ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
& ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
& ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

«ΤΑ *ΟΠΤΙΚΑ* ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ»

της ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ Ν. ΜΠΑΤΣΟΥΛΗ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ
Β. ΚΑΡΑΣΜΑΝΗΣ

ΜΕΛΗ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ
Γ. ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ
Κ. ΓΑΒΡΟΓΛΟΥ

ΑΘΗΝΑ 2008

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τον Επιστημονικό Υπεύθυνο, κ. Β. Καρασμάνη, και προς τα μέλη της Συμβουλευτικής Επιτροπής, κ. Γ. Χριστιανίδη και κ. Κ. Γαβρόγλου, που με την καθοδήγησή τους, τις κρίσιμες παρατηρήσεις και την υποστήριξή τους βοήθησαν ουσιαστικά στην εκπόνηση της διδακτορικής διατριβής μου.

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι, από τον Νοέμβριο του 2000 μέχρι τον Απρίλιο του 2003, η διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο προγράμματος υποτροφιών με ειδίκευση στην Ιστορία των Επιστημών του Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ: «Η ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΥΠΟ ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ ΤΟΥ ΙΣΤΟΡΙΚΟΥ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»……24
Α. ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΑΡΧΑΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ…….….24
Β. ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΟΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΕΡΜΗΝΕΥΤΙΚΟΥΣ ΠΕΙΡΑΣΜΟΥΣ……27
1. Η σκόπελος της 'γεωμετρικής άλγεβρας' και το ξεδίπλωμα δύο ιστοριογραφικών τάσεων…….…….…… 27
2. Ο μίτος της Αριάδνης…….…….…….…….…….…..….33

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: «ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΟΥ ΙΣΤΟΡΙΟΓΡΑΦΙΚΟΥ ΤΟΠΙΟΥ»……...…….…40

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ: Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ, ΤΑ *ΟΠΤΙΚΑ* ΚΑΙ ΤΑ *ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΑ*
Α. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΤΙΣ ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ……40
1. Η περίπτωση των Οπτικών…….....…..41
2. Η περίπτωση των Κατοπτρικών…….....48
Β. ΣΥΓΚΡΟΥΣΕΙΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΝΤΙΘΕΣΗ ΔΥΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΡΟΟΠΤΙΚΗΣ…….……67
1. Η construzione legittima της Αναγέννησης…….....…....67
2. Η θέση του E. Panofsky…….....……69
3. Αντίλογος στην άποψη περί δύο αντιτιθέμενων προοπτικών συστημάτων…….…76
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Η ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ ΣΤΗΝ ΠΤΟΛΕΜΑΪΚΗ *ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ*……...…..94

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ: Ο ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ, Η ΟΠΤΙΚΗ ΚΑΙ Η ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΗ
Α. ΤΟ ΚΕΙΜΕΝΟ ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ* ΣΤΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ…….……....…92
Β. ΙΣΤΟΡΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ *ΟΠΤΙΚΑ* ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ…….……96
1. Το ζήτημα της πατρότητας των Οπτικών…….....……..96
2. Ερμηνευτικές αποκλίσεις-προτάσεις…….....……..111

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ: ΟΙ «*ΟΡΟΙ*» ΤΩΝ ΔΥΟ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ* ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ: ΤΙ ΥΠΟΔΗΛΩΝΟΥΝ;……...……..……122

Α. ΟΙ «*ΟΡΟΙ*» ΣΤΑ ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΜΙΑ ΛΕΞΗ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΣΗΜΑΣΙΕΣ……122

Β. ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΩΝ «*ΟΡΩΝ*» ΤΩΝ ΔΥΟ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ* ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ……...……126
1. Ο πρώτος «όρος» των δύο εκδόσεων……126
2. Ο δεύτερος «όρος» των δύο εκδόσεων……...……127
3. Ο τρίτος «όρος» των δύο εκδόσεων……127
4. Ο τέταρτος, πέμπτος και έκτος «όρος» των δύο εκδόσεων……...…128
5. Ο έβδομος «όρος» των δύο εκδόσεων…….....……..129
Γ. ΟΙ «*ΟΡΟΙ*» ΣΕ ΑΛΛΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΕΙΜΕΝΑ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑΣ……129
1. Αυτόλυκος από την Πιτάνη……129
2. Αρχιμήδης…….……131
3. Απολλώνιος ο Περγαίος…….....132
Δ. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ……...…..134

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ</u>: «Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΟΨΕΩΝ……141

Α. ΤΑ ΤΡΙΑ ΒΑΣΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΟΡΑΣΗΣ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΟΙ ΚΥΡΙΟΤΕΡΟΙ ΕΚΠΡΟΣΩΠΟΙ ΤΟΥΣ……..……141

Β. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΟΨΕΩΝ……...……145

1. Η ευθύγραμμη φύση της όρασης……...…145

2. Απόπειρες θεμελίωσης της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων……149

3. Η ευθύγραμμη διάδοση των όψεων στα Οπτικά και στην Αναθεωρημένη Έκδοσή τους……..150

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ</u>: <u>«</u>ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΩΝ ΟΨΕΩΝ: Η 'ΑΧΙΛΛΕΙΟΣ ΠΤΕΡΝΑ' ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ»..……155

Α. ΣΕ ΤΙ ΕΞΥΠΗΡΕΤΟΥΣΕ ΤΟΝ ΕΥΚΛΕΙΔΗ Η ΔΙΑΚΡΙΤΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΟΨΕΩΝ;…..155

1. Εξετάζοντας τα θεωρήματα 1 και 3……155

Β. ΚΡΙΤΙΚΕΣ ΣΤΗΝ ΥΠΟΘΕΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΟΨΕΩΝ……..……164

Γ. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ……..……..……168

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ</u>: «ΜΙΑ ΝΕΑ ΑΝΑΓΝΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ «ΟΡΟΥ» ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ*»……174

1. Ο πρώτος «όρος» των Οπτικών: τρεις διαφορετικές αναγνώσεις, τρεις διαφορετικές ερμηνείες……174

2. Συμπεράσματα……...186

Β. ΜΙΑ ΝΕΑ ΑΝΑΓΝΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ «ΟΡΟΥ» ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ*……..186

1. Μια νέα προσέγγιση του θεωρητικού και εννοιολογικού πλαισίου του πρώτου «όρου» των Οπτικών: Ένας νέος τρόπος ανάγνωσής του……..….187

2. Ερμηνευτική προσέγγιση του πρώτου «όρου» των Οπτικών……..193

3. Τι αποκαλύπτει ο πρόλογος της Αναθεωρημένης Έκδοσης των Οπτικών;……..…….196

4. Ποιοι ήταν οι λόγοι που επέβαλαν τη μετατροπή του πρώτου «όρου»;……200

5. Συμπεράσματα……...……209

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ</u>: «Ο ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥ ΜΕ ΤΟΝ ΠΡΟΛΟΓΟ ΤΗΣ *ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ* ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ*»……..……217

Α. Ο ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥ ΜΕ ΤΟΝ ΠΡΟΛΟΓΟ ΤΗΣ *ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ* ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ*……..……..217

1. Αντιπαραβολή των κειμένων……..……219

2. Εξετάζοντας τη ρητορική των κειμένων……..234

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ</u>: <u>«</u>ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ* ΚΑΙ ΤΗΣ *ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ*»……242

Α. Η ΓΕΝΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΕΚΔΟΣΕΩΝ……243

Β. ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΕΚΔΟΣΕΩΝ……..……249

1. Περιεκτικότητα εναντίον σχολαστικότητας……250

2. Ο ρόλος της απόστασης στην αντίληψη του φαινομενικού μεγέθους……..…..261

3. Η φαινομενική σύγκλιση των παράλληλων μεγεθών……..…..263

4. Το όγδοο θεώρημα……..……..……..272

5. Οι πλάνες των παρατηρούμενων επιπέδων……..……276
6. Κι άλλες βασικές προτάσεις προοπτικής…….....……282
7. Μετατόπιση του οφθαλμού και μεταβολές στα φαινομενικά μεγέθη……....287
8. Το «γνώριμον» και το «δοθέν»…….…….…….290
9. Πότε οι καμπύλες φαίνονται ως ευθείες γραμμές;……..……303
10. Κοιτάζοντας τη σφαίρα……306
11. Δύο οφθαλμοί για μία σφαίρα……...…311
12. Κοιτάζοντας τον κύλινδρο και τον κώνο…….…….…314
13. Παίζοντας με τα φαινομενικά μεγέθη του κώνου……..318
14. Κοιτάζοντας τον κύκλο.....326
15. Πότε ο κύκλος δε φαίνεται ως κύκλος;…….…….……334
16. Μετατόπιση και φαινομενικά μεγέθη……...……...352
17. Παίζοντας με τους γεωμετρικούς τόπους……..360
18. Παράδοξα που αφορούν στην αντίληψη της κίνησης …….……374
19. Παράδοξα που αφορούν στην αντίληψη του μεγέθους και του σχήματος……..381
Γ. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ……..……..385

ΕΠΙΛΟΓΟΣ……..……392

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ……..……399

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το ταξίδι στη γεωμετρική οπτική του Ευκλείδη αποτελεί μια περιπλάνηση στην αβεβαιότητα. Η αβεβαιότητα αυτή έγκειται τόσο στο επίπεδο των ιστορικών πηγών όσο και στο επίπεδο των συμπερασμάτων που μπορεί να εξάγει κανείς, σχετικά με τη δυνατότητα αντίληψης της πραγματικότητας. Όσον αφορά στις πρωτογενείς πηγές που αντιπροσωπεύουν τη θεωρία οπτικής του Ευκλείδη, η κατάσταση μοιάζει με θολό τοπίο. Δεν είναι λίγες οι φορές που το έργο του ιστορικού δυσχεραίνει, εξαιτίας της μερικής ή ολοσχερούς απώλειας των αρχαίων κειμηλίων. Στην περίπτωση της γεωμετρικής οπτικής του Ευκλείδη, μολονότι ο ιστορικός αισθάνεται αρχικά τυχερός που δεν έχει να αντιμετωπίσει τέτοιου είδους προβλήματα, ωστόσο, το έργο του καταλήγει να περιπλέκεται σοβαρά, γιατί έχει στη διάθεσή του, αντί για μία, δύο διασωζόμενες μορφές κειμένου των *Οπτικών*.

Κατά τον 19^{ο} αιώνα, η φιλολογική μελέτη υπέδειξε έναν συγκεκριμένο τρόπο οργάνωσης των δύο διασωζόμενων μορφών κειμένου των *Οπτικών*. Με βάση την οργάνωση αυτή, η μια μορφή κειμένου αποτελεί την πραγματεία του Ευκλείδη και η δεύτερη μορφή κειμένου συνιστά τη μεταγενέστερη αναθεωρημένη έκδοση της πρώτης. Παρόλο που ο ιστορικός ξεκινά το ταξίδι του αποφασισμένος να ακολουθήσει τις καθιερωμένες αντιλήψεις, ωστόσο, στην πορεία γεννώνται οι πρώτες αμφιβολίες. Κατά τη μελέτη των κειμένων, ανακύπτουν προβλήματα που, όσο και αν προσπαθεί να τα αντιμετωπίσει, χωρίς να προσβάλει την πάγια εικόνα, αυτά επιμένουν. Συνεπώς, είναι αναγκασμένος να αντιστρέψει τους όρους, να θέσει νέα κριτήρια και να ξεκινήσει από την αρχή. Όμως, το αίσθημα της αβεβαιότητας εξακολουθεί να υφίσταται, αν και, αυτή τη φορά, εμφανίζεται υπό διαφορετικές μορφές. Πόσο σίγουρος μπορεί να νιώθει κάποιος απέναντι σε ένα κείμενο, όταν γνωρίζει ότι τον χωρίζουν από αυτό περισσότερα από 2000 χρόνια; Με ποιες λέξεις και με ποιες έννοιες θα επικοινωνήσει μαζί του; Πώς θα διακρίνει τις μεταγενέστερες προσθήκες και τις παρεμβολές που, αναπόφευκτα, έχουν δεχτεί οι πηγές του, κατά την πάροδο του χρόνου;

Αν ύστερα από κάθε ιστορία προκύπτει ένα δίδαγμα, τότε, στην περίπτωση των *Οπτικών* θα λέγαμε ότι αυτό που αποκομίζει ο αναγνώστης ως βασικό συμπέρασμα είναι η αβεβαιότητα που διέπει καθημερινά την οπτική του αντίληψη. Ωστόσο, αυτό αποτελεί ένα από τα πρώτα πράγματα που συνειδητοποιεί κανείς στη ζωή, ακόμα και αν δεν είναι επιστήμονας. Συνεπώς, από την άποψη αυτή, ο Ευκλείδης δεν πρωτοτυπεί, γι' αυτό, όποιος αναμένει να συναντήσει στα *Οπτικά*

κάποιο καινοτόμο επιστημονικό πόρισμα ή κάποια νέα -για την εποχή εκείνη- επιστημονική ανακάλυψη που αφορά στην αντίληψη της όρασης, μάλλον θα απογοητευτεί. Με τη συγγραφή των *Οπτικών* ο Ευκλείδης δεν κοινοποιούσε πράγματα που δεν ήταν ήδη γνωστά στους συγχρόνους του. Όλοι γνώριζαν ότι η αίσθηση της όρασης εξαπατά και ότι μια οπτική εντύπωση μπορεί να απέχει πολύ από την πραγματικότητα. Κανένας ζωγράφος της Αρχαιότητας δεν περίμενε τα *Οπτικά*, για να απεικονίσει, όποτε χρειαζόταν, τον τροχό ενός άρματος με ελλειπτικό σχήμα και κανένας σκηνογράφος δεν περίμενε τον Ευκλείδη, για να μάθει πώς θα αναπαραστήσει στη σκηνή ενός θεάτρου έναν τετράγωνο πύργο, όταν παρατηρείται από μακριά. Οι γλύπτες είχαν προσδώσει στους κίονες του Παρθενώνα και άλλων ναών μια ελαφρά καμπυλότητα, μια *ένταση*, πολύ πριν εμφανιστούν τα *Οπτικά* του Ευκλείδη. Σε τι εξυπηρετούσε λοιπόν η συγγραφή ενός έργου που πραγματευόταν θέματα που ήταν ήδη γνωστά και πώς εξηγείται το γεγονός ότι το ενδιαφέρον των μεταγενέστερων για τα *Οπτικά* του Ευκλείδη παρέμεινε αμείωτο, κατά το πέρασμα των αιώνων; Μήπως αυτό οφείλεται αποκλειστικά στο ότι ο συγγραφέας των *Οπτικών* τύχαινε να ταυτίζεται με τον συγγραφέα των περίφημων *Στοιχείων*;

Το επίτευγμα του Ευκλείδη εκτιμάται σε όλη του τη διάσταση, αν ληφθεί υπόψη το περιβάλλον, μέσα από το οποίο αναδύθηκε, και τα ερωτήματα, στα οποία κλήθηκε να απαντήσει. Τα *Οπτικά* του Ευκλείδη (περ. 300 π.Χ.) εμφανίστηκαν σε μία περίοδο έντονου προβληματισμού, σχετικά με το πώς αποκτάται η γνώση και κατά πόσο μπορεί αυτή να είναι ασφαλής και αξιόπιστη δεδομένης της ανακρίβειας των αισθήσεων. Επικρατούσε ένας άκρατος σκεπτικισμός και μια διαρκής αμφιβολία για το αν το «*φαινόμενον*» μπορεί να παρέχει κάποιες εγγυήσεις και αν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως έγκυρη μαρτυρία, από την οποία να συνάγεται το «*ὄν*». Στο πλαίσιο αυτού του σκεπτικισμού, η γνώση θεωρούνταν αδύνατη, καθώς οι εντυπώσεις που εκλαμβάνει κανείς από τον εξωτερικό κόσμο είναι υποκειμενικές. Επομένως, οποιεσδήποτε απόψεις διατυπώνονταν θεωρούνταν αντικρουόμενες, αφού σε κάθε ισχυρισμό θα μπορούσε να αντιταχθεί κάποιος άλλος. Υπό το πρίσμα αυτό, κανείς δεν ήταν σε θέση να αποκαλύψει την πραγματικότητα που υποκρύπτεται πίσω από τα φαινόμενα. Το μόνο συμπέρασμα που θα μπορούσε να εξάγει κανείς από τα αντικείμενα της αισθητηριακής αντίληψης είναι πώς αυτά του φαίνονται και όχι πώς πραγματικά είναι.

Ωστόσο, όπως σε κάθε εποχή, έτσι και τότε, η αναζήτηση και η προβολή της αλήθειας συνιστούσε τον ύστατο στόχο κάθε ανθρώπινης δραστηριότητας. Όσο αναξιόπιστα και αν ήταν τα φαινόμενα, όσο και αν αυτά αποτελούσαν μια

υποκειμενική ή σχετική αλήθεια που γινόταν αντιληπτή μέσω της παρατήρησης του εξωτερικού κόσμου, δε δίσταζαν να αναπαριστούν την αλήθεια αυτή και να τη θαυμάζουν. Ο Αναξίμανδρος (6ος π.Χ. αιώνα) ήταν ο πρώτος που σχεδίασε σε έναν χάρτη την κατοικημένη γη, ενώ το ίδιο έκανε και ο πολυταξιδευμένος Εκαταίος (6ος-5ος π.Χ. αιώνας) που λέγεται ότι είχε κερδίσει τον θαυμασμό των συγχρόνων του[1]. Αλλά και αργότερα, ο Δικαίαρχος (350-290 π.Χ.), ο μαθητής του Αριστοτέλη, περιέγραψε σε ένα έργο του τη γη συνοδεύοντάς το με εικονογραφημένους χάρτες. Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) είχε κατασκευάσει μια σφαίρα, ένα είδος πλανηταρίου, που με κάποιους εσωτερικούς μηχανισμούς μιμούνταν τις κινήσεις των ουράνιων σφαιρών, έτσι όπως γίνονταν αντιληπτές από τους παρατηρητές. «*...Και η ανακάλυψη του Αρχιμήδη άξιζε ιδιαίτερο θαυμασμό, επειδή είχε σκεφτεί έναν τρόπο να αναπαριστάνει με ακρίβεια, με μια μόνο συσκευή που περιέστρεφε τη σφαίρα, αυτές τις ποικίλες και αποκλίνουσες κινήσεις με τις διαφορετικές ταχύτητες. Και όταν ο Gallus έδωσε κίνηση στη σφαίρα, ήταν πραγματικά αλήθεια πως η Σελήνη ήταν πάντα τόσες περιστροφές πίσω από τον ήλιο πάνω στο χάλκινο τέχνασμα, όσες θα συμφωνούσαν με τον αριθμό των ημερών που θα ήταν πίσω στον ουρανό. Έτσι, η ίδια έκλειψη του ήλιου συνέβαινε πάνω στη σφαίρα, όπως θα συνέβαινε στην πραγματικότητα...*»[2]. «*Τώρα, αν στον κόσμο μας δε μπορούν φαινόμενα να συμβούν χωρίς τη θέληση του Θεού, ούτε και ο Αρχιμήδης θα μπορούσε να αναπαράγει τις ίδιες κινήσεις πάνω σε μια σφαίρα, χωρίς θεία ιδιοφυία*»[3].

Αρκετές φορές, και κυρίως στην τέχνη, η αναζήτηση της αλήθειας μεταφραζόταν σε αναζήτηση της αληθοφάνειας, η οποία εκτιμούνταν στον ίδιο βαθμό. Ήδη σε ένα απόσπασμα κάποιου σατυρικού έργου του Αισχύλου αναφέρεται ότι τα άτομα που απαρτίζουν τον χορό πλησιάζουν έναν ναό κρατώντας εικόνες τους και με φωνές εκφράζουν τον θαυμασμό τους για τη μεγάλη αληθοφάνεια αυτών των εικόνων. Προκειμένου να αποδίδουν το αληθοφανές, οι καλλιτέχνες προσέφευγαν στην τυφλή αναπαράσταση και στη μίμηση. Έτσι, η απεικόνιση των ασπίδων των πολεμιστών με ελλειπτικό σχήμα, το οποίο είχε αποκτήσει το όνομα «*θυρεὸς*», γινόταν από τους ζωγράφους σε πραγματιστικές βάσεις, χωρίς να είχε προηγηθεί κάποια θεωρητική μελέτη ή να πραγματοποιούνταν σύμφωνα με κάποια αυστηρή επιστημονική τεχνική. Το γεγονός αυτό δημιουργούσε ερωτήματα, σχετικά με το αν ένα έργο τέχνης έχει αποδοθεί με ορθότητα. «*Δεδομένου ότι ένα έργο τέχνης είναι μια*

[1] Αγαθήμερου, *Υποτύπωσις Γεωγραφίας*, έκδ. K. Müller, *Geographi Graeci minores*, τόμ. 2, Παρίσι: Didot 1861, 1.1-4.
[2] Κικέρωνα, *De Republica*, I, xiv, 21-22.
[3] Κικέρωνα, *Tusculanae Disputationes*, I, 63.

αναπαράσταση, πρέπει καταρχήν να ξέρει κανείς τι αναπαριστά το έργο˙ γιατί, αν δε γνωρίζει αυτό του οποίου το έργο τέχνης είναι ένα αντίγραφο, δε μπορεί καθόλου να κρίνει αν είναι σωστό ή λάθος. Έπειτα, πρέπει να βρει αν η απεικόνιση είναι σωστή. Τέλος, αν είναι καλά φτιαγμένη»[4].

Από την άλλη μεριά, οι πλάνες της όρασης οδηγούσαν στη διατύπωση παράδοξων απόψεων, όπως στην αντίληψη των Επικουρείων ότι το πραγματικό μέγεθος των ουρανίων σωμάτων είναι όσο το φαινομενικό: «*Τὸ δὲ μέγεθος ἡλίου τε καὶ τῶν λοιπῶν ἄστρων κατὰ μὲν τὸ πρὸς ἡμᾶς τηλικ οῦτόν ἐστιν ἡλίκον φαίνεται*»[5]. Σε ένα χωρίο της *Πολιτείας* που αναφέρεται στη φαινομενική μεταβολή του μεγέθους ενός αντικειμένου, αναλόγως με την απόστασή του από τον παρατηρητή, δηλώνεται ότι καμία αξία δεν πρέπει να δίνεται στα φαινομενικά μεγέθη, καθώς αποτελούν πλάνες. Αντίθετα, τα μόνα αληθή μεγέθη είναι αυτά που επιδέχονται της μέτρησης και που μπορούν να μελετηθούν επιστημονικά[6]. Επιπλέον, ορισμένες βασικές αστρονομικές υποθέσεις, όπως η υπόθεση της κυκλικής κίνησης των αστέρων γύρω από το κέντρο, όπου βρίσκεται η γη, χρειάζονταν κάποια βάση δικαιολόγησης. Τόσο η αντιμετώπιση παράδοξων θεωριών όσο και η αιτιολόγηση πολύ βασικών επιστημονικών υποθέσεων, ήταν επιβεβλημένο να γίνει, σύμφωνα με επιστημονικά κριτήρια. Αυτό προϋπέθετε αρχικά τη διασφάλιση των παρατηρήσεων, μέσω μιας κοινώς αναγνωρισμένης και κατοχυρωμένης μεθοδολογίας που δεν ήταν άλλη από τη γεωμετρία. Μέσα σε αυτό το ανήσυχο κλίμα εμφανίστηκαν τα *Οπτικά* του Ευκλείδη.

Αυτό που έφερε το σύγγραμμα των *Οπτικών* σε τόσο περίοπτη θέση είναι ότι για πρώτη φορά ο Ευκλείδης παρουσιάζει σε επιστημονικό πλαίσιο ένα από τα πιο παράδοξα παιχνίδια στην ιστορία της ανθρώπινης σκέψης. Επιλέγει τη γεωμετρία ως κριτήριο αλήθειας και ψεύδους της παρατήρησης, ταυτόχρονα. Με βάση τη γεωμετρία, αναδεικνύει την πραγματικότητα της οπτικής αντίληψης, δηλαδή το «*ὁρᾶσθαι*», και, με βάση τη γεωμετρία, προσδιορίζει την πλάνη, δηλαδή το «*φαίνεσθαι*». Το επίτευγμα του Ευκλείδη δεν είναι απλώς ότι κατάφερε να δείξει τη σχετικότητα των οπτικών εμφανίσεων και πώς τα φαινόμενα αντιπαλεύουν με την πραγματικότητα, αλλά να προβάλει για πρώτη φορά έναν επιστημονικό τρόπο

---

[4] Πλάτωνος, *Νόμοι,* έκδ. J. Burnet, *Platonis opera*, τόμ. 5, Οξφόρδη: Clarendon Press 1907, 668c.

[5] Επίκουρου, *Επιστολή προς Πυθοκλέα*, έκδ. G. Arrighetti, *Epicuro*, 2η έκδ., Τορίνο: Einaudi 1973, 91.2-3.

[6] Πλάτωνος, *Πολιτεία*, έκδ. J. Burnet, *Platonis opera*, 5 τόμ., Οξφόρδη: Clarendon Press 1900-1907, τόμ. 4, 602c-603a.

απόδειξης και ελέγχου της πλάνης. Η «*φαντασία*», με τη γενικότερη έννοια του όρου, που όλοι γνώριζαν ότι υπάρχει, αλλά δεν ήξεραν πώς να τη συλλάβουν, πώς να τη χειριστούν ή πώς να μιλήσουν με επιστημονικούς όρους για αυτή, ο Ευκλείδης κατόρθωσε να την τιθασεύσει με τον πλέον αξιόπιστο τρόπο της εποχής του: κατάφερε να την εξορθολογικοποιήσει στο γεωμετρικό επίπεδο. Προτού διεισδύσουμε στο εγχείρημα του Ευκλείδη, θα ήταν ενδιαφέρον να σκιαγραφήσουμε σε αυτή την εισαγωγή μια γενικότερη εικόνα, σχετικά με το πώς αντιμετωπίζονταν η αίσθηση της όρασης, ποιοι ήταν οι παράγοντες εκείνοι που συνέβαλαν στην ανάπτυξη της οπτικής επιστήμης, καθώς επίσης από ποιους και πώς ασκούνταν οι οπτικές έρευνες.

Στην περίφημη τραγωδία του Σοφοκλή *Οιδίπους Τύραννος*, όταν ο Οιδίπους έρχεται αντιμέτωπος με τα μεγάλα και αβάστακτα για εκείνον αμαρτήματα που άθελά του είχε διαπράξει, επιλέγει συνειδητά ως μέγιστη τιμωρία να τυφλώσει τον εαυτό του. Ο τύραννος της Σικελίας Διονύσιος θέλοντας να τιμωρήσει τους δεσμώτες του επέλεξε και εκείνος να πλήξει την όρασή τους με το να τους βάλει για μεγάλο χρονικό διάστημα σε ένα δωμάτιο κυριευμένο από το απόλυτο σκοτάδι και, έξαφνα, να τους μεταφέρει σε ένα άλλο δωμάτιο λουσμένο από άπλετο φως και επικαλυμμένο με «*τίτανο*», δηλαδή με ασβέστη. Το ξαφνικό φως έπληξε τόσο πολύ τα μάτια τους, που τους τύφλωσε[7].

Τα παραπάνω περιστατικά φανερώνουν ότι, παρόλη την αβεβαιότητά της, η όραση θεωρούνταν πολύτιμη και μονάκριβη για τον άνθρωπο, ενώ κατείχε την πιο εξέχουσα θέση μεταξύ των υπόλοιπων αισθήσεων. «*Όλοι οι άνθρωποι από τη φύση τους ορέγονται να γνωρίζουν. Απόδειξη είναι η αγάπη των αισθήσεων. Γιατί και χωρίς τη χρεία (οι αισθήσεις) αγαπιούνται για τον εαυτό τους και πιο πολύ από τις άλλες η αίσθηση που συντελείται με τα μάτια. Όχι μόνο δηλαδή για να πράττουμε, αλλά και χωρίς να πρόκειται να πράξουμε τίποτα, το να βλέπουμε το προτιμούμε από όλες γενικά τις άλλες*»[8]. Η αίσθηση της όρασης ήταν η πιο σεβαστή και εκτιμητέα, καθώς όλοι αναγνώριζαν ότι αποτελεί ένα σκαλοπάτι που οδηγεί στη γνώση. «*Για κανέναν άλλο λόγο δεν είναι για τους ανθρώπους αξιοσέβαστη η ζωή, παρά εξαιτίας της αισθητηριακής αντίληψης και προπάντων, εξαιτίας της όρασης. Προφανώς, εκτιμούν υπέρμετρα αυτή την ικανότητα, γιατί είναι σαν ένα είδος γνώσης, σε σχέση με τις άλλες*

[7] Γαληνού, *Περί χρείας μορίων*, C.G. Kühn, *Claudii Galeni opera omnia*, Λειψία: Knobloch 1822, III, 775.12-776.3.
[8] Αριστοτέλους, *Μετά τα Φυσικά*, έκδ. W.D. Ross, *Aristotle's metaphysics*, τόμ. 1, Οξφόρδη: Clarendon Press 1924, A 980a21-26.

αισθητηριακές αντιλήψεις»[9]. Ακόμα και ο Πλάτων (427-437 π.Χ.) που στον *Φαίδωνα* είχε απορρίψει την όραση και, γενικότερα, τις αισθήσεις ως απατηλές[10], στην *Πολιτεία* υιοθετεί μια διαφορετική στάση. Στην αλληγορία του σπηλαίου οι φυλακισμένοι θεωρούν εσφαλμένα τις σκιές που παρατηρούν στον τοίχο ως πραγματικότητα, ενώ αυτές δεν είναι παρά ατελείς εικόνες και απλές αναπαραστάσεις των αντικειμένων. Σύμφωνα με τον Πλάτωνα, μόνο αν υπερβούν τις αισθήσεις τους και σκαρφαλώσουν έξω από τη σπηλιά, οι φυλακισμένοι θα γνωρίσουν την αλήθεια. Στην περίπτωση αυτή παραδέχεται ότι το πρώτο πράγμα που θα χρησιμοποιήσουν βγαίνοντας, ώστε να έχουν αντίληψη του εξωτερικού κόσμου, θα είναι η όρασή τους[11]. Ο Πλάτων φαίνεται να αναγνωρίζει στο σημείο αυτό την ωφελιμότητα της αισθητηριακής εμπειρίας, εφόσον, μέσω της παρατήρησης, η ψυχή μπορεί να κατευθυνθεί προς ευγενέστερα αντικείμενα του κόσμου των ιδεών και να έρθει έτσι πιο κοντά προς την έννοια του δημιουργού. Ωστόσο, ο Πλάτων προειδοποιεί ότι, αν οι φυλακισμένοι επιχειρήσουν να συλλάβουν την έσχατη πραγματικότητα, θα πρέπει να βαδίσουν, σύμφωνα με τον λόγο και χωρίς καμία από τις αισθήσεις τους.

Η οπτική δε συγκαταλεγόταν από τον Πλάτωνα μεταξύ των κλάδων της μαθηματικής γνώσης. Στην *Πολιτεία* ο Πλάτων διέκρινε τα μαθηματικά στην αριθμητική, στη γεωμετρία, στην αστρονομία και στην αρμονική, ενώ στους *Νόμους* τα διέκρινε σε αριθμητική, γεωμετρία και αστρονομία [12]. Αντίθετα, ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ) κατέτασσε την οπτική στον κλάδο των εφαρμοσμένων μαθηματικών, δίπλα στη μηχανική, στην αστρονομία και στην αρμονική[13]. Λίγο αργότερα, κατά τον 1^{ο} π.Χ. αιώνα, ο Γεμίνος διαιρούσε τα μαθηματικά σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιελάμβανε τα μαθηματικά που ασχολούνται με πράγματα που συλλαμβάνονται από τον νου. Σε αυτήν ανήκε η αριθμητική και η γεωμετρία. Η δεύτερη κατηγορία περιελάμβανε τα μαθηματικά που ασχολούνται και εφαρμόζονται σε πράγματα που γίνονται αντιληπτά με τις αισθήσεις. Εκτός από τη μηχανική, την αστρονομία, τη γεωδαισία, την κανονική και τη λογιστική, στην κατηγορία αυτή είχε

---

[9] Αριστοτέλους, *Προτρεπτικός προς Θεμίσωνα*, έκδ. I. Düring, *Aristotle's protrepticus*, Στοκχόλμη: Almqvist & Wiksell 1961, 72-73.
[10] Πλάτωνος, *Φαίδων*, έκδ. J. Burnet, *Platonis opera*, τόμ. 1, Οξφόρδη: Clarendon Press, 65b1-7.
[11] Πλάτωνος, *Πολιτεία*, 514a-521b.
[12] Πλάτωνος, *έ.α.*, 401d5-401e1, 521d8-531c5, *Νόμοι*, 817e5-818a1.
[13]Αριστοτέλους, *Φυσικά*, έκδ. W.D. Ross, *Aristotelis physica*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1950, 194a7-8.

αποκτήσει μία ξεχωριστή θέση και η οπτική[14]. Σύμφωνα με τον Γεμίνο, η οπτική διακρινόταν με τη σειρά της σε τρεις κλάδους: στην καθαυτή οπτική, στην κατοπτρική και στη σκηνογραφία[15]. Καταγράφοντας τον τρόπο ταξινόμησης των μαθηματικών επιστημών ο Πρόκλος (410-485 μ.Χ.) επεσήμαινε ότι η οπτική είχε ως αντικείμενο μελέτης τις πλάνες που σημειώνονται κατά την αντίληψη των αντικειμένων από απόσταση, όπως τη φαινομενική σύγκλιση των παραλλήλων. Η κατοπτρική ερευνούσε κάθε είδους ανάκλαση του φωτός και περιελάμβανε συγχρόνως τη θεωρία των εικόνων. Τέλος, η σκηνογραφία είχε ως στόχο της την αναπαράσταση των αντικειμένων σε διάφορες αποστάσεις και ύψη, έτσι, ώστε να μη φαίνονται δυσανάλογα και παραμορφωμένα στο σχήμα[16]. Πολύ πριν από τον Πρόκλο, ο Βιτρούβιος (1ος π.Χ. αιώνας) μιλώντας *ex professo* για τις αρχές της αρχιτεκτονικής είχε δηλώσει ότι η σκηνογραφία πρέπει να περιλαμβάνεται απαραιτήτως στις εγκυκλοπαιδικές γνώσεις ενός αρχιτέκτονα. Πρότεινε έναν πιο ειδικό ορισμό της σκηνογραφίας λέγοντας ότι είναι το σχέδιο της πρόσοψης ενός οικοδομήματος μαζί με τις πλευρές του σε προοπτική, με όλες τις γραμμές να καταλήγουν σε ένα κοινό κέντρο[17].

Ο Ήρων ο Αλεξανδρινός (περ. 60 μ.Χ.) στα *Κατοπτρικά* του αντικαθιστά στην ταξινόμηση του Γεμίνου τη σκηνογραφία, ως επιμέρους κλάδο της οπτικής, με την επιστήμη της διοπτρικής[18]. Παρόλο που στην ταξινόμηση του Πρόκλου η διοπτρική κατατάσσεται μαζί με τη μετεωροσκοπία και τη γνωμονική στους επιμέρους κλάδους της αστρονομίας[19], ωστόσο, η διοπτρική ήταν στενά συνδεδεμένη με την οπτική και, ιδιαίτερα με τη γεωμετρική οπτική, καθώς ακολουθούσε τα ίδια μεθοδολογικά μονοπάτια. Η διοπτρική είχε ως στόχο της την εξέταση των θέσεων του ήλιου, της σελήνης και των αστέρων, μέσω της χρήσης ενός οπτικού οργάνου, τη *διόπτρα*. Παράλληλα, ικανοποιούσε τις ανάγκες της τοπογραφίας, καθώς με τη διόπτρα μπορούσε να προσδιοριστεί η απόσταση μεταξύ δύο γεωγραφικών τόπων, στους οποίους δεν είναι δυνατή η πρόσβαση ή να χαραχθεί η ευθεία που ενώνει ένα δοθέν

---

[14] Πρόκλου, *Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη*, έκδ. G. Friedlein, *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, Λειψία: Teubner 1873, 38.1-12.

[15] Γεμίνου, *Fragmenta Optica*, έκδ. R. Schöne, *Damianos Schrift über Optik*, Βερολίνο: Reichsdruckerei 1897, 1-3. Ήρωνος Αλεξανδρινού, *Ορισμοί*, έκδ. J.L. Heiberg, *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, τόμ. 4, Λειψία: Teubner 1903, 135, 12.1-4.

[16] Πρόκλου, *έ.α.*, 40.13-22.

[17] Βιτρούβιου, *Περί αρχιτεκτονικής*, έκδ. M.Ch.-L. Maufras, *L' Architecture de Vitruve*, τόμ.1, Παρίσι: C.L.F. Panckoucke 1847, I, 45.

[18] Ήρωνος Αλεξανδρινού, *Κατοπτρικά*, έκδ. G. Schmidt, *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, τόμ. II, Λειψία: Teubner, 1900, 318.3-7.

[19] Πρόκλου, *έ.α.*, 41.19-42.6.

σημείο με κάποιο άλλο μη-ορατό, οποιαδήποτε και αν είναι η μεταξύ τους απόσταση. Η διοπτρική μελετούσε και οπτικά φαινομένα, όπως τα φαινόμενα της διάθλασης. Το γεγονός ότι ένα ραβδί που βυθίζεται στο νερό φαίνεται να κάμπτεται ήταν από καιρό γνωστό, ενώ ο Ευκλείδης έθετε στα *Κατοπτρικά* του ότι, αν σε ένα δοχείο τοποθετηθεί ένα αντικείμενο σε τέτοια απόσταση, ώστε να μη γίνεται ορατό, δεδομένου ότι η απόσταση αυτή παραμένει σταθερή, αν χυθεί νερό στο δοχείο, το αντικείμενο γίνεται ορατό[20]. Στα *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου* ο Θέων ο Αλεξανδρινός (4ος μ.Χ. αιώνας) επιχείρησε να αποδείξει γεωμετρικά, γιατί τα σώματα που είναι βυθισμένα στο νερό φαίνονται μεγενθυμένα, καθώς επίσης, γιατί αυτή η φαινομενική μεγέθυνση εμφανίζεται και στην περίπτωση που τα σώματα τοποθετούνται κοντά στον ορίζοντα[21]. Τα φαινόμενα της διάθλασης - συμπεριλαμβανομένης της ατμοσφαιρικής διάθλασης- μελετήθηκαν και εξηγήθηκαν διεξοδικά από τον Πτολεμαίο. Ο Πτολεμαίος (150 μ.Χ.) υπέβαλε τη διάθλαση σε πλήρη μαθηματική ανάλυση, αλλά και σε πειραματική διερεύνηση, στα *Οπτικά* του.

Τα θέματα της οπτικής απασχολούσαν έναν ευρύ κύκλο ανθρώπων. Αυτό οφείλεται κυρίως στο ότι οι οπτικές έρευνες ξεκίνησαν, για να ικανοποιήσουν πολλούς και διαφορετικούς σκοπούς, όπως ήταν η αναζήτηση απαντήσεων σε ερωτήματα φιλοσοφικού τύπου. Κάθε φιλοσοφικό σύστημα πρότεινε το δικό του θεωρητικό σχήμα για τις αισθήσεις, με αποτέλεσμα να διατυπωθούν ποικίλες υποθέσεις για το πώς βλέπουμε, για το τι είναι τα χρώματα, για τον ρόλο του φωτός. Από τους Πυθαγορείους, τον Δημόκριτο και τον Πλάτωνα, μέχρι τους Στωικούς φιλοσόφους, τον Πτολεμαίο και τον Δαμιανό τον Λαρισσαίο η όραση περιγράφονταν είτε μέσω οπτικών πυρών είτε μέσω οπτικών πνευμάτων είτε μέσω οπτικών ακτίνων που εκπέμπονται από τους οφθαλμούς, είτε μέσω ειδώλων ή ομοιωμάτων που αποτυπώνοται από τα αντικείμενα στους οφθαλμούς. Παρόλες τις διαφοροποιήσεις, ωστόσο, όλοι προσυπέγραφαν σε κάποιες κοινές θεμελιώδεις επιταγές: στην ανάγκη ύπαρξης ενός φυσικού μέσου μεταξύ του οφθαλμού και του παρατηρούμενου αντικειμένου, αλλά και στην ανάγκη της χωρικής διάστασής τους.

Έτσι, οι Πυθαγόρειοι πρέσβευαν ότι ο οφθαλμός όντας προικισμένος με μία εσωτερική φωτιά εκπέμπει φωτεινές ακτίνες, οι οποίες έχουν μία πραγματική ύπαρξη. Οι φωτεινές ακτίνες προσπίπτουν στα αισθητά αντικείμενα και δίνουν την εντύπωσή

---

[20] Ευκλείδου, *Κατοπτρικά*, έκδ. J.L. Heiberg, *Euclidis opera omnia*, τόμ. 7, Λειψία: Teubner 1895, 17-19.

[21] Θέωνος Αλεξανδρινού, *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου*, έκδ. A. Rome, *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, Studi e Testi 72 & 106, Βατικανό: Biblioteca Apostolica Vaticana, τόμ. 2, 1936, 349.1-352.8.

τους, μέσω ανάκλασης. Ο Πυθαγόρειος Αλκμαίων (περ. 490 π.Χ) έλεγε ότι ο οφθαλμός προφανώς έχει μέσα του φωτιά, γιατί, όταν χτυπήσει, δημιουργείται μία έκλαμψη[22]. Ο Δημόκριτος (περ. 460 π.Χ.) έδινε ιδιαίτερη προσοχή στον αέρα που μεσολαβεί, μεταξύ του παρατηρούμενου αντικειμένου και του οφθαλμού. Υποστήριζε ότι η όραση συμβαίνει, όταν ο αέρας συμπιέζεται τόσο πολύ, ώστε να εντυπώνεται. Ο εντυπωμένος αέρας εμφαίνεται τελικά στον υγρό οφθαλμό που, κατά κάποιο τρόπο, σημαίνει ότι απεικονίζει το παρατηρούμενο αντικείμενο[23]. Ο Εμπεδοκλής (περ. 460 π.Χ.) παρομοίαζε τον οφθαλμό, σαν έναν λαμπτήρα. Θεωρούσε, όπως οι Πυθαγόρειοι, ότι η εσωτερική φωτιά του οφθαλμού εκπέμπεται προς τα εξωτερικά αντικείμενα και τα καθιστά ορατά[24]. Ο Πλάτων είχε υιοθετήσει την άποψη ότι η όραση προκαλείται, όταν μία φωτεινή απορροή, ένα φωτεινό ρεύμα, που εκπέμπεται από τον οφθαλμό, συμπράξει με μία άλλη απορροή που εκπέμπεται από τα αντικείμενα. Κατά τη σύμπραξη αυτή, καταλυτική είναι η συνδρομή του φωτός. Η φωτεινή απορροή συμφωνεί με το φως ως όμοιον προς όμοιον και διαμορφώνεται ένα ομογενές σώμα στην ευθεία των οφθαλμών, οπουδήποτε και αν βρίσκεται το εξωτερικό αντικείμενο, στο οποίο προσπίπτει το ρεύμα[25]. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, η όραση πραγματοποιείται, όταν τηρούνται τρεις προϋποθέσεις. Το παρατηρούμενο αντικείμενο πρέπει να έχει χρώμα, ο οφθαλμός και το παρατηρούμενο αντικείμενο πρέπει να συνδέονται μέσω ενός συνεχούς δυνάμει διαφανούς μέσου, όπως ο αέρας ή το νερό, και, τέλος, το δυνάμει διαφανές μέσο πρέπει να καθίσταται ενεργεία διαφανές, μέσω του φωτός[26]. Ο Επίκουρος (300 π.Χ.) με τη σειρά του υποστήριζε ότι από την επιφάνεια των αντικειμένων εκπέμπονται είδωλα. Τα είδωλα διατηρώντας τη θέση και τη διάταξη που είχαν, όταν αποτελούσαν μέρος των αντικειμένων, λειτουργούν ως εικόνες τους και μεταφέρονται στον οφθαλμό[27]. Σύμφωνα με τους Στωικούς, από τον οφθαλμό εκπέμπεται ένα οπτικό πνεύμα, το οποίο δε μεταφέρεται προς το αντικείμενο, αλλά στην περιοχή μεταξύ της επιφάνειας του οφθαλμού και του αέρα που την περιβάλλει. Όταν ο αέρας φωτιστεί

---

[22] Θεόφραστου, *Περί αισθήσεων*, έκδ. H. Diels, *Doxographi Graeci*, Βερολίνο: Reimer 1879, 26.2.
[23] Θεόφραστου, *έ.α.*, 50.1-11.
[24] Αριστοτέλους, *Περί αισθήσεως και αισθητών*, έκδ. W.D. Ross, *Aristotle: Parva naturalia*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1955, 437b11-438a5.
[25] Πλάτωνος, *Τίμαιος*, έκδ. J. Burnet, *Platonis opera*, τόμ. 4, Οξφόρδη: Clarendon Press 1902, 45b2-45d7.
[26] Αριστοτέλους, *Περί ψυχής*, έκδ. W.D. Ross, *Aristotle: De anima*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1961, II, 418a26-419a15.
[27] Διογένη Λαέρτιου, *Βίοι φιλοσόφων*, έκδ. H.S. Long, *Diogenis Laertii vitae philosophorum*, τόμ.1, Οξφόρδη: Clarendon Press 1964, X, 48-49.

κατάλληλα, το οπτικό πνεύμα τον μεταμορφώνει σε ένα είδος επέκτασης του οφθαλμού. Μέσω αυτής της επέκτασης, τα αντικείμενα γίνονται ορατά[28]. Ο Πτολεμαίος θεωρούσε ότι η φωτεινή, ως προς το είδος, οπτική απορροή που πηγάζει από τον οφθαλμό προσπίπτει στα αντικείμενα. Προκειμένου όμως αυτά να γίνουν ορατά, πρέπει να χαρακτηρίζονται από στερεότητα και να είναι αυτόφωτα ή ετερόφωτα. Επιπλέον, πρέπει να έχουν χρώμα, αφού το χρώμα είναι το καθαρό και πρωταρχικό ορατό. Όταν η οπτική απορροή έρθει σε επαφή με τα φωτισμένα αντικείμενα, δημιουργείται ένα «*πάθος*» που έχει ως αποτέλεσμα την οπτική αντίληψή τους[29]. Με τα περισσότερα σημεία της θεωρίας του Πτολεμαίου ήταν σύμφωνος και ο Δαμιανός ο Λαρισσαίος (4ος-5ος μ.Χ. αιώνας), οι απόψεις του οποίου διασώζονται στο έργο του *Οπτικές Υποθέσεις*.

Εκτός από τις ανάγκες του φιλοσοφικού στοχασμού, επιστημονικοί λόγοι, αλλά και θεωρητικά προβλήματα παρακίνησαν σε μεγάλο βαθμό την έναρξη των οπτικών ερευνών. Αρχικά, ήταν απαραίτητη η εξήγηση κάποιων συχνά παρατηρούμενων οπτικών φαινομένων, όπως το ουράνιο τόξο, η άλως της σελήνης και του ήλιου, οι σκιές που διαμορφώνουν τα σώματα, οι ιδιότητες των κατόπτρων. Επιπλέον, η παρατήρηση ήταν απαραίτητο εργαλείο, για να ξεκινήσει κανείς να μελετά αστρονομικά θέματα, γι' αυτό άλλωστε είχαν συσταθεί και τα κατάλληλα παρατηρητήρια. Ο Στράβων (1ος π.Χ. αιώνας) περιγράφει στα *Γεωγραφικά* το Πάνειον που ήταν αφιερωμένο στον θεό Πάνα και που βρισκόταν σε ένα λόφο, δυτικά της Αλεξάνδρειας. Όπως περιγράφει ο Στράβων, όταν ανέβαινε κανείς στο Πάνειον, μέσω ενός σπειροειδούς δρόμου, μπορούσε να δει από την κορυφή όλη την πόλη και είναι πολύ πιθανόν να λειτουργούσε και ως αστρονομικό παρατηρητήριο[30]. Η οπτική κατέληξε να αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της αστρονομίας. Στο πλαίσιο των μαθηματικών σχολών πραγματοποιούνταν και καταγράφονταν παρατηρήσεις που παραδίδονταν σε αστρονόμους ή μπορεί να γίνονταν και από τους ίδιους τους αστρονόμους. Έτσι, ο Πτολεμαίος αναφέρει στη *Μαθηματική Σύνταξη* ότι οι παρατηρήσεις της σχολής του Τιμόχαρη δεν ήταν άξιες εμπιστοσύνης[31]. Η βελτίωση

---

[28] Γαληνού, *Περί Ιπποκράτους και Πλάτωνος δογμάτων*, έκδ. P. De Lacy, *Galen: On the doctrines of Hippocrates and Plato*, Corpus medicorum Graecorum, Βερολίνο: Akademie-Verlag 1978, VII, 5, 46.1-47.1.

[29] Πτολεμαίου, *Οπτικά*, έκδ. A. Lejeune, *L' Optique de Claude Ptolémée*, Λειδία: Brill 1989, II, 4, 12, 16, 23.

[30] Στράβωνος, *Γεωγραφικά*, έκδ. A. Meineke, *Strabonis geographica*, τόμ. 3, Λειψία: Teubner 1877, XVII, 1.10.16-19.

[31] Πτολεμαίου, *Μαθηματική Σύνταξη*, έκδ. J.L. Heiberg, *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia*, Λειψία: Teubner 1903, 1.2, 18.1-3.

των οπτικών οργάνων είχε ως άμεση συνέπεια ακριβέστερες και πιο αξιόπιστες παρατηρήσεις που με τη σειρά τους επηρέαζαν τις εκάστοτε αστρονομικές υποθέσεις, καθώς μπορούσαν να επιφέρουν την αναθεώρησή τους. Επιπλέον, πολλά θεωρητικά προβλήματα διαδραμάτισαν σπουδαίο ρόλο για την ανάπτυξη της οπτικής, αλλά και της κατοπτρικής, όπως το πρόβλημα της εύρεσης μιας επιφάνειας κατόπτρου, τέτοιας που, όταν τοποθετηθεί αντιμέτωπη στον ήλιο, οι ακτίνες που ανακλώνται από αυτή να διαμορφώνουν κυκλική περιφέρεια.

Όλοι οι κλάδοι της οπτικής επιστήμης οφείλουν τη γέννηση και την άνθησή τους στα κριτήρια της αισθητικής, αλλά και στις διάφορες πρακτικές ανάγκες της καθημερινής ζωής. Οι κατασκευές θεάτρων, ναών και άλλων οικοδομημάτων, όπως επίσης οι τέχνες, απαιτούσαν καλλιτεχνήματα με ευρυθμία, αρμονία και συμμετρία, δηλαδή όλα τα στοιχεία εκείνα που αναζητούσε ο ανθρώπινος οφθαλμός, προκειμένου να συλλάβει το ωραίο. «*Η συμμετρία που έχουν τα μέρη μεταξύ τους και προς το όλον, όταν υπάρχει επιπλέον και μια γοητεία χρώματος, συνιστά την ομορφιά που αναγνωρίζει το μάτι˙ ότι στα ορατά αντικείμενα, όπως και σε όλα τα άλλα, το ωραίο ουσιαστικά συνίσταται στη συμμετρία και στο μέτρο*»[32]. Ωστόσο, αυτή η απαίτηση δεν ικανοποιούνταν πάντα. Ο Πλάτων αναφερόμενος στους καλλιτέχνες που φτιάχνουν μεγάλα έργα έλεγε ότι, προκειμένου να ικανοποιήσουν το μάτι, κατέστρεφαν τις κατά μήκος, πλάτος και βάθος συμμετρίες. Δεν απέδιδαν τις αληθινές συμμετρίες, αλλά εκείνες που θεωρούσαν ότι είναι καλές[33]. Πολύ χαρακτηριστικό είναι το περιστατικό, σύμφωνα με το οποίο λέγεται ότι οι Αθηναίοι ζήτησαν από τον Φειδία και τον Αλκαμένη να κατασκευάσουν δύο αγάλματα της θεάς Αθηνάς, προκειμένου να τα τοποθετήσουν πάνω σε δύο πανύψηλους κίονες. Ο Φειδίας γνωρίζοντας ότι τα αντικείμενα που βρίσκονται πιο ψηλά από τον οφθαλμό φαίνονται μικρότερα επέφερε τέτοιες παραμορφώσεις στο άγαλμα που κατηγορήθηκε για ασέβεια. Αντίθετα, το άγαλμα του Αλκαμένη φάνηκε ομορφότερο στους Αθηναίους, καθώς εκείνος το είχε κατασκευάσει διατηρώντας τις συμμετρίες του σώματος. Όταν όμως τοποθέτησαν τα δύο αγάλματα στους ψηλούς κίονες, ειδωμένο από χαμηλά το άγαλμα του Αλκαμένη φαινόταν παραμορφωμένο και άσχημο, ενώ το άγαλμα του Φειδία φαινόταν ωραίο. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα οι Αθηναίοι να εκφράσουν τον χλευασμό τους προς το πρόσωπο του Αλκαμένη και, αντίθετα, το

[32] Πλωτίνου, *Εννεάδες*, έκδ. P. Henry and H.-R. Schwyzer, *Plotini opera*, Λειδία: Brill 1951, 1, 6.1.20-25.
[33] Πλάτωνος, *Σοφιστής*, έκδ. J. Burnet, *Platonis opera*, τόμ. 1, Οξφόρδη: Clarendon Press 1900, 235d6-236a6.

θαυμασμό τους προς το πρόσωπο του Φειδία[34]. Η μελέτη της προοπτικής, ως σύστημα απεικόνισης, πρέπει να είχε ξεκινήσει από νωρίς. Στη *Ρητορική* του Αριστοτέλη η λέξη «*σκιαγραφία*» συσχετίζεται με την εντύπωση που αποκτά κάποιος, όταν κοιτάζει κάτι από μακριά, δηλαδή την προοπτική[35]. Λέγεται ότι ο Αθηναίος ζωγράφος του 5ου π.Χ. αιώνα, ο Απολλόδωρος, ανακάλυψε τη σκιαγραφία[36]. Μάλιστα, ο λεξικογράφος Ησύχιος αναφέρει ότι η σκιαγραφία ταυτιζόταν με τη σκηνογραφία και ότι ο Απολλόδωρος ονομαζόταν, εκτός από «*σκιαγράφος*» και «*σκιογράφος*»[37]. Από την άλλη μεριά, ο Βιτρούβιος πληροφορεί ότι ο Αγάθαρχος από τη Σάμο (6ος-5ος π.Χ. αιώνας), εκτός από το ότι ήταν εκείνος που επινόησε ή τελειοποίησε τη σκηνογραφία, πρέπει να είχε γράψει και σύγγραμμα προοπτικής, το οποίο αποτέλεσε τη βάση για τη συγγραφή άλλων με το ίδιο αντικείμενο από τον Αναξαγόρα (500-428 π.Χ.) και τον Δημόκριτο[38]. Επίσης, όπως μαρτυρά ο Αριστοτέλης, ο Σοφοκλής (496-406 π.Χ) είχε ήδη εφαρμόσει τη σκηνογραφία στο θέατρο[39].

Οι αξιόπιστες παρατηρήσεις ήταν απαραίτητες και για ένα άλλο σημαντικό κομμάτι της καθημερινής ζωής, όπως ήταν τα ταξίδια και η ναυσιπλοΐα. Η παρατήρηση του ουρανού ήταν πάντα ένας ασφαλής οδηγός. Ας μην ξεχνάμε ότι η Καλυψώ κατηύθυνε τον Οδυσσέα να πλέει με τέτοιο τρόπο, ώστε να κρατά τη Μεγάλη Άρκτο πάντα στα δεξιά του. Ο Διογένης Λαέρτιος πληροφορεί ότι, σύμφωνα με τον Καλλίμαχο, ο Θαλής παρατήρησε τη Μικρή Άρκτο και συμβούλευσε τους Έλληνες ναυσιπλόους να ακολουθούν αυτή, αντί για τη Μεγάλη που ακολουθούσαν οι Φοίνικες. Ενδεχομένως, αυτό ο Θαλής να το επεσήμαινε στις σημειώσεις του υπό τον τίτλο *Ναυτική Αστρονομία*[40].

Αρκετά συχνά, υπήρχε η ανάγκη της μέτρησης απρόσιτων μεγεθών, όπως το ύψος των βουνών ή των τειχών μιας πόλης. Αυτό ήταν ιδιαίτερα απαραίτητο, κατά τη

---

[34] Κουρνιάτη, Α.Μ., "Η σκηνογραφία ως κλάδος της οπτικής", *Νεύσις 8* (1999): σσ. 161-162.
[35] «*ἡ μὲν οὖν δημηγορικὴ λέξις καὶ παντελῶς ἔοικεν τῇ σκιαγραφίᾳ·*
ὅσῳ γὰρ ἂν πλείων ᾖ ὁ ὄχλος, πορρώτερον ἡ θέα,
διὸ τὰ ἀκριβῆ περίεργα καὶ χείρω φαίνεται ἐν ἀμφοτέροις·
ἡ δὲ δικανικὴ ἀκριβεστέρα», Αριστοτέλους, *Ρητορική*, έκδ. W.D. Ross, *Aristotelis ars rhetorica*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1959, 1414a8-11.
[36] Tansey, R.G., Kleiner, F.S., *Gardner's Art Through the Ages*, 10η έκδ., Η.Π.Α.: Harcourt Brace College Publishers 1996, σ. 167.
[37] Ησύχιου, *Λεξικόν*, έκδ. M. Schmidt, *Hesychii Alexandrini lexicon*, Άμστερνταμ: Hakkert 1965, 967.1-4.
[38] Βιτρούβιου, *έ.α.*, VII.
[39] Αριστοτέλους, *Περί Ποιητικής*, έκδ. R. Kassel, *Aristotelis de arte poetica liber*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1965, 1449a 18-19.
[40] Διογένη Λαέρτιου, *έ.α.*, I, 23.1-9.

διάρκεια των πολεμικών επιχειρήσεων. Ο Πολύβιος (2ος π.Χ. αιώνας) προσπαθεί να αναδείξει τη χρησιμότητα που μπορεί να έχει η ικανότητα του προσδιορισμού κάποιου ύψους που δεν είναι προσβάσιμο στον παρατηρητή. Στις *Ιστορίες* του μας εξιστορεί ότι ο Φίλιππος προσπαθώντας να καταλάβει την πόλη Μελίτεια τοποθέτησε σκάλες στα τείχη της, αλλά η επιχείρησή του απέτυχε, γιατί οι σκάλες που κατασκεύασε ήταν μικρές. Με άλλα λόγια, δεν είχε υπολογιστεί σωστά το ύψος του τείχους και, επομένως, ούτε το μήκος που θα έπρεπε να έχει η σκάλα[41]. Σε αυτού του τύπου τα ερωτήματα η επιστήμη της οπτικής επεφύλασσε απαντήσεις. Αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα του προσδιορισμού του ύψους των οχυρωμάτων που επιθυμεί κάποιος να φτάσει ο μηχανικός Βίτων (μέσα 3ου π.Χ. αιώνα) πληροφορεί ότι αυτό το είχε πραγματευτεί μεθοδικά στα βιβλία των *Οπτικών* του[42]. Η μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων, ενός απρόσιτου μήκους ή ενός απρόσιτου βάθους μπορούσε να επιτευχθεί, μέσω της χρήσης της διόπτρας, όπως δείχνει ο Ήρων ο Αλεξανδρινός στο *Περί διόπτρας*. Ο Πλούταρχος (46-120 μ.Χ.) αναφέρει ότι και ο Ξεναγόρας (3ος-2ος π.Χ. αιώνας) είχε πραγματοποιήσει μετρήσεις είτε του ύψους ενός όρους είτε του βάθους της θαλάσσης όχι συμπτωματικά, αλλά «*μεθόδῳ καὶ δι' ὀργάνων*»[43]. Και ο Ευκλείδης καταπιάστηκε στα *Οπτικά* του με ανάλογα προβλήματα, γεγονός που υποδεικνύει ότι αυτά πρέπει να αποτελούσαν καθιερωμένα προβλήματα της οπτικής παράδοσης. Ωστόσο, ο Ευκλείδης δεν τα αντιμετωπίζει, μέσω της χρήσης της διόπτρας, αλλά προτείνει μία γεωμετρική επίλυσή τους που, όπως θα δούμε, βασίζεται σε αναλογίες τριγώνων. Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα υψομετρίας ο Ευκλείδης υποθέτει την ύπαρξη της σκιάς του ύψους και, σύμφωνα με τους λόγους που προκύπτουν, προσδιορίζει το ζητούμενο ύψος. Η μεθοδολογία που προτείνει θυμίζει πολύ την ανάλογη πορεία που λέγεται ότι είχε ακολουθήσει ο Θαλής, για τον υπολογισμό του ύψους των πυραμίδων, μέσω της σκιάς τους[44].

Ιδιαίτερα ο κλάδος της κατοπτρικής αποτελούσε πρόσφορο έδαφος για την ικανοποίηση των αναγκών της ψυχαγωγίας και του εντυπωσιασμού. Επιπλέον, διέθετε τα μέσα για την 'κατασκοπεία', ενώ ο μύθος αναφέρει μία συγκεκριμένη

---

[41] Πολύβιου, *Ιστορίες*, έκδ. T. Büttner-Wobst, *Polybii historiae*, τόμ. 1-4, Λειψία: Teubner 1889-1905, V, 97.5-98.11.

[42] Βίτωνος, *Κατασκευαί πολεμικών οργάνων και καταπαλτικών*, έκδ. A. Rehm, E. Schramm, *Bitons Bau von Belagerungsmaschinen und Geschützen*, Abhandlungen der bayerischen Akademie der Wissenschaften, Philosoph.-hist. Abt., N.F. 2, Μόναχο: Oldenbourg 1929, 4.6-10.

[43] Πλούταρχου, *Aemilius Paulus*, έκδ. K. Ziegler, *Plutarchi vitae parallelae*, τόμ. 2.1, 2η έκδ., Λειψία: Teubner 1964, 15.8.1-15.11.3.

[44] Διογένη Λαέρτιου, *έ.α.*, I, 27.5-7.

περίπτωση, στην οποία «*η τέχνη*» των κατόπτρων είχε βοηθήσει τον Αρχιμήδη στην κατατρόπωση ενός εχθρικού στρατεύματος. Αρχικά, είχε παρατηρηθεί ότι τα κοίλα κάτοπτρα έχουν την ιδιότητα να ανακλούν τις φωτεινές ακτίνες σε ένα σημείο και να προκαλούν με τον τρόπο αυτό εμπρησμό. Ο Διοκλής (περ. 200 π.Χ.) αναφέρει στο *Περί πυρείων* ότι η παραπάνω εστιακή ιδιότητα των κοίλων κατόπτρων είχε βρει τέτοιες εφαρμογές, ώστε να εντυπωσιάζει τους θεατές. «*Θεωρούμε ότι είναι δυνατή η κατασκευή ενός γυάλινου πυρείου, τέτοιου που να έχει μία ειδική ιδιότητα, συγκεκριμένα, ότι κάποιος μπορεί να κατασκευάσει από αυτό λαμπτήρες που να προκαλούν φωτιά σε ναούς και σε θυσίες, έτσι ώστε να παρατηρείται καθαρά η φωτιά να καίει τα θύματα της θυσίας. Όπως πληροφορούμαστε, αυτό συμβαίνει σε ορισμένες απομακρυσμένες πόλεις, ιδιαίτερα κατά τις ημέρες των μεγάλων εορτασμών: αυτό προκαλεί τον θαυμασμό των ανθρώπων αυτών των πόλεων και είναι κάτι που θα έπρεπε να κάνουμε κι εμείς*»[45]. Η παράδοση αναφέρει ότι ο Αρχιμήδης είχε εκμεταλλευτεί την ιδιότητα των κοίλων κατόπτρων να προκαλούν ανάφλεξη, κατά τη διάρκεια μιας πολιορκίας. Σύμφωνα με τον μύθο, ο Αρχιμήδης είχε κατασκευάσει γιγάντια κάτοπτρα και με τη βοήθεια των ηλιακών ακτίνων που ανακλώνταν από αυτά κατάφερε να πυρπολήσει τον ρωμαϊκό στόλο[46]. Πολλούς αιώνες αργότερα, ο μηχανικός Ανθέμιος (6ος μ.Χ. αιώνας) επανέφερε τον μύθο, αλλά και το πρόβλημα της ανάφλεξης, μέσω κατόπτρων. Ο Ανθέμιος δεν αμφισβήτησε τον ίδιο τον μύθο, αλλά τον τύπο των κατόπτρων που οι αρχαίοι ιστορικοί απέδιδαν στον Αρχιμήδη και έλεγαν ότι με τα συγκεκριμένα επέφερε τον εμπρησμό του εχθρικού στόλου. Ο Ανθέμιος υποστήριζε στο *Περί παραδόξων μηχανημάτων* ότι τα απλά κάτοπτρα δε θα ήταν καθόλου πρακτικά, για να δημιουργήσουν εμπρησμό σε μεγάλες αποστάσεις. Τόνιζε ότι κανείς δεν πρέπει να υποβιβάζει με τον τρόπο αυτό τη φήμη του Αρχιμήδη και ότι η συγκεκριμένη ανάφλεξη θα απαιτούσε όχι απλά κάτοπτρα, αλλά τη διάταξη περισσότερων από 24 εξαγώνιων κατόπτρων ενωμένων με συνδέσμους στις πλευρές ενός μεγαλύτερου εξαγώνιου κατόπτρου[47].

---

[45] Διοκλή, *Περί πυρείων*, έκδ. G.J. Toomer, *Diocles: On Burning Mirrors: The Arabic Translation of the Lost Greek Original edited with english translation and commentary*, Βερολίνο/Χαϋδελβέργη/Νέα Υόρκη: Springer-Verlag 1975, 36-37.

[46] Ο μύθος αυτός αναφέρεται στον *Ιππία* του Λουκιανού (2ος μ.Χ. αιώνας) και στο *Περί κράσεων* του Γαληνού, ενώ απουσιάζει από άλλους ιστορικούς, όπως τον Πολύβιο και τον Πλούταρχο.

[47] Ανθέμιου, *Περί παραδόξων μηχανημάτων*, έκδ. G.L. Huxley, *Anthemius of Tralles: A study in later Greek geometry, Greek, Roman and Byzantine monographs* 1, Κέμπριτζ, Μασσαχουσσέτη: Harvard University Press 1959, 47.20-53.3.

Όσον αφορά στη μελέτη της κατοπτρικής, προκειμένου να επιτευχθούν ψυχαγωγικά αποτελέσματα, ο Ήρων καταγράφει διάφορους τρόπους διάταξης των κατόπτρων, έτσι, ώστε να προκαλούνται αστείες οπτικές εντυπώσεις. Ο Ήρων υποστήριζε ότι «*...η κατοπτρική είναι σαφώς μία επιστήμη άξια μελέτης και, παράλληλα, παράγει θεάματα που προκαλούν τον θαυμασμό του παρατηρητή. Γιατί με τη βοήθεια αυτής της επιστήμης κατασκευάζονται κάτοπτρα που δείχνουν τη δεξιά πλευρά στα δεξιά και, ομοίως, την αριστερή πλευρά στα αριστερά, ενώ τα συνηθισμένα κάτοπτρα από τη φύση τους έχουν την αντίθετη ιδιότητα και δείχνουν τις αντίθετες πλευρές. Είναι επίσης δυνατόν με τη βοήθεια των κατόπτρων να δούμε τις πλάτες μας και να δούμε τους εαυτούς μας ανεστραμμένους, με τρία μάτια και δύο μύτες και παραποιημένα χαρακτηριστικά, όπως με έντονη λύπη. Ωστόσο, η μελέτη της κατοπτρικής είναι χρήσιμη όχι μόνο στο να παράσχει διάφορα θεάματα, αλλά, επίσης, για απαραίτητους σκοπούς. Γιατί, ποιος δε θα θεωρούσε πολύ χρήσιμο να είμαστε σε θέση να παρατηρήσουμε, κατά περίσταση, ενώ παραμένουμε μέσα στο σπίτι μας, πόσοι άνθρωποι είναι στο δρόμο και τι κάνουν; Και ποιος δε θα θεωρούσε αξιόλογο να μπορεί να λέει την ώρα, νύχτα ή μέρα, με τη βοήθεια φιγούρων που εμφανίζονται σε ένα κάτοπτρο;...Επίσης, ποιος δε θα έμενε έκπληκτος, αν έβλεπε σε ένα κάτοπτρο, όχι τον εαυτό του και κανέναν άλλον, αλλά οτιδήποτε εμείς επιθυμούμε να δει;*»[48]

Τα ερωτήματα της φυσιολογίας του οφθαλμού ή οι ιατρικές ανάγκες για την ίαση των οφθαλμολογικών παθήσεων δε θα μπορούσαν να εξαιρεθούν από τους παράγοντες εκείνους που συνέβαλαν στη μελέτη της όρασης. Παρόλο που η οφθαλμολογία δεν αποτελούσε βέβαια επιμέρους κλάδο της οπτικής, θα ήταν ενδιαφέρον να παρακολουθήσουμε σε τι δυσκολίες έπρεπε να ανταπεξέλθουν οι ιατρικές έρευνες. Αρχικά, οι ιατροί συναντούσαν συχνά περιπτώσεις τύφλωσης, αλλά και δυσλειτουργίες του οφθαλμού, όπως η μυωπία, ο στραβισμός, η αμβλυωπία, που απαιτούσαν κάποιες άμεσες ιατρικές εξηγήσεις. Σε αρχαία ιατρικά κείμενα καταγράφεται μία σωρεία παθήσεων των οφθαλμών που, κυρίως, αποτελούν είδη μολύνσεων. Συγκεκριμένα, αναφέρεται η ψωροφθαλμία, η ξηροφθαλμία, το γλαύκωμα, η φλεγμονή, η οφθαλμία, η χύμωσις, το υπόσφαγμα, η μαδάρωσις, η τρίχωσις, το βόθριον, το επίκαυμα, η πρόπτωσις, οι ανθρακώσεις, τα καρκινώματα. Το κολλύριον, ως ένα υγρής υφής απόσταγμα για τη θεραπεία ορισμένων οφθαλμολογικών παθήσεων, χρησιμοποιούνταν ευρέως. Ο Αλεξανδρινός ιατρός Γαληνός (περ. 129-210 μ.Χ.) εξηγεί στη *Θεραπευτική μέθοδο*, αλλά και στο *Περί*

[48] Ήρωνος Αλεξανδρινού, *έ.α.*, 1-6, 7, 10, 15, 18.

συνθέσεων φαρμάκων κατά τόπους τη χρήση των κολλυρίων. Είναι εύλογο ότι για την αντιμετώπιση των παθήσεων των οφθαλμών ήταν απαραίτητο να έχει προηγηθεί μία επιστημονική μελέτη του οργάνου της όρασης, αλλά και μια εξέταση του τρόπου λειτουργίας του. Ο Αλκμαίων είχε προχωρήσει στην ανατομική μελέτη του οφθαλμού και στην εξέταση της δομής του. Παρατήρησε την ύπαρξη δύο οπτικών νεύρων που ξεκινούν από το ίδιο σημείο του εγκεφάλου και, ενώ παραμένουν ενωμένα στο εσωτερικό του μετώπου, στη συνέχεια διαχωρίζονται και καταλήγουν στις κοιλότητες των οφθαλμών που περιέχουν ένα φυσικό πνεύμα[49]. Ο Θεόφραστος αναφέρει ότι ο Εμπεδοκλής προσπάθησε να μιλήσει για το όργανο της όρασης και υποστήριξε ότι εσωτερικά αποτελείται από φωτιά, ενώ γύρω από αυτή υπάρχει το στοιχείο της γης και ο αέρας[50]. Σε αντίθεση με εκείνον, ο Δημόκριτος έδινε ιδιαίτερη έμφαση στην υδατώδη φύση του οφθαλμού[51], με την οποία συμφωνούσε και ο Αριστοτέλης. Αρκετούς αιώνες αργότερα, ο Γαληνός προσέφερε μια πιο λεπτομερή ανατομική περιγραφή του οφθαλμού στο *Περί χρείας μορίων*[52]. Οι έρευνες σχετικά με τη λειτουργία της όρασης είχαν ήδη γνωρίσει πρόοδο, καθώς είχε προσδιοριστεί η λειτουργία των χιτώνων του οφθαλμού, δηλαδή του κερατοειδούς, του ραγοειδούς, του αμφιβληστροειδούς και του κρυσταλλοειδούς.

Είναι εμφανές ότι τα προβλήματα της οπτικής απασχολούσαν ανθρώπους κάθε ειδικότητας. Εκτός από τους φιλοσόφους που πρότειναν διάφορες θεωρίες όρασης ή από τους ανθρώπους που εργάζονταν από τη σκοπιά της ιατρικής, η γεωμετρική προσέγγιση των οπτικών, κατοπτρικών, ή διοπτρικών θεμάτων είχε απορροφήσει το ερευνητικό ενδιαφέρον των γεωμετρών, των μηχανικών, των αστρονόμων, των αρχιτεκτόνων. Όλοι όσοι ασχολούνταν με τα συγκεκριμένα προβλήματα ονομάζονταν απλά ως «*γεωμέτρες*» ή ως «*μαθηματικοί*». Για παράδειγμα, ο Γαληνός αναφέρει στο *Περί χρείας μορίων* ότι «*δε θα βρεις τίποτα παράλογο στη διαβεβαίωση των μαθηματικών ότι τα αντικείμενα παρατηρούνται κατά ευθείες γραμμές*»[53]. Αρχικά, οι οπτικές έρευνες γίνονταν σε ιδιωτικό επίπεδο, και όχι στο πλαίσιο κάποιου επίσημου θεσμικού φορέα, όπως ήταν οι σχολές. Οι άνθρωποι που τις ασκούσαν επεδίωκαν τη μεταξύ τους επικοινωνία και συνεργασία είτε αλληλογραφώντας είτε πραγματοποιώντας ταξίδια. Έτσι, ο Πυθίων, ο Θάσος

---

[49]Ε.Σ. Σταμάτη, *Προσωκρατικοί Φιλόσοφοι*, 1966, σσ. 119-120.
[50]Θεόφραστου, *έ.α.*, 7.1-11.
[51]*ό.π.*, 50.1-11.
[52] Γαληνού, *Περί χρείας μορίων*, έκδ. G. Helmreich, *Galeni de usu partium libri Xvii*, Λειψία: Teubner, 1909, 759.1-79.17.
[53]*ό.π.*, 817.7-9.

γεωμέτρης, έγραψε ένα γράμμα προς τον Κόνωνα (3ος π.Χ. αιώνας), στο οποίο του ζητούσε να τον βοηθήσει στο θεωρητικό πρόβλημα που αντιμετώπιζε, σχετικά με τον τρόπο εύρεσης μιας επιφάνειας κατόπτρου τέτοιας, ώστε οι ηλιακές ακτίνες που ανακλώνται από αυτή να συναντούν μια κυκλική περιφέρεια[54]. Επίσης, όπως μαρτυρεί πάλι ο Διοκλής, «*όταν ο Ζηνόδωρος, ο αστρονόμος, ταξίδεψε μέχρι την Αρκαδία και παρουσιάστηκε σε εμάς, μας ρώτησε πώς να βρει μια επιφάνεια κατόπτρου τέτοια που, όταν τοποθετηθεί αντιμέτωπη στον ήλιο, οι ακτίνες που ανακλώνται από αυτή να συναντούν ένα σημείο και, έτσι, να προκαλούν εμπρησμό*»[55]. Σε πρώτο στάδιο, οι άνθρωποι που ασκούσαν τις συγκεκριμένες έρευνες δεν αποτελούσαν μία αυστηρώς θεσπισμένη ομάδα οπτικών ή κατοπτρικών ούτε τους αποδίδονταν η ιδιότητα του οπτικού ή του κατοπτρικού. Αναγνωρίζονταν γενικότερα ως μαθηματικοί ή γεωμέτρες που σιγά σιγά κατέληξαν να θεωρούνται ως φορείς του «*ὀπτικοῦ λόγου*», με την έννοια ότι εκείνοι μπορούσαν να αιτιολογήσουν για τα οπτικά, κατοπτρικά ή διοπτρικά φαινόμενα.

Δεν είναι απολύτως βέβαιο αν με την πάροδο των αιώνων είχε συσταθεί μια αυτόνομη κοινότητα οπτικών ή κατοπτρικών επιστημόνων. Πάντως, παρατηρούμε ότι σε κείμενα της ύστερης μεταχριστιανικής εποχής υπάρχει μία τάση, όταν οι συγγραφείς τους αναφέρονται στους ανθρώπους που τελούν τις οπτικές ή κατοπτρικές μελέτες, δεν τους προσαγορεύουν γενικά ως «*μαθηματικούς*» ή «*γεωμέτρες*», αλλά ως «*οπτικούς*» ή «*κατοπτρικούς*». Ενδεικτικά, αναφέρουμε ότι τον 4ο μ.Χ. αιώνα ο Θεμίστιος αναφέρει ότι οι ευθείες και οι γωνίες, «*οἷς χρῆται ὁ ὀπτικός*», πηγάζουν από τη γεωμετρία[56]. Ο Σιμπλίκιος (6ος μ.Χ. αιώνας) παρατηρεί επίσης ότι οι αρχές που χρησιμοποιεί «*ὁ ὀπτικός*» προέρχονται από τη γεωμετρία[57], ενώ ο Ιωάννης ο Φιλόπονος (6ος μ.Χ. αιώνας) επισημαίνει ότι «*ὁ δὲ ὀπτικὸς ὁποῖα τὰ συμβαίνοντά φησι ταῖς ὄψεσι.*
καὶ κέχρηται τοῖς τοῦ ὀπτικοῦ ὁ κατοπτρικός·…ὁ δὴ κατοπτρικὸς οὕτως ἔχει πρὸς τὸν ὀπτικόν, ὡς ὁ ὀπτικὸς πρὸς τὸν γεωμέτρην»[58]. Ο Ανθέμιος μαρτυρά ότι ο

---

[54] Διοκλή, *έ.α.*, 3.
[55] *ό.π.*, 4.
[56] Θεμίστιου, *Παράφραση στα Αναλυτικά Ύστερα του Αριστοτέλη*, έκδ. M. Wallies, *Themistii analyticorum posteriorum paraphrases*, Commentaria in Aristotelem Graeca 5.1, Βερολίνο: Reimer 1900, 5, 1.18.12.
[57] Σιμπλίκιου, *Σχόλια στα Φυσικά του Αριστοτέλη*, έκδ. H. Diels, *Simplicii in Aristotelis physicorum libros octo commentaria*, Commentaria in Aristotelem Graeca, Βερολίνο: Reimer 1882, 9, 294.32.
[58] Ιωάννη Φιλόπονου, *Σχόλια στα Αναλυτικά Ύστερα του Αριστοτέλη*, έκδ. M. Wallies, *Ioannis Philoponi in Aristotelis analytica priora commentaria*, Commentaria in Aristotelem Graeca, Βερολίνο: Reimer 1905, 13, 3.181.22-26.

Απολλώνιος «*πρὸς τοὺς κατοπτρικοὺς ἔδειξεν*» ότι έκαναν λάθος, όταν υποστήριζαν ότι η ανάφλεξη δημιουργείται στο κέντρο των κατόπτρων[59], ενώ ο Ολυμπιόδωρος (6ος μ.Χ. αιώνας) μιλάει για έναν συγκεκριμένο τύπο κατόπτρων, «*τὰ ὀπισθοφανῆ λεγόμενα ὑπὸ τῶν κατοπτρικῶν*»[60].

Μέσω των παραπάνω αναφορών, υποδηλώνεται ότι με την πάροδο του χρόνου η επιστήμη της οπτικής είχε οριοθετήσει το ερευνητικό της πρόγραμμα και, κυρίως, είχε κατοχυρώσει τους ανθρώπους που είχαν την αρμοδιότητα να συμμετάσχουν σε αυτό. Ενδεχομένως, η μετάβαση από το ιδιωτικό επίπεδο, στο οποίο τελούνταν οι οπτικές έρευνες, στην αναγνώριση της ύπαρξης, αν όχι μιας κοινότητας, τουλάχιστον, μιας ομάδας οπτικών ή κατοπτρικών επιστημόνων να συνέβη, όταν οι εργασίες των ανθρώπων αυτών είχαν περάσει πια από το στάδιο της ευρείας αναγνώρισης και της νομιμοποίησης και όταν είχε πλέον συνειδητοποιηθεί η ανάγκη της εξειδίκευσης. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι, από την εποχή του Ίππαρχου (περ. 150 π.Χ.), υπήρχε η τάση τα παρατηρησιακά όργανα να εκτίθενται στην κοινή, δημόσια θέα. Ο Πτολεμαίος πληροφορεί ότι ο Ίππαρχος έλεγε στο χαμένο έργο του *Περί της μεταπτώσεως των τροπικών και ισημερινών σημείων* ότι μπορούσε να αντιληφθεί τη μη-κανονικότητα της διάρκειας του έτους από τις ισημερίες που παρατηρούσε σε έναν χάλκινο κρίκο που ήταν τοποθετημένος στην Τετράγωνη Στοά της Αλεξάνδρειας[61]. Ο Πτολεμαίος αναφέρει ότι τέτοιου είδους παρατηρησιακά όργανα ήταν τοποθετημένα και στην παλαίστρα[62]. Επίσης, ηλιακά ωρολόγια, γνώμωνες και παραπήγματα που χρησίμευαν για τον προσδιορισμό του χρόνου ή για την πρόβλεψη του καιρού εκθέτονταν δημόσια για κοινή χρήση. Είναι σαφές ότι, πέραν της πρακτικής τους χρησιμότητας, η δημοσιοποίηση των παρατηρησιακών οργάνων δημιουργούσε ουσιαστικά ένα κλίμα ευρείας αναγνώρισης, αποδοχής και εξοικείωσης με το έργο του γεωμέτρη-οπτικού, νομιμοποιούσε τις έρευνές του, ενώ, παράλληλα, του προσέδιδε κύρος, γόητρο και προβολή.

Επιπλέον, η ανάγκη του πρακτικού χειρισμού των εκάστοτε επιστημονικών προβλημάτων από τα αρμόδια άτομα, δηλαδή η ανάγκη της προσφυγής σε άτομα που

---

[59] Ανθέμιου, *Fragmentum Mathematicum Bobiense*, έκδ. G.L. Huxley, *Anthemius of Tralles: A study in later Greek geometry, Greek, Roman and Byzantine monographs* 1, Κέμπριτζ, Μασσαχουσσέτη: Harvard University Press 1959, 54.10-11.

[60] Ολυμπιόδωρου, *Σχόλια στα Μετεωρολογικά του Αριστοτέλη*, έκδ. G. Stüve, *Olympiodori in Aristotelis meteora commentaria*, Commentaria in Aristotelem Graeca 12.2, Βερολίνο: Reimer 1900, 264.18.

[61] Πτολεμαίου, *Μαθηματική Σύνταξη*, τόμ. 1,1 (1898), 194.14-195.9.

[62] *ό.π.*, 197.18.

έχουν ειδικευτεί για να αντιμετωπίζουν, ο καθένας στον τομέα του, τα ανάλογα προβλήματα που προκύπτουν, ενδεχομένως να αποτέλεσε έναν εξίσου σημαντικό παράγοντα, για να αποδεσμευτούν οι ερευνητές των θεμάτων της οπτικής από την 'ταμπέλα' του γεωμέτρη, ή του μαθηματικού, και να κατοχυρωθούν ως οπτικοί ή κατοπτρικοί. Ο Βιτρούβιος όντας ο ίδιος επαγγελματίας αρχιτέκτων θεωρούσε ότι είχε αρμοδιότητα να μιλήσει για τα προσόντα που πρέπει να έχει ένας αρχιτέκτων ή για τις αρχές και τα προβλήματα της αρχιτεκτονικής[63]. Αναφερόμενος γενικότερα στον τρόπο άσκησης των επιστημονικών ερευνών και στη διάκριση μεταξύ θεωρίας και πράξης αφήνει να διαφανεί αυτή η ανάγκη της οριοθέτησης και του διαχωρισμού των ερευνητικών αρμοδιοτήτων: «*...σε όλες τις τέχνες πρέπει να ληφθούν υπόψη δύο πράγματα, η πρακτική και η θεωρία. Από αυτά τα δύο πράγματα η πρώτη, δηλαδή η πρακτική, ανήκει ειδικά σε αυτούς που την ασκούν και η δεύτερη, δηλαδή η θεωρία, είναι κοινή σε όλους τους σοφούς. Οι ιατροί, οι μουσικοί θα μπορούν να συζητούν για τον παλμό των αρτηριών, για τον ρυθμό. Αλλά, αν πρόκειται να θεραπευτεί μια αιμορραγία, να απομακρυνθεί ένας άρρωστος από τον κίνδυνο, αυτό δε θα το αναλάβει ο μουσικός, αλλά ο ιατρός που θα βρίσκεται στο στοιχείο του. Ομοίως, δε θα βάλουμε ένα μουσικό όργανο στα χέρια του ιατρού, αν θέλουμε να έχουμε μια γοητευτική μουσική με αρμονικούς ήχους.*

Ένας αστρονόμος και ένας μουσικός μπορούν να σκέφτονται εξίσου για τη συμπάθεια των αστέρων...Μπορούν επίσης να συζητούν με τον γεωμέτρη για την οπτική που στα ελληνικά ονομάζεται οπτικός λόγος. Σε όλες τις άλλες επιστήμες πολλά σημεία, για να μην πούμε όλα, δεν είναι κοινά παρά μόνο στη σκέψη. Αλλά, προφανώς, δεν είναι παρά της αρμοδιότητας εκείνων που είναι ειδικά εξασκημένοι σε μία τέχνη, να συλλογίζονται για πράγματα για τα οποία η χειρωνακτική, η πρακτική, τους έδωσε μεγάλη οικειότητα»[64].

Έχοντας παρουσιάσει ορισμένες από τις πιο σημαντικές πτυχές της αρχαίας οπτικής επιστήμης είμαστε πλέον σε θέση να εστιάσουμε την προσοχή μας σε ένα πιο ειδικό κομμάτι της, στον τομέα της γεωμετρικής οπτικής. Αυτό που θα μονοπωλήσει το ενδιαφέρον μας είναι το μοντέλο που πρότεινε ο Ευκλείδης, για την περιγραφή και την εξήγηση των οπτικών φαινομένων χρησιμοποιώντας ως κύριο μέσο ανάλυσης τη γεωμετρία. Το πρώτο κεφάλαιο, παρόλο που φαίνεται παράταιρο προς το αντικείμενο της διατριβής, ωστόσο θεωρείται πολύ σημαντικό, καθώς επικεντρώνεται σε βασικά μεθοδολογικά ζητήματα, δηλαδή σε ζητήματα που αφορούν στο έργο που επιτελεί ο

[63] Βιτρούβιου, *έ.α.*, I, 43.
[64] *ό.π.*, I, 41.

ιστορικός των αρχαίων μαθηματικών. Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζει ο ιστορικός των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, όσον αφορά στην πρόσβαση στις αρχαίες πηγές, σε εννοιολογικά προβλήματα, αλλά και στους ερμηνευτικούς πειρασμούς που συχνά ορθώνονται εμπρός του. Δυστυχώς, τα παραπάνω εμπόδια κάνουν την εμφάνισή τους και κατά τη μελέτη της ευκλείδειας γεωμετρικής οπτικής. Παράλληλα, λαμβάνοντας έρεισμα από την περίφημη διαμάχη της «*γεωμετρικής άλγεβρας*» που σε τελικές γραμμές υπέδειξε την ανάγκη επαναπροσδιορισμού του τρόπου εργασίας του ιστορικού, θα επιχειρήσουμε να καταγράψουμε ποιοι είναι οι μεθοδολογικοί άξονες που κατευθύνουν το έργο του και ποιες σκοπέλους πρέπει να αποφεύγει.

Στο δεύτερο κεφάλαιο σκιαγραφείται το ιστοριογραφικό τοπίο, δηλαδή παρουσιάζονται ορισμένα από τα σημαντικότερα ερωτήματα που απασχόλησαν ή εξακολουθούν να απασχολούν τους ιστορικούς που μελετούν τα *Οπτικά* αλλά και τα *Κατοπτρικά* του Ευκλείδη. Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η καταγραφή των προβληματισμών, η παράθεση των ερμηνευτικών αποκλίσεων και συγκλίσεων που υπογραμμίζουν τις ιστοριογραφικές προσεγγίσεις του συγκεκριμένου επιστημονικού πεδίου. Επίσης, παρουσιάζονται οι διαμάχες και επισημαίνονται οι νέες τάσεις που εμφανίζονται στη σύγχρονη ιστοριογραφία της ευκλείδειας οπτικής˙ νέες τάσεις ως προς τον τρόπο διατύπωσης των ερωτημάτων, ως προς τα κριτήρια ανάλυσης και επεξεργασίας των ζητημάτων, ως προς τον κριτικό έλεγχο των συμπερασμάτων.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η παρουσίαση της ιστοριογραφικής κατάστασης βασίζεται στη μελέτη της συγκεντρωθείσας βιβλιογραφίας για την αρχαία γεωμετρική οπτική. Σίγουρα δεν αποτελεί μια εξαντλητική περιγραφή του ιστοριογραφικού τοπίου, κρίνεται, ωστόσο, ότι προβάλλει ένα αρκετά μεγάλο τμήμα του. Επιπλέον, αρκετές φορές τα ιστοριογραφικά ερωτήματα που αφορούν στην οπτική του Ευκλείδη συσχετίζονται άμεσα με προβλήματα που προκύπτουν από την ανάγνωση των *Οπτικών* του Πτολεμαίου, γι' αυτό θεωρήσαμε σκόπιμο να αφιερώσουμε το δεύτερο μέρος του συγκεκριμένου κεφαλαίου στα *Οπτικά* του Πτολεμαίου.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται η έννοια του «*όρου*». Η λέξη αυτή εγκαινιάζει τα *Οπτικά* και την *Αναθεωρημένη Έκδοση* των *Οπτικών* και χαρακτηρίζει τις εφτά θεμελιώδεις προτάσεις που ακολουθούν. Αναζητώντας τις διάφορες σημασίες που εκλαμβάνει η λέξη αυτή σε αρχαία μαθηματικά κείμενα διαπιστώσαμε ότι πάρα πολύ συχνά ο «*όρος*» θεωρούνταν συνώνυμος με τον «*ορισμό*». Ωστόσο, αν οι «*όροι*» των *Οπτικών*, αλλά και της *Αναθεωρημένης Έκδοσής* τους, αποδοθούν ως «*ορισμοί*», παρουσιάζεται μια σοβαρή ασυνέπεια, καθώς οι εφτά προτάσεις που έπονται δεν

αποτελούν όλες αυστηρούς ορισμούς. Η έρευνά μας υπέδειξε ότι η ασυνέπεια αυτή δεν αποτελεί μεμονωμένη περίπτωση των *Οπτικών* και της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, αλλά συναντάται και σε άλλα μαθηματικά συγγράμματα που δεν απέχουν πολύ από την εποχή του Ευκλείδη. Πολλές φορές οι αρχικές προτάσεις διάφορων μαθηματικών κειμένων τιτλοφορούνται ως «*όροι*» ή ως «*αξιώματα*», χωρίς όμως αυτό να αντιστοιχεί πλήρως στο περιεχόμενό τους. Στο κεφάλαιο αυτό προτείνουμε έναν άλλο τρόπο απόδοσης και ερμηνείας της λέξης «*όροι*» που συναντάται στην αρχή των *Οπτικών* και της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Εκτιμούμε ότι αυτός ο εναλλακτικός τρόπος, χωρίς να παραβιάζει τον αρχαίο τρόπο σκέψης, παρουσιάζει μεγαλύτερη πληρότητα και συνέπεια, διότι ανταποκρίνεται σε καθεμία από τις εφτά προτάσεις ξεχωριστά. Τέλος, είναι πιο ικανοποιητικός, γιατί αποδεσμεύει τις θεμελιώδεις προτάσεις των συγγραμμάτων από τον άχαρο και περιορισμένο ρόλο των «*ορισμών*» και τις θεωρεί υπό ένα ευρύτερο και πιο ευέλικτο πλαίσιο.

Ο πρώτος «*όρος*» των *Οπτικών*, αλλά και της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, θέτει την περίφημη αρχή της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων. Το τέταρτο κεφάλαιο δε θα μπορούσε λοιπόν παρά να είναι αφιερωμένο σε μια ιστορική αναδρομή και σε μια αναζήτηση της παραπάνω αρχής στον αρχαίο κόσμο. Ανατρέχοντας σε κείμενα φιλοσόφων, ιατρών, μαθηματικών και θεολόγων γίνεται φανερό ότι η αντίληψη της ευθύγραμμης φύσης της όρασης αποτελούσε κοινό τόπο. Στόχος του τέταρτου κεφαλαίου είναι να δείξει ότι η αρχή της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων, αφενός, δε μπορεί να ειδωθεί ξέχωρα από την παραπάνω αντίληψη, αφετέρου, σχετιζόταν άμεσα με μία άλλη κοινή και πολύ διαδεδομένη αρχή: την αρχή της ευθύγραμμης διάδοσης του φωτός.

Το πέμπτο κεφάλαιο εστιάζει το ενδιαφέρον σε ένα πολύ ιδιαίτερο γνώρισμα των όψεων: την ασυνέχεια. Πρόκειται για μια εξαιρετική ιδιότητα που κάνει το μοντέλο του Ευκλείδη να διαφοροποιείται πλήρως από άλλα μοντέλα όρασης που είχαν προταθεί. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε τι είναι η ασυνέχεια των όψεων, γιατί ο Ευκλείδης αναγκάστηκε να κάνει μια τόσο ανατρεπτική υπόθεση, σε τι τον εξυπηρετούσε και ποιο ήταν το τίμημα που έπρεπε να υποστεί για αυτή την επιλογή.

Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που ανέκυψαν κατά την πορεία της έρευνάς μας αφορούσε στον πρώτο «*όρο*» των *Οπτικών*. Εκτιμώντας ότι ο καθιερωμένος τρόπος απόδοσης και ερμηνείας του πρώτου «*όρου*» δεν είναι καθόλου ικανοποιητικός στο έκτο κεφάλαιο προτείνουμε έναν νέο τρόπο ανάγνωσής του. Ο νέος τρόπος που διατυπώνουμε δεν περιορίζεται απλά στο επίπεδο μιας διαφορετικής απόδοσης, αλλά, προς έκπληξή μας, λαμβάνει πολύ μεγάλες εννοιολογικές και,

κυρίως, ερμηνευτικές διαστάσεις. Μέσω της νέας ανάγνωσης, ξετυλίγεται μπροστά μας μια πολύ σημαντική αντίληψη που μέχρι τώρα δεν έχει αναδειχθεί στην ιστοριογραφία και που σχετίζεται με το πώς νοούνταν το αντικείμενο της όρασης. Επιπλέον, οι αποκαλύψεις μας συνηγορούν στο ότι πράγματι ο καθιερωμένος τρόπος οργάνωσης των δύο διασωζόμενων εκδόσεων της πραγματείας του Ευκλείδη είναι προβληματικός και ότι το κλειδί για την επίλυση αυτού του επίμαχου προβλήματος της ταυτότητας των δύο μορφών κειμένου είναι ο νέος τρόπος ανάγνωσης του πρώτου «*όρου*» που προτείνουμε.

Στο έβδομο κεφάλαιο στρέφουμε το ενδιαφέρον μας σε δύο κείμενα οπτικού περιεχομένου που, δυστυχώς, μέχρι στιγμής δεν έχουν τύχει μεγάλης προσοχής και ανάλυσης. Το ένα κείμενο είναι ο πρόλογος της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* των *Οπτικών* και το άλλο είναι οι *Οπτικές Υποθέσεις* του Δαμιανού. Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνουμε ορισμένες νέες απόψεις, όσον αφορά στη σχέση που έχουν τα δύο κείμενα μεταξύ τους. Εκτιμούμε ότι δε θα έπρεπε να μελετώνται αποκομμένα το ένα από το άλλο, καθώς υπάρχουν ορισμένες ενδείξεις που μαρτυρούν ότι ο Δαμιανός είχε πρόσβαση στο κείμενο του προλόγου και ότι απαντούσε στα λεγόμενά του.

Τέλος, το όγδοο κεφάλαιο εξετάζει τα θεωρήματα και τις αποδείξεις που διασώζονται στα *Οπτικά* και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*. Μεταξύ των δύο κειμένων υπάρχουν πολλές ομοιότητες, αλλά και πολύ σημαντικές διαφορές. Στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι, αφενός, να προβληθεί η δομή που διέπει τα δύο κείμενα, και, αφετέρου, να εκθέσουμε τις απόψεις και τα συμπεράσματά μας, όσον αφορά στην ταυτότητα των δύο κειμένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Η ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Υπό το πρίσμα του ιστορικού των αρχαίων μαθηματικών

Α. ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΑΡΧΑΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ

Αν κάποιος μας ζητούσε να του εξηγήσουμε με απλά λόγια το έργο του ιστορικού των αρχαίων μαθηματικών, θα μπορούσαμε να του παρουσιάσουμε το υποθετικό σενάριο που είχε περιγράψει κάποτε ο Wilbur Knorr. Συγκεκριμένα, θα του προτείναμε να φανταστεί ότι όλα τα βιβλία των σύγχρονων μαθηματικών βρίσκονται διασκορπισμένα στη βιβλιοθήκη ενός μεγάλου πανεπιστημίου και ότι, πριν καταφέρει ο ίδιος να τα συγκεντρώσει, πολλά έχουν υποστεί φθορές, όπως ακρωτηριασμούς ή απώλειες των σελίδων των τίτλων τους. Στη συνέχεια, θα τον προτρέπαμε να προβάλει τον εαυτό του στο μέλλον και να επικεντρώσει τις προσπάθειές του στο να προσεγγίσει τα συγκεκριμένα υλικά του 20^{ου} αιώνα, μέσω μιας ξένης γλώσσας και κουλτούρας, μέσω μιας εντελώς διαφοροποιημένης μαθηματικής ιδιοσυγκρασίας[1].

Η φανταστική ιστορία που έπλασε ο Knorr, όσο απογοητευτική ή απελπιστική και αν φαίνεται, προβάλλει την ανάλογη, δυσάρεστη θέση, στην οποία βρίσκεται σήμερα ο ιστορικός που επιθυμεί να μελετήσει την αρχαία μαθηματική επιστήμη. Η πρώτη δυσκολία που εμφανίζεται έχει χαρακτήρα λειτουργικό και αφορά στη διαδικασία της πρόσβασης στα αρχαία μαθηματικά κείμενα. Σοβαρές φθορές, ακόμα και ολοσχερείς καταστροφές που έχουν επέλθει εξαιτίας φυσικών παραγόντων, παρεμποδίζουν την ανάγνωση των γραπτών κειμηλίων του παρελθόντος. Ο Otto Neugebauer περιγράφει την κατάσταση ορισμένων πινακίδων της Μεσοποταμίας που έφερε στο φως η αρχαιολογική σκαπάνη με τα παρακάτω λόγια:

«*Το έδαφος της Μεσοποταμίας διατήρησε πινακίδες για χιλιάδες χρόνια. Δε θα συμβεί όμως το ίδιο και στα δικά μας κλίματα. Πολλές πινακίδες έχουν μια επικάλυψη από άλατα. Η μεταβολή της υγρασίας προκαλεί τον σχηματισμό κρυστάλλων που σπάζουν την επιφάνεια της πινακίδας· έτσι η γραφή σβήνεται πολύ γρήγορα. Έχω δει 'πινακίδες' που δεν ήταν παρά σκόνη, προσεκτικά φυλαγμένη σε προθήκες. Για να*

[1] Knorr, W.R., "New readings in Greek mathematics: sources, problems, publications", *Impact of science on society* (UNESCO), *40 (159)*, 1990, σ. 207.

αποφευχθεί αυτό, οι πινακίδες πρέπει να ψηθούν αργά σε υψηλή θερμοκρασία και ύστερα να διαβραχούν, για να φύγουν τα άλατα»[2].

Είναι σαφές ότι, μέχρι το στάδιο της δημοσίευσης των πινακίδων που αναφέρει ο Neugebauer, χρειάζεται να μεσολαβήσουν ενδιάμεσες εργασίες για την αποκατάστασή τους. Μερικές από αυτές είναι η διαδικασία της αντιγραφής, της ανάγνωσης της 'νεκρής' γλώσσας, στην οποία είναι γραμμένες, και του εντοπισμού τους, εφόσον δεν απουσιάζουν περιπτώσεις, κατά τις οποίες κομμάτια των πινακίδων βρίσκονται διασκορπισμένα σε διάφορα μουσεία του κόσμου. Η περιγραφή του Neugebauer είναι άκρως κατατοπιστική:

«*Δεν υπάρχει απλή μέθοδος δημοσίευσης...Το κόστος λοιπόν και η πραγματική ανάγκη οδήγησαν στην πρακτική της αντιγραφής με το χέρι...Η ιδανική μέθοδος δημοσίευσης θα ήταν βέβαια η άμεση αντιγραφή από το κείμενο. Στην πράξη όμως αυτό συχνά αποκλείεται, επειδή το άμεσα συσχετισμένο υλικό είναι διασκορπισμένο σε ολόκληρο τον κόσμο. Ακόμη και αν κάποιος διαθέτει μεγάλη πείρα, δε μπορεί να αντιγράψει σωστά ένα κείμενο χωρίς την κατανόηση του περιεχομένου του. Σχεδόν κανένα κείμενο δεν 'εκπορθείται' με την πρώτη προσπάθεια. Έτσι, χρειάζεται να γίνουν επανειλημμένες αντιπαραβολές, συγκολλήσεις με άλλα κομμάτια και συγκρίσεις με άλλα κείμενα. Απαιτείται δουλειά χρόνων για να δημοσιευτεί ικανοποιητικά μια μικρή ομάδα από μερικές εκατοντάδες πινακίδες. Και καμία δημοσίευση δεν είναι 'οριστική'. Πάντοτε θα συμβεί ένα νέο και καθαρό μυαλό να βρει τη λύση ενός αινίγματος που διέφυγε του εκδότη, όσο και αν μπορεί να φαίνεται προφανής εκ των υστέρων»*[3].

Πολύ συχνά, η πρόσβαση στα αρχαία συγγράμματα είναι ανέφικτη, εξαιτίας της μερικής ή ολοκληρωτικής απώλειάς τους. Στην περίπτωση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, που πρόκειται να απασχολήσουν την παρούσα μελέτη, πραγματείες που θεωρήθηκαν από τις επερχόμενες γενιές ως υποδεέστερες έναντι άλλων, περιέπεσαν σε αχρηστία, με αποτέλεσμα να μη διασώζονται σήμερα. Έτσι, τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, η *Μαθηματική Σύνταξη* του Πτολεμαίου και τα *Κωνικά* του Απολλώνιου υποβίβασαν προγενέστερα συγγράμματα αντίστοιχου περιεχομένου, τα οποία θεωρήθηκαν ως παρωχημένα. Εύλογα, η απώλεια ενός τόσο σημαντικού σώματος μαθηματικών κειμένων καταλήγει να στοιχειώνει το έργο του ιστορικού και να τον κατατρέχει στην προσπάθειά του να ανασυγκροτήσει την ιστορία των

---

[2] Neugebauer, O., *Οι θετικές επιστήμες στην αρχαιότητα*, μτφρ. Χ. Ζερμπίνη, Ι. Αρζόγλου, Αθήνα: Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης 1986, σ. 98.
[3] *ό.π.*, σσ. 99-100.

διάφορων μαθηματικών κλάδων της Αρχαιότητας. Παράλληλα, δημιουργεί ερωτήματα για το κατά πόσο το διασωζόμενο μαθηματικό υλικό είναι σε θέση να παράσχει μια ικανοποιητική εικόνα των επιτευγμάτων της αρχαίας μαθηματικής σκέψης.

Ακόμα και στην περίπτωση που σπουδαία έργα μαθηματικού περιεχομένου διατηρήθηκαν κατά το πέρασμα του χρόνου, τα προβλήματα δεν παύουν να υφίστανται. Η ανασκαφή μιας βαβυλωνιακής πινακίδας συνοδεύεται, όπως προαναφέρθηκε, από δύσκολες και πολύπλοκες εργασίες. Ωστόσο, όταν αυτές πραγματοποιηθούν, ο ιστορικός κρατά στα χέρια του ένα πολύτιμο αυθεντικό κείμενο της 2ης χιλιετίας π.Χ. Αντίθετα, η κατάσταση με τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά είναι εντελώς διαφορετική, εφόσον ο ιστορικός δεν έρχεται ποτέ σε επαφή με τα αυθεντικά έργα, αλλά με χειρόγραφα αντίγραφα προηγούμενων αντιγραφών. Εξαιτίας της παραπάνω διαδικασίας, το τελικό προϊόν προς μελέτη κουβαλά παραποιήσεις, σφάλματα, ακόμα και ύστερες παρεμβολές, ψεγάδια δηλαδή που ο ιστορικός επιβάλλεται να εντοπίσει και να απαλείψει, προκειμένου να αποκρυσταλλωθούν οι γνήσιες και καθαρές σκέψεις του αρχαίου συγγραφέα.

Λίγο μετά τα μέσα του 19ου αιώνα, η κατάσταση άρχισε να γίνεται πιο ευχάριστη για τον ιστορικό, αφού ξεκίνησε η συστηματική και οργανωμένη απόπειρα όχι της απλής έκδοσης, αλλά της κριτικής έκδοσης όλων των διασωζόμενων αρχαίων πραγματειών των μαθηματικών και της αστρονομίας[4]. Η προσπάθεια αυτή συνεχίστηκε και κατά τη διάρκεια του 20ου αιώνα, περίοδος, κατά την οποία πραγματοποιούνται επιμελημένες εκδόσεις της αραβικής και λατινικής παράδοσης των έργων του Αρχιμήδη, η συμπληρωμένη από τον J.L. Heiberg έκδοση των έργων του Αρχιμήδη, ύστερα από την ανακάλυψη του παλίμψηστου κώδικα της Κωνσταντινούπολης, αλλά και κριτικές εκδόσεις μαθηματικών πραγματειών που δε διασώθηκαν στην ελληνική τους μορφή, αλλά περιήλθαν σε εμάς, μέσω της αραβικής ή της λατινικής παράδοσης. Ενδεικτικά, αναφέρεται η έκδοση της αραβικής μετάφρασης των *Σφαιρικών* του Μενελάου, του *Περί πυρείων* του Διοκλή, των *Αριθμητικών* του Διόφαντου, αλλά και η λατινική έκδοση των *Οπτικών* του Πτολεμαίου, η οποία βασίστηκε στην αραβική έκδοση του αντίστοιχου, μη διασωζόμενου, ελληνικού κειμένου.

[4] Πρωτεργάτης του προγράμματος ήταν ο εκδοτικός οίκος Teubner της Λειψίας, ο οποίος συγκέντρωσε το σύνολο των έργων στη Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum.

Β. ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΟΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΕΡΜΗΝΕΥΤΙΚΟΥΣ ΠΕΙΡΑΣΜΟΥΣ

Η διαδικασία της πρόσβασης στις πηγές του παρελθόντος δεν αποτελεί παρά ένα πρωταρχικό στάδιο της έρευνας του ιστορικού της επιστήμης. Όπως διακρίνεται και στο σενάριο του Knorr, στο πλαίσιο της δραστηριότητας του ιστορικού συμπεριλαμβάνεται το δύσκολο εγχείρημα της προσέγγισης ενός απόμακρου, μη οικείου προς εκείνον πολιτισμού έχοντας στη διάθεσή του διαφορετικά εννοιολογικά εργαλεία, διαφορετικά ιδιοσυγκρασιακά χαρακτηριστικά. «*Η κατανόηση αυτού του συγκεχυμένου σωρού από ντοκουμέντα θα περιπλεκόταν έτσι από την αρχή, από μεταφραστικές και αναχρονιστικές δυσκολίες*»[5].

Η απόπειρα διερεύνησης ενός απαρχαιωμένου επιστημονικού συστήματος που έχει οριοθετήσει το περίγραμμά του με βάση ιδιότυπα χαρακτηριστικά δημιουργεί λεπτά ερμηνευτικά ζητήματα. Ο κλάδος της ιστορίας των αρχαίων μαθηματικών, προσανατολισμένος στην κατανόηση και αξιολόγηση των επιστημονικών και τεχνικών επιτευγμάτων της εποχής εκείνης, συνάντησε στην πορεία του αρκετές τέτοιες ερμηνευτικές σκοπέλους, με κίνδυνο να οδηγηθεί σε παραπλανητικές εκτιμήσεις με θλιβερά αποτελέσματα. Η παραποίηση της ιστορικής πραγματικότητας είναι ένα από αυτά. Όντας προικισμένος με ένα ορισμένο ιδίωμα, διαθέτοντας ένα συγκεκριμένο διανοητικό πλαίσιο και διαμορφωμένος μέσα σε ένα επιστημονικό, κοινωνικό, φιλοσοφικό περιβάλλον που διαφοροποιείται από εκείνο της Αρχαιότητας, ο σύγχρονος ιστορικός συναντά συχνά μπροστά του τον πειρασμό της παραβίασης θεμελιωδών μεθοδολογικών επιταγών, όταν στρέφεται στη μελέτη των μαθηματικών της Αρχαιότητας. Γιατί ο κίνδυνος να θεωρήσει μεμονωμένα επεισόδια, συνεισφορές ή ανακαλύψεις που πραγματοποιήθηκαν στον κλάδο των μαθηματικών κατά την εποχή της Αρχαιότητας ως προδρόμους ή προβλέψεις της σύγχρονης επιστήμης υποσκελίζοντας συγχρόνως τη νοοτροπία, τις πρακτικές, ακόμα και τα λάθη των ανθρώπων που βρίσκονται πίσω από αυτά, ελλοχεύει πάντα.

1. Η σκόπελος της «γεωμετρικής άλγεβρας» και το ξεδίπλωμα δύο ιστοριογραφικών τάσεων

Η περίφημη διαμάχη για τη «*γεωμετρική άλγεβρα*» αποτέλεσε μόνο μια αφορμή, ώστε να ανέλθουν στην επιφάνεια ζητήματα μεθοδολογικής υφής[6]. Η

[5] Knorr, W.R., *έ.α.*, σ. 207.

[6] Ο όρος «*γεωμετρική άλγεβρα*» χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τους P. Tannery και H.G. Zeuthen.

ερμηνευτική προσέγγιση, σύμφωνα με την οποία προτάσεις των *Στοιχείων* και των *Δεδομένων* του Ευκλείδη, μολονότι επικαλυμμένες με γεωμετρικό μανδύα, έχουν αλγεβρικό χαρακτήρα, άνοιξε τους ασκούς του Αιόλου. Παρόλο που το ζήτημα επικεντρωνόταν σε ένα ειδικό θέμα, οι προεκτάσεις που εξέλαβε ήταν τεράστιες, καθώς οι διαξιφισμοί και οι αντιπαραθέσεις που συντελέστηκαν έφτασαν σε σημείο να κλονίσουν τον καθιερωμένο τρόπο μελέτης των αρχαίων μαθηματικών και να προτείνουν την αναθεώρησή του. Το κέντρο βάρους αυτής της ρήξης έπεφτε ουσιαστικά στην ανάγκη επανακαθορισμού των αρμοδιοτήτων του ιστορικού της αρχαίας επιστήμης, στην επανεκτίμηση του ρόλου του και, κυρίως, στον επαναπροσδιορισμό του τρόπου, με τον οποίο οφείλει να μελετά την επιστήμη του παρελθόντος, στην προκειμένη περίπτωση, τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά. Ποιοι ήταν ωστόσο οι λόγοι, οι οποίοι επέβαλαν τις παραπάνω ανάγκες; Τι ήταν αυτό που συνέβαλε τελικά στο να διατυπωθεί το αίτημα να ξαναγραφτεί η ιστορία των αρχαίων μαθηματικών;[7]

Ο τρόπος προσέγγισης και ερμηνείας των συγκεκριμένων ευκλείδειων προτάσεων δεν αποτελεί παρά μια αντανάκλαση του τρόπου, με τον οποίο νοείται το αντικείμενο της ιστορίας των μαθηματικών. Μια προσεκτική ανάγνωση των επίμαχων κειμένων που πλαισιώνουν τη διαμάχη για τη γεωμετρική άλγεβρα είναι ικανή να αναδείξει ότι η αντίληψη αυτή, μολονότι έμοιαζε παγιωμένη, χρειάστηκε να αναθεωρηθεί. Μέσω των παραπάνω κειμένων, μπορεί κανείς να διακρίνει δύο μεθοδολογικές τάσεις στην ιστοριογραφία των αρχαίων μαθηματικών. Στην πρώτη τάση αντιστοιχεί το παραδοσιακό ρεύμα που μελετά τα αρχαία μαθηματικά υπό το πρίσμα του σύγχρονου μαθηματικού και στη δεύτερη το νέο ιστοριογραφικό ρεύμα που πραγματοποιεί τις μελέτες του υπό το πρίσμα του ιστορικού των επιστημών.

Η παραδοσιακή προσέγγιση των αρχαίων μαθηματικών πορεύεται με γνώμονα μια οντολογική θεωρία που είναι σαφώς επηρεασμένη από την πλατωνική φιλοσοφία. Διαμορφωμένη από ανθρώπους-ερευνητές των μαθηματικών υποστηρίζει ότι οι μαθηματικές έννοιες αποτελούν αιώνιες και αναλλοίωτες οντότητες που εδρεύουν στον κόσμο των πλατωνικών ιδεών. Παρουσιάζονται στην ιστορία με ποικίλες εμφανίσεις συνιστώντας κάθε φορά διαφορετικές μορφές των ίδιων

[7] Το αίτημα εκφράστηκε ρητά από τον Sabetai Unguru στο πλαίσιο της επιχειρηματολογίας του ενάντια στην ερμηνευτική προσέγγιση της «γεωμετρικής άλγεβρας» που ανέπτυξε στο "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics", *Archive for History of Exact Sciences 15* (1975-6), σσ. 67-114.

αμετάβλητων μαθηματικών ιδεών και όντας αλώβητες από τα ιδιότυπα γνωρίσματα της εκάστοτε κουλτούρας, μέσα στην οποία φανερώνονται. Παρόλο που κάθε φορά επικαλύπτονται με διαφορετικά ενδύματα, υπάρχει η δυνατότητα να αναγνωριστούν από τον επαγγελματία μαθηματικό.

Με βάση το παραπάνω οντολογικό υπόβαθρο, για τον μαθηματικό του παραδοσιακού μεθοδολογικού ρεύματος, η πρόταση «*Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις*»[8] των *Στοιχείων*, ερμηνευόμενη αλγεβρικά, αντιστοιχεί στην επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, $\alpha\cdot(\beta+\gamma+\delta)= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma+\alpha\cdot\delta$. Η γεωμετρική πρόταση «*Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ*»[9] υποκρύπτει την αλγεβρική ταυτότητα του τριωνύμου $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$, ενώ η πρόταση «*Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ*»[10], όπως και οι προτάσεις 27-29 του έκτου βιβλίου, ερμηνεύονται ως οι γεωμετρικές επιλύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha\cdot(\alpha-\chi)=\chi^2$ ή $\chi^2+\alpha\chi=\alpha^2$. Ο Van der Waerden, ένθερμος υποστηρικτής της γεωμετρικής άλγεβρας, αναφέρει χαρακτηριστικά:

«*Όταν ανοίξει κάποιος το δεύτερο βιβλίο των Στοιχείων θα βρει μια σειρά προτάσεων, οι οποίες δεν είναι τίποτε άλλο, παρά γεωμετρικές διατυπώσεις αλγεβρικών τύπων*»[11].

Οι γεωμετρικές προτάσεις που προαναφέρθηκαν θεωρούνται ως προφανείς και αυτονόητες δηλώσεις, για τις αποδείξεις των οποίων θα αρκούσε μια απλή παρατήρηση του σχήματος που η καθεμία συνιστά. Η ένταξη αυτών των τετριμμένων προτάσεων στο αυστηρά δομημένο οικοδόμημα των *Στοιχείων* αποτελεί ένα αξιοπερίεργο γεγονός. Ποιο ρόλο έχει κληθεί να διαδραματίσει στο πλαίσιο του

---

[8] Ευκλείδου, *Στοιχεία*, έκδ. Ε.Σ. Σταμάτη, *Euclidis elementa*, 4 τόμ., 2η έκδ., Λειψία: Teubner 1969-1973, II, 1, 1-29.
[9] *ό.π.*, II, 4, 1-45.
[10] II, 11, 1-36.
[11] Van der Waerden, B.L., *Η αφύπνιση της επιστήμης*, μτφρ. Γ. Χριστιανίδης, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2000, σσ. 131-2.

αρχαίου συγγράμματος η πρόταση που υποστηρίζει ότι το ορθογώνιο είναι ίσο με το άθροισμα των επιμέρους ορθογωνίων, από τα οποία αποτελείται; Όπως αναφέρει ο Van der Waerden:

«*Μελετήσαμε τη διατύπωση των θεωρημάτων και προσπαθήσαμε να ανακατασκευάσουμε τις πρωταρχικές ιδέες του συγγραφέα. Θεωρήσαμε προφανές ότι αυτά τα θεωρήματα δεν προέκυψαν από γεωμετρικά προβλήματα. Δε μπορέσαμε να βρούμε κάποιο ενδιαφέρον γεωμετρικό πρόβλημα, το οποίο θα οδηγούσε στη δημιουργία θεωρημάτων, όπως τα II 1-4. Από την άλλη μεριά, βρήκαμε ότι η εξήγηση αυτών των θεωρημάτων ως προερχόμενων από την άλγεβρα λειτουργούσε επιτυχώς. Κατά συνέπεια, υιοθετήσαμε την εξήγηση αυτή*»[12].

Υπό την οπτική γωνία της γεωμετρικής άλγεβρας, το ερώτημα σχετικά με τη λειτουργία των επίμαχων γεωμετρικών προτάσεων[13] τυγχάνει κάποιων σαφών απαντήσεων: οι μαθηματικοί της Αρχαιότητας, και μάλιστα της περιόδου πριν από την εποχή του Ευκλείδη, κατείχαν τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης, τον οποίο εξέφρασαν σε γεωμετρική γλώσσα, αφού δε διέθεταν τον σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό. Έτσι, αρκετά τμήματα των *Στοιχείων* και των *Δεδομένων* του Ευκλείδη ερμηνεύτηκαν ως αλγεβρικές ταυτότητες, ενώ κάποια άλλα ως μέθοδοι επίλυσης ειδικών τύπων δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Η εξηγητική ικανότητα της παραδοσιακής ερμηνείας είναι αναμφισβήτητα ικανοποιητική. Αποτελεί, ωστόσο, η ερμηνεία της γεωμετρικής άλγεβρας μια ιστορικά νομιμοποιημένη προσέγγιση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών;

Οι οπαδοί της γεωμετρικής άλγεβρας είναι αναγκασμένοι να υπερασπιστούν μια θεώρηση που εδραιώνεται σε υποθετικές βάσεις. Κρίνουν ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί προσέλαβαν από τους Βαβυλώνιους κάποιες -αλγεβρικού τύπου- προγενέστερες μαθηματικές γνώσεις. Το γεγονός της ανακάλυψης της ασυμμετρίας, που έλαβε χώρα κατά τον 5^{ο} αιώνα π.Χ., τους ανάγκασε, σε αντίθεση με τους Βαβυλώνιους, να εκφράσουν αυτές τις γνώσεις σε γεωμετρική γλώσσα. Το βιβλίο II, μέρη των βιβλίων I, VI, X των *Στοιχείων* και τμήματα των *Δεδομένων* του Ευκλείδη αποτελούν περιπτώσεις των παραπάνω προσλήψεων. Ωστόσο, πρέπει να επισημανθεί

[12] Van der Waerden, B.L., "Defence of a 'Shocking' Point of View", *Archive for History of Exact Sciences 15* (1976), σσ. 203-204.

[13] Πρέπει να επισημανθεί ότι οι υποστηρικτές της παραδοσιακής τάσης δεν περιορίζουν την ερμηνεία τους περί γεωμετρικής άλγεβρας αποκλειστικά στα ευκλείδεια έργα που έχουν προαναφερθεί, αλλά με βάση αυτή ερμηνεύουν όλη την αρχαία μαθηματική παράδοση. Ωστόσο, η διαμάχη που ξέσπασε επικεντρώθηκε κυρίως στην περίπτωση των *Στοιχείων* και των *Δεδομένων* του Ευκλείδη.

ότι καμία από τις προαναφερθείσες θέσεις δεν αποτελεί τεκμηριωμένο γεγονός της ιστορίας των αρχαίων μαθηματικών. Δεν υπάρχουν στοιχεία που να επιβεβαιώνουν τη μεταφορά μαθηματικών γνώσεων από τη Μεσοποταμία στην Ελλάδα κατά τον 5^{ο} αιώνα, ενώ ο υποτιθέμενος αλγεβρικός χαρακτήρας των βαβυλωνιακών μαθηματικών αποτελεί με τη σειρά του μία -μεταξύ αρκετών άλλων- ερμηνευτική πρόταση για ορισμένους αλγόριθμους, σύμφωνα με τους οποίους έχουν συνταχθεί κάποιοι αριθμητικοί πίνακες σφηνοειδούς γραφής. Τέλος, το ζήτημα της ανακάλυψης της ασυμμετρίας, των συνεπειών της και των δυσκολιών που έφερε στα ελληνικά μαθηματικά δεν έχει αποσαφηνιστεί, αλλά απασχολεί ακόμα τους ιστορικούς των μαθηματικών[14].

Η μεθοδολογική προσέγγιση των υπερασπιστών της γεωμετρικής άλγεβρας καθιερώθηκε για έναν αιώνα, ώσπου τελικά δέχτηκε την κριτική. Τόσο η ιστορικά ατεκμηρίωτη βάση της παραδοσιακής άποψης, όσο και η μεθοδολογικά απαράδεκτη εκ μέρους της ανάγνωση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, προκάλεσαν τη γενικότερη αμφισβήτηση και την κατακραυγή της δεύτερης τάσης που αντιπροσωπεύει τη νέα ιστορία των μαθηματικών. Η γεωμετρική άλγεβρα χαρακτηρίστηκε ως «*ένα τερατώδες, υβριδικό δημιούργημα, μια αυτοαντίφαση, μια λογική αδυνατότητα... μια ιστορική αδυνατότητα*»[15].

Οι εκπρόσωποι της νέας ιστορίας των μαθηματικών προέβαλαν ενστάσεις ειδικά για το θέμα της γεωμετρικής άλγεβρας, αλλά και διατύπωσαν γενικότερα αιτήματα αναθεώρησης της ήδη υπάρχουσας ιστοριογραφίας. Συγκεκριμένα, επιλέγοντας κάποιος να πορευτεί προς την κατεύθυνση της γεωμετρικής άλγεβρας και να ερμηνεύσει ορισμένα κομμάτια των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών ως αλγεβρικούς συλλογισμούς που εμφανίζονται με γεωμετρικό ένδυμα σημαίνει ότι διαχωρίζει τη μαθηματική μορφή από το μαθηματικό περιεχόμενο. Θεωρεί ότι το ένα είναι εντελώς ανεξάρτητο από το άλλο, καθώς η μορφή μπορεί να μεταλλάσσεται, αλλά το περιεχόμενο να παραμένει άθικτο ανά τους αιώνες. Η διάκριση μορφής-περιεχομένου είναι ακριβώς εκείνη που επιτρέπει στον σύγχρονο μαθηματικό να μελετήσει τα μαθηματικά του παρελθόντος και να γράψει την ιστορία τους. Όντας ο

[14] Πιθανολογείται ότι η ανακάλυψη της ασυμμετρίας έγινε στην περίπτωση της πλευράς και της διαγωνίου ενός τετραγώνου. Όμως, δεν είναι σύμφωνοι όλοι οι ιστορικοί, καθώς η ασυμμετρία ενδέχεται να είχε διαπιστωθεί κατά τη μελέτη των ιδιοτήτων του κανονικού πενταγώνου, όπου η πλευρά και η διαγώνιος είναι επίσης ασύμμετρες. Πάντως, οι μελετητές τείνουν να συγκλίνουν ομόφωνα στην άποψη ότι η ασυμμετρία ανακαλύφθηκε στη σχολή των Πυθαγορείων.

[15] Unguru, S., *έ.α.*, σ. 77.

ίδιος σε πλεονεκτική θέση έχει τη δυνατότητα να αναγνωρίσει το ίδιο περιεχόμενο, την ίδια αμετάβλητη δομή που φέρουν διαφορετικά κείμενα διαφορετικών εποχών και, στη συνέχεια, να δώσει απαντήσεις σε ερωτήματα του τύπου «*Ποιος ανακάλυψε την άλγεβρα;*» ή να εκφέρει κρίσεις, όπως «*η γεωμετρική άλγεβρα* (ενν. *των Ελλήνων*) *είναι η συνέχεια της βαβυλωνιακής άλγεβρας*»[16].

Η ερμηνευτική προσέγγιση της γεωμετρικής άλγεβρας συνεπάγεται επιπλέον την ταύτιση των γεωμετρικών προτάσεων των *Στοιχείων* και των *Δεδομένων* με τον σύγχρονο αλγεβρικό συλλογισμό. Ο υποστηρικτής της γεωμετρικής άλγεβρας πραγματεύεται τα διάφορα μαθηματικά ιδιώματα που εκφράζουν την ίδια μαθηματική έννοια ως ισοδύναμα μεταξύ τους. Ωστόσο, η αντίληψη αυτή μας φέρνει αντιμέτωπους με ένα ακόμη δυσάρεστο αποτέλεσμα που θίγει τον ρόλο της ιστορίας των μαθηματικών, αφού, όπως παρατηρεί ο Sabetai Unguru, «*η ανάπτυξη των μαθηματικών γίνεται (σχεδόν) η αποκλειστική ανάπτυξη της μαθηματικής μορφής, η αναζήτηση του 'σωστού' τύπου γλώσσας, για να εκφράσει τις καθολικές 'αλήθειες' που υπήρχαν εκεί και γίνονταν πάντα αντιληπτές*»[17]. Είναι εύλογο ότι αυτή η προσέγγιση υποβιβάζει τη λειτουργία της ιστορίας της επιστήμης, εφόσον δεν της αφήνει πολλά περιθώρια δράσης.

Προσδίδοντας μαθηματική ισοδυναμία στα διάφορα μορφώματα που επινοεί κάθε εποχή, για να εκφράσει την ίδια αιώνια μαθηματική ιδέα, δεν έπεται αναγκαστικά και η πρόσληψη της ιστορικής ισοδυναμίας. Η παραδοσιακή προσέγγιση της γεωμετρικής άλγεβρας δε μπορεί να υποστηρίξει και να θεμελιώσει την ιστορική επάρκεια των συμπερασμάτων της. Ο σύγχρονος μαθηματικός ενδέχεται να προσεγγίζει τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά ερμηνεύοντάς τα με αλγεβρικό τρόπο. Ωστόσο, αυτή η μεθοδολογική προσέγγιση δεν προεξοφλεί ότι οι αρχαίοι μαθηματικοί σκέφτονταν ως αλγεβριστές. Αν σήμερα δούμε πίσω από μια ευκλείδεια ή μια απολλώνεια πρόταση μια δευτεροβάθμια ή τετάρτου βαθμού εξίσωση, συνιστά αυτή η ανάγνωση επαρκές στοιχείο, για να συμπεράνουμε ότι πράγματι αυτό σκεφτόταν ο Ευκλείδης ή ο Απολλώνιος, όταν τη διατύπωναν και την αποδείκνυαν; Μια τέτοια εκτίμηση θα ήταν ιστορικά απαράδεκτη, εφόσον δεν είναι δυνατόν να τεκμηριωθεί, μέσω της ανάλυσης των κειμένων. Οι αποδείξεις των προτάσεων των *Στοιχείων*, αλλά και γενικότερα της αρχαίας ελληνικής γεωμετρίας, σχετίζονται προφανώς με τον γεωμετρικό χώρο, αναφέρονται σε γεωμετρικά αντικείμενα και

[16] Van der Waerden, *έ.α*, σ. 132.
[17] Unguru, *έ.α.*, σ. 87.

διέπονται αποκλειστικά από γεωμετρικά συλλογιστικά βήματα. Δεν υπάρχουν σύμβολα ούτε αλγεβρικός τρόπος κατανόησης και αντιμετώπισης των προβλημάτων. Ο αρχαίος γεωμέτρης έχει πάντα μπροστά του ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, ένα συγκεκριμένο σχήμα και μια συγκεκριμένη γλώσσα. Ακόμα και αν η μέθοδος που προτείνει είναι γενική, ουδέποτε την εφαρμόζει σε γενικό, αφηρημένο επίπεδο, αλλά πάντα στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζει. Αυτός είναι ο τρόπος, με τον οποίο εργάζεται. Δε χρησιμοποιεί συμβολισμούς ούτε πραγματοποιεί αλγεβρικές πράξεις πάνω σε αυτούς. Επομένως, το να ισχυρίζεται κάποιος ότι οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες διακατέχονται από μια αλγεβρική νοοτροπία και να ανακαλύπτει στα έργα τους εξισώσεις, είναι όχι μόνο αυθαίρετο, αλλά και ιστορικά αδύνατο.

2. Ο μίτος της Αριάδνης

Επιχειρώντας έναν απολογισμό των συνεπειών που απορρέουν από τη διαμάχη για τη γεωμετρική άλγεβρα η καταγραφή των ιστοριογραφικών προεκτάσεων του θέματος θα προσλάμβανε αναμφισβήτητα εξέχουσα θέση. Οι διαφωνίες προέκυψαν αρχικά με αφορμή την καθιερωμένη ανάγνωση ενός συγκεκριμένου κεφαλαίου των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Ωστόσο, τα βαθύτερα αίτια των αντιπαραθέσεων θα πρέπει να αναζητηθούν στους διαφορετικούς τρόπους αντίληψης του αντικειμένου της ιστορίας των αρχαίων μαθηματικών, στα διαφορετικά μεθοδολογικά πλαίσια που υιοθετούνται για την ανασυγκρότησή της.

Η εξηγητική ικανότητα μιας ερμηνευτικής προσέγγισης δε συνιστά αποκλειστικό κριτήριο για την αποδοχή της, ιδίως όταν αναφερόμαστε στην ιστορία των επιστημών του παρελθόντος. Η παραδοσιακή προσέγγιση των μαθηματικών πέτυχε πράγματι τον εξηγητικό της στόχο θυσιάζοντας όμως την ιστορική πραγματικότητα. Έχοντας αντιληφθεί την ιστορία των μαθηματικών ως την απόπειρα εξακρίβωσης της ταυτότητας των μαθηματικών μορφών που εμφανίζονται ανά τους αιώνες εφαρμόζοντας ως εκμαγείο τις σύγχρονες μαθηματικές γνώσεις και τα σύγχρονα μαθηματικά ιδιώματα εξασφάλισε μια ιστορικά διαστρεβλωμένη εικόνα των αρχαίων μαθηματικών. Απαιτώντας άμεσα και έμμεσα τη συγγραφή της ιστορίας τους αποκλειστικά από ανθρώπους που έχουν αποκτήσει οικειότητα και ευελιξία με τις σύγχρονες μαθηματικές γλώσσες και ορολογίες παρέχοντάς τους ταυτόχρονα το δικαίωμα χρησιμοποίησής τους στον ρόλο των βασικών προτύπων έφτασε στο έσχατο άκρο του αναχρονισμού. Εντοπίζοντας την ανακάλυψη του αλγεβρικού τρόπου σκέψης αιώνες πριν αυτή συμβεί, όχι μόνο παρερμήνευσε πολλές σελίδες των

αρχαίων μαθηματικών, αλλά και, αντιστρόφως, προσέβαλε τη συμβολή μεταγενέστερων ανθρώπων που πραγματικά συνεισέφεραν στη γέννηση του νέου, αφηρημένου, συμβολικά διατυπωμένου αλγεβρικού συλλογισμού.

Όταν το 1591 ο Viète δημοσίευε το σύγγραμμά του *Εισαγωγή στην αναλυτική τέχνη*, διευκρίνιζε ότι το ερευνητικό του πρόγραμμα επικεντρωνόταν στην εισαγωγή μιας νέας μορφής *αναλυτικής τέχνης* που θα διέπεται από μια νέα ορολογία και θα έχει ως στόχο της να μην αφήσει κανένα πρόβλημα άλυτο: "*Nullum non probleme solvere*"[18]. Όταν το 1637 ο Descartes ξεκινούσε τη *Γεωμετρία* του, επεσήμαινε ότι όλα τα γεωμετρικά προβλήματα θα μπορούσαν να αναχθούν στους όρους αυτής της αναλυτικής μεθόδου[19]. Αλλά και ο Fermat καταπιάστηκε στα μαθηματικά έργα του με τη διαμόρφωση και επεξεργασία των κεντρικών αρχών της ανάλυσης[20]. Γενικότερα, το αίτημα της δημιουργίας μιας γενικής αναλυτικής τέχνης για την επίλυση όλων των μαθηματικών προβλημάτων ήταν διάχυτο κατά τον 16ο και 17ο αιώνα. Αντίθετα, κατά την ελληνική Αρχαιότητα συναντάμε μια διαφοροποιημένη κατάσταση, με τα μαθηματικά να μη συνιστούν ένα είδος τέχνης, αλλά να νοούνται ως επιστήμη. Η πολυπόθητη για τους μαθηματικούς των νεότερων χρόνων ανάλυση διαδραμάτιζε για τον αρχαίο Έλληνα μαθηματικό τον ρόλο ενός ικανού ευρετικού μέσου επίλυσης δύσκολων προβλημάτων. Ο τρόπος της ανακάλυψης, η αρχαία μαθηματική απόδειξη, πορευόταν σύμφωνα με τη διαδικασία της σύνθεσης. Σίγουρα δεν είναι τυχαίο ότι σχεδόν όλες οι διασωζόμενες αρχαιοελληνικές αποδείξεις είναι συνθετικές, χωρίς διακριτά ίχνη της «*ανάπαλιν λύσεως*»[21].

---

[18] Viète, François*, In artem analyticen isagoge*, Τουρ 1591, βλ. παράρτημα του Jacob Klein στο *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, μτφρ. Eva Brann, Κέμπριτζ, Μασσαχουσσέτη: MIT Press 1968, σσ. 315-353.

[19] Descartes, Réné, *Discours de la methode pour bien conduire la raison et chercher la verité dans les sciences; plus la dioptrique, les meteors et la geometrie qui sont des essais de cette methode*, Leiden 1637.

[20] Ο Pierre Fermat πιθανώς έγραψε τα έργα του *Ad locos planos et solidos isagoge* και *Appendix ad isagogen topicam, continens solutionem problematum solidorum per locos* το 1636.

[21] Η ανάλυση και η σύνθεση έχουν οριστεί από τον Πάππο στο 7ο βιβλίο της *Μαθηματικής Συναγωγής* του και από έναν σχολιαστή του Ευκλείδη. Σε γενικές γραμμές, κατά την ανάλυση, θεωρούμε το ζητούμενο ως ισχύον, το αναλύουμε και το διαχωρίζουμε σε στάδια, μέχρι να βρούμε στο τέλος κάτι το οποίο είναι γνωστό ότι αληθεύει ή ότι μπορεί να κατασκευαστεί. Κατά τη σύνθεση, φτάνουμε στην κατασκευή του ζητουμένου, για παράδειγμα, ξεκινάμε από κάποιες αρχές και προχωράμε βαθμιαία προς την κατασκευή και απόδειξη του ζητουμένου. Η ανάλυση είναι η «*ανάπαλιν λύσις*», δηλαδή η εργασία κατά την αντίστροφη πορεία.

Παράλληλα, οι μαθηματικοί του 16ου και 17ου αιώνα είχαν συνειδητοποιήσει ότι η ισχύς της αναλυτικής μεθόδου ήταν εξαρτημένη από το κατά πόσο εκείνη χρησιμοποιούσε τη συμβολική άλγεβρα. Όχι μόνο η ανακάλυψη, αλλά ακόμα και η επίγνωση της άμεσης ανάγκης επινόησης ενός μαθηματικού συμβολισμού, πραγματοποιήθηκε, όταν οι συνθήκες ήταν κατάλληλες, όταν το διανοητικό πλαίσιο, στο οποίο εργάζονταν οι άνθρωποι των νεότερων χρόνων επέτρεπε πλέον να γίνονται αντιληπτοί οι αριθμοί ως αφηρημένες οντότητες. Αυτό το χαρακτηριστικό δε συναντάται στην Αρχαιότητα, όπου ο αριθμός θεωρούνταν ως «*αριθμός πραγμάτων*». Ο Viète είχε επηρεαστεί βέβαια από τα μαθηματικά επιτεύγματα της αρχαίας κληρονομιάς, ωστόσο, κατόρθωσε να προσδώσει μια νέα εννοιολογική διάσταση στον όρο «*αριθμός*». Αναφερόμενος σε ένα αριθμητικό στοιχείο, π.χ. το 2, δεν αναφερόταν σε δύο συγκεκριμένες μονάδες, όπως ο Ευκλείδης, αλλά σε μια ποσοτική έννοια με αφηρημένο χαρακτήρα, τη δυαδικότητα. Όπως ισχυρίζεται ο Jacob Klein, οι δύο αυτές θεωρήσεις διαφέρουν στη σύλληψη και στην *αποβλεπτικότητα*, δηλαδή στον τρόπο, με τον οποίο τόσο η σκέψη όσο και η γλώσσα υποδηλώνουν τα αντικείμενα[22].

Η αρχαιοελληνική και η νεότερη μαθηματική σκέψη αποτυπώνουν δύο διαφορετικούς κόσμους. Αναμφίβολα, τα επιτεύγματα του αρχαίου μαθηματικού δε θα άφηναν ανεπηρέαστο τον μαθηματικό των νεότερων χρόνων. Είναι σημαντικό όμως να γίνει κατανοητό πως βρισκόμαστε αντιμέτωποι με δύο επιστήμονες που δρουν ξεχωριστά σε δύο διαφορετικές εποχές. Καθένας από αυτούς είναι κληρονόμος μιας συγκεκριμένης μαθηματικής παράδοσης που κουβαλά τις επιτυχίες και τις αποτυχίες της, αντιλαμβάνεται με έναν ιδιαίτερο τρόπο το αντικείμενό του, έχει θέσει ορισμένους στόχους και κατέχει συγκεκριμένα μέσα για την επίτευξή τους. Όσο παράλογο θα μας φαινόταν να φανταστούμε τον Ευκλείδη να εργάζεται στη θέση του Viète, άλλο τόσο παράλογο θα ήταν να πραγματευτούμε το έργο του ως ένα φυσικό αντικείμενο, με τα πρότυπα ενός σύγχρονου αλγεβρικού εγχειριδίου. Η παραδοσιακή προσέγγιση επιχείρησε να γράψει την ιστορία των αρχαίων μαθηματικών με τον ίδιο τρόπο που ένα ξένο σώμα εισχωρεί σε έναν ζωντανό οργανισμό. Μοιραία η ιστορία παραχαράσσεται, όπως μοιραία ο οργανισμός μολύνεται.

Ακριβώς εξαιτίας των τραγικών για την ιστορία των μαθηματικών συνεπειών της ερμηνευτικής προσέγγισης της γεωμετρικής άλγεβρας, η ρήξη της παραδοσιακής

---

[22] Klein, Jacob, *έ.α.*

με τη νέα ιστορία των αρχαίων μαθηματικών πρέπει να ειδωθεί ως το αποτέλεσμα του αιτήματος για μια ριζική αναθεώρηση της ιστοριογραφίας των αρχαίων μαθηματικών και όχι απλά για ορισμένους επιμέρους μετασχηματισμούς της. Όπως δηλώνει ο Unguru:

«*Όντας έτσι περιχαρακωμένη, η παραδοσιακή ερμηνεία της ιστορίας των αρχαίων μαθηματικών πρέπει να παραχωρήσει τη θέση της σε μια νέα, περισσότερο ευμενή και ιστορικά ευαίσθητη ερμηνεία, απλώς γιατί η παλιά ερμηνεία έχει ξεπεραστεί και τώρα είναι ένα εμπόδιο στο δρόμο προς μια εκλεπτυσμένη ιστορική κατανόηση των αρχαίων μαθηματικών κειμένων. Σε τελευταία ανάλυση, όπως οι επιστημονικές θεωρίες, οι ιστορικές θεωρίες είναι δοκιμαστικές προσπάθειες για να δοθεί νόημα στο παρελθόν˙ αυτές είναι προσωρινές από τη φύση τους και, συνεπώς, οι συγγραφείς τους δε θα έπρεπε να ονειροπολούν μάταια την προικοδότησή τους με θεϊκή αιώνια ζωή και άσπιλη μακαριότητα*»[23].

Μέσω της ρήξης που συντελέστηκε στα μέσα της δεκαετίας 1970-’80, ξεπρόβαλε μια εντελώς νέα προοπτική θέασης των πραγμάτων, σημειώθηκε μια στροφή στον τρόπο, με τον οποίο ο ιστορικός ‘διαβάζει’ την επιστήμη του παρελθόντος. Ένα αρχαίο μαθηματικό κείμενο δεν αποτελεί κειμήλιο αποκομμένο από τον δημιουργό και την εποχή του. Ο συγγραφέας ενός αρχαίου γεωμετρικού, αστρονομικού ή οπτικού κειμένου αποτελεί πάντα μέλος μιας επιστημονικής κοινότητας με ιδιότυπα χαρακτηριστικά. Φέρει μια συγκεκριμένη νοοτροπία και πρακτική, σημαδεύεται από τα ιδιαίτερα γνωρίσματα της εποχής του. Γι’ αυτό και η ερμηνεία των αρχαίων μαθηματικών αρμόζει να πραγματοποιείται ακριβώς στο μέτρο των καταστατικών στοιχείων της Αρχαιότητας και όχι της νεότερης ή της σύγχρονης εποχής.

Όπως έλεγε ο Αριστοτέλης στην *Ποιητική* του, «*ἡ μέν γὰρ ποίησις μᾶλλον τὰ καθόλου, ἡ δ' ἱστορία τὰ καθ' ἕκαστον λέγει. ἔστιν δέ καθόλου μέν,*
τῷ ποίῳ τὰ ποῖα ἄττα συμβαίνει λέγειν ἢ πράττειν κατὰ τὸ εἰκὸς ἢ τὸ ἀναγκαῖον, οὗ στοχάζεται ἡ ποίησις ὀνόματα ἐπιτιθεμένη· τὸ δέ καθ' ἕκαστον,

[23] Unguru, S., “History of Ancient Mathematics: Some Reflections on the State of the Art”, *Isis 70* (No 254) (1979), σ. 563. Για την ελληνική απόδοση βλ. «Ιστορία των αρχαίων μαθηματικών: Ορισμένες σκέψεις για την τρέχουσα κατάσταση του κλάδου», μετάφρ. Π. Μπατσούλη στο *Διαμάχες για την ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών*, επιμέλ. Γ. Χριστιανίδης, Δ. Διαλέτης, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2006.

τί Ἀλκιβιάδης ἔπραξεν ἢ τί ἔπαθεν»[24]. Για μια όσο το δυνατόν έγκυρη ανασυγκρότηση της ιστορίας των μαθηματικών, ο ιστορικός επιβάλλεται να αποφεύγει την εμμονή στην αποκάλυψη των λογικών δομών που διέπουν μια θεωρία, δηλαδή του 'αντικειμενικού' περιεχομένου των μαθηματικών συγγραμμάτων παραγνωρίζοντας την ιδιοσυγκρασιακή πλευρά, τη συγκεκριμένη κουλτούρα, μέσα στην οποία εμφανίστηκαν. Με τον τρόπο αυτό, η ιστορία προσλαμβάνει μια άλλη διάσταση και είναι ικανή να συμβάλει καθοριστικά στη διαμόρφωση μιας αξιόπιστης εικόνας των αρχαίων επιστημών, απαλλαγμένης από δόγματα και μύθους. Όπως πολύ χαρακτηριστικά δηλώνει ο Farrington:

«*Η ιστορία είναι βασική επιστήμη και τούτο γιατί δεν υπάρχει ανθρώπινη γνώση που να μη χάσει τον επιστημονικό της χαρακτήρα, όταν οι άνθρωποι ξεχνάνε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες δημιουργήθηκε αυτή, τα προβλήματα που αντιμετωπίζει και το σκοπό της για τον οποίο δημιουργήθηκε και που καλείται να εξυπηρετήσει.Σε μεγάλο βαθμό ο μυστικισμός και η πρόληψη θαυμασμού που υπάρχει για τους μορφωμένους ανθρώπους πηγάζουν από τη γνώση που ξέκοψε από τις ιστορικές της ρίζες*»[25].

Παρόλες τις εξαντλητικές αντιπαραθέσεις, στις οποίες οδήγησε η ερμηνεία περί γεωμετρικής άλγεβρας, δε θα ήταν αδύνατο να ειδωθεί η θετική πλευρά αυτής της περιπέτειας. Η ιστορία των επιστημών προφανώς βγαίνει ενδυναμωμένη, εφόσον οι άνθρωποι που την ερευνούν αποκόμισαν χρήσιμα μεθοδολογικά διδάγματα. Η γεωμετρική άλγεβρα υποστηρίχτηκε από ανθρώπους, τα έργα των οποίων αποτελούν σημεία-σταθμούς στην ιστορία των αρχαίων μαθηματικών. Θα ήταν μεγάλη αγνωμοσύνη, αν εστιάζοντας την προσοχή μας σε ορισμένα 'στραβοπατήματά' τους ξεχνούσαμε την τεράστια συμβολή τους. Ακόμα και τα λάθη τους συνεισέφεραν τα μέγιστα για την εκλέπτυνση του κλάδου της ιστορίας των επιστημών αποτελώντας πολύτιμους οδηγούς για όλους τους ιστορικούς και, κυρίως, για όσους βρίσκονται στα πρώτα τους βήματα.

Το κυριότερο όφελος για τον ιστορικό των αρχαίων επιστημών είναι ότι μέσα από τη διαμάχη για τη γεωμετρική άλγεβρα έχει την ευκαιρία να διαπιστώσει τα θλιβερά αποτελέσματα που φέρει μια αποσπασματική ανάγνωση των διαφόρων επεισοδίων μιας αρχαίας επιστήμης, στην προκειμένη περίπτωση των αρχαίων μαθηματικών. Η πρακτική της απομόνωσης ενός αρχαίου μαθηματικού κειμένου και,

---

[24] Αριστοτέλους, *Περί ποιητικής*, 1451*b*6-11.
[25] Farrington, B., *Η επιστήμη στην αρχαία Ελλάδα*, μτφρ. Ν. Ραΐση, Κάλβος 1998, σ. 365.

γενικότερα, μιας αρχαίας μαθηματικής συμβολής από το ευρύτερο πλαίσιο της εποχής της, η μελέτη και αξιολόγησή της κάτω από τον μεγεθυντικό φακό των σύγχρονων μαθηματικών ή άλλων επιτευγμάτων αποφέρει μια απατηλή, ιστορικά επισφαλή εικόνα της επιστήμης. Συνιστά στοιχείο αναχρονισμού, ίσως τον χειρότερο εφιάλτη της ιστορίας των επιστημών που, δυστυχώς, όπως θα δούμε, αφήνει τα σημάδια του και στην ιστοριογραφία της αρχαίας μαθηματικής οπτικής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΟΥ ΙΣΤΟΡΙΟΓΡΑΦΙΚΟΥ ΤΟΠΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ
Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ, ΤΑ ΟΠΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΑ ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΑ

Α. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΤΙΣ ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ

Ο σύγχρονος μελετητής της ευκλείδειας γεωμετρικής οπτικής καλείται να αντιμετωπίσει σοβαρά προβλήματα, πριν ακόμα προλάβει να αποκτήσει έστω μια αμυδρή εικόνα του αντικειμένου. Εξαρχής βρίσκεται σε μια ιδιαίτερα άβολη θέση, εφόσον η επιλογή εξέτασης του συγκεκριμένου επιστημονικού πεδίου συνεπάγεται αναπόφευκτα την ενασχόληση με κειμήλια της Αρχαιότητας που έχουν αμφισβητηθεί κατά πολύ.

Πιο συγκεκριμένα, για τα φερόμενα ως ευκλείδεια οπτικά κείμενα, δηλαδή τα *Οπτικά* και τα *Κατοπτρικά*, η ταυτότητα, η αυθεντικότητα και η αλληλεξάρτησή τους αποτελούν ζητήματα αμφιλεγόμενα. Μια ματιά στο τοπίο της ιστοριογραφίας της αρχαίας γεωμετρικής οπτικής αποκαλύπτει ότι, ενώ ήδη από την εποχή της Αναγέννησης είχαν εκφραστεί αμφιβολίες ως προς τα παραπάνω ζητήματα, το θέμα δεν έχει ακόμη τακτοποιηθεί οριστικά. Παρόλο που κατά τα τέλη του 19^{ου} αιώνα τα υπό αμφισβήτηση ευκλείδεια οπτικά έργα υπέστησαν συγκεκριμένης οργάνωσης υπαγορεύοντας με αυτόν τον τρόπο την αντίστοιχη ευκλείδεια συμβολή στην ιστορία της γεωμετρικής οπτικής, τα ερωτήματα εξακολουθούν όχι μόνο να υφίστανται, αλλά να πολλαπλασιάζονται.

Η κατάσταση εμφανίζεται πιο κρίσιμη, εφόσον τα τελευταία χρόνια η επικρατούσα οργάνωση των οπτικών κειμένων που σχετίζονται με τον Ευκλείδη έχει δεχτεί αυστηρή κριτική. Είναι σαφές ότι η αμφισβήτηση μιας θεώρησης που έχει παραμείνει αδιαφιλονίκητη για έναν αιώνα και έχει διαμορφώσει απόψεις που χαρακτηρίζονται πια ως παραδοσιακές δημιουργεί αμηχανία και, συνήθως, επιφέρει σημαντικές αναπροσαρμογές. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το πρόβλημα δεν εστιάζεται πλέον μεμονωμένα στην απόδοση ή όχι ενός οπτικού συγγράμματος στον Ευκλείδη. Αντίθετα, λαμβάνει μεγαλύτερες διαστάσεις που αφορούν στο κατά πόσο η παραπάνω ενέργεια θα επηρέαζε τις αντιλήψεις που έχουν καθιερωθεί, για όσους ασχολήθηκαν με την οπτική ύστερα από τον Ευκλείδη, εφόσον εκείνοι σχετίζονται με αυτόν. Μια πιθανή αναθεώρηση της ευκλείδειας συνεισφοράς στη γεωμετρική οπτική, έτσι όπως έχει καθοριστεί από την οργάνωση των οπτικών κειμένων που συντελέστηκε τον 19^{ο} αιώνα, θα ήταν δυνατόν να επιφέρει αναπροσαρμογές σε

θέματα της ιστορίας του κλάδου, τα οποία έχουν γίνει μεν αποδεκτά, αλλά θα αποδεικνύονταν στο εξής ως απλές συμβάσεις.

Οι διαστάσεις που έχει λάβει το θέμα προκαλούν ανησυχία, καθώς η εγκυρότητα κάποιων παραδοχών μας, σχετικά με τη γεωμετρική οπτική, φαίνεται να στηρίζεται σε αβέβαιες βάσεις. Ακόμα και η απλή πιθανότητα μερικές παγιωμένες απόψεις να μην ισχύουν, καθιστά επιτακτική την άμεση επανεξέτασή τους και, ίσως, τον περαιτέρω επαναπροσδιορισμό τους. Δημιουργείται η εντύπωση ότι το αρχικό πρόβλημα της οργάνωσης των ευκλείδειων οπτικών κειμένων αποτέλεσε την αφορμή, για να έρθουν στην επιφάνεια σοβαρότατα ζητήματα ιστοριογραφικού ενδιαφέροντος. Η αμφισβήτηση της ισχύουσας οργάνωσης των εν λόγω οπτικών πηγών ήταν ικανή να προσδώσει στο αρχικό πρόβλημα της κειμενικής απόδοσης επιπλέον διαστάσεις που αγγίζουν τα μεθοδολογικά και ερμηνευτικά κριτήρια, με τα οποία εκείνη πραγματοποιήθηκε.

Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν εκτενέστερα τα στοιχεία, στα οποία συνίσταται η οργάνωση που ανάγεται στον 19ο αιώνα. Θα προβληθούν οι απόψεις της για την ταυτότητα των συγκεκριμένων οπτικών κειμένων, τα κριτήρια, σύμφωνα με τα οποία ανέπτυξε την επιχειρηματολογία της, αλλά και τα σημεία, στα οποία υπέστη κριτική. Φυσικά, θα εκτεθούν τα ενδιαφέροντα ιστοριογραφικά ερωτήματα που προκύπτουν από αυτή την κριτική. Για λόγους τάξης και μεγαλύτερης σαφήνειας, θα εξεταστεί αρχικά η περίπτωση των *Οπτικών* και, στη συνέχεια, εκείνη των *Κατοπτρικών*.

1. Η περίπτωση των Οπτικών

α. Η οργάνωση των δύο διαφορετικών μορφών κειμένου των Οπτικών

Σε αντίθεση με οπτικά συγγράμματα αρχαίων συγγραφέων, στα οποία η πρόσβαση δεν είναι εφικτή, λόγω της απώλειάς τους, ή πλήρης, λόγω της ελλιπούς μορφής τους, το ελληνικό κείμενο των *Οπτικών* του Ευκλείδη έχει περιέλθει υπό δύο διαφορετικές μορφές. Η πρώτη μορφή παρουσιάζεται από ένα χειρόγραφο του Βατικανού που χρονολογείται στον 10ο αιώνα[1]. Κατά τον 16ο αιώνα, εκδόθηκε μια πληθώρα λατινικών μεταφράσεών του, με πρώτη εκείνη του Bartolomeo Zamberti, το έτος 1505, στη Βιέννη[2]. Ο Zamberti εξέδωσε το πλήρες κείμενο μαζί με τα *Στοιχεία*, τα *Φαινόμενα* και τα *Δεδομένα*. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι η συγκεκριμένη

[1] Cod. gr. 204.

[2] Για έναν αναλυτικό κατάλογο των εκδόσεων των *Οπτικών*, της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και των *Κατοπτρικών* που πραγματοποιήθηκαν από το 1501, μέχρι το 1895, βλ. Ver Eecke, Paul, *Euclide: L' Optique et la Catoptrique*, Παρίσι 1959, σσ. XXXVI-XLVII.

μορφή κειμένου των *Οπτικών* συγκαταλεγόταν μεταξύ των ευκλείδειων διασωζόμενων πραγματειών. Ωστόσο, η αυθεντικότητα του συγκεκριμένου κειμένου ήταν αμφίβολη. Χαρακτηριστικά, ο David Gregory εκδίδοντας το 1703 τα *Οπτικά* και τα *Κατοπτρικά*[3] υποστήριξε ότι αυτά δε θα μπορούσαν να είναι συγγράμματα του Ευκλείδη. Οι λόγοι αυτής της αμφισβήτησης βασίζονταν κυρίως στο ότι τα συγκεκριμένα οπτικά κείμενα παρουσίαζαν αδυναμίες ως προς τη γεωμετρική επεξεργασία των προτάσεων, κάτι που δε θα ανέμενε κανείς από τον συγγραφέα των *Στοιχείων*[4].

Κατά τα τέλη του 19ου αιώνα, ο Δανός φιλόλογος J.L. Heiberg ανακάλυψε μια εναλλακτική, άγνωστη μέχρι τότε, έκδοση των *Οπτικών*, η οποία αποτελεί τη δεύτερη μορφή κειμένου που έχουμε στη διάθεσή μας σήμερα. Η έκδοση αυτή αντιπροσωπεύεται αρχικά από ένα χειρόγραφο της Βιέννης του 12ου αιώνα[5], από ένα χειρόγραφο της Οξφόρδης του 13ου αιώνα[6], από αντίγραφά τους, καθώς επίσης από μια λατινική μετάφραση του 12ου αιώνα, η οποία διασώζεται σε πολλά αντίγραφα[7]. Το 1895 ο Heiberg πραγματοποίησε την κριτική έκδοση και των δύο μορφών κειμένου των *Οπτικών* με τις λατινικές μεταφράσεις τους[8]. Όμως, τόσο στη μελέτη του *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*[9], όσο και στα *Prolegomena critica* της κριτικής του έκδοσης, ισχυρίστηκε ότι η έκδοση που παρουσιάζεται από τον κώδικα της Βιέννης αποτελεί τον πρωταρχικό μας μάρτυρα και πρέπει να αποδοθεί στον Ευκλείδη, ενώ η έκδοση που παρουσιάζεται από τον κώδικα του Βατικανού είναι μια ύστερη Α*ναθεωρημένη Έκδοση* των ευκλείδειων *Οπτικών* που πρέπει να αποδοθεί στον Θέωνα τον Αλεξανδρινό. Η βάση του συλλογισμού του Heiberg ήταν ότι το κείμενο του κώδικα του Βατικανού, δηλαδή η πρώτη μορφή κειμένου, παρουσιάζει ελαττώματα και λάθη που εκείνος ισχυριζόταν ότι δεν υπάρχουν στον κώδικα της Βιέννης. Έτσι, η απόδοση της δεύτερης μορφής κειμένου στον Ευκλείδη, η οποία, όπως υποστήριζε, επιδέχεται υψηλότερου επιπέδου αναγνώσεις, σε σχέση με την άλλη, θα ήταν ανάλογη του ονόματος του Ευκλείδη.

---

[3] *Euclidis quae supersunt omnia ex recensione Davidis Gregory M.D. Astronomiae Professoris Saviliani et R.S.S.*, Oxoniae 1703.
[4] Heiberg, J.L., *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*, Λειψία: Teubner 1882.
[5] Codex Vindobonensis XXXI, 13 (= philos. gr. 103. Lambrecius).
[6] Codex Bodleianus, Auct. F. 6. 23, bombycinus, seac. XIII.
[7] Cod. Dresd. Lat. D. b. 26, saec. XIV.
[8] Heiberg, J.L., *Euclidis Opera Omnia*, τόμ. 7, (*Euclidis Optica, Opticorum Recensio Theonis, Catoptrica, cum scholiis antiquis*), Λειψία: Teubner 1895.
[9] Heiberg J.L, *Litterargeschichtliche..., έ.α.*

β. Αποδοχή της οργάνωσης

Οι απόψεις του Heiberg υιοθετήθηκαν στις μετέπειτα μελέτες της ευκλείδειας γεωμετρικής οπτικής. Οι G. Ovio[10], H.E. Burton[11] και P. Ver Eecke[12] εξέδωσαν την ιταλική, την αγγλική και τη γαλλική μετάφραση, αντίστοιχα, των *Οπτικών* αποδεχόμενοι την οργάνωση του Δανού μελετητή. Επίσης, φιλόλογοι, ιστορικοί και άλλοι μελετητές, όπως οι A. Lejeune, C.D. Lindberg, G. Simon, A.M. Smith προέβησαν σε άκρως ενδιαφέρουσες αναλύσεις της ευκλείδειας οπτικής υιοθετώντας ως γνήσιο ευκλείδειο έργο αυτό που φέρει ο κώδικας της Βιέννης.

Συγκεκριμένα, ο A. Lejeune στο έργο του *Euclide et Ptolémée: Deux Stades de l' Optique Géométrique Grecque*[13] ήταν σύμφωνος με τη συγκεκριμένη οργάνωση κρίνοντας ότι το κείμενο που φέρει ο κώδικας της Βιέννης αποτελεί την αρχική έκδοση των *Οπτικών* του Ευκλείδη. Επιπλέον, είχε την πεποίθηση ότι το έργο αυτό προβάλλει μια ήδη καλώς αναπτυγμένη κατάσταση της οπτικής επιστήμης που προϋποθέτει, όπως τα *Στοιχεία*, κάποιους προκατόχους. Αντίθετα, η έκδοση που παρουσιάζεται από τον κώδικα του Βατικανού συνιστούσε για τον Lejeune την Α*ναθεωρημένη Έκδοση* των ευκλείδειων *Οπτικών*, υπό την επιμέλεια του Θέωνα του Αλεξανδρινού. Εύλογα προκύπτει το ερώτημα που αφορά στους λόγους που ώθησαν τον Θέωνα να επανεκδώσει, ύστερα από τόσους αιώνες, ένα έργο που, σύμφωνα με τον Lejeune, εκθέτει μια κατάσταση της οπτικής επιστήμης «*ήδη κατά πολύ ξεπερασμένη*»[14]. Η θέση του Lejeune εντοπίζεται έμμεσα, όταν ισχυρίζεται ότι, κατά τον 4^{ο} αιώνα μ.Χ., το έργο του Ευκλείδη «*ίσως ήταν ακόμα χρήσιμο από μια καθαρά εκπαιδευτική άποψη, αλλά, αντίθετα με τα Στοιχεία, δε μπορούσε πλέον να παρουσιάσει για τους ειδικούς του συγκεκριμένου θέματος, παρά ένα ιστορικό ενδιαφέρον*»[15].

Οι θέσεις του Lejeune, ως προς την οργάνωση των δύο μορφών κειμένου των *Οπτικών*, παρέμειναν σταθερές και το 1957, όταν δημοσίευσε τις έρευνές του πάνω στην αρχαία ελληνική κατοπτρική επιστήμη. Στη σχετική μονογραφία του

---

[10] Ovio, G., *L' Ottica di Euclide*, Μιλάνο 1918.

[11] Burton, H., "The *Optics* of Euclid", *Journal of the Optical Society of America 35* (1945): σσ. 357-372. Ο Burton μετέφρασε το κείμενο του κώδικα της Βιέννης. Αυτό σημαίνει ότι εκείνο θεωρούσε ως το αυθεντικό ευκλείδειο σύγγραμμα.

[12] Ver Eecke, Paul, *έ.α.* Ο Ver Eecke μετέφρασε τα κείμενα και των δύο κωδίκων, όμως στην εισαγωγή του τάσσεται υπέρ της οργάνωσης του Heiberg.

[13]Lejeune, A., *Euclide et Ptolémée: Deux Stades de l' Optique Géométrique Grecque*, Recueil de Travaux d' Histoire et de Philologie, 3e ser,, fasc. 31, Louvain 1948.

[14] "*...la Recension représente donc un état de la science depuis longtemps dépassé*", *ό.π.*, σ. 10.

[15] *ό.π.*, σ. 172.

Recherches sur la Catoptrique Grécque[16], μολονότι αφιερωμένη αποκλειστικά στη μελέτη των διασωζόμενων αρχαίων κατοπτρικών πραγματειών, δε μαρτυρούσε κανένα ίχνος αναθεώρησης των απόψεών του, ως προς την απόδοση των οπτικών κειμένων που φέρουν οι δύο κώδικες. Ο κώδικας της Βιέννης εξακολουθούσε να αποτελεί για τον Lejeune την πρωταρχική ευκλείδεια πραγματεία της οπτικής επιστήμης[17], ενώ ο κώδικας του Βατικανού τη μεταγενέστερη, «*χωρίς ενδιαφέρον*»[18] *Αναθεωρημένη Έκδοση* των ευκλείδειων *Οπτικών*, εκ μέρους του Θέωνα.

Επιπλέον, ο C.D. Lindberg σε υποσημείωση της εισαγωγής του *Theories of Vision from Al-Kindi to Kepler*[19], η οποία είναι αφιερωμένη σε μια σύντομη επισκόπηση των αρχαίων θεωριών όρασης, παρέπεμπε τους αναγνώστες που ενδιαφέρονται για το ζήτημα της αυθεντικότητας των *Οπτικών* στο *Litterargeschichtliche Studien über Euklid* του Heiberg. Ο ίδιος, όπως ήταν φυσικό στο περιορισμένο πλαίσιο μιας περιεκτικής ιστορικής εισαγωγής, δεν προέβη σε κάποια ανάλυση του συγκεκριμένου θέματος. Ωστόσο, φαίνεται ότι ενστερνιζόταν την οργάνωση του Heiberg, εφόσον, θέλοντας να εκθέσει τους εφτά θεμελιώδεις «όρους» των *Οπτικών*[20], τους παρέθεσε με τη μορφή που παρουσιάζονται στον κώδικα της Βιέννης[21].

Στα αξιώματα της ίδιας μορφής κειμένου παρέπεμπε και ο G. Simon στο έργο του υπό τον τίτλο *Le regard, l' être et l' apparence*[22]. Κατά τη συνέχεια της μελέτης του, εξιστορούσε το γεγονός της ανακάλυψης και ταύτισης του κώδικα της Βιέννης με το γνήσιο ευκλείδειο σύγγραμμα από τον Heiberg. Πάντως, ο Simon δε διατύπωνε κανένα σχόλιο, όσον αφορά στην οργάνωση των συγκεκριμένων οπτικών κειμένων[23].

γ. Ενστάσεις στην οργάνωση

Χάρη στις μελέτες όσων προαναφέρθηκαν, η ιστοριογραφία της αρχαίας γεωμετρικής οπτικής εμπλουτίστηκε με θαυμάσιες και άκρως ενδιαφέρουσες αναλύσεις της ευκλείδειας οπτικής. Ωστόσο, στο πλαίσιο αυτών των ερευνών, δεν

---

[16] Lejeune, A., *Recherches sur la Catoptrique Grecque*, Académie Royale de Belgiques, Classes des Lettres et des Sciences Morales et Politiques, Mémoires, τόμ. 2, Βρυξέλλες 1957.
[17] *ό.π.*, σ. 68.
[18] σ. 4.
[19] Lindberg, C.D., *Theories of Vision from Al-Kindi to Kepler*, University of Chicago Press 1976, υποσημ. 75, σ. 220.
[20] Οι εφτά «όροι» των *Οπτικών* θα μας απασχολήσουν στο επόμενο κεφάλαιο.
[21] Lindberg, C.D., *έ.α.*, σ. 12.
[22] Simon, G., *Le régard, l' être et l' apparence dans l' Optique de l' Antiquité*, Παρίσι: Seuil 1988, σ. 21.
[23] *ό.π.*, σσ. 57-59.

απαντώνται περιπτώσεις αμφισβήτησης ή, τουλάχιστον, απόπειρας ελέγχου της οργάνωσης των οπτικών κειμένων που μας απασχολούν στο σημείο αυτό. Η πλειοψηφία των μελετητών αναφέρει στοιχειωδώς το χρονικό της ανακάλυψης του κώδικα της Βιέννης από τον Heiberg και την απόφασή του να εκληφθεί ως το αρχικό ευκλείδειο σύγγραμμα, αντί του κώδικα του Βατικανού. Δημιουργείται όμως η εντύπωση πως η παραπάνω ενέργεια γίνεται αυτομάτως αποδεκτή από φιλολόγους, ιστορικούς και μελετητές ως ένα καταγεγραμμένο ιστορικό γεγονός που, τόσο το ίδιο όσο και οι συνέπειές του, υιοθετώνται κατά τρόπο αβίαστο και αδιερεύνητο. Σχετικά με το συγκεκριμένο θέμα, δε διατυπώνεται σχεδόν καμία επιφύλαξη ή, έστω, εξαιρώντας την περίπτωση του Lejeune, κάποια μελέτη προς υποστήριξη και επιβεβαίωση της εγκυρότητας της ενέργειας του Heiberg. Το γεγονός αυτό είχε ως αποτέλεσμα να καθιερωθεί στο χρόνο όχι μόνο η οργάνωσή του, αλλά και ό,τι εκείνη, άμεσα ή έμμεσα, συνεπάγεται.

Έπρεπε να περάσουν πολλές δεκαετίες από την εποχή του Heiberg, όταν είχε εδραιωθεί πια στέρεα η -εκ μέρους του- οργάνωση των οπτικών συγγραμμάτων, για να εξεταστεί η νομιμότητά της. Η μοναδική ένσταση που υποβλήθηκε σε αυτήν προήλθε από τον W.R. Knorr. Ο Knorr δεν εξέφρασε απλώς αμφιβολίες, αλλά αντιτάχθηκε σθεναρά στις θέσεις του Heiberg θεωρώντας ότι αυτές αντικατοπτρίζουν τη συμβατική-παραδοσιακή άποψη των ευκλείδειων οπτικών πηγών. Στην εκτενή μελέτη του "Pseudo-Euclidean Reflections in Ancient Optics: A Re-examination of Textual Issues Pertaining to the Euclidean *Optica* and *Catoptrica*"[24] έχοντας εξετάσει προσεκτικά τα κείμενα συμπέρανε ότι ο τρόπος οργάνωσης των οπτικών πραγματειών που φέρονται στους κώδικες του Βατικανού και της Βιέννης δε μπορεί να είναι σωστός, ενώ, παράλληλα, ενέχει «*έναν υψηλά υποθετικό χαρακτήρα*»[25].

Πιο συγκεκριμένα, ο Knorr παρατήρησε ότι για το μεγαλύτερο μέρος της η έκδοση που παρουσιάζεται από τον κώδικα του Βατικανού είναι πρότερη εκείνης που παρουσιάζεται από τον κώδικα της Βιέννης. Χαρακτηριστικά, τόνιζε ότι «*σε παράλληλα χωρία, όπου οι εκδόσεις διαφέρουν, η πρώτη τυπικά φέρει αναγνώσεις που μπορούν να θεωρηθούν ως η πηγή, η εκδοτική τροποποίηση της οποίας, μερικές φορές μόνο αδρά, μερικές φορές ουσιαστικά, δίνει τη δεύτερη*»[26]. Επιπλέον, έκρινε ότι η ορολογία και η σημειογραφία της πρώτης μορφής, ενώ διαφέρουν κατά πολύ από

[24] Knorr, W.R., "Pseudo-Euclidean Reflections in Ancient Optics: A Re-examination of Textual Issues Pertaining to the Euclidean *Optica* and *Catoptrica*", *Physis 31* (1994): σσ. 1-45.
[25] *ό.π.*, σ. 5.
[26] σ. 29.

εκείνες των μετέπειτα σχολιαστών, συμπεριλαμβανομένου του Θέωνα, θα αναμενόταν να συναντώνται σε μια παλαιότερη μορφή κειμένου. Αντίθετα, η δεύτερη μορφή του κώδικα της Βιέννης, την οποία ο Heiberg θεώρησε ως τη γνήσια ευκλείδεια πραγματεία, «*μαρτυρά σημάδια επεξεργασίας και τυποποίησης που κοινώς εμφανίζονται σε μετέπειτα αναθεωρημένες εκδόσεις, όπως εκείνες του Θέωνα*»[27]. Επομένως, κατέληγε ο Knorr, το κείμενο που φέρεται από τον κώδικα του Βατικανού θα έπρεπε να συνιστά τον πρωταρχικό μας μάρτυρα, ενώ το κείμενο του κώδικα της Βιέννης να αποτελεί την *Αναθεωρημένη Έκδοση* του Θέωνα ή ενός άλλου παραπλήσιου εκδότη.

δ. Συμπεράσματα

Η κριτική του Knorr δεν άφησε εντελώς ανεπηρέαστους τους μελετητές. Στις περισσότερες σύγχρονες προσεγγίσεις των ευκλείδειων *Οπτικών*, οι συγγραφείς, αφού δίνουν έμφαση στο πρόβλημα της ταυτότητας των οπτικών κειμένων των δύο κωδίκων και στη μετέπειτα οργάνωσή τους από τον Heiberg, παραπέμπουν τους αναγνώστες στα επίμαχα άρθρα αμφισβήτησής της από τον Knorr. Οι απόψεις του Knorr φαίνεται να ενδιαφέρουν και προβάλλονται σε μεγάλο βαθμό, αλλά, τουλάχιστον για τη συγκεκριμένη περίπτωση, δεν έχει πραγματοποιηθεί καμία απόπειρα άμεσης υποστήριξης ή απόρριψης των θέσεών του. Δημιουργείται η εντύπωση ότι υπάρχει μια γενικότερη τάση αποφυγής του ζητήματος. Στις περισσότερες σχετικές μελέτες της ευκλείδειας οπτικής παρουσιάζεται το πρόβλημα των πηγών, γίνεται μνεία στην οργάνωση του Heiberg, αναφέρονται οι αντιρρήσεις του Knorr ως προς αυτή και συνεχίζεται η όποια ανάλυση της ευκλείδειας οπτικής βασιζόμενη στο κείμενο του κώδικα της Βιέννης. Σε καμία περίπτωση δεν εξηγούνται οι λόγοι υιοθέτησης του κειμένου του κώδικα της Βιέννης, αντί του κώδικα του Βατικανού, ως του γνήσιου ευκλείδειου έργου, εφόσον δεν έχει γίνει πρώτα ούτε κάποια προσπάθεια πιστοποίησης της ορθότητας της οργάνωσης του Heiberg ούτε κάποια κριτική προσέγγιση και αναίρεση των επιχειρημάτων του Knorr.

Είναι προφανές ότι το πρόβλημα της οργάνωσης των οπτικών κειμένων είναι δύσκολο και σύνθετο. Το ερώτημα που διατυπώνεται τελικά είναι ποιο από τα δύο οπτικά κείμενα αποτελεί τη γνήσια έκδοση των *Οπτικών* του Ευκλείδη και ποιο την *Αναθεωρημένη Έκδοση* των ευκλείδειων *Οπτικών* από τον Θέωνα. Ένα γενικά κοινό

[27] Knorr, W.R., "On the Principle of Linear Perspective in Euclid's *Optics*", *Centaurus 34* (1991), σ. 195. Στο άρθρο αυτό παρουσιάζεται η κριτική του Knorr προς την οργάνωση του Heiberg, υπό μια περιεκτική μορφή.

αναγνωρίσιμο στοιχείο των δύο εκδόσεων είναι το ευκλείδειο περιεχόμενό τους. Αυτό αναφέρεται ρητά από τον A.M. Smith στο *Ptolemy and the Foundations of Ancient Mathematical Optics*. Συγκεκριμένα, ο Smith επισημαίνει την οργάνωση του Heiberg και την αντίθετη άποψη του Knorr, αλλά μην έχοντας ο ίδιος ως στόχο να προβεί σε μια συζήτηση, ως προς το ποιο κείμενο πρέπει τελικά να θεωρηθεί ως το γνήσιο ευκλείδειο και ποιο ως η Α*ναθεωρημένη Έκδοση* του Θέωνα, ξεγλυστρά διακριτικά λέγοντας ότι *«το προτασιακό περιεχόμενο και των δύο εκδόσεων είναι αναμφίβολα θεμελιωδώς ευκλείδειο»*[28]. Πρόκειται για μια εύστοχη παρατήρηση που μας βρίσκει σύμφωνους. Πράγματι, το περιεχόμενο των δύο κειμένων είναι σε γενικές γραμμές ευκλείδειο. Συνεπώς, υπάρχει η δυνατότητα, μέσω του εντοπισμού κάποιων κεντρικών στοιχείων και εννοιών, να γίνει μια ικανοποιητική προσέγγιση της οπτικής θεωρίας του Ευκλείδη, όπως αυτή που επιτυχώς πραγματοποιήθηκε από τον Smith. Ωστόσο, πρέπει να γίνει κατανοητό ότι η συνεχής αντιμετώπιση των κειμένων των δύο κωδίκων κατά παρόμοιο τρόπο δε θα βοηθούσε καθόλου στην επίλυση του προβλήματος της αναγνώρισης της πραγματικής ταυτότητας που φέρει το καθένα κείμενο ξεχωριστά.

Η αναφορά στην αντιμετώπιση του ζητήματος από τον Smith δε γίνεται με στόχο να επιρριφθεί σε εκείνον κάτι το επιλήψιμο. Εξάλλου, ο ίδιος δεν είχε πρόθεση να προχωρήσει σε οποιαδήποτε ανάπτυξη του θέματος. Η αναφορά στον Smith γίνεται, για να παρουσιαστεί μια ενδεικτική μόνο περίπτωση της γενικότερης -όχι απαραιτήτως εσκεμμένης- αποστασιοποίησης που παρατηρείται από το πρόβλημα της οργάνωσης των συγκεκριμένων οπτικών κειμένων και τις συνέπειες που αυτή επιφέρει. Με βάση το κοινό χαρακτηριστικό του ευκλείδειου περιεχομένου των προτάσεων των δύο κειμένων, ο Smith είχε την ευχέρεια να πραγματοποιήσει αυτό στο οποίο ευελπιστούσε, δηλαδή σε μια ιστοριογραφική προσέγγιση της οπτικής, χωρίς να αισθανθεί αναγκασμένος να ασχοληθεί με το επιμέρους πρόβλημα της οργάνωσης[29]. Σε παρόμοια περίπτωση, κάποιος ιστορικός ή μελετητής ενδέχεται να

---

[28] Smith, M.A., *Ptolemy and the Foundations of Ancient Mathematical Optics: A Source Based Guided Study*, Transactions of the American Philosophical Society 89.3, Φιλαδέλφεια: American Philosophical Society 1999, σ. 16.

[29] Στον πρόλογο του συγκεκριμένου έργου ο M.A. Smith συνοψίζει τους λόγους, για τους οποίους προχώρησε στη συγγραφή του. Ο πρώτος είναι ιστοριογραφικός και συνίσταται στο να αναδείξει ότι τα εννοιολογικά και μεθοδολογικά θεμέλια της αρχαίας ακτινικής θεωρίας διαφοροποιούνται από εκείνα της μοντέρνας. Ο δεύτερος λόγος είναι, για να προσφέρει μια εισαγωγική μελέτη που θα ενσωματώνει τον νέο πλούτο των μεταφρασμένων πηγών και των ερμηνευτικών απόψεων που αναδύθηκαν κατά τα τελευταία χρόνια. Όπως ο ίδιος αναφέρει, «*χρησιμοποιώντας πραγματικές πηγές ως θεμέλιο, ελπίζω να δείξω πώς αναπτύχθηκε η αρχαία μαθηματική οπτική, σε απάντηση όχι μόνο προς ορισμένες θεωρητικές προσταγές, αλλά*

στηριζόταν σε κάτι ανάλογο. Αυτό που επιθυμούμε να γίνει σαφές είναι ότι μια τέτοια πρακτική μπορεί να μη συνιστά πάντα μια ηθελημένη, συνειδητή αποφυγή του προβλήματος, αλλά συνεπάγεται οπωσδήποτε μια συνεχή αναβολή της επίλυσής του. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα να διαιωνίζονται τα ερωτήματα που αφορούν στην οργάνωση των δύο μορφών κειμένων καθυστερώντας διαρκώς τη στιγμή που θα αποκτήσει το καθένα από αυτά, εκτός από την ταυτότητα, την ακριβή θέση που του αρμόζει στην ιστορία της αρχαίας οπτικής επιστήμης.

2. Η περίπτωση των Κατοπτρικών

α. Η υπόθεση της μη-ευκλείδειας πατρότητας των Κατοπτρικών

Η πραγματεία των *Κατοπτρικών* διασώζεται σε πολλά χειρόγραφα, από τα οποία το αρχαιότερο χρονολογείται κατά τον 13ο αιώνα. Το συγκεκριμένο χειρόγραφο περιλαμβάνει μια ανώνυμη λατινική μετάφραση των *Κατοπτρικών* που φέρει τον τίτλο *Euclidis de speculis*. Μέχρι τον 16ο αιώνα, η απόδοση αυτού του συγγράμματος στον Ευκλείδη δεν αποτελούσε αντικείμενο αμφισβήτησης. Ωστόσο, αυτό δε διήρκησε για πάντα. Ήδη από τις αρχές του 18ου αιώνα, κυριαρχούσε η πεποίθηση ότι τα *Κατοπτρικά* πιθανότατα να μην είναι αυθεντικό έργο του Ευκλείδη[30]. Στην κριτική του έκδοση των *Οπτικών* και των *Κατοπτρικών*, ο D. Gregory θεώρησε, κατά τρόπο ανάλογο με τα *Οπτικά*, ότι η γεωμετρική επεξεργασία που εμφάνιζαν τα *Κατοπτρικά* ήταν άνισης στάθμης συγκρινόμενη με τη μεγάλη γεωμετρική επιδεξιότητα που εμφάνιζαν τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Επομένως, έκρινε ότι το διασωζόμενο κείμενο των *Κατοπτρικών* δε θα μπορούσε να ανήκει στον Ευκλείδη[31].

Οι απόψεις του Gregory διατηρήθηκαν αναλλοίωτες, μέχρι τα τέλη του 19ου αιώνα, όταν ο Heiberg στη μελέτη του *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*

επίσης προς την εμπειρική προφάνεια» (Βλ. Πρόλογο, σ. 8). Όπως φανερώνει ο τίτλος του βιβλίου του, το βάρος της ανάλυσής του πέφτει κυρίως στον Πτολεμαίο. Ωστόσο, επιδιώκοντας να παρουσιάσει την ανάπτυξη της αρχαίας οπτικής επιστήμης αφιερώνει, όπως είναι φυσικό, αρκετά κομμάτια του έργου του στην οπτική θεωρία του Ευκλείδη. Ευελπιστεί να αναπτύξει τη μελέτη του, όπως ο ίδιος αναφέρει, έχοντας *«τις πραγματικές πηγές ως θεμέλιο»*. Αναρωτιόμαστε, αν θα έπρεπε τελικά ο M. Smith να αφιερώσει ένα μέρος της ανάλυσής του στο πρόβλημα της οργάνωσης των κειμένων των δύο κωδίκων ξεκαθαρίζοντας με μεγαλύτερη σαφήνεια τη θέση του απέναντι σε αυτό. Αναρωτιόμαστε, αν θα έπρεπε τελικά να προσδιορίσει ακριβέστερα, σύμφωνα με ποια μορφή κειμένου, με ποια πηγή ως θεμέλιο -θεωρώντας ότι αντικατοπτρίζει περισσότερο την πρωταρχική ευκλείδεια σκέψη- εργάστηκε ο ίδιος, για να παρουσιάσει την ευκλείδεια θεώρηση. Οι απόψεις του θα ήταν, όπως πάντα, πολύ ενδιαφέρουσες και διαφωτιστικές.

[30] Για τον λόγο αυτό, τα *Κατοπτρικά* αναφέρονται ως ψευδο-ευκλείδεια *Κατοπτρικά*.

[31] Heiberg, *Litterargeschichtliche...*, κεφ. IV, σσ. 90-91.

έσπευσε από τη μεριά του να τις υπερασπιστεί. Ο Heiberg ισχυρίστηκε ότι τα *Κατοπτρικά* που αποδίδονται στον Ευκλείδη δε μπορεί να είναι αυθεντικά. Η μοναδική μαρτυρία που αποδίδει τη συγγραφή των *Οπτικών* και των *Κατοπτρικών* από τον Ευκλείδη προέρχεται από τον Πρόκλο, φιλόσοφο του 5ου αιώνα μ.Χ., σύμφωνα με τον οποίο, «*πολλὰ μὲν οὖν καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου* (ενν. *του Ευκλείδου*)
μαθηματικὰ συγγράμματα θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας μ εστά. τοιαῦτα γὰρ καὶ τὰ ὀπτικὰ καὶ τὰ κατοπτρικά, τοιαῦται δὲ καὶ αἱ κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις, ἔτι δὲ τὸ περὶ διαιρέσεων βιβλίον»[32]. Ωστόσο, η λίγο επιμελημένη μορφή των αποδείξεων, τα γεωμετρικά σφάλματα και οι επαναλήψεις που εμφανίζει το κείμενο των *Κατοπτρικών* προδίδουν, όπως έλεγε ο Heiberg, μια σύνθεση μεταγενέστερη του Ευκλείδη, αλλά προγενέστερη της εποχής του Πρόκλου[33]. Πάντως, στο σημείο αυτό ο Heiberg δεν επιχείρησε να προσδιορίσει τον συγγραφέα των *Κατοπτρικών*.

Εκτός από την επιχειρηματολογία του, σχετικά με το χαμηλό τεχνικό επίπεδο των *Κατοπτρικών*, ο Heiberg διατύπωσε αργότερα, στα *Prolegomena critica* της έκδοσής του των *Οπτικών* και των *Κατοπτρικών*, έναν επιπλέον ισχυρισμό φιλολογικού χαρακτήρα. Έλαβε υπόψη ορισμένα στυλιστικά κριτήρια και κάποιες ορολογικές ασυμφωνίες που, όπως υποστήριζε, διαχωρίζουν τα *Κατοπτρικά* από τα αυθεντικά έργα του Ευκλείδη, αλλά τα συνδέουν, αντίθετα, με το έργο του Θέωνα του Αλεξανδρινού. Επομένως, υπέθεσε ότι το διασωζόμενο κείμενο των *Κατοπτρικών* αποτελεί σύνθεση του Θέωνα[34].

Συγκεκριμένα, ο Heiberg παρατήρησε ότι στο κείμενο των *Οπτικών* του Ευκλείδη η οπτική ακτίνα δηλώνεται συνήθως ως «*ἀκτὶς*» και λιγότερο συχνά ως «*ὄψις*». Αντίθετα, στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* του Θέωνα χρησιμοποιείται περισσότερο η «*ὄψις*», σε σχέση με τον όρο «*ἀκτὶς*», ενώ στα *Κατοπτρικά*, εκεί που η «*ἀκτὶς*» δεν εμφανίζεται καθόλου, η «*ὄψις*» παρουσιάζεται 70 φορές. Επίσης, στην έκδοση του Θέωνα και στα *Κατοπτρικά* οι γωνίες υποδηλώνονται με τον καθιερωμένο τρόπο, προσδιορίζονται δηλαδή, μέσω των ευθύγραμμων τμημάτων, υπό των οποίων περιέχονται. Αντίθετα, στα *Οπτικά* υποδηλώνονται με απλά γράμματα. Τέλος, μεταξύ των 58 θεωρημάτων των *Οπτικών*, ο όρος «*οὐκοῦν*» που εισάγεται, για να δηλώσει την αρχή μιας απόδειξης, εμφανίζεται 15 φορές, δηλαδή όχι τόσο συχνά. Στην

[32] Πρόκλου, *Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη*, 68.23-69.4.
[33] Heiberg, *έ.α.*, σ. 148.
[34] Heiberg, *Prolegomena critica*, σσ. XXIX, XLIX-L.

έκδοση του Θέωνα χρησιμοποιείται 50 φορές στις 57 προτάσεις και στα *Κατοπτρικά* 22 φορές, μέσα σε 30 προτάσεις. Δηλαδή, ο όρος «*οὐκοῦν*» παρουσιάζει αναλογικά σχεδόν την ίδια συχνότητα εμφάνισης στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* του Θέωνα και στα *Κατοπτρικά*[35].

Ο Heiberg θεώρησε ότι τα παραπάνω στατιστικά στοιχεία συνηγορούν στην υπόθεσή του. Ο συλλογισμός του βασιζόταν στο ότι κάποια λεπτά και πολύ ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* του Θέωνα απομακρύνουν το συγκεκριμένο έργο από τα γνήσια για τον Heiberg *Οπτικά*, αλλά το καθιστούν πλησιέστερο προς τα *Κατοπτρικά*. Με αυτόν τον τρόπο, ο Heiberg υπέθεσε ότι, κατά τη συγγραφή των *Κατοπτρικών*, ο Θέων είχε τη δυνατότητα να διατυπώσει τις προσωπικές του προτιμήσεις, ως προς τη χρήση όρων και σημειογραφίας των γωνιών, εφόσον δεν είχε στη διάθεσή του κάποια ευκλείδεια πηγή, όπως στην περίπτωση των *Οπτικών*.

Η συγγραφή των *Κατοπτρικών* αποτελούσε για τον Heiberg μια προσωπική επινόηση του Θέωνα επιθυμώντας ο ίδιος να συγγράψει ένα έργο συνοδευτικό της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* των *Οπτικών* που θα είχε εισάγει στον *Μικρό αστρονομούμενο*[36]. Ο Heiberg υπέθετε ότι ο Θέων λάμβανε βέβαια υπόψη του ανάλογες αρχαίες κατοπτρικές πραγματείες. Στα *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου* ο Θέων πληροφορεί ότι ο Αρχιμήδης είχε συγγράψει ένα έργο με τίτλο *Περί Κατοπτρικών*[37]. Ο Heiberg εξέλαβε τη μαρτυρία του Θέωνα γι' αυτό το έργο ως γνήσια. Επομένως, έπρεπε να υποθέσει ότι μια από τις πηγές που χρησιμοποίησε ο Θέων ήταν η συγκεκριμένη πραγματεία του Αρχιμήδη.

β. Αποδοχή της υπόθεσης της μη-ευκλείδειας πατρότητας των Κατοπτρικών

Στην αναλυτική μελέτη του για την ανάπτυξη της αρχαίας κατοπτρικής επιστήμης *Recherches sur la catoptrique grecque* ο Lejeune υιοθέτησε και επεξεργάστηκε τις απόψεις του Heiberg[38]. Μέσω της εξέτασης των αξιωμάτων των *Κατοπτρικών*, αποσκοπούσε στην επιβεβαίωση των θέσεων του τελευταίου. Για παράδειγμα, δίνοντας και ο ίδιος μεγάλη προσοχή σε ορολογικές ασυμφωνίες παρατήρησε ότι τα αξιώματα των *Κατοπτρικών* εκφράζονται αδιακρίτως στο σύνολο

---

[35] *ό.π.*, σσ. XLIX-L.
[36] σ. XLIX, L.
[37] Θέωνος Αλεξανδρινού, *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου*, 347.5-348.1.
[38] Ήδη από το 1948, στο *Euclide et Ptolémée: Deux Stades de l' Optique Géométrique Grecque* ο Lejeune είχε παρουσιάσει τις υποθέσεις του Heiberg, χωρίς να εκφράσει καμία επιφύλαξη, ως προς την αποδοχή τους. Ωστόσο, δεν τις είχε επεξεργαστεί στο βαθμό που το έκανε το 1957 στο *Recherches sur la catoptrique grecque.*

της πραγματείας ως «*όροι*» και ως «*φαινόμενα*». Το γεγονός αυτό ώθησε τον Lejeune να συμπεράνει ότι ο συγγραφέας των *Κατοπτρικών* είχε στη διάθεσή του ετερογενή στοιχεία[39]. Επίσης, ο Lejeune αντιστοίχισε τα αξιώματα των *Κατοπτρικών* με τους τρεις νόμους ανάκλασης του Πτολεμαίου[40]. Υποστήριξε ότι ο συγγραφέας των *Κατοπτρικών* μετασχημάτισε τους νόμους περιπλέκοντας τις παραδοσιακές τους διατυπώσεις, για να φανεί πρωτότυπος[41]. Ο Lejeune συμφωνούσε λοιπόν με τον Heiberg ότι τα *Κατοπτρικά* αποτελούν μια μεταγενέστερη του Ευκλείδη σύνθεση, με πιθανό συγγραφέα τον Θέωνα, για τον οποίο δήλωνε ότι είναι *«μικρός ως λογικός, ακόμη χειρότερος ως φυσικός όντας πλήρως ανίκανος να αφομοιώσει τη σκέψη και τις μεθόδους των προκατόχων του, προσποιείται τουλάχιστον ότι κάνει έργο καινοτόμο»*[42].

Όσον αφορά στο ίδιο το έργο, ο Lejeune θεωρούσε ότι παρουσιάζει ένα στάδιο παρακμής της ελληνικής κατοπτρικής επιστήμης. Ισχυρίστηκε ότι τα *Κατοπτρικά* απαντούν σε ένα σχέδιο, αν όχι τελείως λογικό, τουλάχιστον συστηματικό. Διέκρινε στο σύγγραμμα δύο διακριτά μέρη, καθένα από τα οποία περιελάμβανε 15 θεωρήματα[43]. Όπως υποστήριζε ο Lejeune, το σχέδιο αυτό υιοθετήθηκε από τον συγγραφέα, αφού επιβλήθηκε από την ανάγκη να ενώσει ετερογενή υλικά. Ο Lejeune αναγνώριζε ότι η κρίση του δεν ήταν παρά μια υπόθεση. Αισιοδοξούσε όμως να την ενισχύσει, μέσω της σύγκρισης των δύο μερών του έργου, ανακαλύπτοντας τις άχρηστες επαναλήψεις και τις αντιθέσεις[44].

Εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι, μέσω των σχέσεων που παρουσιάζουν διάφορα μέρη των *Κατοπτρικών* με θέματα που προβάλλονται σε έργα άλλων αρχαίων συγγραφέων, ο Lejeune αποπειράθηκε να εξαγάγει 'στρώματα' στα σωζόμενα *Κατοπτρικά*. Ισχυρίστηκε ότι το αρχαιότερο στρώμα του έργου αντικατοπτρίζει την κατάσταση της εποχής του Ευκλείδη. Ο Lejeune έκρινε ότι ο συγγραφέας τους, πιθανώς ο Θέων, άντλησε στοιχεία από τη γνήσια ευκλείδεια πραγματεία περί κατόπτρων, για λόγους κύρους. Επειδή όμως η πραγματεία του Ευκλείδη παρουσίαζε μια ξεπερασμένη για την εποχή του Θέωνα θεωρία των

---

[39] Lejeune, *Recherches...*, σσ. 54-55.
[40] *ό.π.*, σσ. 55-67.
[41] σ. 112.
[42] σ. 67.
[43] Τα αξιώματα 4 και 5 που αφορούν στον εντοπισμό των κατοπτρικών εικόνων γίνονται επικλητά στα θεωρήματα 16-30. Έτσι, ο Lejeune συμπέρανε ότι τα θεωρήματα 1-15 παρουσιάζουν ένα χρονολογικά παλαιότερο στάδιο της κατοπτρικής, πριν ανακαλυφθούν οι αρχές εντοπισμού των εικόνων. Αντίθετα, το υπόλοιπο έργο, δηλαδή τα θεωρήματα 16-30, προβάλλουν ένα μεταγενέστερο στάδιο, το οποίο φτάνει μέχρι την ανακάλυψη αυτών των αρχών.
[44] Lejeune, *έ.α.*, σ. 116.

κατόπτρων, ο Θέων ήταν αναγκασμένος να ανατρέξει σε πιο πρόσφατες πηγές, όπως στον Αρχιμήδη και στον Ήρωνα τον Αλεξανδρινό[45]. Σύμφωνα με τον Lejeune, ένα σύνολο θεωρημάτων, σχετικά με τον εντοπισμό των εικόνων στα κάτοπτρα, είναι ύστερης προέλευσης, αλλά σίγουρα προγενέστερο του Πτολεμαίου. Ο Lejeune υποστήριζε ότι αυτό το δεύτερο στρώμα των *Κατοπτρικών* αναπαράγει την κατάσταση της κατοπτρικής επιστήμης του 1ου αιώνα μ.Χ αντλώντας στοιχεία από τα *Κατοπτρικά* του. Τέλος, το τρίτο στρώμα των *Κατοπτρικών* παρουσιάζει για τον Lejeune κάποια αποτελέσματα που αποδίδονται στον ίδιο τον συγγραφέα, ενδεχομένως στον Θέωνα[46].

Ο Ver Eecke προσανατολίστηκε προς την ίδια κατεύθυνση με τον Heiberg και τον Lejeune. Στην εισαγωγή του έργου *Euclide: L' Optique et la Catoptrique* ο Ver Eecke δε φαινόταν ικανοποιημένος από τις αποδείξεις των προτάσεων των *Κατοπτρικών* κρίνοντας απλά ότι δεν ακολουθούν την ευκλείδεια αυστηρότητα των *Στοιχείων*. Συμφωνούσε με τους Heiberg και Lejeune ότι τα *Κατοπτρικά* παρουσιάζουν ορισμένες εκφράσεις, οι οποίες δε χρησιμοποιούνται από τον Ευκλείδη. Στο σημείο αυτό, παρέπεμπε στις ορολογικές και σημειογραφικές ασυμφωνίες που είχε εκθέσει ο Heiberg.

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω συνθήκες ο Ver Eecke ήταν πρόθυμος να υποθέσει ότι ο Ευκλείδης είχε πράγματι συγγράψει ένα έργο περί ανακλώμενου φωτός, το οποίο χάθηκε αρκετά νωρίς, καθώς επισκιάστηκε από ένα νέο σύγγραμμα. Αυτό το νέο σύγγραμμα πρέπει να είχε διατηρήσει τα θεμέλια του έργου του Ευκλείδη, αλλά να είχε συμπληρωθεί παράλληλα, με προτάσεις που αντλήθηκαν από έργα πιο πρόσφατων συγγραφέων. Επομένως, δηλώνε ο Ver Eecke, έτσι όπως μας έχουν περιέλθει, τα *Κατοπτρικά* αποτελούν μια σύνθεση, της οποίας ο συγγραφέας είναι ίσως ο Θέων Αλεξανδρινός, αλλά μέσα στο πλαίσιο της αβεβαιότητας, αποδίδεται σε έναν ψευδο-Ευκλείδη[47].

γ. Ενστάσεις στην υπόθεση της μη-ευκλείδειας πατρότητας των Κατοπτρικών

Στην αναλυτική μελέτη "Archimedes and the Pseudo-Euclidean Catoptrics"[48] του 1985 ο W. Knorr αμφισβήτησε για άλλη μια φορά τις θέσεις του Heiberg και του

[45] Για παράδειγμα, η πρόταση 30 των *Κατοπτρικών* αποτελεί για τον Lejeune δάνειο από τον Αρχιμήδη.
[46] Lejeune, *έ.α.*, μέρος I, κεφ. 3, μέρος II, κεφ. 2, 3, 4.
[47] Ver Eecke, *έ.α.*, σ. XXIX.
[48] Knorr, Wilbur R., "Archimedes and the Pseudo-euclidean *Catoptrics*", *Archives Internationales d' Histoire des Sciences 35* (1985): σσ. 28-105.

Lejeune. Ο Knorr εξέφρασε κατηγορηματικά την άποψή του υπέρ της αυθεντικότητας των *Κατοπτρικών*. Υποστήριξε ότι ούτε ο Heiberg ούτε ο Lejeune συνειδητοποίησαν τη σπουδαιότητα της μαρτυρίας του Απουλήιου από τη Μαδόρα[49]. Στην *Απολογία* του ο Απουλήιος παραθέτει μια σειρά από θέματα που πρέπει να απασχολούν τους φιλοσόφους και που αφορούν στα κάτοπτρα, στα είδη και στις ιδιότητές τους[50]. Ο Απουλήιος αναφέρει ότι τα θέματα αυτά είχαν γίνει αντικείμενο μελέτης από τον Αρχιμήδη σε έναν τεράστιο τόμο, σχετικό με την κατοπτρική. Ο Knorr υποστήριξε ότι ο κατάλογος των θεμάτων που καταγράφει ο Απουλήιος 'φωτογραφίζει' τα περιεχόμενα των *Κατοπτρικών*. Σύμφωνα με τον Knorr, το σχετικό απόσπασμα της *Απολογίας* φανερώνει ότι τα θέματα μιας πραγματείας περί κατοπτρικής αντιστοιχούν ακριβώς στα θέματα που αναπτύσσονται στα ψευδο-ευκλείδεια *Κατοπτρικά*. Ο Knorr εξέφρασε την υπόθεση ότι η πραγματεία που περιγράφει ο Απουλήιος ενδέχεται να είναι στην πραγματικότητα τα *Κατοπτρικά* του Ευκλείδη, αλλά ο συγγραφέας να έκανε λάθος και να τα απέδωσε στον Αρχιμήδη.

Έχοντας επίγνωση του υποθετικού χαρακτήρα του συμπεράσματός του ο Knorr έσπευσε να θεμελιώσει την άποψή του συσχετίζοντάς την με άλλες μαρτυρίες περί αρχιμήδειων *Κατοπτρικών*[51]. Ύστερα από μια εκτενή και ενδιαφέρουσα επιχειρηματολογία, ο Knorr συμπέρανε ότι οι μαρτυρίες αυτές, συγκεκριμένα του Θέωνα και του Ολυμπιόδωρου[52], είναι συμβατές με όσα ισχυρίστηκε[53].

Το τελικό συμπέρασμα των συλλογισμών του Knorr, δηλαδή η συσχέτιση του αναφερόμενου από τον Απουλήιο έργου με τα ψευδο-ευκλείδεια *Κατοπτρικά* και, συνεπώς, η απόδοση σε αυτά μιας χρονολόγησης κατά τον 2ο αιώνα μ.Χ. βρίσκεται στον αντίποδα της καθιερωμένης, σύμφωνα με τον Knorr, άποψης περί της προέλευσης των *Κατοπτρικών*. Από τη μια μεριά, ο Heiberg υπέθετε ότι τα *Κατοπτρικά* είναι σύνθεση του Θέωνα, ο οποίος αντλούσε από διάφορες πηγές, όπως

---

[49] Ο Απουλήιος ήταν Λατίνος συγγραφέας που ήκμασε στα μέσα του 2ου αιώνα μ.Χ.

[50] Στην *Απολογία* ο Απουλήιος προσπαθεί να υπερασπίσει τον εαυτό του, απέναντι στις κατηγορίες ότι εφαρμόζει τις μαγικές τέχνες έχοντας στην κατοχή του και κάνοντας χρήση κατόπτρων. Ο Απουλήιος κρίνει απαραίτητο να κάνει σαφές στους κατήγορούς του ότι η μελέτη των κατόπτρων ενέχει φιλοσοφικό και επιστημονικό σκοπό. Θέλοντας να προσδώσει κύρος και αξιοπιστία στα λεγόμενά του επικαλείται μεγάλα ονόματα φιλοσόφων και επιστημόνων, όπως του Σωκράτη, του Πλάτωνα, των Πυθαγορείων, των Στωικών και του Αρχιμήδη.

[51] Knorr, "Archimedes...", σσ. 36-47.

[52] Μαρτυρίες που αποδίδουν στον Αρχιμήδη την πραγματοποίηση κατοπτρικών μελετών διασώζονται, όπως είδαμε και προηγουμένως, από τον Θέωνα στα *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου* (347.5-348.1) και από τον Ολυμπιόδωρο στα *Σχόλια στα Μετεωρολογικά του Αριστοτέλη* (209-214).

[53] Knorr, *έ.α.*, σσ. 36-47.

ο Αρχιμήδης, ο Ήρων και ο Πτολεμαίος. Από την άλλη μεριά, ο Lejeune διέκρινε στα *Κατοπτρικά* τα τρία στρώματα που έχουν προαναφερθεί. Ωστόσο, όπως έλεγε ο Knorr, κανένας από τους δύο δε συνυπολόγισε ότι ένα έργο που συμμορφώνεται με τη συνολική δομή των *Κατοπτρικών* ήταν ήδη προσβάσιμο στον Απουλήιο, δύο αιώνες πριν από τον Θέωνα.

Ο Knorr επιχείρησε να αντικρούσει τους ισχυρισμούς του Heiberg περί ορολογικών δεσμών των *Κατοπτρικών* με την *Αναθεωρημένη Έκδοση* του Θέωνα μάλλον, παρά με τα ευκλείδεια *Οπτικά*. Έκρινε ότι τα στατιστικά στοιχεία του Heiberg είναι όχι μόνο μη-ικανοποιητικά, αλλά και παραπλανητικά[54], γιατί βασίζονται στην αποδοχή του συμπεράσματος του Heiberg ότι το κείμενο των *Οπτικών* που μας παραδίδεται από τον κώδικα του Βατικανού είναι η *Αναθεωρημένη Έκδοση* του Θέωνα, ενώ το κείμενο που φέρει ο κώδικας της Βιέννης είναι η γνήσια ευκλείδεια έκδοση. Παρατήρησε ότι στα *Κατοπτρικά* υπάρχουν πολλοί αρχαϊσμοί που διαιωνίστηκαν στην οπτική παράδοση. Για παράδειγμα, η καθιερωμένη ευκλείδεια υποδήλωση των γωνιών, με τον τρόπο που παρουσιάζεται στα *Στοιχεία*, συμφωνεί με εκείνη των *Οπτικών* του κώδικα της Βιέννης. Αλλά οι εναλλακτικοί τρόποι του κώδικα του Βατικανού και των *Κατοπτρικών* συμπίπτουν με εκείνους που συμπεριλαμβάνονται σε όλη την οπτική γραμματεία, από τον Αριστοτέλη, μέχρι τον Διοκλή και τον Ήρωνα. Ωστόσο, σύμφωνα με τον Knorr, δεν είναι καθόλου σαφής ο λόγος, για τον οποίο ο Θέων δέχτηκε έναν τέτοιο αρχαϊκό τρόπο, εφόσον είχε το καθαρό μοντέλο της ευκλείδειας χρήσης πριν από αυτόν. Εξάλλου, η θεώνεια έκδοση των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και τα *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου* δε συμφωνούν με την *Αναθεωρημένη Έκδοσή* του ούτε με τα *Κατοπτρικά*[55].

Όσον αφορά στη χρήση του «*οὐκοῦν*», ο Knorr παρατήρησε ότι ο όρος αυτός, αν και εμφανίζεται στα ευκλείδεια οπτικά κείμενα, δεν παρουσιάζεται σε κανένα άλλο γεωμετρικό έργο, εκτός από το ευκλείδειο *Κατατομή Κανόνος*, καθώς επίσης σε τεχνικά χωρία των αριστοτελικών συγγραμμάτων. Αντίθετα, δεν αποτελεί γνώρισμα του Θέωνα, αφού εκείνος δεν τον χρησιμοποιεί πουθενά. Ο Knorr υποστήριξε ότι ο όρος αυτός ήταν καθιερωμένος στα τεχνικά συγγράμματα, πριν από την εποχή του Ευκλείδη και ότι δεν είναι πιθανόν ένα έργο που συνετέθη μετά τον Ευκλείδη να

---

[54] Για παράδειγμα, ο Knorr υποστήριξε ότι ο Heiberg παραπλανούσε, όταν έλεγε ότι η δήλωση μιας γωνίας ως «*η Α*» δεν απαντάται στα *Οπτικά*, γιατί στην πραγματικότητα απαντάται στις προτάσεις 9, 38, στην εναλλακτική της 42, στη 48 και στην 53. Η δήλωση «*ἡ Α*» είναι ισοδύναμη με την «*ἡ πρός τῷ Α*». Η εμφάνιση της πρώτης έκφρασης δεν αποτελεί ιδιοσυγκρασιακό στοιχείο του Θέωνα, όπως υποστήριζε ο Heiberg, εφόσον συναντάται στις κατοπτρικές πραγματείες του Διοκλή και του Ήρωνα.

[55] Knorr, "Pseudo-Euclidean Reflections...", σσ. 24-25.

χρησιμοποιούσε αυτόν τον όρο, εκτός αν στηριζόταν σε κάποιο πρωτότυπο, στο οποίο είχε αποτυπωθεί ο όρος αυτός αρχικά[56].

Ένα επιπλέον επιχείρημα που πρόβαλλε ο Knorr σχετίζεται με τις πηγές, με τις οποίες εργάστηκε ο Θέων. Ο Knorr δεν έβλεπε κανέναν λόγο που να ωθούσε τον Θέωνα να προβεί στην παραγωγή ενός εντελώς νέου έργου, αφού είχε στη διάθεσή του τα ευκλείδεια *Κατοπτρικά*. Γιατί να μην εργαστεί πάνω στο παλαιότερο κείμενο, όπως ακριβώς είχε κάνει με την περίπτωση των *Οπτικών*; Επιπλέον, για τον Knorr, τα *Κατοπτρικά* δεν παρουσιάζουν την έκταση και το εύρος της αρχαίας παράδοσης, αφού το τεχνικό τους επίπεδο ούτε καν υπαινίσσεται, για παράδειγμα, εκείνο του Διοκλή. Όπως φαίνεται από τις εκδόσεις του Ευκλείδη και τα σχόλια στον Πτολεμαίο, ο Θέων ήταν ικανός εκδότης τεχνικών έργων, ωστόσο, αυτό δε συνεπάγεται ότι θα μπορούσε να αντλήσει από τα κείμενα της οπτικής παράδοσης και να παραγάγει ένα έργο με τόσα ελαττώματα, όπως υποστήριζε ο Heiberg και άλλοι. Τέλος, ο Knorr εξέφρασε τον προβληματισμό που έχει να κάνει με το ότι αν τα πιο προκαταρκτικά μέρη των *Κατοπτρικών* προέρχονται από μια πηγή που παρουσιάζει το επίπεδο της θεωρίας γύρω στην εποχή του Ευκλείδη, γιατί ο Θέων προτίμησε να επιλέξει μια τέτοια πηγή, απέναντι σε άλλες ανώτερες πραγματείες του Αρχιμήδη και άλλων ύστερων συγγραφέων;[57]

Η εναλλακτική πρόταση του Knorr συνίσταται στο ότι τα *Κατοπτρικά* είναι η υπάρχουσα έκδοση ενός παλαιότερου έργου, από το οποίο άντλησαν συγγραφείς, όπως ο Ήρων και ο Πτολεμαίος, κατά την επεξεργασία δικών τους κειμένων. Η σχέση με τον Αρχιμήδη εξηγείται, μέσω της μαρτυρίας του Απουλήιου, ως το αποτέλεσμα της λανθασμένης απόδοσης στον Αρχιμήδη αυτού του πρωτότυπου των *Κατοπτρικών*. Ο Knorr επανεξέτασε τη σχέση των διασωζόμενων *Κατοπτρικών* με άλλα οπτικά συγγράμματα, όπως αυτά του Δαμιανού, του Πτολεμαίου, του Ήρωνα, του Διοκλή[58] ενισχύοντας το σκεπτικό της τοποθέτησης των *Κατοπτρικών* στο πλαίσιο των τεχνικών μελετών του 3ου αιώνα π.Χ. Όσον αφορά στην ενότητα της τυπικής οργάνωσης των *Κατοπτρικών*, ο Knorr δήλωσε ότι «*είναι εντυπωσιακή*»[59]. Σε αντίθεση με τους ισχυρισμούς των Heiberg και Lejeune, ο Knorr θεώρησε ότι η γεωμετρική τεχνική των αποδείξεων είναι βάσιμη και ο αριθμός των σφαλμάτων είναι

---

[56] *ό.π.*, σσ. 25-28.
[57] Knorr, "Archimedes...", σσ. 50-51.
[58] *ό.π.*, σσ. 52-83.
[59] "*The Catoptrics is neither primitive nor inept. The unity of its formal organization is impressive*", *ό.π.*, σ. 88.

μικρός. Με βάση όλα αυτά τα στοιχεία, ο Knorr έκρινε ότι τα *Κατοπτρικά* είναι ισοδύναμα ή υπερβαίνουν ακόμα τα *Οπτικά*[60].

Οι αντιδράσεις του Lejeune στην κριτική του Knorr δε φανέρωναν κανένα ίχνος αναθεώρησης των απόψεων που πρέσβευε. Στην έκδοση των *Οπτικών* του Πτολεμαίου ο Lejeune αφιέρωσε λίγες σελίδες παρουσιάζοντας τα σημαντικότερα σημεία των συλλογισμών του Knorr, σχετικά με την αυθεντικότητα των *Κατοπτρικών*. Ωστόσο, ο ίδιος παρέμεινε σταθερός στις θέσεις του, χωρίς να αντικρούσει ουσιαστικά κανένα επιχείρημα του Knorr. Εξακολουθούσε να υποστηρίζει ακλόνητα ότι τα *Κατοπτρικά* δεν αντιπροσωπεύουν μια ομοιογενή πραγματεία της εποχής του Ευκλείδη χρονολογούμενη κατά τα πρώτα βήματα της θεωρίας των κατόπτρων, αλλά μια ύστερη παρακμάζουσα σύνθεση[61].

Ήταν ύστερα από την αμετάπιστη στάση του Lejeune που ο Knorr δημοσίευσε το "Pseudo-Euclidean Reflections in Ancient Optics: A Re-examination of Textual Issues Pertaining to the Euclidean *Optica* and *Catoptrica*". Σε αυτή τη μελέτη ο Knorr εξέθετε μια σωρεία επιχειρημάτων προς αντίκρουση των απόψεων της καθιερωμένης θεώρησης των ευκλείδειων οπτικών κειμένων, αρκετά από τα οποία έχουν προαναφερθεί. Με ύφος εντονότερο και πιο αιχμηρό καταπιάστηκε με τις περισσότερες παραμέτρους των θέσεων Heiberg-Lejeune έχοντας ως κύριο στόχο του να αποδείξει τα σοβαρά μειονεκτήματά τους.

Στο άρθρο αυτό ο Knorr εφιστά την προσοχή σε ένα θέμα γενικής ιστοριογραφικής μεθόδου. Εύκολα μπορεί να αναγνωρίσει κάποιος ότι όλες οι θέσεις των Heiberg και Lejeune, σχετικά με τα ευκλείδεια οπτικά κείμενα, αποτελούν υποθέσεις, δηλαδή δεν τεκμηριώνονται από τις πηγές. Το ερώτημα που τίθεται στο σημείο αυτό από τον Knorr αφορά στο ποια χαρακτηριστικά της κατάστασης των μαρτυριών παρέχουν κάποια δικαιολόγηση, για να εισαχθούν τέτοιου είδους υποθέσεις[62]. Η απάντηση βρίσκεται σε κάποιες εσφαλμένες προσδοκίες που έτρεφαν μελετητές από την εποχή του Gregory, μέχρι τους Heiberg και Lejeune. Αρχικά, θεωρούνταν αδύνατο να γίνει αποδεκτή η ευκλείδεια καταγωγή οποιουδήποτε έργου που υπέφερε από τεχνικά μειονεκτήματα. Η ευθύνη για τέτοια ελαττώματα αποδίδεται είτε σε εκδοτικές παρεμβολές, όπως επιχειρήθηκε στην περίπτωση των *Οπτικών*, είτε σε κάποιον ανώνυμο ψευδογράφο, όπως στην περίπτωση των *Κατοπτρικών*. Δεύτερον, σύμφωνα με τον Knorr, προσυπογράφοντας σε μια έννοια

---

[60] *ό.π.*, σ. 88
[61] Lejeune, A., *L' Optique de Claude Ptolémée*, σσ. 357-362.
[62] Knorr, "Pseudo-Euclidean Reflections...", σ. 8.

πτώσης της μαθηματικής παράδοσης κατά την ύστερη Αρχαιότητα, οι μοντέρνοι κριτικοί εφηύραν έναν αποδιοπομπαίο τράγο, πάνω στον οποίο απέδωσαν οποιαδήποτε φαινομενική αδυναμία των πραγματειών.

Ο Knorr καταρρίπτει με εύστοχες παρατηρήσεις τα παραπάνω σημεία. Αντιλαμβάνεται ότι το κείμενο των *Στοιχείων* δε μπορεί να μας πληροφορήσει με ασφάλεια για το στυλ και την τεχνική επιδεξιότητα του Ευκλείδη. Δύσκολα μπορεί να αποτελεί έναν απολύτως σαφή μάρτυρα του τρόπου γραφής του Ευκλείδη, γιατί αποτελεί μια από τις πιο μελετημένες πραγματείες και, επιπλέον, έχει γνωρίσει τον μεγαλύτερο αριθμό εκδόσεων. Συνεπώς, έχει υποστεί αρκετές τροποποιήσεις[63]. Αντίθετα, η μεγάλη τραχύτητα της έκθεσης που σημαδεύει τα *Οπτικά*, τα *Κατοπτρικά* ή την *Κατατομή Κανόνος* πιθανότατα να αναπαριστά τον γνήσιο ευκλείδειο τρόπο γραψίματος και γεωμετρικής επιχειρηματολογίας[64].

Πράγματι, το κείμενο των *Οπτικών* που φέρει ο κώδικας του Βατικανού και τα *Κατοπτρικά* παρουσιάζουν μερικά κενά και αρκετά σημεία τους είναι ασαφή. Σύμφωνα με τον Knorr, η μεσολάβηση ύστερων σχολιαστών, όπως του Πάππου του Αλεξανδρινού (4ος μ.Χ. αιώνας)[65], και εκδοτών, όπως του Θέωνα, έγινε με σκοπό τη διόρθωση αυτών των ανεπαρκειών. Ωστόσο, τα τεχνικά μειονεκτήματα συναντώνται σταθερά στην οπτική παράδοση, πολύ πριν από τον Θέωνα. Επομένως, δεν είναι το αποτέλεσμα της αδέξιας έκδοσής του[66]. Μπορεί οι αρχαίοι σχολιαστές να μην ήταν από τεχνικής απόψεως καινοτόμοι, αλλά γνώριζαν το αρχαίο μαθηματικό σώμα καλύτερα από ό,τι θα μπορούσε ένας σημερινός κριτικός. Κατά την άποψη του Knorr, οι δύο εκδόσεις των *Οπτικών* είναι καλύτερες από ό,τι έγραψε ο Ευκλείδης αρχικά, λόγω των προσπαθειών που κατέβαλαν άνθρωποι, όπως ο Πάππος, ο Θέων και οι διαδόχοι τους[67]. Επίσης, όσον αφορά στην περίπτωση των *Κατοπτρικών*, η απόπειρα εξαγωγής στρωμάτων από αυτά εκ μέρους του Lejeune βασίζεται στη λανθασμένη

---

[63] Ο Knorr επισημαίνει ότι ακόμα και στα *Στοιχεία* υπάρχουν περιστασιακά κενά που εκπλήσσουν από έναν ικανό γεωμέτρη. Βλ. *ό.π.*, σ. 20.

[64] *ό.π.*, σ. 45.

[65] Στο Βιβλίο 6 της *Μαθηματικής Συναγωγής* ο Πάππος σχολιάζει εκτενώς μια πρόταση των *Οπτικών* που αφορά στους λοξά παρατηρούμενους κύκλους και που πρόκειται να μελετήσουμε στο όγδοο κεφάλαιο. Είναι η πρόταση 35 του κώδικα της Βιέννης ή η πρόταση 36 του κώδικα του Βατικανού. Σύμφωνα με τον Knorr, ο Πάππος παρακινήθηκε να τη σχολιάσει, εξαιτίας κάποιων παραλείψεων που σημείωνε. Βλ. *ό.π.*, σσ. 34-43.

[66] Όπως ισχυρίζεται ο Knorr, μια τέτοια θεώρηση του Θέωνα δε θα συμβάδιζε με τα έργα του στον Ευκλείδη και στον Πτολεμαίο. Συγκεκριμένα, αναφέρει ότι η αντιμετώπιση του πολύπλοκου προβλήματος των ισοπεριμετρικών σχημάτων από τη μεριά του Θέωνα είναι πολύ καλύτερη από εκείνη του Πάππου, γιατί ο Θέων είναι λιγότερο επιρρεπής από ό,τι εκείνος στο να παρεκλίνει από την τεχνική γραμμή της πηγής. Για το συγκεκριμένο θέμα, βλ. σσ. 7-8 του άρθρου.

[67] *ό.π.*, σσ. 44-45.

προσδοκία του ότι μια μελέτη θα έπρεπε να παρέχει μια άποψη της εξέλιξης της κατοπτρικής, ανάμεσα στον Ευκλείδη και στον Ήρωνα. Ωστόσο, ο Knorr υποστηρίζει ότι δεν έχουμε στοιχεία που να συνηγορούν ότι ο κλάδος αυτός αναπτύχθηκε με οποιοδήποτε τέτοιο σταδιακό τρόπο, σε μια μεγάλη περίοδο. Τα *Κατοπτρικά* παρουσιάζουν ένα πρώιμο στάδιο του πεδίου και οι προσπάθειες του Ευκλείδη ίσως να διέπονται από κάποια απλοϊκότητα. Αυτό που έχει σημασία για τον Knorr είναι ότι μια σχετικά πρωτόγονη έκθεση, όπως τα *Κατοπτρικά*, συνέχισε να κυκλοφορεί για τόσο μεγάλο χρονικό διάστημα, δεδομένου ότι το πεδίο είχε αναπτυχθεί στο εξής πριν από τον Διοκλή[68].

δ. Υποστήριξη της επιχειρηματολογίας του Knorr

Το 1987 ο A. Jones δημοσίευσε τη μελέτη του "On Some Borrowed and Misunderstood Problems in Greek Catoptrics"[69]. Ο κύριος σκοπός του σε αυτό το άρθρο ήταν να αναδείξει την αλληλεξάρτηση που υφίσταται, ανάμεσα στις αρχαίες κατοπτρικές πραγματείες και τους δανεισμούς που έχουν πραγματοποιήσει αυτές από κοινές, μη-διασωζόμενες πλέον πηγές. Ο Jones επεξεργάστηκε τη σχέση που υπογραμμίζει ορισμένα θεωρήματα των ψευδο-ευκλείδειων *Κατοπτρικών* με το πιο θεωρητικό πρώτο μέρος του ψευδο-Πτολεμαϊκού *De Speculis*[70], καθώς παρουσιάζουν σχεδόν ίδια μορφή. Εξετάζοντας το τέταρτο αξίωμα των *Κατοπτρικών,* σε συσχετισμό με την αντίστοιχη, σχεδόν ταυτόσημή της εκφραστικά, πρόταση του *De Speculis* εντόπισε κάποια σημαντικά στοιχεία, τα οποία αποτέλεσαν ταυτόχρονα αφετηρία για την κριτική του απέναντι στον Lejeune. Συγκεκριμένα, ο Jones αντιτάχθηκε στον τρόπο και στο χρόνο σύνθεσης των *Κατοπτρικών* που πρότεινε ο Lejeune και ειδικότερα στην άποψή του ότι τα αξιώματα αυτού του έργου είναι ύστερα, παρηκμασμένα παράγωγα των νόμων της ανάκλασης του Πτολεμαίου. Παρόλο που οι διατυπώσεις των προτάσεων παρουσιάζουν πολλές εκφραστικές ομοιότητες, ωστόσο, στο *De Speculis* ο ψευδο-Πτολεμαίος διαφοροποιείται εσκεμμένα, ως προς αυτό που θέλει να αποδείξει[71]. Η πρόταση του ψευδο-Πτολεμαίου είναι αποδεδειγμένα

---

[68] σσ. 9-22.

[69] Jones, A., "On Some Borrowed and Misunderstood Problems in Greek Catoptrics", *Centaurus XXX* (1987), σσ. 1-17.

[70] Το *Liber de Speculis* διασώζεται υπό το όνομα του Πτολεμαίου, μέσω της λατινικής μετάφρασης του William του Moerbeke το 1269 από το χαμένο ελληνικό. Το έργο αυτό δε θεωρείται ότι ανήκει στον Πτολεμαίο, λόγω των χαμηλού επιπέδου εκτελέσεων των προβλημάτων. Έχει εκφραστεί η υπόθεση ότι αποτελεί μια περικοπή των *Κατοπτρικών* του Ήρωνα του Αλεξανδρινού.

[71] Το τέταρτο αξίωμα των ψευδο-ευκλείδειων *Κατοπτρικών* δηλώνει ότι «*Ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐνόπτροις τοῦ τόπου καταληφθέντος, ἐφ'*

ορθότερη εκείνης του ψευδο-Ευκλείδη. Ο Jones δε θεωρούσε λοιπόν πιθανόν ότι ένας συγγραφέας της ύστερης Αρχαιότητας θα μπορούσε να είχε πάρει τη σωστή διατύπωση του ψευδο-Πτολεμαίου και να την είχε διαστρεβλώσει, ώστε να λάβει τη μορφή που βρίσκεται στον ψευδο-Ευκλείδη. Αντίθετα, υποπτευόταν ότι η πηγή του ψευδο-Πτολεμαίου ήταν τα ψευδο-ευκλείδεια *Κατοπτρικά*, από τα οποία διατήρησε την ιδιοσυγκρασιακή φρασεολογία τους, ενώ την εφάρμοσε σε μια πιο βάσιμη και ορθότερη θεωρία. Με τον τρόπο αυτό, τα περιεχόμενα του ψευδο-Πτολεμαίου αποτελούσαν για τον Jones παράγωγα από τον ψευδο-Ευκλείδη και όχι το αντίστροφο.

Μερικά χρόνια αργότερα, το 1992, ο K. Takahashi πρόσφερε μια κριτική έκδοση των μεσαιωνικών χειρογράφων των ψευδο-ευκλείδειων *Κατοπτρικών*, με μετάφραση και σχολιασμό. Στην εισαγωγή του έργου του πραγματευόταν πολλά ενδιαφέροντα ζητήματα, ένα από τα οποία αφορούσε στο ερώτημα της αυθεντικότητας των *Κατοπτρικών*. Ο Takahashi εξέφρασε ξεκάθαρα τη θέση του υπέρ των απόψεων του Knorr. Θεώρησε ότι τα *Κατοπτρικά*, με αυτήν ακριβώς τη μορφή που διασώζονται σήμερα, πρέπει να αποδοθούν στον Ευκλείδη, με τον ίδιο βαθμό πιθανότητας που του αποδίδονται τα *Οπτικά*[72]. Η χωρίς επιφυλάξεις αποδοχή του Takahashi της διασωζόμενης κατάστασης των *Κατοπτρικών* ως της αρχικής ευκλείδειας πραγματείας, αποτέλεσε αντικείμενο κριτικής από τον G. Simon. Στο άρθρο του "Aux origins de la théorie des miroirs: sur l' authenticité de la *Catoptrique* d' Euclide" ο Simon δε συμφωνούσε με την τόσο ανεπιφύλακτη απόδοση της διασωζόμενης κατάστασης, στην οποία βρίσκεται το κείμενο των *Κατοπτρικών*, στον Ευκλείδη από τον Takahashi. Και αυτό γιατί, όπως τόνιζε ο Simon, ο Takahashi δεν απόρησε ότι το έκτο και τελευταίο αξίωμα πάνω στη διάθλαση δε χρησιμοποιείται πουθενά, για την απόδειξη οποιασδήποτε πρότασης, ένδειξη ότι το τέλος του έργου έχει απωλεσθεί. Δεν έδωσε σημασία στην εξωτερική παρεμβολή που έχει υποστεί η τελευταία πρόταση, σχετικά με τα πυρεία, με δύο αντιτιθέμενες αποδείξεις, από τις οποίες η μια είναι εσφαλμένη. Δε διερωτήθηκε καθόλου για την ανακρίβεια ορισμένων αποδείξεων, ούτε για την ανυπαρξία κάποιων αρχών που διέπουν κάποιες άλλες αποδείξεις. Ο Simon κατέληγε δηλώνοντας ότι «*σχετικά με ένα κείμενο σίγουρα*

ὃν ἡ κάθετος πίπτει ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου, οὐκέτι ὁρᾶται τὸ ὁρώμενον», ενώ η πρόταση του ψευδο-Πτολεμαίου ότι «*in planis speculis est aliquis locus quo apprehenso non adhuc videtur ydolum*», δηλαδή ότι «*στα επίπεδα κάτοπτρα υπάρχει κάποιος τόπος, ο οποίος, όταν καταληφθεί, δεν οράται πια η εικόνα*».

[72] Takahashi, K., *The Medieval Latin Traditions of Euclid's Catoptrica*, Kyushu University Press 1992, σ. 33.

ακρωτηριασμένο, αναμφίβολα διεφθαρμένο και πιθανώς έχοντας δεχτεί παρεμβολές, η ασφάλεια με την οποία αποδίδει (ενν. *ο Takahashi*) *τα πάντα στον Ευκλείδη μου φαίνεται ότι χάνει πολύ σε αξιοπιστία*»[73].

Παρά τα λίγα σημεία απόκλισης των δύο μελετητών, οι Simon και Takahashi συμφωνούσαν σε κάτι πιο ουσιώδες ακολουθώντας έτσι την πορεία που είχε διαγράψει ο Knorr. Συγκεκριμένα, υποστήριζαν ότι η υπόθεση του Heiberg για τα *Κατοπτρικά* ως μια ύστερη σύνθεση χρονολογούμενη τον 4ο αιώνα μ.Χ. δεν έβρισκε κανένα στοιχείο τεκμηρίωσης. Τόσο ο Simon όσο και ο Takahashi αποπειράθηκαν να θέσουν υπό έλεγχο τις απόψεις των Heiberg και Lejeune καταλήγοντας έτσι σε αντίθετα με εκείνους συμπεράσματα. Έτσι, ο Simon θεώρησε ότι κάποια χαρακτηριστικά των *Κατοπτρικών* είναι συγκρίσιμα με εκείνα των *Οπτικών*. Για παράδειγμα, τα δύο έργα δίνουν μεγάλη σημασία στην πορεία της οπτικής ακτίνας, δεν αναφέρουν καθόλου το χρώμα κλπ. Επίσης, αναρωτιώταν για το πώς ένας ύστερος συγγραφέας, όπως ο Θέων, θα παρέλειπε να συμπεριλάβει στη σύνθεσή του σημαντικές συνιστώσες των *Οπτικών* του Πτολεμαίου. Ο Simon έκρινε ότι το κείμενο των *Κατοπτρικών* παρέχει πληροφορίες για την κατάσταση αυτού του πεδίου πριν τον Ευκλείδη ή την εποχή του Ευκλείδη, αποτελεί δηλαδή μια πρώιμη παρά μια μεταγενέστερη πραγματεία που διασώθηκε ατελής και έχοντας δεχτεί πολλές παρεμβολές[74]. Ο Takahashi είχε ήδη εκφράσει παράλληλες απόψεις και επιχείρησε να δώσει μια διαφορετική ερμηνεία των αξιωμάτων 4 και 5 που για τους Heiberg και Lejeune ήταν ανόητα και ασυνάρτητα[75]. Η ερμηνεία του Takahashi ικανοποιούσε τον Simon, ο οποίος μελετώντας το κείμενο οδηγήθηκε προς ανάλογες κατευθύνσεις.

Το 1994 ο M. Smith υποστήριξε τις απόψεις του Knorr υπέρ της αυθεντικότητας των *Κατοπτρικών*. Σε υποσημείωση της εισαγωγής του *Ptolemy's Theory of Visual Perception* ο Smith χαρακτήρισε την επιχειρηματολογία του Knorr ως πειστική[76]. Το ίδιο έκανε και το 1999 στο *Ptolemy and the Foundations of Ancient Mathematical Optics*, όπου αποφάσισε να πραγματευτεί τα *Κατοπτρικά* ως γνήσιο ευκλείδειο έργο[77].

---

[73] Simon, G., "Aux origines de la théorie des miroirs: sur l' authenticité de la *Catoptrique* d' Euclide", *Revue d' Histoire des Sciences 47* (1994), σ. 260.
[74] *ό.π.*, σ. 261.
[75] Takahashi, *έ.α.*, σσ. 20-26.
[76] Smith, M.A., *Ptolemy's Theory of Visual Perception: An English Translation of the Optics with Introduction and Commentary*, Transactions of the American Philosophical Society 86.2, Φιλαδέλφεια: American Philosophical Society 1996. Βλ. υποσημ. 51, σ. 15.
[77] Smith, *Ptolemy and the Foundations...*, σ. 17.

ε. Συμπεράσματα – Μια νέα ανάγνωση της κριτικής απόπειρας του Knorr

Στις προηγούμενες ενότητες επιχειρήθηκε η παρουσίαση της κατάστασης που έχει διαμορφωθεί στο πλαίσιο της ιστοριογραφίας της αρχαίας γεωμετρικής οπτικής, σχετικά με το θέμα της αυθεντικότητας των 'ψευδο-ευκλείδειων' *Κατοπτρικών*. Μια πρώτη σύγκριση της παραπάνω κατάστασης με την εικόνα που προβάλλει ιστοριογραφικά η αμφίβολη οργάνωση των δύο εκδόσεων των *Οπτικών*, φανερώνει ότι το πρόβλημα της πατρότητας των *Κατοπτρικών* έχει τύχει περισσότερων επιλυτικών εγχειρημάτων. Οι απόπειρες διαλεύκανσης του ζητήματος των *Κατοπτρικών* συνιστούν ταυτόχρονα μια ουσιαστική κριτική αναθεώρηση που καταδεικνύει με σαφήνεια ότι δεν υπάρχουν πλέον περιθώρια για αμφισβήτηση της ευκλείδειας πατρότητας του έργου. Υπό το πρίσμα των μετέπειτα αναλύσεων, οι απόψεις του Heiberg και του Lejeune καθίστανται ως ατεκμηρίωτες υποθέσεις που δεν αντέχουν στην κριτική, ενώ, παράλληλα, δημιουργούν κενά, από όποια πλευρά και αν τις προσεγγίσει κανείς. Συνεπώς, η σύγχρονη ιστοριογραφία καταλήγει στην αποβολή του χαρακτηρισμού του 'ψευδο-ευκλείδειου' συγγράμματος και να πραγματευτεί τα *Κατοπτρικά* ως αυθεντικό ευκλείδειο έργο, όπως, ενδεικτικά, είδαμε να πράττει ο Smith.

Η κατευθυντήρια οδός που αρχικά υπέδειξε ο Knorr συνεπάγεται για εκείνον κάποιες επιπλέον παραμέτρους που επηρεάζουν με μορφή ανακατασκευής την ιστορία των κλάδων της αρχαίας οπτικής και κατοπτρικής. Για παράδειγμα, το θέμα της αυθεντικότητας των *Κατοπτρικών* συνδέεται με τις φερόμενες ως αρχιμήδειες μελέτες στον τομέα αυτό, δηλαδή την υποτιθέμενη συνεισφορά του Αρχιμήδη, την οποία ο Knorr δεν αναγνωρίζει[78]. Επίσης, αποσαφήνισε τη θέση του σχολίου περί των λοξά παρατηρούμενων κύκλων των *Οπτικών* και τον τρόπο σύνδεσής του με τον Πάππο τον Αλεξανδρινό. Ωστόσο, το κυριότερο στοιχείο της ανάλυσης του Knorr έγκειται στην απερίφραστη απόδοση στις ήδη εδραιωμένες απόψεις των Heiberg και Lejeune του χαρακτήρα των παραδοσιακών-συμβατικών αντιλήψεων. Μέσω της κριτικής του στην καθιερωμένη περιγραφή της αρχαίας γεωμετρικής οπτικής, και ειδικότερα της ευκλείδειας συμβολής, ο Knorr κατόρθωσε να αναδείξει τις αδυναμίες της προηγούμενης θεώρησης. Ωστόσο, η κριτική του προς τις ήδη εδραιωμένες απόψεις δε θα έπρεπε να εκληφθεί μονοδιάστατα ως μια απλή ερμηνευτική

[78] Ο Knorr είχε αντιμετωπίσει με σκεπτικισμό την αρχιμήδεια συμβολή στον τομέα της κατοπτρικής, παρά την ύπαρξη αρχαίων μαρτυριών, και νωρίτερα στη μελέτη του "The Geometry of Burning-Mirrors in Antiquity", *Isis 74* (1983): σσ. 53-73.

διαφοροποίηση, αλλά να ειδωθεί ως μια νέα ιστοριογραφική πρόταση για την προσέγγιση της αρχαίας γεωμετρικής οπτικής.

Ο Knorr έκανε σαφές ότι ο Heiberg, ο Lejeune, αλλά και προγενέστεροι από εκείνους κριτικοί, όπως ο Gregory, «*έχοντας προσυπογράψει σε μια αγιογραφική αντίληψη παντοδυναμίας του Ευκλείδη στη γεωμετρία έβρισκαν αδύνατο να αποδεκτούν την ευκλείδεια καταγωγή οποιουδήποτε έργου που περιελάμβανε οποιοδήποτε τεχνικό μειονέκτημα*»[79]. Αυτή η ερμηνευτική υπόθεση ήταν η αιτία της δυσκολίας τους να αποδεχτούν τα *Κατοπτρικά* ως έργο του Ευκλείδη επινοώντας τελικά έναν ψευδογράφο και να εξασφαλίσουν την αυθεντικότητα των *Οπτικών* αποδίδοντας τα ελαττώματά τους σε εκδοτικές παρεμβολές. Επίσης, είχαν προσυπογράψει σε μια αντίληψη παρακμής της μαθηματικής παράδοσης της ύστερης Αρχαιότητας. Γι' αυτόν τον λόγο, προχώρησαν στην εφεύρεση ενός 'αποδιοπομπαίου τράγου', δηλαδή του Θέωνα, χρεώνοντάς του τις ενδεχόμενες ατέλειες των *Κατοπτρικών*.

Ο Knorr επισημαίνει εύστοχα τις εσφαλμένες αφετηρίες της καθιερωμένης θεώρησης. Επεκτείνοντας τα συμπεράσματα του Knorr σε ένα γενικότερο πλαίσιο θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι οι ερμηνευτικές προσυπογραφές που πραγματοποίησαν οι Heiberg και Lejeune θα πρέπει να συνιστούν παράδειγμα προς αποφυγή, για μια αμερόληπτη ιστορική περιγραφή ενός αρχαίου επιστημονικού κλάδου. Ο Knorr υποδεικνύει ότι ο ιστορικός θα ήταν συνετό να αποφεύγει οποιεσδήποτε υπερεκτιμήσεις ή υποτιμήσεις των ικανοτήτων και των δυνατοτήτων ενός αρχαίου επιστήμονα ή μιας ορισμένης χρονολογικής περιόδου. Οι υπέρμετρες προτιμήσεις ή αποτιμήσεις ενός προσώπου ή μιας εποχής αποτελούν κατά βάση έναν αναξιόπιστο και κακό οδηγό της έρευνας, εφόσον την κατευθύνουν σε συμπεράσματα που δεν αντιστοιχούν στην ιστορική πραγματικότητα. Ακόμα και αν αυτό το αρχαίο πρόσωπο αφορά στον Ευκλείδη, εκείνος απέχει από εμάς χιλιάδες χρόνια. Ο μοναδικός συνδετικός κρίκος, ανάμεσα στον σύγχρονο ιστορικό και στον αρχαίο επιστήμονα, είναι οι αρχαίες διασωζόμενες πηγές. Ωστόσο, θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη ότι αυτές, όπως είναι φυσικό, έχουν υποστεί τροποποιήσεις και μεταβολές. Γι' αυτό θα πρέπει να προσεγγίζονται με επιφύλαξη και προσοχή. Εκτιμούμε ότι ο Knorr έχει δίκιο, όταν ισχυρίζεται ότι τα *Στοιχεία* δεν αποτελούν έναν τέλεια σαφή μάρτυρα του ευκλείδειου γραπτού δείγματος. Επομένως, για να αντιληφθούμε την τεχνική επιδεξιότητα του Ευκλείδη, είναι πιο ασφαλές να βασιστούμε όχι στα *Στοιχεία*,

[79] Knorr, "Pseudo-Euclidean Reflections...", σ. 44.

πρακτική που παραπλάνησε τους Heiberg και Lejeune, αλλά στα *Οπτικά* ή στα *Κατοπτρικά*.

Προβληματισμό προκαλεί το γεγονός ότι ο Lejeune αποπειράθηκε να ερμηνεύσει τα *Κατοπτρικά*, μέσω της εξαγωγής τριών χρονολογικών στρωμάτων που διέβλεπε σε αυτά. Με αυτόν τον τρόπο, ήταν σε θέση να εξομαλύνει τα ετερόκλητα στοιχεία που υποστήριζε ότι διέπουν το συγκεκριμένο έργο. Ωστόσο, όπως επισήμανε και ο Knorr, η παραπάνω πρακτική του τεμαχισμού του συγγράμματος σε κομμάτια που αντιστοιχούν σε στάδια της εξέλιξης του κλάδου οφείλεται προφανώς στη μη-κατοχυρωμένη πεποίθηση του Lejeune ότι τα *Κατοπτρικά* προβάλλουν τα στάδια εξέλιξης αυτού του κλάδου, με ένα κομμάτι τους να αντιστοιχεί στον Ευκλείδη, ένα στον Αρχιμήδη, ένα στον Ήρωνα και ένα στον Θέωνα.

Εκτιμούμε ότι η ερμηνευτική προσέγγιση του Lejeune είναι άστοχη και, κυρίως, άδικη για το συγκεκριμένο σύγγραμμα, εφόσον δε νομιμοποιείται από καμία άποψη. Ο Lejeune είχε διατελέσει μια ανάλογη ερμηνευτική πρακτική και κατά τη μελέτη της αρχαίας γεωμετρικής οπτικής, γεγονός που επιβεβαιώνεται και από τον ίδιο τον τίτλο του σχετικού βιβλίου του *Euclide et Ptolémée: Deux Stades de l' Optique Géométrique Grecque*[80]. Στο πλαίσιο αυτής της μελέτης, ο Lejeune αισιοδοξούσε να κατανοήσει τον τρόπο, με τον οποίο εξελίχθηκε η γεωμετρική οπτική, από την εποχή του Ευκλείδη, μέχρι την εποχή του Πτολεμαίου, έχοντας θέσει τον Ευκλείδη ως τον αρχικό όρο σύγκρισης, αφού, όπως έλεγε, είναι η μόνη πραγματεία οπτικής προγενέστερη εκείνης του Πτολεμαίου. Συνέχιζε δηλώνοντας για τον Ευκλείδη ότι είναι «*όρος σύγκρισης αρκετά απομακρυσμένος, αφού ανάμεσα στα δύο έργα μεσολαβούν περισσότεροι από 4 αιώνες, για τους οποίους δεν έχουμε πρακτικά κανένα ντοκουμέντο. Αυτή η αντιμετώπιση θα μας επιτρέψει τουλάχιστον να εκτιμήσουμε την πρόοδο που επετεύχθη εντωμεταξύ*»[81]. Στο συγκεκριμένο έργο του, παρόλο που σε πολλά σημεία ο Lejeune κάνει αξιοσημείωτες παρατηρήσεις, ωστόσο, σε αρκετά άλλα ο ίδιος φαίνεται να διακατέχεται από μια εμμονή ως προς την έννοια της προόδου. Δυστυχώς, οι περιπτώσεις, όπου επιχειρεί να συγκρίνει την αρχαία με τη μοντέρνα οπτική είναι πολύ περισσότερες, ώστε, κατά έναν φυσιολογικό τρόπο, δημιουργείται η εντύπωση ότι ο Lejeune, πριν συγγράψει το έργο του, είχε μελετήσει πολύ καλά την οπτική και την ψυχολογία της εποχής του, για να είναι σε θέση να

[80] *Ευκλείδης και Πτολεμαίος: Δύο Στάδια της Ελληνικής Γεωμετρικής Οπτικής.*
[81] Lejeune, *Euclide et Ptolémée…*, σ. 13.

ερμηνεύσει τα επιτεύγματα των αρχαίων με μοντέρνους όρους σύγκρισης[82]. Ενδεικτικά, αναφέρουμε στο σημείο αυτό την κρίση του Lejeune ότι «*για να καταλάβουμε τις θεωρίες και τα πειράματα του Πτολεμαίου, σχετικά με τη διοφθαλμική όραση, πρέπει να έρθουμε σε επαφή με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της μοντέρνας ψυχολογίας*»[83].

Ο Lejeune όχι μόνο έφτασε στα πρόθυρα του αναχρονισμού, αλλά τα ξεπέρασε και συνέχισε να τα υπερβαίνει κατά μεγάλο βαθμό λίγα χρόνια αργότερα, όταν συνέγραφε το *Recherches sur la Catoptrique Greque*. Το πρώτο μέρος αυτής της μελέτης ήταν αφιερωμένο στους θεμελιώδεις νόμους της ανάκλασης. Επειδή από τα *Κατοπτρικά* του Ήρωνα δε διασώθηκαν παρά λίγα αποσπάσματα και επειδή ο Lejeune δεν έβρισκε ικανοποιητικά τα ευκλείδεια -θεώνεια για εκείνον- *Κατοπτρικά*, ξεκίνησε την έρευνά του, όπως έλεγε, «*από το τέλος, εξετάζοντας αρχικά τους νόμους ανάκλασης κατά το πιο εξελιγμένο στάδιο, αυτό που παρουσιάζει η τελευταία γνήσια ελληνική πραγματεία, σχετικά με αυτό το αντικείμενο: τα Οπτικά του Πτολεμαίου*»[84]. Ο Lejeune έβλεπε στα *Οπτικά* του Πτολεμαίου την πιο ολοκληρωμένη μορφή των συγκεκριμένων νόμων, «*το έσχατο στάδιο μιας εξέλιξης που διήρκησε περισσότερο από 5 αιώνες, στην οποία συνεισέφεραν σοφοί, όπως ο Ευκλείδης και ο Αρχιμήδης και από τους οποίους θα θέλαμε να ανιχνεύσουμε τα στάδια*»[85]. Παράλληλα, στο ευρύ πλαίσιο της αρχαίας κατοπτρικής, αυτό που πρωτίστως τον απασχολούσε ήταν ερωτήματα του τύπου «*Πότε και από ποιον διατυπώθηκαν για πρώτη φορά οι 3 νόμοι της ανάκλασης;*»[86]

Παρόμοιους προβληματισμούς είχε εκφράσει και ο Ver Eecke στην εισαγωγή της μελέτης του της ευκλείδειας οπτικής. Εκεί προεξοφλούσε ότι η ανάλυση του

---

[82] Ορισμένα μόνο από τα σημεία, από τα οποία διαφαίνεται αυτή η προσκόλληση του Lejeune προς τη μελέτη της αρχαίας έχοντας ως γνώμονα τη μοντέρνα οπτική εντοπίζονται, όταν ο ίδιος αναφέρει τα εξής: «*...αυτά που στερείται ο Πτολεμαίος είναι δύο πράγματα: μια σωστή ερμηνεία του φαινομένου της διάχυσης του φωτός και της αναγνώρισης του διοπτρικού χαρακτήρα του οφθαλμικού οργάνου. Είναι υποχρεωμένος να επικαλείται τρεις διακριτούς παράγοντες -την οπτική απορροή, το φως και τα χρώματα- εκεί που η μοντέρνα φυσική θα πετύχει να αναγάγει τα πάντα σε έναν μοναδικό παράγοντα: το φως που, μέσω απορρόφησης, χρωματίζεται και έρχεται να δράσει το ίδιο πάνω στον αμφιβληστροειδή*» (σ. 32), «*...ανάμεσα στον Ευκλείδη και στον Πτολεμαίο, η οπτική, χωρίς να υποστεί καμία αναταραχή θεωρητικής τάξεως, επέκτεινε αξιοσημείωτα το σημείο άποψής της και μεταμόρφωσε τις μεθόδους της, κατά μια έννοια που τη φέρει πλησιέστερα προς τη μοντέρνα φυσική μας*» (σ. 58), «*...δίπλα σε αυτό που παρουσιάζει για εμάς η ελληνική οπτική και όπου η θεμελιώδης υπόθεση είναι η οπτική ακτίνα, υπήρξε συγχρόνως μια αξιοσημείωτη γεωμετρική οπτική με τη μοντέρνα έννοια του όρου, βασισμένη στην έννοια της φωτεινής ακτίνας*» (σ. 60).

[83] *ό.π.*, σ. 124.

[84] Lejeune, *Recherches...*, σ. 32.

[85] *ό.π.*, σ. 46.

[86] σ. 47.

Ευκλείδη απέχει κατά πολύ από τη σύγχρονη φυσική, εφόσον δεν αντιστοιχεί πλήρως με αυτό που η σύγχρονη επιστήμη υποδηλώνει, όταν αναφέρει τον όρο «*οπτική*». Ο Ver Eecke θεωρούσε ότι οι εσφαλμένες θεωρήσεις των ευκλείδειων *Οπτικών*, τα ίδια τα προβλήματά τους, οι λανθασμένες υποθέσεις τους συνηγορούν στο ότι η οπτική του Ευκλείδη δεν πλησιάζει καθόλου τη σύγχρονη[87].

Βασιζόμενες σε αυτές τις ερμηνευτικές αφετηρίες οι αναλύσεις των Lejeune και Ver Eecke δεν ήταν δυνατόν να αποφύγουν τη σκόπελο του αναχρονισμού. Η απόπειρά τους να τοποθετήσουν την αρχαία γεωμετρική οπτική σε σύγχρονα επιστημονικά πλαίσια, για μια τελική αποτίμηση του βαθμού, κατά τον οποίο οι δύο θεωρήσεις αποκλίνουν ή συγκλίνουν, δε νομιμοποιείται στη βάση κανενός ισχυρισμού. Η Αρχαιότητα πραγματεύτηκε τα οπτικά φαινόμενα με όρους εντελώς διαφορετικούς από τους σημερινούς. Επιχειρώντας να τους αντιληφθούμε εντάσσοντάς τους στη σύγχρονη πραγματικότητα, διαπράττουμε μια ανιστορική πρακτική, εφόσον προβαίνουμε στη συγκριτική μελέτη δύο διαφοροποιημένων πλαισίων. Μια αξιόπιστη και ιστορικά έγκυρη προσέγγιση της αρχαίας οπτικής δεν είναι εφικτή, αν δεν ειδωθεί, για παράδειγμα, η έννοια της οπτικής ακτίνας, του οπτικού κώνου ή του φωτός στο ευρύτερο μαθηματικό, φιλοσοφικό περιβάλλον της εποχής εκείνης. Προσδίδοντας σύγχρονους τρόπους αντίληψης και επιστημονικότητας σε αρχαίες έννοιες και θεωρίες προμηνύεται πάντα ο κίνδυνος παραμόρφωσης του αρχαίου τρόπου σκέψης.

Λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω κατάσταση η ανάλυση του Knorr μπορεί να εκλάβει μια επιπλέον ανάγνωση, αυτή τη φορά όχι περιορισμένη στο στενό πλαίσιο της κριτικής θεώρησης, αλλά ως ένα δείγμα ιστοριογραφικής αναθεώρησης. Ο Knorr κατέκρινε με κατηγορηματικό τρόπο τις μεροληπτικές προσυπογραφές της παραδοσιακής θεώρησης της γεωμετρικής οπτικής, προσυπογραφές που αναπόφευκτα διέπουν, υποστηρίζουμε εμείς, και αρκετές πλευρές της παραδοσιακής ιστοριογραφίας του συγκεκριμένου κλάδου. Οι Heiberg, Lejeune και Ver Eecke είχαν προεξοφλήσει πολλά συμπεράσματα, κατά βάση αυθαίρετα, σύμφωνα με τα οποία καθοδήγησαν τη μελέτη τους. Ο Knorr υπέδειξε τον τρόπο, με τον οποίο η ερμηνευτική τακτική των παραπάνω, που διαποτίζει συγχρόνως την παραδοσιακή ιστοριογραφία, έχει καταλήξει σε εσφαλμένες αντιλήψεις της ιστορίας της αρχαίας οπτικής και, συνεπώς, θα πρέπει να αποφεύγεται. Από τη μεριά μας, διακρίνουμε στη μελέτη του Knorr μια νέα ιστοριογραφική τάση, μια πρόταση αποδέσμευσης από τα

[87] Ver Eecke, *Euclide...*, σσ. XXIV-XXV.

επιβλαβή και επικίνδυνα στοιχεία του παραδοσιακού τρόπου ιστοριογραφίας της αρχαίας οπτικής, δηλαδή μια προτροπή αποφυγής των αυθαίρετων προκαταλήψεων, των εσφαλμένων εντυπώσεων και, όπως προαναφέρθηκαν, των αναχρονιστικών προσεγγίσεων, οι οποίες παρατηρούνται επανειλημμένως και έχουν γίνει αντικείμενο κριτικής από τους ιστορικούς.

Για παράδειγμα, ο G. Simon αναφερόμενος στις πολύτιμες συνεισφορές των Lejeune και Ver Eecke κρίνει, ωστόσο, ότι αυτές «*δε μας ικανοποιούν*» και συνεχίζει με μια αιχμηρή κριτική λέγοντας ότι «*η ιστορική περιέργεια που προκαλεί* (ενν. *τις μελέτες τους*) *μάς φαίνεται παραδόξως υποκινούμενη από μια ανιστορική σύλληψη της επιστήμης. Το ερώτημα στο οποίο εννοούν να απαντήσουν -και πρακτικά το μόνο που θέτουν- είναι το επόμενο: από τις γνώσεις μας, τι ακριβώς είχαν αποκτήσει οι αρχαίοι και σε ποια στιγμή;... Είναι λοιπόν σημαντικό να κατανοήσουμε σε ποια ερωτήματα απαντούν οι μελέτες και τα αποτελέσματα που εκθέτουν οι πραγματείες περασμένων εποχών. Αν αποτύχουμε να το κάνουμε, θα διαπράξουμε το μεγαλύτερο επιστημονικό σφάλμα στο αντικείμενο της ιστορίας, το οποίο είναι ο αναχρονισμός: σφάλμα τεράστιο, γιατί διαστρεβλώνει αυτό που αγγίζει και δε βλέπει το ουσιαστικό*»[88]. Οι απόψεις του Simon περί αναχρονιστικών αντιλήψεων στην ιστοριογραφία της προ-μοντέρνας οπτικής έβρισκαν σύμφωνο και τον M. Smith στη μελέτη του "Extremal Principles in Ancient and Medieval Optics"[89]. Ωστόσο, θεωρούσε ότι η κριτική του Simon σε συγκεκριμένα ονόματα ήταν μάλλον πολύ νευρώδης και δογματική, για να είναι ακριβοδίκαιη εμφανίζοντας έτσι μια πιο επιεικά στάση προς τον Lejeune.

Επιθυμούμε να γίνει σαφές ότι ο σκοπός μας δεν είναι να μειώσουμε ούτε να απορρίψουμε ολοκληρωτικά την προσφορά της παραδοσιακής ιστοριογραφίας της αρχαίας οπτικής. Κάτι τέτοιο θα ήταν άδικο και εσφαλμένο. Θεωρούμε ότι η συνεισφορά της είναι πολύτιμη και, όπως έχουμε ήδη δηλώσει, πολλές από τις παρατηρήσεις και τις επισημάνσεις της είναι αξιοσημείωτες. Άλλωστε, μια πληθώρα κριτικών εκδόσεων και μελετών οφείλεται στις προσπάθειες εκείνης, όπως η θαυμάσια κριτική έκδοση των *Οπτικών* του Πτολεμαίου από τον Lejeune. Αυτό που προτείνουμε να αποφεύγεται είναι ορισμένες συνιστώσες που κατευθύνουν τις αναλύσεις της, δηλαδή οι συγκεκριμένες, μη-νομιμοποιημένες ερμηνευτικές υποθέσεις και τα αναχρονιστικά ερωτήματα που συχνά υποβάλλει.

---

[88] Simon, *Le regard...*, σσ. 61-62.
[89] Smith, M.A., "Extremal Principles in Ancient and Medieval Optics", *Physis 31* (1994): σσ. 113-140.

Β. ΣΥΓΚΡΟΥΣΕΙΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΝΤΙΘΕΣΗ ΔΥΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΡΟΟΠΤΙΚΗΣ

Έντονες συζητήσεις έχει προκαλέσει η άποψη που υποστηρίζει ότι η ευκλείδεια και η αναγεννησιακή προοπτική βρίσκονται σε αντιδιαστολή. Πριν εκτεθούν τα ερωτήματα και οι διάφοροι τρόποι προσέγγισής τους από τη σύγχρονη ιστοριογραφία της αρχαίας γεωμετρικής οπτικής, θεωρείται σκόπιμη η επεξήγηση κάποιων βασικών εννοιών, αλλά και μια σύντομη περιγραφή της μεθόδου εικονικής αναπαράστασης της πραγματικότητας από τους καλλιτέχνες της εποχής της Αναγέννησης, της λεγόμενης «*construzione legittima*», ώστε να κατανοηθεί πληρέστερα το ζήτημα.

1. Η construzione legittima της Αναγέννησης

Ο όρος «*προοπτική*» χρησιμοποιείται, γενικά, για να δηλώσει τη μέθοδο, με την οποία οργανώνονται οι διάφορες μορφές στον χώρο. Λόγω της σπουδαιότητάς της στην τέχνη, η προοπτική αποτελεί μια αισθητική έννοια, όπως η μορφή, ο χώρος, η γραμμή, η αναλογία, όντας πολύ σημαντική για την περιγραφή των έργων τέχνης από εποχή σε εποχή και από τόπο σε τόπο. Όπως είναι εύλογο, χρησιμοποιείται κυρίως από τους καλλιτέχνες, για τη δημιουργία της αίσθησης του βάθους σε ένα έργο και, γενικότερα, για την αναπαράσταση του τρισδιάστατου χώρου πάνω σε μια δισδιάστατη επιφάνεια[90].

Κατά την εποχή της ιταλικής Αναγέννησης, χάρη στις εργασίες κωδικοποίησης της *construzione legittima* από τον Leone Battista Alberti[91] και τις μελέτες των Pierro della Francesca,[92] Leonardo da Vinci,[93] Jean Pélerin (Viator)[94], Vignola[95], Serlio[96], Guidobaldo dal Monte[97] και άλλων, δόθηκαν οι κανόνες της

---

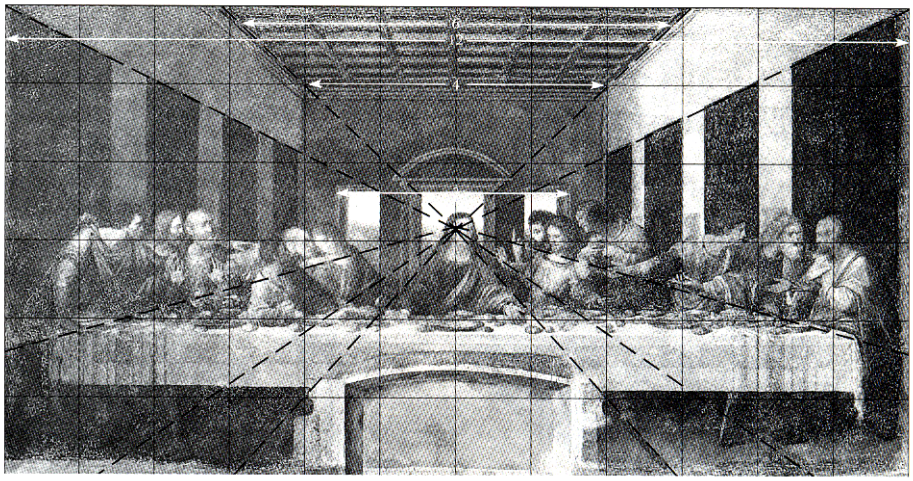
[90] Tansey, R.G., Kleiner, F.S., *έ.α.*, σ. 11.
[91] Alberti, L.B., *Della Pittura*, 1436 1η έκδ. Bâle 1540. Κριτ. έκδ. του Mallé, L., Φλωρεντία 1950.
[92] Piero della Francesca, *De Prospectiva Pingendi*, 1490˙ 1η έκδ. Στρασβούργο 1899. Κριτ. έκδ. του G. Nicco Fasola, Φλωρεντία 1942.
[93] Ravaisson-Mollien, C., *Les Manuscrits de Léonard da Vinci: Le Manuscrit A de la Bibliothèque de l' Institut*, Παρίσι 1881. Μια αναπαραγωγή του έγινε από τον Ivins, W.M., στο *On the rationalization of sight*, Νέα Υόρκη 1938.
[94] Pélerin, J. (Viator), *De Artificiali Perspectiva*, 1η έκδ., Τουλ 1505. Κριτ. έκδ. του Destailleur, H., 1860.
[95] Barozzi da Vignola (Jacopo), *Le due Regole della Prospettiva pratica con commentarii de Padre Egnazzio Danti*, Ρώμη 1583.

προοπτικής και οι διαδικασίες κατασκευής της, μέσω γραφικών επεξεργασιών. Παρόλο που από πραγματεία σε πραγματεία, οι κανόνες της προοπτικής και οι κατασκευές που τη συνόδευαν διαφοροποιούνταν, ωστόσο, εμφάνιζαν το κοινό χαρακτηριστικό της αναγωγής της προοπτικής σε ένα σύστημα, στο οποίο η διάταξη του χώρου της εικόνας γίνεται σε όρους ενός μόνο σημείου. Δηλαδή, κατά την εποχή της Αναγέννησης, η προοπτική σήμαινε ότι, όταν ο καλλιτέχνης ήθελε να αναπαραστήσει εικονικά τα αντικείμενα του τρισδιάστατου χώρου σε μια επίπεδη επιφάνεια, το έκανε με τέτοιο τρόπο, ώστε τα αντικείμενα της εικόνας να έχουν τις ίδιες σχέσεις θέσης, μορφής, μεγέθους που θα είχαν τα πραγματικά αντικείμενα στον χώρο, αν παρατηρούνταν από ένα μόνο σταθερό και προσδιορισμένο σημείο, δηλαδή με έναν μόνο σταθερό οφθαλμό. Το σημείο αυτό είναι πλέον γνωστό ως «*σημείο συμβολής*» ή «*σημείο φυγής*» και αποτελεί το κεντρικό σημείο, στο οποίο συμβάλλουν οι ευθείες, για να δηλωθεί το ελαττωμένο μέγεθος των μορφών, καθώς απομακρύνονται.

Αν υποθέσουμε ότι η οπτική αντίληψη ενός αντικειμένου πραγματοποιείται, μέσω των οπτικών ακτίνων που εξέρχονται από τον οφθαλμό και φτάνουν στο αντικείμενο αυτό, το επίπεδο της εικόνας του καλλιτέχνη αποτελεί την τομή της πυραμίδας που διαμορφώνεται από τις οπτικές ακτίνες έχοντας ως κορυφή της τον οφθαλμό του παρατηρητή και ως βάση το αντικείμενο που πρόκειται να αναπαρασταθεί. Όπως έλεγαν οι θεωρητικοί της Αναγέννησης, μπορούμε να φανταστούμε την εικόνα του καλλιτέχνη, απλά, ως ένα 'παράθυρο', μέσω του οποίου, ο παρατηρητής βυθίζεται στον χώρο. Για να υπάρχει συμφωνία, μεταξύ της προοπτικής και της φυσικής εικόνας, ο παρατηρητής πρέπει να κοιτάξει την εικόνα από το ίδιο οπτικό κέντρο με αυτό που υιοθέτησε ο καλλιτέχνης, στην ίδια απόσταση και με έναν μόνο, ακίνητο οφθαλμό.

---

[96] Serlio, S., *Tutte l' Opere di Architettura de S.S.*, Βενετία 1584 (τόμ. ΙΙ, *Prospettiva*, Παρίσι 1545).
[97] Guidobaldo dal Monte, *Perspectivae libri VI*, Πίζα 1600.



Εικόνα 1-1

Στην παραπάνω εικόνα, οι μαύρες διακεκομμένες γραμμές παρουσιάζουν τις γραμμές της προοπτικής στον πίνακα *Το Τελευταίο Δείπνο* του Leonardo Da Vinci (1495-1498)[98]. Οι γραμμές αυτές συγκλίνουν στο κέντρο και προβάλλουν τον χώρο της εικόνας του δωματίου, πάνω στον τοίχο του. Με αυτόν τον τρόπο, δημιουργείται η εντύπωση ότι ο χώρος της εικόνας και ο χώρος του δωματίου είναι συνεχής. Το παραπάνω σύστημα προοπτικής, το οποίο χαρακτηρίζεται από την κεντρικού-σημείου προβολή, ονομάζεται «*γραμμική*» ή «*επίπεδη προοπτική*».

2. Η θέση του E. Panofsky

Ο πρώτος που ισχυρίστηκε κατηγορηματικά ότι το ευκλείδειο σύστημα προοπτικής είναι αντίθετο από εκείνο της Αναγέννησης είναι ο E. Panofsky. Το 1927, στη μελέτη του *Die Perspective als symbolische Form* δήλωσε ότι η 'σωστή' γεωμετρική κατασκευή προοπτικής ανακαλύφθηκε κατά την Αναγέννηση και αποτελεί τη γραμμική ή επίπεδη προοπτική[99]. Αντίθετα, όπως υποστήριζε, στη ζωγραφική της Αρχαιότητας δε διακρίνεται κανένα έργο που να συνίσταται στη σωστή, κεντρικού-σημείου, προβολή[100]. Με άλλα λόγια, για τον Panofsky, η Αρχαιότητα απέτυχε να αναπτύξει μια σωστή γραμμική προοπτική, όπως έκαναν οι θεωρητικοί της Αναγέννησης. Ο λόγος της παραπάνω αποτυχίας ήταν, σύμφωνα με εκείνον, γιατί ένα τέτοιο σύστημα ερχόταν αντιμέτωπο με έναν από τους βασικούς στόχους της κλασικής οπτικής που ο Panofsky ονόμασε ως «*γωνιακό αξίωμα*». Ο

---

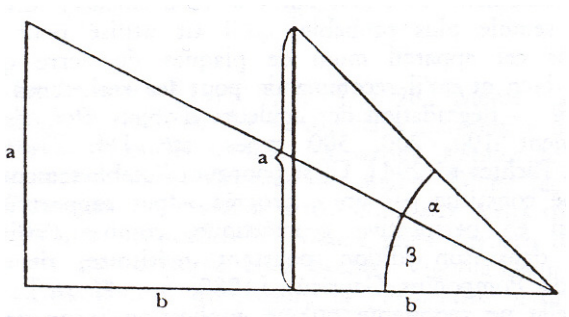
[98] Για την κατασκευή της προοπτικής στη συγκεκριμένη εικόνα, βλ. *Gardner's Art*, *έ.α.*, σ. 11.

[99] Panofsky, E., *Die Perspective als 'symbolische Form'*, Vorträge der Bibliothek Warburg, xxii, 1924-25. Εμείς θα παραπέμπουμε στη γαλλική μετάφρασή του, *La perspective comme forme symbolique et autres essais*, της Marisa delai Emiliani, Παρίσι: Minuit 1975, σ. 39.

[100] *ό.π.*, σ. 71.

Panofsky εξήγαγε το παραπάνω αξίωμα, μέσω της ανάγνωσης του θεωρήματος 8 των *Οπτικών* του Ευκλείδη, το οποίο δηλώνει ότι «*Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντα ἴσα μεγέθη μὴ ἐφεξῆς ἀλλήλοις τεθέντα καὶ ἄνισον διεστηκότα τ οῦ ὄμματος ἄνισα φαίνεται*»[101], αλλά και βασιζόμενος στο αντίστοιχο θεώρημα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, το οποίο θέτει ότι «*Τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισον διεστηκότα οὐκ ἀναλόγως τοῖς ἀποστήμασιν ὁρᾶται*» [102].

Πιο συγκεκριμένα, ο Panofsky παρατήρησε ότι, σύμφωνα με το «γωνιακό αξίωμα», τα οπτικά μεγέθη πρέπει να προσδιορίζονται όχι μέσω της απομάκρυνσης των αντικειμένων, σε σχέση με τον οφθαλμό, αλλά αποκλειστικά, μέσω του μέτρου της οπτικής γωνίας. Δηλαδή, στην ευκλείδεια «*γωνιακή*» ή «*φυσική*», όπως ονομάζεται, προοπτική τα οπτικά μεγέθη είναι ανάλογα των οπτικών γωνιών[103], υπό τις οποίες παρατηρούνται. Το στοιχείο αυτό συνεπάγεται ότι η αναφορά των αντικειμένων προς τον οφθαλμό δε μπορεί να διατυπωθεί με απλές μονάδες μήκους, αλλά με βαθμούς γωνιών ή τόξα κύκλου. Στο σχήμα 1-1 απεικονίζεται το «γωνιακό αξίωμα» του Panofsky. Παρατηρείται ότι τα οπτικά μεγέθη β και α+β δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα προς την απομάκρυνση 2b και b:

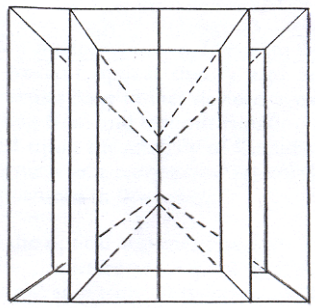


Σχήμα 1-1

Ένα σύστημα προοπτικής βασισμένο στο «γωνιακό αξίωμα» θα είχε ως αποτέλεσμα οι παράλληλες γραμμές να συμβάλουν κατά μήκος ενός κεντρικού

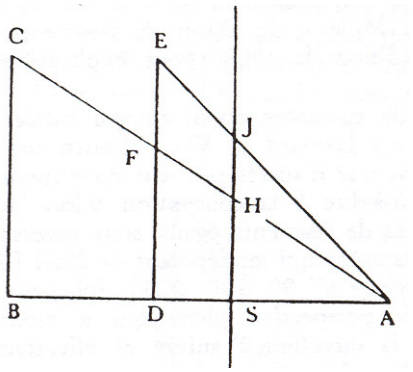
[101] Ευκλείδου, *Οπτικά*, έκδ. J.L. Heiberg, *Euclidis opera omnia*, 8.1-33.
[102] *Opticorum recensio Theonis*, έκδ. J.L. Heiberg, *ό.π.*, 164. 2-3.
[103]Τα *Οπτικά* του Ευκλείδη συνιστούν ένα σύγγραμμα γεωμετρικής περιγραφής των οπτικών φαινομένων ή, πιο συγκεκριμένα, των οπτικών εμφανίσεων των αντικειμένων, όταν αυτά βρίσκονται σε συγκεκριμένες χωρικές σχέσεις, ως προς τον παρατηρητή. Αν υποτεθεί ότι από τον οφθαλμό πηγάζουν οπτικές ακτίνες που συναντούν ένα παρατηρούμενο αντικείμενο διαμορφώνοντας στο σύνολό τους έναν οπτικό κώνο, με κορυφή τον οφθαλμό και βάση τα όρια του παρατηρούμενου αντικειμένου, τότε το φαινομενικό μέγεθος του αντικειμένου μεταφράζεται και περιγράφεται, μέσω της οπτικής γωνίας. Η οπτική γωνία είναι δηλαδή η γωνία που διαμορφώνεται από τα όρια του παρατηρούμενου αντικειμένου στον οφθαλμό, ο οποίος γεωμετρικά υποδηλώνεται ως ένα σημείο.

άξονα, γνωστού ως «*άξονα φυγής*», και όχι σε ένα κεντρικό σημείο προσλαμβάνοντας έτσι, περίπου, τη μορφή ενός ψαροκόκκαλου[104], όπως φαίνεται στο σχήμα 1-2:



Σχήμα 1-2

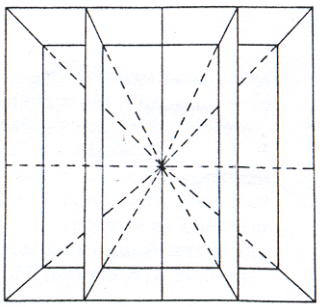
Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω προκείμενες ο Panofsky συμπέρανε ότι η οπτική της Αρχαιότητας, αφού έθεσε τις αρχές της κατεύθυνσής της, δεσμεύτηκε σε μια πορεία αντίθετη από εκείνη της επίπεδης προοπτικής. Στην πραγματικότητα, λόγω της σφαιρικής-καμπύλης φύσης της, παρουσιάζε τη μορφή ενός οπτικού πεδίου πάνω στο μοντέλο μιας σφαίρας έχοντας ως κύρια χαρακτηριστικά την εξάρτηση των μεγεθών από τις οπτικές γωνίες και τη φαινομενική καμπυλότητα των ευθείων γραμμών. Όπως υποστήριζε ο Panofsky, κατά την εποχή της Αναγέννησης, το αξίωμα των γωνιών, το οποίο άφηνε άλυτο το πρόβλημα της 'ορθής' κατασκευής μιας προοπτικής αναπαράστασης, εφόσον μια σφαιρική επιφάνεια δε μπορεί να απλωθεί πάνω σε ένα επίπεδο, έπρεπε να θυσιαστεί. Για τον σκοπό αυτό, η γραμμική προοπτική, μέσω του ίσιου επιπέδου εικόνας, υιοθέτησε, σύμφωνα με τον Panofsky, το «*αξίωμα της απόστασης*», σύμφωνα με το οποίο τα ίσα μεγέθη φαίνονται αντιστρόφως ανάλογα προς τις αποστάσεις τους από τον οφθαλμό. Η αρχή αυτή παρουσιάζεται γεωμετρικά στο σχήμα 1-3. Όπως διακρίνεται στην εικόνα, τα οπτικά μεγέθη HS και JS είναι αντιστρόφως ανάλογα προς την απόσταση AB και AD:



Σχήμα 1-3

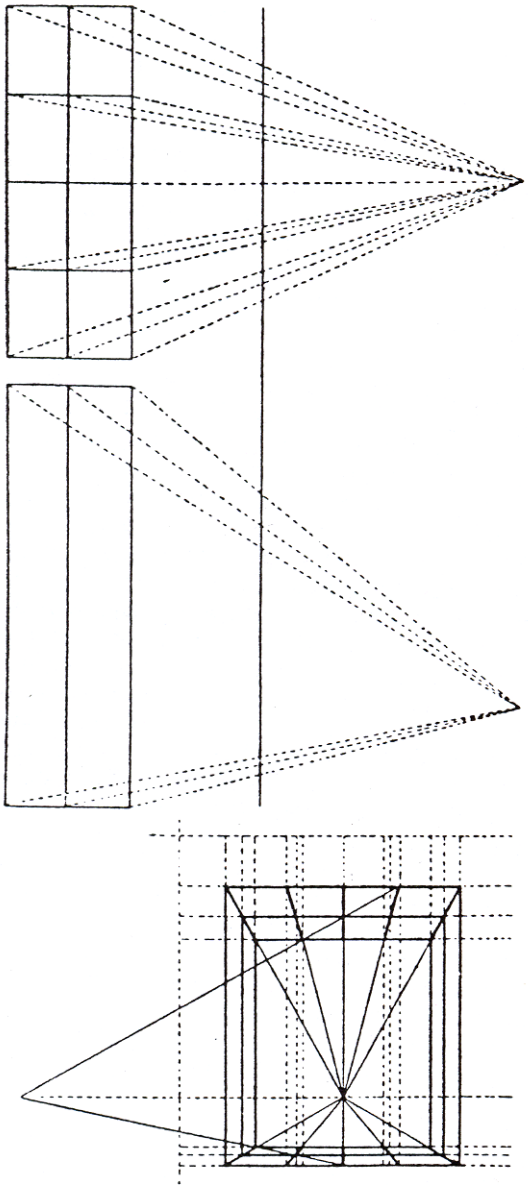
[104] Panofsky, *έ.α.*, σσ. 37-67.

Σύμφωνα με το αξίωμα της απόστασης, τα ίσα μεγέθη φαίνονται αντιστρόφως ανάλογα προς τις αποστάσεις τους από τον οφθαλμό και, επομένως, όπως διακρίνεται στο σχήμα 1-4, οι παράλληλες γραμμές συγκεντρώνονται προς ένα σημείο συμβολής, ακριβώς απέναντι από τον οφθαλμό:

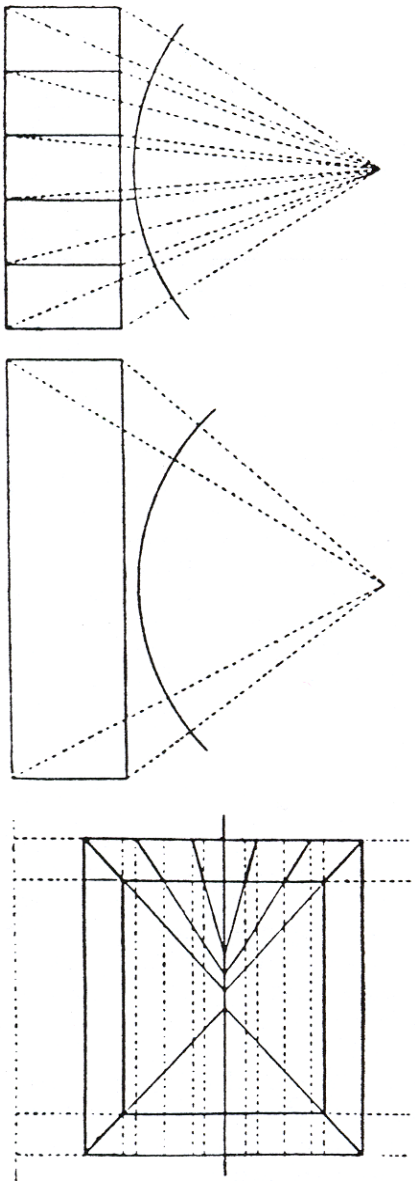


Σχήμα 1-4

Στα σχήματα 1-5 και 1-7 παρουσιάζεται η τεχνική της κατασκευής σε επίπεδη και γωνιακή προοπτική, αντίστοιχα, του εσωτερικού ενός ορθογώνιου χώρου. Για παράδειγμα, σύμφωνα με το σχήμα 1-5, ο καλλιτέχνης της Αναγέννησης θα παρομοίαζε αρχικά τον πίνακα με ένα 'παράθυρο', το οποίο θα αποτελούσε γεωμετρικά μια επίπεδη τομή της οπτικής πυραμίδας. Η οπτική πυραμίδα κατασκευάζεται, αν υποτεθεί αρχικά το οπτικό κέντρο, δηλαδή ο οφθαλμός, ως σημείο και ενωθεί με χαρακτηριστικά σημεία της χωρικής μορφής που πρόκειται να αναπαρασταθεί. Η σχετική θέση των οπτικών ακτίνων προσδιορίζει τη φαινομενική θέση των εν λόγω σημείων στην οπτική εικόνα. Αρκεί λοιπόν να αναπαρασταθεί όλο το σύστημα σε επίπεδο και σε ανύψωση, για τον προσδιορισμό του σχήματος που θα φανεί στο επίπεδο τομής της οπτικής πυραμίδας. Η αναπαράσταση σε επίπεδο, η οποία εμφανίζεται στην επάνω εικόνα του σχήματος 1-5, προσδίδει τις τιμές σε πλάτος, ενώ η αναπαράσταση σε ανύψωση, στη μεσαία εικόνα, τις τιμές σε ύψος. Συνδυάζοντας αυτές τις τιμές σε ένα τρίτο σχέδιο, στην κάτω εικόνα, αποκτάται η



Σχήμα 1-5



Σχήμα 1-6

ζητούμενη προβολή σε προοπτική. Χαρακτηριστικό στοιχείο της συγκεκριμένης κατασκευής είναι ότι, ανεξάρτητα από την κατεύθυνσή τους, όλες οι παράλληλες έχουν ένα σημείο φυγής. Αντίθετα, στη γωνιακή προοπτική του σχήματος 1-6, αν αναπτυχθεί ο κύκλος, οι τομείς του αποκλίνουν κατά ένα συγκεκριμένο μέτρο και, επομένως, αν προεκταθούν οι ευθείες φυγής, θα συναντηθούν δυο-δυο σε περισσότερα σημεία, τοποθετημένα όλα σε έναν κοινό άξονα[105].

Κάνοντας έναν απολογισμό των δύο συστημάτων ο Panofsky κατέληξε στο ότι ο τρόπος παρουσίασης του χώρου από τους αρχαίους έχανε ιδιαίτερα σε σιγουριά και συνοχή, όταν τον αντιστοιχούσε με την τεχνική των μοντέρνων. Όπως δήλωνε,

[105] *ό.π.*, σσ. 37-41 και 68-76.

«*στην πραγματικότητα, η μοντέρνα κατασκευή με το κεντρικό σημείο προβολής παρουσιάζει το τεράστιο πλεονέκτημα....να διατηρεί σταθερή, διαμέσω όλων των μεταβολών, τη σχέση ανάμεσα στο μήκος, το πλάτος και το βάθος, έτσι, ώστε το φαινομενικό μέγεθος κάθε αντικειμένου, για το οποίο είναι γνωστό ότι απορρέει από μετρήσεις αυτού του αντικειμένου και από τη θέση του αναφορικά με τον οφθαλμό να τίθεται χωρίς αμφιβολία*»[106]. Κατά την άποψη του Panofsky, η Αναγέννηση πέτυχε να ορθολογικοποιήσει επαρκώς την εικόνα του χώρου και σε αισθητικό και σε μαθηματικό επίπεδο. Αυτό το κατάφερε, επειδή αποδεσμεύτηκε από την ψυχοφυσιολογική δομή του. Ο καθαρά μαθηματικός χώρος, ο άπειρος, συνεχής και ομογενής, είναι εκ διαμέτρου αντίθετος με τον ψυχοφυσιολογικό. Η αισθητηριακή αντίληψη δεν αναγνωρίζει την έννοια του απείρου ούτε την ομογένεια του χώρου, αφού αυτή δεν είναι δεδομένη, αλλά γεννάται από μια κατασκευή, σύμφωνα με την οποία από κάθε σημείο του χώρου είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν όμοιες κατασκευές σε όλους τους τόπους και σε όλες τις κατευθύνσεις. Αντίθετα, στην άμεση αντίληψη αυτή η αρχή δεν ικανοποιείται, αφού κάθε τόπος έχει τον δικό του τρόπο και τη δική του αξία. Έτσι, στον οπτικό χώρο, όπως και στον απτό, οι τρεις κύριες κατευθύνσεις, πίσω και εμπρός, ψηλά και χαμηλά, αριστερά και δεξιά, δεν είναι ισοδύναμες[107].

Επιπλέον, η εικόνα του οργάνου του αμφιβληστροειδούς δείχνει ότι οι μορφές προβάλλονται σε μια καμπύλη επιφάνεια, στοιχείο από το οποίο η Αναγέννηση ήθελε να αποδεσμευθεί και, επομένως, ήταν ασύμφωνο με την επίπεδη προοπτική αναπαράστασή της. Κατά την Αρχαιότητα, οι καμπύλες θεωρούνταν ως κάτι το αυτονόητο και, μέσω διάφορων αρχιτεκτονικών μοτίβων, γίνονταν απόπειρες οπτικής εξουδετέρωσής τους. Για παράδειγμα, στις κολώνες των ναών προσδίδονταν η γνωστή «*ένταση*», για να μη φαίνεται ότι κυρτώνουν. Ωστόσο, ο Panofsky δήλωνε ότι η Αρχαιότητα, σε αντίθεση την Αναγέννηση, ήταν ανίκανη να εξηγήσει με άλλο τρόπο τον σκοπό χρήσης αυτών των μοτίβων[108].

α. Υπεράσπιση της αντίθεσης των δύο συστημάτων προοπτικής

Η θέση του Panofsky ότι η προοπτική της Αρχαιότητας έρχεται σε αντίθεση με τη 'σωστή' προοπτική των θεωρητικών της Αναγέννησης βρήκε αρκετούς

---

[106] *ό.π.*, σσ. 77-78.
[107] σσ. 41-50 και 156.
[108] σσ. 49-50, 55-60.

υπερασπιστές, όπως τους Morris Kline[109], John White[110], Nelson Goodman[111] και άλλους. Στο συμπέρασμα της αντίθεσης των δύο συστημάτων προοπτικής καταλήγουν και μελέτες που στοχεύουν σε μια προσέγγιση των θεμάτων της τέχνης, υπό το πρίσμα της γεωμετρίας, ανεξάρτητα από το συλλογιστικό πλαίσιο που διαμόρφωσε ο Panofsky, χωρίς δηλαδή να ασχολούνται αποκλειστικά με το ερώτημα που έθεσε εκείνος και να εκφράζουν, συνεπώς, μια συνειδητή υπεράσπιση των απόψεών του.

Για παράδειγμα, ο William Ivins δημοσίευσε το 1946 το έργο του με τίτλο *Art and Geometry* έχοντας ως κύριο στόχο να αναδείξει ότι αρκετοί περιορισμοί της ελληνικής θέασης του κόσμου, όπως η στατική ποιότητα της ελληνικής τέχνης, προέκυψαν από τη μη-κατανόηση των νόμων της προοπτικής και παρεμπόδισαν την ανάπτυξη τόσο των τεχνών όσο και των επιστημών. Λαμβάνοντας υπόψη τα χαρακτηριστικά της αρχαίας ελληνικής τέχνης συμπέρανε ότι η γνώση της προοπτικής που αποδίδεται στον Αγάθαρχο, τον Αναξαγόρα και τον Δημόκριτο είναι ένας μοντέρνος μύθος βασισμένος σε μια πλήρως ανεγγύητη ανάγνωση μιας πρόχειρης σημείωσης του Βιτρούβιου που έζησε τουλάχιστον 400 χρόνια αργότερα, ιδέες που ούτε ο Βιτρούβιος ούτε κάποιος Έλληνας του 5ου αιώνα π.Χ. θα μπορούσε να είχε[112]. Ο Ivins όριζε την προοπτική ως την κατασκευή μιας εικόνας σε επίπεδη επιφάνεια με τέτοιο τρόπο, ώστε τα διάφορα αντικείμενα που παρουσιάζονται σε αυτή να έχουν μεταξύ τους τα ίδια σχετικά μεγέθη, μορφές και θέσεις, που θα είχαν κατά τον εντοπισμό τους στον πραγματικό χώρο, αν παρατηρούνταν από ένα οπτικό σημείο. Ωστόσο, δήλωνε χαρακτηριστικά ότι δεν κατάφερε να ανακαλύψει τίποτα προς επιβεβαίωση της πίστης ότι οι Έλληνες είχαν οποιαδήποτε ιδέα, είτε στην πράξη είτε στη θεωρία, οποιαδήποτε στιγμή, που να ικανοποιεί τις χωρικές σχέσεις που υπαγορεύει ο προηγούμενος ορισμός. Οι σκιές που προκαλούνται από τον ήλιο στη ζωγραφική, διαμορφώνονται σε ορθογώνια προβολή, πράγμα πολύ διαφορετικό από την κεντρική προβολή, επομένως, άσχετο με την προοπτική. Επιπλέον, οι αρχαίοι Έλληνες πάλευαν με την επιμήκυνση του ανεξάρτητου αντικειμένου, αλλά η

[109] Kline, M., *Mathematics in Western Culture*, Λονδίνο 1954.
[110] White, J., *The Birth and Rebirth of Pictorial Space*, Λονδίνο 1957 (επανέκδ. 1972).
[111] Goodman, N., *Languages of Art*, Ινδιανάπολη & Νέα Υόρκη 1968.
[112] Ivins, W.M., *Art and Geometry*, Η.Π.Α.: Dover 1964. (1η έκδ.: Harvard University Press 1946), σ. 31.

επιμήκυνση ενός σώματος πολύ μικρή σχέση είχε με την επιμήκυνση ενός άλλου που βρισκόταν κοντά στο πρώτο[113].

Κάνοντας μια αναδρομή στην εποχή της Αναγέννησης, συγκεκριμένα στις κατασκευές προοπτικής των Alberti, Pelerin, Vignola, στις μεταγενέστερες θεωρίες του Cusanus, στις γεωμετρικές μελέτες περί κωνικών τομών του Kepler και στη συμβολή του Desargues στην προοπτική, ο Ivins περιγράφει τον τρόπο, με τον οποίο οι παραπάνω διόρθωσαν τις εσφαλμένες θεωρήσεις της Αρχαιότητας, για να καταλήξουν τελικά στη μαθηματική προοπτική και στην προβολική γεωμετρία. Αντίθετα, η αρχαία ευκλείδεια γεωμετρία, σύμφωνα με τον Ivins, παρόλο που έφτασε στην πόρτα της μοντέρνας, δεν κατάφερε να την ανοίξει. Ο λόγος αυτής της αποτυχίας οφείλεται στο ότι δεν ήταν δυνατόν να κάνει οποιαδήποτε χρήση της ιδέας του απείρου, γιατί ήταν βασισμένη σε απτικές-μυικές διαισθήσεις[114]. Ο Ivins υποστήριζε ότι οι Έλληνες σκέφτονταν τη γεωμετρία τους σε όρους μιας ανέκφραστης γραμμής από κιμωλία ή ενός ξύλου μιας αυλής. Αναφέρει χαρακτηριστικά το θεώρημα που υποστηρίζει ότι δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές και μια γωνία ίση, είναι μεταξύ τους ίσα και την απόδειξή του από τον Ευκλείδη παίρνοντας ένα τρίγωνο και τοποθετώντας το πάνω σε ένα άλλο. Ο αρχαίος Έλληνας θα θεωρούσε παράλογο, όποιον υποστήριζε ότι οι παράλληλες γραμμές θα μπορούσε να ειπωθεί ότι συναντώνται στο άπειρο, ότι δύο ευθείες γραμμές θα μπορούσε να είναι μια καμπύλη ή ότι Α φορές το Β δεν είναι απαραίτητα το ίδιο, όπως Β φορές το Α[115]. Ο Ivins κατέληξε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι, αντίθετα από την Αναγέννηση και τους μεταγενέστερους χρόνους, η ελληνική τέχνη και η ελληνική γεωμετρία θεμελιώθηκε στις ίδιες απτικές-μυικές διαισθήσεις, ότι οι αναπτύξεις των δύο αυτών κλάδων ακολούθησαν παράλληλη πορεία έχοντας παράλληλους περιορισμούς[116].

3. Αντίλογος στην άποψη περί δύο αντιτιθέμενων συστημάτων προοπτικής

α. Ο Brownson, η γεωμετρική συμβατότητα και μια πρόκληση

Ο C.D. Brownson στο άρθρο του "Euclid's *Optics* and its Compatibility with Linear Perspective" εξέφρασε την έκπληξή του για τη θέση που διατύπωσε ο Panofsky περί της αντίθεσης που διέπει το ευκλείδειο γωνιακό και το αναγεννησιακό

[113] Ivins, *έ.α.*, σσ. 32-34.
[114] *ό.π.*, σ. 47.
[115] σσ. 40-41.
[116] σ. 48.

επίπεδο σύστημα προοπτικής. Η παραπάνω θεώρηση του προκάλεσε έκπληξη, επειδή διέκρινε ότι και τα δύο συστήματα έχουν κοινούς στόχους, αφού επιχειρούν να απαντήσουν σε παρόμοια ερωτήματα, αλλά και παράλληλες εξηγητικές και περιγραφικές διαδικασίες, αφού προβαίνουν στην ανάπτυξη ενός γεωμετρικού μέσου ανάλυσης των οπτικών εμφανίσεων. Ο Ευκλείδης επεδίωκε με τη συγγραφή των *Οπτικών* να μελετήσει το φαινομενικό μέγεθος, τη μορφή και τη θέση ενός αντικειμένου, ως προς ένα παρατηρησιακό σημείο. Η γραμμική προοπτική στόχευε στην περιγραφή του σχετικού μεγέθους, μορφής και εντοπισμού των αντικειμένων σε μια σκηνή, όπως εμφανίζονται στο επίπεδο μια εικόνας. Τόσο η γωνιακή όσο και η επίπεδη προοπτική χρησιμοποίησαν ως βάση της ανάλυσής τους τον οπτικό κώνο παραμερίζοντας ταυτόχρονα οποιεσδήποτε ψυχολογικές ή φυσικές παραμέτρους της όρασης. Ο Brownson ανέπτυξε έναν ενδιαφέροντα συλλογισμό που έγκειται στο ότι, αν τα δύο συστήματα έρχονται σε αντίθεση κατά τη γεωμετρική τους ανάλυση, ενδεχομένως να υπάρχει κάποιος λόγος, ώστε να υποθέσουμε ότι το ένα ή και τα δύο είναι συμβατικά θεμελιωμένες γεωμετρίες και ότι εδραιώνονται σε αυθαίρετες παραδοχές. Αν αυτό είναι αληθές, τότε η διαμάχη γύρω από αυτές τις γεωμετρίες θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί, για να δείξουμε ότι είτε η αντίληψή μας των εμφανίσεων του κόσμου είτε η αποδοχή μας των ρεαλιστικών εμφανίσεων στις εικόνες είναι συμβατική ή αυθαίρετη[117].

Ο Brownson παρατήρησε ότι οι «όροι» των *Οπτικών* διέπονται από κάποια στοιχεία που δεν αντιτίθενται στη γραμμική προοπτική. Για παράδειγμα, τα χαρακτηριστικά των εμφανίσεων των αντικειμένων προσδιορίζονται από τα χαρακτηριστικά της οπτικής γωνίας, υπό την οποία παρατηρούνται. Πρόκειται δηλαδή για σχέσεις και όχι για τα απόλυτα μέτρα των αντιληφθέντων αντικειμένων. Από αυτή την άποψη, «*η ευκλείδεια οπτική είναι συμβατή με τις προβολικές εικόνες της επίπεδης προοπτικής, αφού ούτε και σε εκείνες διατηρούνται τα μέτρα*». Όπως υποστήριζε ο Brownson, «*αν απαιτείται η μέτρηση ενός ανεξάρτητου αντικειμένου, ο Ευκλείδης υποθέτει ότι η μέτρηση αυτή μπορεί να επιτευχθεί και χρησιμοποιεί ένα '*δεδομένο βάθος*', το οποίο είναι το μέτρο μιας πραγματικής απόστασης (παρά μιας αντιληφθείσας απόστασης), όπως η μέτρηση μιας σκιάς ή η απόσταση από τον παρατηρητή στο αντικείμενο*»[118].

---

[117] Brownson, C.D., "Euclid's *Optics* and Its Compatibility with Linear Perspective", *Archive for History of Exact Sciences 24* (1981), σσ. 165-166.
[118] *ό.π.*, υποσημ. 6, σ. 167-168.

Επιπλέον, ο ευκλείδειος οπτικός κώνος, ο οποίος περιγράφεται στον δεύτερο «όρο», έχει την κορυφή του στο παρατηρησιακό σημείο και τη βάση του στο περίγραμμα, δηλαδή στα όρια του παρατηρούμενου αντικειμένου. Ο οπτικός κώνος του Ευκλείδη εξαρτάται από το ίδιο, ανεξάρτητο αντικείμενο. Στο σημείο αυτό υφίσταται φυσικά μια διαφοροποίηση, σε σχέση με την επίπεδη προοπτική, όπου ο κώνος τίθεται με αυθαίρετα μεγέθη και, εφόσον δεν είναι το μέτρο των εμφανίσεων, μπορεί να επεκταθεί στο να περιλαμβάνει περισσότερα από ένα μόνο αντικείμενο. Ωστόσο, ο Brownson υπενθυμίζει ότι σε μερικές προτάσεις των *Οπτικών*, όπως στα θεωρήματα 10-12 που θα εξετάσουμε στο όγδοο κεφάλαιο, ο εντοπισμός των ακτίνων του οπτικού κώνου δεν προσδιορίζεται από το περίγραμμα ενός αντικειμένου. Οι ακτίνες καταλήγουν στο επίπεδο ή στην ευθεία διαδοχικώς σε πιο απόμακρα σημεία. Ο Brownson θεωρεί ότι με αυτόν τον τρόπο οι παραπάνω ευκλείδειες προτάσεις «*πλησιάζουν πιο κοντά στο να παράσχουν μια γεωμετρική ανάλυση του οπτικού χώρου, παρά των οπτικών αντικειμένων*»[119]. Επιπλέον, όσον αφορά στο σχήμα του οπτικού κώνου, ο Ευκλείδης δε χρησιμοποίησε ορθογώνιους κυκλικούς κώνους, παρά μόνο στην περίπτωση που το παρατηρούμενο αντικείμενο έχει κυκλικό περίγραμμα. Το γεγονός αυτό αποτελεί για τον Brownson μια επιπλέον ένδειξη, εναντίον της άποψης ότι η υιοθέτηση του πυραμιδικού αντί του κωνικού σχήματος της Αναγέννησης υποδηλώνει οποιαδήποτε σημαντική διαφορά, μεταξύ της ευκλείδειας και της επίπεδης προοπτικής. Η χρήση της οπτικής πυραμίδας από τους θεωρητικούς της Αναγέννησης, όπως τον Alberti, δεν αποτελούσε μια μεθοδολογική διαφοροποίηση από την Αρχαιότητα, αλλά τη συνέχιση της παράδοσης που ήδη είχε διαμορφωθεί από την εποχή του Μεσαίωνα[120].

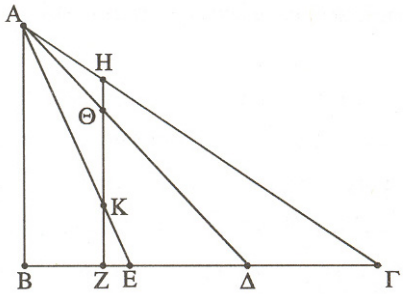
Όπως έχει προαναφερθεί, η επίπεδη προοπτική χρησιμοποιούσε ένα επίπεδο ως τομή της οπτικής πυραμίδας. Ένα ερώτημα που βρίσκεται στον πυρήνα της συγκριτικής μελέτης των *Οπτικών* με την επίπεδη προοπτική είναι γιατί ο Ευκλείδης δε χρησιμοποίησε ένα τέτοιο επίπεδο τομής. Ο Panofsky υποστήριζε ότι μια ανάλογη ενέργεια θα ήταν ασυνεπής στο πλαίσιο του ευκλείδειου συστήματος. Ο Brownson εξέφρασε τη διαφωνία του, αφού τα *Οπτικά* περιλαμβάνουν αρκετές προτάσεις,

---

[119] *ό.π.*, υποσημ. 8, σ. 168.

[120] *ό.π.*, υποσημ. 9, σσ. 168-169. Επιπλέον, ο Brownson διέβλεπε και στον έβδομο «όρο» των *Οπτικών*, ο οποίος δηλώνει ότι τα μεγέθη που παρατηρούνται υπό περισσότερες γωνίες φαίνονται με μεγαλύτερη ακρίβεια, κάποια κοινά στοιχεία με την ατμοσφαιρική προοπτική της Αναγέννησης. Τον παραλλήλιζε με την ανάπτυξη της ατμοσφαιρικής προοπτικής του Leonardo, όπου τα απόμακρα αντικείμενα παρουσιάζονται λιγότερο διακριτά σε έναν πίνακα ζωγραφικής.

συγκεκριμένα τις 18-21[121], τα διαγράμματα των οποίων αφορούν σε αυτή την αρχή, παρόλο που ο Ευκλείδης δεν τη χρησιμοποιεί ρητά. Όμως, στην πρόταση 10, η οποία αποτελεί θεμελιώδη πρόταση της επίπεδης προοπτικής[122], χρησιμοποιείται, όπως φαίνεται στο σχήμα 1-7, ένα επίπεδο που κόβει τον οπτικό κώνο και ο Brownson θεώρησε ότι είναι κατασκευή γραμμικής προοπτικής με διαφανές επίπεδο εικόνας.



Σχήμα 1-7

Προς όλους όσους υποστήριζαν ότι η ευκλείδεια προοπτική είναι αντίθετη με την επίπεδη και, επομένως, αρνούνταν τη χρήση του επιπέδου τομής στον Ευκλείδη, ο Brownson απαντούσε ότι είναι αναγκασμένοι να δείξουν ότι οι προτάσεις 18-21 δεν είναι νομιμοποιημένο τμήμα των *Οπτικών* και ότι το σχήμα της πρότασης 10 είναι εσφαλμένο ή μεταγενέστερη προσθήκη[123].

Ο Brownson έδωσε ιδιαίτερη βαρύτητα σε μια άλλη σημαντική πρόταση των *Οπτικών*, η οποία συσχετίζεται με την επίπεδη προοπτική. Πρόκειται για την πρόταση 8 που τόσο πολύ απασχόλησε τον Panofsky εξάγοντας από αυτή το «γωνιακό αξίωμα». Το θεώρημα αυτό αποτελεί τη μόνη πρόταση που αναφέρεται στη φύση της αριθμητικής σχέσης του μεγέθους της εμφάνισης που παρουσιάζεται στο παρατηρησιακό σημείο προς την απόσταση του παρατηρησιακού σημείου από το αντικείμενο και το μέγεθος της οπτικής γωνίας. Κατέχει κεντρική θέση στη διαφωνία για το αν οι εικόνες που προσδιορίζονται από την οπτική γωνία διαφοροποιούνται από εκείνες της επίπεδης προοπτικής που προσδιορίζονται από τη χρήση ενός

---

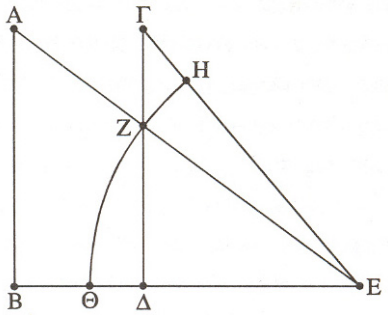
[121] Οι προτάσεις 18-21 είναι, για παράδειγμα, του τύπου *«Τὸ δοθὲν ὕψος γνῶναι, πηλίκον ἐστίν, ἡλίου φαίνοντος»* ή *«Τὸ δοθὲν βάθος γνῶναι, πηλίκον ἐστίν»*. Οι αποδείξεις αυτών των προτάσεων εξαρτώνται από τη γνώση του μεγέθους της επίπεδης τομής που κόβει τον κώνο, ώστε να προσδιοριστεί, μέσω ομοιότητας τριγώνων και υπολογισμών με λόγους, το μέγεθος ενός απόμακρου αντικειμένου. Όπως λέει ο Brownson, αυτό το σύνολο προτάσεων είναι αντίστροφο του κεντρικού προβλήματος των *Οπτικών*: να βρεθεί το σχετικό μέγεθος, σχήμα και θέση των εμφανίσεων γνωρίζοντας το μέγεθος και τον εντοπισμό του αντικειμένου.

[122] Πρόκειται για το θεώρημα «*Τῶν κάτω τοῦ ὄμματος κειμένων ἐπιπέδων τὰ πόρρω μετεωρότερα φαίνεται*», 10.1-23.

[123] Brownson, *έ.α.*, σσ. 172-173.

επιπέδου εικόνας που κόβει τον οπτικό κώνο. Ο Panofsky υποστήριξε ότι η μέθοδος προσδιορισμού του σχετικού μεγέθους των εμφανίσεων, μέσω της οπτικής γωνίας, είναι εκ διαμέτρου αντίθετη με τη μέθοδο της μοντέρνας κατασκευής, η οποία συνόψισε τη δράση της στον τύπο του Pelerin (Viator) ότι «*οι ποσότητες των εμφανίσεων μεταβάλλονται με τις αποστάσεις από τον παρατηρητή*».

Ο Brownson υποστήριξε ότι το τελικό συμπέρασμα αντίθεσης των δύο συστημάτων, στο οποίο κατέληξε ο Panofsky, οφείλεται καθαρά σε μια παρερμηνεία από εκείνον της πρότασης 8 και αντιτίθεται με το θεμελιώδες ευκλείδειο πρόγραμμα που καθιστά το σχετικό μέγεθος της εμφάνισης ως συνάρτηση της απόστασης από το παρατηρησιακό σημείο. Ο Ευκλείδης απέδειξε στο θεώρημα 8, το οποίο εκφράζεται γεωμετρικά στο σχήμα 1-8, ότι ο λόγος των άνισων από το παρατηρησιακό σημείο αποστάσεων δύο ίσων μεγεθών είναι μεγαλύτερος από τον λόγο των οπτικών γωνιών που διαμορφώνουν αυτά τα μεγέθη στον οφθαλμό.



Σχήμα 1-8

Σύμφωνα με τον Brownson, η ανάγνωση της πρότασης 8 από τον Panofsky ήταν πρωτίστως φιλολογική και αγνοούσε την απόδειξη, παρά μαθηματική στηριζόμενη στην απόδειξη. Η μαθηματική σημασία της λέξης «*ανάλογον*» είναι *«να έχει τον ίδιο ή σταθερό λόγο»*, ενώ, κατά την καθιερωμένη χρήση, σημαίνει ότι μια ποσότητα έχει εξαρτώμενη σχέση με μια άλλη. Ο Ευκλείδης κάνει χρήση της μαθηματικής σημασίας του όρου. Όταν λέει ότι τα μεγέθη δεν παρατηρούνται ανάλογα προς την απόσταση, δεν ισχυρίζεται ότι το φαινομενικό μέγεθος δεν εξαρτάται από την απόσταση. Ο Ευκλείδης εξίσωσε την εμφάνιση ενός μεγέθους με την οπτική γωνία και η αλήθεια της πρότασης 8 εξαρτάται από αυτή την εξίσωση. Αν οι εμφανίσεις ερμηνεύονταν ως εικόνες πάνω στο επίπεδο, τότε η πρόταση θα ήταν λάθος, γιατί τέτοιες εικόνες πράγματι είναι μαθηματικά ανάλογες προς την απόσταση. Η επίπεδη προοπτική θεωρεί ότι το μέγεθος των εμφανίσεων τίθεται από το μέγεθος πάνω στο επίπεδο της εικόνας. Ο λόγος του μεγέθους των εμφανίσεων, όπως

προσδιορίζεται από την επίπεδη προοπτική, δε μπορεί να εξισωθεί με τον λόγο των οπτικών γωνιών του Ευκλείδη. Ωστόσο, ο Brownson παρατήρησε ότι το διάγραμμα του Ευκλείδη προτείνει ότι η γωνιακή μέθοδος προσδιορισμού του μεγέθους των εμφανίσεων είναι συμβατή με τη μέθοδο της επίπεδης προοπτικής. Επιπλέον, ισχυρίστηκε ότι, αν η θέση του Panofsky είναι σωστή, τότε η κατασκευή μιας εικόνας βασισμένη στον τύπο του Pelerin για την επίπεδη προοπτική θα είχε αποτελέσματα διαφορετικά από εκείνα που αποκτώνται χρησιμοποιώντας τη γωνία στον οφθαλμό, για τον προσδιορισμό του μεγέθους της εμφάνισης. Ωστόσο, ο Brownson απέδειξε με μαθηματικούς υπολογισμούς ότι η επίπεδη και η γωνιακή προοπτική αποδίδουν τους ίδιους τύπους και τα ίδια αποτελέσματα για το μέγεθος των εικόνων σε επίπεδα εικόνων[124].

Ο Brownson διαπίστωσε ότι το κύριο σώμα προτάσεων των ευκλείδειων *Οπτικών* ασχολείται με το σχετικό μέγεθος, σχήμα και θέση της παρουσίασης των εμφανίσεων σε ένα ακίνητο σημείο. Οι περισσότερες από αυτές σχετίζονται με την επίπεδη προοπτική είτε όταν εξαρτούν το μέγεθος της εμφάνισης από την απόσταση[125] είτε όταν περιγράφουν την εμφάνιση των παράλληλων ευθειών για τη δεύτερη και την τρίτη διάσταση[126] είτε όταν επεκτείνουν άλλα θεωρήματα από τις δύο στις τρεις διαστάσεις[127]. Ο Brownson καταλήγει στο ότι τα ευκλείδεια *Οπτικά* και η επίπεδη προοπτική είναι γεωμετρικά συστήματα που επιχειρούν να αναλύσουν την εμφάνιση αποκλειστικά σε όρους γεωμετρικών ιδιοτήτων του ίδιου συνόλου ακτίνων, αναλύσεις που δε θα μπορούσαν να αντιτίθενται. Αυτό που τις κάνει να διαφοροποιούνται είναι η πρόθεση και ο στόχος εφαρμογής αυτών των γεωμετριών. Τα *Οπτικά* του Ευκλείδη προσανατολίζονται στην έρευνα του πώς βλέπουμε τα πράγματα. Αντίθετα, η επίπεδη προοπτική προορίζεται για τους ζωγράφους και προχωρά πέρα από την απόδοση της εμφάνισης των ανεξαρτήτων αντικειμένων.

---

[124] *ό.π.*, 182-188.

[125] Πχ. το θεώρ. 4 «*Τῶν ἴσων διαστημάτων καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων τὰ ἐκ πλείονος διαστήματος ὁρώμενα ἐλάττονα φαίνεται*» (4.1-3) και το θεώρ. 5 «*Τῶν ἴσων διαστημάτων καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων τὰ ἐκ πλείονος διαστήματος ὁρώμενα ἐλάττονα φαίνεται*» (5.1-2).

[126] Πχ. το θεώρ. 6 «*Τὰ παράλληλα τῶν διαστημάτων ἐξ ἀποστήματος ὁρώμενα ἀνισοπλατῆ φαίνεται*» (6.1-2).

[127] Πχ. το θεώρ. 13 «*Τῶν ἴσων μεγεθῶν καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὄμμα κειμένων τὰ πόρρω μετεωρότερα φαίνεται*» (13.1-2) και το θεώρ. 14 «*Τῶν ἴσων μεγεθῶν καὶ ἀνωτέρω τοῦ ὄμματος κειμένων τὰ πόρρω ταπεινότερα φαίνεται*» (14.1-2).

Ενδιαφέρεται κυρίως για το σχετικό μέγεθος του χώρου που υφίσταται μεταξύ αυτών και το ορίζει ως το σχετικό μέγεθος των φυσικών αντικειμένων. Όπως χαρακτηριστικά διατυπώνει ο Brownson, το σύστημα της επίπεδης προοπτικής «*δε μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι κυρίως ένα συμβατικό σύστημα της εικονικής αναπαράστασης πάνω στις καθαρώς μαθηματικές βάσεις μιας αντιπαράθεσης, μεταξύ εκείνου και της ευκλείδειας γεωμετρίας της οπτικής. Αυτά τα δύο δεν αντιτίθενται*»[128].

Ο Brownson κατέληξε στο ότι τα δύο συστήματα προοπτικής δεν είναι ασύμβατα μεταξύ τους, λόγω της δυνατότητας μετάφρασης του ενός στους όρους του άλλου και λόγω της αναφοράς τους σε ταυτόσημους οπτικούς κώνους. Ο ίδιος διαβεβαίωνε ότι η τεχνική της γραμμικής προβολής μπορεί να υπονοείται, αλλά εμφανίζεται πέντε φορές στα *Οπτικά*. Ωστόσο, όπως είδαμε, παραδέχτηκε ότι μόνο η πρόταση 10 αφορά σε οπτικό κώνο. Η πρόταση αυτή απασχόλησε και την K. Andersen. Το 1987 στη μελέτη της "Ancient Roots in Linear Perspective" δήλωσε ότι η πρόταση 10 είναι η μόνη περίπτωση στο σύνολο των ευκλείδειων προτάσεων που μοιάζει με προβολή. Ωστόσο, επισήμανε ότι η χρήση της στον Ευκλείδη εξυπηρετούσε έναν άλλο στόχο, συγκεκριμένα, τον επαναπροσανατολισμό ορισμένων οπτικών ακτίνων από την προς τα έξω κατεύθυνση στην κάθετη κατεύθυνση[129].

β. Tobin: κριτική και γεωμετρικές ανακατασκευές

Το 1990 ο R. Tobin δημοσίευσε το άρθρο του με τίτλο "Ancient Perspective and Euclid's *Optics*"[130]. Στη μελέτη αυτή ο Tobin άσκησε κριτική στις θέσεις του Panofsky δηλώνοντας ότι αυτές είναι το αποτέλεσμα μιας παρερμηνείας από τη μεριά του της πρότασης 8 των *Οπτικών*. Ο Tobin υπενθύμιζε ότι, όταν ο Panofsky ερμήνευε το όγδοο αξίωμα, επέλεξε να βασιστεί στην αντίστοιχη πρόταση της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* του Θέωνα, δηλαδή, «*στη λιγότερο αξιόπιστη έκδοση των Οπτικών*»[131] και όχι στην *Οπτική* του Ευκλείδη. Όμως οι δύο εκδόσεις παρουσιάζουν τυπική και ουσιαστική διαφορά, όσον αφορά στη συγκεκριμένη πρόταση. Η πρόταση 8 της 'γνήσιας' πραγματείας της έκδοσης της Βιέννης παρουσιάζει σημαντικότατα σημεία,

[128] Brownson, *έ.α.*, σ. 193.
[129] Andersen, K., "Ancient Roots in Linear Perspective", στο *From Ancient Omens to Statistical Mechanics: Essays on the Exact Sciences Presented to Asger Aaboe*, Κοπεγχάγη: University Library 1987, σσ. 75-89.
[130] Tobin, R., "Ancient Perspective in Euclid's *Optics*", *Journal of the Warburg and Courtland Institutes 53* (1990), σσ. 14-41.
[131] *ό.π.*, σ. 19.

τα οποία ο Θέων δε μεταχειρίστηκε προσεκτικά κατά την έκδοσή του, με αποτέλεσμα να χαθούν ορισμένα απαραίτητα στοιχεία-κλειδιά, για την ορθή κατανόηση του θεωρήματος. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται από τις παρακάτω χαρακτηριστικές εκφράσεις των κειμένων, η πρόταση 8 της ευκλείδειας έκδοσης, μέσω της χρήσης των όρων «*ὁράται*» και «*φαίνεται*», διαφοροποιεί αυτό που εγγράφεται στον οφθαλμό από εκείνο που γίνεται αντιληπτό. Αντίθετα, ο Θέων έκανε κακή εφαρμογή των παραπάνω ρημάτων, με αποτέλεσμα να μην πραγματοποιείται εκ μέρους του καμία διάκριση μεταξύ όρασης και αντίληψης.

Euclidis Optica

Α) *Τὰ ἴση μεγέθη καὶ παράλληλα ἄνισον διεστηκότα ἀπὸ τοῦ ὄμματος οὐκ ἀν αλόγως τοῖς διαστήμασιν ὁρᾶται...*

Β) *λέγω, ὅτι οὔκ ἐστιν, ὡς φαίνεται ἔχον, ὡς τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΑΒ, οὕτως τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΔ...*

Γ) *οὐκ ἀνάλογον ἄρα τοῖς ἀποστήμασιν ὁρᾶται τὰ ἴσα μεγέθη.*

Opticorum recensio Theonis

Α)

Τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισον διεστηκότα οὐκ ἀναλόγως τοῖς ἀποστήμασιν ὁρᾶται…

Β) *φημὶ δή, ὅτι οὐκ ἀναλόγως φανήσεται τὰ ΒΓ, ΔΖ μεγέθη τοῖς ΓΚ, ΚΖ διαστήμασιν...*

Γ) *οὐκ ἀνάλογον ἄρα τοῖς ἀποστήμασι τὰ ἴσα μεγέθη ὁρᾶται.*

Σύμφωνα με τον Tobin, ο Ευκλείδης δεν αρνείται απλά, όπως ο Θέων, ότι ο λόγος μεταξύ των μεγεθών των παρατηρούμενων αντικειμένων είναι αντιστρόφως ο ίδιος με τον λόγο των αποστάσεών τους από τον οφθαλμό. «*Δηλώνοντας ότι αυτό δε συμβαίνει για την εικόνα που καταγράφεται στον οφθαλμό (οὐκ... ὁρᾶται) ο Ευκλείδης σημειώνει επίσης το γεγονός ότι αυτό φαίνεται ότι συμβαίνει στην περίπτωση της αντίληψης ή της εμφάνισης (ὡς φαίνεται ἔχον)*»[132]. Αντίθετα, ο Θέων λέει ότι τα μεγέθη δε φαίνονται αναλόγως προς τις αποστάσεις τους από τον οφθαλμό. Με άλλα λόγια, φανερώνει άγνοια γι' αυτή τη διαφοροποίηση. Συνοψίζοντας, η γλώσσα του Ευκλείδη διαφοροποιεί τη διαδικασία της αποδοχής-καταγραφής της εικόνας στον οφθαλμό από το αποτέλεσμα της αντίληψης, δηλαδή το «*φαίνεσθαι*». Επίσης, θέτει μια αναλογική σχέση, αφενός, ανάμεσα στην καταγεγραμμένη εικόνα και τη

[132] *ό.π.*, σ. 19.

φαινόμενη εικόνα και, αφετέρου, στην κοινή τους οπτική γωνία με τις περιεχόμενες ακτίνες της.

Ο Tobin υποστήριξε ότι το θεώρημα 8 δεν αποκλείει την πιθανότητα της κεντρικού-σημείου προβολής στην αρχαία προοπτική, αφού, στην πραγματικότητα την υπονοεί. Σχετικά με τον σκοπό αυτής της πρότασης, ο Tobin δε συμμερίστηκε τις απόψεις του Panofsky. Ο Tobin διέβλεπε σε αυτή την προσπάθεια του Ευκλείδη να θέσει μια αρχή της οπτικής γωνίας που περιλαμβάνει και την εικόνα που καταγράφεται στον οφθαλμό και την εικόνα που φαίνεται στον παρατηρητή. Στόχος του Ευκλείδη δεν ήταν η απόδειξη της άμεσης αναλογίας των παρατηρούμενων μεγεθών και των γωνιών που τα περιλαμβάνουν. Κυρίως, επεδίωκε να αποδοκιμάσει την αντίστροφη αναλογία μεταξύ των παρατηρούμενων μεγεθών και των αποστάσεών τους από τον οφθαλμό που πιθανώς εφάρμοζαν οι καλλιτέχνες και οι σκηνογράφοι του τέλους του 4ου αιώνα π.Χ. επιλέγοντας έτσι την καμπύλη 'οθόνη' της όρασης από την επίπεδη[133]. Θεωρούσε μη-ικανοποιητική την ερμηνεία, κατά την οποία εξισώνεται η αναλογική ιδιότητα της οπτικής γωνίας και της παρατηρούμενης εικόνας με την αρχή του τέταρτου «όρου» των *Οπτικών*, σύμφωνα με τον οποίο «*τὰ μὲν ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα μείζονα φαίνεσθαι, τὰ δὲ ὑπὸ ἐλάττονος ἐλάττονα, ἴσα δὲ τὰ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα*»[134]. Όπως έλεγε ο Tobin, «*ο ορισμός αυτός καλύπτει τις φαινόμενες εικόνες, καθώς επίσης τις αντίστοιχες παρατηρούμενες εικόνες των κοινών γωνιών υπό τις οποίες περιέχονται*»[135].

Μέσω της παραπάνω ανάλυσης, ο Tobin οδηγήθηκε στο συμπέρασμα της ύπαρξης ενός οπτικά 'σωστού' συστήματος προοπτικής διαθέσιμου στους ζωγράφους της Αρχαιότητας. Επιπλέον, πρότεινε μια μέθοδο προβολής ως ανακατασκευή αυτού του συστήματος. Η μέθοδος και τα διαγράμματα που πρότεινε ήταν βασισμένα στους «όρους», τα θεωρήματα και τα σχήματα των *Οπτικών*. Στην ανακατασκευή του Tobin η ιδιότητα των ευκλείδειων οπτικών γωνιών, δηλαδή η άμεση σχέση του μεγέθους τους με το μέγεθος και τη θέση των αντικειμένων που περιέχουν, καθορίζει το σχετικό μέγεθος και τη θέση των εικόνων τόσο για την όραση όσο για την αντίληψη[136]. Αυτό επιτυγχάνεται σχηματικά με το μέγεθος του τόξου να δηλώνει την

---

[133] σσ. 23-26.
[134] Ευκλείδου, *Οπτικά*, «*όροι*». 9-11.
[135] Tobin, *έ.α.*, σ. 24.
[136] Όπως επεξηγούσε ο Tobin, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα επίπεδα και πλαϊνής άποψης διαγράμματα των *Οπτικών* προβάλλουν τη σχέση του οφθαλμού και του αντικειμένου από ένα τρίτο, σταθερό σημείο τοποθετημένο από πάνω ή στο πλάι ή και στα δύο, η κατασκευή

εικόνα που καταγράφεται στον οφθαλμό και τη χορδή του τόξου να παρουσιάζει την εικόνα που φαίνεται στον οφθαλμό. Ο Tobin ανακατασκεύασε τα βήματα για μια μετωπική ή προοπτική κατασκευή αναπτυγμένη με τα δεδομένα που του μετέφεραν τα επίπεδα ή πλαϊνής άποψης διαγράμματα των *Οπτικών*. Τα αποτελέσματα της κατασκευής του Tobin ήταν, εκτός από την «*ένταση*», τη «*μείωση*» και την «*οριζόντια καμπυλότητα*» συγκεκριμένων μεγεθών, ότι τα μεγέθη που καταγράφονταν υπό μεγαλύτερη γωνία εμφανίζονταν μεγαλύτερα, υπό μικρότερη εμφανίζονταν μικρότερα και υπό ίσες εμφανίζονταν ίσα, ενώ, επίσης, διαμορφωνόταν μια κεντρικού-σημείου συμβολή[137].

γ. Ο Knorr αποδέχεται την πρόκληση

Το 1991 ο W. Knorr αφορμώμενος από τον προβληματισμό, σχετικά με την αντίθεση ή μη των δύο συστημάτων προοπτικής, δημοσίευσε το άρθρο του "On the Principle of Linear Perspective in Euclid's *Optics*". Ο Brownson είχε δηλώσει πως, όσοι υποστηρίζουν την ασυμβατότητα των δύο συστημάτων προοπτικής, είναι αναγκασμένοι να αποδείξουν ότι το διάγραμμα της πρότασης 10 των *Οπτικών* είναι ύστερη προσθήκη. Παρακινημένος από τη δήλωση του Brownson ο Knorr εξέφρασε την πρόθεσή του να το πραγματοποιήσει.

Λαμβάνοντας υπόψη την οργάνωση του Heiberg ο Knorr προχώρησε στη μελέτη των θεωρούμενων ως προτάσεων προοπτικής των *Οπτικών*, δηλαδή τις προτάσεις 10 και 11, οι αποδείξεις των οποίων είναι ουσιαστικά ίδιες, αλλά, διαφοροποιούνται σε κάποια σημεία διατύπωσης. Ο Knorr εξέτασε αρχικά την πρόταση 10 της έκδοσης του Βατικανού και διαπίστωσε ότι η απόδειξή της είναι εκφραστικά αδέξια, ιδιαίτερα στα σημεία εκείνα, όπου τίθενται οι έννοιες της προβολής, ενώ τα αποτελέσματά της απαιτούν επιπλέον μεσολαβητικά βήματα που έχουν παραλειφθεί. Επιπλέον, δε χρησιμοποιείται ουσιαστικά η απαιτούμενη για την απόδειξη αρχή της προβολής, ώστε να διασφαλιστούν τα συμπεράσματά της. Συνεπώς, ο Knorr συμπέρανε ότι η έννοια της προβολής δεν πρέπει να ήταν οικεία στον συγγραφέα[138].

προοπτικής που αντιστοιχεί σε ένα δεδομένο επίπεδο και/ή σε ένα πλαϊνής άποψης διάγραμμα θα παρουσίαζε την ίδια σχέση οφθαλμού και αντικειμένου από την υποκειμενική θέση του οφθαλμού. Βλ. *ό.π.*, σ. 26.

[137] *ό.π.*, σ. 32.

[138] Knorr, "On the Principle of Linear Perspective", σσ. 194-197.

Στη συνέχεια, ο Knorr εξέτασε την πρόταση 11. Παρατήρησε ότι το διάγραμμα της έκδοσης του Βατικανού έχει την κάθετη ευθεία προβολής, ενώ η έκδοση της Βιέννης όχι. Εφόσον στις αποδείξεις του θεωρήματος 11 και των δύο εκδόσεων δε γίνεται αναφορά στα σημεία της κάθετης ευθείας, ο Knorr κατέληξε στο ότι αυτή πρόκειται για μεταγενέστερη προσθήκη[139].

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η έκδοση του Βατικανού είναι το αρχικό κείμενο ο Knorr θεώρησε ότι η κριτική διεργασία του Heiberg πρέπει να τύχει ιδιαίτερης προσοχής. Ο Knorr επανέφερε τις αποδείξεις των προτάσεων 10 και 11 της έκδοσης του Βατικανού στη *manu prima* μορφή που περιγράφεται στο κριτικό υπόμνημα του Heiberg. Παρατήρησε ότι στη *manu prima* των δύο προτάσεων ο όρος «*οὐκοῦν*», ο οποίος γενικά είναι σπάνιος στα αρχαία μαθηματικά κείμενα και καθόλου χαρακτηριστικό στοιχείο του Θέωνα, σηματοδοτεί την αρχή των αποδείξεων[140]. Αυτό σήμαινε για τον Knorr ότι η έκδοση του Βατικανού είναι προγενέστερη, ενώ σημαντικό στοιχείο της έρευνάς του ήταν ότι στη *manu prima* μορφή των αποδείξεων των συγκεκριμένων θεωρημάτων δε γίνεται καμία αναφορά στις ευθείες προβολής[141].

Επιπλέον, ο Knorr έλεγξε τη *manu prima* μορφή των προτάσεων 12-14 της έκδοσης του Βατικανού που σχετίζονται με την προοπτική και εντόπισε σε όλες τις αποδείξεις τη χρήση του «*οὐκοῦν*», εκεί που η έκδοση της Βιέννης έφερε το πιο σύνηθες «*λέγω ότι*». Επίσης, επισήμανε ότι, σχετικά με την πρόταση 12, σε καμία έκδοση, είτε της Βιέννης είτε του Βατικανού, δε φέρεται ευθεία προβολής, παρόλο που θα χρειαζόταν, ενώ στις προτάσεις 13 και 14 δε διακρίνεται κανένα στοιχείο προβολής.

Τέλος, ο Knorr έστρεψε την προσοχή του σε ένα πόρισμα που ακολουθεί στο τέλος του θεωρήματος 10 και δηλώνει ότι τα επίπεδα που είναι τοποθετημένα πάνω από το επίπεδο του οφθαλμού φαίνονται ως κοίλα[142]. Στο κριτικό υπόμνημα της έκδοσης του Βατικανού δίδεται η *manu prima* μορφή του πορίσματος, καθώς επίσης η εξήγησή του. Ο Knorr υποστήριξε ότι το συγκεκριμένο πόρισμα που φέρει η έκδοση της Βιέννης αποτελεί μια συντομευμένη αποσπασματική δήλωση που έχει

---

[139] *ό.π.*, σσ. 197-198.

[140] Ο Knorr δήλωνε χαρακτηριστικά: «*...η μεγάλη συχνότητα αυτού του, κατά τα άλλα, σπάνιου όρου μετατρέπεται σε χαρακτηριστικό αυθεντικότητας του κειμένου της έκδοσης του Βατικανού, η μικρότερη συχνότητά του στην έκδοση της Βιέννης* (ενν. *μετατρέπεται σε*) *ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα του χεριού τακτοποίησης ενός εκδότη, όπως του Θέωνα*». Βλ. *ό.π.*, σ. 199.

[141] *ό.π.*, σσ. 199-200.

[142] «*καὶ φανερόν, ὅτι τὰ ἐν μετεώρῳ κείμενα κοῖλα φανήσεται*», Ευκλείδου, *Οπτικά*, 10.24-25.

αντληθεί από τη *manu prima* μορφή του πορίσματος της έκδοσης του Βατικανού. Επιπλέον, θεώρησε σαφές από τον συλλογισμό του πορίσματος ότι μια προβολή θα ήταν μη-συμβατή με την έννοια της κοιλότητας, στοιχείο καθόλου προφανές στην συντομευμένη έκδοση του κώδικα της Βιέννης. Τόσο γλωσσικές-εκφραστικές παράμετροι όσο τεχνικοί λόγοι, απέτρεψαν τον Knorr από το να αποδώσει με ασφάλεια το παραπάνω πόρισμα στον Ευκλείδη[143].

Ο Knorr ολοκλήρωσε τη μελέτη του συμπεραίνοντας ότι στις ευκλείδειες προτάσεις 10-14 της καλύτερης έκδοσης του κειμένου των *Οπτικών*, δηλαδή της *manu prima* της έκδοσης του Βατικανού, απουσιάζουν τα στοιχεία της προβολής που θα δήλωναν την οικειότητα του Ευκλείδη με αυτή τη θεώρηση. Η παρουσία της ευθείας προβολής σε άλλες εκδόσεις, όπως στην έκδοση της Βιέννης ή στη *manu recentiori* της έκδοσης του Βατικανού, πρέπει να οφείλεται σε εκδότες, όπως τον Θέωνα, με κύριο στόχο τους την εξήγηση της ευκλείδειας απόδειξης και όχι την επεξεργασία της, κατά μια διαφοροποιημένη αντίληψη. Ο Knorr θεωρούσε αξιοσημείωτο ότι ο Πάππος δε φαίνεται να έχει πρόσβαση σε μια θεωρητική σύλληψη της προβολής, κάτι που θα διευκόλυνε της αναλύσεις του των ευκλείδειων αποδείξεων. Τέλος, μπορεί ο Knorr να μη διέβλεπε άμεσα κάποια θεώρηση της προβολής, ωστόσο, δεν αρνήθηκε τη δυνατότητα υποδήλωσης των αρχών της γραμμικής προοπτικής στο κείμενο του Ευκλείδη, εφόσον ειδικοί της αναγεννησιακής τεχνικής το έχουν προτείνει.

δ. Συμπεράσματα

Οι συζητήσεις γύρω από την αντίθεση των δύο συστημάτων προοπτικής προϋποθέτουν αναμφισβήτητα την εμπλοκή των απόψεων της ιστορίας της τέχνης. Ο λόγος που απαιτείται κάτι τέτοιο είναι κυρίως γιατί οι ενστάσεις του Panofsky δεν περιορίστηκαν στη θεωρητική-γεωμετρική μελέτη των δύο μεθοδολογιών, αλλά επεκτάθηκαν σε απολογισμούς, σχετικά με το ποια από τις δύο είναι η 'σωστότερη'. Το συγκεκριμένο ζήτημα έχει εξαρχής τεθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να χρήζει δύο επιπέδων ανάλυσης. Το πρώτο αφορά στα ερωτήματα της αρμοδιότητας της ιστορίας της τέχνης και το άλλο σε θέματα που μπορεί να πραγματευτεί η ιστορία της επιστήμης. Για παράδειγμα, η διαπίστωση του Panofsky ότι το αναγεννησιακό σύστημα προοπτικής είναι σωστότερο εκείνου της Αρχαιότητας δημιουργεί

[143] Για τα συγκεκριμένα εκφραστικά σημεία του πορίσματος που απέτρεψαν τον Knorr από το να το αποδώσει στον Ευκλείδη, βλ. Knorr, *έ.α.*, σ. 205.

προφανώς ερωτηματικά ως προς τη νομιμότητά της. Εκτιμούμε ότι ο ιστορικός της αρχαίας επιστήμης που αποσκοπεί σε μια επεξεργασία του συγκεκριμένου θέματος δε θα μπορούσε να ελέγξει πλήρως αυτή τη νομιμότητα. Υπάρχουν σωστά και εσφαλμένα συστήματα προοπτικής; Και με ποια κριτήρια γίνεται αυτός ο διαχωρισμός; Για την απάντηση αυτών των ερωτημάτων είναι αναγκαία η συμβολή του ιστορικού της τέχνης.

Σύμφωνα με τον ιστορικό της τέχνης, η προοπτική της Αναγέννησης είναι ένα μόνο από τα πολλά συστήματα απεικόνισης του βάθους. Άλλα συστήματα χρησιμοποιήθηκαν στην αρχαία Ελλάδα και στη Ρώμη και άλλα στην Ανατολή. Μερικά από αυτά εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται. Ωστόσο, δεν υπάρχει τελική ή απολύτως σωστή προβολή για αυτό που 'πραγματικά' βλέπουμε[144]. Αυτή η διαβεβαίωση από τους ειδικούς της τεχνικής της προοπτικής είναι ικανή να εξασφαλίσει στον ιστορικό της επιστήμης ότι η συγκεκριμένη κρίση του Panofsky αποτελεί μια υποκειμενική εκτίμηση.

Στρέφοντας τώρα την προσοχή μας στα ερωτήματα που ενδιαφέρουν τον ιστορικό της αρχαίας οπτικής επιστήμης μια σημαντική παρατήρηση που μπορεί να γίνει, σχετικά με όσα παρουσιάστηκαν σε αυτή την ενότητα, αφορά στο ότι το πρόβλημα περί αντίθεσης των δύο μεθοδολογιών προοπτικής αποτελεί αφορμή, για να επανέλθει στο προσκήνιο το ζήτημα της ταυτότητας των δύο κειμένων οπτικής του κώδικα της Βιέννης και του κώδικα του Βατικανού.

Στο *Die Perspective als symbolische Form* ο Panofsky θέλοντας να προβάλει το ευκλείδειο σύστημα προοπτικής παρουσίασε παρεφρασμένο το θεώρημα 8 του κώδικα της Βιέννης, ενώ σε μια επαναδιατύπωση του ισχυρισμού του, το 1960, το μετέφραζε ως «*...το όγδοο θεώρημα της Οπτικής του Ευκλείδη, το οποίο δηλώνει ρητά ότι 'η φαινομενική διαφορά μεταξύ ίσων μεγεθών παρατηρούμενων από άνισες αποστάσεις, με κανέναν τρόπο δεν είναι ανάλογη προς αυτές τις αποστάσεις'...*»[145]. Επιπλέον, σε υποσημείωσή του για την πρόταση 8 του κώδικα της Βιέννης στο *Die Perspective* παραθέτει την αντίστοιχή της που φέρεται στον κώδικα του Βατικανού. Τόσο η μεταχείριση εκ μέρους του των δύο μορφών θεωρημάτων όσο η ερμηνεία της

---

[144] Tansey, R.G., Kleiner, F.S., *έ.α.*, σ. 11.

[145] Ο Panofsky επαναδιατύπωσε τους ισχυρισμούς του στο *Renaissance and Renascenses*, Ουψάλα 1960 (επανέκδ. 1972), όπου μετέφραζε τη συγκεκριμένη πρόταση ως εξής: "*...the Eighth Theorem of Euclid's Optics, explicitly stating that "the apparent difference between equal magnitudes seen from unequal distances is by no means proportional to these distances...*"

σημασίας τους προδίδει μια προτίμηση του Panofsky για την πρόταση του κώδικα του Βατικανού, την οποία όμως δεν παύει να θεωρεί ως θεώνεια. Ο Tobin επέκρινε τον Panofsky για παρερμηνεία του Ευκλείδη, εφόσον δε βάσισε την περιγραφή της ευκλείδειας μεθοδολογίας στη 'γνήσια' ευκλείδεια οπτική του κώδικα της Βιέννης, αλλά στη 'θεώνεια', «*λιγότερο αξιόπιστη*», του κώδικα του Βατικανού.

Από την άλλη μεριά, ο Brownson προκάλεσε τους υποστηρικτές της αντίθεσης των δύο συστημάτων προοπτικής να αποδείξουν ότι το διάγραμμα του θεωρήματος 10 της *Οπτικής* του κώδικα της Βιέννης είναι ύστερη προσθήκη. Ο Knorr επιχείρησε να το πραγματοποιήσει στηριζόμενος στη *manu prima* μορφή της πρότασης 10 του αρχικού κειμένου του Βατικανού και μέσω της συγκριτικής μελέτης του θεωρήματος και των δύο κωδίκων.

Θεωρούμε ότι η κατάσταση που έχει διαμορφωθεί εμφανίζεται πολύπλοκη, γιατί έμμεσα σχετίζει δύο μεγάλα προβλήματα της ιστοριογραφίας της ευκλείδειας οπτικής. Τώρα, η ανάγκη να αποσαφηνιστεί το ζήτημα της ταυτότητας των δύο κειμένων οπτικής παρουσιάζεται ακόμα πιο επιβλητική. Αν η έρευνα καταλήξει στο ότι ο κώδικας του Βατικανού, στον οποίο επέλεξε να βασιστεί ο Panofsky, είναι πράγματι η ευκλείδεια έκδοση των *Οπτικών*, παρόλο που εκείνος τον θεωρούσε ως τη θεώνεια αναθεώρηση, μπορεί να επιφέρει συνέπειες στη θεώρησή του; Μπορεί να την ενδυναμώσει, αν ληφθεί υπόψη ότι και η κριτική του Brownson και η κριτική του Tobin αναπτύχθηκε στη βάση του κώδικα του Βιέννης, ως το πραγματικό ευκλείδειο σύγγραμμα; Και ποια ήταν η ουσιαστική συνεισφορά του Knorr με την αποδοχή εκ μέρους του της πρόκλησης του Brownson;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Η κεντρική προβολή στην πτολεμαϊκή Γεωγραφία

Η κεντρικού-σημείου προβολή κατέχει ιδιάζουσα θέση στις συζητήσεις, σχετικά με την αντίθεση της ευκλείδειας γωνιακής και της αναγεννησιακής επίπεδης προβολής. Ωστόσο, το ερώτημα που αφορά στην ενδεχόμενη εφαρμογή της κεντρικής προβολής ως γεωμετρικής μεθόδου απεικόνισης της πραγματικότητας κατά την Αρχαιότητα δεν περιορίστηκε ερευνητικά στην πραγματεία των *Οπτικών* του Ευκλείδη. Ο Ο. Neugebauer μετατόπισε το ενδιαφέρον στην πτολεμαϊκή *Γεωγραφία*. Στη μελέτη "Ptolemy's Geography, Book VII, Chapters 6 and 7" του 1959 ο Ο. Neugebauer είχε την πρόθεση να εξηγήσει την πολύπλοκη μέθοδο χαρτογράφησης του Πτολεμαίου[146].

Ο Neugebauer έστρεψε την προσοχή του στα κεφάλαια 6 και 7 του έβδομου βιβλίου της *Γεωγραφίας*. Στο κεφάλαιο 6 ο Πτολεμαίος επιχειρεί να απεικονίσει πάνω σε ένα επίπεδο το ημισφαίριο της γης, στο οποίο εντοπίζεται η οικουμένη, καθώς επίσης την περιβάλλουσα δακτυλοειδή σφαίρα (*κρικωτή*). Επισημαίνει ορισμένες σημαντικές λεπτομέρειες. Για παράδειγμα, προσδιορίζει τη θέση του οφθαλμού υποθέτοντάς τον ως ένα σημείο της ευθείας, που είναι κοινή στον μεσημβρινό, διαμέσω των τροπικών σημείων διχοτομώντας το μήκος της οικουμένης και την παράλληλη που σχεδιάζεται πάνω στη γη, διαμέσω της Συήνης, η οποία διχοτομεί το πλάτος της οικουμένης. Ο Πτολεμαίος εκφράζει την απαίτηση ότι οι λόγοι των μεγεθών της δακτυλοειδούς σφαίρας και της γης και της απόστασης από τον οφθαλμό πρέπει να επιλεχθούν έτσι, ώστε όλο το γνωστό μέρος της γης να είναι ορατό στον χώρο, μεταξύ του ισημερινού και του τροπικού δακτυλίου. Στη συνέχεια, παρουσιάζει μια γραφική αναπαράσταση, όπως ο ίδιος δηλώνει, «*όσο το δυνατόν πιο όμοια προς τις οπτικές εντυπώσεις*»[147].

---

[146] Neugebauer, O., "Ptolemy' s Geography, Book VII, Chapters 6 and 7", *Isis 50* (1959): σσ. 22-29.

[147] «*Πῶς δ' ἂν μεθοδεύοι μὲν τὴν καταγραφὴν ὁμοίαν ὡς ἔνι μάλιστα ταῖς ὀπτικαῖς διατυπώσεσι, πρόχειρον ἡμῖν ἔσται τόνδε τὸν τρόπον*». Βλ. Πτολεμαίου *Γεωγραφία*, έκδ. Nobbe, C.F.A., *Claudii Ptolemaei geographia*, τόμ. 2., Λειψία: Teubner 1845, VII, 6. 5.1-3.

Η μέθοδος του Πτολεμαίου είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και αναλυτική. Αυτό που κυρίως ενδιαφέρει στο σημείο αυτό είναι ότι ο Neugebauer δε θεώρησε τις προβολές του Πτολεμαίου ως πραγματικές προβολές προοπτικής. Υποστήριξε ότι η αναπαράστασή του ήταν μια χαρτογράφηση με διατήρηση κάποιων αποστάσεων, αλλά δεν αποτελούσε μια προοπτική εικόνα, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της απεικόνισης της οικουμένης[148].

Η K. Andersen ειδικός στην προοπτική της Αναγέννησης, δημοσίευσε το 1987 το άρθρο της "The Central Projection in One of Ptolemy's Map Constructions"[149]. Ο κύριος στόχος της ήταν να προτείνει μια ερμηνεία λίγο διαφορετική από εκείνη του Neugebauer, όσον αφορά κάποιους πτολεμαϊκούς υπολογισμούς. Ωστόσο, σχολιάζοντας τη μέθοδο απεικόνισης του Πτολεμαίου, ισχυρίστηκε ότι υπάρχουν κάποια δείγματα κεντρικής προβολής στη χαρτογράφησή του, αλλά, όπως σημείωνε, περιλαμβάνουν επιπλέον συστατικά[150]. Για παράδειγμα, ο Πτολεμαίος πράγματι εισήγαγε έναν οφθαλμό, αλλά όχι ως σταθερό σημείο, από όπου θα πραγματοποιούνταν η κεντρική προβολή. Ο οφθαλμός μετακινήθηκε από την πραγματική του θέση σε ένα άλλο σημείο, για να χρησιμοποιηθεί ως κέντρο προβολής, κατά τον προσδιορισμό των εικόνων των σημείων τομής, μεταξύ του μεσημβρινού και του ηλιοστασιακού και ισημερινού δακτυλίου.

---

[148] Neugebauer, *έ.α.*, σσ. 25-28.
[149] Andersen, K., "The Central Projection in One of Ptolemy's Map Constructions", *Centaurus 30* (1987), σσ. 106-113.
[150] *ό.π.*, σ. 112.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Ο ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ, Η ΟΠΤΙΚΗ ΚΑΙ Η ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΗ

Α. ΤΟ ΚΕΙΜΕΝΟ ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ* ΣΤΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Τα *Οπτικά* του Πτολεμαίου διασώζονται σήμερα, μέσω μιας λατινικής μετάφρασης ενός αραβικού κειμένου, το οποίο αποτελεί με τη σειρά του μετάφραση του αρχαίου ελληνικού συγγράμματος. Τόσο το αραβικό όσο και το ελληνικό κείμενο δε διασώζονται, ενώ το ζήτημα της άμεσης σχέσης τους είναι αμφισβητήσιμο, εφόσον πιθανολογείται η μεσολάβηση ενός χαμένου συριακού[151]. Η απώλεια των παραπάνω πηγών δημιουργεί προφανώς δυσεπίλυτα προβλήματα. Υπάρχουν βέβαια μαρτυρίες για την ύπαρξη ενός ελληνικού κειμένου *Οπτικών*, οι οποίες χρονολογούνται κατά τον 4^{ο}, 6^{ο} και 11^{ο} αιώνα μ.Χ., και αντιστοιχούν στον Δαμιανό, στον Σιμπλίκιο και στον Siméon Seth. Οι παραπάνω μαρτυρίες επιτρέπουν να συμπεράνουμε τη διάθεση του ελληνικού κειμένου των *Οπτικών* ως την εποχή του Μεσαίωνα. Ωστόσο, δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί με ασφάλεια, αν η πραγματεία των *Οπτικών* που αναφέρεται στους παραπάνω συγγραφείς είναι η πραγματική βάση του αραβικού, και κατ' επέκταση του μεσαιωνικού λατινικού παράγωγου, ούτε αν πρόκειται για το γνήσιο σύγγραμμα του Πτολεμαίου.

Οι πρώτες σαφείς μαρτυρίες της κυκλοφορίας της αραβικής μετάφρασης χρονολογούνται τον 10ο και 11ο αιώνα. Ο Ibn al-Haytham, γνωστός και ως Alhazen, που πέθανε το 1041 συνέγραψε αρκετά έργα οπτικού περιεχομένου, όπως το *Kitāb al-Manāzir*, στα οποία αναφέρει τα πτολεμαϊκά *Οπτικά* και αφιερώνει πολλές κριτικές μελέτες σε αυτά, όπως το *al-Shukūk 'alā Batlamyūs*, δηλαδή *Αμφιβολίες για τον Πτολεμαίο*[152]. Επιπλέον, υπάρχουν σαφείς ενδείξεις ότι το αραβικό κείμενο που είχε ο

---

[151] Ο Lejeune έχει υποστηρίξει ότι αυτή η πιθανότητα μάλλον δεν ισχύει, γιατί ο μεταφραστής του αραβικού κειμένου στη λατινική γλώσσα βεβαιώνει ότι η έκδοση των *Οπτικών* που χρησιμοποίησε είναι άμεση αραβική μετάφραση του ελληνικού έργου (Βλ. Lejeune, *L' Optique*..., 1989, σ. 28*). Ωστόσο, ο Smith διατηρεί επιφυλάξεις, εφόσον δεν είναι σίγουρες οι βάσεις του ισχυρισμού του μεταφραστή, επομένως, η δήλωσή του δε μπορεί να αποτελεί αποδεικτικό στοιχείο (Smith, 1996, σ. 8).

[152] Sabra, A.I., "Ibn al-Haytham's Criticisms of Ptolemy's *Optics*", *Journal of the History of Philosophy 4* (1966): σσ. 145-149.

al-Haytham είναι το ίδιο με εκείνο που παρουσιάζεται στη μετέπειτα λατινική μετάφραση. Για παράδειγμα, ο al-Haytham παραθέτει πολλές πτολεμαϊκές θέσεις που εντοπίζονται στο λατινικό κείμενο, ενώ μέσα από το έργο του γίνεται σαφές ότι η αραβική μετάφραση που είχε στη διάθεσή του στερείται του πρώτου βιβλίου και ενός μέρους του πέμπτου.

Τη λατινική μετάφραση από την αραβική γλώσσα ανέλαβε να πραγματοποιήσει ο Ευγένιος ο Σικελός (amiratus Eugenius siculus), η εργασία του οποίου διήρκησε τέσσερα χρόνια, από το 1156 μέχρι το 1160. Όπως ο ίδιος πληροφορεί, είχε στη διάθεσή του δύο μορφές μιας αραβικής μετάφρασης από την ελληνική γλώσσα, εκ των οποίων στηρίχτηκε στην πιο πρόσφατη, γιατί εκείνη θεωρούσε καλύτερη[153]. Από τη μετάφρασή του απουσιάζει το πρώτο βιβλίο, καθώς επίσης ένα τμήμα του πέμπτου.

Η μετάφραση του Ευγένιου περιέπεσε σε αχρηστία, όταν στα τέλη του 11ου αιώνα μεταφράστηκε στα λατινικά το έργο του Ibn al-Haytham *Kitāb al-Manāzir,* το οποίο απομακρυνόταν τελείως από την πτολεμαϊκή θεώρηση. Κυκλοφόρησε υπό τον λατινικό τίτλο *De Aspectibus* και παρουσίαζε μια θεμελιωδώς διαφοροποιημένη ανάλυση της θεωρίας του φωτός και της όρασης[154]. Κατά το δεύτερο μισό του 13ου αιώνα, είχε αναπτυχθεί στη βάση της μια ολόκληρη παράδοση οπτικής ανάλυσης, η παράδοση της προοπτικής. Χαρακτηριστικό στοιχείο είναι ότι, κατά τον 13ο αιώνα, δε συναντάται ούτε ένα αντίγραφο των πτολεμαϊκών *Οπτικών*, ενώ από τις αρχές του 14ου μέχρι το τέλος του 17ου αιώνα κάνουν την εμφάνισή τους δεκατρία. Ωστόσο, τα *Οπτικά* του Πτολεμαίου αντιμετωπίζονταν ως ένα τμήμα της αρχαίας κληρονομιάς, το οποίο ενδιέφερε, εξαιτίας της απόδοσής του στον Πτολεμαίο, τον συγγραφέα της εξαίσιας *Μαθηματικής Σύνταξης*. Η στάση αυτή είχε ως αποτέλεσμα τη μετατροπή των *Οπτικών* από μια καλή πηγή γνώσεων των οπτικών θεμάτων σε ένα ιστορικό κειμήλιο. Έτσι, περιέπεσε σε τέτοια αχρηστία, ώστε στα μέσα του 18ου αιώνα να θεωρείται χαμένη και αδύνατο να έχει μεταφραστεί στα λατινικά[155]. Η ανακάλυψή της έγινε τυχαία στα τέλη του 18ου αιώνα από τρεις ερευνητές που εργάζονταν

---

[153] Lejeune, *L' Optique*, *έ.α.*, σ. 28*.

[154] Sabra, A.I., *The Optics of Ibn Al-Haytham: Books I-III on Direct Vision*, τόμ. 2 , Λονδίνο: The Warburg Institute 1989.

[155] Για μια σύντομη, αλλά πολύ κατατοπιστική παρουσίαση της μεσαιωνικής πορείας του κειμένου των *Οπτικών*, βλ. Smith, *Ptolemy's Theory*..., 1996, σσ. 8-9.

ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Τα πρόσωπα αυτά ήταν ο G.B. Venturi[156], ο J.F. Montucla[157] και ο J.J.A. Caussin de Perceval[158], καθένας από τους οποίους ανακάλυψε διαφορετικά χειρόγραφα[159]. Για την εσφαλμένη εντύπωση της μη-ύπαρξης της λατινικής μετάφρασης των *Οπτικών*, ο Caussin de Perceval έλεγε χαρακτηριστικά: «*Τέτοια ήταν τελικά η γενική άποψη, ώσπου είχα την τύχη να ανακαλύψω μια λατινική μετάφραση των Οπτικών του Πτολεμαίου, μεταξύ των χειρογράφων της Βασιλικής βιβλιοθήκης...το έργο διέφυγε για πολύ καιρό από όλα τα μάτια. Ο τίτλος του ευτυχώς έπεσε στα δικά μου και όφειλα να επικροτηθώ, για να μπορέσω να ανακοινώσω στους λόγιους την ύπαρξη ενός έργου, για την απώλεια του οποίου λυπόντουσαν*»[160].

Μέχρι το 1870, επικρατούσε μεγάλος ενθουσιασμός, για το εγχείρημα της έκδοσης των *Οπτικών*. Τελικά, ο φυσικός G. Govi, ανέλαβε την έκδοση της πραγματείας με τη συνεργασία της Βασιλικής Ακαδημίας Επιστημών του Τορίνο. Το τελικό αποτέλεσμα εκδόθηκε το 1885 και περιείχε στη σύντομη εισαγωγή του μια ιστορική ανάλυση, ενώ παράλληλα χρησιμοποιούσε μοντέρνο γραμματισμό και στίξη[161]. Ο Smith δήλωνε χαρακτηριστικά για τον Govi και την έκδοσή του: «*Όχι μόνο υστερούσε σε γνώση και εμπειρία στην παλαιογραφία, αλλά δε γνώριζε τίποτα για τη διαδικασία μιας κριτικής έκδοσης. Για εκείνον ήταν αρκετό να αντιγράψει το 'πιο σωστό' (δηλ. το πιο πρώιμο) χειρόγραφο. Δημοσιευμένο το 1885 το αποτέλεσμα ήταν πέρα από κριτικό˙ στην πραγματικότητα, αν παραληφθεί ο μοντέρνος γραμματισμός και η στίξη, παρουσίαζε μικρή ή καμία βελτίωση των μεσαιωνικών και αναγεννησιακών προκατόχων του…Παρόλα αυτά, παρείχε κάποια ιστορική και κριτική ανάλυση στη σύντομη εισαγωγή του κειμένου, και έκανε μεγάλη προσπάθεια να ανακατασκευάσει έναν αριθμό των συνοδευόμενων διαγραμμάτων που είχαν γίνει αγνώριστα, κατά την πορεία της αντιγραφικής μεταβίβασης*»[162].

---

[156] Ο Venturi ανακάλυψε δύο χειρόγραφα, κατά τα έτη 1797-1798. Βλ. Venturi, G.B., "Considerazioni sopra varie parte dell' ottica presso gli antichi" στο έργο του *Commentari sopra la storia e le teorie dell' ottica*, τόμ. 1, Μπολόνια 1814, σσ. 31-62.

[157] Ο Montucla ανακοίνωσε την ανακάλυψή του στη β΄ έκδ. του έργου του *Histoire des mathématiques*, τόμ. 1, Παρίσι 1799, σ. 314.

[158] Ο Caussin de Perceval έκανε την ανακάλυψή του στο Παρίσι το έτος 1798. Βλ. Caussin de Perceval, J.J.A., "Mémoire sur l' *Optique* de Ptolémée", *Mémoires de l' Institut Royal de France, Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, Παρίσι 1822, σσ. 1-43.

[159] Lejeune, *έ.α.*, σσ. 33-35.

[160] Caussin de Perceval, *έ.α.*, σσ. 5-6.

[161] Govi, G., *L' Ottica di Claudio Tolomeo da Eugenio…ridotta in latino sovra la traduzione araba di un testo Greco imperfetto*, Τορίνο 1885.

[162] Smith, *Ptolemy's Theory...*, σσ. 10-11.

Μέσω της έκδοσης του Govi, τα *Οπτικά* έγιναν προσβάσιμα σε ένα σχετικά ευρύ κοινό και απέκτησαν μια σεβαστή θέση στην ιστορία της αρχαίας επιστήμης. Ωστόσο, το έργο δεν είχε την ίδια επιρροή σε όλους τους μελετητές. Αρκετοί ειδικοί το αγνόησαν, επειδή δεν ήταν ικανοποιητικό από την άποψη μιας αυστηρά κριτικής μελέτης, ενώ αντίθετα, όσοι το ερευνούσαν υπό ένα γενικότερο πλαίσιο, το αποδέχτηκαν θετικά. Όπως παρατηρεί ο Smith, «*το αποτέλεσμα της εκλαϊκευμένης θεώρησης των Οπτικών λοξοδρόμησε κακώς προς τις πιο 'επιστημονικές' παραμέτρους της πτολεμαϊκής θεωρίας, συγκεκριμένα στην πειραματική προσέγγιση της ανάκλασης στο βιβλίο ΙΙΙ και της διάθλασης στο βιβλίο V. Εξαιτίας αυτής της επιλεκτικής ανάγνωσης, «τα Οπτικά ερμηνεύτηκαν πολύ στενά, ως μια μελέτη της καθαρής φυσικής οπτικής, παρά ως αυτό που πραγματικά ήταν: μια ευρεία ανάλυση της όρασης. Αυτή η λοξοδρόμηση ανακλάται στις επιλογές από τα Οπτικά που έκαναν οι M.R. Cohen και I.E. Drabkin στο σημαντικό έργο τους A Source Book in Greek Science. Συγκεκριμένα, οι M.R. Cohen και I.E. Drabkin, με αρκετά προβλέψιμο τρόπο, επέλεξαν ακριβώς αυτά τα τμήματα των βιβλίων ΙΙΙ και V των Οπτικών που φαίνονται πιο ταιριαστά από μια μοντέρνα επιστημονική προοπτική. Ωστόσο, τέτοιες εκλαϊκεύσεις ήταν χρήσιμες για τη δημοσιοποίηση των Οπτικών ως μια σημαντική και, ως ένα σημείο, υποδειγματική μελέτη στην αρχαία μαθηματική επιστήμη*»[163].

Η αντιμετώπιση των *Οπτικών* κατά τον τρόπο που προαναφέρθηκε κατέστησε αναγκαία μια πλήρη κριτική ανάλυσή τους επεξεργασμένη σε ιστορικά, φιλοσοφικά και επιστημονικά επίπεδα. Το εγχείρημα αυτό ανέλαβε ο Βέλγος A. Lejeune. Μια σειρά άρθρων και μονογραφιών του είναι αφιερωμένα σε αυτή την προσπάθεια ευρύτερης προσέγγισης και αποκωδικοποίησης του πτολεμαϊκού έργου. Τα σημαντικότερα είναι το *Euclide et Ptolémée: Deux Stades de l' Optique Géometrique Grecque* του 1948 και το *Recherches sur la Catoptrique Grecque* του 1957 που έχουμε προαναφέρει. Ωστόσο, η κυριότερη συνεισφορά του είναι η εξαίρετη κριτική έκδοση των πτολεμαϊκών *Οπτικών*[164] που στηρίχτηκε σε όλα τα γνωστά χειρόγραφα και η μετέπειτα γαλλική μετάφρασή τους[165], η οποία αποτελούσε συνάμα ένα

---

[163] *ό.π.*, σ. 11. Το βιβλίο, στο οποίο αναφέρεται ο Smith, είναι το *A Source Book in Greek Science*, Κέμπριτζ: Harvard University Press 1966.

[164] Lejeune, A., *L' Optique de Claude Ptolémée dans la version latine d' après l' arabe de l' émir Eugène de Sicile: Édition critique et exégétique*, Louvain 1956.

[165] Lejeune, A., *L' Optique de Claude Ptolémée dans la version latine d' après l' arabe de l' émir Eugène de Sicile: Édition critique et exégétique augmentée d' une traduction française et de complements,* Παρίσι: Brill 1989.

συμπλήρωμα της προηγούμενης έκδοσής του περιλαμβάνοντας επιπλέον υλικό και σχολιασμό.

Β. ΙΣΤΟΡΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ *ΟΠΤΙΚΑ* ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

1. Το ζήτημα της πατρότητας των Οπτικών

α. Οι πρώτες αμφιβολίες

Στην αρχή της *Μαθηματικής Σύνταξης*, στο πλαίσιο της συζήτησης για το σχήμα του κόσμου, ο Πτολεμαίος αναφέρει μια οπτική πλάνη, τη φαινομενική μεγέθυνση των ουρανίων σωμάτων, όπως της Σελήνης, όταν αυτά βρίσκονται κοντά στον ορίζοντα. Ο Πτολεμαίος υπερασπίζοντας την κυκλικότητα του ουρανού αποδίδει το φαινόμενο αυτό, όχι στις μικρότερες αποστάσεις των σωμάτων από τον ορίζοντα, αλλά στη γεμάτη από αναθυμιάσεις υγρασία που περιβάλλει τη γη, μεταξύ του οφθαλμού και των συγκεκριμένων παρατηρούμενων ουρανίων σωμάτων: «*ἀλλὰ γὰρ καὶ τὸ πρὸς τοῖς ὁρίζουσιν μείζονα τὰ μεγέθη φαίνεσθαι οὐχ ἡ ἀπόστασις ἐλάττων οὖσα ποιεῖ, ἀλλ' ἡ τοῦ ὑγροῦ τοῦ περιέχοντος τὴν γῆν ἀναθυμίασις μεταξὺ τῆς τε ὄψεως ἡμῶν καὶ αὐτῶν γιγνομένη*»[166]. Ο Πτολεμαίος παραλληλίζει το παραπάνω οπτικό φαινόμενο με αυτό της φαινομενικής μεγέθυνσης των αντικειμένων, όταν αυτά είναι βυθισμένα νερό: «*καθάπερ καὶ τὰ εἰς ὕδωρ ἐμβληθέντα μείζονα φαίνεται, καὶ ὅσῳ ἂν κατωτέρω χωρῇ, τοσούτῳ μείζονα*»[167].

Το βιβλίο V των *Οπτικών* είναι αφιερωμένο στη διάθλαση. Το φαινόμενο της διάθλασης παρατηρείται, όταν η οπτική ακτίνα προσπίπτει στη διάφανη επιφάνεια που διαχωρίζει δύο ανόμοια, ως προς την πυκνότητα, υλικά και τη διαπερνά εμφανίζοντας παράλληλα μια κάμψη. Στα *Οπτικά* δηλώνεται σαφώς ότι «*οι εικόνες που είναι τοποθετημένες στην τομή της διαθλώμενης ακτίνας και της κάθετης που φέρεται από ένα οποιοδήποτε σημείο προς την επιφάνεια διαχωρισμού δύο διαφορετικών μέσων φαίνονται, μέσα σε ένα πιο πυκνό μέσο, μεγαλύτερες, από ό,τι σε ένα μέσο πιο αραιό*»[168]. Ο συγγραφέας παραθέτει λεπτομερείς πειραματικές

---

[166] Πτολεμαίου, *Μαθηματική Σύνταξη*, 1,1, 13.3-7.
[167] *ό.π.*, 1.1, 13.8-9.
[168] Lejeune, *L' Optique…*, (1989), V, 31, σ. 242.

διαδικασίες που αποσκοπούν στην εξέταση της διάθλασης σε διάφορα υλικά μέσα και στον ποσοτικό προσδιορισμό των γωνιών πρόσπτωσης και διάθλασης[169]. Στη συνέχεια, περιγράφει ένα φαινόμενο ατμοσφαιρικής διάθλασης. Συγκεκριμένα, ερευνά το φαινόμενο της εκτροπής προς τον Βορρά της φαινομενικής θέσης των αστέρων που βρίσκονται κοντά στον ορίζοντα[170]: «*Στην πραγματικότητα, κατά την ανατολή και τη δύση τους, οι παράλληλοι του ισημερινού που περιγράφονται από τη θέση τους πλησιάζουν περισσότερο προς τον Βορρά, σε σχέση με τις παραλλήλους που περιγράφονται από τη θέση τους, όταν βρίσκονται στο μέσο του ουρανού [στον μεσημβρινό]*»[171]. Ο Πτολεμαίος εξηγεί το φαινόμενο αυτό ως το αποτέλεσμα της διάθλασης της οπτικής ακτίνας στην επιφάνεια διαχωρισμού του αέρα και του αιθέρα, εξαιτίας της διαφορετικής πυκνότητας των δύο υλικών[172]. Ωστόσο, δηλώνει ανικανότητα ως προς την εκτίμηση του αποτελέσματος αυτής της διάθλασης στο ύψος των άστρων. Όπως πληροφορεί, δεν έχει στη διάθεσή του το ύψος της ατμόσφαιρας που θα ήταν χρήσιμο για τους υπολογισμούς του[173].

Ο Θέων στα *Σχόλιά του στην Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου* έχοντας την πρόθεση να σχολιάσει τις παρατηρήσεις του Πτολεμαίου για τη φαινομενική μεγέθυνση των ουρανίων σωμάτων, επικαλείται τα *Κατοπτρικά* του Αρχιμήδη και όχι τα πτολεμαϊκά *Οπτικά*. Συγκεκριμένα, δανείζεται από τον Αρχιμήδη την πρόταση που θέτει ότι, όσο περισσότερο βυθίζεται ένα αντικείμενο στο νερό, τόσο μεγαλύτερο φαίνεται: «*καθὰ καὶ Ἀρχιμήδης ἐν τοῖς Περὶ κατοπτρικῶν ἀπέδειξεν. φησὶν ὅτι '...καθάπερ καὶ τὰ εἰς ὕδωρ ἐμβαλλόμενα μείζονα φαίνεται, καὶ ὅσῳ κάτω χωρεῖ μείζονα'*». Στη συνέχεια, ο Θέων εκθέτει την αρχιμήδεια γεωμετρική απόδειξη[174].

Η προσέγγιση του φαινομένου της ατμοσφαιρικής διάθλασης στη *Μαθηματική Σύνταξη* διαφέρει από εκείνη των *Οπτικών*. Στη *Μαθηματική Σύνταξη* ο Πτολεμαίος παραθέτει μια συνήθη για την εποχή του εξήγηση της φαινομενικής μεγέθυνσης των άστρων στον ορίζοντα. Στο πλαίσιο αυτής της πραγματείας, το συγκεκριμένο φαινόμενο ερμηνεύεται ως το αποτέλεσμα μιας οπτικής πλάνης. Αντίθετα, στα *Οπτικά* αναπτύσσεται μια θεωρία πιο επεξεργασμένη που δε διστάζει να προσδώσει

---

[169] Από τις εργασίες αυτές προκύπτουν οι πίνακες διάθλασης σε αέρα-νερό, αέρα-γυαλί, νερό-γυαλί. Βλ. *ό.π.*,V, 1-22, σσ. 223-237 και V, 31-38, σσ. 242-248.
[170] *ό.π.*, V, 24-30, σσ. 238-242.
[171] V, 24, σ. 238.
[172] V, 23, σ. 238.
[173] V, 30, σ. 242.
[174] Θέωνος Αλεξανδρινού, *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου*, 346.26-350.6.

στο φαινόμενο ακόμα και ψυχολογικές προεκτάσεις. Τα δύο έργα παρουσιάζουν όμως ακόμα περισσότερες διαφορές. Στη *Μαθηματική Σύνταξη* τα άστρα φαίνονται μεγαλύτερα στον ορίζοντα, γιατί το στρώμα του υγρού αέρα είναι σε αυτή την κατεύθυνση πιο πυκνό. Επισημαίνεται ότι το ίδιο συμβαίνει με τη φαινομενική μεγέθυνση ενός σώματος που βρίσκεται βυθισμένο σε νερό. Όμως, στα *Οπτικά* ο Πτολεμαίος λέει ότι, αν ο οφθαλμός είναι σε ένα μέσο πιο αραιό από εκείνο, στο οποίο βρίσκεται το αντικείμενο, τότε το αντικείμενο φαίνεται πιο μικρό και όχι πιο μεγάλο.

Τόσο η παραπάνω ασυμφωνία, όσο και η επιλογή του Θέωνα να μην αναφερθεί στα *Οπτικά* του Πτολεμαίου, ώθησε τον A. Rome να εκφράσει στο άρθρο του "Notes sur les Passages des *Catoptriques* d' Archimède Conservés par Théon d' Alexandrie"[175] αμφιβολίες για την αυθεντικότητα των *Οπτικών*. «*Συζητώντας την αυθεντικότητα των Οπτικών είναι άδικο να ειπωθεί -γίνεται συνήθως- ότι η Αλμαγέστη δεν υπαινίσσεται τη διάθλαση˙ αλλά, είναι ακόμη χειρότερο από αυτό: τα δύο συγγράμματα αντιτίθενται. Αυτή η αντίθεση μπορεί να εξηγηθεί, αν παραδεχτούμε ότι τα Οπτικά είναι μεταγενέστερα της Αλμαγέστης και ότι, στο μεταξύ, ο Πτολεμαίος εξέτασε και κατάλαβε τον Αρχιμήδη. Αλλά αυτό θέτει πάλι το πρόβλημα της αυθεντικότητας των Οπτικών του Πτολεμαίου*»[176].

Όταν ο Lejeune συνέγραφε τη μελέτη του *Recherches sur la Catoptrique Grecque* είχε ήδη πληροφορηθεί τις αμφιβολίες του Rome. Συμφωνούσε μαζί του στο ότι «*είναι δυνατόν να θεωρηθεί παράξενο που ο Θέων Αλεξανδρινός, σχολιαστής της Αλμαγέστης, φαίνεται να αγνοεί τα Οπτικά του Πτολεμαίου*»[177]. Ωστόσο, ο Lejeune πρόσφερε αρκετές ερμηνείες προς δικαιολόγηση της απόφασης του Θέωνα. Υποστήριξε ότι, επειδή ο Θέων δεν παραπέμπει στα *Οπτικά* του Πτολεμαίου, αυτό δε σημαίνει ότι δεν τα γνωρίζει. Σύμφωνα με τον Lejeune, υπήρχαν πολλοί λόγοι για την επιλογή του Θέωνα να αναφέρει τα *Κατοπτρικά* του Αρχιμήδη. Για παράδειγμα, ο Θέων προτίμησε στη συγκεκριμένη περίσταση να εξαγάγει το θεώρημα από τον Αρχιμήδη, παρά να συνθέσει το ισοδύναμό του από τα δεδομένα των *Οπτικών*. Επιπλέον, ο Θέων θεωρούσε πιο κατάλληλο για τους σχολιαστικούς σκοπούς του να στηριχτεί στον Αρχιμήδη, παρά στον Πτολεμαίο. Βασιζόμενος στον Αρχιμήδη ήταν

---

[175] Rome, A., "Notes sur les Passages des Catoptriques d' Archimède Conservés par Théon d' Alexandrie", *Annales de la Societé Scientifique de Bruxelles*, serie A, *LII* (1932): σσ. 30-41.
[176] *ό.π.*, σσ. 35-36. Ο Rome πρότεινε τελικά ότι τα *Οπτικά* περιήλθαν σε εμάς, αφού διορθώθηκαν και τελειοποιήθηκαν από τους Άραβες. Βλ. *ό.π.*, σ. 30.
[177] Lejeune, *Recherches...*, σ. 19.

σε θέση να παρουσιάσει την παραδοσιακή εξήγηση του φαινομένου, η οποία ήταν παραδεκτή στη *Μαθηματική Σύνταξη*, αντί της νέας ψυχολογικής προσέγγισης των *Οπτικών*. Εξάλλου, αν λάβουμε υπόψη ότι η εξήγηση που δίνεται στη *Μαθηματική Σύνταξη* είναι διαφορετική από εκείνη των *Οπτικών*, η παραπομπή του Θέωνα στα *Οπτικά* θα τον ανάγκαζε να εφεύρει απαντήσεις για το ότι ο Πτολεμαίος είτε αντιφάσκει είτε σφάλλει. Τέλος, ένας άλλος λόγος που ο Θέων ψάχνει αλλού αυτό που αναζητά και όχι στο κείμενο που κρατά στα χέρια του, είναι, σύμφωνα με τον Lejeune, για να επιδείξει την πολυμάθειά του[178].

Οι αμφιβολίες του Rome λειτούργησαν ως μια πρώτη αφορμή, για να έρθει στο προσκήνιο το ζήτημα της αυθεντικότητας των *Οπτικών*. Ο Lejeune προσπάθησε βέβαια να απαντήσει στα συγκεκριμένα ερωτήματα του Rome, ωστόσο, δεν περιορίστηκε εκεί. Πρόβαλε επιπλέον επιχειρήματα προς υποστήριξη της αυθεντικότητας του συγγράμματος, τα οποία θα εκτεθούν στη συνέχεια.

β. Ο Lejeune προς υποστήριξη της αυθεντικότητας των Οπτικών

Όπως έχει προαναφερθεί, οι μαρτυρίες για την ύπαρξη ενός έργου *Οπτικών* με συγγραφέα τον Πτολεμαίο προέρχονται από τον Δαμιανό, τον Σιμπλίκιο και τον Siméon Seth. Συγκεκριμένα, ο Δαμιανός στις *Οπτικές Υποθέσεις* του παραπέμπει στην πραγματεία του Πτολεμαίου, για την πειραματική απόδειξη της ευθύγραμμης διάδοσης της οπτικής απορροής. Ο Σιμπλίκιος στα *Σχόλια στο Περί Ουρανού* του Αριστοτέλη αναφέρεται στη θεωρία της ευθύγραμμης κίνησης των στοιχείων που εξέθεσε ο Πτολεμαίος στα *Στοιχεία*[179] και στα *Οπτικά*. Τέλος, ο Siméon Seth σημειώνει στο *Conspectus rerum naturalium* ότι ο Πτολεμαίος στα *Οπτικά* του αποδίδει στην οπτική απορροή μια φύση πεμπτουσίας[180].

Ο Lejeune θεώρησε ότι οι παραπάνω μαρτυρίες αναφέρονται όχι μόνο στο ίδιο έργο, αλλά στο ίδιο μη-διασωζόμενο πρώτο κεφάλαιο, το οποίο, σύμφωνα με την ανακατασκευή που πρότεινε ο ίδιος στο *Euclide et Ptolémée: Deux stades de l' optique géometrique grecque,* είχε σχέση με την ευθύγραμμη διάδοση της οπτικής απορροής και τη θεωρητική της επιβεβαίωση, μέσω της υπόθεσης της αιθέριας φύσης της και την επίκληση των μηχανικών ιδιοτήτων των στοιχείων[181]. Ο Lejeune έκρινε

---

[178] *ό.π.*, σ. 19-20.
[179] Τα *Στοιχεία* του Πτολεμαίου δε διασώζονται.
[180] Lejeune, *έ.α.*, σσ. 13-14.
[181] Lejeune, *Euclide et Ptolémée...*, σσ. 38-41, 65-66.

ότι οι αναφορές του Δαμιανού, του Σιμπλίκιου και του Siméon Seth αποτελούν ασφαλείς ενδείξεις, ώστε να συμπεριληφθούν τα *Οπτικά*, μεταξύ των αυθεντικών πτολεμαϊκών συγγραμμάτων. Όπως δήλωνε, «*αυτή η απόδοση δεν ενέχει τίποτα το ύποπτο*»[182]. Άλλωστε, σύμφωνα με τον Lejeune, η συγγραφή μιας πραγματείας αφιερωμένης στη μαθηματικοποίηση των οπτικών αισθήσεων θα ήταν φυσιολογική για το συγγραφικό πρόγραμμα του Πτολεμαίου. Ας μην ξεχνάμε ότι τα *Αρμονικά* αποτελούσαν ένα έργο μαθηματικοποίησης, αντίστοιχα, των ακουστικών αισθήσεων και, επιπλέον, ότι τα *Οπτικά* θα ήταν συμβατά, μεταξύ του συνόλου των υπόλοιπων πτολεμαϊκών έργων των εφαρμοσμένων μαθηματικών, όπως η *Μαθηματική Σύνταξη*, η *Γεωγραφία* και τα *Αρμονικά*[183].

Επιπλέον, ο Lejeune διέκρινε στυλιστικές ομοιότητες και αναλογίες, ως προς τη θεωρητική ανάλυση κάποιων επιστημονικών διαδικασιών, μεταξύ των *Οπτικών* και των υπόλοιπων πτολεμαϊκών συγγραμμάτων. Μεταξύ της *Τετράβιβλου* και του λατινικού κειμένου των *Οπτικών*, εντοπίζονται εκφραστικές ισοδυναμίες, αλλά, σύμφωνα με τον Lejeune, δεν είναι δυνατόν να εξασφαλιστεί ότι οι αντίστοιχες λατινικές εκφράσεις καλύπτουν τις ελληνικές[184]. Το κείμενο του Ευγένιου απαρτίζεται από ορισμένες εκφράσεις που δε θα μπορούσαν να είχαν γραφτεί έτσι από τον Πτολεμαίο[185]. Αυτές οι διαφοροποιήσεις οφείλονται για τον Lejeune στους μεταγενέστερους μεταφραστές. Πάντως, ο Lejeune παρατήρησε ότι η έκθεση των *Οπτικών* συμφωνεί με τα άλλα αυθεντικά έργα του Πτολεμαίου. Κάθε βιβλίο και κάθε συγκεκριμένη έκθεση ξεκινά με τον ορισμό και τη διαίρεση του θέματος και καταλήγει με μια περίληψη των ζητημάτων που παρουσιάστηκαν. Ο Lejeune εντόπισε αναλογίες, ως προς τις επιστημονικές διαδικασίες των *Οπτικών* με τη *Μαθηματική Σύνταξη*, τη *Γεωγραφία* και τα *Αρμονικά*. Ο Πτολεμαίος χρησιμοποιεί το υλικό των προκατόχων του, επιβεβαιώνει και ξαναδουλεύει τα αποτελέσματα, συγκρίνει και σχολιάζει τις θεωρίες που έχουν υιοθετηθεί. Εργάζεται έχοντας ως κύριο κριτήριο το παρατηρούμενο γεγονός και, αν είναι δυνατόν, το μετρήσιμο. Στα *Οπτικά*, όπως και στα υπόλοιπα έργα του, ο Πτολεμαίος έχει ως κύριο στόχο του τη δημιουργία «*ενός συνεκτικού συστήματος που ενσωματώνει αρμονικά όλα τα γνωστά*

---

[182] Lejeune, *Recherches...*, σ. 14.
[183] *ό.π.*, σσ. 14-15.
[184] σ. 21.
[185] Για παράδειγμα, σύμφωνα με τον Lejeune, ο Πτολεμαίος δε θα μπορούσε να ονομάζει την πυραμίδα ως «*ένας κώνος, η βάση του οποίου είναι ένα πολύγωνο*». Ο Ευγένιος οδηγήθηκε σε αυτή την περίφραση, επειδή ξεκίνησε ονομάζοντας τον κώνο ως «*πυραμίς*». Βλ. *ό.π.*, σ. 21.

πράγματα, τα εκφράζει με μια μαθηματική παρουσίαση όσο το δυνατόν πιο απλή και τα εξηγεί, μέσω μιας ενοποιητικής φυσικής θεωρίας. Αυτό το διανοητικό πορτραίτο του συγγραφέα των Οπτικών αντιστοιχεί σημείο προς σημείο με εκείνο που μπορεί να ανιχνευθεί από τον Πτολεμαίο, από τα σίγουρα αυθεντικά του έργα»[186].

Σχετικά με τη διαφοροποίηση που υπογραμμίζει τη *Μαθηματική Συναγωγή* και τα *Οπτικά*, ως προς την προσέγγιση των φαινομένων της ατμοσφαιρικής διάθλασης, ο Lejeune αιτιολόγησε το γεγονός υποστηρίζοντας ότι τα *Οπτικά* είναι μεταγενέστερα. Ύστερα από τη συγγραφή της *Μαθηματικής Σύνταξης*, ο Πτολεμαίος είχε την ευκαιρία να εμβαθύνει στο πρόβλημα της διάθλασης και να διαπιστώσει τα σφάλματα της παραδοσιακής θεώρησης. Έτσι, στα *Οπτικά* παρουσίασε μια νέα προσέγγιση. Ο Lejeune θεωρεί βέβαια παράξενο που ο Πτολεμαίος δεν αναφέρει ότι εκλαμβάνει τη νέα εξήγηση των *Οπτικών* ως διόρθωση της *Μαθηματικής Συναγωγής*, αλλά κρίνει τελικά ότι πρόκειται για ένα ερώτημα μικρής σημασίας[187]. Περίεργα ακούγεται στον Lejeune και το ότι ο Πτολεμαίος, αν είναι ο συγγραφέας των *Οπτικών*, δεν παρέπεμψε τους αναγνώστες αυτού του συγγράμματος στη *Μαθηματική Σύνταξη*, όταν εξέταζε την εκτροπή της φαινομενικής θέσης των άστρων προς τον Βορρά, φαινόμενο που, συνεπώς, διαστρέβλωνε τις αστρονομικές παρατηρήσεις. Ωστόσο, δήλωσε ότι ο Πτολεμαίος δεν ήταν αναγκαίο να επιχειρήσει κάτι τέτοιο. «*Κατά τη σύνταξη της Αλμαγέστης, ο Πτολεμαίος γνώριζε τουλάχιστον τα αποτελέσματα της ατμοσφαιρικής διάθλασης, αφού κατασκευάζει το όργανο παράλλαξης με τέτοιο τρόπο, ώστε να μη λειτουργεί για την περιοχή του ουρανού, όπου η διάθλαση είναι αισθητή. Ωστόσο, δεν αναφέρει ούτε λέξη για το φαινόμενο. Στα Οπτικά αποδεσμεύει την αιτία και τον μηχανισμό εκείνου, αλλά, για να δηλώσει τελικά ανίκανος να προσδιορίσει την ποσότητα του σφάλματος προς διόρθωση, το μόνο χρήσιμο δεδομένο για τον αστρονόμο. Δεν υπάρχει λοιπόν λόγος, για να προτείνει ρητά μια τροποποίηση στην Αλμαγέστη*»[188].

γ. Ο Knorr προς υπεράσπιση της μη-αυθεντικότητας των Οπτικών

Ο W. Knorr έκρινε ότι το ερώτημα της αυθεντικότητας πρέπει να εκληφθεί ως ιδιαίτερα σοβαρό για την περίπτωση των *Οπτικών*. Όπως ισχυριζόταν, η άστατη μεταφορά του κειμένου μπορεί πιθανώς να το τροποποίησε, στοιχείο που, αφενός,

[186] σσ. 21-25.
[187] σ. 23.
[188] σσ. 23-24.

ενέχει το ενδεχόμενο της εσφαλμένης απόδοσής του και, αφετέρου, εξυπηρετεί τους υπερασπιστές της αυθεντικότητάς του, εφόσον εκείνοι βασίζονται στις φυσικές αλλοιώσεις και στα αντιγραφικά σφάλματα, για να δικαιολογήσουν τη διάσπαση της έκθεσής του, τη συχνή ασάφεια των δηλώσεων και τις προβληματικές, ως προς την ορθότητα, αποδείξεις[189].

Στο παράρτημα της μελέτης του "Archimedes and the Pseudo-euclidean *Catoptrics*" ο Knorr αντιμετώπισε με κριτική διάθεση τις σχετικές με το ζήτημα της αυθεντικότητας των *Οπτικών* θέσεις του Lejeune, τις οποίες θεωρούσε πολύ αδύναμες, για ένα τόσο σημαντικό ζήτημα. Ο Knorr ισχυρίστηκε ότι, «*παρόλο που οι πλούσιες σε λεπτομέρειες συζητήσεις του Lejeune θα είναι απαραίτητες για μια οποιαδήποτε περαιτέρω έρευνα, η τάση του προς τις υποκειμενικές εντυπώσεις σε υπεράσπιση μιας προκατειλημμένης θέσης μπορεί μόνο να περιπλέξει το θέμα*»[190]. Σύμφωνα με τον Knorr, η αναμενόμενη για τον Lejeune συγγραφή από τον Πτολεμαίο μιας πραγματείας περί οπτικής, η συμφωνία του διανοητικού πορτραίτου των *Οπτικών* με τα άλλα αυθεντικά έργα του Πτολεμαίου, οι εξηγήσεις του Lejeune για τη σιωπή του Θέωνα και για την ευθύνη των μεταφραστών για τις ορολογικές ασυμφωνίες των *Οπτικών* με άλλα έργα, όπως επίσης οι εξηγήσεις του για τη διαφορά τους με τη *Μαθηματική Σύνταξη*, αποτελούν απλά υποκειμενικές εντυπώσεις του Lejeune. Ο Knorr επισήμανε ότι τα *Οπτικά* είναι το μόνο έργο, στο οποίο ο Πτολεμαίος δεν αναφέρει τους προκατόχους του παρέχοντας πληροφορίες για τη συμβολή τους. Επιπλέον, όπως υποστήριζε ο Knorr, ο συγγραφέας της *Μαθηματικής Σύνταξης* δεν ασχολείται πολύ για την τυπική γεωμετρική απόδειξη του θέματός του, αλλά είναι πιο επιτακτικός κατά την εκτέλεση των αποτελεσμάτων που αποδεικνύονται, σε σχέση με τον συγγραφέα των *Οπτικών*[191].

Εκτός από τις υποδείξεις, σχετικά με τον υποκειμενισμό του Lejeune, ο Knorr προσκόμισε επιπλέον επιχειρήματα, με πρόθεση να τροφοδοτήσει υποψίες για τη μη-αυθεντικότητα του έργου. Συγκεκριμένα, παρατήρησε ότι οι μαρτυρίες που αναφέρονται σε ένα πτολεμαϊκό σύγγραμμα περί οπτικής αναπτύσσουν θέματα που δεν εντοπίζονται στα περιεχόμενα του κειμένου των *Οπτικών*. Ο Δαμιανός αναφέρει τη χρήση οργάνων, για την επιβεβαίωση της ευθύγραμμης διάδοσης των ακτίνων, από τον Πτολεμαίο. Τα *Οπτικά* εκθέτουν τέτοιες διαδικασίες με όργανα, αλλά όχι

[189] Knorr, "Archimedes...", σ. 97.
[190] *ό.π.*, σ. 101.
[191] σσ. 100-101.

αυτή που παρουσιάζεται από τον Δαμιανό. Το ίδιο ισχύει και για τις μαρτυρίες των υπόλοιπων προσώπων. Επιπλέον, ο Knorr έκρινε ότι οι μαρτυρίες αυτές είναι πολύ λιγότερες από ό,τι θα ανέμενε κανείς, για μια τόσο καθοριστική πραγματεία συνθετικού χαρακτήρα. Λαμβάνοντας υπόψη την αμφίβολη χρονολόγηση του Δαμιανού[192] ο Knorr υπενθύμιζε ότι ο Σιμπλίκιος και ο Ολυμπιόδωρος[193] βασίζονται σε δευτερεύουσες πηγές για τις απομονωμένες παρατηρήσεις που μεταφέρουν[194]. Επομένως, η πιθανότητα της λανθασμένης απόδοσης του έργου που, κατά τον Knorr, ο Lejeune απέρριψε επιπόλαια, αυξάνεται[195].

Ο Knorr τόνιζε ότι το στοιχείο του εμπειρισμού συνιστά ένα σοβαρό κίνητρο, για την αποδοχή ή την απόρριψη της αυθεντικότητας του συγγράμματος. Επισήμαινε ότι η εμπειρική προσέγγιση των θεμάτων που τόσο πολύ διέπει τις διαδικασίες του Πτολεμαίου στη *Μαθηματική Σύνταξη*, δεν εκτείνεται στο κυριότερο μέρος των *Οπτικών*. Αρκετά τμήματα των *Οπτικών* αποτελούν περιγραφές οργάνων και εφαρμογές τους για τη θεμελίωση της αρχής της ανάκλασης, αναπτύσσουν τις ιδιότητες των κοίλων κατόπτρων, τη σχέση των γωνιών πρόσπτωσης και διάθλασης, παρουσιάζουν βασικά φαινόμενα της διοφθαλμικής όρασης. Όμως, ο εμπειρισμός αυτός απουσιάζει, κατά την έκθεση των γεωμετρικών ιδιοτήτων των οπτικών ακτίνων στην ανάκλαση και στη διάθλαση. Στη θεωρητική εξήγηση του πώς η διάθλαση είναι υπεύθυνη για τη μετατόπιση των εικόνων των αστέρων, όταν παρατηρούνται κοντά στον ορίζοντα, δεν αναπτύσσεται κανένας ποσοτικός προσδιορισμός της μετατόπισης ούτε προσκομίζονται εμπειρικές παρατηρήσεις που θα εδραίωναν τη θεωρία. Ο Lejeune εξήγησε αυτό το μειονέκτημα με το να δώσει προσοχή στη δήλωση του συγγραφέα ότι δεν είχε στη διάθεσή του συγκεκριμένα κριτικά δεδομένα[196]. Ο Knorr διατύπωνε ότι η θεώρηση του Lejeune κάνει τα *Οπτικά* να είναι σύμφωνα με μια εμπειρικώς προσανατολισμένη διαδικασία. Ωστόσο, ο ίδιος διαπίστωνε ότι αυτό δεν ισχύει.

Συγκεκριμένα, τα ακαθόριστα δεδομένα που αναφέρει ο συγγραφέας είναι το ύψος της μεσολαβούσας επιφάνειας, μεταξύ του μέσου του αιθέρα και της ατμόσφαιρας, δηλαδή το ύψος πάνω από τη γη, όπου εμφανίζεται η οπτική ακτίνα να

---

[192] Ο Knorr υποστηρίζει ότι ο Δαμιανός ήταν είτε μαθητής του Ηλιόδωρου, κατά τον 6ο αιώνα μ.Χ., είτε μεταγενέστερος Βυζαντινός σχολιαστής.
[193] Ο Ολυμπιόδωρος αναφέρει στα *Σχόλια στα Μετεωρολογικά* του Αριστοτέλη ότι, για τον Πτολεμαίο, τα χρώματα της ίριδας είναι εφτά.
[194] Knorr, *έ.α.*, σ. 96-97.
[195] *ό.π.*, σ. 100.
[196] Lejeune, *Recherches...*, σ. 20.

κάμπτεται[197]. Σύμφωνα με τον Knorr, τα παραπάνω είναι συστατικά θεωρίας και όχι συστατικά εμπειρικού προσδιορισμού του ποσοστού κάμψης της ακτίνας. Ακόμα και με την παρουσία αυτού του δεδομένου, θα απουσίαζε, όπως λέει ο Knorr, μια άλλη παράμετρος, δηλαδή το ισοδύναμο της ένδειξης της διάθλασης για το φως που περνά από τον αιθέρα στον αέρα. Ο Knorr θεωρούσε ότι από την ίδια τη φύση και τον εντοπισμό του αιθέρα των αρχαίων, κάτι τέτοιο θα ήταν ανέφικτο, μέσω πειραματισμού. Ωστόσο, διέκρινε ότι υπήρχε η δυνατότητα ενός υποθετικού προσδιορισμού του διαθλώμενου αποτελέσματος, με την παραδοχή πιθανών τιμών για τις άγνωστες παραμέτρους και με την υπολογιστική τεχνική, μέσω των τριγωνομετρικών πινάκων του Πτολεμαίου. Τέλος, ο Knorr διέβλεπε ότι μπορούσε να επιτευχθεί ένας πλήρης παρατηρησιακός προσδιορισμός που δε θα ξέφευγε από τα πλαίσια των εφικτών, για τον Πτολεμαίο, παρατηρησιακών μεθόδων[198].

Η απουσία του εμπειρισμού από ορισμένα κρίσιμα θέματα των *Οπτικών*, όπως το φαινόμενο της ατμοσφαιρικής διάθλασης, αποτελούσε λοιπόν για τον Knorr ένα χαρακτηριστικό τελείως ασυμβάδιστο με την πτολεμαϊκή προσέγγιση της *Μαθηματικής Σύνταξης*. «*Ο συγγραφέας αυτού του τμήματος των Οπτικών είχε ισχνή σύλληψη των σχετικών εμπειρικών θεμάτων*»[199]. Η παραπάνω παρατήρηση, σε συνάρτηση με τη σιωπή του Πτολεμαίου για την ανάγκη διαθλαστικών διορθώσεων στη *Μαθηματική Σύνταξη*, ενισχύει, σύμφωνα με τον Knorr, τις αμφιβολίες για την αυθεντικότητα των *Οπτικών*.

Ο Knorr υποστήριξε, επιπλέον, ότι η αναφορά του Πτολεμαίου στη *Μαθηματική Σύνταξη* γύρω από το θέμα της ατμοσφαιρικής διάθλασης γινόταν μόνο, για να προσφέρει μια χαλαρή εξήγηση της φαινομενικής μεγέθυνσης των σωμάτων που παρατηρούνται στον ορίζοντα. Επισήμανε κι εκείνος το γεγονός ότι ο Θέων θέλοντας να σχολιάσει το παραπάνω απόσπασμα παραπέμπει στα *Κατοπτρικά* του Αρχιμήδη

---

[197] "*Ainsi est demontrée la raison pour laquelle il faut que ces phénomènes stellaires se produisent en fonction de la réfraction du rayon visuel. Il nous serait possible de déterminer les valeurs de ces réfractions et de les appliquer aux astres dont la distance nous est connue, comme le soleil et la lune, et prendre en considération les mesures proches de l'horizon et les déplacements dus à la réfraction du rayon visuel, si la distance de la surface de séparation entre les deux milieux susdits était connue. Mais comme on ignore si cette distance –qui est proche de la sphère lunaire à laquelle se termine l'éther- est égale à la distance de la surface de séparation susdite ou est plus proche de la terre ou plus éloignée du milieu contigu, il est possible de calculer les angles qui représentent les déviations de ces sortes de réfraction*", Lejeune, *L' Optique*…, (1989), V, 30, σ. 242.

[198] Για την ανάλυση του Knorr, βλ. "Archimedes…", σσ. 97-98.

[199] *ό.π.*, σ. 97.

και όχι στα *Οπτικά* του Πτολεμαίου υπονοώντας ότι αποτελεί έναν ακόμα μειονεκτικό παράγοντα για την αυθεντικότητα των *Οπτικών*. Όσον αφορά στις εξηγήσεις του Lejeune, ο Knorr δεν τις θεώρησε τόσο πειστικές. Δήλωνε χαρακτηριστικά ότι «*η ικανότητα κάποιου να επινοεί πιθανές ορθολογικές εξηγήσεις γι' αυτά τα προβλήματα, δεν τα απορρίπτει ως προκλήσεις για τη θέση κάποιου*» και πρότεινε την προσεκτική εξέταση της παρουσίασης του Lejeune[200].

Ο Knorr κατέληξε στο ότι το θέμα της αυθεντικότητας των *Οπτικών* πρέπει να θεωρηθεί ανοιχτό και συνέχισε την έκθεσή του προβάλλοντας την αναμενόμενη ένσταση: Ποιος θα μπορούσε να είναι ο συγγραφέας των *Οπτικών*, αν όχι ο Πτολεμαίος; Σε αντίθεση με τις αμφιβολίες που δημιουργούν οι ανεπαρκείς και πολύ μεταγενέστερες μαρτυρίες, για το αν ο Πτολεμαίος έγραψε τα *Οπτικά*, ο Knorr αναφέρει την αναμφισβήτητη, όπως δηλώνει, οκτάτομη πραγματεία *Περί Όψεως* του Περιπατητικού διδασκάλου του ύστερου 2ου αιώνα μ.Χ., Σωσιγένη. Για τη σύνδεση του συγγράμματος του Σωσιγένη με τα *Οπτικά*, ο Knorr βασίστηκε στη μαρτυρία του Αλέξανδρου Αφροδισιέως, ο οποίος πληροφορεί ότι ο Σωσιγένης στην οκτάτομη πραγματεία του *Περί Όψεως* έδειξε το σφάλμα, όσων ισχυρίζονται ότι η άλως προκαλείται από το 'σπάσιμο' των φωτεινών ακτίνων: «*ἀλλ' ὅτι μὲν αἱ τοιαῦται δόξαι περὶ τῆς ἅλω ψευδεῖς,*
ἱκανῶς ὁ διδάσκαλος ἡμῶν Σωσιγένης ἐν τῷ ὀγδόῳ Περὶ ὄψεως ἔδειξεν»[201].

Ο Knorr επιχείρησε αρχικά να ταυτίσει ένα από τα οκτώ βιβλία του Σωσιγένη με τη συνέχεια του διασωζόμενου πέμπτου βιβλίου των *Οπτικών*. Μέσω της *Απολογίας* του Απουλήιου, συγκεκριμένα μέσω της αναφοράς εκείνου στον Αρχιμήδη, ο Knorr έλαβε υπόψη του ότι οι αρχαίες κατοπτρικές μελέτες συμπεριελάμβαναν το πεδίο των μετεωρολογικών εφαρμογών. Από τη μαρτυρία του Ολυμπιόδωρου, ότι δηλαδή ο Πτολεμαίος διέκρινε στο ουράνιο τόξο εφτά χρώματα, ο Knorr συμπέρανε ότι και τα *Οπτικά* ανέπτυσσαν τέτοιου είδους συζητήσεις. Κατά την ανακατασκευή των χαμένων βιβλίων των *Οπτικών*, ο Lejeune πρότεινε ότι το απόσπασμα του Ολυμπιόδωρου πρέπει να αναφέρεται στο πρώτο βιβλίο που ήταν σχετικό με τις φυσικές αρχές. Ωστόσο, ο Knorr θεώρησε πιο πιθανό μια ενότητα, σχετική με τις εξηγήσεις των φαινομένων, μέσω διάθλασης, να αναπτύσσει υποθέσεις

---

[200] σ. 100.

[201] Βλ. Αλέξανδρου Αφροδισιέως, *Σχόλια στα Μετεωρολογικά του Αριστοτέλη*, έκδ. M. Hayduck, *Commentaria in Aristotelem Graeca* 3.2, Βερολίνο: Reimer 1899, 143.12-14.

για τα χρώματα. Με αυτόν τον τρόπο, κατάφερε να ταυτίσει ένα μέρος του συγγράμματος του Σωσιγένη με τη συνέχεια του πέμπτου βιβλίου των *Οπτικών*.

Στη συνέχεια, ο Knorr συσχέτισε τις μαρτυρίες των Simeon Seth και Σιμπλίκιου για τα *Οπτικά*, με το *Περί όψεως* του Σωσιγένη. Οι αναφορές αυτές έχουν να κάνουν με σχόλια του Πτολεμαίου για τα στοιχεία, την πέμπτη ουσία και το οπτικό πνεύμα. Ο Knorr παρατήρησε ότι τα παραπάνω αποτελούν σημεία επαφής με το ίδιο πεδίο φυσικής φιλοσοφίας του Σωσιγένη και των άλλων αριστοτελικών σχολιαστών.

Μέσω της συσχέτισης των μαρτυριών για την πραγματεία του Σωσιγένη και του Πτολεμαίου, ο Knorr κατάφερε να εξαγάγει τελικά την περιγραφή ενός συγγράμματος αποτελούμενου από τρία βιβλία γενικών φυσικών αρχών και από, τουλάχιστον, ένα (του όγδοου), σχετικό με μετεωρολογικές εφαρμογές. Διατύπωσε την υπόθεση ότι ο Σωσιγένης μελετούσε μαζί με τον ηλικιωμένο Πτολεμαίο και ότι ενσωμάτωσε και πτολεμαϊκά αποτελέσματα στο έργο του. Ο Knorr δε θεωρούσε παράξενο το ότι οι μετέπειτα σχολιαστές απέδωσαν εσφαλμένα στον Πτολεμαίο ένα έργο του Σωσιγένη, εφόσον, όπως υποστήριζε, εκείνοι χρησιμοποιούσαν δευτερεύουσες πηγές.

Ο Knorr υποστήριζε ότι η νέα του πρόταση είναι ικανή να εξηγήσει τις διαφοροποιήσεις που υφίστανται, μεταξύ της *Μαθηματικής Σύνταξης* και των *Οπτικών*, στο θέμα της διάθλασης. Προβλήματα που υπογραμμίζουν τις γεωμετρικές αποδείξεις, το μείγμα των φυσικών, φιλοσοφικών και τεχνικών θεμάτων, καθώς επίσης οι διαφορές της έκθεσης των *Οπτικών* από άλλα πτολεμαϊκά συγγράμματα θα μπορούσαν να εξηγηθούν ικανοποιητικά. Ωστόσο, ο Knorr δε θεωρούσε ότι έχει θεμελιώσει την ταύτιση του *Περί Όψεως* με τα *Οπτικά*, αλλά ότι έχει υποδείξει πως η δυνατότητα αυτή αναγκάζει για μια πιο εμβαθή και αντικειμενική εξέταση του ερωτήματος, σε σχέση με εκείνη που παρέχει ο Lejeune: «*Συνοπτικά, συνηγορώ για το αντίστροφο της παρουσίασης του Lejeune και προτείνω ότι, προς το παρόν, κάποιος πραγματεύεται τη μη-αυθεντικότητα των Οπτικών ως την υπό επεξεργασία πιο πιθανή και πιο πλεονάζουσα υπόθεση*»[202].

Οι προτάσεις του Knorr περί της μη-αυθεντικότητας των *Οπτικών* κατέχουν μια σεβαστή θέση στις σύγχρονες ιστορικές αναλύσεις της αρχαίας οπτικής. Ωστόσο, δε φαίνεται να τις επηρεάζουν σημαντικά. Για παράδειγμα, ο Simon χαρακτηρίζει ως νόμιμη κάθε κριτική επαγρύπνηση, όσον αφορά στις αποδόσεις των πηγών, όμως δεν

[202] Knorr, *έ.α.*, σ. 104.

εντοπίζει κάποιον σοβαρό λόγο, για τον οποίο να πρέπει να απορριφθεί η πατρότητα του Πτολεμαίου, εφόσον αυτή του αποδίδεται και από τα χειρόγραφα[203]. Επίσης, ούτε ο Smith έκρινε ότι υπάρχει κάποια αιτία που να μας υποχρεώνει να εγκαταλείψουμε την παραδοχή της συγγραφής των *Οπτικών* από τον Πτολεμαίο[204].

δ. Η επιστροφή του Lejeune

Ο Lejeune αφιέρωσε για άλλη μια φορά ένα τμήμα της εισαγωγής της δεύτερης έκδοσής του των *Οπτικών* του Πτολεμαίου στο ζήτημα της αυθεντικότητας. Η έκθεσή του αποτελούσε ταυτόχρονα απάντηση στην κριτική του Knorr. Συγκεκριμένα, όσον αφορά στην απόρριψη εκ μέρους του Knorr των μαρτυριών του Δαμιανού, του Σιμπλίκιου και του Siméon Seth, ως μη-αποδεικτικών στοιχείων της συγγραφής από τον Πτολεμαίο των *Οπτικών*, ο Lejeune ανταπαντούσε ότι πρόκειται για τρεις ανεξάρτητες μαρτυρίες που συμφωνούν σε έναν τίτλο και σε έναν συγγραφέα. Μπορεί τα στοιχεία που μεταφέρουν να μην εντοπίζονται αυτούσια στο κείμενο του Ευγένιου, αλλά όλα αντιστοιχούν στην ανακατασκευασμένη, σύμφωνα με τον Lejeune, θεματολογία του πρώτου χαμένου βιβλίου των *Οπτικών*. Ο Ευγένιος είχε στα χέρια του δύο αραβικές μορφές του κειμένου που απέδιδαν στο σύγγραμμα αυτόν τον τίτλο και αυτόν τον συγγραφέα και, επιπλέον, πάνω σε ένα έργο με αυτόν τον τίτλο και με αυτόν τον συγγραφέα εργάστηκε ο Alhazen. Ο Lejeune διαβεβαίωνε ότι «*η θέση που υπερασπίζομαι δεν είναι λοιπόν καθόλου μια θέση προκατειλημμένη από 'υποκειμενικές εντυπώσεις', αλλά ένα σύνολο μαρτυριών που δεν είναι δυνατόν να απορριφθούν a priori, χωρίς την προκατειλημμένη ιδέα της μη-αυθεντικότητας*»[205].

Ο Knorr είχε υποστηρίξει ότι οι μαρτυρίες για μια πραγματεία πτολεμαϊκών *Οπτικών* είναι σποραδικές, κυρίως αν ληφθεί υπόψη ότι το έργο αυτό ήταν πολύ καθοριστικό για τον συγκεκριμένο επιστημονικό κλάδο. Ο Lejeune απάντησε λέγοντας ότι δεν έγιναν απαραιτήτως όλα τα έργα του Πτολεμαίου κανονικές πραγματείες. Υπέθεσε ότι τα *Οπτικά* παραμερίστηκαν, καθώς η αστρονομία, η αστρολογία και η αρμονική ευδοκιμούσαν. Έτσι, από την ελληνική γραμματεία

---

[203] Simon, G. "La Notion de Rayon Visuel et ses Consequences sur l'Optique Géométrique Grecque", *Physis 31* (1994), σσ. 77-112. Η μελέτη αυτή είχε παρουσιαστεί αρχικά στο Συνέδριο Ιστορίας της Οπτικής οργανωμένο από τον A.I. Sabra, με τη συμμετοχή του Ινστιτούτου Dibner, Osgood Center, North Andover (Mass.), 30 Μαΐου-1 Ιουνίου 1990. Βλ. σ. 89.

[204] Smith, *Ptolemy's Theory of Visual Perception*, σ. 51 και *Ptolemy and the Foundations…*, σ. 17.

[205] Lejeune, *έ.α.*, σ. 133*.

διασώθηκαν κυρίως συγγράμματα που καθιερώθηκαν, μέσω της διδασκαλίας. Σύμφωνα με τον Lejeune, διδάσκαλοι, όπως ο Πάππος και ο Θέων, πιθανώς να έδειξαν στον τομέα της οπτικής μεγαλύτερη προτίμηση στα πλέον ξεπερασμένα έργα που αποδίδονταν στον Ευκλείδη[206]. Επίσης, άλλη μια αιτία της περιστασιακής αναφοράς των *Οπτικών* εντοπίστηκε από τον Lejeune όχι τόσο στην πορεία της αραβικής μεταφοράς του κειμένου, όσο στην πορεία της ελληνικής μεταφοράς. Ο Ευγένιος δεν είχε πρόσβαση σε ένα ελληνικό κείμενο, ενώ οι Άραβες είχαν στη διάθεσή τους μια αλλοιωμένη μορφή του έργου[207].

Η σιωπή του Θέωνα και η μη-παραπομπή του στα *Οπτικά* του Πτολεμαίου θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως άγνοια εκ μέρους του των *Οπτικών*. Ωστόσο, ο Lejeune υποστήριξε ότι το γεγονός αυτό θα μπορούσε, αντίθετα, να σημαίνει ότι ο Θέων γνώριζε πολύ καλά τα *Οπτικά*. Εκεί, ο Πτολεμαίος υποθέτει ότι, για να φτάσει η οπτική ακτίνα στα άστρα, περνά, όχι από ένα μέσο μικρότερης πυκνότητας σε ένα μεγαλύτερης πυκνότητας (αέρας-υγρασία), αλλά από ένα μέσο πιο πυκνό σε ένα πιο αραιό (αέρας-αιθέρας), άποψη που αντιτίθεται προς την κύρια θεωρία του[208].

Ο Knorr ισχυρίστηκε ότι κατά τη μελέτη της εκτροπής της φαινομενικής θέσης των άστρων στα *Οπτικά*, ο συγγραφέας, παρόλο που είχε τη δυνατότητα να πραγματοποιήσει έναν ποσοτικό προσδιορισμό του φαινομένου, δεν το επιχείρησε. Ο αντίλογος του Lejeune συνίσταται στο ότι δεν είναι δυνατόν να αποδοθούν σε έναν σοφό όλες οι συνέπειες που απορρέουν από μια διατύπωση. Ο Πτολεμαίος των *Οπτικών* δεν αισθανόταν αναγκασμένος, μέσα στο πλαίσιο μιας αρκετά πολύπλοκης και αφιερωμένης σε έναν ειδικευμένο τομέα πραγματείας, να οδηγήσει το ερώτημα, μέχρι το σημείο ενός είδους συμπληρώματος στη *Μαθηματική Σύνταξη*[209].

Στα αυθεντικά έργα του Πτολεμαίου καταγράφονται πολλές αναφορές στους προγενέστερους. Αντίθετα, ο συγγραφέας των *Οπτικών* δεν κάνει τον παραμικρό υπαινιγμό στον Ευκλείδη ή στον Ήρωνα, γεγονός που προκαλεί υποψίες, για το αν ο συγγραφέας τους είναι ο Πτολεμαίος. Κανένα πρόσωπο δε γίνεται επικλητό ονομαστικά, αλλά μέσω ασαφών δηλώσεων, όπως "*antiqui*", "*quidam*", "*illos*". Ο Lejeune επιχείρησε να διαλύσει τις υποψίες περί μη-αυθεντικότητας που θα μπορούσε να εγείρει αυτή η παρατήρηση υποθέτοντας ότι ο Άραβας μεταφραστής

---

[206] *ό.π.*, σ. 134*.
[207] σσ. 137*-138*.
[208] σσ. 134*-135*.
[209] σ. 135*.

ίσως προτίμησε να μη μεταφέρει τα δύσκολα ονόματα που συναντούσε στο ελληνικό κείμενο. Επιπλέον, μια σύντομη στατιστική καταγραφή τάσσεται υπέρ του Lejeune, γιατί φανερώνει ότι το παραπάνω κριτήριο δεν είναι απόλυτο, εφόσον στα *Αρμονικά* αναφέρονται αρκετοί προγενέστεροι, ενώ στο *Περί κριτηρίου* και στην *Τετράβιβλο*, αυθεντικά πτολεμαϊκά έργα, κανένας[210].

Ο Lejeune σπεύδει να σχολιάσει και την πρόταση απόδοσης των *Οπτικών* στον Σωσιγένη, εκ μέρους του Knorr. Συγκεκριμένα, δηλώνει ότι καμία εντύπωση δεν προκάλεσε στον Knorr η μετατροπή του συγγραφέα Σωσιγένη σε Πτολεμαίο, του τίτλου *Περί όψεως* σε *Οπτικά*, ήδη από την ελληνική χειρόγραφη παράδοση, αλλά και το ότι το *Περί όψεως* περιελάμβανε οκτώ βιβλία. Εφόσον από τα *Οπτικά* απουσιάζουν το πρώτο βιβλίο και το τελευταίο μέρος του πέμπτου, μπορούμε βέβαια να φανταστούμε μια σειρά από όσα βιβλία θέλουμε, για να ακολουθούν το πέμπτο. Σύμφωνα με τον Knorr, η μαρτυρία του Ολυμπιόδωρου θα μπορούσε να αντιστοιχεί στο όγδοο βιβλίο του *Περί όψεως*, στο οποίο κατά τον Αλέξανδρο, ο Σωσιγένης πραγματευόταν την άλω. Ο Lejeune όμως αντέστρεψε το επιχείρημα αντιπροτείνοντας ότι τίποτα δεν εμποδίζει η μαρτυρία του Ολυμπιόδωρου να αναφέρεται στο πρώτο βιβλίο των *Οπτικών*.

Σύμφωνα με τον Knorr, το ουσιαστικό ψυχολογικό στοιχείο των *Οπτικών* αντιστοιχεί στην περιπατητική πνευματικότητα του Σωσιγένη. Αντίθετα, ο Lejeune υποστηρίζει ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει και ότι ο Knorr δεν έλαβε υπόψη του τα λεγόμενα του van der Waerden, όταν δηλαδή εκείνος επισήμαινε «*μια ακριβή αντιστοιχία των Οπτικών με τα άλλα έργα του Πτολεμαίου στο στυλ, στην οργάνωση και στον τρόπο μεταβίβασης από το ένα θέμα στο άλλο*», καθώς επίσης ότι «*οι αντιλήψεις του Πτολεμαίου για τη θεωρία της γνώσης στην Αλμαγέστη, στο Περί κριτηρίου και στα Οπτικά συμφωνούν, μέχρι τις λεπτομέρειες*». Οι συγκεκριμένες θεωρήσεις του Πτολεμαίου τοποθετούνται από τον Lejeune σε μια βάση περιπατητική, με τάση προς τον στωικισμό[211].

ε. Συμπεράσματα

Το γεγονός της απώλειας του πρώτου και του τελευταίου μέρους του πέμπτου βιβλίου, καθώς επίσης η απουσία του ελληνικού κειμένου των *Οπτικών* είναι

---

[210] σ. 136*.

[211] Ο Lejeune αναφέρεται στο άρθρο του van der Waerden με τίτλο "Ptolemaios Klaudios", *Real-Enzyclopädie*, Στουτγάρδη 1959. Βλ. Lejeune, *ό.π.*, σ. 137*.

απογοητευτικό. Σίγουρα το λατινικό κείμενο, το οποίο παρήχθη μέσω του αραβικού, έχει δεχτεί μεταβολές, αλλά η αρχική επιστημονική σκέψη του συγγραφέα πρέπει να έχει διατηρηθεί ανέπαφη.

Όσον αφορά στο ζήτημα της αυθεντικότητας, οι αρχικές υποψίες του Rome προκλήθηκαν από τη διαφοροποιημένη προσέγγιση του φαινομένου της διάθλασης, μεταξύ της *Μαθηματικής Σύνταξης* και των φερόμενων ως πτολεμαϊκών *Οπτικών*, καθώς επίσης στη μη-παραπομπή του Θέωνα στα *Οπτικά* του Πτολεμαίου, αλλά στα αρχιμήδεια *Κατοπτρικά*. Ο Knorr αφορμάται από τις παρατηρήσεις του Rome, τις συμμερίζεται και τις επεξεργάζεται περαιτέρω. Φτάνει σε σημείο να αντιπροτείνει μια νέα εκδοχή, εκείνη με συγγραφέα τον Σωσιγένη. Η υπόθεση του Knorr δε φαίνεται να παρουσιάζει κάτι το απίθανο, ωστόσο, αναλογικά με τις σποραδικές μαρτυρίες περί πτολεμαϊκών *Οπτικών*, οι μαρτυρίες για τον Σωσιγένη, επίσης δεν είναι τόσες, όσες θα περίμενε κανείς για μια τόσο καθοριστική πραγματεία. Συγκεκριμένα, οι μαρτυρίες για τη συγγραφή ενός έργου *Περί Όψεως* από τον Σωσιγένη προέρχονται από τον Αλέξανδρο και τον Θεμίστιο[212]. Από την άλλη μεριά, δε φαίνεται να υπάρχει λόγος, ώστε να αμφισβητήσουμε τη δήλωση του Ευγένιου ότι κατείχε δύο αραβικές μορφές κειμένου που απέδιδαν το σύγγραμμα στον Πτολεμαίο. Όσο για την κριτική του Knorr στον Lejeune, μολονότι χαρακτηρίζει μερικές από τις θέσεις του ως υποκειμενικές, πράγμα αληθές, ωστόσο δεν είναι και παράλογες. Αρκετές από αυτές κάλλιστα είναι σε θέση να υποστηρίξουν την επιχειρηματολογία του υπέρ της αυθεντικότητας των *Οπτικών*.

Προς το παρόν παρουσιάστηκαν κάποιες πρώτες εκτιμήσεις για το θέμα της αυθεντικότητας και δεν έχουμε στο σημείο αυτό την πρόθεση να υπερασπιστούμε τη θέση της μιας ή της άλλης εκδοχής. Θεωρούμε ότι και οι δύο έχουν μειονεκτήματα και πλειονεκτήματα, γι' αυτό καταλήγουμε, συμφωνώντας με την κρίση του Knorr, ότι το ζήτημα πρέπει να αντιμετωπίζεται ως ανοιχτό. Ωστόσο, όσο απογοητευτικό και αν ακούγεται αυτό, έχουμε την αίσθηση ότι, εξαιτίας των ιδιάζουσων συνθηκών,

---

212 «*προσήκοντα μᾶλλον τοῖς περὶ αἰσθήσεως καὶ αἰσθητῶν· λέγει δὲ αὐτὸν Σωσιγένης ὁ Ἀλεξάνδρου διδάσκαλος ἐν τῷ τρίτῳ Περὶ ὄψεως, εἴ τῳ πιθανὸς ὁ Σωσιγένης, μετέχειν καὶ ταῦτα φάσκων φύσεώς τινος ἐπ' ὀλίγον τοιαύτης, οἵας καὶ τὸ πέμπτον σῶμα καὶ τὸ πῦρ*». Θεμίστιου, *Παράφραση στο Περί ψυχής του Αριστοτέλη*, έκδ. R. Heinze, Commentaria in Aristotelem Graeca 5.3, Βερολίνο: Reimer 1899, 61.22-25.

ακόμα και αν οι ενδείξεις συγκλίνουν προς την υιοθέτηση της μιας εκδοχής, πάντα θα υπάρχουν υποψίες για την ενδεχόμενη ισχύ της άλλης.

2. Ερμηνευτικές αποκλίσεις-προτάσεις

α. Φωτεινές και οπτικές ακτίνες: αποτελούν ταυτόσημες έννοιες;

Η απώλεια του πρώτου βιβλίου των *Οπτικών* και η μη-ολοκληρωμένη μορφή του πέμπτου δε θα μπορούσαν να αφήσουν απροβλημάτιστους τους ιστορικούς, εφόσον αυτή η κατάσταση δημιουργεί μεγάλες δυσχέρειες στην έρευνα. Ο Lejeune ανέλαβε το δύσκολο εγχείρημα της ανακατασκευής των χαμένων κεφαλαίων, την οποία παρουσίασε στο *Euclide et Ptolémée: Deux Stades de l' Optique Géométrique Grecque*. Για να πραγματοποιήσει τους στόχους του, βασίστηκε σε μαρτυρίες της Αρχαιότητας και, κυρίως, στις *Οπτικές Υποθέσεις* του Δαμιανού, έργο μεταγενέστερο των *Οπτικών* και, σύμφωνα με τον Lejeune, σε μεγάλο βαθμό επηρεασμένο από την πτολεμαϊκή θεώρηση. Εξίσου καθοριστικό ρόλο κατέλαβε για την απόπειρα του Lejeune η περίληψη του πρώτου βιβλίου που παρατίθεται στην αρχή του δεύτερου κεφαλαίου των *Οπτικών* και αφορά σε μια σύντομη έκθεση των όσων προηγήθηκαν.

Σύμφωνα με τα παραπάνω στοιχεία, ο Lejeune κατέληξε στο ότι το πρώτο βιβλίο «*πραγματευόταν την οπτική απορροή και το φως από μια άποψη περισσότερο φυσική*»[213] ή, αλλιώς, ότι «*το πρώτο βιβλίο ήταν αφιερωμένο στη φυσική των οπτικών και φωτεινών ακτινοβολιών*»[214]. Υποστήριζε ότι ο Πτολεμαίος «*θεωρούσε την οπτική απορροή ως μια φυσική και εμπειρική πραγματικότητα*», ότι «*έθετε το πρόβλημα της φύσης και των ιδιοτήτων του φωτός*»[215] και, επομένως, «*η οπτική έσπασε το πλαίσιο μιας εφαρμοσμένης γεωμετρίας, για να μετατραπεί πραγματικά σε έναν κλάδο φυσικής*»[216]. Οι παρατηρήσεις του Lejeune δεν αποτελούσαν απλές υποθέσεις περιορισμένες στο πλαίσιο της ανακατασκευής του χαμένου κεφαλαίου, αλλά μετατράπηκαν σε καθοριστικές συνιστώσες της γενικότερης ερμηνευτικής του προσέγγισης των *Οπτικών*.

Στη μελέτη *Le regard, l'être et l'apparence dans l'Optique de l'antiquité*, ο Simon στράφηκε εναντίον του Lejeune κατηγορώντας τον για έλλειψη κατανόησης των προβληματισμών που απασχόλησαν τον Πτολεμαίο. Εξέφρασε κυρίως την αντίθεσή του προς την εξομοίωση της οπτικής με τη φωτεινή ακτίνα, κάτι που

---

[213] Lejeune, *Euclide et Ptolémée*..., σ. 16.
[214] *ό.π.*, σ. 33.
[215] σ. 84.
[216] σ. 84.

παρατήρησε να πραγματοποιούν και ο Vasco Ronchi και D.C. Lindberg. Συγκεκριμένα, ο Ronchi αναφερόμενος στο έργο του Ευκλείδη έλεγε: «*Αρμόζει να σταθούμε λίγο στα Οπτικά του Ευκλείδη, γιατί, αντίθετα από ό,τι συμβαίνει με τους άλλους συγγραφείς, βρισκόμαστε αντιμέτωποι με ένα κείμενο που μας επιτρέπει να ανακατασκευάσουμε τη θεωρία του φωτός που ο συγγραφέας επεξεργάστηκε*»[217]. Επίσης, ο Lindberg σχολιάζοντας την ευθύγραμμη διάδοση των ακτίνων του Ευκλείδη υποστήριζε ότι: «*Έχοντας δοθεί αυτός ο απλός νόμος που διέπει τη διάδοση του φωτός...είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν οι ευθείες γραμμές ενός γεωμετρικού διαγράμματος, για να αναπαρασταθούν οι οπτικές ακτίνες και να μετατραπούν έτσι τα οπτικά προβλήματα σε γεωμετρικά*»[218]. Τέλος, ο Lejeune προσδίδοντας παραλληλισμό, μεταξύ των εκφράσεων του Δαμιανού «*ἀκτῖνες τῆς ὄψεως*» και «*αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἡλίου*» ταύτισε τη φύση και τις ιδιότητες των οπτικών και των φωτεινών ακτίνων και συμπέρανε ότι αυτή η σύλληψη διακατέχει και τον Πτολεμαίο[219].

Ο Simon άσκησε αιχμηρή κριτική στις παραπάνω θέσεις θεωρώντας ότι δεν αποτελούν ικανοποιητικές ερμηνείες, γενικότερα, της αρχαίας οπτικής, αλλά και ότι δεν αντιπροσωπεύουν, ειδικότερα, τους πραγματικούς στόχους του Πτολεμαίου. Ο Simon τόνιζε ότι η ασχολία των αρχαίων δε συνίσταται καθόλου στη διάδοση μιας ακτίνας, αλλά στον εντοπισμό της εικόνας, αφού πραγματεύονται την όραση και όχι το φως. Μια προσεκτική ανάγνωση των κειμένων αρκεί, για να φανερώσει, σύμφωνα με τον Simon, ότι το φως δεν είναι ποτέ ο πρωταγωνιστής μιας θεωρίας όρασης[220]. Επομένως, η οπτική ακτίνα δεν είναι ένα είδος συμμετρικό της φωτεινής. Αντίστοιχα, στην περίπτωση των *Οπτικών*, ο Πτολεμαίος δεν επεδίωκε μια εξήγηση της φυσικής της ακτινοβολίας, αλλά μια περιγραφή της διαδικασίας της όρασης. Η δική του ασχολία ήταν η όραση και όχι το φως. Βασισμένος στην κατηγορία της ομοιότητας ο Πτολεμαίος έπρεπε να θέσει μια συγγενική φύση, μεταξύ των δύο ακτινοβολιών. Αυτό δε σημαίνει όμως ότι τις ταύτισε. Σύμφωνα με τον Simon, η πτολεμαϊκή οπτική απορροή αποτελεί μια *sui generis* οντότητα, επομένως, δεν πρέπει να συγχέεται με τη φωτεινή[221].

---

[217] Vasco Ronci, *Histoire de la lumière*, μετάφρ. J. Taton, Παρίσι: A. Collin 1956.
[218] Lindberg, *έ.α.*, σ. 12.
[219] Lejeune, *έ.α.*, σ. 21.
[220] Simon, *Le regard...*, σσ. 22-36, 60-91.
[221] Simon, *ό.π.*, και "La Notion de Rayon Visuel...".

Ο Simon προσέδωσε γενικότερες διαστάσεις στο θέμα λέγοντας ότι ο Lejeune προσπαθώντας συστηματικά να ερμηνεύσει με μοντέρνους όρους τους αρχαίους συγγραφείς, για να εκτιμήσει την εγκυρότητα των διατυπώσεων και των αποτελεσμάτων τους, κινδυνεύει από την παγίδα του αναχρονισμού: «*Ο καθαυτός σκοπός του είναι νόμιμος˙ αλλά ξεχνά ότι ερμηνεύοντάς τους έτσι μπορεί να οδηγηθεί στην αδικαιολόγητη διαστρέβλωση του κέντρου ενδιαφέροντος που δεν είναι πλέον το δικό μας ή να θεωρήσει ταυτόσημες τις απαντήσεις σε ερωτήματα ριζικώς διαφορετικά*»[222].

Αφορμώμενος από την παρατηρούμενη ταύτιση της οπτικής με τη φωτεινή ακτίνα και παρακινούμενος από τις έρευνες του Simon, ο Smith αφιέρωσε το άρθρο του "Extremal Principles in Ancient and Medieval Optics" στην αποσαφήνιση των δύο εννοιών. Ο Smith θεώρησε ότι ο λόγος που οδήγησε τους ιστορικούς στην ταύτιση των δύο ακτινικών μοντέλων είναι ότι και τα δύο βασίζονται στην αρχή της ευθύγραμμης διάδοσης, αλλά και στη σύγχυση για το τι αναπαριστά στην πραγματικότητα η κλασική ακτίνα.

Μέσω της μελέτης της πλατωνικής και αριστοτελικής φιλοσοφίας, ο Smith συμπέρανε ότι η αρχαία κατανόηση του κόσμου και των λειτουργιών του γινόταν στη βάση μιας επερχόμενης εκ θεού τάξης, η οποία διατυπώθηκε σε όρους φυσικής οικονομίας. Προσκομίζοντας παραδείγματα από την αστρονομία ο Smith υποστήριξε ότι η αρχή αυτή αντιμετωπίστηκε κατά την εποχή της Αρχαιότητας ως ένα ισχυρό και ευλύγιστο εργαλείο, χρήσιμο για την επιστημονική εξήγηση[223]. Εντός αυτού του επιστημολογικού πλαισίου, ο Smith επιχείρησε να εντάξει και την έννοια της ακτίνας.

Η λειτουργία της ευκλείδειας οπτικής ακτίνας συνίσταται στο να αναπαριστά τη σημείο-προς-σημείο σχέση, μεταξύ του κέντρου της όρασης και του οπτικού αντικειμένου. Στόχος της είναι η περιγραφή ενός αντιληπτικού, παρά φυσικού, δεσμού του παρατηρησιακού με το παρατηρούμενο σημείο έχοντας ως κρίσιμο χαρακτηριστικό την τέλεια ευθυγράμμιση, δηλαδή την πιο σύντομη χωρική πορεία. Έτσι, σύμφωνα με τον Smith, η διαδικασία του Ευκλείδη υπόκειται με φυσικό τρόπο σε μια αρχή οικονομίας που εκφράζεται σε όρους της μικρότερης απόστασης. Ο Smith επισήμανε ότι το στοιχείο αυτό συναντάται και στην απόδειξη της ισότητας των γωνιών ανάκλασης του Ήρωνα, όπου η ανάκλαση ανάγεται σε μια ειδική περίπτωση άμεσης, ανεμπόδιστης ακτινοβολίας, καθώς διέπεται από την ίδια χωρική

[222] Simon, *Le regard...*, σ. 25.
[223] Smith, "Extremal Principles...", σσ. 115-121.

αρχή οικονομίας. Τέλος, η πτολεμαϊκή ακτίνα περιγράφει ό,τι και η ευκλείδεια, αλλά είναι εμποτισμένη με κινητικά και δυναμικά στοιχεία. Η πτολεμαϊκή οπτική απορροή κατέχει ταχύτητα και ένταση που μεταβάλλονται, σε σχέση με τις κυμαινόμενες φυσικές περιστάσεις, όπως την απόσταση από το σημείο προβολής. Δεν παύει να παραμένει διακριτή και άμεση, κατά την διαδικασία αναπαράστασης, αφού εξακολουθεί να περιγράφει τη σημείο-προς-σημείο χωρική σχέση, μεταξύ του παρατηρησιακού σημείου και του παρατηρούμενου αντικειμένου. Ωστόσο, παρουσιάζει την καινοτομία μιας δυναμικής διαδικασίας που ξεδιπλώνεται στον χώρο και στον χρόνο καθιστώντας την λίγο πιο αφηρημένη και έμμεση, κατά την αναπαράσταση[224].

Ο Smith επιχείρησε να ερμηνεύσει την οπτική ακτίνα της Αρχαιότητας εντάσσοντάς την στο επιστημολογικό πλαίσιο της εποχής εκείνης. Στη συνέχεια, εστίασε τη μελέτη του στον Μεσαίωνα και στον τρόπο, με τον οποίο ο Alhazen και ο Al-Kindi προσπάθησαν να λύσουν το πρόβλημα της διχοτομημένης λειτουργίας της πτολεμαϊκής ακτίνας[225]. Μέσω της ανάλυσής του, ο Smith επεδίωκε να κάνει σαφές ότι η έννοια της ακτίνας υπέστη πολλές μεταβολές, κατά το πέρασμα των αιώνων. Ο ρόλος της κατά την Αρχαιότητα περιοριζόταν σε εκείνον της ευθείας της όρασης. Τη λειτουργία της ως εικονική τροχιά του φωτός θα την αποκτούσε πολύ αργότερα, ύστερα από τη μετατροπή που θα γνώριζε από τα χέρια των Αράβων και την παραλαβή της από τους Kepler, Descartes, Huygens και Fermat. Επομένως, οποιαδήποτε εξομοίωση της αρχαίας οπτικής ακτίνας με τη φωτεινή ακτίνα είναι άτοπη.

Οι Simon και Smith επιχείρησαν να εξηγήσουν τους λόγους της σύγχυσης που παρατηρείται στη σύγχρονη ιστοριογραφία ως προς την ταύτιση των οπτικών και των φωτεινών ακτίνων. Στην προσπάθειά τους να αντιμετωπίσουν το συγκεκριμένο θέμα έκριναν ότι αυτό δε θα μπορούσε να ειδωθεί απομονωμένα και ανεξάρτητα από τους ίδιους τους στόχους που είχε θέσει ο Πτολεμαίος. Συνεπώς, η ερμηνευτική προσέγγιση του ζητήματος απαιτείται τελικά να αναχθεί στην αποσαφήνιση των προθέσεων του συγγραφέα και στην απάντηση του παρακάτω ερωτήματος:

β. Γιατί γράφτηκαν τα Οπτικά;

---

[224] σσ. 121-128.
[225] σ. 128-139.

Στο έργο του *Theories of Vision from Al-Kindi to Kepler* ο Lindberg υποστηρίζει ότι κατά την εποχή της Αρχαιότητας δεν υπήρχαν μεγάλες διαφωνίες γύρω από τα θέματα της οπτικής. Αυτό συνέβαινε, εξαιτίας της λειτουργίας τριών σχολών, οι οποίες διαφοροποιούνταν ριζικά ως προς τους τρόπους προσέγγισης των οπτικών θεμάτων. Η φιλοσοφική, η ιατρική και η μαθηματική σχολή αναζητούσε, η καθεμία ξεχωριστά, διαφορετικά πράγματα υποβιβάζοντας, ταυτόχρονα, κάποια άλλα. Έτσι, η φιλοσοφική σχολή επεδίωκε να κατανοήσει την όραση πάνω σε μια βάση φυσική, ψυχολογική και επιστημολογική υποτάσσοντας σε αυτή τη φυσιολογική και τη μαθηματική παράμετρο. Η ιατρική σχολή κατευθύνθηκε προς τη φυσιολογική και ανατομική δομή του οφθαλμού, ενώ η μαθηματική σχολή στις γεωμετρικές ιδιότητες της οπτικής ακτίνας. Σύμφωνα με τον Lindberg, καθεμία σχολή απομονώθηκε στις δικές της ασχολίες τρέφοντας διαφορετικές επιδιώξεις από τις άλλες. Η παραπάνω τριμερής διαίρεση διατηρήθηκε, μέχρι τον πρώιμο Μεσαίωνα. Την εποχή εκείνη, οι Άραβες κατάφεραν να αντιμετωπίσουν αποφασιστικά το πρόβλημα της ελληνικής οπτικής, το οποίο για τον Lindberg ήταν η έλλειψη μιας μοναδικής προσέγγισης της οπτικής θεωρίας, δημιουργώντας έτσι τη μεγάλη σύνθεση της ακτινικής θεωρίας που έφτασε μέχρι τον Kepler[226].

Το 1988 στο άρθρο του "Visual Perception in Ptolemy's *Optics*" ο Smith χαρακτήρισε την παρουσίαση του Lindberg ως πολύ σαφή, ωστόσο, διέκρινε ότι συνεπάγονται από αυτή κάποια προβλήματα. Έκρινε ότι η περιγραφή του Lindberg, σχετικά με το πέρασμα από την κλασική οπτική σε εκείνη του Kepler, διαστρεβλώνει τη θέση των πτολεμαϊκών *Οπτικών* κατά τη μετάβαση, εξαιτίας της περιορισμένης ερμηνείας του της πρόθεσης του Πτολεμαίου κατά τη συγγραφή των *Οπτικών*.

Συγκεκριμένα, ο Smith δήλωνε ότι οι υποθέσεις, από τις οποίες εξαρτάται η ερμηνεία του Lindberg δεν ευσταθούν. Ο Lindberg βασιζόταν στο ότι υπήρχε αποκλειστικά μια μαθηματική σχολή που έφτανε μέχρι τον Ευκλείδη και ότι ο Πτολεμαίος ανήκε σε αυτή. Ως προς την πρώτη υπόθεση, ο Smith τόνιζε την ανυπαρξία επαρκών ενδείξεων για τη λειτουργία μιας μαθηματικής σχολής οπτικής που να χαρακτηρίζεται από τους περιορισμένους στόχους της. Σχετικά με τη δεύτερη υπόθεση, ο Smith παραδέχτηκε ότι ο Πτολεμαίος μοιράστηκε τις θεωρητικές αρχές και τα αναλυτικά μέσα της μαθηματικής παράδοσης. Το παραπάνω μεμονωμένο γεγονός, θα ήταν αρκετό, για να τον εντάξει κι εκείνον στην ίδια πλευρά με τον

[226] Lindberg, *έ.α.*, σσ. 1-17.

Ευκλείδη και τον Ήρωνα. Ωστόσο, ο Smith διατύπωσε το ερώτημα που αφορά στο αν ο Πτολεμαίος μοιράστηκε τη φαινομενική δέσμευση των συναδέλφων του στο θέμα του «*σώζειν τα φαινόμενα*», ακόμα και εις βάρος των φυσικών, φυσιολογικών και ψυχολογικών παραμέτρων[227].

Ο Lindberg κρατά μια διφορούμενη στάση. Από τη μια μεριά, επισημαίνει ότι, σε αντίθεση με τον Ευκλείδη και τους υπόλοιπους προγενεστέρους του της μαθηματικής παράδοσης, ο Πτολεμαίος προσπάθησε να υποβάλει την οπτική ακτίνα στις απαιτήσεις της φυσικής, της φυσιολογίας και της ψυχολογίας συμφωνώντας στο σημείο αυτό και με τον Lejeune[228]. Από την άλλη μεριά, παρασύρεται, όπως λέει ο Smith[229], πάλι όπως ο Lejeune[230], στο να συμπεράνει ότι το έργο του Πτολεμαίου αποτελεί περαιτέρω επεξεργασία του ευκλείδειου συγγράμματος[231]. Επομένως, συνιστά τμήμα της ευκλείδειας-πτολεμαϊκής παράδοσης.

Οι παρατηρήσεις του Smith είναι αξιοσημείωτες, γιατί καταλήγουν τελικά σε κρίσιμα ερωτήματα που καθορίζουν άμεσα την κατανόησή μας της πτολεμαϊκής θεώρησης. Συγκεκριμένα, οι συλλογισμοί του Smith προκαλούν τον προβληματισμό, σχετικά με το ποιοι ήταν πραγματικά οι στόχοι του Πτολεμαίου. Τι επεδίωκε με τη συγγραφή των *Οπτικών*; Εντάσσονται τα *Οπτικά* στο πλαίσιο της μαθηματικής παράδοσης ή το υπερβαίνουν; Πρόκειται τελικά για ένα έργο καινοτόμο ή όχι;

Ο Smith έσπευσε να υποστηρίξει ότι η θεωρητική σύλληψη του Πτολεμαίου προχωρά σε μεγαλύτερο βάθος, ενώ η κύρια πρόθεσή του ήταν να φέρει σε πέρας μια γενικότερη οπτική σύνθεση. Με άλλα λόγια, τα πτολεμαϊκά *Οπτικά* ήταν κάτι παραπάνω από απλή συνέχεια της ευκλείδειας πραγματείας. Ήταν μια πραγματική απόπειρα εκ μέρους του Πτολεμαίου να συγγράψει ένα έργο συνθετικό περιλαμβάνοντας όλες τις παραμέτρους που εμπλέκονται σε μια θεωρία οπτικής αντίληψης. Όπως ισχυριζόταν ο Smith, η συγκριτική μελέτη των *Οπτικών* με το *De Aspectibus* του al-Haytham είναι άκρως αποκαλυπτική. Αυτό που φανερώνεται είναι όχι μόνο ότι ο al-Haytham ήταν συνεχιστής του Πτολεμαίου, αλλά και ότι, μεταξύ

---

[227] Smith, M.A., "The Psychology of Visual Perception in Ptolemy's Optics", *Isis 79* (1988), σσ. 189-191.
[228] Lejeune, *Euclide et Ptolémée...*, σσ. 83-84, 172-177.
[229] Smith, *έ.α.*, σ. 191.
[230] Lejeune, *έ.α.*, σσ. 174-175.
[231] Lindberg, *έ.α.*, σσ. 15-16.

των δύο συγγραμμάτων, υπάρχει μια οργανική σχέση. Τα *Οπτικά* αποτελούσαν έτσι ένα εργαλειακό μέρος της διαμόρφωσης της οπτικής σύνθεσης του al-Haytham[232].

γ. Ο γρίφος μιας πτολεμαϊκής 'αποτυχίας'

Η σύγχρονη ιστοριογραφία διέπεται από μια γενικότερη αντίληψη ακαριαίας διακοπής της ευοίωνης ανάπτυξης της αρχαίας μαθηματικής οπτικής, εξαιτίας της 'αποτυχίας' του Πτολεμαίου να ανακαλύψει τον ημιτονοειδή νόμο της διάθλασης. Αυτή η απογοητευτική διαπίστωση επικεντρώνει αναπόφευκτα τον προβληματισμό στα αίτια αυτής της αποτυχίας. Τα μέσα ανακάλυψης ήταν διαθέσιμα στον Πτολεμαίο και δε διέφεραν από εκείνα των διαδόχων του, κατά τον 17^{ο} αιώνα. Ο Πτολεμαίος αποπειράθηκε να εξάγει τον νόμο με μια πειραματική διαδικασία που ήταν ικανή να τον κατευθύνει σε σωστά αποτελέσματα. Ωστόσο, εκείνος απέτυχε, ενώ, αντίθετα, οι μεταγενέστεροί του τα κατάφεραν. Γιατί;

Μια πρώτη εξήγηση είναι ότι ο Πτολεμαίος είχε τη δυνατότητα να το πραγματοποιήσει, αλλά δε τα κατάφερε, εξαιτίας της απρόσεκτης πειραματικής τεχνικής του. Αν ήταν περισσότερο σχολαστικός και τυπικός κατά τη διαδικασία, ενδεχομένως να μην υπήρχε αυτή τη στιγμή το συγκεκριμένο ζήτημα. Μια άλλη εξήγηση είναι ότι ο Πτολεμαίος κατέληξε πράγματι σε έναν νόμο που υπονοείται και δηλώνεται έμμεσα στους πίνακες διάθλασής του, αλλά, για κάποιον ανεξήγητο λόγο, απέτυχε ή αρνήθηκε να τον αποδεκτεί.

Ο Smith διατύπωσε τον συγκεκριμένο προβληματισμό στο *Ptolemy and the Foundations of Ancient Mathematical Optics*, ενώ στο άρθρο του "Ptolemy's Search for a Law of Refraction" επιχείρησε να δώσει τις δικές του εξηγήσεις. Σύμφωνα με τον Smith, ο Πτολεμαίος δε θα μπορούσε να βρει τον ημιτονοειδή νόμο και ότι είχε λόγους, για να μη διαμορφώσει έναν νόμο βασισμένο στα συγκεκριμένα στοιχεία που ήδη είχε στα χέρια του[233]. Όπως υποστήριζε ο Smith, ο Πτολεμαίος δεν περίμενε, μέσω των πειραμάτων του, να ανακαλύψει κάτι που δεν ήταν αναμενόμενο και κάτι που δε θα συνεπάγονταν λογικά από τη μαθηματική του προσέγγιση της οπτικής.

---

[232] Smith, *έ.α.*, 203-207.

[233] Smith, M.A., "Ptolemy's Search for a Law of Refraction: A Case-Study in the Classical Methodology of 'Saving the Appearances' and its Limitations", *Archive for History of Exact Sciences*, *26*, no 3 (1982): σ. 223.

Η ερμηνεία του Smith βασιζόταν στη μετάφραση του παραπάνω προβλήματος στο ερώτημα «*Γιατί ο Πτολεμαίος απέτυχε να σώσει τα φαινόμενα της διάθλασης;*» Ο Smith θεωρούσε ότι η αποτυχία δεν πρέπει να χρεωθεί στον Πτολεμαίο, αλλά στο «*σώζειν τα φαινόμενα*» που τον εξαπάτησαν οδηγώντας τον από την αρχή στο να πραγματευθεί τον κλάδο της οπτικής ως ένα είδος ανώμαλης δομής. Ο Πτολεμαίος περιορίστηκε στο να αναλύσει αυτή τη δομή σε ένα περισσότερο ή λιγότερο αυστηρό σύστημα τριών τύπων ανωμαλίας, εξαρτώμενων από το αν η οπτική ακτίνα δεν 'κάμπτεται', ανακλάται ή διαθλάται. Θεωρώντας ότι τα φαινόμενα της ανάκλασης και εκείνα της διάθλασης είναι ισοδύναμα ο Πτολεμαίος συμπέρανε ότι, όπως στην ανάκλαση, έτσι και στη διάθλαση, η γωνία πρόσπτωσης και η γωνία διάθλασης θα ήταν σταθερά ανάλογες, παρόλο που στην περίπτωση της διάθλασης θα ήταν άνισες.

Σύμφωνα με τον Smith, ήταν η εξορθολογικοποιημένη από τον Πτολεμαίο προσέγγιση της διάθλασης που τον έκανε να μην ανακαλύψει τον ημιτονοειδή νόμο. Το μοιραίο λάθος του ήταν η αντιμετώπιση της διάθλασης ως μιας ειδικής περίπτωσης της ανάκλασης και ότι αυτή θα έπρεπε να σωθεί, μέσω της άμεσης σχέσης της γωνίας πρόσπτωσης με τη γωνία διάθλασης. Ο Smith τοποθέτησε το πρόβλημα στην πτολεμαϊκή παραδοχή ότι η οπτική δράση γίνεται κατανοητή σε όρους απλών, σταθερών σχέσεων, μεταξύ του παρατηρητή και του αντικειμένου. Έτσι, η οπτική ακτίνα συνιστούσε μια θεμελιωδώς χωρική οντότητα, μια πραγματική ευθεία, μέσω της οποίας θα μπορούσε να εδραιωθεί η γεωμετρική πραγματικότητα που υπογραμμίζει τις οπτικές εμφανίσεις. Για τον Πτολεμαίο οι οπτικές εμφανίσεις και η σωτηρία τους θεωρούνταν ουσιαστικά χωρικές και κατά δεύτερη μοίρα χρονικές. Έτσι, η μαθηματική ακτίνα της οπτικής γινόταν κατανοητή ως πραγματική ευθεία στον χώρο και όχι, όπως στην οπτική του 17^{ου} αιώνα, ως μια φανταστική γραμμή στον χρόνο. Επομένως, ο Smith κατέληξε στο ότι τα μέσα ανακάλυψης του Πτολεμαίου δεν ήταν τα ίδια με εκείνα των μεταγενεστέρων του[234].

δ. Συμπεράσματα

Από όσα εκτέθηκαν παραπάνω, γίνεται σαφές ότι οι ιστορικοί προβαίνουν σε αναλύσεις του κειμένου των *Οπτικών* προτείνοντας τις προσωπικές τους ερμηνευτικές προσεγγίσεις, μπορεί να διαφωνούν μεταξύ τους, αλλά τουλάχιστον συμφωνούν σε ένα πράγμα: όλοι επεξεργάζονται τα *Οπτικά* έχοντας καταλήξει,

[234] *ό.π.*, σσ. 238-240.

προφανώς, στην πτολεμαϊκή πατρότητά τους. Αν φανταστούμε ότι το ζήτημα έχει λήξει και αποδεχτούμε ότι το σύγγραμμα είναι πράγματι πτολεμαϊκό, η συγκεκριμένη ιστοριογραφική εικόνα παρουσιάζει μια δυναμική. Τα ερωτήματα είναι όχι μόνο αρκετά, χωρίς να αποκλείεται η ύπαρξη περισσότερων, αλλά και ποικίλα. Γίνονται προσπάθειες ένταξης των *Οπτικών* στο περιβάλλον της εποχής του Πτολεμαίου, αλλά και απόπειρες προσδιορισμού των τελικών στόχων του συγγραφέα. Δίνεται μεγάλη σημασία στη νοοτροπία, υπό την οποία καθοδηγείται η έκθεση, και στα ιδιοσυγκρασιακά στοιχεία που την υπογραμμίζουν. Πάντως, η πτολεμαϊκή οπτική και κατοπτρική φαίνεται ότι τις τελευταίες δεκαετίες έλκει όλο και περισσότερο το ενδιαφέρον των ιστορικών, γεγονός καθόλου περίεργο. Θεωρούμε ότι ο κλάδος της αρχαίας γεωμετρικής οπτικής αποτελεί έναν σχετικά νέο κόσμο ιστοριογραφικής εξερεύνησης, σε αντίθεση με τον πολυμελετημένο κλάδο των αρχαίων μαθηματικών και της αστρονομίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΟΙ «*ΟΡΟΙ*» ΤΩΝ ΔΥΟ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ* ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ: ΤΙ ΥΠΟΔΗΛΩΝΟΥΝ;

Α. ΟΙ «*ΟΡΟΙ*» ΣΤΑ ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΜΙΑ ΛΕΞΗ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΣΗΜΑΣΙΕΣ

Στην πρώτη σελίδα των *Οπτικών* του Ευκλείδη, αλλά και της *Αναθεωρημένης Έκδοσής* τους, αναγράφεται ως επικεφαλίδα η λέξη «*όροι*». Η λέξη αυτή αναφέρεται και χαρακτηρίζει τις εφτά προτάσεις που την ακολουθούν. Στο πλαίσιο της αρχαίας ελληνικής γεωμετρικής ορολογίας, ο «*όρος*» χρησιμοποιείται ευρέως. Ωστόσο, δεν έχει πάντα την ίδια σημασία. Θεωρείται λοιπόν απαραίτητο στο σημείο αυτό να διευκρινιστεί με ποια από όλες τις σημασίες της χρησιμοποιείται η λέξη «*όροι*» στις δύο συγκεκριμένες πραγματείες. Με άλλα λόγια, ποια είναι η σημασία που πρέπει να αποδοθεί στον παραπάνω όρο, ώστε να ανταποκρίνεται ταυτόχρονα στο περιεχόμενο των εφτά προτάσεων, στις οποίες αναφέρεται;

Στον 13^{ο} ορισμό του βιβλίου Ι των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης δηλώνει ότι «*Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας*», ενώ στον αμέσως επόμενο ορισμό της έννοιας του «*σχήματος*» λέει ότι «*Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον*»[1]. Σύμφωνα με τις παραπάνω προτάσεις, κατανοούμε ότι ο «*όρος*» είχε εκλάβει στα *Στοιχεία* τη σημασία ενός γεωμετρικού στοιχείου, το οποίο συνιστά τα όρια μιας γεωμετρικής οντότητας. Στα *Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη* ο Πρόκλος αναφέρει ότι «*νῦν γὰρ ὅρον καλεῖ* (ενν. *ο Ευκλείδης*) *τὴν περιοχὴν τὴν ἀφορίζουσαν ἕκαστον χωρίον*»[2] και στη συνέχεια μας πληροφορεί ότι η έννοια του «*όρου*» ήταν γνωστή ήδη από τις απαρχές της γεωμετρίας, κατά τη μέτρηση των εκτάσεων της γης, για την οριοθέτηση των συνόρων[3]. Μια σημασία ανάλογη με εκείνη που αποδίδει ο Ευκλείδης απαντάται και στον Αριστοτέλη. Στο βιβλίο ΙΙ του *Περί ζώων γενέσεως* συναντάμε τη λέξη «*όρος*» να είναι συνώνυμη με τη λέξη «*πέρας*» και να αναφέρεται πότε η μια και πότε η άλλη

---

[1] Ευκλείδου, *Στοιχεία*, Ι, ορισμοί 13 και 14.

[2] Πρόκλου, *Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη*, 136 4-6.

[3] Συγκεκριμένα, ο Πρόκλος αναφέρει τα εξής: «*ἐστὶ δὲ τὸ ὄνομα οἰκεῖον τῇ ἐξ ἀρχῆς γεωμετρίᾳ, καθ᾽ ἣν τὰ χωρία ἐμέτρουν καὶ τοὺς ὅρους αὐτῶν ἐφύλαττον ἀσυγχύτους, ἀφ᾽ ἧς καὶ τῆς ἐπιστήμης ταύτης εἰς ἐπίνοιαν ἦ λθον*». Βλ. *ό.π.*, 136 8-12.

στο «*μέγεθος*». Δηλαδή, παρακολουθούμε να χρησιμοποιείται αδιακρίτως και η έκφραση «*τοῦ γὰρ μεγέθους ὅρος....*»[4] και η έκφραση «*πέρας τοῦ μεγέθους...*»[5].

Επιπλέον, η λέξη «*όρος*» εμφανίζεται στα αρχαία μαθηματικά κείμενα, για να υποδηλώσει τα γεωμετρικά ή αριθμητικά μεγέθη που βρίσκονται σε αναλογία. Πρόκειται για αυτό που κοινώς ονομάζεται «*όρος - όροι μιας αναλογίας*». Με αυτή τη σημασία εντοπίζεται η λέξη «*όρος*», ήδη πολύ πριν από τον Ευκλείδη. Έτσι, μέσω του Πορφυρίου μαθαίνουμε ότι, κατά την εξέταση των μεσοτήτων στο *Περί μουσικής*, ο Αρχύτας δήλωνε ότι «*ἀριθμητικὰ μέν* (ενν. *μέσα*), *ὅκκα ἔωντι τρεῖς ὅροι κατὰ τὰν τοίαν ὑπεροχὰν ἀνὰ λόγον·...ἁ γεωμετρικὰ δέ, ὅκκα ἔωντι οἷος ὁ πρᾶτος ποτὶ τὸν δεύτερον, καὶ ὁ δεύτερος ποτὶ τὸν τρίτον. τούτων δ' οἱ μείζονες ἴσον ποιοῦνται τὸ διάστημα καὶ οἱ μείους. ἁ δ' ὑπεναντία, ἂν καλοῦμεν ἁρμονικάν, ὅκκα ἔωντι <τοῖοι, %> ὁ πρᾶτος ὅρος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου αὐταύτου μέρει, τούτ% ὁ μέσος τοῦ τρίτου ὑπερέχει τοῦ τρίτου μέρει. γίνεται δ' ἐν ταύτᾳ τᾷ ἀναλογίᾳ τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖζον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖον*»[6]. Στην *Πολιτεία* του ο Πλάτων συζητούσε για τους τρεις όρους της αρμονίας «*...ὥσπερ ὅρους τρεῖς ἁρμονίας ἀτεχνῶς, νεάτης τε καὶ ὑπάτης καὶ μέσης...*»[7], ενώ στον *Τίμαιο* ανέφερε ότι «*τῆς τοῦ μορίου ταύτης διαστάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὅρους...*»[8]. Φτάνοντας στον Ευκλείδη και στον 8ο ορισμό του βιβλίου V των *Στοιχείων* διαβάζουμε ότι «*Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν*»[9], ενώ στον *Ψαμμίτη* του Αρχιμήδη ότι «*...ἐν τᾷ τῶν δεκαπλασίων ὅρων ἀναλογίᾳ...*»[10]. Με αυτή τη σημασία κάνει ευρεία χρήση του όρου και ο Πάππος. Για παράδειγμα, κατά τους ορισμούς της αριθμητικής και γεωμετρικής μεσότητας, δηλώνει ότι «*Ἀριθμητικὴ μὲν οὖν λέγεται μεσότης,*
ὅταν τριῶν ὄντων ὅρων ὁ μέσος τῷ ἴσῳ ἑνὸς μὲν τῶν ἄκρων ὑπερέχῃ,
ὑπερέχηται δὲ ὑπὸ τοῦ λοιποῦ (ὡς ἔχει ὁ ς πρὸς τὸν θ καὶ τὸν γ ἀριθμόν),

---

[4]Αριστοτέλους, *Περί ζώων γενέσεως*, έκδ. H.J. Drossaart Lulofs, *Aristotelis de generatione animalium*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1965, 745α 9.
[5] *ό.π.*, 745α 6.
[6] Πορφυρίου, *Υπόμνημα εις τα αρμονικά του Πτολεμαίου*, έκδ. I. Düring, *Porphyrios: Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios*, Γκαίτεμπργκ: Elanders 1932, 93. 5-17.
[7] Πλάτωνος, *Πολιτεία*, 443d 5-7.
[8] Πλάτωνος, *Τίμαιος*, 36b 2-4.
[9] Ευκλείδου, *έ.α.,* V, ορισμός 8.
[10] Αρχιμήδους, *Ψαμμίτης*, έκδ. C. Mugler, *Archimède*, 3 τόμ., Παρίσι: Les Belles Lettres 1971, τόμ. 2, 150.3.

ἢ ὅταν ὡς ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς αὐτὸν, ἡ πρώτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δευτέραν. [πρῶτα δὲ ἀκούειν δεῖ τὰ ὑπερέχοντα.] Γεωμετρικὴ δὲ λέγεται μεσότης, τουτέστιν ἀναλογία κυρίως, ὅταν ὡς ὁ μέσος ὅρος πρὸς ἕνα τῶν ἄκρων, οὕτως ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν μέσον (ὡς ἔχει ὁ ς΄ ἀριθμὸς πρός τε τὸν ιβ καὶ τὸν γ), καὶ ἄλλως· ὅταν ὡς ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον, ἡ πρώτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δευτέραν»[11].

Τέλος, η λέξη «*όρος*» εκλαμβάνει σε πολλά μαθηματικά κείμενα της Αρχαιότητας τη σημασία του ορισμού ενός σχήματος ή μιας γεωμετρικής ιδιότητας. Στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη η λέξη «*όροι*» τοποθετείται ως τίτλος που χαρακτηρίζει το σύνολο των προτάσεων που τον ακολουθούν, όπως ακριβώς βλέπουμε να συμβαίνει στις δύο εκδόσεις των *Οπτικών*. Το ίδιο πράττει και ο Απολλώνιος με τους «*πρώτους όρους*» των *Κωνικών* του[12]. Αλλά και σε μεταγενέστερα κείμενα μαθηματικού περιεχομένου, ο «*όρος*» διατηρεί τη σημασία του ορισμού, όπως στη *Μαθηματική Συναγωγή* του Πάππου, όπου διαβάζουμε ότι «*τὴν δὲ διαφορὰν…ὅτι βέλτιον ᾔδεσαν οἱ ἀρχαῖοι, δῆλον ἐκ τῶν ὅρων*»[13], και στα *Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη* του Πρόκλου, ο οποίος αναφέρει ότι «*τοῦτο γὰρ ζητοῦσα ἢ τὸν ὅρον εὑρεῖν ἐθέλει* (ενν. *η γεωμετρία*) *τῆς τοιαύτης γραμμῆς*»[14].

Θα ήταν ενδιαφέρον να επισημανθεί ότι εκτός από τη λέξη «*όρος*» υπήρχε φυσικά και η λέξη «*ορισμός*». Ο «*όρος*» όχι μόνο πλησίαζε σημασιολογικά τη λέξη «*ορισμός*», αλλά θεωρούνταν ως συνώνυμή της. Ενδεικτικά, αναφέρουμε ότι στα *Τοπικά* ο Αριστοτέλης έλεγε ότι «*εἰσὶ δὲ τῶν τοιούτων ὁρισμῶν ὅ τε τῆς στιγμῆς καὶ ὁ τῆς γραμμῆς καὶ ὁ τοῦ ἐπιπέδου*»[15] και ο Πρόκλος ότι «*τὸν δὲ τῆς εὐθείας ὁρισμὸν ὁ μὲν Εὐκλείδης τοῦτον ἀποδέδωκεν*»[16]. Ο «*ορισμός*» υποδήλωνε τη διατύπωση των ουσιωδών ιδιοτήτων μιας γεωμετρικής οντότητας, δηλαδή έθετε το τι είναι αυτή (*τί ἐστιν*). Κατά ανάλογο τρόπο, ο «*όρος*» σχημάτιζε κυρίως κρίσεις του τύπου «*το τάδε εστί…*» ή προσδιόριζε μια γεωμετρική ιδιότητα ή

---

[11] Πάππου, *Μαθηματική Συναγωγή*, έκδ. F. Hultsch, *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt*, 3 τόμ., Βερολίνο: Weidmann 1876-1878, τόμ. 1, III, 70.21-32.
[12] Απολλώνιου, *Κωνικά*, έκδ. J.L. Heiberg, *Apollonii Pergaei quae Graece exstant*, τόμ. 2, Λειψία: Teubner 1891-1893, τόμ. 1, I, «*όροι πρώτοι*».
[13] Πάππου, *έ.α.*, τόμ. 3, VII, 650.14-16.
[14] Πρόκλου, *έ.α.*,201.22-23.
[15] Αριστοτέλους, *Τοπικά*, έκδ. W.D. Ross, *Aristotelis topica et sophistici elenchi*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1970, 141b 19-20.
[16] Πρόκλου, *έ.α.*,109. 6-7.

ένα γεωμετρικό χαρακτηριστικό. Συνεπώς, στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων*, κάτω από την επικεφαλίδα των «*όρων*», ο Ευκλείδης ορίζει το σημείο ως «*Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν*» και την ευθεία γραμμή ως «*Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*»[17], ενώ στον δεύτερο ορισμό του τρίτου βιβλίου καθορίζει τις συνθήκες που πρέπει να τηρούνται, ώστε μια ευθεία να εφάπτεται σε κύκλο: «*Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον*». Θα πρέπει να σημειωθεί πάντως ότι οι αρχαίοι μαθηματικοί έδειχναν μια ιδιαίτερη προτίμηση στη λέξη «*όρος*» χρησιμοποιώντας την πολύ περισσότερο, σε σχέση με τη λέξη «*ορισμός*» που παρουσιάζει μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης σε κείμενα φιλοσοφικού ενδιαφέροντος.

Συνοψίζοντας όσα λέχθησαν παραπάνω είναι δυνατόν να διακρίνουμε τελικά τρεις σημασιολογικές πτυχές των «*όρων*». Αρχικά, οι «*όροι*» υποδηλώνουν γεωμετρικά στοιχεία που προσδιορίζουν τα όρια, ή αλλιώς, τα πέρατα ενός γεωμετρικού σχήματος. Επίσης, οι «*όροι*» απαντώνται συχνά ως τα γεωμετρικά ή αριθμητικά μέλη που εμφανίζονται σε μια αναλογία. Τέλος, οι «*όροι*» θεωρούνται ως συνώνυμοι με τους ορισμούς.

Πριν επιχειρήσουμε να αποσαφηνίσουμε ποια σημασία έχουν οι «*όροι*» των *Οπτικών* και της *Αναθεωρημένης Έκδοσής* τους, είμαστε σε θέση να απορρίψουμε εξαρχής τη δεύτερη σημασία τους, εφόσον στην προκειμένη περίπτωση οι «*όροι*» δεν αναφέρονται σε μέλη κάποιας αναλογίας. Επιπλέον, είναι δυνατόν να αφήσουμε στην άκρη και την πρώτη σημασία -τουλάχιστον την κυριολεκτική της έννοια-, αφού οι «*όροι*» των δύο κειμένων της οπτικής που μας απασχολούν αναφέρονται συνολικά στο σώμα κάποιων προτάσεων επιδιώκοντας να χαρακτηρίσουν το περιεχόμενό τους, και όχι σε κάποια συγκεκριμένη γεωμετρική οντότητα, τα όρια της οποίας προσπαθούν να προσδιορίσουν. Επομένως, απομένει η τρίτη σημασία των «*όρων*» και το ερώτημα που εγείρεται τελικά είναι αν οι «*όροι*» των δύο εκδόσεων των *Οπτικών* υποδηλώνουν ορισμούς. Για να δοθεί μια ικανοποιητική απάντηση, θεωρείται απαραίτητη η εξέταση των προτάσεων, στις οποίες αυτοί αναφέρονται.

[17] Πρόκειται αντίστοιχα για τον πρώτο και τέταρτο ορισμό του βιβλίου Ι των *Στοιχείων*.

Β. ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΩΝ «*ΟΡΩΝ*» ΤΩΝ ΔΥΟ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ* ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

1. Ο πρώτος «όρος» των δύο εκδόσεων

Οι δύο διασωζόμενες εκδόσεις των *Οπτικών* φέρουν 7 «*όρους*», από τους οποίους οι δύο πρώτοι παρουσιάζουν διαφορές μεταξύ τους. Ο πρώτος «*όρος*» των *Οπτικών* είναι ο εξής:

Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐξαγομένας εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων.

Ο αντίστοιχος «*όρος*» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* των *Οπτικών* παρουσιάζεται με τον παρακάτω διαφοροποιημένο τρόπο:

Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ὄψεις κατ' εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι διάστημά τι ποιούσας ἀπ' ἀλλήλων.

Ο πρώτος «*όρος*» των *Οπτικών* υποθέτει ότι οι ευθείες γραμμές που εξάγονται από το μάτι «*φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*». Ο αντίστοιχος «*όρος*» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* υποθέτει ότι οι όψεις (που εξάγονται) από το μάτι φέρονται κατά ευθείες γραμμές δημιουργώντας διαστήματα μεταξύ τους. Στην ίδια έκδοση παρατηρείται η εισαγωγή της έννοιας της «*όψεως*». Αρχικά, μάς γνωστοποιείται ότι η όψη αποτελεί κάτι που προέρχεται από το μάτι. Στη συνέχεια, αναφέρονται δύο ιδιότητές της, δηλαδή ότι η όψη φέρεται κατά ευθείες γραμμές και ότι μεταξύ των όψεων δημιουργούνται διαστήματα. Ο πρώτος «*όρος*» της συγκεκριμένης έκδοσης δε συνιστά έναν αυστηρό ορισμό του τι *είναι* η όψη, αλλά μάλλον έναν προσδι-ορισμό της, μέσω της αναφοράς δύο σημαντικών γνωρισμάτων της.

Σε αντίθεση με τον πρώτο «*όρο*» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, ο πρώτος «*όρος*» των *Οπτικών* δε φέρει τη λέξη «*όψη*», αλλά κάνει λόγο για ευθείες γραμμές που εξάγονται από το μάτι. Οι παραπάνω ευθείες γραμμές έχουν την ιδιότητα να φέρονται «*διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*». Πολύ ενδιαφέρον στοιχείο της συγκεκριμένης έκδοσης αποτελεί ότι, εφόσον έχουν ειπωθεί τα παραπάνω στον πρώτο «*όρο*», στον δεύτερο «*όρο*» θα εισαχθεί η έννοια της «*όψης*», όπως θα δούμε παρακάτω. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί αναπόφευκτα στο να συμπεράνουμε ότι ο πρώτος «*όρος*» των

Οπτικών υποκρύπτει έναν ορισμό των «*όψεων*». Κατανοούμε λοιπόν με πιο σαφή τρόπο ότι οι όψεις είναι ουσιαστικά οι ευθείες γραμμές που έχουν ως χαρακτηριστικό γνώρισμα να εξάγονται από το μάτι και «*φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*».

2. *Ο δεύτερος «όρος» των δύο εκδόσεων*

Ο δεύτερος «*όρος*» παρουσιάζει μια μικρή διαφορά, ανάμεσα στα δύο διασωζόμενα κείμενα των *Οπτικών*. Στην έκδοση των *Οπτικών* διαβάζουμε:

> *καὶ τὸ [μὲν]*
> *ὑπὸ τῶν ὄψεων περιεχόμενον σχῆμα εἶναι κῶνον τὴν κορυφὴν μὲ*
> *ν ἔχοντα ἐν τῷ ὄμματι τὴν δὲ βάσιν πρὸς τοῖς πέρασι τῶν ὁρωμέ*
> *νων.*

Στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* των *Οπτικών* ο συγγραφέας θέτει ότι:

> *καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ὄψεων περιεχόμενον σχῆμα εἶναι κῶνον τὴν*
> *κορυφὴν μὲν ἔχοντα πρὸς τῷ ὄμματι,*
> *τὴν δὲ βάσιν πρὸς τοῖς πέρασι τῶν ὁρωμένων.*

Ο σκοπός του δεύτερου «*όρου*» των *Οπτικών* είναι να προσδιορίσει γεωμετρικά το σχήμα που περιέχεται από τις όψεις. Οι όψεις διαμορφώνουν έναν κώνο, γνωστό στην Αρχαιότητα ως «*οπτικός κώνος*» ή «*κώνος της όψεως*», ο οποίος έχει την κορυφή του στο μάτι και τη βάση του στα πέρατα των ορωμένων, δηλαδή στα όρια των παρατηρούμενων αντικειμένων. Ο δεύτερος «*όρος*» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει τα ίδια πράγματα, με τη διαφορά ότι η κορυφή του κώνου βρίσκεται «*πρὸς τῷ ὄμματι*» και όχι «*ἐν τῷ ὄμματι*».

Τόσο στη μία, όσο και στην άλλη έκδοση, ο δεύτερος «*όρος*» θα λέγαμε ότι υποκρύπτει έναν ορισμό του οπτικού κώνου. Ο οπτικός κώνος είναι συγκεκριμένα το σχήμα που περιέχεται από τις όψεις. Παράλληλα, μέσω του δεύτερου «*όρου*», δίδεται η γεωμετρική περιγραφή του κώνου, προσδιορίζεται σχηματικά ο ίδιος και, συνεπώς, οριοθετείται γεωμετρικά η περιοχή που υποπίπτει στην οπτική αντίληψη.

3. *Ο τρίτος «όρος» των δύο εκδόσεων*

Ο τρίτος «*όρος*» είναι πανομοιότυπος και στις δύο εκδόσεις των *Οπτικών*. Συγκεκριμένα, δηλώνει ότι:

> *καὶ ὁρᾶσθαι μὲν ταῦτα, πρὸς ἃ ἂν αἱ ὄψεις προσπίπτωσι,*
> *μὴ ὁρᾶσθαι δέ, πρὸς ἃ ἂν μὴ προσπίπτωσιν αἱ ὄψεις.*

Στον τρίτο «*όρο*» εισάγεται μια γενική και πολύ προφανή συνθήκη ορατότητας. Αναφέρει ότι ορώνται αυτά, στα οποία προσπίπτουν οι όψεις, ενώ στην αντίθετη περίπτωση δεν ορώνται. Στη συγκεκριμένη πρόταση δεν παρέχεται ο ορισμός κάποιου πράγματος, αλλά διευκρινίζονται οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν, ώστε να γίνει οπτικά αντιληπτό ένα αντικείμενο.

4. Ο τέταρτος, πέμπτος και έκτος «όρος» των δύο εκδόσεων

Οι τρεις επόμενοι «*όροι*» των *Οπτικών*, δηλαδή ο τέταρτος, ο πέμπτος και ο έκτος, είναι ακριβώς ίδιοι με τους αντίστοιχους της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και έχουν ως εξής:

καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα μείζονα φαίνεσθαι,
τὰ δὲ ὑπὸ ἐλάττονος ἐλάττονα,
ἴσα δὲ τὰ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα.

καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μετεωροτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα μετεωρότερα φ
αίνεσθαι, τὰ δὲ ὑπὸ ταπεινοτέρων ταπεινότερα.

καὶ ὁμοίως τὰ μὲν ὑπὸ δεξιωτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα δεξιώτερα
φαίνεσθαι, τὰ δὲ ὑπὸ ἀριστερωτέρων ἀριστερώτερα.

Οι παραπάνω «*όροι*» κρίνονται ως απαραίτητοι για ένα σύστημα που επιδιώκει την εύρεση του μέτρου εμφάνισης ενός αντικειμένου, είτε αυτό αποτελεί μέγεθος, είτε διάστημα κλπ. Το μέγεθος ενός αντικειμένου εξαρτάται λοιπόν αποκλειστικά από το μέγεθος της οπτικής γωνίας, υπό το οποίο οράται. Δηλαδή, αν η οπτική γωνία, υπό την οποία παρατηρείται ένα αντικείμενο, είναι μεγαλύτερη από μια άλλη, υπό την οποία παρατηρείται το ίδιο αντικείμενο, τότε το αντικείμενο θα εμφανίσει μεγαλύτερο μέγεθος, όταν θα παρατηρείται υπό την πιο μεγάλη γωνία. Αντίθετα, στην περίπτωση που παρατηρείται από την -σχετικά με την άλλη- μικρότερη γωνία, θα φανεί μικρότερο. Αν παρατηρηθεί υπό ίσες γωνίες, τότε θα φανεί σε όλες τις περιπτώσεις με ίσο μέγεθος.

Κάτι ανάλογο συμβαίνει και για τις σχέσεις «ψηλότερο», «χαμηλότερο», «αριστερότερο», «δεξιότερο», αλλά σε αυτή την περίπτωση τον καθοριστικό ρόλο κατέχουν οι σχετικές θέσεις των ακτίνων που βρίσκονται στον οπτικό κώνο και όχι η οπτική γωνία.

Σε κανέναν από τους παραπάνω «*όρους*» δεν εμφανίζεται κάποιος ορισμός, αλλά ένας τρόπος καθορισμού του σχετικού μεγέθους ή της σχετικής θέσης των εμφανίσεων. Στόχος αυτών των προτάσεων δεν είναι να παράσχουν το απόλυτο, πραγματικό μέτρο ή την πραγματική θέση των ορωμένων, δηλαδή δεν έχουν να κάνουν με το *είναι*, αλλά να περιγράψουν σχέσεις, δηλαδή πώς αυτά φαίνονται.

5. Ο έβδομος «όρος» των δύο εκδόσεων

Ο έβδομος «*όρος*» των δύο εκδόσεων είναι ο εξής:

τὰ δὲ ὑπὸ πλειόνων γωνιῶν ὁρώμενα ἀκριβέστερον φαίνεσθαι.

Η πρόταση αυτή χρησιμοποιείται για την απόδειξη ενός μόνο θεωρήματος της πραγματείας. Δεν αποτελεί κάποιον ορισμό, αλλά καθορίζει την οπτική ακρίβεια, με την οποία θα ειδωθεί κάτι. Η ακρίβεια αυτή εξαρτάται αποκλειστικά από τον αριθμό των γωνιών, υπό τις οποίες θα παρατηρηθεί. Αν παρατηρείται υπό περισσότερες γωνίες, σε σχέση με ένα άλλο, τότε θα φανεί πιο ακριβές, δηλαδή με μεγαλύτερη ευκρίνεια.

Γ. ΟΙ «*ΟΡΟΙ*» ΣΕ ΑΛΛΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΕΙΜΕΝΑ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑΣ

Μέσω της εξέτασης των 7 «*όρων*» των *Οπτικών* και της *Αναθεωρημένης Έκδοσής* τους, καταλήγουμε ότι μόνο στον πρώτο «*όρο*» των *Οπτικών* και στον δεύτερο «*όρο*» και των δύο εκδόσεων υποβόσκει κάποιος ορισμός. Αν, από την άλλη μεριά, περιορίσουμε την έννοια του ορισμού και θεωρήσουμε πιο αυστηρά ότι αυτός πρέπει να έχει τη μορφή κατηγορικής πρότασης, τότε τα περιθώρια στενεύουν ακόμα πιο πολύ, αφού οι προτάσεις που μας απασχολούν δεν ανταποκρίνονται κατά απόλυτο τρόπο στο αίτημα αυτό. Διαπιστώνουμε ότι τα ερωτήματα που αφορούν στη σημασία των συγκεκριμένων «*όρων*», ώστε να δικαιολογηθεί παράλληλα και η θέση τους ως τίτλος, δεν απαντώνται ικανοποιητικά. Και αυτό γιατί θα αναμέναμε οι «*όροι*» να υποδηλώνουν κάτι που να αντιστοιχεί στο περιεχόμενο όλων των προτάσεων.

Το κείμενο των *Οπτικών* και η *Αναθεωρημένη Έκδοσή* τους δεν αποτελούν μοναδικές περιπτώσεις αρχαίων μαθηματικών έργων, στα οποία παρατηρείται η συγκεκριμένη ασυνέπεια. Σε πολλές πραγματείες οι συγγραφείς ονομάζουν κάποια σύνολα γεωμετρικών προτάσεων ως «*όρους*» ή «*αξιώματα*» και με έκπληξη διαπιστώνουμε τελικά ότι το περιεχόμενό τους δεν αντιστοιχεί απόλυτα με τον τίτλο, από τον οποίο συνοδεύονται. Στη συνέχεια, θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε

ορισμένα γεωμετρικά κείμενα, μέσα από τα οποία μπορεί να αναδειχθεί καλύτερα το πρόβλημα.

1. Αυτόλυκος από την Πιτάνη

Ο Αυτόλυκος ήταν μαθηματικός και τοποθετείται χρονολογικά μια γενιά μετά τον Αριστοτέλη. Ήκμασε περίπου το 300 π.Χ., αλλά ήταν μεγαλύτερος σε ηλικία από τον Ευκλείδη. Διασώζονται δύο συγγράμματά του, το *Περί κινουμένης σφαίρας* και το *Περί επιτολών και δύσεων*. Στην αρχή του έργου *Περί κινουμένης σφαίρας* υπάρχει ο τίτλος «*όροι*»[18]. Στη συνέχεια, ακολουθούν δύο προτάσεις:

> *Ὁμαλῶς λέγεται φέρεσθαι σημεῖα ὅταν ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἴσα τε ἢ καὶ ὅμοια μεγέθη διεξέρχηται·*
> *ἐὰν δὲ ἐπί τινος γραμμῆς φερόμενόν τι σημεῖον ὁμαλῶς δύο γραμμὰς διεξέλθῃ,*
> *τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ὅ τε χρόνος πρὸς τὸν χρόνον ἐν ᾧ τὸ σημεῖον ἑκατέραν τῶν γραμμῶν διεξῆλθεν καὶ ἡ γραμμὴ πρὸς τὴν γραμμήν.*

Η πρώτη πρόταση αποτελεί τον ορισμό της ομαλής κίνησης. Η χρήση του ρήματος «*λέγεται*» είναι χαρακτηριστική ένδειξη, για το ότι αυτό που θα ακολουθήσει είναι ορισμός. Τα πράγματα δεν είναι το ίδιο σαφή, όταν διαβάζουμε τη δεύτερη πρόταση, καθώς αυτή δε συνιστά ορισμό με την αυστηρή έννοια του όρου. Απλά, θα λέγαμε ότι αποτελεί μια επέκταση του πρώτου «*όρου*».

Στο πρώτο βιβλίο του *Περί επιτολών και δύσεων* αναγράφεται πάλι ως τίτλος η λέξη «*όροι*». Ακολουθούν 9 προτάσεις που πράγματι αντιστοιχούν σε ορισμούς[19]:

> *Τῶν ἀπλανῶν ἄστρων αἱ ἐπιτολαί τε καὶ δύσεις αἱ μὲν λέγονται ἀληθιναί, αἱ δὲ φαινόμεναι.*
> *Τῶν δὲ ἀληθινῶν ἑῴα μέν ἐστιν ἐπιτολή,*
> *ὅταν ἅμα τῷ ἡλίῳ ἀνατέλλοντι ἄστρον τι συνανατέλλῃ·*
> *ἑῴα δὲ δύσις, ὅταν ἅμα τῷ ἡλίῳ ἀνατέλλοντι ἄστρον τι δύνῃ·*
> *ἑσπερία δὲ ἀνατολή,*
> *ὅταν ἅμα τῷ ἡλίῳ δύνοντι ἄστρον τι ἀνατέλλῃ·*
> *ἑσπερία δὲ δύσις,*
> *ὅταν ἅμα τῷ ἡλίῳ δύνοντι ἄστρον τι συνδύνῃ.*
> *Τῶν δὲ φαινομένων ἑῴα μέν ἐστιν ἐπιτολή,*
> *ὅταν πρὶν τὸν ἥλιον ἀνατεῖλαι ἄστρον τι πρώτως φανῇ ἀνατέλλον· ἑῴα δὲ δύσις,*
> *ὅταν πρὶν τὸν ἥλιον ἀνατεῖλαι ἄστρον τι πρώτως φανῇ δῦνον·*
> *ἑσπερία δὲ ἐπιτολή,*

---

[18] Αυτόλυκου, *Περί κινουμένης σφαίρας*, έκδ. F. Hultch, *Autolyci De sphaera quae movetur liber De ortibus et occasibus libri duo una cum scholiis antiques*, Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana, Λειψία 1885.

[19] Αυτόλυκου, *Περί επιτολών και δύσεων*, έκδ. F. Hultch, *ό.π.*

ὅταν μετὰ τὸ τὸν ἥλιον δῦναι ἄστρον τι ἐσχάτως φανῇ ἀνατέλ λον· ἑσπερία δὲ δύσις,
ὅταν μετὰ τὸ τὸν ἥλιον δῦναι ἄστρον τι ἐσχάτως φανῇ δῦνον.
Ἑκάστου τῶν ἀπλανῶν ἄστρων αἱ ἑῷαι ἐπιτολαί τε καὶ δύσεις αἱ φαινόμεναι ὕστεραί εἰσιν τῶν ἀληθινῶν,
αἱ δὲ ἑσπέριοι ἐπιτολαί τε καὶ δύσεις αἱ φαινόμεναι πρότεραί εἰσι τῶν ἀληθινῶν.

Στον πρώτο «*όρο*» παρατηρούμε για άλλη μια φορά τη χρήση του ρήματος «*λέγεται*», ενώ στους επόμενους το «*ἐστιν*» ή «*εἰσιν*» που, αν και ορισμένες φορές παραλείπονται, ωστόσο, εννοούνται.

2. *Αρχιμήδης*

Ο Αρχιμήδης τοποθετείται λίγο μεταγενέστερα από την εποχή του Ευκλείδη, περίπου από το 287, μέχρι το 212 π.Χ. Ασχολήθηκε τόσο με τα θεωρητικά, όσο και με τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Ας εξετάσουμε μερικά από τα έργα του:

Στο *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* ο Αρχιμήδης απευθύνεται στον Δοσίθεο και του λέει ότι θα του παραθέσει πρώτα τα «*αξιώματα*» και κατόπιν τα «*λαμβανόμενα*»[20]. Πραγματικά, ακολουθεί η έκθεση 6 αξιωμάτων, μεταξύ των οποίων όμως οι 4 προτάσεις είναι ορισμοί. Συγκεκριμένα, ο Αρχιμήδης δηλώνει[21]:

ΑΞΙΩΜΑΤΑ
α. Εἰσί τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.
β. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμήν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν αἱ μεταξὺ τῶν σημεί ων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς γραμμῆς,
ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.
γ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπιφάνειαί τινές εἰσιν πεπερασμέναι, αὐταὶ μὲν οὐκ ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσαι ἐν ἐπιπέδῳ, αἳ τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσιν,
ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.
δ. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς ἐπιφανείας,
ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.
ε. Τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ κορυφὴν ἔχων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαί ρας,

[20] Αρχιμήδους, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου*, έκδ. C. Mugler, *Archimède*, *ό.π.*, τόμ. 1 (1970), 9.20-21.
[21] *ό.π.*, 9.22t-10.21.

τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐπ ιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κώνου.

ς. Ῥόμβον δὲ καλῶ στερεόν, ἐπειδὰν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες τὰς κορυφὰς ἔχωσιν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ὦσι κείμενοι, τὸ ἐξ ἀμφοῖν τοῖν κώνοιν συγκείμενον στερεὸν σχῆμα.

Χαρακτηριστική είναι η εμφάνιση του ρήματος «*καλῶ*» στους ορισμούς. Στο έργο του Αρχιμήδη *Περί ελίκων* παρατηρείται μια σχετικά μεγαλύτερη συνέπεια. Από τις 7 προτάσεις που ακολουθούν τον τίτλο «*όροι*», αν εξαιρεθεί η πρώτη που περιγράφει τον τρόπο σχηματισμού της έλικας, οι υπόλοιπες 6 αποτελούν ορισμούς και επαναλαμβάνουν τον όρο «*καλείσθω*». Οι «*όροι*» του *Περί ελίκων* είναι οι παρακάτω[22]:

ΟΡΟΙ

α. Εἴ κα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ καὶ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος α ὐτᾶς ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ὁσακισοῦν ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατ ὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

β. Καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον περιαγομένας αὐτᾶς ἀρχὰ τᾶ ς ἕλικος.

γ. Ἁ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς, ἀφ' ἃς ἄρξατο ἁ εὐθεῖα περιφέρεσθαι, ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς.

δ. Εὐθεῖα, ἂν μὲν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σαμεῖον τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερ όμενον, πρώτα καλείσθω, ἂν δ' ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαμεῖον διανύσῃ, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν.

ε. Τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γραφ είσας καὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν πρώτα, πρῶτον καλείσθω, τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσας κα ὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας δεύτερον καλείσθω, καὶ τὰ ἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθω.

ς. Καὶ εἴ κα ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμά, τᾶς εὐθείας ταύτας τὰ ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ἅ κα ἁ περιφορὰ γένηται, προαγουμένα καλείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἑπόμενα.

ζ. Ὅ τε γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σαμείῳ, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ, ἅ ἐστιν πρώτα, πρῶτος καλείσθω, ὁ δὲ γραφεὶς κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ τᾷ διπλασίᾳ εὐθείᾳ δεύτερος καλείσθω, καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

[22] Αρχιμήδους, *Περί ελίκων*, έκδ. C. Mugler, *ό.π.*, τόμ. 2 (1971), 31.9t-32.15.

3. *Απολλώνιος ο Περγαίος*

Ο Απολλώνιος ήκμασε περίπου το 210 π.Χ. Επικέντρωσε τις ερευνητικές του προσπάθειες στη μελέτη των κωνικών τομών. Η πραγματεία των *Κωνικών* είναι αφιερωμένη σε αυτό το θέμα. Ύστερα από έναν σύντομο πρόλογο, κατά τον οποίο απευθύνεται στον Εύδημο, ο Απολλώνιος ξεκινά με την έκθεση των «*πρώτων όρων*»[23]:

Ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν,
ὃς οὐκ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ σημείῳ, εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα προσεκβληθῇ,
καὶ μένοντος τοῦ σημείου ἡ εὐθεῖα περιενεχθεῖσα περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι,
τὴν γραφεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας ἐπιφάνειαν,
ἣ σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κειμένων,
ὧν ἑκατέρα εἰς ἄπειρον αὔξεται τῆς γραφούσης εὐθείας εἰς ἄπειρον προσεκβαλλομένης, καλῶ κωνικὴν ἐπιφάνειαν, κορυφὴν δὲ αὐτῆς τὸ μεμενηκὸς σημεῖον,
ἄξονα δὲ τὴν διὰ τοῦ σημείου καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν.
κῶνον δὲ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ κύκλου καὶ τῆς μεταξὺ τῆς τε κορυφῆς καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας κωνικῆς ἐπιφανείας,
κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου τὸ σημεῖον, ὃ καὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ κορυφή,
ἄξονα δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν,
βάσιν δὲ τὸν κύκλον.
τῶν δὲ κώνων ὀρθοὺς μὲν καλῶ τοὺς πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας, σκαληνοὺς δὲ τοὺς μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας.
πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥτις ἐστὶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ,
διάμετρον μὲν καλῶ εὐθεῖαν,
ἥτις ἠγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείας εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ,
κορυφὴν δὲ τῆς γραμμῆς τὸ πέρας τῆς εὐθείας τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ,
τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.
ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ κειμένων διάμετρον καλῶ πλαγίαν μέν,
ἥτις εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο γραμμὰς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν ἑκατέρᾳ τῶν γραμμῶν παρά τινα εὐθεῖαν δίχα τέμνει,
κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῆς διαμέτρου,
ὀρθίαν δέ,
ἥτις κειμένη μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν πάσας τὰς ἀγομένας παραλλήλους εὐθείας εὐθείᾳ τινὶ καὶ ἀπολαμβανομένας μεταξὺ τῶν γραμμῶν δίχα τέμνει,
τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.
συζυγεῖς καλῶ διαμέτρους [δύο]
καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθείας,
ὧν ἑκατέρα διάμετρος οὖσα τὰς τῇ ἑτέρᾳ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ.

[23] Απολλώνιου, *έ.α.*, τόμ. 1 (1891), I, «*όροι πρώτοι*», στ. 1-48.

ἄξονα δὲ καλῶ καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθεῖαν,
ἥτις διάμετρος οὖσα τῆς γραμμῆς ἢ τῶν γραμμῶν πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὰς παραλ λήλους.
συζυγεῖς καλῶ ἄξονας καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθεία ς,
αἵτινες διάμετροι οὖσαι συζυγεῖς πρὸς ὀρθὰς τέμνουσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλ ους.

Παρατηρούμε ότι στη συγκεκριμένη πραγματεία η κατάσταση εμφανίζεται πιο σαφής. Οι προτάσεις που ακολουθούν τον τίτλο «*πρώτοι όροι*» αντιστοιχούν πράγματι σε ορισμούς. Χαρακτηριστική, για άλλη μια φορά, είναι η χρήση του ρήματος «*καλῶ*».

Δ. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η σύντομη εξέταση των μαθηματικών κειμένων που προηγήθηκε προδίδει μια συγκεχυμένη κατάσταση. Κάτω από την επικεφαλίδα των «*όρων*» ή των «*αξιωμάτων*» συναντώνται προτάσεις που, είτε στη μία είτε στην άλλη περίπτωση, δε μπορούν να εκλάβουν τον χαρακτήρα που τους αποδίδεται. Ενώ στους «*όρους*» του *Περί επιτολών και δύσεων* δεν παρουσιάζεται κάποιο πρόβλημα, ανάμεσα στους «*όρους*» του *Περί κινουμένης σφαίρας* ο Αυτόλυκος έχει εισαγάγει μια πρόταση που δεν παραπέμπει σε ορισμό. Το ίδιο είδαμε να κάνει και ο Αρχιμήδης στο *Περί ελίκων*. Ο ίδιος μάλιστα καταχώρησε έναν σημαντικό αριθμό ορισμών, κάτω από τα «*αξιώματα*» του *Περί σφαίρας και κυλίνδρου*.

Η εικόνα που παρουσιάζεται αφήνει να διαφανεί ότι το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε, σχετικά με τη σημασία του τίτλου «*όροι*» των *Οπτικών* και της *Αναθεωρημένης Έκδοσής* της δεν είναι μεμονωμένο, αλλά διέπει κατά έναν ευρύτερο τρόπο τα μαθηματικά κείμενα της συγκεκριμένης περιόδου. Αυτό που είμαστε σε θέση να παρατηρήσουμε αρχικά είναι ότι, ενώ η ορολογία που αφορά στους «*όρους*», στα «*αξιώματα*», στα «*αιτήματα*» είχε προσδιοριστεί και εξηγηθεί αναλυτικά από τον

Αριστοτέλη, εντούτοις φαίνεται να μην έχει καθιερωθεί ακόμη στα συγγράμματα των μαθηματικών που ήκμασαν γύρω στην εποχή του Ευκλείδη.

Ο Αριστοτέλης είχε αναπτύξει τη θεωρία του περί γνώσης στις λογικές πραγματείες που αποτελούν το *Όργανον*. Ιδιαίτερα στα *Αναλυτικά Ύστερα* εκθέτοντας τον τρόπο με τον οποίο αποκτάται η επιστημονική γνώση, υποστήριζε ότι αυτή προκύπτει μέσω της απόδειξης, δηλαδή μέσω μιας μορφής συλλογισμού που προχωρά από προκείμενες. Οι προκείμενες πρέπει να είναι αναπόδεικτες, αλλά γνωστές ως αληθείς. Διακρίνονται σε αξιώματα, σε ορισμούς και σε υποθέσεις. Ο Αριστοτέλης είχε προβάλλει πολύ διεξοδικά τις σημασιολογικές και εννοιολογικές διαστάσεις των συγκεκριμένων όρων επισημαίνοντας παράλληλα τις διαφοροποιήσεις του ενός από τον άλλον.

Συγκεκριμένα, τα αξιώματα είναι κάποιες αρχές, χωρίς τις οποίες ο συλλογισμός είναι αδύνατος. Ο Αριστοτέλης φέρει ως παράδειγμα αξιώματος την πρόταση ότι «*όταν ίσα αφαιρεθούν από ίσα, τότε τα υπόλοιπα είναι ίσα μεταξύ τους*». Τα αξιώματα αποτελούν προτάσεις που είναι κοινές για όλες τις επιστήμες. Από την άλλη μεριά, οι ορισμοί και οι υποθέσεις δεν αποτελούν κοινές προτάσεις μεταξύ των διαφόρων επιστημών. Αναλυτικότερα, οι ορισμοί είναι προτάσεις που δηλώνουν το *τί ἐστιν* ένα συγκεκριμένο πράγμα. Κατά τη διατύπωση ενός ορισμού, για παράδειγμα της ευθείας γραμμής ή του σημείου, παραδεχόμαστε ως αληθές το νόημα των συγκεκριμένων όρων. Κατά τη διατύπωση μιας υπόθεσης, παραδεχόμαστε ως αληθή την ύπαρξη ορισμένων πρώτων πραγμάτων που ορίζονται, για παράδειγμα της ευθείας γραμμής, του σημείου, της μονάδας ή του μεγέθους. Ωστόσο, η απόδειξη της ύπαρξης αυτών των πραγμάτων γίνεται μέσω των κοινών αρχών. Από την άλλη μεριά, το αίτημα είναι οτιδήποτε υποτίθεται και χρησιμοποιείται, χωρίς να έχει αποδειχθεί, αν και αποτελεί αντικείμενο προς απόδειξη.

Η διαφορά μεταξύ της υπόθεσης και του αιτήματος είναι ότι στην πρώτη περίπτωση αυτό που υποτίθεται, για παράδειγμα, από τον δάσκαλο γίνεται πιστευτό από τον μαθητή και αποτελεί, όπως λέει ο Αριστοτέλης, υπόθεση, όχι απόλυτα, αλλά σχετικά με τον συγκεκριμένο μαθητή, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το αίτημα είναι αυτό που είναι κυρίως αντίθετο παρά διαφορετικό προς την άποψη του μαθητή. Παράλληλα, η διαφορά μεταξύ της υπόθεσης και του αξιώματος είναι ότι, αντίθετα με ό,τι συμβαίνει με την υπόθεση, κατά τη διατύπωση του αξιώματος υπάρχει δυνατότητα να μάθουμε κάτι. Τέλος, η υπόθεση δεν πρέπει να συγχέεται με τον ορισμό. Κατά την υπόθεση παραδεχόμαστε ή δεν παραδεχόμαστε την ύπαρξη ενός

πράγματος. Αντίθετα, κατά τον ορισμό θέτουμε το νόημά του, δηλαδή διατυπώνουμε κάποια θέση για το τι σημαίνει αυτό και δεν υποθέτουμε την ύπαρξή του.

Αν λάβουμε υπόψη από τη μια μεριά τη διεξοδική ανάλυση του Αριστοτέλη, από την οποία μόνο ορισμένα σημεία της επισημάναμε παραπάνω, και από την άλλη μεριά τη συγκεχυμένη εικόνα που παρουσιάζουν τα περισσότερα από τα μαθηματικά κείμενα που προαναφέρθηκαν, καταλήγουμε στο ότι τα συμπεράσματα της αριστοτελικής έρευνας, αλλά και οι εννοιολογικές διαφοροποιήσεις που προτάθηκαν εκ μέρους του Αριστοτέλη, δεν κανονικοποιούνται αμέσως από τους μαθηματικούς που τον διαδέχονται. Στις περισσότερες περιπτώσεις μαθηματικών κειμένων παρατηρούμε ότι ο τίτλος που εισάγεται, για να χαρακτηρίσει ένα σύνολο προτάσεων, δεν ανταποκρίνεται απόλυτα, καθώς στο σύνολο αυτό έχουν συμπεριληφθεί διαφόρων ειδών προτάσεις. Δε λείπουν και οι περιπτώσεις μαθηματικών κειμένων, στα οποία, ακόμα και αν δεν εισάγεται κάποιος τίτλος που να χαρακτηρίζει τις προτάσεις που εγκαινιάζουν μια πραγματεία, αυτές παρατίθενται όλες μαζί, χωρίς καμία τυπική διάκριση. Ενδεικτικά, αναφέρουμε το έργο *Περί κωνοειδούς και σφαιροειδούς* του Αρχιμήδη. Εκεί, ο Αρχιμήδης παραθέτει αδιακρίτως σε ένα σώμα διαφόρων ειδών προτάσεις που μπορεί να περιλαμβάνουν εκτός από ορισμούς, και κάποιες άλλες υποθέσεις που δεν ορίζουν, αλλά καθορίζουν τις προϋποθέσεις, κατά τις οποίες, για παράδειγμα, η τομή που θα γίνει σε έναν κώνο, μέσω ενός επιπέδου, θα σχηματίσει είτε τομή κύκλου είτε τομή οξυγωνίου κώνου[24]. Ακόμα και στα *Στοιχεία*, αυτό το μαθηματικό σύγγραμμα που εντυπωσιάζει με την αυστηρότητά του, δε θα περίμενε κανείς να συναντήσει ίχνη τέτοιων συγχύσεων. Ωστόσο, και εκεί υπάρχουν ανάλογα προβλήματα, όπως έχουν αναδείξει οι κατοπινοί μελετητές.

Η εικόνα που παρουσιάζεται μάς οδηγεί στο να συμπεράνουμε ότι οι «*όροι*» των μαθηματικών πραγματειών που προαναφέρθηκαν δε θα πρέπει να ειδωθούν μονοδιάστατα και να θεωρηθούν κατά μονοσήμαντο τρόπο ως ταυτόσημοι με τους «*ορισμούς*». Η προσμονή μας να συναντήσουμε κάτω από τον τίτλο των «*όρων*» αποκλειστικά και μόνο προτάσεις που έχουν τον χαρακτήρα του ορισμού εδραζόταν σε λανθασμένες βάσεις. Ενδεχομένως την εποχή κατά την οποία συγγράφονταν οι παραπάνω πραγματείες οι «*όροι*» να θεωρούνταν ως συνώνυμοι με τους «*ορισμούς*». Και πράγματι αυτό συνέβαινε, όπως άλλωστε φανερώνεται και από το απόσπασμα των *Τοπικών* του Αριστοτέλη που παρατέθηκε στην αρχή. Στο πλαίσιο όμως της

[24] Αρχιμήδους, *Περί κωνοειδούς και σφαιροειδούς,* έκδ. C. Mugler, *έ.α.*, τόμ. 1 (1970), 158.3t-159.2.

εργασίας που πραγματοποιούσαν οι μαθηματικοί, αυτή η συνωνυμία και, κυρίως, η εννοιολογική ταύτιση των δύο λέξεων δεν είχε επέλθει ακόμη ως παγιωμένη, αναγκαστική ρήτρα, στην οποία έπρεπε να προσυπογράψουν. Δεν είχαν υιοθετήσει ακόμα αυτή την αντίληψη της έννοιας των «*όρων*» ούτε την είχαν καθιερώσει στα έργα τους. Οι «*όροι*» που εισήγαγαν στις πραγματείες τους αποτελούσαν για τους ίδιους ευρύτερες έννοιες, στις οποίες είχαν προσδώσει τη δυνατότητα να ενσωματώνουν μέσα σε ένα σύνολο προτάσεων, όχι μόνο ορισμούς, αλλά κάθε είδους «*πρώτες αρχές*», όπως περιγραφές του τρόπου διαμόρφωσης ενός σχήματος, προσδιορισμούς γεωμετρικών ιδιοτήτων, δηλώσεις αναγκαίων συνθηκών που πρέπει να πληρούνται για την εμφάνιση κάποιων γεωμετρικών γνωρισμάτων και άλλα.

Αυτό ακριβώς εκτιμούμε ότι συμβαίνει και με τους «*όρους*» των *Οπτικών* και της *Αναθεωρημένης Έκδοσής* τους. Θεωρούμε ότι αυτοί δε θα πρέπει να αποδίδονται ως «*ορισμοί*» ούτε να ερμηνεύονται αποκλειστικά ως τέτοιοι. Σαφώς οι «*όροι*» μπορούν να συμπεριλάβουν προτάσεις που ορίζουν γεωμετρικές οντότητες, αλλά δε θα πρέπει να αναμένουμε ότι θα περιορίζονται σε αυτές. Η λέξη «*όροι*» των δύο συγκεκριμένων εκδόσεων έχει τοποθετηθεί ως επικεφαλίδα, για να επιτελέσει έναν πολυσήμαντο και, ταυτόχρονα, πολυδιάστατο ρόλο. Μόνο έτσι μπορεί να νομιμοποιηθεί η συνύπαρξη τόσο διαφορετικών προτάσεων που είτε προσδιορίζουν τις θεμελιώδεις έννοιες της γεωμετρικής οπτικής, είτε καθορίζουν γεωμετρικά τις αναγκαίες συνθήκες της οπτικής αντίληψης, είτε προτείνουν τα μεθοδολογικά πλαίσια για την εύρεση του σχετικού μεγέθους και της θέσης των οπτικών εμφανίσεων. Οι «*όροι*» καταφέρνουν να ενοποιήσουν σε ένα σύνολο όλες τις αρχικές προτάσεις, τις «*πρώτες αρχές*» που προσιδιάζουν στην επιστήμη της γεωμετρικής οπτικής. Ο ρόλος τους είναι να υποδηλώσουν ένα ολόκληρο ερευνητικό πλαίσιο, μέσα στο οποίο θα κινηθεί ο συγγραφέας, και όχι απλά να προετοιμάσουν τον αναγνώστη ότι οι προτάσεις που θα διαβάσει στη συνέχεια είναι «*ορισμοί*».

Θεωρούμε ότι η ορολογική, αλλά και εννοιολογική ταύτιση των δύο όρων, η αντιμετώπιση των «*όρων*» ως εναλλακτική έκφραση και υποδήλωση των «*ορισμών*» πρέπει να πραγματοποιήθηκε στο πεδίο των μαθηματικών πολύ αργότερα, με τα πρώτα δείγματα να χρονολογούνται πιθανώς από την εποχή του Απολλώνιου και ύστερα. Ας μην ξεχνάμε ότι στα *Κωνικά* του συναντήσαμε ένα σύνολο αυστηρών ορισμών να συμπεριλαμβάνονται κάτω από τον τίτλο «*πρώτοι όροι*». Ωστόσο, εκτιμούμε ότι η παραπάνω ταύτιση θα πρέπει να επικρατούσε ήδη στη νοοτροπία των μαθηματικών των πρώτων μεταχριστιανικών αιώνων. Για παράδειγμα, ο Ήρων από

την Αλεξάνδρεια, ο οποίος τοποθετείται γύρω στο 60 μ.Χ., στο έργο του *Γεωμετρικά* θέλοντας να ορίσει την επιστήμη της γεωμετρίας αναφέρει ότι θα πει τον «*όρον*» της: «*Τὰς ἀρχὰς τῆς γεωμετρίας, ὅθεν τυγχάνουσιν, ἔστιν ἐκ φιλοσοφίας δεῖξαι. ἵνα μὴ ἐξαγώνιοι γενώμεθα, εὔλογόν ἐστι τὸν ὅρον αὐτῆς εἰπεῖν. ἔστιν οὖν ἡ γεωμετρία ἐπιστήμη σχημάτων καὶ μεγεθῶν καὶ τῶν περὶ ταῦτα παθῶν, ὁ δὲ σκοπὸς αὐτῆς περὶ τούτων διαλαμβάνειν, ὁ δὲ τρόπος τῆς διδασκαλίας ἐστὶ συνθετικός...*»[25], ενώ ο ίδιος συγγραφέας έχει αφιερώσει μια ολόκληρη πραγματεία για τους «*όρους των ονομάτων της γεωμετρίας*». Σε αυτό το έργο ο Ήρων παραθέτει ορισμούς για το σημείο, τη γραμμή, τα διάφορα είδη γραμμών και άλλα πολλά. Μέσα στο πλαίσιο αυτού του συγγράμματος, ο «*όρος*» θεωρείται και χρησιμοποιείται από τον Ήρωνα ως ταυτόσημος με τον «*ορισμό*». Στο ίδιο έργο ο Ήρων λέει χαρακτηριστικά ότι «*τὸν δὲ τῆς εὐθείας ὁρισμὸν ὁ μὲν Εὐκλείδης τοῦτον ἀποδέδωκεν*»[26]. Μια ανάλογη αντιμετώπιση των «*όρων*» συναντάμε και στα *Βελοποιϊκά*, όπου, για να ορίσει τη βελοποιϊκή δηλώνει ότι «*Ὅρος δὲ τῆς βελοποιικῆς ἐστι τὸ μακρὰν ἀποστέλλειν τὸ βέλος ἐπὶ τὸν δοθέν τα σκοπόν, εὔτονον τὴν πληγὴν ἔχον, περὶ οὗ δεῖ πᾶσαν τὴν φροντίδα ποιῆσαι <ἐπὶ> τοῖς εἰρημένοις ὀργάνοις*»[27].

Επιπλέον, ο Σερήνος από την Αντινόεια της Αιγύπτου, ο οποίος χρονολογείται γύρω στον 2ο ή 3ο αιώνα μ.Χ., στο μαθηματικό του σύγγραμμα *Περί κυλίνδρου τομής* παραθέτει κάποιους από τους «*πρώτους όρους*» του Απολλώνιου. Το στοιχείο όμως που προκαλεί ενδιαφέρον είναι η δήλωσή του ότι οι προτάσεις αυτές έχουν «*οριστεί*» από τον Απολλώνιο. Συγκεκριμένα, λέει ότι:

«*ὁριστέον δὲ κατὰ Ἀπολλώνιον καὶ τάδε·*
πάσης καμπύλης γραμμῆς ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ οὔσης διάμετρος καλείσθω εὐθεῖά τις,
ἥτις ἠγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείας εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ,

[25] Ήρωνος Αλεξανδρινού, *Γεωμετρικά*, έκδ. J.L. Heiberg, *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, Λειψία: Teubner 1903, τόμ. 4, κεφ. 1, 1.23-29.
[26] Ήρωνος Αλεξανδρινού, *Ορισμοί*, τόμ. 4, 136.56.6-7.
[27] Ήρωνος Αλεξανδρινού, *Βελοποιϊκά*, έκδ. H. Diels and E. Schramm, *Herons Belopoiika*, Abhandlungen der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften, Βερολίνο: Reimer 1918, 3.12-17.

κορυφὴ δὲ τῆς γραμμῆς τὸ πέρας τῆς εὐθείας τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ,
τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.
συζυγεῖς δὲ διάμετροι καλείσθωσαν,
αἵτινες ἀπὸ τῆς γραμμῆς τεταγμένως ἀχθεῖσαι ἐπὶ τὰς συζυγεῖς διαμέτρους ὁμοίως αὐτὰς τέμνουσι...»

Καθώς μεταφερόμαστε στην εποχή της ύστερης Αρχαιότητας, η ταύτιση της έννοιας του «*όρου*» με αυτή του «*ορισμού*» γίνεται όλο και πιο συχνή και θα λέγαμε ότι καθιερώνεται πια σε πλήθος έργων. Μια ματιά σε συγγράμματα μαθηματικού ενδιαφέροντος της συγκεκριμένης περιόδου, όπως στη *Μαθηματική Συναγωγή* του Πάππου[28], στα *Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη* από τον Πρόκλο[29], στα *Σχόλια στην Αριθμητική εισαγωγή του Νικόμαχου* από τον Ασκληπιό[30] και σε άλλα, αναδεικνύει ότι οι «*όροι*» αποτελούν πλέον ορολογικά, αλλά και εννοιολογικά, ισοδύναμες εκφράσεις των «*ορισμών*».

---

[28] Αναφέρουμε ενδεικτικά το εξής απόσπασμα: «*τὴν δὲ διαφορὰν...ὅτι βέλτιον ᾔδεσαν οἱ ἀρχαῖοι, δῆλον ἐκ τῶν ὅρων*». Βλ. Πάππου, *Μαθηματική Συναγωγή*, τόμ. 3, VII, 650.14-16.

[29] Για παράδειγμα, ο Πρόκλος αναφερόμενος στον τέταρτο «*όρο*» του βιβλίου Ι των *Στοιχείων*, τον ονομάζει «*ορισμό*»: «*τὸν δὲ τῆς εὐθείας ὁρισμὸν ὁ μὲν Εὐκλείδης τοῦτον ἀποδέδωκεν, ὃν καὶ παρεθέμεθα, καὶ δηλοῖ διὰ τούτου μόνην τὴν εὐθεῖαν ἴσον κατέχειν διάστημα τῷ μεταξὺ τῶν ἐπ᾽ αὐτῆς σημείων*». Βλ. Πρόκλου, *έ.α.*, 109 6-9.

[30] Για παράδειγμα, ο Ασκληπιός αναφέρει: «*ἐντεῦθεν τοίνυν ἐλέγχεται ὁ Εὐκλείδης κακῶς ὁρισάμενος ἐν τῷ ἑβδόμῳ βιβλίῳ τὸν ἀρτιάκις ἄρτιον ἀριθμόν...*». Βλ. Ασκληπιού, *Σχόλια στην Αριθμητική εισαγωγή του Νικόμαχου*, έκδ. L. Tarán, *Asclepius of Tralles. Commentary to Nicomachus' introduction to arithmetic*, *Transactions of the American Philosophical Society*, n.s. 59.4, Φιλαδέλφεια: American Philosophical Society 1969, κεφ. 1, 61. 4-6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ
Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΟΨΕΩΝ

Α. ΤΑ ΤΡΙΑ ΒΑΣΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΟΡΑΣΗΣ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΟΙ ΚΥΡΙΟΤΕΡΟΙ ΕΚΠΡΟΣΩΠΟΙ ΤΟΥΣ

Μια από τις σημαντικότερες αντιλήψεις της Αρχαιότητας που κατάφερε να καθορίσει για αιώνες τη διαμόρφωση των επιστημονικών θεωριών ήταν ότι ένα υλικό σώμα δε μπορεί να επιδράσει εξ αποστάσεως σε ένα άλλο. Θεωρούνταν ότι ένα βέλος που χάνει την επαφή του με τη χορδή του τόξου θα έπρεπε να πέφτει αμέσως στο έδαφος. Ωστόσο, οι παρατηρήσεις έδειχναν ότι το βέλος όχι μόνο δεν πέφτει, αλλά, μόλις χάσει την επαφή του με τη χορδή, κινείται συνεχώς διανύοντας μια ορισμένη απόσταση. Η ανωμαλία αυτή εξηγήθηκε με την υπόθεση της ύπαρξης ενός φυσικού μέσου που παρεμβάλλεται, ανάμεσα στο βέλος και στη χορδή. Υποστηρίχτηκε λοιπόν ότι η αιτία που αναγκάζει το βέλος να κινείται συνεχώς, οφείλεται στη δράση του αέρα, ο οποίος σπεύδοντας από το μπροστινό προς το πίσω μέρος του τόξου, του προσδίδει ώθηση και, ταυτόχρονα, αποτρέπει τη δημιουργία του κενού.

Η έννοια του φυσικού μέσου επινοήθηκε, ώστε να αποτελέσει την κύρια εξηγητική βάση για καταστάσεις, στις οποίες εμφανιζόταν αυτό που σήμερα ονομάζεται ως «*δράση από απόσταση*». Παρόλο που τέτοιες καταστάσεις θεωρούνται στις μέρες μας ως συνήθη φαινόμενα που δε δημιουργούν καμία εντύπωση, κατά την εποχή της Αρχαιότητας τα φαινόμενα της δράσης από απόσταση δεν ήταν δυνατόν να συμβαίνουν και, κυρίως, ο τρόπος αντιμετώπισής τους δεν ήταν καθόλου προφανής. Όπως θα περίμενε κανείς, η ανάγκη για την ύπαρξη ενός φυσικού μέσου θα εκδηλωνόταν σε μεγαλύτερο βαθμό, κατά τη μελέτη των προβλημάτων της κίνησης. Πράγματι, οι αρχαίες επιστημονικές θεωρίες που διατυπώθηκαν στο πλαίσιο της μηχανικής ή της αστρονομίας διέπονται από αυτή την αντίληψη. Αυτό που ενδεχομένως δύσκολα θα περίμενε κανείς είναι να συναντήσει την έννοια του φυσικού μέσου, ως θεμελιώδη συνιστώσα για τη διατύπωση των επιστημονικών θεωριών της όρασης.

Όλες οι αρχαίες θεωρίες της όρασης ξεκινούσαν από ορισμένες κοινές παραδοχές. Συγκεκριμένα, ήταν γενικά αποδεκτό ότι η όραση δεν πραγματοποιείται, όταν ο οφθαλμός βρίσκεται σε άμεση επαφή με το παρατηρούμενο αντικείμενο. Από την άλλη μεριά, η όραση θεωρούνταν επίσης αδύνατη, στην περίπτωση που ο οφθαλμός βρίσκεται απομακρυσμένος από το αντικείμενο, χωρίς να παρεμβάλλεται ανάμεσά τους ένα φυσικό αίτιο. Κρίθηκε λοιπόν απαραίτητη η επινόηση ενός

φυσικού μέσου που να αποτρέπει την άμεση επαφή των δύο σωμάτων και, αντίθετα, να επιτρέπει την απαραίτητη απομάκρυνσή τους. Από το σημείο αυτό ξεκινούσαν οι διαφοροποιήσεις, εφόσον κάθε θεωρία όρασης μετέφραζε την παραπάνω ανάγκη με τους δικούς της όρους. Τα μικροσκοπικά σωμάτια, τα πνεύματα, οι ευγενείς φωτιές και οι φωτεινής φύσεως ακτίνες αποτελούν μερικά μόνο είδη μέσων που επιστρατεύτηκαν από τους θεωρητικούς της όρασης, για να ικανοποιήσουν τον σκοπό αυτό. Παράλληλα με την επιλογή του μέσου, κάθε θεωρία όρασης υιοθετούσε το δικό της μοντέλο που αφορούσε στον τρόπο λειτουργίας του μέσου. Συγκεκριμένα, στην Αρχαιότητα είχαν προταθεί τρία είδη μοντέλων, το μοντέλο της εισπομπής, το μοντέλο της εκπομπής και ένα τρίτο, συνδυαστικό μοντέλο[1].

Σύμφωνα με το μοντέλο της εισπομπής, το φυσικό μέσο εκπέμπεται από τα αντικείμενα και εισχωρεί στον οφθαλμό. Σε αυτή την κατηγορία ανήκει η θεωρία όρασης του Επίκουρου. Ο Επίκουρος πρέσβευε ότι από την επιφάνεια του αντικειμένου εκπέμπονται σωματίδια που σπεύδουν να καταλάβουν τη θέση και τη διάταξη που είχαν, πριν από τη στιγμή της εκπομπής, όταν αποτελούσαν μέρος του φυσικού αντικειμένου. Τα σωματίδια αυτά αναπαριστούν τα είδωλα των αντικειμένων, δηλαδή την εικόνα τους, την οποία μεταφέρουν στον οφθαλμό[2]. Η θεωρία του Επίκουρου ήταν σαφώς επηρεασμένη από τη θεωρία όρασης του Δημόκριτου. Το κυριότερο σημείο διαφοροποίησης ήταν ότι ο Δημόκριτος έδινε ιδιαίτερη βαρύτητα στη συμβολή του αέρα που παρεμβάλλεται μεταξύ του οφθαλμού και του αντικειμένου. Ο αέρας συμπιέζεται, ανάμεσα στα δύο σώματα, με αποτέλεσμα το είδωλο που προέρχεται από το αντικείμενο, να τυπώνεται (*τυποῦσθαι*) ή, αλλιώς, να εμφαίνεται (*ἔμφασις*) στον οφθαλμό[3]. Η μεσολάβηση του αέρα για την πραγματοποίηση της όρασης θεωρούνταν επιτακτική και από τον Αριστοτέλη. Σύμφωνα με εκείνον, ο αέρας αποτελεί ένα διαφανές μέσο

---

[1] Ο όρος «*εισπομπή*» που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω ως αντίθετο του όρου «*εκπομπή*», παρόλο που δε χρησιμοποιείται ευρέως στη Νεοελληνική, ωστόσο, εμφανίζεται σε χωρία αρχαίων κειμένων και συχνά εκφράζει τη λήψη αισθητηριακών ερεθισμάτων ή, πιο συγκεκριμένα, τη λήψη κάποιου είδους απορροής από τον οφθαλμό. Για παράδειγμα, ο Ιωάννης Φιλόπονος αναφέρει στα *Σχόλια στο Περί ψυχής του Αριστοτέλη* ότι «*οὐδὲ γὰρ ὅσα συμβαίνει ἐπὶ τῶν ὄψεων, ἀνάγκη καὶ ἐν ταῖς λοιπαῖς συμβαίνειν, οὐδ' ὅσα ἐπὶ ἀκοῆς καὶ ὀσφρήσεως, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. οἷον ὅτι ἡ μὲν ὄψις κατ' ἐκπομπὴν αἰσθάνεται, αἱ δὲ λοιπαὶ κατὰ εἰσπομπήν, καὶ οὐ διὰ ταύτας καὶ ἡ ὄψις κατὰ εἰσπομπήν*» (15.416.26-30). Επίσης, ο όρος εμφανίζεται στο *Opuscula logica, physica, allegorica, alia* του Μιχαήλ Ψελλού: «*Εἰ κατ' εἰσπομπὴν βλέπομεν τῶν εἰδῶν τῶν ὁρωμένων εἰσερχομένων τῇ ὄψει, τὸ διάστημα τοῦ μεταξὺ ἀέρος πῶς βλέπομεν;*» (52.1-2)

[2] Διογένη Λαέρτιου, *Βίοι Φιλοσόφων*, 10.48-49.

[3] Θεόφραστου, *Περί αισθήσεων*, 50. 1-5.

που τίθεται σε κίνηση από το χρώμα του παρατηρούμενου αντικειμένου και ενεργεί πάνω στον υγρό οφθαλμό. Για τον Αριστοτέλη, η όραση είναι δυνατή, μέσω της διαφάνειας, η οποία συνιστά μια φύση ή μια δύναμη που εντοπίζεται σε κάθε σώμα. Προχωρώντας τον συλλογισμό του ο Αριστοτέλης εξέλαβε το φως ως μια κατάσταση της διαφάνειας, η οποία είναι αποτέλεσμα της παρουσίας της φωτιάς ή ενός άλλου φωτεινού αντικειμένου. Συγκεκριμένα, ένα δυνάμει διαφανές μέσο φτάνει σε κατάσταση ενεργούς διαφάνειας, όταν φωτισθεί από κάποιο άλλο φωτεινό σώμα, όπως τον ήλιο. Θεωρούσε το φως ως αυτή την ενεργή κατάσταση του μέσου που δεν απαιτεί καθόλου χρόνο για να διαδοθεί, αφού το μέσο μπορεί να μεταβληθεί από τη δυνάμει στην ενεργεία διαφάνεια στιγμιαίως. Ο ρόλος του χρώματος που επικαλύπτει την επιφάνεια των αντικειμένων είναι να προκαλέσει περαιτέρω αλλαγές στην ενεργεία διαφάνεια. Το χρώμα μεταβάλλει το διαφανές μέσο, όπως τον αέρα, και αυτός όντας συνεχής ενεργεί στο αισθητήριο όργανο[4].

Σύμφωνα με το μοντέλο της εκπομπής, το φυσικό μέσο εκπέμπεται από τον οφθαλμό και προσπίπτει στα αντικείμενα. Εδώ συναντάται η θεωρία του Εμπεδοκλή που υποστηρίζει ότι ο οφθαλμός, σαν ένα αναμμένο φανάρι, είναι προικισμένος με μια εσωτερική φλόγα που εκπέμπεται και, αφού προσπέσει στα αντικείμενα, τα καθιστά ορατά[5]. Σε αντίθεση με το μοντέλο της εισπομπής, το μοντέλο της εκπομπής, το οποίο έχει τις ρίζες του στους Πυθαγορείους, αναθέτει τον πρωταγωνιστικό ρόλο στον οφθαλμό. Στην κατηγορία αυτή θα μπορούσε να συγκαταλεχθεί και η ακτινική θεωρία των μαθηματικών, όπως εκείνη του Ευκλείδη και του Πτολεμαίου. Πάντως, ιδιαίτερα για την περίπτωση του Ευκλείδη, η συγκεκριμένη κατηγοριοποίηση γίνεται με ορισμένες επιφυλάξεις. Ο Ευκλείδης εξηγούσε την όραση, μέσω της υπόθεσης ότι ευθείες γραμμές που πηγάζουν από τον οφθαλμό, οι οποίες ονομάζονταν «*οπτικές ακτίνες*» ή «*όψεις*», προσπίπτουν στα αντικείμενα. Ωστόσο, ο Ευκλείδης δεν είχε προσδώσει φυσική υπόσταση στις οπτικές ακτίνες. Πουθενά στο έργο του δεν αναφέρει λεπτομέρειες για τη φύση τους. Επίσης, δε διευκρίνιζε τι γίνεται στη συνέχεια, όταν δηλαδή οι οπτικές εντυπώσεις επιστρέφουν στον οφθαλμό, ούτε ανέφερε πουθενά το φως και τα χρώματα. Η ύψιστη προτεραιότητα του Ευκλείδη ήταν η περιγραφή του γεωμετρικού και όχι του φυσικού πλαισίου της όρασης. Γι' αυτό και το μοντέλο που πρότεινε ήταν αυστηρά περιορισμένο στον καθορισμό του τρόπου, με τον οποίο γίνονται αντιληπτά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των αντικειμένων, όπως το μέγεθος και η θέση τους. Δεν εξηγούσε τον μηχανισμό

[4] Αριστοτέλους, *Περί ψυχής*, 418b28-419b3,και *Περί αισθήσεως και αισθητών*, 447a1-11.
[5] Αριστοτέλους, *Περί αισθήσεως και αισθητών*, 437b23-438a5.

αντίληψης των χρωμάτων τους ούτε ποιος είναι ο ρόλος του φωτός για την όραση. Αντίθετα, ο Πτολεμαίος δεν περιορίστηκε στον γεωμετρικό χαρακτήρα της όρασης, αλλά εξέτασε όλους τους παράγοντες που εμπλέκονται σε αυτή συμπεριλαμβανομένων και των φυσικών. Παρόλο που το πρώτο βιβλίο των *Οπτικών*, στο οποίο περιέγραφε τη φυσική διάσταση της όρασης, δε διασώζεται, ωστόσο, από τα υπόλοιπα βιβλία του έργου του γίνεται σαφές ότι ο Πτολεμαίος είχε προσδώσει στις οπτικές ακτίνες μια φωτεινή φύση και, επιπλέον, είχε αναγνωρίσει τον σημαντικό ρόλο του φωτός και των χρωμάτων θεωρώντας τα ως βασικές προϋποθέσεις για την πραγματοποίηση της όρασης[6].

Το τρίτο μοντέλο όρασης, αποτελούσε συνδυασμό των δύο προηγούμενων, δηλαδή υπέθετε τη σύμπραξη της εισπομπής του μέσου από τα αντικείμενα με την εκπομπή του μέσου από τον οφθαλμό. Στην κατηγορία αυτή ανήκει η θεωρία του Πλάτωνα, αλλά και η θεωρία των Στωικών φιλοσόφων. Σύμφωνα με την πλατωνική αντίληψη, η όραση πραγματοποιείται με την αρωγή δύο απορροών. Συγκεκριμένα, το ρεύμα που πηγάζει από τον οφθαλμό και που αποτελεί ένα είδος ευγενούς φωτιάς συνενώνεται με το εξωτερικό φως της ημέρας. Η σύμπραξη του οπτικού ρεύματος με το φως έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός ομογενούς σώματος στην ευθεία των ματιών, οπουδήποτε και αν βρίσκεται το εξωτερικό αντικείμενο. Αυτό το ομογενές σώμα λειτουργεί ως υλικό μέσο, ανάμεσα στους οφθαλμούς και στο ορατό αντικείμενο. Ωστόσο, ο Πλάτων θεωρούσε εξίσου σημαντική και την εκπομπή σωματιδίων από τα αντικείμενα που, εξαιτίας των διαφόρων μεγεθών τους, παράγουν διαφορετικές κινήσεις που μεταφέρονται στην ψυχή και προκαλούν την αντίληψη των διαφόρων χρωμάτων[7]. Όπως ο Πλάτων, έτσι και οι Στωικοί, υπέθεταν την αλληλεπίδραση της οφθαλμικής απορροής με το εξωτερικό φως. Όμως, κατά τους Στωικούς, η οφθαλμική απορροή ή το «*πνεύμα*», το οποίο ήταν μείγμα αέρα και φωτιάς, ξεκινώντας από την έδρα της συνείδησης, το «*ηγεμονικόν*», δεν κατευθυνόταν προς τα αντικείμενα, αλλά σε μια περιοχή, ανάμεσα στην επιφάνεια του ματιού και στον αέρα που την περιβάλλει. Το πνεύμα έθετε σε κατάσταση πίεσης και έντασης τον αέρα. Μέσω του φωτισμού του πεπιεσμένου αέρα από το εξωτερικό φως, ο αέρας μετατρεπόταν σε όργανο της ψυχής, δηλαδή σε ένα είδος προέκτασης του ματιού, ικανό να αντιλαμβάνεται οπτικώς τα αντικείμενα, όπως ακριβώς γίνονται αισθητά τα σώματα, μέσω ενός ραβδιού[8].

---

[6] Πτολεμαίου, *Οπτικά*, έκδ. A. Lejeune (1989), II, 12.14-19, 16.5-10, 17.3-10, 18.9-18.
[7] Πλάτωνος, *Τίμαιος*, 45b-c, 67d-e.
[8] Γαληνού, *De placitis Hippocratis et Platonis*, VII, 5, 6-7 και VII, 7

Ύστερα από τη σύντομη παρουσίαση των κυριότερων θεωριών όρασης που προτάθηκαν στην Αρχαιότητα, θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην αρχή της ευθύγραμμης διάδοσης των οπτικών ακτίνων ή, αλλιώς, των όψεων[9]. Η αρχή αυτή δε μπορεί να ειδωθεί ξέχωρα από την αρχαία αντίληψη της ευθύγραμμης φύσης της όρασης. Γι' αυτό, θεωρούμε αρχικά απαραίτητο τον εντοπισμό της παραπάνω αντίληψης στους αρχαίους συγγραφείς, ώστε να εξακριβώσουμε, από ιστορική σκοπιά, την πρωταρχική θέση και τη μεγάλη σημασία που είχε αποκτήσει, για τη μελέτη των φαινομένων της όρασης. Κατόπιν, θα εξετάσουμε την αρχή της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων στα *Οπτικά* και στην *Αναθεωρημένη Έκδοσή* τους, προκειμένου να διαπιστώσουμε πώς η αρχή αυτή μετατράπηκε στα χέρια του Ευκλείδη σε κύριο μεθοδολογικό-αναλυτικό εργαλείο, για την περιγραφή των οπτικών εμφανίσεων.

Β. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΟΨΕΩΝ

1. Η ευθύγραμμη φύση της όρασης

Η ευθύγραμμη φύση της όρασης αποτελεί μια αντίληψη που ριζώνεται βαθιά σε όλη τη διάρκεια της Αρχαιότητας και συνεχίζει να κάνει την εμφάνισή της ακόμα και σε συγγραφείς των βυζαντινών χρόνων. Προκαλεί εντύπωση το γεγονός ότι η άποψη αυτή, εκτός από το ότι καταφέρνει να διατηρείται ζώσα και αλώβητη κατά ένα τόσο μεγάλο χρονικό διάστημα, φαίνεται ότι ήταν ευρέως διαδεδομένη και κοινή σε ανθρώπους κάθε ειδικότητας. Μαθηματικοί, αστρονόμοι, φιλόσοφοι, ιατροί, λεξικογράφοι, ακόμα και θεολόγοι της μεταχριστιανικής εποχής, κάθε φορά που τύχαινε να αναφέρονται στην όραση και στα φαινόμενα που τη συνοδεύουν, δεν παρέλειπαν να τονίζουν τον ευθύγραμμο τρόπο, κατά τον οποίο αυτή διενεργείται. Αλλά και για όσους ασκούσαν επιστημονικό έργο στον κλάδο της οπτικής έχοντας ως στόχο τους τη διατύπωση οπτικών θεωριών, η ευθύγραμμη φύση της όρασης αποτελούσε μια αδιαπραγμάτευτη αντίληψη. Όποιο μοντέλο όρασης και αν υιοθετούσαν, όλοι ξεκινούσαν από την ίδια αφετηρία. Κατανοούμε λοιπόν ότι η ευθύγραμμη φύση της όρασης συνιστούσε μια θεωρητική επιταγή, στην οποία προσυπέγραφαν άνθρωποι κάθε εποχής και που προέρχονταν από διαφορετικούς χώρους του επιστητού. Όποτε το έκριναν απαραίτητο, οι άνθρωποι αυτοί έσπευδαν να τη διακηρύττουν με κάθε δυνατό τρόπο.

[9] Βέβαια, όπως θα διαπιστώσουμε και από την ανάγνωση των αρχαίων χωρίων, η αρχή αυτή δε συναντάται στην Αρχαιότητα με αυτόν τον τρόπο διατύπωσης, ο οποίος χρησιμοποιείται εδώ για λόγους κατανόησης. Στα αρχαία συγγράμματα διατυπώνεται με παρόμοιες εκφράσεις που νοηματικά εκφράζουν την έννοια της ευθύγραμμης φοράς -διάδοσης- των όψεων.

Έτσι, ο Πλάτων περιέγραφε στον *Τίμαιο* ότι, όταν το ρεύμα της όρασής μας συνενωθεί με το εξωτερικό φως της ημέρας, τότε δημιουργείται ένα ομογενές σώμα «*κατὰ τὴν τῶν ὀμμάτων εὐθυωρίαν*», δηλαδή στην ευθεία των ματιών[10]. Ο Αριστοτέλης ανέφερε στο *Περί ενυπνίων* ότι, αν στρέψουμε το βλέμμα μας προς τον ήλιο ή κάποιο άλλο λαμπερό σώμα, τότε οι παρατηρήσεις μας φαίνονται «*κατ' εὐθυωρίαν, ᾗ συμβαίνει τὴν ὄψιν ὁρᾶν*»[11]. Αυτό συμβαίνει γιατί, όπως εξηγούσε και στο *Περί ζώων μορίων*, «*...ἡ δ' ὄψις εἰς τὸ ἔμπροσθεν* (ενν. *ὁρᾷ*) (*ὁρᾷ γὰρ κατ' εὐθυωρίαν, ἡ δὲ κίνησις εἰς τὸ ἔμπροσθεν, προορᾶν δὲ δεῖ ἐφ' ὃ ἡ κίνησις)*»[12]. Μέσω του Θέωνος του Αλεξανδρινού, πληροφορούμαστε ότι ο Αρχιμήδης είχε υποστηρίξει στο *Περί Κατοπτρικών* ότι «*ἡ ὄψις κατ' εὐθείας γραμμὰς ὁρᾶν*»[13], κάτι που ο Ευκλείδης διατύπωνε στα *Κατοπτρικά* του ως «*Τὰ ὁρώμενα ἅπαντα κατ' εὐθείας ὁρᾶσθαι*»[14]. Ο Ίππαρχος δήλωνε με τη σειρά του στα *Σχόλια στα Φαινόμενα του Άρατου και του Ευδόξου* ότι «*ἥ βολὴ τοῦ ὀφθαλμοῦ εὐθεῖά ἐστι*»[15], ενώ ο Γαληνός εκτιμούσε στο *Περί χρείας μορίων* ότι «*εἰ δὲ καὶ τοῦτ' ἤδη νενόηκας, οὐκ ἄν σοι δόξειαν ἀλόγως οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων ἀποφήνασθαι κατ' εὐθείας γραμμὰς ὁρᾶσθαι τὰ ὁρώμενα*»[16]. Ο Θέων ο Σμυρναίος (2ος μ.Χ. αιώνας) διατύπωνε στο *Περί των κατά μαθηματικόν χρησίμων εις την του Πλάτωνος ανάγνωσιν* ότι «*ἐπεὶ τοίνυν φύσει μὲν ἐπ' εὐθείας ὁρῶμεν,...*»[17], καθώς, λίγο αργότερα, ο Νεμέσιος (περ. 400 μ.Χ.), επίσκοπος της Εμέσης, εξέφραζε ότι « *Ὁρᾷ δὲ ἡ ὄψις κατ' εὐθείας γραμμάς...*»[18]. Αλλά και σε μεταγενέστερους αιώνες, η άποψη αυτή επισημαίνεται από τον Ιωάννη Δαμασκηνό (7ος μ.Χ. αιώνας) ως «*Χρὴ γινώσκειν, ὅτι ἡ μὲν ὄψις κατ' εὐθείας γραμμὰς ὁρᾷ...*»[19], αλλά και από τον ιατρό Θεόφιλο Πρωτοσπαθάριο (9ος μ.Χ. αιώνας), ο οποίος έφερε ακριβώς την

---

[10] Πλάτωνος, *Τίμαιος*, 45c. 2-5.
[11] Αριστοτέλους, *Περί ενυπνίων*, έκδ. W.D. Ross, *Aristotle: Parva naturalia*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1955, 459b. 13-15.
[12] Αριστοτέλους, *Περί ζώων μερών*, έκδ. P. Louis, *Aristote: Les parties des animaux*, Παρίσι: Les Belles Lettres 1956, 656b 29-31.
[13] Θέωνος Αλεξανδρινού, *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου*, 349.7-8.
[14] Ευκλείδου, *Κατοπτρικά*, «*όρος*» 2.
[15] Ίππαρχου, *Σχόλια στα Φαινόμενα του Αράτου και του Ευδόξου*, έκδ. C. Manitius, *Hipparchi in Arati et Eudoxi phaenomena commentariorum libri iii*, Λειψία: Teubner 1894, 1, 9.12.1.
[16] Γαληνού, *Περί χρείας μορίων*, 3.817. 7-9.
[17] Θέωνος Σμυρναίου, *Περί των κατά μαθηματικόν χρησίμων εις την του Πλάτωνος ανάγνωσιν*, έκδ. E. Hiller, *Theonis Smyrnaei philosophi Platonici expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*, Λειψία: Teubner 1878, 192.24.
[18] Νεμέσιου, *Περί φύσεως ανθρώπου*, 7. 67.
[19] Ιωάννη Δαμασκηνού, *Expositio fidei*, έκδ. B. Kotter, *Die Schriften des Johannes von Damaskos*, τόμ. 2, Patristische Texte und Studien 12, Βερολίνο: De Gruyter 1973), 32. 57.

ίδια έκφραση με τον Γαληνό, «*εἰ δὲ καὶ τοῦτ' ἤδη νενόηκας, οὐκ ἄν σοι δόξειαν ἀλόγως οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων ἀποφήνασθαι κατ' εὐθείας γραμμὰς ὁρᾶσθαι τὰ ὁρώμενα*»[20]. Παρόμοια δήλωση έκανε και ο Μιχαήλ Ψελλός (11ος μ.Χ. αιώνας) λέγοντας ότι «*ὁρᾷ ἡ ὄψις κατ' εὐθείας γραμμάς*»[21]. Τέλος, ο λεξικογράφος του 12ου αιώνα μ.Χ., Ιωάννης Ζοναράς, ανέφερε στο λήμμα «*αίσθησις*», ότι «*ἡ μὲν ὄψις κατ' εὐθείας γραμμὰς ὁρᾷ*»[22].

Αυτή η άκρως διαδεδομένη αντίληψη για την ευθύγραμμη φύση της όρασης, η οποία δηλωνόταν και με χαρακτηριστικές λέξεις, όπως «*ευθυωρία*» ή «*ιθυφάνεια*»[23], σχετιζόταν και, τις περισσότερες φορές, αποτελούσε άμεσο επακόλουθο μιας άλλης κοινής αντίληψης: της ευθύγραμμης φύσης του φωτός. Στο πλαίσιο της ακτινικής θεωρίας που κατά κύριο λόγο μας ενδιαφέρει, οι κύριοι παράγοντες για την πραγματοποίηση της όρασης είναι οι οπτικές ακτίνες. Πολύ συχνά, οι οπτικές ακτίνες θεωρούνταν ως ανάλογες με τις φωτεινές ακτίνες, δηλαδή τις ακτίνες που πηγάζουν από τα φωτεινά τεχνητά μέσα, όπως τους λύχνους, ή από τα λαμπερά ουράνια σώματα, όπως τον ήλιο. Εξαιτίας αυτής της αναλογίας, οι οπτικές ακτίνες προικίζονταν με τη φύση και, συνεπώς, με τις ιδιότητες του φωτός. Για παράδειγμα, ο Γεμίνος υποστήριζε αρχικά ότι οι όψεις που πηγάζουν από τον οφθαλμό φέρονται κατά ευθείες γραμμές και συνέχιζε τον συλλογισμό του λέγοντας ότι τα αντικείμενα που βλέπουμε διαμέσω του αέρα ή του αιθέρα, τα βλέπουμε κατά ευθείες γραμμές, επειδή «*φέρεσθαι γὰρ πᾶν φῶς κατ' εὐθείας γραμμάς*»[24]. Επίσης, ο Πτολεμαίος ανέφερε ότι στο χαμένο πρώτο βιβλίο των *Οπτικών* είχε εκθέσει όλα τα πράγματα, μέσω των οποίων είναι να δυνατόν να συγκριθεί η οπτική απορροή με το φως, πώς αυτά τα δύο συνδέονται και πώς αφομοιώνονται. Στο δεύτερο βιβλίο του δήλωνε χαρακτηριστικά ότι η οπτική απορροή αποδέχεται

---

[20] Θεόφιλου Πρωτοσπαθάριου, *Περί της του ανθρώπου κατασκευής*, έκδ. G.A. Greenhill, *Theophili Protospatharii de corporis humani fabrica libri v*, Οξφόρδη: Oxford University Press 1842, 4.24. 30-33.

[21] Μιχαήλ Ψελλού, *Opuscula logica, physica, allegorica, alia*, έκδ. J.M. Duffy, *Michaelis Pselli philosophica minora*, Λειψία: Teubner 1992, 27. 4.

[22] Ιωάννη Ζοναρά, *Συναγωγή λέξεων*, έκδ. A.H. Tittmann, *Iohannis Zonarae lexicon ex tribus codicibus manuscriptis*, 2 τόμ., Λειψία: Crusius 1808, 85.2-3.

[23] Για τη χρήση του όρου «*ευθυωρία*», παραπέμπουμε στα χωρία του Πλάτωνος και του Αριστοτέλη που αναφέρθηκαν στην αρχή της ενότητας. Η «*ευθυωρία*» υποδήλωνε γενικότερα την έννοια της «*ευθείας κατεύθυνσης*». Για τη χρήση του όρου «*ιθυφάνεια*», παραπέμπουμε στο απόσπασμα των *Οπτικών Υποθέσεων* του Δαμιανού «*ὅσα μὲν δι' ἀέρος καὶ ἀκλάστου φερομένης τῆς ὄψεως θεωροῦμεν, ταῦτα κατ' ἰθυφανὲς πάντα θεωρεῖσθαι*» (12.15-16). Επισημαίνουμε ότι σε ανάλογες περιπτώσεις χρησιμοποιούνταν και η συνώνυμη λέξη «*ἰθυωρία*». Το ρήμα «*ἰθύω*» είχε, εκτός από την έννοια του «*επιβάλλομαι*», την έννοια του «*ακολουθώ ευθύγραμμη κατεύθυνση*».

[24] Γεμίνου, *Fragmenta optica*, 24.1-3.

την ποιότητα του φωτός και του χρώματος, γιατί μετέχει στο ίδιο γένος με εκείνα[25]. Τέλος, ο Αλέξανδρος Αφροδισιέας επιχειρώντας να προσδιορίσει τη φύση των οπτικών ακτίνων αναφερόταν και στην άποψη εκείνων που υποστήριζαν ότι η οπτική ακτίνα είναι φως και δήλωνε μεταξύ άλλων ότι «*αὐτὸ γὰρ τὸ διὰ τῶν ὀφθαλμῶν ἐκπῖπτον φῶς ἱκανὸν ἂν ἦν φωτίζειν τὸν θύρα θεν ἀέρα, ὅ γε καὶ μέχρι τῶν ἄστρων ἀποτείνεσθαι πέφυκεν*»[26].

Η υπόθεση της φωτεινής φύσης των οπτικών ακτίνων μπορούσε να λειτουργήσει καταλυτικά, όχι μόνο ως ένα μέσο επιβεβαίωσης της ευθύγραμμης φύσης της όρασης, αλλά και ως ένα μέσο θεμελίωσης του ευθύγραμμου τρόπου φοράς των όψεων. Αν οι όψεις έχουν φωτεινή φύση, αυτό σημαίνει ότι μοιράζονται τις ίδιες ιδιότητες, με εκείνες που χαρακτηρίζουν το φως. Από την άλλη μεριά, η ευθύγραμμη διάδοση των φωτεινών ακτίνων αποτελούσε αναμφισβήτητη αρχή, γιατί είχε θεμελιωθεί, μέσω διάφορων εμπειρικών-πειραματικών τρόπων, όπως μέσω μιας φωτεινής ακτίνας ενός λύχνου που αφήνεται να περάσει από την οπή ενός χαρτονιού που βρίσκεται ακριβώς μπροστά από το κέντρο της φωτεινής πηγής και η οποία πέφτει σε ένα σημείο μιας άλλης επιφάνειας που βρίσκεται κοντά στο χαρτόνι. Είχε ήδη παρατηρηθεί ότι το κέντρο της φωτεινής πηγής, η οπή του χαρτονιού, από την οποία περνά η φωτεινή ακτίνα, και το σημείο της επιφάνειας, στο οποίο αυτή καταλήγει, βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Η παραπάνω πειραματική θεμελίωση της ευθύγραμμης διάδοσης του φωτός αναφέρεται στον πρόλογο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* των *Οπτικών*[27]. Το κείμενο αυτό μάς πληροφορεί και για έναν άλλο τρόπο θεμελίωσης, συγκεκριμένα, μέσω της μελέτης των σκιών. Εκεί λέγεται ότι οι φωτεινές ακτίνες που πέφτουν στα σώματα θεωρούνται ως η αιτία για τη διαμόρφωση των σκιών τους που άλλες φορές είναι μεγαλύτερες, άλλες φορές μικρότερες και άλλες φορές ίσες με τα σώματα. Όταν η φωτεινή πηγή είναι μικρότερη από το σώμα, τότε η σκιά που δημιουργείται είναι μεγαλύτερή του, γιατί οι «*έσχατες*» φωτεινές ακτίνες, δηλαδή αυτές οι ακτίνες που μόλις καταφέρνουν να ξεπεράσουν εξωτερικά τα πέρατα του σώματος, εξαπλώνονται. Όταν η φωτεινή πηγή είναι μεγαλύτερη από το σώμα, τότε η σκιά είναι μικρότερή του και, στην περίπτωση αυτή οι έσχατες ακτίνες δεν εξαπλώνονται, αλλά, αντίθετα, συμπίπτουν. Τέλος, όταν η φωτεινή πηγή είναι ίση με το σώμα, τότε η σκιά είναι ίση με αυτό και οι έσχατες ακτίνες είναι

[25] Πτολεμαίου, *έ.α.*, 11.6-8, 23.10-12.
[26] Αλέξανδρου Αφροδισιέα, *De anima libri mantissa*, έκδ. I. Bruns, *Alexandri Aphrodisiensis praeter commentaria scripta minora*, Commentaria in Aristotelem Graeca, 2.1, Βερολίνο: Reimer 1887, βλ. 127.37-39.
[27] *Opticorum Recensio Theonis*, 144.3-8.

παράλληλες μεταξύ τους. Όπως συμπεραίνει ο συγγραφέας του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, όλα αυτά δε θα ήταν δυνατόν να συμβαίνουν, αν οι φωτεινές ακτίνες δε φέρονταν κατά ευθείες γραμμές[28].

2. Απόπειρες θεμελίωσης της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων

Όπως όλοι οι θεωρητικοί της όρασης, έτσι και οι υποστηρικτές της ακτινικής θεωρίας, διατείνονταν ότι η όραση πραγματοποιείται κατά ευθείες γραμμές. Εφόσον το μέσο περιγραφής και εξήγησης της όρασης ήταν για εκείνους οι όψεις, θα έπρεπε να κατοχυρωθεί ότι αυτές φέρονται ευθύγραμμα. Στην περίπτωση που κάποιος αποδεχόταν τη φωτεινή φύση τους, αυτό δεν ήταν δύσκολο να γίνει, γιατί θα μπορούσε να επικαλεστεί την ευθύγραμμη διάδοση του φωτός που είχε θεμελιωθεί τόσο πειραματικά όσο και θεωρητικά. Αυτό έκανε ο Γεμίνος, ο Πτολεμαίος και, σύμφωνα με τα λεγόμενα του Αλέξανδρου, πολλοί άλλοι. Ακόμα και στον πρόλογο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* των *Οπτικών* μπορούμε να εντοπίσουμε ορισμένα ίχνη που μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο συγγραφέας του είχε ακολουθήσει την ίδια οδό. Αμέσως μετά την παράθεση των διάφορων τρόπων θεμελίωσης της ευθύγραμμης διάδοσης των φωτεινών ακτίνων, δηλαδή τη διάταξη με τη φωτεινή λυχνία και τα αποτελέσματα της θεωρητικής μελέτης των σκιών, αναφέρονται τα εξής: «*ἐναργοῦς οὖν ὄντος τοῦ, ὅτι πᾶν φῶς κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν φέρεται, καὶ πᾶσι προδήλου μεταβαίνειν ἐπὶ τὴν ὄψιν ἠξίου καὶ τὰς ἀπ' αὐτῆς ἐκχεομένας ἀκτῖνας καὶ ὁμολογεῖν κατ' εὐθείας φέρεσθαι γραμμὰς*...»[29]. Ο συγγραφέας του κειμένου του προλόγου δεν περιγράφει ούτε καν αναφέρει κάποια συγκεκριμένη απόπειρα θεμελίωσης της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων, αλλά τόσο η σειρά όσο και ο τρόπος που παρουσιάζει τα πράγματα, αφήνουν να εννοηθεί ότι η ευθύγραμμη διάδοση των όψεων αποτελεί κάτι που εύλογα κάποιος θα αξίωνε και θα ομολογούσε, εφόσον είναι ολοφάνερο ότι *πᾶν φῶς κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν φέρεται*[30]. Από τα λεγόμενα του συγγραφέα, κατανούμε ότι στη σκέψη του η ισχύς της ήδη θεμελιωμένης ευθύγραμμης διάδοσης κάθε φωτός 'συμπαρασύρει' και την πεποίθηση της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων προσδίδοντάς της κάτι από την εγκυρότητά της.

Κατά την Αρχαιότητα είχαν πραγματοποιηθεί ορισμένες άλλες αξιόλογες προσπάθειες θεμελίωσης της ευθύγραμμης φοράς των όψεων, η επιχειρηματολογία

---

[28] *ό.π.*, 144.8-146.6

[29] 146.18-21.

[30] Διευκρινίζουμε ότι με την έκφραση «*πᾶν φῶς*» ο συγγραφέας εννοεί το φως που προέρχεται είτε από τεχνητές φωτεινές πηγές είτε από τα ουράνια σώματα.

των οποίων ξέφευγε από την αντίληψη περί αναλογίας οπτικών και φωτεινών ακτίνων. Για παράδειγμα, ο Ήρων είχε αποπειραθεί στα *Κατοπτρικά* του να θεμελιώσει την ευθύγραμμη φορά των οπτικών ακτίνων με έναν τρόπο που θα λέγαμε ότι παραπέμπει στη μηχανική. Συγκεκριμένα, ο Ήρων θεωρούσε ότι οι οπτικές ακτίνες, οι οποίες έχουν εξαιρετικά μεγάλη ταχύτητα, θα πρέπει να ακολουθούν την -όσο το δυνατόν- συντομέστερη πορεία που δεν είναι άλλη από την ευθεία[31]. Υπέρ αυτής της εξήγησης είχε ταχθεί και ο Δαμιανός. Ο Δαμιανός είχε προβάλλει και άλλα είδη επιχειρημάτων. Υποστήριζε ότι η φύση ασπάζεται την ευθύγραμμη διάδοση των όψεων, ακριβώς επειδή επιδιώκει το χρήσιμο και το αγαθό για τους ζωντανούς οργανισμούς. Επίσης, επεσήμαινε ότι η ευθύγραμμη πορεία των όψεων είναι σύμφωνη με τον «*εἰκότα λόγον*»[32]. Μέσω μιας μαρτυρίας του Δαμιανού, πληροφορούμαστε ότι ο Πτολεμαίος είχε αποδείξει (*ἀπέδειξεν)* στα *Οπτικά* του την ευθύγραμμη διάδοση των όψεων, καθώς επίσης τον σχηματισμό της σε ορθογώνιο κώνο, «*δι' ὀργάνων*»[33]. Η απόδειξη αυτή δεν υπάρχει στα διασωζόμενα βιβλία των *Οπτικών*, γι' αυτό πιθανολογείται ότι ο Πτολεμαίος την είχε εκθέσει στο πρώτο βιβλίο που, δυστυχώς, έχει χαθεί.

3. Η ευθύγραμμη διάδοση των όψεων στα Οπτικά και στην Αναθεωρημένη Έκδοσή τους

Η ευθύγραμμη φορά των όψεων διατυπώνεται στον πρώτο «όρο» των *Οπτικών* ως «*Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐξαγομένας εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*». Σχεδόν σε όλες τις μελέτες των *Οπτικών* εκτιμάται ότι ο καλύτερος τρόπος ανάγνωσης της παραπάνω πρότασης είναι «*Υποτίθεται ότι οι ευθείες γραμμές που εξάγονται από τον οφθαλμό φέρονται (διαδίδονται) σε απόσταση μεγάλου μεγέθους*»[34]. Αναμφισβήτητα, ο πρώτος «όρος» υποθέτει την ευθύγραμμη

---

[31] Ήρωνος, *Κατοπτρικά*, ΙΙ, σ. 320.
[32] Δαμιανού, *έ.α.*, 3.12-18.
[33] «*ὅτι δὲ τὸ προβαλλόμενον τοῦτο ἀφ᾽ ἡμῶν, ὃ δὴ καὶ ὄψιν ἔθος καλεῖν, ἐπ᾽ εὐθείας τε φέρεται καὶ ἐν σχήματι κώνου ὀρθογωνίου, καὶ ὁ Πτολεμαῖος δι᾽ ὀργάνων ἀπέδειξεν ἐν τῇ αὐτ οῦ ὀπτικῇ πραγματείᾳ, ἔνεστι δὲ καὶ λόγῳ θεωρῆσαι*», *ό.π.*, 3.1-5.
[34] Στην αγγλική μετάφραση των *Οπτικών* του 1945 ο H.E. Burton απέδιδε τον πρώτο «όρο» ως "*Let it be assumed that lines drawn directly from the eye pass through a space of great extent*". Στη μονογραφία του *Euclide et Ptoléméé: Deux Stades de l' Optique Géométrique Grecque* ο A. Lejeune δεν παρείχε κάποια μετάφραση του πρώτου «όρου» των *Οπτικών*. Ωστόσο, θεωρούσε ότι, μέσω της συγκεκριμένης πρότασης, δηλώνεται η ευθύγραμμη διάδοση των οπτικών ακτίνων. Ο D.C. Lindberg στην εισαγωγή του έργου του *Theories of Vision from Al-Kindi to Kepler* απέδιδε τον πρώτο «όρο» των *Οπτικών* ως "*Let it be assumed*

διάδοση των όψεων, αφού άλλωστε χαρακτηρίζει τις γραμμές που εξάγονται από τον οφθαλμό, δηλαδή τις όψεις, ως «*ευθείες*». Στον αντίστοιχο πρώτο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, η ευθύγραμμη διάδοση των όψεων διατυπώνεται με εντελώς διαφορετικό τρόπο. Εδώ συναντάμε τη φράση «*Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ὄψεις κατ' εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι...*».

Και στις δύο πραγματείες η ευθύγραμμη διάδοση των όψεων τίθεται ως υπόθεση και σε κανένα σημείο τους δεν επιχειρείται η απόδειξή της. Παράλληλα, στο πλαίσιο της ευκλείδειας γεωμετρικής οπτικής, δεν παρουσιάζεται κάποια ξεκάθαρη εικόνα, σχετικά με το αν γίνεται αποδεκτή η φωτεινή φύση των όψεων, ούτε γίνεται λόγος για το αν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των φωτεινών και των οπτικών ακτίνων. Τα στοιχεία αυτά θα μπορούσαν να μας διαφωτίσουν, για το πώς αντιλαμβανόταν ο Ευκλείδης τις όψεις και για το αν τελικά συμμεριζόταν τη θεμελίωση της ευθύγραμμης διάδοσής τους, με βάση την αναλογία τους -ως προς τη φύση- με τις φωτεινές ακτίνες.

---

that the rectilinear rays proceeding from the eye diverge indefinitely" χρησιμοποιώντας το ρήμα *diverge* όχι με την έννοια της απόκλισης, δηλαδή της χωρικής διάστασης μεταξύ των οπτικών ακτίνων, αλλά με την έννοια της διάδοσης. Όπως ο ίδιος δήλωνε, "*The first three postulates define the visual process and cast it in a geometrical mold: rays proceed in straight lines from the eye…The rectilinearity of the rays, which Euclid assumes in the first postulate,…*". Το 1981 ο C.D. Brownson στη μελέτη του "Euclid's Optics and its Compatibility with Linear Perspective" ακολούθησε πιστά τη μετάφραση του Burton, ενώ ο G. Simon στο βιβλίο του *Le regard, l' être et l' apparence* τον απέδιδε κατά ανάλογο τρόπο στη γαλλική ως "*Posons que les lignes droites issues de l' oeil franchissent des distances d' une grande longueur*". Παράλληλα, σε υποσημείωση του άρθρου του "Pseudo- Euclidean Reflections in Ancient Optics: A Re-Examination of Textual Issues Pertaining to the Euclidean *Optica* and *Catoptrica*" ο W. Knorr τον μετέφραζε ως "*Let it be supposed that the straight lines leading out from the eye are carried a distance of great magnitudes*", ενώ ο A. Jones στο "Peripatetic and Euclidean Theories of the Visual Ray" ως "*Let it be postulated that the straight lines drawn from the eye travel an interval of great magnitudes*". Τέλος, ο R. Rashed στο έργο του *L' Optique et la Catoptrique* τον απέδιδε στη γαλλική ως "*Les lignes droites issues de l' oeil se propagent sur l' intervalle de grandes grandeurs*".

Απέναντι σε αυτή την πληθώρα των αποδόσεων και ερμηνείας του πρώτου «όρου» ως αίτημα της ευθύγραμμης διάδοσης των οπτικών ακτίνων, επιβάλλεται να καταγράψουμε μία επιπλέον απόπειρα ανάγνωσής του που διαφοροποιείται από τις υπόλοιπες. Συγκεκριμένα, αναφερόμαστε στη γαλλική μετάφραση των *Οπτικών* από τον P. Ver Eecke που πραγματοποιήθηκε το 1959. Ο P. Ver Eecke απέδωσε τον πρώτο «όρο» των *Οπτικών* ως "*Supposons que les lignes droites qui émanent de l' oeil se propagent à divergence des grandes grandeurs*". Με τον όρο «*divergence*» ο P. Ver Eecke απέδιδε τον όρο «*διάστημα*» εννοώντας τον ως την απόκλιση των ευθείων γραμμών που εξάγονται από τον οφθαλμό κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να περιλαμβάνουν υπό τη γωνία που διαμορφώνουν όλο το παρατηρούμενο μέγεθος. Δεν εννοούσε την απόκλιση ή αλλιώς την ασυνέχεια που εμφανίζεται διαδοχικά μεταξύ των όψεων, έτσι όπως συναντάται, για παράδειγμα, στο θεώρημα 1 της πραγματείας, αλλά, για να το πούμε απλοϊκότερα, το συνολικό 'άνοιγμα', όλο το εύρος της γωνίας που σχηματίζεται στο σημείο του οφθαλμού και που εξαρτάται κάθε φορά από το μέγεθος που παρατηρείται.

Ωστόσο, το θεώρημα 18 των *Οπτικών* και της *Αναθεωρημένης Έκδοσής* τους, δεν αναφέρεται σε οπτική ακτίνα, αλλά στην ακτίνα του ήλιου, η οποία τυγχάνει της ίδιας μεταχείρισης και της ίδιας ανάλυσης, σαν να επρόκειτο για ακτίνα της όψεως[35]. Κρίνουμε ότι η σιωπή του Ευκλείδη για το θέμα της φωτεινής φύσης των όψεων είναι δικαιολογημένη και ως έναν βαθμό αναμενόμενη, καθώς ο Ευκλείδης δε θα εμπλεκόταν σε κάποια συζήτηση που θα απαιτούσε από τον ίδιο να κάνει λόγο για θέματα που ξεπερνούν το επίπεδο της γεωμετρίας. Το γεγονός ότι συμπεριλαμβάνει στο ερευνητικό του πρόγραμμα την εξέταση μιας περίπτωσης που αφορά σε ηλιακή ακτίνα και, κυρίως, το γεγονός ότι την πραγματεύεται σαν να επρόκειτο για όψη, μπορεί να μη μας επιτρέπει να εξάγουμε κάποιο ασφαλές συμπέρασμα για το αν αποδεχόταν την φωτεινή φύση της δεύτερης, αλλά αφήνει τουλάχιστον να διαφανεί ότι τόσο οι υποθέσεις όσο και η μεθοδολογία που ακολουθείται για τις μεν υιοθετείται και για τις δε. Η πρακτική που ακολουθεί ο Ευκλείδης καταγράφεται με πιο ξεκάθαρο τρόπο από τον Γεμίνο. Συγκεκριμένα, όταν ο Γεμίνος παρουσίαζε τους κλάδους της οπτικής επιστήμης διαχωρίζοντάς τους στον κυρίως κλάδο της οπτικής, στην κατοπτρική και στη σκηνογραφία, ανέφερε ότι ο κλάδος εκείνος που έχει ως αντικείμενό του -μεταξύ άλλων- την εξέταση των ηλιακών ακτίνων, τη διαμόρφωση των σκιών και τα πυρεία, είχε ίδιες υποθέσεις και ίδια μεθοδολογία με εκείνες που ακολουθούσε η θεωρία των οπτικών ακτίνων[36].

Η ευθύγραμμη διάδοση των όψεων αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της γεωμετρικής οπτικής του Ευκλείδη. Στο συγκεκριμένο μοντέλο όλα τα στοιχεία που μετέχουν κατά τη λειτουργία της όρασης ανάγονται στο γεωμετρικό επίπεδο. Ο οφθαλμός αναπαρίσταται ως ένα γεωμετρικό σημείο και τα παρατηρούμενα αντικείμενα ως γεωμετρικά μεγέθη. Η περιγραφή της όρασης επιτυγχάνεται, μέσω των όψεων, δηλαδή μέσω των ευθείων γραμμών που ξεκινούν από το σημείο του οφθαλμού και προσπίπτουν σε σημεία των γεωμετρικών μεγεθών. Σύμφωνα με τον δεύτερο «όρο», οι όψεις διαμορφώνουν τον οπτικό κώνο, ένα τρισδιάστατο σχήμα

---

[35] Το θεώρημα 18 θυμίζει ένα πρόβλημα μέτρησης του ύψους ενός ραβδιού που λέγεται ότι είχε αντιμετωπίσει και ο Θαλής, μέσω της διαμόρφωσης της σκιάς του. Το πρόβλημα 18 των *Οπτικών* και της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* έχουν να κάνουν με τη μέτρηση ενός δοθέντος ύψους που είναι κάθετο προς το επίπεδο του εδάφους: «*Τὸ δοθὲν ὕψος γνῶναι, πηλίκον ἐστίν, ἡλίου φαίνοντος*». Κατά την επίλυση, φέρεται από την κορυφή του ύψους η ηλιακή ακτίνα, με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα τρίγωνο. Ο Ευκλείδης επιλύει το πρόβλημα δουλεύοντας με αναλογίες.

[36] «*αὗται δ' αἱ θεωρίαι τὰς αὐτὰς ὑποθέσεις ἔχουσαι τῇ περὶ τὰς ὄψεις τὸν αὐτὸν ἐκείνῃ τρόπον ἐφοδεύονται. ὁποία γὰρ ἡ τῶν ὄψεων πρόπτωσις, τοιοῦτος καὶ ὁ καταφωτισμὸς ὑπὸ τοῦ ἡλίου γίνεται*». Βλ. Γεμίνου, *έ.α.*, 26.17-20.

που έχει για κορυφή του τον οφθαλμό και για βάση του τα πέρατα των «*ὁρωμένων*», δηλαδή τα όρια των παρατηρούμενων γεωμετρικών μεγεθών. Κατανοούμε ότι χάρη στην αρχή της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων, ο Ευκλείδης διαθέτει ένα πολύτιμο αναλυτικό εργαλείο που του δίνει τη δυνατότητα να γεωμετρικοποιήσει τον πολύπλοκο μηχανισμό της όρασης, να τον περιγράψει τελικά με απλά τρίγωνα που προκύπτουν, αν φέρουμε τομή, κάθετα προς τη βάση του οπτικού κώνου. Με τον τρόπο αυτό, ο Ευκλείδης μεταφέρει την τρισδιάστατη εικόνα που συλλαμβάνει ο οπτικός κώνος στο δισδιάστατο επίπεδο της γεωμετρίας, με το οποίο είναι σε θέση να εργαστεί. Χωρίς να παραπέμπει σε κανέναν φυσικό, φυσιολογικό, ανατομικό ή ψυχολογικό παράγοντα, μπορεί να εξηγήσει τον τρόπο, με τον οποίο γίνονται οπτικώς αντιληπτά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των παρατηρούμενων μεγεθών, αλλά και να εκτιμήσει τη σχετική ακρίβεια που διέπει την οπτική τους αντίληψη. Για τον καθορισμό του σχετικού μεγέθους τους εξετάζει το μέγεθος της οπτικής γωνίας, δηλαδή της γωνίας που βρίσκεται στην κορυφή του κώνου και υπό την οποία παρατηρείται το ορώμενο[37]. Για τον καθορισμό της σχετικής θέσης, εξετάζει τη θέση που κατέχουν οι οπτικές ακτίνες στον κώνο[38]. Τέλος, για τον προσδιορισμό της σχετικής οπτικής ακρίβειας, εξετάζεται η ποσότητα των όψεων που προσπίπτουν σε ένα παρατηρούμενο μέγεθος[39]. Το μοντέλο του Ευκλείδη μιλά πάντα με όρους σχετικότητας και ενδεχομένως αυτό να αποτελεί την πιο ουσιώδη συνεισφορά του: ότι καταδεικνύει όσο κανένα άλλο τον σχετικό χαρακτήρα των οπτικών εμφανίσεων, τον σχετικό χαρακτήρα του κόσμου που μας περιβάλλει. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα μελετήσουμε το γεωμετρικό εκείνο εργαλείο που, κατά τη γνώμη μας, βοήθησε τον Ευκλείδη να τιθασεύσει ορισμένες εκφάνσεις της σχετικότητας των παρατηρήσεων. Θα μελετήσουμε λεπτομερώς την υπόθεση της ασυνέχειας των όψεων.

[37] Βλ. 4ο «*όρο*».
[38] Βλ. 5ο, 6ο «*όρο*».
[39] Βλ. 7ο «*όρο*».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ
ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΩΝ ΟΨΕΩΝ:
Η «ΑΧΙΛΛΕΙΟΣ ΠΤΕΡΝΑ» ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

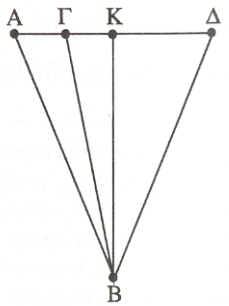
Η ασυνέχεια ή η διακριτότητα των όψεων αποτελεί ιδιότυπο χαρακτηριστικό της γεωμετρικής οπτικής του Ευκλείδη. Πρόκειται για ένα σημαντικό γνώρισμα που διαφοροποιεί ριζικά το ευκλείδειο μοντέλο από ανάλογα ακτινικά μοντέλα όρασης που είχαν προταθεί κατά την Αρχαιότητα. Σύμφωνα με τον Ευκλείδη, ο οπτικός κώνος δεν είναι συνεχής, γιατί καθεμία όψη που υπάρχει σε αυτόν διακρίνεται από την άλλη, μέσω ενός χωρικού διαστήματος. Η παραπάνω υπόθεση δημιουργεί αυτομάτως πολλών ειδών ερωτήματα. Ορισμένα από αυτά αφορούν στον ουσιαστικό ρόλο που επιτελεί για τη μελέτη της όρασης η εισαγωγή ενός τέτοιου χαρακτηριστικού, ενώ ορισμένα άλλα στο πώς μπορεί η ασυνέχεια των όψεων να συμβιβαστεί με τον συνεχή γεωμετρικό χώρο. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω ερωτήματα, αλλά και ορισμένα κρίσιμα προβλήματα θεμελίωσης που, όπως θα διαπιστώσουμε, προκύπτουν από τη συγκεκριμένη υπόθεση, στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα εξετάσουμε τη διακριτότητα των όψεων. Κύριο μέλημά μας είναι να εξακριβώσουμε ποιοι ήταν οι λόγοι εκείνοι που επέβαλαν την υπόθεση μιας τόσο ανατρεπτικής ιδιότητας, τι ήταν αυτό που ώθησε τον Ευκλείδη να μιλήσει περί ασυνέχειας των όψεων και να υποστεί με τον τρόπο αυτό την κριτική και τα πυρά των μεταγενεστέρων του.

Α. ΣΕ ΤΙ ΕΞΥΠΗΡΕΤΟΥΣΕ ΤΟΝ ΕΥΚΛΕΙΔΗ Η ΔΙΑΚΡΙΤΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΟΨΕΩΝ;

1. Εξετάζοντας τα θεωρήματα 1 και 3

Ο μόνος τρόπος που έχουμε στη διάθεσή μας, για να κατανοήσουμε τι είναι η διακριτότητα των όψεων και για ποιο λόγο ο Ευκλείδης θεώρησε αναγκαίο να τη συμπεριλάβει στο μοντέλο του, είναι μέσω της εξέτασης των θεωρημάτων 1 και 3 της πραγματείας του, στα οποία γίνεται επικλητή. Τα θεωρήματα 1 και 3 είναι πανομοιότυπα στις δύο διασωζόμενες εκδόσεις του κειμένου των *Οπτικών*.

Το πρώτο θεώρημα των *Οπτικών* και της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι «*Οὐδὲν τῶν ὁρωμένων ἅμα ὅλον ὁρᾶται*» και η απόδειξή του έχει ως εξής:



Σχήμα 5-1

«*Γιατί, έστω το ΑΔ κάτι που βλέπεται, ενώ ο οφθαλμός έστω το Β, από όπου να προσπέσουν όψεις οι ΒΑ, ΒΓ, ΒΚ, ΒΔ. Λοιπόν, επειδή οι όψεις που προσπίπτουν φέρονται (μεταξύ τους) κατά διαστήματα, δε μπορούν να προσπέσουν κατά συνέχεια στο ΑΔ˙ ώστε, θα υπάρχουν και κατά το ΑΔ διαστήματα, στα οποία οι όψεις δε θα προσπέσουν. Άρα, δε θα ειδωθεί αμέσως όλο το ΑΔ. Φαίνεται όμως ότι βλέπεται ταυτόχρονα (όλο), επειδή οι όψεις μετατοπίζονται γρήγορα*»[1].

Σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα, η διακριτότητα των όψεων εισάγεται από τον Ευκλείδη, για να εξηγήσει τα προβλήματα της μη ολοκληρωμένης οπτικής αντίληψης των αντικειμένων και, γενικότερα, των μεγεθών. Με άλλα λόγια, προσπαθεί να εξηγήσει για ποιο λόγο χρειάζεται να επέλθει η γρήγορη 'σάρωση' ενός μεγέθους από τις όψεις, ώστε να θεωρηθεί ότι παρατηρείται ολόκληρο, και γιατί δεν παρατηρείται αμέσως όλο. Όπως φαίνεται από το πρώτο θεώρημα, αλλά και από το σχήμα που το συνοδεύει, στο πλαίσιο της γεωμετρικής οπτικής του Ευκλείδη η ολοκληρωμένη οπτική αντίληψη ενός μεγέθους σημαίνει ουσιαστικά την ταυτόχρονη οπτική αντίληψη όλων των σημείων του.

Αναλυτικότερα, διαβάζοντας το πρώτο θεώρημα διαπιστώνουμε ότι, αν οι όψεις ήταν συνεχείς, τότε θα έπεφταν την ίδια στιγμή σε όλα τα σημεία του παρατηρούμενου μεγέθους, επομένως, το μέγεθος θα γινόταν αμέσως ορατό ολόκληρο. Αντίθετα, στην περίπτωση των διακριτών, δηλαδή μη συνεχών όψεων, η καθεμία όψη διακρίνεται από την άλλη, μέσω ενός χωρικού διαστήματος. Τα

---

[1] «*ἔστω γὰρ ὁρώμενόν τι τὸ ΑΔ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Β, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΒΚ, ΒΔ. οὐκοῦν, ἐπεὶ ἐν διαστήματι φέρονται αἱ προσπίπτουσαι ὄψεις, οὐκ ἂν προσπίπτοιεν συνεχεῖς πρὸς τὸ ΑΔ· ὥστε γένοιντο ἂν καὶ κατὰ τὸ ΑΔ διαστήματα, πρὸς ἃ αἱ ὄψεις οὐ προσπεσοῦνται. οὐκ ἄρα ὀφθήσεται ὅλον ἅμα τὸ ΑΔ. δοκεῖ δὲ ὁρᾶσθαι ἅμα τῶν ὄψεων ταχὺ παραφερομένων*», Ευκλείδου, *Οπτικά*, 1.2-11, *Opticorum Recensio Theonis*, 156.3-10.

διαστήματα που υπάρχουν μεταξύ των όψεων αναπόφευκτα αποτυπώνονται στο ίδιο το παρατηρούμενο μέγεθος, αφού, όταν οι όψεις προσπίπτουν στα σημεία του, φέρουν αυτόματα πάνω σε αυτό τα διαστήματα, από τα οποία οι ίδιες διέπονται. Τα διαστήματα που δημιουργούνται πάνω στο μέγεθος και που ορίζονται από τα σημεία πάνω στα οποία πέφτουν οι όψεις αποτελούν περιοχές που δε γίνονται ορατές. Αυτό συμβαίνει αναγκαστικά κατά την παρατήρηση όλων των μεγεθών, καθώς οι όψεις είναι πάντα διακριτές. Επομένως, όπως ισχυρίζεται ο Ευκλείδης, τίποτα δε βλέπεται αμέσως ολόκληρο, δηλαδή σε όλα τα σημεία του.

Ο συγγραφέας του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αναφέρεται στη διακριτότητα των όψεων κρίνοντας ότι αυτή αποτελεί μια ιδιότητα που «*ομολογείται*» (*όμολογεῖν*), δηλαδή τυγχάνει της κοινής αποδοχής[2]. Στο σημείο αυτό δε θα εξετάσουμε αναλυτικά τη θεωρητική προσέγγιση του συγκεκριμένου συγγραφέα, αλλά θα εκθέσουμε μόνο ορισμένα ενδιαφέροντα παραδείγματα από την καθημερινή ζωή, στα οποία παραπέμπει θέλοντας να ισχυροποιήσει, αλλά και να επιβεβαιώσει τα λεγόμενα του πρώτου θεωρήματος. Ο λόγος που επικεντρώνουμε στα παραδείγματα αυτά είναι επειδή μπορούν να μας βοηθήσουν, ώστε να αποκτήσουμε μια σαφέστερη εικόνα για τον τρόπο, με τον οποίο επιδρά η ασυνέχεια των όψεων στην οπτική αντίληψη. Παράλληλα, μας δίνουν την εικόνα μιας κατηγορίας προβλημάτων που έπρεπε να αντιμετωπίσουν οι οπτικοί, όπως ο Ευκλείδης, για την επίλυση των οποίων ο τελευταίος θεώρησε αναγκαίο να επινοήσει τη διακριτότητα των όψεων. Συγκεκριμένα, ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* περιγράφει μια κατάσταση, κατά την οποία ορισμένοι άνθρωποι, ενώ κοιτάζουν το έδαφος, δε βλέπουν αμέσως τη βελόνα που βρίσκεται πεταμένη σε αυτό, ή, ενώ κοιτάζουν τη σελίδα ενός βιβλίου, δεν είναι σε θέση να υποδείξουν αμέσως πού βρίσκονται ορισμένα γράμματα που ενδεχομένως τους ζητηθούν[3]. Σύμφωνα με την αντίληψη του Ευκλείδη, ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι γιατί οι όψεις, εξαιτίας της ασυνέχειας που τις διέπει, δεν προσπίπτουν αμέσως σε όλα τα σημεία του εδάφους ή της σελίδας, γεγονός που επηρεάζει την άμεση και ολοκληρωμένη οπτική αντίληψη.

Η διακριτότητα των όψεων είναι καθαρά χωρική, ωστόσο, όπως φαίνεται από το πρώτο θεώρημα, τα αποτελέσματά της έχουν και χρονικό αντίκτυπο, γιατί εξαιτίας της, επηρεάζεται η χρονικά άμεση ορατότητα όλων των σημείων των παρατηρούμενων μεγεθών. Αν οι όψεις ήταν συνεχείς, έπεται ότι θα συλλαμβάνανε αυτοστιγμεί όλα τα σημεία του παρατηρούμενου μεγέθους. Σε αυτή την περίπτωση,

---

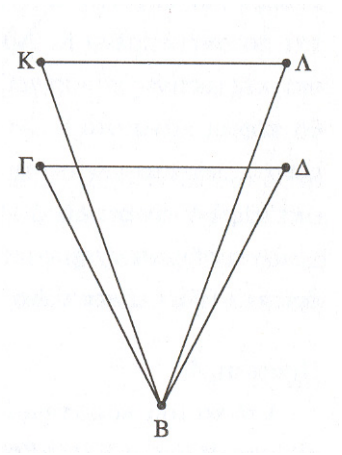
[2] *Opticorum Recensio Theonis*, 146.21-23.
[3] *ό.π.*, 146.23-148.16.

όλα τα σημεία του θα παρατηρούνταν στον ίδιο χρόνο. Αντίθετα, η διακριτότητα των όψεων δεν επιτρέπει την ταυτόχρονη παρατήρηση όλων των σημείων του μεγέθους. Η οπτική αντίληψη όλων των σημείων του μεγέθους είναι εφικτή, δηλαδή όλα τα σημεία του είναι δυνατόν να ειδωθούν, μέσω της γρήγορης παραφοράς των όψεων πάνω σε αυτά, αλλά σε κάθε χρονική στιγμή θα βλέπονται διαφορετικά σημεία του παρατηρούμενου μεγέθους και ποτέ όλα μαζί. Όπως αναφέρεται και στην απόδειξη του πρώτου θεωρήματος, η ολοκληρωμένη οπτική αντίληψη των μεγεθών δε συνιστά τίποτα άλλο, παρά μια εντύπωση, μια ψευδαίσθηση. Ακόμα και αν μέσω της γρήγορης παραφοράς τους, οι όψεις καταφέρνουν να προσπέσουν σταδιακά σε όλα τα σημεία του μεγέθους, εμείς θα νομίζουμε ότι βλέπουμε ολόκληρο το μέγεθος, δηλαδή όλα τα σημεία του ταυτόχρονα (*δοκεῖ δὲ ὁρᾶσθαι ἅμα τῶν ὄψεων ταχὺ παραφερομένων*). Αυτό επισημαίνεται και από τον συγγραφέα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, ο οποίος, ύστερα από την παράθεση των παραδειγμάτων του, δηλώνει ότι: «*ὥστε αυτά που βλέπονται δε θα ειδωθούν ταυτοχρόνως ολόκληρα˙ φαίνεται ότι βλέπονται* (ενν. *ταυτοχρόνως ολόκληρα*), *επειδή οι όψεις κινούνται με υπερβολική ταχύτητα, χωρίς να παραλείπουν τίποτα, δηλαδή μετατοπίζονται κατά έναν συνεχή τρόπο και όχι μεταπηδώντας*»[4]. Ο συγγραφέας προσπαθεί να κάνει σαφές ότι η παρατήρηση ολόκληρου του μεγέθους εξαρτάται από τη γρήγορη, συνεχή μετακίνηση των όψεων πάνω στο παρατηρούμενο μέγεθος. Αλλά, ακόμα και στην περίπτωση που πραγματοποιείται αυτή η γρήγορη μετακίνηση, η ολοκληρωμένη οπτική αντίληψη του μεγέθους είναι απατηλή. Δηλαδή, ο παρατηρητής νομίζει ότι βλέπει αμέσως ολόκληρο το παρατηρούμενο μέγεθος.

Σε αντίθεση με την εναλλακτική υπόθεση των συνεχών όψεων, η υπόθεση των διακριτών όψεων έχει ως αναπόφευκτο επακόλουθο ότι παρέχει τη δυνατότητα και νομιμοποιεί την πραγματοποίηση συζητήσεων που γίνονται με όρους που αφορούν στην ποσότητα των όψεων που δέχεται ένα παρατηρούμενο μέγεθος. Το γεγονός αυτό επιτρέπει τη σύγκριση των μεγεθών, ως προς την ποσότητα των όψεων που εκλαμβάνουν και, συνεπώς, ως προς την ποσότητα των σημείων τους που θα ειδωθούν. Με βάση αυτή την ποσοτική σύγκριση, επιτυγχάνεται τελικά μια εκτίμηση της ποιότητας της οπτικής αντίληψης ενός μεγέθους, σε σχέση με κάποιο άλλο. Αναλυτικότερα, σύμφωνα με το μοντέλο του Ευκλείδη, όσο πιο πολλές είναι οι όψεις που προσπίπτουν σε ένα αντικείμενο, τόσο πιο πολλά σημεία του θα ειδωθούν,

[4]«*ὥστε οὐχ ὁραθήσεται ἅμα ὅλα τὰ ὁρώμενα· δοκεῖ δὲ ὁρᾶσθαι διὰ τὸ κινεῖσθαι τὰς ὄψεις ὑπερβολῇ τάχους μηδὲν ἀπολειπούσας, τουτέστι κατὰ συνέχειαν παραφερομένας καὶ μὴ ἁλλομένας*», *ό.π.*, 148.16-19.

επομένως, η οπτική αντίληψη θα χαρακτηρίζεται ποιοτικά από μεγαλύτερη ακρίβεια. Η ποσότητα των όψεων που προσπίπτουν σε ένα μέγεθος εξαρτάται από την απόστασή του από τον οφθαλμό. Όσο πιο κοντά του βρίσκεται, τόσο περισσότερες όψεις θα δεχτεί. Αυτό θεμελιώνεται στο δεύτερο θεώρημα, το οποίο βασίζεται με τη σειρά του στον 7ο «όρο» της πραγματείας και δηλώνει ότι «*Μεταξύ ίσων μεγεθών που είναι τοποθετημένα σε απόσταση, αυτά που είναι τοποθετημένα πιο κοντά* (ενν. *προς τον οφθαλμό*), *βλέπονται ακριβέστερα*».



Σχήμα 5-2

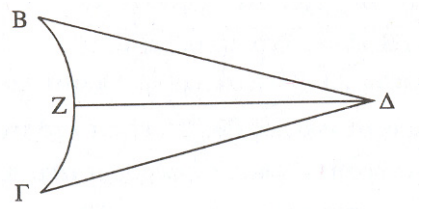
Συγκεκριμένα, ο λόγος για τον οποίο, μεταξύ δύο ίσων και παράλληλων μεγεθών, αυτό που είναι πλησιέστερο του οφθαλμού παρατηρείται με μεγαλύτερη ακρίβεια, είναι επειδή δέχεται περισσότερες όψεις, σε σχέση με το πιο απομακρυσμένο[5].

Λαμβάνοντας υπόψη το δεύτερο θεώρημα συλλογιζόμαστε ότι, αν η απολύτως ακριβής οπτική αντίληψη επιτυγχάνεται, εφόσον οι όψεις έχουν τη δυνατότητα να συλλάβουν όλα τα σημεία ενός παρατηρούμενου μεγέθους και μάλιστα ταυτόχρονα -πράγμα που θα ικανοποιούνταν μόνο με την υπόθεση της συνέχειας των όψεων-, τότε, συμπεραίνουμε ότι η διακριτότητα των όψεων προϋποτίθεται, όχι μόνο για να εξηγήσει τα προβλήματα της μη ολοκληρωμένης οπτικής αντίληψης των μεγεθών, αλλά και για να προσφέρει ένα κριτήριο, με βάση το οποίο μπορούμε να αποφανθούμε για τη σχετική ακρίβεια της οπτικής τους αντίληψης. Με αυτόν τον τρόπο, η διακριτότητα των όψεων μπορεί να εξηγήσει τους λόγους, για τους οποίους εμφανίζονται ορισμένες οπτικές πλάνες, όπως θα διαπιστώσουμε αμέσως παρακάτω:

Συγκεκριμένα, με βάση το θεώρημα 1 και, κατ' επέκταση, με βάση την υπόθεση της διακριτότητας των όψεων, το θεώρημα 22 των *Οπτικών*, αλλά και της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, επιδιώκει να εξηγήσει γιατί «*Εάν στο ίδιο επίπεδο, στο*

[5] Ευκλείδου, *Οπτικά*, 2.1-15, *Opticorum Recensio Theonis*, 56.12-25.

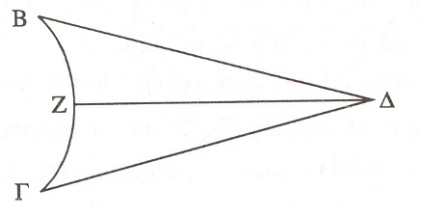
οποίο βρίσκεται ο οφθαλμός, τεθεί περιφέρεια κύκλου, η περιφέρεια του κύκλου φαίνεται ως ευθεία γραμμή»[6]. Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ανάμεσα στις αποδείξεις των δύο εκδόσεων, υπάρχει η εξής διαφορά: το κείμενο των *Οπτικών* εκθέτει συνολικά τρεις τρόπους απόδειξης, από τους οποίους ο πρώτος βασίζεται στον 4ο «όρο» της πραγματείας, ο δεύτερος αποτελεί ένα είδος εμπειρικής επιβεβαίωσης και ο τρίτος στηρίζεται στο θεώρημα 1. Αντίθετα, το κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* παρουσιάζει μόνο μία απόδειξη, αυτή που βασίζεται στο θεώρημα 1. Προς το παρόν, δε θα μας απασχολήσουν οι λόγοι αυτής της διαφοροποίησης ούτε και οι εναλλακτικές αποδείξεις που φέρει το θεώρημα της έκδοσης των *Οπτικών*. Θα μας απασχολήσουν μόνο οι αποδείξεις που θεμελιώνονται έχοντας ως βάση το θεώρημα 1. Στις συγκεκριμένες αποδείξεις, τα κείμενα των δύο εκδόσεων παρουσιάζουν μικρές διαφορές και, για λόγους συνέπειας, παραθέτουμε και τα δύο. Η απόδειξη των *Οπτικών* έχει ως εξής:



Σχήμα 5-3

«*Έστω περιφέρεια κύκλου η ΒΓ, ενώ ο οφθαλμός το Δ, ο οποίος είναι στο ίδιο επίπεδο με (το επίπεδο) της περιφέρειας ΒΓ, από όπου να προσπέσουν όψεις, οι ΔΒ, ΔΖ, ΔΓ. Λοιπόν, επειδή από αυτά που βλέπονται κανένα δε βλέπεται αμέσως όλο, άρα η ΒΖ είναι ευθεία. Παρόμοια, και η ΖΓ (είναι ευθεία). Άρα, όλη η ΒΓ θα φανεί ως ευθεία*»[7].

Η απόδειξη του θεωρήματος 22 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι η παρακάτω:



---

[6] «*Ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ τὸ ὄμμα, κύκλου περιφέρεια τεθῇ, ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια εὐθεῖα γραμμὴ φαίνεται*», Ευκλείδου, *Οπτικά*, 22.1-3. Στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* διαβάζουμε αντίστοιχα «*Ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ τὸ ὄμμα, κύκλου περιφέρεια τεθῇ, εὐθεῖα γραμμὴ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια φανεῖται*», 180.1-4.

[7] «*ἔστω κύκλου περιφέρεια ἡ ΒΓ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Δ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὂν τῇ ΒΓ περι φερείᾳ, ἀφ᾽ οὗ προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ ΔΒ, ΔΖ, ΔΓ, οὐκοῦν,*
ἐπειδὴ τῶν ὁρωμένων οὐδὲν ὅλον ἅμα ὁρᾶται, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖ. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΖΓ. ὅλη ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια εὐθεῖα δόξει», Ευκλείδου, *Οπτικά*, 22.41-49.

Σχήμα 5-4

«*Γιατί, έστω περιφέρεια η ΒΓ, ενώ ο οφθαλμός το Δ που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με την περιφέρεια ΒΓ, από όπου να προσπέσουν όψεις, οι ΔΒ, ΖΔ, ΔΓ. Λοιπόν, επειδή από αυτά που βλέπονται κανένα δε βλέπεται αμέσως όλο, δε θα φαινόταν η περιφέρεια ΖΒ, αλλά τα πέρατα Ζ, Β. Άρα, η περιφέρεια ΖΒ θα φανεί ότι είναι ευθεία. Ομοίως, και η ΖΓ* (ενν. *θα φανεί ότι είναι ευθεία*). *Άρα, όλη η περιφέρεια ΒΓ θα φανεί ότι είναι ευθεία*»[8].

Αν αφήσουμε στην άκρη τις μικρές κειμενικές διαφορές των δύο αποδείξεων, κατανοούμε ότι το θεώρημα 22 επιχειρεί να αιτιολογήσει για την εμφάνιση μιας συνήθους οπτικής πλάνης. Τοποθετημένος στο ίδιο επίπεδο με την περιφέρεια ενός κύκλου ο οφθαλμός θα αντιληφθεί την κυκλική περιφέρεια ως ευθεία. Σύμφωνα με την ευκλείδεια γεωμετρική οπτική, το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι οι όψεις, εξαιτίας της ιδιότητάς τους να φέρονται διακριτά η μία από την άλλη, θα προσπέσουν σε ορισμένα μόνο σημεία της περιφέρειας, επομένως, ο οφθαλμός θα δει μόνο αυτά. Η εντύπωση που θα δημιουργηθεί είναι ότι τα σημεία αυτά αποτελούν σημεία μιας ευθείας και όχι μιας κυκλικής περιφέρειας[9]. Σε καμία από τις δύο εκδόσεις δεν εξηγούνται λεπτομερώς οι λόγοι που προκαλούν την παραπάνω εντύπωση, δηλαδή γιατί πρόκειται αναγκαστικά για σημεία ευθείας. Δεν εξηγείται αναλυτικά το παραπάνω γεγονός, το οποίο αφήνεται να συμπεραθεί έμμεσα από το ότι ο οφθαλμός και η περιφέρεια του κύκλου βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Το θεώρημα 22 μάς δίνει τη δυνατότητα να διαπιστώσουμε ότι η ακρίβεια της οπτικής αντίληψης δεν είναι πάντα σε θέση να αποτρέψει μια οπτική πλάνη. Συλλογιζόμαστε ότι, ακόμα και αν η ίδια κυκλική περιφέρεια τοποθετούνταν πλησιέστερα του οφθαλμού και δεχόταν έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα 2, περισσότερες όψεις που καθιστούσαν ορατά περισσότερα σημεία της, η περιφέρεια θα εξακολουθούσε να φαίνεται ως ευθεία. Συνεπώς, η σχετικά μεγαλύτερη οπτική ακρίβεια ενός μεγέθους δε συνεπάγεται αναγκαστικά την αποτροπή της οφθαλμαπάτης και την απόκτηση της αλήθειας. Η οπτική πλάνη εξακολουθεί να συμβαίνει και αυτό στη συγκεκριμένη περίπτωση οφείλεται σε μια γεωμετρική συνθήκη που έχει τεθεί, συγκεκριμένα, στο ότι η περιφέρεια του κύκλου βρίσκεται

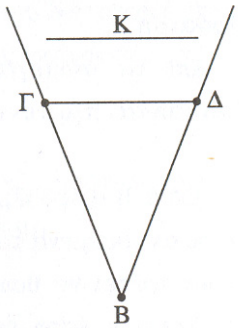
---

[8] «*ἔστω γὰρ περιφέρεια ἡ ΒΓ, ὄμμα δὲ τὸ Δ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὂν τῇ ΒΓ περιφερείᾳ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ ΔΒ, ΖΔ, ΔΓ. οὐκοῦν, ἐπεὶ τῶν ὁρωμένων οὐδὲν ἅμα ὁρᾶται οὐκ ἂν φαίνοιτο ἡ ΖΒ περιφέρεια, τὰ δὲ Ζ, Β πέρατα. δόξει ἄρα ἡ ΖΒ περιφέρεια εὐθεῖα εἶναι. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΖΓ. ὅλη ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια εὐθεῖα δόξει εἶναι*», *Opticorum Recensio Theonis*, 180.5-14.

[9] Πρόκειται για μια αρκετά περίεργη απόδειξη που θα μας απασχολήσει λεπτομερέστερα σε επόμενο κεφάλαιο.

στο ίδιο επίπεδο με το σταθερό σημείο του οφθαλμού, στοιχείο που επισημαίνεται ξεκάθαρα στη διατύπωση του θεωρήματος τόσο από τη μία όσο και από την άλλη έκδοση, αλλά κατά την αποδεικτική διαδικασία δεν του δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα.

Εκτός από τη μη ολοκληρωμένη οπτική αντίληψη των μεγεθών που θέτει το θεώρημα 1, η διακριτότητα των όψεων προσφέρει στον Ευκλείδη τη βάση για να στηριχτεί, ώστε να απαντήσει στο γιατί ένα αντικείμενο που είναι τοποθετημένο σε κάποια απόσταση από τον οφθαλμό τυχαίνει να μην παρατηρείται καθόλου. Πρόκειται για το θεώρημα 3, σύμφωνα με το οποίο «*Καθένα από αυτά που βλέπονται έχει κάποιο μήκος απόστασης, από όπου, αν βρεθεί, δε θα βλέπεται πια*»[10]. Σύμφωνα με τον Ευκλείδη, απαραίτητη προϋπόθεση για την ορατότητα των αντικειμένων είναι, όπως δηλώνει ο τρίτος «όρος», να προσπίπτουν οι όψεις πάνω σε σημεία τους. Το θεώρημα 3 βασίζεται στον τρίτο «όρο», αλλά, παράλληλα, εισάγει μια επιπλέον παράμετρο που μπορεί να επηρεάσει την ορατότητα, εκείνη της απόστασης των αντικειμένων από τον οφθαλμό. Για άλλη μια φορά, διαπιστώνουμε ότι η απόσταση μεταξύ του αντικειμένου και του οφθαλμού, σε συνδυασμό με την ασυνεχή πρόσπτωση των οπτικών ακτίνων, όχι μόνο επηρεάζει την ολοκληρωμένη οπτική αντίληψη και, συνεπώς, την ακρίβειά της, αλλά, όσο η απόσταση μεγαλώνει, μπορεί να προκαλέσει και την πλήρη μη ορατότητα. Ο Ευκλείδης δε συγκεκριμενοποιεί πόσο πρέπει να είναι αυτό το μήκος της απόστασης, από όπου τα αντικείμενα, αν βρεθούν, δε θα παρατηρούνται καθόλου. Όπως διαπιστώνουμε από την απόδειξη του θεωρήματος 3, το μέγεθος ΓΔ όντας στη συγκεκριμένη θέση γίνεται ορατό, εφόσον



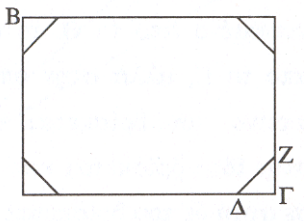
Σχήμα 5-5

δέχεται τις όψεις ΒΓ και ΒΔ. Αν όμως ξεπεράσει ένα ορισμένο μήκος απόστασης και βρεθεί μεταξύ του διαστήματος δύο διαδοχικών όψεων

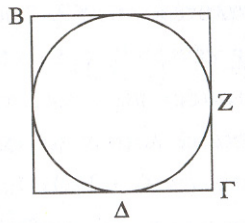
[10] «*Ἕκαστον τῶν ὁρωμένων ἔχει τι μῆκος ἀποστήματος, οὗ γενόμενον οὐκέτι ὁρᾶται*», Ευκλείδου, *Οπτικά*, 3.1-2, *Opticorum Recensio Theonis*, 156.26-28.

(*ἐν τῷ μεταξὺ διαστήματι τῶν ὄψεων*), δε θα γίνει ορατό, γιατί καμία όψη δε θα προσπέσει πάνω του[11].

Όπως το θεώρημα 1, έτσι και το θεώρημα 3 χρησιμοποιείται, για να εξηγήσει τον λόγο της εμφάνισης μιας συνήθους οπτικής πλάνης. Ο Ευκλείδης επικαλείται το θεώρημα 3 θέλοντας να εξηγήσει λίγο αργότερα, στο θεώρημα 9, γιατί «*Τα ορθογώνια μεγέθη που βλέπονται από απόσταση φαίνονται ως περιφερή* (δηλ. στρογγυλεμένα)»[12]. Οι δύο εκδόσεις δεν παρουσιάζουν διαφορές στο κείμενο της απόδειξης του θεωρήματος 9, αλλά μια μικρή διαφορά στο σχήμα. Στα αριστερά παρουσιάζεται το σχήμα των *Οπτικών* και στα δεξιά το σχήμα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*:



Σχήμα 5-6



Σχήμα 5-7

«*Γιατί, έστω ότι το ορθογώνιο ΒΓ είναι τοποθετημένο ψηλά και ότι βλέπεται από απόσταση. Λοιπόν, επειδή καθένα από αυτά που βλέπονται έχει κάποιο μήκος απόστασης, από όπου, αν βρεθεί, δε βλέπεται πια, άρα, η γωνία Γ δε βλέπεται, ενώ μόνο τα σημεία Δ, Ζ φαίνονται. Ομοίως, αυτό θα συμβεί και σε καθεμία από τις υπόλοιπες γωνίες. Ώστε, όλο θα φανεί ως περιφερές*»[13].

Εφόσον η μη ορατότητα των μεγεθών πραγματοποιείται πέρα από ένα ορισμένο μήκος απόστασης, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι, πριν φτάσουν στη συγκεκριμένη απόσταση, τα μεγέθη είναι ορατά. Το ίδιο ισχύει και για τη γωνία Γ του θεωρήματος 9, η οποία, προτού ξεπεράσει το ορισμένο μήκος απόστασης, από το

---

[11] «*ἔστω γὰρ ὄμμα μὲν τὸ Β, ὁρώμενον δὲ τὸ ΓΔ. φημὶ δή, ὅτι τὸ ΓΔ ἕν τινι ἀποστήματι γενόμενον οὐκέτι ὁραθήσεται. γεγενήσθω γὰρ τὸ ΓΔ ἐν τῷ μεταξὺ διαστήματι τῶν ὄψεων, ἐφ᾽ οὗ τὸ Κ. οὐκοῦν πρὸς τὸ Κ οὐδεμία τῶν ἀπὸ τοῦ Β ὄψεων προσπεσεῖται. πρὸς ὃ δὲ αἱ ὄψεις οὐ προσπίπτουσιν, ἐκεῖνο οὐχ ὁρᾶται. ἕκαστον ἄρα τῶν ὁρωμένων ἔχει τι μῆκος ἀποστήματος, οὗ γενόμενον οὐκέτι ὁρᾶται*», Ευκλείδου, *Οπτικά*, 3.3-13, *Opticorum Recensio Theonis*, 158.1-11.

[12] «*Τὰ ὀρθογώνια μεγέθη ἐξ ἀποστήματος ὁρώμενα περιφερῆ φαίνεται*», Ευκλείδου, *Οπτικά*, 9.1-2, *Opticorum Recensio Theonis*, 166.3-5.

[13] «*ἔστω γὰρ ὀρθογώνιον τὸ ΒΓ [ἑστὼς μετέωρον] ἐξ ἀποστήματος ὁρώμενον. οὐκοῦν ἐπεὶ ἕκαστον τῶν ὁρωμένων ἔχει τι μῆκος ἀποστήματος, οὗ γενόμενον οὐκέτι ὁρᾶται, ἡ μὲν Γ ἄρα γωνία οὐχ ὁρᾶται, τὰ δὲ Δ, Ζ σημεῖα μόνον φαίνεται. ὁμοίως καὶ ἐφ' ἑκάστης τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦτο συμβήσεται. ὥστε ὅλον περιφερὲς φανήσεται*», Ευκλείδου, *Οπτικά*, 9.9-17, *Opticorum Recensio Theonis*, 166.4-14.

οποίο καθίσταται μη ορατή, σκεφτόμαστε ότι υπάρχει ένα πιο κοντινό -ως προς τον οφθαλμό- μήκος απόστασης, από το οποίο είναι ορατή, γεγονός που σημαίνει ότι υπάρχει ένα μήκος απόστασης, από το οποίο ο οφθαλμός αντιλαμβάνεται το σχήμα ως ορθογώνιο και όχι ως περιφερές. Σε αντίθεση με το θεώρημα 22, κατά το οποίο διαπιστώσαμε ότι σε περίπτωση μείωσης της απόστασης του παρατηρούμενου μεγέθους από τον οφθαλμό, αυξάνεται η οπτική ακρίβεια, αλλά δεν αποτρέπεται η οπτική πλάνη ως προς το σχήμα του παρατηρούμενου μεγέθους, στο θεώρημα 9 αντιμετωπίζουμε μια αντίθετη κατάσταση, ότι δηλαδή η μείωση της απόστασης συμβάλλει στη σύλληψη του πραγματικού σχήματος και στην αποτροπή της οφθαλμαπάτης. Βέβαια, στα δύο θεωρήματα, οι γεωμετρικές συνθήκες είναι διαφορετικές. Στο θεώρημα 22 η οπτική πλάνη εξακολουθεί να συμβαίνει, ακόμα και αν η οπτική ακρίβεια αυξάνεται, γιατί το παρατηρούμενο μέγεθος βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τον οφθαλμό. Αντίθετα, στο θεώρημα 9 η οπτική πλάνη μπορεί να αποτραπεί, μέσω της αύξησης της οπτικής ακρίβειας, γεγονός για το οποίο συμβάλλει και η γεωμετρική κατάσταση που επικρατεί. Θεωρούμε πολύ σημαντικό ότι και στα δύο θεωρήματα εμπλέκεται άμεσα η υπόθεση της διακριτότητας των όψεων και ο Ευκλείδης αφήνει να διαφανεί ότι η ιδιότητα αυτή εξαρτώμενη από την απόσταση μεταξύ του παρατηρούμενου μεγέθους και του παρατηρησιακού σημείου, χωρίς να παραβλέπονται φυσικά και οι ιδιαίτερες γεωμετρικές συνθήκες που επικρατούν κάθε φορά, είναι σε θέση να παράσχει διαφορετικά αποτελέσματα, ως προς την αλήθεια της οπτικής αντίληψης.

Β. ΚΡΙΤΙΚΕΣ ΣΤΗΝ ΥΠΟΘΕΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΟΨΕΩΝ

Η ευκλείδεια υπόθεση περί της ασυνεχούς φοράς των όψεων δεν άφησε ανεπηρέαστους τους μεταγενέστερους. Δυστυχώς, ελλείψει πολλών αρχαίων κειμένων οπτικής, δε μπορούμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια τις διαστάσεις που είχε εκλάβει η κριτική τους. Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι ένας σημαντικός επικριτής ήταν ο Πτολεμαίος, ο οποίος στα *Οπτικά* του απέρριψε κατηγορηματικά τη συγκεκριμένη υπόθεση.

Ο Πτολεμαίος υιοθέτησε, όπως ο Ευκλείδης, το ακτινικό μοντέλο της όρασης θεωρώντας ότι η οπτική απορροή που αποτελείται από οπτικές ακτίνες πηγάζει από το σημείο του οφθαλμού και καταλήγει στα σημεία των παρατηρούμενων αντικειμένων. Η οπτική απορροή διαμορφώνει έναν κώνο, η βάση του οποίου

αποτελεί το οπτικό πεδίο. Ωστόσο, στα *Οπτικά* του ο Πτολεμαίος δεν περιορίστηκε, όπως ο Ευκλείδης, στη γεωμετρική περιγραφή και εξήγηση της όρασης. Προκειμένου να πραγματευτεί τα φαινόμενά της, ο Πτολεμαίος συμπεριέλαβε τη μελέτη και άλλων παραγόντων που ξεπερνούν το επίπεδο της γεωμετρίας. Για παράδειγμα, ο Πτολεμαίος δεν παρέλειψε να εξετάσει τον ρόλο των χρωμάτων και του φωτός για την ορατότητα των αντικειμένων ή να μιλήσει για τη φωτεινή φύση της οπτικής απορροής και, όπως θα δούμε παρακάτω, για τη δύναμη και την έντασή της. Υποθέτοντας πράγματα που ο Ευκλείδης είχε επιλέξει συνειδητά να αγνοήσει, ο Πτολεμαίος είχε αποφασίσει να μη μιλήσει αποκλειστικά ως μαθηματικός, αλλά να δώσει στο σύγγραμμά του, εκτός από γεωμετρικό, και φυσικό χαρακτήρα. Πρόκειται ίσως για το σημαντικότερο στοιχείο διαφοροποίησής του από τον Ευκλείδη και άμεσα συσχετιζόμενη με αυτή τη διαφοροποίηση είναι και η ρήξη που σημειώθηκε, σχετικά με την υπόθεση της διακριτότητας των όψεων. Ο Πτολεμαίος εξέφρασε την αντίθεσή του για την υπόθεση αυτή και έφτασε σε σημείο να την απορρίψει κατηγορηματικά.

Η κριτική του Πτολεμαίου προς τον Ευκλείδη ασκείται στο δεύτερο βιβλίο των *Οπτικών*[14], το οποίο είναι αφιερωμένο στον προσδιορισμό των ορατών. Ο Πτολεμαίος διέκρινε τα ορατά σε τρεις κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία είναι το καθαρό ορατό, δηλαδή η φωτεινή συμπάγεια, πράγμα που σημαίνει ότι ένα αντικείμενο δε μπορεί να ειδωθεί, αν δεν είναι αυτόφωτο ή αν δε φωτίζεται από ένα εξωτερικό φωτεινό σώμα. Επίσης, το αντικείμενο πρέπει ταυτόχρονα να είναι συμπαγές, ώστε να μπορεί να δεχτεί τη δύναμη της οπτικής απορροής. Η δεύτερη κατηγορία είναι τα πρωταρχικώς ορατά, δηλαδή τα χρώματα. Ό,τι δεν έχει χρώμα δεν οράται. Τα χρώματα δεν είναι καθαρώς ορατά, γιατί χρειάζονται το φως, προκειμένου να ειδωθούν. Στην τρίτη κατηγορία των δευτερευόντως ορατών ανήκουν η σωματικότητα, το μέγεθος, το σχήμα, η θέση, η κίνηση, η ηρεμία. Τα δευτερεύοντα ορατά γίνονται αντιληπτά με τη μεσολάβηση των επιφανειών των αντικειμένων, δηλαδή των χρωμάτων τους, όταν πέφτει πάνω τους το φως[15].

---

[14] Όπως είναι γνωστό, το πρώτο βιβλίο των *Οπτικών* του Πτολεμαίου δε διασώζεται. Οι μόνες πληροφορίες για το περιεχόμενό του δίνονται από τον ίδιο τον Πτολεμαίο, σε μια συνοπτική έκθεση που παραθέτει με μορφή εισαγωγής στο δεύτερο βιβλίο του. Σε αυτή την εισαγωγή αναφέρει περιληπτικά ότι στο πρώτο βιβλίο είχε εξηγήσει όλα όσα είναι απαραίτητο να γνωρίζει κανείς, σχετικά με την αλληλεπίδραση του φωτός με την οπτική απορροή, τον τρόπο κατά τον οποίο αφομοιώνονται, τον τρόπο κατά τον οποίο διαφοροποιούνται ως προς τη δύναμη, τη λειτουργία και τα αποτελέσματά τους. Βλ. Πτολεμαίου, *Οπτικά*, 11.6-10

[15] *ό.π.*, 12.14-13.16.

Ο αντικειμενικός τρόπος ύπαρξης των ορατών εξαρτάται από τον τρόπο διάθεσής τους, ενώ ο υποκειμενικός εξαρτάται από τη δράση της οπτικής λειτουργίας[16]. Στην πρώτη περίπτωση ερευνάται η ορατότητα, είτε συναρτήσει της έντασης της φωτεινότητας και της έντασης της φωτεινούς φύσεως οπτικής απορροής, είτε συναρτήσει φυσικών και χωρικών συνθηκών, είτε συναρτήσει της θέσης του αντικειμένου, σε σχέση με τον οπτικό κώνο. Κατά την περίπτωση του υποκειμενικού τρόπου ύπαρξης των ορατών, ο Πτολεμαίος διακρίνει ότι η όραση των καθαρών και πρωταρχικών ορατών γίνεται, μέσω ενός «*πάθους*» που δημιουργείται στην οπτική απορροή. Αντίθετα, η όραση των δευτερευόντων ορατών πραγματοποιείται, μέσω των συμβεβηκότων του πάθους[17].

Αφού ολοκληρωθεί η συζήτηση του Πτολεμαίου, σχετικά με τον τρόπο της οπτικής αντίληψης των χρωμάτων, αλλά και της θέσης ενός αντικειμένου, αρχίζει η ανάλυση του τρόπου, με τον οποίο γίνεται οπτικά αντιληπτό το μέγεθός του. Κατά τον Πτολεμαίο, ο προσδιορισμός του μεγέθους είναι μια σύνθετη διαδικασία. Υποστηρίζει ότι το μέγεθος γίνεται οπτικά αντιληπτό, κυρίως, μέσω της οπτικής γωνίας, υπό την οποία παρατηρείται, συμφωνώντας έτσι με τον Ευκλείδη. Ωστόσο, ο Πτολεμαίος θέτει και ορισμένες άλλες παραμέτρους, όπως την απόσταση του παρατηρούμενου αντικειμένου από τον οφθαλμό, αλλά και την κλίση του, σχετικά με τον οφθαλμό[18], δηλαδή αν ο άξονας του οπτικού κώνου είναι κάθετος προς την επιφάνεια του παρατηρούμενου αντικειμένου. Από το σημείο αυτό ξεκινά η κριτική του προς την υπόθεση της διακριτότητας των ακτίνων, λέγοντας ότι δεν είναι σωστή η άποψη όσων ισχυρίζονται ότι ένα μέγεθος που βρίσκεται πολύ μακριά δε φαίνεται καθόλου, επειδή πέφτει στο μικρό διάστημα που διαμορφώνουν οι όψεις:

«*Επίσης, δεν οφείλεται στο ότι πέφτει, ανάμεσα στο διάστημα των οπτικών ακτίνων, που ένα πολύ μικρό αντικείμενο δεν οράται. Αντίθετα, πρέπει να γίνει κατανοητό ότι, όσον αφορά στην αίσθηση της όρασης, η φύση της οπτικής ακτινοβολίας είναι κατ' ανάγκη συνεχής, παρά διακριτή. Αλλά, αν φέρουμε μαθηματικές αποδείξεις και πραγματευτούμε τις οπτικές ακτίνες σαν να είναι ευθείες γραμμές, [έπεται ότι] μεγάλα αντικείμενα που βρίσκονται τόσο μακριά όσο άλλα μικρά που δεν είναι ορατά, εξαιτίας του μικρού μεγέθους τους, θα εξακολουθούν να είναι ορατά. Αυτό δε θα συνέβαινε, αν οι οπτικές ακτίνες μειώνονταν [σε αριθμό] σε αυτή την απόσταση και διαχέονταν. Αντίθετα, ένα μεγάλο και ένα μικρό αντικείμενο θα έμοιαζαν όμοια σε αυτή*

[16] 12.9-11.
[17] 22.1-16.
[18] 38.9-45.5.

τη θέση. Γιατί, αν η ακτινοβολία που πέφτει σε όλη τη βάση του οπτικού κώνου αποτελείται από διακριτές ακτίνες, καθεμία από τις οποίες συλλαμβάνει ένα σημείο [του αντικειμένου], τότε, υποθέτοντας ότι υπάρχει μια πραγματική, χωρική απόσταση μεταξύ αυτών των σημείων, οτιδήποτε βρίσκεται μακριά δε θα έπρεπε να οράται, γιατί η οπτική απορροή δεν πέφτει σε αυτά [τα διαστήματα]. Ούτε καν τα σημεία θα γίνονταν ορατά, γιατί δεν έχουν μέγεθος και δεν υπόκεινται σε καμία γωνία. Επομένως, κάθε τέτοιο αντικείμενο θα είναι μη ορατό»[19].

Σύμφωνα με το παραπάνω επιχείρημα, γίνεται εμφανές ότι, κατά τη θεώρηση του Πτολεμαίου, οι διακριτές, μαθηματικές οπτικές ακτίνες αποτελούν ένα βολικό αναλυτικό μέσο, αλλά δε συνιστούν φυσική πραγματικότητα. Η βάση της επιχειρηματολογίας του είναι, αφενός, ότι τα γεωμετρικά σημεία αποτελούν αδιάστατες οντότητες και, αφετέρου, ότι τίποτα δε γίνεται αντιληπτό, αν δεν έχει διαστάσεις. Εφόσον λοιπόν τα σημεία του αντικειμένου, πάνω στα οποία πέφτουν οι διακριτές όψεις, δεν έχουν διαστάσεις, επομένως, δεν είναι δυνατόν να ειδωθούν. Η διακριτότητα των οπτικών ακτίνων που υπέθεσε ο Ευκλείδης βρήκε αντίθετο τον Πτολεμαίο, καθώς είχε άμεση συνέπεια την οπτική αντίληψη αδιάστατων σημείων. Σύμφωνα με τον Πτολεμαίο, μέσω της υπόθεσης της διακριτής, μη συνεχούς φύσης της οπτικής ακτινοβολίας, ο οφθαλμός δε δύναται να αντιληφθεί τη διαφορά ως προς το μέγεθος δύο άνισων και απομακρυσμένων από τον οφθαλμό παρατηρούμενων αντικειμένων.

Το επιχείρημα του Πτολεμαίου εμφανίζεται ξανά, πολύ αργότερα, στον Al-Kindi, στο έργο του *Διόρθωση των σφαλμάτων και των δυσκολιών που οφείλονται στον Ευκλείδη στο έργο του Οπτικά*[20]. Κατά την εξέταση του πρώτου θεωρήματος των *Οπτικών*, ο Al-Kindi το χαρακτηρίζει ως εσφαλμένο και απορρίπτει τη διακριτότητα των όψεων, γιατί, αν δεχτούμε ότι συμβαίνει, «*η όψη δεν αντιλαμβάνεται παρά ένα σημείο, για να μετατοπιστεί στη συνέχεια σε ένα άλλο σημείο και, με αυτόν τον τρόπο, δεν αντιλαμβάνεται τίποτα, γιατί το σημείο δεν έχει ούτε μήκος, ούτε πλάτος, ούτε βάθος και αυτό που δεν έχει ούτε μήκος, ούτε πλάτος, ούτε βάθος δε γίνεται αντιληπτό από την αίσθηση και δεν έχει χρώμα. Έτσι, η όψη δε μετατοπίζεται παρά από ένα μη αντιληπτό σώμα σε ένα άλλο μη αντιληπτό σώμα. Συνεπώς, αν ο οφθαλμός δε βλέπει*

[19] 37.4-21.

[20] Ο Al-Kindi ήκμασε κατά τον 9ο αιώνα. Είχε εγκυκλοπαιδικές γνώσεις. Είναι πολύ γνωστός κυρίως για την πραγματεία του *De aspectibus* που σχετίζεται με την οπτική. Το έργο που αναφέρεται στη μελέτη μας αποτελεί μια κριτική ανάγνωση των *Οπτικών* του Ευκλείδη από τον Al-Kindi και δεν ήταν σε κανέναν γνωστό, μέχρι που ανακαλύφθηκε πρόσφατα από τον R. Rashed. Βλ. Rashed, R., *L' optique et la catoptrique*, Leiden: Brill 1997.

παρά από σημείο σε σημείο, τότε βλέπει αυτό που είναι μη ορατό, πράγμα που αποτελεί πολύ σοκαριστική αντίφαση»[21]. Το επιχείρημα του Al-Kindi έχει ίδια βάση με το επιχείρημα του Πτολεμαίου. Τα σημεία, πάνω στα οποία πέφτουν οι όψεις είναι αδιάστατα, επομένως, δεν είναι δυνατόν να ειδωθούν.

Γ. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μέσω της ανάλυσης των θεωρημάτων 1 και 3 των *Οπτικών*, τα οποία βασίζονται άμεσα στην υπόθεση της ασυνέχειας των όψεων, αλλά και μέσω της εξέτασης των θεωρημάτων 22 και 9 που αποτελούν άρρικτο κρίκο στη συλλογιστική-αξιωματική αλυσίδα του Ευκλείδη ως άμεσα εξαρτώμενα από τα 1 και 3, είχαμε τη δυνατότητα να διαλευκάνουμε ορισμένα θολά σημεία, σχετικά με αυτό το πολύ ιδιαίτερο γνώρισμα των όψεων, τη διακριτότητα. Η μελέτη μας φανέρωσε ότι η διακριτότητα των όψεων αποτελεί μια επινόηση του Ευκλείδη που του επιτρέπει να εκτιμά τη σχετικότητα που διέπει τις οπτικές εμφανίσεις, όταν αυτή αφορά στην ποιότητα της ορατότητας. Όπως ακριβώς είχε αναθέσει στο μέγεθος των οπτικών γωνιών να αποδίδουν τη σχετικότητα του μεγέθους των παρατηρούμενων αντικειμένων ή στη θέση που κατέχουν οι οπτικές ακτίνες στον οπτικό κώνο να αποδίδουν τη σχετικότητα της θέσης του, με τον ίδιο τρόπο, ο Ευκλείδης προσάπτει στις όψεις έναν ασυνεχή χαρακτήρα, προκειμένου να έχει τη δυνατότητα να εξηγεί τις πλάνες και τις οφθαλμαπάτες που διέπουν την οπτική αντίληψη.

Αναλυτικότερα, όπως προκύπτει από τα θεωρήματα του Ευκλείδη, αν εξαιρέσουμε τις επιμέρους γεωμετρικές συνθήκες της παρατήρησης που ισχύουν κάθε φορά και εστιάσουμε την προσοχή μας αποκλειστικά στον τρόπο, με τον οποίο δρα η διακριτότητα των όψεων εξαρτώμενη πάντα από την απόσταση που υπάρχει μεταξύ του παρατηρούμενου μεγέθους και του παρατηρησιακού σημείου, μπορούμε να διακρίνουμε τα αποτελέσματα που αυτή επιφέρει σε δύο κατηγορίες:

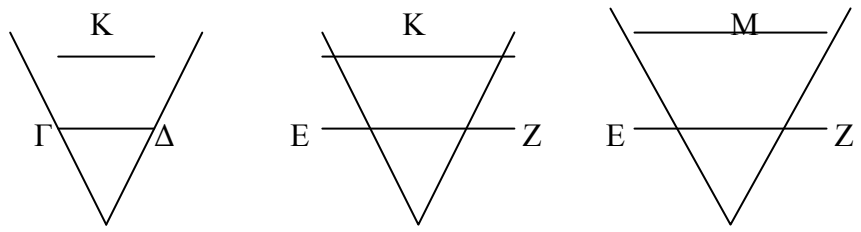
α) Εάν η απόσταση του παρατηρούμενου μεγέθους από τον οφθαλμό δεν ξεπερνά ένα ορισμένο μήκος, τότε η ορατότητα είναι δυνατή, αλλά, εξαιτίας της διακριτότητας των όψεων, ποτέ ολοκληρωμένη. Παράδειγμα αυτής της περίπτωσης αποτελεί το θεώρημα 22.

β) Εάν η απόσταση του παρατηρούμενου μεγέθους από τον οφθαλμό ξεπερνά ένα ορισμένο μήκος, τότε η ορατότητα, εξαιτίας της διακριτότητας των όψεων, είναι αδύνατη. Παράδειγμα αυτής της περίπτωσης αποτελεί το θεώρημα 9.

---

[21] Rashed, *L' optique…*, *έ.α.*, 164.70^{r}.

Το μήκος της απόστασης, από το οποίο εξαρτάται η ορατότητα ή η μη ορατότητα του παρατηρούμενου μεγέθους, δεν προσδιορίζεται από τον Ευκλείδη, ωστόσο, μπορούμε να το κατανοήσουμε ως ένα ελάχιστο όριο ορατότητας. Πέρα από αυτό το όριο, η ορατότητα του μεγέθους δεν είναι εφικτή. Όσον αφορά στους παράγοντες από τους οποίους εξαρτάται αυτό το ελάχιστο όριο ορατότητας, ο Ευκλείδης παρέλειψε να αναφερθεί. Ωστόσο, μέσω της εξέτασης των θεωρημάτων, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αυτό εξαρτάται από το μέγεθος του εκάστοτε παρατηρούμενου αντικειμένου, εφόσον η γωνία που σχηματίζουν οι όψεις παραμένει αμετάβλητη. Συνεπώς, ενώ το μέγεθος ΓΔ του θεωρήματος 3 δεν είναι πλέον ορατό στην απόσταση Κ (σχήμα α), δε μπορούμε να ισχυριστούμε το ίδιο και για ένα μεγαλύτερο μέγεθος, πχ. το ΕΖ, που, εάν υποθέσουμε ότι η οπτική γωνία παραμένει σταθερή, στην ίδια απόσταση Κ το μέγεθος θα εξακολουθεί να είναι ορατό (σχήμα β). Αντίθετα, διατηρώντας πάντα την ίδια γωνία το μέγεθος ΕΖ θα χρειαστεί να βρεθεί σε μια μεγαλύτερη απόσταση Μ, ώστε να μην είναι ορατό (σχήμα γ):



Σχήμα α Σχήμα β Σχήμα γ

Θεωρούμε ότι ο κυριότερος λόγος που ανάγκασε τον Ευκλείδη να υποθέσει την ασυνέχεια των όψεων οφείλεται αποκλειστικά στη μεθοδολογική του απαίτηση να περιγράψει και να εξηγήσει τα φαινόμενα της όρασης στηριζόμενος αποκλειστικά σε γεωμετρικά εργαλεία. Σε αντίθεση με άλλους εκπροσώπους ακτινικών θεωριών, όπως τον Πτολεμαίο, ο Ευκλείδης είχε αποφασίσει να μη διαθέτει κανέναν άλλο τρόπο που να του επιτρέπει να αιτιολογήσει περί της μη ορατότητας κάποιου σώματος σε μια ορισμένη θέση, ενώ είναι γνωστό ότι πράγματι βρίσκεται εκεί, ή, γενικότερα, περί της μη άμεσης και μερικής ορατότητας κάποιου σώματος. Εξαιτίας της επιλογής του να εργαστεί μόνο ως γεωμέτρης, δεν είχε στα χέρια του κανένα εργαλείο που να τον βοηθά στην ποιοτική αξιολόγηση της οπτικής αντίληψης ούτε

κάποιο άλλο μέσο που να λειτουργεί ως κριτήριο για την εκτίμηση της οπτικής ακρίβειας.

Όλα τα παραπάνω αποτελούν σοβαρά προβλήματα της όρασης και μάλιστα είναι αυτά που της προσδίδουν τον χαρακτήρα της σχετικότητας. Κάθε θεωρία όρασης ήταν αναγκασμένη να εξηγήσει τους λόγους εμφάνισης αυτής της φαινομενικότητας που συναντάται τόσο συχνά, αλλά και που είναι άρρικτα συνδεδεμένη με κάθε είδους επιστημονική έρευνα Ας μην ξεχνάμε ότι οι ελληνιστικοί φιλοσοφικοί κύκλοι είχαν ρίξει από τη μεριά τους ιδιαίτερο βάρος στον ρόλο της αισθητηριακής αντίληψης, για την απόκτηση της ασφαλούς γνώσης, καθώς είχε συνειδητοποιηθεί η αναξιοπιστία των παρατηρήσεων. Ο τετράγωνος πύργος που παρατηρείται από μακρινή απόσταση φαίνεται ως στρογγυλός, τα ουράνια σώματα παρουσιάζουν μεταβολές ως προς το μέγεθος και τη λαμπρότητά τους, ενώ η απεικόνιση της στρογγυλής ασπίδας που παρουσιάζει κλίση, σε σχέση με το σημείο παρατήρησης, γινόταν από τους ζωγράφους, μέσω ενός ωοειδούς σχήματος που είχε αποκτήσει μάλιστα την ξεχωριστή ονομασία «*θυρεός*». Όλα αυτά αποτελούσαν φαινόμενα που κατέκλυζαν την καθημερινή ζωή, την τέχνη, τις επιστήμες και απαιτούσαν σαφείς απαντήσεις. Συνεπώς, κάθε οπτική θεωρία όφειλε απαραιτήτως να συμπεριλαμβάνει στο ερευνητικό της πρόγραμμα τη μελέτη και την εξήγησή τους, ανεξαρτήτως της μεθοδολογικής οδού που θα ακολουθούσε.

Κατά ανάλογο τρόπο, ο Ευκλείδης δε μπορούσε να αγνοήσει τις απαιτήσεις της εποχής του, ακόμα και αν, από μεθοδολογική άποψη, βρισκόταν ίσως σε πιο δύσκολη θέση. Και αυτό γιατί τα παραπάνω προβλήματα θα μπορούσαν κάλλιστα να εξηγηθούν, μέσω της υπόθεσης της φωτεινής φύσης των ακτίνων, κάτι που έκαναν όλοι οι θεωρητικοί της όρασης, εκτός από τον Ευκλείδη. Για παράδειγμα, αν μείνουμε στο πλαίσιο του ακτινικού μοντέλου, ο Πτολεμαίος δεν εξηγούσε τη μη ορατότητα ενός μεγέθους που βρίσκεται πολύ μακριά αποκλειστικά μέσω της εξέτασης της οπτικής γωνίας, υπό την οποία παρατηρείται. Ο Πτολεμαίος έλεγε ότι η μη ορατότητα ενός απομακρυσμένου μεγέθους συμβαίνει, επειδή η φωτεινότητα της οπτικής απορροής, δηλαδή των οπτικών ακτίνων, εξασθενεί, όσο απομακρύνεται από τον οφθαλμό. Επιπλέον, ο Δαμιανός, ο οποίος υιοθέτησε την υπόθεση της διακριτότητας των όψεων, παρόλα αυτά άσκησε κριτική στο πρώτο θεώρημα του Ευκλείδη και απέρριψε το ότι κανένα από τα παρατηρούμενα αντικείμενα δεν οράται αμέσως ολόκληρο. Ο Δαμιανός διαφωνούσε με την παραπάνω πρόταση υποστηρίζοντας ότι, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, η ολοκληρωμένη οπτική αντίληψη των αντικειμένων είναι δυνατή. Μεταξύ αυτών των προϋποθέσεων, ο

Δαμιανός συμπεριελάμβανε και την υπόθεση της φωτεινής φύσης των όψεων και, συνεπώς, τη διαμόρφωση ενός φωτεινού οπτικού κώνου, γεγονός που συμβάλλει στην καλύτερη και ακριβέστερη ορατότητα[22]. Αντίθετα με τον Πτολεμαίο και τον Δαμιανό, ο Ευκλείδης είχε αρνηθεί να συμπεριλάβει στο μοντέλο του φυσικούς παράγοντες, όπως το φως, και αποπειράθηκε να εξηγήσει τον πολύπλοκο μηχανισμό της όρασης με ό,τι διέθετε πάντα: σημεία και ευθείες. Εκτιμούμε ότι ο Ευκλείδης είχε επίγνωση ότι η υπόθεση της διακριτότητας των όψεων θα αποτελούσε την αχίλλειο πτέρνα του. Γνώριζε ότι ουσιαστικά υπέθετε αυτό, για το οποίο κατηγορήθηκε, δηλαδή την ορατότητα αδιάστατων σημείων. Ωστόσο, για εκείνον η διακριτότητα των όψεων συνιστούσε μια αναγκαστική σύμβαση που δε μπορούσε να αποφύγει.

Η υπόθεση της διακριτότητας των όψεων δημιουργεί σοβαρά προβλήματα θεμελίωσης, στα οποία δεν αναφερθήκαμε, μέχρι στιγμής. Ο λόγος, για τον οποίο θεωρήσαμε απαραίτητο να μην επεκταθούμε σε αυτά, οφείλεται στην απόφασή μας να μελετήσουμε αρχικά την έννοια της ασυνέχειας των όψεων απερίσπαστοι από άλλα ζητήματα. Η εξέτασή της έγινε, μέσω των συγκεκριμένων θεωρημάτων των δύο εκδόσεων, όπου γίνεται επικλητή. Όμως σε κανένα σημείο της μελέτης μας δεν παραπέμψαμε στους «όρους» των δύο εκδόσεων, στους οποίους θα πρέπει λογικά να προϋποτίθεται. Και αυτό γιατί η διακριτότητα των όψεων, παρόλο που αποτελεί -όπως διαπιστώσαμε- τη βάση, για την εδραίωση αρκετών θεωρημάτων και των δύο εκδόσεων, ωστόσο, η ίδια δεν εκφέρεται ρητά παρά στους «όρους» της μιας έκδοσης.

Συγκεκριμένα, η ασυνέχεια των όψεων διατυπώνεται ξεκάθαρα μόνο στον πρώτο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Αντίθετα, ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών* δε φαίνεται να την υποθέτει. Αν συμφωνήσουμε με την οργάνωση των δύο εκδόσεων που πρότεινε ο Heiberg και θεωρήσουμε ότι τα *Οπτικά* ανήκουν στον Ευκλείδη, τότε θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ο συγγραφέας του πρώτου «όρου» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* διαπιστώνοντας την απουσία της διακριτότητας από τους «όρους» των *Οπτικών* προσπάθησε να καλύψει το κενό και να υποθέσει την ιδιότητα αυτή στον πρώτο «όρο» της μεταγενέστερης έκδοσής του. Όσο εύλογο και αν ακούγεται αυτό το σενάριο, άλλο τόσο εύλογο ακούγεται το ερώτημα που αφορά στο γιατί ο Ευκλείδης να φανεί τόσο ασυνεπής και να ρισκάρει την αξιωματική δομή του έργου του επιλέγοντας να μη διατυπώσει το πιο ιδιαίτερο γνώρισμα του μοντέλου του, τη διακριτότητα των όψεων, στους «όρους» των *Οπτικών*;

[22] Δαμιανού, *Οπτικές Υποθέσεις*, 6.1-5. Η οπτική θεωρία του Δαμιανού θα μας απασχολήσει στο έβδομο κεφάλαιο.

Το παραπάνω ερώτημα έλκυσε το ενδιαφέρον μας ίσως περισσότερο από κάθε άλλο, κυρίως, γιατί θεωρούσαμε ανεξήγητο να μην τίθεται η διακριτότητα των όψεων στους «όρους» της ευκλείδειας πραγματείας. Όσο και αν προσπαθήσαμε, δεν καταφέραμε να βρούμε καμία απάντηση που να δικαιολογεί μια τέτοια απόφαση εκ μέρους του Ευκλείδη. Γι' αυτό ξεκινήσαμε τη μελέτη του πρώτου «όρου» των *Οπτικών*, μιας πρότασης που, ενώ έχει καθιερωθεί πια ως έκφραση της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων, εξακολουθεί να αποτελεί για πολλούς μελετητές μια περίεργη διατύπωση. Η έρευνά μας οδήγησε σε έναν νέο τρόπο ανάγνωσης του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* που έδιωξε το πέπλο που μέχρι τώρα τον έκρυβε και αποκάλυψε την ουσία του. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα περιγράψουμε τα βήματα της έρευνάς μας. Θα παρουσιάσουμε τον νέο τρόπο ανάγνωσης του πρώτου «όρου», ο οποίος απαντά στα ερωτήματα που σχετίζονται με τη θεμελίωση της διακριτότητας, και, κυρίως, συμβάλλει στο ξεκαθάρισμα του επίμαχου ζητήματος της ταυτότητας των δύο εκδόσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΜΙΑ ΝΕΑ ΑΝΑΓΝΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ «ΟΡΟΥ» ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ*

Α. ΝΟΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ «ΟΡΟΥ» ΤΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ*

1. Ο πρώτος «όρος» των Οπτικών: τρεις διαφορετικές αναγνώσεις, τρεις διαφορετικές ερμηνείες

Ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών* αναφέρει τα εξής: «*Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐξαγομένας εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*». Πολλοί μελετητές έχουν επισημάνει την ασάφεια που βλέπουν να διέπει την παραπάνω πρόταση[1]. Πράγματι, ενέχει πολλά προβλήματα, καθώς φαίνεται ότι μπορεί να εκλάβει περισσότερα του ενός νοήματος. Οι δυσκολίες εντοπίζονται κυρίως στον πολυσήμαντο τρόπο διατύπωσης του «*φέρεσθαι διάστημα*», αλλά και στην αδιευκρίνιστη έκφραση «*μεγεθῶν μεγάλων*». Θεωρούμε αναγκαίο, προτού επιχειρήσουμε τη νοηματική προσέγγιση της συγκεκριμένης πρότασης, να μελετήσουμε αρχικά τις σημασίες των λέξεων που αυτή φέρει ξεκινώντας από τις σημασίες των λέξεων της επίμαχης έκφρασης «*φέρεσθαι διάστημα*».

---

[1] Οι M.R. Cohen και I.E. Drabkin αναφέρουν χαρακτηριστικά ότι «*Το ακριβές νόημα του όρου είναι αμφίβολο και η μορφή γραφής, υπό την οποία δίδεται, υποθετική, αν και, σύμφωνα με ένα σχόλιο, το νόημα θα ήταν ουσιαστικά το ίδιο με εκείνο της Αναθεωρημένης Έκδοσης του Θέωνα...*». (Σημειώνουμε ότι το σχόλιο στο οποίο αναφέρονται οι Cohen και Drabkin ανήκει σε έναν ανώνυμο σχολιαστή και συμπεριλαμβάνεται μεταξύ των υπόλοιπων σχολίων που ακολουθούν το κείμενο των *Οπτικών* στην έκδοση του Heiberg. Ο συγκεκριμένος σχολιαστής επεξηγεί τον όρο «*διάστημα*» του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* ως «*κατὰ διαστάσεις καὶ τὰς ἀπ' ἀλλήλων* (ενν. *των όψεων*) *ἀποτμήσεις*». Ο αντίστοιχος «όρος» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* του Θέωνα υπενθυμίζουμε ότι είναι: «*Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ὄψεις κατ' εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι διάστημά τι ποιούσας ἀπ' ἀλλήλων*». Για τη θέση των Cohen και Drabkin, βλ. *A Source Book in Greek Science*, Harvard University Press 1975, υποσημ. 2, σ. 257. Για το ανώνυμο σχόλιο, βλ. *Scholia in Euclidis optica (scholia vetera)*, έκδ. J.L. Heiberg, *Euclidis opera omnia*, τόμ. 7, Λειψία: Teubner 1895, σσ. 125-141, σχόλιο 1, στ. 1-2). Επιπλέον, ο A. Jones συγκρίνοντας τις δύο μορφές γραφής του πρώτου «όρου» των δύο εκδόσεων εκτιμά ότι «*στον αναγνώστη του πρώτου όρου της έκδοσης των Οπτικών λέγεται απλά ότι οι «ευθείες γραμμές» που εξάγονται από το μάτι διατρέχουν «διάστημα μεγάλων μεγεθών», μια μάλλον αδέξια έκφραση που πιθανώς σημαίνει «πολύ μακριά»*. ("Peripatetic and Euclidean Theories of the Visual Ray", *Physis 31* (1994) no 1, σ. 52.) Τέλος, ο R. Rashed διαπιστώνει ότι στα κειμενικά προβλήματα που διέπουν τους «όρους» των δύο εκδόσεων «*προστίθενται κι άλλα -το θέμα είναι ακόμη πιο σοβαρό- σχετικά με τον ορισμό της ιδρυτικής ιδέας των Οπτικών. Πρόκειται για τον πρώτο «όρο», για τον οποίο δεν έχει σταματήσει για πολύ καιρό να καταδεικνύεται η ασάφεια στην έκδοση των Οπτικών... φράση, της οποίας το νόημα δεν είναι καθόλου ικανοποιητικό*». (*L' optique et la catoptrique*, *έ.α.*, σ. 69.)

Ανατρέχοντας σε μαθηματικά κείμενα της Αρχαιότητας διαπιστώσαμε ότι το απαρέμφατο «*φέρεσθαι*», αλλά και λέξεις που ανήκουν στην ίδια οικογένεια, χρησιμοποιούνται, για να δηλώσουν τη μετατόπιση ενός γεωμετρικού στοιχείου από ένα σημείο σε ένα άλλο είτε ευθύγραμμα[2] είτε περιστροφικά, γύρω από έναν άξονα[3]. Ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών* δεν υπεισέρχεται καθόλου σε λεπτομέρειες που να αφορούν στα χαρακτηριστικά αυτής της «φοράς». Το μόνο στοιχείο της πρότασης που ενδεχομένως μπορεί να βοηθήσει, ώστε να γίνει πιο κατανοητή η «φορά» των ευθείων γραμμών είναι η λέξη «*διάστημα*» που ακολουθεί αμέσως μετά. Στην αρχαία ελληνική γεωμετρική ορολογία ο όρος «*διάστημα*» αποδίδει την απόσταση μεταξύ δύο γεωμετρικών στοιχείων[4] και σε αρκετές περιπτώσεις συγκεκριμενοποιείται στην απόσταση, ανάμεσα στο κέντρο και σε ένα σημείο της περιφέρειας κάποιου κύκλου υποδηλώνοντας έτσι ειδικότερα την έννοια της ακτίνας[5]. Λαμβάνοντας υπόψη τους

---

[2] Για παράδειγμα, στο *Οχουμένων* του Αρχιμήδη διαβάζουμε ότι «*Ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν σχήματος, ὅ ἐστιν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ, τὸ βάρος ἐς τὸ κάτω φέρεται κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν ΛΣ...*» (3, 19.22-23) και στα *Πνευματικά* του Ήρωνος Αλεξανδρινού ότι «*φέρεται* (ενν. *τα βάρη*) *γὰρ καὶ ταῦτα τάχιον μὲν κατὰ τὸν συνεγγίζοντα τῷ κάτω τόπον...*» (I, 1, προοίμ., 145-147). Επίσης, στη *Μαθηματική Σύνταξη* ο Πτολεμαίος αναφέρει ότι «*...ἥ τε γῆ τὸν μέσον ἐπέχει τόπον τοῦ κόσμου καὶ τὰ βάρη πάντα ἐπ' αὐτὴν φέρεται...*» (1.1, 21.16-18).

[3] Για παράδειγμα, στα *Στοιχεία* ο Ευκλείδης ορίζει ότι «*Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα*» (XI, «*όρος*» 14), ενώ ο Αρχιμήδης αναφέρει στο *Περί ελίκων* ότι «*...πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιφερομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ*» (κεφ. 2, 11.24-27). Επίσης, στη *Μαθηματική Συναγωγή* του Πάππου διαβάζουμε ότι «*κεκινήσθω ἡ ΒΑ εὐθεῖα οὕτως ὥστε τὸ μὲν Β μένειν, τὸ δὲ Α ὁμαλῶς φέρεσθαι κατὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἅμα δὲ αὐτῇ ἀρξάμενόν τι σημεῖον ἀπὸ τοῦ Β φερέσθω κατ᾽ αὐτῆς ὁμαλῶς ὡς ἐπὶ τὸ Α, καὶ ἐν ἴσῳ χρόνῳ τό τε ἀπὸ τοῦ Β σημεῖον τὴν ΒΑ διερχέσθω καὶ τὸ Α τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν*» (IV, 234. 7-15).

[4] Για παράδειγμα, στα *Κωνικά* του Απολλώνιου συναντάμε την έκφραση «*Αἱ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ τομὴ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόν τε προσάγουσιν ἑαυταῖς καὶ παντὸς τοῦ δοθέντος διαστήματος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα*» (II, 14.1-4). Τέλος, ο Πρόκλος αναφέρει στα *Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη* ότι «*ἡ γὰρ κάθετος τά τε ὕψη τῶν χωρίων καὶ τὰ διαστήματα τῶν γραμμῶν ὁρίζειν δύναται. διόπερ ἴσων μὲν τῶν καθέτων οὐσῶν ἴσα τὰ διαστήματα τῶν εὐθειῶν...*» (176.11-14).

[5] Για παράδειγμα, στα *Στοιχεία* ο Ευκλείδης περιγράφει ότι «*...καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ*» (I, θεώρ.3), ενώ ο Πάππος στη *Μαθηματική Συναγωγή* δηλώνει ότι «*δυνατὸν δέ ἐστιν ἐν ἐπιπέδῳ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφειν...*» (VI, 526.31-32).

παραπάνω ορισμούς του «*φέρεσθαι*» και του «*διαστήματος*» ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών* θα μπορούσε να εκλάβει τρία διαφορετικά νοήματα[6]:

α) «*Υποτίθεται ότι οι ευθείες γραμμές που εξάγονται από το μάτι διαδίδονται σε απόσταση μεγάλου μεγέθους*».

β) «*Υποτίθεται ότι οι ευθείες γραμμές που εξάγονται από το μάτι περιστρέφονται* (ενν. *κυκλικά*) *σε ακτίνα μεγάλου μεγέθους*».

γ) «*Υποτίθεται ότι οι ευθείες γραμμές που εξάγονται από το μάτι διαδίδονται (διαμορφώνοντας μεταξύ τους) διαστήματα μεγάλου μεγέθους*».

Στη συνέχεια, θα εξεταστεί καθένας από τους παραπάνω τρόπους ανάγνωσης του πρώτου «όρου» ξεχωριστά. Το κύριο ερώτημα που θα κατευθύνει στο εξής την έρευνά μας είναι πώς πρέπει τελικά να εκληφθεί ο πρώτος «όρος», ώστε όχι μόνο να αποδίδεται ορθά, αλλά και να εκφράζει την αρχική σκέψη του συγγραφέα του;

α) Εξετάζοντας τον πρώτο τρόπο ανάγνωσης του πρώτου «όρου»

Αυτό που κατανοεί κάποιος, όταν επιχειρεί μια πρώτη ανάγνωση του πρώτου «όρου», είναι ότι ο συγγραφέας του υποθέτει πως οι ευθείες γραμμές που εξάγονται από το μάτι φέρονται σε απόσταση μεγάλου μεγέθους. Πρόκειται, όπως είπαμε, για τον καθιερωμένο πλέον τρόπο ανάγνωσης της συγκεκριμένης πρότασης. Στην περίπτωση αυτή το «*φέρεσθαι*» νοείται ως κίνηση των ευθειών γραμμών από το μάτι, εώς τα σημεία των παρατηρούμενων αντικειμένων, στα οποία προσπίπτουν. Το «*φέρεσθαι*» εκλαμβάνει την πρώτη σημασία που προαναφέρθηκε, αυτή της μετάθεσης από ένα σημείο σε ένα άλλο, αλλά, επειδή πρόκειται για «φορά» ευθείων γραμμών και μάλιστα ειδωμένης στο πλαίσιο της θεωρίας των όψεων, θεωρούμε ότι είναι ορθότερο να μιλάμε για *διάδοση*[7]. Από την άλλη μεριά, το «*διάστημα*» εξέλαβε τη σημασία της απόστασης που υπάρχει, ανάμεσα στο σημείο του ματιού και στα σημεία του παρατηρούμενου αντικειμένου, όπου καταλήγουν οι ευθείες γραμμές.

---

[6] Για την ώρα, θα παρουσιάσουμε τα διάφορα νοήματα που είναι πιθανό να εκλάβει η συγκεκριμένη πρόταση αφήνοντας κατά μέρους τη φιλολογική προσέγγιση, δηλαδή, χωρίς να εστιάσουμε στη συντακτική ή γραμματική δομή που απαιτείται κάθε φορά, ώστε να δηλωθεί με ορθό τρόπο το συγκεκριμένο νόημα. Μια τέτοια, φιλολογικού τύπου, προσέγγιση θα πραγματοποιηθεί στη συνέχεια.

[7] Αντίθετα με τις οπτικές ακτίνες του Πτολεμαίου που, όσο απομακρύνονται από τον οφθαλμό, τόσο πιο πολύ εξασθενούν σε δύναμη φωτεινότητας, οι οπτικές ακτίνες της ευκλείδειας γεωμετρικής οπτικής δεν υφίστανται καμία τέτοιου είδους ποιοτική μεταβολή κατά τη διάδοσή τους. Ο Ευκλείδης νοεί και πραγματεύεται τις οπτικές ακτίνες αυστηρά ως γεωμετρικές ευθείες, χωρίς να κάνει καθόλου λόγο για τη φύση τους.

Η ανάγνωση του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* ως «Υ*ποτίθεται ότι οι ευθείες γραμμές που εξάγονται από το μάτι διαδίδονται σε απόσταση μεγάλου μεγέθους*» είναι ερμηνευτικά συμβατή με το σύνολο του έργου. Είναι ικανοποιητική, εφόσον όλα τα θεωρήματα βασίζονται στο ότι οι ευθείες γραμμές που ξεκινούν από το μάτι διαγράφουν ευθύγραμμη πορεία, μέχρι να φτάσουν σε σημεία του παρατηρούμενου αντικειμένου. Πρόκειται για μια σημαντικότατη ιδιότητα των οπτικών ακτίνων που συναντάται σε όλες τις αποδείξεις των θεωρημάτων και δηλώνεται στα *Οπτικά* με διάφορες εκφράσεις, όπως «*προσπιπτέτωσαν ὄψεις*», «*προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες*», «*ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι*», «*μεταπιπτέτωσαν αἱ ἀκτῖνες*», «*ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπιζευγνυμένη*», «*ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἀκτῖνες ἤχθωσαν*». Με όποιον τρόπο και αν διατυπώνεται, σε όλες τις περιπτώσεις το μάτι συνδέεται γεωμετρικά με σημεία του παρατηρούμενου αντικειμένου, μέσω ευθείων γραμμών. Ωστόσο, είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η χρήση του ρήματος «*φέρομαι*», για να δηλώσει τη θεμελιώδη ιδιότητα της ευθύγραμμης διάδοσης των οπτικών ακτίνων, δεν απαντάται σχεδόν πουθενά στα *Οπτικά*. Η μοναδική περίπτωση που συναντάται το ρήμα αυτό με τη σημασία της διάδοσης είναι το θεώρημα 32, αλλά, ακόμα και εκεί, αφενός το «*φέρομαι*» δε συνοδεύεται από τη λέξη «*διάστημα*», αφετέρου ο τρόπος διατύπωσης είναι εντελώς διαφορετικός από εκείνον του πρώτου «όρου». Συγκεκριμένα, στο θεώρημα 32 των *Οπτικών* διαβάζουμε ότι «...*ἐπειδήπερ ἐπὶ παραλλήλου ἐπιπέδου κεῖται τὸ ὄμμα, κατ' εὐθείας δὲ γραμμὰς φέρονται αἱ ὄψεις*» και «*ἐπεὶ οὖν ἐπὶ παραλλήλου μὲν ἐπιπέδου κατ' εὐθείας γραμμὰς φέρονται αἱ ὄψεις...*»[8].

Μέχρι στιγμής, παρατηρούμε ότι ο πρώτος τρόπος ανάγνωσης του πρώτου «όρου» είναι ικανοποιητικός, εφόσον δεν παραβιάζει τα θεωρητικά πλαίσια της πραγματείας, αλλά, αντίθετα, τα ενισχύει έχοντας τη δυνατότητα να αποτελέσει τόσο τη θεωρητική όσο και τη μεθοδολογική βάση, για τη θεμελίωση των προτάσεών της. Βέβαια, τα ελάχιστα ίχνη εμφάνισης του ρηματικού τύπου «*φέρεσθαι*» ως έκφρασης της έννοιας της διάδοσης και η χρησιμοποίηση διάφορων εναλλακτικών τρόπων έκφρασής της που συναντάμε στην υπόλοιπη πραγματεία θα μπορούσε να καταλογιστεί ως μειονέκτημα. Ωστόσο, το πρόβλημα που παρουσιάζεται δύναται να τύχει κάποιας ικανοποιητικής αντιμετώπισης, αν σκεφτούμε ότι τα ρήματα που χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν τη συγκεκριμένη ιδιότητα συναντώνται σε όλες

[8] Ευκλείδου, *Οπτικά*, 32. 23-25, 27-29.

τις αρχαίες γεωμετρικές πραγματείες. Θα μπορούσαμε λοιπόν να ξεπεράσουμε τη δυσκολία που προκύπτει με το να επισημάνουμε ότι το λεξιλόγιο που χρησιμοποιείται στα *Οπτικά*, για να δηλώσει τη φορά - τη διάδοση των όψεων, συμμορφώνεται με το γεωμετρικό πλαίσιο ακολουθώντας τους καθιερωμένους τεχνικούς όρους που απαντώνται σε όλα τα γεωμετρικά έργα της Αρχαιότητας.

Όλα φαίνονται να λειτουργούν καλά, αν υιοθετηθεί η πρώτη ανάγνωση του πρώτου «όρου». Ωστόσο, η εντύπωση αυτή θεωρούμε ότι είναι απατηλή, γιατί, ακόμα και αν δεχτούμε ότι επιλύεται το πρόβλημα που προαναφέρθηκε, ο πρώτος «όρος» εκλαμβανόμενος νοηματικά ως έκφραση της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων σε απόσταση μεγάλου μεγέθους, θα εξακολουθούσε να παρουσιάζει αδικαιολόγητα γλωσσικά προβλήματα. Ο λόγος που υποστηρίζουμε κάτι τέτοιο είναι γιατί, ακόμα και αν μέσω του «*φέρεσθαι διάστημα*» υπήρχε στόχος να δηλωθεί η επέκταση των όψεων στο χώρο, δηλαδή η διάδοσή τους, θα ήταν -από γλωσσική άποψη- απαραίτητη η χρήση της κατάλληλης πρόθεσης που διαπιστώνουμε ότι απουσιάζει. Ακόμα και στα Νέα Ελληνικά, αν θέλαμε να διατυπώσουμε μια τέτοια ιδιότητα, θα λέγαμε ότι οι όψεις είτε «*φέρονται σε διάστημα*» είτε «*φέρονται επί διαστήματος*» είτε «*φέρονται κατά διάστημα*» κλπ. Παράλληλα, ανατρέχοντας σε αρχαία χωρία που δηλώνουν την ευθύγραμμη διάδοση των όψεων συναντήσαμε πολλούς τρόπους έκφρασής της που, αφενός, δε θυμίζουν σε τίποτα τη διατύπωση του πρώτου «όρου» των *Οπτικών*, αφετέρου, χρησιμοποιούνται πάντα οι απαραίτητες προθέσεις. Στη συνέχεια, παραθέτουμε μερικά από τα σχετικά χωρία:

Στα *Προβλήματα* του Αριστοτέλη χρησιμοποιείται η έκφραση «*τῆς μὲν ὄψεως μία φορὰ ἡ κατ' εὐθεῖαν*»[9]. Ο Ήρων και ο Γεμίνος χρησιμοποιούν την έκφραση «*Ὅτι ὑποτίθεται ἡ ὀπτικὴ τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ὄψεις κατ' εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι...*»[10]. Όταν ο Αλέξανδρος Αφροδισιέας αναφέρεται στους υποστηρικτές της άποψης ότι η όραση πραγματοποιείται, μέσω της μείξης δύο απορροών, δηλαδή ένα είδος απορροής από τον οφθαλμό και ένα είδος απορροής από το ορώμενο, δήλωνε την ευθύγραμμη πορεία και των δύο χρησιμοποιώντας την έκφραση «*...ἑκάτερον τῶν ἐκπεμπομένων* (ενν. *απορροών*) *ἐπ' εὐθείας φέρεται...*»[11]. Στις *Οπτικές Υποθέσεις* του ο Δαμιανός δηλώνει ότι «*τὸ προβαλλόμενον τοῦτο ἀφ' ἡμῶν, ὃ δὴ καὶ ὄψιν ἔθος καλεῖν, ἐπ'*

[9] Αριστοτέλους, *Προβλήματα*, 905α 36-37.
[10] Ήρωνος Αλεξανδρινού, *Ορισμοί*, 135.10.1-2 και Γεμίνου, *Fragmenta Optica*, 22.14-15.
[11] Αλέξανδρου Αφροδισιέα, *De anima libri mantissa*, 137.23.

εὐθείας τε φέρεται...»[12]. Φυσικά, δεν πρέπει να παραλείψουμε τη διατύπωση που συναντάται στον πρόλογο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* των *Οπτικών* «*τὰς ἀπ' αὐτῆς* (ενν. *της όψεως*) *ἐκχεομένας ἀκτῖνας ... κατ' εὐθείας φέρεσθαι γραμμὰς...*»[13], αλλά και στον πρώτο «όρο» της «*Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ὄψεις κατ' εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι...*»[14].

Μέσω της εξέτασης των παραπάνω αρχαίων χωρίων, διαπιστώνουμε ότι οι συγγραφείς τους, προκειμένου να δηλώσουν με σαφήνεια την ευθύγραμμη φορά των όψεων και, γενικότερα, της οφθαλμικής απορροής, χρησιμοποιούν πάντα τις αναγκαίες προθέσεις «*κατά*» ή «*επί*» συνοδευόμενες από τον όρο «*ευθεία*». Αντίθετα, ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών* αναφέρεται σε ευθείες γραμμές που φέρονται «*διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*». Παρατηρούμε ότι ο τρόπος με τον οποίο δηλώνεται στον πρώτο «όρο» η ευθύγραμμη διάδοση των όψεων διαφοροποιείται ριζικά από τους υπόλοιπους εκφραστικούς τρόπους της Αρχαιότητας. Παράλληλα, η απουσία της κατάλληλης πρόθεσης από το αρχαίο κείμενο εντυπωσιάζει, ιδιαίτερα αν σκεφτούμε ότι ο συγγραφέας θα μπορούσε να ήταν πολύ πιο κατανοητός, αν, για παράδειγμα, έγραφε «*Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐξαγομένας εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι* ***κατὰ*** *διάστημα...*».

Η κατάσταση γίνεται περισσότερο συγκεχυμένη, αν σκεφτούμε ότι και στην περίπτωση που αποφασίσουμε να αγνοήσουμε το γεγονός της απουσίας της απαραίτητης πρόθεσης, το «*μεγεθῶν μεγάλων*», εφόσον προσδιορίζει το «*διάστημα*», θα έπρεπε να συμφωνεί με εκείνο στον αριθμό και, συνεπώς, να είναι «*μεγέθους μεγάλου*». Επιχειρώντας να δικαιολογήσουμε την επιλογή του συγγραφέα να γράψει «*μεγεθῶν μεγάλων*» και όχι «*μεγέθους μεγάλου*» μελετήσαμε τα αρχαία σχήματα λόγου, στην περίπτωση που εκείνος επιθυμώντας να δώσει έμφαση στο μεγάλο -ως προς την έκταση- μέγεθος της διάδοσης των όψεων χρησιμοποίησε τον πληθυντικό αριθμό. Ωστόσο, δεν καταφέραμε να εντοπίσουμε κανένα σχήμα λόγου που να ανταποκρίνεται και να δικαιολογεί ικανοποιητικά την περίεργη ασυμφωνία ανάμεσα στο «*διάστημα*» και στο «*μεγεθῶν μεγάλων*» που διαβάζουμε στον πρώτο «όρο».

Όσο και αν προσπαθούμε να επιλύσουμε τα προβλήματα που διέπουν τον τρόπο διατύπωσης του πρώτου «όρου» και που εμφανίζονται αυτόματα, όταν

---

[12] Δαμιανού, *Οπτικές Υποθέσεις*, 3. 1-2.
[13] *Opticorum Recensio Theonis*, 146. 20-21.
[14] *ό.π.*, 154. 4-5

προσπαθούμε επίμονα να διαβάσουμε σε αυτόν την προϋπόθεση της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων σε απόσταση μεγάλου μεγέθους, οι δυσκολίες όχι μόνο εξαφανίζονται, αλλά πολλαπλασιάζονται. Παρόλο που θα θεωρούνταν εύλογη ή και αναγκαία στην πρώτη πρόταση των «όρων» η δήλωση μιας τόσο θεμελιώδους για τη γεωμετρική οπτική ιδιότητα των όψεων, παρατηρούμε ότι ο τρόπος διατύπωσής της από τον συγγραφέα του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* ξεφεύγει τόσο πολύ από ανάλογους αρχαίους τρόπους έκφρασης και εμφανίζει τόσο ανεξήγητα ερωτήματα που μας οδηγούν τελικά στο συμπέρασμα ότι ο συγγραφέας του κάθε άλλο παρά επιθυμούσε να δηλώσει αυτή την ιδιότητα.

β) Εξετάζοντας τον δεύτερο τρόπο ανάγνωσης του πρώτου «όρου»

Αν λάβουμε υπόψη τη δεύτερη σημασία του «*φέρεσθαι*», δηλαδή αυτήν της περιστροφικής κίνησης γύρω από έναν άξονα, και τη δεύτερη σημασία του «*διαστήματος*», δηλαδή αυτήν της ακτίνας ενός κύκλου, ο πρώτος «όρος» θα μπορούσε να αποκτήσει ένα διαφορετικό νόημα. Συγκεκριμένα, ο πρώτος «όρος» θα μπορούσε να αποδοθεί ως «*Υποτίθεται ότι οι ευθείες γραμμές που εξάγονται από το μάτι περιστρέφονται* (ενν. *κυκλικά*) *σε ακτίνα μεγάλου μεγέθους*». Κατά τις αποδείξεις των θεωρημάτων 23 και 25 των *Οπτικών* περιγράφεται μια ανάλογη κατάσταση, όπου ορισμένες οπτικές ακτίνες περιστρέφονται κυκλικά, εφόσον έχουν εξαχθεί από τον οφθαλμό[15]. Ωστόσο, δε θεωρούμε ότι ο πρώτος «όρος» έχει ως στόχο του να θέσει μια τέτοια ιδιότητα. Εκτιμούμε ότι αυτή η ανάγνωση πρέπει να απορριφθεί ως μη ικανοποιητική, καθώς προϋποθέτει ένα σύνολο πραγμάτων που όφειλαν να είχαν προηγηθεί του πρώτου «όρου».

Ειδικότερα, η περιστροφική κίνηση των ακτίνων συνιστά μια αρκετά σύνθετη θεώρηση και θα απαιτούσε μια λεπτομερέστερη περιγραφή και εξήγηση εκ μέρους του συγγραφέα. Μια τέτοια αντίληψη προϋποθέτει αρχικά την ύπαρξη ενός οπτικού κώνου, ο οποίος όμως δεν εισάγεται ως έννοια παρά στον δεύτερο «όρο» των

---

[15] Συγκεκριμένα, στο θεώρημα 23 αναφέρεται ότι «*ἐὰν δὴ τὸ ΒΓΚ τρίγωνον μενούσης τῆς ΑΒ περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν τὴν Κ περιενεχθὲν εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ μὲν ΒΓ καθ᾽ ἕν σημεῖον ἐφ ἅψεται τῆς σφαίρας, ἡ δὲ ΚΓ ποιήσει τὴν τομὴν κύκλον*» (23.14-25), ενώ στο θεώρημα 25 ότι «*ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΑΖ περιενεχθὲν εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ περιενεχθὲν σχῆμα, ἄρξεται μὲν ἀπὸ τοῦ Β, ἐλεύσεται δὲ καὶ ἐπὶ τὸ Γ κα ὶ τὸ Β, καὶ τὸ περιγραφὲν ὑπὸ τῆς ΑΒ σχῆμα κύκλος ἔσται, ὅς γε διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐστίν*» (25.17-22).

Οπτικών[16]. Ακόμα και αν παραβλέψουμε αυτό το στοιχείο, η «*περιστροφική κίνηση σε ακτίνα μεγάλου μεγέθους*» θα σήμαινε ότι η βάση του οπτικού κώνου είναι αναγκαστικά κυκλική. Ωστόσο, αυτό έρχεται σε αντίθεση με τον δεύτερο «όρο», σύμφωνα με τον οποίο, η βάση του οπτικού κώνου προσδιορίζεται κάθε φορά από «*τα πέρατα των ορωμένων*». Επίσης, μια τέτοιου είδους περιστροφή προϋποθέτει κυρίως την ύπαρξη ενός άξονα περιστροφής των οπτικών ακτίνων. Όμως, όπως επιβεβαιώνεται από την εξέταση όλης της πραγματείας, ο άξονας του οπτικού κώνου δε διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ευκλείδεια γεωμετρική οπτική. Θεωρούμε λοιπόν ότι ο συγγραφέας θα έπρεπε να είχε ήδη δώσει βαρύτητα σε αυτά τα στοιχεία και να τα είχε ήδη εισάγει στις υποθέσεις του, προτού προβεί στη διατύπωση ενός «όρου», σχετικά με μια υποτιθέμενη περιστροφή των όψεων. Από την άλλη μεριά, αν εξαιρέσουμε τις περιπτώσεις των θεωρημάτων 23 και 25 που αφορούν στην οπτική αντίληψη μιας σφαίρας, η υπόθεση της περιστροφικής κίνησης των όψεων δεν εξυπηρετεί πρακτικά ή θεωρητικά σε τίποτα άλλο, ώστε να εγκαινιάζει ως πρώτος «όρος» την πραγματεία των *Οπτικών*.

γ) Εξετάζοντας τον τρίτο τρόπο ανάγνωσης του πρώτου «όρου»

Ο πρώτος «όρος» θα μπορούσε να εκφράζει την ιδιότητα εκείνη των όψεων που, ακόμα και αν κάποιος γνωρίζει πολύ καλά τις αρχαίες σημασίες του «*φέρεσθαι*» ή του «*διαστήματος*», δεν είναι τόσο ευδιάκριτη, μέσα στα πλαίσια της έκφρασης «*φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*». Πρόκειται για την ιδιότητα της διακριτότητας που συναντήσαμε στις αποδείξεις του πρώτου και του τρίτου θεωρήματος των *Οπτικών*. Τα θεωρήματα αυτά αποτελούν μοναδικές περιπτώσεις, όπου συναντάται η χρήση του όρου «*φέρεσθαι*», σε συνδυασμό με τον όρο «*διάστημα*». Συγκεκριμένα, στο θεώρημα 1 διαβάζουμε ότι ο λόγος που κανένα από παρατηρούμενα δεν οράται αμέσως ολόκληρο είναι, «*ἐπεὶ ἐν διαστήματι φέρονται αἱ προσπίπτουσαι ὄψεις, οὐκ ἂν προσπίπτοιεν συνεχεῖς*» προς το παρατηρούμενο αντικείμενο. Επίσης, στο θεώρημα 3 υποστηρίζεται ότι για κάθε παρατηρούμενο υπάρχει κάποιο μήκος απόστασης, από το οποίο δε θα οράται πια. Αυτό συμβαίνει, όπως δηλώνεται, όταν το παρατηρούμενο βρεθεί «*ἐν τῷ μεταξὺ διαστήματι τῶν ὄψεων*».

[16]«*καὶ τὸ [μὲν] ὑπὸ τῶν ὄψεων περιεχόμενον σχῆμα εἶναι κῶνον τὴν κορυφὴν μὲν ἔχον τα ἐν τῷ ὄμματι τὴν δὲ βάσιν πρὸς τοῖς πέρασι τῶν ὁρωμένων*», Ευκλείδου, *Οπτικά*, «*όρος*» 2.

Εφόσον κάποιος έχει μελετήσει τα παραπάνω θεωρήματα και έχει διαπιστώσει κυρίως τον τρόπο με τον οποίο προσδιορίζεται το «*διάστημα*», είναι σε θέση ξαναδιαβάζοντας τον πρώτο «όρο» των *Οπτικών*, να τον εκλάβει με έναν νέο τρόπο. Η λέξη «*φέρεσθαι*» διατηρεί την έννοια της διάδοσης. Η λέξη «*διάστημα*» εξακολουθεί να έχει τη σημασία της απόστασης δύο γεωμετρικών στοιχείων, όμως δεν πρόκειται πλέον για απόσταση ανάμεσα στο σημείο του ματιού και σε ένα σημείο του παρατηρούμενου αντικειμένου, αλλά για γωνιακή απόσταση, δηλαδή για την ελάχιστη δυνατή γωνία που υφίσταται μεταξύ δύο διαδοχικών όψεων. Τώρα, ο πρώτος «όρος» μπορεί να αναγνωσθεί ως «*Υποτίθεται ότι οι ευθείες γραμμές που εξάγονται από το μάτι διαδίδονται* (ενν. *διαμορφώνοντας μεταξύ τους*) *διαστήματα μεγάλου μεγέθους*».

Η τρίτη ανάγνωση του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* είναι ως έναν βαθμό ικανοποιητική, καθώς προτείνεται λαμβάνοντας υπόψη τις έννοιες του «*φέρεσθαι*» και του «*διαστήματος*», με τη συγκεκριμένη νοηματική διάσταση που εκλαμβάνουν σε δύο θεωρήματα της πραγματείας. Ερμηνευτικά, ο τρίτος τρόπος ανάγνωσης του πρώτου «όρου» είναι σύμφωνος με τις θεωρητικές επιταγές της διακριτότητας των όψεων που προβάλλονται στα θεωρήματα 1 και 3. Παρόλο που η αποδοχή του θα εξυπηρετούσε απόλυτα στην επίλυση του προβλήματος, σχετικά με την απουσία δήλωσης της συγκεκριμένης ιδιότητας στους «όρους» της πραγματείας, ωστόσο, δεν είναι καθόλου ικανοποιητικός.

Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι η έκφραση «*φέρεσθαι διάστημα*» του πρώτου «όρου» διαφοροποιείται για άλλη μια φορά από τον τρόπο, με τον οποίο εκφέρονται και συσχετίζονται αυτές οι δύο λέξεις στα θεωρήματα 1 και 3. Στο θεώρημα 1 διαβάζουμε «*ἐν διαστήματι φέρονται αἱ προσπίπτουσαι ὄψεις*»[17], ενώ στο θεώρημα 3 «*ἐν τῷ μεταξὺ διαστήματι τῶν ὄψεων*»[18]. Η χρήση της πρόθεσης «*ἐν*» είναι για άλλη μια φορά άκρως απαραίτητη, προκειμένου να δηλωθεί με σαφήνεια η διακριτότητα των όψεων. Κατά ανάλογο τρόπο, στον πρόλογο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* των *Οπτικών*, όποτε ο συγγραφέας θέλει να αναφερθεί σε αυτό το γνώρισμα, λέει «*ἐν διαστήμασι* (ενν. *φέρεσθαι τὰς ἀκτῖνας*)»[19] ή «*ἐκ διαστημάτων ταύτας* (ενν. *τὰς ὄψεις*) *ὑπάρχειν*»[20]. Υπενθυμίζεται επίσης ότι οι εκφράσεις των αντίστοιχων θεωρημάτων 1 και 3 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* των

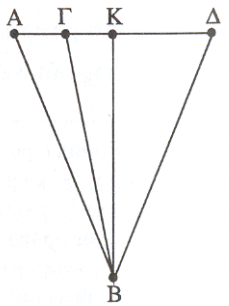
[17] *Οπτικά*, 1. 4-5.
[18] *ό.π.*, 3. 6-7.
[19] *Opticorum Recensio Theonis*, *ό.π.*, 146. 21-22.
[20] *ό.π.*, 148. 11-13.

Οπτικών είναι πανομοιότυπες με εκείνες του κειμένου των *Οπτικών*, όσον αφορά στη δήλωση της διακριτότητας των όψεων. Δηλαδή και σε αυτό το κείμενο γράφεται «*ἐν διαστήματι φέρονται αἱ προσπίπτουσαι ὄψεις*»[21] και «*ἐν τῷ μεταξὺ διαστήματι τῶν ὄψεων*»[22]. Παράλληλα, δεν πρέπει να παραβλέψουμε ότι οι αρχαίοι σχολιαστές του πρώτου «όρου» συνειδητοποιώντας, προφανώς, τα προβλήματα κατανόησης που προέκυπταν από αυτόν επιχείρησαν από τη δική τους μεριά να διασαφηνίσουν την έκφραση «*φέρεσθαι διάστημα*». Έτσι, ένας σχολιαστής των *Οπτικών* διευκρινίζει ότι η παραπάνω δήλωση πρέπει να νοηθεί ως «*κατὰ διαστάσεις καὶ τὰς ἀπ' ἀλλήλων* (ενν. *των ευθειών γραμμών που εξάγονται από το μάτι*) *ἀποτμήσεις*»[23]. Επίσης, ένα άλλο σχόλιο στο χωρίο του θεωρήματος 1 που προαναφέρθηκε επισημαίνει ότι το «*ἐν διαστήματι*» πρέπει να εκληφθεί ως «*κατὰ διάστασιν*»[24]. Τέλος, σε σχόλιο του θεωρήματος 3 αναφέρεται μεταξύ άλλων ότι «*Τουτέστιν ἐπεὶ μὴ συνεχεῖς προσπίπτουσιν αἱ ὄψεις, ἀλλὰ κατὰ διάστημα...*»[25].

Ο τρίτος τρόπος ανάγνωσης παρουσιάζει το πλεονέκτημα ότι προτείνεται λαμβάνοντας υπόψη τις συγκεκριμένες, χαρακτηριστικές σημασίες που έχουν αποκτήσει το «*φέρεσθαι*» και, κυρίως, το «*διάστημα*» στα θεωρήματα 1 και 3. Το ενδεχόμενο να υποθέτει ο πρώτος «όρος», μέσω της έκφρασης «*φέρεσθαι διάστημα*», την ασυνέχεια των οπτικών ακτίνων είναι σημαντικό. Συνυπολογίζοντας τους τρόπους, με τους οποίους εκφέρεται γλωσσικά αυτή η ιδιότητα στα αρχαία κείμενα του προλόγου, αλλά και των αντίστοιχων θεωρημάτων 1 και 3 της

---

[21] *ό.π.*, 156. 5-6.
[22] 158.3-5.
[23] *Scholia in Euclidis optica (scholia vetera)*, *ό.π.*, σχόλιο 1. Σύμφωνα με τον σχολιαστή, αν υποθέσουμε ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Β και το παρατηρούμενο μέγεθος είναι το ΑΔ, τότε οι «*διαστάσεις*» είναι αυτές οι πολύ μικρές γωνίες που σχηματίζονται στον οφθαλμό, ανάμεσα σε δύο διαδοχικές όψεις, δηλαδή οι γωνίες ΑΒΓ, ΓΒΚ, ΚΒΔ. Οι «*ἀποτμήσεις*» είναι η συνολική γωνία που σχηματίζεται στην κορυφή του οπτικού κώνου, δηλαδή η γωνία ΑΒΔ.



[24] *ό.π.*, σχόλιο 2.
[25] σχόλιο 3.

Αναθεωρημένης Έκδοσης, δε μπορούμε να αγνοήσουμε τους πολλούς και διάφορους σαφείς τρόπους διατύπωσης της διακριτότητας. Δεν είναι δυνατόν να αποφύγουμε τον πειρασμό του να συλλογιστούμε ότι ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών* θα μπορούσε να είχε γραφτεί πιο κατανοητά, για παράδειγμα ως «*Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐξαγομένας εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι ἐν διαστήματι...*» ή, σύμφωνα με τις επεξηγηματικές εναλλακτικές γλωσσικές εκφράσεις των αρχαίων σχολιαστών που προαναφέρθηκαν, ως «*Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐξαγομένας εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι κατὰ διαστάσεις...*». Γιατί όμως ο συγγραφέας του πρώτου «όρου» επέλεξε να χρησιμοποιήσει την έκφραση «*φέρεσθαι διάστημα*» προσθέτοντας στη συνέχεια τον χαρακτηρισμό «*μεγεθῶν μεγάλων*»;

Παρατηρούμε ότι πράγματι υπήρχαν ποικίλοι τρόποι διατύπωσης του πρώτου «όρου», ώστε να δηλώνεται με μεγαλύτερη σαφήνεια η διακριτότητα των όψεων. Αυτό όμως προϋποθέτει ότι ο συγγραφέας του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* είχε όντως ως στόχο του να εκφράσει αυτή την ιδιότητα. Αν αναλογιστούμε, από τη μια μεριά, την πληθώρα των δυνατών εκφράσεων της διακριτότητας, όπως συναντώνται στα αρχαία κείμενα, και από την άλλη μεριά, τον τρόπο διατύπωσης του πρώτου «όρου» των *Οπτικών*, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο συγγραφέας του φαίνεται ότι δεν είχε πρόθεση να εκφράσει τη διακριτότητα.

Η υιοθέτηση της τρίτης ανάγνωσης θα μας έφερνε αντιμέτωπους με μια επιπλέον δυσχέρεια που αφορά στην έκφραση «*μεγεθῶν μεγάλων*». Πουθενά μέσα στην πραγματεία δεν προσδιορίζεται ακριβώς το μέγεθος των διαστημάτων που υπάρχουν μεταξύ των ασυνεχών όψεων. Στα θεωρήματα 1 και 3 που σχετίζονται με τη διακριτότητα δεν αναπτύσσεται κανένας συλλογισμός, όσον αφορά στο θέμα αυτό. Παράλληλα, ούτε από το κείμενο του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* των *Οπτικών* και, συγκεκριμένα, από το χωρίο, στο οποίο παρουσιάζονται τα παραδείγματα της βελόνας και των γραμμάτων, ώστε να γίνει πιο κατανοητή η διακριτότητα των όψεων, μπορούμε να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα. Τα παραδείγματα που αναφέρει ο συγγραφέας δε συνηγορούν υπέρ του μεγάλου μεγέθους των διαστημάτων, αλλά μάλλον το αντίθετο. Συνεπώς, ακόμα και στην περίπτωση που ο πρώτος «όρος» υποθέτει τη διακριτότητα των όψεων, δε θα ήταν δικαιολογημένη η δήλωσή του ότι τα διαστήματα που διαμορφώνονται μεταξύ των όψεων είναι μεγάλου μεγέθους.

Μέσω των επεξηγήσεων και των διευκρινίσεων που έκαναν οι αρχαίοι σχολιαστές για το «*φέρεσθαι διάστημα*» του πρώτου «όρου», γίνεται προφανές ότι

το εξέλαβαν νοηματικά ως μια έκφραση που αφορά στη διακριτότητα των όψεων. Αντίθετα, για το «*μεγεθῶν μεγάλων*» δε διατύπωσαν κανένα σχόλιο. Όσο και αν θεωρούμε ότι οι αρχαίοι σχολιαστές όντας πιο κοντά στην εποχή συγγραφής των κειμένων γνώριζαν και κατανοούσαν πολύ περισσότερα από αυτά σε σύγκριση με εμάς, ωστόσο σε αυτή την τόσο ιδιάζουσα περίπτωση του πρώτου «όρου» των *Οπτικών*, δε μπορούμε να εμπιστευτούμε απόλυτα την ερμηνεία τους, παρόλο που θα το επιθυμούσαμε πολύ. Διαπιστώνουμε ότι ο τρόπος γραφής του πρώτου «όρου» ήταν και για εκείνους εξίσου προβληματικός, καθώς οι διευκρινίσεις τους λαμβάνουν τον χαρακτήρα επεξηγήσεων και εναλλακτικών εκφράσεων για τη σαφέστερη διατύπωση του «*φέρεσθαι διάστημα*». Ωστόσο, οι εναλλακτικοί τρόποι που προτείνουν καθοδηγούνται κατά κύριο λόγο από την ιδιαίτερη σημασία και το ιδιαίτερο νόημα που βλέπουν να εκλαμβάνει το «*διάστημα*» στα θεωρήματα 1 και 3. Εκτιμούμε ότι αν κάποιος δεν είχε δυνατότητα πρόσβασης σε αυτά τα θεωρήματα και, συνεπώς, δεν είχε σαφή αντίληψη της ιδέας της διακριτότητας των όψεων που αυτά προβάλλουν, θα του ήταν πολύ δύσκολο να προσδώσει στην έκφραση «*φέρεσθαι διάστημα*» το συγκεκριμένο νόημα˙ και αυτό θεωρούμε ότι οφείλεται αποκλειστικά στον τρόπο διατύπωσής της, ο οποίος δεν επιτρέπει σε κάποιον να την κατανοήσει ως έκφραση της ασυνέχειας.

Τα νοηματικά προβλήματα που υπογραμμίζουν τον πρώτο «όρο» των *Οπτικών* δεν εντοπίζονται στον αντίστοιχο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* των *Οπτικών*, ο οποίος είναι πολύ πιο σαφής σε όσα θέλει να δηλώσει. Συγκεκριμένα, εκεί διαβάζουμε «*Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ὄψεις κατ' εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι διάστημά τι ποιούσας ἀπ' ἀλλήλων*». Η πρόταση αυτή είναι τόσο απλή και κατανοητή, ώστε να μη συνοδεύεται από περαιτέρω επεξηγήσεις, εκ μέρους κάποιου αρχαίου σχολιαστή. Υποθέτει και την ευθύγραμμη διάδοση των όψεων και το χαρακτηριστικό γνώρισμα της διακριτότητας.

Όσο πολλοί και αν είναι οι λόγοι που μας αναγκάζουν να απορρίψουμε το «*φέρεσθαι διάστημα*» του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* ως έκφραση της διακριτότητας των όψεων, δε μπορούμε να παραβλέψουμε τη σοβαρή δυσχέρεια που εξακολουθεί να επιμένει. Εφόσον ο πρώτος «όρος» δεν υποθέτει την ασυνέχεια των όψεων, και αφού, ομοίως, κανένας από τους επόμενους δεν το πραγματοποιεί, σε ποιον «όρο» θα θεμελιώνονται τα θεωρήματα 1 και 3 των *Οπτικών*; Πρόκειται για ένα πολύ σημαντικό εμπόδιο, καθώς τα δύο θεωρήματα που βασίζουν τις αποδείξεις τους στην ιδέα της διακριτότητας μένουν μετέωρα, ενώ η αξιωματική δομή της πραγματείας καταλήγει στο σημείο αυτό να είναι πολύ επισφαλής.

Παρόλο που έχουμε επίγνωση του παραπάνω προβλήματος, ωστόσο, εξακολουθούμε να θεωρούμε ότι ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών*, έτσι όπως είναι γραμμένος, δε μπορεί να εκφράζει άμεσα τη διακριτότητα των όψεων. Η επιλογή μας να αποδώσουμε και, τελικά, να ερμηνεύσουμε τη συγκεκριμένη πρόταση με αυτόν τον τρόπο θα εδράζεται αποκλειστικά στο ότι ήδη γνωρίζουμε την ύπαρξη αυτής της ιδιότητας στα θεωρήματα 1 και 3.

2. Συμπεράσματα

Κανείς από τους τρεις πιθανούς τρόπους ανάγνωσης του πρώτου «όρου» που προαναφέρθηκαν δεν είναι απόλυτα ικανοποιητικός. Όλοι τους μοιάζουν με ξένα μορφώματα που προσπαθούν να ενσωματωθούν βασανιστικά σε αυτόν. Το στοιχείο που εντυπωσιάζει είναι ότι, παρόλο που η θεωρητική ισχύς τόσο της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων όσο και της ασυνέχειας που τις διέπει, είναι αναμφισβήτητη μέσα στην πραγματεία, ωστόσο, όταν προσπαθούμε να διαβάσουμε τον πρώτο «όρο» με κάποιον από τους δύο τρόπους, εκείνος πάντα μάς ξεφεύγει.

Εκτιμούμε ότι ο πρώτος «όρος» δεν είναι προβληματικός ούτε αδέξιος, αλλά καθίσταται ως τέτοιος, επειδή επιχειρούμε να διαβάσουμε σε αυτόν πράγματα που δεν υπάρχουν. Το λάθος έγκειται στο ότι ξεκινήσαμε να τον κατανοήσουμε υποβάλλοντάς τον κάτω από έναν παραμορφωτικό φακό διαστρεβλώνοντας τελικά την ουσία του. Δε μπορούμε να πιστέψουμε ότι ο συγγραφέας αυτής της πρότασης των *Οπτικών*, είτε πρόκειται για τον ίδιο τον Ευκλείδη είτε για κάποιον μεταγενέστερο εκδότη που προσέβλεπε σε μια βελτιωμένη έκδοση της ευκλείδειας πραγματείας, θα ήταν τόσο απρόσεκτος ή αμελής, ώστε να διατυπώσει τον πρώτο «όρο» των *Οπτικών* με τόση ασάφεια. Ωστόσο, το ερώτημα παραμένει και εξακολουθεί να μας απασχολεί επίμονα: τι θέλει τελικά να μας πει ο συγγραφέας του πρώτου «όρου» των *Οπτικών*;

Β. ΜΙΑ ΝΕΑ ΑΝΑΓΝΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ «ΟΡΟΥ» ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ*

Σε αυτή την ενότητα θα προτείνουμε μια νέα ανάγνωση του πρώτου «όρου» της έκδοσης των *Οπτικών*. Ομολογουμένως, η απόπειρά μας να κατανοήσουμε τι θέλει να μας πει ο συγγραφέας της συγκεκριμένης πρότασης εξέλαβε τελικά τον χαρακτήρα μιας σύνθετης και σταδιακής εργασίας. Ο λόγος που υποστηρίζουμε κάτι τέτοιο είναι γιατί, ενώ η αρχική μας εντύπωση ήταν ότι αναλαμβάναμε να

πραγματοποιήσουμε μια φιλολογική -κυρίως- εργασία που στην καλύτερη των περιπτώσεων θα οδηγούσε απλά και μόνο σε έναν πιο ικανοποιητικό τρόπο απόδοσης της πρότασης, ωστόσο, τα πράγματα εξελίχθηκαν πολύ διαφορετικά. Αφενός, για να καταλήξουμε σε αυτόν τον νέο τρόπο ανάγνωσης, έπρεπε αρχικά να αποδεσμευτούμε ακόμα και από τον καθιερωμένο στην ιστοριογραφία τρόπο προσέγγισης του πρώτου «όρου» και, κυρίως, να πραγματοποιήσουμε μια ριζική αλλαγή του πλαισίου που αφορά στον τρόπο ανάγνωσης και χειρισμού των εννοιών που εμφανίζονται σε αυτόν. Αφετέρου, ο νέος τρόπος ανάγνωσης ξετύλιξε μπροστά μας ορισμένες πολύ σημαντικές, άγνωστες μέχρι τώρα, ερμηνευτικές διαστάσεις του πρώτου «όρου». Το γεγονός αυτό είχε ως αποτέλεσμα την αναθεώρηση της εικόνας που είχαμε για ορισμένες βασικές παραμέτρους της ερευνητικής δραστηριότητας του κλάδου της αρχαίας γεωμετρικής οπτικής.

Στο πρώτο μέρος αυτής της ενότητας θεωρούμε απαραίτητο, προτού διατυπώσουμε ρητά τον νέο τρόπο ανάγνωσης του πρώτου «όρου» που προτείνουμε, να παρουσιάσουμε αρχικά το θεωρητικό και εννοιολογικό πλαίσιο που εκτιμούμε ότι εντός του οποίου κινούνταν ο συγγραφέας, όταν έγραφε τη συγκεκριμένη πρόταση των *Οπτικών*. Ειδωμένος σε αυτό το πλαίσιο ο πρώτος «όρος» εκλαμβάνει μια νέα ανάγνωση που ανταποκρίνεται σε εκείνον άμεσα, χωρίς προβλήματα και, κυρίως, αβίαστα. Στο δεύτερο μέρος της ενότητας θα εξετάσουμε την ερμηνευτική διάσταση που αποκτά ο πρώτος «όρος», μέσω της νέας ανάγνωσης, θα καταδείξουμε τους λόγους για τους οποίους θεωρούμε ότι αυτός ο νέος τρόπος ανάγνωσης είναι το κλειδί για την επίλυση του επίμαχου προβλήματος της ταυτότητας των δύο διαφορετικών μορφών κειμένου των *Οπτικών*, ενώ θα εκθέσουμε αναλυτικά τα ενδιαφέροντα ιστοριογραφικά συμπεράσματα, στα οποία έχει καταλήξει η έρευνά μας.

1. Μια νέα προσέγγιση του θεωρητικού και εννοιολογικού πλαισίου του πρώτου «όρου» των Οπτικών: Ένας νέος τρόπος ανάγνωσής του.

Τα *Οπτικά* αποτελούν ένα σύγγραμμα αφιερωμένο στην εξέταση της οπτικής αντίληψης. Η ιδιαιτερότητά του, δηλαδή το στοιχείο εκείνο που το καθιστά ξεχωριστό μεταξύ άλλων σχετικών έργων της Αρχαιότητας, είναι η σύλληψη, αλλά και ο τρόπος αναγωγής της οπτικής αντίληψης στο πεδίο της γεωμετρίας. Παρόλο που η αίσθηση της όρασης συνιστά μια διαδικασία που περιλαμβάνει πολύπλοκους μηχανισμούς και εξαρτάται από παράγοντες που σχετίζονται με την ανατομία, τη φυσιολογία, τη φυσική και την ψυχολογία, το εγχείρημα της γεωμετρικοποίησής τους είναι εξαιρετικά δύσκολο. Όλα τα στοιχεία που μετέχουν της οπτικής λειτουργίας,

αλλά και οι διάφοροι τρόποι, με τους οποίους γίνονται αντιληπτές οι οπτικές εμφανίσεις, οφείλουν να συμμορφωθούν με τις απαιτήσεις της γεωμετρίας.

Ο ανθρώπινος οφθαλμός ή τα παρατηρούμενα φυσικά σώματα δε θα μπορούσαν να έχουν θέση σε μια καθαρά γεωμετρική πραγματεία, εάν προηγουμένως δεν είχαν απαλλαγεί από τα «*φυσικὰ σύμπαντα πάθη*» ή από τη «*φυσικὴν ὕλην*»[26] τους και δεν είχαν διατηρήσει αποκλειστικά τα στοιχεία εκείνα που απαιτούν οι αρχές της γεωμετρίας. Σε ένα γεωμετρικό σύγγραμμα δε συναντάμε σώματα προικισμένα με φυσικές ποιότητες, αφού δεν είναι αυτά τα αντικείμενα, στα οποία αναφέρεται η γεωμετρία. Στη γεωμετρία τον πρωταγωνιστικό ρόλο διαδραματίζουν τα μεγέθη και τα σχήματα: «*Γεωμετρία ἐστὶν ἐπιστήμη μεγεθῶν καὶ σχημάτων...*»[27]. Όπως γνωρίζουμε και από τον Ήρωνα τον Αλεξανδρινό, τα μεγέθη διακρίνονται σε τρία είδη, δηλαδή σε γραμμές, επιφάνειες και στερεά[28]. Όλα τα μεγέθη και τα σχήματα αποτελούν μαθηματικά σώματα που βρίσκονται στον γεωμετρικό χώρο και που το καθένα τους προσδιορίζεται, όπως δήλωνε και ο Αριστοτέλης, από «*διαστήματα*»[29], συγκεκριμένα, από μήκος, πλάτος και βάθος, δηλαδή από διαστάσεις[30].

Υποστηρίζουμε αρχικά ότι τα «*μεγέθη*», στα οποία αναφέρεται ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών*, είναι αυτές ακριβώς οι ευθείες, οι επιφάνειες και τα στερεά. Είναι τα γεωμετρικά μεγέθη, στα οποία έχουν αναχθεί τα παρατηρούμενα αντικείμενα του φυσικού κόσμου, προκειμένου να τύχουν της γεωμετρικής εξέτασης. Τα μεγέθη είναι αυτά που αντιπροσωπεύουν τα αισθητά σώματα στο γεωμετρικό πεδίο και που βλέπουμε να πρωταγωνιστούν σε όλα τα θεωρήματα των *Οπτικών*. Δε συμφωνούμε λοιπόν με καμία ανάγνωση της έκφρασης «*φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*», όταν εκείνη εκλαμβάνει το «*μεγεθῶν μεγάλων*» ως χαρακτηριστικό γνώρισμα της έκτασης του «*διαστήματος*», ότι δηλαδή το «*διάστημα*» έχει μεγάλο μέγεθος, είτε αν πρόκειται για το διάστημα, κατά το οποίο διαδίδονται ευθύγραμμα οι όψεις είτε για το διάστημα που υφίσταται μεταξύ των όψεων. Εκτιμούμε λοιπόν ότι τα «*μεγέθη*» του

---

[26] Πρόκειται για χαρακτηριστικές εκφράσεις που χρησιμοποιεί ο Θεμίστιος στο έργο του *Παράφραση στο Περί ψυχής του Αριστοτέλη*. Στη συνέχεια της ενότητας, θα παραθέσουμε αυτούσιο το συγκεκριμένο χωρίο.

[27] Ήρωνος Αλεξανδρινού, *Ορισμοί*, 135.1.1.

[28] «*εἴδη δὲ αὐτοῦ* (ενν. *του μεγέθους*) *γ, γραμμή, ἐπιφάνεια, στερεόν*», Ήρωνος, *έ.α.*, 119.1.3.

[29] «*διαστήματα μὲν οὖν ἔχει* (ενν. ο τόπος) *τρία, μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος, ὧις ὁρίζεται σῶμα πᾶν*», Αριστοτέλους, *Φυσικά*, 209a4-6.

[30] Αυτά τα «*διαστήματα*» ο Ήρων θα τα ονόμαζε πολύ αργότερα ως «*διαστάσεις*» λέγοντας χαρακτηριστικά ότι «*Ἀρχὰς γεωμετρίας ἔνιοί φασιν εἶναι τὰς τοῦ σώματος διαστάσεις τοῦ μαθηματικοῦ· εἰσὶ δὲ τρεῖς, μῆκος, πλάτος καὶ βάθος*», *Ορισμοί*, 135.3.2-4.

πρώτου «όρου» των *Οπτικών* παραπέμπουν σε γεωμετρικά μεγέθη, σε γεωμετρικές οντότητες που, αναλόγως με το είδος τους, δηλαδή αν πρόκειται για ευθείες ή για επιφάνειες ή για στερεά, έχουν μήκος, πλάτος, βάθος.

Επιπλέον, υποστηρίζουμε ότι η λέξη «*μεγάλων*» που συνοδεύει τα «*μεγέθη*» χαρακτηρίζοντάς τα δεν πρέπει να θεωρηθεί ότι χρησιμοποιείται, για να δηλώσει την υπερβολή, δηλαδή πόσο μεγάλα πρέπει να είναι τα «*μεγέθη*». Δεν πρέπει να νοηθεί ως ένα είδος μετρικού προσδιορισμού ή ότι ο συγγραφέας είχε καθορίσει ποια είναι τα μεγάλα μεγέθη, με βάση κάποια μονάδα μέτρησης. Όταν ο συγγραφέας αναφέρεται σε «*μεγάλα μεγέθη*», αναφέρεται στα μεγέθη εκείνα, οι διαστάσεις των οποίων αρκούν, ώστε να είναι ορατά από κάποια ορισμένη απόσταση. Θεωρούμε ότι ο περιορισμός που θέτει ο συγγραφέας στον πρώτο «όρο» του συγγράμματος υποδηλώνει ότι για εκείνον το πρωταρχικό αντικείμενο έρευνας της οπτικής είναι το ορατό μέγεθος και όχι το αόρατο. Η μη-ορατότητα δεν οφείλεται στην ύπαρξη αόρατων -ως προς τη φύση τους- μεγεθών, τα οποία θα έπρεπε να αποτελούν αντικείμενο εξέτασης της επιστήμης της οπτικής. Η οπτική δεν αναγνωρίζει την ύπαρξη αόρατων μεγεθών, αλλά αναγνωρίζει και χρειάζεται να εξηγεί τη μη-ορατότητα, η οποία θεωρείται ως μια ιδιαίτερη κατάσταση, στην οποία ενδέχεται να επέλθουν τα ορατά μεγέθη, όταν επικρατούν συγκεκριμένες συνθήκες[31].

Παρόλο που η χρήση της έννοιας «*μεγάλο*» ως ένδειξη για την επαρκή ορατότητα ενός μεγέθους δε φαίνεται τόσο προφανής σε εμάς, ωστόσο, δεν ήταν καθόλου ξένη στην Αρχαιότητα, όπου το επίθετο αυτό χρησιμοποιούνταν για να δηλώσει ακόμη και την επαρκή φωτεινότητα ενός σώματος. Για παράδειγμα, η χρήση του όρου «*μεγάλος*» ως ένδειξη της επαρκούς φωτεινότητας ενός σώματος πραγματοποιείται από τον Βασίλειο, τον Αρχιεπίσκοπο Καισαρείας Καππαδοκίας (330 μ.Χ.), στο έργο του *Ομιλίαι εις την Εξαήμερον* και, συγκεκριμένα στην 6η ομιλία του *Περί γενέσεως φωστήρων*. Στην ομιλία του αυτή ο Βασίλειος αναφέρεται στη γένεση των δύο μεγάλων ουράνιων φωστήρων και θέτει το ερώτημα, σχετικά με το πώς πρέπει να εκλάβουμε την έννοια του *μεγάλου*. Η απάντησή του είναι ότι ο ήλιος και η σελήνη δεν είναι μεγάλα, επειδή ξεπερνούν σε μέγεθος τα μικρότερα άστρα, αλλά επειδή τα δύο σώματα είναι σε μέγεθος τόσα, ώστε οι 'αυγές', δηλαδή η

[31] Όπως είδαμε, η μη-ορατότητα εξετάζεται στο θεώρημα 3. Αυτή εξαρτάται από την απόσταση του παρατηρούμενου μεγέθους από τον οφθαλμό και οφείλεται στην προϋπόθεση της διακριτότητας των όψεων.

φωτεινότητα που εκπέμπουν, να επαρκεί, για να φωτίζεται ο ουρανός και ο αέρας και, επιπλέον, για να επεκτείνεται η φωτεινότητα αυτή σε όλη τη γη και τη θάλασσα[32].

Παράλληλα, υποστηρίζουμε ότι ο χαρακτηρισμός των μεγεθών ως «*μεγάλων*» εξυπηρετεί και έναν άλλο ρόλο υψίστης σημασίας. Σύμφωνα με τον ορισμό του Ήρωνα, «*Μέγεθός ἐστι τὸ αὐξανόμενον καὶ τεμνόμενον εἰς ἄπειρον·... ἄπειρον δέ ἐστι μέγεθος, οὗ μεῖζον οὐθὲν νοεῖται καθ' ὑπόστασιν ἡλικηνδήποτε, ὥστε μηδὲν εἶναι αὐτοῦ πέρας*»[33]. Αντίθετα με τα μεγέθη που περιγράφει ο Ήρων, τα μεγέθη των *Οπτικών* δε μπορούν να είναι άπειρα, δηλαδή να μην έχουν πέρατα, καθώς στη φύση δεν υπάρχουν τέτοιου είδους μεγέθη και, συνεπώς, στην εμπειρία μας δεν παρατηρούμε άπειρα μεγέθη. Ο λόγος λοιπόν που χαρακτηρίζονται αυτά ως «*μεγάλα*» είναι, για να ξεκαθαριστεί από την αρχή ότι πρόκειται για μεγέθη πεπερασμένα. Τα μεγέθη των *Οπτικών* οφείλουν να έχουν πέρατα και το στοιχείο αυτό επισημαίνεται ρητά για άλλη μια φορά στον δεύτερο «όρο», κατά τον ορισμό του οπτικού κώνου. Εκεί, διαβάζουμε ότι η βάση του κώνου είναι «*πρὸς τοῖς πέρασι τῶν ὁρωμένων*», αίτημα που εξασφαλίζει ταυτόχρονα τον σχετικό χαρακτήρα της οπτικής αντίληψης, εφόσον αυτή πάντα θα εξαρτάται από το παρατηρούμενο μέγεθος.

Η περατότητα των μεγεθών αποτελεί ένα πολύ σπουδαίο και σημαντικό γνώρισμα που σχετίζεται άμεσα με την έννοια του «διαστήματος». Όταν αναζητούσαμε στην αρχή του κεφαλαίου τη σημασία που αποκτά το «*διάστημα*» στα αρχαία γεωμετρικά συγγράμματα, διαπιστώσαμε ότι αυτό τις περισσότερες φορές αποδίδει την απόσταση που υφίσταται, μεταξύ των γεωμετρικών στοιχείων. Για παράδειγμα, μεταξύ δύο σημείων του επιπέδου ορίζεται ένα διάστημα, δηλαδή μια απόσταση που τα διέπει. Αυτό που ενδεχομένως να μη γίνεται αμέσως αντιληπτό είναι ότι -αντιστρέφοντας τα πράγματα- το διάστημα αποτελεί μια κατεξοχήν αόριστη 'οντότητα' που μόνο εάν και εφόσον υπάρχουν αυτά τα σημεία μπορεί να προσδιοριστεί. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση που εξετάζουμε. Παρόλο που

---

[32] «*πῶς τοίνυν τοῦ μεγάλου τὴν ἔννοιαν ἐκδεξόμεθα; Πότερον ὡς τὸν μύρμηκα, ἢ ἄλλο τι τῶν φύσει μικρῶν, μέγα προσαγορεύομεν διὰ τὴν πρὸς τὰ ὁμογενῆ σύγκρισιν τὴν ὑπεροχὴν μαρτυροῦντες; ἢ τὸ μέγα νῦν οὕτως, ὡς ἐν τῇ οἰκείᾳ τῶν φωστήρων κατασκευῇ τοῦ μεγέθους ἐμφαινομένου; Ἐγὼ μὲν οἶμαι τοῦτο. Οὐ γὰρ ἐπειδὴ μείζους τῶν μικροτέρων ἀστέρων, διὰ τοῦτο μεγάλοι, ἀλλ᾽ ἐπειδὴ τοσοῦτοι τὴν περιγραφὴν, ὥστε ἐξαρκεῖν τὴν ἀπ᾽ αὐτῶν ἀναχεομένην αὐγὴν καὶ οὐρανὸν περιλάμπειν καὶ τὸν ἀέρα, καὶ ὁμοῦ πάσῃ τῇ γῇ καὶ τῇ θαλάσσῃ συμπαρεκτείνεσθαι*». Βλ. Βασιλείου Θεολόγου, *Ομιλίαι εις την Εξαήμερον*, έκδ. S. Giet, *Basile de Césarée, Homélies sur l'hexaéméron*, 2η έκδ., Sources chrétiennes 26, Παρίσι 1968, 6.9.8-18.

[33] Ήρωνος, *έ.α.*, 119.1.2-5.

στο σημείο αυτό υποκρύπτεται μια σημαντική ερμηνευτική διάσταση που θα αναπτύξουμε στην επόμενη ενότητα, προς το παρόν θα αρκεστούμε μόνο στο να επισημάνουμε ότι το «*διάστημα*» εκλαμβάνεται από τον συγγραφέα του πρώτου «όρου» ως κάτι το αόριστο που δύναται να οριστεί στον γεωμετρικό χώρο, μόνο μέσω της ύπαρξης των περάτων των εκάστοτε μεγεθών[34]. Ένα άπειρο μέγεθος θα είχε ως αποτέλεσμα ένα αόριστο διάστημα. Όπως πολύ εύστοχα επισημαίνει ο Σιμπλίκιος, το μέγεθος συνιστά «*πέρας καὶ ὅρος τοῦ ἀορίστου διαστήματος ὁριστικόν τε καὶ περιεκτικόν*»[35].

Το ερώτημα που προκύπτει σε αυτό το σημείο σχετίζεται με τις όψεις και αφορά στη συμβολή τους. Με άλλα λόγια, ποιος είναι ο ρόλος των όψεων; Ο ρόλος των ευθείων γραμμών που εξάγονται από το μάτι επικεντρώνεται στο να ορίσουν με τη σειρά τους όχι μόνο σε γεωμετρικό, αλλά και σε οπτικό -πλέον- επίπεδο, το «*διάστημα των μεγάλων μεγεθών*». Χάρη στη διαμόρφωση του οπτικού κώνου, με κορυφή του το παρατηρησιακό σημείο και με βάση του τα πέρατα του παρατηρούμενου μεγέθους, οι όψεις έχουν τη δυνατότητα να συγκεκριμενοποιήσουν γεωμετρικά τη σχέση του σημείου-οφθαλμού με το διάστημα του μεγέθους. Μέσω των όψεων, υπάρχει η δυνατότητα να περιγραφεί σε γεωμετρική γλώσσα η χωρική σχέση του ενός απέναντι στο άλλο.

Όλα αυτά θεωρούνται αξιόλογα, ωστόσο, δεν αρκούν, γιατί μια πραγματεία γεωμετρικής οπτικής δεν περιορίζεται μόνο στη γεωμετρική έκθεση και καταγραφή των στοιχείων εκείνων που λαμβάνουν μέρος κατά τη διαδικασία της όρασης. Οφείλει να δίνει ικανοποιητικές περιγραφές και εξηγήσεις του τρόπου, με τον οποίο εμφανίζονται στην οπτική αντίληψη τα παρατηρούμενα μεγέθη, να παρέχει μια σαφή αιτιολόγηση για τον σχετικό χαρακτήρα των εμφανίσεών τους. Αυτό το δύσκολο έργο πραγματοποιείται στα *Οπτικά* με γεωμετρικά εργαλεία και τον κύριο ρόλο διαδραματίζουν για άλλη μια φορά οι όψεις. Συγκεκριμένα, οι όψεις αποτελούν τους

---

[34] Είναι απαραίτητο να γίνει σαφές ότι κατά την αρχαία επιστήμη και φιλοσοφία γινόταν διάκριση ανάμεσα στην έννοια του «*διαστήματος*» και στην έννοια του «*μεγέθους*». Όπως προαναφέρθηκε, το «*διάστημα*» αποτελούσε αόριστη οντότητα που γινόταν προσδιορίσιμη, δηλαδή ορισμένη, μόνο μέσω της ύπαρξης ενός «*μεγέθους*» και, πιο συγκεκριμένα, μέσω των περάτων του «*μεγέθους*». Από τη στιγμή που πραγματοποιείται αυτό μεταβαίνουμε σε μια άλλη έννοια. Μιλάμε, όπως ακριβώς κάνει και ο συγγραφέας του πρώτου «όρου», για το «διάστημα του μεγέθους» που υποκρύπτει μια θεμελιώδη έννοια και αντίληψη. Στην ενότητα που ακολουθεί και που είναι αφιερωμένη στην ερμηνευτική προσέγγιση του πρώτου «όρου» θα υποδείξουμε ποια είναι αυτή.

[35] Σιμπλίκιου, *Σχόλια στα Φυσικά του Αριστοτέλη*, έκδ. H. Diels, *Simplicii in Aristotelis physicorum libros octo commentaria*, 2 τόμ. (Commentaria in Aristotelem Graeca 9 & 10), Βερολίνο: Reimer 1882,1895, 9.537.15-16.

φορείς[36] του διαστήματος του μεγέθους στον οφθαλμό, δηλαδή στην οπτική αντίληψη. Είναι ο συνδετικός κρίκος, ανάμεσα στο παρατηρησιακό σημείο και στο διάστημα του μεγέθους. Χωρίς την ύπαρξη αυτών των ευθειών, το διάστημα του μεγέθους μένει από άποψη ορατότητας αόριστο, δηλαδή δε γίνεται οπτικά αντιληπτό, ακόμα και αν υπάρχει στον γεωμετρικό χώρο. Χωρίς τις όψεις να προσπίπτουν σε αυτό, η όρασή του είναι αδύνατη. Η συνθήκη ορατότητας διατυπώνεται ξεκάθαρα στον τρίτο «όρο»:
«*καὶ ὁρᾶσθαι μὲν ταῦτα, πρὸς ἃ ἂν αἱ ὄψεις προσπίπτωσι, μὴ ὁρᾶσθαι δέ, πρὸς ἃ ἂν μὴ προσπίπτωσιν αἱ ὄψεις*»[37]. Αλλά και η σχετική εμφάνιση του διαστήματος των μεγεθών, δηλαδή η σχετική τους θέση στο χώρο και το σχετικό τους μέγεθος, εξαρτάται αντίστοιχα είτε από τη σχετική θέση των όψεων μέσα στον οπτικό κώνο είτε από τη γωνία που διαμορφώνουν στην κορυφή του έχοντας ως βάση του το διάστημα των μεγεθών. Όλα αυτά καθορίζονται στον τέταρτο, πέμπτο και έκτο «όρο» της πραγματείας[38].

Εκτιμούμε ότι ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών* είναι γραμμένος με πολύ περισσότερη προσοχή και με πολύ μεγαλύτερη σαφήνεια από ό,τι γενικά του καταλογίζεται. Δεν είναι ούτε προβληματικός ούτε ελλιπής. Αναλύοντάς τον κανείς μπορεί να βρεθεί μπροστά σε μια πολυσύνθετη θεώρηση. Ήδη από τον πρώτο κιόλας «όρο», παρατηρούμε την προσπάθεια αναγωγής όλων των στοιχείων εκείνων που μετέχουν κατά τη διαδικασία της όρασης στο επίπεδο της γεωμετρίας. Το παρατηρούμενο φυσικό αντικείμενο ειδωμένο αφαιρετικά αντιπροσωπεύεται στον γεωμετρικό χώρο από ένα πεπερασμένο μέγεθος που έχει διάστημα, ενώ ο οφθαλμός από ένα σημείο, κάτι που θα γίνει σαφέστερο στον δεύτερο «όρο», κατά την περιγραφή του οπτικού κώνου. Ήδη από τον πρώτο «όρο», συγκεκριμενοποιείται η

---

[36] Ο λόγος που επιλέγουμε να χαρακτηρίζουμε τις όψεις ως «*φορείς*» οφείλεται όχι μόνο στην ερμηνευτική μας προσέγγιση, αλλά και στον ρηματικό τύπο «*φέρεσθαι*» που χρησιμοποιείται από τον συγγραφέα του πρώτου «όρου». Επισημαίνουμε ότι, σύμφωνα με το λεξικό Liddell-Scott, ο παθητικός ρηματικός τύπος «*φέρεσθαι*» χρησιμοποιούνταν με τις ίδιες ακριβώς σημασίες που είχε και ο τύπος «*φέρειν*» του ενεργητικού ρήματος «*φέρω*».

[37] Θεωρούμε ότι στο πλαίσιο της συγκεκριμένης ανάγνωσης του πρώτου «όρου» που προτείνουμε, η λέξη «*ταῦτα*» του τρίτου «όρου» αναφέρεται με τη σειρά της στα «διαστήματα των μεγεθών» και, αν θέλουμε να είμαστε πιο αυστηροί, στα σημεία εκείνα που ορίζουν και περιέχουν κάθε φορά τα «διαστήματα των μεγεθών».

[38] «*καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα μείζονα φαίνεσθαι, τὰ δὲ ὑπὸ ἐλάττονος ἐλάττονα, ἴσα δὲ τὰ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα*» («*όρος*» 4).
«*καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μετεωροτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα μετεωρότερα φαίνεσθαι, τὰ δὲ ὑπὸ ταπεινοτέρων ταπεινότερα*» («*όρος*» 5).
«*καὶ ὁμοίως τὰ μὲν ὑπὸ δεξιωτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα δεξιώτερα φαίνεσθαι, τὰ δὲ ὑπὸ ἀριστερωτέρων ἀριστερώτερα*» («*όρος*» 6).

σχέση του παρατηρησιακού σημείου με το παρατηρούμενο μέγεθος. Η σχέση αυτή περιγράφεται με γεωμετρικό τρόπο και, παρόλο που τοποθετείται σε γεωμετρικό χώρο, είναι ικανή να προσδιορίσει επίσης γεωμετρικά την οπτική αντίληψη. Θα λέγαμε ότι η μεθοδολογία που ακολουθείται ικανοποιεί απόλυτα τις απαιτήσεις ενός γεωμετρικού συγγράμματος και, γενικότερα της μαθηματικής επιστήμης, θυμίζοντάς μας τα λόγια του Θεμίστιου «*...καὶ ὅσα ἄλλα ἡ μαθηματικὴ θεωρεῖ, ἀφαιροῦσα μὲν τὰ φυσικὰ σύμπαντα πάθη,*
μόνα δὲ αὐτοῦ τὰ πέρατα καὶ τὰ διαστήματα ἐξετάζουσα καὶ μηδαμοῦ προσλαμβάνουσα ἐν τοῖς λόγοις τὴν ὕλην ἢ τὰς φυσικὰς ποιότητας»[39]. Επιπλέον, δεν πρέπει να παραβλέψουμε ότι μέσα από τη διατύπωση του πρώτου «όρου» αναδεικνύεται η σπουδαιότητα των όψεων, η ικανότητά τους να συλλαμβάνουν, να φέρουν και, πιο αυστηρά, να ορίζουν το διάστημα των μεγεθών σε γεωμετρικό και σε οπτικό επίπεδο. Θεωρούμε ότι ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών*, παρόλο που δεν έχει τη μορφή αυστηρής κατηγορικής πρότασης, υποκρύπτει την επιθυμία του συγγραφέα να προσφέρει έναν ορισμό των όψεων, προτού αυτές κάνουν την εμφάνισή τους ως έννοια στον δεύτερο «όρο». Καταλήγουμε λοιπόν υποστηρίζοντας ότι ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών* θα πρέπει να αποδοθεί ως «*Υποτίθεται ότι οι ευθείες γραμμές που εξάγονται από το μάτι ορίζουν το διάστημα των μεγάλων μεγεθών*». Όπως θα συζητηθεί παρακάτω, μέσω της παραπάνω ανάγνωσης, ξεδιπλώνεται ένας διαφορετικός τρόπος αντίληψης των παρατηρούμενων μεγεθών που ενδιαφέρει την ιστορία της αρχαίας οπτικής, δίνονται για πρώτη φορά απαντήσεις για τα σημαντικά ερωτήματα που αφορούν στη θεμελίωση της διακριτότητας των όψεων και, τέλος, βοηθά άμεσα στην επίλυση του σοβαρού ζητήματος της εξακρίβωσης της ταυτότητας των δύο διασωζόμενων εκδόσεων.

2. Ερμηνευτική προσέγγιση του πρώτου «όρου» των Οπτικών

Σύμφωνα με τη νέα ανάγνωση του πρώτου «όρου» των *Οπτικών*, διαπιστώσαμε ότι οι όψεις παρεμβάλλονται ως ευθείες γραμμές, ανάμεσα στον οφθαλμό και στο αντικείμενο της όρασης. Ο ρόλος των όψεων είναι να ορίσουν και να συγκεκριμενοποιήσουν τη σχέση που υφίσταται μεταξύ του παρατηρησιακού σημείου και του παρατηρούμενου αντικειμένου στον γεωμετρικό χώρο. Χωρίς αυτές, τα αντικείμενα θα παρέμεναν σε αοριστία, όχι μόνο όσον αφορά στον καθορισμό της

[39] Θεμίστιου, *Παράφραση στο Περί ψυχής του Αριστοτέλη*, έκδ. R. Heinze, *Themistii in libros Aristotelis de anima paraphrasis* (Commentaria in Aristotelem Graeca 5.3, Βερολίνο: Reimer 1899), 5,3.8.20-23.

σχέσης τους με το σημείο του οφθαλμού στο γεωμετρικό πεδίο, αλλά και όσον αφορά στην οπτική τους αντίληψη. Αυτό που με τόση απλότητα εμείς ονομάζουμε «*παρατηρούμενο αντικείμενο*» έχοντας επίγνωση ότι η έκφραση αυτή αναφέρεται σε ένα ορατό σώμα και εμπερικλείει αναπόφευκτα όλα τα στοιχεία εκείνα που το χαρακτηρίζουν, μεταξύ άλλων την υλική του ποιότητα, με την ίδια επίγνωση ο συγγραφέας του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* προσπαθεί να αποφύγει τέτοιου είδους παραπομπές και ονομάζει το «*παρατηρούμενο αντικείμενο*» ως «*διάστημα του μεγέθους*» προσέχοντας βέβαια να αναφερθεί στα «*μεγάλα*», δηλαδή στα πεπερασμένα μεγέθη.

Επιχειρώντας μια πρώτη προσέγγιση επισημάναμε ότι η έκφραση «*διάστημα του μεγέθους*» παραπέμπει σε αυτό που σήμερα ονομάζεται και κατανοείται ως «*διαστάσεις*». Το «*διάστημα*» αποτελεί κάτι αόριστο που μόνο μέσω του μεγέθους μπορεί να οριστεί. Συγκεκριμένα, τα πέρατα του μεγέθους είναι σε θέση να προσδιορίσουν κάθε φορά το μη-ορισμένο διάστημα. Μέσω των περάτων, δηλαδή των ορίων του μεγέθους, ορίζεται και το διάστημα. Με τον τρόπο αυτό, καταγράφονται στο γεωμετρικό επίπεδο τα χαρακτηριστικά του μεγέθους, δηλαδή το μήκος, το πλάτος, το βάθος, αποδίδονται δηλαδή οι διαστάσεις τους και, επομένως, δίνεται μια πρώτη σχηματική περιγραφή του. Στο πλαίσιο αυτής της αντίληψης, το «*διάστημα του μεγέθους*» μπορεί να ειδωθεί ως ένας ικανοποιητικός τρόπος περιγραφής του παρατηρούμενου σώματος στη γλώσσα της γεωμετρίας και, επομένως, να γίνει πραγματεύσιμο ως γεωμετρικό στοιχείο.

Αν σταματούσαμε στο σημείο αυτό την ερμηνευτική προσέγγιση του πρώτου «όρου», έτσι όπως αναδύεται μέσω της νέας ανάγνωσης που προτείναμε, θα καταλήγαμε στο συμπέρασμα ότι πίσω από την έκφραση «*διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*» υποκρύπτεται η πρόθεση του συγγραφέα να κρατήσει τη συζήτηση στο επίπεδο της γεωμετρίας μιλώντας με όρους γεωμετρικούς και πραγματοποιώντας -όσο και όπως αυτό είναι δυνατόν- όλες τις αναγωγές εκείνες που κρίνονται απαραίτητες, ώστε τίποτα να μην παραπέμπει σε μη-γεωμετρικά στοιχεία. Η ερμηνευτική μας προσέγγιση θα κατέληγε εδώ και εμείς θα βρισκόμασταν αντιμέτωποι με έναν συγγραφέα πολύ νομότυπο, με αναμενόμενες πρακτικές, χωρίς όμως να έχουμε συνειδητοποιήσει το εύρος της αντίληψής του. Δε θα είχαμε διαπιστώσει ότι πίσω από την έκφραση «*διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*» υποδηλώνεται μια θεμελιώδης έννοια που οδηγεί σε μια θεμελιώδη θεώρηση, η οποία όχι μόνο επιτρέπει να κατανοήσουμε τι εννοεί ουσιαστικά ο συγγραφέας του πρώτου «όρου», αλλά επιβεβαιώνει τη νέα ανάγνωση που προτείναμε και, κυρίως, ξετυλίγει

το κουβάρι, όσον αφορά στο επίμαχο ζήτημα της ταυτότητας των δύο διασωζόμενων εκδόσεων των *Οπτικών*:

Συγκεκριμένα, ο συγγραφέας του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* χρησιμοποιεί την έκφραση «*διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*» με έναν σύνθετο τρόπο. Ο συγγραφέας φέρει τη συγκεκριμένη έκφραση, όχι μόνο για να αποδώσει με γεωμετρικούς όρους το σχήμα του παρατηρούμενου αντικειμένου, αλλά για να εννοήσει τον *τόπο* που αυτό καταλαμβάνει. Σύμφωνα με τη δική του αντίληψη, οι όψεις δεν ορίζουν και δεν αποτελούν απλά τους φορείς (*φέρεσθαι*) των παρατηρούμενων μεγεθών στην οπτική αντίληψη, αλλά ορίζουν και φέρουν στην οπτική αντίληψη τον τόπο τους θεωρώντας ότι κάθε σώμα που παρατηρείται περιέχεται σε έναν δικό του τόπο, ο οποίος καθορίζεται κάθε φορά από τα πέρατα του σώματος, και, αντίστροφα, ο τόπος που έχει καθοριστεί από τα πέρατα του σώματος περιέχει το παρατηρούμενο σώμα. Ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών* υποθέτει ουσιαστικά ότι το αντικείμενο της όρασης είναι ένα ορισμένο «διάστημα του μεγέθους», δηλαδή ένας οριοθετημένος τόπος που καθορίζεται κάθε φορά από τα όρια, δηλαδή τα πέρατα, του παρατηρούμενου μεγέθους. Ο τόπος αναδεικνύεται στον παράγοντα εκείνο, μέσω του οποίου πληροφορούμαστε όχι μόνο για το σχήμα του μεγέθους, αλλά, κυρίως, για τη θέση του στον γεωμετρικό χώρο. Εφόσον κάθε ορατό μέγεθος ορίζει το δικό του «*διάστημα του μεγέθους*», δηλαδή τον δικό του τόπο, κατανοούμε ότι η έκφραση «...*φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*» χρησιμοποιήθηκε, επειδή είναι ικανή να δηλώσει τη σχετικότητα ενός παρατηρούμενου διαστήματος του μεγέθους και ενός άλλου, ως προς τη θέση τους στον γεωμετρικό χώρο. Η σχετικότητα των θέσεών τους γίνεται *και* οπτικά αντιληπτή, εφόσον αυτές εξαρτώνται πάντα από τη θέση του παρατηρησιακού σημείου.

Οι λόγοι που μας ωθούν προς αυτή την ερμηνεία του πρώτου «όρου» είναι πολλοί. Αρχικά, επιθυμώντας να συλλάβουμε το βαθύτερο νόημα της έκφρασης «*διάστημα του μεγέθους*» ανατρέξαμε στα κείμενα της Αρχαιότητας, προκειμένου να την εντοπίσουμε. Παρόλο που η έκφραση αυτή δε συναντάται πολύ συχνά, εντούτοις, στις λίγες φορές εμφάνισής της ήταν δυνατόν να διαπιστώσουμε ότι, μέσω αυτής, υποδηλωνόταν από ορισμένους η θεμελιώδης έννοια του τόπου. Έκανε την εμφάνισή της στο πλαίσιο της φυσικής φιλοσοφίας και σε συζητήσεις που είχαν ως θέμα τους τον τόπο.

Συγκεκριμένα, στα *Φυσικά* ο Αριστοτέλης μεταφέρει την άποψη ορισμένων που υποστηρίζουν ότι «*το διάστημα του μεγέθους*» ενός πράγματος υποδηλώνει τον

«*τόπο*» του πράγματος[40]. Από αυτή την άποψη, λέει ο Αριστοτέλης, ο τόπος είναι η ύλη ενός πράγματος. Στη συνέχεια, επισημαίνει ότι «*το διάστημα του μεγέθους δεν είναι το ίδιο με το μέγεθος: είναι αυτό που περιέχεται και ορίζεται από το είδος -για παράδειγμα, από ένα επίπεδο και ένα πέρας- και αυτή η περιγραφή ταιριάζει με την αόριστη φύση της ύλης*»[41].

Το παραπάνω απόσπασμα αποτελεί ένα μέρος του γενικότερου προβληματισμού που αναπτύσσει ο Αριστοτέλης, σχετικά με το τι είναι ο τόπος. Ξεκινά με την παράθεση διάφορων απόψεων περί τόπου που είχαν προταθεί μέχρι την εποχή του. Μέσω του παραπάνω χωρίου, πληροφορούμαστε ότι κατά την Αρχαιότητα επικρατούσε -εκτός των άλλων- μια αντίληψη, σύμφωνα με την οποία ο τόπος ενός πράγματος ορίζεται ως το «*διάστημα του μεγέθους*» του. Η αντίληψη αυτή λάμβανε βέβαια περαιτέρω φιλοσοφικές προεκτάσεις προχωρώντας σε μια ταύτιση του τόπου με την ύλη.

Θεωρούμε ότι ο συγγραφέας του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* δεν αγνοούσε καθόλου την αντίληψη που παρουσιάζει ο Αριστοτέλης, μια αντίληψη που δεν έπαψε να κυκλοφορεί και στους μεταχριστιανικούς αιώνες, καθώς πολύ σημαντικοί μεταγενέστεροι συγγραφείς, όπως ο Θεμίστιος, ο Σιμπλίκιος, ο Ιωάννης Φιλόπονος τη μετέφεραν, όταν σχολίαζαν τα αριστοτελικά *Φυσικά*[42]. Εκτιμούμε ότι το «*διάστημα του μεγέθους*» που αναφέρεται στον πρώτο «όρο» των *Οπτικών* δε μπορεί

---

[40] «*ᾗ δὲ δοκεῖ ὁ τόπος εἶναι τὸ διάστημα τοῦ μεγέθους, ἡ ὕλη*», Αριστοτέλους, *Φυσικά*, 209b6-7.

[41] «*τοῦτο γὰρ ἕτερον τοῦ μεγέθους, τοῦτο δ᾽ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ εἴδους καὶ ὡρισμένον, οἷον ὑπὸ ἐπιπέδου καὶ πέρατος, ἔστι δὲ τοιοῦτον ἡ ὕλη καὶ τὸ ἀόριστον*», *έ.α.*, 209b7-9.

[42] Ο Θεμίστιος αναφέρει στο έργο του *Παράφραση στα Φυσικά του Αριστοτέλη* ότι «*δοκεῖ μὲν γὰρ εἶναι τόπος διάστημα τοῦ μεγέθους καὶ τοῦ σώματος, τοιοῦτον δέ τι καὶ ἡ ὕλη φαντάζεται*» (5,2,106.9-10). Στα *Σχόλια στα Φυσικά του Αριστοτέλη* ο Σιμπλίκιος μεταφέρει και στη συνέχεια σχολιάζει την άποψη αυτή «*ᾗ δὲ δοκεῖ ὁ τόπος εἶναι τὸ διάστημα τοῦ μεγέθους, ταύτῃ ἡ ὕλη δόξει· τοῦτο γὰρ ἕτερον τοῦ μεγέθους· τοῦτο δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ εἴδους καὶ ὡρισμένον οἷον ὑπὸ ἐπιπέδου καὶ πέρατος. ἔστι δὲ τοιοῦτον ἡ ὕλη καὶ τὸ ἀόριστον*» (9,232.27-30). Τέλος, ο Ιωάννης Φιλόπονος στα *Σχόλια στα Φυσικά του Αριστοτέλη*, αφού παραθέτει το αριστοτελικό χωρίο των *Φυσικών* «*Ἡ δὲ δοκεῖ ὁ τόπος εἶναι τὸ διάστημα τοῦ μεγέθους, ἡ ὕλη· τοῦτο γὰρ ἕτερον τοῦ μεγέθους*», προχωρά στο σχολιασμό του (17,519.24-25).

να θεωρηθεί ως μια τυχαία έκφραση ή να ειδωθεί ξεκομμένη και εντελώς ανεπηρέαστη από το πλαίσιο της αντίληψης που περιγράφεται στο αριστοτελικό χωρίο. Ο συγγραφέας του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* αποδίδει το αντικείμενο της όρασης ως «*διάστημα του μεγέθους*» γνωρίζοντας πολύ καλά ότι με αυτόν τον τρόπο πραγματοποιεί μια εννοιολογική και ερμηνευτική μετατόπιση θεωρώντας ότι το αντικείμενο της όρασης -το «*διάστημα του μεγέθους*»- δεν αναφέρεται πια μονοσήμαντα και αποκλειστικά στο ορατό σώμα, αλλά στον τόπο του. Ο κυριότερος λόγος για τον οποίο είμαστε πεπεισμένοι ότι συμβαίνει αυτό βρίσκεται στον πρόλογο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* των *Οπτικών*.

3. Τι αποκαλύπτει ο πρόλογος της Αναθεωρημένης Έκδοσης των Οπτικών;

Στην έκδοση του Heiberg, πριν από το κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* των *Οπτικών*, συναντά κανείς ένα αρχαίο κείμενο, το οποίο θεωρείται ότι αποτελεί τον πρόλογό της. Ο πρόλογος αυτός έχει αποδοθεί από ορισμένους μελετητές στον Θέωνα τον Αλεξανδρινό, ενώ, σύμφωνα με κάποιες άλλες απόψεις, ενδεχομένως να έχει γραφτεί από έναν μαθητή του.

Εκτιμούμε ότι το συγκεκριμένο κείμενο είναι πάρα πολύ σημαντικό, παρόλο που δεν έχει τύχει της προσοχής που θα του άξιζε. Συχνά προσπερνάται στα γρήγορα ή άλλες φορές παραγκωνίζεται τελείως, χωρίς να έχει συνειδητοποιηθεί ότι αποτελεί το κλειδί, όχι μόνο για τη σύλληψη του τρόπου, με τον οποίο κατανοούνταν στην Αρχαιότητα ορισμένα θέματα της γεωμετρικής οπτικής, αλλά και για την επίλυση του σοβαρού ζητήματος της ταυτότητας των δύο διασωζόμενων εκδόσεων των *Οπτικών*. Μελετώντας το σημείο εκείνο του προλόγου, στο οποίο ο συγγραφέας παρουσιάζει τον τρόπο, με τον οποίο γίνεται αντιληπτή η διακριτότητα των όψεων, εντοπίσαμε ορισμένα ίχνη που μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το κείμενο του προλόγου συνδέεται περισσότερο με το κείμενο της έκδοσης των *Οπτικών*, παρά με εκείνο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Παράλληλα, μέσα από το συγκεκριμένο χωρίο του προλόγου, ξεπροβάλλουν ορισμένα στοιχεία που ενισχύουν τον νέο τρόπο ανάγνωσης και ερμηνείας του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* που προτείναμε επιβεβαιώνοντάς τον. Κατά τη συνέχεια της ενότητας, θα εστιάσουμε την προσοχή μας αποκλειστικά στο χωρίο εκείνο του προλόγου που αναφέρεται στη διακριτότητα, ώστε να αναδείξουμε τους λόγους που μας οδήγησαν στα παραπάνω συμπεράσματα[43].

[43] Ολόκληρο το κείμενο του προλόγου θα εξεταστεί αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

Αφήνοντας στην άκρη τις υποθέσεις που προτείνονται για το ποιος είναι ή ποιος θα μπορούσε να είναι ο συγγραφέας του προλόγου, θα επιχειρήσουμε να εξετάσουμε το χωρίο του κειμένου που μας ενδιαφέρει κρατώντας υπόψη μας μόνο ότι ο συγγραφέας του δεν αναπτύσσει τις δικές του απόψεις, αλλά μεταφέρει γραπτά τη θεωρία ενός άλλου προσώπου που δεν κατονομάζει. Ο συγγραφέας αναφέρει ότι το πρόσωπο αυτό «*ομολογούσε*», πρώτον, ότι οι ακτίνες που εκχέονται από το μάτι φέρονται κατά ευθείες γραμμές και, δεύτερον, ότι αυτές φέρονται με διαστήματα[44]. Τα διαστήματα αυτά αποτελούν την αιτία που *τα ορώμενα δε βλέπονται αμέσως ολόκληρα*[45]. Σύμφωνα με τον συγγραφέα του προλόγου, το πρόσωπο που ομολογούσε τα παραπάνω έφερε παράλληλα κάποια «*ὑπόμνησιν*», δηλαδή κάποια υπενθύμιση[46]. Η υπενθύμιση αυτή έχει να κάνει με τα εμπειρικά παραδείγματα της βελόνας και των γραμμάτων που στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφέραμε επιγραμματικά, αλλά στο σημείο αυτό θα τα μελετήσουμε λεπτομερώς. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον συγγραφέα, το πρόσωπο έφερε τα εξής παραδείγματα:

«*Γιατί πολλές φορές (συμβαίνει) μια βελόνα ή ένα άλλο τέτοιου είδους σώμα να έχει πεταχτεί στο έδαφος και ορισμένοι με μεγάλη επιμονή αφοσοιώθηκαν στην αναζήτησή του και εξέτασαν πολλές φορές τον ίδιο τόπο, χωρίς τίποτα να κρύβει το προς αναζήτηση σώμα. Δεν είδαν τη βελόνα, παρά πολύ αργότερα, όταν έριξαν τη ματιά τους στον τόπο, στον οποίο βρισκόταν το σώμα. Είναι λοιπόν φανερό ότι, όταν δε βλεπόταν το πεταμένο σώμα, ούτε ο τόπος, στον οποίο βρισκόταν, βλεπόταν. Ώστε δε βλέπονται όλα τα μέρη του τόπου που τοποθετείται υπό την όψη εκείνου που ψάχνει. Γιατί, αν βλέπονταν, θα βλεπόταν και το ζητούμενο σώμα. Όμως, δε βλεπόταν.*

Επιπλέον, βασιζόμενος (στην περίπτωση) εκείνων που κοιτάζουν προσεκτικά τα βιβλία έλεγε ότι δε μπορούν να δουν όλα τα γράμματα που βρίσκονται μέσα στη σελίδα. Γιατί, αν ήταν αναγκασμένοι να δείξουν τα γράμματα που έχουν γραφτεί σε μικρότερη συχνότητα, δε θα είχαν τη δυνατότητα να το κάνουν, γιατί οι όψεις δε φέρονται προς όλα τα γράμματα, αλλά υπάρχουν με διαστήματα, και έτσι ένας μεγάλος αριθμός γραμμάτων που είναι αραδιασμένα να μη βλέπεται. Ώστε από αυτό γίνεται φανερό γιατί δε θα ειδωθεί ούτε όλος ο τόπος της σελίδας.

---

[44] «*...καὶ ὁμολογεῖν κατ᾽ εὐθείας φέρεσθαι γραμμὰς καὶ ταύτας ἐν διαστήμασι,...*», *Opticorum Recensio Theonis*, 146.21-22.

[45] Υπενθυμίζουμε ότι πρόκειται για το πρώτο θεώρημα των *Οπτικών* και της *Αναθεωρημένης Έκδοσής* τους: *Οὐδέν τῶν ὁρωμένων ἅμα ὅλον ὁρᾶται.*

[46] «*...ἅμα ὅλα ὁρᾶσθαι, ὑπόμνησιν φέρων τοιαύτην·*», *Opticorum Recensio Theonis*, 146.23.

Το ίδιο συμβαίνει και στις περιπτώσεις των άλλων θεαμάτων[47]».

Ύστερα από την παράθεση των παραδειγμάτων, ο συγγραφέας διατυπώνει το συμπέρασμα «*ὥστε οὐχ ὁραθήσεται ἅμα ὅλα τὰ ὁρώμενα*»[48]. Κατανοούμε λοιπόν ότι το πρόσωπο, στο οποίο αναφέρεται ο συγγραφέας, έφερε την παραπάνω υπενθύμιση, δηλαδή ανέσυρε από τη μνήμη των ακροατών του ορισμένα περιστατικά από την εμπειρία τους, μέσω των οποίων μπορούσαν, αν τα θυμηθούν, να διαπιστώσουν ότι πράγματι συμβαίνει τα ορώμενα, όπως το έδαφος ή η σελίδα ενός βιβλίου, να μη βλέπονται αμέσως ολόκληρα. Το πρόσωπο που έκανε αυτή την υπενθύμιση γενίκευσε στη συνέχεια τη διαπίστωση αυτή λέγοντας ότι το ίδιο συμβαίνει *καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων θεαμάτων* προεξοφλώντας τελικά ότι τα ορώμενα δε θα ειδωθούν αμέσως ολόκληρα. Η αιτία που συμβαίνει αυτό το γεγονός οφείλεται στα διαστήματα που διέπουν τις όψεις. Ο προσδιορισμός της αιτίας γίνεται τόσο πριν ξεκινήσει η έκθεση των παραδειγμάτων, όπου λέγεται ότι «...*ὁμολογεῖν κατ' εὐθείας φέρεσθαι γραμμὰς καὶ ταύτας* (ενν. *τὰς ἀκτῖνας*) *ἐν διαστήμασι, καὶ διὰ τοῦτο μηδὲ τὰ ὁρώμενα ἅμα ὅλα ὁρᾶσθαι*...»[49], όσο και κατά τη διάρκεια της έκθεσης αυτής. Αλλά, ας εξετάσουμε πιο προσεκτικά τα παραδείγματα:

Το πρώτο πράγμα που προκαλεί εντύπωση και δε μπορεί να προσπεραστεί ασχολίαστο είναι ότι και στα δύο παραδείγματα που προβάλλονται, για να αναδείξουν τα αποτελέσματα της διακριτότητας των όψεων, το φυσικό αντικείμενο και, γενικότερα, οτιδήποτε βλέπει το μάτι συνιστά έναν τόπο. Ο συγγραφέας χειρίζεται το σώμα και τον τόπο που αυτό καταλαμβάνει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όταν αναφέρεται στην οπτική αντίληψή τους. Αν κάποιος δε βλέπει ένα σώμα, τότε δε

47

«*πολλάκις γὰρ βελόνης ἤ τινος τοιούτου ἑτέρου σωματίου ἐκριφέντος εἰς τὸ ἔδαφος φιλοτιμότερόν τινες προσεκάθισαν τῇ ζητήσει καὶ τὸν αὐτὸν τόπον πολλάκις ἐμάτευσαν οὐδενὸς ἐπιπροσθοῦντος τῷ ζητουμένῳ σωματίῳ·*
εἶτα μέντοι γε ὕστερον ἐπιβάλλοντες τὴν ὄψιν τῷ τόπῳ, ἐν ᾧπερ ἦν τὸ σωμάτιον, εἶδον τὴν βελόνην. δῆλον οὖν, ὡς, ὅτε οὐχ ἑωρᾶτο τὸ ἐξερριμμένον, οὐδὲ ὁ τόπος, ἐν ᾧ ἦν, ἑωρᾶτο·
ὥστε τοῦ ὑπὸ τὴν ὄψιν τοῦ ζητοῦντος κειμένου τόπου μὴ ἅπαντα τὰ μέρη θεωρεῖσθαι. εἰ γὰρ ἐθεωρεῖτο, καὶ τὸ ζητούμενον ἂν ἑωρᾶτο· οὐχ ἑωρᾶτο δέ.
ἐπί τε τῶν ἀτενιζόντων τοῖς βιβλίοις συνιστάμενος ἔφασκε μηδὲ τούτους ἂν δύνασθαι πάντα τὰ ἐν τῇ σελίδι γράμματα ὁρᾶν.
πολλὰ γοῦν ἀναγκαζομένους δεῖξαι τῶν σπανίως γραφομένων γραμμάτων μὴ δύνασθαι δεῖξαι διὰ τὸ μὴ πρὸς πάντα τὰ γράμματα τὰς ὄψεις φέρεσθαι, ἀλλ' ἐκ διαστημάτων ταύτας ὑπάρχειν καὶ πολλὰ τῶν κατατεταγμένων μὴ θεωρεῖν.
ὥστε ἐκ τούτου φανερόν ἐστι, διότι οὐδὲ ὁ τόπος τῆς σελίδος ὅλος ὁραθήσεται. καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων θεαμάτων τὸ αὐτὸ συμβαίνει», *έ.α.*, 146.23-148.16.

48 148.16-17.

49 146.21-23.

βλέπει και τον τόπο του. Αν βλέπει ένα μέρος του τόπου, τότε βλέπει και το σώμα ή ένα μέρος του σώματος που υπάρχει σε αυτό. Στο πρώτο παράδειγμα το έδαφος καθορίζει έναν τόπο. Η βελόνα που βρίσκεται στο έδαφος συνιστά και αυτή έναν τόπο που είναι μέρος του τόπου του εδάφους. Το ίδιο συμβαίνει και με το παράδειγμα της σελίδας και των γραμμάτων. Τόσο το έδαφος όσο και η σελίδα συνιστούν τόπους και οι τόποι αυτοί φαίνεται ότι αποτελούνται από το σύνολο όλων των μικρότερων τόπων που ενυπάρχουν σε αυτούς. Το σημαντικότερο όμως στοιχείο είναι πως οτιδήποτε υπεισέρχεται στην οπτική αντίληψη νοείται ως τόπος. Αυτό δηλώνεται στο αρχαίο χωρίο πάρα πολλές φορές και με κάθε δυνατό τρόπο.

Το ότι ο τόπος είναι κάτι που προσδιορίζεται αυτόματα από τα πέρατα του σώματος που περιέχει διαπνέει ευρύτατα τις αντιλήψεις των αρχαίων στοχαστών. Συναντώντας κανείς σήμερα αυτή την ιδέα στα κείμενα της Αρχαιότητας πιθανότατα να μην του προξενεί ιδιαίτερη εντύπωση. Ωστόσο, η θεώρηση που ξετυλίγεται στον πρόλογο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* των *Οπτικών*, σύμφωνα με την οποία οτιδήποτε γίνεται οπτικά αντιληπτό αποτελεί συνάμα έναν οριοθετημένο τόπο, δε συναντάται τόσο συνειδητοποιημένα πουθενά αλλού, εκτός από το χωρίο που παραθέσαμε, αλλά και από τον πρώτο «όρο» της έκδοσης των *Οπτικών*. Γιατί, η έννοια του ορισμένου τόπου ως το αντικείμενο της οπτικής αντίληψης που προβάλλεται στο εδάφιο του προλόγου δε μπορεί να μη συσχετίζεται με το «*διάστημα του μεγέθους*»[50], το αντικείμενο της οπτικής αντίληψης του πρώτου «όρου» των *Οπτικών*, ειδικά εφόσον γνωρίζουμε μέσω του Αριστοτέλη, του Θεμίστιου, του Σιμπλίκιου και του Ιωάννη Φιλόπονου, ότι το «*διάστημα του μεγέθους*» υποδήλωνε για ορισμένους τον τόπο ενός πράγματος. Με βάση αυτά τα στοιχεία, συμπεραίνουμε ότι το κείμενο του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και ο πρώτος «όρος» της έκδοσης των *Οπτικών* συγκλίνουν ερμηνευτικά ως προς αυτή την πολύ ιδιαίτερη σύλληψη του αντικειμένου της οπτικής αντίληψης, σύλληψη που δεν αναδεικνύεται στον πρώτο «όρο» ούτε σε κανένα άλλο σημείο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, γι' αυτό και εκτιμούμε ότι το κείμενο του προλόγου θα πρέπει να προηγείται της έκδοσης των *Οπτικών* και όχι της *Αναθεωρημένης Έκδοσής* τους. Θεωρούμε ότι ο συγγραφέας του προλόγου και ο συγγραφέας των *Οπτικών* κινούνται στο ίδιο θεωρητικό-εννοιολογικό πλαίσιο και, ενδεχομένως, η σχέση τους να ήταν αυτή του δασκάλου-μαθητή[51]. Ο ίδιος ο πρόλογος πιθανότατα να αποτελεί τις γραπτές

[50] Βλ. σελ. 190, υποσημ. 34.

[51] Δε μπορούμε βέβαια να αποκλείσουμε και την περίπτωση ο πρώτος «όρος» και το κείμενο του προλόγου να έχουν γραφτεί από το ίδιο πρόσωπο. Ο λόγος που μας κάνει να θεωρούμε

σημειώσεις ενός σχετικού μαθήματος που συνέταξε κάποιος μαθητής ακούγοντας τη διδασκαλία που παρέδιδε ο ίδιος ο συγγραφέας της έκδοσης των *Οπτικών*. Όλα όσα αναπτύχθηκαν αποτελούν ένα επιπλέον ενδεικτικό στοιχείο που μπορεί να συγκαταλεχθεί στο γενικότερο πλαίσιο της επιχειρηματολογίας που υποστηρίζει ότι, όσον αφορά στο ζήτημα της οργάνωσης των δύο διασωζόμενων εκδόσεων, οι όροι πρέπει να αντιστραφούν. Εκτιμούμε λοιπόν ότι, αντίθετα με όσα έχει προτείνει ο Heiberg, το κείμενο των *Οπτικών* πρέπει να είναι η μεταγενέστερη αναθεωρημένη έκδοση της πραγματείας του Ευκλείδη. Συνεπώς, το κείμενο που διασώζεται, σύμφωνα με την οργάνωση του Heiberg, ως η *Αναθεωρημένη Έκδοση* των *Οπτικών*, παρόλο που πιστεύουμε ότι δεν έχει αποφύγει τις παρεμβολές των μεταγενέστερων, είναι πιο κοντά προς την πραγματεία που συνέταξε αρχικά ο Ευκλείδης.

4. Ποιοι ήταν οι λόγοι που επέβαλαν τη μετατροπή του πρώτου «όρου»;

Αν αποδεχτούμε ότι ο πρώτος «όρος» που εξετάζουμε δεν αποτελεί αυθεντική πρόταση της ευκλείδειας πραγματείας, αλλά το προϊόν μιας μεταγενέστερης επεξεργασίας και τροποποίησής της, το ερώτημα που προκύπτει αφορά στους λόγους που επέβαλαν αυτή τη μετατροπή. Γιατί ο συγγραφέας που ανέλαβε να προσφέρει την αναθεωρημένη έκδοση της πραγματείας του Ευκλείδη έκρινε ως αναγκαία την αναδιατύπωση του πρώτου «όρου» από
«*Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ὄψεις κατ'*
εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι διάστημά τι ποιούσας ἀπ' ἀλλήλων» που διαβάζουμε στο -σύμφωνα με την οργάνωση του Heiberg- κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* σε
«*Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐξαγομένας εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*» του -επίσης σύμφωνα με τον Heiberg- κειμένου των *Οπτικών*;

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών* αναδεικνύει τη δράση και τον ρόλο των όψεων, κατά την οπτική αντίληψη. Από αυτή την άποψη, λαμβάνει τον χαρακτήρα ενός έμμεσου προσδι-ορισμού των όψεων, υποκρύπτει την πρόθεση του συγγραφέα να μιλήσει για τις όψεις, πριν ο αναγνώστης πρωτοσυναντήσει την έννοια αυτή στον δεύτερο «όρο». Αντίθετα με τα *Οπτικά*, η *Αναθεωρημένη Έκδοση* εισάγει κατευθείαν την έννοια της όψης στον πρώτο «όρο» και υποθέτει τις δύο θεμελιώδεις ιδιότητές της, την ευθύγραμμη διάδοση και την

πιθανότερο να εμπλέκονται δύο διαφορετικά πρόσωπα είναι κυρίως γιατί ο συγγραφέας του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* μιλάει σε τρίτο πρόσωπο.

ασυνέχεια. Εκτιμώντας ότι το κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι πλησιέστερο προς το αρχικό κείμενο της ευκλείδειας πραγματείας, κρίνουμε ότι στο σημείο αυτό ακολουθεί την πρακτική του Ευκλείδη. Για τον Ευκλείδη δεν υπήρχε άμεση ανάγκη να ορίσει τις όψεις στον πρώτο «όρο» του συγγράμματος, γιατί κάτι τέτοιο το είχε ήδη πραγματοποιήσει στον πρώτο «όρο» των *Κατοπτρικών*[52]. Τα *Οπτικά* αποτελούσαν συνοδευτικό έργο και, επομένως, ο αναγνώστης τους ήδη γνώριζε από τα *Κατοπτρικά* τι είναι η όψη: «*Ὄψιν εἶναι εὐθεῖαν, ἧς τὰ μέσα πάντα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ*». Αντίθετα, οι αναγνώστες της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* των *Οπτικών* δεν είχαν ξανασυναντήσει την έννοια της όψης και ο μεταγενέστερος συγγραφέας τους όφειλε να την επεξηγήσει, τουλάχιστον για λόγους συνέπειας.

Η παραπάνω παρατήρηση αποτελεί μια πιθανή απάντηση, για το τι ήταν αυτό που παρακίνησε τον μεταγενέστερο συγγραφέα να τροποποιήσει ριζικά τον πρώτο «όρο». Ωστόσο, εκτιμούμε ότι πίσω από την επιλογή του κρύβονται βαθύτερα αίτια. Θεωρούμε ότι αυτό το κρίσιμο ερώτημα βρίσκει σαφείς απαντήσεις, μόνο εάν προσδιοριστούν με ανάλογη σαφήνεια οι στόχοι του συγγραφέα και τα κριτήρια, με βάση τα οποία πραγματοποιείται η αναθεωρημένη έκδοση ενός έργου που την εποχή που αποφασίζεται η επανακυκλοφόρησή του ήταν ήδη απαρχαιωμένο. Ο στόχος του συγγραφέα δεν ήταν μια απλή αναπαραγωγή του έργου του Ευκλείδη. Όπως έχει επισημανθεί από τους περισσότερους μελετητές, οι αποδείξεις των θεωρημάτων της έκδοσης των *Οπτικών* που θεωρούμε ότι αποτελεί το μεταγενέστερο, αναθεωρημένο κείμενο της αρχικής πραγματείας του Ευκλείδη είναι πολύ πιο επεξεργασμένες και σε αρκετές περιπτώσεις πολύ πιο αυστηρές, σε σχέση με εκείνες της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Δεν είναι λίγες οι φορές που το κείμενο της έκδοσης των *Οπτικών* φέρει εναλλακτικούς τρόπους γεωμετρικής απόδειξης των προτάσεων που στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* δεν υπάρχουν[53]. Το γεγονός αυτό αποτελεί ένα ακόμη ενδεικτικό στοιχείο που, αφενός, επιβεβαιώνει ότι η έκδοση των *Οπτικών* είναι το μεταγενέστερο αναθεωρημένο κείμενο της πραγματείας του Ευκλείδη και που, αφετέρου, προδίδει τα κριτήρια και τους στόχους που είχε θέσει ο μεταγενέστερος συγγραφέας. Συγκεκριμένα, ο συγγραφέας αυτός δεν προσέβλεπε σε μια πιστή αντιγραφή του συγγράμματος του Ευκλείδη, μέσω της οποίας οι αναγνώστες του

[52] Ο Ευκλείδης είχε συγγράψει πρώτα τα *Κατοπτρικά* και αυτό είναι βέβαιο, γιατί τα αναφέρει στο θεώρημα 19 των *Οπτικών*.

[53] Ενδεικτική περίπτωση αποτελεί το θεώρημα 22 που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

κειμένου θα μεταφέρονταν νοερά σε μια παλαιότερη αντίληψη, αλλά, αντίθετα, επιδιώκει να φέρει το κείμενο του παρελθόντος στην εποχή του, συμμορφώνοντάς το σε ορισμένα σημεία με τη νοοτροπία της και παρουσιάζοντας σε ένα ενιαίο πια πλαίσιο ορισμένες σημαντικές παραμέτρους της γεωμετρικής οπτικής. Ο συγγραφέας της αναθεωρημένης έκδοσης διακατέχεται από σεβασμό για το πρόσωπο του Στοιχειωτή, ωστόσο, αυτό δεν τον αποτρέπει από το να μιλήσει με τον καθιερωμένο τρόπο της εποχής του.

Χωρίς να είμαστε βέβαιοι για την ακριβή ταυτότητα του συγγραφέα αυτής της μεταγενέστερης αναθεωρημένης έκδοσης του ευκλείδειου έργου και λαμβάνοντας υπόψη όσα προαναφέρθηκαν για εκείνον, υποστηρίζουμε ότι, παρόλο που ο πρώτος «όρος» φαίνεται να είναι γραμμένος από το χέρι ενός ανθρώπου με ιδιόμορφη αντίληψη, ο ίδιος δεν πρωτοτυπεί, αλλά γράφει όντας γνώστης και φορέας ενός νέου οπτικού λόγου που διατυπώνει ρητά μια νέα νοοτροπία που κατά πάσα πιθανότητα είχε ξεκινήσει πριν από εκείνον. Χωρίς να μπορούμε να αποδώσουμε με απόλυτη ασφάλεια την πραγματοποίηση της αναθεωρημένης έκδοσης του ευκλείδειου συγγράμματος στον Θέωνα, θεωρούμε ότι χρονολογικά δεν πρέπει να απέχει πολύ από την εποχή του. Μέσω του τρόπου γραφής του πρώτου «όρου», κατανοούμε ότι ο συγγραφέας του ακολουθεί μια παράδοση που ήδη έχει διαμορφωθεί και για διάφορους λόγους θέλει το αντικείμενο της όρασης να έχει τη δυνατότητα να νοείται και να γίνεται πραγματεύσιμο ως ένας ορισμένος τόπος, δηλαδή ως μια περιοχή που οριοθετείται από τα πέρατα του ίδιου του παρατηρούμενου μεγέθους. Δυστυχώς, οι πραγματείες γεωμετρικής οπτικής που έχουν διασωθεί είναι ελάχιστες, γεγονός που θα μας επέτρεπε να διερευνήσουμε και να εξακριβώσουμε τη διαμόρφωση αυτής της παράδοσης υπό μια ευρύτερη κλίμακα. Ωστόσο, είμαστε σε θέση να υποστηρίξουμε ότι η παράδοση αυτή είχε ήδη διαμορφωθεί στην εποχή του Πτολεμαίου, καθώς σαφείς ενδείξεις αυτού του νέου τρόπου αντίληψης του αντικειμένου της όρασης και αυτού του νέου λόγου της γεωμετρικής οπτικής βρίσκουμε στα *Οπτικά* του Πτολεμαίου.

Όπως επισημάνθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, στο δεύτερο βιβλίο των *Οπτικών* ο Πτολεμαίος έχει ως στόχο του να καταγράψει ποια είναι τα ορατά, ποιος είναι ο τρόπος ύπαρξης καθενός από αυτά, αλλά και να επισημάνει τα σημεία, στα οποία διακρίνονται το ένα από το άλλο. Σύμφωνα με τον Πτολεμαίο, η όραση αναγνωρίζει το σώμα, το μέγεθος, το χρώμα, το σχήμα, τη θέση, τη μετατόπιση και

τη στάση[54]. Εξαιρώντας τα χρώματα, τα οποία αναγνωρίζονται άμεσα από την όραση, ο Πτολεμαίος δηλώνει ότι τα υπόλοιπα ορατά αναγνωρίζονται, επειδή έχουν πέρατα[55]. Συγκεκριμένα, τα σχήματα και τα μεγέθη αναγνωρίζονται, μέσω των περάτων του χρωματισμένου αντικειμένου, και η θέση, μέσω του τόπου του[56]. Η μεταβολή και η ηρεμία των σχημάτων, των μεγεθών και της θέσης γίνονται αντιληπτές, μέσω της μεταβολής και της ηρεμίας των περάτων του χρωματισμένου αντικειμένου και των τόπων του[57]. Σύμφωνα με τον Πτολεμαίο, το μέγεθος είναι το πέρας της ποσότητας της επιφάνειας ενός σώματος, το σχήμα έχει να κάνει με τον τρόπο διάταξης της ποιότητας της επιφάνειας, ενώ η θέση είναι το πέρας του τόπου της επιφάνειας του αντικειμένου[58]. Επισημαίνουμε ότι για τον Πτολεμαίο η επιφάνεια είναι τα πέρατα του σώματος[59].

Συγκρίνοντας κανείς την πτολεμαϊκή θεώρηση με εκείνη που διατυπώνεται από τον συγγραφέα του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* είναι δυνατόν, αν εξαιρέσει ορισμένες συνιστώσες, κυρίως το χρώμα, με τις οποίες δεν ασχολείται καθόλου η γεωμετρική οπτική του Ευκλείδη, να εντοπίσει ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά. Διαπιστώνουμε αρχικά ότι τα «*ορατά*» του Πτολεμαίου δεν αναφέρονται στα ίδια τα παρατηρούμενα φυσικά σώματα, αλλά σε ό,τι συνιστά την ύπαρξη ενός σώματος και σε ό,τι δύναται να εξετασθεί υπό γεωμετρική σκοπιά. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ο τρόπος με τον οποίο υπάρχουν και καθορίζονται αυτά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά, δηλαδή το σχήμα, το μέγεθος, η θέση, η μετατόπιση και η στάση ενός αντικειμένου έχει να κάνει κατά απόλυτο τρόπο με την οριοθέτησή του. Τα πέρατα, δηλαδή τα όρια, του μεγέθους είναι αυτά που κατά κύριο λόγο ορίζουν ποσοτικά, αλλά και ποιοτικά τα ορατά, όρια που συμπίπτουν με τα όρια του τόπου του. Κατά ανάλογο τρόπο, το διάστημα του πεπερασμένου, ορατού μεγέθους του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* συνιστά τον γεωμετρικό τρόπο ύπαρξης του ορατού

---

[54] «*Λέμε λοιπόν ότι η όραση αναγνωρίζει το σώμα, το μέγεθος, το χρώμα, το σχήμα, τη θέση, τη μετατόπιση και τη στάση*», Πτολεμαίου, *Οπτικά*, 12.3-4.

[55] «*Η οπτική ικανότητα αναγνωρίζει άμεσα τα φωτεινά χρώματα˙ τα υπόλοιπα* (ενν. *ορατά*), *μέσω τέτοιων φωτεινών χρωμάτων, όχι τόσο επειδή είναι χρώματα, όσο επειδή έχουν πέρατα*», *έ.α.*, 13.17-19.

[56] «*Γιατί αναγνωρίζει* (ενν. *η όραση*) *τα σχήματα και τα μεγέθη, μέσω των περάτων του χρωματισμένου αντικειμένου και τη θέση, μέσω του τόπου του*», 13.19-21.

[57] «*Η μεταβολή και η ηρεμία των σχημάτων και των μεγεθών και της θέσης γίνονται αντιληπτά, μέσω της μεταβολής και της ηρεμίας των περάτων του χρωματισμένου αντικειμένου και των τόπων του*", 14.1-3.

[58] «*Γιατί το μέγεθος είναι το πέρας της ποσότητας της επιφάνειας˙ η μορφή είναι η διάταξη της ποιότητας της επιφάνειας˙ η θέση είναι το πέρας του τόπου της επιφάνειας...*», 16.14-17.1.

[59] «*Στο σύνολο των ορατών πραγμάτων το σώμα δεν είναι η επιφάνεια, εφόσον η επιφάνεια είναι το πέρας του*», 16.11-13.

σώματος, έναν οριοθετημένο τόπο που πληροφορεί τον οφθαλμό για το σχήμα, το μέγεθος, τη θέση, τη μετατόπιση και τη στάση του.

Η μετατροπή του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* οφείλεται λοιπόν στην ανάγκη να συγκεκριμενοποιηθεί το αντικείμενο της οπτικής αντίληψης, κάτι που στον αντίστοιχο πρώτο «όρο» του κειμένου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* ούτε καν αναφέρεται. Στη συγκεκριμένη έκδοση, στον 2ο, 4ο, 5ο, 6ο και 7ο «όρο» γίνεται αναφορά απλά και μόνο στα «*ὁρώμενα*», χωρίς περαιτέρω προσδιορισμούς. Έτσι, ο μεταγενέστερος συγγραφέας της αναθεωρημένης έκδοσης έκρινε σκόπιμο να μιλήσει για αυτά, με τον τρόπο που γνώριζε, τον τρόπο της εποχής του, προσέχοντας να μην παραβιάσει τον γεωμετρικό χαρακτήρα του έργου. Από αυτή την άποψη, ο συγγραφέας φαίνεται ότι διέπεται από ένα ώριμο, κριτικό πνεύμα, είναι προσεκτικός με το κείμενο που κρατά στα χέρια του, γνωρίζει καλά το συγκεκριμένο θέμα και δε διστάζει να παρέμβει με μέτρο, όπου εκείνος το θεωρεί απαραίτητο, εξαιτίας ίσως και των ακριβέστερων γνώσεων που έχουν αποκτηθεί μέχρι την εποχή του. Για παράδειγμα, στον δεύτερο «όρο» του έργου υπεισέρχεται στο σημείο εκείνο της πρότασης της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* που αναφέρει ότι η κορυφή του οπτικού κώνου βρίσκεται «*πρὸς τῷ ὄμματι*» διορθώνοντάς το σε «*ἐν τῷ ὄμματι*». Η επιλογή για αυτή τη μετατροπή οφείλεται μάλλον στα επιτεύγματα της ιατρικής επιστήμης, εφόσον κατά τους μεταχριστιανικούς αιώνες οι αλεξανδρινοί ιατροί μελέτησαν εις βάθος την όραση προσδιορίζοντας τους τρόπους λειτουργίας της, μέσω της εξέτασης του οργάνου του οφθαλμού. Για παράδειγμα, μελετώντας τη φυσιολογία και την ανατομία του οφθαλμού ο Γαληνός είχε υποδείξει ότι το κρυσταλλοειδές υγρό, δηλαδή οι κρυσταλλοειδείς φακοί του οφθαλμού, είναι το πρωταρχικό όργανο της όρασης[60]. Με άλλα λόγια, είχε προσδιοριστεί με ακρίβεια η περιοχή, στην οποία εδράζεται η λειτουργία της, περιοχή που εντοπίζεται εντός του οφθαλμού και που προφανώς ήταν γνωστή στον συγγραφέα που επαναδιατύπωσε τον πρώτο «όρο». Κατά τρόπο ανάλογο με εκείνον, ο Δαμιανός στις *Οπτικές Υποθέσεις* τονίζει με έμφαση ότι «*οὐ γὰρ ἄν ποτε ἀπὸ παντὸς μέρους τῆς κόρης ἑωρῶμεν· ἀλλ' ἔστιν ἐντὸς καὶ ἐν τῷ τοῦ ὀφθαλμοῦ βάθει*»[61].

Η επιλογή του συγγραφέα να μετατρέψει τον πρώτο «όρο» της πραγματείας οφείλεται παράλληλα σε έναν άλλο, ύψιστης σημασίας, λόγο που σχετίζεται με τη διακριτότητα των όψεων. Ο συγγραφέας του πρώτου «όρου» αντιμετωπίζει το θέμα της διακριτότητας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που συναντήσαμε και στον συγγραφέα

[60] Γαληνού, *Περί χρείας μορίων*, 3, 635.7-8.
[61] Δαμιανού, *Οπτικαί Υποθέσεις*, 11.2-4.

του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι ο τόπος ως αντικείμενο της όρασης εισάγεται, όπως είδαμε, στο σημείο εκείνο του προλόγου που παρουσιάζεται η διακριτότητα των όψεων. Ωστόσο, η αναφορά στον τόπο δε γίνεται, για να αποδειχθεί μέσω αυτού ότι η διακριτότητα πράγματι συμβαίνει. Η διακριτότητα είναι κάτι που «*ομολογείται*» («*καὶ ὁμολογεῖν κατ' εὐθείας φέρεσθαι γραμμὰς καὶ ταύτας ἐν διαστήμασι*»). Αυτό σημαίνει ότι θεωρείται ως μια δεδομένη ιδιότητα, καθώς, ήδη από την εποχή του Πλάτωνα, τα «*όμολογούμενα*» ή «*ὡμολογημένα*» θεωρούνταν ως τα δεδομένα, δηλαδή αυτά, για τα οποία όλοι συμφωνούσαν ότι ισχύουν. Παρατηρούμε ότι στον πρόλογο η έννοια του τόπου εισάγεται κυρίως, για να κατοχυρώσει τα οπτικά αποτελέσματα της διακριτότητας που τίθενται στο πρώτο θεώρημα, συγκεκριμένα, το ότι κανένα από τα ορατά δε βλέπεται αμέσως ολόκληρο.

Διαβάζοντας τον πρώτο «όρο» διαπιστώνουμε ότι, κατά ανάλογο τρόπο, ο συγγραφέας του δεν υποθέτει την ιδιότητα της διακριτότητας των όψεων, αλλά προσπαθεί να νομιμοποιήσει τις συνέπειές της. Αν λάβουμε υπόψη μας τον ουσιαστικό λόγο, για τον οποίο η ιδιότητα αυτή και, κατ' επέκταση, το πρώτο και το τρίτο θεώρημα, δέχτηκαν τα πυρά των μεταγενέστερων, κατανοούμε ότι η μετατροπή του πρώτου «όρου» αποτελεί ουσιαστικά μια απόπειρα υπεράσπισης του Ευκλείδη, απέναντι στους επικριτές του. Μέσω της τροποποίησης του πρώτου «όρου», ο συγγραφέας αποπειράθηκε να βρει έναν κατάλληλο μηχανισμό, προκειμένου να αποφευχθεί αυτή η -όπως τη χαρακτήρισε ο al-Kindi- «*σοκαριστική αντίφαση*», για την οποία επικρίθηκε ο Ευκλείδης, το γεγονός δηλαδή ότι η διακριτότητα των όψεων οδηγούσε τελικά στο παράλογο αποτέλεσμα της οπτικής αντίληψης αδιάστατων σημείων. Ο συγγραφέας του πρώτου «όρου» συμφωνεί με τη διακριτότητα των όψεων, γεγονός που σημαίνει πως αποδέχεται ότι η βάση του οπτικού κώνου αποτελείται από ασυνεχή σημεία, δηλαδή από τα σημεία στα οποία προσπίπτουν οι ασυνεχείς όψεις. Μεταφράζει όμως τη διακριτότητα με έναν διαφορετικό τρόπο. Εκτιμά πως η ιδιότητα αυτή έχει ως κύριο αποτέλεσμα ότι στη βάση του οπτικού κώνου διαμορφώνονται -από άποψη οπτικής αντίληψης- ασυνεχείς τόποι. Ο οφθαλμός δεν αντιλαμβάνεται τα σημεία των μεγεθών, αλλά τους τόπους που αυτά διαμορφώνουν. Συνεπώς, ο οφθαλμός αντιλαμβάνεται την ασυνέχεια των τόπων, δηλαδή των διαστημάτων των μεγεθών, και όχι την ασυνέχεια των σημείων των μεγεθών. Αυτό συμβαίνει, γιατί, πλέον, το αντικείμενο της όρασης είναι το διάστημα του μεγέθους, ένας ορισμένος τόπος με διαστάσεις, και όχι τα σημεία του μεγέθους.

Αναλυτικότερα, σύμφωνα με την αντίληψη του συγγραφέα του πρώτου «όρου», το ότι οι όψεις είναι ασυνεχείς είναι κάτι το ομολογημένο, γι' αυτό δεν εισάγεται στους «όρους» ως ιδιότητα. Αυτό που ουσιαστικά υποτίθεται είναι ότι οι όψεις, όταν προσπίπτουν, ορίζουν ως αντικείμενα που υποπίπτουν στην οπτική αντίληψη τα διαστήματα των μεγεθών και όχι τα σημεία των μεγεθών. Αν τα παρατηρούμενα μεγέθη νοηθούν ως τόποι, οι όψεις που προσπίπτουν ασυνεχώς πάνω σε αυτούς, ορίζουν επιμέρους τόπους τους που διακρίνονται ο ένας από τον άλλον. Αυτό που συμβαίνει οι όψεις το φέρουν σε οπτικό επίπεδο και ο οφθαλμός το μεταφράζει οπτικά ως αντίληψη ασυνεχών τόπων με διαστάσεις και όχι ως αντίληψη ασυνεχών και, κυρίως, αδιάστατων σημείων. Όπως φαίνεται και από τα παραδείγματα του προλόγου, το έδαφος και η σελίδα αποτελούν τόπους που δε γίνονται αμέσως ορατοί ολόκληροι, δηλαδή δε γίνονται ορατά αμέσως όλα τα μέρη τους. Με την πρόσπτωση των όψεων γίνονται ορατοί κάποιοι επιμέρους τόποι, ενώ δε γίνονται ορατοί κάποιοι άλλοι, όπως ο τόπος που περιέχει τη βελόνα ή οι τόποι που περιέχουν κάποια γράμματα της σελίδας. Ο τόπος του εδάφους και της σελίδας γίνεται τελικά οπτικά αντιληπτός όχι ως συνεχής, αλλά αποτελούμενος από επιμέρους, μη συνεχείς τόπους. Στην περίπτωση αυτή ξεφεύγουμε από το παράλογο αποτέλεσμα της οπτικής αντίληψης αδιάστατων σημείων και μεταβαίνουμε στην οπτική αντίληψη επιμέρους τόπων. Κατά την αντίληψη του μεταγενέστερου συγγραφέα, η διακριτότητα δεν έχει να κάνει με την ασυνέχεια των σημείων των μεγεθών, πάνω στα οποία πέφτουν οι όψεις, αλλά με την ασυνέχεια των επιμέρους διαστημάτων των μεγεθών που ορίζουν οι όψεις, κατά την πρόσπτωσή τους..

Ένας άλλος λόγος που φαίνεται ότι υποκίνησε τον συγγραφέα, ώστε να επαναδιατυπώσει τον πρώτο «όρο» ήταν η ανάγκη όχι μόνο να προσδιοριστεί το αντικείμενο της όρασης, αλλά να συνιστά ταυτόχρονα ένα ποσοτικοποιήσιμο μέγεθος. Η παρέμβαση αυτή οφείλεται στο ότι ο μεταγενέστερος συγγραφέας του πρώτου «όρου» όντας δεσμευμένος με το συγκεκριμένο πλαίσιο αντίληψης και χειρισμού των οπτικών θεμάτων της εποχής του είναι εύλογο ότι θα απηχεί και τις απαιτήσεις της.

Συγκρίνοντας κανείς τα «*ὁρώμενα*» που πρωταγωνιστούν στους «όρους» της μιας έκδοσης με το «*διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*» της άλλης είναι δυνατόν να διαπιστώσει ότι στη δεύτερη περίπτωση το αντικείμενο που πραγματεύεται ο οπτικός παραπέμπει σε μια μετρήσιμη ποσότητα. Η ευκλείδεια γεωμετρική οπτική είχε προνοήσει για την ανάγκη καθορισμού του σχετικού μεγέθους των ορωμένων. Ο 4^{ος} «όρος» της πραγματείας είναι αφιερωμένος ειδικά σε αυτόν δηλώνοντας ότι το

σχετικό μέγεθος των ορωμένων εξαρτάται από το μέγεθος της γωνίας, υπό την οποία παρατηρούνται. Αν εξετάσει κανείς τα θεωρήματα της πραγματείας που έχουν ως στόχο τους τον προσδιορισμό του σχετικού μεγέθους των ορωμένων διαπιστώνει ότι αυτός γίνεται ακολουθώντας κάθε φορά την τυπική γεωμετρική διαδικασία που απαιτείται, ώστε να επιτρέψει πρώτα τον προσδιορισμό του σχετικού μεγέθους των οπτικών γωνιών -σε όρους μεγαλύτερης, μικρότερης ή ίσης γωνίας, σε σχέση με μια άλλη- και κατόπιν, μέσω αυτού, να εξαχθεί κάποιο συμπέρασμα για το σχετικό μέγεθος των αντικειμένων της όρασης. Δε λείπουν και οι περιπτώσεις, κατά τις οποίες επιχειρείται να γίνει γνωστό ένα μέγεθος, για παράδειγμα ένα ύψος, ένα βάθος ή ένα μήκος[62]. Η διαδικασία που ακολουθείται στα συγκεκριμένα προβλήματα συνιστά την εισαγωγή ενός «*γνώριμου*», όπως λέγεται, μεγέθους, και τον καθορισμό του ζητουμένου, μέσω της χρήσης γεωμετρικών αναλογιών ευθύγραμμων τμημάτων.

Παρατηρούμε ότι στο πλαίσιο της ευκλείδειας γεωμετρικής οπτικής, όποτε αναζητάται ο προσδιορισμός του σχετικού ή ακόμη και του απόλυτου μεγέθους των αντικειμένων της όρασης, το μοντέλο που έχει στη διάθεσή του ο οπτικός σε καμία περίπτωση δεν ξεφεύγει από την καθιερωμένη γεωμετρική πρακτική. Ο οπτικός νομιμοποιείται να θέσει ερωτήματα που αφορούν στο μέγεθος των σχετικών εμφανίσεων, νομιμοποιείται να παρέχει λύσεις σε προβλήματα που αφορούν στο απόλυτο μέγεθος των αντικειμένων, αλλά οι απαντήσεις του προτείνονται με βάση τα εργαλεία της γεωμετρικής μεθοδολογίας και διατυπώνονται με τους δικούς της όρους. Ο προσδιορισμός του μεγέθους δεν εκλαμβάνει τον χαρακτήρα αυστηρής ποσοτικής μέτρησης ούτε διέπεται από αριθμητικά αποτελέσματα. Ένα τέτοιο εγχείρημα προφανώς θα απαιτούσε, εκτός από έναν διαφορετικό τρόπο αντίληψης των παρατηρούμενων μεγεθών, και κατάλληλα παρατηρησιακά όργανα που ο γεωμέτρης –οπτικός των *Οπτικών* του Ευκλείδη δεν έχει στη διάθεσή του. Αυτό που διαθέτει είναι τα «*ορώμενα*» που δεν είναι τίποτα άλλο από ευθείες, σημεία και σχήματα, οπότε θα τα χειριστεί γεωμετρικά και όχι αριθμητικά.

Το ενδιαφέρον για τον αριθμητικοποιημένο καθορισμό των παρατηρούμενων μεγεθών αναπτύχθηκε με συστηματικό τρόπο στους κατοπινούς αιώνες και κυρίως στην αστρονομία και στη γεωδαισία. Θεωρούμε ότι η πρακτική αυτή βάδιζε παράλληλα με τη βελτίωση των παρατηρησιακών οργάνων και την ευρεία χρήση τους από όσους μελετούσαν τα θέματα και τα προβλήματα της οπτικής. Μια ενδεικτική περίπτωση της προσπάθειας για αριθμητικοποιημένες μετρήσεις των μεγεθών ή των

[62] Πρόκειται για τα προβλήματα 18, 19, 20, 21 που θα μας απασχολήσουν σε επόμενο κεφάλαιο.

αποστάσεων μεταξύ των παρατηρούμενων αντικειμένων είναι ο Ήρων. Στο έργο του *Περί διόπτρας* αναφέρει ότι η μέτρηση των διαστημάτων μεταξύ των αστεριών, καθώς επίσης των αποστάσεων και των μεγεθών του ήλιου και της σελήνης είναι – μεταξύ άλλων- το αντικείμενο της διοπτρικής επιστήμης[63]. Στο έργο αυτό θέτει μια σειρά από προβλήματα που στοχεύουν στην ποσοτική εκτίμηση, στον αριθμητικό προσδιορισμό των ζητουμένων. Για παράδειγμα, στο έκτο πρόβλημα θέτει «*Δοθέντων δύο σημείων που απέχουν τυχαίο διάστημα να εξεταστεί ποιο από τα δύο κείται ψηλότερα ή χαμηλότερα και πόσο ή αν και τα δύο βρίσκονται στο ίδιο ύψος, δηλαδή αν βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο*»[64], ενώ το δέκατο πρόβλημα θέτει «*Δοθέντων δύο σημείων σε μακρυνή απόσταση που είναι ορατά από τον παρατηρητή να βρεθεί η μεταξύ τους απόσταση και επιπλέον η θέση τους*»[65]. Η επίλυση των προβλημάτων δεν ξεφεύγει βέβαια από το πλαίσιο της γεωμετρίας, αλλά η βαρύτητα που δίνεται στην εξαγωγή αριθμητικών αποτελεσμάτων είναι μεγάλη. Φυσικά, η χρήση της διόπτρας συνέβαλε ουσιαστικά σε αυτόν τον σκοπό.

Εκτιμούμε ότι αριθμητικοποιημένοι προσδιορισμοί των μεγεθών ή των αποστάσεων των παρατηρούμενων αντικειμένων, ο στόχος δηλαδή για αριθμητικές μετρήσεις αποτέλεσε με την πάροδο των αιώνων αναπόσπαστο κομμάτι του ερευνητικού προγράμματος των ανθρώπων που ασκούσαν την επιστήμη της γεωμετρικής οπτικής. Σε αυτό συνέβαλε όχι μόνο η χρήση ακριβέστερων παρατηρησιακών οργάνων, αλλά και η ανάπτυξη των μαθηματικών. Για παράδειγμα, κατά τη μελέτη του φαινομένου της διάθλασης, ο Πτολεμαίος μπορούσε να προσδιορίσει το μέγεθος των προσπιπτουσών και διαθλωμένων γωνιών με μεγαλύτερη ακρίβεια, χάρη στη τριγωνομετρία που διέθετε. Δε μιλούσε με όρους μεγαλύτερης, μικρότερης ή ίσης γωνίας, αλλά με αριθμό μοιρών.

63

«*πρός τε γὰρ ὑδάτων ἀγωγὰς καὶ τειχῶν κατασκευὰς καὶ λιμένων καὶ παντὸς οἰκοδομήματος εὔχρηστος τυγχάνει, πολλὰ δὲ ὤνησεν καὶ τὴν περὶ τὰ οὐράνια θεωρίαν, ἀναμετροῦσα τά [τε] μεταξὺ τῶν ἀστέρων διαστήματα, καὶ τὰ περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων καὶ ἐκλείψεων ἡλίου καὶ σελήνης...*», Ήρωνος Αλεξανδρινού, *Περί διόπτρας*, έκδ. H. Schöne, *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, τόμ. 3, Λειψία: Teubner 1903, 2.2-8.

64

«*Δύο σημείων δοθέντων ἐν ἀποστήματι τυχόντι ἐπισκέψασθαι, ὁπότερον αὐτῶν μετεωρότερόν ἐστιν ἢ ταπεινότερον, καὶ πόσῳ, ἢ καὶ ἀμφότερα ἐξ ἴσου κεῖται, τουτέστιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ ὁρίζοντι*», *έ.α.*, 6.1-4.

65

«*Δύο δοθέντων σημείων πόρρω ὁρωμένων εὑρεῖν τὸ μεταξὺ διάστημα αὐτῶν τὸ πρὸς διαβήτην καὶ ἔτι τὴν θέσιν. ἔστω τὰ δοθέντα*», 10.1-3

Το αίτημα του αριθμητικού προσδιορισμού των ζητουμένων, μέσω μετρήσεων, αποτελεί παράμετρο που αναδεικνύεται βαθμιαία και καθιερώνεται με το πέρασμα του χρόνου ως μια βασική συνιστώσα του έργου του οπτικού. Πρόκειται για μια πρακτική που εύλογα συστηματοποιείται σιγά σιγά κατά τη διάρκεια των αιώνων που ακολουθούν τον Ευκλείδη, όταν είναι διαθέσιμα όλα τα μέσα εκείνα που απαιτούνται για ένα τέτοιο εγχείρημα. Όπως διαπιστώνουμε από τις περιπτώσεις του Ήρωνα και του Πτολεμαίου, δεν υπήρχε επίγνωση μόνο της ανάγκης για αριθμητικά αποτελέσματα, δηλαδή για αποτελέσματα μεγαλύτερης ακρίβειας, αλλά είχε συνειδητοποιηθεί ότι ο κλάδος της μαθηματικής οπτικής μπορούσε να τους τα προσφέρει. Εκτιμούμε ότι η παραπάνω αντίληψη, η οποία αντιμετωπίζει το αντικείμενο της όρασης ως ένα ποσοτικοποιήσιμο-αριθμητικοποιήσιμο μέγεθος μεταφέρεται και καταγράφεται από τον μεταγενέστερο συγγραφέα του πρώτου «όρου», μέσω της έκφρασης «*διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*». Για άλλη μια φορά διαπιστώνουμε ότι αυτή η έκφραση είναι τόσο ιδιότυπη, γιατί κουβαλά μέσα της στοιχεία μιας διαφορετικής νοοτροπίας, μιας διαφορετικής, μεταγενέστερης κουλτούρας.

5. Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό προτείναμε μια νέα ανάγνωση του πρώτου «όρου» της έκδοσης εκείνης που, σύμφωνα με την οργάνωση του Heiberg, θεωρείται ως το κείμενο των *Οπτικών* του Ευκλείδη. Η ανάγκη που επέβαλε την επανεξέταση του πρώτου «όρου» προέκυψε από προβλήματα που αυτός εμφάνιζε, εξαιτίας κάποιων άτυχων τρόπων απόδοσης και κατανόησής του. Καταγράφοντας όλους τους πιθανούς τρόπους ανάγνωσής του διαπιστώσαμε ότι μερικοί από αυτούς τον παρουσιάζουν τελικά να διέπεται από γλωσσικά προβλήματα και να μη συμφωνεί εκφραστικά με αντίστοιχα χωρία της υπόλοιπης πραγματείας, ενώ μερικοί άλλοι φτάνουν σε σημείο να τον υπερερμηνεύουν διαβάζοντας πράγματα που ο ίδιος δε δηλώνει.

Σε όλες σχεδόν τις μεταφράσεις, όπως αυτή του H.E. Burton, αλλά και σε άλλες μελέτες των *Οπτικών*, όπως αυτές των A. Lejeune, D.C. Lindberg, C.D. Brownson, G. Simon, W. Knorr, A. Jones και R. Rashed, θεωρείται ότι ο πρώτος «όρος» εκφράζει την ευθύγραμμη διάδοση των όψεων[66]. Οι ενστάσεις που προβάλαμε για αυτήν την καθιερωμένη πλέον ανάγνωση του πρώτου «όρου» εδράζονται στο ότι, παρόλο που είναι θεωρητικά και μεθοδολογικά συμβατή με την

[66] Βλ. κεφ. 4, υποσημ. 34.

ευκλείδεια γεωμετρική οπτική και ο καθένας θα ανέμενε να διατυπώνεται στην αρχή των «όρων», ωστόσο, η ανάγνωση αυτή παραβιάζει την πρόταση. Αν ο στόχος του πρώτου «όρου» ήταν η διατύπωση της παραπάνω ιδιότητας, αφενός το «*μεγεθῶν μεγάλων*» αναφερόμενο στο «*διάστημα*» θα έπρεπε να είναι «*μεγέθους μεγάλου*», αφετέρου θα ήταν επιτακτική η χρήση της κατάλληλης πρόθεσης.

Ανατρέχοντας σε αρχαία κείμενα και, συγκεκριμένα, σε χωρία που δηλώνουν την ευθύγραμμη διάδοση των όψεων διαπιστώσαμε ότι, αν αποδεχτούμε την καθιερωμένη ανάγνωσή του, ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών* καταλήγει στο να αποτελεί τη μοναδική περίπτωση ενός τόσο ιδιόμορφου και παράξενου τρόπου διατύπωσης της παραπάνω ιδιότητας. Αν υιοθετήσουμε την παραπάνω ανάγνωση, τότε θα πρέπει να παραδεχτούμε ότι ο πρώτος «όρος» των *Οπτικών* είναι γλωσσικά προβληματικός και περίεργα διατυπωμένος, γεγονός που εντυπωσιάζει, όταν τον αντιπαραβάλλουμε με πιο ξεκάθαρες και σαφείς προτάσεις αντίστοιχου περιεχομένου άλλων κειμένων της Αρχαιότητας.

Επιπλέον, δεν πρέπει να διαφεύγει της προσοχής μας ότι η προσυπογραφή στην καθιερωμένη απόδοση του πρώτου «όρου» δημιουργεί αυτομάτως δυσεπίλυτα προβλήματα, όσον αφορά στη θεμελίωση των θεωρημάτων 1 και 3 που σχετίζονται με τη διακριτότητα των όψεων. Κανένας από τους υπόλοιπους έξι «όρους» της πραγματείας δεν την υποθέτει και η υιοθέτηση του καθιερωμένου τρόπου ανάγνωσης του πρώτου «όρου» δεν αφήνει από τη μεριά της καθόλου περιθώρια για απαντήσεις για το τι συμβαίνει με την ιδιότητα αυτή. Ειδικά αν ενστερνιστούμε την άποψη που υποστηρίζει ότι η συγκεκριμένη έκδοση πρέπει να αποδοθεί στον Ευκλείδη, η μη καταγραφή της ιδιότητας της διακριτότητας των όψεων μεταξύ των «όρων» είναι εντελώς αδικαιολόγητη. Θεωρούμε ότι η απουσία ενός τόσο ιδιαίτερου και σημαντικού χαρακτηριστικού από τους «όρους» της πραγματείας που συνέγραψε ο Ευκλείδης δε νομιμοποιείται να συμβαίνει στο πλαίσιο της δικής του εργασίας, καθώς εκτιμούμε ότι ο Ευκλείδης δεν είχε σοβαρούς λόγους που να υπαγορεύουν τη λήψη μιας τέτοιας απόφασης.

Συνειδητοποιώντας τα μειονεκτήματα που προκύπτουν από την καθιερωμένη ανάγνωση του πρώτου «όρου» επιχειρήσαμε την αναθεώρησή του. Όντας αντίθετοι με την κατάσταση που έχει διαμορφωθεί και διαφωνώντας, κυρίως, με τον προβληματικό χαρακτήρα που αδίκως έχει προσλάβει η συγκεκριμένη πρόταση, εξαιτίας της εσφαλμένης προσέγγισής της, εμείς υποστηρίξαμε ότι ούτε η διατύπωση του πρώτου «όρου» είναι αδέξια ούτε το νόημά του αμφίβολο ή μη ικανοποιητικό. Η σύγχυση που δημιουργείται οφείλεται μάλλον στη δική μας προδιάθεση να

συναντήσουμε απαραιτήτως στον πρώτο «όρο» το αίτημα της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων παραπλανημένοι ίσως εν μέρει και από όσα διαβάζουμε στον αντίστοιχο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Αντί του καθιερωμένου τρόπου απόδοσης του πρώτου «όρου», προτείναμε μια νέα ανάγνωση που αποτρέπει την εμφάνιση των παραπάνω σοβαρών αρνητικών επιπλοκών. Η πρακτική μας να αφήσουμε την πρόταση να εκφράσει ελεύθερα αυτό που θέλει αποδεσμεύοντάς την τελείως από τις δικές μας προσδοκίες είχε σημαντικές θετικές συνέπειες.

Αρχικά, είναι φανερό ότι ο τρόπος με τον οποίο αποδίδουμε τον πρώτο «όρο» δεν παραβιάζει από φιλολογική άποψη την πρόταση, καθώς δεν της προσάπτει γραμματικά ή συντακτικά προβλήματα. Η προσέγγισή μας δεν υπερβαίνει τον τρόπο γραφής της πρότασης, αφού γίνεται σύμφωνα με τα δικά της μέτρα και όχι σύμφωνα με τις δικές μας πεποιθήσεις. Ο πρώτος «όρος» δεν αποτελεί πλέον μια δήλωση περίεργη και δεν καταλήγει να διαφοροποιείται ριζικά από τους αρχαίους εκφραστικούς τρόπους, όπως είδαμε να συμβαίνει με την περίπτωση της καθιερωμένης ανάγνωσής του. Η δυσκολία να συλλάβουμε το ακριβές νόημα της διατύπωσής του οφείλεται αποκλειστικά σε δικό μας λάθος και όχι σε κάποια ενδεχόμενη ασάφεια ή αδεξιότητα της γλωσσικής του εκφοράς.

Η νέα ανάγνωση του πρώτου «όρου» οδήγησε σε περαιτέρω απροσδόκητες, αλλά σημαντικές συνέπειες, καθώς διαπιστώσαμε ότι μπορεί να αποτελέσει εφαλτήριο για την εξακρίβωση της ταυτότητας των δύο διασωζόμενων εκδόσεων του κειμένου των *Οπτικών*. Μέσω εκείνης, ο πρώτος «όρος» αποκαλύπτει αντιλήψεις που είναι ανάλογες με εκείνες που προβάλλει το μεταγενέστερο κείμενο του προλόγου και που στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* των *Οπτικών* δεν εκφράζονται καθόλου. Η νέα ερμηνεία του πρώτου «όρου» που προτείναμε ενισχύει τη γενικότερη επιχειρηματολογία της σύγχρονης ιστοριογραφίας που αμφισβητεί τον τρόπο οργάνωσης των συγκεκριμένων οπτικών κειμένων από τον Heiberg. Συνεπώς, υποστηρίζουμε ότι το έργο που ο Heiberg θεώρησε ως τη μεταγενέστερη *Αναθεωρημένη Έκδοση* των *Οπτικών* είναι πιο κοντά προς το αρχικό κείμενο που συνέγραψε ο Ευκλείδης και, αντίστροφα, το έργο των *Οπτικών* είναι το αναθεωρημένο κείμενο που παρήγαγε ένας συγγραφέας πολύ μεταγενέστερος του Ευκλείδη.

Σε αντίθεση με την καθιερωμένη απόδοση του πρώτου «όρου», η νέα ανάγνωση που προτείναμε διαμορφώνει ένα νέο ερμηνευτικό περίγραμμα που μπορεί να δικαιολογήσει ικανοποιητικά την απουσία της ρητής δήλωσης της διακριτότητας. Όποια ανάγνωση και αν ακολουθήσει κανείς, είναι εύκολο να διαπιστώσει ότι σε

καμία περίπτωση δε δηλώνεται η διακριτότητα των όψεων. Το γεγονός αυτό δημιουργεί προβλήματα που στο πλαίσιο της καθιερωμένης ανάγνωσης δε μπορούν παρά να καταλογισθούν στον αφηρημένο ή αδέξιο συγγραφέα. Αντίθετα, στο πλαίσιο της νέας ανάγνωσης του πρώτου «όρου» γίνεται φανερό ότι η απουσία της ρητής δήλωσης της διακριτότητας δεν οφείλεται στην απρονοησία του συγγραφέα, αλλά στην επιλογή του· και αυτό είναι πολύ διαφορετικό. Όπως διαπιστώσαμε και από το κείμενο του προλόγου, το οποίο εκτιμούμε ότι φέρει δια στόματος κάποιου άλλου προσώπου τις αντιλήψεις του συγγραφέα των *Οπτικών*, ο συγγραφέας αυτός θεωρούσε τόσο εύλογη την ιδιότητα της διακριτότητας, που δε στάθηκε καθόλου σε αυτή. Η αναφορά που γίνεται στην ίδια την ιδιότητα είναι πάρα πολύ μικρής έκτασης και αυτό γιατί το πρόσωπο, στο οποίο αναφέρεται ο πρόλογος, αρκούνταν απλά στο να την ομολογήσει, χωρίς να προβεί σε λεπτομερή ανάλυση. Αντίθετα, το κέντρο βάρους της ομιλίας του πέφτει στην απόπειρα να κατοχυρωθούν τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης ιδιότητας και ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι το αντικείμενο της όρασης να μην είναι τα σημεία του μεγέθους πάνω στα οποία προσπίπτουν οι όψεις, αλλά ένας τόπος που αποτελείται από επιμέρους τόπους. Η βαρύτητα που δίνεται σε αυτή την εννοιολογική μετάβαση, χάριν της κατοχύρωσης των συνεπειών της διακριτότητας των όψεων, εκ μέρους του πρόσωπου στο οποίο αναφέρεται ο πρόλογος, είναι ανάλογη με τη βαρύτητα που δίνεται για το ίδιο θέμα από τον συγγραφέα του πρώτου «όρου» των *Οπτικών*. Γι' αυτόν τον λόγο, ο συγγραφέας του πρώτου «όρου» κρίνει ως προτεραιότητά του να μη δηλώσει τη διακριτότητα των όψεων, αλλά, αντιθέτως, στο να προσδιορίσει με άλλους όρους το αντικείμενο της όρασης προσπαθώντας ταυτόχρονα να διασφαλίσει την ιδιότητα αυτή από τα πυρά των επικριτών.

Εκτιμούμε λοιπόν ότι η προτίμηση του συγγραφέα των *Οπτικών* να μη δηλώσει ρητά στον πρώτο «όρο» την ιδιότητα της διακριτότητας των όψεων είναι συνειδητοποιημένη και σύμφωνη με τους στόχους που έχει θέσει. Αντίθετα, αν υποθέσουμε ότι η έκδοση αυτή είναι του Ευκλείδη, η αποσιώπηση αυτής της ιδιότητας από το σύνολο των προτάσεων που συνιστά τους «όρους» δε βρίσκει κανένα στοιχείο αιτιολόγησης. Πιο συγκεκριμένα, μέσω της νέας ανάγνωσης της συγκεκριμένης πρότασης, διακρίναμε ότι ο συγγραφέας της δεν επιθυμεί να παραμείνει άκριτα προσκολλημένος στην ευκλείδεια παράδοση, αλλά αποπειράται να μεταπλάσει ορισμένα σημεία της, σύμφωνα με ό,τι προστάζει η εποχή του, για να απευθυνθεί στους ανθρώπους της εποχής του. Το ότι δε συμπεριλαμβάνει ρητά στους «όρους» την ιδιότητα της διακριτότητας των όψεων σημαίνει ότι, κατά το πέρασμα

των αιώνων, κάτι είχε αλλάξει, ως προς αυτό το σημείο. Ο συγγραφέας επιθυμώντας να απευθυνθεί σε ένα κοινό, το οποίο ήδη είχε γνωρίσει τις θεωρίες άλλων παραδόσεων γεωμετρικής οπτικής διαφορετικών από εκείνης του Ευκλείδη, πιθανώς να μην ήθελε να το δεσμεύσει σε μια αντίληψη που, ανεξάρτητα αν ο ίδιος την ενστερνιζόταν ως αναμφισβήτητη, θα εμφανιζόταν στους «όρους» του συγγράμματος ως αναγκαστική ρήτρα. Ας μην ξεχνάμε ότι ο Πτολεμαίος είχε εντωμεταξύ εκφράσει την υπόθεση ότι οι οπτικές ακτίνες φέρονται συνεχώς και όχι διακριτά. Προφανώς, η αντίληψη αυτή είχε γίνει κοινώς γνωστή -δεν αποκλείεται να ήταν η επικρατούσα- με αποτέλεσμα πολλοί να την έχουν υιοθετήσει[67]. Ενδεχομένως ο συγγραφέας του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* να μην εισάγει ρητά την ιδιότητα της διακριτότητας των όψεων, για να μην αποτρέψει ένα ευρύτερο σύνολο αναγνωστών που θα μπορούσαν να είναι ακόμη και θιασώτες της πτολεμαϊκής παράδοσης από το να διαβάσουν την έκδοση που επιμελήθηκε και να διαπιστώσουν ότι η γεωμετρική οπτική του Ευκλείδη δεν πρέπει να ξεχαστεί, αλλά μπορεί, αν αναμορφωθεί, να επιστρέψει ξανά στο προσκήνιο. Ο συγγραφέας επιθυμεί να ξαναδώσει ζωή σε ένα μοντέλο του παρελθόντος και να αναζωπυρώσει το ενδιαφέρον του κοινού για αυτό. Ωστόσο, δε θέλει να περιορίσει τη γκάμα των αναγνωστών δεσμεύοντάς τους σε μια αντίληψη που πιθανώς να μην αποδέχονται, αλλά, από την άλλη μεριά, κάνει ό,τι περνά από το χέρι του, για να διασφαλίσει τα αποτελέσματα της πιο χαρακτηριστικής ιδιότητας της γεωμετρικής οπτικής του Ευκλείδη.

Μέσω της νέας ανάγνωσης του πρώτου «όρου», μας δίνεται η ευκαιρία να ρίξουμε λίγο φως στον περιβόητο συγγραφέα των *Οπτικών* και να αντλήσουμε κάποιες σημαντικές πληροφορίες για εκείνον και τη νοοτροπία του. Η απόφασή του να επαναδιατυπώσει τον πρώτο «όρο», αλλά και ο τρόπος με τον οποίο το πραγματοποίησε, επιτρέπει την εξαγωγή ορισμένων συμπερασμάτων που, υπό διαφορετικές συνθήκες, δε θα ήταν τόσο ευδιάκριτα. Αντίθετα, τώρα αναδεικνύεται ο ουσιαστικός ρόλος που διαδραματίζει ο συγγραφέας, προσδιορίζεται η θέση από την οποία ασκεί το έργο του, αποκαλύπτεται η στάση του απέναντι στο παρελθόν, καθώς επίσης η σχέση του με την εποχή του. Παράλληλα, αποσαφηνίζεται ο χαρακτήρας του έργου του και οι λόγοι, για τους οποίους θεωρήθηκε απαραίτητη η αναθεωρημένη έκδοση των της πραγματείας του Ευκλείδη.

[67] Το ότι η διακριτότητα των όψεων θεωρείται στο κείμενο του προλόγου ως «ομολογημένη», δε σημαίνει ότι πράγματι όλοι τη θεωρούσαν δεδομένη. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται με αυτόν τον τρόπο, για να της δοθεί κύρος.

Πιο συγκεκριμένα, συνειδητοποιούμε ότι ο συγγραφέας που ανέλαβε να πραγματοποιήσει την αναθεωρημένη έκδοση επιχείρησε να παρουσιάσει τη γεωμετρική οπτική του Ευκλείδη αναμορφώνοντας ορισμένα σημεία της που προφανώς θεωρούσε ξεπερασμένα και διατυπώνοντάς τα με τους όρους της εποχής του. Η πρακτική αυτή προδίδει έναν συγγραφέα που δε μένει προσκολλημένος στις μεγάλες μορφές του παρελθόντος, δε θέλει να γυρίσει πίσω σε αυτές, αλλά να προχωρήσει μπροστά με αυτές. Η μετατροπή του πρώτου «όρου» εκ μέρους του συγγραφέα φανερώνει κάποια ίχνη της απόπειράς του να παρουσιάσει σε ένα ενιαίο πλαίσιο το ευκλείδειο γεωμετρικό μοντέλο της όρασης και ορισμένες σύγχρονές του αντιλήψεις. Έτσι, το αντικείμενο της επιστήμης της γεωμετρικής οπτικής δεν παραμένει απλά ένα «*ορώμενο*», αλλά αναμορφώνεται και γίνεται πραγματεύσιμο ως «*διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*», δηλαδή ως ένας τόπος που ορίζεται αυτόματα από τα πέρατα, δηλαδή τα όρια του μεγέθους που περιέχει. Αυτά τα όρια φέρονται με τη σειρά τους στην οπτική αντίληψη, μέσω των όψεων. Κατανοούμε ότι, για να προχωρήσει ο συγγραφέας στην αναθεώρηση ενός παλαιού για την εποχή του κειμένου γεωμετρικής οπτικής, το οποίο θα επανακυκλοφορούσε ευρέως, σημαίνει ότι θεωρούσε το ευκλείδειο μοντέλο ως ένα ικανό ακόμη σύστημα περιγραφής και εξήγησης των οπτικών εμφανίσεων, με την προϋπόθεση όμως ότι ορισμένα σημεία της θα έπρεπε να τροποποιηθούν και να εκσυγχρονιστούν, ενώ κάποια άλλα δε θα έπρεπε να αποτελούν απόλυτες δεσμεύσεις, ειδικά όταν δε μπορούν να αποδειχθούν, όπως είδαμε να συμβαίνει με την υπόθεση της διακριτότητας. Το στοιχείο αυτό φανερώνει ότι η επανέκδοση του συγκεκριμένου έργου δε γινόταν αποκλειστικά για πληροφοριακούς σκοπούς, δηλαδή δεν ενδιέφερε μόνο η πρόσβαση στη γεωμετρική οπτική του Ευκλείδη, χάριν της γνώσης. Εκείνος ή εκείνοι που εμπλέκονταν στο εγχείρημα της επανακυκλοφόρησης του έργου του Ευκλείδη ήθελαν να το πραγματοποιήσουν, αφού πρώτα το καθιστούσαν ως ένα εγχειρίδιο σύγχρονο και λειτουργικό, ως ένα εγχειρίδιο χρήσιμο για κάθε ενδιαφερόμενο.

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι η ταυτότητα του συγγραφέα που ανέλαβε να πραγματοποιήσει την αναθεωρημένη έκδοση δεν είναι σίγουρα γνωστή. Έχει επικρατήσει η άποψη που υποστηρίζει ότι η έκδοση αυτή πιθανότατα να οφείλεται στον Θέωνα τον Αλεξανδρινό. Ωστόσο, η παραπάνω απόδοση γίνεται συνήθως με επιφυλάξεις, καθώς η μόνη αναφορά στο όνομα του Θέωνα και σε μια ενδεχόμενη πατρότητά του γίνεται από τον Ange Vergèce, ο οποίος το 1566 αντέγραφε στο Παρίσι για τον Michel de l' Hospital τον κώδικα *Paris. gr*. 2468 και έγραφε «*τό προοίμιον ἐκ τῆς τοῦ Θέωνός ἐστιν ἐξηγήσεως*». Πάντως, συμφωνούμε ότι η

συγγραφή αυτής της έκδοσης, δηλαδή η συγγραφή του κειμένου που διασώζεται στην έκδοση του Heiberg ως *Οπτικά*, χρονικά πρέπει να τοποθετηθεί στην εποχή του Θέωνα, δηλαδή στον 4^{ο} αιώνα μ.Χ., καθώς έχουμε την πεποίθηση ότι ο Δαμιανός, ο οποίος τοποθετείται γύρω στο 400 μ.Χ., όταν έγραφε τις *Οπτικές Υποθέσεις* του είχε πρόσβαση στο κείμενο των *Οπτικών* και στον πρόλογο που το συνόδευε. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα εκθέσουμε τους λόγους που μας οδήγησαν στο να διατυπώσουμε την παραπάνω άποψη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

Ο ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥ ΜΕ ΤΟΝ ΠΡΟΛΟΓΟ ΤΗΣ *ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ* ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ*

Α. Ο ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥ ΜΕ ΤΟΝ ΠΡΟΛΟΓΟ ΤΗΣ *ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ* ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ*

Η σημασία του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* εκτιμάται όχι μόνο βάσει της ωφέλειας που έχει ένα κείμενο που προετοιμάζει τον αναγνώστη, ώστε να εισαχθεί στο κύριο σώμα μιας πραγματείας, αλλά και βάσει της αξίας που έχει ένα κείμενο που αντιπροσωπεύει μια αρχαία ερευνητική παράδοση. Μέσω του συγγραφέα του προλόγου, καταγράφονται οι αντιλήψεις ενός προσώπου που, ακόμα και αν το πρόγραμμά του έχει αναμορφωτικό χαρακτήρα, το πρόσωπο αυτό δεν παύει να είναι φορέας των στοιχείων εκείνων που συνθέτουν το οικοδόμημα της γεωμετρικής οπτικής του Ευκλείδη.

Αν, από την άλλη μεριά, κάποιος μας ζητούσε να του υποδείξουμε ένα έργο επηρεασμένο από τη γεωμετρική οπτική του Πτολεμαίου, οι *Οπτικές Υποθέσεις* του Δαμιανού θα ήταν το πρώτο που θα σκεφτόμασταν, από το σύνολο όσων έχουν διασωθεί. Μάλιστα, το σύγγραμμα αυτό, εξαιτίας των πολλών επιρροών που είχε δεχτεί από την πτολεμαϊκή γεωμετρική οπτική, διαθέτει τόσο αξιόλογες πληροφορίες, ώστε να λειτουργήσει στα χέρια του Albert Lejeune[1] ως ένα ικανότατο εργαλείο για την αποκατάσταση του πρώτου χαμένου βιβλίου των *Οπτικών* του Πτολεμαίου.

Οι *Οπτικές Υποθέσεις* πράγματι παρουσιάζουν πολλές πτυχές της πτολεμαϊκής θεωρίας της όρασης. Ωστόσο, εκτιμούμε ότι το γεγονός αυτό δεν πρέπει να στραφεί εις βάρος του Δαμιανού θέτοντας τον ίδιο και το έργο του στη σκιά του Πτολεμαίου. Μια τέτοια αντιμετώπιση είναι εώς έναν βαθμό δικαιολογημένη, όταν μας επιτρέπει να διευκρινίσουμε ή να επιβεβαιώσουμε ορισμένους χειρισμούς του Πτολεμαίου που, εξαιτίας της απώλειας ενός σημαντικού μέρους των *Οπτικών*, δε θα μπορούσαμε να το πετύχουμε με άλλο τρόπο. Ωστόσο, ο Δαμιανός δεν έγραφε θεωρώντας τον εαυτό του ως έναν απλό εκπρόσωπο της πτολεμαϊκής παράδοσης, γι' αυτό και οι μελέτες που αφορούν σε αυτόν δεν πρέπει να εξαντλούνται αποκλειστικά στην ανάδειξη των δεσμών του με τον Πτολεμαίο ή στις επιρροές που δέχτηκε από αυτόν. Επισημαίνουμε την ανάγκη να απαγκιστρωθεί το έργο του από αυτόν τον μονοδιάστατο τρόπο έρευνας, γιατί καταλήγει να παρουσιάζει τον Δαμιανό ως ένα

[1] Lejeune, A., *Euclide et Ptolémée*….

φερέφωνο των πτολεμαϊκών απόψεων παραβλέποντας τους ουσιαστικούς σκοπούς του. Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε ότι με τη συγγραφή των *Οπτικών Υποθέσεων* ο Δαμιανός δεν είχε ως στόχο του να πληροφορήσει απλώς για πράγματα που ήδη είχαν παρουσιαστεί και κοινοποιηθεί με τον καλύτερο τρόπο από τον ίδιο τον Πτολεμαίο. Επιπλέον, οι *Οπτικές Υποθέσεις* δεν εμφανίστηκαν στα ξαφνικά και δεν ήταν αποκομμένες από συγγράμματα γεωμετρικής οπτικής που είχαν προηγηθεί. Αναμφίβολα, ο Δαμιανός έφερε πολλά στοιχεία της πτολεμαϊκής αντίληψης, ωστόσο, η υιοθέτησή τους εκ μέρους του δεν έγινε παθητικά, αλλά για να λειτουργήσουν σε ένα συγκεκριμένο δίπτυχο: αφενός, στο πλαίσιο της απάντησης του Δαμιανού προς τις απόψεις του προσώπου, στο οποίο αναφέρεται ο συγγραφέας του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, δηλαδή στις απόψεις του εκπροσώπου της ευκλείδειας παράδοσης, και, αφετέρου, στο πλαίσιο της προσπάθειας του Δαμιανού να καταθέσει εμπεριστατωμένα τη δική του θεωρία για τα ζητήματα της οπτικής, μια θεωρία, στην οποία επιχειρούσε να συγκεράσει στοιχεία και από τον Ευκλείδη και από τον Πτολεμαίο.

Υποστηρίζουμε ότι το κείμενο του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και το κείμενο των *Οπτικών Υποθέσεων* δεν είναι εντελώς ανεξάρτητο το ένα από το άλλο. Αντίθετα, τα διέπει μια σχέση επικοινωνιακή -έστω και αν αυτή πραγματοποιείται μονομερώς- καθώς θεωρούμε ότι ο Δαμιανός φαίνεται ότι είχε πρόσβαση στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* και η συμβολή του λαμβάνει τον χαρακτήρα της απόκρισης στα λεγόμενα του προλόγου της. Ο Δαμιανός υιοθετεί αρκετές από τις απόψεις του Πτολεμαίου, για να τις χρησιμοποιήσει, όπως εκείνος κρίνει και σύμφωνα με ό,τι του χρειάζεται κάθε φορά. Άλλες φορές τις διατυπώνει, για να προσδώσει κύρος στα λεγόμενά του, άλλες φορές για να φανεί πιο πειστικός, σε σχέση με τον συγγραφέα του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Ωστόσο, πάντα τις οικειοποιείται και τις ενσωματώνει στη δική του θεωρία. Όσο σημαντικές είναι οι περιπτώσεις κατά τις οποίες ο Δαμιανός φέρει στοιχεία της πτολεμαϊκής αντίληψης φανερώνοντας με αυτόν τον τρόπο την επιρροή του από αυτή, άλλο τόσο σημαντικές είναι και οι περιπτώσεις κατά τις οποίες ο Δαμιανός επιλέγει να τα αποσιωπήσει. Πρόκειται για τις ελάχιστες, αλλά εξίσου αξιοσημείωτες περιπτώσεις, κατά τις οποίες ο Δαμιανός δεν ακολουθεί τον Πτολεμαίο, αλλά προτιμά να φέρει τη σφραγίδα του Ευκλείδη. Γι' αυτό κρίνουμε ότι ο Δαμιανός επιθυμούσε να διατυπώσει μια θεωρία όρασης που να συνδυάζει στοιχεία και από τους δύο σημαντικότερους εκπροσώπους της αρχαίας γεωμετρικής οπτικής.

Ο λόγος για τον οποίο εκφράζουμε την υπόθεση ότι οι *Οπτικές Υποθέσεις* έχουν ως σημείο αναφοράς τον πρόλογο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* βασίζεται κυρίως στο ότι ο Δαμιανός δεν αναπτύσσει με τυχαίο τρόπο τα θέματά του, αλλά φαίνεται να αφορμάται από τα περιεχόμενα του κειμένου του προλόγου. Σε αρκετές περιπτώσεις τα λεγόμενα του Δαμιανού συνιστούν αντιπροτάσεις, κριτική ή και συμφωνία σε θέσεις που προβάλλει ο πρόλογος. Άλλες φορές παρατηρείται η χρησιμοποίηση παρόμοιων ή εντελώς ίδιων χαρακτηριστικών εκφράσεων, καθώς και η παραπομπή σε ίδια παραδείγματα. Κατά τη συνέχεια της ενότητας, θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε τον τρόπο, με τον οποίο διαπλέκονται τα δύο κείμενα.

1. Αντιπαραβολή των κειμένων

α. Η απόδειξη της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων

Ο πρόλογος της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* ξεκινά με τη λέξη «*Ἀποδεικνὺς*» και αναφέρεται στην απόπειρα ενός προσώπου να αποδείξει «*τὰ κατὰ τὴν ὄψιν*», δηλαδή θέματα που σχετίζονται με την όραση. Το πρόσωπο εκείνο προφανώς έδινε μεγάλη βαρύτητα στην τεκμηριωμένη παρουσίαση των ζητημάτων που έθετε. Το στοιχείο αυτό μεταφέρεται και αποδίδεται από τον συγγραφέα του προλόγου, μέσω της χρήσης πολλών και διαφόρων εκφράσεων που δίνουν έμφαση σε αυτή την πρακτική. Ο συγγραφέας χρησιμοποιεί την έκφραση «*ἐκόμιζέ τινας παραμυθίας*», δηλαδή ορισμένους ισχυρισμούς που είχαν ως στόχο τους την πειθώ. Γνωρίζουμε ότι η «*παραμυθία*» δε μπορούσε να διατυπωθεί, ελλείψει κάποιας ικανοποιητικής θεωρίας. Από τον Πάππο τον Αλεξανδρινό μαθαίνουμε ότι οι φιλόσοφοι έλεγαν πως η σφαίρα είναι το μεγαλύτερο από τα άλλα στερεά, αλλά δεν έφεραν «*παραμυθίες*», δηλαδή ισχυρισμούς που να αιτιολογούν την κρίση τους, γιατί δεν είχαν κάποια θεωρία[2]. Κατανοούμε λοιπόν ότι το πρόσωπο, στο οποίο αναφέρεται ο συγγραφέας του προλόγου, εφόσον «*ἐκόμιζέ τινας παραμυθίας*», σημαίνει ότι είχε στη διάθεσή του κάποιο θεωρητικό υπόβαθρο, στο οποίο βάσιζε τις αποδείξεις του για τα οπτικά

---

[2] «...*λέγοντες* (εννν. *οι φιλόσοφοι*) *ἔτι καὶ τοῦτο προστιθέασιν ὅτι πάντων τῶν στερεῶν σχημάτων τῶν ἴσην ἐχόντων τὴν ἐπιφάνειαν μεγίστη ἐστὶν ἡ σφαῖρα.*
τἄλλα μὲν οὖν ὅσα προσεῖναι λέγουσιν αὐτῇ πρόδηλά τέ ἐστιν καὶ παραμυθίας ἐλάσσονος δεῖται, τὸ δ' ὅτι μείζων ἐστὶ τῶν ἄλλων σχημάτων οὔθ' οἱ φιλόσοφοι δεικνύουσιν, ἀλλ' ἀποφαίνονται μόνον, οὔτε παραμυθήσασθαι ῥᾴδιον ἄνευ θεωρίας πλείονος», Πάππου Αλεξανδρινού, *Μαθηματική Συναγωγή*, V, 350.23-30.

θέματα που πραγματευόταν. Ο συγγραφέας προσπαθεί να αναδείξει το επιστημονικό status αυτού του προσώπου και να προσδώσει κύρος στη μεθοδολογία του. Αυτό διαφαίνεται και αμέσως μετά, από την έκφραση «*προσεπιλογιζόμενος, διότι κατ' εὐθείας γραμμὰς πᾶν φῶς φέρεται*». Το πρόσωπο αυτό καταπιάστηκε αρχικά με την αιτιολόγηση (*διότι*) της ευθύγραμμης διάδοσης κάθε φωτός, μια αιτιολόγηση που ο ίδιος βάσιζε σε συμπεράσματα που αποκτούσε μέσω μιας αυστηρά συλλογιστικής διαδικασίας (*προσεπιλογιζόμενος*). Με τον τρόπο αυτό, παρουσίαζε τις αποδείξεις του, όπως δηλώνει και η λέξη «*σημεῖον*» που ακολουθεί.

Το πρόσωπο αυτό έφερε ως «*σημεῖον μέγιστον*», δηλαδή ως μέγιστη απόδειξη της ευθύγραμμης διάδοσης κάθε φωτός, τις σκιές που ρίχνουν τα σώματα και τις «*αυγές*»[3], δηλαδή τις ακτίνες του ήλιου που περνούν από τα παράθυρα και τις οπές. Η παραπομπή σε αυτά τα παραδείγματα γίνεται, για να θεμελιωθεί αρχικά η ευθύγραμμη διάδοση των ηλιακών ακτίνων, χωρίς όμως να ακολουθήσουν περαιτέρω εξηγήσεις. Ωστόσο, προς ενίσχυση του συμπεράσματος της ευθύγραμμης διάδοσης των ακτίνων του ήλιου προβάλλεται ένα επιχείρημα που θα λέγαμε ότι έχει πραγματιστικές βάσεις και δηλώνει ότι «*καθένα από αυτά δε θα συνέβαινε, όπως τώρα θεωρείται ότι συμβαίνει, αν οι ακτίνες που πηγάζουν από τον ήλιο δε φέρονταν κατά ευθείες*»[4]. Δεν είναι σαφές αν το επιχείρημα αυτό είχε διατυπωθεί από το ίδιο το πρόσωπο ή αν οφείλεται στην προσπάθεια του συγγραφέα να ενισχύσει τα λεγόμενα του πρώτου. Πάντως, αυτός ο τύπος επιχειρηματολογίας που δίνει έμφαση στο ότι κάποιο πράγμα «*θεωρεῖται γιγνόμενον*», δηλαδή είναι κατά κοινή ομολογία αποδεκτό ότι συμβαίνει πραγματικά και, επομένως, δύναται από μόνο του να καταστήσει αυτονόητη την ισχύ κάποιου προς απόδειξη φαινομένου, εμφανίζεται αρκετές φορές στον πρόλογο.

Στη συνέχεια, εξετάζεται η περίπτωση της ευθύγραμμης διάδοσης των «*αυγών*» των «*παρ' ἡμῖν πυρῶν*», δηλαδή των φωτεινών ακτίνων που αποστέλλονται από άλλου είδους τεχνητές φωτεινές πηγές, όπως λύχνους και πυρά. Ο συγγραφέας μάς πληροφορεί ότι το πρόσωπο, στο οποίο αναφέρεται, έλεγε ότι αυτές οι φωτεινές αυγές είναι η αιτία «*και που φωτίζονται κάποια κοντινά σώματα και που πέφτουν σκιές, άλλες ίσες με τα τοποθετημένα σώματα, ενώ άλλες μεγαλύτερες και άλλες*

---

[3] Στον ενικό αριθμό η «*αὐγὴ*» υποδήλωνε κυρίως το φως του ήλιου, ενώ στον πληθυντικό αριθμό τις ακτίνες του ήλιου. Ωστόσο, όπως θα δούμε και αμέσως παρακάτω, υπάρχουν και περιπτώσεις, κατά τις οποίες οι «*αὐγαί*» υποδήλωναν τις φωτεινές ακτίνες που πηγάζουν από τεχνητά μέσα.

[4] «*ἕκαστον δὲ τούτων οὐκ ἂν ἐγίγνετο, καθάπερ νῦν θεωρεῖται γιγνόμενον, εἴπερ μὴ αἱ ἀπὸ τοῦ ἡλίου φερόμεναι ἀκτῖνες κατά τινας εὐθείας ἐφέροντο*», *Opticorum Recensio Theonis*, 144.6-8.

μικρότερες των τοποθετημένων σωμάτων»[5]. Η απόδειξη της ευθύγραμμης διάδοσης των συγκεκριμένων φωτεινών ακτίνων βασίζεται σε μια θεωρητική προσέγγιση που ακολουθεί και αφορά στη μελέτη των σκιών. Είχε παρατηρηθεί ότι οι σκιές που ρίχνουν τα σώματα δεν είναι πάντα οι ίδιες, ως προς το μέγεθός τους, αλλά καθορίζονται από το μέγεθος των πηγών, από τις οποίες φωτίζονται τα σώματα. Αυτή η διαφοροποίηση ως προς το μέγεθος των σκιών «*οὐδέποτε*» θα συνέβαινε, αν οι φωτεινές ακτίνες δεν ήταν ευθείες γραμμές, οι οποίες, όταν πέφτουν στα αντικείμενα, έχουν τη δυνατότητα να παραμένουν παράλληλες (αν το σώμα είναι ίσου μεγέθους με τη φωτεινή πηγή), να συγκλίνουν (αν το σώμα είναι μικρότερου μεγέθους από τη φωτεινή πηγή) ή να εξαπλώνονται (αν το σώμα είναι μεγαλύτερου μεγέθους από τη φωτεινή πηγή)[6]. Η δεύτερη απόδειξη της ευθύγραμμης διάδοσης των φωτεινών ακτίνων που προτείνεται παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, καθώς ο συγγραφέας προσπαθεί να την εξυψώσει λέγοντας ότι αυτή «*θεωρείται*» (*θεωρεῖσθαι*) ότι καθιστά όλα τα παραπάνω «*ἐκφανέστατα*». Μάλιστα, το απαρέμφατο «*θεωρεῖσθαι*» υποδηλώνει για άλλη μια φορά ότι δεν πρόκειται απλά για την προσωπική του άποψη ή για την άποψη του εν λόγω προσώπου που τυχαίνει να μεταφέρει, αλλά για μια γενική εκτίμηση. Ο συγγραφέας παρουσιάζει την εμπιστοσύνη που εκδηλώνεται για τον δεύτερο τύπο απόδειξης ως καθολική και ο λόγος αυτής της κοινής αποδοχής οφείλεται στο ότι η συγκεκριμένη απόδειξη έχει αποκτηθεί «*κατασκευαστῶς*»[7]. Αυτός ο εκφραστικός τύπος δε συναντάται σε κανένα άλλο σύγγραμμα της Αρχαιότητας, παρά μόνο στον πρόλογο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, και αναφέρεται σε μια γνωστή πειραματική διάταξη. Πρόκειται για έναν λύχνο, το κέντρο του οποίου συμπίπτει με την οπή ενός χαρτονιού που έχει

---

[5] «*ἐπί τε τῶν παρ' ἡμῖν πυρῶν τὰς ἀποστελλομένας ἔφασκεν αὐγὰς αἰτίας εἶναι τοῦ τε φωτίζεσθαί τινα τῶν παρακειμένων σωμάτων καὶ ἀπορρίπτειν σκιὰς τὰς μὲν ἴσ ας τοῖς ὑποκειμένοις σώμασι, τὰς δὲ μείζονας, τὰς δὲ ἐλάσσονας τῶν ὑποκειμένων σω μάτων*», *ό.π.*, 144.8-13.

[6] «*καὶ ἴσας μὲν ἀπορρίπτειν σκιάς, ὅσα τοῖς φωτίζουσι πυροῖς ἴσα ἐστί, τάς τε ἐσχάτας ἀκτῖνας ἐπὶ τούτων συμβαίνειν παραλλήλους γίγνεσθαι καὶ μήτε συναπτούσας αὐτὰ ς μειοῦν τὴν σκιὰν μήτε μὴν ἐξαπλουμένας αὔξειν, ἀλλ᾽ οἷόν ἐστι τὸ ἐπιπροσθοῦν, τοι αύτην καὶ τῆς σκιᾶς συμμετρίαν φυλάσσειν· ἐλάσσονες δὲ τῶν σωμάτων αἱ σκιαί εἰσ ιν, ὅταν τὰ φωτίζοντα πυρὰ μείζονα ᾖ· τὰς γὰρ ἐσχάτας ἀκτῖνας συμπίπτειν ἑαυταῖς· διὸ δὴ καὶ μειοῦν τὰς σκιάς. μείζους δὲ τῶν σωμάτων αἱ σκιαί εἰσιν, ὅταν τὰ φωτίζον τα πυρὰ ἐλάσσονα ᾖ· τὰς γὰρ ἐσχάτας ἀκτῖνας ἐπὶ τούτων ἐξαπλοῦσθαι συμβαίνει κ αὶ μεῖζον τὸ σκιαζόμενον μέρος ἀποτελεῖν· οὐδέποτε δ᾽ ἂν τοῦτο συνέβαινεν, εἰ μὴ αἱ ἀπὸ τοῦ πυρὸς φερόμεναι ἀκτῖνες ἐπ᾽ εὐθείας ἐφέροντο*», 144.13-146.6.

[7] «*ἐκφανέστατα δὲ τούτων πάντων τοῦτο ἐπὶ τῶν κατασκευαστῶς γινομένων θεωρεῖσθα ι συμβαίνει*», 146.6-8.

τοποθετηθεί δίπλα του. Κοντά σε αυτό το χαρτόνι τοποθετείται ένα δεύτερο, πάνω στο οποίο πέφτει η φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από την οπή του πρώτου. Μέσω αυτής της διάταξης, διαπιστώνουμε (*εὑρήσομεν*) ότι το φως που προβάλλεται στο πρώτο χαρτόνι περιέχεται από ευθείες γραμμές και ότι η γραμμή που συνδέει το κέντρο του λύχνου και την οπή του πρώτου χαρτονιού είναι στην ίδια ευθεία[8]. Κατ' επέκταση, συμπεραίνουμε ότι η γραμμή θα είναι στην ίδια ευθεία και με το σημείο του δεύτερου χαρτονιού, όπου αυτή πέφτει. Εφόσον, μέσω των παραπάνω αποδείξεων, το πρόσωπο κατέστησε φανερό (*ἐναργοῦς*) σε όλους (*πᾶσι προδήλου*) ότι κάθε φως, όπως οι ηλιακές ακτίνες ή οι φωτεινές ακτίνες που προέρχονται από πυρά, λύχνους κλπ., φέρεται κατά ευθεία γραμμή, μετέβη στην όψη (*μεταβαίνειν ἐπὶ τὴν ὄψιν*), δηλαδή στην περίπτωση του οφθαλμού, για τον οποίο αξίωνε (*ἠξίου*) τα ίδια πράγματα. Δηλαδή, ομολογούσε (*ὁμολογεῖν*) ότι «*καὶ τὰς ἀπ' αὐτῆς*» ακτίνες, δηλαδή οι ακτίνες που εκχέονται *και από την όψη* φέρονται κατά ευθείες γραμμές και μάλιστα «*ἐν διαστήμασι*»[9].

Παρατηρούμε ότι η ευθύγραμμη διάδοση των οπτικών ακτίνων δεν αποδεικνύεται ούτε επιβεβαιώνεται πειραματικά, αλλά υιοθετείται ως αναντίρρητη αξίωση, δηλαδή ως μια δεδομένη για όλους αρχή. Ωστόσο, όπως έχουμε ήδη επισημάνει, θεωρούμε ότι η σειρά που ακολουθείται, αλλά και ο τρόπος, με τον οποίο παρουσιάζονται τα πράγματα, δεν είναι τυχαίος. Όπως διαφαίνεται από το κείμενο, η ευθύγραμμη διάδοση των οπτικών ακτίνων μπορεί να μην αποδεικνύεται, αλλά καθίσταται ως κάτι που εύλογα κάποιος θα αξίωνε και θα ομολογούσε, εφόσον έχει ήδη γίνει «εκφανέστατο» και ολοφάνερο σε όλους ότι «*κατ' εὐθείας γραμμὰς πᾶν φῶς φέρεται*». Από τα λεγόμενα του συγγραφέα αφήνεται να εννοηθεί ότι η ισχύς της ήδη αποδεδειγμένης ευθύγραμμης διάδοσης κάθε φωτός είναι ικανή να συμπεριλάβει και την παραδοχή της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων προσδίδοντάς της εγκυρότητα. Άλλωστε, το απαρέμφατο «*μεταβαίνειν*» υποδηλώνει την αβίαστη, φυσιολογική και αναπόφευκτη μετάβαση από την περίπτωση της ευθύγραμμης φοράς των φωτεινών ακτίνων του ήλιου ή των «*παρ' ἡμῖν πυρῶν*» στην ανάλογη περίπτωση των οπτικών ακτίνων. Το γεγονός αυτό δεν είναι καθόλου

---

8 «*...πάντως τὴν προσπίπτουσαν αὐγὴν τῷ πτυχίῳ εὐθείαις γραμμαῖς περιεχομένην εὑρήσομεν καὶ τὴν ἐπιζευγνύουσαν τό τε μέσον τοῦ λύχνου καὶ τὴν ἐντομὴν τοῦ πτυχίου κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν οὖσαν*», 146.13-17.

9 «*ἐναργοῦς οὖν ὄντος τοῦ, ὅτι πᾶν φῶς κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν φέρεται, καὶ πᾶσι προδήλου μεταβαίνειν ἐπὶ τὴν ὄψιν ἠξίου καὶ τὰς ἀπ' αὐτῆς ἐκχεομένας ἀκτῖνας καὶ ὁμολογεῖν κατ' εὐθείας φέρεσθαι γραμμὰς καὶ ταύτας ἐν διαστήμασι...*», 146.18-22.

περίεργο, αν σκεφτούμε την υπόθεση της φωτεινής φύσης των όψεων που επικρατούσε στην Αρχαιότητα. Πιθανότατα το πρόσωπο στο οποίο αναφέρεται ο συγγραφέας του προλόγου να αποδεχόταν την υπόθεση αυτή, αλλά, προφανώς, δεν της έδωσε καμία ιδιαίτερη βαρύτητα, γιατί ούτε και ο Ευκλείδης το είχε κάνει.

Ενώ το κείμενο του προλόγου παρουσιάζει υπόρρητα τη διαδεδομένη αντίληψη της φωτεινής φύσης των οπτικών ακτίνων, ο Δαμιανός ξεκινά τις *Οπτικές Υποθέσεις* του δηλώνοντας αυτό ακριβώς το στοιχείο. Αφού αναφέρει με συντομία ότι η οπτική αντίληψη πραγματοποιείται με την εκπομπή μιας προβολής από τον οφθαλμό προς τα παρατηρούμενα αντικείμενα, σπεύδει αμέσως να διευκρινίσει ότι η προβολή αυτή είναι φως. Μάλιστα, δεν αρκείται στο να διατυπώσει την κρίση αυτή ως υπόθεση, αλλά προβαίνει στο να τη θεμελιώσει αρχικά με εμπειρικό τρόπο προβάλλοντας ορισμένα γεγονότα που την καθιστούν φανερή (*δηλοῦσι*). Συγκεκριμένα, αναφέρει τις φωτεινές εκλάμψεις (*μαρμαρυγαὶ*)[10] και το γεγονός ότι κάποια ζώα, έχουν την ικανότητα να βλέπουν στο σκοτάδι, ικανότητα που διέθετε και ο βασιλιάς των Ρωμαίων Τιβέριος[11]. Ο Δαμιανός ακολουθεί μια πρακτική που συναντήσαμε και στον πρόλογο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Προσκομίζει στοιχεία που κανείς δε θα μπορούσε να αρνηθεί, εφόσον αποτελούν καταγεγραμμένα γεγονότα της καθημερινής ζωής. Ο καθένας είχε την ευκαιρία να τα διαπιστώσει στην εμπειρία του, ενώ επικαλούμενος την περίπτωση του Τιβέριου που ήταν ξακουστή στην Αρχαιότητα ο Δαμιανός προσβλέπει στο να κερδίσει την αμέριστη συγκατάβαση των αναγνωστών, καθώς αποτελούσε γεγονός που πιθανότατα όλοι είχαν πληροφορηθεί. Ο Δαμιανός δεν αρκείται σε αυτές τις ενδείξεις, αλλά υποστηρίζει ότι η φωτεινή φύση της προβολής καθίσταται σαφέστερη (*σαφέστερον*), εφόσον γίνει αντιληπτή η ομοιότητα του ήλιου με τον οφθαλμό[12]. Αυτό σημαίνει ότι ο οφθαλμός, όπως ο ήλιος,

---

[10] Οι «*μαρμαρυγές*» είναι οι φωτεινές σπίθες, οι φωτεινές εκλάμψεις. Ο Πλάτων αναφέρει στον *Τίμαιο* ότι η «*μαρμαρυγή*» είναι ένα συγκεκριμένο φαινόμενο, μέσω του οποίου προκύπτουν κάθε είδους χρώματα. Πρόκειται, σύμφωνα με εκείνον, για το φαινόμενο της ανάμειξης δύο φωτιών που συναντώνται από αντίθετες κατευθύνσεις. Η μία φωτιά είναι η φωτιά των δακρύων που εκρέει σαν αστραπή από τα μάτια. Η άλλη φωτιά προέρχεται από τα εξωτερικά σώματα και εισχωρώντας στα μάτια σβήνει στην υγρασία τους. Από το ανακάτεμα αυτό, προκύπτουν τα χρώματα. Το παραπάνω φαινόμενο ονομάζεται από τον Πλάτωνα «*μαρμαρυγή*» και ό,τι το προκαλεί ονομάζεται «*λαμπερό*» και «*αστραφτερό*». Βλ. *Τίμαιος*, 67e6-68b1.

[11] «*ὅτι δὲ τοῦτο τὸ προβαλλόμενον ἀφ᾽ ἡμῶν φῶς ἐστιν, αἵ τ᾽ ἀπολάμπουσαι τῶν ὀμμάτων δηλοῦσι μαρμαρυγαὶ καὶ τὸ τινὰς καὶ νύκτωρ ὁρᾶν οὐδὲν τοῦ ἔξωθεν προσδεομένους φωτός, ὥσπερ οὐδὲ τὰ νυκτίνομα τῶν ζῴων· ὅιος ἐκεῖνος ὁ Τιβέριος γέγονεν ὁ Ῥωμαίων βασιλεύς. τῶν δέ γε νυκτινόμων ζῴων τὰ ὄμματα καὶ ἐκλάμποντα φαίνεται νύκτωρ δίκην πυρός*», *Οπτικές Υποθέσεις*, 2.1-7.

[12] «*ἀλλ' ὅτι μὲν φωτὸς προβολῇ τοῖς ὁρατοῖς ἐπιβάλλομεν, δῆλον μὲν καὶ ἐκ τούτων· ἔτι δὲ σαφέστερον ἔσται,*

αντιπροσωπεύει κατά ανάλογο τρόπο μια φωτεινή πηγή και οι ακτίνες που εκπέμπονται από αυτόν είναι ομοίως φωτεινής φύσεως και μετέχουν στα ίδια πάθη με εκείνες του ηλίου. Αυτό σημαίνει ότι φέρουν τις ίδιες ιδιότητες. Όπως λέγεται παρακάτω, «*φῶς πρόεισιν ἀπὸ τῶν ἡμετέρων ὀμμάτων, εἴγε τὰ αὐτὰ πάθη ἐπί τε τῆς ἡμετέρας ὄψεως κἀπὶ τοῦ ἡλιακοῦ συμβαίνει φω τός*»[13].

Αντίθετα με τον συγγραφέα του προλόγου, ο οποίος είναι αναγκασμένος να προσλάβει και να παρουσιάσει στους αναγνώστες την ευθύγραμμη διάδοση των όψεων ως δεδομένη, ο Δαμιανός έχει τη δυνατότητα να τους πει ότι τόσο την ευθύγραμμη διάδοση των όψεων, όσο και τη διαμόρφωσή τους σε κώνο, «*ὁ Πτολεμαῖος δι' ὀργάνων ἀπέδειξεν ἐν τῇ αὐτοῦ ὀπτικῇ πραγματείᾳ*»[14]. Ο Δαμιανός, παρόλο που έχει την ευκαιρία, δεν παραθέτει λεπτομέρειες αυτής της πολύ σημαντικής απόδειξης, κάτι που σε ανάλογη περίπτωση ο συγγραφέας του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* διαπιστώσαμε ότι είχε κάνει. Ο Δαμιανός δε θέλει να φέρει τους αναγνώστες του σε θέση να ελέγξουν την απόδειξη, για να διαπιστώσουν την εγκυρότητά της. Επιθυμεί να τους κερδίσει και να τους πείσει επιλέγοντας έναν πιο σύντομο δρόμο. Απλά και μόνο αναφέροντας το όνομα του Πτολεμαίου, ως εγγύηση, αλλά και τη μεθοδολογία που ακολούθησε (*δι' ὀργάνων ἀπέδειξεν*), μια μεθοδολογία που ακόμη και ο συγγραφέας του προλόγου είχε παραδεχτεί ως κοινώς αναγνωρισμένη και κατοχυρωμένη (*ἐκφανέστατα δὲ τούτων πάντων τοῦτο ἐπὶ τῶν κατασκευαστῶς γινομένων θεω ρεῖσθαι συμβαίνει*), ο Δαμιανός καταφέρνει με μια σύντομη φράση να δείξει τα σημεία υπεροχής της πτολεμαϊκής θεώρησης και, κατ' επέκταση, της δικής του. Ωστόσο, δε σταματά εδώ, αλλά επιλέγει να προσκομίσει στοιχεία που να καταδεικνύουν το εύλογον, αλλά και το φυσικόν αυτής της πεποίθησης. Το κριτήριο της ευλογοφάνειας διακατέχει το σύνολο της επιχειρηματολογίας του συγγραφέα του προλόγου και ο Δαμιανός φαίνεται ότι επιθυμεί να αναμετρηθεί μαζί του σε αυτό το επίπεδο. Σύμφωνα με τον Δαμιανό, είναι λογικό η όψη να φέρεται ευθύγραμμα, γιατί η ευθεία είναι η ελάχιστη από όλες τις γραμμές, γεγονός που εξασφαλίζει τη μεγάλη

ἐπειδὰν τὴν πρὸς τὸν ἥλιον ὁμοιότητα τῆς ἡμετέρας ὄψεως παραστήσωμεν», *ό.π.*, 2.7-10.

[13] *ό.π.*, 13.6-8.

[14] «*ὅτι δὲ τὸ προβαλλόμενον τοῦτο ἀφ' ἡμῶν, ὃ δὴ καὶ ὄψιν ἔθος καλεῖν, ἐπ' εὐθείας τε φέρεται καὶ ἐν σχήματι κώνου ὀρθογωνίου, καὶ ὁ Πτολεμαῖος δι' ὀργάν ων ἀπέδειξεν ἐν τῇ αὐτοῦ ὀπτικῇ πραγματείᾳ*», 3.1-4.

ταχύτητά της[15]. Από την άλλη μεριά, η φύση προσβλέπει στη λυσιτέλεια, επιθυμεί και δρα για το αγαθό, επομένως, «*κατὰ τὸν εἰκότα λογον*», η οπτική ακτίνα πορεύεται ευθύγραμμα[16].

Η πρόνοια της φύσης δε γίνεται επικλητή μόνο από τον Δαμιανό, αλλά υπογραμμίζει και την επιχειρηματολογία του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, συγκεκριμένα στο σημείο εκείνο, όπου επιχειρείται η κατάρριψη των θεωριών εκείνων, όπως της επικούρειας, που υποθέτουν την εισπομπή ειδώλων από τα σώματα στον οφθαλμό. Στον πρόλογο αναφέρεται ότι το πρόσωπο, για το οποίο γίνεται λόγος, υποστήριζε ότι η φύση έχει κατασκευάσει «*τὰ μὲν τῶν αἰσθητηρίων πρὸς ὑποδοχὴν εὔθετα, τὰ δὲ μή*»[17]. Η ακοή, η όσφρηση, η γεύση πραγματοποιούνται, μέσω κοίλων και «*αντροειδών*» οργάνων, έτσι, ώστε να υποδέχονται τα ερεθίσματα και να τα διατηρούν για αρκετό χρόνο. Αν η όραση έπρεπε να υποδέχεται προσπίπτοντα σώματα, θα έπρεπε να φέρει από τη φύση την παραπάνω κατασκευή[18]. Αντίθετα, αυτό δε «*θεωρείται*» να συμβαίνει κατά αυτόν τον τρόπο (*νυνὶ δὲ θεωρεῖται τοῦτο οὐχ οὕτως ἔχον*), «*ἀλλὰ μᾶλλον σφαιροειδὴς οὖσα θεωρεῖται ἡ ὅρασις*»[19]. Στις *Οπτικές Υποθέσεις* ο Δαμιανός συμφωνώντας με το στοιχείο της εκπομπής της οπτικής ακτινοβολίας από το μάτι χρησιμοποιεί το ίδιο ακριβώς κριτήριο για την επιβεβαίωσή της, δηλαδή τον τρόπο κατασκευής του οφθαλμού. Μάλιστα, δημιουργεί εντύπωση ότι οι εκφράσεις του είναι ανάλογες με εκείνες που διαβάζουμε στον πρόλογο: «*Ὅτι μὲν οὖν προβολῆς τινος ἀφ'*
ἡμῶν γινομένης ἐπιβάλλομεν τοῖς ὁρωμένοις δηλοῖ καὶ τὸ τῶν ὀφθαλμῶν σχῆμ

---

15 «*...ἔνεστι δὲ καὶ λόγῳ θεωρῆσαι. εἰ γὰρ μέλλοι τάχιστα ἡ ὄψις πρὸς τὸ ὁρατὸν ἀφικνεῖσθαι, ἐπ' εὐθείας ἐνεχθήσεται· αὕτη γὰρ πασῶν ἐλαχίστη γραμμῶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν...*», 3.4-8.

16 «*...λυσιτελεῖ γὰρ ταῦτα τῷ ζῴῳ, πᾶν δὲ ὅ τι περ λυσιτελές ἐστι καὶ ἀγαθὸν τοῖς ζῴοις , ἡ φύσις ἀσπάζεται καὶ θέλει ποιεῖν · ὥστε κατὰ τὸν εἰκότα λόγον ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ὄψις ἐνεχθήσεται...*», 3.14-17.

17 *Opticorum Recensio Theonis*, 150.8-10.

18 «*ἀκοὴν μὲν γὰρ καὶ γεῦσιν καὶ ὄσφρησιν κοῖλα κατεσκεύακεν ἐντὸς ὡς ἔξωθεν αὐταῖς προσπίπτειν σώματα κινήσοντα τὰς αἰσθήσεις ταύτας. ἀκοῇ μὲν γὰρ φωνὴ προσπίπτουσα τόπον ἐπιτήδειον ὤφειλεν εὑρίσκειν πρὸς τὸ ἀναμεῖναι καὶ μὴ κατὰ τὴν πρόσπτωσιν εὐθέως ἀποπαλθεῖσαν τήν τε αἴσθησιν ἀκίνητον διαφυλάττειν καὶ τὴν ἐπιφερομένην συγχέαι φωνήν. ὁμοίως δὲ καὶ ὄσφρησιν· ἐπὶ μὲν γὰρ γεύσεως τί δεῖ καὶ λέγειν; διὸ καὶ μάλιστά πως αὗται αἱ αἰσθήσεις κοῖλαί τε καὶ ἀντροειδεῖς κατεσκευάσθησαν πρὸς τὸ ἐμμένειν τὰ προσπίπτοντα σώματα πλείονας χρόνους. καὶ ἐπὶ τῆς ὁράσεως οὖν, εἴπερ ἔξωθεν αὐτῇ προσέπιπτε τὰ κινήσοντα αὐτὴν σώματα, καὶ μὴ αὐτὴ ἐξαπέστελλέ τι ἀφ᾽ ἑαυτῆς, ἔδει τὴν κατασκευὴν αὐτῆς κοίλην τε καὶ εὔθετον πρὸς ὑποδοχὴν τῶν προσπιπτόντων σωμάτων εἶναι...*», *ό.π.*, 150.10-25.

19 150.25-27.

α οὐ κοῖλον οὐδὲ πρὸς ὑποδοχήν τινος πεποιημένον,
ὥσπερ τὰ ἄλλα αἰσθητήρια, ἀλλὰ σφαιροειδὲς ὑπάρχον»[20].

β. Το θέμα της διακριτότητας των όψεων

Ο πρόλογος της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δε φέρει καμία θεωρητική ανάλυση, σχετικά με την έννοια του οπτικού κώνου. Αφού ολοκληρώνεται η συζήτηση που αφορά στην ευθύγραμμη διάδοση του φωτός και των όψεων, ανοίγει το θέμα της διακριτότητας των όψεων και, συγκεκριμένα, της εξέτασης της άμεσης συνέπειάς της ότι «*μηδὲ τὰ ὁρώμενα ἅμα ὅλα ὁρᾶσθαι*», με την παρουσίαση των υπενθυμίσεων (*ὑπόμνησιν*) της βελόνας και των γραμμάτων. Αντίθετα, στις *Οπτικές Υποθέσεις*, όταν τελειώνει η συζήτηση της ευθύγραμμης διάδοσης των οπτικών ακτίνων, ο Δαμιανός πραγματεύεται ζητήματα που αφορούν στον οπτικό κώνο. Από τη μια μεριά, ο Δαμιανός ήταν υποχρεωμένος να μιλήσει στους αναγνώστες του πιο διεξοδικά για τον οπτικό κώνο, γιατί τους είχε ήδη προαναφέρει ότι ο Πτολεμαίος απέδειξε μέσω οργάνων, εκτός από την ευθύγραμμη διάδοση των όψεων, και την κωνική, ως προς το σχήμα, διαμόρφωσή τους. Ο Δαμιανός δεν αρκείται στο να προσλάβει την κωνική σχηματοποίηση των όψεων ως ένα ήδη αποδεδειγμένο γεγονός, αλλά επιχειρεί από τη μεριά του να παρουσιάσει στοιχεία που να τη θεμελιώνουν. Έτσι, ακολουθεί μια εκτενής συζήτηση, στην οποία ο Δαμιανός προσπαθεί να αιτιολογήσει την κυκλική βάση του οπτικού κώνου, γιατί διαμορφώνεται οπτικός κώνος και όχι οπτικός κύλινδρος και γιατί ο οπτικός κώνος πρέπει να είναι ορθογώνιος και όχι οξυγώνιος ή αμβλυγώνιος. Η βαρύτητα που δίνει ο Δαμιανός για την κατοχύρωση των ιδιοτήτων του οπτικού κώνου, και ιδιαίτερα για το είδος του, δεν είναι τυχαία. Ελλείψει του πρώτου βιβλίου των *Οπτικών* του Πτολεμαίου, δε μπορούμε να γνωρίζουμε με βεβαιότητα, αν η επιχειρηματολογία που παρουσιάζει ο Δαμιανός είναι δική του ή πηγάζει από τον Πτολεμαίο. Ωστόσο, είμαστε σε θέση να υποστηρίξουμε ότι ο Δαμιανός θεωρούσε αναγκαίο να παρεμβάλει τη συγκεκριμένη επιχειρηματολογία, γιατί αυτή θα αποτελούσε ταυτόχρονα τη βάση της κριτικής του για τις συνέπειες της διακριτότητας των όψεων, δηλαδή για το ότι «*οὐδὲν τῶν ὁρωμένων ἅμα ὅλον ὁρᾶται*» που, όπως απασχόλησε τον συγγραφέα του προλόγου, με παρόμοιο τρόπο βλέπουμε να απασχολεί πολύ και τον Δαμιανό.

[20] *Οπτικές Υποθέσεις*, 1,1-4.

Σχετικά με το θέμα της διακριτότητας, ο Δαμιανός ακολουθεί μια πολύ ενδιαφέρουσα στάση. Αντίθετα με ό,τι θα περίμενε κανείς, ο Δαμιανός υιοθετεί την άποψη του Ευκλείδη περί διακριτών όψεων θεωρώντας μάλιστα τη διακριτότητα ως αναγκαία ιδιότητα των οπτικών ακτίνων. Αυτό που δεν τον βρίσκει σύμφωνο είναι η αντίληψη που υποστηρίζεται από τον Ευκλείδη, αλλά και από τον συγγραφέα του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, ότι, εξαιτίας της διακριτότητας, *κανένα* μέγεθος δεν παρατηρείται ολόκληρο. Προκειμένου να αντικρούσει την αντίληψη αυτή, ο Δαμιανός αναπτύσσει την επιχειρηματολογία του, σχετικά με τις τρεις προαναφερθείσες ιδιότητες που οφείλει να έχει η οπτική απορροή. Με τον τρόπο αυτό, ορίζει τις συγκεκριμένες προϋποθέσεις που κρίνει ότι, αν ισχύουν, παύει αυτόματα να ισχύει και η πρόταση της ευκλείδειας οπτικής ««*οὐδὲν τῶν ὁρωμένων ἅμα ὅλον ὁρᾶται*».

Ο Δαμιανός παρουσιάζει τις τρεις ιδιότητες που πρέπει να έχει η οπτική απορροή ως υποθέσεις και, στη συνέχεια, προσπαθεί να τις αιτιολογήσει. Συγκεκριμένα, όσον αφορά στη βάση του οπτικού κώνου, ο Δαμιανός αιτιολογεί το κυκλικό της σχήμα επικαλούμενος τα πορίσματα των μαθηματικών, την πρόνοια της φύσης, αλλά και τη λογική. Συγκεκριμένα, λέει ότι με την κυκλική βάση συλλαμβάνεται περισσότερο τμήμα από το παρατηρούμενο σώμα, καθώς έχει αποδειχθεί ότι, μεταξύ των επίπεδων και ισοπεριμετρικών με τον κύκλο σχήματα, αυτός είναι «*πολυχωρητότατος*»[21]. Από την άλλη μεριά, η φύση, η οποία ασπάζεται το ωφέλιμο και το αγαθό, έχει προνοήσει με τέτοιο τρόπο, ώστε η όραση να συλλαμβάνει τα ερεθίσματα όχι μόνο πολύ γρήγορα, αλλά να έχει ταυτόχρονα τη δυνατότητα να βλέπει όσο γίνεται περισσότερο μέρος από τα παρατηρούμενα.

---

[21] «*καὶ αὖ πάλιν εἰ μέλλοι ὡς ἐνδέχεται πλεῖστον ἐπιλήψεσθαι* (εν. *τὴν ὄψιν*) *τοῦ ὁρωμένου, κατὰ κύκλον αὐτῷ ἐπιβαλεῖ. Οὗτος γὰρ τῶν ἐπιπέδων τε καὶ ἰσοπεριμέτρων αὐτῷ σχημάτων πολυχωρητότατος ἀποδείκνυται*», *ό.π.*, 3.9-12. Η πρόταση αυτή είχε αποδειχθεί από τον Ζηνόδωρο (περ. 200 π.Χ.) στο *Περί ισομέτρων σχημάτων* και έκτοτε χρησιμοποιούνταν ευρέως από τους μαθηματικούς. Ο Πτολεμαίος βασίστηκε σε αυτή, για να αποδείξει στη *Μαθηματική Σύνταξη* ότι ο ουρανός είναι μεγαλύτερος των υπολοίπων σωμάτων («*...τῶν ἴσην περίμετρον ἐχόντων σχημάτων διαφόρων ἐπειδὴ μείζονά ἐστιν τὰ πολυγωνιώτερα, τῶν μὲν ἐπιπέδων ὁ κύκλος γίνεται μείζων, τῶν δὲ στερεῶν ἡ σφαῖρα, μείζων δὲ καὶ ὁ οὐρανὸς τῶν ἄλλων σωμάτων*», 1.1, 13.16-20). Αποσπάσματα της απόδειξης του Ζηνόδωρου φέρει, μεταξύ άλλων, ο Θέων ο Αλεξανδρινός στα *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη* του Πτολεμαίου, ενώ εξετάζεται και στο βιβλίο V της *Μαθηματικής Συναγωγής* του Πάππου (308.2-334.21).

Λαμβάνοντας κανείς υπόψη τα παραπάνω στοιχεία εύλογα (*κατὰ τὸν εἰκότα λογον*) συμπεραίνει ότι η όψη «*κατὰ κύκλον ἐπιβαλεῖ τοῖς ὁρωμένοις*»[22].

Σχετικά με το σχήμα της οπτικής απορροής, δηλαδή των οπτικών ακτίνων που εξέρχονται του οφθαλμού, ο Δαμιανός επινοεί, όπως λέει, ένα λογικό επιχείρημα (*οὕτως ἄν τις τῷ λόγῳ κατασκευάσειεν*). Εξετάζει δύο περιπτώσεις: είτε οι όψεις να διαμορφώνουν κύλινδρο είτε να διαμορφώνουν κώνο. Ο Δαμιανός απορρίπτει την πρώτη περίπτωση, καθώς, αν ίσχυε, ο οφθαλμός δε θα ήταν δυνατόν να αντιληφθεί τη διαφοροποίηση των παρατηρούμενων σωμάτων, ως προς το μέγεθός τους. Αντίθετα, θα τα έβλεπε όλα ίσα μεταξύ τους και μάλιστα ίσα με το μέγεθος της κόρης του οφθαλμού. Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνουμε ότι για τον Δαμιανό η κορυφή του οπτικού κώνου βρίσκεται εντός και στο βάθος του οφθαλμού. Σύμφωνα με τα λεγόμενά του, η πρώτη και ελάχιστη βάση του οπτικού κώνου είναι ένας κύκλος, το πέρας του οποίου είναι η περιφέρεια που περιγράφει την κόρη του οφθαλμού[23]. Αν σχηματιζόταν οπτικός κύλινδρος, στην περίπτωση που ο οφθαλμός παρατηρούσε μεγέθη μεγαλύτερα της κόρης, δε θα ήταν δυνατόν να αντιληφθεί αυτή τη διαφοροποίηση, γιατί, σε αντίθεση με τον κώνο, ο κύλινδρος δε μπορεί να αποδόσει το «*τεταγμένον*» ή να παρουσιάσει τα μεγέθη «*ἀθρόως*», δηλαδή συγκεντρωμένα[24].

Στη συνέχεια, ο Δαμιανός επιχειρεί να προσδιορίσει το είδος του οπτικού κώνου, στοιχείο που θα του επιτρέψει να αντιπαρατεθεί όχι στην ιδιότητα της διακριτότητας των όψεων, αλλά στα αποτελέσματά της που τόσο επίμονα είχε προσπαθήσει να θεμελιώσει το πρόσωπο του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Λέει λοιπόν ο Δαμιανός ότι ο οπτικός κώνος είναι ορθογώνιος, δηλαδή ορισμένος ως

22

«*δεῖ δὲ τὴν ὄψιν καὶ ταχέως ἐπιβάλλειν τοῖς ὁρατοῖς καὶ ὡς ἐνδέχεται πλεῖστον ἑκάστου θεωρεῖν ἅμα· λυσιτελεῖ γὰρ ταῦτα τῷ ζῴῳ, πᾶν δὲ ὅ τι περ λυσιτελές ἐστι καὶ ἀγαθὸν τοῖς ζῴοις, ἡ φύσις ἀσπάζεται καὶ θέλει ποιεῖν· ὥστε κατὰ τὸν εἰκότα λόγον ἐπ' εὐθείας ἡ ὄψις ἐνεχθήσεται καὶ κατὰ κύκλον ἐπιβαλεῖ τοῖς ὁρωμένοις*», 3.12-18.

23

«*δῆλον δὲ ὅτι ἡ τοῦ τῆς ὄψεως κώνου κορυφὴ οὐκ ἔστιν ἐπὶ τῆς τοῦ ὀφθαλμοῦ κόρης· οὐ γὰρ ἄν ποτε ἀπὸ παντὸς μέρους τῆς κόρης ἑωρῶμεν· ἀλλ' ἔστιν ἐντὸς καὶ ἐν τῷ τοῦ ὀφθαλμοῦ βάθει.*
βάσις δέ ἐστι τοῦ κώνου ἡ πρώτη καὶ ἐλαχίστη ὁ κύκλος, οὗ πέρας ἐστὶν ἡ τὴν κόρην περιγράφουσα περιφέρεια», 11.1-6.

24

«*οὕτω δὲ φερομένη καὶ οὕτως ἐπιβάλλουσα τοῖς ὁρατοῖς ἤτοι κυλινδρικὸν ἢ κωνικὸν ἕξει τὸ σχῆμα, εἴγε δὴ καὶ τεταγμένον ἔχει, ὥσπερ οὖν εὔλογον ἔχειν. ἀλλὰ μὴν κυλινδρικὸν οὐκ ἔχει·*
οὐ γὰρ ἂν ἐδύνατο τοῖς μείζοσι τῆς κόρης μεγέθεσιν ἀθρόως ἐπιβάλλειν καὶ πρὸς τούτῳ ἅπαντα ἅμα ὅλα τὰ ὁρώμενα ἐδόκει αὐτῇ ἴσα κατὰ μέγεθος εἶναι. κωνικὸν ἄρα ἔχει τὸ σχῆμα. οὕτω δὲ ἔχουσα καὶ τοῖς διαφόροις μεγέθεσι τῶν ὁρωμένων οἵα τε ἔσται διαφερούσῃ κατὰ μέγεθος ἐπιβάλλειν τῇ αὐτῆς βάσει», 4.1-9.

προς το είδος. Αντίθετα, οι οξυγώνιοι και αμβλυγώνιοι κώνοι είναι ως προς το είδος αόριστοι, γιατί επιδέχονται το μικρότερο και το μεγαλύτερο εις άπειρον[25], γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με τη φύση, η οποία «*ὡρισμένον πρὸ τοῦ ἀορίστου ἐθέλει ποιεῖν ὡς ἂν ἄμεινον καὶ οὐχ ἥκιστα λογ ικοῦ ζῴου ἁρμόττον φύσει*»[26]. Στο σημείο αυτό ο Δαμιανός εισάγει ένα επιχείρημα που θεωρεί ότι επιβεβαιώνει την υπόθεσή του περί ορθογωνίου οπτικού κώνου. Το επιχείρημα αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς αποτελεί ένα βήμα πριν από την κριτική που θα ασκήσει στον Ευκλείδη. Ο Δαμιανός υποστηρίζει ότι τα φαινόμενα συμφωνούν με την άποψη που προτείνει, δηλαδή επιβεβαιώνουν ότι ο οπτικός κώνος είναι ορθογώνιος. Τα φαινόμενα που επικαλείται είναι τα εξής:

- *τοῦ τε γὰρ οὐρανοῦ σφαιροειδοῦς ὄντος τεταρτημόριον ἅμα ὁρῶμεν·*
- *καὶ δὴ καὶ τῆς τοῦ ὁρίζοντος περιφερείας τὸ αὐτὸ βλέπομεν μέρος.*
- *ἐὰν δέ γε κύκλου τινὸς ἐντὸς καὶ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γενόμενοι θεωρῶμ εν αὐτὸν, ἡμικύκλιον ἅμα ὅλον ὀψόμεθα*[27].

<u>Συμπέρασμα</u>: *ταῦτα δὲ οὐκ ἄν ποτε οὕτω συνέβαινεν, εἴγε μὴ ὀρθογώνιος ἦν ὁ τῆς ὄψεως κῶνος*[28].

Το ενδιαφέρον του Δαμιανού δεν περιορίζεται απλά στο να κατοχυρώσει το είδος του οπτικού κώνου. Η συζήτηση αυτή του προσφέρει τα μέσα, για να εναντιωθεί άμεσα στον Ευκλείδη και σε αυτό που εκείνος πρεσβεύει, συγκεκριμένα, στο ότι *κανένα από τα ορώμενα δεν οράται αμέσως ολόκληρο*: «*Αλλά, αντίθετα προς αυτό που λέει ο Στοιχειωτής, ότι 'κανένα από τα παρατηρούμενα δεν οράται αμέσως ολόκληρο', εμείς λέμε τα αντίθετα ότι, βεβαίως, το τεταρτημόριο του ουρανού οράται αμέσως ολόκληρο*»[29]. Ο Δαμιανός παρέπεμψε στα παραπάνω φαινόμενα, για να αποδείξει ότι αυτά έρχονται σε ρήξη με τα πορίσματα του Ευκλείδη και να

---

[25] «*ὅτι δὲ καὶ ὀρθογώνιος κῶνος ὡρισμένος τῷ εἴδει (εἶδος γάρ ἐστιν εἰδικώτατον ὥσπερ οὖν καὶ ἡ ὀρθὴ γωνία)*
δῆλον. οἱ γὰρ ἀμβλυγώνιοί τε καὶ ὀξυγώνιοι ἀόριστοι κατὰ τὸ εἶδος ὑπάρχουσιν, ἐπείπερ καὶ αἱ τοιαῦται τῶν γωνιῶν τὸ μᾶλλόν τε καὶ ἧττον εἰς ἄπειρον ἐπιδέχονται», 5.2-7.

[26] 5.7-9.

[27] «*Εάν βρισκόμενοι μέσα σε έναν κύκλο και πολύ κοντά προς την περιφέρειά του τον κοιτάξουμε, θα δούμε αμέσως ολόκληρο το ημικύκλιο*». Στο σημείο αυτό ο Δαμιανός βασίζεται στη γνωστή γεωμετρική πρόταση «*η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή*».

[28] 5.11-17.

[29] «*ἀλλὰ πρὸς τὸ τοῦ στοχει<ωτ>οῦ τοῦ λέγοντος· 'οὐδὲν τῶν ὁρωμένων ἅμα ὅλον ὁρᾶται' ἡμεῖς ἐναντία λέγειν δοκοῦντες ὅτι δὴ τεταρτημόριον τοῦ οὐρανοῦ ἅμα ὅλον ὁρᾶται*», 5.17-21.

καταστήσει πιο εύλογη τη διαφωνία του με τις συνέπειες της διακριτότητας, οι οποίες είχαν τύχει μεγάλης προσπάθειας κατοχύρωσης στο κείμενο του προλόγου, μέσω των παραδειγμάτων του εδάφους και της βελόνας.

Η κριτική του Δαμιανού δεν έχει ως στόχο της να πλήξει τη διακριτότητα των όψεων και αυτό προκαλεί εντύπωση, καθώς, με αυτόν τον τρόπο, ο Δαμιανός δε συμφωνεί με τον Πτολεμαίο. Ο Πτολεμαίος είχε απορρίψει την ιδιότητα αυτή στο δεύτερο βιβλίο των *Οπτικών*, όπου υποστήριζε ότι η φύση της οπτικής ακτινοβολίας είναι συνεχής και όχι διακριτή. Ο Δαμιανός αποσιωπά την άποψη του Πτολεμαίου. Στο σημείο αυτό ακολουθεί τον Ευκλείδη και λέει τα εξής: «*Όμως, πρέπει να γνωρίζουμε ότι αυτό το κωνικό και φωτεινό -ως προς το είδος- σχήμα της όψης που φέρεται διαμέσω των μη φανερών πόρων της κόρης, 'σχίζεται' αναγκαστικά σε διαχωρισμένες μεταξύ τους ακτίνες που φωτίζουν όλον τον τόπο (που υπάρχει) ανάμεσά τους, δηλαδή όλο το βάθος του κώνου*»[30]. Αυτό που ενοχλεί τον Δαμιανό είναι ότι ο Ευκλείδης απορρίπτει *κάθε* παρατηρούμενο αντικείμενο από το να ειδωθεί αμέσως όλο και το ότι καταλογίζει το γεγονός αυτό στη διακριτότητα των όψεων. Όπως δηλώνεται στο θεώρημα 1 και των δύο εκδόσεων του κειμένου των *Οπτικών*, «*οὐδὲν τῶν ὁρωμένων ἅμα ὅλον ὁρᾶται*», γιατί οι όψεις, εξαιτίας της διακριτότητας δεν πέφτουν αμέσως σε όλα τα σημεία του ορωμένου. Για να ειδωθεί το ορώμενο αμέσως ολόκληρο, «*δοκεῖ δὲ ὁρᾶσθαι ἅμα τῶν ὄψεων ταχὺ παραφερομένων*»[31] ή, όπως λέγεται στο χωρίο του προλόγου που αναφέρεται στο θεώρημα αυτό, «*δοκεῖ δὲ ὁρᾶσθαι διὰ τὸ κινεῖσθαι τὰς ὄψεις ὑπερβολῇ τάχους μηδὲν ἀπολειπ ούσας, τουτέστι κατὰ συνέχειαν παραφερομένας καὶ μὴ ἁλλομένας*»[32].

Εκτιμούμε ότι ο Δαμιανός επιθυμεί να απενοχοποιήσει τη διακριτότητα των όψεων από το ότι δεν επιτυγχάνεται αμέσως η ολοκληρωμένη και, επομένως, απολύτως ακριβής παρατήρηση. Ταυτόχρονα, προσπαθεί να αναδείξει ότι αυτά τα προβλήματα δε συμβαίνουν πάντα, δηλαδή δε συνιστούν κανόνα που θα πρέπει να χαρακτηρίζει πάντα την οπτική αντίληψη, όπως προτάσσει ο Ευκλείδης μέσω του θεωρήματος «*οὐδὲν τῶν ὁρωμένων ἅμα ὅλον ὁρᾶται*». Αντίθετα, οι παραπάνω επιπλοκές αποτελούν περιπτώσεις που ενδέχεται να συμβαίνουν ορισμένες φορές.

30

«*γινώσκειν δὲ δεῖ ὅτι τὸ κωνικὸν τοῦτο καὶ φωτοειδὲς τῆς ὄψεως σχῆμα διὰ τῶν ἀδήλ ων πόρων τῆς κόρης φερόμενον σχίζεται ἐξ ἀνάγκης εἰς κεχωρισμένας μὲν ἀλλήλων ἀ κτῖνας, συναυγαζούσας δὲ πάντα τὸν μεταξὺ αὐτῶν τόπον, τουτέστιν ὅλου τοῦ κώνου τὸ βάθος*», 6.1-5.

[31] Ευκλείδου, *Οπτικά*, 1.9-11, *Opticorum Recensio Theonis*, 156.9-10.

[32] *Opticorum Recensio Theonis*, 148.17-19.

Ωστόσο, ακόμα και όταν συμβαίνουν, δεν οφείλονται στη διακριτότητα των όψεων, αλλά στο ότι δεν ικανοποιούνται κάποιες άλλες συνθήκες που ο Δαμιανός συγκεκριμενοποιεί. Σύμφωνα με τον Δαμιανό, οι όψεις που αποτελούν τον οπτικό κώνο πρέπει να είναι αναγκαστικά διακριτές, γιατί εκπέμπονται από τους πόρους της κόρης
(*διὰ τῶν ἀδήλων πόρων τῆς κόρης φερόμενον σχίζεται ἐξ ἀνάγκης εἰς κεχωρισμένας μὲν ἀλλήλων ἀκτῖνας*). Ωστόσο, προσπαθεί να κάνει σαφές ότι αυτή η αναγκαιότητα δε μπορεί να λειτουργήσει εις βάρος της ολοκληρωμένης και ακριβούς οπτικής αντίληψης, όχι όταν ο οπτικός κώνος είναι ορθογώνιος και όταν αποδεχτούμε τη φωτεινή φύση των οπτικών ακτίνων. Στο συμπέρασμα που διατυπώνει ο Δαμιανός, ύστερα από την παράθεση των φαινομένων, λέει ότι και αυτά δε θα συνέβαιναν με αυτόν τον τρόπο (*ταῦτα δὲ οὐκ ἄν ποτε οὕτω συνέβαινεν*), δηλαδή δε θα παρατηρούνταν αμέσως ολόκληρα, αν ο οπτικός κώνος δεν ήταν ορθογώνιος. Σύμφωνα με την αντίληψη του Δαμιανού, ο ορισμένος ορθογώνιος οπτικός κώνος έχει ως αποτέλεσμα ένα ορισμένο οπτικό πεδίο, το οποίο προσδιορίζει ποσοτικά σε ένα τεταρτημόριο της σφαίρας[33]. Οτιδήποτε υπάρξει σε αυτό το ορισμένο οπτικό πεδίο, θα ειδωθεί αμέσως ολόκληρο, δηλαδή «*όλοσχερῶς*», έκφραση που συναντάται και στο κείμενο του προλόγου (*ἀλλ' οὐδὲν ἧττον ἐπιλογιζόμενοι ζητοῦσι καὶ ὁλοσχερῶς οὐχ εὑρίσκουσι*)[34].

Ο Δαμιανός υποστηρίζει ότι διευθετεί αυτή την αρκετά περίπλοκη κατάσταση που αντιμετωπίζει (*ταῦτα πρὸς λύσιν ἐπάγομεν*)[35] με το να αποσαφηνίσει ότι μερικές φορές η οπτική απορροή, ακόμα και αν αποτελείται από διακριτές όψεις, έχει τη δυνατότητα να «*επιβάλλεται*» στα ορώμενα «*ολοσχερώς*» εξασφαλίζοντας την απαιτούμενη ακρίβεια, ενώ μερικές φορές «*επιβάλλεται*» «*κατὰ τὸ ἐνδεχόμενον ἀκριβές*»[36]. Η ολοσχερής παρατήρηση σημαίνει ότι

---

[33] Για την ποσοτικοποίηση αυτή συμβάλλει και ο εντοπισμός της κορυφής του οπτικού κώνου εντός και στο βάθος του οφθαλμού, με πρώτη και ελάχιστη βάση του οπτικού κώνου τον κύκλο, το πέρας του οποίου περιγράφεται από την περιφέρεια της κόρης του οφθαλμού. Η κόρη προσδιορίζεται ως η επιφάνεια του τεταρτημορίου της σφαίρας, επειδή ο οπτικός κώνος είναι ορθογώνιος: «*αὐτὴ γάρ τοι ἡ κόρη οὐ κύκλος, ἀλλὰ τεταρτημορίου σφαίρας ἐστὶν ἐπιφάνεια, εἴπερ γε ὀρθογώνιός ἐστιν ὁ τῆς ὄψεως κῶνος ὡς ἐδείξαμεν*», *Οπτικές Υποθέσεις*, 11.6-8.
[34] *Opticorum Recensio Theonis*, 150.3-5.
[35] *Οπτικές Υποθέσεις*, 5.21-22.
[36] «*...ὁτὲ μὲν ὁλοσχερῶς ἐπιβάλλομεν τοῖς ὁρωμένοις, ὁτὲ δὲ κατὰ τὸ ἐνδεχόμενον ἀκριβές*», *ό.π.*, 5.22-23.

βλέπουμε αμέσως ολόκληρα τα παρατηρούμενα αντικείμενα[37], όπως άλλωστε φανερώνουν και ορισμένα φαινόμενα. Μολονότι δεν το εκφράζει ρητά, ο Δαμιανός φαίνεται να υποστηρίζει ότι, αντίθετα με ό,τι λέει ο Ευκλείδης, κατά την ολοσχερή παρατήρηση, τα παρατηρούμενα αντικείμενα δε βλέπονται μόνο αμέσως ολόκληρα, αλλά και με ακρίβεια, χωρίς να χρειάζεται να «*παραφερθούν*» οι όψεις πάνω σε αυτά. Σε αυτή την περίπτωση, η παρατήρηση δεν ενδέχεται απλά, αλλά είναι ακριβής, χωρίς την παραφορά των όψεων, ακριβώς επειδή ο οπτικός κώνος του Δαμιανού είναι φωτοειδής (*...τὸ κωνικὸν τοῦτο καὶ φωτοειδὲς τῆς ὄψεως σχῆμα...*) και μπορεί να φωτίζει αμέσως όλα τα μέρη του παρατηρούμενου αντικειμένου που υπάρχουν μεταξύ των σημείων, πάνω στα οποία πέφτουν οι όψεις. Αν η παρατήρηση δεν είναι ολοσχερής, τότε δεν είναι και ακριβής, αλλά ενδέχεται να γίνει, μέσω της παραφοράς των όψεων: «*εἰ μέλλοιμεν ἀκριβῶς τι ὁρᾶν, πάντα αὐτοῦ τὰ μέρη ἐπιπορευθῆναι τὰ μεταξὺ τῶν ἀπὸ τοῦ ὄμματος φερομέν ων ἀκτίνων παρεμπεσόντα·*
καὶ ἃ δὴ ἔλαθεν ἡμᾶς ἀναγκαίως κατὰ τὴν πρώτην ἐπιβολήν, ταῦτα τῇ τῶν ὄψεων ἐπιδρομῇ θεασόμεθα»[38]. Το ερώτημα που προκύπτει στο σημείο αυτό είναι το εξής: Γιατί στην πρώτη περίπτωση η φωτεινή φύση των οπτικών ακτίνων είναι επαρκής, ώστε να καταστήσει αμέσως όλα τα μέρη του παρατηρούμενου αντικειμένου ακριβή, ως προς την οπτική τους αντίληψη, ενώ στη δεύτερη περίπτωση δεν είναι;

Η μόνη απάντηση που μπορούμε να βρούμε, μέσα από τα λεγόμενα του Δαμιανού, είναι η εξής: ο Δαμιανός ισχυρίζεται ότι βλέπουμε είτε κατά ορθές γωνίες είτε κατά οξείες και ποτέ κατά αμβλείες[39]. Οι γωνίες αυτές αποτελούν βέβαια την κορυφή του οπτικού κώνου[40]. Στην περίπτωση της ολοσχερούς οπτικής αντίληψης, επειδή ο οπτικός κώνος είναι ορθογώνιος, τα παρατηρούμενα αντικείμενα βλέπονται κατά ορθές γωνίες. Οι γωνίες αυτές βρίσκονται στην κορυφή του οπτικού κώνου και βαίνουν στη διάμετρο του κύκλου, εφόσον ο οπτικός κώνος έχει βάση κυκλική[41]. Ο Δαμιανός φαίνεται να υποστηρίζει ότι στην περίπτωση του ορθογώνιου οπτικού

---

[37] «*ὁλοσχερῶς μὲν οὖν ἅμα ὁρᾶσθαί φαμεν πάντα τὰ ὑφ᾽ ἡμῶν ὁρώμενα...*», 5.23-24.
[38] 5.25-29.
[39] «*ὁρᾶται δὲ τὰ ὁρώμενα ἤτοι κατ᾽ ὀρθὰς γωνίας ἢ κατ᾽ ὀξείας, κατὰ δὲ ἀμβλείας οὐδέπ οτε*», 7.1-2.
[40] «*συνίστανται γὰρ αἱ γωνίαι, καθ᾽ ἃς ὁρῶμεν, πρὸς αὐτῇ τῇ κορυφῇ τοῦ τῆς ὄψεως κώ νου*», 7.2-4.
[41] «*καὶ αἱ μὲν ὀρθαὶ (ενν. γωνίαι) ἐπὶ διαμέτρων βεβήκασι τῆς βάσεως τοῦ κώνου*», 7.4-5.

κώνου το φως που φέρουν οι οπτικές ακτίνες διαμοιράζεται καλύτερα στο παρατηρούμενο αντικείμενο, καθώς ο άξονας του κώνου βρίσκεται στο κέντρο του και, επομένως, η φωτεινότητα μπορεί μοιραστεί πιο αποτελεσματικά πάνω σε αυτό. Ο οπτικός κώνος από τη φύση του δεν έχει παντού την ίδια δύναμη. Οι προνομιακές του περιοχές εντοπίζονται στον άξονα και στις γύρω από αυτόν οπτικές ακτίνες. Όσο πιο πολύ απομακρυνόμαστε από αυτόν τόσο η οπτική και, συνεπώς, η φωτεινή ενέργεια εξασθενεί: «*η οπτική δύναμη ενεργεί κυρίως προς τα εμπρός, ενώ είναι φυσικό να μην (ενεργεί) με τον ίδιο τρόπο προς τα πλάγια. Εφόσον λοιπόν τεθεί, σύμφωνα με τη φύση, το σχήμα της όψης* (δηλ. ο οπτικός κώνος) *προς τα εμπρός, ο μεν άξονας του κώνου θα είναι ακριβώς μπροστά, ενώ οι ακτίνες της όψεως που τον πλησιάζουν θα είναι πλησίον (του άξονα). Γιατί, βέβαια, οι υπόλοιπες (ακτίνες της όψεως) φέρονται προς τα πάνω και προς τα κάτω και προς τα πλάγια. Με αυτόν τον τρόπο, βέβαια, η οπτική δύναμη ενεργεί από τη φύση της προς τα εμπρός...*»[42]. Στην περίπτωση κατά την οποία δεν επιτυγχάνεται ακριβής παρατήρηση και εφόσον την επιθυμούμε, «*στρέφουμε την όψη κατά τέτοιον τρόπο, ώστε το μεσαίο τμήμα της βάσης του οπτικού κώνου να πέφτει πάνω στο παρατηρούμενο*»[43].

Ο Δαμιανός διατηρεί την έννοια του άξονα του οπτικού κώνου, καθώς επίσης τις προνομιακές -από φωτεινής απόψεως- περιοχές του που είχε εισάγει ο Πτολεμαίος. Με βάση αυτή την αντίληψη, σπεύδει να προτείνει τη δική του απάντηση για το πρόβλημα της μη ορατότητας της βελόνας που είχαμε συναντήσει και στο κείμενο του προλόγου: «*Βεβαίως, εξαιτίας αυτού, αν τύχει να βρίσκεται κοντά κάποια βελόνα και θέσουμε την όψη στον τόπο, στον οποίο τυχαίνει να βρίσκεται, δεν τη βλέπουμε, μέχρι να θέσουμε με κάποιον τρόπο πάνω σε αυτή τον άξονα (της όψεως) ή τις ακτίνες (που βρίσκονται) γύρω από αυτόν*»[44]. Παρατηρούμε με έκπληξη ότι ο Δαμιανός δε μεταφέρει μόνο το ίδιο παράδειγμα, αλλά και την ίδια αντίληψη που με τόση έμφαση είχε προβάλλει ο συγγραφέας του προλόγου. Όπως εκείνος, έτσι και ο

---

42 «*ἡ ὀπτικὴ δύναμις μάλιστά πως εἰς τοὔμπροσθεν τὴν ἐνέργειαν ἔχει, εἰς δὲ τὰ πλάγια οὐχ ὁμοίως πέφυκεν.*
πρόσω τοίνυν κατὰ φύσιν στησάντων ἡμῶν τὸ τῆς ὄψεως σχῆμα ἀκριβῶς μὲν πρόσω ὁ ἄξων ἂν εἴη τοῦ κώνου, σύνεγγυς δὲ αἱ τούτῳ πλησιάζουσαι ἀκτῖνες τῆς ὄψεως· αἱ γάρ τοι λοιπαὶ ἄνω τε καὶ κάτω καὶ εἰς τὰ πλάγια φέρονται.
οὕτω δέ τοι πρόσω πέφυκεν ἡ ὀπτικὴ δύναμις ἐνεργεῖν...», 10.1-8.

43 «*ἐπιστρέφομεν οὕτω τὴν ὄψιν, ὥστε κατ' αὐτὸ τὸ μεσαίτατον τῆς βάσεως τῷ τῆς ὄψεως κώνῳ προσβάλλειν τῷ ὁρωμένῳ*», 9.3-6.

44 «*διά τοι τοῦτο καὶ ῥαφίδος εἰ τύχοι παρακειμένης τινὸς προσβάλλοντες τὴν ὄψιν ἐπὶ τὸν τόπον, ἐν ᾧ κειμένη τυγχάνει, οὐχ ὁρῶμεν αὐτὴν, ἕως ἂν κατὰ τὸν ἄξονά πως ἢ κατὰ τὰς περὶ αὐτὸν ἀκτῖνας αὐτῇ ἐπιβάλωμεν*», 9.6-10.

Δαμιανός, χειρίζεται την έννοια της βελόνας και την έννοια του τόπου με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όταν θέλει να αναφερθεί στο αντικείμενο της οπτικής αντίληψης.

Τα αποτελέσματα της διακριτότητας των όψεων προκάλεσαν τη διαφωνία και την άμεση κριτική του Δαμιανού προς τον Ευκλείδη. Αξίζει να αναφέρουμε ότι το ίδιο θέμα αποτέλεσε στα χέρια του προσώπου, στο οποίο αναφέρεται ο συγγραφέας του προλόγου, μια πηγή, από την οποία μπορούσε να εξάγει τη δική του επιχειρηματολογία, εναντίον άλλων θεωριών όρασης. Το πρόσωπο αυτό καταπιάστηκε από τα παραδείγματα του εδάφους και της βελόνας, για να διατυπώσει μια σωρεία «*απορι*ών»[45]. Ο απώτερος σκοπός του ήταν να καταστήσει «*πιστόν*», δηλαδή να πιστοποιήσει ότι η οπτική αντίληψη πραγματοποιείται μέσω της εκπομπής ακτίνων από τον οφθαλμό προς τα παρατηρούμενα σώματα και όχι μέσω της εισπομπής των ειδώλων τους σε αυτόν[46]. Οι απορίες που έφερε ήταν οι εξής: «*Αν το αίσθημα της όρασης συνέβαινε, εξαιτίας της εισροής ειδώλων* (ενν. *στον οφθαλμό*) *και από κάθε σώμα απέρρεαν συνεχώς είδωλα, τα οποία προκαλούν την αίσθησή μας, ποια είναι η αιτία, για την οποία δε βλέπει αυτός που αναζητά τη βελόνα και αυτός που κοιτάζει όλα τα γράμματα στο βιβλίο; Μήπως άραγε επειδή και στις δύο περιπτώσεις είναι αφηρημένος ο νους* (ενν. *του παρατηρητή*)*; Και όμως αυτοί που αναζητούν έχοντας τον νου τους δε βρίσκουν τίποτα, ενώ πολλές φορές βρίσκουν αμέσως, παρόλο που μιλά ο ένας στον άλλο και είναι αφηρημένοι. Όμως, δεν εισρέουν όλα τα είδωλα στην όραση; Και ποια είναι η αιτία της επιλογής αυτών που εισέρχονται;*»[47]

2. Εξετάζοντας τη ρητορική των κειμένων

Μέσω της αντιπαραβολής του προλόγου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και των *Οπτικών Υποθέσεων*, επιχειρήσαμε να καταγράψουμε τα στοιχεία εκείνα που μας ωθούν, ώστε να θεωρήσουμε ότι μεταξύ των δύο κειμένων υπάρχει μια υποδόρια

---

45 «*καὶ γὰρ ἐπὶ τοῦ ζητουμένου σώματος καὶ τοῦ τῷ βιβλίῳ ἀτενίζοντος ἀπορίαν κομίζω ν ἔλεγεν...*», *Opticorum Recensio Theonis*, 148.22-24.

46 «*πρὸς οὖν τὸ πιστὸν εἶναι κατὰ τὸ παρὸν τὸ ἀκτῖνας εἶναι τὰς ἐκχεομένας καὶ κινούσ ας τὸ ὁρατικὸν πάθος ἀρκούντως ἐδόκει εἰρῆσθαι…*», 152.1-3.

47 «*εἰ ἦν κατ' εἰδώλων ἔμπτωσιν τὸ ὁρατικὸν πάθος, καὶ ἀπὸ παντὸς σώματος διηνεκῶς εἴδωλα ἀπέρρεεν, ἃ κινεῖ ἡμῶν τὴν αἴσθησιν τίς ἡ αἰτία γίγνεται, δι' ἣν οὐχ ὁρᾷ ὅ τε ζητῶν τὴν βελόνην καὶ ὁ τῷ βιβλίῳ ἀτενίζων πάντα τὰ γράμματα; πότ ερόν ποτε διὰ τὸ μετεωρίζεσθαι τῇ διανοίᾳ; ἀλλ' οὐδὲν ἧττον ἐπιλογιζόμενοι ζητοῦσι καὶ ὁλοσχερῶς οὐχ εὑρίσκουσι, πολλάκις δὲ ὁμιλοῦντες ἑτέροις καὶ περισπώμενοι τῇ διανοίᾳ εὑρίσκουσι θᾶττον. ἀλλ' οὐ πάντα τὰ εἴδωλα εἰσκρίνεται εἰς τὴν ὅρασιν; καὶ τίς αἰτία τοῦ ἀποκληροῦσθαι τὰ εἰσκρινόμενα;*», 148.24-150.8.

σχέση. Αν εξαιρέσουμε το υπόλοιπο τμήμα των *Οπτικών Υποθέσεων* που αναφέρεται στην ανάκλαση και στη διάθλαση και εστιάσουμε την προσοχή μας στο κομμάτι που μόλις αναλύσαμε, δηλαδή στο κομμάτι της οπτικής, παρατηρούμε ότι μεταξύ των δύο κειμένων υπάρχει μια σαφής αντιστοιχία ως προς τη δομή και το περιεχόμενο. Διαπιστώνουμε ότι και στα δύο κείμενα δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα για τα ίδια πράγματα, όπως στο θέμα που αφορά στις συνέπειες της διακριτότητας των όψεων, ενώ δε θεωρούμε καθόλου τυχαία την παραπομπή στην ίδια υπόμνηση της βελόνας. Βέβαια, δεν πρέπει να παραβλέψουμε τη χρήση παρόμοιων χαρακτηριστικών εκφράσεων, όπως «*...τὰ μὲν τῶν αἰσθητηρίων πρὸς ὑποδοχὴν εὔθετα, τὰ δὲ μή...ἀλλὰ μᾶλλον σφαιροειδὴς οὖσα θεωρεῖται ἡ ὅρασις*» που εκφράζονται στον πρόλογο και «*οὐδὲ πρὸς ὑποδοχήν τινος πεποιημένον, ὥσπερ τὰ ἄλλα αἰσθητήρια, ἀλλὰ σφαιροειδὲς ὑπάρχον*» που εκφράζονται στις *Οπτικές Υποθέσεις*, καθώς επίσης της ίδιας και πολύ χαρακτηριστικής -για την οπτική αντίληψη- λέξης «*ὁλοσχερῶς*» που εμφανίζεται και στα δύο κείμενα σε χωρία που αναπτύσσουν το ίδιο θέμα, δηλαδή τη διακριτότητα των όψεων.

Θεωρούμε ότι ο Δαμιανός είχε πρόσβαση στο κείμενο του προλόγου, το οποίο χρησιμοποίησε ως θεματικό άξονα κατά τη συγγραφή ενός τμήματος των *Οπτικών Υποθέσεων*. Λαμβάνοντας αφορμή από τα λεγόμενα του προλόγου ο Δαμιανός έχει τη διάθεση να επέμβει και να αποκριθεί σε αυτά. Ορισμένες φορές επιθυμεί να προβάλει την ανωτερότητα των δικών του θεωρήσεων, ως προς την εξηγητική ισχύ ή την εγκυρότητά τους, σε σχέση με εκείνες που προτείνει ο πρόλογος. Πρόκειται κυρίως για τις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο Δαμιανός παραπέμπει ονομαστικά ή δανείζεται σιωπηλά στοιχεία από τον Πτολεμαίο. Αντίθετα, όταν συμφωνεί απόλυτα με τις απόψεις του προλόγου, δε διστάζει να δανειστεί ακόμα και εκφράσεις του, όπως αυτές που προαναφέρθηκαν. Αυτή η διφορούμενη συμπεριφορά είναι δικαιολογημένη, καθώς ο Δαμιανός φιλοδοξεί πάνω από όλα να προτείνει μια νέα θεωρία οπτικής επιλέγοντας τα καλύτερα -κατά την άποψή του- υλικά και αποδοκιμάζοντας, μέσω της κατάλληλης επιχειρηματολογίας, ό,τι απέρριψε. Υποστηρίζουμε λοιπόν ότι οι *Οπτικές Υποθέσεις* δεν είναι ανεξάρτητες από τον πρόλογο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Τα δύο κείμενα διέπονται από έναν ισχυρό δεσμό, ο οποίος γίνεται ιδιαίτερα αισθητός, μέσω της μελέτης της ρητορικής τους.

Από την πρώτη κιόλας λέξη του κειμένου του προλόγου (*Ἀποδεικνὺς*) φανερώνεται ο στόχος του συγγραφέα να αναδείξει τον επιστημονικό χαρακτήρα που υπογραμμίζει το έργο του προσώπου, στο οποίο αναφέρεται. Η προσήλωσή του σε αυτόν τον στόχο διαφαίνεται από τη χρήση μιας πληθώρας εκφράσεων που

ακολουθούν, όπως «*ἐκόμιζέ παραμυθίας*», «*προσεπιλογιζόμενος, διότι...*», «*σημεῖον... κομίζει*». Μέσω των παραπάνω εκφράσεων, ο συγγραφέας επιθυμεί έμμεσα να βεβαιώσει ότι το συγκεκριμένο πρόσωπο είναι αρμόδιο και καταρτισμένο στα θέματα της οπτικής και μιλά με αποδείξεις για αυτά. Προσπαθεί να κερδίσει την εμπιστοσύνη των αναγνωστών δίνοντάς τους τη δυνατότητα να διαπιστώσουν ότι το πρόσωπο αυτό μιλά από μια θέση επιστημονική και, συνεπώς, έχει την ικανότητα της αυστηρώς τεκμηριωμένης παρουσίασης των απόψεών του. Η προτεραιότητα αυτού του προσώπου ήταν να κάνει τις απόψεις του φανερές και παραδεκτές από όλους (*ἐναργοῦς οὖν ὄντος...*, *δῆλον οὖν, ἐκφανέστατα*). Με άλλα λόγια, ο στόχος του ήταν να πείσει (*πρὸς οὖν τὸ πιστὸν*), πρόθεση που διαπνέει κατά ανάλογο τρόπο και τον συγγραφέα των *Οπτικών Υποθέσεων*. Παρόλο που το σύγγραμμα του Δαμιανού ξεκινά με τη διατύπωση 14 υποθέσεων, το σύνολο του κειμένου αποτελεί μια επίμονη εργασία θεμελίωσής τους. Στόχος του Δαμιανού είναι να τις κατοχυρώσει και να τις καταστήσει έκδηλες και σαφείς (*δηλοῖ, δηλοῦσι, δῆλον, ἔτι δὲ σαφέστερον ἔσται*) στους αναγνώστες του. Επιλέγει να μιλήσει από μια θέση επιστημονική, αλλά να γίνεται ταυτόχρονα κατανοητός. Με την αναφορά του στο «*ἔθος*»[48] επιχειρεί, από τη μια μεριά, να υποδηλώσει τη διαχωριστική γραμμή, ανάμεσα σε εκείνον ως ερευνητή που πορεύεται με αποδείξεις και στις γνώσεις που έχουν καθιερωθεί από συνήθεια, ενώ, από την άλλη μεριά, επιλέγει να τις αποδεχθεί συμβατικά, ώστε να μπορούν οι αναγνώστες του να τον καταλαβαίνουν. Πολλές φορές ο Δαμιανός προσπαθεί να τους πάρει με το μέρος του, να δημιουργήσει μια άμεση σχέση μαζί τους δίνοντάς τους έμμεσα ενεργό ρόλο και κάνοντάς τους μετόχους στους συλλογισμούς του, μέσω της χρησιμοποίησης ρημάτων πρώτου πληθυντικού αριθμού (*ἐπιβάλλομεν, παραστήσωμεν, ὁρῶμεν, βλέπομεν,* κλπ.) ή της προσωπικής αντωνυμίας *ἡμεῖς* (*ἡμεῖς...ἐπάγομεν*).

Η προσδοκούμενη πειθώ των αναγνωστών επιχειρείται να αποκτηθεί τόσο από το πρόσωπο του προλόγου όσο και από τον Δαμιανό, μέσω της εύρεσης της κατάλληλης επιχειρηματολογίας. Ξεκινώντας από το κείμενο του προλόγου πληροφορούμαστε ότι η τεκμηρίωση της ευθύγραμμης διάδοσης κάθε φωτός έγινε από το συγκεκριμένο πρόσωπο, μέσω της προσφυγής σε εμπειρικά παραδείγματα, σε πραγματιστικά επιχειρήματα που επιδιώκουν να εξασφαλίσουν την αμέριστη συγκατάβαση των αναγνωστών, αφού «*θεωρούνται γιγνόμενα*», στη θεωρία των

[48] «*ὅτι δὲ τὸ προβαλλόμενον τοῦτο ἀφ' ἡμῶν, ὃ δὴ καὶ ὄψιν ἔθος καλεῖν,...*», 3.1-2.

σκιών, αλλά και σε μια πειραματική διαδικασία που καθιστά τα πάντα «*εκφανέστατα*», εφόσον, μέσω αυτής, μπορούμε με σιγουριά να επιβεβαιώσουμε την ευθύγραμμη διάδοση του φωτός (*κατασκευαστῶς...εὑρήσομεν*). Όσον αφορά στην ευθύγραμμη διάδοση των οπτικών ακτίνων, αυτή έγινε αποδεκτή ως αξίωση, ως δεδομένη, αφού, όπως έχουμε προαναφέρει, η υπόθεση της φωτεινής φύσης των οπτικών ακτίνων που θα μπορούσε να συμβάλει στη θεμελίωσή της απουσιάζει από την οπτική του Ευκλείδη. Ο Δαμιανός επισημαίνοντας προφανώς αυτό το μειονέκτημα σπεύδει να προβάλει επιχειρήματα που να διασφαλίζουν τη φωτεινή φύση των όψεων. Παραπέμπει και εκείνος σε παραδείγματα από την εμπειρία των αναγνωστών του, καθώς επίσης στην περίπτωση του βασιλιά Τιβέριου που, εξαιτίας της σπανιότητάς της, προκαλεί ακόμα μεγαλύτερη εντύπωση και είναι πιθανότατα γνωστή σε όλους. Η παραπομπή σε παραδείγματα είναι ένας από τους πιο επιτυχημένους τρόπους επιχειρηματολογίας, καθώς η επιλογή ενός εύστοχου παραδείγματος μπορεί να εξασφαλίσει πολύ σύντομα και απλά τη συγκατάβαση των αναγνωστών. Ο Δαμιανός έχει επίγνωση αυτού του γεγονότος, όπως επίσης το πόσο χρήσιμη και εξυπηρετική είναι η παραπομπή σε αναλογίες που αναδεικνύουν την ομοιότητα που διέπει ορισμένες καταστάσεις και μάλιστα το επιχειρεί, όταν αντιπαραβάλλει τον οφθαλμό με τον ήλιο. Μάλιστα, για να κατοχυρώσει την αναλογία που πρότεινε, δεν παραλείπει να παραπέμψει στη μορφή του «*μεγάλου*» Πλάτωνα που όντας σύμφωνος με την ομοιότητα του ήλιου προς τον οφθαλμό, προσέδιδε ιδιαίτερο κύρος και βαρύτητα στον ισχυρισμό του Δαμιανού[49]. Όσον αφορά στη θεμελίωση της ευθύγραμμης διάδοσης των οπτικών ακτίνων, ο Δαμιανός αναφέρεται στο όνομα του Πτολεμαίου και στην απόδειξη που εκείνος πραγματοποίησε *δι' ὀργάνων*. Χωρίς να καταγράψει καθόλου λεπτομέρειες του πειράματος του Πτολεμαίου, αλλά βασιζόμενος αποκλειστικά στην εγκυρότητα που εξασφαλίζει το όνομα και η μεθοδολογία του, φιλοδοξεί να κερδίσει τη συγκατάθεση των αναγνωστών του και, ενδεχομένως, να αναμετρηθεί στο *κατασκευαστῶς* του προλόγου. Ο Δαμιανός προβάλλει δύο ακόμα τύπους επιχειρημάτων, ο ένας από τους οποίους απευθύνεται στη λογική των αναγνωστών και ο άλλος στο ότι ο ισχυρισμός του είναι σύμφωνος με τα προστάγματα της φύσης. Από τη μια μεριά, κανείς δε θα εξέφραζε αντιρρήσεις στο ότι οι όψεις πρέπει να εξέρχονται από τον οφθαλμό με

49

«*Πλάτων δὲ ὁ μέγας καὶ ἡλιοειδέστατον ἔφατο εἶναι τὴν ὄψιν τῶν περὶ τὰς αἰσθήσεις ὀργάνων*», 13.62-64.

μεγάλη ταχύτητα, αφού μια αντίθετη άποψη θα ήταν ασύμφωνη με τη λογική. Από την άλλη μεριά, μέσω του επιχειρήματος που αναφέρεται στην προβλεπόμενη από τη φύση λυσιτέλεια, ο Δαμιανός παρουσιάζει τον εαυτό του ως άνθρωπο με κατασταλαγμένες πεποιθήσεις που αντιλαμβάνεται τι είναι από τη φύση ωφέλιμο για τον άνθρωπο και, κατά έναν έμμεσο τρόπο, παροτρύνει και συμβουλεύει τους αναγνώστες ότι με την αποδοχή της δικής του αντίληψης πράττουν το καλό και το αγαθό για τον εαυτό τους.

Το πρόσωπο που πρωταγωνιστεί στο κείμενο του προλόγου θέλοντας να κάνει φανερό σε όσους απευθύνεται ότι, εξαιτίας της διακριτότητας των όψεων, κανένα παρατηρούμενο αντικείμενο δεν οράται αμέσως ολόκληρο, καταφεύγει στην «*υπόμνηση*». Είναι προφανές ότι, όπως και στην περίπτωση των παραδειγμάτων ή των αναλογιών, η επιλογή μιας έξυπνης υπόμνησης μπορεί να συμπαρασύρει το κοινό στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Το συγκεκριμένο πρόσωπο επέλεξε να παρουσιάσει ως υπόμνηση την περίπτωση μιας παρατηρούμενης βελόνας και μιας παρατηρούμενης σελίδας ενός βιβλίου. Πρόκειται για δύο πολύ εύστοχα και καθόλου εξεζητημένα περιστατικά που όλοι έχουν συναντήσει στην εμπειρία τους και γι' αυτό μπορούν να γίνουν αμέσως κατανοητά. Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι το πρόσωπο του προλόγου επέλεξε την υπόμνησή του με βάση αυτά τα κριτήρια. Παρουσιάζοντάς τα κατάλληλα μπορούσε να κάνει το κοινό του να εξάγει το επιθυμητό για εκείνον συμπέρασμα, ένα συμπέρασμα στο οποίο το κοινό θα είχε οδηγηθεί από μόνο του. Κατανοούμε ότι, μέσω της χρήσης της υπόμνησης, το πρόσωπο αυτό στοχεύει σε ένα αληθοφανές συμπέρασμα, ωστόσο, τίποτα δεν εμποδίζει από το να είναι λανθασμένο. Επωφελούμενος από αυτό το γεγονός ο Δαμιανός μεταφέρει την υπόμνηση της βελόνας στις *Οπτικές Υποθέσεις* του, με σκοπό να αντιπροτείνει τη δική του απάντηση. Βλέποντας μάλιστα την υπόμνηση της βελόνας να μετατρέπεται στα χέρια του προσώπου του προλόγου σε ένα όπλο που έστρεφε κριτικά σε αντίπαλες θεωρίες όρασης ο Δαμιανός είχε έναν επιπλέον λόγο, ώστε να μην αδιαφορήσει. Συμπεριλαμβάνοντας την ίδια υπόμνηση στο δικό του κείμενο προλαβαίνει ενδεχόμενες «*απορίες*» από τη μεριά των αντιπάλων, αφού προεξοφλεί ότι η θεωρία του μπορεί να εξηγήσει άνετα και αυτό το πρόβλημα.

Το πρόσωπο του προλόγου στράφηκε εναντίον άλλων θεωριών όρασης και ανέπτυξε μια αρκετά εκτενή επιχειρηματολογία, ώστε να απορρίψει τις υποθέσεις περί εισπομπής ειδώλων των παρατηρούμενων αντικειμένων στον οφθαλμό. Παρατηρούμε με ενδιαφέρον ότι το πρόσωπο αποφασίζει να ασκήσει κριτική στους αντιπάλους του, αφού πρώτα έχει προσκομίσει τις κατάλληλες υπομνήσεις και αφού

έχει επιχειρήσει να οδηγήσει το κοινό του στα επιθυμητά για εκείνον συμπεράσματα. Ο λόγος που γίνεται αυτό οφείλεται στο ότι η επιχειρηματολογία που αναπτύσσει για να καταρρίψει τους αντιπάλους του αποτελείται από μια σωρεία «*αποριών*», δηλαδή από ερωτήματα που απευθύνονται προς αυτούς, με στόχο να δείξει τη μεγάλη δυσκολία ή τη μεγάλη αμηχανία, στην οποία αυτοί έρχονται. Το κοινό όχι μόνο συνειδητοποιεί αυτή την άβολη για τους αντιπάλους θέση, αλλά του σχηματίζεται παράλληλα η εντύπωση ότι είναι αδύνατο για εκείνους να προσφέρουν ικανοποιητικές εξηγήσεις. Η εντύπωση αυτή δημιουργείται στο κοινό, εφόσον το ίδιο έχει ήδη πειστεί για τις εξηγήσεις του προσώπου, μέσω των προηγούμενων υπομνήσεων, και έχει ήδη ταχθεί μαζί του όντας βέβαιο πια για την αλήθεια και την ορθότητα των επιχειρημάτων του. Η εύρεση, αλλά και ο τρόπος διατύπωσης των αποριών εκείνων που είναι κατάλληλες για να κάνουν τον αντίπαλο να φανεί αδύναμος, απαιτεί σίγουρα μεγάλη ευστροφία. Όταν ο Δαμιανός βρέθηκε στην ανάλογη θέση να ασκήσει κριτική στον Ευκλείδη, δε διατύπωσε «*απορίες*», αλλά προτίμησε μια άλλη οδό που απαιτεί κατά ανάλογο τρόπο μεγάλη οξύνοια. Επινόησε, μεταξύ άλλων, λογικά επιχειρήματα που θα βάσιζαν την άποψή του (*οὕτως ἄν τις τῷ λόγῳ κατασκευάσειεν*). Επικαλούμενος τη λογική των αναγνωστών ο Δαμιανός θέλει να εξασφαλίσει ότι θα τους πείσει όλους. Μάλιστα, είναι τόσο βέβαιος για την επιχειρηματολογία του, που θεωρεί ότι οδηγεί στη λύση του κρίσιμου προβλήματος που έχει προκύψει (*ταῦτα πρὸς λύσιν ἐπάγομεν*). Με τον τρόπο αυτό, προδιαθέτει τους αναγνώστες ότι η δική του εξήγηση δεν πρόκειται να δεχτεί τα πυρά των αντιπάλων, καθώς διευθετεί το πρόβλημα οριστικά.

Η άμεση κριτική που ασκεί ο Δαμιανός προς τον Ευκλείδη αποτελεί ένα στοιχείο που, κατά τη γνώμη μας, συνηγορεί υπέρ της υπόθεσης που διατυπώσαμε, ότι δηλαδή το κείμενο του προλόγου ήταν στη διάθεση του Δαμιανού. Ακόμα και αν αφήσουμε στην άκρη τους δεσμούς που, μέσω της εξέτασης της ρητορικής των δύο κειμένων, επιχειρήσαμε να αναδείξουμε ότι υπάρχουν, εξακολουθούμε να θεωρούμε πολύ πιθανό ότι ο Δαμιανός είχε πρόσβαση στο συγκεκριμένο κείμενο και ήταν, συνεπώς, γνώστης της απόπειρας κατοχύρωσης των αποτελεσμάτων της διακριτότητας των όψεων που πραγματοποιείται σε αυτό, μέσω των υπομνήσεων της βελόνας και των γραμμάτων. Ο λόγος για τον οποίο εξακολουθούμε να το υποστηρίζουμε βασίζεται στο ότι αν ο Δαμιανός συναντούσε τη συγκεκριμένη αντίληψη, ότι δηλαδή κανένα από τα παρατηρούμενα αντικείμενα δεν οράται αμέσως ολόκληρο, όπως εμφανίζεται στο πρώτο θεώρημα του κειμένου του Ευκλείδη, ένα κείμενο που απέχει από τον Δαμιανό περίπου 700 χρόνια, ενδεχομένως ο τελευταίος

να μην είχε δείξει τόσο μεγάλο ζήλο για την κατάρριψή της. Στην περίπτωση αυτή ποιος θα ήταν ο αποδέκτης της κριτικής του; Αντίθετα, αν διαπίστωνε ότι η αντίληψη αυτή αναβίωνε στην εποχή του προκαλώντας το ερευνητικό ενδιαφέρον των συγχρόνων του και τις προσπάθειές τους να τη θεμελιώσουν, όπως ακριβώς αποκαλύπτεται μέσα από το κείμενο του προλόγου, τότε θεωρούμε ότι θα ήταν πιο πιθανό να προχωρήσει σε κριτική. Στη δεύτερη περίπτωση ο Δαμιανός θα διέθετε ένα ισχυρό κίνητρο για να την ασκήσει -η *Αναθεωρημένη Έκδοση* και, κυρίως, ο πρόλογός της θα του το έδιναν- ενώ, ταυτόχρονα, θα είχε και ανθρώπους, για να την απευθύνει.

Ανεξαρτήτως από το αν η υπόθεσή μας, σχετικά με την πρόσβαση και την απόκριση του Δαμιανού στον πρόλογο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, ευσταθεί, η εξέταση της ρητορικής των δύο κειμένων οδηγεί σε ορισμένες πολύ ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις που δεν πρέπει να παραβλέψουμε. Τόσο το πρόσωπο που αναφέρει ο πρόλογος όσο και ο Δαμιανός προσπαθούν να πείσουν τους ανθρώπους στους οποίους απευθύνονται ακολουθώντας έναν τρόπο που δε συναντάται συχνά και που ξεπερνά κατά πολύ τα πλαίσια ενός τυπικού μαθηματικού συγγράμματος. Μέσω της προσεκτικής ανάγνωσης των κειμένων, προδίδεται η έγνοια των προσώπων αυτών να φροντίσουν και να διαπλάσσουν την εικόνα τους με τέτοιο τρόπο, ώστε να διέπεται από κύρος και επιστημονικότητα. Σε πολλά σημεία διαφαίνεται η ανάγκη τους να δηλώσουν τα διαπιστευτήριά τους διευκρινίζοντας ότι πράγματι έχουν τα προσόντα, για να συζητούν με σοβαρότητα για τα συγκεκριμένα θέματα. Και το πρόσωπο του προλόγου και ο Δαμιανός έχουν ως κύριο στόχο τους να κερδίσουν την εμπιστοσύνη, αλλά και να πείσουν το κοινό των ακροατών ή των αναγνωστών για τις απόψεις τους χρησιμοποιώντας κάθε δυνατό επιχείρημα, ακόμα και αν αυτό υπερβαίνει το επίπεδο των μαθηματικών. Άλλες φορές προσπαθούν να επηρεάσουν την ψυχολογία τους, άλλες φορές να απευθυνθούν στην ηθική ή στη λογική τους, ενώ κάποιες άλλες φορές τους παραπέμπουν στη φύση ή τους παρουσιάζουν παραδείγματα, αναλογίες και υπομνήσεις από την καθημερινή τους ζωή. Χρησιμοποιούν κάθε είδος επιχειρήματος, ώστε να επιδείξουν την ευλογοφάνεια και την αληθοφάνεια των ισχυρισμών τους. Στρέφονται εναντίον αντίπαλων θεωριών απευθύνοντάς τους απορίες, δηλαδή ρητορικά ερωτήματα, για τα οποία δεν πρόκειται να λάβουν άμεση απάντηση, ενώ έχουν φροντίσει πρώτα να κερδίσουν τη συγκατάθεση του κοινού, ή προσπαθώντας να κατασκευάσουν λογικά επιχειρήματα διακηρύττοντας ότι οδηγούν στη λύση των προβλημάτων που τους απασχολούν. Όλα τα παραπάνω στοιχεία συνθέτουν την εικόνα δύο κειμένων που συμφωνούν ως προς την επιλογή του τρόπου εκφοράς και

διάθεσης του επιστημονικού λόγου, γεγονός που συνηγορεί υπέρ της άποψης ότι χρονικά δεν πρέπει να απέχουν πολύ. Δεν αποκλίνουν καθόλου, όσον αφορά στο ύφος που τα διαπνέει, ενώ και τα δύο δίνουν ιδιαίτερη βαρύτητα όχι μόνο στην εξεύρεση των βέλτιστων δυνατών μέσων πειθούς, αλλά και στο να καταστήσουν το κοινό, στο οποίο απευθύνονται, μέτοχο στην εξαγωγή των επιθυμητών συμπερασμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ
ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ *ΟΠΤΙΚΩΝ* ΚΑΙ ΤΗΣ *ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ*

Ο νέος τρόπος ανάγνωσης του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* αποκάλυψε ότι το συγκεκριμένο χωρίο έχει δεχτεί την παρέμβαση κάποιου μεταγενέστερου συγγραφέα, καθώς φέρει στοιχεία μιας νοοτροπίας που κάνει την εμφάνισή της κατά την πρώιμη μεταχριστιανική εποχή. Αντίθετα, ο πρώτος «όρος» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* φαίνεται ότι είναι πιο κοντά προς αυτόν που θα είχε συγγράψει ο Ευκλείδης. Οι εκτιμήσεις μας για την ταυτότητα των δύο κειμένων δεν προκύπτουν μόνο, μέσω της νέας ερμηνείας του πρώτου «όρου», ούτε περιορίζονται αποκλειστικά σε αυτόν. Στρέφοντας το ενδιαφέρον μας προς το κύριο οικοδόμημα των δύο διασωζόμενων πραγματειών, δηλαδή στα θεωρήματά τους, διαπιστώσαμε ότι τις περισσότερες φορές ο τρόπος, με τον οποίο καθένας από τους δύο συγγραφείς επιλέγει να παρουσιάσει ή να θεμελιώσει τις προτάσεις του, διαφοροποιείται έτσι, ώστε να υποδηλώνει ποιο κείμενο φέρει ίχνη της σφραγίδας του Ευκλείδη και ποιο του μεταγενέστερου συγγραφέα. Τα συμπεράσματα που εξάγονται από τη μελέτη των θεωρημάτων επιβεβαιώνουν τις αρχικές μας εκτιμήσεις, σχετικά με την ταυτότητα των δύο έργων.

Από όλους τους νεότερους και σύγχρονους μελετητές έχει επισημανθεί ότι πολλές από τις αποδείξεις των θεωρημάτων των *Οπτικών* διέπονται από μια γεωμετρική αυστηρότητα που δε συναντάται στις αντίστοιχες αποδείξεις της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, ο Heiberg απέδωσε τα *Οπτικά* στον Ευκλείδη κρίνοντας ότι οι αυστηρές γεωμετρικές αποδείξεις δε θα μπορούσαν παρά να έχουν γραφτεί από το χέρι του Στοιχειωτή. Ωστόσο, σύμφωνα με τη δική μας άποψη, το γεγονός αυτό υποδεικνύει μάλλον το αντίθετο.

Μέσω της συγκριτικής μελέτης των θεωρημάτων των δύο εκδόσεων, θα επιχειρήσουμε να καταστήσουμε σαφές ότι η αυστηρότητα που προβάλλουν ορισμένες γεωμετρικές αποδείξεις των *Οπτικών*, μαζί με κάποια άλλα χαρακτηριστικά τους γνωρίσματα που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια, είναι το αποτέλεσμα μιας ύστερης αναθεωρημένης ανάγνωσης. Συγκεκριμένα, στην παρούσα ενότητα θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι τα *Οπτικά* είναι μια μεταγενέστερη και πιο επιμελημένη έκδοση, γιατί παρουσιάζει ορισμένες από τις αποδείξεις του συγγράμματος του Ευκλείδη με πιο επεξεργασμένο τρόπο. Άλλες φορές οι αποδείξεις των *Οπτικών* είναι πιο εμπλουτισμένες, άλλες φορές πιο αναλυτικές και άλλες φορές τροποποιημένες. Δε λείπουν και οι περιπτώσεις ορισμένων αποδείξεων που φαίνεται

ότι έχουν γραφτεί από κάποιον ή από κάποιους που ήταν εμπνευσμένοι από τις νεότερες εξελίξεις στον τομέα της γεωμετρίας, όπως από κάποιες προτάσεις σφαιρικής γεωμετρίας του Θεοδοσίου και, πιθανώς, από κάποιες προτάσεις στερεομετρίας του Πάππου. Κάποια θεωρήματα των *Οπτικών* παρουσιάζουν εναλλακτικούς τρόπους αποδείξεων ή άλλες προσθήκες που, ενδεχομένως, να μην είχαν παραχθεί από τον επιμελητή της έκδοσης, αλλά από σχολιαστές. Με άλλα λόγια, είναι πολύ πιθανόν ο μεταγενέστερος συγγραφέας-επιμελητής να συγκέντρωσε ό,τι είχε γραφτεί, μέχρι την εποχή του, για το έργο του Ευκλείδη από τους ύστερους γεωμέτρες ή σχολιαστές προσπαθώντας να δώσει μια νέα πνοή στο αρχαίο κείμενο. Με βάση όλα τα παραπάνω, θα συνειδητοποιήσουμε τελικά ότι το εγχείρημα της «αναθεωρημένης έκδοσης» είχε έναν χαρακτήρα ανανέωσης, στοιχείο που συμφωνεί απόλυτα με την πρόθεση του συγγραφέα να τροποποιήσει τον πρώτο «όρο» της πραγματείας, προκειμένου να τον κάνει πιο προσιτό προς την εποχή του.

Από την άλλη μεριά, θεωρούμε απίθανο για τον συγγραφέα της ύστερης αναθεωρημένης έκδοσης, αν είχε στα χέρια του το κείμενο των *Οπτικών* ή κάποιο παραπλήσιο προς αυτό, να ακολούθησε την αντίθετη πρακτική της απλοποίησης των πιο 'αυστηρών' ή πιο λεπτομερών γεωμετρικών αποδείξεων. Εκτιμούμε ότι, αφενός, δεν είχε σοβαρούς λόγους για να πράξει κάτι τέτοιο, αφετέρου, ένας τέτοιος χειρισμός του κειμένου θα ήταν παράταιρος προς τον χαρακτήρα του γενικότερου ερευνητικού κλίματος της εποχής του, ένα κλίμα εμποτισμένο με τα στοιχεία της σχολιαστικής παράδοσης που είχε ως βασικό στόχο της τη συγγραφή αναλυτικών επεξηγήσεων ή προεκτάσεων στα σημαντικά έργα του παρελθόντος και όχι την περικοπή τους.

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα εξετάσουμε τα θεωρήματα των δύο διασωζόμενων εκδόσεων έχοντας, παράλληλα, ως στόχο μας να αναδείξουμε τη δομή τους. Θα επιχειρήσουμε να καταγράψουμε τις κυριότερες προϋποθέσεις, στις οποίες θεμελιώνονται όλα τα θεωρήματα, καθώς είναι εύλογο ότι για τις αποδείξεις τους ήταν απαραίτητοι όχι μόνο οι εφτά «όροι» που εγκαινιάζουν καθεμία έκδοση, αλλά και πολλές γεωμετρικές προτάσεις που συμπεριλαμβάνονται σε σπουδαία γεωμετρικά συγγράμματα, όπως στα *Στοιχεία*.

Α. Η ΓΕΝΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΕΚΔΟΣΕΩΝ

Παρόλο που μεταξύ των δύο διασωζόμενων εκδόσεων θα ανέμενε κανείς να υπάρχει μια συμφωνία τουλάχιστον ως προς τον συνολικό αριθμό των θεωρημάτων ή ως προς τη σειρά, με την οποία παραθέτονται, ωστόσο, η κειμενική παράδοση

έρχεται να τον διαψεύσει. Ανάμεσα στις δύο κειμενικές μορφές υπάρχουν πολλές αξιοσημείωτες διαφορές. Αρχικά, αναφέρουμε ότι τα *Οπτικά* αποτελούνται από 58 θεωρήματα, ενώ η *Αναθεωρημένη Έκδοση* από 57. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται ο τρόπος, με τον οποίο διατάσσονται τα θεωρήματα, σε καθεμία από τις δύο εκδόσεις, αλλά και πώς αντιστοιχίζονται μεταξύ τους. Έτσι, το θεώρημα 1 των *Οπτικών* συναντάται επίσης πρώτο στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*, το θεώρημα 2 των *Οπτικών* βρίσκεται αντίστοιχα στη δεύτερη θέση της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και ούτω καθεξής. Θα πρέπει να επισημάνουμε προηγουμένως ότι τα μικρά γράμματα της αλφαβήτου που συνοδεύουν ορισμένους αριθμούς του πίνακα έχουν τεθεί από εμάς, προκειμένου να δηλώσουν είτε την ύπαρξη μιας εναλλακτικής απόδειξης για το ίδιο θεώρημα, είτε επειδή κάτω από ένα θεώρημα αποδεικνύονται διάφορες υποπεριπτώσεις του, είτε επειδή κρίθηκε απαραίτητο να διαχωριστεί κάποια πολύ μακροσκελής απόδειξη σε ενδιάμεσα στάδια, προκειμένου να διαπιστωθεί αν και ποιο από τα αποδεικτικά στάδια ενός θεωρήματος, παρόλο που υπάρχει στη μία έκδοση, απουσιάζει από την άλλη. Για παράδειγμα, και στις δύο εκδόσεις κάτω από το έκτο θεώρημα παραθέτονται δύο αποδείξεις, καθεμία από τις οποίες αναφέρεται σε διαφορετικές γεωμετρικές συνθήκες. Γι' αυτόν τον λόγο, αριθμήσαμε τη μία ως 6α και την άλλη ως 6β. Το ίδιο συνέβη και στην περίπτωση του θεωρήματος 34 των *Οπτικών*, όπου συναντά κανείς τρεις αποδείξεις, η καθεμία από τις οποίες ξεκινά από διαφορετικά δεδομένα, εξετάζει δηλαδή τρεις διαφορετικές περιπτώσεις. Στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* στην πρόταση 34 αποδεικνύεται ξεχωριστά η πρώτη περίπτωση, ενώ οι άλλες δύο περιπτώσεις αποδεικνύονται μαζί στην πρόταση 35. Επιπλέον, θεωρήσαμε αναγκαίο να διαχωρίσουμε την πρόταση 35 των *Οπτικών* σε επιμέρους βήματα, καθώς παρουσιάζει ένα μακροσκελές λήμμα 8 περίπου σελίδων, στο πλαίσιο του οποίου αποδεικνύονται διάφορες γεωμετρικές προτάσεις. Το ίδιο κάναμε και με το αντίστοιχο χωρίο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Όμως, όλα αυτά θα αναλυθούν διεξοδικά παρακάτω. Ο πίνακας που συντάξαμε είναι ο εξής:

Οπτικά	***Αναθεωρημένη Έκδοση***
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

6α	6α
6β	6β
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	16
17	17
18	18
19	19
20	20
21	21
22	-
22 Άλλως 1	-
22 Άλλως 2	22
23	23
24	24
25	25
26	26
27	27
28	-
28 Άλλως	28
29	29
30	30
31	31
32	32
33	33
34α	34

34β	35α
34γ	35β
35 δήλωση	36 δήλωση
35α	36 α,β,γ
35β	-
35γ	36δ
35δ	36ε
36	37
37α	41
37β	-
38	42
39α	38α
39β	38β
-	40α
40α	40β
-	40γ
41	39
42	-
42 Άλλως	43
43	44
44	-
44 Άλλως	45
45	46
46	-
47	47
48	48
49	-
50	49
51	50
52	51
53	52
54	53
54 Άλλως 1	-

54 Ἄλλως 2	-
55	54
56	55
57	56
58	57

Πίνακας 8-1

Παρατηρείται ότι, αν εξαιρεθούν οι εναλλακτικές αποδείξεις των θεωρημάτων 22 και 28 που υπάρχουν στα *Οπτικά*, αλλά που απουσιάζουν από την *Αναθεωρημένη Έκδοση*, μέχρι και το θεώρημα 33 υπάρχει συμφωνία, ως προς τη σειρά με την οποία παρουσιάζονται τα θεωρήματα. Η σειρά αυτή τηρείται και στις προτάσεις 34 εώς 36, παρόλο που η αρίθμηση αλλάζει λίγο, ενώ είναι δύσκολο να την παρακολουθήσει κανείς από το θεώρημα 37 των *Οπτικών* που αντιστοιχεί στο 41 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, εώς το θεώρημα 42 Ἄλλως των *Οπτικών* που αντιστοιχεί στο 43 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Από το σημείο αυτό και μέχρι το τέλος, τα δύο κείμενα εμφανίζουν πάλι συμφωνία, εξαιρουμένων πάλι κάποιων εναλλακτικών αποδείξεων των *Οπτικών* που απουσιάζουν από την άλλη έκδοση και μιας μικρής απόκλισης ως προς την αρίθμηση.

Αν θέλαμε να κάνουμε μια πρώτη κατηγοριοποίηση των θεωρημάτων των δύο κειμένων, ως προς το περιεχόμενό τους, θα λέγαμε ότι από το θεώρημα 1 εώς το θεώρημα 21 και των δύο εκδόσεων συγκροτείται μια ομάδα προτάσεων, στην οποία τον πρωταγωνιστικό ρόλο παίζουν τα παρατηρούμενα μεγέθη που παριστάνονται γεωμετρικά ως ευθύγραμμα τμήματα. Εξετάζεται δηλαδή η οπτική αντίληψη διαστημάτων, ευθύγραμμων μεγεθών, επιπέδων. Βέβαια, η ομάδα αυτή μπορεί να διαιρεθεί σε υπο-ομάδες θεωρημάτων. Έτσι, η πρόταση 6 μπορεί να συγκαταλεχθεί μαζί με την πρόταση 12, γιατί και οι δύο εξετάζουν την περίπτωση της φαινομενικής σύγκλισης των παράλληλων διαστημάτων ή ευθειών που παρατηρούνται από έναν οφθαλμό που βρίσκεται σε απόσταση και είναι τοποθετημένος είτε στο ίδιο επίπεδο με αυτά είτε κάτω από αυτά. Επίσης, οι προτάσεις 10-11 και 13-14 μπορούν να συστήσουν μια άλλη υπο-ομάδα, γιατί αναφέρονται όλες στην περίπτωση επιπέδων ή μεγεθών που όντας πάνω ή κάτω από το επίπεδο του οφθαλμού, όσα είναι πιο μακριά από εκείνον, φαίνονται να βρίσκονται σε διαφορετική θέση από αυτή που βρίσκονται πραγματικά. Επίσης, τα θεωρήματα 15, 16 και 17 δύνανται να εξετασθούν όλα μαζί, γιατί σε αυτά αποδεικνύεται ότι, άνισα ύψη που βρίσκονται κάτω, πάνω ή στο ίδιο επίπεδο με τον οφθαλμό θα φαίνεται να ξεπερνά το ένα το άλλο σε μέγεθος, κατά

μεγαλύτερο ή μικρότερο ή κατά ίσο ποσό, σε μια ενδεχόμενη κίνηση του οφθαλμού. Τέλος, τα θεωρήματα 18 εώς 21 μπορούν να αποτελέσουν ξεχωριστή υπο-ομάδα, καθώς αποτελούν προβλήματα, στα οποία ζητάται να γίνει γνωστό το πραγματικό ύψος, βάθος και μήκος κάποιων παρατηρούμενων μεγεθών.

Η πρόταση 22 μπορεί να ειδωθεί αυτόνομη, γιατί αναφέρεται σε περιφέρεια κύκλου που, αν ειδωθεί από έναν οφθαλμό που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με εκείνη, τότε η περιφέρεια θα φανεί ως ευθεία.

Οι προτάσεις 23-27 σχετίζονται με την οπτική αντίληψη της σφαίρας λαμβάνοντας υπόψη κάθε φορά διαφορετικές γεωμετρικές συνθήκες, γι' αυτό και μπορούν να μελετηθούν ως ενιαίο σύνολο. Το ίδιο μπορεί να γίνει και για τις ακόλουθες προτάσεις 28-29 που αναφέρονται σε κυλίνδρους, αλλά και για τις προτάσεις 30-33 που αναφέρονται σε κώνους που έχουν κυκλική βάση.

Οι προτάσεις 34-36 των *Οπτικών* ή 34-37 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αποτελούν μια ομάδα θεωρημάτων που σχετίζεται με το πώς γίνονται οπτικά αντιληπτές οι διάμετροι ενός κύκλου, όταν ο οφθαλμός βρίσκεται σε διάφορες θέσεις πάνω από το επίπεδο του κύκλου. Η πρόταση 36 των *Οπτικών* και 37 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι ένα είδος εφαρμογής που βασίζεται σε όσα έχουν αποδειχθεί στις προηγούμενες προτάσεις.

Από εδώ και πέρα, η κατηγοριοποίηση των θεωρημάτων θα πρέπει, μέχρι κάποιο σημείο, να γίνει ξεχωριστά για τις δύο εκδόσεις. Αυτό οφείλεται στην ασυμφωνία που παρουσιάζουν ως προς τη σειρά, με την οποία εκθέτουν τα θεωρήματα. Έτσι, στην περίπτωση της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* μπορούμε να συμπεριλάβουμε σε μία ομάδα τις προτάσεις 38-40 που εξετάζουν τις προϋποθέσεις, υπό τις οποίες δε θα μεταβάλλεται το μέγεθος ενός παρατηρούμενου αντικειμένου, αν αυτό κινείται σε σχέση με τον οφθαλμό ή, αντίθετα, αν κινείται ο οφθαλμός σε σχέση με αυτό. Επίσης, εξετάζεται υπό ποιες συνθήκες θα μεταβληθεί το φαινομενικό του μέγεθος, αν υποτεθεί ότι κινείται, ως προς τον οφθαλμό. Στο κείμενο των *Οπτικών* η παραπάνω ομάδα συναντάται στα θεωρήματα 39-41.

Από την πρόταση 41 εώς 48 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* διακρίνεται άλλη μια ομάδα θεωρημάτων, τα οποία έχουν να κάνουν με τον προσδιορισμό ή την εύρεση γεωμετρικών τόπων, όπου, αν υποτεθεί ότι σε αυτούς τοποθετηθεί ή κινηθεί ο οφθαλμός ή το παρατηρούμενο αντικείμενο, τότε θα υπάρξουν συγκεκριμένα αποτελέσματα, ως προς την οπτική αντίληψη του μεγέθους του αντικειμένου. Στην έκδοση των *Οπτικών* τα παραπάνω θεωρήματα βρίσκονται στις θέσεις 37-38 και 42-48.

Οι προτάσεις 49-51 και 53-54 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αφορούν σε οπτικά φαινόμενα που μας παραπέμπουν στη σχετικότητα της κίνησης. Πρόκειται δηλαδή για προτάσεις, στις οποίες η κίνηση του οφθαλμού ή του παρατηρούμενου μεγέθους ή και των δύο μαζί έχουν ως αποτέλεσμα να δημιουργούν διαφόρων ειδών οπτικές εντυπώσεις, όσον αφορά στην κατεύθυνση ή στην ταχύτητα, με την οποία φαίνεται να κινείται το παρατηρούμενο μέγεθος. Οι προτάσεις αυτές βρίσκονται στα *Οπτικά* στις θέσεις 50-52 και 54-55.

Η πρόταση 52 μπορεί να συγκαταλεχθεί στην ίδια ομάδα με την αντίστροφή της, δηλαδή την 55, της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Πρόκειται για ένα θεώρημα, στο οποίο αποδεικνύεται μια συνήθης οπτική πλάνη, συγκεκριμένα, ότι, όσο ο οφθαλμός πλησιάζει ένα παρατηρούμενο μέγεθος, τόσο αυτό φαίνεται να μεγαλώνει, και το αντίστροφο. Η παραπάνω ομάδα αντιστοιχεί στα θεωρήματα 53 και 56 των *Οπτικών*.

Τέλος, η πρόταση 56 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* πρέπει να ειδωθεί αυτόνομα, όπως ακριβώς και η πρόταση 57. Στην πρόταση 56 δηλώνεται ότι, αν ο οφθαλμός τοποθετηθεί μπροστά από μια γωνία, η κορυφή της οποίας κατευθύνεται προς εκείνον, τότε όλο το σχήμα θα φανεί πότε κοίλο και πότε κυρτό. Στα *Οπτικά* η πρόταση αυτή συναντάται στο θεώρημα 57. Αντίθετα, η πρόταση 57 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αφορά στον τρόπο, με τον οποίο θα γίνουν αντιληπτές οι διαγώνιοι ενός τετραγώνου, όταν ο οφθαλμός τοποθετηθεί πάνω από το επίπεδο του τετραγώνου. Το θεώρημα 57 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο θεώρημα 58 των *Οπτικών*.

Β. ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΕΚΔΟΣΕΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τα θεωρήματα των δύο εκδόσεων και τις αποδείξεις που τα συνοδεύουν. Θα προσπαθήσουμε να καταγράψουμε τις κυριότερες προϋποθέσεις στις οποίες εδράζονται, προκειμένου να αναδειχθεί η δομή των δύο πραγματειών. Η μελέτη των τρόπων, με τους οποίους αποδεικνύονται τα θεωρήματα, θα φανερώσει ότι δεν υπάρχει ένα κοινό γνώρισμα ή μια ενιαία πρακτική εκ μέρους των συγγραφέων τους που να ακολουθείται πιστά από την αρχή εώς το τέλος των συγγραμμάτων τους. Το γεγονός αυτό ενδεχομένως να προέδιδε το ποιος έγραψε τι και εμείς να ήμασταν σε θέση να αποφανθούμε με μεγαλύτερη ασφάλεια στο ερώτημα, σχετικά με την ταυτότητα των δύο κειμένων που έχουμε μπροστά μας. Συγκρίνοντας κανείς τις αντίστοιχες αποδείξεις των δύο πραγματειών διαπιστώνει ότι πολλές φορές οι προτάσεις των *Οπτικών* φαίνεται να έχουν υποστεί μεγαλύτερη επεξεργασία, σε σχέση με τις προτάσεις της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Επιπλέον,

άλλες φορές τα δύο κείμενα φαίνονται να συναντώνται παρουσιάζοντας ακριβώς τις ίδιες αποδείξεις, ακόμα και αν αυτές είναι αδέξιες, ενώ άλλες φορές τα δύο κείμενα διαφοροποιούνται σε ορισμένα σημεία τους. Έτσι, το αν ένα κείμενο προκύπτει άμεσα από το άλλο ή αν είναι άμεσα εξαρτώμενο από το άλλο αποτελεί ένα πολύ δύσκολο ερώτημα. Ωστόσο, θεωρούμε ότι σε κάποιες περιπτώσεις θεωρημάτων υποκρύπτονται ορισμένες ενδείξεις που συνηγορούν στην άποψή μας ότι η *Αναθεωρημένη Έκδοση* αποτελεί προγενέστερη μορφή κειμένου που, παρόλο που και εκείνη έχει αναμφισβήτητα δεχτεί μεταγενέστερες παρεμβολές, κουβαλά ίχνη από την αρχική πραγματεία του Ευκλείδη, ενώ τα *Οπτικά* είναι μια μεταγενέστερη μορφή κειμένου που ξεκίνησε να γράφεται για να αποτελέσει την επανέκδοση του συγγράμματος του Ευκλείδη.

1. Περιεκτικότητα εναντίον σχολαστικότητας: τα θεωρήματα 4 και 7

α. Το θεώρημα 4

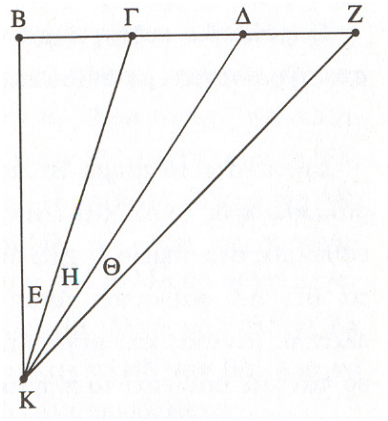
Σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα της πραγματείας, κανένα από τα παρατηρούμενα μεγέθη δε βλέπεται αμέσως ολόκληρο, ενώ, σύμφωνα με το τρίτο θεώρημα, κάθε παρατηρούμενο μέγεθος έχει κάποιο μήκος απόστασης όπου, αν τοποθετηθεί, δε θα είναι πια ορατό από τον οφθαλμό. Τα θεωρήματα 1 και 3, καθώς επίσης το θεώρημα 2 που αναφέρεται στον τρόπο εξάρτησης της οπτικής ευκρίνειας από το πλήθος των οπτικών ακτίνων που προσπίπτουν σε ένα παρατηρούμενο μέγεθος, εξετάστηκαν διεξοδικά στο κεφάλαιο που σχετιζόταν με τη διακριτότητα, γι' αυτό δε θα μας απασχολήσουν στο σημείο αυτό. Ξεκινάμε λοιπόν με το θεώρημα 4 που δηλώνει ότι, αν πάνω στην ίδια ευθεία βρίσκονται ίσα διαστήματα, τότε αυτά που παρατηρούνται από μεγαλύτερη απόσταση φαίνονται ως μικρότερα[1]. Η απόδειξη που παρουσιάζεται στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι σύντομη και περιεκτική. Αντίθετα, η απόδειξη των *Οπτικών* είναι λεπτομερέστερη. Το ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι οι αποδείξεις δε διαφοροποιούνται ως προς τον συλλογισμό, αλλά ως προς τον τρόπο έκθεσης.

Πιο αναλυτικά, το θεώρημα 4 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* θέτει, σύμφωνα με το σχήμα 8-1, ότι, αν ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ είναι ίσα διαστήματα πάνω στην ίδια ευθεία, αν Κ είναι ο οφθαλμός, από τον οποίο προσπίπτουν οι όψεις ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΖ και, τέλος,

---

[1] Στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* το θεώρημα 4 δηλώνεται ως «*Τῶν ἴσων διαστημάτων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων τὰ ἐκ πλείονος ἀποστήματος ὁρ ώμενα ἐλάττω φαίνεται*», ενώ στα *Οπτικά* ως «*Τῶν ἴσων διαστημάτων καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων τὰ ἐκ πλείονος διαστήματο ς ὁρώμενα ἐλάττονα φαίνεται*».

αν η ΚΒ είναι κάθετη προς τη ΒΖ, τότε το ΒΓ θα φανεί μεγαλύτερο από το ΓΔ και το ΓΔ μεγαλύτερο από το ΔΖ.



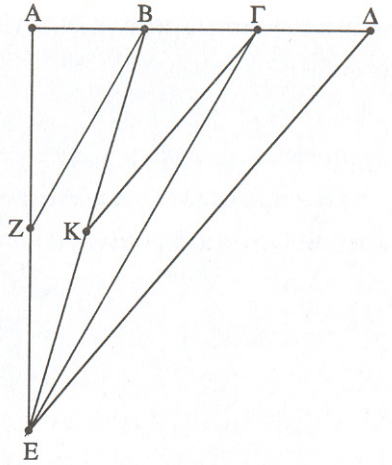
Σχήμα 8-1
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 4

Σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» της πραγματείας, ένα μέγεθος φαίνεται μεγαλύτερο από κάποιο άλλο, όταν η γωνία υπό την οποία παρατηρείται το πρώτο είναι μεγαλύτερη από τη γωνία υπό την οποία παρατηρείται το δεύτερο. Συνεπώς, γι' αυτό που χρειάζεται να είμαστε βέβαιοι είναι ότι στο συγκεκριμένο τρίγωνο η γωνία Ε είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Η και ότι η γωνία Η είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Θ. Στην απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνεται ότι, επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΒΖ τα διαστήματα ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ είναι ίσα, άρα η γωνία Ε είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Η και η γωνία Η είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Θ. Άρα, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» του συγγράμματος, το ΒΓ που παρατηρείται υπό τη γωνία Ε θα φαίνεται μεγαλύτερο από το ΓΔ που παρατηρείται υπό τη μικρότερη γωνία Η. Επιπλέον, το ΓΔ θα φαίνεται μεγαλύτερο από το ΔΖ, το οποίο παρατηρείται υπό τη μικρότερη γωνία Θ.

Παρατηρούμε ότι ο συγγραφέας του συγκεκριμένου θεωρήματος δε μπαίνει στη διαδικασία να παρουσιάσει αναλυτικά την απόδειξη της γεωμετρικής πρότασης, στην οποία βασίζεται, δηλαδή ότι πράγματι στην περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου ΒΖΚ η γωνία Ε είναι μεγαλύτερη από την Η και ότι η γωνία Η είναι μεγαλύτερη από τη Θ. Γνωρίζει την ισχύ της παραπάνω πρότασης είτε επειδή προηγουμένως την είχε αποδείξει ο ίδιος είτε επειδή την είχε αντλήσει από κάπου αλλού. Πάντως, όποιον τρόπο και αν ακολούθησε, διαπιστώνουμε ότι τη λαμβάνει έτοιμη, δεν εκθέτει την απόδειξή της λεπτομερώς, αλλά την εφαρμόζει αμέσως στο υπό εξέταση τρίγωνο. Αντίθετα, ο συγγραφέας του θεωρήματος 4 των *Οπτικών* δεν

αρκείται σε αυτό, αλλά σπεύδει να εκθέσει την απόδειξη της απαιτούμενης γεωμετρικής πρότασης για το τρίγωνο που εξετάζει.

Αναλυτικότερα, όπως φαίνεται στο σχήμα 8-2, υποθέτει ότι τα ίσα διαστήματα που βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία είναι τα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ότι η ΑΕ είναι κάθετη. Στο σημείο Ε τοποθετεί τον οφθαλμό και υποθέτει ότι από αυτόν προσπίπτουν οι όψεις ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ:



Σχήμα 8-2
Οπτικά - Θεώρημα 4

Από το σημείο αυτό, ξεκινά μια πολλών βημάτων συλλογιστική πορεία που έχει ως στόχο της να αποδείξει ότι, εφόσον τα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ είναι ίσα και εφόσον το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο, έπεται ότι η γωνία ΑΕΒ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία ΒΕΓ και ότι η ΒΕΓ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία ΓΕΔ. Αρχικά, φέρει τη ΒΖ παράλληλη στη ΓΕ και συμπεραίνει αμέσως ότι ΑΖ=ΖΕ. Δίνεται η εντύπωση ότι ο συγγραφέας εξήγαγε το συμπέρασμα αυτό βασιζόμενος στο γνωστό θεώρημα, στο οποίο εφαρμόζονται οι ιδιότητες των παραλληλογράμμων και το οποίο δηλώνει ότι, αν μια ευθεία διέρχεται από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου και είναι παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή θα διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς. Ωστόσο, φέροντας την παράλληλη ΒΖ ο συγγραφέας δηλώνει ότι ισχύει η αναλογία ΓΒ/ΒΑ=ΕΖ/ΖΑ, καθώς είναι γνωστό από το δεύτερο θεώρημα του έκτου βιβλίου των *Στοιχείων* ότι, αν μια ευθεία είναι παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου, τότε διαιρεί τις άλλες δύο πλευρές στον ίδιο λόγο[2]. Αφού εκφράσει την παραπάνω αναλογία, ο συγγραφέας συμπεραίνει για άλλη μια φορά ότι

[2] Το θεώρημα 2 του έκτου βιβλίου των *Στοιχείων* δηλώνει τα εξής: «*Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν*».

ΑΖ=ΖΕ. Αν υποθέσουμε ότι ο συγγραφέας εξήγαγε την ισότητα των ΑΖ και ΖΕ, μέσω του θεωρήματος που εφαρμόζει τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων, τότε η δεύτερη παρατήρησή του περί των ανάλογων ευθύγραμμων τμημάτων, προκειμένου να εξάγει για άλλη μια φορά το ίδιο συμπέρασμα, θα ήταν πλεονασμός. Κατανοούμε λοιπόν ότι ο συγγραφέας έφερε την παράλληλη ΒΖ και απέδειξε την ισότητα των ΑΖ και ΖΕ, μέσω του θεωρήματος 2 του έκτου βιβλίου των *Στοιχείων*.

Κατά τη συνέχεια, ο συγγραφέας ισχυρίζεται ότι η ΒΖ είναι μεγαλύτερη από τη ΖΑ. Ο συγγραφέας φαίνεται ότι βασίζει τον συλλογισμό αυτό στο ότι «*η μεγαλύτερη πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι η υποτείνουσα*». Η πρόταση αυτή αποτελεί πόρισμα που προκύπτει από το θεώρημα 19 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, σύμφωνα με το οποίο, σε οποιοδήποτε τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία περιέχεται από τη μεγαλύτερη πλευρά[3]. Αφού η ΒΖ είναι μεγαλύτερη από τη ΖΑ, επομένως, είναι μεγαλύτερη και από τη ΖΕ. Από το γεγονός αυτό ο συγγραφέας συμπεραίνει, πρώτον, ότι η γωνία ΖΕΒ είναι μεγαλύτερη από τη ΖΒΕ, γιατί, σύμφωνα με το θεώρημα 18 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, σε οποιοδήποτε τρίγωνο απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία[4], και, δεύτερον, ότι η γωνία ΖΒΕ είναι ίση με τη γωνία ΒΕΓ, ως εναλλάξ[5]. Επομένως, η γωνία ΖΕΒ είναι μεγαλύτερη και από τη ΓΕΒ.

Έχοντας αποδείξει λεπτομερώς την ανισότητα των γωνιών ΖΕΒ και ΒΕΓ, υπό τις οποίες παρατηρούνται τα μεγέθη ΑΒ και ΒΓ, αντίστοιχα, ο συγγραφέας βασίζεται τελικά στον τέταρτο «όρο» των *Οπτικών* και συμπεραίνει ότι το ΑΒ θα φανεί μεγαλύτερο από το ΒΓ. Τέλος, επισημαίνει ότι, αν από το Γ φέρουμε παράλληλη προς τη ΔΕ και ακολουθήσουμε την ίδια συλλογιστική πορεία, θα αποδείξουμε ότι το ΒΓ θα φανεί με τη σειρά του μεγαλύτερο από το ΓΔ.

Συγκρίνοντας τις δύο διασωζόμενες αποδείξεις του θεωρήματος 4 βρισκόμαστε αντιμέτωποι με δύο συγγραφείς που ακολουθούν διαφορετικές πρακτικές. Παρόλο που η συλλογιστική βάση είναι η ίδια, διαφοροποιούνται ως προς τον τρόπο παρουσίασης. Ο πρώτος επιλέγει να ακολουθήσει τη σύντομη οδό. Αρκείται στο να δηλώσει τη γεωμετρική πρόταση που χρειάζεται και, κατόπιν,

---

[3] «*Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει*».

[4] «*Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει*».

[5] Πρόκειται για το θεώρημα 29 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* που δηλώνει ότι «*Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλ λήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐ τὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας*».

σύμφωνα με αυτή και τον 4ο «όρο» της πραγματείας να εξάγει τα συμπεράσματά του ως προς την οπτική αντίληψη. Αντίθετα, ο δεύτερος επιλέγει να είναι πιο αναλυτικός. Δίνει περισσότερη βαρύτητα στο να κατοχυρώσει την ισχύ της γεωμετρικής πρότασης που τον ενδιαφέρει και φτάνει σε τέτοιο σημείο που κάνει τον αναγνώστη να ξεχνά το θεώρημα που αφορά στην οπτική. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται συνοπτικά η δομή του θεωρήματος 4 των δύο εκδόσεων. Διαπιστώνουμε ότι, σε αντίθεση με τον συγγραφέα των *Οπτικών*, ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, παρόλο που γνωρίζει, δεν παρουσιάζει λεπτομερώς το πλαίσιο απόδειξης της συγκεκριμένης γεωμετρικής πρότασης, αλλά το λαμβάνει ως δεδομένο:

Οπτικά	***Αναθεωρημένη Έκδοση***
Στοιχεία VI, 2	?
Στοιχεία I, 19 πόρισμα	?
Στοιχεία I, 18	?
Στοιχεία I, 29	?
Οπτικά «όρος» 4	*Αναθεωρημένη Έκδοση* «όρος» 4

Πίνακας 8-2

Παρόλο που η πρακτική που ακολουθεί ο συγγραφέας των *Οπτικών* είναι νόμιμη, ωστόσο, δεν πρέπει να παραβλέπουμε ότι έχουμε να κάνουμε με μια πραγματεία γεωμετρικής οπτικής και ότι αυτό που προέχει είναι η απόδειξη του θεωρήματός της με τρόπο ορθό. Τίποτα δεν απαγορεύει στον συγγραφέα του θεωρήματος 4 των *Οπτικών* να παρεμβάλει μέσα στο πλαίσιο της απόδειξης του συγκεκριμένου θεωρήματος την απόδειξη της απαραίτητης γεωμετρικής πρότασης, στην οποία πρόκειται να βασιστεί. Όμως, εκτιμούμε ότι μια τέτοια ενέργεια δεν είναι πρωτίστως αναγκαία για τη θεμελίωση του θεωρήματος 4. Εκτιμούμε ότι η μεγαλύτερη αναλυτικότητα που επιδεικνύει ο συγγραφέας της απόδειξης 4 των *Οπτικών* δεν αποτελεί ταυτόχρονα στοιχείο ή κριτήριο μεγαλύτερης γεωμετρικής αυστηρότητας, αλλά μάλλον σχολαστικότητας. Αυτό που απαιτείται για να αποδειχθεί το θεώρημα 4 είναι να ισχύει η γεωμετρική πρόταση που επικαλούνται οι συγγραφείς και όχι να δείξουν το γιατί αυτή ισχύει. Το γιατί αυτή ισχύει αποτελεί αντικείμενο ενός καθαρά γεωμετρικού συγγράμματος και, παρόλο που είναι βασική, δεν απαιτείται ο τρόπος της απόδειξής της να παρουσιάζεται στην απόδειξη του θεωρήματος της οπτικής. Θεωρούμε ότι ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, ο οποίος δεν αναλώνεται στο να *επι-δείξει* λεπτομερώς την απόδειξη της γεωμετρικής πρότασης που χρειάζεται, αλλά, αντίθετα, τη λαμβάνει έτοιμη και την εφαρμόζει

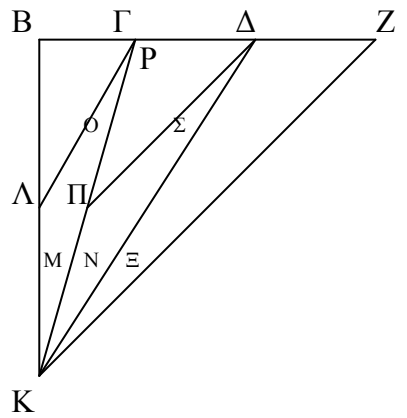
κατευθείαν στην περίπτωση που τον ενδιαφέρει, δείχνει ότι, αφενός, δουλεύει περισσότερο κατά το πρότυπο του γεωμέτρη και όχι του σχολιαστή και, αφετέρου, ότι δεν επιθυμεί να πληροφορήσει για τον τρόπο της απόδειξής της, δηλαδή να διδάξει. Από την άλλη μεριά, το θεώρημα 4 των *Οπτικών* είναι γραμμένο με πιο σχολαστικό τρόπο και αφήνει τα περιθώρια να υποθέσουμε ότι, ενδεχομένως, προσπαθούσε να ικανοποιήσει και εκπαιδευτικούς σκοπούς παρουσιάζοντας και μαθαίνοντας σε μαθητές, επ' ευκαιρίας του θεωρήματος 4, τον τρόπο απόδειξης και εφαρμογής της συγκεκριμένης γεωμετρικής πρότασης σε ένα θεώρημα οπτικής. Όλα τα παραπάνω στοιχεία μάς προτρέπουν στο να θεωρούμε ότι η απόδειξη του θεωρήματος 4 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντικατοπτρίζει τον τρόπο, με τον οποίο πρέπει να εργαζόταν στο συγκεκριμένο σύγγραμμα ο Ευκλείδης, ενώ η απόδειξη του θεωρήματος 4 των *Οπτικών* είναι γραμμένη από κάποιον μεταγενέστερο συγγραφέα με σχολαστικές διαθέσεις που, ενδεχομένως, είχε ως στόχο, μέσω της αναθεωρημένης επανέκδοσης, να διδάξει ή να προσφέρει ένα λειτουργικό σύγγραμμα εκπαιδευτικού χαρακτήρα.

Παράλληλα, θα πρέπει να επισημανθεί ότι ο ελλιπής και περιεκτικός τρόπος γραφής της απόδειξης της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι σύμφωνος με το πρότυπο γραφής που ακολουθούσαν οι αρχαίοι γεωμέτρες, έτσι όπως μας το παρουσιάζει σε ένα χωρίο του ο Σιμπλίκιος. Στα *Σχόλια στα Φυσικά του Αριστοτέλη* και πιο συγκεκριμένα στο σημείο εκείνο όπου εξετάζεται το πρόβλημα του τετραγωνισμού των μηνίσκων, ο Σιμπλίκιος μας πληροφορεί ότι δεν αρκέστηκε απλά στο να εκθέσει κατά λέξη τα λεγόμενα του Εύδημου (περ. 340 π.Χ.) από το έργο του *Ιστορία της Γεωμετρίας*, αλλά πρόσθεσε και ορισμένα πράγματα που άντλησε από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Ο λόγος που το έκανε αυτό ήταν γιατί ο Εύδημος ακολουθούσε «*τὸ ἀρχαϊκὸν ἔθος*»[6]. Όπως δηλώνει ο Σιμπλίκιος, «*τὸ ἀρχαϊκὸν ἔθος*», ο αρχαϊκός τρόπος γραφής, συνίστατο στη σύντομη και περιεκτική έκθεση των λεγομένων, δηλαδή κάτι ανάλογο με τη σύντομη έκθεση της απόδειξης της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* που μόλις εξετάσαμε. Θέλοντας λοιπόν πολύ αργότερα να παρουσιάσει με μεγαλύτερη «*σαφήνειαν*» τη συνοπτική έκθεση του Εύδημου για τον τετραγωνισμό των μηνίσκων ο Σιμπλίκιος έκρινε σκόπιμο να τη συμπληρώσει με πρόσθετα στοιχεία.

Οι εκτιμήσεις μας, σχετικά με την ταυτότητα των δύο κειμένων, έτσι όπως αυτές διαμορφώνονται μέσω της μελέτης των αποδείξεων του θεωρήματος 4 των δύο

[6] Σιμπλίκιου, *Σχόλια στα Φυσικά του Αριστοτέλη*, 9, 60.27-31.

εκδόσεων, ενισχύονται από ένα ακόμη ενδιαφέρον στοιχείο. Στο σχόλιο 15 του θεωρήματος 4 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* διασώζεται η απόδειξη εκείνης της γεωμετρικής πρότασης που ήταν απαραίτητη για τη θεμελίωση του θεωρήματος 4 και που ο συγγραφέας των *Οπτικών* παρουσίασε με τρόπο αναλυτικό. Στο σχόλιο αυτό επιχειρείται να αποδειχθεί, σύμφωνα με το σχήμα 8-3, ότι, αν το τρίγωνο ΚΒΖ είναι ορθογώνιο και αν τα ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ είναι ίσα, τότε η γωνία Μ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Ν και η γωνία Ν είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Ξ. Προκειμένου να αποδειχθούν τα παραπάνω, ξεδιπλώνεται ένας συλλογισμός που είναι ακριβώς ίδιος με αυτόν που ακολούθησε ο συγγραφέας των *Οπτικών*:



Σχήμα 8-3
Σχόλιο 15
Αναθεωρημένης Έκδοσης

Κατά τον ίδιο τρόπο, ο συγγραφέας του σχολίου 15 φέρει τη ΓΛ παράλληλη προς τη ΔΚ. Συμπεραίνει ότι ΔΓ/ΓΒ=ΚΛ/ΛΒ και ότι, εφόσον ΔΓ=ΓΒ, άρα και ΚΛ=ΛΒ. Παρατηρούμε ότι στο σημείο αυτό βασίζεται στο θεώρημα 2 του έκτου βιβλίου των *Στοιχείων*.

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη του ότι η μεγαλύτερη πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι η υποτείνουσα ισχυρίζεται ότι, επειδή η γωνία Β είναι ορθή, άρα η ΓΛ είναι μεγαλύτερη από τη ΛΒ, επομένως, και από τη ΛΚ. Ώστε, και η γωνία Μ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Ο, αφού σε οποιοδήποτε τρίγωνο απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία. Αλλά, η γωνία Ο είναι ίση με τη Ν, ως εναλλάξ. Άρα, και η γωνία Ν είναι μικρότερη από τη Μ.

Ο σχολιαστής επισημαίνει ότι, αν από το σημείο Δ φέρουμε τη ΔΠ παράλληλη προς τη ΖΚ, τότε είναι φανερό ότι η γωνία Ρ θα είναι μεγαλύτερη ορθής, επομένως, η ΠΔ θα είναι μεγαλύτερη από την ΠΚ. Άρα, και η γωνία Ν θα είναι

μεγαλύτερη από τη Σ. Αλλά η Σ είναι ίση με την Ξ. Επομένως, η γωνία Ν είναι μεγαλύτερη από την Ξ.

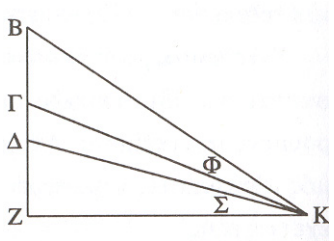
Αν συγκρίνουμε τα διαδοχικά βήματα που ακολούθησε ο συγγραφέας του θεωρήματος 4 των *Οπτικών*, προκειμένου να αποδείξει την παραπάνω γεωμετρική πρόταση, με τα βήματα του σχολιαστή, θα παρατηρήσουμε ότι υπάρχει πλήρης αντιστοιχία, ως προς τη συλλογιστική πορεία. Μέχρι το σημείο εκείνο που ο συγγραφέας των *Οπτικών*, όταν φέρει τη δεύτερη παράλληλη στο σχήμα του, επιλέγει να μην επαναλάβει τα ίδια πράγματα, διαπιστώνουμε ότι ο τρόπος με τον οποίο θεμελιώνει την ίδια γεωμετρική πρόταση δε διαφέρει σε τίποτα από εκείνον του σχολιαστή. Θεωρούμε ότι είναι πολύ πιθανό το συγκεκριμένο σχόλιο, όπως και άλλα, να είναι προγενέστερο του εγχειρήματος συγγραφής της αναθεωρημένης επανέκδοσης του συγγράμματος του Ευκλείδη και ότι ο συγγραφέας των *Οπτικών* να το έλαβε υπόψη του και να το ενσωμάτωσε στην απόδειξη του θεωρήματος 4 κρίνοντας ότι, με τον τρόπο αυτό, παρουσιάζει μια πιο έγκυρη, πιο πλήρη και πιο διδακτική απόδειξη, σε σχέση με εκείνη που διασώζει το κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*.

β. Το θεώρημα 7

Το θεώρημα 7 μοιάζει με το θεώρημα 4, καθώς εξετάζει την περίπτωση ίσων παρατηρούμενων μεγεθών που βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία, χωρίς όμως να είναι το ένα ακριβώς δίπλα στο άλλο, αλλά να τα χωρίζει κάποια απόσταση. Δηλώνεται ότι τα μεγέθη αυτά θα φαίνονται άνισα[7]. Η απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι παραπλήσια με εκείνη που είχε ακολουθηθεί και κατά την απόδειξη του θεωρήματος 4:

Όπως φαίνεται στο σχήμα 8-4, υποτίθεται ότι δύο ίσα μεγέθη, τα ΒΓ, ΔΖ, βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία, ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Κ, από όπου προσπίπτουν οι όψεις ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΖ, και ότι η γωνία ΚΖΒ είναι ορθή:

[7] Το θεώρημα 7 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι «*Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντα ἴσα μεγέθη πορρωτέρῳ ἀλλήλων τεθέντα ἄνισα φαίνεται*», ενώ στα *Οπτικά* διαβάζουμε ότι «*Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντα ἴσα μεγέθη μὴ ἐφεξῆς ἀλλήλοις τεθέντα καὶ ἄνισον διεστηκότα τοῦ ὄμματος ἄνισα φαίνεται*».



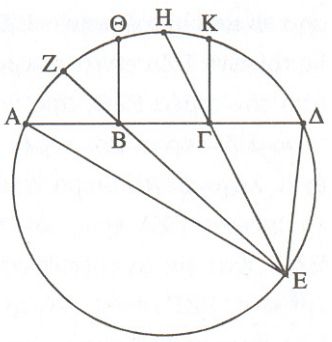
Σχήμα 8-4
Αναθεωρημένη Έκδοση - Θεώρημα 7

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία, ο συγγραφέας διαπιστώνει αμέσως ότι η γωνία Σ είναι μεγαλύτερη της γωνίας Φ: «*οὐκοῦν μείζων ἐστὶν ἡ Σ γωνία τῆς Φ*»[8]. Επομένως, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, το μέγεθος ΔΖ που παρατηρείται υπό μεγαλύτερη γωνία θα φανεί μεγαλύτερο από το ΒΓ.

Ακριβώς όπως στην περίπτωση του θεωρήματος 4, έτσι και για την απόδειξη του θεωρήματος 7, ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αρκείται στο να ακολουθήσει τη σύντομη αποδεικτική οδό. Αφού εκθέσει τα δεδομένα του θεωρήματος, συμπεραίνει αμέσως την ανισότητα των γωνιών Σ και Φ. Από τη μια μεριά, ο αναγνώστης κατανοεί ότι ο συγγραφέας παραπέμπει έμμεσα σε κάποια γεωμετρική πρόταση που δηλώνει ότι, οι γωνίες που σχηματίζονται στην κορυφή ενός ορθογωνίου τριγώνου περιέχοντας ίσα τμήματα της βάσης του, τα οποία δεν ενώνονται μεταξύ τους, είναι άνισες και ότι όσο πιο κοντά προς την ορθή γωνία του τριγώνου βρίσκεται το τμήμα εκείνο της βάσης, στο οποίο περιέχεται από μια γωνία που βρίσκεται στην κορυφή, τόσο πιο μεγάλη είναι η γωνία αυτή. Ωστόσο, από την άλλη μεριά, ο αναγνώστης δεν πληροφορείται καθόλου για το κομμάτι εκείνο που αφορά στο πλαίσιο της απόδειξης της συγκεκριμένης πρότασης.

Αντίθετα, ο συγγραφέας των *Οπτικών*, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, θεωρεί απαραίτητο να προβάλει την απόδειξή της. Προκειμένου να το κατορθώσει, εισάγει στο σχήμα μια βοηθητική κατασκευή και ακολουθεί, για άλλη μια φορά, μια πολλών βημάτων συλλογιστική πορεία. Συγκεκριμένα, υποθέτει ότι πάνω σε μια ευθεία βρίσκονται δύο ίσα μεγέθη, τα ΑΒ, ΓΔ, τα οποία είναι τοποθετημένα σε άνισες αποστάσεις από τον οφθαλμό. Ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Ε, από όπου προσπίπτουν οι όψεις ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ:

[8]*Opticorum Recensio Theonis*, 162.21.



Σχήμα 8-5

Οπτικά - Θεώρημα 7

Επιπλέον, ο συγγραφέας υποθέτει ότι η ΕΑ είναι μεγαλύτερη από την ΕΔ. Αυτό που σκοπεύει να αποδείξει είναι ότι η γωνία ΑΕΖ είναι μικρότερη από τη γωνία ΗΕΔ. Για να το πετύχει, εισάγει βοηθητική κατασκευή. Γύρω από το τρίγωνο ΑΕΔ περιγράφει τον κύκλο ΑΕΔ. Προεκτείνει τις ευθείες ΕΒ και ΕΓ στις ΕΖ και ΕΗ, αντίστοιχα, και από τα σημεία Β και Γ φέρει κάθετα τις ίσες ευθείες ΒΘ και ΓΚ. Με τον τρόπο αυτό, σχηματίζονται δύο ίσα τόξα, το ΑΘ και το ΚΔ. Δηλώνει ότι το τόξο ΚΔ είναι μεγαλύτερο του ΖΑ και, συνεπώς, το ΗΔ θα είναι πολύ μεγαλύτερο του ΖΑ. Όμως, στο τόξο ΖΑ βαίνει η γωνία ΑΕΖ και στο τόξο ΗΔ βαίνει η γωνία ΗΕΔ. Άρα, συμπεραίνει ότι η γωνία ΗΕΔ είναι μεγαλύτερη της ΑΕΖ. Συνεπώς, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» των *Οπτικών*, το μέγεθος ΓΔ που παρατηρείται υπό τη γωνία ΗΕΔ θα φαίνεται μεγαλύτερο από το μέγεθος ΑΒ που παρατηρείται υπό τη γωνία ΑΕΖ.

Διαπιστώνουμε αρχικά ότι, σε αντίθεση με τον συγγραφέα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, ο συγγραφέας των *Οπτικών* κάνει μια διαφορετική υπόθεση. Δεν υποθέτει ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο, αλλά ότι η ΑΕ είναι μεγαλύτερη από τη ΔΕ. Η απόφαση αυτή είναι σημαντική, γιατί υποδηλώνει την προσπάθειά του να διαμορφώσει το θεώρημα 7 κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να ικανοποιεί όλες τις δυνατές περιπτώσεις, όσον αφορά στη θέση που μπορεί να κατέχει το παρατηρησιακό σημείο. Ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* εξέτασε και απέδειξε την ισχύ του θεωρήματος 7 λαμβάνοντας υπόψη του την περίπτωση που το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο. Βέβαια, δε δηλώνει πουθενά ότι το θεώρημα 7 ισχύει μόνο αν και μόνο αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, αλλά η συγκριτική μελέτη του θεωρήματος 7 και των δύο εκδόσεων φανερώνει ότι η απόδειξη των *Οπτικών* έχει γραφτεί με τέτοιον τρόπο, ώστε, όχι μόνο να συμπεριλαμβάνει τις περισσότερες δυνατές περιπτώσεις, αλλά και να αποκλείει τη μοναδική περίπτωση, κατά την οποία το θεώρημα αυτό δε θα ισχύει. Ο συγγραφέας των *Οπτικών* προνόησε στο να θέσει την εξής συνθήκη: ότι τα παρατηρούμενα μεγέθη δεν ισαπέχουν από το σημείο της παρατήρησης. Αν ισαπέχουν, τότε ο

οφθαλμός θα τα βλέπει ως ίσα, γι' αυτό ο συγγραφέας σπεύδει να τονίσει κατά τη δήλωση του θεωρήματος ότι τα παρατηρούμενα μεγέθη είναι «*ἄνισον διεστηκότα ἀπὸ τοῦ ὄμματος τοῦ Ε*». Αυτή η πολύ εύστοχη επισήμανση απουσιάζει από την αντίστοιχη δήλωση του θεωρήματος της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και είναι κάτι που ο αναγνώστης μπορεί να συμπεράνει μόνο από το γεγονός ότι το σχήμα που διαμορφώνεται είναι ορθογώνιο.

Άλλο ένα στοιχείο που συνηγορεί στο ότι το θεώρημα των *Οπτικών* αποτελεί μία μεταγενέστερη επεξεργασία αφορά στον τρόπο δήλωσης των γωνιών. Παρατηρούμε ότι στην απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* οι γωνίες του σχήματος δηλώνονται με απλά γράμματα. Πρόκειται για ένα πολύ ιδιαίτερο γνώρισμα του κειμένου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* που σπάνια συναντάται στην έκδοση των *Οπτικών*. Η δήλωση των γωνιών με ένα μόνο κεφαλαίο γράμμα (*γωνία Φ, γωνία Σ*) δεν είναι συνήθης στα *Στοιχεία*. Στο σύγγραμμα αυτό συναντάμε εκφράσεις της μορφής «*ἡ πρὸς τῷ Α γωνία*», ενώ ελάχιστες είναι οι φορές που απαντάται η απλούστερη και πιο σύντομη μορφή της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, όπως, για παράδειγμα, στις αποδείξεις 42, 44, και 45 του δεύτερου βιβλίου, όπου διαβάζουμε «*ἡ Ε γωνία*» ή «*τῇ Δ γωνίᾳ*». Η δήλωση των γωνιών με απλά γράμματα εντοπίζεται κυρίως σε τεχνικά και σε οπτικά συγγράμματα που δεν απέχουν πολύ από την εποχή του Ευκλείδη. Για παράδειγμα, απαντάται στα *Αναλυτικά πρότερα* και στα *Μετεωρολογικά* του Αριστοτέλη και, κυρίως, σε κείμενα οπτικού περιεχομένου, όπως το *Περί πυρείων* του Διοκλή και τα *Κατοπτρικά* του ίδιου του Ευκλείδη[9]. Κατά το πέρασμα των αιώνων, η δήλωση των γωνιών μέσω ενός μόνο γράμματος μειώνεται σημαντικά, οπότε καθιερώνεται ο τρόπος εκείνος που συναντάται κατά μέγιστο βαθμό στα *Στοιχεία*, αλλά και στα *Οπτικά*, δηλαδή οι γωνίες δηλώνονται, με βάση τις ευθείες υπό τις οποίες περιέχονται (π.χ. *ἡ ὑπὸ ΒΕΔ γωνία*, *γωνία ἡ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΖ*). Θεωρούμε λοιπόν ότι ο συγγραφέας των *Οπτικών* μετέτρεψε τον απλούστερο τρόπο σήμανσης των γωνιών της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, για να ακολουθήσει τον πιο τυπικό τρόπο, αυτόν που είχε καθιερωθεί στα γεωμετρικά συγγράμματα της εποχής του.

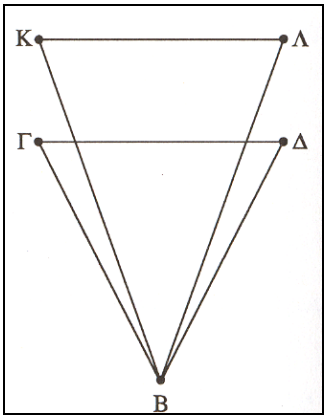
[9]*Αναλυτικά πρότερα* I, 42b14-22, *Μετεωρολογικά*, III, 376a29, *Περί πυρείων*, προτ. 1-3, *Κατοπτρικά*, προτ. 1, 2, 3 κλπ.

2. *Ο ρόλος της απόστασης στην αντίληψη του φαινομενικού μεγέθους: το θεώρημα 5*

Ενώ στο θεώρημα 2 και των δύο εκδόσεων είχε αποδειχθεί ότι, μεταξύ δύο ίσων και παράλληλων μεγεθών που βρίσκονται σε άνισες αποστάσεις από τον οφθαλμό, αυτό που βρίσκεται πιο κοντά του φαίνεται με μεγαλύτερη ακρίβεια, στο θεώρημα 5 δηλώνεται, επιπλέον, ότι το πιο κοντινό -ως προς τον οφθαλμό- μέγεθος θα φαίνεται και ως μεγαλύτερο[10]. Οι αποδείξεις των δύο εκδόσεων δε διαφέρουν καθόλου στον συλλογισμό. Η μόνη διαφορά είναι ότι η έκθεση της απόδειξης της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* γίνεται με πολύ πιο σύντομο τρόπο, ενώ, αντίθετα, η αντίστοιχη απόδειξη των *Οπτικών* παρουσιάζεται ως πιο λεπτομερής και πιο λόγια, καθώς έχει γραφτεί με περισσότερη προσοχή, όσον αφορά στην επιλογή των εκφράσεων και στον τρόπο διάθεσης του λόγου. Εκτιμούμε ότι, σε σχέση με την απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, η αντίστοιχη απόδειξη των *Οπτικών* έχει υποστεί μεγαλύτερη επεξεργασία και είναι πιο τυποποιημένη, ώστε να πλησιάζει στα πρότυπα των τυπικών γεωμετρικών αποδείξεων. Για τους παραπάνω λόγους, όπως και για κάποιους άλλους που θα εκθέσουμε αμέσως παρακάτω, θεωρούμε ότι η απόδειξη των *Οπτικών* είναι μεταγενέστερη. Οι αποδείξεις των δύο εκδόσεων είναι οι εξής:

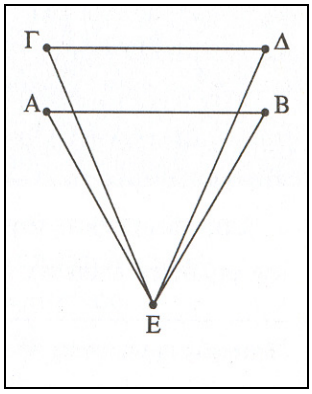
---

[10] Το θεώρημα 5 δηλώνεται στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ως «*Τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισον διεστηκότα ἄνισα φαίνεται, καὶ μεῖζον αἰεὶ τὸ ἔγγιον τοῦ ὄμματος κείμενον*» και στα *Οπτικά* ως «*Τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισον διεστηκότα ἄνισα φαίνεται, καὶ μεῖζον ἀεὶ τὸ ἔγγιον κείμενον τοῦ ὄμματος*».



ἔστω γὰρ ἴσον τὸ ΓΔ τῷ ΚΛ,
ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Β,
ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ ΒΔ, ΒΛ, ΒΚ, ΒΓ.
οὐκοῦν τὸ ΓΔ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρᾶται
ἤπερ τὸ ΚΛ·
μεῖζον ἄρα φαίνεται τὸ ΓΔ τοῦ ΚΛ.

Σχήμα 8-6
Αναθεωρημένη Έκδοση
Θεώρημα 5



ἔστω δύο ἴσα μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ,
ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Ε,
ἀφ' οὗ ἄνισον διεστηκέτω,
καὶ ἔστω ἔγγιον τὸ ΑΒ.
λέγω, ὅτι μεῖζον φανήσεται τὸ ΑΒ.
προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ.
ἐπεὶ οὖν τὰ ὑπὸ μειζόνων γωνιῶν ὁρ ώμενα
μείζονα φαίνεται,
μείζων δὲ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ,
μείζων ἄρα φανήσεται καὶ ἡ ΑΒ τῆ ς ΓΔ.

Σχήμα 8-7
Οπτικά
Θεώρημα 5

Και στις δύο αποδείξεις δηλώνεται ότι οι δύο οπτικές γωνίες υπό τις οποίες παρατηρούνται τα δύο μεγέθη είναι άνισες μεταξύ τους. Βέβαια, το σχήμα βοηθά στο να καταλάβουμε το γιατί συμβαίνει αυτό, ωστόσο, η βασική πρόταση που θεμελιώνει την ανισότητα των γωνιών θα λέγαμε ότι είναι η πέμπτη κοινή έννοια των *Στοιχείων* «*το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους*». Έτσι, για παράδειγμα, στο σχήμα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* η γωνία ΚΒΛ, εφόσον περιέχεται αποτελώντας μέρος της γωνίας ΓΒΔ, θα είναι συνεπώς μικρότερη της ΓΒΔ. Εξαιτίας της ανισότητας των οπτικών γωνιών, το θεώρημα 5 βασιζόμενο τελικά στον τέταρτο «όρο» των δύο συγγραμμάτων αποδεικνύει ότι, παρόλο που τα δύο μεγέθη είναι ίσα, θα φανούν ως άνισα.

Το θεώρημα 5 μας δίνει την ευκαιρία να σχολιάσουμε τη χρήση της λέξης «*οὐκοῦν*» στην απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Η λέξη αυτή εμφανίζεται τόσες πολλές φορές στη συγκεκριμένη έκδοση, ώστε να αποτελεί ένα από τα πιο

χαρακτηριστικά γνωρίσματά της. Το «*οὐκοῦν*» εγκαινιάζει πάντα, ως εισαγωγικός όρος, την απόδειξη και συνοδεύεται κάθε φορά από την έκφραση μιας διαπίστωσης. Έτσι, στο θεώρημα 5, ύστερα από τη λέξη «*οὐκοῦν*» δηλώνεται ότι το μέγεθος ΓΔ παρατηρείται υπό μεγαλύτερη γωνία, σε σύγκριση με το μέγεθος ΚΛ. Σήμερα το «*οὐκοῦν*» θα αποδιδόταν ως «*λοιπόν*,...», «*τότε*,...» και, παρόλο που συνήθως εμφανίζεται σε φιλοσοφικά, ιστορικά, θεολογικά κείμενα της Αρχαιότητας, ωστόσο, συναντάται και σε ορισμένα τεχνικά συγγράμματα που χρονολογούνται πριν ή γύρω στην εποχή του Ευκλείδη. Με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιείται στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*, δηλαδή στην αρχή της απόδειξης, το «*οὐκοῦν*» χρησιμοποιείται πάρα πολλές φορές και στα *Αναλυτικά Πρότερα*, στα *Αναλυτικά Ύστερα*, στο *Περί αισθήσεως και αισθητών* του Αριστοτέλη, αλλά και σε πιο τεχνικά αριστοτελικά χωρία του *Περί ουρανού* και των *Φυσικών*. Επιπλέον, εκτός από τα *Κατοπτρικά*, απαντάται και στο *Κατατομή κανόνος* του ίδιου του Ευκλείδη, όπως επίσης σε γεωμετρικές πραγματείες του Αρχιμήδη[11].

Εκτιμούμε ότι η ευρύτατη χρήση της λέξης «*οὐκοῦν*» στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* αποτελεί ακόμη ένα ενδεικτικό στοιχείο που υποδηλώνει ότι το παραπάνω σύγγραμμα φέρει ίχνη μιας προγενέστερης μορφής κειμένου. Αντίθετα, στο σύγγραμμα των *Οπτικών* στη θέση της συγκεκριμένης λέξης συναντάται τις περισσότερες φορές το «*ἐπεὶ οὖν*», γεγονός που υποδεικνύει ότι ο μεταγενέστερος συγγραφέας πραγματοποίησε αυτή την αντικατάσταση. Σε σχέση με τη λέξη «*οὐκοῦν*», η έκφραση «*ἐπεὶ οὖν*» είναι πιο λόγια και πιο διαδεδομένη στα γεωμετρικά συγγράμματα της ύστερης Αρχαιότητας.

3. Η φαινομενική σύγκλιση των παράλληλων μεγεθών: τα θεωρήματα 6 και 12

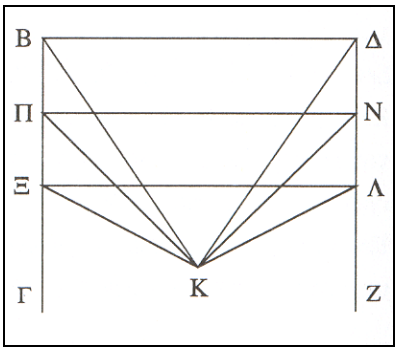
Το θεώρημα 6 δηλώνει ότι δύο παράλληλα μεγέθη που παρατηρούνται από απόσταση θα φανούν ως «*ανισοπλατή*»[12]. Με άλλα λόγια, η απόσταση που χωρίζει τα

---

[11] Για παράδειγμα, βλ. *Αναλυτικά πρότερα* 26a24, 26b9, 36b38, 38a23, 42a9, 42a13, 45a29, 50b36 κλπ., *Αναλυτικά ύστερα* 79a39, *Περί ουρανού* 275a16, *Φυσικά* 232a33, 233b25, 234a27, 236b11 κλπ., *Περί αισθήσεως και αισθητών* 448b6, *Κατατομή κανόνος* 6.5, 6.9, 12.2, 15.4, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* του Αρχιμήδη, I, 86 και, τέλος, στον *Τετραγωνισμό της παραβολής* II, 184.19.

[12] Το θεώρημα 6 δηλώνεται στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* και στα *Οπτικά* ως «*Τὰ παράλληλα τῶν διαστημάτων ἐξ ἀποστήματος ὁρώμενα ἀνισοπλατῆ φαίνεται*».

παράλληλα μεγέθη δε θα φαίνεται πάντα ίση, γεγονός που έχει ως άμεση συνέπεια τα δύο μεγέθη να μη φαίνονται ως παράλληλα, αλλά ως συγκλίνοντα. Το θεώρημα αυτό αποτελεί μία από τις πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις θεωρημάτων που προβάλλουν τον τρόπο, με τον οποίο η φαινομενικότητα έρχεται να διαψεύσει την πραγματικότητα, αλλά και το αντίθετο. Συγκεκριμένα, στο θεώρημα 6 εξετάζονται δύο περιπτώσεις, είτε αν ο οφθαλμός βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τα παράλληλα μεγέθη είτε εκτός του επιπέδου τους. Μεταξύ των δύο εκδόσεων δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές στους τρόπους των αποδείξεων. Έτσι, αν λάβουμε υπόψη το σχήμα 8-8 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* που δε διαφέρει από το σχήμα των *Οπτικών* παρά μόνο στον γραμματισμό, υποτίθεται ότι υπάρχουν δύο παράλληλα μεγέθη, τα ΒΓ και ΔΖ, και ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με αυτά, δηλαδή στο σημείο Κ. Επιπλέον, υποτίθεται ότι προσπίπτουν οι όψεις ΚΞ, ΚΛ, ΚΠ, ΚΝ, ΚΒ, ΚΔ και ότι φέρονται οι ευθείες ΞΛ, ΠΝ, ΒΔ:



Σχήμα 8-8
Αναθεωρημένη Έκδοση - Θεώρημα 6α

Ουσιαστικά, αυτό που επιχειρείται να αποδειχθεί από τους συγγραφείς των δύο εκδόσεων είναι ότι τα διαστήματα ΞΛ, ΠΝ και ΒΔ, παρόλο που στην πραγματικότητα είναι ίσα, ωστόσο, θα φανούν ως άνισα και, ειδικότερα, το διάστημα εκείνο που βρίσκεται πιο κοντά προς τον οφθαλμό, δηλαδή το ΞΛ, θα φανεί μεγαλύτερο από το πιο μακρινό, δηλαδή από το ΠΝ. Κατά ανάλογο τρόπο, το ΠΝ όντας πλησιέστερο του οφθαλμού, σε σχέση με το ΒΔ, θα φανεί μεγαλύτερο από το ΒΔ. Παρατηρούμε ότι το θεώρημα 6α σχετίζεται με το θεώρημα 5 που είχε προηγηθεί, παρόλο που κανείς από τους δύο συγγραφείς δεν το αναφέρει ρητώς. Στο θεώρημα 5 είχε αποδειχθεί κατά έναν πολύ γενικό τρόπο ότι η απόσταση των παρατηρούμενων ίσων μεγεθών από το παρατηρησιακό σημείο επηρεάζει άμεσα το φαινομενικό τους μέγεθος, καθώς το πιο κοντινό θα φανεί μεγαλύτερο από το πιο μακρινό. Διαπιστώνουμε ότι, όπως το θεώρημα 5, έτσι και η πρόταση 6α θίγει τη

σχέση που υφίσταται, μεταξύ απόστασης και φαινομενικού μεγέθους, αλλά εκείνη αποτελεί μια πιο ειδική περίπτωση, καθώς περιορίζεται σε παρατηρούμενα ίσα, αλλά και παράλληλα διαστήματα.

Πιο συγκεκριμένα, προκειμένου να αποδειχθούν οι διαφορές που παρουσιάζουν τα -σε άνισες αποστάσεις από τον οφθαλμό- διαστήματα, ως προς τα φαινομενικά τους μεγέθη, οι δύο συγγραφείς εργάζονται με τα μεγέθη των γωνιών, υπό τις οποίες παρατηρούνται τα συγκεκριμένα διαστήματα. Έτσι, υποστηρίζεται, όπως στο θεώρημα 5, ότι η γωνία ΞΚΛ είναι μεγαλύτερη της ΠΚΝ και ότι η γωνία ΠΚΝ είναι μεγαλύτερη της ΒΚΔ. Όπως επισημάναμε στην απόδειξη του θεωρήματος 5, ο συλλογισμός αυτός, παρόλο που δεν αναφέρεται ρητά, πρέπει να βασίζεται όχι μόνο στην εποπτεία του σχήματος, αλλά και στην κοινή έννοια των *Στοιχείων*, συγκεκριμένα ότι «*το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους*». Συνεπώς, η γωνία ΠΚΝ που αποτελεί μέρος της ΞΚΛ πρέπει να είναι μικρότερή της και η γωνία ΒΚΔ που αποτελεί μέρος της ΠΚΝ πρέπει, ομοίως, να είναι μικρότερή της.

Η ανισότητα των γωνιών υπό τις οποίες παρατηρούνται τα διαστήματα ΞΛ, ΠΝ και ΒΔ φέρει, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, συγκεκριμένα αποτελέσματα ως προς την οπτική αντίληψη των μεγεθών τους. Έτσι, το διάστημα ΞΛ θα φανεί μεγαλύτερο από το ΠΝ και το ΠΝ θα φανεί μεγαλύτερο από το ΒΔ. Αυτό συνεπάγεται ότι οι παράλληλες ευθείες ΒΓ και ΔΖ δε θα φανούν ως παράλληλες, αλλά ως συγκλίνουσες, γιατί το πλάτος που τις διέπει, φαινομενικά, δεν παραμένει ίσο, αλλά, όσο απομακρύνεται από τον οφθαλμό, μικραίνει. Έτσι, αν φανταστούμε ότι τα δύο μεγέθη ΒΓ και ΔΖ επεκταθούν, θα υπάρξει κάποιο σημείο, όπου φαινομενικά θα συναντηθούν. Ωστόσο, αυτό έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό των παράλληλων ευθειών. Σύμφωνα με τον ορισμό 23 του βιβλίου Ι των *Στοιχείων*, οι παράλληλες ευθείες είναι αυτές που όντας στο ίδιο επίπεδο, αν επεκταθούν στο άπειρο και κατά τις δύο κατευθύνσεις, δε θα συναντηθούν ούτε από τη μία ούτε από την άλλη κατεύθυνση[13].

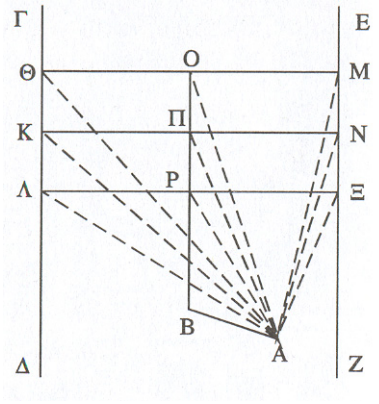
Η δεύτερη περίπτωση που εξετάζεται στο θεώρημα 6, δηλαδή η 6β, είναι πιο σύνθετη, αφού ο οφθαλμός υποτίθεται ότι βρίσκεται εκτός του επιπέδου των παρατηρούμενων διαστημάτων. Αυτό που διασώζεται και στις δύο εκδόσεις είναι

---

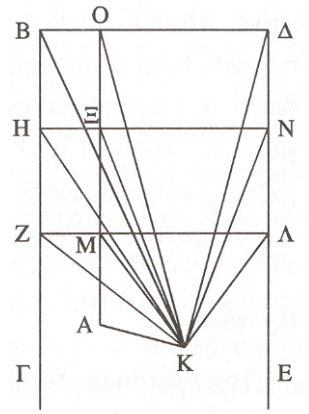
13 «*Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις*».

μόνο η απόδειξη που ακολουθεί αμέσως μετά την απόδειξη 6α. Η απόδειξη 6β δεν παρουσιάζεται στο πλαίσιο ενός ξεχωριστού θεωρήματος, ενώ απουσιάζει, έστω και τυπικά, η δήλωση του τι πρόκειται να αποδειχθεί. Όλα αυτά δίνουν την εντύπωση ότι και στις δύο εκδόσεις η απόδειξη 6β αποτελεί μεταγενέστερη προσθήκη.

Συγκεκριμένα, στα *Οπτικά* υποτίθεται, όπως φαίνεται στο σχήμα 8-9, ότι τα διαστήματα που ορίζονται από τα παράλληλα μεγέθη ΓΔ και ΕΖ βρίσκονται ψηλότερα από το σημείο Α, στο οποίο βρίσκεται ο οφθαλμός:



Σχήμα 8-9
Οπτικά
Θεώρημα 6β



Σχήμα 8-10
Αναθεωρημένη Έκδοση
Θεώρημα 6β

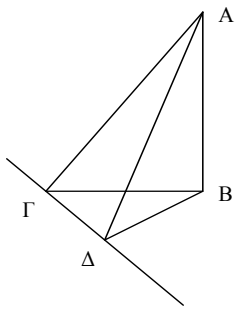
Αντίθετα, στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* υποτίθεται ότι ο οφθαλμός Κ βρίσκεται σε ψηλότερο επίπεδο από τα παρατηρούμενα μεγέθη ΒΓ και ΔΕ. Η διαφορά αυτή δεν επηρεάζει τους τρόπους των αποδείξεων που είναι παραπλήσιοι στις δύο εκδόσεις.

Αυτό που χρειάζεται να αποδειχθεί είναι ότι τα παρατηρούμενα μεγέθη δε θα φανούν ως παράλληλα, δηλαδή τα διαστήματα που τα διαχωρίζουν δε φαίνονται ως ίσα, αλλά ως «*ανισοπλατή*». Αναλυτικότερα, σύμφωνα με το σχήμα και την απόδειξη των *Οπτικών*, φέρονται οι παράλληλες ευθείες ΛΞ, ΚΝ, ΘΜ, όπως επίσης η ευθεία ΑΒ, έτσι, ώστε να είναι κάθετη προς το επίπεδο των παρατηρούμενων μεγεθών. Επιπλέον, φέρεται η ΒΡ κάθετη προς τη ΛΞ και προεκτείνεται μέχρι το σημείο Ο. Τέλος, υποτίθεται ότι από το σημείο Α του οφθαλμού προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΑΛ, ΑΚ, ΑΘ, ΑΞ, ΑΝ, ΑΜ και ότι φέρονται οι ΑΡ, ΑΠ, ΑΟ. Επισημαίνουμε ότι ακριβώς ανάλογα πράγματα συμβαίνουν και στην απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, μόνο που ο γραμματισμός στο σχήμα της είναι διαφορετικός.

Κατά τη συνέχεια της απόδειξης των *Οπτικών*, δηλώνεται ότι δεδομένου ότι η ΑΒ είναι κάθετη στο επίπεδο και ότι η ΒΡ είναι κάθετη στη ΡΞ, τότε, εφόσον από το

ψηλότερο σημείο Α φέρεται η ΑΡ, έπεται ότι και η ΑΡ είναι κάθετη προς τη ΡΞ. Ομοίως, η ΑΠ είναι κάθετη προς την ΠΝ και η ΑΟ είναι κάθετη προς την ΟΜ. Ο ίδιος συλλογισμός που ακολουθείται στα *Οπτικά* συναντάται και στην απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Κατά παρόμοιο τρόπο, αναφέρεται ότι, εφόσον η ΚΑ του σχήματος 8-10 είναι κάθετη στο επίπεδο των ΓΒ, ΔΕ, και, εφόσον η ΑΜ είναι κάθετη προς τη ΖΛ, τότε και η ΚΜ θα είναι κάθετη προς τη ΜΛ. Ομοίως, η ΚΞ θα είναι κάθετη προς την ΞΝ και η ΚΟ κάθετη προς την ΟΔ.

Παρατηρούμε ότι και στις δύο αποδείξεις εφαρμόζεται το ίδιο θεώρημα, το οποίο είναι γνωστό ως «*το θεώρημα των τριών καθέτων*». Το στοιχείο εκείνο που εντυπωσιάζει δεν είναι βέβαια ότι ακολουθείται η ίδια συλλογιστική πορεία, αλλά ότι το συγκεκριμένο θεώρημα το είχε αποδείξει ο Πάππος στο βιβλίο VI της *Μαθηματικής Συναγωγής*. Ο Πάππος είχε συγγράψει σχόλια στα θεωρήματα που συναντάμε ως 34 των *Οπτικών* και ως 34 και 35 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Στο πλαίσιο των σχολίων του είχε αποδείξει και το θεώρημα των τριών καθέτων, όπου δήλωνε ότι:



Σχήμα 8-11

«*Από ψηλότερο σημείο, το Α, φέρεται η ΑΒ κάθετη προς το επίπεδο και συμβάλλει σε αυτό στο σημείο Β˙ έστω κάποια ευθεία του επιπέδου, η ΓΔ, και από το σημείο Β φέρεται κάθετη προς τη ΓΔ, η ΒΔ, και ενώνεται η ΑΔ. Λέω ότι και η ΑΔ είναι κάθετη στη ΓΔ*»[14].

Αν λάβουμε υπόψη ότι ο Πάππος ήκμασε κατά τον πρώιμο 4ο μ.Χ. αιώνα, η εφαρμογή του θεωρήματός του στην απόδειξη της πρότασης 6β των *Οπτικών* ενισχύει

[14] «*Ἀπὸ μετεώρου σημείου τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ ΑΒ, καὶ συμβαλλέτω αὐτῷ κατὰ τὸ Β σημεῖον, ἔστω δ' ἐν τῷ ἐπιπέδῳ εὐθεῖά τις ἡ ΓΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΔ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΓΔ*», Πάππου Αλεξανδρινού, *Μαθηματική Συναγωγή*, έκδ. F. Hultsch, *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt*, 3 τόμ., Βερολίνο: Weidmann. Βλ. τόμ. 2 (1877), 570.6-11.

την άποψή μας ότι το κείμενο αυτό έχει γραφτεί για να αποτελέσει την αναθεωρημένη επανέκδοση του ευκλείδειου συγγράμματος συμπεριλαμβάνοντας στις αποδείξεις της πολλά από τα μεταγενέστερα πορίσματα της γεωμετρίας. Από την άλλη μεριά, το ότι συναντάται το θεώρημα του Πάππου και στην απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, η οποία αποτελεί κατά τη γνώμη μας μια προγενέστερη μορφή κειμένου, σημαίνει ότι το θεώρημα 6β αποτελεί μεταγενέστερη προσθήκη. Πάντως, δεν είναι απίθανο η απόδειξη 6β να είχε γραφτεί πριν από τον Πάππο, γιατί, όπως θα δούμε στην ενότητα 15, που εξετάζει τις προτάσεις που σχετίζονται με την οπτική αντίληψη των κύκλων, το θεώρημα των τριών καθέτων αποδεικνύεται στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* με τρόπο διαφορετικό από εκείνον που διασώζει η *Μαθηματική Συναγωγή*. Επομένως, είναι πολύ πιθανόν το συγκεκριμένο γεωμετρικό θεώρημα να ήταν γνωστό και να χρησιμοποιούνταν ήδη πριν από τον Πάππο.

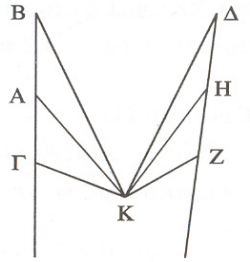
Ξαναγυρνώντας στην απόδειξη του θεωρήματος 6β διαπιστώνουμε ότι, μέσω του θεωρήματος των τριών καθέτων, οι δύο συγγραφείς αποδεικνύουν ότι στα σχήματά τους διαμορφώνονται ορθογώνια τρίγωνα. Έτσι, ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* επισημαίνει ότι τα τρίγωνα ΚΜΛ, ΚΞΝ και ΚΟΔ του σχήματος 8-10 είναι ορθογώνια. Το ίδιο ισχυρίζεται και ο συγγραφέας των *Οπτικών* για τα τρίγωνα ΑΡΞ, ΑΠΝ και ΑΟΜ του σχήματος 8-9. Αυτό που χρειάζεται να αποδειχθεί στη συνέχεια είναι ότι οι γωνίες που διαμορφώνουν τα ορθογώνια τρίγωνα στον οφθαλμό είναι άνισες. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της σύγκρισης των τριγώνων και οι αποδείξεις των δύο συγγραφέων είναι σχεδόν ίδιες.

Συγκεκριμένα, ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι η πλευρά ΞΝ είναι ίση με τη ΜΛ, γιατί το ΜΝ είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης, οι πλευρές ΞΚ και ΚΝ είναι μεγαλύτερες από τις ΜΚ και ΚΛ, αντίστοιχα. Επομένως, η γωνία ΜΚΛ είναι μεγαλύτερη από την ΞΚΝ και, εξαιτίας αυτού, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, το ΜΛ θα φαίνεται μεγαλύτερο από το ΞΝ. Ομοίως, το ΖΜ θα φανεί μεγαλύτερο από το ΗΞ. Ο συγγραφέας συμπεραίνει ότι όλο το ΖΛ θα φανεί μεγαλύτερο από το ΗΝ και το ΗΝ θα φανεί μεγαλύτερο από το ΒΔ. Επομένως, τα μεγέθη ΒΓ και ΔΕ δε θα φαίνονται ως παράλληλα.

Κατά παρόμοιο τρόπο, ο συγγραφέας των *Οπτικών* ισχυρίζεται ότι, επειδή τα τρίγωνα ΑΠΝ, ΑΡΞ είναι ορθογώνια, επειδή η πλευρά ΠΝ είναι ίση με τη ΡΞ και η ΠΑ είναι μεγαλύτερη από την ΑΡ, επομένως, η γωνία ΞΑΡ είναι μεγαλύτερη από την ΠΑΝ. Σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» των *Οπτικών*, το ΡΞ θα φανεί μεγαλύτερο από

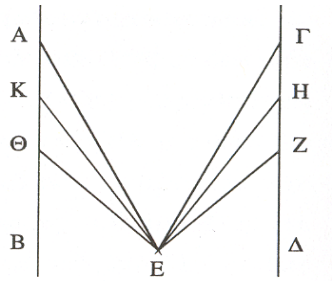
το ΠΝ και, ομοίως, το ΡΛ θα φανεί μεγαλύτερο από το ΠΚ. Άρα, όλο το ΛΞ θα φανεί μεγαλύτερο από το ΚΝ, γεγονός που συνεπάγεται ότι τα μεγέθη ΓΔ και ΕΖ δε θα φαίνονται ως παράλληλα.

Μια γενικότερη περίπτωση του θεωρήματος 6 αποτελεί το θεώρημα 12 που δηλώνει ότι μεταξύ των μεγεθών που εκτείνονται εμπρός του οφθαλμού, αυτά που βρίσκονται δεξιά του οφθαλμού φαίνεται να κλίνουν προς τα αριστερά και αυτά που βρίσκονται αριστερά του οφθαλμού φαίνεται να κλίνουν προς τα δεξιά[15]. Όσον αφορά στα σχήματα, αλλά και σε ορισμένα σημεία των αποδείξεων, οι δύο εκδόσεις παρουσιάζουν μικρές διαφοροποιήσεις:



ἔστω γὰρ ὁρώμενα τὰ ΒΓ, ΔΖ,
ὄμμα δὲ τὸ Κ,
ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ὄψεις
αἱ ΚΓ, ΚΑ, ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΔ.
οὐκοῦν τὸ Δ παρῆχθαι δοκεῖ εἰς
τὰ ἀριστερὰ ἤπερ τὸ Η.
ὁμοίως δὲ καὶ τὸ Β εἰς τὰ δεξιὰ
δοκεῖ παρῆχθαι ἤπερ τὸ Α.
ὥστε τῶν εἰς τοὔμπροσθεν
μῆκος ἐχόντων τὰ μὲν ἐν τοῖς δε
ξιοῖς εἰς τὰ ἀριστερὰ δοκεῖ παρῆ
χθαι,
τὰ δὲ ἐν τοῖς ἀριστεροῖς εἰς τὰ δ
εξιά.

Σχήμα 8-12
Αναθεωρημένη Έκδοση
Θεώρημα 12



ἔστω δύο ὁρώμενα μεγέθη τὰ ΑΒ,
ΓΔ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Ε,
ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες
αἱ ΕΘ, ΕΚ, ΕΑ, ΕΖ, ΕΗ, ΕΓ.
λέγω, ὅτι αἱ μὲν ΕΖ, ΕΗ, ΕΓ
δοκοῦσιν εἰς τὰ ἀριστερὰ μετῆχθαι,
αἱ δὲ ΕΘ, ΕΚ, ΕΑ εἰς τὰ δεξιά.
ἐπεὶ γὰρ ἡ ΕΖ τῆς ΕΗ ἐστι δεξιωτέρ
α,ἡ δὲ ΕΗ τῆς ΕΓ,
ἐντεῦθεν ἄρα ἡ ΕΓ τῆς ΕΗ
δοκεῖ εἰς τὰ ἀριστερὰ μετῆχθαι,ἡ δὲ
ΗΕ τῆς ΕΖ.
ὁμοίως καὶ αἱ ΕΚ, ΕΑ, Εθ δοκοῦσιν
εἰς τὰ δεξιὰ μετῆχθαι.

Σχήμα 8-13
Οπτικά
Θεώρημα 12

τα
ά μὲν
δεξιά

Παρατηρούμε ότι το θεώρημα 12 θεμελιώνεται ουσιαστικά στον 6ο «όρο» που δηλώνει ότι «*τὰ μὲν ὑπὸ δεξιωτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα δεξιώτερα φαίνεσθαι, τὰ δὲ ὑπὸ ἀριστερωτέρων ἀριστερώτερα*». Βέβαια, σημαντικότατο ρόλο διαδραματίζει και η εποπτεία των σχημάτων. Έτσι, κατά την απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, αν υποθέσουμε ότι τα παρατηρούμενα μεγέθη είναι τα ΒΓ, ΔΖ και ότι ο οφθαλμός είναι στο σημείο Κ, από όπου προσπίπτουν οι όψεις ΚΓ, ΚΑ, ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΔ, λέγεται ότι το σημείο Δ φαίνεται να είναι αριστερά του Η και, ομοίως, το Β φαίνεται να είναι δεξιά του Α. Επομένως, ο συγγραφέας συμπεραίνει ότι το μέγεθος ΔΖ που βρίσκεται δεξιά του οφθαλμού θα φαίνεται να κλίνει προς τα αριστερά, ενώ το ΒΓ προς τα δεξιά.

Η απόδειξη των *Οπτικών* διαφοροποιείται λίγο, καθώς δεν αναφέρεται στη σχετική θέση των σημείων, όπου προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες, αλλά στη σχετική θέση των οπτικών ακτίνων. Έτσι, αν ΕΘ, ΕΚ, ΕΑ, ΕΖ, ΕΗ, ΕΓ είναι οι οπτικές ακτίνες που ξεκινούν από το σημείο του οφθαλμού, δηλαδή από το σημείο Ε, και προσπίπτουν στα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ, τότε, όπως λέγεται, επειδή η ΕΖ είναι δεξιότερη της ΕΗ και η ΕΗ δεξιότερη της ΕΓ, άρα η ΕΓ θα φαίνεται να κλίνει προς τα αριστερά της ΕΗ και η ΕΗ θα φαίνεται να κλίνει προς τα αριστερά της ΕΖ. Κατά παρόμοιο τρόπο, και οι οπτικές ακτίνες ΕΚ, ΕΑ, ΕΘ θα φαίνεται να κλίνουν προς τα δεξιά.

Καμία από τις δύο διασωζόμενες αποδείξεις δεν παρουσιάζει γεωμετρική αυστηρότητα. Πάντως, για άλλη μια φορά διαπιστώνουμε ότι η απόδειξη των *Οπτικών* παρουσιάζει σημάδια μεγαλύτερης σχολαστικότητας. Το στοιχείο αυτό δημιουργεί την εντύπωση ότι είναι πιο λεπτομερής, ωστόσο, αν την προσέξουμε καλύτερα, θα διαπιστώσουμε ότι είναι ημιτελής. Ο συγγραφέας αναπτύσσει τον συλλογισμό του για τη θέση των οπτικών ακτίνων, ως προς τη σχέση «αριστερά – δεξιά» που έχουν μεταξύ τους, αλλά δεν τον αναπτύσσει περαιτέρω μεταβαίνοντας στην αντίστοιχη σχέση που κατέχουν τα σημεία των μεγεθών, πάνω στα οποία προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες. Δηλαδή, δεν αναφέρει ότι, εφόσον η ΕΖ είναι δεξιότερη της ΕΗ, άρα και το σημείο Ζ του παρατηρούμενου μεγέθους, όπου προσπίπτει η οπτική ακτίνα ΕΖ, θα φαίνεται να είναι δεξιότερα του σημείου Η κλπ.

Από την άλλη μεριά, η απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι γραμμένη με πιο σύντομο και λιτό τρόπο, δεν αναφέρεται σε όλα τα στοιχεία του σχήματος που εισάγει, ενώ παραβλέπει ένα απαραίτητο ενδιάμεσο βήμα. Ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* συζητά για τη σχετική θέση των σημείων των παρατηρούμενων μεγεθών, πάνω στα οποία προσπίπτουν οι όψεις, προτού να προσδιορίσει τη σχετική θέση των ίδιων των όψεων. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι αυτό που παραλείπει ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* το συμπεριλαμβάνει ο συγγραφέας των *Οπτικών*. Επιπλέον, ενώ στην απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* επισημαίνεται η σχετική θέση των σημείων Δ, Η και Β, Α, δεν εξηγείται τι συμβαίνει με τα σημεία Ζ, Γ του σχήματος. Προφανώς, ο συγγραφέας είχε την πεποίθηση ότι έχει κατανοητός, μέσω της αναφοράς του μόνο στα σημεία Δ, Η, Β, Α, επομένως, θεωρούσε περιττό να επαναλάβει ανάλογα πράγματα και για τα σημεία Ζ, Γ. Σε όλα τα παραπάνω έρχεται να προστεθεί η εμφάνιση της λέξης «*οὐκοῦν*» που, προσδίδει περισσότερη απλότητα στο κείμενο και που, όπως έχει προαναφερθεί, προδίδει ότι η απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι προγενέστερη.

Κατανοούμε ότι ο τρόπος με τον οποίο είναι γραμμένη η απόδειξη του θεωρήματος 12 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* ξεφεύγει από τα πρότυπα των τυπικών αρχαίων γεωμετρικών αποδείξεων. Η παρουσίασή της γίνεται όσο το δυνατόν πιο σύντομα και πιο απλά. Κατά τη γνώμη μας, τα παραπάνω χαρακτηριστικά είναι εκείνα που θα προέτρεπαν τους μεταγενέστερους να προχωρήσουν στην επανέκδοση του συγγράμματος του Ευκλείδη. Μάλιστα, το εγχείρημα αυτό θα ήταν ακόμη πιο επιτακτικό να γίνει δεδομένου ότι το έργο αυτό ανήκε στον συγγραφέα των *Στοιχείων*. Ήταν επιβεβλημένο λοιπόν να ξαναγραφτεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να

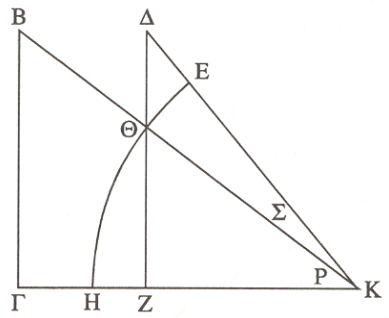
παραληφθούν τυχόν ατέλειες των γεωμετρικών αποδείξεών του και να προσλάβουν τη μορφή και τα τυπικά χαρακτηριστικά που έχουν οι αποδείξεις των περισσότερων γεωμετρικών συγγραμμάτων.

4. Το όγδοο θεώρημα

Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα θεωρήματα της γεωμετρικής οπτικής του Ευκλείδη είναι το 8. Βασιζόμενο σε προτάσεις που αντλούνται από τη θεωρία των αναλογιών, αλλά και στον τέταρτο «όρο» που θέτει ότι «*τὰ μὲν ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα μείζονα φαίνεσθαι, τὰ δὲ ὑπὸ ἐλάττονος ἐλάττονα, ἴσα δὲ τὰ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα*» το θεώρημα 8 είναι το μόνο που θίγει το ερώτημα του αριθμητικού προσδιορισμού του μεγέθους της εμφάνισης των παρατηρούμενων αντικειμένων και της σχέσης του με τις οπτικές γωνίες, υπό τις οποίες παρατηρούνται, αλλά και με τις αποστάσεις τους από το σημείο της παρατήρησης.

Μεταξύ των δύο εκδόσεων υπάρχουν διαφορές στον τρόπο δήλωσης αυτής της πρότασης, αλλά και αποκλίσεις σε ορισμένα στάδια των αποδείξεων. Έτσι, στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* το θεώρημα 8 διατυπώνεται ως «*Τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισον διεστηκότα οὐκ ἀναλόγως τοῖς ἀποστήμασιν ὁρᾶται*». Στα *Οπτικά* το θεώρημα αυτό δηλώνεται ως «*Τὰ ἴση μεγέθη καὶ παράλληλα ἄνισον διεστηκότα ἀπὸ τοῦ ὄμματος οὐκ ἀναλ όγως τοῖς διαστήμασιν ὁρᾶται*».

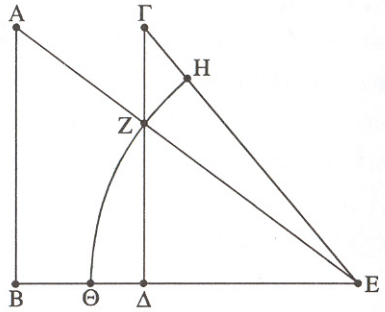
Σύμφωνα με το σχήμα 8-14 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, υποτίθεται ότι το μέγεθος ΒΓ είναι ίσο και παράλληλο με το ΔΖ, ενώ ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Κ. Προσπίπτουν οι όψεις ΚΖΓ, ΚΒ, ΚΔ, από τις οποίες η ΚΓ είναι κάθετη στο ΓΒ:



Σχήμα 8-14
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 8

Ο ισχυρισμός που ακολουθεί αμέσως μετά διαφοροποιείται από όσα διαβάσαμε στην αρχική δήλωση του θεωρήματος, καθώς αναφέρει ότι «*φημὶ δή, ὅτι οὐκ ἀναλόγως φανήσεται τὰ ΒΓ, ΔΖ μεγέθη τοῖς ΓΚ, ΚΖ διαστήμασιν*». Εκτός από το ότι η λέξη «*ἀποστήμασιν*» αντικαθίσταται από το «*διαστήμασιν*», παρατηρούμε ότι το «*ὁρᾶται*» αντικαθίσταται από το «*φανήσεται*». Η δεύτερη αντικατάσταση είναι πιο σοβαρή από την πρώτη, γιατί το «*ὁρᾶται*» δεν έχει την ίδια σημασία με το «*φανήσεται*», γεγονός που αλλάζει το νόημα της πρότασης. Μέσω του «*ὁρᾶται*», δηλώνεται οτιδήποτε 'καταγράφεται', δηλαδή οτιδήποτε βλέπεται από τον οφθαλμό, ενώ, μέσω του «*φανήσεται*», υποδηλώνεται αυτό που φαίνεται στον παρατηρητή. Από την άλλη μεριά, παρατηρούμε ότι, όταν ολοκληρώνεται το κομμάτι της απόδειξης, το τελικό συμπέρασμα που εξάγεται συμφωνεί με τη δήλωση του θεωρήματος, αφού εκφράζει ότι «*οὐκ ἀνάλογον ἄρα τοῖς ἀποστήμασι τὰ ἴσα μεγέθη ὁρᾶται*».

Από την άλλη μεριά, στο κείμενο των *Οπτικών* υποτίθεται ότι δύο μεγέθη, τα ΑΒ, ΓΔ βρίσκονται σε άνισες αποστάσεις από τον οφθαλμό που είναι τοποθετημένος στο σημείο Ε:



Σχήμα 8-15

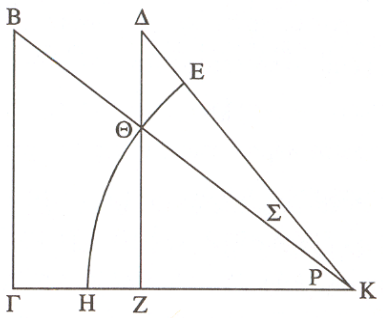
Οπτικά – Θεώρημα 8

Ο συγγραφέας των *Οπτικών* κάνει την εξής ενδιαφέρουσα δήλωση: «*λέγω, ὅτι οὔκ ἐστιν, ὡς φαίνεται ἔχον, ὡς τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΑΒ, οὕτως τὸ ΒΕ πρὸ ς τὸ ΕΔ*». Διαπιστώνουμε ότι ο συγγραφέας των *Οπτικών* πραγματοποιεί μία διάκριση, ανάμεσα στο τι καταγράφεται στον οφθαλμό και στο τι γίνεται αντιληπτό.

Εκτιμούμε ότι η δεύτερη δήλωση που διατυπώνεται στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και που διαφοροποιείται όχι μόνο από την αρχική, αλλά και από το τελικό συμπέρασμα, αποτελεί μεταγενέστερη προσθήκη από κάποιον που, ενώ επιχείρησε να παρουσιάσει την απόδειξη με πιο τυπικό τρόπο και πιο κοντά προς τα καθιερωμένα πρότυπα παρεμβάλλοντας την έκφραση «*φημὶ δή...*» πριν αρχίσει η έκθεση της απόδειξης, ωστόσο, επηρεασμένος ίσως και από τη δήλωση των *Οπτικών*

επέφερε μετατροπές που παραποιούν το αρχικό νόημα του θεωρήματος, αλλά και είναι ασύμφωνες με την ορολογία της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Συγκεκριμένα, στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ποτέ δε χρησιμοποιείται η λέξη «*διάστημα*», για να εκφραστεί η απόσταση, ανάμεσα στο παρατηρησιακό σημείο και στο παρατηρούμενο μέγεθος. Όταν πρόκειται να δηλωθεί κάτι τέτοιο, δηλαδή στα θεωρήματα 3, 4, 6, 9, αλλά, όπως βλέπουμε και στο 8, χρησιμοποιείται πάντα ο όρος «*ἀπόστημα*». Αντίθετα, ο όρος «*διάστημα*» χρησιμοποιείται στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* είτε για να εκφράσει το διάστημα μεταξύ των όψεων, δηλαδή την ιδιότητα της διακριτότητας, είτε για να εκφράσει την απόσταση που υφίσταται μεταξύ των παρατηρούμενων μεγεθών, είτε την απόσταση μεταξύ δύο οφθαλμών, όταν εξετάζονται προβλήματα διοφθαλμικής όρασης, είτε για να δηλώσει την ακτίνα ενός κύκλου. Ενώ λοιπόν το κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* τηρεί μια πολύ χαρακτηριστική και πάγια γραμμή ως προς αυτό το θέμα, στο κείμενο των *Οπτικών* υπάρχει μια σαφής προτίμηση για τον όρο «*διάστημα*», ο οποίος χρησιμοποιείται αδιακρίτως.

Στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* επιχειρείται αρχικά να αποδειχθεί ότι ο κύκλος ΕΘΗ που περιγράφεται με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα τη ΘΚ θα ξεπεράσει την ΚΖ:



Αυτό συμβαίνει, γιατί στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΖΚ η γωνία ΖΘΚ είναι οξεία, επομένως, η ΘΚ είναι μεγαλύτερη από την ΚΖ. Το κομμάτι της απόδειξης που μόλις παρακολουθήσαμε, απουσιάζει από την αντίστοιχη απόδειξη των *Οπτικών*. Όμως ο συλλογισμός που ακολουθεί στη συνέχεια και που θα λέγαμε ότι αποτελεί το κύριο κομμάτι της απόδειξης του θεωρήματος 8 διασώζεται, μέχρι ενός σημείου, ακριβώς με τον ίδιο τρόπο και στα *Οπτικά*.

Έτσι, σύμφωνα με μια πιο σύγχρονη απόδοση, η κύρια απόδειξη είναι η εξής:

Επειδή τρίγωνο ΘΔΚ/τομέα ΘΕΚ>τρίγωνο ΖΘΚ/τομέα ΗΘΚ,

άρα, εναλλάξ, τρίγωνο ΘΔΚ/τρίγωνο ΖΘΚ>τομέας ΕΘΚ/τομέα ΗΘΚ

άρα, συνθέντι, τρίγωνο ΖΔΚ/τρίγωνο ΖΘΚ>τομέας ΕΗΚ/τομέα ΗΘΚ.

Αλλά, τρίγωνο ΖΔΚ/τρίγωνο ΖΘΚ=ΔΖ/ΖΘ,

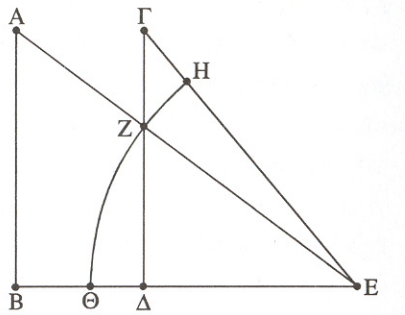
τομέας ΗΕΚ/τομέα ΗΘΚ=γωνία ΔΚΖ/γωνία ΘΚΖ.

Άρα, ΔΖ/ΖΘ>γωνία Σ,Ρ/γωνία Ρ.

ΔΖ/ΖΘ=ΓΚ/ΚΖ και άρα ΚΓ/ΚΖ>γωνία Σ,Ρ/γωνία Ρ

Όμως, υπό της γωνίας Σ,Ρ, βλέπεται το ΔΖ και, υπό της γωνίας Ρ, βλέπεται το ΒΓ. Επομένως, τα ίσα μεγέθη δε βλέπονται κατά αναλογία προς τις αποστάσεις τους από τον οφθαλμό.

Σύμφωνα με το σχήμα των *Οπτικών*, η απόδειξη του θεωρήματος 8 είναι η εξής:



Επειδή τρίγωνο ΕΖΓ>τομέα ΕΖΗ και επειδή τρίγωνο ΕΖΔ<τομέα ΕΖΘ,

άρα, τρίγωνο ΕΖΓ/τομέα ΕΖΗ>τρίγωνο ΕΖΔ/τομέα ΕΖΘ

και, εναλλάξ, τρίγωνο ΕΖΓ/τρίγωνο ΕΖΔ>τομέας ΕΖΗ/τομέα ΕΖΘ

και, συνθέντι, τρίγωνο ΕΖΓ/τρίγωνο ΕΖΔ>τομέας ΕΗΘ/τομέα ΕΖΘ.

Αλλά, τρίγωνο ΕΔΓ/τρίγωνο ΕΖΔ=ΓΔ/ΔΖ.

Όμως, ΓΔ=ΑΒ και ΑΒ/ΔΖ=ΒΕ/ΕΔ.

Άρα, ΒΕ/ΕΔ>τομέας ΕΗΘ/τομέα ΕΖΘ.

Όμως, τομέας ΕΗΘ/τομέα ΕΖΘ=γωνία ΗΕΘ/γωνία ΖΕΘ.

Άρα, ΒΕ/ΕΔ> γωνία ΗΕΘ/γωνία ΖΕΘ.

Και υπό της γωνίας ΗΕΘ βλέπεται το ΓΔ, ενώ υπό της γωνίας ΖΕΘ βλέπεται το ΑΒ. Επομένως, τα ίσα μεγέθη δε βλέπονται κατά αναλογία προς τις αποστάσεις τους από τον οφθαλμό.

Παρατηρούμε ότι μέχρι κάποιο σημείο, η κειμενική παράδοση διασώζει ακριβώς τα ίδια αποδεικτικά βήματα. Από εκεί και πέρα, η απόδειξη των *Οπτικών* είναι λίγο πιο λεπτομερής. Πάντως, οι αποδείξεις βασίζονται σε προτάσεις της θεωρίας των αναλογιών, όπως στους ορισμούς 7, 12 και 14 του πέμπτου βιβλίου των

Στοιχείων[16], στο θεώρημα 33 του έκτου βιβλίου, ενώ στα *Οπτικά* εφαρμόζεται και το θεώρημα 4 του ίδιου βιβλίου που θέτει ότι οι πλευρές των ισογώνιων τριγώνων είναι ανάλογες[17].

5. Οι πλάνες των παρατηρούμενων επιπέδων: τα θεωρήματα 10 και 11

Τα θεωρήματα 10 και 11 αποτελούν πολύ σημαντικές προτάσεις της προοπτικής. Το θεώρημα 10 δηλώνει ότι, μεταξύ των επιπέδων που βρίσκονται κάτω από το επίπεδο του οφθαλμού, εκείνα που βρίσκονται πιο μακριά από τον οφθαλμό φαίνονται ψηλότερα[18]. Το θεώρημα 11 εξετάζει την αντίστροφη περίπτωση και θέτει ότι, μεταξύ των επιπέδων που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο του οφθαλμού, εκείνα που βρίσκονται πιο μακριά φαίνονται χαμηλότερα[19]. Μεταξύ των δύο εκδόσεων δεν παρατηρούνται διαφορές ως προς τον τρόπο απόδειξης, ενώ οι εκφράσεις τους είναι παραπλήσιες. Το ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι, προκειμένου να αποδειχθούν, χρησιμοποιείται, εκτός από τον 5ο «όρο» των συγγραμμάτων, ένα επίπεδο που 'κόβει' τον οπτικό κώνο, δηλαδή ένα επίπεδο προβολής. Το επίπεδο αυτό υπάρχει στα σχήματα των θεωρημάτων 10 και 11 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και, ενώ υπάρχει στο σχήμα του θεωρήματος 10 των *Οπτικών*, απουσιάζει από το σχήμα του θεωρήματος 11. Η εισαγωγή των επιπέδων προβολής που 'κόβουν' τον οπτικό κώνο

---

[16]«*Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον*», *Στοιχεία* V, *ορισμός* 7.
«*Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον*», *Στοιχεία*, V, *ορισμός* 12.
«*Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον*», *Στοιχεία*, V, *ορισμός* 14.

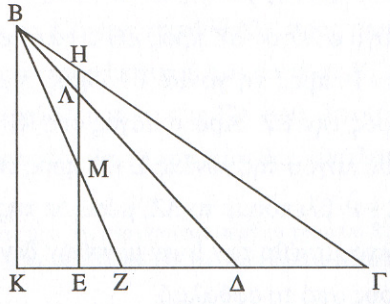
[17]«*Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι*», *Στοιχεία*, VI, 33.
«*Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι*», *Στοιχεία*, VI, 4.

[18] Στα *Οπτικά* το θεώρημα 10 δηλώνεται ως «*Τῶν κάτω τοῦ ὄμματος κειμένων ἐπιπέδων τὰ πόρρω μετεωρότερα φαίνεται*» και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ως «*Τῶν κάτω τοῦ ὄμματος ἐπιπέδων κειμένων τὰ πόρρω μετεωρότερα φανεῖται*».

[19] Στα *Οπτικά* το θεώρημα 11 δηλώνεται ως «*Τῶν ἄνω τοῦ ὄμματος κειμένων ἐπιπέδων τὰ πόρρω ταπεινότερα φαίνεται*» και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ως «*Τῶν ἄνω τοῦ ὄμματος ἐπιπέδων κειμένων τὰ πόρρω ταπεινότερα φανεῖται*».

στα σχήματα των συγκεκριμένων θεωρημάτων αποτέλεσε το έναυσμα για να ξεκινήσουν κάποιες συζητήσεις που αφορούν στο αν ο Ευκλείδης είχε συλλάβει την έννοια της γραμμικής προοπτικής και κατά πόσο αυτή είναι συμβατή με το σύστημα της γωνιακής προοπτικής που προτείνει το σύστημά του[20]. Αλλά, ας εξετάσουμε πιο λεπτομερώς τα συγκεκριμένα θεωρήματα:

Αναλυτικότερα, όπως φαίνεται στο σχήμα 8-16, στη διασωζόμενη απόδειξη του θεωρήματος 10 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* υποτίθεται ότι ο οφθαλμός Β βρίσκεται πάνω από το επίπεδο ΚΓ, στο οποίο προσπίπτουν οι όψεις ΒΓ, ΒΔ, ΒΖ, ΒΚ. Επιπλέον, υποτίθεται ότι η ΒΚ είναι κάθετη στην ΚΓ:



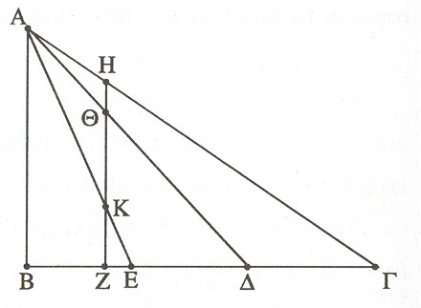
Σχήμα 8-16
Αναθεωρημένη Έκδοση- Θεώρημα 10

Αυτό που πρέπει να αποδειχθεί είναι ότι το επίπεδο ΓΔ που είναι πιο μακριά από τον οφθαλμό φαίνεται ψηλότερο από το ΔΖ που βρίσκεται πιο κοντά και, ομοίως, το επίπεδο ΔΖ φαίνεται ψηλότερο από το ΖΚ. Από ένα τυχαίο σημείο της ΚΓ, δηλαδή από το Ε, φέρεται άλλη μια κάθετη προς αυτή, η ΕΗ. Στη συνέχεια, αναπτύσσεται ένας ενδιαφέρον συλλογισμός, παρόλο που εκφραστικά είναι λίγο αδέξιος και άκομψος. Αρχικά, υποστηρίζεται ότι, επειδή οι όψεις προσπίπτουν πρώτα πάνω στην ΗΕ και μετά πάνω στην ΕΓ, έπεται ότι η ΒΓ θα συναντήσει πρώτα την ΗΕ στο σημείο Η, η ΒΔ στο σημείο Λ και η ΒΖ στο σημείο Μ. Ωστόσο, όπως φαίνεται στο υποτιθέμενο επίπεδο προβολής, το σημείο Η είναι ψηλότερα από το Λ και το Λ ψηλότερα από το Μ. Αλλά, όπως δηλώνεται στην απόδειξη, εκεί όπου βρίσκεται το Η, εκεί βρίσκεται και το Γ, εκεί όπου βρίσκεται το Λ, εκεί βρίσκεται το Δ, εκεί όπου βρίσκεται το Μ, εκεί βρίσκεται το Ζ[21]. Όμως, μέσω των όψεων ΒΓ, ΒΔ φαίνεται το ΔΓ, μέσω των ΒΔ, ΒΖ φαίνεται το ΖΔ και, μέσω των ΒΖ, ΒΚ, φαίνεται η ΚΖ.

[20] Βλ. κεφ. 2, μέρος 1ο.
[21] Αυτό συμβαίνει γιατί τα ζεύγη σημείων βρίσκονται πάνω σε ίδιες οπτικές ακτίνες.

Βασιζόμενος τελικά στον 5ο «όρο» του συγγράμματος ο συγγραφέας συμπεραίνει ότι το επίπεδο ΓΔ θα φανεί ψηλότερα από το ΖΔ και το ΖΔ ψηλότερα από το ΖΚ.

Παρατηρούμε ότι στο πλαίσιο της συγκεκριμένης απόδειξης επιχειρείται να δηλωθεί κατά έναν πολύ απλοϊκό τρόπο ότι οι θέσεις που καταλαμβάνουν τα σημεία των οπτικών ακτίνων, όταν προβάλλονται στο υποτιθέμενο επίπεδο ΗΕ, ισοδυναμούν με τις θέσεις που καταλαμβάνουν, όταν προσπίπτουν στο επίπεδο ΚΓ. Έτσι, σύμφωνα με τα λεγόμενα της απόδειξης, «*ἐν ᾧ ἐστι τὸ Η, ἐν τούτῳ τὸ Γ, ἐν ᾧ δὲ τὸ Λ, ἐν τούτῳ τὸ Δ, ἐν ᾧ δὲ τὸ Μ, ἐν τούτῳ τὸ Ζ*». Ακριβώς ο ίδιος συλλογισμός αναπτύσσεται και στην απόδειξη των *Οπτικών*. Αν λάβουμε υπόψη τον διαφορετικό γραμματισμό στο σχήμα 8-17, και στη διασωζόμενη απόδειξη των *Οπτικών* συναντάμε



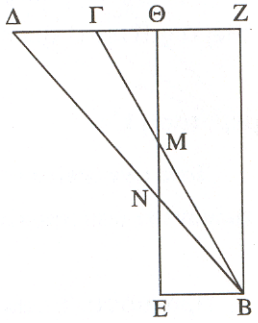
Σχήμα 8-17
Οπτικά – Θεώρημα 10

την ανάλογη αδέξια έκφραση «*ἐν ᾧ ἐστι τὸ Η, ἐν τούτῳ τὸ Γ, ἐν ᾧ δὲ τὸ Θ, ἐν τούτῳ τὸ Δ, ἐν ᾧ δὲ τὸ Κ, ἐν τούτῳ τὸ Ε*». Αυτό που δυστυχώς δε γίνεται ξεκάθαρο σε καμία έκδοση είναι ότι, για παράδειγμα στο σχήμα των *Οπτικών*, τα σημεία Η, Θ, Κ βρίσκονται φαινομενικά και όχι πραγματικά στην ίδια θέση με τα Γ, Δ και Ε, αντίστοιχα. Ακόμα και αν αγνοήσουμε το παραπάνω πρόβλημα, μέσω των δύο αποδείξεων του θεωρήματος 10, εκφράζεται η δυνατότητα της όποιας ισοδυναμίας των σημείων ενός παρατηρούμενου επιπέδου με τα σημεία ενός άλλου υποτιθέμενου επιπέδου, γεγονός που μάς φέρνει αντιμέτωπους με μια σημαντική προϋπόθεση που δεν έχει τεθεί στους «όρους» των πραγματειών, αλλά εκφράζεται έμμεσα για πρώτη φορά στο θεώρημα 10.

Εφόσον, μέσω του υποτιθέμενου επιπέδου προβολής, δηλωθεί η σχετική θέση των σημείων, όπου προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες, οι συγγραφείς των δύο εκδόσεων βασιζόμενοι στον πέμπτο «όρο» των πραγματειών που θέτει ότι «*καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μετεωροτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα μετεωρότερα φαίνεσθαι,*

τὰ δὲ ὑπὸ ταπεινοτέρων ταπεινότερα» συμπεραίνουν την αντίστοιχη σχετική θέση των παρατηρούμενων επιπέδων. Δηλαδή, στην απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* διαβάζουμε ότι «*διὰ δὲ τῶν ΒΓ, ΒΔ ἡ ΔΓ φαίνεται, διὰ δὲ τῶν ΒΔ, ΒΖ ἡ ΖΔ, διὰ δὲ τῶν ΒΖ, ΒΚ ἡ ΚΖ, οὐκοῦν ἡ μὲν ΓΔ τῆς ΖΔ μετεωροτέρα φαίνεται, ἡ δὲ ΖΔ τῆς ΖΚ*» και στα *Οπτικά* ότι «*διὰ δὲ τῶν ΑΓ, ΑΔ ἡ ΔΓ φαίνεται, διὰ δὲ τῶν ΑΔ, ΑΕ ἡ ΔΕ, ἡ ΓΔ ἄρα τῆς ΔΕ μετεωροτέρα φαίνεται. ὁμοίως καὶ ἡ ΔΕ τῆς ΒΕ μετεωροτέρα φανήσεται*». Παρατηρούμε ότι και οι δύο συγγραφείς καταλήγουν στα τελικά συμπεράσματα ως προς τη φαινομενική θέση των παρατηρούμενων επιπέδων παραλείποντας να αναφερθούν όμως σε ενδιάμεσα σημαντικά βήματα που έχουν να κάνουν με τις οπτικές γωνίες, υπό τις οποίες παρατηρούνται τα επίπεδα, και τον προσδιορισμό των σχετικών θέσεων των εν λόγω οπτικών γωνιών πάνω στο υποτιθέμενο επίπεδο προβολής. Έτσι, αν λάβουμε υπόψη το σχήμα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, θα έπρεπε να γίνει αναφορά, πρώτον, στο ότι τα επίπεδα ΔΓ, ΖΔ, ΚΖ παρατηρούνται υπό τις οπτικές γωνίες ΓΒΔ, ΔΒΖ, ΖΒΚ, αντίστοιχα, δεύτερον, ότι οι γωνίες αυτές ισοδυναμούν φαινομενικά με τις ΗΒΛ, ΛΒΜ, ΜΒΚ, αντίστοιχα, του επιπέδου προβολής και, τρίτον, ότι η ΗΒΛ είναι ψηλότερη από τη ΛΒΜ, ενώ η ΝΒΜ είναι ψηλότερη από τη ΜΒΚ. Οι ανάλογες παρατηρήσεις θα έπρεπε να γίνονται και στην απόδειξη των *Οπτικών*.

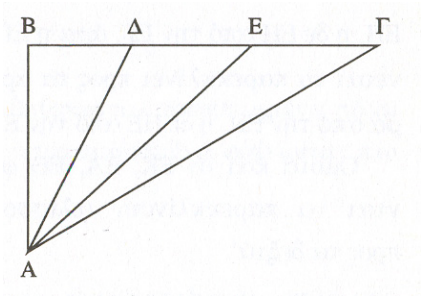
Η αντίστροφη περίπτωση του θεωρήματος 10 εξετάζεται στο θέωρημα 11, όπου ο οφθαλμός βρίσκεται χαμηλότερα των παρατηρούμενων επιπέδων, δηλαδή στο σημείο Β. Σύμφωνα με το θεώρημα 11 και το σχήμα 8-18 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, αυτό που πρέπει να αποδειχθεί είναι ότι το επίπεδο ΔΓ που βρίσκεται πιο μακριά από τον οφθαλμό θα φανεί χαμηλότερο από το ΓΘ και, ομοίως, το ΓΘ θα φανεί χαμηλότερο από το ΘΖ. Στο σχήμα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* υπάρχει πάλι



Σχήμα 8-18
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 11

το επίπεδο προβολής ΘΕ που συναντήσαμε και προηγουμένως, αλλά ούτε κατά την εισαγωγή των γεωμετρικών στοιχείων στο σχήμα ούτε κατά την έκθεση της απόδειξης δεν αναφέρεται τίποτα για τον ρόλο που διαδραματίζει. Το μόνο που κάνει ο συγγραφέας είναι να παραπέμψει τον αναγνώστη στην ανάλογη περίπτωση του θεωρήματος 10 που είχε προηγηθεί:
«*διὰ δὴ τὸ προεκτεθὲν θεώρημα ταπεινοτάτη τῶν ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος πρὸς τὸ Δ Ζ ἐπίπεδον προσπιπτουσῶν ἀκτίνων ἐστὶν ἡ ΒΔ, ἡ δὲ ΒΓ τῆς ΒΖ ταπεινοτέρα. ἀλλὰ διὰ μὲν τῶν ΒΔ, ΒΓ ἀκτίνων τὸ ΔΓ φαίνεται, διὰ δὲ τῶν ΒΓ, ΒΖ τὸ ΓΖ. τὸ ΔΓ ἄρα ταπεινότερον τοῦ ΓΖ ὁρᾶται*».

Ακριβώς τα ίδια πράγματα και η ίδια παραπομπή γίνεται και στο θεώρημα 11 των *Οπτικών*, στο σχήμα του οποίου χρησιμοποιούνται, όπως φαίνεται παρακάτω, περισσότερες ακτίνες, σε σχέση με το αντίστοιχο σχήμα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, αλλά το επίπεδο προβολής που 'κόβει' τον οπτικό κώνο απουσιάζει. Κατά



Σχήμα 8-19
Οπτικά – Θεώρημα 11

παρόμοιο τρόπο, ο συγγραφέας παραπέμπει στο προηγούμενο θεώρημα, μέσω του οποίου μπορεί κανείς να συμπεράνει τη σχετική θέση των ακτίνων και, ακολούθως, τη σχετική θέση των επιπέδων:
«*διὰ δὴ τὸ προεκτεθὲν θεώρημα ταπεινοτέρα ἡ μὲν ΑΓ ἀκτὶς τῆς ΑΕ, ἡ δὲ ΑΕ τῆς ΑΔ, ἡ δὲ ΑΔ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ διὰ μὲν τῶν ΓΑ, ΑΕ τὸ ΓΕ βλέπεται, διὰ δὲ τῶν ΕΑ, ΑΔ τὸ ΕΔ, διὰ δὲ τῶν ΔΑ, ΑΒ τὸ ΔΒ φαίνεται. τὸ ΓΕ ἄρα τοῦ ΕΔ ταπεινότερον φαίνεται, τὸ δὲ ΕΔ τοῦ ΔΒ*».

Τα θεωρήματα 10 και 11 των δύο εκδόσεων παρουσιάζουν αρκετά προβλήματα. Το γεγονός ότι το επίπεδο προβολής, παρόλο που υπάρχει στα δύο σχήματα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, ωστόσο, στην απόδειξη του θεωρήματος 11 δε γίνεται καθόλου λόγος γι' αυτό, σε συνδυασμό με το ότι το συγκεκριμένο επίπεδο, μολονότι παρουσιάζεται στο σχήμα της πρότασης 10 των *Οπτικών*, όμως απουσιάζει

από το σχήμα της πρότασης 11, μας δημιούργησε υποψίες, σχετικά με το αν το υποτιθέμενο επίπεδο προβολής αποτελεί μεταγενέστερη διόρθωση. Από την άλλη μεριά, οι αποδείξεις των δύο εκδόσεων δεν είναι πλήρεις, αλλά, όπως διαπιστώσαμε, απουσιάζουν αρκετά συλλογιστικά βήματα που είναι πολύ σημαντικά, καθώς η ύπαρξή τους θα υποδήλωνε έναν ορθό ή, για να το εκφράσουμε καλύτερα, έναν πιο ολοκληρωμένο τρόπο αντίληψης της έννοιας της γραμμικής προβολής, όπως επίσης, έναν πιο ορθό τρόπο χειρισμού του συγκεκριμένου συστήματος. Δε μπορούμε βέβαια να μην παραδεχτούμε ότι στις συγκεκριμένες αποδείξεις υπάρχουν κάποια στοιχεία που μας παραπέμπουν σε αυτή την τεχνική της προοπτικής, όμως, ταυτόχρονα, δε μπορούμε να αποδεχτούμε απερίφραστα ότι οι συγγραφείς αυτών των αποδείξεων και ιδιαίτερα ο Ευκλείδης, αν αποδεχτούμε ότι το κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι πιο κοντά προς όσα εκείνος συνέγραψε, εργάστηκε σε αυτό το θεωρητικό-συλλογιστικό πλαίσιο. Ο λόγος που υποστηρίζουμε κάτι τέτοιο είναι γιατί συμφωνώντας με τις παρατηρήσεις του W. Knorr που παρουσιάσαμε στο πρώτο μέρος του δεύτερου κεφαλαίου θεωρούμε ότι οι αποδείξεις των θεωρημάτων 10 και 11 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι μεταγενέστερες επεξεργασίες των αρχικών.

Αναλυτικότερα, όπως έχει επισημάνει και ο W. Knorr, στο *criticus apparatus* της έκδοσης του Heiberg πληροφορούμαστε ότι οι αποδείξεις των θεωρημάτων 10 και 11 έχουν δεχτεί βελτιώσεις από κάποιον μεταγενέστερο συγγραφέα (*manu recentiori*)[22]. Ο Heiberg αποκατέστησε τη *manu prima* των θεωρημάτων 10 και 11. Για το θεώρημα 10 η αποκατάσταση έχει ως εξής:

Χωρίο 1: «*οὐκοῦν τῶν ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος πρὸς τὸ ΓΚ ἐπίπεδον προσπιπτουσῶν ἀκτίνων μετεωροτέρα ἐστὶν ἡ ΒΓ ἤπερ ἡ ΒΖ. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς. οὐκοῦν τὸ μὲν Γ τοῦ Ζ μετεωρότερον φανεῖται, τὸ δὲ Ζ τοῦ Δ, τὸ δὲ Δ τοῦ Κ*»[23].

Για το θεώρημα 11 η αποκατάσταση έχει ως εξής:

Χωρίο 2: «*οὐκοῦν ταπεινοτάτη τῶν ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος πρὸς τὸ ΔΖ ἐπίπεδον προσπιπτουσῶν ἀκτί νων ἐστὶν ἡ ΒΔ, καὶ ἀπώτερον φαίνεται τὸ Δ· τὸ Δ ἄρα ταπεινότερον φαίνεται τοῦ Γ, τὸ δὲ Γ τοῦ Ζ*»[24].

---

[22]Knorr, "On the Principle of Linear Perspective", *Centaurus 34* (1991).
[23] έκδ. Heiberg, *έ.α.*, xix, για 166.20.
[24] *ό.π.*, xix, για 168.14.

Οι παραπάνω αρχικές μορφές των κειμένων παρουσιάζουν τις αποδείξεις των θεωρημάτων 10 και 11 στο αρχικό χειρόγραφο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, δηλαδή στο χειρόγραφο του Βατικανού του 10ου αιώνα και εκτιμούμε ότι με αυτόν τον τρόπο πρέπει να είχαν γραφτεί από τον Ευκλείδη. Άλλωστε, ο περιεκτικός τρόπος γραφής, η απλότητα, αλλά και η χαρακτηριστική λέξη «*οὐκοῦν*» δεν είναι πρωτόγνωρα στοιχεία, αλλά συναντώνται στις περισσότερες αποδείξεις της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* που εκτιμούμε ότι φέρει ίχνη της αρχικής γραφής του Ευκλείδη. Οι υπόλοιπες αποδείξεις των θεωρημάτων 10 και 11 που διασώζονται στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* και στα *Οπτικά* της έκδοσης του Heiberg και που παρουσιάσαμε αναλυτικώς παραπάνω αποτελούν μεταγενέστερες διορθώσεις που αποσκοπούσαν σε μια πιο βελτιωμένη και πιο επεξηγηματική έκθεση των αρχικών αποδείξεων. Ενδεχομένως, η εισαγωγή του υποτιθέμενου επιπέδου που εμείς μεταφράζουμε ως 'επίπεδο προβολής' να έγινε από τους μεταγενέστερους διορθωτές, προκειμένου να δηλωθούν με έναν πιο σχηματικό και κατανοητό τρόπο οι σχετικές θέσεις των οπτικών ακτίνων προσπαθώντας να αποφύγουν τον χαλαρό και απλοϊκό τρόπο με τον οποίο προσδιορίζονταν στις αρχικές αποδείξεις. Η πρακτική αυτή δε συνεπάγεται ότι βελτίωσαν τις αρχικές αποδείξεις γνωρίζοντας και εκτελώντας στη συγκεκριμένη περίπτωση τους κανόνες της γραμμικής προοπτικής. Από την άλλη μεριά, εκτιμούμε ότι δε μπορεί κανείς να αποκλείσει κατηγορηματικά ότι η συγκεκριμένη πρακτική έγινε τυχαία, χωρίς να αφορμάται έστω και από κάποιο στοιχειώδες θεωρητικό υπόβαθρο.

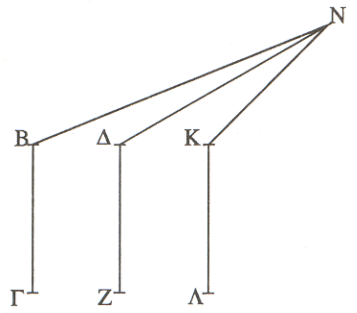
6. Κι άλλες βασικές προτάσεις προοπτικής: τα θεωρήματα 13 και 14

Τα θεωρήματα 13 και 14 εξετάζουν τις περιπτώσεις εκείνες, όπου ο οφθαλμός παρατηρεί ίσα μεγέθη που βρίσκονται είτε κάτω είτε πάνω από το επίπεδό του. Αναλόγως με τη θέση, στην οποία βρίσκονται, δηλώνεται ότι τα μακρινότερα από τον οφθαλμό μεγέθη θα φανούν είτε ψηλότερα είτε χαμηλότερα απ' ό,τι πραγματικά είναι[25]. Τα θεωρήματα 13 και 14 θυμίζουν τις προτάσεις 10 και 11 που εξετάσαμε

[25] Στα *Οπτικά* το θεώρημα 13 δηλώνεται ως «*Τῶν ἴσων μεγεθῶν καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὄμμα κειμένων τὰ πόρρω μετεωρότερα φαίνεται*», ενώ στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ως «*Τῶν ἴσων μεγεθῶν ὑπὸ τὸ ὄμμα κειμένων τὰ πόρρω κείμενα μετεωρότερα φαίνεται*». Επίσης, το θεώρημα 14 των *Οπτικών* δηλώνει ότι «*Τῶν ἴσων μεγεθῶν καὶ ἀνωτέρω τοῦ ὄμματος κειμένων τὰ πόρρω ταπεινότερα φαίνετ*

προηγουμένως. Ενώ όμως πριν το αντικείμενο της παρατήρησης ήταν το επίπεδο, τώρα το αντικείμενο της παρατήρησης είναι γενικά το «*μέγεθος*».

Μεταξύ των δύο εκδόσεων δεν υπάρχουν διαφορές, ως προς τον συλλογισμό που ακολουθείται. Ωστόσο, για άλλη μια φορά παρατηρείται ότι οι αποδείξεις της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, σε αντίθεση με εκείνες των *Οπτικών*, είναι γραμμένες με πιο περιεκτικό τρόπο. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στο σχήμα 8-20, στο θεώρημα 13 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* υποτίθεται ότι κάτω από το επίπεδο του οφθαλμού Ν είναι τοποθετημένα τα ίσα μεγέθη ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ. Επιπλέον, υποτίθεται ότι από το σημείο Ν προσπίπτουν οι όψεις ΝΒ, ΝΔ, ΝΚ:



Σχήμα 8-20
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 13

Αυτό που πρέπει να αποδειχθεί είναι ότι τα πιο μακρινά από τον οφθαλμό μεγέθη φαίνονται ψηλότερα από τα πιο κοντινά. Ο συλλογισμός του συγγραφέα είναι πολύ σύντομος:

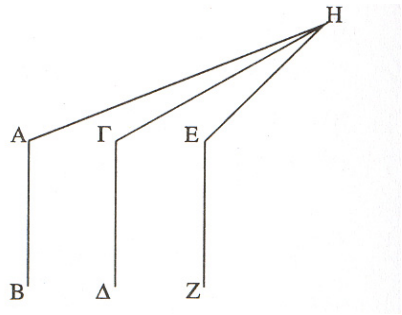
«*οὐκοῦν μετεωροτάτη ἐστὶν ἡ ΝΒ τῶν λοιπῶν ἀκτίνων·*
ὥστε καὶ τὸ Β σημεῖον.
τὸ ἄρα ΒΓ τοῦ ΔΖ μετεωρότερον φαίνεται, τὸ δὲ ΔΖ τοῦ ΚΛ.
τῶν ἄρα ἴσων μεγεθῶν ὑπὸ τὸ ὄμμα κειμένων τὰ πόρρω κείμενα μετεωρότερα φ αίνεται».

Ο συγγραφέας προσδιορίζει τη θέση της οπτικής ακτίνας ΒΝ, σε σχέση με τις υπόλοιπες, ως προς το ύψος. Με τον τρόπο αυτό, καταφέρνει να προσδιορίσει την αντίστοιχη θέση του σημείου Β του παρατηρούμενου μεγέθους, σε σχέση με τα υπόλοιπα σημεία των μεγεθών, πάνω στα οποία προσπίπτουν οι υπόλοιπες ακτίνες. Εφόσον το σημείο Β του μεγέθους ΒΓ είναι ψηλότερο από τα υπόλοιπα, σύμφωνα με

αι» και της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* ότι «*Τῶν ἴσων μεγεθῶν ἄνω τοῦ ὄμματος κειμένων τὰ πόρρω κείμενα ταπεινότερα φαίνετ αι*».

τον 5ο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, συνάγεται ότι το ΒΓ θα φαίνεται ψηλότερο από το ΔΖ. Χωρίς να επαναλάβει τον ίδιο συλλογισμό για τη σχετική θέση των οπτικών ακτίνων ΝΔ, ΝΚ και, κατόπιν, για τα σημεία Δ, Κ, ο συγγραφέας εκφράζει αμέσως το συμπέρασμα ότι το ΔΖ θα φανεί μεγαλύτερο από το ΚΛ.

Η απόδειξη του θεωρήματος 13 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* παρουσιάζεται με περιεκτικό και σύντομο τρόπο αποφεύγοντας όποιες επαναλήψεις θα μπορούσαν να θεωρηθούν περιττές. Αντίθετα, η αντίστοιχη απόδειξη των *Οπτικών*, παρόλο που ακολουθεί την ίδια συλλογιστική πορεία, παρουσιάζεται με πιο σχολαστικό τρόπο. Έτσι, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, υποτίθεται ότι ο οφθαλμός Η βρίσκεται πάνω από το επίπεδο των παρατηρούμενων ίσων μεγεθών ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ και ότι προσπίπτουν οι όψεις ΗΑ, ΗΓ, ΗΕ:



Σχήμα 8-21
Οπτικά – Θεώρημα 13

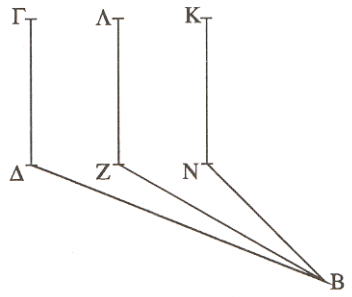
Σύμφωνα με τον συγγραφέα,

«ἐπεὶ γὰρ ἡ ΗΑ τῆς ΗΓ ἐστι μετεωροτέρα, ἡ δὲ ΗΓ τῆς ΗΕ,
καὶ ἐν ᾧ εἰσιν αἱ ΗΑ, ΗΓ, ΗΕ, ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ τὰ Α, Γ, Ε σημεῖα,
ἐν ᾧ δὲ τὰ Α, Γ, Ε, ἐν τούτῳ καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ μεγέθη,
τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ ΓΔ μετεωρότερον φαίνεται, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ ΕΖ».

Παρατηρούμε ότι ο συγγραφέας του θεωρήματος 13 των *Οπτικών* είναι πιο λεπτομερής από τον συγγραφέα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Αναφέρεται σε κάθε στοιχείο του σχήματος ξεχωριστά, χωρίς να τον απασχολεί, αν επαναλαμβάνεται. Επιπλέον, η απόδειξή του εμφανίζεται πιο τακτοποιημένη. Αρχικά, αναφέρεται στη σχετική θέση καθεμίας οπτικής ακτίνας ξεχωριστά. Στη συνέχεια, μεταβαίνει στο να προσδιορίσει την αντίστοιχη σχετική θέση των σημείων εκείνων που όντας πέρατα των οπτικών ακτίνων συμπίπτουν με τα σημεία – πέρατα των παρατηρούμενων μεγεθών. Επομένως, μέσω του 5ου «όρου» των *Οπτικών*, αποδεικνύει ότι τα ίσα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ φαινομενικά δεν έχουν το ίδιο ύψος, αλλά το ΑΒ που απέχει

περισσότερο από τον οφθαλμό φαίνεται ψηλότερο από το ΓΔ και το ΓΔ φαίνεται με τη σειρά του ψηλότερο από το ΕΖ.

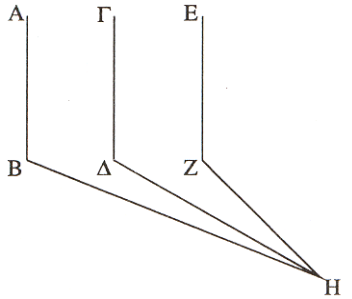
Όπως έχουμε προαναφέρει, στο θεώρημα 14 επιχειρείται να αποδειχθεί το αντίστροφο του θεωρήματος 13, δηλαδή ότι, μεταξύ ίσων μεγεθών που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο του οφθαλμού, όσα βρίσκονται πιο μακριά από τον οφθαλμό φαίνονται χαμηλότερα. Η απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι ακριβώς ανάλογη με την απόδειξη του θεωρήματος 13 που είχε προηγηθεί, ενώ ο τρόπος παρουσίασής της διέπεται από τα ίδια χαρακτηριστικά απλότητας και περιεκτικότητας. Αν λάβουμε υπόψη το σχήμα 8-22, η απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι η εξής:



Σχήμα 8-22
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 14

«*ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ ΚΝ, ΛΖ, ΓΔ ἄνω τοῦ ὄμματος κείμενα τοῦ Β,*
καὶ ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΒΝ, ΒΖ, ΒΔ.
οὐκοῦν ταπεινοτάτη ἐστὶν ἡ ΒΔ·
ὥστε καὶ τὸ Δ.
ὥστε καὶ τὸ μὲν ΓΔ ταπεινότερον φαίνεται τοῦ ΛΖ, τὸ δὲ ΛΖ τοῦ ΚΝ».

Η απόδειξη του θεωρήματος 14 των *Οπτικών* είναι ανάλογη με εκείνη του θεωρήματος 13, τόσο ως προς τον τρόπο θεμελίωσης, όσο και ως προς τον τρόπο έκθεσης:



Σχήμα 8-23
Οπτικά – Θεώρημα 14

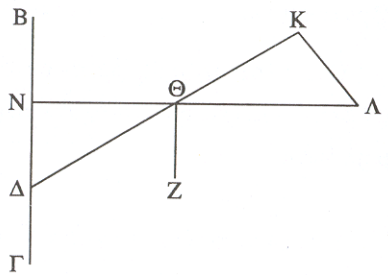
«*ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ μετεωρότερα κείμενα τοῦ ὄμματος τοῦ Η.*
λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ ταπεινότερον φαίνεται, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ ΕΖ.
προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΗΒ, ΗΔ, ΗΖ.
ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΒ ἀκτὶς τῆς ΗΔ ἐστι ταπεινοτέρα, ἡ δὲ ΗΔ τῆς ΗΖ,
ἀλλ' ἐν ᾧ εἰσιν αἱ ΗΒ, ΗΔ, ΗΖ, ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ τὰ Β, Δ, Ζ σημεῖα,
ἐν ᾧ δὲ τὰ Β, Δ, Ζ, ἐν τούτῳ καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ μεγέθη,
τὸ μὲν ΑΒ ἄρα τοῦ ΓΔ ταπεινότερον φαίνεται,
τὸ δὲ ΓΔ τοῦ ΕΖ [ταπεινότερόν ἐστιν]».

Για άλλη μια φορά, διαπιστώνουμε ότι οι αποδείξεις των *Οπτικών* φέρουν ίχνη μιας μεταγενέστερης επεξεργασίας, σε σχέση με εκείνες της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* που θεωρούμε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις είναι προγενέστερες. Ωστόσο, παρατηρούμε άλλο ένα σημαντικό στοιχείο που ενισχύει την εκτίμηση που είχαμε εκφράσει στην προηγούμενη ενότητα, όσον αφορά στα χωρία 1 και 2 του χειρογράφου του Βατικανού που σχετίζονταν με τις αποδείξεις των θεωρημάτων 10 και 11. Προηγουμένως, είχαμε τονίσει ότι τα χωρία αυτά παρουσιάζουν τις αρχικές αποδείξεις των θεωρημάτων 10 και 11 και ότι έτσι πρέπει να είχαν γραφτεί από τον Ευκλείδη. Αν προσέξουμε τον τρόπο γραφής των δύο χωρίων και τον συγκρίνουμε με τον τρόπο γραφής των αποδείξεων των θεωρημάτων 13 και 14 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, διαπιστώνουμε ότι τα κείμενα αυτά είναι πολύ κοντά το ένα στο άλλο, τόσο στις εκφράσεις που χρησιμοποιούν όσο και στον σύντομο και περιεκτικό τρόπο, με τον οποίο ξεδιπλώνεται ο συλλογισμός τους. Επίσης, οι αδέξιες εκφράσεις «*ἀλλ' ἐν ᾧ εἰσιν...ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ*», «*ἐν ᾧ δὲ...ἐν τούτῳ καὶ*» που συναντήσαμε στα θεωρήματα 10, 11 των *Οπτικών* και της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, ενώ υπάρχουν και στα θεωρήματα 13 και 14 των *Οπτικών*, ωστόσο, αυτή τη φορά, απουσιάζουν από τα αντίστοιχα θεωρήματα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Τα παραπάνω στοιχεία μαρτυρούν για άλλη μια φορά ότι οι αποδείξεις 10 και 11 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* οφείλονται σε κάποιον μεταγενέστερο διορθωτή, ενώ οι αποδείξεις 13 και 14 της ίδιας έκδοσης πρέπει να διασώζουν την αρχική μορφή γραφής, εφόσον παρουσιάζουν συμφωνίες με τη *manu prima* των χωρίων 1 και 2 που παραθέσαμε. Αντίθετα, οι αποδείξεις των *Οπτικών* αποδεικνύεται ότι είναι μεταγενέστερες.

7. Μετατόπιση του οφθαλμού και μεταβολές στα φαινομενικά μεγέθη: τα θεωρήματα 15-17

Στα θεωρήματα 15-17 δηλώνεται ότι, αν κάποια άνισα ύψη παρατηρούνται από έναν οφθαλμό που βρίσκεται πάνω από το επίπεδό τους, τότε το μεγαλύτερο ύψος φαίνεται να ξεπερνά το μικρότερο κατά μεγαλύτερο ή μικρότερο μέγεθος, σε μια ενδεχόμενη προσέγγιση ή απομάκρυνση του οφθαλμού, αντίστοιχα. Εάν ο οφθαλμός τοποθετηθεί σε επίπεδο κάτω από τα ύψη, συμβαίνει το αντίθετο και, τέλος, εάν ο οφθαλμός τοποθετηθεί στο επίπεδο του μικρότερου ύψους, τότε το μεγαλύτερο θα φαίνεται να ξεπερνά το μικρότερο κατά ίσο μέγεθος είτε αν το μάτι πλησιάζει τα ύψη είτε αν απομακρύνεται από αυτά[26].

Για άλλη μια φορά, παρόλο που ο τρόπος παρουσίασης των αποδείξεων των *Οπτικών* είναι πιο σχολαστικός από εκείνον της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, ο τρόπος θεμελίωσής τους δεν παρουσιάζει διαφοροποιήσεις. Έτσι, στο θεώρημα 15 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* υποτίθεται ότι τα δύο άνισα παρατηρούμενα ύψη είναι τα



Σχήμα 8-24
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 15

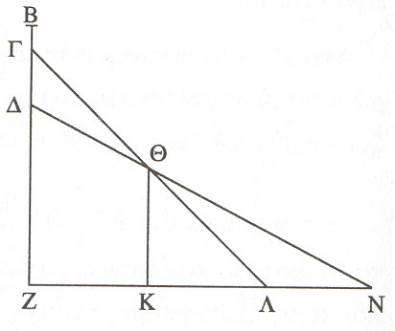
ΒΓ και ΘΖ, ενώ ο οφθαλμός βρίσκεται πάνω από αυτά, στο σημείο Κ. Επιπλέον, υποτίθεται ότι η οπτική ακτίνα που προσπίπτει από τον οφθαλμό διέρχεται από το σημείο Θ και είναι η ΚΔ. Ο βασικός συλλογισμός αποτελείται από δύο κύρια βήματα.

---

[26] Στα *Οπτικά* το θεώρημα 15 δηλώνει ότι «*Ὅσα ἀλλήλων ὑπερέχει ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὄμμα κείμενα, προσιόντος μὲν τοῦ ὄμματος μείζονι μεῖζον τὸ ὑπερφαινόμενον φαίνεται, ἀπιόντος δὲ ἐλάσσονι*», το θεώρημα 16 ότι «*Ὅσα ἀλλήλων ὑπερέχει ἐπάνω τοῦ ὄμματος ἄνισα μεγέθη, προσιόντος μὲν τοῦ ὄμματος ἐλάσσονι μεῖζον φαίνεται τὸ ὑπερφαινόμενον, ἀπιόντος δὲ μείζονι*» και το θεώρημα 17 ότι «*Ὅσα ἀλλήλων ὑπερέχει, ἐπ' εὐθείας τῷ ἐλάττονι μεγέθει τοῦ ὄμματος προσιόντος τε καὶ ἀφισταμένου τῷ ἴσῳ ἀεὶ δόξει τὸ ὑπερφαινόμενον τοῦ ἐλάττονος ὑπερέχειν*». Παράλληλα, το θεώρημα 15 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* θέτει ότι «*Ὅσα ἀλλήλων ὑπερέχει τῶν ὑπὸ τὸ ὄμμα κειμένων, προσιόντος μὲν τοῦ ὄμματος μείζονι τὸ ὑπερφαινόμενον φαίνεται μεῖζον, ἀπιόντος δὲ ἐλάττονι μεῖζον*», το θεώρημα 16 ότι «*Ὅσα ἀλλήλων ὑπερέχει κάτω τοῦ ὄμματος κειμένου, προσιόντος μὲν τοῦ ὄμματος ἐλάττονι μεῖζον τὸ ὑπερφαινόμενον φαίνεται, ἀπιόντος δὲ μείζονι μεῖζον*» και το θεώρημα 17 ότι «*Ὅσα ἀλλήλων ὑπερέχει τοῦ ὄμματος ἐπ' εὐθείας τῷ ἐλάσσονι μεγέθει ὄντος, προσιόντος τε καὶ ἀφισταμένου τοῦ ὄμματος τῷ ἴσῳ αἰεὶ δόξει τὸ ὑπερφαινόμενον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν*».

Αρχικά, διαπιστώνεται ότι, αν ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Κ, το ΒΓ φαίνεται να ξεπερνά το ΘΖ κατά μέγεθος ΒΔ. Εάν όμως ο οφθαλμός μετατοπιστεί στη θέση Λ και προσπέσει πάλι η οπτική ακτίνα ΛΝ, διαμέσω του σημείου Θ, τότε το ΒΓ θα ξεπερνά το ΘΖ κατά μικρότερο μέγεθος, σε σχέση με το μέγεθος που το ξεπερνούσε, όταν ο οφθαλμός βρισκόταν στο Κ, δηλαδή το ξεπερνά κατά μέγεθος ΒΝ. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το θεώρημα 15 έχει αποδειχθεί. Ωστόσο, μεταξύ των δύο βημάτων μεσολαβεί μία πρόταση που, κατά την άποψή μας, δε χρειαζόταν, ενώ είναι παράταιρη προς το θεωρητικό πλαίσιο της ευκλείδειας γεωμετρικής οπτικής. Στην πρόταση αυτή λέγεται ότι το ΘΖ φαινόταν να είναι ίσο με το ΔΓ, επειδή παρατηρούνταν υπό του οφθαλμού και της ακτίνας ΚΔ[27]. Όμως, από τον 4ο «όρο»της πραγματείας γνωρίζουμε ότι η φαινομενική ισότητα δύο παρατηρούμενων αντικειμένων ως προς το μέγεθος εξαρτάται από το αν οι γωνίες υπό τις οποίες παρατηρούνται είναι ίσες. Θεωρούμε ότι, επειδή υπό του οφθαλμού και της ΚΔ παρατηρούνταν τα ΔΓ, ΘΖ, δε σημαίνει ότι τα μεγέθη αυτά φαίνονταν ίσα. Στην αντίστοιχη απόδειξη των *Οπτικών* η πρόταση αυτή απουσιάζει, αλλά εμφανίζεται στην αντίστροφή της, την 16. Αντίθετα, απουσιάζει από την πρόταση 16 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*.

Στο θεώρημα 16 δηλώνεται ότι, εάν ο οφθαλμός βρίσκεται κάτω από τα παρατηρούμενα ύψη, τότε, όταν ο οφθαλμός τα πλησιάζει, το μεγαλύτερο ύψος θα φαίνεται να ξεπερνά το μικρότερο ύψος κατά μικρότερο μέγεθος, απ΄ ό,τι το ξεπερνά, όταν ο οφθαλμός απομακρύνεται. Η αποδεικτική διαδικασία είναι παρόμοια με εκείνη που παρακολουθήσαμε προηγουμένως. Έτσι, στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* υποτίθεται ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Λ, δηλαδή κάτω από τα παρατηρούμενα άνισα ύψη ΒΖ και ΘΚ:

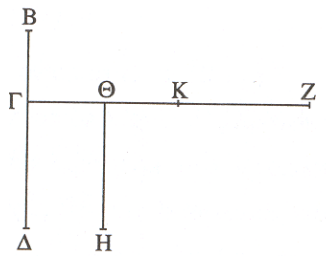


[27] «*ἴσον γὰρ ἐφαίνετο τὸ ΘΖ τῷ ΔΓ, ἐπειδὴ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ὄμματος καὶ τῆς ΚΔ ἀκτῖνος ἑωρᾶτο*», βλ. *Opticorum Recensio Theonis*, 172.17-18.

Σχήμα 8-25
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 16

Υποτίθεται ότι από το σημείο Λ ξεκινά μια οπτική ακτίνα που διέρχεται από το σημείο Θ, δηλαδή από το άκρο του μικρότερου ύψους, και προσπίπτει στο σημείο Γ του ύψους ΒΖ. Επομένως, το μεγαλύτερο ύψος θα φαίνεται να υπερέχει του μικρότερου κατά μέγεθος ΒΓ. Εάν υποτεθεί ότι ο οφθαλμός απομακρύνεται και τοποθετείται στο σημείο Ν, από όπου ξεκινά μια οπτική ακτίνα που διέρχεται πάλι από το σημείο Θ και προσπίπτει στο Δ, τότε το ύψος ΒΖ φαίνεται να ξεπερνά το μικρότερο κατά ΒΔ, δηλαδή κατά μεγαλύτερο μέγεθος, σε σχέση με το μέγεθος που το ξεπερνούσε, όταν ο οφθαλμός βρισκόταν πλησιέστερα προς τα παρατηρούμενα ύψη.

Τέλος, το θεώρημα 17 εξετάζει την περίπτωση που ο οφθαλμός βρίσκεται στην ίδια ευθεία με το άκρο του μικρότερου ύψους. Συγκεκριμένα, στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* υποτίθεται ότι τα άνισα ύψη είναι τα ΒΔ και ΘΗ. Το ΒΔ



Σχήμα 8-26
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 17

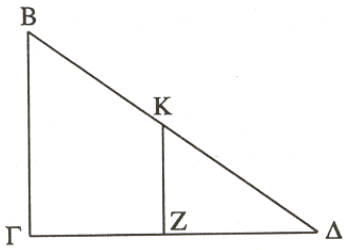
ξεπερνά το ΘΗ κατά μέγεθος ΒΓ. Ενώνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΓΘ και επεκτείνεται, μέχρι το σημείο Ζ. Στο σημείο αυτό τοποθετείται ο οφθαλμός και δηλώνεται ότι η οπτική ακτίνα που ξεκινά από αυτόν συμπίπτει με τη ΖΓ. Εάν ο οφθαλμός μετακινηθεί στο σημείο Κ, η οπτική ακτίνα θα συμπίπτει πάλι με τη ΖΓ. Επομένως, σε οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ΖΓ και αν τοποθετηθεί ο οφθαλμός, το μεγαλύτερο ύψος ΒΔ θα φαίνεται να ξεπερνά το μικρότερο ύψος κατά ίσο μέγεθος, δηλαδή κατά μέγεθος ΒΓ.

8. Το «γνώριμον» και το «δοθέν»: τα θεωρήματα 18-21

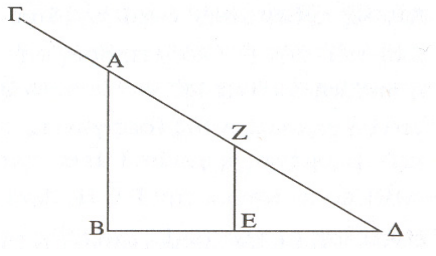
Τα θεωρήματα 18–21 πραγματεύονται ζητήματα προσδιορισμού του ύψους ή του μήκους κάποιων παρατηρούμενων μεγεθών. Διαφοροποιούνται ριζικά από τα υπόλοιπα θεωρήματα, καθώς αποτελούν τις μοναδικές περιπτώσεις, όπου αυτό που ενδιαφέρει δεν είναι να προβληθεί η φαινομενική διάσταση της οπτικής αντίληψης και, συνεπώς, ο σχετικός χαρακτήρας της, αλλά η ανάδειξη της πραγματικότητας. Οι συγκεκριμένες προτάσεις αποτελούν προβλήματα έμμεσων μετρήσεων του ύψους, του βάθους ή του μήκους των παρατηρούμενων μεγεθών. Εντάσσονται στην κατηγορία των πολύ παλαιών προβλημάτων, η επίλυση των οποίων ήταν σημαντική για την πραγματοποίηση κατασκευών και έργων ή για την αντιμετώπιση μηχανικών και άλλων πρακτικών αναγκών.

Εξετάζοντας τα προβλήματα 18-21 εντοπίσαμε ανάμεσα στις δύο εκδόσεις ορισμένες λεπτές διαφορές που, ενώ με την πρώτη ματιά φαίνονται ασήμαντες, ωστόσο, θεωρούμε ότι είναι άκρως αποκαλυπτικές, καθώς ενισχύουν την άποψη που έχουμε διατυπώσει, σχετικά με την ταυτότητα των δύο κειμένων.

Συγκεκριμένα, το πρόβλημα 18 που τίθεται στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* ζητά «*Τὸ δοθὲν ὕψος γνῶναι, πόσον ἐστίν*». Στα *Οπτικά* το πρόβλημα 18 εκφράζεται ως «*Τὸ δοθὲν ὕψος γνῶναι, πηλίκον ἐστίν, ἡλίου φαίνοντος*». Παρόλο που, συνήθως, τα *Οπτικά* εμφανίζουν περισσότερη σχολαστικότητα, σε σχέση με την *Αναθεωρημένη Έκδοση*, η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος γίνεται στα δύο κείμενα με τον ίδιο τρόπο. Και στα δύο κείμενα υποτίθεται η εισαγωγή ενός «*γνώριμου*» μεγέθους, σε θέση παράλληλη προς το δοθέν, προκειμένου να σχηματιστούν ισογώνια τρίγωνα. Το στοιχείο αυτό δίνει τη δυνατότητα να εφαρμοστούν προτάσεις που αντλούνται από τη θεωρία των αναλογιών. Αν και μεταξύ των δύο επιλυτικών διαδικασιών δεν υπάρχουν σπουδαίες διαφορές, κρίνουμε σκόπιμο να τις εκθέσουμε αυτούσιες. Το ίδιο θα κάνουμε και για τα προβλήματα 19-21.



ἔστω γάρ, ὃ δεῖ ἐπιγνῶναι ὕψος,
πόσον ἐστί, τὸ ΒΓ,
καὶ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡλίου διὰ τοῦ Β
ἡ ΒΔ.



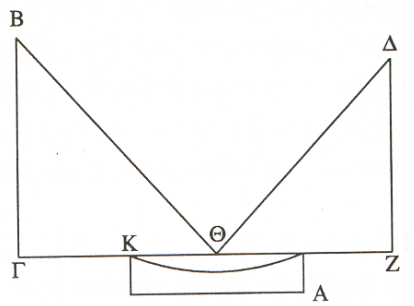
ἔστω τὸ δοθὲν ὕψος τὸ ΑΒ,
καὶ δέον αὐτὸ γνῶναι,
πηλίκον ἐστίν.
ἔστω μὲν ὄμμα τὸ Δ, ἡλίου
δὲ ἀκτὶς ἡ ΓΑ συμβάλλουσα τῷ πέ
ρατι τοῦ ΑΒ μεγέθους καὶ διήχθω μ
έχρι τοῦ Δ ὄμματος.
ἔστω δὲ σκιὰ ἡ ΛΒ τοῦ ΑΒ

Για πρώτη φορά παρατηρούμε σε μια πρόταση της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, αλλά και των *Οπτικών*, να εισάγεται μια φωτεινή ακτίνα που πηγάζει από τον ήλιο. Στην επίλυση της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δε γίνεται πουθενά λόγος για τον οφθαλμό. Φαίνεται ότι τη θέση του ως παρατηρησιακό σημείο την έχει λάβει ο ήλιος και ότι η φωτεινή ακτίνα που πηγάζει από αυτόν ισοδυναμεί μεθοδολογικά με την οπτική ακτίνα που βλέπουμε να πρωταγωνιστεί σε όλα τα θεωρήματα. Αντίθετα, στο κείμενο των *Οπτικών*, ενώ υποτίθεται η ύπαρξη μιας φωτεινής ακτίνας, γίνεται σαφής διάκριση μεταξύ ήλιου και οφθαλμού, αφού επισημαίνεται ότι το καθένα από αυτά καταλαμβάνει διαφορετικές θέσεις. Υποθέτουμε ότι ο συγγραφέας των *Οπτικών* προσπαθεί να είναι πιο συνεπής, γιατί πουθενά μέσα στο σύνολο της πραγματείας, π.χ. στους «όρους», δεν έχει αναφερθεί ότι ο οφθαλμός μπορεί από μεθοδολογική άποψη να ισοδυναμεί με οποιαδήποτε άλλη φωτεινή πηγή, όπως ο ήλιος. Από την άλλη μεριά, η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος προϋποθέτει τη διαμόρφωση της σκιάς του παρατηρούμενου μεγέθους, επομένως, η ύπαρξη της φωτεινής ακτίνας ήταν επιβεβλημένη και ο συγγραφέας δε μπορούσε να την αποφύγει. Πάντως,

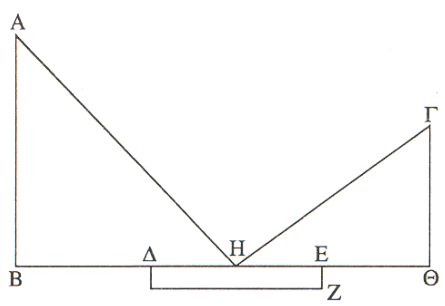
θεωρούμε ότι, ενώ ο συγγραφέας των *Οπτικών* προσπαθεί να είναι πιο συνεπής, ωστόσο, η υπόθεσή του περί ύπαρξης του οφθαλμού δεν εξυπηρετεί πουθενά.

Αν εξαιρεθούν οι παραπάνω μικρές διαφορές, οι δύο επιλύσεις του προβλήματος ακολουθούν την ίδια συλλογιστική πορεία. Και στα δύο κείμενα υποτίθεται η τοποθέτηση ενός «*γνώριμου*» μεγέθους, παράλληλα προς το ύψος, ώστε να σχηματίζονται δύο ισογώνια τρίγωνα. Βασιζόμενοι στο θεώρημα 4 του βιβλίου VI των *Στοιχείων* που δηλώνει ότι «*Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι*» και οι δύο συγγραφείς εργάζονται με τους λόγους που προκύπτουν.

Η ίδια μεθοδολογία ακολουθείται και στο πρόβλημα 19, στο οποίο ζητάται, σύμφωνα με το πρόβλημα 19 των *Οπτικών*, «*Μὴ ὑπάρχοντος ἡλίου τὸ δοθὲν ὕψος γνῶναι, πηλίκον ἐστίν*» και, σύμφωνα με την *Αναθεωρημένη Έκδοση*, «*Μὴ ὄντος ἡλίου τὸ δοθὲν ὕψος γνῶναι, ἡλίκον ἐστίν*». Αυτό που βοηθά στην επίλυση του προβλήματος είναι η εισαγωγή ενός κατόπτρου και η προσφυγή σε ένα θεμελιώδες θεώρημα των *Κατοπτρικών*, αυτό που γνωρίζουμε σήμερα ως «*νόμο της ανάκλασης*». Θα πρέπει βέβαια να επισημάνουμε ότι, εξαιτίας του παραπάνω γεγονότος, θεωρείται ότι ο Ευκλείδης είχε γράψει τα *Οπτικά* μετά από τα *Κατοπτρικά*. Το πρόβλημα 19 επιλύεται με τον εξής ενδιαφέροντα τρόπο:



ἔστω γάρ, ὃ δεῖ ἐπιγνῶναι ὕψος,
πηλίκον ἐστίν, τὸ ΒΓ,
καὶ κείσθω κάτοπτρον τὸ ΚΑ,
ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Δ,
καὶ ἀπ' αὐτοῦ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ ΔΘ
καὶ ἀνακεκλάσθω ὡς ἡ ΘΒ ἐπὶ τὸ Β πέρας,



ἔστω τι [μεγέθους] ὕψος τὸ ΑΒ,
ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Γ,
καὶ δέον ἔστω τὸ ΑΒ γνῶναι,
πηλίκον ἐστίν, ὡς μὴ ὑπάρχοντος ἡλίου.
κείσθω κάτοπτρον τὸ ΔΖ,
καὶ προσεκβεβλήσθω τῇ ΕΔ ἐπ'

Στο θεώρημα 19 χρησιμοποιείται ένα κάτοπτρο. Υποτίθεται ότι η οπτική ακτίνα προσπίπτει πάνω σε αυτό και ανακλάται. Σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα των *Κατοπτρικών*, «*Από τα επίπεδα, κυρτά και κοίλα κάτοπτρα οι όψεις ανακλώνται σε ίσες γωνίες*»[28]. Συνεπώς, αν λάβουμε υπόψη το σχήμα 8-29 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, οι γωνίες που διαμορφώνονται στο σημείο Θ, δηλαδή οι ΔΘΖ και ΒΘΓ, είναι ίσες. Εφόσον και οι γωνίες ΔΖΘ και ΒΓΘ είναι ίσες, το ίδιο θα ισχύει και για τις ΓΒΘ και ΘΔΚ. Ο συγγραφέας συμπεραίνει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια. Γνωρίζουμε από τον πρώτο ορισμό του βιβλίου VI των *Στοιχείων* ότι «*Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν,*
ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον». Έχοντας στη διάθεσή του δύο όμοια τρίγωνα ο συγγραφέας ακολουθεί παρόμοια εργασία με εκείνη του θεωρήματος 18 βασιζόμενος στη θεωρία των αναλογιών. Δηλώνει ότι ΘΓ/ΓΒ=ΘΖ/ΖΔ. Για τη διατύπωση της παραπάνω αναλογίας, ο συγγραφέας δίνει την εντύπωση ότι προτιμά να βασιστεί πάλι στο θεώρημα 4 του βιβλίου VI των *Στοιχείων*. Παρόλο που και ο τρίτος «όρος» των *Κατοπτρικών* θα μπορούσε να χρησιμεύσει ως βάση για τη διατύπωση της αναλογίας ΘΓ/ΓΒ=ΘΖ/ΖΔ, εφόσον θέτει ότι «*Εάν υποτεθεί κάτοπτρο τοποθετημένο σε ένα επίπεδο και ένα ύψος, το οποίο είναι κάθετο προς το επίπεδο αυτό, τότε το ύψος του παρατηρητή προς το ύψος που είναι κάθετο στο επίπεδο είναι ανάλογα με την ευθεία που φέρεται μεταξύ του κατόπτρου και του παρατηρητή προς την ευθεία που φέρεται μεταξύ του κατόπτρου και του ύψους που είναι κάθετο προς το επίπεδο*»[29], κανείς από τους δύο συγγραφείς δεν παραπέμπει στο σημείο αυτό στον συγκεκριμένο «όρο».

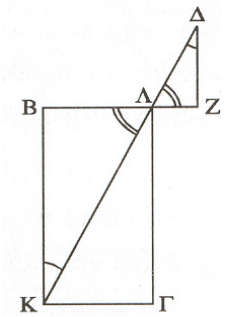
Το πρόβλημα 20 ζητά να γίνει γνωστό πόσο είναι ένα βάθος, στο οποίο δεν υπάρχει πρόσβαση. Στα *Οπτικά* το θεώρημα 20 διατυπώνεται ως «*Τὸ δοθὲν βάθος γνῶναι, πηλίκον ἐστίν*» και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ως «*Τὸ δοθὲν βάθος ἐπιγνῶναι, πηλίκον ἐστίν*». Η μεθοδολογία είναι ίδια με εκείνες των προηγούμενων προβλημάτων. Μέσω της διαμόρφωσης ισογωνίων τριγώνων, οι

---

28 «*Ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἐνόπτρων καὶ κυρτῶν καὶ κοίλων αἱ ὄψεις ἐν ἴσαις γωνίαις ἀνακλῶνται*», *Κατοπτρικά*, 1.1-2.

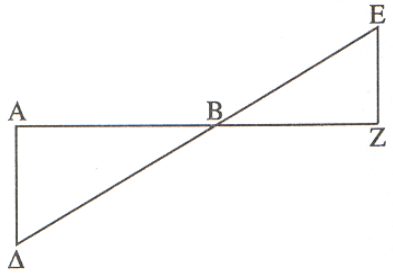
29 «*Ἐνόπτρου τεθέντος ἐν ἐπιπέδῳ καὶ θεωρουμένου τινὸς ὕψους, ὃ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ἐπιπέδῳ, γίγνονται ἀνάλογον, ὡς ἡ μεταξὺ τοῦ ἐνόπτρου καὶ τοῦ θεωροῦντος εὐθεῖα πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ ἐνόπτρου καὶ τοῦ πρὸς ὀρθὰς ὕψους,*
οὕτω τὸ τοῦ θεωροῦντος ὕψος πρὸς τὸ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ ὕψος», *Κατοπτρικά*, «*όρος*» 3.

συγγραφείς εργάζονται με τους λόγους των πλευρών τους. Οι επιλύσεις των δύο εκδόσεων παρουσιάζονται παρακάτω:



ἔστω γὰρ τὸ βάθος, ὃ δεῖ ἐπιγνῶναι, πηλίκον ἐστίν, τὸ ΚΒ,
καὶ κείσθω ὄμμα τὸ Δ,
καὶ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ ΔΛΚ εἰς τὸ βάθος,
καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΒΚ ἡ ΔΖ.
ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΚ τῇ ΔΖ,
καὶ ἐμπέπτωκεν ἡ ΔΚ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΛ, ΛΔΖ ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ.
εἰσὶ δὲ καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αἱ πρὸς τῷ Λ ἴσαι ἀλλήλαις·
καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα γωνία τῇ λοιπῇ ἴση ἐστίν.
ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΛ τρίγωνον τῷ ΛΔΖ τριγώνῳ.
ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΛΖ πρὸς ΖΔ,
ἡ ΛΒ πρὸς ΒΚ.
<u>δοθεὶς</u> δὲ ὁ τῆς ΛΖ πρὸς ΖΔ λόγος·
<u>δοθεὶς</u> ἄρα καὶ ὁ τῆς ΛΒ πρὸς ΒΚ λόγος.
καί ἐστι <u>δοθεῖσα</u> ἡ ΛΒ·
<u>δοθεῖσα</u> ἄρα καὶ ἡ ΒΚ.

Σχήμα 8-31
Αναθεωρημένη Έκδοση
Θεώρημα 20



ἔστω τὸ δοθὲν βάθος τὸ ΑΔ,
ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Ε,
καὶ δέον τὸ βάθος γνῶναι,
πηλίκον ἐστίν.
προσπιπτέτω γὰρ τῇ ὄψει ἡλίου ἀκτὶς ἡ ΕΔ συμβάλλουσα τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Β σημεῖον καὶ τῷ βάθει κατὰ τὸ Δ.
καὶ προσεκβεβλήσθω ἀπὸ τοῦ Β ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΖ,
καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΒΖ εὐθεῖαν κάθετος ἡ ΕΖ.
ἐπεὶ οὖν ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΕΖΒ τῇ ὑπὸ Β ΑΔ,
ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ,
καὶ ἡ τρίτη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΖ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ ἐστιν ἴση.
ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ.
καὶ αἱ πλευραὶ ἄρα ἀνάλογον ἔσονται.
ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΒ,
ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ.
ἀλλ'
ὁ τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΖΒ λόγος ἐστὶ <u>γνώριμος</u>·
καὶ ὁ τῆς ΔΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ <u>γνώριμος</u>.
καί ἐστι καὶ τὸ ΑΒ <u>γνώριμον</u>.
καὶ τὸ ΑΔ ἄρα <u>γνώριμόν</u> ἐστιν.

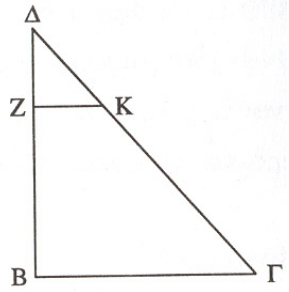
Σχήμα 8-32
Οπτικά
Θεώρημα 20

Αρχικά, παρατηρούμε ότι τα δύο σχήματα διαφέρουν. Στο σχήμα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* παρουσιάζεται ένα τρίγωνο, το ΛΓΚ, το οποίο δε φαίνεται να συμβάλει στην επίλυση του προβλήματος. Σε γενικές γραμμές, οι δύο εκδόσεις δεν έχουν διαφορές, ως προς την επιλυτική διαδικασία. Βέβαια, ο συγγραφέας των *Οπτικών* είναι πιο σχολαστικός. Για παράδειγμα, δίνει περισσότερες λεπτομέρειες στον καθορισμό της θέσης της προσπίπτουσας ακτίνας. Ενώ ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* λέει απλά ότι η οπτική ακτίνα ΔΛΚ προσπίπτει «*εἰς τὸ βάθος*» και μόνο από το σχήμα κατανοούμε το σημείο πρόσπτωσής της, ο συγγραφέας των *Οπτικών* διευκρινίζει από ποιο σημείο του επιπέδου διέρχεται και σε ποιο σημείο του βάθους καταλήγει. Επιπλέον, υποθέτει την ύπαρξη του οφθαλμού, αλλά όχι της οπτικής ακτίνας. Αντίθετα, υποθέτει ότι μια ηλιακή ακτίνα διέρχεται από τη θέση στην οποία βρίσκεται το παρατηρησιακό σημείο και φτάνει μέχρι το βάθος, κάτι που στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* δεν υπάρχει.

Όσον αφορά στη συλλογιστική πορεία, οι διαφορές είναι πολύ μικρές. Ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αποδεικνύει ότι τα τρίγωνα ΒΚΛ και ΛΔΖ είναι ισογώνια ξεκινώντας από διαφορετικές προκείμενες. Δηλώνει ότι οι γωνίες ΒΚΛ και ΛΔΖ είναι ίσες ως εναλλάξ, πρόταση που παραπέμπει στο θεώρημα 29 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*[30]. Στη συνέχεια, ισχυρίζεται ότι οι κατά κορυφήν γωνίες που σχηματίζονται στο σημείο Λ είναι ίσες. Από το θεώρημα 15 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* είναι γνωστό ότι «*Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν*». Με βάση τα παραπάνω, ο συγγραφέας συμπεραίνει ότι οι γωνίες ΔΖΛ και ΛΒΚ είναι ίσες, επομένως, τα τρίγωνα ΒΚΛ και ΛΔΖ είναι ισογώνια. Ο συγγραφέας των *Οπτικών* οδηγείται στο ίδιο συμπέρασμα λαμβάνοντας υπόψη του, αντίθετα, ότι οι γωνίες ΕΖΒ και ΒΑΔ είναι ίσες, αφού είναι ορθές, και ότι οι ΑΒΔ και ΕΒΖ είναι πάλι ίσες ως κατακορυφήν. Κατά τη συνέχεια των επιλύσεων, μεταξύ των δύο εκδόσεων δεν εμφανίζονται διαφορές ως προς τον συλλογισμό που ακολουθείται.

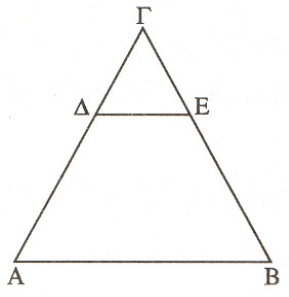
Τέλος, και στα δύο κείμενα το πρόβλημα 21 ζητά να γίνει γνωστό πόσο είναι το δοθέν μήκος: «*Τὸ δοθὲν μῆκος ἐπιγνῶναι, πηλίκον ἐστίν*». Οι δύο επιλύσεις είναι οι εξής:

[30] Βλ. σελ. 253, υποσημ. 5.



ἔστω γάρ, ὃ δεῖ μῆκος ἐπιγνῶναι, πηλίκον ἐστίν, τὸ ΒΓ.
κείσθω δὴ ὄμμα τὸ Δ,
ἀφ'
οὗ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΔΒ, ΔΓ,
καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἤχθω παρὰ τὴν ΒΓ ἡ ΖΚ.
οὐκοῦν ἐστιν, ὡς ἡ ΖΚ πρὸς ΚΔ, ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ.
γνώριμος δὲ ὁ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΔ λόγος·
γνώριμος ἄρα καὶ ὁ τῆς ΒΓ πρὸς ΓΔ λόγος.
καὶ γνώριμος ἡ ΓΔ·
γνώριμος ἄρα καὶ ἡ ΓΒ.

Σχήμα 33
Αναθεωρημένη Έκδοση
Θεώρημα 20



ἔστω τὸ δοθὲν μῆκος τὸ ΑΒ,
ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Γ,
καὶ δέον ἔστω τὸ ΑΒ μῆκος γνῶναι, πηλίκον ἐστίν.
προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΓΑ, ΓΒ,
καὶ εἰλήφθω ἐγγὺς τοῦ ὄμματος τοῦ Γ ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος τυχὸν σημεῖον τὸ Δ,
καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος εὐθεῖα ἡ ΔΕ.
ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΑ ἦκται ἡ ΔΕ,
ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ.
ἀλλ' ὁ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ λόγος ἐστὶ γνώριμος·
καὶ ὁ τῆς ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγος γνώριμός ἐστιν.
καὶ γνώριμός ἐστιν ἡ ΑΓ.
γνώριμος ἄρα καὶ ἡ ΑΒ.

Σχήμα 34
Οπτικά
Θεώρημα 20

Ύστερα από την καταγραφή των προβλημάτων 18-21 των δύο διασωζόμενων εκδόσεων, μπορούμε να κάνουμε ορισμένες παρατηρήσεις. Εάν προσέξει κανείς τις δηλώσεις των προβλημάτων, θα διαπιστώσει ότι στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* οι όροι «*πόσον*», «*πηλίκον*» ή «*ἡλίκον*» χρησιμοποιούνται αδιακρίτως, στοιχείο που υποδηλώνει ότι για τον συγγραφέα του δεν υπήρχε καμία εννοιολογική διαφοροποίηση. Αν δεχτούμε ότι η *Αναθεωρημένη Έκδοση* είναι μεταγενέστερη των *Οπτικών*, τότε δεν εξηγείται γιατί ο συγγραφέας της δεν τήρησε την εννοιολογική διάκριση των δύο όρων που γνωρίζουμε ότι ίσχυε ήδη από την εποχή του Νικόμαχου του Γερασηνού (περ. μισά του 1^{ου} αιώνα μ.Χ - μισά του 2^{ου} αιώνα μ.Χ.). Ο

Νικόμαχος είχε εκφράσει στην *Αριθμητική Εισαγωγή* αυτόν τον εννοιολογικό διαχωρισμό λέγοντας ότι το «*πόσον*» αναφέρεται στο πλήθος, δηλαδή στους αριθμούς, ενώ το «*πηλίκον*» στα μεγέθη[31]. Αντίθετα, στο κείμενο των *Οπτικών* εκφέρεται μόνο ο όρος «*πηλίκον*», γεγονός που συμφωνεί με τη διάκριση του Νικόμαχου. Αυτό που επιθυμούμε να τονίσουμε είναι ότι θεωρούμε πολύ περίεργη την άγνοια ή την αμέλεια του μεταγενέστερου συγγραφέα, σχετικά με τα συγκεκριμένα σημεία των δηλώσεων, ενώ, συγχρόνως, εκτιμούμε ότι η ασυμφωνία που παρατηρείται θα δικαιολογούνταν μόνο αν το κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι προγενέστερο εκείνου των *Οπτικών*. Η εννοιολογική διαφοροποίηση που υπογραμμίζει τους δύο όρους δεν είχε πραγματοποιηθεί μέχρι την εποχή του Ευκλείδη, αλλά οι δύο όροι χρησιμοποιούνται αδιακρίτως, όπως ακριβώς στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*.

Ο λόγος που παραθέσαμε αυτούσια τα προβλήματα 18-21 των δύο εκδόσεων ήταν, για να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή στις λέξεις που έχουν υπογραμμιστεί. Παρατηρούμε ότι στο κείμενο των *Οπτικών*, όποτε γίνεται αναφορά σε ορισμένες πλευρές τριγώνων ή σε λόγους ορισμένων πλευρών, αυτά χαρακτηρίζονται μόνο με τη λέξη «*γνώριμος*» ή «*γνώριμον*». Αντίθετα, σε αντίστοιχα σημεία των χωρίων της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δε χρησιμοποιείται μόνο η λέξη «*γνώριμος*» ή «*γνώριμον*», αλλά και οι λέξεις «*δοθείς*» ή «*δοθείσα*». Η παραπάνω διαφοροποίηση δημιούργησε πολλά ερωτηματικά που σχετίζονταν με τους λόγους που ώθησαν τον συγγραφέα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* να χρησιμοποιεί πότε τον έναν και πότε τον άλλο όρο και γιατί ο συγγραφέας των *Οπτικών* δεν το πράττει. Η προσεκτική εξέταση των χωρίων απέδειξε ότι το παραπάνω γεγονός, παρόλο που γενικώς περνά απαρατήρητο ή ασχολίαστο, ωστόσο, δεν είναι καθόλου ασήμαντο ούτε τυχαίο.

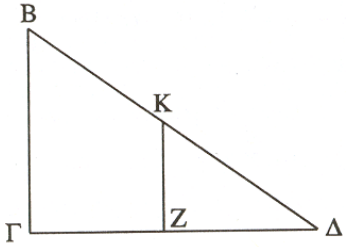
Αρχικά, αυτό που προκαλεί εντύπωση είναι ότι στα προβλήματα 18-21 δε ζητάται *να βρεθεί* κάτι, αλλά *να γίνει γνωστό*. Κάθε φορά που διατυπώνεται ένα από τα παραπάνω προβλήματα, δε συναντάται, όπως συνήθως, η λέξη «*εὑρεῖν*», αλλά οι λέξεις «*γνῶναι*» ή «*ἐπιγνῶναι*». Αυτό που κατανοεί κάποιος, όταν διαβάζει τις δηλώσεις των προβλημάτων είναι ότι αυτό που ζητάται να γίνει γνωστό είναι το μέτρο, δηλαδή ο ποσοτικός προσδιορισμός του ύψους, του βάθους ή του μήκους των μεγεθών. Ωστόσο, αν προχωρήσει στις επιλύσεις των προβλημάτων και διακρίνει πού έγκειται η διαφορετική χρήση των εννοιών «*γνώριμον*» και «*δοθέν*» στο κείμενο της

[31] Νικόμαχου Γερασηνού, *Αριθμητική Εισαγωγή*, R. Hoche, *Nicomachi Geraseni Pythagorei introductionis arithmeticae libri ii*, Λειψία: Teubner, 1866, I, 2.5.14-15.

Αναθεωρημένης Έκδοσης, θα διαπιστώσει ότι οι λέξεις «*γνῶναι*» και «*ἐπιγνῶναι*» που εμφανίζονται στις δηλώσεις των προβλημάτων δεν αφορούν μόνο στον υπολογισμό του ύψους, του βάθος ή του μήκος, αλλά συμπεριλαμβάνουν και μια άλλη παράμετρο που δεν είναι τόσο εμφανής.

Εστιάζοντας την προσοχή μας στις επιλύσεις των προβλημάτων 18-21 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* προσπαθήσαμε να ανακαλύψουμε σε ποιες περιπτώσεις ο συγγραφέας χρησιμοποιεί τον όρο «*γνώριμον*» και σε ποιες τον όρο «*δοθέν*». Το κοινό χαρακτηριστικό σε όλα αυτά τα προβλήματα είναι ότι εισάγονται ή επινοούνται σχηματισμοί, μέσω οπτικών ή ηλιακών ακτίνων, που άλλες φορές καταφέρνουν να ορίζουν, δηλαδή να διέρχονται από τα άκρα των μεγεθών που επιθυμείται να γίνουν γνώριμα και άλλες φορές όχι. Για παράδειγμα, στο θεώρημα 18 το μέγεθος που θέλουμε να γίνει γνώριμο ορίζεται από την ηλιακή ακτίνα που διέρχεται από το άκρο του Β και τη σκιά του που διέρχεται από το άκρο του Γ, ενώ στο θεώρημα 21 το μέγεθος ορίζεται από τις οπτικές ακτίνες που διέρχονται από τα άκρα του μεγέθους Β και Γ. Διακρίναμε λοιπόν ότι η λέξη «*γνώριμον*» χρησιμοποιείται, για να χαρακτηρίσει πάντα ένα μέγεθος που ορίζεται ή που αποτελεί τμήμα είτε του οπτικού κώνου είτε του φωτεινού σχηματισμού που δημιουργείται στην περίπτωση που υπάρχει ο ήλιος και που προσδιορίζεται από την ηλιακή ακτίνα και τη σκιά του μεγέθους.

Αναλυτικότερα, στο πρόβλημα 18 ζητάται να γίνει γνωστό πόσο είναι το δοθέν ύψος. Το ύψος χαρακτηρίζεται ως δοθέν, όχι μόνο γιατί είναι κάτι που μας δίνεται για να το γνωρίσουμε, αλλά γιατί το ΒΓ δεν έχει οριστεί ακόμη από κάποιον οπτικό σχηματισμό, π.χ. από τις οπτικές ακτίνες. Ωστόσο, στο συγκεκριμένο πρόβλημα υποτίθεται ότι υπάρχει ο ήλιος, από τον οποίο προσπίπτει η ηλιακή ακτίνα ΒΔ που διέρχεται από το πέρας του μεγέθους ΒΓ. Αναπόφευκτα, διαμορφώνεται θεωρητικά η σκιά του που είναι η ΓΔ. Οι ΒΔ και ΓΔ διαμορφώνουν τον σχηματισμό εκείνο που περιέχει το προς εξέταση μέγεθος ΒΓ, γιατί διέρχεται από τα πέρατά του.



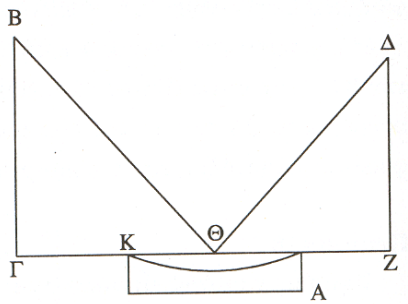
Αφού εισαγάγει το μέγεθος ΚΖ, το οποίο επισημαίνει ότι είναι «*γνώριμο*», και εκφράσει τη σχέση ΔΓ/ΓΒ=ΔΖ/ΖΚ, ο συγγραφέας κάνει τις εξής 4 δηλώσεις:

α. καὶ γνώριμος ὁ λόγος ὁ τῆς ΔΖ πρὸς ΖΚ
β. γνώριμος ἄρα καὶ ὁ τῆς ΔΓ πρὸς ΓΒ.
γ. καί ἐστι γνώριμος ἡ ΔΓ σκιά·
δ. γνώριμον ἄρα καὶ τὸ ΓΒ ὕψος.

Διαπιστώνουμε πως οποιοδήποτε μέγεθος ορίζεται από τις ΒΔ και ΓΔ ή οποιοδήποτε μέγεθος αποτελεί τμήμα των ΒΔ, ΓΔ υποπίπτοντας έτσι στον σχηματισμό τους χαρακτηρίζεται ως «*γνώριμο*». Έτσι, ο λόγος ΔΖ/ΖΚ είναι γνώριμος, γιατί, αφενός, το ΔΖ είναι μέρος του ΓΔ και, αφετέρου, το ΖΚ είναι γνώριμον όχι απλά επειδή ο συγγραφέας το εξέλαβε ως τέτοιο από την αρχή, αλλά επειδή το ΖΚ ορίζεται από τις ΒΔ και ΓΔ. Όταν ο συγγραφέας δήλωνε «*ἔλαβον δή τι γνώριμον μέγεθος τὸ ΚΖ καὶ ἐνήρμοσα ὑπὸ τὴν Δ γωνίαν παράλληλον τῇ ΒΓ*», δεν εννοούσε απλά ότι έλαβε ένα μέγεθος ΚΖ που του ήταν γνώριμο, επειδή γνώριζε το μέτρο του, αλλά επειδή το τοποθέτησε έτσι, ώστε να περιέχεται στον σχηματισμό που διαμορφώνει η ηλιακή ακτίνα και η σκιά.

Επιπλέον, ο συγγραφέας δηλώνει ότι και ο λόγος ΔΓ/ΓΒ είναι γνώριμος και, σύμφωνα με όσα έχουμε προτείνει, κατανοούμε το γιατί. Το ΔΓ συνιστά το μέγεθος εκείνο που μαζί με τη ΒΔ διαμορφώνουν τον σχηματισμό που χρειάζεται, για να ορίσει το μέγεθος εκείνο, το ύψος του οποίου θέλουμε να γνωρίσουμε, δηλαδή, το ΒΓ. Από την άλλη μεριά, το ΒΓ είναι γνώριμον, επειδή περιέχεται και ορίζεται από τις ΒΔ και ΓΔ. Εάν ο όρος «*γνώριμον*» ενείχε μόνο τη σημασία του ποσοτικά προσδιορισμένου μεγέθους, τότε πώς θα ήταν δυνατόν σε αυτό το σημείο να χαρακτηριστεί ο λόγος ΔΓ/ΓΒ γνώριμος, δηλαδή γνωστός ως προς τον μέτρο του, αφού το ΓΒ δεν έχει προσδιοριστεί ακόμη;

Στο πρόβλημα 19 ζητάται να γίνει γνώριμο το δοθέν ύψος μη υπάρχοντος του ηλίου. Η χρήση του κατόπτρου είναι πολύ πιο σημαντική απ' ότι φαίνεται. Υποτίθεται ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Δ και ότι η οπτική ακτίνα ΔΘ ανακλάται και καταλήγει στο Β. Το σημείο Θ του κατόπτρου αποτελεί μια δευτερεύουσα θέση του οφθαλμού. Επομένως, είναι σαν να βρίσκεται ο οφθαλμός στο Θ και να προσπίπτουν από αυτόν ακτίνες, οι ΘΒ και ΘΓ που αποτελούν εντέλει τον σχηματισμό εκείνο που κατορθώνει να ορίσει το μέγεθος ΒΓ περνώντας από τα άκρα του Β και Γ.

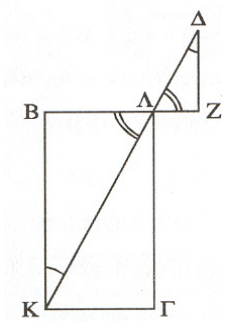


Αφού εκφράσει την ισότητα ΘΓ/ΓΒ=ΘΖ/ΖΔ, ο συγγραφέας κάνει τις εξής δηλώσεις:

α. τῆς δὲ ΘΖ πρὸς ΖΔ λόγος δοθείς ἐστιν·
β. καὶ τῆς ΘΓ ἄρα πρὸς ΓΒ γνώριμος ὁ λόγος ἐστίν.
γ. γνώριμος δὲ ἡ ΘΓ·
δ. γνώριμον ἄρα καὶ τὸ ΓΒ ὕψος

Εκτός από τη δήλωση α, σε όλες τις υπόλοιπες χρησιμοποιείται ο χαρακτηρισμός «*γνώριμος*» ή «*γνώριμον*». Γιατί στην πρώτη δήλωση χρησιμοποιείται ο χαρακτηρισμός «*δοθείς*»; Εκτιμούμε ότι αυτό δεν είναι τυχαίο και δεν οφείλεται σε απροσεξία του συγγραφέα. Ο λόγος ΘΖ/ΖΔ χαρακτηρίζεται ως «*δοθείς*», γιατί οι πλευρές ΘΖ και ΖΔ δεν ανήκουν σε καμία από αυτές που ορίζουν το μέγεθος ΒΓ. Αντίθετα, ο λόγος ΘΓ/ΓΒ είναι «*γνώριμος*», επειδή οι ακτίνες ΘΓ, ΓΒ το ορίζουν.

Στο πρόβλημα 20 ζητάται να γίνει γνώριμο το δοθέν βάθος. Από το σημείο Δ, όπου βρίσκεται ο οφθαλμός, ξεκινά μία οπτική ακτίνα που διέρχεται από το σημείο Λ του επιπέδου και καταλήγει στο σημείο Κ.

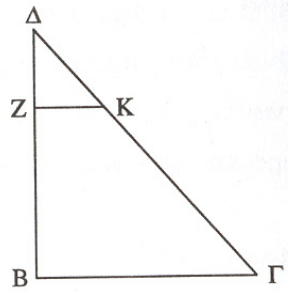


Ο συγγραφέας εκφράζει την ισότητα ΛΖ/ΖΔ=ΛΒ/ΒΚ. Στη συνέχεια, διατυπώνει τις εξής προτάσεις:

α. δοθεὶς δὲ ὁ τῆς ΛΖ πρὸς ΖΔ λόγος·
β. δοθεὶς ἄρα καὶ ὁ τῆς ΛΒ πρὸς ΒΚ λόγος.
γ. καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ΛΒ·
δ. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΒΚ.

Παρατηρούμε ότι σε όλες τις δηλώσεις χρησιμοποιούνται οι όροι «*δοθείς*» και «*δοθείσα*». Πουθενά δεν εμφανίζονται οι όροι «*γνώριμος*» ή «*γνώριμον*» που

συναντήσαμε προηγουμένως, παρόλο που αυτό που ζητούσε το πρόβλημα ήταν «*Τὸ δοθὲν βάθος ἐπιγνῶναι, πηλίκον ἐστίν*». Εκτιμούμε ότι οι όροι «*γνώριμος*» ή «*γνώριμον*» δε χρησιμοποιήθηκαν, γιατί καμία από τις πλευρές που αναφέρει ο συγγραφέας δεν ανήκει στον σχηματισμό εκείνο που χρειάζεται, ώστε να ορίζεται από οπτική άποψη το βάθος ΒΚ. Έτσι, ο λόγος ΛΖ/ΖΔ είναι δοθείς, γιατί οι πλευρές ΛΖ και ΖΔ δεν ορίζουν το ΒΚ. Το ίδιο ισχύει και για τον λόγο ΛΒ/ΒΚ. Η πλευρά ΛΒ, παρόλο που διέρχεται από το άκρο Β του μεγέθους ΒΚ, δεν είναι οπτική ή ηλιακή ακτίνα ούτε υπάγεται, γενικότερα, σε κάποιον φωτεινό σχηματισμό. Συνεπώς, η ΒΚ καταλήγει, σύμφωνα με την τέταρτη δήλωση, να είναι «*δοθείσα*» και όχι «*γνώριμη*», γιατί δεν αποτελεί εξ ολοκλήρου αντικείμενο οπτικής αντίληψης ή αντικείμενο που να φωτίζεται από εξωτερική πηγή. Εάν ο οφθαλμός βρισκόταν στο σημείο Λ και υποθέταμε ότι προσέπιπταν από αυτόν οι οπτικές ακτίνες ΛΒ και ΛΚ, τότε το μέγεθος ΒΚ θα χαρακτηριζόταν τελικά ως «*γνώριμον*», γιατί θα οριζόταν από εκείνες. Μια ανάλογη περίπτωση που επιβεβαιώνει την εκτίμησή αυτή εξετάζεται στο πρόβλημα 21, όπου ζητάται να γίνει γνώριμο το δοθέν μήκος.



Υποτίθεται ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο Δ, από όπου προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΔΒ και ΔΓ. Αφού εκφράσει την ισότητα ΖΚ/ΚΔ=ΒΓ/ΓΔ, ο συγγραφέας δηλώνει ότι:

α. γνώριμος δὲ ὁ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΔ λόγος·
β. γνώριμος ἄρα καὶ ὁ τῆς ΒΓ πρὸς ΓΔ λόγος.
γ. καὶ γνώριμος ἡ ΓΔ·
δ. γνώριμος ἄρα καὶ ἡ ΓΒ.

Κατανοούμε ότι ο λόγος ΖΚ/ΚΔ χαρακτηρίζεται ως γνώριμος, γιατί, αφενός, το ΖΚ υποτίθεται ότι έχει τοποθετηθεί έτσι, ώστε να ορίζεται από τις οπτικές ακτίνες ΔΒ, ΔΓ, και, αφετέρου, το ΚΔ αποτελεί μέρος του οπτικού σχηματισμού, αφού αποτελεί τμήμα της οπτικής ακτίνας ΔΓ. Και ο λόγος ΒΓ/ΓΔ είναι γνώριμος, γιατί το μέγεθος ΒΓ κατορθώνεται να ορίζεται από οπτικές ακτίνες και γιατί η ΔΓ συνιστά μία από τις δύο οπτικές ακτίνες που χρειάζονται, για να οριστεί το μέγεθος ΒΓ.

Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν παραπάνω, συνειδητοποιούμε ότι ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, δε χρησιμοποιεί τη λέξη «*γνώριμον*» για να αναφερθεί αποκλειστικά σε ένα μέγεθος, το μέτρο του οποίου έχει γίνει γνωστό. Διαπιστώσαμε ότι με τον παραπάνω όρο χαρακτηρίζεται μόνο το μέγεθος εκείνο που εμπίπτει στον οπτικό ή φωτεινό κώνο. Με τον τρόπο αυτό, γίνεται οπτικά αντιληπτό ή, στην περίπτωση που έχουμε να κάνουμε με κάποια άλλη εξωτερική φωτεινή πηγή, γίνεται προσδιορίσιμο από τον φωτεινό σχηματισμό. Όταν αυτό δε συμβαίνει, όπως είδαμε στην περίπτωση του προβλήματος 20, το μέγεθος δεν καθίσταται γνώριμο. Το ότι ένα μέγεθος δεν είναι γνώριμον δε σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί το μέτρο του. Άλλωστε, σε όλα τα προβλήματα προτείνεται ξεκάθαρα η μέθοδος ποσοτικού προσδιορισμού των μεγεθών. Αυτό που κατανοούμε, μέσω της διαφορετικής χρήσης των εννοιών «*δοθέν*» και «*γνώριμον*», είναι ότι το «*δοθέν*» παραπέμπει σε ένα μέγεθος που δύναται να υπολογιστεί ή έχει υπολογιστεί ποσοτικά, ενώ το «*γνώριμον*», χωρίς να αποκλείει το ποσοτικά προσδιορισμένο μέγεθος, ενέχει και μια ποιοτική διάσταση, εφόσον αναφέρεται σε μέγεθος που έχει καταστεί ορατό ή φωτεινό, έχει καταληφθεί από τον οπτικό ή από τον φωτεινό κώνο.

Στην έκδοση των *Οπτικών* δεν παρατηρείται διαφοροποίηση ως προς τη χρήση των λέξεων «*γνώριμον*» και «*δοθέν*». Σε όλες τις επιλύσεις των προβλημάτων ο συγγραφέας μιλάει για «*γνώριμους*» λόγους ή «*γνώριμα*» μεγέθη θεωρώντας ότι το «*γνώριμον*» είναι το μέγεθος εκείνο, το μέτρο του οποίου είναι γνωστό. Εκτιμούμε ότι ο συγγραφέας των *Οπτικών* είχε στη διάθεσή του τις επιλύσεις των προβλημάτων της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και, επειδή θεώρησε ότι οι όροι «*δοθέν*» και «*γνώριμον*» εναλλάσσονταν στο κείμενο αδιακρίτως, τους μετέτρεψε όλους σε «*γνώριμον*», προκειμένου να υποδηλώνουν το «*γνωστό σε ποσότητα*».

9. Πότε οι καμπύλες φαίνονται ως ευθείες γραμμές;

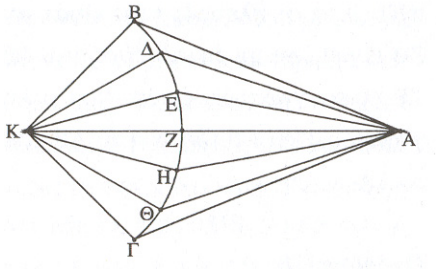
Το θεώρημα 22

Το θεώρημα 22 που μας απασχόλησε και στο κεφάλαιο που αφορούσε στη διακριτότητα των όψεων δηλώνει ότι, εάν τοποθετηθεί περιφέρεια κύκλου στο ίδιο επίπεδο με το επίπεδο, όπου βρίσκεται ο οφθαλμός, τότε η περιφέρεια του κύκλου θα φανεί ως ευθεία[32]. Στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* προβάλλεται μόνο μία

[32] Στα *Οπτικά* το θεώρημα 22 δηλώνεται ως «*Ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ τὸ ὄμμα, κύκλου περιφέρεια τεθῇ, ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια εὐθεῖα γραμμὴ φαίνεται*» και στην

απόδειξη που βασίζεται στο πρώτο θεώρημα της πραγματείας[33]. Η απόδειξη αυτή συναντάται και στο κείμενο των *Οπτικών*, αλλά πριν από αυτή παραθέτονται άλλοι δύο εναλλακτικοί τρόποι απόδειξης που απουσιάζουν από την *Αναθεωρημένη Έκδοση*.

Ο πρώτος εναλλακτικός τρόπος απόδειξης του θεωρήματος 22 των *Οπτικών* δε διασώζεται πλήρης. Σύμφωνα με αυτόν, υποτίθεται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ότι η κυκλική περιφέρεια ΒΓ, η οποία έχει ως κέντρο της το σημείο Κ, βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τον οφθαλμό που βρίσκεται στο Α. Επιπλέον, υποτίθεται ότι προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ΑΘ, ΑΓ και ότι φέρονται οι ακτίνες ΚΒ, ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ, ΚΓ:



Σχήμα 8-35
Οπτικά - Θεώρημα 22 Ἄλλως 1

Ο συλλογισμός του συγγραφέα είναι ο εξής: επειδή η ευθεία ΚΒ παρατηρείται υπό της γωνίας ΚΑΒ, ενώ η ευθεία ΚΔ υπό της ΚΑΔ, έπεται, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» των *Οπτικών*, ότι η ΚΒ θα φαίνεται μεγαλύτερη από την ΚΔ. Η εξαγωγή του παραπάνω συμπεράσματος βασίζεται στο ότι ο συγγραφέας θεωρεί πως η γωνία ΚΑΒ είναι μεγαλύτερη από την ΚΑΔ. Παρατηρούμε ότι στη συγκεκριμένη απόδειξη ο συγγραφέας δεν παρουσιάζει μεγάλη σχολαστικότητα, γεγονός που δε μας επιτρέπει να γνωρίζουμε με ακρίβεια σε ποιες γεωμετρικές προτάσεις βασίστηκε για να συμπεράνει την ανισότητα των συγκεκριμένων γωνιών. Δεν εκθέτει λεπτομερώς τη γεωμετρική απόδειξη, όπως τον είδαμε να κάνει σε προηγούμενες προτάσεις, π.χ. στα θεωρήματα 4 και 7, εκτιμούμε πάντως ότι το πιθανότερο είναι να οδηγήθηκε σε αυτό το συμπέρασμα, μέσω της σύγκρισης των τριγώνων ΚΑΒ και ΚΑΔ.

Ακολουθώντας παρόμοιο σκεπτικό συμπεραίνει ότι η ΚΔ θα φανεί με τη σειρά της μεγαλύτερη από την ΚΕ και ότι η ΚΕ θα φανεί μεγαλύτερη από την ΚΖ. Ισχυρίζεται ότι το ίδιο συμβαίνει και στο άλλο μέρος της κυκλικής περιφέρειας.

Αναθεωρημένη Έκδοση ως «*Ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ τὸ ὄμμα, κύκλου περιφέρεια τεθῇ, εὐθεῖα γραμμὴ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια φανεῖται*».

[33] Για την απόδειξη, βλ. κεφ. 5.

Συγκεκριμένα, η ΚΓ θα φανεί μεγαλύτερη από την ΚΘ, η ΚΘ μεγαλύτερη από την ΚΗ και η ΚΗ μεγαλύτερη από την ΚΖ. Στο σημείο αυτό υπάρχει ένα κενό στο χωρίο και ο συλλογισμός του συγγραφέα διακόπτεται. Το μόνο που έχει διασωθεί αναφέρει ότι: «*διὰ τοῦτο δὴ τῆς μενούσης εὐθείας τῆς ΚΑ.....κάθετος ἡ ΒΓ ἀεί ἐστιν. τὰ δ' αὐτὰ συμβήσεται καὶ ἐπὶ τῆς κοίλης περιφερείας*».

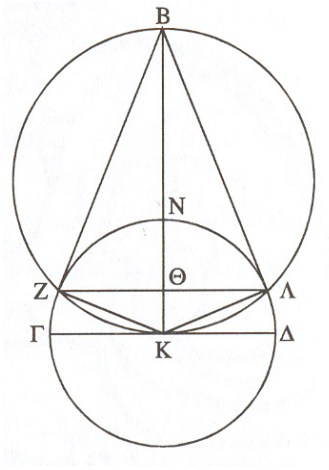
Ο συγγραφέας φαίνεται να υποστηρίζει ότι, εξαιτίας της φαινομενικής μείωσης του μεγέθους των διαδοχικών ακτίνων του κύκλου, ορισμένα από τα παρατηρήσιμα σημεία της περιφέρειας ΚΒ, δηλαδή τα Δ, Ε, Ζ και Θ, Η, θα φαίνεται ότι 'υποχωρούν', δηλαδή μετατοπίζονται από την αρχική τους θέση δίνοντας, τελικά, την εντύπωση ότι αποτελούν σημεία ευθείας γραμμής και όχι κυκλικής περιφέρειας. Επιπλέον, λέγεται ότι η ευθεία αυτή θα είναι κάθετη προς την ΚΑ. Πρόκειται για μια ενδιαφέρουσα προσπάθεια απόδειξης του συγκεκριμένου θεωρήματος που, όμως, εκτιμούμε ότι δεν είναι ικανοποιητική, καθώς δε θεμελιώνει επαρκώς το γιατί η κυκλική περιφέρεια θα ειδωθεί ως ευθεία. Από την άλλη μεριά, αν εξαιρέσουμε τον πρώτο «όρο» του συγγράμματος που, όπως έχουμε υποστηρίξει, αποτελεί ένα είδος ορισμού των όψεων, η συγκεκριμένη απόδειξη δε βασίζεται σε κανέναν άλλο «όρο».

Ο δεύτερος εναλλακτικός τρόπος απόδειξης του θεωρήματος 22 αποτελεί μάλλον ένα είδος εμπειρικής θεμελίωσης του θεωρήματος και, προφανώς, αποτελεί κείμενο μεταγενέστερο. Παραπέμποντας στην καθημερινή ζωή γίνεται προσπάθεια να επιβεβαιωθούν τα λεγόμενα της πρότασης 22. Για παράδειγμα, αναφέρεται η περίπτωση μη τεντωμένων χορδών ή σκοινιών που, αναλόγως από τη θέση που θα έχει ο οφθαλμός, ορισμένες φορές παρατηρείται η χαλαρότητά τους, δηλαδή το καμπύλωμα που κάνουν, ενώ άλλες φορές φαίνονται ως ευθείες. Το θεώρημα επιβεβαιώνεται, παράλληλα, μέσω της καταγραφής ενός παραδείγματος, όπου τη θέση του οφθαλμού την έχει πάρει μια φωτεινή πηγή. Τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν και γι' αυτήν την περίπτωση. Έτσι, αναφέρεται το παράδειγμα των κρίκων που, όταν φωτίζονται από κάποια εξωτερική πηγή που βρίσκεται στο επίπεδό τους, τότε οι σκιές των κρίκων δε φαίνονται ως καμπύλες, αλλά ως ευθείες γραμμές.

10. Κοιτάζοντας τη σφαίρα:

τα θεωρήματα 23-24

Τα θεωρήματα 23-24 εγκαινιάζουν ένα σύνολο προτάσεων που αφορούν στην οπτική αντίληψη της σφαίρας. Στο θεώρημα 23 επιχειρείται να αποδειχθεί ότι με όποιον τρόπο και αν ένας οφθαλμός κοιτάζει μια σφαίρα, θα βλέπει πάντα ένα τμήμα της που θα είναι μικρότερο του ημισφαιρίου και, επιπλέον, το τμήμα αυτό θα φαίνεται να περιέχεται από μια κυκλική περιφέρεια[34]. Οι αποδείξεις των δύο εκδόσεων παρουσιάζουν ορισμένες εκφραστικές διαφορές, αλλά ο συλλογισμός και το σχήμα είναι ίδια, εκτός από τον γραμματισμό. Έτσι, σύμφωνα με το σχήμα 8-36, στην απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* υποτίθεται ότι η παρατηρούμενη σφαίρα έχει κέντρο το Κ και ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Β:



Σχήμα 8-36

Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 23

Ενώνεται η ΒΚ και φέρεται, διαμέσου του Κ, η διάμετρος ΓΚΔ, η οποία είναι κάθετη στη ΒΚ. Στη συνέχεια, φέρεται επίπεδο που περνά από τα ΓΚΔ και ΒΚ. Ο συγγραφέας συμπεραίνει ότι το επίπεδο αυτό «*ποιήσει δὴ ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον*», τον ΓΔΛΝ. Και ο συγγραφέας των *Οπτικών* ακολουθεί ανάλογη πορεία, δηλαδή και αυτός φέρει ένα επίπεδο που διέρχεται από την ευθεία που ενώνει τον οφθαλμό με το κέντρο της σφαίρας, και ισχυρίζεται ότι το επίπεδο αυτό «*ποιήσει οὖν τομὴν κύκλον*».

Παρατηρούμε ότι και οι δύο συγγραφείς εφαρμόζουν τη γνωστή γεωμετρική πρόταση που δηλώνει ότι, εάν μια σφαίρα τμηθεί από επίπεδο, τότε η τομή που θα

---

[34] Στα *Οπτικά* το θεώρημα 23 δηλώνει ότι «*Σφαίρας ὁπωσδηποτοῦν ὁρωμένης ὑπὸ ἑνὸς ὄμματος ἔλασσον ἀεὶ ἡμισφαιρίου φαίνε ται, αὐτὸ δὲ τὸ ὁρώμενον τῆς σφαίρας μέρος κύκλου περιφέρεια φαίνεται*» και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ότι «*Σφαίρας ὁπωσοῦν ὁρωμένης ὑπὸ τοῦ ἑνὸς ὄμματος ἔλαττον αἰεὶ ἡμισφαιρίου ὀφθήσε ται, αὐτὸ δὲ τὸ ὁρώμενον τῆς σφαίρας ὑπὸ κύκλου περιεχόμενον φαίνεται*».

προκύψει θα είναι κύκλος. Γνωρίζουμε ότι την πρόταση αυτή την είχε αποδείξει ο Θεοδόσιος στο πρώτο βιβλίο των *Σφαιρικών*, όπου έθετε ότι «*Ἐὰν σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ,*
ἡ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γραμμὴ κύκλου περιφέρειά ἐστι»[35]. Βέβαια, η συγκεκριμένη πρόταση δεν πρέπει να ήταν άγνωστη και στον Ευκλείδη. Για παράδειγμα, στο θεώρημα 17 του βιβλίου XII των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης υποθέτει την ύπαρξη δύο ομόκεντρων σφαιρών που τέμνονται από ένα επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο τους[36]. Τότε, σύμφωνα με τα λεγόμενα του Ευκλείδη, «*οι τομές θα είναι κύκλοι, εφόσον η σφαίρα παρήχθη με τη διάμετρο να παραμένει σταθερή και το ημικύκλιο να περιστρέφεται γύρω από αυτή*»[37]. Διαπιστώνουμε ότι την πρόταση περί της κυκλικής τομής της σφαίρας από ένα επίπεδο, ο Ευκλείδης τη βάσιζε εξολοκλήρου στον ορισμό της σφαίρας. Σύμφωνα με τον Ευκλείδη, «*η σφαίρα είναι το σχήμα που προκύπτει, αν, εφόσον η διάμετρος ενός ημικυκλίου παραμένει σταθερή, το ημικύκλιο περιστρέφεται γύρω από αυτή και σταματήσει πάλι στην ίδια θέση, από την οποία άρχισε να περιστρέφεται*»[38].

Σύμφωνα με τα παραπάνω, εκτιμούμε ως πολύ πιθανό ότι στο συγκεκριμένο σημείο της απόδειξης της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, εφόσον το κείμενο αυτό είναι προγενέστερο του Θεοδοσίου, η εξαγωγή του συμπεράσματος περί της κυκλικής τομής της σφαίρας από ένα επίπεδο να βασίζεται στον ορισμό της σφαίρας. Από την άλλη μεριά, θεωρούμε πολύ εύλογο ότι ο συγγραφέας της μεταγενέστερης επανέκδοσης του συγγράμματος του Ευκλείδη -που κατά τη γνώμη μας είναι ο συγγραφέας των *Οπτικών*- εξήγαγε το ίδιο συμπέρασμα βασιζόμενος στην πιο πρόσφατη για εκείνον απόδειξη του Θεοδοσίου.

---

[35] Θεοδοσίου, *Σφαιρικά*, I, 1.1-29.

[36] Στο θεώρημα 17 του βιβλίου XII των *Στοιχείων* υποτίθενται δύο ομόκεντρες σφαίρες και επιχειρείται να εγγραφεί ένα στερεό πολύεδρο στη μεγαλύτερη σφαίρα, έτσι, ώστε να μην ακουμπά την επιφάνεια της μικρότερης: «*Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρο ν ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν*».

[37] «*Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου το ῦ ἡμικυκλίου ἐγίγνετο ἡ σφαῖρα· ὥστε καὶ καθ᾽ οἵας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικ ύκλιον, τὸ δι᾽ αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον*», *Στοιχεία*, XII, 17.8-13.

[38] «*Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον ε ἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα*», *Στοιχεία*, XI, ορισμός 14.

Ξαναγυρνώντας στο σχήμα 8-36, κατά τη συνέχεια της απόδειξης του θεωρήματος 23, ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* γράφει τον κύκλο με διάμετρο την ΚΒ και ενώνει τις ΚΖ, ΖΒ, ΒΛ, ΛΚ, ΛΖ. Ισχυρίζεται ότι οι γωνίες ΚΖΒ, ΒΛΚ είναι ορθές. Πρόκειται για την πρόταση 31 του τρίτου βιβλίου των *Στοιχείων*, σύμφωνα με την οποία, η γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή[39]. Παράλληλα, οι ευθείες ΒΛ, ΒΖ θα εφάπτονται σε κάθε σημείο της σφαίρας. Αυτό αποτελεί πόρισμα που προκύπτει από το θεώρημα 16 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*. Στο πόρισμα αυτό δηλώνεται ότι η ευθεία γραμμή που διέρχεται από το άκρο ενός κύκλου και είναι κάθετη προς τη διάμετρό του εφάπτεται του κύκλου[40]. Έπεται λοιπόν ότι οι οπτικές ακτίνες θα είναι οι ΒΖ και ΒΛ. Αμέσως μετά, ο συγγραφέας δηλώνει ότι, αν η ΘΒ παραμείνει σταθερή και το τρίγωνο ΒΖΒ αρχίσει να περιστρέφεται, γύρω από αυτή, ώσπου σταματήσει τελικά στη θέση εκείνη από την οποία ξεκίνησε, τότε η οπτική ακτίνα ΒΖ, καθώς περιστρέφεται, θα εφάπτεται της σφαιρικής επιφάνειας και το σχήμα που θα περιγράψει θα είναι κύκλος που θα διέρχεται από τα σημεία Ζ, Λ. Αυτό το συμπέρανε λαμβάνοντας υπόψη του, πρώτον, ότι οι γωνίες που σχηματίζονται στο σημείο Θ είναι ορθές, εφόσον οι ΓΔ και ΖΛ είναι παράλληλες, και, δεύτερον, ότι η ΖΘ είναι ίση με τη ΘΛ. Η πρώτη παρατήρηση του συγγραφέα βασίζεται στο θεώρημα 29 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*[41] και η δεύτερη στο τρίτο θεώρημα του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*[42].

Πρέπει να επισημάνουμε ότι η περιγραφή του τρόπου με τον οποίο παράγεται το παρατηρούμενο μέρος της σφαίρας, δηλαδή ο κύκλος, παραπέμπει στον ορισμό του κώνου και στον ορισμό της βάσης του κώνου, συγκεκριμένα, στους ορισμούς 18 και 20, του βιβλίου ΧΙ των *Στοιχείων*. Ο Ευκλείδης ορίζει γενικότερα τον κώνο ως το

---

39 «*Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς· καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ὀρθῆς*», ΙΙΙ, 3.

40 «*Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου*».

41 Σύμφωνα με το θεώρημα 29 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, «*Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας*».

42 Σύμφωνα με το τρίτο θεώρημα του τρίτου βιβλίου των *Στοιχείων*, «*Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει*».

σχήμα εκείνο που προκύπτει, όταν υποθέσουμε ότι μία πλευρά από αυτές που πρόσκεινται στη γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου παραμένει σταθερή και το τρίγωνο, αφού περιστραφεί γύρω από αυτή, σταματήσει στη θέση, από την οποία ξεκίνησε. Επιπλέον, ορίζει τη βάση του κώνου ως τον κύκλο που περιγράφει η ευθεία εκείνη του τριγώνου που περιφέρεται γύρω από τον άξονα, δηλαδή γύρω από την ευθεία του τριγώνου που παραμένει σταθερή[43]. Διαπιστώνουμε ότι στο θεώρημα 23 περιγράφεται κατά ανάλογο τρόπο ο οπτικός κώνος που διαμορφώνεται, όταν παρατηρείται μια σφαίρα. Αυτό που ενδιέφερε ήταν να προσδιοριστεί η βάση του οπτικού κώνου, δηλαδή το μέρος εκείνο της σφαίρας που παρατηρείται. Στο θεώρημα 23 αποδεικνύεται λοιπόν ότι το παρατηρούμενο μέρος της σφαίρας περιέχεται από κυκλική περιφέρεια και, μάλιστα, είναι μικρότερο του ημισφαιρίου, γιατί το ΖΛ είναι μικρότερο του ημικυκλίου. Το θεώρημα 23 αποτελεί μία από τις πιο ενδεικτικές περιπτώσεις, κατά τις οποίες μπορούμε να αντιληφθούμε τη σημασία του δεύτερου «όρου», σύμφωνα με τον οποίο «*καὶ τὸ [μὲν] ὑπὸ τῶν ὄψεων περιεχόμενον σχῆμα εἶναι κῶνον τὴν κορυφὴν μὲν ἔχοντα ἐν τῷ ὄμματι τὴν δὲ βάσιν πρὸς τοῖς πέρασι τῶν ὁρωμένων*». Η βάση του οπτικού κώνου του θεωρήματος 23 προσδιορίζεται από τα σημεία εκείνα της σφαίρας, στα οποία προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες. Έχοντας αποδειχθεί ότι οι οπτικές ακτίνες διερχόμενες από τα πέρατα της σφαίρας διαγράφουν έναν κύκλο έπεται ότι το μέρος εκείνο που γίνεται οπτικά αντιληπτό περιέχεται από κυκλική περιφέρεια.

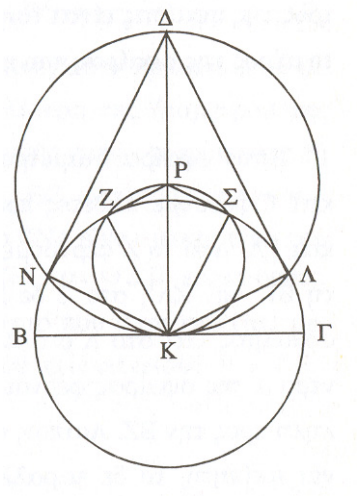
Στο θεώρημα 24 αποδεικνύεται, ότι, αν ο οφθαλμός μετακινηθεί και τοποθετηθεί πιο κοντά προς τη σφαίρα, το μέρος της σφαίρας που θα παρατηρείται θα είναι στην πραγματικότητα μικρότερο, αλλά ο παρατηρητής θα έχει την εντύπωση ότι είναι μεγαλύτερο από εκείνο που έβλεπε, όταν βρισκόταν πιο μακριά από την παρατηρούμενη σφαίρα[44]. Οι αποδείξεις των δύο εκδόσεων δε διαφέρουν ως προς

---

43 «*Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. κἂν μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ [τῇ] περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος, ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος*», *Στοιχεία*, XI ορισμός 18. «*Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος*» *Στοιχεία*, XI, ορισμός 20.

44 Στα *Οπτικά* το θεώρημα 24 δηλώνεται ως «*Τοῦ ὄμματος προσιόντος τῇ σφαίρᾳ ἔλαττον ἔσται τὸ ὁρώμενον, δόξει δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι*» και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ως

τον συλλογισμό. Το θεώρημα 24 βασίζεται, εκτός από τον δεύτερο «όρο» του συγγράμματος και στον τέταρτο «όρο», γεγονός αναμενόμενο, καθώς στη συγκεκριμένη πρόταση δεν ενδιαφέρει μόνο να προσδιοριστεί γεωμετρικά το τμήμα της σφαίρας που θα παρατηρείται, υπό τις διαφορετικές θέσεις που θα καταλαμβάνει ο οφθαλμός, αλλά να αναδειχθεί το φαινομενικό μέγεθος που θα έχουν τα παρατηρούμενα τμήματα. Το θεώρημα 24 αποτελεί άλλη μία πολύ ενδιαφέρουσα περίπτωση, κατά την οποία η πραγματικότητα αντιμάχεται της φαινομενικότητας. Έτσι, αν υποθέσουμε, όπως φαίνεται στο σχήμα 8-37, ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο Δ και η παρατηρούμενη σφαίρα έχει ως κέντρο της το Κ, τότε διαπιστώνουμε ότι το



Σχήμα 8-37
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 24

μέρος της σφαίρας που θα γίνεται αντιληπτό θα είναι η περιφέρεια ΝΖΛ. Αν ο οφθαλμός πλησιάσει τη σφαίρα στο σημείο Ρ, τότε το τμήμα της σφαίρας που θα γίνεται αντιληπτό θα είναι μικρότερο από πριν, συγκεκριμένα, θα είναι η περιφέρεια ΖΣ. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, όταν ο οφθαλμός βρισκόταν στην πρώτη, πιο απομακρυσμένη θέση, ο οπτικός κώνος που διαμορφωνόταν είχε μεγαλύτερη βάση από τη βάση που προέκυψε, όταν ο οφθαλμός μετακινήθηκε σε πλησιέστερη θέση προς τη σφαίρα. Ωστόσο, η οπτική αντίληψη του μεγέθους των δύο παρατηρούμενων τμημάτων της σφαίρας θα είναι πολύ διαφορετική. Από την πρώτη θέση του

«*Τοῦ ὄμματος προσιόντος ἔγγιον τῆς σφαίρας ἔλαττον ἔσται τὸ ὁρώμενον, δόξει δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι*».

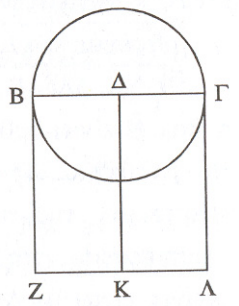
οφθαλμού το παρατηρούμενο τμήμα της σφαίρας ΝΖΛ περιέχεται υπό της γωνίας Δ, ενώ από τη δεύτερη θέση του οφθαλμού το παρατηρούμενο τμήμα της σφαίρας, δηλαδή το ΖΣ, περιέχεται υπό της γωνίας Ρ. Όμως, η γωνία Ρ είναι μεγαλύτερη από τη Δ, επομένως, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» της πραγματείας, το τμήμα ΖΣ θα φαίνεται μεγαλύτερο από το ΝΖΛ, παρόλο που στην πραγματικότητα το ΖΣ είναι μικρότερο από το ΝΖΛ.

11. Δύο οφθαλμοί για μία σφαίρα: τα θεωρήματα 25-27

Ενώ όλα τα θεωρήματα που εξετάσαμε μέχρι τώρα υπέθεταν την ύπαρξη ενός οφθαλμού, στα θεωρήματα 25-27 εμπλέκεται η διοφθαλμική όραση. Στο θεώρημα 23 αποδείχθηκε ότι το τμήμα εκείνο της σφαίρας που παρατηρείται από έναν οφθαλμό είναι πάντα μικρότερο του ημισφαιρίου. Στις προτάσεις 25-27 το αντικείμενο της όρασης εξακολουθεί να είναι η σφαίρα και επιχειρείται να προσδιοριστεί πόσο τμήμα της θα παρατηρείται από δύο οφθαλμούς. Όπως θα δούμε, το κριτήριο για τον προσδιορισμό αυτό έγκειται στη σχέση, όσον αφορά στο μέγεθος, που έχει η διάμετρος της σφαίρας με την ευθεία που ενώνει τους δύο οφθαλμούς. Μεταξύ των δύο εκδόσεων δε σημειώνονται αξιόλογες διαφοροποιήσεις. Σε όλα τα θεωρήματα ακολουθείται η ίδια αποδεικτική οδός, γι' αυτό θα παρουσιάσουμε ενδεικτικά τις αποδείξεις της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*.

Αναλυτικότερα, σύμφωνα με το θεώρημα 25, εάν η διάμετρος της σφαίρας είναι ίση με την ευθεία που ενώνει τους δύο οφθαλμούς, τότε το τμήμα της σφαίρας που θα ειδωθεί θα ισούται με το ημισφαίριό της[45.] Στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* υποτίθεται μία σφαίρα με διάμετρο ΒΓ. Από τα σημεία Β, Γ φέρονται οι

[45] Στα *Οπτικά* το θεώρημα 25 εκφράζεται ως «*Σφαίρας διὰ δύο ὀμμάτων ὁρωμένης ἐὰν ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἴση ᾖ τῇ εὐθείᾳ, ἐφ᾽ ἣν διεστήκασι τὰ ὄμματα ἀπ᾽ ἀλλήλων, τὸ ἡμισφαίριον αὐτῆς ὀφθήσεται ὅλον*» και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ως «*Σφαίρας διὰ τῶν δύο ὀμμάτων ὁρωμένης, ἐὰν ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἴση ᾖ τῇ εὐθείᾳ τῇ διεστώσῃ ἀπὸ τῶν ὀμμάτων, ἡμισφαίριον αὐτῆς ὀφθήσεται*».



Σχήμα 8-38

Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 25

κάθετες ευθείες ΒΖ και ΓΛ. Ενώνεται η ΖΛ παράλληλη στη ΒΓ και υποτίθεται ότι στο σημείο Ζ τοποθετείται ο ένας οφθαλμός και στο σημείο Λ ο άλλος. Από το κέντρο Δ του κύκλου φέρεται η ΔΚ παράλληλη στη ΒΖ.

Στο σημείο αυτό αναπτύσσεται ένας συλλογισμός που μας παραπέμπει στον ορισμό του κυλίνδρου. Ωστόσο, για να τον εκθέσει, σημαίνει ότι ο συγγραφέας είχε οδηγηθεί προηγουμένως σε κάποια γεωμετρικά συμπεράσματα που προαπαιτούνται, αλλά δεν τα αναφέρει λεπτομερώς. Συγκεκριμένα, προτού προχωρήσει στο επόμενο βήμα, ο συγγραφέας είχε ήδη συμπεράνει, μέσω των δεδομένων του θεωρήματος, ότι, πρώτον, το ΒΖΛΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και, δεύτερον, ότι το ΒΖΚΔ είναι επίσης ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το πρώτο συμπέρασμα εξάγεται από το γεγονός ότι οι πλευρές ΒΓ, ΖΛ είναι ίσες και παράλληλες. Επομένως, μέσω του θεωρήματος 33 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* συμπεραίνουμε ότι οι ΒΖ, ΓΛ θα είναι, επίσης, ίσες και παράλληλες[46]. Άρα, το ΒΖΛΓ είναι παραλληλόγραμμο και, εφόσον, οι ΒΖ, ΓΛ είναι κάθετες στη ΒΓ, έπεται ότι και οι γωνίες ΒΖΛ, ΓΛΖ θα είναι ορθές, αφού, σύμφωνα με το θεώρημα 34 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, στα παραλληλόγραμμα χωρία οι απέναντι πλευρές και γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους[47]. Κατά τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να συμπεράνουμε, γιατί το ΒΖΚΛ είναι, επίσης, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Αφού λοιπόν ο συγγραφέας έχει διαπιστώσει τα παραπάνω στοιχεία, χωρίς όμως να τα αναφέρει, λέει ότι, αν η ΔΚ παραμείνει σταθερή και το παραλληλόγραμμο ΒΚ αρχίσει να περιστρέφεται, μέχρι να σταματήσει στη θέση από την οποία ξεκίνησε, τότε η ΒΔ θα έχει διαγράψει έναν κύκλο που περνά από το

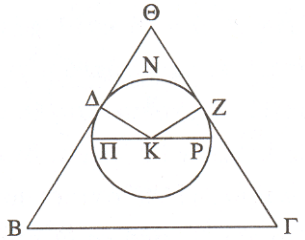
---

[46] Το θεώρημα 33 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* δηλώνει ότι «*Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐτ αὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν*».

[47] Το θεώρημα 34 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* δηλώνει ότι «*Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαι ς εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει*».

κέντρο της σφαίρας[48]. Ο συγγραφέας συμπεραίνει λοιπόν ότι το μέρος της σφαίρας που θα ειδωθεί από τους οφθαλμούς Ζ και Λ θα είναι το ημισφαίριο.

Το θεώρημα 26 εξετάζει την περίπτωση, κατά την οποία η ευθεία που ενώνει τους δύο οφθαλμούς είναι μεγαλύτερη της διαμέτρου της σφαίρας. Εάν συμβαίνει αυτό, τότε παρατηρείται τμήμα της σφαίρας που είναι μεγαλύτερο του ημισφαιρίου. Στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* υποτίθεται μια σφαίρα με κέντρο το Κ και



Σχήμα 8-39
Αναθεωρημένη Έκδοση- Θεώρημα 26

ότι το διάστημα μεταξύ των οφθαλμών, δηλαδή το ΒΓ, είναι μεγαλύτερο από τη διάμετρο της σφαίρας. Μέσω του Κ και της ΒΓ, φέρεται ένα επίπεδο που, όπως είχαμε δει και στο θεώρημα 23, θα δημιουργήσει στη σφαίρα μια τομή που θα είναι κύκλος, συγκεκριμένα, τον ΔΖΝ. Τέλος, υποτίθεται ότι από τους οφθαλμούς προσπίπτουν οι όψεις ΒΔ, ΓΖ.

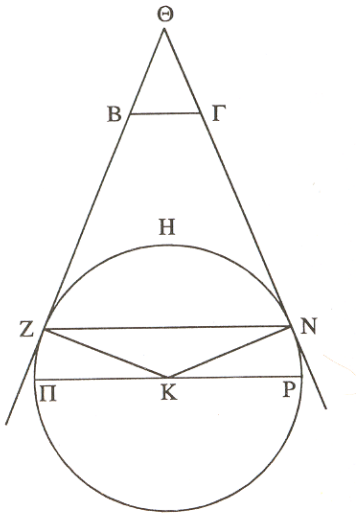
Εάν οι όψεις ΒΔ, ΓΖ επεκταθούν, τότε θα συμπέσουν στο σημείο Θ, επειδή η ΒΓ είναι μεγαλύτερη από τη διάμετρο. Οι ΘΖ και ΘΔ είναι εφαπτομένες στον κύκλο και η περιφέρεια ΖΝΔ είναι μικρότερη του ημικυκλίου, γιατί, όπως αναφέρεται, οι γωνίες ΘΖΚ, ΘΔΚ είναι ορθές. Αυτό μπορεί να εξαχθεί από το θεώρημα 18 του τρίτου βιβλίου των *Στοιχείων* που δηλώνει ότι αν μία ευθεία γραμμή εφάπτεται σε έναν κύκλο, τότε η ευθεία που φέρεται από το κέντρο του κύκλου, μέχρι το σημείο της επαφής, θα είναι κάθετη στην εφαπτομένη[49].

---

[48] Ο Ευκλείδης ορίζει τον κύλινδρο ως το σχήμα εκείνο που προκύπτει, όταν, εφόσον η μία πλευρά ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου παραμένει σταθερή, το παραλληλόγραμμο περιστραφεί και επιστρέψει πάλι στην ίδια θέση, από την οποία ξεκίνησε: «*Κύλινδρός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνί αν περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα*», *Στοιχεία*, XI, ορισμός 21.

[49]«*Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην*».

Στο θεώρημα 27 αποδεικνύεται ότι, αν η ευθεία που ενώνει τους δύο οφθαλμούς είναι μικρότερη της διαμέτρου της σφαίρας, τότε το παρατηρούμενο τμήμα της θα είναι μικρότερο του ημισφαιρίου. Στο θεώρημα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* υποτίθεται μια σφαίρα με κέντρο το σημείο Κ και ότι το διάστημα ΒΓ μεταξύ των οφθαλμών είναι μικρότερο της διαμέτρου. Φέρεται ένα επίπεδο, διαμέσω



Σχήμα 40
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 27

του σημείου Κ και της ΒΓ. Επομένως, διαμορφώνεται ως τομή στη σφαίρα ο κύκλος ΖΗΝ. Οι οπτικές ακτίνες ΒΖ και ΓΝ είναι εφαπτομένες στον κύκλο και, αν επεκταθούν, θα συμπέσουν στο σημείο Θ. Ωστόσο, οι ευθείες ΘΖ και ΘΝ, οι οποίες συμπίπτουν με τις οπτικές ακτίνες, περιλαμβάνουν το τμήμα ΖΗΝ που είναι μικρότερο του ημισφαιρίου. Επομένως, ο οφθαλμός θα δει τμήμα μικρότερο του ημισφαιρίου.

Οι αποδείξεις των θεωρημάτων 25-27 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, αλλά και των *Οπτικών*, δίνουν την εντύπωση ότι δε βασίζονται σε κανέναν «όρο» των εν λόγω συγγραμμάτων. Ωστόσο, εκτιμούμε ότι απαραίτητοι για την εδραίωσή τους είναι όχι μόνο ο πρώτος «όρος», αλλά και ο δεύτερος, που σχετίζεται με τη διαμόρφωση του οπτικού κώνου. Όπως και με τα θεωρήματα 23-24, έτσι και μέσω των θεωρημάτων 25-27, κατανοούμε ότι η βάση του οπτικού κώνου είναι εκείνη που καθορίζει πόσο μέρος, δηλαδή πόσο τμήμα του παρατηρούμενου μεγέθους γίνεται πραγματικά αντιληπτό. Αυτό θα μας δοθεί η ευκαιρία να το διαπιστώσουμε και σε επόμενες προτάσεις, όπως στα θεωρήματα 28-29 που ακολουθούν.

12. Κοιτάζοντας τον κύλινδρο και τον κώνο:

τα θεωρήματα 28-29

Τα θεωρήματα 28-29 δηλώνουν ό,τι και τα 23-24, μόνο που στην προκειμένη περίπτωση εξετάζεται η οπτική αντίληψη των κυλίνδρων. Έτσι, το θεώρημα 28 θέτει ότι, με όποιον τρόπο και αν ένας οφθαλμός παρατηρεί έναν κύλινδρο, το τμήμα αυτό που θα βλέπεται θα είναι μικρότερο του ημικυλίνδρου[50]. Το θεώρημα 29 δηλώνει ότι, όταν ο οφθαλμός τοποθετηθεί πιο κοντά προς τον κύλινδρο, τότε το τμήμα του εκείνο που θα βλέπεται θα είναι μικρότερο από το τμήμα που παρατηρείται, όταν ο οφθαλμός βρίσκεται πιο μακριά του, ωστόσο, το τμήμα αυτό θα φαίνεται μεγαλύτερο[51]. Τα θεωρήματα 30-31 εξετάζουν τα ανάλογα πράγματα που συμβαίνουν στους κώνους. Το θεώρημα 30 τονίζει ότι, όταν παρατηρείται ένας κώνος που έχει κυκλική βάση, τότε το τμήμα εκείνο που θα γίνεται οπτικά αντιληπτό θα είναι μικρότερο του ημικωνίου[52]. Τέλος, σύμφωνα με το θεώρημα 31, εάν ο οφθαλμός μετακινηθεί πιο κοντά προς τον κώνο, τότε το τμήμα εκείνο που θα περιλαμβάνεται από τις όψεις θα είναι μικρότερο από εκείνο που περιλαμβάνεται, όταν ο οφθαλμός είναι πιο απομακρυσμένος, ωστόσο, θα φαίνεται ως μεγαλύτερο[53].

Επειδή ο κύλινδρος έχει ως βάση του τον κύκλο, οι αποδείξεις των θεωρημάτων 28 και 29 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι ακριβώς ανάλογες με εκείνες που συναντήσαμε στα αντίστοιχα θεωρήματα της σφαίρας, δηλαδή στα

---

[50] Το θεώρημα 28 δηλώνεται στα *Οπτικά* ως «*Κυλίνδρου όπωσδηποτοῦν ὑπὸ ἑνὸς ὄμματος ὁρωμένου ἔλαττον ἡμικυλινδρίου ὀφθήσεται*» και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ως «*Κυλίνδρου όπωσοῦν ὁρωμένου ὑπὸ τοῦ ἑνὸς ὄμματος ἔλαττον ἡμικυλίνδρου ὀφθήσεται*».

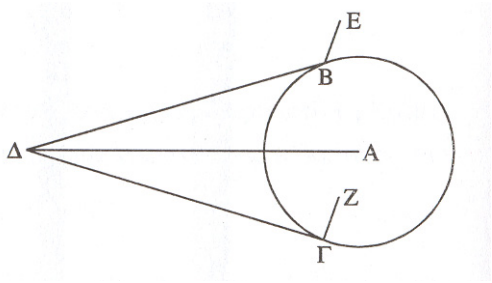
[51] Το θεώρημα 29 δηλώνεται στα *Οπτικά* ως «*Τοῦ ὄμματος τεθέντος ἔγγιον τοῦ κυλίνδρου ἔλαττον μέν ἐστι τὸ περιλαμβανόμενον ὑπὸ τῶν ἀκτίνων τοῦ κυλίνδρου, δόξει δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι*» και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ως «*Τοῦ δὲ ὄμματος ἔγγιον τεθέντος τοῦ κυλίνδρου ἔλασσον μὲν ἔσται τὸ περιλαμβανόμενον ὑπὸ τῶν ὄψεων τοῦ κυλίνδρου, δόξει δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι*».

[52] Το θεώρημα 30 δηλώνεται στα *Οπτικά* ως «*Κώνου κύκλον ἔχοντος τὴν βάσιν καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ τὸν ἄξονα ὑπὸ τοῦ ἑνὸς ὄμματος ὁρωμένου ἔλαττον ἡμικωνίου ὀφθήσεται*» και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ως «*Κώνου κύκλον ἔχοντος τὴν βάσιν ὑπὸ τοῦ ἑνὸς ὄμματος ὁρωμένου ἔλασσον ἡμικωνίου ὀφθήσεται*».

[53] Το θεώρημα 31 δηλώνεται στα *Οπτικά* ως «*Τοῦ δὲ ὄμματος ἔγγιον τεθέντος ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ ἐστιν ἡ βάσις τοῦ κώνου, ἔλαττον μὲν ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν ὄψεων ἐμπεριλαμβανόμενον μέρος, δόξει δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι*» και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ως «*Τοῦ δὲ ὄμματος ἔγγιον μετατεθέντος ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔλασσον μὲν ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν ὄψεων περιλαμβανόμενον μέρος, δόξει δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι*».

θεωρήματα 23 και 24. Στο θεώρημα 28 του κειμένου των *Οπτικών* δε διασώζεται μόνο αυτή που υπάρχει και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*, αλλά παρουσιάζεται και ένας εναλλακτικός τρόπος απόδειξης, ο οποίος εμφανίζεται και στο θεώρημα 29. Επίσης, ενώ στα θεωρήματα 30 και 31 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, οι αποδείξεις είναι πάλι ανάλογες με εκείνες που είδαμε στην περίπτωση της σφαίρας, εφόσον ο κώνος έχει κυκλική βάση, τα *Οπτικά* δε συμπεριλαμβάνουν αυτούς τους τρόπους απόδειξης, αλλά παραθέτουν άλλους που είναι ανάλογοι με τους εναλλακτικούς τρόπους αποδείξεων που προτάθηκαν στα θεωρήματα 28 και 29.

Συγκεκριμένα, στο θεώρημα 28 των *Οπτικών* υποτίθεται ένας κύλινδρος που η βάση του έχει ως κέντρο το Α. Γύρω από το Α περιγράφεται ο κύκλος ΒΓ, ενώ ο οφθαλμός τοποθετείται στο σημείο Δ, το οποίο βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τη βάση του κυλίνδρου. Ενώνεται η ΔΑ και φέρονται οι οπτικές ακτίνες ΔΒ και ΔΓ, οι οποίες

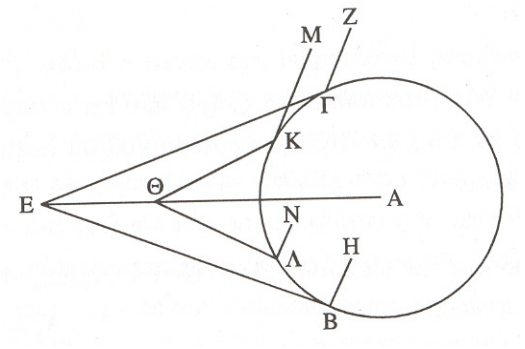


Σχήμα 8-41
Οπτικά – Θεώρημα 28

είναι εφαπτομένες στον κύκλο. Παράλληλα, από τα σημεία Β και Γ φέρονται κάθετα οι πλευρές του κυλίνδρου, οι ΒΕ, ΓΖ, όπως επίσης ένα επίπεδο που διέρχεται από τις ΔΒ, ΒΕ και ένα άλλο επίπεδο που διέρχεται από τις ΔΓ, ΓΖ. Ο συγγραφέας συμπεραίνει ότι κανένα από αυτά τα επίπεδα δεν τέμνει τον κύλινδρο, αφού οι ΔΒ, ΔΓ και ΒΕ, ΓΖ εφάπτονται του κυλίνδρου. Συνεπώς, υπό τις οπτικές ακτίνες ΔΒ, ΔΓ παρατηρείται η περιφέρεια ΒΓ, η οποία είναι μικρότερη του ημικυκλίου, επομένως, το παρατηρούμενο τμήμα είναι μικρότερο του ημικυλινδρίου.

Εκτός από τον παραπάνω τύπο απόδειξης, το θεώρημα 28 των *Οπτικών* έχει, όπως είπαμε, και την απόδειξη που παρουσιάζει η *Αναθεωρημένη Έκδοση* και η οποία είναι ανάλογη με εκείνη της θεωρήματος 23, όπου εξεταζόταν η σφαίρα. Αντίθετα, το θεώρημα 29 των *Οπτικών* δε μεταφέρει, όπως στο θεώρημα 28, την απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, αλλά παραθέτει μόνο έναν τρόπο απόδειξης που είναι ανάλογος με αυτόν που συναντήσαμε παραπάνω.

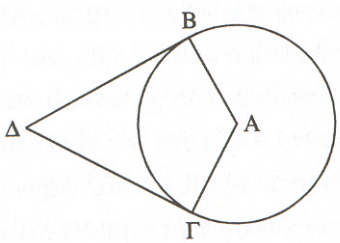
Συγκεκριμένα, στο θεώρημα 29 των *Οπτικών* υποτίθεται πάλι ένας κύλινδρος με βάση τον κύκλο ΒΓ και με κέντρο το Α. Ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Ε, το



Σχήμα 8-42
Οπτικά – Θεώρημα 29

οποίο ενώνεται με το Α. Υποτίθεται ότι προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΕΓ, ΕΒ και ότι από τα σημεία Β, Γ φέρονται κάθετες στον κύλινδρο, οι ΓΖ και ΒΗ. Σύμφωνα με το θεώρημα 28 που προηγήθηκε, γνωρίζουμε ότι θα ειδωθεί τμήμα μικρότερο του ημικυλίνδρου. Αυτό που πρέπει να αποδειχθεί στο θεώρημα 29 είναι ότι, αν ο οφθαλμός τοποθετηθεί πιο κοντά προς τον κύλινδρο, τότε θα ειδωθεί τμήμα μικρότερο από αυτό που παρατηρούνταν από τη θέση Ε. Από τη θέση Ε οι οπτικές ακτίνες περιλαμβάνουν το τμήμα ΖΓΒΗ. Όμως, αν ο οφθαλμός μετακινηθεί στη θέση Θ, οι οπτικές ακτίνες θα περιλαμβάνουν το τμήμα ΜΚΛΝ. Παρόλο που το ΖΓΒΗ είναι στην πραγματικότητα μεγαλύτερο από το ΜΚΛΝ, ωστόσο, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» των *Οπτικών*, το ΖΓΒΗ θα φαίνεται ότι είναι μικρότερό του, γιατί η γωνία Ε, υπό την οποία παρατηρείται, είναι μικρότερη από τη Θ.

Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια μεθοδολογία ο συγγραφέας των *Οπτικών* αποδεικνύει στο θεώρημα 30 ότι, όταν ένας οφθαλμός παρατηρεί έναν κώνο που έχει κυκλική βάση και τον άξονά του κάθετα προς αυτή, τότε το τμήμα που θα ειδωθεί θα είναι μικρότερο του ημικωνίου. Κατά τον ίδιο τρόπο, υποθέτει έναν κώνο με βάση

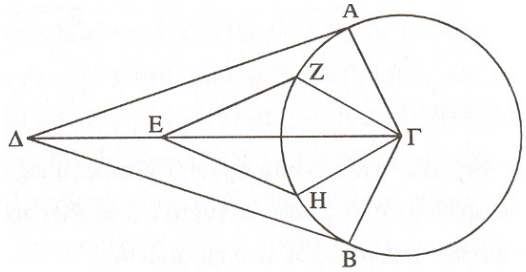


Σχήμα 8-43
Οπτικά – Θεώρημα 30

τον κύκλο ΒΓ και κορυφή το σημείο Α. Ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Δ, από όπου προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΔΒ, ΔΓ εφαπτόμενες στον κώνο. Οι πλευρές

του κώνου είναι οι ΑΒ και ΑΓ. Το παρατηρούμενο τμήμα του κώνου είναι το τόξο ΒΓ, το οποίο είναι μικρότερο του ημικυκλίου. Συνεπώς, παρατηρείται τμήμα μικρότερο του ημικωνίου.

Στο θεώρημα 31 επιχειρείται να αποδειχθεί ότι, όταν ο οφθαλμός μετακινείται σε σημείο που να είναι πλησιέστερο προς τον κώνο, τότε το τμήμα του κώνου που περιλαμβάνουν οι όψεις είναι μικρότερο από εκείνο που περιλαμβάνουν, όταν ο οφθαλμός είναι πιο απομακρυσμένος, αλλά το τμήμα αυτό θα φαίνεται μεγαλύτερο. Ο συγγραφέας ακολουθεί την ίδια συλλογιστική πορεία. Έτσι, σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, υποθέτει έναν κώνο που έχει ως βάση του τον κύκλο ΑΒ και κορυφή του το σημείο Γ. Υποτίθεται επίσης ότι ο οφθαλμός βρίσκεται αρχικά στο



Σχήμα 8-44
Οπτικά – Θεώρημα 31

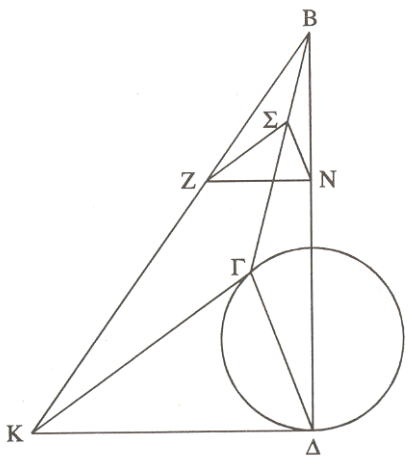
σημείο Δ, το οποίο ενώνεται με το κέντρο του κύκλου που ονομάζει Λ. Το σημείο Λ δε φαίνεται στο σχήμα, γιατί, εφόσον ο άξονας είναι κάθετος στο κέντρο του κύκλου, το σημείο της κορυφής συμπίπτει με το κέντρο της βάσης. Επιπλέον, υποτίθεται ότι προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΔΑ, ΔΒ, οι οποίες περιλαμβάνουν το ΑΓΒ τμήμα του κύκλου. Ωστόσο, αν ο οφθαλμός μετακινηθεί πλησιέστερα, συγκεκριμένα στο σημείο Ε, από όπου προσπέσουν οι οπτικές ακτίνες ΕΖ, ΕΗ, είναι φανερό ότι αυτές θα περιλαμβάνουν το τμήμα ΖΓΗ του κύκλου που είναι μικρότερο από το ΑΓΒ. Ωστόσο, η γωνία Ε είναι μεγαλύτερη από τη Δ και, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» των *Οπτικών*, το ΖΓΗ θα φαίνεται μεγαλύτερο από το ΑΓΒ.

13. Παίζοντας με τα φαινομενικά μεγέθη του κώνου: τα θεωρήματα 32-33

Τα θεωρήματα 32 και 33 σχετίζονται πάλι με την οπτική αντίληψη του κώνου. Το θεώρημα 32 εξετάζει υπό ποιες προϋποθέσεις τα παρατηρούμενα τμήματα του κώνου θα φαίνονται ίσα. Οι προϋποθέσεις αυτές αφορούν στον προσδιορισμό των

θέσεων που πρέπει να καταλαμβάνει το παρατηρησιακό σημείο, ώστε το τμήμα του κώνου που θα περιλαμβάνουν οι οπτικές ακτίνες να φαίνεται πάντα ίσο. Αντίθετα, στο θεώρημα 33 προσδιορίζονται οι συγκεκριμένες θέσεις του παρατηρησιακού σημείου, από τις οποίες τα περιεχόμενα -υπό των οπτικών ακτίνων- τμήματα του κώνου που γίνονται ορατά θα φαίνονται άνισα, παρόλο που η απόσταση του παρατηρησιακού σημείου από τον κώνο διατηρείται σταθερή.

Σύμφωνα με το θεώρημα 32 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, υποτίθεται ένας κώνος με βάση τον κύκλο ΓΔ και κορυφή το σημείο Β. Ο οφθαλμός εντοπίζεται στο σημείο Κ, από τον οποίο προσπίπτουν οπτικές ακτίνες, οι ΚΔ, ΚΓ, έτσι, ώστε να είναι



Σχήμα 8-45
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 32

εφαπτομένες στα σημεία Γ, Δ. Ενώνονται οι ευθείες ΔΒ, ΓΒ και υποτίθεται ότι φέρονται δύο επίπεδα, εκ των οποίων το ένα διέρχεται από τις ευθείες ΓΒ, ΓΚ και το άλλο από τις ευθείες ΔΒ, ΔΚ. Σύμφωνα με τα λεγόμενα του συγγραφέα, επειδή η ΓΒ συμπίπτει με τη ΔΒ στο σημείο Β, και, επειδή το ίδιο συμβαίνει και με τις ΓΚ, ΚΔ στο σημείο Κ, τα δύο επίπεδα θα εφάπτονται, με αποτέλεσμα η κοινή τομή τους να είναι η ευθεία ΒΚ.

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι στο αντίστοιχο σημείο της απόδειξης των *Οπτικών* ο συγγραφέας δεν προσπαθεί να αιτιολογήσει γιατί η κοινή τομή των επιπέδων είναι ευθεία, αλλά, αφού υποθέσει την ύπαρξη των δύο συγκεκριμένων επιπέδων, δηλώνει απλά ότι «*ποιήσει ἄρα τὴν κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν*». Η πρόταση στην οποία μας παραπέμπει η δήλωση του συγγραφέα των *Οπτικών* είναι η πρόταση

3 του βιβλίου XI των *Στοιχείων*, σύμφωνα με την οποία, εάν δύο επίπεδα τέμνουν το ένα το άλλο, η κοινή τομή τους είναι ευθεία γραμμή[54].

Ύστερα από αυτή την επισήμανση, ξαναγυρνάμε στο θεώρημα 32 και στο σχήμα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Αυτό που επιχειρείται να αποδειχθεί είναι ότι σε όποιο σημείο της ευθείας ΒΚ και αν τοποθετηθεί ο οφθαλμός, το τμήμα του κώνου που θα περιλαμβάνεται κάθε φορά από τις οπτικές ακτίνες θα φαίνεται πάντα ίσο[55]. Ο οφθαλμός τοποθετείται στο σημείο Ζ, από όπου υποτίθεται ότι προσπίπτει η οπτική ακτίνα ΖΝ παράλληλα προς την ΚΔ, και η ΖΣ παράλληλα προς τη ΓΚ. Σύμφωνα με την επιχειρηματολογία που αναπτύσσεται, οι οπτικές ακτίνες θα είναι εφαπτομένες στην επιφάνεια του κώνου, με σημεία επαφής τα σημεία Σ και Ν. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι γιατί, όπως δηλώνεται, στην κωνική επιφάνεια ΒΓΔ τα παράλληλα τμήματα των κύκλων είναι όμοια. Από το γεγονός αυτό συνάγεται ότι τα διαστήματα που παρατηρούνται στην επιφάνεια του κώνου ΒΔΓ θα φαίνονται ίσα. Συνεπώς, επειδή η γωνία που περιέχεται από τις ΖΣ, ΖΝ είναι ίση με τη γωνία που περιέχουν οι ΚΔ, ΚΓ, άρα, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» της πραγματείας, το διάστημα ΣΝ του κώνου θα φαίνεται ίσο με το διάστημα ΔΓ.

Διαπιστώνουμε ότι στην απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* το συμπέρασμα περί της ισότητας των οπτικών γωνιών εδραιώνεται στην ομοιότητα των κυκλικών τμημάτων που περιέχουν οι οπτικές ακτίνες. Ο συγγραφέας φαίνεται ότι στηρίζει τα συμπεράσματά του στον ορισμό των όμοιων κυκλικών τμημάτων. Σύμφωνα με τον 11ο ορισμό του βιβλίου III των *Στοιχείων*, τα όμοια κυκλικά

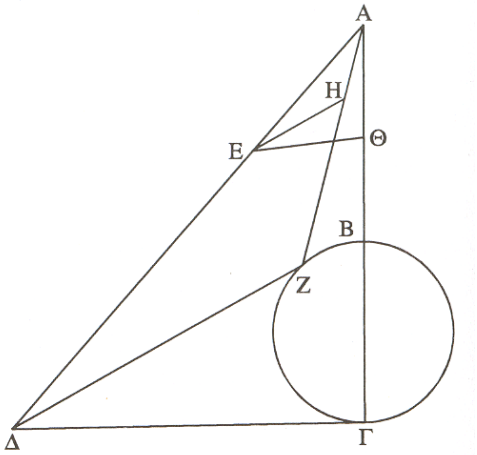
---

[54] «*Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστιν*», *Στοιχεία*, XI, 3.

[55] Στα *Οπτικά* το θεώρημα 32 δηλώνεται ως «*Ἐὰν ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὴν τοῦ κώνου βάσιν προσπίπτωσιν ἀκτῖνες, ἀπὸ δὲ τῶν προσπιπτουσῶν ἀκτίνων καὶ ἐφαπτομένων ἀπὸ τῶν ἁφῶν εὐθεῖαι ἀχθῶσι διὰ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου πρὸς τὴν κορυφὴν αὐτοῦ, διὰ δὲ τῶν ἀχθεισῶν καὶ τῶν ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου προσπιπτουσῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἐπὶ δὲ τῆς συναφῆς αὐτῶν, τουτέστιν ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων, τὸ ὄμμα τεθῇ, τὸ ὁρώμενον τοῦ κώνου διὰ παντὸς ἴσον ὀφθήσεται τῆς ὄψεως ἐπὶ παραλλήλου ἐπιπέδου τῷ προϋποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὑπαρχούσης*» και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ως «*Κώνου κύκλον ἔχοντος τὴν βάσιν, ἐὰν ἀπὸ τῶν συναφῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὴν τοῦ κώνου βάσιν προσπιπτουσῶν ἀκτίνων εὐθεῖαι διαχθῶσι διὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς τοῦ κώνου πρὸς τὴν κορυφὴν αὐτοῦ, διὰ δὲ τῶν ἀχθεισῶν καὶ τῶν ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου προσπιπτουσῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἐπὶ δὲ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων τὸ ὄμμα τεθῇ, τὸ ὁρώμενον τοῦ κώνου ἴσον διὰ παντὸς ὀφθήσεται τῆς ὄψεως ἐπὶ παραλλήλου ἐπιπέδου τῷ προϋποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὑπαρχούσης*».

τμήματα είναι αυτά που δέχονται ίσες γωνίες[56]. Εφόσον λοιπόν κρίνεται ότι τα κυκλικά τμήματα που περιλαμβάνουν οι οπτικές γωνίες είναι όμοια, αυτό σημαίνει ότι οι οπτικές γωνίες είναι ίσες.

Στην αντίστοιχη απόδειξη των *Οπτικών*, ο συγγραφέας ακολουθεί έναν διαφορετικό συλλογισμό. Όπως φαίνεται στο σχήμα 46, ο συγγραφέας των *Οπτικών* υποθέτει ότι ο οφθαλμός βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΑΕΔ, συγκεκριμένα στο σημείο Ε, από όπου προσπίπτουν οπτικές ακτίνες στον κώνο:



Σχήμα 8-46
Οπτικά – Θεώρημα 32

Ο συγγραφέας λέει ότι οι οπτικές ακτίνες θα διέρχονται κατά τις ευθείες ΑΖ, ΑΓ, επειδή ο οφθαλμός βρίσκεται σε παράλληλο επίπεδο και επειδή οι όψεις φέρονται κατά ευθείες γραμμές. Η πρόταση αυτή μας παραπέμπει στο θεώρημα 15 του βιβλίου XI των *Στοιχείων*. Σύμφωνα με αυτό, εάν δύο ευθείες γραμμές που τέμνονται η μία με την άλλη είναι παράλληλες προς δύο ευθείες γράμμες που, επίσης, τέμνονται μεταξύ τους, αλλά δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τα επίπεδα που διέρχονται από αυτές θα είναι παράλληλα[57].

Κατά τη συνέχεια, ο συγγραφέας ισχυρίζεται ότι, αν οι οπτικές ακτίνες προσπέσουν εκτός των ΑΖ, ΑΓ, θα κλασθούν, δηλαδή θα παρουσιάσουν καμπυλότητα που, όπως τονίζει, είναι άτοπο. Υποθέτει λοιπόν ότι οι οπτικές ακτίνες θα είναι οι ΕΗ, ΕΘ και συμπληρώνει: «*επειδή λοιπόν επί ενός παράλληλου επιπέδου οι όψεις φέρονται κατά ευθείες γραμμές, αυτά που παρατηρούνται υπό ίσες γωνίες*

---

56 «*Ὅμοια τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλ ήλαις εἰσίν*», Στοιχεία, III, ορισμός 11.

57 «*Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, παράλληλά ἐστι τὰ δι᾽ αὐτῶν ἐπίπεδα*», *Στοιχεία*, XI, 15.

φαίνονται ίσα˙ όσες όψεις και αν τεθούν παράλληλες της ευθείας ΑΕΔ, περιέχουν ίσες γωνίες, άρα θα ειδωθεί ίσο τμήμα του κώνου»[58]. Ο συγγραφέας φαίνεται ότι αφορμάται από την πρόταση 10 του βιβλίου XI των *Στοιχείων*, σύμφωνα με την οποία, εάν δύο ευθείες που τέμνονται μεταξύ τους είναι παράλληλες προς δύο ευθείες που, επίσης, τέμνονται μεταξύ τους και που βρίσκονται σε διαφορετικό επίπεδο, θα περιέχουν ίσες γωνίες[59].

Διαπιστώνουμε ότι η απόδειξη του θεωρήματος 32 του συγγραφέα των *Οπτικών* βασίζεται σε προτάσεις του εντέκατου βιβλίου των *Στοιχείων*, δηλαδή σε αρκετά σύνθετες προτάσεις που αφορούν στη στερεομετρία. Αντίθετα, η απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* βασίζεται σε πιο απλές προτάσεις της επιπεδομετρίας. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση του θεωρήματος 33. Παρατηρούμε ότι και στις δύο εκδόσεις το θεώρημα αυτό βασίζεται στις ίδιες γεωμετρικές προτάσεις που τέθησαν και στο θεώρημα 32, αφού ακολουθείται η ίδια συλλογιστική πορεία.

Συγκεκριμένα, στο θεώρημα 33 δηλώνεται ότι, ακόμα και αν ο οφθαλμός απέχει ίση απόσταση από τον κώνο, εάν αυτός τοποθετηθεί σε ψηλότερη θέση, τότε το τμήμα του κώνου που παρατηρείται θα φαίνεται μικρότερο από εκείνο που παρατηρείται, εάν ο οφθαλμός βρίσκεται σε χαμηλότερη θέση[60].

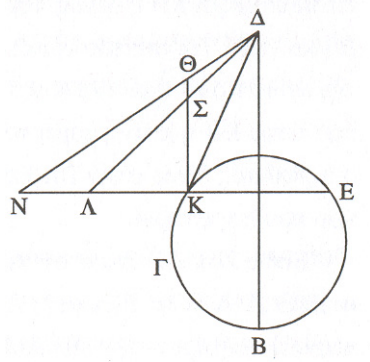
Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* υποτίθεται ένας κώνος που έχει για κορυφή το σημείο Δ και για βάση τον κύκλο ΒΓ. Η ΚΘ φέρεται παράλληλα προς τη ΒΔ και ο οφθαλμός τοποθετείται στο Θ:

---

[58] «*...ἐπειδήπερ ἐπὶ παραλλήλου ἐπιπέδου κεῖται τὸ ὄμμα, κατ' εὐθείας δὲ γραμμὰς φέρονται αἱ ὄψεις. εἰ γὰρ ἐκτὸς πεσοῦνται τῶν ΑΓ, ΑΖ, κλασθήσονται αἱ ὄψεις· ὅπερ ἄτοπον. ἔστωσαν οὖν αἱ ΕΘ, ΕΗ. ἐπεὶ οὖν ἐπὶ παραλλήλου μὲν ἐπιπέδου κατ' εὐθείας γραμμὰς φέρονται αἱ ὄψεις, τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται, ὅσαι δ' ἂν ὄψεις ἐπὶ τῆς ΑΕΔ εὐθείας τεθῶσι παράλληλοι, ἴσας γωνίας περιέχουσι, τὸ ἴσον ἄρα τοῦ κώνου ὀφθήσεται*», 32.23-32.

[59] «*Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν*», *Στοιχεία*, XI, 10.

[60] Στα *Οπτικά* το θεώρημα 33 δηλώνεται ως «*Πάλιν δέ γε τοῦ ὄμματος μετατεθέντος ἀπὸ τοῦ ταπεινοῦ μετεώρου μὲν τοῦ ὄμματος τεθέντος μεῖζον μὲν ἔσται τοῦ κώνου τὸ ὁρώμενον, δόξει δὲ ἔλασσον φαίνεσθαι, ταπεινοτέρου δὲ ἔλασσον μὲν ἔσται, δόξει δὲ μεῖζον φαίνεσθαι*» και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ως «*Ἴσον δὲ ἀεὶ τοῦ ὄμματος ἀπὸ τοῦ κώνου ἀπέχοντος μετεώρου μὲν τοῦ ὄμματος τεθέν τος ἔλασσον φαίνεται τοῦ κώνου τὸ ὁρώμενον, ταπεινοτέρου δὲ μεῖζον*».

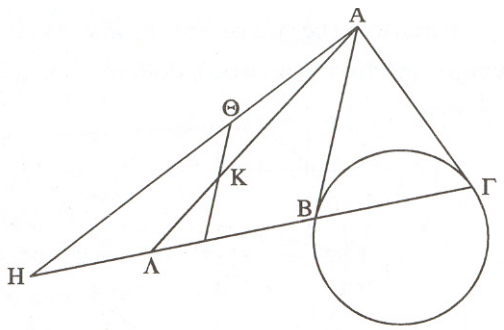


Σχήμα 8-47

Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 33

Αυτό που ζητάται να αποδειχθεί είναι ότι από τη θέση Θ το παρατηρούμενο τμήμα του κώνου θα φαίνεται μικρότερο, σε σχέση με αυτό που παρατηρείται, αν ο οφθαλμός βρίσκεται χαμηλότερα, δηλαδή στο σημείο Σ. Από την κορυφή του κώνου ενώνονται οι ΔΘ, ΔΣ που επεκτείνονται στα Ν και Λ. Ο συγγραφέας δηλώνει ότι από τα σημεία Ν και Λ τα παρατηρούμενα τμήματα του κώνου θα φαίνονται άνισα και, μάλιστα, αυτό που βλέπεται από το σημείο Ν θα φαίνεται μικρότερο, σε σχέση με αυτό που βλέπεται από το Λ. Ο συγγραφέας δεν το αναφέρει, αλλά γνωρίζουμε ότι αυτό το είχε αποδείξει στο θεώρημα 31. Στη συνέχεια, παραπέμποντας ο ίδιος στο θεώρημα 32 ισχυρίζεται ότι το τμήμα του κώνου που βλέπεται από το Ν φαίνεται ίσο με αυτό που βλέπεται από το Θ και το τμήμα του κώνου που βλέπεται από το Λ φαίνεται ίσο με αυτό που βλέπεται από το Σ. Επομένως, από την ψηλότερη θέση Θ του οφθαλμού το παρατηρούμενο τμήμα του κώνου θα φαίνεται μικρότερο από εκείνο που παρατηρείται, όταν ο οφθαλμός βρίσκεται στη χαμηλότερη θέση Σ, παρόλο που οι δύο θέσεις βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Στην απόδειξη του θεωρήματος 33 των *Οπτικών* ακολουθείται ανάλογος συλλογισμός. Υπάρχει μια μικρή διαφορά στο σχήμα, αφού, εκτός από αυτά που είδαμε να συμβαίνουν στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*, ο συγγραφέας φέρει, όπως βλέπουμε στο σχήμα 8-48, και την ευθεία ΒΓ επεκτείνοντάς τη, μέχρι το σημείο Η:



Σχήμα 8-48
Οπτικά – Θεώρημα 33

Στη συνέχεια, αφού φέρει τις ευθείες ΑΘ, ΑΚ και τις επεκτείνει μέχρι τα σημεία Η και Λ, δηλώνει βασιζόμενος στο θεώρημα 31 ότι το τμήμα του κώνου που παρατηρείται από το σημείο Η θα φαίνεται μικρότερο από αυτό που βλέπεται από τη θέση Λ. Συμπληρώνει όμως τη δήλωσή του λέγοντας ότι στην πραγματικότητα από τη θέση Η καταλαμβάνεται μεγαλύτερο τμήμα του κώνου, σε σχέση με τη θέση Λ. Η επισήμανση αυτή δε γίνεται στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*.

Διαπιστώνουμε ότι στο σημείο αυτό οι δύο εκδόσεις συμφωνούν συλλογιστικά, αφού και οι δύο παραπέμπουν στο θεώρημα 31, όμως ο συγγραφέας των *Οπτικών* είναι πιο πιστός στα λεγόμενα του συγκεκριμένου θεωρήματος, γι' αυτό δεν παραλείπει τίποτα από αυτά. Το θεώρημα 31 δηλώνει ότι «*Εάν ο οφθαλμός που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τη βάση του παρατηρούμενου κώνου τοποθετηθεί πιο κοντά προς τον κώνο, τότε το τμήμα του κώνου που περιλαμβάνεται από τις όψεις θα είναι μικρότερο, όμως θα φανεί ότι είναι μεγαλύτερο*». Αντίθετα με τον συγγραφέα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, ο συγγραφέας των *Οπτικών* προσπαθεί να είναι πιο συνεπής προς τα λεγόμενα του θεωρήματος 31. Γι' αυτόν τον λόγο, συμπληρώνει τη δήλωση του θεωρήματος 33 με το να επισημάνει επιπλέον τι συμβαίνει στην πραγματικότητα. Έτσι, δεν αναφέρει μόνο τι γίνεται με την αισθητηριακή αντίληψη, δηλαδή ποιο τμήμα του κώνου θα φανεί μεγαλύτερο δεδομένων δύο διαφορετικών θέσεων του οφθαλμού, αλλά διευκρινίζει, όπως το θεώρημα 31, ότι το παρατηρούμενο τμήμα του κώνου που φαινομενικά είναι μικρότερο, ωστόσο, στην πραγματικότητα είναι μεγαλύτερο.

Κατά τη συνέχεια της απόδειξης των *Οπτικών*, ο συγγραφέας δηλώνει ότι το τμήμα του κώνου που παρατηρείται από τη θέση Η φαίνεται ίσο με αυτό που παρατηρείται από τη θέση Θ. Αντίστοιχα, το τμήμα που παρατηρείται από τη θέση Λ φαίνεται ίσο με αυτό που παρατηρείται από τη θέση Κ. Ο ισχυρισμός αυτός

εδραιώνεται, όπως είδαμε και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*, στο θεώρημα 32. Επειδή όμως το τμήμα του κώνου που παρατηρείται από τη θέση Η, παρόλο που είναι μεγαλύτερο, φαίνεται μικρότερο από το τμήμα που παρατηρείται από τη θέση Λ, ο συγγραφέας συμπεραίνει αντίστοιχα ότι, όταν ο οφθαλμός βρίσκεται στο Θ, το τμήμα του κώνου που παρατηρείται, παρόλο που είναι μεγαλύτερο, θα φαίνεται μικρότερο από αυτό που παρατηρείται, όταν ο οφθαλμός βρίσκεται στη θέση Κ.

Παρόλο που ο συγγραφέας των *Οπτικών* προσπαθεί να είναι πιο συνεπής, εξαιτίας της σχολαστικότητας που τον διακρίνει, ωστόσο, θεωρούμε ότι πίπτει σε σφάλμα. Παρασυρόμενος από τη συμπληρωματική έκφραση που παρέθεσε, για να είναι πιο τυπικός απέναντι στη δήλωση του θεωρήματος 31, εξήγαγε δύο τελικά συμπεράσματα, από τα οποία το ένα δεν ευσταθεί.

Το πρώτο συμπέρασμα είναι ότι από τη θέση Θ το παρατηρούμενο τμήμα του κώνου θα φανεί μικρότερο από εκείνο που παρατηρείται από τη θέση Κ. Το συμπέρασμα αυτό που βασίζεται στο θεώρημα 32 είναι ορθό. Ωστόσο, ο συγγραφέας συμπεραίνει επίσης ότι από τη θέση Θ το τμήμα εκείνο που περιλαμβάνουν οι όψεις είναι μεγαλύτερο από το τμήμα που περιλαμβάνουν, όταν ο οφθαλμός βρίσκεται στο Κ. Θεωρούμε ότι το δεύτερο συμπέρασμα δεν είναι ορθό, γιατί τα σημεία Θ και Κ δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, όπως τα Η και Λ. Σύμφωνα με το θεώρημα 31, μεταξύ των σημείων Η και Λ που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, από το σημείο Η οι όψεις περιλαμβάνουν ένα τμήμα του κώνου που είναι μεγαλύτερο, αλλά θα φανεί μικρότερο, σε σχέση με εκείνο που περιλαμβάνουν από τη θέση Λ. Από την άλλη μεριά, σύμφωνα με το θεώρημα 32, το μόνο νόμιμο συμπέρασμα που μπορεί να εξαχθεί είναι ότι τόσο από το σημείο Η όσο και από το σημείο Θ, τα παρατηρούμενα τμήματα του κώνου φαίνονται ίσα, όχι ότι θα είναι και στην πραγματικότητα ίσα. Αυτό που πρέπει να γίνει κατανοητό είναι πως ό,τι συμβαίνει μεταξύ των σημείων Η και Λ που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, όσον αφορά στο πραγματικό μέγεθος των τμημάτων του κώνου που περιλαμβάνονται από τις όψεις σε καθεμία από τις δύο θέσεις, δε μπορεί να ισχύει αντίστοιχα και για τις θέσεις Θ, Κ που δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο μεταξύ τους. Εξαιτίας του θεωρήματος 32, μεταξύ των σημείων Η, Θ και Λ, Κ, αντίστοιχα, υπάρχει μια 'ισοδυναμία' ως προς τα φαινομενικά μεγέθη των τμημάτων του κώνου, αλλά η 'ισοδυναμία' αυτή δεν υφίσταται και ως προς τα πραγματικά μεγέθη των τμημάτων του κώνου που περιλαμβάνουν κάθε φορά οι όψεις. Ό,τι συμπεράσματα εξάγουμε για τα διαφορετικά ως προς το μέγεθος τμήματα που περιέχονται από τις όψεις στα σημεία Η και Λ, δεν είναι ορθό να τα εξάγουμε και

για τα αντίστοιχά τους σημεία Θ και Κ, γιατί τα Θ και Κ θεωρούνται ως αντίστοιχά τους μόνο σε επίπεδο φαινομενικότητας. Επομένως, επειδή από το σημείο Λ οι όψεις περιλαμβάνουν μικρότερο μέρος του οπτικού κώνου, σε σχέση με αυτό που περιλαμβάνεται από τη θέση Η, δε σημαίνει ότι και από τη θέση Κ οι όψεις θα περιλαμβάνουν μικρότερο τμήμα, σε σύγκριση με αυτό που περιλαμβάνεται από το σημείο Θ. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι από τη θέση Κ οι όψεις περιλαμβάνουν μεγαλύτερο ή μικρότερο τμήμα του κώνου, σε σχέση με αυτό που περιλαμβάνουν όταν ο οφθαλμός βρίσκεται στο Θ, μόνο αν τα Κ και Θ βρίσκονταν στο ίδιο επίπεδο. Επομένως, εκτιμούμε ότι το συγκεκριμένο σκέλος του συμπεράσματος του συγγραφέα των *Οπτικών* είναι αβάσιμο.

14. Κοιτάζοντας τον κύκλο

Από το θεώρημα 34 εώς το θεώρημα 37 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* το ενδιάφερον εστιάζεται στην οπτική αντίληψη των κύκλων. Το θεώρημα 37 δηλώνει ότι οι τροχοί των αρμάτων άλλοτε φαίνονται ως κύκλοι και άλλοτε ως «*παρεσπασμένοι*», δηλαδή εμφανίζουν ελλειπτικό σχήμα. Ουσιαστικά, τα θεωρήματα 34 εώς 36 προετοιμάζουν τις βάσεις, πάνω στις οποίες στηρίζεται ως ένα είδος εφαρμογής τους το θεώρημα 37. Συγκεκριμένα, επιχειρούν να προσδιορίσουν τις συνθήκες, υπό τις οποίες ένας κύκλος θα φαίνεται ως κύκλος, και τις συνθήκες, υπό τις οποίες δε θα φαίνεται ως κύκλος.

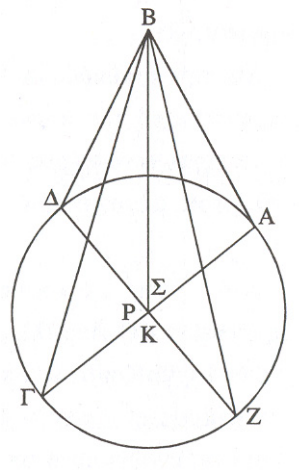
Τα παραπάνω ερωτήματα απασχόλησαν και τον Πάππο, ο οποίος συνέγραψε εκτεταμένα σχόλια στα θεωρήματα που σχετίζονται με την οπτική αντίληψη των κύκλων. Όπως έχουμε προαναφέρει, τα σχόλια αυτά διασώζονται στο βιβλίο VI της *Μαθηματικής Συναγωγής*. Αυτό που κάνει ο Πάππος είναι να αναπτύξει περαιτέρω ορισμένες από τις παραπάνω προτάσεις και να μελετήσει τις περιπτώσεις της ελλειπτικής εμφάνισης του κύκλου και τα παράδοξα που προκύπτουν από αυτή. Δυστυχώς, δε είναι δυνατόν να αποφανθεί κανείς με απόλυτη ακρίβεια για το τι κείμενο είχε στα χέρια του ο Πάππος. Η έκθεση της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, αλλά και εκείνη των *Οπτικών* πλησιάζουν πολύ την ανάλυση του Πάππου, ώστε να μη γίνεται σαφές με την πρώτη ματιά, αν και ποια χωρία των δύο εκδόσεων προϋπήρχαν της συγγραφής του Πάππου, ή αν, εφόσον δεν υπήρχαν, ενσωματώθηκαν στη συνέχεια από κάποιον συγγραφέα επηρεασμένο από τα σχόλια του Πάππου.

Μέσα σε όλη αυτή τη σύγχυση, παρατηρούμε ότι στο κείμενο των *Οπτικών* τα θεωρήματα που σχετίζονται με την οπτική αντίληψη των κύκλων ακολουθούν μια

αρίθμηση που διαφέρει από εκείνη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, γεγονός που περιπλέκει ακόμη περισσότερο την κατάσταση. Έτσι, το θεώρημα περί των τροχών των αρμάτων συναντάται στην πρόταση 36 και τα θεωρήματα 34-36 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* βρίσκονται στις θέσεις 34 και 35 των *Οπτικών*. Βέβαια, εξαιτίας των μακροσκελών εκθέσεων και για λόγους ευκολίας, οι αποδείξεις των θεωρημάτων 34-36 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* έπρεπε να χωριστούν σε επιμέρους τμήματα που έχουν τα αντίστοιχά τους στα *Οπτικά*. Αλλά, όλα αυτά θα διασαφηνιστούν στη συνέχεια.

α. Πρώτη συνθήκη υπό την οποία ο κύκλος θα φανεί ως κύκλος

Το θεώρημα 34 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι, εάν από το κέντρο ενός κύκλου φέρουμε μία κάθετη και πάνω σε αυτή τοποθετηθεί ο οφθαλμός, τότε οι διάμετροι του κέντρου φαίνονται ίσες[61]. Στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* υποτίθεται ένας κύκλος με κέντρο το Κ, από το οποίο φέρεται η κάθετη ΚΒ. Στο σημείο Β τοποθετείται ο οφθαλμός και δηλώνεται ότι η ΑΓ θα φανεί ίση με τη ΔΖ. Επομένως, αυτό που ο συγγραφέας σπεύδει να αποδείξει είναι ότι οι γωνίες ΑΒΓ και ΔΒΖ είναι ίσες.



Σχήμα 8-49
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 34

[61] Στα *Οπτικά* το θεώρημα 34α δηλώνει ότι «*Ἐὰν κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνασταθῇ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ εὐθεῖα, ἐπὶ δὲ ταύτης τὸ ὄμμα τεθῇ, αἱ διάμετροι αἱ ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ διαγόμεναι πᾶσαι ἴσαι φανήσονται*» και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* το θεώρημα 34 δηλώνει ότι «*Ἐν κύκλῳ ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς ὀρθάς τις ἀχθῇ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, ἐπὶ δὲ ταύτης τεθῇ τὸ ὄμμα, ἴσαι αἱ διάμετροι τοῦ κύκλου φαίνονται*».

Αφού φέρει τις ευθείες ΒΑ, ΒΖ, ΒΓ, ΒΔ, συγκρίνει τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΒΚΖ και συμπεραίνει ότι η βάση ΒΖ είναι ίση με τη ΒΓ, γιατί, όπως δηλώνει το θεώρημα 4 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, «*αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και έχουν, επίσης, ίσες τις γωνίες που περιέχονται από τις ίσες πλευρές, τότε θα έχουν και τις βάσεις ίσες, τα τρίγωνα θα είναι ίσα και οι υπόλοιπες γωνίες θα είναι μία προς μία ίσες μεταξύ τους*»[62]. Στη συνέχεια, ο συγγραφέας συγκρίνει τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΒΚΔ και, κατά τον ίδιο τρόπο, συμπεραίνει ότι και η ΒΔ θα είναι ίση με τη ΒΑ. Όμως, η ΔΒ είναι ίση με τη ΓΒ, η ΒΖ ίση με τη ΒΑ και η ΔΖ ίση με ΓΑ. Επομένως, η γωνία ΔΒΖ είναι ίση με τη ΓΒΑ, αφού, σύμφωνα με το όγδοο θεώρημα του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν ίσες και τις γωνίες τους[63]. Από την ισότητα των γωνιών των παρατηρούμενων μεγεθών συνάγεται, μέσω του τέταρτου «όρου» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, ότι οι διάμετροι θα φανούν ίσες.

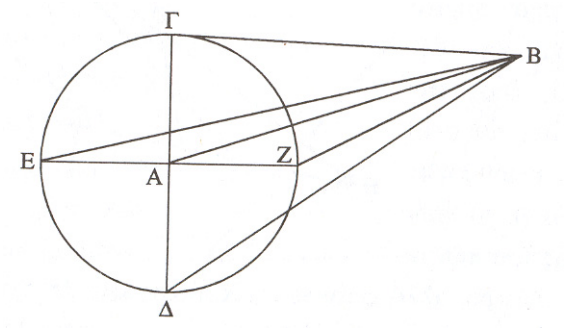
Το θεώρημα 34 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο 34α των *Οπτικών*, όπου για την απόδειξή του ακολουθείται ανάλογη μεθοδολογία. Το συμπέρασμα της ισότητας των παρατηρούμενων γωνιών εξάγεται, μέσω της σύγκρισης των τριγώνων. Ωστόσο, ο συγγραφέας των *Οπτικών* βασίζεται περισσότερο στην ισότητα των γωνιών των τριγώνων που εξετάζει κάθε φορά, ενώ ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δουλεύει περισσότερο με την ισότητα των πλευρών.

Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στο σχήμα 8-50, ο συγγραφέας των *Οπτικών* συγκρίνει αρχικά τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΒΓ:

---

[62] «*Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν*», *Στοιχεία*, I, 4.

[63] «*Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρα, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην*», *Στοιχεία*, I, 8.



Σχήμα 8-50
Οπτικά – Θεώρημα 34α

Μέσω της σύγκρισης των τριγώνων και βασιζόμενος στο θεώρημα 4 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, συμπεραίνει όχι μόνο ότι η ΖΒ είναι ίση με τη ΓΒ, αλλά και ότι η γωνία ΖΒΑ είναι ίση με την ΑΒΓ. Κατά παρόμοιο τρόπο, συμπεραίνει ότι και η γωνία ΕΒΑ είναι ίση με την ΑΒΔ. Η ισότητα των γωνιών ΕΒΑ και ΑΒΔ, μαζί με την ισότητα των ΑΒΖ και ΑΒΓ καταλήγει στην ισότητα των αθροισμάτων τους, δηλαδή στην ισότητα των γωνιών ΕΒΖ και ΓΒΔ. Έτσι, μέσω του τέταρτου «όρου» των *Οπτικών*, εξάγεται τελικά το συμπέρασμα ότι οι διάμετροι ΕΖ και ΓΔ φαίνονται ίσες.

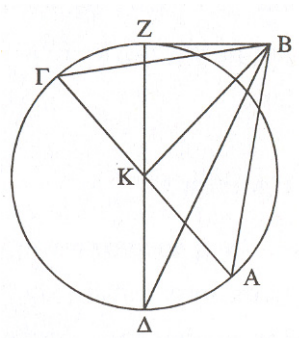
β. Δεύτερη συνθήκη υπό την οποία ο κύκλος θα φανεί ως κύκλος

Στο θεώρημα 35 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* τίθενται άλλες δύο συνθήκες που, αν τηρούνται, εξασφαλίζεται η ισότητα των οπτικών γωνιών, υπό τις οποίες παρατηρείται ένας κύκλος. Έτσι, η πρόταση 35α της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι, ακόμα και αν η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και πάνω στην οποία είναι τοποθετημένος ο οφθαλμός δεν είναι κάθετη προς τον κύκλο, αλλά ισούται με την ακτίνα του, ακόμα και σε αυτή την περίπτωση, οι διάμετροι του κύκλου θα φανούν ίσες[64].

Έτσι, σύμφωνα με το σχήμα 8-51 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, υποτίθεται ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Β της ευθείας ΚΒ που διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου και που δεν είναι κάθετη προς αυτόν, αλλά είναι ίση με την ακτίνα του:

---

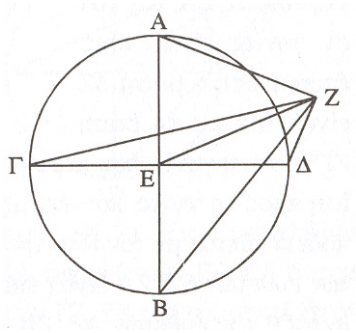
[64] Το θεώρημα 35α της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι «*Καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ τοῦ κέντρου ἀναχθεῖσα μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ἐπιπέδῳ, ἴση δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἴσαι αἱ διάμετροι φανήσονται*».Το θεώρημα αυτό αντιστοιχεί στο 34β των *Οπτικών*, όπου δηλώνεται ως «*κἂν ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀχθεῖσα μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ἐπιπέδῳ, ἴση δὲ ᾖ τῇ ἐκ τοῦ κέν τρου, αἱ διάμετροι πᾶσαι ἴσαι φανήσονται*».



Σχήμα 8-51
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 35α

Ενώνονται οι ευθείες ΒΑ, ΒΔ, ΒΓ, ΒΖ. Ο συγγραφέας δηλώνει ότι, επειδή οι ΔΚ, ΚΒ, ΚΖ είναι ίσες, άρα η περιεχόμενη γωνία ΖΒΔ είναι ορθή. Το ίδιο συμβαίνει και με τη γωνία ΑΒΓ. Ο συγγραφέας δεν το αναφέρει ρητά, αλλά φαίνεται ότι βασίζεται στο θεώρημα 31 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*, γιατί, αν υποθέσουμε ότι φέρεται ένα ημικύκλιο που διέρχεται από τα σημεία Ζ, Β, Δ, τότε η γωνία που βαίνει σε αυτό, δηλαδή η Β, είναι ορθή[65]. Αφού οι οπτικές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, τότε, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» του συγγράμματος, οι διάμετροι ΔΖ και ΑΓ φαίνονται ίσες.

Το θεώρημα 35α της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο 34β των *Οπτικών*. Η απόδειξη που παρουσιάζει ο συγγραφέας των *Οπτικών* δεν αποκλίνει μεθοδολογικά από εκείνη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Έτσι, σύμφωνα με το σχήμα 8-52 των *Οπτικών*, ο συγγραφέας ισχυρίζεται ότι επειδή οι ΕΖ, ΕΑ, ΕΒ είναι ίσες, το ημικύκλιο που φέρεται διαμέσω των ΑΒ, ΕΖ και γύρω από τη διάμετρο ΑΒ, θα περνά



Σχήμα 8-52
Οπτικά – Θεώρημα 34β

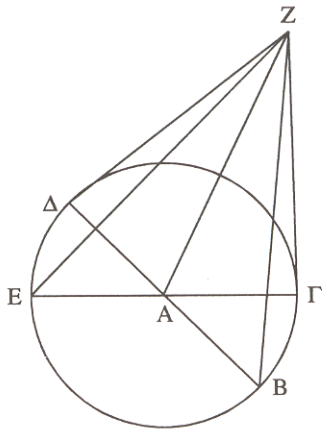
---

65 «*Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς· καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ὀρθῆς*», *Στοιχεία*, ΙΙΙ, 31.

από το σημείο Ζ. Επομένως, η γωνία ΑΖΒ θα είναι ορθή. Το ίδιο ισχύει και για τη γωνία ΓΖΔ. Διαπιστώνουμε ότι σε αυτό το σημείο ο συγγραφέας των *Οπτικών* είναι πιο σχολαστικός, σε σχέση με τον συγγραφέα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Έτσι, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι εξάγει το συμπέρασμα περί των ορθών γωνιών ΑΖΒ, ΓΖΔ, μέσω του θεωρήματος 31 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*.

γ. Τρίτη συνθήκη υπό την οποία ο κύκλος θα φανεί ως κύκλος

Στο θεώρημα 35β της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αποδεικνύεται ότι οι διάμετροι ενός κύκλου θα φανούν ίσες ακόμα και αν η ευθεία, πάνω στην οποία τοποθετείται ο οφθαλμός, δεν είναι ούτε κάθετη σε αυτόν ούτε ίση με την ακτίνα του. Η προϋπόθεση που πρέπει να τηρείται είναι η ευθεία, πάνω στην οποία βρίσκεται ο οφθαλμός, να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου με τέτοιο τρόπο, ώστε να σχηματίζει ίσες γωνίες με συγκεκριμένες, επιλεγμένες, διαμέτρους του κύκλου. Για παράδειγμα, στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* υποτίθεται ότι η ευθεία ΑΖ δεν είναι κάθετη στον κύκλο ούτε ίση με την ακτίνα του. Υποτίθεται όμως ότι η γωνία ΔΑΖ είναι ίση με τη γωνία ΖΑΓ και η γωνία ΕΑΖ είναι ίση με τη γωνία ΖΑΒ:



Σχήμα 8-53
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 35β

Μέσω της σύγκρισης των τριγώνων ΔΑΖ και ΖΑΓ και, σύμφωνα με το θεώρημα 4 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, συνάγεται ότι η ΔΖ είναι ίση με τη ΖΓ και ότι η γωνία ΔΖΑ είναι ίση με την ΑΖΓ. Κατά ανάλογο τρόπο, εξάγεται το συμπέρασμα ότι και η γωνία ΕΖΑ είναι ίση με την ΑΖΒ. Επομένως, τα αθροίσματά τους θα είναι ίσα και ολόκληρη η γωνία ΔΖΒ θα είναι ίση με ολόκληρη την ΕΖΓ. Επομένως, οι διάμετροι θα φανούν ίσες.

Η συλλογιστική πορεία που ακολουθείται για την απόδειξη του θεωρήματος 35β της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* θυμίζει εκείνη που είχαμε συναντήσει στην απόδειξη του θεωρήματος 34α των *Οπτικών*. Η πρόταση 35β της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στην πρόταση 34γ των *Οπτικών*. Στην περίπτωση αυτή τα *Οπτικά* συμφωνούν με το κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, αφού η αποδεικτική διαδικασία που καταγράφεται για το συγκεκριμένο θεώρημα είναι ακριβώς η ίδια.

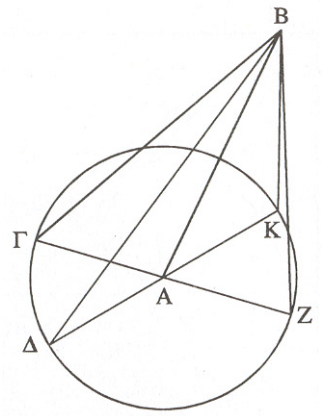
Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η πρόταση 35β της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, αλλά και η 34γ των *Οπτικών*, ενδέχεται να είναι μεταγενέστερες προσθήκες, γιατί ο Πάππος δεν κάνει καθόλου λόγο για τη συγκεκριμένη συνθήκη στα σχόλιά του. Ο Πάππος αναφέρει και εξετάζει μόνο τις δύο πρώτες συνθήκες, δηλαδή είτε αν ο οφθαλμός βρίσκεται σε ευθεία κάθετη προς το κέντρο του κύκλου, είτε αν βρίσκεται σε ευθεία που ισούται με την ακτίνα του κύκλου[66].

δ. Τι συμβαίνει αν δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες;

Στο θεώρημα 36 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνεται ότι, εάν δεν ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες που τέθηκαν στις προηγούμενες προτάσεις, δηλαδή, εάν η ευθεία, πάνω στην οποία είναι τοποθετημένος ο οφθαλμός και που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, δεν είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου ή δεν είναι ίση με την ακτίνα του ή δε σχηματίζει ίσες γωνίες με ορισμένες διαμέτρους του, τότε οι διάμετροι του κύκλου θα φανούν άνισες. Η δήλωση του θεωρήματος 36 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στη δήλωση 35 των *Οπτικών*.

Σύμφωνα με την *Αναθεωρημένη Έκδοση* και το σχήμα 8-54, υποτίθεται ένας κύκλος με κέντρο το Α και η ευθεία ΑΒ που είναι έτσι τοποθετημένη, ώστε να μην πληρείται καμία από τις τρεις παραπάνω συνθήκες. Ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Β. Επιπλέον, φέρεται η διάμετρος ΓΖ που είναι κάθετη στην ΑΒ και η διάμετρος ΔΚ που σχηματίζει άνισες γωνίες με την ΑΒ. Ενώνονται οι ευθείες ΒΓ, ΒΔ, ΒΖ, ΒΚ και υποτίθεται, αρχικά, ότι η ΒΑ είναι μεγαλύτερη από την ΑΚ:

[66] Πάππου, *έ.α.*, VI, 580.12-582.11.

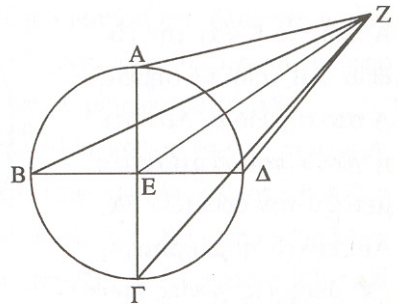


Σχήμα 8-54
Αναθεωρημένη Έκδοση – Δήλωση Θεωρήματος 36

Ο συγγραφέας δηλώνει ότι η γωνία ΓΒΖ είναι μεγαλύτερη από την ΚΒΔ, «*ὡς ἐν τοῖς θεωρήμασιν ἀποδείκνυται*». Επομένως, με βάση τον τέταρτο «όρο» της πραγματείας, οι διάμετροι θα φανούν άνισοι. Ο συγγραφέας συμπληρώνει ότι, εάν η ΒΑ είναι μικρότερη της ΑΚ, τότε η ΔΚ θα φανεί μεγαλύτερη από τη ΓΖ.

Τα θεωρήματα, στα οποία παραπέμπει ο συγγραφέας της πρότασης 36 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, παρουσιάζονται αμέσως μετά. Πρόκειται για την πολυσέλιδη αναλυτική έκθεση γεωμετρικών αποδείξεων που υπάρχει βέβαια -με κάποιες διαφοροποιήσεις- και στο κείμενο των *Οπτικών*. Μάλιστα, στην έκδοση των *Οπτικών* του Heiberg αναγράφεται πάνω από τη μακροσκελή έκθεση η λέξη «*Λῆμμα*».

Επισημαίνουμε ότι στη δήλωση του αντίστοιχου θεωρήματος 35 των *Οπτικών* υποτίθεται ο κύκλος ΑΒΓΔ με διαμέτρους τις ΑΓ, ΒΔ που είναι κάθετη η μία στην άλλη. Από το σημείο τομής τους, δηλαδή το Ε, φέρεται η ευθεία ΕΖ, κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να μην ικανοποιούνται οι τρεις γνωστές συνθήκες. Ο οφθαλμός βρίσκεται στο Ζ και δηλώνεται ότι οι διάμετροι θα φανούν άνισοι:



Σχήμα 8-55
Οπτικά – Δήλωση Θεωρήματος 35

Ενώνονται οι ΖΓ, ΖΑ, ΖΔ, ΖΒ. Ο συγγραφέας ισχυρίζεται ότι η ΕΖ θα είναι είτε μεγαλύτερη είτε μικρότερη από την ακτίνα του κύκλου. Γι' αυτόν τον λόγο, είτε η γωνία ΔΖΒ θα είναι μεγαλύτερη της ΓΖΑ είτε η γωνία ΓΖΑ θα είναι μεγαλύτερη της ΔΖΒ, «*ὡς ἑξῆς δείξομεν*». Από το σημείο αυτό ξεκινά η έκθεση του μακροσκελούς λήμματος.

15. Πότε ο κύκλος δε φαίνεται ως κύκλος;

Σύμφωνα με την *Αναθεωρημένη Έκδοση*, αλλά και τα *Οπτικά*, ο κύκλος δε φαίνεται ως κύκλος, όταν δεν ικανοποιούνται οι τρεις προαναφερθείσες συνθήκες που αφορούν στη θέση που καταλαμβάνει το παρατηρησιακό σημείο, σε σχέση με το επίπεδο του κύκλου και, πιο συγκεκριμένα, με τις διαμέτρους του κύκλου. Γιατί όμως, όταν δεν ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες, ο κύκλος δε φαίνεται ως κύκλος; Η αναλυτικότατη έκθεση που συνοδεύει τη δήλωση του θεωρήματος 36 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και που στα *Οπτικά* φέρει τον τίτλο «*Λῆμμα*» κάτω από το αντίστοιχο θεώρημα 35, έχει ως στόχο της να αποδείξει γεωμετρικά, γιατί ο κύκλος δε θα γίνει οπτικά αντιληπτός ως κύκλος.

Ουσιαστικά, αυτό που μένει να αποδειχθεί είναι ότι, αν η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την ακτίνα του, τότε οι διάμετροί του θα φανούν άνισες. Η έκθεση της απόδειξης αυτής που αντιστοιχεί στις προτάσεις 36δ-36ε της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και στις 35γ-35δ των *Οπτικών* καθυστερεί, γιατί, πριν από αυτή, προβάλλεται μια άλλη γεωμετρική απόδειξη που θα λέγαμε ότι προετοιμάζει το έδαφος, καθώς θεωρείται προαπαιτούμενη. Η απόδειξη αυτή είναι η 36α της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και η 35α-35β των *Οπτικών*. Ωστόσο, και η απόδειξη αυτή βασίζεται με τη σειρά της σε άλλα θεωρήματα που, ενώ στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* παρουσιάζονται οι αποδείξεις τους, συγκεκριμένα είναι οι 36β και 36γ, στα *Οπτικά* δεν παρουσιάζονται. Έτσι, η δομή των δύο εκδόσεων μπορεί να αποδοθεί σχηματικά ως εξής:

<u>*Αναθεωρημένη Έκδοση:*</u>

Δήλωση 36→Απόδειξη 36δ-36ε→36α→36β και 36γ

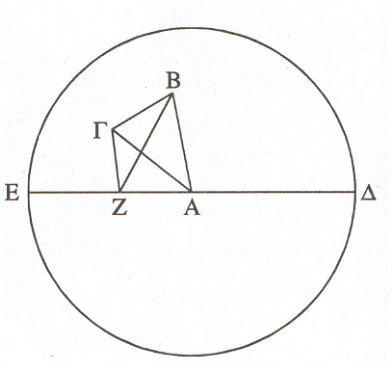
<u>*Οπτικά*</u>:

Δήλωση 35→Απόδειξη 35γ-35δ→35α-35β

α. Ποιες είναι οι προαπαιτούμενες γεωμετρικές προτάσεις;

Αυτό που αποδεικνύεται πρώτα στην 36α της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι, σύμφωνα με το σχήμα 8-56, το εξής:

Υποτίθεται ένας κύκλος με κέντρο το Α. Ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Β, από το οποίο φέρεται στο επίπεδο του κύκλου μια κάθετη ευθεία που δεν περνά από το κέντρο του. Η κάθετη ευθεία είναι η ΒΓ. Στη συνέχεια, ενώνονται οι ΓΑ και ΒΑ:



Σχήμα 8-56
Αναθεωρημένη Έκδοση – Απόδειξη 36α

Αυτό που επιχειρείται να αποδειχθεί είναι ότι από όλες τις ευθείες που περνάνε από το Α και σχηματίζουν γωνίες με τη ΒΑ, η ελάχιστη είναι η γωνία ΓΑΒ. Για την απόδειξη ακολουθούνται τρία βήματα:

Βήμα 1ο: Φέρεται η ευθεία ΔΑΕ, όπως επίσης η ΓΖ που είναι κάθετη στη ΔΕ. Ενώνεται και η ΒΖ. Εφόσον η ΒΓ είναι κάθετη στο επίπεδο και η ΓΖ είναι κάθετη προς μια ευθεία του επιπέδου, έπεται ότι και η ΒΖ θα είναι κάθετη στη ΔΕ. Το συμπέρασμα του πρώτου βήματος βασίζεται στο θεώρημα των τριών καθέτων που είχαμε ξανασυναντήσει στο θεώρημα 6β των *Οπτικών* και της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Υπενθυμίζουμε ότι το θεώρημα αυτό το αποδεικνύει ο Πάππος στα σχόλιά του.

Βήμα 2ο: Επειδή η γωνία ΓΖΑ είναι ορθή, η γωνία ΑΓΖ θα είναι μικρότερη της ορθής και, άρα, η πλευρά ΑΓ θα είναι μεγαλύτερη της ΑΖ. Ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δεν το δηλώνει ρητά, αλλά πιθανότατα βασίζεται στο θεώρημα 19 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, σύμφωνα με το οποίο, σε κάθε τρίγωνο απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά[67].

Βήμα 3ο: Αμέσως μετά, ο συγγραφέας ισχυρίζεται ότι η ΒΑ θα έχει μεγαλύτερο λόγο προς την ΑΖ, παρά προς την ΑΓ. Στο σημείο αυτό φαίνεται ότι

[67] «*Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει*», *Στοιχεία*, Ι, 19.

στηρίζεται στο όγδοο θεώρημα του βιβλίου V των *Στοιχείων*[68]. Στη συνέχεια, προσθέτει ότι οι γωνίες ΑΓΒ και ΒΖΑ είναι ορθές και οι πλευρές ΓΑ και ΑΖ άνισες. Επομένως, συμπεραίνει τελικά ότι η γωνία ΖΑΒ είναι μεγαλύτερη από τη ΓΑΒ. Στο σημείο αυτό, ο συγγραφέας βασίζεται σε μια γεωμετρική πρόταση που δηλώνει ότι, εάν υποθέσουμε δύο ορθογώνια τρίγωνα, τα ΑΒΓ και ΔΕΖ, με τις ορθές τους γωνίες να είναι στα σημεία Α και Δ, αντίστοιχα, και, αν, επίσης, υποθέσουμε ότι η βάση ΒΓ προς την πλευρά ΓΑ του ενός τριγώνου έχει μεγαλύτερο λόγο, σε σχέση με τη βάση ΕΖ προς την πλευρά ΖΔ του άλλου τριγώνου, τότε η γωνία ΒΓΑ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία ΕΖΔ. Η πρόταση αυτή αποδεικνύεται και από τον Πάππο στα σχόλιά του[69].

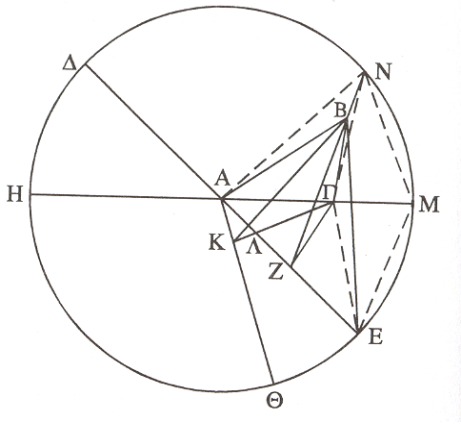
Ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* απέδειξε ότι η γωνία ΓΑΒ είναι μικρότερη από τη γωνία ΖΑΒ. Μετά από αυτό, επισημαίνει ότι, αν ακολουθήσουμε ανάλογο τρόπο, θα αποδείξουμε ότι η γωνία ΓΑΒ θα είναι μικρότερη από όλες τις γωνίες που σχηματίζονται έχοντας ως πλευρές τους, αφενός, οποιαδήποτε ευθεία διέρχεται από το σημείο Α και, αφετέρου, την ΑΒ. Στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* η απόδειξη σταματά στο σημείο αυτό. Στη συνέχεια όμως, παρατίθενται οι αποδείξεις των 2 γεωμετρικών προτάσεων που ήταν προαπαιτούμενες για την απόδειξη που μόλις παρακολουθήσαμε, δηλαδή για την 36α. Έτσι, στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*, μετά από την απόδειξη 36α, προβάλλεται η απόδειξη του θεωρήματος των τριών καθέτων, την οποία αριθμούμε ως 36β, και της τελευταίας πρότασης που πρωταγωνίστησε στο 3ο βήμα και που αφορούσε στα ορθογώνια τρίγωνα που οι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών τους είναι άνισοι. Την πρόταση αυτή την αριθμούμε ως 36γ. Προτού μελετήσουμε τους τρόπους με τους αποδεικνύονται οι προτάσεις 36β και 36γ της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, ας δούμε τι συμβαίνει, μέχρι αυτό το σημείο, στα *Οπτικά*.

Η απόδειξη 36α της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στην 35α των *Οπτικών*. Συγκεκριμένα, όπως βλέπουμε στο σχήμα 8-57, υποτίθεται ένας κύκλος με κέντρο το Α και ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Β. Από το Β φέρεται μία κάθετη στο επίπεδο που να μην περνά από το κέντρο του, δηλαδή η ΒΓ. Ενώνεται η ΑΓ και η ΑΒ:

68

«*Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον. κα ὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον*», *Στοιχεία*, V, 8.

[69] Πάππου, *έ.α.*, 568.18-570.5.



Σχήμα 8-57
Οπτικά – Απόδειξη 35α

Προκειμένου να αποδείξει ότι η γωνία ΓΑΒ είναι μικρότερη από όλες τις γωνίες που περιέχονται από την ΑΒ και από ευθείες που περνούν από το σημείο Α, ο συγγραφέας των *Οπτικών* ακολουθεί σχεδόν τα ίδια συλλογιστικά βήματα, με αυτά που είδαμε στην απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*:

Βήμα 1: Φέρει την ευθεία ΔΑΕ και τη ΓΖ, έτσι, ώστε να είναι κάθετη στη ΔΕ. Αμέσως μετά, ενώνει τη ΒΖ. Βασιζόμενος στο θεώρημα των τριών καθέτων συμπεραίνει ότι και η ΒΖ είναι κάθετη στη ΔΕ.

Βήμα 2: Δηλώνει ότι η ΑΓ είναι μεγαλύτερη από την ΑΖ. Σε αντίθεση με τον συγγραφέα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, ο συγγραφέας των *Οπτικών* αιτιολογεί γιατί η πλευρά ΑΓ του ορθογωνίου τριγώνου είναι μεγαλύτερη από την ΑΖ λέγοντας ότι «*τὴν δὲ μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. μείζων ἄρα ἡ ΑΓ τῆς ΑΖ*». Η παραπάνω αιτιολόγηση μας παραπέμπει άμεσα στο θεώρημα 19 των βιβλίου Ι των *Στοιχείων*.

Βήμα 3: Ο συγγραφέας των *Οπτικών*, αφού δήλωσε ότι η ΑΓ είναι μεγαλύτερη από την ΑΖ και ότι οι γωνίες ΑΓΒ και ΒΖΑ είναι ορθές, καταλήγει ότι οι πλευρές ΓΒ, ΒΖ είναι άνισες και, τελικά, συμπεραίνει ότι η γωνία ΖΑΒ είναι μεγαλύτερη από τη ΓΑΒ. Παρατηρούμε ότι ο συγγραφέας των *Οπτικών* εξάγει το συμπέρασμα περί της ανισότητας των γωνιών ΖΑΒ και ΓΑΒ, χωρίς να επισημάνει την ανισότητα των λόγων των πλευρών, όπως έκανε ο συγγραφέας στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*. Σε αυτό το σημείο, ο συγγραφέας των *Οπτικών* πορεύεται με έναν διαφορετικό συλλογιστικό τρόπο και, όπως φαίνεται, εξάγει το επιθυμητό συμπέρασμα, μέσω του πυθαγορείου θεωρήματος. Συγκεκριμένα, στα ορθογώνια τρίγωνα ΒΓΑ, ΒΖΑ με ορθές τις γωνίες Γ και Ζ, αντίστοιχα, η ΒΑ ισούται, αφενός,

με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ΒΓ, ΓΑ και, αφετέρου, με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ΒΖ, ΖΑ. Όμως, η ΓΑ αποδείχτηκε ότι είναι μεγαλύτερη από τη ΖΑ, επομένως, η ΒΖ πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τη ΒΓ. Τέλος, μέσω του θεωρήματος 18 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* που δηλώνει ότι «*Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει*», ο συγγραφέας πρέπει να συμπέρανε τελικά ότι η γωνία ΖΑΒ είναι μεγαλύτερη από τη ΓΑΒ.

Η απόδειξη 35α των *Οπτικών* δίνει την εντύπωση ότι ολοκληρώνεται με την επισήμανση ότι κατά ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι από όλες τις γωνίες που περιέχονται, αφενός, από ευθείες που περνούν από το Α και, αφετέρου, από την ΑΒ, η μικρότερη θα είναι η ΓΑΒ. Ωστόσο, ακολουθεί άλλο ένα χωρίο, ως ξεχωριστή παράγραφος, που απουσιάζει από την *Αναθεωρημένη Έκδοση* και είναι το χωρίο 35β. Στο χωρίο αυτό λέγεται ότι «*καὶ φανερόν, ὅτι, ἐὰν διαχθῇ τις καὶ ἄλλη εὐθεῖα διὰ τοῦ Α ὡς ἡ ΑΘ πορρώτερον οὖσα τῆς ΑΓ ἤ περ ἡ ΑΖ, μείζων ἔσται ἡ ὑπὸ ΒΑΘ τῆς ὑπὸ ΒΑΖ*». Συνεπώς, κατανοούμε ότι η απόδειξη 35α δεν έχει πλέον ολοκληρωθεί, αλλά εξετάζεται και άλλη μία ανάλογη περίπτωση.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 8-57, ο συγγραφέας φέρει άλλη μια ευθεία που να διέρχεται από το σημείο Α, συγκεκριμένα την ευθεία ΑΘ, και αποδεικνύει ότι και σε αυτή την περίπτωση η γωνία ΒΑΘ θα είναι μεγαλύτερη από τη ΒΑΖ και, συνεπώς, από τη ΓΑΒ. Φέρει τη ΓΚ κάθετη στην ΑΘ, όπως επίσης και τη ΒΚ, για την οποία συμπεραίνει, μέσω του θεωρήματος των τριών καθέτων, ότι θα είναι ομοίως κάθετη στην ΑΘ. Επειδή η ΑΛ είναι μεγαλύτερη της ΑΚ, αφού είναι υποτείνουσα στο τρίγωνο ΑΚΛ, έπεται ότι η ΑΖ θα είναι μεγαλύτερη από την ΑΚ. Όμως, οι γωνίες ΒΖΑ, ΒΚΑ είναι ορθές. Επομένως, η ΒΖ είναι μικρότερη της ΒΚ. Αυτό το συμπέρανε «*διὰ τὸ ἴσα εἶναι τά τε ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΖΑ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΚ, ΚΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ καὶ ἀλλήλοις, μείζων δὲ πάλιν ἡ ὑπὸ ΒΑΚ τῆς ὑπὸ ΒΑΖ*». Η δήλωση αυτή συνηγορεί στην εκτίμηση που εκφράσαμε προηγουμένως στο αντίστοιχο βήμα της 35α, ότι δηλαδή η απόδειξη της ανισότητας των γωνιών στηρίζεται στο πυθαγόρειο θεώρημα και όχι σε κάποια άλλη πρόταση.

Επιπλέον, ο συγγραφέας προχωρά τον συλλογισμό του και σε ένα άλλο επίμαχο σημείο που απουσιάζει από την *Αναθεωρημένη Έκδοση*. Στα *Οπτικά* αποδεικνύεται κατόπιν ότι η μεγαλύτερη γωνία που σχηματίζεται είναι αυτή που

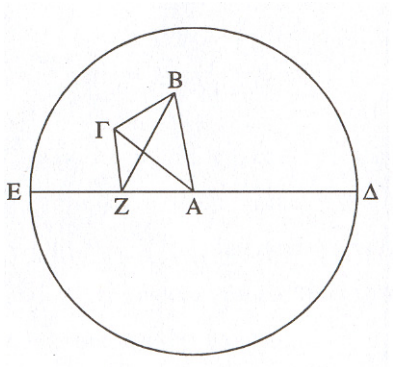
περιέχεται από τη ΒΑ και την ΑΗ, δηλαδή η γωνία ΒΑΗ, αν υποτεθεί ότι η ΓΑ εκτείνεται μέχρι το σημείο Η της κυκλικής περιφέρειας. Αυτό πραγματοποιείται με τον ακόλουθο τρόπο:

Φέρεται η ευθεία ΜΝ ίση με τη ΜΕ και, στη συνέχεια, οι ευθείες ΕΜ, ΜΝ, ΕΓ, ΓΝ, ΒΕ, ΒΝ, ΑΝ. Επειδή η ΜΝ είναι ίση με τη ΜΕ, επειδή η ευθεία ΜΓ είναι κοινή και επειδή περιέχουν ίσες γωνίες, συγκεκριμένα τις ΝΜΓ και ΓΜΕ, έπεται ότι η ΕΓ θα είναι ίση με τη ΓΝ. Αλλά στα τρίγωνα ΒΓΕ, ΒΓΝ η ΓΒ είναι κοινή και κάθετη, επομένως, η ΕΒ είναι ίση με τη ΒΝ. Αλλά, η ΕΑ είναι ίση με την ΑΝ και η ΑΒ είναι κοινή, επομένως, η γωνία ΕΑΒ είναι ίση με τη ΝΑΒ.

Στο λήμμα των *Οπτικών* δεν παρουσιάζεται αναλυτικά η απόδειξη του θεωρήματος των τριών καθέτων που ήταν προαπαιτούμενο για την απόδειξη 35α. Αντίθετα, στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*, αμέσως μετά την απόδειξη της 36α, ο αναγνώστης έχει μπροστά του δύο αποδείξεις, την 36β και την 36γ, που αντιστοιχούν, αφενός, στην απόδειξη του θεωρήματος των τριών καθέτων που χρησιμοποιήθηκε στο βήμα 1 της 36α και στην απόδειξη του θεωρήματος σχετικά με τους λόγους των πλευρών των ορθογωνίων τριγώνων που εφαρμόστηκε στο βήμα 3 της 36α. Τις προτάσεις αυτές τις απέδειξε και ο Πάππος στα σχόλιά του, αλλά η μία από αυτές διαφέρει από εκείνη που συναντάμε στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*. Θα ήταν λοιπόν ενδιαφέρον να παρακολουθήσουμε τις συγκεκριμένες αποδείξεις, έτσι όπως καταγράφονται στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και να διαπιστώσουμε ποια είναι η σχέση τους με τις αποδείξεις του Πάππου.

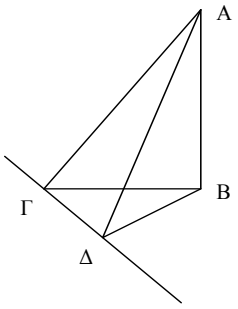
β. Οι δύο γεωμετρικές αποδείξεις που διασώζουν η Αναθεωρημένη Έκδοση και ο Πάππος: πού συναντώνται και πού διαφοροποιούνται;

Συγκεκριμένα, στην 36β της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* επιχειρείται να αποδειχθεί γιατί, όπως δηλώθηκε στο πρώτο βήμα της 36α, η ΖΒ είναι κάθετη στη ΔΕ, αν υποτεθεί ότι η ΒΓ που δε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου είναι κάθετη σε αυτόν, ότι ενώνονται οι ΒΑ, ΓΑ, ότι η ΓΖ είναι κάθετη στη ΔΕ και ότι φέρεται η ΒΖ. Πρόκειται δηλαδή για την απόδειξη του θεωρήματος των τριών καθέτων:



Στην απόδειξη που διασώζει η *Αναθεωρημένη Έκδοση*, λέγεται ότι, επειδή η ΒΓ είναι κάθετη στο επίπεδο, άρα όλα τα επίπεδα που διέρχονται από τη ΒΓ θα είναι κάθετα στο επίπεδο του κύκλου. Αυτό προκύπτει από το θεώρημα 18 του βιβλίου XI των *Στοιχείων* που δηλώνει ότι, αν μια ευθεία γραμμή είναι κάθετη προς ένα επίπεδο, τότε όλα τα επίπεδα που διέρχονται από αυτή θα είναι κάθετα προς το επίπεδο[70]. Ένα από τα κάθετα προς τον κύκλο επίπεδα που διέρχονται από τη ΒΓ είναι και το τρίγωνο ΒΓΖ. Επειδή το επίπεδο του κύκλου και το επίπεδο του τριγώνου ΒΓΖ είναι κάθετα μεταξύ τους, άρα η ΖΔ θα είναι κάθετη στην κοινή τομή των δύο επιπέδων, δηλαδή στη ΓΖ, γιατί η ΓΖ είναι κάθετη στην ΕΔ. Άρα, και η ΖΔ θα είναι κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου ΒΓΖ. Και όλες οι ευθείες που άπτονται της ΖΔ και είναι στο επίπεδο του τριγώνου ΓΖΒ θα είναι κάθετες. Επομένως, η ΔΖ είναι κάθετη στη ΖΒ. Και η ΒΖ είναι κάθετη στη διάμετρο ΕΖΔ.

Ο Πάππος δεν αποδεικνύει το θεώρημα των τριών καθέτων με τον ίδιο τρόπο. Σύμφωνα με το σχήμα 8-58, «*Από ψηλότερο σημείο, το Α, φέρεται η ΑΒ κάθετη προς το επίπεδο και συμβάλλει σε αυτό στο σημείο Β˙ έστω κάποια ευθεία του επιπέδου, η ΓΔ, και από το σημείο Β φέρεται κάθετη προς τη ΓΔ, η ΒΔ, και ενώνεται η ΑΔ. Λέω ότι και η ΑΔ είναι κάθετη στη ΓΔ*»[71].



70

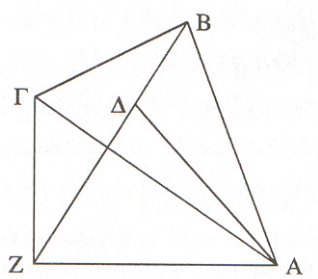
«*Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι᾽ αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπ έδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται*», *Στοιχεία*, XI, 18.

[71] Βλ. σελ. 268, υποσημ. 14.

Σχήμα 8-58

Ενώ η απόδειξη 36β της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* βασίζεται κυρίως σε προτάσεις που αντλούνται από τη στερεομετρία, ο Πάππος ακολουθεί έναν διαφορετικό τρόπο απόδειξης που βασίζεται στο πυθαγόρειο θεώρημα, δηλαδή στο θεώρημα 47 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, καθώς και στο αντίστροφό του, το 48[72]. Έτσι, από τυχαίο σημείο Γ της ευθείας ΓΔ φέρει τις ευθείες ΓΑ, ΓΒ. Επειδή η γωνία Β είναι ορθή, άρα, ΑΓ2=ΑΒ2+ΒΓ2 και ΒΓ2=ΒΔ2+ΔΓ2. Άρα, ΑΓ2=ΑΒ2+ΒΔ2+ΔΓ2. Επίσης, ΑΔ2=ΑΒ2+ΒΔ2. Άρα, ΑΓ2=ΑΔ2+ΔΓ2. Επομένως, η γωνία ΑΔΓ είναι ορθή. Συνεπώς, η ΑΔ είναι κάθετη στη ΓΔ.

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη το σχήμα 8-59 στην απόδειξη 36γ της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* επιχειρείται να αποδειχθεί ότι η γωνία ΖΑΒ είναι μεγαλύτερη της ΓΑΒ, αν υποτεθεί ότι στα τρίγωνα ΒΓΑ, ΒΖΑ οι γωνίες Γ, Ζ είναι ορθές και ότι η ΒΑ έχει μεγαλύτερο λόγο προς τη ΖΑ, παρά προς τη ΓΑ. Πρόκειται δηλαδή για την απόδειξη της πρότασης, στην οποία παραπέμπει το τρίτο βήμα της 36α:



Σχήμα 8-59
Αναθεωρημένη Έκδοση – Απόδειξη 36γ

Επειδή ο λόγος ΒΑ/ΖΑ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο ΒΑ/ΓΑ, άρα, αντίστροφα, ο λόγος ΖΑ/ΑΒ είναι μικρότερος από τον λόγο ΓΑ/ΑΒ. Ώστε, ΓΑ/ΑΒ>ΖΑ/ΑΒ. Στη συνέχεια, υποτίθεται ότι ΓΑ/ΑΒ=ΖΑ/ΑΔ. Επομένως, τα τρίγωνα ΒΓΑ, ΔΖΑ είναι ισογώνια και η γωνία ΓΑΒ είναι ίση με τη ΖΑΔ. Συνεπώς, η

---

[72] Σύμφωνα με το θεώρημα 47 του βιβλίου Ι των *Στοιχείων*, «*Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις*». Σύμφωνα με το αντίστροφό του, το 48, «*Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν*».

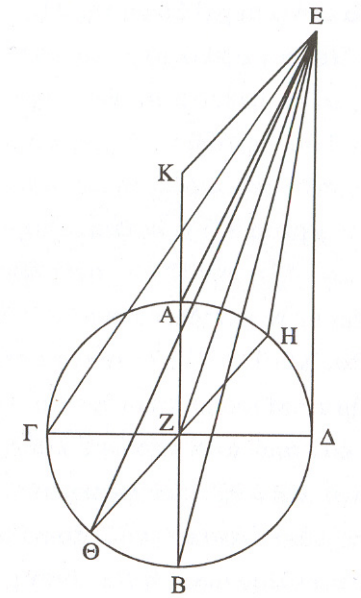
γωνία ΖΑΒ είναι μεγαλύτερη της ΓΑΒ. Στη *Μαθηματική Συναγωγή* ο Πάππος αποδεικνύει τη συγκεκριμένη πρόταση με τον ίδιο τρόπο.

γ. Γιατί ο κύκλος δε φαίνεται ως κύκλος;

Ύστερα από την παράθεση όλων των παραπάνω προαπαιτούμενων γεωμετρικών αποδείξεων, ξεκινά η κύρια απόδειξη του θεωρήματος 36 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και, αντίστοιχα, 35 των *Οπτικών*. Η απόδειξη αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος αποδεικνύεται ότι οι διάμετροι του κύκλου θα φανούν άνισες, αν η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ο οφθαλμός είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου. Η απόδειξη αυτή αντιστοιχεί στην 36δ της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και στην 35γ των *Οπτικών*. Στο δεύτερο μέρος της απόδειξης αποδεικνύεται ότι οι διάμετροι του κύκλου θα φανούν πάλι άνισες, αν η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ο οφθαλμός είναι μικρότερη από την ακτίνα του κύκλου. Η απόδειξη αυτή αντιστοιχεί στην 36ε της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και στην 35δ των *Οπτικών*.

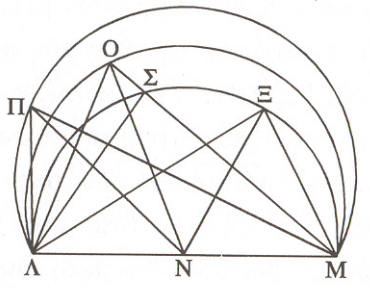
Μεταξύ των δύο εκδόσεων δεν παρατηρούνται διαφορές στη συλλογιστική πορεία που ακολουθείται. Η μόνη διαφορά είναι ότι, ενώ η απόδειξη 36δ της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* σταματά σε κάποιο σημείο, η αντίστοιχη των *Οπτικών* συνεχίζει, όπως ακριβώς είχε γίνει και με την απόδειξη 35α των *Οπτικών*.

Αναλυτικότερα, σύμφωνα με την 36δ της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και το σχήμα 60, υποτίθεται ότι ο παρατηρούμενος κύκλος είναι ο ΑΓΒΔ με διαμέτρους τις ΑΒ, ΓΔ που είναι κάθετες μεταξύ τους. Ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Ε της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, δηλαδή της ΖΕ. Η ευθεία ΖΕ είναι κάθετη προς τη διάμετρο ΓΔ, αλλά με τη διάμετρο ΑΒ σχηματίζει τυχαία γωνία. Επίσης, είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου:



Σχήμα 8-60
Αναθεωρημένη Έκδοση – Απόδειξη 36δ

Επειδή η ΓΔ είναι κάθετη και στην ΑΒ και στην ΕΖ, σύμφωνα με το θεώρημα 18 του βιβλίου XI των *Στοιχείων*[73], όλα τα επίπεδα που διέρχονται από τη ΓΔ θα είναι κάθετα στο επίπεδο που διέρχεται από τις ΑΒ και ΕΖ. Από το σημείο Ε φέρεται μια κάθετη στο επίπεδο, η ΕΚ, η οποία πέφτει στην κοινή τομή των επιπέδων, δηλαδή στην ΑΒ. Επιπλέον, φέρεται άλλη μια διάμετρος, η ΗΘ. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ένα άλλο σχήμα που προβάλλει τα δεδομένα του προβλήματος σε δισδιάστατο επίπεδο, προφανώς για να γίνουν πιο ευκατάληπτα. Στο σχήμα αυτό η διάμετρος του κύκλου ΑΓΒΔ παριστάνεται ίση με τη ΛΜ που χωρίζεται, μέσω του σημείου Ν, σε δύο ίσα τμήματα:



Σχήμα 8-61
Αναθεωρημένη Έκδοση – Απόδειξη 36δ

Αρχικά, φέρεται η ευθεία ΝΞ κάθετη προς τη ΛΜ. Η ΝΞ υποτίθεται ότι είναι ίση με την ΕΖ του σχήματος 8-60. Το κυκλικό τμήμα που περιγράφεται και περνά

[73] Βλ. σελ. 340, υποσημ. 70.

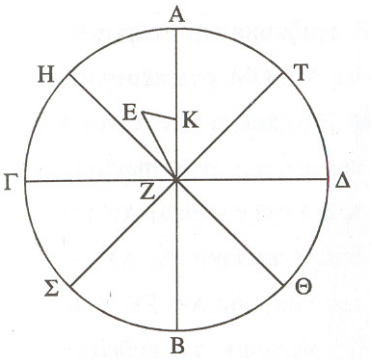
από το σημείο Ξ είναι μεγαλύτερο από ημικύκλιο, αφού η ΝΞ είναι μεγαλύτερη από τις ΛΝ και ΝΜ. Έστω ότι αυτό το κυκλικό τμήμα είναι το ΛΣΞΜ και ενώνονται οι ΞΛ, ΞΜ. Η γωνία ΛΞΜ είναι ίση με τη γωνία ΓΕΔ του σχήματος 8-60.

Κατόπιν, η γωνία ΕΖΗ παριστάνεται στο σχήμα 8-61 ίση με τη γωνία ΛΝΟ, ενώ, παράλληλα, υποτίθεται ότι η πλευρά ΝΟ είναι ίση με την ΕΖ. Ενώνονται οι ΛΟ, ΜΟ και περιγράφεται άλλο ένα κυκλικό τμήμα, το ΛΟΜ. Η γωνία στο σημείο Ο είναι ίση με την ΗΕΘ.

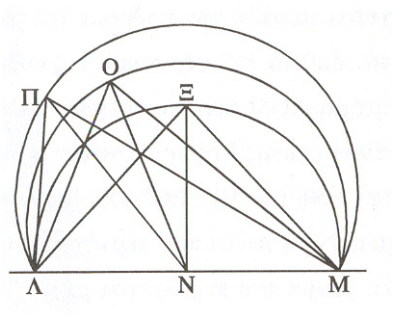
Στη συνέχεια, τίθεται η γωνία ΛΝΠ ίση με τη γωνία ΕΖΚ του σχήματος 8-60 και υποτίθεται ότι η ΝΠ είναι ίση με την ΕΖ. Ενώνονται πάλι οι ΛΠ, ΠΜ και περιγράφεται άλλο ένα κυλικό τμήμα γύρω από το τρίγωνο ΛΠΜ. Η γωνία που σχηματίζεται στο σημείο Π είναι ίση με την ΑΕΒ.

Ο συλλογισμός αναπτύσσεται ως εξής: Η γωνία Ξ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Ο, αλλά ίση με τη γωνία Σ. Από την άλλη μεριά, η γωνία Σ είναι μεγαλύτερη από την Ο. Όμως, η γωνία Ξ είναι ίση με τη γωνία ΓΕΔ και η γωνία Ο είναι ίση με την ΗΕΘ. Επομένως, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» του συγγράμματος, η διάμετρος ΓΔ θα φανεί μεγαλύτερη από την ΗΘ. Επίσης, η γωνία Π είναι ίση με τη γωνία ΑΕΒ, αλλά η γωνία Ο που ισοδυναμεί με την ΗΕΘ είναι μεγαλύτερη της Π. Επομένως, η διάμετρος ΗΘ είναι μεγαλύτερη από την ΑΒ.

Στα *Οπτικά* η απόδειξη 36γ πορεύεται συλλογιστικά, κατά τον ίδιο τρόπο. Τα αντίστοιχα σχήματα που κατασκευάζονται είναι τα παρακάτω:



Σχήμα 62



Σχήμα 63

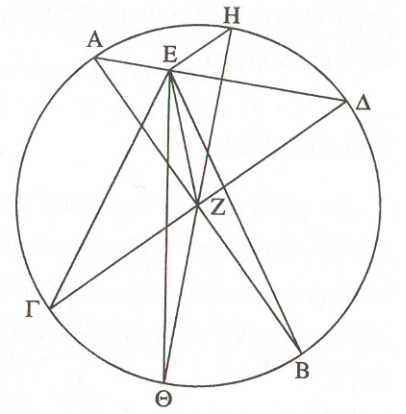
Κατά ανάλογο τρόπο, υποτίθεται ότι η ΛΜ είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου ΑΒΓΔ. Η γωνία Ξ είναι ίση με τη ΓΕΔ, η ΛΝΟ είναι ίση με την ΗΖΕ, ενώ η ΝΟ είναι ίση με την ΕΖ. Επίσης, η γωνία Ο ισούται με την ΗΕΘ και η γωνία ΛΝΠ ισούται με την ΑΖΕ, ενώ η ΝΠ είναι ίση με την ΕΖ. Τέλος, η γωνία Π ισούται με την ΑΕΒ. Ακολουθώντας τον ίδιο συλλογισμό με αυτόν που παρακολουθήσαμε στην

Αναθεωρημένη Έκδοση αποδεικνύεται ότι η διάμετρος ΓΔ θα φανεί μεγαλύτερη της ΗΘ και η διάμετρος ΗΘ θα φανεί μεγαλύτερη της ΑΒ.

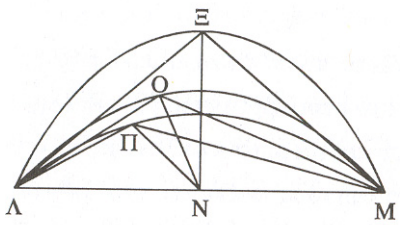
Μέχρι αυτό το σημείο, οι συγκεκριμένες αποδείξεις των δύο εκδόσεων συμφωνούν. Ωστόσο, στα *Οπτικά* η απόδειξη συνεχίζεται, καθώς ο συγγραφέας επιθυμεί να αποδείξει ποια είναι η μοναδική διάμετρος που θα φανεί ίση με την ΗΘ. Αρχικά, επισημαίνει ότι από όλες τις ευθείες που περνάνε από το σημείο Ζ και που σχηματίζουν γωνίες με την ΕΖ, η ΓΔ θα φανεί μεγαλύτερη και η ΑΒ μικρότερη, επειδή από τις γωνίες που σχηματίζονται στο σημείο Ε η μεγαλύτερη είναι η ΓΕΔ και μικρότερη είναι η ΑΕΒ. Κατόπιν, υποστηρίζει ότι, αν τεθεί τόξο ΑΤ ίσο με το τόξο ΗΑ και αν αχθεί η ευθεία ΤΖ και επεκταθεί μέχρι το Σ, η γωνία ΤΕΣ είναι η μοναδική που ισούται με την ΗΕΘ. Το γεγονός αυτό διαπιστώνεται και μέσω του σχήματος 63. Η γωνία Π είναι μικρότερη από τις γωνίες Ξ και Ο, επειδή η γωνία ΠΝΛ είναι ίση με τη μικρότερη γωνία, την ΕΖΑ. Επιπλέον, η γωνία Ξ είναι μεγαλύτερη, επειδή η ΝΞ είναι κάθετη, επομένως, η μεγαλύτερη από όλες τις ευθείες που περνάνε από το Ν και καταλήγουν σε σημεία της κυκλικής περιφέρειας ΛΞΜ. Από την άλλη μεριά, η ευθεία που ισούται με τη ΝΞ υπερβαίνει την περιφέρεια ΛΞΜ. Με τον τρόπο αυτό, το σημείο Ξ βρίσκεται στο εσωτερικό και το Π σε εξωτερικό σημείο της περιφέρειας, έτσι δεν υπάρχει άλλη γωνία μικρότερη από την ΠΝΛ. Όμως, επειδή η γωνία ΕΖΤ είναι ίση με την ΕΖΗ, η ΕΖΣ είναι ίση με την ΕΖΘ, δηλαδή ίση με την ΟΝΜ. Επομένως, οι γωνίες ΤΕΣ και ΗΕΘ είναι ίσες με την Ο. Συνεπώς, η διάμετρος ΗΘ θα φανεί ίση με την ΤΣ.

Η απόδειξη 36ε της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* εξετάζει τη δεύτερη περίπτωση, κατά την οποία η ευθεία, πάνω στην οποία τοποθετείται ο οφθαλμός, είναι μικρότερη από την ακτίνα του παρατηρούμενου κύκλου. Αν συμβαίνει αυτό, τότε θα ισχύουν τα αντίθετα από αυτά που παρακολουθήσαμε προηγουμένως, όσον αφορά στην οπτική αντίληψη του μεγέθους των διαμέτρων. Η διάμετρος εκείνη που πριν φαινόταν μεγαλύτερη, τώρα θα φαίνεται μικρότερη, ενώ εκείνη που φαινόταν μικρότερη, τώρα θα φαίνεται μεγαλύτερη.

Αναλυτικότερα, όπως φαίνεται στο σχήμα 8-64, υποτίθεται ότι ο παρατηρούμενος κύκλος είναι ο ΑΒΓΔ, με κέντρο το σημείο Ζ. Οι διάμετροι ΑΒ, ΓΔ είναι κάθετες μεταξύ τους και φέρεται, επιπλέον, μια άλλη διάμετρος, η ΗΘ. Ο οφθαλμός τοποθετείται στο Ε. Η ευθεία ΕΖ υποτίθεται ότι είναι μικρότερη από την ακτίνα του κύκλου:



Σχήμα 8-64



Σχήμα 8-65

Παράλληλα, εισάγει ένα δεύτερο σχήμα, το σχήμα 8-65, στο οποίο η ΛΜ είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου ΑΒΓΔ και χωρίζεται σε δύο ίσα τμήματα, μέσω του σημείου Ν. Η κάθετη ευθεία ΞΝ είναι ίση με την ΕΖ. Γύρω από την ΞΝ περιγράφεται μια κυκλική περιφέρεια που διέρχεται από το σημείο Ξ. Αυτή η κυκλική περιφέρεια είναι μικρότερη ημικυκλίου, γιατί η ΞΝ έχει υποτεθεί ότι είναι μικρότερη της ακτίνας του κύκλου. Η γωνία Ξ είναι ίση με τη γωνία ΓΕΔ. Κατόπιν, τοποθετείται η γωνία ΛΝΟ, η οποία ισούται με την ΕΖΗ, ενώ η ΝΟ είναι ίση με την ΕΖ. Γύρω από τη ΛΜ περιγράφεται ένα κυκλικό τμήμα που διέρχεται από το σημείο Ο. Η γωνία Ο είναι ίση με τη ΘΕΗ. Στη συνέχεια, τίθεται η γωνία ΛΝΠ, έτσι, ώστε να είναι ίση με την ΑΖΕ, ενώ η ΝΠ είναι, επίσης, ίση με την ΕΖ. Γύρω από τη ΛΜ περιγράφεται ένα ακόμη κυκλικό τμήμα που διέρχεται από το σημείο Π. Η γωνία ΛΠΜ είναι ίση με την ΑΕΒ.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, εξάγονται τα εξής συμπεράσματα: Η γωνία Ξ είναι μικρότερη από την Ο, ενώ η Ο είναι ίση με τη ΘΕΗ. Επιπλέον, η γωνία Ξ είναι ίση με τη ΓΕΔ. Συνεπώς, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, η διάμετρος ΓΔ θα φανεί μικρότερη από την ΗΘ. Επίσης, επειδή η γωνία ΘΕΗ είναι μικρότερη από την ΑΕΒ, η διάμετρος ΗΘ θα φανεί μεγαλύτερη από την ΑΒ. Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Η αντίστοιχη απόδειξη των *Οπτικών* είναι η 35δ, η οποία ακολουθεί ακριβώς την ίδια συλλογιστική πορεία.

δ. Η απόδειξη του Πάππου

Στο έκτο βιβλίο της *Μαθηματικής Συναγωγής* ο Πάππος αναλαμβάνει τη συγγραφή σχολίων «*Εἰς τὰ ὀπτικὰ Εὐκλείδου*» λαμβάνοντας έναυσμα από το

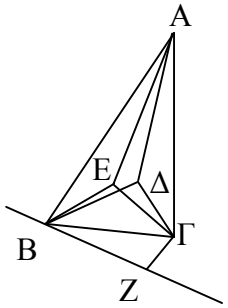
θεώρημα εκείνο που δηλώνει τη φαινομενική ανισότητα των διαμέτρων του κύκλου, όταν η ευθεία πάνω στην οποία τίθεται ο οφθαλμός δεν είναι κάθετη στο επίπεδο ούτε ίση με την ακτίνα του. Ο Πάππος διασώζει τη συγκεκριμένη πρόταση ως «*Ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος προσπίπτουσα πρὸς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου μήτε πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ἐπιπέδῳ μήτε ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, μείζων δὲ ἢ ἐλάσσων, ἄνισοι αἱ διάμετροι τοῦ κύκλου φανοῦνται*». Αν εξαιρέσουμε το γεγονός ότι ο Πάππος δεν αναφέρει την τρίτη συνθήκη, δηλαδή τι συμβαίνει αν ο οφθαλμός βρίσκεται σε ευθεία που σχηματίζει ίσες γωνίες με ορισμένες διαμέτρους του κύκλου, η διατύπωση του συγκεκριμένου θεωρήματος από τον Πάππο πλησιάζει περισσότερο εκείνη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, παρά των *Οπτικών*. Τόσο στη διατύπωση του Πάππου όσο και στη διατύπωση της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* συναντάμε τον προσδιορισμό «*μείζων δὲ ἢ ἐλάσσων*» για την ευθεία στην οποία είναι τοποθετημένος ο οφθαλμός. Με αυτόν τον τρόπο, οι δηλώσεις των δύο κειμένων προσδιορίζουν έμμεσα τις δύο περιπτώσεις που πρόκειται να εξεταστούν κατά τις αποδείξεις που τις ακολουθούν.

Ο Πάππος θεωρεί σημαντικό, προτού εκθέσει την απόδειξη του συγκεκριμένου θεωρήματος, να καταγράψει τις αποδείξεις των γεωμετρικών προτάσεων που είναι προαπαιτούμενες, γι' αυτό αναφέρει ότι «*Προγράφεται δὲ τοῦ θεωρήματος τάδε*». Οι προαπαιτούμενες προτάσεις που ο Πάππος σπεύδει να αποδείξει είναι, αρχικά, αυτές που παρακολουθήσαμε μόνο στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Δηλαδή, ο Πάππος αποδεικνύει αρχικά την πρόταση εκείνη που σχετίζεται με τους λόγους των πλευρών δύο ορθογωνίων τριγώνων που συμφωνεί με την απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, αλλά και το θεώρημα των τριών καθέτων που διαφοροποιείται από την απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Κατόπιν, ο Πάππος αποδεικνύει την πρόταση εκείνη που βασίζεται με τη σειρά της στις δύο προηγούμενες και που διασώζεται και στο κείμενο των *Οπτικών* και στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Συγκεκριμένα, αποδεικνύει την πρόταση εκείνη που συναντήσαμε στα *Οπτικά* ως 35α-35β και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ως 36α. Ο Πάππος δηλώνει την πρόταση αυτή ως «*Ἀπὸ σημείου μετεώρου τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον εὐθεῖα διήχθω ἡ ΑΒ μὴ οὖσα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον,*

καὶ κάθετος ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἤχθω,

καὶ συμβαλλέτω αὐτῷ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ·

λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία ἐλαχίστη ἐστὶν πασῶν τῶν περιεχομένων ὑπό τε τῆς ΑΒ καὶ ἑκάστης τῶν ἀπὸ τοῦ Β σημείου διαγομένων εὐθειῶν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἔτι δὲ ὅτι ἀεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστίν, καὶ ὅτι δύο μόνον ἴσαι αὐτῇ ἐφ' ἑκάτερα συνίστανται»:



Σχήμα 8-66

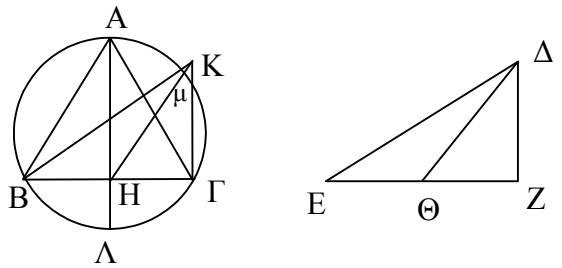
Η απόδειξη του Πάππου διακρίνεται σε τρία μέρη: στο πρώτο μέρος αποδεικνύεται ότι η γωνία ΑΒΓ θα είναι μικρότερη από όλες όσες περιέχονται, αφενός, από την πλευρά ΑΒ και, αφετέρου, από όλες τις ευθείες που διέρχονται από το Β. Στο δεύτερο μέρος αποδεικνύεται ότι η κοντινότερη προς την ΑΒΓ γωνία, δηλαδή η ΑΒΔ, θα είναι μικρότερη από την πιο μακρινή, δηλαδή την ΑΒΕ, και, τέλος, στο τρίτο μέρος αποδεικνύεται ότι μόνο δύο ίσες γωνίες μπορούν να συσταθούν από τη μία και από την άλλη πλευρά της ΑΒΓ, συγκεκριμένα, οι ΑΒΖ και ΑΒΔ.

Υπενθυμίζουμε ότι στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* η αντίστοιχη απόδειξη παρουσιάζει μόνο ό,τι αντιστοιχεί στο πρώτο μέρος της απόδειξης του Πάππου. Από την άλλη μεριά, στα *Οπτικά*, παρόλο που δίνεται στον αναγνώστη η εντύπωση ότι η απόδειξη ολοκληρώνεται στο ίδιο σημείο με την *Αναθεωρημένη Έκδοση*, ωστόσο, ακολουθεί άλλο ένα χωρίο, το 35β. Στο 35β αποδεικνύεται για άλλη μια φορά ότι η γωνία που ενδιαφέρει είναι μικρότερη από εκείνη που σχηματίζεται, όταν ξαναφέρουμε άλλη μια ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. Με άλλα λόγια, επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία που είχε ακολουθηθεί κατά την 35α και εξετάζεται άλλη μία περίπτωση, ανάλογη προς την πρώτη. Επίσης, αποδεικνύεται ό,τι αντιστοιχεί στο τρίτο μέρος της απόδειξης που συναντάμε στη *Μαθηματική Συναγωγή*. Τα παραπάνω στοιχεία κάνουν την απόδειξη των *Οπτικών* να συμφωνεί περισσότερο με τον Πάππο και δημιουργούν την εντύπωση ότι έχει γραφτεί από κάποιον μεταγενέστερο συγγραφέα που ήταν επηρεασμένος από τον εκείνον. Η άποψή μας είναι ότι η 35β των *Οπτικών* πράγματι αποτελεί, σε σχέση με την 35α, μεταγενέστερη προσθήκη από κάποιον συγγραφέα, ο οποίος όμως προηγείται

χρονολογικά του Πάππου και δεν αντλεί από αυτόν. Όσον αφορά στο πρώτο κομμάτι της απόδειξης της 35β, αυτό δε μπορεί να προέρχεται από τη *Μαθηματική Συναγωγή*, γιατί στο συγκεκριμένο σημείο ο Πάππος διατυπώνει την πρότασή του έτσι, ώστε να της προσδίδει έναν πιο γενικό χαρακτήρα: «*ἔτι δὲ (λέγω) ὅτι ἀεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστίν*». Το στοιχείο αυτό δεν καταγράφεται στην απόδειξη των *Οπτικών*. Επίσης, ούτε το δεύτερο κομμάτι της απόδειξης 35β αντλείται από τον Πάππο, καθώς η συλλογιστική πορεία που ακολουθείται δεν είναι ίδια με εκείνη της *Μαθηματικής Συναγωγής*.

Τόσο στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* όσο και στα *Οπτικά* η απόδειξη του θεωρήματος που σχετίζεται με τη φαινομενική ανισότητα των διαμέτρων του κύκλου ακολουθεί μια ενδιαφέρουσα μεθοδολογία. Και στις δύο εκδόσεις παρακολουθήσαμε τη μεταφορά των δεδομένων του θεωρήματος στο δισδιάστατο επίπεδο και την εξαγωγή των συμπερασμάτων, μέσω απλής σύγκρισης γωνιών. Ο Πάππος ακολουθεί μια διαφορετική πορεία που υποδηλώνει ότι οι αποδείξεις του γράφτηκαν κατόπιν. Προτού εκθέσει την απόδειξη της εν λόγω πρότασης, παραθέτει έναν αρκετά μεγάλο αριθμό αποδείξεων γεωμετρικών προτάσεων που πρόκειται να του χρειαστούν. Ό,τι οι συγγραφείς των αποδείξεων της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και των *Οπτικών* αποδεικνύουν εντός των πλαισίων της κυρίως απόδειξης με τον πιο απλό και στοιχειώδες τρόπο, στον Πάππο αποδεικνύεται ξεχωριστά, πιο αναλυτικά και αποκτά έναν γενικότερο χαρακτήρα. Με αυτόν τον τρόπο, η έκθεσή του παρουσιάζεται συστηματοποιημένη και περισσότερο επεξεργασμένη.

<u>Πρώτη απόδειξη</u>: Ο Πάππος υποθέτει ότι στα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, η ΒΓ ισούται με την ΕΖ και ότι τα σημεία Η, Θ διχοτομούν τις ΒΓ και ΕΖ, αντίστοιχα. Φέρει τις ΑΗ, ΔΘ, οι οποίες είναι ίσες μεταξύ τους, και υποθέτει ότι η ΑΗ είναι κάθετη στη ΒΓ, ενώ η ΔΘ δεν είναι κάθετη στην ΕΖ. Τέλος, υποθέτει ότι η ΑΗ είναι μεγαλύτερη ς ΗΒ:

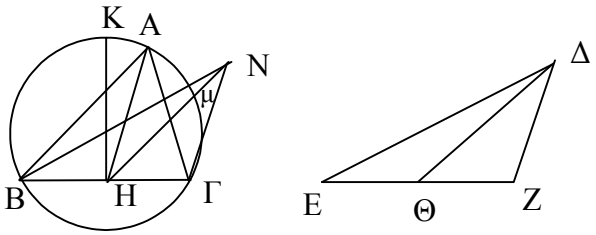


Ο Πάππος αποδεικνύει ότι η γωνία ΒΑΓ είναι μεγαλύτερη της ΕΔΖ και ότι, αν η ΗΑ είναι μικρότερη της ΗΒ, τότε η γωνία ΒΑΓ θα είναι μικρότερη της ΕΔΖ.

Δεύτερη απόδειξη: Ο Πάππος υποθέτει έναν κύκλο με διάμετρο την ΑΒ και τυχαίο σημείο της το Δ. Ενώνει το Δ με κάποιο τυχαίο σημείο της περιφέρειας του κύκλου, π.χ. το Γ, και υποθέτει ότι η ΑΔ είναι μεγαλύτερη από τη ΔΓ. Ο Πάππος αποδεικνύει ότι η ΑΒ θα είναι μεγαλύτερη και από τη ΔΒ. Επίσης, ότι, αν η ΑΔ είναι μικρότερη από τη ΔΓ, τότε θα είναι μικρότερη και από τη ΔΒ.

Τρίτη απόδειξη: Ο Πάππος υποθέτει έναν κύκλο με διάμετρο την ΑΒ και Δ ένα σημείο της διαμέτρου. Ενώνει το σημείο Δ με δύο σημεία της περιφέρειας του κύκλου, τα Γ, Ε. Υποθέτει ότι η ΓΔ είναι μεγαλύτερη της ΔΕ και αποδεικνύει ότι η ΑΔ είναι μεγαλύτερη της ΔΒ.

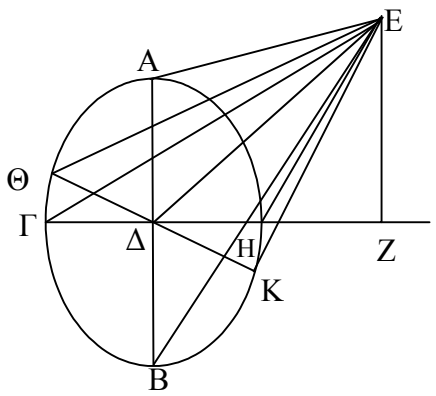
Τέταρτη απόδειξη: Υποτίθενται δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ που έχουν τις ΒΓ και ΕΖ ίσες. Οι πλευρές αυτές διχοτομούνται στα Η και Θ, αντίστοιχα. Φέρονται οι ΑΗ, ΔΘ που υποτίθεται ότι είναι ίσες, αλλά καμία από αυτές δεν είναι κάθετη στη βάση. Έστω ότι η γωνία ΑΗΓ είναι μεγαλύτερη της ΔΘΖ:



Σχήμα 67

Ο Πάππος αποδεικνύει ότι, αν η ΑΗ είναι μεγαλύτερη από την ΗΓ, τότε η γωνία ΒΑΓ θα είναι μεγαλύτερη από την ΕΔΖ. Αν η ΑΗ είναι μικρότερη από την ΗΓ, τότε η γωνία ΒΑΓ θα είναι μικρότερη από την ΕΔΖ.

Εφόσον έχει αποδείξει τις παραπάνω προτάσεις, καταπιάνεται με την κυρίως απόδειξη του θεωρήματος που σχετίζεται με τη φαινομενική ανισότητα των διαμέτρων του κύκλου. Έτσι, σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, υποθέτει ότι στον κύκλο ΑΒΓ η ευθεία ΔΕ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, το Δ, έτσι, ώστε να μην είναι κάθετη στο επίπεδό του ούτε ίση με την ακτίνα του. Υποτίθεται ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Ε. Αρχικά, εξετάζεται η περίπτωση, κατά την οποία η ΔΕ είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα. Από το σημείο Ε φέρεται μία κάθετη προς το επίπεδο του κύκλου, η ΕΖ. Ενώνεται η ΖΗΔ και επεκτείνεται, μέχρι το σημείο Γ. Τέλος, από το σημείο Δ φέρεται η ΑΒ, η οποία είναι κάθετη στην ΗΓ:



Σχήμα 8-68

Με βάση όλες τις αποδείξεις που είχε προγράψει, ο Πάππος αποδεικνύει ότι «*μεγίστη μὲν ὀφθήσεται ἡ ΑΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΗΓ, αἰεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΗΓ τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ὀφθήσεται, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΗΓ θεωρηθήσονται*».

ε. Συμπεράσματα

Ύστερα από την παράθεση μίας, ομολογουμένως, μεγάλης σωρείας γεωμετρικών αποδείξεων, είμαστε σε θέση να κάνουμε ορισμένες παρατηρήσεις. Οι προτάσεις που αφορούν στην οπτική αντίληψη των κύκλων είχαν κεντρίσει το ενδιαφέρον των μεταγενέστερων, ένα ενδιαφέρον που έφτανε, τουλάχιστον, μέχρι την εποχή του Πάππου. Θεωρούμε ότι οι προτάσεις των *Οπτικών*, αλλά και της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, που σχετίζονται με τα συγκεκριμένα προβλήματα υπέστησαν διαδοχικές διορθώσεις και συμπληρώματα, μέχρι να καταλήξουν στη μορφή, υπό την οποία διασώζονται σήμερα. Καμία από τις διασωζόμενες μορφές κειμένου των συγκεκριμένων θεωρημάτων δεν έχει γραφτεί αυτοτελώς από το χέρι ενός μόνο συγγραφέα, αλλά φαίνεται ότι έχει δεχτεί μεταγενέστερες προσθήκες, ιδιαίτερα οι προτάσεις εκείνες που αφορούν στο πότε και γιατί ένας κύκλος δε φαίνεται ως κύκλος, δηλαδή οι προτάσεις 36 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και 35 των *Οπτικών*.

Συγκεκριμένα, εκτιμούμε ότι οι αποδείξεις που είχαν γραφτεί αρχικά για τα παραπάνω δύο θεωρήματα ήταν η 36δ-36ε για την *Αναθεωρημένη Έκδοση* και η 35γ-35δ για τα *Οπτικά*. Οτιδήποτε προηγείται αυτών, δηλαδή οι 36α, 36β, 36γ της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και η 35α και, πιθανότατα, η 35β των *Οπτικών*, αποτελεί μεταγενέστερη προσθήκη. Θεωρούμε μάλιστα ότι οι προσθήκες των *Οπτικών* είναι

προγενέστερες από εκείνες που φέρει η *Αναθεωρημένη Έκδοση*, εκτός ίσως από την 35β.

Επιπλέον, υποστηρίζουμε την άποψη ότι όλες οι εν λόγω προσθήκες συμπεριλαμβανομένης και της 35β των *Οπτικών* πραγματοποιήθηκαν πριν από τη συγγραφή των σχολίων του Πάππου, ο οποίος είχε πρόσβαση και στο κείμενο των *Οπτικών* και στο κείμενο που μας διασώζει η *Αναθεωρημένη Έκδοση*. Ο Πάππος επεξεργάστηκε με προσοχή και επιμέλεια τα χωρία που είχε στη διάθεσή του, γιατί αυτά αποτελούσαν τη βάση των σχολίων που θα συνέγραφε στη συνέχεια. Ο Πάππος προσέφερε εναλλακτικές αποδείξεις, όπως την απόδειξη του θεωρήματος των τριών καθέτων, αλλά και πληρέστερες αποδείξεις στη θέση των προηγούμενων. Επιπλέον, ενώ κατά τις κύριες αποδείξεις των θεωρημάτων 36 και 35 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και των *Οπτικών*, αντίστοιχα, χρησιμοποιείται η ίδια μεθοδολογία, δηλαδή η μεταφορά και η εξέταση των δεδομένων των θεωρημάτων στις δύο διαστάσεις, στην αντίστοιχη απόδειξη ο Πάππος δεν είναι αναγκασμένος να πραγματοποιήσει κάτι τέτοιο, γιατί έχει ήδη αποδείξει ό,τι πρόκειται να του χρειαστεί στη συνέχεια. Στα χέρια του Πάππου η απόδειξη του συγκεκριμένου θεωρήματος της οπτικής συστηματοποιείται και τακτοποιείται.

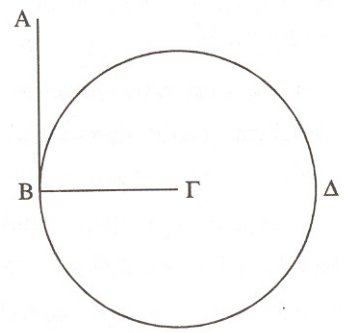
Το ενδιαφέρον του Πάππου δεν έγκειται τόσο στο να παρουσιάσει με πιο εύτακτο και οργανωμένο τρόπο την απόδειξη του θεωρήματος περί της φαινομενικής ανισότητας των διαμέτρων του κύκλου. Το πιο αξιοσημείωτο κομμάτι των σχολίων του συνίσταται σε όσα γράφει στη συνέχεια. Ο Πάππος επιχειρεί να αποδείξει ότι το φαινομενικό σχήμα είναι έλλειψη και έχει την παράδοξη ιδιότητα ότι το φαινομενικό της κέντρο δε συμπίπτει με το πραγματικό κέντρο του κύκλου. Επιπλέον, ο Πάππος παραθέτει άλλο ένα πιο παράδοξο πρόβλημα που αφορά στον προσδιορισμό του τόπου των σημείων, από τα οποία ένας δεδομένος κύκλος θα φανεί ως έλλειψη και το κέντρο της θα συμπίπτει με ένα δεδομένο σημείο του κύκλου.

16. Μετατόπιση και φαινομενικά μεγέθη

Τα θεωρήματα που ακολουθούν στη συνέχεια εξετάζουν το ερώτημα, σχετικά με το ποιες θέσεις πρέπει να καταλαμβάνουν, τόσο το παρατηρησιακό σημείο όσο και το παρατηρούμενο αντικείμενο, ώστε σε μια ενδεχόμενη μετατόπιση του ενός ή του άλλου, το φαινομενικό μέγεθος του παρατηρούμενου αντικειμένου να παραμένει σταθερό. Στο θεώρημα 38 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, δηλώνεται ότι το φαινομενικό μέγεθος του αντικειμένου θα παραμένει ίσο, εάν αυτό κινείται σε

κυκλική περιφέρεια, με κέντρο τον οφθαλμό. Παράλληλα, θεωρείται επιτακτικό το παρατηρούμενο μέγεθος να είναι τοποθετημένο κάθετα προς το επίπεδο της παρατήρησης[74].

Έτσι, σύμφωνα με το σχήμα 8-69, υποτίθεται ότι το παρατηρούμενο μέγεθος είναι το ΑΒ, το οποίο είναι ψηλότερο και κάθετο προς το επίπεδο, ενώ ο οφθαλμός είναι στο σημείο Γ. Ενώνεται η ευθεία ΓΒ και έχοντας ως κέντρο το Γ και ακτίνα τη ΓΒ περιγράφεται ο κύκλος ΒΔ:



Σχήμα 8-69

Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 38

Αυτό που πρέπει να αποδειχθεί είναι ότι σε οποιοδήποτε σημείο της κυκλικής περιφέρειας και αν τοποθετηθεί το ΑΒ, η οπτική γωνία που το περιέχει είναι πάντα ίση. Επειδή η γωνία ΑΒΓ είναι ορθή, όλες οι ευθείες που θα περνάνε από το σημείο Γ και θα προσπίπτουν στο σημείο Β θα σχηματίζουν ίσες γωνίες, αν το ΑΒ μετακινηθεί στην κυκλική περιφέρεια και παραμείνει κάθετο προς αυτή. Επομένως, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» του συγγράμματος, το ΑΒ θα φαίνεται πάντα ίσο. Παρόλο που η αποδεικτική διαδικασία είναι πολύ σύντομη, κατανοούμε ότι η απόδειξη του θεωρήματος 38 βασίζεται στην ισότητα των τριγώνων που θα προκύπτουν, κάθε φορά που το ΑΒ θα μετατοπίζεται. Η πλευρά ΒΓ, ως ακτίνα του κύκλου, θα παραμένει σταθερή. Το ίδιο θα συμβαίνει με το μέγεθος ΑΒ, αλλά και με την ορθή γωνία ΑΒΓ, κατά την κίνηση της ΑΒ. Επομένως, εκτιμούμε ότι η πρόταση εκείνη που

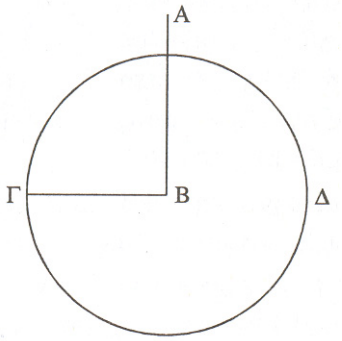
---

[74] Στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* το θεώρημα 38 δηλώνεται ως «*Ἐὰν μέγεθός τι πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ μετέωρον,*
τεθῇ δὲ τὸ ὄμμα ἐπί τι σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου,
καὶ μεθιστῆται τὸ ὁρώμενον ἐπὶ κύκλου περιφερείας,
ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον ὀφθήσεται» και στα *Οπτικά* δηλώνεται αντίστοιχα στην πρόταση 39 ως «*Ἐὰν μέγεθός τι πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ,*
τεθῇ δὲ τὸ ὄμμα ἐπί τι σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ μεθίστηται τὸ ὁρώμενον ἐπὶ κύκλου περιφερείας κέντρον ἔχοντος τὸ ὄμμα,
ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον ὀφθήσεται κατὰ παράλληλον θέσιν τῇ ἐξ ἀρχῆς μεταβαῖνον».

είναι απαραίτητη για την απόδειξη της ισότητας των οπτικών γωνιών είναι η πρόταση 4 του βιβλίου Ι των *Στοιχείων*[75].

Στο τέλος της απόδειξης επισημαίνεται ότι, ακόμα και αν από το σημείο Γ αχθεί κάθετη ευθεία και τοποθετηθεί ο οφθαλμός πάνω σε αυτή, δηλαδή σε θέση παράλληλη προς το παρατηρούμενο μέγεθος, τότε σε κάθε ενδεχόμενη κίνηση του παρατηρούμενου μεγέθους γύρω από την κυκλική περιφέρεια, αυτό θα φαίνεται πάντα ίσο.

Το θεώρημα 39 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* εξετάζει την αντίστροφη κατάσταση. Εάν το παρατηρούμενο μέγεθος είναι κάθετο στο επίπεδο, ενώ ο οφθαλμός μετατοπίζεται σε κυκλική περιφέρεια, το παρατηρούμενο μέγεθος θα φαίνεται πάντα ίσο[76]. Έτσι, σύμφωνα με το σχήμα 8-70, το παρατηρούμενο μέγεθος ΑΒ



Σχήμα 8-70
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 39

είναι κάθετο στο επίπεδο και ο οφθαλμός είναι στο σημείο Γ. Περιγράφεται ένας κύκλος με κέντρο το Β και ακτίνα τη ΒΓ. Εάν ο οφθαλμός κινηθεί στην περιφέρεια του κύκλου, τότε το παρατηρούμενο μέγεθος θα φαίνεται πάντα ίσο, γιατί όλες οι ευθείες που περνούν από το Γ και προσπίπτουν στην ΑΒ σχηματίζουν ίσες γωνίες. Το

---

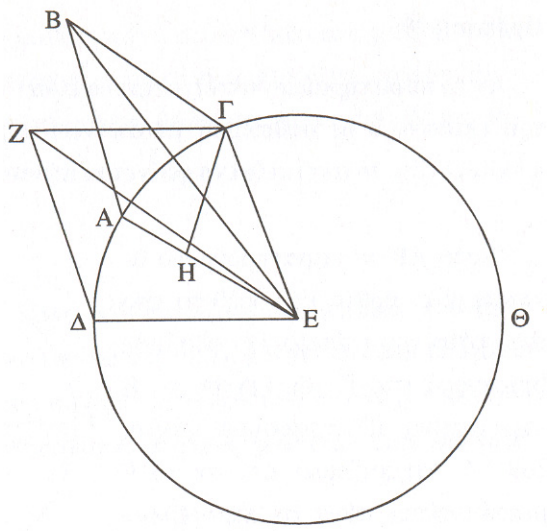
[75] «*Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν*», *Στοιχεία*, Ι, 4.

[76] Το θεώρημα 39 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι «*Ἐὰν δὲ τὸ ὁρώμενον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μεθιστῆται δὲ τὸ ὄμμα ἐπὶ κύκλου περιφερείας, ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φανήσεται*». Η αντίστοιχη πρόταση στα *Οπτικά*, η πρόταση 41, δηλώνει ότι «*Ἐὰν δὲ τὸ ὁρώμενον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μεθίστηται δὲ τὸ ὄμμα ἐπὶ κύκλου περιφερείας κέντρον ἔχοντος τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ συμβάλλει τὸ μέγεθος τῷ ἐπιπέδῳ, ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φανήσεται*».

θεώρημα 39 βασίζεται, όπως και το 38, στην πρόταση 4 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, αλλά και στον τέταρτο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*.

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι το θεώρημα 38 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο θεώρημα 39 των *Οπτικών*, ενώ το θεώρημα 39 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο 41 των *Οπτικών*. Στα *Οπτικά* η απόδειξη των δύο συγκεκριμένων θεωρημάτων γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο.

Στο θεώρημα 40 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* εξετάζεται μια ακόμη πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση, κατά την οποία το παρατηρούμενο μέγεθος δεν είναι κάθετο προς το επίπεδο. Στην πρόταση αυτή δηλώνεται ότι, αν το παρατηρούμενο μέγεθος δεν είναι κάθετο προς το επίπεδο και μετακινείται σε περιφέρεια κύκλου γύρω από τον οφθαλμό, τότε θα φαίνεται πάντα άνισο[77]. Όπως φαίνεται στο σχήμα 71, υποτίθεται ο κύκλος ΑΘ. Σε τυχαίο σημείο Δ της περιφέρειας φέρεται η ευθεία ΔΖ, έτσι, ώστε να μην είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου. Ο οφθαλμός τοποθετείται στο Ε:



Σχήμα 8-71
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 40

Η απόδειξη διακρίνεται σε τρία μέρη, αφού εξετάζονται τρεις διαφορετικές περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση είναι το παρατηρούμενο μέγεθος να είναι

---

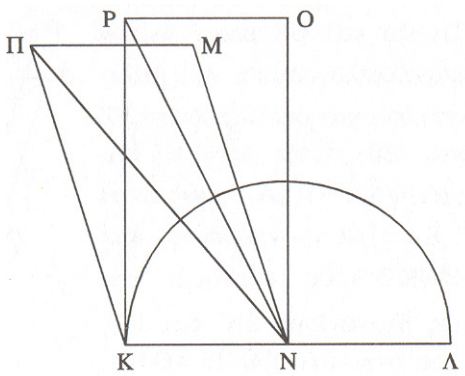
[77] Το θεώρημα 40 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι «*Ἐὰν δὲ τὸ ὁρώμενον μέγεθος μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ,*
μεθιστῆται δὲ ἐπὶ κύκλου περιφερείας, ἄνισον ἀεὶ ὀφθήσεται». το θεώρημα 40 των *Οπτικών* δηλώνει ότι «*Ἐὰν δὲ τὸ ὁρώμενον μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ,*
μεθίστηται δὲ ἐπὶ κύκλου περιφερείας ἴσον ὂν τῇ ἐκ τοῦ κέντρου,
ποτὲ μὲν ἴσον ἑαυτῷ,
ποτὲ δὲ ἄνισον ὀφθήσεται κατὰ παράλληλον θέσιν τῇ ἐξ ἀρχῆς μεταβαῖνον».

μεγαλύτερο από την ακτίνα του κύκλου (απόδειξη 40α), η δεύτερη να είναι ίσο με την ακτίνα (απόδειξη 40β) και η τρίτη να είναι μικρότερο της ακτίνας (απόδειξη 40γ).

Σύμφωνα με την απόδειξη 40α και το σχήμα 8-71, έστω ότι η ΖΔ είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα. Αρχικά, φέρεται η ΕΓ ίση και παράλληλη με τη ΖΔ. Από το σημείο Γ φέρεται η κάθετη ΓΗ. Ενώνεται η ΕΗ και επεκτείνεται μέχρι το σημείο Α της περιφέρειας. Από το σημείο Α φέρεται η ΑΒ που είναι παράλληλη με την ΕΓ και ίση με τη ΖΔ. Αυτό που ζητάται να αποδειχθεί είναι ότι από όλες τις ευθείες που μπορεί να κινηθούν πάνω στην περιφέρεια, η ΑΒ θα φαίνεται μικρότερη.

Όπως είχαμε δει και στην απόδειξη 36α, η γωνία ΓΕΑ θα είναι μικρότερη από όλες τις γωνίες που σχηματίζονται στο σημείο Ε έχοντας ως πλευρά τους, αφενός, τη ΓΕ και, αφετέρου, οποιαδήποτε άλλη ευθεία που διέρχεται από το Ε. Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης βασίζεται με τη σειρά της σε θεωρήματα που είχε αποδείξει ο Πάππος, στοιχείο που υποδηλώνει ότι το θεώρημα 40 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αποτελεί μεταγενέστερη προσθήκη. Κατά τη συνέχεια της απόδειξης 40α, παρατηρείται ότι το ΒΕ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί η ΓΕ είναι ίση και παράλληλη στην ΑΒ και, επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 33 του βιβλίου Ι των *Στοιχείων*, και η ΕΑ θα είναι ίση και παράλληλη με τη ΒΓ. Για τους ίδιος λόγους, και το ΖΕ θα είναι παραλληλόγραμμο.

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία με εκείνη που παρακολουθήσαμε στις αποδείξεις 36δ και 36ε ο συγγραφέας φέρει ένα δεύτερο σχήμα και παρουσιάζει τα δεδομένα του θεωρήματος σε δισδιάστατο επίπεδο. Σύμφωνα με το σχήμα 8-72, θέτει το κυκλικό τμήμα ΚΑΛ ίσο με το ημικύκλιο του κύκλου ΔΘ και θεωρεί ως κέντρο του το σημείο Ν:

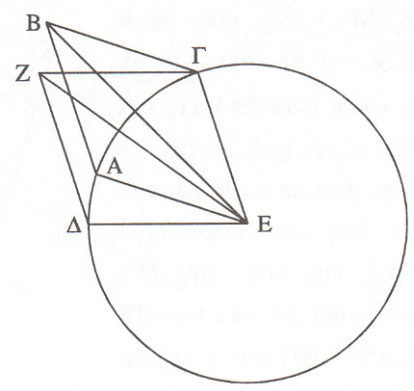


Σχήμα 8-72
Αναθεωρημένη Έκδοση – Απόδειξη 40α

Υποθέτει ότι η γωνία ΚΝΜ είναι ίση με τη ΓΕΑ και ότι η γωνία ΚΝΟ είναι ίση με τη ΓΕΔ. Οι ευθείες ΟΝ, ΜΝ θεωρούνται ίσες με τη ΔΖ. Από το σημείο Μ

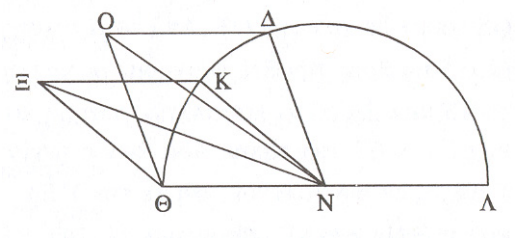
φέρεται η ΜΠ έτσι, ώστε να είναι ίση και παράλληλη προς την ΚΝ, και ενώνεται η ΠΚ. Επομένως, το ΝΠ είναι ίσο και όμοιο παραλληλόγραμμο με το ΒΕ του σχήματος 8-71. Επιπλέον, από το Ο φέρεται η ευθεία ΟΡ που είναι ίση και παράλληλη με την ΚΝ και ενώνεται η ΡΚ. Άρα, το ΡΝ είναι ίσο και όμοιο παραλληλόγραμμο με το ΖΕ. Ενώνονται οι διάμετροι ΡΝ και ΠΝ. Επομένως, η γωνία ΚΝΠ είναι μικρότερη της ΚΝΡ. Επιπλέον, η γωνία ΚΝΠ είναι ίση με την ΑΕΒ και η ΚΝΡ είναι ίση με τη ΔΕΖ. Επομένως, η ΑΕΒ είναι μικρότερη από τη ΔΕΖ. Συνεπώς, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, το μέγεθος ΑΒ θα φανεί μικρότερο του ΔΖ.

Σύμφωνα με το δεύτερο μέρος της απόδειξης, υποτίθεται ότι η ΔΖ είναι ίση με την ακτίνα και κατασκευάζονται ακριβώς τα ίδια πράγματα με αυτά που είδαμε στην απόδειξη 40α:



Σχήμα 8-73
Αναθεωρημένη Έκδοση – Απόδειξη 40β

Ωστόσο, ο συγγραφέας παρουσιάζει και ένα άλλο συνοδευτικό σχήμα, όπως είχε πράξει και προηγουμένως:

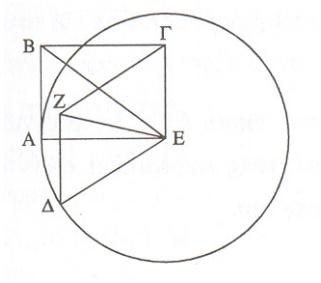


Σχήμα 8-74
Αναθεωρημένη Έκδοση – Απόδειξη 40β

Θέτει το ημικύκλιο ΘΚΛ, το οποίο είναι ίσο με το ημικύκλιο του κύκλου του σχήματος 8-73. Λαμβάνει πάλι ως κέντρο του το σημείο Ν. Επειδή η ΔΖ θεωρείται ίση με την ακτίνα του κύκλου, η ΘΝ είναι ίση με τη ΔΖ. Κατόπιν, τίθεται η γωνία ΘΝΚ ίση με τη γωνία ΓΕΑ και φέρεται η ΚΞ ίση και παράλληλη με τη ΘΝ. Ενώνεται η ΞΘ. Η γωνία ΘΝΔ υποτίθεται ότι είναι ίση με τη γωνία ΓΕΔ και φέρεται η ΔΟ ίση και παράλληλη με τη ΘΝ. Ενώνεται και η ΟΘ. Επομένως, τα ΘΚ, ΘΔ είναι

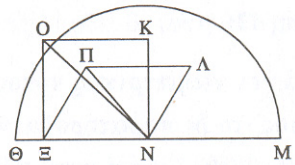
παραλληλόγραμμα ίσα και όμοια με τα παραλληλόγραμμα ΕΖ, ΕΒ. Ώστε, η γωνία ΘΝΔ είναι ίση με τη ΓΕΔ και η ΘΝΚ είναι ίση με τη ΓΕΑ. Όμως, η ΓΕΑ είναι μικρότερη από τη ΓΕΔ, οπότε και η ΘΝΚ είναι μικρότερη από τη ΘΝΔ. Στη συνέχεια, φέρονται οι διαγώνιες ΞΝ, ΟΝ. Επομένως, η γωνία ΘΝΞ είναι μικρότερη από τη ΘΝΟ. Επιπλέον, η ΘΝΞ είναι ίση με την ΑΕΒ και η ΘΝΟ είναι ίση με τη ΔΕΖ. Συνεπώς, το μέγεθος ΑΒ θα φανεί μικρότερο από το ΔΖ.

Στο τρίτο μέρος της απόδειξης, δηλαδή στο 40γ, εξετάζεται η περίπτωση, κατά την οποία η ΖΔ είναι μικρότερη της ακτίνας του κύκλου:



Σχήμα 8-75
Αναθεωρημένη Έκδοση – Απόδειξη 40γ

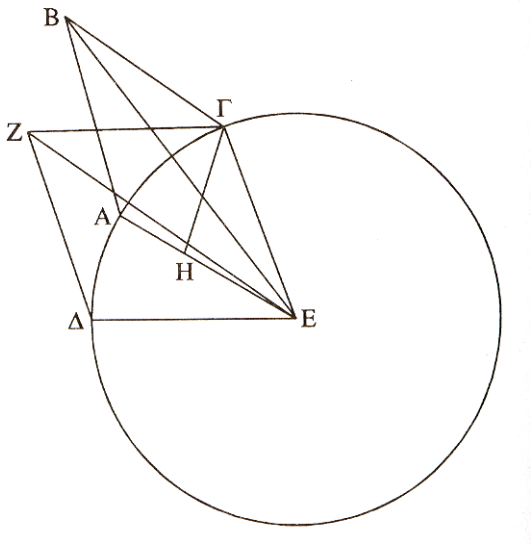
Αφού κατασκευαστούν όλα όσα παρακολουθήσαμε και προηγουμένως, ο συγγραφέας προβάλλει το ανάλογο συνοδευτικό σχήμα:



Σχήμα 8-76
Αναθεωρημένη Έκδοση – Απόδειξη 40γ

Υποθέτει ότι το ημικύκλιο ΘΜ, με κέντρο του το σημείο Ν, είναι ίσο με το ημικύκλιο του κύκλου του σχήματος 8-75. Τίθεται η ΝΞ ίση με τη ΔΖ και η γωνία ΘΝΚ ίση με τη γωνία ΓΕΑ. Παράλληλα, η ΘΝΛ θεωρείται ίση με τη ΓΕΔ, ενώ οι ΝΚ, ΝΛ ίσες με τη ΔΖ. Από το σημείο Κ φέρεται η ΚΟ ίση και παράλληλη στη ΝΞ και ενώνεται η ΞΟ. Από το σημείο Λ φέρεται η ΛΠ ίση και παράλληλη στην ΞΝ και ενώνεται η ΠΞ. Επομένως, τα ΚΞ, ΞΛ είναι παραλληλόγραμμα. Το παραλληλόγραμμο ΚΞ είναι ίσο και όμοιο με το ΕΒ, ενώ το ΞΛ είναι ίσο και όμοιο με το ΕΖ. Επομένως, η γωνία ΘΝΚ ισούται με τη ΓΕΑ και η ΘΝΛ ισούται με τη ΓΕΔ. Όμως, η ΓΕΔ είναι μεγαλύτερη από τη ΓΕΑ, άρα και η ΘΝΛ είναι μεγαλύτερη από τη ΘΝΚ. Ενώνονται οι ΝΟ, ΝΠ. Άρα, η γωνία ΞΝΟ είναι μικρότερη από την ΞΝΠ. Ωστόσο, η ΞΝΟ είναι ίση με την ΑΕΒ και η ΞΝΠ είναι ίση με τη ΔΕΖ. Συνεπώς, το μέγεθος ΑΒ θα φανεί μικρότερο από το ΔΖ.

Αντίθετα με ό,τι μας έχουν συνηθίσει οι αποδείξεις της έκδοσης των *Οπτικών* που συνήθως είναι πιο αναλυτικές και πιο σχολαστικές, η απόδειξη του συγκεκριμένου θεωρήματος γίνεται με πιο γρήγορο τρόπο. Από την άλλη μεριά, η δήλωση των *Οπτικών* διαφοροποιείται, καθώς ισχυρίζεται ότι, εάν το παρατηρούμενο μέγεθος δεν είναι κάθετο στο επίπεδο και μετακινείται πάνω σε κυκλική περιφέρεια, ενώ είναι ίσο με την ακτίνα του, τότε, άλλες φορές θα φανεί ίσο και άλλες φορές άνισο με τον εαυτό του, όντας σε θέση παράλληλη με εκείνη που είχε κατά το ξεκίνημα της μετατόπισής του[78]. Ο συγγραφέας παρουσιάζει το παρακάτω σχήμα, στο οποίο συμβαίνουν ακριβώς τα ανάλογα πράγματα με εκείνα που είδαμε στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*:



Σχήμα 8-77
Οπτικά – Θεώρημα 40

Στην περίπτωση των *Οπτικών* υποτίθεται ότι η ΖΔ είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου και αυτό που επιχειρείται να αποδειχθεί είναι ότι κατά τη μετάβασή της -σε παράλληλη θέση με τη ΖΔ- πάνω στην περιφέρεια του κύκλου, θα φανεί πότε ίση και πότε άνιση. Ο συγγραφέας παρατηρεί ότι τα ΑΕΓΒ και ΕΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα. Επιπλέον, σύμφωνα με το 35α, ισχυρίζεται ότι η γωνία ΓΕΑ είναι μικρότερη της ΓΕΔ. Όμως, η γωνία ΒΕΑ ισούται με το μισό της ΓΕΑ, γιατί το ΒΕ είναι ισόπλευρο παραλληλόγραμμο. Εξάλλου από το θεώρημα 34 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* είναι γνωστό ότι στα παραλληλόγραμμα χωρία οι απέναντι πλευρές

[78] Το θεώρημα 40 των *Οπτικών* δηλώνει ότι «*Ἐὰν δὲ τὸ ὁρώμενον μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μεθίστηται δὲ ἐπὶ κύκλου περιφερείας ἴσον ὂν τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ποτὲ μὲν ἴσον ἑαυτῷ, ποτὲ δὲ ἄνισον ὀφθήσεται κατὰ παράλληλον θέσιν τῇ ἐξ ἀρχῆς μεταβαῖνον*».

και γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους και οι διάμετροι διχοτομούν το χωρίο[79]. Κατά ανάλογο τρόπο, και η ΖΕΔ ισούται με το μισό της ΓΕΔ, γιατί το ΖΕ είναι ισόπλευρο παραλληλόγραμμο. Επομένως, η γωνία ΒΕΑ είναι μικρότερη της ΖΕΔ. Συνεπώς, το μέγεθος ΑΒ θα φανεί μικρότερο του ΔΖ. Ο συγγραφέας επισημαίνει ότι το μέγεθος θα φανεί μικρότερο στο σημείο Α, αλλά στο αντιδιαμετρικό σημείο του Α θα φανεί μεγαλύτερο και σε σημείο που απέχει εξίσου από το Α θα φανεί ίσο. Αυτά τα ισχυρίζεται επικαλούμενος το λήμμα που είχε προηγηθεί. Συγκεκριμένα, αναφέρεται στην απόδειξη 35α και 35β.

17. Παίζοντας με τους γεωμετρικούς τόπους

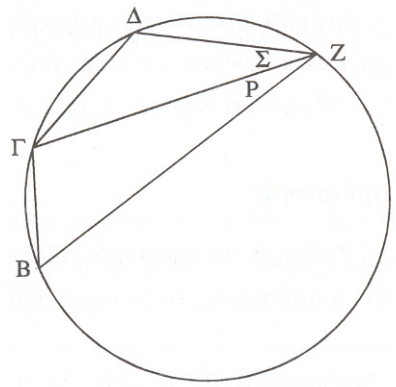
Τα θεωρήματα 41 εώς 48 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στον προσδιορισμό ή στην εύρεση γεωμετρικών τόπων, στους οποίους, αν τοποθετηθεί ο οφθαλμός ή το παρατηρούμενο αντικείμενο, ικανοποιούνται προκαθορισμένες οπτικές εντυπώσεις. Οι εντυπώσεις αυτές σχετίζονται κυρίως με τα φαινομενικά μεγέθη που επιθυμείται να έχουν τα παρατηρούμενα αντικείμενα.

Για παράδειγμα, στο θεώρημα 41 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* προσδιορίζεται ο γεωμετρικός τόπος, όπου, αν τοποθετηθεί ο οφθαλμός, ενώ το παρατηρούμενο μέγεθος κινείται, τότε αυτό θα φαίνεται ίσο[80]. Σύμφωνα με το σχήμα 8-78, υποτίθεται ότι το παρατηρούμενο μέγεθος είναι το ΒΓ και ο οφθαλμός το Ζ, από τον οποίο προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΖΓ, ΖΒ. Γύρω από το τρίγωνο ΖΒΓ περιγράφεται ο κύκλος ΔΒΖ:

---

79 «*Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει*», *Στοιχεία*, I, 34.

80 Το θεώρημα 41 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* θέτει ότι «*Ἔστι τις τόπος, οὗ τοῦ ὄμματος μένοντος,*
τοῦ δὲ ὁρωμένου μεθισταμένου, ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φαίνεται» και το αντίστοιχο θεώρημα 37 των *Οπτικών* ότι «*Ἔστι τόπος, οὗ τοῦ ὄμματος μένοντος, τοῦ δὲ ὁρωμένου μεθισταμένου, ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φαίνεται*».



Σχήμα 8-78

Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 41

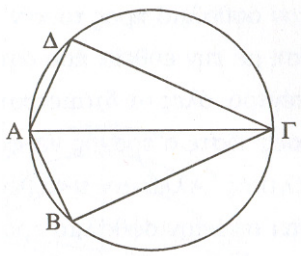
Αυτό που επιχειρείται να αποδειχθεί είναι ότι, αν το ΒΓ μετατοπίζεται επί της περιφέρειας του κύκλου, τότε θα φαίνεται πάντα ίσο. Υποτίθεται λοιπόν ότι μετατοπίζεται στη θέση ΓΔ της περιφέρειας και φέρεται η ΔΖ. Η περιφέρεια ΒΓ είναι ίση με τη ΓΔ, γιατί τα ΒΓ και ΓΔ είναι ίσα και, σύμφωνα με το θεώρημα 28 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*, σε ίσους κύκλους ίσες ευθείες αντιστοιχούν σε ίσες κυκλικές περιφέρειες[81]. Εφόσον, λοιπόν οι περιφέρειες ΒΓ και ΓΔ είναι ίσες, έπεται ότι και η γωνία Ρ θα είναι ίση με τη γωνία Σ, γιατί, σύμφωνα με την πρόταση 27 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*, οι γωνίες που βαίνουν σε ίσες περιφέρειες ενός κύκλου είναι ίσες μεταξύ τους, είτε αν σχηματίζονται στο κέντρο του κύκλου είτε αν σχηματίζονται στην περιφέρειά του[82]. Αφού οι οπτικές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, άρα, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, το ΓΔ θα φανεί ίσο με το ΓΒ.

Το παραπάνω θεώρημα αντιστοιχεί στο θεώρημα 37 των *Οπτικών*, όπου, σύμφωνα με το σχήμα 8-79, υποτίθεται ότι το παρατηρούμενο μέγεθος είναι το ΒΓ και ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Α. Και σε αυτή την περίπτωση γύρω από το τρίγωνο ΑΒΓ περιγράφεται ένας κύκλος και το μέγεθος ΒΓ μετατοπίζεται στη θέση ΔΓ της περιφέρειας:

---

[81] Σύμφωνα με το θεώρημα 28 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*, «*Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι*». Το θεώρημα αυτό ισχύει και για έναν κύκλο.

[82] «*Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰ σίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι*», *Στοιχεία*, ΙΙΙ, 27. Η πρόταση αυτή ισχύει, όχι μόνο για πολλούς ίσους κύκλους, αλλά και για έναν κύκλο.



Σχήμα 8-79

Οπτικά – Θεώρημα 37

Ο συγγραφέας των *Οπτικών* θέτει άλλη μια δέσμευση που απουσιάζει από το το θεώρημα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, συγκεκριμένα, ότι η ΒΑ είναι ίση με την ΑΔ. Εφόσον οι πλευρές αυτές είναι ίσες και η ΒΓ ισούται με τη ΓΔ, ο συγγραφέας καταλήγει στο ότι οι γωνίες ΒΑΓ και ΔΑΓ είναι ίσες. Παρόλο που για την εξαγωγή αυτού του συμπεράσματος χρειάζεται να ειπωθεί, επιπλέον, ότι η ευθεία ΑΓ είναι κοινή, ωστόσο, κατανοούμε ότι ο συγγραφέας βασίζεται στο θεώρημα 8 του βιβλίου Ι των *Στοιχείων* που θέτει ότι, αν οι πλευρές δύο τριγώνων είναι ίσες μεταξύ τους μία προς μία, και έχουν και τις βάσεις του ίσες, τότε θα έχουν και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία[83]. Ο συγγραφέας δε σταματά στο σημείο αυτό. Παρόλο που απέδειξε την ισότητα των οπτικών γωνιών, μέσω της σύγκρισης των πλευρών των τριγώνων, στη συνέχεια, προσπαθεί να ενισχύσει το συμπέρασμά του δηλώνοντας ότι οι γωνίες ΒΑΓ και ΔΑΓ έχουν το επιπλέον χαρακτηριστικό γνώρισμα ότι βαίνουν σε ίσες περιφέρειες, γεγονός που αποδεικνύει για ακόμη μια φορά, μέσω του θεωρήματος 27 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*, την ισότητά τους.

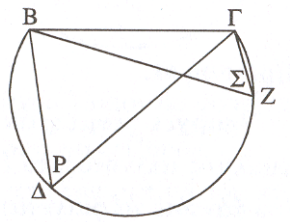
Στο τέλος της απόδειξης ο συγγραφέας επισημαίνει ότι το παρατηρούμενο μέγεθος θα φανεί ίσο, ακόμα και αν ο οφθαλμός παραμείνει σταθερός στο κέντρο του κύκλου, ενώ το παρατηρούμενο μέγεθος μετακινείται στην περιφέρεια. Η παρατήρηση αυτή απουσιάζει από το κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, γι' αυτό κρίνουμε ότι αποτελεί προσθήκη του μεταγενέστερου εκδότη.

Στο θεώρημα 42 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* εξετάζεται η αντίστροφη κατάσταση. Δηλώνεται ότι υπάρχει κάποιος τόπος, όπου, αν υποθέσουμε ότι μετακινείται ο οφθαλμός, ενώ το παρατηρούμενο μέγεθος παραμένει ακίνητο, τότε

83

«*Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρα, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην*», *Στοιχεία*, Ι, 8.

αυτό θα φαίνεται πάντα ίσο[84]. Έτσι, υποτίθεται ότι το παρατηρούμενο μέγεθος είναι το ΒΓ και ο οφθαλμός είναι το σημείο Ζ, από όπου προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΖΒ, ΖΓ. Γύρω από το τρίγωνο ΒΖΓ περιγράφεται το κυκλικό τμήμα ΒΖΓ. Στη συνέχεια, υποτίθεται ότι ο οφθαλμός μετατοπίζεται στο σημείο Δ, από όπου προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΔΒ, ΔΓ:



Σχήμα 8-80

Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 42

Ο συγγραφέας αποδεικνύει την ισότητα των οπτικών γωνιών Ρ και Σ λέγοντας ότι αυτές βαίνουν στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα. Προφανώς παραπέμπει στο θεώρημα 21 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων* που θέτει ότι σε έναν κύκλο οι γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσες μεταξύ τους[85]. Συνεπώς, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» του συγγράμματος, το μέγεθος ΒΓ θα φανεί ίσο όχι μόνο, αν ο οφθαλμός τα παρατηρεί από τις θέσεις Δ και Ζ, αλλά από κάθε σημείο της κυκλικής περιφέρειας.

Το θεώρημα 42 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο θεώρημα 38 των *Οπτικών*. Η απόδειξη των *Οπτικών* δε διαφοροποιείται καθόλου, όσον αφορά στη συλλογιστική πορεία που ακολουθεί. Και εκείνη βασίζεται στην πρόταση 21 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*, καθώς επίσης στον τέταρτο «όρο» του συγγράμματος.

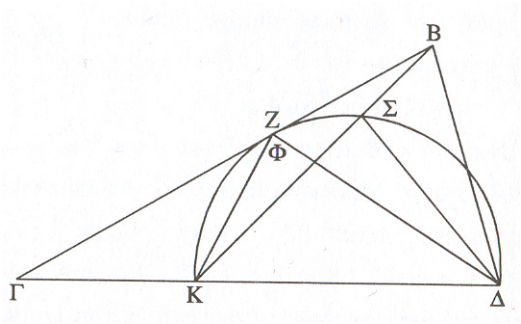
Στο θεώρημα 43 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αποδεικνύεται ότι υπάρχει κάποιος τόπος, όπου, αν το μάτι μετατοπιστεί, ενώ το παρατηρούμενο μέγεθος

---

[84] Το θεώρημα 42 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, καθώς και το αντίστοιχό του θεώρημα 38 των *Οπτικών* δηλώνουν ότι «*Ἔστι τις τόπος, οὗ τοῦ ὄμματος μεθισταμένου, τοῦ δὲ ὁρωμένου μένοντος, ἀεὶ ἴσον τὸ ὁρώμενον φαίνεται*».

[85] Το θεώρημα 21 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων* δηλώνει ότι «*Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*».

παραμένει ακίνητο, τότε αυτό θα φανεί άνισο[86]. Όπως φαίνεται στο σχήμα 8-81, υποτίθεται ότι το παρατηρούμενο μέγεθος είναι το ΚΔ. Φέρεται η ευθεία ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΚΔ στο σημείο Γ. Λαμβάνεται η μέση ανάλογος της ΔΓ και της ΓΚ, η οποία είναι η ΓΖ. Η εύρεση της μέσης αναλόγου δύο δεδομένων ευθύγραμμων τμημάτων παρουσιάζεται στο θεώρημα 13 του βιβλίου VI των *Στοιχείων*[87]. Στη συνέχεια, φέρονται οι ευθείες ΖΚ, ΖΔ και γύρω από το ΚΔ περιγράφεται κυκλικό τμήμα. Επιπλέον, υποτίθεται ότι στην ΚΔ βαίνει η οξεία γωνία Φ:



Σχήμα 8-81

Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 43

Ο συγγραφέας ισχυρίζεται ότι η κορυφή της γωνίας Φ θα εφάπτεται της ΒΓ, επειδή ΔΓ/ΓΖ=ΖΓ/ΓΚ. Ο οφθαλμός τοποθετείται στο σημείο Β και φέρονται οι ΔΒ, ΒΚ και η ΣΔ. Σύμφωνα με το θεώρημα 21 του βιλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*, η γωνία Φ είναι ίση με τη Σ, γιατί βαίνουν στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα. Αντίθετα, η γωνία Σ είναι μεγαλύτερη της Β. Ενδεχομένως ο συγγραφέας να στηρίχτηκε στο ότι στο τρίγωνο ΒΣΔ, εφόσον η ΒΣ επεκτείνεται μέχρι το σημείο Κ, η εξωτερική γωνία που σχηματίζεται στο σημείο Σ είναι μεγαλύτερη από τη Β γωνία. Αυτό αποδεικνύεται στο θεώρημα 16 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*[88]. Εφόσον η γωνία Σ είναι μεγαλύτερη από τη Β, άρα και η γωνία Φ θα είναι μεγαλύτερη της Β. Επομένως, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, από τη θέση Ζ, το μέγεθος ΚΔ θα φανεί μεγαλύτερο από όσο φαίνεται από τη θέση Β.

Το θεώρημα 43 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο θεώρημα 42 των *Οπτικών*. Ωστόσο, η δήλωση του συγκεκριμένου θεωρήματος διαφοροποιείται στην

---

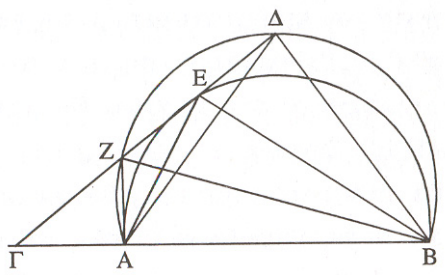
[86] Το θεώρημα 43 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι *«Ἔστι τις τόπος, οὗ τοῦ ὄμματος μεθισταμένου, τοῦ δὲ ὁρωμένου μένοντος, ἄνισον τὸ ὁρώμενον φανεῖται»*.

[87] «*Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν*», *Στοιχεία*, VI, 13.

[88] «*Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐ ντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν*», *Στοιχεία*, I, 16.

έκδοση των *Οπτικών*, όπου διαβάζουμε ότι «*εάν το παρατηρούμενο μέγεθος παραμένει ακίνητο, ενώ ο οφθαλμός μετατοπίζεται προς αυτό κατά πλάγια ευθεία γραμμή, τότε το παρατηρούμενο μέγεθος θα φαίνεται πότε ίσο και πότε άνισο*»[89]. Επομένως, στα *Οπτικά* παρουσιάζονται δύο αποδείξεις, εκ των οποίων η πρώτη αποδεικνύει την ανισότητα των φαινομενικών μεγεθών και, συνεπώς, απουσιάζει από την *Αναθεωρημένη Έκδοση*, ενώ η δεύτερη αποδεικνύει την ισότητα των φαινομενικών μεγεθών και συμφωνεί με εκείνη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*.

Σύμφωνα με την πρώτη απόδειξη των *Οπτικών* και το σχήμα 8-82, υποτίθεται ότι το παρατηρούμενο μέγεθος είναι το ΑΒ, ενώ η ΓΔ είναι μια πλάγια προς αυτό ευθεία. Η ΒΑ επεκτείνεται, μέχρι το σημείο Γ και ο οφθαλμός μετατοπίζεται σε σημεία της ΔΓ. Αυτό που πρέπει να αποδειχθεί είναι ότι το ΑΒ θα φαίνεται πότε ίσο και πότε άνισο:



Σχήμα 8-82
Οπτικά – Απόδειξη 42

Λαμβάνεται η μέση ανάλογος των ΒΓ, ΓΑ, η οποία είναι η ΓΕ. Υποτίθεται ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Ε και ότι μετατοπίζεται στο σημείο Δ. Ενώνονται οι ευθείες ΑΕ, ΕΒ, ΑΔ, ΒΔ και περιγράφεται στο τρίγωνο ΑΕΒ το κυκλικό τμήμα ΑΕΒ. Υποτίθεται ότι η γωνία ΓΔΒ είναι ίση με την ΓΑΖ και ενώνεται η ΒΖ. Επομένως, τα σημεία Β, Α, Ζ, Δ είναι πάνω στον κύκλο. Παρατηρείται ότι η γωνία ΑΕΒ είναι μεγαλύτερη από την ΑΖΒ, ενώ η ΑΖΒ είναι ίση με την ΑΔΒ, σύμφωνα με το θεώρημα 21 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*. Επομένως, η ΑΕΒ είναι μεγαλύτερη της ΑΔΒ. Επομένως, από το σημείο Ε το μέγεθος ΑΒ θα φανεί μεγαλύτερο από όσο φαίνεται, όταν ο οφθαλμός μετατοπίζεται στο Δ. Ο συγγραφέας διαπιστώνει ότι το παρατηρούμενο μέγεθος θα φαίνεται άνισο, όταν ο οφθαλμός μετατοπίζεται πάνω

---

[89] «*Τοῦ ὁρωμένου μένοντος, τοῦ δὲ ὄμματος μεθισταμένου κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν πλαγίαν πρὸς τὸ ὁρώμενον μέγεθος οὖσαν ποτὲ μὲν ἴσον, ποτὲ δὲ ἄνισον τὸ ὁρώμενον φαίνεται*», *Οπτικά*, 42.

στην ΕΓ. Μεγαλύτερο θα φανεί από το σημείο Ε και πάντα θα φαίνεται μεγαλύτερο, όταν ο οφθαλμός βρίσκεται κοντά σε αυτό το σημείο, είτε αν βρίσκεται πάνω στην ΕΔ είτε πάνω στην ΕΓ. Επίσης, θα φανεί ίσο από τα σημεία Ζ και Δ και, γενικότερα, από όσα σημεία λαμβάνονται με αυτόν τον τρόπο, καθώς οι γωνίες τους βρίσκονται στο ίδιο κυκλικό τμήμα.

Η δεύτερη απόδειξη των *Οπτικών* είναι ίδια με εκείνη που συναντήσαμε στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*. Η μόνη διαφορά είναι ότι, ενώ στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ο συγγραφέας επισήμανε ότι η γωνία Φ του σχήματος 8-81 είναι οξεία, ο συγγραφέας των *Οπτικών* δεν το θέτει. Πάντως, αυτό που προκαλεί εντύπωση είναι ότι, στη συγκεκριμένη απόδειξη, ο τρόπος δήλωσης των γωνιών του σχήματος ακολουθεί τον τρόπο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Έχουμε επισημάνει ότι ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* τις περισσότερες φορές υποδηλώνει τις γωνίες των σχημάτων, μέσω απλών γραμμάτων, ενώ ο συγγραφέας των *Οπτικών* τις υποδηλώνει, κυρίως, μέσω των ευθυγράμμων τμημάτων, υπό τις οποίες περιέχονται, π.χ. ΑΒΓ.

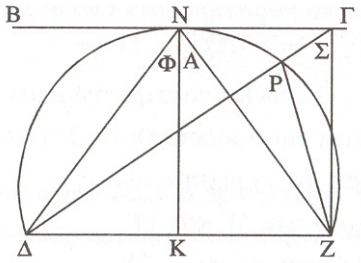
Είναι φανερό ότι το θεώρημα 42 αποτελεί αντιπροσωπευτικό παράδειγμα της μεταγενέστερης επεξεργασίας και των παρεμβολών που έχουν δεχτεί τα περισσότερα θεωρήματα του κειμένου της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, για να καταλήξουν τελικά υπό τη μορφή που συναντάμε στην έκδοση των *Οπτικών*. Ο συγγραφέας των *Οπτικών* επέφερε τροποποιήσεις, βελτιώσεις, ακόμα και εναλλακτικές αποδείξεις. Ωστόσο, κάποια χαρακτηριστικά στοιχεία της παλαιότερης μορφής κειμένου διατηρούνται ανέπαφα, όπως είναι ο τρόπος σήμανσης των γωνιών.

Στο θεώρημα 44 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνεται ότι ένα ακίνητο παρατηρούμενο μέγεθος θα φαίνεται άνισο, ακόμα και αν ο οφθαλμός μετατοπίζεται κατά ευθεία παράλληλη προς αυτό[90].

Αναλυτικότερα, υποτίθεται ότι η παράλληλη ευθεία είναι η ΒΓ και το παρατηρούμενο μέγεθος είναι το ΔΖ, το οποίο διχοτομείται, μέσω του σημείου Κ. Από το Κ φέρεται η κάθετη ΚΝ. Στο σημείο Ν τοποθετείται ο οφθαλμός και ενώνονται οι ΝΔ, ΝΖ. Γύρω από τη ΔΖ περιγράφεται κυκλικό τμήμα που δέχεται τη γωνία Φ, Α:

---

[90] Το θεώρημα 44 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι «*Τὸ δ᾽ αὐτὸ συμβήσεται, κἂν παράλληλος ᾖ ἡ γραμμὴ τῷ ὁρωμένῳ μεγέθει, ἐφ᾽ ἧς τὸ ὄμμα μεθίσταται*».



Σχήμα 8-83

Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 44

Επειδή η ΚΝ είναι διάμετρος και η ΚΝ είναι κάθετη στη ΒΓ που περνά από ένα άκρο της κυκλικής περιφέρειας, έπεται ότι η ΒΓ θα εφάπτεται του κυκλικού τμήματος ΔΝΖ, γιατί σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος 16 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*, η ευθεία που διέρχεται από ένα άκρο του κύκλου και σχηματίζει ορθή γωνία με τη διάμετρό του, εφάπτεται του κύκλου[91]. Κατόπιν, ο οφθαλμός μετατοπίζεται στο σημείο Γ. Προσπίπτουν οι ΓΖ, ΓΔ και ενώνεται η ΡΖ. Η γωνία Φ, Α είναι ίση με τη Ρ, γιατί βαίνουν στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα, το ΔΖ[92]. Παράλληλα, σύμφωνα με το θεώρημα 16 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, η γωνία Ρ είναι μεγαλύτερη από τη Σ, γιατί αποτελεί εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΣΡΖ[93]. Επομένως, η γωνία Φ, Α είναι μεγαλύτερη και της Σ. Συνεπώς, το μέγεθος ΔΖ θα φανεί μεγαλύτερο, αν ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Ν, παρά αν μετατοπιστεί στο σημείο Γ.

Το θεώρημα 44 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο θεώρημα 43 των *Οπτικών*[94]. Η συλλογιστική που ακολουθείται είναι η ίδια και ο συγγραφέας των *Οπτικών* σπεύδει αυτή τη φορά να μην υποδηλώσει τις γωνίες με απλά γράμματα, αλλά μέσω των πλευρών που τις διαμορφώνουν.

Στο θεώρημα 45 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνεται ότι υπάρχει κοινός τόπος, από τον οποίο τα ίσα μεγέθη φαίνονται άνισα[95]. Έτσι, υποτίθεται ότι τα μεγέθη ΒΓ, ΓΔ είναι ίσα. Γύρω από το ΒΓ περιγράφεται ημικύκλιο και γύρω από το ΓΔ κυκλικό τμήμα που να είναι μεγαλύτερο από ημικύκλιο. Ο συγγραφέας δεν το

---

[91] «*Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου*», *Στοιχεία*, ΙΙΙ, 16.51-53.

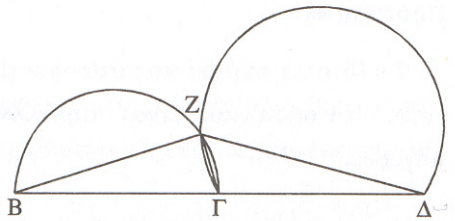
[92] Πρόκειται για το θεώρημα 21 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*. Βλ. σελ. 363, υποσημ. 85.

[93] Για το θεώρημα 16 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, βλ. σελ. 364, υποσημ. 88.

[94] Το θεώρημα 43 των *Οπτικών* δηλώνει ότι «*Τὸ δ᾽ αὐτὸ συμβήσεται, κἂν παράλληλος ᾖ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ τῷ ὁρωμένῳ μεγέθει*».

[95] Το θεώρημα 45 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι «*Ἔστι τις τόπος κοινός, ἐν ᾧ τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισα φαίνεται*».

αναφέρει, αλλά υποτίθεται ότι ο οφθαλμός τοποθετείται στο σημείο τομής των δύο κυκλικών τμημάτων, δηλαδή στο σημείο Ζ. Ενώνονται οι ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ:



Σχήμα 8-84

Αναθεωρημένη Έκδοση – Θέωρημα 45

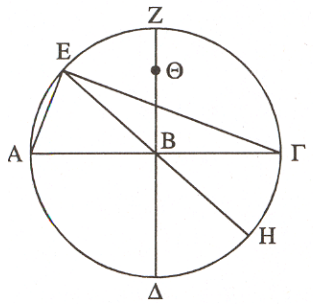
Παρατηρείται ότι η γωνία που σχηματίζεται στο ημικύκλιο είναι μεγαλύτερη από τη γωνία που σχηματίζεται στο κυκλικό τμήμα που είναι μεγαλύτερο του ημικυκλίου. Η πρόταση αυτή μας παραπέμπει στο θεώρημα 31 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων* που δηλώνει, μεταξύ άλλων, ότι η γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή, ενώ αυτή που βαίνει σε τμήμα μεγαλύτερο του ημικυκλίου είναι μικρότερη από ορθή[96]. Συνεπώς, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, το μέγεθος ΒΓ θα φανεί μεγαλύτερο από το ΓΔ.

Το θεώρημα 45 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο θεώρημα 44 των *Οπτικών*. Η δήλωση των *Οπτικών* διαφοροποιείται, καθώς αναφέρει ότι υπάρχουν τόποι, όπου, αν μετατοπιστεί ο οφθαλμός, τα ίσα μεγέθη που καταλαμβάνουν ορισμένους τόπους θα φανούν πότε ίσα και πότε άνισα[97]. Στα *Οπτικά* παρουσιάζονται δύο αποδείξεις, από τις οποίες μόνο η δεύτερη συμφωνεί με την απόδειξη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, παρόλο που έχει υποστεί μεγαλύτερη επεξεργασία. Αντίθετα, η πρώτη απόδειξη απουσιάζει από αυτή.

Σύμφωνα με την πρώτη απόδειξη και το σχήμα 85, υποτίθενται δύο ίσα μεγέθη, τα ΑΒ και ΒΓ. Από το σημείο Β φέρεται η κάθετη ΒΖ, η οποία επεκτείνεται μέχρι το σημείο Δ:

[96] Για το θεώρημα 31 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*, βλ. σελ. 330, υποσημ. 65.

[97] Το θεώρημα 44 των *Οπτικών* δηλώνει ότι «*Εἰσὶ τόποι, ἐφ' οὓς τοῦ ὄμματος μετατιθεμένου τὰ ἴσα μεγέθη καὶ κοινῶς ἀπολαβόντα τόπους τινὰς π οτὲ μὲν ἴσα, ποτὲ δὲ ἄνισα φαίνεται*».



Σχήμα 8-85

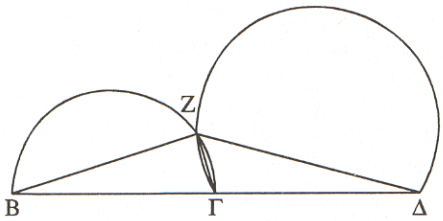
Οπτικά – Θεώρημα 44

Παρατηρείται ότι σε όποιο σημείο της ΖΔ και αν τεθεί ο οφθαλμός, τα δύο παρατηρούμενα μεγέθη θα φανούν ίσα. Στη συνέχεια, ο οφθαλμός τοποθετείται στο σημείο Ε, από όπου προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ, και περιγράφεται γύρω από το τρίγωνο ΑΓΕ ο κύκλος ΑΕΔΓ. Η ευθεία ΕΒ επεκτείνεται, μέχρι το σημείο Η. Επειδή το τόξο της περιφέρειας ΑΔ είναι ίσο με το τόξο της ΔΓ, η περιφέρεια ΑΔΗ θα είναι μεγαλύτερη από την ΗΓ. Επομένως, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» των *Οπτικών*, η ΑΒ θα φανεί μεγαλύτερη της ΒΓ.

Ο συγγραφέας συμπληρώνει ότι, ακόμα και αν ο οφθαλμός μετατοπιστεί σε σημεία της ΕΗ, τα μεγέθη θα φανούν πάλι άνισα. Το ίδιο θα συμβεί και αν ο οφθαλμός βρεθεί σε τμήματα του κύκλου εξαιρουμένων εκείνων της καθέτης, καθώς επίσης αν ο οφθαλμός τοποθετηθεί εκτός του κύκλου, αλλά όχι στην κατεύθυνση της ΔΖ.

Η δεύτερη απόδειξη συμφωνεί με εκείνη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, ως προς τη συλλογιστική πορεία, αλλά είναι λίγο πιο σχολαστική. Κατά τα διάφορα βήματα της αποδεικτικής διαδικασίας, αναφέρονται τα θεωρήματα των *Στοιχείων* που απαιτούνται κάθε φορά. Το στοιχείο αυτό δεν παρατηρείται συνήθως στις αποδείξεις των *Οπτικών* και είναι πολύ πιθανό να αποτελεί μεταγενέστερη παρεμβολή. Πάντως, είτε αν αυτές οι παραπομπές ανήκουν στον συγγραφέα που επιμελήθηκε την επανέκδοση της πραγματείας είτε σε κάποιον άλλο σχολιαστή, η συγκεκριμένη απόδειξη είναι μεταγενέστερη από εκείνη που παρακολουθήσαμε στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*.

Συγκεκριμένα, υποτίθενται δύο ίσα μεγέθη, τα ΒΓ, ΓΔ, γύρω από τα οποία περιγράφονται κυκλικά τμήματα. Το κυκλικό τμήμα που περιγράφεται γύρω από το ΒΓ είναι ίσο με ημικύκλιο, ενώ γύρω από το ΓΔ είναι μεγαλύτερο ημικυκλίου:

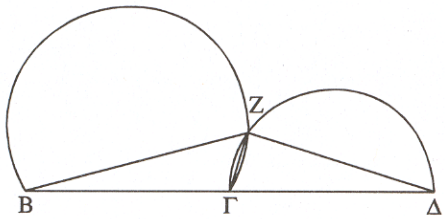


Σχήμα 8-86
Οπτικά – Θεώρημα 44 Ἄλλως

Ο συγγραφέας αναφέρει ότι τα δύο κυκλικά τμήματα θα τέμνονται. Στη συνέχεια, αρχίζει μια μικρή έκθεση, στην οποία αιτιολογείται, γιατί είναι δυνατόν να περιγραφεί γύρω από τη ΓΔ κυκλικό τμήμα μεγαλύτερο του ημικυκλίου. Αναφέρεται ότι είναι δυνατόν να περιγραφεί γύρω από το ΓΔ κυκλική περιφέρεια που να δέχεται μια οποιαδήποτε οξεία γωνία. Αυτό βασίζεται, όπως λέγεται, στο θεώρημα 33 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων* που δηλώνει ότι είναι δυνατόν σε μία οποιαδήποτε δοθείσα ευθεία να περιγραφεί κυκλικό τμήμα που να δέχεται γωνία ίση με μια οποιαδήποτε δοθείσα ευθύγραμμη γωνία[98]. Στην περίπτωση αυτή το κυκλικό τμήμα θα είναι μεγαλύτερο του ημικυκλίου. Αυτό το συμπέρασμα στηρίζεται, όπως επισημαίνεται, στο θεώρημα 31 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*[99].

Στη συνέχεια, ενώνονται οι ΒΖ, ΖΓ, ΖΔ και διαπιστώνεται ότι η γωνία που βαίνει στο ημικύκλιο είναι μεγαλύτερη από αυτή που βαίνει στο άλλο κυκλικό τμήμα. Επομένως, το μέγεθος ΒΓ φαίνεται μεγαλύτερο από το ΓΔ. Κατόπιν, ο συγγραφέας επιχειρούσε να δείξει από ποιο σημείο τα δύο μεγέθη θα φαίνονταν ίσα. Ωστόσο, η απόδειξη διακόπτεται απότομα και δε διασώζεται τίποτα από τον συλλογισμό του συγγραφέα.

Στο θεώρημα 46 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνεται ότι υπάρχει κάποιος τόπος, από τον οποίο τα άνισα μεγέθη φαίνονται ίσα[100]. Σύμφωνα με το σχήμα 8-87,



Σχήμα 8-87
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 46

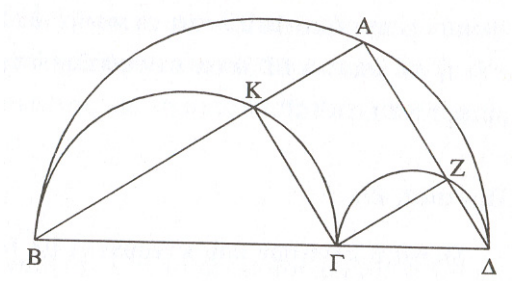
---

[98] «*Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ*», *Στοιχεία*, ΙΙΙ, 33.
[99] Για το θεώρημα 31 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*, βλ. σελ. 330, υποσημ. 65.
[100] Το θεώρημα 46 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι «*Ἔστι τις τόπος κοινός, ἀφ' οὗ τὰ ἄνισα μεγέθη ἴσα φαίνεται*».

υποτίθεται ότι το μέγεθος ΒΓ είναι μεγαλύτερο από το ΓΔ. Γύρω από το ΒΓ περιγράφεται κυκλικό τμήμα μεγαλύτερο του ημικυκλίου και γύρω από το ΓΔ ένα όμοιο με το ΒΓ κυκλικό τμήμα, τέτοιο δηλαδή που να δέχεται γωνία ίση με τη ΒΖΓ. Αυτό μας παραπέμπει στο θεώρημα 33 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων* που συναντήσαμε και προηγουμένως. Ο οφθαλμός τοποθετείται στο σημείο Ζ και φέρονται οι ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ. Τα δύο παρατηρούμενα μεγέθη θα φανούν, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» του συγγράμματος, ίσα, γιατί οι γωνίες ΒΖΓ, ΓΖΔ βαίνουν σε όμοια τμήματα, επομένως, είναι ίσες μεταξύ τους.

Το θεώρημα 46 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο θεώρημα 45 των *Οπτικών*[101]. Τα δύο θεωρήματα δε διαφέρουν στις αποδείξεις ούτε στα σχήματα που παρουσιάζουν.

Σύμφωνα με το θεώρημα 47 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, υπάρχουν κάποιοι τόποι, από τους οποίους άνισα μεγέθη που ενώνονται σε ένα θα φαίνονται ίσα με καθένα από τα άνισα μεγέθη[102]. Για παράδειγμα, υποτίθεται ότι το μέγεθος ΒΓ είναι μεγαλύτερο από το ΓΔ:



Σχήμα 8-88
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 47

Γύρω από τα μεγέθη ΒΓ και ΓΔ περιγράφονται δύο ξεχωριστά ημικύκλια. Επιπλέον, περιγράφεται άλλο ένα γύρω από το συνολικό μέγεθος ΒΔ. Σύμφωνα με το θεώρημα 31 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*, οι γωνίες ΒΑΔ και ΒΚΓ είναι ίσες, γιατί βαίνουν και οι δύο σε ημικύκλια. Επομένως, το μέγεθος ΒΓ θα φαίνεται ίσο με το ΒΔ. Ίσα θα φαίνονται και τα μεγέθη ΒΔ, ΓΔ, αν ο οφθαλμός βρίσκεται στις γωνίες ΒΑΔ, ΓΖΔ.

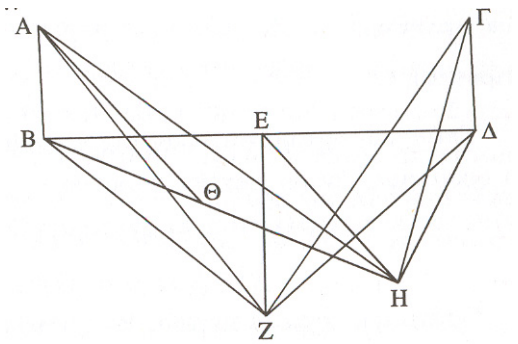
---

[101] Το θεώρημα 45 των *Οπτικών* δηλώνει ότι *«Ἔστι τις τόπος κοινός, ἀφ᾽ οὗ τὰ ἄνισα μεγέθη ἴσα φαίνεται»*.

[102] Το θεώρημα 47 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι «*Εἰσί τινες τόποι, ἐν οἷς τὰ ἄνισα μεγέθη δύο εἰς ταὐτὸ συντεθέντα ἴσα ἑκατέρῳ τῶν ἀνίσων φαίνεται*».

Επισημαίνουμε ότι το παραπάνω θεώρημα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο 47 των *Οπτικών*[103]. Μεταξύ των δύο αποδείξεων δεν υπάρχουν διαφορές.

Στα *Οπτικά* παρατίθεται ένα θεώρημα που δεν υπάρχει στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*. Σύμφωνα με το θεώρημα 46, υπάρχουν τόποι, όπου, αν μετατοπιστεί ο οφθαλμός, τα παρατηρούμενα ίσα μεγέθη που βρίσκονται κάθετα στο επίπεδο του οφθαλμού θα φανούν πότε ίσα και πότε άνισα[104]. Όπως φαίνεται στο σχήμα 8-89, υποτίθενται δύο ίσα μεγέθη, τα ΑΒ, ΓΔ, που βρίσκονται κάθετα στο επίπεδο:



Σχήμα 8-89

Οπτικά – Θεώρημα 46

Ενώνεται η ΒΔ και διχοτομείται στο σημείο Ε. Από το Ε φέρεται η ΕΖ, έτσι, ώστε να είναι κάθετη στη ΔΒ. Εάν ο οφθαλμός βρεθεί πάνω στην ευθεία ΕΖ, τα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ θα φανούν ίσα. Έτσι, ο οφθαλμός τοποθετείται στο σημείο Ζ, από όπου προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΑΖ, ΖΒ, ΖΕ, ΖΔ. Ο συγγραφέας δηλώνει ότι η ΖΒ είναι ίση με τη ΖΔ. Κατανοούμε ότι έφτασε σε αυτό το συμπέρασμα, μέσω της σύγκρισης των τριγώνων ΒΕΖ, ΖΕΔ και βασιζόμενος στο θεώρημα 4 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*[105]. Επιπλέον, τα ΑΒ, ΓΔ είναι ίσα και οι γωνίες ΑΒΖ, ΓΔΖ είναι ίσες. Επομένως, η γωνία ΒΖΑ ισούται με τη ΔΖΓ. Συνεπώς, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» των *Οπτικών*, τα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ θα φανούν ίσα από το σημείο Ζ.

Στη συνέχεια, ο οφθαλμός μετατοπίζεται στο σημείο Η και προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΗΒ, ΗΑ, ΗΓ, ΗΔ. Παρατηρείται ότι η ΗΒ είναι μεγαλύτερη από την ΗΔ. Από την ευθεία ΗΒ λαμβάνεται το τμήμα ΒΘ, έτσι, ώστε να ισούται με την ΗΔ.

---

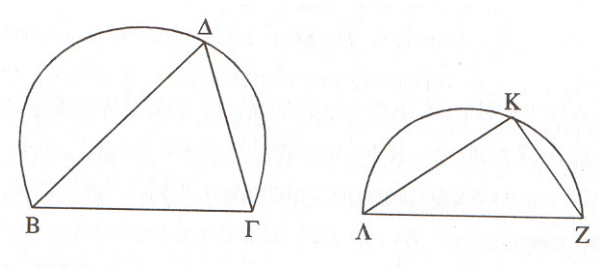
[103] Το θεώρημα 47 των *Οπτικών* δηλώνει ότι «*Εἰσὶ τόποι τινές, ἐν οἷς τοῦ ὄμματος τεθέντος τὰ ἄνισα μεγέθη εἰς τὸ αὐτὸ συντεθέντα ἴσα ἑκατέρῳ τῶν ἀνίσων φανήσεται*».

[104] Το θεώρημα 46 των *Οπτικών* δηλώνει ότι «*Εἰσὶ τόποι, ἐφ᾽ οὓς τοῦ ὄμματος μετατιθεμένου τὰ ἴσα μεγέθη καὶ πρὸς ὀρθὰς ὄντα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ποτὲ μὲν ἴσα, ποτὲ δὲ ἄνισα φαίνεται*».

[105] Για το θεώρημα 4 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, βλ. σελ. 327, υποσημ. 61.

Ενώνεται η ΑΘ και διαπιστώνεται, μέσω σύγκρισης των τριγώνων ΑΒΘ, ΓΔΗ και του θεωρήματος 4 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, ότι η γωνία ΒΘΑ είναι ίση με τη ΓΗΔ. Όμως, η γωνία ΒΘΑ είναι μεγαλύτερη από τη ΒΗΑ, επομένως, η ΓΗΔ είναι μεγαλύτερη της ΒΗΑ. Συνεπώς, από το σημείο Η, το μέγεθος ΓΔ θα φανεί μεγαλύτερο από το ΑΒ.

Η πρόταση 48 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αποτελεί πρόβλημα, στο οποίο ζητάται να βρεθούν οι τόποι, από τους οποίους ένα μέγεθος θα φανεί ίσο με το μισό του ή με το ένα τέταρτό του ή, γενικά, ίσο με τον δοθέντα λόγο, κατά τον οποίο διαιρείται η οπτική γωνία[106]. Αναλυτικότερα, υποτίθεται η ευθεία ΛΖ, γύρω από την οποία περιγράφεται τυχαίο κυκλικό τμήμα. Επιπλέον, υποτίθεται ότι η γωνία Κ είναι εγγεγραμμένη σε αυτό. Λαμβάνεται η ευθεία ΒΓ ίση με τη ΛΖ. Γύρω από τη ΒΓ περιγράφεται κυκλικό τμήμα που δέχεται τη γωνία Δ, έτσι, ώστε να ισούται με το μισό της Κ:



Σχήμα 8-90
Αναθεωρημένη Έκδοση – Πρόβλημα 48

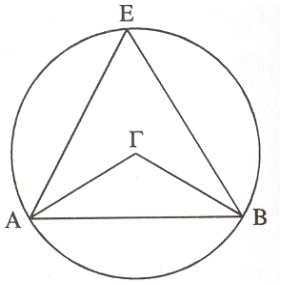
Αφού η γωνία Κ είναι διπλάσια της Δ, τότε το μέγεθος ΛΖ θα φανεί διπλάσιο από το ΒΓ, σε όποιο σημείο της περιφέρειας ΛΚΖ και αν τοποθετηθεί ο οφθαλμός. Ο συγγραφέας δεν προσθέτει τίποτε άλλο. Ωστόσο, κατανοούμε ότι, αν είχαμε λάβει τη γωνία Κ να ισούται με το ¼ της γωνίας Δ, και, γενικότερα, με οποιοδήποτε λόγο της, τότε, θα υπήρχαν τα ανάλογα αποτελέσματα ως προς το φαινομενικό μέγεθος του παρατηρούμενου αντικειμένου.

Το παραπάνω πρόβλημα που εξετάσαμε αντιστοιχεί στην πρόταση 48 των *Οπτικών*, όπου η επιλυτική διαδικασία που ακολουθείται δεν παρουσιάζει

[106] Το πρόβλημα 48 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* θέτει «*Εὑρεῖν τόπους, ἀφ' ὧν τὸ ἴσον μέγεθος ἥμισυ φανεῖται ἢ τέταρτον μέρος καὶ καθόλου ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ, ἐν ᾧ καὶ ἡ γωνία τέμνεται*».

διαφοροποιήσεις[107]. Ωστόσο, στο κείμενο των *Οπτικών* ακολουθεί άλλη μία πρόταση που απουσιάζει από την *Αναθεωρημένη Έκδοση*. Η πρόταση αυτή σχετίζεται με το πρόβλημα 48 των *Οπτικών*. Συγκεκριμένα, υποθέτει ένα μέγεθος ΑΒ και δηλώνει ότι το μέγεθος αυτό έχει τόπους, όπου, αν τοποθετηθεί ο οφθαλμός, τότε το παρατηρούμενο μέγεθος θα φαίνεται είτε ίσο με το μισό του είτε ίσο με το ένα τέταρτό του είτε, γενικότερα, ίσο με τον δοθέντα λόγο, κατά τον οποίο διαιρείται η οπτική γωνία.

Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 8-91, γύρω από το ΑΒ περιγράφεται ο κύκλος ΑΕΒ, έτσι, ώστε το ΑΒ να μην είναι διάμετρος. Ο οφθαλμός τοποθετείται στο κέντρο του κύκλου, δηλαδή στο σημείο Γ, και ενώνονται οι ευθείες ΑΓ, ΓΒ. Επομένως, το μέγεθος ΑΒ θα παρατηρείται υπό τη γωνία ΑΓΒ:



Σχήμα 8-91

Οπτικά – Θεώρημα 49

Κατόπιν, ο οφθαλμός μετατοπίζεται στο σημείο Ε της κυκλικής περιφέρειας, από όπου προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΕΑ, ΕΒ. Ο συγγραφέας συμπεραίνει ότι το μέγεθος ΑΒ, όταν παρατηρείται από τη θέση Γ, θα φαίνεται διπλάσιο από όσο φαίνεται, όταν ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Ε, γιατί η γωνία Γ είναι διπλάσια από τη γωνία Ε. Κατανοούμε ότι, για να οδηγηθεί σε αυτό το συμπέρασμα, ο συγγραφέας βασίζεται, αφενός, στο θεώρημα 20 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων* που δηλώνει ότι σε έναν κύκλο η γωνία που διαμορφώνεται στο κέντρο του κύκλου είναι διπλάσια από αυτή που διαμορφώνεται στην περιφέρειά του, όταν οι γωνίες αυτές

[107] Το πρόβλημα 48 των *Οπτικών* θέτει «*Εὑρεῖν τόπους, ἀφ᾽ ὧν τὸ ἴσον μέγεθος ἥμισυ φανεῖται ἢ τέταρτον μέρος ἢ καθόλου ἐ ν τῷ λόγῳ, ἐν ᾧ καὶ ἡ γωνία τέμνεται*».

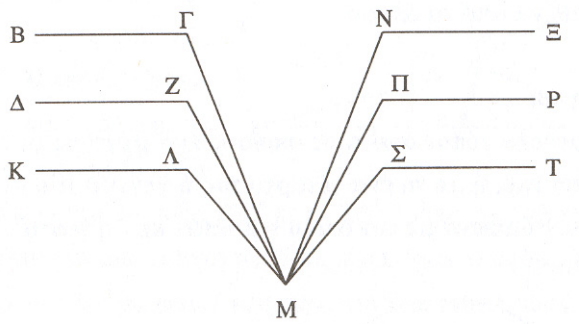
έχουν ως βάση τους την ίδια κυκλική περιφέρεια[108] και, αφετέρου, στον τέταρτο «όρο» των *Οπτικών*.

18. Παράδοξα που αφορούν στην αντίληψη της κίνησης

Τα θεωρήματα 49-51 και 53-55 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον, καθώς έχουν να κάνουν με οφθαλμαπάτες που επηρεάζουν τον τρόπο αντίληψης της κίνησης. Στα θεωρήματα αυτά θίγεται κατά κάποιο τρόπο η έννοια της σχετικότητας της κίνησης ή, για να το πούμε καλύτερα, της μετατόπισης των μεγεθών.

Συγκεκριμένα, στο θεώρημα 49 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνεται ότι, μεταξύ κάποιων μεγεθών που κινούνται με ίση ταχύτητα πάνω στην ίδια ευθεία, όταν πλησιάζουν προς τον οφθαλμό, το τελευταίο, δηλαδή το πιο απομακρυσμένο, φαίνεται να προηγείται, ενώ, όταν μετατοπιστούν (και απομακρυνθούν από τον οφθαλμό), αυτό που φαινόταν να προηγείται θα φαίνεται να ακολουθεί, ενώ αυτό που ακολουθούσε, θα φαίνεται να προηγείται[109].

Έτσι, υποτίθεται ότι τα ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ κινούνται ισοταχώς και ότι από τον οφθαλμό Μ προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΜΓ, ΜΖ, ΜΛ:



Σχήμα 8-92

Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 49

Παρατηρείται ότι η οπτική ακτίνα ΜΓ είναι ψηλότερη και δεξιότερη, σε σχέση με τις υπόλοιπες. Γι' αυτόν τον λόγο, το μέγεθος ΒΓ θα φαίνεται να προηγείται των άλλων. Κατόπιν, υποτίθεται ότι τα μεγέθη ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ έχουν μετατοπιστεί στις θέσεις ΝΞ,

---

[108] Σύμφωνα με το θεώρημα 20 του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*, «*Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι*».

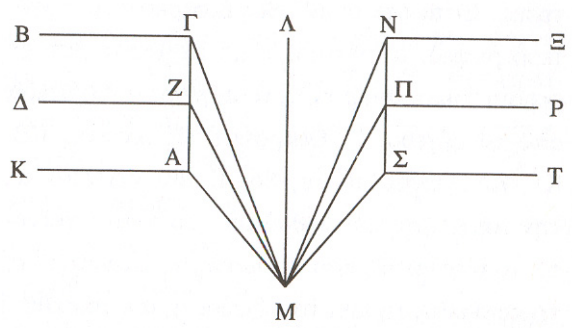
[109] Το θεώρημα 49 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι «*Τῶν ἴσῳ τάχει φερομένων καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων προσιόντων μὲν πρὸς τὸ ὄμμα τὸ τελευταῖον προηγεῖσθαι δόξει, παραλλαξάντων δὲ τὸ μὲν προηγούμενον ἐπακολουθεῖν, τὸ δὲ ἐπακολουθοῦν προηγεῖσθαι δόξει*».

ΠΡ και ΣΤ, αντίστοιχα. Αν οι οπτικές ακτίνες είναι οι ΜΝ, ΜΠ, ΜΣ, παρατηρείται ότι η δεξιότερη είναι η ΜΣ και ότι η αριστερότερη είναι η ΜΝ. Ο συγγραφέας συμπεραίνει λοιπόν ότι τώρα το μέγεθος εκείνο που φαίνεται να προηγείται είναι, αυτό που πριν φαινόταν να ακολουθεί τελευταίο, δηλαδή, το ΜΣ, ενώ αυτό που τώρα φαίνεται να ακολουθεί τελευταίο είναι εκείνο που πριν φαινόταν να προηγείται των υπολοίπων, δηλαδή το ΝΞ.

Το θεώρημα 49 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο θεώρημα 50 των *Οπτικών*. Το θεώρημα των *Οπτικών* έχει γραφτεί με πιο προσεκτικό και πιο σχολαστικό τρόπο, ενώ το σχήμα παρουσιάζει μικρές διαφορές. Ακόμα και η δήλωση του θεωρήματος εκφράζεται πιο λεπτομερώς. Σύμφωνα με αυτή, αν μεγέθη που κινούνται με ίση ταχύτητα και που έχουν τα άκρα τους στην ίδια πλευρά πάνω σε μία ευθεία που είναι κάθετη σε αυτά, προχωρούν προς την ευθεία που φέρεται από τον οφθαλμό παράλληλα προς την προαναφερθείσα ευθεία, το μέγεθος που βρίσκεται πιο μακριά από τον οφθαλμό φαίνεται να προηγείται εκείνου που είναι πιο κοντά και, όταν μετατοπιστούν στην άλλη πλευρά, το μέγεθος που φαινόταν να προηγείται φαίνεται να ακολουθεί και εκείνο που φαινόταν να ακολουθεί φαίνεται να προηγείται[110]. Συγκεκριμένα, τα μεγέθη που φέρονται ισοταχώς είναι τα ΒΓ, ΔΖ, ΚΑ. Αντίθετα από τον συγγραφέα της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* που το εννοεί, αλλά δεν το επεξηγεί λεπτομερώς, ο συγγραφέας των *Οπτικών* ισχυρίζεται ότι τα άκρα Γ, Ζ, Α των παρατηρούμενων μεγεθών αποτελούν σημεία μίας ευθείας που είναι κάθετη στα μεγέθη. Επιπλέον, από τον οφθαλμό Μ φέρεται η ευθεία ΜΛ παράλληλη στη ΓΑ και προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΜΓ, ΜΖ, ΜΑ:

---

[110] Σύμφωνα με το θεώρημα 50 των *Οπτικών*, «*Τῶν ἴσῳ τάχει φερομένων καὶ ἐπὶ μιᾶς πρὸς ὀρθὰς αὐτοῖς οὔσης εὐθείας τὰ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πέρατα ἐχόντων προσιόντων μὲν πρὸς τὴν ἀγομένην διὰ τοῦ ὄμματος παράλληλον τῇ εἰρημένῃ εὐθείᾳ τὸ πορρώτερον τοῦ ὄμματος τοῦ ἐγγύτερον προηγεῖσθαι δόξει, παραλλαξάντων δὲ τὸ μὲν προηγούμενον ἐπακολουθεῖν, τὸ δὲ ἐπακολουθοῦν προηγεῖσθαι*».



Σχήμα 8-93

Οπτικά – Θεώρημα 50

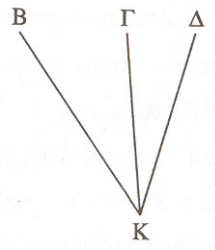
Ο συγγραφέας των *Οπτικών* υποστηρίζει ότι το μεγεθος ΒΓ φαίνεται να προηγείται και το ΚΑ να ακολουθεί, γιατί η οπτική ακτίνα ΜΓ φαίνεται να προχωρά περισσότερο, σε σχέση με τις άλλες ακτίνες. Κατόπιν, τα παρατηρούμενα μεγέθη μετατοπίζονται και είναι τα ΝΞ, ΠΡ και ΣΤ, αντίστοιχα. Ο συγγραφέας υποστηρίζει ότι το μέγεθος ΝΞ φαίνεται να προχωρά προς το σημείο Ν, επειδή η οπτική ακτίνα ΜΝ προχωρά προς το Ν περισσότερο από τις άλλες ακτίνες. Το μέγεθος ΣΤ προχωρά προς το σημείο Τ, γιατί η οπτική ακτίνα ΜΣ φαίνεται να προχωρά προς το Τ περισσότερο από τις άλλες. Επομένως, το ΣΤ θα φαίνεται να προηγείται, ενώ το ΝΞ να ακολουθεί τελευταίο.

Το θεώρημα 50 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* εξετάζει την περίπτωση κάποιων παρατηρούμενων μεγεθών που κινούνται με άνισες ταχύτητες. Λαμβάνοντας υπόψη ότι και ο οφθαλμός κινείται με την ίδια κατεύθυνση με αυτά, το θεώρημα 50 δηλώνει ότι τα παρατηρούμενα μεγέθη που κινούνται με ίση ταχύτητα με εκείνη του οφθαλμού, θα φαίνονται ότι είναι ακίνητα. Επιπλέον, αυτά που κινούνται βραδύτερα από τον οφθαλμό θα φαίνεται ότι κινούνται στην αντίθετη κατεύθυνση από εκείνον, ενώ αυτά που κινούνται γρηγορότερα από τον οφθαλμό θα φαίνεται να κινούνται προς τα εμπρός[111].

Αναλυτικότερα, υποτίθεται ότι τα Β, Γ, Δ κινούνται με άνισες ταχύτητες. Το Β κινείται βραδύτερα από όλα, το Γ κινείται με ταχύτητα ίση με εκείνη του οφθαλμού, ενώ το Δ κινείται γρηγορότερα από το Γ. Από τον οφθαλμό Κ προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ:

---

[111] Το θεώρημα 51 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι «*Ἐάν τινων φερομένων πλειόνων ἀνίσῳ τάχει συμπαραφέρηται ἐπὶ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ὄμμα, τὰ μὲν τῷ ὄμματι*
ἰσοταχῶς φερόμενα δόξει ἑστάναι, τὰ δὲ βραδύτερον εἰς τοὐναντίον φέρεσθαι, τὰ δὲ θᾶττον εἰς τὰ προηγούμενα».



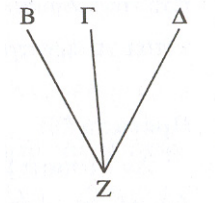
Σχήμα 8-94

Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 50

Ο συγγραφέας δηλώνει ότι, ενώ ο οφθαλμός κινείται μαζί με τα Β, Γ, Δ, το Γ θα φαίνεται πάντα ακίνητο. Από την άλλη μεριά, το Β που καθυστερεί θα φαίνεται ότι κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση από εκείνη του οφθαλμού και το Δ που κινείται γρηγορότερα από το Γ θα φαίνεται να κινείται προς τα εμπρός, γιατί απομακρύνεται περισσότερο από το Γ.

Παρατηρούμε ότι η απόδειξη του συγκεκριμένου θεωρήματος δε γίνεται με αυστηρό γεωμετρικό τρόπο. Τα συμπεράσματα που εξάγονται ως προς τη σχετική κίνηση των παρατηρούμενων μεγεθών βασίζονται στην εμπειρία. Στο κείμενο των *Οπτικών* το συγκεκριμένο θεώρημα αντιστοιχεί στην πρόταση 51 και η θεμελίωσή της γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο[112].

Στο θεώρημα 51 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνεται ότι αν, όταν κινούνται παρατηρούμενα μεγέθη, ένα είναι ακίνητο, τότε αυτό θα φαίνεται να κινείται προς τα πίσω[113]. Συγκεκριμένα, υποτίθεται ότι τα Β, Δ κινούνται, ενώ το Γ μένει ακίνητο. Από τον οφθαλμό Ζ προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ:



Σχήμα 8-95

Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 51

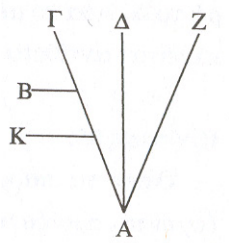
---

[112] Σύμφωνα με το θεώρημα 51 των *Οπτικών*, «*Ἐάν τινων φερομένων πλειόνων ἀνίσῳ τάχει συμπαραφέρηται ἐπὶ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ὄμμα, τὰ μὲν τῷ ὄμματι ἰσοταχῶς φερόμενα δόξει ἑστάναι, τὰ δὲ βραδύτερον εἰς τοὐναντίον φέρεσθαι, τὰ δὲ θᾶττον εἰς τὰ προηγούμενα*».

[113] Σύμφωνα με το θεώρημα 51 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, «*Ἐάν τινων φερομένων διαφαίνηταί τι μὴ φερόμενον, δόξει τὸ μὴ φερόμενον εἰς τοὐναντίον φέρεσθαι*».

Ο συγγραφέας ισχυρίζεται πολύ απλά ότι, καθώς το Β κινείται, πλησιάζει το Γ, ενώ το Δ απομακρύνεται από αυτό. Επομένως, το Γ φαίνεται να κινείται προς τα πίσω. Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος γίνεται στο κείμενο των *Οπτικών* με τον ίδιο τρόπο[114].

Επιπλέον, το θεώρημα 53 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι, μεταξύ παρατηρούμενων μεγεθών που κινούνται με ίσες ταχύτητες, αυτά που βρίσκονται πιο μακριά από τον οφθαλμό φαίνεται να κινούνται πιο αργά[115]. Έτσι, όπως φαίνεται στο σχήμα 8-96, υποτίθεται ότι τα Β, Κ κινούνται ισοταχώς προς το μέρος του Ζ και ότι από τον οφθαλμό Α προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΑΓ, ΑΔ, ΑΖ:



Σχήμα 8-96
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 53

Σύμφωνα με τον συγγραφέα, το Κ λαμβάνει μικρότερες οπτικές ακτίνες, σε σχέση με το Β. Επομένως, θα φαίνεται ότι διανύει μικρότερο διάστημα, μέχρι την ΑΖ. Άρα, θα ξεπεράσει την ΑΖ γρηγορότερα και, συνεπώς, θα δώσει την εντύπωση ότι κινείται γρηγορότερα από το Β.

Το θεώρημα 53 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο θεώρημα 54 των *Οπτικών*[116]. Στα *Οπτικά* παρατίθενται τρεις αποδείξεις, εκ των οποίων η μία συμφωνεί με τον συλλογισμό της απόδειξης που είδαμε στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*. Οι άλλες δύο αποδείξεις δεν υπάρχουν στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, γι' αυτό εκτιμούμε ότι αποτελούν μεταγενέστερες απόπειρες θεμελίωσης του συγκεκριμένου θεωρήματος.

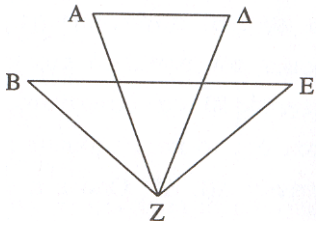
---

[114] Το θεώρημα 52 των *Οπτικών* δηλώνει ότι «*Ἐάν τινων φερομένων διαφαίνηταί τι μὴ φερόμενον, δόξει τὸ μὴ φερόμενον εἰς τὰ ὄπ ισθεν φέρεσθαι*».

[115] Το θεώρημα 53 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι «*Τῶν ἴσῳ τάχει φερομένων τὰ πόρρω δοκεῖ βραδύτερον φέρεσθαι*».

[116] Το θεώρημα 54 των *Οπτικών* δηλώνει ότι «*Τῶν ἴσῳ τάχει φερομένων τὰ πόρρω δοκεῖ βραδύτερον φέρεσθαι*».

Σύμφωνα με τη δεύτερη απόδειξη των *Οπτικών*, υποτίθεται ότι τα σημεία Α, Β κινούνται σε παράλληλες ευθείες και ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο Ζ, από όπου προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΖΑ, ΖΒ, ΖΕ, ΖΔ:

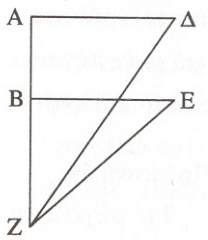


Σχήμα 8-97

Οπτικά – Θεώρημα 54 Ἄλλως 1

Η συγκεκριμένη απόδειξη δε διασώζεται πλήρης, ωστόσο, κατανοούμε ότι γινόταν προσπάθεια να αποδειχθεί το θεώρημα 54, μέσω του τέταρτου «όρου» των *Οπτικών*. Η απόδειξη ξεκινά λέγοντας ότι, επειδή η οπτική γωνία ΑΖΔ είναι μικρότερη από τη ΒΖΕ, έπεται ότι το ΒΕ θα φανεί μεγαλύτερο από το ΑΔ. Στη συνέχεια, ο συγγραφέας έφερε την επέκταση της ακτίνας ΖΕ. Στο σημείο αυτό υπάρχει κενό στο χωρίο και δε μπορούμε να παρακολουθήσουμε ακριβώς τη σκέψη του συγγραφέα.

Σύμφωνα με την τρίτη απόδειξη των *Οπτικών*, υποτίθεται πάλι ότι τα σημεία Α, Β κινούνται «*ὁμαλῶς*» πάνω στις παράλληλες ευθείες ΑΔ, ΒΕ:



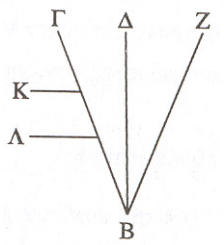
Σχήμα 8-98

Οπτικά – Θεώρημα 54 Ἄλλως 2

Εξαιτίας του παραπάνω γεγονότος ο συγγραφέας συμπεραίνει ότι τα σημεία Α, Β «*τὰς ἴσας ἄρα ἐν ἴσῳ χρόνῳ διελεύσονται*», δηλαδή θα διατρέξουν ίσες αποστάσεις σε ίσους χρόνους. Η ενδιαφέρουσα αυτή πρόταση μας παραπέμπει στην αρχή της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης. Ένας από τους πιο παλιούς ορισμούς της ομαλής κίνησης είχε δοθεί από τον Αυτόλυκο, ο οποίος ήταν λίγο μεγαλύτερος από τον Ευκλείδη. Στο έργο του *Περί κινουμένης σφαίρας* δήλωνε ότι «*Ὁμαλῶς λέγεται φέρεσθαι σημεῖα ὅταν ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἴσα τε ἢ καὶ ὅμοια μεγ έθη διεξέρχηται*».

Συνεχίζοντας την απόδειξη ο συγγραφέας δηλώνει ότι οι ΑΔ, ΒΕ είναι ίσες και υποθέτει ότι από τον οφθαλμό Ζ προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΖΑ, ΖΔ, ΖΒ, ΖΕ. Σύμφωνα με τον συλλογισμό του, επειδή η γωνία ΑΖΔ είναι μικρότερη από τη ΒΖΕ, άρα, το διάστημα ΑΔ θα φανεί μικρότερο από το ΒΕ. Επομένως, το σημείο Α θα φαίνεται ότι κινείται πιο αργά. Διαπιστώνουμε ότι η πρόταση που διατύπωσε στην αρχή, συγκεκριμένα, ότι, εξαιτίας της ομαλής τους κίνησης, τα σημεία θα διατρέξουν ίσες αποστάσεις σε ίσους χρόνους δεν είναι βασική για την απόδειξη του ίδιου του θεωρήματος, αλλά, μέσω αυτής, αποδίδεται με έμφαση η αντίφαση που υπάρχει ανάμεσα σε αυτό που αντιλαμβάνεται ο οφθαλμός και στην πραγματικότητα.

Το θεώρημα 54 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι, όταν ο οφθαλμός κινείται παράλληλα προς τα παρατηρούμενα μεγέθη που, όπως εννοείται από το προηγούμενο θεώρημα, κινούνται ισοταχώς, αλλά εκείνος κινείται πιο γρήγορα από αυτά, τότε το παρατηρούμενο μέγεθος που απέχει περισσότερο από εκείνον φαίνεται να παραμένει σταθερό[117]. Συγκεκριμένα, υποτίθεται ότι ο οφθαλμός βρίσκεται στο Β, από όπου προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΒΓ, ΒΔ, ΒΖ. Τα παρατηρούμενα μεγέθη είναι τα Κ και Λ:



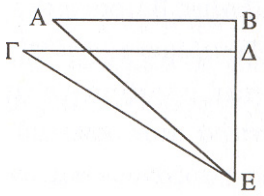
Σχήμα 8-99
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 54

Σύμφωνα με τα λεγόμενα του συγγραφέα, εφόσον ο οφθαλμός κινείται με πιο γρήγορη ταχύτητα προς το μέρος του σημείου Γ, οι οπτικές ακτίνες θα ξεπεράσουν πιο γρήγορα το σημείο Κ, παρά το σημείο Λ. Επομένως, το Κ θα φαίνεται ακίνητο, ενώ το Λ θα φαίνεται ότι κινείται αντίθετα προς το Κ, δηλαδή προς το μέρος του Ζ.

Το παραπάνω θεώρημα αντιστοιχεί στην πρόταση 55 των *Οπτικών*, όπου η δήλωση, το σχήμα και η αποδεικτική διαδικασία διαφοροποιούνται. Το θεώρημα 55 των *Οπτικών* δηλώνει ότι, αν ο οφθαλμός μένει ακίνητος, ενώ οι όψεις κινούνται γρήγορα, τα πιο απομακρυσμένα παρατηρούμενα μεγέθη θα φαίνεται ότι μένουν

[117] Σύμφωνα με το θεώρημα 54 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, «*Τοῦ ὄμματος παραφερομένου τὰ πόρρω τῶν ὁρωμένων καταλείπεσθαι δόξει*».

πίσω[118]. Όπως φαίνεται στο σχήμα 8-100, υποτίθεται ότι τα παρατηρούμενα σημεία είναι τα Α, Β που βρίσκονται στις ευθείες ΑΔ, ΒΕ, αντίστοιχα. Ο οφθαλμός βρίσκεται στο σημείο Ε, από όπου προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΕΓ, ΕΔ, ΕΑ, ΕΒ:

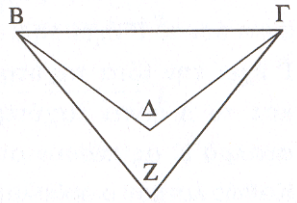


Σχήμα 8-100
Οπτικά – Θεώρημα 55

Αρχικά, φέρεται η ευθεία ΕΔ, η οποία επεκτείνεται μέχρι το σημείο Β. Επειδή η γωνία ΓΕΒ είναι μεγαλύτερη της ΑΕΒ, άρα, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» των *Οπτικών*, το διάστημα ΓΔ θα φανεί μεγαλύτερο από το ΑΒ. Επομένως, εφόσον ο οφθαλμός μένει ακίνητος, οι όψεις που κινούνται προς το μέρος των Α, Γ θα περνάνε πιο γρήγορα πέρα από το σημείο Α, σε σχέση με το Γ. Συνεπώς, η ΑΒ θα φαίνεται ότι μένει πίσω.

19. Παράδοξα που αφορούν στην αντίληψη του μεγέθους και του σχήματος

Το θεώρημα 52 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αποδεικνύει ότι, αν ο οφθαλμός πλησιάζει το παρατηρούμενο μέγεθος, τότε αυτό φαίνεται ότι μεγαλώνει[119]. Συγκεκριμένα, υποτίθεται ότι το μέγεθος ΒΓ παρατηρείται από τον οφθαλμό που βρίσκεται αρχικά στο σημείο Ζ, από όπου προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΖΒ, ΖΓ. Στη συνέχεια, ο οφθαλμός τοποθετείται πιο κοντά προς το ΒΓ, δηλαδή στη θέση Δ, από όπου προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΔΒ, ΔΓ:



Σχήμα 8-101
Αναθεωρημένη Έκδοση- Θεώρημα 52

Ο συγγραφέας ισχυρίζεται ότι η γωνία Δ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Ζ. Αυτό ισχύει, καθώς γνωρίζουμε από το θεώρημα 21 του πρώτου βιβλίου των

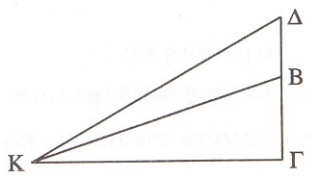
---

[118] Σύμφωνα με το θεώρημα 55 των *Οπτικών*, «*Τοῦ ὄμματος μένοντος, τῶν δὲ ὄψεων παραφερομένων, τὰ πόρρω τῶν ὁρωμένων κατα λείπεσθαι δόξει*».

[119] Σύμφωνα με το θεώρημα 52 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, «*Τοῦ ὄμματος ἔγγιον τοῦ ὁρωμένου προσιόντος δόξει τὸ ὁρώμενον ηὐξῆσθαι*».

Στοιχείων ότι, αν από τα άκρα μιας πλευράς ενός τριγώνου αχθούν δύο ευθείες που συναντώνται μέσα στο τρίγωνο, τότε οι πλευρές που σχηματίζονται είναι μικρότερες από τις υπόλοιπες δύο πλευρές του τριγώνου, αλλά περιέχουν μεγαλύτερη γωνία[120]. Εφόσον λοιπόν η γωνία Δ είναι μεγαλύτερη από τη Ζ, επομένως, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, το μέγεθος ΒΓ θα φανεί μεγαλύτερο, όταν ο οφθαλμός βρίσκεται πιο κοντά του, δηλαδή στο σημείο Δ, σε σχέση με όσο φαίνεται, όταν βρίσκεται πιο μακριά του, δηλαδή στο σημείο Ζ. Επισημαίνεται ότι το θεώρημα 52 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο θεώρημα 53 των *Οπτικών*, όπου η απόδειξη γίνεται κατά τον ίδιο τρόπο[121].

Το θεώρημα 55 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αποτελεί την αντίστροφη περίπτωση του θεωρήματος 52 και δηλώνει ότι τα παρατηρούμενα αντικείμενα που αυξάνονται σε μέγεθος φαίνεται ότι πλησιάζουν τον οφθαλμό. Συγκεκριμένα, υποτίθεται ότι το μέγεθος ΓΒ παρατηρείται υπό τις οπτικές ακτίνες ΚΒ, ΚΓ και, στη συνέχεια, ότι αυξάνεται κατά ΒΔ. Από τον οφθαλμό Κ προσπίπτει η οπτική ακτίνα ΚΔ:



Σχήμα 8-102
Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 55

Παρατηρείται ότι η γωνία ΔΚΓ είναι μεγαλύτερη από τη ΒΚΓ και ο συγγραφέας ισχυρίζεται ότι «*τὰ δὲ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα ἔγγιον φαίνεται*», πρόταση που μας παραπέμπει στο θεώρημα 52 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Επομένως, το ΓΔ φαίνεται ότι είναι πιο κοντά προς τον οφθαλμό, σε σχέση με το ΒΓ. Το θεώρημα 55 αντιστοιχεί στο θεώρημα 56 των *Οπτικών* και η απόδειξη που παρατίθεται εκεί ακολουθεί τα ίδια συλλογιστικά βήματα.

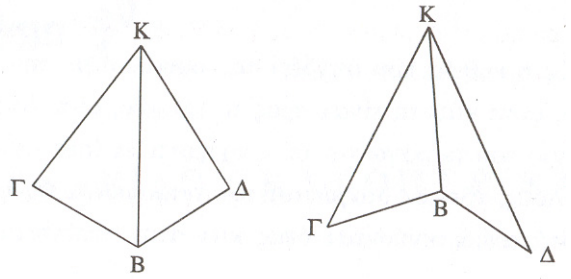
Το θεώρημα 56 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* υποστηρίζει ότι τα παρατηρούμενα μεγέθη που δε βρίσκονται στο ίδιο διάστημα, δεν είναι τοποθετημένα

---

120 «*Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν*», *Στοιχεία*, I, 21.

121 Το θεώρημα 53 των *Οπτικών* δηλώνει ότι «*Τοῦ ὄμματος ἔγγιον τοῦ ὁρωμένου προσιόντος δόξει τὸ ὁρώμενον ηὐξῆσθαι*».

παράλληλα, χωρίς να έχουν τα άκρα τους στην ίδια ευθεία με τα μέσα τους, τότε όλο το σχήμα θα φανεί πότε κοίλο και πότε κυρτό[122]. Η δήλωση του θεωρήματος δεν είναι τόσο σαφής. Ωστόσο, από το σχήμα του κατανοούμε περισσότερα. Υποτίθεται ότι ο οφθαλμός Κ παρατηρεί τα σημεία Γ, Β, Δ του μεγέθους, μέσω των οπτικών ακτίνων ΚΓ, ΚΒ, ΚΔ:



Σχήμα 8-103

Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 56

Τα σημεία Γ, Β, Δ δεν απέχουν ίσες αποστάσεις από τον οφθαλμό ούτε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Ο συγγραφέας ισχυρίζεται απλά ότι όλο το σχήμα θα δώσει την εντύπωση ότι είναι κοίλο. Αν το ίδιο παρατηρούμενο μέγεθος τοποθετηθεί πιο κοντά προς τον οφθαλμό, θα δώσει την εντύπωση ότι είναι κυρτό.

Το παραπάνω θεώρημα αντιστοιχεί στην πρόταση 57 των *Οπτικών*. Στα *Οπτικά* η δήλωση του θεωρήματος γίνεται με διαφορετικό τρόπο και εμφανίζεται λίγο βελτιωμένη. Θέτει ότι, όταν ένα παρατηρούμενο μέγεθος βρίσκεται στην ίδια απόσταση και τα άκρα δεν είναι στην ίδια ευθεία με το μέσο, τότε όλο το σχήμα θα φαίνεται ότι είναι πότε κοίλο και πότε κυρτό[123]. Η απόδειξη των *Οπτικών* δεν παρουσιάζει καμία διαφορά με εκείνη της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*.

Τέλος, το θεώρημα 57 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι, αν από το σημείο τομής των διαγωνίων ενός τετραγώνου αχθεί ευθεία κάθετη στο επίπεδο, πάνω στην οποία τοποθετείται ο οφθαλμός, τότε οι πλευρές και οι διαγώνιοι του τετραγώνου θα φανούν ίσες[124]. Το θεώρημα αυτό θυμίζει την πρόταση 34, στην οποία

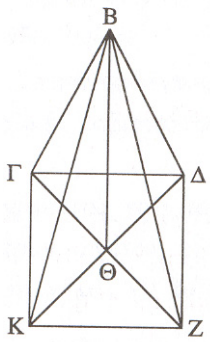
---

[122] Σύμφωνα με το θεώρημα 56 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, «*Ὅσα μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἀποστήματι κεῖται μὴ παράλληλα κείμενα τῶν ἄκρων μὴ κατάλληλα κειμένων τῶν μέσων μηδὲ ἐπ᾽ εὐθείας ὄντων, τὸ ὅλον σχῆμα ὁτὲ μὲν κοῖλον, ὁτὲ δὲ κυρτὸν ποιεῖ*».

[123] Το θεώρημα 57 των *Οπτικών* δηλώνει ότι «*Ὅσα ἐπὶ τῷ αὐτῷ διαστήματι κεῖται τῶν ἄκρων μὴ ἐπ᾽ εὐθείας τῷ μέσῳ ὄντων, τὸ ὅλον σχῆμα ὁτὲ μὲν κοῖλον, ὁτὲ δὲ κυρτὸν ποιεῖ*».

[124] Το θεώρημα 57 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δηλώνει ότι «*Τετραγώνου ὑπάρχοντος ἐὰν ἀπὸ τῆς συναφῆς τῶν διαμέτρων πρὸς ὀρθάς τις ἀναχθῇ τῷ τοῦ τετραγώνου ἐπιπέδῳ,*

εξετάζονταν οι προϋποθέσεις για τη φαινομενική ισότητα των διαμέτρων του κύκλου. Συγκεκριμένα, υποτίθεται το τετράγωνο ΓΖ και οι διαγώνιοί του ΓΖ, ΚΔ. Από το σημείο Θ φέρεται κάθετη στο επίπεδο, η ΒΘ. Στο σημείο Β τοποθετείται ο οφθαλμός και προσπίπτουν οι οπτικές ακτίνες ΚΒ, ΒΔ, ΒΓ, ΒΖ:



Σχήμα 8-104

Αναθεωρημένη Έκδοση – Θεώρημα 57

Ο συγγραφέας διαπιστώνει ότι η ΒΖ είναι ίση με τη ΒΓ, μέσω της σύγκρισης των τριγώνων ΒΘΓ και ΒΘΖ. Η ΓΘ είναι ίση με τη ΘΖ, η ΒΘ είναι κοινή και η γωνία ΒΘΓ είναι ίση με τη ΒΘΖ. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 4 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, οι οπτικές ακτίνες ΒΖ, ΒΓ είναι ίσες. Το ίδιο ισχύει και με τις ΒΚ, ΒΔ. Επιπλέον, οι ΖΒ, ΒΓ, ΚΒ, ΒΔ είναι ίσες μεταξύ τους. Αυτό προκύπτει από τη σύγκριση των τριγώνων ΒΘΚ, ΒΘΖ και ΒΘΓ, ΒΘΔ και, πάλι, μέσω του θεωρήματος 4 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*[125]. Τέλος, ο συγγραφέας συμπεραίνει ότι οι γωνίες που σχηματίζονται στο σημείο Β είναι ίσες μεταξύ τους, κάτι που προφανώς, εξήγαγε, μέσω της σύγκρισης των τριγώνων ΚΒΔ, ΓΒΖ. Τα τρίγωνα αυτά είναι ισόπλευρα, επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 8 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, θα έχουν και όλες τους τις γωνίες ίσες, μία προς μία[126]. Συνεπώς, σύμφωνα με τον τέταρτο «όρο» της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, οι διαγώνιοι του τετραγώνου θα φανούν ίσες. Το ίδιο θα ισχύει και για τις πλευρές του τετραγώνου. Παρόλο που δεν το αναφέρει αναλυτικά, παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΓΒΚ, ΚΒΖ, ΖΒΔ, ΔΒΓ είναι ισόπλευρα, επομένως, οι γωνίες ΓΒΚ, ΚΒΖ, ΖΒΔ, ΔΒΓ είναι ίσες μεταξύ τους. Συνεπώς, οι πλευρές ΓΚ, ΚΖ, ΖΔ, ΔΓ θα φαίνονται ίσες.

ἐπὶ δὲ ταύτης τεθῇ τὸ ὄμμα, αἵ τε πλευραὶ τοῦ τετραγώνου καὶ αἱ διάμετροι ἴσαι φαν οῦνται».

[125] Για το θεώρημα 4 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, βλ. σελ. 328, υποσημ. 62.

[126] Για το θεώρημα 8 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων*, βλ. σελ. 328, υποσημ. 63.

Το θεώρημα 57 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* αντιστοιχεί στο θεώρημα 58 των *Οπτικών*, όπου η απόδειξη γίνεται με τον ίδιο τρόπο[127]. Όπως στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*, έτσι και *Οπτικά*, μετά το τέλος της απόδειξης, σημειώνεται ότι, αν από το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραγώνου αχθεί μια ευθεία που δεν είναι κάθετη στο επίπεδο, ούτε ισούται με καθεμία από τις ημιδιαγωνίους ούτε σχηματίζει ίσες γωνίες με αυτές, τότε οι διαγώνιοι του τετραγώνου θα φανούν άνισες. Επίσης, επισημαίνεται ότι τα παραπάνω αποδεικνύονται, όπως αποδείχτηκαν και στην ανάλογη περίπτωση των κύκλων.

Γ. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Έχοντας μελετήσει τα θεωρήματα των δύο διασωζόμενων εκδόσων των *Οπτικών* είμαστε σε θέση να καταγράψουμε ορισμένα βασικά συμπεράσματα. Όσον αφορά στο θέμα της οργάνωσης και της δομής, παρατηρούμε ότι τα δύο κείμενα δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφοροποιήσεις. Και οι δύο πραγματείες είναι γραμμένες κατά το πρότυπο των *Στοιχείων*. Ύστερα από την καταγραφή των εφτά θεμελιωδών «όρων», ακολουθεί μια πληθώρα θεωρημάτων που, όπως περιγράψαμε και στην ενότητα Α, δε διατάσσονται άτακτα ή τυχαία, αλλά επιδέχονται κάποια ομαδοποίηση. Ξεκινώντας από απλά θεωρήματα, όπου τα παρατηρούμενα μεγέθη παριστάνονται ως ευθύγραμμα τμήματα, η πραγματεία προχωρά σε πιο σύνθετες προτάσεις που έχουν να κάνουν με παρατηρούμενα στερεά μεγέθη, με κύκλους, με την εύρεση γεωμετρικών τόπων κλπ. Κατανοούμε λοιπόν ότι ο Ευκλείδης αποπειράθηκε να καταγράψει και να εξηγήσει όσο το δυνατόν περισσότερα φαινόμενα της όρασης.

Κατά τη μελέτη των θεωρημάτων, διαπιστώσαμε ότι οι αποδείξεις τους βασίζονται, εκτός από τους εφτά «όρους», σε προτάσεις των *Στοιχείων*. Δε λείπουν και περιπτώσεις αποδείξεων που βασίζονται σε θεωρήματα μεταγενέστερων, όπως του Θεοδοσίου. Από την άλλη μεριά, η αλληλεξάρτηση των προτάσεων δεν είναι πολύ ισχυρή. Λίγα είναι τα θεωρήματα εκείνα που για την απόδειξή τους βασίζονται σε θεωρήματα που έχουν προηγηθεί. Μια ενδεικτική περίπτωση είναι το θεώρημα 9 που βασίζεται στο θεώρημα 3, το οποίο με τη σειρά του βασίζεται στο θεώρημα 1. Στο θεώρημα 1 βασίζεται επίσης η απόδειξη του θεωρήματος 22, ενώ το θεώρημα

---

[127] Το θεώρημα 58 των *Οπτικών* δηλώνει ότι «*Ἐὰν τετραγώνου ἀπὸ τῆς συναφῆς τῶν διαμέτρων πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ εὐθεῖα, ἐπὶ δὲ τα ύτης τὸ ὄμμα τεθῇ, αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου ἴσαι φανοῦνται, καὶ αἱ διάμετροι δὲ ἴ σαι φανήσονται*».

που αναφέρεται στην οπτική αντίληψη των τροχών των αρμάτων βασίζεται στις αμέσως προηγούμενες προτάσεις, σχετικά με την οπτική αντίληψη των διαμέτρων του κύκλου.

Επιπλέον, η συγκριτική μελέτη των θεωρημάτων των δύο εκδόσεων μας επέτρεψε να κάνουμε κάποιες ενδιαφέρουσες διαπιστώσεις. Αναλυτικότερα, διαπιστώσαμε ότι η *Αναθεωρημένη Έκδοση* φέρει κάποια χαρακτηριστικά στοιχεία που, κατά κύριο λόγο, συναντώνται σε γεωμετρικά ή, γενικότερα, σε τεχνικά συγγράμματα που χρονολογικά δεν απέχουν πολύ από την εποχή του Ευκλείδη. Κατά το πέρασμα των αιώνων, η συχνότητα εμφάνισης του παραπάνω χαρακτηριστικού στοιχείου μειώνεται σταδιακά, ώσπου οι γεωμέτρες και οι σχολιαστές της ύστερης Αρχαιότητας να δείχνουν ιδιαίτερη προτίμηση στο να δηλώνουν τις γωνίες, μέσω των ευθύγραμμων τμημάτων, υπό τις οποίες περιέχονται. Αυτόν τον τρόπο χρησιμοποιεί και ο Θέων, για τον οποίο ο Heiberg εξέφρασε την άποψη ότι ενδεχομένως αυτός να είναι ο συγγραφέας της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Ωστόσο, ούτε στα *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη* του Πτολεμαίου ούτε σε κανένα άλλο έργο του ο Θέων δε δηλώνει τις γωνίες με απλά γράμματα.

Κάτι ανάλογο διαπιστώσαμε ότι συμβαίνει και με τη λέξη «*οὐκοῦν*», η οποία σημειώνει ευρύτατη εμφάνιση στο κείμενο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Το «*οὐκοῦν*» χρησιμοποιείται, προκειμένου να σηματοδοτήσει την αρχή μιας απόδειξης Συγκεκριμένα, παρατηρήσαμε ότι το «*οὐκοῦν*» εμφανίζεται, όταν ο συγγραφέας, αφού εκθέσει τα δεδομένα του θεωρήματος, δεν ξαναδηλώνει αυτό που πρόκειται να αποδείξει, αλλά εκφέρει το «*οὐκοῦν*» και αμέσως μετά ξεκινά την απόδειξή του. Αντίθετα, στο κείμενο των *Οπτικών*, στη θέση της παραπάνω λέξης, τις περισσότερες φορές συναντάται η έκφραση «*ἐπεὶ οὖν*». Το«*ἐπεὶ οὖν*» χρησιμοποιείται στην αρχή της αποδεικτικής διαδικασίας, αφού όμως ο συγγραφέας έχει εκθέσει τα δεδομένα και αφού έχει δηλώσει ξανά τι πρέπει να αποδειχθεί, μέσω των εκφράσεων «*λέγω, ὅτι...*», «*φημὶ δή...*».

Όπως έχει επισημανθεί, η λέξη «*οὐκοῦν*» χρησιμοποιείται με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιείται και στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*, δηλαδή στην αρχή της απόδειξης, στον Αριστοτέλη, στον Αρχιμήδη, στον Ευκλείδη, αλλά δεν εμφανίζεται σχεδόν καθόλου σε μεταγενέστερες γεωμετρικές πραγματείες[128]. Είναι λοιπόν φανερό ότι, ενώ η *Αναθεωρημένη Έκδοση* διατηρεί κάποια ιδιαίτερα γνωρίσματα που

[128] Βλ. σελ. 263, υποσημ. 11.

απαντώνται σε συγγράμματα του Ευκλείδη, αλλά και σε κείμενα που χρονολογικά είναι κοντά σε αυτόν, στην έκδοση των *Οπτικών* είναι προφανής η προσπάθεια της αποφυγής τους και, αντί αυτών, η χρησιμοποίηση από εκφραστικής ή σημειολογικής απόψεως ό,τι έχει καθιερωθεί κατά τους μεταγενέστερους χρόνους.

Συγκρίνοντας τα θεωρήματα των δύο εκδόσεων παρατηρήσαμε ότι, σχεδόν πάντα, εκεί που οι αποδείξεις της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* είναι σύντομες και περιεκτικές, οι αποδείξεις των *Οπτικών* είναι πιο εκτενείς και πιο επεξεργασμένες. Ωστόσο, δεν πρέπει να παραβλέψουμε το γεγονός ότι, μεταξύ των δύο εκδόσεων, η κύρια αποδεικτική μέθοδος που ακολουθείται σπάνια διαφοροποιείται και η μεγαλύτερη επεξεργασία που επιδεικνύουν οι αποδείξεις των *Οπτικών* περιορίζεται στο επίπεδο της παρουσίασης. Στα θεωρήματα 4 και 7 συναντήσαμε τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις αυτής της πρακτικής. Η αποδεικτική διαδικασία είναι ίδια και στις δύο μορφές κειμένου, αλλά ο τρόπος παρουσίασης διαφέρει. Στην έκδοση των *Οπτικών*, παρόλο που δεν είναι αναγκαίο, παρουσιάζονται οι αποδείξεις κάποιων επιμέρους γεωμετρικών προτάσεων, ενώ στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* οι προτάσεις αυτές λαμβάνονται έτοιμες και εφαρμόζονται αμέσως. Με αυτόν τον τρόπο, οι αποδείξεις της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δίνουν την εντύπωση ότι είναι προχειρογραμμένες και λιγότερο αυστηρές, ενώ, αντίθετα, το κείμενο των *Οπτικών* καταφέρνει να γίνεται πιο σχολαστικό και πιο διδακτικό. Η σχολαστικότητα είναι ίσως το βασικότερο χαρακτηριστικό αυτής της έκδοσης, η οποία παρατηρείται, υπό διαφορετικές μορφές, και σε άλλα θεωρήματα, όπως, για παράδειγμα, στα θεωρήματα 13 και 14, όπου, ενώ στην *Αναθεωρημένη Έκδοση* ο συγγραφέας δεν αναφέρεται σε όλα τα στοιχεία του σχήματος ή δεν επαναλαμβάνει πράγματα που θεωρεί ότι έχουν γίνει κατανοητά, ο συγγραφέας των *Οπτικών* είναι πιο λεπτομερής και επαναλαμβάνει ό,τι χρειάζεται, προκειμένου να παρουσιάζει πληρότητα.

Σε ορισμένα θεωρήματα των *Οπτικών* επισημάναμε την πιθανότητα να εφαρμόζονται στις αποδείξεις τους προτάσεις που αποδίδονται σε γεωμέτρες μεταγενέστερους του Ευκλείδη. Για παράδειγμα, είδαμε ότι ένα συγκεκριμένο στάδιο της απόδειξης του θεωρήματος 23 των *Οπτικών* θα μπορούσε να μας παραπέμψει στα *Σφαιρικά* του Θεοδόσιου και, συγκεκριμένα, στην πρόταση 1 του πρώτου βιβλίου που δηλώνει ότι, αν μία σφαιρική επιφάνεια τμηθεί από ένα επίπεδο, τότε η τομή που θα σχηματιστεί στη σφαίρα είναι κύκλος. Πράγματι, στο σχόλιο 42 των *Οπτικών* ένας σχολιαστής του θεωρήματος 23 παραπέμπει άμεσα στην εν λόγω πρόταση του

Θεοδοσίου λέγοντας ότι *«τοῦτο ἐν τοῖς Σφαιρικοῖς τοῦ Θεοδοσίου δείκνυται»*[129]. Και η δεύτερη περίπτωση του θεωρήματος 6 που εξετάζει μια πιο σύνθετη εκδοχή της φαινομενικής σύγκλισης των παράλληλων μεγεθών, δηλαδή η απόδειξη 6β των *Οπτικών* και της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, θα μπορούσε να αποτελεί μεταγενέστερη προσθήκη από κάποιον συγγραφέα που αντλεί το θεώρημα των τριών καθέτων από τον Πάππο, παρόλο που, δυστυχώς, δε μπορούμε να είμαστε απολύτως βέβαιοι. Στην απόδειξη 36β της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* συναντήσαμε μια εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος των τριών καθέτων που είναι δυνατόν να προηγείται της απόδειξης του Πάππου. Αυτό σημαίνει ότι το θεώρημα των τριών καθέτων πιθανότατα να ήταν γνωστό πριν από τον Πάππο και, συνεπώς, οι συγγραφείς των αποδείξεων 6β των δύο εκδόσεων να μην το αντλούν από τη *Μαθηματική Συναγωγή*.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω εκτιμούμε ότι, όσον αφορά στα στυλιστικά στοιχεία, τα *Οπτικά* είναι το προϊόν της προσπάθειας των μεταγενέστερων να παρουσιάσουν μια βελτιωμένη μορφή κειμένου, με βάση ό,τι είχε καθιερωθεί στην εποχή τους. Όσον αφορά στην έκθεση των αποδείξεων, τα *Οπτικά* είναι πιο σχολαστικά, αλλά δε διαφοροποιούνται σημαντικά ως προς την αυστηρότητα των αποδείξεων, αφού σε γενικές γραμμές δεν προβάλλουν πιο σύνθετες ή πιο περίπλοκες αποδείξεις. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα *Οπτικά* παρουσιάζουν ένα κείμενο που έχει επιδεχτεί της προσοχής και της φροντίδας των μεταγενέστερων επιθυμώντας να 'φρεσκάρουν' και να εμπλουτίσουν την ήδη υπάρχουσα μορφή του κειμένου του Ευκλείδη. Αυτό φαίνεται και από τις εναλλακτικές αποδείξεις που παρατίθενται, όπως είδαμε στα θεωρήματα 22, 28, 42, 44, 54. Ωστόσο, ενώ οι παραπάνω εναλλακτικές αποδείξεις απουσιάζουν από το κύριο σώμα των θεωρημάτων της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, διασώζονται όλες με ελάχιστες διαφοροποιήσεις στα σχόλια που τη συνοδεύουν. Η μόνη που δε διασώζεται είναι η 54 Ἄλλως 1. Το στοιχείο αυτό ενδεχομένως να σημαίνει ότι οι εναλλακτικές αποδείξεις των *Οπτικών* συμπληρώθηκαν αργότερα ως σχόλια στην *Αναθεωρημένη Έκδοση*, ενδεχομένως όμως να συμβαίνει και το αντίθετο. Ενδεχομένως, οι παραπάνω εναλλακτικές αποδείξεις να είχαν γραφτεί κατά την πάροδο του χρόνου από κατοπινούς σχολιαστές που είχαν πρόσβαση στο κείμενο του Ευκλείδη, πριν από τη συγγραφή του κειμένου των *Οπτικών*. Επομένως, στο πλαίσιο της απόπειρας των μεταγενέστερων να

[129] *Scholia in Euclidis optica*, έκδ. J.L. Heiberg, σχόλιο 42.1-2.

επανεκδώσουν το σύγγραμμα του Ευκλείδη, ενσωμάτωσαν και τις εναλλακτικές αποδείξεις που είχαν εντωμεταξύ συγκεντρωθεί. Με τον τρόπο αυτό, εμπλούτιζαν και συμπλήρωναν την πραγματεία που είχαν στη διάθεσή τους ανανεώνοντάς την.

Παράλληλα, αν λάβουμε υπόψη ότι ο «*αστρονομούμενος τόπος*» που προετοίμαζε τους μαθητές για τη συστηματική μελέτη της *Μαθηματικής Σύνταξης* του Πτολεμαίου περιελάμβανε, μεταξύ άλλων, τη μελέτη συγγραμμάτων οπτικής, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι η αναθεωρημένη επανέκδοση των *Οπτικών* του Ευκλείδη πραγματοποιήθηκε για να εξυπηρετήσει και αυτόν τον σκοπό. Δε θεωρούμε τυχαίο ότι ο Πάππος συμπεριέλαβε τα σχόλιά του στα *Οπτικά* του Ευκλείδη στο έκτο βιβλίο της *Μαθηματικής Συναγωγής*. Σύμφωνα με τον Πάππο, το βιβλίο αυτό περιείχε «*ἀπορι̃ων λύσεις τω̃ν ἐν τῷ μικρῷ ἀστρονομουμένῳ*»[130]. Ο Πάππος ανέφερε στον πρόλογο ότι πολλοί διδάσκαλοι του «*αστρονομούμενου τόπου*», εξαιτίας της απρόσεκτης μελέτης των προτάσεων, πρόσθεσαν, ως απαραίτητα, κάποια πράγματα, ενώ παρέλειψαν να αναφέρουν κάποια άλλα. Έφερε ως παράδειγμα μια εσφαλμένη προσθήκη στα *Σφαιρικά* του Θεοδόσιου, αλλά και κάποια παράλειψη στα *Φαινόμενα* του Ευκλείδη[131]. Ο Πάππος είχε ως στόχο του σε αυτό το βιβλίο να διορθώσει τα σφάλματα των προγενεστέρων του, όχι μόνο στις παραπάνω πραγματείες, αλλά και σε άλλες, όπως στα *Σφαιρικά* του Μενελάου, στο *Περί μεγεθών και αποστημάτων ηλίου και σελήνης* του Αρίσταρχου, στο *Περί κινουμένης σφαίρας* του Θεοδοσίου. Σε αυτό το ερευνητικό πλαίσιο κατατάσσονται και τα λήμματα που συνέγραψε ο Πάππος στα *Οπτικά* του Ευκλείδη. Είναι λοιπόν προφανές ότι το σύγγραμμα αυτό είχε αρχίσει να σχετίζεται άμεσα με τη μελέτη του μικρού αστρονομούμενου και όσοι εργάστηκαν για την επανέκδοσή του επιθυμούσαν να το καταστήσουν όσο το δυνατόν πιο διδακτικό και λειτουργικό. Γι' αυτό ξαναέγραψαν τις αποδείξεις με πιο επεξεργασμένο και σχολαστικό τρόπο, σύμφωνα με τα καθιερωμένα πρότυπα εκφοράς του λόγου και της σημειολογίας, ενώ παρέθεσαν και τις εναλλακτικές αποδείξεις που είχαν συγκεντρωθεί, μέχρι στιγμής.

Παρατηρούμε ότι και στις δύο εκδόσεις, προκειμένου να αποδειχθούν τα θεωρήματα, εκτός βέβαια από τους εφτά «όρους» των συγγραμμάτων που είναι θεμελιώδεις για την εξαγωγή των συμπερασμάτων που αφορούν στην οπτική αντίληψη, είναι απαραίτητες κάποιες αρχές, αλλά και κάποια θεωρήματα της γεωμετρίας. Αυτά είναι αναγκαία για τον προσδιορισμό των παρατηρούμενων

[130] Πάππου, *Μαθηματική Συναγωγή*, *έ.α.*, VI, 474.2.
[131] *ό.π.*, VI, 474.3-14.

μεγεθών σε γεωμετρικό επίπεδο. Άλλες φορές προσδιορίζεται η θέση τους, άλλες φορές το μέγεθος και άλλες φορές το σχήμα τους. Στις περισσότερες περιπτώσεις εφαρμόζονται στοιχειώδεις προτάσεις της επιπεδομετρίας, συγκεκριμένα, προτάσεις που αφορούν στη σύγκριση τριγώνων ή που αντλούνται από τη θεωρία των αναλογιών. Σε μικρότερο βαθμό εφαρμόζονται προτάσεις στερεομετρίας.

Σημαντικό ρόλο για την απόδειξη ορισμένων θεωρημάτων διαδραματίζει κάποιες φορές και η εποπτεία των σχημάτων, όπως για παράδειγμα στα θεωρήματα 12, 13, 14. Επίσης, ορισμένα θεωρήματα που αφορούν σε αυτό που σήμερα θα ονομάζαμε ως σχετικότητα της κίνησης αποτελούν ίσως από τα πρώτα δείγματα καταγραφής της αντίληψης αυτής. Βεβαίως, ακολουθούν μία πολύ απλοϊκή προσέγγιση και από άποψη γεωμετρικής θεμελίωσης δεν παρουσιάζουν αυστηρότητα, αλλά βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στην εμπειρία. Σε αυτά θα κατατάσσαμε τα θεωρήματα 50, 51, 53, 54 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*, αλλά και τα αντίστοιχά τους στην έκδοση των *Οπτικών*.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διατριβή είχε ως στόχο της τη μελέτη ενός κειμηλίου που, ενώ ο χρόνος φάνηκε τόσο ευνοϊκός απέναντί του, ωστόσο, το ίδιο δεν έχει τύχει της προσοχής και της αναγνώρισης που θα του άξιζε. Ο Ευκλείδης έχει μείνει στην ιστορία ως ο «*Στοιχειωτής*» και ο χαρακτηρισμός αυτός οφείλεται στο απαράμιλλης αξίας σύγγραμμά του, τα *Στοιχεία*. Αμέτρητες είναι οι σελίδες που έχουν γραφτεί από τους κατοπινούς για το έργο αυτό. Ωστόσο, ο Ευκλείδης δεν ήταν μόνο συγγραφέας των *Στοιχείων* και, αν μας ενδιαφέρει να συλλάβουμε τη σπουδαιότητά του σε όλο της το μεγαλείο, θα πρέπει να ανατρέξουμε και σε άλλες πηγές που ενδεχομένως να είναι και πιο αντιπροσωπευτικές. Κανείς δε μπορεί να εκτιμήσει έναν πίνακα ζωγραφικής ή ένα έργο τέχνης εστιάζοντας μόνο σε κάποια κομμάτια του και αφήνοντας κάποια άλλα. Αντίθετα, θα θεωρούσε σκόπιμο να κοιτάξει κάθε σημείο του, προκειμένου να αποκτήσει μια σαφή και ολοκληρωμένη εντύπωση. Παρόλο που τα *Οπτικά* αποτελούν και αυτά ένα κομμάτι της εικόνας του Ευκλείδη, ωστόσο, έχουν μείνει στην αφάνεια. Όσο και αν ακούγεται παράξενο, τουλάχιστον όσον αφορά στον ελληνικό χώρο, οι μελέτες για τη γεωμετρική οπτική του Ευκλείδη είναι ελάχιστες έως ανύπαρκτες.

Η έρευνα που πραγματοποιήσαμε δεν αποτελεί βεβαίως μια εξαντλητική ανάλυση των *Οπτικών*. Οι πτυχές της ευκλείδειας γεωμετρικής οπτικής που δεν αναδείχθηκαν σίγουρα είναι πολύ περισσότερες. Αυτό που επιχειρήσαμε να αποφύγουμε είναι η μονοδιάστατη ανάγνωση των κειμένων που σχετίζονται με τις οπτικές έρευνες του Ευκλείδη, δηλαδή των *Οπτικών* και της *Αναθεωρημένης Έκδοσης*. Ένας από τους βασικότερους στόχους μας ήταν η ένταξη του έργου του Ευκλείδη στο ευρύτερο φιλοσοφικό, επιστημονικό και πολιτισμικό πλαίσιο του 3^{ου} π.Χ. αιώνα. Προσπαθήσαμε να κατανοήσουμε τους λόγους για τους οποίους ο Ευκλείδης θεώρησε αναγκαίο να γράψει μια πραγματεία οπτικής, ποιοι ήταν οι προβληματισμοί της εποχής του, κατά πόσο μπορούσε να προσφέρει ικανοποιητικές απαντήσεις σε ό,τι αφορά τη δυνατότητα απόκτησης γνώσης μέσω της οπτικής αντίληψης και, τέλος, σε ποιους απευθυνόταν.

Το σημαντικότερο πρόβλημα που είχαμε να αντιμετωπίσουμε, παρόλο που ήταν κειμενικής φύσεως, σύντομα εξέλαβε και τη μορφή ερμηνευτικού προβλήματος. Έχοντας στη διάθεσή μας δύο διασωζόμενες μορφές του κειμένου των *Οπτικών* ήταν αρχικά απαραίτητο να καταλήξουμε στο ποια μορφή είναι αυτή που αντιπροσωπεύει τον Ευκλείδη. Διαφωνώντας με τον καθιερωμένο τρόπο οργάνωσης των κειμένων του

Ευκλείδη υποστηρίξαμε ότι η *Αναθεωρημένη Έκδοση* αποτελεί, σε σχέση με τα *Οπτικά*, μία προγενέστερη μορφή κειμένου. Στο συμπέρασμα αυτό μας οδήγησε η συγκριτική μελέτη των δύο κειμένων, αλλά και ενδείξεις που μας προσέφεραν οι ιστορικές πηγές. Με λίγα λόγια, παρατηρήσαμε ότι, αν εξαιρέσει κανείς κάποιες εμφανείς μεταγενέστερες παρεμβολές που είναι φυσιολογικό ότι έχει επιδεχτεί κατά το πέρασμα του χρόνου, η *Αναθεωρημένη Έκδοση* διασώζει ορισμένα πολύ ιδιαίτερα στοιχεία που, αφενός, είναι πιο κοντά προς τα δείγματα γραφής του Ευκλείδη, παρά προς εκείνα των μεταγενέστερων συγγραφέων, όπως του Θέωνα του Αλεξανδρινού, αφετέρου, χαρακτηρίζουν και άλλα κείμενα της οπτικής παράδοσης. Αυτό που φαίνεται να είναι παράταιρο προς τον Ευκλείδη και που παραπλανά είναι ότι σε κάποιες αποδείξεις της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* ο συλλογισμός που ξετυλίγεται είναι τόσο απλός και περιεκτικός, ώστε να μη θυμίζει σε τίποτα τις εκτενείς και πιο σύνθετες αποδείξεις των *Στοιχείων*. Ωστόσο, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι δεν υπάρχουν ενδείξεις ή τεκμήρια που να πιστοποιούν ότι τα *Οπτικά* γράφτηκαν κατά την περίοδο της επιστημονικής ωριμότητας του Ευκλείδη. Είναι πολύ πιθανό τα *Οπτικά* να αποτελούσαν ένα από τα πρώιμα έργα του, δηλαδή να προηγούνταν των *Στοιχείων*. Αν συμβαίνει αυτό, τότε εξηγείται ο λόγος που οι περισσότερες αποδείξεις της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* δεν ακολουθούν τα 'καλούπια' των τυπικών γεωμετρικών αποδείξεων, αλλά είναι τόσο λιτές και απέριττες. Συγγράφοντας σε μια πιο νεαρή ηλικία είναι εύλογο ότι ο Ευκλείδης δε θα είχε ακόμη διαπλάσει τα στοιχεία εκείνα που συνθέτουν τον χαρακτήρα του αυστηρού-τυπικού γεωμέτρη και δε θα ακολουθούσε τα ίδια στιλιστικά γνωρίσματα, με εκείνα που συναντάμε στα *Στοιχεία*. Άλλωστε, και τα *Στοιχεία* έχουν δεχτεί πάρα πολλές παρεμβολές και προσθήκες από ύστερους σχολιαστές. Επομένως, εφόσον δεν αντιπροσωπεύουν κατά γράμμα το αρχικό κείμενο του Ευκλείδη, δε δύνανται να εκληφθούν ως το ιδανικό πρότυπο του τρόπου γραφής του ούτε μπορούμε να ανατρέξουμε εκεί για να αναζητήσουμε κριτήρια αυθεντικότητας.

Ουσιαστικό ρόλο για την απόφασή μας να θεωρήσουμε ότι το κείμενο των *Οπτικών* αποτελεί μια μεταγενέστερη μορφή κειμένου έπαιξε ο νέος τρόπος ανάγνωσης του πρώτου «όρου» των *Οπτικών* που προτείναμε. Η έρευνά μας υπέδειξε ότι ο συγκεκριμένος «όρος» υποκρύπτει μια αντίληψη που δεν κάνει την εμφάνισή της παρά στους πρώτους μεταχριστιανικούς αιώνες. Συγκεκριμένα, δείξαμε ότι στον πρώτο «όρο» των *Οπτικών* το αντικείμενο της οπτικής αντίληψης δε νοείται απλά ως μέγεθος, αλλά ως ένας *τόπος* που προσδι-ορίζεται από τις ακτίνες του οπτικού κώνου.

Από την έρευνά μας δε θα μπορούσε να λείπει βεβαίως η περιγραφή των βασικότερων γνωρισμάτων της γεωμετρικής οπτικής του Ευκλείδη. Προσφέραμε μια ιστορική αναδρομή στην αρχή της ευθύγραμμης διάδοσης των όψεων και προσπαθήσαμε να αναδείξουμε τους δεσμούς της με μια άλλη βασική αρχή, την αρχή της ευθύγραμμης φύσης της όρασης, αλλά και την ευθύγραμμη διάδοση του φωτός. Επιπλέον, επιχειρήσαμε να ρίξουμε φως σε ένα πολύ ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των οπτικών ακτίνων του Ευκλείδη, συγκεκριμένα, την ασυνέχεια. Προσδιορίσαμε τους λόγους για τους οποίους ο Ευκλείδης αναγκάστηκε να υποθέσει μια τέτοια ιδιότητα που δεν έμεινε αλώβητη από τα πυρά του Πτολεμαίου.

Άλλο ένα σημαντικό ερώτημα που τέθηκε κατά την έρευνά μας αφορούσε στο αν υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στον πρόλογο της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και στις *Οπτικές Υποθέσεις* του Δαμιανού του Λαρισσαίου. Εξετάζοντας τη ρητορική των δύο κειμένων καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι, ενδεχομένως, ο Δαμιανός να είχε στη διάθεσή του το κείμενο του προλόγου και οι *Οπτικές Υποθέσεις* να γράφτηκαν ως απάντηση προς αυτό. Οι εκτιμήσεις αυτές δεν αποτελούν βέβαια παρά υποθέσεις, για τις οποίες δεν έχουμε αποδείξεις, αλλά πολύ σοβαρές ενδείξεις. Αν τα συμπεράσματά μας ισχύουν, τότε το έργο του Δαμιανού παύει να μοιάζει αποκομμένο και βρίσκει τη θέση και τον ρόλο του στην ιστορία της αρχαίας οπτικής επιστήμης.

Έχοντας ολοκληρώσει πια την έρευνά μας, ένα ερώτημα εξακολουθεί να επιμένει: τι ήταν τελικά τα *Οπτικά* και ποια ήταν η συμβολή του Ευκλείδη στην ιστορία της οπτικής; Αναμφισβήτητα, τα *Οπτικά* πρέπει να ήταν για την εποχή του Ευκλείδη ένα έργο καινοτόμο και συνάμα ανατρεπτικό. Παρόλο που ήταν γραμμένο σε γεωμετρική γλώσσα, δεν ήταν γραμμένο μόνο για τους γεωμέτρες. Τα *Οπτικά* είχαν ως αποδέκτη τους κάθε αρχιτέκτονα ή σκηνογράφο, κάθε καλλιτέχνη, μηχανικό ή αστρονόμο και, γενικότερα, κάθε άνθρωπο που με κάποιες στοιχειώδεις γνώσεις γεωμετρίας θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει το σύγγραμμα ως μέσο εκγύμνασης είτε για την επαγγελματική, ερευνητική ή τεχνική του δραστηριότητα είτε για να αποκομίσει κάποια επιστημονικά κριτήρια, προκειμένου να αντιμετωπίσει επίκαιρα ερωτήματα που αφορούσαν στο κατά πόσο μπορούμε να εμπιστευτούμε τις αισθήσεις μας και κατά πόσο αυτό που μας παρέχουν αντικατοπτρίζει την πραγματικότητα. Οι άνθρωποι είχαν συνειδητοποιήσει την πλάνη της όρασης και τις οφθαλμαπάτες που κατέκλυζαν τις παρατηρήσεις τους. Όμως ποτέ άλλοτε δεν είχαν την ευκαιρία να δουν μπροστά στα μάτια τους την πλάνη σε αντιπαραβολή με την πραγματικότητα και το αντίστροφο. Ωστόσο, θεωρούμε ότι είναι πολύ πιθανό η πραγματεία αυτή να επισκιάστηκε αργότερα από τα *Οπτικά* του Πτολεμαίου, όπως άλλωστε έχει συμβεί

και με άλλα σημαντικά έργα της Αρχαιότητας. Αν λάβουμε υπόψη ότι τα *Οπτικά* του Πτολεμαίου αποτελούσαν ένα έργο συνθετικό και πολύ συστηματικό, μπορούμε εύλογα να υποθέσουμε τον λόγο που τα *Οπτικά* του Ευκλείδη λησμονήθηκαν για πολλά χρόνια, ώσπου τελικά επανήλθαν στο προσκήνιο υπό τη μορφή της αναθεωρημένης έκδοσής τους.

Η επινόηση του Ευκλείδη να προβάλει σε ένα γεωμετρικό σύστημα την πλάνη και να δείξει συγχρόνως το πώς αυτή αντιπαλεύει την πραγματικότητα είναι τόσο μεγαλοφυής και ριζοσπαστική που εντυπωσιάζει ακόμη και σήμερα. Ο Ευκλείδης είναι ο πρώτος που εξέφρασε σε ένα επιστημονικά δομημένο σύστημα ποια είναι η πραγματικότητα, δηλαδή τι καταγράφεται στον οφθαλμό, και που απέδειξε επιστημονικά την ύπαρξη της πλάνης. Είναι ο πρώτος που προσδιόρισε σε γεωμετρική βάση τους λόγους για τους οποίους συμβαίνει η οφθαλμαπάτη, από ποιους παράγοντες εξαρτάται, ποιοι είναι οι μηχανισμοί εκείνοι που μπορούν να την περιορίσουν ή να την εξαλείψουν και, επομένως, κατά πόσο μπορεί να ελεγχθεί. Ο έλεγχος της πλάνης και, συνεπώς, των παρατηρήσεων συνιστούσε ασφαλιστική δικλείδα, καθώς ήταν έκδηλη η πεποίθηση ότι, αν συμβαίνει αυτό, είναι δυνατή η διατύπωση ασφαλέστερων και εγγυημένων επιστημονικών προτάσεων. Το στοιχείο αυτό εμφανίζεται σε μεγάλο βαθμό στον τομέα της αστρονομίας.

Για παράδειγμα, τα *Οπτικά* προσφέρουν μια επιστημονική και εγγυημένη μέθοδο, με την οποία μπορεί κανείς να προσδιορίσει ποσοτικά το τμήμα ενός ουράνιου σώματος που περιλαμβάνεται στον οπτικό κώνο, δηλαδή που γίνεται ορατό. Ο ίδιος ο Ευκλείδης παρατηρεί στα *Φαινόμενα* ότι οι αστέρες ανατέλλουν και δύουν πάντα στον ίδιο τόπο. Ισχυρίζεται ότι αυτό συμβαίνει μόνο, αν ο οφθαλμός βρίσκεται σε τέτοιο σημείο που να ισαπέχει από μια κυκλική περιφέρεια, «*ὡς ἐν τοῖς ὀπτικοῖς δείκνυται*». Έχοντας αυτή την εγγύηση συμπεραίνει ότι οι αστέρες φέρονται εγκυκλίως[1].

Κατά παρόμοιο τρόπο, ο Πάππος στα *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη* επιβεβαιώνει την άποψη του Πτολεμαίου ότι «*Οι κύκλοι του ήλιου, της σελήνης και της γης που περιλαμβάνονται από τους κώνους δεν είναι σημαντικά μικρότεροι από ό,τι οι μέγιστοι κύκλοι των σφαιρών τους, και οι διάμετροι επίσης (δεν είναι σημαντικά μικρότερες από ό,τι οι διάμετροι του μέγιστου κύκλου)*»[2]. Προκειμένου να το πετύχει,

---

[1] Ευκλείδου, *Φαινόμενα*, προοίμιον, 1-10.

[2] «*Καὶ ὡς τῶν περιλαμβανομένων ὑπὸ τῶν κώνων κύκλων ἡλίου τε καὶ σελήνης καὶ γῆ ς ἀδιαφόρῳ ἐλασσόνων ὄντων τῶν ἐν ταῖς σφαίραις αὐτῶν γραφομένων μεγίστων κύκ*

ο Πάππος παραπέμπει σε μία πρόταση των *Οπτικών* του Ευκλείδη. Συγκεκριμένα, διαπιστώνουμε ότι η πρόταση που αναφέρει ο Πάππος αντιστοιχεί στο θεώρημα 23 της *Αναθεωρημένης Έκδοσης* και των *Οπτικών*, γιατί δηλώνει «*Ὅτι μὲν οἱ περιλαμβανόμενοι κύκλοι κατὰ τὰς σφαίρας τῶν φώτων ὑπὸ τῶν πρὸς τῇ ὄψει συνισταμένων κώνων ἐλάσσονές εἰσιν τῶν ἐν αὐταῖς μεγίστων κ ύκλων, δῆλον ἐκ τῶν Εὐκλείδου ὀπτικῶν. ὅτι δὲ καὶ ἀδιαφόρῳ ἐλάσσονές εἰσιν αὐτῶν, οὕτως ἔσται δῆλον...*»[3].

Αλλά και ο Θέων ο Αλεξανδρινός στα *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη* του Πτολεμαίου κάνει αρκετές παραπομπές στα *Οπτικά* του Ευκλείδη. Αρχικά, επιχειρεί να τεκμηριώσει την άποψη ότι, όσον αφορά στην οπτική αντίληψη, η γη έχει λόγο σημείου προς την απόσταση της σφαίρας των απλανών αστέρων επικαλούμενος το θεώρημα 3 της πραγματείας του Ευκλείδη που δηλώνει ότι υπάρχει κάποιο μήκος απόστασης, όπου, αν τοποθετηθεί ένα αντικείμενο, δε θα είναι πια ορατό. Έτσι, ο Θέων μάς καλεί να φανταστούμε ότι, αν μπορούσαμε να παρατηρήσουμε τη σφαιρική γη, υπάρχει κάποια απόσταση, από όπου η γη θα μας φαινόταν ελάχιστη[4]. Επιπλέον, ο Θέων ελέγχει την άποψη των Επικουρείων ότι η κίνηση των αστέρων γίνεται κατά ευθεία γραμμή προς το άπειρο. Σύμφωνα με τον Θέωνα, η άποψη αυτή είναι προβληματική, γιατί έρχεται σε ρήξη με ορισμένες προτάσεις των *Οπτικών* του Ευκλείδη, συγκεκριμένα, το θεώρημα 3, στο οποίο είχε παραπέμψει και προηγουμένως, αλλά και στο θεώρημα 4, σύμφωνα με το οποίο, αν ίσα μεγέθη βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία, αυτά που παρατηρούνται από πιο μακρινή απόσταση θα φαίνονται μικρότερα. Λαμβάνοντας τα θεωρήματα αυτά ως κριτήριο αλήθειας για τα παρατηρούμενα φαινόμενα ο Θέων αντικρούει την επικούρεια αντίληψη εκφράζοντας τις εξής απορίες: αν τα άστρα κινούνται σε ευθεία προς το άπειρο, τότε, πώς είναι δυνατόν να ανατέλουν κάθε μέρα από το ίδιο σημείο, πώς γίνεται να επιστρέφουν και, αν επιστρέφουν, πώς αυτό δεν είναι προφανές; Σύμφωνα με τον Θέωνα, αν τα άστρα κινούνταν με τον τρόπο που υπέθεταν οι Επικούρειοι, τότε θα έπρεπε, κατά το θεώρημα 4 των *Οπτικών*, να παρατηρείται κάποια φαινομενική μείωση του μεγέθους τους, καθώς απομακρύνονται προς το άπειρο. Αντίθετα, τα

λων αὐτῶν τε καὶ τῶν διαμέτρων», Πτολεμαίου, *Μαθηματική Σύνταξη*, *ό.π.*, 1,1, 421.20-422.2.

[3] Πάππου Αλεξανδρινού, *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου*, έκδ. A. Rome, *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, Studi e Testi 54, Ρώμη, Biblioteca Apostolica Vaticana, 1931, 103.12-104.3.

[4] Θέωνος Αλεξανδρινού, *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη*, 332.13-20.

άστρα φαίνονται να είναι μεγαλύτερα κατά τη στιγμή της δύσης τους, γι' αυτό ο Θέων απορρίπτει την επικούρεια άποψη[5].

Με τον ίδιο ζήλο, ο Θέων αποπειράται να επιβεβαιώσει την άποψη ότι τα ουράνια σώματα κινούνται σφαιρικώς. Ο Θέων επισημαίνει ότι, αν τα ουράνια σώματα κινούνταν κατά οποιοδήποτε άλλον τρόπο, τότε θα παρατηρούνταν, εκτός από μεταβολές στο φαινομενικό τους μέγεθος, και μεταβολές, όσον αφορά στις μεταξύ τους αποστάσεις. Όμως, όπως αναφέρει, είναι γνωστό από το θεώρημα 4 των *Οπτικών* του Ευκλείδη ότι τα ίσα μεγέθη, δηλαδή τα ίσα διαστήματα, που απέχουν άνισες αποστάσεις από τον οφθαλμό, φαίνονται άνισα. Ωστόσο, αυτό δεν παρατηρείται. Επομένως, τα ουράνια σώματα πράγματι κινούνται σφαιρικώς[6]. Ο Θέων επικαλείται και το θεώρημα των *Οπτικών* που αφορά στην οπτική αντίληψη του σχήματος των τροχών των αρμάτων. Ο Θέων παραπέμπει στην πρόταση αυτή θέλοντας να ενισχύσει την επιχειρηματολογία του Πτολεμαίου, σχετικά με τα σφαιρικά, ως προς το σχήμα, ουράνια σώματα. Ο Πτολεμαίος ισχυριζόταν ότι, αν τα ουράνια σώματα ήταν επίπεδα ή αν είχαν σχήμα κυκλικού δίσκου, τότε δε θα εμφάνιζαν κυκλικό σχήμα, ταυτόχρονα, σε όλους τους παρατηρητές της γης. Ο Θέων συμφωνεί με την αντίληψη του Πτολεμαίου, γιατί, όπως έχει αποδειχθεί στα *Οπτικά*, οι τροχοί των αρμάτων άλλες φορές εμφανίζουν κυκλικό σχήμα και άλλες φορές ελλειπτικό εξαρτώμενο πάντα από τη θέση του παρατηρητή. Εφόσον το σχήμα των ουράνιων σωμάτων δεν παρουσιάζει τέτοιες διακυμάνσεις για κανέναν παρατηρητή της γης, σημαίνει ότι είναι σφαιρικό.

Επιπλέον, στο σύγγραμμα *Υποτύπωσις των αστρονομικών υποθέσεων* ο Πρόκλος προσπαθεί, μέσα στο πλαίσιο του πτολεμαϊκού μοντέλου της κατ' έκκεντρον κίνησης, να εξετάσει την κίνηση του Ήλιου, όταν εκείνος φέρεται πάνω στον έκκεντρο κύκλο. Ο Πρόκλος υποστηρίζει ότι η περιφέρεια του κύκλου που θα διανύσει ο Ήλιος ορίζεται από τη γωνία υπό την οποία παρατηρείται, όταν το σημείο παρατήρησης, δηλαδή ο οφθαλμός, βρίσκεται στο κέντρο του κόσμου. Ωστόσο, ο Ήλιος κινείται σε περιφέρεια γύρω από το κέντρο του έκκεντρου κύκλου και καλύπτει περιφέρεια ίση με την γωνία που ορίζεται με κορυφή της το κέντρο του έκκεντρου. Ο Πρόκλος ισχυρίζεται ότι, αν οι δύο γωνίες συνέπιπταν, δεν θα υπήρχε καμία διαφοροποίηση ως προς το σημείο απ' όπου θα γινόταν η παρατήρηση της κίνησης. Επειδή όμως η γωνία που διαμορφώνεται με κορυφή το κέντρο του έκκεντρου είναι μεγαλύτερη από την άλλη, «*μείζονα κεκινημένος* (ενν. *ο*

[5] *ό.π.*, 338.18-340.2.
[6] 341.8-342.1.

Ἥλιος) *ἐλάττονα δόξει κεκινῆσθαι*». Στη συνέχεια, αιτιολογεί τη δήλωσή του λέγοντας πως «*ἔχομεν γὰρ ἐν τοῖς Ὀπτικοῖς, ὅτι τοῖς μεγέθεσι τῶν πρὸς τῷ ὄμματι γωνιῶν τὰ μεγέθη τῶν ὁρατῶν μείζοσιν ἢ ἐλάττοσιν οὖσι μείζω καὶ ἐλάττω φαίνεται*»[7] επικαλούμενος τον θεμελιώδη «όρο» της εξάρτησης της οπτικής εμφάνισης από την οπτική γωνία, υπό την οποία παρατηρείται.

Τα παραπάνω παραδείγματα συνιστούν ενδεικτικές μόνο περιπτώσεις που φανερώνουν ότι η γεωμετρική οπτική, και ειδικότερα τα *Οπτικά* του Ευκλείδη, διαδραμάτιζαν σπουδαίο ρόλο στις αστρονομικές μελέτες. Δεν είχαν μόνο θεωρητική χρησιμότητα, αλλά βοηθούσαν και εμπράκτως στο έργο της αστρονομίας. Οι μαθηματικοί-αστρονόμοι είχαν ενστερνιστεί τις βασικές αρχές της γεωμετρικής οπτικής, ακολουθούσαν τη μεθοδολογία της και αντλούσαν από τα θεωρήματά της, προκειμένου να ενισχύσουν ή να επιβεβαιώσουν τα συμπεράσματά τους. Έτσι, η γεωμετρική οπτική κατέληξε να αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι του ερευνητικού προγράμματος της αστρονομίας. Εκτός από τον Ευκλείδη, τον Πάππο, τον Θέωνα, τον Πρόκλο, το μοντέλο της γεωμετρικής οπτικής είχε υιοθετηθεί στο πλαίσιο των αστρονομικών ερευνών του Αρίσταρχου (310-230 π.Χ.), του Αρχιμήδη (287-212 π.Χ), του Κλεομήδη (1^{ος} μ.Χ. αιώνας), του Πτολεμαίου, του Σωσιγένη (β΄ μισό 2^{ου} μ.Χ. αιώνα) και άλλων.

Η μελέτη του τρόπου επίδρασης της γεωμετρικής οπτικής στη διαμόρφωση των αστρονομικών θεωριών δεν εξαντλείται βέβαια στο σημείο αυτό. Αντίθετα, θα απαιτούσε τη συγγραφή μιας ξεχωριστής και εκτενέστερης εργασίας. Ωστόσο, μέσω των παραπάνω παραδειγμάτων, γίνεται φανερό ότι η οπτική δεν ήταν μια επιστήμη που πορευόταν απομονωμένη από τις υπόλοιπες ούτε αντιμετωπίζονταν ως απλή θεραπαινίδα τους. Κατά το πέρασμα των αιώνων, η επιστήμη της οπτικής αποκτούσε ολοένα και πιο ενεργό ρόλο σε όλες τις εκφάνσεις της ζωής είτε με το να βελτιώνει και να επιλύει πρακτικά προβλήματα είτε με το να παρεμβαίνει καθοριστικά στις εργασίες των επιστημών και της τέχνης. Ο «*ὀπτικός λόγος*» είχε την ικανότητα να διαπλάθει την εικόνα που είχαν οι άνθρωποι για τον κόσμο, να την αμφισβητεί, ακόμα και να τη μετασχηματίζει.

[7] Βλ. Πρόκλου, *Υποτύπωσις των αστρονομικών υποθέσεων*, έκδ. C. Manitius, *Procli Diadochi hypotyposis astronomicarum positionum*, Λειψία: Teubner, 1909, 3, 33.1-35.10.

ΠΡΩΤΟΓΕΝΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αυτόλυκου, *Περί επιτολών και δύσεων*, έκδ. F. Hultch, *Autolyci De sphaera quae movetur liber De ortibus et occasibus libri duo una cum scholiis antiques*, Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana, Λειψία 1885.
- Αυτόλυκου, *Περί κινουμένης σφαίρας*, έκδ. F. Hultch, *Autolyci De sphaera quae movetur liber De ortibus et occasibus libri duo una cum scholiis antiques*, Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana, Λειψία 1885.
- Αγαθήμερου, *Υποτύπωσις Γεωγραφίας*, έκδ. K. Müller, *Geographi Graeci minores*, τόμ. 2, Παρίσι: Didot 1861.
- Ανθέμιου, *Fragmentum Mathematicum Bobiense*, έκδ. G.L. Huxley, *Anthemius of Tralles: A study in later Greek geometry, Greek, Roman and Byzantine monographs* 1, Κέμπριτζ, Μασσαχουσσέτη: Harvard University Press 1959.
- Ανθέμιου, *Περί παραδόξων μηχανημάτων*, έκδ. G.L. Huxley, *Anthemius of Tralles: A study in later Greek geometry, Greek, Roman and Byzantine monographs* 1, Κέμπριτζ, Μασσαχουσσέτη: Harvard University Press 1959.
- Απολλώνιου, *Κωνικά*, έκδ. J.L. Heiberg, *Apollonii Pergaei quae Graece exstant*, τόμ. 2, Λειψία: Teubner 1891-1893.
- Αριστοτέλους, *Μετά τα Φυσικά*, έκδ. W.D. Ross, *Aristotle's metaphysics*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1924.
- Αριστοτέλους, *Περί αισθήσεως και αισθητών*, έκδ. W.D. Ross, *Aristotle: Parva naturalia*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1955.
- Αριστοτέλους, *Περί ζώων γενέσεως*, έκδ. H.J. Drossaart Lulofs, *Aristotelis de generatione animalium*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1965.
- Αριστοτέλους, *Περί Ποιητικής*, έκδ. R. Kassel, *Aristotelis de arte poetica liber*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1965.
- Αριστοτέλους, *Περί ψυχής*, έκδ. W.D. Ross, *Aristotle: De anima*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1961.
- Αριστοτέλους, *Προτρεπτικός προς Θεμίσωνα*, έκδ. I. Düring, *Aristotle's protrepticus*, Στοκχόλμη: Almqvist & Wiksell 1961.
- Αριστοτέλους, *Ρητορική*, έκδ. W.D. Ross, *Aristotelis ars rhetorica*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1959.
- Αριστοτέλους, *Τοπικά*, έκδ. W.D. Ross, *Aristotelis topica et sophistici elenchi*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1970.
- Αριστοτέλους, *Φυσικά*, έκδ. W.D. Ross, *Aristotelis physica*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1950.
- Αρχιμήδους, *Περί ελίκων*, έκδ. C. Mugler, *Archimède*, 3 τόμ., Παρίσι: Les Belles Lettres, τόμ. 2, 1971.
- Αρχιμήδους, *Περί κωνοειδούς και σφαιροειδούς,* έκδ. C. Mugler, *Archimède*, 3 τόμ., Παρίσι: Les Belles Lettres, τόμ. 1, 1970.
- Αρχιμήδους, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου*, έκδ. C. Mugler, *Archimède*, 3 τόμ., Παρίσι: Les Belles Lettres, τόμ. 1, 1970.
- Αρχιμήδους, *Ψαμμίτης*, έκδ. C. Mugler, *Archimède*, 3 τόμ., Παρίσι: Les Belles Lettres 1971.

- Ασκληπιού, *Σχόλια στην Αριθμητική εισαγωγή του Νικόμαχου*, έκδ. L. Tarán, *Asclepius of Tralles. Commentary to Nicomachus' introduction to arithmetic*, *Transactions of the American Philosophical Society*, 59.4, Φιλαδέλφεια: American Philosophical Society 1969.
- Βιτρούβιου, *Περί αρχιτεκτονικής*, έκδ. M.Ch.-L. Maufras, *L' Architecture de Vitruve*, τόμ.1, Παρίσι: C.L.F. Panckoucke 1847.
- Βίτωνος, *Κατασκευαί πολεμικών οργάνων και καταπαλτικών*, έκδ. A. Rehm, E. Schramm, *Bitons Bau von Belagerungsmaschinen und Geschützen*, Abhandlungen der bayerischen Akademie der Wissenschaften, Philosoph.-hist. Abt., N.F. 2, Μόναχο: Oldenbourg 1929.
- Γαληνού, *Περί Ιπποκράτους και Πλάτωνος δογμάτων*, έκδ. P. De Lacy, *Galen: On the doctrines of Hippocrates and Plato*, Corpus medicorum Graecorum, Βερολίνο: Akademie-Verlag 1978.
- Γαληνού, *Περί χρείας μορίων*, C.G. Kühn, *Claudii Galeni opera omnia*, Λειψία: Knobloch 1822.
- Γεμίνου, *Fragmenta Optica*, έκδ. R. Schöne, *Damianos Schrift über Optik*, Βερολίνο: Reichsdruckerei 1897.
- Δαμιανού Ηλιοδώρου, *Κεφάλαια περί των Οπτικών Υποθέσεων*, έκδ. R. Schöne, *Damianos Schrift über Optik*, Βερολίνο: Reichsdruckerei 1897.
- Διογένη Λαέρτιου, *Βίοι φιλοσόφων*, έκδ. H.S. Long, *Diogenis Laertii vitae philosophorum*, τόμ.1, Οξφόρδη: Clarendon Press 1964.
- Διοκλή, *Περί πυρίων*, έκδ. & μετάφρ. G.J. Toomer, *Diocles: On Burning Mirrors: The Arabic Translation of the Lost Greek Original edited with english translation and commentary*, Βερολίνο/Χαϋδελβέργη/Νέα Υόρκη: Springer-Verlag 1975.
- Επίκουρου, *Επιστολή προς Πυθοκλέα*, έκδ. G. Arrighetti, *Epicuro*, 2η έκδ., Τορίνο: Einaudi 1973.
- Ευκλείδου, *Κατοπτρικά*, έκδ. J.L.Heiberg, *Euclidis opera omnia*, τόμ. 7, Λειψία: Teubner 1895, σσ. 285-343.
- Ευκλείδου, *Οπτικά*, έκδ. J.L.Heiberg, *Euclidis opera omnia*, τόμ. 7, Λειψία: Teubner 1895, σσ. 1-121.
- Ευκλείδου, *Στοιχεία*, έκδ. E.S. Stamatis, *Euclidis elementa*, τόμ. 1-4, 2η έκδ., Λειψία: Teubner 1969-1973.
- Ήρωνος Αλεξανδρινού, *Βελοποιϊκά*, έκδ. H. Diels and E. Schramm, *Herons Belopoiika*, Abhandlungen der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften, Βερολίνο: Reimer 1918.
- Ήρωνος Αλεξανδρινού, *Γεωμετρικά*, έκδ. J.L. Heiberg, *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, τόμ. 4, Λειψία: Teubner 1903
- Ήρωνος Αλεξανδρινού, *Κατοπτρικά*, έκδ. & μετάφρ. Wilhelm Schmidt, *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, τόμ. 2:1, Λειψία: Teubner 1900, σσ. 301-373.
- Ήρωνος Αλεξανδρινού, *Ορισμοί*, έκδ. J.L. Heiberg, *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, τόμ. 4, Λειψία: Teubner 1903.
- Ήρωνος Αλεξανδρινού, *Περί διόπτρας*, έκδ. H. Schöne, *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, τόμ. 3, Λειψία: Teubner 1903.

- Ησύχιου, *Λεξικόν*, έκδ. M. Schmidt, *Hesychii Alexandrini lexicon*, Άμστερνταμ: Hakkert 1965.
- Θεμίστιου, *Παράφραση στα Αναλυτικά Ύστερα του Αριστοτέλη*, έκδ. M. Wallies, *Themistii analyticorum posteriorum paraphrases*, Commentaria in Aristotelem Graeca 5.1, Βερολίνο: Reimer 1900.
- Θεόφραστου, *Περί αισθήσεων*, έκδ. H. Diels, *Doxographi Graeci*, Βερολίνο: Reimer 1879.
- Θέωνος Αλεξανδρινού, *Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου*, έκδ. A. Rome, *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, Studi e Testi 72 & 106, Βατικανό: Biblioteca Apostolica Vaticana, τόμ. 2, 1936.
- Ιωάννη Φιλόπονου, *Σχόλια στα Αναλυτικά Ύστερα του Αριστοτέλη*, έκδ. M. Wallies, *Ioannis Philoponi in Aristotelis analytica priora commentaria*, Commentaria in Aristotelem Graeca, Βερολίνο: Reimer 1905.
- Κλαύδιου Πτολεμαίου, *Μαθηματική Σύνταξη*, έκδ. J.L. Heiberg, *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia*, Λειψία: Teubner 1903.
- Κλαύδιου Πτολεμαίου, *Οπτική*, έκδ. Albert Lejeune, *L' Optique de Claude Ptolémée dans la version latine d' aprés l' arabe de l' emir Eugene de Sicile: Edition critique et exégetique*, Louvain 1956.
- Ολυμπιόδωρου, *Σχόλια στα Μετεωρολογικά του Αριστοτέλη*, έκδ. G. Stüve, *Olympiodori in Aristotelis meteora commentaria*, Commentaria in Aristotelem Graeca 12.2, Βερολίνο: Reimer 1900.
- Πάππου Αλεξανδρινού, *Μαθηματική Συναγωγή*, έκδ. F. Hultsch, *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt*, 3 τόμ., Βερολίνο: Weidmann 1876-1878.
- Πλάτωνος, *Νόμοι,* έκδ. J. Burnet, *Platonis opera*, τόμ. 5, Οξφόρδη: Clarendon Press 1907.
- Πλάτωνος, *Πολιτεία*, έκδ. J. Burnet, *Platonis opera*, τόμ. 5, Οξφόρδη: Clarendon Press 1900-1907.
- Πλάτωνος, *Σοφιστής*, έκδ. J. Burnet, *Platonis opera*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1900.
- Πλάτωνος, *Τίμαιος*, έκδ. J. Burnet, *Platonis opera*, τόμ. 4, Οξφόρδη: Clarendon Press 1902.
- Πλάτωνος, *Φαίδων*, έκδ. J. Burnet, *Platonis opera*, Οξφόρδη: Clarendon Press 1900.
- Πλούταρχου, *Aemilius Paulus*, έκδ. K. Ziegler, *Plutarchi vitae parallelae*, τόμ. 2.1, 2η έκδ., Λειψία: Teubner 1964.
- Πλωτίνου, *Εννεάδες*, έκδ. P. Henry and H.-R. Schwyzer, *Plotini opera*, Leiden: Brill 1951.
- Πολύβιου, *Ιστορίες*, έκδ. T. Büttner-Wobst, *Polybii historiae*, τόμ. 1-4, Λειψία: Teubner 1889-1905.
- Πορφυρίου, *Υπόμνημα εις τα αρμονικά του Πτολεμαίου*, έκδ. I. Düring, *Porphyrios: Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios*, Γκαίτεμπργκ: Elanders 1932.
- Πρόκλου, *Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη*, έκδ. G. Friedlein, *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, Λειψία: Teubner 1873.
- Πρόκλου, *Υποτύπωσις των αστρονομικών υποθέσεων*, έκδ. C. Manitius, *Procli Diadochi hypotyposis astronomicarum positionum*, Λειψία: Teubner 1909.

- Σιμπλίκιου, *Σχόλια στα Φυσικά του Αριστοτέλη*, έκδ. H. Diels, *Simplicii in Aristotelis physicorum libros octo commentaria*, Commentaria in Aristotelem Graeca, Βερολίνο: Reimer 1882.
- Στράβωνος, *Γεωγραφικά*, έκδ. A. Meineke, *Strabonis geographica*, τόμ. 3, Λειψία: Teubner 1877.

ΜΕΤΑΦΡΑΣΕΙΣ

- Burton, H.E., "The *Optics* of Euclid", *Journal of the Optical Society of America 35* (1945), σσ. 357-372.
- Κάλφα, Β., *Πλάτων: Τίμαιος*, Αθήνα: Πόλις 1995.
- Lejeune, A., *L' Optique de Claude Ptolémée*, Leiden: Brill 1989.
- Smith, M.A., *Ptolemy's Theory of Visual Perception: An English Translation of the Optics with Introduction and Commentary*, Transactions of the American Philosophical Society 86.2, Φιλαδέλφεια: American Philosophical Society 1996.
- Stevenson, E.L., *Claudius Ptolemy: The Geography*, Νέα Υόρκη: Dover Publications 1991.
- Theisen, W.R., "Liber de visu: the Greco-Latin Translation of Euclid's *Optics*", *Medieval Studies 51* (1979): σσ. 44-105.
- Ver Eecke, P., *Euclide: L' Optique et la Catoptrique*, Παρίσι 1959.
- Waterfield, R., *Aristotle: Physics*, Oxford University Press 1999.

ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Boyer, C.B., *The Rainbow: From Myth to Mathematics*, Νιού Τζέρσυ: Princeton University Press 1987.
- Cohen, M.R., Drabkin, I.E., *A Source Book in Greek Science*, 5η έκδ., Harvard University Press 1975.
- Cuomo, S., *Pappus and the Mathematics of Late Antiquity*, Κέμπριτζ: Cambridge University Press 2000.
- Farrington, B., *Η επιστήμη στην αρχαία Ελλάδα*, μετάφρ. Ν. Ραΐση, Κάλβος 1998.
- Klein, J., *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, μετάφρ. Eva Brann, Κέμπριτζ, Μασσαχουσσέτη: MIT Press 1968.
- Lejeune, A., *Euclide et Ptolémée: Deux Stades de l' Optique Géometrique Grecque*, Recueil de Travaux d' Histoire et de Philologie, 3e ser., fasc. 31, Louvain 1948.
- Lejeune, A., *Recherches sur la Catoptrique Grecque*, Académie Royale de Belgiques, Classes des Lettres et des Sciences Morales et Politiques, Mémoires, τόμ. 2, Βρυξέλλες 1957.
- Lindberg, C.D., *Theories of Vision from Al-Kindi to Kepler*, The University of Chicago Press 1976.

- Neugebauer, O., *Οι θετικές επιστήμες στην αρχαιότητα*, μετάφρ. Χ. Ζερμπίνη, Ι. Αρζόγλου, Αθήνα: Μ.Ι.Ε.Τ. 1986.
- Panofsky, E., *La perspective comme forme symbolique et autres essais*, Παρίσι: Minuit 1975.
- Reymond, A., *Histoire des Sciences Exactes et Naturelles dans l' Antiquitée Gréco-Romaine*, 2η έκδ., Paris: Presses Universitaires de France 1955.
- Tansey, R.G., Kleiner, F.S., *Gardner's Art Through the Ages*, 10η έκδ., Η.Π.Α.: Harcourt Brace College Publishers 1996.
- Simon, G., *Le régard, l' être et l' apparence dans l' Optique de l' Antiquité*, Paris: Seuil 1988.
- Smith, M.A., *Ptolemy and the Foundations of Ancient Mathematical Optics: A Source Based Guided Study*, Transactions of the American Philosophical Society 89.3, Φιλαδέλφεια: American Philosophical Society 1999.
- Σταμάτη, Ε.Σ., *Προσωκρατικοί Φιλόσοφοι* 1966.
- Ronchi, V., *Optics: The Science of Vision*, μετάφρ. Edward Rosen, Νέα Υόρκη: Dover Publications 1991.
- Van der Waerden, B.L., *Η αφύπνιση της επιστήμης*, μετάφρ. Γ. Χριστιανίδης, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2000.
- Χριστιανίδης Γ, Διαλέτης Δ., *Διαμάχες για την ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2006.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΑ ΑΡΘΡΑ

- Berryman, S., "Euclid and the Sceptic: A paper on Vision, Doubt, Geometry, Light and Drunkenness", *Phronesis 43 (2)*(1998): σσ. 176-96.
- Boring, E.G., "Visual Perception as Invariance", *Psychological Review 59* (March 1952): σσ. 141-48.
- Boyer, C.B., "Aristotelian References to the Law of Reflection", *Isis 36* (1945-46): σσ. 92-5.
- Brownson, C.D., "Euclid's Optics and Its Compatibility with Linear Perspective", *Archive for History of Exact Sciences 24* (1981): σσ. 165-94.
- Caussin De Perceval, G.G.A., "Memoire sur l' *Optique* de Ptolémée", *Memoires de l' Institut Royal de France, Academie des Inscriptions et Belles-Lettres 6* (1822): σσ.1-39.
- Cherniss, H., "Galen and Posidonius' Theory of Vision", *American Journal of Philology 54* (1933): σσ. 154-61.
- Drake, S., "Ptolemy, Galileo and Scientific Method", *Studies in History and Philosophy of Science 9* (1978): σσ. 99-115.
- Eastwood, B.S., "Metaphysical Derivations of a Law of Refraction: Damianos and Grosseteste", *Archive for History of Exact Sciences 6* (1970): σσ. 224-36.
- Gibson, J.J., "The Visual Field and the Visual World: A Reply to Professor Boring", *Psychological Review 59 No 2*, (March 1952): σσ. 149-51.

- Goldstein, B.R., Bowen, A.C., "A New View of Early Greek Astronomy", *Isis 74* (1983): σσ. 330-40.
- Jones, A., "Pappus' Notes to Euclid's Optics", στο *Ancient & Medieval Traditions in the Exact Sciences: Essays in Memory of Wilbur Knorr*, CSLI Publications, Stanford, California 2000, σσ. 49-58.
- Kahn, C.H., "Sensation and Consciousness in Aristotle's Psychology", *Archive fur Geschichte der Philosophie 48* (1966): σσ. 43-81.
- Kattsoff, L.O., "Ptolemy and Scientific Method", *Isis 38* (1947): σσ. 18-22.
- Knorr, W.R., "Archimedes and the Elements: Proposal for a Revised Chronological Ordering of the Archimedean Corpus", *Archive for History of Exact Sciences 19* (1978): σσ. 211-90
- Knorr, W.R., "Archimedes and the Pseudo-euclidean *Catoptrics*", *Archives Internationales d' Histoire des Sciences 35* (1985): σσ. 28-105.
- Knorr, W.R., "New readings in Greek mathematics: sources, problems, publications", *Impact of science on society* (UNESCO), *40 (159)*, 1990.
- Knorr, W.R., "On the Principle of Linear Perspective in Euclid's *Optics*", *Centaurus 34* (1991): σσ. 193-210.
- Knorr, W.R., "The geometry of burning-mirrors in antiquity", *Isis 74* (1983): σσ. 53-73.
- Knorr, W.R., "The practical element in ancient exact sciences", *Synthése 81* (1989): σσ. 313-28.
- Knorr, W.R., "When Circles Don't Look Like Circles: An Optical Theorem in Euclid and Pappus", *Archive for History of Exact Sciences* (1992): σσ. 287-329.
- Lejeune, A., "Archiméde et la Loi de la Réflexion ", *Isis 38* (1947): σσ. 51-53.
- Lejeune, A., "Les Lois de la Reflexion dans l' Optique de Ptolemée", *Antiquité Classique XV* (1946): σσ. 241-56.
- Lejeune, A., "Les Postulates de la *Catoptrique* dite d' Euclide", *Archives Internationales d' Histoire des Sciences*, *fasc. 7* (1949): σσ. 598-613.
- Lejeune, A., "Les recherches de Ptolémée sur la vision binoculaire", *Janus 47* (1958): σσ. 79-86.
- Lindberg, D.C., "Al Kindi's Critique of Euclid's Theory of Vision", *Isis 62* (1971): σσ. 469-89.
- Lindberg, D.C., "Alhazen's Theory of Vision and Its Reception in the West", *Isis 58* (1967): σσ. 321-41.
- Lindberg, D.C., "New Light on an Old Story", *Isis 62* (1971): p. 522-24.
- Lindberg, D.C., "The Theory of Pinhole Images from Antiquity to the Thirteenth Century", *Archive for History of Exact Sciences 5* (1968): σσ. 154-76.
- Lloyd, G.E.R., "Saving the Appearances", *Classical Quarterly*, *n.s. 28* (1978): σσ. 202-22.
- Machamer, P.K., "Aristotle on Natural Place and Natural Motion", *Isis 69* (1978): σσ. 377-87.
- Meyerhof, M., "An Arabic Compendium of Medico-Philosophical Definitions", *Isis 10* (1928): σσ. 340-9.
- Middleton, K.W.E., "Archimedes, Kircher, Buffon and the Burning-Mirrors", *Isis 52* (1961): σσ. 533-43.

- Neugebauer, O., “Ptolemy’s Geography, Book VII, Chapters 6 and 7”, *Isis 50* (1959): σσ. 22-9.
- O’ Brien, D., “The Effect of a Simile: Empedocle’ s Theories of Seeing and Breathing”, *Journal of Hellenic Studies 90* (1970): σσ. 140-79.
- Ockulicz, L., “La valeur de l’ oeuvre astronomique de Ptolemée”, *Scientia 54* (1933), σσ. 450-56.
- Pines, S., “Ibn Al-Haytham’s Critique of Ptolemy”, *Actes du Xe Congrés International d’ Histoire des Sciences (1962)*, Paris 1964, I, σσ. 547-50.
- Rashed, R., “A Pioneer in Anaclastics: Ibn Sahl On Burning Mirrors and Lenses”, *Isis 81* (1990): σσ. 464-91.
- Rashed, R., “Le commentaire par Al-Kindi de l’ *Optique* d’ Euclide: un traité jusqu’ ici inconnu”, *Arabic Sciences and Philosophy* vol. 7, *no 1* (Mar. 1997), σσ. 9-56.
- Rashed, R., “Le *Discours de la Lumiére* d’ Ibn Al-Haytham: traduction française critique”, *Revue d’ Histoire des Sciences 21* (1968): σσ. 197-224.
- Rashed, R., “Le modéle de la sphére transparente et l’ explication de l’ ark-en-ciel: Ibn Al-Haytham, Al-Farisi”, *Revue d’ Histoire des Sciences et de leurs applications 23* (1970): σσ. 109-40.
- Rashed, R., “Lumiére et vision: l’ application des mathématiques dans l’ optique d’ Ibn aHaytham” στο *Roemer et la vitesse de la lumiére*, εκδ. R.Taton, Paris: Librairie J.Vrin, 1978, σσ. 19-44.
- Rashed, R., “Optique Géometrique et doctrine optique chez Ibn Al-Haytham”, *Archive for History of Exact Sciences 6* (1970): σσ. 271-98.
- Rashed, R., “Problems of the Transmission of Greek Scientific Thought into Arabic: Examples from Mathematics and Optics” *History of Science 27* (1989): σσ. 199-209.
- Rashed, R., “Transmissions et recommencements: l’ exemple de l’ optique”, Maghreb-Machrek *no 123*, Paris: La documentation française, 1989, σσ. 22-6.
- Rome, A., “Notes sur les passages des Catoptriques d’ Archiméde conservés par Théon d’ Alexandrie”, *Annales de la Societé Scientifique de Bruxelles*, série A, *LII* (1932), σσ. 30-41.
- Ronchi, V., “Classical Optics is a Mathematical Science”, *Archive for History of Exact Sciences 1* (1961) No 2: σσ. 160-71.
- Ronchi, V., “Ibn Al-Haytham’s Criticisms of Ptolemy’s Optics”, *Journal of the History of Philosophy 4* (1966): σσ. 145-9.
- Rosenthal, F., “Al-Kindi and Ptolemy”, *Islamic Mathematics and Astronomy 63* (1998): σσ. 436-56.
- Sabra, A.I., “Explanation of optical reflection and refraction, Ibn Al-Haytham, Descartes, Newton”, *Actes du Xe Congrés International d’ Histoire des Sciences (1962)*, Paris, 1964, I: σσ. 551-4.
- Sabra, A.I., “Form in Ibn al-Haytham’s theory of vision”, *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften 5* (1989): σσ. 115-40.
- Sabra, A.I., “Ibn al-Haytham’s Lemmas for Solving ‘Alhazen’s Problem’”, *Archive for History of Exact Sciences 26* (1982): σσ. 299-324.
- Sabra, A.I., “Ibn al-Haytham”, *Dictionary of Scientific Biography 6*, εκδ. Charles C. Gillispie, New York: Charles Scribner’s Sons, 1972, σσ. 189-210.

- Sabra, A.I., “Psychology versus mathematics: Ptolemy and Alhazen on the moon illusion”, *Mathematics and its Applications to Science and Natural Philosophy in the Middle Ages: essays in Honor of Marshall Clagett*, εκδ. Edward Grant & John Murdoch, Cambridge University Press, 1987, σσ. 217-47.
- Sabra, A.I., “Sensation and Inference in Alhazen’s Theory of Visual Perception”, *Studies in Perception: Interrelations in the History of Philosophy and Science*, εκδ. Peter K. Machamer & Robert G. Turnbull, Ohio State University Press, 1978, σσ. 160-85.
- Sabra, A.I., “The Astronomical Origin of Ibn Al-Haytham’s Concept of Experiment”, *Actes du XIIe Congrés International d’ Histoire des Sciences*, Paris, 1968, III A (1971): σσ. 133-6.
- Sabra, A.I., “The Authorship of the *Liber de crepusculis*, an Eleventh-Century Work on the Atmospheric Refraction”, *Isis 58* (1967): σσ. 77-85.
- Sabra, A.I., “The Physical and the Mathematical in Ibn al-Haytham’s Theory of Light and Vision”, *The Commemoration Volume of Bīrūnī International Congress in Tehran, High Council of Culture & Arts*, Publication *no 38*, Tehran, 1976, σσ. 1-20.
- Sambursky, S, “Plato, Proclus and the Limitations of Science”, *Journal of the History of Philosophy 3* (1965): σσ. 1-11.
- Sarton, G., “The Tradition of the Optics of Ibn Al-Haytham”, *Isis 29* (1938): σσ. 403-6.
- Sayili, A.M., “The Aristotelian Explanation of the Rainbow”, *Isis 30* (1939): σσ. 65-83.
- Sesiano, J., “Les miroires ardents de Dioclés”, *Museum Helveticum 45*, *fasc.4* (1988), σσ. 193-202.
- Shapiro, A.E., “Archimedes measurement of the sun’s apparent diameter”, *Journal of the History of Astronomy VI* (1975): σσ. 75-83.
- Siegel, R.E., “Did the Greek Atomists Consider a Non-Corpuscular Visual Transmission? Reconsideration of Some Ancient Visual Doctrines”, *Archives Internationales d’ Histoire des Sciences 22* (1969): σσ. 3-16.
- Simon, G., “Aux origines de la théorie des miroirs: sur l’ authenticité de la *Catoptrique* d’ Euclide”, *Revue d’ Histoire des Sciences 47* (1994): σσ. 259-72.
- Smith, M.A., “Ptolemy’s Search for a Law of Refraction: A Case-Study in the Classical Methodology of ‘Saving the Appearances’ and Its Limitations”, *Archive for History of Exact Sciences 26* (1982): σσ. 221-40.
- Smith, M.A., “Saving the Appearances of the Appearances: The Foundations of Classical Geometrical Optics”, *Archive for History of Exact Sciences 24* (1981): σσ. 73-100.
- Smith, M.A., “The Psychology of Visual Perception in Ptolemy’s *Optics*”, *Isis 79* (1988): σσ. 189-206.
- Spies, O., “Al-Kindi’s Treatise on the Cause of the Blue Color of the Sky”, *Journal of the Bombay Branch of the Royal Asiatic Society*, n.s., *13* (1937): σσ. 7-19.
- Theisen, W., “Euclid, Relativity and Sailing”, *Historia Mathematica 11* (1984): σσ. 81-91.
- Tobin, R., “Ancient Perspective and Euclid’s *Optics*, *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, *53* (1990): σσ. 14-41.

- Turnbayne, C.M., “Grosseteste and an Ancient Optical Principle”, *Isis 50* (1959): σσ. 467-72.
- Unguru, S., “On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics”, *Archive for History of Exact Sciences 15* (1975-6).
- Unguru, S., “Pappus in the Thirteenth Century in the Latin West”, *Archive for History of Exact Sciences 13* (1974): σσ. 307-24.
- Van der Waerden, B.L., “Defence of a ‘Shocking’ Point of View”, *Archive for History of Exact Sciences 15* (1976).
- Walzer, R., “New Studies on Al-Kindi”, *Oriens 10* (1957): σσ. 203-32.

ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΑΡΘΡΑ

- Κάλφας, Βασίλης, “Η παράδοση του ‘σώζειν τα φαινόμενα’ στην αρχαία ελληνική επιστήμη”, *λόγου χάριν 1*(1990): σσ. 133-54.
- Κάλφας, Βασίλης-Τσιτσιρίδης, Σταύρος, “Η μέθοδος του φυσικού και η μέθοδος του αστρονόμου”, *Παλίμψηστον 8* (1989): σσ. 99-124.
- Κουρνιάτη, Α.Μ., “Η σκηνογραφία ως κλάδος της οπτικής”, *Νεύσις 8* (1999): σσ. 157-69.