ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΒΑΣΙΚΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΝΩΣΙΑΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ»

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

«ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΑΛΛΑΓΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ»

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Π. ΧΡΗΣΤΟΥ

ΑΘΗΝΑ, 2009

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

Στέλλα Βοσνιαδου
επιβλέπουσα
Καθηγήτρια, Τμήμα Μ.Ι.Θ.Ε, Ε.Κ.Π.Α.

Βασιλική Φαρμάκη
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.

Γιάννης Χριστιανίδης
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μ.Ι.Θ.Ε, Ε.Κ.Π.Α.

Επταμελής Επιτροπή

- Στέλλα Βοσνιαδου, Καθηγήτρια Γνωστικής Ψυχολογίας, Τμήμα Μ.Ι.Θ.Ε, Ε.Κ.Π.Α.
- Βασιλική Φαρμάκη, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.
- Γιάννης Χριστιανίδης, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μ.Ι.Θ.Ε, Ε.Κ.Π.Α.
- Κωνσταντίνος Δημητρακόπουλος, Καθηγητής, Τμήμα Μ.Ι.Θ.Ε, Ε.Κ.Π.Α.
- Μαρία Γρηγοριάδου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ε.Κ.Π.Α.
- Θεοδόσης Ζαχαριάδης, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.
- Στυλιανός Νεγρεπόντης, Ομ. Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.

Ευχαριστίες

Πρώτα θα ήθελα να ευχαριστήσω την καθηγήτριά μου Στέλλα Βοσνιάδου για την αμέριστη υποστήριξη, τόσο σε επιστημονικό όσο και σε ηθικό επίπεδο, καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας, ή μάλλον καλύτερα της μαθητείας μου. Η συνολική της στάση αποτέλεσε πηγή έμπνευσης για μένα.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, τον κο Γιάννη Χριστιανίδη για την απλόχερη βοήθεια που μου πρόσφερε κάθε φορά που του το ζήτησα και για τις σημαντικές επισημάνσεις που μου έκανε και την κα. Βασιλική Φαρμάκη για την εξαιρετική συνεργασία που είχαμε και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε.

Η παρουσία της Ξένιας Βαμβακούση στο εργαστήριο ήταν πολύτιμη για τις ατελείωτες συζητήσεις, για την επιστημονική υποστήριξη και ψυχολογική συμπαράσταση, για την άρτια συνεργασία και το φιλικό κλίμα που έκανε τα πάντα πιο εύκολα.

Πολλά ευχαριστώ επίσης στην Ειρήνη Σκοπελίτη που ήταν εκεί για ό,τι της ζητούσα - της χρωστάω πολλά.

Οι συμβουλές της Ελένης Καλαμάρα στη στατιστική ανάλυση ήταν παραπάνω από πολύτιμες και η βοήθεια της Δέσποινας Δαραβίγκα στην επιμέλεια του κειμένου ήταν εξαιρετική.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Διευθυντές των σχολείων για τη συνεργασία και τη δυνατότητα που μου έδωσαν να κάνω τις έρευνες – ενδεικτικά αναφέρω το $2^{ο}$ Γυμνάσιο Ιλίου, το $45^{ο}$ Γυμνάσιο Αθηνών, το $2^{ο}$ Λύκειο Αργυρούπολης. Επίσης, τους συνεργάτες των Φροντιστηρίων «Παιδεία» στα Τρίκαλα για τη βοήθεια που μου πρόσφεραν στις πιλοτικές έρευνες.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου Παναγιώτη και Άρτεμις για Όλα. Χωρίς την οικονομική, ηθική και ψυχολογική τους στήριξη αυτά τα χρόνια, τίποτα δε θα ήταν εφικτό.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τον Κωνσταντίνο Μαρκίδη γιατί οι συμβουλές του ήταν πάντα σημαντικές, την Κική Κατσαρού για τη βοήθεια με τα διοικητικά, την Ειρήνη Μπιζά και Βασίλειο Κόλια που μου στείλανε τα άρθρα που τους ζήτησα, τα παιδιά του εργαστηρίου Γνωσιακής Επιστήμης: Σβετλάνα, Πόπη, Νατάσα, Σπυριδούλα για κάθε βοήθεια που μου πρόσφεραν και τη Στεφανία Μαυρικίδου που συνεισέφερε σημαντικά στο μαγείρεμα.

Δεν ξέρω πως θα μπορούσα να το ξεπληρώσω από τα αδέρφια μου, Χρήστο και Βάσια, τους φίλους και τις φίλες, τους συντρόφους, και τις συντρόφισσες, τους συγκατοίκους και τις συγκάτοικες που με άντεξαν, ακόμα κι όταν δεν με άντεχαν.

Η διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Γνωσιακής Επιστήμης, στο πλαίσιο του ΠΜΣ «Βασική και Εφαρμοσμένη Γνωσιακή Επιστήμη» (Τμήμα Μ.Ι.Θ.Ε., Ε.Κ.Π.Α.).

What is "familiarly known" is not properly known,
just for the reason that it is "familiar".

Georg Wilhelm Friedrich Hegel

Ποιο είναι τάχα το θέμα που «λύνεται»; Δεν ξεμένουν οι απορίες της ζωής που ζήσαμε σαν ένα φύλλωμα ζωγραφιστό, που μας κόβει τη θέα; Να το ξεριζώσουμε, η και απλώς να το αραιώσουμε, ούτε καν το σκεφτόμαστε Προχωρούμε, τα' αφήνουμε πίσω μας, κι από μακριά είναι βέβαια διακριτό, μα όχι καθαρά, σαν σκιά, και γι' αυτό ακόμα πιο αινιγματικά περιπεπλεγμένο.

Walter Benjamin, Μονόδρομος

Πίνακας Περιεχομένων

Περίληψη

Σκοπός της παρούσα διατριβής είναι να διερευνήσει τον τρόπο με τον οποίο κατανοούν οι μαθητές την έννοια της μεταβλητής στην άλγεβρα. Η μεταβλητή αποτελεί ιδιαίτερα σημαντική έννοια των μαθηματικών και η διεθνής βιβλιογραφία έχει καταγράψει μεγάλες δυσκολίες των μαθητών με την κατανόηση και τη χρήση της, καθώς και πλήθος λαθών και παρερμηνειών. Προηγούμενες έρευνες που επικεντρώθηκαν στη μελέτη των δυσκολιών και των λαθών που εμφανίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της χρήσης των γραμμάτων ως μεταβλητές επισήμαναν τη δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν τα γράμματα ως γενικευμένους αριθμούς, δηλαδή ως σύμβολα που θα μπορούσαν να αναπαραστήσουν ένα εύρος τιμών και όχι μία και μοναδική αριθμητική τιμή. Οι ερμηνείες που προσφέρθηκαν για αυτές τις δυσκολίες επικαλούνταν τη θεωρία σταδίων του Piaget, ή τις απέδιδαν σε επιδράσεις της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών από το πλαίσιο της αριθμητικής. Στην παρούσα μελέτη, υιοθετήσαμε το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής για να εξηγήσουμε τις δυσκολίες των μαθητών να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής.

Υποστηρίζουμε ότι οι μαθητές, ήδη από την προσχολική ηλικία οργανώνουν μια αρχική κατανόηση του αριθμού γύρω από την έννοια του φυσικού αριθμού. Μια τέτοια κατανόηση του αριθμού επιβεβαιώνεται και ενισχύεται από τη σχολική διδασκαλία, όπου

στα πλαίσια της αριθμητικής οι μαθητές μαθαίνουν συστηματικά τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών. Με τον τρόπο αυτό καταλήγει να αποτελέσει ένα ισχυρό εναλλακτικό πλαίσιο – μια ‘αρχική θεωρία’ - των μαθητών για τους αριθμούς, στο οποίο συχνά αναφέρονται με έναν άδηλο τρόπο, για να δώσουν απαντήσεις στα μαθηματικά προβλήματα. Ο όρος ‘θεωρία’ χρησιμοποιείται εδώ όχι για να δηλώσει ένα αδιαμφισβήτητο και καλοσχηματισμένο σύστημα που είναι κοινώς αποδεκτό από μία κοινότητα, όπως είναι η επιστημονική θεωρία, αλλά έναν τρόπο οργάνωσης επιμέρους γνώσεων σε ένα συνεκτικό σώμα το οποίο μπορεί να δώσει απαντήσεις στα προβλήματα των μαθηματικών. Η γνώση αυτή για τον φυσικό αριθμό κάποιες φορές λειτουργεί υποστηρικτικά στην κατανόηση άλλων εννοιών, όπως η έννοια του επόμενου φυσικού αριθμού, αλλά συχνά στέκεται εμπόδιο στην κατανόηση εννοιών όπως οι δεκαδικοί και τα κλάσματα.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, υποθέσαμε ότι η αρχική γνώση των μαθητών για τους αριθμούς, όπως αυτή έχει οργανωθεί στα πλαίσια της αριθμητικής, με την ιδιαίτερη θέση που επιφυλάσσει για τον φυσικό αριθμό, θα στεκόταν εμπόδιο στη κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής ως σύμβολο πραγματικών αριθμών. Οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν τη χρήση της μεταβλητής στην άλγεβρα ως του σύμβολο του γενικευμένου αριθμού, που δεν έχει μια συγκεκριμένη αξία αλλά παίρνει τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών – εφόσον δεν υπάρχουν επιμέρους περιορισμοί που να περιορίζουν το εύρος τιμών της. Υπό αυτή την έννοια, τα οντολογικά χαρακτηριστικά της έννοιας της μεταβλητής διαφοροποιούνται από αυτά του φυσικού αριθμού στα πλαίσια της αριθμητικής, που έχει μια συγκεκριμένη αξία, και ιδιότητες όπως της ύπαρξης του επόμενου αριθμού, κοκ. Ακόμα και σε ότι αφορά τους μετασχηματισμούς, η μεταβλητή δεν χρησιμοποιείται με τον ίδιο τρόπο στους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς όπως ο φυσικός αριθμός στα πλαίσια της αριθμητικής. Για παράδειγμα, στο σύνολο των φυσικών αριθμών ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει τον αριθμό και η διαίρεση τον μικραίνει. Αυτό όμως δε συμβαίνει στους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς με μεταβλητές.

Υποθέσαμε, λοιπόν, ότι κάποιοι μαθητές θα κατανοούν τις μεταβλητές στα πλαίσια του εναλλακτικού τους πλαισίου για τους αριθμούς, που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό. Στην περίπτωση αυτή θα ερμηνεύουν τις μεταβλητές ως σύμβολα φυσικών αριθμών, αποδίδοντάς τους ιδιότητες των φυσικών αριθμών, και αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα συγκεκριμένα λάθη και παρερμηνείες σε διάφορα αλγεβρικά πλαίσια, όπως στην κατανόηση των τιμών που μπορούν να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν μεταβλητές. Θα περιμέναμε ότι για να γίνει κατανοητή η μαθηματική έννοια της μεταβλητής ως σύμβολο πραγματικών αριθμών, θα πρέπει οι μαθητές να αλλάξουν την αρχική θεωρία τους για τον αριθμό που είναι οργανωμένη γύρω από το φυσικό αριθμό, μέσα από τη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής. Έρευνες στην ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού έχουν δείξει ότι αυτό είναι μια δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία που γίνεται σταδιακά και χαρακτηρίζεται από ενδιάμεσα επίπεδα κατανόησης.

Στο Πείραμα 1 εξετάστηκε η υπόθεση ότι οι μαθητές θα τείνουν να αποδίδουν μόνο φυσικούς αριθμούς στις μεταβλητές που εμφανίζονται σε μια σειρά αλγεβρικών παραστάσεων. Ζητήσαμε από μαθητές Β’ και Γ’ Γυμνασίου να γράψουν αριθμούς που θα μπορούσαν, ή που δεν θα μπορούσαν, να τους πάρουν μια σειρά αλγεβρικών παραστάσεων που περιείχαν μεταβλητές. Τα αποτελέσματα υποστήριξαν την υπόθεσή μας, καθώς έδειξαν μια έντονη τάση των μαθητών να αντικαθιστούν τα γράμματα μόνο με φυσικούς αριθμούς και, στα πλαίσια της λανθασμένης του πεποίθησης ότι τα γράμματα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς, να αποκλείουν άλλους αριθμούς ως πιθανές αντικαταστάσεις. Φάνηκε, επίσης, πως οι αριθμοί που έτειναν οι μαθητές να δίνουν στα γράμματα επηρεάζονταν από το *φαινομενικό πρόσημο* των μεταβλητών και των αλγεβρικών παραστάσεων.

Ονομάστηκε 'φαινομενικό πρόσημο' το πρόσημο που φαίνεται να έχει μια μεταβλητή, ή μια αλγεβρική παράσταση, ως εξωτερικό χαρακτηριστικό της μορφή της. Για παράδειγμα, οι μαθητές είχαν την τάση να θεωρούν ότι φαινομενικά θετικές αλγεβρικές παραστάσεις, όπως η '4γ', αναπαριστούν μόνο θετικούς αριθμούς, και ότι φαινομενικά αρνητικές παραστάσεις, όπως η '-β', αναπαριστούν μόνο αρνητικούς αριθμούς.

Τα αποτελέσματα αυτά ενισχύθηκαν από αυτά του Πειράματος 2, στο οποίο ζητήθηκε από τους μαθητές, στη συνθήκη ενός κλειστού ερωτηματολογίου αυτή τη φορά, να επιλέξουν από ένα διαθέσιμο σύνολο φυσικών και μη-φυσικών αριθμών, εκείνους που θεωρούν ότι δε θα μπορούσαν να δοθούν στις ίδιες αλγεβρικές παραστάσεις με αυτές του Πειράματος 1 – αν, βέβαια, θεωρούν ότι υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί. Ακόμα και στη συνθήκη αυτή, όπου η ορθή απάντηση, δηλαδή ότι δεν υπάρχουν αριθμοί που δε θα μπορούσε να τους πάρει κάθε αλγεβρική παράσταση, ήταν μία από τις διαθέσιμες επιλογές των μαθητών, στην πλειοψηφία τους οι μαθητές απέκλεισαν μια σειρά αριθμών ως αριθμούς που δε θα μπορούσαν να δοθούν στις παραστάσεις. Οι αποκλεισμοί αυτοί έγιναν στη βάση της τάσης τους να θεωρούν τα γράμματα ως σύμβολα φυσικών αριθμών και της *παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου*, δηλαδή της τάσης τους να ερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο μιας παράστασης ως το πραγματικό πρόσημο των τιμών που δύναται αυτή να πάρει.

Θεωρούμε ότι η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου δεν είναι μια ανεξάρτητη και ασύνδετη παρερμηνεία αλλά μια έκφανση της επίδρασης του εναλλακτικού πλαισίου των μαθητών για τον αριθμό που υποστηρίζει, άλλωστε, και τη λανθασμένη πεποίθηση των μαθητών ότι τα γράμματα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς. Η ερμηνεία αυτή υποστηρίχθηκε από τα αποτελέσματα του Πειράματος 3, όπου φάνηκε πως οι μαθητές που ήταν πρόθυμοι να δώσουν έστω και μία μη-φυσική τιμή στις μεταβλητές που εμφανίζονταν στο πλαίσιο των συναρτήσεων, είχαν σημαντικά μικρότερη πιθανότητα να κάνουν λάθη που οφείλονταν στην παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, σε μια σειρά από δοκιμασίες που αφορούσαν λύση ανισώσεων, εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης με τετραγωνική ρίζα και εύρεση της απόλυτης τιμής μιας αλγεβρικής παράστασης.

Συνοπτικά, τα αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων έδειξαν ότι το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο των μαθητών για τον αριθμό, που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό, επιβάλει στην κατανόηση της χρήσης των γραμμάτων ως μεταβλητές στην άλγεβρα, δύο προϋποθέσεις: α) την *ακεραιότητα*, δηλαδή ότι τα γράμματα αναπαριστούν ακέραιους αριθμούς και όχι κλάσματα ή δεκαδικούς αριθμούς και β) την *φαινομενικότητα του προσήμου*, δηλαδή ότι το φαινομενικό πρόσημο μιας μεταβλητής, ή μιας αλγεβρικής παράστασης που περιέχει μεταβλητές, είναι το πραγματικό πρόσημο των τιμών που δύναται να αναπαραστήσει.

Φάνηκε επίσης ότι η κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής είναι μια σταδιακή διαδικασία που δεν γίνεται από τη μια στιγμή στην άλλη αλλά χαρακτηρίζεται από ενδιάμεσα επίπεδα κατανόησης. Στα ενδιάμεσα αυτά επίπεδα οι μαθητές είχαν άρει μία από τις δύο παραπάνω προϋποθέσεις. Κάποιοι μαθητές εμφανίζονταν να δέχονται δεκαδικούς αριθμούς ως πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή, αλλά όχι κλάσματα. Κάποιοι άλλοι μαθητές δεχόντουσαν αρνητικούς αριθμούς ως πιθανές τιμές που θα μπορούσαν να πάρουν οι φαινομενικά θετικές παραστάσεις, αλλά όχι το αντίστροφο. Τα λάθη αυτά θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως *συνθετικά λάθη* που μπορούν να ερμηνευτούν ως μια άδηλη προσπάθεια από τη μεριά των μαθητών να κατανοήσουν τη νέα πληροφορία που έρχεται από τη συστηματική διδασκαλία και θέλει τις μεταβλητές να δύνανται να αναπαραστήσουν τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, η οποία όμως γίνεται στα πλαίσια των εμποδίων που θέτει το αρχικό εννοιολογικό πλαίσιο για τον αριθμό που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό. Επίσης, τα λάθη αυτά δείχνουν πως οι μαθητές αυτοί βρίσκονται σε μια διαδικασία αναδιοργάνωσης του αρχικού τους εννοιολογικού πλαισίου, αφού εμφανίζουν την τάση να άρουν τις προϋποθέσεις που αυτό θέτει στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, η οποία όμως διαδικασία δεν έχει ακόμα ολοκληρωθεί.

Στο Πείραμα 4, χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα των προηγούμενων πειραμάτων και σχεδιάσαμε μια διδακτική παρέμβαση που λάμβανε υπόψη την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών και τις λανθασμένες πεποιθήσεις τους σε σχέση με τη χρήση των γραμμάτων ως μαθηματικά σύμβολα. Χρησιμοποιώντας τις βασικές αρχές της άμεσης διδασκαλίας και κάποιες διδακτικές στρατηγικές για μάθηση με εννοιολογική αλλαγή, όπως αυτές προτείνονται από τη διεθνή βιβλιογραφία, στοχεύσαμε στο να βοηθήσουμε ένα δείγμα μαθητών Α΄ Λυκείου να διορθώσει την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Από την παρέμβαση αυτή ωφελήθηκαν κάποιοι μαθητές, καθώς κατάφεραν να διορθώσουν την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, κάνοντας λιγότερα λάθη στις δοκιμασίες που τους δόθηκαν αμέσως μετά τη διδακτική παρέμβαση. Παρόλα αυτά, η διδακτική παρέμβαση δεν βοήθησε όλους τους μαθητές και τα αποτελέσματά της δεν διατηρήθηκαν αρκετό διάστημα. Αυτό έδειξε ότι για να διορθώσουν επιμέρους παρερμηνείες όπως αυτή του φαινομενικού προσήμου, που υποστηρίζονται από τα εναλλακτικά τους πλαίσια για τον αριθμό, οι μαθητές θα πρέπει να έχουν αναπτύξει την έννοια του αριθμού πέρα από το εννοιολογικό πλαίσιο του φυσικού αριθμού.

Κεφάλαιο 1
Δυσκολίες και λάθη με τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές στην άλγεβρα – επισκόπηση της βιβλιογραφίας

1.1 Τα γράμματα ως μαθηματικά σύμβολα και η έννοια της μεταβλητής

Η άλγεβρα αποτελεί ένα βασικό κομμάτι της μαθηματικής γνώσης που οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν επαρκώς. Η εισαγωγή στη συμβολική άλγεβρα γίνεται, τουλάχιστον στη χώρα μας, στο τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και κατά την είσοδο των παιδιών στο Γυμνάσιο (βλ. Αλιμπινίσης, Αντύπας, Ευσταθόπουλος, Κλαουδάτος, & Παπασταυρίδης, 1987· Αλιμπινίσης και συνεργάτες, 1989a· βλ. Αλιμπινίσης και συνεργάτες, 1989b). Έστω κι αν η κατανόηση της άλγεβρας αποτελεί βασικό στόχο κάθε εκπαιδευτικού προγράμματος, μεγάλης κλίμακας εμπειρικές μελέτες που διεξήχθησαν τόσο στη Βρετανία (Hart, 1981) όσο και στις Η.Π.Α. (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, & Reys, 1981), έδειξαν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλες δυσκολίες στην κατανόηση βασικών εννοιών της (βλ. επίσης Kieran, 2006).

Η προσπάθεια να οριστεί επακριβώς η άλγεβρα και να βρεθεί η σχέση της με την αριθμητική, που αποτελεί το προηγούμενο πλαίσιο μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών, έχει αποτελέσει ένα πεδίο διαλόγου στους κύκλους τόσο των μαθηματικών όσο και των επιστημόνων της μαθηματικής εκπαίδευσης (βλ. Booth, 1984· Filloy & Rojano, 1989· Resnick, 1987· Sfard & Linchevski, 1994). Οι Saunders Mac Lane και Garrett Birkhoff (1967), κάνουν στην *Άλγεβρα* τους μια προσπάθεια να παρουσιάσουν μία συνεχή εικόνα της άλγεβρας, ξεκινώντας από την αριθμητική και, περνώντας από τη σχολική άλγεβρα, να καταλήξουν στην πανεπιστημιακή:

> *«Η άλγεβρα ξεκινά ως η τέχνη του χειρισμού αθροισμάτων, γινομένων και δυνάμεων αριθμών. Οι κανόνες αυτών των χειρισμών ισχύουν για όλους τους αριθμούς, οπότε οι χειρισμοί αυτοί θα μπορούσαν να γίνουν και με γράμματα που συμβολίζουν τους αριθμούς. Έπειτα φαίνεται ότι οι ίδιοι κανόνες ισχύουν για διάφορα είδη αριθμών...και οι κανόνες εφαρμόζονται ακόμα και σε πράγματα...που δεν είναι πια αριθμοί. Οπότε, ένα αλγεβρικό σύστημα, όπως θα το μελετήσουμε, είναι ένα σύνολο στοιχείων κάθε είδους στο οποίο λειτουργούν εφαρμογές όπως η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός, με την προϋπόθεση ότι αυτές οι εφαρμογές ικανοποιούν συγκεκριμένους βασικούς κανόνες» (σελ. 1) (στο Usiskin, 1988).*

Το καθοριστικό σημείο που ουσιαστικά σηματοδοτεί το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα είναι η εισαγωγή στην έννοια της μεταβλητής (Matz, 1980· Wagner, 1981). Είναι τόσο στενή η σχέση της άλγεβρας με τη χρήση της μεταβλητής, όπως άλλωστε φαίνεται και από τον παραπάνω ορισμό, που πολλές φορές η άλγεβρα ορίζεται ως η μελέτη της χρήσης και των ιδιοτήτων της μεταβλητής (Usiskin, 1988). Για το λόγο αυτό, σε κάθε επισκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας που αφορά την έρευνα για τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην άλγεβρα, υπάρχει πάντα ειδική αναφορά, συγκεκριμένα στον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύουν και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν με τη χρήση των γραμμάτων που χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές στην άλγεβρα (βλ. Kieran, 1990· 1992· 2006· 2007). Πολλοί μαθητές μάλιστα παραδέχονται οι ίδιοι ότι είναι η χρήση των γραμμάτων που τους δυσκολεύει και ότι καταλάβαιναν τα μαθηματικά μέχρι να εμφανιστούν τα γράμματα (Sackur, 1995).

Η χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές στην άλγεβρα δεν γίνεται με έναν αλλά με περισσότερους τρόπους, οι οποίοι μάλιστα είναι απόλυτα συνδεδεμένοι με τον τρόπο με τον οποίο ορίζεται η άλγεβρα[1]. Ο Usiskin (1988), πρότεινε την παρακάτω ταξινόμηση των διαφορετικών χρήσεων των μεταβλητών στην άλγεβρα:

Α) Θεωρώντας την άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική, οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται ως γενικευμένοι αριθμοί για τη έκφραση των σχέσεων που έχουν κάποιοι αριθμοί μεταξύ τους, όποιοι κι αν είναι αυτοί οι αριθμοί. Έτσι, για παράδειγμα, η αντιμεταθετική ιδιότητα των αριθμών (π.χ., 2+3=3+2) γενικεύεται με τη μορφή α+β=β+α. Οι μεταβλητές εδώ αναπαριστούν τον γενικευμένο αριθμό που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από ένα σύνολο αριθμών και υπόκειται σε όλες τις διαδικασίες που γίνονται με ή στους αριθμούς αυτούς. Οι μεταβλητές στην περίπτωση αυτή μπορούν να σταθούν από μόνες τους ως ανεξάρτητες οντότητες και να πάρουν μέρος σε αλγοριθμικές διεργασίες σαν να ήταν συγκεκριμένοι αριθμοί.

Β) Θεωρώντας την άλγεβρα ως το πεδίο στο οποίο παρουσιάζονται γενικοί τρόποι επίλυσης προβλημάτων, οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν τον άγνωστο της εξίσωσης που αναπαριστά το πρόβλημα (π.χ. 2x+3=15). Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται από τις Sfard και Linchevsky (1994) «προσέγγιση της σταθερής αξίας». Στην περίπτωση αυτή το γράμμα έχει μία

[1] Αυτό θα γίνει επίσης εμφανές από την αναφορά στην ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας που θα παρουσιαστεί παρακάτω (βλ. Κεφ. 2).

αριθμητική αξία (ή περισσότερες όσο ανεβαίνει ο βαθμός της εξίσωσης) που είναι προς το παρόν άγνωστη. Αυτή η χρήση της μεταβλητής αποτελεί την πρώτη επαφή των μαθητών με το γράμμα ως μαθηματικό αντικείμενο ήδη από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση - σε προκαταρκτική φάση της χρήσης του γράμματος χρησιμοποιούνταν το κενό στοιχείο που πρέπει να συμπληρωθεί για να ισχύει η ισότητα (π.χ., _+3=5).

Γ) Θεωρώντας την άλγεβρα ως μελέτη των σχέσεων ανάμεσα σε ποσότητες, οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται για να ορίσουν συναρτησιακές σχέσεις. Για παράδειγμα, στη γενική εξίσωση της ευθείας y=αx+β, το x είναι η *ανεξάρτητη μεταβλητή* που βρίσκεται σε συναρτησιακή σχέση με την *εξαρτημένη μεταβλητή* y, όπου το x χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει ένα σύνολο αριθμητικών τιμών που αποτελούν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, το y αναπαριστά μια ποσότητα που εξαρτάται από την ποσότητα x, ενώ τα α και β (*παράμετροι*) αναπαριστούν σταθερούς και συγκεκριμένους αριθμούς που ορίζουν την ειδική σχέση του x με το y.

Δ) Τέλος, θεωρώντας την άλγεβρα ως μελέτη δομών όπως ομάδων, δακτυλίων, σωμάτων κτλ., οι μεταβλητές είναι αυθαίρετα αντικείμενα σε μια φορμαλιστική δομή η οποία συγκροτείται γύρω από συγκεκριμένους κανόνες/αρχές. Έτσι, για παράδειγμα, κατά την παραγοντοποίηση του πολυωνύμου $2\chi^2-5\alpha\chi-9\alpha^2$ σε γινόμενο των παραγόντων $(\chi-3\alpha)(2\chi+3\alpha)$, όλα τα γράμματα δεν αντιπροσωπεύουν απαραίτητα κάτι άλλο πέραν του ότι είναι απλά σύμβολα που μετασχηματίζονται με βάση τους κανόνες που θέτει το φορμαλιστικό σύστημα στο οποίο εμφανίζονται.

1.1.2 Τα αλγεβρικά σύμβολα και το νόημά τους

Ο τρόπος με τον οποίο νοηματοδοτούνται από τους μαθητές τα αλγεβρικά σύμβολα, όπως οι μεταβλητές και οι κανόνες μετασχηματισμού της άλγεβρας, έχει αποτελέσει πεδίο εκτεταμένης μελέτης από σειρά ερευνητών όπως, για παράδειγμα, φαίνεται από την επισκόπηση της έρευνας για την άλγεβρα στο PME[2] (βλ. Kieran, 2006). Από την επισκόπηση αυτή θα μπορούσε να βγει το συμπέρασμα ότι οι ερευνητές συγκλίνουν στο να δέχονται ότι τα αλγεβρικά σύμβολα και οι κανόνες μετασχηματισμού αντλούν το νόημά τους είτε μέσα από το ίδιο το φορμαλιστικό σύστημα της άλγεβρας, είτε από αναφορές σε αντικείμενα και σχέσεις που βρίσκονται έξω από το ίδιο το σύστημα αυτό. Σύμφωνα με το μοντέλο που προτείνει η Demby (1997) (βλ. επίσης Booth, 1989· Kaput, 1989), οι αλγεβρικές παραστάσεις[3] έχουν μία *σημασιολογική* (semantic) πλευρά που κατανοεί την άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική και δίνει στη μεταβλητή το ρόλο του συμβόλου που αναπαριστά αριθμούς, και μία *συντακτική* (syntactic) πλευρά η οποία αναφέρεται στους τρόπους χρήσης των αλγεβρικών συμβόλων με βάση τους φορμαλιστικούς κανόνες της άλγεβρας, ανεξάρτητα από οποιαδήποτε εξωτερική αναφορά αυτών.

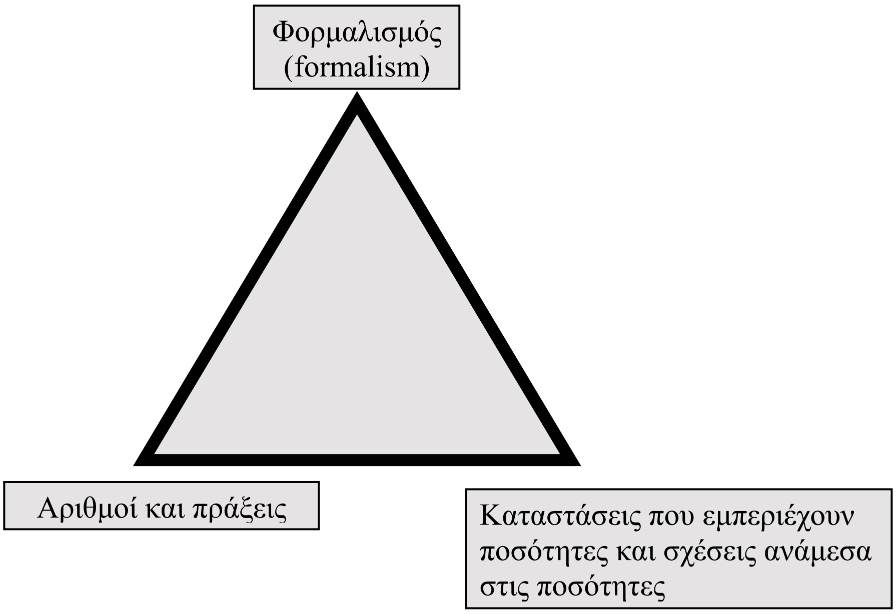
Για να γίνει αυτός ο διαχωρισμός πιο κατανοητός θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο για τη νοηματοδότηση των αλγεβρικών παραστάσεων που πρότεινε η Resnick (1987), ως πιο κατάλληλο και αντιπροσωπευτικό των διαφόρων προσεγγίσεων που έχουν προταθεί. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, οι αλγεβρικές παραστάσεις αντλούν το νόημά τους μέσα από το φορμαλιστικά καθορισμένο τυπικό σύστημα της άλγεβρας. Πέραν τούτου όμως, οι αλγεβρικές παραστάσεις έχουν και ένα *αναφορικό νόημα* που παίρνουν είτε από τις

---

[2] Το PME (Psychology of Mathematics Education) είναι ένα διεθνές συνέδριο της ένωσης ερευτητών για την ψυχολογία της μαθηματικής εκπαίδευσης.

[3] Οι *αλγεβρικές παραστάσεις* είναι μαθηματικές κατασκευές στις οποίες οι μεταβλητές συνδέονται με άλλους αριθμούς και σύμβολα όπως πρόσημα και σύμβολα πράξεων, π.χ., 2x+3. Μαθηματικά μιλώντας, οι αλγεβρικές παραστάσεις μπορεί να είναι μονώνυμα ή πολυώνυμα.

καταστάσεις στις οποίες αναφέρονται και οι οποίες αφορούν ποσότητες και σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων, είτε από τη σύνδεσή τους με τον «κόσμο των αριθμών» (βλ. Διάγραμμα 1.1).



Διάγραμμα 1.1 Μοντέλο νοηματοδότησης των αλγεβρικών παραστάσεων (Resnick και συνεργάτες, 1989)

Με τον τρόπο αυτό, μετασχηματισμοί όπως στο παράδειγμα της περίπτωσης Δ' στην παραπάνω ταξινόμηση του Usiskin, θα μπορούσαν να γίνουν πιο κατανοητοί από τους μαθητές μέσα από μια διαδικασία να τους αποδώσουν νόημα, κάνοντας αναφορά στους αριθμούς τους οποίους θα μπορούσαν να αναπαραστήσουν. Εμπειρικά δεδομένα υποστηρίζουν ότι η αντικατάσταση των μεταβλητών με συγκεκριμένους αριθμούς, έστω κι αν αυτό δεν αποτελεί απόδειξη για την ορθότητα ή όχι ενός μετασχηματισμού, είναι παρόλα αυτά μια επιτυχημένη στρατηγική για την ορθή χρήση τους από τους μαθητές. Μια τέτοια περίπτωση μπορούμε να βρούμε σε δοκιμασίες απλοποίησης αλγεβρικών παραστάσεων, όπου οι μαθητές που έτειναν να δοκιμάζουν αριθμούς είχαν υψηλότερες επιδόσεις στα έργα (βλ. Demby, 1997· Malara, 1999).

Φαίνεται λοιπόν από τα παραπάνω πως η μεταβλητή δεν είναι ταυτόσημη με τον αριθμό, μιας και χρησιμοποιείται για να συμβολίσει τον οποιονδήποτε αριθμό. Παρόλα αυτά, το γεγονός ότι αναπαριστά αριθμούς κάνει τη σχέση ανάμεσα στην έννοια της μεταβλητής και την έννοια του αριθμού να είναι άρρηκτη.

Παίρνοντας στοιχεία από τη σημειωτική παράδοση του Ferdinand de Saussure, όπου κάθε σημείο αποτελείται από ένα σημαίνον και ένα σημαινόμενο, με το σημαίνον (signifier) να είναι η μορφή που παίρνει το σημείο, ενώ το σημαινόμενο (signified) να είναι η έννοια που αναπαριστά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι μεταβλητές αποτελούν το σημείο και οι αριθμοί που αυτές αναπαριστούν αποτελούν το σημαινόμενο. Όπως στη γλώσσα, όπου ένα σημαίνον μπορεί να αναφέρεται σε πολλά σημαινόμενα και σε ένα σημαινόμενο μπορεί να αναφέρονται πολλά σημαίνοντα, έτσι και στις μεταβλητές ένα γράμμα μπορεί να αναπαριστά παραπάνω από έναν αριθμούς και ο ίδιος αριθμός μπορεί να αναπαρίσταται από διαφορετικά γράμματα.

Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές προσδίδουν αναφορικό νόημα στις μεταβλητές και ο τρόπος με τον οποίο τις συνδέουν με τον κόσμο των αριθμών αποτελεί κεντρικό ερευνητικό στόχο της παρούσας διατριβής. Έστω κι αν οι μαθητές, με την εισαγωγή τους στην άλγεβρα, διδάχθηκαν την έννοια της μεταβλητής ως σύμβολο που αναπαριστά τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, εμφανίζουν συχνά την τάση να χρησιμοποιούν εναλλακτικούς τρόπου ερμηνείας της συγκεκριμένης έννοιας και του συμβολισμού της, με αποτέλεσμα να εμφανίζουν λάθη και παρερμηνείες. Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιάσουμε τους τρόπους με τους οποίους τείνουν να ερμηνεύουν οι μαθητές τα γράμματα και τους τρόπους με τους οποίους νοηματοδοτούν τη χρήση τους στην άλγεβρα, όπως η διεθνής βιβλιογραφία έχει επισημάνει.

1.2 Πώς ερμηνεύουν οι μαθητές τη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα – δυσκολίες, λάθη, παρερμηνείες

Οι τρόποι με τους οποίους ερμηνεύουν οι μαθητές τη χρήση των γραμμάτων ως αλγεβρικά αντικείμενα είναι πολλοί και μπορούν να εξηγήσουν ένα σύνολο λαθών που παρουσιάζονται σε διάφορες αλγεβρικές διεργασίες, όπως, για παράδειγμα, στην προσπάθεια έκφρασης γενικών σχέσεων μεταξύ αριθμών, στη λύση εξισώσεων, στην έκφραση μοτίβων, κτλ. Από τις πρώτες συστηματικές μελέτες για τις δυσκολίες κατανόησης της άλγεβρας, η οποία μάλιστα εστίασε και στον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύεται η χρήση των γραμμάτων σε αυτή, ήταν αυτή του Collis (1975). Ο συγκεκριμένος ερευνητής απέδωσε την αυξημένη δυσκολία των μαθητών με την άλγεβρα στα αφηρημένα αντικείμενα που αυτή χρησιμοποιεί. Πρότεινε μια αναπτυξιακή ερμηνεία των λαθών και των δυσκολιών των μαθητών βασιζόμενος στη θεωρία των σταδίων ανάπτυξης του Piaget. Πιο συγκεκριμένα, ο Collis (1975) υποστήριξε ότι οι μαθητές κατανοούν με προοδευτικό τρόπο αρχικά τους μικρούς αριθμούς που είναι αντικείμενα της άμεσης εμπειρίας τους, έπειτα τους μεγαλύτερους αριθμούς που δεν είναι άμεσα επαληθεύσιμοι εμπειρικά και μόνο στο τέλος κατανοούν τη χρήση των γραμμάτων ως σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς. Σε πρώτη φάση κατανοούν τα γράμματα ως σύμβολα που αναπαριστούν συγκεκριμένους μόνο αριθμούς, αργότερα ως *γενικευμένους αριθμούς* και στο τέλος ως *μεταβλητές*.

Σύμφωνα με τον Collis (1975), ένας μαθητής που βρίσκεται στο στάδιο των *συγκεκριμένων λογικών ενεργειών*, είναι ικανός να κατανοήσει τη χρήση του γράμματος, για να αναπαραστήσει μία συγκεκριμένη αριθμητική αξία που είναι προς το παρόν άγνωστη. Τη χρήση όμως των γραμμάτων ως γενικευμένους αριθμούς ή ως μεταβλητές (βλ. τη διαφοροποίηση που πρότεινε παραπάνω ο Usiskin, σελ. 20), μπορούν να την κατανοήσουν μόνο οι μαθητές που βρίσκονται στο στάδιο των *τυπικών λογικών ενεργειών*.

Η πιο ουσιαστική συμβολή της παραπάνω ανάλυσης που πρότεινε ο Collis ήταν, σύμφωνα με την Booth (1984), ότι η ανάπτυξη της κατανόησης της άλγεβρας μπορεί να αντιστοιχηθεί με την ανάπτυξη της κατανόησης της χρήσης των γραμμάτων ως αλγεβρικά αντικείμενα. Μάλιστα το σημείο αυτό είναι πολύ ενδιαφέρον γιατί η ίδια αντιστοίχιση ανάμεσα στην εξέλιξη της άλγεβρας ως σύστημα γνώσης και στην υιοθέτηση του αλγεβρικού συμβολισμού – δηλαδή της υιοθέτησης των γραμμάτων ως μαθηματικά σύμβολα – υπάρχει και στην ιστορική μελέτη της εξέλιξης της άλγεβρας, όπως θα φάνει από την αναφορά στην ιστορία της εξέλιξης της άλγεβρα που θα γίνει στο Κεφάλαιο 2. Η προσέγγιση αυτή επηρέασε το σχεδιασμό των δύο μεγαλύτερων ερευνητικών προγραμμάτων που έχουν γίνει σε αυτό το γνωστικό πεδίο και τα οποία αποτελούν βασική αναφορά των ερευνητών: την έρευνα στο πλαίσιο του προγράμματος για «Έννοιες των Μαθηματικών και της Επιστήμης στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση» (Concepts in Secondary Mathematics and Science, CSMS) που χρηματοδοτήθηκε από το Συμβούλιο για την Έρευνα στις Κοινωνικές Επιστήμες (Social Science Research Counsil, SSRC) στο Κέντρο για την Εκπαίδευση της Επιστήμης και των Μαθηματικών (Centre for Science and Mathematics Education) του Κολεγίου Chelsea του Πανεπιστημίου του Λονδίνου για την περίοδο 1974-1979, και την έρευνα για «Στρατηγικές και Λάθη στα Μαθηματικά της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης» (Strategies and Errors in Secondary Mathematics, SESM) που ακολούθησε (περίοδος 1980-1983), με την ίδια χρηματοδότηση.

Η έρευνα που έγινε για την άλγεβρα στα πλαίσια του CSMS και στην οποία συμμετείχαν 3000 μαθητές 13-15 χρόνων στη Βρετανία, παρουσιάζεται από τον Hart (1981). Στα πλαίσια της έρευνας αυτής ο Kuchemann (1978· 1981) χρησιμοποίησε τα αποτελέσματα της ανάλυσης του Collis, όπως αυτά αναφέρθηκαν παραπάνω, και σχεδίασε σειρά πειραμάτων με ερωτηματολόγια και ατομικές συνεντεύξεις για να αναλύσει σε βάθος την κατανόηση της χρήσης των γραμμάτων από τους μαθητές. Ταξινόμησε τις ερμηνείες των μαθητών για τη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα σε έξι κατηγορίες κατανόησης και χρήσης τους:

- *Αποτίμηση του γράμματος:* στο γράμμα αποδίδεται μία αριθμητική τιμή ανάλογα με το πλαίσιο αναφοράς και στη συνέχεια χρησιμοποιείται αυτή η τιμή και όχι το γράμμα.
- *Αγνόηση του γράμματος:* το γράμμα αγνοείται εντελώς ή αναγνωρίζεται η ύπαρξή του χωρίς όμως να του δίνεται ιδιαίτερη σημασία.
- *Γράμμα ως αντικείμενο:* το γράμμα χρησιμοποιείται ως συντομογραφία του ονόματος ενός αντικειμένου ή ως αντικείμενο από μόνο του.
- *Γράμμα ως συγκεκριμένος άγνωστος:* το γράμμα θεωρείται ως συγκεκριμένος αλλά άγνωστος αριθμός και έτσι χρησιμοποιείται στους μετασχηματισμούς.
- *Γράμμα ως γενικευμένος αριθμός:* το γράμμα γίνεται κατανοητό ως σύμβολο που αναπαριστά πολλούς και όχι μόνο έναν αριθμό.
- *Γράμμα ως μεταβλητή:* το γράμμα γίνεται κατανοητό ως σύμβολο που αναπαριστά ένα εύρος τιμών όπου η τιμή του μεταβάλλεται μέσα από μια ειδική σχέση που έχει με άλλα γράμματα-μεταβλητές.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνάς του Kuchemann (1978· 1981), ένα πολύ μικρό ποσοστό των μαθητών μπορούσαν να κατανοήσουν τα γράμματα ως αριθμούς και ακόμα λιγότεροι ως γενικευμένους αριθμούς και μεταβλητές, σύμφωνα με την παραπάνω ταξινόμηση που είχε προτείνει. Η πλειοψηφία των μαθητών (73% σε ηλικία 13 χρονών, 59% σε 14 χρονών και 53% σε 15 χρονών) ερμήνευαν τα γράμματα στις αλγεβρικές παραστάσεις και στις εξισώσεις ως αντικείμενα, ονόματα αντικειμένων (π.χ. β: βάρκες) ή απλά τα αγνοούσαν (Kuchemann, 1981).

Όπως και ο προκάτοχός του Collis, η ερμηνεία που πρότεινε ο Kuchemann για τις δυσκολία των μαθητών κινήθηκε στα πλαίσια της θεωρίας της ανάπτυξης του Piaget. Ο Kuchemann ιεράρχησε τις παραπάνω κατηγορίες κατανόησης/χρήσης των μεταβλητών από τις πιο συγκεκριμένες στις πιο αφηρημένες (όπως και παρουσιάζονται παραπάνω) και αντιστοίχησε κάθε μία από αυτές σε αντίστοιχα στάδια ανάπτυξης. Συμφώνησε, τέλος, με τον Collis (1975) ότι οι μαθητές που δεν έχουν φτάσει ακόμα στο στάδιο των τυπικών λογικών ενεργειών δεν μπορούν να κατανοήσουν τα γράμματα ως γενικευμένους αριθμούς ή μεταβλητές.

Κινούμενη επίσης στα πλαίσια της αναπτυξιακής προσέγγισης, η Booth (1984), ως επιστημονική υπεύθυνη του προγράμματος SESM που ακολούθησε το CSMS, παρουσίασε αποτελέσματα που ενισχύουν το ρόλο της γνωστικής ανάπτυξης στις ικανότητες των παιδιών να κατανοούν τη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα και να αναγνωρίζουν τις αλγεβρικές μεθόδους. Παρόλα αυτά, η Booth σημείωσε ότι μια αυστηρή αναπτυξιακή ερμηνεία,όπως αυτή που είχαν προτείνει οι Kuchemann και Collis και που στηριζόταν στα στάδια ανάπτυξης του Piaget, δεν υποστηρίζεται από τα εμπειρικά δεδομένα. Η ίδια εξέφρασε την άποψη ότι η ανάπτυξη αυτών των ικανοτήτων δεν μπορεί να είναι αποτέλεσμα αυθόρμητης γνωστικής ανάπτυξης, αλλά ότι απαιτούνται κατάλληλα γνωστικά ερεθίσματα και εμπειρίες για να αναπτυχθούν.

Ο σχεδιασμός της έρευνας που έγινε στα πλαίσια του SESM ήταν πολύπλοκος και περιλάμβανε ερωτηματολόγια, ατομικές συνεντεύξεις, καθώς και διδακτική παρέμβαση. Μάλιστα, η διδακτική παρέμβαση ήταν ειδικά σχεδιασμένη και λάμβανε υπόψη της τις παρερμηνείες των μαθητών και τις δυσκολίες τους και προσπαθούσε να τις διορθώσει. Συνοπτικά, και ειδικά για το κομμάτι της έρευνας που αφορούσε την ερμηνεία των γραμμάτων από τους μαθητές, τα αποτελέσματά της ήταν παρόμοια με αυτά των προηγούμενων μελετών και έδειξαν ότι:

- Οι μαθητές είχαν την τάση να ερμηνεύουν τα γράμματα ως αντικείμενα ή συντομογραφίες από ονόματα αντικειμένων.
- Οι μαθητές που δέχονταν ότι τα γράμματα αναπαριστούν αριθμούς, έτειναν να θεωρούν ότι αναπαριστούν συγκεκριμένους αριθμούς μόνο και είχαν μεγάλη δυσκολία να κατανοήσουν τα γράμματα ως γενικευμένους αριθμούς, έστω και μετά από τη διδασκαλία με χρήση ειδικά σχεδιασμένου διδακτικού υλικού. Μάλιστα, οι μαθητές που δεν είχαν ξανασυναντήσει άλγεβρα εμφάνισαν την τάση να θεωρούν ότι τα γράμματα βρίσκονται στη θέση συγκεκριμένων αριθμών, όπου διαφορετικά γράμματα αναπαριστούν απαραιτήτως διαφορετικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, η πλειοψηφία των μαθητών απαντούσε ότι δεν μπορεί να ισχύει $x+y+z=x+p+z$ γιατί το y και το p αναπαριστούν υποχρεωτικά διαφορετικούς αριθμούς αφού είναι διαφορετικά σύμβολα, κάτι που είχε ήδη παρατηρηθεί και από άλλους ερευνητές (Kuchemann, 1981· Wagner, 1981).

Σύμφωνα με την Booth (1984), η μεγάλη απροθυμία των μαθητών να δεχθούν τα γράμματα ως γενικευμένους αριθμούς, ακόμα και μετά από ειδικά σχεδιασμένη διδακτική παρέμβαση, ενισχύει τις ερμηνείες που είχαν εκφραστεί και οι οποίες θεωρούσαν ως προϋπόθεση να έχει φτάσει κάποιος μαθητής στο απαραίτητο στάδιο ανάπτυξης για να κατανοήσει τις συγκεκριμένες έννοιες. Παρόλα αυτά, η Booth (1984) σημειώνει ότι και ο τρόπος με τον οποίο διδάσκονται αυτές οι έννοιες έχει μεγάλο μερίδιο της ευθύνης για τις συγκεκριμένες παρερμηνείες. Για παράδειγμα, ανέφερε ότι όταν οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της μεταβλητής και για πολύ καιρό μετά, διδάσκονται τη χρήση του γράμματος ως αγνώστου με συγκεκριμένη αριθμητική αξία και όχι ως γενικευμένου αριθμού.

Ένα άλλο σημαντικό λάθος που σημείωσε η Booth (1984) ήταν ότι πολλοί από τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα δεν ήταν καθόλου πρόθυμοι να δεχτούν ότι οι τελικές απαντήσεις σε ασκήσεις που αφορούσαν αλγεβρικούς μετασχηματισμούς θα μπορούσαν να περιέχουν και γράμματα. Το φαινόμενο αυτό είχε αναφερθεί ήδη από τον Collis (1975) που το χαρακτήρισε ως το πρόβλημα της «Αποδοχής της μη-Περάτωσης» (Acceptance of Lack of Closure). Σύμφωνα με τον Collis, κάποιοι μαθητές δεν δέχονται ότι μια σειρά μετασχηματισμών μπορεί να τελειώσει στην άλγεβρα, έστω κι αν δεν έχει βρεθεί τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα, όπως αντίστοιχα θα συνέβαινε στην αριθμητική (βλ. επίσης Firth, 1975· Herscovics & Linchevski, 1994· Linchevski & Herscovics, 1996· βλ. επίσης Tirosh, Even, & Robinson, 1998). Η Booth (1982· 1984· 1988· 1989) είδε στο φαινόμενο αυτό μια επίδραση της προηγούμενης γνώσης της αριθμητικής. Παρατήρησε ότι στην αριθμητική οι μαθητές ασχολούνται διαρκώς και σχεδόν αποκλειστικά με πράξεις που γίνονται με μικρούς ακέραιους αριθμούς, οι οποίοι δίνουν ως τελικές λύσεις επίσης ακέραιους αριθμούς, ενώ σπάνια ασχολούνται με μεγαλύτερους ή μη ακέραιους αριθμούς που οι λύσεις τους θα μπορούσαν να έχουν μια μορφή πιο σύνθετη από αυτή ενός ακέραιου αριθμού (π.χ., ένα κλάσμα). Αυτό θα μπορούσε να επηρεάσει τους μαθητές να θεωρούν ότι μια άσκηση στα μαθηματικά τελειώνει μόνο εφόσον καταλήξει σε έναν αριθμό και μάλιστα ακέραιο.

Η σημαντικότερη όμως συμβολή της Booth στην έρευνα στο συγκεκριμένο πεδίο ήταν ότι σημείωσε ότι, λόγω του ότι η άλγεβρα μπορεί να ιδωθεί ως γενικευμένη αριθμητική, οι δυσκολίες των μαθητών με τις αλγεβρικές μεθόδους και τους συμβολισμούς της άλγεβρας θα μπορούσαν να οφείλονται σε αντίστοιχες δυσκολίες που είχαν ήδη με τις μεθόδους και τα σύμβολα της αριθμητικής. Με τον τρόπο αυτό, άνοιξε το δρόμο σε ερευνητές που ακολούθησαν εστιάζοντας το ενδιαφέρον τους στη μελέτη της αριθμητικής ως ένα προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο, το οποίο θα μπορούσε να επηρεάσει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται κατανοητή η άλγεβρα.

Στο σημείο αυτό σημειώνεται μια διαφωνία της Booth (1984) με τον Matz (1980), που υποστήριζε ότι δεν είναι η προβληματική γνώση της αριθμητικής που δημιουργεί προβλήματα στην μάθηση της άλγεβρας αλλά ότι η άλγεβρα είναι κάτι περισσότερο από γενικευμένη αριθμητική και ότι στην άλγεβρα χρησιμοποιούνται μια σειρά από συμβάσεις, πολύ διαφορετικές από αυτές της αριθμητικής. Ο Matz πρότεινε ότι πολλές από τις παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα οφείλονται σε αυθαίρετες γενικεύσεις κανόνων που, ενώ ισχύουν στην αριθμητική, δεν ισχύουν στην άλγεβρα (Linchevski & Livneh, 1999). Για παράδειγμα, ενώ στην αριθμητική η συνένωση δύο αριθμητικών συμβόλων σημαίνει πρόσθεση, τόσο στην αξία θέσης (π.χ., 43=4 δεκάδες και 3 μονάδες) όσο και στην αναπαράσταση μεικτών κλασμάτων (π.χ., 2½=2 + ½), στην άλγεβρα συμβολίζει τον πολλαπλασιασμό (π.χ., 3α=3*α). Επίσης, τα γράμματα χρησιμοποιούνται στην αριθμητική για να αναφερθούν σε αντικείμενα (π.χ., το μ για μέτρα) και όχι απαραίτητα τον αριθμό των αντικειμένων όπως στην άλγεβρα. Όσον αφορά την Αποδοχής της μη-Περάτωσης, ο Matz (1980) παραδέχεται ότι οι μαθητές θα πρέπει αργά ή γρήγορα να αποδεχτούν ότι στην άλγεβρα οι τελικές λύσεις δεν χαρακτηρίζονται από αριθμητικό αποτέλεσμα και να εξοικειωθούν με το γεγονός ότι στην άλγεβρα θα μπορούσαμε να έχουμε τελικές λύσεις που να περιέχουν γράμματα και όχι μόνο αριθμούς (π.χ., x+3).

Πολλοί ήταν οι ερευνητές που ακολούθησαν το παράδειγμα των Booth και Matz, προτείνοντας ερμηνείες για τις δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα, οι οποίες αναγνώριζαν τον αρνητικό ρόλο που θα μπορούσε να έχει η προηγούμενη εμπειρία των παιδιών με άλλα συμβολικά συστήματα πριν την εισαγωγή τους στην άλγεβρα (Herscovics & Linchevski, 1994· Kieran, 1989· 1990· 1992· 2006· 2007· Lee & Wheeler, 1981· Linchevski & Herscovics, 1996· Linchevski & Livneh, 1999· MacGregor & Stacey, 1994· Stacey & MacGregor, 1997).

Οι MacGregor και Stacey (1993· 1994· 1997· Stacey & MacGregor, 1997) έκαναν επίσης μία συνολική κριτική στην Πιαζετιανή προσέγγιση που είχαν προτείνει ερευνητές, όπως οι Collis (1975), Kuchmann (1981) και Harper (1987), και οι οποίοι ερμήνευαν την κατανόηση της χρήσης των γραμμάτων από τους μαθητές να γίνεται σε αυστηρά ιεραρχημένα στάδια ανάπτυξης. Υποστήριξαν ότι τέτοιες προσεγγίσεις δεν μπορούν να εξηγήσουν το εύρος των λαθών που εμφανίζονται με συστηματικότητα στις απαντήσεις των μαθητών. Η μελέτη τους έγινε σε 2000 μαθητές και μαθήτριες 11-15 χρόνων στην Αυστραλία. Στόχος τους ήταν η περαιτέρω διερεύνηση του τρόπου ερμηνείας της χρήσης των γραμμάτων στην άλγεβρα και η αναζήτηση βαθύτερων αιτιών για τα λάθη τους. Έδωσαν σε μαθητές που δεν είχαν διδαχθεί καθόλου άλγεβρα ένα τεστ με κάποια προβλήματα για προέλεγχο και ένα για μετα-έλεγχο, αφού είχαν παρακολουθήσει μια σειρά εισαγωγικών μαθημάτων στην άλγεβρα. Ένα από τα βασικά προβλήματα που περιείχαν τα τεστ ήταν το ακόλουθο:

Ο David είναι 10cm ψηλότερος από τον Con. Ο Con είναι h cm ψηλός. Τι θα μπορούσες να γράψεις για το ύψος του David;

(σωστή απάντηση: $h+10$)

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στο παραπάνω πρόβλημα, μιας και σε αυτές εμφανίζονται τόσο οι ίδιες παρανοήσεις που είχαν εμφανιστεί στις προηγούμενες μελέτες και τις έχουμε αναφέρει παραπάνω, όσο και νέες. Οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών και οι τρόποι με τους οποίους αυτές προέκυψαν παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.1. Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 1.1, στις απαντήσεις των μαθητών εμφανίστηκαν οι ήδη γνωστές παρερμηνείες όπως το να ερμηνεύονται τα γράμματα ως αντικείμενα ή συντομογραφίες αντικειμένων. Οι συγκεκριμένες ερευνήτριες απέδωσαν αυτά τα λάθη στο προβληματικό διδακτικό υλικό που χρησιμοποιούν αρκετοί εκπαιδευτικοί στην διδασκαλία τους. Το υλικό αυτό πολλές φορές ενισχύει τη χρήση γραμμάτων ως συντομογραφίες, για παράδειγμα όταν δίνονται προβλήματα όπου με ‘γ’ συμβολίζεται η ‘γάτα’ και άρα με ‘5γ’ οι ‘5 γάτες’.

Απάντηση	**Περιγραφή**
Dh	David's height (συντομογραφία)
C+10=D	C: ύψος του Con, D: ύψος David, (αγνόηση γράμματος)
h=10+h	h: το ύψος σε κάθε περίπτωση
h10 ή 10h	προσθέτει 10 στο h
Uh	Unknown height (συντομογραφία)
11	το γράμμα είναι μονάδα (h=1)+10 = 11
R	είναι το δέκατο γράμμα μετά το h
18	h (είναι το 8ο γράμμα της αλφαβήτου)+10 = 18
110	προσθέτει 10 σε μια λογική τιμή που δίνει στο h
t, g	επιλέγει ένα νέο γράμμα για να δηλώσει το άγνωστο ύψος

Πίνακας 1.1 Λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών και εκτιμήσεις για το πώς προέκυψαν (Stacey & MacGregor, 1997)

Νέες παρερμηνείες που έκαναν την εμφάνισής τους στις απαντήσεις των μαθητών στο συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν ότι κάποιοι μαθητές είχαν την τάση να αποδίδουν αριθμητικές αξίες στα γράμματα με βάση τη θέση τους στο αλφάβητο (h=8, R=18). Η ίδια παρερμηνεία είχε παρατηρηθεί και από τον Wagner (1981) που ανέφερε ότι υπήρχαν μαθητές που απαντούσαν ότι το ‘w’ είναι μεγαλύτερο από το ‘n’, καθώς εμφανίζεται πιο αργά στο αλφάβητο. Οι Stacey και MacGregor (1997) απέδωσαν τις συγκεκριμένες απαντήσεις σε αναλογίες που έκαναν οι μαθητές με άλλα συμβολικά συστήματα που γνώριζαν, ως έναν τρόπο να αντλήσουν νόημα για τα σύμβολα ενός συστήματος που τους ήταν άγνωστο. Έτσι, υποστήριξαν ότι οι μαθητές έδωσαν αυτές τις απαντήσεις κάνοντας μια αναλογία με το σύστημα αρίθμησης των αρχαίων ελλήνων όπου α=1, β=2, κοκ., που χρησιμοποιείται συχνά στα σχολικά τους εγχειρίδια.

Άλλη τέτοια περίπτωση ήταν οι απαντήσεις με h10 για να δηλώσουν το h+10, παρερμηνεία που είχε παρατηρήσει και η Booth (1984), όπου οι μαθητές έγραφαν '1y' για να δηλώσουν το '1-y'. Σύμφωνα με τις MacGregor και Stacey (1997) οι απαντήσεις αυτές προκύπτουν μέσα από μια άλλη αναλογία με το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης αυτή τη φορά, που θέλει έναν αριθμό που αφαιρείται από μία βάση να εμφανίζεται αριστερά ενώ όταν προστίθεται να εμφανίζεται δεξιά (π.χ., IV για 4, ενώ VI για 6).

Άλλη σημαντική παρερμηνεία που εμφάνισαν οι μαθητές ήταν να θεωρούν ότι, όταν τα γράμματα εμφανίζονται χωρίς συντελεστή, τότε αναφέρονται στη μονάδα (h=1). Σύμφωνα με τις ερευνήτριες η παρανόηση αυτή θα μπορούσε να οφείλεται στον προβληματικό τρόπο διδασκαλίας από μεριάς εκπαιδευτικών που συχνά αναφέρουν ότι «το γράμμα x χωρίς συντελεστή σημαίνει 1x», επιτρέποντας έτσι στους μαθητές να θεωρήσουν ότι όταν ένα γράμμα παρουσιάζεται μόνο του τότε αναφέρεται στη μονάδα.

Με βάση τα παραπάνω, οι MacGregor και Stacey (1997) κατέληξαν ότι η ποιότητα και η συστηματικότητα των λαθών που έκαναν οι μαθητές στις δοκιμασίες που τους δόθηκαν οφείλονται στους εξής παράγοντες:

- *Οι μαθητές, για να αποδώσουν νόημα στο νέο συμβολικό σύστημα της άλγεβρας, κάνουν υποθέσεις που βασίζονται σε διαισθητικές πεποιθήσεις και σε αναλογίες με άλλα συμβολικά συστήματα.*
- *Κάποια από τα λάθη των μαθητών οφείλονται σε προβληματική διδασκαλία και χρήση παραπλανητικού διδακτικού υλικού.*

Επίσης, στα πλαίσια μιας προσέγγισης που θέλει οι μαθητές να ερμηνεύουν τη νέα πληροφορία που αφορά την άλγεβρα χρησιμοποιώντας την προϋπάρχουσα γνώση τους από τη συστηματική διδασκαλία της αριθμητικής κινήθηκαν και άλλες ερευνήτριες (Filloy & Rojano, 1989· Herscovics & Linchevski, 1994· Kieran, 1981· 1992· Lee & Wheeler, 1981· Linchevski, 1995· Sfard & Linchevski, 1994). Οι ερευνήτριες αυτές περιέγραψαν αναλυτικά τα χαρακτηριστικά των δύο συστημάτων, της αριθμητικής και της άλγεβρας, επισημαίνοντας τις διαφορές τους, για να καταλήξουν στις αλλαγές που θα πρέπει να επέλθουν στην αριθμητική γνώση των μαθητών, για να κατανοήσουν σε βάθος την άλγεβρα.

Είναι κοινή εκτίμηση όλων αυτών των ερευνητών ότι μία από τις σημαντικότερες αλλαγές που συμβαίνουν κατά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα είναι αυτή από πράξεις με αριθμούς σε μετασχηματισμούς με γράμματα. Το πέρασμα αυτό αποτελεί ένα δύσκολο ζήτημα και απαιτεί ειδική γνωστική διαχείριση από μεριάς μαθητών. Έχει χαρακτηριστεί ως «γνωστικό κενό» (cognitive gap) (Herscovics & Linchevski, 1994), «σημείο τομής» (cut point) ή «διδακτική τομή» (didactic cut) (Filloy & Rojano, 1989).

Κάποιες ερευνήτριες αποδίδουν τις δυσκολίες και τις παρερμηνείες των μαθητών με την κατανόηση της χρήσης των μεταβλητών και των αλγεβρικών παραστάσεων στο διπλό χαρακτήρα τέτοιων μαθηματικών οντοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, υποστηρίζουν ότι μια μαθηματική έννοια όπως η μεταβλητή μπορεί να ιδωθεί τόσο ως μια διαδικασία όσο και ως μια αυτόνομη μαθηματική οντότητα. Άλλες μαθηματικές έννοιες με διπλό χαρακτήρα είναι, για παράδειγμα, τα κλάσματα που μπορούν να ιδωθούν τόσο ως μία διαδικασία διαίρεσης δύο αριθμών όσο και ως ένα αυτόνομο αντικείμενο-αριθμός. Με τον ίδιο τρόπο, η αλγεβρική παράσταση 2x έχει έναν διπλό χαρακτήρα: α) ενός πολλαπλασιασμού ανάμεσα στο 2 και το x, χαρακτήρας που γίνεται εμφανής όταν οι μαθητές κληθούν να αντικαταστήσουν το x με έναν αριθμό και να βρουν το τελικό αποτέλεσμα και β) ως μια αυτόνομη οντότητα, χαρακτήρας που γίνεται εμφανής όταν οι μαθητές κληθούν, για παράδειγμα, να την συμπεριλάβουν σε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς όπως να την υψώσουν στο τετράγωνο. Αυτός ο διπλός χαρακτήρας των εννοιών εμφανίζεται στη βιβλιογραφία με διάφορους όρους: «διαδικασία/αντικείμενο» (process/object) (Kieran, 1992· Sfard, 1991), «διαδικασία/αποτέλεσμα» (process/product) (Tall & Thomas, 1991), «διαδικασία/έννοια» (process/concept) (Gray & Tall, 1991). Οι παραπάνω ερευνήτριες υποστηρίζουν ότι είναι δύσκολο για τους μαθητές να δεχθούν τη διπλή υπόσταση των μαθηματικών οντοτήτων και αυτή η δυσκολία είναι που δημιουργεί πολλά από τα λάθη.

Κάποιες ερευνήτριες χρησιμοποιούν αυτό το διαχωρισμό για να υποστηρίξουν τις θέσεις τους για τον τρόπο με τον οποίο κατανοούνται και αναπτύσσονται οι έννοιες των μαθηματικών, όπως μέσα από τη διαδικασία της «*υποστασιοποίησης*» (reification) που προτείνει η Sfard (1991· Sfard & Linchevski, 1994). Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη Sfard η αλγεβρική παράσταση 2x, όπως και κάθε μαθηματικό αντικείμενο, γίνεται αρχικά κατανοητή ως διαδικασία (γινόμενο στη συγκεκριμένη περίπτωση). Για το λόγο αυτό, οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να αποδίδουν μία τιμή στα γράμματα, έστω και αυθαίρετη, και να συνεχίζουν με τις πράξεις που αναγράφονται στις αλγεβρικές παραστάσεις. Στη συνέχεια, και ως αποτέλεσμα συστηματικής διδασκαλίας και επίμονης προσπάθειας, είναι δυνατόν να γίνει η παράσταση 2x κατανοητή ως ένα αυτόνομο αντικείμενο που έχει μια ορισμένη θέση στο σύστημα της άλγεβρας. Όταν και εφόσον έχει επέλθει υποστασιοποίηση, ο μαθητής είναι σε θέση να κατανοεί το μαθηματικό αυτό αντικείμενο ως μια μαθηματική οντότητα με συγκεκριμένες ιδιότητες, που μπορεί ανά πάσα στιγμή να έχει έναν διπλό χαρακτήρα που εκφράζεται ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται. Το τελικό αυτό αποτέλεσμα της μάθησης μιας έννοιας οι Gray και Tall (1991) το χαρακτηρίζουν «procept», που είναι το σημείο όπου η διαδικασία (process) και η έννοια (concept) συνυπάρχουν.

Κάποιες άλλες από τις παραπάνω ερευνήτριες συσχετίζουν κάθε ένα από αυτά τα χαρακτηριστικά των αλγεβρικών παραστάσεων με το προϋπάρχον πλαίσιο της αριθμητικής και την επίδραση που αυτό ασκεί στην κατανόηση της άλγεβρας. Για παράδειγμα, η Kieran (1992) θεωρεί ότι ο χαρακτήρας μιας αλγεβρικής παράστασης ως «διαδικασία» (procedural) είναι κάτι που χαρακτηρίζει την αριθμητική, όπου οι διαδικασίες γίνονται πάνω σε αριθμούς για να προκύψουν αριθμοί, σε αντιδιαστολή με τον «δομικό» της χαρακτήρα (structural) ως αντικείμενο, που έχει συγκεκριμένη θέση στο φορμαλιστικό σύστημα της άλγεβρας.

Στην παρούσα διατριβή υιοθετούμε το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής για να εξετάσουμε τις δυσκολίες και τις παρερμηνείες των μαθητών με την έννοια της μεταβλητής. Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής προτείνει μια προσέγγιση στα λάθη και τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές με τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές, που είναι σύμφωνη με εκείνες από τις παραπάνω ερμηνείες που υποστηρίζουν ότι κάποια λάθη και παρερμηνείες των μαθητών στην άλγεβρα προκαλούνται λόγω της επίδρασης της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών, όπως αυτή έχει οργανωθεί στο πλαίσιο της αριθμητικής (Kieran, 1992· Linchevski & Livneh, 1999· Matz, 1980· Resnick, 1989· Sfard & Linchevski, 1994· Stacey & MacGregor, 1997). Όμως, το θεωρητικό αυτό πλαίσιο πάει ακόμα παραπέρα, για να προβλέψει και νέες παρερμηνείες που θα εμφάνιζαν οι μαθητές, λόγω του τρόπου με τον οποίο έχει συγκροτηθεί η προϋπάρχουσα γνώση τους στα πλαίσια της αριθμητικής. Χρησιμοποιώντας το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής γίνεται μια προσπάθεια συστηματοποίησης των λαθών και παρερμηνειών που εμφανίζουν οι μαθητές, γύρω από ένα ενιαίο ερμηνευτικό πλαίσιο.

Σε επόμενο κεφάλαιο θα γίνει μια αναλυτική αναφορά στις βασικές αρχές του θεωρητικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής και θα παρουσιαστούν τα επιχειρήματα που υποστηρίζουν τη χρήση του στην μελέτη της ανάπτυξης μαθηματικών εννοιών. Πρώτα όμως θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στην ιστορική εξέλιξη της υιοθέτησης του αλγεβρικού συμβολισμού, εστιάζοντας στις δυσκολίες και τις εννοιολογικές αγκυλώσεις που χρειάστηκε να ξεπεράσουν οι μαθηματικοί στους προηγούμενους αιώνες, για να αποδεχθούν τη χρήση των γραμμάτων ως σύμβολα που αναπαριστούν πραγματικούς αριθμούς.

Κεφάλαιο 2
Μια σύντομη ιστορία του αλγεβρικού συμβολισμού

2.1 Εισαγωγή

Το γεγονός ότι η χρήση των γραμμάτων ως μαθηματικά σύμβολα είναι μια τόσο διαδεδομένη πρακτική που χρησιμοποιείται στην καθημερινή μαθηματική δραστηριότητα, μέσα και έξω από το σχολείο, καθώς και συχνά ακόμα και στον καθημερινό λόγο, δημιουργεί συχνά την εντύπωση ότι το κομμάτι αυτό της γνώσης είναι α-ιστορικό και γνωστό από πάντα. Παρόλα αυτά, η μαθηματική κοινότητα υιοθέτησε τα γράμματα ως μαθηματικά σύμβολα μόλις τον δέκατο έβδομο αιώνα, και αυτό δεν ήταν κάτι που έγινε από τη μια στιγμή στην άλλη, αλλά ήταν αποτέλεσμα μακροχρόνιων και σταδιακών αλλαγών (Sfard, 1995· Sfard & Linchevski, 1994). Ακόμη κι αν δεχθούμε ότι η διαδικασία μάθησης μιας έννοιας δεν ακολουθεί απαραίτητα την ιστορική της εξέλιξη, αφού άλλωστε τα σημερινά περιβάλλοντα μάθησης είναι πολύ διαφορετικά από εκείνα του παρελθόντος (Herscovics, 1989), πιστεύουμε ότι η μελέτη της ιστορικής εξέλιξης μιας έννοιας και των επιστημολογικών εμποδίων που σημειώθηκαν σε αυτήν θα μπορούσαν να επισημάνουν δυσκολίες που ενέχει η κατανόηση της έννοιας αυτής από τους μαθητές σήμερα. Για το λόγο αυτό, ακολουθούμε το παράδειγμα των Harper (1987), Sfard and Linchevski (1994), Sfard (1995) και Drijvers (2003), παραθέτοντας μια σύντομη αναφορά στα πιο σημαντικά στάδια στην εξέλιξη της άλγεβρας, μιας ιστορίας που εξελίσσεται παράλληλα με την ιστορία της υιοθέτησης του συμβολικού της συστήματος.

2.2 Ιστορική εξέλιξη της υιοθέτησης του αλγεβρικού συμβολισμού

Έστω κι αν υπάρχει ένας ανοιχτός διάλογος για τον ορισμό και την περιοδολόγηση της Άλγεβρας και κατ' επέκταση για το από πότε και πέρα μπορούμε να μιλάμε για 'Άλγεβρα', δεν είναι λίγοι οι ερευνητές εκείνοι οι οποίοι, ακολουθώντας ένα σχήμα που εισήγαγε στα μέσα του 19^ου^ αιώνα ο Γερμανός ιστορικός των μαθηματικών G. H. F. Nesselmann (Nesselmann, 1842), διακρίνουν τρεις σημαντικές φάσεις στην ιστορία της εξέλιξής της, που αντανακλούν αντίστοιχες φάσης στην εξέλιξη της υιοθέτησης των γραμμάτων ως σύμβολα αριθμών: τη ρητορική άλγεβρα, την άλγεβρα των συντομογραφιών και τη συμβολική άλγεβρα (βλ. για παράδειγμα Eves, 1989· Harper, 1987).

2.2.1 Φάση Α: Ρητορική άλγεβρα

Λέγοντας 'Ρητορική άλγεβρα' ο Neselmann ενοεί την προφορική άλγεβρα. Κατά τη φάση της ιστορίας της άλγεβρας που αντιπροσωπεύεται από τη ρητορική άλγεβρα, τα προβλήματα καθώς και οι λύσεις τους εκφράζονταν σε καθαρή πρόζα, με φυσική γλώσσα, χωρίς τη χρήση ειδικών συμβόλων για τους άγνωστους αριθμούς ή συντομογραφίες λέξεων για τις πράξεις και τους μετασχηματισμούς. Αυτή η μεθοδολογία είναι πολύ κοντινή σε αυτή που χρησιμοποιείται σήμερα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση για τη λύση προβλημάτων. Τόσο η άλγεβρα των αρχαίων Βαβυλωνίων όσο και των αρχαίων Αιγυπτίων ήταν ρητορική. Η ρητορική φάση της άλγεβρας διήρκεσε μέχρι τον Διόφαντο (περίπου το 250 μ.Χ.) αν και εμφανίζεται επίσης σε μεταγενέστερους πολιτισμούς όπως στον αραβικό.

2.2.2 Φάση Β: Άλγεβρα των συντομογραφιών:

Ο Διόφαντος θεωρείται ο πρωτοπόρος που εισήγαγε τη χρήση συντομογραφιών για να αναπαρασταθούν άγνωστοι αριθμοί και οι αντίστροφοί τους, οι δυνάμεις και οι ρίζες τους καθώς και πράξεις με αυτούς, δημιουργώντας έτσι ένα ιδιαίτερο είδος άλγεβρας που ήταν η άλγεβρα των συντομογραφιών. Παράλληλα με τον Διόφαντο, ινδοί μαθηματικοί φαίνεται επίσης να είχαν χρησιμοποιήσει συντομογραφίες για την έκφραση αλγεβρικών προβλημάτων και των λύσεών τους (Stallings, 2000). Ο Διόφαντος χαρακτηρίζει ως 'αριθμό' τον άγνωστο αριθμό, που συμβολίζεται με 'ς' και του οποίου η απόλυτη τιμή θα αποκαλυφθεί μετά τη λύση του προβλήματος (Klein, 1992). Για τον Διόφαντο η έννοια του αριθμού είναι αυτή που έχουν και οι άλλοι αρχαίοι έλληνες, δηλαδή 'ένας συγκεκριμένος αριθμός συγκεκριμένων πραγμάτων', ή αλλιώς, *το σύνολο των καθαρών μονάδων* (Klein, 1992). Υπό την έννοια αυτή ο αριθμός αναφέρεται στην πληθικότητα[4] ενός συνόλου. Αυτό όμως δε σημαίνει ότι ως αριθμοί θεωρούνταν μόνο οι φυσικοί αριθμοί. Σύμφωνα με τον Χριστιανίδη, ο Διόφαντος δεχόταν ως 'μονάδες' και τις κλασματικές μονάδες (Christianidis, 2004). Φυσικά, οι δεκαδικοί και οι αρνητικοί αριθμοί δεν υπάρχουν ακόμα ως μαθηματικά αντικείμενα. Για το λόγο αυτό τα προβλήματα που εξετάζονταν στα βιβλία του Διόφαντου ήταν προσεκτικά επιλεγμένα για να έχουν υπαρκτή λύση, δηλαδή φυσικό αριθμό ή θετική κλασματική μονάδα, ή πλήθος κλασματικών μονάδων.

Το σύμβολο του άγνωστου αριθμού που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος αναπαριστά τον *προσωρινά απροσδιόριστο* αριθμό και όχι τη μεταβλητή, που συμβολίζει τον οποιονδήποτε αριθμό μέσα από ένα ευρύ σύνολο αριθμών. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η γενικότητα των λύσεων των αριθμητικών προβλημάτων που προσφέρει ο Διόφαντος στα Αριθμητικά να απορρέει όχι από τη γενικότητα των αντικειμένων επί των οποίων εφαρμόζονται οι

[4] Πληθικότητα (numerosity) η αριθμητική αξία που δηλώνει το πλήθος ενός συνόλου αντικειμένων (Gallistel & Gelman, 1992)

επιλυτικές διαδικασίες (όπως συμβαίνει στη σημερινή συμβολική άλγεβρα) αλλά από τη δυνατότητα επαναλήψεις των επιλυτικών διαδικασιών στα αριθμητικά δεδομένα των εκάστοτε προβλημάτων. Το ότι ο Διόφαντος δεν είχε ως στόχο την εξεύρεση τύπων γενικών λύσεων στα προβλήματα ήταν άλλωστε και η βασική αδυναμία της μεθόδου που εισήγαγε (Klein, 1968). Άλλωστε, τόσο οι αρχαίοι έλληνες όσο και ο Διόφαντος εστίαζαν το ενδιαφέρον τους στους αριθμούς τους οποίους μελετούσαν και όχι στην ίδια τη μέθοδο (Χριστιανίδης, 1996). Η άλγεβρα του Διόφαντου αντιπροσωπεύει ένα στάδιο στην ιστορία της άλγεβρας όπου η έμφαση δίνεται στην άλγεβρα ως εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων. Αργότερα, από τους Άραβες, τους Ιταλούς αλγεβριστές της Ανναγέννησης καθώς και τον Viète και τους μαθητές του, η άλγεβρα θα γίνει μια θεωρία επίλυσης των εξισώσεων (Χριστιανίδης, 2008).

Ο συμβολισμός που εισήγαγε ο Διόφαντος δημιουργώντας την άλγεβρα της συντομογραφίας δεν εξελίχθηκε καθόλου μέχρι τον 17^{ο} αιώνα με μια μικρή εξαίρεση τους *αλγεβριστές* του 16^{ου} αιώνα, που αποκαλούνται και ‘Κοσσιστές’ από την ιταλική λέξη ‘cosa’, την οποία χρησιμοποιούσαν για να εκφράσουν τον άγνωστο (Struik, 1990). Οι Κοσσιστές χρησιμοποίησαν κάποιον συμβολισμό, ο οποίος ήταν όμως πολύ περίπλοκος και για τον λόγο αυτό δεν επικράτησε. Τα χρόνια του χριστιανικού ολοκληρωτισμού στη δυτική Ευρώπη και της οθωμανικής αυτοκρατορίας στην ανατολική, την επιστήμη και τα μαθηματικά των αρχαίων ελλήνων και των ινδών κράτησαν ζωντανά οι άραβες, μέχρι να μεταφραστούν στα λατινικά και να μελετηθούν από την Ευρώπη της Αναγέννησης. Η άλγεβρα των αράβων ήταν ρητορική άλγεβρα, ενώ μικρής κλίμακας ήταν οι αλλαγές που έγιναν στο συμβολισμό της κατά την Αναγέννηση.

2.2.3 Φάση Γ: Συμβολική άλγεβρα

Οι μαθηματικοί οι οποίοι εισήγαγαν τη *συμβολική άλγεβρα,* η οποία τελικά υιοθετήθηκε και χρησιμοποιείται με κάποιες διαφοροποιήσεις μέχρι και σήμερα, ήταν οι Francois Viète (1540-1603) και René Descartes (1596-1650). Αυτοί χρησιμοποίησαν γράμματα για να αναπαραστήσουν τόσο τους αγνώστους (αγνώστους εξίσωσης ή μεταβλητές), όσο και τους δοσμένους συντελεστές (παραμέτρους) μιας εξίσωσης. Στο συμβολικό σύστημα που πρότεινε ο Viète οι άγνωστες ποσότητες συμβολίζονταν με διαφορετικά γράμματα από ότι οι γνωστές. Στο έργο του *Εισαγωγή στην Αναλυτική Τέχνη* (In artem analyticem isagoge) ο Viète (1591) αναφέρει σχετικά ότι είναι απαραίτητο να διακρίνονται οι δεδομένες από τις άγνωστες ποσότητες και ότι αυτό θα πρέπει να διασφαλιστεί με μία σταθερή, διαρκή και ταιριαστή σύμβαση όπως, για παράδειγμα, να δηλώνονται οι γνωστές ποσότητες με σύμφωνα όπως B, D, C,… ενώ οι άγνωστες με φωνήεντα, όπως A, O, Y,… (βλ. Mahoney, 1997). Λίγο αργότερα, στη *Γεωμετρία* του ο Descartes (1637) χρησιμοποίησε τα τελευταία μικρά γράμματα της αλφαβήτου (x, y, z) ως σύμβολα των αγνώστων και μεταβλητών και τα πρώτα γράμματα της αλφαβήτου (a, b, c) ως σύμβολα των παραμέτρων που οι αξίες τους είναι γνωστές (Stallings, 2000).

Έτσι, ο Viète, εισάγοντας τον νέο τρόπο χρήσης των γραμμάτων, δημιούργησε τη βάση για τη δημιουργία μιας τυπικής αλγεβρικής γλώσσας που μπορούσε να εκφράσει γενικούς αλγόριθμους λύσης προβλημάτων. Ήταν ο πρώτος που συμβόλισε τη γενική μορφή μιας εξίσωσης και αυτό του επέτρεψε να μελετήσει τη γενική δομή της κάθε εξίσωσης και όχι μόνο κάποιας συγκεκριμένης (Mahoney, 1997). Η χρήση γραμμάτων για τον συμβολισμό του οποιουδήποτε αριθμού αποτέλεσε απαραίτητη προϋπόθεση για την ανάπτυξη ενός φορμαλιστικού λογισμού που θα άλλαζε τον τρόπο λύσης των εξισώσεων που αναπαριστούσαν τα προβλήματα. Αυτό από μόνο του μείωσε το βαθμό πολυπλοκότητας στον οποίο είχε φτάσει το $16_{ο}$ αιώνα η άλγεβρα, όταν τα προβλήματα γίνονταν όλο και πιο περίπλοκα, ενώ η προηγούμενη μέθοδος είχε γίνει πλέον ανεπαρκής.

Το συγκεκριμένο συμβολικό σύστημα έφερε σημαντικές αλλαγές, τόσο στα ίδια τα μαθηματικά όσο και τις άλλες επιστήμες (Harper, 1987· Sfard, 1995· Struik, 1990). Χρησιμοποιήθηκε, για παράδειγμα, στη γεωμετρία (βασικά από τον Καρτέσιο και τον Fermat) για να αποτελέσει μία εναλλακτική αναπαράσταση πέραν της γραφικής που ήταν η μόνη που υπήρχε μέχρι τότε. Στη συνέχεια εφαρμόστηκε και στις φυσικές επιστήμες (αρχικά από τους Γαλιλαίο, Νεύτωνα και Leipniz), για την αναπαράσταση των νόμων που διέπουν τα φυσικά φαινόμενα.

2.3 Αριθμητική άλγεβρα και συμβολική άλγεβρα

Παρόλα αυτά, έστω κι αν υιοθετήθηκε η χρήση των μεταβλητών για να αναπαρασταθεί ο οποιοσδήποτε αριθμός, η μεταβλητή και, κατά συνέπεια, η άλγεβρα δεν απέκτησαν αμέσως το γενικευμένο χαρακτήρα που έχουν σήμερα. Όπως σημειώνει ο Kline (1980), μέχρι τα μέσα του 19ου αιώνα, η άλγεβρα δεν ήταν επαρκώς λογικά θεμελιωμένη. Το πρόβλημα ήταν ότι, ενώ τα γράμματα ήταν για τους μαθηματικούς σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς οποιουδήποτε είδους, στην πράξη τα χειρίζονταν ως σύμβολα που έχουν τις γνωστές ή και τις διαισθητικές ιδιότητες των φυσικών αριθμών (θετικών ακεραίων). Με τον τρόπο αυτό, η άλγεβρα αποτελούσε ένα σύστημα όπου οι μετασχηματισμοί γίνονται πάνω σε φυσικούς αριθμούς. Αυτό συνέβαινε διότι οι μη-φυσικοί αριθμοί, όπως οι αρνητικοί ή οι άρρητοι, δεν ήταν ακόμα πολύ κατανοητοί και δεν υπήρχε στη μαθηματική κοινότητα μεγάλη ασφάλεια με τη χρήση τους.

Το πρόβλημα αυτό επισημάνθηκε από τον George Peacock (1791-1858) ο οποίος έκανε μία διάκριση ανάμεσα σε *αριθμητική άλγεβρα* και *συμβολική* άλγεβρα (βλ. Kline, 1980). Η αριθμητική άλγεβρα ήταν η άλγεβρα στην οποία τα σύμβολα αναπαριστούσαν μόνο φυσικούς αριθμούς, και για το λόγο αυτό επιτρεπτοί ήταν μόνο οι μετασχηματισμοί που είχαν ως αποτέλεσμα φυσικούς αριθμούς. Η αριθμητική άλγεβρα φαίνεται σε μας ως ένα αμάλγαμα της συμβολικής άλγεβρας του Viète με την άλγεβρα του Διόφαντου, στην οποία οι εμπλεκόμενοι αριθμοί ήταν φυσικοί ή πλήθη κλασματικών μονάδων. Από την άλλη μεριά, η συμβολική άλγεβρα υιοθετούσε όλους τους κανόνες μετασχηματισμού της αριθμητικής άλγεβρας χωρίς να εκπίπτει στον παραπάνω περιορισμό, επιτρέποντας δηλαδή στις μεταβλητές να αναφέρονται σε κάθε είδους αριθμό. Για να γίνει το πέρασμα από την αριθμητική *άλγεβρα των φυσικών αριθμών* στην *άλγεβρα των πραγματικών αριθμών*, όπως την γνωρίζουμε σήμερα, έπρεπε να διατυπωθεί το επιχείρημα του Peacock το 1833 που είναι γνωστό ως «η αρχή της διατήρησης των ισοδύναμων μορφών» και στο οποίο υποστήριξε με κατηγορηματικό τρόπο, σύμφωνα με τον Kline (1980, p. 159), ότι:

> *Κάθε αλγεβρική μορφή που είναι ισοδύναμη όταν τα σύμβολά της έχουν γενική μορφή αλλά συγκεκριμένη αξία (θετικοί ακέραιοι), θα είναι επίσης ισοδύναμη και όταν τα σύμβολά της έχουν γενική αξία όπως και μορφή.*

Με το επιχείρημα αυτό πρόσφερε την απαραίτητη λογική θεμελίωση ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν με ασφάλεια οι πραγματικοί αριθμοί, όπως και οι φανταστικοί και σύνθετοι αριθμοί, εκεί που μέχρι τώρα χρησιμοποιούνταν μόνο οι φυσικοί.

2.4 Εννοιολογικές διαφοροποιήσεις στην έννοια του αριθμού

Πολύ ενδιαφέρον στη μελέτη της ιστορικής εξέλιξης εννοιών, όπως η έννοια του αριθμού, της μεταβλητής και των συμβολισμών τους, έχουν οι εννοιολογικές διαφορές και οι επιστημικές πεποιθήσεις που ενυπάρχουν στον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι έννοιες αυτές από τους διάφορους μαθηματικούς, των οποίων η συμβολή στην εξέλιξη του αλγεβρικού συμβολισμού ήταν καθοριστική. Το συμβολικό σύστημα που πρότεινε ο Viète βασιζόταν σε μια διαφορετική, πιο αφηρημένη και, με τον τρόπο αυτό, πιο εκλεπτυσμένη πρόσληψη της έννοιας του αριθμού, σε σύγκριση με αυτήν του Διόφαντου και των αρχαίων ελλήνων. Κάποιοι, όπως ο Mahoney (1971), υποστηρίζουν ότι τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά στο σύνολό τους ήταν διαισθητικά και άμεσα συνδεδεμένα με μια φυσική οντολογία, δηλαδή ήταν σε μεγάλο βαθμό εξαρτημένα από τη φυσική τους αναπαράσταση. Για το λόγο αυτό, οι αρχαίοι έλληνες μαθηματικοί δεν έκαναν χρήση συμβόλων και δεν ενδιαφέρονταν για τη διατύπωση γενικών μεθόδων [για το ζήτημα αυτό υπάρχει ένας ανοιχτός διάλογος που περιγράφεται καλύτερα από τον Mahoney (1997)]. Ακόμα και όταν χρησιμοποιούνταν ένα γράμμα ή μία συντομογραφία για να αναπαραστήσει έναν αριθμό, όπως στον Διόφαντο ή στους μεσαιωνικούς Κοσσιστές, αυτό το σύμβολο αναφερόταν σε μία συγκεκριμένη αριθμητική αξία, δηλαδή σε ένα πλήθος μονάδων συγκεκριμένο, αν και αρχικά άγνωστο (Χριστιανίδης, 1996).

Όπως επισημαίνει ο Klein (1998), ενώ μέχρι τότε κάθε αριθμός αναφερόταν απευθείας στα πράγματα ή στο πλήθος των μονάδων τους, στον Viète ο αριθμός ερμηνεύεται μέσα από ένα ανώτερο εννοιολογικό επίπεδο στο οποίο ταυτίζεται η έννοια του αριθμού μόνο με τον ίδιο τον αριθμό, χωρίς άλλες εξωτερικές αναφορές. Δηλαδή, ο αριθμός για παράδειγμα 2, δεν είναι ένας χαρακτηρισμός για την ύπαρξη δύο αντικειμένων αλλά μια αυθύπαρκτη οντότητα. Έτσι, το σύμβολο του γράμματος που αναπαριστά αριθμούς αναφέρεται στο γενικό χαρακτηριστικό του ότι ‘είναι αριθμός’, ένα χαρακτηριστικό που ανήκει σε οποιονδήποτε αριθμό. Αυτή η διαφοροποίηση σε εννοιολογικό επίπεδο που υπάρχει ανάμεσα στο Διόφαντο και τον Viète ήταν καθοριστική για τον τρόπο με τον οποίο υιοθέτησαν και χρησιμοποίησαν τα γράμματα ως μαθηματικά σύμβολα. Αυτό γίνεται πιο ξεκάθαρο από την απάντηση που δίνει ο Klein (1998, σελ. 63, 64) στο ερώτημά του: «θα μπορούσε ο Διόφαντος να έχει κάνει ουσιαστικά το ίδιο βήμα με τον Viète;»:

Η απάντηση εξαρτάται ευθέως από το πώς ερμηνεύουμε το αριθμητικό σημείο «2». Για τον Viète η αντικατάστασή του «2» από το «α» είναι δυνατή επειδή η έννοια του «δύο» δεν αναφέρεται πια, όπως συνέβαινε με τον Διόφαντο, άμεσα σε κάποιο αντικείμενο, δηλαδή, σε δύο καθαρές μονάδες, αλλά έχει ήδη από μόνη της έναν «πιο γενικό» χαρακτήρα. Στον Viète «δύο» δεν σημαίνει πια «δύο ορισμένα αντικείμενα», αλλά τη γενική έννοια της δυαδικότητας εν γένει. Με άλλα λόγια η έννοια του δύο (…) δεν σημαίνει πλέον ούτε αναφέρεται σε έναν ορισμένο αριθμό αντικειμένων, αλλά στο γενικό αριθμητικό χαρακτήρα αυτού ακριβώς του αριθμού, ενώ το σύμβολο «α» παριστάνει τον γενικό αριθμητικό χαρακτήρα ενός εκάστου και κάθε αριθμού. Υπ' αυτή την έννοια το σημείο «α» είναι περισσότερα από το σημείο «2»». *(υπογράμμιση δική μας).*

Στην άλγεβρα που εισήγαγε λοιπόν ο Viète, έχει χαλαρώσει, έως εξαφανιστεί, η αναφορά του αριθμού στη φυσική του οντολογία (Mahoney, 1997) και αποκτά έτσι μια πιο αφηρημένη, πιο γενικευμένη και όχι πλήρως ορισμένη αξία. Η αλλαγή αυτή στα μαθηματικά του 17ου αιώνα που έρχεται με την άλγεβρα του Viète και πιο συγκεκριμένα με την υιοθέτηση του συγκεκριμένου συμβολικού συστήματος, αποτελεί για πολλούς μια 'επαναστατική' αλλαγή στα μαθηματικά (Klein, 1992· Mahoney, 1997) (με τον τρόπο που τέτοιου τύπου αλλαγές θα συζητηθούν στο Κεφάλαιο 3), που προϋπέθετε την εννοιολογική αλλαγή στον τρόπο κατανόησης και χρήσης της έννοιας του αριθμού. Η αλλαγή αυτή δεν περιορίζεται μόνο στα επιφανειακά χαρακτηριστικά της έννοιας του αριθμού αλλά, όπως φάνηκε από τα παραπάνω, έχει αναφορές στις βαθύτερες επιστημολογικές προϋποθέσεις για την οντολογία του αριθμού (για μια πληρέστερη ανάλυση της εξέλιξης της έννοιας του αριθμού τον 17ο αιώνα και της σχέσης του με την έννοια του αριθμού στους αρχαίους έλληνες βλ. Klein, 1992).

Από τις παραπάνω ιστορικές αναφορές θα θέλαμε επίσης να τονίσουμε ότι, όπως φάνηκε και από την ιστορική εξέλιξη της υιοθέτησης του αλγεβρικού συμβολισμού, το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο για τον αριθμό, με τις απαραίτητες εννοιολογικές και επιστημολογικές προϋποθέσεις που ενέχει και που το συγκροτούν σε σώμα, θα μπορούσε, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, να εμποδίσει την υιοθέτηση μιας νέας έννοιας. Αυτό αποτελεί κοινό τόπο με τη μελέτη που ακολουθεί και που επικεντρώνεται στον τρόπο με τον οποίο γίνεται γνωστικά το πέρασμα από τον συγκεκριμένο αριθμό στην έννοια της μεταβλητής.

Φάνηκε, επίσης, πόσο σημαντική ήταν η επίδραση του προϋπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου και οι πεποιθήσεις των μαθηματικών για τους αριθμούς στην χρήση του αλγεβρικού συστήματος όπως το ξέρουμε σήμερα, ακόμα και από τη στιγμή που υιοθετήθηκε η χρήση των γραμμάτων για να αναπαριστούν τον οποιονδήποτε αριθμό. Την επίδραση τέτοιου είδους προκαταλήψεων σχολίασε με χαρακτηριστικό τρόπο ο επίσκοπος Berkeley σημειώνοντας ότι:

> *«Αρχαίες και ριζωμένες προκαταλήψεις συχνά μετασχηματίζονται σε αρχές · και αυτές οι προτάσεις που κάποτε εξασφάλισαν την ισχύ και το κύρος μιας αρχής, και όχι μόνο αυτές, αλλά επίσης οτιδήποτε έχει προκύψει συμπερασματικά από αυτές, είναι προνομιούχες για κάθε είδους εξέταση»* (Kline (1980, p. 160).

Στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τις βασικές αρχές του θεωρητικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής που προέκυψε από την αξιοποίηση επισημάνσεων των ιστορικών της επιστήμης, όπως αυτές που αναφέρθηκαν παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα, κάνοντας μια αναλογία ανάμεσα στην ιστορική εξέλιξη των εννοιών και στη μάθηση των εννοιών από τους μαθητές, θα υποστηρίξουμε πως οι αρχικές γνώσεις ενός ατόμου συγκροτούνται σε συνεκτικές δομές που έχουν τη μορφή θεωρίας και πολλές φορές στέκονται εμπόδιο στην υιοθέτηση μιας νέας έννοιας, όπως η έννοια της μεταβλητής.

Κεφάλαιο 3
Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής

3.1 Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής και η εφαρμογή του στη μελέτη της ανάπτυξης μαθηματικών εννοιών

3.1.1 Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής – Βασικές αρχές

Το θεωρητικό πλαίσιο της «εννοιολογικής αλλαγής» στην έρευνα για τη μάθηση και τη διδασκαλία επιστημονικών εννοιών έχει τις ρίζες του στις θέσεις που εξέφρασαν οι Kuhn (1970), Feyerabend (1975) και Lakatos (1976) στο χώρο της φιλοσοφίας και της ιστορία της επιστήμης (βλ. επίσης Arabatzis & Kindi, 2008). Σύμφωνα με την «Δομή των Επιστημονικών Επαναστάσεων» του Kuhn (1970), η ιστορία της επιστήμης δείχνει ότι η εξέλιξη της επιστημονικής γνώσης δεν είναι μία συσσωρευτική διαδικασία, όπου η νέα γνώση προστίθεται στην προηγούμενη εμπλουτίζοντάς την. Αυτό που είναι αυτή τη στιγμή κοινώς αποδεχτό ως το επιστημονικά ορθό δεν είναι αποτέλεσμα συσσώρευσης των γνώσεων που αποκτήθηκαν όλο το προηγούμενο διάστημα. Αντίθετα, η ιστορία της επιστήμης έχει να επιδείξει πολλά παραδείγματα «επιστημονικών επαναστάσεων» όπου μία νέα θεωρία (υπό τη μορφή παραδείγματος) συγκρούστηκε με την παλιά και η νέα κυριάρχησε επί της παλιάς.

Όπως αναφέρει η Vosniadou (1994), κατά την ίδια περίοδο που αναπτύσσονταν οι παραπάνω ιδέες, ερευνητές της γνωσιακής επιστήμης και της επιστήμης της εκπαίδευσης, όπως οι Driver & Easley (1978), Viennot (1979) και Novak (1977), παρατήρησαν ότι οι μαθητές μεταφέρουν στη μάθηση των φυσικών επιστημών εναλλακτικά ερμηνευτικά πλαίσια ή παρανοήσεις, που είχαν δημιουργηθεί από την καθημερινή τους εμπειρία, ακόμα και πριν εκτεθούν στη συστηματική διδασκαλία. Τα εναλλακτικά αυτά πλαίσια δεν ήταν μια απλή σύνθεση από αποσπασματικές παρατηρήσεις, αλλά εμφανίζονταν συγκροτημένα σε ένα συνεκτικό σώμα που είχε τη μορφή θεωρίας. Τέτοια εναλλακτικά ερμηνευτικά πλαίσια ήταν, για παράδειγμα, η 'αφελής φυσική', όπως περιγράφηκε στη βιβλιογραφία της έρευνας για την κατανόηση των εννοιών των φυσικών επιστημών (McCloskey, 1983) ή, κατ' αναλογία, οι αφελείς θεωρίες στη βιολογία (Hatano & Inagaki, 1994) και τη χημεία (Kouka, Vosniadou, & Tsaparlis, 2001). Για παράδειγμα, οι μαθητές φάνηκε να δυσκολεύονται να κατανοήσουν τους νόμους του Νεύτωνα που αφορούν την κίνηση (Ioannides & Vosniadou, 2001· McCloskey, 1983) ή την επιστημονική εξήγηση της αλλαγής της θερμοκρασίας, συχνά επηρεασμένοι από την καθημερινή τους εμπειρία και εκφράσεις όπως «κλείσε την πόρτα μην μπει το κρύο μέσα» (Driver, 1989).

Τόσο η παρατήρηση ότι τα παιδιά έδειχναν να έχουν δομήσει τις διαισθητικές τους γνώσεις για τον κόσμο σε συνεκτικά πλέγματα εννοιών, που να μοιάζουν με θεωρίες, όσο και το γεγονός ότι, σε πολλές περιπτώσεις, τα εναλλακτικά αυτά ερμηνευτικά πλαίσια που χρησιμοποιούσαν εμφάνιζαν μεγάλη σθεναρότητα και ήταν πολύ δύσκολο να αλλάξουν, έκαναν κάποιους ερευνητές να κάνουν αντιστοιχίσεις ανάμεσα στις διαδικασίες αλλαγής των επιστημονικών θεωριών στην ιστορία της επιστήμης και στη μάθηση των επιστημονικών εννοιών μέσα από τη συστηματική διδασκαλία (McCloskey, 1983· Posner, Strike, Hewson, & Gertzog, 1982). Πιο συγκεκριμένα, οι Posner, Strike, Hewson και Gertzog (1982) έκαναν μια αναλογία μεταξύ των εννοιών της αφομοίωσης και της συμμόρφωσης του Piaget και των εννοιών της «κανονικής επιστήμης» και της «επιστημονικής επανάστασης» που προτάθηκε από τον Kuhn (1970) (βλ. Duit, 1999). Στο πλαίσιο αυτής της προσέγγισης, τα εναλλακτικά ερμηνευτικά πλαίσια των παιδιών θα πρέπει να αλλάξουν, για να υποδεχτούν την επιστημονική θεωρία με τη διαδικασία της «εννοιολογικής αλλαγής», έναν όρο που επίσης είχε χρησιμοποιηθεί αρχικά από τον Kuhn. Η θεωρητική αυτή προσέγγιση αποδείχθηκε εξαιρετικά παραγωγική και αποτέλεσε κυρίαρχο παράδειγμα στην έρευνα για την γνωστική ανάπτυξη των επιστημονικών εννοιών στους μαθητές, κάτω από τον τίτλο ‘ομπρέλα’ «εννοιολογική αλλαγή» (Carey, 1985· Chi, 1992· Driver & Easley, 1978· Duit, 1999· Hatano & Inagaki, 2003· McCloskey, 1983· Merenluoto & Lehtinen, 2002· Novak, 1977· Posner και συνεργάτες, 1982· Vosniadou, 2007b· Vosniadou & Brewer, 1992).

3.1.2 Η θεωρία-πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή

Σύμφωνα με την προσέγγιση της θεωρίας-πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή (Vosniadou, 1994· 1999· 2001· 2002a· Vosniadou, Baltas, & Vamvakoussi, 2007· Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008), τα παιδιά, ήδη από την προσχολική ηλικία, οργανώνουν την πολλαπλότητα των εμπειριών τους από την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον τους μέσω των αισθήσεών τους, καθώς επίσης και τις πληροφορίες που λαμβάνουν από το πολιτιστικό πλαίσιο, σε εσωτερικά συνεπείς εξηγήσεις που έχουν τη μορφή θεωρίας. Οι θεωρίες αυτές βοηθούν τα παιδιά να κάνουν προβλέψεις και να παρέχουν εξηγήσεις για τα φαινόμενα που συμβαίνουν στο φυσικό τους περιβάλλον, έστω και αν οι εξηγήσεις αυτές είναι συχνά πολύ διαφορετικές από τις επιστημονικές (Carey, 1985).

Θα πρέπει να επισημάνουμε εδώ, ότι ο όρος ‘θεωρία’ χρησιμοποιείται από τους ερευνητές των γνωσιακών επιστημών και των επιστημόνων της εκπαίδευσης, όχι για να δηλώσει ένα αδιαμφισβήτητο και καλοσχηματισμένο σύστημα που είναι κοινώς αποδεκτό από μία κοινότητα, όπως είναι η επιστημονική θεωρία (Vosniadou, 2002b), αλλά έναν τρόπο οργάνωσης επιμέρους γνώσεων σε ένα συνεκτικό σώμα το οποίο έχει προβλεπτική και ερμηνευτική ισχύ, δηλαδή μπορεί να χρησιμοποιηθεί παραγωγικά για να προσφέρει ερμηνείες για τα φυσικά φαινόμενα (Carey & Spelke, 1996· βλ. επίσης Siegler & Alibali, 2004).

Η θεωρητική προσέγγιση της θεωρίας-πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή είναι μέρος της κονστρουκτιβιστικής παράδοσης στη μάθηση και τη διδασκαλία. Στα πλαίσια της κονστρουκτιβιστικής προσέγγισης, που αποτελεί ένα από τα κυρίαρχα παραδείγματα στην έρευνα γύρω από τη μάθηση και την ανάπτυξη των εννοιών, η μάθηση είναι το αποτέλεσμα της ενεργούς δράσης του παιδιού να κατανοήσει μια νέα πληροφορία χρησιμοποιώντας αυτά που ήδη γνωρίζει. Κάθε νέα πληροφορία ερμηνεύεται στη βάση των όσων είναι ήδη γνωστά και στις περισσότερες περιπτώσεις αφομοιώνεται ομαλά στην προϋπάρχουσα γνωστική δομή (Vosniadou, 1999· 2001). Οι προϋπάρχουσες γνώσεις, είτε αποτελούν με την παρουσία τους μια βοηθητική βάση για την περαιτέρω δόμηση της γνώσης, είτε, δια της απουσίας τους, δημιουργούν ένα σημαντικό κενό, πάνω στο οποίο η νέα πληροφορία δεν μπορεί να θεμελιωθεί (Ausubel, 1963· Bruner, 1961). Πρόσφατα αποτελέσματα ερευνών έχουν δείξει ότι κάποια από τα λάθη που κάνουν τα παιδιά, σε κάποιες δοκιμασίες που αφορούν την κατανόηση εννοιών, δεν είναι τυχαία, αλλά η συστηματικότητα εμφάνισής τους μπορεί να ερμηνευτεί ως επίδραση της προηγούμενης γνώσης τους (στην περίπτωση των μαθηματικών βλ. για παράδειγμα Fischbein, 1987· Greer, 1994· Kieran, 1992· Sfard, 1994).

Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής έρχεται να ενσωματώσει αυτά τα αποτελέσματα σε ένα πιο ολοκληρωμένο θεωρητικό σχήμα για τη μάθηση και τη διδασκαλία (Carey, 1985· Chi, 1992· Vosniadou, 1999). Πιο συγκεκριμένα, το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής δέχεται ότι η γνώση δεν αποτελείται από αποσπασματικές παρατηρήσεις, αλλά συγκροτείται σε συνεπή δίκτυα που έχουν τη μορφή θεωρίας. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η νέα γνώση βρίσκεται σε σύγκρουση με θεμελιώδη χαρακτηριστικά της αρχικής θεωρίας των μαθητών και στις περιπτώσεις αυτές, για να επέλθει μάθηση, απαιτείται αναδιοργάνωση του ισχύοντος εννοιολογικού πλαισίου, που μπορεί να χαρακτηριστεί ως αλλαγή θεωρίας. Η διαδικασία αυτή, που περιγράφεται ως *εννοιολογική αλλαγή*, είναι μια αργή και επίπονη διαδικασία που απαιτεί αλλαγές σε μια σειρά από έννοιες και σχέσεις μεταξύ τους, που συγκροτούν το ισχύων εννοιολογικό πλαίσιο (Smith, Solomon, & Carey, 2005· Vosniadou, 1999· Vosniadou και συνεργάτες, 2007· Vosniadou και συνεργάτες, 2008).

Η μάθηση των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών, συμβαίνει κατά βάση μέσα στη σχολική αίθουσα και ως αποτέλεσμα συστηματικής διδασκαλίας. Θα μπορούσαν έτσι να αποτελέσουν είδη *μάθησης με εννοιολογική αλλαγή που συμβαίνει μέσα από συστηματική διδασκαλία*, όπως αυτή έχει περιγραφεί από τους Inagaki & Hatano (2002). Τόσο στη φυσική όσο και στα μαθηματικά οι μαθητές καλούνται σε μικρό, σχετικά, χρονικό διάστημα να κατανοήσουν μη-διαισθητικές έννοιες, που συχνά βρίσκονται σε σύγκρουση με άλλες έννοιες που είχαν διδαχθεί το αμέσως προηγούμενο διάστημα (π.χ., κλάσματα μετά από τους φυσικούς αριθμούς). Στις περιπτώσεις αυτές, η χρήση προσθετικών μηχανισμών εμπλουτισμού της προϋπάρχουσας γνώσης, που είναι ενσωματωμένη σε διαφορετικό εννοιολογικό πλαίσιο, αναπόφευκτα οδηγεί στη διατάραξη της συνοχής της προϋπάρχουσας γνωστικής δομής και στην εμφάνιση παρερμηνειών (Vosniadou και συνεργάτες, 2008).

Κάποιες από τις παρερμηνείες αυτές μπορούν να ερμηνευτούν ως *συνθετικά λάθη* των μαθητών, καθώς αντανακλούν την άδηλη προσπάθειά τους να ενσωματώσουν τις νέες πληροφορίες στις αρχικές θεωρίες τους (Vosniadou, 1994· 1999· 2002b· Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Τα συνθετικά αυτά λάθη εμφανίζονται διότι οι αρχικές θεωρίες-πλαίσια των μαθητών είναι δύσκολο να εγκαταλειφθούν, αφού αποτελούν ένα συγκροτημένο ερμηνευτικό πλαίσιο που βασίζεται στην καθημερινή εμπειρία, ενθαρρύνεται και επιβεβαιώνεται συνεχώς από το κοινωνικό-πολιτισμικό πλαίσιο (Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Τα συνθετικά λάθη των μαθητών δείχνουν επίσης ότι αυτοί βρίσκονται σε μία διαδικασία αναδιοργάνωσης του προϋπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου η οποία όμως διαδικασία βρίσκεται ακόμα σε εξέλιξη και δεν έχει ολοκληρωθεί.

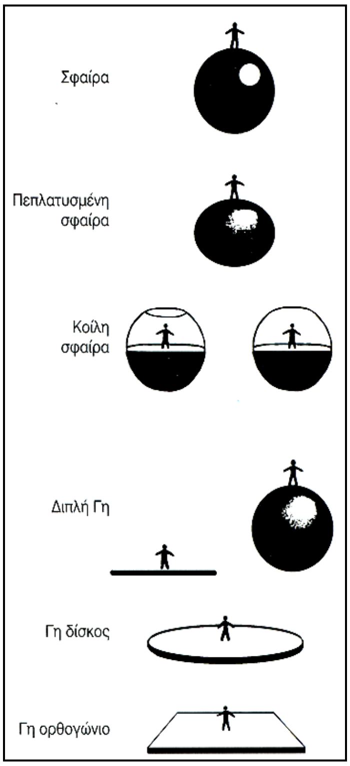
Για να κάνουμε τα παραπάνω πιο σαφή θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα από την έρευνα στην αστρονομία.

3.1.2.1 Ένα παράδειγμα μάθησης με εννοιολογική αλλαγή

Το παράδειγμα που θα χρησιμοποιήσουμε αφορά την έρευνα της Βοσνιάδου και των συνεργατών της για την κατανόηση από τα παιδιά του σχήματος της Γης (βλ. Skopeliti & Vosniadou, 2006· Vosniadou & Brewer, 1992). Αρχικά τα παιδιά εμφανίζονται να έχουν μια αρχική θεωρία για το σχήμα της Γης ως ένα επίπεδο, σταθερό, ακίνητο και υποστηριζόμενο, φυσικό αντικείμενο. Η κατανόηση του σχήματος της Γης με αυτό τον τρόπο εμφανίζεται ήδη από τα προσχολικά χρόνια και είναι συνέπεια της καθημερινής εμπειρίας των παιδιών στο κοινωνικό-πολιτισμικό τους περιβάλλον. Τα αντικείμενα που βρίσκονται πάνω στη Γη υπακούουν, σύμφωνα με αυτό το εναλλακτικό ερμηνευτικό πλαίσιο, στη βαρύτητα που κινεί τα αντικείμενα ‘από πάνω προς τα κάτω’. Η αρχική αυτή κατανόηση για τη Γη, έχει τη μορφή θεωρίας-πλαισίου αφού έχει έντονη ερμηνευτική και προβλεπτική ισχύ – δίνει για παράδειγμα επαρκείς εξηγήσεις στο γιατί τα πράγματα πέφτουν κάτω και γιατί η ίδια η Γη δεν πέφτει.

Μια τέτοια ερμηνεία του σχήματος της Γης και της βαρύτητάς της απέχει πολύ, όπως είναι προφανές, από την επιστημονική που θέλει τη Γη να είναι ένα ουράνιο σώμα, σφαιρικό, που κινείται, δεν στηρίζεται, ενώ η βαρύτητά της ασκείται πάντα με κατεύθυνση προς το κέντρο της. Για να αποκτήσουν τα παιδιά την επιστημονική εξήγηση του σχήματος της Γης και της έννοιας της βαρύτητας, θα πρέπει να αναδιοργανώσουν την αρχική τους θεωρία-πλαίσιο και να αποδεχτούν μη-διαισθητικές ερμηνείες που θέλουν, για παράδειγμα, να ζουν άνθρωποι στην πλαϊνή πλευρά μιας σφαιρικής Γης και παρόλα αυτά να μην πέφτουν.

Στην άδηλη προσπάθεια των μαθητών να διατηρήσουν την αρχική θεωρία/πλαίσιο για το σχήμα της Γης ως επίπεδο, αλλά και να αφομοιώσουν την νέα πληροφορία ότι «η Γη είναι σφαιρική» και ότι «η Γη κινείται», που έρχεται μέσα από τη συστηματική διδασκαλία και το πολιτισμικό περιβάλλον, τα παιδιά, με χρήση προσθετικών μηχανισμών εμπλουτισμού των προηγούμενων πεποιθήσεών τους, καταλήγουν συχνά στη δημιουργία παρερμηνειών. Τέτοιες παρερμηνείες εμφανίζονται στα συνθετικά λάθη που κάνουν οι μαθητές σε συγκεκριμένες ερωτήσεις και που υποδηλώνουν την ύπαρξη συνθετικών μοντέλων (βλ. Διάγραμμα 3.1). Ένα τέτοιο παράδειγμα συνθετικού λάθους είναι αυτό της «διπλής Γης» που αποτελείται από μία επίπεδη Γη στην οποία ζουν οι άνθρωποι και που ισχύει η ‘από πάνω προς τα κάτω’ βαρύτητα και από μία δεύτερη Γη που είναι ουράνιο σώμα, βρίσκεται στον ουρανό, είναι σφαιρική και κινείται (Vosniadou, 2002b· Vosniadou & Brewer, 1992).



Διάγραμμα 3.1: Μοντέλα της Γης (Vosniadou & Brewer, 1992)

3.2 Εννοιολογική Αλλαγή στα Μαθηματικά

3.2.1 Τα μαθηματικά και η σχέση τους με τις φυσικές επιστήμες

Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής χρησιμοποιούταν για χρόνια στην έρευνα για την κατανόηση εννοιών των φυσικών επιστημών. Τα τελευταία χρόνια έχει αρχίσει να χρησιμοποιείται επίσης και στην έρευνα που αφορά έννοιες των μαθηματικών (Verschaffel & Vosniadou, 2004). Ένας βασικός λόγος για αυτή την καθυστέρηση είναι ότι τα μαθηματικά θεωρούνται ότι είναι δομημένα συσσωρευτικά, χωρίς κενά και επαναστάσεις (βλ. Crowe, 1975).

Έστω και αν η ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης έχει να επιδείξει την ύπαρξη συχνών και σοβαρών ‘ανωμαλιών’ (βλ. Lakatos, 1976), υπάρχει διάσπαρτη η πεποίθηση ότι τα μαθηματικά είναι βασισμένα στην παραγωγική απόδειξη και όχι στην παρατήρηση και το πείραμα, όπως οι φυσικές επιστήμες, και ότι αυτό τα κάνει ανθεκτικά στις ανωμαλίες που συμβαίνουν στο εσωτερικό τους (βλ. επίσης Confrey, 1981· βλ. επίσης Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Αυτή η προσέγγιση δέχεται ότι όταν νέες θεωρίες ή καλύτερα έννοιες, όσον αφορά τα μαθηματικά, εκφραστούν και αποδειχτούν στα πλαίσια του μαθηματικού φορμαλισμού, τότε είναι έτοιμες να πάρουν και αυτές με τη σειρά τους μια θέση στο σώμα των μαθηματικών, χωρίς απαραίτητα να πρέπει να αντικαταστήσουν την προηγούμενη κατανόηση και χρήση των εννοιών (Dauben, 1984).

Σύμφωνα με τον Mahoney (1997, p. 2) η «συνθετική γεωμετρία, η αμετάβλητη θεωρία, ή τα τετραδόνια (quaternions) μπορεί να έχασαν το ενδιαφέρον τους για τους μαθηματικούς και να κρίθηκαν πεπαλαιωμένα ή άκαρπα, αλλά δεν φαίνεται να παύουν να είναι μαθηματικά με τον τρόπο που η μηχανική του Αριστοτέλη έπαψε να είναι μηχανική, η φυσιολογία του Galen έπαψε να είναι φυσιολογία ή το φλόγιστρον στην χημεία έπαψε να είναι χημεία». Παράλληλοι μαθηματικοί ‘κόσμοι’, όπως η Ευκλείδεια και οι μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες, μπορούν να συνυπάρχουν ταυτόχρονα χωρίς να παρατηρείται το φαινόμενο της *ασυμβατότητας*, φαινόμενο κεντρικό στις επιστημονικές επαναστάσεις των φυσικών επιστημών, όπως αυτές περιγράφηκαν από τον Kuhn.

Τα παραπάνω αποτελούν τα βασικά σημεία στα οποία διαφοροποιούνται τα μαθηματικά ως σύστημα γνώσης από αυτό των φυσικών επιστημών. Πάνω στα σημεία αυτά στηρίζονται τα επιχειρήματα της άποψης που ήθελε τα μαθηματικά να εξελίσσονται ως μια γραμμική διαδικασία συσσώρευσης, χωρίς επαναστάσεις και κενά και, ως εκ τούτου, απέκλειε την εφαρμογή θεωρητικών προσεγγίσεων, όπως αυτή της εννοιολογικής αλλαγής στη μελέτη της εξέλιξής τους. Ο ίδιος ο Kuhn είχε άλλωστε αποκλείσει ρητά τα μαθηματικά από το μοντέλο ανάλυσής του, όντας πεπεισμένος ότι δεν υπάρχουν επαναστάσεις στα μαθηματικά, τουλάχιστον όχι με την έννοια των επαναστάσεων που εμφανίζονται στις φυσικές επιστήμες (Mahoney, 1997).

3.2.2. 'Επαναστατικές' αλλαγές στα μαθηματικά

3.2.2.1 Κατά την ιστορική τους εξέλιξη

Με την παραπάνω όμως άποψη δεν συμφωνούν όλοι οι ερευνητές του χώρου. Στον διάλογο που άνοιξε για το *εάν υπάρχουν επαναστάσεις στα μαθηματικά* κάποιοι ερευνητές διαφώνησαν με την άποψη του Crowe (1975), ότι, δηλαδή, η δομή των μαθηματικών απεικονίζει ακριβώς την ιστορία τους. Στήριξαν μάλιστα τις θέσεις τους, προσφέροντας ποικιλία αντιπαραδειγμάτων, σε έννοιες των μαθηματικών, η ιστορική εξέλιξη των οποίων κάθε άλλο παρά γραμμική εμφανίζεται να είναι (βλ. Ernest, 1992· Gillies, 1992· Sfard, 1994). Ερευνητές όπως οι Confrey (1981), Dauben (1984), Ernest (1992), Greer & Verschaffel (Greer & Verschaffel, 2007), Mehrtens (1976, 1992), Vamvakoussi & Vosniadou (2004) υποστηρίζουν ότι υπάρχουν αλλαγές στα μαθηματικά που θα μπορούσαν να φέρουν τον τίτλο 'επαναστατικές', έστω κι αν τα χαρακτηριστικά τους διαφοροποιούνται από τις αντίστοιχες των φυσικών επιστημών. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η έννοια του αριθμού.

Οι Πυθαγόρειοι έβλεπαν στον αριθμό την ουσία των πραγμάτων, του απέδιδαν ιερές ιδιότητες και μεταφυσικές συνδηλώσεις, μέχρι του σημείου να θεωρείται ο περιττός αριθμός γένους αρσενικού ενώ ο άρτιος γένους θηλυκού (βλ. Dauben, 1984). Το πέρασμα από την κατανόηση αυτή για τον αριθμό στη θεωρία των ποσοστών του Εύδοξου ή την έννοια των ρητών και των πραγματικών αριθμών του Dedekind ενέχει πολύ βαθιές αλλαγές στο νόημα της έννοιας του αριθμού, που δεν μπορούν να έχουν επέλθει μέσω εμπλουτισμού της αρχικής έννοιας (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Οι αλλαγές αυτές είναι τόσο βαθιές που αγγίζουν τον 'σκληρό πυρήνα', των 'ερευνητικών προγραμμάτων' για τον αριθμό (χρησιμοποιώντας το θεωρητικό μοντέλο του Lakatos, 1976). Άλλα τέτοια παραδείγματα από την ιστορία των μαθηματικών θα μπορούσαν να αποτελέσουν η έννοια του αριθμού στον Viète σε αντιδιαστολή με την έννοια του αριθμού στον Διόφαντο, που οδήγησε στο πέρασμα από τον συγκεκριμένο αριθμό στην έννοια της μεταβλητής (Klein, 1992· 1998) (βλ. επίσης Κεφ. 2 της παρούσας διατριβής), η υιοθέτηση του αλγεβρικού συμβολισμού (Greer, 2004), το πέρασμα από τους ρητούς αριθμούς στους άρρητους (Dauben, 1984· 1992), η αποδοχή των αρνητικών αριθμών ως αριθμούς από τη μαθηματική κοινότητα (Gallardo, 2002), η θεωρία συνόλων του Cantor (Baltas, 2007· Dauben, 1984), κτλ. (για περισσότερα παραδείγματα βλ. Confrey, 1981, Ernest, 1992).

Τα παραπάνω παραδείγματα δείχνουν ότι είναι δυνατόν η υπάρχουσα μαθηματική γνώση να μην εμπλουτίζεται ύστερα από την εισαγωγή μιας νέας έννοιας, αλλά αυτή η νέα έννοια να προκαλεί ριζικές αλλαγές στο προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο. Η εκτίμηση αυτή, που υποστηρίζεται από διάφορες αναφορές στην ιστορία των μαθηματικών, θα μπορούσε να δικαιολογήσει την υιοθέτηση της θεωρητικής προσέγγισης της εννοιολογικής αλλαγής και στην περίπτωση των μαθηματικών εννοιών, όπως αυτή είχε εκφραστεί για τις φυσικές επιστήμες παραπάνω. Με βάση αυτό, θα μπορούσε να γίνει και μία αναλογία όπως αυτή που προσέφεραν οι Posner, Strike, Hewson, και Gertzog (1982) (βλ. Duit, 1999) για την περίπτωση των φυσικών επιστημών, σύμφωνα με την οποία θα μπορούσαμε να δούμε την γνωστική ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές, σε αντιστοιχία με την ιστορική εξέλιξη αυτών των εννοιών, δηλαδή ως μια διαδικασία που σε κάποιες περιπτώσεις απαιτεί ριζική αναδιοργάνωση του προϋπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου.

Η υιοθέτηση μιας τέτοιας προσέγγισης ενισχύεται και από ευρήματα της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση που έρχονται να δείξουν ότι, έστω κι αν η ιστορία των μαθηματικών δεν εξελίσσεται με τον ίδιο τρόπο όπως η αντίστοιχη των φυσικών επιστημών, ο τρόπος με τον οποίο κατανοούνται από τους μαθητές οι έννοιες, τόσο των φυσικών επιστημών όσο και αυτές των μαθηματικών, εμφανίζει σημαντικές ομοιότητες (Verschaffel & Vosniadou, 2004· Vosniadou, Vamvakoussi, & Christou, 2005).

3.2.2.2 Κατά την γνωστική τους ανάπτυξη

Υπάρχουν εμπειρικά δεδομένα που υποστηρίζουν ότι, όπως τα παιδιά εμφανίζονται να έχουν αφελείς θεωρίες για τις φυσικές επιστήμες, έτσι έχουν και την τάση να χρησιμοποιούν εναλλακτικά ερμηνευτικά πλαίσια και για τις μαθηματικές έννοιες – εναλλακτικά με την έννοια του διαφορετικού από το χαρακτηρισμένο ως 'μαθηματικώς ορθό'. Μάλιστα, τα εναλλακτικά αυτά ερμηνευτικά πλαίσια μπορούν και να σταθούν εμπόδιο στην απόκτηση της νέας μαθηματικής γνώσης, με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο οι 'αφελείς' θεωρίες για τη φυσική εμποδίζουν την κατανόηση των επιστημονικών εξηγήσεων στα φυσικά φαινόμενα. Ένας από τους πρώτους ερευνητές που παρατήρησε ότι συχνά τα παιδιά ερμηνεύουν με διαισθητικό τρόπο τις μαθηματικές καταστάσεις, κάνοντας μια σειρά από συστηματικά λάθη, ήταν ο Fischbein (1987). Παρόμοιες ιδέες έχουν εκφραστεί και από άλλους ερευνητές όπως ο Greeno (1991) και η Sfard (1994).

Με τον ίδιο τρόπο που η Resnick (2006) υποστηρίζει ότι η προϋπάρχουσες διαισθητικές γνώσεις των παιδιών δεν υποστηρίζουν απαραίτητα την μάθηση νέων εννοιών στα μαθηματικά, πολλοί ερευνητές έχουν επισημάνει ότι ο τρόπος εισαγωγής των μαθητών σε κάποιες αρχικές μαθηματικές έννοιες θα μπορούσε και να εμποδίσει την κατανόηση ανώτερων μαθηματικών εννοιών (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985· Stafylidou & Vosniadou, 2004· Vamvakoussi & Vosniadou, 2007). Επίσης, ότι χρήσεις εννοιών και συμβολισμών με συγκεκριμένο τρόπο σε ορισμένα πλαίσια θα μπορούσαν να ευθύνονται για τυχόν παρερμηνείες που εμφανίζουν οι μαθητές, όταν το πλαίσιο αλλάζει (βλ. Gelman, 1994). Η δημιουργία μιας γνωστικής σύγκρουσης, όταν μία έννοια ή ένας συμβολισμός χρησιμοποιείται με διαφορετικό τρόπο σε διαφορετικά πλαίσια, είναι σε κάποιες περιπτώσεις αναπόφευκτη. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η έννοια της μεταβλητής που χρησιμοποιείται με διαφορετικό τρόπο στην άλγεβρα από ότι για παράδειγμα στους αλγόριθμους που χρησιμοποιούν οι γλώσσες προγραμματισμού, κάτι που δημιουργεί στους μαθητές δυσκολίες κατανόησης (Heck, 2001). Παρόλα αυτά, υπάρχουν περιπτώσεις όπου είναι ο τρόπος με τον οποίο έχουν αρχικά διδαχθεί κάποιες έννοιες ή συμβολισμοί στους μαθητές, που στέκεται εμπόδιο στην κατανόηση μιας άλλης χρήσης της ίδιας έννοιας ή συμβολισμού. Για παράδειγμα, ερευνητές έχουν ερμηνεύσει λάθη και δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα να προκύπτουν λόγω του τρόπου με τον οποίο διδάχθηκαν αρχικά οι έννοιες αυτές στους μαθητές στα πλαίσια της αριθμητικής (Booth, 1984· Herscovics, 1989· Kieran, 1992· MacGregor & Stacey, 1997) (για πιο αναλυτική επισκόπηση της βιβλιογραφίας στο συγκεκριμένο ζήτημα βλέπε Κεφ. 1).

Ένα τέτοιο παράδειγμα θα μπορούσε να είναι το σύμβολο της ισότητας. Το ίσον (=) διδάσκεται και χρησιμοποιείται στην αριθμητική ως το σύμβολο διεξαγωγής των υπολογιστικών πράξεων που έχουν σημειωθεί αριστερά από αυτό και την ανακοίνωση του τελικού αποτελέσματος δεξιά του (π.χ., 2+3=5). Αυτός ο τρόπος χρήσης εμποδίζει την κατανόηση της χρήσης του στην άλγεβρα ως σύμβολο της ισότητας ανάμεσα σε δύο μέλη (Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil, & Stephens, 2007· Kieran, 1981). Για το λόγο αυτό ο (Greer, 2006) προτείνει να χρησιμοποιείται το «ίσον» στην αριθμητική με τέτοιους τρόπους ώστε να υποστηρίζεται η μελλοντική του χρήση ως σύμβολο ισότητας (π.χ., 5+7=8+4). Τέλος, ένα σημαντικό παράδειγμα χρήσης εναλλακτικών ερμηνευτικών πλαισίων από τους μαθητές, που επηρεάζει την περαιτέρω ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών και που εμφανίζεται κατά κόρον και σε διάφορες εκφάνσεις του σε όλο τα φάσμα της μαθηματικής εκπαίδευσης, αποτελεί η έννοια του αριθμού, στην οποία γίνεται εκτενής αναφορά παρακάτω.

3.2.3 Εννοιολογική αλλαγή και στα μαθηματικά λοιπόν;

Το επιχείρημα ότι δεν υπάρχουν αλλαγές στα μαθηματικά που να μπορούν να χαρακτηριστούν 'επαναστατικές' με την έννοια της βαθιάς ρήξης στη σχέση της νέας χρήσης μιας έννοιας με την παλιότερη φαίνεται από τα παραπάνω να έχει δεχθεί σημαντική κριτική, με πολλά παραδείγματα από την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών. Έστω κι αν μία επανάσταση στις φυσικές επιστήμες, όπως αυτή περιγράφεται από την ιστορία των επιστημών στα πλαίσια της θεωρίας του Kuhn, θέλει να ανατρέπεται πλήρως το επιστημονικό σκηνικό, με την αντικατάσταση της παλαιάς θεωρίας από τη νέα, κάτι τέτοιο δεν χαρακτηρίζει τα μαθηματικά. Οι 'επαναστάσεις' στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών, με τους όρους με τους οποίους αυτές περιγράφηκαν παραπάνω, δεν προκαλούν εγκατάλειψη του παλιού και αντικατάστασή του από το νέο. Κάποιοι μάλιστα υποστηρίζουν ότι αυτό που προκαλούν οι επαναστάσεις στα μαθηματικά είναι ριζικές αλλαγές στο λανθάνον επιστημολογικό πλαίσιο και τις μετα-μαθηματικές οπτικές (Ernest, 1992· Sfard, 1994) ή στις λανθάνουσες πεποιθήσεις (Baltas, 2007).

Η ανάδυση της εν λόγω προβληματικής αποδείχθηκε ενδιαφέρουσα, διότι έριξε φως σε μερικές από τις συζητήσεις που έχουν πραγματοποιηθεί στη βιβλιογραφία της προσέγγισης της εννοιολογικής αλλαγής, από τη μεριά της γνωστικής ανάπτυξης (Vosniadou & Verschaffel, 2004). Πιο συγκεκριμένα, οι παραπάνω ερευνητές έχουν επισημάνει ότι, ακόμη και στην περίπτωση των φυσικών επιστημών, δεν θα πρέπει να βλέπουμε την εννοιολογική αλλαγή ως μια διαδικασία αντικατάστασης των λανθασμένων θεωριών των μαθητών με τις 'σωστές' επιστημονικές θεωρίες. Αντίθετα, υποστηρίζουν ότι η προσέγγιση θα έπρεπε να κινείται προς την κατεύθυνση της διευκόλυνσης των μαθητών να αναπτύξουν πολλαπλές προοπτικές ή/και περισσότερα και πιο αφηρημένα επεξηγηματικά πλαίσια, με τη μέγιστη δυνατότητα παραγωγής γενικών συμπερασμάτων, με τον τρόπο που τα μαθηματικά εξελίσσονται ιστορικά, προσφέροντας όλο και πιο αφηρημένα επίπεδα ανάλυσης που επιτρέπουν την ανάπτυξη πιο γενικών λύσεων (βλ. Dauben, 1984· βλ. επίσης Sfard, 1994). Έτσι, φαίνεται ότι το ζήτημα αντικατάστασης θεωρίας (ή έννοιας στα μαθηματικά), που αντιπροσωπεύει μια σημαντική διαφορά στην ιστορική εξέλιξη των φυσικών επιστημών έναντι των μαθηματικών, μπορεί να μην αποτελεί ζήτημα διαφοροποίησης στην περίπτωση της γνωστικής ανάπτυξης των δύο αυτών αντικειμένων. Άλλωστε, όπως υποστηρίζουν οι Arabatzis & Kindi (2008) και Vamvakoussi & Vosniadou (2004), η εννοιολογική αλλαγή αναφέρεται στην αλλαγή του νοήματος μιας έννοιας και όχι στην αντικατάσταση μιας έννοιας από μια άλλη, και οι μαθηματικές έννοιες, όπως δείξαμε παραπάνω, συχνά χαρακτηρίζονται από τέτοιες αλλαγές.

Τα επιχειρήματα λοιπόν που θα απέκλειαν την εφαρμογή του θεωρητικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής στα μαθηματικά φαίνονται να κάμπτονται, ενισχύοντας τη θέση ότι είναι δυνατή η χρήση θεωρητικών πλαισίων όπως αυτό της εννοιολογικής αλλαγής και στη μελέτη της γνωστικής ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών. Η εφαρμογή μάλιστα του εν λόγω θεωρητικού πλαισίου σε ερευνητικές μελέτες που εστίασαν σε μαθηματικές έννοιες αποδείχθηκε μια παραγωγική επιλογή, για παράδειγμα στην περίπτωση της κατανόησης της έννοιας του αρνητικού αριθμού (Vlassis, 2004), του ρητού αριθμού, τόσο από μεριάς των καθηγητών (Merenluoto & Lehtinen, 2002) όσο και των μαθητών (Stafylidou & Vosniadou, 2004· Vamvakoussi & Vosniadou, 2004), της έννοιας του απείρου (Tsamir & Tirosh, 2007) ή των στρατηγικών λύσης προβλημάτων (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2004).

3.3. Εννοιολογική αλλαγή και η έννοια του αριθμού

3.3.1 Αριθμός και φυσικός αριθμός

Υπάρχουν ερευνητές που, έστω και από διαφορετικές κατευθύνσεις, συγκλίνανε στην παρατήρηση μιας έντονης τάσης των μαθητών να χρησιμοποιούν τη γνώση τους για τις ιδιότητες και τους συμβολισμούς των φυσικών αριθμών στην κατανόηση των κλασμάτων, των δεκαδικών ή και των αρνητικών αριθμών (Gelman, 2000· Hartnett & Gelman, 1998· Mack, 1988· Merenluoto & Lehtinen, 2004· Ni & Zhou, 2005· Resnick και συνεργάτες, 1989· Stafylidou & Vosniadou, 2004· Vamvakoussi & Vosniadou, 2004· Vlassis, 2004). Η τάση, μάλιστα, των μαθητών να αποδίδουν ιδιότητες των φυσικών αριθμών στα κλάσματα ή στους δεκαδικούς αριθμούς, στην προσπάθειά τους να τους κατανοήσουν χαρακτηρίζεται και ως 'προκατάληψη του φυσικού αριθμού'[5] (Ni & Zhou, 2005). Ο όρος 'προκατάληψη' ορίζεται ως μια συστηματική απόκλιση από τον κανόνα (Caverni, Fabre, & Gonzalez, 1990) (όπως αναφέρεται στους Ni & Zhou, 2005).

3.3.2 Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού

Διάφορες απόψεις έχουν εκφραστεί για τη φύση και τις πιθανές αιτίες της προκατάληψης του φυσικού αριθμού[6]. Σύμφωνα με τους Galistel και Gelman (1992), το φαινόμενο αυτό οφείλεται στα χαρακτηριστικά του γνωστικού μηχανισμού που είναι υπεύθυνος για την αριθμητική ικανότητα στον άνθρωπο. Η προσέγγισή τους αυτή προτείνει την ύπαρξη ενός έμφυτου εμποδίου που οφείλεται στην ύπαρξη ενός εξειδικευμένου, προγλωσσικού, γνωστικού μηχανισμού, που έχει τη δυνατότητα να αντιλαμβάνεται την

[5] Αν θα θέλαμε να είμαστε πιστοί στην ορολογία των Ni & Zhou (2005) θα έπρεπε να μιλήσουμε για «προκατάληψη του ολόκληρου αριθμού» (whole number bias). Παρόλα αυτά θεωρούμε ότι ο όρος 'ολόκληρος' χρησιμοποιείται για τον 'φυσικό αριθμό', αποφεύγοντας να γίνει άμεση αναφορά στην μαθηματική έννοια αυτού. Επειδή, όπως θα γίνει ξεκάθαρο παρακάτω, στην παρούσα μελέτη χρησιμοποιούμε τον όρο 'φυσικός αριθμός' με τον ίδιο τρόπο, αποφασίσαμε να προβούμε στην συγκεκριμένη μετάφραση.

[6] Για μια αναλυτική συζήτηση του φαινομένου της προκατάληψης του φυσικού αριθμού και των επιπτώσεων του στη μαθηματική εκπαίδευση βλ. Ni & Zhou (2005).

πληθικότητα ενός συνόλου αντικειμένων και να αναπαριστά την αριθμητική αξία σε μια νοητική αναπαράσταση, που διατηρεί τα αναλογικά χαρακτηριστικά της σαν να ήταν ποσότητα (Gallistel & Gelman, 1992). Έστω και αν περίμενε κανείς το αντίθετο από έναν αναλογικό συσσωρευτή, η ποσοτική αναπαράσταση δεν έχει τη δυνατότητα αναπαράστασης συνεχών μεγεθών, όπως είναι για παράδειγμα οι κλασματικές αριθμητικές αξίες, αλλά αναπαριστά την αριθμητική αξία με διακριτό τρόπο (Gallistel & Gelman, 1992· Hartnett & Gelman, 1998). Σύμφωνα λοιπόν με την προσέγγιση αυτή, η προκατάληψη του φυσικού αριθμού είναι ένα έμφυτο εμπόδιο που οφείλεται στη νοητική αναπαράσταση του αριθμού και οπότε δεν μπορεί να αποφευχθεί.

Οι Galistel και Gelman υποστηρίζουν επιπλέον ότι η ύπαρξη ενός γνωστικού μηχανισμού, όπως αυτός που περιγράφηκε παραπάνω, δημιουργεί τις κατάλληλες προϋποθέσεις για την υιοθέτηση από τα παιδιά της διαδικασίας της απαρίθμησης. Η διαδικασία της απαρίθμησης διέπεται από ένα σύνολο αρχών: της ένα-προς-ένα αντιστοιχία αντικειμένου με αριθμό, της σταθερής διάταξης της λίστα που καταμετρείται, της αφαίρεσης (όπου κάθε σύνολο στοιχείων μπορεί να καταμετρηθεί με τον ίδιο τρόπο) και της πληθικότητας, όπου η τελευταία λέξη δηλώνει το πλήθος του συνόλου (βλ. Gelman & Gallistel, 1978). Η υιοθέτηση των αρχών της απαρίθμησης κατά τη γλωσσική περίοδο ενισχύει την ήδη υπάρχουσα προσκόλληση στις διακριτές ποσότητες, καθώς και την προκατάληψη του φυσικού αριθμού (Hartnett & Gelman, 1998).

Σύμφωνα με την προσέγγιση της Mix και των συνεργατών της η αριθμητική ικανότητα δεν έγκειται στην ικανότητα του ανθρώπου να διακρίνει σύνολα αντικειμένων με βάση την πληθικότητα του κάθε συνόλου όπως υποστηρίζουν κάποιοι ερευνητές (Starkey, Spelke, & Gelman, 1990), αλλά με βάση το συνολικό μέγεθος (όγκος, έκταση) της εν λόγω ποσότητας, είτε είναι διακριτή είτε συνεχής (Antell & Keating, 1983· Feigenson, Carey, & Spelke, 2002). Έτσι, δέχονται ότι στην αριθμητική ικανότητα του ανθρώπου εμπλέκονται παραπάνω από ένας γνωστικοί μηχανισμοί (Carey, 2001· Mix, Levine, & Huttenlocher, 2002). Έστω κι αν αμφισβητούν την ύπαρξη ενός εξειδικευμένου μηχανισμού κατανόησης της πληθικότητας ενός συνόλου, με τον τρόπο που πρότειναν οι Galistel και Gelman (βλ. Mix και συνεργάτες, 2002), δέχονται την ύπαρξη του φαινομένου της 'προκατάληψης του φυσικού αριθμού', το οποίο υποστηρίζουν ότι οφείλεται στη γνωστική ανάπτυξη που επιτυγχάνεται μέσω της εσωτερίκευσης εργαλείων του πολιτισμού [κάνοντας χρήση της ορολογίας που προτείνει ο Vygotsky (1978)], όπως είναι οι αρχές της απαρίθμησης που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Τέλος, μια άλλη προσέγγιση που εστιάζει περισσότερο στη μάθηση θέλει την προκατάληψη του φυσικού αριθμού να είναι εννοιολογικής φύσεως και αποτέλεσμα μάθησης και προβληματικής διδασκαλίας (Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993). Δίνει ιδιαίτερη σημασία στις εμπειρίες των παιδιών με τους αριθμούς στο κοινωνικό-πολιτιστικό τους περιβάλλον και πρωτεύοντα ρόλο στο σχολείο. Μοιράζεται έτσι πολλά κοινά με τις υπόλοιπες προσεγγίσεις για τη διαδικασία της μάθησης που, στα πλαίσια της κονστρουκτιβιστικής παράδοσης, δέχονται ότι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών για τους φυσικούς αριθμούς θα επηρέαζε τον τρόπο με τον οποίο κατανοούν τα κλάσματα και τους ρητούς.

Εμείς παραμένουμε αγνωστικιστές όσον αφορά τις πιθανές βιολογικές βάσεις αυτού του φαινομένου, αφού άλλωστε ο διάλογος για το εάν αυτές υπάρχουν και ποιος είναι ο ρόλος τους στην πρόσληψη και χρήση των φυσικών ή/και των μη-φυσικών αριθμών είναι ακόμα ανοιχτός (βλ. Ni & Zhou, 2005). Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, όπως έχουμε αναλυτικά αναφέρει παραπάνω, εστιάζει στο πρόβλημα που προκύπτει, όταν χαρακτηριστικά μιας νέας έννοιας βρίσκονται σε σύγκρουση με αυτά του προϋπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου. Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού θέτει ένα πρόβλημα εννοιολογικής αλλαγής, από τη στιγμή που η αρχική θεωρία των μαθητών για τον αριθμό που οργανώνεται γύρω από τη μαθηματική έννοια του φυσικού αριθμού (βλ. Vosniadou και συνεργάτες, 2008) βρίσκεται σε σύγκρουση με θεμελιώδη χαρακτηριστικά εννοιών, όπως τα κλάσματα και οι δεκαδικοί που οι μαθητές θα διδαχθούν μέσα από τη συστηματική διδασκαλία. Παρόλα αυτά, το ερώτημα του πώς προέκυψε η προκατάληψη του φυσικού αριθμού είναι σημαντικό, τόσο για την καλύτερη κατανόηση των λαθών και των δυσκολιών των μαθητών που αυτή συνεπάγεται, όσο και για την υιοθέτηση των κατάλληλων διδακτικών προσεγγίσεων που θα βοηθούσαν τους μαθητές να την υπερβούν.

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, τα παιδιά ήδη από την προσχολική ηλικία έχουν σχηματίσει κάποιες ιδέες σε σχέση με το τι μπορεί να θεωρείται ότι είναι ‘αριθμός’ (Ni & Zhou, 2005). Η αρχική αυτή γνώση των μαθητών για τους αριθμούς είναι κοντινή στην μαθηματική έννοια του φυσικού αριθμού (Vosniadou και συνεργάτες, 2008), καθώς οργανώνεται με βάση τις αρχές της ένα-προς-ένα απαρίθμησης (Gallistel & Gelman, 1992· Gelman, 2000), τουλάχιστον στην γλωσσική περίοδο της ανάπτυξης. Η γνώση αυτή των παιδιών εμφανίζεται χρήσιμη και λειτουργεί βοηθητικά όταν μαθαίνουν τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών, όπως ότι ‘κάθε αριθμός έχει έναν επόμενο και έναν προηγούμενο αριθμό’ (Gelman, 2000· Hartnett & Gelman, 1998· Vamvakoussi & Vosniadou, 2007), ή όταν μαθαίνουν τις βασικές πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με φυσικούς (Fuson, 1988· Steffe & Cobb, 1988). Με τον τρόπο αυτό, η αρχική γνώση των μαθητών για τους αριθμούς επιβεβαιώνεται από τη καθημερινή τους εμπειρία με τους φυσικούς αριθμούς και ενισχύεται από τα πρώτα χρόνια της συστηματικής διδασκαλίας, με αποτέλεσμα να εδραιώνεται περαιτέρω, καταλήγοντας να αποτελεί ένα κυρίαρχο εναλλακτικό πλαίσιο των παιδιών για τον αριθμό.

Στο εναλλακτικό αυτό πλαίσιο/θεωρία ανατρέχουν συχνά οι μαθητές με αποτέλεσμα την εμφάνιση συγκεκριμένων λαθών και την ύπαρξη αυξημένης δυσκολίας όταν μη-φυσικοί αριθμοί, όπως τα κλάσματα, εισάγονται στο μαθηματικό πρόγραμμα σπουδών

(Gelman, 2000· Mack, 1988· Ni & Zhou, 2005· Stafylidou & Vosniadou, 2004). Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές εμφανίζονται να ερμηνεύουν τα κλάσματα ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς και ως εκ τούτου θεωρούν ότι το $\frac{1}{4}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{1}{3}$ διότι το 4 είναι μεγαλύτερο από το 3. Επίσης, πολλοί μαθητές κάνουν πράξεις με κλάσματα σαν να επρόκειτο για φυσικούς αριθμούς και αυτό οδηγεί σε λάθη. Για παράδειγμα, υπάρχουν μαθητές που θα έλεγαν ότι $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{5}{7}$ προσθέτοντας λανθασμένα αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή, σαν να ήταν απλοί φυσικοί αριθμοί που χωρίζονται με μια παύλα.

Το ίδιο φαίνεται να συμβαίνει και στην περίπτωση της κατανόησης των αρνητικών αριθμών (Vlassis, 2004) ή και των ρητών (Moskal & Magone, 2000· Resnick και συνεργάτες, 1989). Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση της κατανόησης των ρητών αριθμών, οι Vamvakoussi και Vosniadou (2004· 2007) υποστηρίζουν ότι η προϋπόθεση της διακριτότητας, που είναι μια ιδιότητα που χαρακτηρίζει τη δομή του συνόλου των φυσικών αριθμών, εμποδίζει την επαρκή κατανόηση της πυκνότητας από τους μαθητές, η οποία είναι μια ιδιότητα της δομής του συνόλου των ρητών. Έτσι, πολλοί μαθητές εμφανίζονται να θεωρούν ότι ανάμεσα σε δύο ψευτοδιαδοχικούς αριθμούς (όπως π.χ., το 0,5 και 0,6 ή το 2/5 και 3/5) δεν υπάρχουν άλλοι πραγματικοί αριθμοί. Συχνά δε, εμφανίζονται και πεποιθήσεις όπως αυτή, ότι «πάντα ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει τον αριθμό, ενώ η διαίρεση τον μικραίνει», που προέρχονται επίσης από την ενεργοποίηση της γνώσης των μαθητών για τους υπολογισμούς με φυσικούς αριθμούς, σύμφωνα με τους Fischbein, Deri, Nello, & Marino (1985).

3.4 Η εννοιολογική αλλαγή και η κατανόηση της μεταβλητής

Στην παρούσα μελέτη, όπως άλλωστε έχουμε αναφέρει παραπάνω, θα εστιάσουμε σε μία έννοια, που, αν και δεν αποτελεί ένα βήμα στην ανάπτυξη του αριθμού, όπως αντίστοιχα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ο ρητός ή ο πραγματικός αριθμός, έχει μια άμεση σχέση με τον αριθμό: είναι η έννοια της μεταβλητής. Η έννοια της μεταβλητής είναι θεμελιώδης έννοια της άλγεβρας, η κατανόηση της οποίας αποτελεί σημαντικό στόχο των αναλυτικών προγραμμάτων που αφορούν τα μαθηματικά. Όπως είδαμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 1, εμπειρικές μελέτες καταγράφουν αυξημένη δυσκολία από τους μαθητές να κατανοήσουν αυτή την έννοια, καθώς και την εμφάνιση πλήθους λαθών και παρερμηνειών. Στην παρούσα μελέτη θα διερευνήσουμε τη χρήση του θεωρητικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής, ως μια νέα προσέγγιση για να εξετάσουμε την επεξηγηματική και προβλεπτική του αξία, τόσο για να ερμηνεύσει με έναν συστηματικό τρόπο τις παρερμηνείες των μαθητών, όπως αυτές έχουν καταγραφεί από τη διεθνή βιβλιογραφία, όσο και για να κάνει νέες προβλέψεις για λάθη που θα έκαναν οι μαθητές και συγκεκριμένες δυσκολίες που θα εμφάνιζαν, σε ειδικά σχεδιασμένες μαθηματικές δοκιμασίες.

Όπως αναλυτικά αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1, διάφορες προσεγγίσεις έχουν προταθεί για να ερμηνεύσουν τα λάθη και τις δυσκολίες των μαθητών με τον αλγεβρικό συμβολισμό. Αυτό που προσθέτει το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής είναι ότι δεν αντιμετωπίζει τις επιμέρους παρερμηνείες των μαθητών ως ασύνδετες μεταξύ τους ιδέες, που εμφανίζονται σποραδικά και με άναρχο τρόπο, χωρίς αναφορά σε κάποιες βαθύτερες ιδέες και πεποιθήσεις. Αντίθετα, υποστηρίζει ότι πολλά από τα λάθη των μαθητών, που εμφανίζονται με συστηματικότητα στις απαντήσεις τους και που αφορούν τη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα, οφείλονται στην επίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης τους, που είναι συγκροτημένη σε ένα σχετικά συνεκτικό εννοιολογικό πλέγμα εννοιών και σχέσεων μεταξύ των εννοιών γύρω από το φυσικό αριθμό, που έχει τη μορφή θεωρίας-πλαισίου για τον αριθμό. Με βάση όσα αναφέραμε παραπάνω για τη θεωρία-πλαίσιο των μαθητών για τον φυσικό αριθμό και του τρόπου με τον οποίο επηρεάζει την κατανόηση άλλων εννοιών, θα περιμέναμε ότι το εναλλακτικό αυτό πλαίσιο για τον αριθμό θα εμπόδιζε την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής ως γενικευμένου πραγματικού αριθμού. Για να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της μεταβλητής ως ένα σύμβολο που αναπαριστά τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό θα πρέπει να προβούν σε αλλαγή του αρχικό τους εννοιολογικού πλαισίου για τον αριθμό, μέσα από τη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής.

Αυτό γιατί η νέα πληροφορία που έρχεται μέσα από τη συστηματική διδασκαλία και αφορά την έννοια της μεταβλητής θέλει τα γράμματα του αλφαβήτου, στο ρόλο μεταβλητής, να αναπαριστούν τον οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό. Σε ένα πρώτο επίπεδο, η πληροφορία αυτή έρχεται σε σύγκρουση με την προηγούμενη εμπειρία των μαθητών με τα γράμματα τόσο ως γλωσσικά σύμβολα όσο και με τη χρήση τους στην αριθμητική ως συντομογραφίες/ταμπέλες ονομάτων ή αντικειμένων. Για παράδειγμα, συχνά στα προβλήματα της αριθμητικής συμβολίζεται με 'Ν' ο Νίκος και με 'μ' τα 'μέτρα' ή οι 'μπανάνες'. Μια τέτοια χρήση των γραμμάτων στο προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο στέκεται ως ένα πρώτο εμπόδιο στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής. Όπως φάνηκε από τις εμπειρικές μελέτες που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 1, κατά την εισαγωγή τους στην άλγεβρα και την έννοια της μεταβλητής οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να ερμηνεύουν τα γράμματα ως συντομογραφίες για ονόματα ή αντικείμενα και όχι ως σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς (Booth, 1984· Hart, 1981· Kieran, 1992· Kuchemann, 1981· Stacey & MacGregor, 1997). Αυτή η παρερμηνεία διορθώνεται σχετικά εύκολα, αφού λίγοι μαθητές στο Λύκειο ερμηνεύουν με αυτόν τον τρόπο τη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα (Alibali και συνεργάτες, 2007· Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, & Stephens, 2005· Stacey & MacGregor, 1997).

Παρόλα αυτά, το να αποδεχθούν τελικά οι μαθητές ότι τα γράμματα αναπαριστούν αριθμούς δε σημαίνει ότι απέκτησαν μια επαρκή κατανόηση της μαθηματικής έννοιας της μεταβλητής ως το σύμβολο που αναπαριστά τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Πολλοί από τους μαθητές που έχουν κατανοήσει ότι τα γράμματα αναπαριστούν αριθμούς εμφανίζουν μια άλλη παρερμηνεία, κατά την οποία τα γράμματα αναπαριστούν ένα μόνο συγκεκριμένο αριθμό και όχι ένα εύρος αριθμών. Από τη μεριά της εννοιολογικής αλλαγής θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι, από τη στιγμή που οι μαθητές δέχονται τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα γράμματα ως μεταβλητές και αριθμούς, ενεργοποιείται το εναλλακτικό ερμηνευτικό πλαίσιο των μαθητών για τον αριθμό, που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό, όπως αυτό περιγράφηκε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 1 της παρούσας διατριβής. Οι δυσκολίες, λοιπόν, που συνεχίζουν να έχουν οι μαθητές με την έννοια της μεταβλητής και οι νέες παρερμηνείες που εμφανίζονται θα μπορούσαν να οφείλονται στα εμπόδια που βάζει το εννοιολογικό πλαίσιο για τον αριθμό, που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό. Εδώ θα σημειώσουμε ότι, όταν οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της μεταβλητής, έχουν ήδη διδαχθεί συστηματικά μη-φυσικούς αριθμούς, όπως δεκαδικούς και κλάσματα. Παρόλα αυτά, όπως υποστηρίζουν πολλοί ερευνητές που αναφέρονται αναλυτικά παραπάνω, οι μαθητές απέχουν πολύ από μια επαρκή κατανόηση αυτών των εννοιών καθώς οι θεμελιώδεις προϋποθέσεις του φυσικού αριθμού συνεχίζουν για καιρό να ρυθμίζουν τον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύονται οι έννοιες αυτές (βλ. Ni & Zhou, 2005).

Για να κατανοήσουν οι μαθητές επαρκώς την έννοια της μεταβλητής θα πρέπει όχι μόνο να κατανοήσουν ότι τα γράμματα αναπαριστούν παραπάνω από έναν αριθμούς, αλλά και ότι το είδος των αριθμών που μπορούν να δοθούν στα γράμματα ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Στο σημείο αυτό ανακύπτει ένα ερώτημα που δεν έχει απασχολήσει την έρευνα μέχρι τώρα, στο βαθμό τουλάχιστον που γνωρίζουμε. Έστω ότι οι μαθητές κατανοούν το ρόλο των γραμμάτων στην άλγεβρα να αναπαριστούν ένα σύνολο αριθμών και όχι έναν συγκεκριμένο αριθμό μόνο· αυτό σημαίνει αυτόματα ότι έχουν κατανοήσει την έννοια της μεταβλητής ως οποιοσδήποτε *πραγματικός* αριθμός, όπως άλλωστε ορίζεται ρητά στο σχολικό εγχειρίδιο; Ή, για να τοποθετήσουμε το ίδιο ερώτημα με άλλον τρόπο, οι μαθητές που ερμηνεύουν τα γράμματα στην άλγεβρα ως σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς, τι αριθμούς τείνουν να δίνουν στα γράμματα; Θα μπορούσαν να δεχτούν ότι ένα γράμμα μπορεί ως μεταβλητή να πάρει μια κλασματική ή μια δεκαδική τιμή με την ίδια ευκολία όπως αν έπαιρνε μια φυσική τιμή; Και αν όχι, τότε ποιοι αριθμοί είναι πιο ‘προνομιούχοι΄ με την έννοια του πιο πιθανού να αντικαταστήσει μια μεταβλητή και γιατί;

Στην διεθνή βιβλιογραφία δεν αναφέρονται μελέτες που να εστίασαν στο συγκεκριμένο ερώτημα, ούτε καταγράφονται κάποιες παρατηρήσεις με εξαίρεση μια μικρή αναφορά της Booth (1984) ότι στην πλειοψηφία τους οι μαθητές έδιναν μόνο φυσικούς αριθμούς στις μεταβλητές που εμφανίζονταν σε κάποιες δοκιμασίες και στην τάση των μαθητών να δίνουν αριθμητικές τιμές ανάλογα με τη θέση τους στο αλφάβητο, όπως αυτή αναφέρθηκε παραπάνω.

Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής στο συγκεκριμένο ερώτημα θα προέβλεπε ότι το εναλλακτικό ερμηνευτικό πλαίσιο των μαθητών για τον αριθμό, που είναι αυτό του φυσικού αριθμού, θα στεκόταν εμπόδιο στην κατανόηση της μεταβλητής ως γενικευμένου πραγματικού αριθμού. Υποθέσαμε, λοιπόν, ότι κάποιοι μαθητές θα κατανοούν τις μεταβλητές στα πλαίσια του εναλλακτικού τους πλαισίου για τους αριθμούς, που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό. Στην περίπτωση αυτή θα ερμηνεύουν τις μεταβλητές ως σύμβολα φυσικών αριθμών, αποδίδοντάς τους ιδιότητες των φυσικών αριθμών, και αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα συγκεκριμένα λάθη και παρερμηνείες σε διάφορα αλγεβρικά πλαίσια, όπως στην κατανόηση των τιμών που μπορούν να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν μεταβλητές. Πιο συγκεκριμένα, ότι οι μαθητές θα έχουν την τάση να θεωρούν ότι τα γράμματα ως μεταβλητές στην άλγεβρα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς. Θα περιμέναμε λοιπόν ότι οι μαθητές θα έτειναν να δίνουν στις μεταβλητές φυσικούς αριθμούς και ότι αυτό θα είχε συνέπειες σε διάφορες εκφάνσεις της μαθηματικής τους δραστηριότητας. Με άλλα λόγια, ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού αφήνει πολλούς από τους μαθητές καθηλωμένους σε μία *«αριθμητική άλγεβρα των φυσικών αριθμών»*, έστω κι αν η συστηματική διδασκαλία τούς έχει εισαγάγει στη *«συμβολική άλγεβρα των πραγματικών αριθμών»*, χρησιμοποιώντας το διαχωρισμό του Peacock (βλ. Κεφ. 2, σελ 44).

Χρησιμοποιώντας το σχήμα για τη νοηματοδότηση των αλγεβρικών παραστάσεων της Resnick και των συνεργατών της (Resnick και συνεργάτες, 1989) (βλ. Κεφ 1, σελ. 23 της παρούσας διατριβής) θα λέγαμε ότι, όταν οι μαθητές τείνουν να ερμηνεύουν τα γράμματα στην άλγεβρα ως φυσικούς αριθμούς, έχουν μια πολύ περιορισμένη έκταση του «κόσμου των αριθμών» από τον οποίο αντλούνε αναφορικό νόημα για τις αλγεβρικές παραστάσεις. Αυτός ο περιορισμός θα εμπόδιζε ή θα περιόριζε την κατανόηση εννοιών όπως οι συναρτήσεις, η απόλυτη τιμή αριθμού, οι τετραγωνικές ρίζες, και οι μετασχηματισμοί λύσεων εξισώσεων ή ανισώσεων.

Στην παρούσα διατριβή, σε μια σειρά εμπειρικών μελετών θα χρησιμοποιήσουμε το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής για να εξετάσουμε τι είδους αριθμούς τείνουν οι μαθητές να δίνουν στα γράμματα όταν αυτά χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές στην άλγεβρα, καθώς και τις νέες παρερμηνείες που προκύπτουν από την τάση αυτή των μαθητών. Στα επόμενα κεφάλαια παρουσιάζουμε αυτές τις μελέτες.

Κεφάλαιο 4
Πείραμα 1

4.1 Υποθέσεις της έρευνας

Με βάση τα όσα αναλυτικά αναφέρθηκαν παραπάνω, σε σχέση με την εφαρμογή του θεωρητικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής στην μελέτη των λαθών που εμφανίζουν οι μαθητές, και των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν με την κατανόηση της χρήσης γραμμάτων ως μεταβλητές στην άλγεβρα, θα υποθέταμε ότι το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο των μαθητών για τον αριθμό, που είναι οργανωμένο στα πλαίσια της αριθμητικής γύρω από το φυσικό αριθμό, θα στέκεται εμπόδιο στην κατανόηση της μεταβλητής ως σύμβολο που δύναται να αναπαραστήσει τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό (εφόσον δεν υπάρχουν επιμέρους περιορισμοί στο εύρον τιμών της). Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επηρεάζει τους μαθητές να θεωρούν ότι τα γράμματα που χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές στην άλγεβρα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς. Λόγω αυτής της πεποίθησης θα περιμέναμε ότι οι μαθητές θα είχαν την τάση να αποδίδουν μόνο φυσικές τιμές στα γράμματα που εμφανίζονται σε αλγεβρικές παραστάσεις – στο πλαίσιο, δηλαδή, στο οποίο διδάχθηκαν αρχικά τη χρήση της έννοιας (βλ. Αλιμπινίσης και συνεργάτες, 1989a).

Για να ελέγξουμε την παραπάνω υπόθεση δώσαμε σε ένα δείγμα μαθητών ένα ερωτηματολόγιο (ΕΡ/Α) στο οποίο τους ζητούσαμε να δώσουν ό,τι τιμές θέλουν σε μια σειρά από δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις που περιείχαν μεταβλητές. Με αυτόν τον τρόπο θα είχαμε κάποια δεδομένα για το τι αριθμούς τείνουν οι μαθητές να δίνουν στις μεταβλητές. Επειδή όμως σε αυτή τη συνθήκη κάθε απάντηση είναι εν δυνάμει ορθή, καθώς, μαθηματικά μιλώντας, κάθε μεταβλητή – και κατ' επέκταση κάθε αλγεβρική παράσταση – μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, προχωρήσαμε στη δημιουργία ενός ακόμα ερωτηματολογίου, στο οποίο οι σωστές απαντήσεις θα διακρίνονταν από τις λανθασμένες με έναν πιο ξεκάθαρο τρόπο. Έτσι, αποφασίστηκε να δοθεί σε ένα παρόμοιο δείγμα μαθητών ένα άλλο ερωτηματολόγιο (ΕΡ/Β) στο οποίο θα τους ζητούνταν να δώσουν αριθμούς που πίστευαν ότι *δεν μπορούν* να τους πάρουν οι ίδιες αλγεβρικές παραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν και στο ΕΡ/Α. Κάτω από τη συνθήκη αυτή υπάρχει μόνο μία ορθή απάντηση, ότι δεν υπάρχουν αριθμοί που δεν μπορεί να τους πάρει μια αλγεβρική παράσταση. Για το λόγο αυτό θεωρήσαμε ότι οι μαθητές δε θα μπορούσαν να απαντήσουν στο ΕΡ/Β με έναν αυτόματο και διαισθητικό τρόπο όπως στο ΕΡ/Α. Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζεται αναλυτικά ο σχεδιασμός και τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης.

4.2 Μέθοδος

4.2.1 Συμμετέχοντες

Πενήντα επτά μαθητές και μαθήτριες από δύο δημόσια Γυμνάσια της Αθήνας συμμετείχαν σε αυτή τη μελέτη. Οι μαθητές πήγαιναν στην Β' και τη Γ' Γυμνασίου (ηλικίας κατά προσέγγιση 14,5 ετών). Επιλέχθηκαν οι τάξεις αυτές διότι η έννοια και η χρήση της μεταβλητής σε αλγεβρικές παραστάσεις είχε εισαχθεί στους μαθητές ήδη από την Α' Γυμνασίου (βλ. Αλιμπινίσης και συνεργάτες, 1987· Αλιμπινίσης και συνεργάτες, 1989a) και έκτοτε χρησιμοποιούνταν σε διάφορα μαθηματικά πλαίσια, όπως σε εξισώσεις, συναρτήσεις, κτλ. Είκοσι εννέα μαθητές συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο Α (ΕΡ/Α) ενώ είκοσι οχτώ συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο Β (ΕΡ/Β). Το δείγμα ήταν σχεδόν μοιρασμένο σε κορίτσια και αγόρια (31 κορίτσια και 26 αγόρια).

4.2.2 Υλικά

Τα ερωτηματολόγια ξεκινούσαν με τις παρακάτω οδηγίες: «*Στην άλγεβρα χρησιμοποιούμε γράμματα (όπως το α, β, x, y) για να αναπαραστήσουμε αριθμούς. Στις ερωτήσεις που ακολουθούν χρησιμοποιούμε τα γράμματα με αυτό τον τρόπο. Διαβάστε τις παρακάτω ερωτήσεις με προσοχή και απαντήστε με όσο το δυνατόν περισσότερους αριθμούς*». Και στα δύο ερωτηματολόγια δόθηκαν στους μαθητές οι εξής αλγεβρικές παραστάσεις: Ε1: α, Ε2: -β, Ε3: 4γ, Ε4: 1/γ, Ε5: α/β, Ε6: δ+δ+δ, Ε7: κ+3. Για κάθε μία από τις δοσμένες παραστάσεις το ερώτημα ήταν στο ΕΡ/Α: *«Γράψτε αριθμητικές τιμές που νομίζετε ότι μπορεί να πάρει το ...»* και στο ΕΡ/Β: *«Γράψτε αριθμητικές τιμές που νομίζετε ότι <u>δεν</u> μπορεί να πάρει να πάρει το ...»*.

4.2.3 Διαδικασία

Τα ερωτηματολόγια μοιράστηκαν στους μαθητές με τυχαίο τρόπο και κάθε μαθητής είχε να συμπληρώσει ένα μόνο ερωτηματολόγιο (είτε το ΕΡ/Α είτε το ΕΡ/Β). Οι μαθητές συμπλήρωσαν τα ερωτηματολόγια μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας τους, παρουσία του καθηγητή των μαθηματικών και του ερευνητή. Μόνο διευκρινιστικές ερωτήσεις επιτρέπονταν, οι οποίες και απαντήθηκαν. Είχαν στη διάθεσή τους μία ολόκληρη διδακτική ώρα, ενώ μπορούσαν να πάρουν χρόνο και από το διάλειμμα που ακολουθούσε.

4.3 Αποτελέσματα

Αρχικά οι απαντήσεις των μαθητών στο ΕΡ/Α τοποθετήθηκαν σε τρεις κατηγορίες: ‘Ορθές’, ‘Λανθασμένες’[7] και ‘Καμία Απάντηση’. Στην κατηγορία ‘Ορθές’ απαντήσεις τοποθετήθηκαν αυτές που θα έδιναν οι μαθητές που έχουν κατανοήσει σε βάθος τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές στην άλγεβρα και θα ανέφεραν ότι «όλους τους αριθμούς μπορεί να τους πάρει η αλγεβρική παράσταση», δίνοντας επίσης παραδείγματα από αριθμούς από κάθε είδος και όχι μόνο φυσικούς. Κάθε άλλη απάντηση, όπως για παράδειγμα το να δοθούν μόνο φυσικοί αριθμοί ή μόνο κλάσματα, κατηγοριοποιήθηκε ως ‘Λανθασμένη’ απάντηση. Ο Πίνακας 4.1 παρουσιάζει ποσοστά των απαντήσεων για κάθε μία από τις ερωτήσεις του ΕΡ/Α σε κάθε μια από τις τρεις παραπάνω κατηγορίες απαντήσεων.

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 4.1, μόνο 23,6% του συνόλου των απαντήσεων των μαθητών ήταν ορθές ενώ στην πλειοψηφία τους οι απαντήσεις που δόθηκαν ήταν με ένα μόνο είδος αριθμών (68% στο ΕΡ/Α), π.χ. μόνο με φυσικούς ή μόνο με κλάσματα.

Αλγεβρικές παραστάσεις	**Κατηγορίες απαντήσεων**

[7] Μαθηματικά μιλώντας, στο ΕΡ/Α κάθε απάντηση είναι ορθή, αφού κάθε αριθμός θα μπορούσε να δοθεί σε οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση (εκτός από το μηδέν στην 1/γ η οποία δεν αναφέρθηκε). Παρόλα αυτά χρησιμοποιούμε τον όρο ‘ορθές’ για να χαρακτηρίσουμε τις ‘μαθηματικώς εκλεπτυσμένες’ απαντήσεις και τον όρο ‘λανθασμένες’ για τις ‘λιγότερο εκλεπτυσμένες’ απαντήσεις. Η χρήση αυτών των όρων γίνεται για μεθοδολογικούς λόγους που θα φανούν στη συνέχεια, όπως επίσης και γιατί είναι πιο δόκιμοι γλωσσικά όροι.

	Ορθές	Λανθασμένες	Καμία απάντηση
α	31.0	69.0	--
-β	13.8	86,2	--
4γ	24.1	69.0	6.9
$\frac{1}{\gamma}$	17.2	69.0	13.8
$\frac{\alpha}{\beta}$	20.7	69.0	10.3
δ+δ+δ	27.6	65.5	6.9
κ+3	31.0	48.3	20.7
Σύνολο	23.6	68.0	8.4

Πίνακας 4.1 Ποσοστά απαντήσεων σε κάθε κατηγορία απαντήσεων κάθε αλγεβρικής παράστασης του ΕΡ/Α

Παρόμοια ήταν τα αποτελέσματα για τις απαντήσεις των μαθητών στο σύνολο των ερωτήσεων του ΕΡ/Β, όπως αυτές παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2. Για το ΕΡ/Β, υπήρχε μόνο μία ορθή απάντηση, ότι, δηλαδή, ‘δεν υπάρχουν τιμές που δεν μπορεί να πάρει μια αλγεβρική παράσταση’ ή ότι ‘κάθε αριθμός μπορεί να δοθεί σε κάθε αλγεβρική παράσταση’. Οι απαντήσεις των μαθητών που μπήκαν στη διαδικασία να γράψουν αριθμούς που θεωρούσαν ότι δεν μπορούν πάρουν οι δοσμένες παραστάσεις, κατηγοριοποιήθηκαν ως «Λανθασμένες».

Όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 4.2, μόνο το 32,7% των απαντήσεων ήταν ορθές σε αυτό το ερωτηματολόγιο. Η πλειοψηφία των απαντήσεων (46,9% στο ΕΡ/Β) ήταν λανθασμένες μιας και οι μαθητές που τις έδωσαν έγραψαν διάφορους αριθμούς που πίστευαν ότι δεν μπορούν να τους πάρουν οι δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις, ενώ στο 20,4% των περιπτώσεων δεν δόθηκε καμία απάντηση. Η αύξηση του ποσοστού των μαθητών που δεν έδωσαν καμιά απάντηση στις ερωτήσεις του ΕΡ/Β, σε σχέση με το αντίστοιχο ποσοστό του ΕΡ/Α, θα μπορούσε να εξηγηθεί λόγω της φύσης των ερωτήσεων, που ήταν σαφώς πιο δύσκολες, αφού αυτού του τύπου οι ερωτήσεις είναι μη-διαισθητικές και οι μαθητές δεν τις έχουν ξανασυναντήσει στη μέχρι τώρα μαθηματική τους δραστηριότητα.

Αλγεβρικές παραστάσεις	**Κατηγορίες απαντήσεων**		
	Ορθές	Λανθασμένες	Καμία απάντηση
α	28.6	67.8	3.6
-β	17.9	75.0	7.1
4γ	32.1	46.4	21.4
$\frac{1}{\gamma}$	42.9	42.9	14.3
$\frac{\alpha}{\beta}$	35.7	35.7	28.6
δ+δ+δ	46.4	28.6	25.0
κ+3	25.0	32.1	42.9
Σύνολο	32.7	46.9	20.4

Πίνακας 4.2 Ποσοστά των ορθών και μη απαντήσεων σε κάθε ερώτηση του ΕΡ/Β

Για να εξετάσουμε αν υπήρχαν σημαντικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο απάντησαν οι μαθητές στα δύο ερωτηματολόγια και, πιο συγκεκριμένα, για να εξετάσουμε αν τα πηγαίνουν καλύτερα ή χειρότερα σε ένα από αυτά, προχωρήσαμε στην παρακάτω ανάλυση: βαθμολογήσαμε τις λανθασμένες απαντήσεις του συνόλου του δείγματος με 1, ενώ τις ορθές απαντήσεις με 2, και υπολογίσαμε το βαθμό επίδοσης κάθε μαθητή στο σύνολο των επτά ερωτήσεων του κάθε ερωτηματολογίου. Ανάλυση διακύμανσης (ANOVA) στη μεταβλητή που προέκυψε έδειξε ότι δεν υπάρχουν στατιστικώς σημαντικές διαφορές στη συνολική επίδοση των μαθητών ανάμεσα στα δύο ερωτηματολόγια. Λόγω του γεγονότος ότι η κατανομή της μεταβλητής της συνολικής επίδοσης απείχε ελαφρώς από την κανονική κατανομή, συνεχίσαμε με τη διεξαγωγή και μη-παραμετρικών κριτηρίων με τα ίδια αποτελέσματα.

Στη συνέχεια προχωρήσαμε σε πιο λεπτομερή ανάλυση των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών, κατηγοριοποιώντας εκ νέου τις απαντήσεις τους σε πιο αναλυτικές κατηγορίες με βάση το είδος των αριθμών με τους οποίους απάντησαν.

4.3.1 Ανάλυση των λανθασμένων απαντήσεων στο 'α' και στο '-β'

Αρχικά θα αναλύσουμε τον τρόπο με τον οποίο απάντησαν οι μαθητές στις δύο πρώτες αλγεβρικές παραστάσεις ('α' και '–β') ενώ θα ακολουθήσουν οι απαντήσεις στις υπόλοιπες παραστάσεις. Αυτό γίνεται διότι οι δύο αυτές παραστάσεις έχουν διαφορετικά ποιοτικά χαρακτηριστικά από τις υπόλοιπες: είναι οι πιο απλές αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν μία μεταβλητή και που εμφανίζονται με ή χωρίς αρνητικό πρόσημο. Μαθηματικά μιλώντας αποτελούν μονώνυμα, με συντελεστή τη μονάδα στην περίπτωση του 'α' και το -1 στην περίπτωση του '-β'. Οι υπόλοιπες αλγεβρικές παραστάσεις αποτελούν πιο σύνθετες μαθηματικές κατασκευές.

Συνολικά διακρίθηκαν τέσσερις κατηγορίες λανθασμένων απαντήσεων, ανάλογα με το είδος των αριθμών που δώσανε οι μαθητές. Ιεραρχημένες από τις λιγότερο στις περισσότερο εκλεπτυσμένες, οι κατηγορίες ήταν: «Φυσικοί Αριθμοί» (θετικοί ακέραιοι αριθμοί) (π.χ., 1, 2, 3), «Αρνητικοί Ακέραιοι Αριθμοί» (π.χ., -1, -2, -3), «Θετικοί μη-Ακέραιοι Αριθμοί» (π.χ., 2,33, 1/3) και «Αρνητικοί μη-Ακέραιοι Αριθμοί» (π.χ., -2,33, -1/3). Οι απαντήσεις με πάνω από ένα είδος αριθμών από αυτούς που αναφέρονται σε αυτές τις κατηγορίες τοποθετήθηκαν στην πιο εκλεπτυσμένη από αυτές τις κατηγορίες. Για παράδειγμα, μία απάντηση που περιλάμβανε φυσικούς αριθμούς και έστω και ένα θετικό κλάσμα θα τοποθετούνταν στην κατηγορία «Θετικοί μη-Ακέραιοι Αριθμοί».

Ο Πίνακας 4.3α παρουσιάζει τα ποσοστά των απαντήσεων στις δύο πρώτες αλγεβρικές παραστάσεις (‘α’ και ‘-β’) για το ΕΡ/Α. Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 4.3α, η πλειοψηφία των απαντήσεων ήταν μόνο με ‘Φυσικούς Αριθμούς’ στην περίπτωση του ‘α’ (65,5% στην Ε1, ΕΡ/Α) και με ‘Αρνητικούς Ακέραιους Αριθμούς’ στην περίπτωση του ‘-β’ (72,4% στην Ε2, ΕΡ/Α).

Από τις απαντήσεις στις δύο αυτές ερωτήσεις φαίνεται ότι οι μαθητές έχουν την τάση να απαντούν με ακέραιους αριθμούς, αφού ελάχιστοι απάντησαν με κλάσματα ή με δεκαδικούς αριθμούς. Από την άλλη μεριά, ένα ενδιαφέρον εύρημα, στο οποίο θα σταθούμε και θα το εξετάσουμε λεπτομερώς, τόσο στην παρούσα μελέτη όσο και σ’ αυτές που θα ακολουθήσουν, είναι ότι οι μαθητές φαίνεται να επηρεάζονται από το *φαινομενικό πρόσημο* των δοσμένων μεταβλητών.

Κατηγορίες απαντήσεων	**Αλγεβρικές παραστάσεις**	
	α	-β
Ορθές	31,0	13,8
Φυσικοί Αριθμοί (θετικοί	65,5	6,9

ακέραιοι αριθμοί) (1, 2, 3, κοκ.)	(ΦΑ/ιΦΠ)	(ΦΑ/δΦΠ)
Αρνητικοί Ακέραιοι Αριθμοί (-1, -2, -3, κοκ.)	3,5 (ΦΑ/δΦΠ)	72,4 (ΦΑ/ιΦΠ)
Θετικοί μη-Ακέραιοι αριθμοί (2.33, 1/3, κοκ.)	--	6,9 (μηΦΑ/δΦΠ)
Αρνητικοί μη-Ακέραιοι αριθμοί (-2.33, -1/3, κοκ.)	--	--
Καμία Απάντηση	--	--

Πίνακας 4.3.α Ποσοστά των απαντήσεων σε κάθε κατηγορία για τις ερωτήσεις Ε1 και Ε2 στο ΕΡ/Α

4.3.1.1 Φαινομενικό πρόσημο

Φαινομενικό πρόσημο ονομάζουμε το πρόσημο που φαίνεται να έχει μια μεταβλητή ως ένα εξωτερικό χαρακτηριστικό της μορφής της. Στα μαθηματικά, οι μεταβλητές δεν έχουν ένα πρόσημο το οποίο να γίνεται άμεσα αντιληπτό από τον συμβολισμό τους. Για παράδειγμα, αν σκεφτούμε με όρους αριθμών μία μεταβλητή, όπως για παράδειγμα το ‘α’ φαίνεται να έχει θετικό πρόσημο γιατί, ως γνωστόν, στους αριθμούς η απουσία προσήμου ή η παρουσία θετικού προσήμου υποδηλώνει θετική αξία (π.χ., το 3 ή +3) · αντίστοιχα, παρουσία αρνητικού προσήμου πριν από έναν αριθμό υποδηλώνει αρνητική αξία (π.χ., το -3). Παρόλα αυτά, το φαινομενικά θετικό πρόσημο της μεταβλητής ‘α’ δε δηλώνει τίποτα για τις τιμές που μπορεί αυτή να πάρει, αφού από τον ορισμό της μπορεί να πάρει οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, τόσο θετικό όσο και αρνητικό.

Όπως οι μεταβλητές έχουν φαινομενικό πρόσημο, έτσι κι οι αλγεβρικές παραστάσεις, επειδή περιέχουν μεταβλητές, έχουν συχνά ένα φαινομενικό πρόσημο που δεν είναι απαραίτητα το πρόσημο των τιμών που δύναται να αναπαραστήσουν. Το φαινομενικό πρόσημο μιας παράστασης με μορφή μονώνυμου, για παράδειγμα, είναι το πρόσημο του συντελεστή του μονώνυμου. Για παράδειγμα, στην αλγεβρική παράσταση ‘2x’ ο συντελεστής είναι θετικός και άρα έχει θετικό φαινομενικό πρόσημο, αλλά παρόλα αυτά μπορεί να πάρει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. Με τον ίδιο τρόπο, μια αλγεβρική παράσταση με αρνητικό φαινομενικό πρόσημο, όπως για παράδειγμα η ‘-2x’ μπορεί με τη σειρά της να αναπαριστά τόσο αρνητικές τιμές (όταν η μεταβλητή x πάρει θετικές τιμές) όσο και θετικές (όταν η μεταβλητή x πάρει αρνητικές τιμές, γιατί -(-3)=3)[8]. Το πραγματικό πρόσημο μιας αλγεβρικής παράστασης είναι διαφορετικό από το φαινομενικό και το ορίζουν οι τιμές που μπορεί να πάρει κάθε μεταβλητή που περιέχει. Με άλλα λόγια, το πρόσημο μιας αλγεβρικής παράστασης το καθορίζει το πεδίο ορισμού των μεταβλητών που περιέχει και όχι από μόνη της η εξωτερική της μορφή.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, οι απαντήσεις των μαθητών με αρνητικούς ακέραιους αριθμούς (-1, -2, -3) στην περίπτωση του ‘-β’ θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως αποτέλεσμα αντικατάστασης της μεταβλητής ‘β’ με φυσικούς αριθμούς, με ταυτόχρονη διατήρηση του φαινομενικά αρνητικού προσήμου της. Οι απαντήσεις των μαθητών στα δύο ερωτηματολόγια επανακατηγοριοποιήθηκαν με βάση το εάν αντικατέστησαν τα γράμματα μόνο με φυσικούς αριθμούς ή όχι, αλλά και με βάση το κατά πόσο οι αριθμοί που έδωσαν είχαν το ίδιο ή διαφορετικό πρόσημο από το φαινομενικό πρόσημο των δοσμένων

[8] Θα πρέπει να επισημάνουμε εδώ ότι υπάρχουν παραστάσεις (πολυώνυμα) που δεν έχουν ένα καθαρό φαινομενικό πρόσημο, π.χ., η 3-2x. Στις μελέτες της παρούσας διατριβής ασχολούμαστε με αλγεβρικές παραστάσεις, οι οποίες έχουν ένα ευδιάκριτο θετικό ή αρνητικό φαινομενικό πρόσημο.

αλγεβρικών παραστάσεων[9]. Έτσι, δημιουργήσαμε τέσσερις νέες κατηγορίες: «Φυσικοί Αριθμοί» (ΦΑ) ή «μη-Φυσικοί Αριθμοί» (μηΦΑ) εάν οι απαντήσεις ήταν με φυσικούς αριθμούς στις μεταβλητές ή όχι αντίστοιχα, και «ίδιο Φαινομενικό Πρόσημο» (ιΦΠ) ή «διαφορετικό Φαινομενικό Πρόσημο» (δΦΠ) εάν οι απαντήσεις είχαν το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο της μεταβλητής ή διαφορετικό αντίστοιχα.

Η νέα αυτή κατηγοριοποίηση λαμβάνει υπόψη της τις διαφορές ανάμεσα στα φαινομενικά πρόσημα δύο παραστάσεων, όπως η διαφορά στο φαινομενικά θετικό ‘α’ και στο φαινομενικά αρνητικό ‘-β’. Με αυτή την κατηγοριοποίηση οι διαφορές στις απαντήσεις – που οφείλονται στις διαφορές των ίδιων των παραστάσεων – εξαλείφονται. Έτσι, για παράδειγμα, οι απαντήσεις με θετικούς μη-φυσικούς αριθμούς στο ‘α’ και αρνητικούς μη-φυσικούς στο ‘-β’ μπαίνουν στην ίδια κατηγορία ως απαντήσεις με μη-φυσικούς αριθμούς, που όμως διατηρούν το φαινομενικό πρόσημο της δοσμένης μεταβλητής (κατηγορία μηΦΑ/ιΦΠ).

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 4.3.α, η πλειοψηφία των απαντήσεων στις δύο πρώτες ερωτήσεις του ΕΡ/Α ήταν μόνο με φυσικούς αριθμούς και είχαν το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο των δοσμένων μεταβλητών. Θετικοί ακέραιοι αριθμοί δόθηκαν στο ‘α’ και αρνητικοί ακέραιοι στο ‘-β’. Έτσι, στην πλειοψηφία τους οι απαντήσεις μπήκαν στην κατηγορία ΦΑ/ιΦΠ.

Στον Πίνακα 4.3.β παρουσιάζονται τα ποσοστά των απαντήσεων στις δύο πρώτες ερωτήσεις για το ΕΡ/Β, στο οποίο ζητούνταν από τους μαθητές να γράψουν αριθμούς που *δεν μπορούν* να πάρουν οι συγκεκριμένες παραστάσεις.

[9] Θα πρέπει επίσης να επισημάνουμε ότι στην περίπτωση του ‘α’ η μεταβλητή ‘α’ και η αλγεβρική παράσταση ‘α’ ταυτίζονται, ενώ μπορούμε να πούμε ότι στην περίπτωση του ‘-β’ το φαινομενικό πρόσημο της μεταβλητής ‘β’ ταυτίζεται με το φαινομενικό πρόσημο της αλγεβρικής παράστασης ‘-β’ και είναι το μείον. Η διαφορά αυτή ανάμεσα σε φαινομενικό πρόσημο μεταβλητών και φαινομενικό πρόσημο αλγεβρικής παράστασης ως συνολική κατασκευή είναι πιο ξεκάθαρη στις αλγεβρικές παραστάσεις Ε3-Ε7 που αναλύονται παρακάτω.

Κατηγορίες απαντήσεων	Αλγεβρικές παραστάσεις	
	α	-β
Ορθές	28,6	17,9
Φυσικοί Αριθμοί (θετικοί ακέραιοι αριθμοί) (1, 2, 3, κοκ.)	3,6 (ΦΑ/ιΦΠ)	50,0 (ΦΑ/δΦΠ)
Αρνητικοί Ακέραιοι Αριθμοί (-1, -2, -3, κοκ.)	46,4 (ΦΑ/δΦΠ)	3,6 (ΦΑ/ιΦΠ)
Θετικοί μη-Ακέραιοι αριθμοί (2.33, 1/3, κοκ.)	7,1 (μηΦΑ/ιΦΠ)	14,3 (μηΦΑ/δΦΠ)
Αρνητικοί μη-Ακέραιοι αριθμοί (-2.33, -1/3, κοκ.)	10,7 (μηΦΑ/δΦΠ)	7,1 (μηΦΑ/ιΦΠ)
Καμία απάντηση	3,6	7,1

Πίνακας 4.3.β Ποσοστά των απαντήσεων σε κάθε κατηγορία για τις ερωτήσεις Ε1 και Ε2 στο ΕΡ/Β

Στην πλειοψηφία τους οι απαντήσεις ήταν λανθασμένες και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές έτειναν να απαντούν με αρνητικούς ακέραιους αριθμούς ως τιμές που δεν μπορεί να πάρει το ‘α’ (46,4% στην Ε1, ΕΡ/Β) και με φυσικούς αριθμούς (θετικούς ακέραιους) ως τιμές που δεν μπορεί να πάρει το ‘-β’ (50% στην Ε2, ΕΡ/Β). Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι μαθητές απαντούν και στις δύο περιπτώσεις με ακέραιους αριθμούς και ότι αυτό που αλλάζει είναι το πρόσημο των ακεραίων αυτών τιμών, θα μπορούσαμε να πούμε ότι κι αυτές οι απαντήσεις είναι επηρεασμένες από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού, αφού είναι απαντήσεις με φυσικούς αριθμούς στη θέση των γραμμάτων ‘α’ και ‘β’, οι οποίοι όμως αριθμοί είχαν πρόσημο αντίθετο από το φαινομενικό πρόσημο της δοσμένης μεταβλητής (κατηγορία ΦΑ/δΦΠ). Από τις απαντήσεις αυτές φαίνεται η επίδραση τόσο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού όσο και του φαινομενικού προσήμου.

Η επίδραση του φαινομενικού προσήμου των ‘α’ και ‘-β’ φάνηκε επίσης στις απαντήσεις με μη-φυσικούς αριθμούς, στη συνθήκη του ΕΡ/Β. Στην πλειοψηφία τους οι απαντήσεις με μη-φυσικούς αριθμούς είχαν διαφορετικό πρόσημο από αυτό των δοσμένων μεταβλητών. Έτσι, 10,7% των απαντήσεων ήταν με μη-φυσικούς αριθμούς, οι οποίοι όμως ήταν αρνητικοί, ως αριθμούς που δεν μπορεί να πάρει το φαινομενικά θετικό ‘α’. Αντίστοιχα, 14,3% των απαντήσεων ήταν με θετικούς μη-φυσικούς αριθμούς ως αριθμούς που δεν μπορεί να πάρει το φαινομενικά αρνητικό ‘-β’. Φάνηκε, λοιπόν, σε αυτές τις περιπτώσεις ότι οι μαθητές απέκλειαν αριθμούς ως τιμές που δεν μπορεί να τις πάρει μια μεταβλητή, με βάση το φαινομενικό της πρόσημο.

Για να αναλύσουμε σε βάθος την τάση των μαθητών να αποδίδουν φυσικούς αριθμούς στις δύο αυτές μεταβλητές και στα δύο ερωτηματολόγια, προχωρήσαμε σε μία νέα βαθμολόγηση των απαντήσεων των μαθητών που θα μας βοηθούσε στη διεξαγωγή στατιστικών αναλύσεων. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε ερωτηματολόγιο χωριστά, βαθμολογήσαμε τις απαντήσεις με Φυσικούς Αριθμούς (ΦΑ) του συνόλου του δείγματος με 1, τις απαντήσεις με μη-Φυσικούς Αριθμούς (μηΦΑ) με 2, ενώ τις ορθές απαντήσεις με 3. Ο Πίνακας 4.4.α παρουσιάζει τα ποσοστά των απαντήσεων στις νέες κατηγορίες.

Ερωτηματολόγιο	**Κατηγορίες απαντήσεων**			
	Ορθές	ΦΑ	μηΦΑ	Καμία απάντηση
ΕΡ/Α	22,4	74.1	3,4	0.0

ΕΡ/Β	23.2	51.8	19.6	5.4

Πίνακας 4.4.α Ποσοστά των απαντήσεων με φυσικούς ή μη-φυσικούς αριθμούς στις δύο πρώτες ερωτήσεις, για κάθε ερωτηματολόγιο

Οι απαντήσεις των μαθητών μόνο με φυσικούς αριθμούς στις μεταβλητές των δύο πρώτων παραστάσεων (‘α’ και ‘-β’) ήταν σημαντικά περισσότερες από αυτές με μη-φυσικούς αριθμούς και στα δύο ερωτηματολόγια, $\chi^2(2) = 10.302, p<.05$. Φάνηκε λοιπόν ότι και στις δύο συνθήκες των δύο ερωτηματολογίων οι μαθητές έτειναν να δίνουν μόνο φυσικούς αριθμούς στα γράμματα. Το αυξημένο ποσοστό των απαντήσεων με μη-φυσικούς αριθμούς στο ΕΡ/Β υποστηρίζει την ύπαρξη της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, αφού στις απαντήσεις αυτές οι μαθητές απέκλεισαν μη-φυσικούς αριθμούς ως πιθανές αντικαταστάσεις στα γράμματα των παραστάσεων.

Για να εξετάσουμε την επίδραση του φαινομενικού προσήμου των μεταβλητών στις απαντήσεις των μαθητών στις δύο πρώτες ερωτήσεις, προχωρήσαμε σε μια ανάλογη βαθμολόγηση των απαντήσεών τους με βάση το εάν απαντούν με αριθμούς που έχουν ή όχι το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο των δοσμένων μεταβλητών. Βαθμολογήσαμε, λοιπόν, τις απαντήσεις των μαθητών που είχαν το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό (ιΦΠ) με 1, αυτές που είχαν διαφορετικό πρόσημο από το φαινομενικό (μηΦΠ) με 2 και τις ορθές απαντήσεις με 3 (βλ. Πίνακα 4.4.β).

Ερωτηματολόγιο	**Κατηγορίες απαντήσεων**			
	Ορθές	ιΦΠ	δΦΠ	Καμία απάντηση

ΕΡ/Α	22,4	69.0	8,5	0.0
ΕΡ/Β	23.2	10.7	60.7	5.4

Πίνακας 4.4.β Ποσοστά των απαντήσεων με το ίδιο ή όχι πρόσημο με το φαινομενικό των μεταβλητών στις δύο πρώτες ερωτήσεις, για κάθε ερωτηματολόγιο

Ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στον τρόπο με τον οποίο απαντούν οι μαθητές στα δύο ερωτηματολόγια, η οποία οφείλεται στο γεγονός ότι ενώ οι απαντήσεις τους στο ΕΡ/Α είχαν το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο των μεταβλητών, στο ΕΡ/Β είχαν το αντίθετο από το φαινομενικό τους πρόσημο, $\chi^2(2)=47.750,\ p<.001$. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι οι αριθμοί που οι μαθητές τείνουν να θεωρούν ότι μπορεί να πάρει ή να μην πάρει μια μεταβλητή επηρεάζονται από το φαινομενικό της πρόσημο.

Στη συνέχεια εξετάζουμε τον τρόπο με τον οποίο απάντησαν οι μαθητές στις υπόλοιπες αλγεβρικές παραστάσεις (Ε3-Ε7).

4.3.2 Ανάλυση των απαντήσεων στις υπόλοιπες αλγεβρικές παραστάσεις.

Με τον ίδιο τρόπο αναλύθηκαν και οι απαντήσεις των μαθητών στις υπόλοιπες αλγεβρικές παραστάσεις (Ε3-Ε7) που περιέχονταν στα δύο ερωτηματολόγια. Οι απαντήσεις αυτές τοποθετήθηκαν σε μία από τις έξι βασικές κατηγορίες απαντήσεων: «Ορθές», «ΦΑ/ιΦΠ», «ΦΑ/δΦΠ», «μηΦΑ/ιΦΠ», «μηΦΑ/δΦΠ» και «Καμία Απάντηση». Πιο συγκεκριμένα, στην κατηγορία «Ορθές» τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις που στο ΕΡ/Α σημείωσαν ότι κάθε αλγεβρική παράσταση θα μπορούσε να πάρει κάθε είδος αριθμού και όχι μόνο φυσικούς. Στην αντίστοιχη κατηγορία στο ΕΡ/Β τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις που σημείωναν ότι δεν υπάρχουν αριθμοί που δεν μπορεί να πάρει η δοσμένη αλγεβρική παράσταση.

Στην κατηγορία «ΦΑ/ιΦΠ» τοποθετήθηκαν απαντήσεις με φυσικούς αριθμούς στη θέση των μεταβλητών των αλγεβρικών παραστάσεων που είχαν και το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο τους (π.χ., 2/3, 3/4, στο 'α/β') (παραδείγματα απαντήσεων για κάθε μία από τις κατηγορίες μη-ορθών απαντήσεων δίνονται στον Πίνακα 4.5 – οι αριθμοί που εμφανίζονται στις αγκύλες του πίνακα παρουσιάζουν αναμενόμενες απαντήσεις σε κάποια κατηγορία, οι οποίες όμως δεν δόθηκαν από κανέναν μαθητή).

Στην κατηγορία «ΦΑ/δΦΠ» τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις με φυσικούς αριθμούς στις μεταβλητές, που όμως είχαν διαφορετικό πρόσημο από το φαινομενικό τους πρόσημο (π.χ., -2/-3, -3/-4, στο α/β).

Στην κατηγορία «μηΦΑ/ιΦΠ» τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις με μη-φυσικούς αριθμούς, που είχαν όμως το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο των δοσμένων αλγεβρικών παραστάσεων (π.χ., 2,3, ή 2/3 στο '4γ'), ενώ στην κατηγορία «μηΦΑ/δΦΠ» τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις με μη φυσικούς αριθμούς που είχαν και διαφορετικό πρόσημο από αυτό των δοσμένων παραστάσεων (π.χ., -2,3 ή -2/3 στο δ+δ+δ). Θα πρέπει εδώ να επισημάνουμε ότι η κατηγορία απαντήσεων «μηΦΑ/δΦΠ» διαφοροποιείται από τις ορθές στο ΕΡ/Α, γιατί στην πρώτη οι απαντήσεις αφορούσαν ένα μόνο είδος μη-φυσικών αριθμών, που είχαν και διαφορετικό πρόσημο από το φαινομενικό πρόσημο της αντίστοιχης μεταβλητής, και όχι κάθε τέτοιο είδος, όπως θα απαιτούνταν για να τοποθετηθούν στη 'Ορθή' κατηγορία. Για παράδειγμα, οι απαντήσεις μόνο με αρνητικά κλάσματα στην περίπτωση του '4γ' τοποθετήθηκαν στην κατηγορία «μηΦΑ/δΦΠ», καθώς αυτές διαφοροποιούνται από μία ορθή απάντηση που θα περιείχε τόσο αρνητικά κλάσματα όσο και αρνητικούς δεκαδικούς ή ακόμα και άρρητους.

Αλγεβρικές παραστάσεις	**Κατηγορίες απαντήσεων**			
	ΦΑ/ιΦΠ	ΦΑ/δΦΠ	μηΦΑ/ιΦΠ	μηΦΑ/δΦΠ
4γ	$4\cdot1, 4\cdot2$ 1, 2, 3	$4\cdot(-1), 4\cdot(-2)$	$[2.3, \frac{2}{3}]$	$-2.3, -\frac{2}{3}$
$\frac{1}{\gamma}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 1, 2, 3	$\frac{1}{-2}, \frac{1}{-3}$	$[2.3, \frac{2}{3}]$	$-2.3, -\frac{2}{3}$
$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$	$\frac{-2}{-3}, \frac{-3}{-4}$	$2.3, \frac{2}{3}$	$-2.3, -\frac{2}{3}$
δ+δ+δ	1+1+1 2+2+2 1, 2, 3	(-1)+(-1)+(-1), (-2)+(-2)+(-2)	$[2.3, \frac{2}{3}]$	$-2.3, -\frac{2}{3}$
κ+3	2+3, 3+3, μεγαλύτεροι του 3	(-2)+3, (-3)+3	2.3, 3.7	$-2.3, -\frac{2}{3}$

Πίνακας 4.5 Παραδείγματα λανθασμένων απαντήσεων σε κάθε μία κατηγορία στο ΕΡ/Α και στο ΕΡ/Β.

Σε ό,τι αφορά την κατηγοριοποίηση των απαντήσεων των μαθητών σε όλες τις φάσεις, αυτή πραγματοποιήθηκε από τον ερευνητή. Ένας άλλος ανεξάρτητος κριτής κλήθηκε να βαθμολογήσει τις απαντήσεις των μισών μαθητών, χρησιμοποιώντας τα ίδια κριτήρια. Η συμφωνία μεταξύ των δύο βαθμολογητών ήταν της τάξης του 97%, ενώ κάθε διαφωνία συζητήθηκε μέχρι που επιτεύχθηκε συναίνεση.

Στον Πίνακα 4.6 παρουσιάζουμε τα ποσοστά των απαντήσεων σε κάθε ερωτηματολόγιο, για το σύνολο των απαντήσεων στις ερωτήσεις Ε3-Ε7.

Η πλειοψηφία των απαντήσεων στο ΕΡ/Α ήταν αριθμοί όπως 2/3, 3/4 στο ‘α/β’ ή 2+3, 3+3 στο ‘κ+3’, κοκ. Αυτό ήταν το αποτέλεσμα της αντικατάστασης των γραμμάτων μόνο με φυσικούς αριθμούς, που είχαν μάλιστα και το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο των μεταβλητών αυτών. Για το λόγο αυτό η κατηγορία «ΦΑ/ιΦΠ» είναι η πιο ενισχυμένη από τις κατηγορίες απαντήσεων του ΕΡ/Α (59,3% στο ΕΡ/Α).

Ερωτηματολόγιο	**Κατηγορίες απαντήσεων**					
	Ορθές	ΦΑ/ιΦΠ	ΦΑ/δΦΠ	μηΦΑ/ιΦΠ	μηΦΑ/δΦΠ	Καμία απάντηση
QR/A	24,1	59,3	-	1.4	3.4	11.7
QR/B	36.4	2,9	21.4	2,1	10,7	26,4

Πίνακας 4.6 Ποσοστά των απαντήσεων σε κάθε κατηγορία για τις παραστάσεις Ε3-Ε7.

Στη συνθήκη του ΕΡ/Β, στην πλειοψηφία των απαντήσεων τα γράμματα αντικαταστάθηκαν από αρνητικούς ακέραιους αριθμούς, καταλήγοντας σε απαντήσεις του τύπου (-1)+(-1)+(-1), (-2)+(-2)+(-2) στην περίπτωση του ‘δ+δ+δ’, ή 1/-2, 1/-3, στην περίπτωση του ‘1/γ’. Στις απαντήσεις αυτές οι μαθητές αντικαθιστούσαν τα γράμματα με φυσικούς αριθμούς, που είχαν όμως αντίθετο πρόσημο από το φαινομενικό πρόσημο των δοσμένων μεταβλητών. Για το λόγο αυτό η κατηγορία «ΦΑ/δΦΠ» ήταν και η πιο ενισχυμένη του ΕΡ/Β (21,4% στο ΕΡ/Β).

Φαίνεται λοιπόν ότι, όπως και στην περίπτωση των δύο πρώτων αλγεβρικών παραστάσεων που παρουσιάστηκαν πρωτύτερα, στην πλειοψηφία τους οι μαθητές έτειναν να απαντούν αντικαθιστώντας τα γράμματα μόνο με φυσικούς αριθμούς, τόσο στο ΕΡ/Α όσο και στο ΕΡ/Β, μόνο που στο ΕΡ/Β το πρόσημο των αριθμών ήταν διαφορετικό από το φαινομενικό πρόσημο των δοσμένων μεταβλητών, ενώ στο ΕΡ/Α ήταν το ίδιο.

Επίσης, το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων ως συνολική κατασκευή είχε σημαντική επίδραση στις απαντήσεις των μαθητών και αυτό έγινε ιδιαίτερα εμφανές από τις απαντήσεις με μη-φυσικούς αριθμούς στο ΕΡ/Β. Στις απαντήσεις αυτές οι μαθητές απέκλεισαν αρνητικούς μη-φυσικούς αριθμούς ως αριθμούς που δεν μπορούν να πάρουν οι φαινομενικά θετικές αλγεβρικές παραστάσεις (Ε3-Ε7) (ποσοστό 10,7% στην κατηγορία «μηΦΑ/δΦΠ» στο ΕΡ/Β).

Για να εξεταστούν περαιτέρω τα συγκεκριμένα αποτελέσματα προχωρήσαμε σε μια σειρά αναλύσεων της επίδρασης του φυσικού αριθμού αλλά και του φαινομενικού προσήμου των μεταβλητών και των αλγεβρικών παραστάσεων στις απαντήσεις των μαθητών στα δύο ερωτηματολόγια, όπως κάναμε πρωτύτερα για τις δύο πρώτες ερωτήσεις (Ε1 και Ε2). Για να εξετάσουμε την επίδραση του φυσικού αριθμού, οι απαντήσεις που αντικατέστησαν τα γράμματα μόνο με φυσικούς αριθμούς (ΦΑ) βαθμολογήθηκαν με 1, ενώ αυτές με τουλάχιστον έναν μη-φυσικό αριθμό (μηΦΑ) με 2 και οι ορθές απαντήσεις με 3. Ο Πίνακας 4.6.α παρουσιάζει τα αποτελέσματα αυτής της νέας βαθμολόγησης.

Ερωτηματολόγιο	Κατηγορίες απαντήσεων			
	Ορθές	ΦΑ	μηΦΑ	Καμία απάντηση
ΕΡ/Α	24.1	59.3	4.8	11.7
ΕΡ/Β	36.4	24.3	12.9	26.4

Πίνακας 4.6.α Ποσοστά των απαντήσεων με φυσικούς ή μη-φυσικούς αριθμούς στις ερωτήσεις Ε3-Ε7, για κάθε ερωτηματολόγιο

Όπως και στις δύο πρώτες αλγεβρικές παραστάσεις, οι απαντήσεις με φυσικούς αριθμούς στα γράμματα των δοσμένων αλγεβρικών παραστάσεων ήταν σημαντικά περισσότερες από αυτές με τουλάχιστον έναν μη-φυσικό αριθμό, και στα δύο ερωτηματολόγια, $\chi^2(2) = 37.681, p<.001$.

Για να εξεταστεί η επίδραση του φαινομενικού προσήμου των μεταβλητών και των αλγεβρικών παραστάσεων στις απαντήσεις των μαθητών, οι απαντήσεις που είχαν το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο (ιΦΠ) βαθμολογήθηκαν με 1, αυτές με διαφορετικό (δΦΠ) με 2 και οι ορθές με 3. Τα αποτελέσματα της νέας βαθμολόγησης παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.6.β.

Αλγεβρικές παραστάσεις	Κατηγορίες απαντήσεων			
	ορθές	ιΦΠ	δΦΠ	Καμία απάντηση
ΕΡ/Α	24.1	60.7	3.4	11.7

ΕΡ/Β	36.4	5.0	32.1	26.4

Πίνακας 4.6.β. Ποσοστά των απαντήσεων που διατήρησαν ή όχι το φαινομενικό πρόσημο στις ερωτήσεις Ε3-Ε7, για κάθε ερωτηματολόγιο

Ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι υπήρχε στατιστικώς σημαντική διαφορά στις απαντήσεις των μαθητών στα δύο ερωτηματολόγια. Οι μαθητές έτειναν να απαντούν με αριθμούς με ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο στο ΕΡ/Α αλλά με αντίθετο στο ΕΡ/Β, $\chi^2(2)=111.384, p<.001$.

4.4 Συζήτηση

Τα αποτελέσματα του πρώτου πειράματος υποστήριξαν την υπόθεσή μας ότι οι μαθητές έχουν την τάση να ερμηνεύουν τα γράμματα που βρίσκονται στη θέση μεταβλητών ως φυσικούς αριθμούς. Όπως φάνηκε από τις απαντήσεις στο ΕΡ/Α, στην πλειοψηφία των απαντήσεων τα γράμματα αντικαταστάθηκαν με φυσικούς αριθμούς, δίνοντας απαντήσεις όπως 1+1+1, 2+2+2 στο 'δ+δ+δ' ή με -1, -2, -3 στο '-β'.

Στο ΕΡ/Β, όπου οι μαθητές κλήθηκαν να γράψουν τιμές που *δεν μπορούν* να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις, η πλειοψηφία των μαθητών αντικατέστησε τα γράμματα με αρνητικούς ακέραιους αριθμούς, δίνοντας απαντήσεις όπως το -1, -2, -3, στο 'α' ή -2/-3, -3/-4 στο α/β. Οι απαντήσεις αυτές φαίνεται να είναι το αποτέλεσμα μιας πιθανά άδηλης προσπάθειας των μαθητών να ανταπεξέλθουν στη συνθήκη του ΕΡ/Β, που τους ζητούσε αριθμούς που *δεν μπορούν* να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι οι μαθητές, θέλοντας να τοποθετηθούν στην αρνητικά δοσμένη ερώτηση *(δεν μπορούν)* των ερωτήσεων του ΕΡ/Β, άλλαξαν το πρόσημο των αριθμών που θα έδιναν αν η ερώτηση ήταν καταφατική (όπως στο ΕΡ/Α).

Έτσι, ισχυριζόμαστε ότι είναι και πάλι η τάση των μαθητών να ερμηνεύουν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς που τους ώθησε να απαντήσουν με αρνητικούς ακέραιους αριθμούς στις μη-διαισθητικά δοσμένες ερωτήσεις του ΕΡ/Β. Ισχυριζόμαστε δηλαδή ότι οι αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, με τους οποίους αντικατέστησαν τις μεταβλητές στο ΕΡ/Β, συμβολίζουν για τους μαθητές μη-φυσικούς αριθμούς, ή αλλιώς τους 'άλλους' από τους φυσικούς αριθμούς. Θα μπορούσαμε μάλιστα να ισχυριστούμε ότι πρόκειται για μία σύγχυση ανάμεσα στο μαθηματικώς *αντίθετο*, έννοια που έχουν διδαχθεί οι μαθητές από πολύ νωρίς, και στο 'μη-ίδιο'. Σύμφωνα με την ερμηνεία αυτή, οι αρνητικοί, που έδωσαν οι μαθητές στη συγκεκριμένοι συνθήκη, δεν αποτελούν ένα συγκεκριμένο είδος αριθμών, ως υπαρκτή μαθηματική οντότητα, αλλά είναι οι φυσικοί αριθμοί με ένα σύμβολο μπροστά, για να συμβολίσει το 'μη-φυσικό', το 'άλλο από το φυσικό'. Η συγκεκριμένη βέβαια ερμηνεία υστερεί σε εμπειρικά δεδομένα που να την υποστηρίζουν, έστω κι αν οι παραπάνω ενδείξεις μας δημιουργούν μια σχετική ασφάλεια να την εκφράσουμε.

Το ενδιαφέρον, παρόλα αυτά, είναι ότι όταν οι μαθητές βρέθηκαν στη συνθήκη του ΕΡ/Β, όπου λόγω της φύσης του ερωτήματος δεν μπορούσαν να απαντήσουν με διαισθητικό τρόπο, όπως αντίστοιχα έκαναν στις ερωτήσεις του ΕΡ/Α, τότε προχώρησαν σε αλλαγές στις διαισθητικές τους απαντήσεις, οι οποίες δεν έθιξαν την 'ακεραιότητα' των αριθμών με τους οποίους απάντησαν, δίνοντας για παράδειγμα κλάσματα ή δεκαδικούς αριθμούς, αλλά έθιξαν το πρόσημό τους. Αν δεχθούμε ότι η κατανόηση της χρήσης των γραμμάτων ως μεταβλητές στην άλγεβρα επηρεάζεται, αφενός από την τάση των μαθητών να ερμηνεύουν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς και αφετέρου από το φαινομενικό πρόσημο των μεταβλητών και των αλγεβρικών παραστάσεων, τότε φάνηκε από αυτές τις απαντήσεις ότι οι μαθητές, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, είναι πιο πρόθυμοι να άρουν την επίδραση του φαινομενικού προσήμου των μεταβλητών, παρά να άρουν την επίδραση του φυσικού αριθμού (που βασικό του χαρακτηριστικό είναι η ακεραιότητα) που τους κάνει να δίνουν απαντήσεις με ακέραιες τιμές σε κάθε συνθήκη.

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, τέτοιου είδους απαντήσεις μπορούν να ερμηνευτούν ως *συνθετικά λάθη*, που προκύπτουν λόγω της επίδρασης του προϋπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου, με τις προϋποθέσεις που αυτό άδηλα επιβάλλει στην ερμηνεία της νέας και ασύμβατης πληροφορίας (Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Οι μαθητές φαίνεται να έχουν μια αρχική πεποίθηση ότι τα γράμματα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς. Η λανθασμένη αυτή πεποίθηση υποστηρίζεται από την αρχική θεωρία τους για τον αριθμό, που είναι οργανωμένη γύρω από το φυσικό αριθμό. Η αρχική αυτή πεποίθηση για τη χρήση των γραμμάτων μπορεί να υποστηρίξει τους μαθητές να ανταποκριθούν στα ερωτήματα του ΕΡ/Α και να δώσουν στα γράμματα μόνο φυσικούς αριθμούς, αλλά δεν μπορεί να τους υποστηρίξει να δώσουν απαντήσεις στις μη-διαισθητικές ερωτήσεις του ΕΡ/Β. Στη συνθήκη του ΕΡ/Β οι μαθητές φαίνεται πως διατηρούν την αρχική τους πεποίθηση ότι τα γράμματα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς και αλλάζουν ένα επιφανειακό χαρακτηριστικό, όπως φαίνεται πως είναι γι' αυτούς το πρόσημο, ώστε να ανταποκριθούν στα συγκεκριμένα ερωτήματα. Ως αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας, που σε μεγάλο βαθμό δεν βρίσκεται υπό τον συνειδητό έλεγχο των μαθητών, εμφανίζονται τα συγκεκριμένα συνθετικά λάθη.

Τέλος, ένα ακόμα σημείο των αποτελεσμάτων στο οποίο θα θέλαμε να σταθούμε αφορά και πάλι την επίδραση του φαινομενικού προσήμου στις απαντήσεις των μαθητών. Φάνηκε πως στην περίπτωση του φαινομενικά αρνητικού '-β', που οι μαθητές έτειναν να το ερμηνεύουν ως μια μεταβλητή που αναπαριστά μόνο αρνητικούς αριθμούς, η επίδραση του φαινομενικού προσήμου ήταν μεγαλύτερη σε σχέση με την επίδραση που αυτό είχε στις φαινομενικά θετικές παραστάσεις. Αυτό δείχνει ότι η παρουσία του αρνητικού προσήμου έχει μεγαλύτερη επίδραση στις απαντήσεις των μαθητών από την απουσία προσήμου ή την παρουσία θετικού προσήμου. Με άλλα λόγια, είναι πιο έντονη η *παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου* στην περίπτωση μιας φαινομενικά αρνητικής παράστασης παρά μιας φαινομενικά θετικής. *Παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου* ονομάζουμε την λανθασμένη πεποίθηση ότι το φαινομενικό πρόσημο μιας μεταβλητής ή μιας αλγεβρικής παράστασης είναι το πρόσημο των τιμών που αυτή δύναται να αναπαραστήσει.

Πέρα από την επίδραση του φαινομενικού προσήμου των μεταβλητών, φάνηκε από τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής ότι υπάρχει και η επίδραση του φαινομενικού προσήμου των παραστάσεων, ως συνολική κατασκευή, το οποίο οι μαθητές τείνουν επίσης να ερμηνεύουν ως το πραγματικό πρόσημο των τιμών που δύνανται να αναπαραστήσουν. Έτσι, τόσο στο ΕΡ/Α αλλά πιο έντονα στο ΕΡ/Β, οι μαθητές έτειναν να θεωρούν ότι οι φαινομενικά θετικές παραστάσεις Ε3-Ε7 αναπαριστούν μόνο θετικούς αριθμούς, αποκλείοντας τους αρνητικούς ως τιμές που δεν θα μπορούσαν να τις πάρουν.

Μια κριτική που θα μπορούσε να εκφραστεί για την παραπάνω μελέτη θα ήταν ότι οι μαθητές απάντησαν με τους συγκεκριμένους τρόπους, όχι γιατί δεν γνωρίζουν ότι κάθε πραγματικός αριθμός θα μπορούσε να δοθεί σε κάθε μεταβλητή, αλλά επειδή αυτός ήταν ο πιο εύκολος τρόπος να απαντήσουν στις ερωτήσεις. Μην ξεχνάμε ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι οι πιο διαδεδομένοι αριθμοί που χρησιμοποιούνται με μεγαλύτερη συχνότητα στο μεγαλύτερο μέρος της καθημερινής μαθηματικής δραστηριότητας των παιδιών. Στην μεγάλη τους πλειοψηφία τόσο οι ασκήσεις όσο και οι λύσεις των ασκήσεων που δίνονται στους μαθητές αφορούν φυσικούς αριθμούς. Έτσι, θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι οι μαθητές απάντησαν με αυτόν τον τρόπο διότι θεώρησαν ότι αυτό έπρεπε να κάνουν, καθώς οι φυσικοί αριθμοί είναι οι πιο διαδεδομένοι αριθμοί, οπότε αυτές θα ήταν και οι πιο αναγνωρίσιμες απαντήσεις.

Παρόλα αυτά, το γεγονός ότι οι μαθητές απάντησαν με συστηματικό τρόπο, αντικαθιστώντας μόνο με φυσικούς αριθμούς τα γράμματα των δοσμένων αλγεβρικών παραστάσεων, δείχνει ότι οι απαντήσεις τους δεν είναι τυχαίες και ανεξάρτητες από κάποιες ισχυρές πεποιθήσεις που έχουν για τους αριθμούς και για τη χρήση των γραμμάτων ως σύμβολα αριθμών στην άλγεβρα. Η επίδραση των εναλλακτικών μοντέλων των μαθητών για τον αριθμό φάνηκε τόσο από τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις για το ποιους αριθμούς μπορούν να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις, όσο και όταν οι ερωτήσεις δόθηκαν με αρνητικό τρόπο, για αριθμούς που δεν μπορούν να πάρουν οι ίδιες αλγεβρικές παραστάσεις. Το γεγονός ότι οι μαθητές απάντησαν με συστηματικότητα, υποστηρίζει την ύπαρξη μιας βαθύτερης αιτίας για την ισχυρή τάση των μαθητών να ερμηνεύουν τη χρήση των γραμμάτων σε αλγεβρικές παραστάσεις ως σύμβολα που αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς. Από τις απαντήσεις των μαθητών στις συγκεκριμένες ερωτήσεις φάνηκε ότι η 'προκατάληψη του φυσικού αριθμού' επιδρά στον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύουν οι μαθητές τα γράμματα ως σύμβολα αριθμών, εμποδίζοντας την κατανόησή τους ως σύμβολα που θα μπορούσαν να αναπαραστήσουν τον οποιανδήποτε πραγματικό αριθμό.

Για να διευκρινιστεί περαιτέρω αυτό το ζήτημα, σχεδιάστηκε ένα δεύτερο πείραμα στο οποίο χρησιμοποιήσαμε ένα ερωτηματολόγιο κλειστού τύπου. Οι μαθητές κλήθηκαν αυτή τη φορά να επιλέξουν, από ένα δοσμένο σύνολο αριθμών που περιείχε τόσο φυσικούς όσο και μη-φυσικούς αριθμούς, αυτούς που πίστευαν ότι *δεν μπορούν* να πάρουν οι ίδιες αλγεβρικές παραστάσεις που είχαν αρχικά χρησιμοποιηθεί στο πρώτο πείραμα. Η έκθεση των μαθητών σε συγκεκριμένους αριθμούς κάθε είδους θα έκανε τις απαντήσεις τους λιγότερο αντανακλαστικές, από ό,τι ήταν στα ανοιχτά ερωτηματολόγια του πρώτου πειράματος. Στο νέο αυτό ερωτηματολόγιο, η ορθή απάντηση, που ανέφερε ότι δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός και ότι κάθε αριθμός θα μπορούσε να δοθεί σε κάθε παράσταση, ήταν μια από τις εναλλακτικές απαντήσεις που ήταν διαθέσιμες στους μαθητές. Θεωρούμε ότι στις συνθήκες του κλειστού ερωτηματολογίου οι μαθητές θα μπορούσαν πιο εύκολα να δώσουν τη σωστή απάντηση, εφόσον τη γνώριζαν.

Κεφάλαιο 5
Πείραμα 2

5.1 Στόχοι και υποθέσεις του πειράματος

Στόχος του Πειράματος 2 ήταν να εξεταστεί περαιτέρω η βασική υπόθεση της παρούσας διατριβής, ότι, δηλαδή, το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο των μαθητών για τον αριθμό, που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό στα πλαίσια της αριθμητικής, στέκεται εμπόδιο στην κατανόηση της χρήσης των γραμμάτων ως μεταβλητές στην άλγεβρα. Πιο συγκεκριμένα, ότι οι μαθητές έχουν την τάση να ερμηνεύουν τα γράμματα που συμβολίζουν μεταβλητές ως σύμβολα που αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς. Ένας δεύτερος στόχος ήταν να εξεταστούν σε βάθος τα αποτελέσματα του πρώτου πειράματος, ειδικά ότι οι μαθητές επηρεάζονται από το φαινομενικό πρόσημο τόσο των μεταβλητών όσο και των αλγεβρικών παραστάσεων και τείνουν να το ερμηνεύουν ως το πραγματικό πρόσημο των τιμών που μπορούν αυτές να αναπαραστήσουν.

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής και τα αποτελέσματα του προηγούμενου πειράματος θα υποθέταμε ότι οι μαθητές θα είχαν την τάση να θεωρούν ότι οι μεταβλητές των αλγεβρικών παραστάσεων είναι σύμβολα που αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς και ότι θα έτειναν να ερμηνεύουν το πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων που περιέχουν μεταβλητές ως το πρόσημο των τιμών που δύνανται να αναπαραστήσουν.

Για να ελέγξουμε αυτή την υπόθεση δώσαμε ένα ερωτηματολόγιο, κλειστού τύπου αυτή τη φορά, σε ένα δείγμα μαθητών με τα ίδια χαρακτηριστικά με τους συμμετέχοντες στο Πείραμα 1. Οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ζητούσαν από τους μαθητές να επιλέξουν από ένα διαθέσιμο σύνολο αριθμών, που περιείχε τόσο φυσικούς όσο και μη-φυσικούς αριθμούς, εκείνους που πίστευαν ότι δεν μπορούν να πάρουν οι ίδιες αλγεβρικές παραστάσεις που είχαν χρησιμοποιηθεί και στο πρώτο πείραμα. Χρησιμοποιήθηκε η αρνητικά δοσμένη ερώτηση (*δεν μπορεί* να πάρει) διότι, όπως και στο ΕΡ/Β του πρώτου πειράματος, μόνο με αυτό τον τρόπο η ορθή απάντηση είναι μόνο μία και κάθε άλλη είναι λανθασμένη. Η ορθή αυτή απάντηση, που σημείωνε ότι ‘όλες τις τιμές μπορεί να τις πάρει η κάθε αλγεβρική παράσταση’, ήταν μία από τις δοσμένες επιλογές. Κάτω από αυτή τη συνθήκη οι μαθητές θα μπορούσαν πιο εύκολα να δώσουν τη σωστή απάντηση, εφόσον βέβαια δεν υπάρχει κάποια προκατάληψη για το φυσικό αριθμό.

Με βάση τη συνθήκη του κλειστού ερωτηματολογίου (ΕΡ/Γ) και τις υποθέσεις μας θα περιμέναμε ότι οι μαθητές θα έτειναν να αποκλείουν κάποια είδη αριθμών από το διαθέσιμο σύνολο, ως αριθμούς που δεν μπορούν να τους πάρουν οι δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις. Οι αποκλεισμοί αυτοί θα γίνονταν υπό την επίδραση τόσο της τάσης των μαθητών να θεωρούν ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς, όσο και της τάσης τους να επηρεάζονται από το φαινομενικό πρόσημο των δοσμένων αλγεβρικών παραστάσεων.

Πιο συγκεκριμένα, θα περιμέναμε, για παράδειγμα, ότι κάποιοι μαθητές, επειδή θα είχαν την τάση να ερμηνεύουν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς, θα απέκλειαν όλους τους διαθέσιμους αριθμούς εκτός από τα θετικά κλάσματα ως αριθμούς που δεν μπορεί να πάρει το ‘α/β’. Επίσης, ότι κάποιοι μαθητές θα απέκλειαν όλους τους αρνητικούς αριθμούς – ανεξαρτήτως είδους – ως αριθμούς που δεν μπορεί να πάρει το φαινομενικά θετικό ‘α/β’. Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζεται ο σχεδιασμός και τα αποτελέσματα αυτού του πειράματος.

5.2 Μέθοδος

5.2.1 Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στο πείραμα αυτό ήταν 34 μαθητές και μαθήτριες από τα ίδια δύο δημόσια γυμνάσια της Αθήνας από τα οποία είχε προκύψει και το δείγμα στο Πείραμα 1. Πιο συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες ήταν μαθητές και μαθήτριες της Β’ και Γ’ Γυμνασίου. Οι μαθητές αυτοί είχαν διδαχθεί την έννοια της μεταβλητής ήδη από την Α’ Γυμνασίου και την είχαν χρησιμοποιήσει σε διάφορα μαθηματικά πλαίσια, όπως σε λύση εξισώσεων, ανισώσεων συναρτήσεων, κτλ. Το δείγμα ήταν σχεδόν ίσα μοιρασμένο σε αγόρια και κορίτσια (19 αγόρια, 15 κορίτσια) που είχαν μέσο όρο ηλικίας τα 14,5 χρόνια.

5.2.2 Υλικά

Το κλειστό ερωτηματολόγιο αποτελούνταν από 6 ερωτήσεις (βλ. Παράρτημα 2). Σε κάθε ερώτηση οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν από ένα διαθέσιμο σύνολο αριθμών εκείνους που θεωρούσαν ότι *δεν* θα μπορούσαν να πάρουν οι ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις: Ε1: α, Ε2: -β, Ε3: 4γ, Ε4: α/β, Ε5: δ+δ+δ και Ε6: κ+3 (ερωτήσεις Ε1-Ε6). Στο ερωτηματολόγιο αυτό δε χρησιμοποιήθηκε η αλγεβρική παράσταση '1/γ' που είχε χρησιμοποιηθεί στο πρώτο πείραμα για λόγους οικονομίας, καθώς φάνηκε ότι οι μαθητές απαντούσαν σε αυτήν με παρόμοιο τρόπο όπως στην 'α/β'. Για κάθε επιμέρους ερώτηση δόθηκε στους μαθητές ένα σύνολο αριθμών, από τους οποίους έπρεπε να επιλέξουν αυτούς που πίστευαν ότι δεν μπορούν να τους πάρουν οι δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις. Το σύνολο αυτό των αριθμών περιείχε όλα τα είδη των αριθμών που οι μαθητές έχουν συναντήσει στα σχολικά μαθηματικά (εκτός από άρρητους αριθμούς). Περιείχε δηλαδή θετικά και αρνητικά κλάσματα, θετικούς και αρνητικούς δεκαδικούς, θετικούς και αρνητικούς ακέραιους αριθμούς.

Η ερώτηση ήταν η εξης: *«Ανάμεσα στους αριθμούς που σου δίνονται υπάρχουν μήπως αριθμοί που νομίζεις ότι <u>δε</u> θα μπορούσε να πάρει το …;»*. Οι διαθέσιμοι αριθμοί ήταν έντεκα σε κάθε ερώτηση και η δωδέκατη επιλογή ήταν η σωστή απάντηση, που έλεγε ότι *«όχι, όλους τους αριθμούς θα μπορούσε να τους πάρει»*. Ένα παράδειγμα μιας ερώτησης και των εναλλακτικών απαντήσεων που δόθηκαν στους μαθητές στο κλειστό ερωτηματολόγιο παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 5.1.

Ανάμεσα στους αριθμούς που σου δίνονται υπάρχουν μήπως αριθμοί που νομίζεις ότι δε θα μπορούσε να πάρει το 4γ;		
α) 6	ε) 6.74	θ) $-\frac{2}{3}$
β) 2	στ) $\frac{5}{7}$	ι) -8
γ) -0.25	ζ) 1	κ) 2.333
δ) -3	η) 4	λ) Όχι, όλους τους αριθμούς θα μπορούσε να τους πάρει

Διάγραμμα 5.1. Ένα παράδειγμα για τον τρόπο που τέθηκαν οι ερωτήσεις στο ΕΡ/Γ

5.2.3 Διαδικασία

Οι ακόλουθες οδηγίες δόθηκαν στους μαθητές για να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο: *«Στην άλγεβρα χρησιμοποιούμε γράμματα της αλφαβήτου (όπως α, β, χ, ψ, κτλ) για να συμβολίσουμε αριθμούς. Στις παρακάτω ερωτήσεις που θα δεις, χρησιμοποιούμε με αυτόν τον τρόπο τα γράμματα. Διάβασε τις ερωτήσεις προσεκτικά. Εάν πιστεύεις ότι υπάρχουν αριθμοί, ανάμεσα σε αυτούς που σου δίνονται που δεν θα μπορούσε να τους πάρει το συγκεκριμένο σύμβολο, σημείωσέ τους βάζοντάς τους σε κύκλους. Μπορείς να επιλέξεις περισσότερους από έναν αριθμούς αν θέλεις».*

Οι μαθητές συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο παρουσία του ερευνητή και του καθηγητή των μαθηματικών τους, στην αίθουσα διδασκαλίας τους. Είχαν στη διάθεσή τους 20’ που ήταν αρκετά για την προσεκτική ενασχόληση με όλες τις ερωτήσεις. Μόνο διευκρινιστικές ερωτήσεις επιτράπηκαν, οι οποίες και απαντήθηκαν.

5.3 Αποτελέσματα

5.3.1 Ανάλυση των απαντήσεις στις δύο πρώτες ερωτήσεις 'α' και '-β'

Οι απαντήσεις των μαθητών στις δύο πρώτες αλγεβρικές παραστάσεις παρουσιάζονται μόνες τους σε σχέση με τις υπόλοιπες, για λόγους που αναφέρθηκαν στο πρώτο πείραμα (βλ. Κεφ.4, σελ.82). Οι απαντήσεις στις δύο αυτές ερωτήσεις τοποθετήθηκαν σε μία από τις πέντε κατηγορίες, όπως φαίνεται στον Πίνακα 5.1. Στην κατηγορία 'Ορθές' τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες μόνο η σωστή εναλλακτική απάντηση είχε επιλεγεί. Οι δύο βασικές κατηγορίες μη ορθών απαντήσεων «Ακέραιοι Αριθμοί» και «Φαινομενικό Πρόσημο» έχουν παρόμοια χαρακτηριστικά με τις αντίστοιχες κατηγορίες του προηγούμενου πειράματος (βλ. Πείραμα 1).

Πιο συγκεκριμένα, η κατηγορία «Φυσικοί Αριθμοί» περιλαμβάνει τις απαντήσεις στις οποίες αποκλείστηκαν μια σειρά αριθμών από το δοσμένο σύνολο με βάση την τάση των μαθητών να θεωρούν τα γράμματα ως σύμβολα που αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς. Για τις ανάγκες μιας πιο λεπτομερούς παρουσίασης του εύρους των απαντήσεων τέτοιου είδους, η κατηγορία αυτή χωρίστηκε σε δύο επιμέρους υποκατηγορίες. Στην κατηγορία «ΦΑ1» (Φυσικοί Αριθμοί 1) τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις εκείνες που αντανακλούν την πεποίθηση των μαθητών ότι τα γράμματα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς με έναν απόλυτο τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, στην κατηγορία αυτή τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες αποκλείστηκαν όλοι οι διαθέσιμοι αριθμοί, εκτός από εκείνους που θα προέκυπταν αν στις μεταβλητές των δοσμένων αλγεβρικών παραστάσεων δίνονταν μόνο φυσικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, αν σε κάποια απάντηση είχαν επιλεγεί όλοι οι αριθμοί του διαθέσιμου συνόλου, εκτός από τους φυσικούς αριθμούς, ως αριθμοί που δεν μπορεί να τους πάρει το 'α', τότε η απάντηση αυτή θα τοποθετούνταν στη κατηγορία «ΦΑ1». Επίσης, οι απαντήσεις στις οποίες επιλέχθηκαν όλοι οι δοσμένοι αριθμοί, εκτός από τους αρνητικούς ακέραιους στην περίπτωση του '-β', τοποθετήθηκαν σε αυτή την κατηγορία.

Στην υποκατηγορία «ΦΑ2» (Φυσικοί Αριθμοί 2) τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών στις οποίες ήταν εμφανής η επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, αλλά διαφοροποιείται από την κατηγορία «ΦΑ1», λόγω του ότι αυτού του τύπου οι αποκλεισμοί δεν έγιναν με τον ίδιο απόλυτο τρόπο, όπως στις απαντήσεις που τοποθετήθηκαν στη κατηγορία «ΦΑ1». Πιο συγκεκριμένα, στην κατηγορία αυτή τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που απέκλεισαν ένα είδος αριθμών, επηρεασμένοι από την τάση τους να ερμηνεύουν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς, αλλά δεν απέκλεισαν όλα τα είδη των αριθμών που έχουν αυτό το χαρακτηριστικό. Για παράδειγμα, στην κατηγορία «ΦΑ2» τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες αποκλείστηκαν όλα τα κλάσματα του δοσμένου συνόλου, ως αριθμούς που δεν μπορεί να πάρει το 'α', αλλά δεν αποκλείσθηκαν και οι δεκαδικοί. Αντίστοιχα, στην περίπτωση του '-β', στην κατηγορία «ΦΑ2», τοποθετήθηκαν, για παράδειγμα, οι απαντήσεις στις οποίες αποκλείστηκαν όλοι οι διαθέσιμοι αριθμοί, εκτός από τους αρνητικούς ακέραιους, αλλά δεν αποκλείστηκαν οι δεκαδικοί.

Στην άλλη βασική κατηγορία απαντήσεων που ονομάστηκε «Φαινομενικό Πρόσημο» τοποθετήθηκαν εκείνες οι απαντήσεις στις οποίες αποκλείστηκαν αριθμοί, με βάση μόνο το πρόσημό τους και όχι με βάση το είδος τους (κλάσματα ή δεκαδικοί, κοκ.). Πιο συγκεκριμένα, στην κατηγορία αυτή τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες αποκλείστηκαν όλοι οι αρνητικοί αριθμοί, ως αριθμούς που δεν μπορεί να τους πάρει το 'α', καθώς και οι απαντήσεις στις οποίες αποκλείστηκαν όλοι οι θετικοί αριθμούς του δοσμένου συνόλου, ως αριθμοί που δεν μπορεί να τους πάρει το φαινομενικά αρνητικό '-β'.

Στην κατηγορία «Μη-συστηματικές απαντήσεις» τοποθετήσαμε τις απαντήσεις εκείνες στις οποίες αποκλείστηκαν αριθμοί από το διαθέσιμο σύνολο με έναν μη-συστηματικό τρόπο, κάτι που καθιστούσε αδύνατο να κατηγοριοποιηθούν με βάση οποιοδήποτε κοινό χαρακτηριστικό τους. Για παράδειγμα, σε αυτήν την κατηγορία τοποθετήθηκαν απαντήσεις στις οποίες είχε αποκλειστεί ένα κλάσμα, ένας δεκαδικός και ένας αρνητικός ακέραιος, αλλά δεν αποκλείστηκαν τα υπόλοιπα κλάσματα ή οι υπόλοιποι δεκαδικοί που υπήρχαν στο σύνολο.

Στον Πίνακα 5.1 παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών στις δύο πρώτες αλγεβρικές παραστάσεις.

Αλγεβρικές παραστάσεις	Κατηγορίες απαντήσεων					
	Ορθές	Φυσικοί Αριθμοί		Φαινομενικό Πρόσημο	Μη-συστηματικές απαντήσεις	Καμία απάντηση
		ΦΑ1	ΦΑ2			
α	29.4	20.5	8.8	38.2%	2.9	-
-β	17.6	5.9	5.9	52.9	14.7	2.9

Πίνακας 5.1 Ποσοστά των απαντήσεων των 34 μαθητών στις ερωτήσεις Ε1 και Ε2

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 5.1, το ποσοστό των ορθών απαντήσεων είναι ιδιαίτερα χαμηλό, τόσο στην περίπτωση του ‘α’ (29,4% στην Ε1, στο ΕΡ/Γ) όσο και στο ‘-β’ (17,6% στην Ε2, στο ΕΡ/Γ). Το ποσοστό αυτό είναι το ίδιο χαμηλό όπως στις αντίστοιχες ερωτήσεις στα δύο ανοιχτού τύπου ερωτηματολόγια του Πειράματος 1. Έστω, λοιπόν, κι αν στην περίπτωση του ΕΡ/Γ η ορθή απάντηση ήταν μία από τις διαθέσιμες επιλογές που είχαν οι μαθητές, φάνηκε πως οι λανθασμένες πεποιθήσεις τους για τη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα τους επηρέασαν και σε αυτή τη συνθήκη να δώσουν λανθασμένες απαντήσεις, αποκλείοντας μια σειρά αριθμών ως αριθμούς που δεν μπορούν να τους πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις.

Στην περίπτωση του ‘α’, σε ένα μεγάλο ποσοστό των απαντήσεων (20,5% στην Ε1, ΕΡ/Γ), οι μαθητές, επηρεασμένοι από την τάση τους να θεωρούν ότι τα γράμματα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς, απέκλεισαν όλους τους διαθέσιμους αριθμούς, εκτός από τους φυσικούς του συνόλου, ως αριθμούς που δεν μπορεί να τους πάρει το ‘α’. Σε ένα μεγαλύτερο ακόμα ποσοστό (38,2% στην Ε1, ΕΡ/Γ) στις απαντήσεις αποκλείστηκαν όλοι οι αρνητικοί αριθμοί ως αριθμούς που δεν μπορεί να πάρει το ‘α’.

Στην περίπτωση του ‘-β’, στη μεγάλη τους πλειοψηφία οι απαντήσεις ήταν επηρεασμένες από το φαινομενικά αρνητικό πρόσημο της μεταβλητής, αφού επιλέχθηκαν όλοι οι θετικοί αριθμοί, ως αριθμούς που δεν μπορεί να τους πάρει το ‘-β’ (52,9% στην Ε2, ΕΡ/Γ).

Σε ένα μικρό ποσοστό των απαντήσεων (8,8% στην Ε1, και 5,9% στην Ε2, ΕΡ/Γ) οι μαθητές απέκλεισαν ένα από τα δύο είδη μη φυσικών αριθμών, όπως τα κλάσματα ή οι δεκαδικοί του διαθέσιμου συνόλου, ως αριθμούς που δεν μπορούν να τους πάρει το ‘α’ και το ‘–β’, χωρίς όμως να αποκλείσουν το άλλο είδος. Με λίγα λόγια, κάποιοι θεωρούσαν ότι οι μεταβλητές αυτές θα μπορούσαν να αναπαραστήσουν δεκαδικούς αλλά όχι κλάσματα, ενώ κάποιοι άλλοι το αντίστροφο.

Από τις απαντήσεις στις δύο αυτές παραστάσεις φάνηκε ότι ο τρόπος με τον οποίο ερμηνεύεται η χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές επηρεάζεται τόσο από την τάση να θεωρούνται τα γράμματα ως φυσικοί αριθμοί, όσο και από το φαινομενικό πρόσημο των μεταβλητών. Ειδικά στην περίπτωση του φαινομενικά αρνητικού ‘-β’, η παρουσία του αρνητικού προσήμου πριν από τη μεταβλητή επηρέασε μια μεγάλη μερίδα των μαθητών να αποκλείσουν τη δυνατότητα της μεταβλητής να πάρει και θετικές τιμές. Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιαστούν οι απαντήσεις στις υπόλοιπες αλγεβρικές παραστάσεις.

5.3.2 Ανάλυση των απαντήσεων στις παραστάσεις των ερωτήσεων Ε3-Ε6.

Οι απαντήσεις στις ερωτήσεις που αφορούσαν τις υπόλοιπες αλγεβρικές παραστάσεις του ερωτηματολογίου (Ε3-Ε6) κατηγοριοποιήθηκαν με τον ίδιο τρόπο όπως οι απαντήσεις στις δύο πρώτες ερωτήσεις. Παραδείγματα των αριθμών που λανθασμένα αποκλείστηκαν ως αριθμοί που δεν μπορεί να τους πάρει η κάθε αλγεβρική παράσταση, καθώς και η αντίστοιχη κατηγορία στην οποία τοποθετήθηκε κάθε τέτοια απάντηση παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.2.

Στον Πίνακα 5.3, παρουσιάζονται τα ποσοστά του συνόλου των απαντήσεων στις ερωτήσεις αυτές για κάθε κατηγορία. Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 5.3, και στις υπόλοιπες αλγεβρικές παραστάσεις το ποσοστό των ορθών απαντήσεων είναι ιδιαίτερα χαμηλό (16,2% στο ΕΡ/Γ). Στην πλειοψηφία των απαντήσεών τους οι μαθητές του δείγματος απέκλεισαν διάφορους αριθμούς ως αριθμούς που θεωρούν ότι δεν μπορούν να τους πάρουν οι δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις.

Αλγεβρικές παραστάσεις	**Κατηγορίες απαντήσεων**

	Φυσικοί Αριθμοί		Φαινομενικό Πρόσημο
	ΦΑ/1	ΦΑ/2	
4γ	Όλοι εκτός των φυσικών αριθμών	Κλάσματα	Αρνητικοί
$\frac{\alpha}{\beta}$	Όλοι εκτός από τα θετικά κλάσματα	Δεκαδικούς	Αρνητικοί
δ+δ+δ	Όλοι εκτός των φυσικών αριθμών	Κλάσματα	Αρνητικοί
κ+3	Όλοι εκτός των φυσικών αριθμών	Κλάσματα	Αρνητικοί

Πίνακας 5.2. Παραδείγματα λανθασμένων απαντήσεων σε κάθε κατηγορία για τις ερωτήσεις Ε3 έως Ε6

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 5.2 σε συνδυασμό με τον Πίνακα 5.3, κάποιοι μαθητές επέλεξαν αριθμούς από το διαθέσιμο σύνολο με βάση το ότι διαφοροποιούνται από τους αριθμούς που θα προέκυπταν αν μόνο φυσικοί αριθμοί δίνονταν στα γράμματα των παραστάσεων (26,5% του συνόλου των απαντήσεων στο ΕΡ/Γ, κατηγορία ΦΑ/1). Για παράδειγμα, στην περίπτωση του ‘4γ’ αποκλείσθηκαν όλοι οι μη-φυσικοί αριθμοί του διαθέσιμου συνόλου, ενώ στην περίπτωση του ‘α/β’ αποκλείσθηκαν όλοι οι αριθμοί, εκτός από τα θετικά κλάσματα.

Αλγεβρικές παραστάσεις	Κατηγορίες απαντήσεων

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Ορθές</th><th colspan="2">Φυσικοί Αριθμοί</th><th rowspan="2">Φαινομενικό Πρόσημο</th><th rowspan="2">Μη-συστηματικές</th><th rowspan="2">Καμία απάντηση</th></tr>
<tr><th>ΦΑ/1</th><th>ΦΑ/2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Σύνολο</td><td rowspan="2">16.2</td><td>26.5</td><td>8.8</td><td rowspan="2">15.4</td><td rowspan="2">19.9</td><td rowspan="2">13.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">35,3</td></tr>
</table>

Πίνακας 5.3 Ποσοστά των απαντήσεων των 34 μαθητών στο σύνολο των ερωτήσεων Ε3-Ε6, στο ΕΡ/Γ

Μια άλλη μεγάλη ομάδα απαντήσεων υποδείκνυε αριθμούς από το διαθέσιμο σύνολο, στη βάση του προσήμου αυτών των αριθμών. Με άλλα λόγια, αποκλείστηκαν όλοι οι αρνητικοί αριθμοί – ανεξαρτήτου είδους – ως αριθμοί που δεν μπορούν να τους πάρουν οι φαινομενικά θετικές αλγεβρικές παραστάσεις Ε3-Ε6 (15,4% του συνόλου των απαντήσεων στο ΕΡ/Γ, κατηγορία «Φαινομενικό Πρόσημο»).

Τέλος, ένα 8.8% των απαντήσεων, στη βάση της πεποίθησης ότι μόνο φυσικοί αριθμοί θα μπορούσαν να αντικατασταθούν στα γράμματα των μεταβλητών, απέκλεισαν ένα τουλάχιστον είδος αριθμών που δεν ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία, μην αποκλείοντας όμως τα υπόλοιπα τέτοια είδη (κατηγορία ΦΑ/2). Για παράδειγμα, στην περίπτωση του ‘κ+3’ ή του ‘δ+δ+δ’ αποκλείστηκαν όλα τα κλάσματα άλλα όχι οι δεκαδικοί.

Συνολικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών στο Πείραμα 2 ήταν επηρεασμένες τόσο από την τάση των μαθητών να θεωρούν ότι τα γράμματα των παραστάσεων αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς, αποκλείοντας τους αριθμούς που δεν είχαν αυτό το χαρακτηριστικό (35,3% συνολικά στις απαντήσεις στο ΕΡ/Γ), όσο και από το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων ως συνολική κατασκευή, το οποίο τείνουν να ερμηνεύουν ως το πραγματικό πρόσημο των τιμών που δύναται να αναπαραστήσουν (15,4%).

5.4 Συζήτηση

Τα αποτελέσματα του Πειράματος 2 – όσο και τα αποτελέσματα του προηγούμενου πειράματος (Πείραμα 1) που παρουσιάστηκαν παραπάνω – υποστήριξαν τις υποθέσεις μας ότι η ερμηνεία της χρήσης των γραμμάτων στην άλγεβρα επηρεάζεται από την τάση των μαθητών να θεωρούν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς, καθώς και από την τάση τους να ερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των μεταβλητών, και των παραστάσεων στις οποίες εμφανίζονται, ως το πραγματικό πρόσημο των τιμών που δύνανται να αναπαραστήσουν. Οι εν λόγω πεποιθήσεις επηρέασαν τους μαθητές να δώσουν λανθασμένες απαντήσεις, αποκλείοντας συγκεκριμένους αριθμούς ως αριθμούς που δεν μπορούν να τους πάρουν οι παραστάσεις. Αυτό συνέβη ακόμα και κάτω από τη συνθήκη ενός κλειστού τύπου ερωτηματολογίου πολλαπλών επιλογών στο οποίο, όχι μόνο εμφανίζονταν κάθε είδους αριθμοί αλλά και η ορθή απάντηση ότι 'κάθε παράσταση μπορεί να πάρει οποιονδήποτε αριθμό'.

Η πιο έντονη επίδραση της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου εμφανίστηκε στην περίπτωση του φαινομενικά αρνητικού '-β', το οποίο οι μαθητές έτειναν να ερμηνεύουν ως αρνητικό αριθμό, αποκλείοντας όλους τους θετικούς αριθμούς ως αριθμούς που δεν θα μπορούσε να τους πάρει. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα συμφωνεί με αποτελέσματα του πειράματος 1, στο οποίο έγινε επίσης εμφανές ότι η παρουσία του μείον πριν από τη μεταβλητή 'β' επηρέαζε τους μαθητές να το θεωρούν ως σύμβολο που ορίζει την αξία των αριθμών που μπορεί να αναπαραστήσει η συγκεκριμένη αλγεβρική παράσταση.

Ενδιαφέρον επίσης έχουν οι απαντήσεις των μαθητών στην κατηγορία «ΦΑ2». Θυμίζουμε ότι στη συγκεκριμένη κατηγορία τοποθετήθηκαν απαντήσεις στις οποίες, λόγω της παρερμηνείας που θέλει τις μεταβλητές να αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς, αποκλείστηκαν ορισμένοι αλλά όχι όλοι οι αριθμοί του διαθέσιμου συνόλου που είχαν αυτό το χαρακτηριστικό. Έτσι, φάνηκε ότι στην πλειοψηφία τους αποκλείστηκαν τα κλάσματα ως αριθμοί που δεν μπορούν να πάρουν οι δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις, αλλά όχι οι δεκαδικοί αριθμοί. Ένα συμπέρασμα που βγαίνει από τις απαντήσεις αυτές είναι ότι, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, είναι δυνατόν οι μαθητές να άρουν όχι μόνο την επίδραση του φαινομενικού προσήμου των παραστάσεων, όπως είχε φανεί στο Πείραμα 1, αλλά ακόμα και την επίδραση του φυσικού αριθμού που αποτελεί θεμελιώδη προϋπόθεση του προϋπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου για τον αριθμό, κάνοντας νέου τύπου συνθετικά λάθη.

Τα συνθετικά αυτά λάθη θα μπορούσαν και πάλι να ερμηνευτούν ως αποτέλεσμα μιας διαδικασίας να ενσωματωθεί η νέα πληροφορία, που αφορά τη χρήση των μεταβλητών στην άλγεβρα ως τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, στην αρχική πεποίθηση των μαθητών που θέλει τα γράμματα να είναι φυσικοί αριθμοί. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές έχουν ακούσει στο σχολείο ότι τα γράμματα στην άλγεβρα μπορούν να αντικατασταθούν με οποιονδήποτε αριθμό. Η πληροφορία αυτή τους υπενθυμίζεται από τη δωδέκατη επιλογή που έχουν σε κάθε ερώτηση του κλειστού ερωτηματολογίου. Παρόλα αυτά, η αρχική τους πεποίθηση, που υποστηρίζεται από την προκατάληψη τους για τους φυσικούς τους, εμποδίζει τους μαθητές να δεχθούν κάθε πραγματικό αριθμό ως πιθανή αντικατάσταση στα γράμματα. Οι συνθετικές απαντήσεις τους θα μπορούσε να είναι ένα δείγμα μιας αμφισβήτησης, από μεριάς μαθητών, της αρχικής τους λανθασμένης πεποίθησης, ότι, δηλαδή, μόνο φυσικοί αριθμοί μπορούν να δοθούν στα γράμματα. Η αμφισβήτηση αυτή θα επέτρεπε και σε άλλους, μη-φυσικούς αριθμούς, όπως τα κλάσματα ή οι δεκαδικοί, να μπορούν να αποτελέσουν πιθανές αντικαταστάσεις στα γράμματα των παραστάσεων. Παρόλα αυτά, επειδή η διαδικασία αναδιοργάνωσης του αρχικού εννοιολογικού πλαισίου που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό δεν έχει ολοκληρωθεί, οι μαθητές που έδωσαν αυτές τις απαντήσεις φαίνεται πως δεν είναι σε θέση να αποδεχθούν τον κάθε μη-φυσικό αριθμό ως πιθανή αντικατάσταση στα γράμματα και έτσι δέχονται ένα είδος μη-φυσικών αριθμών ως πιθανή αντικατάσταση, ενώ αποκλείουν ένα άλλο.

Από την άλλη μεριά, το γεγονός ότι οι μαθητές τείνουν να αποκλείουν με αξιοπρόσεχτη συστηματικότητα τα κλάσματα, και όχι τους δεκαδικούς αριθμούς, ως αριθμούς που δεν μπορούν να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις που δεν έχουν κλασματική μορφή, συμφωνεί με ευρήματα άλλων ερευνητών στο χώρο της κατανόησης της έννοιας του αριθμού. Πιο συγκεκριμένα, κάποιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι μαθητές συχνά εμφανίζονται να κατανοούν τα κλάσματα με διαφορετικό τρόπο από αυτόν με τον οποίο κατανοούν τους δεκαδικούς και ως εκ τούτου επιφυλάσσουν διαφορετική αντιμετώπιση για αυτούς (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007). Η διάκριση αυτή φαίνεται να γίνεται με βάση τα επιφανειακά χαρακτηριστικά της μορφής τους και όχι με βάση την αριθμητική τους αξία.

5.4.1 Η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου

Πέραν από κάποιες μελέτες που εξετάζουν τις δυσκολίες των μαθητών με τους αρνητικούς αριθμούς (βλ. για παράδειγμα Gallardo, 2002· Stacey, Helme, & Steinle, 2001· Vlassis, 2004), η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου δεν έχει γίνει αντικείμενο συστηματικής διερεύνησης από τους ερευνητές της μάθησης των μαθηματικών. Το να θεωρούν οι μαθητές ότι οι αλγεβρικές παραστάσεις με αρνητικό φαινομενικό πρόσημο, όπως η ‘-β’, αναπαριστούν μόνο αρνητικές τιμές και το αντίστροφο για τις φαινομενικά θετικές παραστάσεις, θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως μια απλή απροσεξία από μεριάς των μαθητών. Με βάση την ερμηνεία αυτή, οι μαθητές γνωρίζουν ότι κάθε αλγεβρική παράσταση που περιέχει γράμματα θα μπορούσε, ανεξάρτητα από το φαινομενικό της πρόσημο, να αναπαραστήσει τον οποιονδήποτε αριθμό. Παρόλα αυτά, τα λάθη τους ή είναι τυχαία ή οφείλονται στο γεγονός ότι η μορφή των αλγεβρικών παραστάσεων, με την ύπαρξη του φαινομενικού προσήμου, τους επηρεάζει να δίνουν τιμές συμβατές με το φαινομενικό τους πρόσημο.

Σύμφωνα με τη δική μας ερμηνεία τα λάθη αυτά των μαθητών έχουν βαθύτερες αιτίες, γιατί δεν εμφανίζονται σποραδικά αλλά με μία αξιοπρόσεχτη συστηματικότητα και συνέπεια. Υπενθυμίζουμε ότι όταν οι μαθητές ρωτήθηκαν στο Πείραμα 1 για αριθμούς που θα μπορούσαν να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις, η πλειοψηφία επέλεξε με συνέπεια αριθμούς που είχαν το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο των δοσμένων αλγεβρικών παραστάσεων. Στην περίπτωση αυτή όλες αυτές οι απαντήσεις ήταν σωστές. Παρόλα αυτά, ακόμα και στη συνθήκη στην οποία οι μαθητές ρωτήθηκαν για αριθμούς που δεν μπορούν να τους πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις, οι απαντήσεις των μαθητών ανέφεραν με συστηματικότητα ότι οι φαινομενικά θετικές παραστάσεις δεν μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές και το αντίστροφο για τις φαινομενικά αρνητικές παραστάσεις. Ίδια ήταν τα αποτελέσματα και στο ερωτηματολόγιο που παρουσιάστηκε παραπάνω και στο οποίο οι μαθητές εκτέθηκαν σε ένα σύνολο αριθμών (θετικών κι αρνητικών). Και στη συνθήκη αυτή, η πλειοψηφία των μαθητών απέκλεισε τους αρνητικούς αριθμούς ως πιθανές αναπαραστάσεις των φαινομενικά θετικών αλγεβρικών παραστάσεων και το αντίστροφο για τη φαινομενικά αρνητική παράσταση '-β'.

Η συστηματικότητα αυτών των απαντήσεων δείχνει την ύπαρξη μιας εσωτερικής συνέπειας στις απαντήσεις των μαθητών. Με βάση τη βιβλιογραφική αναφορά στις έρευνες που εστιάζουν στα προβλήματα των μαθητών με τον αλγεβρικό συμβολισμό, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 1, η εσωτερική αυτή συνέπεια των απαντήσεων θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως επίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών για τους αριθμούς όπως αυτή έχει οργανωθεί στα πλαίσια της αριθμητικής (βλ. για παράδειγμα Booth, 1984· Herscovics & Linchevski, 1994· Kieran, 1992· Matz, 1980). Σύμφωνα με αυτή, οι μαθητές γνωρίζουν ότι η ύπαρξη του αρνητικού προσήμου πριν από έναν «αριθμό», δηλώνει την αρνητική αξία του αριθμού (π.χ., -2) και η γνώση αυτή μεταφέρεται λανθασμένα και στα γράμματα ως σύμβολα αριθμών, δημιουργώντας την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Παρόλα αυτά, η συγκεκριμένη ερμηνεία ευσταθεί μόνο εφόσον δεχθούμε ότι οι μαθητές έχουν συγκεκριμένες πεποιθήσεις για το τι θα μπορούσε να είναι «αριθμός». Στη συγκεκριμένη περίπτωση, για παράδειγμα, η παραπάνω φράση ισχύει μόνο για θετικούς αριθμούς.

Στο σημείο αυτό, το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής έρχεται να ερμηνεύσει τις επιμέρους παρερμηνείες και τα λάθη των μαθητών με τα γράμματα ως μεταβλητές, στη βάση των λανθασμένων πεποιθήσεών τους για τους αριθμούς, όπως αυτές έχουν σχηματιστεί από την προηγούμενη εμπειρία των μαθητών στα πλαίσια της αριθμητικής. Πιο συγκεκριμένα, το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής πάει και λίγο παραπέρα από τις προσεγγίσεις που θα απέδιδαν τα λάθη και τις παρερμηνείες στην προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών, μπαίνοντας στη διαδικασία να περιγράψει τα χαρακτηριστικά της προϋπάρχουσας αυτής γνώσης. Υποστηρίζει ότι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών για τον αριθμό είναι συγκροτημένη σε συνεκτικά πλέγματα εννοιών και πεποιθήσεων για τους αριθμούς, που έχουν τη μορφή θεωρίας για τον αριθμό και τα οποία είναι οργανωμένα γύρω από το φυσικό αριθμό στα πλαίσια της αριθμητικής. Με βάση αυτό, η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου δεν αποτελεί μια αυτόνομη, αποκομμένη παρερμηνεία, χωρίς καμία σύνδεση και χωρίς αναφορές στις αρχικές πεποιθήσεις των μαθητών για τους αριθμούς, οι οποίες κάνουν την εμφάνισή τους στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής. Αντίθετα, υποστηρίζουμε ότι η εν λόγω παρερμηνεία αποτελεί μια έκφανση της επίδρασης βαθύτερων πεποιθήσεων των μαθητών για τα γράμματα ως μεταβλητές, που απορρέουν από το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο των μαθητών, το οποίο αυτοί χρησιμοποιούν για την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής.

Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενες ενότητες, οι μαθητές, σε μία άδηλη προσπάθεια να προσδώσουν νόημα στη νέα πληροφορία που αφορά τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές στην άλγεβρα, ανατρέχουν στο προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο για τον αριθμό, όπως αυτό έχει οργανωθεί μέσα από την εμπειρία της αριθμητικής, με την ιδιαίτερη θέση που επιφυλάσσει για τον φυσικό αριθμό. Μια από τις εκφάνσεις της ενεργοποίησης αυτού του εναλλακτικού πλαισίου για την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής αποτελεί η τάση των μαθητών να ερμηνεύουν τα γράμματα που αναπαριστούν μεταβλητές ως φυσικούς αριθμούς και όχι ως τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι και η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου αποτελεί άλλη μια έκφανση της ίδιας ενεργοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, υποστηρίζουμε ότι οι μαθητές τείνουν να ερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των μεταβλητών, ή των αλγεβρικών παραστάσεων στις οποίες εμφανίζονται οι μεταβλητές, ως το πραγματικό πρόσημο των τιμών που δύνανται να αναπαραστήσουν, λόγω της αρχικής τους λανθασμένης πεποίθησης ότι τα γράμματα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς.

Αν οι μαθητές έχουν την τάση να ερμηνεύουν τα γράμματα που χρησιμοποιούνται στη θέση των μεταβλητών ως φυσικούς αριθμούς μόνο, τότε είναι φυσικό να μεταφέρουν σε αυτά ιδιότητες των φυσικών αριθμών, όπως αυτές που αφορούν την αξία τους σε σχέση με τα πρόσημα που τους συνοδεύουν. Με άλλα λόγια, αν οι μαθητές βλέπουν το x στην παράσταση '-2x' ως φυσικό αριθμό, είναι φυσικό να θεωρούν ότι η εν λόγω αλγεβρική παράσταση αναπαριστά αρνητικούς αριθμούς.

Η παραπάνω άποψη έρχεται να ερμηνεύσει την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, δίνοντάς της μια συγκεκριμένη θέση σε ένα ευρύτερο ερμηνευτικό πλαίσιο που συνδέει τους αριθμούς με τις μεταβλητές, όπως αυτό έχει αναλυτικά περιγραφεί στην εισαγωγή της παρούσας διατριβής. Η ερμηνεία αυτή υποστηρίζεται από τα μέχρι τώρα εμπειρικά δεδομένα των πειραμάτων 1 και 2. Στα πειράματα αυτά οι μαθητές εμφάνισαν, πέρα από την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, μια έντονη τάση να ερμηνεύουν τα γράμματα στις παραστάσεις ως φυσικούς αριθμούς, δίνοντας μόνο τέτοιες τιμές σε αυτά, κάθε φορά που είχαν αυτή την ευκαιρία (όπως στο ΕΡ/Α).

Αυτή η εξήγηση της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου θα αποτελέσει υπόθεση εργασίας μιας πιο επικεντρωμένης μελέτης, που θα εστιάσει στην λεπτομερέστερη εξέταση του συγκεκριμένου ζητήματος. Με αυτόν ως έναν από τους βασικούς του στόχους σχεδιάστηκε το Πείραμα 3 που παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 6
Πείραμα 3

6.1 Στόχοι και υποθέσεις του πειράματος

Βασικός στόχος του τρίτου κατά σειρά πειράματος (Πείραμα 3) ήταν η περαιτέρω εξέταση της αρχικής υπόθεσης, ότι, δηλαδή, το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο για τον αριθμό, που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό στα πλαίσια της αριθμητικής, θα επηρέαζε τους μαθητές να ερμηνεύουν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς. Επίσης ότι η τάση αυτή των μαθητών θα είχε ως συνέπεια την εμφάνιση παρερμηνειών, όπως αυτή του φαινομενικού προσήμου.

Στις μελέτες που προηγήθηκαν, η συγκεκριμένη υπόθεση εξετάστηκε με τις μεταβλητές να εμφανίζονται μόνες τους ή σε αλγεβρικές παραστάσεις, έξω από κάποιο οικείο μαθηματικό πλαίσιο. Στην παρούσα μελέτη οι μεταβλητές και οι αλγεβρικές παραστάσεις που τις περιέχουν τοποθετούνται σε συγκεκριμένο μαθηματικό πλαίσιο, που είναι αυτό των συναρτήσεων, που αποτελεί βασικό πεδίο στο οποίο η έννοια βρίσκει εφαρμογές. Βασιζόμενοι στα προηγούμενα αποτελέσματά μας, υποθέσαμε ότι στην πλειοψηφία τους οι μαθητές θα τείνουν να αποδίδουν μόνο φυσικούς αριθμούς στα γράμματα των δοσμένων παραστάσεων, ακόμη κι όταν εμφανίζεται στο συγκεκριμένο μαθηματικό πλαίσιο.

Το Πείραμα 3 εστίασε στη μελέτη της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου των μεταβλητών και των παραστάσεων και στον τρόπο με τον οποίο αυτή επηρεάζει την βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής. Πιο συγκεκριμένα, στις προηγούμενες μελέτες οι μαθητές εμφανίστηκαν να ερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο μιας μεταβλητής (όπως είναι το μείον στο '-β') ως το πραγματικό της πρόσημο και άρα των τιμών που δύναται να αναπαραστήσει. Η εερμηνεία που δόθηκε στην εν λόγω παρερμηνεία ήταν ότι οφείλεται στην τάση των μαθητών να θεωρούν ότι τα γράμματα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς, καθώς και στο γεγονός ότι ο συμβολισμός των φυσικών αριθμών, όπως και κάθε αριθμού στα πλαίσια της αριθμητικής, διαφοροποιείται από αυτόν της μεταβλητής στην άλγεβρα. Η συγκεκριμένη ερμηνεία αποτέλεσε υπόθεση εργασίας για το πείραμα που σχεδιάστηκε στο Πείραμα 3. Ένας δεύτερος στόχος, λοιπόν, της μελέτης αυτής ήταν να εξεταστεί η υπόθεση ότι η παρανόηση του φαινομενικού προσήμου υποστηρίζεται από την τάση των μαθητών να αποδίδουν μόνο φυσικές τιμές στα γράμματα που αναπαριστούν μεταβλητές.

Στα πλαίσια της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου, κάτι άλλο που έγινε φανερό ήταν ότι οι μαθητές τείνουν να επηρεάζονται περισσότερο από το φαινομενικά αρνητικό πρόσημο μιας αλγεβρικής παράστασης, παρά από το φαινομενικά θετικό πρόσημό της. Πιο συγκεκριμένα, ότι η παρουσία του αρνητικού προσήμου πριν από μία μεταβλητή ή σε μία αλγεβρική παράσταση συμβολίζει ότι αυτές αναπαριστούν μόνο αρνητικούς αριθμούς. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα θελήσαμε να το εξετάσουμε διεξοδικότερα στο νέο αυτό πείραμα.

Τέλος, ένας άλλος στόχος του Πειράματος 3 ήταν να εξεταστούν οι επιπτώσεις της παρανόησης του φαινομενικού προσήμου σε διάφορες εκφάνσεις της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών. Επιλέξαμε να εστιάσουμε στη λύση ανισώσεων και στο πεδίο ορισμού των συναρτήσεων, για λόγους οι οποίοι θα διευκρινιστούν παρακάτω.

6.1.1 Η περίπτωση των ανισώσεων

Οι ανισώσεις αποτελούν βασικό κομμάτι της μαθηματικής γνώσης και δραστηριότητας που οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν επαρκώς και να χειρίζονται με ευχέρεια, σύμφωνα με τις συστάσεις του Εθνικού Συμβουλίου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών των ΗΠΑ (National Council for the Teaching of Mathematics, NCTM), όπως αναφέρεται από τους Bazzini & Tsamir (2001). Έστω όμως κι αν αποτελούν ένα ιδιαίτερα σημαντικό τομέα της μαθηματικής γνώσης, λίγη έρευνα έχει γίνει για να καταδείξει τα λάθη και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόησή τους (Bazzini & Tsamir, 2004· Tsamir, Almog, & Tirosh, 1998).

Ένα από τα σημαντικότερα λάθη που εμφανίζονται με μεγάλη συχνότητα στη λύση των ανισώσεων και στο οποίο θα σταθούμε στην παρούσα μελέτη είναι ότι, για να λύσουν μια ανίσωση, οι μαθητές συχνά πολλαπλασιάζουν/διαιρούν τα δύο μέλη της με μια αλγεβρική παράσταση, χωρίς να δείξουν την απαραίτητη προσοχή στο πρόσημο αυτής της παράστασης και στον τρόπο με τον οποίο αυτός ο μετασχηματισμός θα επηρεάσει τη φορά της ανίσωσης (Bazzini & Tsamir, 2001· 2004· Tsamir & Almog, 2001· Tsamir και συνεργάτες, 1998· Verikios & Farmaki, 2006). Μια ερμηνεία του φαινομένου αυτού που έχει προταθεί από διάφορους ερευνητές είναι ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν τις εξισώσεις ως πρότυπα για τη λύση των ανισώσεων και ότι πολλά από τα λάθη τους, όπως και το παραπάνω, οφείλονται στο ότι χρησιμοποιούν κανόνες μετασχηματισμού από τις εξισώσεις που δεν ισχύουν στις ανισώσεις (Bazzini & Tsamir, 2001· 2004· Sfard & Linchevski, 1994· Tsamir & Almog, 2001· Tsamir και συνεργάτες, 1998· Tsamir & Bazzini, 2002· 2004· Verikios & Farmaki, 2006). Το γεγονός ότι στις ανισώσεις ισχύουν άλλοι κανόνες μετασχηματισμού και χρησιμοποιούνται άλλοι συμβολισμοί από αυτούς των εξισώσεων φαίνεται να προκαλεί γνωστικά εμπόδια και παρανοήσεις στους μαθητές που έχουν την τάση να χρησιμοποιήσουν τη γνώση τους για τις εξισώσεις στην κατανόηση των ανισώσεων (Arambatzis, Skiadaresis, & Christou, 2007· Tall, 2004· Tsamir & Almog, 2001).

Η ερμηνεία αυτή είναι συμβατή με την προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής, που υποστηρίζει ότι η προϋπάρχουσα γνώση μπορεί, καθώς είναι συγκροτημένη σε μια συνεκτική δομή, να σταθεί εμπόδιο στην κατανόηση μιας νέας πληροφορίας, όταν αυτή βρίσκεται σε σύγκρουση με τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά του προϋπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου. Οι ανισώσεις και η σχέση τους με τις εξισώσεις θα μπορούσαν να αποτελέσουν μια τέτοια περίπτωση. Έχουμε λόγους να πιστεύουμε ότι τόσο οι κανόνες μετασχηματισμού όσο και το συμβολικό σύστημα των εξισώσεων είναι δύο παράγοντες έντονα συμβατοί με τη γνώση των μαθητών για τον αριθμό (τις ιδιότητες και τον συμβολισμό του), όπως αυτή έχει οργανωθεί στα πλαίσια της αριθμητικής (βλ. για παράδειγμα Kieran, 1992· Sfard, 1995). Η συγκροτημένη αυτή γνώση των μαθητών για τον αριθμό στα πλαίσια της αριθμητικής (βλ. Κεφ. 1, 3 της παρούσας διατριβής), θα μπορούσε να σταθεί εμπόδιο στην κατανόηση του συμβολικού συστήματος και των ιδιοτήτων των ανισώσεων, που έχουμε λόγους να πιστεύουμε ότι είναι ένα κομμάτι γνώσης πιο έντονα συμβατό με το συμβολικό σύστημα και τους κανόνες της άλγεβρας (βλ. επίσης Arambatzis και συνεργάτες, 2007). Θα μπορούσε δηλαδή η κατανόηση της νέας γνώσης που αφορά τις ανισώσεις να απαιτεί εννοιολογική αλλαγή στις βασικές προϋποθέσεις του προϋπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου για τον αριθμό, που είναι συνεπές με τις ιδιότητες των εξισώσεων. Το συγκεκριμένο ζήτημα δεν θα αναλυθεί περαιτέρω στο σημείο αυτό, αφού κάτι τέτοιο δεν αποτελεί στόχο της παρούσας μελέτης.

Στη συγκεκριμένη μελέτη, που έχει στόχο να διερευνήσει την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, στεκόμαστε στο συγκεκριμένο λάθος των μαθητών, όπως αυτό αναφέρθηκε παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα, θα προβλέπαμε ότι η τάση των μαθητών να πολλαπλασιάζουν/διαιρούν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης με μία αλγεβρική παράσταση, χωρίς να γνωρίζουν το πρόσημό της, σε συνδυασμό με την παρανόηση του φαινομενικού προσήμου, όπως αυτή έχει παρουσιαστεί αναλυτικά πρωτύτερα, θα είχε ως συνέπεια την εμφάνιση συγκεκριμένων λαθών. Υποθέσαμε ότι, ακόμη κι αν οι μαθητές γνωρίζουν τον κανόνα που υποχρεώνει να αλλάζει η φορά μιας ανίσωσης όταν τα μέλη της πολλαπλασιαστούν/διαιρεθούν με αρνητική αλγεβρική παράσταση, θα προέβαιναν σε λανθασμένους μετασχηματισμούς, επειδή θα είχαν την τάση να εκτιμούν το πρόσημο της δοσμένης παράστασης σαν να είναι το φαινομενικό της πρόσημο. Έτσι, θα περιμέναμε ότι θα υπήρχαν παιδιά που θα διατηρούσαν τη φορά της ανίσωσης αν πολλαπλασίαζαν/διαιρούσαν με φαινομενικά θετικές παραστάσεις (όπως η 2χ+1), ενώ, αντίθετα, θα άλλαζαν τη φορά της ανίσωσης όταν πολλαπλασίαζαν/διαιρούσαν με φαινομενικά αρνητικές αλγεβρικές παραστάσεις (όπως η -2χ-4).

6.1.2 Η περίπτωση των συναρτήσεων

Οι συναρτήσεις αποτελούν επίσης ένα πολύ σημαντικό κομμάτι της μαθηματικής γνώσης, το οποίο οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν και στο οποίο σημειώνονται πολλές δυσκολίες. Πολλοί ερευνητές έχουν μελετήσει με την κατανόηση των συναρτήσεων, τους τρόπους με τους οποίους τείνουν οι μαθητές να τις ερμηνεύουν, τις δυσκολίες και τα λάθη που κάνουν, καθώς και τις πιθανές διδακτικές προσεγγίσεις που θα μπορούσαν να βοηθήσουν στην πιο εύκολη και σε βάθος κατανόησή τους (βλ. για παράδειγμα Biehler, 2005· Harel & Dubinsky, 1992· Yerushalmy, 1997). Στην παρούσα μελέτη δεν μας απασχόλησε ο τρόπος κατανόησης και οι δυσκολίες που εμφανίζουν οι μαθητές με τις συναρτήσεις αλλά χρησιμοποιήσαμε το πλαίσιο των συναρτήσεων ως ένα από τα πλαίσια στα οποία εμφανίζεται η μεταβλητή και μάλιστα σε ρυθμιστικό ρόλο (βλ. την κατηγοριοποίηση των πολλαπλών χρήσεων των μεταβλητών από τον Usiskin, 1988 όπως αυτή αναφέρεται στο Κεφ. 1 της παρούσας διατριβής).

Τόσο κατά την εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της συνάρτησης, όσο και κατά την πιο διεξοδική μελέτη των συναρτήσεων που περιλαμβάνει και το σχεδιασμό των γραφικών τους παραστάσεων, οι μαθητές καλούνται να δώσουν τιμές στις μεταβλητές και να υπολογίσουν τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης. Στα ελληνικά σχολεία οι μαθητές διδάσκονται, τόσο στη Β' όσο και στη Γ' Γυμνασίου, να κάνουν πίνακα τιμών, δίνοντας ό,τι τιμές θέλουν στη μεταβλητή της συνάρτησης, να υπολογίζουν τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης και με αυτές να κάνουν τη γραφική της παράσταση (Αλιμπινίσης και συνεργάτες, 1989a· 1989b).

Παρά το γεγονός ότι επισημαίνεται, τόσο από το σχολικό βιβλίο όσο και από την διδασκαλία μέσα στην τάξη, ότι οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν κάθε πραγματικό αριθμό, οι μαθητές, όπως φάνηκε και από τις προηγούμενες μελέτες, έχουν την τάση να δίνουν στις μεταβλητές μόνο φυσικούς αριθμούς. Θα πρέπει να επισημάνουμε εδώ ότι, αν δοθούν μόνο φυσικοί αριθμοί στις μεταβλητές των συναρτήσεων, τότε οι γραφικές τους παραστάσεις, επειδή ορίζονται από τα ζεύγη τιμών που έχουν προκύψει από αυτές τις φυσικές τιμές, θα είναι ημιτελείς και θα εκτείνονται σε ένα περιορισμένο χώρο του καρτεσιανού επιπέδου.

Ένα καθαρά μαθηματικό πλαίσιο όπως αυτό των συναρτήσεων, που μάλιστα είναι οικείο στους μαθητές και που σε αυτό έχουν τη δυνατότητα να δώσουν στις μεταβλητές όποιες τιμές θέλουν, αποτελεί ιδανική συνθήκη για να ελέγξουμε περαιτέρω την υπόθεσή μας, ότι, δηλαδή, θα έτειναν να δίνουν μόνο φυσικές τιμές, έστω κι αν αυτό θα τους οδηγούσε σε λανθασμένες – ελλιπείς – γραφικές παραστάσεις. Για το λόγο αυτό επιλέχθηκε το συγκεκριμένο μαθηματικό πλαίσιο – για να ελεγχθούν οι υποθέσεις μας, που αφορούν τον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύεται η χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα.

Δώσαμε, έτσι, σε ένα δείγμα μαθητών μια σειρά από συναρτήσεις και τους ζητήσαμε να κάνουν τη γραφική τους παράσταση, αποδίδοντας στις μεταβλητές ό,τι τιμές θέλουν οι ίδιοι. Περιμέναμε ότι οι μαθητές θα έδιναν μόνο φυσικές τιμές στις μεταβλητές των συναρτήσεων, κάτι που θα είχε ως συνέπεια να εμφανίσουν μία πολύ περιορισμένη εικόνα της έκτασής τους στο καρτεσιανό επίπεδο, όπως θα απεικονίζονται στις γραφικές παραστάσεις που θα έκαναν.

Το πλαίσιο των συναρτήσεων χρησιμοποιήθηκε όμως και με έναν ακόμα τρόπο, στη συγκεκριμένη μελέτη. Επειδή οι τιμές των μεταβλητών μιας συνάρτησης καθορίζουν και το πεδίο ορισμού της, η μελέτη του πεδίου ορισμού συγκεκριμένων συναρτήσεων θα μπορούσε επίσης να αποτελέσει ένα πεδίο εμφάνισης λαθών των μαθητών, που οφείλονται στην παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Πιο συγκεκριμένα, σε περιπτώσεις όπου μια συνάρτηση ορίζεται ή όχι ανάλογα με το πρόσημό της, οι μαθητές που θα εμφάνιζαν την παρανόηση του φαινομενικού προσήμου θα έκαναν συγκεκριμένα λάθη στην μελέτη του πεδίου ορισμού τους. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελούν οι συναρτήσεις που περιέχουν αλγεβρικές παραστάσεις μέσα σε τετραγωνική ρίζα.

6.1.3 Οι συναρτήσεις με τετραγωνικές ρίζες

Οι τετραγωνικές ρίζες ορίζονται μόνο για μη-αρνητικούς αριθμούς και είναι κανόνας των μαθηματικών ότι οι συναρτήσεις που εμπεριέχουν μεταβλητές σε τετραγωνική ρίζα ορίζονται μόνο εφόσον η υπόριζη ποσότητα είναι μη-αρνητική. Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει παραπάνω, θα περιμέναμε ότι η παρανόηση του φαινομενικού προσήμου θα είχε ως συνέπεια οι μαθητές να θεωρούν εσφαλμένα ότι συγκεκριμένες συναρτήσεις ορίζονται ή όχι ανάλογα με το φαινομενικό πρόσημο της υπόριζης ποσότητας και όχι ανάλογα με το πραγματικό της πρόσημο.

Για να εξετάσουμε αυτή την υπόθεση δώσαμε στους μαθητές μια σειρά από συναρτήσεις, όπου η μεταβλητή βρισκόταν σε τετραγωνική ρίζα και τους ζητήσαμε να αποφανθούν για το αν και κατά πόσο αυτές ορίζονται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Θα περιμέναμε ότι οι μαθητές που θα είχαν την τάση να προσδιορίζουν το πρόσημο της εν λόγω παράστασης με βάση το φαινομενικό της πρόσημο, θα εκτιμούσαν εσφαλμένα ότι οι συναρτήσεις με υπόριζο φαινομενικά αρνητικές παραστάσεις δεν θα ορίζονταν για καμία τιμή της μεταβλητής, ενώ αντίστροφα θα εκτιμούσαν, επίσης εσφαλμένα, ότι οι συναρτήσεις με υπόριζο φαινομενικά θετικές παραστάσεις θα ορίζονταν για κάθε τιμή της μεταβλητής.

Κατ' επέκταση, θελήσαμε να εξετάσουμε αν τα διαφορετικά πλαίσια στα οποία εμφανίζονται οι αλγεβρικές παραστάσεις (ανισώσεις ή συναρτήσεις με τετραγωνικές ρίζες) επηρεάζουν ή όχι τις απαντήσεις των μαθητών. Έχουμε λόγους να περιμένουμε ότι οι μαθητές θα τα πηγαίνουνε καλύτερα στις δοκιμασίες που αφορούν την εύρεση του πεδίου ορισμού συναρτήσεων, απ' ό,τι στους μετασχηματισμούς για τη λύση ανισώσεων, λόγω των διαφορετικών ποιοτικών χαρακτηριστικών των δύο δοκιμασιών. Κατά τη μελέτη του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, στόχος είναι να ορισθεί το εύρος τιμών που επιτρέπεται να πάρει η κάθε μεταβλητή για να ορίζεται η συνάρτηση. Όταν, για παράδειγμα, μια συνάρτηση έχει τη μεταβλητή της στον παρονομαστή κλάσματος, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης δεν μπορεί να περιέχει τις τιμές που θα μπορούσαν να μηδενίσουν τον παρανομαστή, αφού τέτοιο κλάσμα δεν ορίζεται. Άλλο τέτοιο παράδειγμα είναι και οι τετραγωνικές ρίζες, όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Κάθε φορά που τίθεται ζήτημα πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, οι μαθητές καλούνται να αναρωτηθούν για τις τιμές που μπορεί να πάρει ή όχι η μεταβλητή και η ερώτηση αυτή είναι άμεση και ρητή.

Από την άλλη μεριά, κατά τη λύση ανισώσεων, οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουνε τις μεταβλητές και τις αλγεβρικές παραστάσεις που τις περιέχουν σε μια σειρά αλγεβρικών μετασχηματισμών, όπου οι τιμές και τα πρόσημα των παραστάσεων αυτών και των μεταβλητών που περιέχουν υπονοούνται στο παρασκήνιο της χρήσης τους στους μετασχηματισμούς. Έτσι, έστω κι αν σε κάθε μετασχηματισμό με τη χρήση αλγεβρικών παραστάσεων υπάρχει το ερώτημα για τις τιμές που παίρνουν ή όχι οι μεταβλητές που περιέχουν οι παραστάσεις αυτές, το ερώτημα αυτό τις περισσότερες φορές υποβόσκει. Όπως παρατήρησε και η Sfard (1995), συχνά οι μαθητές ερμηνεύουν τις αλγεβρικές παραστάσεις ως απλές αλληλουχίες συμβόλων, που το νόημά τους δίνεται μόνο από τη δυνατότητά τους να συμμετάσχουν σε μετασχηματισμούς ως απλές διαδικασίες (βλ. επίσης Demby, 1997).

Ενώ, λοιπόν, στα ερωτήματα με το πεδίο ορισμού υπάρχει μια άμεση πρόσκληση προς τους μαθητές να αναρωτηθούν για τις τιμές που μπορούν να αποδοθούν σε μια μεταβλητή, στις ανισώσεις το ερώτημα αυτό υπονοείται. Για το λόγο αυτό θα περιμέναμε ότι οι μαθητές θα τα πηγαίνανε καλύτερα με τα ερωτήματα που τους δόθηκαν όταν αυτά τίθενται στο πλαίσιο του πεδίου ορισμού συναρτήσεων, παρά στο πλαίσιο των μετασχηματισμών που αφορούν τη λύση ανισώσεων, γιατί το ίδιο το ερώτημα στην πρώτη περίπτωση εφιστά την προσοχή των μαθητών στις τιμές που μπορούν να πάρουν ή όχι οι μεταβλητές και όχι στην απλή, διαδικαστική, χρήση τους, όπως στη δεύτερη περίπτωση.

6.1.4 Υποθέσεις του Πειράματος 3

Με βάση τα παραπάνω, στο πείραμα αυτό στόχος ήταν να εξεταστούν οι παρακάτω υποθέσεις:

1) Οι μαθητές έχουν την τάση να δίνουν μόνο φυσικούς αριθμούς στα γράμματα που χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές σε συγκεκριμένο και οικείο μαθηματικό πλαίσιο, όπως αυτό των συναρτήσεων (όταν καλούνται να σχεδιάσουν τις γραφικές τους παραστάσεις).

2) Οι μαθητές που τείνουν να δίνουν μόνο φυσικούς αριθμούς στις μεταβλητές θα έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να κάνουν λάθη που οφείλονται στην παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές αυτοί θα έχουν την τάση να ερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των δοσμένων μεταβλητών και των αλγεβρικών παραστάσεων, στις οποίες αυτές εμφανίζονται, ως το πραγματικό πρόσημο των τιμών που αυτές δύνανται να αναπαραστήσουν.

3) Η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου είναι πιο έντονη στις περιπτώσεις των φαινομενικά αρνητικών παραστάσεων, παρά στις περιπτώσεις των φαινομενικά θετικών. Με άλλα λόγια, η παρουσία του αρνητικού προσήμου θα επηρεάζει πιο έντονα τους μαθητές να το ερμηνεύουν ως το πραγματικό πρόσημο των τιμών που παίρνουν οι παραστάσεις, παρά η παρουσία του θετικού προσήμου.

4) Τέλος, το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται μια μεταβλητή (μετασχηματισμοί κατά τη λύση ανισώσεων ή εύρεση του πεδίου ορισμού συναρτήσεων με τετραγωνικές ρίζες) θα διαφοροποιούσε τις απαντήσεις των μαθητών, όπου οι μαθητές θα κάνανε λιγότερα λάθη στις δοκιμασίες εύρεσης του πεδίου ορισμού συναρτήσεων με τετραγωνικές ρίζες.

6.2 Μέθοδος

6.2.1 Συμμετέχοντες

Στην παρούσα μελέτη συμμετείχαν 110 μαθητές και μαθήτριες της Α’ Λυκείου, από δύο δημόσια σχολεία της Αθήνας. Το δείγμα αποτελούσαν 60 αγόρια και 50 κορίτσια, με μέσο όρο ηλικίας 15.5 ετών περίπου.

6.2.2 Υλικά

Το ερωτηματολόγιο που είχε κάθε μαθητής να συμπληρώσει περιείχε συνολικά οχτώ δοκιμασίες. Στις πρώτες δοκιμασίες δόθηκαν στους μαθητές δύο συναρτήσεις: f(x) = 2x+1 και f(x) = 1/x ($x \neq 0$) και δύο πίνακες, ένας για κάθε συνάρτηση, με επτά κενά κελιά ο καθένας. Τους ζητήθηκε να συμπληρώσουν τον πίνακα τιμών με τιμές που θα έδιναν οι ίδιοι στη μεταβλητή x, να υπολογίσουν τις αντίστοιχες τιμές που θα έπαιρνε η συνάρτηση και να σχεδιάσουν τη γραφική της παράσταση μέσα σε ένα επίσης κενό, πλαίσιο.

Οι δοκιμασίες που ακολουθούσαν αφορούσαν τρεις αλγεβρικές ανισώσεις και τρεις συναρτήσεις με τετραγωνικές ρίζες. Για να εξετάσουμε την υπόθεση ότι η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου είναι πιο έντονη στις περιπτώσεις των φαινομενικά αρνητικών παραστάσεων απ' ότι στις φαινομενικά θετικές, οι παραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν τόσο στις ανισώσεις όσο και στα υπόριζα των συναρτήσεων είχαν είτε θετικό είτε αρνητικό φαινομενικό πρόσημο. Μία από τις ανισώσεις και μία από τις συναρτήσεις δόθηκαν στους μαθητές λυμένες σωστά, ενώ οι υπόλοιπες είχαν, για μεθοδολογικούς λόγους, από ένα σκόπιμο λάθος. Οι ανισώσεις και οι συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.1 (βλ. και Παράρτημα 3).

Μαθηματικό πλαίσιο	**Τύπος δοκιμασιών**		
	Ορθή	Λανθασμένη (θετικό φαινομενικό πρόσημο)	Λανθασμένη (αρνητικό φαινομενικό πρόσημο)
Ανισώσεις	$2 < \frac{2}{x^2}$, $x \neq 0$	$3 < \frac{1}{2x}$, $x \neq 0$	$5 > \frac{3}{-4x}$, $x \neq 0$
Συναρτήσεις με	f(x)=$\sqrt{x^2+1}$	f(x)= $\sqrt{4+3x}$	f(x)= $\sqrt{-2x-1}$

τετρ. ρίζα			

Πίνακας 6.1 Οι ανισώσεις και οι συναρτήσεις με τετραγωνική ρίζα που χρησιμοποιήθηκαν

Οι ανισώσεις παρουσιάστηκαν στους μαθητές λυμένες ακολουθώντας μια σειρά μετασχηματισμών. Οι μετασχηματισμοί που συνέβαιναν σε κάθε βήμα της λύσης, εξηγούνταν σε σχόλια που υπήρχαν μέσα σε παρενθέσεις, δίπλα από κάθε βήμα. Στα δύο από τα τρία έργα που αφορούσαν ανισώσεις, αυτές παρουσιάστηκαν στους μαθητές με ένα σκόπιμο λάθος. Το λάθος ήταν ότι και τα δύο μέλη της ανίσωσης πολλαπλασιάζονταν με μία αλγεβρική παράσταση, της οποίας το πρόσημο ήταν άγνωστο. Αν η παράσταση με την οποία είχαμε πολλαπλασιάσει είχε θετικό φαινομενικό πρόσημο, η φορά της ανίσωσης παρέμενε ως είχε, ενώ άλλαζε αν η παράσταση είχε αρνητικό φαινομενικό πρόσημο. Όπως καταλαβαίνει κανείς, ο κανόνας που αφορά τον πολ/σμό και τη διαίρεση στις ανισώσεις με θετική ή αρνητική ποσότητα εφαρμόστηκε σωστά, αλλά το λάθος ήταν ότι εφαρμόστηκε με βάση το φαινομενικό και όχι με βάση το πραγματικό πρόσημο της παράστασης. Με τον τρόπο αυτό ήταν δυνατόν να εστιάσουμε στον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύουν οι μαθητές το φαινομενικό πρόσημο της παράστασης και όχι στην πιθανά ανεπαρκή γνώση του κανόνα, σύμφωνα με τον οποίο αλλάζει ή δεν αλλάζει η φορά της ανίσωσης. Στο Διάγραμμα 6.1 φαίνεται ένα παράδειγμα από μια ανίσωση που περιείχε μια παράσταση με θετικό φαινομενικό πρόσημο στον παρονομαστή.

Οι ανισώσεις δόθηκαν στους μαθητές με τις εξής οδηγίες: *«Γνωρίζουμε ότι:* Στις ανισώσεις, όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με θετική ποσότητα η φορά της ανίσωσης παραμένει η ίδια. Αν όμως πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε με αρνητική ποσότητα τότε η φορά της ανίσωσης πρέπει να αλλάξει. Κάποιο παιδί της ηλικίας σου έλυσε κάποιες ανισώσεις με τον τρόπο που φαίνεται παρακάτω. Παρακολούθησε προσεκτικά τις λύσεις που έδωσε και σκέψου αν έκανε κάπου λάθος ή όχι». Στο τέλος κάθε δοκιμασίας οι μαθητές καλούνταν να επιλέξουν αν η ανίσωση είχε λυθεί σωστά ή όχι και, αν είχαν επιλέξει το 'όχι', καλούνταν να δηλώσουν το συγκεκριμένο βήμα στο οποίο είχε συμβεί το λάθος και να το αναφέρουν (βλ. επίσης Παράρτημα 3).

$$3 < \frac{1}{2x},\ x \neq 0$$

Βήμα 1: $6x < 1$ *(γιατί το 2x είναι θετικός και μπορούμε να πολ/με με θετικό χωρίς να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

Βήμα 2: $x < \frac{1}{6}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το 6 που είναι θετικός αριθμός και δεν πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

Διάγραμμα 6.1 Παράδειγμα από ανίσωση με παράσταση με θετικό φαινομενικό πρόσημο

Τέλος, όσον αφορά τις δοκιμασίες με συναρτήσεις που είχαν τη μεταβλητή σε τετραγωνική ρίζα, οι ακόλουθες οδηγίες δόθηκαν στους μαθητές: *«Γνωρίζουμε ότι όταν μια συνάρτηση έχει τη μεταβλητή μέσα σε τετραγωνική ρίζα, τότε για να ορίζεται θα πρέπει το υπόριζο να είναι μη-αρνητικός αριθμός»*. Στη συνέχεια δόθηκαν τρεις συναρτήσεις που περιείχαν τετραγωνικές ρίζες που στο υπόριζό τους είχαν παραστάσεις με θετικό ή με αρνητικό φαινομενικό πρόσημο (βλ. Πίνακα 6.1). Κάθε συνάρτηση συνοδευόταν από μία δήλωση που αναφερόταν στο εάν και γιατί ορίζεται ή δεν ορίζεται η συνάρτηση, σε σχέση με το πρόσημο της παράστασης που εμφανιζόταν στο υπόριζο. Στις δύο από τις τρεις περιπτώσεις η δήλωση αυτή ήταν λανθασμένη και το λάθος ήταν ότι έβγαζε συμπέρασμα για το εάν ορίζεται ή όχι η συνάρτηση σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, με βάση το φαινομενικό πρόσημο της υπόριζης ποσότητας. Από τους μαθητές ζητήθηκε να αποφανθούν εάν συμφωνούν ή όχι με τις δηλώσεις που συνόδευαν κάθε συνάρτηση και πρόσφεραν εκτιμήσεις για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Για παράδειγμα, οι μαθητές ρωτήθηκαν: *«Η συνάρτηση f(x)=* $\sqrt{-2x-1}$ *δεν ορίζεται γιατί το -2x-1 είναι πάντα αρνητικός αριθμός για κάθε τιμή του x. Συμφωνείς ή διαφωνείς και γιατί;»*.

Τόσο στις δοκιμασίες που αφορούσαν τους μετασχηματισμούς με τις αλγεβρικές ανισώσεις, όσο και σε αυτές που αφορούσαν το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τετραγωνικές ρίζες, οι κανόνες που ισχύουν σε σχέση με το πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων που εμφανίζονται σε αυτές, όπως αυτοί έχουν αναφερθεί παραπάνω, δόθηκαν ρητά στους μαθητές με τη μορφή οδηγιών. Αυτό έγινε για να ελαχιστοποιηθεί η πιθανότητα τα λάθη των μαθητών να οφείλονται σε ανεπαρκή γνώση των κανόνων, αλλά να οφείλονται στην παρανόηση των φαινομενικών προσήμων των αλγεβρικών παραστάσεων που εμφανίζονται στις δοκιμασίες.

Για να εξεταστεί η πιθανή επίδραση του πλαισίου (ανισώσεις ή συναρτήσεις με τετρ. ρίζα) στις απαντήσεις των μαθητών στα ερωτηματολόγια, το ερωτηματολόγιο εκδόθηκε σε δύο τύπους. Στον πρώτο τύπο (ΕΡ/Δ1) οι ανισώσεις εμφανίζονταν μετά από τα έργα με τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων και πριν από τις δοκιμασίες με τις συναρτήσεις με τετραγωνικές ρίζες. Στο δεύτερο τύπο ερωτηματολογίου (ΕΡ/Δ2) οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων εμφανίζονταν και πάλι πρώτες και ακολουθούσαν αυτή τη φορά οι συναρτήσεις με τετραγωνικές ρίζες και στο τέλος οι ανισώσεις (βλ. Παράρτημα 3). Στα δύο ερωτηματολόγια οι δοκιμασίες που περιέχονταν ήταν ίδιες, ενώ αυτό που τα διαφοροποιούσε ήταν η σειρά εμφάνισής τους. Με τον τρόπο αυτό θα μπορούσαμε να εξετάσουμε αν οι διαφορές στις επιδόσεις οφείλονται στο διαφορετικό πλαίσιο κάθε δοκιμασίας ή στη θέση τους στο ερωτηματολόγιο.

Από το παραπάνω δείγμα, ισάριθμο πλήθος παιδιών συμπλήρωσαν τον κάθε έναν τύπο ερωτηματολογίου (οι 53 συμπλήρωσαν το ΕΡ/Δ1 και οι υπόλοιποι 57 το ΕΡ/Δ2).

6.2.3 Διαδικασία

Οι συμμετέχοντες συμπλήρωσαν τα ερωτηματολόγια στη διάρκεια μίας διδακτικής ώρας μέσα στην αίθουσα διδασκαλία τους, με την παρουσία του καθηγητή των μαθηματικών τους και του ερευνητή. Τα ερωτηματολόγια μοιράστηκαν με τυχαίο τρόπο στους μαθητές. Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους όλη τη διδακτική ώρα και μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν και το χρόνο του διαλείμματος που ακολουθούσε. Ο χρόνος αυτός ήταν αρκετός για την προσεκτική ενασχόληση με κάθε ένα από τα ερωτήματα. Μόνο διευκρινιστικές ερωτήσεις επιτράπηκαν, οι οποίες και απαντήθηκαν.

6.2.4 Βαθμολόγηση

Οι απαντήσεις των μαθητών στις δύο πρώτες ερωτήσεις, όπου κλήθηκαν να συμπληρώσουν έναν πίνακα τιμών για κάθε μία από τις δύο συναρτήσεις και να κάνουν τις γραφικές τους παραστάσεις, κατηγοριοποιήθηκαν με βάση το είδος των αριθμών που έδωσαν στη μεταβλητή και τοποθετήθηκαν σε δύο βασικές κατηγορίες: στην κατηγορία 'Φυσικοί Αριθμοί' τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που έδωσαν αποκλειστικά μόνο φυσικές τιμές στη μεταβλητή, ενώ στην κατηγορία 'μη-Φυσικοί Αριθμοί' τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που έδωσαν τουλάχιστον μία μη-φυσική τιμή, όπως κλάσμα, ή οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό.

Στις δοκιμασίες που ακολουθούσαν και αφορούσαν τις ανισώσεις και τις συναρτήσεις με τετραγωνικές ρίζες, οι απαντήσεις των μαθητών κατηγοριοποιήθηκαν με βάση το αν κατάφεραν να εντοπίσουν το σκόπιμο λάθος ή όχι, όποτε αυτό υπήρχε. Οι απαντήσεις που δεν κατάφεραν να εντοπίσουν το λάθος ήταν λανθασμένες. Οι σωστές απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 1 ενώ οι λανθασμένες με 0.

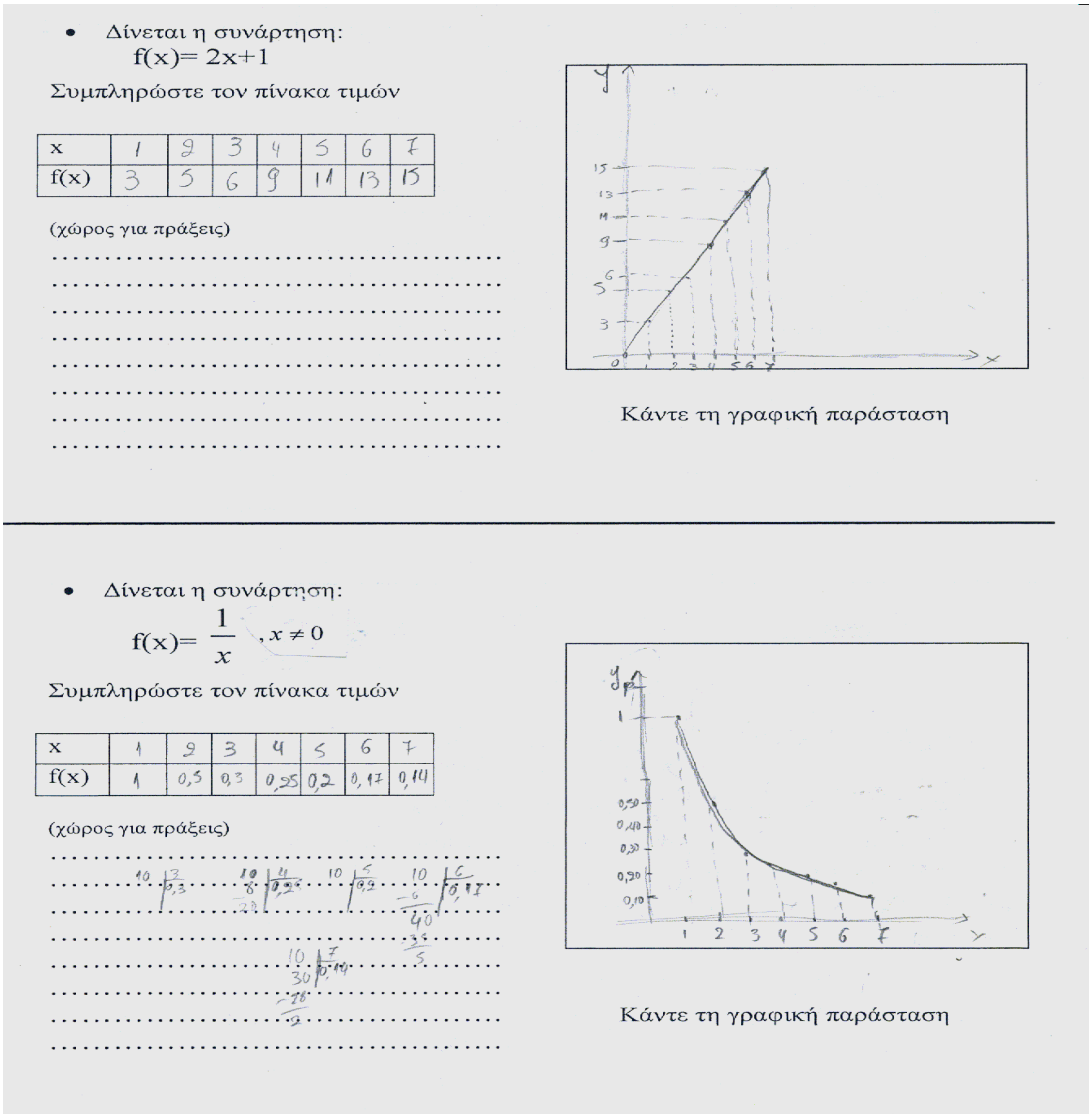
6.3 Αποτελέσματα

Στον Πίνακα 6.2 φαίνονται τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών του συνόλου του δείγματος σε κάθε κατηγορία για κάθε μία από τις δύο συναρτήσεις. Όπως ήταν αναμενόμενο, στην πρώτη συνάρτηση, 81,8% των μαθητών έδωσαν μόνο φυσικές τιμές στη μεταβλητή, ενώ μόνο ένα 18,2% έδωσε τουλάχιστον έναν μη-φυσικό αριθμό.

Κατηγορία απαντήσεων	**Συναρτήσεις**	
	f(x)=2x+1	**f(x)=1/x**
Φυσικοί Αριθμοί	81,8	78,2
μη-Φυσικοί Αριθμοί	18,2	19,1
Καμία απάντηση	-	2,7

Πίνακας 6.2 Ποσοστά κάθε κατηγορίας αριθμού που έδωσαν οι μαθητές στις μεταβλητές των συναρτήσεων για να κάνουν τη γραφική τους παράσταση

Παρόμοια ήταν τα αποτελέσματα και στη δεύτερη συνάρτηση, όπου το 78% των μαθητών συμπλήρωσαν τον πίνακα τιμών δίνοντας και πάλι μόνο φυσικές τιμές στη μεταβλητή. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις, οι μαθητές που έδωσαν μόνο φυσικές τιμές στις μεταβλητές, σχεδίασαν μια ελλιπή γραφική παράσταση της αντίστοιχης συνάρτησης, που εκτεινόταν μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων του Καρτεσιανού επιπέδου. Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας κυρίαρχης απάντησης παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 1.



- Δίνεται η συνάρτηση:
  f(x)= 2x+1

Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	3	5	6	9	11	13	15

(χώρος για πράξεις)

Κάντε τη γραφική παράσταση

- Δίνεται η συνάρτηση:
  $f(x)= \frac{1}{x}, x \neq 0$

Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	1	0,5	0,3	0,25	0,2	0,17	0,14

(χώρος για πράξεις)

Κάντε τη γραφική παράσταση

Διάγραμμα 1 Ένα παράδειγμα απάντησης μαθητή στις δύο πρώτες ερωτήσεις

Στους Πίνακες 6.3 και 6.4 παρουσιάζονται τα ποσοστά των σωστών και των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών για κάθε τύπο ερωτηματολογίου στις δοκιμασίες με ανισώσεις και σε αυτές με συναρτήσεις με τετραγωνικές ρίζες αντίστοιχα. Στις δοκιμασίες που δόθηκαν στους μαθητές χωρίς να περιέχουν λάθη, η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε ορθώς ότι είναι σωστές (96,4% για τη σωστή ανίσωση και 91,8% για τη σωστή συνάρτηση). Οι ερωτήσεις αυτές δόθηκαν στους μαθητές για μεθοδολογικούς λόγους και δεν μετράνε την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, όπως το κάνουν οι ερωτήσεις που περιείχαν ένα σκόπιμο λάθος. Το γεγονός ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές τις απάντησαν σωστά ήταν αναμενόμενο και για το λόγο αυτό οι απαντήσεις των μαθητών σε αυτές τις ερωτήσεις δε λήφθηκαν υπόψη στις αναλύσεις που ακολούθησαν.

Κατηγορία απαντήσεων	**Τύπος ανίσωσης**					
	Ορθή ανίσωση		Λανθασμένη ανίσωση (θετικό φαινομενικό πρόσημο)		Λανθασμένη ανίσωση (αρνητικό φαινομενικό πρόσημο)	
	ΕΡ/Δ1	ΕΡ/Δ2	ΕΡ/Δ1	ΕΡ/Δ2	ΕΡ/Δ1	ΕΡ/Δ2
Λάθος απάντηση	1.9	-	79,2	75.4	96.2	73.7
Σωστή απάντηση	92.5	100	20,8	24.6	3.8	26.3
Καμία απάντηση	5.7	-	-	-	-	-

Πίνακας 6.3 Ποσοστά των απαντήσεων στις ανισώσεις σε κάθε ερωτηματολόγιο

Όπως φαίνεται από την περιγραφική εικόνα που προσφέρουν αυτοί οι δύο πίνακες (Πίνακες 6.3 και 6.4), στις δοκιμασίες που δόθηκαν με ένα σκόπιμο λάθος οι επιδόσεις των μαθητών ήταν αισθητά μειωμένες, αφού πολλοί ήταν οι μαθητές που δεν κατάφεραν να εντοπίσουν το σκόπιμο λάθος.

Κατηγορία απαντήσεων	**Τύπος συνάρτησης με τετραγωνική ρίζα**					
	Ορθή συνάρτηση με τετρ. ρίζα		Λανθασμένη συνάρτηση τετρ. ρίζα (θετικό φαινομενικό πρόσημο)		Λανθασμένη συνάρτηση τετρ. ρίζα (αρνητικό φαινομενικό πρόσημο)	
	ΕΡ/Δ1	ΕΡ/Δ2	ΕΡ/Δ1	ΕΡ/Δ2	ΕΡ/Δ1	ΕΡ/Δ2
Λάθος απάντηση	13.2	1.8	37.7	28.1	49.1	47.4
Σωστή απάντηση	84.9	98.2	62.3	71.9	50.9	50.9
Καμία απάντηση	1.9	-	-	-	-	1.8

Πίνακας 6.4 Ποσοστά των απαντήσεων στις συναρτήσεις με τετραγωνικές ρίζες σε κάθε ερωτηματολόγιο

Υπολογίστηκε ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών στις δοκιμασίες που δόθηκαν λανθασμένες στους μαθητές και αφορούσαν λυμένες ανισώσεις και σε αυτές που αφορούσαν συναρτήσεις με τετραγωνικές ρίζες (Πίνακας 6.5).

Ερωτηματολόγιο	**Επιδόσεις**			
	Μέσος όρος	Πλήθος	Τυπ. απόκλιση	Μέγιστο
Ανισώσεις	0.36	109	0.7	2.0
Συναρτήσεις με τετρ. ρίζα	1.18	109	0.86	2.0

Πίνακας 6.5 Μέσοι όροι επίδοσης σε κάθε πλαίσιο δοκιμασιών

Υπολογίστηκε επίσης ο μέσος όρος των επιδόσεων των μαθητών στις δοκιμασίες που περιείχαν αλγεβρικές παραστάσεις με θετικό φαινομενικό πρόσημο και επίσης σε αυτές που περιείχαν παραστάσεις με αρνητικό φαινομενικό πρόσημο (Πίνακας 6.6).

Ερωτηματολόγιο	**Επιδόσεις**			
	Μέσος όρος	Πλήθος	Τυπ. απόκλιση	Μέγιστο
Δοκιμασίες με θετικό φαινομενικό πρόσημο	0.89	109	0.69	2.0
Δοκιμασίες με αρνητικό φαινομενικό πρόσημο	0.66	109	0.68	2.0

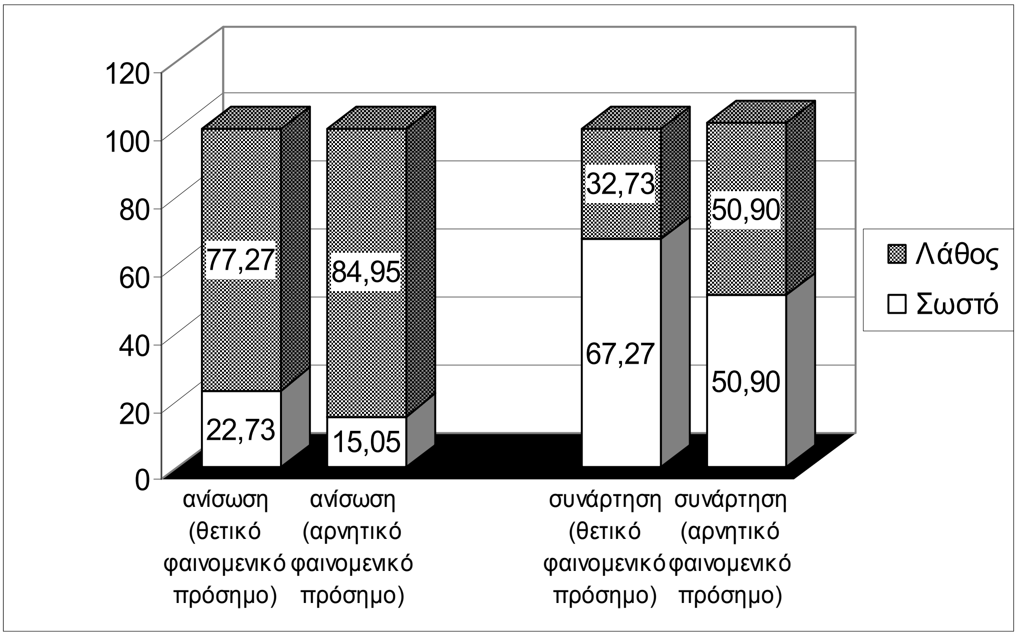
Πίνακας 6.6 Μέσοι όροι απαντήσεων για κάθε είδος δοκιμασιών, στο σύνολο του δείγματος

Όπως είχαμε υποθέσει, οι μαθητές είχαν καλύτερες επιδόσεις στις συναρτήσεις με τετραγωνικές ρίζες από ό,τι στις ανισώσεις $F(1,107)=83.197$, $p<.001$, αλλά ανάλυση διασποράς επαναλαμβανόμενων μετρήσεων έδειξε ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση στον τρόπο που απαντούν οι μαθητές στα δύο ερωτηματολόγια που να οφείλεται στις διαφορές που σημειώνονται στον τρόπο που απαντούν στα δύο αυτά μαθηματικά πλαίσια, $F(1,107)=0{,}438$, *n.s.* Το αποτέλεσμα αυτό υποστήριξε τις προβλέψεις μας, ότι στο πλαίσιο των συναρτήσεων οι μαθητές θα κάνουν λιγότερα λάθη λόγω της διαφορετικής φύσης της δοκιμασίας και όχι λόγω της θέσης των ερωτήσεων στο ερωτηματολόγιο. Πιο συγκεκριμένα, ότι θα επηρεάζονται λιγότερο από το φαινομενικό πρόσημο διότι έχουν μάθει ότι όπου εμφανίζονται τετραγωνικές ρίζες πρέπει να δείχνουν ιδιαίτερη προσοχή στο πρόσημο της υπόριζης ποσότητας.

Οι μαθητές είχαν επίσης σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στις δοκιμασίες που περιείχαν παραστάσεις με θετικό φαινομενικό πρόσημο σε σχέση με αυτές που περιείχαν αρνητικό φαινομενικό πρόσημο, $F(1,108)=18.616$, $p<.001$. Το αποτέλεσμα αυτό γίνεται αντικείμενο διεξοδικότερης ανάλυσης παρακάτω.

Τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών στις λανθασμένα δοσμένες ανισώσεις και συναρτήσεις και στα δύο ερωτηματολόγια[10] παρουσιάζονται και γραφικά στο Διάγραμμα 6.2 για καλύτερη εποπτεία των αποτελεσμάτων. Όπως φαίνεται από το γράφημα στο Διάγραμμα 6.2, σε ένα μεγάλο ποσοστό, οι μαθητές, επηρεασμένοι από το φαινομενικό πρόσημο των παραστάσεων, το οποίο έτειναν να παρερμηνεύουν ως το πρόσημο των τιμών τις οποίες είναι δυνατό να αναπαραστήσουν, απέτυχαν να εντοπίσουν το σκόπιμο λάθος, τόσο στις ανισώσεις όσο και στις συναρτήσεις.

[10] Από τη στιγμή που δεν σημειώνονται σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των μαθητών στα δύο ερωτηματολόγια και λόγω του γεγονότος ότι τα ερωτηματολόγια αυτά περιείχαν τις ίδιες δοκιμασίες, η συνέχεια της ανάλυσης στις απαντήσεις των μαθητών γίνεται για το σύνολο του δείγματος, ανεξάρτητα από το ερωτηματολόγιο που είχαν απαντήσει οι συμμετέχοντες.



Διάγραμμα 6.2 Ποσοστά επιτυχίας/αποτυχίας των μαθητών να εντοπίσουν το λάθος στις λανθασμένα δοσμένες ανισώσεις και τις συναρτήσεις με τετρ. ρίζες.

Επίσης από το Διάγραμμα 6.2 φαίνεται ότι οι μαθητές στην πλειοψηφία τους εμφανίστηκαν να τα πηγαίνουν καλύτερα στην ανίσωση με φαινομενικά θετική παράσταση, απ' ό,τι στην ανίσωση με φαινομενικά αρνητική παράσταση, κάτι που υποστήριξε την αρχική μας υπόθεση, ότι, δηλαδή, η παρουσία του φαινομενικά αρνητικού προσήμου έχει μεγαλύτερη επίδραση από την παρουσία φαινομενικά θετικού προσήμου. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 6.7, όπου συγκρίνονται τα ποσοστά των ορθών και των λανθασμένων απαντήσεων σε κάθε είδους ανίσωσης, μόνο 2,4% των μαθητών που απάντησαν λανθασμένα στην ανίσωση με φαινομενικά θετική παράσταση απάντησαν σωστά στην ανίσωση με φαινομενικά αρνητική παράσταση, ενώ στην αντίθετη περίπτωση, το ποσοστό που απάντησε σωστά στην φαινομενικά θετική περίπτωση και λανθασμένα στη φαινομενικά αρνητική ήταν 40%. Η διαφορά αυτή ήταν στατιστικώς σημαντική, $\chi^2(1, N=110)=49.133$, *McNemar Test value* $p<0.05$.

Τύπος ανίσωσης	Λανθασμένη ανίσωση με αρνητικό φαινομενικό πρόσημο		
Λανθασμένη ανίσωση με θετικό φαινομενικό πρόσημο		Λάθος απάντηση	Σωστή απάντηση
	Λάθος απάντηση	97,6	2,4
	Σωστή απάντηση	40,0	60,0

Πίνακας 6.7 Ποσοστά απαντήσεων στις λανθασμένα δοσμένες ανισώσεις

Όπως και στην περίπτωση των ανισώσεων έτσι και στις συναρτήσεις με τετραγωνικές ρίζες οι μαθητές τα πήγαν καλύτερα στη δοκιμασία που αφορούσε φαινομενικά θετική παράσταση, παρά σε αυτή που αφορούσε φαινομενικά αρνητική (βλ. Διάγραμμα 6,2). Όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 6.8, μόνο 11,1% των μαθητών απάντησαν σωστά στη συνάρτηση με φαινομενικά αρνητικό υπόριζο, ενώ είχαν απαντήσει λανθασμένα στην αντίστοιχη με φαινομενικά θετικό υπόριζο. Στην αντίθετη περίπτωση, όπου οι μαθητές απάντησαν σωστά στη δοκιμασία με θετική παράσταση και λανθασμένα στη δοκιμασία με αρνητική παράσταση, το ποσοστό ήταν 28,8% και αυτή η διαφορά ήταν στατιστικώς σημαντική, χ^2*(1, N=109)=34,886, McNemar Test value p<0.001.*

Τύπος συνάρτησης με τετραγωνική ρίζα	Λανθασμένη συνάρτηση τετρ. ρίζα με αρνητικό φαινομενικό πρόσημο		
Λανθασμένη συνάρτηση τετρ. ρίζα με θετικό φαινομενικό πρόσημο		Λάθος απάντηση	Σωστή απάντηση
	Λάθος απάντηση	88,9	11,1
	Σωστή απάντηση	28,8	71,2

Πίνακας 6.8 Ποσοστά απαντήσεων στις λανθασμένα δοσμένες συναρτήσεις με τετρ. ρίζα

Φάνηκε λοιπόν ότι οι μαθητές τα πήγαιναν συνολικά καλύτερα, δηλαδή επηρεάζονταν λιγότερο από το φαινομενικό πρόσημο στις δοκιμασίες που περιείχαν φαινομενικά θετικές παραστάσεις, παρά σε αυτές που περιείχαν φαινομενικά αρνητικές. Οι μαθητές δηλαδή εμφανίστηκαν πιο πρόθυμοι να δεχθούν ότι μια φαινομενικά θετική παράσταση θα μπορούσε να αναπαραστήσει και αρνητικές τιμές ,παρά ότι μια φαινομενικά αρνητική θα μπορούσε να αναπαραστήσει και θετικές τιμές.

Τέλος, εξετάστηκε μία από τις βασικές υποθέσεις του πειράματος, ότι η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου υποστηρίζεται από την τάση των μαθητών να ερμηνεύουν τα γράμματα ως σύμβολα που αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς. Δημιουργήθηκε μια μεταβλητή που μετρούσε σε πόσες (καμία, μία ή δύο) από τις δύο συναρτήσεις, που δόθηκαν για να γίνει η γραφικής της παράσταση, έδωσε κάθε μαθητής έστω και μία μη-φυσική τιμή στη μεταβλητή. Ανάλυση παλινδρόμησης έδειξε ότι ο τρόπος με τον οποίο απάντησαν οι μαθητές στις δύο πρώτες δοκιμασίες προβλέπει με στατιστική σημαντικότητα τον μέσο όρο συνολικής επίδοσης στις υπόλοιπες δοκιμασίες που αφορούσαν την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, *β=.318, t=3,472, p<.001*. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν συνεπές με την υπόθεσή μας, καθώς έδειξε ότι οι μαθητές που ήταν πρόθυμοι να δώσουν και μη φυσικές τιμές στα γράμματα, ήταν πιο πρόθυμοι να δεχτούν ότι το πρόσημο μιας παράστασης δεν είναι απαραίτητα ίδιο με το φαινομενικό της πρόσημο, κάνοντας λιγότερα λάθη στις συγκεκριμένες δοκιμασίες.

6.4 Συζήτηση

Τα αποτελέσματα της Πειράματος 3 ενίσχυσαν αυτά των προηγούμενων πειραμάτων και υποστήριξαν την αρχική μας υπόθεση ότι οι μαθητές έχουν την τάση να ερμηνεύουν τα γράμματα που χρησιμοποιούνται στη θέση των μεταβλητών ως σύμβολα που αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς. Ακόμα και όταν τα γράμματα αυτά εμφανίζονται σε ένα οικείο μαθηματικό πλαίσιο, όπως αυτό των συναρτήσεων, που αποτελεί βασικό μαθηματικό πλαίσιο στο οποίο η έννοια της μεταβλητής βρίσκει εφαρμογές, οι μαθητές έχουν την τάση να τα θεωρούν ως φυσικούς αριθμούς. Αυτό φάνηκε στις δύο πρώτες δοκιμασίες, όπου, έχοντας τη δυνατότητα να δώσουν ό,τι τιμές ήθελαν στις μεταβλητές δύο συναντήσεων για να κάνουν τη γραφικής τους παράσταση, η πλειοψηφία των μαθητών έδωσε μόνο φυσικούς αριθμούς, καταλήγοντας σε λανθασμένες – ελλιπείς – γραφικές παραστάσεις που εκτείνονταν μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων του επιπέδου.

Τα αποτελέσματα του πειράματος αυτού έκαναν επίσης φανερή την ύπαρξη της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου στα συγκεκριμένα μαθηματικά πλαίσια, δηλαδή την τάση των μαθητών να θεωρούν το φαινομενικό πρόσημο μιας μεταβλητής, ή μιας αλγεβρικής παράστασης που περιέχει μεταβλητές, ως το πραγματικό πρόσημο των τιμών που δύναται να αναπαραστήσει. Η συγκεκριμένη παρερμηνεία είχε ως αποτέλεσμα τη χαμηλή επίδοση σε μια σειρά από μαθηματικές δραστηριότητες όπως, για παράδειγμα, στους μετασχηματισμούς για τη λύση ανισώσεων, καθώς και στη μελέτη του πεδίου ορισμού συναρτήσεων.

Η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου φάνηκε πως εξαρτάται από το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζονται οι αλγεβρικές παραστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές φάνηκε να μην επηρεάζονται από το φαινομενικό πρόσημο των συναρτήσεων με τετραγωνικές ρίζες στο βαθμό που επηρεάζονται από αυτό στο πλαίσιο των μετασχηματισμών για τη λύση ανισώσεων. Στην περίπτωση των συναρτήσεων με τετραγωνικές ρίζες, το πρόσημο της υπόριζης ποσότητας είναι οντολογικό χαρακτηριστικό της έννοιας και έτσι αποτελεί σημείο ιδιαίτερης προσοχής από τους μαθητές. Από την άλλη μεριά, στο πλαίσιο των μετασχηματισμών με ανισώσεις, το πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων που συμμετέχουν στους μετασχηματισμούς υπονοείται και για το λόγο αυτό δεν αποτελεί σημείο ιδιαίτερης προσοχής από τους μαθητές.

Η μεγαλύτερη επίδραση της εν λόγω παρερμηνείας εμφανίστηκε στην περίπτωση της παρουσίας του φαινομενικά αρνητικού προσήμου, όπου οι μαθητές έτειναν να το ερμηνεύουν ως το σύμβολο αρνητικών τιμών που αναπαριστούν. Το αποτέλεσμα αυτό είναι κοινό με τα προηγούμενα πειράματα (βλ. Πείραμα 1 και 2) όπου είχε φανεί ότι η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου είχε τη μεγαλύτερη επίδρασή της στην περίπτωση της φαινομενικά αρνητικής παράστασης ‘-β’, παρά στις φαινομενικά θετικές παραστάσεις. Τα αποτελέσματα αυτά υποστηρίζουν ότι η ύπαρξη του αρνητικού προσήμου πριν από μεταβλητές και μέσα σε αλγεβρικές παραστάσεις επηρεάζει τους μαθητές να το ερμηνεύουν ως το σύμβολο της αρνητικής αξίας των μεταβλητών και των παραστάσεων.

Τα αποτελέσματα της εμπειρικής αυτής μελέτης έρχονται τέλος να υποστηρίξουν την ερμηνεία που προτάθηκε για την παρανόηση του φαινομενικού προσήμου, με βάση το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής. Σύμφωνα με αυτή την ερμηνεία, η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου δεν είναι ανεξάρτητη από την τάση των μαθητών να ερμηνεύουν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς, αλλά υποστηρίζεται από τις αρχικές λανθάνουσες πεποιθήσεις των μαθητών ότι τα γράμματα στην άλγεβρα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η τάση των μαθητών να δίνουν μόνο φυσικές τιμές στα γράμματα υποστηρίζει την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Αυτό έγινε φανερό από το γεγονός ότι οι μαθητές που ήταν πρόθυμοι να δώσουν στις μεταβλητές τουλάχιστον μία μη-φυσική τιμή είχαν μικρότερη πιθανότητα να εμφανίσουν την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου.

Τα αποτελέσματα αυτού του πειράματος, καθώς και τα άλλα των προηγούμενων πειραμάτων, χρησιμοποιήθηκαν στο σχεδιασμό μιας διδακτικής παρέμβασης, που στόχο είχε να βοηθήσει τους μαθητές να διορθώσουν την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Στη μελέτη που ακολουθεί χρησιμοποιήσαμε μια σειρά από συγκεκριμένες προτάσεις που έχουν εκφραστεί από ερευνητές στο χώρο της μάθησης με εννοιολογική αλλαγή, για να σχεδιάσουμε μια διδακτική παρέμβαση που εστιάζει στην παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου των αλγεβρικών παραστάσεων. Στο επόμενο κεφάλαιο περιγράφουμε το σχεδιασμό και τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης.

Κεφάλαιο 7
Πείραμα 4

7.1 Στόχοι και υποθέσεις του πειράματος

Στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που αφορά την έρευνα για τη μάθηση και τη διδασκαλία της άλγεβρας η Kieran (2007) καταλήγει ότι, ενώ υπάρχουν αρκετά ευρήματα για τις δυσκολίες και τις παρερμηνείες που εμφανίζουν οι μαθητές με έννοιες της άλγεβρας, παρόλα αυτά δεν υπάρχουν έρευνες που να αναφέρονται σε δοκιμασμένες διδακτικές προτάσεις που εστιάζουν σε αυτά τα λάθη και στις παρερμηνείες. Οι προηγούμενες μελέτες που παρουσιάστηκαν παραπάνω έδειξαν την ύπαρξη μιας σειράς λαθών στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές ερμηνεύουν τη χρήση γραμμάτων ως μεταβλητές, που δεν είχαν εντοπιστεί στο παρελθόν από άλλους ερευνητές του πεδίου, τουλάχιστον στο βαθμό που γνωρίζουμε. Πιο συγκεκριμένα, πρόκειται για την τάση των μαθητών να θεωρούν ότι τα γράμματα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς και την τάση τους να παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο μιας αλγεβρικής παράστασης ως το πραγματικό πρόσημο των τιμών που αυτή μπορεί να αναπαραστήσει.

Σκοπός του Πειράματος 4 ήταν να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα αυτά στο σχεδιασμό μιας διδακτικής παρέμβασης που θα στόχευε στην διόρθωση της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου και να εξεταστεί κατά πόσον αυτή η παρερμηνεία διορθώνεται εύκολα ή όχι, αν δοθούν στους μαθητές κατάλληλες οδηγίες.

Έστω κι αν είναι στους βασικούς στόχους κάθε εκπαιδευτικού προγράμματος να μάθουν οι μαθητές κάποιες βασικές έννοιες σε τομείς γνώσης, όπως οι φυσικές επιστήμες και τα μαθηματικά, είναι ακριβώς εκεί όπου εμφανίζονται οι μεγαλύτερες δυσκολίες, τα υψηλότερα ποσοστά αποτυχίας των μαθητών και πλήθος παρερμηνειών. Όπως υποστηρίζει η Βοσνιάδου (Vosniadou, 2007a· in press) ένας βασικός λόγος αυτού του φαινομένου είναι διότι η εκπαιδευτική διαδικασία δεν έχει καταφέρει να διαχειριστεί επαρκώς το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής. Πιο συγκεκριμένα, εξηγεί η Βοσνιάδου, η σχολική διδασκαλία δεν λαμβάνει υπόψη της ότι η μάθηση δεν είναι πάντα μια συσσωρευτική διαδικασία και ότι η νέα γνώση δεν είναι πάντα αποτέλεσμα εμπλουτισμού της προϋπάρχουσας γνωστικής δομής, αλλά υπάρχουν περιπτώσεις όπου η μάθηση επιτυγχάνεται μέσα από μία ριζική αλλαγή του προϋπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου.

Η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου είναι ένα πρόβλημα εννοιολογικής αλλαγής, καθώς φαίνεται να οφείλεται στην επίδραση της αρχικής γνώσης των μαθητών για τον αριθμό που είναι οργανωμένη γύρω από τον φυσικό αριθμό και της επίδρασης της προηγούμενης γνώσης των μαθητών στην αριθμητική. Πιο συγκεκριμένα, η αρχική γνώση των μαθητών για τους αριθμούς που είναι οργανωμένη γύρω από την έννοια του φυσικού αριθμού φαίνεται πως επηρεάζει τους μαθητές να ερμηνεύουν τα γράμματα στην άλγεβρα ως φυσικούς αριθμούς και όχι ως τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Επίσης, όπως αναφέραμε και στο Κεφάλαιο 4, αν τα γράμματα αναπαριστούσαν μόνο φυσικούς αριθμούς, τότε το φαινομενικό πρόσημο μιας παράστασης θα ήταν ίδιο με το πραγματικό της πρόσημο. Η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου υποστηρίζεται και από την προηγούμενη εμπειρία των μαθητών με αριθμούς στα πλαίσια της αριθμητικής, όπου η παρουσία αρνητικού προσήμου πριν από έναν αριθμό συμβολίζει ότι ο αριθμός αυτός είναι αρνητικός. Η γνώση αυτή των μαθητών θα μπορούσε να τους επηρεάζει στο να πιστεύουν ότι και η παρουσία αρνητικού προσήμου πριν από μία μεταβλητή (π.χ., -2x) συμβολίζει ότι η αλγεβρική παράσταση θα πρέπει να αναπαριστά μόνο αρνητικούς αριθμούς. Η σύγκρουση ανάμεσα στον τρόπο χρήσης των γραμμάτων στο συμβολικό σύστημα της άλγεβρας με τα σύμβολα των αριθμών στην αριθμητική και η ιδιαίτερη προσκόλληση των μαθητών στους φυσικούς αριθμούς αποτελούν ένα πρόβλημα εννοιολογικής αλλαγής και η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου το αναδεικνύει.

Στην παρούσα μελέτη θελήσαμε να εξετάσουμε αν θα μπορούσαμε να διαχειριστούμε διδακτικά το συγκεκριμένο πρόβλημα προσπαθώντας να βοηθήσουμε τους μαθητές να διορθώσουν την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου μέσα από μία διδακτική παρέμβαση, η οποία θα λάμβανε υπόψη τα ζητήματα της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών, όπως αυτά τοποθετούνται από το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής. Για το λόγο αυτό δοκιμάσαμε σε ένα δείγμα μαθητών μια διδακτική παρέμβαση σύντομη και στοχευόμενη στη συγκεκριμένη παρερμηνεία. Η διδακτική παρέμβαση χρησιμοποίησε τα εμπειρικά αποτελέσματα των προηγούμενων πειραμάτων, καθώς και τα αποτελέσματα για τα λάθη και τις παρερμηνείες των μαθητών που έχει επισημάνει η διεθνής βιβλιογραφία στο πεδίο (βλ. Κεφ. 1).

Στη διδακτική παρέμβαση υιοθετήσαμε τις βασικές αρχές της άμεσης διδασκαλίας, προσφέροντας στους μαθητές ξεκάθαρους και ρητά εκφρασμένους ορισμούς των εννοιών που συνοδεύονταν από συγκεκριμένα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα που υποστήριζαν αυτούς τους ορισμούς, αναφερθήκαμε σε συγκεκριμένα λάθη και προτείναμε στρατηγικές με τις οποίες θα μπορούσαν αυτά να αποφευθούν (βλ. Kinder & Carmine, 1991· D. Kuhn, 2007· Mayer, 2004· Moore, 1986). Στο σχεδιασμό της παρέμβασης δόθηκε έμφαση στην ενεργοποίηση της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών (Ausubel, 1968), ενώ ο βαθμός δυσκολίας των ζητημάτων που τέθηκαν αύξανε γραμμικά, από τα πιο απλά στα πιο σύνθετα. Λήφθηκαν επίσης υπ' όψιν προτάσεις από το χώρο που αφορά την έρευνα στη γνωστική ανάπτυξη και τη μάθηση με εννοιολογική αλλαγή (βλ. De Corte, 2004· Tsamir & Tirosh, 2007· Vosniadou, in press· βλ. Vosniadou, Ioannides, Dimitrakopoulou, & Papademitriou, 2001), που θα αναπτυχθούν παρακάτω.

Μια διδακτική στρατηγική που συχνά προτείνεται ειδικά για τη διόρθωση συγκεκριμένων παρερμηνειών είναι αυτή της *γνωστικής σύγκρουσης* (βλ. Limon, 2001· Stavy & Berkovitz, 1980· Tirosh, Stavy, & Cohen, 1998). Οι απαρχές αυτής της ιδέας βρίσκονται στη θεωρία του Piaget, σύμφωνα με την οποία η διαδικασία της γνωστικής σύγκρουσης έχει κεντρικό ρόλο στη γνωστική ανάπτυξη ως μέρος του μηχανισμού της εξισορρόπησης (βλ. Druyan, 2001). Επίσης, ως μηχανισμός γνωστικής ανάπτυξης ταυτίστηκε με τις θεωρίες της εννοιολογικής αλλαγής (Limon, 2001· Posner και συνεργάτες, 1982). Η ιδέα είναι πως, όπως στην ιστορία της επιστήμης, η εμφάνιση κάποιων δεδομένων που βρίσκονται σε σύγκρουση με τις προβλέψεις μιας θεωρίας θα μπορούσαν να κάνουν τη θεωρία αυτή να απορριφθεί και να αντικατασταθεί από μια νέα θεωρία, έτσι και στη μάθηση, κάτι αντίστοιχο θα μπορούσε να συμβαίνει (βλ. Thagard, 1992). Η ιδέα αυτή θα μπορούσε να αναγνωριστεί ως ένα μέρος της αναλογίας ανάμεσα στη γνωστική ανάπτυξη και την ιστορική εξέλιξη των επιστημονικών θεωριών, από την οποία αναλογία άλλωστε προέκυψαν και τα διάφορα θεωρητικά πλαίσια για τη μάθηση με εννοιολογική αλλαγή (βλ. Κεφ. 3). Ερευνητές του χώρου της μάθησης με εννοιολογική αλλαγή υποστήριξαν ότι, εκθέτοντας τους μαθητές σε δεδομένα που βρίσκονται σε σύγκρουση με τις αρχικές τους προβλέψεις όπως αυτές θα προέκυπταν από τα εναλλακτικά ερμηνευτικά τους πλαίσια, θα δημιουργούσε στους μαθητές γνωστική σύγκρουση. Το αποτέλεσμα αυτής της σύγκρουσης θα ήταν να αμφισβητήσουν τις αρχικές τους γνώσεις και λανθασμένες πεποιθήσεις και να δεχθούν τη νέα και πιο εκλεπτυσμένη χρήση μιας έννοιας (βλ. Limon, 2001· Posner και συνεργάτες, 1982· Vosniadou, 1994).

Θεωρήσαμε ότι η διδακτική πρακτική της δημιουργίας γνωστικής σύγκρουσης θα μπορούσε να λειτουργήσει στην περίπτωση της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου, βοηθώντας τους μαθητές να τη διορθώσουν. Όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω, στην περίπτωση της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου οι μαθητές τείνουν να ερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο μιας μεταβλητής ή μιας αλγεβρικής παράστασης ως το πραγματικό της πρόσημο. Στη διδακτική μας παρέμβαση θα είχαμε την ευκαιρία να προσφέρουμε παραδείγματα αριθμών που, αν αντικατασταθούν στις μεταβλητές μιας παράστασης, θα δώσουν πρόσημο αντίθετο από το φαινομενικό πρόσημο, προκαλώντας στους μαθητές γνωστική σύγκρουση. Το αποτέλεσμα της σύγκρουσης αυτής θα μπορούσε να είναι να κατανοήσουν οι μαθητές ότι τα πράγματα στην άλγεβρα δεν είναι όπως φαίνονται, κάνοντας την απαραίτητη διάκριση ανάμεσα σε αριθμούς στην αριθμητική και μεταβλητές στην άλγεβρα.

Ένας άλλος στόχος μιας διδακτικής παρέμβασης είναι να προσπαθήσει να κάνει τους μαθητές μεταεννοιολογικά ενήμερους των εναλλακτικών ερμηνευτικών τους πλαισίων και των εμποδίων που αυτά θέτουν στην κατανόηση της νέας πληροφορίας (Vosniadou, in press). Επειδή, όπως υποστηρίζουν έρευνες στο συγκεκριμένο πεδίο, οι λανθασμένες πεποιθήσεις των μαθητών συχνά δεν βρίσκονται κάτω από το συνειδητό τους έλεγχο (De Corte, 2004· Fischbein και συνεργάτες, 1985· Vosniadou, Skopeliti, & Ikospentaki, 2004), η απόκτηση τόσο μεταεννοιολογικής όσο και μεταγνωστικής επίγνωσης φαίνεται να αποτελεί σημαντική προϋπόθεση για τη διαδικασία της μάθησης και τη διόρθωση συγκεκριμένων λαθών και παρερμηνειών (De Corte, 2004· Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Θεωρήσαμε λοιπόν ότι, αν οι μαθητές αποκτήσουν μεταεννοιολογική επίγνωση της ύπαρξης της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου, των λόγων για τους οποίους πιθανά εμφανίζεται και των συνεπειών που αυτή έχει σε διάφορα μαθηματικά πλαίσια, η διδακτική παρέμβαση θα ήταν πιο αποτελεσματική.

Κάθε διδακτική παρέμβαση θα έπρεπε επίσης να στοχεύει στο να εφοδιάσει τους μαθητές με τις κατάλληλες στρατηγικές που θα τους βοηθούσαν να διορθώσουν τα λάθη τους (De Corte, 2004). Στα πλαίσια αυτού του προβληματισμού, που αποτελεί και βασική αρχή της άμεσης διδασκαλίας, θα είχαμε την ευκαιρία να δείξουμε στους μαθητές κάποιους συγκεκριμένους τρόπους, με τους οποίους να καταφέρνουν να ξεπερνούν την τάση τους να παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων.

Για να εξεταστεί εμπειρικά η αποτελεσματικότητα μιας τέτοιας διδακτικής παρέμβασης, ένα δείγμα μαθητών εξετάστηκε ως προς την ύπαρξη της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου, πριν και αμέσως μετά τη διδακτική παρέμβαση. Το ίδιο δείγμα μαθητών εξετάστηκε για την ίδια παρερμηνεία και ένα μήνα μετά τη διδακτική παρέμβαση, για να ελεγχθεί κατά πόσο η διδακτική παρέμβαση είχε πιο μόνιμα αποτελέσματα.

Τα ερωτηματολόγια που χρησιμοποιήθηκαν για την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου παραστάσεων περιείχαν δοκιμασίες ίδιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στο Πείραμα 3. Πιο συγκεκριμένα, αλγεβρικές παραστάσεις με θετικό ή αρνητικό φαινομενικό πρόσημο παρουσιάστηκαν στο πλαίσιο των μετασχηματισμών για τη λύση ανισώσεων, καθώς και στο πλαίσιο του πεδίο ορισμού συναρτήσεων με τετραγωνικές ρίζες. Στη συγκεκριμένη μελέτη χρησιμοποιήθηκε και ένα νέο πλαίσιο, στο οποίο το πρόσημο των παραστάσεων έχει επίσης ρυθμιστικό ρόλο, όπως στις περιπτώσεις των ανισώσεων και των συναρτήσεων με τετραγωνικές ρίζες, και αυτό είναι το πλαίσιο της *απόλυτης τιμής αριθμού*.

Κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης δώσαμε στους μαθητές παραδείγματα μόνο από ένα από τα πλαίσια στα οποία είχαν εξεταστεί στον προέλεγχο, αυτού των συναρτήσεων με τετραγωνικές ρίζες, θέλοντας να εξετάσουμε αν στον μετα-έλεγχο θα υπήρχε μεταφορά αυτής της γνώσης και στα άλλα μαθηματικά πλαίσια. Αν οι μαθητές μετέφεραν αυτή τη γνώση και στα άλλα μαθηματικά πλαίσια και όχι μόνο στο πλαίσιο στο οποίο τα είχαν διδαχθεί, αυτό θα έδειχνε μια βαθύτερη κατανόηση του ζητήματος της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου (για μια συζήτηση για το ζήτημα της μεταφοράς γνώσης βλ. Bransford, Brown, & Cocking, 1999).

Επιλέξαμε να δώσουμε παραδείγματα από το πλαίσιο των συναρτήσεων με τετραγωνικές ρίζες γιατί, όπως είχε φανεί από το Πείραμα 3, οι μαθητές στο συγκεκριμένο πλαίσιο κάνουν λάθη, τα οποία οφείλονται στην παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, αλλά τα πηγαίνουν καλύτερα στις ερωτήσεις αυτές απ' ότι στις ανισώσεις. Εστιάζοντας τη διδασκαλία στο πιο οικείο, για τους μαθητές, πλαίσιο των τετραγωνικών ριζών θα είχαμε τη δυνατότητα να εξετάσουμε την πιθανή μεταφορά αυτής της γνώσης στο πλαίσιο των ανισώσεων, στο οποίο σημειώνεται και μεγαλύτερη δυσκολία.

7.1.1 Η απόλυτη τιμή αριθμού

Στη συγκεκριμένη μελέτη χρησιμοποιούμε την απόλυτη τιμή αριθμού ως ένα πλαίσιο στο οποίο η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου θα είχε σημαντική επίδραση στα λάθη των μαθητών. Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού συμβολίζει την απόσταση ενός αριθμού από το μηδέν. Επειδή συμβολίζει απόσταση, οι τιμές που μπορεί να πάρει είναι υποχρεωτικά μη-αρνητικές. Έτσι, ο μαθηματικός ορισμός της απόλυτης τιμής ενός αριθμού α (συμβολισμός $|a|$) είναι: $|a|$=α, αν α>0 και $|a|$=-α, αν α<0. Με τον τρόπο αυτό ορισμού της, η απόλυτη τιμή αριθμού έχει πάντα θετική αξία. Για παράδειγμα, όταν πρόκειται για αριθμούς, είναι: $|3| = 3$ και $|-3| = 3$.

Με την απόλυτη τιμή των συγκεκριμένων αριθμών οι μαθητές δε φαίνεται να αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες. Ο βασικές δυσκολίες και τα λάθη εμφανίζονται με τις απόλυτες τιμές μεταβλητών καθώς και παραστάσεων που περιέχουν μεταβλητές. Τα λάθη σχεδόν αποκλειστικά οφείλονται στη δυσκολία των μαθητών να δεχθούν ότι το ‘-α’ είναι θετικός αριθμός, στο δεύτερο σκέλος του ορισμού της απόλυτης τιμής, όπου το ‘α’ ορίζεται ως αρνητικός αριθμός (Chiarugi, Fracassina, & Furinghetti, 1990). Έστω κι αν αποτελεί βασική έννοια στα σχολικά μαθηματικά, η απόλυτη τιμή δεν έχει αποτελέσει αντικείμενο αρκετών εμπειρικών μελετών για τα λάθη και τις δυσκολίες των μαθητών στην κατανόησή της.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των προηγούμενων μελετών μας θα περιμέναμε ότι οι μαθητές θα είχαν την τάση να ερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων που εμφανίζονται μέσα σε απόλυτες τιμές ως το πραγματικό πρόσημο της αξίας τους και αυτό θα οδηγούσε σε λάθη σε σχέση με την εφαρμογή του ορισμού της απόλυτης τιμής.

7.1.2 Η διδακτική παρέμβαση

Από τις προηγούμενες μελέτες μας, φάνηκε ότι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών για τους αριθμούς, όπως αυτή συγκροτήθηκε στο πλαίσιο της αριθμητικής, με την ιδιαίτερη θέση που επιφυλάσσει για τους φυσικούς αριθμούς, αποτελεί το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο πάνω στο οποίο χτίζεται η νέα γνώση για τη μεταβλητή στην άλγεβρα. Στη διδακτική παρέμβαση, λάβαμε υπόψη μας τα χαρακτηριστικά της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών που φαίνεται πως επιδρούν στον τρόπο με τον οποίο αυτοί ερμηνεύουν τη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα. Ξεκινήσαμε από μία αναλυτική παρουσίαση των διαφορών που υπάρχουν ανάμεσα στο συμβολισμό των αριθμών, και ειδικά των φυσικών αριθμών στην αριθμητική, και στο συμβολισμό των μεταβλητών και των παραστάσεων στην άλγεβρα. Προχωρήσαμε σε μια αναλυτική αναφορά στον ορισμό της έννοιας της μεταβλητής ως σύμβολο που αναπαριστά τον οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, δίνοντας σειρά παραδειγμάτων και επιμείναμε στο γεγονός ότι κάθε αριθμός, οποιουδήποτε είδους, θα μπορούσε να δοθεί σε κάθε μεταβλητή (η απομαγνητοφώνηση της διδακτικής παρέμβασης βρίσκεται στο Παράρτημα 4).

Σε μια προσπάθεια να αναδείξουμε τις άδηλες εσωτερικές αναπαραστάσεις των μαθητών για τις μεταβλητές και τις αλγεβρικές παραστάσεις, επισημάναμε το ζήτημα του προσήμου και του φαινομενικού προσήμου αυτών. Προσπαθήσαμε να αναδείξουμε την τάση που υπάρχει να θεωρείται το φαινομενικό πρόσημο μιας μεταβλητής, ή μιας αλγεβρικής παράστασης, ως το πραγματικό πρόσημο των τιμών που αναπαριστά, κάνοντας χρήση του μηχανισμού της *γνωστικής σύγκρουσης*. Πιο συγκεκριμένα, φέραμε τους μαθητές αντιμέτωπους με τη σύγκρουση που συμβαίνει ανάμεσα στα πράγματα όπως φαίνεται να είναι και στο πώς είναι στην πραγματικότητα της άλγεβρας. Δείξαμε με παραδείγματα ότι είναι δυνατόν μια φαινομενικά αρνητική παράσταση να αναπαριστά και θετικές τιμές, αναφέροντας ότι αυτό συμβαίνει όταν δοθούν κάποιες αρνητικές τιμές στη μεταβλητή, και το αντίστροφο.

Η γνωστική σύγκρουση δεν περιορίστηκε σε μια απλή αναφορά, αφού κάτι τέτοιο δεν θα μπορούσε από μόνο του να αποτελέσει λύση στο βαθύτερο πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής (Vosniadou και συνεργάτες, 2001). Αντίθετα, η συνθήκη αυτή αποτέλεσε ένα έναυσμα για να γίνει μια ανάλυση του φαινομένου με ρητές αναφορές στους βαθύτερους λόγους που φαίνεται ότι προκαλούν την εν λόγω σύγχυση. Πιο συγκεκριμένα, αναφέραμε ότι η τάση να θεωρούμε ότι μια παράσταση που έχει μόνο θετικά πρόσημα, για παράδειγμα, αναπαριστά μόνο θετικούς αριθμούς οφείλεται πιθανά στο ότι σκεφτόμαστε τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς μόνο, αποδίδοντάς τους ιδιότητες των φυσικών αριθμών. Και πως, αν καταφέρουμε να βλέπουμε τα γράμματα ως έναν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό (που θα μπορούσε να είναι θετικός ή και αρνητικός), τότε θα μπορούσαμε να ξεπεράσουμε τις αρχικές μας εντυπώσεις για το πρόσημό τους. Η συγκεκριμένη συζήτηση έγινε σε μία προσπάθεια να αποκτήσουν οι μαθητές μεταεννοιολογική επίγνωση της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου.

Στη συνέχεια αναφερθήκαμε στις συνέπειες μιας τέτοιας παρερμηνείας στην καθημερινή μαθηματική πρακτική, παίρνοντας παραδείγματα από το τεστ στο οποίο είχαν υποβληθεί οι μαθητές πριν από τη διδακτική παρέμβαση. Αναφερθήκαμε αναλυτικά στο παράδειγμα των συναρτήσεων με τετραγωνική ρίζα, όπου συχνά εμφανίζεται το λάθος να βγαίνει συμπέρασμα για το πεδίο ορισμού τους με βάση το φαινομενικό πρόσημο της υπόριζης ποσότητας, δίνοντας κάποια παραδείγματα.

Στην προσπάθειά μας να προτείνουμε στους μαθητές συγκεκριμένες στρατηγικές για να μην παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των παραστάσεων, αναφερθήκαμε στη στρατηγική της δοκιμής με αριθμούς. Είπαμε στους μαθητές ότι ένας εύκολος τρόπος να καταλαβαίνουν ποιο θα μπορούσε να είναι το πρόσημο μιας αλγεβρικής παράστασης που περιέχει μεταβλητές, είναι να δοκιμάζουν να αντικαταστήσουν τις μεταβλητές με αριθμούς, έχοντας στο νου τους να μην είναι μόνο φυσικοί αυτοί οι αριθμοί. Αναφέραμε ρητά στους μαθητές ότι πρέπει να δοκιμάζουν το πρόσημο μιας παράστασης τουλάχιστον με έναν αρνητικό αριθμό. Επαναλάβαμε, μάλιστα, αρκετές φορές ότι τα πράγματα στην άλγεβρα δεν είναι όπως φαίνονται και ότι αυτό πρέπει να το έχουν διαρκώς στο μυαλό τους.

Στο τέλος της διδακτικής παρέμβασης, που κράτησε περίπου 15 λεπτά, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να κάνουν ερωτήσεις και να εκφράσουν τις εντυπώσεις τους από αυτά που είχαν ακούσει - κατά πόσο ήταν πράγματα που τα άκουγαν για πρώτη φορά ή τους ήταν ήδη γνωστά. Επίσης, είχαν την ευκαιρία να μιλήσουν για το βαθμό στον οποίο εμφάνιζαν οι ίδιοι τις παραπάνω παρερμηνείες και τα λάθη που πιθανά είχαν κάνει στο τεστ που είχε προηγηθεί και ταυτόχρονα να ακούσουν τα αντίστοιχα σχόλια των συμμαθητών τους.

Στη μελέτη αυτή υποθέσαμε ότι μια διδακτική παρέμβαση που έχει τα χαρακτηριστικά διδακτικής παρέμβασης ειδικά σχεδιασμένης για εννοιολογική αλλαγή, όπως αυτά παρουσιάστηκαν παραπάνω, θα μπορούσε να λειτουργήσει βοηθητικά στη διόρθωση της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου των μεταβλητών και των αλγεβρικών παραστάσεων.

7.2 Μέθοδος

7.2.1 Συμμετέχοντες

Συμμετείχαν συνολικά 20 μαθητές και μαθήτριες της Α' Λυκείου (15,5 ετών περίπου). Το δείγμα ήταν σχεδόν μοιρασμένο σε αγόρια και κορίτσι (9 αγόρια και 11 κορίτσια).

7.2.2 Υλικά

Στους μαθητές δόθηκαν συνολικά τρία κλειστού τύπου ερωτηματολόγια: Το Ερωτηματολόγιο Ε1 (ΕΡ/Ε1) δόθηκε στην πρώτη φάση του πειράματος ως αρχικό τεστ, με στόχο να εξετάσουμε την ύπαρξη της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου των μεταβλητών και των αλγεβρικών παραστάσεων στις οποίες εμφανίζονται. Ένα δεύτερο ερωτηματολόγιο (ΕΡ/Ε2) δόθηκε αμέσως μετά τη διδακτική παρέμβαση για να εξετάσει αν η διδακτική παρέμβαση είχε αποτελέσματα στη διόρθωση της παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Τέλος, το Ερωτηματολόγιο Ε3 (ΕΡ/Ε3), που ήταν το ίδιο με το ΕΡ/Ε2, αλλά για λόγους παρουσίασης των αποτελεσμάτων ονομάζεται ΕΡ/Ε3, δόθηκε στο ίδιο δείγμα μαθητών με σκοπό να εξετάσει αν τα αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης διατηρούνταν και μετά από το πέρασμα ενός μεγαλύτερου χρονικού διαστήματος. Και τα τρία ερωτηματολόγια περιείχαν παρόμοιες δοκιμασίες που αφορούσαν μετασχηματισμούς για τη λύση ανισώσεων, το πεδίο ορισμού συναρτήσεων με τετραγωνική ρίζα και την εύρεση της αξίας απολύτων τιμών αλγεβρικών παραστάσεων.

Οι μετασχηματισμοί για λύση ανισώσεων καθώς και οι οδηγίες που τις συνόδευαν δόθηκαν με τον ίδιο τρόπο, όπως στο Πείραμα 3. Συνοπτικά αναφέρουμε ότι παρουσιάστηκαν λυμένες με αναλυτικά βήματα, άλλες φορές σωστά και άλλες με ένα σκόπιμο λάθος που συνέβαινε λόγω της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου. Από τους μαθητές ζητήθηκε να αποφανθούν για τη λύση που έβλεπαν μπροστά τους – αν συμφωνούσαν ή διαφωνούσαν και να δικαιολογήσουν την απάντησή τους (βλ. Παράρτημα 5) (για πιο λεπτομερή περιγραφή των οδηγιών και της παρουσίασης των δοκιμασιών βλ. Κεφ. 6, σελ 132-134 της παρούσας διατριβής).

Οι δοκιμασίες που αφορούσαν το πεδίο ορισμού συναρτήσεων με τετραγωνικές ρίζες, καθώς και οι συνοδευτικές οδηγίες δόθηκαν επίσης με τον ίδιο τρόπο, όπως στο Πείραμα 3, δηλαδή με τη μορφή δηλώσεων που αφορούσαν το αν ορίζεται ή όχι μια συνάρτηση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, όπου κάποιες από τις δηλώσεις ήταν σκόπιμα λανθασμένες εμφανίζοντας την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Από τους μαθητές ζητήθηκε να αποφανθούν για την αλήθεια αυτών των δηλώσεων (βλ. Κεφ. 6).

Τέλος, οι δοκιμασίες που αφορούσαν την αξία των απόλυτων τιμών αλγεβρικών παραστάσεων είχαν παρόμοια μορφή με τις δοκιμασίες που αφορούσαν το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων. Ο ορισμός της έννοιας της μεταβλητής δόθηκε ρητά σε μορφή οδηγιών, για να αποφευχθεί το ενδεχόμενο τα λάθη των μαθητών να οφείλονται σε ανεπαρκή γνώση του κανόνα. Πιο συγκεκριμένα, συνοδεύονταν από τις εξής οδηγίες: *«Γνωρίζουμε ότι: α) η απόλυτη τιμή μιας θετικής ποσότητας είναι η ίδια η ποσότητα και β) η απόλυτη τιμή μιας αρνητικής ποσότητας είναι η αντίθετή της που είναι θετική ποσότητα»*. Η κάθε δοκιμασία που αφορούσε απόλυτες τιμές παρουσίαζε στους μαθητές μια εφαρμογή του ορισμού της απόλυτης τιμής σε αλγεβρικές παραστάσεις που περιείχαν μεταβλητές. Οι εφαρμογές αυτές του ορισμού συνοδεύονταν από δηλώσεις που αφορούσαν την αξία των απολύτων τιμών και οι μαθητές καλούνταν να συμφωνήσουν ή να διαφωνήσουν και να εξηγήσουν γιατί. Για παράδειγμα, μία τέτοια δοκιμασία ήταν: *«Είναι* $|-2-3x| = 2+3x$ *γιατί το -2-3x είναι αρνητικός ενώ το 2+3x είναι θετικός για κάθε αριθμό x»*. Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν αν συμφωνούν ή διαφωνούν με την παραπάνω δήλωση και να δικαιολογήσουν την απάντησή τους. Τα είδη των δοκιμασιών σε κάθε ερωτηματολόγιο παρουσιάζονται στον Πίνακα 7.1 (βλ. επίσης Παράρτημα 5).

Πλαίσιο δοκιμασιών	**Τύποι δοκιμασιών ανά ερωτηματολόγιο**		
		ΕΡ/Ε1	ΕΡ/Ε2 & ΕΡ/Ε3
Συναρτήσεις με τετρ. ρίζες	Σωστές	1	-
	Λανθασμένες (θετικό φαινομενικό πρόσημο)	2	1
	Λανθασμένες (αρνητικό φαινομενικό πρόσημο)	2	2
Ανισώσεις	Σωστές	1	-

	Λανθασμένες (θετικό φαινομενικό πρόσημο)	2	1
	Λανθασμένες (αρνητικό φαινομενικό πρόσημο)	2	2
Απόλυτες τιμές	Σωστές	1	-
	Λανθασμένες (θετικό φαινομενικό πρόσημο)	1	2
	Λανθασμένες (αρνητικό φαινομενικό πρόσημο)	2	1
	Σύνολο	14	9

Πίνακας 7.1 Τα είδη των δοκιμασιών σε κάθε ερωτηματολόγιο

7.2.3 Διαδικασία

Αρχικά μοιράστηκε στους μαθητές το ΕΡ/Ε1, το οποίο συμπλήρωσαν παρουσία του καθηγητή τους των μαθηματικών και του ερευνητή. Τους δόθηκαν 20’ για να το συμπληρώσουν. Μετά το πέρασμα του χρόνου τα ερωτηματολόγια μαζεύτηκαν και ξεκίνησε η σύντομη διδακτική παρέμβαση.

Η παρέμβαση είχε τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν παραπάνω και έγινε από τον ερευνητή με τη χρήση του μαυροπίνακα, όποτε αυτός χρειαζόταν. Η διδακτική παρέμβαση ηχογραφήθηκε και αποηχογραφημένη βρίσκεται στο Παράρτημα 4.

Μετά το τέλος της διδακτικής παρέμβασης οι μαθητές έλαβαν το ΕΡ/Ε2 το οποίο συμπλήρωσαν μέχρι το τέλος της διδακτικής τους ώρας και κάνοντας χρήση και του χρόνου του διαλείμματος, εφόσον χρειάστηκε (περίπου 15’). Το ερωτηματολόγιο (ΕΡ/Ε3) δόθηκε στους μαθητές και μετά από έναν μήνα κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Στο μεταξύ οι μαθητές έλειψαν από τις σχολικές δραστηριότητες για 15 μέρες λόγω διακοπών του Πάσχα.

Κατά τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων επιτρέπονταν μόνο διευκρινιστικές ερωτήσεις, οι οποίες και απαντήθηκαν. Άλλες ερωτήσεις επιτράπηκαν μόνο στα πλαίσια της διδακτικής παρέμβασης.

7.2.4 Βαθμολόγηση

Όπως και στο Πείραμα 3, οι απαντήσεις των μαθητών αξιολογήθηκαν με βάση το αν κατάφεραν να εντοπίσουν το σκόπιμο λάθος εκεί που υπήρχε ή όχι. Οι ορθές απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 1, ενώ οι λανθασμένες με 0.

7.3 Αποτελέσματα

Για να εξετάσουμε πόσο υποστηρικτικά θα μπορούσε να λειτουργήσει μια διδακτική παρέμβαση, όπως η παραπάνω, στη διόρθωση της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου, υπολογίστηκαν οι διάμεσοι και το ενδοτεταρτιμορικό εύρος του μέσου όρου της επίδοσης των μαθητών για το σύνολο των δοκιμασιών σε κάθε ένα από τα τρία ερωτηματολόγια (Πίνακας 7.2). Αυτή η ανάλυση ακολουθήθηκε διότι οι μεταβλητές που εξέφραζαν τη συνολική επίδοση των μαθητών σε κάθε ένα από τα ερωτηματολόγια δεν ακολουθούσαν κανονική κατανομή. Έτσι, οι επιδόσεις αυτές υποβλήθηκαν σε μη-παραμετρικά στατιστικά κριτήρια, όπου φάνηκε ότι υπήρξε στατιστικώς σημαντική διαφορά στις επιδόσεις των μαθητών, πριν και αμέσως μετά τη διδακτική παρέμβαση. Οι μαθητές εμφανίστηκαν να τα πηγαίνουν σημαντικά καλύτερα στο ερωτηματολόγιο που ακολούθησε αμέσως μετά τη διδακτική παρέμβαση, *Wilcoxon Signed Ranks Test: Z=2,074, p<.05*. Αυτό σημαίνει ότι η διδακτική παρέμβαση, με τον τρόπο που έγινε, είχε κάποια αποτελέσματα και βοήθησε κάποιους μαθητές να διορθώσουν την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου.

Ερωτηματολόγιο	Επιδόσεις	
	Διάμεσος (n=20)	Ενδοτεταρτημοριακό εύρος
ΕΡ/Ε1	0.392	0.34
ΕΡ/Ε2	0.611	0.64
ΕΡ/Ε3	0.500	0.56

Πίνακας 7.2 Επιδόσεις των μαθητών στα τρία ερωτηματολόγια

Όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 7.2, ένα μήνα μετά τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές τα πήγαν καλύτερα από ό,τι πριν την παρέμβαση, αλλά η σύγκριση των μέσων όρων στο σύνολο των ερωτήσεων δεν έδειξε στατιστικώς σημαντικές διαφορές. Φαίνεται, λοιπόν, ότι η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης δεν παρέμεινε το ίδιο ισχυρή ένα μήνα μετά, σε σχέση με την επίδρασή της αμέσως μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Στη συνέχεια της ανάλυσης των αποτελεσμάτων θελήσαμε να εστιάσουμε στις απαντήσεις των μαθητών και να εξετάσουμε σε ποιο πλαίσιο εμφανίστηκαν τα περισσότερα λάθη και αν οι διαφορές στις απαντήσεις σε κάθε πλαίσιο θα μπορούσαν να εξηγήσουν τη συνολική διαφορά που εμφανίστηκε στις επιδόσεις, αμέσως μετά την παρέμβαση. Με άλλα λόγια, θελήσαμε να εξετάσουμε το ζήτημα της μεταφοράς της γνώσης. Θυμίζουμε ότι κατά τη διδακτική παρέμβαση δώσαμε παραδείγματα μόνο από το πρόσημο των παραστάσεων που εμφανίζονται σε συναρτήσεις με τετραγωνικές ρίζες, θέλοντας να εξετάσουμε αν οι μαθητές θα διόρθωναν τις απαντήσεις τους μόνο σε αυτό το πλαίσιο ή θα μεταφέρουν τη γνώση τους και στα άλλα δύο πλαίσια. Για το λόγο αυτό υπολογίστηκαν οι διάμεσοι και τα ενδοτεταρτημοριακά εύρη για κάθε σύνολο ερωτήσεων για τις ερωτήσεις κάθε πλαισίου δοκιμασιών ξεχωριστά (συναρτήσεις, ανισώσεις και απόλυτες τιμές) και παρουσιάζονται στον Πίνακα 7.3.

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 7.3, οι μαθητές είχαν καλύτερη αρχική επίδοση στις ερωτήσεις που αφορούσαν συναρτήσεις με τετραγωνικές ρίζες καθώς και στις απόλυτες τιμές, ενώ χαμηλότερες επιδόσεις εμφανίστηκαν στις ερωτήσεις που αφορούσαν ανισώσεις. Τα αποτελέσματα αυτά είναι συμβατά με τα αντίστοιχα του Πειράματος 3. Το γεγονός ότι οι επιδόσεις των μαθητών ήταν υψηλότερες στις δοκιμασίες με απόλυτες τιμές, σε σχέση με αυτές με ανισώσεις, ενισχύει την ερμηνεία αυτού του φαινομένου που είχαμε προτείνει στο Κεφάλαιο 6. Πιο συγκεκριμένα, ο ορισμός των απόλυτων τιμών κάνει σαφή αναφορά στο πρόσημο των τιμών μιας μεταβλητής, με τον ίδιο τρόπο που το κάνει και ο ορισμός της συνάρτησης με τετραγωνική ρίζα. Έτσι, στις απόλυτες τιμές η φύση του ερωτήματος στρέφει την προσοχή των μαθητών ακριβώς στο ζήτημα του προσήμου των τιμών των παραστάσεων που περιέχουν μεταβλητές. Για το λόγο αυτό, οι δοκιμασίες με απόλυτες τιμές από τη φύση τους εφιστούν την προσοχή των μαθητών στο ζήτημα του προσήμου και αυτό έχει ως αποτέλεσμα καλύτερες επιδόσεις σε αυτές απ’ ό,τι στις δοκιμασίες με ανισώσεις, όπου το ζήτημα του προσήμου των παραστάσεων υπονοείται (βλ. επίσης Κεφάλαιο 6, σελ. 147).

Πλαίσιο δοκιμασίας	Επιδόσεις ανά ερωτηματολόγιο		
	ΕΡ/Ε1	ΕΡ/Ε2	ΕΡ/Ε3

	Διάμεσος	Ενδ. εύρος	Διάμεσος	Ενδ. εύρος	Διάμεσος	Ενδ. εύρος
Συναρτήσεις με τετρ. ρίζες	0,50	0,75	1,00	0,33	1,00	0,92
Ανισώσεις	0,20	0,00	0,00	0,67	0,00	0,67
Απόλυτες τιμές	0,50	0,25	0,55	1,00	0,66	0,58

Πίνακας 7.3 Επιδόσεις των μαθητών σε κάθε πλαίσιο δοκιμασιών για κάθε ερωτηματολόγιο

Όσον αφορά το ζήτημα της μεταφοράς της γνώσης από το ένα πλαίσιο δοκιμασιών στο άλλο, στατιστική ανάλυση της μέσης επίδοσης των μαθητών σε κάθε πλαίσιο δοκιμασιών έδειξε ότι υπήρχε σημαντική βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών αμέσως μετά τη διδακτική παρέμβαση μόνο στις ερωτήσεις με τετραγωνικές ρίζες, *Wilcoxon Signed Ranks Test: $Z=2,692$, $p<.001$.* Όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 7.3, σχεδόν όλοι οι μαθητές απάντησαν αυτές τις ερωτήσεις, τόσο αμέσως μετά, όσο και έναν μήνα μετά την παρέμβαση.

Από την άλλη μεριά, οι μέσες επιδόσεις στις ερωτήσεις των άλλων πλαισίων δεν έδειξαν στατιστικώς σημαντικές διαφορές, τόσο αμέσως μετά τη διδακτική παρέμβαση, όσο και μετά από έναν μήνα. Αυτό δείχνει πως οι μαθητές στην πλειοψηφία τους δε μετέφεραν στα άλλα πλαίσια δοκιμασιών τη γνώση που φαίνεται πως απέκτησαν μέσα από τα παραδείγματα με συναρτήσεις με τετραγωνικές ρίζες στα πλαίσια της διδακτικής παρέμβασης.

Σε μια άλλη ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών θελήσαμε να εξετάσουμε αν η διδακτική παρέμβαση είχε την ίδια επίδραση σε όλους τους μαθητές ή όχι. Για να κάνουμε αυτήν την ανάλυση χωρίσαμε τους μαθητές σε δύο ομάδες, ανάλογα με τις επιδόσεις τους στο αρχικό ερωτηματολόγιο, πριν τη διδακτική παρέμβαση. Επειδή η καλύτερη επίδοση σε αυτό το ερωτηματολόγιο ήταν ενός μαθητή που απάντησε σωστά στις 12 από τις 14 δοκιμασίες του ερωτηματολογίου, αποφασίστηκε να χωριστεί το δείγμα σε δύο ομάδες μαθητών: αυτούς που απάντησαν σωστά μέχρι και 6 από τα 14 προβλήματα του ΕΡ/Ε1 (ομάδα χαμηλών επιδόσεων, ΟΧΕ) και στους υπόλοιπους που απάντησαν σωστά μέχρι 12 από τα 14 προβλήματα (ομάδα υψηλών επιδόσεων, ΟΥΕ). Με τον τρόπο αυτό οι δύο ομάδες κατέληξαν σχεδόν ισάριθμες (11 άτομα στην ΟΧΕ και 9 στην ΟΥΕ).

Στον Πίνακα 7.4 παρουσιάζονται αναλυτικά οι επιδόσεις κάθε ομάδας μαθητών στις τρεις φάσεις της εξέτασης για την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Όπως φαίνεται κι από τον πίνακα, οι μαθητές χαμηλών επιδόσεων δε φαίνονται να επηρεάστηκαν σχεδόν καθόλου από τη διδακτική παρέμβαση, αφού οι επιδόσεις τους πριν και μετά την παρέμβαση παρέμειναν εξίσου χαμηλές.

Αντίθετα, οι επιδόσεις των καλύτερων μαθητών (ΟΥΕ) έγιναν καλύτερες αμέσως μετά την παρέμβαση και η αύξηση αυτή ήταν στατιστικώς σημαντική *Wilcoxon Signed Ranks Test: Z=2,310, p<.05.* Οι επιδόσεις αυτές διατηρήθηκαν υψηλές ακόμα και ένα μήνα μετά την παρέμβαση, αλλά η διαφορά σε σχέση με τις επιδόσεις πριν από την παρέμβαση είναι οριακά στατιστικώς μη-σημαντικές *Wilcoxon Signed Ranks Test: Z=1,780, p=0,075.*

Ερωτηματολόγιο	**Επιδόσεις**	
	ομάδα χαμηλών επιδόσεων	ομάδα υψηλών επιδόσεων

	(ΟΧΕ)		(ΟΥΕ)	
	Διάμεσος (n=11)	Ενδοτεταρτημοριακό εύρος	Διάμεσος (n=9)	Ενδοτεταρτημοριακό εύρος
ΕΡ/Ε1	0,286	0,14	0,571	0,21
ΕΡ/Ε2	0,222	0,22	0,778	0,33
ΕΡ/Ε3	0,222	0,78	0,778	0,44

Πίνακας 7.4 Επιδόσεις των μαθητών κάθε ομάδας επίδοσης, στα τρία ερωτηματολόγια

7.4 Συζήτηση

Όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα του παραπάνω πειράματος η εφαρμογή της συγκεκριμένης διδακτικής παρέμβασης είχε ως αποτέλεσμα τη βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών στις δοκιμασίες αμέσως μετά την εφαρμογή της. Αυτό δείχνει ότι είναι δυνατόν, με κατάλληλα σχεδιασμένες διδακτικές παρεμβάσεις να διορθωθεί, ως ένα βαθμό, η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Παρόλα αυτά, η επίδραση της παρέμβασης στον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύουν οι μαθητές το πρόσημο μιας παράστασης δεν διατηρήθηκε για μεγάλο χρονικό διάστημα, ούτε αφορούσε όλους τους μαθητές. Η βελτίωση στις επιδόσεις των μαθητών φάνηκε πως οφειλόταν στη διόρθωση των απαντήσεων μόνο στο συγκεκριμένο πλαίσιο των δοκιμασιών στο οποίο είχαν δεχθεί συγκεκριμένες οδηγίες και παραδείγματα μέσα από τη διδακτική παρέμβαση. Με άλλα λόγια, η διόρθωση της παρερμηνείας του προσήμου ήταν επιφανειακή, αφού οι μαθητές στην πλειοψηφία τους δεν κατάφεραν να μεταφέρουν τη γνώση από το ένα πλαίσιο δοκιμασιών στα άλλα.

Με βάση αυτά τα αποτελέσματα θα λέγαμε ότι η συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση δεν κατάφερε, τουλάχιστον στο βαθμό που επιδιώκαμε, να βοηθήσει τους μαθητές να διορθώσουν την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Θα πρέπει εδώ να επισημάνουμε ότι το μικρό δείγμα του πειράματος αποτελεί έναν ανασταλτικό παράγοντα για την ασφαλή έκφραση γενικών κρίσεων και συμπερασμάτων. Παρόλα αυτά, στην προσπάθειά μας να προσφέρουμε κάποιες ερμηνείες αυτού του αποτελέσματος θα λέγαμε, καταρχήν, ότι φάνηκε ότι η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου δεν είναι εύκολο να διορθωθεί. Το συγκεκριμένο παράδειγμα άμεσης διδασκαλίας που δοκιμάσαμε λάμβανε υπόψη τις προϋπάρχουσες γνώσεις και πεποιθήσεις των μαθητών στο συγκεκριμένο πεδίο και ήταν εστιασμένο στο πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής. Παρόλα αυτά, δεν είχε ως αποτέλεσμα να διορθωθεί η εν λόγω παρερμηνεία και αυτό ενισχύει την εκτίμηση ότι η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου είναι συνδεδεμένη με βαθύτερες πεποιθήσεις των μαθητών που είναι δύσκολο να αλλάξουν.

Πιο συγκεκριμένα, μετά από αυτά τα αποτελέσματα έχουμε περισσότερους λόγους να πιστεύουμε ότι η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου οφείλεται στην επίδραση των εναλλακτικών πλαισίων που διαθέτουν οι μαθητές για τον αριθμό που είναι οργανωμένα γύρω από ιδιότητες των φυσικών αριθμών. Με βάση αυτή την εκτίμηση, για να διορθωθεί η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου θα πρέπει οι μαθητές να αναδιοργανώσουν την αρχική τους θεωρία για τον αριθμό, μέσα από τη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής. Για να γίνει σε βάθος κατανοητό ότι μια παράσταση αναπαριστά τόσο θετικούς όσο και αρνητικούς αριθμούς ανεξάρτητα από το φαινομενικό της πρόσημο, οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι οι μεταβλητές θα μπορούσαν να πάρουν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, θετικό ή αρνητικό. Η γνώση αυτή προϋποθέτει όχι μόνο να δεχθούν οι μαθητές τα γράμματα ως αριθμούς, αλλά προϋποθέτει επίσης να έχουν αναπτύξει επαρκώς την έννοια του αριθμού πέρα από τα εννοιολογικά πλαίσια του φυσικού αριθμού. Έχει φανεί από τη βιβλιογραφία ότι οι μαθητές δεν εμφανίζουν μεγάλη δυσκολία να δεχθούν ότι τα γράμματα στην άλγεβρα αναπαριστούν αριθμούς. Έστω κι αν αρχικά έχουν την τάση να τα ερμηνεύουν ως ονόματα αντικειμένων ή συντομογραφία ονομάτων, παρόλα αυτά σχετικά γρήγορα κατανοούν τη νέα τους χρήση ως αριθμούς στην άλγεβρα (Asquith, Stephens, Knuth, & Alibali, 2007· MacGregor & Stacey, 1994· MacGregor & Stacey, 1997).

Από την άλλη μεριά, έχει φανεί ότι η εννοιολογική αλλαγή από τον φυσικό στον μη-φυσικό αριθμό είναι μια δύσκολη διαδικασία που δεν γίνεται από τη μια στιγμή στην άλλη, αλλά απαιτεί χρόνο και γίνεται σταδιακά (βλ. Stafylidou & Vosniadou, 2004· Vamvakoussi & Vosniadou, 2007· Vlassis, 2004· Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Έστω κι αν η διδακτική παρέμβαση έγινε σε μαθητές Α' Λυκείου, οι οποίοι έχουν μια μεγάλη εμπειρία με μη-φυσικούς αριθμούς, παρόλα αυτά επιφυλασσόμαστε για το επίπεδο της εννοιολογικής τους κατανόησης και χρήσης αυτών των αριθμών. Ακόμη και φοιτητές στα πρώτη έτη σπουδών τους παρουσιάζουν δυσκολίες σε βασικά σημεία κατανόησης της δομής των ρητών, θεωρώντας ότι στα πλαίσια του συνόλου των ρητών υπάρχει επόμενος αριθμός, όπως αντίστοιχα συμβαίνει στους φυσικούς (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007). Δεν μπορούμε να περιμένουμε από τους μαθητές να αποδώσουν στη μεταβλητή ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, αν δεν έχουν μια επαρκή κατανόηση των ιδιοτήτων αυτών των αριθμών.

Με βάση τα παραπάνω, μια επιτυχημένη διδασκαλία δεν θα έπρεπε να στοχεύει μόνο στην παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, αφού αυτή φαίνεται να είναι μια έκφανση ενός βαθύτερου προβλήματος, που είναι η εννοιολογική αλλαγή από τον φυσικό αριθμό στην μεταβλητή ως σύμβολο πραγματικών αριθμών. Παρεμβάσεις τέτοιου τύπου, όπως αυτή που δοκιμάστηκε παραπάνω, θα έπρεπε να αποτελούν κομμάτι μιας γενικότερης διδακτικής στρατηγικής, που ξεκινά ήδη από τις πρώτες τάξεις του σχολείου, έχει βραχυπρόθεσμο σχεδιασμό, γίνεται με συστηματικότητα και συνέχεια και εστιάζει σε βαθύτερα εννοιολογικά προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τους αριθμούς, όπως αυτά έχουν αναφερθεί από τη σχετική έρευνα. Όσον αφορά το είδος της διδασκαλίας που θα πρέπει να επιλεγεί, όπως φάνηκε από το παραπάνω πείραμα, για να βοηθήσουμε τους μαθητές να προβούν στην απαραίτητη εννοιολογική αλλαγή που απαιτείται για την σε βάθος κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, το μοντέλο της άμεσης διδασκαλία ίσως δεν είναι το καταλληλότερο.

Υπάρχει ένας ανοιχτός διάλογος όσον αφορά την αποτελεσματικότητα της άμεσης διδασκαλίας σε σχέση με άλλες διδακτικές προσεγγίσεις. Σε μια προσπάθεια να παρουσιάσουμε σε συντομία τις βασικές προσεγγίσεις θα λέγαμε ότι από τη μία μεριά έχουμε την προσέγγιση της διερευνητικής μάθησης-μάθησης με ανακάλυψη (βλ. Bruner, 1961· Papert, 1980). Αυτή η προσέγγιση θέλει τον μαθητή να είναι ενεργός στην ανακάλυψη και την οικοδόμηση της γνώσης του, ενώ τον δάσκαλο να έχει έναν επικουρικό ρόλο του να δίνει μικρή ή καθόλου βοήθεια κατά τη διαδικασία αυτής της ανακάλυψης. Από την άλλη μεριά, έχουμε την προσέγγιση της άμεσης διδασκαλίας που προτείνει μια δασκαλοκεντρική διδασκαλία βασισμένη στην έκφραση συγκεκριμένων ορισμών, που συνοδεύονται από ειδικά παραδείγματα και είναι απόλυτα γραμμικά σχεδιασμένη, όπου η δυσκολία των ζητημάτων που τίθενται αυξάνει από τα πιο εύκολα στα πιο πολύπλοκα. Κάποιοι ένθερμοι υποστηρικτές της παραπάνω προσέγγισης φτάνουν στο σημείο να την προτείνουν ως τη μοναδική αποτελεσματική επιλογή για τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών (βλ. Kirshner, 2006· Mayer, 2004).

Συνεισφέροντας σε αυτόν το διάλογο, τα αποτελέσματα της δικής μας παρέμβασης έδειξαν ότι μια τέτοιου τύπου άμεση διδασκαλία, όπως αυτή που δοκιμάσαμε, που είναι δασκαλοκεντρική και επαφίεται στη ρητή αναφορά σε ορισμούς, παραδείγματα και αντιπαραδείγματα και συγκεκριμένες στρατηγικές, δεν επαρκεί για να κάνουν οι μαθητές την απαραίτητη εννοιολογική αλλαγή. Θεωρούμε πως σε προβλήματα, όπως αυτό στο οποίο εστιάσαμε παραπάνω, λόγω του γεγονότος ότι φαίνεται να έχουν βαθύτερες εννοιολογικές ρίζες, ίσως να ενδείκνυνται πιο μαθητοκεντρικές διδακτικές προσεγγίσεις, όπου ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να ανακαλύψει, να διερευνήσει και να δομήσει ενεργά τη γνώση του στο συγκεκριμένο πεδίο (βλ. Bransford και συνεργάτες, 1999).

Μια πιο μαθητοκεντρική προσέγγιση δείχνει, επίσης, να είναι απαραίτητη από τη στιγμή που φάνηκε ότι από το παράδειγμα της διδακτικής παρέμβασης με άμεση διδασκαλία που χρησιμοποιήσαμε στο παραπάνω πείραμα δεν βγήκαν το ίδιο ωφελημένοι όλοι οι μαθητές. Οι μαθητές που είχαν πολύ χαμηλές επιδόσεις πριν τη διδακτική παρέμβαση δεν κατάφεραν να επωφεληθούν από τη διδακτική παρέμβαση, σε αντίθεση με τους μαθητές που είχαν καλύτερες επιδόσεις εξ' αρχής. Μια πιο μαθητοκεντρική προσέγγιση θα είχε τη δυνατότητα να διερευνήσει την υπάρχουσα γνώση των μαθητών και να προσαρμοστεί στις ανάγκες ενός μεγαλύτερου εύρους μαθητών.

Οι μαθητές με πολύ χαμηλές επιδόσεις δύσκολα επωφελούνται από διδακτικές παρεμβάσεις ή χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία εννοιών, καθώς φαίνεται ότι δεν διαθέτουν τις απαραίτητες εννοιολογικές βάσεις για να κατανοήσουν τις πληροφορίες που δέχονται μέσα από αυτές τις παρεμβάσεις. Αντίθετα, κάποια αρχικά γνωστικά εργαλεία που διαθέτουν οι καλύτεροι μαθητές, έστω κι αν αυτά δεν λειτουργούν κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες και προκαλούν λάθη και παρερμηνείες, αποτελούν παρόλα αυτά εννοιολογικές βάσεις για να αποκτήσει η νέα πληροφορία νόημα για αυτούς. Μάλιστα, ακόμα και η πρακτική της γνωστικής σύγκρουσης προϋποθέτει την ύπαρξη μιας στοιχειώδους εννοιολογικής υποδομής από το μαθητή για να υποστηριχθεί και να έχει νόημα (βλ. Limon, 2001· Vosniadou και συνεργάτες, 2001).

Από τη στιγμή που φαίνεται πως η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου είναι αποτέλεσμα βαθύτερων πεποιθήσεων των μαθητών και προϋποθέσεων που θέτει το προϋπάρχον εναλλακτικό πλαίσιο για τον αριθμό, ακόμα και η πρακτική της γνωστικής σύγκρουσης ίσως να είχε καλύτερα αποτελέσματα αν δεν εστίαζε αποκλειστικά στην παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου αλλά στις βαθύτερες προϋποθέσεις που προκαλούν την παρερμηνεία (βλ. Vosniadou και συνεργάτες, 2001).

Λόγω του γεγονότος ότι οι λανθασμένες πεποιθήσεις των μαθητών δεν φαίνεται να βρίσκονται κάτω από το συνειδητό τους έλεγχο (Fischbein και συνεργάτες, 1985), ένας σημαντικός στόχος μιας διδακτικής παρέμβασης που εστιάζει στο πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής είναι να κάνει τους μαθητές γνωστικά ενήμερους για αυτές τους τις πεποιθήσεις και τις προβληματικές τους εσωτερικές τους αναπαραστάσεις για τις έννοιες (De Corte, 2004· Vosniadou, 2003). Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές γίνονται σύμμαχοι στην προσπάθεια να γίνουν οι απαραίτητες αλλαγές στα θεμελιώδη χαρακτηριστικά της προϋπάρχουσας γνώσης τους (Fischbein, 1987· Greer, 2006). Παρόλα αυτά, το να αποκτήσουν οι μαθητές μεταεννοιολογική επίγνωση των λανθασμένων πεποιθήσεών τους και μεταγνωστικό έλεγχο της διαδικασίας αλλαγής τους, είναι μια δύσκολη υπόθεση η οποία απαιτεί πολύ περισσότερο χρόνο από αυτόν μιας σύντομης διδακτικής παρέμβασης. Ο Van Dooren και οι συνεργάτες του (Van Dooren et al., , 2004) προσπάθησαν σε μια παρέμβαση που διήρκεσε 10 διδακτικές ώρες να κάνουν τους μαθητές ενήμερους για την τάση τους να βλέπουν ως αναλογικές τις μη-αναλογικές σχέσεις ανάμεσα σε ποσότητες. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους έδειξαν ότι μια τέτοια στοχευόμενη διδακτική προσπάθεια δεν αρκούσε, αλλά θα έπρεπε να έχει έναν πιο μακροχρόνιο σχεδιασμό για να καταφέρει να κάνει τους μαθητές ενήμερους για το πρόβλημα και να τους βοηθήσει να αλλάξουν σε βάθος τις λανθασμένες πεποιθήσεις τους.

Τέλος, μια σημαντική προϋπόθεση για πιο αποτελεσματική διδασκαλία θα ήταν να έχουν δημιουργηθεί στους μαθητές τα κατάλληλα κίνητρα για μάθηση (De Corte, 2004· Vosniadou, in press). Είναι σημαντικό να έχουν οι μαθητές τα απαραίτητα κίνητρα, τόσο για να μάθουν κάτι καινούριο, όσο και για να αλλάξουν παλιές και λανθασμένες τους ιδέες για τις έννοιες. Συχνά, οι συνθήκες που επικρατούν κατά την άμεση διδασκαλία δεν αφήνουν πολλά περιθώρια στους μαθητές να θέσουν οι ίδιοι τους εκπαιδευτικούς τους στόχους, παίρνοντας και την αντίστοιχη ικανοποίηση από τη διαδικασία κατάκτησής τους (βλ. D. Kuhn, 2007) κι αυτός είναι ένας ακόμη λόγος για να μην υιοθετείται απόλυτα η επιλογή της άμεσης διδασκαλίας σε κάθε περίπτωση.

Με βάση τα αποτελέσματα που είχε η συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση που δοκιμάσαμε, αν έπρεπε να πάρουμε θέση ανάμεσα στις δύο αντιμαχόμενες προσεγγίσεις για τη διδασκαλία που αναφέραμε παραπάνω, θα στεκόμασταν μάλλον πιο κοντά στους ερευνητές που προσπαθούν να γεφυρώσουν την απόσταση που φαίνεται να τις χωρίζει, θέτοντας ερωτήματα όπως «τι είναι αυτό που θέλουμε να μάθουν οι μαθητές» και προσπαθώντας να βρουν μια σύνθεση από χαρακτηριστικά και των δύο προσεγγίσεων που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν εποικοδομητικά για την επίτευξη κάθε εκπαιδευτικού στόχου (βλ. D. Kuhn, 2007).

Κεφάλαιο 8
Γενικά Συμπεράσματα – Συζήτηση – Εκπαιδευτικές Εφαρμογές

8.1.1 Τα γράμματα ως φυσικοί αριθμοί

Στην παρούσα διατριβή μελετήσαμε τον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύουν οι μαθητές τη χρήση των γραμμάτων ως μαθηματικά σύμβολα στην άλγεβρα. Όπως φάνηκε στην παρουσίαση των συμπερασμάτων της διεθνούς βιβλιογραφίας που εστιάζει στη μελέτη των λαθών και των παρερμηνειών των μαθητών με τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές που έγινε στο Κεφάλαιο 1, στο σύνολό τους οι ερευνητές φαίνεται να δέχονται πως οι μαθητές κατανοούν τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές στην άλγεβρα, εφόσον δεχθούν τη χρήση τους ως σύμβολα που αναπαριστούν ένα εύρος αριθμών. Τα λάθη και οι παρερμηνείες των μαθητών που εντοπίστηκαν από τους ερευνητές αφορούσαν την τάση των μαθητών να ερμηνεύουν τα γράμματα ως συντομογραφίες ονομάτων ή αντικειμένων, καθώς επίσης και την τάση των μαθητών να τα θεωρούν ως σύμβολα ενός συγκεκριμένου αριθμού και όχι ως ένα εύρος αριθμών. Αρχικά, οι ερμηνείες που προτάθηκαν για τα λάθη και τις παρερμηνείες αυτές των μαθητών ήταν αναπτυξιακής προσέγγισης, επηρεασμένες από τη θεωρία σταδίων του Piaget (βλ. Booth, 1984· Collis, 1975· Kuchemann, 1981). Στη συνέχεια, πολλοί ερευνητές υποστήριξαν ότι τις βαθύτερες αιτίες για κάποια από τα λάθη και τις παρερμηνείες των μαθητών θα πρέπει να αναζητηθούν στην προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών από την αριθμητική (βλ. Kieran, 1992· βλ. MacGregor & Stacey, 1997· Matz, 1980).

Στην παρούσα μελέτη χρησιμοποιήσαμε το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής (Vosniadou και συνεργάτες, 2008· Vosniadou & Verschaffel, 2004) για να μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο κατανούν οι μαθητές τη χρήση των γραμμάτων ως αλγεβρικά σύμβολα. Το θεωρητικό αυτό πλαίσιο συμφωνεί με τις άλλες ερμηνείες που έχουν προταθεί και που υποστηρίζουν ότι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών θα μπορούσε, κάτω από κάποιες προϋποθέσεις, να σταθεί εμπόδιο στην κατανόηση μιας νέας έννοιας (Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Αυτό που προσθέτει το συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο είναι ότι μπαίνει στη διαδικασία να περιγράψει τον τρόπο με τον οποίο είναι οργανωμένη η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών, καθώς και τον τρόπο με τον οποίον εμποδίζει την κατανόηση μιας νέας έννοιας, όπως η έννοια της μεταβλητής.

Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής δέχεται ότι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών είναι συχνά οργανωμένη σε έναν πλέγμα εννοιών και σχέσεων μεταξύ τους που έχουν τη μορφή θεωρίας (Carey, 1985· Vosniadou και συνεργάτες, 2007· Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Όντας έτσι οργανωμένη, η αρχική γνώση των μαθητών, θα μπορούσε και να σταθεί εμπόδιο στην κατανόηση μιας νέας έννοιας όταν αυτή έρχεται σε σύγκρουση με θεμελιώδη χαρακτηριστικά του προϋπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου. Στις περιπτώσεις αυτές, για να είναι δυνατή η κατανόηση της νέας πληροφορίας απαιτείται ριζική αναδιοργάνωση του αρχικού εννοιολογικού πλαισίου – απαιτείται εννοιολογική αλλαγή (Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Η διαδικασία αυτή είναι χρονοβόρα και δύσκολη και γίνεται σταδιακά, με ενδιάμεσα επίπεδα κατανόησης (Vosniadou και συνεργάτες, 2001· Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Η διαρκής, μάλιστα, επίδραση του αρχικού εννοιολογικού πλαισίου στη κατανόηση της νέας έννοιας συχνά ευθύνεται για *συνθετικά λάθη* των μαθητών που συμβαίνουν λόγω της άδηλης προσπάθειάς τους να συνδυάσουν τις αρχικές λανθασμένες πεποιθήσεις τους για μια έννοια με τη νέα και ασύμβατη πληροφορία που έρχεται από τη συστηματική διδασκαλία.

Διάφοροι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι μαθητές έχουν οργανώσει μια αρχική κατανόηση της έννοιας του αριθμού σε ένα συνεκτικό πλέγμα εννοιών και σχέσεων μεταξύ των εννοιών, γύρω από το φυσικό αριθμό (Gallistel & Gelman, 1992· Gelman, 2000· Ni & Zhou, 2005· Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Το συνεκτικό αυτό πλέγμα εννοιών που αποτελεί την αρχική κατανόηση των μαθητών για τον αριθμό, είχε φανεί ότι μπορεί να σταθεί εμπόδιο στην κατανόηση των μη-φυσικών αριθμών όπως των κλασμάτων (Mack, 1988· Ni & Zhou, 2005· Stafylidou & Vosniadou, 2004) ή των ρητών αριθμών (Moss, 2005· Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής θα υποθέταμε ότι το εναλλακτικό πλαίσιο των μαθητών για τον αριθμό, που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό, θα μπορούσε να σταθεί εμπόδιο και στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής ως σύμβολο που αναπαριστά πραγματικούς αριθμούς. Η έννοια της μεταβλητής δεν είναι ταυτόσημη με την έννοια του αριθμού, καθώς είναι σύμβολο που αναπαριστά τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Παρόλα αυτά, είναι άρρηκτη η σχέση της με τους αριθμούς που αναπαριστά και αυτή η σχέση μπορεί να κάνει το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο των μαθητών για τον αριθμό, που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό, να δρα ως εμπόδιο στο να κατανοήσουν οι μαθητές ότι ένα γράμμα στη θέση μιας μεταβλητής αναπαριστά τον γενικευμένο πραγματικό αριθμό – δηλαδή παίρνει διάφορες τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Πιο συγκεκριμένα, η βασική υπόθεση που εξετάστηκε στην παρούσα μελέτη και η οποία προέκυπτε από το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής ήταν ότι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών για τους αριθμούς, που είχε σε προνομιούχα θέση το φυσικό αριθμό, θα μπορούσε να σταθεί εμπόδιο στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής ως το σύμβολο που μπορεί να αναπαραστήσει τον οποιανδήποτε πραγματικό αριθμό. Η υπόθεση αυτή υποστηρίχθηκε από τα αποτελέσματα των εμπειρικών μελετών που αναλυτικά παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια και που έδειξαν μια ξεκάθαρη τάση των μαθητών να ερμηνεύουν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς και όχι ως οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό.

Όταν οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να δώσουν ό,τι τιμές ήθελαν σε μια σειρά αλγεβρικών παραστάσεων που περιείχαν μεταβλητές (ΕΡ/Α, Πείραμα 1, Κεφάλαιο 4), έτειναν να αντικαθιστούν τα γράμματα των παραστάσεων μόνο με φυσικούς αριθμούς. Έτσι, η πλειοψηφία κατέληξε να απαντά μόνο με φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, κτλ., στο 'α' (65,5%), μόνο με θετικά κλάσματα όπως 3/4, 2/3, κτλ., στο 'α/β' (62,1%) και αντίστοιχα αρνητικούς ακέραιους όπως -1, -2, -3, στο '-β' (72,4%).

Μάλιστα, ίδια ήταν τα αποτέλεσμα ακόμα και όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να δώσουν ό,τι τιμές ήθελαν σε μεταβλητές που, αυτή τη φορά, εμφανίζονταν σε ένα πιο ξεκάθαρο μαθηματικό πλαίσιο, όπως αυτό των συναρτήσεων, με σκοπό να κάνουν τις γραφικές τους παραστάσεις (ΕΡ/Δ1, ΕΡ/Δ2, Πείραμα 3, Κεφάλαιο 6). Στην πλειοψηφία τους οι μαθητές και σε αυτή τη συνθήκη αντικατέστησαν μόνο με φυσικούς αριθμούς τις μεταβλητές (πάνω από 75%, Πείραμα 3, Κεφάλαιο 6), με αποτέλεσμα να καταλήξουνε σε λανθασμένες, ελλιπείς γραφικές παραστάσεις που εκτείνονταν μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων του επιπέδου. Τα αποτελέσματα αυτά έδειξαν ότι οι μαθητές εμφάνισαν την τάση να αντικαθιστούν μόνο φυσικούς αριθμούς στις μεταβλητές, ακόμα κι όταν αυτό θα τους οδηγούσε σε λανθασμένες απαντήσεις.

Η τάση αυτή των μαθητών να ερμηνεύουν τα γράμματα ως σύμβολα φυσικών αριθμών υποστηρίχθηκε και κάτω από μια πιο δύσκολη συνθήκη, κατά την οποία οι μαθητές ρωτήθηκαν αν υπάρχουν αριθμοί που *δεν μπορούν* να τους πάρουν μια σειρά από δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις που περιείχαν μεταβλητές (ΕΡ/Β, Πείραμα 1, Κεφάλαιο 4 & ΕΡ/Γ, Πείραμα 2, Κεφάλαιο 5). Οι απαντήσεις τους σε αυτή τη συνθήκη υποστήριξαν επίσης την υπόθεσή μας αφού έδειξαν ότι τουλάχιστον τα δύο τρίτα των μαθητών δε θεωρούσαν ότι *κάθε* αριθμός μπορεί να δοθεί σε κάθε αλγεβρική παράσταση, αλλά μπήκαν στη διαδικασία να αποκλείσουν συγκεκριμένους αριθμούς ως μη-πιθανές αντικαταστάσεις. Εστιάζοντας στις συγκεκριμένες απαντήσεις που έδωσαν, έγινε εμφανής η τάση τους να θεωρούν ότι τα γράμματα μπορούν να αναπαραστήσουν μόνο φυσικούς αριθμούς, μιας και οι αντίθετοι των φυσικών αριθμών, οι αρνητικοί ακέραιοι, αποκλείστηκαν από την πλειοψηφία των μαθητών ως πιθανές αντικαταστάσεις. Για παράδειγμα, κυρίαρχες ήταν απαντήσεις όπως ότι τους αριθμούς -1, -2, -3, δεν μπορεί να τους πάρει το 'α' (46,4%), ότι κλάσματα όπως το -2/-3, -3/-4 δεν μπορεί τα πάρει το α/β (25%) και αντίστοιχα ότι φυσικούς αριθμούς όπως το 1, 2, 3 δεν μπορεί να τους πάρει το '-β'.(50%) (ΕΡ/Β, Πείραμα 1, Κεφάλαιο 4).

Φάνηκε, λοιπόν, ότι, για να απαντήσουν οι μαθητές τις μη-διαισθητικές ερωτήσεις για αριθμούς που *δεν μπορούν* να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις, αυτό που έκαναν ήταν να γράψουν αριθμούς με αντίθετο πρόσημο από το πρόσημο που φαίνεται να έχουν οι μεταβλητές και οι αλγεβρικές παραστάσεις που τους δόθηκαν και όχι να θίξουν την 'ακεραιότητα' του αριθμού απαντώντας με δεκαδικούς ή κλάσματα.

Τα αποτελέσματα αυτά ενισχύθηκαν και από το γεγονός ότι με αυτόν τον τρόπο απάντησαν οι μαθητές ακόμα και κάτω από τη συνθήκη ενός κλειστού ερωτηματολογίου, που τους ζητούσε να επιλέξουν από ένα διαθέσιμο σύνολο φυσικών και μη-φυσικών αριθμών αυτούς τους αριθμούς που θεωρούσαν ότι *δεν μπορούν* να τους πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις (ΕΡ/Γ, Πείραμα 2, Κεφάλαιο 5). Ακόμα και σε αυτή τη συνθήκη, σε λιγότερες από το ένα τρίτο των απαντήσεων επιλέχθηκε η σωστή απάντηση, ότι δεν υπάρχουν αριθμοί που δεν μπορεί να τους πάρει κάθε αλγεβρική παράσταση, έστω κι αν αυτή ήταν μια από τις επιλογές που είχαν στη διάθεσή τους οι μαθητές. Στην πλειοψηφία τους οι απαντήσεις απέκλεισαν κάποιους από τους διαθέσιμους αριθμούς, ως αριθμούς που δεν μπορούν να τους πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις. Οι αποκλεισμοί αυτοί έγιναν στη βάση δύο πεποιθήσεων: α) ότι τα γράμματα των αλγεβρικών παραστάσεων αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς και β) ότι το *φαινομενικό πρόσημο* των αλγεβρικών παραστάσεων είναι και το πραγματικό πρόσημο των παραστάσεων που μπορούν να αναπαραστήσουν οι αλγεβρικές παραστάσεις.

8.1.2 Το φαινομενικό πρόσημο μεταβλητών και αλγεβρικών παραστάσεων

Η επίδραση του προϋπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου για τον αριθμό που είναι οργανωμένο γύρω από τον φυσικό αριθμό φάνηκε επίσης και από μία παρερμηνεία που εμφάνισαν οι μαθητές και που αφορούσε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα γράμματα στις αλγεβρικές παραστάσεις: την *παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου*. Η παρερμηνεία αυτή επηρεάζει τους μαθητές να θεωρούν ότι το φαινομενικό πρόσημο των μεταβλητών και των αλγεβρικών παραστάσεων που περιέχουν μεταβλητές ταυτίζεται με το πρόσημο των αριθμών που δύναται να αναπαραστήσουν. Ονομάσαμε *φαινομενικό πρόσημο* το πρόσημο που οι μεταβλητές εμφανίζονται να έχουν ως ένα επιφανειακό χαρακτηριστικό της μορφής τους. Για παράδειγμα, μια παράσταση που έχει θετικό φαινομενικό πρόσημο είναι η ‘4γ’, ενώ αντίθετα, μια φαινομενικά αρνητική παράσταση είναι η ‘-β’ (βλ. Κεφάλαιο 4, σελ. 84).

Η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου έκανε τους μαθητές να θεωρούν ότι φαινομενικά θετικές παραστάσεις όπως το ‘α’ αναπαριστούν μόνο θετικούς αριθμούς, ενώ αρνητικοί αριθμοί αποκλείστηκαν ως πιθανές αντικαταστάσεις (38,2% στο ΕΡ/Γ, Πείραμα 2, Κεφάλαιο 5). Με τον ίδιο τρόπο, στη φαινομενικά αρνητική παράσταση ‘-β’ οι μαθητές έτειναν να δίνουν μόνο αρνητικές τιμές, ενώ απέκλειαν τις θετικές τιμές ως τιμές ως πιθανές αντικαταστάσεις (52,9% στο ΕΡ/Γ, Πείραμα 2, Κεφάλαιο 5).

Τα αποτελέσματα του Πειράματος 3 (Κεφάλαιο 6) υποστήριξαν την ερμηνεία που προέκυπτε από το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής ότι η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου δεν είναι ανεξάρτητη αλλά είναι συνεπής με την τάση των μαθητών να θεωρούν ότι τα γράμματα στη θέση των μεταβλητών αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς. Στο πείραμα αυτό αρχικά ζητήσαμε από τους μαθητές να δώσουν ό,τι τιμές θέλουν στις μεταβλητές δύο συναρτήσεων και να κάνουν τις γραφικές τους παραστάσεις, ενώ επίσης εξετάσαμε την ύπαρξη της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου με ειδικά σχεδιασμένες δοκιμασίες. Όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα αυτού του πειράματος, ο τρόπος με τον οποίο απαντούσαν οι μαθητές στις δύο πρώτες ερωτήσεις, και πιο συγκεκριμένα το είδος των αριθμών που έδωσαν στις μεταβλητές προκειμένου να κάνουν τη γραφική τους παράσταση, είχε σημαντική επίπτωση στον τρόπο με τον οποίο αντιμετώπιζαν το πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων. Τα αποτελέσματα αυτά ελέχθησαν στατιστικά με ανάλυση παλινδρόμησης στις απαντήσεις των μαθητών, που έδειξε ότι οι μαθητές που ήταν πρόθυμοι να δώσουν έστω και μία μη φυσική τιμή στις μεταβλητές των συναρτήσεων είχαν μικρότερη πιθανότητα να εμφανίσουν την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου ($\beta=.318$, $t=3,472$, $p<.001$).

Αυτό έρχεται να υποστηρίξει τις προβλέψεις που προέκυψαν από το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής για τον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύουν, οι μαθητές, τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές, κάτω από την επίδραση του αρχικού τους επεξηγηματικού πλαισίου για τον αριθμό που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό. Από τις απαντήσεις των μαθητών φάνηκε πως το αρχικό ερμηνευτικό πλαίσιο των μαθητών για τους αριθμούς υποστηρίζει την λανθασμένη πεποίθησή τους για τη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα ως σύμβολα που αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς. Η λανθασμένη αυτή πεποίθηση έχει ως συνέπεια τη δημιουργία μιας σειράς επιμέρους παρερμηνειών όσον αφορά τη χρήση των γραμμάτων ως μαθηματικά αντικείμενα όπως είναι η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου μιας μεταβλητής ή μιας αλγεβρικής παράστασης που περιέχει μεταβλητές.

8.1.3 Το σύμβολο της αρνητικότητας

Στο Πείραμα 3 φάνηκε επίσης πως το φαινομενικά αρνητικό πρόσημο των παραστάσεων έχει πιο έντονη επίδραση στην εμφάνιση της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου από ό,τι το φαινομενικά θετικό πρόσημο αυτών. Πιο συγκεκριμένα, ήδη από τα πειράματα 1 και 2, είχε φανεί ότι η παρουσία του φαινομενικού αρνητικού προσήμου στην παράσταση '-β' είχε μεγάλη επίδραση στους μαθητές, με αποτέλεσμα αυτοί να θεωρούν ότι αναπαριστά μόνο αρνητικούς αριθμούς, μεγαλύτερη από την επίδραση που είχε το φαινομενικά θετικό πρόσημο παραστάσεων, όπως η '4γ', που οι μαθητές έτειναν να θεωρούν ότι αναπαριστά μόνο θετικούς αριθμούς. Στο Πείραμα 3 οι μαθητές ήταν πιο πρόθυμοι να δεχθούν ότι οι φαινομενικά θετικές παραστάσεις θα μπορούσαν να πάρουν και αρνητικές τιμές από το να δεχθούν το αντίστροφο, ότι δηλαδή οι φαινομενικά αρνητικές παραστάσεις θα μπορούσαν να πάρουν και θετικές τιμές. Αυτή η τάση μάλιστα ήταν εμφανής, είτε όταν οι αλγεβρικές παραστάσεις εμφανίζονταν στο πλαίσιο των ανισώσεων είτε στο πλαίσιο των συναρτήσεων με τετραγωνικές ρίζες.

Η τάση των μαθητών να ερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των παραστάσεων που περιέχουν μεταβλητές ως το πραγματικό πρόσημο των τιμών που αναπαριστούν, είναι κάτι που, έστω κι όχι με έναν ρητό τρόπο και χωρίς να έχει αποτελέσει σημείο ειδικής διερεύνησης στη διεθνή βιβλιογραφία, όπως στη δική μας περίπτωση, παρόλα αυτά έχει επισημανθεί κι από άλλους ερευνητές του πεδίου (Chiarugi και συνεργάτες, 1990· Crowley, Thomas, & Tall, 1994· Gallardo, 2002· Malara & Iaderosa, 2000· Tirosh, Even και συνεργάτες, 1998). Μάλιστα, κάποιοι υποστηρίζουν ότι η παρουσία του αρνητικού προσήμου ερμηνεύεται από τους μαθητές ως το σύμβολο της 'αρνητικότητας' (Vlassis, 2004) και ότι αυτή η παρερμηνεία δυσκολεύει την κατανόηση εννοιών, όπως της απόλυτης τιμής μιας αλγεβρικής παράστασης που ορίζεται με βάση το πρόσημό της (Chiarugi και συνεργάτες, 1990). Τα αποτελέσματα της έρευνάς μας συμφωνούν με αυτά των παραπάνω ερευνητών, καθώς και στη δική μας περίπτωση φάνηκε πράγματι ότι η παρουσία του μείον πριν από μία μεταβλητή γίνεται κατανοητή ως το σύμβολο της αρνητικότητας. Φάνηκε επίσης ότι τέτοιες παρερμηνείες του φαινομενικού προσήμου μιας παράστασης έχουν ως αποτέλεσμα λάθη και χαμηλές επιδόσεις σε μια σειρά από μαθηματικές δοκιμασίες, όπως αυτές που αφορούν όχι μόνο απόλυτες τιμές (Πείραμα 4) αλλά επίσης συναρτήσεις και ανισώσεις (Πείραμα 3 και 4).

8.1.4 Συνθετικά λάθη

Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, όπως αυτό περιγράφηκε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 1, υποθέσαμε ότι, για να κατανοήσουν οι μαθητές τη χρήση των μεταβλητών ως γράμματα που αναπαριστούν τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, θα πρέπει να αναδιοργανώσουν την αρχική τους γνώση για τον αριθμό που είναι συγκροτημένη σε ένα συνεκτικό εννοιολογικό πλαίσιο γύρω από τον φυσικό αριθμό, μέσω της διαδικασίας της εννοιολογικής αλλαγής. Η αναδιοργάνωση του προϋπάρχοντος πλαισίου είναι απαραίτητη, καθώς αυτό το πλαίσιο δεν επαρκεί για την κατανόηση της νέας πληροφορίας που αφορά την έννοια της μεταβλητής. Δεν θα ήταν δυνατή μια επαρκής κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής ως γενικευμένος πραγματικός αριθμός, στα πλαίσια μιας προϋπάρχουσας γνώσης του αριθμού ως φυσικού αριθμού. Άλλες, αντίστοιχες περιπτώσεις μάθησης με εννοιολογική αλλαγή, όπως η κατανόηση των κλασμάτων (Stafylidou & Vosniadou, 2004) ή των ρητών αριθμών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004), έχουν δείξει ότι μια τέτοια διαδικασία αναμένεται να είναι μια διαδικασία που χρειάζεται χρόνο και στην διάρκεια της οποίας εμφανίζονται ενδιάμεσα επίπεδα κατανόησης και συνθετικά λάθη.

Από την παρούσα σειρά μελετών φάνηκε ότι και η κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής είναι επίσης μια σταδιακή διαδικασία που δεν γίνεται από τη μια στιγμή στην άλλη. Όπως έγινε φανερό από τη μελέτη της βιβλιογραφίας που αφορά τα λάθη και τις παρερμηνείες των μαθητών με τη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα (βλ. Κεφάλαιο1), κάποιοι μαθητές έχουν δυσκολία να κατανοήσουν τη χρήση των γραμμάτων ως σύμβολα αριθμών (Booth, 1984· 1989· Hart, 1981· Kuchemann, 1981· MacGregor & Stacey, 1997). Ακόμα και οι μαθητές που εμφανίζονταν να δέχονται τα γράμματα ως σύμβολα αριθμών δυσκολεύονταν να δεχθούν ότι μπορούν να αναπαραστήσουν παραπάνω από έναν αριθμούς (Kuchemann, 1981· Stacey & MacGregor, 1997). Τα αποτελέσματα δε των πειραμάτων μας έδειξαν ότι, ακόμα και αν δεχθούν οι μαθητές τη χρήση των γραμμάτων για την αναπαράσταση εύρους αριθμών, αυτό δε σημαίνει ότι έχουν κατανοήσει σε βάθος τη μαθηματική έννοια της μεταβλητής ως σύμβολο που αναπαριστά τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, καθώς τείνουν να θεωρούν ότι τα γράμματα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς.

Από τα πειράματά μας φάνηκε επίσης ότι οι μαθητές δεν εγκαταλείπουν έτσι ξαφνικά το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο του φυσικού αριθμού, με τους συμβολισμούς και τις ιδιότητές του, ούτως ώστε να είναι σε θέση να υιοθετήσουν ένα πλαίσιο για τον αριθμό ως πραγματικό αριθμό, το οποίο να υποστηρίζει και τον συμβολισμό της μεταβλητής ως έναν οποιονδήποτε τέτοιο αριθμό. Αντίθετα, φάνηκε πως η βαθιά γνώση και προκατάληψη για τον φυσικό αριθμό (βλ. Κεφάλαιο 3) είναι διαρκώς παρούσα κατά τη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής από το αρχικό εννοιολογικό πλαίσιο του φυσικού αριθμού σε αυτό της μεταβλητής ως πραγματικού αριθμού.

Πιο συγκεκριμένα, από τις απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις του Πειράματος 1 και 2 φάνηκε ότι το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο των μαθητών για τον αριθμό που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό επιβάλει στην κατανόηση της χρήσης των γραμμάτων ως μεταβλητές στην άλγεβρα δύο προϋποθέσεις: α) την *ακεραιότητα*, δηλαδή ότι τα γράμματα αναπαριστούν ακέραιους αριθμούς και όχι κλάσματα ή δεκαδικούς αριθμούς και β) τη *φαινομενικότητα του προσήμου*, δηλαδή ότι το φαινομενικό πρόσημο μιας μεταβλητής, ή μιας αλγεβρικής παράστασης που περιέχει μεταβλητές, είναι το πραγματικό πρόσημο των τιμών που δύναται να αναπαραστήσει. Από τα πειράματά μας φάνηκε πως, όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να δώσουν ό,τι τιμές θέλουν στις αλγεβρικές παραστάσεις, εκείνοι στην πλειοψηφία τους απάντησαν αυτόματα και διαισθητικά με φυσικούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας το προϋπάρχον πλαίσιο για το φυσικό αριθμό. Όταν όμως οι μαθητές βρέθηκαν αντιμέτωποι με μια σειρά ερωτήσεων, όπως ήταν οι ερωτήσεις για αριθμούς που *δεν μπορούν* να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις, οι οποίες δεν μπορούσαν να απαντηθούν με έναν διαισθητικό, αντανακλαστικό τρόπο, τότε το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο για το φυσικό αριθμό αφενός ήταν παρόν, αφετέρου δεν επαρκούσε για να δώσει απαντήσεις.

Κάτω από τη συνθήκη αυτή, πολλοί από τους μαθητές έκαναν μια σειρά από *συνθετικά λάθη* (Vosniadou και συνεργάτες, 2005· Vosniadou και συνεργάτες, 2008) που μπορούν να ερμηνευτούν ως μια άδηλη προσπάθεια να κατανοηθεί η νέα πληροφορία που θέλει τις μεταβλητές να δύνανται να αναπαραστήσουν τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, η οποία όμως γίνεται στα πλαίσια των εμποδίων που θέτει η αρχική τους πεποίθηση, ότι, δηλαδή, τα γράμματα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς. Στα συνθετικά αυτά λάθη βλέπουμε μια διάθεση να αρθούν οι παραπάνω προϋποθέσεις, ώστε να γίνει πλήρως αποδεκτός ο πραγματικός αριθμός ως η μαθηματικώς εκλεπτυσμένη κατανόηση της μεταβλητής. Στα λάθη αυτά οι μαθητές έχουν άρει μόνο τη μία από τις δύο προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Πιο συγκεκριμένα, κάποιοι από τους μαθητές στο ΕΡ/Β του Πειράματος 1 αντικατέστησαν τα γράμματα των αλγεβρικών παραστάσεων με αρνητικούς ακέραιους αριθμούς, ως αριθμούς που δεν μπορούν να τους πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις. Οι μαθητές αυτοί, κάτω από τη συγκεκριμένη συνθήκη, φαίνεται ότι μπήκαν στη διαδικασία να άρουν τον γνωστικό περιορισμό του φαινομενικού προσήμου των αλγεβρικών παραστάσεων, χωρίς όμως να θίξουν την ακεραιότητα των αριθμών, τους οποίους τείνουν να δίνουν στα γράμματα. Αυτό γιατί δεν απάντησαν με δεκαδικούς ή κλάσματα αλλά με ακέραιους αριθμούς. Θα πρέπει να επισημάνουμε εδώ, πως η ακεραιότητα είναι βασικό χαρακτηριστικό του φυσικού αριθμού. Οι απαντήσεις αυτές δείχνουν τη συνεχή παρουσία του προϋπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου για το φυσικό αριθμό στην διαδικασία κατανόησης της χρήσης της μεταβλητής.

Αντίστοιχα, κάποιοι μαθητές που στο ΕΡ/Γ του Πειράματος 2 έδωσαν απαντήσεις που τοποθετήθηκαν στην κατηγορία απαντήσεων ΦΑ/2, φαίνεται πως μπήκαν στη διαδικασία να άρουν εν μέρει την προϋπόθεση της ακεραιότητας των αριθμών που μπορούν να δοθούν στα γράμματα. Οι μαθητές αυτοί απέκλεισαν από το διαθέσιμο σύνολο αριθμών κάποιους μη-φυσικούς αριθμούς, αλλά όχι όλους, ως αριθμούς που δεν μπορούν να πάρουν οι δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις. Για παράδειγμα, στις απαντήσεις τους κάποιοι από αυτούς τους μαθητές έδειξαν την τάση να θεωρούν ότι οι μεταβλητές των δοσμένων παραστάσεων δεν μπορούν να αναπαραστήσουν κλάσματα, αλλά μπορούν να αναπαραστήσουν δεκαδικούς αριθμούς.

Τα συνθετικά λάθη των μαθητών που αναφέραμε παραπάνω δείχνουν επίσης πως οι μαθητές που έδωσαν τέτοιες απαντήσεις βρίσκονται σε μια διαδικασία αναδιοργάνωσης του αρχικού τους εννοιολογικού πλαισίου, αφού εμφανίζουν την τάση να άρουν τις προϋποθέσεις που αυτό θέτει στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, η οποία όμως διαδικασία δεν έχει ακόμα ολοκληρωθεί. Ως αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας, εάν και εφόσον αυτή ολοκληρωθεί, θα μπορούσαν να αποκτήσουν οι μαθητές μια πιο γενικευμένη κατανόηση της χρήσης των γραμμάτων ως σύμβολα που αναπαριστούν όχι μόνο φυσικούς αριθμούς αλλά τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό και όχι μόνο να είναι πρόθυμοι να αντικαταστήσουν μια μεταβλητή με μη-φυσικούς αριθμούς, αλλά να είναι σε θέση να ερμηνεύουν τη χρήση τους ως πραγματικούς αριθμούς αποδίδοντάς τους ιδιότητες πραγματικού αριθμού. Μια τέτοια δυνατότητα των μαθητών να προβούν στις απαραίτητες εννοιολογικές αλλαγές που θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ακόμα και 'επαναστατικές', με τον τρόπο που αυτό αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3, θα είχε ως αποτέλεσμα να αναπτύξουν πολλαπλές αναπαραστάσεις και μια πιο γενικευμένη κατανόηση για τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές, που θα προσέφερε όλο και πιο αφηρημένα επίπεδα ανάλυσης που επιτρέπουν την ανάπτυξη πιο γενικών λύσεων (βλ. Dauben, 1984, Κεφάλαιο 1).

Για άλλους ερευνητές κάτι τέτοιο θα είχε τα χαρακτηριστικά 'υποστασιοποίησης', όπου οι μαθητές θα έχουν καταφέρει να βλέπουν το σύμβολο της μεταβλητής ως ένα αυτόνομο αντικείμενο με όλες τις ιδιότητες που θα είχε ένας πραγματικός αριθμός (βλ. Sfard & Linchevski, 1994).

8.1.5 Άλγεβρα των φυσικών αριθμών

Οι δύο προϋποθέσεις που θέτει το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, όπως αυτές αναφέρθηκαν παραπάνω, έχουν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας σειράς λαθών σε διάφορες μαθηματικές δοκιμασίες. Οι μαθητές που ερμηνεύουν τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές στα πλαίσια του αρχικού εναλλακτικού τους πλαισίου για τον αριθμό που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό, θα έχουν την τάση να θεωρούν ότι, για παράδειγμα, η αλγεβρική παράσταση '4x' αναπαριστά θετικούς αριθμούς (με βάση την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου) ή πολλαπλάσια του 4 (με βάση την τάση να θεωρείται η μεταβλητή ως φυσικός αριθμός). Από τη διεξοδικότερη μελέτη της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου φάνηκε πράγματι ότι αυτή μπορεί να οδηγήσει σε λάθη και χαμηλές επιδόσεις των μαθητών σε σειρά μαθηματικών δοκιμασιών, όπως στην κατανόηση των συναρτήσεων, της απόλυτης τιμής αριθμού και της λύσης ανισώσεων. Με τον ίδιο τρόπο θα περιμέναμε ότι και οι ακεραιότητα των γραμμάτων ως μεταβλητές θα ευθυνόταν για λάθη των μαθητών στην άλγεβρα.

Μια πιλοτική μελέτη που έγινε σε οχτώ μαθητές και μαθήτριες της Α΄ Λυκείου με τη μέθοδο των συνεντεύξεων, έδειξε, επίσης, ότι οι μαθητές τείνουν να ερμηνεύουν τα γράμματα ως ακέραιους αριθμούς και αυτό είχε ως αποτέλεσμα να κάνουν λάθη σε μια σειρά ανισώσεων. Πιο συγκεκριμένα, δόθηκαν στους μαθητές έξι αλγεβρικές ανισώσεις, όπως για παράδειγμα η $7a < \frac{6}{a}$, και τους ζητήθηκε να αποφανθούν ως προς το εάν και κατά πόσο είναι αληθείς για το σύνολο των πραγματικών αριθμών που θα μπορούσαν να πάρουν οι μεταβλητές. Αν οι μεταβλητές αντικαθιστούνταν μόνο με φυσικούς αριθμούς, τότε οι ανισώσεις αυτές ήταν άλλοτε αληθείς και άλλοτε ψευδείς.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι στην πλειοψηφία των απαντήσεών τους οι μαθητές μπήκαν στη διαδικασία να αντικαταστήσουν τις μεταβλητές μόνο με φυσικούς αριθμούς και έβγαλαν το συμπέρασμα ότι οι ανισώσεις ήταν αληθείς (ή ψευδείς) για *κάθε* τιμή της μεταβλητής. Φάνηκε λοιπόν ότι η απροθυμία των μαθητών να δοκιμάσουν έστω και με ένα κλάσμα ή έναν αρνητικό αριθμό τους ώθησε να απαντήσουν λανθασμένα ότι, για παράδειγμα, $\frac{6}{a} < 7a$ και ότι $5\gamma > \frac{4}{\gamma}$ για κάθε τιμή που θα μπορούσε να πάρει η μεταβλητή. Η τάση κάποιων μαθητών να σκέφτονται με ακέραιες μόνο αντικαταστάσεις στα γράμματα φαίνεται και από τον διάλογο που είχαμε στα πλαίσια μιας από αυτές τις συνεντεύξεις, με τον Μ (15, ετών):

Ερευνητής: *Θα μπορούσε το 4/β ($\beta \neq 0$) να είναι ίσο με –8;*

Μ: Ναι, θα μπορούσε.

Ερευνητής: *Πώς το σκέφτηκες;*

Μ: Εάν υπάρχει ένας αριθμός και τον αντικαταστήσουμε στη θέση του β και μας κάνει -8 αυτός ο αριθμός κατ αρχήν θα πρέπει να είναι αρνητικός, οπότε το θέμα είναι αν υπάρχει τέτοιος αριθμός που να μας κάνει 8. Μμμμ! Νομίζω λάθος έκανα, γιατί αν πάρουμε το -4 κάνει –1 που απέχει πολύ από το -8, αν πάρουμε το -2, κάνει –2 που απέχει από το –8, εάν πάρουμε το –1 κάνει –4 που απέχει από –8, οπότε… αν πάρουμε το μηδέν δεν γίνεται γιατί δεν ορίζεται, οπότε… αν πάρουμε –6 δεν θα βγαίνει ίσο με το –8 θα βγαίνει δεκαδικός και μικρότερο του 4, οπότε (…) δεν υπάρχει, δεν θα μπορούσε να υπάρχει τέτοιο β που να κάνει –8.

Από τον παραπάνω διάλογο προκύπτει ότι ο συγκεκριμένος μαθητής σκέφτεται με ακέραιους αριθμούς ως αντικαταστάσεις στα γράμματα και μάλιστα με έναν διακριτό τρόπο που αρμόζει στο σύνολο των φυσικών αριθμών και κατ' επέκταση και των ακεραίων. Στα πλαίσια αυτού του συνόλου δεν είναι πράγματι δυνατό να βρεθεί λύση στο παραπάνω πρόβλημα. Στη συνέχεια, όταν ζητήσαμε από τον ίδιο μαθητή να λύσει το παραπάνω πρόβλημα δίνοντάς το στη μορφή εξίσωσης, εκτυλίχθηκε ένας ακόμα ενδεικτικός διάλογος.

Ερευνητής: *Θέλεις να λύσεις το 4/β=-8;*

Μ: (λύνει σωστά) β=-1/2, β=-0,5

Ερευνητής: *Τι θα σήμαινε αυτό; Αλλάζει την απάντησή σου;*

Μ: Ναι, σαφώς. Αν αντικαταστήσουμε το –0,5 στη θέση του β θα μας βγάλει -8.

Ερευνητής: *Γιατί πριν δεν το σκέφτηκες πριν;*

Μ: Γιατί δε σκέφτηκα να συνεχίσω, γιατί ενώ είδα ότι όσο μειώνω, αυτό αυξάνει και έφτασα στο –1 που κάνει -4, μετά έκανα το λάθος και πήγα αμέσως στο μηδέν, το οποίο δεν ισχύει βέβαια και δεν πήγα στους δεκαδικούς αριθμούς.

Ακόμα κι αν ο μαθητής στο τέλος παραδέχτηκε τον δεκαδικό αριθμό ως μια τιμή που θα μπορούσε να πάρει η μεταβλητή, παρόλα αυτά, η προκατάληψη για τον φυσικό αριθμό τον εμπόδιζε να σκεφτεί με δεκαδικούς αριθμούς.

Τα αποτελέσματα αυτά σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα των προηγούμενων μελετών δείχνουν ότι η τάση των μαθητών να θεωρούν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς μπορεί να τους περιορίσει σε μια *άλγεβρα των φυσικών αριθμών*, με τον ίδιο τρόπο που οι μαθηματικοί του 19^{ου} αιώνα, αν και είχαν αποδεχτεί το συμβολικό σύστημα του Viète, παρόλα αυτά ήταν επιφυλακτικοί να το χρησιμοποιήσουν για τον κάθε πραγματικό αριθμό και προτιμούσαν να το χρησιμοποιούν για φυσικούς αριθμούς μόνο (βλ. Κεφάλαιο 2).

8.2 Εφαρμογές στην εκπαίδευση

Όπως υποστηρίξαμε και στο Κεφάλαιο 1, ο τρόπο οργάνωσης της σχολικής διδασκαλίας των μαθηματικών φαίνεται να δέχεται ότι η μάθηση των μαθηματικών είναι συσσωρευτική και λαμβάνει χώρα με τη χρήση προσθετικών μηχανισμών εμπλουτισμού της προηγούμενης γνωστικής δομής. Με βάση αυτή την εκτίμηση, η διδασκαλία μιας καινούριας έννοιας προσπαθεί, κατά το δυνατόν, να χρησιμοποιήσει αρχικές διαισθητικές γνώσεις των μαθητών για την έννοια που πρόκειται να διδάξει και να χτίσει τη νέα γνώση πάνω τους. Μια τέτοια προσέγγιση συχνά είναι αποτελεσματική. Για παράδειγμα, στα πρώτα χρόνια της διδασκαλίας των μαθηματικών για να διδαχθεί ο φυσικός αριθμός γίνεται χρήση των αρχικών διαισθήσεων των παιδιών για τον αριθμό, που είναι κοντινές στις ιδιότητες της μαθηματικής έννοιας του φυσικού αριθμού. Αυτή η στρατηγική βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν αρχές των φυσικών αριθμών, όπως ότι υπάρχει πάντα προηγούμενος και επόμενος αριθμός (βλ. Vosniadou και συνεργάτες, 2008).

Παρόλα αυτά, το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής δείχνει ότι αυτή η προσέγγιση δεν μπορεί να είναι πάντα αποτελεσματική, καθώς συχνά η μάθηση μιας έννοιας δεν υποστηρίζεται από τα προϋπάρχοντα εννοιολογικά πλαίσια των μαθητών (Resnick, 2006). Μάλιστα, ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών, που είναι συγκροτημένες σε εννοιολογικές δομές με μορφή θεωρίας, μπορεί και να σταθούν εμπόδιο στην κατανόηση νέων εννοιών, που τα χαρακτηριστικά τους έρχονται σε σύγκρουση με θεμελιώδη χαρακτηριστικά της προϋπάρχουσας γνωστικής δομής (Vosniadou, 2007a· Vosniadou και συνεργάτες, 2005). Κάποιες εκτιμήσεις θέλουν τις δυσκολίες, τις πολλές παρερμηνείες και τη μεγάλη σχολική αποτυχία που σημειώνεται σε βασικούς τομείς γνώσης, όπως είναι τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες, να οφείλονται στην αδυναμία της εκπαιδευτικής διαδικασίας να διαχειριστεί αποτελεσματικά το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής (Vosniadou, 2007a· in press).

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής παρουσιάσαμε μια σειρά από εμπειρικά δεδομένα που υποστηρίζουν ότι η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής ως σύμβολο που αναπαριστά τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό αποτελεί ένα πρόβλημα εννοιολογικής αλλαγής και ως τέτοιο πρέπει να προσεγγιστεί. Τα αποτελέσματα του Πειράματος 4 έδειξαν ότι εστιασμένες διδακτικές παρεμβάσεις που λαμβάνουν υπόψη τους την προϋπάρχουσα γνώση και τις πεποιθήσεις των μαθητών, μπορούν να έχουν κάποια άμεσα αποτελέσματα, βοηθώντας τουλάχιστον κάποιους από τους μαθητές να διορθώσουν την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου. Παρόλα αυτά, για να έχουν τα αποτελέσματα αυτά μεγαλύτερο βάθος και διάρκεια και να αφορούν ακόμα και τους μαθητές με χαμηλές επιδόσεις, θα πρέπει οι διδακτικές προσεγγίσεις να στοχεύουν στις βαθύτερες λανθασμένες πεποιθήσεις των μαθητών, που έχουν ως αποτέλεσμα τις επιμέρους παρερμηνείες όπως είναι αυτή του φαινομενικού προσήμου.

Φάνηκε λοιπόν ότι, για να διορθώσουν οι μαθητές την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, πρέπει να κατανοήσουν σε βάθος την έννοια της μεταβλητής ως τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό και ότι, για να γίνει αυτό, θα πρέπει να αναδιοργανώσουν το αρχικό εννοιολογικό τους πλαίσιο για τον αριθμό που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό, μέσα από τη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής.

Με ποιον τρόπο είναι όμως δυνατό να γίνει αυτή η αναδιοργάνωση; Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το εναλλακτικό αυτό πλαίσιο για τον αριθμό υποστηρίζεται τόσο από την αλληλεπίδραση με τον κοινωνικό-πολιτισμικό περιβάλλον, όσο και συχνά από την ίδια τη συστηματική διδασκαλία των αριθμών στο σχολείο. Στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου οι μαθητές μαθαίνουν τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών σαν να είναι οι μοναδικοί αριθμοί που υπάρχουν (Greer, 2006). Όταν οι μαθητές εισάγονται στην άλγεβρα, ακόμα κι εκεί οι περισσότερες ασκήσεις, και συχνά ακόμα και οι λύσεις των ασκήσεων αυτών, είναι ακέραιοι αριθμοί, επιβεβαιώνοντας τις λανθασμένες πεποιθήσεις των μαθητών ότι τα γράμματα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς (Booth, 1984). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τέτοιες πεποιθήσεις να ισχυροποιούνται και να είναι δύσκολο να αλλάξουν. Προηγούμενες μελέτες έχουν δείξει ότι το να αλλάξουν οι μαθητές αρχικές λανθασμένες πεποιθήσεις τους, που υποστηρίζονται από τα εναλλακτικά τους ερμηνευτικά πλαίσια, δεν είναι εύκολη υπόθεση αλλά απαιτεί διαρκή προσπάθεια και πολύ χρόνο (Vosniadou & Brewer, 1994· Vosniadou & Vamvakoussi, 2006· Vosniadou και συνεργάτες, 2008).

Υπάρχουν διάφορες διδακτικές προτάσεις που θα μπορούσαν να λειτουργήσουν υποστηρικτικά στη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής. Ιδιαίτερο βάρος δίνεται στην σημασία της συμμετοχής των μαθητών σε αυτή τη διαδικασία, που μπορεί να εξασφαλιστεί σε ένα βαθμό με τα κατάλληλα κίνητρα (De Corte, 2004). Με άλλα λόγια, οι μαθητές πρέπει να έχουν κάποια ισχυρά κίνητρα και να βρίσκουν κάποιο νόημα για να μπούνε στη διαδικασία να αλλάξουν τις λανθασμένες πεποιθήσεις, κάτι που ούτε εύκολο θα είναι ούτε θα γίνει από τη μια στιγμή στην άλλη (Vosniadou, in press). Σε αυτό το κλίμα κινείται η πρόταση του Fischbein (1987) να συζητούμε τέτοια ζητήματα με τους μαθητές, κάνοντάς τους συμμέτοχους στη διαδικασία αυτής της αλλαγής. Προτείνει μάλιστα πως η χρήση αναφορών από την ιστορική εξέλιξη και τις εννοιολογικές αλλαγές που υπέστη μια έννοια, μέχρι να αποκτήσει τη σημερινή της χρήση, θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές σε αυτή τη διαδικασία, προσδίδοντας περισσότερο νόημα και κίνητρο για κατανόηση. Μια τέτοια διαδικασία θα μπορούσε μάλιστα να καλλιεργήσει στους μαθητές τις κατάλληλες επιστημικές πεποιθήσεις σε σχέση με τα μαθηματικά, που θα μπορούσαν επίσης να τους βοηθήσουν στη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής με τον τρόπο που τους βοηθάνε στην εννοιολογική αλλαγή στη φυσική (βλ. Staphopoulou & Vosniadou, 2007).

Ενδιαφέρουσα είναι και η πρόταση της Resnick (2006), σε αυτές τις συζητήσεις, να προλογίζουμε την εισαγωγή σε μία έννοια που είναι ασυνεπής με την προηγούμενη γνώση των μαθητών ως ένα ταξίδι ‘επιστημονικής φαντασίας’, κατά το οποίο εισερχόμαστε σε έναν παράξενο κόσμο, όπου αυτά που ξέραμε δεν ισχύουν όπως ακριβώς τα ξέραμε και που θα πρέπει να τα παραμερίσουμε για λίγο και έτσι να εξερευνήσουμε αυτόν τον νέο κόσμο. Υποστηρίζει ότι με τον τρόπο αυτό οι μαθητές θα μπορούν να είναι ενεργοί στην οικοδόμηση της νέας γνώσης, γνωρίζοντας ότι αυτοβούλως θα πρέπει να καταπιέσουν κάποιες από τις προηγούμενες πεποιθήσεις τους για να παίξουν αυτό το νέο «γνωστικό παιχνίδι».

Η κουβέντα με τους μαθητές γύρω από αυτά τα ζητήματα προτείνεται και ως ένας μηχανισμός για την απόκτηση από τους μαθητές μεταεννοιολογικής επίγνωσης για τα άδηλα μοντέλα που διαθέτουν για την έννοια αυτή (βλ. Fischbein και συνεργάτες, 1985), καθώς και για τις εσωτερικές αναπαραστάσεις και τις λανθασμένες πεποιθήσεις τους, που βασίζονται στην προϋπάρχουσα γνώση τους (βλ. Van Dooren και συνεργάτες, 2004· βλ. Vosniadou και συνεργάτες, 2001). Η επίγνωση αυτή φαίνεται να αποτελεί προϋπόθεση για τη μάθηση με εννοιολογική αλλαγή, γιατί οι μαθητές συχνά δεν διαθέτουν συνειδητό έλεγχο των λανθασμένων πεποιθήσεών τους (De Corte, 2004· Vosniadou και συνεργάτες, 2001). Η μεταεννοιολογική επίγνωση για την ύπαρξη εναλλακτικών ερμηνευτικών μοντέλων καθώς και ο μεταγνωστικός έλεγχος των διαδικασιών αλλαγής της προϋπάρχουσας γνώσης, μπορούν να δημιουργήσουν τις απαραίτητες προϋποθέσεις για την αναδιοργάνωση του προϋπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου και την αποδόμηση του αρχικού τρόπου κατανόησης μιας έννοιας (Bransford και συνεργάτες, 1999· Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Στην περίπτωση της κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής, μεταεννοιολογική επίγνωση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού και των συνεπειών της θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν ότι τα γράμματα δεν αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς αλλά τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, καθώς και ότι το φαινομενικό πρόσημο μιας παράστασης δεν είναι πάντα ίδιο με το πραγματικό πρόσημο των τιμών που μπορεί να αναπαραστήσει.

Στο Πείραμα 4 προσπαθήσαμε, έστω και στο σύντομο χρονικό διάστημα που είχαμε στη διάθεσή μας, να καλλιεργήσουμε στους συμμετέχοντες μεταεννοιολογική επίγνωση της λανθασμένης τάσης τους να αποδίδουν μόνο φυσικούς αριθμούς στα γράμματα. Αυτό θεωρούμε πως ήταν ένας από τους παράγοντες που επέδρασαν στο να μειωθεί η τάση των μαθητών να παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των παραστάσεων και να αυξηθούν οι επιδόσεις τους στις δοκιμασίες που ακολούθησαν αμέσως μετά. Από την άλλη μεριά, το γεγονός ότι η συγκεκριμένη παρέμβαση δεν κατάφερε να βοηθήσει τους μαθητές να διορθώσουν πιο μακροπρόθεσμα αυτή την παρερμηνεία οφείλεται εν μέρει στο γεγονός ότι, για να αποκτήσουν οι μαθητές την απαραίτητη μεταεννοιολογική επίγνωση, απαιτείται περισσότερος χρόνος από αυτόν που διαθέσαμε στα πλαίσια αυτής της παρέμβασης (βλ. επίσης Van Dooren και συνεργάτες, 2004).

Επίσης, από τα αποτελέσματα του Πειράματος 4 φάνηκε πως η προσέγγιση της άμεσης διδασκαλίας (Kirshner, 2006· Mayer, 2004) δεν είναι η καταλληλότερη μέθοδος για να βοηθήσουμε τους μαθητές να διορθώσουν επιμέρους παρερμηνείες που εμφανίζουν στη κατανόηση συγκεκριμένων εννοιών, όταν αυτές φαίνεται πως έχουν τις ρίζες τους σε βαθύτερες πεποιθήσεις, που υποστηρίζονται από την προϋπάρχουσα γνωστική δομή. Διδακτικές προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν προτάσεις τόσο από την προσέγγιση της μάθησης με ανακάλυψη όσο και από αυτές της άμεσης διδασκαλίας θεωρούμε πως θα ήταν πιο αποτελεσματικές στη μάθηση με εννοιολογική αλλαγή και θα αφορούσαν περισσότερους μαθητές. Οι διδακτικές προσεγγίσεις της μάθησης με ανακάλυψη, που θέλουν τον μαθητή πιο ενεργό στη διαδικασία κατασκευής της γνώσης του μέσα από συνθήκες ανακάλυψης (Bransford και συνεργάτες, 1999· Bruner, 1961· De Corte, 2004· Papert, 1980), θα έκαναν ακόμα και πιο εστιασμένες τις διδακτικές πρακτικές, όπως αυτή της γνωστικής σύγκρουσης, να είναι πιο αποτελεσματικές, αφού θα είχαν περισσότερο νόημα για τους μαθητές (Limon, 2001· Vosniadou και συνεργάτες, 2001).

Θα πρέπει πάντως εδώ να επισημάνουμε ότι, επειδή η εννοιολογική αλλαγή είναι μια δύσκολη διαδικασία που απαιτεί χρόνο και μεγάλη προσπάθεια, κάθε εκπαιδευτική πρόταση θα πρέπει να έχει βραχυπρόθεσμη προοπτική (Greer & Verschaffel, 2007· Van Dooren και συνεργάτες, 2004· Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Διδακτικές παρεμβάσεις που στοχεύουν στη διόρθωση επιμέρους δυσκολιών και λαθών των μαθητών, όπως αυτή που δοκιμάσαμε στο Πείραμα 4, θα πρέπει να αποτελούν μέρος μιας γενικότερης διδακτικής στρατηγικής. Αυτές οι διδακτικές στρατηγικές θα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τους τα δεδομένα των εμπειρικών μελετών, που αφορούν τα λάθη και τις παρερμηνείες των μαθητών, καθώς και συγκεκριμένες προτάσεις για την οργάνωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας που θα τις υποστηρίξουν.

Στα πλαίσια πιο άμεσα εφαρμόσιμων προτάσεων θα μπορούσαν τα αναλυτικά προγράμματα να ενσωματώσουν τα παραπάνω ευρήματα, προσφέροντας στους μαθητές ευκαιρίες να διορθώσουν τις λανθάνουσες πεποιθήσεις τους που αφορούν τους αριθμούς. Για παράδειγμα, ο Greer (2006) υποστηρίζει ότι καλό θα ήταν να δίνονται στους μαθητές παραδείγματα όπου οι μεταβλητές δεν παίρνουν μόνο φυσικούς αριθμούς. Παραδείγματα εξισώσεων όπως η $2.67x^2 - 3.86x - 12.23 = 0$ αφενός θα μπορούσαν εύκολα να λυθούν από τους μαθητές με τη χρήση ενός μικρο-υπολογιστή, αφετέρου θα λειτουργούσαν υποστηρικτικά στο να διευρύνουν τους εννοιολογικούς τους ορίζοντες των μαθητών, για τις τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή, πέρα από τους φυσικούς αριθμούς (Greer, 2006).

Ενδιαφέρον επίσης έχουν κάποιες διδακτικές προτάσεις που έρχονται από το χώρο της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση και που προτείνουν τρόπους να γίνει εισαγωγή των μαθητών σε στοιχειώδεις έννοιες της άλγεβρας με ειδικό τρόπο, από πιο νωρίς στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η προσέγγιση της «Πρώιμης Άλγεβρας» (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2001· Schliemann και συνεργάτες, 2003) υποστηρίζει ότι μπορούμε να εισαγάγουμε στους μαθητές την έννοια της μεταβλητής, με ειδικό τρόπο και ειδικά σχεδιασμένα περιβάλλοντα μάθησης, σε πολύ μικρότερα παιδιά απ' ό,τι τώρα, ήδη δηλαδή από τις μεσαίες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Αυτή η προσέγγιση έχει ενδιαφέρουσες προοπτικές, αλλά σίγουρα χρειάζεται περισσότερη έρευνα, τόσο για τον τρόπο όσο και για τα πιθανά αποτελέσματα που θα είχε η υιοθέτησή της.

Τέλος, θα θέλαμε να αναφερθούμε στην αναγκαιότητα περισσότερης έρευνας για το τι γνωρίζουν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί για τις πεποιθήσεις των μαθητών, για τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζει η προηγούμενη γνώση τους την μάθηση μιας νέας έννοιας, πώς τείνουν να ερμηνεύουν τα λάθη των μαθητών και τι σημασία τους δίνουν. Έχει φανεί ότι οι γνώσεις και οι στάσεις των εκπαιδευτικών απέναντι σε αυτά τα ζητήματα συνδέονται άμεσα με τις επιδόσεις των μαθητών (Nathan & Koellner, 2007· Resnick, 2006· Stacey & MacGregor, 1997). Πρέπει, έτσι, να διερευνηθούν οι τρόποι με τους οποίους θεωρούν οι εκπαιδευτικοί ότι μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να διορθώσουν προκαταλήψεις, λάθη και παρερμηνείες τους που οφείλονται στο προηγούμενο εννοιολογικό πλαίσιο, με έναν τρόπο που να καλλιεργεί την μάθηση και όχι τη δημιουργία νέων εμποδίων.

Είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να είναι σε θέση να διακρίνουν πότε μία έννοια μπορεί να γίνει κατανοητή με τη χρήση απλών προσθετικών μηχανισμών μάθησης, στην οποία η προηγούμενη γνώση λειτουργεί υποστηρικτικά, και πότε η μάθηση μιας έννοιας απαιτεί την αναδιοργάνωση της προϋπάρχουσας γνωστικής δομής, μέσω της διαδικασίας της εννοιολογικής αλλαγής. Μόνο αν οι εκπαιδευτικοί είναι ενήμεροι για τη σημασία αυτής της διαφοράς μπορούν να κάνουν και τους μαθητές επίσης ενήμερους για αυτή, αλλά και να προσαρμόσουν τη διδακτική τους προσέγγιση στο πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής με την απαραίτητη ευαισθησία (Greer & Verschaffel, 2007· Vosniadou και συνεργάτες, 2001· Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Για το λόγο αυτό, είναι σημαντικό η εκπαιδευτική πολιτική να απευθύνεται πρώτα στους ίδιους τους εκπαιδευτικούς, κάνοντάς τους ενήμερους για προβλήματα όπως αυτό της εννοιολογικής αλλαγής αλλά και για τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαν να τα προσεγγίσουν (Vosniadou & Verschaffel, 2004).

8.3 Θέματα για μελλοντική έρευνα

Αν θέλαμε να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα των μελετών της παρούσας διατριβής, θα λέγαμε ότι το βασικό εύρημα ήταν ότι, η κατανόηση από τους μαθητές της χρήσης των γραμμάτων στην άλγεβρα, ως σύμβολα που αναπαριστούν ένα εύρος αριθμών και όχι πράγματα, ονόματα πραγμάτων ή συγκεκριμένους μόνο αριθμούς, δεν προϋποθέτει ότι έχουν κατανοήσει την μαθηματική έννοια της μεταβλητής. Οι μαθητές τείνουν να ερμηνεύουν τη μεταβλητή ως σύμβολο που αναπαριστά φυσικούς αριθμούς και όχι τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Αυτοί που βλέπουν τη μεταβλητή ως φυσικό αριθμό έχουν μια περιορισμένη εικόνα της άλγεβρας, που εκτείνεται μόνο στο εύρος του συνόλου των φυσικών αριθμών. Με άλλα λόγια, κάποιοι μαθητές και για κάποια περίοδο της μαθηματικής τους ζωής, έχουν εισαγάγει τους εαυτούς τους στα πλαίσια της *άλγεβρας των φυσικών αριθμών*.

Θα είχε ενδιαφέρον για μελλοντικές μελέτες να εξεταστεί σε βάθος το εννοιολογικό αυτό πεδίο της άλγεβρας των φυσικών αριθμών. Με άλλα λόγια, θα ήταν ενδιαφέρον να χαρτογραφηθούν όλες εκείνες οι παρερμηνείες, τα λάθη και οι δυσκολίες που θα εμφάνιζαν οι μαθητές στην καθημερινή μαθηματική τους δραστηριότητα, που θα μπορούσαν να οφείλονται στο γεγονός ότι έχουν μια κατανόηση της μεταβλητής ως φυσικό αριθμό. Θα περιμέναμε ότι οι προϋποθέσεις της ακεραιότητας και του φαινομενικού προσήμου ως πραγματικό πρόσημο που θέτει η κατανόηση της μεταβλητής ως φυσικό αριθμό, ευθύνονται για συγκεκριμένα και συστηματικά λάθη στην λύση εξισώσεων και ανισώσεων, στην κατανόηση και χρήση των συναρτήσεων, αλλά και σε ανώτερες μαθηματικές έννοιες, όπως η έννοια του ορίου. Με άλλα λόγια, θα είχε ενδιαφέρον να χαρτογραφηθεί η διαφοροποίηση της άλγεβρας των φυσικών αριθμών από αυτή των πραγματικών αριθμών και να μελετηθεί αν, και κατά πόσο, συγκεκριμένα λάθη των μαθητών οφείλονται στο γεγονός ότι κάποιοι μαθητές κινούνται στα πλαίσια της άλγεβρας των φυσικών αριθμών.

Άλλα ερωτήματα που προκύπτουν από τα παραπάνω είναι εάν η κατανόηση των μεταβλητών ως σύμβολα φυσικών αριθμών έχει τα χαρακτηριστικά σταδίου, από το οποίο περνούν όλοι ανεξαρτήτως οι μαθητές και μετά το εγκαταλείπουν ή το εμπλουτίζουν διευρύνοντας τους εννοιολογικούς τους ορίζοντες πέρα από τους φυσικούς αριθμούς, ή υπάρχουν μαθητές που κατανοούν τη μεταβλητή ως γενικευμένο πραγματικό αριθμό εξ αρχής. Αν η άλγεβρα των φυσικών αριθμών είναι ένα αρχικό στάδιο κατανόησης της άλγεβρας, με ποιες διδακτικές προσεγγίσεις θα μπορούσαμε να βοηθήσουμε τους μαθητές να περάσουν στην άλγεβρα των πραγματικών πιο γρήγορα και με λιγότερες δυσκολίες;

Στα παραπάνω ερωτήματα θεωρούμε ότι το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής θα μπορούσε να αποτελέσει έναν πολύ βοηθητικό οδηγό, τόσο για την έκφραση ρητών υποθέσεων και το σχεδιασμό συγκεκριμένων εμπειρικών μελετών που θα τις εξετάσουν, όσο και για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Το συγκεκριμένο πλαίσιο έχει ως βασικό του στόχο την προσπάθεια να ερμηνευτούν διάφορα επιμέρους φαινόμενα, όπως λάθη, δυσκολίες και συγκεκριμένες παρερμηνείες, όχι ως ασύνδετα και ανεξάρτητα μεταξύ τους φαινόμενα αλλά ως συνέπεια της ύπαρξης συγκεκριμένων αρχών και προϋποθέσεων της προϋπάρχουσας γνωστικής δομής των μαθητών.

Μια τέτοια προσπάθεια να δούμε αν μπορεί να ερμηνευτεί ένα σύνολο λαθών και παρερμηνειών από τους μαθητές στην άλγεβρα, ως αποτέλεσμα της ύπαρξης μιας εναλλακτικής εννοιολογικής δομής όπως αυτή της άλγεβρας των φυσικών αριθμών, θα ήταν ενδιαφέρουσα τόσο σε επίπεδο ερμηνείας των δυσκολιών των μαθητών με την άλγεβρα όσο και σε επίπεδο εκπαιδευτικών προτάσεων. Γιατί οι εκπαιδευτικές προτάσεις αυτές θα είχαν πιο διευρυμένη στόχευση από άλλες που προσπαθούν να προσεγγίσουν διάφορα λάθη και δυσκολίες των μαθητών, αναγνωρίζοντάς τα ως ανεξάρτητα και ασύνδετα μεταξύ τους φαινόμενα.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2007). A Longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 221-247.

Antell, S. E., & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development*(54), 695-701.

Arabatzis, T., & Kindi, V. (2008). The Problem of Conceptual Change in the Philosophy and History of Science. Στο S. Vosniadou (Εκδ.), *International Handbook of Research on Conceptual Change*: Routledge.

Arambatzis, K., Skiadaresis, P., & Christou, K. P. (2007). *Conceptual change in the shift from equations to inequalities.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο the 2nd National Conference of the Greek Association of Reserach in Mathematics Education, Alexandroupolis.

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 249-272.

Ausubel, D. P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune & Stratton.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Baltas, A. (2007). Background 'Assumptions' and the Grammar of Conceptual Change: Rescuing Kuhn by Means of Wittgenstein. Στο S. Vosniadou, A. Baltas & X.

Vamvakoussi (Εκδ.), *Reframing the conceptual change approch to learning and instruction* (σελ. 63-81). Oxford: Elsevier Press.

Bazzini, L., & Tsamir, P. (2001). *Research based instruction: Widening students' perspective when dealing with inequalities.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 12th ICMI Study "The future of teaching and learning of algebra", Melbourne.

Bazzini, L., & Tsamir, P. (2004). *RF02: Algebraic equations and inequalities:Issues for research and teaching.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: The concept of function as an example. Στο J. Kilpatrick, C. Hoyles & O. Skovsmose (Εκδ.), *Meaning in Mathematics Education*: Springer US.

Booth, L. R. (1982). *Developing a teaching module in beginning algebra.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 6th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education

Booth, L. R. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor: Berkshire: NFER-Nelson.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. Στο *The Ideas of Algebra,K-I2 (1988 Yearbook)* (σελ. 20-32). Reston,Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Booth, L. R. (1989). A question of structure. Στο C. Kieran & S. Wagner (Εκδ.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (σελ. 57-60): Lawrebce Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. C. (1999). *How People Learn; Brain, Mind, Experience, and School*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Bruner, J. S. (1961). The act of discovering. *Harvard Educational Review, 31*(21-32).

Carey, S. (1985). *Conceptual change in childhood*. Cambridge, MA: MIT Press.

Carey, S. (2001). On the very possibility of discontinuities in conceptual development. Στο E. Dupoux (Εκδ.), *Language, brain, and cognitive development: Essays in honor of Jacques Mehler* (σελ. 303-324). Cambridge: MA: MIT Press.

Carey, S., & Spelke, E. (1996). Science ang core knowledge. *Philosophy of Science, 63*, 515-533.

Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S. J., Lindquist, M. M., & Reys, R. E. (1981). *Results from the second mathematics assessment of the national assessment of educational progress*. Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2001). *Can young students operate on unknowns?* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht.

Caverni, J.-P., Fabre, J.-M., & Gonzalez, M. (1990). Cognitive biases: Their contribution for understanding human cognitive processes. Στο J.-P. Caverni, J.-M. Fabre & M. Gonzales (Εκδ.), *Cognitive biases* (σελ. 7-12). Amsterdam, The Netherlands: North-Holland.

Chi, M. T. H. (1992). Conceptual change within and across ontological categories: examples from learning and discovery in science. Στο R. Giere (Εκδ.), *Cognitive Models of Science: Minnesota Studies in the Philosophy of Science* (σελ. 129-186). Minneapolis: University of Minnesota Press.

Chiarugi, I., Fracassina, G., & Furinghetti, F. (1990). *Learning difficulties behind the notion of absolute value.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico.

Christianidis, J. (2004). Introduction. Στο J. Christianidis (Εκδ.), *Classics in the History of Greek Mathematics*: Kluwer Academic Publishers, Netherland.

Collis, K. F. (1975). *The development of formal reasoning*. Newcastle, Australia: University of Newcastle.

Confrey, J. (1981). Conceptual change analysis: Implications for mathematics and Curriculum. *Curriculum Inquiry, 11*(3), 243-257.

Crowe, M. (1975). Ten 'laws' concerning patterns of change in the history of mathematics. Στο D. Gillies (Εκδ.), *Renolutions in mathematics* (σελ. 1-20). New York: Oxfrod University Press, Inc.

Crowley, L., Thomas, M., & Tall, D. (1994). *Algebra symbols, and translation of meaning.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 8th International Conferencefor the Psychology of Mathematics Education Lisbon, Portugal.

Dauben, J. (1984). Conceptual revolutions and the history of mathematics: Two studies in the growth of knowledge. Στο D. Gillies (Εκδ.), *Revolutions in mathematics* (σελ. 49-71). New York: Oxford University Press Inc.

Dauben, J. (1992). Appendix (1992): Revolutions revised. Στο D. Gillies (Εκδ.), *Revolutions in Mathematics* (σελ. 72-82). New York: Oxford Unoversity Press Inc.

De Corte, E. (2004). Mainstreams and perspectives in reserach on learning (mathematics) from instruction. *Applied Psychology: An International Review 53*(2), 279-310.

Demby, A. (1997). Algebraic Procedures Used By 13- to 15-Year-Olds. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 45-70.

Driver, R. (1989). Students' conceptions and the learning of science. *International Journal for Science Education, 11*(Special Issue), 481-490.

Driver, R., & Easley, J. (1978). Pupils and paradigms: A review of literature related to concept development in adolescent science students. *Studies in Science Education, 5*, 61-84.

Druyan, S. (2001). A comparison of four types of cognitive conflict and their effect on cognitive development. *International Journal of Behavioral Development, 25*(3), 226-236.

Duit, R. (1999). Conceptual change approches to science education. Στο W. Schnotz, S. Vosniadou & M. Carretero (Εκδ.), *New perspectives on conceptual change* (σελ. 263-282). Amsterdam, NI: Pergamon.

Ernest, P. (1992). Are there revolutions in mathematics? *Philosophy of Mathematics Education Newsletter, 4/5,* 14-18.

Eves, H. W. (1989). *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών* (Τόμος. 1). Αθήνα: Τροχαλία.

Feigenson, L., Carey, S., & Spelke, E. (2002). Infants' discrimination of number vs. continuous extent. *Cognitive Psychology*(44), 33-66.

Feyerabend, P. (1975). *Against method: Outline of an anarchist theory of knowledge*. London: New Left Books.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19±25.

Firth, D. E. (1975). A study of rule dependence in elementary algebra, *Unpublished master's thesis*. Nottingham, England: University of Nottingham.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer Verlag.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*(49), 171-192.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition, 44*, 43-74.

Gelman, R. (1994). Constructivism and supporting environments. Στο D. Tirosh (Εκδ.), *Implicit and explicit knowledge: An educational approach* (σελ. 55-82). New York: Ablex.

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied Developmental Psychology, 21*, 27-37.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge: MA: Harvard University Press.

Gillies, D. (Εκδ.). (1992). *Revolutions in mathematics*. New York: Oxford University Press Inc.

Gray, E., & Tall, D. (1991). *Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Assisi, Italy.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 170-218.

Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. Στο G. Harel & J. Confrey (Εκδ.), *he Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*. New York: SUNY Press.

Greer, B. (2004). The growth of mathematics through conceptual restructuring. *Learning and Instruction, 14*, 541-548.

Greer, B. (2006). *Designing for conceptual change.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Prague.

Greer, B., & Verschaffel, L. (2007). Nurturing conceptual change in mathematics education. Στο S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (Εκδ.), *Reframing the conceptual change approach to learning and instruction* (σελ. 319-329). Oxford: Elsevier Press.

Harel, G., & Dubinsky, E. (Εκδ.). (1992). *The concept of functions: Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington: Mathematical Association of America.

Harper, E. (1987). Ghost of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*(18), 75-90.

Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray.

Hartnett, P. M., & Gelman, R. (1998). Early understandings of number: Paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction, 8*(4), 341-374.

Hatano, G., & Inagaki, K. (1994). Young children's naive theory of biology. *Cognition*(50), 171-188.

Hatano, G., & Inagaki, K. (2003). When is conceptual change intended? A cognitive-sociocultural view. Στο G. M. Sinatra & P. R. Pintrich (Εκδ.), *Intentional conceptual change* (σελ. 407-427). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Heck, A. (2001). Variables in computer algebra, mathematics, and science. *International Journal of Computers in Mathematics Education, 8*(3), 195-221.

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. Στο S. Wagner & C. Kieran (Εκδ.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (σελ. 60-86). Reston, VA: NCTM.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*(27), 59-78.

Inagaki, K., & Hatano, G. (2002). *Young children's naïve thinking about the biological world*. New York: Psychology Press.

Ioannides, C., & Vosniadou, S. (2001). The changing meanings of force: From coherence to fragmentation. *Cognitive Science Quarterly, 2*(1), 5-62.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol system of algebra. Στο S. Wagner & C. Kieran (Εκδ.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (σελ. 167-194). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. Στο C. Kieran & S. Wagner (Εκδ.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (σελ. 33-56): Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. Στο P. Nesher & J. Kilpatrick (Εκδ.), *Mathematics and Cognition* (σελ. 96-112). Cambridge: Cambridge University Press.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Στο D. Grouws (Εκδ.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (σελ. 390-419). New York.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. Στο A. Gutiérrez & P. Boero (Εκδ.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (σελ. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. Στο F. K. Lester Jr.

(Εκδ.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (σελ. 707-762). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kinder, D., & Carmine, C. (1991). Direct Instruction: What it is and what it is becoming. *Journal of Behavioral Education, 1*(2), 193-213.

Kirshner, D. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovering, problem based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist, 41*(2), 75-86.

Klein, J. (1992). *Greek mathematical thought and the origins of algebra*. New York: Dover Publications, Inc.

Klein, J. (1998). Ο κόσμος της φυσικής και ο φυσικός κόσμος. *Περιοδικό "Νεύσης"*(7), 41-74.

Kline, M. (1980). *Mathematics, the loss of certainty*. New York: Oxford University Press.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school understanding of core algebraic concepts: Equivalence and variable. *International Reviews on Mathematical Education, 37*(1), 68-76.

Kouka, A., Vosniadou, S., & Tsaparlis, G. (2001). *The development of students' understanding of water as a solvent.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο Biennial meeting of the European science education association, Thessaloniki, Greece.

Kuchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School, 7*(4), 23-26.

Kuchemann, D. (1981). Algebra. Στο K. Hart (Εκδ.), *Children's understanding of mathematics: 11-16.* (σελ. 102-119). London: John Murray.

Kuhn, D. (2007). Is direct instruction an answer to the right question? *Educational Psychologist, 42*(2), 109-113.

Kuhn, T. (1970). *The structure of scientific revolutions (2nd edition)* (First edition: 1962 ed.). Chicago: Chicago Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lee, L., & Wheeler, D. (1981). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics, 20*(41-54).

Limon, M. (2001). On the cognitive conflict as an instructional stategy for conceptual change: a critical appraisal. *Learning and Instruction, 11*, 357-380.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior*(14), 113-120.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: operationg on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*(30), 39-65.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196.

Mac Lane, S., & Birkhoff, G. (1967). *Algebra*. New York: Macmillan Co.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). What is x? *Australian Mathematical Teacher*(49), 28-30.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1994). *Progress in learning algebra: Temporary and persistent difficulties.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο Proceedings of the Seventeenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation:11-15. *Educational studies in mathematics, 33*(1), 1-19.

Mack, N. K. (1988). Learning fractions with understanding: Building upon informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 16-32.

Mahoney, M. S. (1997). *Revolutions in mathematics*.Unpublished manuscript.

Malara, N. A. (1999). *An aspect of long-term reaserch on algebra: The solution of verbal problems.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 23rd Conference of the International Froup for Psychology of Mathematics Education, Haifa, Irael.

Malara, N. A., & Iaderosa, R. (2000). The interweaving of arithmetic and algebra: Some questions about syntactic, relational and structural aspects and their teaching and learning Στο E. Swanke (Εκδ.), *European Research in Mathematics Education* (Τεύχος. 2, σελ. 159-171).

Matz, M. (1980). Building a metaphoric theory of mathematical thought. *Journal of Mathematical Behavior, 3*(1), 93-166.

Mayer, R. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovering learning? The case for guided methods of instruction. *American Psychologist, 59*, 14-19.

McCloskey, M. (1983). Naive theories of motion. Στο D. Gentner & A. L. Stevens (Εκδ.), *Mental models* (σελ. 299-323). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mehrtens, H. (1976). T. S. Kuhn's theories and mathematics: a discussion paper on the 'new historiography' of mathematics. Στο D. Gillies (Εκδ.), *Revolutions in Mathematics* (σελ. 21-42). New York: Oxford University Press Inc.

Mehrtens, H. (1992). Appendix (1992): Revolutions reconsidered. Στο D. Gillies (Εκδ.), *Revolutions in mathematics* (σελ. 42-48). New York: Oxford University Press Inc.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. Στο M. Limon & L. Mason (Εκδ.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (σελ. 233-258). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction, 14*, 519-534.

Mix, K. S., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2002). Multiple cues for quantification in infancy: Is number one of them? *Psychological Bulletin, 128*(2), 278-294.

Moore, J. (1986). Direct Instruction: A model of instructional design. *Educational Psychology, 6*(3), 201-229.

Moskal, B. M., & Magone, M. E. (2000). Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. *Educational Studies in Mathematics*(43), 313-335.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. Στο S. Donovan & J. D. Bransford (Εκδ.), *How students learn: History, mathematics, and science in the classroom* (σελ. 309-349). Washington, D.C: National Academy Press.

Nathan, M. J., & Koellner, M. (2007). Introcuction: A Framework for Understanding and Cultivating the Transition from Arithmetic to Algebraic Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 179-192.

Nesselmann, G. H. F. (1842). *Die Algebra der Griechen*. Berlin: Reimer.

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

Novak, J. D. (1977). An alternative to Piagetian psychology for science and mathematics education. *Science Education, 61*, 453-477.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: children Computers, and powerful ideas*. New York: Basic Books.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Towards a theory of conceptual change. *Science Education, 66*, 211-227.

Post, T. R., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. Στο T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Εκδ.), *Rational numbers: An integration of research* (σελ. 327-362). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Resnick, L. B. (1987). Understanding algebra. Στο J. A. Sloboda & D. Rogers (Εκδ.), *Cognitive Process in Mathematics* (σελ. 169-203). Oxford: Clarendon Press.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44*(2), 162-169.

Resnick, L. B. (2006). *The dilemma of mathematical intuition in learning.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Prague.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 8–27.

Sackur, C. (1995). *Blind calculators in algebra: write false interviews.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο First European Research Conference on Mathematics Education (ERCME ’95) Osnabruck, Germany.

Schliemann, A., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., & Lara-Roth, S. (2003). *Algebra in elementary school.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 27th PME International Conference.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*(22), 1-36.

Sfard, A. (1994). Mathematical practices, anomalies and classroom communication problems. Στο P. Ernest (Εκδ.), *Constructing mathematical knowledge: Epistemology and mathematics education* (Τεύχος. 4). London: The Falmer press.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 15-39.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reifcation - The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*(26), 191-228.

Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2004). *Children's thinking* (4th ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Skopeliti, I., & Vosniadou, S. (2006). *The influence of refutational texts on children's ideas about the earth.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 28th Annual Conference of the Cognitive Science Society, Vancouver, Canada.

Smith, C. L., Solomon, G. E. A., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students'understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology* (51), 101-140.

Stacey, K., Helme, S., & Steinle, V. (2001). *Confusions between decimals, fractions and negative numbers: A consequence of the mirror as a conceptual metaphor in three different ways.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Utrecht.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher, 90*(2), 110-113.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). Students' understanding of the numerical value of fractions: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*, 503-518.

Stallings, L. (2000). A brief history of algebraic notation. *School Science and Mathematics, 100*(5), 230-236.

Staphopoulou, C., & Vosniadou, S. (2007). Exploring the relationship between epistemological beliefs and Physics understanding. *Contemporary Educational Psychology, 32*, 255-281.

Starkey, P., Spelke, E. S., & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition*(36), 97-127.

Stavy, R., & Berkovitz, B. (1980). Cognitive Conflict as a Basis for Teaching Quantitative Aspects of the Concept of Temperature. *Science Education, 64*(5), 679-692.

Steffe, L. P., & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.

Struik, D., J. (1990). *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών* (Α. Φερεντίνου - Νικολακοπούλου, Trans. B' ed.). Αθήνα: Δαίδαλος, Ι. Ζαχαρόπουλος.

Tall, D. (2004). *Reflections on reserach and teaching of equations and inequalities.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway.

Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*(22), 125-147.

Thagard, P. (1992). *The Structure of Conceptual Revolutions*. Cambridge, MA: MIT Press.

Tirosh, D., Even, R., & Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Educational studies in mathematics, 35*, 51-64.

Tirosh, D., Stavy, R., & Cohen, S. (1998). Cognitive conflict and intuitive ruls. *International Journal of Science Education, 20*(10), 1257-1269.

Tsamir, P., & Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: The case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 513-524.

Tsamir, P., Almog, N., & Tirosh, D. (1998). *Students' solutions of inequalities.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο PME 22, Stellenbosch, South Africa

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2002). *Algorithmic models: Italian and Israeli students' solutions to algebraic inequalities.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο Proceedings of PME26, Norwich, UK.

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2004). Consistencies and inconsistencies in students' solutions to algebraic 'single-value' inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*(35), 793-812.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (2007). Teaching for conceptual change: The case of infinite sets. Στο S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (Εκδ.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (σελ. 299-317). Oxford: Elsevier Press.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. Στο A. Coxford (Εκδ.), *The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook)*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*, 453-467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models, and the effect of the number line. Στο S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (Εκδ.), *Re-framing the conceptual change approach in learning and instruction* (σελ. 265-282). Oxford: Elsevier Press.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: A teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction, 14*, 485-501.

Verikios, P., & Farmaki, V. (2006). *Introducing algebraic thinking to 13 year-old students: the case of the inequality.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 30th Conference of the

International Group for the Psychology of Mathematics Education, Prague, Czech Republic.

Verschaffel, L., & Vosniadou, S. (Εκδ.). (2004). *The conceptual change approach to mathematics learning and teaching. Special Issue of Learning and Instruction* (Τόμος. 14).

Viennot, L. (1979). Spontaneous reasoning in elementary dynamics. *European Journal of Science Education, 1*, 205-221.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and Instruction, 14*, 469-484.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. *Learning and Instruction, 4*, 45-69.

Vosniadou, S. (1999). Conceptual change research: State of the art and future directions. Στο W. Schnotz, S. Vosniadou & M. Carretero (Εκδ.), *New Perspectives on Conceptual Change*: Elsevier Sciences Ltd.

Vosniadou, S. (2001). On the nature of naive physics. Στο M. L. a. L. Mason (Εκδ.), *Reframing the processes of conceptual change* (σελ. 61-76). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Vosniadou, S. (2002a). Exploring the relationships between conceptual change and intentional learning. Στο G. M. Sinatra & P. R. Pintrich (Εκδ.), *Intentional conceptual change* (σελ. 377-406). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Vosniadou, S. (2002b). Mental models in conceptual development. Στο L. Magnani, N. J. Nerserssian & P. Thagard (Εκδ.), *Model-based reasoning in scientific discovery* (σελ. 353-368): Kluwer Academic/Plenum Publishers.

Vosniadou, S. (2003). Exploring the Relationships Between Conceptual Change and Intentional Learning. Στο G. M. Sinatra & P. R. Pintrich (Εκδ.), *Intentional Conceptual Change* (σελ. 377-406). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vosniadou, S. (2007a). Conceptual change and education. *Human Development, 50*, 47-54.

Vosniadou, S. (2007b). Conceptual change and education. *Human Development, 50*(1), 47-54.

Vosniadou, S. (in press). Science education for young children: A conceptual change point of view. *Society for Reserach in Science Development*.

Vosniadou, S., Baltas, A., & Vamvakoussi, X. (Εκδ.). (2007). *Re-framing the conceptual change approach in learning and instruction*. Oxford: Elsevier Press.

Vosniadou, S., & Brewer, W. F. (1992). Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood. *Cognitive Psychology, 24*, 535–585.

Vosniadou, S., & Brewer, W. F. (1994). Mental models of the day/night cycle. *Cognitive Science, 18*, 123-183.

Vosniadou, S., Ioannides, C., Dimitrakopoulou, A., & Papademitriou, E. (2001). Designing learning environments to promote conceptual change in science. *Learning and Instruction, 11*(4-5), 381-419.

Vosniadou, S., Skopeliti, I., & Ikospentaki, K. (2004). Modes of knowing and ways of reasoning in elementary astronomy. *Cognitive Development, 19*, 203-222.

Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2006). Examining mathematics learning from a conceptual change point of view: Implications for the design of learning environments. . Στο L. Verschaffel, P. Dochy, M. Boekartz & S. Vosniadou (Εκδ.), *Instructional psychology: Past, present and future trends. Sixteen essays in honour of Eric De Corte*: Elsevier Press.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Christou, K. P. (2005). *What can we gain from a conceptual change approach to the learning and teaching of mathematics?* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education, Palermo, Italy.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, E. (2008). The framework theory approach to conceptual change. Στο S. Vosniadou (Εκδ.), *Handbook of research on conceptual change* (σελ. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change spproach to mathematics learning and teaching. Στο L. Verschaffel & S. Vosniadou (Εκδ.), *Learning and Instruction* (Τεύχος. 14, σελ. 445-451).

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind and society: The development of higher mental processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variables. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 107-118.

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 431-466.

Αλιμπινίσης, Α., Αντύπας, Ζ., Ευσταθόπουλος, Ε., Κλαουδάτος, Ν., & Παπασταυρίδης, Σ. (1987). *Μαθηματικά Α′ Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Αλιμπινίσης, Α., Γρηγοριάδης, Σ., Ευσταθόπουλος, Ε., Κλαουδάτος, Ν., Παπασταυρίδης, Σ., & Σβέρκος, Α. (1989a). *Μαθηματικά Β′ Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Αλιμπινίσης, Α., Γρηγοριάδης, Σ., Ευσταθόπουλος, Ε., Κλαουδάτος, Ν., Παπασταυρίδης, Σ., & Σβέρκος, Α. (1989b). *Μαθηματικά Γ′ Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Χριστιανίδης, Γ. (1996). Οι εγγράμματες παραστάσεις και ο αλγεβρικός συμβολισμός. *Νεύσις, 5*, 83-90.

Χριστιανίδης, Γ. (2008). Η μέθοδος του Διοφάντου για την επίλυση των αριθμητικών προβλημάτων και η ρήξη με την παλιά λογιστική παράδοση. *Νεύσις, 17*, 183-234.

Παράρτημα 1

Ερωτηματολόγια Πειράματος 1

Ερωτηματολόγιο Α

Ερωτηματολόγιο Β

Ερωτηματολόγιο Α

Όνομα:..................Ηλικία:.........Φύλο: ....Τάξη:..........Σχολείο:....................

Στην άλγεβρα χρησιμοποιούμε γράμματα (όπως το α, β, x, y) για να αναπαραστήσουμε αριθμούς. Στις ερωτήσεις που ακολουθούν χρησιμοποιούμε τα γράμματα με αυτό τον τρόπο. Διαβάστε τις παρακάτω ερωτήσεις με προσοχή και απαντήστε με όσο το δυνατόν περισσότερους αριθμούς

1. Γράψε αριθμητικές τιμές που νομίζεις ότι μπορεί να πάρει το **α** ……………………..
………………………………………………………………………………………........
………………………………………………………………………………………........
2. Γράψε αριθμητικές τιμές που νομίζεις ότι μπορεί να πάρει το **(–β)** …………………..
………………………………………………………………………………………........
……………………………………………………………………………………….......
3. Γράψε αριθμητικές τιμές που νομίζεις ότι μπορεί να πάρει το $\frac{1}{\gamma}$ …………………….
………………………………………………………………………………………........
………………………………………………………………………………………........
4. Γράψε αριθμητικές τιμές που νομίζεις ότι μπορεί να πάρει το **4γ** ……………………
………………………………………………………………………………………........
………………………………………………………………………………………........
5. Γράψε ριθμητικές τιμές που νομίζεις ότι μπορεί να πάρει το **δ+δ+δ**………………..
……………………………………………………………………………………….......
………………………………………………………………………………………........
6. Γράψε αριθμητικές τιμές που νομίζεις ότι μπορεί να πάρει το $\frac{\alpha}{\beta}$ ……………………
………………………………………………………………………………………........
……………………………………………………………………………………….......
7. Γράψε αριθμητικές τιμές που νομίζεις ότι μπορεί να πάρει το **κ+3**…………………..
……………………………………………………………………………………….......
………………………………………………………………………………………........

Ερωτηματολόγιο Β

Όνομα:..................Ηλικία:.........Φύλο: ....Τάξη:..........Σχολείο:....................

Στην άλγεβρα χρησιμοποιούμε γράμματα (όπως το α, β, x, y) για να αναπαραστήσουμε αριθμούς. Στις ερωτήσεις που ακολουθούν χρησιμοποιούμε τα γράμματα με αυτό τον τρόπο. Διαβάστε τις παρακάτω ερωτήσεις με προσοχή και απαντήστε με όσο το δυνατόν περισσότερους αριθμούς

1. Γράψε αριθμητικές τιμές που νομίζεις ότι <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το **α** ………………
……………………………………………………………………………………….......
……………………………………………………………………………………….......

2. Γράψε αριθμητικές τιμές που νομίζεις ότι <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το **(–β)** ..…………..
……………………………………………………………………………………….......
………………………………………………………………………………………......

3. Γράψε αριθμητικές τιμές που νομίζεις ότι <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το $\frac{1}{\gamma}$ ………………
……………………………………………………………………………………….......
……………………………………………………………………………………….......

4. Γράψε αριθμητικές τιμές που νομίζεις ότι <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το **4γ** ………………
……………………………………………………………………………………….......
……………………………………………………………………………………….......

5. Γράψε αριθμητικές τιμές που νομίζεις ότι <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το **δ+δ+δ**…..……..
………………………………………………………………………………………......
……………………………………………………………………………………….......

6. Γράψε αριθμητικές τιμές που νομίζεις ότι <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το $\frac{\alpha}{\beta}$ ………………
……………………………………………………………………………………….......
………………………………………………………………………………………......

7. Γράψε αριθμητικές τιμές που νομίζεις ότι <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το **κ+3**……………..
………………………………………………………………………………………......
……………………………………………………………………………………….......

Παράρτημα 2
Ερωτηματολόγια Πειράματος 2

Ερωτηματολόγιο Γ

Ερωτηματολόγιο Γ

Όνομα:..................Ηλικία:.........Φύλο:...........Τάξη:..........Σχολείο:.............................

Στην άλγεβρα χρησιμοποιούμε γράμματα της αλφαβήτου (όπως α, β, χ, ψ, κτλ) για να συμβολίσουμε αριθμούς. Στις παρακάτω ερωτήσεις που θα δεις, χρησιμοποιούμε με αυτόν τον τρόπο τα γράμματα. Διάβασε τις ερωτήσεις προσεκτικά. Εάν πιστεύεις ότι υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα σε αυτούς που σου δίνονται που δεν θα μπορούσε να τους πάρει το συγκεκριμένο σύμβολο, σημείωσέ τους βάζοντάς τους σε κύκλους.

Μπορείς να επιλέξεις περισσότερους από έναν αριθμούς αν θέλεις.

1. Ανάμεσα στους αριθμούς που σου δίνονται υπάρχουν μήπως αριθμοί που νομίζεις ότι <u>δεν</u> θα μπορούσε να πάρει το α;

α) 2

β) -6

γ) $\frac{3}{4}$

δ) 0

ε) $-\frac{6}{7}$

στ) -2,36

ζ) 3,45

η) -4

θ) 0,22

ι) 1

κ) 5

λ) όχι, όλους τους αριθμούς θα μπορούσε να τους πάρει

2. Ανάμεσα στους αριθμούς που σου δίνονται υπάρχουν μήπως αριθμοί που νομίζεις ότι <u>δεν</u> θα μπορούσε να πάρει το (–β);

α) -4

β) 0

γ) $\frac{2}{3}$

δ) 0,333…

ε) $-\frac{7}{8}$

στ) -0,92

ζ) 1

η) 8

θ) -2,36

ι) -2

κ) -7

λ) όχι, όλους τους αριθμούς θα μπορούσε να τους πάρει

3. Ανάμεσα στους αριθμούς που σου δίνονται υπάρχουν μήπως αριθμοί που νομίζεις ότι <u>δεν</u> θα μπορούσε να πάρει το $\frac{\alpha}{\beta}$;

α) 2

β) 2,63

γ) $-\frac{5}{4}$

δ) -9

ε) 3

στ) $\frac{\frac{1}{5}}{3}$

ζ) -1

η) -0,13

θ) $\frac{4}{13}$

ι) 0,22…

κ) $\frac{1}{2}$

λ) όχι, όλους τους αριθμούς θα μπορούσε να τους πάρει

4. Ανάμεσα στους αριθμούς που σου δίνονται υπάρχουν μήπως αριθμοί που νομίζεις ότι <u>δεν</u> θα μπορούσε να πάρει το κ+3;

α) -2
β) 1
γ) -0.25
δ) 4
ε) 6.74
στ) $\frac{5}{7}$
ζ) 5
η) $-\frac{2}{3}$
θ) 0
ι) -8
κ) 2,333
λ) όχι, όλους τους αριθμούς θα μπορούσε να τους πάρει

5. Ανάμεσα στους αριθμούς που σου δίνονται υπάρχουν μήπως αριθμοί που νομίζεις ότι <u>δεν</u> θα μπορούσε να πάρει το δ+δ+δ;

α) 1
β) 2,75
γ) $-\frac{4}{5}$
δ) 0
ε) -2,3
στ) 5
ζ) $\frac{2}{5}$
η) -3
θ) 8
ι) 4
κ) -9
λ) όχι, όλους τους αριθμούς θα μπορούσε να τους πάρει

6. Ανάμεσα στους αριθμούς που σου δίνονται υπάρχουν μήπως αριθμοί που νομίζεις ότι <u>δεν</u> θα μπορούσε να πάρει το 4γ;

α) 6
β) 2
γ) -0,25
δ) -3
ε) 6,74
στ) $\frac{5}{7}$
ζ) 1
η) 4
θ) $-\frac{2}{3}$
ι) -8
κ) 2.333
λ) όχι, όλους τους αριθμούς θα μπορούσε να τους πάρει

Παράρτημα 3
Ερωτηματολόγια Πειράματος 3

Ερωτηματολόγιο Δ1

Ερωτηματολόγιο Δ2

Ερωτηματολόγιο Δ1

Όνομα:.......................... Ημερομηνία Γέννησης:.....................Τάξη:...... Σχολείο: ……….

- Δίνεται η συνάρτηση:

  f(x)= 2x+1

Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών

x							
f(x)							

(χώρος για πράξεις)

……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………

Κάντε τη γραφική παράσταση

- Δίνεται η συνάρτηση:

  f(x)= $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$

Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών

x							
f(x)							

(χώρος για πράξεις)

……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………

Κάντε τη γραφική παράσταση

Γνωρίζουμε ότι:
Στις ανισώσεις, όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με θετική ποσότητα η φορά της ανίσωσης παραμένει η ίδια.
Αν όμως πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε με αρνητική ποσότητα τότε η φορά της ανίσωσης πρέπει να αλλάξει.

Κάποιο παιδί της ηλικίας σου έλυσε κάποιες ανισώσεις με τον τρόπο που φαίνεται παρακάτω. Παρακολούθησε προσεκτικά τις λύσεις που έδωσε και σκέψου αν έκανε κάπου λάθος ή όχι.

- **Ανίσωση 1:**

$$2 < \frac{2}{x^2},\ x \neq 0$$

Βήμα 1: $2x^2 < 2$ *(γιατί το x^2 είναι θετικός και μπορούμε να πολ/με με θετικό χωρίς να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

Βήμα 2: $x^2 < 1$ *(γιατί διαιρέσαμε με το 2 που είναι θετικός αριθμός και δεν πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Βήμα 3: $-1 < x < 1$

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

- **Ανίσωση 2:**

$$3 < \frac{1}{2x},\ x \neq 0$$

Βήμα 1: $6x < 1$ *(γιατί το 2x είναι θετικός και μπορούμε να πολ/με με θετικό χωρίς να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

Βήμα 2: $x < \frac{1}{6}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το 6 που είναι θετικός αριθμός και δεν πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

<u>Ανίσωση 3:</u>

$$5 > \frac{3}{-4x},\ x \neq 0$$

<u>Βήμα 1:</u> 5(-4x) < 3 *(γιατί το –4x είναι αρνητικός κι όταν πολ/με με αρνητικό πρέπει να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

<u>Βήμα 2:</u> -20x < 3

<u>Βήμα 3</u>: $x > -\frac{3}{20}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το –20 που είναι αρνητικός αριθμός και πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

…………………………………………………………………………………

………..……………………………………………………………………………

………..……………………………………………………………………………

Γνωρίζουμε ότι όταν μία συνάρτηση έχει τη μεταβλητή μέσα σε τετραγωνική ρίζα, τότε για να ορίζεται θα πρέπει το υπόριζο να είναι μη αρνητικός αριθμός.

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{4+3x}$ ορίζεται σε όλο το R γιατί το 4+3x είναι θετικός αριθμός, για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΏ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………..

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{x^2+1}$ ορίζεται σε όλο το R γιατί το x^2+1 είναι θετικός αριθμός, για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΏ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………..

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{-2x-1}$ δεν ορίζεται γιατί το –2x-1 είναι αρνητικός αριθμός για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΏ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………..

Όνομα:............................ Ημερομηνία Γέννησης:......................Τάξη:...... Σχολείο: ……….

- Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=2x+1$$

Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών

x							
f(x)							

(χώρος για πράξεις)

………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………

Κάντε τη γραφική παράσταση

- Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{1}{x},\ x\neq 0$$

Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών

x							
f(x)							

(χώρος για πράξεις)

………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………

Κάντε τη γραφική παράσταση

Γνωρίζουμε ότι όταν μία συνάρτηση έχει τη μεταβλητή μέσα σε τετραγωνική ρίζα, τότε για να ορίζεται θα πρέπει το υπόριζο να είναι θετικό.

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{4+3x}$ ορίζεται σε όλο το R γιατί το 4+3x είναι θετικός αριθμός, για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΏ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{x^2+1}$ ορίζεται σε όλο το R γιατί το x^2+1 είναι θετικός αριθμός, για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΏ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{-2x-1}$ δεν ορίζεται γιατί το –2x-1 είναι αρνητικός αριθμός για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΏ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
…..…………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

Γνωρίζουμε ότι:
Στις ανισώσεις, όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με θετική ποσότητα η φορά της ανίσωσης παραμένει η ίδια.
Αν όμως πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε με αρνητική ποσότητα τότε η φορά της ανίσωσης πρέπει να αλλάξει.

Κάποιο παιδί της ηλικίας σου έλυσε κάποιες ανισώσεις με τον τρόπο που φαίνεται παρακάτω. Παρακολούθησε προσεκτικά τις λύσεις που έδωσε και σκέψου αν έκανε κάπου λάθος ή όχι.

- **Ανίσωση 1:**

$$2 < \frac{2}{x^2}, \ x \neq 0$$

Βήμα 1: $2x^2 < 2$ *(γιατί το x^2 είναι θετικός και μπορούμε να πολ/με με θετικό χωρίς να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

Βήμα 2: $x^2 < 1$ *(γιατί διαιρέσαμε με το 2 που είναι θετικός αριθμός και δεν πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Βήμα 3: $-1 < x < 1$

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

…………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………

- **Ανίσωση 2:**

$$3 < \frac{1}{2x}, \ x \neq 0$$

Βήμα 1: $6x < 1$ *(γιατί το 2x είναι θετικός και μπορούμε να πολ/με με θετικό χωρίς να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

Βήμα 2: $x < \frac{1}{6}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το 6 που είναι θετικός αριθμός και δεν πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

…………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………

- **<u>Ανίσωση 3:</u>**

$$5 > \frac{3}{-4x},\ x \neq 0$$

<u>Βήμα 1:</u> $5(-4x) < 3$ *(γιατί το –4x είναι αρνητικός κι όταν πολ/με με αρνητικό πρέπει να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

<u>Βήμα 2:</u> $-20x < 3$

<u>Βήμα 3</u>: $x > -\frac{3}{20}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το –20 που είναι αρνητικός αριθμός και πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………

Παράρτημα 4
Η διδακτική παρέμβαση

Η διδακτική παρέμβαση

Θα ήθελα να σας επιστήσω την προσοχή στην έννοια και τη χρήση της μεταβλητής. Η μεταβλητή είναι κάτι που το διδασκόμαστε και το χρησιμοποιούμε όταν αφήνουμε την αριθμητική στο Δημοτικό και μπαίνουμε σιγά σιγά στην άλγεβρα. Η βασική διαφορά ανάμεσα στην αριθμητική και στην άλγεβρα είναι ότι στην αριθμητική αυτό που κάνουμε είναι πράξεις με συγκεκριμένους αριθμούς. Αυτοί οι αριθμοί μπορεί να είναι είτε φυσικοί (1, 2, 3, …), είτε δεκαδικοί (2,36, 0,64,…), είτε κλάσματα (1/2, 3/5, …), πάντως είναι συγκεκριμένοι αριθμοί. Στην αριθμητική λέγαμε για παράδειγμα ότι 2+3=5. Επίσης ότι 3+2=5, και βγάζαμε το συμπέρασμα ότι 2+3=3+2. Αυτό ήταν ένα συμπέρασμα που ισχύει για όλους τους αριθμούς, έτσι δεν είναι; Στην άλγεβρα θέλουμε να μπορούμε να εκφράσουμε σχέσεις που ισχύουν για όλους τους αριθμούς. Για να το κάνουμε αυτό, έπρεπε να βρούμε έναν τρόπο να συμβολίσουμε όλους μαζί τους αριθμούς. Στην άλγεβρα, λοιπόν, αποφασίσαμε να χρησιμοποιούμε γράμματα όπως το α, το β, το x, το y,… για να συμβολίσουμε τον οποιονδήποτε αριθμό. Με τον τρόπο αυτό, την παραπάνω σχέση που ισχύει για όλους τους αριθμούς στην άλγεβρα θα τη γράφαμε α+β=β+α, όπου τα α και β μπορούν να αντικατασταθούν από οποιονδήποτε αριθμό.

Όπως μας έχουν πει λοιπόν και στο σχολείο, οι μεταβλητές είναι γράμματα που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή. Για παράδειγμα, η μεταβλητή x μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Για να δούμε λοιπόν, τι τιμές μπορεί να πάρει; Μπορεί να πάρει φυσικούς (1, 2, 3,…); δεκαδικούς (2,125, 5,99,…); κλάσματα (5/9, 12/5, …); αρνητικούς (-3, -5, -3,69, -6/5, -0,222);

Εδώ υπάρχει μια διαφορά ανάμεσα στην αριθμητική και στην άλγεβρα. Στην αριθμητική, όταν εμφανίζεται ένας αριθμός χωρίς πρόσημο, αυτομάτως μπορούμε να πούμε ότι αυτός ο αριθμός είναι θετικός. Για παράδειγμα το 2, ή το 3,65 είναι θετικοί αριθμοί. Αντίστοιχα, αν εμφανιστεί ένας αριθμός που έχει μπροστά του το πρόσημο μείον, τότε μπορούμε να πούμε ότι είναι αρνητικός αριθμός. Για παράδειγμα το -2, το -6 είναι αρνητικοί αριθμοί. Έτσι τα πράγματα στην αριθμητική είναι ακριβώς όπως φαίνονται. Αν υπάρχει το μείον, ο αριθμός είναι αρνητικός, ενώ αν δεν υπάρχει είναι θετικός.

Στην άλγεβρα όμως τα πράγματα δεν είναι έτσι. Ας πάρουμε για παράδειγμα το x. Δεν έχει μπροστά του το μείον, οπότε, με βάση αυτά που ξέραμε από την αριθμητική, θα λέγαμε ότι αυτός είναι θετικός αριθμός. Παρόλα αυτά, αφού είπαμε παραπάνω ότι θα μπορούσε να πάρει και αρνητικές τιμές, το x θα μπορούσε να είναι -3, δηλαδή αρνητικός αριθμός. Πολλοί μαθητές όταν βλέπουν μια μεταβλητή όπως για παράδειγμα το x έτσι μόνο του, νομίζουν ότι μπορεί να είναι μόνο θετικός αριθμός. Για παράδειγμα, η παράσταση 2x+3 τι τιμές μπορεί να πάρει; Τι γίνεται αν, όπου x, βάλουμε το 2; Το αποτέλεσμα είναι πράγματι θετικός αριθμός. Τι γίνεται όμως αν, όπου x, βάλουμε το -2;

Ακόμα μεγαλύτερο είναι το πρόβλημα όταν μια μεταβλητή εμφανίζεται με το μείον μπροστά, για παράδειγμα το –x. Πολλοί μαθητές, όταν βλέπουν το –x, νομίζουν ότι είναι αρνητικός αριθμός. Εσείς τι νομίζετε; Το –x είναι αρνητικός αριθμός; Πράγματι, αν για παράδειγμα βάλουμε όπου x το 2 ή το 6, το –x θα είναι αρνητικός αριθμός. Αν όμως βάλουμε όπου x το -3 ή το -6, τότε γίνεται –(-3)=3, οπότε το –x γίνεται ξαφνικά θετικός αριθμός. Επίσης αν βάλουμε όπου x το -2,3, πάλι το –x γίνεται θετικός. Βλέπουμε λοιπόν ότι στην άλγεβρα τα πράγματα δεν είναι πάντα όπως φαίνονται να είναι, αλλά πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικοί.

Αυτό μάλλον συμβαίνει γιατί έχουμε στο μυαλό μας ότι τα γράμματα παίρνουν φυσικές τιμές μόνο, όπως το 1, 2, 3,… Σίγουρα μπορεί μια μεταβλητή να πάρει αυτές τις τιμές, αλλά δεν είναι οι μόνες που παίρνει. Παίρνει και κλάσματα και αρνητικούς, έτσι δεν είναι; Αυτό πρέπει να το έχουμε πάντα στο μυαλό μας, ότι το να αντικαθιστούμε τα γράμματα μόνο με φυσικούς αριθμούς είναι το πιο εύκολο, αλλά δεν είναι πάντα σωστό και πρέπει να σκεφτόμαστε ότι και αρνητικοί αριθμοί μπορούν να αντικαταστήσουν τα γράμματα, όπως και κλάσματα και δεκαδικοί.

Αν κάποιος βλέπει για x μόνο θετικές τιμές, τότε θα βλέπει το –x σαν αρνητικό. Αλλά αυτό είπαμε δεν είναι σωστό. Μάλιστα, αυτό μπορεί να οδηγεί σε λάθη. Υπάρχουν διάφορες περιπτώσεις στα μαθηματικά στις οποίες πρέπει να γνωρίσουμε ποιο είναι το πρόσημο μιας παράστασης που έχει μέσα μεταβλητές, όπως είναι η 2x+3, είτε όταν αυτή εμφανίζεται σε μια συνάρτηση είτε σε μια ανίσωση, κτλ.

Για παράδειγμα, όταν τέτοιες παραστάσεις εμφανίζονται μέσα σε μια ρίζα, τότε είναι σημαντικό να γνωρίσουμε το πρόσημό τους. Γιατί μια τετραγωνική ρίζα ορίζεται μόνο όταν το υπόριζο είναι μη-αρνητικός αριθμός. Με βάση αυτά που ξέρουμε μέχρι τώρα, δεν θα μπορούσαμε να έχουμε $\sqrt{-2}$ για παράδειγμα. Πολλοί θα έλεγαν ότι η $\sqrt{2x+3}$ ορίζεται για κάθε τιμή του x, γιατί, αφού το 2x+3 φαίνεται να είναι θετικό, τότε θα είναι θετικό. Αντίθετα για την $\sqrt{-2-3y}$, που το -2-3y φαίνεται να είναι αρνητικό, θα έλεγαν ότι δεν ορίζεται γιατί είναι πάντα αρνητικό για κάθε τιμή του y. Αυτό είναι σωστό; Τι λέτε, το -2-3y είναι πάντα αρνητικό; Τι γίνεται αν βάλω όπου y το 2; Τι γίνεται όμως αν βάλω όπου το y το -2; Πώς θα έπρεπε να έχω απαντήσει την παραπάνω ερώτηση;

Πρέπει λοιπόν να έχουμε πάντα στο μυαλό μας ότι τα πράγματα στην άλγεβρα με τα πρόσημα των παραστάσεων δεν είναι όπως φαίνονται. Ένας εύκολος τρόπος να βρίσκουμε ποιο μπορεί να είναι το πρόσημο μιας αλγεβρικής παράστασης είναι να δοκιμάζουμε να αντικαταστήσουμε με διάφορους αριθμούς τη μεταβλητή. Αλλά πρέπει να έχουμε στον νου μας ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, και θετικό αλλά και αρνητικό, και να μην δοκιμάζουμε μόνο με τους πιο εύκολους αριθμούς που μας έρχονται στο μυαλό, το 1, το 2, κτλ. Να θυμάστε να δοκιμάζετε τουλάχιστον έναν αρνητικό αριθμό, για να βλέπετε τι γίνεται το πρόσημο μιας παράστασης. Ας πάρουμε για παράδειγμα τη $\sqrt{-3y-4}$. Τι λέτε, ορίζεται ή όχι; Πάμε να δοκιμάσουμε κάποιους αριθμούς; Ας πάρουμε πρώτα το 2, τότε το υπόριζο γίνεται -10 που είναι αρνητικός αριθμός. Οπότε δεν έπρεπε να ορίζεται. Υπάρχει κάποιος αριθμός για τον οποίο να ορίζεται; Ας δοκιμάσουμε το -2, τότε το υπόριζο γίνεται 2 που είναι θετικός. Άρα μπορούμε να πούμε ότι για κάποιους αριθμούς η ρίζα ορίζεται, ενώ για κάποιους δεν ορίζεται έτσι δεν είναι;

Υπάρχει κάποια απορία σε αυτά που ακούσατε; Ήταν πράγματα καινούρια ή τα έχετε ξανακούσει; Πιστεύετε ότι έχετε κάνει κι εσείς τέτοια λάθη όπως αυτά για τα οποία σας μίλησα; Στο τεστ που πήρατε πριν υπήρχαν τέτοια ερωτήματα;[11]

[11] Το παρόν κείμενο είναι προϊόν απομαγνητοφώνησης από τη διδακτική παρέμβαση που έγινε προφορικά, με επιμέρους επιμέλεια στον λόγο.

Παράρτημα 5
Ερωτηματολόγια Πειράματος 4

Ερωτηματολόγιο Ε1

Ερωτηματολόγιο Ε2

Ερωτηματολόγιο Ε3

Ερωτηματολόγιο Ε1

Όνομα:.............................……… Ημερομηνία Γέννησης:.....................Τάξη:....……. A

Γνωρίζουμε ότι:
Μία συνάρτηση που έχει τη μεταβλητή μέσα σε τετραγωνική ρίζα, ορίζεται μόνο όταν το υπόριζο είναι θετικό.

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{2+3x}$ ορίζεται σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών γιατί το 2+3x είναι θετικός αριθμός, για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΩ □ ΔΙΑΦΩΝΩ □

Γιατί;
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{-5x}$ δεν ορίζεται γιατί το -5x είναι αρνητικός αριθμός, για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΩ □ ΔΙΑΦΩΝΩ □

Γιατί;
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
…..……………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{x^2+1}$ ορίζεται σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών γιατί το x^2+1 είναι θετικός αριθμός, για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΩ □ ΔΙΑΦΩΝΩ □

Γιατί;
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{3x}$ ορίζεται σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών γιατί το 3x είναι θετικός αριθμός, για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;

…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………..
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{-2x-1}$ δεν ορίζεται γιατί το -2x-1 είναι αρνητικός αριθμός για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;

…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
..………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

<u>*Γνωρίζουμε ότι:*</u>
Στις ανισώσεις, όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με θετική ποσότητα η φορά της ανίσωσης παραμένει η ίδια.
Αν όμως πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε με αρνητική ποσότητα τότε η φορά της ανίσωσης πρέπει να αλλάξει.

Κάποιο παιδί της ηλικίας σου έλυσε κάποιες ανισώσεις με τον τρόπο που φαίνεται παρακάτω. Παρακολούθησε προσεκτικά τις λύσεις που έδωσε και σκέψου αν έκανε κάπου λάθος ή όχι.

- $3 < \frac{1}{2x}$

<u>Βήμα 1:</u> 6x <1 *(γιατί πολ/με με το 2x που είναι θετικός για κάθε x κι έτσι δεν πρέπει να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

<u>Βήμα 2:</u> $x < \frac{1}{6}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το 6 που είναι θετικός κι έτσι δεν πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

…………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………

- $3 < \frac{1}{-x-1}$

<u>Βήμα 1:</u> 3(-x-1) >1 *(γιατί πολ/με με το –x-1 που είναι αρνητικός για κάθε x κι έτσι πρέπει να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

<u>Βήμα 2:</u> -3x-3 > 1 (γιατί εφαρμόσαμε την επιμεριστική ιδιότητα)

<u>Βήμα 3:</u> -3x > 4 (γιατί μεταφέραμε το 3 στο άλλο μέλος και άλλαξε πρόσημο)

<u>Βήμα 4:</u> $x < \frac{4}{-3}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το -3 που είναι αρνητικός κι έτσι πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………

- $2 < \frac{2}{x^2}$

<u>Βήμα 1:</u> $2x^2 < 2$ *(γιατί πολ/με το x^2 που είναι θετικός για κάθε x κι έτσι δεν πρέπει να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

<u>Βήμα 2:</u> $x^2 < 1$ *(γιατί διαιρέσαμε με το 2 που είναι θετικός κι έτσι δεν πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………

- $5 > \frac{3}{-4x}$

<u>Βήμα 1:</u> 5(-4x) < 3 *(γιατί πολ/με με το –4x που είναι αρνητικός για κάθε x κι έτσι πρέπει να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

<u>Βήμα 2:</u> -20x < 3 (γιατί πολ/με με το 5)

<u>Βήμα 3</u>: $x > -\frac{3}{20}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το –20 που είναι αρνητικός κι έτσι πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………

- $2 < \dfrac{3}{1+2x}$

<u>Βήμα 1:</u> $2(1+2x) < 3$ *(γιατί πολ/με με το 1+2x που είναι θετικός για κάθε x κι έτσι δεν πρέπει να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*
<u>Βήμα 2:</u> $2+4x<3$ (γιατί εφαρμόσαμε την επιμεριστική ιδιότητα)
<u>Βήμα 3</u>: $4x<1$ (γιατί μεταφέραμε το 2 στο άλλο μέλος και άλλαξε πρόσημο)
<u>Βήμα 4</u>: $x < \dfrac{1}{4}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το 4 που είναι θετικός κι έτσι δεν πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐
Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;
…………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………….
…………………………………………………………………………………

<u>Γνωρίζουμε ότι:</u>

- *Η απόλυτη τιμή μιας θετικής ποσότητας είναι η ίδια η ποσότητα*
- *Η απόλυτη τιμή μιας αρνητικής ποσότητας είναι η αντίθετή της που είναι θετική ποσότητα.*

- Είναι: $|-7x-1| = 7x+1$ γιατί το -7x-1 είναι αρνητικός ενώ το 7x+1 είναι θετικός για κάθε αριθμό x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;……………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

- Είναι: $|3+x| = 3+x$ γιατί το 3+x είναι θετικός για κάθε αριθμό x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;……………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

- Είναι: $|2x^2| = 2x^2$ γιατί το $2x^2$ είναι θετικός για κάθε αριθμό x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;……………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

- Είναι: $|-x| = x$ γιατί το -x είναι αρνητικός για κάθε αριθμό x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;……………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

Ερωτηματολόγιο Ε2

Όνομα:................................……….. Ημερομηνία Γέννησης:...............Τάξη:....……. **B**

Γνωρίζουμε ότι:
Μία συνάρτηση που έχει τη μεταβλητή μέσα σε τετραγωνική ρίζα, ορίζεται μόνο όταν το υπόριζο είναι θετικό.

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{-4x-3}$ δεν ορίζεται γιατί το -4x-3 είναι αρνητικός, για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…..……………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{7x}$ ορίζεται σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών γιατί το 7x είναι θετικός, για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…..……………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{-2x}$ δεν ορίζεται γιατί το -2x είναι αρνητικός, για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;
………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………..………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Γνωρίζουμε ότι:
Στις ανισώσεις, όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με θετική ποσότητα η φορά της ανίσωσης παραμένει η ίδια.
Αν όμως πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε με αρνητική ποσότητα τότε η φορά της ανίσωσης πρέπει να αλλάξει.

Κάποιο παιδί της ηλικίας σου έλυσε κάποιες ανισώσεις με τον τρόπο που φαίνεται παρακάτω. Παρακολούθησε προσεκτικά τις λύσεις που έδωσε και σκέψου αν έκανε κάπου λάθος ή όχι.

- $1 < \frac{2}{1+2x}$

Βήμα 1: 1+2x<2 *(γιατί πολ/με με το 1+2x που είναι θετικός για κάθε x κι έτσι δεν πρέπει να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*
Βήμα 2: 2x < 1 (γιατί μεταφέραμε το 1 στο άλλο μέλος και άλλαξε πρόσημο)
Βήμα 4: $x < \frac{1}{2}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το 2 που είναι θετικός κι έτσι δεν πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………

$1 < \frac{2}{-5x},\ x \neq 0$

Βήμα 1: -5x >2 *(γιατί πολ/με με το –5x που είναι αρνητικός για κάθε x και έτσι πρέπει να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*
Βήμα 2: x$<\frac{2}{-5}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το –5 που είναι αρνητικός και έτσι πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐
Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

- $1 < \frac{2}{-3x-6}$, $x \neq 0$

<u>Βήμα 1:</u> -3x-6>2 *(γιατί πολ/με με το –3x-6 που είναι αρνητικός για κάθε x και έτσι πρέπει να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

<u>Βήμα 2</u>: -3x>8 *(*γιατί μεταφέραμε το 6 στο άλλο μέλος και άλλαξε πρόσημο*)*

<u>Βήμα 3:</u> $x < \frac{8}{-3}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το –3 που είναι αρνητικός και έτσι πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

<u>*Γνωρίζουμε ότι:*</u>

- *Η απόλυτη τιμή μιας θετικής ποσότητας είναι η ίδια η ποσότητα*
- *Η απόλυτη τιμή μιας αρνητικής ποσότητας είναι η αντίθετή της που είναι θετική ποσότητα.*

- Είναι: $|-2-3x| = 2+3x$ γιατί το -2-3x είναι αρνητικός ενώ το 2+3x είναι θετικός για κάθε αριθμό x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………..

- Είναι: $|5x+3| = 5x+3$ γιατί το 5x+3 είναι θετικός, για κάθε αριθμό x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………..

- Είναι: $|x| = x$ γιατί το x είναι πάντα θετικός.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Ερωτηματολόγιο Ε3

<u>Όνομα:......................…………..</u> (παρακαλώ συμπληρώστε με το όνομα που δώσατε στα προηγούμενα δύο τεστ) **<u>Ημερομηνία Γέννησης:...............φύλο:…………………………….</u>**

<u>Γνωρίζουμε ότι:</u> Μία συνάρτηση που έχει τη μεταβλητή μέσα σε τετραγωνική ρίζα, ορίζεται μόνο όταν το υπόριζο είναι θετικό.

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{-4x-3}$ δεν ορίζεται γιατί το -4x-3 είναι αρνητικός, για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
…..………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{7x}$ ορίζεται σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών γιατί το 7x είναι θετικός, για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
…..………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

- Η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{-2x}$ δεν ορίζεται γιατί το -2x είναι αρνητικός, για κάθε τιμή του x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………..………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

Γνωρίζουμε ότι:
Στις ανισώσεις, όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με θετική ποσότητα η φορά της ανίσωσης παραμένει η ίδια.
Αν όμως πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε με αρνητική ποσότητα τότε η φορά της ανίσωσης πρέπει να αλλάξει.

Κάποιο παιδί της ηλικίας σου έλυσε κάποιες ανισώσεις με τον τρόπο που φαίνεται παρακάτω. Παρακολούθησε προσεκτικά τις λύσεις που έδωσε και σκέψου αν έκανε κάπου λάθος ή όχι.

- $1 < \frac{2}{1+2x}$

Βήμα 1: 1+2x<2 *(γιατί πολ/με με το 1+2x που είναι θετικός για κάθε x κι έτσι δεν πρέπει να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

Βήμα 2: 2x < 1 (γιατί μεταφέραμε το 1 στο άλλο μέλος και άλλαξε πρόσημο)

Βήμα 4: $x < \frac{1}{2}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το 2 που είναι θετικός κι έτσι δεν πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

…………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

- $1 < \frac{2}{-5x}$,

Βήμα 1: -5x >2 *(γιατί πολ/με με το –5x που είναι αρνητικός για κάθε x και έτσι πρέπει να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

Βήμα 2: x$<\frac{2}{-5}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το –5 που είναι αρνητικός και έτσι πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;

…………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

- $1 < \dfrac{2}{-3x-6}$

<u>Βήμα 1:</u> -3x-6>2 *(γιατί πολ/με με το –3x-6 που είναι αρνητικός για κάθε x και έτσι πρέπει να αλλάξουμε φορά στην ανίσωση)*

<u>Βήμα 2</u>: -3x>8 (γιατί μεταφέραμε το 6 στο άλλο μέλος και άλλαξε πρόσημο)

<u>Βήμα 3:</u> $x < \dfrac{8}{-3}$ *(γιατί διαιρέσαμε με το –3 που είναι αρνητικός και έτσι πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης)*

Πιστεύεις ότι λύθηκε σωστά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐
Αν ΟΧΙ ποιο ήταν το λάθος και σε ποιο βήμα έγινε;
…………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………..
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

<u>Γνωρίζουμε ότι:</u>

- *Η απόλυτη τιμή μιας θετικής ποσότητας είναι η ίδια η ποσότητα*
- *Η απόλυτη τιμή μιας αρνητικής ποσότητας είναι η αντίθετή της που είναι θετική ποσότητα.*

- Είναι: $|-2-3x| = 2+3x$ γιατί το -2-3x είναι αρνητικός ενώ το 2+3x είναι θετικός για κάθε αριθμό x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;
…………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………

- Είναι: $|5x+3| = 5x+3$ γιατί το 5x+3 είναι θετικός, για κάθε αριθμό x.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;
…………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………

- Είναι: $|x| = x$ γιατί το x είναι πάντα θετικός.

ΣΥΜΦΩΝΩ ☐ ΔΙΑΦΩΝΩ ☐

Γιατί;……………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………