ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες μάθησης: Η Ανάπτυξη της Έννοιας του Κλάσματος.

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΣΤΑΜΑΤΙΑΣ Θ. ΣΤΑΦΥΛΙΔΟΥ

Αθήνα, Οκτώβριος 2001

Η εργασία αυτή αφιερώνεται

στον σύντροφό μου Σωτήρη
και τα παιδιά μας Ελένη και Παναγιώτη

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω όλους εκείνους που η παρουσία και η βοήθειά τους κατέστησε εφικτή τη πραγμάτωση της εργασίας αυτής.

Αρχικά θέλω να ευχαριστήσω θερμά τα μέλη της τριμελούς επιτροπής. Ιδιαίτερα στην επιβλέπουσα καθηγήτρια Στέλλα Βοσνιάδου οφείλω να αναγνωρίσω ότι μου άνοιξε νέους δρόμους εισάγοντάς με στο χώρο της γνωσιακής επιστήμης. Χωρίς τις υποδείξεις της σε θεωρητικά θέματα όπως και σε ζητήματα μεθοδολογίας δεν θα είχε πραγματοποιηθεί η εργασία αυτή. Την ευχαριστώ για την επιστημονική καθοδήγηση, τη συνεχή ενθάρρυνση και την αμέριστη συμπαράσταση που μου προσέφερε σε όλες τις φάσεις της εκπόνησης της διατριβής.

Ευχαριστώ τον καθηγητή Αθανάσιο Γαγάτση για τις σημαντικές του παρατηρήσεις στο πρώτο χειρόγραφο της διατριβής. Επίσης τα σεμινάρια τα οποία διοργάνωσε στο πλαίσιο της διδακτικής των μαθηματικών έδωσαν νέα ώθηση στους προβληματισμούς μου.

Επίσης ευχαριστώ τον καθηγητή Διονύσιο Αναπολιτάνο για τη μακροχρόνια επιστημονική συμπαράστασή του.

Ο λέκτορας Ιωάννης Χριστιανίδης με τις παρατηρήσεις του συνέβαλε σημαντικά στην επεξεργασία του ιστορικού μέρους της διατριβής.

Για τις ενδιαφέρουσες συζητήσεις μας και τις παρατηρήσεις του στο τελικό κείμενο της ιστορικής ανασκόπησης ευχαριστώ τον αγαπητό συνάδελφο Γιάννη Θωμαΐδη.

Ευχαριστώ ακόμη τους συναδέλφους και καλούς μου φίλους Χρήστο Ιωαννίδη, Ισμήνη Ιωαννίδου, Βασίλη Κόλλια, Χρήστο Κύρκο και Έφη Παπαδημητρίου για τις πολύτιμες συζητήσεις μας. Για τη συνεργασία μας και την αμέριστη ηθική συμπαράστασή τους ευχαριστώ ιδιαίτερα την Έλση Χουτζαμάνογλου και την Άννα Κουκά.

Για τη φιλική παρουσία και τη στήριξη που μου προσέφεραν με διαφορετικούς η καθεμιά τρόπους ευχαριστώ την Βίλλη Στελλάκου, την Σοφία Τσάνη και την Ντίνα Ταμουτσέλη.

Ιδιαίτερα πολύτιμη επίσης μου στάθηκε η βοήθεια της Λώρα Γκορίλα στη διεκπεραίωση διαδικαστικών εργασιών αλλά και στην τυπογραφική προετοιμασία του τελικού κειμένου της διατριβής.

Θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν τους διευθυντές, καθηγητές και δασκάλους των σχολείων στα οποία πραγματοποίησα τις εμπειρικές έρευνες, καθώς και τους μαθητές μου που όλα αυτά τα χρόνια με πλούτισαν με τις ιδέες τους.

Εξαιρετικά πολύτιμη για την πραγματοποίηση της εργασίας αυτής ήταν η βοήθεια που μου δόθηκε από την οικογένειά μου. Ξεκινώντας από τη μητέρα μου Αναστασία Σταφυλίδου, αλλά και από τη πάντα ζωντανή μέσα μου μνήμη του πατέρα μου Θεμιστοκλή, θα ήθελα στη συνέχεια να ευχαριστήσω την αδελφή μου Καίτη Γκατζούλη, την Τάνια Βοσνιάδου και την Ελένη Βοσνιάδου για τη συμπαράσταση που μου παρείχαν στην πολυετή μου αυτή προσπάθεια. Ακόμη τον Κώστα Γκατζούλη που με βοήθησε να ανακαλύψω την ομορφιά των μαθηματικών.

Και βέβαια χωρίς την πολύτιμη βοήθεια και την με κάθε τρόπο συμπαράσταση του Σωτήρη, της Ελένης και του Παναγιώτη θα ήταν αδύνατη η ολοκλήρωση της εργασίας αυτής, την οποία και τους αφιερώνω.

Ματούλα Σταφυλίδου
Θεσσαλονίκη, Σεπτέμβρης 2001

ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Η παρούσα διατριβή σχεδιάστηκε ως συμβολή στην προβληματική που έχει αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια γύρω από τους τρόπους με τους οποίους αποκτούνται και αναδιοργανώνονται οι γνώσεις σε διάφορους τομείς. Πιο συγκεκριμένα η εργασία αυτή επικεντρώθηκε στην περιοχή των Μαθηματικών και ειδικότερα στην έννοια του κλάσματος προκειμένου να διερευνήσει την πορεία που ακολουθούν τα παιδιά καθώς αναπτύσσουν ιδέες για την έννοια του κλάσματος και με ποιους τρόπους οι ιδέες αυτές αλλάζουν, καθώς το παιδί προσεγγίζει μέσα από τη διδασκαλία την επιστημονική θεώρηση του κλάσματος ως ρητού αριθμού.

Αφετηριακή υπόθεση της εργασίας ήταν ότι τα παιδιά ταυτίζουν την έννοια του αριθμού με την έννοια του φυσικού αριθμού και ότι η πεποίθηση αυτή δεν τα βοηθά αλλά αντίθετα τους στέκεται εμπόδιο κατά την εκμάθηση των κλασμάτων. Υποθέσαμε ότι για να αναπτύξουν τα παιδιά την επιστημονική έννοια του κλάσματος απαιτείται εννοιολογική αλλαγή στις δομές της γνώσης που διαθέτουν για την έννοια του αριθμού. Θέσαμε ως επιπλέον στόχο της διερεύνησής μας την αναγνώριση των διαδικασιών με τις οποίες η αλλαγή αυτή πραγματώνεται.

Με στόχο να διερευνηθεί η ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος πραγματοποιήσαμε δύο εμπειρικές έρευνες που είχαν ως δείγμα 75 και 200 μαθητές αντίστοιχα. Τα τρία κύρια σημεία στα οποία βασίστηκε ο σχεδιασμός των δύο αυτών εμπειρικών ερευνών ήταν η κατανόηση από την πλευρά των μαθητών της έννοιας του κλάσματος μέσα από τη διερεύνηση καταστάσεων που αφορούσαν το σύμβολό του, την αριθμητική του αξία και τις διαδικασίες που ακολουθούν τα παιδιά κατά την εκτίμηση πράξεων με κλάσματα.

Οι μαθητές απάντησαν στις ερωτήσεις που τους θέσαμε χρησιμοποιώντας έναν μικρό αριθμό επεξηγηματικών πλαισίων της έννοιας του κλάσματος, επεξηγηματικά πλαίσια τα οποία και είχαν σταθερή κατανομή όσον αφορά τις ηλικίες των μαθητών. Όπως αποδείχθηκε, τρία είναι τα βασικά επεξηγηματικά πλαίσια της έννοιας του κλάσματος. Το αρχικό είναι το επεξηγηματικό πλαίσιο Κλάσμα/Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί, ένα ενδιάμεσο είναι το Κλάσμα/ Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας και τέλος, το Κλάσμα /Σχέση δύο Αριθμών, επεξηγηματικό πλαίσιο το οποίο και προσεγγίζει περισσότερο την επιστημονική θεώρηση του κλάσματος.

Εξηγήσαμε τη δημιουργία των επεξηγηματικών πλαισίων αποδεικνύοντας την ύπαρξη κάποιων βασικών προϋποθέσεων της αρχικής θεωρίας των παιδιών για τους φυσικούς αριθμούς. Από τα αποτελέσματά μας προέκυψε ότι οι μαθητές δύσκολα παραιτούνται από τα αρχικά επεξηγηματικά πλαίσια ακόμη και όταν διδάσκονται στο σχολείο τους κανόνες που ισχύουν για τα κλάσματα. Συνεπώς και όταν φαίνονται να υιοθετούν επεξηγηματικά πλαίσια που προσεγγίζουν τα επιστημονικώς ισχύοντα, οι μαθητές διατηρούν ορισμένες παρανοήσεις.

Τέλος κρίναμε ότι τα αποτελέσματά μας επιτρέπουν να διατυπώσουμε ορισμένες προτάσεις για το σχεδιασμό αναλυτικών προγραμμάτων και διδακτικών παρεμβάσεων στο μάθημα των Μαθηματικών τόσο στη Στοιχειώδη όσο και στη Μέση Εκπαίδευση.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διατριβή αποτελεί μια προσπάθεια διερεύνησης του τρόπου που τα παιδιά αποκτούν τη μαθηματική έννοια του κλάσματος. Συγκεκριμένα μελετά τόσο την πορεία που ακολουθούν τα παιδιά καθώς εισάγονται στην έννοια του κλάσματος όσο και τους τρόπους που οι σχετικές ιδέες αλλάζουν καθώς μέσα από τη διδασκαλία τα παιδιά προσεγγίζουν την επιστημονική θεώρηση του κλάσματος ως ρητού αριθμού.

Σύμφωνα με την εκπαιδευτική παράδοση, τα μαθηματικά θεωρείται ότι έχουν μιαν απολύτως ιεραρχημένη δομή στην οποία όλες οι νέες έννοιες ακολουθούν λογικά προηγουμένως αποκτηθείσες έννοιες (Danzig, 1954). Τις τελευταίες ωστόσο δεκαετίες έρευνες που έγιναν με αντικείμενο τα συστηματικά λάθη των παιδιών στα μαθηματικά διαπίστωσαν ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου η ιεραρχημένη αυτή δομή αναιρείται. Έτσι ενώ υπάρχουν μαθηματικές έννοιες που η απόκτησή τους υποβοηθείται από την προηγούμενη γνώση, όπως π.χ. συμβαίνει με τους φυσικούς αριθμούς, υπάρχουν και έννοιες στις οποίες η προϋπάρχουσα γνώση δημιουργεί εμπόδια στην πρόσκτησή τους. Ερευνητές οι οποίοι ασχολήθηκαν με την έννοια του κλάσματος από διάφορες οπτικές γωνίες συμφωνούν ότι η έννοια αυτή αποτελεί παράδειγμα μαθηματικής έννοιας όπου η προϋπάρχουσα γνώση δεν βοηθά τα παιδιά να την αποκτήσουν.

Πράγματι η τόσο σημαντική αυτή μαθηματική έννοια, η οποία καλύπτει έναν μεγάλο τομέα της μαθηματικής σκέψης, φαίνεται να προϋποθέτει από τα παιδιά την αναδόμηση των ιδεών τους για την έννοια του αριθμού. Έχοντας ως βάση τα ευρήματα των σχετικών ερευνών η εργασία αυτή προσεγγίζει το θέμα από μιαν άλλη οπτική, αυτή της εννοιολογικής αλλαγής. Η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής έχει δοκιμαστεί σε διάφορους τομείς γνώσεων και τα ευρήματα των σχετικών ερευνών έχουν δώσει πολύτιμες πληροφορίες για τους τρόπους που αναδιοργανώνονται οι γνώσεις (Carey, 1985· Chi, 1992· di Sessa, 1988, 1993· Gelman, 1991· Spelke, 1990· Vosniadou, 1992, 1994, 2000).

Ιδιαίτερα τα τελευταία είκοσι χρόνια, ερευνητές προσπάθησαν να ερμηνεύσουν το είδος της εννοιολογικής αλλαγής που πραγματώνεται σε τομείς των φυσικών επιστημών, όπως η αστρονομία (Vosniadou & Brewer, 1992, 1994), η μηχανική (δυναμική και κινηματική) (Viennot, 1979· McCloskey, 1983· diSessa, 1983· Orton, 1985· Whitaker, 1983· Trowbridge & McDermott, 1980· Ioannides & Vosniadou, 1994· Ioannides & Vosniadou, in press), τα γεωφυσικά φαινόμενα (Ιωαννίδου, 1998), η θερμότητα (Wiser, 1989, Rosenquist, Popp & McDermott, 1982· Tiberghien, 1984· Kolliopoulos & Tiberghien, 1986), η βιολογία (Carey, 1985· Bell & Freyberg, 1986· Barker & Carr, 1989· Κύρκος, 1999) και η χημεία (Κουκά, 2000).

Η εργασία αυτή αποτελεί απόπειρα να ελεγχθεί το κατά πόσο η εννοιολογική αλλαγή προσφέρεται ως αναλυτικό εργαλείο προκειμένου να ερμηνευτούν οι αποτυχίες των μαθητών στην προσέγγιση της έννοιας του κλάσματος. Το συγκεκριμένο αυτό θεωρητικό ζήτημα, λόγω της εξαιρετικής συνθετότητάς του, κρίθηκε σκόπιμο να ενταχθεί στον γενικότερο προβληματισμό που σχετίζεται με την απόκτηση γνώσεων σε διάφορους τομείς. Έτσι έχοντας ως βάση τα πιο πρόσφατα πορίσματα από το χώρο της γνωστικής ψυχολογίας η διερεύνησή μας χρειάστηκε να αντλήσει επίσης στοιχεία από τους χώρους της διδακτικής και της ιστορίας των Μαθηματικών.

Στο πρώτο Κεφάλαιο περιγράφονται οι βασικές θέσεις της γνωστικής ψυχολογίας σχετικά με το ζήτημα της απόκτησης των γνώσεων από τα παιδιά. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται μια επισκόπηση για τον τρόπο που αποκτούνται οι νέες πληροφορίες και πώς θεωρείται ότι αυτές αναδιοργανώνουν τις δομές της υπάρχουσας γνώσης. Παράλληλα η επισκόπησή μας επεκτείνεται στις θεωρίες μάθησης που ασχολούνται κυρίως με την απόκτηση των μαθηματικών εννοιών από τα παιδιά και ιδιαίτερα με την έννοια του αριθμού. Ακολουθεί η παρουσίαση των θεωριών για την εννοιολογική αλλαγή, θεωρητική πρόταση η οποία όπως ήδη αναφέρθηκε, αποτελεί και το υπόβαθρο της έρευνάς μας.

Στη συνέχεια η διερεύνηση επικεντρώνεται στη μαθηματική έννοια του κλάσματος, ξεκινώντας από μια ιστορική αναδρομή όπου γίνεται προσπάθεια να παρακολουθήσουμε την πορεία της εξέλιξης αυτής από το πρίσμα της εννοιολογικής αλλαγής. Η ιστορική επισκόπηση της έννοιας του κλάσματος ως προς τον ορισμό της από τους μαθηματικούς της κάθε εποχής και μαζί η διερεύνηση των διαφορετικών χρήσεων της έννοιας αυτής στην εκπαιδευτική πρακτική θεώρησα ότι μπορούσαν να με οδηγήσουν σε μια σφαιρικότερη αντίληψη των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σήμερα.

Στην τρίτη ενότητα παρατίθενται τα ευρήματα των κυριοτέρων, κατά την άποψή μας, εμπειρικών ερευνών που είχαν ως αντικείμενο την έννοια του κλάσματος. Τα ευρήματα αυτά συγκρότησαν ένα πλούσιο πεδίο, το οποίο και χρησιμοποίησα ως σημείο εκκίνησης στη δική μας διερεύνηση. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση του θεωρητικού πλαισίου και τις υποθέσεις της εργασίας.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο παρουσιάζεται η πρώτη εμπειρική έρευνα που πραγματοποίησα με θέμα το σύμβολο του κλάσματος. Εδώ περιγράφονται η μέθοδος, το δείγμα και τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν καθώς επίσης τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα που προέκυψαν.

Το τρίτο Κεφάλαιο αφιερώνεται στην παρουσίαση της δεύτερης που ήταν και η κύρια εμπειρική έρευνα. Συγκεκριμένα περιγράφεται το δείγμα, τα υλικά, ο ερευνητικός σχεδιασμός της εργασίας αυτής, η διαδικασία της διεξαγωγής της καθώς επίσης και ο τρόπος βαθμολόγησης των δεδομένων. Στη συνέχεια περιγράφονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της έρευνας και πώς από αυτά προκύπτουν τα Επεξηγηματικά Πλαίσια που χρησιμοποιούν τα παιδιά για να χειριστούν την έννοια του κλάσματος. Ακολουθεί η συζήτηση των αποτελεσμάτων της έρευνας και η σύγκρισή τους με τα αποτελέσματα άλλων σχετικών ερευνών.

Στο τέταρτο Κεφάλαιο συνοψίζονται τα συμπεράσματα της διερεύνησής μας και προτείνονται τρόποι με τους οποίους τα συμπεράσματα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία των κλασμάτων.

Η εργασία κλείνει με την Βιβλιογραφία και την προσθήκη του Παραρτήματος όπου παρατίθενται οι πίνακες των αποτελεσμάτων της δεύτερης κυρίως έρευνας καθώς επίσης και τα ερωτηματολόγια των δύο εμπειρικών ερευνών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ:
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

1.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ ΤΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ – Η ΑΠΟΚΤΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Τα ερωτήματα που προτίθεμαι να πραγματευτώ στην ενότητα αυτή έχουν σχέση με το γενικότερο ερώτημα πώς τα παιδιά προσλαμβάνουν και δομούν τη γνώση. Το σημαντικό αυτό ερώτημα αποτέλεσε αντικείμενο έρευνας στο παρελθόν ενώ και σήμερα ακόμη είναι πολλοί οι ερευνητές εκείνοι οι οποίοι ασχολούνται με τις θεωρίες της γνωστικής ανάπτυξης.

Έκρινα σκόπιμο να παρουσιάσω ορισμένες από τις πλέον θεμελιώδεις θεωρητικές θέσεις που έχουν διατυπωθεί σε σχέση με το θέμα αυτό, επιμένοντας ιδιαίτερα στην απόκτηση των μαθηματικών εννοιών. Η παρουσίαση των θεωρητικών αυτών θέσεων αποσκοπεί να αποτελέσει το πλαίσιο για την παρουσίαση του ιδιαίτερου θέματος που απασχολεί την εργασία αυτή και είναι η απόκτηση εκ μέρους των παιδιών της μαθηματικής έννοιας του κλάσματος.

1.1.1 Η φύση της ανάπτυξης των γνώσεων - Αρχικές θεωρίες

Το θέμα της απόκτησης των γνώσεων προσεγγίστηκε, ερμηνεύτηκε και αναλύθηκε με διαφορετικούς κατά εποχές τρόπους. Έως τις αρχές της δεκαετίας του ’50 οι επικρατούσες θεωρητικές απόψεις για την απόκτηση των γνώσεων, επηρεασμένες από τις θεωρίες του συμπεριφορισμού έδιναν ιδιαίτερη σημασία στις εξωτερικές επιδράσεις του περιβάλλοντος, δηλαδή στην ενίσχυση, την εξάσκηση και τη μίμηση των κατάλληλων προτύπων (Skinner, 1953)[1]. Οι προσεγγίσεις αυτές χαρακτηρίζονται από την ιδέα ότι η απόκτηση των γνώσεων λειτουργεί αθροιστικά.

Ο Piaget (1952) ήταν ο πρώτος ψυχολόγος που αντιμετώπισε το παιδί ως ενεργό - κτίστη της γνώσης του. Σύμφωνα με τη θεωρία του η διαδικασία απόκτησης της γνώσης αποτελεί μια ιδιαίτερη περίπτωση των γενικότερων διαδικασιών *αφομοίωσης* και *συμμόρφωσης* που χαρακτηρίζουν όλους τους έμβιους οργανισμούς (Piaget, 1979). Ο Piaget υποστήριξε ότι η γνωστική ανάπτυξη του παιδιού περνά από

[1] Πολλές από τις αρχές του συμπεριφορισμού συνεχίζουν να έχουν μεγάλη επίδραση στην εκπαίδευση και ιδιαίτερα στη διδασκαλία των μαθηματικών.

συγκεκριμένα στάδια τα οποία χαρακτηρίζονται από ποιοτικά διαφορετικές δομές. Προσδιόρισε δε το είδος των δομών αυτών με βάση τον τρόπο με τον οποίο παιδιά διαφορετικών ηλικιών ανταποκρίνονταν σε μια σειρά πειραματικών έργων[2].

Ο Piaget διέκρινε τρεις χρονικές περιόδους από τις οποίες περνά η γνωστική ανάπτυξη του παιδιού. Η πρώτη χρονική περίοδος ανάπτυξης ονομάζεται ***αισθησιοκινητική*** και διαρκεί από τη γέννηση του παιδιού έως τους δεκαοκτώ περίπου μήνες· θεωρείται δε ότι στο τέλος της περιόδου αυτής το παιδί έχει αναπτύξει την ικανότητα για αναπαραστασιακή σκέψη και είναι ικανό να σχηματίσει μια νοητική εικόνα των αντικειμένων. Η δεύτερη περίοδος διαιρείται από τον Piaget σε δύο υποπεριόδους. Η υποπερίοδος που ονομάζεται ***προεννοιολογική*** διαρκεί από τα ενάμισι με δύο περίπου χρόνια έως τα έξι ή επτά χρόνια του παιδιού και χαρακτηρίζεται από την εμφάνιση της συμβολικής σκέψης· εδώ το παιδί καθίσταται πλέον ικανό να εσωτερικεύει τις πράξεις που υπήρξαν αποτελεσματικές κατά την προηγούμενη χρονική περίοδο. Η εσωτερίκευση αυτή απαιτεί την αναδόμηση των γνωστικών δομών που συγκροτήθηκαν την προηγούμενη περίοδο. Το παιδί την περίοδο αυτή έχει την τάση να επικεντρώνεται σε ένα χαρακτηριστικό μιας κατάστασης, δεν είναι δηλαδή σε θέση να διατυπώνει λογικούς συλλογισμούς. Η σκέψη του είναι *μεταγωγική,* δηλαδή δεν γενικεύει αλλά βασίζεται στις εξωτερικές ομοιότητες και οι έννοιες που σχηματίζει είναι ιδιοσυγκρασιακές και στηρίζονται σε ειδικές περιπτώσεις. Κατά τη δεύτερη υποπερίοδο, αυτή των ***συγκεκριμένων λογικών ενεργειών***, που διαρκεί από τα έξι ή επτά χρόνια έως περίπου τα έντεκα, στις γνωστικές δομές του παιδιού εμφανίζονται τρία είδη λογικής σκέψης: α) Η λογική των συνόλων, β) η λογική των σχέσεων και γ) η λογική των αριθμών, ενώ κύριο χαρακτηριστικό των γνωστικών αυτών δομών είναι η *αντιστρεψιμότητα*. Παρ' όλες τις δυνατότητες που προσφέρει στο παιδί η κατάκτηση της λογικομαθηματικής σκέψης η οποία συντελείται κατ' αυτή την περίοδο, η σκέψη του παιδιού παραμένει *συγκεκριμένη*. Στην τρίτη περίοδο, την περίοδο της ανάπτυξης των ***τυπικών λογικών***

[2] Με τον τρόπο αυτό μεταφράζουμε τον όρο *tasks* του Piaget, χρησιμοποιώντας τη μετάφραση του όρου στο βιβλίο της M. Donaldson (1991) *Η σκέψη των παιδιών.*

ενεργειών, σύμφωνα πάντα με τον Piaget, οι γνωστικές διαδικασίες αποσυνδέονται από τα συγκεκριμένα αντικείμενα και καθίστανται *τυπικές* (Piaget, 1970)[3].

Ερευνώντας την ψυχολογική ανάπτυξη του παιδιού ο Piaget ενδιαφέρθηκε για το πώς το παιδί κατανοεί τις μαθηματικές έννοιες και τους τρόπους κατά τους οποίους συσχετίζει με τις έννοιες αυτές με έννοιες της λογικής. Στο βιβλίο του *The Child's Conception of Number (Οι αντιλήψεις των παιδιών για την έννοια του Αριθμού) (1952),* συνδέει την αριθμητική σκέψη με τη λογική σκέψη και προσπαθεί να αποδείξει ότι η ανάπτυξη της μιας σχετίζεται και εξαρτάται απόλυτα από την ανάπτυξη της άλλης (Isaacs, 1960). Συγκεκριμένα θεωρούσε ότι η μάθηση των μαθηματικών δεν πραγματοποιείται με τη μετάδοση γνώσεων από τον δάσκαλο στο μαθητή, και ότι η οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης έρχεται ως φυσικό αποτέλεσμα της γενικότερης ανάπτυξης των λογικών ικανοτήτων του παιδιού· ισχυριζόταν δε ότι αυτή η *φυσική* μέθοδος μάθησης πραγματώνεται μέσα από δραστηριότητες και ανακαλύψεις των ίδιων των παιδιών: "Η πραγματική κατανόηση μιας γνώσης ή μιας θεωρίας προϋποθέτει το υποκείμενο από μόνο του να εφεύρει ξανά αυτή τη θεωρία[4] " (Piaget, 1983, σ. 85). Σύμφωνα με τον Piaget (1983) η έννοια του αριθμού εμφανίζεται όταν το παιδί μεταβεί στην περίοδο των συγκεκριμένων λογικών ενεργειών, όταν δηλαδή έχει αναπτύξει τις κατάλληλες λογικομαθηματικές δομές που του επιτρέπουν να λειτουργεί και να σκέφτεται με τρόπους που κάνουν δυνατή την κατανόηση της διατήρησης της ποσότητας, της μάζας, του αριθμού κ.ά.. Οι απόψεις αυτές και κυρίως ότι η γνώση παράγεται από την προσωπική δραστηριότητα του παιδιού έγιναν ευρέως αποδεκτές όχι μόνο από ψυχολόγους αλλά από τους ερευνητές που ασχολήθηκαν με τη διδακτική των μαθηματικών.

Έτσι πολλοί από εκείνους που ακολουθούν τις απόψεις του Piaget τονίζουν ότι οι αριθμοί δεν αποτελούν αντανακλάσεις των στοιχείων του έξω κόσμου στο μυαλό του

---

[3] Κατά τον Piaget η αναδιοργάνωση των γνωστικών δομών του παιδιού δίνει νέες δυνατότητες για απόκτηση γνώσεων σε όλους τους τομείς. Για το λόγο η Carey (1985) αναφέρεται στο είδος αυτό της αναδιοργάνωσης που προτείνει ως *ολική αναδιοργάνωση*.

[4] Η λέξη *θεωρία* έχει εδώ το νόημα της γνωστικής δομής που είναι εντελώς διαφορετικό από αυτό που της προσδίδουν ερευνητές όπως η Carey ή η Vosniadou όταν αναφέρονται στις θεωρίες βάσης (framework theory) που αναπτύσσουν τα παιδιά.

ανθρώπου, αλλά προκύπτουν ως αποτέλεσμα της κατασκευαστικής διαδικασίας (von Glasersfeld, 1991· Steffe, von Glasersfeld, Richards και Cobb, 1983). Ο ανθρώπινος νους δεν «μαθαίνει» αριθμούς απευθείας από τον διαφορετικό αριθμό πραγματικών αντικειμένων, αλλά η αντίληψη διαφορετικών διακεκριμένων ποσοτήτων βασίζεται σε μια κατασκευαστική διαδικασία η οποία απομονώνει τα αντικείμενα από τα φυσικά χαρακτηριστικά τους. Σύμφωνα με την κονστρουκτιβιστική αυτή παράδοση η διάκριση και η ένα προς ένα αντιστοιχία φαίνεται να αποτελούν τα βασικά στοιχεία της έννοιας του αριθμού.

1.1.2 Κριτική στη θεωρία του Piaget

Πολλοί ψυχολόγοι στάθηκαν κριτικά απέναντι σε πολλές από τις απόψεις αυτές. Η Donaldson (1978, 1991) και οι Gelman και Gallistel (1978) επανέλαβαν ορισμένα από τα έργα που χρησιμοποίησε ο Piaget προκειμένου να εκτιμήσει τις νοητικές λειτουργίες των παιδιών και να τα εντάξει σε στάδια. Όπως έδειξαν οι έρευνές τους, τα έργα αυτά ήταν πολύπλοκα και απαιτούσαν από τα παιδιά να διαθέτουν ικανότητες διαφορετικές από εκείνες που ήταν αναγκαίες για τις συγκεκριμένες νοητικές λειτουργίες. Πιο συγκεκριμένα οι ερευνητές αυτοί διαπίστωσαν ότι τα παιδιά που αποτύγχαναν στα τυπικά έργα του Piaget, όταν τα ίδια αυτά έργα τούς παρουσιαζόντουσαν διαφορετικά, τα ποσοστά επιτυχίας αυξάνονταν σημαντικά. Αυτό που κυρίως οι έρευνες αυτές απέδειξαν ήταν η πολυπλοκότητα που χαρακτήριζε τα έργα του Piaget (Donaldson, 1991· Gelman και Baillergeon, 1983· Gelman, 1977)· από την άποψη αυτή ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα πειράματα της Gelman (1972/1995) η οποία διαπίστωσε ότι παιδιά που βρίσκονται ακόμη και στο κατά Piaget προεννοιολογικό στάδιο μπορούσαν να αντιμετωπίζουν τον αριθμό ως σταθερά.

Μια άλλη κριτική που ασκήθηκε στις απόψεις του Piaget σχετίζεται με τον αυθόρμητο χαρακτήρα της γνώσης. Η άποψή του ότι η ανάπτυξη της σκέψης του παιδιού είναι *αυθόρμητη* και δεν επηρεάζεται από την κοινωνία και την εκπαίδευση έχει αμφισβητηθεί από πολλούς ερευνητές (Bliss, 1994). Για παράδειγμα σύμφωνα με τη Bliss, ο Piaget δεν λαμβάνει υπόψη του τις διαφορές που μπορεί να υπάρχουν μεταξύ των παιδιών όσον αφορά την ωρίμανση, τη μάθηση, τις κοινωνικές επιρροές και τα κίνητρα. Αποτελέσματα διαπολιτισμικών ερευνών έχουν δείξει ότι στη γνωσιακή ανάπτυξη ενός παιδιού το κοινωνικό και μορφωτικό περιβάλλον του παίζει πολύ σημαντικό ρόλο (Nunes Carraher, 1995).

Εκείνος όμως που κυρίως άσκησε κριτική στο ρόλο που ο Piaget αναγνωρίζει στο κοινωνικό ή πολιτισμικό περιβάλλον για την εξέλιξη της σκέψης του παιδιού ήταν ο Vygotsky (1962). Αν και συμφωνούσε με τον Piaget για τον ενεργητικό ρόλο που διαδραματίζει το παιδί στη ανάπτυξη της γνώσης του, ο ίδιος υποστήριξε ότι στη θεωρία του Piaget: «το παιδί δεν θεωρείται ως μέρος του κοινωνικού συνόλου, ως υποκείμενο των κοινωνικών σχέσεων που από τις πρώτες μέρες της ζωής του λαμβάνει μέρος στην κοινωνική ζωή στην οποία ανήκει. Το κοινωνικό θεωρείται ως εξωτερικό προς το παιδί, ως μια ξένη δύναμη που ασκεί πίεση στο παιδί και του επιβάλλει τους τρόπους σκέψης του» (Vygotsky, 1970, σ. 71).

Ο Vygotsky (1970) διακρίνει τις έννοιες σε αυθόρμητες ή καθημερινές και σε επιστημονικές και διερευνά τη μεταξύ τους σχέση σε παιδιά της σχολικής ηλικίας. Κατ' αυτόν οι αυθόρμητες έννοιες αναπτύσσονται ως αποτέλεσμα των δραστηριοτήτων του παιδιού με ανθρώπους του περιβάλλοντός του[5]. Οι επιστημονικές έννοιες, αντίθετα, όπως αυτές διδάσκονται στο σχολείο, ανήκουν σε κάποια εσωτερικά ιεραρχημένα συστήματα εννοιών. Όπως πιστεύει ο Vygotsky, εκεί που βρίσκεται η δύναμη των αυθόρμητων εννοιών, στην αυθόρμητη δηλαδή χρήση τους και στη σύνδεσή τους με την ατομική εμπειρία, εκεί εντοπίζεται η αδυναμία των επιστημονικών εννοιών. Και αντίθετα, εκεί που βρίσκεται η δύναμη των επιστημονικών εννοιών, στη συνειδητοποίηση δηλαδή και στην εκούσια χρήση τους,

---

[5] Ένα χαρακτηριστικό των αυθόρμητων εννοιών των παιδιών σχολικής ηλικίας είναι ότι αυτές δεν είναι συνειδητές. Σύμφωνα με τον Vygotsky "η έννοια μπορεί να είναι συνειδητή και εκούσια μόνο όταν είναι μέρος ενός συστήματος" (ό. π., σ. 92).
Σύμφωνα με τον Vygotsky, η εξέλιξη των αυθορμήτων εννοιών διέρχεται από τρεις κύριες φάσεις. Στην πρώτη φάση, στην πρώιμη παιδική ηλικία, η σημασία της λέξης δεν δηλώνει τίποτε περισσότερο από μια 'αόριστη συγκριτική συσσώρευση ξεχωριστών αντικειμένων" (Vygotsky, 1970, σ. 59) που κατά κάποιο τρόπο έχουν ενωθεί σε μια ασταθή εικόνα στο μυαλό τους. Στη δεύτερη φάση το παιδί σκέφτεται με "συμπλέγματα" δηλαδή συλλογές αντικειμένων που τα συνδέουν πραγματικοί δεσμοί και όχι η υποκειμενική εντύπωση του παιδιού. Στην εφηβεία όπου τα παιδιά διανύουν την τρίτη φάση οι δεσμοί που ήταν συγκεκριμένοι και πρακτικοί γίνονται αφηρημένοι και λογικοί. Η φάση αυτή δηλαδή χαρακτηρίζεται από ικανότητα γενίκευσης καθώς επίσης και από μια αυξανόμενη αφαιρετική ικανότητα.

εκεί εντοπίζεται η αδυναμία των καθημερινών εννοιών. Είναι σημαντικό όμως ότι και τα δύο είδη εννοιών, αυθόρμητες και επιστημονικές, δεν εξελίσσονται ανεξάρτητα οι μεν από τις δε αλλά μέσα από διαδικασίες αλληλεπίδρασης.

Ο Vygotsky (1970) επισημαίνει ότι ανάμεσα στη θεωρία του Piaget και τη δική του, αναφορικά με τον ρόλο που μπορούν να παίξουν οι επιστημονικές έννοιες στην εξέλιξη της σκέψης του παιδιού σχολικής ηλικίας, υπάρχουν σημαντικές διαφορές: «Η διαφωνία μας με τον Piaget επικεντρώνεται σε ένα μόνο αλλά σημαντικό σημείο. [Εκείνος] συμπεραίνει ότι η ανάπτυξη και η διδασκαλία είναι εντελώς ξεχωριστές και μη συγκρίσιμες διαδικασίες, ότι η λειτουργία της διδασκαλίας είναι απλώς να εισάγει τους τρόπους σκέψης του ενήλικα, τρόποι οι οποίοι συγκρούονται με εκείνους του παιδιού, τους οποίους τελικά και αντικαθιστούν. Η μελέτη της σκέψης του παιδιού, ξεχωριστά από την επίδραση της διδασκαλίας, όπως έκανε ο Piaget, ... απαγορεύει στον ερευνητή να θέσει το ζήτημα της αλληλεπίδρασης της ανάπτυξης της σκέψης και της κατάλληλης για κάθε ηλικία διδασκαλίας. Η δική μας προσέγγιση εστιάζεται σ' αυτήν ακριβώς την αλληλεπίδραση" (ό. π., σ. 116).

Τόσο στην περίπτωση του Piaget όσο και του Vygotsky οι πρώτες αυθόρμητες έννοιες (σύμφωνα με τον Piaget) ή προέννοιες (σύμφωνα με τον Vygotsky) αποτελούν **συναθροίσεις μεμονωμένων χαρακτηριστικών** που δεν ενσωματώνονται σε κάποια θεωρία ή σε κάποιο σύστημα γνώσεων.

Εκτός από τον Vygotsky και διάφοροι άλλοι, μεταγενέστεροι ερευνητές όπως η Gelman (1983) και η Carey (1982) άσκησαν κριτική στις ιδέες του Piaget ότι η ψυχολογική ανάπτυξη του ατόμου είναι αυθόρμητη και δεν επηρεάζεται σε σημαντικό τουλάχιστον βαθμό, από την κοινωνία και την εκπαίδευση.

1.1.3 Το περιεχόμενο της γνώσης – μερική αναδιοργάνωση

Η κυριότερη ωστόσο, για την άποψη της εργασίας αυτής, κριτική που ασκήθηκε στις απόψεις του Piaget σχετίζεται με την ανάπτυξη των γνωστικών λειτουργιών. Αν στο σχήμα του Piaget, η ανάπτυξη των γνώσεων του παιδιού ακολουθεί στάδια, η μετάβασή του από το ένα στάδιο στο άλλο προϋποθέτει την ολική αναδιοργάνωση των γνώσεών του. Ερευνητές όπως οι Carey (1985), Chi (1992) και Vosniadou (1994) αντέταξαν στη θέση αυτή την άποψη που έγινε γνωστή ως *μερική αναδιοργάνωση της γνώσης*. Συγκεκριμένα η Carey (1985) υποστήριξε ότι, όπως έδειξαν οι έρευνές της, η ιδέα της *ολικής αναδιοργάνωσης* της γνώσης δεν ισχύει και ότι η γνωστική εξέλιξη του παιδιού προκύπτει ως αποτέλεσμα αναδιοργάνωσης των γνώσεων σε συγκεκριμένους τομείς ξεχωριστά, δεδομένου ότι έχουμε να κάνουμε με εξειδικευμένη κατά τομείς γνώση.

Η άποψη της μερικής αναδιοργάνωσης προέκυψε κυρίως από τη μελέτη των διαφορών που παρατηρήθηκαν μεταξύ αρχαρίων και ειδικών σε διάφορους τομείς της ανθρώπινης γνώσης, όπως για παράδειγμα η Φυσική (Chi, Glaser και Rees, 1982), το σκάκι (Chase και Simon, 1973a, 1973b) ή οι κοινωνικές επιστήμες (Voss, Greene, Post και Penner, 1983). Ερευνητές που ενστερνίζονται τις θεωρητικές θέσεις της μερικής αναδιοργάνωσης της γνώσης διερευνούν το είδος των αλλαγών που πραγματώνονται κατά τη γνωσιακή ανάπτυξη επιχειρώντας να περιγράψουν τη μορφή της αρχικής κατάστασης και τη μορφή του αποτελέσματος που προέκυψε από την αλλαγή. Οι Vosniadou (1994a, 2000), Chi (1992), Chi, M.T.H., Slotta, J.D. και de Leeuw, N. (1994) and Carey και Spelke (1994) έχουν παρουσιάσει καλά επεξεργασμένες θεωρίες της εννοιολογικής αυτής αλλαγής. Οι ερευνητές αυτοί προσπαθούν να αναλύσουν τη σχέση ανάμεσα στην προϋπάρχουσα και στη νέα γνώση ώστε να αποκαλύψουν τα στοιχεία της διαδικασίας με την οποία συντελείται η απόκτηση γνώσης ό,τι και θα εξηγούσε τις δυσκολίες στην εκμάθηση κάποιων εννοιών και την τάση των παιδιών να δημιουργούν παρανοήσεις.

1.1.4 Ο ρόλος της προϋπάρχουσας γνώσης

Στα πλαίσια αυτής της θεωρίας για τη μερική αναδιοργάνωση της γνώσης διατυπώθηκαν διάφορες απόψεις όχι μόνο για τον τρόπο που η αναδιοργάνωση αυτή πραγματώνεται αλλά και τη φύση και το ρόλο της προϋπάρχουσας γνώσης στην απόκτηση και την αλλαγή των εννοιών. Όπως θα περιγράψουμε παρακάτω οι απαντήσεις που δίνουν σε αυτά τα ζητήματα διαφέρουν.

Όλες αυτές οι θεωρίες για την προϋπάρχουσα γνώση, τη φύση αλλά και τον ρόλο της στην απόκτηση και την αλλαγή των εννοιών σχετίζονται άμεσα με τους προβληματισμούς για την απόκτηση των μαθηματικών εννοιών. Οι πρόσφατες έρευνες σχετικά με την απόκτηση των μαθηματικών εννοιών αποδέχονται ότι τα παιδιά διαθέτουν μια προϋπάρχουσα γνώση υπό μορφή νοητικών αναπαραστάσεων. Ερευνητές που ασχολήθηκαν με τη φύση των νοητικών αναπαραστάσεων διαπίστωσαν την παρουσία τους στη σκέψη των παιδιών σε ηλικίες μικρότερες από αυτές που είχαν προτείνει ο Piaget και ο Vygotsky.

Σύμφωνα εξάλλου με τα αποτελέσματα εμπειρικών ερευνών που πραγματοποίησαν οι Gelman και Greeno (1987) φαίνεται ότι τα παιδιά προτού πάνε στο σχολείο πράγματι διαθέτουν μια προϋπάρχουσα (αν και πιθανόν όχι συνειδητή) γνώση της μέτρησης, των αριθμών και των συνόλων. Οι ίδιοι αποκαλούν τη γνώση αυτού του είδους σχήματα (schemata) και θεωρούν ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν τα σχήματα αυτά προκειμένου να δημιουργούν πλάνα για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων που τους παρουσιάζονται. Η κυριότερη ωστόσο λειτουργία που οι ερευνητές αυτοί προσδίδουν στα σχήματα είναι ότι διευκολύνουν τα παιδιά να δημιουργούν αναπαραστάσεις από τις πληροφορίες που δίνονται από τα μαθηματικά αυτά προβλήματα.

Αργότερα ο Greeno (1991) θέλοντας να περιγράψει τα σχήματα αυτά προκειμένου να περιγράψει την γνώση στον τομέα των αριθμών και των ποσοτήτων εισάγει τον όρο number sense. Ο όρος αυτός αναφέρεται σε δεξιότητες των παιδιών όπως οι ευέλικτοι υπολογισμοί με το μυαλό, οι αριθμητικές εκτιμήσεις και οι κρίσεις σε σχέση με μια ποσότητα, δεξιότητες τις οποίες αναπτύσσουν τα παιδιά χρησιμοποιώντας το περιβάλλον στο οποίο ζουν ως πηγή από όπου αντλούν γνώση την οποία μεταφέρουν στις δραστηριότητές τους.

Στα πλαίσια του προβληματισμού για τη φύση της προϋπάρχουσας γνώσης μια άλλη σειρά ερευνών επικεντρώθηκε στα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα. Ο Greeno και οι συνεργάτες του (1984, 1998) εισήγαγαν ένα σύστημα ταξινόμησης των στοιχειωδών λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης, σύστημα το οποίο συνέχισαν να επεξεργάζονται και οι De Corte και Verschaffel (1995). Τα αποτελέσματά τους όπως και αυτά των Carpenter (1988, 1993) έδειξαν ότι τα περισσότερα παιδιά διαθέτουν με λανθάνοντα τρόπο μια αρκετά πολύπλοκη γνώση των στοιχειωδών πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Τα ευρήματά τους, που αφορούν την επίδραση της σημασιολογικής δομής των λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων στις διαδικασίες που χρησιμοποιούν τα παιδιά κατά την επίλυση των προβλημάτων αυτών, φαίνεται να επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματα και άλλων ερευνών που υποστηρίζουν ότι η εξειδικευμένη κατά τομείς γνώση διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση προβλημάτων (Glaser, 1984· Resnick, 1983). Συγκεκριμένα, οι Brown και Burton (1978), οι Carpenter, Fennema και Romberg (1993), De Corte και Verschaffel (1987, 1994, 1996) και Resnick (1981, 1987, 1989, 1995) διαπίστωσαν ότι οι λανθασμένες απαντήσεις των παιδιών στα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα δεν συνιστούν τυχαίες αποτυχίες των παιδιών, αλλά είναι αποτέλεσμα λανθασμένων αντιλήψεων και στρατηγικών που συστηματικά εφαρμόζουν τα παιδιά. Οι ερευνητές αυτοί θεωρούν δηλαδή, ότι τα λάθη που κάνουν τα παιδιά έχουν νόημα και ότι ακολουθούν κάποιους κανόνες. Αυτό σημαίνει ότι στις περισσότερες περιπτώσεις τα λάθη των παιδιών αποτελούν συστηματικές εφαρμογές λανθασμένων διαδικασιών, κάτι ανάλογο με τους ονομαζόμενους ιούς (buggy algorithms) στην ορολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών.[6]

Προχωρώντας περισσότερο ο γνωστικός ψυχολόγος Mayer (1983, 1985, 1995) προσεγγίζει από μιαν άλλη οπτική τη διαδικασία επίλυσης των λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων· σε μια σειρά ερευνών που πραγματοποίησε υιοθέτησε την υπόθεση ότι η διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος αρχίζει με μιαν αναπαράστασή του, δηλαδή με μια εσωτερική απεικόνιση όλων των σημαντικών πληροφοριών που το πρόβλημα περιέχει. Σύμφωνα με τον Mayer η αναπαράσταση αυτή θέτει τις βάσεις πάνω στις οποίες ο μαθητής εφαρμόζει τις αποδεκτές μαθηματικές πράξεις για να λύσει το πρόβλημα. Τα ευρήματά του έδειξαν ότι τα

[6] Ερευνητές όπως οι Brown και Burton (1978), Brown και VanLehn (1982) και Hiebert και Wearne (1988) έχουν επίσης διερευνήσει τους επονομαζόμενους *ιούς* σε έρευνες; που επικεντρώθηκαν στις διαδικασίες που τα παιδιά εφαρμόζουν καθώς αυτά εκτελούν τις τέσσερις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης

λάθη που κάνουν οι μαθητές είναι συχνά λάθη αναπαράστασης. Οι λανθασμένες δε αναπαραστάσεις των παιδιών μπορεί να είναι αποτέλεσμα αποτυχίας στη γλωσσική ερμηνεία του προβλήματος ή αποτέλεσμα ενεργοποίησης λανθασμένου *σχήματος* για τις αριθμητικές πράξεις που απαιτούνται.

Ο Fischbein και οι συνεργάτες του (1985) προσπάθησαν και αυτοί να διερευνήσουν τα λάθη που κάνουν τα παιδιά κατά την επίλυση αριθμητικών λεκτικών προβλημάτων, δίνοντας όμως ιδιαίτερο βάρος στην επιλογή, εκ μέρους του παιδιού, της πράξης που απαιτείται κατά την επίλυση. Εισάγοντας την έννοια των διαισθητικών μοντέλων υποστήριξαν ότι «Κάθε θεμελιώδης αριθμητική πράξη παραμένει γενικά συνδεδεμένη με ένα λανθάνον, ασυνείδητο και πρωτόγονο διαισθητικό μοντέλο. Η αναγνώριση της πράξης που χρειάζεται για να επιλυθεί ένα πρόβλημα με δύο αριθμητικά δεδομένα γίνεται όχι άμεσα, αλλά με τη μεσολάβηση ενός τέτοιου μοντέλου. Το μοντέλο επιβάλλει τους δικούς του περιορισμούς στη διαδικασία έρευνας» (σ. 4). Σύμφωνα με τους ερευνητές αυτούς, δύο προβλήματα μπορεί να είναι λειτουργικά ή και λεκτικά πανομοιότυπα, αλλά να διαφέρουν στη δυσκολία ανάλογα με τους τύπους των αριθμών που χρησιμοποιούνται και τους ρόλους που έχουν οι αριθμοί μέσα στη δομή του προβλήματος. Για παράδειγμα το πρωτογενές μοντέλο του πολλαπλασιασμού είναι η επαναληπτική πρόσθεση. Γι’ αυτό και ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού γίνεται πολύ δυσκολότερο εάν ο πολλαπλασιαστής είναι δεκαδικός ή κλασματικός αριθμός οπότε και παραβιάζεται το μοντέλο της επαναληπτικής πρόσθεσης[7]. Για τη διαίρεση, αντίστοιχα υπάρχουν δύο πρωτόγονα μοντέλα, το επιμεριστικό και το μετρητικό[8].

Η υπόθεση ότι υπάρχουν λανθάνοντα μοντέλα για τις διάφορες αριθμητικές πράξεις και ότι τα μοντέλα αυτά επηρεάζουν τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές

[7] Η ερμηνεία της πράξης 3x5 συνδέεται με το μοντέλο της επαναληπτικής πρόσθεσης, της επανάληψης δηλαδή του 3 πέντε φορές (3+3+3+3+3). Οι ερευνητές αυτοί υποστηρίζουν ότι οι μαθητές βρίσκουν δύσκολο τον πολλαπλασιασμό με δεκαδικούς αριθμούς, ιδίως όταν ο δεκαδικός αριθμός βρίσκεται στη θέση του τελεστή (15.000 x 0,75). Αυτό συμβαίνει γιατί ο πολλαπλασιασμός αυτός είναι αντίθετος με το μοντέλο της επαναληπτικής πρόσθεσης με το οποίο συνδέεται ο πολλαπλασιασμός.

[8] Στη διαίρεση ο Fischbein και οι συνεργάτες του πρότειναν δυο πρωτογενή μοντέλα: το μεριστικό (μερισμός σε ισοδύναμα υποσύνολα ή σε ίσες μικρότερες ποσότητες) και το μετρητικό (που καθορίζει τον αριθμό των υποσυνόλων ή των ίσων μικρότερων ποσοτήτων όταν δίνεται το μέγεθος του υποσύνολου ή της μικρότερης ποσότητας).

ερμηνεύουν ένα μαθηματικό πρόβλημα με βάση τις καθημερινές τους εμπειρίες επιβεβαιώνεται και από τα ευρήματα των De Corte και Verschaffel (1985, 1987, 1990 και 1994). Οι παραπάνω ερευνητές, ακολουθώντας την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση, θεωρούν ότι ο μαθητής χρησιμοποιεί ενεργά την προϋπάρχουσα γνώση του προκειμένου να δομήσει τις νέες πληροφορίες και να τις αφομοιώσει στο δικό του νοηματικό πλαίσιο (Carpenter, 1988· Resnick, 1983).

Η ενασχόληση των ψυχολόγων με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και την ανάλυση των στοιχείων που επηρεάζουν τα παιδιά κατά τη διαδικασία επίλυσής τους διεύρυνε το πεδίο της έρευνας. Έτσι, αναπτύχθηκε παράλληλα προς τις παραπάνω προσεγγίσεις, ένα άλλο ρεύμα το οποίο απέδωσε καθοριστική σημασία στο πλαίσιο της γνώσης και επικεντρώθηκε στη σύνδεση των μαθηματικών πράξεων με πραγματικές καταστάσεις (De Corte, 1995b· Streefland, 1991). Το ρεύμα αυτό, αποβλέπει σε μια *ρεαλιστική* προσέγγιση στη διδασκαλία των μαθηματικών *(realistic mathematics)·* αντίθετα από την παλαιότερη άποψη ότι τα μαθηματικά είναι ένα καθολικό τυπικό σύστημα εννοιών και κανόνων, η ρεαλιστική προσέγγιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών βασίζεται στην αντίληψη ότι το γνωστικό αυτό αντικείμενο συνιστά μια ανθρώπινη δραστηριότητα που στοχεύει όχι μόνο στην επίλυση προβλημάτων αλλά και στην οικοδόμηση νοημάτων. Μαθαίνω μαθηματικά σημαίνει "κάνω μαθηματικά" (μαθηματικοποίηση – mathematization). Η προσέγγιση αυτή στηρίζεται στην Διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal (1983), όπου η καθημερινή πραγματικότητα γίνεται πηγή και πεδίο εφαρμογής των μαθηματικών εννοιών. Η διαδικασία μάθησης ταυτίζεται με την ανάπτυξη των συμβόλων, των σχημάτων και των νοητικών οπτικών μοντέλων (σύσταση "νοητικών αντικειμένων"). Η επεξεργασία των δεδομένων εκ μέρους των μαθητών γίνεται μέσα από τις δικές τους νοηματικές κατασκευές και τους δικούς τους τρόπους να εξάγουν συμπεράσματα. Κατ' αυτήν την έννοια η εκπαίδευση καθίσταται μια διαδικασία συνεργασίας και ανταλλαγής απόψεων (De Corte, 1993· Streefland, 1991· Treffer, 1987)[9].

[9] Για παράδειγμα κατά τη διδασκαλία του κλάσματος οι παραπάνω ερευνητές πιστεύουν ότι απαιτείται εκ μέρους των δασκάλων συνύφανση της διδασκαλίας των εννοιών του κλάσματος, του λόγου και της αναλογίας

Με τη σύνδεση των μαθηματικών και της καθημερινής ζωής ασχολήθηκε και ο Hughes (1992, 1996) Διάφορες μελέτες που πραγματοποίησε έδειξαν ότι τα παιδιά δεν κατανοούν τη φύση και τη χρησιμότητα του γραπτού αριθμητικού συμβολισμού γιατί δεν συνδέουν τις αριθμητικές ασκήσεις που λύνουν στο σχολείο με τις προσθετικές και αφαιρετικές δραστηριότητες της πραγματικής ζωής. Θεωρεί δε ότι η διδασκαλία των μαθηματικών δεν μπορεί να είναι απλώς και μόνο μια μηχανική εξάσκηση αριθμητικών πράξεων. Αποτελέσματα ερευνών τόσο του ίδιου όσο και της Resnick και των συνεργατών της (1995) επιβεβαιώνουν ότι ένας μεγάλος αριθμός παιδιών δεν κατανοεί τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα τυπικά μαθηματικά σύμβολα και στις πραγματικές καταστάσεις στις οποίες αναφέρονται.

Στα πλαίσια της θεωρίας για την προϋπάρχουσα γνώση της έννοιας του αριθμού στο παιδί, μια άλλη ομάδα εμπειρικών και πάλι ερευνών εστιάστηκε στο θέμα των δεξιοτήτων και ιδιαίτερα των αριθμητικών δεξιοτήτων. Η Resnick (1981, 1989) προτείνει μια θεωρία για τους τρόπους που τα παιδιά επεξεργάζονται τις έννοιες του αριθμού τα πρώτα χρόνια του σχολείου (βλ. επίσης, Hiebert, 1986). Συγκεκριμένα αναφέρεται στα *πρωτοποσοτικά σχήματα* που διαθέτουν τα παιδιά όταν ξεκινούν το σχολείο, τα οποία ενώ από τη μία πλευρά τους βοηθούν να αναπτύξουν τις δεξιότητες της μέτρησης, της απαρίθμησης και της επίλυση απλών λεκτικών προβλημάτων, η τυπική εκπαίδευση επειδή ακριβώς δεν λαμβάνει υπόψη της αυτήν την άτυπη γνώση των παιδιών, τα οδηγεί να εστιάζονται στο συντακτικό και όχι στη σημασιολογία των μαθηματικών (Resnick και Omanson, 1987). Επιπλέον, εμπειρικές έρευνες που διεξήγαγε η Resnick με τους συνεργάτες της (1989) καθώς επίσης και οι Sackur-Grisvard and Leonard (1985) και οι Nesher and Peled (1986) εξετάζουν την πιθανότητα από την πλευρά των παιδιών να υπεργενικεύουν κάποιες έννοιες όταν προσπαθούν να ερμηνεύσουν μια νέα περιοχή των μαθηματικών βασιζόμενα σε μια ήδη οικεία σε αυτά περιοχή γνώσης.

Όλες αυτές οι προσεγγίσεις που παρουσιάστηκαν εδώ, χωρίς να συγκλίνουν απαραιτήτως μεταξύ τους, διατηρούν ως κοινό χαρακτηριστικό την σημασία που οι ερευνητές αποδίδουν στον ρόλο που διαδραματίζει η προϋπάρχουσα γνώση στην απόκτηση των μαθηματικών εννοιών. Κατά τα τελευταία χρόνια, το ερευνητικό ενδιαφέρον εστιάστηκε στον τρόπο που είναι δομημένη η προϋπάρχουσα αυτή γνώση τόσο στον τομέα των μαθηματικών όσο και σε διάφορα άλλα γνωστικά πεδία. Συγκεκριμένα γνωστικοί ψυχολόγοι όπως οι Carey (1985), Chi (1992), di Sessa (1988, 1993), Gelman (1991), Spelke (1990), Vosniadou (1992, 1994, 2000) αλλά και άλλοι θεωρούν ότι τα παιδιά διαθέτουν κάποιες αρχικές νοητικές δομές για διάφορα φαινόμενα που τα περιβάλλουν. Δηλαδή τα παιδιά πριν διδαχθούν στο σχολείο ερμηνεύουν με διάφορους τρόπους τα πράγματα γύρω τους, αναπτύσσοντας πεποιθήσεις και ιδέες. Οι ερευνητές αυτοί ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με τη διερεύνηση του τρόπου που είναι οργανωμένες οι δομές αυτής της αρχικής γνώσης που διαθέτουν τα παιδιά (Carey, 1985· Chi, Slotta και De Leeuv, 1994· di Sessa, 1988· Vosniadou, 1994a, 1994b, 2000). Ορισμένοι πιστεύουν ότι τα παιδιά αρχίζουν με λίγες, πιθανώς έμφυτες -εξειδικευμένες κατά τομείς αρχές. Οι αρχές αυτές είναι οργανωμένες σε δομές που έχουν τη μορφή θεωριών, οι οποίες και όπως υποστηρίζεται, επηρεάζουν τη διαδικασία απόκτησης γνώσεων (Carey, 1985, 1991· Gelman, 1990· Spelke, 1990). Οι παραπάνω ερευνητές διαφωνούν ωστόσο ως προς τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά αντιλαμβάνονται τη διαδικασία απόκτησης των γνώσεων. Μερικοί πιστεύουν ότι η διαδικασία αυτή βασίζεται στον εμπλουτισμό των αρχικών δομών (π.χ. Spelke, 1991), ενώ άλλοι υποστηρίζουν ότι η ίδια αυτή διαδικασία προϋποθέτει την αντικατάσταση των αρχικών θεωριών με νέες (Carey, 1985). Η Carey (1985) αναφέρεται στις δύο αυτές διαφορετικές ερμηνείες χρησιμοποιώντας τους όρους *ασθενής αναδιοργάνωση* και *ριζοσπαστική αναδιοργάνωση*. Τα δύο αυτά είδη αναδιοργάνωσης διακρίνονται από τη διαφορετική σχέση που οι αντίστοιχοι υποστηρικτές τους υποθέτουν ότι υπάρχει ανάμεσα στην αρχική και στην τελική εννοιολογική δομή. Έτσι, η Chi και οι συνεργάτες της (1982) καθώς και η Spelke (1991) υποστηρίζουν ότι η γνώση αποκτιέται από το παιδί με μια διαδικασία εμπλουτισμού των αρχικών γνώσεων που αυτό ήδη κατέχει -ασθενής αναδιοργάνωση- (αν και οι Carey και Spelke (1994) στηριζόμενες στα πλέον πρόσφατα ευρήματά τους υποστηρίζουν ότι υπάρχει θεμελιώδης αλλαγή ανάμεσα στις πυρηνικές αρχές των παιδιών και των ενηλίκων)· οι υποστηριχτές της ριζικής αναδιοργάνωσης αντίστοιχα ισχυρίζονται ότι απαιτείται εκ μέρους του παιδιού μια αλλαγή στη *θεωρία*[10] που αυτό κατέχει[11], παρόμοια από πολλές απόψεις με το είδος της αλλαγής θεωρίας που παρουσιάζεται στην ιστορία της επιστήμης (Kuhn, 1957).

Σύμφωνα με τη Βοσνιάδου (1998), οι θέσεις της ασθενούς και της ριζοσπαστικής αναδιοργάνωσης δεν είναι αναγκαστικά ασυμβίβαστες, αλλά αντίθετα ενδέχεται να χαρακτηρίζουν και οι δύο τη διαδικασία αναδιοργάνωσης της γνώσης. Η συγκεκριμένη ερευνήτρια παρομοιάζει τη διάκριση των δύο αυτών ειδών αναδιοργάνωσης με τη διάκριση που γίνεται από τον Kuhn ανάμεσα στην αλλαγή *θεωρίας* και στην αλλαγή *γενικού πλαισίου*[12]. Όπως συγκεκριμένα αναφέρει: «Η διαδικασία αλλαγής κατά την ανάπτυξη μπορεί να θεωρηθεί ότι συνίσταται κυρίως στον εμπλουτισμό της υπάρχουσας *θεωρίας* που θα μπορούσε να δώσει ώθηση σε μια ασθενή αναδιοργάνωση των γνώσεων. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου το παιδί αντιμετωπίζει μεγαλύτερες δυσκολίες από αυτές που η υπάρχουσα δομή της γνώσης μπορεί να επεξηγήσει, κι έτσι χρειάζεται μια επαναστατική αλλαγή γενικού πλαισίου, δηλαδή μια ριζοσπαστική αναδιοργάνωση» (σ. 63).

Έχουμε ήδη αναφερθεί στην κριτική που ασκήθηκε σε ορισμένα σημεία της θεωρίας του Piaget. Βασιζόμενοι σε ευρήματα εμπειρικών ερευνών, ψυχολόγοι όπως οι Gelman και Gallistel (1978) αμφισβήτησαν τόσο τα έργα της διατήρησης όσο και τον τρόπο που ο Piaget πίστευε ότι αναπτύσσεται η έννοια του αριθμού. Οι ίδιοι προτείνουν ότι υπάρχει μια δομική αντιστοιχία ανάμεσα σ' αυτά που είναι γνωστά στο παιδί για τη μέτρηση και γενικά για την αριθμητική και στις μαθηματικές αναπαραστάσεις που πρόκειται να διδαχθεί. Η δομική αυτή αντιστοιχία θεωρείται ότι ισχύει κατά τη μάθηση της προφορικής μέτρησης. Πιο συγκεκριμένα, η Gelman (1995), από την έρευνα με το "μαγικό" πείραμα[13] που πραγματοποίησε, ανέπτυξε μια θεωρία για τις τρεις βασικές αρχές μέτρησης: την αρχή της ένα προς ένα

[10] Σύμφωνα με τη Βοσνιάδου (2001) ο όρος *θεωρία* «χρησιμοποιείται όχι με την έννοια μιας καλά διαμορφωμένης επιστημονικής θεωρίας αλλά για να χαρακτηρίσει την ύπαρξη κάποιου επεξηγηματικού πλαισίου που αποσκοπεί στην ερμηνεία ενός ή περισσοτέρων φαινομένων» (σ. 209).

[11] Σύμφωνα με τη θέση της ριζοσπαστικής αναδιοργάνωσης, ο αρχάριος όχι μόνο έχει φτωχές βάσεις σε σύγκριση με τον ειδήμονα, αλλά έχει και μια διαφορετική "θεωρία" (διαφορετική από την άποψη της δομής της, των φαινομένων που εξηγεί και της αντίληψης των επιμέρους εννοιών που την απαρτίζουν (βλ. Βοσνιάδου, 1998).

[12] Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ., Kuhn, 1970.

[13] Βλ. Βοσνιάδου (Επιμ..) (1995) Η *Ψυχολογία των Μαθηματικών*, σ. 46-69.

αντιστοιχίας, την αρχή της stable-order και την αρχή του απόλυτου αριθμού (για περισσότερες λεπτομέρειες, βλ. Gelman και Gallistel, 1978).

Η ίδια αργότερα (Gelman, 1991) έκανε λόγο για τις αρχές της βασικής *μέτρησης* και *της λογικής σκέψης* (*skeletal counting and reasoning principles*), οι οποίες παρέχουν στα παιδιά μια δομή που τα βοηθά να κατανοούν τις ονομασίες των αριθμών, τις γραφικές αναπαραστάσεις του πληθικού αριθμού που αντιπροσωπεύουν, καθώς και τους όρους που αναφέρονται σε αριθμητικές σχέσεις. Το πρώτο, λοιπόν, σύνολο αριθμών που μαθαίνει το παιδί είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών. Ξεκινά με την απλή απαρίθμηση και προχωρά σε πράξεις, όπως πρόσθεση και αφαίρεση αρχικά και στην συνέχεια πολλαπλασιασμό και διαίρεση ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή αφαίρεση αντίστοιχα.

Η Gelman επιβεβαιώνει την κοινή παραδοχή ότι τα παιδιά έρχονται στο σχολείο με την ιδέα ότι “αριθμός είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης μιας συλλογής αντικειμένων”. Στη συνέχεια τα παιδιά προχωρούν στη χρήση λέξεων για τη μέτρηση καθώς επίσης και στη χρήση άλλων συμβόλων, και φτάνουν να επιτυγχάνουν σε κάποια αριθμητικά έργα και έργα επίλυσης προβλημάτων, είτε αυτά τους δίνονται με προφορικές οδηγίες είτε με γραπτά συμβολικά παραδείγματα που μπορεί να περιλαμβάνουν αριθμούς και πράξεις (Fuson, 1988· Gallistel και Gelman, 1992· Gelman και Gallistel, 1978· Gelman και Meck, 1992· Siegler και Robinson, 1995).

Σχετικά πρόσφατα η Gelman (1991) έδειξε ότι η έννοια του αριθμού στα παιδιά προσχολικής ηλικίας ταυτίζεται με την έννοια του *θετικού ακέραιου,* όπως αυτός καθορίζεται από τις δύο βασικές αρχές της μέτρησης και της λογικής σκέψης που αναφέραμε παραπάνω· ισχυρίζεται δε ότι αυτή η βασική γνώση αλλάζει στα πρώτα χρόνια του σχολείου καθώς τα παιδιά κατασκευάζουν την έννοια του *μηδενός*

(Wellman και Miller, 1986), του *απείρου*[14] και την έννοια του *ρητού αριθμού* και αποκτούν επίγνωση των βασικών αρχών που ορίζουν τους αριθμούς[15].

Ψυχολογικές έρευνες σε νήπια και ζώα ενίσχυσαν την άποψη ότι υπάρχουν εγγενή (innate) συστήματα γνωστικών δομών γνώσης που οργανώνουν την περιοχή των μαθηματικών (βλ. Dehaene, 1997· Gallistel και Gelman, 1992· Gelman, 1990). Οι έρευνες αυτές έδειξαν ότι η ικανότητα της μέτρησης διακεκριμένων ποσοτήτων βασίζεται σε εγγενείς δεξιότητες που είναι τυπικές για το ανθρώπινο είδος. Κατά ταύτα, η γνώση της έννοιας του αριθμού περιλαμβάνει τις βασικές αρχές της ένα προς ένα αντιστοιχίας και του επόμενου αριθμού[16]. Στην περιγραφή που κάνουν οι Carey και Spelke (1994) για τις βασικές αυτές αρχές καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι: "Οι έννοιες του αριθμού αποτελούν ένα τομέα γνώσης διαφορετικό από αυτό της φυσικής και της ψυχολογίας" (ό. π., σ. 176). Μια άλλη σειρά ερευνών εστιάστηκε στο αν η ικανότητα διάκρισης μικρών συνόλων αντικειμένων από νήπια αντανακλά μια διαδικασία αναπαράστασης του πληθάριθμου των συνόλων ή μια διαδικασία αντιστοίχησης των αντικειμένων που βλέπουν μπροστά τους (βλ. Pylyshyn, 1990· Scholl και Pylyshyn, 1999· Spelke και Van de Walle, 1993). Σύμφωνα με τα συμπεράσματα των ερευνών αυτών τα πολύ μικρά παιδιά αναπαριστούν αντικείμενα και όχι την αριθμητική αξία των συνόλων στα οποία τα αντικείμενα αυτά ανήκουν.

Και οι Xu και Spelke (2000) σε μια πολύ πρόσφατη έρευνά τους εξέτασαν την ικανότητα των νηπίων να αναπαριστούν κατά προσέγγιση πληθάριθμους συνόλων. Προκειμένου να ελέγξουν κατά πόσο οι αντιδράσεις των νηπίων βασιζόταν στο μηχανισμό της ένα προς ένα αντιστοιχίας των αντικειμένων που είχαν μπροστά τους, εξέτασαν την ικανότητα των παιδιών στη διάκριση συνόλων με μεγαλύτερους πληθάριθμους (συγκεκριμένα 8 vs 16 στοιχείων ή 8 vs 12 στοιχείων). Τα ευρήματά τους έδειξαν ότι η ικανότητα να αναπαριστούν κατά προσέγγιση τον πληθικό αριθμό

[14] Με την έννοια της αναγνώρισης ότι δεν υπάρχει ένας μοναδικός μεγαλύτερος αριθμός (βλ. Gelman και Evans, 1981)

[15] Σε πιο πρόσφατες έρευνες που διεξήγαν οι Hartnett και Gelman (1995) ασχολήθηκαν με την έννοια του κλάσματος και τόνισαν ότι η γνώση των αρχών της μέτρησης δεν βοηθάει την απόκτηση της έννοιας του κλάσματος. Τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών θα συζητηθούν εκτενέστερα στην ενότητα 1.3 όπου εκθέτονται τα ευρήματα εμπειρικών ερευνών με αντικείμενο τα κλάσματα.

[16] Σύμφωνα με την αρχή *του επόμενου αριθμού,* κάθε αριθμός έχει ένα μοναδικό επόμενο αριθμό.

ενός συνόλου αντικειμένων αναπτύσσεται στα νήπια πριν από τη γλώσσα και τη συμβολική μέτρηση.

Οι παραπάνω απόψεις, οσοδήποτε και αν διαφοροποιούνται μεταξύ τους, διατηρούν ωστόσο κοινή την άποψη ότι η προϋπάρχουσα γνώση ισοδυναμεί με ορισμένες βασικές αρχές οι οποίες και την καθορίζουν. Για άλλους ωστόσο ερευνητές, η προϋπάρχουσα αυτή γνώση προσεγγίζει περισσότερο τη δομή μιας θεωρίας (θεωρία βάσης ή αρχική θεωρία). Στο πλαίσιο αυτής της προβληματικής ιδιαίτερη προσοχή αποδόθηκε στις διαδικασίες με τις οποίες συντελείται η πρόσληψη των νέων πληροφοριών.

1.1.5 Εννοιολογική αλλαγή – Κυριότερες θεωρητικές Θέσεις

Μια σειρά ερευνών που πραγματοποίησαν ερευνητές όπως η Carey (1985), οι Chi, Slotta και De Leeuv (1994), η Spelke (1994) και η Vosniadou (1994, 1999) εστίασαν το ενδιαφέρον τους στους μηχανισμούς με τους οποίους πραγματοποιείται η εννοιολογική αλλαγή καθώς και στις παρανοήσεις των παιδιών σε ποικίλες γνωστικές περιοχές.

Σύμφωνα με τη Vosniadou (1994, 1999) οι αρχικές εξηγήσεις των παιδιών για το φυσικό κόσμο στο πλαίσιο της διαισθητικής φυσικής σχηματίζουν μια *θεωρία* (*framework theory*) που έχει συνοχή, δεν μπορούν δηλαδή να θεωρηθούν άσχετες και αποσπασματικές παρατηρήσεις. Όπως έδειξε με την έρευνά της τόσο στο χώρο της αστρονομίας όσο και της φυσικής και της βιολογίας αυτές οι *θεωρίες βάσης* των παιδιών είναι αιτία της δημιουργίας παρανοήσεων και εμποδίζουν την περαιτέρω απόκτηση γνώσης. Πολλές από αυτές τις παρανοήσεις η Vosniadou τις εξήγησε ως συνθετικά μοντέλα που σχηματίζουν τα νεαρά άτομα στην προσπάθειά τους να αφομοιώσουν τις νέες πληροφορίες. Οποιεσδήποτε αλλαγές στο επίπεδο της *θεωρίας βάσης* είναι δύσκολες γιατί η θεωρία αυτή συνιστά ένα ερμηνευτικό σύστημα που διαθέτει συνοχή και στηρίζεται στις καθημερινές εμπειρίες οι οποίες και το εδραιώνουν καθώς περνούν τα χρόνια. Ως εκ τούτου η εκμάθηση πολλών επιστημονικών (και όχι μόνο) εννοιών απαιτεί εννοιολογική αλλαγή. Πιο συγκεκριμένα, σε παλαιότερη συνεργασία της με τον Brewer (Vosniadou και Brewer, 1992, 1994) προσπάθησαν να αναπτύξουν ένα θεωρητικό πλαίσιο το οποίο να ερμηνεύει την εννοιολογική αλλαγή στον χώρο των φυσικών επιστημών· διερευνώντας φυσικά φαινόμενα όπως του σχήματος της γης, της εναλλαγής μέρας/νύχτας, τη διαδοχή των εποχών και άλλα. Σε έρευνες που διεξήγαν στην Αμερική, στην Ελλάδα, στην Ινδία και τη Σαμόα έθεταν στα υποκείμενά τους (παιδιά νηπιαγωγείου, δημοτικού, γυμνασίου και αναλφάβητους ενηλίκους) μια σειρά από ερωτήσεις, είτε *ερωτήσεις γνώσεων*, όπως τις ονόμαζαν, οι οποίες σύμφωνα με τους ερευνητές απαιτούσαν συγκεκριμένες γνώσεις (π.χ. «Ποιο είναι το σχήμα της γης;), είτε *παραγωγικές ερωτήσεις*, οι οποίες σύμφωνα με τους ερευνητές δεν μπορούν να απαντηθούν με απλή επανάληψη πληροφοριών που έχουν αποκτηθεί με τη διδασκαλία, αλλά μπορούν να αποκαλύψουν πληροφορίες σχετικά με τις βαθύτερες εννοιολογικές δομές που διαθέτουν τα παιδιά (π.χ. Αν περπατούσες πολλές μέρες θα έφθανες στην άκρη της γης;).

Τα αποτελέσματα των Vosniadou και Brewer (1992, 1994) έδειξαν ότι τα παιδιά χρησιμοποιούσαν ένα μικρό αριθμό νοητικών αναπαραστάσεων κατά τρόπο συνεπή (π.χ. το 78% των παιδιών χρησιμοποίησε έξι διαφορετικές νοητικές αναπαραστάσεις για το σχήμα της γης). Προκειμένου δε να αναφερθούν στις νοητικές αυτές αναπαραστάσεις οι συγκεκριμένοι ερευνητές χρησιμοποίησαν τον όρο ***νοητικά μοντέλα*** στον οποίο δίνουν τον παρακάτω ορισμό "νοητικό μοντέλο είναι μια αναπαράσταση που σχηματίζεται επιτόπου για να αντεπεξέλθει το άτομο στις υπονοούμενες προσδοκίες συγκεκριμένων καταστάσεων, ... παράγονται δε από τις υποκείμενες εννοιολογικές δομές των παιδιών και περιορίζονται από αυτές τις δομές", "και "η κατανόησή τους είναι δυνατό να μας δώσει πληροφορίες για το περιεχόμενο και τη δομή της υποκείμενης βάσης της γνώσης" (Vosniadou, 1994, 2001).

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων τους οι παραπάνω ερευνητές έβγαλαν το συμπέρασμα ότι τα παιδιά από μικρή ηλικία σχηματίζουν μια *θεωρία βάσης* που αποτελείται από οντολογικές και επιστημολογικές ***προϋποθέσεις***, όπως τις ονόμασαν, οι οποίες "κατασκευάζονται από τα παιδιά με βάση τις καθημερινές τους εμπειρίες...". Οι προϋποθέσεις αυτές επηρεάζουν την ερμηνεία των εισερχόμενων πληροφοριών με τρόπους που δεν είναι ελέγχονται συνειδητά. Άρα οι προϋποθέσεις αυτές της θεωρίας βάσης, περιορίζουν τα είδη των νοητικών αναπαραστάσεων τις οποίες μπορούν να σχηματίσουν τα παιδιά.

Η Vosniadou υποστηρίζει (1994a) ότι όσον αφορά τον τομέα της αστρονομίας τα νοητικά μοντέλα των παιδιών διακρίνονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες: τα διαισθητικά, τα συνθετικά και τα επιστημονικά. Το χαρακτηριστικό των διαισθητικών μοντέλων είναι ότι παρουσιάζουν τη μικρότερη απόκλιση από τον φυσικό κόσμο όπως τον αντιλαμβάνονται τα παιδιά, χωρίς να υπεισέρχεται η επίδραση των επιστημονικών απόψεων. Για παράδειγμα, το διαισθητικό μοντέλο για το σχήμα της γης είναι εκείνο σύμφωνα με το οποίο η γη είναι ένα παραλληλόγραμμο. Επιστημονικά είναι τα νοητικά μοντέλα που προσεγγίζουν τις επιστημονικές απόψεις, ενώ τα συνθετικά μοντέλα είναι το αποτέλεσμα της προσπάθειας των παιδιών να αφομοιώσουν τις επιστημονικές απόψεις στις ήδη υπάρχουσες νοητικές δομές. Σύμφωνα με τα παραπάνω, για παράδειγμα τα νοητικά μοντέλα της γης περιορίζονται από δύο προϋποθέσεις της *θεωρίας βάσης (framework theory)*: "τα πράγματα που φαίνονται επίπεδα είναι επίπεδα, και επομένως το έδαφος είναι επίπεδο" και "τα πράγματα πρέπει να υποβαστάζονται για να μην πέσουν". Εξ ορισμού τα διαισθητικά μοντέλα θα πρέπει να σχηματίζονται με βάση τις οντολογικές και τις επιστημονικές πεποιθήσεις των ατόμων και μόνο αυτές. Οπότε οι Vosniadou και Brewer (1992) υποθέτουν ότι το διαισθητικό μοντέλο της γης θα πρέπει να είναι μια επίπεδη επιφάνεια ώστε να ισχύει η πρώτη από τις προϋποθέσεις και ότι οι άνθρωποι θα ζουν στο επάνω μέρος της γης σύμφωνα με τη δεύτερη. Πράγματι τα δεδομένα της έρευνάς τους έδειξαν ότι υπάρχουν παιδιά τα οποία υποστηρίζουν ότι η γη είναι ένας επίπεδος δίσκος ή ορθογώνιο στην επάνω επιφάνεια του οποίου ζουν οι άνθρωποι. Κατά συνέπεια για να μπορέσουν τα παιδιά να προσεγγίσουν το επιστημονικό μοντέλο θα πρέπει να αρθούν οι περιορισμοί που επιβάλλονται από τις εδραιωμένες πεποιθήσεις της θεωρίας βάσης και αυτό θα συμβεί όταν οι πεποιθήσεις αυτές θα απορριφθούν ή θα ερμηνευθούν σε ένα άλλο ***επεξηγηματικό πλαίσιο***. Επειδή οι βασικές προϋποθέσεις της θεωρίας βάσης των παιδιών είναι διαμορφωμένες από την καθημερινή τους εμπειρία και είναι βαθιά εδραιωμένες, η απόρριψη ή η αναθεώρησή τους είναι πολύ δύσκολη για τα παιδιά και αυτό είναι η αιτία για τη δημιουργία των συνθετικών νοητικών μοντέλων. Επιπλέον, οι Vosniadou και Brewer τονίζουν ότι η διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής με τη μορφή αλλαγής της θεωρίας ή του επεξηγηματικού πλαισίου είναι μια αργή διαδικασία, η οποία πραγματοποιείται καθώς τα παιδιά βαθμιαία σχηματίζουν ένα διαφορετικό επεξηγηματικό πλαίσιο που ολοένα πλησιάζει το επιστημονικό. Τα αποτελέσματα τόσο στην έρευνα για το σχήμα της γης όσο και στις άλλες έρευνες έδειξαν ότι τα παιδιά της μικρότερης ηλικίας υιοθετούσαν τα διαισθητικά μοντέλα, τα παιδιά στις ενδιάμεσης ηλικίας τα συνθετικά μοντέλα ενώ τα μεγαλύτερης ηλικίας παιδιά υιοθετούσαν τα επιστημονικά[17].

Ένα άλλο παράδειγμα από τον τομέα της μηχανικής, προκύπτει από τις έρευνες που πραγματοποίησε οι Ιωαννίδης (1991) και Ioannides και Vosniadou (υπό δημοσίευση) για την ανάπτυξη της σημασίας της λέξης "δύναμη" σε παιδιά του νηπιαγωγείου και του δημοτικού. Από τη διερεύνηση αυτή προέκυψε ότι υπάρχουν δύο βασικές προϋποθέσεις της θεωρίας βάσης οι οποίες περιορίζουν τις αρχικές ερμηνείες των παιδιών για τη δύναμη: η μια είναι ότι η δύναμη είναι ιδιότητα των φυσικών αντικειμένων και η άλλη ότι η δύναμη είναι η αιτία που εξηγεί την κίνηση των φυσικών αντικειμένων. Συνεπώς τα περισσότερα παιδιά του νηπιαγωγείου πίστευαν ότι όλα τα αντικείμενα που έχουν βάρος έχουν μια εσωτερική δύναμη. Αργότερα τα παιδιά αντικαθιστούσαν την ερμηνεία αυτή με μια άλλη σύμφωνα με την οποία η δύναμη είναι μια επίκτητη ιδιότητα των αντικειμένων που κινούνται (Ioannides και Vosniadou, υπό δημοσίευση). Οι ερευνητές κατέληξαν ότι η εννοιολογική αλλαγή πραγματώνεται καθώς τα παιδιά ενσωματώνουν τις πληροφορίες που παίρνουν από τη διδασκαλία της Νευτώνειας μηχανικής δημιουργώντας συνθετικές ερμηνείες.

Ακόμη η Ιωαννίδου (1998) η οποία διερεύνησε τις ιδέες των παιδιών για τη σύσταση του εσωτερικού της γης καθώς επίσης και για κάποια γεωδυναμικά φαινόμενα όπως

[17] Η θεωρία που ανέπτυξε η Βοσνιάδου ενισχύεται τόσο από τα αποτελέσματα που προκύπτουν από της προαναφερθείσες έρευνες που έχει πραγματοποιήσει στην Αμερική, τις Ινδίες, την Ελλάδα και τη Σαμόα (Vosniadou, 1994a) για το σχήμα της γης και γενικά στον τομέα της Αστρονομίας, όσο και στους τομείς της Γεωλογίας, της Φυσικής και της Βιολογίας. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών όλες οι παρανοήσεις παιδιών σε σχέση με το σχήμα της γης, μπορούν να εξηγηθούν σαν προσπάθειες των παιδιών να συνθέσουν δυο ασυνεπή κομμάτια πληροφοριών: την πληροφορία που εκλαμβάνουν από τη διδασκαλία σύμφωνα με την οποία η γη είναι μια σφαίρα και την πληροφορία που δέχονται από την καθημερινή τους εμπειρία ότι η γη είναι επίπεδη.

οι σεισμοί, τα ηφαίστεια και γενικότερα οι αλλαγές στο ανάγλυφό της, έδειξε ότι τα αρχικά νοητικά μοντέλα των παιδιών διαφέρουν κατά πολύ από τις επιστημονικές απόψεις για αυτά τα θέματα. Σύμφωνα με τα ευρήματά της τα παιδιά που υιοθετούσαν αρχικά νοητικά μοντέλα πίστευαν ότι τα υλικά στο εσωτερικό της γης είχαν επίπεδη διάταξη και ότι η θερμική κατάσταση του εσωτερικού της γης δεν διέφερε από τη θερμική κατάσταση της επιφάνειάς της. Τα αρχικά μοντέλα δηλαδή περιορίζονται από την προϋπόθεση της "πάνω-κάτω οργάνωσης" του χώρου που λειτουργεί στη θεωρία βάσης (framework theory) για το φυσικό κόσμο. Στη συνέχεια και καθώς τα παιδιά μεγαλώνουν, υιοθετούν διάφορα συνθετικά νοητικά μοντέλα που περιέχουν ιδέες που πλησιάζουν την επιστημονική άποψη. Έτσι, για παράδειγμα, βλέπουμε ότι ανάμεσα στα μεγαλύτερα, υπάρχουν παιδιά που πιστεύουν ότι το εσωτερικό της γης περιέχει διάπυρα υλικά τα οποία βρίσκονται στον πυρήνα της, συνεπώς η θερμική κατάσταση του εσωτερικού της γης είναι διαφορετική από την αντίστοιχη της επιφάνειά της (βλ. επίσης Ιωαννίδου και Βοσνιάδου, 2001).

Αντίστοιχα, στον τομέα της Βιολογίας, ο Κύρκος (1999) έδειξε ότι τα μικρά παιδιά αρχικά πιστεύουν ότι η τροφή των φυτών είναι οι διάφορες ουσίες που αντλούν από το έδαφος, κυρίως το νερό, και ότι η ανάπτυξη είναι αποτέλεσμα συσσωρεύσεως της τροφής εντός του φυτού. Διερευνώντας την εννοιολογική αλλαγή, εξήγησε το σχηματισμό των νοητικών μοντέλων που υιοθετούν τα παιδιά με την ύπαρξη δύο βασικών προϋποθέσεων της θεωρίας βάσης που είναι η θεωρία για το πως τρέφονται οι άνθρωποι: Πρώτον, ότι τα φυτά είναι ετερότροφα και αντλούν την τροφή τους από το έδαφος και δεύτερον, ότι οι διάφορες ουσίες που προσλαμβάνουν τα φυτά διατηρούν την ταυτότητά τους και δεν μετασχηματίζονται.

Στον τομέα της Χημείας η Κουκά (2000) διερευνώντας τις απόψεις των μαθητών για το νερό ως χημική ένωση και το νερό ως διαλύτη, έδειξε ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν έναν περιορισμένο αριθμό νοητικών μοντέλων τα οποία και είχαν σταθερή κατανομή ως προς την ηλικία των μαθητών. Η ερευνήτρια αυτή εξηγεί τη δημιουργία των αρχικών μοντέλων του νερού που σχημάτισαν οι μικρότεροι σε ηλικία μαθητές με βάση τη φαινομενολογική εκ μέρους τους αντίληψη του κόσμου. Για παράδειγμα ένας βασικός τύπος αρχικού νοητικού μοντέλου που εντόπισε στους μαθητές του δείγματός της ήταν αυτός σύμφωνα με τον οποίο το νερό είναι μόνο υγρό, δεν υφίσταται σε αέρια κατάσταση, δεν αλλάζει όταν βράζει και παραμένει αδρανές κατά τη διάλυση. Τα αποτελέσματα της έρευνάς αυτής έδειξαν ότι οι μαθητές πολύ δύσκολα παραιτούνται από τις αρχικές διαισθητικές τους απόψεις ακόμη και όταν διδάσκονται στο σχολείο τις επιστημονικές απόψεις για το νερό ως χημική ένωση (βλ. επίσης Κουκά, Βοσνιάδου και Τσαπαρλής, 2000).

Συνοψίζοντας, η Βοσνιάδου εξηγεί την εννοιολογική αλλαγή λέγοντας: «Ο μηχανισμός της πρόσθεσης πληροφοριών σε μια υπάρχουσα θεωρία βάσης της γνώσης μπορεί να προκαλέσει μια παρανόηση αν οι δύο πληροφορίες ανήκουν σε δύο μη συμβατά επεξηγηματικά πλαίσια, όπως συμβαίνει στην περίπτωση του σχήματος της γης. Σε αυτές τις καταστάσεις η κατανόηση μιας επιστημονικής εξήγησης απαιτεί μια θεμελιώδη αναδιοργάνωση της θεωρίας βάσης –την αναθεώρηση των βασικών προϋποθέσεων και πεποιθήσεων της θεωρίας βάσης– πριν μπουν σε ενέργεια οι προσθετικοί μηχανισμοί. Αυτό εννοούμε με τον όρο εννοιολογική αλλαγή. Τα παιδιά δηλαδή πρέπει να καταλάβουν ότι η γη είναι ένα αντικείμενο που ανήκει στην κατηγορία των αστρονομικών αντικειμένων και έχει το σχήμα της σφαίρα και όχι ένα φυσικό αντικείμενο που είναι επίπεδο και υποβασταζόμενο και το οποίο υπακούει σε όλες τις άλλες ιδιότητες των φυσικών αντικειμένων. Αυτή η αλλαγή στις οντολογικές κατηγορίες είναι στην πραγματικότητα ένα είδος αλλαγής θεωρίας που δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη αντικατάστασή της.» (Vosniadou, 1999).

Στο χώρο των μαθηματικών εννοιών οι ενστερνιστές της θεωρίας της εννοιολογικής αλλαγής ασχολήθηκαν με την απόκτηση της έννοιας του αριθμού και συγκεκριμένα τόνισαν τη σημασία του διαχωρισμού της έννοιας του αριθμού από τη μέτρηση. Οι Carey και Spelke (1994) θεωρούν ότι η κατασκευή της έννοιας του ρητού αριθμού επιφέρει μια ακόμη βαθύτερη εννοιολογική αλλαγή από εκείνη που απαιτείται για την κατασκευή του *μηδενός* και της *μη ύπαρξης μεγαλύτερου αριθμού*. Συγκεκριμένα αναφέρουν ότι αναγνώριση του *0,5* ή του *1/3* ως αριθμών απαιτεί την εγκατάλειψη της ταυτοποίησης του αριθμού με τη μέτρηση, εγκατάλειψη της αρχής του επόμενου αριθμού και κατασκευή μιας νέας κατανόησης της διαίρεσης, ως πράξης διαφορετικής από την επαναλαμβανόμενη αφαίρεση. Η θεώρηση αυτή οδηγεί στην άποψη ότι οι νέες αρχές που από κοινού προσδιορίζουν αυτό το οποίο συνιστά έναν αριθμό και οι οποίες καθορίζουν την λογική σκέψη σε σχέση με τους αριθμούς, περιλαμβάνουν τη διαίρεση ως ένα κλειστό σύστημα.

Ανακεφαλαιώνοντας: στην ενότητα που προηγήθηκε, αναφερθήκαμε στις διάφορες θεωρίες που διατυπώθηκαν αναφορικά με την απόκτηση και την αλλαγή της γνώσης. Αυτό κυρίως που ενδιαφερθήκαμε να δείξουμε είναι οι προεκτάσεις που οι συγκεκριμένες θεωρίες είχαν στην ερμηνεία των τρόπων που τα παιδιά αποκτούν την έννοια του αριθμού. Συγκεκριμένα αναφερθήκαμε στη θεωρία του Piaget και στην κριτική που ασκήθηκε σ' αυτήν. Στη συνέχεια αναφερθήκαμε στην κριτική περί της μερικής αναδιοργάνωσης της γνώσης που οι ενστερνιστές της δίνουν ιδιαίτερη σημασία στο περιεχόμενο της εκάστοτε γνωστικής περιοχής. Επισημάναμε το ρόλο που αναπτυξιακοί ψυχολόγοι ισχυρίζονται ότι διαδραματίζει η προϋπάρχουσα γνώση. Όπως είδαμε για ορισμένους ψυχολόγους η προϋπάρχουσα γνώση έχει τη μορφή κανόνων ή αρχών που επηρεάζουν την εκμάθηση διαφόρων εννοιών. Στον τομέα των μαθηματικών, οι αρχές της μέτρησης είναι εκείνες οι οποίες βοηθούν την απόκτηση της έννοιας του αριθμού (του φυσικού αριθμού). Για άλλους ψυχολόγους η προϋπάρχουσα γνώση έχει τη δομή μιας θεωρίας, την οποία τα παιδιά πρέπει να αντικαταστήσουν καθώς εισάγονται στις επιστημονικές έννοιες. Η διαδικασία αυτή απαιτεί εννοιολογική αλλαγή.

Με δεδομένο ότι το θέμα που πραγματώνεται η εργασία μας είναι συγκεκριμένα η διερεύνηση της ύπαρξης εννοιολογικής αλλαγής αναφορικά με την έννοια του αριθμού και ιδιαίτερα του κλάσματος κρίναμε σκόπιμο να αφιερώσουμε την επόμενη ενότητα σε μια ιστορική επισκόπηση των τρόπων που κατά εποχές προσεγγίστηκε η έννοια αυτή· στη συνέχεια θα συνεχίσουμε με την παράθεση σύγχρονων εμπειρικών ερευνών για την έννοια που μας απασχολεί, ώστε να μπορέσουμε να αναπτύξουμε το θεωρητικό πλαίσιο και τις υποθέσεις τις οποίες θα πραγματευτούμε κατά την εμπειρική μας έρευνα.

1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΠΟΡΕΙΑΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

Έχοντας αναφερθεί στις κυριότερες σύγχρονες απόψεις για την απόκτηση των γνώσεων και ιδιαίτερα των μαθηματικών εννοιών και πριν προχωρήσω στην ανασκόπηση των πρόσφατων ειδικών ερευνών που έχουν ως αντικείμενο το κλάσμα, έκρινα σκόπιμο να επεκτείνω τη διερεύνησή μας και στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας αυτής. Αν και δεν θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών στα παιδιά ταυτίζεται με την εξέλιξη που είχαν ιστορικά οι έννοιες αυτές, πιστεύουμε ότι αυτή η ιστορική αναδρομή είναι δυνατό να μας δώσει κάποιες ιδέες για τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές ακόμη και σήμερα στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος.

Ερευνητές από τη σκοπιά της διδακτικής των Μαθηματικών όπως οι Brousseau (1983), Herscovics (1989) και Artigue (1990) έχουν εκφράσει διαφορετικές απόψεις για την αντιστοιχία ανάμεσα στις γνώσεις-εμπόδια που εμφανίζουν οι σημερινοί μαθητές και σε παρόμοιες αντιλήψεις που εκφράστηκαν από τους μαθηματικούς κατά το παρελθόν. Ο Brousseau (1983) ενώ δίνει ιδιαίτερη σημασία στα επιστημολογικά εμπόδια που αποκαλύπτει η ιστορική μελέτη μιας μαθηματικής έννοιας είναι αντίθετος στην αναπαραγωγή των ιστορικών συνθηκών υπέρβασης αυτών των εμποδίων στο πλαίσιο του σχολείου. Ο Herscovics (1989) επίσης ενώ υποστηρίζει ότι πολλά από τα επιστημολογικά εμπόδια μπορούν να παραλληλιστούν με τα γνωστικά εμπόδια που αντιμετωπίζουν οι σημερινοί μαθητές, επισημαίνει ότι το σχολικό περιβάλλον μάθησης διαφέρει ουσιαστικά από εκείνο του παρελθόντος. Τέλος η Artigue (1990) υποστηρίζοντας ότι υπάρχουν κοινοί μηχανισμοί παραγωγής επιστημολογικών εμποδίων τόσο στους μαθηματικούς κατά το παρελθόν όσο και στους σημερινούς μαθητές, προωθεί την ιδέα ενός παραλληλισμού αυτών των δύο[18].

Από το χώρο της *Ψυχολογίας της Μαθηματικής εκπαίδευσης*, ερευνητές όπως οι Ernest (1989), Sfard (1994) και Vergnaud (1990) συμμερίζονται την άποψη ότι η

[18] Βλ. Θωμαΐδη, 1997, σ. 5.

γνώση της ιστορικής εξέλιξης μιας μαθηματικής έννοιας, μπορεί να συμβάλλει ουσιαστικά στην επίλυση προβλημάτων που συνδέονται με την έρευνα των διαδικασιών μάθησης αυτής της μαθηματικής έννοιας[19].

Στη δική μας έρευνα, υποθέτοντας ότι στη διερεύνηση των αρχικών ιδεών των παιδιών για τα κλάσματα θα μας βοηθούσε η παράθεση των απόψεων που ίσχυαν σε διάφορες χρονικές περιόδους, προσπαθήσαμε να διερευνήσουμε την εξελικτική πορεία αυτής της μαθηματικής έννοιας μέσα από την ιστορία των Μαθηματικών. Συγκεκριμένα θα εστιάσουμε τη διερεύνησή μας στις συγκεκριμένες εκείνες χρονικές περιόδους που υπήρξε κάποιου είδους αλλαγή στον τρόπο που αντιλαμβανόταν οι άνθρωποι της αντίστοιχης εποχής αυτή την έννοια (δηλαδή στις ιστορικές εκείνες περιόδους που διαπιστώνονται εννοιολογικές αλλαγές).

Στην περίπτωση των κλασμάτων το πρόβλημα της διερεύνησης της ιστορικής εξέλιξης περνά από τη διερεύνηση των πολύπλοκων διαδρομών που χάραξε από τον 5ο αιώνα π.Χ. έως σήμερα. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η παρακολούθηση αυτών των διαδρομών γίνεται δυσκολότερη εξαιτίας των διαφορετικών ερμηνειών που προσδίδουν στα αρχαία κείμενα οι ιστορικοί των Μαθηματικών. Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχουν επιστήμονες που προσεγγίζουν την εννοιολογική ιδιαίτερα υπόσταση του κλάσματος στις ίδιες χρονικές περιόδους με εκ διαμέτρου αντίθετες αφετηρίες.

1.2.1 Η πορεία της εξέλιξης των κλασμάτων

Η ιστορική εξέλιξη της έννοιας του κλάσματος περιλαμβάνει πολλά στάδια που διαφοροποιούνται τόσο από το πεδίο εφαρμογών της, όσο και από την εννοιολογική υπόστασή της (θεωρητική ή επιστημολογική). Για παράδειγμα τα *εναδικά* κλάσματα[20] των Αρχαίων Αιγυπτίων από άλλους ιστορικούς ερμηνεύονται ως τα πρώτα κλάσματα που έχουν ευρύτατη εφαρμογή (Ritter, 1992) ενώ από άλλους ως

[19] Συγκεκριμένα η Sfard υποστήριξε ότι "... η ιστορική προοπτική αποδείχθηκε ανεκτίμητη πηγή για να σχηματίσω σωστές αντιλήψεις των λεπτών σημείων της διαδικασίας μάθησης και της φύσης των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές" (βλ. Sfard, 1994, σ. 131).

[20] Παρακάτω και στην παράγραφο 1.2.1.1. θα αναφερθούμε στα εναδικά κλάσματα που χρησιμοποιούσαν οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι και που θα μπορούσαν να αντιστοιχούν στις σύγχρονες κλασματικές μονάδες.

κάποιοι αριθμοί που δεν έχουν καμία σχέση με την έννοια του κλάσματος όπως την αντιλαμβανόμαστε σήμερα (van der Waerden, 1976, 2000).

Με βάση λοιπόν την επιστημονική εξέλιξή τους και τη χρήση των κλασμάτων, θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε στη συνέχεια την εξέλιξη των κλασμάτων σε τέσσερις χρονικές περιόδους εκθέτοντας τις απόψεις διάφορων ιστορικών των μαθηματικών.

1.2.1.0 Η προϊστορία των κλασμάτων

Οι προϊστορικοί λαοί είχαν ανακαλύψει την έννοια του αριθμού και τις προϋποθέσεις των υπολογισμών για την εφεύρεση συστημάτων αρίθμησης, αλλά δεν υπάρχουν στοιχεία ότι είχαν αναπτύξει την έννοια του κλασματικού αριθμού (Keller, 1918). Αρχικά σύμβολα που υποδηλώνουν πρωταρχικές χρήσεις της έννοιας του κλάσματος έχουν αποκρυπτογραφηθεί σε πλάκες, τις λεγόμενες πρωτο-ελαμιτικές (Μεσοποταμία, 3000 π.Χ. περίπου) (βλ., Σχήμα 1). Μια εξερεύνηση των πρωτο-Σουμεριακών κειμένων του Uruk (γύρω στα τέλη του μισού της τέταρτης χιλιετηρίδας με αρχή της τρίτης χιλιετηρίδας π.Χ.) είναι ως επί το πλείστον λογαριασμοί τροφίμων, υφασμάτων, αντικειμένων που παραλαμβάνονται, αποθηκεύονται ή διανέμονται (Ritter, 1992). Σε Πίνακες Συστημάτων μέτρησης εμφανίζονται υποδιαιρέσεις που θα μπορούσαμε να τα θεωρήσουμε ως κλάσματα και που σήμερα αντιστοιχούν στις κλασματικές μονάδες.

Σχήμα 1.1: Τα πρωτο-ελαμιτικά κλάσματα

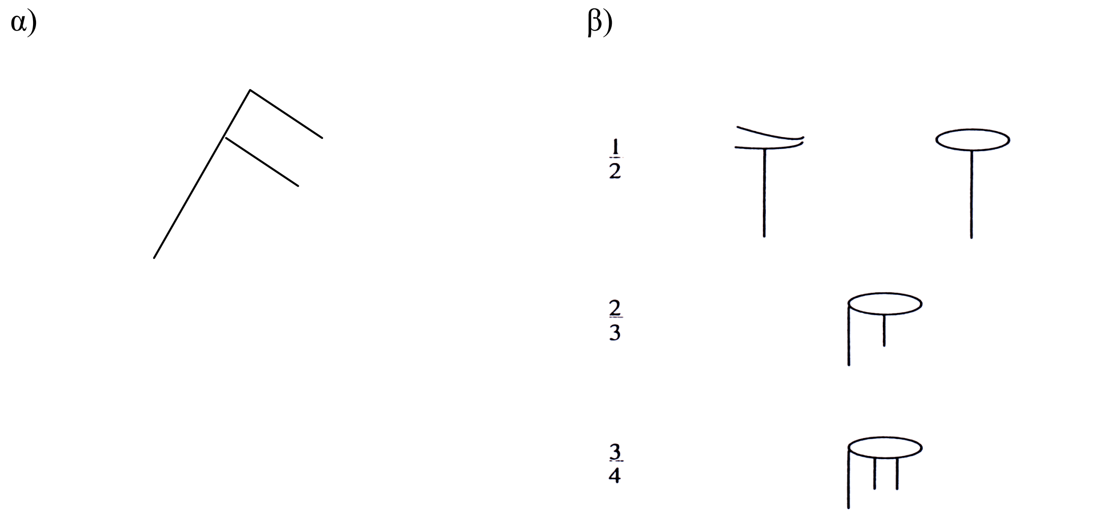
1.2.1.1 Πρώτη περίοδος: Αιγύπτιοι - Βαβυλώνιοι (2000π.Χ – 500πΧ)

ι) Αιγύπτιοι

Οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι γνώριζαν την έννοια του κλάσματος (Benoit, Chemla & Ritter, 1992· Cajori, 1928· Caveing, 1992· Guillemot, 1992· Loria, 1928· Ritter, 1992).

Ιστορικά στοιχεία χρονολογούνται από το 1800-1300 π.Χ., αν και η οικοδόμηση των πυραμίδων, τον 27ο αιώνα π.Χ., απαιτούσε εκτεταμένες γνώσεις των αναλογιών και συνεπώς η χρήση των κλασμάτων ήταν απαραίτητη. Πολυάριθμα όμως αρχεία εκείνης της εποχής καταστράφηκαν κατά τις εξεγέρσεις του 2200 π.Χ. περίπου.

Τεκμήρια όμως όπως κείμενα που βρέθηκαν σε πάπυρους, όστρακα, πέτρες και ξύλα είναι τεράστιας σημασίας γιατί μας δίνουν πληροφορίες που δεν μπορούμε να πάρουμε από κείμενα που έχουν μεταγραφεί από τα πρωτότυπα όπου οι αρχικοί συμβολισμοί μπορεί να έχουν τροποποιηθεί (van der Waerden, 2000) . Για παράδειγμα η πέτρα του Παλέρμο[21] (βλ. Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.3. Τύποι αρχαϊκών κλασμάτων (λεπτομέρειες από την Πέτρα του Παλέρμο)

[21] Η αποκαλούμενη Πέτρα του Παλέρμο είναι ένα κομμάτι μαύρου βασάλτη, η οποία βρίσκεται στο μουσείο του Παλέρμο. Πάνω στην πέτρα αυτή είχε χαραχθεί ένα αντίγραφο των πρώιμων δυναστειακών χρονικών και μπορεί κανείς να παρατηρήσει την πιο όψιμη εξέλιξη του γραμμικού μετρικού συστήματος. Συγκεκριμένα η Πέτρα του Παλέρμο είναι χωρισμένη σε καταχωρήσεις εκ των οποίων η κάθε μια αποτελείται από μια σειρά κουτιών. Το κάθε κουτί με τη σειρά του αντιπροσωπεύει ένα χρόνο της βασιλείας ενός Φαραώ και παρουσιάζει τα σημαντικότερα γεγονότα αυτού του βασιλικού έτους – ως επί το πλείστον θρησκευτικές τελετές και προσφορές ή στρατιωτικές εκστρατείες. Το ενδιαφέρον για μας είναι ότι στον πάτο του κάθε κουτιού από τη βασιλεία του Φαραώ Ντερ και μετά καταγράφεται το μέγιστο ύψος του νερού του Νείλου για το συγκεκριμένο χρόνο σε κύβιτον (αρχαία μονάδα μέτρησης ύψους –1 κύβιτον ισούται περίπου με πενήντα εκατοστά του σημερινού μέτρου). Το σύστημα που χρησιμοποιείται είναι το τυπικό για τις μετρήσεις μήκους με την προσθήκη ενός ειδικού σημαδιού για το μισό κύβιτον που χρησιμοποιούνταν στις βασιλείες των Φαραώ Ντερ και (V) (βλ. Σχήμα 1.3α). Σημαντικό είναι ότι από την περίοδο της Πέμπτης δυναστείας των Φαραώ αυτό το σημάδι εξαφανίζεται και εμφανίζονται κλάσματα γραμμένα με την κλασική τους μορφή περίπου (βλ. Σχήμα 1.3β).

Σχήμα 1.2: Ένα παράδειγμα τεκμηρίου αποτελεί η πέτρα του Parermo (Πέμπτη Δυναστεία)
(βλ. Ritter, 1992)

Στις πρώτες γραφές όπως τα ιερογλυφικά και στη συνέχεια τα ιερατικά παράλληλα με τα δημώδη βλέπουμε την έννοια του αριθμού να εκφράζεται πάντα μέσα από μετρήσεις ή σε πίνακες μέτρησης. Για κάθε σύστημα μέτρησης οι αριθμοί είχαν διαφορετικά σύμβολα (μονάδες μήκους, εμβαδού, βάρους κ.α.).

Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τα Αιγυπτιακά εναδικά κλάσματα. Οι απόψεις διίστανται στο κατά πόσο τα κλάσματα που αναγνωρίζονται, τα ονομαζόμενα "quantièmes" (Caveing, 1992) είχαν το ίδιο εννοιολογικό χαρακτήρα με τους αριθμούς που εμείς σήμερα ονομάζουμε κλάσματα. Τα χρησιμοποιούσαν στις καθημερινές τους συναλλαγές και ο τρόπος που τα ερμήνευαν μας θυμίζει την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρους μιας μονάδας.

Συγκεκριμένα οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν τα *εναδικά κλάσματα*[22] τα οποία ήταν σύμβολα που περιλάμβαναν το ιερογλυφικό  , το οποίο σήμαινε το *n-μέρος* - το *n-μερίδιο* για να συμπληρωθεί η μονάδα. Αυτός ο συμβολισμός είναι ο αντίστοιχος $\frac{1}{n}$ με τον οποίο συμβολίζονται σήμερα οι κλασματικές μονάδες, όπου το ιερογλυφικό  έχει αντικατασταθεί με την κλασματική γραμμή.

Για παράδειγμα ενώ για τους αρχαίους Αιγυπτίους το σύμβολο  σήμαινε το τέταρτο από τα τέσσερα κομμάτια που απαιτείται για να συμπληρωθεί η μονάδα, το σύγχρονο κλάσμα $\frac{1}{4}$ σημαίνει απλά το ένα από τα τέσσερα ίσα μέρη στα οποία έχουμε διαιρέσει μια μονάδα (βλ. σχήμα 1.3).

Επιπλέον, χρησιμοποιούσαν κάποια συγκεκριμένα σύμβολα για τις αντίστοιχες σύγχρονες κλασματικές μονάδες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ και για το κλάσμα $\frac{2}{3}$. Το ενδιαφέρον είναι ότι στις συναλλαγές τους χρησιμοποιούσαν όλα τα κλάσματα τα οποία όμως συμβόλιζαν ως αθροίσματα κλασματικών μονάδων και του κλάσματος $\frac{2}{3}$. Για παράδειγμα η αριθμητική αξία του σύγχρονου κλάσματος $\frac{3}{5}$ για έναν αρχαίο Αιγύπτιο ήταν το άθροισμα των κλασματικών μονάδων $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{5}$ (δηλαδή $\frac{3}{5}$ $=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}$) όπως προκύπτει από αναφορές σε αρχαία κείμενα. Άλλο παράδειγμα

[22] Τα *εναδικά* ή αλλιώς *μοναδιαία* κλάσματα είναι τα επονομαζόμενα *quantième* (Caveing, 1992).

αποτελεί το μερίδιο του γραφέα σε ένα ναό που ήταν $2\frac{1}{6}\frac{1}{18}$ άρτοι και $3\frac{2}{3}\frac{1}{45}$ στάμνες μπύρα, ενώ το μερίδιο ενός εργάτη στο ναό ήταν $\frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{180}$ της στάμνας μπύρα.

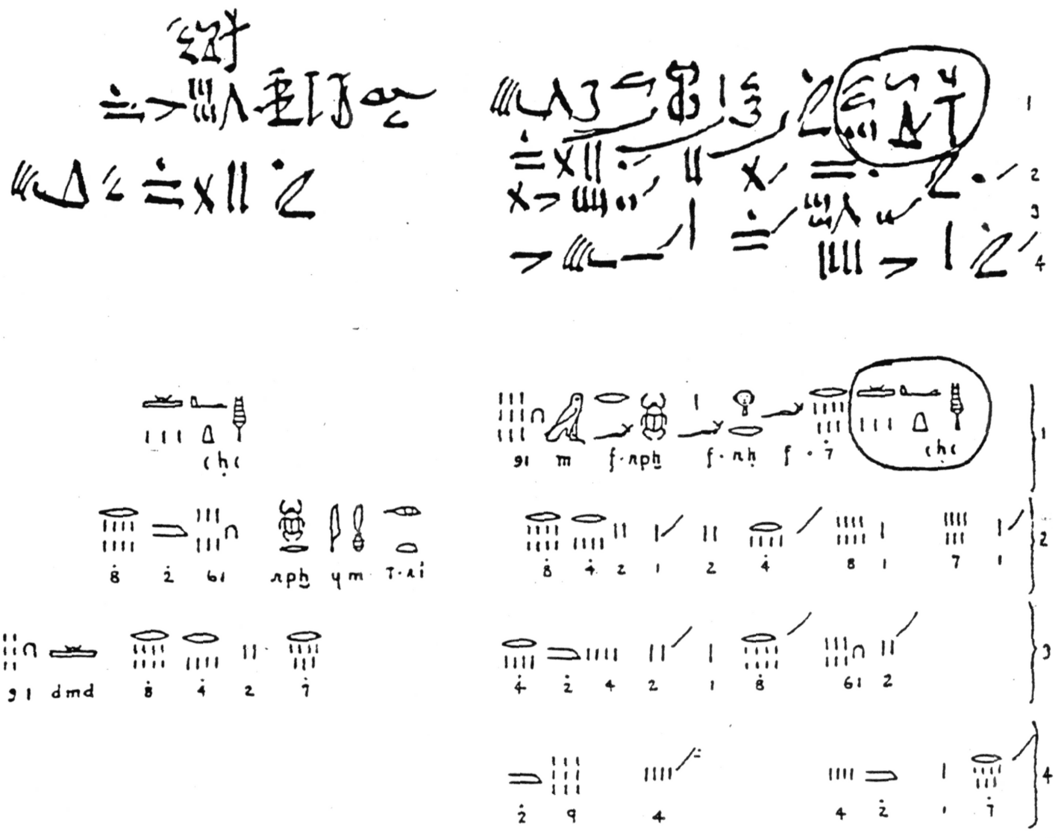
Από τα παραδείγματα αυτά γίνεται φανερή η τάση των αρχαίων Αιγυπτίων να παραθέτουν εναδικά κλάσματα ώστε να μπορούν να εκφράσουν ποσότητες τις οποίες θα μπορούσαμε σήμερα να ερμηνεύσουμε ως κοινά κλάσματα. Παρατηρούμε δηλαδή ότι η παράθεση (το άθροισμα) των εναδικών κλασμάτων θα μπορούσε να είναι εννοιολογικά μια πρώτη έκφραση του κοινού κλάσματος, παρά το γεγονός ότι αυτό το ίδιο τους ήταν άγνωστο όπως αναφέρει ο Guillemot (1992, σ. 67).

Ανάλογο παράδειγμα δυσκολίας μετάβασης από μια έννοια που έχει πρακτική εφαρμογή στην αντίστοιχή της που εκφράζεται θεωρητικά, αποτελεί η μετάβαση από την έννοια του μεικτού (που είχε ευρεία εφαρμογή) στην έννοια του καταχρηστικού κλάσματος. Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι το αποτέλεσμα για παράδειγμα του μεικτού $1\frac{2}{5}$ κάποια χρονική περίοδο αυτονομήθηκε κι έγινε το καταχρηστικό σύγχρονο κλάσμα $\frac{7}{5}$.

Οι ερευνητές που προσπάθησαν να διερευνήσουν την ύπαρξη πράξεων ανάμεσα στα εναδικά Αιγυπτιακά κλάσματα καταφεύγουν σε λογιστικά κείμενα, σε πίνακες μέτρησης και σε πηγές όπως π.χ. ο Πάπυρος του Rhind (βλ., Σχήμα 1.4) και ο Δερμάτινος Κύλινδρος (1600 π.Χ. - τα πρωτότυπα χρονολογούνται από το 1850 π.Χ.). Και πάλι οι απόψεις διίστανται.

Ερευνητές όπως οι Jim Ritter και Michel Guillemot (1992) θεωρούν ότι ενώ υπάρχουν τεκμήρια από πολλαπλασιασμούς κλασματικών μονάδων με μονάδες άλλων συστημάτων (π.χ. ακέραιους), δεν θεωρούν ότι υπάρχουν τεκμήρια που να καταδείχνουν πράξεις ανάμεσα σ' αυτές τις κλασματικές μονάδες. Ο Guillemot (ό. π) αντίστοιχα πίστευε ότι στο μοναδικό τομέα που εκτελούσαν πράξεις οι αρχαίοι

Αιγύπτιοι ήταν σε αθροίσματα των ακεραίων, των *quantièmes* και του $\frac{2}{3}$. Παρόλα αυτά από τη μελέτη αρχαίων κειμένων αναγνωρίζει κάποιους κανόνες χειρισμού των Αιγυπτιακών κλασμάτων όπως τον κανόνα των δύο τρίτων, του πολλαπλασιασμού κλασματικών μονάδων και της αντιστροφής (σ. 67).



Σχήμα 1.4: Ένα παράδειγμα τεκμηρίου-πηγής αποτελεί ο Πάπυρος του Rhind. Σε αυτό το απόσπασμα αναγράφεται ένα πρόβλημα στο οποίο οι κύκλοι δηλώνουν ποσότητα, στα ιερατικά και στα ιερογλυφικά (βλ. Fauvel & Gray, 1987)

ii) Βαβυλώνιοι (2000π.Χ. έως 500π.Χ.)

Παράλληλα με τους Αρχαίους Αιγυπτίους, οι Βαβυλώνιοι ανέπτυξαν ένα σύστημα αρίθμησης με *αξία θέσης* και βάση το *εξήντα*. Οι αριθμοί γράφονταν ως αθροίσματα δυνάμεων του εξήντα (Το 60 χρησιμοποιούνταν ως βάση και από τους Σουμέριους).

Αυτό ανακαλύφθηκε από κάποιους πίνακες των τετραγώνων ακεραίων αριθμών (2000 π.Χ.). Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν σύνθετους πίνακες για τον πολλαπλασιασμό *ακίων* αλλά και για να αναπαριστούν κοινά κλάσματα ως *εξηκονταδικά*. Για παράδειγμα το 1/2 ισοδυναμεί με το 30· το 1/3 με το 20· το 1/4 με το 15 και το 1/6 με το 10. Θα ήταν σημαντικό να αναφέρουμε ότι αντίθετα με τα Αιγυπτιακά εναδικά, τα εξηκονταδικά κλάσματα είχαν μορφή ακεραίου και προέκυψαν αρκετά φυσικά καθώς υποδιαιρούσαν τον χρόνο σε 360 μέρες, τη ώρα σε 60' και το 1' σε 60'' (Burton, 1991). Οι ακέραιες δηλαδή μονάδες δεν διαφοροποιούνται στο συμβολισμό τους από τις υποδιαιρέσεις τους.

Η περίοδος αυτή χαρακτηρίζεται από την επέκταση των ακεραίων στα εξηκονταδικά κλάσματα που θα επιβιώσουν στην πορεία του χρόνου ιδιαίτερα στην περιοχή της αστρονομίας. Το σύστημα μέτρησης του χρόνου στην εποχή μας είναι απομεινάρι του Βαβυλωνιακού εξηκονταδικού συστήματος.

1.2.1.2 Δεύτερη περίοδος: Αρχαίοι Έλληνες (600πΧ - 300μΧ)

i) Αρχαία Ελλάδα (600πΧ έως 300π.Χ.)

Η πλέον αρχαία αναφορά σε κλάσματα στην Ελληνική λογοτεχνία είναι στην Ομήρου Ιλιάδα (στ. 253)[23]

"*Δύο μέρη της νύχτας πέρασαν. Το τρίτο μένει*"

Στην Αρχαία Ελλάδα συμβόλιζαν τους αριθμούς με την ιωνική αλφάβητο έχοντας ως βάση το 10. Από τον 5ο αιώνα π.Χ. με τον Πυθαγόρα και τη Σχολή που ανέπτυξε, η έννοια του αριθμού παίρνει μυστικιστική υπόσταση. "Ο αριθμός είναι η ουσία των όντων και σαν τέτοιος έχει μαγική δύναμη". Οι Πυθαγόρειοι (540-450π.Χ.) φαίνονται να δέχονται την ύπαρξη των ακεραίων μόνο αριθμών. Η επιστημονική θεωρία καθώς και η ορολογία όμως που ανέπτυξαν – π.χ. για τα μουσικά διαστήματα (βλ. Φιλόλαος) [24] - ώστε να αντικαταστήσουν τα μεικτά κλάσματα με λόγους, δείχνει

[23] Στο στοίχο αυτό παρατηρούμε ότι αναφέρονται κάποια απλά κλάσματα που είχαν άμεσες καθημερινές εφαρμογές. Συγκεκριμένα τα κλάσματα αυτά είχαν ιδιαίτερο συμβολισμό στην Αίγυπτο και σήμερα γράφονται ως 2/3 και 1/3. Τέτοια κλάσματα ήταν ακόμη το 1/2 (μισό), το 1/4 (τέταρτο) και το 3/4.

[24] Σύμφωνα με αυτήν τη θεωρία βασικά μουσικά διαστήματα όπως η οκτάβα, το πέμπτο και το τέταρτο αντιστοιχούν σε λόγους απλών αριθμών. Το τέταρτο αντιστοιχεί στο λόγο 4:3 που το ονομάζουν *επίτριτον* και που αντιστοιχεί σήμερα στον μεικτό 1 1/3.

ότι κατείχαν κάποια λανθάνουσα ίσως γνώση των κλασμάτων (Bunt, Jones & Bedient, 1981). Ο Φιλόλαος (450π.Χ.) έγραφε: "Το Ένα είναι η αρχή του παντός", έδινε δε ιδιαίτερη σπουδαιότητα στον αριθμό 10. Τον 4ο αιώνα π.Χ. επικρατεί η αντίληψη του Πλάτωνα[25] (388 π.Χ.) για το αδιαίρετο της μονάδας που έρχεται σε σύγκρουση με την έννοια του κλάσματος. Σύμφωνα με τον Caveing (ό. π), με τον Αριστοτέλη θεσμοθετείται η αντίληψη της έννοιας της μονάδας ως μονάδας μέτρησης.

Σε νεώτερα μαθηματικά έργα όπως τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη (300π.Χ.), που αποτελούν την κορύφωση των καθαρών θεωρητικών μαθηματικών ως αριθμοί αναφέρονται μόνο οι ακέραιοι. Ο ορισμός του αριθμού όπως αναφέρεται στα *Στοιχεία του Ευκλείδη είναι*:

"Το εκ μονάδων συγκείμενον πλήθος (πλήθος αποτελούμενο από μονάδες)."

(Ευκλείδου Στοιχεία VII, Ορισμός 2)

Στην πρακτική λογιστική το κλάσμα έχει την ίδια τυπολογία όπως τα Αιγυπτιακά κλάσματα, μόνο που εδώ ονομάζονται *μέρη* ή *μόρια.* Τα *μέρη* τα χειρίζονται ως μια επέκταση των αριθμών και η ιδέα του *λόγου* ακόμη και όταν αναφέρεται σε αυτά τα *μέρη*, δεν σχετίζεται με αριθμητική ποσότητα (Fowler, 1987, σ. 247).

Συγκεκριμένα, *οι αριθμοί* στην Αρχαία Ελλάδα συμβολίζονταν με τα γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου. Έτσι η ακολουθία *δύο, τρία, τέσσερα, πέντε,…,* συμβολίζονταν με τα *β, γ, δ, ε, ….* Τα *μέρη* όπως *το δεύτερο*, το *τρίτο*, το *τέταρτο*, το *πέμπτο*, … συμβολίζονταν με τα ίδια γράμματα μόνο είχαν ένα τόνο πάνω από το γράμμα: *β́, γ́, δ́, έ, ….* (ο τόνος αυτός μπορούσε όπως και στα αιγυπτιακά εναδικά

Παρόμοια ο λόγος 9:8 σύμφωνα με τους Πυθαγόρειους ονομαζόταν *επόγδοο* που σημαίνει «πάνω σ' αυτό ένα όγδοο» ή 1+1/8. Συνεπώς παρατηρούμε ότι οι Πυθαγόρειοι ξεκίνησαν από τα μικτά κλάσματα 1 1/3 και 1 1/8, γνωστά από την καθημερινή ζωή και ανέπτυξαν μια επιστημονική θεωρία όπου αυτά τα κλάσματα αντικαταστάθηκαν από λόγους όπως 4:3 και 9:8.

[25] Πλάτων (427π.Χ.-347π.Χ)

κλάσματα να ήταν μια παύλα ή μια τελεία. Αυτά διαβάζονταν ως το *δεύτερο*, το *τρίτο*, το *τέταρτο*, … και όχι το *ένα δεύτερο* ή το *ένα τρίτο* ή το *ένα τέταρτο* …... Το δε σύμβολο του *2/3* το ονόμαζαν τα *δύο μέρη* και το συμβόλιζαν με το γράμμα *β* με δύο τόνους στο πάνω μέρος του: *β΄΄* (βλ. Fowler, 1987, σ. 227).

Σημαντικό είναι να παραθέσουμε την άποψη του Fowler όπως ακριβώς την εκφράζει:

> "Στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά κείμενα, είτε τα επιστημονικά είτε τα εμπορικά ή τα παιδαγωγικά, δεν υπάρχει κανένα τεκμήριο ότι υπήρχε οποιαδήποτε έννοια του κοινού κλάσματος *p/q* και χειρισμού τέτοιων κλασμάτων, όπως για παράδειγμα ότι το γινόμενο *p/q x r/s = pr/qs* και ότι το *p/q + r/s = (ps + qr)/qs*, πριν από την εποχή του Ήρωνα και του Διόφαντου…"
>
> (βλ. Fowler, 1987, σ. 226)

Στη θεωρητική λογιστική οι *λόγοι* δεν προσθέτονται ποτέ και η σύνθεση ή ο πολλαπλασιασμός των λόγων στα Ελληνικά μαθηματικά πριν από τα έργα του Απολλώνιου δεν υφίστανται[26]. Αντίθετα η εμπορική παράδοση είναι γεμάτη από αριθμητικούς υπολογισμούς. Η πιο σημαντική αριθμητική πράξη που αναδεικνύει κλασματικές ποσότητες είναι η πράξη της διαίρεσης όπως φαίνεται από το παρακάτω παράδειγμα (βλ. Fowler, 1992, σ. 136):

των *ιβ* τό *ίξ* / *Lίβ΄ίξ΄΄λόνάχή*

από τα 12 το 17ο είναι 2΄ 1΄ 2΄ 1΄ 7΄ 3΄ 4΄ 5΄1΄ 6΄ 8΄

γι' αυτό που θα γράφαμε σήμερα ως: $\frac{12}{17} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$

Επιπλέον ο Fowler αναφέρει ότι: "... η λανθάνουσα διαίσθηση των ελληνικών μαθηματικών δεν ήταν *αριθμητικοποιημένη*[27]" (ό.π., σ. 137).

---

[26] O Fowler (1992) αναφέρεται ιδιαίτερα στη θεωρία της μουσικής και πιστεύει ότι οι Μαθηματικοί στην Αρχαία Ελλάδα αντιμετώπιζαν πρόβλημα στη σύνθεση *λόγων* που σήμερα αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό κοινών κλασμάτων.

[27] Ο αγγλικός όρος όπως αναφέρεται από τον Fowler είναι *arithmetised*, 1992, σ. 137. Συγκεκριμένα αναφέρει "…..the underlying intuitions of Greek mathematics were not arithmetised".

Συνεπώς οι Αρχαίοι Έλληνες αντί να αναφέρουν ότι μια ποσότητα είναι τα 2/5 μιας άλλης αναφέρουν ότι ο λόγος τους είναι 2 στα 5[28]. Σύμφωνα με τον van der Waerden (1976) ένας βασικός λόγος που τα κλάσματα εξαιρέθηκαν από τα καθαρά μαθηματικά ήταν πιθανά η Πλατωνική φιλοσοφική αντίληψη ότι η μονάδα είναι αδιαίρετη.

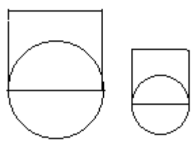
Ας σταθούμε στο παράδειγμα μιας Ευκλείδειας πρότασης που σήμερα αναφέρεται ως "*ο λόγος του εμβαδού δύο κύκλων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των ακτίνων τους*". Σύμφωνα με την πρόταση αυτή ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων, έχει ως αποτέλεσμα να ισούται με ένα αριθμητικό κλάσμα. Συγκεκριμένα, ο λόγος

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$, όπου ο λόγος $\frac{R_1^2}{R_2^2}$ αποτελεί σήμερα ένα αριθμητικό κλάσμα.

Το παραπάνω θεώρημα αποτελεί τη σύγχρονη, αριθμητικοποιημένη ερμηνεία της δεύτερης πρότασης του 12[ου] βιβλίου από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Η πρόταση αυτή συγκεκριμένα αναφέρει:

" Οι κύκλοι προς αλλήλους εισίν ως προς τα των διαμέτρων τετράγωνα"

Στην παραπάνω πρόταση παρατηρούμε ότι ο Ευκλείδης ερμηνεύει το λόγο των χωρίων των δύο κύκλων ως το λόγο των χωρίων δύο τετραγώνων. Συγκεκριμένα αποδεικνύει ότι ο λόγος των χωρίων δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των χωρίων των τετραγώνων που έχουν ως πλευρά τη διάμετρο κάθε κύκλου αντίστοιχα, ο οποίος δεν αποτελεί σίγουρα έναν αριθμητικό λόγο (βλ. Σχήμα 1.4).



Σχήμα 1.4: Δεύτερη πρόταση του ιβ΄ βιβλίου από τα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Επιπλέον η ύπαρξη λόγων και αναλογιών φαίνεται από τους παρακάτω ορισμούς (3, 4 και 20 του 7ου βιβλίου από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη) :

[28] Θα ήταν σημαντικό να αναφέρουμε ότι στους *λόγους* μπορούσαμε να έχουμε 4 στα 3 (βλ. υποσημ. 24), κάτι που δεν θα ήταν δυνατόν όταν αναφερόμαστε στα *μέρη*.

γ'. Μέρος εστίν αριθμός αριθμού ο ελάσσων του μείζονος, όταν καταμετρή τον μείζονα.
δ'. Μέρη δε, όταν μη καταμετρή.
κα'. Αριθμοί ανάλογόν εισίν, όταν ο πρώτος του δευτέρου και ο τρίτος του τετάρτου ισάκις η πολλαπλάσιος η το αυτό μέρος ή τα αυτά μέρη ώσιν.

ii) Ελληνιστικά Χρόνια (300π.Χ. έως 300μ.Χ.)
Μετά τον Ευκλείδη αναβαθμίζεται η λογιστική (αριθμητικές πράξεις και υπολογισμοί) και η αριθμητική (θεωρία αριθμών - ιδιότητες αριθμών - είδη αριθμών).

Ο Αρχιμήδης (230π.Χ.) στο έργο του *Κύκλου Μέτρησις*, αποδεικνύει ότι η περίμετρος του κύκλου βρίσκεται ανάμεσα σε $3\frac{10}{71}$ και $3\frac{1}{7}$ φορές τη διάμετρο. Στο σύγγραμμά του *Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου*, αποδεικνύει ότι ο όγκος της σφαίρας είναι τα 2/3 του όγκου του περιγεγραμμένου στη σφαίρα κυλίνδρου. Ο σύγχρονός του Ερατοσθένης (250π.Χ.) στην εκτίμηση της λόξωσης της εκλειπτικής αναφέρει ότι είναι 11 φορές του 83 των δύο ορθών γωνιών.

Η επαφή με τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων επηρεάζει τους Έλληνες μαθηματικούς. Η επιρροή γίνεται αισθητή στο έργο του Ήρωνα (80 μ.Χ.), όπου με τις έμμεσες μετρήσεις του κορυφώνονται τα υπολογιστικά μαθηματικά. Επίσης στο έργο του Πτολεμαίου (140 μ.Χ.) *Μεγίστη Μαθηματική Σύνταξις* (περισσότερο γνωστή με τον αραβικό τίτλο *Αλμαγέστη*) που θεωρείται το μεγαλύτερο έργο στην Αρχαία Αστρονομία

Στην περίοδο αυτή βλέπουμε τους Έλληνες να χρησιμοποιούν τα εξηκονταδικά κλάσματα των Βαβυλωνίων σε μετρήσεις (πρακτικά προβλήματα) και σε κείμενα αστρονομίας (Fowler, 1992· Rashed, 1994). Ο Πτολεμαίος ιδιαίτερα είχε μεγάλη ικανότητα στους υπολογισμούς στο εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης. Συγκεκριμένα κατασκεύασε ακριβέστατους πίνακες που περιέχουν τα μήκη των χορδών κυκλικών τόξων υπολογισμένων ανά μισή μοίρα. Οι πίνακες αυτοί που ισοδυναμούν με τους σημερινούς πίνακες ημίτονων είχαν μεγάλη εφαρμογή στους αστρονομικούς υπολογισμούς – θέση των άστρων κλπ (Θωμαΐδης, 1981).

Πολλοί Μαθηματικοί του 3ου αιώνα μ.Χ. ανέπτυξαν την θεωρία των αριθμών έχοντας ως θεωρητικό υπόβαθρο τις θεωρίες των Πυθαγορείων, οι οποίοι επηρέασαν την εξέλιξη των μαθηματικών τους επόμενους αιώνες. Μαθηματικοί όπως ο Ήρων με τα *Μετρικά* του, ο Νικόμαχος (100μ.Χ.) και ο Διόφαντος (250μ.Χ.) με τα έργα τους διαχωρίζουν την αριθμητική από τη Γεωμετρία. Ο Νικόμαχος αναφέρει αριθμητικές σχέσεις λόγων που απαιτούνται για τη μελέτη της μουσικής. Ο Διόφαντος αντίστοιχα στα *Αριθμητικά* του ενώ αποδέχεται τον ορισμό του αριθμού όπως τον έδωσε ο Ευκλείδης, παραδέχεται έμμεσα ως λύσεις των εξισώσεών του όχι μόνο ακέραιους αριθμούς αλλά και αριθμούς που έχουν τη μορφή κλάσματος[29]. Ακόμη σε ένα πρόβλημα αναφέρεται στη διάσπαση της μονάδας σε δύο αριθμούς των οποίων το άθροισμα ισούται με τη μονάδα. Και σε αυτό το πρόβλημα δεν είναι δυνατόν παρά οι αριθμοί που θα προκύψουν ως λύσεις να είναι μέρη (ό. π.).

Παρατηρούμε δηλαδή ότι ενώ κατά τα Αρχαία Ελληνικά χρόνια στα θεωρητικά μαθηματικά έργα υπήρχαν μόνο λόγοι, στην καθημερινή λογιστική εμφανίζεται η χρήση των κλασμάτων με τον ίδιο τρόπο όπως τα εναδικά Αιγυπτιακά κλάσματα., Στα Ελληνιστικά αντίστοιχα χρόνια σε μαθηματικά έργα όπως αυτά που αναφέραμε προηγούμενα υπάρχει μια πρώτη λανθάνουσα έμμεση αποδοχή ότι τα κοινά κλάσματα αποτελούν αριθμούς, αφού τα αποδέχονται ως αποτελέσματα προβλημάτων.

1.2.1.3 Τρίτη Περίοδος: Άραβες - Λατίνοι (700μΧ - 1600 μ.Χ.)

ι) Άραβες (700 - 1500μ.Χ.)

Τον 9ο αιώνα μ.Χ. αρχίζουν Άραβες μαθηματικοί να μεταφράζουν κλασικά έργα Ελλήνων συγγραφέων όπως του Ευκλείδη, του Πτολεμαίου, του Απολλώνιου, του Αρχιμήδη του Πάππου και του Διόφαντου (Rashed, 1984). Έτσι η ελληνική αριθμητική και γεωμετρία διαδίδονται ευρύτατα και με τη συμβολή των έργων των

[29] Από Jean Christianidis: "Les fractions dans l'oeuvre de Diophante". Contribution to the 5th International Conference on Ancient Mathematics, Delphi, August 17-20, 2000.

Αράβων τίθενται τα θεμέλια της Άλγεβρας (το όνομα άλγεβρα προέκυψε από τον τίτλο του έργου *Hisậb al-jabr wal-muqậbala*[30] του al-Hawarizmi - 820 μ.Χ.) και διαμορφώνεται μια διαφορετική σχέση ανάμεσα στην άλγεβρα και γεωμετρία που δίνει αφορμή σε τεχνικές τεράστιου δυναμικού[31].

Συγχρόνως εισάγεται ο όρος *Αλγόριθμος* από το έργο του al-Hawarizmi (780-850) που θα αποτελέσει τη μια από τις δύο τάσεις υπολογισμού κατά τον 10ο αιώνα. Η άλλη είναι αυτή που διαμόρφωσαν οι αβακιστές (οι πράξεις εκτελούνται μέσω του άβακα, χωρίς τη χρήση αριθμητικών ψηφίων). Τελικά επικράτησε αυτή των αλγοριστών που έχοντας το πλεονέκτημα του ελέγχου των γραπτών υπολογισμών καθιερώθηκε συγχρόνως με τη διάδοση και την ευρύτερη αποδοχή των δυτικοαραβικών ψηφίων (Bunt, 1981).

Τον 11ο αιώνα με τη σχολή του al-Karaji έχουμε την *αριθμητικοποίηση* της Άλγεβρας (arithmetisation). Σύμφωνα με τον Rashed (1975) η *αριθμητικοποίηση* της Άλγεβρας ερμηνεύεται ως η εφαρμογή των πράξεων της στοιχειώδους αριθμητικής σε αλγεβρικές εκφράσεις.
Από τον 10ο αιώνα (ίσως και νωρίτερα) εμφανίζονται σε έργα πολλών αράβων συγγραφέων τα δεκαδικά κλάσματα. Στο έργο του al-Samaw'al *Διατριβή* (1172 μ.Χ.) βλέπουμε να χρησιμοποιούνται δεκαδικά κλάσματα χωρίς να αναγνωρίζονται ως τέτοια: το μόνο που χρειάζεται κανείς είναι να θεωρεί όλες τις πράξεις με κλάσματα που ο παρονομαστής τους είναι δύναμη του δέκα (Rashed, 1984). O al-Samaw'al θεωρεί ότι χρειάζεται μια θεωρία των δεκαδικών κλασμάτων για την ενίσχυση της εφαρμογής ορισμένων πράξεων όπως της διαίρεσης, της εξαγωγής της ν-οστής ρίζας ενός κλάσματος, με ίδιο τρόπο όπως και στους ακέραιους, και με αυτόν τον τρόπο οι άπειρες διορθώσεις των προσεγγίσεων να γίνονται πιο ξεκάθαρες και πιο εύκολες.

Ο μεταγενέστερος al-Kashi (1436) στο έργο του *Διατριβή πάνω στην περιφέρεια του κύκλου* και ακόμη περισσότερο στο *Key to arithmetic* προσπαθεί να εισάγει ένα άλλο ευκολότερο και πλέον προσιτό σύστημα κλασμάτων, στο οποίο επιτυγχάνονται οι

[30] Βλ. Struik, 1948, σ. 73.
[31] Βλ. Καστάνη (1992). Σημειώσεις παραδόσεων (Rashed, 1984).

ίδιες πράξεις που χρησιμοποιούνται ήδη στο εξηκονταδικό σύστημα. Εστιάζεται ιδιαίτερα στον πραγματικό αριθμό π. Παρόλο που θεωρεί το δεκαδικό αριθμό σαν μια μαθηματική ανακάλυψη, δεν τον θέτει κάτω από έλεγχο μιας θεωρίας που να σταθεροποιεί τον ορισμό, τις ιδιότητες και την επιστημολογική του θέση. Το έργο του είναι τόσο σημαντικό που ακόμη και τον 17ο αιώνα άραβες μαθηματικοί (για παράδειγμα ο al-Yazdi) παραπέμπουν στο τελευταίο έργο του.

Από εγχειρίδια που διδάσκονταν στη Βόρεια Αφρική κατά τον Μεσαίωνα με περιεχόμενο την Επιστήμη του Υπολογισμού όπως του al-Hassar, προκύπτει ότι ο συμβολισμός των κλασμάτων περιελάμβανε μια οριζόντια γραμμή για τα απλά και τα συνεχή κλάσματα, κομμένα από κάθετες γραμμές όταν επρόκειτο για ασυνεχή κλάσματα και συμπληρωμένα από συζεύξεις που εκφράζανε τις βασικές αριθμητικές πράξεις.

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι οι Άραβες μαθηματικοί με την ενασχόλησή τους με την άλγεβρα και τη γεωμετρία αντιμετώπισαν μεγάλη δυσκολία στους αριθμητικούς τους υπολογισμούς με κοινά κλάσματα. Θα ήταν λοιπόν σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η εισαγωγή των δεκαδικών κλασμάτων προέκυψε ως μια αναγκαιότητα ώστε να μπορέσουν οι μαθηματικοί εκείνης της εποχής να ξεπεράσουν τις δυσκολίες που τους δημιουργούσαν οι υπολογισμοί με κοινά κλάσματα, τα οποία περιλάμβαναν τεράστιους αριθμούς και να ανακαλύψουν νέους πιο εύχρηστους αλγόριθμους για την επίλυση διαφόρων μαθηματικών προβλημάτων.

ii) Αναγέννηση (1300 - 1600μ.Χ.)

Η περίοδος της Αναγέννησης χαρακτηρίζεται από την παρουσία της ανθρωπιστικής παιδείας. Η ανάπτυξη της μαθηματικής παιδείας επηρεάζεται από την πνευματική αυτή κίνηση παρόλο που η επιστήμη και τα μαθηματικά είναι έξω από τον προσανατολισμό της. Σημαντική είναι η παρουσία των σχολείων των *αβακιστών* (*abacci)* που προσφέρουν επαγγελματική λαϊκή εκπαίδευση. Επίκεντρο των μαθημάτων που προσφέρουν είναι τα μαθήματα εμπορικής αριθμητικής και πρακτικής γεωμετρίας. Γεγονός αποτελεί ο διαχωρισμός της θεωρίας των μαθηματικών από τις εφαρμογές της.

Όσον αφορά τα κλάσματα οι εφαρμογές δεν είναι ιδίου τύπου με τα προβλήματα διαίρεσης μερισμού όπως εμφανιζόταν στον πάπυρο του Rhind. Στην περίοδο αυτή έχουν να κάνουν με εφαρμογές, όπως προβλήματα διαίρεσης στο πλαίσιο της «αριθμητικής των εμπόρων» και γενικά στο πλαίσιο των υπολογισμών με διάφορες ποσότητες χρησιμοποιώντας «τη μέθοδο των τριών». Τον 15ο αιώνα οι δάσκαλοι της υπολογιστικής στην Ιταλία είχαν πολύ καλή επίδοση στις αριθμητικές πράξεις με ρητούς αριθμούς (Καστάνης, 1992).

Τον 16ο αιώνα θεσμοθετείται πλέον η γραφή των κλασμάτων σε δεκαδική μορφή από τον Ολλανδό μαθηματικό Simon Stevin (1548 - 1620). Είναι ο πρώτος που με το έργο του *La Disme (Η Δεκάτη)* παρουσιάζει πως θα μπορούσαν οι φυσικοί αριθμοί να επεκταθούν στους δεκαδικούς καθώς επίσης και τα πλεονεκτήματα των δεκαδικών αριθμών (Ritter, 1992). Η επινόηση του Stevin εξυπηρέτησε έναν πολύ πρακτικό σκοπό, την απλοποίηση δηλαδή των καθημερινής πρακτικής αριθμητικής (με κλάσματα) αποφεύγοντας τα απλά κλάσματα με τον τρόπο που πρότεινε. Η ποικιλία των μη τυποποιημένων (όχι δεκαδικά επεξεργασμένων) συστημάτων μέτρησης είχε σαν αποτέλεσμα οι καθημερινές δραστηριότητες της αγοράς να γίνουν τρομερά πολύπλοκες, στο διεθνές επίπεδο κυρίως. Η πολύπλοκη αριθμητική των κλασμάτων δεν μπορούσε πλέον να αποφευχθεί. Ο Stevin είχε επίγνωση της προοπτικής της ανακάλυψής του. Προέβλεψε ότι η εισαγωγή των δεκαδικά επεξεργασμένων συστημάτων μέτρησης για το μήκος, το βάρος και τα χρήματα θα ήταν θέμα χρόνου. Ο ίδιος πάντως υποστήριξε με έμφαση τη μετάβαση σε τέτοια συστήματα. Παρολ' αυτά έπρεπε να περάσουν ακόμη δύο αιώνες πριν εισαχθεί η αριθμητική των δεκαδικών συστημάτων. Με τον Stevin επίσης οι δεκαδικοί αριθμοί αποκτούν την υπόσταση μαθηματικής έννοιας, αφού μέσα από τους αριθμούς αυτούς δημιουργείται μια γενική έννοια του αριθμού που εφαρμόζεται στις λύσεις των αλγεβρικών προβλημάτων της εποχής του. Σε αρκετές όμως εφαρμογές τους στην καθημερινή ζωή εμφανίζονται τα κλάσματα. Όπως συγκεκριμένα αναφέρει ο Streefland (1991), οι προθέσεις του Stevin, που βρίσκονται πίσω από τις προτάσεις του, υποστηρίζουν ακόμη μια φορά πόσο βαθιά ριζωμένη είναι η αριθμητική των κλασμάτων στις εφαρμογές της.

Από ένα Βυζαντινό έγγραφο που έφεραν στην Βενετία το 1562 αποδεικνύεται η γνώση των δεκαδικών κλασμάτων. Ο βυζαντινός συγγραφέας γράφει: Οι Τούρκοι πολλαπλασιάζουν και διαιρούν κλάσματα .."*δι' ενός λογαριασμού*" (Rashed, 1984).

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι ακόμη και τον 16^{ο} αιώνα επιβιώνει ένα επιστημολογικό εμπόδιο που συνδέεται με την έννοια του κλάσματος, δηλαδή η γνώση ότι ο πολλαπλασιασμός δημιουργεί πάντοτε αύξηση. Όπως αναφέρει ο Σωτηράκης (1989), στην Ελλάδα κατά την εποχή της τουρκοκρατίας υπήρχαν προοδευτικοί δάσκαλοι οι οποίοι στην προσπάθειά τους να διαποτίσουν το υπόδουλο έθνος με το ζωογόνο πνεύμα του ευρωπαϊκού διαφωτισμού ασχολούνται με τη διάδοση των επιστημών. Ιδιαίτερα αναφέρεται στον Μανουήλ Γλυζώνιο από τη Χίο ο οποίος ασχολήθηκε με εκδόσεις ελληνικών συγγραμμάτων στη Βενετία. Είναι πολύ ενδιαφέρον ότι ο Γλυζώνιος συγγράφει και εκδίδει το 1568 μια αριθμητική[32] η οποία για δυόμισι αιώνες αποτέλεσε το πιο διαδεδομένο λαϊκό βιβλίο αριθμητικής. Αυτό που μας κάνει ιδιαίτερη εντύπωση στο κείμενο αυτό είναι ο απλός τρόπος με τον οποίο προσπαθεί να εξηγήσει πως συμβαίνει με τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων[33] $\frac{1}{4}\text{x}\frac{3}{8}$ να βρίσκουμε αποτέλεσμα μικρότερο από το $\frac{3}{8}$. Αυτό το θέμα αποτελεί και σήμερα ένα μεγάλο πρόβλημα για τους σύγχρονους μαθητές. Συγκεκριμένα αναφέρει:

> "Είναι τινές όπου έχουν δίστασιν εις τον πολυπλασιασμόν[34] των τζακισμάτων έσοντας ότι, όταν πολυπλασιάζουν τζάκισμα με άλλο τζάκισμα ολιγοστεύει πολλά. Και όσοι δεν ηξεύρουν τη θεωρίαν της μεθόδου λέγουσιν ότι αύτη η μέθοδος δεν είναι σωστή … πλην τούτο λέγομεν δια να καταλάβη ο καθείς την θεωρίαν της μεθόδου κατά λόγον: ημείς επολυπλασιάσαμεν άνωθεν το $\frac{1}{4}$ με το $\frac{3}{8}$ και έγιναν $\frac{3}{32}$ και αυτό είναι πολλά ολιγότερον παρά το $\frac{3}{8}$. Το λοιπόν λέγομεν ότι ηγοράσαμε το $\frac{1}{4}$ της πήχης από

[32] Η αριθμητική αυτή είχε τίτλο "Βιβλίον πρόχειρον τοις πασοι περιέχον την τε πρακτικήν αριθμητικήν ή μάλλον ειπείν την λογαριαστικήν και περί του πως ευρίσκη έκαστος το Άγιον Πάσχα και τέλειον Πασχάλιον πάντοτε· και περί ευρέσεως σελήνης εν ποία ημέρα γίνεται η γεννα αυτής" (βλ. Σωτηράκη, 1989).

[33] Στο βιβλίο αυτό ο συγγραφέας αναφέρεται στα κλάσματα με τη λέξη τζακίσματα.

[34] Στο βιβλίο αυτό ο συγγραφέας αναφέρεται στην πράξη του πολλαπλασιασμού με αυτόν τον τρόπο.

$\frac{3}{8}$ του άσπρου την κάθε πήχην, τι χρεωστούμεν να πληρώσουμεν; Λέγομεν ότι η μία πήχη το πανί έχει $\frac{3}{8}$ του άσπρου, η μισή ($\frac{1}{2}$) είναι χρεια να έχη τα μισά των $\frac{3}{8}$ ήγουν το $\frac{3}{16}$. Το λοιπόν αυτό είναι $\frac{1}{4}$ που είναι το μισόν από την μισήν πήχη, χρεία έναι να έχει η τιμή του τα μισά των $\frac{3}{16}$· και τα μισά των $\frac{3}{16}$ έναι $\frac{3}{32}$ ωσάν ευγήκεν και εις την μέθοδον άνωθεν" (σ. 27).

Επειδή η αριθμητική του Γλυζώνιου δεν αποτελεί ένα επιστημονικό έργο αλλά ένα λαϊκό βιβλίο που απευθύνεται κυρίως σε εμπόρους, ο συγγραφέας θεωρεί σκόπιμο να επισημάνει το συγκεκριμένο σημείο το οποίο, όπως προκύπτει και από εμπειρικές έρευνες, που θα παρουσιάσουμε στην επόμενη ενότητα, είναι πηγή παρανοήσεων και λαθών των σύγχρονων παιδιών (Callahan, 1983· Hart, 1981· Fischbein, 1985).

1.2.1.4 Τέταρτη περίοδος: (1600 - 1900 μ.Χ.)

ι) Διαφωτισμός (από τον Newton στον Laplace)

Ο Newton χρησιμοποιεί τους δεκαδικούς αριθμούς για να εξηγήσει την προσέγγιση των συναρτήσεων και των ολοκληρωμάτων με τη βοήθεια των πολυωνυμικών συναρτήσεων.

Ο Euler (1707 – 1783) στο *Elements of Algebra* (1984) δίνει έναν πλήρη ορισμό του κλάσματος ως μαθηματικής αφηρημένης έννοιας καθώς επίσης και όλες τις περιπτώσεις των διαφορετικών κλασμάτων, τις ιδιότητές τους, τη σχέση τους με την ακέραια μονάδα, τον τρόπο που διατάσσονται καθώς επίσης και τις διαδικασίες των πράξεων με κλάσματα. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι αν το πηλίκο δύο αριθμών δεν είναι ακέραιος, τότε υπάρχει ένα ιδιαίτερο είδος αριθμού που ονομάζεται κλάσμα και που δηλώνει ένα τέτοιο πηλίκο. Ορίζει δηλαδή το κλάσμα α/β, ως το πηλίκο διαίρεσης του α δια του β, τους οποίους ονομάζει αριθμητή και παρονομαστή. Επίσης ορίζει το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ως το γινόμενο του ακεραίου α επί την κλασματική μονάδα $\frac{1}{\beta}$[35], διακρίνει δε τις περιπτώσεις των κλασμάτων όπως το κλάσμα $\frac{\alpha}{\alpha}$ (όπου ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή) το οποίο είναι ίσο με το 1, το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου $\alpha<\beta$ το οποίο είναι μικρότερο του 1 και το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ όπου $\alpha>\beta$ το οποίο είναι μεγαλύτερο του 1 και ονομάζεται καταχρηστικό.

Η μακρά χρονική περίοδος από την αρχαιότητα έως την ανακάλυψη του λογισμού μπορεί να εξηγηθεί με τη δυσκολία τόσο να εγκαταλειφθεί μια διακριτή εδραίωση των αριθμών όσο και της μετάβασης στην "ελεύθερη χρήση της προτεινόμενης απειροστής και πιο ευρείας εφαρμογής των αριθμητικών εννοιών", όπως το θέτει ο Boyer (1962, σ. 124)[36].

Μια παρατήρηση που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι ότι από τη στιγμή που το κλάσμα εισέρχεται σε εκπαιδευτικά προγράμματα, υπάρχει μια τάση των διδασκόντων να καταφεύγουν στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρους μιας μονάδας. Σύμφωνα με τον Caveing (1992), «Αρωγός της μέτρησης των μεγεθών η κλασσική διδασκαλία υπήρξε πάντα εξαρτημένη από τις αναφορές της στο συγκεκριμένο και ποτέ απόλυτα συνεπής στο θεωρητικό επίπεδο έως τη στιγμή που οι αναφορές εξαφανίστηκαν εξ αιτίας του ορισμού των ρητών αριθμών ως ζεύγη δύο ακεραίων και ως κλάσεις ισοδυναμίας (σ. 50).

Ένα παράδειγμα παίρνουμε από τα δέκα μαθήματα Μαθηματικών που έδωσε ο Laplace το 1795 στην École Normale στο Παρίσι[37] (Dhombres, 1992). Στο πρώτο μάθημα έθεσε τη βάση της αριθμητικής με τους αριθμούς και τις τέσσερις βασικές πράξεις ενώ το δεύτερο μάθημα ήταν αφιερωμένο σε μαθηματικές έννοιες όπως των

[35] Με τον ίδιο τρόπο που εισάγονται τα κλάσματα στην Τετάρτη δημοτικού (βλέπε βιβλίο οργανισμού «Τα μαθηματικά μου» της Δ΄ Δημοτικού.

[36] Βλ. επίσης και Boyer (1968).

[37] Στο πρόγραμμα των μαθημάτων συμμετείχαν και οι Lagrange και Monge. Τα μαθήματα αυτά αρχικά δημοσιεύθηκαν το 1812 στο Journal de l' École Polytechnique.

κλασμάτων, των ποσοστών, των ριζών, των προόδων και των λογαρίθμων. Μελετώντας αυτό το μάθημα παρατηρούμε ότι στην αρχή εισάγει το κλάσμα ως το μέρος μιας μονάδας ισομερώς διαιρημένης. Συγκεκριμένα αναφέρει (ό. π, σ. 54):

> "Προηγούμενα θεωρήσαμε τους ακέραιους αριθμούς και τους δεκαδικούς· ας εξετάσουμε τώρα τους κλασματικούς αριθμούς γενικά. Εάν θεωρήσουμε μια μονάδα διαιρημένη σε πολλά ίσα μέρη, ένας ορισμένος αριθμός από αυτά τα μέρη είναι αυτό που ονομάζουμε *κλάσμα*. Για να το εκφράσουμε, τοποθετούμε κάτω από μια οριζόντια γραμμή τον αριθμό που ορίζει σε πόσα μέρη έχουμε διαιρέσει τη μονάδα, και αυτός ο αριθμός ονομάζεται *παρονομαστής*, ενώ από πάνω τοποθετούμε τον αριθμό που δείχνει πόσα από τα μέρη αυτά παίρνουμε και ο αριθμός αυτός ονομάζεται *αριθμητής*. Ως εκ τούτου μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι ένα κλάσμα ισούται με το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή δια του παρονομαστή, …."

Στην ίδια σειρά μαθημάτων ο Lagrange αναφέρεται στη δυσκολία στην κατανόηση των κλασμάτων σε σχέση με τους ακέραιους αριθμούς. Όπως αναφέρει (ό.π., σ. 200):

> "Δεν ισχύει το ίδιο (ό,τι στους ακέραιους) για τα κλάσματα· ο νους τα αντιλαμβάνεται πολύ δυσκολότερα από τους ακεραίους αριθμούς· όταν λεω ένα δεύτερο αντιλαμβάνομαι το ίδιο πράγμα μοιρασμένο σε δύο μέρη· όταν λεω ένα τρίτο, πρέπει να αντιλαμβάνομαι το ίδιο πράγμα μοιρασμένο σε τρία μέρη· όσο έχω ένα κλάσμα, είναι εντάξει· θα μάθω τι είναι ένα τρίτο σχηματίζοντας την ιδέα ενός πράγματος και χωρίζοντάς το νοητά σε τρία μέρη· αλλά όταν θελήσω να τα συγκρίνω, δεν είναι εύκολο και θα δείτε ότι μεταξύ των ανθρώπων που δεν άσκησαν το πνεύμα τους σε υπολογισμούς θα είναι πολύ λίγοι αυτοί που μπορούν να σας πουν αμέσως, πόσο μεγαλύτερο είναι το μισό από το τρίτο, πόσο το τέταρτο είναι μεγαλύτερο από το πέμπτο· για παράδειγμα αν για ένα ρούχο χρειάζεται δύο και ένα τρίτο πήχεων ύφασμα, θα θεωρήσετε ότι ένα τρίτο είναι πολύ και θα πάρετε μόνο ένα τέταρτο χωρίς να έχετε ξεκάθαρη ιδέα πόσο μεγαλύτερο είναι το ένα τρίτο από το ένα τέταρτο."

Στο απόσπασμα αυτό συγκεκριμένα ο Lagrange αναφέρεται στη δυσκολία που αντιμετωπίζουν όσοι προσπαθούν να μάθουν να χειρίζονται κλάσματα και ιδιαίτερα να τα συγκρίνουν σε αντιδιαστολή με τη σύγκριση φυσικών αριθμών.
Τον 18ο αιώνα αρχίζει η αξιωματοποίηση της άλγεβρας. Δημιουργούνται νέες άλγεβρες, ορίζονται νέοι αριθμοί και οι ιδιότητές τους. Πολλές λοιπόν από τις αριθμητικές έννοιες που έκαναν την εμφάνισή τους κατά την αρχαιότητα και διερευνήθηκαν από αρχαίους μαθηματικούς, διατυπώνονται αυτήν την εποχή ως μέρη ή στοιχεία μιας ολότητας ή ενός συστήματος και μελετούνται ως τμήματα μιας γενικότερης δομής.

Κατά τον 19ο αιώνα αρχίζει πραγματικά η εξερεύνηση της θεμελίωσης της ανάλυσης. Ιδιαίτερα με τον Dedekind (1831 - 1916) αποσαφηνίσθηκε η έννοια του πραγματικού αριθμού και αντιστοιχίσθηκαν οι πραγματικοί αριθμοί σε σημεία μιας ευθείας - απειροστός λογισμός (Bunt, 1981).

Μετά από διακόσια χρόνια από τις ανακαλύψεις των Newton και Leibniz οι Dedekind, Weierstrass και Cantor παρουσίασαν τύπους για μια συνεχή έννοια των αριθμών, που δεν έγιναν αποδεκτοί από όλους τους μαθηματικούς εκείνης της εποχής. Οι τυποποιήσεις αυτές δεν ήταν γενικεύσεις κάποιων προηγούμενων αριθμητικών εννοιών, αλλά αφηρημένες ιδέες που βασίζονταν στον αφηρημένο φορμαλισμό της θεωρίας των συνόλων που ανέπτυξε ο Cantor (1874). Η διαμάχη της τυποποίησης της έννοιας του αριθμού οδήγησε στη διερεύνηση της θεμελίωσης των μαθηματικών. Αποτέλεσμα αυτής της διερεύνησης υπήρξαν τρεις διαφορετικές σχολές μαθηματικών: η λογική του Russell, η διαισθητικότητα του Brouwer και ο φορμαλισμός του Hilbert (Kline, 1972). Ο λογισμός φαίνεται να αποτελεί μια ιδιαίτερα χρήσιμη ανακάλυψη. Από τη γνωσιακή άποψη, φαίνεται να συγκρούεται με ορισμένες θεμελιώδεις αρχές των μαθηματικών που στηρίζονται στη λογική των ρητών αριθμών.

Συνοψίζοντας, το πρώτο σύνολο αριθμών που επεξεργάστηκαν οι άνθρωποι από την αρχαιότητα είναι αυτό των φυσικών αριθμών. Αυτό όμως το σύνολο θεμελιώθηκε ως σύνολο αριθμών μέσα από το σύνολο των πραγματικών αριθμών με μια σειρά αξιωμάτων που έθεσε ο Peano (1858 - 1932) πέντε χιλιάδες χρόνια από την εποχή που κατόρθωσε ο άνθρωπος να χαράξει αυτούς τους αριθμούς. Στη θεωρία του Peano (1903) βλέπουμε να ενοποιούνται δύο τάσεις που έχουν τις ρίζες τους στην αρχαιότητα ώστε να παράγουν ένα σύστημα που εισάγει αξιωματικά τους φυσικούς αριθμούς (αντίστοιχα κάτι τέτοιο έγινε από τον Ευκλείδη το 300 π.Χ.): Η Πυθαγόρεια έννοια (οι ακέραιοι αριθμοί αποτελούν την αρχή των πάντων) και η Αριστοτελική και Ευκλείδεια ιδέα (ο βασικός ρόλος των ορισμών και των αξιωμάτων).

Στη μαθηματική επιστήμη το κλάσμα ορίζεται ως ένα στοιχείο μιας ολότητας, ως αντιπρόσωπος των κλάσεων ισοδυναμίας ενός καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων. Δηλαδή ορίζεται ως μία σχέση και η σημασία του δεν αποδίδεται άμεσα αλλά μέσα από τις ιδιότητες του συστήματος [38] (βλ. Λάκκη, 1980). Συνεπώς τα κλάσματα και κατ' επέκταση οι ρητοί αριθμοί είναι αποδεκτοί και θεμελιώνονται ως στοιχεία ενός καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων.

1.2.2 Ανακεφαλαίωση

Συνοψίζοντας: στις σελίδες που προηγήθηκαν θελήσαμε να εντοπίσουμε τις κυριότερες εννοιολογικές αλλαγές που συνέβησαν κατά την εξελικτική πορεία της έννοιας αυτής. Η αρχική εμφάνιση των *εναδικών* αιγυπτιακών κλασμάτων εξυπηρετούσε όπως είδαμε, την ανάγκη καθημερινών συναλλαγών των αρχαίων

[38] Ορίζεται πρώτα το Καρτεσιανό γινόμενο Z΄ των συνόλων Z και Z-{0}, δηλαδή το $Z' = \{(a1, a2) \in Q \; a1 \in Z, a2 \in Z, a2 \neq 0\}$.
Στη συνέχεια ορίζεται στο Z΄ η σχέση ισοδυναμίας: $(\alpha_1, \alpha_2) \approx (\beta_1, \beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \beta_2 = \alpha_2 \cdot \beta_1$, η οποία χωρίζει το Z΄ σε κλάσεις ισοδυναμίας, που ονομάζονται κλάσματα και συμβολίζονται ως εξής:
$[(\alpha1, \alpha2)] = \frac{a1}{b2}$
Το σύνολο κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή των κλασμάτων
$Q = \{[(\alpha1, \alpha2)] = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} : \alpha_1 \in Z, \; \alpha_2 \in Z, \; \alpha_2 \neq 0\}$ εφοδιάζεται με τις πράξεις
$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_2}$, δηλαδή $[(\alpha_1, \alpha_2)] + [(\beta_1, \beta_2)] = [(\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1, \alpha_2 \cdot \beta_2)]$
$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2}$, δηλαδή $[(\alpha_1, \alpha_2)] \cdot [(\beta_1, \beta_2)] = [(\alpha_1 \cdot \beta_1, \alpha_2 \cdot \beta_2)]$
Αποδεικνύεται ότι το Q έχει τη δομή σώματος, στο οποίο μάλιστα ορίζεται μια σχέση διάταξης. Επίσης αποδεικνύεται ότι περιέχει ισόμορφα το Z μ΄ αυτό τον τρόπο το σώμα των ρητών αριθμών. (βλ. Λάκκη, Κ., 1980, σ. 93-96). Άλγεβρα, Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη

Αιγυπτίων. Στο πλαίσιο αυτό τα κλάσματα εκλαμβάνονταν ως το μέρος το οποίο υπολείπεται ώστε να συμπληρωθεί η εκάστοτε ακέραια μονάδα, η οποία και αντιστοιχούσε σε φυσικά αντικείμενα. Τα εναδικά αυτά κλάσματα εξυπηρετούσαν την ανάγκη για καταμετρήσεις οι οποίες προϋπέθεταν υποδιαιρέσεις και για το λόγο αυτό μπορεί να υποστηριχθεί ότι για τους Αιγυπτίους τα κλάσματα είχαν έναν σαφώς οντολογικό χαρακτήρα. Τελικά, οι παραθέσεις των *εναδικών* αιγυπτιακών κλασμάτων ενώ έχουν εννοιολογικά την ίδια σημασία με τα σύγχρονα κοινά κλάσματα (ως αθροίσματα κλασματικών μονάδων), αποτελούν απλά αθροίσματα μεριδίων χωρίς να αναγνωρίζονται ως αυτόνομοι αριθμοί που έχουν τη δική τους υπόσταση.

Στην Αρχαία Ελλάδα παρατηρήσαμε ότι τα κλάσματα εμφανίζονται με δύο όψεις. Από τη μια πλευρά, στα θεωρητικά μαθηματικά έργα του Ευκλείδη, του Απολλώνιου και άλλων αρχαίων επιστημόνων, εμφανίζονται οι μη αριθμητικοποιημένες έννοιες του *λόγου* και της *αναλογίας*. Από την άλλη πλευρά, παρά την επικρατούσα πλατωνική αντίληψη περί του αδιαίρετου της μονάδας, τα κλάσματα χρησιμοποιούνται σε διάφορες εφαρμογές όπως οι μουσικές κλίμακες, ενώ στην πρακτική λογιστική τα *μέρη* ή *μόρια* έχουν την ίδια ερμηνεία με τα *εναδικά* αιγυπτιακά κλάσματα. Κι εδώ πάλι παρόλο που χρησιμοποιούνται για τη λύση προβλημάτων δεν αναγνωρίζονται ως αριθμοί.

Στα ελληνιστικά χρόνια υπάρχει μια *έμμεση* αποδοχή των κοινών δεκαδικών και εξηκονταδικών κλασμάτων (αριθμητικοποίηση των λόγων και αναλογιών) ως αριθμών χωρίς όμως να αναφέρονται πουθενά και πράξεις με αυτά, όπως προκύπτει από τα έργα του Ήρωνος, του Διόφαντου, του Πτολεμαίου και άλλων αρχαίων επιστημόνων.

Στο Μεσαίωνα, οι Άραβες, δίνοντας μεγάλη ώθηση στις διαδικασίες των πράξεων, εισήγαγαν την έννοια και το συμβολισμό του κλάσματος με τη μορφή που το συναντάμε και σήμερα· ενοποίησαν το λογισμό των φυσικών με το λογισμό των γεωμετρικών λόγων και εισήγαγαν τη χρήση της αρίθμησης με δεκαδική θέση. Επιπλέον, οι μαθηματικοί της εποχής εκείνης, προσπαθώντας να ξεπεράσουν τις δυσκολίες που τους δημιουργούσαν οι υπολογισμοί με κοινά κλάσματα τα οποία περιλάμβαναν τεράστιους αριθμούς επιχείρησαν να ανακαλύψουν νέους πιο εύχρηστους αλγόριθμους για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων. Έτσι, κατέστησαν δυνατή την ανάδυση των δεκαδικών ως μαθηματικό εργαλείο για την προσέγγιση όχι μόνο των μεγεθών αλλά και των μαθηματικών οντοτήτων - των ρητών στην αρχή, των ριζικών και των άρρητων στη συνέχεια. Όπως είδαμε οι οντότητες αυτές στη συνέχεια γίνονται αριθμοί μέτρησης και με τον Stevin αυθεντικές απεικονίσεις. Και εδώ πάλι η εισαγωγή των δεκαδικών κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών προέκυψε από τις πρακτικές αναγκαιότητες της εποχής.

Μετά την Γαλλική Επανάσταση μέσα από τη διάδοση της στοιχειώδους και μέσης εκπαίδευσης καθιερώνεται ευρύτατα η χρήση των δεκαδικών αριθμών ως εύχρηστο μέσο υπολογισμών· ως αποτέλεσμα αυτού η έννοια του αριθμού και κατά συνέπεια η έννοια του κλάσματος έχασαν την οντολογική τους υπόσταση.
Επιπλέον θεωρήσαμε σημαντικό να τονίσουμε ότι ακόμη και από τον 18^{ο} αιώνα μαθηματικοί όπως ο Laplace και ο Lagrange σε μαθήματά τους αναφέρονται στα προβλήματα της διδασκαλίας των κλασμάτων σε σχέση με τους ακέραιους αριθμούς ενώ επικεντρώνονται ιδιαίτερα στη δυσκολία κατανόησης της διάταξης των κλασμάτων.

Τελειώνοντας είδαμε ότι η θεωρητική θεμελίωση των κλασμάτων και των ρητών αριθμών με τον τρόπο που είναι και σήμερα αποδεκτός έρχεται έπειτα από εκατό περίπου χρόνια με την αξιωματική θεμελίωση των αριθμοσυνόλων, τα στοιχεία των οποίων πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες βασικές ιδιότητες.

1.3 ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

Η έννοια του κλάσματος αποτελεί μια μαθηματική έννοια η οποία, αν και την τελευταία εικοσαετία έχει απασχολήσει ένα μεγάλο αριθμό τόσο ερευνητών ψυχολόγων όσο και μαθηματικών εκπαιδευτικών, η διερεύνησή της δεν φαίνεται να έχει ολοκληρωθεί που σημαίνει ότι η έννοια αυτή εξακολουθεί να θέτει ερωτήματα. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια ανασκόπηση ορισμένων εμπειρικών ερευνών καθώς επίσης και τα βασικά συμπεράσματα τα οποία προέκυψαν από τις έρευνες αυτές.

1.3.1 Υποέννοιες - συνιστώσες της έννοιας του κλάσματος

Ορισμένοι ερευνητές, έχοντας ως βάση τη θεωρία μάθησης σε εξειδικευμένους τομείς γνώσης, εστίασαν αρχικά την προσοχή τους στη διερεύνηση της φύσης της έννοιας του κλάσματος έχοντας ως βάση τη θεωρητική παράδοση του Piaget. Οι ερευνητές αυτοί ενστερνιζόμενοι ωστόσο ένα μέρος της κριτικής που είχε ασκηθεί σε σχέση με τις μαθηματικές δεξιότητες που αυτός απέδιδε στα παιδιά, προσπάθησαν να δημιουργήσουν λιγότερο πολύπλοκα έργα. Οι παραπάνω ερευνητές, έχοντας υιοθετήσει ως θεωρητικό υπόβαθρο το αθροιστικό μοντέλο ανάπτυξης της γνώσης, θεωρούν ότι η κατανόηση της έννοιας του κλάσματος ισοδυναμεί με την κατανόηση κάποιων *υποεννοιών (subconcepts*) τις οποίες θεωρούν ότι είναι αναγκαίες για μια συνολική κατανόηση του κλάσματος (Behr, Harel, Post και Lesh, 1992· Behr, Lesh, Post και Silver, 1983· Kieren, 1976· Kieren, 1988· Mack, 1987· Nesher, 1985) [39].

Οι Behr, Lesh, Post και Silver (1983) έχουν προτείνει τις παρακάτω επτά υποέννοιες των κλασμάτων και που οι ίδιοι τις ονομάζουν νοητικές υποκατασκευές: 1) Η υποέννοια του *κλασματικού μέτρου*, η οποία αντιπροσωπεύει το μέρος μιας ποσότητας σε σχέση με την ιδιαίτερη μονάδα αυτής της ποσότητας. Ο Behr και οι συνεργάτες του (1983) θεωρούν αυτή την υποέννοια ως μετασχηματισμό της έννοιας

[39] Όπως θα περιγράψουμε παρακάτω οι ερευνητές αυτοί διατυπώνουν με διαφορετικούς όρους τον όρο *υποέννοια (subconcept).* Συγκεκριμένα, ορισμένοι αναφέρονται σε *υποκατασκευές* (*subconstructs*), ενώ άλλοι σε *ερμηνείες* (*interpretations)* ή *νοήματα* (*meanings)* της έννοιας του κλάσματος.

του *μέρους - όλου*. 2) Η υποέννοια της *αναλογίας*. 3) Η υποέννοια του *λόγου,* που ορίζει μια νέα ποσότητα ως σχέση δύο άλλων ποσοτήτων· αυτό που διακρίνει το λόγο από την αναλογία είναι ότι οι λόγοι προστίθενται ενώ οι αναλογίες όχι. 4) Η υποέννοια του *πηλίκου*, που ορίζει τον ρητό αριθμό ως αποτέλεσμα διαίρεσης. 5) Η υποέννοια της γραμμικής συντεταγμένης, που ερμηνεύει τον ρητό αριθμό ως σημείο στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. 6) Η υποέννοια του *δεκαδικού* που δίνει έμφαση στις ιδιότητες του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος, και 7) Η υποέννοια του *τελεστή*, που ερμηνεύει ένα κλάσμα ως μετασχηματισμό. (Behr, Lesh, Post και Silver, 1983· Behr, Harel, Post και Lesh, 1992).

Από την πλευρά της η Kieren (1988) παρόλο που αναφέρεται στους ρητούς αριθμούς, οι βασικές ιδέες που προτείνει είναι παρόμοιες με τις ερμηνείες των κλασμάτων που προτείνουν οι άλλοι ερευνητές. Και αυτή διακρίνει επτά διαφορετικές ερμηνείες των ρητών αριθμών: 1) Οι ρητοί αριθμοί είναι *κλάσματα* που μπορούμε να τα συγκρίνουμε, να τα προσθέτουμε, να τα αφαιρούμε, κ.λ.π. 2) Οι ρητοί αριθμοί είναι *δεκαδικά κλάσματα* που σχηματίζουν μια φυσική επέκταση των ακεραίων αριθμών στο δικό μας αριθμητικό σύστημα. 3) Οι ρητοί αριθμοί είναι *κλάσεις ισοδυναμίας* των κλασμάτων. 4) Οι ρητοί αριθμοί είναι *αριθμοί της μορφής p/q*, όπου τα p, q είναι ακέραιοι με $q \neq 0$. Σ' αυτή τη μορφή οι ρητοί αριθμοί είναι λόγοι. 5) Οι ρητοί αριθμοί είναι *πολλαπλασιαστικοί τελεστές*. 6) Οι ρητοί αριθμοί είναι *στοιχεία ενός απειροστού διατεταγμένου σώματος* (συνόλου πηλίκων). Είναι αριθμοί της μορφής $x = p/q$ όπου το x ικανοποιεί την εξίσωση $qx=p$. 7) Οι ρητοί αριθμοί είναι *μέτρα ή σημεία της ευθείας των αριθμών*. Σε μεταγενέστερή της ανακοίνωση η Kieren (1988) πρότεινε ότι μια ολοκληρωμένη έννοια του ρητού αριθμού περιλαμβάνει τις εξής τέσσερις υποκατασκευές: το *μέτρο*, το *πηλίκο*, τον *αριθμητικό λόγο* και τον *πολλαπλασιαστικό τελεστή*. Η θέση της αυτή συμπίπτει με τις αντίστοιχες των Vergnaud (1983) και Freudenthal (1983). Τέλος, η Kieren (1993) αποδίδει τις δυσκολίες που συναντούν τα παιδιά στην εκμάθηση του κλάσματος στην πολλαπλότητα ακριβώς των υποεννοιών του.

Η Nesher (1985, 1989) προτείνει μια ανάλυση των κλασμάτων στις εξής έννοιες: κλάσμα *–σχέση μέρους ενός όλου*, κλάσμα *–αναλογία*, κλάσμα *–τελεστής* και κλάσμα

–πιθανότητα. Ακολουθώντας την κονστρουκτιβιστική παράδοση υποστηρίζει ότι η χρήση φυσικών αντικειμένων βοηθά στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος από το παιδί, το οποίο και βαθμιαία ανεξαρτητοποιείται από αυτά (Nesher, 1989· Arnon, Dubinsky και Nesher, 1994· βλ. επίσης και Dubinsky, 1991). Κοινό χαρακτηριστικό των ερευνητών αυτών αποτελεί η πεποίθηση ότι τα παιδιά για να αποκτήσουν μια πλήρη έννοια του κλάσματος οφείλουν να κατακτήσουν προηγουμένως τις επιμέρους έννοιές του.

Συνεχίζοντας την παράδοση των παραπάνω ερευνητών ο Ohlsson (1988) διευρύνει την προβληματική ισχυριζόμενος ότι το σημαντικό δεν είναι να διακρίνουμε απλά τις *υποέννοιες* αλλά να δούμε πώς αυτές συνδέονται και σε ποιο *πλαίσιο*[40]. Συγκεκριμένα ο ίδιος θεωρεί (ό. π.) ότι οι παραπάνω ερευνητές δεν εξηγούν διεξοδικά τα κριτήρια που χρησιμοποίησαν κατά τη διάκριση των ερμηνειών. Αν και θεωρεί ότι η απαρίθμηση των ερμηνειών του κλάσματος μπορεί να αποτελέσει ένα σοβαρό σημείο εκκίνησης, πιστεύει ότι απαραίτητο στοιχείο για την ανάπτυξη μιας θεωρίας αποτελεί η αναγνώριση των σχέσεων ανάμεσα στις διαφορετικές ερμηνείες του κλάσματος. Ο Ohlsson επεκτείνοντας τη διερεύνησή του, προσπάθησε να προσδιορίσει μια δομή των ερμηνειών του κλάσματος και να απαντήσει στο ερώτημα ποια είναι τα όρια του συνόλου αυτών των ερμηνειών. Πρότεινε ότι η ερμηνεία του κλάσματος είναι μια συνάρτηση της ερμηνείας του αριθμητή και του παρονομαστή και εφόσον και οι δυο αυτοί είναι ακέραιοι αριθμοί θα μπορούσαν να ερμηνεύονται είτε ως ποσότητες είτε ως παράμετροι πράξεων. Συνεπώς τα κλάσματα μπορούν να έχουν τέσσερις βασικές ερμηνείες: Στην πρώτη περίπτωση όπου και οι δύο αριθμοί ερμηνεύονται ως ποσότητες, το κλάσμα εκφράζει μια *σύγκριση* (η μια ποσότητα περιγράφεται σε σχέση με μια άλλη ποσότητα). Στη δεύτερη όπου ο αριθμητής ερμηνεύει μια ποσότητα και ο παρονομαστής μια παράμετρο, το κλάσμα αντιστοιχεί στην ιδέα του *μερισμού*. Στην τρίτη περίπτωση, όπου και οι δύο αριθμοί ερμηνεύονται ως παράμετροι, το κλάσμα αντιστοιχεί στην ιδέα των *σύνθετων πράξεων* (ο αριθμητής είναι πολλαπλασιαστής και ο παρονομαστής διαιρέτης, που και οι δυο εφαρμόζονται στην ίδια ποσότητα). Όσον αναφορά την τέταρτη περίπτωση, όπου ο αριθμητής

[40] Στην περίπτωση αυτή ο όρος *πλαίσιο* έχει διαφορετική σημασία από αυτήν που του προσδίδουν ερευνήτριες όπως η Carey ή η Βοσνιάδου.

ερμηνεύεται ως μια παράμετρος και ο παρονομαστής ως μια ποσότητα, ο Ohlsson, θεωρεί ότι το κλάσμα είναι αδύνατον να ερμηνευτεί. Οι υπόλοιπες ερμηνείες των κλασμάτων αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των παραπάνω ερμηνειών. Για παράδειγμα η αναλογία αποτελεί ένα είδος *σύγκρισης* όπως και ο λόγος δύο αριθμών.

Στην προσέγγιση που προτείνει ο Ohlsson (ό. π.) τονίζει τη σημασία την οποία έχουν οι καθημερινές καταστάσεις όπου εφαρμόζονται κλάσματα· ιδιαίτερα επισημαίνει την αναγκαιότητα αντιστοίχησης των καθημερινών αυτών καταστάσεων με την περιοχή των μαθηματικών που περιλαμβάνει τα κλάσματα .

Προχωρώντας παρακάνω ο Ohlsson (1988) εξετάζει και τη συμβολική πλευρά του κλάσματος. Συγκεκριμένα, θεωρεί ότι τα παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος, ως δυο αριθμοί που έχουν νόημα καθεαυτοί, σχετίζονται και ορίζουν έναν νέο αριθμό, ο οποίος διαφέρει τόσο στον συμβολισμό όσο και στη σημασία του. Επιπλέον πιστεύει ότι δημιουργούνται ακόμη περισσότερα προβλήματα επειδή χρησιμοποιείται το ίδιο μαθηματικό σύμβολο για τις διαφορετικές εκφράσεις του κλάσματος όπως οι λόγοι, οι αναλογίες και οι ρητοί αριθμοί, εκφράσεις που έχουν σχέση αλλά εν μέρει μόνο συμπίπτουν με τον κλασματικό αριθμό.

Η κριτική που ασκήθηκε στον Ohlsson επισήμανε ότι η θεωρία του δεν εξήγησε επαρκώς κάποια εννοιολογικά φαινόμενα, όπως αυτό της ισοδυναμίας των κλασμάτων. Σε μια μεταγενέστερη διερεύνησή του ο ίδιος προσπάθησε να αναλύσει τη δομή του *πηλίκου* ως πράξη η οποία δηλώνει την αντίστροφη πράξη από τον πολλαπλασιασμό, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των *σχημάτων* (Ohlsson, 1988).

Οι παραπάνω αναλύσεις εστιάζονται στην ίδια την έννοια του κλάσματος όπως και στις διαφορετικές ερμηνείες που αποδόθηκαν στο σύμβολό του. Οι προσεγγίσεις αυτές θεωρούν ότι το παιδί αποκτά την έννοια του κλάσματος μέσα από την απόκτηση των επιμέρους ερμηνειών του, ακολουθώντας μια πορεία *εμπλουτισμού* της γνώσης.

1.3.2 Ο ρόλος της γνώσης του μερισμού στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος

Στο ίδιο θεωρητικό πλαίσιο που θεωρεί ότι η απόκτηση της έννοιας του κλάσματος συνίσταται σε μια διαδικασία εμπλουτισμού, ορισμένες έρευνες με διαφορετικούς προβληματισμούς και εστιάσεις ανέδειξαν ως προϋπόθεση της κατανόησης της έννοιας του κλάσματος την έννοια του μερισμού. Η γνώση του μερισμού άλλοτε αντιμετωπίζεται ως υποέννοια και άλλοτε ως διαισθητική γνώση για την έννοια του κλάσματος.

Ο ρόλος της γνώσης του μερισμού στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος αναδείχτηκε από δύο μεγάλης έκτασης έρευνες που πραγματοποιήθηκαν στην Αγγλία και οι οποίες εξέταζαν την ανάπτυξη της κατανόησης αυτής της έννοιας[41]. Τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών έδειξαν ότι οι βασικές συνιστώσες της γνώσης που απαιτούνται για την κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές είναι μια βαθιά ποιοτική γνώση των κλασμάτων, η οποία περιλαμβάνει απαραίτητα την έννοια του *μερισμού,* την ιδέα ότι *τα κλάσματα είναι αριθμοί* (Behr, Lesh, Post και Silver, 1983· Kerslake, 1986) καθώς επίσης και την κατανόηση *των πράξεων* της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ((Behr, Lesh, Post και Silver, 1983· Carpenter, 1988· Lesh, Landau και Hamilton, 1983· LeFevre, 1986, 1993). Τα αποτελέσματα αυτά αποτέλεσαν το έναυσμα για μια σειρά μικρότερες έρευνες, οι οποίες στόχευαν να διερευνήσουν περαιτέρω τα σχετικά ευρήματα.

Ο Behr και οι συνεργάτες του (1983) θεωρούν ότι αν και το μοντέλο του μέρους ενός όλου είναι βασικό για τον μερισμό, ο μερισμός επεκτείνεται πέρα από αυτό το

[41] Εδώ αναφερόμαστε αφενός στο Rational Number Project (RNP) και στο Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project (SESM). Ο Behr και οι συνεργάτες του (1983) αναφέρουν τους γενικούς στόχους του RNP, οι οποίοι ήταν: (α) Να περιγράψει την ανάπτυξη της κατανόησης των παιδιών για τα κλάσματα σε μαθητές από τη δεύτερη έως την όγδοη τάξη. (β) Να περιγράψει το ρόλο που παίζουν διάφορα αναπαραστασιακά συστήματα στην ανάπτυξη της κατανόησης των κλασμάτων. Η έρευνα αυτή αποτελεί μέρος μιας μεγαλύτερης έρευνας που πραγματοποιήθηκε στην Αγγλία με θέμα Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS). Σκοπός της έρευνας ήταν (1) να διερευνήσει τις δυσκολίες των παιδιών σε κάποιες περιοχές των μαθηματικών και (2) να αναπτύξει μια ιεραρχία της κατανόησης στα μαθηματικά στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στο πρόγραμμα αυτό συμμετείχαν παιδιά από 11 έως 15 ετών.

μοντέλο και περιλαμβάνει τη συνειδητή επιλογή της μονάδας και τον διαχωρισμό της μονάδας σε μέρη που έχουν το ίδιο μέτρο.
Η Kieren (1988) και οι Pothier και Sawada (1983) χαρακτηρίζουν το μερισμό ως διαίρεση μιας μονάδας σε ίσα μέρη είτε πρόκειται για συνεχείς ποσότητες είτε πρόκειται για μονάδες –σύνολα διακριτών στοιχείων. Οι ερευνητές αυτοί θεωρούν πολύ σημαντική την κατανόηση του μερισμού, διότι πιστεύουν ότι ο μερισμός σχηματίζει τη βάση για την ισοδυναμία των κλασμάτων και η ισοδυναμία σχηματίζει τη βάση για τις πράξεις με κλάσματα (βλ. επίσης και Kerslake, 1986).

Σύμφωνα με τη άποψη του Behr και των συνεργατών του (1983) ο μερισμός επεκτείνεται πέρα από το μοντέλο του μέρους ενός όλου, οι μαθητές δηλαδή πρέπει να επεκτείνουν τη γνώση τους πέρα από το μοντέλο αυτό για να μπορέσουν να προχωρήσουν σε μια πιο ολοκληρωμένη γνώση για τα κλάσματα. Πράγματι αποτελέσματα και άλλων μελετών έδειξαν ότι η αποτυχία των μαθητών στην επέκταση της γνώσης τους πέρα από το μοντέλο του μέρους ενός όλου οφείλεται κατά μεγάλο μέρος στην έλλειψη κατανόησης του μερισμού ((Behr, Lesh, Post και Silver, 1983· Hunting, 1983· Kerslake, 1986· Lesh, Landau και Hamilton, 1983). Συγκεκριμένα, έρευνες που πραγματοποίησε ο Hunting (1983) για τη διερεύνηση της έλλειψης κατανόησης του μερισμού περιελάμβαναν έργα στα οποία τα παιδιά έπρεπε να διαμερίσουν συνεχείς ποσότητες ή σύνολα διακριτών στοιχείων. Από τα αποτελέσματα των ερευνών του προέκυψε ότι τα παιδιά είχαν καλύτερη επίδοση στα προβλήματα που περιελάμβαναν σύνολα διακριτών στοιχείων (βλ. επίσης, Pitkethly και Hunting, 1996.

Μια άλλη προσέγγιση στην έννοια του μερισμού επιχειρήθηκε από την Mack (1990, 1993, 1995). Ξεκινώντας από την άποψη ότι τα παιδιά έρχονται στο σχολείο διαθέτοντας κάποιες διαισθητικές γνώσεις[42] για τον μερισμό, υποστήριξε ότι οι γνώσεις αυτές θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου τα παιδιά να κατανοήσουν τόσο το σύμβολο του κλάσματος όσο και τις διαδικασίες χειρισμού του. Επιπλέον θεωρεί ότι οι διαισθητικές αυτές γνώσεις δεν περιορίζουν αλλά

[42] Η Mack (1990) αναφέρεται στις διαισθητικές αυτές γνώσεις με τον όρο *άτυπες*.

βοηθούν τα παιδιά να επιλύουν διάφορα προβλήματα με τρόπους που να τους είναι κατανοητοί. Η Mack ιδιαίτερα στέκεται στη γνώση των παιδιών για τα κλάσματα που είναι ισοδύναμα της μονάδας, γνώση που τα βοηθά να εφευρίσκουν αλγόριθμους για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων. Ακόμη προτείνει ότι η διδασκαλία θα έπρεπε να ενθαρρύνει τα παιδιά να στηρίζονται στη γνώση τους για τα ισοδύναμα της μονάδας κλάσματα και να την εφαρμόζουν σε διάφορες καταστάσεις· επισημαίνει δε την ανάγκη περαιτέρω έρευνας στον τομέα ακριβώς των ισοδύναμων με τη μονάδα κλασμάτων (σ.157, 1990).

Το μοντέλο του εμπλουτισμού που πρότεινε η Mack σχετίζεται άμεσα με τις διαδικασίες που επιλέγει κάποιος για να εισάγει την έννοια του κλάσματος με βάση την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση. Εφαρμογή της προσέγγισης αυτής αποτελεί η πειραματική διδασκαλία που, χρησιμοποιώντας νέες τεχνολογίες, σχεδίασε ο Tzur (1999) με θέμα τα καταχρηστικά κλάσματα. Στόχος αυτής της διδασκαλίας ήταν να προαγάγει μια σταδιακή μετατροπή των *σχημάτων* που διαθέτουν τα παιδιά για τα κλάσματα. Από την εφαρμογή αυτής της διδασκαλίας σε δύο παιδιά της Δ΄ δημοτικού διαπίστωσε ότι τα παιδιά μπόρεσαν να μεταβούν από την ιδέα ότι η κλασματική μονάδα είναι ένα μέρος ενός συνόλου στην ιδέα ότι η κλασματική μονάδα αναφέρεται σε μια πολλαπλασιαστική σχέση με το σύνολο αναφοράς (η οποία και αποτελεί το επαναλαμβανόμενο σχήμα του κλάσματος). Γενικά η μελέτη αυτή παρουσίασε: 1) Μία συνδυαστική ανάλυση του τρόπου που τα παιδιά κατασκευάζουν την πολλαπλασιαστική αυτή σχέση, 2) Μία διερεύνηση του τρόπου που οι δάσκαλοι προσαρμόζονται σε διδακτικές καταστάσεις και 3) Μία διερεύνηση του τρόπου που οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα σε δάσκαλο και μαθητή προσαρμόζονται στους περιορισμούς της μαθηματικής δραστηριότητας των παιδιών.

Όπως φάνηκε ως εδώ, αρκετοί ερευνητές, προσεγγίζοντας την έννοια του κλάσματος θεωρούν ότι για την ανάπτυξή της απαιτείται η ανάπτυξη των υποεννοιών του. Υπάρχουν όμως κάποιοι οι οποίοι ενώ ξεκινούν από το ίδιο κονστρουκτιβιστικό υπόβαθρο, επηρεασμένοι όμως και από το θεωρητικό πλαίσιο του Vygotsky, θεωρούν ότι η εκμάθηση του κλάσματος θα έπρεπε να συνδέεται κυρίως με καθημερινές καταστάσεις. Ένας από αυτούς είναι ο Freudenthal (1983) ο οποίος θεωρεί ότι το κλάσμα αποτελεί τη φαινομενολογική προέλευση των ρητών αριθμών. Ο ερευνητής αυτός εκφράζει μια διαφορετική άποψη όταν αναφέρει ότι τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν τα παιδιά σ' αυτήν την περιοχή των μαθηματικών προκαλούνται από το γεγονός ότι τα εισάγουμε στα κλάσματα δίνοντάς τους μία μόνο προσέγγιση της πραγματικότητας ενώ τα κλάσματα εμφανίζονται σε πολλαπλά φαινόμενα της καθημερινής ζωής ως *διαμεριστές* (όλο-μέρος-κλάσμα), ως *μέσο σύγκρισης*, ως *τελεστές*.

Υποστηρίζοντας την άποψη του Freudenthal ο Vergnaud (1983), προχωράει περισσότερο. Όπως συγκεκριμένα αναφέρει: "Η λέξη *κλάσμα* χρησιμοποιείται για να εκφράζει άλλοτε το μέρος μιας ακέραιας μονάδας, άλλοτε ένα μέγεθος που δεν μπορεί να εκφραστεί μ' έναν ακέραιο αριθμό μονάδων, άλλοτε ένα διατεταγμένο ζεύγος συμβόλων p/q και άλλοτε μια σχέση που συνδέει δύο ιδίου είδους μεγέθη" (βλ. Vergnaud, σ. 160). Ο Vergnaud με τη θεωρία των *εννοιολογικών πεδίων*, που ανέπτυξε, συνεισέφερε σημαντικά στην ανάλυση του προβλήματος που μας απασχολεί[43]. Σύμφωνα με την άποψή του, οι πολλαπλασιαστικές δομές, έχοντας άμεση σχέση με την έννοια του κλάσματος, αποτελούν ένα από τα κυρίαρχα εννοιολογικά πεδία. Τέλος, ο Vergnaud πιστεύει ότι η έννοια του κλάσματος και οι συναφείς προς αυτήν έννοιες απορρέουν από τον πολλαπλασιασμό. Η διαφορά ανάμεσα στην ανάλυσή του και στις αναλύσεις που οι άλλοι υποστηρίζουν, βρίσκεται στο γεγονός, ότι ο ίδιος προσεγγίζει τις ερμηνείες του κλάσματος με την τάση της ταξινόμησης *των προβλημάτων –καταστάσεων*[44] που περιλαμβάνουν κλάσματα, ενώ οι άλλες αναλύσεις προσπαθούν να ταξινομήσουν τις ίδιες τις *έννοιες*· θεωρεί δηλαδή ότι η έννοια του κλάσματος είναι μια από τις έννοιες που παίρνουν το νόημά τους μέσα από στα προβλήματα αναλογίας και αναπτύσσονται ως εργαλεία σκέψης μέσα από την προοδευτική κυριαρχία στις καταστάσεις αυτές, πολύ πριν να μπορούν να εισαχθούν και να χρησιμοποιηθούν ως μαθηματικά αντικείμενα.

[43] Για περισσότερες λεπτομέρειες, βλ. Vergnaud, 1983, σ. 164.

[44] Ο Vergnaud αναφέρει ότι σε αυτήν την περίπτωση προσδίδει στην έννοια της *κατάστασης* το νόημα που της δίνουν συνήθως οι ψυχολόγοι: οι γνωστικές διαδικασίες και οι απαντήσεις του υποκειμένου είναι συνάρτηση των καταστάσεων τις οποίες αντιμετωπίζει. Επισημαίνει δε ότι υπάρχει μεγάλη ποικιλία καταστάσεων σε ένα δεδομένο εννοιολογικό πεδίο και ότι οι γνώσεις των μαθητών διαπλάθονται από τις καταστάσεις που συναντούν και ελέγχουν σταδιακά, κυρίως μάλιστα από τις πρώτες καταστάσεις, οι οποίες είναι δυνατόν να δώσουν νόημα στις έννοιες και στις διαδικασίες, τις οποίες θέλει κάποιος να τους διδάξει.

Ο Streefland (1982) προχωρώντας περισσότερο και με βάση το ίδιο αυτό πλαίσιο της ρεαλιστικής προσέγγισης των μαθηματικών επισημαίνει την ελάχιστη προσοχή που έχει δοθεί στη σχέση της έννοιας του κλάσματος με άλλες συναφείς έννοιες, απόδειξη ότι από τη δεκαετία του ΄60, στην εκπαιδευτική πρακτική η προσοχή εστιάζεται στη δημιουργία παιχνιδιών με κλάσματα με σκοπό την πρακτική εξάσκηση και όχι την ανάπτυξη της έννοιας αυτής. Βασιζόμενος στο θεωρητικό πλαίσιο τόσο του Freudenthal όσο και του Vergnaud προχώρησε στην επεξεργασία μιας προσέγγισης όπου η καθημερινή πραγματικότητα καθίσταται το πεδίο από το οποίο αντλούνται ιδέες για την εκπαιδευτική διαδικασία (βλ. Streefland, 1982).

Πολλοί ερευνητές στην προσπάθειά τους να διερευνήσουν τον τρόπο που τα παιδιά αντιμετωπίζουν τους κλασματικούς αριθμούς μελέτησαν τις διαδικασίες (στρατηγικές) που ακολουθούν κατά την επίλυση προβλημάτων και είδαν ότι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους αναπαριστούν τα παιδιά τα κλάσματα, μαρτυρούν συγκεκριμένα είδη παρανοήσεων που διαφέρουν ανάλογα με τα έργα που αντιμετωπίζουν και ανάλογα με το πλαίσιο που τους παρουσιάζονται τα έργα αυτά (Oliveira και Ramalho, 1994· Valdemoros, 1994· Maher, Martino και Davis, 1994).

Μια άλλη άποψη στο θέμα της απόκτησης των κλασμάτων εκφράστηκε από ερευνητές οι οποίοι στάθηκαν κριτικά απέναντι στο αθροιστικό μοντέλο το οποίο προσπαθήσαμε να αναλύσουμε παραπάνω. Οι ερευνητές αυτοί θεωρούν ιδιαίτερα σημαντική την προϋπάρχουσα γνώση που διαθέτει το παιδί όταν προσεγγίζει την έννοια του κλάσματος[45]. Στη συνέχεια θα συζητήσουμε τις διάφορες απόψεις που εκφράστηκαν για τους τρόπους που η προϋπάρχουσα γνώση επηρεάζει την απόκτηση της έννοιας του κλάσματος.

[45] Εξαίρεση στους προαναφερθέντες ερευνητές αποτελεί η περίπτωση της Kieren (1992). Διερευνώντας την εκμάθηση των δεκαδικών αριθμών η Kieren υποστηρίζει ότι η προϋπάρχουσα γνώση μπορεί να βοηθήσει ή να έρθει σε αντιπαράθεση με τη δημιουργία μιας σωστής έννοιας των δεκαδικών και των κλασματικών αριθμών. Σύμφωνα με την ίδια ερευνήτρια, το παιδί που πρωτομαθαίνει τους δεκαδικούς αριθμούς δημιουργεί μια αναπαράστασή τους και τους συσχετίζει με άλλα συστήματα αριθμών που ήδη γνωρίζει καλά ή σχεδόν καλά (δηλαδή τους φυσικούς αριθμούς ή τα δεκαδικά κλάσματα ή τα κλάσματα αν τα έχει διδαχθεί προηγουμένως), όπως και με συγκεκριμένες έννοιες της μέτρησης.

1.3.3 Η προϋπάρχουσα γνώση εμπόδιο στη γνώση της έννοιας του κλάσματος

Γνωστικοί ψυχολόγοι οι οποίοι επικεντρώθηκαν στις *δεξιότητες* των παιδιών κατά την επίλυση μαθηματικών έργων διαπίστωσαν ότι τα παιδιά καθώς χειρίζονται τη νέα γνώση περιορίζονται από κανόνες που έχουν ήδη αναπτύξει (Greeno, 1991· Resnick, 1995). Οι ερευνητές αυτοί πραγματοποίησαν εμπειρικές έρευνες που εστιάστηκαν ιδιαίτερα στη διερεύνηση των συστηματικών λαθών και παρανοήσεων των παιδιών.

Οι Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson και Peled (1989) εξέτασαν την εννοιολογική αναλογία ανάμεσα στους λανθασμένους αλγόριθμους[46] των παιδιών και στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης που βασίζεται σε κανόνες. Ιδιαίτερα διερεύνησαν την υπόθεση αν τα παιδιά, κατέχοντας ήδη κάποια προϋπάρχουσα γνώση και προσπαθώντας να κατανοήσουν το εννοιολογικό νόημα[47] ενός νέου μαθηματικού αντικειμένου, οδηγούνται σε συστηματικά λάθη. Συγκεκριμένα διερεύνησαν την περίπτωση των δεκαδικών αριθμών, όπου λόγω της ομοιότητας των αλγόριθμων με αυτούς των φυσικών αριθμών, τόσο οι δάσκαλοι όσο και τα παιδιά κατά συνέπεια, θεωρούν την ενσωμάτωση του νέου συνόλου αριθμών και των κανόνων χειρισμού τους μια απλή διεύρυνση της γνώσης τους. Τα ευρήματά τους όμως έδειξαν ότι υπάρχει σύγκρουση ανάμεσα στην παλαιότερη γνώση και στη γνώση που καλούνται να μάθουν τα παιδιά. Βασιζόμενοι στους τρεις κανόνες των Sackur-Grisvard και Leonard (1985) (τον κανόνα του ακεραίου, τον κανόνα του κλάσματος και τον κανόνα του μηδενός) οι ερευνητές αυτοί διερεύνησαν την εννοιολογική βάση των λαθών που κάνουν τα παιδιά· κατέληξαν δε ότι η διδασκαλία σχεδόν πάντα είναι κατά κάποιο τρόπο ατελής δεδομένου ότι η διδασκαλία δεν είναι δυνατόν να καλύψει όλες τις ιδιαίτερες περιπτώσεις στην περιοχή αυτή των μαθηματικών. Η διδασκαλία βασίζεται στην υπόθεση ότι οι μαθητευόμενοι θα χρησιμοποιήσουν το υλικό που τους παρουσιάζεται και θα εξάγουν συμπεράσματα και ερμηνείες ώστε να ολοκληρώσουν και να κατανοήσουν αυτό που τους διδάχθηκε. Τα παιδιά όμως είναι πιθανό να οδηγούνται σε λάθη κατά τη διεξαγωγή συμπερασμάτων και των ερμηνειών αυτών. Συνεπώς η Resnick και οι συνεργάτες της

[46] Ο όρος που χρησιμοποίησαν οι ερευνητές ήταν *buggy algorithms· ιούς* όπως μεταφράσαμε στην ενότητα 1.1.
[47] Ο όρος που χρησιμοποιήθηκε ήταν *conceptual sense*, που τον εισήγαγε αρχικά ο Greeno (1991).

ισχυρίζονται ότι οι λανθασμένοι κανόνες των παιδιών είναι εγγενείς στη διαδικασία της μάθησης και είναι το φυσικό αποτέλεσμα της προσπάθειας των παιδιών να ερμηνεύσουν αυτό που τους διδάσκεται και να επεκταθούν πέρα από τις περιπτώσεις που τους εμφανίζονται στην πράξη.
Οι Nesher και Peled (1986) προσπάθησαν να κατατάξουν ιεραρχικά τους τρεις παραπάνω λανθασμένους κανόνες, υποθέτοντας ότι τα παιδιά κατά την μακρόχρονη πορεία τους προς την πλήρη κατανόηση περνούν από κάποια στάδια, και ανάλογα με το ποιους κανόνες χρησιμοποιούν μπορούμε να καταλάβουμε σε πιο επίπεδο κατανόησης βρίσκονται. Οι ίδιοι πιστεύουν ότι τα συστήματα των κανόνων μπορούν να ταξινομηθούν από πιο πρωτογενή σε πιο εξελιγμένα και ερευνούν την υπόθεσή τους μελετώντας τα λάθη που κάνουν οι μαθητευόμενοι κατά τη μετάβασή τους από το επίπεδο του αρχάριου στο επίπεδο του γνώστη ενός συγκεκριμένου θέματος.

Οι παραπάνω ερευνητές προτείνουν ότι η χρήση από την πλευρά των παιδιών κάποιων αρχών για το τι τους επιτρέπεται ή τους απαγορεύεται[48] αντανακλά τη λανθάνουσα θεωρία τους για αυτό το πεδίο γνώσης. Οι ίδιοι ερευνητές που εξέτασαν τον βαθμό κατανόησης της έννοιας του κλάσματος, με βάση τα λάθη των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων, υποστηρίζουν ότι ένα λάθος που παρουσιάζεται στη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος αντιστοιχεί είτε σε διαφορετικά είδη κατανόησης είτε σε παρανοήσεις. Για παράδειγμα το λάθος που κάνουν τα παιδιά κατά την πρόσθεση δύο κλασμάτων προσθέτοντας τους αριθμητές και τους παρονομαστές αντίστοιχα, μπορεί να αντανακλά είτε μια ελλιπή γνώση των πράξεων είτε μια βαθιά παρανόηση για τη φύση της έννοιας του κλάσματος.

Όπως φάνηκε έως εδώ, οι ερευνητές που ασχολήθηκαν με την εκμάθηση της έννοιας του κλάσματος εκλαμβάνοντας ως δεδομένη την προϋπάρχουσα γνώση δεν συμφωνούν απαραίτητα και επί των σημείων μεταξύ τους. Για ορισμένους πρόκειται για άτυπη γνώση, την οποία διαθέτουν τα παιδιά πριν ακόμη πάνε στο σχολείο, ενώ για άλλους η γνώση αυτή έχει τη μορφή κανόνων που δρουν περιοριστικά στις εισερχόμενες πληροφορίες. Για άλλους, που διερευνούν την προϋπάρχουσα γνώση

[48] Οι όροι που χρησιμοποιούνται είναι permissions και constraints.

κυρίως μέσα από την επίλυση λεκτικών προβλημάτων, η γνώση αυτή έχει τη μορφή πρωτόγονων διαισθητικών μοντέλων που είναι αποτέλεσμα της διδασκαλίας.

Με τα πρωτόγονα διαισθητικά μοντέλα, όπως ήδη αναφέραμε (στην παράγραφο 1.1.4) ασχολήθηκαν οι Fischbein, Deri, Nello και Marino (1985). Τα αποτελέσματα ερευνών τους έδειξαν ότι τα μοντέλα αυτά επιβάλουν κάποιους περιορισμούς στο είδος των αριθμών που περιλαμβάνονται στο πρόβλημα καθώς επίσης και στο ρόλο που παίζουν στη δομή του προβλήματος· αν δηλαδή τα δεδομένα ενός προβλήματος οδηγούν σε παραβίαση ενός ή περισσοτέρων περιορισμών, ο λύτης μπορεί να δυσκολευτεί να αποφασίσει ποια είναι η σωστή αριθμητική πράξη.

Σύμφωνα με τον Fiscbein και τους συνεργάτες του το πρωτογενές μοντέλο του πολλαπλασιασμού είναι η επαναληπτική πρόσθεση. Ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού γίνεται πολύ δυσκολότερο αν ο πολλαπλασιαστής είναι δεκαδικός ή κλασματικός αριθμός οπότε και παραβιάζεται το μοντέλο της επαναληπτικής πρόσθεσης. Για τους περιορισμούς δε που θέτει το μοντέλο της επαναληπτικής πρόσθεσης ασχολήθηκαν και ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών οι οποίοι πιστεύουν ότι: α) Ο πολλαπλασιαστής πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός και β) το γινόμενο πρέπει να είναι μεγαλύτερο από τον πολλαπλασιαστέο (Hart, 1980, 1981· Pirie, 1988).

Με έρευνές τους ο Fischbein και οι συνεργάτες τους έδειξαν ότι το πλέον πρωτογενές διαισθητικό μοντέλο διαίρεσης που κατέχουν τα παιδιά είναι αυτό του μερισμού ενώ αυτό που αποκτούν αργότερα μέσα από τη διδασκαλία είναι το μετρητικό.· για να μην παραβιάζεται το μεριστικό μοντέλο της διαίρεσης, ο διαιρέτης πρέπει να είναι φυσικός ή ακέραιος αριθμός, ο διαιρέτης πρέπει να είναι μικρότερος του διαιρετέου και το πηλίκο της διαίρεσης να είναι μικρότερο του διαιρετέου. Στο μοντέλο δε της μετρητικής διαίρεσης υπάρχει ένας μόνο περιορισμός, ο διαιρέτης να είναι μικρότερος του διαιρετέου. Πολλοί ερευνητές έχουν κάνει τον ίδιο διαχωρισμό στα είδη της διαίρεσης· θεωρούν δε ότι στα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα πολλαπλασιασμού οι δυο παράγοντες ενός γινομένου παίζουν διαφορετικούς ρόλους, αυτόν του πολλαπλασιαστή και αυτόν του πολλαπλασιαστέου (De Corte et al., 1988, 1994· Graeber και Tirosh, 1990· Greer, 1987· Greer, 1992· Simon, 1994). Επιπλέον οι θέσεις του Fischbein και των συνεργατών του έχουν επιβεβαιωθεί από έρευνες στις οποίες ζητούσαν από τα παιδιά να γράψουν λεκτικά αριθμητικά προβλήματα που αντιστοιχούσαν σε συγκεκριμένες διαιρέσεις που τους έδιναν (Bell, Fischbein και Greer, 1984· Kaput, 1985), καθώς επίσης και από έρευνες που έχουν γίνει σε αδιόριστους νηπιαγωγούς, όπου δόθηκαν παρόμοια έργα (Tirosh και Graeber, 1990). Στις απαντήσεις των παιδιών όπως και των νηπιαγωγών υπερίσχυαν κατά πολύ τα προβλήματα μερισμού.

Με τη σειρά της η Neuman (1999) διερεύνησε την επίγνωση της σχέσης ανάμεσα στις καταστάσεις και τους υπολογισμούς σε προβλήματα διαίρεσης μέτρησης και σε προβλήματα διαίρεσης μερισμού σε μαθητές της δεύτερης έως της έκτης τάξης. Από τα αποτελέσματα της έρευνάς της προέκυψε ότι οι μαθητές της δεύτερης τάξης μετρούσαν ή έκαναν ζωγραφιές και συσχέτιζαν τις μεθόδους που χρησιμοποιούσαν με τις καταστάσεις που περιγράφονταν στα διάφορα προβλήματα. Αντίθετα όμως διαπίστωσε ότι τα μεγαλύτερα παιδιά είχαν δυσκολία να συσχετίσουν τους υπολογισμούς με τις καταστάσεις που περιέγραφαν τα προβλήματα διαίρεσης μερισμού. Το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε είναι ότι η τυπική πράξη της διαίρεσης η οποία γίνεται κατανοητή μέσα από τη σχέση της με καθημερινές καταστάσεις, αναπτύσσεται μόνο μέσα από την αλληλεπίδρασή της με την άτυπη γνώση που διαθέτουν τα παιδιά.

Ένα άλλο θέμα απασχόλησε μια σειρά εμπειρικών ερευνών με αντικείμενο τη δυσκολία των δασκάλων να βοηθήσουν τα παιδιά όταν τα εισάγουν στις έννοιες των κλασματικών και δεκαδικών αριθμών. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών, οι δυσκολίες των παιδιών στην κατανόηση των κλασμάτων, οφείλεται στις δικές τους αδυναμίες κατανόησης των εννοιών, στις δικές τους παρανοήσεις ή στη αδυναμία τους να αναγνωρίζουν τα λάθη των μαθητών τους (Graever, Tirosh και Glover, 1989· Martin, Pirie και Kieren, 1994· Philippou και Christou, 1994· Santos, 1994· Tirosh, 2000). Συγκεκριμένα μετά από πολυάριθμες έρευνες που διεξήγε η Tirosh (2000) για αρκετά χρόνια, υπογραμμίζει ότι στα προγράμματα εκπαίδευσης των δασκάλων είναι ιδιαίτερα σημαντικό να γίνεται προσπάθεια ώστε οι δάσκαλοι να εξοικειώνονται με τις λανθασμένες διαδικασίες που χρησιμοποιούν τα παιδιά (ιδιαίτερα στη διαίρεση των κλασμάτων).

Επιπλέον οι Moss και Case (1999) διαπιστώνοντας την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης των ρητών αριθμών (κλασμάτων, ποσοστών και δεκαδικών) από τους μαθητές, εντοπίζοντας τα βασικά στοιχεία που θεωρούσαν ότι αποτελούσαν τα βασικά προβλήματα στα παιδιά και αμφισβητώντας τις υπάρχουσες μεθόδους διδασκαλίας, προχώρησαν στο σχεδιασμό μιας πειραματικής προσέγγισης διδασκαλίας των ρητών αριθμών. Τα προβλήματα που εντόπισαν στη διδασκαλία αφορούσαν 1) την έμφαση στις διαδικασίες χειρισμού των ρητών αριθμών παρά στην εννοιολογική /σημασιολογική κατανόησή τους, 2) τη δασκαλοκεντρική διδασκαλία σε αντιδιαστολή με την παιδοκεντρική, 3) τη χρήση αναπαραστάσεων με τις οποίες υπάρχει σύγχυση ανάμεσα στους ρητούς και τους φυσικούς αριθμούς και 4) το γεγονός ότι ο συμβολισμός των ρητών αριθμών θεωρείται δεδομένος.

Τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν μετά από την πραγματοποίηση πειραματικής διδασκαλίας σε 16 μαθητές της Δ΄ τάξης του Πειραματικού σχολείου του Πανεπιστημίου και 13 μαθητές της ίδιας τάξης ιδιωτικού σχολείου της ίδιας περιοχής καθώς επίσης και συνεντεύξεις των μαθητών που έλαβαν μέρος στο πρόγραμμα, ήταν ότι οι μαθητές της πρώτης ομάδας παρουσίασαν βαθύτερη κατανόηση των ρητών αριθμών (π.χ. έδιναν ποιοτικές εξηγήσεις, σέβονταν τη σχέση αναλογίας μεταξύ των αριθμών), σε αντιδιαστολή με τους αντίστοιχους μαθητές που παρακολούθησαν το παραδοσιακό πρόγραμμα του σχολείου (ομάδα ελέγχου) οι οποίοι ενώ καταφέρνουν να χειρίζονται απλούς ρητούς αριθμούς σε συνηθισμένες εργασίες αποτυγχάνουν στην επίλυση πρωτότυπων προβλημάτων) ενώ συγχρόνως παρουσιάζουν στοιχεία σύγχυσης των ρητών αριθμών με τους ακέραιους αριθμούς (διαπιστώνεται δηλαδή έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης). Επιπλέον οι μαθητές της πειραματικής ομάδας μεταχειρίζονταν τα ζητούμενα με βάση τους λόγους και όχι με βάση τις γνώσεις τους για τους φυσικούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές αναπαράστασής τους (διαπιστώθηκε ευελιξία, επινοητικότητα και αυτοπεποίθηση). Τέλος, οι παραπάνω ερευνητές κατέληξαν ότι η κατανόηση των μαθητών για το σύστημα των ρητών αριθμών γίνεται πιο προφανής μέσα από προβλήματα που απαιτούν άμεση μετάφραση από τη μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη[49].

Οι Philippou και Christou (1994) ενστερνιζόμενοι ιδιαίτερα την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση των Hiebert και Wearne (1986) για τις σχέσεις τις εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης, διερεύνησαν τα δύο αυτά είδη γνώσης σε δασκάλους του δημοτικού. Σύμφωνα με τα αποτελέσματά τους, αν και οι δάσκαλοι φαίνεται να μπορούν να εκτελούν σωστά τους υπολογισμούς, έχουν σημαντική δυσκολία με το νόημα των πράξεων με κλάσματα που δηλώνει μια περιορισμένη κατανόηση των υποκείμενων εννοιών της διαδικαστικής γνώσης.

Οι Reeve και Pattison (1996) επισημαίνουν ότι παρόλο που στην εκπαιδευτική διαδικασία χρησιμοποιούνται πολύ συχνά οπτικά μέσα όπως σχεδιαγράμματα, δεν έχει διερευνηθεί η σημασία των ερμηνειών των μαθητών σε σχέση με τα οπτικά μέσα που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά. Θεωρείται δεδομένο ότι ο τρόπος που τα παιδιά κατασκευάζουν ή ερμηνεύουν τις οπτικές αναλογίες των μαθηματικών προβλημάτων αντανακλά την γνώση τους για το σχετικό μαθηματικό τομέα. Σε δύο εμπειρικές έρευνες προσπάθησαν να εξετάσουν τη σχέση ανάμεσα στη μαθηματική σχετική επάρκεια στις ζωγραφιές των παιδιών, στις κρίσεις τους για τις σχετικές οπτικές αναλογίες των κλασμάτων και στην ικανότητά τους να επιλύουν προβλήματα. Εξέτασαν δηλαδή την επάρκεια με την οποία τα παιδιά κατασκευάζουν ή ερμηνεύουν τις σχετικές ιδιότητες των κλασμάτων στο πλαίσιο της μαθηματικής γνώσης τους για τα κλάσματα.

Από την πρώτη τους έρευνα προέκυψε ότι οι ζωγραφιές των παιδιών που αναπαριστούν σχέσεις κλασμάτων μπορούν να θεωρηθούν ως πηγή δεδομένων για τις νοητικές αναπαραστάσεις τους για τα κλάσματα. Και οι δύο έρευνες όμως έδειξαν ότι υπάρχει μια σημαντική σχέση ανάμεσα στις ζωγραφιές των παιδιών και στην επίδοσή τους σε προβλήματα που περιλαμβάνουν κλάσματα. Η συνέπεια στις επιδόσεις των παιδιών στο σύνολο των ερωτήσεων των ερευνών ενισχύουν την

[49] Για περισσότερες λεπτομέρειες, βλ. Moss και Case (1999).

άποψη ότι υπάρχουν διακριτά δυναμικά νοητικά μοντέλα[50] τα οποία αποτελούν τη βάση στην οποία στηρίζονται οι επιδόσεις των παιδιών και ότι η αναλογία της κατασκευής και της εκτίμησης των σχεδίων που αναπαριστούν σχέσεις κλασμάτων είναι ένα χρήσιμο μέσο για την αποκάλυψη αυτών των νοητικών μοντέλων. Τα νοητικά μοντέλα που φανέρωσαν τα αποτελέσματά τους ήταν: α) Το μοντέλο του μέρους-όλου, β) το μοντέλο της πολλαπλής μονάδας, γ) μια μεταβατική έκδοση του διακριτού συσχετιστικού μοντέλου δ) το διακριτό συσχετιστικό μοντέλο και ε) το μοντέλο μέτρησης. Η ταξινόμηση των παιδιών σε κάποιο από τα παραπάνω μοντέλα έγινε μ' έναν επαγωγικό τρόπο. Για παράδειγμα τα παιδιά τα οποία μπόρεσαν να αντιστοιχήσουν ένα κλάσμα της μορφής p/q σε μια σχέση ανάμεσα σ' ένα διακριτό υποσύνολο που αντιστοιχούσε στον αριθμητή p του κλάσματος και σ' ένα διακεκριμένο υπερ-σύνολο που αντιστοιχούσε στον παρονομαστή του κλάσματος, θεωρούνταν από τους ερευνητές ότι διαθέτουν το μοντέλο μέρους-όλου.

Γενικά τα αποτελέσματα των ερευνών τους δείχνουν ότι προοδευτικά τα πιο σύνθετα μοντέλα της κατανόησης των κλασμάτων αποτελούν τη βάση για μια όλο και μεγαλύτερη ικανότητα στην επίλυση προβλημάτων με κλάσματα. Από τα αποτελέσματά τους προέκυψε ότι η ερμηνεία τους για τη φύση του κλάσματος έρχεται σε αντίθεση με άλλες θεωρήσεις οι οποίες αποδίδουν την χαμηλή επίδοση των παιδιών σε απλούς διαδικαστικούς αλγόριθμους. Τέλος οι Reeve και Pattison (1996) υπογραμμίζουν ιδιαίτερα την ανάγκη για περαιτέρω έρευνα με σκοπό την εδραίωση όχι μόνο της πολυπλοκότητας αυτών των μοντέλων αλλά και τις καταστάσεις κάτω από τις οποίες τα μοντέλα των παιδιών αλλάζουν.

Όλοι οι ερευνητές που αναφέραμε παραπάνω συμφωνούν ότι τα παιδιά του δημοτικού σχολείου μεταβάλουν τον τρόπο με τον οποίο καταλαβαίνουν τα προβλήματα της αριθμητικής όταν τα προβλήματα αυτά περιέχουν κλάσματα (Post, Cramer, Behr, Lesh και Harel, 1993). Ερευνητές όπως οι Mack (1995) και Parrat-Dayan και Vonèche (1992) πιστεύουν ότι αυτή η μεταβολή φανερώνει μια

[50] Οι Reeve και Pattison (1996) ερμηνεύουν τον όρο *νοητικό μοντέλο* ως ένα είδος νοητικής οργάνωσης που έχει συνοχή και που παρέχει μηχανισμούς ερμηνείας και επίλυσης προβλημάτων.

εννοιολογική μετάβαση (conceptual transition) στην ικανότητα των παιδιών να συνδυάζουν τις σχέσεις ανάμεσα στα μέρη και στις μονάδες στις οποίες αναφέρονται.

Οι Saxe και Gearhart (1999) από την πλευρά τους, μελετώντας την επίδραση που είχε ένα νέο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών στα μαθηματικά, διερεύνησαν τη σχέση ανάμεσα στην επιτυχία των μαθητών στην περιοχή των κλασμάτων και στο βαθμό που η διδασκαλία στην τάξη συνδέεται με τις αρχές των ισχυόντων αναθεωρητικών πλαισίων[51] (όπως για παράδειγμα αυτά που έχει προτείνει το National Council of Teachers of Mathematics το 1989). Η ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνάς τους αποκάλυψε ότι η ευθυγράμμιση της διδασκαλίας με αρχές αναθεώρησης είχε σχέση με την επιτυχία των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων αλλά όχι στους υπολογισμούς με κλάσματα. Επιπλέον διέκριναν ότι η σχέση αυτή διέφερε για τους μαθητές που διέθεταν ή όχι μια στοιχειώδη κατανόηση για τα κλάσματα (όπως προέκυψε από την πραγματοποίηση ενός pre-test). Για τους μαθητές που διέθεταν μια στοιχειώδη κατανόηση των κλασμάτων αποδείχθηκε ότι αυτή η σχέση ήταν γραμμική. Αντίθετα οι μαθητές χωρίς στοιχειώδη κατανόηση για τα κλάσματα είχαν μια μικρή βάση πάνω στην οποία θα μπορούσαν να δομήσουν μαθηματικούς στόχους με άλλους τρόπους παρά μόνο από εκείνους του ακέραιου αριθμού και των διαδικασιών του. Οι παραπάνω ερευνητές τονίζουν την αξία των καινούριων προγραμμάτων διδασκαλίας τα οποία διακατέχονται από αρχές αναθεώρησης καθώς επίσης και τη σπουδαιότητα μιας συντονισμένης ανάλυσης της προϋπάρχουσας γνώσης των παιδιών και των μεθόδων διδασκαλίας κατά τη διερεύνηση της μάθησης από τα παιδιά.

1.3.4 Οι φυσικοί αριθμοί εμπόδιο στη μάθηση των κλασμάτων

Μια άλλη άποψη εκφράζεται από διάφορους γνωστικούς ψυχολόγους οι οποίοι διερεύνησαν τη σχέση ανάμεσα στην προϋπάρχουσα γνώση για τους αριθμούς και στα προβλήματα που αντιμετωπίζουν τα παιδιά κατά τη μάθηση των κλασμάτων καθώς επίσης και τη δημιουργία διαφόρων παρανοήσεων. Ερευνητές όπως οι

---

[51] Οι αρχές αναθεώρησης σχετίζονται με το περιεχόμενο του νέου αναλυτικού προγράμματος σπουδών για τα μαθηματικά που εφαρμόστηκε στα δημοτικά και γυμνάσια στη χώρα τους όπου η διδασκαλία επικεντρώνεται στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων και όχι στην εκτέλεση απλά πράξεων (επίλυση προβλημάτων vs δεξιότητες).

Hartnett και Gelman (1995) υποστήριξαν ότι οι γνώσεις των παιδιών για τον αριθμό οριοθετούν –αποτελούν δηλαδή εμπόδιο στην κατανόηση των κλασμάτων.

Οι δύο αυτές ερευνήτριες (1995) διερεύνησαν δύο μαθηματικές έννοιες την έννοια της ύπαρξης του επόμενου αριθμού και την έννοια του κλάσματος. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει (στην παράγραφο 1.2.3.2) από την πρώτη έρευνα προέκυψε ότι αν και τα παιδιά δεν είχαν διδαχθεί την αρχή του επόμενου αριθμού δεν είχαν δυσκολία να αφομοιώσουν τα νέα δεδομένα. Σύμφωνα πάντα με τις Hartnett και Gelman το γεγονός αυτό συμβαίνει διότι οι αρχές που οργανώνουν τις νέες πληροφορίες συμπίπτουν με αυτές της δομής της γνώσης του παιδιού. Αυτά δηλαδή που τα παιδιά γνωρίζουν χρησιμεύουν ως βάση για την περαιτέρω μάθηση των αριθμών. Αντίθετα στην έννοια του κλάσματος δεν ισχύει το ίδιο[52]. Οι εισαγόμενες πληροφορίες που αντιστοιχούν στο μαθηματικό δεδομένο ότι τα κλάσματα είναι αριθμοί δεν συμφωνούν με τις αρχές τις μέτρησης. Όπως αναφέρουν «οι μαθηματικές αρχές που προσδίδουν σ' ένα κλάσμα την υπόσταση ενός αριθμού είναι διαφορετικές από εκείνες που δίνουν σ' έναν φυσικό αριθμό υπόσταση αριθμού» και τονίζουν ότι «ενώ ένας φυσικός αριθμός είναι το αποτέλεσμα μιας μέτρησης, δεν μπορεί κανείς να μετρήσει πράγματα και να έχει ως αποτέλεσμα ένα κλάσμα». Στα συμπεράσματά τους ισχυρίζονται ότι αν η κονστρουκτιβιστική προσέγγιση είναι αληθής και τα παιδιά έρχονται στο σχολείο έχοντας αναπτύξει τις αρχές τις μέτρησης και τους κανόνες πρόσθεσης και αφαίρεσης, η πρώτη αυτή γνώση θα σταθεί εμπόδιο στην εκμάθηση του κλάσματος.

[52] Οι Gelman και Meck (1992) στην μελέτη τους με θέμα τη διάταξη αριθμητικών ψηφίων, υπέθεσαν ότι τα παιδιά θα αντιμετώπιζαν δυσκολίες κατά τη διάταξη των κλασμάτων αν δεν είχαν ήδη κατανοήσει ότι το κλάσμα είναι ένας αριθμός που προκύπτει από μια διαίρεση, και ότι τέτοιοι αριθμοί είναι δυνατόν να διαταχθούν, να προστεθούν, να αφαιρεθούν, να πολλαπλασιαστούν και να διαιρεθούν. Η έρευνά τους περιλάμβανε θέματα όπως: α) εξάσκηση στη διάταξη των κλασμάτων με ξυλάκια διαφόρων μηκών και β) αναγνώριση και διάταξη κλασμάτων και ακεραίων. Στην έρευνά τους χρησιμοποίησαν κλασματικές μονάδες (όπως το 1/4, το 1/3 ή το 1/2), μεικτά κλάσματα (όπως το 1 1/2 ή το 2 1/2), κλάσματα που ήταν ισοδύναμα με μια ακέραια μονάδα και φυσικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα παρουσίασαν κάρτες που περιείχαν αριθμητικά ψηφία των παραπάνω αριθμών σε 35 παιδιά που είχαν τελειώσει την πρώτη δημοτικού και τους ζητούσαν να ονομάσουν προφορικά τους αριθμούς καθώς επίσης και να διατάξουν τις κάρτες ανάλογα με το αριθμητικό ψηφίο που αναπαριστούσε. Τα αποτελέσματα της έρευνά τους έδειξαν ότι κανένα παιδί δεν τοποθέτησε σωστά όλους τους αριθμούς, ενώ το 53% των παιδιών διέταξαν στην αρχή το 0 και το 1 ή και όλους τους ακέραιους· κατέληξαν συνεπώς στο συμπέρασμα ότι τα παιδιά είχαν πρόβλημα στη διάταξη των αριθμητικών ψηφίων και ότι τα παιδιά προτιμούσαν να χρησιμοποιούν στρατηγικές με βάση τη μέτρηση. Για παράδειγμα τοποθετούσαν το 2/3 πριν από το 3/4 γιατί το 2<3 και 3<4.

Σύμφωνα με τη Gelman (1991) τα παιδιά αρκετά συχνά αναφέρονται στα μέρη μιας μονάδας χρησιμοποιώντας φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα όταν ζήτησαν από τα παιδιά να γράψουν ένα κλάσμα που να εκφράζει το πλήθος των χρωματισμένων σχημάτων, σε μια ερώτηση όπου τα παιδιά είχαν μπροστά τους μια εικόνα που περιλάμβανε τέσσερις κύκλους από τους οποίους οι τρεις είναι χρωματισμένοι γκρι, υπήρχαν παιδιά που απάντησαν με το φυσικό αριθμό "3". Η Gelman υποστηρίζει ότι τέτοιου είδους αντιλήψεις, της εννοιολογικοποίησης των κλασμάτων ως ακέραιους αριθμούς, δεν περιορίζονται από έργα που αναπαριστάνουν διακεκριμένες ή συνεχείς ποσότητες ως μονάδες αναφοράς. Πράγματι στους υπολογισμούς με κλάσματα πολλά παιδιά προσθέτουν ή αφαιρούν αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή.

Όμοια, η Ball (1993) υποστηρίζει ότι όταν ζητείται από τα παιδιά να διαμερίσουν μια ποσότητα, για παράδειγμα να μοιράσουν εξίσου έναν αριθμό κουλουριών σε ένα συγκεκριμένο αριθμό ατόμων, ορισμένα παιδιά θα χειριστούν το αποτέλεσμα του μερισμού σαν αριθμό των κομματιών και όχι σαν κλασματικά μέρη μιας μονάδας. Όταν για παράδειγμα είχαν να μοιράσουν δύο κουλούρια σε τέσσερα άτομα, ένα παιδί μπορεί να διαμερίσει κάθε κουλούρι σε δύο μισά και να δηλώσει ότι το κάθε άτομο θα πάρει από *ένα κομμάτι*.

1.3.5 Η γνώση των φυσικών αριθμών – σημείο εκκίνησης για την απόκτηση της έννοιας του κλάσματος.

Τα αποτελέσματα των ερευνών που περιγράψαμε παραπάνω επισημαίνουν την ανάγκη για μια ολιστική προσέγγιση του προβλήματος της αναδιοργάνωσης της γνώσης κατά την εκμάθηση της έννοιας του κλάσματος.

Οι Lehtinen, Merenluoto και Kasanen (1997) ασχολήθηκαν με τη διερεύνηση της εννοιολογικής αλλαγής που πραγματώνεται στη σκέψη των παιδιών κατά την εκμάθηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Τα αποτελέσματά τους έδειξαν ότι ενώ τα παιδιά αναπτύσσουν ικανότητες στην εκτέλεση αλγόριθμων οι οποίες πολλές φορές θεωρούνται επαρκείς για την επίλυση προβλημάτων στο πλαίσιο του μαθήματος, οι γνώσεις αυτές αποδεικνύονται όμως ανεπαρκείς για την κατανόηση της υποκείμενης γνώσης που σχετίζεται με την έννοια της συνέχειας των αριθμών. Επομένως οι τρεις αυτοί ερευνητές καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η εννοιολογική αλλαγή που πραγματοποιείται καθώς τα παιδιά περνούν από μια διακριτή σε μια συνεχή έννοια των αριθμών είναι πιο δύσκολη και πιο απαιτητική από ό,τι πιστεύουν οι δάσκαλοι.

Από την πλευρά της η Chi (1994) ισχυρίζεται ότι τα κλάσματα αποτελούν παράδειγμα μιας έννοιας η εκμάθηση της οποίας απαιτεί οντολογική αλλαγή. Όταν δηλαδή ένας μαθητής εισάγεται στην έννοια του κλάσματος πρέπει να μεταπηδήσει σε έννοιες που είναι οντολογικά διαφορετικές από την έννοια των φυσικών αριθμών.

Συνοψίζοντας: κατά την ανασκόπηση των εμπειρικών ερευνών που είχαν ως υπόβαθρο διάφορες θεωρητικές προσεγγίσεις εντοπίσαμε τις βασικές κατά την άποψή μας θεωρίες για τις ιδέες που αναπτύσσουν τα παιδιά κατά τη διαδικασία εκμάθησης της έννοιας του κλάσματος.

Με την δική μας διερεύνηση θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε σε κάποια από τα θέματα που οι συγκεκριμένες έρευνες έχουν θίξει, θέματα τα οποία κατά την άποψή μας είτε δεν έχουν απαντηθεί είτε έχουν απαντηθεί ελλιπώς. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να οριοθετήσουμε θεωρητικό στίγμα της δικής μας προσέγγισης ως προς τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν τα παιδιά κατά την απόκτηση της έννοιας του κλάσματος.

1.4 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΙ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στις προηγούμενες τρεις ενότητες αυτού του κεφαλαίου έχουν αναφερθεί καταρχάς οι κεντρικές θεωρητικές θέσεις που αφορούν τα ζητήματα απόκτησης και αναδιοργάνωσης των γνώσεων, οι προεκτάσεις των θέσεων αυτών στην εκμάθηση επιστημονικών εννοιών καθώς και η κριτική που ασκήθηκε στις θέσεις αυτές. Επιπλέον, έχει περιγραφεί η ιστορική εξέλιξη της έννοιας του κλάσματος, οι τρόποι, δηλαδή, με τους οποίους έχει οριστεί η έννοια αυτή σε διάφορες χρονικές περιόδους στο πλαίσιο της μαθηματικής επιστήμης.

Στην επόμενη ενότητα αναφέρθηκαν τα ευρήματα εμπειρικών ερευνών και συγκεκριμένα αυτά που αφορούσαν την απόκτηση της έννοιας του κλάσματος. Αρχικά συζητήθηκαν οι διαφορετικές συνιστώσες της έννοιας του κλάσματος, όπως αυτές προέκυψαν από έρευνες στο πλαίσιο του κονστρουκτιβισμού, ενώ στη συνέχεια έγινε αναφορά σε έρευνες γνωστικών ψυχολόγων οι οποίοι επικέντρωσαν τη διερεύνησή τους στα διαδικαστικά λάθη των παιδιών στη συγκεκριμένη περιοχή των μαθηματικών. Κοινό χαρακτηριστικό των παραπάνω θεωρήσεων, όπως προέκυψε από την επισκόπησή μας, αποτελεί το γεγονός ότι η πρόσληψη γνώσεων ερμηνεύεται από τους ερευνητές αυτούς ως αθροιστική διαδικασία.

Στη συνέχεια εκτέθηκαν οι απόψεις αναπτυξιακών ψυχολόγων οι οποίοι δίνουν βαρύνουσα έμφαση στον ρόλο που διαδραματίζει η προϋπάρχουσα γνώση κατά την απόκτηση νέων πληροφοριών. Εδώ ενδιαφερθήκαμε ιδιαίτερα για τα ευρήματα της Gelman (1991) η οποία ύστερα από έρευνες που διεξήγαγε κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα παιδιά αναπτύσσουν ορισμένες αρχές της μέτρησης που τα βοηθούν στη μάθηση των φυσικών αριθμών ενώ αντίθετα οι αρχές αυτές εμποδίζουν την απόκτηση της έννοιας του κλάσματος.

Προχωρώντας παρακάτω τη θεωρητική μας επισκόπηση αναφερθήκαμε στις προτάσεις εκείνες οι οποίες υποστηρίζουν ότι οι αρχικές γνώσεις των παιδιών σε διάφορα γνωστικά πεδία έχουν μια θεωρητικού τύπου δομή (Carey, 1985, 1991· Vosniadou, 1994). Συγκεκριμένα εκθέσαμε το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής που έχει αναπτύξει η Βοσνιάδου (1999, 2000), το οποίο εξηγεί διεξοδικά τη δημιουργία των διαισθητικών γνώσεων στην γνωσιακή περιοχή της αστρονομίας καθώς και τη δυσκολία των παιδιών να υιοθετήσουν την επιστημονική θεώρηση, στον βαθμό που η θεώρηση αυτή απαιτεί την αναδιοργάνωση της αρχικής τους «θεωρίας»[53] για τον φυσικό κόσμο. Επιμείναμε στην παρουσίαση του θεωρητικού αυτού πλαισίου επειδή πιστεύουμε ότι με την εισαγωγή των συνθετικών μοντέλων και των επεξηγηματικών πλαισίων[54] εξηγεί τη δημιουργία των παρανοήσεων.

Έχοντας λάβει υπόψη τις θεωρίες αυτές που αφορούν την απόκτηση των γνώσεων γενικά και ιδιαίτερα την απόκτηση της έννοιας του αριθμού, θα προχωρήσουμε στη διερεύνηση του τρόπου που θεμελιώθηκαν οι φυσικοί αριθμοί και τα κλάσματα στο πλαίσιο της μαθηματικής επιστήμης. Θεωρούμε τη διερεύνηση αυτή απαραίτητη για τη συγκρότηση της υπόθεσης της εργασίας μας και κατ' επέκταση για το σχεδιασμό των εμπειρικών ερευνών που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

1.4.1. Φυσικοί αριθμοί vs Κλάσματα

Στην ιστορική ανασκόπηση έχουμε ήδη αναφέρει ότι οι φυσικοί αριθμοί ήταν οι πρώτοι αριθμοί που επεξεργάστηκαν οι άνθρωποι ήδη από την αρχαιότητα. Η έννοια του φυσικού αριθμού, ως μαθηματικό κατασκεύασμα-στοιχείο ενός συνόλου, θεμελιώθηκε ωστόσο πολύ αργότερα, και πιο συγκεκριμένα από τον Peano (1903) με μια σειρά αξιωμάτων[55]. Όπως επίσης είδαμε στην ιστορική αυτή ανασκόπηση η έννοια του κλάσματος έχει οριστεί με διαφορετικούς κατά εποχές τρόπους.

Όπως προκύπτει από τα στοιχεία του Πίνακα 1.1, πρόκειται για δύο έννοιες, οι οποίες από την προσέγγιση της Μαθηματικής Επιστήμης διαφοροποιούνται τόσο ως προς τον ορισμό τους όσο και ως προς τις ιδιότητες που ικανοποιούν. Παρατηρώντας

[53] Έχουμε ήδη αναφέρει τον τρόπο με τον οποίο η Βοσνιάδου χρησιμοποιεί τον όρο «θεωρία» (βλ. υποσημείωση 10, ενότητα 1.1).

[54] Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο *επεξηγηματικά πλαίσια,* αναφερόμενοι στις ερμηνείες των παιδιών που έχουν όμως τη δομή μιας *θεωρίας* όπως την ορίζει η Βοσνιάδου.

[55] Αριθμοί όπως οι ακέραιοι, οι ρητοί κ.α. θεμελιώθηκαν στη συνέχεια με βάση το σύνολο των φυσικών αριθμών σύμφωνα με μια κατασκευαστική αντίληψη. Ένας άλλος τρόπος θεμελίωσης των φυσικών αριθμών πραγματώθηκε αργότερα μέσα από τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή οι φυσικοί αριθμοί ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών και αποτελούν υποσύνολό του.

την πρώτη στήλη που αφορά το σύνολο των φυσικών αριθμών διαπιστώνουμε ότι η μονότιμος απεικόνιση του Ν στο Ν όπως την ορίζει ο Peano έχει άμεση σχέση με τις αρχές στις οποίες αναφέρεται η Gelman (1991) και συγκεκριμένα στην αρχή του επόμενου αριθμού. Παρατηρώντας τη δεύτερη στήλη του ίδιου Πίνακα η έννοια του κλάσματος βλέπουμε ότι η έννοια του κλάσματος έχει οριστεί είτε ως το μέρος μιας ισομερώς διαιρεμένης ποσότητας –ορισμός που έχει άμεση σχέση με την ένα προς ένα αντιστοιχία με φυσικά αντικείμενα, είτε ως το αφηρημένο πηλίκο δύο αριθμών. Σε ένα ακόμη πιο αφηρημένο επίπεδο ορίζεται δε ως αντιπρόσωπος μιας κλάσης ισοδυναμίας.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1.

Ορισμοί του φυσικού αριθμού και του κλάσματος όπως ορίζονται στη Μαθηματική Επιστήμη

Πως ορίζεται ο Φυσικός Αριθμός στη Μαθηματική Επιστήμη	**Πως ορίζεται το Κλάσμα στη Μαθηματική Επιστήμη**[56]
Δεχόμαστε την ύπαρξη ενός συνόλου Ν το οποίο χαρακτηρίζεται από τις επόμενες ιδιότητες[57]: 1^o Το σύνολο Ν δεν είναι κενό. 2^o Υπάρχει μια μία μονότιμος απεικόνιση του Ν εντός του Ν[58] Κατά την απεικόνιση αυτή την εικόνα του στοιχείου $\alpha \in N$, τη συμβολίζουμε με α^+ και το στοιχείο α^+ το ονομάζουμε επόμενο ή διαδοχικό του α. 3^o Υπάρχει ένα τουλάχιστον $e \in N$, το οποίο κατά την απεικόνιση αυτή δε είναι επόμενος κανενός στοιχείου του Ν[59]. 4^o Εάν $\alpha^+ = \beta^+$, τότε α=β, δηλαδή το επόμενο κάθε στοιχείου του Ν ορίζεται μονοτίμως. 5^o Εάν $N_1 \subseteq N$ τέτοιο ώστε:	1. Τα κλάσματα αναπαριστούν μέρη μιας ισομερώς διαιρεμένης ποσότητας (μονάδα αναφοράς)[60] 2. Το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ορίζεται ως το πηλίκο της διαίρεσης του α δια του β, τους οποίους ονομάζουμε αριθμητή και παρονομαστή[61] 3. Το κλάσμα ορίζεται ως κλάση ισοδυναμίας: $[(\alpha_1, \alpha_2)] = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, που ανήκει στο Καρτεσιανό γινόμενο Ζ΄ των συνόλων Ζ και Ζ-{0},

[56] Στον καθορισμό των προτάσεων που αναφέρουμε παρακάτω λάβαμε υπόψη μας τους διαφορετικούς τρόπους που έχει οριστεί η έννοια του κλάσματος στην Μαθηματική Επιστήμη και Εκπαίδευση.

[57] Εδώ αναφερόμαστε στα αξιώματα του Peano (1882/1903) (βλ. επίσης Λάκκη, 1980, σ. 48-49).

[58] Κατά την απεικόνιση αυτή την εικόνα του στοιχείου $\alpha \in N$, τη συμβολίζουμε με α^+ και το στοιχείο α^+ το ονομάζουμε επόμενο ή διαδοχικό του α.

[59] Για το στοιχείο $e \in N$ το οποίο δεν είναι επόμενο κανενός στοιχείο του Ν, χρησιμοποιούμε το σύμβολο 1, για το επόμενο αυτού, δηλαδή το 1^+ το 2, για το 2^+ το 3 κ.ο.κ.

Ο Peano αρχίζει τους φυσικούς αριθμούς από τον αριθμό *1*. Αργότερα όμως για λόγους σκοπιμότητας προστέθηκε στους φυσικούς αριθμούς και ο αριθμός *0*.

[60] Βλ. βιβλίο οργανισμού «Τα μαθηματικά μας» της Δ΄ Δημοτικού.

[61] Ο Euler στο *Elements of Algebra* δίνει έναν πλήρη ορισμό του κλάσματος ως μαθηματικής αφηρημένης έννοιας καθώς επίσης και όλες τις περιπτώσεις των διαφορετικών κλασμάτων, τις ιδιότητές τους, τη σχέση τους με την ακέραια μονάδα, τον τρόπο που διατάσσονται καθώς επίσης και τις διαδικασίες των πράξεων με κλάσματα (βλ. Euler, 1984).

α) το στοιχείο $e \in N_1$ β) $(\forall \alpha \in N_1) \Rightarrow (\alpha \in N)$, τότε $N_1 = N$ Το σύνολο αυτό λέγεται σύνολο των φυσικών αριθμών και τα στοιχεία αυτού **φυσικοί αριθμοί**	όπου $Z' = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in Q$ και $\alpha_1 \in Z$, $\alpha_2 \in Z$, $\alpha_2 \neq 0\}$[62]

Απέναντι στους ορισμούς αυτούς, σύγχρονες έρευνες στην περιοχή της γνωσιακής επιστήμης εξετάζουν την απόκτηση των δύο αυτών εννοιών από τα παιδιά επικεντρώνοντας τη διερεύνησή τους στις ιδέες που αναπτύσσουν τα ίδια τα παιδιά. Από τη σκοπιά αυτή, ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι έρευνες των Hartnett και Gelman (1995) καθώς επίσης και των Carey και Spelke (1994) που αναφέρονται στις *αρχές της μέτρησης,* τις οποίες και θεωρούν ότι αποτελούν τη βάση για την απόκτηση διαφόρων των μαθηματικών εννοιών, ιδιαίτερα δε για την απόκτηση της έννοιας του αριθμού και πιο συγκεκριμένα του φυσικού αριθμού.

Υποθέτοντας ότι η γνώση των φυσικών αριθμών αποτελεί το σημείο εκκίνησης στη σκέψη των παιδιών για την κατανόηση της έννοιας του αριθμού, πιστεύουμε ότι πρέπει να διευκρινίσουμε τι ακριβώς θεωρούμε ότι πιστεύουν τα παιδιά για την έννοια του φυσικού αριθμού. Στον Πίνακα 1.2 παραθέτουμε τις πεποιθήσεις εκείνες των παιδιών που πιστεύουμε ότι συγκροτούν τη «θεωρία» τους για την έννοια του φυσικού αριθμού. Οι προτάσεις που αναφέρουμε στηρίζονται αρκετά στα ευρήματα των αναπτυξιακών ψυχολόγων που αναφέραμε αμέσως παραπάνω.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.
Αρχικό Εννοιολογικό Πλαίσιο των Παιδιών για την Έννοια του Φυσικού Αριθμού

1. Οι φυσικοί αριθμοί είναι σύμβολα που αναπαριστούν ποσότητες σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία με φυσικά αντικείμενα
2. Για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει ένας επόμενος
3. Δεν υπάρχει αριθμός ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς
4. Το 1 είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός

[62] Βλ. Λάκκη, 1980, σ. 93-96.

Έχοντας ως βάση αυτό το Αρχικό Εννοιολογικό Πλαίσιο των παιδιών για τους φυσικούς αριθμούς, θα παρουσιάσουμε τις ιδέες που αναπτύσσουν τα παιδιά για την έννοια του φυσικού αριθμού σε αντιδιαστολή προς την έννοια του κλάσματος. Συγκεκριμένα στον Πίνακα 1.3. εκθέτουμε τις πεποιθήσεις των παιδιών για την έννοια του φυσικού αριθμού και για την έννοια του κλάσματος σε συσχετισμό με τις διάφορες θεματικές ενότητες που αντιπροσωπεύουν το σύμβολο, τη διάταξη και τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις. Στην κατάστρωση του Πίνακα αυτού χρησιμοποιήσαμε τις θεωρητικές θέσεις και τα ευρήματα αναπτυξιακών ψυχολόγων και ιδιαίτερα την επισήμανση του Ohlsson (1988) η οποία αφορά το σύμβολο του κλάσματος, καθώς και τις αντίστοιχες επισημάνσεις της Gelman για τις αρχές της μέτρησης που στηρίζουν τη διάταξη των φυσικών αριθμών· στην περιοχή των πράξεων, βασιστήκαμε στα ευρήματα του Fischbein και των συνεργατών του (1985), οι οποίοι αναφέρονται στα πρωτόγονα διαισθητικά μοντέλα του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.3

Διαφορές ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς και τα κλάσματα

	ΦΥΣΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ←→	ΚΛΑΣΜΑ
♦ ΣΥΜΒΟΛΟ	Ένας αριθμός	Το σύμβολο του κλάσματος περιλαμβάνει δύο φυσικούς αριθμούς που τους χωρίζει μια γραμμή
♦ ΔΙΑΤΑΞΗ	Υποστηρίζεται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών (απαρίθμηση) Ύπαρξη επόμενου ή προηγούμενου αριθμού	Δεν υποστηρίζεται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών[63] Ανάμεσα σε δύο αριθμούς υπάρχει πάντα ένας άλλος αριθμός
♦ ΠΡΑΞΕΙΣ		
ΠΡΟΣΘΕΣΗ/ ΑΦΑΙΡΕΣΗ	Υποστηρίζεται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών.	Δεν υποστηρίζεται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών
ΠΟΛ/ΣΜΟΣ	Ο πολ/σμός μεγαλώνει τον αριθμό	Ο πολ/σμός μεγαλώνει ή μικραίνει τον αριθμό
ΔΙΑΙΡΕΣΗ	Η διαίρεση μικραίνει τον αριθμό	Η διαίρεση μικραίνει ή μεγαλώνει τον αριθμό

[63] Υποστηρίζεται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών μόνο στην περίπτωση των ομώνυμων κλασμάτων.

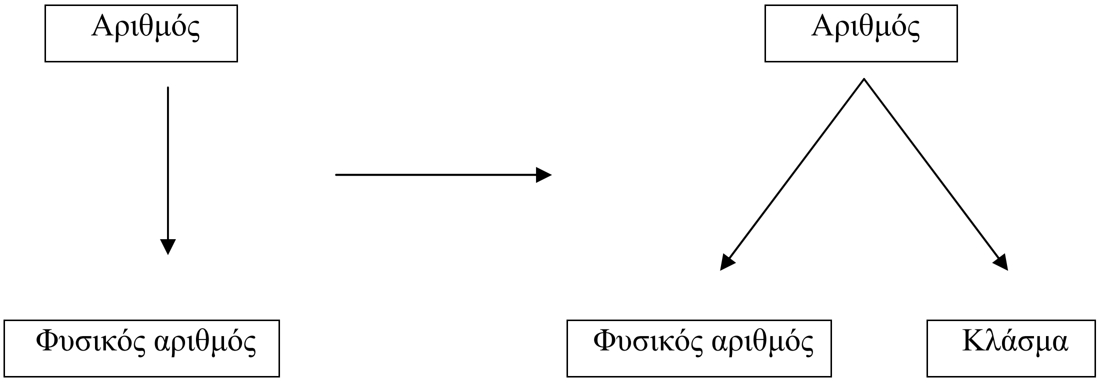
Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 1.3 τα στοιχεία που συγκροτούν την έννοια του κλάσματος στα παιδιά είναι διαφορετικά από αυτά που συγκροτούν την έννοια του φυσικού αριθμού.

1.4.2 Υποθέσεις της έρευνας

Υιοθετώντας το θεωρητικό πλαίσιο που θεωρεί καταστατική τη σημασία της προϋπάρχουσας γνώσης κατά την πρόσληψη νέων πληροφοριών, υποθέσαμε ότι η απόκτηση της έννοιας του κλάσματος από τα παιδιά απαιτεί αναδιοργάνωση της γνώσης τους για τους φυσικούς αριθμούς· απαιτεί δηλαδή εννοιολογική αλλαγή. Πιο συγκεκριμένα: βασική υπόθεση της έρευνάς μας είναι ότι στην πορεία απόκτησης της έννοιας του κλάσματος απαιτείται από τα παιδιά αναδιοργάνωση της θεωρίας που έχουν αναπτύξει για την έννοια του αριθμού και όχι απλώς εμπλουτισμός της προϋπάρχουσας γνώσης τους για τους φυσικούς αριθμούς με νέες πληροφορίες.

Το θέμα που ανακύπτει στο σημείο αυτό είναι αν η αναδιοργάνωση αυτή απαιτεί τη μετάβαση από μια θεωρία Α σε μια θεωρία Β ή επισυμβαίνει ως βαθμιαία εξέλιξη ανάλογα με το πόσες από τις προϋποθέσεις και πεποιθήσεις της αρχικής θεωρίας αναιρούνται από τα παιδιά, όταν έρχονται σε επαφή με τη νέα θεωρία. Ιδιαίτερα η Βοσνιάδου (1994, 1999, 2000), η οποία ασχολήθηκε με την αναδιοργάνωση της γνώσης των παιδιών στη περιοχή της αστρονομίας, υποστηρίζει ότι η κατάκτηση της επιστημονικής άποψης πραγματοποιείται όχι απλά μέσα από διαδικασίες προσθαφαίρεσης κάποιων εδραιωμένων πεποιθήσεων αλλά μέσα από μια αργή διαδικασία διαδοχικών τροποποιήσεων των αρχικών (διαισθητικών) νοητικών αναπαραστάσεων (από την εκ νέου δηλαδή οργάνωση του γνωστικού συστήματος), διαδικασία η οποία πραγματώνεται υπό την επίδραση του πολιτισμικού περιβάλλοντος και της διδασκαλίας στο σχολείο· σημαντικό δε σημείο της διερεύνησης της εννοιολογικής αλλαγής αποτελεί ο καθορισμός και η ανάλυση της προϋπάρχουσας σχετικής κάθε φορά γνώσης.

Βασική, λοιπόν, υπόθεση της εργασίας αυτής αποτελεί ότι τα παιδιά ταυτίζουν την έννοια του αριθμού με την έννοια του φυσικού αριθμού και ότι προκειμένου να αντικαταστήσουν τη θεωρία τους για τον αριθμό με μια νέα θεωρία υποθέτουμε ότι αναδιοργανώνουν τις ιδέες τους για την έννοια του φυσικού αριθμού. Η αναδιοργάνωση αυτή αφορά κυρίως την εκ μέρους των παιδιών αποδοχή ότι υπάρχουν και αριθμοί που δεν είναι φυσικοί (βλ. Διάγραμμα 1).



Διάγραμμα 1.1.

Όπως είναι γνωστό τα μαθηματικά αποτελούν ένα συμβολικό σύστημα, του οποίου η χρήση απαιτεί την κατανόηση συγκεκριμένων αντιστοιχιών ανάμεσα αφενός σε αντικείμενα ή γεγονότα του κόσμου και στα σύμβολα και τους κανόνες του αναπαραστασιακού αυτού συστήματος (Βοσνιάδου, 1995). Στην περίπτωση των κλασμάτων υποθέτουμε ότι οι αντιστοιχίες αυτές είναι περισσότερο πολύπλοκες καθώς, ανάμεσα στη συμβολική αναπαράσταση του φυσικού κόσμου και την συμβολική αναπαράσταση των κλασμάτων, μεσολαβεί το συμβολικό σύστημα των φυσικών αριθμών.

Βασικό δε ρόλο στην εκμάθηση εκ μέρους του παιδιού των αντιστοιχιών αυτών διαδραματίζει η ικανότητα αναλογικής σκέψης. Η απόκτηση της ικανότητας για αναλογική σκέψη εξαρτάται άμεσα από την ικανότητα αναγνώρισης αντιστοιχήσεων ανάμεσα στο αναπαραστασιακό σύστημα και στον φυσικό και κοινωνικό κόσμο. Επίσης άμεσα εξαρτάται και από την αναγνώριση αντιστοιχιών ανάμεσα σε διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα, κατά τη μεταφορά πληροφοριών από το ένα στο άλλο και κατά την αξιολόγηση της εφαρμοσιμότητας της μεταφερόμενης πληροφορίας για το αντίστοιχο σύστημα. Σύμφωνα με τα παραπάνω η αναλογική σκέψη διαδραματίζει έναν πολύ πιο σημαντικό ρόλο στην γνωστική ανάπτυξη του παιδιού από αυτόν που της αναγνώριζε η θεωρία του Piaget ή η θεωρία της επεξεργασίας των πληροφοριών (Βοσνιάδου, 1995).

Στην πρώτη εμπειρική μας έρευνα επιχειρήσαμε να ελέγξουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά κατά την αναγνώριση αντιστοιχήσεων από ένα αναπαραστασιακό σύστημα σε κάποιο άλλο. Στη δεύτερη έρευνα επιμείναμε στις έννοιες της διάταξης και των πράξεων με κλάσματα. Απώτερος στόχος τόσο της πρώτης αλλά κυρίως της δεύτερης εμπειρικής μας έρευνας ήταν, όπως έχουμε αναφέρει, να διερευνήσουμε τους μηχανισμούς με τους οποίους πραγματώνονται οι αλλαγές των σχετικών πεποιθήσεων των παιδιών.

Υποθέσαμε ότι οι αρχικές εννοιολογικές δομές (αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο) που κατασκευάζουν τα παιδιά για να ερμηνεύουν τις μαθηματικές εκφράσεις που περιλαμβάνουν κλάσματα υιοθετούν πολλές από τις πεποιθήσεις τους για τον φυσικό αριθμό. Οι πεποιθήσεις αυτές στην πορεία που τα παιδιά διανύουν για να προσεγγίσουν την επιστημονική θεώρηση του κλάσματος σταδιακά αντικαθίστανται· άρα η μετάβαση αυτή απαιτεί εννοιολογική αλλαγή, αναδιοργάνωση δηλαδή των δομών της γνώσης των παιδιών για την έννοια του αριθμού. Επίσης υποθέσαμε ότι υπάρχουν ενδιάμεσα επεξηγηματικά πλαίσια που υιοθετούν τα παιδιά σε αυτήν την πορεία, πλαίσια τα οποία και προσπαθήσαμε να διερευνήσουμε. Θεωρήσαμε ότι τα ενδιάμεσα αυτά επεξηγηματικά πλαίσια μπορούν να ερμηνευτούν ως προσπάθειες των παιδιών να συμβιβάσουν τις βασικές προϋποθέσεις της θεωρίας βάσης για τους φυσικούς αριθμούς με τις νέες πληροφορίες με τις οποίες έρχονται σε επαφή μέσα από την εκπαίδευση ή τον κοινωνικό τους περίγυρο. Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, επομένως, τα παιδιά είναι σε θέση να υιοθετήσουν το επιστημονικό επεξηγηματικό πλαίσιο όταν μπορέσουν να εγκαταλείψουν αυτές τις προϋποθέσεις που δρουν περιοριστικά στην αποδοχή της επιστημονικής άποψης (Vosniadou, 1994a).

Στα επόμενα δύο κεφάλαια παρουσιάζουμε τις δύο εμπειρικές έρευνες, τις οποίες διενεργήσαμε προκειμένου να ελέγξουμε τις βασικές αυτές υποθέσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΕΡΕΥΝΑ 1

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην πρώτη εμπειρική έρευνα εστιάζουμε την προσοχή μας στο σύμβολο του κλάσματος σε σχέση με φυσικές καταστάσεις που περιγράφουν λεκτικά ή εικονικά σχέσεις μέρους – όλου. Η διερεύνηση αυτή στοχεύει να διαλευκάνει την ικανότητα των παιδιών να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος στο πλαίσιο που τους διδάσκεται δηλαδή του κλάσματος ως μέρους μιας συνεχούς ποσότητας ή ενός συνόλου αντικειμένων.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην τελευταία ενότητα του πρώτου κεφαλαίου, υποθέτουμε ότι οι αρχικές εννοιολογικές δομές που κατασκευάζουν τα παιδιά για να ερμηνεύουν το σύμβολο του κλάσματος υιοθετούν πολλές από τις πεποιθήσεις τους για τον φυσικό αριθμό. Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι πεποιθήσεις αυτές στην πορεία που διανύουν τα παιδιά για να προσεγγίσουν την επιστημονική θεώρηση του κλάσματος σταδιακά αντικαθίστανται. Η μετάβαση δηλαδή αυτή απαιτεί εννοιολογική αλλαγή, (αναδιοργάνωση δηλαδή των δομών της γνώσης των παιδιών για την έννοια του αριθμού), αλλαγή την οποία θα διερευνήσουμε μέσα από τις παρανοήσεις που εκφράζουν τα παιδιά.

Από την ανασκόπηση των δεδομένων διάφορων εμπειρικών ερευνών που εστιάζονται στην έννοια του κλάσματος προκύπτει ότι τα παιδιά αντιμετωπίζουν προβλήματα στην απόκτηση της επιστημονικής γνώσης του κλάσματος. Πολλοί ερευνητές, οι οποίοι έχουν ασχοληθεί με τη μάθηση μαθηματικών εννοιών θεωρούν ότι τα προβλήματα που έχουν τα παιδιά προκαλούνται είτε από αδυναμία τους να αναγνωρίσουν ομοιότητες ανάμεσα σε δύο αναπαραστασιακά συστήματα είτε από την αποτυχία τους να μεταφέρουν πληροφορίες από το ένα σύστημα στο άλλο (για παράδειγμα, βλ. Resnick, 1987, 1989, 1995· Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson και Peled, 1989).

Σε αυτήν την έρευνα προσπαθούμε να ελέγξουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά κατά την αναγνώριση αντιστοιχήσεων από ένα αναπαραστασιακό σύστημα σε κάποιο άλλο. Δώσαμε στα υποκείμενα ερωτήσεις οι οποίες σχετίζονται με το σύμβολο του κλάσματος και τους ζητήσαμε να απαντήσουν με αριθμητικά σύμβολα ή με ζωγραφιές. Συγκεκριμένα ζητήθηκε από τα παιδιά να αντιστοιχίσουν αριθμητικές αναπαραστάσεις κλασμάτων σε γλωσσικές ή εικονικές και το αντίστροφο. Συνεπώς το βασικό σημείο στο οποίο βασίστηκε ο σχεδιασμός της παρούσης έρευνας είναι η διερεύνηση της κατανόησης από την πλευρά των παιδιών της έννοιας του κλάσματος μέσα από τη διερεύνηση καταστάσεων που αφορούν το σύμβολό του. Συγκεκριμένα αυτό το ερωτηματολόγιο περιελάμβανε 18 ερωτήσεις οι οποίες είχαν ως στόχο να διερευνήσουν τις ιδέες των παιδιών για το σύμβολο ενός κλάσματος. Από τα παιδιά ζητείται να ερμηνεύσουν το σύμβολο ενός κλάσματος γλωσσικά και εικονικά (ζωγραφίζοντας δηλαδή κάτι που πιστεύουν ότι αναπαριστά ένα κλάσμα).

Ακόμη, στις ερωτήσεις χρησιμοποιούνται κλάσματα που έχουν είτε πολύ μικρούς μονοψήφιους αριθμούς, είτε διψήφιους ως αριθμητές και παρονομαστές. Η μεταβλητή των *μικρών* ή *μεγάλων* αριθμών χρησιμοποιήθηκε στο σχεδιασμό της έρευνας ώστε να αποκαλύψει τους διαφορετικούς τρόπους αντιμετώπισης του κλάσματος από τα παιδιά σε ιδίου τύπου έργα τα οποία διαφέρουν μόνο ως προς το μέγεθος των αριθμητών και των παρονομαστών των κλασμάτων που περιλαμβάνουν.

ΣΥΜΒΟΛΟ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		
Σύμβολο → Φυσική Κατ.	Φυσική Κατ. → Σύμβολο	Αριθμητική Αξία Κλάσματος
Λεκτική Περιγραφή Φυσικής Κατάστασης που αντιστοιχεί στο Σύμβολο Εικονική Περιγραφή Φυσικής Κατάστασης που αντιστοιχεί στο Σύμβολο	Σύμβολο που αντιστοιχεί σε Λεκτική Περιγραφή Φυσικής Κατάστασης Σύμβολο που αντιστοιχεί σε Εικονική Περιγραφή Φυσικής Κατάστασης	Σύμβολο που αντιστοιχεί σε Λεκτική Περιγραφή Φυσικής Κατάστασης (απλά – σύνθετα) Σύμβολο που αντιστοιχεί σε Εικονική Περιγραφή Φυσικής Κατάστασης (απλά – σύνθετα)

<u>Διάγραμμα 2.1</u>: Σχεδιασμός του ερωτηματολογίου της Έρευνας 1

Τα έργα που περιλαμβάνονται στο ερωτηματολόγιο στοχεύουν στη διερεύνηση των αναπαραστάσεων των παιδιών για το σύμβολο του κλάσματος. Διακρίνουμε τρεις ομάδες ερωτήσεων σε σχέση με το ζητούμενο στις ερωτήσεις που θέτουμε στα παιδιά (βλέπε, Διάγραμμα 2.1).

Στην πρώτη ομάδα ερωτήσεων δίνεται στα παιδιά το σύμβολο ενός κλάσματος και τους ζητείται να το ορίσουν και να το αντιστοιχίσουν σε μια λεκτική ή εικονική περιγραφή μιας κατάστασης. Στη δεύτερη ομάδα τους ζητείται η αντίστροφη διαδικασία, δίνεται δηλαδή στα παιδιά η περιγραφή μιας κατάστασης λεκτικά ή εικονικά και τους ζητείται το σύμβολο του κλάσματος που αναπαριστά η κατάσταση. Στην τρίτη ομάδα τους ζητείται να ορίσουν την αριθμητική αξία που αντιπροσωπεύει ένα δεδομένο κλάσμα ως προς μια δεδομένη μονάδα αναφοράς, η οποία άλλοτε περιγράφεται λεκτικά και άλλοτε εικονικά. Όπως θα περιγράψουμε παρακάτω, στην τρίτη ομάδα ερωτήσεων χρησιμοποιήσαμε και ακόμη μια μεταβλητή, πέρα από τη μεταβλητή των *μικρών* ή *μεγάλων* αριθμών των κλασμάτων που χρησιμοποιήσαμε και στις δύο πρώτες ομάδες. Η μεταβλητή αυτή έχει να κάνει με την *απλή* ή *σύνθετη* αντιστοιχία του κλάσματος που δίνεται στα παιδιά σε σχέση με τον αριθμό των μερών στα οποία είναι χωρισμένη η μονάδα αναφοράς (ή των στοιχείων που απαρτίζουν το σύνολο που αποτελεί τη μονάδα αναφοράς.)

2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ

Στη συνέχεια γίνεται μια αναλυτική έκθεση του δείγματος της έρευνας, των υλικών που χρησιμοποιήσαμε, της διαδικασίας που ακολουθήσαμε καθώς επίσης και της διαδικασίας βαθμολόγησης των δεδομένων της έρευνας.

2.2.1. Υποκείμενα

Τα υποκείμενα της Έρευνας 1 ήταν 75 συνολικά παιδιά τα οποία κατανέμονται ως εξής: 25 παιδιά της τετάρτης τάξης του Δημοτικού σχολείου ηλικίας, από 9 χρόνων έως 9 χρόνων και 11 μηνών (μέσος όρος ηλικίας 9 χρόνια και 5 μήνες περίπου)· 25 παιδιά της έκτης τάξης του Δημοτικού σχολείου ηλικίας, από 10 χρόνων και 11 μηνών έως 11 χρόνων και 10 μηνών (μέσος όρος ηλικίας 11 χρόνια και 5 μήνες περίπου) και 25 παιδιά της δεύτερης τάξης του Γυμνασίου, ηλικίας από 12 χρόνων και 11 μηνών έως 13 χρόνων και 10 μηνών (μέσος όρος ηλικίας 13 χρόνια και 5 μήνες περίπου). Τα σχολεία στα οποία πραγματοποιήθηκε η έρευνα ήταν το $1^{ο}$, το $4^{ο}$ και το $20^{ο}$ Δημοτικό σχολείο του Δήμου Καλαμαριάς της Θεσσαλονίκης καθώς επίσης το $14^{ο}$ και $19^{ο}$ Γυμνάσιο Θεσσαλονίκης.

Ως μικρότερη ηλικιακή ομάδα επιλέχθηκε η τετάρτη Δημοτικού διότι επιδίωξή μας ήταν τα υποκείμενά μας να απαντούν στις ερωτήσεις αυτού του ερωτηματολόγιου όχι μόνο με βάση αυτά που έχουν διδαχθεί αλλά με βάση τις διαισθητικές ιδέες τους για το σύμβολο του κλάσματος πριν την έναρξη της διδασκαλίας. Η μεγαλύτερη ηλικιακή ομάδα περιλαμβάνει μαθητές της δευτέρας Γυμνασίου στην τάξη κατά την οποία ολοκληρώνεται η διδασκαλία των ρητών αριθμών. Οπότε οι ηλικιακές ομάδες της έρευνας κατανέμονται από ομάδες αρχαρίων έως ομάδες παιδιών που έχουν ολοκληρώσει τη διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος όπως επίσης και εννοιών που έχουν άμεση σχέση με αυτήν όπως των ανάλογων ποσών και των ρητών αριθμών.

2.2.2 Υλικά (Σχεδιασμός ερωτηματολογίου)

Η έρευνα 1 περιελάμβανε ένα γραπτό ερωτηματολόγιο (βλέπε, Παράρτημα 1) με κεντρικό θέμα το σύμβολο του κλάσματος. Όπως φάνηκε στο Διάγραμμα 2.1, ταξινομήσαμε τις ερωτήσεις του ερωτηματολόγιου αυτού σε τρεις ομάδες τις οποίες θα περιγράψουμε στη συνέχεια. Υποθέσαμε ότι οι απαντήσεις των παιδιών θα μπορούσαν να μας δείξουν πώς η κατανόηση ενός κλάσματος από τα παιδιά, περιορίζεται από τους τρόπους με τους οποίους αυτά ερμηνεύουν ένα κλάσμα ως μέρος μιας μονάδας.

Ομάδα 1: Πως τα παιδιά ερμηνεύουν το σύμβολο ενός κλάσματος;

Στις ερωτήσεις αυτής της ομάδας ζητήθηκε από τα παιδιά να ερμηνεύσουν το σύμβολο ενός κλάσματος γλωσσικά (δηλαδή να το ορίσουν) και εικονικά, ζωγραφίζοντας κάτι που πιστεύουν ότι αναπαριστά ένα κλάσμα. Οι ερωτήσεις αυτές ταξινομήθηκαν σε γλωσσικές ή εικονικές με τη μεταβλητή του μεγέθους των αριθμών που περιέχουν τα κλάσματα που δίνονται στα παιδιά (βλ. Διάγραμμα 2.2).

ΣΥΜΒΟΛΟ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

	Γλωσσική Περιγραφή Φυσικής Κατάστασης	Εικονική Περιγραφή Φυσικής Κατάστασης
Μικροί αριθμοί:	ερ. 1: Τι είναι το 2/3; ερ. 2: Τι σημαίνει το 2/3;	ερ. 3: Ζωγράφισε κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το 2/3.
Μεγάλοι αριθμοί:	ερ. 4: Τι είναι το 12/15; ερ. 5: Τι σημαίνει το 12/15;	ερ.6: Ζωγράφισε κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το 12/15.

Διάγραμμα 2.2: Οι ερωτήσεις και οι κατηγορίες των ερωτήσεων της πρώτης ομάδας ερωτήσεων

Οι *Γλωσσικές Περιγραφές ενός Συμβόλου («Ανοικτές» ερωτήσεις)* -ερωτήσεις 1, 2, 4, και 5- έχουν εισαγωγικό χαρακτήρα (βλ. Διάγραμμα 2.2). Δίνεται στα παιδιά το σύμβολο ενός κλάσματος και τους ζητείται να γράψουν τι είναι αυτό το σύμβολο και τι σημαίνει. Τις ονομάζουμε «ανοικτές» διότι δεν υπάρχει κάποιο συγκεκριμένο πλαίσιο μέσα στο οποίο οφείλουν τα παιδιά να ορίσουν αυτό το σύμβολο. Αυτές οι ερωτήσεις μας δίνουν κάποιες ιδέες για το πώς ονομάζουν και ορίζουν τα παιδιά το σύμβολο ενός κλάσματος και συγχρόνως μας φανερώνουν κατά πόσο παραμένουν σταθερά στον τρόπο που ερμηνεύουν αυτό το σύμβολο και στα υπόλοιπα έργα.

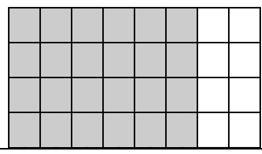
Στις *Εικονικές Περιγραφές* -ερωτήσεις 3 και 6- ζητείται από τα παιδιά να μεταφράσουν το σύμβολο ενός κλάσματος που τους δίνεται, σε μια εικονική αναπαράσταση μιας κατάστασης (βλ. Διάγραμμα 2.2). Στα σχολικά εγχειρίδια το κλάσμα εισάγεται με εικονικές αναπαραστάσεις σχημάτων διαιρημένων σε τόσα ίσα μέρη όσος ο παρονομαστής του κλάσματος, ενώ είναι διαφορετικά χρωματισμένα ή σκιαγραφημένα τόσα μέρη όσος ο αριθμητής του κλάσματος. Οι εικονικές αναπαραστάσεις των παιδιών είναι οι προσπάθειές τους να ζωγραφίσουν κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το σύμβολο ενός κλάσματος στην κάθε περίπτωση.

Ομάδα 2: Αντιστοιχία μιας δεδομένης κατάστασης σε σύμβολο κλάσματος

Μέσα από τις ερωτήσεις αυτής της ομάδας τα παιδιά καλούνται να κάνουν την αντίστροφη μετάφραση απ’ ό,τι στην προηγούμενη. Τους δίνεται δηλαδή η περιγραφή μιας κατάστασης που περιγράφει ένα κλάσμα λεκτικά ή εικονικά και τους ζητείται να αντιστοιχίσουν σε αυτήν το σύμβολο ενός κλάσματος. Στο Διάγραμμα 2.3 περιγράφονται οι κατηγορίες στις οποίες διακρίνονται οι ερωτήσεις αυτής της ομάδας:

Στις γλωσσικές περιγραφές δίνεται στα παιδιά ένα κλάσμα «μικρό» ή «μεγάλο», όπως επίσης και μια κατάσταση που περιγράφει λεκτικά την μονάδα στην οποία αναφέρεται το συγκεκριμένο κλάσμα (ερωτήσεις 7 και 9 – βλ. Διάγραμμα 2.3). Οι λεκτικές περιγραφές περιγράφουν έναν μερισμό.

Στις *εικονικές αναπαραστάσεις* δίνονται στα παιδιά σε μορφή ενός σχήματος ή ενός συνόλου αντικειμένων (για παράδειγμα κύκλοι) και τους ζητείται το σύμβολο του κλάσματος που αναπαριστά τι μέρος του σχήματος είναι σκιαγραφημένο ή τι μέρος του συνόλου των αντικειμένων είναι σκιαγραφημένα διαφορετικά (ερωτήσεις 8 και 10 -βλ. Διάγραμμα 2.3). Η μεταβλητή που χρησιμοποιείται εδώ είναι του διακεκριμένου ή μη διακεκριμένου συνόλου αντικειμένων.

	Γλωσσική Περιγραφή ενός μερισμού	Εικονική Περιγραφή ενός μερισμού
Μικροί αριθμοί:	ερ. 7: Τρεις φίλοι μοιράζονται εξίσου δύο σοκολάτες. Γράψε τι μέρος από τις σοκολάτες θα πάρει ο καθένας τους.	ερ. 8: Γράψε ένα κλάσμα που να φανερώνει τι μέρος από τις παρακάτω σφαίρες είναι χρωματισμένες. ●●●●○
Μεγάλοι αριθμοί:	ερ. 9: Σε μια τάξη με 24 παιδιά θέλουν να μοιράσουν ένα κιβώτιο με 16 πορτοκαλάδες. Τι μέρος των πορτοκαλάδων θα πάρει ο κάθε μαθητής;	ερ. 10: Γράψε ένα κλάσμα που να φανερώνει τι μέρος από το παρακάτω σχήμα είναι χρωματισμένο. 

ΣΥΜΒΟΛΟ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

Διάγραμμα 2.3: Οι ερωτήσεις και οι κατηγορίες των ερωτήσεων της δεύτερης ομάδας ερωτήσεων

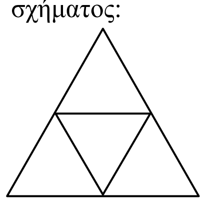
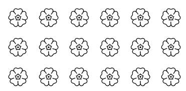
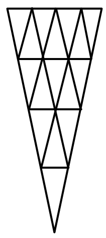
<u>Ομάδα 3</u>: Αριθμητική αξία ενός κλάσματος (Αντιστοιχία του συμβόλου ενός κλάσματος σε μια δεδομένης κατάστασης μέρους – όλου)

Στις ερωτήσεις των προηγούμενων ομάδων ερωτήσεων ζητούσαμε από τους μαθητές να επινοήσουν είτε μια κατάσταση που αναπαριστούσε ένα δεδομένο σύμβολο του κλάσματος, είτε το σύμβολο ενός κλάσματος που αντιστοιχούσε σε μια δεδομένη κατάσταση (λεκτικά ή εικονικά). Με αυτήν την ομάδα ερωτήσεων προσπαθήσαμε να διερευνήσουμε την αριθμητική αξία που θεωρούν οι μαθητές ότι αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα όταν αυτό αναπαριστά το μέρος μιας μονάδας ή ενός συνόλου αντικειμένων.

Στις ερωτήσεις αυτής της ομάδας δίνεται ένα κλάσμα «μικρό» ή «μεγάλο» το οποίο αναπαριστά το μέρος μιας μονάδας καθώς επίσης και μια κατάσταση που περιγράφει λεκτικά ή εικονικά την μονάδα στην οποία αναφέρεται το συγκεκριμένο κλάσμα. Από τα παιδιά ζητείται ο απόλυτος αριθμός που αντιπροσωπεύει τα μέρη της μονάδας που αναπαριστά το κλάσμα ή στην περίπτωση της εικονικής αναπαράστασης της μονάδας, ζητείται να σκιαγραφήσουν τόσα μέρη όσα αναπαριστά το κλάσμα. Από τις απαντήσεις των παιδιών μπορούμε να δούμε αν αυτά αναγνωρίζουν την ποσότητα που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα. Οι ερωτήσεις αυτής της ομάδας διακρίνονται σε κατηγορίες όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 2.4 στην επόμενη σελίδα.

Οι ερωτήσεις 11, 13, 15 και 17 είναι *Λεκτικές Περιγραφές* (απλά λεκτικά προβλήματα) μιας κατάστασης (βλ. Διάγραμμα 2.4). Τα κλάσματα που περιλαμβάνουν αντιστοιχούν στα μέρη μιας μονάδας αναφοράς. Το σύνολο που αποτελεί τη μονάδα στην οποία αναφέρεται το κλάσμα περιγράφεται λεκτικά και ακόμη δίνεται ο αριθμός των στοιχείων που το απαρτίζουν. Από τα παιδιά ζητείται να προσδιοριστεί ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου τα οποία αναπαριστά το κλάσμα.

Στις *Εικονικές Περιγραφές* αυτής της ομάδας είτε δίνεται ένα σχήμα το οποίο είναι διαιρημένο σε ίσα μέρη (στις ερωτήσεις 12 και 16), είτε ένα σύνολο ομοειδών σχημάτων (στις ερωτήσεις 14 και 18) και ζητείται από τα παιδιά να χρωματίσουν τόσα μέρη ή τόσα σχήματα, όσα αναπαριστά το μέρος που αντιπροσωπεύει το δεδομένο κλάσμα. Οι καταστάσεις εδώ είναι παρόμοιες με αυτές της προηγούμενης υποκατηγορίας με διαφορά στον τρόπο που περιγράφεται η μονάδα στην οποία αναφέρεται το κλάσμα (λεκτικά ή εικονικά) (βλ. Διάγραμμα 2.4).

	Αριθμητική αξία ενός κλάσματος που αντιστοιχεί			
	απλά	σύνθετα	απλά	σύνθετα
	σε δεδομένη			
	Λεκτική Περιγραφή Φυσικής Κατάστασης		Εικονική Περιγραφή Φυσικής Κατάστασης	
Μικροί αριθμοί:	Ερώτηση 11: Ένα πακέτο περιέχει 4 σοκολάτες. Πόσες σοκολάτες είναι τα 3/4 του πακέτου;	Ερώτηση 13: Το πάτωμα ενός δωματίου έχει 15 πλακάκια. Από πόσα πλακάκια αποτελούνται τα 4/5 του πατώματος του δωματίου;	Ερώτηση 12: Χρωμάτισε τα 3/4 του παρακάτω σχήματος: 	Ερώτηση 14: Χρωμάτισε τα 2/3 του συνόλου των λουλουδιών της παρακάτω εικόνας. 
Μεγάλοι αριθμοί:	Ερώτηση 15: Μια εταιρία έχει 16 υπαλλήλους. Αν μια μέρα απουσίαζαν τα 12/16 αυτών, πόσοι υπάλληλοι απουσίαζαν;	Ερώτηση 17: Ένα κουτί περιέχει 30 μολύβια. Πόσα μολύβια είναι τα 12/15 του κουτιού;	Ερώτηση 16: Χρωμάτισε τα 12/16 του παρακάτω σχήματος: 	Ερώτηση 18: Χρωμάτισε τα 10/12 του συνόλου των τετραγώνων στην παρακάτω εικόνα.

Διάγραμμα 2.4: Οι ερωτήσεις και οι κατηγορίες των ερωτήσεων της τρίτης ομάδας ερωτήσεων.

Όπως και στις προηγούμενες ομάδες ερωτήσεων δίνονται στα παιδιά ιδίου τύπου ερωτήσεις που διαφέρουν στο μέγεθος των αριθμητών και παρονομαστών των κλασμάτων που περιλαμβάνουν (η μεταβλητή των *Μικρών ή Μεγάλων αριθμών*), ώστε να διερευνηθεί αν ο παράγοντας αυτός επηρεάζει τις απαντήσεις των παιδιών. Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 2.4, οι ερωτήσεις 11, 13 (λεκτικές περιγραφές) και οι 12 και 14 (εικονικές περιγραφές) περιέχουν κλάσματα με *μικρούς* αριθμητές και παρονομαστές (μονοψήφιους αριθμούς), ενώ οι ερωτήσεις 15 και 17 (λεκτικές περιγραφές) και οι 16 και 18 (εικονικές περιγραφές) περιέχουν κλάσματα με *μεγάλους* αριθμητές και παρονομαστές (διψήφιους αριθμούς).

Στις ερωτήσεις αυτής της ομάδας χρησιμοποιήσαμε και μια ακόμη μεταβλητή η οποία σχετίζεται με την αντιστοιχία των αριθμών που απαρτίζουν τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος και στη μονάδα στην οποία αυτά αναφέρονται. Στις λεκτικές περιγραφές μιας κατάστασης, ο παρονομαστής του κλάσματος που περιλαμβάνεται άλλοτε είναι ίσος με τον αριθμό των στοιχείων του συνόλου που αποτελεί την μονάδα στην οποία αναφέρεται το κλάσμα (*απλή αντιστοιχία*- ερωτήσεις 11 και 15) ενώ άλλοτε δεν είναι (*σύνθετη αντιστοιχία* - ερωτήσεις 13 και 17). Το ίδιο συμβαίνει και στις ερωτήσεις όπου η μονάδα στην οποία αναφέρεται το κλάσμα δίνεται εικονικά με ένα σχήμα διαιρημένο σε ίσα μέρη ή με ένα σύνολο ίδιων σχημάτων. Ο παρονομαστής του κλάσματος άλλοτε είναι ίσος με τα μέρη στα οποία είναι διαιρημένο το σχήμα ή με τον αριθμό των ίδιων σχημάτων (απλή αντιστοιχία - ερωτήσεις 12 και 16) ενώ άλλοτε δεν είναι (*σύνθετη αντιστοιχία* - ερωτήσεις 14 και 18).

Η μεταβλητή της απλής ή σύνθετης αντιστοιχίας του κλάσματος προς τη μονάδα στην οποία αναφέρεται χρησιμοποιήθηκε στον σχεδιασμό της έρευνας ώστε να διερευνηθεί αν επηρεάζονται οι απαντήσεις των παιδιών σε ίδιου τύπου έργα που διαφέρουν μόνο ως προς αυτήν τη μεταβλητή.

2.2.3. Διαδικασία

Το ερωτηματολόγιο της έρευνας δόθηκε στα παιδιά στο περιβάλλον της τάξης του σχολείου τους. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες δέκα παιδιών ώστε να καταστεί δυνατό το κάθε παιδί να επεξεργαστεί από μόνο του το ερωτηματολόγιο.

Σε κάθε ομάδα παιδιών η ερευνήτρια συστήθηκε και ανέφερε τους λόγους για τους οποίους πραγματοποιείται η συγκεκριμένη έρευνα, ότι δηλαδή πραγματοποιείται στο πλαίσιο της διατριβής της, και διερευνά τις ιδέες τους στο χώρο των μαθηματικών. Επισήμανε ότι οι ερωτήσεις δεν έχουν άμεση σχέση με το πρόγραμμα που ακολουθούν στα μαθηματικά την συγκεκριμένη εκείνη περίοδο στο σχολείο, ενώ τόνισε ιδιαίτερα ότι η επίδοσή τους σε αυτό το γραπτό ερωτηματολόγιο δεν θα επηρεάσει τον βαθμό προόδου τους. Στην συνέχεια δόθηκαν στα παιδιά εξηγήσεις για το πως θα συμπληρώσουν τα στοιχεία τους στο πάνω μέρος του ερωτηματολογίου και τους ζητήθηκε να διαβάσουν τις οδηγίες με προσοχή και να απαντούν την κάθε ερώτηση με τη σειρά που είχε στο ερωτηματολόγιο.

Ο χρόνος διάρκειας των γραπτών ερωτηματολογίων ήταν μια διδακτική ώρα. Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας απάντησης των ερωτήσεων ακολούθησε μια ανοικτή συζήτηση με τα παιδιά κάθε ομάδας όπου συζητήθηκαν τα τυχόν προβλήματα που τους δημιουργήθηκαν κατά την απάντηση των ερωτήσεων και ένας γενικός σχολιασμός του ερωτηματολογίου.

2.2.4. Βαθμολόγηση

Η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας ακολούθησε την ποιοτική μέθοδο ανάλυσης που χρησιμοποιεί η Βοσνιάδου στις έρευνες που έχει πραγματοποιήσει για τα φυσικά φαινόμενα (βλ. Βοσνιάδου, 1995). Το κριτήριο βαθμολόγησης δεν ήταν οι σωστές ή λανθασμένες απαντήσεις των παιδιών αλλά οι διαφορετικοί τρόποι που επινοούσαν τα παιδιά για να απαντήσουν ή οι διαδικασίες που ακολουθούσαν ώστε να δώσουν μια σωστή ή λανθασμένη απάντηση.

Σύμφωνα με αυτήν τη διαδικασία τα υποκείμενα της έρευνάς μας κωδικοποιήθηκαν ανάλογα με την ηλικία, το φύλο, την τάξη και το σχολείο που παρακολουθούσαν. Την πρώτη φάση βαθμολόγησης των αποτελεσμάτων αποτέλεσε η δημιουργία πρωτοκόλλων απαντήσεων. Επιλέχθηκαν δέκα παιδιά κάθε ηλικιακής ομάδας για το κάθε ερωτηματολόγιο και καταγράφηκαν όλες οι απαντήσεις των παιδιών. Η επιλογή των παιδιών ήταν αντιπροσωπευτική με βάση το φύλο και το σχολείο που παρακολουθούσαν. Με την παραπάνω διαδικασία κατάστρωσης των πρωτοκόλλων δημιουργήθηκε για την κάθε ερώτηση μια συλλογή πιθανών απαντήσεων ή διαδικασιών που ακολουθούσαν τα παιδιά. Οι απαντήσεις αυτές ταξινομήθηκαν σε απλές κατηγορίες (βαθμολόγηση στο επίπεδο ερώτησης - ΚΕΕ), και το κάθε υποκείμενο της έρευνας εντάχθηκε σε μια από αυτές. Στη συνέχεια σε ένα δεύτερο επίπεδο βαθμολόγησης, ανάλογα με τον διαφορετικό συνδυασμό απαντήσεων των παιδιών σε κάθε ομάδα ερωτήσεων, τα παιδιά εντάχθηκαν σε διαφορετικές κατηγορίες (βαθμολόγηση στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων - ΚΕΟΕ).

Στην συνέχεια και αφού τα παιδιά εντάχθηκαν σε μια σύνθετη κατηγορία ανάλογα με τον συνδυασμό απαντήσεων στην κάθε ομάδα ερωτήσεων, εξετάστηκε ο συνολικός τρόπος που τα παιδιά αντιλαμβάνονται την έννοια του κλάσματος σύμφωνα με τις διαφορετικές κατηγορίες στην κάθε ενότητα και προέκυψαν οι διαφορετικές ερμηνείες που διαθέτουν για την έννοια του κλάσματος και ιδιαίτερα για το αριθμητικό της σύμβολο .

2.3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στις προηγούμενες παραγράφους περιγράψαμε το ερωτηματολόγιο της Έρευνας 1 καθώς επίσης και τη διαδικασία εκτέλεσης και βαθμολόγησης των απαντήσεων των μαθητών του δείγματός μας. Σε αυτήν την παράγραφο θα περιγράψουμε τη διαδικασία που ακολουθήσαμε κατά την ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας. Όπως έχουμε αναφέρει κατά την ανάλυση αυτή χρησιμοποιούμε δύο επίπεδα βαθμολόγησης. Στο πρώτο επίπεδο το οποίο περιλαμβάνει βαθμολόγηση των απαντήσεων ανά ερώτηση, οι απαντήσεις των παιδιών ομαδοποιούνται σε κατηγορίες ενώ στο δεύτερο επίπεδο βαθμολόγησης ανά ομάδα ερωτήσεων αναδεικνύονται οι κατηγορίες απάντησης στις ερωτήσεις κάθε ομάδας. Συνεπώς κάθε παιδί ταξινομείται σε μια από τις κατηγορίες αυτές. Στο τέλος καταγράφοντας τους συνδυασμούς απάντησης των παιδιών στο σύνολο των ομάδων ερωτήσεων, προσπαθούμε να δούμε αν από αυτούς τους συνδυασμούς διαφαίνεται κάποια συνέπεια στις ιδέες των παιδιών. Πρόκειται λοιπόν για μια αφαιρετική διαδικασία την οποία πραγματοποιούμε προσπαθώντας να προσεγγίσουμε τις ιδέες και τις πεποιθήσεις των παιδιών σε σχέση με τα υπό διερεύνηση θέματα.

2.3.1 Πως τα παιδιά ερμηνεύουν το σύμβολο ενός κλάσματος;

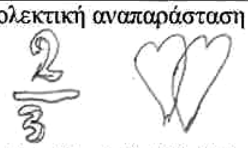
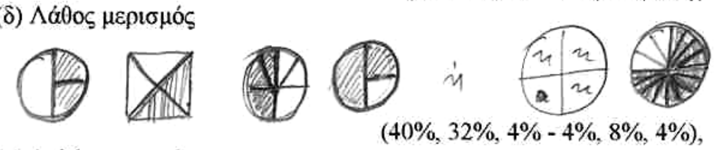
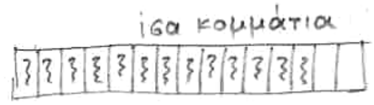
Η πρώτη ομάδα ερωτήσεων περιλαμβάνει τις έξι πρώτες ερωτήσεις του ερωτηματολογίου. Στις ερωτήσεις αυτές δίνεται στα παιδιά το σύμβολο ενός κλάσματος και τους ζητείται να το ορίσουν και να το αντιστοιχίσουν σε μια λεκτική ή εικονική περιγραφή μιας κατάστασης.

2.3.1i) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ)

Όπως αναφέραμε στην περιγραφή της διαδικασίας βαθμολόγησης οι απαντήσεις των παιδιών βαθμολογήθηκαν αρχικά σε κατηγορίες απάντησης στο επίπεδο της ερώτησης. Για την πρώτη ομάδα ερωτήσεων στον Πίνακα 2.1Α παρουσιάζονται οι διαφορετικές κατηγορίες βαθμολόγησης ανά ερώτηση, που προέκυψαν από τις απαντήσεις των παιδιών καθώς επίσης και η ποσοστιαία αναλογία επί τοις εκατό στις τρεις ηλικιακές ομάδες των 75 μαθητών του δείγματός μας.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1Α

Βασικές κατηγορίες βαθμολόγησης απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ) στις ερωτήσεις της Ομάδας 1: Πως τα παιδιά ερμηνεύουν το σύμβολο ενός κλάσματος γλωσσικά και εικονικά.

Ερωτήσεις	Απαντήσεις παιδιών (βαθμολόγηση βασικών κατηγοριών)
Ερωτήσεις 1 ή 4 : Τι είναι το 2/3 ή το 12/15;	(α) Άσχετη απάντηση (12%, 0%, 0% - 8%, 0%, 0%)[1], (β) όπως προφορικά, μη επεξηγηματική (20%, 4%, 0% - 12%,4%,0%), (γ) Ασαφώς μέρος (το 2/3 είναι ένα μέρος) (4%,0%,0% -8%,0%,0%), (δ) Λάθος μέρος (το μισό του δύο) (4%, 0%, 0% - 8%, 0%, 0%), (ε) Απλός μερισμός (12%, 0%, 0% 12%, 0%, 0%), (στ) Ισομερισμός (0%, 0%, 0% - 0%, 0%, 0%), (ζ) Διαίρεση (4%, 8%, 4% - 4%, 8%, 4%, (η) Αριθμός – κλάσμα (16%, 84%, 96% - 12%, 84%, 96%), (θ) Δεν ξέρω/ θυμάμαι (28%, 4%, 0% - 36%, 4%, 0%)
Ερωτήσεις 2 ή 5: Τι σημαίνει το 2/3 ή το 12/15;	(α) Άσχετη απάντηση (8%, 0%, 0% - 8%, 0%, 0%), (β)Μη επεξηγηματική απάντηση (8%, 0%, 0% - 4%, 0%, 0%), (γ) Ασαφώς κάποιο μέρος (0%, 4%, 0% - 0%, 8%, 0%), (δ) Λάθος μέρος (20%, 4%, 0% - 8%, 0%, 0%), (ε) Απλός μερισμός (32%, 52%, 68% - 40%, 48%, 64%), (στ) Ισομερισμός (0%, 32%, 24% - 4%, 28%, 28%), (ζ) Διαίρεση (0%, 0%, 8% - 0%, 0%, 8%), η) Αριθμός ή κλάσμα (4%, 0%, 0% - 0%, 0%, 0%), (θ) Δεν ξέρω/ Δεν θυμάμαι (28%, 8%, 0% - 36%, 16%, 0%)
Ερωτήσεις 3 ή 6: Ζωγράφισε κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το 2/3 ή 12/15.	(α) Άσχετη ζωγραφιά (β) Κυριολεκτική αναπαράσταση   (24%, 0%, 0% - 20%, 4%, 0%), (4%, 0%, 0% - 0%, 0%, 0%), (γ) Ασαφώς μέρος  (8%, 0%, 0% - 8%, 4%, 0%), (δ) Λάθος μερισμός  (40%, 32%, 4% - 4%, 8%, 4%), (ε) Απλός μερισμός   (12%, 28%, 32% - 28%, 40%, 32%), (στ) Ισομερισμός   (12%, 40%, 64% - 16%, 44%, 64%), (θ) Καμία απάντηση – Δεν ξέρω (0%, 0%, 0% - (12%, 0%, 0%)

[1] Ποσοστιαία αναλογία επί τοις εκατό στις τρεις ηλικιακές ομάδες επί συνόλου μαθητών N=75 για τις δύο ερωτήσεις αντίστοιχα.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.1Α στις ανοικτές ερωτήσεις 1 και 4 οι μαθητές του δείγματός μας είτε δεν αναγνωρίζουν το σύμβολο του κλάσματος και απαντούν όπως για παράδειγμα ο μαθητής της τετάρτης δημοτικού (υποκ. #12) "είναι η πρώτη δύο αριθμοί του τρία", είτε αναφέρουν ότι είναι για παράδειγμα το *δύο τρίτα* (όπως προφορικά -κατηγορία β), είτε απαντούν ότι είναι ένα μέρος χωρίς να δίνουν περαιτέρω εξηγήσεις –κατηγορία γ. Ακόμη υπήρχαν μαθητές που οι απαντήσεις τους δήλωναν ότι ένα κλάσμα είναι ένα μέρος από κάτι λανθασμένα. Για παράδειγμα για το κλάσμα 12/15 η μαθήτρια της τετάρτης δημοτικού (υποκ. #18) αναφέρει "είναι το μισό του δύο" (κατηγορία δ). Οι μαθητές που απάντησαν ότι το σύμβολο 2/3 ή το 12/15 είναι ένα μέρος, όπως για παράδειγμα η μαθήτρια της τετάρτης τάξης (υποκ. #24) που απαντά για το 2/3: "Είναι τα 2/3 μιας τούρτας που την έχουμε χωρίσει σε τρία κομμάτια και παίρνουμε μόνο τα δύο". Οι απαντήσεις αυτές ταξινομήθηκαν στην κατηγορία (ε). Επιπλέον υπήρχαν μαθητές οι οποίοι ανάφεραν ότι το σύμβολο που τους δώσαμε είναι μια πράξη και συγκεκριμένα μια διαίρεση –κατηγορία ζ, ενώ κάποιοι μαθητές απάντησαν και στις δύο περιπτώσεις λέγοντας ότι είναι *ένα κλάσμα* –κατηγορία η.

Επίσης στον Πίνακα 2.1Α βλέπουμε ότι στις πρώτες κατηγορίες ταξινομήθηκαν μαθητές από τις δύο πρώτες ηλικιακές ομάδες, ενώ οι μεγαλύτεροι ηλικιακά μαθητές έδωσαν επαρκέστερες απαντήσεις οι οποίες και ταξινομήθηκαν στις κατηγορίες ζ και η (βλ. ποσοστά επί τοις εκατό στις παρενθέσεις για τις ερωτήσεις με κλάσματα που περιέχουν μικρούς ή μεγάλους αριθμούς αντίστοιχα) .

Στις ερωτήσεις 2 και 5 όπου ζητούσαμε από τους μαθητές να μας πουν τη σημασία του συμβόλου που τους δώσαμε οι μαθητές απάντησαν με τον ίδιο περίπου τρόπο όπως και στις προηγούμενες ερωτήσεις με τη διαφορά, ότι αρκετοί από τους μεγαλύτερους μαθητές που είχαν απαντήσει ότι τα σύμβολα που τους δώσαμε είναι κλάσματα, στην περίπτωση αυτών των ερωτήσεων ανάφεραν ότι σημαίνει ένα μερισμό και ιδιαίτερα ότι τα μέρη στα οποία χωρίζεται η πίττα ή η τούρτα είναι ίσα –κατηγορία στ.

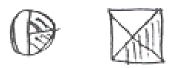
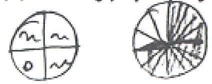
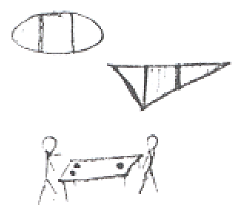
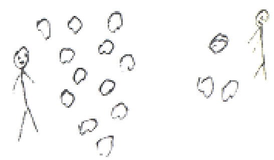
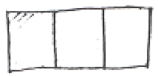
Για τις ερωτήσεις 3 και 6, όπου ζητούσαμε από τους μαθητές να αναπαραστήσουν με μια ζωγραφιά τα κλάσματα 2/3 και 4/5, οι απαντήσεις τους ταξινομήθηκαν στις ίδιες περίπου κατηγορίες όπως και στις προηγούμενες ερωτήσεις και στον Πίνακα 2.1Α παρουσιάζονται κάποιες ενδεικτικές εικονικές αναπαραστάσεις των μαθητών. Στον Πίνακα αυτόν είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το ποσοστό των μαθητών που αναπαριστά το εκάστοτε κλάσμα με επαρκή μερισμό –κατηγορία στ, αυξάνεται σημαντικά με την ηλικία ((βλ. ποσοστά επί τοις εκατό στις παρενθέσεις για τις ερωτήσεις με κλάσματα που περιέχουν μικρούς ή μεγάλους).

2.3.1ii) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ)

Σύμφωνα με τη δεύτερη φάση βαθμολόγησης των απαντήσεων των μαθητών στο επίπεδο ομάδα ερωτήσεων, οι μαθητές του δείγματός μας ταξινομήθηκαν σε πέντε κατηγορίες σύμφωνα με το συνδυασμό με τον οποίο απάντησαν στην κάθε ερώτηση αυτής της ομάδας. Στην επόμενη σελίδα στον Πίνακα 2.1Β παρουσιάζονται οι σύνθετες αυτές κατηγορίες καθώς επίσης και κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών ανά κατηγορία για την κάθε ερώτηση. Όπως φαίνεται στον Πίνακα αυτό υπάρχουν μαθητές οι οποίοι, από τις απαντήσεις τους στο σύνολο των ερωτήσεων, δείχνουν ότι δεν αναγνωρίζουν καθόλου το σύμβολο ενός κλάσματος. Ακόμη στην περίπτωση που αναγνωρίζουν ότι αντιπροσωπεύει ένα μέρος μιας ποσότητας δεν έχουν κατανοήσει την έννοια του μερισμού μιας μονάδας με αποτέλεσμα να αντιστοιχούν λανθασμένα το κλάσμα σε κάποιο μέρος ενός σχήματος. Ο Πίνακας 2.1Β συμπληρώνεται από τον Πίνακα 2.1Γ στον οποίο παρουσιάζονται τα ποσοστά των παιδιών όπως κατανέμονται στις διάφορες κατηγορίες απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων στις τρεις ηλικιακές ομάδες.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1Β

Κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών, στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ –Ομάδα 1: Πως τα παιδιά ερμηνεύουν το σύμβολο ενός κλάσματος γλωσσικά και εικονικά) και ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών.

Ερωτήσεις Κατηγορίες απαντήσεων	Ερώτηση 1 : Τι είναι το 2/3;	Ερώτηση 2: Τι σημαίνει το 2/3;	Ερώτηση 3: Ζωγράφισε κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το 2/3.	Ερώτηση 4 : Τι είναι το 12/15;	Ερώτηση 5: Τι σημαίνει το12/15;	Ερώτηση 6: Ζωγράφισε κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το 12/15.
1. Μη αναγνώριση του συμβόλου -Άσχετη ζωγραφιά	(α) Είναι η πρώτη δύο αριθμοί του τρία	(α) Άσχετη απάντηση (ότι με τα 2/3 μπορείς να παίρνεις πράματα)	(α) Άσχετη ζωγραφιά (β)Κυριολεκτική αναπαράσταση 	(α) Άσχετη απάντηση Είναι οι πρώτοι 12 αριθμοί του 15	(α) Άσχετη απάντηση	(α) Άσχετη ζωγραφιά ή (β)Κυριολεκτική αναπαρ. 
2. Λάθος μερισμός	(δ) το μισό του δύο (η) Το 2/3 είναι ένα κλάσμα. (θ) Δεν ξέρω	(δ) Το 2/3 είναι το μισό του δύο	(δ) Λάθος μερισμός 	(η) Το 12/15 είναι ένα κλάσμα ή (θ) Δεν ξέρω	(δ) Σημαίνει το 1/4 ή το μισό του δώδεκα	(δ) Λάθος μερισμός 
3. Απλός μερισμός	(ε) Είναι τα 2 από τα τρία ή (η) Το 2/3 είναι ένα κλάσμα.	(γ) Σημαίνει κάποιος αριθμός στον οποίο δείχνουμε πόσο μέρος κάποιου τμήματος έχουμε ή (ε) Σημαίνει ότι αν ένα χαρτί το κόψουμε σε 3 κομμάτια τα 2 απ' αυτά είναι δύο τρίτα	(ε) Απλός μερισμός 	(ε) Είναι τα 12 από τα 15 ή η) Το 12/15 είναι κλάσμα	(γ) το 12/15 είναι ένα μέρος ή (ε) τα 12 από τα 15 ή σημαίνει ότι χωρίσαμε ένα πράμα σε 15 κομμάτια και πήραμε τα 12	(ε) Απλός μερισμός 
4. Κλάσμα - ισομερισμός	(η) Το 2/3 είναι ένα κλάσμα.	(στ) Σημαίνει ότι χωρίζουμε κάτι σε τρία ίσα μέρη και παίρνουμε τα δύο από αυτά	(στ) Ισομερισμός 	η) Το 12/15 είναι κλάσμα	(στ) Αν πάρουμε ένα κύβο και το κόψουμε σε 15 ίσα μέρη θα πάρεις τα12	(στ) Ισομερισμός  ίσα κομμάτια
5. Κλάσμα – διαίρεση και ισομερισμός	(η) και (ζ) Το 2/3 είναι ένα κλάσμα ή (ζ) Ακόμα ισούται με την διαίρεση 2:3	(στ) Σημαίνει τα 2 από τα 3 ίσα κομμάτια ή (ζ) Κάθε κλάσμα είναι μια διαίρεση		η) Το 12/15 είναι κλάσμα ή (ζ) Το 12/15 είναι μια διαίρεση του 12 και του 15.	(η) Σημαίνει τα 12 από τα 15 ίσα κομμάτια ή (ζ) Κάθε κλάσμα είναι μια διαίρεση	
0.Ελλιπείς απαντήσεις	(θ) Δεν ξέρω	(θ) Δεν ξέρω	(γ) Ασαφώς μέρος ή (θ) Δεν ξέρω	(θ) Δεν ξέρω	(θ) Δεν ξέρω	(γ) Ασαφώς μέρος ή (θ) Δεν ξέρω

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.1Γ αρκετοί μαθητές (κυρίως της πρώτης ηλικιακής ομάδας) δεν αναγνωρίζουν το σύμβολο του κλάσματος και δίνουν άσχετες ζωγραφιές όταν προσπαθούν να το αναπαραστήσουν εικονικά (το ποσοστό αυτών των παιδιών φτάνει το 24% των μαθητών της τετάρτης δημοτικού). Επιπλέον γίνεται φανερό ότι το ποσοστό αυτό μηδενίζεται στην έκτη τάξη του δημοτικού και στη δευτέρα γυμνασίου, όπου όλοι οι μαθητές φαίνεται να αναγνωρίζουν το σύμβολο ενός κλάσματος. Οι μαθητές αυτοί καθώς επίσης και οι περισσότεροι από τους υπόλοιπους μαθητές της τετάρτης δημοτικού, ακόμη και στην περίπτωση που δεν γνωρίζουν το όνομα αυτού του συμβόλου αναγνωρίζουν ότι αναπαριστά κάποιο μέρος.

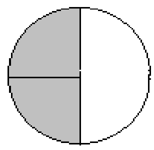
ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1Γ

Κατηγορίες βαθμολόγησης, συχνότητες και ποσοστά επί τοις εκατό των απαντήσεων των παιδιών στις κατηγορίες βαθμολόγησης, στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ –Ομάδα 1: Πως τα παιδιά ερμηνεύουν το σύμβολο ενός κλάσματος γλωσσικά και εικονικά) ανά ηλικιακή ομάδα (Ν=75).

Ηλικιακές ομάδες Κατηγορίες απαντήσεων	Δ΄ Δημοτ. Ν=25 (%)	ΣΤ΄ Δημοτ. Ν=25 (%)	Β΄ Γυμν. Ν=25 (%)	Σύνολο Ν=100 (%)
1. Μη αναγνώριση του συμβόλου - Άσχετη ζωγραφιά	6 (24%)	0 (0%)	0 (0%)	6 (8%)
2. Λάθος μερισμός για όλα τα κλάσματα	4 (16%)	3 (12%)	1 (4%)	8 (10.7%)
3. Λάθος μερισμός για το κλάσμα με τους μικρούς αριθμούς	6 (24%)	5 (20%)	0 (0%)	11 (14.7%)
4. Απλός μερισμός	5 (20%)	6 (24%)	8 (32%)	19 (25.3%)
5. Κλάσμα - Ισομερισμός	3 (12%)	9 (36%)	13 (52%)	25 (33.3%)
6. Διαίρεση και αναπαραστάσεις μερισμού	0 (0%)	2 (5%)	3 (12%)	5 (6.7%)
Δεν ξέρω	1 (4%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (1.3%)
Σύνολο	25 (100%)	25 (100%)	25 (100%)	75 (100%)

Επιπλέον όπως φαίνεται στον ίδιο Πίνακα, μαθητές ακόμα και της δευτέρας γυμνασίου ερμηνεύουν το σύμβολο ενός κλάσματος ως το μέρος μιας μονάδας διαιρεμένης σε άνισα μέρη ή σε περίπου ίσα μέρη, χωρίς να αναφέρουν την αναγκαιότητα χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη. Το ένα τρίτο μόνο του συνόλου των μαθητών αναφέρει ότι τα μέρη στα οποία διαμερίζεται η μονάδα αναφοράς πρέπει να είναι ίσα (12%, 36% και 52% αντίστοιχα στις τρεις ηλικιακές ομάδες) ενώ το ποσοστό αυτό προκύπτει κυρίως από τους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι είναι περισσότεροι οι μαθητές που αναπαριστούν λανθασμένα το κλάσμα 2/3 (μεταφράζοντάς το τις περισσότερες φορές ως το ένα δεύτερο μιας μονάδας) απ' ότι το κλάσμα 12/15. Το παράδοξο αυτό θα μπορούσαμε να το ερμηνεύσουμε ως μια παρερμηνεία των παιδιών για τα σύμβολα των χαρακτηριστικών κλασμάτων όπως είναι το 1/2 ή το 2/3 (στα σύμβολα των οποίων εισάγονται οι μαθητές σε μικρότερη ηλικία -δευτέρα δημοτικού[64]). Αρκετοί λοιπόν μαθητές ζωγραφίζουν ένα κύκλο, τον χωρίζουν σε τρία άνισα μέρη και σκιαγραφούν τα δύο από αυτά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Λανθασμένη εικονική αναπαράσταση του συμβόλου 2/3 από τους μαθητές.

Ορισμένοι από τους μαθητές, οι οποίοι απάντησαν με τον παραπάνω τρόπο, κατά την εικονική αναπαράσταση του 12/15 ζωγραφίζουν δεκαπέντε διακεκριμένα αντικείμενα και χρωματίζουν τα 12 (κύκλους ή τετραγωνάκια). Αποφεύγουν δηλαδή να αναπαραστήσουν εικονικά αυτό το κλάσμα με το διαμερισμό μιας συνεχούς ποσότητας και καταφεύγουν σε ένα σύνολο διακεκριμένων στοιχείων.

Στην έκτη δημοτικού ελαττώνεται ο αριθμός των μαθητών που αναπαριστά τα κλάσματα λανθασμένα και αυξάνεται αντίστοιχα ο αριθμός των μαθητών που αναπαριστούν ένα κλάσμα ως το μέρος μιας μονάδας αναφέροντας ή όχι την αναγκαιότητα του διαμερισμού της μονάδας αναφοράς σε ίσα μέρη.

[64] Στα σύμβολα αυτά αναφερθήκαμε ιδιαίτερα κατά την επισκόπηση της ιστορικής εξέλιξης της έννοιας του κλάσματος (βλ. ενότητα 1.2)

Ακόμη αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ένας μικρός αριθμός μαθητών (δύο στην έκτη δημοτικού -8%, και τρεις στη δευτέρα γυμνασίου -12%) ερμηνεύει τα κλάσματα ως διαιρέσεις ενώ οι μαθητές αυτοί στις εικονικές αναπαραστάσεις τους επισημαίνουν τον ισομερισμό της μονάδας αναφοράς, χωρίς να διαφοροποιούν τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις που περιλαμβάνουν κλάσματα με μικρούς ή μεγάλους αριθμούς. Επιπλέον είναι άξιο παρατήρησης ότι ένας μόνο μαθητής της δευτέρας γυμνασίου αναπαριστά λανθασμένα τα κλάσματα στην εικονική αναπαράσταση του κλάσματος ως μέρος μιας μονάδας.

Συνοψίζοντας, από τις απαντήσεις των μαθητών έγινε σαφές ότι οι περισσότεροι μαθητές (με μια εξελικτική πορεία σε σχέση με την ηλικία τους) αναγνωρίζουν ότι το σύμβολο ενός κλάσματος αντιπροσωπεύει κάποιο μέρος μιας ποσότητας έχοντας ή όχι αναπτύξει την έννοια του διαμερισμού της μονάδας αναφοράς, σε αντίθεση με τον αριθμό των μαθητών που αναγνωρίζουν σε αυτό το σύμβολο μια διαίρεση (βλ. Πίνακα 2.1Β -κατηγορία 5). Για να εξετάσουμε όμως κατά πόσο υπάρχει διαφοροποίηση με την ηλικία και το φύλο των μαθητών, χρησιμοποιήσαμε τα μη παραμετρικά τεστ των Kruskal-Wallis και των Mann-Whitney αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα από το test των Kruskal-Wallis έδειξαν ότι η ηλικία επηρεάζει κατά στατιστικά σημαντικό τρόπο τις απαντήσεις των μαθητών για τις ερωτήσεις της ομάδας αυτής (x^2=23,8; β.ε.=2; ασυμπτ. $p<0{,}001$) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 2.1). Συγκρίνοντας τις μέσες θέσεις των τριών ηλικιών του δείγματος μεταξύ τους, είναι φανερό ότι οι μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων απάντησαν τις ερωτήσεις αυτής της ομάδας χρησιμοποιώντας κατηγορίες απαντήσεων που ήσαν πλησιέστερες προς την επιστημονική θεώρηση του κλάσματος. Αντίστοιχα, με το test των Mann-Whitney, ελέγξαμε την ύπαρξη τυχόν διαφοροποίησης μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών του δείγματος στις ερμηνείες που έδωσαν για το σύμβολο του κλάσματος. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το φύλο δεν διαφοροποιεί γενικά τις απαντήσεις των μαθητών με στατιστικά σημαντικό τρόπο ($z= -0{,}13$; ασυμπτ. $p= 0{,}9$) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 2.2).

2.3.2 Αντιστοιχία μιας δεδομένης κατάστασης σε σύμβολο κλάσματος

Η δεύτερη ομάδα ερωτήσεων περιλαμβάνει τις ερωτήσεις 7, 8, 9 και 10. Στις ερωτήσεις αυτές δίναμε στα παιδιά την περιγραφή μιας κατάστασης λεκτικά ή εικονικά και τους ζητούσαμε να αντιστοιχίσουν στην κατάσταση αυτήν ένα κλάσμα.

2.3.2i) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ)

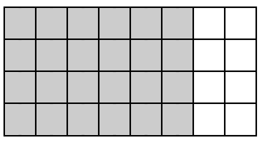
Οι διαφορετικές κατηγορίες στις οποίες ταξινομήσαμε τις απαντήσεις των μαθητών στην κάθε ερώτηση παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.2Α. Στον ίδιο Πίνακα παρουσιάζονται και τα ποσοστά των μαθητών στις τρεις ηλικιακές ομάδες για την κάθε κατηγορία απάντησης.

Παρατηρούμε ότι στις ερωτήσεις 7 και 9 υπήρχαν μαθητές οι οποίοι απαντούσαν με το κλάσμα 1/2 –κατηγορία β. Ακόμη μια ομάδα παιδιών συγχέει το ρόλο του αριθμητή με αυτόν του παρονομαστή με συνέπεια να απαντούν δίνοντας το αντίστροφο κλάσμα. Για παράδειγμα η μαθήτρια της έκτης δημοτικού (υποκ. #44) απαντά στην ερώτηση 7 ότι ο καθένας από τους φίλους θα πάρει από 1,5 σοκολάτα (αφού εκτελεί τη διαίρεση 3:2=1,5). Η ίδια μαθήτρια κάνει το ίδιο λάθος και στην ερώτηση 9 όπου απαντά ότι ο καθένας θα πάρει 1,5 μπουκάλι πορτοκαλάδας αφού εκτελεί τη διαίρεση 24:16=1,5. Στον Πίνακα 2.2Α φαίνεται ότι περισσότερα παιδιά απαντούσαν με αυτόν τον τρόπο όταν οι αριθμοί που τους δίνονταν ήταν μεγαλύτεροι. Παρατηρούμε επίσης ότι τα παιδιά που δίνουν το κλάσμα 4/5 ή το 16/24 –κατηγορία δ- ή εκτελούν την αντίστοιχη διαίρεση –κατηγορία ε- είναι μαθητές της έκτης δημοτικού και περισσότερο της δευτέρας γυμνασίου αντίστοιχα.

Στις ερωτήσεις 8 και 10 υπάρχουν μαθητές που μεταφράζουν τα χρωματισμένα μέρη ενός συνόλου αντικειμένων με ένα κλάσμα που έχει ως αριθμητή και παρονομαστή το σύνολο των χρωματισμένων και το σύνολο των άσπρων π.χ. σφαιρών ερμηνεύοντας με αυτόν τον τρόπο το κλάσμα ως σχέση μέρους-μέρους αντί για τη σχέση μέρους-όλου. Για παράδειγμα η μαθήτρια της τετάρτης δημοτικού (υποκ. #22) η οποία απαντά στην ερώτηση 10 με το κλάσμα 24/8 (αντί του κλάσματος 24/32).

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2Α

Βασικές κατηγορίες βαθμολόγησης απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ) στις ερωτήσεις της Ομάδας 2: Πως τα παιδιά αναπαριστούν με το σύμβολο ενός κλάσματος καταστάσεις που τους δίνονται λεκτικά ή εικονικά με τα χρωματισμένα μέρη ενός σχήματος.

Ερωτήσεις	Απαντήσεις παιδιών (βαθμολόγηση βασικών κατηγοριών)
<u>Ερώτηση 7</u>: Τρεις φίλοι μοιράζονται εξίσου δύο σοκολάτες. Γράψε τι μέρος από τις σοκολάτες θα πάρει ο καθένας τους.	(α) Το 1 ή κάποιος φυσικός αριθμός (8%, 16%, 8%)[65], (β) Το 1/2 ή κάποιο άλλο κλάσμα (48%, 36%, 28%), (γ) Το αντίστροφο κλάσμα (3/2) ή εκτέλεση της αντίστροφης διαίρεσης (3:2) (4%, 12%, 12%), (δ) Το σωστό κλάσμα (2/3) (16%, 20%, 24%), (ε) Εκτέλεση της διαίρεσης (2:3=0,66..) (0%, 4%, 12%), (στ) Δεν ξέρω/ δεν θυμάμαι (24%, 12%, 16%)
<u>Ερώτηση 8</u>: Γράψε ένα κλάσμα που να φανερώνει τι μέρος από τις παρακάτω σφαίρες είναι χρωματισμένες. ●●●●○	(α) Κάποιος φυσικός (4%, 0%, 0%), (β) Κάποιο άλλο κλάσμα ή το κλάσμα που αντιπροσωπεύει τις άσπρες σφαίρες (το 1/5) (36%, 12%, 0%), γ) Το αντίστροφο κλάσμα (το 5/4) (8%, 0%, 0%), (δ) Το σωστό κλάσμα (το 4/5) (44%, 88%, 100%), (στ) Δεν ξέρω/ δεν θυμάμαι (8%, 0%, 0%)
<u>Ερώτηση 9</u>: Σε μια τάξη με 24 παιδιά θέλουν να μοιράσουν ένα κιβώτιο με 16 πορτοκαλάδες. Τι μέρος των πορτοκαλάδων θα πάρει ο κάθε μαθητής;	(α) Το 16 ή κάποιος φυσικός αριθμός (4%, 0%, 4%), (β) Το 1/2 ή κάποιο άλλο κλάσμα (20%, 16%, 4%), (γ) Το αντίστροφο κλάσμα (24/16) ή εκτέλεση της αντίστροφης διαίρεσης (24:16) (12%, 24%, 32%), (δ) Το σωστό κλάσμα (απλή αντιστοιχία: 16/24) (4%, 4%, 36%), (ε) Εκτέλεση διαίρεσης (16:24=0,66) ή το απλοποιημένο κλάσμα 2/3 (16/24=2/3) (4%, 16%, 20%), (στ) Δεν ξέρω/ δεν θυμάμαι (56%, 40%, 4%)
<u>Ερώτηση 10</u>: Γράψε ένα κλάσμα που να φανερώνει τι μέρος από το παρακάτω σχήμα είναι χρωματισμένο. 	(α) Κάποιος φυσικός (12%, 0%, 0%), (β) Κάποιο άλλο κλάσμα (36%, 8%, 4%), (γ) Το αντίστροφο κλάσμα (το 32/24) (12%, 0%, 0%), (δ) Το σωστό κλάσμα (24/32) (28%, 48%, 72%), (ε) Το απλοποιημένο κλάσμα (6/8) (0%, 32%, 24%), (στ) Δεν ξέρω / δεν θυμάμαι (12%, 12%, 0%)

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.2Α το ποσοστό των μαθητών των οποίων οι απαντήσεις βαθμολογήθηκαν ως επαρκείς είναι πολύ μεγαλύτερο απ' ό,τι στις ερωτήσεις που περιλάμβαναν λεκτικές περιγραφές σε όλες τις ηλικιακές ομάδες (βλ. ποσοστά επί τοις εκατό στις παρενθέσεις για τις ερωτήσεις με κλάσματα που περιέχουν μικρούς ή μεγάλους αριθμούς αντίστοιχα).

[65] Ποσοστιαία αναλογία επί τοις εκατό στις τρεις ηλικιακές ομάδες επί συνόλου μαθητών Ν=75.

2.3.2ii) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ)

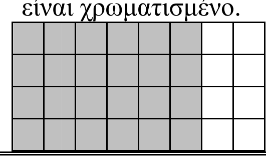
Στη δεύτερη φάση βαθμολόγησης οι απαντήσεις των μαθητών βαθμολογήθηκαν στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων ανάλογα με τους συνδυασμούς των απαντήσεων σε όλες τις ερωτήσεις. Οι έξι διαφορετικές κατηγορίες απάντησης στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων φαίνονται στον Πίνακα 2.2Β, καθώς επίσης και ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών ανά κατηγορία στην κάθε ερώτηση. Ο Πίνακας αυτός συνοδεύεται από τον Πίνακα 2.2Γ στον οποίο παρουσιάζονται τα ποσοστά των παιδιών όπως αυτά κατανέμονται στις διάφορες κατηγορίες απαντήσεων στις τρεις ηλικιακές ομάδες του δείγματός μας.

Από τους δύο αυτούς Πίνακες φαίνεται ότι τα παιδιά έχουν μεγάλη δυσκολία να μεταφράσουν μια γλωσσική περιγραφή μιας κατάστασης μέρους - όλου στο αντίστοιχο αριθμητικό σύμβολο ενός κλάσματος. Αντίθετα, φαίνεται να τους είναι πιο εύκολο να μεταφράσουν το χρωματισμένο μέρος ενός σχήματος με το σύμβολο ενός κλάσματος. Όπως προκύπτει, το πιο συνηθισμένο φαινόμενο στις απαντήσεις τους είναι να κάνουν αντιστοιχία ένα προς ένα των χρωματισμένων μερών του σχήματος στον αριθμητή και του συνόλου των μεριδίων στον παρονομαστή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2Β

Κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών, στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ –Ομάδα 2: Αντιστοιχία της γλωσσικής και εικονικής περιγραφής μιας κατάστασης σε Σύμβολο (Κατάσταση → Σύμβολο)

<table>
<tr><td>Ερωτήσεις

Κατηγορίες απαντήσεων</td><td>Ερ. 7: Τρεις φίλοι μοιράζονται εξίσου δύο σοκολάτες. Γράψε τι μέρος από τις σοκολάτες θα πάρει ο καθένας τους.</td><td>Ερ 8: Γράψε ένα κλάσμα που να φανερώνει τι μέρος από τις παρακάτω σφαίρες είναι χρωματισμένες.
●●●●○</td><td>Ερ. 9: Σε μια τάξη με 24 παιδιά θέλουν να μοιράσουν ένα κιβώτιο με 16 πορτοκαλάδες.
Τι μέρος των πορτοκαλάδων θα πάρει ο κάθε μαθητής;</td><td>Ερ. 10: Γράψε ένα κλάσμα που να φανερώνει τι μέρος από το παρακάτω σχήμα είναι χρωματισμένο.
</td></tr>
<tr><td>1. Ανεπαρκής ή λανθασμένη αντιστοιχία Κατάστασης σε Σύμβολο με μικρά και μεγάλα κλάσματα</td><td>(α) Το 1 ή κάποιος φυσικός αριθμός, (β) Το 1/3 ή το 1/2 ή κάποιο άλλο κλάσμα ή (γ)Το αντίστροφο κλάσμα (3/2)</td><td rowspan="2">(α) Το 1 ή κάποιος φυσικός αριθμός ή (β) Το 1/5 ή το 1/4 ή κάποιο άλλο κλάσμα ή (γ) Το αντίστροφο κλάσμα (5/4)</td><td rowspan="4">(α) Το 16 ή κάποιος φυσικός αριθμός,
(β) Το 3/4 ή το 1/2 ή το 12/16 ή κάποιο άλλο κλάσμα ή
(γ) Το αντίστροφο κλάσμα (24/16) ή
(στ) Δεν ξέρω</td><td rowspan="4">α) Το 4 ή το 16 κάποιος άλλος φυσικός αριθμός ή (β) Το 4/6 ή το 24/8 ή το 12/16 ή κάποιο άλλο κλάσμα ή (γ) Το αντίστροφο κλάσμα (24/16) ή (στ) Δεν ξέρω</td></tr>
<tr><td>2. Όπως η κατηγορία 1 με εξαίρεση σωστή αντιστοιχία λεκτικής κατάστασης σε σύμβολο για το μικρό κλάσμα</td><td>(δ) Το 2/3</td></tr>
<tr><td>3. Όπως η κατηγορία 1 με εξαίρεση σωστή αντιστοιχία εικονικής κατάστασης σε σύμβολο για το μικρό κλάσμα</td><td rowspan="2">(α) Το 1 ή κάποιος φυσικός αριθμός, (β) Το 1/3 ή το 1/2 ή κάποιο άλλο κλάσμα ή (γ) Το αντίστροφο κλάσμα (3/2)</td><td rowspan="4">(δ) Τα 4/5</td></tr>
<tr><td>4. Ανεπαρκής ή λάθος αντιστοιχία κατάστασης εκφρασμένης λεκτικά σε σύμβολο και σωστή αντιστοιχία εικονικής κατάστασης σε σύμβολο</td></tr>
<tr><td>5. Σωστή αντιστοιχία κατάστασης εκφρασμένης λεκτικά σε σύμβολο μόνο για το μικρό ή το μεγάλο κλάσμα και σωστή αντιστοιχία εικονικής κατάστασης σε σύμβολο γενικά</td><td>(β) Θα πάρει το 1/3 της σοκολάτας ή το 1/4
(δ) Τα 2/3 της σοκολάτας</td><td>(δ) Το 16/24</td><td rowspan="2">(δ) Το 24/32 ή
(ε) Το 6/8</td></tr>
<tr><td>6. Σωστή αντιστοιχία κατάστασης εκφρασμένης λεκτικά ή εικονικά σε σύμβολο</td><td>(δ) Ο καθένας θα πάρει τα 2/3 της σοκολάτας
(ε) 2:3=0,66 της σοκ.</td><td>(δ) Το 16/24
(ε) Το 16/24=2/3 της κάθε πορτοκαλάδας</td></tr>
<tr><td>Ελλιπείς απαντήσεις.</td><td>(στ) Δεν ξέρω ή δεν θυμάμαι</td><td>(στ) Δεν ξέρω ή δεν θυμάμαι</td><td>(στ) Δεν ξέρω ή δεν θυμάμαι</td><td>(στ) Δεν ξέρω ή δεν θυμάμαι</td></tr>
</table>

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2Γ

Κατηγορίες βαθμολόγησης, συχνότητες και ποσοστά επί τοις εκατό των απαντήσεων των παιδιών στις κατηγορίες βαθμολόγησης, στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ –Ομάδα 2: Αντιστοιχία καταστάσεων εκφρασμένων λεκτικά ή εικονικά (με τα χρωματισμένα μέρη ενός σχήματος προς το σύμβολο ενός κλάσματος) ανά ηλικιακή ομάδα (Ν=75).

Ηλικιακές ομάδες Κατηγορίες απαντήσεων	Δ΄ Δημ. N=25 (%)	ΣΤ΄ Δημ. N=25 (%)	Β΄ Γυμν. N=25 (%)	Σύνολο N=100 (%)
1. Ανεπαρκής ή λανθασμένη αντιστοιχία Κατάστασης σε Σύμβολο	9 (36%)	2 (8%)	0 (0%)	11 (14.7%)
2. Όπως στην κατηγορία 1 με εξαίρεση σωστή αντιστοιχία λεκτικής κατάστασης σε σύμβολο για το μικρό κλάσμα	3 (12%)	1 (4%)	1 (4%)	5 (6.7%)
3. Όπως στην κατηγορία 1 με εξαίρεση σωστή αντιστοιχία εικονικής κατάστασης σε σύμβολο για το μικρό κλάσμα	5 (20%)	2 (8%)	0 (0%)	7 (9.3%)
4. Ανεπαρκής ή λάθος αντιστοιχία κατάστασης εκφρασμένης γλωσσικά σε σύμβολο και σωστή αντιστοιχία εικονικής κατάστασης σε σύμβολο	6 (24%)	14 (56%)	7 (28%)	27 (36%)
4. Σωστή αντιστοιχία κατάστασης εκφρασμένης λεκτικά για το μικρό ή το μεγάλο κλάσμα και σωστή αντιστοιχία εικονικής κατάστασης σε σύμβολο	0 (0%)	2 (8%)	11 (44%)	13 (17.3%)
6. Σωστή αντιστοιχία κατάστασης εκφρασμένης λεκτικά ή εικονικά σε σύμβολο	1 (4%)	4 (16%)	6 (24%)	11 (14.7%)
Δεν ξέρω	1 (4%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (1.3%)
Σύνολο	25 (100%)	25 (100%)	25 (100%)	75 (100%)

Στον Πίνακα 2.2Γ αντίστοιχα βλέπουμε ότι οι μικρότεροι μαθητές αναπτύσσουν πρώτα την ικανότητα να αντιστοιχίζουν τις χρωματισμένες σφαίρες από ένα μικρό σύνολο σφαιρών στο αντίστοιχο σύμβολο του κλάσματος που τις αντιπροσωπεύει (εικονική αναπαράσταση κλάσματος με μικρούς αριθμούς στον αριθμητή και τον παρονομαστή). Οι μαθητές αυτοί δυσκολεύονται να κάνουν την ίδια αντιστοιχία όταν το σύνολο των μερών στο οποίο είναι χωρισμένη η μονάδα που τους δίνεται εικονικά είναι μεγαλύτερο. Συνεπώς παρατηρούμε ότι το μέγεθος των αριθμών που περιλαμβάνει ένα κλάσμα είναι ένας παράγοντας που δημιουργεί δυσκολίες στα μικρότερα παιδιά ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο τα παιδιά των μεγαλύτερων ηλικιακών ομάδων. Επιπλέον στον ίδιο Πίνακα φαίνεται ότι είναι πολύ δυσκολότερο για τα παιδιά να μεταφράσουν σε ένα σύμβολο κλάσματος μια κατάσταση που τους δίνεται λεκτικά, κάτι που γίνεται εφικτό σε ορισμένους μόνο από τους μεγαλύτερους κυρίως μαθητές.

Συνοψίζοντας, θα ήταν σημαντικό να τονίσουμε τη δυσκολία των μικρότερων παιδιών να μεταφράσουν μια κατάσταση μέρους-όλου είτε τους δίνεται λεκτικά είτε εικονικά στο αντίστοιχο αριθμητικό σύμβολο όπως φαίνεται από τα ποσοστά των επαρκών απαντήσεων. Επιπλέον παρατηρήσαμε ότι η μεταβλητή των μικρών ή μεγάλων αριθμών επηρεάζει τις απαντήσεις των μικρότερων κυρίως παιδιών. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.2Γ στις κατηγορίες 2 και 3 ταξινομήθηκαν κυρίως μαθητές της Δ΄ Δημοτικού, γεγονός που μας δείχνει ότι οι μαθητές αυτοί μπορούν να ερμηνεύουν σύμβολα κλασμάτων που περιλαμβάνουν μικρούς αριθμούς ως αριθμητή και παρονομαστή. Τέλος παρατηρήσαμε ότι το σύνολο των μαθητών είχε δυσκολία στην μετάφραση των λεκτικών ιδιαίτερα περιγραφών καταστάσεων μέρους-όλου στο αντίστοιχο αριθμητικό σύμβολο.

Για να διερευνήσουμε κατά πόσο υπάρχει μια εξελικτική πορεία ως προς τα ποσοστά επαρκών απαντήσεων σε σχέση με την ηλικία και το φύλο των μαθητών, χρησιμοποιήσαμε αντίστοιχα τα μη παραμετρικά τεστ των Kruskal-Wallis και των Mann-Whitney. Τα αποτελέσματα από το test των Kruskal-Wallis έδειξαν ότι η ηλικία επηρεάζει κατά στατιστικά σημαντικό τρόπο τις απαντήσεις των μαθητών για τις ερωτήσεις αυτής της ομάδας (x^2=27,8; β.ε.=2; ασυμπτ. $p<0{,}001$) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 2.1). Συγκρίνοντας τις μέσες θέσεις των τριών ηλικιών του δείγματος μεταξύ τους, είναι φανερό ότι οι μεγαλύτεροι ηλικιακά μαθητές μπορούν να μεταφράζουν επαρκέστερα την περιγραφή μιας κατάστασης σε σύμβολο είτε η κατάσταση αυτή τους δίνεται λεκτικά ή εικονικά. Αντίστοιχα, με το test των Mann-Whitney, ελέγξαμε την ύπαρξη τυχόν διαφοροποίησης μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών του δείγματος στις απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις αυτής της ομάδας. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το φύλο δεν διαφοροποιεί γενικά τις απαντήσεις των μαθητών με στατιστικά σημαντικό τρόπο (z= -1,06; ασυμπτ. p= 0,29) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 2.2).

2.2.3 Αριθμητική αξία ενός κλάσματος (Αντιστοιχία του συμβόλου ενός κλάσματος σε μια δεδομένης κατάστασης μέρους – όλου)

Αυτή η ομάδα ερωτήσεων περιλαμβάνει τις υπόλοιπες ερωτήσεις του ερωτηματολογίου (ερωτήσεις 11 έως 18). Ορισμένες από αυτές τις ερωτήσεις είναι τόσο απλές που κάποιοι θα θεωρούσαν αυτονόητο ότι θα τις απαντούσαν σωστά τα παιδιά. Στόχος μας σε αυτήν την περίπτωση αποτελούσε η διαπίστωση του κατά πόσο τα παιδιά μπορούν να αντιμετωπίσουν τόσο απλά έργα και πως διαφοροποιούνται οι απαντήσεις τους όταν μεταβάλλονται οι μεταβλητές των μικρών – μεγάλων αριθμών και της απλής ή σύνθετης αντιστοιχίας του κλάσματος με τη μονάδα στην οποία αναφέρονται, τις οποίες περιγράψαμε κατά την περιγραφή των ερωτήσεων στην παράγραφο 2.2.2.

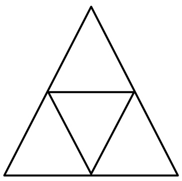
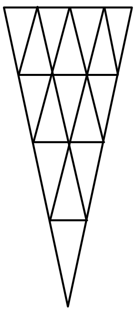
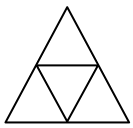
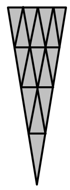
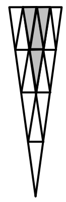
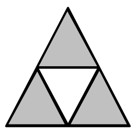
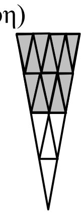
2.3.3i) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ)

Όπως και στις προηγούμενες ομάδες ερωτήσεων, οι ερωτήσεις αυτής της ομάδας καθώς επίσης και οι διαφορετικές κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων ανά ερώτηση παρουσιάζονται στους Πίνακες 2.3Α(1) και 2.3Α(2) για τις ερωτήσεις που είναι απλές αντιστοιχίες και για τις σύνθετες αντίστοιχα.

Από τις απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις 11, 12, 15 και 16 που περιλάμβαναν απλές (ένα-προς-ένα) αντιστοιχίες κλασμάτων και των μονάδων στις οποίες αυτά αναφέρονταν (σε καταστάσεις που περιγράφονταν λεκτικά ή εικονικά), φάνηκε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών ήταν σε θέση να αναγνωρίσει την αριθμητική αξία που αντιπροσώπευε το εκάστοτε κλάσμα. Συγκεκριμένα στις καταστάσεις που περιγράφονται εικονικά και ιδιαίτερα στην ερώτηση που περιλάμβανε κλάσμα με μικρούς αριθμούς το ποσοστό των επαρκών απαντήσεων των μαθητών φτάνει το 98,7% του συνόλου των μαθητών (μόνο ένας μαθητής δεν απάντησε σωστά και χρωμάτισε μόνο ένα μέρος από τα τέσσερα ίσα μέρη που ήταν χωρισμένο το σχήμα για να αναπαραστήσεις το 3/4 του σχήματος) ενώ στην ερώτηση που περιλάμβανε κλάσμα με μεγαλύτερους αριθμούς φτάνει το 94,7% των μαθητών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3Α(1)

Βασικές κατηγορίες βαθμολόγησης απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ) στις ερωτήσεις της Ομάδας 3: Πως τα παιδιά αντιστοιχούν το σύμβολο ενός κλάσματος σε καταστάσεις που τους δίνονται λεκτικά ή εικονικά (χρωματίζοντας τα μέρη ενός σχήματος) (Απλή αντιστοιχία ένα προς ένα)

Ερωτήσεις	Απαντήσεις παιδιών (βαθμολόγηση βασικών κατηγοριών)
<u>Ερώτηση 11</u>: Ένα πακέτο περιέχει 4 σοκολάτες. Πόσες σοκολάτες είναι τα 3/4 του πακέτου; <u>Ερώτηση 15</u>: Μια εταιρία έχει 16 υπαλλήλους. Αν μια μέρα απουσίαζαν τα 12/16 αυτών, πόσοι υπάλληλοι απουσίαζαν;	(α) Άσχετη απάντηση (12%, 0%, 0% - 4%, 0%, 0%)[66], (β) Λάθος απάντηση με κάποιο κλάσμα (π.χ. το 3/4 ή το 12/16) (0%, 4%, 0% - 12%, 4%, 4%), (δ) Λάθος με σχέση αριθμητή – παρονομαστή (π.χ. 4-3=1 ή 16-12=4) (4%, 0%, 0% - 52%, 20%, 12%), (ε)Λάθος εκτέλεση πράξης ανάμεσα στο φυσικό και το κλάσμα (4%, 16%, 0% - 4%, 0%, 4%), (στ) Σωστή απάντηση με δήλωση μέρους (3 από τις 4 ή 12 από τους 16) ή Σωστή απάντηση με εκτέλεση της πράξης (π.χ. 3/4·4=3 ή 12/16·4=12) (60%, 76%, 100% - 24%, 60%, 76%), (ζ) Δεν ξέρω/ Δεν θυμάμαι (20%, 4%, 0% - 4%, 16%, 4%)
<u>Ερώτηση 12</u>: Χρωμάτισε τα 3/4 του παρακάτω σχήματος:  <u>Ερώτηση 16</u>: Χρωμάτισε τα 12/16 του παρακάτω σχήματος: 	(α) Χρωματίζει λάθος μέρη   ή  (4%, 0%, 0%) (8%, 4%, 0%) (β) Χρωματίζει σωστά τα τρία από τα τέσσερα ίσα μέρη (ή τα δώδεκα από τα δεκαέξι ίσα μέρη)   (96%, 100%, 100%) (92%, 92%, 100%) (γ) Δεν ξέρω – καμία απάντηση (Δεν χρωματίζει κανένα μέρος) (0%, 0%, 0% - 0%, 4%, 0%)

Στις ερωτήσεις όπου οι μονάδες αναφοράς περιγράφονται λεκτικά το ποσοστό επαρκών απαντήσεων μειώνεται ιδιαίτερα όταν το κλάσμα περιλαμβάνει μεγάλους

[66] Ποσοστιαία αναλογία επί τοις εκατό στις τρεις ηλικιακές ομάδες επί συνόλου μαθητών Ν=75 για τις δύο ερωτήσεις αντίστοιχα.

αριθμούς. Στην περίπτωση αυτή οι περισσότεροι μαθητές που απάντησαν λανθασμένα είτε έδωσαν ως απάντηση το κλάσμα που τους δώσαμε –κατηγορία β, είτε το αποτέλεσμα της αφαίρεσης του αριθμητή από τον παρονομαστή –κατηγορία δ (βλ. Πίνακα 2.3Α(1)).

Υπήρχαν και κάποια παιδιά που προσπάθησαν να εκτελέσουν μια πράξη ανάμεσα στον φυσικό αριθμό (που αντιπροσωπεύει τη μονάδα αναφοράς) και στο κλάσμα που τους δώσαμε. Στην περίπτωση που επέλεξαν λάθος πράξη και δεν κατάφεραν να καταλήξουν σε κάποιο επαρκές αποτέλεσμα η απάντησή τους βαθμολογήθηκε με την κατηγορία ε. Ένα παράδειγμα απάντησης που βαθμολογήθηκε σε αυτήν την κατηγορία αποτελεί η απάντηση του μαθητή της ΣΤ΄ δημοτικού (υποκ. #26) ο οποίος επιλέγει να κάνει διαίρεση την οποία εκτελεί λανθασμένα. Συγκεκριμένα απαντά ως εξής: “ $15:\frac{4}{5} = \frac{15}{1}:\frac{4}{5} = \frac{75}{5}:\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ δεν θυμάμαι”. Ένα άλλο παράδειγμα αποτελεί η απάντηση της μαθήτριας ΣΤ΄ δημοτικού (υποκ. #33), η οποία γράφει: “$\frac{4}{5}:15 = 15\cdot\frac{5}{4} = \frac{75}{4}$. Άρα αποτελούνται από $\frac{75}{4}$.”

Ακόμη υπήρχαν μαθητές που είτε επέλεξαν να κάνουν πολλαπλασιασμό (και τον εκτέλεσαν σωστά) είτε με άλλο τρόπο σκέψης κατέληξαν σε επαρκή απάντηση, βαθμολογήθηκαν με την κατηγορία (στ). Ένα παράδειγμα αποτελεί ο μαθητής της ΣΤ΄ δημοτικού (υποκ. #31) ο οποίος εκτελεί την απλή μέθοδο των τριών ως εξής:

$$\text{Τα } \frac{5}{5} \text{ πατωμ.} \rightarrow 15 \text{ πλακάκια}$$

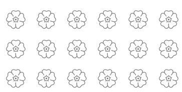
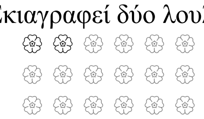
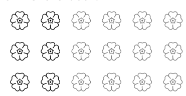
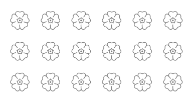
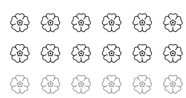
$$\frac{1}{5} \text{ πατωμ.} \rightarrow \frac{15}{5} = 3 \text{ πλακ.}$$

$$\frac{4}{5} \text{ πατωμ.} \rightarrow 3 \text{ x } 4 = 12 \text{ πλακάκια}$$

Οι απαντήσεις των παιδιών διαφοροποιούνται ριζικά στις ερωτήσεις που περιλαμβάνουν σύνθετες όπως τις ονομάσαμε αντιστοιχίες. Εδώ τα ποσοστά των παιδιών που απαντούν επαρκώς μειώνεται και όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.3Α(2) τα παιδιά διαφοροποιούν τις απαντήσεις τους ιδιαίτερα όταν τα κλάσματα περιλαμβάνουν σχετικά μεγαλύτερους διψήφιους αριθμούς (βλ. ποσοστά επί τοις εκατό στις παρενθέσεις για τις ερωτήσεις με κλάσματα που περιέχουν μικρούς ή μεγάλους αριθμούς αντίστοιχα).

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3Α(2)

Βασικές κατηγορίες βαθμολόγησης απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ) στις ερωτήσεις της Ομάδας 3: Πως τα παιδιά αντιστοιχούν το σύμβολο ενός κλάσματος σε καταστάσεις που τους δίνονται λεκτικά ή εικονικά (χρωματίζοντας τα μέρη ενός σχήματος) (Σύνθετη αντιστοιχία)

Ερωτήσεις	Απαντήσεις παιδιών (βαθμολόγηση βασικών κατηγοριών)
<u>Ερώτηση 13</u>: Το πάτωμα ενός δωματίου έχει 15 πλακάκια. Από πόσα πλακάκια αποτελούνται τα 4/5 του πατώματος του δωματίου; <u>Ερώτηση 17</u>: Ένα κουτί περιέχει 30 μολύβια. Πόσα μολύβια είναι τα 12/15 του κουτιού;	(α) Άσχετη απάντηση (12%, 0%, 0% - 4%, 0%, 0%)[67], (β) Λάθος απάντηση με κάποιο κλάσμα (8%, 4%, 0% - 12%, 8%, 0%), (γ) Ευθεία αντιστοιχία του αριθμητή του κλάσματος (4 πλακάκια ή 12 μολύβια) (4%, 0%, 0% - 8%, 4%, 0%), (δ) Λάθος σχέση αριθμητή – παρονομαστή (π.χ. 5-4=1 ή 15-12=3) (4%, 0%, 0% - 12%, 0%, 4%), (ε) Λάθος εκτέλεση πράξης ανάμεσα στο φυσικό και το κλάσμα (28%, 32%, 20% - 20%, 24%, 16%), (στ) Σωστή απάντηση με δήλωση μέρους (12 από τα 15 ή 24 από τα 30), ή Σωστή απάντηση με εκτέλεση της πράξης (4/5·15=4·3=12 ή 12/15·30= 24) (8%, 52%, 64% - 12%, 40%, 76%), (ζ) Δεν ξέρω/ Δεν θυμάμαι (36%, 12%, 16% - 32%, 24%, 4%)
<u>Ερώτηση 14:</u> Χρωμάτισε τα 2/3 του συνόλου των λουλουδιών της παρακάτω εικόνας.  <u>Ερώτηση 18:</u> Χρωμάτισε τα 10/12 του συνόλου των τετραγώνων στην παρακάτω εικόνα.	(α) Χρωματίζει λάθος μέρη (ευθεία αντιστοιχία) Σκιαγραφεί δύο λουλούδια Σκιαγραφεί δέκα τετράγωνα  (24%, 8%, 4%) (68%, 36%, 28%) (β) Χρωματίζει λάθος μέρη (άσχετα) Σκιαγραφεί λάθος αριθμό λουλουδιών Σκιαγραφεί λάθος αριθμό τετραγώνων  ή  (28%, 4%, 12%) (24%, 28%, 12%) (γ) Χρωματίζει σωστά μέρη  (48%, 84%, 80%) (4%, 24%, 60%) (δ) Δεν ξέρω – καμία απάντηση (Δεν χρωματίζει κανένα μέρος) (0%, 4%, 4% - 4%, 12%, 0%)

[67] Ποσοστιαία αναλογία επί τοις εκατό στις τρεις ηλικιακές ομάδες επί συνόλου μαθητών Ν=75 για τις δύο ερωτήσεις αντίστοιχα.

Μία ομάδα παιδιών καταλήγει σε λανθασμένο αποτέλεσμα στις ερωτήσεις που περιλαμβάνουν λεκτικές περιγραφές της μονάδας αναφοράς είτε διότι επιλέγει να κάνει διαίρεση αντί του πολλαπλασιασμού είτε διότι εκτελεί λανθασμένα τον πολλαπλασιασμό –κατηγορία ε.

Εξαίρεση αποτελούν δύο μαθητές, ένας της ΣΤ΄ δημοτικού (#38) και ένας της Β΄ γυμνασίου (#55), οι οποίοι μετατρέποντας το 12/15 στο ισοδύναμό του με παρονομαστή ίσο με τον αριθμό των στοιχείων της μονάδας αναφοράς καταλήγουν στο σωστό συμπέρασμα. Συγκεκριμένα γράφουν: “Τα $\frac{12}{15} = \frac{24}{30}$, άρα είναι 24 μολύβια στα 30”. Συνεπώς παρατηρούμε ότι το ποσοστό των μαθητών που απαντούν επαρκώς στην ερώτηση 18 φτάνει το 29,3% μόνο του συνόλου των μαθητών. Από τους υπόλοιπους μαθητές το 44% χρωματίζει απλά τόσα τετράγωνα όσος είναι ο αριθμητής του κλάσματος που τους δίνεται (απλή αντιστοιχία), παραβλέποντας ότι ο αριθμός των τετραγώνων δεν είναι ίδιος με τον παρονομαστή του κλάσματος, όπως στις περιπτώσεις των ερωτήσεων που περιλάμβαναν απλές αντιστοιχίες (βλ. ποσοστά επί τοις εκατό στις παρενθέσεις για τις ερωτήσεις με κλάσματα που περιέχουν μικρούς ή μεγάλους αριθμούς αντίστοιχα).

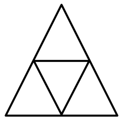
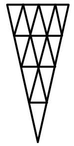
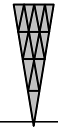
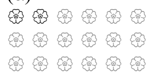
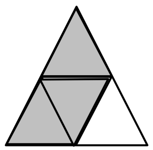
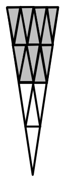
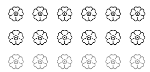
2.3.3ii) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ)

Στον Πίνακα 2.3Β δίνονται οι κατηγορίες απάντησης στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων οι οποίες προέκυψαν από τους συνδυασμούς των απαντήσεων των παιδιών στην εκάστοτε ερώτηση καθώς επίσης και ορισμένες ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών ανά κατηγορία για την κάθε ερώτηση. Ο Πίνακας αυτός συμπληρώνεται από τον επόμενο Πίνακα 2.3Γ, ο οποίος παρουσιάζει τα ποσοστά των παιδιών, όπως αυτά κατανέμονται στις διάφορες κατηγορίες απαντήσεων στις τρεις ηλικιακές ομάδες του δείγματος.

Όπως βλέπουμε στον Πίνακα 2.3Β οι απαντήσεις των μαθητών ταξινομήθηκαν σε έξι σύνθετες κατηγορίες. Παρατηρούμε ότι οι κατηγορίες αυτές έχουν έναν εξελικτικό χαρακτήρα. Οι μαθητές που ταξινομήθηκαν στην πρώτη κατηγορία απάντησαν επαρκώς μόνο στην ερώτηση 12, ενώ οι μαθητές στη δεύτερη κατηγορία

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3Β

Κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών, στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ – Ομάδας 3: Πως τα παιδιά αντιστοιχούν το σύμβολο ενός κλάσματος σε καταστάσεις που τους δίνονται λεκτικά ή εικονικά (χρωματίζοντας τα μέρη ενός σχήματος) και ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών.

Ερωτήσεις Κατηγορίες απαντήσεων	Ερώτηση 11: Ένα πακέτο περιέχει 4 σοκολάτες. Πόσες σοκολάτες είναι τα 3/4 του πακέτου;	Ερώτηση 12: Χρωμάτισε τα 3/4 του παρακάτω σχήματος: 	Ερώτηση 15: Μια εταιρία έχει 16 υπαλλήλους. Αν μια μέρα απουσίαζαν τα 12/16 αυτών, πόσοι υπαλ. απουσίαζαν;	Ερώτηση 16: Χρωμάτισε τα 12/16 του παρακάτω σχήματος: 	Ερώτηση 13: Το πάτωμα ενός δωματίου έχει 15 πλακάκια. Από πόσα πλακάκια αποτελούνται τα 4/5 του πατώματος του δωματίου;	Ερώτηση 14: Χρωμάτισε τα 2/3 του συνόλου των λουλουδιών της παρακάτω εικόνας. 	Ερώτηση 17: Ένα κουτί περιέχει 30 μολύβια. Πόσα μολύβια είναι τα 12/15 του κουτιού;	Ερώτηση 18: Χρωμάτισε τα 10/12 του συνόλου των τετραγώνων στην παρακάτω εικόνα.
1. Ανεπαρκείς ή λανθασμένες αντιστοιχίες εκτός την απλή αντιστ. της εικονικής αναπαρ. με κλάσματα με μικρούς αριθμούς	(α) είναι το μισό (δ) 1 σοκολάτα ή 4-3=1 σοκολάτα		(β) τα 4/16 απουσίαζαν ή	(α) 	(α) □	(α)  ή	(α) είναι όλα ή 30 μολύβια (β) τα 2/4 ή τα 12/15	(α)
2. Σωστές οι απλές αντιστοιχίες εικονικών αναπαρ. καταστ. και λανθασμένες όλες οι σύνθετες αντιστοιχίες	(στ) είναι τρεις σοκολάτες	(β) 	(δ) 4 υπάλληλοι απουσιάζουν ή 16-12=4 υπάλληλοι		ή (γ) 4 πλακάκια ή (δ) 1 πλακάκι	(β) 	(γ) είναι 12 μολύβια ή (δ) Τρία μολύβια ή (ε) κάνω την	ή
3. Επαρκείς οι απλές αντιστοιχίες εικονικών αναπ. και οι σύνθετες αντιστ. εικονικών αναπ. καταστ. με κλάσματα με μικρούς αριθμούς			ή (ζ) Δεν ξέρω	(β) 	ή (ε) 15·4/5 =60/5 ή (ζ) δεν το	(γ)	πράξη: 12/15:30/1=60/15 ή 360 μολύβια ή 15/15-12/15=3/5	(β)
4. Επαρκείς οι απλές αντιστ. γενικά και οι σύνθετες αντιστ. εικονικών αναπαραστ. καταστ. με κλάσματα με μικρούς αριθμούς	(στ) Είναι 3 σοκολάτες γιατί χωρίζουμε το πακέτο σε 4		(στ) Είναι 12 υπάλληλοι ή 16·12/16 =		καταλαβαίνω		(ζ) Δεν θυμάμαι	
5. Πρόβλημα μόνο στις σύνθετες εικον. αναπαρ. καταστ. με κλάσματα με μεγάλους αριθμούς	κομμάτια που το κάθε κομμάτι έχει 1 σοκολάτα και παίρνουμε		=192/16 = 12 υπάλληλοι απουσιάζουν		(στ) Είναι 12 πλακάκια γιατί χωρίζουμε το 15 σε 5 κομ. και το		(στ) 24 μολύβια ή 30· 12/15 = =360/15= 24 μολύβια ή	
6. Επαρκείς όλες οι αντιστοιχίες απλές ή σύνθετες με μικρά ή μεγάλα κλάσματα	τα 3 ή 4 ·3/4 = 3 σοκολάτες				παίρνουμε 4 φορές το 3 ή 15·4/5= 60/5=12		$\frac{12}{15}=\frac{24}{30}$ άρα 24 στα 30	(γ)

απάντησαν επαρκώς στις ερωτήσεις 12 και 16, στις απλές δηλαδή αντιστοιχίες του κλάσματος (με μικρούς και μεγάλους αριθμούς αντίστοιχα) σε εικονικές περιγραφές καταστάσεων. Στην τρίτη κατηγορία οι μαθητές είναι σε θέση να αντιστοιχίσουν επαρκώς ένα κλάσμα (με μικρούς αριθμούς) σε μια εικονική περιγραφή κατάστασης όταν η ποσότητα που αναπαρίσταται είναι διαφορετική από τον παρονομαστή του κλάσματος (όχι απλή αντιστοιχία –ερώτηση 14). Στην τέταρτη κατηγορία ταξινομήθηκαν οι μαθητές που μπόρεσαν να αντιστοιχίσουν το σύμβολο του κλάσματος και στις λεκτικές περιγραφές μιας κατάστασης στις απλές αντιστοιχίες, ενώ στην πέμπτη κατηγορία και στις σύνθετες κατηγορίες. Στην έκτη κατηγορία ταξινομήθηκαν οι μαθητές των οποίων όλες οι απαντήσεις περιλάμβαναν επαρκείς αντιστοιχίες (για παραδείγματα βλ. Πίνακα 2.3Β).

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3Γ

Κατηγορίες βαθμολόγησης, συχνότητες και ποσοστά επί τοις εκατό των απαντήσεων των παιδιών στις κατηγορίες βαθμολόγησης, στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ –Ομάδα 3: Πως τα παιδιά αντιστοιχούν το σύμβολο ενός κλάσματος σε καταστάσεις που τους δίνονται λεκτικά ή εικονικά (χρωματίζοντας τα μέρη ενός σχήματος) ανά ηλικιακή ομάδα (N=75).

Ηλικιακές ομάδες Κατηγορίες απαντήσεων	Δ΄ Δημοτ. N=25 (%)	ΣΤ΄ Δημοτ. N=25 (%)	Β΄ Γυμν. N=25 (%)	Σύνολο N=100 (%)
1. Ανεπαρκείς ή λανθασμένες αντιστοιχίες εκτός την απλή αντιστ. της εικονικής αναπαρ. με κλάσματα με μικρούς αριθμούς	2 (8%)	1 (4%)	0 (0%)	3 (4%)
2. Σωστές οι απλές αντιστοιχίες εικονικών αναπαρ. καταστ. και λανθασμένες όλες οι σύνθετες αντιστοιχίες	9 (36%)	2 (8%)	1 (4%)	12 (16%)
3. Επαρκείς οι απλές αντιστοιχίες εικονικών αναπ. και οι σύνθετες αντιστ. εικονικών αναπ. καταστ. με κλάσματα με μικρούς αριθμούς	8 (32%)	8 (32%)	4 (16%)	20 (26.7%)
4. Επαρκείς οι απλές αντιστοιχίες γενικά και οι σύνθετες αντιστοιχίες εικονικών αναπαραστ. καταστάσεων με κλάσματα με μικρούς αριθμούς	4 (16%)	4 (16%)	2 (8%)	10 (13.3%)
5. Πρόβλημα μόνο στις σύνθετες εικονικές αναπαραστάσεις καταστάσεων με κλάσματα με μεγάλους αριθμούς	1 (4%)	1 (4%)	3 (12%)	5 (6.7%)
6. Επαρκείς όλες οι αντιστοιχίες απλές ή σύνθετες με μικρά ή μεγάλα κλάσματα	1 (4%)	7 (28%)	14 (56%)	22 (29.3%)
0. Ελλιπείς απαντήσεις	0 (0%)	2 (8%)	1 (4%)	3 (4%)
Σύνολο	25 (100%)	25 (100%)	25 (100%)	75 (100%)

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.3Γ οι μαθητές αποκτούν σταδιακά την ικανότητα να αντιστοιχούν το σύμβολο ενός κλάσματος σε μια δεδομένη κατάσταση. Παρατηρούμε ότι για τους μαθητές είναι ευκολότερη η αντιστοιχία αυτή όταν οι καταστάσεις δίνονται εικονικά και το σύμβολο του κλάσματος περιλαμβάνει μικρούς αριθμούς. Επίσης γίνεται σαφές ότι τα παιδιά μπορούν να κάνουν σωστά αυτές τις αντιστοιχίες όταν είναι απλές, όταν δηλαδή η ποσότητα στην οποία αντιστοιχίζεται το κλάσμα αποτελείται από στοιχεία ή είναι χωρισμένη σε μέρη ίσα με τον παρονομαστή του κλάσματος.

Σημαντικό θα ήταν να παρατηρήσουμε ότι τα μικρότερα παιδιά δυσκολεύονται ιδιαίτερα στις αντιστοιχίες όταν οι καταστάσεις περιγράφονται λεκτικά και ακόμη περισσότερο όταν οι αντιστοιχίες δεν είναι απλές (δηλαδή ένα προς ένα). Το ποσοστό των μαθητών που είναι σε θέση να αναγνωρίσει την αριθμητική αξία που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα σε μια δεδομένη μονάδα αναφοράς άσχετα από τον τρόπο που τους έχει περιγραφεί φθάνει να είναι 56% των μαθητών της δευτέρας γυμνασίου.

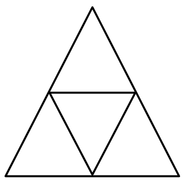
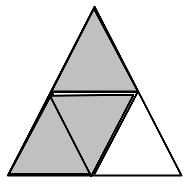
Θέλοντας να διερευνήσουμε στατιστικά την ύπαρξη μιας εξελικτικής πορείας ως προς τα ποσοστά επαρκών αντιστοιχήσεων του συμβόλου ενός κλάσματος σε μια κατάσταση σε σχέση με την ηλικία και το φύλο των μαθητών, χρησιμοποιήσαμε τα μη παραμετρικά τεστ των Kruskal-Wallis και των Mann-Whitney αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα από το test των Kruskal-Wallis έδειξαν ότι η ηλικία επηρεάζει κατά στατιστικά σημαντικό τρόπο τις απαντήσεις των μαθητών για τις ερωτήσεις της ομάδας αυτής (x^2=19,2; β.ε.=2; ασυμπτ. $p<0,001$) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 2.1). Συγκρίνοντας τις μέσες θέσεις των τριών ηλικιών του δείγματος μεταξύ τους, είναι φανερό ότι ο αριθμός των μαθητών της έκτης δημοτικού και περισσότερο της δευτέρας γυμνασίου είναι σε θέση να μεταφράζουν επαρκώς τις αντιστοιχήσεις που τους ζητούσαμε είτε ήταν απλές είτε σύνθετες. Με το test των Mann-Whitney αντίστοιχα, ελέγξαμε την ύπαρξη τυχόν διαφοροποίησης μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών του δείγματος στις αντιστοιχίες που τους ζητούσαμε. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το φύλο δεν διαφοροποιεί γενικά τις απαντήσεις των μαθητών με στατιστικά σημαντικό τρόπο (z= -0,96; ασυμπτ. p= 0,34) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 2.2).

2.4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

2. 4.1. Βαθμολόγηση σε συνολικό επίπεδο

Σε ένα τρίτο επίπεδο βαθμολόγησης ταξινομήσαμε του μαθητές του δείγματός μας σε σχέση με τους τρόπους με τους οποίους απάντησαν συνολικά στις τρεις ομάδες ερωτήσεων. Συγκεκριμένα καταγράφοντας τους συνδυασμούς των κατηγοριών απάντησης στις τρεις ομάδες ερωτήσεων ταξινομήσαμε τους μαθητές σε οκτώ διαφορετικές κατηγορίες (βλ. Πίνακα 2.3). Ο Πίνακας αυτός συμπληρώνεται από τον Πίνακα 3.4, στον οποίο παρουσιάζονται τα ποσοστά των μαθητών που κατανέμονται στις αντίστοιχες κατηγορίες.

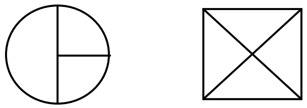
Όπως φαίνεται στους Πίνακες 2.3 και 2.4, ορισμένοι μαθητές της τετάρτης δημοτικού δεν αναγνωρίζουν το σύμβολο ενός κλάσματος όταν τους δίνεται χωρίς κάποιο πλαίσιο αναφοράς (πρώτη ομάδα ερωτήσεων) και επιπλέον δεν μπορούν να εκφράσουν με ένα κλάσμα μια κατάσταση που τους περιγράφεται λεκτικά ή εικονικά (δεύτερη ομάδα ερωτήσεων). Αντίθετα στην τρίτη ομάδα ερωτήσεων, όταν τους δίνεται το σύμβολο ενός κλάσματος και συγχρόνως η εικονική αναπαράσταση της μονάδας αναφοράς του, τα ίδια αυτά παιδιά μπορούν να αντιστοιχίσουν το σύμβολο αυτό σε κάποιο μέρος του δεδομένου σχήματος που τους δίνεται (το οποίο είναι διαιρημένο σε τόσα μέρη όσος ο παρονομαστής του κλάσματος) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (βλ. Πίνακα 2.3 –*κατηγορία 1*).

Τα $\frac{3}{4}$ του τριγώνου  είναι το χρωματισμένο 

Ακόμη υπήρχαν παιδιά που, από τις απαντήσεις τους στην πρώτη ομάδα ερωτήσεων φαίνεται να αναγνωρίζουν ότι το σύμβολο του κλάσματος αναπαριστά κάποιο μέρος ενός σχήματος ή μιας ποσότητας, χωρίς όμως να γνωρίζουν το συγκεκριμένο μέρος του σχήματος ή της ποσότητας που αυτό αναπαριστά (λάθος μερισμός). Ορισμένα

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3.

Κατηγορίες συνδυασμών των απαντήσεων των παιδιών και οι κατηγορίες βαθμολόγησης στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων στις τρεις ομάδες ερωτήσεων.

Ομάδες ερωτήσεων Κατηγορίες συνδυασμών	Ομάδα 1: Πως τα παιδιά ερμηνεύουν το σύμβολο ενός κλάσματος (Πίνακες 2.1Β και 2.1Γ)	Ομάδα 2: Αντιστοιχία μιας δεδομένης κατάστασης σε σύμβολο κλάσματος (Πίνακεςς 2.2Β και 2.2Γ)	Ομάδα 3: Αντιστοιχία του συμβόλου ενός κλάσματος σε μια δεδομένης κατάστασης μέρους – όλου (Πίνακες 2.3Β και 2.3.Γ)
Κατηγορία 1. Ανεπαρκείς αντιστοιχίες	(1)[68] Μη αναγνώριση του συμβόλου – Άσχετες ζωγραφιές	(1) Ανεπαρκής ή λανθασμένη αντιστοιχία Κατάστασης σε Σύμβολο με μικρά και μεγάλα κλάσματα	(1) ή (2) Ανεπαρκείς ή λανθασμένες αντιστοιχίες εκτός την απλή αντιστ. της εικονικής αναπαρ. με κλάσματα με μικρούς ή μεγάλους αριθμούς αριθμούς
Κατηγορία 2. Λάθος μερισμός 1	(2) Λάθος μερισμός 		
Κατηγορία 3. Λάθος μερισμός 2		(2) Σωστή αντιστοιχία λεκτικής κατάστασης σε σύμβολο για το μικρό κλάσμα	(2) ή (3) Επαρκείς οι απλές αντιστοιχίες εικονικών αναπ. και λανθασμένες οι σύνθετες αντιστ. εκτός ίσως των εικονικών αναπ. καταστ. με κλάσματα με μικρούς αριθμούς
Κατηγορία 4. Λάθος μερισμός 3		(3) ή (4) ή (5) Ανεπαρκής ή λάθος αντιστοιχία κατάστασης εκφρασμένης λεκτικά σε σύμβολο και σωστή αντιστοιχία εικονικής κατάστασης σε σύμβολο	(2) ή (3) >> ή και (4) Επαρκείς όλες οι απλές και οι σύνθετες αντιστ. εικονικών αναπαραστάσεων καταστάσεων με κλάσματα με μικρούς αριθμούς
Κατηγορία 5. Απλός μερισμός 1	(3) ή (4) Απλός μερισμός ή ισομερισμός		
Κατηγορία 6. Απλός μερισμός 2		(5) Σωστή αντιστοιχία κατάστασης εκφρασμένης λεκτικά σε σύμβολο μόνο για το μικρό ή το μεγάλο κλάσμα και σωστή αντιστοιχία εικονικής κατάστασης σε σύμβολο γενικά, ή (6) Σωστή αντιστοιχία κατάστασης εκφρασμένης λεκτικά ή εικονικά σε σύμβολο	(5) Πρόβλημα μόνο στις σύνθετες εικον. αναπαρ. καταστ. με κλάσματα με μεγάλους αριθμούς ή (6) Επαρκείς όλες οι αντιστοιχίες απλές ή σύνθετες με μικρά ή μεγάλα κλάσματα
Κατηγορία 7. Το κλάσμα είναι διαίρεση και επαρκείς όλες οι αντιστοιχήσεις (εκτός ίσως στις σύνθετες αντιστ. με μεγάλους αριθμούς)	(5) Διαίρεση και αναπαραστάσεις μερισμού		
Κατηγορία 0. Αντιφατικές απαντήσεις	Καμία απάντηση ή (3)	(2) ή (6)	(2) ή (3) ή (4)

[68] Αναφέρονται στις κατηγορίες βαθμολόγησης στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων στους αντίστοιχους Πίνακες.

από τα παιδιά αυτά, όπως και τα προηγούμενα που ταξινομήθηκαν στην *κατηγορία 1*, δεν μπορούν να αντιστοιχίσουν σε ένα κλάσμα το χρωματισμένο μέρος ενός σχήματος ή το μέρος μιας ποσότητας που τους περιγράφεται λεκτικά (ομάδα ερωτήσεων 2), ενώ μπορούν να αντιστοιχήσουν το σύμβολο ενός κλάσματος όταν τους δίνεται ένα πλαίσιο αναφοράς όπου υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία του παρονομαστή με τα μέρη που είναι διαιρεμένη η μονάδα αναφοράς (βλ. Πίνακα 2.3 –*κατηγορία 2*).

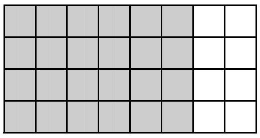
ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.

Κατηγορίες βαθμολόγησης των συνδυασμών των απαντήσεων των παιδιών στις τρεις ομάδες ερωτήσεων, συχνότητες και ποσοστά επί τοις εκατό στις τρεις ομάδες ηλικίας του δείγματος.

Ηλικιακές ομάδες Κατηγορίες συνδυασμών απαντήσεων στις τρεις ομάδες ερωτήσεων	Δ΄ Δημοτ. N=25 (%)	ΣΤ΄ Δημοτ. N=25 (%)	Β΄ Γυμν. N=25 (%)	Σύνολο N=100 (%)
Κατηγορία 1. Ανεπαρκείς αντιστοιχίες	6 (24%)	0 (0%)	0 (0%)	6 (8%)
Κατηγορία 2. Λάθος μερισμός 1	4 (16%)	2 (8%)	0 (0%)	6 (8%)
Κατηγορία 3. Λάθος μερισμός 2	2 (8%)	1 (4%)	0 (0%)	3 (4%)
Κατηγορία 4. Λάθος μερισμός 3	4 (16%)	5 (20%)	1 (4%)	10 (13.3%)
Κατηγορία 5. Απλός μερισμός 1	6 (24%)	8 (32%)	8 (32%)	22 (29.3%)
Κατηγορία 6. Απλός μερισμός 2	1 (4%)	6 (24%)	12 (48%)	19 (25.3%)
Κατηγορία 7. Το κλάσμα είναι διαίρεση	0 (0%)	2 (8%)	3 (12%)	5 (6.7%)
Κατηγορία 0. Ανεπαρκείς αντιστοιχίες	2 (8%)	1 (4%)	1 (4%)	4 (5.3%)
Σύνολο	25 (100%)	25 (100%)	25 (100%)	75 (100%)

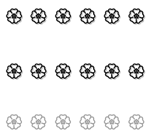
Τρία παιδιά από εκείνα που εκφράζανε το σύμβολο ενός κλάσματος με λάθος μερισμό, μπορούσαν να μεταφράσουν μια κατάσταση εκφρασμένη λεκτικά στο σύμβολο ενός κλάσματος όταν το κλάσμα που προέκυπτε είχε μικρούς αριθμούς, ενώ απαντούσαν με τον ίδιο τρόπο στην τρίτη ομάδα ερωτήσεων (*κατηγορία 3*). Το μεγαλύτερο όμως ποσοστό των προηγούμενων παιδιών μπορούσε να μεταφράσει σε σύμβολο ενός κλάσματος τα χρωματισμένα μέρη ενός σχήματος ακόμη και όταν το κλάσμα που προέκυπτε είχε μεγάλους αριθμούς. Επιπλέον στην τρίτη ομάδα ερωτήσεων τα ίδια παιδιά αντιστοιχούσαν σωστά το σύμβολο ενός κλάσματος (είτε περιλάμβανε μικρούς είτε μεγάλους αριθμούς) σε μια δεδομένη μονάδα αναφοράς όταν αυτή περιγραφόταν εικονικά με ένα σχήμα ή με ένα σύνολο διακριτών στοιχείων (*κατηγορία 4*).

Όπως έχουμε ήδη περιγράψει, κατά τη βαθμολόγηση των απαντήσεων των παιδιών στις ερωτήσεις της πρώτης ομάδας τα περισσότερα από τα παιδιά της έκτης δημοτικού και της δευτέρας γυμνασίου ερμηνεύουν το σύμβολο του κλάσματος που τους δίνουμε ως το μέρος ενός σχήματος ή ενός συνόλου διακριτών στοιχείων που ζωγραφίζουν. Στον Πίνακα 2.1Γ φάνηκε ότι τα περισσότερα από τα παιδιά αυτά, χωρίζουν το σχήμα που ζωγραφίζουν σε τόσα περίπου ίσα μέρη όσος ο παρονομαστής του κλάσματος, χωρίς πάντα να αναφέρουν την αναγκαιότητα ισομερισμού του σχήματος αυτού. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.3, τα ίδια παιδιά στις άλλες δύο ομάδες ερωτήσεων απαντούν επαρκώς στις ερωτήσεις που περιλαμβάνουν εικονικές περιγραφές της μονάδας αναφοράς (*κατηγορία 5*). Συγκεκριμένα, στη δεύτερη ομάδα ερωτήσεων μεταφράζουν τα χρωματισμένα μέρη ενός σχήματος σε ένα κλάσμα ως εξής:



→ είναι τα $\frac{24}{32}$ ή τα $\frac{6}{8}$ του σχήματος

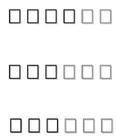
Στην τρίτη ομάδα ερωτήσεων χρωματίζουν σωστά το μέρος του σχήματος που τους δίνεται (ή τα διακεκριμένα στοιχεία του συνόλου των στοιχείων που τους δίνονται) όσο το μέρος της μονάδας στο οποίο αντιστοιχεί το δεδομένο σύμβολο του κλάσματος, μόνο στις ερωτήσεις που περιλαμβάνουν κλάσματα με μικρούς αριθμούς. Για παράδειγμα στην ερώτηση 14 απαντούν ως εξής:

Τα $\frac{2}{3}$ του συνόλου των λουλουδιών  είναι 

τα χρωματισμένα λουλούδια.

Αντίθετα όταν το σύμβολο του κλάσματος περιλαμβάνει μεγάλους αριθμούς, στις σύνθετες αντιστοιχίες, όπως για παράδειγμα στην ερώτηση 18 (η οποία περιλαμβάνει κλάσμα με μεγάλους αριθμούς όπου ο αριθμός των τετραγώνων που δίνεται στα παιδιά ως μονάδα αναφοράς είναι διαφορετικός από τον παρονομαστή του κλάσματος), αρκετά από τα παιδιά αυτά συνεχίζουν να χρωματίζουν τόσα τετράγωνα όσος ο αριθμητής του κλάσματος που τους δίνεται σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία. Για παράδειγμα:

Τα $\frac{10}{12}$ του συνόλου των τετραγώνων είναι τα χρωματισμένα τετράγωνα



Μια άλλη ομάδα παιδιών, τα οποία απαντούν με τον ίδιο τρόπο στην πρώτη ομάδα ερωτήσεων, απαντούν σχεδόν επαρκώς στο σύνολο των ερωτήσεων που περιλαμβάνουν είτε λεκτικές είτε εικονικές περιγραφές της μονάδας αναφοράς στη δεύτερη και στην τρίτη ομάδα ερωτήσεων αντίστοιχα, με εξαίρεση και στην περίπτωση αυτή, την ερώτηση 18 (*κατηγορία 6*).

Τέλος, τα παιδιά που απάντησαν με τον ίδιο τρόπο στις ερωτήσεις της δεύτερης και της τρίτης ομάδας ερωτήσεων, αλλά όρισαν το σύμβολο του κλάσματος ως μια διαίρεση, ταξινομήθηκαν στην *κατηγορία 7*. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.4 τα παιδιά που ταξινομήθηκαν στις δύο τελευταίες κατηγορίες ανήκαν κυρίως στις δύο μεγαλύτερες ηλικιακές ομάδες.

2.4.2. Συζήτηση των αποτελεσμάτων – Σύγκριση με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών

Η εμπειρική αυτή έρευνα το πρώτο πράγμα που επιβεβαίωσε είναι τα σοβαρά προβλήματα που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στην ερμηνεία τόσο του συμβόλου όσο και της αριθμητικής αξίας που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα.

Οι ιδέες των παιδιών όπως αναδείχθηκαν από τις απαντήσεις τους στις διάφορες ερωτήσεις που τους θέσαμε επιβεβαίωσαν την αρχική μας υπόθεση ότι τα παιδιά, στην προσπάθειά τους να προσεγγίσουν ολοκληρωμένα την έννοια του κλάσματος, δεν υιοθετούν αυτόματα την επιστημονική θεώρηση του ρητού αριθμού (ως πηλίκου του αριθμητή δια τον παρονομαστή)· αντίθετα ερμηνεύουν το σύμβολο του κλάσματος προσπαθώντας να συμβιβάσουν τις αρχικές τους ιδέες για την έννοια του αριθμού, έννοια που ταυτίζεται με αυτήν του φυσικού αριθμού. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τα παιδιά να υιοθετούν ερμηνείες του κλάσματος που οδηγούν σε παρανοήσεις. Η διαπίστωση αυτή ενισχύεται από τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις εκείνες στις οποίες οι διαφορετικές καταστάσεις είχαν περιγραφεί άλλοτε λεκτικά και άλλοτε εικονικά.

Από τις απαντήσεις των παιδιών προέκυψε ότι ακόμη και στην περίπτωση που αναγνωρίζουν ότι το σύμβολο ενός κλάσματος αντιπροσωπεύει έναν αριθμό, δεν φαίνεται να είναι πολύ ξεκάθαρο, ιδιαίτερα για τα παιδιά του δημοτικού, ποια είναι η σχέση που συνδέει τον αριθμητή με τον παρονομαστή του[69]. Επιπλέον από τις απαντήσεις των παιδιών προέκυψε και ένα δεύτερο στοιχείο, ότι δηλαδή τα μικρότερα παιδιά δεν αναγνωρίζουν το σύμβολο ενός κλάσματος όταν αυτό τους δίνεται χωρίς το πλαίσιο αναφοράς ενώ τα ίδια παιδιά το αναγνωρίζουν ως μέρος μιας ποσότητας όταν τους δίνεται και το πλαίσιο αναφοράς και μάλιστα όταν η μονάδα αναφοράς περιγράφεται με ένα σχήμα ή πάλι εικονικά με ένα σύνολο στοιχείων. Συγκεκριμένα, ακόμη και τα μικρότερα παιδιά μπορούν να καταλάβουν ότι τα 3/4 ενός σχήματος που είναι χωρισμένο σε τέσσερα μέρη αντιστοιχεί στα τρία μέρη αυτού του σχήματος.

Επιπλέον παρατηρήσαμε ότι τα περισσότερα από τα μικρότερα παιδιά ερμηνεύουν το σύμβολο ενός κλάσματος ως το μέρος μιας μονάδας χωρίς να θεωρούν απαραίτητο τον χωρισμό της μονάδας σε ίσα μέρη· δεν κρίνουν δηλαδή απαραίτητο να είναι ακριβώς ίσα τα αντικείμενα του συνόλου ή τα μέρη στα οποία χωρίζεται το σχήμα. Η διαπίστωσή μας αυτή συμπίπτει με τα ευρήματα της έρευνας που διεξήγαγαν οι Reeve και Pattison (1996)[70] σε παιδιά ίδιας ηλικίας περίπου στην Αυστραλία. Η γενική αυτή ερμηνεία του κλάσματος ως μέρους μιας ακέραιας μονάδας, ερμηνεία η οποία είναι και η λιγότερο αφηρημένη για τα παιδιά, είναι

[69] Όπως είδαμε, στα λεκτικά προβλήματα της τρίτης ομάδας ερωτήσεων, ορισμένα παιδιά απαντούσαν με τη διαφορά του αριθμητή από τον παρονομαστή

[70] Οι Reeve και Pattison (1996) κατηγοριοποίησαν τις απαντήσεις των παιδιών με τους χαρακτηρισμούς *congruent segments* ή *non-congruent segments* στις περιπτώσεις που τα παιδιά κατά την εικονική αναπαράσταση ενός κλάσματος, χωρίζουν ένα σχήμα (μονάδα αναφοράς) σε ίσα ή άνισα μέρη αντίστοιχα (για περισσότερες λεπτομέρειες, βλ. Reeve και Pattison (1996), σ. 144).

επίσης και η πλέον τρέχουσα ερμηνεία που χρησιμοποιούν αρχικά οι δάσκαλοι όταν εισάγουν τα παιδιά σ' αυτή τη μαθηματική έννοια.

Ακόμη, από τους συνδυασμούς των απαντήσεων των παιδιών (βλ. Πίνακα 2.3.), φάνηκε ότι η κατανόηση της έννοιας του μερισμού μιας μονάδας αναπτύσσεται παράλληλα με την απόκτηση της έννοιας του κλάσματος ως μέρους μιας μονάδας (αναγνώριση δηλαδή της αναγκαιότητας του διαχωρισμού σε ίσα μέρη).

Ακόμη κρίνουμε σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η υπόθεσή μας για το μέγεθος των ψηφίων που απαρτίζουν ένα κλάσμα δεν επαληθεύτηκε στο σύνολο των ερωτήσεων. Από τις απαντήσεις τους στην πρώτη ομάδα ερωτήσεων προκύπτει ότι τα παιδιά πολλές φορές παρερμηνεύουν το σύμβολο ενός *μικρού* κλάσματος, όπως το 2/3, μεταφράζοντάς ως το 1/2 της μονάδας αναφοράς του. Γενικά φαίνεται ότι τα παιδιά δεν διαφοροποιούν τις απαντήσεις τους σε σχέση με τη μεταβλητή των *μικρών* ή *μεγάλων αριθμών* στις απλές γραμμικές αντιστοιχίες ανάμεσα σε σύμβολο και καταστάσεις που τους δίνονται λεκτικά ή εικονικά (πρώτη και δεύτερη ομάδα ερωτήσεων). Η μεταβλητή αυτή όμως διαφοροποιεί το είδος των απαντήσεών τους όταν οι αντιστοιχίες που τους ζητούνται είναι σύνθετες (όπως στις περιπτώσεις των ερωτήσεων 13, 14, 17 και 18 της τρίτης ομάδας). Τότε γίνεται σαφές ότι οι δυσκολίες των παιδιών πολλαπλασιάζονται και τα παιδιά έχουν μεγαλύτερη δυσκολία στην αντιμετώπιση κλασμάτων με μεγάλους αριθμούς.

Γενικά οι απαντήσεις έδειξαν ότι τα παιδιά έχουν καλύτερη επίδοση στις ερωτήσεις που περιλαμβάνουν εικονικές αναπαραστάσεις των καταστάσεων που περιγράφουν. Όπως παρουσιάσαμε στον Πίνακα 2.3., τα παιδιά αρχικά επιτυγχάνουν να αντιστοιχήσουν ένα κλάσμα προς μια δεδομένη μονάδα αναφοράς, όταν αυτή τους παρουσιάζεται εικονικά και ιδιαίτερα όταν ο αριθμός των μερών στα οποία είναι η μονάδα αυτή διαιρεμένη ισούται με τον παρονομαστή του δεδομένου κλάσματος (απλή αντιστοιχία –Πίνακας 2.3Α(1) . Αντίθετα, ακόμη και τα μεγαλύτερα παιδιά έχουν πρόβλημα να αποκαταστήσουν μια τέτοιου είδους αντιστοιχία όταν ο αριθμός των μερών στα οποία είναι διαιρεμένη η μονάδα είναι διαφορετικός από τον παρονομαστή του δεδομένου κλάσματος (σύνθετη αντιστοιχία), και ιδιαίτερα όταν το κλάσμα αυτό περιλαμβάνει μεγάλους αριθμούς. Θέλοντας να επαληθεύσουμε το συγκεκριμένο αυτό εύρημα πραγματοποιήσαμε το μη παραμετρικό τεστ του Wilcoxon το οποίο συγκρίνει τις επιδόσεις των παιδιών σε ερωτήσεις που διαφέρουν μόνο στο κριτήριο της απλής ή σύνθετης αντιστοιχίας. Τα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν ότι τα παιδιά έχουν σταθερά καλύτερες επιδόσεις στις ερωτήσεις που περιλαμβάνουν απλές αντιστοιχίες τόσο στις λεκτικές όσο και τις εικονικές αναπαραστάσεις των μονάδων αναφοράς.

Επιπλέον τα αποτελέσματά μας δεν εμφάνισαν ιδιαίτερες διαφορές όσον αφορά τις συνεχείς και τις διακριτές ποσότητες που περιελάμβαναν οι ερωτήσεις της έρευνάς μας. Στο σημείο αυτό τα ευρήματα της έρευνάς μας συμπίπτουν με τα ευρήματα της Gelman (1991) η οποία ισχυρίζεται ότι τα παιδιά έχουν την ίδια επίδοση άσχετα από τον τρόπο που τους δίνονται στα διάφορα έργα οι ποσότητες (διακριτές ή συνεχείς). Αντίθετα, τα ευρήματά μας διαφέρουν ως προς τα δεδομένα άλλων ερευνών όπως αυτές του Hunting (1983) και των Phillippou και Christou (1994) οι οποίοι πρεσβεύουν ότι τα παιδιά έχουν καλύτερη επίδοση στα προβλήματα όπου ένα κλάσμα ερμηνεύεται ως μέρος ενός συνόλου διακριτών στοιχείων.

Συνοψίζοντας, οι διαφορετικές μεταβλητές που χρησιμοποιήσαμε στις ιδίου τύπου ερωτήσεις είχαν ως αποτέλεσμα να μας δώσουν μια αρκετά ολοκληρωμένη εικόνα των νοητικών αναπαραστάσεων που διαθέτουν τα παιδιά για την έννοια του κλάσματος ως μέρους μιας μονάδας. Όμως οι ερωτήσεις αυτής της μελέτης δεν κάλυψαν το ευρύ πεδίο των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν καλούνται να λύσουν προβλήματα που περιλαμβάνουν κλάσματα. Έτσι προέκυψε η ανάγκη να διερευνηθούν και άλλες πλευρές της μαθηματικής αυτής έννοιας, ώστε να μπορέσουμε να κατανοήσουμε καλύτερα τη διαδρομή που ακολουθούν τα παιδιά για να αναπτύξουν πλήρως την έννοια του κλάσματος. Για το λόγο αυτό θεωρήσαμε ότι στη δεύτερη έρευνα θα έπρεπε να στραφούμε και σε άλλες πλευρές όπως η διάταξη των κλασμάτων και οι αριθμητικές πράξεις με κλάσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ: ΕΡΕΥΝΑ ΙΙ

3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο πρώτο κεφάλαιο δια μέσου της βιβλιογραφικής επισκόπησης έγινε μια προσπάθεια οριοθέτησης της διερεύνησής μας καθώς και μια περιγραφή των υποθέσεων της έρευνας. Βασική υπόθεση της εργασίας αυτής είναι ότι τα παιδιά ταυτίζουν την έννοια του αριθμού με την έννοια του φυσικού αριθμού. Ειδικότερα υποθέσαμε ότι καθώς τα παιδιά εισάγονται στην έννοια του κλάσματος στη σκέψη τους πραγματώνεται εννοιολογική αλλαγή στην έννοια του αριθμού.

Με την εμπειρική έρευνα, που παρουσιάζεται σε αυτό το κεφάλαιο και που βασίζεται στο θεωρητικό πλαίσιο της Βοσνιάδου (1998, 2000), θέλουμε να διερευνήσουμε αν τα μικρά παιδιά διαθέτουν ένα αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο της έννοιας του κλάσματος πολύ διαφορετικό από το αντίστοιχο επιστημονικό. Αν συμβαίνει αυτό, υποθέτουμε ότι καθώς τα παιδιά αλλάζουν σταδιακά ιδέες και θεωρίες για την έννοια του κλάσματος (μέσα από τη διδασκαλία) θα παρουσιάζουν διάφορες παρανοήσεις για το κλάσμα. Συνεπώς στόχο της εμπειρικής αυτής έρευνας αποτελεί η διερεύνηση της ύπαρξης εννοιολογικής αλλαγής στη σκέψη των παιδιών καθώς επίσης και η μελέτη των μηχανισμών με τους οποίους αυτή πραγματώνεται.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας και συγκεκριμένα στην ενότητα 1.1.5. έχει περιγραφεί η μεθοδολογική προσέγγιση που ανέπτυξε η Βοσνιάδου (1994, 1999, 2000) για τις νοητικές αναπαραστάσεις των παιδιών σε σχέση με φυσικές έννοιες στο χώρο της αστρονομίας· στην ίδια ενότητα έχουν περιγραφεί και έρευνες οι οποίες χρησιμοποίησαν την ίδια αυτή μεθοδολογία ώστε να διερευνήσουν το φαινόμενο της εννοιολογικής αλλαγής σε διάφορες περιοχές γνώσης (Ιωαννίδης 1991· Ioannides και Vosniadou, υπό δημοσίευση· Ιωαννίδου 1998· Ιωαννίδου και Βοσνιάδου, 2001· Κουκά 2000· Κουκά, Βοσνιάδου και Τσαπαρλής, 2000· Κύρκος, 1999).

Στην παρούσα έρευνα θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε την προαναφερθείσα μέθοδο στο χώρο των μαθηματικών και ειδικότερα σε σχέση με την έννοια του κλάσματος. Σύμφωνα με αυτήν τη μέθοδο, δίνονται στα υποκείμενα ερωτήσεις οι οποίες σχετίζονται με την έννοια του κλάσματος και τους ζητείται να απαντήσουν με αριθμητικά σύμβολα ή με ζωγραφιές.

Τα τρία βασικά σημεία πάνω στα οποία βασίστηκε ο σχεδιασμός της έρευνας είναι η διερεύνηση της κατανόησης από την πλευρά των παιδιών της έννοιας του κλάσματος δια μέσου της διερεύνησης καταστάσεων που αφορούν το σύμβολό του, την αριθμητική του αξία και τις διαδικασίες που ακολουθούν τα παιδιά κατά την επεξεργασία πράξεων με κλάσματα. Η δομή των ερωτήσεων στοχεύει στη διερεύνηση των παραπάνω σημείων.

Συγκεκριμένα το ερωτηματολόγιο περιελάμβανε 23 ερωτήσεις οι οποίες διακρίνονται σε δύο ενότητες σε σχέση με το περιεχόμενό τους. Η πρώτη ενότητα περιλαμβάνει ερωτήσεις που στοχεύουν στην διερεύνηση της εννοιολογικής γνώσης που διαθέτουν τα παιδιά ως προς την αξία που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα, ενώ στη δεύτερη ενότητα εξετάζεται η διαδικαστική γνώση των παιδιών μέσα από ερωτήσεις που περιλαμβάνουν πράξεις με κλάσματα (βλ., Σχήμα 3.1).

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΞΙΑ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΑ		
Ορισμός	Διάταξη Κλασμάτων	Εκτίμηση πράξεων	Σύμβολο → Κατάσταση	Κατάσταση → Σύμβολο
Επινόηση της αριθμητικής αναπαράστασης του μικρότερου και του μεγαλύτερου κλάσματος.	Σύγκριση αριθμητικών αναπαραστάσεων κλασμάτων και της ακέραιας μονάδας.	Εκτίμηση του μεγέθους του αποτελέσματος μιας πράξης με κλάσματα ή της ορθότητας μιας ισότητας που περιλαμβάνει μια πράξη.	Εικονική περιγραφή κατάστασης που αντιστοιχεί στην αριθμητική πράξη	Αριθμητική πράξη που αντιστοιχεί στην εικονική περιγραφή μιας κατάστασης

Σχήμα 3.1: Σχεδιασμός του ερωτηματολογίου της έρευνας

Παρακάτω περιγράφεται η μέθοδος που ακολουθήσαμε κατά την πραγματοποίηση της έρευνας, ενώ στη συνέχεια περιγράφονται αναλυτικά τα αποτελέσματα και η συζήτηση των αποτελεσμάτων αυτών.

3.2. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται το δείγμα της έρευνας, τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν, η διαδικασία που ακολουθήθηκε και η βαθμολόγηση των δεδομένων της έρευνας.

3.2.1 Υποκείμενα

Τα υποκείμενα της παρούσης έρευνας ήταν 200 παιδιά τα οποία κατανέμονται ως εξής: 40 παιδιά της πέμπτης τάξης του Δημοτικού ηλικίας, από 9 χρόνων και έντεκα μηνών έως 10 χρόνων και 11 μηνών (μέσος όρος ηλικίας 10 χρόνια και 7 μήνες)· 40 παιδιά της έκτης τάξης του Δημοτικού ηλικίας, από 11 χρόνων έως 11 χρόνων και 11 μηνών (μέσος όρος ηλικίας 11 χρόνια και 5 μήνες)· 40 παιδιά της πρώτης τάξης του Γυμνασίου, ηλικίας από 12 χρόνων έως 12 χρόνων και 11 μηνών (μέσος όρος ηλικίας 12 χρόνια και 4 μήνες)· 40 παιδιά της δευτέρας τάξης του Γυμνασίου, ηλικίας από 13 χρόνων έως 13 χρόνων και 11 μηνών (μέσος όρος ηλικίας 13 χρόνια και 8 μήνες) και 40 παιδιά της πρώτης τάξης του Λυκείου, ηλικίας από 15 χρόνων έως 16 χρόνων (μέσος όρος ηλικίας 15 χρόνια και 6 μήνες). Τα σχολεία στα οποία πραγματοποιήθηκε η έρευνα ήταν το 1^{o} , το 4^{o} και το 20^{o} Δημοτικό σχολείο του Δήμου Καλαμαριάς της Θεσσαλονίκης, το 14^{o} και 19^{o} Γυμνάσιο Θεσσαλονίκης καθώς επίσης και το Λύκειο Νεάπολης Θεσσαλονίκης. Η ακριβής κατανομή του δείγματος ως προς την ηλικία, το φύλο τους, την τάξη που παρακολουθούν και για τα δύο ερωτηματολόγια παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.2.

ΗΛΙΚΙΑΚΗ ΟΜΑΔΑ	ΤΑΞΗ	Μ.Ο. ΗΛΙΚΙΑΣ	ΦΥΛΟ		ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
			ΑΓΟΡΙ	ΚΟΡΙΤΣΙ	
1	Ε΄ Δημοτικού	10 χρόνια 7 μήνες	20	20	40
2	ΣΤ΄ Δημοτικού	11 χρόνια 5 μήνες	19	21	40
3	Α΄ Γυμνασίου	12 χρόνια 4 μήνες	20	20	40
4	Β΄ Γυμνασίου	13 χρόνια 8 μήνες	20	20	40
5	Α΄ Λυκείου	15 χρόνια 6 μήνες	21	19	40

<u>Σχήμα 3.2</u>: Κατανομή των παιδιών σε σχέση με την τάξη, την ηλικία και το φύλο

Οι ηλικίες του δείγματος επιλέχτηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να καταστεί δυνατή η διερεύνηση των πεποιθήσεων των παιδιών για την έννοια του κλάσματος σε συγκεκριμένα στάδια της πορείας που ακολουθούν κατά την εκμάθηση της έννοιας του κλάσματος όπως επίσης και σε σχέση με τις απαιτήσεις του ερωτηματολογίου. Για το λόγο αυτό επιλέχθηκε η πέμπτη Δημοτικού ως η μικρότερη ηλικιακή ομάδα ώστε τα παιδιά αυτής της ομάδας να απαντούν στις ερωτήσεις αυτού του ερωτηματολόγιου όχι μόνο με βάση αυτά που έχουν διδαχθεί αλλά με βάση τις γενικότερες ιδέες τους για τα κλάσματα. Δεν επιλέξαμε μικρότερα παιδιά, επειδή οι ερωτήσεις που περιέχονται σε αυτό το ερωτηματολόγιο απαιτούν έστω και μια πρώτη γνώση των διαδικασιών χειρισμού των κλασμάτων που δεν είναι δυνατόν να ελεγχθούν σε παιδιά μικρότερης ηλικίας. Η μεγαλύτερη ηλικιακή ομάδα περιλαμβάνει παιδιά της πρώτης Λυκείου γιατί στις τάξεις του Γυμνασίου ολοκληρώνεται η διδασκαλία των ρητών αριθμών. Έτσι οι ηλικιακές ομάδες της έρευνας κατανέμονται από ομάδες αρχαρίων έως ομάδες παιδιών που έχουν ολοκληρώσει τη διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος όπως επίσης και έννοιες που έχουν άμεση σχέση με αυτήν όπως των ανάλογων ποσών και των ρητών αριθμών.

3.2.2 Υλικά (Περιγραφή του Ερωτηματολογίου)

Η έρευνα περιελάμβανε ένα γραπτό ερωτηματολόγιο το οποίο περιλαμβάνεται στο τέλος του Παραρτήματος. Παρακάτω περιγράφουμε αναλυτικά τις ερωτήσεις του ερωτηματολόγιου αυτού σύμφωνα με τον σχεδιασμό που περιγράφεται στο Σχήμα 3.1. (βλ. σ. 126)

3.2.2Α. Η Αριθμητική αξία ενός κλάσματος

Τα έργα που περιλαμβάνει αυτή η ενότητα στοχεύουν να αποκαλύψουν τις πεποιθήσεις των παιδιών για την αριθμητική αξία που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα. Τι αντιπροσωπεύει για τα παιδιά ένα κλάσμα; Θεωρούν ότι είναι ένας αριθμός; Πως συγκρίνουν δύο κλάσματα; Οι ερωτήσεις αυτής της ενότητας διακρίνονται σε δύο ομάδες σε σχέση με το περιεχόμενό τους. Στις ερωτήσεις της πρώτης ομάδας ζητείται από τα παιδιά να επινοήσουν το μικρότερο και το μεγαλύτερο κλάσμα, αν πιστεύουν ότι υπάρχει ένα τέτοιο κλάσμα, ενώ στη δεύτερη ομάδα τους ζητείται να συγκρίνουν κλάσματα. Οι απαντήσεις των παιδιών στις παραπάνω ερωτήσεις συνθέτουν μια εικόνα των τρόπων που τα παιδιά αντιλαμβάνονται το κλάσμα. Αυτοί οι τρόποι εμπλουτίζουν τις πληροφορίες για το πως τα παιδιά προσεγγίζουν την έννοια του κλάσματος.

Ομάδα 1: Επινόηση του μικρότερου και του μεγαλύτερου κλάσματος

Σε αυτή την ομάδα ερωτήσεων ανήκουν οι ερωτήσεις 1, 1α, 2 και 2α στις οποίες ζητείται από τα παιδιά να αναφέρουν το μικρότερο και το μεγαλύτερο κλάσμα που μπορούν να σκεφθούν. Οι παραπάνω ερωτήσεις εντάσσονται στις ερωτήσεις ορισμού ή ανίχνευσης. Θεωρούν τα παιδιά ότι υπάρχει ένα συγκεκριμένο κλάσμα που είναι το μικρότερο ή το μεγαλύτερο όλων των κλασμάτων ή θεωρούν ότι τα κλάσματα δεν έχουν αρχή και τέλος; Στην πρώτη περίπτωση ποια είναι η μορφή του μικρότερου κλάσματος και ποια του μεγαλύτερου; Τα κλάσματα που επιλέγουν ως το μεγαλύτερο ή το μικρότερο μας φανερώνουν τις ιδέες τους για το κλάσμα και την αξία που προσδίδουν σε αυτό ως έναν αριθμό.

Ομάδα 2: Διάταξη κλασμάτων

Τα έργα της διάταξης δίνουν πληροφορίες για την αριθμητική αξία που αναπαριστά ένα κλάσμα καθώς και για την ίδια την έννοια του κλάσματος. Οι ερωτήσεις διάταξης περιέχουν αριθμητικά σύμβολα κλασμάτων και σε κάθε περίπτωση ζητείται από τα παιδιά να τα διατάξουν και στη συνέχεια να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.

Στην ερώτηση 3 τους ζητείται να διατάξουν τέσσερις αριθμούς εκ των οποίων οι τρεις είναι κλάσματα και ο τέταρτος (ο τρίτος στη διαδοχή των αριθμών που τους δίνονται) είναι η ακέραια μονάδα. Η συμμετοχή της μονάδας στους αριθμούς που είχαν να διατάξουν τα παιδιά θεωρήθηκε σημαντική, διότι μας φανερώνει τον τρόπο που τα παιδιά συσχετίζουν διαφορετικά κλάσματα, όπως μια κλασματική μονάδα, ένα απλό και ένα καταχρηστικό κλάσμα, με την μονάδα. Στις υπόλοιπες ερωτήσεις αυτής της ομάδας ζητείται από τα παιδιά να διατάξουν ζεύγη κλασμάτων και σύμφωνα με το σχέδιο της έρευνας χρησιμοποιούνται διάφοροι τύποι κλασμάτων. Στην ερώτηση 4 τα κλάσματα είναι ομώνυμα, στην 5 έχουν ίδιους αριθμητές, στην 6 το ένα από τα δύο κλάσματα έχει αριθμητή μεγαλύτερο του παρονομαστή, στην 7 το ένα κλάσμα πλησιάζει το μηδέν ενώ το άλλο τη μονάδα και στην 8 οι αριθμοί του ενός κλάσματος είναι μικρότεροι από τους αντίστοιχους του άλλου ενώ η αριθμητική αξία του πρώτου είναι μεγαλύτερη από του δεύτερου. Οι διαδικασίες που χρησιμοποιούν τα παιδιά κατά τη σύγκριση των κλασμάτων στις παραπάνω περιπτώσεις, όπως επίσης και οι αιτιολογήσεις τους αποκαλύπτουν τις γνώσεις που διαθέτουν για την έννοια του κλάσματος.

3.2.2Β. Πράξεις με Κλάσματα

Τα έργα που περιέχονται στην παρούσα ενότητα στοχεύουν στη διερεύνηση της διαδικαστικής γνώσης των παιδιών για τα κλάσματα. Η διερεύνηση αυτή πραγματώνεται μέσα από την προσπάθεια των παιδιών να απαντήσουν είτε σε ερωτήσεις που περιέχουν συμβολικές αναπαραστάσεις πράξεων είτε μέσα από τις προσπάθειές τους να μεταφράσουν πράξεις με κλάσματα που τους δίνονται συμβολικά σε λεκτικές ή εικονικές αναπαραστάσεις καταστάσεων που αντιστοιχούν σε αυτές τις πράξεις και το αντίστροφο. Οι εξηγήσεις που δίνουν τα παιδιά κατά την εκτίμηση της ορθότητας συμβολικών ισοτήτων που περιέχουν πράξεις με κλάσματα, καθώς και οι διαδικασίες που ακολουθούν κατά την εκτέλεση πράξεων με κλάσματα μας δίνουν πληροφορίες για τις γνώσεις που διαθέτουν για το κλάσμα όπως επίσης για το σύμβολο και την έννοια του κλάσματος γενικότερα. Στην ενότητα αυτή διακρίνουμε τέσσερις ομάδες ερωτήσεων όπως θα περιγράψουμε παρακάτω.

<u>*Ομάδα 3*</u>*: Εκτίμηση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων ενός φυσικού αριθμού με ένα κλάσμα*

Οι ερωτήσεις αυτής της ομάδας περιλαμβάνουν αριθμητικές αναπαραστάσεις πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων του φυσικού αριθμού 17 με διαφορετικά κλάσματα χωρίς να δίνεται το αποτέλεσμα της κάθε πράξης. Από τα παιδιά ζητείται να εκτιμήσουν αν το αποτέλεσμα στην εκάστοτε περίπτωση είναι μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο με τον αριθμό 17. Επίσης τους ζητείται να αιτιολογήσουν σε κάθε περίπτωση την απάντησή τους. Ακόμη στην περίπτωση που δεν γνωρίζουν την απάντηση θα πρέπει να το αναφέρουν. Οι συνθήκες στο παρόν έργο είναι δύο:

1) το είδος της *πράξης*: πολλαπλασιασμός ή διαίρεση

2) το είδος του *κλάσματος* με το οποίο πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται το 17 (απλό κλάσμα, κλάσμα που έχει ως αριθμητή και παρονομαστή τον ίδιο αριθμό δηλαδή που ισοδυναμεί με την ακέραια μονάδα και καταχρηστικό κλάσμα (βλ., σχήμα 3.3)

Ερωτήσεις	Πράξη	Κλάσμα	Είδος πράξης	Έργο
Ερωτ. 9	Πολ/σμος	Καταχρηστικό	Πολ/σμος συμβατός (ΠΣ)	17·13/6
Ερωτ. 10	Πολ/σμος	Απλό	Πολ/σμος μη συμβατός (ΠΜΣ)	17·3/8
Ερωτ. 11	Πολ/σμος	Ίσο με 1	Πολ/σμος με κλάσμα ίσο με τη μονάδα	17·3/3
Ερωτ. 12	Διαίρεση	Καταχρηστικό	Διαίρεση συμβατή (ΔΣ)	17:8/5
Ερωτ. 13	Διαίρεση	Απλό	Διαίρεση μη συμβατή (ΔΜΣ)	17:3/5
Ερωτ. 14	Διαίρεση	Ίσο με 1	Διαίρεση με κλάσμα ίσο με τη μονάδα	17:2/2

Σχήμα 3.3: Σχεδιασμός των ερωτήσεων της ομάδας 3

Η διερεύνηση των αντιλήψεων των παιδιών μέσα από τέτοιου τύπου εκτιμήσεις έχει πραγματωθεί σε περιπτώσεις ακεραίων και δεκαδικών αριθμών (Fischbein, 1985) όπου έχει διαφανεί ότι τα παιδιά διαθέτουν κάποια λανθάνοντα διαισθητικά μοντέλα του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με φυσικούς αριθμούς (ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει τον αριθμό ενώ η διαίρεση τον ελαττώνει) που τα περιορίζουν στις εκτιμήσεις τους. Στο σχεδιασμό της ερώτησης οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις που δίνονται στα παιδιά προς εκτίμηση διακρίνονται σε σχέση με το κλάσμα που πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται ο φυσικός αριθμός 17. Όταν τα κλάσματα είναι καταχρηστικά οι παραπάνω πράξεις θεωρούνται συμβατές προς τις πεποιθήσεις των παιδιών ότι “ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει” και “η διαίρεση μικραίνει”[71], ενώ όταν τα κλάσματα είναι απλά θεωρούνται μη συμβατές προς τις πεποιθήσεις τους διότι στον μεν πολλαπλασιασμό το αποτέλεσμα είναι μικρότερο του 17 και στη δε διαίρεση το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο του 17. Ακόμη στην περίπτωση όπου το κλάσμα είναι ίσο με τη μονάδα τότε το αποτέλεσμα της πράξης παραμένει ίσο με 17.

Ομάδα 4: Εκτίμηση της ορθότητας αριθμητικών ισοτήτων με κλάσματα

Η τέταρτη ομάδα περιέχει ισότητες που αναπαριστούν ισότητες αριθμητικών αναπαραστάσεων πράξεων (βλ., σχήμα 3.4). Σε κάποιες από αυτές δίνεται το σωστό

[71] Βλέπε αναφορά στις ενότητες 1.1. και 1.3.

αποτέλεσμα, ενώ σε άλλες ένα λανθασμένο αποτέλεσμα βασιζόμενο σε παρανοήσεις των παιδιών κατά την εκτέλεση πράξεων[72]. Από τα παιδιά ζητείται να αποφανθούν για την ορθότητα ή μη των συγκεκριμένων ισοτήτων. Τα έργα που περιλαμβάνονται σε αυτήν την ομάδα ερωτήσεων μας φανερώνουν το είδος των παρανοήσεων των παιδιών που αφορούν την εκτέλεση των τεσσάρων βασικών πράξεων.

Ερωτήσεις	Πράξη	Είδος ισότητας
Ερώτηση 15	πολ/σμος	$\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{21}$ (σωστή)
Ερώτηση 16	πρόσθεση	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (σωστή)
Ερώτηση 17	αφαίρεση	$\frac{4}{7} - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ (λάθος)
Ερώτηση 18	διαίρεση	$\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$ (λάθος)
Ερώτηση 19	πρόσθεση	$\frac{1}{8} + 2 = \frac{17}{8}$ (σωστή)

<u>Σχήμα 3.4</u>: Σχεδιασμός ερωτήσεων της ομάδας 4

<u>Ομάδα 5</u>: Εικονικές Αναπαραστάσεις αριθμητικών πράξεων με κλάσματα

Στην πέμπτη ομάδα περιλαμβάνονται οι ερωτήσεις στις οποίες ζητείται από τα παιδιά να μεταφράσουν αριθμητικές αναπαραστάσεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού κλασμάτων σε εικονικές περιγραφές καταστάσεων που αντιστοιχούν στις δεδομένες πράξεις (βλ. Σχήμα 3.5).

Αριθμητική Αναπαράσταση Πράξης (πρόσθεση – πολλαπλασιασμός) $\longrightarrow$ Επινόηση Εικονικής Περιγραφής Κατάστασης

<u>Σχήμα 3.5</u>: Σχεδιασμός ερωτήσεων ομάδας 5

Συγκεκριμένα ζητήθηκε από τα παιδιά να εκφράσουν με μια ζωγραφιά το άθροισμα (ερώτηση 20) και το γινόμενο (ερώτηση 22) δύο κλασμάτων. Τα παιδιά επινοούν

[72] Βλ. ενότητα 1.3, όπου υπάρχουν αναφορές για τις παρανοήσεις των παιδιών που οφείλονται στη διαδικαστική γνώση των πράξεων με φυσικούς αριθμούς: πρόσθεση αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή

διάφορες ζωγραφιές προσπαθώντας να ερμηνεύσουν εικονικά το άθροισμα των κλασμάτων. Στόχος των ερωτήσεων αυτής της ομάδας είναι να μας αποκαλύψει τις ιδέες των παιδιών όχι μόνο για τις δύο αυτές βασικές πράξεις, αλλά και για το κάθε κλάσμα που περιλαμβάνεται σε αυτές. Τα παιδιά χρησιμοποιούν την ίδια μονάδα αναφοράς δηλαδή ζωγραφίζουν δύο διαφορετικά σχήματα ή δύο ίδια για τα δύο κλάσματα ή αντιστοιχούν το κάθε κλάσμα ξεχωριστά ως μέρος του ιδίου σχήματος ή απλά το αποτέλεσμα του αθροίσματος ή του γινομένου ως μέρος ενός σχήματος; Όταν αντιστοιχούν ένα κλάσμα στο μέρος ενός σχήματος χωρίζουν το σχήμα αυτό σε ίσα ή σε άνισα μέρη;

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στη σημασία των διαφορετικών αναπαραστασιακών συστημάτων και τις πληροφορίες που μπορεί να προκύψουν από τη μετάφραση από το ένα αναπαραστασιακό σύστημα σε ένα άλλο.

<u>Ομάδα 6</u>: Συμβολικές αναπαραστάσεις σκιαγραφημένων σχημάτων

Στις ερωτήσεις της έκτης ομάδας ζητείται από τα παιδιά να εκτελέσουν την αντίστροφη διαδικασία από ότι στην προηγούμενη περίπτωση. Τους δίνονται σχήματα των οποίων κάποια μέρη είναι χρωματισμένα και τους ζητείται να χρωματισμένα μέρη σε μια αριθμητική πράξη με κλάσματα. Στην περίπτωση της πρόσθεσης (ερώτηση 21) τα διαφορετικά χρωματισμένα μέρη ενός σχήματος αντιστοιχούν σε ένα άθροισμα κλασμάτων, ενώ στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού τους ζητείται να εκφράσουν το διπλά σκιαγραφημένο μέρος ενός κύκλου (ερώτηση 23).

Εικονική Περιγραφή Κατάσταση ⟶ Επινόηση Αριθμητικής Αναπαράστασης Πράξης (πρόσθεση – πολλαπλασιασμός)

<u>Σχήμα 3.6</u>: Σχεδιασμός ερωτήσεων ομάδας 6

3.2.3 Διαδικασία

Το ερωτηματολόγιο της έρευνας δόθηκε στα παιδιά στο περιβάλλον της τάξης του σχολείου τους. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες δέκα παιδιών ώστε να καταστεί δυνατό το κάθε παιδί να επεξεργαστεί από μόνο του το ερωτηματολόγιο.

Σε κάθε ομάδα παιδιών η ερευνήτρια συστήθηκε και έκανε μια εισαγωγή για τους λόγους που πραγματοποιείται η συγκεκριμένη έρευνα, ότι δηλαδή είναι μια έρευνα που πραγματοποιείται στο πλαίσιο της διατριβής της και διερευνά τις ιδέες τους στο χώρο των μαθηματικών χωρίς να αναφερθεί στο περιεχόμενο των ερωτήσεων του ερωτηματολογίου. Επισήμανε ότι οι ερωτήσεις δεν έχουν άμεση σχέση με το πρόγραμμα που ακολουθούν στα μαθηματικά την συγκεκριμένη εκείνη περίοδο στο σχολείο, ενώ τόνισε ιδιαίτερα ότι η επίδοσή τους σε αυτά τα γραπτά ερωτηματολόγια δεν θα επηρεάσει τον βαθμό προόδου τους. Στην συνέχεια δόθηκαν στα παιδιά εξηγήσεις για το πώς θα συμπληρώσουν τα στοιχεία τους στο πάνω μέρος του ερωτηματολογίου και τους ζητήθηκε να διαβάσουν τις οδηγίες με προσοχή και να απαντούν την κάθε ερώτηση με τη σειρά που είχε στο ερωτηματολόγιο.

Ο χρόνος διάρκειας των γραπτών ερωτηματολογίων ήταν δύο διδακτικές ώρες. Την πρώτη διδακτική ώρα δόθηκε στα παιδιά η πρώτη ενότητα του ερωτηματολογίου. Στη συνέχεια και έπειτα από ένα διάλειμμα δέκα λεπτών τους δόθηκε η δεύτερη ενότητα. Το διάλειμμα της υπό εξέτασης ομάδας δεν συνέπιπτε με το διάλειμμα των υπόλοιπων παιδιών του σχολείου ώστε να μειωθεί στο ελάχιστο η ανταλλαγή πληροφοριών ανάμεσα στις διαφορετικές ομάδες παιδιών. Αν κάποιο παιδί ολοκλήρωνε την επεξεργασία του ερωτηματολογίου πριν από τον καθορισμένο χρόνο, η ερευνήτρια του ζητούσε να απασχοληθεί με ότι ήθελε μόνο του (ζωγραφική ή διάβασμα κάποιου βιβλίου). Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας απάντησης των ερωτήσεων ακολούθησε μια ανοικτή συζήτηση με τα παιδιά κάθε ομάδας όπου συζητήθηκαν τα τυχόν προβλήματα που τους δημιουργήθηκαν κατά την απάντηση των ερωτήσεων και ένας γενικός σχολιασμός του ερωτηματολογίου.

3.2.4. Βαθμολόγηση

Από έρευνες που έχουν γίνει στο χώρο της διδακτικής των Μαθηματικών έχουν προκύψει κάποια ποσοτικά αποτελέσματα που αφορούν κυρίως τα διαδικαστικά λάθη που κάνουν τα παιδιά κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα. Στην δική μας έρευνα η οποία έχει ως σκοπό της διερεύνηση των νοητικών αναπαραστάσεων που διαθέτουν τα παιδιά για την έννοια του κλάσματος θεωρήθηκε αναγκαία μια ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων των παιδιών. Η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας ακολούθησε την ποιοτική μέθοδο ανάλυσης που χρησιμοποιεί η Βοσνιάδου (1994, 1995, 1999, 2000) στις έρευνες που έχει πραγματοποιήσει για τα φυσικά φαινόμενα. Το κριτήριο βαθμολόγησης δεν ήταν οι σωστές ή λανθασμένες απαντήσεις των παιδιών αλλά οι διαφορετικοί τρόποι που επινοούσαν μια απάντηση ή οι διαδικασίες που ακολουθούσαν ώστε να δώσουν μια σωστή ή λανθασμένη απάντηση. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε κατά την ανάλυση περιγράφεται παρακάτω.

Τα υποκείμενα της έρευνάς μας κωδικοποιήθηκαν ανάλογα με την ηλικία, το φύλο, την τάξη και το σχολείο που παρακολουθούσαν. Την πρώτη φάση βαθμολόγησης των αποτελεσμάτων αποτέλεσε η δημιουργία πρωτοκόλλων απαντήσεων. Επιλέχθηκαν δέκα παιδιά από κάθε ηλικιακή ομάδα για το κάθε ερωτηματολόγιο και καταγράφηκαν όλες οι απαντήσεις των παιδιών. Η επιλογή των παιδιών ήταν αντιπροσωπευτική με βάση το φύλο και το σχολείο που παρακολουθούσαν. Με την παραπάνω διαδικασία κατάστρωσης των πρωτοκόλλων δημιουργήθηκε για την κάθε ερώτηση μια συλλογή πιθανών απαντήσεων ή διαδικασιών που ακολουθούσαν τα παιδιά. Οι απαντήσεις αυτές ταξινομήθηκαν σε απλές κατηγορίες (βαθμολόγηση στο επίπεδο ερώτησης - ΚΕΕ), και το κάθε υποκείμενο της έρευνας εντάχθηκε σε μια από αυτές. Στη συνέχεια σε ένα δεύτερο επίπεδο βαθμολόγησης, ανάλογα με τον διαφορετικό συνδυασμό απαντήσεων των παιδιών σε κάθε ομάδα ερωτήσεων, τα παιδιά εντάχθηκαν σε διαφορετικές κατηγορίες (βαθμολόγηση στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων - ΚΕΟΕ). Από την παραπάνω διαδικασία ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των παιδιών αποκαλύπτονται οι ιδέες των παιδιών στις συγκεκριμένες ομάδες ερωτήσεων, οι οποίες καθορίζουν τις απαντήσεις τους. Σε μια δεύτερη φάση ανάλυσης περιγράφεται πως από αυτές τις κατηγορίες απαντήσεων προκύπτουν τα πιθανά νοητικά μοντέλα που αναπτύσσουν τα παιδιά για τις υπό διερεύνηση έννοιες.

Οι κατηγορίες των απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης - ΚΕΕ, στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων – ΚΕΟΕ θα περιγραφούν λεπτομερώς στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων και παρουσιάζονται στους Πίνακες του Τέταρτου Κεφαλαίου (βλ. Παράρτημα – Πίνακες Κυρίως Έρευνας). Στην συνέχεια και αφού τα παιδιά εντάχθηκαν σε μια σύνθετη κατηγορία ανάλογα με τον συνδυασμό απαντήσεων στην κάθε ενότητα του ερωτηματολόγιου, εξετάστηκε ο συνολικός τρόπος που τα παιδιά αντιλαμβάνονται την έννοια του κλάσματος σύμφωνα με τις διαφορετικές κατηγορίες στην κάθε ενότητα και προέκυψαν συνολικά κάποια ήδη νοητικών αναπαραστάσεων που διαθέτουν για την έννοια του κλάσματος. Για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της έρευνας, οι απαντήσεις ενός περιορισμένου αριθμού υποκειμένων (δέκα παιδιά από κάθε ηλικιακή ομάδα) βαθμολογήθηκαν ανεξάρτητα από δύο βαθμολογητές τόσο στο επίπεδο ερώτησης όσο και στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων. Από τη σύγκριση των δύο ανεξάρτητων βαθμολογήσεων προέκυψε συμφωνία στο 94% του δείγματος.

Συνοψίζοντας, στην ενότητα αυτή περιγράψαμε το δείγμα, τα υλικά και τη διαδικασία που ακολουθήθηκε κατά την πραγματοποίηση της δεύτερης έρευνας καθώς επίσης και τον τρόπο βαθμολόγησης των αποτελεσμάτων που ακολουθήθηκε κατά την επεξεργασία των απαντήσεων των παιδιών.

Η επόμενη ενότητα περιλαμβάνει μια εκτενή ανάλυση της διαδικασίας της επεξεργασίας των απαντήσεων των παιδιών που αποτελούσε το δείγμα της έρευνάς μας.

3.3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται αναλυτικά η διαδικασία που ακολουθήθηκε κατά την ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας. Το πρώτο επίπεδο ανάλυσης των αποτελεσμάτων, το οποίο περιελάμβανε την καταγραφή των απαντήσεων των παιδιών ανά ερώτηση, οδήγησε αρχικά στην ομαδοποίηση των απαντήσεων σε βασικές κατηγορίες βαθμολόγησης στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ) και στη συνέχεια έκανε εφικτή την πιο σύνθετη βαθμολόγηση των απαντήσεων σε κατηγορίες στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ) (βλέπε, 3^{ο} κεφάλαιο, Βαθμολόγηση)[73]. Από την παραπάνω διαδικασία ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των μαθητών μπορέσαμε να διακρίνουμε τις πεποιθήσεις τους που αφορούν τα ειδικά ζητήματα που διερευνούν οι συγκεκριμένες ομάδες ερωτήσεων, πεποιθήσεις οι οποίες και καθόρισαν τις απαντήσεις τους.

Σε ένα δεύτερο επίπεδο ανάλυσης περιγράφεται πώς αυτές οι πεποιθήσεις των παιδιών αποκαλύπτουν και καθορίζουν κάποια επεξηγηματικά πλαίσια που χρησιμοποιούν τα παιδιά ώστε να ερμηνεύουν την έννοια του κλάσματος στα διάφορα ερωτήματα που τους θέσαμε.

Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται ανά ομάδα ερωτήσεων στις δύο ενότητες. Οι κατηγορίες των απαντήσεων σε επίπεδο ερώτησης, οι κατηγορίες των απαντήσεων σε επίπεδο ομάδας ερωτήσεων και κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών ανά ηλικιακή ομάδα, καθώς επίσης οι συχνότητες και τα ποσοστά επί τοις εκατό των μαθητών του δείγματός μας, παρουσιάζονται στους αντίστοιχους Πίνακες για την κάθε ομάδα ερωτήσεων.

---

[73] Προς αποφυγή επαναλήψεων η αρχική βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης περιγράφεται συνοπτικά, ενώ η βαθμολόγηση στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων περιγράφεται λεπτομερώς και με ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών στην εκάστοτε κατηγορία όπως φαίνεται στους Πίνακες 3.1Β, 3.2Β, 3.3Β, 3.4Β, 3.5Β και 3.6Β αντίστοιχα για την κάθε ομάδα ερωτήσεων.

3.3Α. Η Αριθμητική Αξία του Κλάσματος

Οι ερωτήσεις αυτής της ενότητας αποσκοπούν στη διερεύνηση των πεποιθήσεων των παιδιών για την αριθμητική αξία που αντιπροσωπεύει το σύμβολο ενός κλάσματος. Μια βασική υπόθεση της διερεύνησής μας αφορά το σύμβολο του κλάσματος και την αριθμητική αξία που προσδίδουν σε αυτό τα παιδιά σε σχέση με το σύμβολο και την αξία ενός φυσικού αριθμού. Στη διερεύνηση του παραπάνω θέματος χρησιμοποιήσαμε δύο ομάδες ερωτήσεων.

<u>Ομάδα ερωτήσεων 1</u>: Ύπαρξη μικρότερου ή μεγαλύτερου κλάσματος

<u>Ομάδα ερωτήσεων 2</u>: Διάταξη κλασμάτων

3.3.1 Πιστεύουν τα παιδιά ότι υπάρχει ένα μικρότερο και ένα μεγαλύτερο κλάσμα;

Η πρώτη ομάδα ερωτήσεων περιλαμβάνει τέσσερις ερωτήσεις οι οποίες στοχεύουν να διερευνήσουν αν τα παιδιά πιστεύουν ότι υπάρχει ένα μοναδικό μικρότερο κλάσμα -ερωτήσεις 1 και 1α- και ένα μοναδικό μεγαλύτερο κλάσμα -ερωτήσεις 2 και 2α, καθώς και τον τρόπο που συμβολίζουν αντίστοιχα αυτά τα κλάσματα (βλ., Πίνακα 3.1Α).

(Πίνακας 3.1Α περίπου εδώ)

Αντιλαμβάνονται τα παιδιά ότι το κλάσμα είναι ένας αριθμός που δεν έχει πέρας (οι αριθμοί είναι άπειροι); Πώς αναπαριστούν συμβολικά ένα πολύ μικρό και ένα πολύ μεγάλο κλάσμα αντίστοιχα;

Από τις απαντήσεις των παιδιών φαίνονται οι πεποιθήσεις τους σε σχέση με την ύπαρξη ή όχι ενός μοναδικού ελάχιστου ή μέγιστου κλάσματος. Τα κριτήρια τα οποία χρησιμοποιήθηκαν κατά τη βαθμολόγηση των απαντήσεων των παιδιών ήταν τα ακόλουθα:

1. Το <u>σύμβολο</u> του κλάσματος το οποίο κατέθεσαν τα παιδιά ως το μικρότερο και ως το μεγαλύτερο κλάσμα αντίστοιχα,

2. Οι <u>αιτιολογήσεις</u> των παιδιών για την εκάστοτε επιλογή των συμβόλων που κατέθεσαν,

3. Η αναφορά των παιδιών στην απειρία των κλασμάτων είτε ως προς το μικρότερο ή ως προς το μεγαλύτερο κλάσμα, είτε και τα δύο.

3.3.1.1i) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ)

Στις ερωτήσεις 1 και 2 το κριτήριο με το οποίο έγιναν οι κατηγορίες βαθμολόγησης στο επίπεδο ερώτησης, είναι το ίδιο το σύμβολο που καταθέτουν οι μαθητές (στις περιπτώσεις που δίνουν ένα τέτοιο σύμβολο).

Παρατηρούμε στον Πίνακα 3.1Α ότι στην πρώτη ερώτηση υπάρχουν μαθητές που θεωρούν ότι το μικρότερο κλάσμα είναι το 1/1 -*κατηγορία α*, ενώ το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών του δείγματος θεωρεί ότι μικρότερο κλάσμα είναι το 1/2 ή ένα κλάσμα με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή όπως το 1/100 ή 1/1000 -*κατηγορία β*. Αρκετοί από αυτούς τους μαθητές αναφέρουν ότι το κλάσμα που κατέθεσαν δεν είναι το μοναδικό αλλά υπάρχουν και μικρότερα κλάσματα -*κατηγορία δ*. Για παράδειγμα ο μαθητής της Α΄ Γυμνασίου (υποκ. #101) δίνει το κλάσμα 1/1000000000000000000000000 και παρατηρεί "Δεν είναι το πιο μικρό κλάσμα που υπάρχει, ούτε θα υπάρξει γιατί οι αριθμοί δεν τελειώνουν". Υπάρχουν ακόμα μαθητές που δίνουν ως το μικρότερο κλάσμα ένα κλάσμα που ο αριθμητής του είναι μεγαλύτερος ή ίσος του παρονομαστή (διάφορος της μονάδας) -*κατηγορίες γ και ε.* Στις παραπάνω κατηγορίες εντάσσονται απαντήσεις όπως του μαθητή της ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού (υποκ. #68) που ως μικρότερο αναφέρει το κλάσμα 1000000/1000000. Μόνο δύο από τους διακόσιους μαθητές δηλώνουν ότι δεν υπάρχει ένα μικρότερο κλάσμα οπότε δεν καταθέτουν κανένα κλάσμα -*κατηγορία ζ*. Ακόμη τέσσερα παιδιά είτε έδωσαν άσχετες απαντήσεις -*κατηγορία η*, όπως ο μαθητής της Ε΄ Δημοτικού (υποκ. #2) ο οποίος παρερμηνεύοντας τη λέξη κλάσμα με τη λέξη πλάσμα απάντησε "η ψείρα, γιατί όταν είναι στα μαλλιά μας δεν αισθανόμαστε τίποτε", είτε δεν απάντησαν καθόλου -*κατηγορία θ*.

Στη δεύτερη ερώτηση, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.1Α, υπάρχουν μαθητές που θεωρούν ότι το μεγαλύτερο κλάσμα είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή ίσο με τον παρονομαστή. Από αυτούς άλλοι θεωρούν ότι το 1/1 είναι το μεγαλύτερο κλάσμα -*κατηγορία α*, ενώ άλλοι δίνουν κλάσματα που έχουν ως αριθμητή και παρονομαστή τον ίδιο μεγάλο φυσικό αριθμό -*κατηγορία γ*. Για παράδειγμα ο μαθητής της Ε΄ Δημοτικού (υποκ. #38) απαντά με το κλάσμα 900εκατ./900εκατ. ενώ ο μαθητής της ΣΤ΄ Δημοτικού θεωρεί ως μεγαλύτερο κλάσμα το 100/100 (υποκ. #51). Τα παιδιά που απαντούν με τον παραπάνω τρόπο δεν είναι πάντα σίγουρα ότι αυτό το κλάσμα αντιπροσωπεύει τη μονάδα.

Ακόμη υπάρχουν μαθητές που ως μεγαλύτερο κλάσμα αναφέρουν ένα κλάσμα που έχει αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή -*κατηγορία β*. Ορισμένοι από αυτούς απαντούν με ένα κλάσμα που έχει μεγάλους αριθμούς ως αριθμητή και παρονομαστή όπως το 99/100 ή το 999/1000, ενώ άλλοι απαντούν με το κλάσμα 1/2. Επίσης τρεις μαθητές αναφέρουν ότι το κλάσμα που έχουν καταθέσει με αριθμητή μικρότερο ή ίσο του παρονομαστή δεν είναι το μοναδικό αλλά υπάρχουν και μεγαλύτερα -*κατηγορία δ*. Για παράδειγμα η μαθήτρια της Β΄ Γυμνασίου η οποία ενώ αναφέρει ως μεγαλύτερο κλάσμα το 999/1000 προσθέτει ότι "τα κλάσματα δεν έχουν τέλος".

Μια ομάδα μαθητών απαντά με ένα καταχρηστικό κλάσμα (κλάσμα με αριθμητή μεγαλύτερο του παρονομαστή) ενώ τις περισσότερες φορές το κλάσμα αυτό είχε παρονομαστή την ακέραια μονάδα -*κατηγορία ε*. Ένα μέρος μόνο αυτών των μαθητών αναφέρει ότι το κλάσμα που δίνει δεν είναι το μεγαλύτερο αλλά υπάρχουν και άλλα μεγαλύτερα -*κατηγορία στ*. Ακόμη υπήρχαν μαθητές που δεν έδωσαν κανένα κλάσμα αναφέροντας ότι «δεν υπάρχει ένα μοναδικό μεγαλύτερο κλάσμα» -*κατηγορία ζ*.

Στις ερωτήσεις 1α και 2α οι μαθητές προσπαθούν να αιτιολογήσουν την επιλογή του συμβόλου που καταθέτουν ως το μικρότερο ή το μεγαλύτερο κλάσμα. Στις αιτιολογήσεις των παιδιών διακρίνονται οι διαφορετικές ερμηνείες τους για το κλάσμα. Στον Πίνακα 3.1Α βλέπουμε ότι οι εξηγήσεις διακρίνονται στις παρακάτω κατηγορίες:

1-2. Ερμηνεία του κλάσματος ως δύο ανεξάρτητοι αριθμοί. Οι μαθητές των οποίων οι απαντήσεις βαθμολογήθηκαν σε αυτές τις κατηγορίες, είτε εξηγούν ότι όσο μεγαλώνουν οι αριθμοί ενός κλάσματος μεγαλώνει και η αξία του κλάσματος -

κατηγορία 1, είτε ότι όσο μικραίνουν οι αριθμοί ενός κλάσματος μεγαλώνει και η αξία του κλάσματος -*κατηγορία 2*. Για παράδειγμα ο μαθητής της Α΄ Γυμνασίου (υποκ. #106) εξηγεί ότι "το 1/1 είναι το μικρότερο κλάσμα γιατί έχει μικρό αριθμητή και μικρό παρονομαστή" ή αντίστοιχα στις ερωτήσεις 2 και 2α απαντά με το κλάσμα 10000000/1000000 "γιατί έχει μεγάλο αριθμητή και παρονομαστή". Παράδειγμα της δεύτερης περίπτωσης αποτελεί η μαθήτρια της ΣΤ΄ Δημοτικού που αναφέρει ότι "μικρότερο κλάσμα είναι το 357/800, γιατί όσο πιο μεγάλο αριθμό βάζεις τόσο είναι και πιο μικρό το κλάσμα", ενώ μεγαλύτερο κλάσμα είναι "το 1/1, γιατί όσο πιο μικρό αριθμό βάζεις τόσο πιο μεγάλο είναι το κλάσμα".

3. Το κλάσμα αποτελεί μέρος μιας ακέραιης μονάδας. Οι μαθητές που βαθμολογήθηκαν σε αυτή την κατηγορία ερμηνεύουν τα κλάσματα που δίνουν ως μέρη ή κομμάτια μιας μονάδας ή ενός φυσικού αντικειμένου. Συνήθως χρησιμοποιούν εμπειρικά παραδείγματα στα οποία περιγράφουν τον διαμερισμό ενός αντικειμένου σε τόσα μέρη όσα ο παρονομαστής του κλάσματος που αναφέρουν ως το μικρότερο ή το μεγαλύτερο κλάσμα. Επιπλέον χρησιμοποιούν τις λέξεις "χωρίσαμε", "κόψαμε", "διαιρέσουμε" ή "έχουμε κάτι και παίρνουμε κάτι". Για παράδειγμα όπως αναφέρει η μαθήτρια της ΣΤ¨ Δημοτικού (υποκ. #74), "μικρότερο είναι το κλάσμα 1/10 γιατί έτσι παίρνουμε ένα μικρό κομμάτι απ' το μέρος, ενώ μεγαλύτερο είναι το 10/10 γιατί παίρνω ολόκληρο το κομμάτι δηλαδή όλο το μέρος π.χ. μιας πίτας" ή όπως αναφέρει ο μαθητής της Β΄ Γυμνασίου (υποκ. #128) "μικρότερο είναι το 1/100000000000000, διότι αν πάρουμε μια πίτα θα την κόψουμε σε 1000000000000000 κομμάτια" και ως μεγαλύτερο το κλάσμα "1/1, διότι αν πάρουμε μια πίτα δεν θα την κόψουμε σε κομμάτια, γιατί το κλάσμα 1/1 μας δίνει τη μονάδα άρα θα μείνει η πίτα χωρίς να την κόψουμε".

4. Η αξία του κλάσματος προκύπτει από τη σχέση του αριθμητή και του παρονομαστή του (Χρήση κανόνων διάταξης). Σε αυτήν την περίπτωση οι μαθητές αιτιολογούν την επιλογή τους για το ελάχιστο και μέγιστο κλάσμα εστιάζοντας την προσοχή τους στο μέγεθος είτε του αριθμητή και είτε του παρονομαστή του κλάσματος είτε στη σχέση του αριθμητή με τον παρονομαστή. Για παράδειγμα η μαθήτρια της Ε΄ Δημοτικού (υποκ. #21) απαντάει: "Το 1/1000 είναι το ελάχιστο κλάσμα γιατί έχει το μεγαλύτερο παρονομαστή που μπορώ να σκεφθώ και το 10/2 είναι το μέγιστο γιατί έχει το μικρότερο παρονομαστή και το μεγαλύτερο αριθμητή που μπορώ να σκεφθώ".

5. Η αξία του κλάσματος προκύπτει από τη σχέση του αριθμητή και του παρονομαστή του με σημείο αναφοράς τη μονάδα. Με αυτή την κατηγορία βαθμολογήθηκαν οι μαθητές οι οποίοι αιτιολογούν την επιλογή του μικρότερου ή του μεγαλύτερου κλάσματος σε σύγκριση μια ακέραια μονάδα. Συγκεκριμένα μια ομάδα μαθητών θεωρεί ότι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή είναι μικρότερο της μονάδας με συνέπεια να είναι μικρό, ενώ ότι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή μεγαλύτερο του παρονομαστή είναι μεγαλύτερο της μονάδας με αποτέλεσμα να μπορεί να είναι το μεγαλύτερο κλάσμα.

6. Το κλάσμα ως σχέση πηλίκου του αριθμητή δια του παρονομαστή. Υπάρχουν μαθητές οι οποίοι ερμηνεύουν το μικρότερο ή το μεγαλύτερο κλάσμα ως μια διαίρεση του αριθμητή δια του παρονομαστή. Για παράδειγμα η μαθήτρια της Α΄ Γυμνασίου η οποία αναφέρει ως το μεγαλύτερο κλάσμα το 10/10 εξηγώντας: "αν το διαιρέσω, βγαίνει μονάδα".

7. Οι αριθμοί είναι άπειροι. Υπάρχουν μαθητές οι οποίοι είτε δίνουν κάποια ενδεικτικά σύμβολα, τα οποία υπονοούν απειρία των κλασμάτων –όπως για παράδειγμα το 1/ν για ένα πολύ μικρό κλάσμα ή το ν/1 για ένα πολύ μεγάλο κλάσμα, όπου ν ένας μεγάλος φυσικός αριθμός- είτε δεν δίνουν κανένα σύμβολο. Η συνήθης απάντηση των μαθητών που βαθμολογήθηκαν σε αυτή την κατηγορία είναι ότι "οι αριθμοί είναι άπειροι".

8. Άσχετες αιτιάσεις, στις οποίες οι μαθητές δίνουν άσχετες εξηγήσεις για την επιλογή των συμβόλων που καταθέτουν.

9. Μη επεξηγηματικές, όπου οι μαθητές δεν αναφέρουν καμιά ερμηνεία για το κλάσμα που έχουν επιλέξει. Για παράδειγμα υπάρχουν μαθητές οι οποίοι απαντούν απλά ότι δεν ξέρουν ή όπως ο μαθητής της ΣΤ΄ Δημοτικού (υποκ. #66) που απαντά με το κλάσμα 1/2 και εξηγεί “γιατί πιο μικρό δεν υπάρχει” ή όπως αναφέρουν άλλοι “γιατί είναι το μικρότερο κλάσμα που μπορώ να σκεφθώ» ή «γιατί δεν ξέρω μεγαλύτερο”.

3.1.1ii) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ)

Παραπάνω περιγράψαμε τις βασικές κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των μαθητών, στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ). Στη συνέχεια όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.1Β, σημαντικό είναι να παρατηρήσουμε ότι παρόλο που υπάρχουν πάρα πολλοί συνδυασμοί απαντήσεων στις τέσσερις ερωτήσεις αυτής της ομάδας (4 x 8 x 8 x 9 x 8 = 5.832), οι μαθητές απαντούν με ορισμένους μόνο συνδυασμούς, οι οποίοι στο μεγαλύτερο ποσοστό τους έχουν κάποια συνέπεια και τους οποίους ομαδοποιήσαμε σε δέκα κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων –ΚΕΟΕ. Συγκεκριμένα στον Πίνακα 3.1Β παρουσιάζονται οι ερωτήσεις της πρώτης ομάδας, οι κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων –ΚΕΟΕ, καθώς και κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις τους στην κάθε κατηγορία για την κάθε ερώτηση.

(ο Πίνακας 3.1Β περίπου εδώ)

Ι. Κατηγορίες 1α και 1β: <u>Κλάσμα ως δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί που όσο μεγαλώνουν μεγαλώνει και η αξία του κλάσματος.</u>

Όπως φαίνεται από τις ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών οι οποίες παραθέτονται στον Πίνακα 3.1Β, το κριτήριο που χρησιμοποιούν οι μαθητές που βαθμολογήθηκαν στις κατηγορίες 1 και 1α, είναι το μέγεθος του αριθμητή και του παρονομαστή του ως δύο ξέχωροι φυσικοί αριθμοί. Συγκεκριμένα οι μαθητές που βαθμολογήθηκαν σε αυτή την κατηγορία φαίνεται να πιστεύουν ότι η αξία ενός κλάσματος μεγαλώνει όσο μεγαλώνουν και οι αριθμοί που το απαρτίζουν. Συνεπώς ένα κοινό χαρακτηριστικό των συμβόλων που παραθέτουν οι μαθητές για το μεγαλύτερο κλάσμα είναι ότι τα κλάσματα αυτά περιλαμβάνουν ιδιαίτερα μεγάλους αριθμούς.

Μία ομάδα μαθητών θεωρώντας τη μονάδα ως το μικρότερο φυσικό αριθμό, οδηγούνται σε παρανοήσεις όπως στο να δίνουν ως μεγαλύτερο κλάσμα ένα κλάσμα μικρότερο από αυτό που έδωσαν ως το μικρότερο (για παράδειγμα το κλάσμα 1/1 ως το μικρότερο και το κλάσμα 999/1000 ως το μεγαλύτερο). Ακόμη αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι στις απαντήσεις των παιδιών δεν υπάρχει καμία ένδειξη ότι τα κλάσματα που δίνουν ως μεγαλύτερα (ιδιαίτερα στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή) ισοδυναμούν με την ακέραια μονάδα. Για παράδειγμα ο μαθητής της ΣΤ΄ Δημοτικού (υποκ. #66), ο οποίος απαντά με το 1/2 για το μικρότερο κλάσμα και εξηγεί "γιατί πιστεύω ότι δεν υπάρχει πιο μικρό" και ως μεγαλύτερο το 1000000000000 /1000000000000 "γιατί δεν ξέρω μεγαλύτερο".

Τα κλάσματα που έδωσαν οι περισσότεροι μαθητές οι οποίοι βαθμολογήθηκαν σε αυτή την κατηγορία, ως το μικρότερο και το μεγαλύτερο κλάσμα, είχαν αριθμητή μικρότερο ή ίσο του παρονομαστή με εξαίρεση ορισμένους μαθητές που έδωσαν καταχρηστικά κλάσματα χωρίς όμως να φαίνεται από τις εξηγήσεις που δίνουν ότι αναγνωρίζουν την αξία ενός καταχρηστικού κλάσματος και συνεχίζοντας να εστιάζονται στο μέγεθος του αριθμητή και του παρονομαστή. Για παράδειγμα η μαθήτρια της Ε΄ Δημοτικού η οποία θεωρεί ότι το μικρότερο κλάσμα είναι το 1/5 ενώ το μεγαλύτερο το 250/100 χωρίς να δίνει περαιτέρω εξηγήσεις.

Επιπλέον στις απαντήσεις των παιδιών που βαθμολογήθηκαν με την κατηγορία 1α διαφαίνεται κάποια ένδειξη απειρίας των κλασμάτων η οποία όμως αφορά την απειρία του αριθμητή και του παρονομαστή ως δύο ξέχωρους φυσικούς αριθμούς. Δηλαδή οι μαθητές πιστεύοντας ότι η αξία που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα αυξάνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμητής και ο παρονομαστής του, οδηγούνται σε παρανοήσεις όπως στην περίπτωση του μαθητή της Ε΄ Δημοτικού (υποκ. #38), ο οποίος αναφέρει το 1/1 ως το μικρότερο κλάσμα ενώ ως ένα μεγάλο κλάσμα το 900εκατ/900εκατ., συμπληρώνοντας ότι "δεν υπάρχει ένα μοναδικό μεγαλύτερο κλάσμα γιατί οι αριθμοί είναι άπειροι", ενώ αναφέρεται σε ισοδύναμα κλάσματα..

ΙΙ. Κατηγορία 2: *<u>Κλάσμα ως δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί που όσο μικραίνουν μεγαλώνει και η αξία του κλάσματος.</u>*

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.1Β, η ιδέα που διέπει τις απαντήσεις των μαθητών που βαθμολογήθηκαν σε αυτήν την κατηγορία, είναι ότι η αξία ενός κλάσματος μεγαλώνει όσο μικραίνουν οι αριθμοί που απαρτίζουν το κλάσμα. Για παράδειγμα η μαθήτρια της Ε΄ Δημοτικού (υποκ. #7), απαντά στην πρώτη ερώτηση με το κλάσμα "90/950, γιατί έχει μεγαλύτερους αριθμούς και όσο μεγαλύτερους έχει τόσο μικρότερο είναι", ενώ για το μεγαλύτερο απαντά με το κλάσμα "1/2, γιατί όσο μικρότερους αριθμούς έχει το κλάσμα τόσο μεγαλύτερο είναι".

Σε αυτή όπως και στην αρχική κατηγορία βαθμολόγησης οι μαθητές μεταφράζουν την αριθμητική αξία ενός κλάσματος με την αριθμητική αξία των δύο αριθμών που το απαρτίζουν (τον αριθμητή και τον παρονομαστή του αντίστοιχα). Η δεύτερη όμως κατηγορία διαφοροποιείται από την αρχική και αποτελεί ίσως ένα μεταβατικό στάδιο που διέρχονται οι μαθητές στην προσπάθειά τους να διαφοροποιήσουν τα κλάσματα από τους φυσικούς αριθμούς.

ΙΙΙ. Κατηγορίες 3α και 3β: <u>Κλάσμα ως σχέση μέρους μιας μονάδας</u>

Το ένα τέταρτο του συνόλου των υποκειμένων του δείγματός μας, βαθμολογήθηκε με την τρίτη κατηγορία η οποία διαφέρει από τις προηγούμενες σε τρία βασικά σημεία: Πρώτο, ότι τα σύμβολα των μεγαλυτέρων κλασμάτων που καταθέτουν τα παιδιά δεν περιλαμβάνουν τόσο εντυπωσιακά μεγαλύτερους ή μικρότερους αριθμούς. Συνήθως το μεγαλύτερο κλάσμα έχει απλά μεγαλύτερο αριθμητή (για παράδειγμα 1/10 και 9/10). Δεύτερο, ότι οι εξηγήσεις των παιδιών έχουν να κάνουν με ερμηνείες του κλάσματος που επιλέγουν σαν το μέρος ή μια ολόκληρη ακέραια μονάδα. Η πλέον συνήθης ερμηνεία ενός κλάσματος η οποία προκύπτει από τις απαντήσεις των παιδιών είναι αυτή του κλάσματος ως μέρους μιας μονάδας, για παράδειγμα ένα κλάσμα αναπαριστά κομμάτια μιας πίτας ή μιας τούρτας, οπότε η αξία που αντιπροσωπεύει μεταφράζεται στο πλήθος κλασματικών μονάδων. Τρίτο, ότι τα σύμβολα που επιλέγουν για το μικρότερο κλάσμα έχουν πάντα αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή, ενώ τα σύμβολα για το μεγαλύτερο κλάσμα έχουν αριθμητή μικρότερο ή ίσο του παρονομαστή (μη χρήση καταχρηστικών κλασμάτων).

Η ιδέα του κλάσματος ως μέρους που χαρακτηρίζει τις απαντήσεις αυτής της κατηγορίας διαφοροποιεί τον τρόπο που συσχετίζουν το κλάσμα με τη ακέραια μονάδα. Για παράδειγμα ο μαθητής της Ε΄ Δημοτικού (υποκ.#30), ο οποίος απαντά στην ερώτηση για το μικρότερο κλάσμα: "Το 1/1000, γιατί πήρα μόνο το ένα από τα χίλια" και για το μεγαλύτερο κλάσμα: "Το 5/5, γιατί πήρα και τα 5 από τα 5" ή η μαθήτρια της ΣΤ¨ Δημοτικού (υποκ. #43), η οποία απαντά: "Το 1/10, γιατί χωρίζουμε σε 10 ίσα μέρη και παίρνουμε το 1" και για το μεγαλύτερο κλάσμα: "Το 9/10, γιατί χωρίζουμε σε 10 ίσα μέρη και παίρνουμε τα 9". Ακόμη και η μαθήτρια της Β΄ Γυμνασίου (υποκ. #138) απαντά: "Το 1/15, γιατί το χωρίζουμε σε δεκαπέντε μέρη και παίρνουμε μόνο το ένα, άρα το κομμάτι αυτό θα είναι πολύ μικρό", ενώ για το μεγαλύτερο: "Το 2/2=1, γιατί το χωρίζουμε σε δύο μέρη και τα παίρνουμε και τα δύο δηλαδή αν έχουμε μια πίτα την παίρνουμε ολόκληρη". Ακόμη και στην περίπτωση που βαθμολογήθηκαν με την κατηγορία 3α -απειρία ως προς το μικρότερο κλάσμα, (βλ., Πίνακα 3.1Β) οι μαθητές πιστεύουν ότι ένα κλάσμα μπορεί το πολύ να ισοδυναμεί με μια ακέραια μονάδα. Παράδειγμα στην παραπάνω κατηγορία αποτελεί η απάντηση της μαθήτριας της Β΄ Γυμνασίου (υποκ. #158), η οποία δίνει ως μικρότερο κλάσμα «Το 1/1000» και συνεχίζει "Το κλάσμα που έδωσα σίγουρα δεν είναι το πιο μικρό που υπάρχει, γιατί οι αριθμοί είναι άπειροι, γι αυτό δεν μπορώ να δώσω μια συγκεκριμένη απάντηση στο ερώτημα αυτό". Για το μεγαλύτερο δε κλάσμα δίνει το 1/2 και αιτιολογεί την επιλογή της "Πιστεύω ότι είναι το μεγαλύτερο κλάσμα, γιατί δεν υπάρχει μεγαλύτερο".

IV και V. Κατηγορίες 4, 5α και 5β: <u>*Κλάσμα ως σχέση δύο αριθμών*</u>

Οι απαντήσεις του 45% των υποκειμένων (ποσοστό που ενισχύεται ιδιαίτερα από τους μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας) βαθμολογήθηκαν με τις κατηγορίες 4, 5α και 3β. Οι απαντήσεις αυτές διαφοροποιούνται από τις προηγούμενες σε δύο βασικά σημεία: Πρώτο ότι το κλάσμα που καταθέτουν ως το μεγαλύτερο είναι ένα καταχρηστικό κλάσμα. Δεύτερο ότι οι εξηγήσεις που συνοδεύουν τις απαντήσεις τους, αν και εστιάζονται στη σχέση του αριθμητή με τον παρονομαστή με ποικίλους τρόπους. Χρησιμοποιούν τη μονάδα ως σημείο αναφοράς ή ερμηνεύουν το κλάσμα ως το πηλίκο του αριθμητή δια τον παρονομαστή (βλ. Πίνακα 3.1Β -ΚΕΕ 4, 5 και 6).

Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών δίνει το κλάσμα 1/q για το μικρότερο και το αντίστροφο q/1 για το μεγαλύτερο κλάσμα. Παραδείγματα μαθητών που απαντούν με αυτόν τον τρόπο είναι η μαθήτρια της Α΄ Γυμνασίου (υποκ. #81) που απαντά με τα κλάσματα 1/1000000000 και 1000000000/1. Οι εξηγήσεις τους για την επιλογή του συμβόλου σχετίζονται με τη σχέση αριθμητή παρονομαστή όπως φαίνεται στον

Πίνακα 3.1Β. Για παράδειγμα η μαθήτρια της Ε΄ Δημοτικού (υποκ. #21) η οποία εξηγεί: "Το 1/1000 είναι το ελάχιστο γιατί έχουν το μεγαλύτερο παρονομαστή που μπορώ να σκεφθώ και το 10/2 είναι το μέγιστο γιατί έχει το μικρότερο παρονομαστή και το μεγαλύτερο αριθμητή που μπορώ να σκεφθώ". Στην περίπτωση αυτή η αξία του κλάσματος προκύπτει από το μέγεθος του αριθμητή και του παρονομαστή συγχρόνως. Ένα κλάσμα είναι μικρό, όταν έχει μικρό αριθμητή και μεγάλο παρονομαστή και μεγάλο όταν έχει μεγάλο αριθμητή και μικρό παρονομαστή.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.1Β υπάρχουν μαθητές οι οποίοι αν και δίνουν σύμβολα όπως αυτά που αναφέραμε προηγούμενα θεωρούν ότι το κλάσμα που έδωσαν ως το μεγαλύτερο (μόνο) δεν είναι το μοναδικό αλλά υπάρχουν και μεγαλύτερα –κατηγορία 5α, ενώ άλλοι φαίνεται να πιστεύουν ότι υπάρχουν και μικρότερα και μεγαλύτερα κλάσματα από αυτά που έχουν καταθέσει –κατηγορία 3γ. Σε αυτή την κατηγορία ταξινομήσαμε και τα παιδιά τα οποία δεν δίνουν κανένα σύμβολο λέγοντας ότι "Δεν υπάρχει γιατί οι αριθμοί είναι άπειροι", μαθητής της Α΄ Γυμνασίου (υποκ. #99) και ο μαθητής της Β΄ Γυμνασίου (υποκ. #159).

Κάποιες από τις απαντήσεις, οι οποίες δεν είχαν κάποια συνέπεια, θεωρήθηκαν ως ασαφείς ή αντιφατικές και δεν κατέστη δυνατή η ομαδοποίησή τους σε κάποια από τις παραπάνω κατηγορίες -κατηγορία 6. Ακόμη κάποιες απαντήσεις παιδιών δεν εντάχθηκαν στις παραπάνω κατηγορίες βαθμολόγησης, διότι ήταν ελλιπείς (δεν απαντούσαν σε κάποια από τις ερωτήσεις) -κατηγορία 0.

Ακόμη θα πρέπει να αναφέρω ότι κάποια παιδιά θέλοντας να τονίσουν ότι ένα κλάσμα μικραίνει όσο μικραίνει ο αριθμητής, θέτουν έναν δεκαδικό π.χ. στην περίπτωση του μαθητή (υποκ. #189) τον αριθμό 0,000.......1 που τείνει στο μηδέν χωρίς να αναγνωρίζουν ότι το κλάσμα που δίνουν 0,000000....1/9999999999999...... έχει αριθμητή το κλάσμα 1/10000000......

Στον Πίνακα 3.1Γ παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά των παιδιών που οι απαντήσεις τους βαθμολογήθηκαν με τις κατηγορίες που αναλύθηκαν παραπάνω.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1Γ

Κατηγορίες βαθμολόγησης, συχνότητες και ποσοστά επί τοις εκατό των απαντήσεων των παιδιών στις κατηγορίες βαθμολόγησης, στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ –Ομάδα 1: Ύπαρξη μικρότερου και μεγαλύτερου κλάσματος) ανά ηλικιακή ομάδα (Ν=200).

Ηλικιακές ομάδες Κατηγορίες απαντήσεων	Ε΄ Δημοτ. Ν=40 (%)	ΣΤ΄ Δημοτ. Ν=40 (%)	Α΄ Γυμν. Ν=40 (%)	Β΄ Γυμν. Ν=40 (%)	Α΄ Λυκείου Ν=40 (%)	Σύνολο Ν=200 (%)
Ι. Μεγάλοι αριθμοί - μεγάλο κλάσμα						
1α. Μεγάλοι αριθμοί - μεγάλο κλάσμα	11 (27.5%)	11 (27.5%)	7 (17.5%)	4 (10%)	4 (10%)	37 (18.5%)
1β. Μεγάλοι αριθμοί - μεγάλο κλάσμα. Οι αριθμοί δεν έχουν τέλος	2 (5%)	2 (5%)	2 (5%)	1 (2,5%)	0 (0%)	7 (3.5%)
Σύνολο Ι	13 (32.5%)	13 (32.5%)	9 (22.5%)	5 (12.5%)	4 (10%)	44 (22%)
ΙΙ. Μικροί αριθμοί - μεγάλο κλάσμα						
2. Μικροί αριθμοί - μεγάλο κλάσμα. Μικρότερο κλάσμα με α<π και το μεγαλύτερο(με α<π ή α=π	3 (7.5%)	4 (10%)	2 (5%)	2 (5%)	1 (2.5%)	12 (6%)
ΙΙΙ. Κλάσμα ως μέρος μιας ακέραιης μονάδας						
3α. Κλάσμα ως μέρος μιας ακέραιης μονάδας	7 (17.5%)	13 (32.5%)	13 (32.5%)	8 (20%)	6 (15%)	47 (23.5%)
3β. Απειρία ως προς το μικρότερο				2 (5%)	1 (2.5%)	3 (1.5%)
Σύνολο ΙΙΙ	7 (17.5%)	13 (32.5%)	13 (32.5%)	10 (25%)	7 (17.5%)	50 (25%)
ΙV. Κλάσμα ως σχέση δύο αριθμών						
4. Ύπαρξη ενός μικρότερου και ενός μεγαλύτερου κλάσματος. Το μικρότερο κλάσμα με α<π είναι μικρότερο της μονάδας και το μεγαλύτερο κλάσμα με α>π είναι μεγαλύτερο της μονάδας.	9 (22.5%)	6 (15%)	6 (15%)	7 (17.5%)	6 (15%)	34 (17%)
V. Δεν υπάρχει ένα μοναδικό μικρότερο ή μεγαλύτερο κλάσμα						
5α. Απειρία ως προς το μεγαλύτερο κλάσμα.	1 (2.5%)	1 (2.5%)	2 (5%)	3 (7.5%)	1 (2.5%)	8 (4%)
5β. Απειρία ως προς το μικρότερο και το μεγαλύτερο κλάσμα.	3 (7.5%)	2 (5%)	7 (17.5%)	12 (30%)	17 (42.5%)	41 (20.5%)
Σύνολο V	4 (10%)	3 (7.5%)	9 (22.5%)	15 (37.5%)	18 (45%)	49 (24.5%)
6. Μη κατηγοριοποιήσιμες απαντήσεις.	1 (2.5%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (2.5%)	3 (7.5%)	5 (2.5%)
0. Ελλιπείς απαντήσεις	3 (7.5%)	1 (2.5%)	1 (2.5%)	0 (0%)	1 (2.5%)	6 (3%)
Σύνολο	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	200 (100%)

Στον Πίνακα αυτό μπορούμε να διακρίνουμε τέσσερις τάσεις στις απαντήσεις των μαθητών:

Στην πρώτη τάση οι μαθητές ερμηνεύουν την αριθμητική αξία ενός κλάσματος με το μέγεθος του αριθμητή και του παρονομαστή ξεχωριστά. Η τάση αυτή εμφανίζεται στα παιδιά κυρίως του Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου, ενώ φθίνει στους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου (βλ. Πίνακα 3.1Γ –κατηγορίες Ι και ΙΙ).

Μία δεύτερη τάση, την οποία υιοθετεί το ένα τέταρτο του συνόλου των μαθητών του δείγματος, σχετίζεται με την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος μιας μονάδας αναφοράς και εμφανίζεται στους μαθητές όλων των ηλικιών. Στον παραπάνω Πίνακα μπορούμε να δούμε ότι το ποσοστό των παιδιών αυξάνει αντίστοιχα στις μεσαίες ηλικίες φθάνοντας το 32.5% στην ΣΤ΄ Δημοτικού και στην Α΄ Γυμνασίου (κατηγορία ΙΙΙ).

Μια τρίτη άποψη για την αριθμητική τιμή ενός κλάσματος η οποία αφορά την ερμηνεία του κλάσματος ως σχέση δύο αριθμών που είναι όμως πεπερασμένος αριθμός μοιάζει να μειώνεται ελαφρά με την ηλικία (κατηγορία ΙV), ενώ αντίστοιχα αυξάνεται θεαματικά ο αριθμός των παιδιών που θεωρούν ότι τα κλάσματα είναι άπειροι αριθμοί με αποτέλεσμα να φθάνει το 45% των μαθητών της Α΄ Λυκείου – τέταρτη τάση (βλ. Πίνακα 3.1Γ –κατηγορία V).

Για να διερευνήσουμε κατά πόσο υπάρχει διαφοροποίηση με την ηλικία και το φύλο των παιδιών, χρησιμοποιήσαμε τα μη παραμετρικά test των Kruskal-Wallis και των Mann-Whitney αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα από το test των Kruskal-Wallis έδειξαν ότι η ηλικία επηρεάζει κατά στατιστικά σημαντικό τρόπο τις απαντήσεις των μαθητών για τις ερωτήσεις της ομάδας 1 (x^2=29,4; β.ε.=4; ασυμπτ. $p<0{,}001$) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 3.7). Συγκρίνοντας τις μέσες θέσεις των πέντε ηλικιών του δείγματος μεταξύ τους, είναι φανερό ότι οι μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων απάντησαν τις ερωτήσεις αυτής της ομάδας χρησιμοποιώντας κατηγορίες απαντήσεων που ήσαν πλησιέστερες προς τον επιστημονικό ορισμό του κλάσματος. Αντίστοιχα, με το test των Mann-Whitney, ελέγξαμε την ύπαρξη τυχόν διαφοροποίησης μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών του δείγματος στις απαντήσεις που έδωσαν για την ύπαρξη ενός μικρότερου ή ενός μεγαλύτερου κλάσματος. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το φύλο δεν διαφοροποιεί γενικά τις απαντήσεις των μαθητών με στατιστικά σημαντικό τρόπο (z=-2,2; ασυμπτ. p= 0,025) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 3.8).

3.3.2 Διάταξη κλασμάτων

Η δεύτερη ομάδα ερωτήσεων περιλαμβάνει δώδεκα ερωτήσεις διάταξης κλασμάτων (βλ., Πίνακα 3.2Α) Η διάταξη των κλασμάτων αποτελεί ένα πεδίο εφαρμογής της γνώσης που διαθέτουν τα παιδιά για τα κλάσματα. Επιλέξαμε η έρευνά μας να περιλαμβάνει ερωτήσεις διάταξης ώστε να ενισχυθεί η υπόθεσή μας για το ρόλο που παίζει η γνώση των φυσικών αριθμών στην ανάπτυξη ιδεών και διαδικασιών για το κλάσμα.

(Πίνακας 3.2Α περίπου εδώ)

Υποθέτουμε ότι τα έργα της διάταξης θα μας αποκαλύψουν τις πεποιθήσεις των παιδιών για την αριθμητική αξία που αντιπροσωπεύει το σύμβολο ενός κλάσματος (βλ., σελ. 135, 3^{ο} Κεφάλαιο) και κατ' επέκταση τις διαφορετικές ερμηνείες αυτού του συμβόλου. Από τις απαντήσεις των υποκειμένων μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα τα παρακάτω: πρώτο, πως αυτά πιστεύουν ότι μεταβάλλεται η αξία ενός κλάσματος, δεύτερο η σχέση των διαφορετικών κλασμάτων με την ακέραια μονάδα και τρίτο οι διαδικασίες τις οποίες χρησιμοποιούν και οι οποίες φανερώνουν τους διαφορετικούς τρόπους που ερμηνεύουν ένα κλάσμα. Συνεπώς τα βασικά κριτήρια βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών ήταν:

1. Τα σύμβολα των κλασμάτων που τα παιδιά θεωρούν ότι είναι μικρότερα ή μεγαλύτερα,
2. Η θέση που τοποθετούν την ακέραια μονάδα σε σχέση με τα διαφορετικού τύπου κλάσματα και
3. Οι διαδικασίες και οι αιτιολογήσεις τις οποίες χρησιμοποιούν κατά τη σύγκριση των κλασμάτων που τους δίνονται.

3.1.2i) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ)

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.2Α οι κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων στις ερωτήσεις διάταξης έχει σχέση αφενός με το αν οι μαθητές επιλέγουν πάντα ως μεγαλύτερο, το κλάσμα που έχει μεγαλύτερους αριθμούς ως αριθμητή και παρονομαστή, ή αν επιλέγουν πάντα ως μεγαλύτερο το κλάσμα που έχει τους μικρότερους αριθμούς ως αριθμητή και παρονομαστή, ή αν η επιλογή τους για το μεγαλύτερο κλάσμα δεν έχει σχέση με το μέγεθος του αριθμητή και του παρονομαστή ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς αλλά προκύπτει από τη σχέση αυτών των δύο αριθμών, αφετέρου δε με τη θέση που οι μαθητές τοποθετούν την ακέραια μονάδα σε σχέση με τα διάφορα κλάσματα που περιλαμβάνουν οι ερωτήσεις (βλ. Πίνακα 3.2Α, κατηγορίες για τις ερωτήσεις 3, 4, 5, 6, 7 και 8).

Επιπλέον οι αιτιολογήσεις και οι διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι μαθητές στα έργα της διάταξης φανερώνουν τους διαφορετικούς τρόπους που ερμηνεύουν ένα κλάσμα, οι οποίοι όμως είναι παρόμοιοι με αυτούς που αποκαλύπτονται από τις ερωτήσεις 1α και 2α. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.2Α, υπάρχουν μαθητές που γενικεύουν κανόνες που ισχύουν στη διάταξη των φυσικών αριθμών (παρακανόνες), όπως για παράδειγμα "το κλάσμα είναι μεγαλύτερο επειδή έχει μεγαλύτερο αριθμητή και παρονομαστή" –κατηγορία 1.

Μία ομάδα μαθητών συνεχίζει να συσχετίζει την αριθμητική αξία ενός κλάσματος με το μέγεθος του αριθμητή και του παρονομαστή του, με τη διαφορά ότι θεωρεί ότι τα κλάσματα που περιλαμβάνουν μεγαλύτερους αριθμούς αντιπροσωπεύουν μικρότερη αριθμητική αξία –κατηγορία 2.

Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών του δείγματός μας περιγράφει το διαμερισμό ενός φυσικού αντικειμένου όπως τούρτα, κέικ, σοκολάτα κλπ, και ερμηνεύει το κάθε κλάσμα ως μέρος ή μέρη αυτού του αντικειμένου μεταφράζοντας με αυτόν τον τρόπο τη σύγκριση των κλασμάτων στη σύγκριση των μερών της μονάδας στην οποία αναφέρονται –κατηγορία 3.

Αρκετοί μαθητές εξηγούν την απάντησή τους χρησιμοποιώντας κανόνες σύγκρισης των αριθμητών ή των παρονομαστών των κλασμάτων που συγκρίνουν, οι οποίοι εστιάζονται στη σχέση του μεγέθους του αριθμητή και του παρονομαστή των κλασμάτων–κατηγορία 4, ενώ κάποιοι άλλοι προχωρούν παραπάνω τη σχέση αριθμητή – παρονομαστή χρησιμοποιώντας την ακέραια μονάδα ως σημείο αναφοράς στις συγκρίσεις τους (ιδιαίτερα όταν κάποιο από τα προς σύγκριση κλάσματα είναι καταχρηστικό) –κατηγορία 5. Συγκεκριμένα αυτοί οι μαθητές θεωρούν ότι ένα κλάσμα με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή είναι μικρότερο της μονάδας, ενώ ένα κλάσμα με αριθμητή μεγαλύτερο του παρονομαστή είναι μεγαλύτερο της μονάδας.

Επιπλέον υπάρχουν μαθητές οι οποίοι δείχνουν να κατανοούν ότι η αριθμητική αξία ενός κλάσματος ισοδυναμεί με το πηλίκο του αριθμητή δια του παρονομαστή, οπότε κατά τη σύγκριση των κλασμάτων εκτελούν τις διαιρέσεις του αριθμητή δια τον παρονομαστή του κάθε κλάσματος και στη συνέχεια συγκρίνουν τα πηλίκα που προκύπτουν –κατηγορία 6.

Ακόμη αρκετοί μαθητές μετατρέπουν τα προς σύγκριση κλάσματα (καθώς επίσης και τη μονάδα) σε ομώνυμα ώστε να γίνει εφικτή η σύγκρισή τους. Οι μαθητές σε αυτή την περίπτωση εκτελούν τη διαδικασία μετατροπής των κλασμάτων σε ισοδύναμα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή, ώστε στη συνέχεια τα συγκρίνουν συγκρίνοντας τους αριθμητές τους –κατηγορία 7.

Τέλος, ορισμένοι μαθητές δεν ξεκαθαρίζουν τη διαδικασία που ακολούθησαν για να συγκρίνουν τα κλάσματα, δηλαδή απλά αναφέρουν ότι αυτό είναι το μεγαλύτερο ή ότι έτσι είναι η σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο –κατηγορία 8.

3.1.2ii) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ)

Παραπάνω περιγράφηκαν οι κατηγορίες βαθμολόγησης στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ). Παρόλο που υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί αυτών των βασικών κατηγοριών, παρατηρούμε ότι τα παιδιά απαντούν με ορισμένους μόνο συνδυασμούς τις ερωτήσεις, οι οποίοι και καθορίζουν τις κατηγορίες βαθμολόγησης στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων.

(ο Πίνακας 3.2Β περίπου εδώ)

Στον Πίνακα 3.2Β παρουσιάζονται οι ερωτήσεις της δεύτερης ομάδας, οι κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ) και ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών στην κάθε κατηγορία για κάθε ερώτηση στις αντίστοιχες κατηγορίες ανά ηλικιακή ομάδα (Ε΄ Δημοτικού, ΣΤ΄ Δημοτικού, Α΄ Γυμνασίου, Β΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου).

Ι. Κατηγορίες 1, 2 και 3: <u>Μεγάλοι αριθμοί - Μεγάλο κλάσμα</u>

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.2Β, οι απαντήσεις των μαθητών οι οποίοι βαθμολογήθηκαν με τις στις κατηγορίες 1, 2 και 3 περιλαμβάνουν διατάξεις των κλασμάτων από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο είτε ως προς τον αριθμητή είτε ως προς τον παρονομαστή εκφράζοντας με αυτό τον τρόπο την κοινή πεποίθηση ότι όσο μεγαλώνει π.χ. ο αριθμητής ενός κλάσματος μεγαλώνει και το κλάσμα (αγνοώντας αν τα υπό σύγκριση κλάσματα έχουν διαφορετικούς παρονομαστές). Γι αυτό το λόγο τις θεωρούμε ως περιπτώσεις ενός κοινού τύπου απάντησης –τύπος απάντησης Ι.

Ιδιαίτερα οι μαθητές οι οποίοι βαθμολογήθηκαν με την κατηγορία 1, στην τρίτη ερώτηση, θέτουν πάντα ως μικρότερη όλων των κλασμάτων τη μονάδα. Για παράδειγμα η μαθήτρια της πέμπτης Δημοτικού (υποκ. #23) διατάσσει τους αριθμούς ως εξής: 1, 1/7, 4/3 και 5/6 και εξηγεί "Σκέφτηκα: από το 1 ξεκίνησα που είναι ο μικρότερος αριθμός και πήγα στο 5/6". Ένα άλλο παράδειγμα αυτής της κατηγορίας είναι η απάντηση της μαθήτριας της Β΄ Γυμνασίου (υποκ. #145), η οποία αφού διατάσσει τους αριθμούς όπως παραπάνω εξηγεί "Γιατί εγώ νομίζω πως έτσι είναι η σωστή τους σειρά. Η σκέψη που έκανα είναι ότι το μικρότερο πάντα μπαίνει μπροστά και τα άλλα νούμερα ακολουθούν". Στην κατηγορία αυτή εντάσσουμε και την απάντηση της μαθήτριας της Α΄ Γυμνασίου (υποκ. #100), η οποία αφού τοποθετεί τους αριθμούς με την εξής σειρά: 1, 3/4, 5/6 και 1/7, εξηγεί "τα έβαλα έτσι γιατί έχουμε μάθει ότι μικρότερο ή μεγαλύτερο είναι ανάλογα με τον παρονομαστή τους".

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.2Β, με τον ίδιο τρόπο παρατηρούμε ότι διατάσσουν και τα ζεύγη των κλασμάτων. Ένα παράδειγμα αποτελεί ο μαθητής της ΣΤ΄

Δημοτικού ο οποίος επιλέγει πάντα ως μεγαλύτερο το κλάσμα που έχει μεγαλύτερους αριθμούς. Έτσι επιλέγει το 4/5 από την ερώτηση 4(σωστή επιλογή), το 4/15 από τη ερώτηση 5 (λάθος επιλογή), το 5/8 από την ερώτηση 6 (λάθος επιλογή), το 5/6 από την ερώτηση 7 (σωστή επιλογή) και το 4/9 από την ερώτηση 8 (λάθος επιλογή). Είναι σημαντικό να παρατηρηθεί ότι οι εξηγήσεις των μαθητών σ' αυτήν την κατηγορία βαθμολόγησης είναι είτε μη επεξηγηματικές είτε στηρίζονται σε κανόνες διάταξης που ισχύουν στους φυσικούς αριθμούς.

Οι απαντήσεις των μαθητών οι οποίοι, ενώ διατάσουν τα κλάσματα ως προς το κλάσμα με τους μεγαλύτερους αριθμούς, θεωρούν ότι η μονάδα είναι μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων στην πρώτη ερώτηση, βαθμολογήθηκαν με την κατηγορία 2 (βλ. Πίνακα 3.2Β). Στην περίπτωση αυτή το κλάσμα ερμηνεύεται ως δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί που όσο μεγαλώνουν μεγαλώνει και η αξία του η οποία όμως <u>δεν ξεπερνά τη μονάδα</u>. Σ' αυτήν όπως και στην προηγούμενη κατηγορία απάντησης οι μαθητές μοιράζονται την πεποίθηση ότι η αριθμητική αξία που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα μεγαλώνει όσο μεγαλώνουν οι αριθμοί που το απαρτίζουν, ενώ η διαφοροποίηση από την κατηγορία 1, βρίσκεται στις πεποιθήσεις των υποκειμένων τα οποία εμφανίζουν στις απαντήσεις τους μια πρώτη ερμηνεία του κλάσματος ως μέρους, θεωρούν δηλαδή ότι η μονάδα είναι μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων. Ένα παράδειγμα αποτελεί η μαθήτρια της ΣΤ΄ Δημοτικού (υποκ. #49) η οποία αφού διατάσσει τα κλάσματα με τη σειρά 1/7, 4/3, 5/6, 1 εξηγεί "τα βάζω έτσι και το 1 το βάζω τελευταίο γιατί είναι μια ολόκληρη μονάδα".

Ας σημειωθεί ότι ενώ στις αιτιολογήσεις των υποκειμένων υπάρχει η τάση των παιδιών να επιλέγουν ως μεγαλύτερο το κλάσμα με το μεγαλύτερο αριθμητή ή παρονομαστή ή και τα δύο), τέσσερα παιδιά ερμηνεύουν τα κλάσματα ως μέρη μιας μονάδας όχι πάντα σωστά. Για παράδειγμα η μαθήτρια της ΣΤ΄ Δημοτικού (υποκ. #67), η οποία στην ερώτηση 1 διατάσσει τα κλάσματα όπως παραπάνω και εξηγεί "Γιατί νομίζω ότι το 1/7 παίρνουμε 1 κομμάτι απ' τη σοκολάτα π.χ., από το 4/3 παίρνουμε 4 κομμάτια απ' τη σοκολάτα, από το 5/6 παίρνουμε 5 κομμάτια απ' τη σοκολάτα και από το 1 παίρνουμε μια ολόκληρη σοκολάτα", ενώ στην ερώτηση 8 επιλέγει το κλάσμα 4/9 "Γιατί από τις 9 σοκολάτες παίρνουμε τις 4".

Ένα κοινό χαρακτηριστικό των απαντήσεων στις παραπάνω κατηγορίες βαθμολόγησης είναι η μη αναγνώριση του καταχρηστικού κλάσματος ως κλάσματος μεγαλύτερου της μονάδας τόσο στην περίπτωση της ερώτησης 1 όσο και στην ερώτηση 6.

Ένας μικρός αριθμός παιδιών διατάσσει όπως στις δύο προηγούμενες κατηγορίες βαθμολόγησης τα κλάσματα ενώ δεν αναφέρει τη σχέση τους με τη μονάδα. Αν και οι απαντήσεις αυτών των παιδιών θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ελλιπείς, θεωρήσαμε ότι δεν θα έπρεπε να χαθούν οι υπόλοιπες πληροφορίες που μας παρέχουν (βλ. Πίνακα 3.2Β -κατηγορία 3).

II. Κατηγορία 4: <u>Μικροί αριθμοί - Μεγάλο κλάσμα</u>

Στον Πίνακα 3.2Β φαίνεται ότι με την κατηγορία II βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών οι οποίοι, αντίθετα από την προηγούμενη κατηγορία, πιστεύουν ότι όσο μικραίνουν οι αριθμοί που απαρτίζουν ένα κλάσμα μεγαλώνει η αξία του κλάσματος και ότι η μονάδα είναι μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα. Για παράδειγμα ο μαθητής της πέμπτης Δημοτικού (υποκ. #52) απαντά στην ερώτηση 1 θέτοντας τους αριθμούς με την εξής σειρά: 5/4< 4/3<1/7<1 , «γιατί τα μεγαλύτερα για τα κλάσματα είναι τα μικρότερα» και επιλέγει για τον ίδιο λόγο το κλάσμα 2/5 (γιατί όσο μικρότερους αριθμούς έχει ένα κλάσμα τόσο μεγαλύτερο είναι) στην ερώτηση 4 ή το κλάσμα 4/7 στην ερώτηση 5 κ.α. (βλέπε, Πίνακα 3.2Β). Επίσης ο μαθητής της Β΄ γυμν. (υποκ. #129) ο οποίος διατάσσει τα κλάσματα όπως παραπάνω και εξηγεί "οι αριθμοί αυτοί μπήκαν από το μικρότερο στο μεγαλύτερο με αυτήν τη σειρά διότι τα κλάσματα που έχουν τον μικρότερο αριθμητή είναι μεγαλύτερα από αυτά που έχουν μεγαλύτερο αριθμητή. Και που μας δίνει στην άσκηση την μονάδα, είναι το μεγαλύτερο διότι η μονάδα μας δίνει το κλάσμα 1/1".

Από τις απαντήσεις των μαθητών θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η κοινή πεποίθηση των μαθητών για την ακέραια μονάδα, ότι δηλαδή είναι μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων, είναι συμβατή με την πεποίθησή τους ότι όσο μικραίνουν οι αριθμοί που απαρτίζουν ένα κλάσμα τόσο μεγαλώνει και η αξία που αντιπροσωπεύει[74], η οποία είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής λανθασμένων κανόνων διάταξης.

Στην ίδια κατηγορία βαθμολογήθηκαν και οι απαντήσεις των παιδιών τα οποία διατάσσουν τους αριθμούς όπως παραπάνω, ερμηνεύοντας όμως το κλάσμα ως μέρος μιας μονάδας. Δηλαδή συγκρίνουν τα μέρη που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα - τα κομμάτια- και αναφέρουν ότι όσο πιο λίγα είναι τα κομμάτια στα οποία χωρίζεται μια μονάδα τόσο πιο μεγάλα είναι αυτά. Η ερμηνεία αυτή του κλάσματος είναι συμβατή με την πεποίθησή τους ότι ένα κλάσμα είναι το μέρος μιας μονάδας άρα είναι πάντα μικρότερο της μονάδας. Για παράδειγμα ένα από τα μικρότερα παιδιά (υποκ. #7) αιτιολογεί την επιλογή του κλάσματος με τους μικρότερους αριθμούς "γιατί αν έχουμε μια πίτσα και τη χωρίσουμε σε 4 κομμάτια και μετά σε 10 μεγαλύτερη είναι όταν είναι χωρισμένη σε 4 κομμάτια". Επίσης ο μαθητής της πέμπτης Δημοτικού (υποκ. #36) απαντά στην ερώτηση 6 "Το 4/3 επειδή το 'χουμε χωρίσει σε τρία κομμάτια μεγαλύτερα από τα 8 κομμάτια που είναι μικρότερα." και στην ερώτηση 9 "Τα 2/3 γιατί τα 3 κομμάτια είναι μεγαλύτερα από τα 9 που επειδή είναι περισσότερα είναι και μικρότερα".

ΙΙΙ. Κατηγορίες 5, 6, 7: <u>Σωστή διάταξη κλασμάτων εκτός της μονάδας</u>

Τρεις μαθητές του δείγματός μας, ενώ διατάσουν σωστά τα κλάσματα σε όλες τις ερωτήσεις αυτής την ομάδας, στην ερώτηση 3 τοποθετούν την ακέραια μονάδα στην αρχή πιστεύοντας ότι είναι μικρότερη από οποιοδήποτε κλάσμα –κατηγορία 5.

Αντίθετα, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.2Β, υπάρχουν μαθητές οι οποίοι ενώ διατάσσουν σωστά τα κλάσματα θέτουν τη μονάδα στο τέλος λέγοντας ότι είναι μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα (κατηγορία 6).

Οι μαθητές που βαθμολογήθηκαν με τις δύο αυτές κατηγορίες, κατά τη σύγκριση των κλασμάτων είτε δεν δίνουν εξηγήσεις για την διαδικασία που ακολούθησαν, είτε ιδιαίτερα μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, χρησιμοποιούν κανόνες σύγκρισης κλασμάτων

[74] Ας σημειωθεί ακόμη ότι δεν υπήρχε ούτε ένα παιδί το οποίο να διατάσσει τα κλάσματα όπως παραπάνω και να θεωρεί συγχρόνως ότι η μονάδα είναι μικρότερη όλων των κλασμάτων.

που αφορούν την σχέση αριθμητή – παρονομαστή του εκάστοτε κλάσματος, είτε μετατρέπουν τα ετερώνυμα κλάσματα σε ισοδύναμα ομώνυμα και στη συνέχεια τα συγκρίνουν εφαρμόζοντας κανόνες σύγκρισης. Είναι όμως περισσότεροι οι μαθητές που στις απαντήσεις τους ερμηνεύουν τα κλάσματα ως μέρη μιας ακέραιης μονάδας, όπως για παράδειγμα η μαθήτρια της Ε΄ Δημοτικού (υποκ. #20), η οποία αιτιολογεί την διάταξη των αριθμών 1/7, 5/4, 4/3, 1 εξηγώντας "γιατί το 7 χωρίζεται σε πιο πολλά κομμάτια απ' ότι οι άλλοι αριθμοί" -υπονοεί ότι τα κομμάτια θα είναι μικρότερα- ή η μαθήτρια της ΣΤ' Δημοτικού (υποκ. #46) η οποία μετατρέπει τα κλάσματα σε ομώνυμα και τα διατάσσει σωστά χωρίς να περιλαμβάνει στην παραπάνω διαδικασία την ακέραια μονάδα, την οποία και τοποθετεί στο τέλος εξηγώντας "Γιατί άμα τα απλοποιήσουμε βλέπουμε ποιο είναι μεγαλύτερο και ποιο είναι μικρότερο". Επίσης η μαθήτρια της Β΄ Γυμνασίου (υποκ. #154) εξηγεί "τα έβαλα σ' αυτή την σειρά γιατί τα κλάσματα που έχουν μικρότερο παρονομαστή είναι μεγαλύτερα από αυτά που έχουν μεγαλύτερο παρονομαστή. Ακόμη ο μαθητής (υποκ. #114) ενώ μετατρέπει τα κλάσματα σε ομώνυμα στη συνέχεια δεν είναι σίγουρος για τη διάταξη των ομώνυμων κλασμάτων. Συγκεκριμένα εξηγεί: "Πρώτα πρέπει να τα απλοποιήσουμε ώστε να έχουν ίδιο παρονομαστή. Όπως ξέρουμε όποιο κλάσμα έχει ίδιο παρονομαστή και διαφορετικό αριθμητή είναι μεγαλύτερο αυτό που έχει τον ~~μικρότερο~~ μεγαλύτερο αριθμητή".

Τρεις μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου αντίστοιχα, οι οποίοι στις απαντήσεις τους περιλαμβάνουν σωστές διατάξεις κλασμάτων ενώ συγχρόνως δεν κάνουν καμία αναφορά στην μονάδα την οποία αγνοούν, βαθμολογήθηκαν με την κατηγορία 7. Οι διαδικασίες που χρησιμοποιούν είναι συνήθως ερμηνείες των κλασμάτων ως μέρη της μονάδας και στη συνέχεια σύγκριση αυτών των μερών.

IV. Κατηγορία 8: <u>Σωστή διάταξη κλασμάτων</u>

Οι απαντήσεις των μαθητών που περιλαμβάνουν σωστές διατάξεις τόσο μεταξύ των κλασμάτων όσο και μεταξύ των κλασμάτων και της μονάδας βαθμολογήθηκαν με την κατηγορία 8 και όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.2Β οι διαδικασίες που χρησιμοποίησαν περιλαμβάνουν κανόνες σύγκρισης κλασμάτων, ερμηνεία των κλασμάτων ως μέρη μιας ακέραιης μονάδας, μετατροπή των κλασμάτων και της μονάδας σε ισοδύναμα ομώνυμα κλάσματα (η οποία είναι η διαδικασία που χρησιμοποιείται από τους περισσότερους μαθητές) και ακόμη εμφανίζονται διαδικασίες όπως χρήση της μονάδας ως σημείου αναφοράς για τη σύγκριση των κλασμάτων και ερμηνεία του κλάσματος ως το πηλίκο δύο αριθμών.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι οι μαθητές εδώ χρησιμοποιούν περισσότερες από μια διαδικασίες και ερμηνεία του κλάσματος όταν υποστηρίζουν την επιλογή τους. Συγκεκριμένα, σε κάποιες συγκρίσεις μετατρέπουν τα κλάσματα σε ομώνυμα ενώ σε κάποιες άλλες χρησιμοποιούν εμπειρικά παραδείγματα ή κάποια άλλη διαδικασία. Για παράδειγμα ο μαθητής της ΣΤ΄ Δημοτικού (υποκ. #63) απαντά σωστά στην τρίτη ερώτηση εξηγώντας "το 4/3 είναι πάνω απ' τη μονάδα. Το 5/6 είναι σχεδόν μονάδα και το 1/7 είναι αρκετά μικρό από τ' άλλα" και στις υπόλοιπες ερωτήσεις ακόμη και στην ερώτηση 6 (η οποία περιλαμβάνει ένα καταχρηστικό κλάσμα) μετατρέπει τα κλάσματα σε ομώνυμα και στη συνέχεια τα συγκρίνει σωστά. Ακόμη στις περιπτώσεις που εκτελούν τη διαδικασία μετατροπής σε ομώνυμα και στη συνέχεια σύγκριση των κλασμάτων, θέλοντας να ενισχύσουν την ορθότητα της απάντησή τους, χρησιμοποιούν εμπειρικά παραδείγματα ερμηνείας των κλασμάτων ως μέρη ενός φυσικού αντικειμένου ή μιας ακέραιης μονάδας.

Τέλος οι απαντήσεις πέντε μαθητών, επειδή αποκάλυπταν μια συνεχή ασυνέπεια στις απαντήσεις τους στις διαφορετικές ερωτήσεις, δεν εντάχθηκαν στις παραπάνω κατηγορίες βαθμολόγησης. Στις παραπάνω κατηγορίες βαθμολόγησης δεν εντάχθηκαν επίσης και κάποιες ελλιπείς απαντήσεις.

Συνοψίζοντας, από τις ερωτήσεις διάταξης προκύπτουν τέσσερις τάσεις στις απαντήσεις των μαθητών. Στον Πίνακα 3.2Γ παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά των μαθητών που βαθμολογήθηκαν στις κατηγορίες που περιγράψαμε προηγούμενα.

Η πρώτη τάση "Μεγάλοι αριθμοί - Μεγάλο κλάσμα", την οποία εκφράζει το 22% του συνόλου των μαθητών του δείγματός μας, εμφανίζεται περισσότερο στους μαθητές του Δημοτικού, και μοιάζει να φθίνει στους μαθητές του Γυμνασίου και του

Λυκείου. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι ο αριθμός των μαθητών οι οποίοι έχουν τη κοινή αυτή πεποίθηση για το μέγεθος των αριθμών που απαρτίζουν ένα κλάσμα και θεωρούν ότι η ακέραια μονάδα είναι ο μικρότερος αριθμός, η οποία είναι και περισσότερο συνεπής, είναι σχεδόν τριπλάσιος από τον αριθμό των μαθητών οι οποίοι ενώ διατάσσουν τα κλάσματα με τον ίδιο τρόπο θεωρούν ότι η ακέραια μονάδα είναι μεγαλύτερη από οποιοδήποτε κλάσμα –14.5% και 5% επί του συνόλου των μαθητών αντίστοιχα (βλ. Πίνακα 3.2Γ).

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2Γ

Κατηγορίες βαθμολόγησης, συχνότητες και ποσοστά επί τοις εκατό των παιδιών στις κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ –Ομάδα 2: Διάταξη κλασμάτων), ανά ηλικιακή ομάδα (N=200).

Ηλικιακές ομάδες Κατηγορίες απαντήσεων	Ε΄ Δημοτ. N=40 (%)	ΣΤ΄ Δημοτ. N=40 (%)	Α΄ Γυμν. N=40 (%)	Β΄ Γυμν. N=40 (%)	Α΄ Λυκείου N=40 (%)	Σύνολο N=200 (%)
Ι. Μεγάλοι αριθμοί-Μεγάλο κλάσμα						
1. Η μονάδα μικρότερη όλων.	7 (17.5%)	8 (20%)	7 (17.5%)	3 (7.5%)	4 (10%)	29 (14.5%)
2. Η μονάδα μεγαλύτερη όλων	2 (5%)	4 (10%)	2 (5%)	2 (5%)	0 (0%)	10 (5%)
3. Διάταξη χωρίς τη μονάδα.	2 (5%)	3 (7.5%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	5 (2.5%)
Σύνολο Ι	11 (27.5%)	15 (37.5%)	9 (22.5%)	5 (12.5%)	4 (10%)	44 (22%)
ΙΙ. Μικροί αριθμοί - μεγάλο κλάσμα						
4. Η μονάδα μεγαλύτερη όλων	6 (15%)	4 (10%)	4 (10%)	5 (12.5%)	3 (7.5%)	22 (11%)
ΙΙΙ. Σωστή διάταξη των κλασμάτων						
5. Η μονάδα μικρότερη όλων.	0 (0%)	1 (2.5%)	2 (5%)	0 (0%)	0 (0%)	3 (1.5%)
6. Η μονάδα μεγαλύτερη όλων	5 (12.5%)	6 (15%)	6 (15%)	8 (20%)	6 (15%)	31 (15.5%)
7. Διάταξη χωρίς τη μονάδα.	0 (0%)	0 (0%)	1 (2.5%)	1 (2.5%)	1 (2.5%)	3 (1.5%)
Σύνολο ΙΙΙ	5 (12.5%)	7 (17.5%)	9 (22.5%)	9 (22.5%)	7 (17.5%)	37 (18.5%)
IV. Σωστή διάταξη των κλασμάτων και της μονάδας						
8. Σωστή διάταξη των κλασμάτων και της μονάδας	13 (32.5%)	13 (32.5%)	18 (45%)	21 (52.5%)	23 (57.5%)	88 (44 %)
9. Μη κατηγοριοποιήσιμες απαντήσεις	2 (5%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	3 (7.5%)	5 (2.5%)
0. Ελλιπείς απαντήσεις	3 (7.5%)	1 (2.5%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	4 (2%)
Σύνολο	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	200 (100%)

Αντίθετα ο αριθμός των μαθητών που θεωρούν ότι η μονάδα είναι μεγαλύτερη από τα κλάσματα, είτε τα διατάσσουν υιοθετώντας την ιδέα “Μικροί αριθμοί - Μεγάλο κλάσμα" είτε χρησιμοποιώντας διαδικασίες που τους οδηγούν σε σωστή διάταξη των κλασμάτων, μοιράζεται το ίδιο σχεδόν στις διαφορετικές ηλικίες και αποτελεί το 11% και το 15,5% του συνόλου των μαθητών αντίστοιχα.

Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 3.2Γ, αριθμός των μαθητών που διατάσσει σωστά τα κλάσματα και την ακέραια μονάδα σε όλες τις ερωτήσεις αυξάνεται αρκετά στο γυμνάσιο και το λύκειο (από το 32,5% των μαθητών της Ε΄ Δημοτικού φθάνει στο 57,5% των μαθητών της Α΄ Λυκείου).

Για να διερευνήσουμε κατά πόσο υπάρχει διαφοροποίηση με την ηλικία και το φύλο των μαθητών, χρησιμοποιήσαμε τα μη παραμετρικά τεστ των Kruskal-Wallis και των Mann-Whitney αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα από το test των Kruskal-Wallis έδειξαν ότι η ηλικία επηρεάζει κατά στατιστικά σημαντικό τρόπο τις απαντήσεις των μαθητών για τις ερωτήσεις της ομάδας 1 (x^2=16,1; β.ε.= 4; ασυμπτ. $p<0{,}01$) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 3.7). Συγκρίνοντας τις μέσες θέσεις των πέντε ηλικιών του δείγματος μεταξύ τους, είναι φανερό ότι οι μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων απάντησαν τις ερωτήσεις αυτής της ομάδας χρησιμοποιώντας κατηγορίες απαντήσεων που περιλάμβαναν σωστές διατάξεις των κλασμάτων και της ακέραιας μονάδας σε σχέση με τους αντίστοιχους από τις μικρότερες τάξεις και φαίνεται να υπάρχει μια γραμμική αύξουσα μεταβολή των μέσων θέσεων από ηλικία σε ηλικία με εξαίρεση τη μεταβολή από την Ε΄ στην ΣΤ΄ Δημοτικού, όπου δεν φαίνεται να υπάρχουν διαφορές. Ιδιαίτερα θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι διαφορές εντοπίζονται ανάμεσα στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο και στις τάξεις του Γυμνασίου και του Λυκείου αντίστοιχα.

Επιπλέον, με το test των Mann-Whitney, ελέγξαμε την ύπαρξη τυχόν διαφοροποίησης μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών του δείγματος στις απαντήσεις που έδωσαν για τη διάταξη κλασμάτων και της ακέραιας μονάδας. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το φύλο δεν διαφοροποιεί γενικά τις απαντήσεις των μαθητών με στατιστικά σημαντικό τρόπο (z=-2,4; ασυμπτ. p= 0,016>0,1[75]) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 3.8).

3.3.Β. Πράξεις με κλάσματα

Σύμφωνα με το σχεδιασμό της έρευνας υπάρχουν τέσσερις ομάδες ερωτήσεων που περιλαμβάνουν πράξεις με κλάσματα τις οποίες θα περιγράψουμε παρακάτω:
Ομάδα ερωτήσεων 3: Εκτίμηση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων φυσικού αριθμού με κλάσμα
Ομάδα ερωτήσεων 4: Εκτίμηση της ορθότητας πράξεων με κλάσματα.
Ομάδα ερωτήσεων 5: Εικονική αναπαράσταση αριθμητικών πράξεων με κλάσματα.
Ομάδα ερωτήσεων 6: Συμβολική αναπαράσταση σκιαγραφημένων μερών ενός σχήματος με μια αριθμητική πράξη.

Οι δύο πρώτες ομάδες ερωτήσεων (τρίτη και τέταρτη) περιλαμβάνουν εκτιμήσεις αριθμητικών πράξεων με διαφορετικά κλάσματα, ενώ οι πέμπτη και έκτη περιλαμβάνουν μεταφράσεις αριθμητικών πράξεων στις αντίστοιχες εικονικές αναπαραστάσεις τους και το αντίστροφο.

3.3.3. Εκτίμηση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων ενός φυσικού αριθμού με ένα κλάσμα

Σύμφωνα με το σχεδιασμό της έρευνάς μας θέσαμε στα παιδιά ερωτήσεις που περιλαμβάνουν αριθμητικές πράξεις με κλάσματα, οι οποίες αποτελούν την τρίτη και τέταρτη ομάδα ερωτήσεων του ερωτηματολόγιού μας. Με τις ερωτήσεις αυτές θέλαμε να διερευνήσουμε εάν υπάρχουν μαθητές οι οποίοι ερμηνεύουν τις πράξεις με κλάσματα με τα μοντέλα που έχουν αναπτύξει για τις πράξεις με φυσικούς αριθμούς, ώστε να ελέγξουμε την υπόθεσή μας, ότι η προϋπάρχουσα γνώση των φυσικών αριθμών εμποδίζει τα παιδιά στην απόκτηση της γνώσης των κλασμάτων και στην γνωστική περιοχή των πράξεων. Συγκεκριμένα στην τρίτη ομάδα ερωτήσεων, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3Β, ζητήθηκε από τους μαθητές να

[75] Διόρθωση κατά Bonferroni του επιπέδου 0,05 για πολλαπλές συγκρίσεις.

εκτιμήσουν το αποτέλεσμα πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων ενός φυσικού αριθμού, του 17, με ένα κλάσμα – απλό ή καταχρηστικό.

Κατά την επεξεργασία των απαντήσεων των μαθητών παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές εκτιμούσαν το μέγεθος του αποτελέσματος των πολλαπλασιασμών και των διαιρέσεων με διαφορετικούς τρόπους. Σε μερικές περιπτώσεις βασίζονταν στο είδος της πράξης ενώ σε άλλες περιπτώσεις εκτελούσαν την ίδια την πράξη με στόχο να βρουν το αποτέλεσμα το οποίο στη συνέχεια το σύγκριναν με το φυσικό αριθμό 17. Όπως έχουμε αναφέρει (βλ. σελ. 139, 3ο Κεφάλαιο) στο σχεδιασμό των ερωτήσεων 9 έως 14 οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις που δίνονται στα παιδιά προς εκτίμηση διακρίνονται σε σχέση με το κλάσμα που πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται ο φυσικός αριθμός 17. Όταν τα κλάσματα είναι καταχρηστικά οι παραπάνω πράξεις θεωρούνται συμβατές προς τις πεποιθήσεις των παιδιών ότι “ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει” και “η διαίρεση μικραίνει”[76], ενώ όταν τα κλάσματα είναι απλά θεωρούνται μη συμβατές προς τις πεποιθήσεις τους, διότι στον μεν πολλαπλασιασμό το αποτέλεσμα είναι μικρότερο του 17 ενώ στη διαίρεση το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο του 17. Ακόμη στην περίπτωση όπου το κλάσμα είναι ίσο με τη μονάδα τότε το αποτέλεσμα της πράξης παραμένει ίσο με το 17.

Το βασικό κριτήριο με το οποίο ταξινομήθηκαν οι απαντήσεις των παιδιών σε αυτές τις ερωτήσεις ήταν η ορθότητα ή μη των απαντήσεων σύμφωνα με τις πεποιθήσεις που τα παιδιά έχουν αναπτύξει από τη απόκτηση της γνώσης των φυσικών αριθμών, αν δηλαδή για παράδειγμα τα παιδιά πιστεύουν ότι ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει πάντα τον αριθμό και η διαίρεση τον μικραίνει.

Παρακάτω περιγράφονται οι κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων σε σχέση με την εφαρμογή ή όχι των διαδικασιών των πράξεων με φυσικούς αριθμούς στις πράξεις με κλάσματα.

---

[76] Στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση δεν ισχύουν πάντα οι πεποιθήσεις των παιδιών (από την εκτέλεση αυτών των πράξεων με φυσικούς αριθμούς), ότι “το αποτέλεσμα ενός πολλαπλασιασμού είναι μεγαλύτερο του πολλαπλασιαστή” και “το πηλίκο μιας διαίρεση είναι μικρότερο του διαιρετέου” (Hart, 1980, 1981³·Pirie, 1988). Ακόμη ¨Ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει” και “η διαίρεση μικραίνει” έναν αριθμό (Bell et all, 1981).

3.1.3i) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ)

Σε αυτή την ομάδα ερωτήσεων βαθμολογήσαμε σε κατηγορίες τις απαντήσεις των παιδιών απ' ευθείας στο επίπεδο της ομάδας ερωτήσεων (βλ. Πίνακα 3.3Β).

(ο Πίνακας 3.3Β περίπου εδώ)

Σε αυτόν τον Πίνακα παρουσιάζονται οι ερωτήσεις της τρίτης ομάδας, οι κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ), καθώς και κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών στην κάθε κατηγορία για κάθε ερώτηση.

Όπως φαίνεται στον παραπάνω Πίνακα υπήρχαν μαθητές, οι οποίοι εκτίμησαν και δικαιολόγησαν με τον ίδιο τρόπο τις εκτιμήσεις τους, τις οποίες στη συνέχεια σύμφωνα με τη μέθοδο ανάλυσης που έχουμε περιγράψει παραπάνω (βλ. σελ. 132) κατατάξαμε σε διάφορες κατηγορίες βαθμολόγησης.

Ι. Κατηγορίες 1και 2: *<u>Ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει και η διαίρεση μικραίνει</u>*

Από τις απαντήσεις αρκετών μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού, καθώς ακόμη και της Α΄ Γυμνασίου προέκυψε ότι οι εκτιμήσεις των μαθητών είναι επηρεασμένες από τους κανόνες που ισχύουν στο σύνολο των φυσικών αριθμών (το ποσοστό κυμαίνεται από το 37,5% έως το 22,5% και φτάνει το ένα τέταρτο του συνόλου των μαθητών, βλ. παρακάτω Πίνακα 3.3Γ).

Συγκεκριμένα αρκετοί από τους μαθητές, ιδιαίτερα των τριών πρώτων ηλικιακών ομάδων, φαίνεται να αντιμετωπίζουν τις πράξεις που περιλαμβάνουν κλάσματα με τον ίδιο τρόπο όπως τους φυσικούς αριθμούς. Συνεπώς στους πολλαπλασιασμούς επιλέγουν ότι το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο ενώ στις διαιρέσεις ότι είναι μικρότερο του 17. Οι απαντήσεις αυτές, είτε δεν συνοδεύονται από εξηγήσεις -μη επεξηγηματικές- είτε οι μαθητές χρησιμοποιούν κανόνες που ισχύουν για τους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή ότι το αποτέλεσμα ενός πολλαπλασιασμού είναι μεγαλύτερο από τους παράγοντες του γινομένου ή το πηλίκο μιας διαίρεσης είναι μικρότερο του διαιρετέου, οι οποίοι δεν ισχύουν στην περίπτωση που ο πολλαπλασιαστής ή ο διαιρέτης είναι ένα απλό κλάσμα. Ένα παράδειγμα αποτελεί ο μαθητής της ΣΤ΄ Δημοτικού (υποκ. #60) ο οποίος εκτιμά σε όλους τους πολλαπλασιασμούς του 17 επί οποιουδήποτε κλάσματος -ακόμη και του 3/3- ότι το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο του 17 "γιατί πολλαπλασιάζουμε", ενώ αντίστοιχα στις διαιρέσεις ότι το αποτέλεσμα είναι μικρότερο του 17 γιατί "κάνουμε διαίρεση".

Σε ορισμένες περιπτώσεις οι λανθασμένες εκτιμήσεις προκαλούνται από την εφαρμογή διαδικασιών εκτέλεσης πράξεων που ισχύουν στους φυσικούς αριθμούς. Υπάρχουν δηλαδή παιδιά τα οποία εκτελούν λανθασμένα τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας αντίστοιχα τον αριθμό 17 με τον αριθμητή του κλάσματος και συγκρίνοντας αυτόν τον αριθμό με το 17 ακόμη και στην περίπτωση των κλασμάτων των ισοδύναμων με τη μονάδα. Ακόμη κάποιοι μαθητές πολλαπλασιάζουν και τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος με τον 17 με συνέπεια να βρίσκουν λανθασμένο αποτέλεσμα και να αποτυγχάνουν στη σύγκριση που τους ζητείται.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3Β, στην περίπτωση που οι μαθητές αναγνώρισαν ότι τα κλάσματα 2/2 και 3/3 είναι ίσα με μια ακέραια μονάδα, οπότε εκτίμησαν σωστά ότι το αποτέλεσμα της πράξης που περιείχε τα παραπάνω κλάσματα ήταν ίσο με τον αριθμό 17, οι απαντήσεις τους ταξινομήθηκαν στην κατηγορία βαθμολόγησης 2.

ΙΙ. Κατηγορία 3: *<u>Ο πολ/σμος και η διαίρεση με κλάσμα της μορφής q/q δεν μεταβάλλει το αποτέλεσμα</u>*

Στον ίδιο Πίνακα παρατηρούμε ότι υπήρχαν μαθητές (ακόμη και της Α΄ Λυκείου), οι οποίοι δεν ήταν σίγουροι για το αποτέλεσμα της πράξης παρά μόνο στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης του αριθμού 17 με ένα κλάσμα που ο αριθμητής του και ο παρονομαστής του ήταν ο ίδιος αριθμός. Στην περίπτωση που αναγνώρισαν ότι αυτό το κλάσμα ισοδυναμούσε με μια ακέραια μονάδα, η οποία δεν επηρέαζε το αποτέλεσμα της πράξης, οι απαντήσεις τους ταξινομήθηκαν στην κατηγορία 3.

III. Κατηγορία 4: <u>Ο πολλαπλασιασμός μικραίνει και η διαίρεση μεγαλώνει</u>

Τέσσερις μαθητές στην προσπάθεια να εφαρμόσουν τους νέους κανόνες που ισχύουν στο σύνολο των κλασμάτων, εφάρμοσαν τους ακριβώς αντίθετους κανόνες από αυτούς που ίσχυαν στους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή ότι το γινόμενο δύο αριθμών είναι μικρότερο και από τους δύο παράγοντες του γινομένου, ενώ το πηλίκο μιας διαίρεσης είναι μεγαλύτερο από τον διαιρετέο, κανόνες που αληθεύουν μόνο στην περίπτωση πράξεων με κάποια συγκεκριμένα είδη κλασμάτων. Αυτές οι λανθασμένες εκτιμήσεις ταξινομήθηκαν στην κατηγορία βαθμολόγησης 4. Ένα παράδειγμα αποτελεί η απάντηση του μαθητή της ΣΤ΄ Δημοτικού (υποκ. #75) ο οποίος θεωρεί ότι όταν πολλαπλασιάζουμε με κλάσμα κάνουμε διαίρεση, άρα το αποτέλεσμα είναι μικρότερο, ενώ όταν διαιρούμε με κλάσμα πολλαπλασιάζουμε άρα το αποτέλεσμα μεγαλώνει.

IV. Κατηγορία 5: <u>Ο πολ/σμος και η διαίρεση μεγαλώνουν τον αριθμό</u>

Ένας επίσης μικρός αριθμός μαθητών εκτίμησε ότι το αποτέλεσμα θα είναι πάντα μεγαλύτερο από τον αριθμό 17. Στις εξηγήσεις που δίνουν αυτοί οι μαθητές γίνεται φανερό ότι εμπλέκονται δύο ιδέες. Από τη μια πλευρά η ιδέα ότι στη διαίρεση, αν ο διαιρέτης είναι κλάσμα τότε το κλάσμα αυτό αντιστρέφεται και αντί για διαίρεση εκτελείται πολλαπλασιασμός και από την άλλη το μοντέλο του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τον αριθμό.

V. <u>Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση μικραίνουν ή μεγαλώνουν τον αριθμό</u>

Στις απαντήσεις που περιγράφονται παρακάτω, οι μαθητές αντίθετα από τις προηγούμενες περιπτώσεις δεν εκτιμούν το αποτέλεσμα μιας πράξης βασιζόμενοι σε έναν γενικό κανόνα (λανθασμένο συνήθως), όπως προκύπτει από τις απαντήσεις τους οι οποίες βαθμολογήθηκαν στις αντίστοιχες προηγούμενες κατηγορίες, αλλά δείχνουν να πιστεύουν ότι σε έναν πολλαπλασιασμό ή σε μια διαίρεση το αποτέλεσμα μπορεί να είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο των αριθμών που περιλαμβάνει. Στις περισσότερες δε περιπτώσεις καταφεύγουν στην εκτέλεση της αντίστοιχης πράξης ώστε να μπορέσουν να απαντήσουν στην αντίστοιχη ερώτηση.

Vα. Κατηγορίες 6 και 7: <u>Λανθασμένες εκτιμήσεις λόγω λανθασμένης εκτέλεσης πράξης</u>

Σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται όλες οι απαντήσεις των μαθητών στις οποίες δεν διακρίνονται κάποιες από τις πεποιθήσεις των προηγούμενων κατηγοριών. Σε αυτήν την κατηγορία ταξινομήθηκαν οι λανθασμένες εκτιμήσεις των μαθητών οι οποίες έχουν να κάνουν συνήθως με λανθασμένες διαδικασίες που χρησιμοποιούν τα παιδιά κατά την εκτέλεση των πράξεων[77].

Για παράδειγμα, υπάρχουν παιδιά τα οποία θεωρούν ότι για οποιαδήποτε πράξη με κλάσματα απαιτείται η μετατροπή των κλασμάτων στα αντίστοιχα ισοδύναμά τους ομώνυμα κλάσματα ή εκτελούν πολλαπλασιασμούς με τον ίδιο τρόπο που μετατρέπουν ένα μεικτό κλάσμα σε απλό. Για παράδειγμα ο μαθητής της Β΄ Γυμνασίου στον πολλαπλασιασμό 17· 3/8 εκτελεί την πράξη 17·8 + 3 =136+3=139 και συγκρίνει το αποτέλεσμα με το 17 ή αντίστοιχα στη διαίρεση 17:2/2 υπολογίζει 17:2+2=8+2=10 (βλ., Πίνακα 3.3Β –κατηγορία 6).

Σημαντικό είναι να παρατηρήσουμε ότι μια ομάδα μαθητών εκτελεί λανθασμένα μόνο τις διαιρέσεις (για παράδειγμα μετατρέπουν τη διαίρεση σε πολλαπλασιασμό χωρίς να αντιστρέφουν το διαιρέτη) –κατηγορία 7.

Vβ. Κατηγορία 8: <u>Σωστές εκτιμήσεις</u>

Σε αυτή την κατηγορία βαθμολόγησης εντάχθηκαν όλες σωστές αιτιολογήσεις και εκτιμήσεις των μαθητών. Οι μαθητές αυτοί οι οποίοι φτάνουν το 35% στην περίπτωση της Β΄ Γυμνασίου (βλ. παρακάτω, Πίνακα 3.3Γ), είτε χρησιμοποιούν τους κανόνες που αναφέραμε παραπάνω προσαρμοσμένους στο σύνολο των ρητών αριθμών, όπως για παράδειγμα όταν πολλαπλασιάζεται το 17 επί ένα κλάσμα που είναι μικρότερο της μονάδας, το αποτέλεσμα είναι μικρότερο του 17, ενώ επί ένα κλάσμα που είναι μεγαλύτερο της μονάδας, το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο του 17, είτε εκτελούν σωστά τους αλγόριθμους των πράξεων.

[77] Κατά την ταξινόμηση των απαντήσεων των παιδιών καταγράψαμε ποικιλία διαδικαστικών λαθών τα οποία προκαλούνται από τους νέους μη αφομοιωμένους κανόνες που ισχύουν στα κλάσματα και αφορούν το χειρισμό των κλασμάτων. Στην παρούσα εργασία τα λάθη των παιδιών κατά την εκτέλεση των πράξεων δεν θα αναλυθούν σε βάθος διότι δεν ήταν κάτι που ζητήσαμε στα παιδιά να κάνουν, οπότε υπάρχουν παιδιά τα οποία απάντησαν χωρίς να εκτελέσουν την αντίστοιχη πράξη.

Ακόμη υπήρχαν δύο παιδιά των οποίων οι απαντήσεις δεν φανέρωναν κάποιες ιδέες ώστε να μπορέσουμε να τις αξιολογήσουμε, και τις οποίες βαθμολογήσαμε ως ασαφείς απαντήσεις με την κατηγορία 9. Επίσης κατά τη βαθμολόγηση δεν ήταν εφικτή η κατηγοριοποίηση κάποιων απαντήσεων διότι δεν απαντούσαν στις περισσότερες ερωτήσεις –κατηγορία 0.

Στη συνέχεια θα συνοψίσουμε τους διαφορετικούς τύπους απάντησης των μαθητών και θα περιγράψουμε τα ποσοστά των μαθητών που βαθμολογήθηκαν στις αντίστοιχες κατηγορίες στις πέντε ηλικιακές ομάδες του δείγματός μας, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακας 3.3Γ στην επόμενη σελίδα.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω γίνεται φανερό από τις απαντήσεις των παιδιών ότι το ένα τέταρτο περίπου του συνόλου των μαθητών εκτιμά τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις με κλάσματα με τον ίδιο τρόπο όπως με φυσικούς αριθμούς. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3Γ, το ποσοστό αυτό κατανέμεται κυρίως στις μικρότερες ηλικίες (το 37,5% των μαθητών της Ε΄ και το 40% της ΣΤ΄ Δημοτικού), ενώ φθίνει στις μεγαλύτερες ηλικίες, παραμένοντας όμως ακόμη μαθητές και της Α΄ Λυκείου που συνεχίζουν να εκτιμούν με αυτό τον τρόπο τις πράξεις.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε στον ίδιο Πίνακα ότι το ένα πέμπτο ακόμη και των μικρότερων μαθητών του δείγματός μας είναι σε θέση να εκτιμά ορθά τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις με κλάσματα που είναι ισοδύναμα της ακέραιας μονάδας, όπως το 2/2 και το 3/3 (βλ. ποσοστά στους τύπους απάντησης Ι και ΙΙ –κατηγορίες 2 και 3).

Από τις απαντήσεις δύο μικρών ομάδων μαθητών προκύπτει ότι έχουν την τάση να εκτιμούν τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης εφαρμόζοντας τις ιδέες που περιγράφονται στους τύπους απάντησης ΙΙΙ και IV. Παρατηρούμε στον Πίνακα 3.3Γ ότι οι μαθητές αυτοί κατανέμονται σχεδόν το ίδιο σε όλες τις ηλικιακές ομάδες.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3Γ

Κατηγορίες βαθμολόγησης, συχνότητες και ποσοστά επί τοις εκατό των απαντήσεων των παιδιών στις κατηγορίες βαθμολόγησης, στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ –Ομάδα 3: Εκτίμηση πολ/σμων και διαιρέσεων φυσικού αριθμού με κλάσμα) ανά ηλικιακή ομάδα (N=200).

Ηλικιακές ομάδες Κατηγορίες απαντήσεων	Ε΄ Δημοτ. N=40 (%)	ΣΤ΄ Δημοτ. N=40 (%)	Α΄ Γυμν. N=40 (%)	Β΄ Γυμν. N=40 (%)	Α΄ Λυκείου N=40 (%)	Σύνολο N=200 (%)
Ι. Ο πολ/σμος μεγαλώνει και η διαίρεση μικραίνει						
1. Εφαρμογή του μοντέλου των φυσικών αριθμών	8 (20%)	10 (25%)	6 (15%)	2 (5%)	0 (0%)	26 (13 %)
2.. Λάθος εκτιμήσεις εκτός από τις πράξεις με κλάσματα που έχουν α=π.	7 (17.5%)	6 (15%)	4 (10%)	1 (2.5%)	5 (12.5%)	23 (11.5%)
Σύνολο Ι	15 (37.5%)	16 (40%)	9 (22.5%)	3 (7.5%)	5 (12.5%)	49 (24.5%)
ΙΙ. Ο πολ/σμος και η διαίρεση με κλάσμα της μορφής q/q δεν μεταβάλλει το αποτέλεσμα						
3. Το κλάσμα q/q=1 δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα μιας πράξης	1 (2.5%)	3 (7.5%)	4 (10%)	3 (7.5%)	4 (10%)	3 (7,5%)
ΙΙΙ. Ο πολ/σμος μικραίνει και η διαίρεση μεγαλώνει						
4. Ο πολ/σμος μικραίνει και η διαίρεση μεγαλώνει εκτός όταν κάνουμε πράξη με κλάσμα q/q=1 που δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα	1 (2.5%)	3 (7.5%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (2.5%)	5 (2.5%)
IV. Ο πολ/σμος και η διαίρεση μεγαλώνουν						
5. Στη διαίρεση αντιστρέφουμε και πολλαπλασιάζουμε, άρα το αποτέλεσμα μεγαλώνει	3 (7.5%)	1 (2.5%)	3 (7.5%)	1 (2.5%)	1 (2.5%)	9 (4.5%)
V. Ο πολ/σμος και η διαίρεση μικραίνει ή μεγαλώνει **Vα. Λάθος εκτιμήσεις**						
6. Λάθος εκτιμήσεις λόγω σύγχυσης κατά την εφαρμογή των κανόνων που ισχύουν στα κλάσματα ή λάθος πράξεις.	8 (20%)	7 (17.5%)	9 (22.5%)	9 (22.5%)	8 (20%)	41 (20.5%)
7. Λάθος εκτιμήσεις στις διαιρέσεις μόνο	0 (0%)	1 (2.5%)	3 (7.5%)	8 (20%)	10 (25%)	22 (11%)
Σύνολο Vα	8 (20%)	8 (20%)	12 (30%)	17 (42.5%)	18 (45%)	63 (31.5%)
Vβ. Σωστές εκτιμήσεις						
8. Σωστές όλες οι εκτιμήσεις	5 (12.5%)	6 (15%)	10 (25%)	14 (35%)	10 (25%)	45 (22.5%)
9. Ασαφείς απαντήσεις	2 (5%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	2 (5%)
0.Ελλιπείς απαντήσεις	5 (12.5%)	3 (7.5%)	1 (2.5%)	2 (5%)	1 (2.5%)	12 (6%)
Σύνολο	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	200 (100%)

Επίσης το ίδιο συμβαίνει και στους μαθητές που θεωρούν απαραίτητη την εκτέλεση των πράξεων πριν από την εκτίμηση που τους ζητούμε και εκτελούν λανθασμένα τους αλγόριθμους των πράξεων, αν και ιδιαίτερα για την πράξη της διαίρεσης αυξάνει ο αριθμός των μαθητών που την εκτελούν λάθος συγκριτικά με την ηλικία. Το γεγονός αυτό μας δείχνει ότι τα παιδιά ακόμη και στην Α΄ Λυκείου αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατά την εκτέλεση αυτής της πράξης. Όπως βλέπουμε στον Πίνακα 3.3Γ το 20% των μαθητών του Δημοτικού, το 30%, το 42,5% και το 45% των μαθητών αντίστοιχα της Α΄, Β΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου εκτελεί τα λάθη που περιγράψαμε αναλυτικά προηγούμενα.

Τέλος, λιγότερο από το ένα τέταρτο του συνόλου των μαθητών εκτιμά σωστά όλες τις πράξεις που τους ζητούνται. Παρατηρούμε ότι στην καλύτερη περίπτωση, το 35% των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου μπορεί να εκτιμήσει σωστά το αποτέλεσμα ενός πολλαπλασιασμού ή μιας διαίρεσης, άσχετα με το είδος του κλάσματος που περιλαμβάνει η πράξη, ποσοστό που όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3Γ, στους μαθητές του Δημοτικού προσεγγίζει το 12.5% και το 15% των μαθητών της πέμπτης και έκτης τάξης αντίστοιχα.

Για να διερευνήσουμε κατά πόσο υπάρχει διαφοροποίηση με την ηλικία και το φύλο των μαθητών, χρησιμοποιήσαμε τα μη παραμετρικά τεστ των Kruskal-Wallis και των Mann-Whitney αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα από το test των Kruskal-Wallis έδειξαν ότι η ηλικία επηρεάζει κατά στατιστικά σημαντικό τρόπο τις απαντήσεις των μαθητών για τις ερωτήσεις της ομάδας 1 (x^2=24,3; β.ε.=4; ασυμπτ. $p<0{,}001$) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 3.7). Συγκρίνοντας τις μέσες θέσεις των πέντε ηλικιών του δείγματος μεταξύ τους, είναι φανερό ότι οι μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων απάντησαν τις ερωτήσεις αυτής της ομάδας χρησιμοποιώντας κατηγορίες απαντήσεων που ήσαν πλησιέστερες προς τις επιστημονικές απόψεις για τις πράξεις με κλάσματα. Αντίστοιχα, με το test των Mann-Whitney, ελέγξαμε την ύπαρξη τυχόν διαφοροποίησης μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών του δείγματος στις απαντήσεις που έδωσαν για τις εκτιμήσεις των πολλαπλασιασμών και των διαιρέσεων φυσικού αριθμού με κλάσμα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το φύλο δεν διαφοροποιεί γενικά τις απαντήσεις των μαθητών με στατιστικά σημαντικό τρόπο (z=-1,6; ασυμπτ. p= 0,119) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 3.8).

3.3.4. Εκτίμηση της ορθότητας αριθμητικών ισοτήτων με κλάσματα

Όπως αναφέραμε παραπάνω με τις ερωτήσεις της τρίτης και της τέταρτης ομάδας ερωτήσεων θέλαμε να διερευνήσουμε εάν η προϋπάρχουσα γνώση των φυσικών αριθμών εμποδίζει τα παιδιά στην απόκτηση της γνώσης των κλασμάτων και στην γνωστική περιοχή των πράξεων. Οι ερωτήσεις 15 έως 19 που περιλαμβάνονται στην τέταρτη ομάδα ερωτήσεων μας φανερώνουν το είδος των παρανοήσεων των παιδιών σε σχέση με την εκτέλεση των τεσσάρων βασικών πράξεων της αριθμητικής. Ορισμένες από τις ισότητες περιέχουν σωστό αποτέλεσμα ενώ άλλες ένα λανθασμένο αποτέλεσμα βασιζόμενο σε παρανοήσεις των παιδιών κατά την εκτέλεση πράξεων[78]. Από τα παιδιά ζητήθηκε να εκτιμήσουν κατά πόσο η κάθε ισότητα είναι σωστή ή λάθος καθώς επίσης και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.

(ο Πίνακας 3.4Β περίπου εδώ)

Στην περίπτωση αυτής της ομάδας βαθμολογήσαμε απευθείας σε κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων σε σχέση με την εφαρμογή ή όχι των διαδικασιών των πράξεων με φυσικούς αριθμούς στις πράξεις με κλάσματα.

3.1.4i) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ)

Οι απαντήσεις των παιδιών μας αποκαλύπτουν τις διαδικασίες που αυτά ακολουθούν ώστε να εκτιμήσουν την ορθότητα μιας αριθμητικής ισότητας που περιλαμβάνει μια πράξη.

Ι. Λανθασμένες εκτιμήσεις

Ια. Κατηγορίες 1 και 2: <u>Πράξεις όπως στους φυσικούς αριθμούς</u>

Όπως βλέπουμε στον Πίνακα 3.4Β, με την κατηγορία Ια βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών, οι οποίοι στις πράξεις έχουν την τάση να χειρίζονται τα κλάσματα με την ίδια γραμμική διαδικασία που χρησιμοποιούν στις πράξεις με φυσικούς αριθμούς.

Οι μαθητές αυτοί ενώ εκτιμούν σωστά τις ισότητες που περιέχουν πολλαπλασιασμό, εκτιμούν λανθασμένα τις ισότητες που περιλαμβάνουν πρόσθεση, αφαίρεση και

[78] Οι λανθασμένες ισότητες των ερωτήσεων περιλαμβάνουν λάθη που έχει αποδειχθεί ότι κάνουν τα παιδιά βασιζόμενα στις διαδικασίες πράξεων με φυσικούς αριθμούς (βλ. σ. 138).

διαίρεση. Στον πολλαπλασιασμό δηλαδή των κλασμάτων απλά πολλαπλασιάζουν τους αριθμητές και τους παρονομαστές ενώ στην διαίρεση διαιρούν τους αριθμητές και τους παρονομαστές αντίστοιχα (δεν χρησιμοποιούν τη διαδικασία διαίρεσης που έχουν μάθει στο σχολείο με αντιστροφή του κλάσματος που είναι ο διαιρέτης και εκτέλεση πολλαπλασιασμού αντί για διαίρεση). Στην πρόσθεση και την αφαίρεση αντίστοιχα θεωρούν ότι το αποτέλεσμα ενός αθροίσματος ή της διαφοράς δύο κλασμάτων προκύπτει από την πρόσθεση ή την αφαίρεση των αριθμητών και των παρονομαστών ξεχωριστά, διαδικασία που είναι εντελώς λανθασμένη στην πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων όπου τα κλάσματα πρέπει να μετατραπούν στα ισοδύναμά τους ομώνυμα κλάσματα ώστε να αναφέρονται στην ίδια μονάδα (βλ. Πίνακα 3.4Β –*κατηγορία 1*).

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.4Β, οι μαθητές οι οποίοι, αν και αντιμετωπίζουν τις πράξεις με τον ίδιο τρόπο όπως τις πράξεις με φυσικούς αριθμούς, αναγνωρίζουν ότι η ισότητα 1/8 + 2 = 17/8 της ερώτησης 19 είναι ορθή, αναγνωρίζουν δηλαδή ότι ο φυσικός αριθμός 2 μπορεί να ισοδυναμεί με το κλάσμα 16/8 ή όπως αναφέρουν μερικοί μαθητές "το μεικτό κλάσμα 2 1/8 ισοδυναμεί με το κλάσμα 17/8", ταξινομήθηκαν στην κατηγορία απαντήσεων 2.

Ιβ. Κατηγορίες 2,3, 4, 5, 6 και 7: *Μικτά διαδικαστικά λάθη*

Πολλοί μαθητές εκτιμούν λανθασμένα έστω και κάποιες από τις ισότητες που περιλαμβάνουν τις τέσσερις πράξεις. Σε αυτή την κατηγορία ταξινομήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών, οι οποίοι για να αποφανθούν αν η κάθε ισότητα είναι σωστή ή λάθος εκτελούν την αντίστοιχη πράξη κάνοντας διαδικαστικά λάθη.

Για παράδειγμα υπάρχουν μαθητές οι οποίοι θεωρούν ότι οποιαδήποτε πράξη με κλάσματα απαιτεί τη μετατροπή των κλασμάτων στα αντίστοιχα ισοδύναμά τους ομώνυμα κλάσματα (βλ. Πίνακα 3.4Β –*κατηγορία 3*).

Μια άλλη ομάδα μαθητών εκτιμά σωστά μόνο τον πολλαπλασιασμό, όπως και στην περίπτωση των μαθητών που ταξινομήθηκαν στην κατηγορίας 1, χωρίς όμως να ακολουθεί η σκέψη τους, όπως φαίνεται από τις αιτιάσεις τους, τη διαδρομή που ακολουθεί στις απαντήσεις που βαθμολογήθηκαν με την πρώτη κατηγορία, όπου ακολουθούν τις διαδικασίες των πράξεων με φυσικούς αριθμούς. Οι λανθασμένες τους απαντήσεις είναι αποτέλεσμα της χρήσης λανθασμένων αλγόριθμων που εφαρμόζουν κατά την εκτέλεση πράξεων (βλ, Πίνακα 3.4Β –*κατηγορίες 4 και 5*).

Αντίθετα από την πρώτη κατηγορία στην ερώτηση 17 που περιλαμβάνει μια λανθασμένη αφαίρεση οι μαθητές εκτιμούν ότι είναι λάθος, γιατί ίσως γνωρίζουν ότι δεν αφαιρούμε με αυτόν τον γραμμικό τρόπο τα κλάσματα αλλά χρειάζεται μια άλλη διαδικασία την οποία από τις απαντήσεις τους στις υπόλοιπες ερωτήσεις φαίνεται ότι δεν γνωρίζουν. Συνεπώς σε αυτή την κατηγορία βαθμολογήθηκαν τα παιδιά τα οποία ενώ έχουν ξεφύγει από τις διαδικασίες των πράξεων των φυσικών αριθμών δεν γνωρίζουν τις διαδικασίες των πράξεων στα κλάσματα.
Στην τέταρτη κατηγορία βαθμολογήσαμε και τις απαντήσεις των μαθητών οι οποίοι, αν και φαίνεται να γνωρίζουν ότι για να προστεθούν δύο κλάσματα θα πρέπει να μετατραπούν πρώτα στα ισοδύναμά τους ομώνυμα κλάσματα και στη συνέχεια να προστεθούν βρίσκοντας βασικά το άθροισμα των αριθμητών, παρόλο δηλαδή που διαθέτουν αυτή τη διαδικαστική γνώση της πρόσθεσης κλασμάτων δεν εκτιμούν ορθά την ισότητα της ερώτησης 16, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, η οποία αν και έχει το σωστό αποτέλεσμα στο άθροισμα, τα κλάσματα όπως δίνονται δεν είναι ομώνυμα.

Στις κατηγορίες 6 και 7 κατατάξαμε τις απαντήσεις εκείνες των μαθητών οι οποίοι έχοντας μάθει τη διαδικασία μετατροπής σε ομώνυμα στην πρόσθεση κλασμάτων, δεν έχουν κατανοήσει το νόημα των ισοδύναμων κλασμάτων με αποτέλεσμα να πιστεύουν σε ορισμένες περιπτώσεις ότι και στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση είναι αναγκαία η μετατροπή των κλασμάτων στα ισοδύναμα ομώνυμά τους.

ΙΙ. Κατηγορία 8 - Σωστές όλες οι εκτιμήσεις

Με αυτή την κατηγορία βαθμολογήθηκαν οι σωστές εκτιμήσεις των παιδιών. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.4Β, τα παιδιά είτε αιτιολογούν την απάντησή τους με κανόνες που ισχύουν στις πράξεις με κλάσματα είτε εκτελούν τις ίδιες πράξεις ώστε να συγκρίνουν το αποτέλεσμα που βρίσκουν κάθε φορά με αυτό που τους δίνεται στην κάθε ισότητα.

Επιπλέον κατά τη βαθμολόγηση δεν ήταν εφικτή η κατηγοριοποίηση κάποιων παιδιών διότι δεν απαντούσαν σε όλες τις ερωτήσεις. Τις παραπάνω απαντήσεις τις θεωρήσαμε ελλιπείς και τις εντάξαμε στην κατηγορία βαθμολόγησης 0.

Στον Πίνακα 3.4Γ παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά επί τοις εκατό των μαθητών στους διαφορετικούς τύπους απάντησης και πιο αναλυτικά στις διάφορες κατηγορίες βαθμολόγησης στις πέντε ηλικιακές ομάδες του δείγματός μας.

Από τον Πίνακα 3.4Γ γίνεται φανερό ότι ο αριθμός των μαθητών που εκτιμά τις πράξεις με κλάσματα με τον ίδιο τρόπο όπως τους φυσικούς αριθμούς φθίνει με την ηλικία. Παρατηρούμε δηλαδή ότι, ενώ φθάνει το 37,5% των μαθητών τις Ε΄ Δημοτικού σταδιακά μειώνεται στο 7,5% των μαθητών της Α΄ Λυκείου. Το ίδιο συμβαίνει και στα ποσοστά των μαθητών που εκτιμούν με τον ίδιο τρόπο τις πράξεις αλλά είναι σε θέση να αναγνωρίσουν ένα μεικτό αριθμό και να τον μετατρέπουν στο αντίστοιχο κλάσμα. Στο Δημοτικό αποτελεί το 12,5% των μαθητών ενώ μειώνεται στο 2,5% των μαθητών της Α΄ Λυκείου.

Συνεπώς παρατηρούμε ότι οι μισοί περίπου από τους μαθητές του Δημοτικού (πέμπτη και έκτη τάξη) εκτιμούν τις πράξεις με κλάσματα με το γραμμικό τρόπο που το έκανε για τους φυσικούς αριθμούς, ποσοστό που φθίνει στο 10% των μαθητών της Α΄ Λυκείου.

Οι μαθητές που κάνουν διάφορα διαδικαστικά λάθη κατά την εκτίμηση των πράξεων έχουν μια ελαφρά αύξηση σε σχέση με την ηλικία. Στο σύνολό τους από το 40% των μαθητών της Ε΄ Δημοτικού φθάνει στο 50% των μαθητών της Α΄ Λυκείου (βλ. Πίνακα 3.4Γ).

Από τα ποσοστά των μαθητών που εκτίμησαν σωστά όλες τις ισότητες γίνεται φανερό ότι ο αριθμός των μαθητών που εκτιμά σωστά τις αριθμητικές ισότητες έχει μια αύξουσα πορεία σύμφωνα με την ηλικία. Έτσι, όπως βλέπουμε στον Πίνακα 3.4Γ από τα 5% των μαθητών της Ε΄ Δημοτικού φτάνει το 40% των παιδιών στην Α΄ Λυκείου.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4Γ

Κατηγορίες βαθμολόγησης, συχνότητες και ποσοστά επί τοις εκατό των παιδιών στις κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων ΚΕΟΕ –Ομάδα 4: Εκτίμηση της ορθότητας πράξεων με κλάσματα) ανά ηλικιακή ομάδα (N=200).

Ηλικιακές ομάδες Κατηγορίες απαντήσεων	Ε΄ Δημοτ. N=40 (%)	ΣΤ΄ Δημοτ. N=40 (%)	Α΄ Γυμν. N=40 (%)	Β΄ Γυμν. N=40 (%)	Α΄ Λυκείου N=40 (%)	Σύνολο N=200 (%)
Ι. Λανθασμένες εκτιμήσεις						
Ια. Πράξεις όπως στους φυσικούς αριθμούς						
1. Πράξεις όπως στους φυσικούς αριθμούς	15 (37.5%)	14 (35%)	8 (20%)	7 (17.5%)	3 (7.5%)	47 (23.5%)
2. Αναγνώριση ενός μεικτού κλάσματος	5 (12.5%)	5 (12.5%)	4 (10%)	1 (2.5%)	1 (2.5%)	16 (8%)
Σύνολο Ια	20 (50%)	19 (47.5%)	12 (30%)	8 (20%)	4 (10%)	63 (31.5%)
Ιβ. Πράξεις με μικτά διαδικαστικά λάθη						
3. Λάθος εκτιμήσεις γενικά	0 (0%)	2 (5%)	3 (7.5%)	2 (5%)	1 (2.5%)	8 (4%)
4. Σωστές εκτιμήσεις μόνο στον πολ/σμο	12 (30%)	10 (25%)	9 (22.5%)	12 (30%)	13 (37.5%)	56 (28%)
5. Λάθος εκτίμηση στην πρόσθεση με φυσικό αριθμό	2 (5%)	1 (2.5%)	4 (10%)	1 (2.5%)	2 (5%)	10 (5%)
6. Λάθος εκτιμήσεις λόγω λανθασμένων διαδικασιών στον πολλαπλασιασμό	2 (5%)	3 (7.5%)	1 (2.5%)	2 (5%)	3 (7.5%)	11 (5.5%)
7. Λάθος εκτιμήσεις λόγω λανθασμένων διαδικασιών στη διαίρεση			1 (2.5%)	3 (7.5%)	1 (2.5%)	5 (2.5%)
Σύνολο Ιβ	16 (40%)	16 (40%)	18 (45%)	20 (50%)	20 (50%)	90 (45%)
ΙΙ. Σωστές όλες οι εκτιμήσεις						
8. Σωστές όλες οι εκτιμήσεις	2 (5%)	4 (10%)	9 (22.5%)	12 (30%)	16 (40%)	43 (21.5%)
0. Ελλιπείς απαντήσεις/ Δεν ξέρω	2 (5%)	1 (2.5%)	1 (2.5%)	0 (0%)	0 (0%)	4 (2%)
Σύνολο	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	200 (100%)

Για να διερευνήσουμε κατά πόσο υπάρχει διαφοροποίηση με την ηλικία και το φύλο των μαθητών, χρησιμοποιήσαμε τα μη παραμετρικά τεστ των Kruskal-Wallis και των Mann-Whitney αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα από το test των Kruskal-Wallis έδειξαν ότι η ηλικία επηρεάζει κατά στατιστικά σημαντικό τρόπο τις απαντήσεις των μαθητών για τις ερωτήσεις της ομάδας 1 (x^2=31,5; β.ε.=4; ασυμπτ. p<0,001) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 3.7). Συγκρίνοντας τις μέσες θέσεις των πέντε ηλικιών του δείγματος μεταξύ τους, είναι φανερό ότι οι μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων απάντησαν τις ερωτήσεις αυτής της ομάδας χρησιμοποιώντας κατηγορίες απαντήσεων που ήσαν πλησιέστερες προς τις επιστημονικές απόψεις για τις πράξεις με κλάσματα. Αντίστοιχα, με το test των Mann-Whitney, ελέγξαμε την ύπαρξη τυχόν διαφοροποίησης μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών του δείγματος στις απαντήσεις που έδωσαν για τις εκτιμήσεις της ορθότητας των αριθμητικών ισοτήτων που εκφράζουν πράξεις ανάμεσα σε κλάσματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το φύλο δεν διαφοροποιεί γενικά τις απαντήσεις των μαθητών με στατιστικά σημαντικό τρόπο (z=-1,1; ασυμπτ. p= 0,262) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 3.8).

3.3.5. Εικονικές αναπαραστάσεις πράξεων με κλάσματα

Στις ερωτήσεις αυτής της ομάδας ζητείται από τα παιδιά να μεταφράσουν την αριθμητική αναπαράσταση μιας πρόσθεσης και ενός πολλαπλασιασμού με μια ζωγραφιά. Οι ζωγραφιές των παιδιών, οι απόπειρές τους δηλαδή να αναπαραστήσουν εικονικά μια πρόσθεση ή έναν πολλαπλασιασμό με κλάσματα μας δίνουν πληροφορίες για τις νοητικές αναπαραστάσεις που έχουν αναπτύξει τόσο για τις πράξεις με κλάσματα όσο και για τα σύμβολα των ίδιων των κλασμάτων. Τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη βαθμολόγηση των απαντήσεων ήταν

1. Η πιστότητα της μετάφρασης της αριθμητικής πράξης στην εικονική αναπαράσταση.
2. Ο διαχωρισμός της μονάδας σε ίσα ή άνισα μέρη.
3. Η χρήση της ίδιας ή ίσων μονάδων αναφοράς στην περίπτωση του αθροίσματος δύο κλασμάτων και της ίδιας μονάδας αναφοράς στην περίπτωση του γινομένου.

3.1.5i) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ)

Στις ερωτήσεις 20 και 22 όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.5Α ζητήθηκε από τα παιδιά να αναπαραστήσουν με μια ζωγραφιά ένα άθροισμα και ένα γινόμενο δύο κλασμάτων αντίστοιχα. Στον Πίνακα αυτό, παρουσιάζονται ενδεικτικές ζωγραφιές των μαθητών όπως αυτές ταξινομήθηκαν στις κατηγορίες βαθμολόγησης στο επίπεδο ερώτησης σύμφωνα με τα παραπάνω κριτήρια, τα οποία αναλύουμε παρακάτω.

(ο Πίνακας 3.5Α περίπου εδώ)

Τα κριτήρια βάση των οποίων ταξινομήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών σε κατηγορίες βαθμολόγησης ήταν: 1) αν σχεδιάζουν διαφορετικά ή ίδια σχήματα για να αναπαραστήσουν τα κλάσματα ως μέρη αυτών (κατηγορίες 2 ή 3-4 αντίστοιχα). 2) αν κατά την αναπαράσταση του κλάσματος ως μέρους ενός σχήματος χωρίζουν το σχήμα σε διαφορετικά (χωρισμός του σχήματος σε άνισα μέρη –κατηγορία 3) ή σε ίσα μέρη (ισομερισμός –κατηγορία 4). 3) αν αναπαράστησαν το κάθε κλάσμα της αριθμητικής πράξης ως μέρος ενός σχήματος (κατηγορίες 2, 3 και 4) ή αν αναπαράστησαν το αποτέλεσμα της πράξης ως μέρος ενός σχήματος (κατηγορίες 5 και 6) ή αν αναπαράστησαν τα δύο κλάσματα που περιλαμβάνει η κάθε αριθμητική πράξη ως μέρη του ίδιου σχήματος (κατηγορία 7) και 4) αν εκτελούν λανθασμένα ή σωστά την εκάστοτε πράξη (κατηγορίες 5 και 6 αντίστοιχα).

Στην πρώτη κατηγορία βαθμολογήσαμε όλες εκείνες τις ζωγραφιές των μαθητών που είτε είναι κυριολεκτικές (ζωγραφιές που αναπαριστούν τα ίδια τα σύμβολα των κλασμάτων) είτε είναι άσχετες αναπαραστάσεις (ζωγραφιές που αναπαριστούν φυσικά αντικείμενα ή ζώα), είτε κάποιες προσπάθειες για αναπαράσταση διαμερισμού ενός σχήματος, όπως βλέπουμε στον Πίνακα 3.5Α .

Στη δεύτερη κατηγορία ταξινομήθηκαν εκείνες οι απαντήσεις των μαθητών οι οποίοι αναπαριστούν το κάθε κλάσμα που περιλαμβάνεται στο άθροισμα ή στο γινόμενο με τον ίδιο τρόπο, ζωγραφίζοντας <u>δύο διαφορετικά σχήματα</u> και αναπαριστώντας το κάθε κλάσμα που περιλαμβάνεται στο άθροισμα ή στο γινόμενο ως κάποιο μέρος του κάθε σχήματος (διαμερίζοντάς το σε τόσα μέρη όσος είναι ο παρονομαστής του κλάσματος και σκιαγραφώντας τόσα μέρη του σχήματος όσος ο αντίστοιχος αριθμητής). Οι μαθητές που απάντησαν με τον παραπάνω τρόπο δεν φαίνεται να αναγνωρίζουν ότι στην πρόσθεση των κλασμάτων απαιτείται η χρήση της ίδιας μονάδας αναφοράς.

Η διαφορά στις κατηγορίες βαθμολόγησης 3 και 4 έγκειται στο γεγονός ότι τα παιδιά ζωγράφισαν δύο ίδια σχήματα και επανέλαβαν την ίδια διαδικασία με την προηγούμενη περίπτωση. Οι μαθητές που απάντησαν με αυτόν τον τρόπο φαίνεται να αναγνωρίζουν ότι για να προστεθούν δύο κλάσματα πρέπει να αναφέρονται στην ίδια μονάδα αναφοράς (να αποτελούν δηλαδή μέρη της ίδιας μονάδας). Αυτό όμως δεν ισχύει στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων όπου μια τέτοια ερμηνεία δεν αποτελεί μια μετάφραση της πράξης του πολλαπλασιασμού, αλλά μια απλή αναπαράσταση του κάθε κλάσματος ως μέρους μιας μονάδας. Επιπλέον υπήρχαν μαθητές που χώρισαν σε άνισα μέρη το κάθε σχήμα (κατηγορία 3), ενώ κάποιοι άλλοι τα διαμέρισαν (κατηγορία 4).

Με τις κατηγορίες 5 και 6 βαθμολογήσαμε τις απαντήσεις των μαθητών οι οποίοι αναπαριστούν ως μέρος ενός σχήματος το κλάσμα που είναι το αποτέλεσμα της κάθε πράξης. Στην περίπτωση που έχουν εκτελέσει λανθασμένα την πράξη και αναπαριστούν ως το μέρος ενός σχήματος το λανθασμένο αποτέλεσμα –για παράδειγμα στην περίπτωση της πρόσθεσης 1/8+2/3, αναπαριστούν ως μέρος ενός κύκλου το κλάσμα 3/9 (γραμμική διαδικασία εκτέλεσης πράξης)- οι απαντήσεις τους βαθμολογήθηκαν στην κατηγορία 5. Επιπλέον στην περίπτωση που εκτέλεσαν την πράξη σωστά και αναπαράστησαν το αποτέλεσμα ως το μέρος ενός σχήματος, ταξινομήθηκαν στην κατηγορία βαθμολόγησης 6.

Όπως βλέπουμε στον Πίνακα 3.5Α υπήρχαν μαθητές που προσπάθησαν να αναπαραστήσουν τα δύο κλάσματα της εκάστοτε πράξης ως μέρη του ίδιου σχήματος. Συγκεκριμένα στην περίπτωση της πρόσθεσης αναπαράστησαν το άθροισμα των μερών που αντιπροσωπεύει το κάθε κλάσμα, ενώ στην περίπτωση του αντιστοίχισαν το γινόμενο των κλασμάτων στο μέρος ενός μέρους ενός σχήματος (βλ. Πίνακα 3.5Α, κατηγορία 7).

3.1.5ii) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ)

Κατά την βαθμολόγηση στο επίπεδο ερώτησης των απαντήσεων έγινε προφανές ότι οι μαθητές είχαν περισσότερες δυσκολίες να αναπαραστήσουν με μια ζωγραφιά ένα γινόμενο απ' ότι ένα άθροισμα κλασμάτων. Όπως θα δούμε παρακάτω, ενώ υπάρχουν πολύ συνδυασμοί απαντήσεων στις δύο αυτές ερωτήσεις ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών αναπαράστησε με τον ίδιο τρόπο την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων. Παρακάτω θα περιγράψουμε τις κατηγορίες βαθμολόγησης στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.5Β.

(ο Πίνακας 3.5Β περίπου εδώ)

Ι. Κατηγορία 1: *Άσχετες ή κυριολεκτικές εικονικές αναπαραστάσεις*

Οι περισσότεροι μαθητές που έδωσαν άσχετες εικονικές αναπαραστάσεις στην πρόσθεση, έκαναν το ίδιο και για τον πολλαπλασιασμό. Όταν οι μαθητές απαντούν με κυριολεκτικές αναπαραστάσεις σημαίνει ότι δεν αναγνωρίζουν το κλάσμα ως μέρος μιας μονάδας αλλά το αντιμετωπίζουν απλά ως δύο αριθμούς.

ΙΙ. Κατηγορίες 2, 3 και 4: *Αναπαράσταση των δύο κλασμάτων της πράξης ως μέρη δύο σχημάτων*

Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 3.5Β οι μαθητές που βαθμολογήθηκαν με τις κατηγορίες 2, 3 και 4 αναπαριστούν την εκάστοτε πράξη ζωγραφίζοντας δύο διαφορετικά ή δύο ίδια σχήματα και χρωματίζοντας κάποια μέρη τους (με σωστό ή λάθος μερισμό) θέλοντας να αναπαραστήσουν το κάθε κλάσμα ως μέρος μιας ποσότητας χωρίς να διακρίνουν την πράξη του πολλαπλασιασμού από την πρόσθεση.

Στην κατηγορία 2 βαθμολογήθηκαν οι μαθητές που δεν κατανοούν ότι σε ένα άθροισμα δύο κλασμάτων είναι αναγκαία (απαιτείται) μια κοινή μονάδα αναφοράς.

Τα δύο κλάσματα που περιλαμβάνει δηλαδή το άθροισμα πρέπει να είναι και τα δύο μέρη από το ίδιο κάτι. Συνεπώς όσοι μαθητές ερμηνεύουν μια πράξη με αυτόν τον τρόπο, μεταφράζουν μεν το κλάσμα ως μέρος χωρίς όμως να έχουν τη δυνατότητα να εντάξουν αυτή τη γνώση τους στο πλαίσιο των πράξεων.

Σε όλες τις παραπάνω κατηγορίες γίνεται σαφές ότι τα παιδιά δεν κάνουν διάκριση στις αναπαραστάσεις των δύο πράξεων και αναπαριστούν απλά τα δύο κλάσματα (κάτι που έχει νόημα στην πρόσθεση κλασμάτων ενώ δεν έχει νόημα στον πολλαπλασιασμό).

ΙΙΙ. Κατηγορίες 5 και 6: *Αναπαράσταση του αποτελέσματος της πράξης ως μέρος ενός σχήματος*

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.5Β, υπήρχαν ακόμη και μαθητές της πρώτης Λυκείου που εκτέλεσαν λανθασμένα την πρόσθεση ακολουθώντας τη γραμμική διαδικασία των πράξεων με φυσικούς αριθμούς (αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή) – κατηγορία 5. Επίσης υπήρχαν παιδιά που εκτέλεσαν τους πολλαπλασιασμούς με τον ίδιο τρόπο όπως και τις προσθέσεις (μετατρέποντας τα κλάσματα σε ομώνυμα). Στη περίπτωση αυτή βαθμολογήθηκαν στην ίδια κατηγορία.

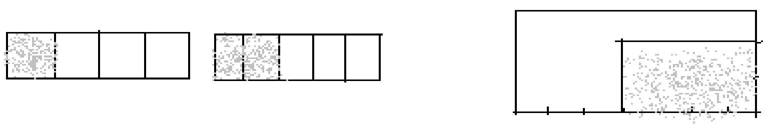
Το μεγαλύτερο ποσοστό ιδιαίτερα των μεγαλύτερων μαθητών αφού εκτέλεσε την πράξη αναπαράστησε το αποτέλεσμα της πράξης ως μέρος ενός σχήματος. Σε αυτήν την περίπτωση τα παιδιά εκτελούσαν πρώτα την πράξη αριθμητικά και στη συνέχεια απεικόνιζαν το αποτέλεσμα ως το μέρος ενός σχήματος – μονάδας. Στην περίπτωση που εκτελούσαν την πράξη σωστά, μπορούμε να πούμε ότι έχουν κατακτήσει τη διαδικαστική γνώση της εκτέλεσης της πρόθεσης κυρίως, και την έννοια του κλάσματος ως μέρος μιας μονάδας. Η διαδικασία μετατροπής των κλασμάτων σε ομώνυμα, ώστε να γίνει εφικτή η πρόσθεσή τους, θα μπορούσε να θεωρηθεί ως διαδικασία εύρεσης μιας κοινής μονάδας αναφοράς των κλασμάτων που περιλαμβάνονται στο άθροισμα (βλ. Πίνακα 3.5Β –κατηγορία 6).

IV.Κατηγορία 7: Διαφορετικές επαρκείς αναπαραστάσεις στην πρόσθεση και στον πολ/σμο

Ένας μικρός αριθμός μαθητών αναπαράστησε με διαφορετικό τρόπο τις δύο αριθμητικές πράξεις. Οι περισσότεροι από αυτούς τους μαθητές αναπαράστησαν το κάθε κλάσμα του αθροίσματος ως μέρος ενός σχήματος, ενώ στον πολλαπλασιασμό αφού εκτέλεσαν την πράξη αναπαράστησαν το αποτέλεσμα του γινομένου (βλ. Πίνακα 3.5Β –κατηγορία 7). Τα παιδιά αυτά φαίνεται να κατανοούν ότι δεν μπορούν να αναπαραστήσουν με τον ίδιο τρόπο τις δύο αριθμητικές πράξεις.

Επίσης εδώ ταξινομήθηκαν και ορισμένοι μαθητές, οι οποίοι ενώ αναπαράστησαν με τον παραπάνω τρόπο την πρόσθεση των δύο κλασμάτων, δεν έδωσαν καμία αναπαράσταση για τον πολλαπλασιασμό καταλαβαίνοντας ίσως ότι δεν μπορούσαν να αναπαραστήσουν με τον ίδιο τρόπο τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Δύο ακόμη από τα μεγαλύτερα παιδιά αναπαράστησαν με διαφορετικούς τρόπους τις δύο αριθμητικές πράξεις και οι αναπαραστάσεις τους βαθμολογήθηκαν με την κατηγορία 7. Πρόκειται για την μαθήτρια της Β΄ Γυμνασίου (υποκ. #146), η οποία αναπαράστησε τις δύο πράξεις όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3: Εικονικές αναπαραστάσεις του αθροίσματος $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$ και του γινομένου $\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}$ αντίστοιχα, της μαθήτριας της Β΄ Γυμνασίου (υποκ. #146).

V. Κατηγορία 8: Αναπαράσταση των δύο κλασμάτων της πράξης στο ίδιο σχήμα

Με αυτή την κατηγορία βαθμολογήθηκαν δύο μόνο μαθητές της Β΄ Γυμνασίου που αναπαράστησαν εικονικά τα δύο κλάσματα της πρόσθεσης ως μέρη του ιδίου σχήματος ενώ το αριθμητικό γινόμενο ως το μέρος (τα 2/3) ενός μέρους (των 4/7) ενός κύκλου. Αυτού του είδους η αναπαράσταση από τη μια πλευρά σέβεται τον περιορισμό της κοινής μονάδας αναφοράς στην πρόσθεση και είναι η πιο επαρκής αναπαράσταση ενός πολλαπλασιασμού αντίστοιχα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5Γ

Κατηγορίες βαθμολόγησης, συχνότητες και ποσοστά επί τοις εκατό των παιδιών στις κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ –Ομάδα 5: Πώς τα παιδιά αναπαριστούν εικονικά μια αριθμητική πράξη με κλάσματα) ανά ηλικιακή ομάδα (Ν=200).

Ηλικιακές ομάδες Κατηγορίες απαντήσεων	Ε΄ Δημοτ. Ν=40 (%)	ΣΤ΄ Δημοτ. Ν=40 (%)	Α΄ Γυμν. Ν=40 (%)	Β΄ Γυμν. Ν=40 (%)	Α΄ Λυκείου Ν=40 (%)	Σύνολο Ν=200 (%)
Ι. Άσχετες ή κυριολεκτικές αναπαραστάσεις						
1. Άσχετες αναπαραστάσεις	2 (5%)	5 (12.5%)	2 (5%)	0 (0%)	2 (5%)	11 (5.5%)
ΙΙ. Αναπαράσταση των δύο κλασμάτων ως μέρη δύο σχημάτων						
2. Δύο διαφορετικά σχήματα	8 (20%)	6 (15%)	3 (7.5%)	3 (7.5%)	1 (2.5%)	21 (10.5%)
3. Δύο ίδια σχήματα – Λάθος μερισμός	1 (2.5%)	4 (10%)	3 (7.5%)	4 (10%)	2 (5%)	14 (6%)
4. Δύο ίδια σχήματα – Ισομερισμός	1 (2.5%)	5 (12.5%)	6 (15%)	8 (20%)	7 (17.5%)	27 (13.5%)
Σύνολο ΙΙ	10 (25%)	15 (40%)	12 (30%)	15 (40%)	10 (25%)	62 (31%)
ΙΙΙ. Αναπαράσταση του αποτελέσματος ως μέρος ενός σχήματος						
5.Λάθος αποτέλεσμα στην πρόσθεση - Επιρροή φυσικών αριθμών στην πρόσθεση ή Λανθασμένες διαδικασίες στον πολλαπλασιασμό	8 (20%)	7 (17.5%)	5 (12.5%)	2 (5%)	6 (15%)	28 (14%)
6. Αναπαράσταση του σωστού αποτελέσματος γενικά	9 (22.5%)	5 (12.5%)	13 (32.5%)	12 (30%)	12 (30%)	51 (25.5%)
Σύνολο ΙΙΙ	17 (42.5%)	12 (30%)	18 (45%)	14 (35%)	18 (45%)	79 (39.5%)
ΙV. Διαφορετικές επαρκείς αναπαραστάσεις στην πρόσθεση και στον πολ/σμο						
7. Δύο ίδια σχήματα μόνο στην πρόσθεση – Ισομερισμός ή Άμεση αντιστοιχία σε δύο σχήματα στην πρόσθεση και αναπαράσταση του αποτελέσματος στον πολ/σμο ή αναπαράσταση του πολ/σμού στο ίδιο σχήμα	4 (10%)	4 (10%)	4 (10%)	6 (15%)	9 (22.5%)	27 (13.5%)
V. Αναπαράσταση των δύο κλασμάτων της πράξης σε ένα σχήμα						
8. Αναπαράσταση των δύο κλασμάτων της πράξης στο ίδιο σχήμα	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	2 (5%)	0 (0%)	2 (1%)
0. Ελλιπείς απαντήσεις	7 (17.5%)	4 (10%)	4 (10%)	3 (7.5%)	1 (2.5%)	19 (9.5%)
Σύνολο	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	200 (100%)

Στον Πίνακα 3.5Γ παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά των μαθητών στους διάφορους τύπους και στις κατηγορίες απάντησης για όλες τις ηλικιακές ομάδες.

Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται πέντε τάσεις στις ζωγραφιές των μαθητών, τις οποίες περιγράψαμε αναλυτικά προηγούμενα:

1) Υπάρχουν μαθητές οι οποίοι έδωσαν κυριολεκτικές ή άσχετες αναπαραστάσεις.

2) Μια τάση στις αναπαραστάσεις των μαθητών έχει να κάνει με την αναπαράσταση των δύο πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με τον ίδιο τρόπο (τύπος απάντησης ΙΙ). Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η χρήση δύο διαφορετικών σχημάτων κατά την αναπαράσταση των δύο κλασμάτων της κάθε πράξης φθίνει με την ηλικία (από 20% των μαθητών της Ε΄ Δημοτικού φθάνει στο 2,5% των μαθητών της Α΄ Λυκείου). Η τάση αυτή των μαθητών είναι ιδιαίτερα δημοφιλής, ιδιαίτερα στους μαθητές της ΣΤ΄ δημοτικού καθώς και του Γυμνασίου, όπου φθάνει τα 40% των μαθητών. Παρόλα αυτά το 25% των μαθητών ακόμη και του Λυκείου συνεχίζει να αναπαριστά την πράξη του πολλαπλασιασμού ως το άθροισμα των μερών δύο σχημάτων (τα οποία σχεδόν πάντοτε είναι ίσα).

3) Μια άλλη τάση εμφανίζει ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών (τύπος απάντησης ΙΙΙ) που φθάνει το 45% στους μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου, οι οποίοι αφού εκτελούν την εκάστοτε πράξη, στη συνέχεια αναπαριστούν ως μέρος ενός σχήματος το αποτέλεσμα της εκάστοτε πράξης που βρήκαν, αντί να αναπαραστήσουν τις ίδιες τις πράξεις. Σημαντικό είναι να παρατηρήσουμε ότι στις μεγαλύτερες ηλικίες διπλασιάζεται ο αριθμός των παιδιών που εκτελεί σωστά τις πράξεις προτού να αναπαραστήσει το σωστό αποτέλεσμα ως μέρος ενός σχήματος.

4) Μια τέταρτη τάση εμφανίζουν οι μαθητές οι οποίοι διαφοροποιούν τις εικονικές αναπαραστάσεις του πολλαπλασιασμού από της πρόσθεσης (τύπος απάντησης IV). Στον Πίνακα 3.5Γ παρατηρούμε ότι ο αριθμός των μαθητών που υιοθέτησαν αυτή την τάση αυξάνει ελαφρά με την ηλικία φθάνοντας όμως μόνο στο 22.5% των μαθητών της Α΄ Λυκείου.

5) Τέλος, όπως αναφέραμε και προηγούμενα είναι δύο μόνο οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου που αναπαριστούν στο ίδιο σχήμα με σωστό τρόπο τα κλάσματα διαφοροποιώντας τις δύο πράξεις (τύπος απάντησης V).

Για να διερευνήσουμε κατά πόσο υπάρχει διαφοροποίηση με την ηλικία και το φύλο των μαθητών, χρησιμοποιήσαμε τα μη παραμετρικά τεστ των Kruskal-Wallis και των Mann-Whitney αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα από το test των Kruskal-Wallis έδειξαν ότι η ηλικία επηρεάζει κατά στατιστικά σημαντικό τρόπο τις απαντήσεις των μαθητών για τις ερωτήσεις της ομάδας 1 (x^2=13,3; β.ε.=4; ασυμπτ. $p<0{,}05$) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 3.7). Συγκρίνοντας τις μέσες θέσεις των πέντε ηλικιών του δείγματος μεταξύ τους, είναι φανερό ότι οι μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων απάντησαν τις ερωτήσεις αυτής της ομάδας χρησιμοποιώντας κατηγορίες απαντήσεων που περιλάμβαναν πιο επαρκείς εικονικές αναπαραστάσεις των πράξεων με κλάσματα. Αντίστοιχα, με το test των Mann-Whitney, ελέγξαμε την ύπαρξη τυχόν διαφοροποίησης μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών του δείγματος στις απαντήσεις που έδωσαν για τις εικονικές αναπαραστάσεις των αριθμητικών πράξεων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το φύλο δεν διαφοροποιεί γενικά τις απαντήσεις των μαθητών με στατιστικά σημαντικό τρόπο ($z=-0{,}9$; ασυμπτ. $p= 0{,}371$) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 3.8).

3.3.6. Συμβολικές αναπαραστάσεις σκιαγραφημένων σχημάτων

Σε αυτή την ομάδα ερωτήσεων ζητήθηκε από τα παιδιά να κάνουν την ακριβώς αντίστροφη μετάφραση απ' ότι στην προηγούμενη ομάδα ερωτήσεων. Δηλαδή τους ζητήθηκε να μεταφράσουν τα σκιαγραφημένα μέρη ενός σχήματος σε μια πράξη με κλάσματα. Τα κριτήρια με τα οποία έγινε η βαθμολόγηση των απαντήσεων των παιδιών ήταν:

1. Τη δυνατότητα της μετάφρασης των χρωματισμένων μερών ενός σχήματος σε ένα κλάσμα ή σε μια πράξη κλασμάτων.
2. Το διαχωρισμό του σχήματος σε <u>ίσα μέρη</u> όταν αναπαριστούσαν αριθμητικά με ένα κλάσμα τα χρωματισμένα μέρη ενός σχήματος.
3. Το πρόβλημα της κοινής μονάδας αναφοράς.

4.1.6i) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ)

Στην ερώτηση 21 ζητείται από τα παιδιά να εκφράσουν με μια συμβολική αναπαράσταση μιας πράξης το σκιαγραφημένο μέρος ενός ορθογωνίου, ενώ στην ερώτηση 23 το διπλά σκιαγραφημένο μέρος ενός κύκλου. Οι απαντήσεις των παιδιών στην ερώτηση 21 ταξινομήθηκαν όπως περιγράφονται στον Πίνακα 3.6Α.

(ο Πίνακας 3.6Α περίπου εδώ)

Υπήρχαν μαθητές οι οποίοι μετέφρασαν τα σκιαγραφημένα μέρη των σχημάτων που τους δόθηκαν με ένα άσχετο κλάσμα. Στην περίπτωση αυτή οι απαντήσεις τους βαθμολογήθηκαν με την *κατηγορία 1*.

Στην περίπτωση που οι μαθητές απάντησαν με ένα κλάσμα, όπου ο παρονομαστής του εκφράζει τον αριθμό των μερών στα οποία ήταν χωρισμένο το ορθογώνιο ενώ ο αριθμητής του, τον αριθμό των χρωματισμένων μερών, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους την αναγκαία συνθήκη των ίσων μερών στα οποία θα έπρεπε να ήταν διαμερισμένο το ορθογώνιο, οι απαντήσεις τους βαθμολογήθηκαν με την κατηγορία 2 (βλ. Πίνακα 3.6Α). Ιδιαίτερα στην περίπτωση της πρόσθεσης, οι μαθητές αναπαράστησαν με το κλάσμα 4/6 τα τέσσερα σκιαγραφημένα μέρη από τα έξι, παραβλέποντας ότι τα μέρη αυτά δεν ήταν ίσα. Στην περίπτωση όμως που έλαβαν υπόψη τους το διαμερισμό του σχήματος σε ίσα μέρη, βαθμολογήθηκαν με την κατηγορία 3 (βλ. Πίνακα 3.6Α).

Υπήρχαν μαθητές, οι οποίοι στην ερώτηση 21αντιστοιχούσαν άμεσα σε ένα κλάσμα το σκιαγραφημένο μέρος του κάθε μικρού ορθογωνίου (το μισό του μεγάλου ορθογωνίου), χωρίς να εκφράζουν το σύνολο των σκιαγραφημένων μερών σε σχέση με όλο το σχήμα, δηλαδή το 1/2 και το 3/4 και στη συνέχεια εκτελούσαν λανθασμένα την πρόσθεση των κλασμάτων επηρεασμένα από τη διαδικασία των πράξεων με φυσικούς αριθμούς, βαθμολογήθηκαν με τις κατηγορίες 4.

Στην περίπτωση που εκτελούσαν την πρόσθεση των δύο παραπάνω κλασμάτων ακολουθώντας τη διαδικασία τροπής σε ομώνυμα κλάσματα με αποτέλεσμα το κλάσμα 5/4, οι απαντήσεις τους ταξινομήθηκαν στην κατηγορία 5. Στις δύο παραπάνω περιπτώσεις παρατηρούμε ότι οι μαθητές είχαν ως μονάδα αναφοράς των κλασμάτων το μισό του σχήματος που τους είχαμε δώσει.

Στην κατηγορία 6 ταξινομήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών οι οποίοι μετέφρασαν τα σκιαγραφημένα μέρη του ορθογωνίου με το άθροισμα 1/4+3/8. Σε αυτές τις απαντήσεις οι μαθητές δείχνουν να αναγνωρίζουν ότι τα μέρη του σχήματος, τα οποία αντιστοιχούσαν σε κλάσματα ήταν απαραίτητο να είναι ίσα. Επιπλέον αντίθετα από τις προηγούμενες περιπτώσεις, σε αυτή την κατηγορία παρατηρείται από τις απαντήσεις των μαθητών ότι κατανοούν την αναγκαιότητα ύπαρξης μιας ενιαίας μονάδας αναφοράς των κλασμάτων ιδιαίτερα στην πράξη της πρόσθεσης.

Από τις απαντήσεις των μαθητών φάνηκε ότι στην περίπτωση της ερώτησης 23 οι μαθητές δεν κατάλαβαν τι ακριβώς τους ζητούσαμε. Από τις απαντήσεις τους έγινε φανερό ότι τα παιδιά δυσκολεύονται να εκφράσουν με έναν πολλαπλασιασμό το διπλά σκιαγραφημένο μέρος ενός κύκλου. Συνεπώς οι μαθητές είτε εκφράσανε κάποιο από τα σκιαγραφημένα μέρη με ένα άσχετο κλάσμα -*κατηγορία 1*, είτε το σύνολο των σκιαγραφημένων μερών του κύκλου με το κλάσμα 3/4 - *κατηγορία 2*, είτε εκφράσανε το διπλά σκιαγραφημένο μέρος με ένα κλάσμα, το 1/2 ή το 2/4, χωρίς να αναφέρονται σε κάποια πράξη - *κατηγορία 3*.

Στην περίπτωση δε που μεταφράζουν τα σκιαγραφημένα μέρη του κύκλου με μια πράξη, σχεδόν πάντα καταφεύγουν στις πράξεις της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης κλασμάτων (κατηγορίες 4 και 5), ενώ μόνο ένας μαθητής της δευτέρας Γυμνασίου (#135) αναφέρθηκε στον πολλαπλασιασμό 2/3· 3/4 (*κατηγορία 7*), που ήταν και η αναμενόμενη απάντηση.

Παρακάτω θα περιγράψουμε με ποιους συνδυασμούς απάντησαν τα παιδιά συνολικά στις ερωτήσεις αυτής της ομάδας και ποιες ήταν οι κατηγορίες βαθμολόγησης στο επίπεδο της ομάδας ερωτήσεων.

4.1.6ii) Βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ)

Στον Πίνακα 3.6Β εμφανίζονται οι συνδυασμοί απαντήσεων που πήραμε από τα παιδιά που σίγουρα είναι μικρότεροι σε αριθμό από όλους τους πιθανούς συνδυασμούς απάντησης που υπάρχουν. Σημαντικό είναι να παρατηρήσουμε ότι αν και υπάρχουν παιδιά που είναι σε θέση να ερμηνεύσουν τα χρωματισμένα μέρη του ορθογωνίου της ερώτησης 21 ως ένα άθροισμα, δεν ερμηνεύουν σε καμία σχεδόν περίπτωση το διπλά χρωματισμένο μέρος του κύκλου ως το γινόμενο δύο κλασμάτων (μόνο ένα παιδί το ερμηνεύει ως το γινόμενο 2/3·3/4. Αν και θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η δυσκολία των παιδιών οφειλόταν στη δυσκολία κατανόησης της ερώτησης, από τις απαντήσεις των παιδιών προέκυψε ότι τα παιδιά δυσκολεύονται να αναπαραστήσουν αριθμητικά με ένα γινόμενο κλασμάτων, μια εικονική αναπαράσταση στο πλαίσιο του κλάσματος ως μέρος μιας ακέραιας μονάδας. Από τις απαντήσεις των παιδιών γίνεται σαφές ότι στην περίπτωση που οφείλουν να ερμηνεύσουν τα χρωματισμένα μέρη ενός σχήματος με μια πράξη, η πράξη που επιλέγουν κυρίως είναι η πρόσθεση.

Παρακάτω περιγράφονται οι κατηγορίες των απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (βλέπε, Πίνακα 3.6Β). Παρατηρούμε ότι οι απαντήσεις στην ερώτηση 21 καθορίζουν τις κατηγορίες στο επίπεδο ερώτησης ενώ οι απαντήσεις στην ερώτηση 23 παίζουν έναν περιοριστικό απλά ρόλο.

(ο Πίνακας 3.6Β περίπου εδώ)

Ι. Κατηγορία 1. Αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του ορθογωνίου σε ένα άσχετο κλάσμα.

Υπήρχαν μαθητές που και στα δύο σχήματα που τους δόθηκαν, αντιστοίχισαν τα χρωματισμένα μέρη των σχημάτων σε ένα κλάσμα που δεν αντιπροσώπευε το αντίστοιχο μέρος στην εκάστοτε περίπτωση. Συνεπώς σε αυτή την κατηγορία ταξινομήθηκαν απαντήσεις όπως το κλάσμα $\frac{1}{3}$.

ΙΙ. Κατηγορίες 2 και 3: Άμεση αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του ορθογωνίου σε ένα κλάσμα.

Όπως βλέπουμε στον Πίνακα 3.6Β σε αυτές τις κατηγορίες ταξινομήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών, οι οποίοι στην ερώτηση 21 αντιστοιχούν τα σκιαγραφημένα μέρη του ορθογωνίου σε ένα κλάσμα, λαμβάνοντας ή μη λαμβάνοντας υπόψη την αναγκαιότητα διαμερισμού της μονάδας που τους δίνεται σε ίσα μέρη κατηγορίες 2 ή 3 αντίστοιχα).

Στην ερώτηση 23 αντίστοιχα , οι παραπάνω μαθητές σε καμία περίπτωση δεν εκφράζουν το διπλά χρωματισμένο μέρος του κύκλου με έναν πολλαπλασιασμό. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση εντάσσονται στις δύο αυτές κατηγορίες απάντησης.

ΙΙΙ. Άμεση αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του ορθογωνίου σε μια πράξη

ΙΙΙα. Κατηγορίες 4, και 5: Λανθασμένη αντιστοιχία (λάθος μονάδα αναφοράς)

Στις κατηγορίες 4 και 5 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών, οι οποίοι αντιστοιχούν τα χρωματισμένα μέρη του σχήματος που περιλαμβάνει η ερώτηση 21 σε δύο κλάσματα που αντιπροσωπεύουν κάθε φορά το μέρος των δύο μικρότερων ορθογωνίων που περιέχονται στο σχήμα, και στη συνέχεια στο άθροισμα αυτών. Στην περίπτωση που εκφράζουν το άθροισμα με τον γραμμικό τρόπο που γίνεται η πρόσθεση με τους φυσικούς αριθμούς βαθμολογήθηκαν με την κατηγορία 4, ενώ στην περίπτωση που εκτελούν σωστά τη διαδικασία μετατροπής σε ομώνυμα, δεν φαίνεται να αναγνωρίζουν ότι ως αποτέλεσμα προκύπτει ένα κλάσμα που αντιπροσωπεύει μέγεθος μεγαλύτερο της μονάδας, όπως το κλάσμα 5/4 (κατηγορία 5). Οι μαθητές που απάντησαν με αυτό τον τρόπο σε καμία περίπτωση δεν εκφράζουν το διπλά χρωματισμένο μέρος του κύκλου στην άλλη ερώτηση με έναν πολλαπλασιασμό.

ΙΙΙβ. Κατηγορίες 6 και 7: Επαρκής αντιστοιχία

Οι μαθητές ταξινομήθηκαν σε αυτές τις κατηγορίες όταν αντιστοιχούν τα σκιαγραφημένα μέρη των σχημάτων σε αθροίσματα δύο κλασμάτων, τα οποία αντίθετα από την προηγούμενη περίπτωση, αντιστοιχούν στην κοινή μονάδα αναφοράς που είναι ολόκληρο το σχήμα που τους δίνεται. Στην κατηγορία 6 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών, οι οποίοι και στις δύο ερωτήσεις αντιστοιχούν ένα άθροισμα, ενώ στην κατηγορία 7 εντάχθηκε ένας μόνο μαθητής της Β΄ Γυμνασίου, ο οποίος στις απαντήσεις του εκφράζει τα σκιαγραφημένα μέρη των σχημάτων με δύο διαφορετικές πράξεις όπως ακριβώς του ζητήθηκε από τις ερωτήσεις.

Στον Πίνακα 3.6Γ παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά των μαθητών στους διάφορους τύπους και στις κατηγορίες απάντησης για όλες τις ηλικιακές ομάδες.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.5Γ, εμφανίζονται τέσσερις τάσεις στις ζωγραφιές των μαθητών, τις οποίες περιγράψαμε αναλυτικά προηγούμενα. Όπως βλέπουμε στον Πίνακα αυτό, οι μαθητές των μικρότερων ηλικιακών ομάδων έδωσαν αριθμητικά σύμβολα κάποιων κλασμάτων που δεν έχουν καμία αντιστοιχία προς τα χρωματισμένα μέρη των σχημάτων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6Γ

Κατηγορίες βαθμολόγησης, συχνότητες και ποσοστά επί τοις εκατό των απαντήσεων των παιδιών στις κατηγορίες βαθμολόγησης, στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων –ΚΕΟΕ- Ομάδα 6: Πώς τα παιδιά αναπαριστούν αριθμητικά με μια πράξη με κλάσματα τα σκιαγραφημένα μέρη ενός σχήματος), ανά ηλικιακή ομάδα (N=200).

Ηλικιακές ομάδες Κατηγορίες απαντήσεων	Ε΄ Δημοτ. N=40 (%)	ΣΤ΄ Δημοτ. N=40 (%)	Α΄ Γυμν. N=40 (%)	Β΄ Γυμν. N=40 (%)	Α΄ Λυκείου N=40 (%)	Σύνολο N=200 (%)
Ι. Άσχετες απαντήσεις						
1. Άσχετες απαντήσεις	2 (5%)	3 (7.5%)	4 (10%)	1 (2.5%)	0 (0%)	10 (5%)
ΙΙ. Άμεση αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του ορθογωνίου σε <u>ένα κλάσμα</u>						
2. Λάθος μερισμός	15 (37.5%)	8 (20%)	5 (12.5%)	3 (7.5%)	3 (7.5%)	34 (17%)
3. Ισομερισμός	2 (5%)	6 (15%)	6 (15%)	3 (7.5%)	3 (7.5%)	20 (10%)
Σύνολο ΙΙ	17 (42.5%)	14 35%	11 (27.5)%	6 (15%)	6 (15%)	54 (27%)
ΙΙΙ. Άμεση αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του ορθογωνίου σε μια πράξη						
ΙΙΙα. Λανθασμένη αντιστοιχία						
4. Επιρροή φυσικών αριθμών	6 (15%)	2 (5%)	2 (5%)	4 (10%)	5 (12.5%)	19 (9.5%)
5. Άλλη μονάδα αναφοράς (Μικρά ορθογώνια)	9 (22.5%)	19 (47.5%)	20 (50%)	24 (60%)	22 (55%)	94 (47%)
ΙΙΙβ. Επαρκής αντιστοιχία						
6. Σωστή μετάφραση σε ένα άθροισμα	2 (5%)	1 (2.5%)	2 (5%)	2 (5%)	6 (15%)	13 (6.5%)
7. Σωστή μετάφραση σε άθροισμα και γινόμενο	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (2.5%)	0 (0%)	1 (0.5%)
0. Ελλιπείς απαντήσεις	4 (10%)	1 (2.5%)	1 (2.5%)	2 (5%)	1 (2.5%)	9 (4.5%)
Σύνολο	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	200 (100%)

Η τάση των μαθητών να αντιστοιχίζουν τα χρωματισμένα μέρη των σχημάτων σε ένα κλάσμα δίχως να λαμβάνουν υπόψη τους το διαμερισμό του σχήματος (ίσα μέρη) –κατηγορία 2, ενώ είναι έντονη στις μικρές ηλικίες φθίνει στις μεγαλύτερες· από το 37.5% των μαθητών της Ε΄ Δημοτικού κατεβαίνει στο 7.5% των μαθητών της Α΄ Λυκείου σε μια φθίνουσα πορεία. Αντίθετα οι μαθητές που θεωρούν αναγκαίο το διαμερισμό της μονάδας αναφοράς σε ίσα μέρη αυξάνεται στις μεσαίες ηλικίες.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.6Γ μια άλλη τάση εμφανίζει το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (τύπος απάντησης ΙΙΙα). Η τάση αυτή αφορά την αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών των δύο σχημάτων στο άθροισμα δύο κλασμάτων που δεν έχουν όμως ως μονάδα αναφοράς ολόκληρο το σχήμα που τους δίνεται και φθάνει το 56.5% του συνόλου των μαθητών του δείγματός μας. Μολονότι εμφανίζονται μαθητές όλων των ηλικιακών ομάδων να εκτελούν αυτά τα αθροίσματα με τη γραμμική διαδικασία που χρησιμοποιείται στην πρόσθεση φυσικών αριθμών, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι αυξάνεται κατά πολύ ο αριθμός των μαθητών που εκτελούν σωστά αυτές τις προσθέσεις σε σχέση με την ηλικία.

Στον Πίνακα 3.6Γ παρατηρούμε ότι η τρίτη τάση των παιδιών είναι να μεταφράζουν τα χρωματισμένα μέρη των σχημάτων με το άθροισμα δύο κλασμάτων τα οποία σε αυτή την περίπτωση αναφέρονται σε μια κοινή μονάδα αναφοράς. Ο αριθμός των μαθητών που υιοθέτησαν αυτή την τάση αυξάνει ελαφρά με την ηλικία φθάνοντας όμως μόνο στο 15% των μαθητών της Α΄ Λυκείου.

Τέλος, όπως αναφέραμε και προηγούμενα ένας μόνο μαθητής της Β΄ Γυμνασίου μεταφράζει διαφορετικά τα χρωματισμένα μέρη του ορθογωνίου με ένα άθροισμα, ενώ τα διπλά χρωματισμένα μέρη του κύκλου με έναν πολλαπλασιασμό αντίστοιχα (κατηγορία 7).

Για να διερευνήσουμε κατά πόσο υπάρχει διαφοροποίηση με την ηλικία και το φύλο των μαθητών, χρησιμοποιήσαμε τα μη παραμετρικά τεστ των Kruskal-Wallis και των Mann-Whitney αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα από το test των Kruskal-Wallis έδειξαν ότι η ηλικία επηρεάζει κατά στατιστικά σημαντικό τρόπο τις απαντήσεις των μαθητών για τις ερωτήσεις της ομάδας 1 (x^2=21,9; β.ε.=4; ασυμπτ. $p<0,001$) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 3.7). Συγκρίνοντας τις μέσες θέσεις των πέντε ηλικιών του δείγματος μεταξύ τους, είναι φανερό ότι οι μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων απάντησαν τις ερωτήσεις αυτής της ομάδας χρησιμοποιώντας κατηγορίες απαντήσεων που περιλάμβαναν πιο επαρκείς αριθμητικές αναπαραστάσεις των εικονικών αναπαραστάσεων των πράξεων με κλάσματα. Αντίστοιχα, με το test των Mann-Whitney, ελέγξαμε την ύπαρξη τυχόν διαφοροποίησης μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών του δείγματος στις απαντήσεις που έδωσαν για τις αριθμητικές αναπαραστάσεις των εικονικών αναπαραστάσεων των πράξεων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το φύλο δεν διαφοροποιεί γενικά τις απαντήσεις των μαθητών με στατιστικά σημαντικό τρόπο ($z=-0,7$; ασυμπτ. $p= 0,487$) (βλ. Παράρτημα, Πίνακα 3.8).

3.4 ΕΠΕΞΗΓΗΜΑΤΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

Η ανάλυση των απαντήσεων των παιδιών μας οδήγησε στην εξαγωγή κάποιων συμπερασμάτων για τις γνώσεις των παιδιών που αφορούν στο σύμβολο του κλάσματος, στη διάταξη των κλασμάτων καθώς επίσης και στις πράξεις με κλάσματα. Τα συμπεράσματα όμως αυτά δεν μας επιτρέπουν να αποφανθούμε αν οι απαντήσεις των παιδιών στο σύνολο των ερωτήσεων έχουν κάποια συνέπεια . Όπως αναφέραμε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου, για να μπορέσουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει συνέπεια στη σκέψη των παιδιών θα πρέπει να συγκρίνουμε τις απαντήσεις του κάθε παιδιού στις έξι ομάδες ερωτήσεων. Μόνο μια τέτοια σύγκριση θα μπορούσε να αναδείξει αν η σκέψη των παιδιών έχει κάποια συνέπεια και οργανώνεται με κάποια δομή. Στην περίπτωση που η σύγκριση αυτή δείξει ότι οι απαντήσεις των παιδιών είναι αντιφατικές η υπόθεσή μας δεν ευσταθεί.

Οι Vosniadou και Brewer (1992) με την έρευνά τους στην περιοχή της αστρονομίας έδειξαν ότι είναι δυνατή η ένταξη του μεγαλύτερου ποσοστού των παιδιών σε μια συνεπή χρήση ενός περιορισμένου αριθμού μοντέλων του σχήματος της γης. Με τον τρόπο αυτό μπόρεσαν να ανιχνεύσουν την εννοιολογική αλλαγή που πραγματώνεται στη σκέψη των παιδιών καθώς αυτά εισάγονται στις επιστημονικές απόψεις. Ερευνητές όπως οι Ιωαννίδου και Βοσνιάδου (1998), Ioannides και Vosniadou (in press), Κύρκος και Βοσνιάδου, (1999), Κουκά και Βοσνιάδου (2000), υιοθετώντας το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, διερεύνησαν την ανάπτυξη εννοιών στα παιδιά σε σχέση με τα φυσικά φαινόμενα, τη μηχανική, την έννοια της δύναμης και με έννοιες της βιολογίας και της χημείας αντίστοιχα. Τα ευρήματά τους έδειξαν ότι τα παιδιά υιοθετούν στην κάθε μια από τις παραπάνω γνωστικές περιοχές ένα μικρό αριθμό μοντέλων ή ερμηνειών ή επεξηγηματικών πλαισίων για να ερμηνεύσουν φαινόμενα που σχετίζονται με τις έννοιες αυτές.

Λαμβάνοντας υπόψη τη μεθοδολογία που ανέπτυξαν οι παραπάνω ερευνητές θα ελέγξουμε και στην περιοχή των μαθηματικών με τη δική μας έρευνα κατά πόσο το μεγαλύτερο ποσοστό του δείγματός μας υιοθετεί με συνέπεια ένα μικρό αριθμό *επεξηγηματικών πλαισίων* της έννοιας του κλάσματος. Στις προηγούμενες ενότητες έχουμε παρουσιάσει τα δεδομένα της εμπειρικής μας έρευνας. Οι απαντήσεις των παιδιών έχουν φανερώσει αρκετές από τις παρανοήσεις τους σε σχέση με τα επιμέρους ζητήματα που περιλάμβανε το ερωτηματολόγιο της έρευνας. Από τις απαντήσεις των παιδιών προέκυψε ότι ένα μεγάλο ποσοστό παιδιών δεν υιοθετεί την επιστημονική άποψη για την έννοια του κλάσματος ως ενός ρητού αριθμού. Έχουμε ήδη αναφερθεί στην υπόθεσή μας σε σχέση με την ύπαρξη εννοιολογικής αλλαγής στη σκέψη των παιδιών κατά την ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να ανιχνεύσουμε την ύπαρξη εννοιολογικής αλλαγής εξετάζοντας κατά πόσο οι ερμηνείες που υιοθετούν τα παιδιά, τα επεξηγηματικά δηλαδή πλαίσια, για την έννοια του κλάσματος έχουν κάποια συγκεκριμένη δομή.

3.4.1. Πιθανά Επεξηγηματικά Πλαίσια του Κλάσματος

Από την προηγούμενη ανάλυση των απαντήσεων των παιδιών σε κατηγορίες τόσο στο επίπεδο ερώτησης όσο και στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων, προέκυψε ότι υπάρχουν ομάδες παιδιών που εντάχθηκαν σε διαφορετικές κατηγορίες απαντήσεων τόσο λόγω του διαφορετικού περιεχόμενου των απαντήσεων όσο και λόγω των διαφορετικών εκάστοτε εξηγήσεων. Για παράδειγμα υπήρχαν παιδιά που βαθμολογήθηκαν με την κατηγορία I στις ομάδες ερωτήσεων 1, 2, 3 και 4 και που από το σύνολο των απαντήσεών τους προέκυψε η πεποίθησή τους ότι το κλάσμα δεν συμβολίζει έναν αριθμό αλλά δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς. Αντίθετα υπάρχουν παιδιά που βαθμολογήθηκαν με την κατηγορία 5 στην πρώτη ομάδα και με την 8 στις υπόλοιπες ομάδες ερωτήσεων αντίστοιχα και από τις απαντήσεις τους προέκυψε ότι αντιμετώπιζαν το κλάσμα πολύ διαφορετικά απ' ό,τι τα παιδιά που αναφέραμε προηγούμενα, δηλαδή ως το αποτέλεσμα μιας σχέσης δύο αριθμών (του πηλίκου του αριθμητή δια τον παρονομαστή).

Συγκεκριμένα από τις κατηγορίες απαντήσεων των παιδιών μπορέσαμε να διαχωρίσουμε τρία διαφορετικά πιθανά επεξηγηματικά πλαίσια ερμηνείας του κλάσματος:

1) Την ερμηνεία του κλάσματος ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς

2) Την ερμηνεία του κλάσματος ως μια σχέση μέρους-όλου μιας ακέραιας μονάδας

3) Την ερμηνεία του κλάσματος ως σχέσης των δύο αριθμών που το απαρτίζουν (π.χ. το πηλίκο αριθμητή δια παρονομαστή).

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία ανάλυσης των αποτελεσμάτων της έρευνάς μας, αν υπάρχει συνέπεια στις απαντήσεις των παιδιών, θα προκύψει από τη διαδικασία βαθμολόγησης των παιδιών στο επίπεδο του *επεξηγηματικού πλαισίου*. Στη διαδικασία αυτή απαραίτητη είναι η περιγραφή αρχικά των κριτηρίων που υποθέτουμε ότι τα καθορίζουν.

Αν υπάρχουν παιδιά που υιοθετούν με συνέπεια τα παραπάνω πιθανά επεξηγηματικά πλαίσια, τότε θα πρέπει τα παιδιά αυτά να απαντούν με ένα συνεπή τρόπο στις διάφορες ερωτήσεις που περιγράψαμε παραπάνω. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τα κριτήρια που καθορίζουν τις συνεπείς απαντήσεις σε όλες τις ομάδες ερωτήσεων. Στον Πίνακα 3.Ι περιγράφουμε τις αναμενόμενες κατηγορίες απάντησης των παιδιών σε όλες τις ομάδες ερωτήσεων για το καθένα επεξηγηματικό πλαίσιο.

(ο Πίνακας 3.Ι περίπου εδώ)

Κλάσμα ως δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί (Πιθανά Επεξηγηματικά Πλαίσια Α1 και Α2)

Η κοινή τάση των παιδιών που μπορεί να υιοθετούν αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο είναι ότι αντιμετωπίζουν το σύμβολο του κλάσματος ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς (ο αριθμητής και ο παρονομαστής) και όχι ως ένα σύμβολο που αντιπροσωπεύει έναν αριθμό. Στο επεξηγηματικό αυτό πλαίσιο έχουν αναφερθεί και άλλοι ερευνητές όπως οι Hiebert και Berh (1988). Στην περίπτωση που ένα παιδί υιοθετεί με συνέπεια αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο θα έπρεπε οι απαντήσεις του να δεσμεύονται από τη δομή που παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.Ι, στον οποίο καταγράφουμε ενδεικτικές κατηγορίες απάντησης ανά ομάδα ερωτήσεων (βλ. Πίνακα 3.Ι, Πιθανά Επεξηγηματικά Πλαίσια του Κλάσματος Α1 και Α2).

Όπως φαίνεται στον παραπάνω Πίνακα, από τις απαντήσεις των παιδιών στις ερωτήσεις των ομάδων 1, 2, 3 και 4 διακρίναμε δύο τάσεις οι οποίες είναι συμβατές προς το πιθανό επεξηγηματικό πλαίσιο του κλάσματος ως δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί. Ένα κοινό χαρακτηριστικό αυτών των δύο τύπων απαντήσεων είναι ότι υποδηλώνουν ότι τα παιδιά αντιμετωπίζουν το σύμβολο του κλάσματος ως δύο ξέχωρους φυσικούς αριθμούς και όχι ως μια σχέση του αριθμητή και του παρονομαστή του. Οι αναμενόμενες απαντήσεις για την κάθε ομάδα ερωτήσεων αναγράφονται στον Πίνακα 3.Ι.

Όπως βλέπουμε στον Πίνακα 3.Ι, από το επεξηγηματικό πλαίσιο Α1 περιμέναμε απαντήσεις όπως ότι καθώς μεγαλώνουν αντίστοιχα ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος, αυξάνεται και η αριθμητική αξία που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα (ομάδες ερωτήσεων 1 και 2)· ότι η ακέραια μονάδα είναι μικρότερη από οποιοδήποτε κλάσμα (ομάδα ερωτήσεων 2) καθώς επίσης και στις εκτιμήσεις των αριθμητικών πράξεων με κλάσματα ότι τα παιδιά θα υιοθετούν τα λανθάνοντα νοητικά μοντέλα των φυσικών αριθμών στα οποία αναφέρεται ο Fischbein (1975), ότι δηλαδή ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει πάντα τον αριθμό, ενώ η διαίρεση τον μικραίνει (ομάδα ερωτήσεων 3). Επιπλέον θα περιμέναμε ότι στις εκτιμήσεις των πράξεων με κλάσματα (ομάδα ερωτήσεων 4), τα παιδιά θα μετέφραζαν τις πράξεις των κλασμάτων στις αντίστοιχες πράξεις ανάμεσα στους αριθμητές και τους παρονομαστές των δύο κλασμάτων (βλ. Πίνακα 3.Ι, επεξηγηματικό πλαίσιο Α1).

Επίσης όπως βλέπουμε στον Πίνακα 3.Ι, από το επεξηγηματικό πλαίσιο Α2 περιμέναμε απαντήσεις (αντίθετα από την προηγούμενη περίπτωση) ότι καθώς μεγαλώνουν αντίστοιχα ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος, μειώνεται η αριθμητική αξία που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα (ομάδες ερωτήσεων 1 και 2)· ότι η ακέραια μονάδα είναι μεγαλύτερη από οποιοδήποτε κλάσμα (ομάδα ερωτήσεων 2), ενώ στις εκτιμήσεις των αριθμητικών πράξεων με κλάσματα ότι τα παιδιά θα υιοθετούν τις εντελώς αντίθετες ιδέες των λανθανόντων μοντέλων των φυσικών αριθμών (Fischbein, 1975), ότι δηλαδή ο πολλαπλασιασμός μικραίνει τον αριθμό ενώ η διαίρεση τον μεγαλώνει (ομάδα ερωτήσεων 3). Επιπλέον σε αυτή την περίπτωση θα περιμέναμε ότι στις εκτιμήσεις των πράξεων με κλάσματα (ομάδα ερωτήσεων 4), τα παιδιά θα συνέχιζαν να μεταφράζουν τις πράξεις των κλασμάτων στις αντίστοιχες πράξεις ανάμεσα στους αριθμητές και τους παρονομαστές των δύο κλασμάτων ή θα εκτελούσαν λανθασμένα τις αντίστοιχες πράξεις (βλέπε Πίνακα 3.Ι, επεξηγηματικό πλαίσιο Α1).

Στις εικονικές αναπαραστάσεις μιας πράξης με κλάσματα (ομάδες 5 και 6), θα περιμέναμε από τους μαθητές που ακολουθούν με συνέπεια το επεξηγηματικό πλαίσιο Α, να δώσουν απαντήσεις σαν αυτές που φαίνονται στον Πίνακα 3.Ι. Δεν περιμέναμε δηλαδή διαφορές ανάμεσα στις τάσεις Α1 και Α2 όπως στις προηγούμενες ομάδες ερωτήσεων.

Κλάσμα ως σχέση μέρους – όλου (Πιθανό Επεξηγηματικό Πλαίσιο Β)

Η ερμηνεία του κλάσματος ως μέρους μιας ακέραιας μονάδας καθορίζεται από τη βασική ιδέα ότι ένα κλάσμα δεν αντιπροσωπεύει έναν αριθμό αλλά ένα μέρος από κάτι. Το κλάσμα αντιπροσωπεύει αξία μικρότερη ή το πολύ ίση με μια ακέραια μονάδα. (βλ. Πίνακα 3.Ι, Επεξηγηματικό πλαίσιο Β). Αν υπάρχουν παιδιά που ερμηνεύουν το κλάσμα ως ένα κομμάτι ή κομμάτια κάποιας ποσότητας την οποία θεωρούν ως μονάδα αναφοράς με συνεπή τρόπο, θα περιμέναμε κατά τη διάταξη των κλασμάτων να προσπαθήσουν να συγκρίνουν τα κλάσματα μεταφράζοντάς τα ως μικρότερα ή μεγαλύτερα κομμάτια θεωρώντας πάντα την ακέραια μονάδα μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων. Ακόμη από τις απαντήσεις των παιδιών υπάρχουν ενδείξεις ότι μερικά παιδιά κατά την εκτίμηση των αριθμητικών πράξεων με κλάσματα δεν εκτιμούν ορθά το αποτέλεσμα μιας πράξης, αλλά υιοθετούν μια πληθώρα διαδικασιών που εκφράζει ένα συνοθύλευμα ιδεών και διαδικασιών που ισχύουν στους φυσικούς αριθμούς συγχρόνως με κάποιες νέες διαδικασίες μη αφομοιωμένες. Αυτό το είδος απαντήσεων θεωρούμε ότι είναι συνεπές προς αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο (βλ. Πίνακα 3.Ι, *επεξηγηματικό πλαίσιο Β*).

Στις μεταφράσεις των αριθμητικών πράξεων σε εικονικές αναπαραστάσεις, υποθέτουμε ότι τα παιδιά που ακολουθούν με συνέπεια αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο θα έχουν αναπτύξει την έννοια του <u>διαμερισμού</u> της ακέραιας μονάδας (διαμερίζω σημαίνει ότι διαιρώ την ακέραια μονάδα σε ίσα μέρη - διαίρεση μερισμού ή μέτρησης). Ακόμη υποθέτουμε όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.Ι ότι τα παιδιά θα αναγνωρίζουν ότι τα κλάσματα τα οποία συσχετίζονταν έπρεπε να αναφέρονται σε μια κοινή μονάδα αναφοράς, οπότε θα έπρεπε να ζωγράφιζαν στο ίδιο ή σε ίσα σχήματα τα μέρη που αντιπροσώπευαν τα αντίστοιχα κλάσματα.

Κλάσμα ως σχέση δύο αριθμών (Πιθανό Επιστημονικό Επεξηγηματικό Πλαίσιο Γ)

Αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο του κλάσματος καθορίζεται από τη διαφορετική αντιμετώπιση του συμβόλου του κλάσματος στις απαντήσεις των παιδιών απ' ότι στα προηγούμενα επεξηγηματικά πλαίσια. Συνεπώς από τις απαντήσεις των παιδιών προκύπτει ότι το κλάσμα δεν αντιμετωπίζεται πλέον ούτε ως δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί ούτε ως μια σχέση μέρους-όλου που περιορίζεται από την προϋπόθεση ότι αντιστοιχεί σε αξία μικρότερη της μονάδας, αλλά ως μια συσχέτιση του αριθμητή και του παρονομαστή του. Το επεξηγηματικό αυτό πλαίσιο δεσμεύεται από τρεις προϋποθέσεις. Πρώτη, ότι το κλάσμα αντιμετωπίζεται στις απαντήσεις των παιδιών ως μια σχέση αριθμητή-παρονομαστή (πηλίκο) που σημαίνει ότι αντιμετωπίζεται ως ένας αριθμός (αναφορά καταχρηστικών κλασμάτων για ένα μεγάλο κλάσμα). Δεύτερη, ότι η σχέση του κλάσματος με τη μονάδα εξαρτάται από τη σχέση αριθμητή – παρονομαστή του κλάσματος (συνεπώς τα παιδιά εδώ θεωρούν ότι υπάρχουν κλάσματα μικρότερα της μονάδας και κλάσματα μεγαλύτερα αυτής) και τρίτη, ότι αναγνωρίζουν ότι δεν υπάρχει ένα μοναδικό μικρότερο και ένα μοναδικό μεγαλύτερο κλάσμα –ότι δηλαδή το κλάσμα είναι ένας μη πεπερασμένος αριθμός (Πίνακας 3.Ι, ομάδα ερωτήσεων 1). Ακόμη σε αυτό το (επιστημονικό) επεξηγηματικό πλαίσιο θα μπορούσαν να είναι συμβατές και απαντήσεις στις οποίες μη δίνοντας κανένα σύμβολο για το μικρότερο και το μεγαλύτερο κλάσμα, τα παιδιά αναφέρουν ότι οι αριθμοί είναι άπειροι συνεπώς δεν υπάρχει ένα μικρότερο ή ένα μεγαλύτερο κλάσμα.

Συνοψίζοντας όπως φαίνεται από τον Πίνακα 3.Ι, θα περιμέναμε από τα παιδιά που υιοθετούν με συνέπεια το επιστημονικό επεξηγηματικό πλαίσιο Γ: α) να κάνουν χρήση καταχρηστικών κλασμάτων για να δηλώσουν ένα μεγάλο κλάσμα ή και να μην δηλώνουν ένα κλάσμα ως το μικρότερο ή ως το μεγαλύτερο, αλλά να αναγνωρίζουν ότι τα κλάσματα είναι άπειροι αριθμοί, β) να γνωρίζουν ότι η αξία ενός κλάσματος ισοδυναμεί με το πηλίκο του αριθμητή δια τον παρονομαστή του κλάσματος και ότι η σύγκριση των κλασμάτων θα μπορούσε να μεταφραστεί σε σύγκριση πηλίκων καθώς ακόμη και ότι ένα κλάσμα μπορεί να είναι μικρότερο ή και μεγαλύτερο της ακέραιης μονάδας, γ) να χρησιμοποιούν μια ποικιλία ερμηνειών του κλάσματος ως μέρους μιας ακέραιας μονάδας ή ως του πηλίκου των δύο αριθμών που το απαρτίζουν (ακόμη και μετατροπή των κλασμάτων στους αντίστοιχους δεκαδικούς αριθμούς), καθώς επίσης να χρησιμοποιούν την ακέραια μονάδα ως σημείο αναφοράς ή τη μετατροπή των κλασμάτων στα αντίστοιχα ισοδύναμά τους ομώνυμα, ως διαδικασίες σύγκρισης των κλασμάτων δ) να εκτιμούν τις αριθμητικές ισότητες των κλασμάτων μη χρησιμοποιώντας διαδικασίες που ισχύουν στις πράξεις με φυσικούς αριθμούς, και ε) να διαφοροποιούν στις εικονικές αναπαραστάσεις των αριθμητικών πράξεων την πράξη του πολλαπλασιασμού από της πρόσθεσης[79] και να θεωρούν αναγκαία μια κοινή μονάδα αναφοράς (ίσα σχήματα) ή το διαχωρισμό ενός σχήματος-μονάδας σε ίσα μέρη[80].

3.4.2. Τελικά επεξηγηματικά πλαίσια

Παραπάνω έχουμε περιγράψει τρία πιθανά επεξηγηματικά πλαίσια με τα οποία υποθέτουμε ότι τα παιδιά ερμηνεύουν την έννοια του κλάσματος όπως προκύπτει από το σύνολο των απαντήσεων των παιδιών σε όλες τις ερωτήσεις του ερωτηματολόγιου της έρευνάς μας, καθώς επίσης και τα κριτήρια σύμφωνα με τα οποία αυτά διαφοροποιούνται, στην περίπτωση που τα υιοθετούν με συνέπεια (βλ. Πίνακα 3.I). Στη συνέχεια συγκρίναμε τις απαντήσεις των παιδιών στις ερωτήσεις κάθε ομάδας με τις υποτιθέμενες πρότυπες απαντήσεις που περιγράψαμε στον Πίνακα 3.I, ώστε να ελέγξουμε αν υπάρχουν παιδιά που υιοθετούν με συνέπεια τα υποθετικά επεξηγηματικά πλαίσια που παρουσιάζονται σ' αυτόν (βαθμολόγηση των απαντήσεων στο επίπεδο επεξηγηματικού πλαισίου). Από αυτή τη διαδικασία προέκυψε ότι ένας αρκετά μεγάλος αριθμός παιδιών του δείγματός μας υιοθετεί με

[79] Τον πολλαπλασιασμό αντίστοιχα δεν θα περιμέναμε να τον εκφράζουν μεταφράζοντας το κάθε κλάσμα ως το μέρος ενός σχήματος γιατί στην περίπτωση που το κάνουν με αυτό τον τρόπο εκφράζουν στην ουσία το άθροισμα των δύο κλασμάτων. Ο πολλαπλασιασμός μπορεί να μεταφραστεί εικονικά ως το μέρος ενός μέρους μιας ακέραιας μονάδας.

[80] Η κατανόηση του κλάσματος ως μέρους ενός όλου -απαραίτητη για την κατανόηση του κλάσματος ως ρητού είναι αμφιλεγόμενη. (Βλ. αναφορές από τη βιβλιογραφική επισκόπηση, ενότητα 1.3).

συνέπεια κάποιο από τα τρία πιθανά επεξηγηματικά πλαίσια (βλ. Πίνακες 3.ΙΙ.Α, 3.ΙΙ.Β και 3.ΙΙ.Γ).

(οι Πίνακες 3.ΙΙ.Α, 3.ΙΙ.Β και 3.ΙΙ.Γ περίπου εδώ)

Πολλά από τα υπόλοιπα παιδιά στις απαντήσεις τους αποκάλυπταν ιδέες και πεποιθήσεις συνεπείς προς κάποιες βασικές παρανοήσεις, τις οποίες αξιολογήσαμε ως ενδιάμεσες ερμηνείες του κλάσματος στην πορεία τους για την κατάκτηση του επιστημονικού πλαισίου του κλάσματος ως ρητού αριθμού και οι οποίες καθορίζουν κάποιες υποκατηγορίες των επεξηγηματικών πλαισίων. Για παράδειγμα στο αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο του κλάσματος «Δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί» (Α) διαπιστώσαμε την εξής απόκλιση. Υπάρχουν παιδιά τα οποία στο σύνολο των ερωτήσεων φαίνεται να αναγνωρίζουν ότι τα κλάσματα που έχουν αριθμητή ίσο με τον παρονομαστή τους ισοδυναμούν με τη μονάδα (βλέπε Πίνακα 3.ΙΙ.Α, επεξηγηματικό πλαίσιο Α1). Για παράδειγμα, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.IV, ο μαθητής (υποκ. #31) της Ε΄ δημοτικού, ενώ από τις απαντήσεις του φαίνεται να υιοθετεί το επεξηγηματικό πλαίσιο των δύο ανεξάρτητων φυσικών αριθμών (Πίνακας 3.Ι, πιθανό επεξηγηματικό πλαίσιο 1α), στις ερωτήσεις 10 και 13, αναφέρει ότι το αποτέλεσμα της εκάστοτε πράξης είναι ίσο με το 17 επειδή το 2/2 ή το 3/3 είναι ένας ακέραιος. Το παιδί αυτό δεν το ταξινομήσαμε στο επεξηγηματικό πλαίσιο του μέρους μιας μονάδας, γιατί απλά και μόνο αναγνωρίζει ότι ένα κλάσμα που έχει ίδιο αριθμητή και παρονομαστή ισοδυναμεί με τη μονάδα (βλέπε Πίνακα 3.ΙΙ.Α., υποκατηγορία επεξηγηματικού πλαισίου Α1), χωρίς όμως να ικανοποιεί τις υπόλοιπες προϋποθέσεις του επεξηγηματικού πλαισίου του κλάσματος μέρους.

Στους Πίνακες 3.ΙΙ.Α, 3.ΙΙ.Β και 3.ΙΙ.Γ, παρουσιάζονται τα τελικά επεξηγηματικά πλαίσια (και οι υποκατηγορίες τους), τα οποία θα περιγράψουμε αναλυτικά παρακάτω, καθώς επίσης και οι κατηγορίες απάντησης σε κάθε ομάδα ερωτήσεων για το καθένα από αυτά.

Α. ΚΛΑΣΜΑ ΩΣ ΔΥΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ένα κοινό χαρακτηριστικό αυτού του επεξηγηματικού πλαισίου αποτελεί η τάση των παιδιών να αντιμετωπίζουν το σύμβολο ενός κλάσματος ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς (ο αριθμητής και ο παρονομαστής) και όχι ως ένα σύμβολο που αντιπροσωπεύει έναν αριθμό.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.ΙΙ.Α (ερμηνεία Α), τα παιδιά που χρησιμοποιούν το επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα /Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί*, στις απαντήσεις τους φανερώνουν μια εμμονή να χειρίζονται τα κλάσματα ως δύο αριθμούς, τόσο στις ερωτήσεις διάταξης όσο και στις εκτιμήσεις των πράξεων με κλάσματα.

Στο θέμα της διάταξης, η βασική πεποίθηση των παιδιών που δεσμεύει αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο είναι ότι η αριθμητική αξία που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα αυξάνεται, όταν αυξάνονται ξέχωρα ο αριθμητής και ο παρονομαστής του αντίστοιχα (βλέπε Πίνακα 3.ΙΙ.Α, επεξηγηματικό πλαίσιο Α -ομάδες ερωτήσεων 1 και 2). Για παράδειγμα, ο μαθητής της έκτης δημοτικού (υποκ. #42), εξηγεί την επιλογή του κλάσματος 1/1 ως το μικρότερο, λέγοντας: "γιατί είναι οι μικρότεροι αριθμοί", ενώ στις ερωτήσεις της διάταξης όπως για παράδειγμα στην τέταρτη ερώτηση επιλέγει αντίστοιχα το 4/5 από το 2/5 ή στην πέμπτη ερώτηση το 4/15 από το 4/7, ή στην έκτη ερώτηση το 5/8 από το 4/3 και στην όγδοη ερώτηση το 4/9 από το 2/3, εξηγώντας κάθε φορά "γιατί ο αριθμός του είναι μεγαλύτερος" ή "γιατί αυτό το κλάσμα έχει μεγαλύτερη αξία από το άλλο".

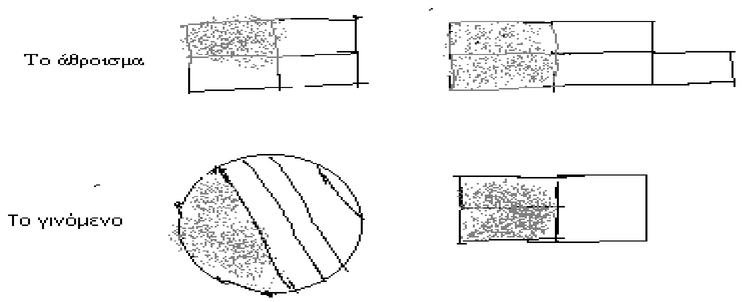
Ένα δεύτερο ιδιαίτερο βασικό κριτήριο που διαφοροποιεί αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο σχετίζεται με τις πεποιθήσεις των παιδιών για τη σχέση του κλάσματος με την ακέραια μονάδα. Τα παιδιά λοιπόν που υιοθετούν αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο θεωρούν ότι η ακέραια μονάδα, ως ο μικρότερος φυσικός αριθμός, είναι μικρότερη από οποιοδήποτε κλάσμα. Για παράδειγμα το ίδιο παιδί στην τρίτη ερώτηση, διατάσσει τους αριθμούς από το μικρότερο στο μεγαλύτερο με την ακόλουθη σειρά "1, 1/7, 4/3, 5/6" τοποθετώντας τη μονάδα στην αρχή.

Ακόμη κατά την εκτίμηση των πράξεων με κλάσματα παρατηρήσαμε ότι τα παιδιά εκτιμούσαν το αποτέλεσμα της κάθε πράξης υιοθετώντας τα λανθάνοντα επεξηγηματικά πλαίσια των πράξεων στα οποία αναφέρεται ο Fischbein (1975). Συνεπώς εκτιμούσαν ορθά τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις ενός φυσικού αριθμού με ένα κλάσμα όταν το κλάσμα ήταν καταχρηστικό, οπότε δεν παραβιάζονταν τα παραπάνω μοντέλα, αλλά αποτύγχαναν κατά την εκτίμηση των υπόλοιπων πράξεων, οι οποίες περιελάμβαναν ένα απλό κλάσμα -όπου παραβιάζονταν τα παραπάνω λανθάνοντα μοντέλα. Για παράδειγμα το παιδί που αναφέραμε προηγούμενα στις εκτιμήσεις των πράξεων θεωρεί ότι όλοι οι πολλαπλασιασμοί έχουν αποτέλεσμα μεγαλύτερο του αριθμού 17 ενώ οι διαιρέσεις μικρότερο, αγνοώντας το είδος του κλάσματος στην κάθε περίπτωση (για παράδειγμα δεν διαφοροποιεί την απάντησή του όταν το κλάσμα είναι της μορφής q/q και είναι ίσο με τη μονάδα).

Ακόμη τα παιδιά που ταξινομήθηκαν σε αυτό το πλαίσιο αντιμετώπισαν όλες τις πράξεις των κλασμάτων με τον ίδιο τρόπο όπως στους φυσικούς αριθμούς (εφαρμόζοντας για παράδειγμα διαδικασίες που ίσχυαν στους φυσικούς αριθμούς - εκτέλεση των πράξεων αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή αντίστοιχα), με αποτέλεσμα να εκτιμούν λανθασμένα τις ισότητες που περιελάμβαναν προσθέσεις και αφαιρέσεις κλασμάτων, αντίθετα απ’ ότι στον πολλαπλασιασμό όπου ακολουθείται αυτή ακριβώς η διαδικασία.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στο επεξηγηματικό πλαίσιο των δύο ανεξάρτητων φυσικών αριθμών εντάσσονται τα παιδιά τα οποία από το σύνολο των απαντήσεών τους στα πεδία που σχετίζονται με την αριθμητική αξία ενός κλάσματος και τις εκτιμήσεις πράξεων φαίνεται να αντιμετωπίζουν το κλάσμα ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς –η γνώση δηλαδή των φυσικών αριθμών φαίνεται να υπερισχύει στις ερμηνείες τους για το κλάσμα (βλ. Πίνακα 3.ΙΙ.Α –επεξηγηματικό πλαίσιο Α).

Παρόλα αυτά, ορισμένα παιδιά εμφανίζουν στις ερμηνείες των εικονικών αναπαραστάσεων ενός κλάσματος κάποια στοιχεία του κλάσματος ως μέρους ενός σχήματος. Παρατηρήσαμε λοιπόν ότι αυτά τα παιδιά στις ερωτήσεις που τους ζητήθηκε να αναπαραστήσουν με μια ζωγραφιά μια πράξη με κλάσματα, και στην περίπτωση που δεν ζωγράφισαν άσχετες (όπως στην περίπτωση του παιδιού που αναφέραμε παραπάνω (υποκείμενο #42) το οποίο ζωγραφίζει άσχετα σχήματα (βλέπε Πίνακες 3.ΙΙ.Α και 3.ΙV) ή κυριολεκτικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων της κάθε πράξης (βλέπε Πίνακα 3.5Β -κατηγορία 1), σχεδίασαν *δύο διαφορετικά σχήματα* για να αναπαραστήσουν το κάθε κλάσμα ως μέρος του καθενός διαφορετικού σχήματος, σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία (χωρίς να θεωρούν απαραίτητη μια κοινή μονάδα αναφοράς των δύο κλασμάτων και χωρίς να χωρίζουν πάντα το εκάστοτε σχήμα σε ίσα μέρη – *άνισα μέρη*). Για παράδειγμα ο μαθητής της Ε΄ Δημοτικού (υποκ. #13) αναπαράστησε το άθροισμα $\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ και το γινόμενο $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (βλέπε Σχήμα 4.2).



<u>Σχήμα 4.2</u>: Πώς αναπαριστά ο Άκης, μαθητής της Ε΄ Δημοτικού το άθροισμα $\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ *και το γινόμενο* $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}$

Από τις απαντήσεις του έγινε φανερό ότι το παιδί αυτό δεν διαφοροποιούσε τις αναπαραστάσεις του πολλαπλασιασμού από αυτές της πρόσθεσης. Αυτό που έκανε στην ουσία ήταν να αντιστοιχεί το κάθε κλάσμα στο μέρος ενός σχήματος ακόμη και στον πολλαπλασιασμό. Δεν φάνηκε δηλαδή να έχει κατανοήσει την έννοια του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων όπου ένα γινόμενο δύο κλασμάτων σημαίνει το μέρος του μέρους μιας μονάδας, π.χ. ενός σχήματος.

(ο Πίνακας 3.IV περίπου εδώ)

Στον Πίνακα 3.IV, βλέπουμε τις απαντήσεις του Θωμά (υποκ. #79), μαθητή της ΣΤ΄ Γυμνασίου) που υιοθετεί αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο.

Επιπλέον σε αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο ταξινομήθηκαν και τέσσερις μαθητές (δύο της έκτης δημοτικού και δύο της πρώτης γυμνασίου, οι οποίοι εμφανίζουν κάποιες ιδέες απειρίας των αριθμών τις οποίες όμως θεωρούμε διαισθητικές. Για παράδειγμα ο μαθητής (υποκ. #115), αναφέρει ως μεγαλύτερο κλάσμα το 1000/1000, εξηγώντας ότι «Δεν πιστεύω ότι είναι το μεγαλύτερο κλάσμα, υπάρχουν πιο μεγάλα, π.χ. αν βάλω το 100000 ή το 100000000 κ. α.

Παραπάνω περιγράψαμε τα κοινά χαρακτηριστικά του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα /Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί*, ενώ στη συνέχεια θα σταθούμε στις διαφοροποιήσεις δύο υποκατηγοριών του, όπως φαίνονται στον Πίνακα 3.ΙΙ.Α. (υποκατηγορίες Α1 και Α2).

Δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί και το κλάσμα q/q =1 (Υποκατηγορία Α1)

Σε αυτή την υποκατηγορία του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα /Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί* ταξινομήθηκαν οι μαθητές οι οποίοι ενώ ικανοποιούν τα γενικά κριτήρια αυτού του επεξηγηματικού πλαισίου, διαφοροποιούν τις απαντήσεις τους στις εκτιμήσεις των πράξεων που περιλαμβάνουν κλάσματα με αριθμητή ίσο του παρονομαστή (ερωτήσεις 10 και 13). Από τις απαντήσεις τους δηλαδή φαίνεται να αναγνωρίζουν ότι το κλάσμα της μορφής q/q δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα ενός πολλαπλασιασμού ή μιας διαίρεσης. Τα παιδιά τα οποία ταξινομήθηκαν σε αυτό το πλαίσιο άλλοτε δεν εξηγούν την απάντησή τους ενώ άλλοτε αναφέρονται στη λέξη *ακέραιος* (υποκ. #31) και μόνο η μαθήτρια της πρώτης λυκείου (υποκ. # 163) αναφέρει ότι "το αποτέλεσμα είναι ίσο με το 17, γιατί το 17 διαιρείται με την μονάδα", δηλαδή φαίνεται να αναγνωρίζει ότι ένα κλάσμα της μορφής q/q ισούται με τη μονάδα (βλ. Πίνακα 3.ΙΙ.Α, υποκατηγορία Α1 του επεξηγηματικού πλαισίου Α).

Ακόμη ένα παιδί που ταξινομήθηκε σε αυτό το πλαίσιο φαίνεται να αναγνωρίζει ακόμη ότι ο φυσικός αριθμός 2 που περιλαμβάνεται στην προς εκτίμηση αριθμητική ισότητα 1/8+2 = 17/8, της ερώτησης 19, αναγνωρίζει ότι το 2 είναι ίσο με το 16/8.

Δύο ανεξάρτητοι αριθμοί που όσο μεγαλώνουν, μικραίνει η αξία του κλάσματος (Υποκατηγορία Α2)

Σε αυτήν την υποκατηγορία όπως και στην προηγούμενη αυτού του επεξηγηματικού πλαισίου τα παιδιά συνεχίζουν να αντιμετωπίζουν το σύμβολο του κλάσματος ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς. Συνεπώς τα κριτήρια τα οποία την περιορίζουν είναι ίδια με τα γενικά κριτήρια του επεξηγηματικού πλαισίου Κ*λάσμα/Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί* με τις εξής όμως διαφοροποιήσεις: Πρώτον, στις απαντήσεις των παιδιών εκφράζεται η κοινή τους πεποίθηση ότι *όσο μεγάλοι είναι ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος τόσο μικρή είναι η αξία που αντιπροσωπεύει το κλάσμα* και δεύτερο, ότι *η μονάδα* ως ο μικρότερος φυσικός αριθμός *είναι μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων*. Τα παιδιά που ταξινομήθηκαν σε αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο φαίνεται από τις απαντήσεις τους ότι συνεχίζουν να πιστεύουν ότι υπάρχει ένα μοναδικό μικρότερο και ένα μοναδικό μεγαλύτερο κλάσμα (όπως και στα προηγούμενα) και συνεχίζουν να διατάσσουν τα κλάσματα σύμφωνα με το μέγεθος των αριθμών που το απαρτίζουν ενώ οι αιτιολογήσεις τους έχουν σχέση με το μέγεθος των αριθμών που απαρτίζουν τα υπό σύγκριση κλάσματα. Αυτό ακριβώς είναι που τα διαφοροποιεί από τα παιδιά που τα ταξινομήσαμε στο επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας* που θα περιγράψουμε παρακάτω. Παρόλο δηλαδή που και εκεί τα παιδιά θεωρούν ότι η μονάδα είναι μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων χρησιμοποιούν διαφορετικές εξηγήσεις που έχουν σχέση με την ερμηνεία του κλάσματος ως το μέρος μιας μονάδας αναφοράς.

Μία ακόμη διαφοροποίηση στις απαντήσεις ορισμένων παιδιών που υιοθετούν αυτή την υποκατηγορία σχετίζεται με την εκτίμηση των πράξεων με κλάσματα, όπου τα παιδιά βρισκόμενα σε ένα μεταβατικό στάδιο, δεν εφαρμόζουν απλά τους κανόνες που ισχύουν στους φυσικούς αριθμούς σε όλες τις περιπτώσεις, αλλά εμφανίζουν στις απαντήσεις τους κάποιες λανθασμένες εκτιμήσεις που απορρέουν από μη αφομοιωμένους κανόνες που ισχύουν στα κλάσματα. (βλέπε Πίνακα 3.ΙΙΑ).

Ένα παράδειγμα μαθητή που υιοθετεί αυτό το πλαίσιο αποτελεί η περίπτωση της Νένας, μαθήτριας της έκτης δημοτικού (υποκ. #56), η οποία θεωρεί ότι μικρότερο κλάσμα είναι "το 357/800, γιατί όσο μεγάλο αριθμό βάζεις τόσο είναι και πιο μικρό κλάσμα", ενώ για το μεγαλύτερο κλάσμα απαντά "το 1/1, γιατί όσο πιο μικρό αριθμό βάζεις τόσο πιο μεγάλο είναι το κλάσμα". Από αυτές τις απαντήσεις καθώς επίσης και από τις υπόλοιπες των μαθητών που ταξινομήθηκαν στην *υποκατηγορία Α2*, γίνεται φανερό ότι οι μαθητές που υιοθετούν αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο έχουν αναπτύξει την εκ διαμέτρου αντίθετη πεποίθηση από τα αντίστοιχα παιδιά που ταξινομήθηκαν στα προηγούμενα, ότι δηλαδή όσο μικρότερη είναι η αξία των αριθμών που απαρτίζουν ένα κλάσμα τόσο μεγαλώνει η αξία του κλάσματος με αποτέλεσμα να θεωρούν ότι το κλάσμα 1/1 είναι το μεγαλύτερο κλάσμα.

Β. ΜΕΡΟΣ ΜΙΑΣ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΜΟΝΑΔΑΣ

Η ερμηνεία του κλάσματος ως μέρους μιας ακέραιας μονάδας περιορίζεται από τη βασική ιδέα ότι ένα κλάσμα δεν αντιπροσωπεύει έναν αριθμό αλλά ένα μέρος μιας ποσότητας η οποία παίζει το ρόλο της μονάδας αναφοράς. Το μέρος δηλώνεται από τον αριθμητή και τα μέρη στα οποία χωρίζεται η μονάδα αναφοράς δηλώνεται από τον παρονομαστή π.χ. το κλάσμα 4/5 σημαίνει τα τέσσερα από τα πέντε κομμάτια μιας πίττας ή ενός συνόλου αντικειμένων. Το επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας* ήταν ένα από τα υποθετικά επεξηγηματικά πλαίσια που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο (βλέπε Πίνακα 3.Ι, πιθανό επεξηγηματικό πλαίσιο Β) με κάποιες διαφοροποιήσεις.

Όπως φαίνεται στον Πίνακας 3.ΙΙ.Β (ομάδα ερωτήσεων 1), τα παιδιά που ταξινομήθηκαν σε αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο έδωσαν δύο συγκεκριμένα κλάσματα ως το μικρότερο και το μεγαλύτερο κλάσμα, τα οποία σε καμία περίπτωση δεν ξεπερνούσαν σε αξία την ακέραια μονάδα (είχαν δηλαδή αριθμητή μικρότερο ή ίσο του παρονομαστή -κατηγορία 3 -Πίνακας 3.1Β).

Συνεπώς και στο θέμα της σχέσης των κλασμάτων με την ακέραια μονάδα από τις απαντήσεις των παιδιών προκύπτει ότι τα παιδιά θεωρούν ότι η ακέραια μονάδα είναι μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων παρόλο που διατάσσουν σωστά τα κλάσματα στις ερωτήσεις διάταξης (βλ. Πίνακα 3.2Β –κατηγορία 6). Τα περισσότερα παιδιά που διατάσσουν με αυτό το τρόπο τα κλάσματα καταφεύγουν σε διαδικασίες μετατροπής των ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα με αποτέλεσμα να τα διατάσσουν σωστά χωρίς όμως να περιλαμβάνουν και τη μονάδα σε αυτή τη διαδικασία. Παρατηρούμε δηλαδή ότι τα παιδιά έχουν αναπτύξει κάποιες μηχανιστικές διαδικασίες στο να διατάσσουν σωστά τα κλάσματα (θέτοντας το καταχρηστικό κλάσμα ως μεγαλύτερο) χωρίς την κατανόηση των ισοδύναμων των κλασμάτων. Υπάρχουν ακόμη παιδιά, όπως για παράδειγμα η περίπτωση του μαθητή της έκτης δημοτικού (υποκ. #50), ο οποίος αναφέρει ότι το 4/15 είναι μικρότερο του 4/7, γιατί αν χωρίσουμε ένα κύκλο σε 15 μέρη τα κομμάτια γίνονται μικρότερα απ' ότι αν το χωρίζαμε σε 7 (βλ. Πίνακα 3.IV, Επεξηγηματικό πλαίσιο Β).

Η εσωτερική ασυνέπεια την οποία εμφανίζει αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο (η πεποίθηση από τη μια πλευρά ότι το μεγαλύτερο κλάσμα προσεγγίζει το πολύ τη μονάδα και η σωστή διάταξη των κλασμάτων μεταξύ τους –ακόμη και ενός καταχρηστικού) θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως μια φάση εννοιολογικής αλλαγής όπου το παιδί κατέχοντας τους μηχανισμούς της διάταξης πειραματίζεται εγκαταλείποντας ένα αφελές επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας* (το οποίο θα περιγράψουμε παρακάτω) και κάνοντας απόπειρες στο πλαίσιο του κλάσματος ως σχέση ανάμεσα στον αριθμητή και παρονομαστή.

Επιπλέον στο θέμα της απειρίας των κλασμάτων έγιναν αποδεκτές σε αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο απαντήσεις στις οποίες ανέφεραν ότι υπάρχουν και μικρότερα κλάσματα από αυτό που πρότειναν, τα οποία προσεγγίζουν το μηδέν (κατηγορία 3β -Πίνακας 3.1Β).

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.ΙΙ.Β -ερμηνεία Β, κατά την εκτίμηση των αριθμητικών πράξεων με κλάσματα τα παιδιά σχεδόν ποτέ δεν εκτιμούσαν σωστά το αποτέλεσμα μιας πράξης, αλλά υιοθετούσαν διάφορες διαδικασίες που εκφράζανε ένα συνοθύλευμα ιδεών και διαδικασιών που ίσχυαν στους φυσικούς αριθμούς καθώς επίσης και κάποιες νέες μη αφομοιωμένες ιδέες που ισχύουν στα κλάσματα (π.χ. ο πολλαπλασιασμός μικραίνει και η διαίρεση μεγαλώνει (βλ. Πίνακα 3.ΙΙ.Β). Συγκεκριμένα τα παιδιά είχαν πρόβλημα κατά την εκτίμηση της ορθότητας τόσο των αριθμητικών ισοτήτων που περιλάμβαναν προσθέσεις και αφαιρέσεις ετερώνυμων κλασμάτων, όσο και πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις (βλέπε Πίνακα 3.IV, παράδειγμα επεξηγηματικού πλαισίου Β). Ακόμη υπήρχαν παιδιά που εκτιμούσαν ορθά την ισότητα της ερώτησης 19 επειδή μπορούσαν να αναγνωρίσουν ότι το άθροισμα $\frac{1}{8}$ + 2 είναι ίσο με τον μεικτό $2\frac{1}{8}$ το οποίο μπορούσαν να το μεταφράσουν με το κλάσμα $\frac{17}{8}$.

Στις εικονικές αναπαραστάσεις μιας πράξης, τα παιδιά αντιστοιχούσαν τα δύο κλάσματα που περιελάμβανε αντίστοιχα η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός σε *ίσα μέρη δύο ίσων σχημάτων*, χωρίς να διαφοροποιούν πάντα τις πράξεις του πολλαπλασιασμού από της πρόσθεσης. Ακόμη υπήρχαν παιδιά τα οποία αφού πρώτα εκτέλεσαν την αριθμητική πράξη αναπαράστησαν στη συνέχεια το αποτέλεσμα ως το μέρος ενός σχήματος (βλ. Πίνακα 3.ΙΙ.Β –Επεξηγηματικό πλαίσιο Β).

Ακόμη στις ερωτήσεις που έπρεπε να μεταφράσουν τα σκιαγραφημένα μέρη ενός σχήματος με μια αριθμητική πράξη τα παιδιά αντιστοιχούσαν συνήθως τα σκιαγραφημένα μέρη ενός σχήματος σε δύο κλάσματα (σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία) ή ακόμη και στο άθροισμα αυτών (και στην περίπτωση που η αναμενόμενη πράξη ήταν πολλαπλασιασμός), χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους ότι η μονάδα αναφοράς ήταν μία (κατηγορίες 2, 3 και 5, Πίνακας 3.6Β).

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.IV-παράδειγμα ερμηνείας Β, ένα παράδειγμα παιδιού που ταξινομήθηκε σε αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο αποτελεί ο Χρήστος, μαθητής της Α΄ γυμνασίου.

Στο επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας* διακρίναμε δύο ομάδες παιδιών των οποίων οι απαντήσεις φανέρωναν τις ίδιες πεποιθήσεις που αναφέραμε και παραπάνω διαφοροποιημένες όμως ως προς το βαθμό που έχουν αναπτύξει κάποιες ιδέες τα παιδιά. Τα παιδιά αυτά καθόρισαν τις δύο υποκατηγορίες του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας*. Τα κριτήρια βάση των οποίων διακρίναμε αυτές τις δύο υποκατηγορίες έχουν σχέση α) με το βαθμό που τα παιδιά έχουν αναπτύξει διαδικασίες ώστε να διατάσσουν τόσο τα κλάσματα μεταξύ τους όσο τα κλάσματα σε σχέση με μια ακέραια μονάδα, β) με την επίγνωση ή όχι ότι ο διαμερισμός μιας μονάδας προϋποθέτει το χωρισμό (π.χ. ενός σχήματος ή ενός συνόλου) σε ίσα μέρη ή σε ισοδύναμα υποσύνολα αντίστοιχα, και γ) με την ικανότητα των παιδιών να αναγνωρίζουν ότι για να συσχετιστούν δύο κλάσματα πρέπει να αναφέρονται σε κάποια κοινή μονάδα – για παράδειγμα, αν τα σχήματα τα οποία ζωγραφίζουν για να αναπαραστήσουν το κάθε κλάσμα ενός αθροίσματος είναι ίσα.

Παρακάτω προσπαθούμε να περιγράψουμε αυτές τις δύο υποκατηγορίες ξεκινώντας από το πιο πρώιμο, *το Αφελές επεξηγηματικό πλαίσιο Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας* (βλ. Πίνακα 3.ΙΙ.Β – *υποκατηγορία Β1*) και προχωρώντας σε ένα πιο σύνθετο από το επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας* (βλ. Πίνακα 3.ΙΙ.Β – *υποκατηγορία Β2*)

Αφελές μέρος μιας μονάδας (Υποκατηγορία. Β1)

Ονομάσαμε αυτή την υποκατηγορία *Αφελές Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας* διότι στις απαντήσεις των παιδιών που την υιοθετούν διαφαίνονται κάποιες ιδέες του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας* που σχετίζεται με τον διαμερισμό ενός φυσικού αντικειμένου (χωρίζω ή κόβω ένα φυσικό αντικείμενο σε κομμάτια), ενώ συγχρόνως συνυπάρχουν πολλά στοιχεία των φυσικών αριθμών. Συνεπώς ένα οποιοδήποτε κλάσμα συνεχίζει να αντιπροσωπεύει ένα μέρος μιας μονάδας και ως τέτοιο να αντιπροσωπεύει πάντα αξία μικρότερη της μονάδας. Στον Πίνακα 3.ΙΙ.Β, επισημαίνονται οι επιμέρους διαφοροποιήσεις αυτής της υποκατηγορίας από το βασικό επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας*.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.II.B -υποκατηγορία B1, οι μαθητές που ταξινομήθηκαν στο επεξηγηματικό πλαίσιο B, αναγνωρίζουν έστω και διαδικαστικά την αριθμητική αξία των καταχρηστικών κλασμάτων. Αντίθετα εδώ δεν αναφέρθηκαν καθόλου στα καταχρηστικά κλάσματα. Έτσι στις ερωτήσεις της δεύτερης ομάδας τα παιδιά αντιμετώπισαν πρόβλημα στη διάταξη των καταχρηστικών κλασμάτων, που είχε ως αποτέλεσμα να υιοθετήσουν κανόνες διάταξης των φυσικών αριθμών (όπως στο πλαίσιο των *Δύο Ανεξάρτητων Φυσικών Αριθμών*) ή να μεταφράζουν λανθασμένα το κλάσμα 4/3 ως τα τρία κομμάτια από τα τέσσερα. Στα υπόλοιπα έργα διάταξης που περιελάμβαναν απλά κλάσματα συνέχισαν να συγκρίνουν τα κλάσματα μεταφράζοντάς τα ως μικρότερα ή μεγαλύτερα κομμάτια μιας ποσότητας την οποία θεωρούσαν ως μονάδα αναφοράς - πάντα μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων (ομάδα ερωτήσεων 2, κατηγορίες 2, 4 - Πίνακας 3.2B) ή χρησιμοποιούσαν κανόνες που ίσχυαν στη διάταξη των φυσικών αριθμών (βλ, Πίνακα 3.II.B).

Κατά την εκτίμηση των αριθμητικών πράξεων με κλάσματα οι διαφοροποιήσεις που υπήρχαν είχαν να κάνουν με το γεγονός ότι τα περισσότερα παιδιά εκτιμούσαν τις πράξεις όπως τις πράξεις με φυσικούς αριθμούς.

Από τις ζωγραφιές τους φάνηκε ότι τα παιδιά δεν είχαν ξεκαθαρίσει πλήρως το θέμα του ισομερισμού της ακέραιας μονάδας, οπότε και στην περίπτωση που ζωγράφιζαν, για παράδειγμα ένα κύκλο και τον χώριζαν σε ίσα περίπου μέρη, όταν καλούνταν να αναπαραστήσουν αριθμητικά τα σκιαγραφημένα μέρη ενός σχήματος (ερώτηση 21) δεν ικανοποιούσαν πάντα το κριτήριο του ισομερισμού της μονάδας, δεν θεωρούσαν δηλαδή απαραίτητο να είναι ίσα τα μέρη του σχήματος.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός παιδιού που ταξινομήθηκε σε αυτήν την υποκατηγορία, αποτελεί η μαθήτρια της ΣΤ΄ δημοτικού (υποκ. #74) η οποία θεωρεί ότι "το μικρότερο κλάσμα έχει ένα μεγάλο αριθμό για παρονομαστή και τον πιο μικρό αριθμό για αριθμητή, το 1/10, γιατί έτσι παίρνουμε ένα πολύ μικρό κομμάτι απ' αυτό το μέρος", ενώ ότι "μεγαλύτερο είναι το 10/10, γιατί έτσι παίρνω ολόκληρο το κομμάτι, δηλαδή όλο το μέρος π.χ. μιας πίτας". Ακόμη στις ερωτήσεις διάταξης κλασμάτων διατάσσει τους αριθμούς με τη σειρά 1/7, 4/3, 5/6 και 1 ή θεωρεί ότι το 4/5>2/5 και εξηγεί "γιατί έχουμε ένα μεγάλο αριθμητή και ένα μεγάλο παρονομαστή και όταν παίρνουμε τα τέσσερα από τα πέντε μας μένει μόνο ένα, ενώ στο άλλο έχουμε μεγάλο παρονομαστή και μικρό αριθμητή κι έτσι παίρνουμε πολύ λίγο".

Ένα άλλο παράδειγμα παιδιού που ταξινομήθηκε σε αυτό το πλαίσιο αποτελεί η μαθήτρια της πέμπτης τάξης (υποκείμενο #37) η οποία θεωρεί ότι το 1/5 είναι το μικρότερο κλάσμα "γιατί έχει το μικρότερο αριθμητή" και το 4/4 είναι το μεγαλύτερο "γιατί φανερώνει μια ακέραια μονάδα". Στις ερωτήσεις διάταξης συγκρίνει τα κλάσματα με κριτήριο το μέγεθος του αριθμητή ή του παρονομαστή έχοντας την πεποίθηση ότι όσο μικραίνει ο αριθμητής ή ο παρονομαστής μεγαλώνει η αξία του κλάσματος. Έτσι θεωρεί ότι το 2/5>4/5 γιατί έχει μικρότερο αριθμητή ή ότι το 4/3>5/8 γιατί έχει μικρότερο παρονομαστή ή ότι το 5/6>2/7 γιατί έχει μικρότερο παρονομαστή επίσης, και φυσικά μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων θεωρεί ότι είναι η μονάδα. Ακόμη στις εκτιμήσεις του αποτελέσματος των πολ/σμων και των διαιρέσεων του φυσικού αριθμού 17 με ένα κλάσμα θεωρεί ότι το αποτέλεσμα είναι πάντα μεγαλύτερο, εκτελώντας λανθασμένα τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις. Μετατρέπει σωστά όλες τις διαιρέσεις σε πολλαπλασιασμούς αντιστρέφοντας το κλάσμα και στη συνέχεια πολλαπλασιάζει τον αριθμό 17 μόνο με τον αριθμητή του αντεστραμμένου κλάσματος. Στις εκτιμήσεις των ισοτήτων που περιέχουν πράξεις θεωρεί ότι μόνο ο πολλαπλασιασμός είναι σωστός ενώ στις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις θεωρεί ότι θα έπρεπε να γίνουν πρώτα τα κλάσματα ομώνυμα και εκτιμά ότι η πρόσθεση 1/2 + 1/4 = 3/4 είναι λάθος. Ακόμη στην ισότητα 1/8 + 2 = 17/8 αποφαίνεται ότι είναι λάθος γιατί 1+8=9. Στις εικονικές αναπαραστάσεις αντιστοιχεί το λανθασμένο αποτέλεσμα της πρόσθεσης (πράξεις όπως φυσικοί αριθμοί) και το σωστό του πολλαπλασιασμού σε μέρος ενός σχήματος. Στην αντίστροφη διαδικασία όπου είχε να αντιστοιχίσει τα χρωματισμένα μέρη ενός σχήματος σε μια αριθμητική πράξη, αντιστοιχεί τα διαφορετικά χρωματισμένα μέρη σε δύο κλάσματα και στο άθροισμα αυτών χωρίς να θεωρεί απαραίτητη μια κοινή μονάδα αναφοράς.

Προχωρημένο Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας (Υποκατηγορία. Β2)

Τα παιδιά που ταξινομήθηκαν σε αυτή την υποκατηγορία, ενώ εμφανίζανε στις απαντήσεις τους ιδέες του κλάσματος ως μέρους μιας μονάδας, είχαν αναπτύξει συγχρόνως διαδικασίες σύγκρισης κλασμάτων έτσι ώστε να μπορούν να διατάσσουν σωστά τόσο τα κλάσματα όσο και την ακέραια μονάδα. Ενώ δηλαδή στο βασικό επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρους μιας Ακέραιας Μονάδας*, παρόλο που διάτασσαν σωστά τα κλάσματα, συνέχιζαν να θεωρούν ότι η μονάδα είναι μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων, σε αυτή την υποκατηγορία, κατά τη διαδικασία σύγκρισης των κλασμάτων περιελάμβαναν και την ακέραια μονάδα την οποία μετέφραζαν στο κλάσμα 1/1 ή ακόμη σε μερικές περιπτώσεις την χρησιμοποιούσαν ως σημείο αναφοράς στη διαδικασία σύγκρισης (βλ., Πίνακα 3.II.B *–υποκατηγορία Β2*).

Ακόμη στις εικονικές αναπαραστάσεις τα παιδιά χώριζαν πάντα τα σχήματα που ζωγράφιζαν σε ίσα μέρη, χωρίς να υπάρχει ούτε ένα παιδί που να μην λάβει υπόψη του τα ίσα μέρη που απαιτούνται στο μερισμό ενός σχήματος.

Αντίθετα όμως, τα παιδιά συνέχιζαν να αντιστοιχίζουν τα χρωματισμένα μέρη του σχήματος σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία σε δύο κλάσματα ή και στο άθροισμα αυτών χωρίς να θεωρούν απαραίτητη την κοινή μονάδα αναφοράς και στην ιδιαίτερη περίπτωση του διπλά χρωματισμένου σχήματος χωρίς να αντιλαμβάνονται ότι η κατάλληλη πράξη που θα μπορούσε να εκφράσει το διπλά χρωματισμένο σχήμα δεν είναι σίγουρα η πρόσθεση (βλ., Πίνακα 3.II.B *–υποκατηγορία Β2*, ομάδες ερωτήσεων 5 και 6).

Γ. ΣΧΕΣΗ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ (Συσχετιστικό Επεξηγηματικό Πλαίσιο)

Τα παιδιά σε αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο αντιμετωπίζουν το κλάσμα ως το αποτέλεσμα μιας σχέσης ανάμεσα στον αριθμητή και τον παρονομαστή του χωρίς αυτή να σχετίζεται με μια συγκεκριμένη σχέση μέρους-όλου, όπως στο προηγούμενο επεξηγηματικό πλαίσιο.

(ο Πίνακας 3.II.Γ περίπου εδώ)

Τα παιδιά εδώ παρουσίαζαν στις απαντήσεις τους τη βασική πεποίθηση ότι ένα κλάσμα για να είναι μεγάλο, πρέπει σίγουρα να είναι καταχρηστικό (αριθμητής μεγαλύτερος του παρονομαστή). Η πεποίθηση αυτή των παιδιών διαφοροποιεί κατά συνέπεια αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο από τα προηγούμενα όπου στις απαντήσεις των παιδιών απουσίαζε η έννοια του καταχρηστικού κλάσματος. Επίσης τα περισσότερα από τα παιδιά που ταξινομήθηκαν σε αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο πιστεύουν ότι οι αριθμοί είναι άπειροι και ότι το κλάσμα αποτελεί στοιχείο ενός απειροσυνόλου της μορφής p/q, όπου $q \neq 0$· συμβολίζουν δε το μικρότερο και το μεγαλύτερο κλάσμα όπως περιγράψαμε παραπάνω. Επιπλέον σε αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο έγιναν δεκτές και οι απαντήσεις των παιδιών τα οποία δεν έδωσαν κανένα σύμβολο για το μικρότερο και το μεγαλύτερο κλάσμα, εξηγώντας ότι οι αριθμοί είναι άπειροι και κατά συνέπεια δεν υπάρχει ένα μικρότερο ή ένα μεγαλύτερο κλάσμα.

Στις ερωτήσεις διάταξης τα παιδιά διέταξαν σωστά τα κλάσματα και τη μονάδα και από τις απαντήσεις τους φάνηκε να γνωρίζουν ότι η αξία ενός κλάσματος μπορεί να είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη μιας ακέραιας μονάδας. Στις απαντήσεις τους χρησιμοποίησαν διάφορες ερμηνείες του κλάσματος για να εξηγήσουν τη σειρά με την οποία διέταξαν τα κλάσματα. Άλλοτε μετέφρασαν τα κλάσματα σε κομμάτια μιας μονάδας τα οποία στη συνέχεια τα συνέκριναν μεταξύ τους ή χρησιμοποιούσαν την ακέραια μονάδα ως σημείο αναφοράς των συγκρίσεων που τους ζητούσαμε να κάνουν ή μετέτρεπαν τα κλάσματα στα αντίστοιχα ισοδύναμά τους με τον ίδιο παρονομαστή και στη συνέχεια τα έβαζαν σε μια σειρά σε σχέση με τους αριθμητές τους, αν και τα περισσότερα παιδιά χρησιμοποιούσαν κανόνες σύγκρισης κλασμάτων –ότι όσο μεγαλώνει ο αριθμητής και μικραίνει ο παρονομαστής ενός κλάσματος τόσο μεγαλώνει και η αξία του κλάσματος (βλ., Πίνακα 3.ΙΙ.Γ – *Επεξηγηματικό πλαίσιο Γ*).

Στις εκτιμήσεις των αριθμητικών πράξεων με κλάσματα τα περισσότερα παιδιά πειραματίστηκαν με διαδικασίες εκτέλεσης πράξεων που ισχύουν στα κλάσματα χωρίς να αποφύγουν διάφορα διαδικαστικά λάθη κατά την εκτέλεση των πράξεων, που οφείλονταν στους μη αφομοιωμένους νέους κανόνες που ίσχυαν στα κλάσματα (για παραδείγματα, βλ. Πίνακες 3.ΙΙ.Γ και 3.IV).

Στις εικονικές αναπαραστάσεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού τα παιδιά ήταν σε θέση να μεταφράσουν μια πρόσθεση δύο κλασμάτων σε άθροισμα μερών ίσων σχημάτων ή του ίδιου σχήματος καθώς επίσης να μεταφράζουν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ως μέρος ενός σχήματος. Στον πολλαπλασιασμό όμως και στην περίπτωση που δεν αντιστοιχούσαν το αποτέλεσμα του γινομένου ως μέρος ενός σχήματος, συνέχιζαν να αντιστοιχούν το κάθε κλάσμα ως το μέρος ενός σχήματος, εκφράζοντας στην ουσία το άθροισμα των δύο κλασμάτων, ενώ ο πολλαπλασιασμός μπορεί να μεταφραστεί εικονικά ως το μέρος ενός μέρους μιας ακέραιας μονάδας.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.ΙΙ.Γ, στις αντιστοιχίσεις των χρωματισμένων μερών των δεδομένων σχημάτων σε αριθμητικές πράξεις είτε αντιστοίχιζαν τα χρωματισμένα μέρη του σχήματος σε ένα κλάσμα λαμβάνοντας υπόψη τους το χωρισμό του σχήματος σε ίσα μέρη, είτε σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία σε δύο κλάσματα ή και στο άθροισμα αυτών χωρίς να θεωρούν απαραίτητη μια κοινή μονάδα αναφοράς και χωρίς να διαφοροποιούν τις πράξεις της πρόσθεσης από του πολλαπλασιασμού.

Ας σημειωθεί, ότι υπήρχαν παιδιά της πέμπτης Δημοτικού, τα οποία ικανοποιούσαν τα παραπάνω κριτήρια με μια εξαίρεση. Δεν θεωρούσαν αναγκαίο το διαχωρισμό της μονάδας αναφοράς σε ίσα μέρη, όπως προέκυπτε από τις απαντήσεις τους στις μεταφράσεις των εικονικών αναπαραστάσεων σε αριθμητικές πράξεις (ομάδα ερωτήσεων 6). Αυτά λοιπόν τα παιδιά τα εντάξαμε στο μικτό επεξηγηματικό πλαίσιο (Μ4), και θα αναφερθούμε σε αυτό παρακάτω.

Σχέση δύο αριθμών χωρίς αναφορά στην απειρία (Υποκατηγορία Γ1)

Υπήρχαν αρκετά παιδιά τα οποία ενώ φαινόταν να αντιμετωπίζουν το κλάσμα ως μια σχέση του αριθμητή και του παρονομαστή του, δεν αναφέρθηκαν καθόλου στο θέμα της απειρίας των αριθμών. Συγκεκριμένα όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.ΙΙ.Γ-υποκατηγορία Γ1, στην πρώτη ομάδα ερωτήσεων ανέφεραν δύο κλάσματα ως το μικρότερο και το μεγαλύτερο αντίστοιχα. Ιδιαίτερα για το μεγαλύτερο κλάσμα έδιναν πάντα ένα καταχρηστικό (αριθμητής μεγαλύτερος του παρονομαστή) δίνοντας και ως εξήγηση ότι είναι το μεγαλύτερο γιατί είναι μεγαλύτερο της μονάδας. Θεωρώντας ότι η κατάκτηση της έννοιας της απειρίας των κλασμάτων έχει μεγάλη σχέση με την αντιμετώπιση του κλάσματος ως αριθμού, και παρόλο που το παραπάνω αποτελεί τη μοναδική διαφοροποίηση στις απαντήσεις των παιδιών από το επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Σχέση δύο Αριθμών*, εντάξαμε τα παιδιά αυτά σε μια ξέχωρη υποκατηγορία.

Ένα παράδειγμα παιδιού που ταξινομήθηκε σε αυτή την υποκατηγορία, αποτελεί η περίπτωση του μαθητή της Β΄ γυμνασίου (υποκ. 149), που θεωρεί ότι μικρότερο κλάσμα είναι το 1/100 γιατί προσεγγίζει κατά πολύ το μηδέν, ενώ μεγαλύτερο το 100/1, χωρίς να δίνει περαιτέρω εξηγήσεις. Ακόμη αυτό το παιδί διατάσσει σωστά όλα τα κλάσματα, εκτιμά σωστά τους πολλαπλασιασμούς ενώ δεν εκτιμά σωστά τις διαιρέσεις, αναγνωρίζει ότι το κλάσμα 2/2 και 3/3 ισοδυναμεί με μια ακέραια μονάδα και εκτιμά σωστά τις αριθμητικές ισότητες με κλάσματα. Στις αντιστοιχίσεις των αριθμητικών πράξεων σε εικονικές, αναπαριστά τα δύο κλάσματα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ως μέρη δύο κύκλων, χωρίς να διαφοροποιεί τις εικονικές αναπαραστάσεις του πολλαπλασιασμού από αυτές της πρόσθεσης. Το ίδιο ακριβώς κάνει και στην αντίστροφη αντιστοίχηση όπου αντιστοιχεί τα σκιαγραφημένα μέρη σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία σε δύο κλάσματα και στο άθροισμα αυτών.

Σχέση δύο αριθμών (Υποκατηγορία Γ2 -Επιστημονικό Επεξηγηματικό Πλαίσιο)

Σε αυτήν την υποκατηγορία του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα /Σχέση δύο Αριθμών* οι απαντήσεις των παιδιών είναι παρόμοιες με τις ενδεικτικές πρότυπες απαντήσεις των παιδιών στο πιθανό επιστημονικό επεξηγηματικό πλαίσιο που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο πλαίσιο (βλ. Πίνακα 3.Ι – πιθανό επιστημονικό επεξηγηματικό πλαίσιο Γ και Πίνακα 3.ΙΙ.Γ – *υποκατηγορία Γ2*).

Μια σημαντική διαφοροποίηση από το βασικό επεξηγηματικό πλαίσιο αφορά τον τρόπο που τα παιδιά αναπαράστησαν με μια ζωγραφιά το άθροισμα και το γινόμενο δύο κλασμάτων, όπου αν και τα περισσότερα παιδιά αφού εκτέλεσαν την πράξη αναπαράστησαν το σωστό αποτέλεσμα ως μέρος ενός σχήματος υπήρχαν παιδιά αναπαράστησαν διαφορετικά τις δύο αριθμητικές πράξεις. Έτσι ορισμένα παιδιά αντιστοίχισαν τα δύο κλάσματα της πρόσθεσης σε μέρη δύο ίσων σχημάτων, ενώ στον πολλαπλασιασμό αναπαράστησαν το αποτέλεσμα ως μέρος ενός σχήματος. Υπήρχε ένα μόνο κορίτσι της Β΄ γυμνασίου, η Ηλέκτρα (#135), που αναπαράστησε τα δύο κλάσματα της κάθε πράξης στο ίδιο σχήμα με διαφορετικό τρόπο για την πρόσθεση από ότι για τον πολλαπλασιασμό.

Ακόμη όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.ΙΙ.Γ τα παιδιά σε αυτή την υποκατηγορία είναι σε θέση να εκτιμήσουν σωστά μια πράξη με κλάσματα (για παράδειγμα, βλ. τις απαντήσεις του Θανάση στον Πίνακα 3.ΙV).

Είναι σημαντικό ακόμη να παρατηρήσουμε ότι στις εξηγήσεις των παιδιών στις ερωτήσεις της διάταξης κλασμάτων τα παιδιά χρησιμοποίησαν την ακέραια μονάδα ως σημείο αναφοράς για να συγκρίνουν τα διάφορα κλάσματα. Εδώ πια έχει αφομοιωθεί σε τέτοιο βαθμό η έννοια της αξίας του κλάσματος σε σχέση με τη μονάδα ώστε τα παιδιά βρίσκουν αυτό τον οικονομικό τρόπο να συγκρίνουν τα κλάσματα.. Ακόμη στην περίπτωση που δεν χρησιμοποιούν τη μονάδα ως σημείο αναφοράς, εκτελούν τις διαιρέσεις του αριθμητή δια τον παρονομαστή και συγκρίνουν στη συνέχεια τα πηλίκα που προκύπτουν (ας σημειώσουμε ότι κάποια παιδιά ανέφεραν ότι μετατρέπουν τα κλάσματα στους αντίστοιχους δεκαδικούς αριθμούς).

3.4.3. Μικτά Επεξηγηματικά πλαίσια

Η εξέταση των δεδομένων της έρευνάς μας καθώς επίσης και πληροφορίες που είχαμε από παρεμφερείς προηγούμενες έρευνες (βλ. υποκεφάλαιο 1.4) μας οδήγησε στη καθορισμό των παραπάνω επεξηγηματικών πλαισίων της έννοιας του κλάσματος. Από τις απαντήσεις των παιδιών φάνηκε ότι τα περισσότερα παιδιά, το 89% συνολικά του δείγματός μας, μπόρεσαν να ταξινομηθούν σ’ ένα περιορισμένο αριθμό επεξηγηματικών πλαισίων της έννοιας του κλάσματος. Υπήρχαν όμως παιδιά τα οποία δεν ικανοποιούσαν τα αντίστοιχα κριτήρια ώστε να ταξινομηθούν σε κάποιο από τα παραπάνω επεξηγηματικά πλαίσια. Στην περίπτωση που τα παιδιά εμφάνιζαν ασυνέπειες στις απαντήσεις τους ταξινομήθηκαν στη μικτή κατηγορία νοητικών μοντέλων.

Γενικότερα υπήρχαν κάποια παιδιά τα οποία είτε επειδή δεν απάντησαν σε κάποιες σημαντικές ερωτήσεις είτε διότι το σχήμα των απαντήσεών τους δεν είχε καμία συνέπεια προς κάποιες ιδέες δεν μπορέσαμε να τα ταξινομήσουμε σε κάποιο από τα παραπάνω επεξηγηματικά πλαίσια της έννοιας του κλάσματος και τα ταξινομήσαμε είτε σε μικτές κατηγορίες, είτε στις ελλιπείς είτε στις αντιφατικές ή μη κατηγοριοποιήσιμες κατηγορίες.

Μικτό 1: Ορισμένοι μαθητές ενώ θα μπορούσαν να ταξινομηθούν στην υποκατηγορία του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα/Σχέση δύο Αριθμών χωρίς αναφορά στην απειρία των αριθμών (Γ2)*, επειδή από τις απαντήσεις τους φάνηκε να πιστεύουν ότι ένα κλάσμα για να είναι μεγάλο πρέπει να είναι καταχρηστικό, συγχρόνως θεωρούσαν ότι τα κλάσματα είναι μικρότερα της ακέραιας μονάδας, όπως προέκυψε από τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις της διάταξης των κλασμάτων.

Συγκεκριμένα, οκτώ παιδιά θα μπορούσαν να ταξινομηθούν είτε στο παραπάνω επεξηγηματικό πλαίσιο του κλάσματος, είτε στην υποκατηγορία του πλαισίου του *Κλάσμα/Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί που όσο μεγαλώνουν μικραίνει η αξία του κλάσματος (Α2)* ή στο επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας (Β),* γιατί θεωρούν ότι η ακέραια μονάδα είναι μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων όπως προκύπτει από τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις της διάταξης των κλασμάτων.

Έτσι για παράδειγμα η μαθήτρια της Ε΄ δημοτικού (υποκ. #20) θεωρεί από τη μια πλευρά ότι το πιο μικρό κλάσμα είναι το 1/99999 γιατί ο αριθμός 99999 χωρίζεται σε πολλά κομμάτια, ενώ μεγάλο κλάσμα είναι το 99999/1 γιατί το 1 είναι μια ολόκληρη ακέραια μονάδα και συγχρόνως θεωρεί ότι η μονάδα είναι μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων.

Επίσης τα παιδιά που εντάσσονται σε αυτό το μικτό πλαίσιο αφ' ενός εκτιμούν τις πράξεις με κλάσματα επηρεασμένα από τις πράξεις με φυσικούς αριθμούς και αφ' ετέρου αναπαριστούν εικονικά με όμοιες αναπαραστάσεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων, αναπαριστώντας τα κλάσματα που περιλαμβάνουν οι πράξεις ως μέρη όχι απαραίτητα ιδίων σχημάτων.

Μικτό 2: Τέσσερα παιδιά της πέμπτης δημοτικού, ενώ φανερώνουν ιδέες *Κλάσμα/Αφελές Μέρος μιας Μονάδας*, όπως το περιγράψαμε παραπάνω, συγχρόνως αναφέρονται σε ένα καταχρηστικό κλάσμα όταν αναφέρονται στο μεγαλύτερο κλάσμα. Τα παιδιά αυτά δεν ήταν δυνατόν να τα εντάξουμε ούτε στο επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας (Β)*, ούτε στην υποκατηγορία του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα/Σχέση δύο Αριθμών χωρίς αναφορά στην απειρία των αριθμών (Γ1)*.

Ακόμη υπήρχαν παιδιά των οποίων οι απαντήσεις δεν υποδήλωναν καμία συνέπεια προς κάποιες ιδέες για το κλάσμα (ούτε τις ασυνέπειες όπως αυτές που εμφανίζονται στα μικτά επεξηγηματικά πλαίσια που περιγράψαμε παραπάνω). Συνεπώς δεν ήταν δυνατή η ταξινόμησή τους σε κάποια από τα προηγούμενα επεξηγηματικά πλαίσια.

Επιπλέον μια ομάδα παιδιών δεν απάντησε σε αρκετές από τις ερωτήσεις με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή και σε αυτή την περίπτωση δυνατή η ένταξή τους σε κάποιο από τα επεξηγηματικά πλαίσια.

3.4.4. Ανακεφαλαίωση – Σχέση της ηλικίας με το είδος των Επεξηγηματικών Πλαισίων

Συνοψίζοντας τα παραπάνω μπορέσαμε να εντοπίσουμε τρία επεξηγηματικά πλαίσια για την έννοια του κλάσματος καθώς επίσης και δύο υποκατηγορίες του καθενός από αυτά. Ακολουθώντας το δεύτερο επίπεδο ανάλυσης των δεδομένων της έρευνάς μας μπορέσαμε να ταξινομήσουμε το 89% των μαθητών του δείγματός μας στα επεξηγηματικά πλαίσια που περιγράψαμε παραπάνω και στις υποκατηγορίες τους. Αυτοί οι μαθητές ικανοποιούσαν με συνέπεια τα κριτήρια του αντίστοιχου επεξηγηματικού πλαισίου ή της αντίστοιχης υποκατηγορίας όπως τα περιγράψαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Για την αξιοπιστία αυτής της διαδικασίας ταξινόμησης, χρησιμοποιήθηκε ένας δεύτερος βαθμολογητής για το 25% των παιδιών του δείγματός μας (δέκα παιδιά για κάθε μια από τις ηλικιακές ομάδες). Η σύγκριση των δύο ανεξάρτητων βαθμολογήσεων κατέληξε σε συμφωνία μεταξύ τους της τάξης του 97%. Στον Πίνακα 3.ΙΙΙ, παρουσιάζονται τα ποσοστά των μαθητών που υιοθέτησαν τα αντίστοιχα επεξηγηματικά πλαίσια σε συνάρτηση με την ηλικία των παιδιών.

(ο Πίνακας 3.ΙΙΙ περίπου εδώ)

Όπως φαίνεται υπάρχει μια εξέλιξη στα επεξηγηματικά πλαίσια που χρησιμοποιούν τα παιδιά σε σχέση με την ηλικία τους. Παρατηρούμε ότι τα περισσότερα παιδιά της πέμπτης δημοτικού υιοθέτησαν είτε το επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί*, είτε το επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας*. Τα παιδιά της έκτης δημοτικού παρουσιάζουν περίπου τις ίδιες συχνότητες με τη διαφορά ότι υπάρχουν περισσότερα παιδιά που υιοθετούν το επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/ Προχωρημένο Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας*. Τα παιδιά της πρώτης γυμνασίου εμφανίζονται να υιοθετούν το ίδιο όλα σχεδόν τα επεξηγηματικά πλαίσια και τις υποκατηγορίες τους.

Αυτό που γίνεται αρκετά εμφανές στον Πίνακα 3.ΙΙΙ, είναι ότι τα περισσότερα παιδιά της δευτέρας γυμνασίου καθώς επίσης και της πρώτης λυκείου παύουν να χρησιμοποιούν σταδιακά τα αρχικά επεξηγηματικά πλαίσια και μεγαλώνει ο αριθμός των παιδιών που υιοθετεί το επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Σχέση δύο Αριθμών* με αναφορά στην απειρία.

Θα ήταν σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι παρόλο που εμφανίζεται να υπάρχει ο ίδιος αριθμός παιδιών που υιοθετεί την υποκατηγορία Γ1 του επεξηγηματικού πλαισίου Γ *του Κλάσματος – Σχέση δύο αριθμών*, ο αριθμός των παιδιών που υιοθετεί το ίδιο επεξηγηματικό πλαίσιο και ακόμη περισσότερο την υποκατηγορία του Γ2 διαφοροποιείται ριζικά σε σχέση με την ηλικία (βλ. Πίνακα 3.ΙΙΙ).

Συνοψίζοντας, από την κατανομή των παιδιών στα διάφορα επεξηγηματικά πλαίσια της έννοιας του κλάσματος συμπεραίνουμε ότι τα παιδιά με μια σταδιακά εξελικτική πορεία αναδιοργανώνουν τις αρχικές τους ερμηνείες του κλάσματος που σχετίζονταν με τις προϋπάρχουσες γνώσεις για τους φυσικούς αριθμούς και με την ερμηνεία του κλάσματος ως το μέρος μιας μονάδας αναφοράς και προσεγγίζουν ένα επιστημονικό επεξηγηματικό πλαίσιο διαμέσου λιγότερο ή περισσότερο προωθημένων υποκατηγοριών των επεξηγηματικών πλαισίων.

Για τη διερεύνηση της ύπαρξης σχέσης ανάμεσα στην επιλογή του επεξηγηματικού πλαισίου και της ηλικίας, εκτελέστηκε ο έλεγχος x^2 ανεξαρτησίας. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.V η μεταβλητή της ηλικίας περιλαμβάνει πέντε κατηγορίες (Ε΄, ΣΤ΄ Δημοτικού, Α΄, Β΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου, ενώ η μεταβλητή του Επεξηγηματικού Πλαισίου περιλαμβάνει τις εξής επτά: 1) Το Επεξηγηματικό Πλαίσιο *Κλάσμα/Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί (Α)* και τις υποκατηγορίες του Α1 και Α2, 2)το επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας* και τις υποκατηγορίες του, 3) την υποκατηγορία Γ1 του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα/Σχέση δύο Αριθμών* χωρίς αναφορά στην απειρία των αριθμών και την υποκατηγορία του Γ2. Επιπλέον στην κατηγορία 5 περιλαμβάνονται όλα τα μικτά επεξηγηματικά πλαίσια ενώ στην κατηγορία 6 οι μαθητές που ταξινομήθηκαν στα ασαφή.

(ο Πίνακας 3.V περίπου εδώ)

Το αποτέλεσμα του ελέγχου έδειξε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση ανάμεσα στην επιλογή του επεξηγηματικού πλαισίου και της ηλικίας (x^2 =42,19; β.ε.=20; ασυμπ. ρ<0,01) (βλ. Πίνακα 3.V).

3.5 ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προέκυψε ότι περίπου το 90% του συνόλου των μαθητών του δείγματός μας χρησιμοποίησε με συνέπεια ένα μικρό αριθμό επεξηγηματικών πλαισίων της έννοιας του κλάσματος.

Επαληθεύτηκε, λοιπόν, η υπόθεσή μας ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν σαν βάση για την κατάκτηση της γνώσης των κλασμάτων τη γνώση που ήδη κατέχουν για τους φυσικούς αριθμούς. Η γνώση των φυσικών αριθμών μπορεί να θεωρηθεί ως η διαισθητική θεωρία που διαθέτουν τα παιδιά γενικά για την έννοια του αριθμού (θεωρία βάσης). Βασιζόμενοι στη μεθοδολογία της Vosniadou (1994, 1999, 2000) μπορέσαμε καταρχάς να κατανοήσουμε πώς τα παιδιά σχηματίζουν ένα αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο για την έννοια του κλάσματος. Ακολουθώντας την ίδια αυτή μεθοδολογία, μπορέσαμε επίσης να διακρίνουμε τα ενδιάμεσα επεξηγηματικά πλαίσια που χρησιμοποιούν τα παιδιά προκειμένου να προσεγγίσουν τον αφηρημένο ορισμό του κλάσματος. Τελικά τα διαφορετικά αυτά επεξηγηματικά πλαίσια που χρησιμοποίησαν τα παιδιά μας έδειξαν πώς αναπτύσσεται η έννοια του κλάσματος, ποιες είναι πεποιθήσεις που αναπτύσσονται πρώτες και πως αυτές αλλάζουν και αντικαθίστανται με άλλες πιο επιστημονικές.

Συνεπώς παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα της εμπειρικής αυτής έρευνας επιβεβαίωσαν την υπόθεσή μας ότι η απόκτηση της έννοιας του κλάσματος απαιτεί ριζοσπαστική εννοιολογική αλλαγή της έννοιας του αριθμού.

Στη συνέχεια ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία θα ανιχνεύσουμε την εννοιολογική αλλαγή, συζητώντας τα επεξηγηματικά πλαίσια της έννοιας του κλάσματος που χρησιμοποίησαν οι μαθητές του δείγματός μας. Η συζήτησή μας θα επικεντρωθεί στις βασικές προϋποθέσεις της θεωρίας βάσης των παιδιών για τους φυσικούς αριθμούς, προϋποθέσεις οι οποίες πιστεύουμε ότι περιορίζουν τα επεξηγηματικά αυτά πλαίσια. Θα προσπαθήσουμε δηλαδή να διακρίνουμε τα βασικά χαρακτηριστικά του κάθε επεξηγηματικού πλαισίου και της κάθε υποκατηγορίας του, όπως επίσης και τους τρόπους που τα πλαίσια αυτά αλλάζουν καθώς τα παιδιά προχωρούν από ένα επεξηγηματικό πλαίσιο σε ένα άλλο πιο επιστημονικό.

3.5.1 Τα Επεξηγηματικά Πλαίσια της Έννοιας του Κλάσματος και οι Προϋποθέσεις που τα περιορίζουν

Τα επεξηγηματικά πλαίσια που διακρίναμε ότι χρησιμοποίησαν οι μαθητές του δείγματός μας για να ερμηνεύσουν τα κλάσματα ήταν τρία, ενώ το καθένα από αυτά περιελάμβανε και δύο υποκατηγορίες.

Σύμφωνα με τα ευρήματά μας το αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα /Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί (Α)* αποδείχθηκε ότι είναι κατ' ουσία το επεξηγηματικό πλαίσιο των φυσικών αριθμών. Οι μαθητές εδώ ερμηνεύουν το σύμβολο ενός κλάσματος ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς. Φαίνεται ότι από την αρχή της εισαγωγής τους στη συμβολική γλώσσα των αριθμών τα παιδιά έμαθαν να αντιστοιχούν σε κάθε αριθμό ένα σύμβολο, στο πλαίσιο μιας ένα προς ένα αντιστοιχίας. Πράγματι όπως προκύπτει από τους Πίνακες 3.1 και 3.2 (βλ. Παράρτημα), υπάρχουν μαθητές που οι απαντήσεις τους δείχνουν ότι αντιμετωπίζουν το σύμβολο του κλάσματος ως δύο ανεξάρτητους αριθμούς (τον αριθμητή και τον παρονομαστή). Βάσει των υποθέσεών μας, η προϋπόθεση αυτή αποδεικνύεται καθοριστική καθώς οι μαθητές που υιοθετούν το επεξηγηματικό αυτό πλαίσιο θεωρούν ότι όσο αυξάνεται η αξία των αριθμών που περιλαμβάνει ένα κλάσμα, τόσο μεγαλώνει και η αξία του ίδιου του κλάσματος[81]· ότι μια πράξη δύο κλασμάτων μεταφράζεται σε δύο ξεχωριστές πράξεις, μία ανάμεσα στους αριθμητές και μία ανάμεσα στους παρονομαστές.[82]

[81] Υπήρξαν μαθητές, τους οποίους και εντάξαμε στο παραπάνω επεξηγηματικό πλαίσιο, οι οποίοι θεωρούσαν ότι όπως και οι αριθμοί δεν έχουν τέλος, έτσι και στα κλάσματα όσο μεγαλώνει ο αριθμητής και ο παρονομαστής του μεγαλώνει και η αξία του κλάσματος.

[82] Όπως αναφέραμε στην ενότητα 1.2 (σ. 49), η δυσκολία στη σύγκριση κλασμάτων που απορρέει από τη γνώση των φυσικών αριθμών δεν αποτελεί πρόβλημα για τους σύγχρονους μόνο μαθητές, αλλά αποτέλεσε ένα θέμα το οποίο επισήμανε ο Lagrange, πριν από διακόσια χρόνια περίπου, σε μια από τις διαλέξεις του στους φοιτητές της Ecole Normale στο Παρίσι το 1795 (βλ. σ. 200).

Επιπλέον από τις απαντήσεις των μαθητών[83] έγινε σαφές ότι ορισμένοι δυσκολεύονται να δεχτούν ότι υπάρχουν αριθμοί μικρότεροι από τη μονάδα (εκτός ίσως από το μηδέν το οποίο σύμφωνα με τις απαντήσεις ορισμένων μαθητών αντιπροσωπεύει το τίποτα). Η βασική αυτή ιδέα ότι η μονάδα είναι ο μικρότερος αριθμός αποτελεί, όπως φαίνεται μια δεύτερη προϋπόθεση η οποία περιορίζει τον σχηματισμό αυτού του αρχικού επεξηγηματικού πλαισίου[84]. Συνεπώς η δεύτερη προϋπόθεση που καθορίζει το αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα /Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί (Α)* είναι ότι η ακέραια μονάδα ως ο μικρότερος φυσικός αριθμός είναι μικρότερη από οποιοδήποτε κλάσμα που περιλαμβάνει αριθμούς μεγαλύτερους του 1. Ορισμένοι μαθητές, όπως προκύπτει από τις απαντήσεις τους, γενικεύοντας αυτήν την ιδέα, θεωρούν ότι το μικρότερο κλάσμα είναι το κλάσμα 1/1.

Η διαφοροποίηση στις ιδέες των μαθητών στην πρώτη υποκατηγορία (*υποκατηγορία Α1*) αυτού του επεξηγηματικού πλαισίου αφορά το κλάσμα που έχει αριθμητή ίσο με τον παρονομαστή. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει υπήρξαν μαθητές οι οποίοι αναγνώριζαν ότι τα κλάσματα της μορφής q/q ήταν ίσα με την ακέραια μονάδα.

Στη δεύτερη υποκατηγορία *(Α2*) του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα / Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί (Α)*, εντάχθηκαν οι μαθητές που, ενώ συνέχιζαν να αντιμετωπίζουν το κλάσμα ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς, αντέστρεφαν εντελώς τους κανόνες που ίσχυαν στη διάταξη των φυσικών αριθμών και εκφράζανε την λανθασμένη πεποίθηση ότι «στα κλάσματα τα μικρά είναι τα μεγαλύτερα». Ερμηνεύσαμε αυτήν την πεποίθηση ως μεταβατικό στάδιο στην πορεία εκμάθησης των κλασμάτων και ως απόρροια της προσπάθειάς τους να προσλάβουν τις νέες πληροφορίες που αφορούν τη διάταξη των κλασμάτων. Τα παιδιά ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο σκέψης μεταβάλλουν ριζικά και την προϋπόθεση της θεωρίας τους που αφορά τη σχέση του κλάσματος με την ακέραια μονάδα. Έτσι, το κλάσμα θεωρείται από τους μαθητές ότι είναι πάντα μικρότερο μιας ακέραιας μονάδας.

[83] Βλ., παραγράφους 3.3.1 και 3.3.2.
[84] Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι Αρχαίοι Έλληνες συμβόλιζαν με γράμματα της αλφαβήτου τους αριθμούς τους μεγαλύτερους του δύο, ενώ η μονάδα αντιπροσώπευε γι αυτούς μια πολύ ιδιαίτερη οντότητα.

Οι μαθητές που ερμηνεύουν με τους παραπάνω τρόπους ένα κλάσμα δεν χρησιμοποιούν καταχρηστικά κλάσματα παρά μόνο διαισθητικά. Επίσης θεωρούν ότι η μονάδα είναι είτε μικρότερη είτε μεγαλύτερη από οποιοδήποτε κλάσμα. Ένα άλλο στοιχείο που προέκυψε είναι ότι οι μαθητές, με εξαίρεση τα παιδιά που ταξινομήθηκαν στην *υποκατηγορία Α1,* δεν αναγνωρίζουν ότι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή ίσο με τον παρονομαστή ισοδυναμεί με μια ακέραια μονάδα. Επιπλέον συγκρίνουν τα κλάσματα συγκρίνοντας τους δύο αριθμούς που τα απαρτίζουν σαν να ήταν φυσικοί αριθμοί. Οι μαθητές αυτοί, καθώς στερούνται την ερμηνεία *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας*, δεν θεωρούν απαραίτητο ότι τα μέρη που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα προκύπτουν από τον διαμερισμό (χωρισμό σε ίσα μέρη) της μονάδας αναφοράς· στην περίπτωση που αναφέρονται σε δύο κλάσματα τα οποία έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους οι μαθητές δεν θεωρούν πάντα αναγκαία τη χρήση μιας κοινής μονάδας αναφοράς.

Στο δεύτερο επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας*, η προϋπόθεση του συμβολισμού ενός αριθμού δεν λειτουργεί εντελώς περιοριστικά, παρόλο που οι μαθητές αντιμετωπίζουν τον αριθμητή και τον παρονομαστή ως δύο αριθμούς που συνδέονται με σχέση μέρους και όλου. Οι αριθμοί, δηλαδή, που απαρτίζουν ένα κλάσμα δεν αντιμετωπίζονται ως δύο ανεξάρτητοι αριθμοί αλλά ως δύο αριθμοί που συνδέονται με τη σχέση μέρους-όλου ενός συνήθως φυσικού αντικειμένου (το οποίο και θεωρούν ως μονάδα αναφοράς). Οι μαθητές που χρησιμοποιούν αυτό το δεύτερο επεξηγηματικό πλαίσιο ερμηνεύουν το κλάσμα ως το μέρος (κομμάτι-ια) μιας ποσότητας (μονάδας). Συνεπώς θεωρούν ότι το κλάσμα δηλώνει τη σχέση μέρους-όλου όπου ο αριθμητής δηλώνει τα μέρη «που παίρνουμε» και ο παρονομαστής τα μέρη στα οποία διαμερίζεται η μονάδα-σύνολο αναφοράς· ως εκ τούτου τα παιδιά πιστεύουν ότι το κλάσμα αντιπροσωπεύει πάντα ποσότητα μικρότερη της μονάδας. Ακόμη εδώ διαπιστώσαμε ότι τα παιδιά έχουν αναπτύξει: 1) διαδικασίες διάταξης των κλασμάτων, 2) την έννοια του διαμερισμού της μονάδας (διαίρεση της μονάδας σε ίσα μέρη) και 3) την έννοιας της αναγκαιότητας της ίδιας μονάδας αναφοράς (με εξαίρεση τα παιδιά που ταξινομήθηκαν στην πρώτη υποκατηγορία του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα /Αφελές Μέρος)*.

Η υποκατηγορία του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα/Αφελές Μέρος (Β1)* αποτελεί ένα μεταβατικό στάδιο προς την κατάκτηση του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα/Μέρος*· σε αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο παρατηρήσαμε ότι τα παιδιά ενώ φαίνεται να έχουν κατακτήσει κάποιες ιδέες από την έννοια του κλάσματος ως μέρους μιας μονάδας, διατηρούν ακόμη αρκετές πεποιθήσεις από τη θεωρία βάσης για τους φυσικούς αριθμούς, πεποιθήσεις οι οποίες εμφανίζονται τόσο στις ερωτήσεις της διάταξη των κλασμάτων όσο και στις εκτιμήσεις για την ορθότητα των αριθμητικών πράξεων με κλάσματα. Οι μαθητές, δηλαδή, που ταξινομήθηκαν σ' αυτήν την υποκατηγορία έχουν αναπτύξει μια αφελή ερμηνεία του κλάσματος ως το κομμάτι ή τα κομμάτια π.χ. μιας τούρτας· η ερμηνεία αυτή δεν περιορίζεται από τα χαρακτηριστικά του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας* όσον αφορά: 1) τις διαδικασίες διάταξης, 2) το διαμερισμό της μονάδας σε ίσα μέρη και 3) την έννοια της αναγκαιότητας κοινής μονάδας αναφοράς. Αντίθετα, οι μαθητές φαίνεται να διατηρούν κάποιες από τις ιδέες που ισχύουν στο σύνολο των *φυσικών αριθμών*.

Στη δεύτερη υποκατηγορία *Κλάσμα/Προχωρημένο Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας (Β2)*, οι μαθητές έχουν αναπτύξει περισσότερο κάποιες διαδικασίες χειρισμού του κλάσματος απ΄ ό,τι στο βασικό επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα /Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας*. Η ανατροπή της δεύτερης προϋπόθεσης δεν λειτουργεί ωστόσο περιοριστικά κατ' απόλυτο τρόπο. Οι μαθητές, δηλαδή, ενώ θεωρούν ότι τα κλάσματα αντιπροσωπεύουν αξία μικρότερη της ακέραιας μονάδας, συγχρόνως κατά τη διάταξη κλασμάτων και της μονάδας αποδείχθηκε ότι έχουν αναπτύξει διαδικασίες που τα βοηθούν να διατάσσουν σωστά τα κλάσματα και την ακέραια μονάδα. Για παράδειγμα ο αλγόριθμος μετατροπής των κλασμάτων σε ομώνυμα, ώστε στη συνέχεια να καθίσταται ευκολότερη η διάταξή τους, δεν συνοδεύεται πάντα από την επίγνωση των ισοδύναμων κλασμάτων, όπως φαίνεται από τις εξηγήσεις των μαθητών στις διάφορες ερωτήσεις καθώς επίσης και από τον τρόπο που αναπαράστησαν εικονικά αριθμητικές με κλάσματα. Συνεπώς, αν και στην περίπτωση αυτή φαίνεται να υπάρχει εσωτερική ασυνέπεια, εμείς κρίναμε ότι θα μπορούσαμε να την ερμηνεύσουμε ως διαδικασία εννοιολογικής αλλαγής κατά την προσπάθεια των παιδιών να προσεγγίσουν την επιστημονική άποψη.

Στο τρίτο βασικό επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Σχέση Δύο Αριθμών (Γ)*, η προϋπόθεση που αφορά το σύμβολο του κλάσματος αλλάζει. Εδώ πλέον το κλάσμα αντιμετωπίζεται ως αριθμός. Οι μαθητές που το υιοθετούν έχουν αλλάξει ριζικά τις πεποιθήσεις τους για το κλάσμα όσον αφορά τη σχέση του αριθμητή με τον παρονομαστή του. Πιστεύουν, δηλαδή, ότι το κλάσμα είναι ένας μη πεπερασμένος αριθμός που προκύπτει από το πηλίκο του αριθμητή διά του παρονομαστή. Ακόμη πιστεύουν ότι ή σχέση ενός κλάσματος και της μονάδας συνδέεται άμεσα με τη σχέση αριθμητή – παρονομαστή: θεωρούν ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας όταν ο αριθμητής του είναι μικρότερος του παρονομαστή του, ενώ αντίθετα ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο από την ακέραια μονάδα όταν ο αριθμητής του είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή.

Στο επεξηγηματικό αυτό πλαίσιο οι μαθητές έχουν επίσης αναπτύξει πλήρως και τις πεποιθήσεις του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας*· αυτό έχει ως αποτέλεσμα να διαμερίζουν σε *ίσα μέρη* τη μονάδα αναφοράς και να αναφέρονται πάντα σε μία κοινή ή σε δύο ίσες μονάδες αναφοράς. Και εδώ όμως οι περισσότεροι μαθητές παρουσίασαν κάποια προβλήματα κατά την εκτέλεση και την αναπαράσταση των βασικών πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού· έκαναν αρκετά διαδικαστικά λάθη και στις αναπαραστάσεις τους συχνά δεν διαφοροποίησαν τις δύο αυτές αριθμητικές πράξεις.

Στην πρώτη και λιγότερο εξελιγμένη υποκατηγορία αυτού του πλαισίου (*υποκατηγορία Γ1*) εντάχθηκαν οι μαθητές οι οποίοι, παρ' όλο που έχουν αναπτύξει τα στοιχεία του κλάσματος τα οποία εκθέσαμε παραπάνω, *δεν αναφέρονται καθόλου στην απειρία των κλασμάτων*· πιστεύουν, δηλαδή, ότι υπάρχει ένα μοναδικό μικρότερο και ένα μοναδικό μεγαλύτερο κλάσμα. Η προϋπόθεση ότι οι αριθμοί δεν έχουν τέλος δεν υιοθετείται από τους μαθητές αυτής της υποκατηγορίας. Γενικότερα αυτή η προϋπόθεση δεν υιοθετείται παρά μόνο από τους μαθητές που εντάχθηκαν στο *επεξηγηματικό πλαίσιο Γ* και στην πιο προωθημένη του εκδοχή στην *υποκατηγορία Γ2*. Ας σημειώσουμε ότι υπήρχε και η εξαίρεση κάποιων μαθητών που, ενώ ταξινομήθηκαν στο πρώτο επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Δύο*

Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί, πιστεύουν ότι οι αριθμοί δεν έχουν τέλος και εφαρμόζουν αυτή την πεποίθησή τους στα κλάσματα με ένα διαισθητικό τρόπο (για παράδειγμα υπήρχε ένα παιδί που θεωρούσε ότι το κλάσμα 900000000.../900000000... είναι ένα μεγάλο κλάσμα αλλά υπάρχουν και μεγαλύτερα).

Στη δεύτερη υποκατηγορία του επεξηγηματικού πλαισίου *Κλάσμα/Σχέση Δύο Αριθμών (Γ2),* οι μαθητές έχουν αναπτύξει μια πιο ολοκληρωμένη ιδέα για τις εκφράσεις του κλάσματος. Η βασική διαφοροποίηση της υποκατηγορίας αυτής από το βασικό επεξηγηματικό πλαίσιο έγκειται στην ικανότητα των μαθητών να εκτιμούν σωστά τις πράξεις με κλάσματα καθώς επίσης και να διαφοροποιούν τις εικονικές τους αναπαραστάσεις στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Συνοψίζοντας: έως εδώ συζητήσαμε τις πεποιθήσεις των παιδιών στα διάφορα επεξηγηματικά πλαίσια της έννοιας του κλάσματος, πεποιθήσεις οι οποίες αποδεικνύεται ότι σχετίζονται άμεσα με τις προϋποθέσεις της θεωρίας βάσης των παιδιών για τους φυσικούς αριθμούς. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στους τρόπους που αλλάζουν οι πεποιθήσεις αυτές των παιδιών καθώς τα ίδια μεταβαίνουν από το ένα επεξηγηματικό πλαίσιο ή μια υποκατηγορία του σε ένα άλλο πιο επιστημονικό.

3.5.2 Μηχανισμοί αλλαγής των Επεξηγηματικών Πλαισίων

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο που υιοθετήσαμε η μετάβαση από ένα επεξηγηματικό πλαίσιο σε ένα άλλο περισσότερο επιστημονικό προκύπτει από την ανάγκη των μαθητών να συμβιβάσουν αυτά που ήδη γνωρίζουν με τις νέες πληροφορίες που προσλαμβάνουν· υποθέσαμε ότι η μετάβαση αυτή θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως αλλαγή στις προϋποθέσεις που περιορίζουν τα αρχικά επεξηγηματικά πλαίσια των μαθητών καθώς επίσης και ως σταδιακή αντικατάσταση των πεποιθήσεων των παιδιών με άλλες πιο επιστημονικές. Όπως διαπιστώσαμε τα επεξηγηματικά πλαίσια της έννοιας του κλάσματος και οι υποκατηγορίες τους αποτελούν κρίκους μιας εξελικτικής αλυσίδας.

(ο Πίνακας 3.VI περίπου εδώ)

Στον Πίνακα 3.VI περιγράφουμε συνοπτικά τις αλλαγές στις πεποιθήσεις των παιδιών καθώς τα παιδιά μεταβαίνουν από ένα επεξηγηματικό πλαίσιο σε ένα άλλο. Όπως φαίνεται όσον αφορά τη σχέση του αριθμητή και του παρονομαστή ενός κλάσματος, μόνο τα παιδιά που ταξινομήθηκαν στο επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Σχέση Δύο Αριθμών* φαίνεται να έχουν εδραιωμένη την πεποίθηση ότι υπάρχουν κλάσματα με αριθμητή μεγαλύτερο του παρονομαστή[85] και ότι τα κλάσματα αυτά έχουν αριθμητική αξία μεγαλύτερη της ακέραιας μονάδας.

Διαπιστώνουμε ότι η πρώτη πεποίθηση την οποία τα παιδιά αναπτύσσουν σε σχέση με το σύμβολο του κλάσματος είναι ότι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή ίσο με τον παρονομαστή (της μορφής q/q) ισοδυναμεί με την ακέραια μονάδα. Όπως βλέπουμε στον Πίνακα 3.VI, την ιδέα αυτή τη διαθέτουν τα παιδιά που ταξινομήθηκαν στην *υποκατηγορία Α1* του *Κλάσμα/Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί·* τα ίδια αυτά παιδιά συνεχίζουν να πιστεύουν ότι η ακέραια μονάδα είναι μικρότερη από οποιοδήποτε κλάσμα. Την έννοια του κλάσματος του ισοδύναμου με μια ακέραια μονάδα φαίνεται να την έχουν κατακτήσει επίσης και τα παιδιά στο επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας*.

Η επόμενη επισήμανσή μας σχετίζεται με την ικανότητα των παιδιών να διατάσσουν σωστά τα κλάσματα. Από τις απαντήσεις τους προέκυψε ότι τα παιδιά μπορούν να μάθουν τη διαδικασία μετατροπής σε ομώνυμα χωρίς υποχρεωτικά να έχουν κατανοήσει την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων. Αυτό γίνεται ιδιαίτερα φανερό από τις εικονικές αναπαραστάσεις που επινοούν για την πρόσθεση δύο κλασμάτων. Για παράδειγμα, μαθητές που ταξινομήθηκαν στο επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Σχέση Δύο Αριθμών*, οι οποίοι ενώ διάτασσαν σωστά τα κλάσματα και την ακέραια μονάδα μετατρέποντάς τα στα ισοδύναμά τους ομώνυμα κλάσματα, αναπαριστούσαν εικονικά ένα άθροισμα δύο κλασμάτων ως μέρη δύο διαφορετικών σχημάτων. Η κατανόηση των ισοδύναμων κλασμάτων είναι ένα μέσο που θα μπορούσε να τα βοηθήσει σε μια πλέον αφηρημένη έννοια του κλάσματος όπως

[85] Ο ισχυρισμός αυτός γίνεται σαφής από τον Πίνακα 3.ΙΙΙ.

αυτή του πηλίκου. Η διαδικαστική μηχανιστική αυτή γνώση που αναπτύσσουν τα παιδιά κατά τη μετατροπή σε ομώνυμα, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα βήμα ώστε το παιδί να αρχίσει να κατανοεί π.χ. ότι αυτό που έχει σημασία για την αριθμητική αξία ενός κλάσματος δεν είναι το μέγεθος του αριθμητή και του παρονομαστή όσο η σχέση των δύο αυτών αριθμών.

Ένα άλλο εύρημα της μελέτης μας σχετίζεται με την πεποίθηση των παιδιών ότι ένα κλάσμα δεν συνδέεται απλά με τον διαχωρισμό μιας μονάδας αλλά με τον *διαμερισμό* της, που σημαίνει την αναγνώριση ότι τα μέρη στα οποία θα διαχωρίζεται μια μονάδα είναι μεταξύ τους ίσα. Η πεποίθηση λοιπόν που ισχύει στην υποκατηγορία *Β1* του Ε.Π. *Κλάσμα/Αφελές Μέρος* ότι το κλάσμα αντιπροσωπεύει απλώς μέρος κάποιου πράγματος θα πρέπει να αντικατασταθεί από την πεποίθηση ότι το μέρος αυτό προκύπτει από τον μερισμό της μονάδας αναφοράς, κάτι που, όπως είδαμε συμβαίνει στα επόμενα επεξηγηματικά πλαίσια.

Το θέμα αυτό συνδέεται στις περισσότερες περιπτώσεις με την ικανότητα των παιδιών να αναπαριστούν ένα άθροισμα δύο κλασμάτων ως μέρη δύο σχημάτων, αναγνωρίζοντας την αναγκαιότητα για κοινή μονάδα αναφοράς. Με τον τρόπο αυτό αποδεικνύεται ότι τα παιδιά έχουν φθάσει να κατανοούν την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων. μιας πράξης σε μέρη δύο ίσων σχημάτων με την ανάπτυξη της έννοιας της ισοδυναμίας των κλασμάτων. Το παραπάνω θέμα αποτελεί μια βασική αρχή που διέπει την υποκατηγορία Γ2 του επεξηγηματικού πλαισίου Κλάσμα/Σχέση Δύο Αριθμών.

Και από τις εικονικές αναπαραστάσεις των πράξεων φάνηκε αν οι μαθητές έχουν ξεκαθαρίσει πλήρως το θέμα του ισομερισμού της ακέραιας μονάδας. Υπήρξε περίπτωση, να ζωγραφίζουν, για παράδειγμα, ένα κύκλο και να τον χωρίζουν σε περίπου ίσα μέρη, ενώ όταν καλούνταν να μεταφράσουν τα σκιαγραφημένα μέρη ενός σχήματος τα ίδια παιδιά να μην θεωρούν απαραίτητο να είναι τα μέρη του σχήματος ίσα. Τέλος, από τις εικονικές αναπαραστάσεις των μαθητών φάνηκε ότι δυσκολεύονται ιδιαίτερα στη διαφοροποίηση ανάμεσα στην πράξη της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Η διαφοροποίηση αυτή επιτυγχάνεται μόνο από τα παιδιά που εντάχθηκαν στην υποκατηγορία Γ2 του επεξηγηματικού πλαισίου Κλάσμα/Σχέση Δύο Αριθμών.

3.5.3. Σύγκριση των αποτελεσμάτων της έρευνας με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας μας έχουμε αναφερθεί στους ερευνητές εκείνους οι οποίοι ασχολήθηκαν με τη μαθηματική έννοια του κλάσματος και πραγματοποίησαν έρευνες χρησιμοποιώντας διαφορετικά θεωρητικά πλαίσια και διαφορετικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις. Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να αντιπαραβάλουμε τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών με τα αποτελέσματα της δικής μας εργασίας.

Ερευνητές όπως οι Hart, 1980, 1981, Hiebert & Wearne (1988), Nesher και Peled (1986) και η Resnick (1981, 1989, 1995) διερεύνησαν κυρίως τις *δεξιότητες* των παιδιών κατά την επίλυση μαθηματικών έργων. Στις έρευνες που διεξήγαγαν εστίασαν ιδιαίτερα τη προσοχή τους στη διερεύνηση των *συστηματικών λαθών* και των *παρανοήσεων* των παιδιών, χωρίς να διερευνούν τους τρόπους με τους οποίους αυτά δημιουργούνται σε σχέση με τη γενικότερη δομή των γνώσεων που διαθέτουν τα παιδιά για τα κλάσματα. Οι παραπάνω δηλαδή ερευνητές φαίνεται ότι αντιμετωπίζουν τις παρανοήσεις των παιδιών ως μια στατική κατάσταση η οποία μπορεί να αλλάξει με τη διδασκαλία.

Ορισμένοι από τους ερευνητές αυτούς θεωρούν ότι υπάρχει κάποια διαισθητική γνώση των κλασμάτων. Συγκεκριμένα ερευνητές όπως οι Carpenter, Fennema & Romberg (1993), Hiebert & Behr (1989), Hiebert & Wearne (1986) και Silver (1986) θεωρούν ότι η άτυπη και η τυπική γνώση των παιδιών για τα κλάσματα υπάρχει και αναπτύσσεται ανεξάρτητα. Από την πλευρά της η Mack (1995) αμφισβητεί τον παραπάνω ισχυρισμό και αναφέρει ότι αυτό δεν ισχύει πάντα. Συγκεκριμένα αναφέρεται στα αποτελέσματα της έρευνάς της τα οποία έδειξαν ότι υπήρχαν παιδιά που κατάφερναν να συσχετίσουν την άτυπη γνώση τους για το μερισμό με την τυπική τους γνώση για τα σύμβολα των κλασμάτων και τις απαιτούμενες διαδικασίες όταν τα προβλήματα που αντιμετώπιζαν ήταν παρόμοια. Στην περίπτωση που τα προβλήματα δεν ήταν παρόμοια, αν και υπήρχε μια συνεχής προσπάθεια των παιδιών να συσχετίσουν τα κομμάτια της γνώσης, δεν κατάφερναν να το επιτύχουν. Ειδικότερα αναφέρεται σε δύο παιδιά του δείγματός της, τα οποία ενώ σύγκριναν σωστά τα κλάσματα 1/3 και 1/4 συσχετίζοντας τις συμβολικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων με την άτυπη γνώση που διαθέτουν για τη σχέση ανάμεσα στον αριθμό των κομματιών στα οποία είναι διαιρημένη η μονάδα και στο μέγεθος αυτών των κομματιών, απέτυχαν να κάνουν τέτοιου είδους συσχετίσεις κατά τη σύγκριση κλασμάτων όπως το 3/4 και το 3/5, όπου επικέντρωσαν την προσοχή τους στους παρονομαστές και τους σύγκριναν σαν να ήταν ακέραιοι αριθμοί με αποτέλεσμα να απαντήσουν λανθασμένα.

Η δική μας έρευνα διαφέρει τόσο ως προς τη μέθοδο που ακολουθήσαμε, προσεγγίζοντας δηλαδή τα ίδια επιμέρους θέματα χρησιμοποιώντας διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα, όσο και ως προς την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών που στόχευε στον προσδιορισμό των διαισθητικών ιδεών που οι μαθητές ακολουθούν με συνέπεια. Σε σχέση με το παράδειγμα από τα ευρήματα της Mack που αναφέραμε προηγούμενα, μας ενδιέφερε να διερευνήσουμε τις βασικές πεποιθήσεις των μαθητών οι οποίες και περιορίζουν τις απαντήσεις τους με αποτέλεσμα να αποτυγχάνουν να απαντήσουν σωστά στις ερωτήσεις που τους θέταμε και τους τρόπους με τους οποίους αυτές μεταβάλλονται ή αντικαθίστανται από άλλες. Συνεπώς η πορεία που ακολουθήσαμε κατά την κατάστρωση του δικού μας ερωτηματολόγιου είχε ως στόχο να αποκαλύψει τη διαισθητική γνώση που διαθέτουν οι μαθητές για την αριθμητική αξία του κλάσματος και για τις πράξεις με κλάσματα, καθώς επίσης τους τρόπους με τους οποίους αλλάζουν οι πεποιθήσεις των μαθητών καθώς αναπτύσσουν ιδέες για την έννοια του κλάσματος.

Μολονότι η Mack (1990) διαφοροποιείται στο ζήτημα της ανάπτυξης της άτυπης και της τυπικής γνώσης των παιδιών για τα κλάσματα, υιοθετεί γενικά τις απόψεις των Greeno (1978), Hiebert και Wearne (1988), Resnick και Ford (1981) και άλλων γνωστικών ψυχολόγων οι οποίοι πιστεύουν ότι οι συνιστώσες της γνώσης παίζουν ένα πολύ σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της κατανόησης σε εξειδικευμένους τομείς γνώσης (domain specific). Ειδικότερα προτείνει ότι μια τέτοιου είδους συνιστώσα η οποία απαιτείται για την ανάπτυξη της κατανόησης για τα κλάσματα είναι και η γνώση των παιδιών για τα κλάσματα που είναι ισοδύναμα της μονάδας.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της Mack (1990), τα παιδιά που εστιάζουν στη γνώση τους για τα κλάσματα που είναι ισοδύναμα της μονάδας πολλές φορές εφαρμόζουν αυτή τη γνώση ώστε να εφευρίσκουν αλγόριθμους για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων Προτείνει ακόμη ότι θα πρέπει η διδασκαλία να είναι ικανή να ενθαρρύνει τα παιδιά να στηρίζονται στη γνώση τους για τα κλάσματα τα ισοδύναμα της μονάδας και να εφαρμόζουν αυτή τους τη γνώση σε διάφορες καταστάσεις. Επίσης, η ίδια ερευνήτρια αναφέρει ότι λόγω της έλλειψης ερευνών που στοχεύουν να εξετάσουν τη γνώση των μαθητών για τα κλάσματα που είναι ισοδύναμα της μονάδας, απαιτείται περαιτέρω έρευνα.

Όπως προέκυψε από τα αποτελέσματα της δικής μας έρευνας ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών υιοθετεί το δεύτερο επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας*. Από τις απαντήσεις αυτών των μαθητών γίνεται φανερό ότι οι μαθητές αυτοί διαθέτουν τη γνώση ότι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή ίσο με τον παρονομαστή ισοδυναμεί με μια ακέραια μονάδα. Αυτή τους η γνώση φαίνεται και στις απαντήσεις τους τόσο στις ερωτήσεις της διάταξης όσο και στις ερωτήσεις εκτίμησης του αποτελέσματος μιας πράξης με κλάσματα που περιλαμβάνουν και πράξεις με κλάσματα ισοδύναμα της μονάδας.

Επιπλέον ερευνητές όπως οι Alexander (1998), Behr, Harel, Post και Lesh (1992) και Lamon (1999) έχουν επικεντρώσει την προσοχή τους στην έννοια της μονάδας πιστεύοντας ότι συνδέει τις έννοιες του ακέραιου και του ρητού αριθμού. Οι ερευνητές αυτοί τονίζουν ιδιαίτερα την ανάγκη για περισσότερη πρακτική εξάσκηση στο θέμα του μερισμού και των μετρήσεων με δραστηριότητες που θα στοχεύουν στη διευκόλυνση της ανάπτυξης της έννοιας της μονάδας ενώ, επιπλέον, πιστεύουν ότι πρέπει να διερευνηθούν οι στρατηγικές που θα ενθαρρύνουν τα παιδιά να ξεπεράσουν τα εμπόδια του αρχικού τους μοντέλου για τη διαίρεση.

Η δική μας έρευνα πιστεύουμε ότι αναδεικνύει τις ιδέες των παιδιών για τη σχέση ενός κλάσματος με την ακέραια μονάδα. Στο αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας* είναι σαφές ότι τα παιδιά αναφέρονται στα κλάσματα ως μέρη μιας μονάδας. Η ιδέα αυτή ενισχύεται από τον τρόπο που διδάσκονται αρχικά οι μαθητές τα κλάσματα στο σχολείο και μοιάζει κατά πολύ με τη θεώρηση των κλασμάτων-*μεριδίων*, που είχαν αναπτύξει οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι για τα *εναδικά κλάσματα*[86]. Συνεπώς απαιτείται ριζική αλλαγή στις πεποιθήσεις των μαθητών ώστε να μεταβούν σε μια θεώρηση της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού που μπορεί να είναι είτε μικρότερος αλλά είτε ακόμη και μεγαλύτερος της ακέραιας μονάδας.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στις πολύ σχετικές με τη δική μας έρευνες της Gelman και των συνεργατών της (1991, 1995). Οι ερευνητές αυτοί τονίζουν το ρόλο που διαδραματίζει η προϋπάρχουσα γνώση κατά την εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών. Σύμφωνα με την Gelman η προϋπάρχουσα γνώση έχει τη μορφή κάποιων έμφυτων αρχών που δρουν περιοριστικά κατά την εκμάθηση της έννοιας του κλάσματος. Οι έρευνες που διεξήγαγαν (στις οποίες αναφερθήκαμε εκτενώς στην ενότητα 1.3.) είναι ιδιαίτερα σημαντικές για τις εξηγήσεις που δίνουν οι μαθητές ιδιαίτερα στο θέμα της διάταξης των κλασμάτων. Τα αποτελέσματα της έρευνάς μας πιστεύουμε ότι συμπληρώνουν τα ευρήματά τους. Οι παραπάνω ερευνητές, αν και αποδέχονται το μοντέλο *εμπλουτισμού* κατά την απόκτηση των γνώσεων, θεωρούν ότι υπάρχουν γνώσεις, όπως στην συγκεκριμένη περίπτωση της έννοιας του κλάσματος, όπου η προϋπάρχουσα γνώση δημιουργεί ιδιαίτερα προβλήματα στα παιδιά· οι ίδιοι όμως ερευνητές δεν κάνουν σαφή τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά μπορούν να ξεπεράσουν αυτά τα προβλήματα.

[86] Τα παιδιά διδάσκονται ακόμη και από τη δευτέρα δημοτικού, ότι τα απλά κλάσματα όπως το 1/2, το 1/3 και το 1/4 αντιπροσωπεύουν το μέρος ενός σχήματος –όπου το 2, 3 και 4 τα μέρη στα οποία διαμερίζεται το αντίστοιχο σχήμα). Η πρώτη δηλαδή ιδέα με την οποία τους εισάγεται η έννοια του κλάσματος είναι αυτή του μέρους μιας μονάδας. Η ιδέα αυτή ενισχύεται και στην καθημερινή ζωή των παιδιών όπου οι λέξεις μισό ή ένα τρίτο δηλώνουν κάποιο μέρος –άσχετα αν τα παιδιά συχνά δεν αντιστοιχούν αυτό που λένε στο αντίστοιχο αριθμητικό σύμβολο του κλάσματος. Από τα αποτελέσματα της έρευνάς μας προέκυψε ότι τα περισσότερα παιδιά καταφεύγουν στην ερμηνεία του κλάσματος ως ένα μέρος ή το κομμάτι μιας μονάδας ώστε να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους σε διαφορετικού περιεχομένου ερωτήσεις.

Θα ήταν σημαντικό στο σημείο αυτό να σταθούμε σε μια συγκεκριμένη άποψη που εκφράζει η Gelman (1991), ότι σε ορισμένες περιπτώσεις τα παιδιά αντιμετωπίζουν τα κλάσματα ως ακέραιους και να σημειώσουμε τη διαφοροποίησή μας σε σχέση με την ερμηνεία του κλάσματος που εμείς ονομάζουμε επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί* . Σύμφωνα με την Gelman, όταν τα παιδιά θέλουν να αναπαραστήσουν, για παράδειγμα, τρία χρωματισμένα σχήματα από ένα σύνολο τεσσάρων ίσων σχημάτων, απαντούν με τον φυσικό αριθμό "3" αντί με το κλάσμα 3/4· αναφέρονται δηλαδή στα μέρη που αναπαριστά ένα κλάσμα σαν να ήταν ακέραιοι αριθμοί. Παρόλο που στην πρώτη εμπειρική μας έρευνα υπήρχαν παιδιά που απάντησαν με τον συγκεκριμένο αυτό τρόπο, σύμφωνα με τα αποτελέσματά μας στη δεύτερη εμπειρική έρευνα η άποψη αυτή δεν σχετίζεται άμεσα με την ερμηνεία *Κλάσμα/Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί*. Τα παιδιά δηλαδή τα οποία υιοθετούν το επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί* ερμηνεύουν ένα κλάσμα ως δύο διαφορετικούς ακέραιους αριθμούς. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η άποψη αυτή της Gelman σχετίζεται περισσότερο με το επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Αφελές Μέρος μιας Ακέραιας* Μονάδας.

Επιπλέον θεωρούμε ότι τα ευρήματά μας ενισχύουν και συμπληρώνουν το θεωρητικό πλαίσιο που έχουν αναπτύξει με τις έρευνές τους οι Carey και Spelke (1994). Σύμφωνα με τη θεωρία τους η αποδοχή από την πλευρά των παιδιών της ιδέας ότι οι δεκαδικοί και τα κλάσματα είναι αριθμοί απαιτεί την εγκατάλειψη της ταυτοποίησης του αριθμού με τη μέτρηση, εγκατάλειψη της αρχής του επόμενου αριθμού και την κατασκευή μιας νέας κατανόησης για τη διαίρεση ως μιας πράξης διαφορετικής από την επαναλαμβανόμενη αφαίρεση. Κατ' εμάς, η ύπαρξη των διαφορετικών επεξηγηματικών πλαισίων για την έννοια του κλάσματος που διαθέτουν τα παιδιά και των βασικών προϋποθέσεων της θεωρίας τους για τους φυσικούς αριθμούς που τα περιορίζουν, δείχνουν ότι στη σκέψη των παιδιών πραγματώνεται μια ριζική αναδιοργάνωση που τους επιτρέπει και να μπορέσουν να υιοθετήσουν το επιστημονικό μοντέλο της έννοιας του κλάσματος.

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της Βοσνιάδου στο οποίο βασίσαμε τη δική μας διερεύνηση και σύμφωνα και με τα δεδομένα της εμπειρικής μας έρευνας επιβεβαιώθηκε η υπόθεσή μας ότι η απόκτηση της έννοιας του κλάσματος απαιτεί την αναδιοργάνωση του επεξηγηματικού πλαισίου για την έννοια του αριθμού που τα παιδιά αναπτύσσουν πρώτα. Ειδικότερα τα αρχικά επεξηγηματικά πλαίσια που εντοπίσαμε περιλαμβάνουν εξηγήσεις που σχετίζονται με την προϋπάρχουσα γνώση των παιδιών για τους φυσικούς αριθμούς. Η διερεύνηση των προϋποθέσεων της θεωρίας που έχουν αναπτύξει τα παιδιά για την έννοια του αριθμού, των προϋποθέσεων δηλαδή οι οποίες περιορίζουν και το αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο της έννοιας του κλάσματος, μας δίνει ένα ισχυρό στοιχείο της ερμηνείας των μηχανισμών που υπόκεινται κατά τη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής· οι μηχανισμοί αυτοί αφορούν τη σχέση του αριθμητή με τον παρονομαστή ενός κλάσματος p/q, τη σχέση ενός κλάσματος με τη μονάδας στην οποία αναφέρεται, τη σύγκριση δυο κλασμάτων, την έννοια του μερισμού, η έννοια της μονάδας αναφοράς, οι τρόποι που αναπαριστούν τις πράξεις με κλάσματα και την έννοια της απειρίας. Συζητώντας αυτά τα επιμέρους ζητήματα μπορέσαμε να εξηγήσουμε τη σειρά με την οποία γίνεται η μετάβαση από τις αρχικές αντιλήψεις για το κλάσμα στην επιστημονική ερμηνεία του. Με αυτό τον τρόπο εξηγήσαμε και τη δυσκολία αποδοχής από την πλευρά των παιδιών της επιστημονικής άποψης για την έννοια του κλάσματος.

Τα ευρήματα της έρευνάς μας εξάλλου πιστεύουμε ότι μπορούν να εξηγήσουν ευρήματα όπως αυτά των Saxe και Gearhart (1999) για τη σχέση της διδασκαλίας, η οποία στηρίζεται στις αρχές αναθεώρησης των αναλυτικών προγραμμάτων, με τις επιτυχίες που κατακτούν οι μαθητές που διαθέτουν ή όχι κάποια στοιχειώδη κατανόηση της έννοιας του κλάσματος.

Τα νοητικά μοντέλα τα οποία περιγράφουν οι Reeve και Pattison (1996) παρόλο που προκύπτουν από μια ενδιαφέρουσα επεξεργασία των αποτελεσμάτων που περιλαμβάνει ομαδοποίηση των κοινών κατηγοριών απάντησης δεν έχουν πολλά κοινά σημεία με τα επεξηγηματικά πλαίσια στα οποία αναφερόμαστε (βλ. υποκεφάλαιο 1.3). Εξαρχής αναφέρεται μια βασική διαφορά της δικής μας έρευνας όπου από την αρχή τονίσθηκε η σπουδαιότητα της διερεύνησης των μηχανισμών της εννοιολογικής αλλαγής που πραγματώνεται στη σκέψη των παιδιών. Οι Reeve και

Pattison ξεκινώντας με το θεωρητικό πλαίσιο των Resnick και Omanson (1987), που είναι στην ουσία μια ερμηνεία εμπλουτισμού, δεν ασχολούνται με την γνώση που τα παιδιά διαθέτουν όταν προσεγγίζουν την έννοια του κλάσματος. Παρόλο που μοιραζόμαστε μαζί τους την άποψη για τη σπουδαιότητα της χρήσης διαφορετικών αναπαραστασιακών συστημάτων κατά τη διαδικασία της διερεύνησης, οι Reeve και Pattison δεν φαίνεται να θεωρούν ότι τα παιδιά διαθέτουν αρχικά κάποιο επεξηγηματικό πλαίσιο που έχει συνοχή και που περιορίζεται από προϋποθέσεις και πεποιθήσεις, όπως υποθέσαμε στη δική μας έρευνα και το επιβεβαίωσαν τα αποτελέσματά μας στη συνέχεια. Συγκεκριμένα διαπιστώσαμε ότι στις πράξεις με κλάσματα, οι μαθητές που υιοθέτησαν το αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/ Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί αριθμοί* ή την υποκατηγορία *Κλάσμα/ Αφελές Μέρος μιας Μονάδας*, αντιμετώπισαν και την πρόσθεση κλασμάτων ως άθροισμα δύο ζευγαριών (αριθμητών και παρονομαστών). Επιπλέον από τις ζωγραφιές των μαθητών έγινε σαφής ο τρόπος που οι μαθητές ερμηνεύουν τις βασικές πράξεις της αριθμητικής με κλάσματα καθώς επίσης και οι δυσκολία τους να συνταιριάσουν την έννοια του κλάσματος με τις αριθμητικές αυτές πράξεις (και ιδιαίτερα με την πράξη του πολλαπλασιασμού). Οι μαθητές που ταξινομήθηκαν στο επεξηγηματικό πλαίσιο του *Κλάσματος /Μέρους μιας Ακέραιας Μονάδας*, μολονότι είναι σε θέση να μεταφράσουν ένα κλάσμα σε ένα μέρος ενός κύκλου ή ενός ορθογωνίου, αφενός έχουν πρόβλημα με τη μονάδα στην οποία αναφέρονται στο πλαίσιο μιας αριθμητικής πράξης και αφετέρου δεν διαφοροποιούν τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Από τη μια μεριά, τα αποτελέσματά μας επιβεβαιώνουν και επεκτείνουν σε μεγάλο βαθμό την άποψη του Fishbein και των συνεργατών του (1985) οι οποίοι πιστεύουν ότι "τα διδακτικά μοντέλα φαίνεται να ριζώνουν τόσο βαθιά στο νου του μαθητή ώστε αυτά συνεχίζουν να ασκούν ένα ασυνείδητο έλεγχο πάνω στη νοητική του συμπεριφορά ακόμη και αφού ο μαθητής αποκτήσει τυπικές μαθηματικές έννοιες που είναι γερές και στηρίζονται σε γερές βάσεις". Σύμφωνα, δηλαδή, με τα παραπάνω, ακόμη και μεγαλύτεροι σε ηλικία μαθητές συνεχίζουν να αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν καλούνται να επιλύσουν στοιχειώδη προβλήματα αριθμητικής με αριθμητικά δεδομένα, δεδομένα που οδηγούν σε σύγκρουση ανάμεσα στη σωστή πράξη και τους περιορισμούς του αντίστοιχου άδηλου μοντέλου. Από την άλλη πλευρά, στα δικά μας αποτελέσματα οι περιορισμοί αυτοί δεν προκαλούνται απλά από τη διδασκαλία, όπως φαίνεται να υπονοεί ο Fishbein και οι συνεργάτες του, αλλά από την αρχική θεωρία βάσης που αναπτύσσουν τα παιδιά η οποία και ενισχύεται από τη διδασκαλία των πράξεων με φυσικούς αριθμούς.

Ακόμη τα αποτελέσματά μας συμφωνούν κατά μια έννοια με αυτά των Philippou και Christou (1994) ως προς την επίδοση των παιδιών στις διαδικαστικές πράξεις με κλάσματα. Σύμφωνα με τα δικά μας ευρήματα υπάρχουν παιδιά που ενώ ταξινομήθηκαν στο Επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας* διαθέτουν έστω και κάποια επιφανειακή γνώση των διαδικασιών των πράξεων. Πιστεύουμε ότι η επιφανειακή αυτή γνώση μπορεί σταδιακά, στο πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, να βοηθήσει τους μαθητές να αναδιοργανώσουν τις δομές της γνώσης τους για το κλάσμα. Μέσα δηλαδή από τις διαδικασίες των πράξεων να αναγνωρίσουν αυτοί οι ίδιοι την αναγκαιότητα για αλλαγή επεξηγηματικού πλαισίου. Στο θέμα ιδιαίτερα του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων θα ήταν σημαντικό να τονίσουμε ότι η αδυναμία των μαθητών να αποδεχθούν ότι σε ορισμένες περιπτώσεις το γινόμενο δύο κλασμάτων είναι ένας αριθμός μικρότερος από τον πολλαπλασιαστέο δεν είναι ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζουν μόνο οι σύγχρονοι μαθητές αλλά όπως είδαμε στην ιστορική αναδρομή της εξέλιξης της έννοιας του κλάσματος, ήταν ένα πρόβλημα που απασχολούσε τους ανθρώπους πριν από τέσσερις περίπου αιώνες. Ο πολλαπλασιασμός των κλασμάτων δεν έχει την ίδια σημασία με τον πολλαπλασιασμό των φυσικών αριθμών ώστε να μπορεί να αιτιολογηθεί ως μια αθροιστική διαδικασία αλλά έχει περισσότερο νόημα της σύνθεση δύο σχέσεων (το 2/3 του 3/4), που μόνο δύο μαθητές από το σύνολο του δείγματός μας πέτυχαν να εκφράσουν.

Όσον αφορά, τώρα, τη διερεύνηση της εννοιολογικής αλλαγής των Lehtinen, Merenluoto και Kasanen (1997), οι οποίοι θεωρούν ότι η αλλαγή αυτή πραγματώνεται καθώς τα παιδιά περνούν από μια διακριτή σε μια συνεχή έννοια των αριθμών, συμφωνούμε ότι η εννοιολογική αλλαγή που απαιτείται στη σκέψη των παιδιών είναι πολύ πιο δύσκολη και απαιτητική από ό,τι πιστεύουν οι δάσκαλοι.

Πιστεύουμε δε, ότι τα ευρήματα τόσο των δικών τους όσο και των δικών μας ερευνών που αποδέχονται τη θεωρητική προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής είναι σε θέση να εξηγήσουν τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν τα παιδιά καθώς διδάσκονται τα σύνολα των ρητών και των πραγματικών αριθμών.

Τέλος συμφωνούμε με την Chi και τους συνεργάτες της (1994) ότι τα κλάσματα αποτελούν παράδειγμα έννοιας όπου απαιτείται μια οντολογική αλλαγή, καθώς από τα αποτελέσματά μας προκύπτει ότι η απόκτηση της έννοιας του κλάσματος απαιτεί μια εννοιολογική αλλαγή της έννοιας του αριθμού και την κατανόηση εννοιών που είναι οντολογικά διαφορετικές από την έννοια των φυσικών αριθμών. Η άποψή μας αυτή ενισχύεται και από τον μικρό αριθμό των μαθητών που υιοθέτησαν το επιστημονικό επεξηγηματικό πλαίσιο της έννοιας του κλάσματος ως στοιχείου των κλάσεων ισοδυναμίας των ρητών αριθμών.

ΤΕΤΑΡΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΓΕΝΙΚΗ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

4.1. ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Προκειμένου να διερευνήσουμε τους παράγοντες εκείνους που εμποδίζουν την αποδοχή από την πλευρά των παιδιών της επιστημονικής άποψης για την έννοια του κλάσματος ως αντιπροσώπου μιας κλάσης ισοδυναμίας, υιοθετήσαμε την υπόθεση της εννοιολογικής αλλαγής· προσπαθήσαμε δηλαδή να διερευνήσουμε τους τρόπους με τους οποίους παιδιά διαφόρων ηλικιών ερμηνεύουν και χειρίζονται το σύμβολο ενός κλάσματος, την αριθμητική αξία που αντιπροσωπεύει καθώς επίσης και τις αριθμητικές πράξεις που περιλαμβάνουν κλάσματα.

Ακολουθώντας τη θεωρητική προσέγγιση της Βοσνιάδου (1994, 1999, 2000), υποθέσαμε ότι τα αρχικά επεξηγηματικά πλαίσια που αναπτύσσουν οι μαθητές για το κλάσμα περιορίζονται από κάποιες προϋποθέσεις της θεωρίας τους για τους φυσικούς αριθμούς (θεωρία βάσης). Όπως φάνηκε από τα αποτελέσματά μας, το σύνολο αυτών των προϋποθέσεων και των πεποιθήσεων των μαθητών αποτελούν ένα δυναμικό γνωστικό σύστημα που οι μαθητές δυσκολεύονται να εγκαταλείψουν. Από τα αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσης είδαμε ότι η ηλικία είναι ένας στατιστικά σημαντικός παράγοντας για το σχηματισμό των επεξηγηματικών πλαισίων του κλάσματος. Υποστηρίξαμε ότι τα επεξηγηματικά αυτά πλαίσια της έννοιας του κλάσματος αλλάζουν με την ηλικία και διατυπώσαμε ορισμένες υποθέσεις σχετικά με το πώς επιτυγχάνονται οι αλλαγές αυτές. Η διαδικασία αλλαγής από ένα επεξηγηματικό πλαίσιο σε ένα άλλο, αποδείχθηκε ότι δεν συνιστά απότομη αλλαγή, αλλά πραγματοποιείται σταδιακά καθώς τα παιδιά υιοθετούν τις διάφορες υποκατηγορίες των τριών βασικών επεξηγηματικών πλαισίων.

Συγκροτήσαμε τα επεξηγηματικά αυτά πλαίσια στηριζόμενοι στα στοιχεία που προέκυψαν από τη δική μας εμπειρική έρευνα (συγκεκριμένα από τις απαντήσεις του 90% περίπου των μαθητών του δείγματός μας), σε συνδυασμό με αναφορές από τη διεθνή βιβλιογραφία. Με τον τρόπο αυτό μπορέσαμε να ανιχνεύσουμε τις εννοιολογικές δομές - ***επεξηγηματικά πλαίσια*** - που διαθέτουν τα παιδιά για τα παραπάνω θέματα καθώς επίσης και τη σειρά με την οποία επέρχονται οι αλλαγές.

Συγκεκριμένα μπορέσαμε να διακρίνουμε το αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Δύο ανεξάρτητοι αριθμοί* που διαθέτουν τα παιδιά για να ερμηνεύουν τόσο την αριθμητική αξία ενός κλάσματος όσο και καταστάσεις που περιλαμβάνουν κλάσματα. Επίσης διακρίναμε ακόμη δύο βασικά επεξηγηματικά πλαίσια (και τις υποκατηγορίες τους) τα οποία αναλύσαμε εκτενώς.

Υποθέσαμε ότι ο σχηματισμός των επεξηγηματικών πλαισίων του κλάσματος περιορίζεται από την ύπαρξη τριών βασικών προϋποθέσεων, οι οποίες υπαγορεύονται τόσο από την προϋπάρχουσα γνώση των φυσικών αριθμών, όσο και από την οντολογική υπόσταση της έννοιας του κλάσματος ως μεριδίου.

Η πρώτη προϋπόθεση της θεωρίας βάσης σχετίζεται με το σύμβολο του κλάσματος. Οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιμετωπίσουν το κλάσμα ως έναν αριθμό· αντίθετα, αντιμετωπίζουν το κλάσμα ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς. Η προϋπόθεση αυτή περιορίζει όλες τις πεποιθήσεις τους σε σχέση με την αριθμητική αξία ενός κλάσματος, με τη διάταξη κλασμάτων και με τους τρόπους που εκτελούν πράξεις με κλάσματα. Η προϋπόθεση δε αυτή αποδεικνύεται κυρίαρχη στο πρώτο επεξηγηματικό πλαίσιο (*Κλάσμα/ Δύο Ανεξάρτητοι Φυσικοί Αριθμοί*).

Μια δεύτερη προϋπόθεση της θεωρίας βάσης συνδέεται με τη σχέση κλάσματος και ακέραιας μονάδας. Τα ευρήματά μας έδειξαν ότι οι μαθητές που υιοθετούν το αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο εμφανίζουν έντονη την τάση να πιστεύουν ότι η ακέραια μονάδα είναι ο μικρότερος αριθμός που υπάρχει. Στο δεύτερο επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Μονάδας*, οι πεποιθήσεις των παιδιών όσον αφορά αυτή τη σχέση του κλάσματος με την ακέραια μονάδα αλλάζουν ριζικά. Οι μαθητές που υιοθετούν αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο πιστεύουν ότι ένα κλάσμα αντιπροσωπεύει πάντα ποσότητα μικρότερη μιας ακέραιας μονάδας· σε πολλές δε περιπτώσεις χρησιμοποιούν παραδείγματα φυσικών αντικειμένων για να ορίζουν την ακέραια αυτή μονάδα.

Η έννοια της απειρίας αποτελεί μια τρίτη προϋπόθεση της θεωρίας βάσης των παιδιών. Όπως διαπιστώσαμε, κάποια διαισθητική ιδέα της απειρίας των αριθμών διαθέτουν ορισμένα τουλάχιστον παιδιά από αυτά που εντάχθηκαν στο πρώτο επεξηγηματικό πλαίσιο. Την ιδέα ωστόσο αυτή τη στερούνται, όπως φάνηκε, τα παιδιά στα ενδιάμεσα επεξηγηματικά πλαίσια, ενώ κυριαρχεί στα παιδιά που προσεγγίζουν το επιστημονικό επεξηγηματικό πλαίσιο του κλάσματος ως ρητού αριθμού (*Κλάσμα/ Σχέση δύο αριθμών με αναφορά στην απειρία των αριθμών*).

Όπως προέκυψε από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας, η έννοια του κλάσματος όπως αναπαρίσταται στα επεξηγηματικά πλαίσια των μαθητών διανύει μια εξελικτική πορεία. Στην πορεία τους προσπαθώντας οι μαθητές να εντάξουν τις νέες πληροφορίες στις ήδη υπάρχουσες εννοιολογικές δομές σχηματίζουν ενδιάμεσα επεξηγηματικά πλαίσια στα οποία διαφαίνονται οι παρανοήσεις τους. Επιπλέον αποδείχθηκε ότι κυρίως οι μεγαλύτεροι μαθητές του δείγματός μας ήταν αυτοί που πέτυχαν να αποκτήσουν ένα πληρέστερο επεξηγηματικό πλαίσιο για την έννοια του κλάσματος.

Τέλος, τα αποτελέσματά μας έδειξαν ακόμη ότι κατά τη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής που συμβαίνει στα παιδιά σε σχέση με την έννοια του κλάσματος υπάρχει μια σειρά ακολουθίας αλλαγής των πεποιθήσεών τους την οποία και συζητήσαμε. Πιστεύουμε ότι είναι ιδιαίτερα σημαντικό να γνωρίζουμε πώς αναπτύσσεται η έννοια του κλάσματος, ποια στοιχεία δηλαδή της έννοιας αυτής κατακτώνται πρώτα από τα παιδιά και ποια έπονται. Η σειρά με την οποία αλλάζουν οι πεποιθήσεις των παιδιών θα μπορούσε να αξιοποιηθεί θετικά για το σχεδιασμό αναλυτικών προγραμμάτων που πραγματεύονται αυτά τα θέματα σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης. Οι επιπτώσεις των αποτελεσμάτων της εργασίας μας στη διδασκαλία θα συζητηθούν στην επόμενη ενότητα.

4.2. ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Η ανάλυση των επεξηγηματικών πλαισίων που αναπτύσσουν τα παιδιά θεωρούμε ότι μπορεί να αποτελέσει ένα σημείο εκκίνησης για έναν αποτελεσματικότερο σχεδιασμό διδακτικών παρεμβάσεων σε σχέση με τα κλάσματα.

Η τρέχουσα διδακτική πρακτική δίνοντας έμφαση στη διδασκαλία των αλγορίθμων οδηγεί τα παιδιά σε μια μηχανιστική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών και υποβαθμίζει τη μαθηματική δραστηριότητα σε μια συνεχή εξάσκηση (Θωμαΐδης, 1997). Με τον τρόπο αυτό ενισχύεται η αποσπασματικότητα της γνώσης.

Τα αποτελέσματα της έρευνάς μας επιβεβαίωσαν την υπόθεση ότι οι δυσκολίες που συναντούν τα παιδιά στην απόκτηση της έννοιας του κλάσματος έχουν να κάνουν με τη δυσκολία αλλαγής επεξηγηματικού πλαισίου για την έννοια του κλάσματος. Η αλλαγή επεξηγηματικού πλαισίου συνδέεται άμεσα με τις προϋποθέσεις στις οποίες αναφερθήκαμε αμέσως παραπάνω. Συνεπώς η διδασκαλία αυτής της έννοιας θα πρέπει καταρχάς να θέσει ως στόχο της να βοηθήσει τα παιδιά να επανερμηνεύσουν τις συγκεκριμένες προϋποθέσεις.

Επίσης σημαντικό στόχο της διδασκαλίας θα πρέπει να αποτελεί η κατάδειξη στα παιδιά της ανεπάρκειας του αρχικού και των ενδιάμεσων επεξηγηματικών πλαισίων. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά πρέπει να οδηγηθούν να καταλάβουν τα ίδια την αναγκαιότητα να αλλάξουν επεξηγηματικό πλαίσιο. Ιδιαίτερα κατά την εισαγωγή του επιστημονικού επεξηγηματικού πλαισίου θα πρέπει να δίνεται έμφαση στην αποτελεσματικότητά του να εξηγεί όλα τα φαινόμενα τα οποία τους ήταν έως τώρα δύσκολο να ερμηνεύσουν. Για παράδειγμα στο σχεδιασμό μιας διδακτικής παρέμβασης σε παιδιά τα οποία έχει διαπιστωθεί ότι ερμηνεύουν το κλάσμα με το επεξηγηματικό πλαίσιο *Κλάσμα/Μέρος μιας Ακέραιας Μονάδας* είναι ιδιαίτερα σημαντικό ο διδάσκων να επικεντρωθεί στην αποσαφήνιση: α) της σχέσης του αριθμητή και του παρονομαστή, β) της σχέσης του κλάσματος με την ακέραια μονάδα και γ) στην αποσαφήνιση του ρόλου που διαδραματίζει η μονάδα αναφοράς στο πλαίσιο των πράξεων με κλάσματα.

Πράγματι στην περιοχή των αριθμητικών πράξεων θα ήταν ιδιαίτερα σημαντικό, ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης να ενισχύει τη διαφοροποίηση των αριθμητικών πράξεων με κλάσματα, ούτως ώστε να κατανοηθεί από τα παιδιά η ανεπάρκεια του αρχικού επεξηγηματικού πλαισίου πράγμα που θα τα διευκολύνει και στην απόρριψή του.

Στα βιβλία των μαθηματικών του Δημοτικού γίνεται μια κατάχρηση θα λέγαμε της ερμηνείας των κλασμάτων ως μέρος μιας ισομερώς διαιρημένης μονάδας. Συγκεκριμένα τα σχολικά βιβλία της τετάρτης τάξης του Δημοτικού εισάγουν τα παιδιά στα κλάσματα μέσα από εικονικές αναπαραστάσεις κλασματικών μονάδων (1/2, 1/5, 1/6 κ.α.) όπως ισομερώς διαιρεμένους κύκλους, ορθογώνια ή τετράγωνα. Η σημασία που αποδίδεται έτσι στο κλάσμα είναι ότι εκφράζει το μέρος μιας ποσότητας, ότι δηλαδή κάθε κλάσμα είναι το πολλαπλάσιο μιας κλασματικής μονάδας (π.χ. το κλάσμα 3/5 είναι 3 φορές το 1/5). Με τον τρόπο αυτόν, υπερτονίζοντας δηλαδή τα σχολικά βιβλία και οι δάσκαλοι την έννοια του κλάσματος ως το μέρος μιας μονάδας, θεωρούν ότι διευκολύνουν την εισαγωγή των μαθητών στη νέα αυτή έννοια. Έτσι ενώ ένας φυσικός αριθμός είναι το αποτέλεσμα μιας μέτρησης αντικειμένων, το κλάσμα είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης κλασματικών μονάδων μιας ποσότητας. Με την ερμηνεία αυτή διατηρείται ο οντολογικός χαρακτήρας του φυσικού αριθμού και στο κλάσμα.

Επιπλέον, με τη διδασκαλία των δεκαδικών κλασμάτων και την εισαγωγή των δεκαδικών αριθμών καθώς επίσης και των διαδικασιών των αριθμητικών πράξεων με τους αριθμούς αυτούς, διδασκαλία που συνεχίζεται και ολοκληρώνεται στην πέμπτη και έκτη τάξη του δημοτικού αντίστοιχα, φαίνεται να συμπληρώνεται το σύνολο των πληροφοριών που απαιτείται να διαθέτουν τα παιδιά για τις νέες αυτές έννοιες. Όλες αυτές οι πληροφορίες έχουν ως αποτέλεσμα τον ορισμό του συνόλου των ρητών αριθμών ως το σύνολο όλων των αριθμών που μπορούν να γραφούν με κλασματική μορφή. Όμως στην πρώτη γυμνασίου τα παιδιά συναντούν τον ορισμό του ρητού αριθμού ως το πηλίκο δύο ακέραιων αριθμών. Με το νέο αυτόν ορισμό του κλάσματος εισάγεται μια εννοιολογικά διαφορετική υπόστασή του. Το κλάσμα είναι πλέον ένας αφηρημένος αριθμός που προκύπτει ως το αποτέλεσμα μιας αριθμητικής πράξης. Έτσι το κλάσμα εδώ ορίζεται ως σχέση δύο αριθμών και τα παιδιά που ερμηνεύουν το κλάσμα με τον τρόπο αυτόν, υιοθετούν την ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκου.

Όταν οι νέες πληροφορίες που διδάσκονται οι μαθητές δεν είναι συνεπείς με τις προηγούμενες γνώσεις τους, τότε το να τις παρουσιάσουμε απλά ίσως δεν είναι αρκετό. Όπως είδαμε στην έρευνά μας οι μαθητές δεν μπορούν απλά να προσθέσουν τις νέες πληροφορίες στις υπάρχουσες γνώσεις τους χωρίς οι τελευταίες να υποστούν σημαντική αναδιοργάνωση. Για παράδειγμα, τα καταχρηστικά κλάσματα και η σχέση ενός κλάσματος με την ακέραια μονάδα είναι κάποια από τα θέματα για τα οποία δεν επαρκεί η ερμηνεία του κλάσματος ως μέρους μιας ακέραιας μονάδας. Προκειμένου οι μαθητές να αντιμετωπίσουν την ανεπάρκεια της ερμηνείας τους για την έννοια του κλάσματος και να φθάσουν να αμφισβητήσουν τις σχετικές πεποιθήσεις τους πιστεύουμε ότι η επεξεργασία προβλημάτων με κλάσματα από μικρές ομάδες μαθητών στο πλαίσιο της συνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας ή όπως και η χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών προσφέρονται ιδιαίτερα.

Η διδασκαλία μαθηματικών εννοιών όπως τα κλάσματα είναι μια δύσκολη διαδικασία καθώς τα αρχικά επεξηγηματικά πλαίσια των μαθητών για την έννοια αυτή που βασίζονται αφενός στην προϋπάρχουσα γνώση των φυσικών αριθμών και αφετέρου στην καθημερινή εμπειρία αντιστέκονται στην αλλαγή. Για το λόγο αυτό κρίνουμε ότι χρειάζεται περισσότερη έρευνα προκειμένου να σχεδιαστούν μέθοδοι διδασκαλίας οι οποίες λαμβάνοντας υπόψη τους την πραγματική φύση των δυσκολιών θα μπορέσουν να τις υπερβούν οδηγώντας τα παιδιά να προσεγγίσουν τα μαθηματικά με πραγματικό ενδιαφέρον και ενθουσιασμό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arnon, Ilana, Dubinsky, Ed & Nesher, Perla (1994). Actions which can be performed in the learner's imagination: The case of multiplication of a fraction by an integer. In J. P. da Ponte and J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 2, (pp. 32-39). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2,3), σ. 241-286.

Atkinson, S. (1992). *Mathematics with reason*. London: Hander & Stoughton.

Balacheff, Nicolas (1990). Future Perspectives for Research in the Psychology of Mathematics Education. In Pearla Nesher and Jeremy Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 135-148). Cambridge University Press, Cambridge, GB.

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing representational contexts in teaching fractions. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research (pp. 157-196). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Baroody, A. J. (1989). Geometry and Fractions. In *A Guide to Teaching Mathematics in the Primary Grades* (pp. 356-379). Massachusetts: Allyn and Bacon.

Beck, C. & Maier, H. (1993). Η συνέντευξη στην έρευνα της διδακτικής των Μαθηματικών. Στο Α. Γαγάτση (Επιμ.) *Διδακτική των Μαθηματικών* (σ. 259-300). Θεσσαλονίκη: Erasmus ICP-92-G-2011/11.

Behr, M. J., Wachsmuth, I. & Post, T. R. (1985). Constuct a sum: A measure of children's understanding of fraction size. *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 16, n. 2, pp. 120-131.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-126). New York: Academic Press.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Επιμ.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Bell, Alan (1993). Principles for the design of teaching, *Educational Studies in Mathematics, vol. 24* (1), (pp. 5-34).

Bell, A. W., Fischbein, E. & Greer, B. (1984). Choice of Operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size problem structure and content. *Educational Studies in Mathematics* 15, 129-147.

Benoit, P., Chemta, K. and Ritter J. (Eds.) (1992). *Histoire de Fractions, fractions d'histoire.* Basel: Birkhauser Verlag.

Bergeron, Jacques C. & Herscovics, Nicolas (1990). Psychological Aspects of Learning Early Arithmetic. In Pearla Nesher and Jeremy Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 31-52). Cambridge University Press, Cambridge, GB.

Bezuk, Nadine & Cramer, Kathleen (1989). Teaching about Fractions: What, When, and How? In *New Directions for Elementary School Mathematics,* 1989 Yearbook (pp. 156-167). Reston VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Bisanz, J. & LeFevre, J. (1992). Understanding elementary mathematics. In J. Campbell (Επιμ.), *The nature and origin of mathematical skills* (pp. 113-136). Amsterdam: North-Holland.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, n. 2, pp. 166-208.

Bouvier, A. (1987). The Right to Make Mistakes. *F.L.M.* 7 (3), 17-25. (Ελληνική μετάφραση: Β. Ευσταθόπουλος, *Ευκλείδης γ'* 21, 1989, σ. 69-86).

Boyer, C. B. (1962). Viete's use of decimal fractions. *The mathematics Teacher* LV(2), σ. 123-125.

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*. New York: Wiley.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 4 (2), 164-197.

Brousseau N. G., (1987) Rationnels et Decaux dans la scolarité obligatoire. Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1988). «Ένα πείραμα επιστημολογίας στη διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών» (Μετάφραση). *Διάσταση, τ. 2,* Έκδοση του παραρτήματος κεντρικής Μακεδονίας ΕΜΕ.

Brun J., Conne F., Cordey P.A., Floris R., Lemoyne G., Leutenegger F. & Portugais J. (1994). Erreurs systématiques et schemes-algorithmes. In M. Artigue, R. Gras, C. Labord, P. Tavignot (Eds.) *Vingt ans de didactique des Mathématiques en France* (pp. 203-209). La Pensée Sauvage éditions.

Bunt, L., Jones P. & Bedient, J. (1981). *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών*. (Μετάφραση). Αθήνα: Γ. Α. Πνευματικός

Burton, D. M. (1988). *The History of Mathematics. An Introduction.* USA: Wm. C. Brown Publishers.

Βαϊνάς, Κώστας. (1992). Η λογική δομή στη διδασκαλία των μαθηματικών και η εφαρμογή της στη σύγκριση των κλασμάτων. *Ευκλείδης Γ'*, τόμος 8, τεύχος 30-31, 1992, σ. 84-96, Ε.Μ.Ε.

Βοσνιάδου, Στέλλα (Επιμ.) (1992). *Κείμενα Εξελικτικής Ψυχολογίας*. Αθήνα: Gutenberg.

Βοσνιάδου, Στέλλα (Επιμ.) (1995). Η *Ψυχολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.

Βοσνιάδου, Στέλλα (1998). *Γνωσιακή Ψυχολογία. Ψυχολογικές Μελέτες και Δοκίμια*. Gutenberg, Αθήνα.

Βοσνιάδου, Στέλλα. (2001). *Εισαγωγή στην Ψυχολογία*. Τόμος Α΄. Γνωστική Ψυχολογία. Gutenberg, Αθήνα.

Cajori, F. (1928). *A History of Mathematical Notations*, volume I. Ανατύπωση. La Salle: Open Court, 1974.

Cajori, F. (1929). *A History of Mathematical Notations*, volume II. Chicago. Open Court.

Callahan, L. (1983). An analysis of "error" in error analysis. In M. Zweg et al. (Eds.) *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, pp. 476-478. Boston: Birkhäuser.

Cantor, G. (1874). Uber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. Στο Georg. Cantor, Gesammelte Abhandlugen, 115-118. Ανατύπωση. Berlin: Springer, 1990.

Carey, S. (1985). *Conceptual change in childhood*. Cambridge. MA: MIT (Bradford) Press.

Carey, S. (1991). Knowledge acquisition: Enrichment or conceptual change. In L.A. Hirschfeld & S.A. Gelman (Eds.), *Mapping the Mind: Domain Specificity in Cognition and Culture*, Cambridge: Cambridge University Press.

Carey, S. & Spelke, E. (1994). Domain-specific knowledge and conceptual change. In L. A. Hirshfeld and S. A. Gelman (Eds.) Mapping the mind: Domain specificity in cognition; culture, New York: Cambridge Univ. Press.

Carpenter, T. (1988). Teaching as problem solving. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The Teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 187-202). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carpenter, T., Fennema, E., & Romberg, T. (Eds.) (1993). *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Caveing, M. (1992). The arithmetic status of the Egyptian *quantième*. In P. Benoit, K. Chemta, and J. Ritter (Eds.) *Histoire de Fractions, fractions d' histoire* (pp. 39-52). Basel: Birkhauser Verlag.

Chi, M. T. H. (1992). Conceptual change within and across ontological categories: Examples from learning and discovery in science. In R. Giere (Επιμ.), Cognitive models of science: Minnesota studies in the philosophy of science (pp. 129-160). Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.

Chi, M.T.H., Glaser, R. & Rees, E. (1982). Expertise in Problem Solving. In R.J. Sternberg (Επιμ.), Advances in the Psychology of Human Intelligence, Vol. 2, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Chi, M.T.H., Slotta, J.D. & de Leeuw, N. (1994). From things to processes: a theory of conceptual change for learning science concepts. *Learning and Instruction, 4*, 27-43.

Cobb, Paul (1986). Concrete can be abstract: A case study. *Educational Studies in Mathematics 17* (pp. 37-48).

Chiosi, Lou (1984). Fractions Revisited. *Arithmetic Teacher*, vol. 31, n. 8, pp. 46-47.

Cockroft, W. H. (1982). *Mathematics Counts*. London: HMSO.

Γαγάτσης, Α. (1991). *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών*. (Κείμενα των L. Bazzini, G. Brousseau, Α. Γαγάτση, J. Fauvel, H. Maier, Τ. Πατρώνη). Εκδοτικός οίκος Αδελφών Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη.

Γαγάτσης, Α. (Επιμ.) (1992-93). *Διδακτική των Μαθηματικών.* Erasmous ICP-92-G-2011/11. Θεσσαλονίκη.

Γαγάτσης, Α. (1993). Προβλήματα προσθετικών σχέσεων σύμφωνα με τις εργασίες του G. Vergnaud. *Διάσταση,* τ. 1-2, σ. 85-117. Ε.Μ.Ε.

Danzing, T. (1954). Number, the language of science. New York: Macmillan.

Davis, Robert B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. New Jersey: Ablex Publishing Co.

Davis, Robert B. (1992). Reflections on where mathematics education now stands and on where it may be goiing. In A. D. Grouws (Επιμ.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 724-734). New York: Macmillan.

Davis, Robert B., Alston, Alice, Maher, Carolyn A. and Martino, Amy (1994). Children's use of alternative structures. In J. P. da Ponte and J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol. 2,* (pp. 248-255). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

De Corte, E. (1990). Acquiring and teaching cognitive skills: A state-of-the-art of theory and research. In P.J.D. Drenth, J.A. Sergeant & R.J. Takens (Eds.), *European perspectives in psychology. Volume 1* (pp. 237-263). London : John Wiley.

De Corte, Eric.(1995b). Fostering cognitive development: a perspective from research on mathematics learning and instruction. *Educational Phychologist, 30*, 37-46.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. In D. C. Berliner & R. C Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 491-549). New York: Macmillan.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1985). Beginning First Graders' Initial Representation of Arithmetic Word Problems. *The Journal of Mathematical Behaviour, 4,* 3-21.

De Corte, E. & Verschaffel, L. ( ). Do non-semantic factors also influence the solution process of addition and subtraction word problems; *Learning and Instruction, v. 2.2*, 415-429. Pergamon Press.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' solution strategies of elementary addition and subtraction word problems. *Journal of Research in Mathematics Education, 18*, 363-381.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1987). Children's problem solving skills and processes with respect to elementary arithmetic word problems. In E. De Corte, H. Lodewijks, R. Parmentier& P. Span (Eds.), *Learning and instruction. European research in an international context.* Volume 1 (pp. 297-308). Leuven University Press/Pergamon Press.

De Corte, Eric & Verschaffel, Lieven (1994). Using student-generated word problems to further untravel the difficulty of multiplicative structures. In J. P. da Ponte and J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 2, (pp. 256-263). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

De Corte, E., Verschaffel, L. & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology, 77*, 460-470.

De Corte, E., Verschaffel, L. & Pauwels, A. (1990). Influence of the semantic structure of word problems on second graders' eye movements. *Journal of Educational Psychology, 82*, 359-365.

De Corte, E. & Verschaffel, L., & Van Coillie, V. (1988). Influence of number size, problem structure, and response mode on children's solutions of multiplication problems. *Journal of Mathematical Behavior, 7,* 197-216.

Dedekind, R. (1872/1901). Continuity and irrational numbers. In R. Dedekind, *Essays on the theory of numbers* (μεταφρ. W. W. Beman), pp. 1-27. Ανατύπωση. New York: Dover, 1963.

Dehaene, S. (1997). *The number sense*, Oxford: Oxford University Press.

Dhombres, Jean (Επιμ.) (1992). *L' Ecole Normale De l'An III. Lecons de Mathématiques. Edition anotée des cours de Laplace, Lagrange et Monge avec intoductons et annexes*. Paris: Dunod.

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1984). *Children Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research*. Great Britain: Holt, Rinehart and Winston.

diSessa, A. A (1988). Knowledge in pieces. In G. Forman & P.B. Pufall (Eds.), *Constructivism in the computer age* (pp. 49-70). Hillsdale. NJ: Erlbaum.

diSessa, A. A (1993). Toward an epistemology of physics. *Cognition and Instruction, 10*, pp. 105-225.

Donalson, M. (1978) *Η σκέψη των παιδιών*. (Μετάφραση) Gutenberg Ψυχολογία, Αθήνα 1991.

Dossey, John A. (1988). Continued Fractions. In Leroy Sachs (Επιμ.) *Projects to Enrich School Mathematics: Level 3* (pp. 67-73). NCTM.

Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence. In A. D. Grouws (Επιμ.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 39-48). New York: Macmillan.

Dreyfus, Tommy (1990). Advanced Mathematical Thinking. In Pearla Nesher and Jeremy Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.113-134). Cambridge University Press, Cambridge, GB.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In K. S. Steffe (Επιμ.) *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 160-202). New York: Springer-Verlag.

Δαφέρμος, Βασίλης (1998). *Εννοιολογικές μορφές του ρητού αριθμού, ανάπτυξη, αιτιολόγηση και λειτουργία αυτών ως αυτόνομων διδακτικών μοντέλων. Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, τ. 3, (3-43). Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας της Ε.Μ.Ε. Θεσσαλονίκη.

Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: a model. *Journal of Education for Teaching, 15(1),* pp. 13-33.

Euler, L. (1770/1840). *Elements of Algebra* (μεταφρ. J. Hewlett). Ανατύπωση. New York: Springer, 1984.

Εξαρχάκος, Θ. Γ. & Ντζιαχρήστος Β. (1993). Στοιχειώδεις μαθηματικές έννοιες: Η μαθηματική τους δικαιολόγηση. *Μαθηματική Επιθεώρηση,* τ. 40 , σ. 1-19. Ε.Μ.Ε.

Θωμαΐδης, Ι. (1995). *Διδακτική μετατόπιση μαθηματικών εννοιών και εμπόδια μάθησης. Η περίπτωση της απόλυτης τιμής*. Διδακτορική διατριβή. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης. Σχολή Θετικών Επιστημών. Μαθηματικό Τμήμα. Θεσσαλονίκη.

Θωμαΐδης, Ι. (1981). Η Αρχή και Εξέλιξη της Τριγωνομετρίας. *Μαθηματική Επιθεώρηση,* τ. 24 , σ. 45-73. Ε.Μ.Ε.

Θωμαΐδης, Ι. (1997). Είναι δυνατός ο «ιστορικός παραλληλισμός» στη διδασκαλία και μάθηση μαθηματικών εννοιών; *Ερευνητική Διάσταση*, τ. 2, σ. 3-38. Ε.Μ.Ε. Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας.

Fischbein, Efraim (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics 8 (pp. 153-165).* Dordrecht-Holland.

Fischbein, Efraim (1990). Psychology and Mathematics. Introduction in Pearla Nesher and Jeremy Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-13). Cambridge University Press, Cambridge, GB.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 1985, 16*, 3-17.

Flegg, G. (1989). *Numbers through the Ages*. The Open University. Macmillan Education LTD. GB.

Fowler, D. H. (1987). *The Mathematics of Plato's Academy*. Oxford University Press. New York.

Fowler, D. H. (1992). Logistic and fractions in early Greek mathematics: a new interpretation. In P. Benoit, K. Chemta, and J. Ritter (Eds.) *Histoire de Fractions, fractions d' histoire* (pp. 133-148). Basel: Birkhauser Verlag.

Freudenthal, Hans (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Holland: D. Reidel.

Fuson, K. (1988). Children's counting and concepts of number. New York: Springer-Verlag.

Fort, M. (1991). Κονστρουκτιβισμός: Από το μαθησιακό στο παιδαγωγικό μοντέλο. (Μετάφραση). *Ευκλείδης Γ',* τόμος 8, τεύχος 29, σ. 53-66. Ε.Μ.Ε.

Gallistel C.R. and Gelman, R. (1990). The what and how of counting. *Cognition, 34*, 197-199. Elsevier Science Publishers B.V.

Gearhart, M., Saxe, G., Seltzer, M., Schlackman, J., Ching, C., Nasir, N., Fall, R., Bennett, T., Rhine, S., Sloan, T. (1999). Opportunities to learn fractions in elementary mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, *vol. 30*, n. 3, pp. 286-315. US: National Council of Teachers of Mathematics.

Gelman, R. (1990). Structural Constraints on cognitive development: introduction to a special issue of *Cognitive Science*. *Cognitive Science, 14*, 3-9. Michigan.

Gelman, R. (1991). Epigenetic Foundations of Knowledge Structures: Initial and Transcendent Constructions. In S. Carey & R. Gelman (Eds.), *The Epigenesis of Mind: Essays on biology and cognition (pp. 293-322)*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Gelman, R. (1995). Η Λογική ικανότητα των μικρών Παιδιών: Κανόνες Σταθερότητας του Αριθμού (μετάφραση, 1972). Στο Σ. Βοσνιάδου (Επιμ.) *Ψυχολογία των Μαθηματικών*, (σελ. 46-69), Gutenberg, Αθήνα.

Gelman, R. & Baillargeon, R. (1983). A review of some Piagetian Concepts.

Gelman, R., Cohen, M. & Hartnett, P. (1989). To Know mathematics is to go beyond thinking that "fractions aren't numbers". *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of the North American Chapter, International Group for Psychology of Mathematics Education*. New Branswick, NJ.

Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gelman, R. & Greeno, J. (1987). On the nature of competence: Principles for understanding in a domain. In Resnick L. B (Ed) *Knowing, learning and instruction. Essays in honour of Robert Glaser.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gelman, R. & Meck, B. (1992). Early principles aid initial but not later conceptions of number. In J. Bideaud, C. Meljac, & J. Fischer (Eds.), *Pathways to number* (pp. 171-189). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ginsburg, H.P. (1983). *The Development of Mathematical Thinking.* New York: Academic Press.

Ginsburg, H. & Baron, J. (1993). Cognition: Young Children's Construction of Mathematics. In Robert J. Jensen (Επιμ.) *Research Ideas for the Classroom Early Childhood Mathematics*, (pp. 3-21), NCTM, New York: Macmillan Publishing Company.

Glaeser, G. (1984). A propos des obstacles epistemologiques. Réponse a Guy Brousseau. *Recherches en didactique des mathématiques* 5 (2), 229-234.

Glaser, R. (1984). Education and Thinking. The Role of Knowledge. *American Psychologist*, vol. 39, n. 2, 93-104.

Graeber, Anna O. (1993). Research into Practice: Misconceptions about Multiplication and Division. *Arithmetic Teacher*, vol. 40, n. 7, (pp. 408-11).

Graeber, Anna O. and Baker, Kay M. (1991). Curriculum Materials and Misconceptions Concerning Multiplication and Division. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 13, n. 3, (pp. 25-38).

Graeber, Anna O. and Baker, Kay M. (1992). Little into Big Is the Way It Always Is. *Arithmetic Teacher*, vol. 39, n. 8, (pp. 18-21).

Graeber, Anna O. and Tirosh, Dina (1990). Insights fourth and fifth graders bring to multiplication and division with decimals. *Educational Studies in Mathematics,* 21, 565-588. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Greer, Brian (1987). Understanding of arithmetical operations as models of situations. In John A. Sloboda, and Don Rogers, (Eds.) *Cognitive Processes in Mathematics* (pp. 60-80). Oxford, England: Oxford University Press.

Greeno, J.G. Riley M.S. & Gelman R., (1984). Conceptual competence and children's counting. *Cognitive Psychology*, 16, pp. 94-143.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 22, No 3, 170-218.

Greeno, J. G. & Goldman, S. V. (1998) (Επιμ.). *Thinking Practices in Mathematics and Science Learning.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Greer, B., (1987). Non-conservation of multiplication and division involving decimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, pp. 37-45.

Greer, Brian (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Επιμ.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Grouws A. D. (Επιμ.) (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Guillemot, M. (1992). Do notational and operational practices allow us to speak of Egyptian fractions? In P. Benoit, K. Chemta, and J. Ritter (Eds.) *Histoire de Fractions, fractions d' histoire* (pp. 53-70). Basel: Birkhauser Verlag.

Hart, Kathleen (1980). From the whole numbers to fractions and decimals. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 1, n.1, pp. 61-75.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London, Murray J.

Hart, K. (1987). Strategies and Errors in Secondary Mathematics. *Mathematics in School* vol. 16, n. 2, pp. 14-17.

Hart, K. & Kerslake, D. (1983). Avoidance of Fractions. Paper presented at the annual meeting for *the American Educational Research Association*. Montreal, Canada.

Hartnett, P. & Gelman, R. (1995). Early understandings of Numbers: Paths or Barriers to the Construction of New Understanding?

Hercovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Keiran (Eds.) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, pp. 60-86. N.C.T.M.-Erlbaum.

Hiebert, J., Επιμ. (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 333-355.

Hiebert, J. & Behr, M. (Eds.) (1989). *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1988). Instruction and cognitive change in mathematics. *Educational Psychologist, 23* (2), 105-117.

Howden, Hilde (1990). Egyptian Fractions. In Judith Trowell (Επιμ.) *Projects to Enrich School Mathematics: Level 1*. National Council of Teachers of Mathematics (pp. 57-62).

Hudges, M (1996). *Τα Παιδιά και η Έννοια του Αριθμού* (μετάφραση, 1986). Gutenberg Ψυχολογία, Αθήνα.

Hudges, M (1992). Ποια δυσκολία υπάρχει στη μάθηση της αριθμητικής. Στα *Κείμενα Εξελικτικής Ψυχολογίας, τ. Β΄, Σκέψη*, Βοσνιάδου Σ. (Επιμ..), (σ.. 165-190), Gutenberg, Αθήνα.

Hunting, R. P. (1986). Rachel's schemes for constructing fraction knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 17, pp. 49-66.

Ioannides, C., & Vosniadou, S. (in press). Exploring the changing meanings of force: From coherence to fragmentation, *Cognitive Science Quarterly*.

Isaacs, Nathan (1960). *New Light on Children's Ideas of Number. The work of Professor Piaget.* William Clowes & Sons, Limited, London, GB.

Ιωαννίδης Χρήστος (1991). *Η εξέλιξη της έννοιας της δύναμης*. Διδακτορική διατριβή. Α.Π.Θ. Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών. Θεσσαλονίκη.

Ιωαννίδης, Χ. & Βοσνιάδου, Σ. (1994). Νοητικές αναπαραστάσεις των μαθητών για την έννοια της δύναμης. Στο βιβλίο του Β. Κουλαϊδή (Εκδ.) *Αναπαραστάσεις του Φυσικού Κόσμου* (σ. 263-310). Σειρά Ψυχολογίας, Gutenberg. Αθήνα.

Ιωαννίδου Ισμήνη (1998). *Η ανάπτυξη των γνώσεων για τα γεωφυσικά φαινόμενα. Επιπτώσεις στη διδασκαλία*. Διδακτορική διατριβή. Πανεπιστήμιο Αθηνών. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης. Αθήνα.

Ιωαννίδου, Ι. και Βοσνιάδου, Σ. (2001). Η ανάπτυξη των γνώσεων για τη διαστρωμάτωση και σύσταση του εσωτερικού της γης –Επιπτώσεις στη διδασκαλία. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση, τ. 31* (σ. 107-148), Αθήνα.

Ιωνάς, Π. (1989). Τα Αιγυπτιακά κλάσματα και η ανάλυση ενός κλάσματος σε άθροισμα κλασματικών μονάδων. *Διάσταση, 4*, σ. 64-79, Ε.Μ.Ε., Θεσσαλονίκη.

Keller, Olivier (1918). L' algèbre et le calcul en Egypte antique. Le problème 24 du papyrus de Rhind. Les signes entoures signifient "quantité", en hiératique et en hiéroglyphes. Institut de recherche pour l' enseignement des mathématiques. Académie de Lyon. Université Claude Bernard.

Kennedy, Leonard M. & Tipps, Steve (1988). *Guiding Children's Learning of Mathematics*. Belmont, California: Wadsworth.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER - Nelson.

Kieran, Carolyn (1990). Cognitive Processes Involved in Learning School Algebra. In Pearla Nesher and Jeremy Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 96-112). Cambridge University Press, Cambridge, GB.

Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, 2 (pp. 162-181)). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. In R. Leinhardt, R. Putnam and R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale. NJ, pp. 323-371.

Kilpatrick, Jeremy (1992). A history of research in mathematics education. In A. D. Grouws (Επιμ.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3-38). New York: Macmillan.

Klein, Jacob (1998). Ο κόσμος της Φυσικής και ο «φυσικός» κόσμος (μετάφραση). *Νεύσις, τ. 7, σ. 62,* Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα.

Kline, M. (1972).Mathematics in western culture. London: Penguin Books.

Krutetskii, V.A., (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago. The University of Chicago Press.

Καστάνης, Ν. (1992). (Επιμ.) Εισαγωγή στην Ιστορία της Μαθηματικής Παιδείας.Τεύχη 1, 2, 3, 4 και 5. Θεσ/νίκη.

Κολέζα, Ευγενία. (1994). Σκέψεις γύρω από το ρόλο της αναπαράστασης στη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Μαθηματική Επιθεώρηση,* τ. 41, σ. 33-69. Ε.Μ.Ε.

Κοντογιάννης, Δημήτρης & Ντζιαχρήστος, Βαγγέλης. (1994). Οι ψυχολογικές βάσεις της διδακτικής των Μαθηματικών. *Μαθηματική Επιθεώρηση,* τ. 41, σ. 71-82. Ε.Μ.Ε.

Κουκά, Άννα (2000). Το νερό στη χημική εκπαίδευση: Έννοιες παρανοήσεις, δυσκολίες στην κατανόηση. Διδακτορική διατριβή. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Χημείας.

Κουκά, Α., Βοσνιάδου, Σ. και Τσαπαρλής, Γ. (2000). Διαισθητική γνώση και νοητικά μοντέλα για το νερό ως υγρό και αέριο. Παρουσίαση στο 2° Πανελλήνιο Συνέδριο: Διδακτική Φυσικών Επιστημών και Εφαρμογή νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση. Λευκωσία, Κύπρος.

Κύρκος, Χρήστος (1999). Η εξέλιξη των βιολογικών γνώσεων για την ταυτότητα, διατροφή, αναπνοή και ανάπτυξη των φυτών. Διδακτορική διατριβή. Πανεπιστήμιο Αθηνών. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης. Αθήνα.

Laborde, Colette (1990). Language and Mathematics. In Pearla Nesher and Jeremy Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 53-69). Cambridge University Press, Cambridge, GB.

Lambert, K. (1986). Knowing, Doing and Teaching Multiplication. *Cognition and Instruction, 3(4)*, pp. 305-342.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*. Mahwah, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Langford, K. & Satullo, A. (1993). Introductory Common and Decimal Fraction Concepts. In Robert J. Jensen (Επιμ.) *Reseasch Ideas for the Classroom Early Childhood Mathematics*, (pp. 223-247), NCTM, New York: Macmillan Publishing Company.

LeFevre, J. A. (1986). *Exploring fractions with fourth graders*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, April 20, 1986. San Francisco, CA.

LeFevre, J. A., Greenham, S. L., & Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computation estimation. *Cognition and Instruction*, 11, 95-132.

Lehtinen, E., Merenluoto, K. & Kasanen, E. (1997). Conceptual change in mathematics: From rational to (un)real numbers. *European Journal of Education*, vol. XII, n 2, 131-145.

Lesh, R. & Landau, M., Eds. (1983). *Acquisition of mathematical concepts and processes*. New York: Academic Press Inc.

Lesh, R., Landau, M., and Hamilton, E. (1983). Conceptual Models and Applied Mathematical Problem-Solving Research. In R. Lesh and M. Landau (Eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 263-343). New York: Academic Press Inc.

Loria, G. (1928). *Ιστορία των Μαθηματικών.* (Μετάφραση). Τόμος πρώτος, σ. 19-33. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, 1971.

Λάκκης, Κ. (1980). *Άλγεβρα*. Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.

Λεμονίδης, Χαράλαμπος (1994). Περίπατος στη Μάθηση της Στοιχειώδους Αριθμητικής. Εκδοτικός οίκος Αδελφών Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη.

Mack, Nancy K. (1990). Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *vol. 21*, n. 1, pp. 16-32. US: National Council of Teachers of Mathematics.

Mack, Nancy K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg, (Eds.). *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ (85-106): Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mack, Nancy K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *vol. 26*, pp. 422-441.

Maher, C. A., Martino, A. M. & Davis, R. B. (1994). Children's different ways of thinking about fractions. In J. P. da Ponte and J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol. 3,* (pp. 208-215). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Martin L., Pirie S.E.B. & Kieren T. E. (1994). Mathematical images for fractions: Help or Hindrance? In J. P. da Ponte and J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 3, (pp. 247-254). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Mayer, Richard (1983). *Thinking, Problem Solving, Cognition*. NY: W. H. Freeman and Company.

Mayer, R.E. (1985). Implications of Cognitive Psychology for Instruction in Mathematical Problem Solving. In E. A. Silver (Επιμ.) *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple research perspectives* (pp. 123-138). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mayer, R.E. (1995). Μαθηματική ικανότητα (μετάφραση, Mayer, 1985). Στο Σ. Βοσνιάδου (Εκδ.) *Ψυχολογία των Μαθηματικών*, (σελ. 154-190), Gutenberg, Αθήνα.

Moss, J. and Case, R. (1999). Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *vol. 30*, n. 2, pp. 122-147. US: National Council of Teachers of Mathematics.

Neugebauer, O. (1957). *The Exact Sciences in Antiquity*. New York. Dover.

Nersessian, N. (1994). Εννοιολογική δόμηση και διδασκαλία: Ένας ρόλος για την ιστορία στη διδακτική των φυσικών επιστημών. Στο βιβλίο του Β. Κουλαϊδή (Εκδ.) *Αναπαραστάσεις του Φυσικού Κόσμου* (σ. 115–154). Σειρά Ψυχολογίας, Gutenberg. Αθήνα.

Nersessian, N. J. & Resnick L. B. (1989). Comparing Historical and Intuitive Explanations of Motion. Does "Naïve" Physics Have a Structure? In *Proceedings of the Cognitive Science Society, 11*, (pp. 412 420) Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Nesher, Pearla (1986). Are Mathematical Understanding and Algorithmic Performance Related? *For the Learning of Mathematics 6*, 3, pp. 2-9.

Nesher, Pearla (1987). Towards an Instructional Theory: the Role of student's Misconceptions. *For the Learning of Mathematics* 7, 3, pp. 33-40.

Nesher, Pearla & Kilpatric, Jeremy (Eds.) (1990). *Mathematics and Cognition: A research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press, GB.

Nesher, P. & Peled, I. (1986). Shifts in reasoning. *Educational Studies in Mathematics* 17, pp. 67-79.

Neuman, Dagmar (1999). Early learning and awareness of division: A phenomenographic approach. *Educational Studies in Mathematics* **40**, 101-128. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Ohlsson, Stellan (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* (pp. 53-91). Reston Va: NCTM.

Oliveira, I. & Ramalho, G. (1994). Rational numbers: Strategies and misconceptions in sixth grade students. In J. P. da Ponte and J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 3, (pp. 392-398). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas*. Brighton: Harvester.

Peano, G. (1903). *Formulaire Mathématiques*, tome IV. Turin: Bocca Frères –Gh. Clausen.

Perrin-Glorian, M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: Naissance, développement, perspectives. In M. Artigue, R. Gras, C. Labord, P. Tavignot (Eds.) *Vingt ans de didactique des Mathématiques en France* (pp. 97-147). La Pensée Sauvage editions.

Piaget, J. (1945). *La formation du symbole*. Neuchatel: Delachaux et Niestle.

Piaget, J. (1949). *Introduction a l' épistémologie génétique*. Paris: Presses Universitaires de France.

Piaget, J. (1983). Piaget's Theory. In Paul H. Mussen (Επιμ.) *Handbook of Child Psychology (Formerly Carmichael's Manual of Child Psychology (1970)),* Fourth edition, v. 1, (pp. 103 – 128). John Wiley & Sons. New York

Piaget, J. (1995). Η έννοια του αριθμού (μετάφραση, 1965). Στο Σ. Βοσνιάδου (Επιμ.) *Ψυχολογία των Μαθηματικών*, (σελ. 27-45), Gutenberg, Αθήνα.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1952). *The child's conception of number*. London: Rootledge and Kegan Paul.

Philipou, G. & Christou, C. (1994). Prospective elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of fractions. In J. P. da Ponte and J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 4, (pp. 33-40). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Pirie, S. E. B. (1988). Understanding: Instrumental, relational, intuitive, constructed, formalized ...? How can we know? *For the Learning of Mathematics*, *8(3),* 2-6.

Pitkethly, A. & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 5-38. Belgium: Kluwer Academic Publishers.

Post, T. R., Cramer, K. A., Behr, M., Lesh, R. & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 327-362). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Pothier, Y., & Sawada, D. (1983). Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for research in mathematics education, 14(5)*, 307-317.

Pylishyn, Z. (1990). Some primitive mechanisms of spatial attention. *Cognition, 50*, 363-384.

Πιαζέ, Ζ. (1979). *Προβλήματα γεγετικής ψυχολογίας*. Αθήνα. Υποδομή.

Pluvinage, Francois (1988). Η μάθηση των αριθμών στην εποχή των ηλεκτρονικών υπολογιστών. (Μετάφραση των Α. Γαγάτση και Μ. Τζεκάκη). *Διάσταση, 2,* σ.48-58, Ε.Μ.Ε., Θεσσαλονίκη.

Πόταρη, Δ. (1989). Δυσκολίες μάθησης των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο. *Ευκλείδης Γ', τόμος 6, τεύχος 21 (1989)*, σ. 3-22. Ε.Μ.Ε.

Rashed, Roshdi (1984). *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. Translated by A. F. W. Armstrong. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Reeve, R. & Pattison, P. (1996). The referential adequacy of students' visual analogies of fractions. *Mathematical Cognition*, 2 (2), pp. 137-169.

Resnick. L.B. & Ford, W.W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Resnick, L. B. (1986). The Development of Mathematical Intuition. In M. Perlmutter (Επιμ.), *Perspectives on intellectual development: The Minnesota Symposia on Child Psychology* (Vol. 19, pp. 159-194). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L. B. (1987). Constructing Knowledge in School. In L. S. Liben (Επιμ.), *Development and learning: Conflict or congruence?* (pp. 19-50). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L. B. (1988). Treating Mathematics as an III-Structured Discipline. In R. I. Charles and E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 32-60). Hillsdale, NJ/Reston, VA: Erlbaum and National Council of Teachers of Mathematics.

Resnick, L. B. (Επιμ.) (1989). *Knowing, learning and instruction. Essays in honour of Robert Glaser.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Resnick, L. B. (1995). Αναπτύσσοντας τη Μαθηματική Γνώση (μετάφραση, 1989). Στο Βοσνιάδου Στέλλα (Εκδ.) *Ψυχολογία των Μαθηματικών*, (σελ. 128-153), Gutenberg, Αθήνα.

Resnick, L. B., Cauzinille-Marmeche, E. & Mathieu, J. (1995). Η κατανόηση της Άλγεβρας (μετάφραση, 1987). Στο Βοσνιάδου Στέλλα (Εκδ.) *Ψυχολογία των Μαθηματικών*, (σελ. 191-247), Gutenberg, Αθήνα.

Resnick, L.B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. & Peled, I. (1989). Conceptual Bases of Arithmetic Errors: The Case of Decimal Fractions. *Journal of Research in Mathematics Education,* 20 (1), pp. 8-27.

Resnick, L. B. & Omanson, S. (1987). Learning to Understand Arithmetic. In R. Glaser (Επιμ.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 3, pp. 41-95). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Riley, M.S., Greeno, J.G. & Heller, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In Herbert P. Ginsbourg (Επιμ.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196) New York: Academic.

Ritter, J. (1992). Metrology and the prehistory of fractions. In P. Benoit, K. Chemta, and J. Ritter (Eds.) *Histoire de Fractions, fractions d' histoire* (pp. 19-35). Basel: Birkhauser Verlag.

Sackur-Grisvard, C. and Leonard, F. (1985). Intermediate cognitive organizations in the process of learning a mathematical concept: The order of positive decimal numbers, *Cognition and Instruction 2*, 157-174.

Saenz-Lundlow, Adalina (1994). Michael's Fraction Schemes. *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 25, n. 1, (pp. 50-85).

Santos, V. M. (1994). An analysis of teacher candidates' reflections about their understanding of rational numbers. In J. P. da Ponte and J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 4, (pp. 201-208). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Saxe, G.B. (1991). *Culture and Cognitive Development: Studies in Mathematical* Understanding. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Saxe, Geoffrey & Gearhart, Maryl (1999). Relations Between Classroom Practices and Student Learning in the Domain of Fractions. *Cognition and Instruction, 17*(1), pp. 1-24. US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Saxe, G., Gearhart, M. & Seltzer, M. (1999). Relations Between Classroom Practices and Student Learning in the Domain of Fractions. *Cognition and Instruction, 17 (1), pp. 1-24.* Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Schminke, C.W., Maertens, Norbert & Arnold, William (1988). *Teaching the child mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Schoenfeld, H. A. (1985). Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematics Understanding. In E. A. Silver *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 361-379). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Επιμ.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, H. A. (1994). *Mathematical Thinking and Problem Solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A., Smith, J. & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's understanding of a complex subject matter domain. In R. Glaser (Επιμ.) *Advances in Instructional Psychology*, vol. 4. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Scholl, B. J. & Pylyshyn, Z. (1999). Tracking multiple items through occlusion: clues to visual object-hood. *Cognitive Psychology, 38*, 259-290.

Sierprinska, A. (1990). Epistemological obstacles and understanding: two useful categories of thought for research into teaching and learning mathematics. *Proceedings of the 2nd International Symposium on Research and Development in Mathematics Education*, Bratislava, August 1990.

Sierprinska, A., Kilpatrick, J., Balacheff, N., Howson, A. G., Sfard, A. & Steinbring, H. (1993). A Forum for Researchers. What is Research in Mathematics Education, and What Are Its Results? *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 24, n. 3, 274-278.

Silver, E. A. (1986).

Simon, Martin A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 24, n. 3, pp. 233-254.

Skemp, Richard (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Harmondsworth, U.K.: Penguin.

Skinner, B. F. (1953). *Science and human behavior*, New York: Macmillan.

Sloboda, John A. and Rogers, Don (Eds.) (!987) *Cognitive Processes in Mathematics* (Keele cognition seminars; 1). GB: Oxford University Press.

Sowder, Judith (1992). Estimation and number sense. In A. D. Grouws (Επιμ.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). New York: Macmillan.

Spelke, E. S. (1991). Physical objects in infancy: Reflections on Piaget's theory. In S. Carey & R. Gelman (Eds.), *The Epigenesis of Mind: Essays on biology and cognition*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Spelke, E. S. (1994). Initial Knowledge: Six Suggestions, *Cognition*, 50, p. 431-455.

Spelke, E. S., & Van de Walle, G. (1993). Perceiving and reasoning about objects: insights from infants. In N. Eilan, R. McCarthy, & B. Brewer, *Spatial representation*, Cambridge, MA: Blackwell.

Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J. & Cobb, P. (1983). Children's counting types: Philosophy, theory and application. New York: Praeger

Streefland, l., (1991). *Fractions in realistic Mathematics Education*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Struik, D. J. (1948). *A Concise History of Mathematics*, 2 vols., New York, Dover.

Sugarment, Susan (1987). *Piaget construction of the child's reality*. Cambridge, Cambridge University Press.

Σωτηράκης, Ν. (1989). Τα Μαθηματικά εις την Ελλάδα κατά την εποχήν της Τουρκοκρατίας (16ος έως 18ος αιών). *Διάσταση,* τ. 2-3, σ. 22-50.Π.Κ.Μ.Ε.Μ.Ε. Θεσσαλονίκη.

Thipkong, Siriporn and Davis, Edward J. (1991). Preservice Elementary Teachers' Misconceptions in Interpreting and Applying Decimals. *School Science and Mathematics*, vol. 91, n. 3, (pp. 93-99).

Tirosh, Dina (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, n. 1, pp. 5-25. US: National Council of Teachers of Mathematics.

Tirosh, Dina & Graeber, Anna O. (1990). Inconsistencies in Preservice Elementary Teachers' Beliefs about Multiplication and Division. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 12, n. 3-4, (pp. 65-74).

Tirosh, Dina & Graeber, Anna O. (1990). Evoking Cognitive Conflict to Explore Preservice Teachers' Thinking about Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, n. 2, pp. 98-108. US: National Council of Teachers of Mathematics.

Tzur, Ron (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 30, n. 4, pp. 390-416. US: National Council of Teachers of Mathematics.

Τζουβάρας, Θανάσης (1993). Αλγοριθμικά μαθηματικά - Εννοιολογικά μαθηματικά. Μια κρίσιμη και χρήσιμη διάκριση. *Διάσταση,* τ. 1-2, σ. 5-38. Ε.Μ.Ε. Θεσσαλονίκη.

Τρέσσου-Μυλωνά, Ε. (1991). Σταθερές, λαθεμένες στρατηγικές λύσεις που ακολουθούν τα παιδιά σε ασκήσεις διάταξης δεκαδικών αριθμών. *Ευκλείδης Γ',* τόμος 8, τεύχος 29, σ. 53-66. Ε.Μ.Ε.

Valdemoros, Marta (1994). Various representations of the fraction through a case study. In J. P. da Ponte and J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol. 2,* (pp. 16-23). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

van der Waerden, B. L. (1976). Written fractions. The Open University Press. Walton Hall Milton Keynes MK7 6AA.

van der Waerden, B. L. (2000). Η Αφύπνιση της Επιστήμης. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. Ηράκλειο.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-174)). New York: Academic Press Inc.

Vergnaud, Gerard (1990). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. In Pearla Nesher and Jeremy Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge University Press, Cambridge, GB.

Vergnaud, Gerard (1990). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.10, n. 23*, (pp. 133-170).

Vergnaud, Gerard (1994). Le rôle de l' enseignant a la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In M. Artigue, R. Gras, C. Labord, P. Tavignot (Eds.) *Vingt ans de didactique des Mathématiques en France* (pp. 177-191). La Pensée Sauvage.

von Glasersfeld, E. (1991). Abstraction, Re-Presentation and Reflection: An interpretation of experience and Piaget's approach. In L.P. Steffe (Επιμ.), Epistemological foundations of mathematical experience (pp. 45-67). NY: Springer-Verlag.

Vosniadou, Stella (1992). Knowledge acquisition and conceptual change. *Applied Psychology: An International Journal*, 41, 347-357.

Vosniadou, Stella (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. *Learning and Instruction: European research in an international context* (Vol. 4, pp. 45-69). Oxford: Pergamon Press.

Vosniadou, Stella (in press). On the Nature of Naïve Physics. In M. Limon and L. Mason (Eds.). *Reframing the Processes of Conceptual Change*. Kluwer Academic Publishers.

Vosniadou, Stella (in press). Exploring the Relationships between Conceptual Change and Intentional Learning. In G.M. Sinatra and P.R. Pintrich (Eds.) *Intentional Conceptual Change*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vosniadou, Stella (in press). On the Nature of Naïve Physics. In M. Limon and L. Mason (Eds.). *Refraiming the Processes of Conceptual Change*. Kluwer Academic Publishers.

Vosniadou, Stella (in press). Model-Based Reasoning in Conceptual Development. In L. Magnani, N.J. Nerserssian, and P. Thagard (Eds.) *Model-Based Reasoning in Scientific Discovery*, Kluwer Academic /Plenum Publishers.

Vosniadou, S. & Brewer, W. F. (1987). Theories of knowledge restructuring in development. *Review of educational research*, 57 (1), 51-67.

Vosniadou, S. & Brewer, W. F. (1994). Mental Models of the Earth: A study of Conceptual Change in Childhood. *Cognitive Psychology*, 24, σ. 535-85.

Vosniadou, S. & Ortony, A. (1989). *Similarity and analogical reasoning*. New York:
Cambridge University Press.

Vygotsky, L. (1970). Thought and language. The M.I.T. Press.

Vygotsky, L. (1978). Mind in Society: The development of higher psychological processes. Cambridge: Harvard University Press.

Wearne, Diana (1990). Acquiring meaning for decimal fraction symbols: A one year follow-up. *Educational Studies in Mathematics* 21, pp. 545-564.

Wilder, Raymond L. (1973). *Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών* (Μετάφραση). Το Ανοικτό Πανεπιστήμιο. Αθήνα: Π. Κουτσούμπος Α.Ε.

Xu, F. & Spelke, E.S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition, 74*, B1-B11. Esevier Science B.V.

Χατζηγεωργίου, Απόστολος Ι. (1990). Η πρόσθεση και η αφαίρεση στους ακεραίους. Δυσκολίες και λάθη των μαθητών. *Ευκλείδης Γ',* τόμος 7, τεύχος 27, σ. 8-24. Ε.Μ.Ε.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΙΝΑΚΕΣ ΕΡΕΥΝΑΣ Ι

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1.

Μέσες θέσεις των τιών τάξεων μαθητών και σημαντικότητα των διαφορών μεταξύ τους σε κάθε ομάδα ερωτήσεων της πρώτης έρευνας (Kruskal-Wallis)

	Τάξεις			Τιμή x^2	Βαθμ. Ελευθ.	Ασυμπτ. Σημαντ.
	Δ΄ Δημοτ.	ΣΤ΄ Δημοτ.	Β΄ Γυμν.			
Ομάδα 1	22,2	40,9	50,9	23,8	2	0,000
Ομάδα 2	21,5	39,6	52,9	27,8	2	0,000
Ομάδα 3	24,9	37,8	51,3	19,2	2	0,000

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2.

Μέσες θέσεις των δύο φύλων των μαθητών και σημαντικότητα των διαφορών μεταξύ τους σε κάθε ομάδα ερωτήσεων της πρώτης έρευνας (Mann-Whitney)

	Φύλο		Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Ασυμπτ. Σημαντ
	Αγόρι	Κορίτσι				
Ομάδα 1	37,71	38,32	690,5	1470,5	-0,13	0,9
Ομάδα 2	40,5	35,29	604,5	1270,5	-1,06	0,29
Ομάδα 3	40,27	35,54	613,5	1279,5	-0,96	0,34

ΠΙΝΑΚΕΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΙΙ

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1Α.

Βασικές κατηγορίες βαθμολόγησης στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ) – Ομάδα 1: Ερωτήσεις σχετικές με την ύπαρξη μικρότερου και μεγαλύτερου κλάσματος.

Ερώτηση 1: Γράψε το πιο μικρό κλάσμα που μπορείς να σκεφθείς.	Ερώτηση 1α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μικρό κλάσμα;	Ερώτηση 2: Γράψε το πιο μεγάλο κλάσμα που μπορείς να σκεφθείς.	Ερώτηση 2α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο κλάσμα;
α. Το κλάσμα 1/1	**1** Είναι το μικρότερο γιατί έχει τους μικρότερους αριθμούς	**α**. Το κλάσμα 1/1	**1** Είναι το μεγαλύτερο γιατί έχει μεγάλο αριθμητή και παρονομαστή
β. Ένα κλάσμα με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή π.χ. Κλάσματα όπως τα 1/2, 2/3, 1/6 ή τα 90/950 1/8000000 ή 1/1000	**2**. Είναι το μικρότερο γιατί όσο μεγαλύτερους αριθμούς έχει το κλάσμα τόσο μικρότερο είναι.	**β**. Ένα κλάσμα με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή π.χ. Κλάσματα όπως τα 1/2, 1230/2000 ή 1000/1000 ή 1000000/1000000	**2** Είναι το μεγαλύτερο γιατί όσο μικρότερους αριθμούς έχει το κλάσμα τόσο μεγαλύτερο είναι.
γ. Ένα κλάσμα με αριθμητή ίσο του παρονομαστή (διάφοροι του 1). Π.χ. 1000/1000 ή 1000000/1000000	**3**. Ερμηνεία του κλάσματος ως μέρους μιας ακέραιης μονάδας (κομμάτια από κάτι) - αναφορά στην ακέραια μονάδα.	**γ**. Ένα κλάσμα με αριθμητή ίσο του παρονομαστή (διάφοροι του 1). Π.χ. Κλάσματα όπως το 10/10, 100/100 ή100000/100000	**3**. Ερμηνεία του κλάσματος ως μέρους μιας ακέραιης μονάδας (κομμάτια από κάτι) - αναφορά στην ακέραια μονάδα.
δ. Ένα κλάσμα με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή, με αναφορά ότι υπάρχουν και μικρότερα π.χ. κλάσματα όπως τα 1/10000000000000000 ή το 1/ν ή το 1/ ∞ .	**4**. Σχέση αριθμητή – παρονομαστή. π.χ. Γιατί όσο μεγαλύτερο παρονομαστή και μικρότερο αριθμητή έχει τόσο μικρότερη είναι η αξία του.	**δ**. Ένα κλάσμα με αριθμητή μικρότερο ή ίσο του παρονομαστή, με αναφορά ότι υπάρχουν και μεγαλύτερα π.χ. Κλάσματα όπως τα 1000000/1000000 ή 999/1000 ή 100/100	**4**. Σχέση αριθμητή – παρονομαστή. π.χ. Γιατί όσο μικρότερο παρονομαστή και μεγαλύτερο αριθμητή έχει τόσο μεγαλύτερη είναι η αξία του.
ε. Ένα κλάσμα με αριθμητή μεγαλύτερο του παρονομαστή. Π.χ. κλάσματα όπως τα 2/1 ή 26/1 ή 1000/2	**5**. Ερμηνεία της αξίας ενός κλάσματος ως σχέση αριθμητή-παρονομαστή σε σχέση με τη μονάδα. Π.χ. Ο αριθμητής είναι μικρότερος του παρονομαστή, άρα το κλάσμα μικρότερο του 1.	**ε**. Ένα κλάσμα με αριθμητή μεγαλύτερο του παρονομαστή π.χ. Κλάσματα όπως τα 1000000000/1 ή 99999999999999999/1	**5**. Ερμηνεία της αξίας ενός κλάσματος ως σχέση αριθμητή παρονομαστή σε σχέση με τη μονάδα. Π.χ. Ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή, άρα το κλάσμα είναι μεγαλύτερο του 1.
	6. Ερμηνεία της αξίας ενός κλάσματος ως σχέση πηλίκου του αριθμητή δια του παρονομαστή. Π.χ. Γιατί διαιρούμε τη μονάδα με ένα τεράστιο αριθμό.	**στ**. Ένα κλάσμα με αριθμητή μεγαλύτερο του παρονομαστή π.χ. Κλάσματα όπως το 1000/10 ή το ν/1 ή ∞/1, 10000000000000000/1 αναφέροντας ότι δεν είναι το μοναδικό μεγαλύτερο	**6**. Ερμηνεία της αξίας ενός κλάσματος ως σχέση πηλίκου του αριθμητή δια του παρονομαστή. Π.χ. Γιατί διαιρούμε ένα τεράστιο αριθμό με τη μονάδα.
ζ. Δεν υπάρχει ένα μοναδικό μικρότερο κλάσμα	7. Οι αριθμοί είναι άπειροι.	ζ. Δεν υπάρχει ένα μοναδικό μεγαλύτερο κλάσμα	7. Οι αριθμοί είναι άπειροι.
η. Άσχετες απαντήσεις π.χ. η ψείρα γιατί όταν είναι στα μαλλιά μας δεν αισθανόμαστε τίποτε	**8**. Άσχετες απαντήσεις	**η**. Άσχετες απαντήσεις π.χ ο βροντόσαυρος γιατί είναι της προϊστορίας	**8**. Άσχετες απαντήσεις
θ. Δεν ξέρω	**9**. Μη επεξηγηματικές απαντήσεις	**θ**. Δεν ξέρω	**9**. Μη επεξηγηματικές απαντήσεις

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1Β

Κατηγορίες βαθμολόγησης απαντήσεων στις ερωτήσεις που σχετίζονται με την ύπαρξη ενός
ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών.

Ερωτήσεις Κατηγορίες απαντήσεων	Ερώτηση 1: Γράψε το πιο μικρό κλάσμα που μπορείς να σκεφθείς.
I. Μεγάλοι αριθμοί - μεγάλο κλάσμα	
1α. Μεγάλοι αριθμοί - μεγάλο κλάσμα	**α**[1] ή **β** ή **ε** Το κλάσμα 1/1 ή Κλάσματα όπως τα 1/2, 2/3, 1/6 ή Κλάσματα όπως τα 2/1 ή
1β. Μεγάλοι αριθμοί - μεγάλο κλάσμα. Οι αριθμοί δεν έχουν τέλος.	**β** Τα κλάσματα 1/2 ή 0,1/1
II. Μικροί αριθμοί - μεγάλο κλάσμα.	
2. Το μικρότερο κλάσμα περιέχει μεγάλους αριθμούς και το μεγαλύτερο μικρούς.	**β** ή **γ** Κλάσματα όπως τα 90/950, 357/800 ή 1000000/1000000
III. Κλάσμα ως σχέση μέρους μιας ακέραιης μονάδας	
3α. Το μικρότερο κλάσμα με α<π και το μεγαλύτερο κλάσμα με α<π ή α=π	**β** Κλάσματα όπως τα 1/8000000 ή 1/1000 ή 1/100
3β. Απειρία ως προς το μικρότερο.	**δ** Κλάσματα όπως το 1/100. Φυσικά υπάρχουν και μικρότερα κλάσματα από αυτό.
IV. Κλάσμα ως σχέση δυο αριθμών	
4. Το μικρότερο κλάσμα με α<π και το μεγαλύτερο κλάσμα με α>π.	**β** Το 1/10000000000000000 ή το 1/9999999999999999
V. Δεν υπάρχει ένα μοναδικό μικρότερο ή μεγαλύτερο κλάσμα	
5α. Απειρία ως προς το μεγαλύτερο κλάσμα.	**β** Το κλάσμα 1/2.
5β. Απειρία ως προς το μικρότερο και το μεγαλύτερο κλάσμα.	**δ** ή **ζ** Δεν υπάρχει μικρότερο κλάσμα ή κλάσματα όπως τα 1/ν ή 1/ ∞ ή 1/10000000000000000
6. Ασαφείς ή άσχετες μη κατηγοριοποιήσιμες απαντήσεις.	**ε** ή **η**. Κλάσματα όπως το 1/0 ή $\frac{-1000000000}{+1000000000}$ ή η ψείρα γιατί όταν είναι στα μαλλιά μας δεν αισθανόμαστε τίποτε
0. Ελλιπείς απαντήσεις	**θ**. Δεν ξέρω

[1] Οι κατηγορίες αναφέρονται στις κατηγορίες βαθμολόγησης στο επίπεδο ερώτησης (Βλ. Πίνακα 3.1Α)

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1Β (Συνέχεια)

μικρότερου και ενός μεγαλύτερου κλάσματος στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ –ομάδα 1) και

Ερώτηση 1α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μικρό;	Ερώτηση 2: Γράψε το πιο μεγάλο κλάσμα που μπορείς να σκεφθείς.	Ερώτηση 2α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο;
1 ή **9** Γιατί είναι το μικρότερο κλάσμα που μπορώ να σκεφθώ και δεν μπορώ να σκεφθώ άλλο ή γιατί περιέχει μικρούς αριθμούς.	**β** ή **γ** Κλάσματα όπως τα 95/100 ή 1230/2000 , 100/500 ή 10000/100000000 ή 1000/1000 ή 1000000/1000000	**1** ή **9** Γιατί αυτό είναι το πιο μεγάλο κλάσμα ή Γιατί έχει μεγάλο αριθμητή και παρονομαστή ή Γιατί δεν ξέρω μεγαλύτερο
1 ή **9** Γιατί το 2/2 είναι μεγαλύτερο ή γιατί περιέχει μικρούς αριθμούς.	**δ** Τα 999/1000, 1000000/1000000 ή το100/100 ……	**1** ή **9** Καταρχήν τα κλάσματα δεν έχουν όρια ή εγώ έβαλα ένα κλάσμα υπάρχουν όμως και μεγαλύτερα.
2 ή **9** Γιατί έχει μεγαλύτερους αριθμούς και όσο μεγαλύτερους έχει τόσο μικρότερο είναι.	**β** ή **γ** Το κλάσμα 1/2 ή το κλάσμα 1/1	**2** ή **9** Γιατί όσο μικρότερους αριθμούς έχει το κλάσμα τόσο μεγαλύτερο είναι.
3 ή **4** ή **5** Γιατί είναι διαιρεμένος σε πολλά κομμάτια έτσι είναι μικρό το κλάσμα ή γιατί πήρα μόνο το ένα από τα χίλια ή γιατί χωρίζουμε σε 100 ίσα μέρη και παίρνουμε το 1	**α** ή **β** ή **γ** Κλάσματα όπως το 1/2 ή το 99/100 ή το κλάσμα 1/1 ή το 8/8 ή το 100/100.	**3** ή **4** ή **5** Γιατί ο παρανομαστής είναι διαιρεμένος σε 2 μεγάλα κομμάτια ή γιατί έτσι είναι μεγάλο το κλάσμα. ή γιατί παίρνουμε όλο το μέρος του κλάσματος
3 ή **4** ή **5** Πιστεύω ότι είναι μικρό, γιατί ο παρονομαστής του είναι πολύ μεγάλος.	**α** ή **β** ή **γ** Το κλάσμα 1/2 ή το 1/1	**3** ή **4** ή **5** Γιατί δεν υπάρχει μεγαλύτερο ή γιατί ο παρονομαστής του είναι ο μικρότερος
4 ή **5** ή **6** Επειδή ο παρονομαστής είναι πολύ μεγάλος και ο αριθμητής πολύ μικρός και είναι μικρότερο από τη μονάδα ή γιατί διαιρούμε τη μονάδα με ένα τεράστιο αριθμό	**ε** Κλάσματα όπως τα 1000000000/1 ή 99999999999999999/1	**4** ή **5** ή **6** Γιατί έχει μεγάλο αριθμητή και μικρό παρονομαστή και είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα ή γιατί διαιρούμε ένα τεράστιο αριθμό με τη μονάδα
4 Γιατί από τα δύο κομμάτια πήραμε μόνο το ένα ή είναι το πιο απλοποιημένο κλάσμα	**στ** Κλάσματα όπως το1000/100.	**4** ή **7** Δεν μπορώ να σκεφθώ το μεγαλύτερο κλάσμα ή Δεν πιστεύω ότι αυτό είναι το μεγαλύτερο κλάσμα
4 Γιατί όσο μεγαλύτερο παρον. και μικρότερο αριθμητή έχει τόσο μικρότερη είναι η αξία του ή οι αριθμοί είναι άπειροι	**στ** ή **ζ** Δεν υπάρχει μεγαλύτερο κλάσμα ή κλάσματα όπως τα ν/1 ή ∞/1 ή 10000000000000000/1	**4** ή **7** Γιατί όσο μικρότερο παρον. και μεγαλύτερο αριθμητή έχει τόσο μεγαλύτερη είναι η αξία του. Υπάρχουν πολύ μεγαλύτερα
8 ή **9** Δεν ξέρω ή άσχετες απαντήσεις	**β** ή **η** Κλάσματα όπως το +1000000000 ή - 1000000000 ο βροντόσαυρος γιατί είναι της προϊστορίας	**8** ή **9** Δεν ξέρω ή άσχετες απαντήσεις
9 Δεν ξέρω	**θ** Δεν ξέρω	**9** Δεν ξέρω

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2Α.

Βασικές κατηγορίες βαθμολόγησης στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ) – Ομάδα 2: Ερωτήσεις διάταξης κλασμάτων και της ακέραιας μονάδας.

Ερώτηση 3: Βάλε στη σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς 5/6, 1, 1/7, 4/3	Ερώτηση 4: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: 4/5 2/5 Ερώτηση 5: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: 4/15 4/7 Ερώτηση 6: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: 5/8 4/3 Ερώτηση 7: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: 2/7 5/6 Ερώτηση 8: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: 2/3 4/9	Ερώτηση 3α: Γιατί τους έβαλες σ’ αυτήν τη σειρά; Ερωτήσεις 4α, 5α, 6α, 7α, 8α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο κλάσμα;
1α. Το κλάσμα που το απαρτίζουν μεγαλύτεροι αριθμοί (αριθμητής ή παρονομαστής ή και τα δύο) είναι το μεγαλύτερο – Η μονάδα είναι μικρότερη όλων **1β**. Το κλάσμα με τους μεγαλύτερους αριθμούς είναι το μεγαλύτερο- Η μονάδα είναι μεγαλύτερη όλων **1γ**. Το κλάσμα που το απαρτίζουν μεγαλύτεροι αριθμοί είναι το μεγαλύτερο-Διάταξη χωρίς τη μονάδα	**1**. Το κλάσμα που το απαρτίζουν μεγαλύτεροι αριθμοί (αριθμητής ή παρονομαστής ή και τα δύο) είναι το μεγαλύτερο	**1**. Όσο μεγαλώνουν οι δύο αριθμοί (αριθμητής – παρονομαστής), μεγαλώνει η αξία του κλάσματος **2**. Όσο μικραίνουν οι δύο αριθμοί (αριθμητής – παρονομαστής), μεγαλώνει η αξία του κλάσματος **3**. Κλάσμα ως σχέση μέρους μιας ακέραιης μονάδας (μεγαλύτερος αριθμός - μικρότερα κομμάτια). **4**. Κλάσμα ως σχέση αριθμητή παρονομαστή – χρήση κανόνων διάταξης **5**. Η ακέραια μονάδα σημείο αναφοράς της σύγκρισης κλασμάτων **6**. Κλάσμα ως το πηλίκο του αριθμητή δια τον παρονομαστή. **7**. Μετατροπή των κλασμάτων σε ισοδύναμα με ίδιο παρονομαστή **8**. Μη επεξηγηματικές ερμηνείες,
2α. Το κλάσμα με τους μικρότερους αριθμούς είναι το μεγαλύτερο. - Η μονάδα είναι μικρότερη όλων **2β**. Το κλάσμα με τους μικρότερους αριθμούς είναι το μεγαλύτερο - Η μονάδα είναι μεγαλύτερη όλων **2γ**. Το κλάσμα που το απαρτίζουν μικρότεροι αριθμοί είναι το μεγαλύτερο - Διάταξη χωρίς τη μονάδα	**2**. Το κλάσμα με τους μικρότερους αριθμούς είναι το μεγαλύτερο (αριθμητής ή παρονομαστής ή και τα δύο)	
3α. Σωστή διάταξη των κλασμάτων - Η μονάδα είναι μικρότερη όλων των κλασμάτων **3β**. Σωστή διάταξη των κλασμάτων - Η μονάδα μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων **3γ**. Σωστή διάταξη των κλασμάτων χωρίς τη μονάδα **3δ**. Σωστή διάταξη των κλασμάτων και της μονάδας	**3**. Σωστή επιλογή του μεγαλύτερου κλάσματος άσχετα με το μέγεθος των αριθμών που το απαρτίζουν	
4. Άσχετη απάντηση	**4**. Άσχετη απάντηση	
5. Δεν ξέρω	**5**. Δεν ξέρω	

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2Β

Κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών στις ερωτήσεις διάταξης κλασμάτων – ομάδα 2- στο επίπεδο

Ερωτήσεις Κατηγορίες απαντήσεων	Ερ. 3: Βάλε στη σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: 5/6, 1, 1/7, 4/3 Ερ. 3α: Γιατί τους έβαλες σ' αυτήν τη σειρά;	Ερ. 4: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: 4/5 2/5 Ερ. 4α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο;
Ι. Μεγάλοι αριθμοί-Μεγάλο κλάσμα		
1. Η μονάδα μικρότερη όλων.	**1α**[1] 1, 1/7, 4/3, 5/6 **1** π.χ. γιατί το μικρότερο πάντα μπαίνει μπροστά και τα άλλα νούμερα ακολουθούν.	**1** Το κλάσμα 4/5 **1** π.χ. γιατί έχει μεγαλύτερο αριθμητή ή γιατί έχει τα μεγαλύτερα νούμερα.
2. Η μονάδα μεγαλύτερη όλων.	**1β** 1/7, 4/3, 5/6, 1, ή 4/3<5/6<1/7<1, **1 ή 3** π.χ. γιατί το 1 είναι μια ολόκληρη ακέραια μονάδα και είναι το μεγαλύτερο και τα άλλα κλάσματα από τους αριθμητή ή παρονομαστή.	**1** Το κλάσμα 4/5 **1** π.χ. γιατί έχει μεγαλύτερο παρονομαστή.
3. Διάταξη χωρίς τη μονάδα.	**1γ** 1/7, 4/3, 5/6 ή 4/3<5/6<1/7 **1** π.χ. γιατί έχει στο πρώτο μικρότερο διαιρετέο και μετά αρχίζει να γίνεται μεγαλύτερος	**1** Το κλάσμα 4/5 **3** π.χ. γιατί αν χωρίσουμε έναν κύκλο σε 5 κομμάτια και πάρουμε 4 παίρνουμε σχεδόν ολόκληρο το κύκλο.
ΙΙ. Μικροί αριθμοί - Μεγάλο κλάσμα		
4. Η μονάδα μεγαλύτερη όλων	**2β** 5/4< 4/3<1/7<1 ή 5/6, 4/3, 1/7, 1 ή 1/7, 5/6, 4/3, 1, **2** π.χ. γιατί τα μεγαλύτερα για τα κλάσματα είναι τα μικρότερα ή γιατί όσο πιο λίγα είναι τα κομμάτια στα οποία χωρίζεται μια μονάδα τόσο πιο μεγάλα είναι.	**2** Το κλάσμα 2/5 **2** π.χ. γιατί όσο μικρότερους αριθμούς έχει ένα κλάσμα τόσο μεγαλύτερο είναι.
ΙΙΙ. Σωστή διάταξη των κλασμάτων εκτός της μονάδας		
5. Η μονάδα μικρότερη όλων.	**3α** 1, 1/7, 5/4, 4/3 **8** π.χ.	**3** Το κλάσμα 4/5 **3** π.χ. γιατί παίρνουμε τα 4 από τα 5 μέρη ενός κύκλου
6. Η μονάδα μεγαλύτερη όλων.	**3α** 1/7, 5/4, 4/3, 1 **3** γιατί το 7 χωρίζεται σε πιο πολλά κομμάτια απ' ότι οι άλλοι αριθμοί ή τα έβαλα σ' αυτή την σειρά γιατί τα κλάσματα που έχουν μικρότερο παρον. είναι μεγαλύτερα από αυτά που έχουν μεγαλύτερο παρονομαστή	**3** Το κλάσμα 4/5 **1** ή **3** ή **4** γιατί έχει μεγαλύτερο αριθμητή ή γιατί έχει πιο πολλά κομμάτια ή γιατί είναι ομώνυμα και έχει μεγαλύτερο αριθμητή.
7. Διάταξη χωρίς τη μονάδα	**3γ** 1/7, 5/6, 4/3 **4** ή **7** ή **8** π.χ. μετατροπή σε ομώνυμα ή δεν ξέρω	**3** Το κλάσμα 4/5 **3** ή **4** π.χ. γιατί έχει πάρει πιο πολλά κομμάτια από το 2/5 ή γιατί στα ομώνυμα αυτό είναι το πιο μεγάλο.
IV. Σωστή διάταξη των κλασμάτων και της μονάδας		
8. Σωστή διάταξη των κλασμάτων και της μονάδας	**3δ** 1/7<5/6<1<4/3 **4** ή **5** ή **6** ή **7** π.χ. γιατί 6/42<35/42<42/42<56/42 ή κάνουμε τις πράξεις για να δούμε πιο είναι μικροτερο 50 └6 10 └7 4 └3 20 │0,83 30 │0,142 10 │1,3 2 2 1 άρα από το μικρότερο στο μεγαλύτερο είναι: 1/7, 5/6, 1, 4/3	**3** Το κλάσμα 4/5 **3** ή **4** π.χ. γιατί από τα 5 παίρνουμε τα 4 ενώ στο δεύτερο από τα 5 παίρνουμε τα 2 ή γιατί είναι ομώνυμα και ο αριθμητής του είναι μεγαλύτερος.
9. Μη κατηγοριοποιήσιμες απαντήσεις	**1** ή **5** 1, 1/7, 4/3, 5/6 ή δεν ξέρω **8** π.χ. γιατί έτσι είναι ή δεν ξέρω	**2** Το κλάσμα 2/5 **2** π.χ. γιατί έχει μικρότερο αριθμητή
0. Ελλιπείς απαντήσεις	**5** Δεν ξέρω	**5** Δεν ξέρω

[1] Οι κατηγορίες αναφέρονται στις κατηγορίες βαθμολόγησης στο επίπεδο ερώτησης (Βλ. Πίνακα 3.2Α)

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2Β (συνέχεια)

ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ) και ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών.

Ερ. 5: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: 4/15 4/7 Ερ. 5α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο;	Ερ. 6: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: 5/8 4/3 Ερ. 6α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο;	Ερ. 7: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: 2/7 5/6 Ερ. 7α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο;	Ερ. 8: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: 2/3 4/9 Ερ. 8α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο;
1α Το κλάσμα 4/15 **1** π.χ. γιατί έχει μεγαλύτερο παρονομαστή.	**1α** Το κλάσμα 5/8 **1** π.χ. γιατί έχει μεγαλύτερους αριθμούς.	**1α** Το κλάσμα 5/6 ή το 2/7 **1** π.χ. γιατί έχει το μεγαλύτερο αριθμητή ή γιατί έχει το μεγαλύτερο παρονομαστή	**1α** Το κλάσμα 4/9 **1** π.χ. γιατί έχει τους μεγαλύτερους αριθμούς.
1α Το κλάσμα 4/15 **1** π.χ. γιατί όταν ένα κλάσμα έχει ίδιους αριθμητές μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει μεγαλύτερο παρονομαστή.	**1α** Το κλάσμα 5/8 **1** π.χ. γιατί το 8 είναι μεγαλύτερο από το τρία.. Μη αναγνώριση του καταχρηστικού κλάσματος.	**1α** Το κλάσμα 5/6 ή το 2/7 **1** π.χ. ο κλάσμα με το μεγαλύτερο αριθμητή ή με το μεγαλύτερο παρονομαστή. π.χ. το 2/7 , γιατί το 7 είναι μεγαλύτερο από το 6.	**1α** Το κλάσμα 4/9 **1** π.χ. γιατί το 9 είναι μεγαλύτερο από το τρία.
1α Το κλάσμα 4/15 **1** π.χ. γιατί έχει πιο μεγάλο διαιρετέο από το άλλο κλάσμα .	**1α** Το κλάσμα 5/8 **1** π.χ. γιατί έχει πάλι μεγαλύτερο και διαιρέτη και διαιρετέο	**1α** Το κλάσμα 2/7 **1** π.χ. γιατί έχει μεγαλύτερο διαιρετέο.	**1α** Το κλάσμα 4/9 **1** π.χ. γιατί ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι πιο μεγάλος.
2 ή **3** Το κλάσμα 4/7 **2** ή **3** π.χ. γιατί είναι πιο μικρό το εφτά από το 15 ή Εάν χωρίσουμε ένα στρογγυλό αντικείμενο σε 7 ίσα μέρη. Τα 7 θα είναι πιο μεγάλα απ' τα 15.	**2** ή **3** Το κλάσμα 4/3 **2** π.χ. γιατί όποια είναι πιο μικρά για τα κλάσματα είναι πιο μεγάλα.	**2** Το κλάσμα 5/6 ή το 2/7 **2** π.χ. το κλάσμα με το μικρότερο αριθμητή ή παρονομαστή είναι το μεγαλύτερο.	**2** Το κλάσμα 2/3 **2** ή **3** π.χ. γιατί στα κλάσματα τα μικρότερα είναι τα μεγαλύτερα και γιατί αν έχουμε ένα καρπούζι και το χωρίζουμε στα 3 ή στα 9 μεγαλύτερα είναι όταν το χωρίζουμε στα 3.
2 ή **3** Το κλάσμα 4/7 **3** ή **4** π.χ. γιατί το 4/7 γιατί έναν κύκλο αν το χωρίσουμε σε 15 μέρη τα κομμάτια γίνονται μικρότερα απ'ότι σε 7.	**3** Το 4/3 **3** π.χ, γιατί παίρνουμε ένα κύκλο και ακόμη ένα τρίτο	**3** Το 5/6 **3** π.χ. γιατί παίρνουμε 5 από τα 6 κομμάτια	**3** Το 2/3 **3** π.χ. γιατί ένα κύκλο αν το χωρίσουμε σε τρία κομμάτια παίρνουμε μεγαλύτερα κομμάτια
2 ή **3** Το κλάσμα 4/7 **3** ή **4** π.χ. γιατί έχει μικρότερο παρονομαστή.	**3** Το 4/3 **3** ή **4** ή **7** π.χ. γιατί το 15/24 < 39/24 (μετατροπή σε ομώνυμα και σύγκριση ως προς τον αριθμητή)	**3** Το 5/6 **3** ή **4** ή **7** π.χ. μετατροπή σε ομώνυμα και σύγκριση ως προς τον αριθμητή	**3** Το 2/3 **4** ή **7** π.χ. γιατί 6/9 < 4/9 (μετατροπή σε ομώνυμα και σύγκριση ως προς τον αριθμητή).
3 Το κλάσμα 4/7 **3** ή **4** π.χ. γιατί τα 7 κομμάτια επειδή είναι λιγότερα είναι μεγαλύτερα από τα 15 κομμάτια.	**3** Το 4/3 **3** ή **4** ή **7** π.χ. επειδή το 'χουμε χωρίσει σε τρία κομμάτια μεγαλύτερα από τα 8 κομμάτια που είναι μικρότερα.	**3** Το 5/6 **3** ή **4** ή **7** π.χ. επειδή τα 6 κομμάτια είναι μεγαλύτερα από τα 7 μικρότερα ή μετατροπή σε ομώνυμα.	**3** Τα 2/3 **3** ή **4** ή **7** π.χ. γιατί τα 3 κομμάτια είναι μεγαλύτερα από τα 9 που επειδή είναι περισσότερα είναι και μικρότερα.
3 Το κλάσμα 4/7 **3** ή **4** π.χ. γιατί από τα 7 παίρνουμε τα 4 ενώ από τα 15 (που είναι μικρότερα κομμάτια) παίρνουμε τα 4	**3** Το 4/3 **4** ή **5** ή **6** ή **7** π.χ, γιατί από τη μετατροπή που κάναμε σε ομώνυμα βλέπουμε ότι το 32/24 είναι μεγαλύτερο από το 15/24 ή γιατί 5:8=0,625 και 4:3=1,3 ή γιατί είναι μεγαλύτερο απόο τη μονάδα	**3** Το 5/6 **5** ή **6** ή **7** π.χ. γιατί 2/7=12/42 και το 5/6=35/42 και το 35/42 έχει μεγαλύτερο αριθμητή από το 12/42 ή γιατί 2:7=0,28 και 5:6=0,8 ή γιατί είναι σχεδόν ένα	**3** Το 2/3=6/9 **7** γιατί το 6/9 έχει μεγαλύτερο αριθμητή από το 4/9.
1 Το κλάσμα 4/15 **1** π.χ. γιατί έχει παρονομαστή το 15	**3** Το 4/3 **6** π.χ. γιατί τόσο βγαίνει αν διαιρέσω	Το 5/6 γιατί απέχουν ένα	Δεν ξέρω
Δεν ξέρω	Δεν ξέρω	Δεν ξέρω	Δεν ξέρω

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3Β

Κατηγορίες βαθμολόγησης απαντήσεων στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ, Ομάδα 3: Εκτίμηση

Ερωτήσεις Κατηγορίες απαντήσεων	Ερώτηση 9: Το αποτέλεσμα είναι μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο του 17 και γιατί; $17 \cdot \frac{3}{8}$	Ερώτηση 10: Το αποτέλεσμα είναι μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο του 17 και γιατί; $17 : \frac{2}{2}$
Ι. Ο πολ/σμος μεγαλώνει και η διαίρεση μικραίνει τον αριθμό		
1.Εφαρμογή του μοντέλου των φυσικών αριθμών	Μεγαλύτερο γιατί ο πολ/σμος μεγαλώνει	Μικρότερο γιατί η διαίρεση μικραίνει.
2. Εφαρμογή του μοντέλου των φυσικών αριθμών εκτός των πράξεων με κλάσματα q/q που δεν αλλάζουν το αποτέλεσμα	Μεγαλύτερο γιατί ο πολ/σμος μεγαλώνει.	Ίσο με το 17 γιατί διαιρούμε με το 1 ή 17:2/2=17:1=17
ΙΙ. Ο πολ/σμος και η διαίρεση με κλάσμα q/q δεν μεταβάλλει το αποτέλεσμα		
3. Πολ/σμοι και διαιρέσεις με κλάσματα της μορφής q/q δεν αλλάζουν το αποτέλεσμα.	Δεν ξέρω	Γιατί το αποτέλεσμά του είναι ίσο ή γιατί 2/2=1 και 17:1=17.
ΙΙΙ. Ο πολ/σμος μικραίνει και η διαίρεση μεγαλώνει τον αριθμό		
4. Ο πολ/σμος μικραίνει και η διαίρεση μεγαλώνει τον αριθμό	Μικρότερο γιατί ο πολλαπλασιασμός μικραίνει	Μεγαλύτερο γιατί η διαίρεση μεγαλώνει
ΙV. Ο πολ/σμος και η διαίρεση μεγαλώνουν τον αριθμό		
5. Ο πολ/σμος και η διαίρεση μεγαλώνουν τον αριθμό	Μεγαλύτερο, γιατί αξία του αριθμού πολ/ζεται, έτσι βγαίνει μεγαλύτερο κλάσμα	Μεγαλύτερο, γιατί όταν διαιρούμε έναν αριθμό με έναν άλλο τον αντιστρέφουμε σε πολλαπλασιασμό.
V. Ο πολ/σμος και η διαίρεση μπορεί να μεγαλώνουν ή να μικραίνουν τον αριθμό		
Vα. Λάθος εκτιμήσεις		
6. Λάθος εκτιμήσεις λόγω εφαρμογής λανθασμένων διαδικασιών ή κανόνων που ισχύουν στα κλάσματα ή λάθος εκτίμηση του αποτελέσματος.	Λάθος εκτέλεση του πολ/σμου π.χ. 17·3/8=51/136 ή (17·8):3=45 ή 17·8=136 και 136+3=139[1] ή Μεγαλύτερο γιατί 17x3=51/8	Μικρότερο ή μεγαλύτερο (λάθος εκτέλεση της διαίρεσης) π.χ.17:2/2= 8,5/2 ή 17:2=8 και 8+2=10 ή Μεγαλύτερο γιατί 17:2/2= 17·2/2=34/2
7. Λάθος εκτιμήσεις στις διαιρέσεις.	Το (17·3):8 είναι μικρότερο του 17	Μικρότερο λόγω λανθασμένης διαδικασίας εκτέλεσης της διαίρεσης πχ. 17:2=8,5 και 8,5:2=4,25
Vβ. Σωστές όλες οι εκτιμήσεις		
8. Σωστές όλες οι εκτιμήσεις	Μικρότερο του 17 γιατί πολ/σιάζω με κλάσμα μικρότερο της μονάδας ή εκτέλεση της πράξης 17·3/8 = 51/8 $\approx$ 6,3	Ίσο με το 17 γιατί διαιρούμε με το 1 ή γιατί 17:2/2=17:1=17 ή γιατί 17·2=34 και 34:2=17
9. Άσχετες απαντήσεις	Μεγαλύτερο γιατί το 2 είναι μεγαλύτερο του 17.	Δεν ξέρω
0. Ελλιπείς απαντήσεις	Δεν ξέρω	Δεν ξέρω

[1] Διαδικασία μετατροπής μεικτού κλάσματος σε απλό κλάσμα

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3Β (συνέχεια)
πολ/σμων και διαιρέσεων φυσικού αριθμού με κλάσμα) και ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών.

Ερώτηση 11: Το αποτέλεσμα είναι μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο του 17 και γιατί; $17 : \frac{3}{5}$	Ερώτηση 12: Το αποτέλεσμα είναι μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο του 17 και γιατί; $17 \cdot \frac{13}{6}$	Ερώτηση 13: Το αποτέλεσμα είναι μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο του 17 και γιατί; $17 \cdot \frac{3}{3}$	Ερώτηση 14: Το αποτέλεσμα είναι μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο του 17 και γιατί; $17 : \frac{8}{5}$
Μικρότερο γιατί η διαίρεση μικραίνει	Μεγαλύτερο γιατί ο πολ/σμος μεγαλώνει	Μεγαλύτερο γιατί ο πολ/σμος μεγαλώνει	Μικρότερο γιατί η διαίρεση μικραίνει
Μικρότερο γιατί η διαίρεση μικραίνει	Μεγαλύτερο γιατί ο πολ/σμος μεγαλώνει	Ίσο με το 17 γιατί πολ/ζουμε με το 1 ή γιατί 17·3/3=17·1=17	Μικρότερο γιατί η διαίρεση μικραίνει
Δεν ξέρω	Δεν ξέρω	Ίσο γιατί αν το πολλαπλασιάσεις θα βγει ισοδύναμο του 17 ή γιατί 3/3=1 και 17·1=17	Δεν ξέρω
Μεγαλύτερο γιατί η διαίρεση μεγαλώνει	Μικρότερο γιατί ο πολλαπλασιασμός μικραίνει	Μικρότερο γιατί ο πολλαπλασιασμός μικραίνει	Μεγαλύτερο γιατί η διαίρεση μεγαλώνει
Μεγαλύτερο γιατί όταν διαιρούμε έναν αριθμό με έναν άλλο τον αντιστρέφουμε σε πολλαπλασιασμό.	Μεγαλύτερο γιατί όταν πολ/ζουμε έναν αριθμό με έναν άλλο βρίσκουμε πάντα μεγαλύτερο.	Μεγαλύτερο γιατί όταν πολ/ζουμε έναν αριθμό με έναν άλλο βρίσκουμε πάντα μεγαλύτερο.	Μεγαλύτερο γιατί όταν διαιρούμε έναν αριθμό με έναν άλλο τον αντιστρέφουμε σε πολλαπλασιασμό.
Λάθος εκτέλεση της διαίρεσης π.χ. 17:3/5 → 17:3=5,6 και 17:5=3,4 5,6+3,4=8,0 Μεγαλύτερο γιατί 17:3/5=17·5/3=85	Λάθος εκτέλεση του πολ/σμού ή Μεγαλύτερο γιατί 17·13/6=221/6	Λάθος εκτέλεση του πολ/σμού ή Μεγαλύτερο γιατί 17·3/3=21/3.	Μικρότερο ή μεγαλύτερο (Λάθος εκτέλεση της διαίρεσης), π.χ. 17/1 · 5/8 = 85/8 ή Μεγαλύτερο γιατί 17·8/5=85/5
Μικρότερο λόγω λανθασμένης διαδικασίας εκτέλεσης της διαίρεσης πχ.(17·3):5=1,2 ή 17:3=5,6 και 5,6:5=1,..	Το (17·13):6 είναι μεγαλύτερο του 17	Είναι ίσο με το 17 γιατί (17·3):3=17	Μεγαλύτερο του 17 γιατί 17:8=2,1 και 2,1:5= ή (17·8):5=27,2>17
Μεγαλύτερο του 17 γιατί διαιρώ με κλάσμα μικρότερο της μονάδας ή σωστή εκτέλεση της πράξης	Μεγαλύτερο του 17 γιατί πολ/σιάζω με κλάσμα μεγαλύτερο της μονάδας ή σωστή εκτέλεση της πράξης	Ίσο με το 17 γιατί πολ/ζουμε με το 1 ή γιατί 17·3/3=17·1=17 ή γιατί (17·3):3=17	Μικρότερο του 17 γιατί διαιρώ με κλάσμα μεγαλύτερο της μονάδας ή σωστή εκτέλεση της πράξης
Μικρότερο γιατί το 13 είναι μικρότερο του 17.	Ίσο γιατί το 3 είναι ίσο με το 17.	Μικρότερο γιατί βγαίνει 5.	Δεν ξέρω
Δεν ξέρω	Δεν ξέρω	Δεν ξέρω	Δεν ξέρω

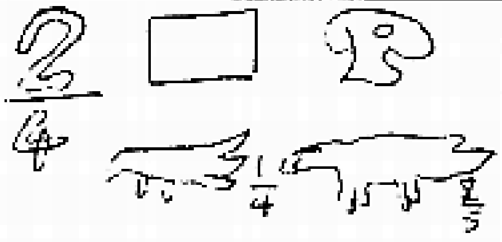
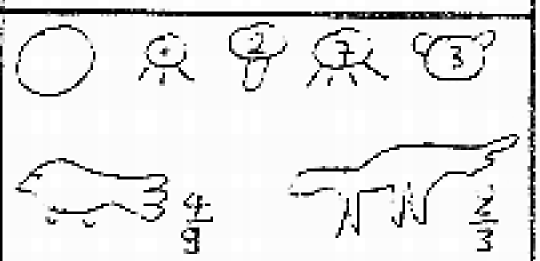
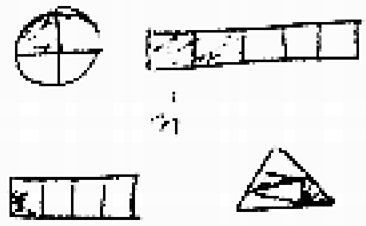
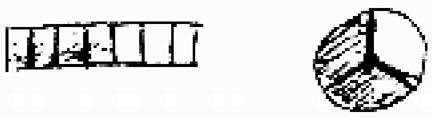
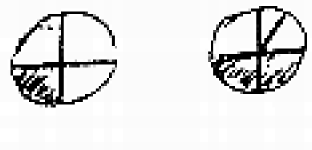
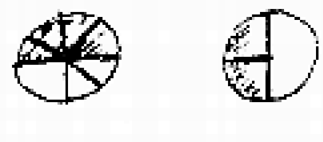
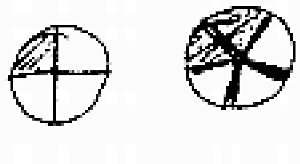
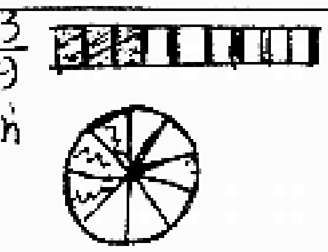
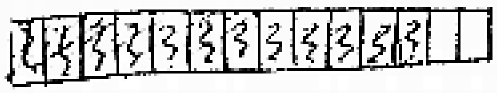
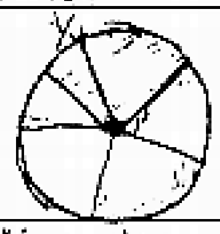
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4Β

Κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ) Ομάδα 4:Εκτίμηση της ορθότητας πράξεων με κλάσματα, και ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών.

Ερωτήσεις Κατηγορίες απαντήσεων	Ερώτηση 15: Είναι σωστή ή λάθος η ισότητα; $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{21}$ Γιατί;	Ερώτηση 16: Είναι σωστή ή λάθος η ισότητα; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ Γιατί;	Ερώτηση 17: Είναι σωστή ή λάθος η ισότητα; $\frac{4}{7} - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ Γιατί;	Ερώτηση 18: Είναι σωστή ή λάθος η ισότητα; $\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$ Γιατί;	Ερώτηση 19: Είναι σωστή ή λάθος η ισότητα; $\frac{1}{8} + 2 = \frac{17}{8}$ Γιατί;
Ι. Λανθασμένες εκτιμήσεις **Ια. Πράξεις όπως στους φυσικούς αριθμούς**					
1. Επιρροή της διαδικασίας πράξεων με φυσικούς αριθμούς	Σωστή γιατί 4·2=8 & 7·3=2	Λάθος γιατί 1+1=2 και όχι 3 και 2+4=6	Σωστή γιατί 4-1=3 και 7-3=4	Λάθος γιατί 5:1=5 και 6:3=2	Λάθος γιατί μας κάνει 3/8 και όχι 17/8
2. Επιρροή της διαδικασίας πράξεων με φυσικούς αριθμούς με αναγνώριση της μετάφρασης ενός φυσικού σε κλάσμα.	Σωστή γιατί 4·2=8 & 7·3=2	Λάθος γιατί 1+1=2 και όχι 3	Σωστή γιατί 4-1=3 και 7-3=4	Λάθος γιατί 5:1=5 και 6:3=2	Σωστό γιατί 2 1/8=17/8
Ιβ. Πράξεις με μικτά διαδικαστικά λάθη					
3. Λάθος η πρόσθεση και ο πολ/σμος γενικά	Λάθος γιατί για να πολ/σουμε και να προσθέσουμε οι παρον. πρέπει να είναι ίσοι ή γιατί πρέπει να κάνουμε χιαστή	Λάθος γιατί 1/2+ 1/4=2/6 Ή γιατί θα έπρεπε να είναι ομώνυμα	Λάθος γιατί το 4 δεν έχει καμία σχέση με το 7 και το 3 ή γιατί δεν ταιριάζουν τα σταυρωτά γινόμενα	Λάθος γιατί διαιρούμε, δεν πολλαπλασιάζουμε	Λάθος γιατί αν τα κάνουμε ομώνυμα δεν βγαίνει αυτό το αποτέλεσμα ή Σωστό γιατί το 2 1/8=17/8
4. Λάθος εκτιμήσεις στις προσθέσεις ή και την αφαίρεση. Σωστές εκτιμήσεις μόνο στον πολ/σμο.	Σωστή γιατί 4·2=8 & 7·3=2 ή γιατί για να πολ/σουμε κλάσματα δεν χρειάζεται να γίνουν ομώνυμα.	Λάθος γιατί τα κλάσματα θα έπρεπε να είναι ομώνυμα	Δεν ξέρω ή λάθος γιατί τα κλάσματα θα έπρεπε να είναι ομώνυμα ή σωστή γιατί 4/7-1/3= 3/4	Λάθος γιατί 6:3=2 ή γιατί 5/6:1/3 = 5/6·3 = 15/6	Λάθος από τις πράξεις ή σωστό γιατί το 17/8 δηλώνει το μεικτό 2 1/8 ή γιατί 1/8 + 16/8 = 17/8
5. Λάθος εκτίμηση στην πρόσθεση με φυσικό αριθμό.	Σωστή γιατί 4·2=8 & 7·3=2 ή γιατί έτσι είναι ο πολ/σμος	Σωστή γιατί 1/2+ 1/4= 2/4 + 1/4 = 3/4	Λάθος γιατί 4/7-1/3= 12/21 - 7/21 = 5/21	Λάθος γιατί 5/6:1/3 = 5/6·3 = 15/6	Λάθος γιατί 1+2=3 και όχι 17
6. Λάθος εκτιμήσεις λόγω λανθασμένων διαδικασιών στον πολλαπλασιασμό.	Λάθος γιατί πρέπει να είναι ομώνυμα ή δεν ταιριάζουν τα σταυρωτά γινόμενα ή 4/7·2/3=12/21:14/21=21	Σωστή γιατί 1/2+ 1/4= 2/4 + 1/4 = 3/4 ή σωστή εκτίμηση μη επεξηγηματική	Λάθος γιατί θα έπρεπε να είναι ομώνυμα	Λάθος γιατί για να διαιρέσουμε κλάσματα αντιστρέφουμε και κάνουμε πολλαπλασιασμό	Σωστό γιατί το 17/8 δηλώνει το μεικτό 2 1/8 ή γιατί 1/8 + 16/8 = 17/8
7. Λάθος εκτιμήσεις στη διαίρεση	Σωστή γιατί 4·2=8 & 7·3=2 ή γιατί έτσι είναι ο πολ/σμος	Σωστή γιατί 1/2+ 1/4= 2/4 + 1/4 = 3/4	Λάθος γιατί θα έπρεπε να είναι ομώνυμα	Σωστή γιατί έχουν γίνει πρώτα ομώνυμα κι ύστερα διαιρέθηκαν	Σωστή γιατί στην πρόσθεση τα κάνουμε ομώνυμα
ΙΙ. Σωστές όλες οι εκτιμήσεις					
8. Σωστές όλες οι εκτιμήσεις	Σωστή γιατί έτσι είναι ο πολλαπλασιασμός	Σωστή γιατί 1/2+ 1/4= 2/4 + 1/4 = 3/4	Λάθος γιατί θα έπρεπε να είναι ομώνυμα	Λάθος γιατί στη διαίρεση γίνεται αντιστροφή του δευτέρου κλάσματος	Σωστό γιατί το 17/8 δηλώνει το μεικτό 2 1/8 ή γιατί 1/8 + 16/8 = 17/8
0. Ελλιπείς απαντήσεις	Δεν ξέρω	Δεν ξέρω	Δεν ξέρω	Δεν ξέρω	Δεν ξέρω

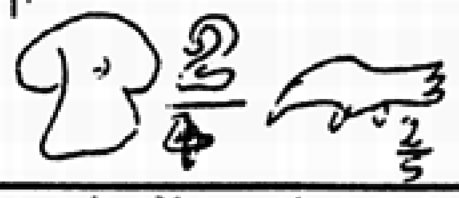
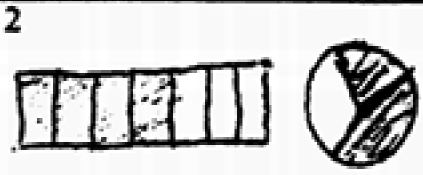
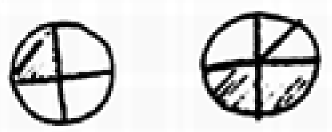
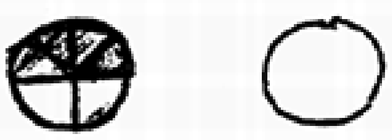
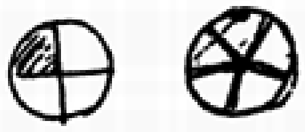
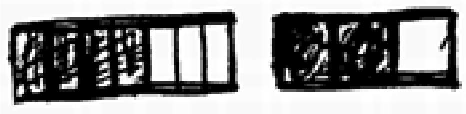
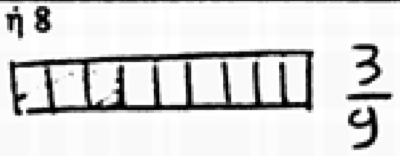
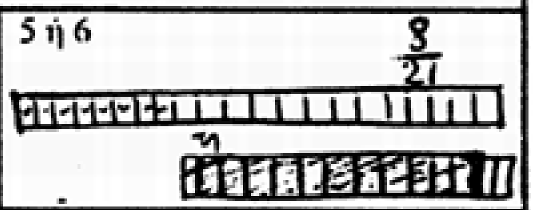
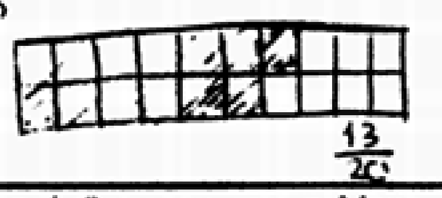
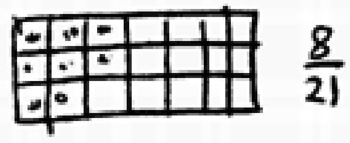
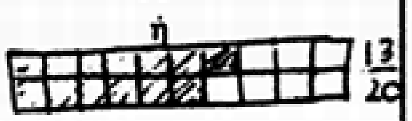
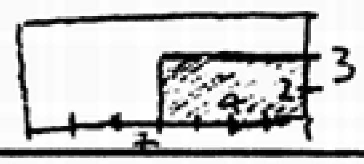
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5Α.

Βασικές κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών, στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ), στις ερωτήσεις της Ομάδας 5: Πώς τα παιδιά αναπαριστούν εικονικά μια αριθμητική πράξη με κλάσματα και ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών.

Ερωτήσεις Κατηγορίες απαντήσεων	<u>Ερωτ. 20</u>: Μπορείς να ζωγραφίσεις κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το άθροισμα $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$	<u>Ερωτ. 22</u>: Μπορείς να ζωγραφίσεις κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το γινόμενο $\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}$
1. Άσχετες ή κυριολεκτικές εικονικές αναπαραστάσεις		
2. Αναπαράσταση των δύο κλασμάτων της πράξης ως μέρη <u>δύο διαφορετικών</u> σχημάτων στην πρόσθεση και στον πολ/σμο *Διαφορετική μονάδα αναφοράς*		
3. Αναπαράσταση των δύο κλασμάτων της πράξης ως μέρη <u>δύο ίσων</u> σχημάτων στην πρόσθεση και στον πολ/σμο *Άνισα μέρη –* *Ίδια μονάδα αναφοράς.*		
4. Αναπαράσταση των δύο κλασμάτων ως μέρη δύο ίσων σχημάτων στην πρόσθεση και στον πολ/σμο *Ίσα μέρη –* *Ίδια μονάδα αναφοράς.*		
5. Αναπαράσταση του λανθασμένου αποτελέσματος της πράξης ως μέρος ενός σχήματος	$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{3}{9}$ 	$\frac{4}{7}\times\frac{2}{3}$ 
6. Αναπαράσταση του σωστού αποτελέσματος της πράξης ως μέρος ενός σχήματος.	$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}=\frac{13}{20}$ 	$\frac{8}{21}$ 
7. Αναπαράσταση των δύο κλασμάτων της πράξης ως μέρη του ιδίου σχήματος.		
8. Καμία απάντηση	Δεν ξέρω – Δεν μπορώ	Δεν ξέρω – Δεν μπορώ

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5Β

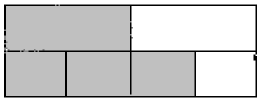
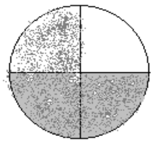
Κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών, στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ –Ομάδα 5: Πώς τα παιδιά αναπαριστούν εικονικά μια αριθμητική πράξη με κλάσματα) και ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών.

Ερωτήσεις Κατηγορίες απαντήσεων	Ερωτ. 19: Μπορείς να ζωγραφίσεις κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το άθροισμα $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$	Ερωτ. 21: Μπορείς να ζωγραφίσεις κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το γινόμενο $\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}$
I. Άσχετες ή κυριολεκτικές αναπαραστάσεις		
1. Άσχετες ή κυριολεκτικές αναπαραστάσεις	1[1] 	1 ή 8 
II. Αναπαράσταση των δύο κλασμάτων ως μέρη δύο σχημάτων		
2. Άμεση αντιστοιχία σε δύο διαφορετικά σχήματα στην πρόσθεση και τον πολ/σμο.	2 	2 
3. Άμεση αντιστοιχία σε δύο ίδια σχήματα στην πρόσθεση και τον πολ/σμό *(Άνισα μέρη)*	3 	3 
4. Άμεση αντιστοιχία σε δύο ίδια σχήματα στην πρόσθεση και τον πολ/σμο *(Ίσα μέρη)*	4 	4 
III. Αναπαράσταση του αποτελέσματος ως μέρος ενός σχήματος		
5. Λάθος αποτέλεσμα στην πρόσθεση - Πράξεις όπως στους φυσικούς αριθμούς ή Λανθασμένες διαδικασίες στον πολ/σμο	5 ή 8 	5 ή 6 
6. Στην πρόσθεση και στον πολ/σμο	6 	6 
IV. Διαφορετικές αναπαραστάσεις στην πρόσθεση και στον πολ/σμο		
7α. Άμεση αντιστοιχία σε δύο ίδια σχήματα μόνο στην πρόσθεση *(ίσα μέρη)* και στον πολ/σμο είτε καμία απάντηση είτε αναπαράσταση του αποτελέσματος.	4 ή 5 	6 ή 8 >> ή
7β. Άμεση αντιστοιχία σε δύο σχήματα ή του αποτελέσματος σε ένα σχήμα στην πρόσθεση και αναπαράσταση του πολ/σμού στο ίδιο σχήμα	>> ή 6 	7 
V. Αναπαράσταση των δύο κλασμάτων της πράξης στο ίδιο σχήμα		
8. Αναπαράσταση των δύο κλασμάτων της πράξης στο ίδιο σχήμα	7 	7 >>
0. Ελλιπείς απαντήσεις	8. Δεν ξέρω	8. Δεν ξέρω

[1] Κατηγορίες απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.5Α.

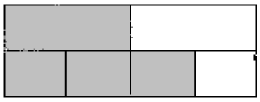
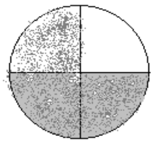
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6Α

Βασικές κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών, στο επίπεδο ερώτησης (ΚΕΕ - Ομάδα 6: Πώς τα παιδιά αναπαριστούν τα σκιαγραφημένα μέρη ενός σχήματος με μια αριθμητική πράξη με κλάσματα) και ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών.

Ερωτήσεις Κατηγορίες απαντήσεων	Ερωτ. 21: Στο παρακάτω σχήμα είναι χρωματισμένα κάποια μέρη από δύο ορθογώνια. Τι μέρος του συνολικού σχήματος είναι χρωματισμένο; Γράψε την απάντηση με τη μορφή ενός αθροίσματος κλασμάτων. 	Ερωτ. 23: Στον παρακάτω κύκλο κάποια μέρη του είναι χρωματισμένα διαφορετικά. Τι μέρος του κύκλου είναι διπλά χρωματισμένο; Γράψε την απάντησή σου με τη μορφή μιας πράξης με κλάσματα. 
1. Άλλο κλάσμα	Το κλάσμα 1/3 ή το κλάσμα 2/6	Το κλάσμα 1/3 ή το 1/4
2. Αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του ορθογωνίου σε ένα λάθος κλάσμα .	Άμεση αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του ορθογωνίου σε ένα κλάσμα . Το κλάσμα $\frac{4}{6}$ (Άνισα μέρη)	Αναπαράσταση όλου του χρωματισμένου μέρους του κύκλου με ένα κλάσμα. Το κλάσμα $\frac{3}{4}$.
3. Σωστή μετάφραση της εικονικής αναπαράστασης με ένα κλάσμα	Άμεση αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του ορθογωνίου σε ένα κλάσμα . Το κλάσμα 5/8	Αναπαράσταση του διπλά χρωματισμένου μέρους του κύκλου με το κλάσμα $\frac{1}{2}$ ή το $\frac{2}{4}$
4. Αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του σχήματος σε μια πρόσθεση (Πρόσθεση όπως στους φυσικούς αριθμούς).	Άμεση αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών των δύο μικρών ορθογωνίων σε δύο κλάσματα και στο λάθος άθροισμα αυτών $\frac{1}{2}$ + $\frac{3}{4} = \frac{4}{6}$	Αναπαράσταση όλου του χρωματισμένου μέρους με μια πράξη $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ή $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$
5. Αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του σχήματος σε δύο κλάσματα ή και στο άθροισμα αυτών. (Λάθος μονάδα αναφοράς στην πρόσθεση)	Άμεση αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών των δύο μικρών ορθογωνίων σε δύο κλάσματα 1/2 και 3/4 ή και στο άθροισμα αυτών $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ (Λάθος μονάδα αναφοράς)	
6. Αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του σχήματος σε δύο κλάσματα ή και στο άθροισμα αυτών	Αναπαράσταση του χρωματισμένου μέρους του ορθογωνίου με τα κλάσματα $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ ή με το άθροισμα $\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$ (Κοινή μονάδα αναφοράς)	Αναπαράσταση του διπλά χρωματισμένου μέρους του κύκλου με μια πρόσθεση ή μια αφαίρεση κλασμάτων. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$
7. Αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του σχήματος στην κατάλληλη αριθμητική πράξη.	Αναπαράσταση του χρωματισμένου μέρους του ορθογωνίου με τα κλάσματα με το άθροισμα $\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$ (Κοινή μονάδα αναφοράς)	Αναπαράσταση του διπλά χρωματισμένου μέρους του κύκλου με τον πολλαπλασιασμό $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$
8. Ελλιπείς απαντήσεις	Δεν ξέρω	Δεν ξέρω

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6Β

Κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων των παιδιών στο επίπεδο ομάδας ερωτήσεων (ΚΕΟΕ) στην Ομάδα 6- Πώς τα παιδιά αναπαριστούν αριθμητικά με μια πράξη με κλάσματα τα σκιαγραφημένα μέρη ενός σχήματος , και ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών.

Ερωτήσεις Κατηγορίες απαντήσεων	Ερωτ. 21: Στο παρακάτω σχήμα είναι χρωματισμένα κάποια μέρη από δύο ορθογώνια. Τι μέρος του συνολικού σχήματος είναι χρωματισμένο; Γράψε την απάντηση με τη μορφή ενός αθροίσματος κλασμάτων. 	Ερωτ. 23: Στον παρακάτω κύκλο κάποια μέρη του είναι χρωματισμένα διαφορετικά. Τι μέρος του κύκλου είναι διπλά χρωματισμένο; Γράψε την απάντησή σου με τη μορφή μιας πράξης με κλάσματα. 
I. Αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του ορθογωνίου σε ένα άσχετο κλάσμα.		
1. Άλλο κλάσμα	**1**[1] Το κλάσμα 1/3	**1**, **2**. Το κλάσμα 1/3
II. Άμεση αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του ορθογωνίου σε ένα κλάσμα		
2. Διαχωρισμός του σχήματος σε άνισα μέρη	**2** Άμεση αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του ορθογωνίου στο κλάσμα 4/6 ή το 2/6 *Λάθος μερισμός*	**2**, **3** Αναπαράσταση όλου του χρωματισμένου μέρους του κύκλου με το κλάσμα 1/4 ή 3/4 ή με το κλάσμα 2/4 ή 1/2 ή **4**, **6** Αναπαράσταση του διπλά χρωματισμένου μέρους του κύκλου με μια πρόσθεση ή αφαίρεση κλασμάτων. $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$ ή $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ ή $\frac{4}{4}-\frac{2}{4}=\frac{2}{4}$
3. Διαχωρισμός του σχήματος σε ίσα μέρη	**3**. Άμεση αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του ορθογωνίου στο κλάσμα 5/8	
III. Άμεση αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών του ορθογωνίου σε μια πράξη		
IIIα. Λανθασμένη αντιστοιχία		
4. Πράξεις όπως στους φυσικούς αριθμούς.	**4**. Άμεση αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών των δύο μικρών ορθογωνίων στο λάθος άθροισμα αυτών. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{4}{6}$ *Επιρροή φυσικών*	**4**, **6** Αναπαράσταση του διπλά χρωματισμένου μέρους του κύκλου με μια πρόσθεση ή αφαίρεση κλασμάτων. $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$ ή $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ ή $\frac{4}{4}-\frac{2}{4}=\frac{2}{4}$ ή **2**, **3** Αναπαράσταση όλου του χρωματισμένου μέρους του κύκλου με το κλάσμα 3/4 ή με το κλάσμα 2/4 ή 1/2
5. Ευθεία αντιστοιχία σε αριθμητικές αναπαραστάσεις με πρόβλημα στη μονάδα αναφοράς στην πρόσθεση	**5**. Άμεση αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών των δύο μικρών ορθογωνίων στο άθροισμα αυτών (*Λάθος μονάδα αναφοράς*) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$	
IIIβ. Επαρκής αντιστοιχία		
6. Αντιστοιχία σε αριθμητική πράξη στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό *(Μη διαφοροποίηση των δύο πράξεων)*	**6**. Αναπαράσταση του χρωματισμένου μέρους του ορθογωνίου με το άθροισμα $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$	**3** Αναπαράσταση όλου του χρωματισμένου μέρους του κύκλου με το κλάσμα 2/4 ή 1/2 ή **4**, **6** Αναπαράσταση του διπλά χρωματισμένου μέρους του κύκλου με μια πρόσθεση ή αφαίρεση κλασμάτων. $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$ ή $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$
7. Αντιστοιχία σε αριθμητική πράξη στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό	**6**. Αναπαράσταση του χρωματισμένου μέρους του ορθογωνίου με το άθροισμα $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$	**7**. Αναπαράσταση του διπλά χρωματισμένου κύκλου με τον πολ/σμο $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$
0. Καμία απάντηση	**8**. Δεν ξέρω	**8**. Δεν ξέρω

[1] Κατηγορίες απαντήσεων στο επίπεδο ερώτησης όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.6Α.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.7

Μέσες θέσεις των πέντε τάξεων μαθητών και σημαντικότητα των διαφορών μεταξύ τους σε κάθε ομάδα ερωτήσεων (Kruskal-Wallis)

	Τάξεις					Τιμή x^2	Βαθμ. Ελευθ.	Ασυμπτ. σημαντ.
	Ε΄ Δημ.	ΣΤ΄ Δημ.	Α΄ Γυμν.	Β΄ Γυμν.	Α΄ Λυκ.			
Ομάδα 1	80,3	75,7	95,7	120,0	130,9	29,4	4	0,000
Ομάδα 2	86,9	81,5	99,0	110,8	124,3	16,1	4	0,003
Ομάδα 3	79,0	77,0	102,0	125,3	119,3	24,3	4	0,000
Ομάδα 4	72,5	79,3	102,0	116,2	132,6	31,5	4	0,000
Ομάδα 5	87,3	81,4	100,8	112,3	120,7	13,3	4	0,010
Ομάδα 6	71,6	93,3	99,2	114,8	123,7	21,9	4	0,000

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.8

Μέσες θέσεις των δύο φύλων των μαθητών και σημαντικότητα των διαφορών μεταξύ τους σε κάθε ομάδα ερωτήσεων (Mann-Whitney)

	Φύλο		Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Ασυμπτ. σημαντ.
	Αγόρι	Κορίτσι				
Ομάδα 1	109,48	91,52	4102,0	9152,0	-2,2	0,025
Ομάδα 2	109,88	91,12	4062,0	9112,0	-2,4	0,016
Ομάδα 3	106,79	94,21	4370,5	9420,5	-1,6	0,119
Ομάδα 4	104,99	96,01	4551,5	9601,5	-1,1	0,262
Ομάδα 5	104,11	96,89	4638,5	9688,5	-0,9	0,371
Ομάδα 6	97,82	103,18	4731,5	9781,5	-0,7	0,487

ΠΙΝΑΚΑΣ 3. Ι. Πιθανά Επεξηγηματικά Πλαίσια του Κλάσματος: Υποθετικές Πρότυπες Απαντήσεις

Πιθανά Επεξηγηματικά Πλαίσια	Ομάδα 1: Ύπαρξη μικρότερου και μεγαλύτερου κλάσματος (Πίνακας 3.1Β)	Ομάδα 2: Διάταξη κλασμάτων σε σχέση με την ακέραια μονάδα (Πίνακας 3.2Β)	Ομάδα 3: Εκτίμηση πολ/σμων και διαιρέσεων φυσικού αριθμού με κλάσμα. (Πίνακας 3.3Β)	Ομάδα 4: Εκτίμηση της ορθότητας μιας πράξης με κλάσματα. (Πίνακας 2.4Β)	Ομάδα 5: Πώς τα παιδιά αναπαριστούν εικονικά μια αριθμητική πράξη με κλάσματα. (Πίνακας 2.5Β)	Ομάδα 6: Πώς τα παιδιά αναπαριστούν τα μέρη ενός σχήματος με μια αριθμητική πράξη με κλάσματα. (Πίνακας 2.6Β)
(Α1) ΔΥΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	Όσο μεγαλώνουν ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος τόσο μεγαλώνει και η αξία του κλάσματος. (1α, 1β[1])	Η μονάδα μικρότερη όλων των κλασμάτων. (1 ή 3)	Πράξεις με κλάσματα όπως οι πράξεις με φυσικούς αριθμούς. Ο πολ/σμος μεγαλώνει τον αριθμό και η διαίρεση τον μικραίνει. (1)	Εκτίμηση των πράξεων με κλάσματα όπως τις πράξεις με φυσικούς αριθμούς. Σωστές εκτιμήσεις μόνο στον πολ/σμο. (1, 3, 4, 5)	Δεν ξέρω ή άσχετες αναπαραστάσεις ή όμοιες εικονικές αναπαραστάσεις των δύο κλασμάτων της πρόσθεσης και του πολ/σμου ως μέρη δύο διαφορετικών ή δύο ίδιων σχημάτων (άνισα μέρη) ή αναπαράσταση του αποτελέσματος σε ένα σχήμα -πράξεις όπως φυσικοί αριθμοί. (0,1,2,3,5)	Δεν ξέρω ή άσχετες αναπαραστάσεις ή αναπαράσταση των χρωματισμένων μερών του σχήματος με ένα κλάσμα ή σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία με δύο κλάσματα, ή στο άθροισμα αυτών (πράξεις όπως στους φυσικούς αριθμούς). (0, 1, 2, 4)
(Α2) ΔΥΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	Όσο μεγαλώνουν ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος τόσο μικραίνει και η αξία του κλάσματος. (2)	Μεγάλοι αριθμοί - μικρό κλάσμα Η μονάδα μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων. (4)	>> ή Λάθος εκτιμήσεις Ο πολ/σμος μικραίνει και η διαίρεση μεγαλώνει ή λάθη στην εκτέλεση των πράξεων (1, 4, 5, 6)	>> ή Λάθη κατά την εκτέλεση της πράξης (1, 3, 4, 5, 6, 7)		
(Β) ΜΕΡΟΣ ΜΙΑΣ ΜΟΝΑΔΑΣ	Υπάρχει ένα μικρότερο και ένα μεγαλύτερο κλάσμα με αριθμητή μικρότερο ή ίσο του παρονομαστή. (3α, 3β)	Η μονάδα μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα. Μεγάλοι αριθμοί – μεγάλο ή μικρό κλάσμα ή γνώση διαδικασιών διάταξης κλασμάτων εκτός της μονάδας. (2, 4, 6)	Πράξεις όπως στους φυσικούς αριθμούς. Το κλάσμα q/q=1 δεν μεταβάλλει το αποτέλεσμα ή ο πολ/σμος μικραίνει και η διαίρεση μεγαλώνει ή ο πολ/σμος και η διαίρεση μεγαλώνουν ή πολ/σμος και η διαίρεση μικραίνουν ή μεγαλώνουν (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)	Πράξεις όπως στους φυσικούς αριθμούς ή σωστά μόνο ο πολ/σμος ή λάθη κατά την εκτέλεση της πράξης (Λάθος εκτιμήσεις) (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)	Άσχετες ή κυριολεκτικές αναπαραστάσεις ή αναπαράσταση του κάθε κλάσματος του αθροίσματος και του γινομένου ως μέρη δύο διαφορετικών ή δύο ίδιων σχημάτων (ίσα μέρη) ή αναπαράσταση του αποτελέσματος. (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)	Αντιστοιχία ένα-προς-ένα σε ένα κλάσμα (ίσα ή άνισα μέρη) ή με εκτέλεση πράξεων όπως στους φυσικούς αριθμούς ή αναπαραστάσεις με πρόβλημα στη μονάδα αναφοράς στην πρόσθεση. (3, 5, 6, 7)
(Γ) ΣΧΕΣΗ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ Κλάσμα ως μια σχέση αριθμητή δια παρονομαστή	Κλάσμα ως σχέση δύο αριθμών – Δεν υπάρχει μοναδικό μικρότερο ή μεγαλύτερο κλάσμα (5)	Σωστή διάταξη της ακέραιας μονάδας και όλων των κλασμάτων (8)	Ο πολ/σμος και η διαίρεση μικραίνουν ή μεγαλώνουν - Σωστές εκτιμήσεις (8)	Σωστές εκτιμήσεις των αριθμητικών ισοτήτων (8)	Διαφορετικές αναπαρ/σεις στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολ/σμου (ίσα μέρη) ή αναπαράσταση του σωστού αποτελέσματος της κάθε πράξης σε ένα σχήμα. (6, 7, 8)	Αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών σε ένα κλάσμα (ίσα μέρη) ή σε δύο κλάσματα ή και στο άθροισμα αυτών, με πρόβλημα ή όχι στη μονάδα αναφοράς στην πρόσθεση. (3, 6, 7)

[1] Οι αριθμοί δείχνουν την κατηγορία βαθμολόγησης των απαντήσεων για τις ομάδες ερωτήσεων 1 έως 6, όπως παρουσιάζονται στους Πίνακες 3.1Β, 3.2Β, 3.3Β, 3.4Β, 3.5Β και 3.6Β αντίστοιχα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.ΙΙ.Α. ΕΠΕΞΗΓΗΜΑΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ/ΔΥΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Υποκατηγορίες Επεξηγηματικών Πλαισίων του Κλάσματος	Ομάδα ερωτήσεων 1: Μικρότερο και μεγαλύτερο κλάσμα (Πίνακας 3.1Β)	Ομάδα ερωτήσεων 2: Διάταξη κλασμάτων σε σχέση με την ακέραια μονάδα (Πίνακας 3.2Β)	Ομάδα ερωτήσεων 3: Εκτίμηση πολ/σμων και διαιρέσεων φυσικού αριθμού με κλάσμα (Πίνακας 3.3Β)	Ομάδα ερωτήσεων 4: Εκτίμηση της ορθότητας μιας πράξης με κλάσματα. (Πίνακας 3.4Β)	Ομάδα ερωτήσεων 5: Πώς τα παιδιά αναπαριστούν εικονικά μια πράξη με κλάσματα. (Πίνακας 3.5Β)	Ομάδα ερωτήσεων 6: Πώς τα παιδιά αναπαριστούν τα μέρη ενός σχήματος με μια αριθμητική πράξη με κλάσματα. (Πίνακας 3.6Β)
Α Δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί που όσο μεγαλώνουν μεγαλώνει η αξία του κλάσματος	Όσο μεγαλώνουν ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος τόσο μεγαλώνει και η αξία του κλάσματος. Π.χ. Το 1/1 ή το 1/2 είναι το μικρότερο κλάσμα γιατί είναι οι μικρότεροι αριθμοί και μεγαλύτερο είναι το 999/1000 ή το 100/100 ή το 1000000/1000000 γιατί έχει μεγάλους αριθμούς. (1[2])	Η ακέραια μονάδα είναι μικρότερη όλων των κλασμάτων. Π.χ. Τα κλάσματα διατάσσονται ως εξής 1<1/7<4/5<5/6 ή το 4/3<5/8 γιατί το 5/8 έχει μεγαλύτερους αριθμούς (1, 3)	Πράξεις με κλάσματα όπως οι πράξεις με φυσικούς αριθμούς. Ο πολ/σμος μεγαλώνει τον αριθμό και η διαίρεση τον μικραίνει. Π.χ. Το αποτέλεσμα της πράξης $17 : \frac{2}{2}$ είναι μικρότερο γιατί η διαίρεση μικραίνει τον αριθμό. (1)	Εκτίμηση των πράξεων με κλάσματα όπως τις πράξεις με φυσικούς αριθμούς. Π.χ. 1) Η ισότητα $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ είναι λάθος γιατί 1+1=2 και 2+4=6 2) Η ισότητα $\frac{1}{8}+2=\frac{17}{8}$ είναι λάθος γιατί κάνει 3/8 και όχι 17/8. (1, 3)	Άσχετες ή κυρολεκτικές αναπαραστάσεις ή κλάσματα → μέρη δύο διαφορετικών ή δύο ίδιων σχημάτων (*άνισα μέρη*) ή αναπαράσταση του λανθασμένου αποτελέσματος ως μέρος ενός σχήματος (εκτέλεση πράξεων όπως στους φυσικούς αριθμούς) (0, 1, 2, 3, 5)	Αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών των σχημάτων σε ένα κλάσμα (άνισα μέρη) ή αντιστοιχία 1-1 σε δύο κλάσματα ή και στο άθροισμα αυτών (πρόσθεση όπως στους φυσικούς αριθμούς .) (1, 2, 4, 5)
Α1 Δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί και το κλάσμα q/q = 1.	↓ >>	↓ >>	Το κλάσμα α/α=1 δεν αλλάζει τον αριθμό. Π.χ. Το αποτέλεσμα της πράξης $17 : \frac{2}{2}$ είναι ίσο με το 17 γιατί τα 2/2 είναι ίδια ή γιατί 2/2=1 και 17:1=17 (2, 3)	Εκτίμηση των πράξεων με κλάσματα όπως τις πράξεις με φυσικούς αριθμούς εκτός από την πρόσθεση κλάσματος με φυσικό. Π.χ. Η ισότητα $\frac{1}{8}+2=\frac{17}{8}$ είναι σωστή γιατί $2\frac{1}{8}=\frac{17}{8}$. (1, 2, 3, 4)	↓ >>	↓ >>
Α2 Δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί που όσο μεγαλώνουν μικραίνει η αξία του κλάσματος	Όσο μικραίνουν ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος τόσο μεγαλώνει η αξία του κλάσματος. Π.χ. Μικρότερο κλάσμα είναι το 90/950, γιατί όσο μεγαλύτερους έχει τόσο μικρότερο είναι και μεγαλύτερο το 1/1, γιατί όσο μικρότερους αριθμούς έχει τόσο μεγαλύτερο είναι. (2)	Η ακέραια μονάδα είναι μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων. Π.χ. Τα κλάσματα διατάσσονται ως εξής: 5/6< 4/3<1/7<1, γιατί τα μεγαλύτερα για τα κλάσματα είναι τα μικρότερα ή Το 4/3>5/8 γιατί έχει μικρότερους αριθμούς. (4)	Λάθος εκτιμήσεις λόγω διαδικαστικών λαθών Π.χ. Το αποτέλεσμα του πολ/σμου 17· 3/8 είναι μεγαλύτερο, γιατί 17·3/8=51/136 ή (17·8):3=45 ή 17·8=136 και 136+3=139 (2, 3, 4, 6)	Εκτίμηση των πράξεων με κλάσματα όπως τις πράξεις με φυσικούς αριθμούς ή λάθη κατά την εκτέλεση της πρόσθεσης. Π.χ. Η ισότητα $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ είναι λάθος γιατί πρέπει να τα κάνουμε ομώνυμα και δεν βγαίνει αυτό (1, 2, 3, 4)	↓ >>	↓ >>

[2] Οι αριθμοί στις παρενθέσεις αντιστοιχούν στις κατηγορίες βαθμολόγησης των απαντήσεων για τις ομάδες ερωτήσεων 1 έως 6, όπως παρουσιάζονται στους Πίνακες 4.1Β, 4.2Β, 4.3Β, 4.4Β, 4.5Β και 4.6Β αντίστοιχα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.ΙΙ.Β. ΕΠΕΞΗΓΗΜΑΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ / ΣΧΕΣΗ ΜΕΡΟΥΣ – ΟΛΟΥ

Υποκατηγορίες Επεξηγηματικών Πλαισίων του Κλάσματος	Ομάδα ερωτήσεων 1: Μικρότερο και μεγαλύτερο κλάσμα (Πίνακας 3.1Β)	Ομάδα ερωτήσεων 2: Διάταξη κλασμάτων σε σχέση με την ακέραια μονάδα (Πίνακας 3.2Β)	Ομάδα ερωτήσεων 3: Εκτίμηση πολ/σμων και διαιρέσεων φυσικού αριθμού με κλάσμα (Πίνακας 3.3Β)	Ομάδα ερωτήσεων 4: Εκτίμηση της ορθότητας μιας πράξης με κλάσματα. (Πίνακας 3.4Β)	Ομάδα ερωτήσεων 5: Πώς τα παιδιά αναπαριστούν εικονικά μια πράξη με κλάσματα. (Πίνακας 3.5Β)	Ομάδα ερωτήσεων 6: Πώς τα παιδιά αναπαριστούν τα μέρη ενός σχήματος με μια αριθμητική πράξη με κλάσματα. (Πίνακας 3.6Β)
Β1 Αφελές Μέρος μιας μονάδας	Όσο μεγαλώνουν ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος τόσο μεγαλώνει και η αξία του κλάσματος – με α<π. Π.χ. Το 1/2 είναι το μικρότερο κλάσμα γιατί είναι οι μικρότεροι αριθμοί και μεγαλύτερο είναι το 999/1000 ή το 1000000/1000000 γιατί έχει μεγάλους αριθμούς. (1) ή >> ↑	Η ακέραια μονάδα είναι μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων και λάθος διάταξη των κλασμάτων. Π.χ. 1/7<4/5<5/6<1 γιατί το 1 είναι ακέραιος γιαυτό το έβαλα τελευταίο ή 5/6<4/5<1/7<1 γιατί τα κλάσματα που έχουν μικρότερο αριθμητή είναι μεγαλύτερα από αυτά που έχουν μεγαλύτερο και η μονάδα είναι το μεγαλύτερο γιατί μας δίνει το κλάσμα 1/1. (2, 4)	Πράξεις με κλάσματα όπως οι πράξεις με φυσικούς αριθμούς ή λάθος εκτιμήσεις λόγω διαδικαστικών λαθών Π.χ. Το 17:2/2 έχει αποτέλεσμα μικρότερο αριθμό γιατί 17:2/2= 8,5/2 ή 17:2=8 και 8+2=10 (1, 2, 3, 4, 5, 6)	Εκτίμηση των πράξεων με κλάσματα όπως τις πράξεις με φυσικούς αριθμούς ή λάθος εκτιμήσεις λόγω διαδικαστικών λαθών. Π.χ. Η ισότητα $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ είναι λάθος γιατί 1+1=2 και 2+4=6 ή γιατί τα κλάσματα θα έπρεπε να είναι ομώνυμα. (1, 2, 3, 4, 5)	Όμοιες εικονικές αναπαραστάσεις των δύο κλασμάτων της πρόσθεσης και του πολ/σμου ως μέρη δύο διαφορετικών σχημάτων (*άνισα μέρη*) (2, 3) ή >> ↑	Αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών σε ένα κλάσμα (*άνισα μέρη*) (2) ή >> ↑
Β Μέρος μιας ακέραιας μονάδας	Το μικρότερο και το μεγαλύτερο κλάσμα έχουν αριθμητή ≤ παρονομαστή και αντιπροσωπεύουν αξία μικρότερη από μια ακέραια μονάδα. Π.χ. Μικρότερο κλάσμα είναι το 1/1000 γιατί αν έχουμε μια σοκολάτα και τη χωρίσουμε σε χίλια κομμάτια και πάρουμε το 1 θα είναι πολύ μικρότερο και μεγαλύτερο κλάσμα το 1/1 γιατί ισοδυναμεί με μια ακέραια μονάδα. (3)	Η ακέραια μονάδα είναι μεγαλύτερη όλων των κλασμάτων και σωστή διάταξη των κλασμάτων. Π.χ. 1/7<5/6<4/5<1 γιατί αν τα απλοποιήσουμε βλέπουμε πιο είναι μικρότερο και πιο μεγαλύτερο ή γιατί τα κλάσματα που έχουν μικρότερο παρονομαστή είναι τα μεγαλύτερα. (6)	Το κλάσμα α/α=1 δεν μεταβάλλει το αποτέλεσμα ή Ο πολ/σμος και η διαίρεση μικραίνει και μεγαλώνει τον αριθμό με σωστές ή λάθος εκτιμήσεις (ιδιαίτερα στις διαιρέσεις) λόγω διαδικαστικών λαθών. Π.χ. Το $17 : \frac{2}{2} = 17$ γιατί 2/2=1 (2, 5, 6, 7, 8)	Λανθασμένες εκτιμήσεις γενικά λόγω διαδικαστικών λαθών και μερικές σωστές εκτιμήσεις Π.χ. Η ισότητα $\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{21}$ είναι λάθος γιατί δεν ταιριάζουν τα σταυρωτά γινόμενα ή 4/7·2/3=12/21:14/21=21 (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)	Όμοιες εικονικές αναπαραστάσεις των δύο κλασμάτων της πρόσθεσης και του πολ/σμου ως μέρη δύο *ίδιων* σχημάτων (*ίσα μέρη)* ή αναπαράσταση του αποτελέσματος της πράξης ως μέρος ενός σχήματος (4, 5, 6)	Αντιστοιχία ένα προς ένα των χρωματισμένων μερών σε δύο κλάσματα και στο άθροισμα αυτών, με πρόβλημα στη μονάδα αναφοράς στην πρόσθεση. (4,5)
Β2 Προχωρημένο μέρος μιας ακέραιας μονάδας	↓ >>	Ένα κλάσμα μπορεί να είναι μικρότερο ή και μεγαλύτερο της ακέραιας μονάδας. Π.χ. Τα κλ΄σματα διατάσσονται ως εξής: 1/7<5/6<1<4/3 γιατί 6/42<35/42<42/42<56/42 ή γιατί από τα 7 πήραμε μόνο το 1, το 5/6 είναι σχεδόν όλο, το 1 είναι ολόκληρο και το 4/3 είναι ολόκληρο και κάτι. (8)	↓ >>	↓ >>	↓ >> Σε ορισμένες περιπτώσεις διαφοροποίηση στην αναπαράσταση του πολ/σμου ή καμία αναπαράσταση. (7)	↓ >> ή Αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών σε ένα κλάσμα (*ίσα μέρη*) (3)

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.ΙΙΓ. ΕΠΕΞΗΓΗΜΑΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ / ΣΧΕΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΗ – ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

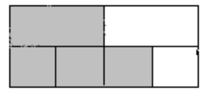
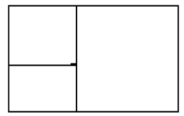
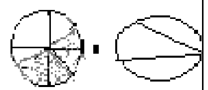
Υποκατηγορίες Επεξηγηματικών Πλαισίων του Κλάσματος	Ομάδα ερωτήσεων 1: Μικρότερο και μεγαλύτερο κλάσμα (Πίνακας 3.1Β)	Ομάδα ερωτήσεων 2: Διάταξη κλασμάτων σε σχέση με την ακέραια μονάδα (Πίνακας 3.2Β)	Ομάδα ερωτήσεων 3: Εκτίμηση πολ/σμων και διαιρέσεων φυσικού αριθμού με κλάσμα (Πίνακας 3.3Β)	Ομάδα ερωτήσεων 4: Εκτίμηση της ορθότητας μιας πράξης με κλάσματα. (Πίνακας 3.4Β)	Ομάδα ερωτήσεων 5: Πώς τα παιδιά αναπαριστούν εικονικά μια πράξη με κλάσματα. (Πίνακας 3.5Β)	Ομάδα ερωτήσεων 6: Πώς τα παιδιά αναπαριστούν τα μέρη ενός σχήματος με μια αριθμητική πράξη με κλάσματα. (Πίνακας 3.6Β)
Γ1 Σχέση δύο αριθμών χωρίς αναφορά στην απειρία των αριθμών	Κλάσμα ως το πηλίκο αριθμητή δια παρονομαστή Υπάρχει ένα μικρότερο και ένα μεγαλύτερο κλάσμα. Π.χ. Το μικρότερο κλάσμα είναι το 1/1000 γιατί τα χιλιοστά είναι από τις μικρότερες μονάδες, ενώ μεγαλύτερο είναι το 1000/1 γιατί αν αυτός ο αριθμός είναι μεγαλύτερος τότε είναι περισσότερο από μια μονάδα. (4)	>> ↑	>> ↑	>> ↑	>> ↑	>> ↑
Γ Σχέση δύο αριθμών Συσχετιστικό Επεξηγηματικό Πλάσιο	Οι αριθμοί δεν έχουν τέλος Π.χ. Δεν υπάρχει μικρότερο κλάσμα ή κλάσματα όπως τα 1/ν ή το1/10000000000000000 γιατί όσο μεγαλύτερο παρονομαστή έχει τόσο μικρότερη είναι η αξία του και Δεν υπάρχει μεγαλύτερο κλάσμα ή κλάσματα όπως τα ν/1 ή ∞/1 ή το 10000000000/1 (5)	Σωστή διάταξη της ακέραιας μονάδας και όλων των κλασμάτων. Π.χ. 1/7<5/6<1<4/3 γιατί 6/42<35/42<42/42<56/42 ή γιατί κάνουμε τις πράξεις στις οποίες αντιστοιχούν τα κλάσματα για να βρούμε ποιο είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο 50 ⎣6 10 ⎣7 4 ⎣3 20 0,83 30 0,142 10 1,3 2 2 1 (8)	Διαδικαστικά λάθη κατά τις εκτιμήσεις των πράξεων. Το κλάσμα α/α=1 δεν μεταβάλλει το αποτέλεσμα ή Ο πολ/σμος και η διαίρεση μικραίνει και μεγαλώνει τον αριθμό με σωστές ή λάθος εκτιμήσεις (ιδιαίτερα στις διαιρέσεις) λόγω διαδικαστικών λαθών (3 , 6, 7, 8)	Λανθασμένες εκτιμήσεις γενικά λόγω διαδικαστικών λαθών και μερικές σωστές εκτιμήσεις Π.χ. Η ισότητα $\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{21}$ είναι λάθος γιατί δεν ταιριάζουν τα σταυρωτά γινόμενα ή η ισότητα $\frac{5}{6}:\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$ είναι λάθος γιατί 6:3=2 (4, 5, 6, 7, 8)	Όμοιες εικονικές αναπαραστάσεις των δύο κλασμάτων της πρόσθεσης και του πολ/σμου ως μέρη δύο διαφορετικών ή ίδιων σχημάτων *(ίσα μέρη)* ή αναπαράσταση του αποτελέσματος της πράξης ως μέρος ενός σχήματος (σωστή ή λάθος εκτέλεση πράξης) (2, 3, 4, 6, 7)	Αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών σε ένα κλάσμα (ίσα μέρη) ή με αντιστοιχία των χρωματισμένων μερών σε σε δύο κλάσματα και στο άθροισμα αυτών, με πρόβλημα ή όχι στη μονάδα αναφοράς στην πρόσθεση. (3, 5, 6, 7)
Γ2 Σχέση δύο αριθμών με αναφορά στην απειρία των αριθμών και διαφοροποίηση των εικονικών αναπαραστάσεων πράξεων με κλάσματα	↓ >>	↓ >>	Σωστές όλες εκτιμήσεις των πράξεων. Π.χ. Το αποτέλεσμα του 17·$\frac{3}{8}$ είναι μικρότερο του 17 γιατί πολ/ζω με κλάσμα μικρότερο της μονάδας ή (17·3):8 = 51:8 = 6,3 <17 (6, 7, 8)	Σωστές εκτιμήσεις των αριθμητικών ισοτήτων. Π.χ. Η ισότητα $\frac{4}{7}-\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$ είναι λάθος γιατί θα έπρεπε να τα κάνουμε ομώνυμα ή η $\frac{5}{6}:\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$ είναι λάθος γιατί πολλαπλασιάζουμε το αντίστροφο κλάσμα. (7, 8)	Διαφορετικές αναπαραστάσεις στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολ/σμου (ίσα μέρη) ή αναπαράσταση του σωστού αποτελέσματος της κάθε πράξης σε ένα σχήμα. (6, 7, 8)	↓ >>

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.ΙΙΙ.
Συχνότητες και ποσοστά επί τοις εκατό των Τελικών Επεξηγηματικών Πλαισίων για την Έννοια του Κλάσματος.

Κωδ	Επεξηγηματικά Πλαίσια	Ε΄ Δημοτ. N=40 (%)	ΣΤ΄ Δημοτ. N=40 (%)	Α΄ Γυμν. N=40 (%)	Β΄ Γυμν. N=40 (%)	Α΄ Λυκείου N=40 (%)	Σύνολο N=200 (%)
1	Α. Δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί	7 (17.5%)	8 (20%)	6 (15%)	1 (2.5%)	1 (2.5%)	23 (11.5%)
2	Α1. Δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί και το κλάσμα q/q=1.	5 (12.5%)	3 (7.5%)	1 (2.5%)	2 (5%)	3 (7.5%)	14 (7%)
3	Α2. Δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί που όσο μεγαλώνουν μικραίνει η αξία του κλάσματος.	3 (7.5%)	2 (5%)	2 (5%)	2 (5%)	1 (2.5%)	10 (5%)
4	Β1. Αφελές Μέρος μιας ακέραιας μονάδας	4 (10%)	7 (17.5%)	4 (10%)	4 (10%)	2 (5%)	21 (10.5%)
5	Β. Μέρος μιας ακέραιας μονάδας	3 (7.5%)	5 (12.5%)	5 (12.5%)	5 (12.5%)	5 (12.5%)	23 (11.5%)
6	Β2. Προχωρημένο Μέρος μιας ακέραιας μονάδας	1 (2.5%)	5 (12.5%)	5 (12.5%)	3 (7.5%)	1 (2.5%)	15 (7.5%)
7	Γ1. Σχέση δύο αριθμών χωρίς αναφορά στην απειρία	5 (12.5%)	5 (12.5%)	6 (15%)	6 (15%)	5 (12.5%)	27 (13.5%)
8	Γ. Σχέση δύο αριθμών με αναφορά στην απειρία	3 (7.5%)	3 (7.5%)	6 (15%)	6 (15%)	10 (25%)	28 (14%)
9	Γ2. Προωθημένο Σχέσης δύο αριθμών	0 (0%)	0 (0%)	3 (7.5%)	7 (17.5%)	7 (17.5%)	17 (8.5%)
	Σύνολο παιδιών που ταξινομήθηκαν σε επεξ, πλαίσιο	31 (77.5%)	38 (95%)	38 (95%)	36 (90%)	35 (87.5%)	178 (89%)
10	Μικτό 1	2 (5%)	1 (2.5%)	0 (0%)	3 (7.5%)	2 (5%)	8 (4%)
11	Μικτό 2	4 (10%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	4 (2%)
12	Μη κατηγοριοποιήσιμα	1 (2.5%)	1 (2.5%)	2 (5%)	1 (2.5%)	3 (7.5%)	8 (4%)
0	Ελλειπή	2 (5%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	2 (1%)
	Σύνολο παιδιών που δεν ταξινομήθηκαν σε ένα επεξηγηματικό πλαίσιο	9 (22.5%)	2 (5%)	2 (5%)	4 (10%)	5 (12.5%)	22 (11%)
	Σύνολο	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	40 (100%)	200 (100%)

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.IV

Παραδείγματα απαντήσεων των παιδιών που χρησιμοποιούσαν διαφορετικά Επεξηγηματικά Πλαίσια της Έννοιας του Κλάσματος σε κάποιες βασικές ερωτήσεις του ερωτηματολόγιου.

Ερωτήσεις Υποκείμενα	<u>Ερώτηση 2</u> (Πίνακας 1) Γράψε το πιο μεγάλο κλάσμα που μπορείς να σκεφθείς	<u>Ερ. 3 & 3α</u> (Πίνακας 2) Βάλε στη σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: 5/6, 1, 1/7, 4/3	<u>Ερ. 6 & 6α</u> (Πίνακας 2) Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: 5/8 4/3 Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο;	<u>Ερ. 10 & 10α</u> (Πίνακας 3) Το αποτέλεσμα είναι μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο του 17 και γιατί; $17 : \frac{2}{2}$	<u>Ερ. 15 & 15α</u> (Πίνακας 4) Είναι σωστή ή λάθος η ισότητα $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{21}$ και γιατί;	<u>Ερ. 16 & 16α</u> (Πίνακας 4) Είναι σωστή ή λάθος η ισότητα $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ και γιατί;	<u>Ερ. 21 (Πίνακας 5)</u> Μπορείς να ζωγραφίσεις κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το γινόμενο $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}$	<u>Ερ. 21 (Πίνακας 6)</u> Τι μέρος του συνολικού σχήματος είναι χρωματισμένο; Γράψε την απάντηση με τη μορφή ενός αθροίσματος κλασμάτων. 
Επεξ. Πλαίσιο Α *Δύο ανεξαρτ. φυσικοί αριθμοί* Θωμάς Υποκ. # 79, ΣΤ΄ Δημοτικού	Το $\frac{1000000}{1000000}$ γιατί έχει μεγάλους αριθμούς	1, 1/7, 4/3, 5/6 Γιατί το 5/6 είναι μεγαλύτερο από το 4/3 και το 4/3 μεγαλύτερο από το 1/7 και το 1/7 είναι μεγαλύτερο από το 1.	Το 5/8 γιατί έχει μεγαλύτερους αριθμούς.	Μικρότερο γιατί το διαιρούμε.	Είναι σωστή	Είναι λάθος γιατί 1+1=2 και 2+4=6 άρα 2/6.	οικόπεδο 	Είναι το $\frac{1}{4}$ χρωματισμένο
Επεξ. πλαίσιο Β *Μέρος μιας ακέραιας μονάδας* Χρήστος Υποκ. # 114, Α΄ Γυμνασίου	Το $\frac{36}{36}$=1 γιατί αν είχαμε μια τούρτα και την κόβαμε σε 36 κομάτια θα μπορούσαμε να πάρουμε και τα 36 κομ. δηλαδή ολόκληρη	1/7, 5/6,4/3, 1 γιατί ΕΚΠ(3,6,8)=36 και γίνονται 4/36, 30/36 και 48/36	Το 4/3 γιατί ΕΚΠ=24 και 15/24 < 32/24	Μεγαλύτερο, γιατί το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο.	Σωστό γιατί οι πολ/σμοι αν γίνουν είναι σωστοί με το άθροισμα.	Λάθος γιατί οι πράξεις αν γίνουν δεν βγάζουν ίσο αποτέλεσμα	$\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}$=12/21· 14/21 =12/21 · 21/14 = =152/294	$\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$
Επεξ. πλαίσιο Γ *Σχέση δύο αριθμών με αναφορά στην απειρία* Θανάσης Υποκ. #130 Α΄ Γυμνασίου	Το ν/1 Γιατί έχει αριθμητή ν που δείχνει ότι στον αριθμητή μπορεί να μπει οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός.	1/7<5/6<1<4/3 Αυτό συμβαίνει γιατί αν διαιρέσουμε το 1 προς το 7 θα βρούμε μικρότερο πηλίκο από το αν διαιρέσουμε το 5 προς το 6, θα είναι μικρότερο από τη μονάδα και η μονάδα είναι μικρότερη από το πηλίκο του 4 προς το 3.	Το 4/3 γιατί είναι είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα, ενώ το άλλο δεν είναι.	Ίσο γιατί αν κάνουμε την πράξη 17:1 θα βγει 17.	Σωστή γιατί αν κάνουμε την πράξη $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{21}$ βρίσκουμε πράγματι $\frac{8}{21}$	Σωστή γιατί αν κάνουμε την πράξη $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ βρίσκουμε 3/4	Χωρίζουμε τον κύκλο σε εφτά ίσα τμήματα και παίρνουμε τα τέσσερα και χωρίζουμε τον κύκλο σε 3 ίσα τμήματα και παίρνουμε τα 2 	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.VI

ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΣΤΑ ΕΠΕΞΗΓΗΜΑΤΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

Επεξηγηματικά Πλαίσια	Σύμβολο			Σχέση κλάσματος με την ακέραια μονάδα	Μερισμός	Μονάδα αναφοράς	Αναπαράσταση πράξεων	Απειρία
	Μέγεθος αριθμητή – παρονομαστή του p/q	Σχέση αριθμητή - παρονομαστή του p/q	Το κλάσμα q/q = 1		Χωρισμός της μονάδας σε μέρη	Είδος μονάδας αναφοράς	Διαφοροποίηση πρόσθεσης / πολ/σμου	Κάθε αριθμός έχει έναν επόμενο
Α. Δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί	Το p/q μικρό όταν το p και το q μικροί αριθμοί	Διαισθητικά p<q ή p>q ή p=q	Όχι	1 < p/q	Άνισα	Όχι πάντα ίδια μονάδα αναφοράς	Όχι	Διαισθητικά ο αριθμ. και ο παρονομαστής είναι πολύ μεγάλοι αριθμοί
Α1. Δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί και το κλάσμα q/q = 1.	Το p/q μικρό όταν το p και το q μικροί αριθμοί	Διαισθητικά p<q ή p>q ή p=q	q/q = 1	1 < p/q (αν p≠q)	Άνισα	Όχι πάντα ίδια μονάδα αναφοράς	Όχι	
Α2. Δύο ανεξάρτητοι φυσικοί αριθμοί που όσο μεγαλώνουν, μικραίνει η αξία του κλάσματος	Το p/q μικρό όταν το p και το q <u>μεγάλοι</u> αριθμοί	Διαισθητικά p<q ή p>q ή p=q	Όχι πάντα	p/q ≤ 1	Όχι πάντα ίσα	Όχι πάντα ίδια μονάδα αναφοράς	Όχι	Όχι
Β1. Αφελές μέρος μιας μονάδας	Το p/q μικρό όταν το p και το q μικροί αριθμοί	Πάντα p ≤ q	Όχι πάντα	p/q ≤ 1	Όχι πάντα ίσα	Όχι πάντα ίδια μονάδα αναφοράς	Όχι	Όχι
Β. Μέρος μιας ακέραιας μονάδας	Η αξία ενός κλάσματος δεν έχει σχέση με το μέγεθος του αριθμητή & παρονομαστή	Πάντα p ≤ q	Ναι	p/q ≤ 1	Πάντα ίσα	Ίδια μονάδα αναφοράς	Όχι	Όχι
Β2.Προχωρημένο μέρος μιας ακέραιας μονάδας		Πάντα p ≤ q	Ναι	p/q < ή > ή = 1	Πάντα ίσα		Όχι	Όχι
Γ1. Σχέση δύο αριθμών χωρίς αναφορά στην απειρία των αριθμών	Η αξία ενός κλάσματος δεν έχει σχέση με το μέγεθος του αριθμητή και παρονομαστή	p<q ή p>q ή p=q	Ναι	p/q < ή > ή = 1	Πάντα ίσα	Όχι πάντα ίδια μονάδα αναφοράς	Όχι	Όχι
Γ. Σχέση δύο αριθμών με αναφορά στην απειρία των αριθμών		p<q ή p>q ή p=q	Ναι	p/q < ή > ή = 1	Πάντα ίσα	Ίδια μονάδα αναφοράς	Όχι	Ναι
Γ2. Σχέση δύο αριθμών (Επιστημονικό)		p<q ή p>q ή p=q	Ναι	p/q < ή > ή = 1	Πάντα ίσα		Ναι	Ναι

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.V
Συχνότητες και ποσοστά επί τοις εκατό καθώς και τυπικά υπόλοιπα (Adjusted Residual) ανά ηλικιακή ομάδα στα διαφορετικά επεξηγηματικά πλαίσια των μαθητών (Pearson Chi-Square)

ΕΠΕΞΗΓΗΜ. ΠΛΑΙΣΙΑ		ΗΛΙΚΙΑΚ. ΟΜΑΔΕΣ					
		Ε΄ ΔΗΜ.	ΣΤ΄ ΔΗΜ.	Α΄ ΓΥΜΝ.	Β΄ ΓΥΜΝ.	Α΄ ΛΥΚ.	ΣΥΝΟΛΟ
Α	Ν	15	13	9	5	5	47
	%	39,50%	32,50%	22,50%	12,50%	12,50%	23,70%
	Τυπ. υπολ.	2,5	1,5	-0,2	-1,9	-1,9	
Β	Ν	8	17	14	12	8	59
	%	21,10%	42,50%	35,00%	30,00%	20,00%	29,80%
	Τυπ. υπολ.	-1,3	2	0,8	0	-1,5	
Γ1	Ν	5	5	6	6	5	27
	%	13,20%	12,50%	15,00%	15,00%	12,50%	13,60%
	Τυπ. υπολ.	-0,1	-0,2	0,3	0,3	-0,2	
Γ, Γ2	Ν	3	3	9	13	17	45
	%	7,90%	7,50%	22,50%	32,50%	42,50%	22,70%
	Τυπ. υπολ.	-2,4	-2,6	0	1,7	3,3	
ΜΙΚΤΑ	Ν	6	1	0	3	2	12
	%	15,80%	2,50%	0,00%	7,50%	5,00%	6,10%
	Τυπ. υπολ.	2,8	-1,1	-1,8	0,4	-0,3	
ΜΗ ΚΑΤΗΓΟΡ.	Ν	1	1	2	1	3	8
	%	2,60%	2,50%	5,00%	2,50%	7,50%	4,00%
	Adj.R.	-0,5	-0,6	0,3	-0,6	1,2	
ΕΛΛΙΠΗ	Ν	2	0	0	0	0	2
	%	5,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,00%
ΣΥΝΟΛΟ	Σύνολο Ν	40	40	40	40	40	200
	%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ Ι

ΣΧΟΛΕΙΟ ....

ΤΜΗΜΑ ....

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝΝΗΣΗΣ ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ....

ΟΔΗΓΙΕΣ Οι ερωτήσεις που κρατάς στα χέρια σου αποτελούν μέρος μιας έρευνας σχετικά με το μάθημα των Μαθηματικών. Δεν έχουν σκοπό να σε βαθμολογήσουν. Διάβαζε με προσοχή τις εκφωνήσεις και προσπάθησε να απαντήσεις σ' όλες τις ερωτήσεις. Γράφε την απάντηση της κάθε ερώτησης κάτω από την εκφώνηση.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Τι είναι το $\frac{2}{3}$;

2. Τι σημαίνει;

3. Ζωγράφισε κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το $\frac{2}{3}$.

4. Τι είναι το $\frac{12}{15}$;

5. Τι σημαίνει;

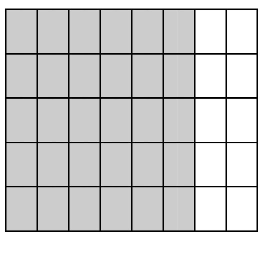
6. Ζωγράφισε κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το $\frac{12}{15}$.

7. Τρεις φίλοι μοιράζονται εξίσου δύο σοκολάτες. Γράψε τι μέρος από τις σοκολάτες θα πάρει ο καθένας τους.

8. Γράψε ένα κλάσμα που να φανερώνει τι μέρος από τις παρακάτω σφαίρες είναι χρωματισμένες.

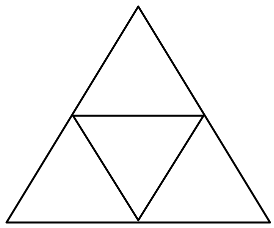
9. Σε μια τάξη με 24 παιδιά θέλουν να μοιράσουν ένα κιβώτιο με 16 πορτοκαλάδες. Τι μέρος των πορτοκαλάδων θα πάρει ο κάθε μαθητής;

10. Γράψε ένα κλάσμα που να φανερώνει τι μέρος από το παρακάτω σχήμα είναι χρωματισμένο.



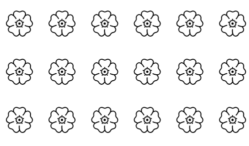
11. Ένα πακέτο περιέχει 4 σοκολάτες. Πόσες σοκολάτες είναι τα $\frac{3}{4}$ του πακέτου;

12. Χρωμάτισε τα $\frac{3}{4}$ του παρακάτω σχήματος:



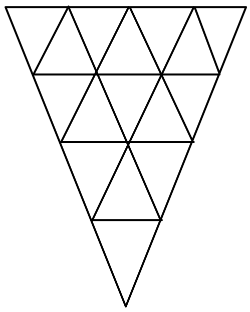
13. Το πάτωμα ενός δωματίου έχει 15 πλακάκια. Από πόσα πλακάκια αποτελούνται τα $\frac{4}{5}$ του πατώματος του δωματίου;

14. Χρωμάτισε τα $\frac{2}{3}$ του συνόλου των λουλουδιών της παρακάτω εικόνας.



15. Μια εταιρία έχει 16 υπαλλήλους. Αν μια μέρα απουσίαζαν τα $\frac{12}{16}$ αυτών, πόσοι υπάλληλοι απουσίαζαν;

16. Χρωμάτισε τα $\frac{12}{16}$ του παρακάτω σχήματος:



17. Ένα κουτί περιέχει 30 μολύβια. Πόσα μολύβια είναι τα $\frac{12}{15}$ του κουτιού;

18. Χρωμάτισε τα $\frac{10}{12}$ του συνόλου των τετραγώνων στην παρακάτω εικόνα.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΙΙ

ΣΧΟΛΕΙΟ ....

ΤΜΗΜΑ ....

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝ. ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ....

ΟΔΗΓΙΕΣ Οι ερωτήσεις που κρατάς στα χέρια σου αποτελούν μέρος μιας έρευνας σχετικά με το μάθημα των Μαθηματικών. Δεν έχουν σκοπό να σε βαθμολογήσουν. Διάβαζε με προσοχή τις εκφωνήσεις και προσπάθησε να απαντήσεις σ' όλες τις ερωτήσεις ακολουθώντας τις οδηγίες που σου δίνονται.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ερώτηση 1: Γράψε το πιο μικρό κλάσμα που μπορείς να σκεφθείς.

Ερώτηση 1α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μικρό κλάσμα;

Ερώτηση 2: Γράψε το μεγαλύτερο κλάσμα που μπορείς να σκεφθείς.

Ερώτηση 1β: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο κλάσμα;

Ερώτηση 3: Βάλε στη σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\frac{5}{6} \quad 1 \quad \frac{1}{7} \quad \frac{4}{3}$$

Ερώτηση 3α: Αιτιολόγηση της απάντησης:

Ερώτηση 4: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{5}$

Ερώτηση 4α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο κλάσμα;

Ερώτηση 5: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: $\frac{4}{15}$ $\frac{4}{7}$

Ερώτηση 5α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο κλάσμα;

Ερώτηση 6: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: $\frac{5}{8}$ $\frac{4}{3}$

Ερώτηση 6α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο κλάσμα;

Ερώτηση 7: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: $\frac{2}{7}$ $\frac{5}{6}$

Ερώτηση 7α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο κλάσμα;

Ερώτηση 8: Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα: $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{9}$

Ερώτηση 8α: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το πιο μεγάλο κλάσμα;

Έχουμε τον αριθμό 17. Αυτό τον αριθμό τον πολλαπλασιάζω ή τον διαιρώ κάθε φορά με έναν άλλο αριθμό. Σε ποιές περιπτώσεις το αποτέλεσμα που θα βρω είναι μεγαλύτερο του 17, σε ποιες μικρότερο του 17 και σε ποιες περιπτώσεις είναι ίσο με το 17;

Βάλε ένα σταυρό σ' αυτήν που θεωρείς ότι είναι η σωστή απάντηση και στην τελευταία στήλη αιτιολόγησε την απάντησή σου.

Ερωτήσεις		Αποτέλεσμα μεγαλύτερο του 17	Αποτέλεσμα μικρότερο του 17	Αποτέλεσμα ίσο του 17	Δεν ξέρω	Γιατί;
ερ. 9	$17 \cdot \frac{3}{8}$					
ερ. 10	$17 : \frac{2}{2}$					
ερ. 11	$17 : \frac{3}{5}$					
ερ.12	$17 \cdot \frac{13}{6}$					
ερ.13	$17 \cdot \frac{3}{3}$					
ερ. 14	$17 : \frac{8}{5}$					

Στον παρακάτω πίνακα βλέπεις κάποιες κάποιες αριθμητικές ισότητες. Σημείωσε με ένα σταυρό αυτό που πιστεύεις ότι ισχύει για την κάθε ισότητα. Στην τελευταία στήλη αιτιολόγησε την απάντησή σου.

Ισότητες		Σωστή	Λάθος	Δεν ξέρω	Γιατί;
ερ. 15	$\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{21}$				
ερ. 16	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$				
ερ. 17	$\frac{4}{7} - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$				
ερ. 18	$\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$				
ερ. 19	$\frac{1}{8} + 2 = \frac{17}{8}$				

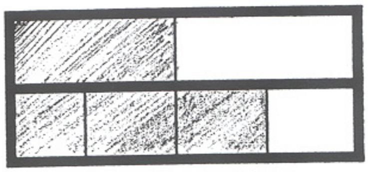
Ερώτηση 20:

Μπορείς να ζωγραφίσεις κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το άθροισμα

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5}.$$

Ερώτηση 21:

Στο παρακάτω σχήμα είναι χρωματισμένα κάποια μέρη από δύο ορθογώνια.
Τι μερος ολόκληρου του σχήματος είναι χρωματισμένο;
Γράψε την απάντηση με τη μορφή ενός αθροίσματος κλασμάτων.



Ερώτηση 22:

Μπορείς να ζωγραφίσεις κάτι που να δείχνει το ίδιο πράγμα με το γινόμενο

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}.$$

Ερώτηση 23:

Στο παρακάτω σχήμα είναι χρωματισμένα κάποια μέρη του σχήματος με διαφορετικό τρόπο. Τι μέρος του σχήματος είναι το διπλά χρωματισμένο; Γράψε την απάντησή σου με τη μορφή μιας πράξης με κλάσματα.