ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Μ.Ι.Θ.Ε.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Π.Μ.Σ. ‘Ιστορία και Φιλοσοφία των Επιστημών και της Τεχνολογίας’

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Της Δήμητρας Χριστοπούλου

Θέμα:

«Κριτική διερεύνηση του επιχειρήματος του Νεολογικισμού για τους φυσικούς αριθμούς ως πραγματικά αντικείμενα και για την προέλευση της αριθμητικής γνώσης»

3-μελής συμβουλευτική επιτροπή:

Στ. Ψύλλος (επιβλέπων) αναπλ. Καθηγητής

Δ. Αναπολιτάνος καθηγητής

Α. Μπαλτάς καθηγητής

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Κεφ.1
Μορφές του σύγχρονου μαθηματικού ρεαλισμού

1. Ο μαθηματικός ρεαλισμός του Goedel
2. Τα επιχειρήματα των Quine-Putnam: το 'αναπόδραστο' των μαθηματικών αντικειμένων
3. Η κριτική του Paul Benacerraf στον μαθηματικό ρεαλισμό (1973)

Κεφ. 2
Ο αριθμητικός πλατωνισμός του Frege. Η ανασυγκρότηση της θέσης του Frege για τους φυσικούς αριθμούς ως αντικείμενα, από το νεολογικισμό.

1. Οι βασικοί στόχοι των Grundlagen

2. Η ανασυγκρότηση των βασικών θέσεων των Grundlagen από το φιλοσοφικό πρόγραμμα του Νεολογικισμού

α. Η θέση για τη δικαίωση της προοπτικής του λογικισμού.

β. Το επιχείρημα για την ύπαρξη των φυσικών αριθμών ως πραγματικών αντικειμένων

γ. Η δικαιολόγηση της αριθμητικής γνώσης από τους Hale & Wright.

Κεφ. 3
Το πρόβλημα σχεδιασμού συντακτικών κριτηρίων για τον διαχωρισμό των ενικών όρων από άλλες εκφράσεις. Οι αριθμητικές εκφράσεις ως ενικοί όροι.

1. Η αρχή της 'συντακτικής προτεραιότητας'

2. Τα προτεινόμενα από τους Hale & Wright συντακτικά κριτήρια

3. Αξιολόγηση των προτεινόμενων συντακτικών κριτηρίων

4. Η εναλλακτική προσέγγιση: όροι που εκφράζουν ιδιότητες εννοιών ;

ΚΕΦ. 4

Η απόρριψη της μαθηματικής αλήθειας από τον Hartry Field

1. Το νομιναλιστικό πρόγραμμα του Field

2. Η κριτική των Hale & Wright

3. Ο ενδεχομενικός νομιναλισμός του Field

ΚΕΦ.5

Η αλήθεια της ταυτότητας Nx:Fx = Nx:Gx & η κριτική του Field

Κεφ. 6
Το status της ισοδυναμίας N=

1. Είναι η N= ορισμός;

2. Οι έμμεσοι ορισμοί

3. Η N= ως έμμεσος ορισμός

4. Ειδικά προβλήματα για την N=

Κεφ. 7
Προβλήματα για μια ρεαλιστική ερμηνεία της αναφοράς των αριθμητικών όρων

1. Η ερμηνεία του Dummett για την αναφορά των αριθμητικών όρων: η ισχνή ή η «εσωτερική της γλώσσας» αναφορά.

2. Η σχέση γλώσσας και πραγματικότητας στο πλαίσιο του νεολογικισμού

3. Η ερμηνεία του αναγωγισμού

4. Η αριθμητική πραγματικότητα

5. Το θέμα της αναφοράς των αριθμητικών εκφράσεων που είναι οριστικές περιγραφές

Κεφ.8
Αρκεί η συνέπεια της N= για τη ρεαλιστική θέση του νεολογικισμού;

1. Η N= λειτουργεί ως ανακαλυπτικός ορισμός

2. Η γνωσιολογική διάσταση της 'μετριοπάθειας' της N=

Κεφ. 9
Το πρόβλημα της απροσδιοριστίας της αναφοράς των αριθμητικών όρων.

1. Το σημασιολογικό δίλημμα του Benacerraf (1965)

2. Η πρόταση του στρουκτουραλισμού

3. Η πρόταση του Balaguer (1998)

Κεφ. 10
Το πρόβλημα του Καίσαρος.

1. Ερμηνείες του προβλήματος

2. Απόπειρες των Hale & Wright για τη θεραπεία του προβλήματος του Καίσαρος

Κεφ. 11
Το θέμα της μοναδικότητας

1. Η διαφωνία Frege – Hilbert για τους ορισμούς και τα αξιώματα

2. Η σχέση του προβλήματος του Καίσαρος με το status της N= ως έμμεσου ορισμού

3. Είναι αναγκαία η «μοναδικότητα» των αριθμών για τη ρεαλιστική θέση του νεολογικισμού;

Συμπεράσματα

Εισαγωγή

Το πρόγραμμα του νεολογικισμού που εκπροσωπείται από τους Bob Hale & Crispin Wright ακολουθεί τη φιλοσοφική παράδοση του Frege και ιδιαίτερα των Grundlagen. Συγκεκριμένα, επιχειρεί να επαναδιατυπώσει και να υπερασπιστεί τη θέση του Frege ότι οι φυσικοί αριθμοί αποτελούν αντικείμενα και να ανασυγκροτήσει τις βασικές αρχές του για τη λογική θεμελίωση της αριθμητικής γνώσης. Η παρούσα μελέτη αναφέρεται στο νεολογικισμό και ιδιαίτερα στο επιχείρημα του νεολογικισμού για τους φυσικούς[1] αριθμούς ως πραγματικά αντικείμενα. Αποτελεί μια κριτική προσέγγιση στη ρεαλιστική θέση που συγκροτείται στο πλαίσιο του νεολογικισμού και στην εξήγηση που δίνει το συγκεκριμένο πρόγραμμα στο θέμα της προσβασιμότητας σε αλήθειες που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς. Ιδιαίτερα θα επικεντρωθεί στα επί μέρους σημεία του επιχειρήματος των Hale & Wright για την ύπαρξη των αριθμών τα οποία είναι επιδεκτικά κριτικής, δηλαδή: στις προκείμενες α. *οι αριθμητικές εκφράσεις συμπεριφέρονται συντακτικά ως ενικοί όροι* και β. *οι προτάσεις της αριθμητικής όπου εμφανίζονται οι εν λόγω ενικοί όροι είναι αληθείς,* καθώς και στο συμπέρασμα ότι *υπάρχουν τα αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών εκφράσεων*. Σε ότι αφορά την πρώτη προκείμενη, δηλαδή το ότι οι αριθμητικές εκφράσεις αποτελούν ενικούς όρους, θα ελεγχθεί κατά πόσον αυτός ο ισχυρισμός είναι βάσιμος. Για το λόγο αυτό, θα εξεταστεί το προτεινόμενο από το νεολογικισμό σύνολο συντακτικών κριτηρίων με βάση το οποίο οι αριθμητικές εκφράσεις κατατάσσονται στην κατηγορία των ενικών όρων. Επίσης θα διερευνηθούν και οι δύο εναλλακτικές δυνατότητες θεώρησης των αριθμητικών εκφράσεων ως: ενικοί όροι ή κατηγορηματικοί προσδιορισμοί. Σε ότι αφορά τη δεύτερη προκείμενη του επιχειρήματος, σχετικά με την αλήθεια των προτάσεων της αριθμητικής, θα εξεταστεί η κριτική του νομιναλιστή Field προς τη μαθηματική αλήθεια. Ως προς το συμπέρασμα του εν λόγω επιχειρήματος, ιδιαίτερα θα ελεγχθεί κατά πόσον η ύπαρξη αντικειμένων αναφοράς των αριθμητικών εκφράσεων μπορεί να λάβει ρεαλιστική ερμηνεία. Η διερεύνηση του παραπάνω επιχειρήματος του νεολογικισμού στοχεύει στο να εξετάσει εάν ο αριθμητικός πλατωνισμός που υποστηρίζουν οι Hale & Wright στο πλαίσιο του νεολογικισμού είναι βάσιμος.

Συγχρόνως θα μελετηθούν οι χαρακτηριστικές ιδιότητες της ισοδυναμίας N= του Frege και ιδιαίτερα το status της μέσα στο πρόγραμμα του νεολογικισμού που την αναδεικνύει ως θεμελιώδη αρχή. Θα διερευνηθεί ακόμα ο τρόπος που αυτή συμβάλλει αφενός στην υποστήριξη της θέσης του ρεαλισμού για τους φυσικούς αριθμούς και αφετέρου στη θεμελίωση της αριθμητικής γνώσης.

Αναλυτικά, κατά κεφάλαιο, θα εξεταστούν τα παρακάτω θέματα:

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΑΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Το ***πρώτο*** κεφάλαιο αναφέρεται στον μαθηματικό ρεαλισμό και αποτελεί μια σύντομη παρουσίαση των κυριότερων, *μη φρεγκιανού* τύπου, μορφών του μαθηματικού ρεαλισμού, ιδιαίτερα α) του μαθηματικού ρεαλισμού που υποστηρίζει ο Goedel και β) των επιχειρημάτων των Quine & Putnam υπέρ του αναπόδραστου των μαθηματικών οντοτήτων. Μετά την παρουσίαση των δύο αυτών εκδοχών του μαθηματικού ρεαλισμού, αναπτύσσεται το βασικό πρόβλημα που αναδεικνύει ο Benacerraf στο άρθρο του 1973, δηλαδή οι δυσχέρειες που προκύπτουν όταν κάποιος προσπαθήσει να συνδυάσει τον ισχυρισμό για την πραγματική ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων με μια ικανοποιητική εξήγηση του τρόπου γνωστικής πρόσβασης στα αντικείμενα αυτά. Ακολουθεί σύντομη παρουσίαση και αξιολόγηση των κυριότερων φιλοσοφικών προτάσεων που έχουν γίνει για τη λύση του προβλήματος αυτού, προς όφελος της ρεαλιστικής θέσης.

Το ***δεύτερο*** κεφάλαιο αποσκοπεί στο να παρουσιάσει τις βασικές θέσεις του Frege στα Grundlagen για τους φυσικούς αριθμούς ως αντικείμενα και τη θεμελίωση της αριθμητικής γνώσης στη λογική. Παρουσιάζεται αρχικά η κριτική που ασκεί ο Frege προς τις επικρατούσες αντιλήψεις της εποχής του για τους αριθμούς, δηλαδή τον εμπειρισμό, τον ψυχολογισμό, τον υποκειμενισμό και την καντιανή παράδοση. Αναπτύσσονται οι απόψεις του Frege για τους αριθμούς ως αυθυπόστατα αντικείμενα και οι ενδείξεις που παρέχει η γλώσσα της αριθμητικής για την υποστήριξη αυτών των απόψεων. Ακολουθεί η προσπάθεια του Frege να διατυπώσει κατ'αρχήν έναν

[1] Όταν στα επόμενα αναφερόμαστε σε αριθμούς θα εννούμε φυσικούς αριθμούς. Θα τους εξετάσουμε μάλιστα με βάση μια ορισμένη έννοια πληθυκότητας. Δεν θα ασχοληθούμε επομένως με το status των

επαγωγικό ορισμό για τη σημασία της έκφρασης '*ο αριθμός n ανήκει στην έννοια F*' και ύστερα το εγχείρημά του να διατυπώσει πλαισιακούς ορισμούς για τον *αριθμό της έννοιας F* και για την *διεύθυνση της ευθείας a*. Παρουσιάζεται η θεμελιώδης ισοδυναμία N= (Hume's Principle) και ο κυριότερος λόγος για τον οποίο ο Frege επέλεξε να στραφεί τελικά σε εκτασιακούς ορισμούς της διεύθυνσης και του αριθμού. Γίνεται αναφορά στις επιπτώσεις αυτής του της επιλογής. Στο δεύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζεται η ανασυγκρότηση της θέσης του Frege για τους αριθμούς ως αντικείμενα από το φιλοσοφικό πρόγραμμα του νεολογικισμού. Παρουσιάζεται ειδικότερα το θεμελιώδες επιχείρημα των Hale & Wright ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι πραγματικά αντικείμενα Σύμφωνα με το επιχείρημα αυτό, α) οι αριθμητικές εκφράσεις συμπεριφέρονται συντακτικά ως ενικοί όροι μέσα στις προτάσεις της αριθμητικής και β) οι εν λόγω προτάσεις είναι αληθείς, κατά συνέπεια υπάρχουν τα αντικείμενα αναφοράς αυτών των όρων. Προαναγγέλεται ότι στα επόμενα κεφάλαια θα ακολουθήσει η μελέτη των επί μέρους σημείων του επιχειρήματος για την ύπαρξη των αριθμών. Επίσης παρουσιάζεται και αξιολογείται η απάντηση που δίνει ο νεολογικισμός στο δίλημμα του Benacerraf (1973).

Το ***τρίτο*** κεφάλαιο επικεντρώνεται στην πρώτη προκείμενη του επιχειρήματος των Hale & Wright για την ύπαρξη των φυσικών αριθμών. Σύμφωνα με αυτήν, οι αριθμητικές εκφράσεις συμπεριφέρονται συντακτικά ως ενικοί όροι μέσα στις προτάσεις της αριθμητικής. Παρουσιάζεται η αρχή της συντακτικής προτεραιότητας με βάση την οποία οι νεολογικιστές ερμηνεύουν τον Frege. Επίσης περιγράφεται αναλυτικά το σύνολο των συντακτικών κριτηρίων με τα οποία οι νεολογικιστές επιχειρούν, αφενός να διαχωρίσουν την κατηγορία των ενικών όρων από άλλες κατηγορίες εκφράσεων και αφετέρου να ελέγξουν την συμπεριφορά των αριθμητικών όρων. Στη συνέχεια εντοπίζονται και επισημαίνονται συγκεκριμένες αδυναμίες του σχεδιασμού των εν λόγω συντακτικών κριτηρίων ως προς την επάρκεια και την πληρότητά τους να εγγυηθούν μια συγκεκριμένη συντακτική συμπεριφορά για μια σειρά εκφράσεων. Στο δεύτερο μέρος εξετάζεται η εναλλακτική δυνατότητα της αντιμετώπισης των αριθμητικών εκφράσεων ως κατηγορηματικών προσδιορισμών.

Το ***τέταρτο*** κεφάλαιο εξετάζει τον ισχυρισμό των νεολογικιστών ότι οι προτάσεις της αριθμητικής είναι αληθείς. Παρουσιάζεται η κριτική που ασκεί ο νομιναλιστής Hartry Field στη μαθηματική αλήθεια γενικότερα και οι βασικές αρχές

άλλων αριθμών, όπως πχ. πραγματικών, φανταστικών, μιγαδικών κλπ.

του νομιναλιστικού του προγράμματος. Εκτίθενται οι απόψεις του Field σύμφωνα με τις οποίες η μεγάλη επιτυχία των μαθηματικών στις επιστημονικές εφαρμογές και η χρησιμότητά τους δεν οφείλεται κατ'ανάγκην στη μαθηματική αλήθεια αλλά μπορεί να δικαιολογηθεί και με διαφορετικό τρόπο. Παρουσιάζεται η έννοια της συντηρητικότητας του Field. Ακολουθεί η κριτική των Hale & Wright στον Field, σύμφωνα με την οποία ο Field αδυνατεί να υποστηρίξει το ψεύδος των υπαρκτικών μαθηματικών προτάσεων και οφείλει να αρκεστεί σε ένα αγνωστικιστικό συμπέρασμα. Ακολουθεί η περιγραφή του ενδεχομενικού νομιναλισμού του Field.

Το ***πέμπτο*** κεφάλαιο αφορά την κριτική που ασκεί ο Field στην αλήθεια των αριθμητικών ταυτοτήτων της μορφής «Nx:Fx=Nx:Gx» καθώς και στην αλήθεια των ίδιων των ισοδυναμιών D= και N=. Ο ίδιος παρομοιάζει τα οντολογικά συμπεράσματα των Hale & Wright για την ύπαρξη των διευθύνσεων και των αριθμών με εκείνα του Ανσελμου για την ύπαρξη του Θεού. Επιπλέον, απορρίπτει την ισοδυναμία N= και προτείνει ως ορισμό της έννοιας του φυσικού αριθμού, μια εναλλακτική υποθετική πρόταση. Ακολουθεί η απάντηση του Wright στις επικρίσεις.

Το ***έκτο*** κεφάλαιο επιχειρεί να δικαιολογήσει τον a priori αληθή χαρακτήρα της N= με βάση το status της. Η N= δεν είναι αναλυτική (με βάση τον ορισμό της αναλυτικότητας του Frege) και δεν συνιστά αυστηρό ορισμό αλλά μία «εξήγηση» της έννοιας του φυσικού αριθμού. Ακολούθως γίνεται αναφορά στους έμμεσους ορισμούς και σε διάφορες διατυπώσεις έμμεσων ορισμών που χρησιμοποιούνται στην επιστήμη. Αναπτύσσεται η επίσημη άποψη του νεολογικισμού σύμφωνα με την οποία η N= αποτελεί έμμεσο ορισμό της έννοιας του φυσικού αριθμού. Στη συνέχεια, εξετάζεται η N= ως προς τις ιδιότητες της συνέπειας, της συντηρητικότητας και κυρίως της μη αλαζονείας. Ακολουθεί μια ενότητα που αφορά σε συγκεκριμένες δυσκολίες που υπάρχουν σχετικά με την N=.

Το ***έβδομο*** κεφάλαιο αναφέρεται στη μαθηματική αναφορά. Εδώ εξετάζεται το κατά πόσον, από τη συντακτική συμπεριφορά των αριθμητικών όρων ως ενικών όρων και από την αλήθεια των αριθμητικών προτάσεων, προκύπτει η ύπαρξη αντικειμένων αναφοράς των αριθμητικών όρων και αν αυτή η ύπαρξη είναι ερμηνεύσιμη ρεαλιστικά. Παρουσιάζονται διάφορα προβλήματα για τη ρεαλιστική ερμηνεία της αναφοράς, όπως πχ. οι απόψεις του Dummett για την «ισχνή» αναφορά των αφηρημένων ενικών όρων, η άποψη του αναγωγισμού, η κριτική του Rumfit και τέλος οι ερμηνείες της αναφοράς που επιχειρούνται με βάση το πρόγραμμα του νεολογικισμού. Υποστηρίζεται ότι η αναφορά των αριθμητικών όρων είναι το κατ'εξοχήν παράδειγμα προσδιορισμού της αναφοράς, που γίνεται, όχι με τις μεθόδους της κατάδειξης ή της αιτιακής σχέσης που επικαλείται ο εμπειρισμός, αλλά μέσω μιας πρότασης-πλαισίου της οποίας οι συνθήκες αληθείας είναι προσδιορίσιμες. Στη συνέχεια, διερευνάται η σχέση αναγωγισμού-ρεαλισμού. Εξετάζεται επίσης η έννοια της ανακατανομής του περιεχομένου μιας πρότασης, με βάση την οποία ο νεολογικισμός εξηγεί τη σχέση αριστερής και δεξιάς πρότασης των ισοδυναμιών του. Η τελευταία ενότητα του κεφαλαίου μελετά την κριτική που έχει ασκηθεί στο νεολογικισμό και η οποία βασίζεται στο status των αριθμητικών εκφράσεων ως οριστικών περιγραφών.

Το ***όγδοο*** κεφάλαιο προσπαθεί να απαντήσει στο ερώτημα εάν η συνέπεια ενός έμμεσου ορισμού αρκεί για να εξασφαλιστεί μια ανακαλυπτική διάσταση της λειτουργίας του, προς υποστήριξη της ρεαλιστικής θέσης. Με παράδειγμα την N= , διαπιστώνεται ότι η συνέπεια δεν είναι αρκετή αλλά χρειάζονται άλλες ιδιότητες των έμμεσων ορισμών και των αφαιρετικών αρχών ειδικότερα, μεταξύ των οποίων και η 'μετριοπάθεια' (modesty). Η N= διαθέτει αυτή την ιδιότητα. Στη συνέχεια εξετάζεται η συμβολή της N= στο θέμα της θεμελίωσης της αριθμητικής γνώσης ως a priori γνώσης.

Το ***ένατο*** κεφάλαιο συνεχίζει την προβληματική γύρω από το θέμα της αναφοράς, αυτή τη φορά ωστόσο, με την έκθεση άλλου είδους δυσκολιών που προκύπτουν στην προσπάθεια να ερμηνευτεί αυτή ρεαλιστικά. Γίνεται αναφορά στο έτερο δίλημμα του Benacerraf (1965) που αποτελεί ένα είδος σημασιολογικής κριτικής στον μαθηματικό ρεαλισμό. Η κριτική αυτή βασίζεται στην αναγωγή, μέσω μοντελοποίησης, της αριθμητικής στη συνολοθεωρία και εκφράζει το δίλημμα ότι αν οι αριθμοί είναι αντικείμενα τότε θα πρέπει να επιλεγεί η συγκεκριμένη συνολοθεωρητική εκδοχή με την οποία ταυτίζονται. Το δίλημμα στοχεύει να πλήξει σημασιολογικά τον μαθηματικό ρεαλισμό, εκφράζοντας ένα είδος απροσδιοριστίας της μαθηματικής αναφοράς. Εκτίθεται η στρουκτουραλιστική προσέγγιση του Benacerraf και στη συνέχεια περιγράφονται διάφορες εκδοχές του μαθηματικού στρουκτουραλισμού οι οποίες και αξιολογούνται. Ακολουθεί η απάντηση που δίνει ο Balaguer στο παραπάνω δίλημμα, μέσω της αποδοχής της μη μοναδικότητας των αντικειμένων αναφοράς των αριθμητικών όρων. Η προσέγγιση του Balaguer θεωρείται συμβατή με το μαθηματικό ρεαλισμό.

Το ***δέκατο*** κεφάλαιο αναφέρεται στο πρόβλημα του Καίσαρος το οποίο έπαιξε σημαντικότατο ρόλο στην εξέλιξη του προγράμματος του λογικισμού του Frege. Επιχειρούνται ερμηνευτικές προσεγγίσεις του προβλήματος, σύμφωνα με τις οποίες η Ν= αδυνατεί να λειτουργήσει ως κριτήριο εφαρμογής της έννοιας του φυσικού αριθμού. Ακολουθεί η περιγραφή των προσπαθειών των Hale & Wright να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα αυτό, ώστε να μην πλήττεται α. η θεμελιώδης σημασία της ισοδυναμίας Ν= στο πρόγραμμα του νεολογικισμού και β. η θέση τους για τον προσδιορισμό των αριθμών ως μοναδικών αντικειμένων. Επιχειρείται αξιολόγηση των συγκεκριμένων προσπαθειών.

Το ***ενδέκατο*** κεφάλαιο επιχειρεί να παρουσιάσει το πρόβλημα του Καίσαρος ως σχετικό με το status της ισοδυναμίας Ν= . Γι αυτό το λόγο περιγράφεται η διαμάχη μεταξύ Frege και Hilbert για το ρόλο των ορισμών στα μαθηματικά όπως αυτή προκύπτει από την μεταξύ τους αλληλογραφία. Το πρόβλημα του Καίσαρος προσεγγίζεται ως ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα των έμμεσων ορισμών γενικότερα. Διερευνάται επίσης σε ποιο βαθμό η μη 'μοναδικότητα' πλήττει τη ρεαλιστική θέση του νεολογικισμού. Στη συνέχεια διαπιστώνεται ότι στην περίπτωση της αριθμητικής Frege υπάρχει ένα είδος κατηγορικότητας που επιτρέπει μια ερμηνεία μοναδικότητας των φυσικών αριθμών ως 'μοναδικότητα μέχρι ισομορφισμού'. Η ερμηνεία αυτή θεωρείται αναγκαία για τη βασιμότητα της ρεαλιστικής θέσης του νεολογικισμού.

Ακολουθεί συνοπτική παρουσίαση των επί μέρους συμπερασμάτων των προηγούμενων κεφαλαίων.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τα μέλη της 3-μελούς συμβουλευτικής επιτροπής και συγκεκριμένα:

τον αναπλ. Καθηγητή κ. Στ. Ψύλλο, επιβλέποντα, για την αμέριστη βοήθεια, την ερευνητική καθοδήγηση, τις κατευθύνσεις, τη διαμόρφωση στόχων, τις επιμελείς υποδείξεις στα κείμενά μου και κυρίως για τη διαμόρφωση ενός κοινού πλαισίου έρευνας, διαλόγου και ανταλλαγής απόψεων σχετικά με το θέμα του Νεολογικισμού,

τον καθηγητή κ. Δ. Αναπολιτάνο, τόσο για την πρώτη γνωριμία με το αντικείμενο της Φιλοσοφίας των Μαθηματικών, ήδη στα φοιτητικά μου χρόνια στο Μαθηματικό Τμήμα του Παν/μίου Αθηνών, όσο και για την περαιτέρω στήριξη και καθοδήγησή του από τα *μεταπτυχιακά χρόνια και έπειτα, τις συμβουλές, τις υποδείξεις και τις παρατηρήσεις του,*

τον καθηγητή κ. Α. Μπαλτά, που είχε επιβλέψει την μεταπτυχιακή μου εργασία στο δίλημμα του Benacerraf, για το συνεχές ενδιαφέρον του, την ενθάρρυνση και φροντίδα, τις απόψεις και παρατηρήσεις του.

Επίσης όλους τους καθηγητές μου από το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στην 'Ιστορία και Φιλοσοφία των Επιστημών και της Τεχνολογίας'.

Κεφ.1

Μορφές του μαθηματικού ρεαλισμού

Με τον όρο 'μαθηματικός ρεαλισμός' στη φιλοσοφία των μαθηματικών εννοούμε κυρίως τη φιλοσοφική άποψη που υποστηρίζει την ύπαρξη μιας μαθηματικής πραγματικότητας που δεν επινοείται από τον ανθρώπινο νου αλλά είναι ανεξάρτητη από αυτόν. Ετσι ο όρος χρησιμοποιείται για να εκφράσει τη θέση υπέρ της πραγματικής (και ανεξάρτητης από τον ανθρώπινο γνώστη) ύπαρξης μαθηματικών οντοτήτων. Ο μαθηματικός ανακαλύπτει ως ένα βαθμό τις οντότητες αυτές και δεν τις κατασκευάζει ο ίδιος. Αλλοτε ο όρος ‘μαθηματικός ρεαλισμός’ αναφέρεται στη σημασιολογική θέση ότι κάθε μαθηματική πρόταση είναι αληθής ή ψευδής ανεξάρτητα από τη δυνατότητα του ανθρώπινου γνώστη να το γνωρίζει αυτό. Επιπλέον συνηθίζεται από κάποιους φιλοσόφους και ο όρος ‘πλατωνισμός’ για να χαρακτηρίσει τη θέση υπέρ της ύπαρξης μαθηματικών οντοτήτων[2]. Η χρήση του όρου ‘μαθηματικός πλατωνισμός’ παραπέμπει βέβαια στον Πλάτωνα. Ο Πλάτων δεχόταν την ύπαρξη των Ιδεών οι οποίες είναι αιώνιες και απαρασάλευτες οντότητες, αναλλοίωτες, αμετάβλητες και ανεπηρέαστες από την ενδεχομενικότητα του φυσικού κόσμου. Μοντέλο των πλατωνικών Ιδεών είναι οι αριθμητικές και γεωμετρικές. Ένα οποιοδήποτε μαθηματικό θεώρημα περιγράφει τις μαθηματικές Ιδέες και τις δομικές τους σχέσεις[3]. Η γνώση των μαθηματικών Ιδεών προϋπάρχει στην αθάνατη ανθρώπινη ψυχή αλλά για να λειτουργήσει ως ανάμνηση, η ψυχή πρέπει να αφυπνιστεί με τη βοήθεια της αισθητηριακής αντίληψης και με τη διαλεκτική μέθοδο.

Σήμερα, η χρήση του όρου ‘μαθηματικός πλατωνισμός’, πολύ διαδεδομένη στη σύγχρονη φιλοσοφική συζήτηση, αναφέρεται άλλοτε σε καθόλου όντα και άλλοτε σε ατομικά αλλά αφηρημένα αντικείμενα. Πχ. ένας μαθηματικός πλατωνιστής μπορεί να θεωρεί τα *σύνολα* ως ατομικά αντικείμενα ενώ κάποιος άλλος μαθηματικός πλατωνιστής να τα θεωρεί ως καθόλου όντα. Οι φυσικοί αριθμοί θεωρούνται συνήθως αφηρημένα αντικείμενα (particulars) αν και δεν λείπουν φιλόσοφοι (πχ. Maddy) που τους έχουν προσεγγίσει ως ιδιότητες συνόλων. Κάποιοι φιλόσοφοι επιμένουν στον όρο ‘μαθηματικός πλατωνισμός’ αντί του όρου ‘μαθηματικός ρεαλισμός’ ενώ ταυτόχρονα διαχωρίζουν τη θέση τους από τις απόψεις του Πλάτωνα χαρακτηρίζοντας τις τελευταίες ως ‘παραδοσιακό πλατωνισμό’ [4]. Σε κάθε περίπτωση και ανεξάρτητα από τις επί μέρους αποχρώσεις στην ορολογία, μας απασχολεί η φιλοσοφική θέση ότι υπάρχουν μαθηματικές οντότητες οι οποίες ανακαλύπτονται και δεν κατασκευάζονται ούτε επινοούνται από τον ανθρώπινο παράγοντα.

Στη σύγχρονη φιλοσοφία των μαθηματικών, οι απόψεις του μαθηματικού ρεαλισμού-πλατωνισμού γενικά ακολουθούν κυρίως τρεις βασικές παραδόσεις.

[2] Για παράδειγμα, από τον Paul Bernays στο «On Platonism in Mathematics».

[3] Πρλ. Αναπολιτάνος, Δ. (1985), 32

Εκτός από την παράδοση του Frege στην οποία ανήκει ο αριθμητικός πλατωνισμός των Hale & Wright, δηλαδή το υπό διερεύνηση εδώ θέμα, έχουν αναπτυχθεί δύο ακόμα πολύ σημαντικές παραδόσεις. Η μία απ'αυτές βασίζεται στις απόψεις του Goedel ενώ η άλλη στα επιχειρήματα των Quine-Putnam για το αναπόδραστο των μαθηματικών οντοτήτων. Σε αυτό το κεφάλαιο ειδικότερα, θα αναφερθούμε σε αυτές τις δύο μορφές του μαθηματικού ρεαλισμού, οι οποίες είναι μη φρεγκιανές προσεγγίσεις.

1. Ο μαθηματικός ρεαλισμός του Goedel

Μία από τις σημαντικότερες εκδοχές του μαθηματικού ρεαλισμού, η οποία είχε μεγάλη συμβολή στη φιλοσοφική συζήτηση για τα μαθηματικά, είναι αυτή του Goedel. Σύμφωνα με τον Goedel, τα σύνολα είναι μαθηματικές οντότητες που έχουν ανεξάρτητη ύπαρξη από τους ορισμούς και τις νοητικές μας κατασκευές. Οι στοιχειώδεις αλήθειες σχετικά με τις ιδιότητες των συνόλων και τις μεταξύ τους σχέσεις, μπορούν να συλληφθούν από το νου και αποτελούν τη βάση για συνθετότερες μαθηματικές αλήθειες. Ο Goedel αποδέχεται ένα μαθηματικό σύμπαν συνόλων, πραγματικό και ανεξάρτητο από τον ανθρώπινο νου. Ο ίδιος αναφέρει: «μου φαίνεται ότι η υπόθεση της ύπαρξης τέτοιων αντικειμένων είναι τόσο νόμιμη όσο και η υπόθεση της ύπαρξης φυσικών σωμάτων και υπάρχουν εξίσου πολλοί λόγοι για να πιστέψουμε στην ύπαρξή τους. Τα αντικείμενα αυτά είναι, κατά την ίδια έννοια, αναγκαία προκειμένου να συγκροτηθεί ένα ικανοποιητικό σύστημα για τα μαθηματικά, όπως ακριβώς τα φυσικά αντικείμενα είναι αναγκαία για να συσταθεί μια ικανοποιητική θεωρία περί των αισθητηριακών μας αντιλήψεων» (Benacerraf & Putnam, 1983, 456). Μία χαρακτηριστική αναφορά του Goedel που αποδεικνύει την πεποίθησή του σχετικά με την ύπαρξη μιας ανεξάρτητης από μας μαθηματικής πραγματικότητας είναι ότι τα στοιχειώδη αξιώματα της θεωρίας συνόλων «επιβάλλονται πάνω μας ως αληθινά» (βλ. Benacerraf & Putnam, 1983, 484).

Στον ρεαλισμό του Goedel, έχει ενδιαφέρον ο τρόπος με τον οποίο ο ίδιος απαντά στο γνωσιολογικό ερώτημα: πώς γνωρίζουμε τις στοιχειώδεις αλήθειες για τα

---

[4]Για παράδειγμα η Maddy χρησιμοποιεί τον όρο "μαθηματικός πλατωνισμός" για να υποστηρίξει την ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων και τον όρο "παραδοσιακός πλατωνισμός" για να αναφερθεί στις

σύνολα; Ο ίδιος υποστηρίζει ότι υπάρχει ένα είδος διανοητικής λειτουργίας η οποία παίζει, για τα μαθηματικά, ρόλο ανάλογο με αυτόν που παίζει η αισθητηριακή αντίληψη για τη φυσική πραγματικότητα. Τη λειτουργία αυτή, ονομάζει «μαθηματική εποπτεία» (intuition). Η αναλογία έγκειται στο ότι στη μία περίπτωση συλλαμβάνουμε στοιχειώδεις αλήθειες για τη φυσική πραγματικότητα μέσω της αισθητηριακής αντίληψης ενώ στην άλλη περίπτωση συλλαμβάνουμε στοιχειώδεις αλήθειες (αξιώματα) για την μαθηματική πραγματικότητα μέσω της μαθηματικής εποπτείας. Η διαφορά έγκειται στο ότι η μαθηματική εποπτεία συνιστά a priori γνώση η οποία δεν προυποθέτει καθόλου αιτιακού τύπου αλληλεπιδράσεις και βασίζεται εξ ολοκλήρου στον λόγο ενώ αντίθετα η αισθητηριακή αντίληψη αποτελεί a posteriori γνωστική διαδικασία. Πάντως και στις δύο περιπτώσεις υποχρεωνόμαστε να δεχθούμε την ύπαρξη αντικειμένων για να δικαιολογήσουμε είτε τα δεδομένα της αισθητηριακής αντίληψης είτε τα δεδομένα της μαθηματικής εποπτείας.

Ο Goedel επεκτείνει αυτή την αναλογία σε ανώτερο επίπεδο ως αναλογία μεταξύ μαθηματικών και φυσικής. Σε ένα υψηλότερο από θεωρητική άποψη επίπεδο, οι προτάσεις της φυσικής δεν προκύπτουν άμεσα από τα αισθητηριακά δεδομένα και κατά παρόμοιο τρόπο οι μαθηματικές προτάσεις δεν είναι άμεσα εποπτεύσιμες. Βέβαια στα μαθηματικά, ένα πλήθος μαθηματικών προτάσεων προκύπτουν από τα αξιώματα μέσω της παραγωγής. Ενδιαφέρον όμως παρουσιάζει το γεγονός ότι κάποια αξιώματα πχ αυτά που αναφέρονται σε μεγάλους διατακτικούς και βρίσκονται σε ένα απομακρυσμένο από τη μαθηματική εποπτεία επίπεδο, δεν είναι καθόλου προφανή, επομένως στην περίπτωση αυτή, αναφέρει ο Goedel (op cit., 477), εμπιστευόμαστε τα αξιώματα με κριτήριο τον τρόπο με τον οποίο φωτίζουν μια ολόκληρη μαθηματική περιοχή και την επιτυχία τους στο να παρέχουν μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων της μαθηματικής θεωρίας. Το ίδιο κάνουμε και στην περίπτωση της φυσικής, για προτάσεις που αξιολογούμε με βάση τη γονιμότητα, την αποτελεσματικότητα και γενικότερα το ρόλο που παίζουν μέσα σε μια θεωρία. Συνεπώς, τα στοιχειώδη αξιώματα της θεωρίας συνόλων μας επιβάλλονται μέσω της εποπτείας ενώ τα πολυπλοκότερα και πιο σύνθετα αξιώματα γίνονται δεκτά με βάση το ρόλο που παίζουν και τις συνέπειες που παρουσιάζουν μέσα στις μαθηματικές θεωρίες.

απόψεις του Πλάτωνα, βλ. Maddy, P. (1990), 21

Σε ότι αφορά προβλήματα της συνολοθεωρίας για τα οποία δεν διαθέτουμε απάντηση όπως πχ. το πρόβλημα του συνεχούς, ο Goedel πίστευε ότι δεν διαθέτουμε μια πλήρη εικόνα του τοπίου της συνολοθεωρίας, τέτοια που να μας επιτρέπει να απαντήσουμε σε τέτοιου είδους ερωτήματα και ότι αυτό δεν αποκλείεται να επιτευχθεί στο μέλλον με τη βοήθεια προτάσεων που θα φωτίζουν περισσότερο τη μαθηματική αυτή περιοχή.

Το βασικό πρόβλημα της προσέγγισης του Goedel θα εξετάσουμε στην ενότητα που αναφέρεται στο δίλημμα του Benacerraf.

2. Τα επιχειρήματα των Quine-Putnam: το 'αναπόδραστο' των μαθηματικών αντικειμένων

Μία δεύτερη παράδοση που κυριαρχεί στο φιλοσοφικό ρεύμα του σύγχρονου μαθηματικού ρεαλισμού συνδέεται με συγκεκριμένες απόψεις των Quine και Putnam για τα μαθηματικά. Ο μαθηματικός ρεαλισμός αυτού του τύπου βασίζεται στα επιχειρήματα για το αναπόδραστο των μαθηματικών. Διαρθρώνουμε και διατυπώνουμε τις επιστημονικές μας θεωρίες με μια οντολογία μη παρατηρήσιμων φυσικών οντοτήτων και μια οντολογία μαθηματικών οντοτήτων, κυρίως συνόλων και αριθμών. Οι Quine & Putnam πιστεύουν ότι για να συγκροτήσουμε τις επιστημονικές μας θεωρίες και να οργανώσουμε τα δεδομένα μας με τον καλύτερο δυνατό τρόπο, είναι απολύτως αναγκαίο να αποδεχθούμε την ύπαρξη μη παρατηρήσιμων φυσικών οντοτήτων και εξίσου την ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων. Βασική θέση του Putnam είναι ότι οι μαθηματικές οντότητες δεν διευκολύνουν απλώς την επιστημονική περιγραφή και διατύπωση αλλά ότι οι επιστημονικές μας θεωρίες δεν μπορούν να συγκροτηθούν και τα ασύνδετα κομμάτια της εμπειρίας μας δεν μπορούν να οργανωθούν για να δώσουν επαρκείς επιστημονικά περιγραφές του φυσικού κόσμου, εάν δεν χρησιμοποιηθεί μια οντολογία μαθηματικών αντικειμένων. Συνεπώς, δεν έχουμε το δικαίωμα να τηρούμε ρεαλιστική στάση απέναντι στις μη παρατηρήσιμες φυσικές οντότητες και συγχρόνως να τηρούμε νομιναλιστική στάση απέναντι στις μαθηματικές οντότητες. Οφείλουμε να κρατήσουμε την ίδια στάση απέναντι και στους δύο αυτούς τύπους οντοτήτων οι οποίες είναι αναγκαίες κατά αναπόφευκτο τρόπο στην επιστήμη (Putnam, 1979, 60-78).

Ο μαθηματικός ρεαλισμός των Quine & Putnam, όπως προκύπτει από τα προαναφερθέντα επιχειρήματα, συνιστά μια ρεαλιστική θέση που δεν φέρει τα χαρακτηριστικά του αποκαλούμενου συχνά ως κλασικού μαθηματικού ρεαλισμού, δηλαδή τον a priori χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης και την αναγκαία αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων. Στην περίπτωση αυτή, η δικαιολόγηση των μαθηματικών προτάσεων όπως και των προτάσεων της φυσικής γίνεται με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή a posteriori, αφού το φυσικό και το μαθηματικό μέρος αποτελούν ένα ενιαίο πλέγμα πεποιθήσεων υποκείμενο στον εμπειρικό έλεγχο. Δεν αποκλείει επίσης την αναθεωρησιμότητα για το μαθηματικό μέρος με τον ίδιο τρόπο που δεν την αποκλείει για το φυσικό. Ωστόσο αυτού του είδους ο μαθηματικός ρεαλισμός είναι ιδιαίτερα σεβαστός –ακόμα στους αντιπάλους του μαθηματικού ρεαλισμού- διότι υποστηρίζει κάτι που γίνεται φανερό στην καθημερινή επιστημονική πρακτική: το ότι δεν μπορούμε να εργαστούμε επιστημονικά χωρίς αναφορά σε μαθηματικές οντότητες. Οι επιστημονικές μας θεωρίες είναι εξίσου δεσμευμένες σε φυσικές θεωρητικές οντότητες και σε μαθηματικά σύνολα και αριθμούς.

Από την άλλη πλευρά οι μαθηματικοί, εξοικειωμένοι με την καθαρά μαθηματική πρακτική, δεν περιμένουν τη δικαιολόγηση της ύπαρξης των μαθηματικών οντοτήτων να προέλθει μέσα από την επιστημονική γλώσσα της φυσικής ή μέσα από τα εργαστήρια των φυσικών[5]. Η ίδια η δύναμη της μαθηματικής γλώσσας καθώς και οι ιδιαίτερες μαθηματικές μέθοδοι ανάπτυξης και εξέλιξης των καθαρά μαθηματικών κλάδων μπορούν να παράσχουν επιχειρήματα υπέρ του μαθηματικού ρεαλισμού. Αλλωστε, έχει εκφραστεί η άποψη ότι μέσω των επιχειρημάτων των Quine & Putnam, ένα μικρό μόνο μέρος των μαθηματικών μπορεί να δικαιολογηθεί, αυτό το οποίο χρησιμοποιείται στις εφαρμογές ενώ το μαθηματικό σύμπαν είναι κατά πολύ μεγαλύτερο.

Ας σημειωθεί ότι ακόμα και αντίπαλοι του μαθηματικού ρεαλισμού, πχ. ο Hartry Field χαρακτηρίζουν τα επιχειρήματα του αναπόδραστου ως τα σοβαρότερα που έχει να παρουσιάσει το φιλοσοφικό ρεύμα του μαθηματικού ρεαλισμού. Μία στρατηγική κατάρριψης αυτών των επιχειρημάτων συνήθως συνίσταται στον διαχωρισμό της εμπειρικής επιστήμης και των εμπειρικών προτάσεων σε μια

Βλ. πχ. Maddy, P. (1990), Realism in Mathematics, 31 νομιναλιστική και μια πλατωνιστική συνιστώσα και ύστερα στην εξάλειψη της δεύτερης συνιστώσας. Γενικότερα, η ευλογοφάνεια των επιχειρημάτων για το αναπόδραστο των μαθηματικών οντοτήτων οφείλεται στο ότι οι προτάσεις της εμπειρικής επιστήμης δεσμεύονται εξίσου σε φυσικές μη παρατηρήσιμες οντότητες και σε μαθηματικές οντότητες. Συνεπώς κάποιος οφείλει να αντιμετωπίζει ομοιόμορφα τις οντότητες αυτές. Είναι εύλογο το ότι τα γεγονότα που καθιστούν αληθείς αυτές τις προτάσεις είναι μεικτά δηλαδή συνίστανται σε καθαρά φυσικά γεγονότα και σε καθαρά μαθηματικά γεγονότα, τα οποία είναι πολύ δύσκολο να διαχωριστούν. Σ'αυτή την περίπτωση τρεις στάσεις είναι δυνατές: α. αποδέχεται κάποιος την ύπαρξη τόσο των μη παρατηρήσιμων φυσικών οντοτήτων όσο και την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων στις οποίες δεσμεύονται οι εμπειρικές θεωρίες β. δεν αποδέχεται ούτε την ύπαρξη των μη παρατηρήσιμων φυσικών οντοτήτων ούτε την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων και κρατά εξίσου μια ινστρουμενταλιστική στάση απέναντι και στις δύο γ. δέχεται ότι μόνον η καθαρά φυσική συνιστώσα της εμπειρικής επιστήμης συλλαμβάνει το πλήρες περιεχόμενό της επιστήμης και θεωρεί τις μαθηματικές οντότητες ως φανταστικές (fictional). Αυτό είναι κάτι που μπορεί να ισχύει ακόμα και αν δεν είναι δυνατός ο διαχωρισμός της φυσικής από τη μαθηματική συνιστώσα. Η στάση αυτή διευκολύνει έναν επιστημονικό ρεαλιστή που δεν επιθυμεί να είναι ταυτόχρονα και μαθηματικός ρεαλιστής.

Στην επόμενη παράγραφο θα αναφερθούμε στα προβλήματα που αντιμετωπίζει ο παραδοσιακός μαθηματικός ρεαλισμός (τύπου Goedel) τα οποία προέρχονται από την περιοχή της γνωσιολογίας.

3. Η κριτική του Paul Benacerraf στον μαθηματικό ρεαλισμό (1973)

Στο άρθρο του "Mathematical Truth" (1973), ο Paul Benacerraf θέτει ένα σοβαρό πρόβλημα για τη φιλοσοφία των μαθηματικών. Τον απασχολεί κατά πόσον είναι δυνατό μια αποδεκτή σημασιολογία για τα μαθηματικά να εναρμονιστεί με μια ικανοποιητική γνωσιολογία. Πιστεύει ότι μια πλήρης φιλοσοφική θεώρηση για τα μαθηματικά απαιτεί τον επιτυχή συνδυασμό και των δύο αυτών συνθηκών, δηλαδή της σημασιολογίας και της γνωσιολογίας, οδηγείται όμως στην απαισιόδοξη διαπίστωση ότι οι διάφορες θεωρίες της φιλοσοφίας των μαθηματικών καλύπτουν είτε την πρώτη συνθήκη εις βάρος της δεύτερης είτε τη δεύτερη εις βάρος της πρώτης. Συμβαίνει δηλαδή να παρέχουν μια ικανοποιητική θεωρία αλήθειας και να αναπτύσσουν μια αποδεκτή σημασιολογία αλλά να μην δίνουν μια εξίσου ικανοποιητική απάντηση στο ερώτημα πώς προέρχεται η μαθηματική γνώση. Είτε, από την άλλη πλευρά, να απαντούν ικανοποιητικά στο γνωσιολογικό ερώτημα, υστερώντας όμως στο σημασιολογικό επίπεδο.

Ο Benacerraf χωρίζει τις προσεγγίσεις στη μαθηματική αλήθεια σε δύο κυρίως κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία προσεγγίσεων η οποία παρέχει μια ικανοποιητική σημασιολογία αλλά υστερεί ως προς τη γνωσιολογία, ονομάζεται από τον Benacerraf ως «standard account» (Benacerraf & Putnam, 410), «κανονική» ή «στερεοτυπική» ή «καθιερωμένη» προσέγγιση, η οποία εκφράζει την άποψη του μαθηματικού ρεαλισμού. Η καθιερωμένη προσέγγιση εξομοιώνει από λογική άποψη τις μαθηματικές με τις εμπειρικές προτάσεις, αντιμετωπίζει δηλαδή ενιαία, από άποψη λογικής δομής και ανάλυσης, τις μαθηματικές και μη μαθηματικές περιοχές της γλώσσας. Ετσι, πχ. οι προτάσεις :

(1) Υπάρχουν τουλάχιστον τρεις μεγάλες πόλεις παλαιότερες από τη Ν.Υόρκη

και

(2) Υπάρχουν τουλάχιστον τρεις τέλειοι αριθμοί μεγαλύτεροι από τον 17

έχουν συνθήκες αλήθειας που προσδιορίζονται με τον ίδιο τρόπο. Οι κανόνες αναφοράς και η χρήση των ποσοδεικτών υπόκεινται σε ενιαίο χειρισμό. Το βασικό πλεονέκτημα αυτού του τύπου προσέγγισης είναι ότι εξασφαλίζει κάποιο είδος οικονομίας, αφού η ίδια σημασιολογία που υιοθετούμε για τις εμπειρικές περιοχές της γλώσσας, μπορεί να εφαρμοστεί και για τις μαθηματικοποιημένες περιοχές[6]. Πρέπει μάλιστα να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη προσέγγιση δίνει ιδιαίτερη έμφαση στα σημασιολογικά χαρακτηριστικά μιας πρότασης (πχ. στην αναφορά των όρων) αφήνοντας περιθώριο στην υποστήριξη της άποψης ότι είναι δυνατή μία σύνδεση των όρων των προτάσεων με κάποια αντικειμενική μαθηματική πραγματικότητα. Για

[6]Οι συνθήκες αλήθειας των προτάσεων (1) και (2) προσδιορίζονται ενιαία: Η πρόταση (1) όπως και η πρόταση (2) είναι αληθής αν και μόνο αν τρία τουλάχιστον αντικείμενα από το σύμπαν το οποίο διατρέχει ο υπαρκτικός ποσοδείκτης, τα οποία επιπλέον ικανοποιούν τις ιδιότητες των αντίστοιχων κατηγορημάτων, βρίσκονται σε μια συγκεκριμένη σχέση με ένα αντικείμενο από το ίδιο σύμπαν.

παράδειγμα, τόσο ο όρος 'Νέα Υόρκη' όσο και ο όρος '17' αναφέρονται σε συγκεκριμένα αντικείμενα.

Παρά την επιτυχή λειτουργία της «καθιερωμένης» προσέγγισης στο σημασιολογικό επίπεδο (ο Benacerraf την χαρακτηρίζει ως την πληρέστερη και επιτυχέστερη), η προσέγγιση αυτή υστερεί στην εξήγηση του τρόπου απόκτησης της μαθηματικής γνώσης. Αυτό συμβαίνει διότι η υποτιθέμενη οντολογία των μαθηματικών αντικειμένων που αποτελούν τις αναφορές των μαθηματικών όρων βρίσκεται «πέρα από τα όρια ακόμα και του καλύτερα κατανοητού μέσου της ανθρώπινης γνωστικής ικανότητας» (Benacerraf & Putnam, 409). Τα μαθηματικά αντικείμενα (αριθμοί, σύνολα κλπ.) βρίσκονται, σύμφωνα τουλάχιστον με τις παραδοσιακές ρεαλιστικές αντιλήψεις, εκτός χωροχρονικού πλαισίου και κατά συνέπεια ξεφεύγουν από τους συνήθεις τρόπους γνωστικής πρόσβασης στα πράγματα.

Ενώ η καθιερωμένη προσέγγιση κινείται ικανοποιητικά στο σημασιολογικό επίπεδο υστερώντας ταυτόχρονα στο γνωσιολογικό επίπεδο, το αντίθετο συμβαίνει για τον δεύτερο τύπο προσεγγίσεων στη μαθηματική αλήθεια. Οι διάφορες αντιρεαλιστικές προσεγγίσεις υστερούν ως προς τη σημασιολογία χωρίς να αντιμετωπίζουν ιδιαίτερη δυσκολία στο να παράσχουν απαντήσεις σχετικά με τον τρόπο απόκτησης της μαθηματικής γνώσης. Ο Benacerraf αναφέρεται στις αντιρεαλιστικές μαθηματικές προσεγγίσεις, με τον όρο «συνδυαστικές» («combinatorial»). Οι προσεγγίσεις αυτές αντιμετωπίζουν με διαφορετικό τρόπο τις παραπάνω προτάσεις (1) και (2) θεωρώντας ότι ο προσδιορισμός των συνθηκών αλήθειας των εμπειρικών προτάσεων διαφέρει από τον προσδιορισμό των συνθηκών αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων. Όπως ο Benacerraf αναφέρει, οι αντιρεαλιστικές προσεγγίσεις "επιχειρούν να περιγράψουν τις συνθήκες αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων στη βάση συντακτικών και όχι σημασιολογικών θεωρήσεων" (Benacerraf & Putnam, 1983, 407). Στην περίπτωση αυτή, ο προσδιορισμός των συνθηκών αλήθειας βασίζεται μόνο στην τυπική παραγωγή των μαθηματικών προτάσεων από συγκεκριμένα σύνολα αξιωμάτων. Ετσι, τα συντακτικά χαρακτηριστικά, όπως πχ. η έννοια της απόδειξης είναι κυρίαρχα, αφού η απόδοση τιμών αλήθειας στις προτάσεις βασίζεται κυριολεκτικά στους συντακτικούς κανόνες. Η διαφορά είναι σημαντική. Στην καθιερωμένη προσέγγιση, δεν αρκεί μία πρόταση να είναι απλώς θεώρημα σε κάποιο τυπικό σύστημα αλλά απαιτείται η ιδιότητα του θεωρήματος να συνοδεύεται ταυτόχρονα από μία σαφή εξήγηση για τη σύνδεση μεταξύ αποδειξιμότητας και αλήθειας. Κάτι τέτοιο όμως προυποθέτει μία σύνδεση του συντακτικού και του σημασιολογικού επιπέδου. Αντίθετα, στις αντιρεαλιστικές προσεγγίσεις, η αλήθεια είναι κάτι που μεταφέρεται απλώς από ένα σύνολο προτάσεων σε ένα άλλο. Το σημασιολογικό επίπεδο παρουσιάζεται εδώ εντελώς υποβαθμισμένο ενώ κανένα είδος σύνδεσης με κάποια εξωτερική (της γλώσσας) πραγματικότητα δεν υπονοείται. Ωστόσο, στις αντιρεαλιστικές προσεγγίσεις, το γνωσιολογικό ερώτημα για τα μαθηματικά είναι εύκολο να απαντηθεί, είναι σχεδόν τετριμμένο: αποκτούμε μαθηματική γνώση, αποδεικνύοντας μαθηματικές προτάσεις από άλλες προτάσεις και αξιώματα. Οπως αναφέρει ο Benacerraf, «δεν μας εκπλήσσει το γεγονός ότι μέσω αυτών των (αντιρεαλιστικών) προσεγγίσεων της μαθηματικής αλήθειας, πολύ λίγο μυστήριο καλύπτει τον τρόπο απόκτησης τις μαθηματικής γνώσης. Χρειάζεται μόνο εξήγηση για την ικανότητά μας να παράγουμε και να διατηρούμε τυπικές εξηγήσεις» (Benacerraf & Putnam, op.cit. 409).

Το συμπέρασμα του Benacerraf στο άρθρο του 1973, είναι ότι καμιά από τις μέχρι τώρα θεωρίες της σύγχρονης φιλοσοφίας των μαθηματικών δεν είναι ικανοποιητική, επειδή καμιά δεν συνδυάζει συγχρόνως μια αποδεκτή σημασιολογία και μια πειστική απάντηση στο ερώτημα τι συνιστά μαθηματική γνώση. Και επειδή το πρόβλημα έχει μια σημασιολογική και μια γνωσιολογική συνιστώσα, η λύση θα'πρεπε να αναζητηθεί είτε στην πρώτη είτε στη δεύτερη. Εχει σημασία ότι το άρθρο παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τους μαθηματικούς ρεαλιστές επειδή τονίζει την κύρια αδυναμία της προσέγγισής τους. Η ρεαλιστική προσέγγιση αδυνατεί να απαντήσει στο ερώτημα για τη μαθηματική γνώση. Τα μαθηματικά αντικείμενα βρίσκονται πέρα από τα όρια των μέσων της ανθρώπινης γνωστικής ικανότητας. Πώς μπορούμε να τα γνωρίσουμε;

Ακριβώς επειδή το άρθρο αυτό του Benacerraf αναδεικνύει την κύρια αδυναμία της ρεαλιστικής προσέγγισης, γι αυτό πολλοί αντιρεαλιστές φιλόσοφοι έχουν στηρίξει σ'αυτό, τις επιθέσεις τους κατά του μαθηματικού ρεαλισμού. Το άρθρο αποτέλεσε μία «γνωσιολογική πρόκληση» για το μαθηματικό ρεαλισμό. Βεβαίως ο ίδιος ο Benacerraf δεν απορρίπτει οριστικά το μαθηματικό ρεαλισμό, παρά την αξιοποίηση του επιχειρήματός του από τους αντιρεαλιστές προς αυτή την κατεύθυνση. Δεδομένων μάλιστα των πλεονεκτημάτων της καθιερωμένης προσέγγισης τα οποία ο ίδιος αναγνωρίζει (Benacerraf & Putnam, op.cit. 411), θεωρήθηκε ενδεδειγμένη από τους μαθηματικούς ρεαλιστές, η περαιτέρω διερεύνηση της δεύτερης συνιστώσας του προβλήματος, δηλαδή της γνωσιολογικής συνιστώσας.

Η συνήθης θεώρηση των μαθηματικών αντικειμένων ως απομακρυσμένων από το χωροχρονικό σύμπαν δεν αφήνει περιθώρια να υποτεθεί ότι είναι δυνατός κάποιος τρόπος σύνδεσής τους με τον γνώστη τους. Ωστόσο είναι απαραίτητος ένας κατάλληλος τρόπος σύνδεσης της μαθηματικής πραγματικότητας με τις αληθείς πεποιθήσεις που σχηματίζουμε γι αυτήν, αν θέλουμε να χαρακτηρίσουμε τις πεποιθήσεις αυτές ως γνώση.

Η μαθηματική εποπτεία την οποία προτείνει ο Goedel, θεωρείται έννοια αρκετά ασαφής για να παίξει το ρόλο του συνδετικού κρίκου μεταξύ γνώστη και μαθηματικών αντικειμένων. Βέβαια ο ρεαλιστής Goedel θεωρεί την υπόθεση για την ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων εξίσου νόμιμη με την υπόθεση της ύπαρξης των φυσικών σωμάτων. Σε ό,τι μάλιστα αφορά τα στοιχειώδη αξιώματα της θεωρίας συνόλων, γράφει ότι αυτά έχουν τη δύναμη να επιβάλλονται πάνω μας: «παρά την απόστασή τους από την αισθητηριακή εμπειρία, έχουμε πραγματικά κάτι σαν αντίληψη για τα αντικείμενα της θεωρίας συνόλων, όπως φαίνεται από το γεγονός ότι τα αξιώματα επιβάλλονται πάνω μας ως αληθινά» (Benacerraf & Putnam, op.cit. 484). Επιχειρεί έτσι, μία απάντηση στο γνωσιολογικό πρόβλημα με βάση την ύπαρξη μιας νοητικής λειτουργίας, της μαθηματικής εποπτείας, η οποία παίζει ρόλο ανάλογο με αυτόν της αισθητηριακής αντίληψης. Ο παραλληλισμός ωστόσο μαθηματικής εποπτείας και αισθητηριακής αντίληψης δεν είναι αρκετός για να εξηγήσει τι ακριβώς είναι η μαθηματική εποπτεία και αυτό είναι το ασθενές σημείο του ρεαλισμού του Goedel. Δηλώνεται ένα μέσο, χάρη στο οποίο ο γνώστης πληροφορείται για τα μαθηματικά αντικείμενα αλλά δεν δίνονται σαφείς πληροφορίες γι αυτό. Αυτός είναι και ο λόγος που αρκετοί αντιρεαλιστές φιλόσοφοι, όπως ο Hartry Field και ο Michael Dummet χαρακτηρίζουν την γκεντελιανή εποπτεία ως «μυστηριώδη» και ο Charles Chihara ως «χαλαρή εξήγηση».

Μία συγκεκριμένη παράγραφος του άρθρου "Mathematical Truth" του Benacerraf έγινε αφορμή για τη σύνδεση του προβλήματος με τις διάφορες αιτιακές θεωρίες γνώσης. Πράγματι, ο Benacerraf αναφέρει ότι ίδιος είναι υπέρ μιας αιτιακής αντίληψης, διότι «μια τέτοια θεωρία πρέπει να είναι ορθή και υπόκειται της έννοιας που διαθέτουμε για τη γνώση» (Benacerraf & Putnam, op.cit., 412-3). Για τα συνήθη φυσικά αντικείμενα, όπως πχ. σπίτια δέντρα κλπ., αυτή η αντίληψη εφαρμόζεται χωρίς προβλήματα. Κατ'επέκταση μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύει και στην περίπτωση γενικών νόμων ή φυσικών θεωριών. Χρειάζεται γενικά ένα είδος αιτιακής αλληλεπίδρασης ανάμεσα στην πεποίθηση του γνώστη ότι ισχύει p και στη συνθήκη που επιτρέπει στην p να ισχύει. Οι συνθήκες αλήθειας της p και η αιτία για την πεποίθηση του γνώστη πρέπει να συνδέονται μεταξύ τους. Διαφορετικά δεν μπορεί ο γνώστης να γνωρίζει ότι ισχύει p. Το πρόβλημα ωστόσο για τον ρεαλισμό είναι ότι τα μαθηματικά αντικείμενα θεωρούνται, κατά παράδοση, απομονωμένα από το χωροχρονικό πλαίσιο και ακατάλληλα στο να συμμετέχουν σε αιτιακές αλληλεπιδράσεις. Αν δηλαδή οι αριθμοί, τα σύνολα κλπ. είναι το είδος των οντοτήτων που υποτίθεται συνήθως ότι είναι , τότε δεν μπορεί να εξηγηθεί η σύνδεση ανάμεσα στις συνθήκες αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων και τους ανθρώπους που υποτίθεται ότι έχουν μαθηματική γνώση.

Η Maddy (1990, 36-7) εκθέτει τον ίδιο προβληματισμό ως εξής: για να συνιστά γνώση μια "αληθής και καλώς δικαιολογημένη πεποίθηση"[7] χρειάζεται κάτι περισσότερο: χρειάζεται αυτό που καθιστά την πεποίθηση αληθή να συνδέεται με κάποιο κατάλληλο τρόπο με αυτή την πεποίθηση. Για να γνωρίζω πχ. ότι 2+2 = 4, προυποτίθεται ότι τα αντικείμενα "2" και "4" παίζουν ένα αιτιακό ρόλο στη γέννηση της πεποίθησής μου. Αυτό όμως είναι αδύνατο, αν τα αντικείμενα αυτά θεωρηθούν, όπως παραδοσιακά θεωρούνται, απομονωμένα από το χωροχρονικό σύμπαν.

Με βάση αυτόν τον προβληματισμό, η γνωσιολογική πρόκληση για το μαθηματικό ρεαλισμό παίρνει μια πιο συγκεκριμένη μορφή: εάν δεχθούμε την ορθότητα της αιτιακής θεωρίας γνώσης και ότι τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν εκτός χωροχρονικού πλαισίου, τότε δεν μπορούμε να τα γνωρίσουμε. Ετσι, δεδομένων των αιτιακών θεωριών, ο μαθηματικός ρεαλισμός δεν απαντά στο πρόβλημα της μαθηματικής γνώσης.

Η απάντηση των αντιρεαλιστών στο επιχείρημα είναι ότι πρέπει να εγκαταλειφθεί η θέση του μαθηματικού ρεαλισμού. Σε ότι αφορά την υπεράσπιση

[7]Ο ορισμός της γνώσης ως αληθούς, καλώς δικαιολογημένης πεποίθησης ανάγεται στον Πλάτωνα. Ωστόσο, ο ίδιος ο Πλάτων και βέβαια πολύ αργότερα ο Gettier άσκησαν κριτική σ'αυτό τον ορισμό. Τέλος, ο Goldman θεώρησε ότι οι συνθήκες "αληθής", "δικαιολογημένη", "πεποίθηση" πρέπει να συμπληρωθούν με την επιπλέον συνθήκη ότι αυτό που καθιστά την πεποίθηση αληθή, χρειάζεται να είναι αιτιακά υπεύθυνο γι αυτή την πεποίθηση.

του μαθηματικού ρεαλισμού θα παρακολουθήσουμε παρακάτω τους κυριότερους προτεινόμενους τρόπους αντίδρασης.

Α. Αμφισβήτηση των αιτιακών θεωριών γνώσης.

Ορισμένοι φιλόσοφοι άσκησαν κριτική στην αιτιακή αντίληψη περί γνώσης και ή την απέρριψαν ή πρότειναν μετριότερες μορφές της, οι οποίες δεν θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν προς όφελος αντιρεαλιστικών επιχειρημάτων. Για παράδειγμα, ο Steiner (1975, 113, 116) υποστήριξε ότι μία ισχυρή εκδοχή της αιτιακής θεωρίας μόνον ελάχιστο μέρος της ανθρώπινης γνώσης θα μπορούσε να εξηγήσει ενώ ασθενέστερες μορφές της αιτιακής θεωρίας δεν θα απέκλειαν κατ'ανάγκην τα μαθηματικά αντικείμενα από κάποιες αιτιακού τύπου σχέσεις. Θα μπορούσε δηλαδή να θεωρηθεί ότι ένα γεγονός που αφορά τους αριθμούς, πχ. την πρόσθεση δύο αριθμών, μπορεί να θεωρηθεί ότι παίζει αιτιακό ρόλο στην εξήγηση τυχόν πεποιθήσεών μας για την πρόταση «3+8=11». Άλλες προσεγγίσεις απομακρύνονται από την προβληματική των αιτιακών θεωριών γνώσης και αναφέρονται σε 'αξιόπιστες' διαδικασίες πρόσβασης σε προτάσεις όπως η «3+8=11». Οι διαδικασίες αυτές μεσολαβούν ανάμεσα στο γνώστη και στις μαθηματικές αλήθειες, παίζοντας τον ρόλο του απαιτούμενου συνδετικού κρίκου. Το πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι δεν προυποθέτει κατ'ανάγκην μια αιτιακού τύπου αλληλεπίδραση του γνώστη με τα μαθηματικά αντικείμενα ούτε επίσης μια μυστηριώδη διανοητική ικανότητα όπως η γκεντελιανή εποπτεία.

Β. Το a priori της μαθηματικής γνώσης.

Αλλοι υποστηρικτές του μαθηματικού ρεαλισμού αντιμετωπίζουν διαφορετικά το πρόβλημα. Θεωρούν ότι η όλη προβληματική σχετικά με τις αιτιακές θεωρίες δεν πρέπει να συνδέεται με τη μαθηματική γνώση διότι οι αιτιακές θεωρίες αφορούν μόνο την εμπειρική γνώση, επομένως όχι τη μαθηματική, η οποία είναι a priori. Ο Jerrold Katz, εκπρόσωπος αυτού του τύπου αντίδρασης υποστηρίζει (1995, 491-522) τον αναγκαία αληθή χαρακτήρα των μαθηματικών προτάσεων. Σύμφωνα με τον Katz, η αισθητηριακή αντίληψη και γενικότερα η εμπειρική γνώση παίζει ουσιαστικό ρόλο στην περίπτωση των φυσικών αντικειμένων, επειδή παρέχει πληροφορίες σχετικά με το *ποιες δυνατότητες έχουν καταστεί ενεργές.* Αυτό συμβαίνει, εξηγεί ο Katz, διότι τα φυσικά αντικείμενα θα μπορούσαν να είναι διαφορετικά απ'ότι είναι στον κόσμο μας και επομένως η αισθητηριακή αντίληψη είναι η βασική πηγή πληροφόρησης από την οποία γνωρίζουμε, ποια από τις διάφορες δυνατότητες είναι ενεργοποιημένη στον συγκεκριμένο κόσμο. Αντίθετα, τα αφηρημένα αντικείμενα, πχ. τα μαθηματικά αντικείμενα, είναι τα ίδια σε όλους τους δυνατούς κόσμους. Για παράδειγμα, ο αριθμός "δύο" είναι ο μοναδικός πρώτος άρτιος αριθμός σε όλους τους δυνατούς κόσμους. Σημειώνουμε ότι οι απόψεις αυτές παραπέμπουν στον Leibniz. Ο Katz θεωρεί τις ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων αναγκαίες και τις αληθείς μαθηματικές προτάσεις αναγκαία αληθείς. Τα μαθηματικά αντικείμενα παρουσιάζουν γι αυτόν μία σταθερότητα σε όλους τους δυνατούς κόσμους. Η σταθερότητα αυτή των μαθηματικών ιδιοτήτων και αληθειών θα καθιστούσε περιττή την ανάγκη ύπαρξης μίας ικανότητας παρόμοιας με την αισθητηριακή αντίληψη, χάρη στην οποία θα μπορούσαμε να πληροφορηθούμε μεταξύ ποιων δυνατοτήτων, ποιες είναι ενεργοποιημένες στον συγκεκριμένο κόσμο που ζούμε. Εδώ, υποστηρίζει ο Katz, δεν χρειάζεται κάτι τέτοιο. Αντίθετα, θεωρείται απαραίτητη στην περίπτωση αυτή μία θεμελιώδης νοητική λειτουργία, με την οποία γινόμαστε ικανοί να συλλαμβάνουμε τις μαθηματικές αλήθειες.

Ο Katz δίνει στις απόψεις του το όνομα ‘ρεαλιστικός ρασιοναλισμός’ (1998, 25-61). Η μαθηματική γνώση είναι γι αυτόν καθαρά μη εμπειρική και ο ανθρώπινος λόγος είναι το μοναδικό μέσο απόκτησής της. Ο ίδιος δέχεται διάφορες λειτουργίες του λόγου, όπως για παράδειγμα τον συλλογισμό. Ομως, στο βασικό επίπεδο της πρόσληψης των στοιχειωδών ιδιοτήτων και σχέσεων των μαθηματικών αντικειμένων, η κύρια λειτουργία του λόγου θεωρείται ότι είναι η μαθηματική εποπτεία. Ο Katz έχει τη γνώμη πως ο Goedel έδειξε στους ρεαλιστές τη σωστή κατεύθυνση, μιλώντας για μία αντίστοιχη προς την αισθητηριακή αντίληψη λειτουργία, η οποία όμως είναι καθαρά νοητική. Ο ίδιος κατανοεί τη λειτουργία της εποπτείας ως μία ‘άμεση κατανόηση της δομής’ των αφηρημένων αντικειμένων (1995, 510) και επισημαίνει με έμφαση ότι η εποπτεία δεν έχει σχέση με οποιουδήποτε τύπου δράση αντικειμένων πάνω στα αισθητηριακά όργανα του γνώστη. Υπερασπιζόμενος μάλιστα την γκεντελιανή αυτή έννοια, απέναντι στις ειρωνικές επικρίσεις των Chihara και Dummett, απαντά ότι δεν έχουμε να κάνουμε με κάποιο είδος μυστικισμού αλλά με ένα φιλοσοφικό μυστήριο, το οποίο άλλωστε δείχνει να απασχολεί σοβαρά και τους επικριτές αυτής της υπόθεσης.

Υποστηρικτής της γκεντελιανής εποπτείας είναι επίσης ο James Robert Brown ο οποίος αποδέχεται την αναλογία μεταξύ μαθηματικής εποπτείας και αισθητηριακής αντίληψης. Οι διάφοροι ρεαλισμοί, αναφέρει ο Brown, (πχ. ο ρεαλισμός των συνήθων φυσικών αντικειμένων ή ο ρεαλισμός των θεωρητικών οντοτήτων της φυσικής) δεν είναι ισχυρότεροι από το ρεαλισμό των μαθηματικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, ο απλούστατος τύπος ρεαλισμού, που αφορά στα συνήθη φυσικά αντικείμενα (τραπέζια, δέντρα κλπ.), είναι μια πολύ καλή εξήγηση (ίσως η καλύτερη δυνατή) για τα δεδομένα της αισθητηριακής αντίληψης. Εχουμε λοιπόν κάθε δικαίωμα να δεχθούμε την ύπαρξη των μαθηματικών συνόλων, για τους ίδιους λόγους για τους οποίους απορρίπτουμε τον Berkeley και δεχόμαστε την ύπαρξη των συνήθων φυσικών αντικειμένων. (Irvine, A., 1990, 105).

Γ. Ο μαθηματικός ρεαλισμός και η φυσικοποιημένη φιλοσοφία.

Ενα διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος, προτείνει η «φυσικοποιημένη» (naturalized) εκδοχή του μαθηματικού ρεαλισμού με χαρακτηριστική εκπρόσωπο την Penelope Maddy (1990), η οποία επιχειρεί να εντάξει τα μαθηματικά αντικείμενα στο χωροχρονικό πλαίσιο και να τα παρουσιάσει ως αιτιακώς ενεργά. Ετσι, ο φυσικοποιημένος ρεαλισμός της Maddy θεωρεί τις μαθηματικές οντότητες κάθε άλλο παρά απομονωμένες από το χωροχρονικό σύμπαν. Οπως προαναφέρθηκε, η άποψη της Maddy εντάσσεται σε μια φυσικοποιημένη αντίληψη για τη φιλοσοφία, η οποία γενικά προυποθέτει μία επίπλωση του σύμπαντος από φυσικά αντικείμενα, δηλαδή χωροχρονικά αντικείμενα των οποίων η γνώση δεν μπορεί να προέρχεται από πηγές ξένες και μεθόδους ασυμβίβαστες προς αυτές των φυσικών επιστημών. Βάση για το ρεαλισμό της Maddy, αποτελούν τα επιχειρήματα των Quine & Putnam, σχετικά με την αναγκαιότητα αποδοχής μίας οντολογίας για τη συγκρότηση της καλύτερης δυνατής θεωρίας-περιγραφής για τον κόσμο. Δεχόμαστε την ύπαρξη των συνήθων φυσικών αντικειμένων και ακόμη περισσότερο των μη παρατηρήσιμων αφηρημένων φυσικών οντοτήτων, με σκοπό την καλύτερη οργάνωση των δεδομένων μας και τη συγκρότηση των επιστημονικών μας θεωριών. Ανάλογα, δεχόμαστε και τις μαθηματικές οντότητες (πχ. αριθμούς ή σύνολα). Αποδεχόμενοι όλες αυτές τις οντότητες, επιτυγχάνουμε την τακτοποίηση των ασύνδετων κομματιών της εμπειρίας μας με τον καλύτερο δυνατό ικανοποιητικό τρόπο. Οχι μόνο έχουμε το δικαίωμα να δεχθούμε την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων, ως μέρος της καλύτερης δυνατής επιστημονικής περιγραφής που διαθέτουμε για τον κόσμο αλλά υποχρεωνόμαστε εκ των πραγμάτων να το κάνουμε και αυτό συμβαίνει διότι οι επιστημονικές θεωρίες μας δεν θα μπορούσαν να συγκροτηθούν χωρίς τα μαθηματικά.

Η Maddy επικαλείται τα παραπάνω επιχειρήματα για να δικαιολογήσει τη ρεαλιστική της θέση. Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι ο ρεαλισμός της είναι συνολοθεωρητικός, με την έννοια ότι θεωρεί τα σύνολα ως υπαρκτά αντικείμενα. Τα σύνολα της Maddy δεν είναι «καθαρά», είναι σύνολα φυσικών αντικειμένων πχ. σύνολα μήλων, σύνολα τραπεζιών, σύνολα ανθρώπων κ.λπ. είτε σύνολα τα οποία έχουν ως στοιχεία τους σύνολα φυσικών αντικειμένων ή ακόμα πιο σύνθετα σύνολα που έχουν ως στοιχεία τους σύνολα της προηγούμενης κατηγορίας κ.ο.κ. Το κενό σύνολο $\varnothing$ δεν συμπεριλαμβάνεται στην οντολογία της Maddy, ούτε και σύνολα του τύπου $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$. Σύμφωνα με τη Maddy ένα σύνολο τοποθετείται στο χώρο και το χρόνο εκεί όπου βρίσκονται τοποθετημένα τα στοιχεία του. Κατά το αγαπημένο παράδειγμα της Maddy, το σύνολο τριών αυγών θεωρείται τοποθετημένο στο χώρο και το χρόνο εκεί όπου τα συγκεκριμένα αυγά είναι τοποθετημένα. Επίσης, το πιο σύνθετο σύνολο που έχει ως στοιχεία του το σύνολο των τριών αυγών και το σύνολο των χεριών της Μαρίας, τοποθετείται στο χώρο και το χρόνο, εκεί όπου το σύνολο των αυγών και το σύνολο των χεριών είναι τοποθετημένα. Το σύνολο με τα πενήντα δύο χαρτιά της τράπουλας καταλαμβάνει το χώρο όπου βρίσκεται η τράπουλα κλπ. Πέραν όμως αυτών, ο ακόμα πιο εκπληκτικός ισχυρισμός της Maddy είναι ότι η Μαρία προσλαμβάνει αισθητηριακά ένα σύνολο τριών αυγών και ότι το συγκεκριμένο σύνολο είναι αιτιακά υπεύθυνο για τη δημιουργία μιας πεποίθησης στη Μαρία.

Για να δικαιολογήσει τον ισχυρισμό ότι τα σύνολα είναι αιτιακώς υπεύθυνα για τις πεποιθήσεις μας σχετικά με αυτά, η Maddy επικαλείται τη νευροφυσιολογία και συγκεκριμένα τον D. O. Hebb, ο οποίος έχει αναπτύξει θεωρίες για τον σχηματισμό των πεποιθήσεών μας τόσο για φυσικά αντικείμενα όσο και για γεωμετρικά σχήματα. Οι εξηγήσεις που προτείνει, βασίζονται κυρίως στην πρόκληση συγκεκριμένων ερεθισμών σε κάποια νευρικά εγκεφαλικά κύτταρα, η επανάληψη των οποίων δημιουργεί ομαδοποιήσεις των κυττάρων αυτών σε κυτταρικές συναθροίσεις που ενεργοποιούνται κάθε φορά που κάποιος προσλαμβάνει ένα γεωμετρικό σχήμα. Η Maddy πιστεύει (1990, 56-58 , 65-66) ότι ανάλογες θεωρίες με αυτές που η νευροφυσιολογία προτείνει για τα γεωμετρικά σχήματα, θα μπορούσαν να αναπτυχθούν για την περίπτωση των συνόλων.

Συνεπώς η Maddy επιχειρεί να απαντήσει στο ερώτημα πώς ο μαθηματικός ρεαλισμός εξηγεί τη μαθηματική γνώση, θεωρώντας ότι η συγκεκριμένη γνώση αποκτάται με τρόπους ανάλογους με αυτούς που ισχύουν για τα συνήθη φυσικά αντικείμενα. Η ομοιότητα οφείλεται στο ότι τα μαθηματικά σύνολα δεν είναι χωροχρονικά απομονωμένα ούτε αιτιακώς αδρανή. Συνεπώς η Maddy εγκαταλείπει τον παραδοσιακό μαθηματικό ρεαλισμό. Επίσης προτείνει μια εναλλακτική μορφή της γκεντελιανής μαθηματικής εποπτείας που παρέχει τις «πεποιθήσεις εποπτείας». Πρόκειται για το σχηματισμό πεποιθήσεων που αφορούν στις στοιχειώδεις ιδιότητες των συνόλων (1990, 70), με βάση μια ικανότητα η οποία μοιάζει πολύ με αυτή του Goedel αλλά εμπεριέχει στοιχεία από την εμπειρία, γι αυτό και χαρακτηρίζεται ως «impurely a priori». Τις πεποιθήσεις εποπτείας τις χαρακτηρίζει πρωταρχικές διότι δημιουργούνται σε εξαιρετικά πρώιμα στάδια της γνώσης των πραγμάτων πχ. η πεποίθηση ότι τα σύνολα έχουν αριθμητικές ιδιότητες ή ότι η αριθμητική ιδιότητα ενός συνόλου δεν αλλάζει όταν τα στοιχεία του αναδιαταχθούν κλπ.

Οι απόψεις της Maddy σχετικά με την αισθητηριακή πρόσληψη των συνόλων και τον υποτιθέμενο αιτιακό χαρακτήρα τους, αν και εντυπωσιακές, έχουν δεχθεί σημαντική κριτική. Σε ότι αφορά τη μαθηματική εποπτεία της Maddy δεν γίνεται αρκετά σαφής η ανάμειξη του εμπειρικού και του a priori στοιχείου που την χαρακτηρίζει ως impurely a priori, δηλαδή δεν εξηγείται επαρκώς σε ποιο βαθμό συνιστά εμπειρική και σε ποιο βαθμό a priori γνώση. Επίσης δεν είναι αρκετά σαφής η σχέση μεταξύ των συνόλων και των φυσικών αντικειμένων που αποτελούν μέλη αυτών των συνόλων. Εάν ένα μονοσύνολο {x} τοποθετείται στο χώρο εκεί όπου βρίσκεται το φυσικό αντικείμενο x, τότε είναι εύλογο το ερώτημα του Charles Chihara: πώς διαφοροποιείται το μήλο από το μονοσύνολό του; Η Maddy αφήνει ανοιχτό αυτό το ερώτημα, δηλώνει όμως την προτίμησή της σε μια απάντηση η οποία θα ταύτιζε τα {x} και x, όταν x είναι φυσικό αντικείμενο. Αντιμετωπίζει δηλαδή ένα φυσικό αντικείμενο ως ταυτόχρονα μαθηματικό αντικείμενο. Η άποψη αυτή αποκαλείται 'μονισμός' και πρεσβεύει ότι η ίδια πραγματικότητα είναι συγχρόνως μαθηματική και φυσική (1990, op.cit. 153-8).

Στα προηγούμενα, παρακολουθήσαμε τις πιο κύριες φιλοσοφικές εκδοχές του σύγχρονου μαθηματικού ρεαλισμού (μη φρεγκιανού τύπου) και τους τρόπους με τους οποίους προσπαθούν να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα που έχει τεθεί από τον

Benacerraf. Το πρόβλημα στη γενικότερη διατύπωσή του είναι η αδυναμία του μαθηματικού ρεαλισμού να δώσει μια ικανοποιητική απάντηση στο ερώτημα σχετικά με τη γνώση των μαθηματικών οντοτήτων: εάν υπάρχουν μαθηματικές οντότητες τότε πώς τις γνωρίζουμε; Η δυσκολία είναι ολοφάνερη και δυσεπίλυτη στις παραδοσιακές εκδοχές του μαθηματικού ρεαλισμού, όπου τα μαθηματικά αντικείμενα, σύνολα, αριθμοί κλπ θεωρούνται εκτός χωροχρονικού πλαισίου και αδρανή από αιτιακή άποψη. Η γκεντελιανή εποπτεία δεν πείθει λόγω του ασαφούς χαρακτήρα της. Πρόκειται για μια υπόθεση η οποία δεν διαθέτει επαρκή ερείσματα και έτσι μπορεί εύκολα να κατηγορηθεί για μυστικισμό. Από την άλλη πλευρά, ο νατουραλιστικός ρεαλισμός της Maddy παρουσιάζει προβλήματα σε ότι αφορά τον χωροχρονικό εντοπισμό των μαθηματικών συνόλων και τη μη επαρκή δικαιολόγηση της αισθητηριακής τους πρόσληψης.

Θα ακολουθήσει η μελέτη της εκδοχής του μαθηματικού ρεαλισμού που αναπτύσσεται στο πλαίσιο του νεολογικισμού από τους Bob Hale και Crispin Wright και η οποία βασίζεται στις απόψεις του Frege για τους φυσικούς αριθμούς ως αντικείμενα. Οι Hale & Wright, όταν αναφέρονται στην οντολογική τους θέση για την ύπαρξη των αριθμών, χρησιμοποιούν τον όρο ‘*αριθμητικός πλατωνισμός*’ ή ‘*φρεγκιανός πλατωνισμός’* (arithmetical platonism, fregean platonism). Ιδιαίτερα ο MacBride χρησιμοποιεί τον όρο ‘νεο-φρεγκιανισμος’ (‘neo-fregeanism’) σε ότι αφορά την οντολογική θέση των νεολογικιστών για τους αριθμούς και κυρίως τη σχέση της με θέματα γλώσσας, ιδιαίτερα μάλιστα τη σχέση μαθηματικής γλώσσας-πραγματικότητας, στην περίπτωση των αριθμών. Ο Wright πιο συγκεκριμένα, αναφέρεται στην άποψη ότι οι φυσικοί αριθμοί αποτελούν ένα μοναδικό σύμπαν πραγματικών αντικειμένων και στην άποψη ότι οι αλήθειες της θεωρίας αριθμών είναι ανεξάρτητες από τους ανθρώπινους γνώστες και όχι απαραίτητα πάντοτε προσβάσιμες. Θεωρεί ότι μια τέτοια διάκριση δεν υπάρχει στο έργο του Frege, διότι εκεί παρουσιάζεται ένα «αμάλγαμα» των δύο αυτών απόψεων, με βάση το οποίο ο Frege προσπάθησε να αντιμετωπίσει τους φιλοσοφικούς του αντιπάλους του εμπειρισμού, του φορμαλισμού και του ψυχολογισμού. Ο Frege επιθυμούσε να τονίσει προς τα αντίπαλα φιλοσοφικά ρεύματα ότι τα μαθηματικά αντικείμενα ανακαλύπτονται και δεν επινοούνται από έναν μαθηματικό, με την ίδια έννοια που οι διάφορες γεωγραφικές περιοχές ανακαλύπτονται και δεν επινοούνται από έναν γεωγράφο και ήθελε επιπλέον να καταστήσει σαφές ότι τα μαθηματικά δεν αφορούν απλώς σε μια σειρά μετασχηματισμών τυπικών συμβόλων. Σύμφωνα με τον πλατωνισμό του Frege, ανάμεσα σε μια αληθή πρόταση της θεωρίας αριθμών και του μαθηματικού γεγονότος που την καθιστά αληθή, υπάρχει μια σχέση που δεν διαφέρει πάρα πολύ από την αντίστοιχη σχέση που συνδέει μια αληθή πρόταση για τον φυσικό κόσμο και το φυσικό γεγονός που την καθιστά αληθή. Τα μαθηματικά αντικείμενα, στην προκειμένη περίπτωση οι φυσικοί αριθμοί, υπάρχουν πραγματικά και αυτό διαπιστώνεται με βάση δύο γεγονότα: το ότι η μαθηματική γλώσσα έχει μια δεδομένη συντακτική δομή, με αριθμητικούς όρους που συμπεριφέρονται συντακτικά ως ενικοί όροι μέσα στις μαθηματικές προτάσεις και το ότι οι μαθηματικές προτάσεις είναι αληθείς. Ο αριθμητικός πλατωνισμός των νεολογικιστών διαφέρει τόσο από τον γκεντελιανό μαθηματικό ρεαλισμό όσο κι από τον ρεαλισμό των Quine-Putnam. Κατ'αρχήν είναι αριθμητικός δηλαδή αναφέρεται στους αριθμούς και ιδιαίτερα στους φυσικούς αριθμούς. Επιπλέον, όπως θα διαπιστωθεί, δεν επικαλείται γνωστικές ικανότητες όπως η μαθηματική εποπτεία του Goedel για να εξηγήσει την πρόσβαση στη μαθηματική πραγματικότητα αλλά ούτε και βασίζεται στις φυσικές επιστημονικές θεωρίες και στη δυνατότητα εφαρμογών των μαθηματικών. Συνοψίζει τη θέση ότι η έννοια του αριθμού είναι μια ειδική έννοια με συγκεκριμένες πραγματώσεις, τους φυσικούς αριθμούς και επισημαίνει ότι η ύπαρξη των πραγματώσεων αυτών εξασφαλίζεται χάρη στην αλήθεια κατάλληλων μαθηματικών προτάσεων-πλαισίων. Διατηρεί επίσης τον παραδοσιακό a priori χαρακτήρα των μαθηματικών αντικειμένων. Η αριθμητική γνώση θεμελιώνεται ως a priori γνώση που προέρχεται από την ισοδυναμία N= (τη θεμελιώδη αφαιρετική αρχή του νεολογικισμού) και τη λογική 2^{ης} τάξης.

Κεφ. 2

Ο αριθμητικός πλατωνισμός του Frege. Η ανασυγκρότηση της θέσης του Frege για τους φυσικούς αριθμούς ως αντικείμενα, από το νεολογικισμό.

1. Οι βασικοί στόχοι των Grundlagen

Δύο κύρια στοιχεία της φιλοσοφίας των μαθηματικών του Frege, αναδεικνύονται στο έργο του Die Grundlagen der Arithmetik: *α. η θέση ότι οι αλήθειες της αριθμητικής απορρέουν από τη λογική με τη βοήθεια κατάλληλων ορισμών και β. η θέση ότι η αριθμητική περιγράφει ένα σύνολο αληθειών σχετικά με αντικείμενα που έχουν ανεξάρτητη ύπαρξη (τους φυσικούς αριθμούς).*

Στόχος του Frege στα Grundlagen είναι να συγκροτήσει την οντολογία της αριθμητικής και να θεμελιώσει την αντικειμενικότητα της αριθμητικής γνώσης. Κινείται ταυτόχρονα τόσο στο οντολογικό όσο και στο γνωσιολογικό επίπεδο, επιθυμώντας να παρουσιάσει τους αριθμούς ως αντικείμενα και να αναδείξει τα λογικά θεμέλια της αριθμητικής γνώσης. Οι απόψεις που κυριαρχούσαν την εποχή του Frege για τους αριθμούς είχαν επηρεαστεί σε μεγάλο βαθμό από τον ψυχολογισμό και τον εμπειρισμό, γι αυτό και τους αντιμετώπιζαν περισσότερο ως νοητικές παραστάσεις, υποκειμενικές ιδέες ή ως ιδιότητες των φυσικών πραγμάτων και συλλογών. Αντίστοιχα, οι ίδιες τάσεις θεωρούσαν την αριθμητική γνώση αποτέλεσμα ψυχολογικών διαδικασιών είτε επαγωγικών γενικεύσεων που βασίζονται σε εμπειρικά γεγονότα. Παράλληλα υπήρχε βέβαια και η καντιανή παράδοση που προσέγγιζε τους αριθμούς μέσω της a priori εποπτείας και ταυτόχρονα χαρακτήριζε τη μαθηματική γνώση (αριθμητική και γεωμετρική) ως a priori συνθετική. Σύμφωνα με την καντιανή αντίληψη, ο νους γνωρίζει την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων χωρίς τη βοήθεια της εμπειρίας αλλά με τη μεσολάβηση των a priori μορφών της καθαρής εποπτείας. Κάποιες διαφορετικές επιρροές ωστόσο προέρχονταν από την παράδοση του ορθολογισμού (πχ. Leibniz) η οποία θεωρούσε τις αληθείς μαθηματικές προτάσεις ως λογικές και αναγκαίες αλήθειες που προσεγγίζονται και γίνονται γνωστές μόνον μέσω της νόησης. Αυτή η παράδοση ήταν πιο οικεία στον Frege.

Ο Frege άσκησε λοιπόν δριμύτατη κριτική στις τρέχουσες αντιλήψεις του εμπειρισμού και του ψυχολογισμού σχετικά με την αριθμητική και προσπάθησε να καταστήσει σαφές ότι οι αριθμοί δεν αποτελούν προϊόν της a posteriori εποπτείας, ούτε όμως και της a priori εποπτείας, όπως ήθελε η καντιανή παράδοση. Για το λόγο αυτό, χρειάστηκε να διατυπώσεις τρεις θεμελιώδεις προγραμματικές αρχές:

Α. Διάκριση ψυχολογικού-λογικού, υποκειμενικού-αντικειμενικού

Τόνισε ότι η θεμελίωση της γνώσης γενικότερα και της αριθμητικής γνώσης ειδικότερα απαιτεί τη διάκριση του ψυχολογικού στοιχείου από το λογικό. Από τη φιλοσοφική έρευνα έπρεπε να αποβληθούν τα στοιχεία του ψυχολογισμού, μιας τάσης με εξαιρετική επιρροή στους συγχρόνους του. Αντίστοιχα, για να θεμελιωθεί η αντικειμενικότητα της γνώσης έπρεπε να απομακρυνθούν όλα τα υποκειμενικά στοιχεία και να διασαφηνιστεί το γεγονός ότι οι σημασίες των εκφράσεων είναι ανεξάρτητες από τα επί μέρους γνωστικά υποκείμενα αλλά ταυτόχρονα κοινά αναγνωρίσιμες. Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι οι σημασίες των εκφράσεων πρέπει να διακρίνονται από τις ατομικές ιδέες και τις υποκειμενικές παραστάσεις.

Β. Αρχή του πλαισίου

Το νόημα κάθε όρου πρέπει πάντοτε να αναζητείται στο πλαίσιο προτάσεων και όχι ανεξάρτητα από αυτές.

Γ. Διάκριση μεταξύ έννοιας και αντικειμένου.

Η σχέση μεταξύ αντικειμένου και έννοιας είναι αντίστοιχη με τη σχέση μεταξύ ορίσματος και συνάρτησης. Οι έννοιες είναι συναρτησιακοί μηχανισμοί και αυτός είναι ο λόγος που αναπαριστάνονται στη γλώσσα με ακόρεστες εκφράσεις ενώ τα αντικείμενα είναι πλήρεις οντότητες που αναπαριστάνονται με κορεσμένες εκφράσεις δηλαδή τους ενικούς όρους. Θα έχουμε την ευκαρία στα επόμενα να δούμε τις λεπτομέρειες.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω αρχές, ο Frege εξήγησε τι δεν είναι οι αριθμοί. Ασκώντας κριτική στις απόψεις του εμπειρισμού, τόνισε στα Grundlagen (§§24-25) ότι οι αριθμοί δεν είναι αισθητά αντικείμενα. Αυτό γίνεται φανερό στο παράδειγμα «δύο μπότες», «ένα ζευγάρι μπότες» όπου η διαφοροποίηση ως προς τον αριθμό δεν συνοδεύεται ταυτόχρονα από αντίστοιχη διαφοροποίηση ως προς το φυσικό υλικό. Όμως είχε να αντιμετωπίσει και μια άλλη αντίληψη σύμφωνα με την οποία οι αριθμοί προσεγγίζονται ως ιδιότητες φυσικών πραγμάτων ή φυσικών συλλογών. Ο Mill συνήθιζε να υποστηρίζει ότι οι αριθμητικές εκφράσεις συνοδεύονται από ονόματα αισθητών αντικειμένων: δέκα βότσαλα, πέντε σώματα, τριάντα δέντρα κλπ. Μία αριθμητική έκφραση στις περιπτώσεις αυτές συμπεριφέρεται συντακτικά ως επιθετικός προσδιορισμός. Ο Frege εξέφρασε την πλήρη διαφωνία του με αυτή την προσέγγιση του ρόλου των αριθμητικών εκφράσεων και εξήγησε τον λόγο για τον οποίο ένας αριθμός δεν μπορεί να είναι ιδιότητα κάποιου φυσικού πράγματος (§§21-23). Πράγματι, ενώ πχ. το γαλάζιο αποτελεί ιδιότητα των φυσικών πραγμάτων, όπως μιας φυσικής επιφάνειας γιατί την χαρακτηρίζει με σαφή τρόπο, δεν συμβαίνει το ίδιο με τους αριθμούς. Δεν υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους το γαλάζιο χαρακτηρίζει μια φυσική επιφάνεια, υπάρχουν όμως πολλοί διαφορετικοί τρόποι για να χαρακτηρίσει κανείς αριθμητικά μια φυσική ποσότητα. Αυτό οφείλεται στο ότι μια οποιαδήποτε φυσική πραγματικότητα δεν καθορίζει μονοσήμαντα τον τρόπο με τον οποίο υποδιαιρείται σε μέρη. *Ενα* δεμάτι καλάμια ή *τριάντα* καλάμια μπορεί να αποτελούν την ίδια φυσική πραγματικότητα αλλά δεν χαρακτηρίζονται από τον ίδιο αριθμό. Εάν επίσης σπάσουμε τα καλάμια στη μέση, μπορούμε να αναφερθούμε στην ίδια φυσική πραγματικότητα ως *δύο* δεμάτια καλάμια ή ως *εξήντα* καλάμια ή ακόμα ως *χιλιάδες* μόρια. Σύμφωνα με ένα άλλο παράδειγμα, αναφερόμαστε σε *μια* τράπουλα ή σε *πενήντα δύο* τραπουλόχαρτα ενώ πρόκειται και πάλι για το ίδιο φυσικό υλικό. Αρα, το ότι πολύ συχνά οι αριθμητικές εκφράσεις συνοδεύονται από ονόματα αισθητών πραγμάτων δεν πρέπει να ερμηνεύεται ως ένδειξη του ότι οι αριθμοί μπορεί να συνιστούν ιδιότητες των πραγμάτων αυτών. Επιπλέον δεν πρέπει να διαφεύγει της προσοχής μας το γεγονός ότι σε αρκετές περιπτώσεις, οι αριθμητικές εκφράσεις δεν συνοδεύουν ονόματα αισθητών πραγμάτων (§7) αλλά συνοδεύουν ονόματα αφηρημένων αντικειμένων, όπως στα παραδείγματα 'τρεις *λύσεις* του προβλήματος', 'δύο *μέθοδοι* επίλυσης' κλπ.

Κάτι άλλο που επίσης ο Frege επιθυμούσε να τονίσει με έμφαση είναι ότι ένας αριθμός δεν είναι νοητική παράσταση ούτε ατομική ιδέα. Εάν συνέβαινε αυτό τότε ο καθένας μας θα είχε μια διαφορετική νοητική παράσταση στο μυαλό του. Για παράδειγμα, καθένας από μας έχει μια υποκειμενική νοητική παράσταση για τον

Πήγασο που διαφέρει από άτομο σε άτομο αλλά διαφέρει ακόμα και στο ίδιο άτομο σε διαφορετικές στιγμές. Τα πράγματα όμως είναι διαφορετικά στην περίπτωση των αριθμών επειδή όλοι συλλαμβάνουμε το ίδιο αντικείμενο. Αλλά αυτή η θεώρηση προϋποθέτει τον απεγκλωβισμό από την επιρροή του υποκειμενισμού και του ψυχολογισμού που ήταν σημαντική κατά την περίοδο που γράφονταν τα Grundlagen. Ο Frege υποστήριξε, όπως προαναφέρθηκε, την προγραμματική αρχή Α. ότι απαιτείται διάκριση του λογικού από το ψυχολογικό στοιχείο στη φιλοσοφία. Στην εποχή του οι ψυχολογικές μέθοδοι είχαν παρεισφρύσει στα φιλοσοφικά επιχειρήματα προκαλώντας δικαιολογημένα τη δυσφορία των μαθηματικών. Προσπάθησε λοιπόν να διασαφηνίσει το ρόλο των ψυχολογικών μεθόδων και να τον διαχωρίσει από τη λογική. Οι ψυχολογικές προσεγγίσεις συνήθως αναζητούν τους τρόπους δημιουργίας και εξέλιξης των σκέψεών μας για ένα επιστημονικό αντικείμενο αλλά αυτό είναι κάτι τελείως διαφορετικό από αυτό που μας ενδιαφέρει κατά τη θεμελίωση ενός επιστημονικού κλάδου. Η περιγραφή των τρόπων προέλευσης μιας νοητικής παράστασης σε καμία περίπτωση δεν συνιστά ορισμό μιας έννοιας. Ετσι και στην περίπτωση της αριθμητικής, μας ενδιαφέρει η σταθερότητα των εννοιών στο καθαρό τους σχήμα, όπως αποκρυσταλλώνεται μόνο ύστερα από τεράστια διανοητική προσπάθεια ακόμη και αιώνων (Grundlagen, εισαγωγή, ελλ.μετ. σ. 69). Η εξασφάλιση της διυποκειμενικότητας και της αντικειμενικότητας των αριθμών μπορεί να γίνει μόνον με την απομάκρυνση των υποκειμενικών και ψυχολογικών προσεγγίσεων από την έννοια του αριθμού.

Η διαφωνία του Frege με τις αντιλήψεις του εμπειρισμού επικεντρώνεται στο ότι ο αριθμός δεν συνιστά προϊόν της a posteriori εποπτείας και ότι η αριθμητική γνώση δεν έχει εμπειρική προέλευση και δεν θεμελιώνεται μέσω επαγωγικών γενικεύσεων. Ο Mill υποστήριζε ότι οι αριθμητικοί υπολογισμοί συνδέονται πάντοτε με φυσικά γεγονότα όπως στην περίπτωση πχ. «δύο βότσαλα + τρία βότσαλα = πέντε βότσαλα». Ο Frege αντέταξε ότι εάν ο Mill είχε δίκιο, τότε δεν είναι σαφές το πώς θα μπορούσε κάποιος να κάνει υπολογισμούς με ιδιαίτερα μεγάλους αριθμούς. Γενικότερα, η ύλη του σύμπαντος δεν θα ήταν αρκετή για να συνοδεύει κάθε φορά, καθέναν από τους φυσικούς αριθμούς (τους οποίους τα αξιώματα Peano περιγράφουν) με αντίστοιχα φυσικά αντικείμενα ή γεγονότα. Το λάθος του Mill, σύμφωνα με τον Frege (§9), είναι ότι συγχέει τις εφαρμογές μιας αριθμητικής πράξης που είναι συχνά φυσικές εφαρμογές με τη λογική σημασία της αριθμητικής πράξης. Ιδιαίτερη κριτική άσκησε ο Frege (§10) στην άποψη του Mill ότι οι αληθείς αριθμητικές προτάσεις αποτελούν επαγωγικές αλήθειες. Κάτι τέτοιο προσκρούει στον μη χωροχρονικό χαρακτήρα των αριθμών και στο γεγονός ότι οι αριθμοί είναι ανόμοιοι μεταξύ τους[8]. Επίσης η επαγωγική γενίκευση δεν μπορεί παρά να αποδείξει μια πρόταση ως πιθανή και τίποτα περισσότερο. Εάν λάβει όμως κανείς υπόψη το ότι οι ίδιες οι πιθανότητες βασίζονται στους αριθμητικούς νόμους τότε κατανοεί ότι η εμπειρική μέθοδος της επαγωγικής γενίκευσης προϋποθέτει, αντί να δικαιολογεί τους αριθμητικούς νόμους.

Ο Frege διαφώνησε ωστόσο εξίσου και με τον Kant, επιθυμώντας να καταστήσει σαφές το ότι ο αριθμός δεν είναι προϊόν της a priori εποπτείας. Για τον Kant, η νόηση δεν είναι αρκετή για τον προσδιορισμό των αριθμών διότι απαιτείται επιπλέον η συμβολή της a priori εποπτείας του χρόνου για να πραγματοποιηθεί η σχηματοποίηση. Ετσι, σύμφωνα με την καντιανή αντίληψη οι αριθμοί μας *δίνονται* μέσω της συνεργασίας της νόησης και της a priori εποπτείας. Ο Frege υποστήριξε ότι η νόηση είναι επαρκής για τον προσδιορισμό των αριθμών και ότι κανένα είδος εποπτείας δεν χρειάζεται να παρεμβληθεί. Η αριθμητική γνώση δεν ήταν γι αυτόν συνθετική a priori όπως πίστευε ο Kant αλλά αναλυτική. Αλλά και η ίδια η έννοια της αναλυτικότητας έλαβε από τον Frege μια διαφορετική διατύπωση. Ενώ ο Kant θεωρούσε ως αναλυτική μία πρόταση όταν η έννοια του κατηγορήματος εμπεριέχεται στην έννοια του υποκειμένου, ο Frege χαρακτήρισε ως ανεπαρκή τον ορισμό αυτό, επειδή μια πρόταση μπορεί κάλλιστα να είναι αναλυτική χωρίς η έννοια του κατηγορήματος να εμπεριέχεται στην έννοια του υποκειμένου. Η αναλυτικότητα σύμφωνα με τον Frege ορίζεται διαφορετικά: μία πρόταση είναι αναλυτική εάν μπορεί να παραχθεί από λογικές αλήθειες μέσω γενικών νόμων της λογικής και ορισμών. Με βάση λοιπόν τη νέα διατύπωση της αναλυτικότητας, θεώρησε τις αριθμητικές αλήθειες ως αναλυτικές. Στόχος του ήταν να αναδείξει τα λογικά θεμέλια της αριθμητικής γνώσης, να δείξει δηλαδή ότι η αριθμητική γνώση είναι a priori και προέρχεται από λογικές αλήθειες.

---

[8] Ο Frege εδώ επικαλείται την άποψη του Leibniz ότι οι αριθμοί έχουν το χαρακτηριστικό να είναι ανόμοιοι. Δεν είναι απλώς άνισοι στο μέγεθος αλλά και ανόμοιοι πχ. οι άρτιοι μπορούν να διαιρεθούν σε δύο ίσα μέρη, το 3 και το 6 είναι τριγωνικοί αριθμοί, το 8 κυβικός αριθμός κλπ. Αυτό το χαρακτηριστικό κάνει τους αριθμούς να διαφέρουν, για παράδειγμα, από τα σχήματα τα οποία μπορεί να είναι άνισα αλλά όμοια μεταξύ τους. Η συγκεκριμένη ιδιαιτερότητα των αριθμών μαζί με τη μη

Η κριτική του Frege στις τρέχουσες αντιλήψεις της εποχής του αποσκοπούσε στην απομάκρυνση όλων εκείνων των στοιχείων που εμπόδιζαν τους φιλοσόφους να δουν με καθαρότητα την πραγματική φύση των αριθμών και της αριθμητικής γνώσης. Οι φυσικοί αριθμοί έπρεπε να αναδειχθούν ως λογικά αντικείμενα. Είναι επίσης χαρακτηριστικό το γεγονός ότι ο ίδιος άσκησε δριμύτατη κριτική επιπλέον σε όσους αντιμετώπιζαν τους αριθμούς ως κατασκευές καθώς επίσης και σε όσους τους θεωρούσαν ως απλά σύμβολα χωρίς νόημα. Οταν, πχ. ο Hankel υποστήριζε ότι τα ερωτήματα ύπαρξης για τα καθαρά μαθηματικά δεν έχουν κανένα νόημα, επειδή τα καθαρά μαθηματικά είναι αποτέλεσμα της δημιουργίας του ανθρώπινου νου με μόνους περιορισμούς τους κανόνες της λογικής, ο Frege απαντούσε στα Grundlagen (§96) ότι ο μαθηματικός *δεν δημιουργεί* αντικείμενα κατά βούληση όπως και ο γεωγράφος δεν δημιουργεί περιοχές αλλά τις ανακαλύπτει. Ο μαθηματικός και ο γεωγράφος ανακαλύπτουν αυτά που ήδη υπάρχουν και μετά τους δίνουν ονόματα. Η ιδέα που εκφράζεται εδώ, δηλαδή ότι ο ανθρώπινος παράγων *ανακαλύπτει* αντί να *δημιουργεί,* είναι ενδεικτική μιας ρεαλιστικής φιλοσοφικής κατεύθυνσης. Επιπλέον, στα Grundgesetze, ii, §§ 86-137, άσκησε εκτενή κριτική στον φορμαλιστή Thomae ο οποίος περιέγραφε τη θεωρία αριθμών σαν ένα παιχνίδι άδειων (χωρίς νόημα) συμβόλων. Εάν πρόκειται για ένα παιχνίδι άδειων συμβόλων τότε δεν μπορεί να εξηγηθεί η τόσο επιτυχής εφαρμογή των μαθηματικών στη φυσική πραγματικότητα.

Όπως προαναφέρθηκε, ο Frege πίστευε ότι οι αριθμητικές αλήθειες προκύπτουν μόνον από τους νόμους της λογικής με τη βοήθεια ορισμών. Όμως, επειδή οι μαθηματικοί ορισμοί ερμηνεύονταν στην εποχή του με διάφορους τρόπους από πολλούς, αφιέρωσε μεγάλο μέρος του έργου του για να εξηγήσει τι είναι οι ορισμοί των μαθηματικών εννοιών, επιμένοντας ότι αυτοί δεν αποτελούν εκδηλώσεις μιας ελεύθερης κατασκευαστικής δραστηριότητας. Πολλοί μαθηματικοί είχαν και έχουν την εντύπωση ότι τα νέα αντικείμενα που κατά καιρούς έχουν εισαχθεί στη μαθηματική δραστηριότητα είναι κατασκευές του νου. Αυτή ήταν η κυρίαρχη άποψη πχ. για τους φανταστικούς αριθμούς. Ο Hankel για παράδειγμα στο *Theorie der complexen Zahlensysteme* το 1867, υποστήριζε ότι ο αριθμός δεν θεωρείται πια ως ένα πράγμα, μία ουσία που είναι αυθύπαρκτη ανεξάρτητα από το σκεπτόμενο

χωροχρονικότητά τους εμποδίζει κατά τη γνώμη του Frege την εφαρμογή της επαγωγικής γενίκευσης που χρησιμοποιούν οι εμπειρικές επιστήμες κατά τη θεμελίωση γενικών φυσικών νόμων.

υποκείμενο αλλά το ερώτημα για την ύπαρξη των αριθμών πρέπει να κατανοείται σε σχέση με το σκεπτόμενο υποκείμενο. Αυτό που οι μαθηματικοί όφειλαν να εξετάζουν είναι εάν μια έννοια αριθμού είναι λογικά δυνατή, δηλαδή ελεύθερη αντιφάσεων. Ο Frege αντέταξε ότι ο μαθηματικός δεν δημιουργεί αντικείμενα σύμφωνα με τις επιθυμίες του, αλλά πρώτα ανακαλύπτει το αντικείμενο και ύστερα του δίνει ένα όνομα (Grundlagen, §96). Αυτοί που υποστηρίζουν τους κατασκευαστικούς ορισμούς ισχυρίζονται ότι οφείλει κάποιος να είναι προσεκτικός για να αποφεύγει τις αντιφάσεις όταν εισάγει νέα αντικείμενα. Αλλά πώς προτείνουν να αποδειχθεί η συνέπεια αυτών των υποτιθέμενων κατασκευών;[9] Ο Frege εξήγησε ότι για να ελέγξουμε αν μια έννοια είναι ελεύθερη από αντιφάσεις αναζητούμε πρώτα κάτι που να εμπίπτει στην έννοια. Και όταν έχουμε τη δυνατότητα να υποδείξουμε κάτι το οποίο εμπίπτει στην έννοια, τότε είναι πλέον ανόητο το να θεωρούμε τον ορισμό της έννοιας σαν μια κατασκευή. Τουναντίον, η αξία ενός ορισμού έγκειται στο ότι ο ορισμός υποδεικνύει το πεδίο εφαρμογής ενός όρου. Οπως αποδεικνύεται επιπλέον από την αλληλογραφία μεταξύ Frege και Hilbert σχετικά με τον ρόλο των ορισμών, ο Frege τους αποδίδει ρόλο ανακάλυψης πραγματικών αντικειμένων (cf. Resnik, D., 1974, 386-403)

Ο Frege στα Grundlagen χαρακτήρισε τους φυσικούς αριθμούς ως «αυθυπόστατα» αντικείμενα (πχ. §57 & §62), για να τους διακρίνει από τις έννοιες, τις σχέσεις κλπ. Τόνισε επιπλέον ότι και οι άπειροι πληθυκοί του Cantor, τα κλάσματα, οι άρρητοι, οι μιγαδικοί αριθμοί κλπ είναι εξίσου υπαρκτοί και το γεγονός ότι δεν γίνονται αντιληπτοί από τις αισθήσεις ούτε βρίσκονται στο χώρο δεν πρέπει να μας κάνει να αμφισβητούμε την ύπαρξή τους. Η άποψη αυτή συνιστά γενικότερα τον μαθηματικό πλατωνισμό του. Όμως στα Grundlagen ειδικότερα, προσπαθεί με συστηματικότητα να προσδιορίσει το status των φυσικών αριθμών ως πραγματικών αντικειμένων.

Σύμφωνα με την προαναφερθείσα προγραμματική αρχή Γ, το *αντικείμενο* στη φιλοσοφία του Frege έχει μια συγκεκριμένη σχέση με την *έννοια.* Οι έννοιες είναι συναρτησιακοί μηχανισμοί και εκφράζονται με ακόρεστες ή μη-πλήρεις εκφράσεις πχ. F( ). Αντίθετα, μία έκφραση για ένα αντικείμενο δεν περιέχει καθόλου κενά. Εάν λοιπόν η ακόρεστη έκφραση F( ) τροφοδοτηθεί με ένα όνομα αντικειμένου τότε προκύπτει μια πρόταση με συγκεκριμένη αληθοτιμή. Για παράδειγμα, ας

[9] Εδώ υπάρχει ένας υπαινιγμός ότι δεν μπορεί να δοθεί μια απόλυτη απόδειξη της συνέπειας

θεωρήσουμε την ακόρεστη έκφραση *'___ είναι σοφός'*. Εάν τη θέση του κενού πάρει το όνομα *'Σωκράτης'* τότε προκύπτει η πρόταση «ο Σωκράτης είναι σοφός» που έχει συγκεκριμένη αληθοτιμή. Είναι σημαντικό επίσης το γεγονός ότι ο Frege θεωρεί τις έννοιες ως λογικά πρότερες των αντικειμένων[10]. Ας θεωρήσουμε όλα τα αντικείμενα x, των οποίων τα ονόματα τροφοδοτούν την ακόρεστη έκφραση F( ) με αποτέλεσμα η πρόταση F(x) να είναι αληθής. Τότε, η συλλογή όλων αυτών των αντικειμένων αποτελεί η ίδια ένα νέο λογικό αντικείμενο. Δηλαδή, οι έννοιες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προκύψουν νέα αντικείμενα.

Ο Frege συνήθιζε να συνδέει τους φυσικούς αριθμούς με έννοιες με χαρακτηριστικό τρόπο. Για παράδειγμα, ο 1 μπορεί να θεωρηθεί ως ο αριθμός της έννοιας 'δορυφόρος της γης' (επειδή ο αριθμός των δορυφόρων της γης είναι 1), επίσης ο 16 μπορεί να θεωρηθεί ως ο αριθμός της έννοιας 'δορυφόρος του Δία', ο αριθμός 52 μπορεί να θεωρηθεί ως ο αριθμός της έννοιας 'χαρτί της τράπουλας' κλπ. Στην §55 των Grundlagen, επιχείρησε να ορίσει με ακρίβεια τη σημασία της έκφρασης 'ο αριθμός n ανήκει στην έννοια F' με επαγωγικό τρόπο:

"ο αριθμός 0 ανήκει στην έννοια F αν και μόνο αν $\forall x\ \neg Fx$*"*

"ο αριθμός 1 ανήκει στην έννοια F αν και μόνο αν $\exists x\ (Fx\ \&\ \forall y\ Fy \rightarrow y=x)$*"*

"ο αριθμός n+1 ανήκει στην έννοια F αν και μόνο αν ∃x (Fx και ο αριθμός n ανήκει στην έννοια Fy και y≠x')"

Στη συνέχεια όμως (§56), διαπίστωσε ότι ο παραπάνω τρόπος παρουσίασης του αριθμού δημιουργούσε ορισμένα προβλήματα: παρά το γεγονός ότι η σημασία της έκφρασης (2) 'ο αριθμός n+1 ανήκει στην έννοια F' ορίζεται με βάση την έκφραση (1) 'ο αριθμός n ανήκει στην έννοια G', η σημασία της (1) δεν είναι περισσότερο ξεκάθαρη ή περισσότερο γνωστή από τη σημασία της έκφρασης (2). Αρα, ο παραπάνω ορισμός μας λέει μάλλον με ποιον τρόπο θα μεταφερθούμε από την (1) στην (2), παρά το τι ακριβώς εννοούμε με την έκφραση 'ο αριθμός n ανήκει στην έννοια G'. Ο ορισμός δεν μας λέει τι είναι αριθμός ούτε εάν ο Ιούλιος Καίσαρ είναι αριθμός ή όχι. Θα αποτελούσε ψευδαίσθηση το να θεωρηθεί ότι έχουν ορισθεί με αυτό τον τρόπο οι αριθμοί. Γι αυτούς τους λόγους, ο Frege συνέχισε την αναζήτηση ενός κατάλληλου ορισμού.

[10]Βλ. Αναπολιτάνος, Δ. (1985), Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, Αθήνα: Νεφέλη, σ.227

Στην §57 των Grundlagen, συναντάμε τον ευθύ χαρακτηρισμό των αριθμών ως *αντικειμένων* και μάλιστα *αυθυπόστατων*. Στόχος του Frege ήταν να αναδείξει το status των φυσικών αριθμών το οποίο υποδηλώνεται και από τη συντακτική θέση των αριθμητικών όρων μέσα στις προτάσεις της αριθμητικής. Η πρόταση «υπάρχουν 2 κορυφαία πολιτικά κόμματα στις ΗΠΑ» μπορεί να μετασχηματισθεί στην πρόταση «ο αριθμός των κορυφαίων πολιτικών κομμάτων στις ΗΠΑ είναι ο 2», όπου ο αριθμητικός όρος '2' παύει να έχει θέση επιθετικού προσδιορισμού. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, φαίνεται ότι μπορεί κανείς να επιλέξει να χειρίζεται τις αριθμητικές εκφράσεις είτε ως επίθετα είτε ως ονόματα. Ο Frege παρατήρησε ότι στην καθημερινή ζωή συχνά οι αριθμητικές εκφράσεις εκφέρονται σαν να είναι επιθετικοί προσδιορισμοί. Παρά το γεγονός αυτό, οπουδήποτε συμβαίνει κάτι τέτοιο, υπάρχει η δυνατότητα μιας διαφορετικής παρουσίασης της πρότασης έτσι ώστε οι ίδιες αριθμητικές εκφράσεις να έχουν τη θέση ονομάτων. Ας δούμε το παράδειγμα «το ηλιακό σύστημα έχει 9 πλανήτες». Η πρόταση αυτή μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής : «ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος *είναι* ο 9». Οπως εξηγεί ο Frege στην §57 των Grundlagen, ο αριθμητικός όρος '9' στη δεύτερη πρόταση δεν εμφανίζεται πια με μορφή επιθετικού προσδιορισμού ενώ η δυνατότητα αυτού του είδους των επαναδιατυπώσεων δείχνει ότι η χρήση των αριθμητικών εκφράσεων ως επιθέτων που συναντάμε συχνά, δεν πρέπει να μας παραπλανά. Ακόμα και αν μια αριθμητική έκφραση εμφανίζεται σαν επιθετικός προσδιορισμός, διαφέρει σημαντικά από άλλες επιθετικές εκφράσεις όπως πχ. το επίθετο 'γαλάζιος' στην πρόταση «ο ουρανός είναι γαλάζιος». Η λέξη 'είναι' στην τελευταία πρόταση είναι ένα απλό συνδετικό μεταξύ του υποκειμένου και του επιθέτου ενώ στην περίπτωση των αριθμητικών εκφράσεων το '*είναι*' ισοδυναμεί με το: '*είναι ταυτόσημος με*'. Για παράδειγμα: «ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος *είναι ταυτόσημος* με τον 9». Κατά συνέπεια, η επαναδιατύπωση των παραπάνω προτάσεων δείχνει ότι μια αριθμητική έκφραση καταλαμβάνει μέσα σε μια πρόταση τη θέση ενός ονόματος και όχι ενός επιθέτου. Ακόμα, η παρουσία του οριστικού άρθρου πριν από μια αριθμητική έκφραση όπως και η παρουσία μεγάλου πλήθους αριθμητικών ταυτοτήτων στην αριθμητική δικαιολογούν για τον Frege το γεγονός ότι οι αριθμοί είναι αντικείμενα. Εάν όμως δεν διαθέτουμε για τους αριθμούς ούτε την κατάλληλη αισθητηριακή πρόσληψη ούτε νοητικές παραστάσεις, όπως ήδη επισημάνθηκε, τότε είναι ανάγκη να εξηγηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι αριθμοί *δίνονται* σε μας.

Στην §62 υπάρχει η επισήμανση ότι το γεγονός ότι δεν διαθέτουμε καμιά a posteriori ή a priori εποπτεία για τους αριθμούς, δεν συνιστά εμπόδιο για να τους θεωρήσουμε αυθυπόστατα αντικείμενα. Το ζητούμενο εδώ είναι να *αναγνωρίζουμε έναν αριθμό ως την ίδια οντότητα* κάθε φορά που τον συναντούμε και αυτό απαιτεί κατάλληλες *αναγνωριστικές* προτάσεις. Οταν δηλαδή χρησιμοποιούμε το σύμβολο a για έναν αριθμό και ύστερα τον ξανασυναντήσουμε με το σύμβολο b, τότε θα πρέπει να είμαστε σε θέση να αποφασίσουμε εάν πρόκειται για τον ίδιο αριθμό, δηλαδή να αναγνωρίζουμε έναν αριθμό ως τον ίδιο ξανά, κάθε φορά που τον συναντούμε. Ο Frege θεώρησε ως κατάλληλες για τον ρόλο των αναγνωριστικών προτάσεων, τις αριθμητικές ταυτότητες. Εδώ πρέπει να θυμηθούμε την χαρακτηριστική έκφραση του Quine ότι καμιά οντότητα δεν στερείται ταυτότητας. Συνεπώς, για να εξηγήσει ο Frege τον τρόπο που προσδιορίζουμε τους αριθμούς έπρεπε να προσδιορισθούν οι συνθήκες αληθείας της ταυτότητας «ο αριθμός της έννοιας F είναι ο ίδιος με τον αριθμό της έννοιας G». Πώς όμως μπορεί να γίνει αυτό; Μέσω ενός κριτηρίου ταυτότητας.

Στην §63 συναντούμε μια υπενθύμιση του Frege ότι στο Treatise, Book I, part iii, sect.1, ο Hume είχε προτείνει ένα μέσο χάρη στο οποίο μπορούμε να αναγνωρίζουμε την ταυτότητα ενός αριθμού. Σύμφωνα με την εν λόγω ιδέα του Hume, δύο αριθμοί ταυτίζονται όταν καθένας απ'αυτούς έχει πάντοτε μια μονάδα που να αντιστοιχεί σε κάθε μονάδα του άλλου, δηλαδή η ταυτότητα των αριθμών εκφράζεται με όρους 1-1 αντιστοιχίας. Η ιδέα αυτή σχολιάζεται θετικά στην §63. Ο ίδιος ο Frege αποφάσισε να εκφράσει την ταυτότητα των αριθμών μέσω μιας 1-1 αντιστοιχίας αλλά ο τρόπος που χρησιμοποιεί την 1-1 αντιστοιχία διαφέρει από εκείνον του Hume. Συγκεκριμένα, ο Frege εισήγαγε (§68) ως κριτήριο ταυτότητας για τους αριθμούς την ισοδυναμία N= που ονομάζεται συχνά και 'Αρχή του Hume' ή πιο σύντομα HP (Hume's Principle):

"Ο αριθμός της έννοιας F ταυτίζεται με τον αριθμό της έννοιας G αν και μόνο αν οι έννοιες F και G βρίσκονται σε μία 1-1 αντιστοιχία".

(N =) $\quad (\forall F)(\forall G)\,[(Nx : Fx = Nx : Gx) \leftrightarrow (F\ 1\text{-}1\ G)]$

Η N= είναι $2^{ης}$ τάξης ποσοδεικτούμενη ισοδυναμία της οποίας το δεξί μέλος εκφράζει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ δύο εννοιών F, G (δηλαδή μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ εννοιών). Η ισοδυναμία αναλαμβάνει να καθορίσει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να είναι αληθής η αριθμητική ταυτότητα «**Nx:Fx = Nx:Gx**».

Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι προηγουμένως, δηλ. στην §64, ο Frege διατύπωσε και άλλα παραδείγματα κριτηρίων ταυτότητας, ένα από τα οποία αφορά τις διευθύνσεις ευθειών:

"Η διεύθυνση της ευθείας a ταυτίζεται με τη διεύθυνση της ευθείας b αν και μόνο αν οι ευθείες a, b είναι παράλληλες"

(D=) $\quad (\forall a)(\forall b)\ [(D(a) = D(b)) \leftrightarrow (a // b)]$

Η D= χρησιμοποιήθηκε από τον Frege ως υπόδειγμα το οποίο εξηγεί ως ένα βαθμό και τον τρόπο λειτουργίας της N=, παρά το γεγονός ότι οι δύο ισοδυναμίες έχουν διαφορές[11]. Με τη βοήθεια της D= , μπορούμε να διαπιστώσουμε εάν η διεύθυνση της ευθείας a ταυτίζεται με τη διεύθυνση της ευθείας b. Αυτό συμβαίνει όταν οι ευθείες a και b είναι παράλληλες. Ανάλογα, με τη βοήθεια της N= μπορούμε να διαπιστώσουμε εάν για παράδειγμα, ο αριθμός της έννοιας ‘πιάτο στο τραπέζι’ ταυτίζεται με τον αριθμό της έννοιας ‘μαχαίρι στο τραπέζι’. Αυτό πράγματι συμβαίνει όταν οι δύο έννοιες βρίσκονται μεταξύ τους σε μια 1-1 αντιστοιχία.

Οι παραπάνω ισοδυναμίες επρόκειτο να παίξουν στα Grundlagen το ρόλο των πλαισιακών ορισμών για τους φυσικούς αριθμούς και τις διευθύνσεις αντίστοιχα. Εάν οι συνθήκες αλήθειας μιας αριθμητικής ταυτότητας της μορφής «**Nx:Fx = Nx:Gx**» είναι προσδιορίσιμες μέσω της ισοδυναμίας, τότε, επειδή η εν λόγω ταυτότητα λειτουργεί ως αναγνωριστική πρόταση, μπορούμε να προσεγγίσουμε έναν αριθμό ως μοναδικό αντικείμενο. Ο Frege ωστόσο πολύ γρήγορα ήρθε αντιμέτωπος με ένα σκοτεινό σημείο αυτών των ισοδυναμιών. Στην §66 των Grundlagen αναφέρεται ότι ενώ η ισοδυναμία D= παρέχει τον τρόπο για να απαντήσει κανείς στο ερώτημα εάν η διεύθυνση της ευθείας a είναι ταυτόσημη με τη διεύθυνση της ευθείας b, δεν μας δίνει ωστόσο τη δυνατότητα να απαντήσουμε στο ερώτημα εάν η διεύθυνση του άξονα της γης είναι ταυτόσημη με την Αγγλία. Εάν ο ίδιος προβληματισμός μεταφερθεί στην περίπτωση της N=, σημαίνει ότι και αυτή η ισοδυναμία δεν μας δίνει τη δυνατότητα να απαντήσουμε στο ερώτημα εάν πχ. ο αριθμός της έννοιας F είναι ταυτόσημος με τον Ιούλιο Καίσαρα. Γενικότερα, η δυσκολία αυτή συνίσταται στο ότι η ισοδυναμία

D= δεν προσδιορίζει το κατά πόσον είναι αληθής η (μεικτή) ταυτότητα «η διεύθυνση της ευθείας a = q » ενώ η ισοδυναμία N= δεν προσδιορίζει το κατά πόσον είναι αληθής η (μεικτή) ταυτότητα «ο αριθμός της έννοιας F = q», όταν η έκφραση 'q' δεν είναι της ίδιας μορφής με το πρώτο μέλος των ταυτοτήτων. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα του Καίσαρος. Βέβαια μπορεί τα παραπάνω παραδείγματα (του ίδιου του Frege) να δείχνουν ακραία αφού κανείς δεν μπορεί να εκλάβει την Αγγλία ως διεύθυνση ή ακόμα περισσότερο τον Ιούλιο Καίσαρα ως αριθμό, όμως οφείλουμε να παραδεχθούμε ότι οι ίδιες οι ισοδυναμίες δεν μας βοηθούν καθόλου στην αποφυγή μιας τέτοιας σύγχυσης. Εάν οι παραπάνω ισοδυναμίες έπαιζαν ικανοποιητικά τον ρόλο τους ως πλαισιακοί ορισμοί, όπως ο Frege επιθυμούσε, τότε θα έπρεπε να μας πληροφορούν με σαφήνεια για το ότι η Αγγλία δεν μπορεί να ταυτίζεται με τη διεύθυνση μιας ευθείας και ότι ο Ιούλιος Καίσαρ δεν είναι δυνατό να ταυτίζεται με τον αριθμό μιας έννοιας. Η γνώση μας ότι κάτι τέτοιο δεν μπορεί να συμβαίνει, σίγουρα δεν απορρέει από τις ίδιες τις ισοδυναμίες. Το ερώτημα λοιπόν εάν ο Καίσαρ είναι ή δεν είναι αριθμός δεν απαντιέται με βάση την N= , παρά το γεγονός ότι αυτή προτάθηκε ως το καθεαυτό μέσο προσδιορισμού των αριθμών. Η N= αδυνατεί να λειτουργήσει ικανοποιητικά ως ορισμός διότι δεν απαντά στο ερώτημα, ποια ήδη γνωστά αντικείμενα είναι αριθμοί και ποια δεν είναι. Επειδή δεν μπορεί μάλιστα να αποκλείσει τον Ιούλιο Καίσαρα, γι αυτό το λόγο δεν εξασφαλίζει τη μοναδικότητα κάθε φυσικού αριθμού, που ο Frege ήθελε να αναδείξει. Σχετικά με τις ερμηνείες του προβλήματος του Καίσαρος και τη σημασία του θα ασχοληθούμε σε επόμενα κεφάλαια (κεφ.10-11). Προς το παρόν, αρκεί να επισημανθεί ότι το πρόβλημα αυτό ήταν για τον Frege ιδιαίτερα σοβαρό διότι αποκάλυπτε μια σοβαρή αδυναμία των ορισμών του. Γι αυτό ο ίδιος αποφάσισε να κάνει μια σημαντική στροφή.

Στις §§67-69 προχώρησε στη διατύπωση νέων ορισμών κάνοντας χρήση εκτάσεων εννοιών[12]. Συγκεκριμένα, όρισε τη διεύθυνση της ευθείας a ως την έκταση της έννοιας 'παράλληλη προς την ευθεία a'. Αυτό σημαίνει ότι η διεύθυνση της ευθείας a είναι η κλάση που περιέχει ακριβώς εκείνες τις ευθείες που είναι παράλληλες με την ευθεία a. Επίσης, όρισε τον αριθμό της έννοιας F ως την έκταση

[11] Η πιο εμφανής διαφορά είναι ότι, σε αντίθεση με την N=, η ισοδυναμία D= είναι πρώτης τάξης ποσοδεικτούμενη ισοδυναμία, της οποίας το δεξί μέλος εκφράζει την παραλληλία μεταξύ δύο ευθειών, (δηλαδή μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ δύο αντικειμένων)

[12] Η έκταση μιας έννοιας είναι η κλάση των αντικειμένων που ικανοποιούν την έννοια

της έννοιας ‘ισοπληθυκή[13] προς την έννοια F’. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός της έννοιας F είναι η κλάση που περιέχει ακριβώς εκείνες τις έννοιες που μπορούν να τεθούν σε 1-1 αντιστοιχία με την έννοια F. Η στροφή του προς την εκτασιακή αντίληψη τον ανάγκασε βέβαια να χρησιμοποιήσει μια θεωρία κλάσεων. Ο Frege ταύτισε τους φυσικούς αριθμούς με κλάσεις τις οποίες θεωρούσε μέρος του λογικού του οπλοστασίου και πίστευε ότι με αυτόν τον τρόπο είχε καταφέρει να προσδιορίσει τους αριθμούς ως λογικά αντικείμενα. Δεν είχε λάβει όμως υπόψη δύο ενδιαφέροντα σημεία. Πρώτον ότι δεν ήταν καθόλου αυτονόητο το κατά πόσον οι κλάσεις έχουν λογικό status και δεύτερον ότι διέτρεχε τον κίνδυνο να εμπλακεί σε ασυνέπειες. Ετσι, οδηγήθηκε στα Grundgesetze στη διατύπωση της μοιραίας πρότασης

« $\forall F \forall G\ [\{x{:}Fx\}=\{x{:}Gx\} \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)]$»,

από την οποία μπορεί να παραχθεί το παράδοξο του Russell. Η εμφάνιση του παραδόξου του Russell ελλοχεύει σε κάθε ανεξέλεγκτη προσπάθεια ορισμού ενός συνόλου με βάση απλώς μια ιδιότητα των στοιχείων του, δηλαδή του συνόλου {x: Fx}.

Η εμφάνιση του παραδόξου του Russell σήμαινε τότε κατάρρευση του προγράμματος του λογικισμού του Frege. Ηταν ένα γεγονός που στη συνέχεια προκαλούσε διαρκώς ισχυρές επιφυλάξεις σχετικά με κάθε μεταγενέστερη προσπάθεια ανασυγκρότησης του προγράμματος του λογικισμού.

2. Η ανασυγκρότηση των βασικών θέσεων των Grundlagen από το πρόγραμμα του Νεολογικισμού.

α. Η θέση για τη δικαίωση της προοπτικής του λογικισμού.

Ο όρος ‘νεολογικισμός’ αναφέρεται στο φιλοσοφικό πρόγραμμα που επιχειρεί να δικαιώσει τις βασικές θέσεις του λογικισμού του Frege, σύμφωνα με τις οποίες οι φυσικοί αριθμοί συνιστούν αντικείμενα και οι γενικοί νόμοι της αριθμητικής θεμελιώνονται στη λογική. Συγκεκριμένα ο νεολογικισμός εκτίθεται στα έργα των Crispin Wright (1983) και Bob Hale (1987) καθώς και σε ένα πλήθος άρθρων όπου

[13] Ισάριθμη (ή ισοπληθυκή) προς την έννοια F: δηλαδή 1-1 προς την F

προσπαθούν να ανασυγκροτήσουν το πρόγραμμα των Grundlagen. Το εν λόγω εγχείρημα έχει προκαλέσει ευρύτατη συζήτηση στο χώρο της σύγχρονης φιλοσοφίας των μαθηματικών.

Ο νεολογικισμός βασίζεται σε ένα γεγονός που διαπιστώνει κανείς μελετώντας τις τελευταίες παραγράφους των Grundlagen. Αφού ο Frege διατύπωσε τους εκτασιακούς ορισμούς, έσπευσε στην §73 να παραγάγει και πάλι την ισοδυναμία N= . Αυτό αποδεικνύει ότι δεν είχε σκοπό να εγκαταλείψει την N= παρά μόνον προσωρινά. Η απόδειξη της N= πραγματοποιείται ως εξής: Οπως προαναφέρθηκε, ο αριθμός της έννοιας F ορίζεται ως η έκταση της έννοιας ‘ισοπληθυκή προς την έννοια F’ . Ο Frege συνήγαγε ότι: η έκταση της έννοιας ‘ισοπληθυκή προς την έννοια F’ είναι η ίδια με την έκταση της έννοιας ‘ισοπληθυκή προς την έννοια G’ εάν και μόνο αν η έννοια F είναι ισοπληθυκή με την έννοια G. Μέσω αντικατάστασης από τον εκτασιακό ορισμό, προκύπτει ότι: ο αριθμός της έννοιας F είναι ο ίδιος με τον αριθμό της έννοιας G εάν και μόνο αν η έννοια F είναι ισοπληθυκή με την έννοια G. Αλλά το τελευταίο σημαίνει ότι: ο αριθμός της έννοιας F είναι ο ίδιος με τον αριθμό της έννοιας G αν και μόνο αν η F τίθεται σε 1-1 αντιστοιχία με την G. Αρα, συνάγεται η ισοδυναμία N= .

Όπως φαίνεται, ο Frege πραγματοποίησε έναν ελιγμό. Αφησε προσωρινά την N= για να προχωρήσει στον εκτασιακό ορισμό του αριθμού αλλά στη συνέχεια παρήγαγε και πάλι την N= με τη βοήθεια του εκτασιακού ορισμού. Η μοναδική χρήση του εκτασιακού ορισμού στα Grundlagen βρίσκεται στην παραγωγή της N= (cf. Hale & Wright, 2001, 5). Πρόκειται για μια κίνηση που εντυπωσιάζει αλλά η οποία έχει την ερμηνεία της. Ο Frege στόχευε στην απόδειξη των θεμελιωδών νόμων της αριθμητικής. Η επίτευξη αυτού του στόχου ήταν κεφαλαιώδους σημασίας για το πρόγραμμα του Frege, διότι θα αποδείκνυε ότι οι προτάσεις της αριθμητικής ανάγονται στη λογική. Ο εκτασιακός ορισμός του αριθμού δεν χρησιμοποιείται ωστόσο στο σχεδίασμα των αποδείξεων των αξιωμάτων Peano που ο ίδιος έδωσε στις §§76-83. Χρησιμοποιείται μόνο στην παραγωγή της N= η οποία του ήταν απαραίτητη για να αποδείξει τους θεμελιώδους νόμους της αριθμητικής. Ο λόγος που δεν χρησιμοποίησε εξ αρχής την N= και στράφηκε προς τους εκτασιακούς ορισμούς του, ήταν ακριβώς το πρόβλημα του Καίσαρος.

Ακριβώς αυτό το σημείο έκανε τον Crispin Wright να σκεφτεί ότι μπορούσε κάποιος να αποφύγει εντελώς την εμπλοκή με τους εκτασιακούς ορισμούς (άρα και τα προβλήματα ασυνέπειας στα οποία αυτοί ενέπλεξαν τον Frege) και να παραγάγει απευθείας τα αξιώματα Peano από την ισοδυναμία Ν= στη λογική 2ης τάξης. Αυτή η ιδέα αποτέλεσε και τον πυρήνα του νεολογικισμού. Πράγματι, στο (1983, 158-169) *ο Wright απέδειξε ότι ο Frege είχε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει την ισοδυναμία Ν= ως ένα αξίωμα το οποίο μαζί με τη λογική 2ης τάξης αποτελεί τη συνεπή βάση για την παραγωγή όλων των αξιωμάτων Peano της αριθμητικής (μεταξύ των οποίων και το αξίωμα ότι για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει πάντοτε ο διάδοχός του)*. Το συγκεκριμένο συμπέρασμα ονομάζεται 'Θεώρημα Frege'[14]. Η παραγωγή των θεμελιωδών νόμων της αριθμητικής από την Ν= και τη λογική 2ης τάξης, φιλοδοξεί να είναι ένα είδος δικαίωσης του λογικισμού του Frege. Ο νεο-λογικισμός κατανόησε και ανέδειξε τη μεγάλη σημασία της ισοδυναμίας Ν= για το πρόγραμμα του λογικισμού και τη χρησιμοποίησε ως ακρογωνιαίο λίθο για να αποκαταστήσει τη φιλοσοφική προοπτική του υπό ορισμένες προυποθέσεις, όπως αναφέρουν οι ίδιοι οι Hale & Wright στην εισαγωγή πρόσφατου τόμου τους (2001, 4).

β. Το επιχείρημα του Νεολογικισμού για την ύπαρξη των φυσικών αριθμών ως πραγματικών αντικειμένων.

Σε ότι αφορά την σημαντικότατη επιδίωξη των Grundlagen, δηλαδή την δικαιολόγηση του status των φυσικών αριθμών ως αντικειμένων, ο Crispin Wright σε συνεργασία με τον Bob Hale επιδιώκουν την υποστήριξη αυτής της θέσης μέσω ενός θεμελιώδους επιχειρήματος. Το επιχείρημα του νεολογικισμού για τους αριθμούς συγκροτεί, όπως θα δούμε, μια ρεαλιστική θέση για την ύπαρξη των φυσικών αριθμών. Στα Grundlagen §57, παρουσιάζεται η άποψη ότι οι όροι που εκφράζουν αριθμούς όπως πχ. '4', 'ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος' κλπ. συμπεριφέρονται συντακτικά ως κύρια ονόματα. Όπως ήδη προαναφέρθηκε, μια αριθμητική πρόταση μπορεί να αναδιατυπωθεί με τέτοιο τρόπο ώστε μια αριθμητική έκφραση που φαινόταν να συμπεριφέρεται ως επιθετικός προσδιορισμός, να λαμβάνει τη θέση κυρίου ονόματος και να συμπεριφέρεται ως ενικός όρος. Επιπλέον το γεγονός ότι το οριστικό άρθρο προηγείται των αριθμητικών εκφράσεων, καθώς επίσης και το ότι η αριθμητική κατακλύζεται από έναν υπερπλεονασμό αριθμητικών ταυτοτήτων, υποδηλώνουν ότι οι αριθμοί συνιστούν αντικείμενα. Οι Hale & Wright

[14] Το όνομα αυτό δόθηκε μετά από πρόταση του Boolos.

υποστηρίζουν ότι μπορεί να δοθεί μια πλήρης δικαιολόγηση της ρεαλιστικής-πλατωνιστικής θέσης ότι οι αριθμοί αποτελούν πραγματικά αντικείμενα και ότι οι προαναφερθείσες επισημάνσεις του Frege στα Grundlagen προσφέρουν ένα πολύ χρήσιμο υλικό για την κατασκευή μιας τέτοιας δικαιολόγησης (2001, 7-8). Ο αριθμητικός πλατωνισμός συνιστά μια οντολογική θέση. Ο Fraser MacBride ο οποίος χρησιμοποιεί τον όρο 'νεοφρεγκιανισμός' (neofregianism) για να αναφερθεί ειδικότερα στην οντολογική θέση του νεολογικισμού, σχολιάζει: «*...ο νεολογικισμός είναι μια δέσμη από λίγο πολύ ανεξάρτητες θέσεις. Η μία ή άλλη επί μέρους θέση μπορεί να επιτυγχάνει ακόμα και αν οι άλλες αποτυγχάνουν. Ιδιαίτερα, είναι δυνατόν ο νεολογικισμός ως όλον να αποδειχθεί αβάσιμος ακόμα και αν ο νεοφρεγκιανισμός (=η υποκείμενη έννοια της οντολογίας) επικρατήσει*» (2003, 115).

Οι παρατηρήσεις του Frege που προαναφέρθηκαν, σχετικά με το ότι οι αριθμητικές εκφράσεις συμπεριφέρονται όπως και τα κύρια ονόματα, αποτελούν το πρώτο βήμα του επιχειρήματος του νεολογικισμού. Μας ενδιαφέρει κατ'αρχήν, η θέση και η συντακτική λειτουργία των αριθμητικών εκφράσεων μέσα στις προτάσεις της αριθμητικής. Το πρόβλημα έως εδώ είναι συντακτικού χαρακτήρα, πρέπει δηλαδή να εξασφαλισθεί το ότι οι αριθμητικές εκφράσεις συμπεριφέρονται συντακτικά ως ονόματα (ενικοί όροι) μέσα στις αριθμητικές προτάσεις. Στη συνέχεια χρειάζεται να ισχύει μια δεύτερη προϋπόθεση, δηλαδή το να είναι οι αριθμητικές προτάσεις αληθείς. Επομένως, σύμφωνα με το νεολογικισμό, η ρεαλιστική θέση ότι οι αριθμοί υπάρχουν ως πραγματικά αντικείμενα βασίζεται πάνω σε δύο προυποθέσεις: *η πρώτη είναι ο συντακτικός ρόλος του ενικού όρου τον οποίο παίζουν οι αριθμητικοί όροι μέσα στις προτάσεις της αριθμητικής· η δεύτερη προυπόθεση είναι η αλήθεια των αντίστοιχων προτάσεων (1983, 12-14)*: *Οταν συγκεκριμένοι ενικοί όροι εμφανίζονται μέσα σε αληθείς ατομικές*[15] *προτάσεις τότε υπάρχουν τα αντικείμενα στα οποία αυτοί αναφέρονται*. Στην περίπτωση λοιπόν της αριθμητικής, εάν έχουμε πραγματικά να κάνουμε με αληθείς προτάσεις, τότε δεδομένης της συντακτικής συμπεριφοράς των αριθμητικών εκφράσεων ως ενικών όρων, θα πρέπει αυτοί να αναφέρονται σε κάποια αντικείμενα. Και αυτά τα αντικείμενα είναι οι αριθμοί.

Ας δούμε το παράδειγμα της πρότασης «ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος είναι ο 9», που είναι μια αληθής ταυτοτική πρόταση. Σύμφωνα με το επιχείρημα του Wright, ο αριθμητικός όρος '9' λειτουργεί ως ενικός όρος όπως επίσης και η αριθμητική έκφραση «ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος». Σ'αυτή την περίπτωση καλύπτονται και οι δύο προυποθέσεις, δηλαδή τόσο η παρουσία ενικών όρων στην πρόταση όσο και η αλήθεια της πρότασης. Κατά συνέπεια, υπάρχει αντικείμενο στο οποίο αναφέρονται οι εν λόγω ενικοί όροι, δηλ. ο αριθμός 9.

Ο Wright εκφράζεται με χαρακτηριστικό τρόπο για το γεγονός της ύπαρξης των αριθμών: *«... όταν έχει θεμελιωθεί με βάση το είδος των κριτηρίων που έχουν σχεδιασθεί, ότι μια δεδομένη κλάση όρων λειτουργούν ως ενικοί όροι και όταν έχει επιβεβαιωθεί ότι συγκεκριμένες κατάλληλες προτάσεις που τους περιέχουν είναι με κανονικά κριτήρια αληθείς, τότε προκύπτει ότι αυτοί οι όροι πραγματικά αναφέρονται γνήσια. Και αφού είναι ενικοί όροι, η αναφορά τους θα είναι σε αντικείμενα. Δεν υπάρχει περαιτέρω ευφυής ερώτηση για το εάν τέτοιοι όροι πράγματι έχουν αναφορά, για το εάν υπάρχουν πραγματικά τέτοια αντικείμενα. Για παράδειγμα, το να λειτουργεί η έκφραση ' 7 ' ως ενικός όρος μέσα στην πρόταση '' 7 είναι ο αριθμός των ειδών της Βρετανικής κορώνας'' και το να είναι η πρόταση αυτή αληθής, είναι γεγονότα αποφασιστικής σημασίας για το ότι ο αριθμός 7 υπάρχει, για το ότι ο κόσμος πραγματικά περιέχει ένα τέτοιο αντικείμενο. Δεδομένων των σχετικών γεγονότων της συντακτικής δομής και της αλήθειας, δεν υπάρχει απλά, καμιά περαιτέρω συνεπής αμφισβήτηση για το θέμα» (1983, 14).*

Από τις παραπάνω διατυπώσεις του Wright γίνεται φανερή η πλατωνιστική-ρεαλιστική θεώρηση των αριθμών. Επίσης, αναφέρει: «*... Η πρόταση του Frege είναι πως το γεγονός ότι η αριθμητική μας γλώσσα έχει τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, είναι αρκετό για να εδραιώσει τον φυσικό αριθμό ως μια ειδική έννοια, της οποίας οι πραγματώσεις, εάν έχει, θα είναι αντικείμενα, που συγκροτούν τον εξοπλισμό του κόσμου, το ίδιο αντικειμενικά, όπως τα βουνά, τα ποτάμια και τα δέντρα. Και πάλι, το ότι η έννοια έχει όντως πραγματώσεις εδραιώνεται από την αλήθεια των κατάλληλων αριθμητικών προτάσεων...» (1983, 13-14)*

Επίσης: «*ο Frege χειρίζεται τα θέματα γλώσσας ως καθοριστικά για το εάν μια έννοια είναι γνήσια "ειδική" ή όχι...» (1983, 13).* Ο Wright αναφέρεται στην *έννοια του φυσικού αριθμού* ως μια *ειδική* έννοια με πραγματώσεις τα συγκεκριμένα αντικείμενα δηλαδή τους επί μέρους φυσικούς αριθμούς. Μια έννοια χαρακτηρίζεται

[15] Προτάσεις που δεν περιέχουν άλλες προτάσεις

ως *ειδική* όταν παρουσιάζει ένα είδος αντικειμένων του κόσμου και η κατανόησή της απαιτεί ένα κριτήριο ταυτότητας για τα πράγματα που εμπίπτουν σ' αυτήν. Με αυτό τον τρόπο διακρίνουμε τις ειδικές έννοιες 'άνθρωπος', 'γάτα', 'τραπέζι', 'λεμονιά' από τις μη ειδικές έννοιες 'βαρύ', 'καφετί', 'ριγέ' κλπ. Ο Wright πιστεύει ότι η αριθμητική γλώσσα έχει ακριβώς τα αναγκαία χαρακτηριστικά για να θεωρηθεί η έννοια του φυσικού αριθμού ως ειδική και ότι η έννοια αυτή έχει συγκεκριμένες πραγματώσεις σε αντικείμενα-εκπροσώπους ενός συγκεκριμένου είδους, όπως ισχύει και για την έννοια του ποταμού ή του δέντρου.

Αλλά και ο Bob Hale επίσης διατυπώνει το επιχείρημα για την ύπαρξη των αριθμών με τον ακόλουθο τρόπο :

α. εάν μια κατηγορία εκφράσεων λειτουργούν ως ενικοί όροι σε αληθείς προτάσεις, τότε υπάρχουν αντικείμενα στα οποία αναφέρονται οι εκφράσεις αυτής της κατηγορίας

β. Οι αριθμητικοί όροι και διάφορες άλλες αριθμητικές εκφράσεις μεταξύ αυτών, πράγματι λειτουργούν με αυτόν τον τρόπο σε πολλές αληθείς προτάσεις (των καθαρών και των εφαρμοσμένων μαθηματικών)

Συνεπώς

γ. Υπάρχουν αντικείμενα στα οποία αναφέρονται αυτές οι αριθμητικές εκφράσεις (δηλ. υπάρχουν αριθμοί) (1987, 11)

Οπως είδαμε, οι προϋποθέσεις πάνω στις οποίες στηρίζεται η δικαιολόγηση της ύπαρξης των αριθμητικών αντικειμένων σύμφωνα με τους Hale & Wright είναι συντακτικού αλλά και σημασιολογικού χαρακτήρα: *α) ότι οι αριθμητικές εκφράσεις συμπεριφέρονται συντακτικά ως ενικοί όροι μέσα στις προτάσεις των καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών όπου εμφανίζονται (συντακτική προυπόθεση) και β) ότι ισχύει η αλήθεια των προτάσεων αυτών (σημασιολογική προυπόθεση).* Συνεπώς, η οντολογική θέση για την ύπαρξη των αριθμών θεμελιώνεται (με βάση το επιχείρημα του νεολογικισμού) αφενός σε καθαρά γλωσσικές - συντακτικές προυποθέσεις και αφετέρου στο αληθές κατάλληλων αριθμητικών προτάσεων.

Η ισοδυναμία N= συμβάλλει με καθοριστικό τρόπο στην εφαρμογή του εν λόγω επιχειρήματος γιατί προσδιορίζει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την αλήθεια των ταυτοτήτων της μορφής «Nx:Fx=Nx:Gx». Εάν μια τέτοια ταυτότητα αποδειχθεί αληθής (πράγμα το οποίο συμβαίνει όταν οι έννοιες F και G τίθενται σε μια 1-1 αντιστοιχία) και εάν οι αριθμητικοί όροι Nx:Fx, Nx:Gx συμπεριφέρονται πράγματι ως ενικοί όροι, τότε θα πρέπει να υπάρχει το κοινό αντικείμενο αναφοράς των όρων αυτών. Συνεπώς η αναφορά των αριθμητικών όρων προσδιορίζεται στο πλαίσιο μιας αληθούς αριθμητικής πρότασης. Η πρόταση «Nx:Fx=Nx:Gx» παίζει το ρόλο μιας *αναγνωριστικής πρότασης* (recognition statement) για τους αριθμούς, μας δίνει δηλαδή τη δυνατότητα να αναγνωρίζουμε έναν αριθμό ως τον ίδιο, κάθε φορά που τον συναντούμε υπό ένα διαφορετικό σύμβολο. Ετσι ερμηνεύεται η επισήμανση του Frege ότι το γεγονός πως οι αριθμοί δεν είναι νοητικές παραστάσεις και δεν μας δίνονται μέσω της εμπειρίας αλλά ούτε και μέσω της a priori εποπτείας, δεν αποτελεί εμπόδιο για να τους προσδιορίσουμε (§62). Επίσης: το ότι δεν μπορούμε να σχηματίσουμε μια οποιαδήποτε νοητική εικόνα για μια λέξη δεν σημαίνει καθόλου ότι πρέπει να αρνηθούμε ένα νόημα στη λέξη αυτή (§60). Το να απομονώσουμε μία λέξη και να αναζητούμε για το περιεχόμενό της μια νοητική παράσταση είναι λάθος, γιατί το νόημα δεν ταυτίζεται ούτε με κάποια νοητική παράσταση ούτε με μια ατομική ιδέα. *Οι λέξεις έχουν νόημα μόνο στο πλαίσιο μιας πρότασης*. Εδώ υπεισέρχεται η θεμελιώδης αρχή Β. του Frege, μια από τις τρεις προγραμματικές αρχές που προαναφέρθηκαν στην αρχή αυτού του κεφαλαίου, δηλαδή η αρχή του πλαισίου («context principle»). Η ερμηνεία της αρχής που δίνεται στην περίπτωση των αριθμών από το νεολογικισμό είναι, όπως θα δούμε αναλυτικά, ότι η αναφορά μιας αριθμητικής έκφρασης πρέπει να προσδιορίζεται πάντοτε στο πλαίσιο μιας αληθούς πρότασης. Συνεπώς, η αναφορά των ενικών αριθμητικών όρων προσδιορίζεται στο πλαίσιο αληθών ταυτοτήτων της μορφής «Nx:Fx=Nx:Gx».

Ανοίγουμε μια παρένθεση για να προσθέσουμε ότι κάτι ανάλογο ισχύει βεβαίως για την περίπτωση των διευθύνσεων, εάν λάβουμε υπόψη το χαρακτηριστικό υπόδειγμα πλαισιακού ορισμού του Frege, την ισοδυναμία D=. Χάρη στην ισοδυναμία, είναι γνωστό πότε η ταυτότητα «D(a)=D(b)» είναι αληθής. Ο νεολογικισμός υποστηρίζει ότι και οι εκφράσεις D(a), D(b) συμπεριφέρονται ως ενικοί όροι μέσα σε κατάλληλες προτάσεις. Όταν λοιπόν μια ταυτότητα της μορφής «D(a)=D(b)» είναι αληθής (πράγμα το οποίο συμβαίνει όταν οι ευθείες a και b είναι παράλληλες) τότε οι ενικοί όροι D(a), D(b) αναφέρονται. Συνεπώς υπάρχει ένα αντικείμενο που είναι η κοινή αναφορά των όρων αυτών. Ο νεολογικισμός υποστηρίζει επομένως ένα αντίστοιχο επιχείρημα για την ύπαρξη των διευθύνσεων. Η αναφορά των όρων διεύθυνσης προσδιορίζεται στο πλαίσιο αληθών ταυτοτήτων της μορφής «D(a)=D(b)».

Το επιχείρημα για την ύπαρξη των φυσικών αριθμών, παρά τη βεβαιότητα του Wright για την προφάνειά του, έχει δεχθεί επιθέσεις από διάφορες πλευρές. Με βάση τη διάρθρωσή του, **α)** ένα σημείο επιδεκτικό κριτικής είναι η ίδια η συντακτική συμπεριφορά των αριθμητικών εκφράσεων. Τίθεται το πρόβλημα κατά πόσον μπορούν να σχεδιαστούν *ακριβή κριτήρια για την κατάταξη των αριθμητικών όρων στην κατηγορία των ενικών όρων* και τον διαχωρισμό τους από άλλους τύπους εκφράσεων. Γι αυτό, απαιτείται να αξιολογηθούν τα προτεινόμενα από τους νεολογικιστές κριτήρια ως προς την αποτελεσματικότητά τους (κεφ. 3) **β)** ένα δεύτερο σημείο κριτικής αφορά την αλήθεια των αριθμητικών προτάσεων. Ο Hartry Field έχει ασκήσει γενικότερη κριτική στη μαθηματική αλήθεια αλλά και ειδικότερη κριτική στο νεολογικισμό σχετικά με την αλήθεια των αριθμητικών ταυτοτήτων (κεφ.4 & 5) γι αυτό το λόγο πρέπει να ελεγχθούν τα επιχειρήματά του **γ)** ένα τρίτο σημείο της κριτικής συνδέεται με την αναφορά των αριθμητικών εκφράσεων. Εάν υποτεθεί ότι πράγματι εξασφαλίζεται πως οι αριθμητικές εκφράσεις λειτουργούν ως ενικοί όροι και επίσης ότι πράγματι οι προτάσεις της αριθμητικής είναι αληθείς, τότε τίθεται το θέμα της ερμηνείας της αναφοράς των αριθμητικών εκφράσεων και το κατά πόσον αυτή είναι ερμηνεύσιμη ρεαλιστικά. Τι σημαίνει ότι η αναφορά ενός αριθμητικού όρου είναι πραγματικό αντικείμενο; Για να αποτελέσει το επιχείρημα των νεολογικιστών για τους αριθμούς μια βάσιμη θέση υπέρ του μαθηματικού ρεαλισμού, είναι απαραίτητο τα αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών εκφράσεων να είναι ανεξάρτητα από τον ανθρώπινο γνώστη. Εδώ χρειάζεται να εκτεθεί μία ολόκληρη προβληματική σχετικά με την αριθμητική αναφορά (κεφ. 7, 9, 10) η οποία έχει άμεσο αντίχτυπο στην υπεράσπιση της ρεαλιστικής θέσης.

γ. Η δικαιολόγηση της αριθμητικής γνώσης από τους Hale & Wright.

Όπως προαναφέρθηκε, ο νεολογικισμός επιχειρεί να συγκροτήσει μια δικαιολόγηση της θέσης του Frege ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι πραγματικά αντικείμενα. Ωστόσο, μέσω της ισοδυναμίας N= επιδιώκει επίσης να εξηγήσει τον τρόπο προέλευσης της αριθμητικής γνώσης, με τρόπο συμβατό προς τον αριθμητικό πλατωνισμό. Κατ'αυτή την έννοια, προσφέρει μια ενδιαφέρουσα απάντηση στο δίλημμα του Benacerraf που παρουσιάστηκε στο κεφ.1

Είδαμε ότι σύμφωνα με την κριτική που άσκησε στο μαθηματικό ρεαλισμό ο Paul Benacerraf (1973), η ρεαλιστική προσέγγιση υιοθετεί την καθιερωμένη σημασιολογία αλλά υστερεί στο γνωσιολογικό επίπεδο διότι δεν απαντά στο ερώτημα πώς γνωρίζουμε τις μαθηματικές αλήθειες. Το πρόβλημα συνίσταται στο ότι οι αλήθειες αυτές αφορούν σε οντότητες που θεωρούνται χωροχρονικά απομονωμένες και αιτιακά αδρανείς. Ο Benacerraf γράφει: «*αν οι αριθμοί είναι το είδος των οντοτήτων που υποτίθεται συνήθως ότι είναι, τότε η σύνδεση ανάμεσα στις συνθήκες αλήθειας για τις προτάσεις της θεωρίας αριθμών... και τους ανθρώπους που υποτίθεται ότι έχουν μαθηματική γνώση, δεν μπορεί να εξηγηθεί. Είναι αδύνατο να δοθεί εξήγηση για το πώς κάποιος γνωρίζει τις προτάσεις της θεωρίας αριθμών*». Από την άλλη πλευρά, αν δίναμε την προφανή «... *απάντηση ότι κάποιες από αυτές τις προτάσεις είναι αληθείς αν και μόνο αν προκύπτουν από συγκεκριμένα αξιώματα μέσω καθορισμένων κανόνων, δεν θα βοηθούσε... διότι τότε θα απουσίαζε ο κρίκος σύνδεσης μεταξύ απόδειξης και αλήθειας*» (Benacerraf & Putnam, 1983, 414) (δηλαδή μια τέτοια απάντηση θα μας οδηγούσε και πάλι στη συνδυαστική προσέγγιση).

Το προηγούμενο απόσπασμα παρουσιάζει την εξαιρετικά δύσκολη θέση στην οποία βρίσκεται ο οποιοσδήποτε φιλοδοξεί να απαντήσει στο δίλημμα Benacerraf επιλέγοντας ταυτόχρονα την πλευρά του μαθηματικού ρεαλισμού. Απαιτείται δηλαδή να παρουσιάσει *μια ικανοποιητική εξήγηση του τρόπου σύνδεσης των συνθηκών αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων με τους γνώστες αυτών των αληθειών.*

Παρακολουθήσαμε στο κεφ.1 διάφορες απόπειρες που έγιναν για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα προς όφελος του μαθηματικού ρεαλισμού και τις δυσκολίες στις οποίες προσέκρουσαν. Οι Wright και Hale αντιμετωπίζουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την φρεγκιανή παράδοση. Οι δύο φιλόσοφοι υποστηρίζουν ότι μπορούμε να συνδυάσουμε κατάλληλα τη ρεαστική προσέγγιση με μια ικανοποιητική εξήγηση του *τρόπου σύνδεσης των συνθηκών αληθείας των μαθηματικών προτάσεων με τους γνώστες τους*. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούν το βοηθητικό υπόδειγμα του Frege για τις διευθύνσεις.

Στα Grundlagen § 64, υπάρχει η επισήμανση ότι δεν είναι δυνατό να έχουμε εποπτεία της διεύθυνσης μιας ευθείας αλλά διαθέτουμε εποπτεία της ίδιας της ευθείας. Συγκεκριμένα ο Frege αναφέρει: «... *ασφαλώς, καθετί στη γεωμετρία πρέπει να μας δοθεί αρχικά στην εποπτεία. Τώρα όμως ρωτώ: είχε ποτέ κανείς εποπτεία της διεύθυνσης μιας ευθείας; Ασφαλώς έχουμε εποπτεία μιας ευθείας αλλά κάνουμε διάκριση μεταξύ της ευθείας και της διεύθυνσής της στην εποπτεία; μάλλον απίθανο. Η έννοια της διεύθυνσης ανακαλύφθηκε ως αποτέλεσμα μιας διανοητικής δραστηριότητας η οποία συνδέεται με την εποπτεία. Από την άλλη μεριά, μπορούμε πραγματικά να σχηματίσουμε μία παράσταση των παραλλήλων ευθειών*».

Η παρατήρηση του Frege συνίσταται στο ότι η έννοια της διεύθυνσης είναι λιγότερο οικεία σ'εμάς απ'ότι είναι η παραλληλία δύο ευθειών («*είχε ποτέ κανείς εποπτεία της διεύθυνσης μιας ευθείας;*»). Η παραλληλία δύο ευθειών είναι αρκετά οικεία σ'εμάς, διότι «*μπορούμε να σχηματίσουμε εύκολα μια παράσταση των παραλλήλων ευθειών*» και είναι γνωστό ότι «*καθετί στη γεωμετρία πρέπει να μας δοθεί* αρχικά *στην εποπτεία».* Κατά συνέπεια, από την εποπτεία που διαθέτουμε για την παραλληλία δύο ευθειών μπορούμε να μεταβούμε στην έννοια της διεύθυνσης, μέσω μιας συγκεκριμένης διανοητικής δραστηριότητας που εκφράζεται από την ισοδυναμία

(**D**=) $(\forall a)(\forall b)\ \mathbf{[}\ (D(a) = D(b)) \leftrightarrow (a \mathbin{//} b)\ \mathbf{]}$

Οπως αναφέρει ο Frege στην ίδια παράγραφο, «*αν κατανείμουμε το περιεχόμενο της παραλληλίας δύο ευθειών διαφορετικά από τον αρχικό τρόπο, τότε παίρνουμε μια καινούργια έννοια*». Ο Wright (1983, 32) διασαφηνίζει το συγκεκριμένο σημείο της σκέψης του Frege, εξηγώντας ότι επιτυγχάνουμε μια προσέγγιση σε μια έννοια την οποία δεν γνωρίζαμε πριν, δηλ. την έννοια της διεύθυνσης, βασιζόμενοι απλά στις *οικείες* μας έννοιες της ευθείας γραμμής και της παραλληλίας.

Για να αντιμετωπισθεί κατάλληλα το πρόβλημα που έθεσε ο Benacerraf, χρειάζεται να εναρμονισθεί η θέση του μαθηματικού ρεαλισμού με μια ικανοποιητική απάντηση στο γνωσιολογικό ερώτημα για τα μαθηματικά. Οι Hale και Wright υποστηρίζουν ότι η προσέγγισή τους εναρμονίζει τις δύο συνιστώσες του διλήμματος του Benacerraf στην περίπτωση των διευθύνσεων, διότι από τη μια πλευρά εκφράζει τη ρεαλιστική θέση για τις διευθύνσεις ως πραγματικά αντικείμενα και από την άλλη πλευρά παρέχει μια ικανοποιητική εξήγηση του τρόπου με τον οποίο συνδέονται οι συνθήκες αλήθειας των αντίστοιχων μαθηματικών ταυτοτήτων με τους γνώστες αυτών των αληθειών. Το πρόβλημα για τον ρεαλισμό είναι ότι η χωροχρονική απομόνωση και γενικότερα ο αφηρημένος χαρακτήρας των υποτιθέμενων μαθηματικών οντοτήτων, δεν αφήνει περιθώρια για μια τέτοια εξήγηση. Εδώ όμως παρατηρούμε ότι χάρη στην ισοδυναμία D= βρισκόμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τις συνθήκες αλήθειας προτάσεων που αφορούν διευθύνσεις.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας κατ'αρχήν απλώς τον οικείο γνωστικό εξοπλισμό μας, είμαστε σε θέση να διαπιστώσουμε εάν η δεξιά πρόταση «a//b» της ισοδυναμίας D= είναι αληθής, δηλαδή αν δύο ευθείες a και b είναι παράλληλες. Τότε όμως, λόγω των κοινών συνθηκών αληθείας της αριστερής και της δεξιάς πρότασης (που είναι ισοδύναμες) έχουμε τη δυνατότητα να γνωρίζουμε επίσης το αν η αριστερή ταυτότητα «D(a)=D(b)» είναι αληθής, δηλ. εάν οι διευθύνσεις δύο ευθειών ταυτίζονται. Κατά συνέπεια, υποστηρίζουν οι Hale & Wright, μας δίνεται η δυνατότητα να γνωρίζουμε τις συνθήκες αλήθειας μιας ταυτοτικής πρότασης για αφηρημένες διευθύνσεις, χωρίς να προϋποτίθεται κάποια γκεντελιανού τύπου νοητική λειτουργία που να μας συνδέει με αυτές. Χάρη στον μη προβληματικό επιστημολογικό χαρακτήρα της δεξιάς πρότασης της ισοδυναμίας κατορθώνουμε να γνωρίζουμε το αν είναι αληθής μια ταυτότητα αφηρημένων οντοτήτων (Hale, B. & Wright, C. 2002, 25).

Ο MacBride, σχολιάζοντας τη θέση των Hale & Wright, ισχυρίζεται ότι η ικανότητά μας να επιβεβαιώνουμε την αλήθεια ή το ψεύδος οικείων προτάσεων για ευθείες κατά κάποιο τρόπο *μετασχηματίζεται* στην ικανότητα να επιβεβαιώνουμε την αλήθεια ή το ψεύδος ταυτοτήτων σχετικά με το νέο είδος όρων. Τα αντίστοιχα ισχύουν για την περίπτωση των αριθμών, μέσω της ισοδυναμίας N= .

(N =) $(\forall F)(\forall G)\ [(Nx{:}Fx = Nx{:}Gx) \leftrightarrow (F\ 1\text{-}1\ G)]$

Δηλαδή και στην περίπτωση αυτή, η δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας («F 1-1 G») μας είναι περισσότερο οικεία και επομένως παρουσιάζει μια επιστημολογική προτεραιότητα αφού ανήκει στη λογική ($2^{ης}$ τάξης). Συνεπώς μπορούμε με βάση τον οικείο γνωστικό εξοπλισμό μας να γνωρίζουμε κατά πόσον είναι αληθής η δεξιά πλευρά της N= . Αλλά τότε γνωρίζουμε επιπλέον και κατά πόσον είναι αληθής η ισοδύναμη αριστερή πλευρά, δηλ. η αριθμητική ταυτότητα «Nx:Fx = Nx:Gx».

Επομένως, και οι δύο ισοδυναμίες μας δίνουν τη δυνατότητα πρόσβασης στις συνθήκες-καταστάσεις αληθείας προτάσεων που αφορούν σε αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα (διευθύνσεις ή αριθμούς), μιας πρόσβασης η οποία θα αποτελούσε διαφορετικά ένα μυστήριο. Σύμφωνα με τη διατύπωση των ίδιων των Wright και Hale, η γνωσιολογική συνιστώσα του διλήμματος Benacerraf αντιμετωπίζεται επιτυχώς, διότι έχουμε μια ικανοποιητική απάντηση στο πρόβλημα του τρόπου σύνδεσης ανάμεσα στον ανθρώπινο γνώστη και στις συνθήκες αλήθειας κατάλληλων μαθηματικών προτάσεων: «*Στο βαθμό που μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες ή δύο έννοιες βρίσκονται σε μια 1-1 αντιστοιχία, δεν τίθεται περαιτέρω πρόβλημα σχετικά με τη γνώση βασικών ειδών αλήθειας για τις διευθύνσεις και τους αριθμούς και αυτό συμβαίνει παρά τον αφηρημένο τους χαρακτήρα*» (op.cit., 25).

Η συγκεκριμένη προσέγγιση παρουσιάζει το πλεονέκτημα ότι δεν περιλαμβάνει υποθέσεις περί γνωστικών ικανοτήτων ενός αμφιβόλου status (του τύπου της γκεντελιανής μαθηματικής εποπτείας) ούτε βασίζεται σε κάποια αιτιακού τύπου σχέση του γνώστη με τις εν λόγω οντότητες. Η πρόσβαση στις συνθήκες αλήθειας της αριστερής ταυτότητας βασίζεται στο γνωσιολογικά μη προβληματικό status της δεξιάς πρότασης της ισοδυναμίας N= (αντίστοιχα της D=). Γι αυτούς τους λόγους η προσέγγιση αυτή υπερτερεί έναντι άλλων φιλοσοφικών προτάσεων που παρουσιάστηκαν στο κεφ.1, για την αντιμετώπιση του διλήμματος του Benacerraf (1973).

Κεφ. 3

Το πρόβλημα του σχεδιασμού συντακτικών κριτηρίων για τον διαχωρισμό των ενικών όρων από άλλες εκφράσεις. Οι αριθμητικές εκφράσεις ως ενικοί όροι.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ξεκινήσει η εξέταση των επί μέρους σημείων του επιχειρήματος του νεολογικισμού σύμφωνα με το οποίο επειδή: α) οι αριθμητικές εκφράσεις συμπεριφέρονται συντακτικά ως ενικοί όροι μέσα σε κατάλληλες προτάσεις της αριθμητικής και β) οι προτάσεις αυτές είναι αληθείς, τότε θα πρέπει να υπάρχουν τα αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών αυτών εκφράσεων. Η πρώτη προκείμενη του επιχειρήματος του νεολογικισμού είναι ότι αναγνωρίζεται μια συγκεκριμένη συντακτική συμπεριφορά των αριθμητικών εκφράσεων, τέτοια που να τις κατατάσσει στους ενικούς όρους.

Οι Hale & Wright προσπαθούν γενικότερα να απαντήσουν στα οντολογικά ερωτήματα του τύπου «τι αντικείμενα υπάρχουν;» μέσω της αναζήτησης και εύρεσης μιας ομάδας ενικών όρων που λειτουργούν έτσι σε κατάλληλες αληθείς προτάσεις (2003, 256). Επίσης θεωρούν ότι πρέπει να γίνεται διάκριση ανάμεσα στα ερωτήματα «τι είναι ένας ενικός όρος;» και «ποιες εκφράσεις συμπεριφέρονται ως ενικοί όροι;». Ασφαλώς ένας ενικός όρος είναι η έκφραση που αναπαριστά ένα αντικείμενο αλλά το ποιες εκφράσεις συμπεριφέρονται ως ενικοί όροι είναι ένα συντακτικού τύπου ζήτημα.

1. Η αρχή της 'συντακτικής προτεραιότητας'

Σύμφωνα με τον Frege, τα αντικείμενα ως οντολογική κατηγορία αναπαριστάνονται στη γλώσσα με τις πλήρεις εκφράσεις (ονόματα, οριστικές περιγραφές, γενικότερα ενικούς όρους) ενώ οι έννοιες και οι σχέσεις αναπαριστάνονται με τις ακόρεστες ή μη-πλήρεις εκφράσεις (κατηγορήματα, συναρτησιακές εκφράσεις). Για να ελεγχθεί η πρώτη προκείμενη του επιχειρήματος του νεολογικισμού πρέπει να εξεταστεί ο τρόπος που ο νεολογικισμός διαχωρίζει τους ενικούς όρους από άλλες κατηγορίες εκφράσεων. Ο διαχωρισμός αυτός επιχειρείται με καθαρά συντακτικά κριτήρια. Ο Wright δηλώνει ότι «*βάση του πλατωνισμού του Frege συνιστά η θέση ότι αντικείμενα είναι αυτά στα οποία οι ενικοί όροι, με την κανονική σημασία του 'ενικού όρου', αναφέρονται*» (1983, 13, 53). Στη συγκεκριμένη ανάγνωση, το συντακτικό επίπεδο έχει προτεραιότητα έναντι του οντολογικού. Ο Wright δίνει ιδιαίτερη έμφαση σ'αυτή τη σειρά προτεραιοτήτων και αναφέρεται σ'αυτήν ως αρχή της 'συντακτικής προτεραιότητας'. Αναφέρει χαρακτηριστικά ότι: «*Για τον Frege είναι η συντακτική κατηγορία που βρίσκεται σε προτεραιότητα ενώ η οντολογική*[16] *ακολουθεί*» (1983, 13, 25).

Τι είναι η συντακτική προτεραιότητα; Είναι «*... η θέση ότι ... δεν μπορεί να δοθεί καλύτερη γενική εξήγηση της έννοιας του αντικειμένου παρά με όρους που*

[16] Το ορθότερο, με βάση την ίδια την προσέγγιση του Wright, θα ήταν να γραφτεί ότι (η σύνταξη + η αλήθεια) προηγείται και η οντολογία ακολουθεί.

εκφράζονται με τη βοήθεια της έννοιας του ενικού όρου και της έννοιας της αναφοράς' και ότι η αλήθεια των κατάλληλων προτάσεων-πλαισίων οι οποίες περιέχουν κάτι που είναι, με βάση συντακτικά κριτήρια, ένας ενικός όρος, είναι αρκετή για να εγγυηθεί, θα λέγαμε, για την αναφορά του» (1983, 24).

Σύμφωνα με την αρχή της συντακτικής προτεραιότητας, αντικείμενο είναι, επομένως, κάτι στο οποίο ένας ενικός όρος αναφέρεται. Αυτό που θέλει να επισημάνει ο Wright με την αρχή της συντακτικής προτεραιότητας είναι ότι θα πρέπει πρώτα να απαντήσουμε στο ερώτημα 'ποιες εκφράσεις συμπεριφέρονται ως ενικοί όροι;'. Συνεπώς οφείλουμε να ξεκινήσουμε από τη σύνταξη της γλώσσας και με βάση καθαρά συντακτικά κριτήρια να μπορούμε να αναγνωρίζουμε *ποιες* εκφράσεις της γλώσσας είναι ενικοί όροι. Αυτή την άποψη εκφράζει στο απόσπασμα που ακολουθεί (1983, 53): *"Το κλειδί στον πλατωνισμό του Frege, σύμφωνα με την ερμηνεία μας, είναι η θέση περί της συντακτικής προτεραιότητας: η κατηγορία των αντικειμένων ειδικότερα πρόκειται να εξηγηθεί ως η κατηγορία που περιλαμβάνει κάθετί στο οποίο θα μπορούσε να αναφέρεται ένας ενικός όρος, όπου εννοούμε ότι η δυνατότητα να αναφέρεται ένας ενικός όρος, του δίνεται μέσω της παρουσίας του σε αληθείς κατάλληλες προτάσεις. Είναι φανερό ότι αυτή η αντίληψη θα αποδειχθεί εντελώς ρηχή εάν δεν αποδειχθεί εφικτό το να εξηγήσουμε την έννοια του ενικού όρου, μέσω συντακτικών όρων, δηλαδή με βάση μόνο τα χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς του και χωρίς τη μεσολάβηση της έννοιας του αντικειμένου και της αναφοράς"*.

Παρατηρούμε επιπλέον ότι η σειρά προτεραιοτήτων που τίθεται με αυτόν τον τρόπο μας δίνει τη δυνατότητα να αποκαλούμε αντικείμενο και οτιδήποτε για το οποίο δεν μπορούμε να σχηματίσουμε μια νοητική παράσταση ή το οποίο δεν προσλαμβάνουμε με τις αισθήσεις μας. Η αρχή της συντακτικής προτεραιότητας η οποία από τη σύνταξη μας οδηγεί στην οντολογία έρχεται σε αντίθεση με τον εμπειρισμό. Εάν είμαστε υποχρεωμένοι να σκεφθούμε εμπειριστικά, τότε θα έπρεπε να διαθέτουμε από την αρχή κάποια αντίληψη ενός αντικειμένου, πχ. μια αισθητηριακή πρόσληψη ενός αντικειμένου και έτσι, ξεκινώντας από το ίδιο το αντικείμενο θα μπορούσαμε έπειτα να χαρακτηρίσουμε έναν όρο που αναφέρεται σ'αυτό, ως ενικό όρο. Αλλά τώρα ξεκινάμε από τη σύνταξη, δηλαδή από κάποιους όρους που χαρακτηρίζονται ως ενικοί όροι με βάση κάποια χαρακτηριστικά της γλώσσας και αφού στη συνέχεια μπορέσουμε να εξασφαλίσουμε την αλήθεια τότε θα καταλήξουμε στο αντικείμενο. Οπως άλλωστε αναφέρει ο Frege στην §58 των

Grundlagen για τον αριθμό τέσσερα, «*...δεν μπορούμε να σχηματίσουμε καμιά παράσταση που θα τον καθιστούσε αυθυπόστατο αντικείμενο. Αλλά αυτό δεν είναι σφάλμα που θα μπορούσε να προκύπτει από το χαρακτήρα του αυθυπόστατου που αποδώσαμε στον αριθμό*» και στην §60 σημειώνει: «*...το γεγονός ότι δεν μπορούμε να σχηματίσουμε καμία παράσταση για το περιεχόμενο μιας λέξης δεν είναι λόγος να αρνηθούμε κάθε νόημα στη λέξη ή να την αποκλείσουμε από το λεξιλόγιό μας. Το ότι τείνουμε να το κάνουμε, οφείλεται στο γεγονός ότι όταν ρωτάμε για το νόημα της λέξης το κάνουμε απομονώνοντάς την κι αυτό μας οδηγεί στο να δεχθούμε μια παράσταση ως το νόημα της λέξης... Αλλά οφείλουμε πάντοτε να εξετάζουμε πλήρεις προτάσεις. Μόνο στο πλαίσιο της πρότασης οι λέξεις έχουν νόημα*». Στην προηγούμενη αναφορά επισημαίνουμε δύο σημεία. Το πρώτο είναι ότι η αδυναμία σχηματισμού κάποιας οπτικής ή άλλης παράστασης για τον αριθμό τέσσερα, δεν θα του στερήσει στην παρούσα προσέγγιση το χαρακτήρα του αυθυπόστατου αντικειμένου. Το δεύτερο σημείο είναι ότι το νόημα μιας λέξης καθορίζεται με πλαίσιο την αντίστοιχη πρόταση. Πρόκειται δηλαδή για την περίφημη 'αρχή του πλαισίου'. Θα οδηγηθούμε λοιπόν στους αριθμούς, ξεκινώντας από τη θέση των αριθμητικών εκφράσεων μέσα σε προτάσεις και όχι από νοητικές ή φανταστικές παραστάσεις για τους αριθμούς.

Ηδη στο κεφ.2 αναφέρθηκαν κάποιες ενδείξεις που επισημαίνει ο Frege, σύμφωνα με τις οποίες οι αριθμητικές εκφράσεις λειτουργούν ως ενικοί όροι. Τέτοιες ενδείξεις είναι ότι το οριστικό άρθρο προτάσσεται των αριθμητικών εκφράσεων πχ. '*ο* αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος', '*ο* 3', '*το* τετράγωνο του 5' κλπ. και το ότι οι αριθμητικές εκφράσεις καταλαμβάνουν τη θέση υποκειμένου στις προτάσεις της αριθμητικής. Αναφερόμαστε σε «ενδείξεις» επειδή υπάρχουν και εκφράσεις που φαίνονται να παρουσιάζουν τα προηγούμενα χαρακτηριστικά χωρίς όμως να αποτελούν ενικούς όρους, όπως πχ. η έκφραση 'πήγαινε-έλα' στην πρόταση «το πήγαινε-έλα του Νίκου ήταν εκνευριστικό» ή ο όρος 'χαμόγελο' στην πρόταση «το χαμόγελο του Γιάννη ήταν αμήχανο». Επίσης η έκφραση 'φάλαινα' στην πρόταση «η φάλαινα είναι θηλαστικό' δεν αποτελεί ενικό όρο. Αντίθετα, η ίδια έκφραση αποτελεί ενικό όρο στην πρόταση «η φάλαινα αναρρώνει στο θηριοτροφείο» όπου και υποδηλώνει μία συγκεκριμένη εκπρόσωπο του θηλαστικού αυτού.

Τα παραδείγματα αυτά αποδεικνύουν (cf. 1983, 53-56) ότι για τον χαρακτηρισμό των μαθηματικών εκφράσεων ως ενικών όρων δεν επαρκούν τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά (πρόταξη του οριστικού άρθρου και θέση υποκειμένου) και ότι απαιτείται ο σχεδιασμός συγκεκριμένων και αξιόπιστων κριτηρίων. Οι Hale & Wright επιχείρησαν επανειλλημένα να καθορίσουν όσο το δυνατόν πιο ακριβή κριτήρια για να διαχωρίσουν κατ'αρχήν τους ενικούς όρους από άλλες κατηγορίες εκφράσεων και στη συνέχεια να ελέγξουν τον τρόπο λειτουργίας των αριθμητικών εκφράσεων. Μετά από επαναλήψεις αυτού του εγχειρήματος, έχουν καταλήξει στα κριτήρια που θα περιγραφτούν στα επόμενα (2001, 32-47 & 48-71).

2. Τα προτεινόμενα από τους Hale & Wright συντακτικά κριτήρια

Οι Hale & Wright χρησιμοποιούν κατ'αρχήν τα κριτήρια που είχε διατυπώσει ο Dummett (1973, 59-60) για τους ενικούς όρους. Συγκεκριμένα είχε προτείνει τρία κριτήρια με βάση τα οποία μπορεί να ελεγχθεί κατά πόσον μία έκφραση είναι ενικός όρος. Σύμφωνα μ' αυτά, για να αποτελεί η έκφραση ' t ' ενικό όρο είναι αναγκαίο :

I. Για κάθε πρόταση 'A(t)' (που περιέχει τον όρο t), να μπορούμε να συμπεράνουμε με εγκυρότητα ότι 'υπάρχει κάτι, τέτοιο ώστε A(αυτό)'

II. Από δύο προτάσεις 'A(t)' και 'B(t)' (που περιέχουν τον όρο t), να μπορούμε να συμπεράνουμε με εγκυρότητα ότι 'υπάρχει κάτι, τέτοιο ώστε A(αυτό) και B(αυτό)'

III. Να μπορούμε να συμπεράνουμε έγκυρα μία διάζευξη 'A(t) ή B(t)' από την πρόταση 'είναι αληθές για το t ότι A(αυτό) ή B(αυτό)' .

Τα κριτήρια I-III ορίζουν αναγκαίες συνθήκες για να αποτελούν κάποιες εκφράσεις ενικούς όρους, όχι όμως και ικανές αφού, όπως θα δούμε αργότερα, κάποιες εκφράσεις οι οποίες περνούν με επιτυχία τον έλεγχο των κριτηρίων αυτών, δεν είναι ενικοί όροι.

Ας δούμε με κάποια παραδείγματα, πώς εφαρμόζονται τα παραπάνω κριτήρια στην περίπτωση που η μεταβλητή t αντιστοιχεί σε ενικό όρο. Πχ. από την πρόταση

'Η Αννα είναι άρρωστη' έπεται ότι 'υπάρχει κάποιος τέτοιος ώστε αυτός είναι άρρωστος' και από την πρόταση 'ο εκτυπωτής του Γιώργου είναι εκτός λειτουργίας' έπεται ότι 'υπάρχει κάτι τέτοιο ώστε αυτό είναι εκτός λειτουργίας'. Από τις προτάσεις 'η τετραγωνική ρίζα του 4 είναι πρώτος' και 'η τετραγωνική ρίζα του 4 είναι άρτιος' έπεται ότι 'υπάρχει κάτι τέτοιο ώστε αυτό είναι πρώτος και αυτό είναι άρτιος'. Από την πρόταση 'είναι αληθές για τον Γιώργο ότι αυτός είναι υγιής ή αυτός είναι άρρωστος' έπεται ότι 'ο Γιώργος είναι υγιής ή ο Γιώργος είναι άρρωστος'.

Στα παραπάνω παραδείγματα, εκφράσεις όπως 'Αννα', 'ο εκτυπωτής του Γιώργου', '2', 'η τετραγωνική ρίζα του 4', 'Γιώργος' που παίρνουν την θέση του t φαίνεται να περνούν με επιτυχία τα τεστ. Το γεγονός ότι δεν αποκλείσθηκαν οι συγκεκριμένες εκφράσεις από τα τρία κριτήρια, τους δίνει το προβάδισμα για να θεωρηθούν υποψήφιες για χαρακτηρισμό του ενικού όρου. Θα δούμε στη συνέχεια ότι άλλες εκφράσεις δεν περνούν με επιτυχία τα τρία τεστ με αποτέλεσμα να αποκλεισθούν από την υποψηφιότητά τους ως ενικοί όροι.

Συγκεκριμένα, το πρώτο κριτήριο καταφέρνει να αποκλείει εκφράσεις όπως 'τίποτα', 'κανένας' από την κατηγορία των ενικών όρων [17]. Το δεύτερο κριτήριο αποκλείει εκφράσεις όπως 'κάτι', 'κάποιος' οι οποίες επίσης δεν περνούν αυτό το τεστ. Πράγματι από τις προτάσεις 'κάτι είναι F' και 'κάτι είναι G' δεν έπεται η πρόταση 'υπάρχει κάτι τέτοιο ώστε αυτό είναι F και αυτό είναι G' [18]. Τέλος το τρίτο κριτήριο αποκλείει εκφράσεις όπως 'καθετί', 'καθένας', 'όλα'[19] διότι από την πρόταση 'είναι αληθές για καθετί ότι αυτό είναι F ή αυτό είναι G' δεν έπεται η πρόταση 'καθετί είναι F ή καθετί είναι G' (1983, 57).

Οι Hale και Wright (2001, 50-1, 36-8) αποδέχονται το γεγονός ότι τα κριτήρια Dummett επιτυγχάνουν ως προς τον αποκλεισμό εκφράσεων όπως οι παραπάνω, δηλαδή εκφράσεις ποσοδεικτών. Ομως, τόσο ο Wright (1983, 58) όσο και ο Hale (1987, 16) διαπιστώνουν ότι τα κριτήρια αυτά δεν καταφέρνουν να

[17]Πχ. από την πρόταση 'το αυτοκίνητο του Νίκου έπαθε βλάβη' έπεται ότι υπάρχει κάτι τέτοιο ώστε αυτό έπαθε βλάβη. Αν όμως στη θέση της μεταβλητής t τοποθετήσουμε τη λέξη "τίποτα" τότε από την πρόταση 'τίποτα δεν έπαθε βλάβη' δεν έπεται ότι υπάρχει κάτι τέτοιο ώστε αυτό έπαθε βλάβη.

[18]Πχ. αν η μεταβλητή t αντικατασταθεί από τη λέξη "κάτι" τότε από τις προτάσεις 'κάτι κινείται στον ουρανό' και 'κάτι έπεσε απ'το ντοσιέ' δεν έπεται ότι υπάρχει κάτι τέτοιο ώστε αυτό κινείται στον ουρανό και αυτό έπεσε απ'το ντοσιέ.

[19]Πχ. αν η μεταβλητή t αντικατασταθεί από τη λέξη "καθετί" τότε από την πρόταση 'είναι αληθές για καθετί ότι αυτό είναι όμορφο ή αυτό είναι άσχημο' δεν έπεται ότι 'καθετί είναι όμορφο ή καθετί είναι άσχημο'.

αποκλείσουν επιθετικούς προσδιορισμούς όπως πχ. ‘κόκκινο’ ή αόριστες ονοματικές εκφράσεις όπως πχ. ‘αστυνομικός’ όταν αυτές εμφανίζονται στη θέση του t σε συμπληρωματικές θέσεις μέσα στην πρόταση. Αυτό συμβαίνει πχ. για την πρόταση Γ(t) ‘ο Γιάννης είναι αστυνομικός’ ή για την πρόταση Δ(t) ‘το αυτοκίνητό μου είναι βαθυκόκκινο’, όπου οι λέξεις ‘αστυνομικός’ και ‘βαθυκόκκινο’ είναι δυνατό να παραπλανήσουν περνώντας επιτυχώς τα τεστ, χωρίς να είναι ενικοί όροι.

Το πρόβλημα που παρουσιάζεται όταν εκφράσεις όπως αυτές των προηγούμενων παραδειγμάτων (‘βαθυκόκκινο’, ‘αστυνομικός’) δεν είναι δυνατό να αποκλεισθούν από τα δεδομένα κριτήρια, αντιμετωπίσθηκε από τον ίδιο τον Dummett, με συγκεκριμένες συμπληρώσεις των κριτηρίων του.

Ο Dummett παρατήρησε ότι στις προβληματικές περιπτώσεις όπου επιθετικοί προσδιορισμοί ή αόριστες ονοματικές εκφράσεις φαινομενικά ικανοποιούν τα κριτήρια, χωρίς να είναι ενικοί όροι, τότε ο όρος ‘κάτι’ που αναφέρεται στα κριτήρια (βλ. κριτήρια 1 και 2: ‘υπάρχει *κάτι* τέτοιο ώστε...’) συμβαίνει να εκφράζει μια γενικότητα 2ης ή ανώτερης τάξης, δηλαδή να γίνεται ποσόδειξη πάνω σε έννοιες και όχι σε αντικείμενα. Πχ. εάν στη θέση t τοποθετήσουμε τη λέξη ‘αστυνομικός’ για να ελέγξουμε κατά πόσον είναι ενικός όρος, τότε από την πρόταση ‘ο Γιάννης είναι αστυνομικός’ θα μπορούσε κάποιος να συναγάγει σύμφωνα με το κριτήριο 1 ότι ‘υπάρχει *κάτι*, ώστε αυτό είναι ο Γιάννης’, αλλά ο ποσοδείκτης ‘κάτι’ στην προκειμένη περίπτωση παρουσιάζει γενικότητα 2ης τάξης, αφού αυτό το ‘κάτι’ αναφέρεται στην ιδιότητα του αστυνομικού και όχι σε αντικείμενο. Ο Dummett πιστεύει ότι ένας τρόπος να διαχωρίσουμε και να αποκλείσουμε τις προβληματικές εκφράσεις είναι να συμπληρώσουμε τα τρία κριτήρια με ένα τέταρτο. Εδώ θα μπορούσε να παρατηρήσει κάποιος ότι αν μπορούσαμε να κάνουμε τη διάκριση ανάμεσα στις χρήσεις που εκφράζουν γενικότητα $1^{ης}$ τάξης και στις χρήσεις που εκφράζουν γενικότητα ανώτερης τάξης τότε θα είμαστε ήδη σε θέση να ξεχωρίσουμε τους ενικούς όρους από τους κατηγορηματικούς προσδιορισμούς. Αλλά για να γίνει η απαιτούμενη διάκριση, ο Dummett προτείνει μια ελεγκτική διαδικασία. Το τέταρτο αυτό κριτήριο θα επιβάλλει έναν περιορισμό στη χρήση του ποσοδείκτη ‘κάτι’, έτσι ώστε αυτός να ερμηνεύεται ως πρώτης τάξης ποσοδείκτης. Συγκεκριμένα προτείνεται (1973, 67-8) μια ορισμένη σειρά ερωταποκρίσεων για περαιτέρω διευκρίνιση. Ετσι, αν κάποιος, από την πρόταση ‘ο Γιάννης είναι αστυνομικός’ συναγάγει ότι ‘υπάρχει *κάτι*, ώστε αυτό είναι ο Γιάννης’, του θέτουμε το ερώτημα ‘τι;’ και απαντά:

‘αστυνομικός’. Τότε ξαναρωτάμε: ‘ποιος αστυνομικός;’ Όμως η τελευταία ερώτηση δεν έχει απάντηση διότι δεν έχει νόημα κάποια απάντηση. Οταν ο όρος ‘κάτι’ εκφράζει γενικότητα 2ης ή ανώτερης τάξης, θα οδηγηθούμε μέσω μιας σειράς διευκρινιστικών ερωτήσεων σε ένα σημείο στο οποίο η ερώτηση δεν θα έχει απάντηση. Ας δούμε (cf. Hale, 2001, 37, 51) επιπλέον το παράδειγμα: ‘ο Γιάννης είναι αστυνομικός’ και ‘ο Γιώργος δεν είναι αστυνομικός’. Τότε κάποιος μπορεί να συναγάγει με βάση το κριτήριο 2, ότι ‘υπάρχει *κάτι* τέτοιο ώστε αυτό είναι ο Γιάννης και δεν είναι ο Γιώργος’. Τότε, ο Dummett συνιστά να θέσουμε την εξής διευκρινιστική ερώτηση : ‘τι;’ (δηλαδή ‘τι είναι αυτό που είναι ο Γιάννης και δεν είναι ο Γιώργος;’) Μπορούμε φυσικά να απαντήσουμε ‘αστυνομικός’. Αλλά τότε πρέπει να θέσουμε την επόμενη διευκρινιστική ερώτηση: ‘ποιος αστυνομικός;’ Η τελευταία ερώτηση δεν επιδέχεται απάντηση, παρά το γεγονός ότι γραμματολογικά δεν φαίνεται να παρουσιάζει κάποιο πρόβλημα. Η περαιτέρω διευκρίνηση δεν έχει πραγματικά κανένα νόημα αφού αυτό που συνιστά τη διαφορά του Γιάννη από τον Γιώργο είναι η ιδιότητα του αστυνομικού. Στο παράδειγμα αυτό, το συμπληρωματικό τεστ του Dummett επίσης έδειξε ότι ο όρος ‘κάτι’ εκφράζει γενικότητα 2ης τάξης, δηλαδή αντιστοιχεί σε μια ιδιότητα.

Αντίθετα, ας εξετάσουμε το παράδειγμα: ‘ο Γιάννης δανείσθηκε το φλογοβόλο του Γιώργου’. Τότε, σύμφωνα με το κριτήριο 1 συνάγουμε ότι υπάρχει ‘κάτι’ το οποίο δανείσθηκε ο Γιάννης. Επομένως η έκφραση ‘το φλογοβόλο του Γιώργου’ περνά επιτυχώς το τεστ. Εάν τώρα θέσουμε (κατά την υπόδειξη του Dummett) τη διευκρινιστική ερώτηση ‘τι (δανείσθηκε);’ απαντάμε ‘ένα φλογοβόλο’. Και ακολουθεί η περαιτέρω διευκρινιστική ερώτηση ‘ποιο φλογοβόλο;’ Εδώ η τελευταία ερώτηση είναι αποδεκτή και έχει νόημα μια απάντηση για το συγκεκριμένο φλογοβόλο δηλ. ‘το φλογοβόλο του Γιώργου’. Διότι είναι φανερό ότι αυτό που έγινε αντικείμενο δανεισμού ήταν ένα συγκεκριμένο φλογοβόλο. Στην προκειμένη περίπτωση, ο όρος ‘κάτι’ αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο και όχι σε κάποια ιδιότητα.

Συνεπώς ο ίδιος ο Dummett αναγκάσθηκε να συμπληρώσει τα τρία κριτήριά του με το τέταρτο κριτήριο που συνίσταται σε μια σειρά διευκρινιστικών ερωτήσεων. Στις περιπτώσεις που η ποσοδεικτική έκφραση ‘κάτι’ εκφράζει γενικότητα 2ης τάξης, η σειρά διευκρινιστικών ερωτήσεων καταλήγει σε ένα ορισμένο σημείο όπου μια ερώτηση, ακόμα κι αν είναι γραμματολογικά ορθή, δεν έχει νόημα να απαντηθεί. Ας εξετάσουμε επιπλέον το παράδειγμα: έχουμε τις προτάσεις 'Ο Γιάννης είναι υπομονετικός', 'Ο Γιώργος δεν είναι υπομονετικός'. Από τις δύο προτάσεις, με βάση το κριτήριο 2 έπεται ότι 'υπάρχει *κάτι* το οποίο ο Γιάννης είναι και ο Γιώργος δεν είναι'. Φαινομενικά, η έκφραση 'υπομονετικός' περνά το τεστ 2. Τότε σύμφωνα με την υπόδειξη Dummett, για να δούμε αν ο όρος 'κάτι' εκφράζει γενικότητα 1ης ή ανώτερης τάξης, πρέπει επιπλέον να θέσουμε τη διευκρινιστική ερώτηση: 'τι;'. Και απαντούμε: 'υπομονετικός'. Υποβάλλουμε και την αμέσως επόμενη διευκρινιστική ερώτηση : 'ποιος υπομονετικός;' και παρατηρούμε ότι όχι μόνο δεν έχει νόημα μια απάντηση αλλά επιπλέον η ίδια η ερώτηση δεν είναι γραμματολογικά ορθή.

Σύμφωνα λοιπόν με τα κριτήρια Dummett I – III στα οποία έχει προστεθεί το συμπληρωματικό κριτήριο των ερωταποκρίσεων, είναι δυνατό να αποκλεισθούν από την κατηγορία των ενικών όρων, διάφορες αόριστες ονοματικές περιγραφές, όπως πχ. 'αστυνομικός', 'ποιητής', 'φιλόσοφος' και επιθετικοί προσδιορισμοί όπως 'βαθυκόκκινο', 'υπομονετικός' κλπ. Τότε όμως τίθεται ένα επιπλέον θέμα το οποίο απασχόλησε τον Hale. Τα κριτήρια Dummett δεν επαρκούν προκειμένου να αποκλεισθούν εκφράσεις όπως είναι για παράδειγμα τα κατηγορήματα. Σχετικά μ' αυτό αναφέρει «*... Αλλά αυτό δεν είναι ένα καταστροφικό μειονέκτημα, όπως αρχικά μπορεί να φαίνεται, επειδή -αν όλα πάνε καλά- θα είμαστε ικανοί να αποκλείσουμε και αυτές τις εκφράσεις μέσω μιας κατάλληλα τροποποιημένης εκδοχής του αριστοτελικού κριτηρίου*» (Hale, 2001, 54).

Αυτό που προτείνεται για τον αποκλεισμό των κατηγορημάτων είναι ένας κατάλληλος συνδυασμός των κριτηρίων Dummett και μιας τροποποιημένης εκδοχής του αριστοτελικού κριτηρίου. Σύμφωνα με το αριστοτελικό κριτήριο (κριτήριο που ο Wright αποδίδει στον Αριστοτέλη) μπορούμε να διακρίνουμε ανάμεσα στους ενικούς όρους και στα κατηγορήματα με βάση το γεγονός ότι ενώ υπάρχει η άρνηση ενός κατηγορήματος, δεν υπάρχει η άρνηση ενός ενικού όρου. Για κάθε κατηγόρημα πχ. '__ είναι σοφός' υπάρχει ένα κατηγόρημα το οποίο επαληθεύεται από όλα και ακριβώς τα αντικείμενα που διαψεύδουν το αρχικό κατηγόρημα. Υπάρχει δηλαδή η άρνηση '__ δεν είναι σοφός'. Για οποιονδήποτε όμως ενικό όρο, δεν υπάρχει ένας άλλος ο οποίος να χαρακτηρίζεται από όλες και ακριβώς τις ιδιότητες που δεν χαρακτηρίζουν τον αρχικό, με άλλα λόγια δεν υπάρχει η άρνηση του αρχικού ενικού όρου. Θα λέγαμε ότι οι ιδιότητες εμφανίζονται στο επίπεδο της γλώσσας να ανταγωνίζονται για το ποιο αντικείμενο θα χαρακτηρίσουν όπως φαίνεται από το ότι για κάθε κατηγόρημα υπάρχει ένα αντίθετο κατηγόρημα που εφαρμόζεται σε ένα αντικείμενο όπου το πρώτο δεν εφαρμόζεται. Ενώ τα αντικείμενα δεν ανταγωνίζονται μεταξύ τους για την κατοχή των ιδιοτήτων, όπως φαίνεται στο επίπεδο της γλώσσας από την απουσία αντιθετικών ενικών όρων.

Συνήθως χρησιμοποιείται η αρχή:

(A) ($\exists$ B) (C) { [A $\overline{C}$] είναι αληθής αν και μόνο αν [B $\overline{C}$] ψευδής }

Η αρχή επαληθεύεται όταν A και B κατηγορήματα και C ενικός όρος. Η αρχή σφάλλει όταν A και B ενικοί όροι και C κατηγόρημα. Η σημασία του αριστοτελικού κριτηρίου έγκειται στο γεγονός ότι για οποιονδήποτε ενικό όρο δεν υπάρχει ο αντίθετός του, δηλαδή κάποιος όρος που να αποτελεί την άρνησή του. Για τους ενικούς όρους, δεν ισχύει η αρχή της άρνησης η οποία ισχύει για τα κατηγορήματα.

Το αριστοτελικό κριτήριο στην αρχική του εκδοχή παρουσίαζε αδυναμίες τις οποίες υπέδειξε ο Wright. Προϋπέθετε έναν εκ των προτέρων περιορισμό των τιμών των μεταβλητών A, B και C για να λειτουργήσει σωστά. Ο Hale αντιμετώπισε αυτό το θέμα: Εάν t είναι μία έκφραση μέσα σε μια πρόταση και C( ) είναι το υπόλοιπο της πρότασης, τότε C(t) είναι η πλήρης πρόταση. Εστω επίσης 'Σα' και 'Πβ' ποσοδείκτες, όπου το α διατρέχει τις εκφράσεις και μόνο τις εκφράσεις που μπορούν να αντικαταστήσουν το t και το β διατρέχει τις εκφράσεις και μόνο αυτές που μπορούν να αντικαταστήσουν το C( ). Τότε σχηματίζουμε ένα ζεύγος (α, β) που αποτελείται από μια έκφραση τύπου α και μια έκφραση τύπου β, με την δικαιολογημένη σκέψη ότι αυτό το ζεύγος δημιουργεί μια ολοκληρωμένη πρόταση. Το αριστοτελικό κριτήριο μπορεί να τροποποιηθεί με βάση τις προηγούμενες προϋποθέσεις και να διατυπωθεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να προσδιορίζει την αναγκαία συνθήκη για να είναι ο όρος t ενικός όρος :

« t λειτουργεί ως ενικός όρος στην πρόταση C(t) $\rightarrow \neg$ΣαΠβ((α,β) $\leftrightarrow \neg$(t,β))»

Αν πχ. στη θέση του t τοποθετηθεί το όνομα ‘Σωκράτης’ και στη θέση του β η έκφραση ‘είναι σοφός’, είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να βρούμε ένα α τέτοιο ώστε να ισχύει η ισοδυναμία:

(α, είναι σοφός) $\leftrightarrow \neg$ (Σωκράτης, είναι σοφός)

Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει η άρνηση του όρου ‘Σωκράτης’. Επομένως το όνομα ‘Σωκράτης’ περνάει το τεστ της ασυμμετρίας της άρνησης και άρα είναι ενικός όρος. Κατά τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει η άρνηση καθεμιάς από τις εκφράσεις ‘δύο’, ‘η τετραγωνική ρίζα του τέσσερα’, ‘το αυτοκίνητο του Γιώργου’.

Δεν συμβαίνει βέβαια το ίδιο με το κατηγόρημα ‘__είναι σοφός’, εάν αυτό πάρει τη θέση του t. Διότι η άρνησή του υπάρχει και είναι η έκφραση ‘__δεν είναι σοφός’. Συγκεκριμένα, εάν το t αντικατασταθεί με την έκφραση ‘__είναι σοφός’ και το β με την έκφραση ‘Σωκράτης’, τότε μπορούμε να βρούμε ένα α (δηλ. την έκφραση ‘__δεν είναι σοφός’) τέτοιο ώστε να ισχύει η ισοδυναμία:

(δεν είναι σοφός, Σωκράτης) $\leftrightarrow \neg$ (είναι σοφός, Σωκράτης).

Κατά συνέπεια, με βάση το τεστ, η έκφραση ‘__είναι σοφός’ πρέπει να αποκλεισθεί από την κατηγορία των ενικών όρων, διότι είναι κατηγόρημα. Ομοίως αποκλείονται από την κατηγορία των ενικών όρων εκφράσεις, όπως ‘__είναι άρτιος’, ‘__είναι περιττός’, ‘__είναι πρώτος’, ‘__είναι δίκαιος’ κλπ.

Το κριτήριο αυτό φαίνεται να λειτουργεί σωστά, διότι διαχωρίζει τους ενικούς όρους από τα κατηγορήματα. Ωστόσο, στο σημείο αυτό ο Hale επισημαίνει ότι χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή διότι η μεταβλητή β δεν πρέπει να παίρνει ανεξέλεγκτα οποιαδήποτε τιμή. Για την ορθή χρήση του αριστοτελικού κριτηρίου απαιτείται ο περιορισμός των μεταβλητών, διότι, όταν πχ. το β πάρει ως τιμή την έκφραση ‘καθένας’ ή ‘κάποιος’ τότε το κριτήριο δεν οδηγεί σε ορθά αποτελέσματα. Χρειάζεται λοιπόν ένας κατάλληλος περιορισμός της μεταβλητής β. Και τι θα είναι αυτό που θα περιορίσει τη μεταβλητή β κατάλληλα ώστε να μην παίρνει τιμές όπως ‘καθένας’, ‘κάποιος’, ‘καθετί’ κλπ; Η απάντηση στο ερώτημα είναι : τα κριτήρια του Dummett. Γι αυτό το λόγο, ο Hale πιστεύει ότι τα κριτήρια Dummett που προαναφέρθηκαν, πρέπει να εφαρμόζονται πριν από το αριστοτελικό κριτήριο. Οπως είδαμε, τα κριτήρια Dummett καταφέρνουν να αποκλείσουν ποσοδεικτικές εκφράσεις όπως ‘καθένας’, ‘κάποιος’, ‘καθετί’, ‘τίποτα’ κλπ. από την κατηγορία των ενικών όρων. Κατά συνέπεια, αυτό που χρειαζόμαστε στο συγκεκριμένο σημείο, είναι ένας συνδυασμός του τροποποιημένου αριστοτελικού κριτηρίου και των κριτηρίων Dummett.

Για να ανακεφαλαιώσουμε, η διαδικασία ελέγχου την οποία τελικά διατυπώνει ο Hale (2001, 47, 53) αποτελείται από έναν συνδυασμό μιας τροποποιημένης μορφής του αριστοτελικού κριτηρίου και των κριτηρίων Dummett και πραγματοποιείται σε δύο στάδια : στο πρώτο στάδιο, χρησιμοποιούμε τα τρία κριτήρια Dummett μαζί με το συμπληρωματικό κριτήριο των ερωταποκρίσεων για να αποκλείσουμε ποσοδεικτικές εκφράσεις όπως 'τίποτα', 'κανένας', 'κάποιος', 'κάτι', 'καθένα' κλπ. καθώς και αόριστες ονοματικές εκφράσεις όπως πχ. 'αστυνομικός', 'φιλόσοφος', 'ποιητής' κλπ. και επιθετικούς προσδιορισμούς όπως 'βαθυκόκκινο', 'υπομονετικός' κλπ. με τους τρόπους που έχουν περιγραφεί. Ύστερα σε ένα δεύτερο στάδιο, χρησιμοποιούμε το τροποποιημένο από τον Hale αριστοτελικό κριτήριο αλλά αυτή τη φορά με ταυτόχρονο περιορισμό της μεταβλητής β σε εκφράσεις οι οποίες δεν έχουν ήδη αποκλεισθεί από το προηγούμενο στάδιο. Τότε μόνο καταφέρνουμε να αποκλείσουμε και εκείνες τις εκφράσεις που αποτελούν κατηγορήματα. Οι εκφράσεις που απομένουν τελικά, δηλαδή όσες περνούν με επιτυχία και τα δύο στάδια ελέγχου χωρίς να αποκλεισθούν, λειτουργούν τελικά ως ενικοί όροι στις προτάσεις τους. Επίσης, οι αριθμητικοί όροι και οι αριθμητικές εκφράσεις δεν *αποκλείονται* με βάση τα δύο αυτά βήματα ελέγχου, άρα είναι δυνατό να θεωρηθούν ενικοί όροι.

3. Αξιολόγηση των προτεινόμενων συντακτικών κριτηρίων

Η προσπάθεια των Wright και Hale να θέσουν κριτήρια διάκρισης των ενικών όρων από άλλους τύπους εκφράσεων βασίστηκε, όπως είδαμε, σε μεγάλο βαθμό στα κριτήρια Dummett. Σε ότι αφορά το ερώτημα αν αυτά τα κριτήρια είναι πλήρη ή εάν χρειασθεί ενδεχομένως να συμπληρωθούν με κάποια άλλα, ο Hale (2001, 68-9) εκφράζει την άποψη ότι δεν μπορεί κανείς να περιμένει μια απόδειξη της πληρότητας των συγκεκριμένων κριτηρίων. Αυτό που μπορεί κανείς μόνο να κάνει είναι να ξεκινήσει από κάποιες ιδέες που έχει για το *ποιες εκφράσεις* πρέπει και ποιες δεν πρέπει να ταξινομούνται ως ενικοί όροι και να σχεδιάσει συνθήκες οι οποίες να καλύπτουν ένα πεδίο περιπτώσεων. Από εκεί και μετά, διερευνά και διευρύνει περαιτέρω το πεδίο, ελέγχοντας κατά πόσον τα κριτήρια επαρκούν για μεγαλύτερο πλήθος περιπτώσεων. Τίποτα επομένως δεν αποκλείει την συμπλήρωση ή διόρθωση των δεδομένων κριτηρίων.

Πράγματι, η παραπάνω απόπειρα να διαχωρισθούν με συντακτικά κριτήρια οι ενικοί όροι, πρέπει να ληφθεί υπόψη και να χαρακτηρισθεί ως 'σχεδιασμός κριτηρίων' και όχι ως 'καθορισμός κριτηρίων', δεδομένου ότι δεν παρουσιάζει την πληρότητα που χρειάζεται για έναν έλεγχο όλων των τύπων εκφράσεων. Αν και μπορεί να δεχθεί κριτική από διάφορες απόψεις, δύο αδύνατα σημεία των εν λόγω κριτηρίων θα αναφερθούν τα οποία και συνδέονται άμεσα με το υπό διερεύνηση θέμα.

Στην απόπειρα των νεολογικιστών να αποδείξουν ότι οι αριθμητικές εκφράσεις συμπεριφέρονται ως ενικοί όροι, δεν έχει γίνει καμιά αναφορά στο θέμα των «περιγραφών». Πολλές από τις αριθμητικές εκφράσεις όπως 'ο αριθμός των δορυφόρων του Δία', 'ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος', 'ο αριθμός των μαθητών του Χριστού' κλπ, στις οποίες προηγείται το οριστικό άρθρο, εκφράσεις οι οποίες κατεξοχήν ενδιαφέρουν το νεολογικισμό, είναι οριστικές περιγραφές. Οι Hale & Wright δεν κάνουν μνεία αυτού του γεγονότος και όπως διαπιστώνεται από τα παραδείγματα που έχουν χρησιμοποιήσει, αντιμετωπίζουν τις οριστικές περιγραφές όπως και τα κύρια ονόματα. Ωστόσο είναι γνωστό ότι ο Russell είχε διαφορετική γνώμη.

Ο Russell και όσοι τον ακολουθούν, διαφωνούν με την άποψη ότι οι οριστικές περιγραφές είναι ενικοί όροι. Συγκεκριμένα, (βλ. 1919, ch.16) διαχώρισε τις οριστικές περιγραφές από τα ονόματα. Εάν στην πρόταση 'x=x' αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή με ένα όνομα ενός υπαρκτού αντικειμένου, πχ. 'Αριστοτέλης' τότε η ταυτότητα που προκύπτει είναι αληθής, εάν όμως αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή με μια οριστική περιγραφή όπως πχ. 'ο νυν βασιλιάς της Γαλλίας' τότε η αντίστοιχη ταυτότητα εμφανίζει πρόβλημα.

Ενα «κύριο όνομα» είναι ένα σύμβολο το οποίο υποδηλώνει ένα ατομικό αντικείμενο και αυτό το κάνει ανεξάρτητα από οποιοδήποτε άλλο σύμβολο. Αυτό το αντικείμενο αποτελεί την αναφορά του ονόματος. Μια «περιγραφή» όμως είναι ένα σύνθετο σύμβολο το οποίο δεν μπορεί να έχει νόημα από μόνο του παρά μόνον σε συνδυασμό με άλλα σύμβολα. Στις προτάσεις που μια οριστική περιγραφή έχει τη θέση υποκειμένου, ο Russell πρότεινε μια ανάλυση τέτοια ώστε ώστε το γραμματικό υποκείμενο να μην εμφανίζεται πια. Ο νέος τρόπος γραφής χρησιμοποιεί προτασιακές συναρτήσεις και μεταβλητές. Ετσι, ο Russell, απορρίπτοντας το status των ενικών όρων στις περισσότερες εκφράσεις που χρησιμοποιούνται ως οριστικές περιγραφές, χρησιμοποιεί μια μέθοδο απαλοιφής τους από τη λογική μορφή της γλώσσας. Η μέθοδος συνίσταται σε έναν διαφορετικό τρόπο παρουσίασης των προτάσεων που περιέχουν καθορισμένες περιγραφές. Η πρόταση πχ. (1) ‘ο νυν βασιλιάς της Γαλλίας είναι φαλακρός’ μπορεί να παρουσιασθεί με τον εξής τρόπο:

‘Υπάρχει κάποιος x τέτοιος ώστε (x βασιλιάς της Γαλλίας) και για κάθε y, αν (y βασιλιάς της Γαλλίας) τότε x = y και ο x είναι φαλακρός’

Θα μπορούσε όμως κανείς να ισχυρισθεί ότι και η μαθηματική πρόταση (2) ‘ο αριθμός των πλανητών του ηλ.συστήματος είναι περιττός’ μπορεί να παρουσιαστεί ως εξής:

‘ Υπάρχει κάποιος x τέτοιος ώστε (x αριθμός των πλανητών του ηλ.συστήματος) και για κάθε y, αν (y αριθμός των πλανητών του ηλ.συστήματος) τότε x = y και ο x είναι περιττός’

Η παραπάνω ανάλυση που προτείνει ο Russell δείχνει ότι υπάρχει και εναλλακτικός τρόπος χειρισμού των εκφράσεων της μορφής ‘ο αριθμός της έννοιας F’ πχ. ‘ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος’, ‘ο αριθμός των δορυφόρων του Δία’, ‘ο αριθμός των τροχών της άμαξας’ κλπ. όπου οι εν λόγω εκφράσεις δεν αντιμετωπίζονται ως κύρια ονόματα. Ενα μειονέκτημα της προσέγγισης του νεολογικισμού σε ότι αφορά το θέμα των ενικών όρων είναι το γεγονός ότι οι Hale & Wright δεν κάνουν μνεία του θέματος των οριστικών περιγραφών. Μόνον μετά από κριτική[20] που τους ασκήθηκε σχετικά, έδωσαν ορισμένες διευκρινίσεις τις οποίες θα έχουμε την ευκαιρία να παρακολουθήσουμε, στο κεφ.7, όταν θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της αναφοράς. Προς το παρόν επισημαίνουμε απλώς ότι οι οριστικές περιγραφές της μορφής ‘ο αριθμός της έννοιας F’ αντιμετωπίζονται από το νεολογικισμό ως ενικοί όροι, χωρίς ιδιαίτερη αναφορά στο ειδικό τους status.

Ειδικότερα, σε ότι αφορά εκφράσεις όπως πχ. ‘το χαμόγελο του Ανδρέα’, ‘το νεύμα της Μαρίας’, τα κριτήρια δεν λειτουργούν σωστά, διότι ενώ αυτές οι εκφράσεις δεν είναι ενικοί όροι, τα κριτήρια δεν μπορούν να τις αποκλείσουν. Για να διαχωρισθούν οι ενικοί όροι από εκφράσεις που μας παραπλανούν παίρνοντας εκ πρώτης όψεως τη θέση ενικού όρου, θα έπρεπε να προβλεφθούν κριτήρια ταυτότητας. Ο Ian Rumfit παρατηρεί ότι από τα προτεινόμενα κριτήρια των Hale & Wright λείπει ένα κριτήριο ταυτότητας. Πράγματι, ένα κριτήριο ταυτότητας θα μπορούσε να ελέγξει και να αποκλείσει παραπλανητικές εκφράσεις όπως πχ. ‘το χαμόγελο του Ανδρέα’, ‘το πήγαινε-έλα του Νίκου’, ‘το νεύμα του Νίκου’ κλπ. Ο ίδιος ο Frege έχει επισημάνει τη συμμετοχή των αριθμητικών εκφράσεων σε πλήθος από ταυτότητες ως ένδειξη ότι αποτελούν ενικούς όρους. Η παράλειψη ενός κριτηρίου ταυτότητας από τον συνδυασμό των κριτηρίων που προτείνει ο Hale είναι κάτι που ο ίδιος παραδέχεται (2001, 69). Από την άλλη πλευρά, όπως ο Ian Rumfit (2003, 198-9) παρατηρεί, ένα κριτήριο ταυτότητας δεν θα μπορούσε ούτως ή άλλως να συμπεριληφθεί σε έναν κατάλογο συντακτικών κριτηρίων για την αναγνώριση των ενικών όρων διότι δεν έχει καθαρά συντακτικό χαρακτήρα. Ένα κριτήριο ταυτότητας δεν μπορεί να έχει καθαρά συντακτικό χαρακτήρα διότι δεν μπορεί να απογυμνωθεί από σημασιολογικά και επιστημολογικά στοιχεία που συνδέονται με τα ίδια τα αντικείμενα αναφοράς των ταυτιζόμενων όρων, τις συνθήκες αλήθειας της ταυτότητας που εκφράζουν και τον τρόπο γνωστικής μας πρόσβασης σε αυτές. Συνεπώς, από τη μια πλευρά ένα κριτήριο ταυτότητας είναι αναγκαίο για τον διαχωρισμό των ενικών όρων και από την άλλη πλευρά ένα τέτοιο κριτήριο δεν θα μπορούσε να είναι καθαρά συντακτικό. Γι αυτό το λόγο, ο Rumfit πιστεύει ότι οι Hale & Wright σφάλλουν ως προς την αρχή συντακτικής προτεραιότητας που έχουν θέσει ως προϋπόθεση της προσέγγισής τους: «*Ως ερμηνεία του Frege, η συντακτική προτεραιότητα στέκεται ή καταρρέει μαζί με τον ισχυρισμό ότι η έννοια ενός κριτηρίου ταυτότητας μπορεί να πάρει μια καθαρά συντακτική έκφραση. Επειδή οι Hale & Wright δεν παρέχουν μια τέτοια έκφραση, ένα κρίσιμο στοιχείο λείπει από την υπεράσπιση της θέσης τους*» (2003, 198).

Θα καταλήξουμε ότι το πολύ δύσκολο εγχείρημα του σχεδιασμού συντακτικών κριτηρίων για τον διαχωρισμό των ενικών όρων από τους νεολογικιστές, λειτουργεί σε μια μεγάλη σειρά περιπτώσεων με αποτελεσματικότητα αλλά όχι σε όλες τις περιπτώσεις. Πράγματι, τα προαναφερθέντα κριτήρια δεν διαχωρίζουν χρήσεις των όρων ‘ο πατέρας του Αμλετ’, ‘το χαμόγελο του Ανδρέα’, ‘ο αριθμός των δορυφόρων του Δία’ από χρήσεις κυρίων ονομάτων. Επειδή μεταξύ των προηγούμενων εκφράσεων, συγκαταλέγονται και εκφράσεις που δεν είναι ενικοί

---

[20] Ο John MacFarlane (2004, 2-3) για παράδειγμα, πιστεύει ότι ο χειρισμός των οριστικών περιγραφών από τους Hale & Wright ως ενικών όρων, θα έπρεπε να έχει δικαιολογηθεί κατάλληλα από το νεολογικισμό, πράγμα το οποίο δεν συμβαίνει.

όροι, συμπεραίνουμε ότι ο προτεινόμενος από τους Hale & Wright κατάλογος συντακτικών κριτηρίων δεν είναι πλήρης.

4. Η εναλλακτική προσέγγιση: όροι που εκφράζουν ιδιότητες εννοιών;

Ο χαρακτηρισμός των αριθμητικών εκφράσεων ως ενικών όρων είναι καίριας σημασίας για την προσέγγιση του νεολογικισμού, δεδομένου ότι μεταξύ των δύο διατυπώσεων Α. «ο αριθμός των αδερφών της Μαρίας είναι ο 2» και Β. «η Μαρία έχει 2 αδερφούς» επιλέγεται η Α. όπως ακριβώς προτείνει ο Frege. Η επιλογή της διατύπωσης Α. αποσκοπεί στον χειρισμό των φυσικών αριθμών ως αντικειμένων. Στην περίπτωση Β., αν δηλαδή κάποιος επιλέξει να θεωρήσει την αριθμητική έκφραση ως επιθετικό προσδιορισμό, τότε αναλαμβάνει έναν ποσοδεικτικό χειρισμό των φυσικών αριθμών. *Το διακύβευμα στη συζήτηση περί των ενικών όρων είναι ποια από τις δύο προηγούμενες στάσεις θα επιλεγεί.*

Ο Wright εκφράζει αυτό το δίλημμα με τον ακόλουθο τρόπο: « ... *οι επιλογές είναι δύο: είτε (ακολουθώντας τον Frege) θεωρούμε ως βασική μορφή της αριθμητικής έκφρασης το να είναι ενικός όρος, που προσδιορίζεται μέσω ενός τελεστή πάνω σε έννοιες και τότε μετατρέπουμε τις προτάσεις όπου οι αριθμοί εμφανίζονται ως επιθετικοί προσδιορισμοί σε προτάσεις ταυτότητας· είτε θεωρούμε ως βασική μορφή της αριθμητικής έκφρασης το να συνιστά κατηγόρημα εννοιών, δηλαδή ποσοδείκτη και τότε επιχειρούμε να μετατρέψουμε τις χρήσεις ονόματος που φαινομενικά εμφανίζει το αριθμητικό λεξιλόγιο στην αριθμο-θεωρία*» (1983, .

Αν υποτεθεί λοιπόν ότι κάποιος δεν πείθεται καθόλου από τον συντακτικό έλεγχο στον οποίο οι νεολογικιστές υποβάλλουν τις αριθμητικές εκφράσεις και αρνείται σ' αυτές το status του ενικού όρου, τότε έχει τις ακόλουθες δυνατότητες:
Η επιλεγμένη διατύπωση είναι η Β., δηλ. «η Μαρία έχει 2 αδερφούς». Οι υποστηρικτές της άποψης ότι οι αριθμοί έχουν θέση επιθετικών προσδιορισμών συνήθως χειρίζονται τις προτάσεις της αριθμητικής με την ποσοδεικτική μορφή: «Υπάρχουν 2 αδερφοί της Μαρίας». Είναι προφανές ότι σε μια τέτοια προσέγγιση χάνεται η έννοια του αριθμού-αντικειμένου, αφού η προηγούμενη πρόταση μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$\exists x \exists y(Fx \wedge Fy \wedge x \neq y \wedge (\forall z Fz \rightarrow z=x \vee z=y))$ όπου F είναι η έννοια 'αδερφός της Μαρίας'.

Οι αριθμητικοί ποσοδείκτες μπορούν να ορισθούν ως ακολούθως, κάτι που θυμίζει σε κάποιο βαθμό τον τρόπο που χρησιμοποίησε και ο Frege[21], όταν προσπάθησε να ορίσει επαγωγικά το τι σημαίνει 'ο αριθμός n ανήκει στην έννοια F':

$\exists_0 xFx =_{df} \forall x \neg Fx$ (η έννοια F δεν έχει πραγματώσεις)

$\exists_1 xFx =_{df} \exists x (Fx \wedge \forall y\, Fy \rightarrow y=x)$ (υπάρχει μια πραγμάτωση της F)

………

$\exists_{n+1} xFx =_{df} \exists x (Fx \wedge \exists_n y(Fy \wedge y \neq x))$ (υπάρχουν n+1 πραγματώσεις της F)

Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, αν θεωρήσουμε ότι υπάρχουν μόνον πεπερασμένου πλήθους αντικείμενα στον κόσμο, προκύπτει το εξής ζήτημα. Εάν υπάρχουν πχ μόνο 10000000000 αντικείμενα τότε οι ποσοδείκτες $\exists_{10000000001} xFx$, $\exists_{10000000002} xFx$ κλπ δεν θα εφαρμόζονται σε καμιά έννοια πρώτης τάξης. Συνεπώς θα πρέπει να προϋποθέσουμε πως η μεταβλητή x διατρέχει απροσδιόριστα μεγάλο πλήθος αντικειμένων. Πρόκειται ουσιαστικά για το ίδιο πρόβλημα της προσέγγισης του Mill: ο κόσμος δεν περιέχει αρκετό «υλικό» για να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις της αριθμητικής, αν απαιτήσουμε κάθε αριθμός να συνοδεύει το όνομα ενός αισθητού.

Στο κεφ.2 (2.1) παρακολουθήσαμε την αρκετά πειστική κριτική του Frege στον Mill για το ότι οι αριθμοί *δεν είναι ιδιότητες των φυσικών πραγμάτων*, γι αυτό και θα αποκλείσουμε αυτή την περίπτωση. Επειδή όμως σ'αυτή την ενότητα εξετάζεται η εναλλακτική προσέγγιση σύμφωνα με την οποία οι αριθμητικές εκφράσεις λειτουργούν ως επιθετικοί προσδιορισμοί τότε θα πρέπει αυτές να εκφράζουν ιδιότητες άλλου τύπου, πχ. ιδιότητες εννοιών.

Ας θεωρήσουμε τις προτάσεις:

(α) Το τραπέζι έχει 4 πόδια (β) το αυτοκίνητό μου έχει 4 ρόδες (γ) η άμαξα έχει 4 άλογα

[21] Πρλ. με την §55 των Grunlagen

Τότε μπορούμε να λάβουμε υπόψη ότι οι έννοιες ‘πόδι του τραπεζιού’, ‘τροχός του αυτοκινήτου μου’, ‘άλογο της άμαξας’ βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τους αφού κάθε μια από αυτές έχει τέσσερις ακριβώς πραγματώσεις. Όπως έχει επισημανθεί και σε προηγούμενα σημεία, η 1-1 αντιστοιχία είναι μια σχέση ισοδυναμίας η οποία μπορεί να χωρίσει τις έννοιες σε κλάσεις ισοδυναμίας. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε την κλάση ισοδυναμίας C στην οποία ανήκουν οι παραπάνω έννοιες μαζί με όλες εκείνες που βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με αυτές. Είναι γεγονός ότι οι έννοιες της συγκεκριμένης κλάσης ισοδυναμίας μοιράζονται κάτι κοινό, τον αριθμό 4. Κατά συνέπεια, θα μπορούσε να υποτεθεί ότι ο αριθμός 4 είναι η κοινή ιδιότητα όλων αυτών των εννοιών, ή ότι είναι η ιδιότητα αντιπροσωπεύει την κλάση C και η οποία χαρακτηρίζει όλες τις έννοιες της κλάσης C. Κατ’αυτή την άποψη, ο αριθμός 4 θεωρείται *ιδιότητα εννοιών ή έννοια δεύτερης τάξης*. Γενικότερα, ο αριθμός της έννοιας F μπορεί να θεωρηθεί ως *η κοινή ιδιότητα των εννοιών που βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία (δηλ. είναι ισοπληθυκές) με την έννοια F.* Η εναλλακτική αυτή προσέγγιση θεωρεί τον αριθμό ως την ιδιότητα εκείνη μιας έννοιας που δείχνει πόσες πραγματώσεις έχει αυτή η έννοια.

Ο Frege απέρριψε αυτή την εκδοχή στην §57 των Grundlagen, με βάση τον εξής ισχυρισμό. Θεωρεί ότι το 0 είναι μόνον ένα στοιχείο του κατηγορήματος (εάν θεωρηθεί η έννοια F ως το υποκείμενο). Συνεπώς εάν το 0 ήταν ιδιότητα της έννοιας F τότε θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί «η έννοια F είναι 0», αλλά αυτό δεν ισχύει.

Υπενθυμίζουμε επίσης ένα άλλο σημείο. Ο Frege διαπιστώνοντας το πρόβλημα του Καίσαρος, στράφηκε προς τον εναλλακτικό ορισμό μέσω εκτάσεων εννοιών. Σύμφωνα με τον εκτασιακό ορισμό του, ο αριθμός της έννοιας F είναι η *έκταση της έννοιας ‘ισοπληθυκή με την έννοια F’*. Με άλλα λόγια, ο αριθμός της έννοιας F ταυτίστηκε με την κλάση που περιλαμβάνει όλες εκείνες τις έννοιες που είναι ισοπληθυκές με την έννοια F. Η ιστορία αυτή είχε τις γνωστές εξελίξεις. Αυτό που παρουσιάζει όμως ενδιαφέρον είναι ότι στην § 68 των Grundlagen, στο σημείο που ο Frege δίνει τον εκτασιακό ορισμό του αριθμού, παρεμβάλλει μια υποσημείωση όπου αναφέρει: «*Πιστεύω ότι αντί για ‘έκταση της έννοιας’ μπορούμε να γράψουμε απλώς ‘έννοια’. Αλλά τότε μπορεί κανείς να εγείρει δύο πιθανές αντιρρήσεις: 1. Αντιφάσκει προς την προηγούμενη δήλωσή μου ότι οι επιμέρους αριθμοί είναι αντικείμενα… 2. Οι έννοιες μπορεί να έχουν ταυτόσημες εκτάσεις χωρίς οι έννοιες οι ίδιες να συμπίπτουν. Είμαι τελείως πεπεισμένος ότι αυτές οι αντιρρήσεις μπορούν να* *αντιμετωπιστούν – όμως κάτι τέτοιο θα μας οδηγούσε μακριά από το σκοπό του παρόντος…».*

Αυτό το οποίο σημειώνει εδώ ο Frege είναι ότι, αντί να ορίσει τον αριθμό της έννοιας F ως την *έκταση της έννοιας* ‘ισοπληθυκή με την έννοια F’ θα μπορούσε να τον ορίσει απευθείας ως την *έννοια* ‘ισοπληθυκή με την έννοια F’ αλλά οι λόγοι που τον εμποδίζουν να το κάνει αυτό είναι α) το ότι ο ίδιος ήδη έχει δηλώσει ότι οι επιμέρους αριθμοί είναι αντικείμενα και β) το ότι δύο έννοιες μπορεί να ταυτίζονται ως προς την έκταση όχι όμως ως προς την ένταση. Με άλλα λόγια δεν μπορούσε να διατυπωθεί με αρκετή σαφήνεια η ταυτότητα ‘η έννοια H = η έννοια K’[22]. Μία εντασιακού τύπου λύση δεν θα βοηθούσε τον Frege αφού, όπως αναφέρει στην υποσημείωσή του, η ταυτότητα δύο εννοιών μπορεί να ισχύει ως προς την έκταση αλλά όχι ως προς την ένταση. Επομένως, η δυσκολία που αφορά την ταυτότητα των εννοιών, αποτελεί σημαντικό εμπόδιο για την εναλλακτική προσέγγιση. Ο ίδιος αναφέρει, παρ’όλα αυτά, ότι αυτού του είδους τα προβλήματα θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν, αν και κάτι τέτοιο δεν ήταν στους άμεσους στόχους του.

Με βάση όσα επισημαίνει η υποσημείωση του Frege για την εναλλακτική προσέγγιση που εξετάζεται εδώ, ότι δηλαδή οι αριθμητικές εκφράσεις αποτελούν κατηγορήματα εννοιών και οι φυσικοί αριθμοί είναι ιδιότητες εννοιών, υπάρχουν δύο βασικές δυσκολίες: η πρώτη δυσκολία είναι ότι οι αριθμητικές εκφράσεις αποτελούν ορίσματα στη σχέση τους με συναρτησιακούς μηχανισμούς. Αυτό είναι δείγμα ότι υποδηλώνουν αντικείμενα. Η δεύτερη δυσκολία είναι κατά πόσον μπορούμε να προσδιορίσουμε την ταυτότητα δύο ιδιοτήτων. Αν δηλαδή θεωρήσουμε ότι m είναι η ιδιότητα εκείνων των εννοιών που τίθενται σε 1-1 αντιστοιχία με την έννοια F και ότι n είναι η ιδιότητα εκείνων των εννοιών που τίθενται σε 1-1 αντιστοιχία με την έννοια G, τότε δεν είναι σαφής η ταυτότητα ‘m = n’ για τους λόγους που ήδη αναφέρθηκαν προηγουμένως. Πράγματι, τι είναι η ταυτότητα δύο ιδιοτήτων; Οι ιδιότητες συνδέονται πάντοτε με κατηγορήματα και δύο κατηγορήματα μπορεί να έχουν την ίδια σημασία, να είναι δηλαδή συνώνυμα, όπως τα ‘εργένης’ και ‘ανύπανδρος άνδρας’. Αλλά επίσης, δύο κατηγορήματα μπορεί να έχουν την ίδια έκταση και διαφορετικές σημασίες όπως ‘άπτερο δίποδο’ και ‘άνθρωπος’[23]. Το να

[22] Εάν η ταυτότητα ‘η έννοια H = η έννοια K’ θεωρηθεί ισοδύναμη με την πρόταση (x)(Hx$\leftrightarrow$Kx) τότε είναι φανερό ότι η ταυτότητα αφορά κλάσεις (τις εκτάσεις των εννοιών).

[23] Τα ίδια παραδείγματα χρησιμοποιεί η Maddy (1990, 92) στην προσπάθειά της να παρουσιάσει τους αριθμούς ως ιδιότητες των συνόλων

είναι δύο ιδιότητες ταυτόσημες θα μπορούσε πχ. να σημαίνει ότι έχουν τα ίδια ή συνώνυμα κατηγορήματα, όμως η ίδια η συνωνυμία παρουσιάζει προβλήματα ως έννοια, όπως έχει μάλιστα επισημάνει και ο Quine (1951).

Επομένως, η ερμηνεία των αριθμητικών εκφράσεων ως κατηγορηματικών προσδιορισμών (και η αντίστοιχη ερμηνεία των φυσικών αριθμών ως ιδιοτήτων εννοιών) προσκρούει κυρίως στο πρόβλημα της ταυτότητας των ιδιοτήτων. Από την άλλη πλευρά, ο υπερπλεονασμός αριθμητικών ταυτοτήτων στην αριθμητική και η κυρίαρχη παρουσία τους στις μαθηματικές θεωρίες δείχνει ίσως με τον πιο εναργή τρόπο ότι οι αριθμητικές εκφράσεις πρέπει να θεωρηθούν πράγματι ως ενικοί όροι. Σ'αυτό το συμπέρασμα συνεπικουρούν βέβαια και οι άλλες σχετικές ενδείξεις που συζητήθηκαν σ'αυτό το κεφάλαιο, καθώς και τα αποτελέσματα των ελέγχων των κριτηρίων των Hale & Wright, παρά τις αδυναμίες που αυτά παρουσιάζουν.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη δεύτερη προκείμενη του επιχειρήματος του νεολογικισμού για τους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή το θέμα της αλήθειας των προτάσεων της αριθμητικής.

Κεφ 4

Η απόρριψη της μαθηματικής αλήθειας από τον Hartry Field

1. Το νομιναλιστικό πρόγραμμα του Field

Η άποψη ότι τα μαθηματικά δεν είναι ανάγκη[24] να είναι αληθή για να είναι χρήσιμα διατυπώνεται από τον Hartry Field (1989, 240). Εχουμε ήδη αναφέρει ότι η αλήθεια των αριθμητικών προτάσεων αποτελεί βασική προυπόθεση του επιχειρήματος των νεολογικιστών για την ύπαρξη των αριθμών. Επίσης πρέπει να παρατηρήσουμε γενικότερα ότι η αλήθεια θεωρείται συχνά από τους μαθηματικούς ρεαλιστές ως το χαρακτηριστικό των μαθηματικών που δικαιολογεί την τόσο μεγάλη επιτυχία των εφαρμογών τους στον φυσικό κόσμο. Ο ίδιος ο Frege επικαλέστηκε τις εφαρμογές των μαθηματικών για να αντιμετωπίσει τις απόψεις του φορμαλιστή Thomae ότι τα μαθηματικά δεν είναι παρά ένα παιχνίδι με συνδυασμούς άδειων συμβόλων.

Ο Field όμως απορρίπτει την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων. Για παράδειγμα, η πρόταση «Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί» είναι για τον Field ψευδής από τη στιγμή που ο ίδιος απορρίπτει την ύπαρξη των αριθμών. Παρά το γεγονός αυτό, εξακολουθεί να θεωρεί ιδιαίτερα χρήσιμες προτάσεις όπως η προηγούμενη, γι αυτό και αναζητά την ιδιότητα εκείνη των μαθηματικών θεωριών που εξηγεί πραγματικά την τόσο μεγάλη συμβολή των μαθηματικών στις εφαρμογές σ'όλους τους επιστημονικούς κλάδους. Αρχικά αναρωτιέται μήπως η ιδιότητα αυτή είναι η συνέπεια αλλά στη συνέχεια την χαρακτηρίζει ανεπαρκή διότι πολλές μαθηματικές θεωρίες είναι συνεπείς χωρίς όμως να παρουσιάζουν όλες την ίδια

[24] Ας θυμηθούμε μια ανάλογη πρόταση από το χώρο της φιλοσοφίας της επιστήμης. Ο Bas van Fraassen κάνει μια διάκριση ανάμεσα στην αποδοχή μιας φυσικής επιστημονικής θεωρίας και στην θεώρησή της ως αληθούς. Πιστεύει ότι δεν πρέπει να δεσμευόμαστε σε τίποτα περισσότερο από την "εμπειρική επάρκεια" μιας θεωρίας.

γονιμότητα στις εφαρμογές. Στα εφαρμοσμένα μαθηματικά χρειαζόμαστε μια ισχυρότερη από τη συνέπεια, έννοια για να εξηγήσουμε την αποτελεσματικότητα της χρήσης των θεωριών αυτών στις εφαρμογές. Για το σκοπό αυτό, αναφέρεται σε μια έννοια 'ισχυρής συνέπειας'. Θεωρεί μια μαθηματική θεωρία M ως ισχυρά συνεπή όταν, για κάθε θεωρία T η οποία δεν αναφέρεται σε μαθηματικές οντότητες και είναι συνεπής, ισχύει ότι και η T+M είναι συνεπής (1989, 96). Την ισχυρή αυτή εκδοχή της συνέπειας, ονομάζει 'συντηρητικότητα' (conservativeness). Η γονιμότητα των μαθηματικών θεωριών στις εφαρμογές εξαρτάται από διάφορους παράγοντες όπως πχ. το να έχουν πλούσιες συνέπειες, κομψότητα, γνησιότητα και (για τους ρεαλιστές) το να είναι αληθείς. Ο Field πιστεύει πως η αλήθεια ως παράγων γονιμότητας των μαθηματικών θεωριών, θα μπορούσε κάλλιστα να αντικατασταθεί από την συντηρητικότητα.

Ας δούμε πώς ορίζει τη συντηρητικότητα ακριβέστερα: μία μαθηματική θεωρία S λέγεται συντηρητική (conservative) όταν, συνδυαζόμενη με μια οποιαδήποτε συλλογή N από προτάσεις νομιναλιστικά διατυπωμένες, η S δεν παρέχει περισσότερα συμπεράσματα από όσα προκύπτουν από μόνη την N. Δηλαδή: μία μαθηματική θεωρία S είναι συντηρητική, όταν για κάθε νομιναλιστικά διατυπωμένο ισχυρισμό A και μια οποιαδήποτε συλλογή N από προτάσεις νομιναλιστικά διατυπωμένες, ο ισχυρισμός A δεν μπορεί να αποτελεί μια συνέπεια της N+S , αν δεν είναι ήδη συνέπεια της N μόνης (1989, 125).

Ποια είναι η διαφορά μεταξύ συντηρητικότητας και αλήθειας; Είναι διαφορετικές έννοιες και ούτε προυποθέτουν η μία την άλλη. Η συντηρητικότητα δεν απαιτεί την αλήθεια, δηλαδή μια θεωρία μπορεί να είναι συντηρητική και μη αληθής. Επιπλέον, η αλήθεια δεν απαιτεί την συντηρητικότητα (op.cit., 240-1). Ο ίδιος διευκρινίζει ότι η συντηρητικότητα είναι ισχυρότερη έννοια από τη συνέπεια. Επίσης, η συντηρητικότητα είναι ασθενέστερη έννοια από την αναγκαία αλήθεια. Γι αυτό το λόγο χαρακτηρίζει τη συντηρητικότητα χαλαρά ως «αναγκαία αλήθεια, χωρίς αλήθεια» (1989, 240-1). Η διαφορά ανάμεσα σε μια συντηρητική θεωρία και σε μια αναγκαία αληθή θεωρία είναι ακριβώς ότι στην πρώτη περίπτωση δεν προυποτίθεται η αλήθεια. Εχει ενδιαφέρον το γεγονός που ο Field σχολιάζει (op.cit. 241) ότι οι περισσότεροι παραδοσιακοί μαθηματικοί ρεαλιστές αναγνωρίζουν -χωρίς να το συνειδητοποιούν- μια έννοια συντηρητικότητας, όταν ισχυρίζονται ότι οι μαθηματικές θεωρίες είναι αναγκαία αληθείς.

Ο Field θέτει λοιπόν τη διαμάχη μεταξύ ρεαλιστών και αντιρεαλιστών σε μια άλλη βάση: είναι ανάγκη να θεωρήσουμε τις μαθηματικές θεωρίες αληθείς προκειμένου να εξηγήσουμε τη χρησιμότητά τους; ή μήπως αυτή η χρησιμότητα εξηγείται με βάση το ότι είναι συντηρητικές; Και απαντά ότι αρκεί το δεύτερο. Χάρη στην ιδιότητα της συντηρητικότητας, οι μαθηματικές θεωρίες εφαρμόζονται με επιτυχία στο χώρο των φυσικών επιστημών με πολύ γόνιμα αποτελέσματα. Αυτό συμβαίνει γιατί ένας νομιναλιστής, δηλαδή κάποιος ο οποίος αρνείται την ύπαρξη αφηρημένων οντοτήτων, έχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά ως επιτυχές μέσο παραγωγής νομιναλιστικά διατυπωμένων συμπερασμάτων από νομιναλιστικά διατυπωμένες υποθέσεις (1980, 14). Διότι είναι ευκολότερο να δει κανείς πώς ένας νομιναλιστικά διατυπωμένος ισχυρισμός έπεται από μια νομιναλιστικά διατυπωμένη θεωρία με τη βοήθεια των μαθηματικών, από το να δει πώς αυτός ο νομιναλιστικά διατυπωμένος ισχυρισμός έπεται μόνον από τη νομιναλιστική θεωρία (1989, 127). Συγκεκριμένα, έστω μια νομιναλιστική θεωρία N και μια μαθηματική θεωρία M που είναι συντηρητική. Κάθε νομιναλιστικά διατυπωμένη πρόταση A έχει ένα αντίστοιχο A΄στη γλώσσα της μαθηματικής θεωρίας M, έτσι ώστε στην M+N, η A να είναι ισοδύναμη με την A΄. Τότε μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει τα μέσα και τις πράξεις της μαθηματικής θεωρίας και να συμπεράνει από την A΄ μια συνέπεια B΄στη μαθηματική γλώσσα. Όμως για την B΄ υπάρχει μια αντίστοιχη B στη νομιναλιστική θεωρία. Τότε, λόγω της συντηρητικότητας της μαθηματικής θεωρίας, η πρόταση B αποτελεί συνέπεια της αρχικής νομιναλιστικής πρότασης A μέσα στη νομιναλιστική θεωρία.

Υπάρχουν κατ'αρχήν λόγοι για τους οποίους η συντηρητικότητα μπορεί να είναι μια έννοια προτιμότερη αντί της αλήθειας στο φιλοσοφικό επίπεδο. Ενας από αυτούς συνδέεται με την ανταγωνιστικότητα των μαθηματικών θεωριών, όπως πχ. στην περίπτωση της θεωρίας συνόλων με το αξίωμα επιλογής και της θεωρίας συνόλων με την άρνηση του αξιώματος επιλογής. Ποια από τις δύο είναι αληθής; Η συντηρητικότητα δεν μας βάζει σε τέτοιου είδους διλήμματα διότι δύο ανταγωνιστικές μαθηματικές θεωρίες, όπως αυτές που προαναφέρθηκαν, μπορεί είναι συγχρόνως και οι δύο συντηρητικές. Ενας άλλος λόγος συνδέεται με την καχυποψία με την οποία μπορεί κάποιος να αντιμετωπίζει την ύπαρξη μιας πραγματικότητας μαθηματικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, ο ίδιος ο Field δεν είναι διατεθειμένος να δεχθεί τη μαθηματική αλήθεια δεδομένου ότι οι μαθηματικές θεωρίες περιλαμβάνουν πλήθος από υπαρκτικές προτάσεις και ο ίδιος θεωρεί όλες ανεξαιρέτως τις υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις ψευδείς. Οι λόγοι που τον πείθουν γι αυτό, συνδέονται με τη γνωσιολογία. Εάν υπήρχαν οι μαθηματικές οντότητες τότε θα έπρεπε να είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε και έναν αξιόπιστο τρόπο γνώσης τους. O Paul Benacerraf στο γνωστό άρθρο του "Mathematical Truth" (1973) παρουσίασε ένα σημαντικό πρόβλημα που χαρακτηρίζει τον μαθηματικό ρεαλισμό, δηλαδή το ότι η καθιερωμένη σημασιολογία του μαθηματικού ρεαλισμού δεν μπορεί να συμβιβαστεί με μια εξίσου ικανοποιητική γνωσιολογία. Εάν υποτεθεί ότι τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν τότε αποτελεί μυστήριο ο τρόπος γνώσης τους δεδομένου ότι αυτά δεν είναι χωροχρονικά αντικείμενα και δεν βρίσκονται σε αιτιακή σχέση μαζί μας. Το επιχείρημα του Benacerraf μας έχει απασχολήσει σε ξεχωριστό κεφάλαιο. O Field επαναδιατυπώνει τον προβληματισμό αυτό, αποδεσμεύοντάς τον από τις αιτιακές θεωρίες γνώσης. Το πρόβλημα δεν είναι απλώς ότι οι υποτιθέμενες μαθηματικές οντότητες είναι *αιτιακά αδρανείς*. Ακόμα και αν δεν υιοθετούμε μια αιτιακή θεωρία γνώσης τότε και πάλι δεν μπορούμε εξηγήσουμε τη γνώση μας για τις μαθηματικές οντότητες και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθηματικές οντότητες δεν βρίσκονται σε κανενός τύπου *φυσική* σχέση και αλληλεπίδραση με τους γνώστες τους, Είναι λοιπόν ακατανόητο το πώς μπορούμε να λαμβάνουμε πληροφορίες σχετικά μ' αυτές. Δεν έχει διατυπωθεί κάποια αξιόπιστη εξήγηση για τη σχέση ανάμεσα στις μαθηματικές μας πεποιθήσεις και στο σύμπαν αυτών των οντοτήτων (1989, 27, 233). Συνεπώς, γιατί να δεχθούμε ότι υπάρχει ένα τέτοιο σύμπαν; Ετσι μπορεί κάποιος να τεθεί ενώπιον του διλήμματος: είτε αποδέχεται τις μαθηματικές οντότητες και προσπαθεί να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο τις γνωρίζουμε είτε απορρίπτει τις μαθηματικές οντότητες (άρα και την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων) και προσπαθεί να εξηγήσει την επιτυχία των μαθηματικών στις εφαρμογές. O Field επιλέγει να κάνει το δεύτερο.

Για τον Field, οι υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις είναι ψευδείς. Σε ότι αφορά την αλήθεια διαφόρων μαθηματικών προτάσεων του τύπου πχ. «2+5=7», ο Field τις αντιμετωπίζει με τον ίδιο τρόπο που αντιμετωπίζει και την αλήθεια της πρότασης «O Oliver Twist ζούσε στο Λονδίνο», δηλαδή στο πλαίσιο μιας γνωστής ιστορίας. Θεωρεί ότι οι περιπτώσεις είναι παρόμοιες, παρ'όλο που στη μία περίπτωση έχουμε μια μαθηματική θεωρία ενώ στη δεύτερη ένα μυθιστόρημα. Στο πλαίσιο ενός μυθιστορήματος έχουμε φυσικά τη δυνατότητα να διαχωρίζουμε αληθείς από ψευδείς προτάσεις όπως να διακρίνουμε πχ. την παραπάνω αληθή πρόταση από την ψευδή πρόταση «O Oliver Twist ζούσε στο Παρίσι». Αλλά η συνολική ιστορία δεν είναι παρά ένα μυθιστόρημα. Κάτι παρόμοιο ισχύει και για τις μαθηματικές θεωρίες.

Ο Field θεωρείται νομιναλιστής επειδή απορρίπτει την ύπαρξη αφηρημένων οντοτήτων. Υπάρχει όμως μια διαφορά ανάμεσα στο νομιναλισμό του Field και στον παραδοσιακό νομιναλισμό. Ο παραδοσιακός νομιναλισμός απορρίπτει τις αφηρημένες οντότητες και θεωρεί ταυτόχρονα επιβεβλημένη την αποφυγή προτάσεων που περιλαμβάνουν όρους με αναφορά σε αφηρημένες οντότητες. Μόνον η αναφορά σε φυσικές, χωροχρονικές οντότητες θεωρείται επιτρεπτή από τους κλασικούς νομιναλιστές. Ο νομιναλισμός του Field έχει το χαρακτηριστικό ότι δεν διαφωνεί με τη σημασιολογία της μαθηματικής γλώσσας. Θεωρεί ότι το λάθος του μαθηματικού ρεαλισμού δεν εντοπίζεται στη σημασιολογία του αλλά στο ότι αποδέχεται ως αληθείς τις μαθηματικές προτάσεις. Οι μαθηματικές προτάσεις διατηρούν για τον Field τη συγκεκριμένη δομή που υποτίθεται ότι έχουν και συνεχίζουν να διέπονται από την καθιερωμένη σημασιολογία και τις αντίστοιχες συνθήκες αλήθειας αλλά δεν είναι αληθείς. Η στάση του Field πρέπει να χαρακτηρισθεί κατά συνέπεια, ως "φιξιοναλιστική" ("fictionalistic"). Οι μαθηματικές οντότητες είναι γι αυτόν τόσο φανταστικές όσο και οι ήρωες των μυθιστορημάτων.

Αναφέραμε ότι ο Field στηρίζει την απόρριψη των μαθηματικών οντοτήτων κατ'αρχήν σε ενδείξεις που απορρέουν από το γεγονός ότι δεν διαθέτουμε τρόπο να δικαιολογήσουμε την άντληση πληροφοριών σχετικά με αυτές τις οντότητες. Το ερώτημα που τίθεται ωστόσο είναι: υπάρχει σοβαρός λόγος για να θεωρήσουμε τις μαθηματικές θεωρίες αληθείς (και τις μαθηματικές οντότητες στις οποίες αυτές δεσμεύονται, ως πραγματικές;) Οπως ο ίδιος αναφέρει, μοναδικός λόγος για τον οποίο θα υποχρεωνόταν να δεχθεί την ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων θα ήταν ίσως τα επιχειρήματα υπέρ του αναπόδραστου των μαθηματικών οντοτήτων (indispensability arguments) των Quine-Putnam, τα οποία χαρακτηρίζει ως τα σοβαρότερα που έχει να παρουσιάσει το ρεύμα του μαθηματικού ρεαλισμού: «*...υπάρχει ένα και μόνο σοβαρό επιχείρημα για την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων και αυτό είναι το επιχείρημα του Quine ότι χρειάζεται να προυποθέσουμε τέτοιες οντότητες (μαθηματικές) προκειμένου να συνεχίσουμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τον φυσικό κόσμο και να παράγουμε επιστήμη...*» (1980, 4-5).

Όπως είδαμε στο κεφ.1, σύμφωνα με τα εν λόγω επιχειρήματα, για να συγκροτήσουμε επιστημονικές θεωρίες χρειαζόμαστε τις μαθηματικές οντότητες όπως οι αριθμοί ή τα σύνολα. Η επιτακτική και αναπόδραστη ανάγκη τέτοιων οντοτήτων στον τρόπο με τον οποίο συγκροτούμε αλλά και διατυπώνουμε τις επιστημονικές μας θεωρίες αποτελεί ένα είδος εγγύησης ότι οι οντότητες αυτές είναι πραγματικές. Το ίδιο ισχύει βέβαια και για τις μη παρατηρήσιμες φυσικές οντότητες δηλ. η αναγκαιότητά τους στη συγκρότηση και διατύπωση των επιστημονικών μας θεωριών είναι τόσο επιτακτική ώστε να θεωρούμε πραγματικές αυτές τις οντότητες. Κατά συνέπεια, οφείλουμε να κρατήσουμε την ίδια στάση απέναντι τόσο στις μαθηματικές οντότητες όσο και στις μη-παρατηρήσιμες οντότητες της φυσικής αφού οι επιστημονικές θεωρίες μας δεσμεύονται εξίσου σ'αυτές. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι τα γεγονότα που καθιστούν αληθείς τις προτάσεις των επιστημονικών θεωριών είναι τόσο φυσικά όσο και μαθηματικά γεγονότα.

Μία φιλόδοξη αντιρεαλιστική στρατηγική ως προς τις μαθηματικές οντότητες συνίσταται στον πλήρη διαχωρισμό μιας επιστημονικής θεωρίας σε μια νομιναλιστική και μια πλατωνιστική συνιστώσα, έτσι ώστε η πρώτη να εκφράζει το φυσικό μέρος της θεωρίας και η δεύτερη το μαθηματικό μέρος. Στη συνέχεια, η ίδια στρατηγική αποσκοπεί στην εξάλειψη του πλατωνιστικού-μαθηματικού μέρους. Όμως, όπως έχει αποδειχθεί, δεν είναι εύκολο να εξαλειφθεί το μαθηματικό λεξιλόγιο αλλά και όταν αυτό επιτυγχάνεται, συνεπάγεται μεγάλο κόστος για τον χειρισμό της επιστημονικής θεωρίας. Μια εναλλακτική αντιρεαλιστική στρατηγική ως προς τις μαθηματικές οντότητες συνίσταται στη θεώρηση μιας νομιναλιστικής (φυσικής) και μιας πλατωνιστικής (μαθηματικής) συνιστώσας, έτσι ώστε η νομιναλιστική συνιστώσα να εκφράζει το πλήρες περιεχόμενο της θεωρίας (την περιγραφή του κόσμου) και η μαθηματική συνιστώσα να αφορά σε 'φανταστικές' (fictional) οντότητες που ωστόσο δεν μπορούν να εξαλειφθούν από το λεξιλόγιο. Στη δεύτερη περίπτωση, η μαθηματική συνιστώσα αντιμετωπίζεται φιξιοναλιστικά ενώ η νομιναλιστική (φυσική) συνιστώσα είναι επαρκής για την έκφραση του περιεχομένου της επιστημονικής θεωρίας. Η εναλλακτική αυτή αντιρεαλιστική πρόταση σημαίνει ότι κρατάμε διαφορετική στάση απέναντι στους δύο τύπους οντοτήτων. Μια τρίτη εναλλακτική πρόταση είναι αυτή του επιστημονικού αντιρεαλιστή ο οποίος αρνείται την πραγματική ύπαρξη τόσο στις μαθηματικές οντότητες όσο και στις μη παρατηρήσιμες φυσικές οντότητες.

Παρά τη σοβαρότητα των επιχειρημάτων υπέρ του αναπόδραστου των μαθηματικών οντοτήτων, την οποία ο Field ομολογουμένως αναγνωρίζει, είναι ωστόσο πεπεισμένος ότι τα επιχειρήματα αυτά είναι δυνατό να καταρριφθούν. Αυτό το οποίο προσπαθεί να αποδείξει στο νομιναλιστικό του πρόγραμμα, ξεκινώντας από το Science without Numbers, είναι ότι οι επιστημονικές μας θεωρίες μπορούν να διατυπωθούν, να λειτουργήσουν και να δώσουν αποτελέσματα, χωρίς καθόλου εμπλοκή των μαθηματικών οντοτήτων (δηλ. των αριθμών και των συνόλων). Γι αυτό επιχειρεί να επαναδιατυπώσει τις φυσικές θεωρίες με νομιναλιστικό τρόπο. Εάν λοιπόν οι επιστημονικές θεωρίες μπορούν να αναδιατυπωθούν χωρίς αναφορά σε αριθμούς ή σύνολα τότε παύουν να δεσμεύονται σε μαθηματικές οντότητες.

Το εγχείρημα νομιναλιστικής διατύπωσης των κυριότερων επιστημονικών θεωριών έχει ως σκοπό να δείξει ότι το λεξιλόγιο με αναφορά σε μαθηματικές οντότητες είναι ουσιαστικά περιττό (dispensable) στην επιστημονική διαδικασία. Αυτό μπορεί να γίνει καλύτερα κατανοητό αν θυμηθούμε μια ανάλογη προσπάθεια των ινστρουμενταλιστών να παρουσιάσουν ως περιττό το λεξιλόγιο με αναφορά σε θεωρητικές (μη παρατηρήσιμες) φυσικές οντότητες.

Ο ινστρουμενταλισμός γενικότερα υποστηρίζει ότι η επιστήμη συνιστά ένα εργαλείο μέσω του οποίου δεν διερευνούμε ουσιαστικά τίποτα περισσότερο από την εμπειρία όπως αυτή προκύπτει από την παρατήρηση. Αντιμετωπίζει ωστόσο το πρόβλημα ότι ο επιστημονικός λόγος δεν είναι μόνον παρατηρησιακός αλλά είναι και θεωρητικός. Ο παρατηρησιακός λόγος δεσμεύεται σε παρατηρήσιμες οντότητες και ο θεωρητικός σε θεωρητικές μη- παρατηρήσιμες οντότητες. Το ερώτημα είναι κατά πόσον ο ινστρουμενταλισμός έχει τη δυνατότητα να υποστηρίξει ότι ο θεωρητικός λόγος για μη-παρατηρήσιμες οντότητες είναι περιττός και εξαλείψιμος. Το θεώρημα του Craig έρχεται να συμβάλει με ουσιαστικό τρόπο προς την κατεύθυνση ακριβώς του εξαλειπτικού ινστρουμενταλισμού. Είτε υπάρχουν είτε δεν υπάρχουν μη παρατηρήσιμες οντότητες στη φύση, ο σκοπός της επιστήμης περιορίζεται στην διερεύνηση των παρατηρήσιμων φαινομένων. Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Craig, εάν δοθεί μια θεωρία Τ πρώτης τάξης και Ο είναι ένα υπο-λεξιλόγιο της γλώσσας της Τ, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια θεωρία Τ΄ , η οποία δεν θα περιλαμβάνει άλλες σταθερές από αυτές που ανήκουν στο λεξιλόγιο Ο. Συνεπώς, εάν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα αυτό στην περίπτωση μιας επιστημονικής θεωρίας Τ της οποίας δίνεται το παρατηρησιακό υπο-λεξιλόγιο Vo, συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια άλλη θεωρία Craig(T) η οποία θα αποτελείται από εκείνα τα θεωρήματα της Τ που διατυπώνονται μόνον με όρους του παρατηρησιακού λεξιλογίου Vo [25] .

Οπως προαναφέραμε, ο εξαλειπτικός ινστρουμενταλισμός αντιμετωπίζει ως μη απαραίτητο (dispensable) το θεωρητικό λεξιλόγιο των επιστημονικών θεωριών και τις δεσμεύσεις του σε μη-παρατηρήσιμες οντότητες. Κατά συνέπεια, βρίσκει στο θεώρημα Craig έναν σημαντικό σύμμαχο: την απόδειξη ότι οι θεωρητικοί όροι μιας επιστημονικής θεωρίας είναι εξαλείψιμοι, χωρίς αυτό να εμποδίζει σε τίποτα την έγκυρη παραγωγή παρατηρησιακών συνεπειών από παρατηρησιακές προκείμενες (op.cit., 23).

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι ο Field εισάγει έναν παρόμοιο εξαλειπτισμό στην περίπτωση του μαθηματικού λεξιλογίου. Εάν θεωρηθεί ότι μια επιστημονική θεωρία διαθέτει ένα μαθηματικό λεξιλόγιο με όρους που αναφέρονται σε μαθηματικές οντότητες και ένα νομιναλιστικό λεξιλόγιο με όρους που αναφέρονται μόνον σε συγκεκριμένες φυσικές οντότητες (και όχι σε μαθηματικές), τότε ο Field επιχειρεί να υποστηρίξει ότι το λεξιλόγιο που δεσμεύεται σε μαθηματικές οντότητες είναι εξαλείψιμο. Και ότι αυτό είναι δυνατό να συμβαίνει, χωρίς να θίγεται σε τίποτα η παραγωγή νομιναλιστικά διατυπωμένων επιστημονικών συμπερασμάτων από νομιναλιστικά διατυπωμένες προκείμενες.

Γι αυτό το λόγο η νομιναλιστική επαναδιατύπωση των σημαντικότερων επιστημονικών θεωριών αποτελεί τον κύριο στόχο του προγράμματός του. Ενα παράδειγμα αποτελεί η νομιναλιστική διατύπωση της νευτώνειας φυσικής. Πρέπει ωστόσο να επισημάνουμε ότι μια από τις κυριότερες προυποθέσεις της επίτευξης των νομιναλιστικών στόχων του Field είναι η δυνατότητα διαχωρισμού της επιστημονικής γλώσσας σε δύο διακριτά συστατικά: σε ένα νομιναλιστικό λεξιλόγιο και ένα μαθηματικό λεξιλόγιο. Το πρώτο πρέπει να μην περιέχει αναφορές σε μαθηματικές οντότητες και το δεύτερο να ανήκει στα καθαρά μαθηματικά. Ακολουθεί ένα παράδειγμα που αναφέρει ο ίδιος ο Field:

Ας θεωρήσουμε την πρόταση:

[2 = ο αριθμός των πλανητών που βρίσκονται πλησιέστερα στον ήλιο απ'ότι η γη]

Η προσπάθεια του νομιναλιστή είναι να διασπάσει την πρόταση αυτή σε δύο συστατικά μέρη:

Α. $\exists x \exists y (Px \ \& \ Py \ \& \ x \neq y \ \& \ \forall z (Pz \supset z=x \vee z=y))$ *νομιναλιστική συνιστώσα*

---

[25] Psillos, S.(1999), 22-23

('Px' σημαίνει 'x είναι πλανήτης που βρίσκεται πλησιέστερα στον ήλιο απ'ότι η γη')

B. [2 = ο αριθμός των u τέτοιων ώστε Pu] αν και μόνο αν

$[\exists x \exists y(Px \ \& \ Py \ \& \ x \neq y \ \& \ \forall z(Pz \supset z=x \ \vee \ z=y))]$ *μαθηματική συνιστώσα.*

Η στρατηγική που μόλις αναφέρθηκε θυμίζει και πάλι το θεώρημα Craig. Βασική προυπόθεση του θεωρήματος ήταν ο σαφής διαχωρισμός του λεξιλογίου της αρχικής θεωρίας Τ σε ένα λεξιλόγιο θεωρητικών όρων και σε ένα λεξιλόγιο παρατηρησιακών όρων, έτσι ώστε τα δύο λεξιλόγια να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα. Αυτό όμως δεν ήταν τόσο απλό. Οπως αποδείχθηκε, δεν ήταν δυνατή μια σαφής διάκριση των θεωρητικών και των παρατηρησιακών όρων. Αντίθετα μάλιστα, ο χαρακτηρισμός ενός όρου ως θεωρητικού ή παρατηρησιακού εξαρτιόταν κάθε φορά από το πλαίσιο, συνέβαινε μάλιστα ένας όρος να λειτουργεί άλλοτε με τον ένα και άλλοτε με τον άλλο τρόπο. Επειδή λοιπόν, η διάκριση μεταξύ θεωρητικού και παρατηρησιακού λεξιλογίου δεν ήταν σαφής, κάποιοι όροι ήταν εξαλείψιμοι σε ορισμένα πλαίσια όπου έπαιζαν θεωρητικό ρόλο ενώ σε άλλα πλαίσια όπου είχαν παρατηρησιακό ρόλο, δεν ήταν πια εξαλείψιμοι, πράγμα το οποίο υπονόμευε ουσιαστικά τη σημασία του θεωρήματος Craig (Psillos, 1999, 24-55). Κατ'αναλογία λοιπόν, επειδή και στην περίπτωση του νομιναλιστικού προγράμματος του Field, η απόδειξη ότι οι μαθηματικοί όροι με τις αντίστοιχες οντολογικές δεσμεύσεις είναι εξαλείψιμοι προυποθέτει την διάσπαση του μεικτού επιστημονικού λόγου σε μια καθαρά μαθηματική συνιστώσα και μια νομιναλιστική συνιστώσα, το εγχείρημα προσκρούει σε παρόμοιες δυσκολίες. Στην περίπτωση αυτή, όπως ο ίδιος ο Field αναφέρει (1989, 235), δεν είναι πάντα δυνατή η διάσπαση των μεικτών προτάσεων της επιστημονικής γλώσσας σε δύο πλήρη και αμοιβαία αποκλειόμενα λεξιλόγια, πράγμα το οποίο δυσχεραίνει την πορεία του προγράμματός του.

Ο Field προσπάθησε να διατυπώσει νομιναλιστικά τη νευτώνεια φυσική, δίνοντας ένα υπόδειγμα της θεωρίας του. Για το λόγο αυτό, δέχεται την ύπαρξη σημείων τα οποία απαρτίζουν τον χωροχρόνο της νομιναλιστικής φυσικής του και την ύπαρξη 'περιοχών' δηλαδή συλλογών από τέτοια σημεία. Μέσω μιας σειράς αξιωμάτων χαρακτηρίζει τον χωροχρόνο ως συνεχή και πλήρη ενώ το status των σημείων του δεν διαφέρει πολύ από το status των φυσικών μη παρατηρήσιμων οντοτήτων (πχ ηλεκτρόνια, quarks κλπ). Κάποιες από τις σχέσεις που διατυπώνει μεταξύ των σημείων του χωροχρόνου είναι πχ η σχέση 'μεταξύ' (between) : « το y είναι μεταξύ των x , z » και η σχέση ‘ταυτότητα θερμοκρασίας’ (tempcong) : «η διαφορά μεταξύ των θερμοκρασιών στο x και στο y ταυτίζεται με τη διαφορά μεταξύ των θερμοκρασιών στο z και στο w ». Επίσης δεν διατυπώνει τους νευτώνειους νόμους με αριθμητικούς όρους αλλά με ‘συγκριτικά κατηγορήματα’· για παράδειγμα, αντί να αναφέρεται στη δύναμη βαρύτητας στο x, αναφέρεται σε ένα συγκριτικό κατηγόρημα: η διαφορά της δύναμης βαρύτητας ανάμεσα στα x και y είναι μικρότερη από τη διαφορά της δύναμης βαρύτητας ανάμεσα στα z και w. Ετσι, ο χωροχρόνος του Field δεν περιλαμβάνει αναφορές σε αριθμούς και η φυσική του είναι νομιναλιστική υπό αυτή την έννοια. Ουσιαστικά χρησιμοποιεί σημεία αντί για τετράδες πραγματικών αριθμών και ο χωροχρόνος του είναι ισόμορφος με τον R^n για n=4. Διάφορες συναρτήσεις-ομομορφισμοί διατηρούν τη δομή με τρόπο ώστε οι συγκριτικές σχέσεις στη νομιναλιστική φυσική του Field να αντιστοιχούν στις συγκριτικές σχέσεις του R^n. Η γενική αντίρρηση η οποία βέβαια μπορεί να διατυπωθεί σ’αυτή την περίπτωση είναι ότι τα σημεία του Field δεν είναι λιγότερο προβληματικά, από άποψη οντολογικού status, από ότι οι αριθμοί και τα σύνολα ή οι τετράδες πραγματικών αριθμών. Επίσης οι ‘περιοχές’ ως συλλογές σημείων δεν διαφέρουν και πολύ από σύνολα. Θα έλεγε κανείς ότι έχει περιβάλει τον R^n με ένα νομιναλιστικό μανδύα, χωρίς όμως να καταφέρνει να τον καλύψει. Αλλά, ακόμα και αν δεχθούμε την επιτυχία της νομιναλιστικής παρουσίασης της νευτώνειας φυσικής, το νομιναλιστικό πρόγραμμα κατά την επέκτασή του έχει συναντήσει ισχυρές αντιστάσεις σε άλλες θεωρίες της φυσικής όπως, για παράδειγμα, στην κβαντομηχανική. Οπως ο ίδιος ο Field αναφέρει (1989, 17), δεν γνωρίζει τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσε να εξαλείψει τις μαθηματικές οντότητες από όλες τις επιστημονικές εξηγήσεις.

2. *Η κριτική των Hale & Wright*

Οι εκπρόσωποι του νεολογικισμού Hale & Wright πιστεύουν ότι η έννοια της συντηρητικότητας του Field σε συνδυασμό με την πεποίθησή του πως οι υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις είναι ψευδείς τον οδηγούν σε συγκεκριμένα προβλήματα. Αναπτύσσουν μία κριτική στον Field, με σκοπό την ανάδειξη των συνεπειών που προκύπτουν από τις δύο βασικές πεποιθήσεις του. Ο Hale (1987, 108) θέτει ένα ερώτημα στον Field σχετικά με το ποιο είναι ακριβώς το περιεχόμενο της έννοιας "συντηρητικότητα". Η έννοια αυτή εξαρτάται από την έννοια της συνέπειας-αποτελέσματος (consequence) και από την έννοια της συνέπειας-αποφυγής αντιφάσεων (consistency). Οπως είδαμε, η συντηρητικότητα είναι ισχυρή συνέπεια και όπως ο Field αναφέρει, μια μαθηματική θεωρία δεν μπορεί να είναι συντηρητική αν δεν είναι συνεπής (1989, 240).

Σύμφωνα με τον Hale, οι δύο έννοιες της συνέπειας (συνέπεια-αποτέλεσμα, συνέπεια-αποφυγή αντιφάσεων) αλλά και η έννοια της συντηρητικότητας μπορούν να κατανοηθούν είτε σημασιολογικά (semantically) είτε αποδεικτικο-θεωρητικά (proof-theoretically). Το ερώτημα που θέτει ο Hale είναι με ποιον από τους δύο τρόπους τις αντιλαμβάνεται ο Field. Ο Field, σχετικά μ'αυτό το θέμα, διευκρινίζει πως σε ότι αφορά τις 1ης τάξεως θεωρίες, έχει κανείς τη δυνατότητα να μετακινείται άνετα από το σημασιολογικό στο αποδεικτικο-θεωρητικό επίπεδο και αντίστροφα (λόγω των θεωρημάτων πληρότητας που συνδέουν αυτά τα δύο επίπεδα) αλλά ότι όταν έχει να κάνει με τη λογική 2ης τάξης τότε δεν έχει πλέον αυτή τη δυνατότητα. Γι αυτό ο ίδιος επιλέγει τον σημασιολογικό τρόπο ερμηνείας.

Ο Shapiro (1983) είχε θεωρήσει εσφαλμένη την επιλογή της σημασιολογικής ερμηνείας από τον Field με βάση το ότι το ενδιαφέρον του Field για την παραγωγή νομιναλιστικά διατυπωμένων συμπερασμάτων από νομιναλιστικά διατυπωμένες υποθέσεις ταίριαζε περισσότερο με μια αποδεικτικο-θεωρητική ερμηνεία της συντηρητικότητας. Ο Hale χαρακτήρισε επίσης την επιλογή της σημασιολογικής ερμηνείας από τον Field ως εσφαλμένη, επειδή τον αναγκάζει να εμπλακεί με μια συνολοθεωρητική αντίληψη που εισάγει ανεπιθύμητες (για τον ίδιο) συνολοθεωρητικές οντότητες. Οπως φαίνεται καθαρά στην περίπτωση της συνέπειας (consistency) η σημασιολογική ερμηνεία γίνεται με τη βοήθεια της έννοιας του μοντέλου: *μια θεωρία είναι σημασιολογικά συνεπής όταν έχει ένα τουλάχιστον μοντέλο*. Η επιλογή της σημασιολογικής ερμηνείας από τον Field τον υποχρεώνει να αποδεχθεί μια συνολοθεωρητική δομή, δηλαδή μια μαθηματική οντότητα, την οποία ως νομιναλιστής όφειλε να αποφύγει. Ο Field ωστόσο αναφέρει (1989, 127) ότι μια ενδεχόμενη στροφή σε αποδεικτικο-θεωρητική ερμηνεία της συνέπειας δεν θα βοηθούσε. Αντίθετα, θα ήταν εξίσου προβληματική διότι θα τον ενέπλεκε με αφηρημένες ακολουθίες αφηρημένων εκφράσεων-τύπων. Για τους λόγους αυτούς, ο Field επιλέγει τελικά μια εναλλακτική λύση, ερμηνεύοντας την έννοια της συνέπειας τροπικά (modally) (1989, 242). Εκφράζει μάλιστα τις τροπικότητες σε μια πρωτογενή εκδοχή, έτσι ώστε να μην είναι ανάγκη να υπεισέρχονται ανεπιθύμητες οντότητες όπως πχ. δυνατοί κόσμοι και μοντέλα.

Σημειώνουμε ότι μία σημασιολογική ερμηνεία της έννοιας "συνέπεια" (consequence) είναι η εξής: εάν Α είναι ένα σύνολο προτάσεων και Β μια πρόταση τότε: *"Από Α έπεται λογικά ότι Β αν και μόνο αν η Β είναι αληθής σε κάθε μοντέλο όπου όλες οι προτάσεις του Α είναι αληθείς"*. Ενώ μια (κατά Field) τροπική ερμηνεία της ίδιας έννοιας είναι: *"μία συναγωγή ενός συμπεράσματος θεωρείται έγκυρη εάν και μόνο εάν είναι αδύνατο να είναι ταυτόχρονα όλες οι υποθέσεις αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές"*. Επιπλέον, μια σημασιολογική ερμηνεία της έννοιας "συνέπεια" (consistency) είναι η εξής: *"Α είναι συνεπές αν και μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον ένα μοντέλο στο οποίο όλες οι προτάσεις του Α είναι αληθείς"* . Ενώ μια (κατά Field) τροπική ερμηνεία της ίδιας έννοιας είναι: *"ένα σώμα προτάσεων θεωρείται συνεπές αν και μόνο αν είναι δυνατό να είναι όλες αυτές οι προτάσεις αληθείς ταυτόχρονα"* .

Σχετικά με την τροπική παρουσίαση των παραπάνω εννοιών, ο Hale επισημαίνει ότι ένας κλασικός ρεαλιστής[26]

[26] Ενας κλασικός μαθηματικός ρεαλιστής. Με αυτόν τον τρόπο αποκαλεί έναν ρεαλιστή φιλόσοφο που δεν βασίζεται στα επιχειρήματα περί του αναπόδραστου των μαθηματικών οντοτήτων αλλά σε πιο παραδοσιακές ρεαλιστικές θέσεις όπως η αναγκαία ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων και η a priori γνώση της.

δεν θα είχε καμία αντίρρηση, όπως δεν θα είχε άλλωστε και κανένα πρόβλημα να δεχθεί την έννοια της συντηρητικότητας, αφού δέχεται την πιο ισχυρή έννοια της αναγκαίας αλήθειας. Επισημαίνει ωστόσο ότι υπάρχει ένα πρόβλημα για τον ίδιο τον Field από τη στιγμή που αυτός συνδυάζει *α)* την έννοια της συντηρητικότητας με *β)* τον ισχυρισμό ότι οι υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις είναι ψευδείς. Ο Hale λοιπόν αναπτύσσει το παρακάτω επιχείρημα εναντίον του Field:

Εάν S είναι μια συντηρητική μαθηματική θεωρία που περιλαμβάνει κάποιο τμήμα των κλασικών μαθηματικών τότε ο Field δέχεται ότι η θεωρία αυτή είναι και συνεπής. Ερμηνεύει μάλιστα τη συνέπεια τροπικά, σύμφωνα με όσα προαναφέραμε. Αυτό όμως σημαίνει πως ο Field δέχεται τον ισχυρισμό ότι *είναι δυνατό* όλα τα αξιώματα S_1, S_2, ..., S_n της θεωρίας (άρα και οι συνέπειές τους) να είναι συγχρόνως αληθή (Hale, 1987, 108-9). Από την άλλη πλευρά όμως, ο Field θεωρεί όλες τις υπαρκτικά ποσοδεικτούμενες μαθηματικές προτάσεις ψευδείς διότι δεν υπάρχουν οι αντίστοιχες οντότητες. Αρα, σε αυτή την περίπτωση, εκείνο το οποίο ο Field είναι εκ των πραγμάτων υποχρεωμένος να δεχθεί ως συνέπεια των δικών του παραδοχών, είναι ότι *οι υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις θα μπορούσαν να είναι αληθείς αν και στην πραγματικότητα είναι ψευδείς*. Αυτό το συμπέρασμα -καταλήγει ο Hale- σημαίνει ότι οι υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις είναι για τον Field ενδεχομενικά ψευδείς (1987, 109-14), (Hale & Wright, 1994, 169-83). Το ότι το ψεύδος των υπαρκτικών μαθηματικών προτάσεων είναι ενδεχομενικό σημαίνει επίσης ότι η ύπαρξη ή η μη ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων έχει και αυτή (για τον Field) ενδεχομενικό χαρακτήρα (cf. Field, 1984, 527).

Γι αυτούς τους λόγους, οι Hale και Wright ζητούν (1987, 109-14), (1992, 111-35), (1994, 169-83) από τον Field να διασαφηνίσει περισσότερο τον ενδεχομενικό χαρακτήρα της μη ύπαρξης των μαθηματικών οντοτήτων. Θεωρούν ότι το συμπέρασμα περί της ενδεχομενικότητας του ψεύδους των υπαρκτικών μαθηματικών προτάσεων, στο οποίο υποχρεώνεται εκ των πραγμάτων ο Field να καταλήξει, τον εξαναγκάζει ουσιαστικά να εκθέσει εκείνες τις καταστάσεις στις οποίες οι υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις θα ήταν αληθείς ενώ συμβαίνει να είναι ψευδείς. Οφείλει δηλαδή, κατά τη γνώμη τους, να δώσει μια περιγραφή για το πώς θα έπρεπε να ήταν τα πράγματα (ο κόσμος) ώστε οι υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις να είναι αληθείς και να υπάρχουν οι αντίστοιχες μαθηματικές οντότητες.

Ο Field από την άλλη πλευρά δεν διαθέτει μια τέτοια εξήγηση σαν κι αυτή που του ζητούν οι Hale και Wright, αλλά πιστεύει ότι αυτό δεν αποτελεί ιδιαίτερο πρόβλημα. Απαντώντας στον Hale, ισχυρίζεται ότι πχ. η ύπαρξη του Θεού έχει μια λογική συνέπεια αλλά συγχρόνως η ύπαρξη του Θεού είναι ενδεχομενικά ψευδής. Οποιος απορρίπτει τελικά την ύπαρξη του Θεού δεν μπορεί να δώσει κάποια ιδιαίτερη ερμηνεία ή εξήγηση της συγκεκριμένης ενδεχομενικότητας: "*...Δεν υπάρχει εξήγηση γιατί ο κόσμος δεν περιλαμβάνει το Θεό και εάν ακόμα υποθέσουμε ότι ο κόσμος περιελάμβανε τον Θεό ως οντότητα, τότε δεν θα μπορούσε να υπάρχει εξήγηση ούτε γι αυτό το γεγονός...*" (1989, 43). Ετσι και στην περίπτωση των μαθηματικών, πιστεύει ότι δεν υπάρχει εξήγηση γιατί ο κόσμος δεν περιέχει πχ. αριθμούς ως οντότητες ενώ θα μπορούσε να τους περιέχει (cf. 1993, 291-2). Παρόμοιες ενδεχομενικότητες αφορούν την ύπαρξη της ύλης, την ανυπαρξία άυλων πνευμάτων, την ύπαρξη διαστάσεων του χώρου κά. Κατά συνέπεια, ο Field έχει τη γνώμη ότι η ενδεχομενικότητα της μη ύπαρξης μαθηματικών οντοτήτων δεν είναι η μόνη για την οποία δεν διατίθεται κάποια ιδιαίτερη ερμηνεία. Στις περιπτώσεις αυτές, δεν μπορούν να περιγραφούν εκείνες οι καταστάσεις πραγμάτων στις οποίες θα υπήρχαν τα μαθηματικά αντικείμενα (οι αριθμοί, τα σύνολα κλπ) τα οποία συμβαίνει υπό τις παρούσες συνθήκες να μην υπάρχουν.

Οι Hale & Wright πιστεύουν ότι η υποτιθέμενη ενδεχομενικότητα της μη ύπαρξης μαθηματικών οντοτήτων αποτελεί μια διαφορετική περίπτωση από τις προαναφερθείσες από τον Field, διότι παρουσιάζει ένα χαρακτηριστικό που την απομονώνει από άλλες ενδεχομενικότητες ("insularity objection"). Το χαρακτηριστικό αυτό της συγκεκριμένης ενδεχομενικότητας έγκειται Α) στο ότι δεν *επηρεάζει* καμιά άλλη ενδεχομενικότητα και Β) στο ότι η εν λόγω ενδεχομενικότητα δεν *επηρεάζεται* και δεν *εξαρτάται* από άλλες ενδεχομενικότητες. Αυτό το χαρακτηριστικό καθιστά -ισχυρίζονται οι Hale και Wright- ιδιαίτερη τη θέση της υποτιθέμενης ενδεχομενικότητας της μη ύπαρξης των μαθηματικών οντοτήτων (1992, 133). Ετσι, αν χαρακτηρίσουμε ως ακραίες ("brute") τις ενδεχομενικότητες οι οποίες δεν εξαρτώνται από άλλες ενδεχομενικότητες και ως άγονες ("barren") τις ενδεχομενικότητες από τις οποίες δεν εξαρτώνται άλλες ενδεχομενικότητες, τότε η ενδεχομενικότητα της μη ύπαρξης μαθηματικών οντοτήτων φαίνεται να ανήκει και στις δύο κατηγορίες[27]. Η συγκεκριμένη ενδεχομενικότητα δείχνει απομονωμένη από οποιαδήποτε μεταφυσική εικόνα θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε για το συνολικό σύστημα των ενδεχομενικοτήτων. Δεδομένων των αλληλεξαρτήσεων που οι ενδεχομενικότητες εμφανίζουν μεταξύ τους, το σύστημα αυτό θα μπορούσε να περιγραφεί περίπου ως δέντρο με κλάδους και παρακλάδια, όπου οι διάφορες ενδεχομενικότητες φαίνονται να εξαρτώνται από άλλες και να επηρεάζουν κάποιες άλλες. Σε κάποια εσωτερικά σημεία, υπάρχουν οι ακραίες ("brute") ενδεχομενικότητες που δεν εξαρτώνται από άλλες. Σε κάποια τελικά, καταληκτικά σημεία του δέντρου βρίσκονται οι "άγονες" ("barren") από τις οποίες δεν εξαρτώνται άλλες ενδεχομενικότητες. Τότε, φαίνεται αρκετά προβληματική η τοποθέτηση της ενδεχομενικότητας της μη ύπαρξης μαθηματικών οντοτήτων μέσα σ'αυτό το διακλαδωτό σύστημα (1992, 134).

Σκοπός του παραπάνω επιχειρήματος ("insularity objection") των Hale & Wright είναι να δείξει ότι η ενδεχομενικότητα της μη ύπαρξης των μαθηματικών οντοτήτων (η οποία αποτελεί συνέπεια –όπως είδαμε- των δύο βασικών φιλοσοφικών παραδοχών του Field) αποτελεί μια προβληματική πρόταση την οποία, αν ο Field ήθελε να υπερασπιστεί, θα έπρεπε να μπει στον κόπο και να δικαιολογήσει μια κατάλληλη μεταφυσική δομή ενός συστήματος ενδεχομενικοτήτων, όπου το περίεργο αυτό είδος απομονωμένης ενδεχομενικότητας θα είχε μια συγκεκριμένη θέση. Το ερώτημα λοιπόν που τίθεται είναι γιατί να οδηγηθεί κανείς σε μια τέτοια φιλοσοφική περιπέτεια (cf. 1994, 176).

Σχετικά με την κριτική του Hale (1987, 109-14) προς τις απόψεις του, ο Field πιστεύει ότι δεν έχει κατανοηθεί αρκετά το γεγονός ότι ο ίδιος αντιλαμβάνεται την ενδεχομενικότητα με μια αυστηρή ("austere") λογική σημασία: κάτι είναι ενδεχομενικό όταν δεν είναι ούτε λογική αλήθεια ούτε λογική αντίφαση. Υποστηρίζει λοιπόν ότι ο τρόπος που ο ίδιος αντιλαμβάνεται την ενδεχομενικότητα δεν αφήνει περιθώρια στην κριτική των αντιπάλων του (1989, 43-4).

Γενικότερα, σκοπός της κριτικής των Hale & Wright είναι να προκαλέσουν έναν προβληματισμό σχετικά με το αν ένας νομιναλιστής τύπου Field έχει τη δυνατότητα να παρουσιάσει μια συνεπή εικόνα του τροπικού (modal) status της ενδεχομενικής πρότασης ότι δεν υπάρχουν μαθηματικές οντότητες, η οποία αποτελεί

[79] Το ενδεχομενικό ως 'εξαρτώμενο' συνιστά μια έννοια ενδεχομενικότητας που συχνά συνοδεύει το κοσμολογικό επιχείρημα

συνέπεια των παραδοχών του. Βέβαια πίσω από το επιχείρημα των Hale & Wright βρίσκεται η πεποίθησή τους για την αναγκαία ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων. Υπενθυμίζουμε ότι η πρόταση πως οι υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις θα μπορούσαν να είναι αληθείς αλλά είναι ψευδείς, αποτελεί συνέπεια *α) της συντηρητικότητας και β) του ισχυρισμού ότι οι υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις είναι ψευδείς*. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι ο νομιναλιστής Field αποφεύγει διατυπώσεις που θα έκαναν χρήση μοντέλων και ίσως να τον διευκόλυναν.

Η αλήθεια μιας μαθηματικής πρότασης εξαρτάται από μία συγκεκριμένη ερμηνεία της (πρωτοβάθμιας) γλώσσας της θεωρίας που εξετάζουμε. Για τις προτάσεις εκείνες που αποδεικνύονται από το σύνολο των αξιωμάτων της θεωρίας, είναι πάντως βέβαιο ότι η αλήθειά τους ακολουθεί την αλήθεια των αξιωμάτων. Πιο συγκεκριμένα, κάθε μαθηματική πρόταση φ που δεν είναι ούτε λογικά έγκυρος τύπος ούτε αντιφατική είναι δυνατό: είτε να αποδεικνύεται η ίδια η φ από το σύνολο των αξιωμάτων της θεωρίας είτε να αποδεικνύεται η άρνηση της φ από το σύνολο των αξιωμάτων της θεωρίας είτε να μην υπάρχει απόδειξη ούτε της ίδιας ούτε της άρνησής της. Στην περίπτωση που υπάρχει απόδειξη της ίδιας της φ από τα αξιώματα της θεωρίας, τότε η πρόταση αυτή είναι αληθής σε όλα τα μοντέλα της θεωρίας. Στην περίπτωση που υπάρχει απόδειξη της άρνησης της φ από τα αξιώματα της θεωρίας τότε η πρόταση φ είναι ψευδής σε όλα τα μοντέλα της θεωρίας. Στην τρίτη περίπτωση, στην οποία δεν υπάρχει απόδειξη ούτε της ίδιας της φ ούτε της άρνησής της από τα αξιώματα της θεωρίας, όταν δηλαδή η φ είναι μη αποκρίσιμη, τότε η πρόταση είναι αληθής σε κάποια μοντέλα και ψευδής σε κάποια άλλα μοντέλα (Αναπολιτάνος Δ., 1985, 107-8). Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις υπάρχει βέβαια τουλάχιστον μια ερμηνεία της γλώσσας της θεωρίας, όπου η πρόταση φ δεν είναι αληθής (αφού η φ δεν είναι λογικά έγκυρος τύπος). Κατά την παραπάνω έννοια, η αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων δεν είναι αναγκαία.

Ο Field γνωρίζει πως τουλάχιστον σε ότι αφορά τις πρωτοβάθμιες γλώσσες, έχει κανείς τη δυνατότητα να μετακινείται άνετα από το σημασιολογικό στο αποδεικτικο-θεωρητικό επίπεδο και αντίστροφα (λόγω των θεωρημάτων πληρότητας που συνδέουν αυτά τα δύο επίπεδα) αλλά ότι όταν έχει να κάνει με γλώσσες 2ης τάξης, τότε δεν έχει αυτή τη δυνατότητα. Οπως έχουμε προαναφέρει, υπάρχει επίσης ένας τουλάχιστον λόγος για τον οποίο ο Field δεν θα υιοθετούσε μία διατύπωση όπως η προηγούμενη. Συγκεκριμένα, βλέπει με καχυποψία την έννοια του μοντέλου. Ως νομιναλιστής δεν χρησιμοποιεί μοντελο-θεωρητικές διατυπώσεις, διότι πιστεύει ότι στην έννοια του μοντέλου υπεισέρχεται μια μαθηματική οντότητα δηλ. υπεισέρχεται η έννοια του συνόλου. Στόχος, άλλωστε, του προγράμματός του δεν είναι μόνο η επαναδιατύπωση των επιστημονικών θεωριών της φυσικής χωρίς τη συμβολή των μαθηματικών οντοτήτων αλλά και η επαναδιατύπωση των μεταλογικών εννοιών χωρίς τη βοήθεια του μοντέλου.

Η κριτική των Hale & Wright στον Field που προηγήθηκε δεν είναι καθοριστικής σημασίας ως προς το αν ο ίδιος μπορεί να εξηγήσει με άλλους όρους ή με περισσότερη ακρίβεια την ενδεχομενικότητα της ύπαρξης των μαθηματικών οντοτήτων, ούτε είναι καθοριστικής σημασίας ως προς το αν μπορεί ο ίδιος να απαντήσει σε ερωτήματα που του θέτουν σχετικά με το είδος της ενδεχομενικότητας αυτής και το κατά πόσον είναι ακραία ή άγονη κλπ. Αυτό που έχει σημασία είναι ότι ο Field με βάση τις δικές του προκείμενες, οφείλει να παραδεχτεί ότι η ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων είναι ενδεχομενική, δηλαδή ότι οι μαθηματικές οντότητες θα μπορούσαν να υπάρχουν. Όπως θα δούμε, ο ίδιος αναφέρεται στη θέση του ενδεχομενικού νομιναλισμού.

3. *Ο ενδεχομενικός νομιναλισμός του Field.*

Εχει σημασία να εξετάσουμε πόσο βάσιμη είναι η θέση του Field όταν μιλάει, συνήθως με βεβαιότητα, για το ψεύδος των υπαρκτικών μαθηματικών προτάσεων. Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι ο Field, υιοθετώντας τη συντηρητικότητα των μαθηματικών θεωριών και συγχρόνως την άποψη ότι οι υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις είναι ψευδείς, οδηγείται στο συμπέρασμα ότι τα αξιώματα μιας συντηρητικής μαθηματικής θεωρίας (και οι συνέπειές τους) θα ήταν δυνατό να είναι όλα συγχρόνως αληθή αλλά στην πραγματικότητα είναι ψευδή.

Ο Field αντιμετωπίζει τις μαθηματικές θεωρίες περίπου με τον τρόπο που αντιμετωπίζει και την ιστορία του Oliver Twist, δηλαδή το πολύ-πολύ ως μια συνεπή ιστορία. Πιστεύει ωστόσο ότι υπάρχει μια διαφορά ανάμεσα στους λόγους για τους οποίους, η ιστορία του Oliver Twist είναι «καλή» και μια μαθηματική θεωρία είναι «καλή» (1989, 4). Αυτή η διαφορά προκύπτει από το γεγονός ότι οι μαθηματικές θεωρίες αποδεικνύονται χρήσιμες στις επιστημονικές εφαρμογές άλλων ερευνητικών χώρων ενώ η ιστορία του Oliver Twist δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά τον ίδιο τρόπο. Θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι μία μαθηματική θεωρία είναι «καλή» δηλ. χρήσιμη, όχι για τους ίδιους λόγους για τους οποίους είναι καλή η ιστορία του Oliver Twist, αλλά γιατί είναι αληθής. Όπως είδαμε, ο Field αντιμετώπισε αυτό το επιχείρημα με βάση την έννοια της συντηρητικότητας, υποστήριξε δηλαδή ότι η χρησιμότητα των μαθηματικών στις διάφορες επιστήμες εξασφαλίζεται χάρη στη συντηρητικότητα των μαθηματικών θεωριών και όχι χάρη στην αλήθειά τους. Η συντηρητικότητα είναι η ιδιότητα η οποία εγγυάται την έγκυρη παραγωγή νομιναλιστικά διατυπωμένων επιστημονικών συμπερασμάτων από νομιναλιστικά διατυπωμένες υποθέσεις.

Ο Field, όπως είδαμε, υπερασπίζεται μια άποψη της μορφής:
α. *'είναι ενδεχομενικό γεγονός ότι οι μαθηματικές οντότητες υπάρχουν αλλά στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν'*. Τη θέση αυτή, ο ίδιος χαρακτηρίζει ως ενδεχομενικό νομιναλισμό (contingent nominalism) (1984, 285). Επιλέγει μάλιστα αυτή την άποψη αντί των απόψεων:
β. *'είναι ενδεχομενικό γεγονός ότι οι μαθηματικές οντότητες υπάρχουν και στην πραγματικότητα υπάρχουν'*
γ. 'είναι αναγκαίο γεγονός ότι οι μαθηματικές οντότητες υπάρχουν'
δ. 'είναι αναγκαίο γεγονός ότι οι μαθηματικές οντότητες δεν υπάρχουν'.

Τι τον οδηγεί στο να επιλέξει την πρώτη; Κατ'αρχήν απορρίπτει την γ. μια άποψη πολύ προσφιλή στους μαθηματικούς πλατωνιστές. Επίσης απορρίπτει την δ. αν και φλερτάρει μαζί της με αξιοπρόσεκτο τρόπο[28]. Τέλος, προσπαθεί να επιλέξει μεταξύ των α. και β. Αν προσέξουμε τις δύο αυτές απόψεις, παρατηρούμε ότι και οι δύο δέχονται την ενδεχομενικότητα, διαφέρουν όμως ως προς το ότι η πρώτη θεωρεί ενεργεία ψευδείς τις υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις ενώ η δεύτερη τις θεωρεί ενεργεία αληθείς. Τι είναι αυτό που αναγκάζει τον Field να επιλέξει την πρώτη; Ενας λόγος, τον οποίο και προαναφέραμε, είναι ότι δεν μπορεί να δεχθεί την ύπαρξη οντοτήτων εκτός χωροχρονικού πλαισίου, πολύ περισσότερο την ύπαρξη οντοτήτων με τις οποίες δεν αλληλεπιδρούμε σε κανένα φυσικό επίπεδο. Πέρα όμως από αυτήν

[28] Πιστεύει ότι η μη ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων δεν είναι λογικά αναγκαία. Δεν είναι λογικά αναγκαία γιατί η ίδια η έννοια πχ του αριθμού ή του συνόλου δεν εμπεριέχει καμιά λογική αντίφαση. Ωστόσο, θεωρεί ότι η μη ύπαρξη αυτών των οντοτήτων θα μπορούσε να χαρακτηρισθεί ως εννοιολογικά αναγκαία, διότι δεν υπάρχουν τέτοιες οντότητες.

την ένδειξη, υπάρχει και ένας σοβαρότατος για τον Field λόγος να επιλέξει την *α)*. Ο ίδιος απαντά στο ερώτημα που θέσαμε: «Κατά τη γνώμη μου η απόφαση (μεταξύ των *α)* και *β)* εξαρτάται σε μεγάλο μέρος από το εάν τα γνωστά ως επιχειρήματα υπέρ του αναπόδραστου (indinspensability arguments) των μαθηματικών οντοτήτων μπορούν να απορριφθούν ή γενικότερα, το εάν μπορούμε να ανακόψουμε τα επιχειρήματα για την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων που βασίζονται στη χρησιμότητα ή την εφαρμογή των μαθηματικών σε άλλα πεδία. Αυτό δεν είναι ένα θέμα που ο Hale και ο Wright συζητούν και δεν θα το συζητήσω ούτε εγώ εδώ...» (1984, 285-6, 290). Ο ίδιος επισημαίνει ωστόσο ότι ο λόγος που τον κάνει να επιλέξει την εκδοχή *α)* είναι η πίστη του ότι τα επιχειρήματα των Quine-Putnam μπορούν να καταρριφθούν. Ενα μεγάλο τμήμα του νομιναλιστικού του προγράμματος μάλιστα, αποσκοπεί συστηματικά στο να καταρρίψει τα επιχειρήματα αυτά. Προσπαθεί να επαναδιατυπώσει μεγάλο μέρος των επιστημονικών θεωριών, χωρίς τη συμβολή των μαθηματικών οντοτήτων. Η θέση που παίρνει επομένως σχετικά με το θέμα της ύπαρξης των μαθηματικών οντοτήτων εξαρτάται από την τύχη των επιχειρημάτων Quine-Putnam, εναντίον των οποίων έχει κατευθύνει μεγάλο μέρος της ερευνητικής του προσπάθειας. Και ευελπιστεί ότι βρίσκεται σε καλό δρόμο για την απόρριψη αυτών των επιχειρημάτων. Η προσπάθειά του συνίσταται στο ν' αποδείξει ότι εξίσου καλές θεωρίες και επιστημονικές εξηγήσεις μπορούν να διατυπωθούν, οι οποίες δεν δεσμεύονται σε μαθηματικές οντότητες. Ο Field έχει δηλώσει ότι είναι αισιόδοξος για το νομιναλιστικό αυτό πρόγραμμα αποσκοπώντας στην ολοκλήρωσή του. Γι αυτό και επιλέγει την εκδοχή *α)*. Αλλά είναι γεγονός ότι το θέμα αυτό δεν έχει κλείσει αφού το νομιναλιστικό πρόγραμμα του Field δεν έχει ολοκληρωθεί και όπως ο ίδιος επίσης αναφέρει (1989, 17), δεν γνωρίζει τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσε να εξαλείψει τις μαθηματικές οντότητες από όλες τις επιστημονικές εξηγήσεις. Κατά συνέπεια, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν έχει αποδείξει ακόμα αυτό που πιστεύει, δηλ. ότι οι υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις είναι ψευδείς, παρά το γεγονός ότι έχει ενδείξεις προς αυτή την κατεύθυνση.

Επίσης πρέπει να τονισθεί ότι η έννοια της συντηρητικότητας που εισήγαγε ο Field, δεν επαρκεί μόνη της για να τον οδηγήσει στο συμπέρασμα της μη ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων. Η έννοια αυτή τον οδηγεί (όπως είδαμε στο σχετικό επιχείρημα των Hale & Wright) να αποδεχθεί τη *δυνατότητα* της αλήθειας των αξιωμάτων μιας μαθηματικής θεωρίας και των αντίστοιχων θεωρημάτων. Η συντηρητικότητα δεν μπορεί να οδηγήσει από μόνη της σε κανένα συμπέρασμα υπέρ της αλήθειας ή του ψεύδους των υπαρκτικών μαθηματικών προτάσεων. Το συγκεκριμένο επιχείρημα του Field (αρκεί η έννοια της συντηρητικότητας για να δικαιολογηθεί η εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών), αν αντιμετωπισθεί απομονωμένο από άλλα επιχειρήματα του ίδιου, δεν οδηγεί άμεσα σε απόρριψη της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων. Σημαίνει απλώς ότι η ιδιότητα των μαθηματικών να είναι *εφαρμόσιμα* στις φυσικές επιστήμες δεν προυποθέτει τη μαθηματική αλήθεια και ότι η έννοια της αλήθειας υποκαθίσταται στον τομέα αυτό από την έννοια της συντηρητικότητας. Με αυτό τον τρόπο ο Field ανακόπτει την επιχειρηματολογία όλων εκείνων που επικαλούνται τη μαθηματική αλήθεια για να δικαιολογήσουν τη χρησιμότητα των μαθηματικών στους άλλους επιστημονικούς κλάδους. Από την άλλη πλευρά, οι Hale και Wright δεν θεωρούν την συντηρητικότητα καθόλου απειλητική για τις απόψεις τους, διότι οι απόψεις τους για τη μαθηματική αλήθεια διατυπώνονται ανεξάρτητα από το θέμα των μαθηματικών εφαρμογών.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο Field θα έπρεπε να είναι μάλλον αγνωστικιστής σε ότι αφορά την ύπαρξη ή μη, των μαθηματικών οντοτήτων, πριν καταφέρει να ολοκληρώσει το νομιναλιστικό του πρόγραμμα. Οπως ο ίδιος παραδέχεται, «*.... η συντηρητικότητα των μαθηματικών από μόνη της δεν αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει λόγος να πιστεύουμε στα μαθηματικά: όπως έχω επανειλημμένα τονίσει από τον καιρό των βιβλίου μου Science without Numbers, για να αντιπαλέψει κανείς το επιχείρημα του πλατωνισμού, πρέπει να δείξει επιπλέον ότι τα μαθηματικά δεν είναι αναγκαία στην επιστήμη και... σε περιοχές τέτοιες όπως η μεταλογική επίσης... Είναι παραδεκτό ότι δεν έχουμε άμεση και κατευθείαν προφάνεια εναντίον των μαθηματικών οντοτήτων...*» και παρακάτω «*... ίσως ο αγνωστικισμός θα μπορούσε να ήταν ένα επαρκές συμπέρασμα...*» (1989, 44-5).

Συμπεραίνουμε επομένως ότι: ο Field, όπως δηλώνει ο ίδιος, επιλέγει και αποδέχεται τον ισχυρισμό Α. *'είναι ενδεχομενικό γεγονός το ότι οι μαθηματικές οντότητες υπάρχουν αλλά στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν'.* Όμως δεν έχει καταφέρει να τον αποδείξει, τουλάχιστον σε ότι αφορά το δεύτερο μέρος του. Όπως συμπεράναμε στο τέλος της προηγούμενης ενότητας, ο Field οφείλει να παραδεχθεί (με βάση τις δικές του προκείμενες) ότι οι μαθηματικές οντότητες *θα μπορούσαν να υπάρχουν* (ενδεχομενικότητα ύπαρξης). Σε ότι αφορά το ψεύδος των υπαρκτικών μαθηματικών προτάσεων, όπως ο ίδιος ομολογεί στο παραπάνω απόσπασμα και όπως εμείς διαπιστώσαμε, δεν είναι κάτι που έχει μέχρι τώρα καταφέρει να αποδείξει. Η συντηρητικότητα την οποία επικαλείται δεν μπορεί να καταργήσει τη μαθηματική αλήθεια. Χρειάζεται λοιπόν ένα ανεξάρτητο επιχείρημα για να υποστηρίξει ότι οι μαθηματικές οντότητες είναι πράγματι εξαλείψιμες απ'όλες τις επιστημονικές θεωρίες. Αλλά ούτε και αυτό έχει επιτευχθεί μέχρι τώρα. Συνεπώς ο Field δεν έχει προχωρήσει πιο μακριά από το ότι είναι (λογικά) ενδεχομενικό οι μαθηματικές οντότητες να υπάρχουν.

ΚΕΦ.5

Η αλήθεια της ταυτότητας Nx:Fx = Nx:Gx & η κριτική του Field

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρακολουθήσαμε τις απόψεις του Field σχετικά με τη μαθηματική αλήθεια και καταλήξαμε στο ότι δεν έχει καταφέρει να δικαιολογήσει τον ισχυρισμό ότι δεν υπάρχουν μαθηματικές οντότητες, τον οποίο προβάλλει γενικότερα στο έργο του. Μάλλον οδηγείται περισσότερο σε ένα συμπέρασμα αγνωστικιστικό. Ουσιαστικά το μόνο που καταφέρνει να αποδείξει είναι η ενδεχομενικότητα της ύπαρξης των μαθηματικών οντοτήτων και κατά συνέπεια η δυνατότητα της ύπαρξής τους. Εάν είχε επιτύχει τη νομιναλιστική διατύπωση των επιστημονικών θεωριών σύμφωνα με το πρόγραμμά του τότε θα ήταν σε θέση να υποστηρίξει ότι το λεξιλόγιο που αναφέρεται σε μαθηματικές οντότητες είναι περιττό, αλλά είναι αμφίβολο το αν μπορεί να γίνει μία νομιναλιστική ανασυγκρότηση των επιστημονικών θεωριών στο σύνολό τους. Απλά ο Field υπέδειξε έναν τρόπο για να αποφύγει κανείς την αναφορά σε μαθηματικές οντότητες μέσα στις επιστημονικές θεωρίες. Επιπλέον, η μαθηματική αλήθεια είναι ανεξάρτητη έννοια από τη συντηρητικότητα και όπως είδαμε, η πρώτη δεν θίγεται από τον τρόπο που χρησιμοποιεί ο Field τη δεύτερη. Ετσι, η προσπάθεια των νεολογικιστών να θεμελιώσουν την ύπαρξη των αριθμών, δεν προσκρούει σε τίποτα από τα προηγούμενα.

Θα δούμε ωστόσο, ότι υπάρχει συγκεκριμένη κριτική του Field που επικεντρώνεται στο νεολογικισμό, σε ότι αφορά ιδιαίτερα την αλήθεια των αριθμητικών ταυτοτήτων «Nx:Fx = Nx:Gx» και την αλήθεια της ίδιας της N=. Εάν υποτεθεί ότι η λειτουργία των αριθμητικών όρων μέσα στις αριθμητικές προτάσεις είναι πράγματι συντακτική λειτουργία ενικών όρων, το επόμενο βήμα είναι ο έλεγχος του ισχυρισμού ότι αυτές οι προτάσεις είναι αληθείς. Υπενθυμίζουμε το απόσπασμα από τον Wright (1983, 14) : «*... όταν έχει θεμελιωθεί με το είδος των συντακτικών κριτηρίων που σχεδιάστηκαν, ότι μια δεδομένη κατηγορία όρων λειτουργούν ως ενικοί όροι, και όταν έχει επιβεβαιωθεί ότι συγκεκριμένες κατάλληλες προτάσεις που τους* *περιέχουν είναι, με κανονικά κριτήρια, αληθείς, τότε έπεται πως αυτοί οι όροι αναφέρονται γνήσια. Και αφού είναι ενικοί όροι, τότε η αναφορά τους θα είναι προς αντικείμενα*». Σ'αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τα επιχειρήματα του Field εναντίον της αλήθειας των αριθμητικών ταυτοτήτων.

Ο νεολογικισμός εξετάζει στο σημείο αυτό το ερώτημα κατά πόσον είναι αληθής η αριστερή πρόταση της ισοδυναμίας N=, που αποτελεί γενικά μια αριθμητική ταυτότητα. Υπενθυμίζουμε ότι η ισοδυναμία N=, η οποία συνιστά άλλωστε τον ακρογωνιαίο λίθο του νεολογικισμού, στοχεύει στο να καθορίσει αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την αλήθεια της αριθμητικής ταυτότητας «Nx:Fx = Nx:Gx».

(N =) $\quad (\forall F)(\forall G) \quad [(Nx : Fx = Nx : Gx) \leftrightarrow (F\ 1\text{-}1\ G)]$

Ο Hartry Field εγείρει ειδικότερα αμφιβολίες σχετικά με την «κανονικότητα των κριτηρίων», χάρη στα οποία χαρακτηρίζονται συνήθως ως αληθείς μια σειρά από μαθηματικές προτάσεις. Ο Field αναρωτιέται αν άραγε τα «κανονικά κριτήρια» των αρχαίων Ελλήνων για την αλήθεια, καθιστούσαν αληθή την πρόταση «Ο Ζεύς ρίχνει κεραυνούς» όταν εμφανίζονταν αστραπές (1989, 155) στον ελληνικό ουρανό. Στο ελαφρώς ειρωνικό σχόλιο του Field, ο Wright (2001, 158) απάντησε ότι σίγουρα η εμφάνιση αστραπών στον ουρανό δεν συνιστούσε, ακόμα και για τους ανθρώπους εκείνης της εποχής, κανονικό έδαφος για να δεχθούν την αλήθεια της πρότασης «ο Ζεύς ρίχνει κεραυνούς». Εξηγεί ωστόσο τι εννοεί ο ίδιος όταν αναφέρεται σε κανονικά κριτήρια και καλεί τον Field να σκεφθεί κατά πόσον η παραλληλία μεταξύ δύο ευθειών συνιστά κανονικό κριτήριο για να δεχθεί κάποιος την ταυτότητα των διευθύνσεών τους. Για τους νεολογικιστές, η επιβεβαίωση της παραλληλίας μεταξύ δύο ευθειών a, b συνιστά κανονικό έδαφος για να υποστηριχθεί η ταυτότητα μεταξύ των διευθύνσεών τους D(a), D(b) .

Το σημείο στο οποίο ο Field ασκεί κριτική κατ'αρχήν είναι ακριβώς η τιμή αλήθειας των ταυτοτήτων που εμφανίζονται στην αριστερή πλευρά των ισοδυναμιών D= και N=. Αμφισβητεί την αλήθεια της «**D(a) = D(b)**» και την αλήθεια της «**Nx : Fx = Nx : Gx**» όπως προκύπτει μέσω των ισοδυναμιών D= και N= αντίστοιχα, από την αλήθεια των δεξιών προτάσεων**.** Εάν ο Field έχει δίκιο τότε ακόμα και αν έχουμε λόγους να πιστεύουμε ότι πχ. οι αριθμητικοί όροι **Nx:Fx , Nx:Gx** συμπεριφέρονται συντακτικά ως ενικοί όροι, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχουν τα αντικείμενα αναφοράς τους. Ετσι ο Field πλήττει καίρια το επιχείρημα των νεολογικιστών.

Για να δοθεί μια απάντηση στην ένσταση αυτή του Field, πρέπει να κατανοηθούν κατ'αρχήν δύο σημεία: το ότι οι ισοδυναμίες καθορίζουν ίδιες συνθήκες-καταστάσεις αλήθειας για την αριστερή και τη δεξιά πρότασή τους και το ότι οι προτάσεις που βρίσκονται στη δεξιά πλευρά των ισοδυναμιών αφορούν σε γεγονότα πιο *οικεία* σε μας (και άρα ελέγξιμα) από ότι οι προτάσεις που βρίσκονται στην αριστερή πλευρά. Αυτό εξηγεί μάλιστα ο Frege με πολύ εναργή τρόπο στην §64 των Grundlagen, όπου αναφέρει ότι πχ. η σχέση παραλληλίας δύο ευθειών (δεξιά πρόταση της ισοδυναμίας D=) είναι πιο οικεία σ'εμάς από ότι η ταυτότητα των διευθύνσεών τους, διότι «*μπορούμε να σχηματίσουμε εύκολα μια παράσταση των παραλλήλων ευθειών*» και είναι γνωστό ότι «*καθετί στη γεωμετρία πρέπει να μας δοθεί αρχικά στην εποπτεία*». Αντίθετα, η ταυτότητα των διευθύνσεων (δηλ. η αριστερή πρόταση της D=) είναι λιγότερο οικεία. Ο Wright χαρακτηριστικά (1983, 32) επισημαίνει ότι οδηγούμαστε στην ειδική έννοια της διεύθυνσης βασιζόμενοι απλά στις οικείες μας έννοιες της ευθείας γραμμής και της παραλληλίας. Η παραλληλία είναι κάτι στο οποίο έχουμε πρόσβαση με βάση τον ήδη υπάρχοντα εξοπλισμό μας και μπορούμε να διαπιστώσουμε αν ισχύει. Τότε όμως θα είναι αληθής και η αριστερή πρόταση, δηλαδή η ταυτότητα διευθύνσεων, δεδομένου ότι η αριστερή και η δεξιά πρόταση είναι ισοδύναμες. Επίσης σε ότι αφορά τους αριθμούς, η διαπίστωση της ύπαρξης μιας 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ δύο εννοιών είναι ένα οικείο θέμα, ανήκει στη λογική ($2^{ης}$ τάξης). Συνεπώς εάν διαπιστωθεί η ύπαρξη μιας 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ εννοιών τότε θα είναι αληθής και η αριθμητική ταυτότητα, δεδομένου ότι η αριστερή και η δεξιά πρόταση είναι ισοδύναμες. Για παράδειγμα, επειδή οι έννοιες ‘παίκτης σε ομάδα ποδοσφαίρου’ και ‘παίκτης σε ομάδα κρίκετ’ μπορούν να τεθούν σε μια 1-1 αντιστοιχία τότε η ταυτότητα «ο αριθμός των παικτών μιας ομάδας ποδοσφαίρου ταυτίζεται με τον αριθμό των παικτών μιας ομάδας κρίκετ» (1) θα είναι αληθής.

Τα προηγούμενα βέβαια ισχύουν υπό την προυπόθεση ότι οι ίδιες οι ισοδυναμίες D= και N= είναι αληθείς. Ο Field ωστόσο έχει αντιρρήσεις και ως προς τις ίδιες τις ισοδυναμίες. Θα ήταν διατεθειμένος για παράδειγμα να δεχθεί την ισοδυναμία D=, *μόνον υπό την προυπόθεσ*η ότι οι διευθύνσεις D(a), D(b) υπάρχουν.

Ανάλογα, θα ήταν διατεθειμένος να δεχθεί ότι ισχύει η ισοδυναμία N=, *μόνον υπό την προυπόθεση* ότι ο αριθμός της έννοιας F και ο αριθμός της έννοιας G υπάρχουν (1989, 169) & (1984, 661). Θα δεχόταν δηλαδή ως αληθή μία διαφορετική διατύπωση η οποία θα είχε περίπου τη μορφή:

(η*): [εάν οι αριθμοί $\eta_\chi(A(x))$ και $\eta_\chi(B(x))$ υπάρχουν τότε:
$\eta_\chi(A(x)) = \eta_\chi(B(x))$ αν και μόνο αν υπάρχουν ακριβώς τόσα x τέτοια ώστε A(x) όσα x τέτοια ώστε B(x)].

Αν μεταφέρουμε την ιδέα του Field σε μια πιο οικεία σε μας διατύπωση τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο Field προτιμά μια διατύπωση της μορφής η*:
[Εάν ο αριθμός της έννοιας F και ο αριθμός της έννοιας G υπάρχουν τότε:
ο αριθμός της έννοιας F ταυτίζεται με τον αριθμό της έννοιας G αν και μόνο αν οι έννοιες F και G μπορούν να τεθούν σε μια 1-1 αντιστοιχία].

Ο Field επιμένει ότι η πρόταση η* είναι ό,τι ισχυρότερο μπορούμε να δεχθούμε για τους αριθμούς, διότι όπως εξηγεί, η ύπαρξη των αριθμών δεν είναι κάτι που εξασφαλίζεται μέσω ορισμών ούτε κάτι που αποδεικνύεται.

Η η* είναι μια υποθετική πρόταση με προκείμενη την ύπαρξη των αριθμών. Από την άλλη πλευρά, η N= είναι μια ισοδυναμία που καθορίζει αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την αλήθεια μιας αριθμητικής ταυτότητας. Πρέπει να σημειωθεί όμως ότι στην περίπτωση της N=, η ύπαρξη των αριθμών δεν αποτελεί κάποια υπόθεση αλλά ούτε και θεμελιώνεται ως ένας ισχυρισμός που έχει την ισχύ αξιώματος. Είναι σημαντικό το ότι στη σκέψη των νεολογικιστών, η ύπαρξη των αριθμών αποτελεί ένα *αποτέλεσμα, δηλαδή ένα συμπέρασμα* που προκύπτει *α)* από την ισοδυναμία N= και *β)* από αληθείς προτάσεις που τοποθετούνται στη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας N=. Ο Wright τονίζει με ιδιαίτερη έμφαση αυτό το σημείο: *«... δεν έχει γίνει καμιά υπόθεση υπαρκτικού χαρακτήρα: εάν έχουμε πράγματι επιτύχει στο να προσδιορίσουμε μια ειδική έννοια του αριθμού με ικανοποιητικό τρόπο, τότε η ύπαρξη των Nx:Fx για μια δεδομένη έννοια F, είναι ένα θέμα όχι κάποιας υπόθεσης αλλά κάτι που προκύπτει από την αλήθεια των κατάλληλων προτάσεων ...»* (1983, 148). Ανάλογα, η ύπαρξη των διευθύνσεων δεν αποτελεί μια υπόθεση αλλά προκύπτει ως αποτέλεσμα *α)* από την ισοδυναμία D= και *β)* από αληθείς προτάσεις που τοποθετούνται στη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας.

Γι αυτό ο Wright ασκεί ο ίδιος έντονη κριτική στην εναλλακτική πρόταση του Field με τον ισχυρισμό ότι η προκείμενη του Field 'εάν ο αριθμός της έννοιας F και ο αριθμός της έννοιας G υπάρχουν' δεν μπορεί να γίνει κατανοητή αφού ο Field δεν παρέχει καμιά εξήγηση του όρου 'ο αριθμός της έννοιας F'. Για να κατανοηθεί – ισχυρίζεται ο Wright– η προκείμενη της η* , προϋποτίθεται η κατανόηση της έννοιας του αριθμού για την οποία ο Field δεν έχει μεριμνήσει. Ο Wright αναφέρει (2001, 160) σχετικά, ότι όχι μόνο δεν έχει φροντίσει ο Field να κάνει κατανοητή την προκείμενη της δικής του εναλλακτικής διατύπωσης αλλά και αν του ζητηθεί να παράσχει κάποια εξήγηση της έννοιας του αριθμού, το πιθανότερο είναι να απαντήσει ότι δεν είναι υποχρεωμένος να το κάνει.

Το προηγούμενο επιχείρημα του Wright δεν είναι αρκετά ισχυρό, διότι όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, υποθετικές προτάσεις περίπου της μορφής n* του Field μπορούν να θεωρηθούν και αυτοί ως ένα είδος ορισμού της έννοιας του φυσικού αριθμού. Ο πραγματικός λόγος που ο Wright απορρίπτει την n* είναι ότι δεν μπορεί να επιτύχει μέσω αυτής, τους στόχους του νεολογικισμού. Οι στόχοι του, μεταξύ των οποίων και η παραγωγή των αξιωμάτων Peano, επιτυγχάνονται μόνον μέσω της N= .

Από την άλλη πλευρά, ο λόγος που ο Field εκδηλώνει την προτίμησή του προς τις εναλλακτικές υποθετικές διατυπώσεις τύπου η*, αντί των ισοδυναμιών D= και N= του Wright, είναι η καχυποψία του απέναντι στην ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων την οποία οι νεολογικιστές συμπεραίνουν με βάση τις ισοδυναμίες τους. Ακολουθεί μια διαμάχη σχετικά με αυτό ακριβώς το θέμα. Ο Field ισχυρίζεται (ορθά) ότι ακόμα και αν δεχθούμε την N= ως έναν ορισμό, ως μια ικανοποιητική εξήγηση της έννοιας του αριθμού, τίποτα δεν εγγυάται την ύπαρξη οντοτήτων που εμπίπτουν σ'αυτή την έννοια. Μπορεί η έννοια του αριθμού να εισάγεται με επιτυχία μέσω της ισοδυναμίας αλλά τίποτα δεν εξασφαλίζει ότι αυτή η έννοια έχει συγκεκριμένες πραγματώσεις. Υπενθυμίζει μάλιστα την παρατήρηση του Kant, στην κριτική του προς το οντολογικό επιχείρημα του Ανσελμου για την ύπαρξη του Θεού. Ο Kant επεσήμανε ότι οι έννοιες από μόνες τους δεν μας δίνουν καμιά εγγύηση για το ότι υπάρχουν κάποια αντικείμενα που εμπίπτουν σ'αυτές. Για παράδειγμα, αν ο Θεός υπάρχει τότε ο Θεός είναι μια τέλεια ύπαρξη, όμως η ύπαρξη του Θεού σε καμία περίπτωση δεν είναι κάτι που προκύπτει από την ίδια την έννοια του Θεού. Ακολουθώντας τον Kant, ο Field εκφράζει τη γνώμη ότι και στην περίπτωση των αριθμών, η ύπαρξή τους με κανένα τρόπο δεν προκύπτει από την έννοια του αριθμού. Γι αυτούς τους λόγους, ο Field αντιμετωπίζει τις ισοδυναμίες του νεολογικισμού ως ένα είδος θεωρίας που εισάγει μια έννοια (πχ της διεύθυνσης, του αριθμού) όπως μια φυσική θεωρία εισάγει πχ. την έννοια του quark. Η εισαγωγή μιας έννοιας είναι βέβαια κάτι σημαντικό και χρήσιμο στην επιστήμη αλλά με κανένα τρόπο δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη της αντίστοιχης οντότητας. Αλλά δεν εξασφαλίζεται επιπλέον ούτε η αλήθεια της αντίστοιχης θεωρίας. Αν λοιπόν υποτεθεί ότι η ισοδυναμία N= αποτελεί μία θεωρία που εισάγει την έννοια του αριθμού, τότε αυτό δεν σημαίνει ότι αυτή η έννοια έχει πραγματώσεις. Δεν αποκλείεται η N= να αποδειχθεί ως θεωρία ψευδής, όπως δεν αποκλείεται και κάποια από τις θεωρίες της φυσικής που εισάγουν αφηρημένες οντότητες, πχ. ηλεκτρόνια, quarks κλπ να αποδειχθεί ψευδής.

Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτές οι επισημάνσεις του Field είναι εύλογες και κανείς δεν θα είχε λόγους να διαφωνήσει μ'αυτές. Η διαφωνία έγκειται στο ότι ο ίδιος δεν έχει κατανοήσει πώς προκύπτει η ύπαρξη αριθμών στο νεολογικισμό .

Ο Field γίνεται βέβαια ιδιαίτερα καυστικός στην κριτική του, κατηγορώντας τον Wright ότι αντιμετωπίζει τις διευθύνσεις και τους αριθμούς ως οντότητες που «ξεπροβάλλουν» μυστηριωδώς μέσα από έννοιες. Και ρωτά: μήπως ο Wright έχει κάτι να πει που να κάνει τον πλατωνισμό του να μοιάζει λίγο περισσότερο αξιόπιστος από το οντολογικό συμπέρασμα του Ανσελμου για τον Θεό (1989, 167);

Ο Wright απαντά στον ίδιο τόνο ότι «και βέβαια έχει κάτι να πει» (2001, 162-3). Ο ίδιος θεωρεί εντελώς λανθασμένο τον παραλληλισμό που κάνει ο Field μεταξύ της περίπτωσης της έννοιας του Θεού και της έννοιας της διεύθυνσης ή του αριθμού. Ανάμεσα στο δικό του επιχείρημα και στα θεολογικά επιχειρήματα υπάρχει τεράστια απόσταση. Ο Wright εκφράζει τη συμφωνία του με τον Field ότι καμιά έννοια από μόνη της δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη αντικειμένων που εμπίπτουν σ'αυτήν, δηλαδή την ύπαρξη πραγματώσεών της. Ούτε είναι πρόθεση του νεολογικισμού να ισχυριστεί ότι οι έννοιες εγγυώνται από μόνες τους την ύπαρξη των πραγματώσεών τους. Ομως η ύπαρξη των διευθύνσεων και η ύπαρξη των αριθμών δεν προκύπτουν από την έννοια της διεύθυνσης και από την έννοια του αριθμού αντίστοιχα, όπως τα οντολογικά επιχειρήματα του Ανσελμου ισχυρίζονται για την ύπαρξη του Θεού, αλλά από εξακριβωμένα αληθείς προτάσεις.

Η διαφορά ανάμεσα στα δύο παραδείγματα οφείλεται στα εξής: τόσο η παραλληλία μεταξύ δύο ευθειών όσο και η ύπαρξη μιας 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ δύο εννοιών μπορούν να ελεγχθούν. Μπορούμε να αποδόσουμε λοιπόν τιμή αλήθειας στις δεξιές προτάσεις των ισοδυναμιών D= και N= με αξιόπιστους τρόπους. Αντίθετα, το θεολογικό επιχείρημα του Ανσελμου δεν προσφέρει τέτοιες δυνατότητες επιστημονικού ελέγχου των δεξιών προτάσεων τυχόν παρόμοιων ισοδυναμιών. Διότι στο θεολογικό επιχείρημα, το οριζόμενο ("definientum"), δηλ. η έννοια του Θεού είναι τέτοιο ώστε να αποκλείει κάθε αξιόπιστη επιστημονική μέθοδο επικύρωσης της αλήθειας του ορίζοντος ("definient").

Ο Wright απαντά επίσης γενικότερα στον Field και σε «*οιονδήποτε θα αμφισβητούσε την ύπαρξη κάθε είδους αφηρημένου αντικειμένου του οποίου η αντίστοιχη ειδική έννοια ερμηνεύεται με βάση το παράδειγμα του Frege για την διεύθυνση*» (2001, 159) με τον εξής τρόπο: διατυπώνει ένα δίλημμα σε ότι αφορά την ισοδυναμία D= (ανάλογα διατυπώνεται για την ισοδυναμία N=), στο οποίο καλεί τον Field να απαντήσει. Σύμφωνα με αυτό το δίλημμα, μπορούμε είτε να δεχθούμε ότι η παραλληλία μεταξύ δύο ευθειών a, b είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ταυτότητα των διευθύνσεων D(a), D(b) είτε όχι. Στην πρώτη περίπτωση που απαντάμε καταφατικά, ο Wright πιστεύει πως η έννοια της διεύθυνσης πραγματώνεται όταν τοποθετήσουμε στη δεξιά πλευρά της D= μια αληθή πρόταση (παραλληλία μεταξύ δύο ευθειών a και b) διότι τότε θα είναι αληθής και η αριστερή πρόταση «D(a)=D(b)». (Ομως τότε οι ενικοί όροι D(a) και D(b) θα πρέπει να αναφέρονται σε ένα αντικείμενο. Προκύπτει λοιπόν το αντικείμενο αναφοράς αυτών των όρων δηλαδή η κοινή διεύθυνση των ευθειών a και b). Στη δεύτερη περίπτωση του διλήμματος, εάν δηλαδή δεν αποδεχθούμε ότι η παραλληλία μεταξύ δύο ευθειών συνιστά αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ταυτότητα των διευθύνσεων των ευθειών αυτών, ο Wright πιστεύει ότι *δεν μπορούμε να εκφράσουμε καμία αμφισβήτηση για την ύπαρξη των διευθύνσεων* αφού : «*δεν διαθέτουμε την έννοια με όρους της οποίας θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε μια τέτοια αμφισβήτηση*» (2001, 159). Ετσι, αν υποτεθεί ότι ο Field επιλέγει την πρώτη δυνατότητα τότε θα πρέπει να παρακολουθήσει πιο προσεκτικά τον τρόπο με τον οποίο συνάγεται το συμπέρασμα για την ύπαρξη των διευθύνσεων ως αντικειμένων, *ώστε να μην το παραλληλίζει και να μην το συγχέει με τα επιχειρήματα του Ανσελμου.* Εάν όμως υποτεθεί ότι επιλέγει τη δεύτερη δυνατότητα τότε δεν διαθέτει κάποια έννοια της διεύθυνσης με όρους της οποίας θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι υπάρχουν ή δεν υπάρχουν οι διευθύνσεις. Δεν μπορεί να ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει κάτι, την έννοια του οποίου δεν έχει ορίσει.

Επειδή όμως η κριτική του Field στοχεύει να πλήξει την ίδια την αλήθεια της ισοδυναμίας Ν= γι αυτό πρέπει να μας απασχολήσει το είδος της συγκεκριμένης ισοδυναμίας. Ποιος είναι ο πραγματικός χαρακτήρας της Ν=; Πώς δικαιολογείται η αλήθειά της; Είναι αναλυτική αλήθεια ή όχι;. Το status της ισοδυναμίας Ν= θα μας απασχολήσει στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφ. 6

Το status της ισοδυναμίας N=

Το μέσον εισαγωγής της έννοιας του φυσικού αριθμού είναι, σύμφωνα με τους Hale & Wright, η ισοδυναμία N= (ή Hume's Principle):

«Ο αριθμός της έννοιας F ταυτίζεται με τον αριθμό της έννοιας G αν και μόνο αν υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των εννοιών F και G»

$$(\forall F)(\forall G) \quad [(Nx : Fx = Nx : Gx) \leftrightarrow (F\ 1 - 1\ G)]$$

Η άποψη αυτή εισάγεται στα Grundlagen αλλά θεμελιώνεται από το νεολογικισμό. Όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, οι αριθμοί δεν μας δίνονται ούτε μέσω της αισθητηριακής αντίληψης ούτε μέσω της a priori καντιανής εποπτείας. Δεν αποτελούν νοητικές παραστάσεις ή ατομικές ιδέες της φαντασίας. Το γεγονός ότι δεν τους προσλαμβάνουμε αισθητηριακά δεν μας εμποδίζει όμως να τους θεωρούμε αντικείμενα. Για να κατανοήσουμε λοιπόν τους αριθμούς ως αυθυπόστατα αντικείμενα, ο Frege θεώρησε ότι χρειάζεται ένα κριτήριο ταυτότητας (§62). Επίσης στην §63 τόνισε ότι η έννοια του αριθμού «*δεν έχει ακόμα προσδιοριστεί αλλά πρόκειται να προσδιοριστεί στο πλαίσιο του ορισμού της αριθμητικής ταυτότητας... δεν προτείνουμε να ορίσουμε την ταυτότητα ειδικά στην περίπτωση των αριθμών, αλλά να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της ταυτότητας ως ένα μέσο για να προσεγγίσουμε αυτά που πρέπει να θεωρηθούν ως ταυτόσημα*». Επίσης, η χρήση των ταυτοτήτων όπου εμφανίζονται οι αριθμητικοί όροι, έπρεπε να ερμηνεύεται με τη βοήθεια *άλλων προτάσεων πιο οικείων σε μας*. Οι πιο οικείες προτάσεις σε μας είναι προτάσεις για 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ εννοιών. Αυτό όμως είναι κάτι που γίνεται ιδιαίτερα εμφανές στο παράδειγμα που έδωσε ο Frege για την εισαγωγή της έννοιας της διεύθυνσης μέσω της ισοδυναμίας D=, όπου οι πιο οικείες προτάσεις αφορούν την παραλληλία ευθειών.

Ενας βασικός λόγος που μας υποχρεώνει να διερευνήσουμε το status της N= σ’αυτό το σημείο είναι ότι αποτελεί μέρος της κριτικής του Field, άρα το θέμα που μας απασχολεί συνιστά συνέχεια των κεφ. 4 και 5. Οπως είδαμε, ο Field αμφισβητεί την αλήθεια των ισοδυναμιών του Frege. Ενας γενικότερος λόγος είναι η θεμελιώδης θέση που δίνει ο λογικισμός σ’αυτή την ισοδυναμία.

1. Είναι η N= ορισμός;

Ο Wright πιστεύει ότι ο ρόλος της ισοδυναμίας N= είναι η εισαγωγή της ‘ειδικής έννοιας’ του πληθυκού αριθμού. Μία ειδική έννοια παρουσιάζει ένα είδος αντικειμένων του κόσμου. Οι ειδικές έννοιες διακρίνονται από τις υπόλοιπες έννοιες με βάση το ότι η κατανόησή τους απαιτεί την ιδιότητα της ταυτότητας για τα πράγματα που εμπίπτουν σ' αυτές (1983, 2). Εάν λοιπόν κάθε ειδική έννοια χαρακτηρίζεται από ένα κριτήριο ταυτότητας, η ειδική έννοια του πληθυκού αριθμού έχει την N= ως κριτήριο ταυτότητας. Ο δεύτερος λόγος που κάνει ιδιαίτερα σημαντική την ισοδυναμία N= είναι ότι μαζί με τη λογική 2ης τάξης συνιστούν την επαρκή βάση ενός συνεπούς συστήματος από το οποίο προκύπτουν όλα τα αξιώματα Peano (μεταξύ των οποίων και το αξίωμα ότι για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει πάντοτε ο διάδοχός του). Αυτό το συμπέρασμα αποτελεί τη βασική θέση του νεολογικισμού και η απόδειξή του εκτίθεται στο έργο του Wright (1983, 158-69).

Πολύ συζήτηση έχει γίνει σχετικά με το αν η εν λόγω ισοδυναμία είναι αναλυτική αλήθεια. Διότι αν υποτεθεί ότι είναι αναλυτική, τότε και οι βασικοί νόμοι της αριθμητικής που προκύπτουν από αυτήν στη λογική 2ης τάξης, είναι επίσης αναλυτικές αλήθειες. Ομως τα πράγματα έδειξαν ότι αυτό δεν ισχύει απόλυτα, παρά το γεγονός ότι αποτελούσε την αρχική φιλοδοξία των νεολογικιστών.

Κατ’αρχήν, τουλάχιστον με βάση[30] τους ορισμούς του Kant και του Frege για την αναλυτικότητα, δεν μπορεί να υποστηριχθεί ότι η N= συνιστά μια αναλυτική αλήθεια.

[30] Η αναλυτικότητα μιας πρότασης κατά Kant συνίσταται στο ότι η σημασία του κατηγορήματος περιλαμβάνεται στη σημασία του υποκειμένου. Η αναλυτικότητα μιας πρότασης κατά Frege συνίσταται στο ότι είτε είναι η ίδια λογική αλήθεια είτε μπορεί να προκύψει από λογικές αλήθειες με βάση ορισμούς και καθαρά λογικούς νόμους

Σύμφωνα με τον Wright, η N= δεν αποτελεί ούτε λογική αλήθεια είτε ορισμό. Όπως αναφέρει ο ίδιος ο Wright (2001, 214-25) «*Στο Frege's Conception of Numbers as Objects υποστήριξα ότι το 'Θεώρημα Frege' είναι πράγματι στην υπηρεσία ενός μετριοπαθούς πλατωνικού λογικισμού: ότι η N= θα έπρεπε να θεωρηθεί όχι, ως λογική αλήθεια ούτε ως ορισμός με την αυστηρή έννοια αλλά μάλλον ως ο πυρήνας μιας εξήγησης της έννοιας του πληθυκού αριθμού...*». Η N= επίσης χαρακτηρίζεται στο πλαίσιο του νεολογικισμού ως 'υλική ισοδυναμία' [31]. Αυτό σημαίνει ότι η αριστερή και η δεξιά πρότασή της έχουν την ίδια αληθοτιμή και τις ίδιες καταστάσεις αληθείας.

Όμως, αυτό που έχει μεγάλο ενδιαφέρον είναι το γιατί η N= δεν αποτελεί αυστηρό ορισμό. Το εξηγεί εκτενώς Wright (1983, 135-136): υπάρχει μια σοβαρή δυσκολία σε ότι αφορά τη θεώρηση της ισοδυναμίας N= ως ορισμού με την αυστηρή έννοια. Η δυσκολία αναφέρεται σε ένα χαρακτηριστικό της το οποίο ούτε ο Frege είχε προσέξει. Οπως προαναφέραμε, ο αριθμητικός τελεστής αναφέρεται σε έννοιες και όχι σε αντικείμενα, σε αντίθεση με τον τελεστή διεύθυνσης. Η ιδιαιτερότητα της N = έγκειται στο ότι είναι δυνατόν ο τελεστής 'ο αριθμός της (έννοιας) ...' να εφαρμόζεται σε μια έννοια F η οποία όμως, και πάλι περιλαμβάνει τον τελεστή 'ο αριθμός της (έννοιας) ...'. Πραγματικά, υπάρχει διαφορά ανάμεσα στην εφαρμογή του αριθμητικού τελεστή σε έννοιες όπως πχ. 'μήλο πάνω στο τραπέζι' και στην εφαρμογή του αριθμητικού τελεστή σε έννοιες του τύπου 'πρώτος αριθμός μεταξύ 8 και 47'. Στην πρώτη περίπτωση προκύπτει το αντικείμενο 'ο αριθμός των μήλων πάνω στο τραπέζι' ενώ στη δεύτερη περίπτωση προκύπτει το αντικείμενο 'ο αριθμός των πρώτων αριθμών μεταξύ 8 και 47'. Με αυτό το παράδειγμα, γίνεται φανερό ότι στη δεύτερη περίπτωση έχουμε να κάνουμε με 'αριθμούς αριθμών'. Η ιδιαιτερότητα αυτή δεν εμφανίζεται στην περίπτωση των διευθύνσεων διότι εκεί δεν μπορούμε να έχουμε παρά διευθύνσεις ευθειών (και ποτέ διευθύνσεις διευθύνσεων).

Κατά συνέπεια, στην αριστερή πλευρά της N =, ο αριθμητικός τελεστής είναι δυνατό να εφαρμόζεται σε έννοιες όπου και πάλι εμφανίζεται ο ίδιος τελεστής. Σύμφωνα με το παράδειγμα που χρησιμοποιεί ο Wright (1983, 136), έστω η πρόταση "η γη έχει έναν δορυφόρο".

Εάν F είναι η έννοια 'δορυφόρος της γης' τότε :

[31] Δύο προτάσεις είναι υλικά ισοδύναμες, όταν έχουν την ίδια τιμή αλήθειας

$Nx : Fx = 1$ (ο αριθμός των δορυφόρων της γης είναι 1)

Εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του αριθμού 1 ($1 = Nx : x=0$), τότε :

$Nx : Fx = Nx : x=0$

Εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του αριθμού 0 ($0 = Nx : x \neq x$), τότε :

$Nx : Fx = Nx : (x = Ny:(y \neq y))$

Τότε όμως, με βάση την N=, πρέπει να υπάρχει σχέση αντιστοιχίας 1-1 μεταξύ των εννοιών F και $[x = Ny:(y \neq y)]$ δηλαδή:

Fx 1-1 $[x = Ny:(y \neq y)]$

Ο Wright απέδειξε ότι σε κάθε προσπάθεια περαιτέρω ανάλυσης της προηγούμενης πρότασης εξακολουθεί να εμφανίζεται με προβληματικό τρόπο ο τελεστής ‘ο αριθμός της (έννοιας)...’. Γενικότερα, οι προβληματικές εμφανίσεις του αριθμητικού τελεστή είναι τέτοιες ώστε ο συγκεκριμένος τελεστής να εφαρμόζεται σε μια έννοια G, στην περιγραφή της οποίας και πάλι ο ίδιος τελεστής εμφανίζεται, χωρίς δυνατότητα εξάλειψής του. Το ότι η N= δεν επαρκεί για την μετάφραση ενός τέτοιου πλαισίου σε ένα πλαίσιο όπου ο αριθμητικός τελεστής εξαλείφεται, σημαίνει ότι η N= δεν είναι ορισμός (op.cit. 137). Το πρόβλημα ουσιαστικά είναι η αποτυχία της N= να παρέχει δυνατότητα μετάφρασης κάθε αριθμητικής ταυτότητας σε μία πρόταση της λογικής 2ης τάξης.

Αφού διαπίστωσε ότι η N= δεν είναι ορισμός με την αυστηρή σημασία, ο Wright οδηγήθηκε στο συμπέρασμα ότι δεν μπορούμε να στηρίξουμε σ' αυτήν, το είδος του φιλόδοξου λογικισμού σύμφωνα με τον οποίο κάθε πρόταση της αριθμητικής θα ήταν δυνατό να μεταφραστεί σε μια λογική αλήθεια 2ης τάξης. Επρεπε λοιπόν να εγκαταλείψει την εκδοχή αυτού του λογικισμού. Μία δεύτερη εκδοχή του λογικισμού την οποία δοκίμασε ο Wright να υποστηρίξει (op.cit. 139), ήταν να αναζητήσει μία βασική ομάδα προτάσεων της θεωρίας αριθμών οι οποίες να είναι μεταφράσιμες σε προτάσεις της λογικής 2ης τάξης και ακολούθως, όλα τα υπόλοιπα θεωρήματα της θεωρίας αριθμών να προκύπτουν από αυτή την ομάδα, με μέσα της λογικής. Το ερώτημα τότε θα ήταν πώς μπορεί να εξασφαλισθεί το ότι όλα τα υπόλοιπα θεωρήματα της θεωρίας αριθμών θα προέκυπταν από τη βασική ομάδα με καθαρά λογικά μέσα. Το ζητούμενο ήταν, για κάποιο αξιωματικό σύστημα της θεωρίας αριθμών να διακρίνουμε μια βασική ομάδα προτάσεων, τέτοια ώστε καθεμιά από αυτές να μπορεί να μεταφραστεί σε μια λογική αλήθεια 2ης τάξης αλλά και κάθε άλλο θεώρημα να προκύπτει με μέσα της λογικής. Ο Wright κατέληξε λοιπόν σε μία εκδοχή μετριοπαθούς λογικισμού. Σ'αυτή την εκδοχή, η ισοδυναμία N= δεν θεωρείται ορισμός με την αυστηρή έννοια αλλά αποτελεί μια 'εξήγηση' της έννοιας του αριθμού, όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Wright (op.cit. 153). Το νεολογικιστικό πρόγραμμα βασίζεται στην απόδειξη από τον Wright (1983, 158-169) ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος, το οποίο έχει χαρακτηριστικά ονομαστεί και 'Θεώρημα Frege': *με βάση τη λογική 2ης τάξης με ταυτότητα και την N= ως συμπληρωματικό αξίωμα, μπορούν να παραχθούν τα αξιώματα Peano της θεωρίας αριθμών*. Κατ' αυτή την έννοια, ο νεολογικισμός δεν επιμένει πλέον σε μία τόσο ισχυρή μορφή λογικισμού σύμφωνα με την οποία θα έπρεπε κάθε πρόταση της θεωρίας αριθμών να μεταφράζεται σε μια λογική αλήθεια, αφού κάτι τέτοιο δεν ήταν δυνατό. Όμως στην εκδοχή του νεο-λογικισμού που προτείνει ο Crispin Wright, η αποτυχία της N= να λειτουργήσει ως αυστηρός ή ρητός ορισμός δεν δημιουργεί ιδιαίτερα προβλήματα, αφού η γνώση των προτάσεων της αριθμητικής προκύπτει από τη λογική 2ης τάξης στην οποία έχει προστεθεί ως μη λογικό αξίωμα η $N^{=}$.

2. Οι έμμεσοι ορισμοί

Σε πρόσφατο άρθρο τους (2001, 117-50) οι Hale και Wright υποστηρίζουν ότι η N= είναι ένας έμμεσος (υπόρρητος) ορισμός (implicit definition) της έννοιας του αριθμού. Η διαφορά μεταξύ ενός άμεσου (ή ρητού) ορισμού και ενός έμμεσου (ή υπόρρητου) ορισμού είναι ότι ο πρώτος παρέχει μια *ισοδύναμη σημασιολογικά έκφραση του ίδιου συντακτικού τύπου προς το οριζόμενο*, ενώ ο δεύτερος χαρακτηρίζεται από τον *προσδιορισμό του νοήματος μιας νέας έκφρασης μέσω εκφράσεων που έχουν μια οικεία και καθιερωμένη χρήση στο προϋπάρχον λεξιλόγιο*. Στην περίπτωση του έμμεσου ορισμού, εγκαθίσταται ένα μοντέλο χρήσης της οριζόμενης έκφρασης. Συνήθως τα προηγούμενα συνδέονται με την αξίωση να είναι αληθής μια συγκεκριμένη πρόταση που εμπεριέχει το οριζόμενο. Γι αυτό και το ενδιαφέρον για τους έμμεσους ορισμούς έχει συνδεθεί με τη δυνατότητα a priori γνώσης και ιδιαίτερα με την a priori γνώση των μαθηματικών και της λογικής. Οι Hale και Wright πιστεύουν ότι κάποια είδη a priori γνώσης, όπως αυτά που αφορούν τα μαθηματικά και τη λογική, στηρίζονται σε έμμεσους ορισμούς.

Το πρόβλημα θα μπορούσε να τεθεί ως εξής: ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια πρόταση που εμπεριέχει μία έκφραση της οποίας το νόημα δεν είναι γνωστό. Τότε ζητάμε να προσδιορισθεί το νόημα της έκφρασης με τέτοιο τρόπο ώστε η πρόταση να είναι a priori αληθής. Το να θεωρούμε τη δεδομένη πρόταση ως αληθή σημαίνει ότι επιλέγουμε ένα 'κατάλληλο' νόημα για τη δεδομένη έκφραση. Με αυτό το μοντέλο, ο Horwich (1998, 132) περιγράφει την παραδοσιακή άποψη για τους έμμεσους ορισμούς : έστω '# f' η πρόταση που αποτελεί έναν έμμεσο ορισμό για την έκφραση 'f'. Τότε η έκραση 'f' αποκτά το κατάλληλο νόημα, ώστε η πρόταση ' # f ' να είναι αληθής. Πώς συμβαίνει αυτό; Ο Horwich είναι αρκετά σκεπτικιστής σχετικά με την ύπαρξη μιας τέτοιας δυνατότητας. Ο ίδιος πιστεύει ότι ο προσδιορισμός ενός κατάλληλου νοήματος για τη δεδομένη έκφραση προσκρούει σε συγκεκριμένα εμπόδια, όπως πχ. στο ότι δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι πως υπάρχει πραγματικά το κατάλληλο νόημα ή ότι αυτό είναι μοναδικό. Το κατάλληλο νόημα της 'f' θα μπορούσε πραγματικά να μην υπάρχει, δηλαδή είναι δυνατόν η πρόταση '# f' να είναι ψευδής, οποιοδήποτε και να είναι το νόημα της 'f'. Για παράδειγμα, η πρόταση «Το χιόνι είναι πράσινο και το φεγγάρι είναι f» είναι ψευδής, οποιοδήποτε και να είναι το νόημα της έκφρασης 'f'. Ενα άλλο πρόβλημα σχετικά με το εν λόγω μοντέλο του έμμεσου ορισμού, σχετίζεται με την απαίτηση του a priori αληθούς χαρακτήρα της πρότασης '# f'. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, πρέπει η αλήθεια της πρότασης '# f' να μην χρειάζεται a posteriori επικύρωση. Για παράδειγμα η πρόταση «το φεγγάρι είναι f» χρειάζεται a posteriori επιβεβαίωση. Το συγκεκριμένο πρόβλημα στην τελευταία πρόταση αφορά την ιδιότητα ενός ορισμού που καλείται 'αλαζονεία' ('arrogance'). Ενας έμμεσος ορισμός καλείται αλαζονικός όταν η αλήθεια της πρότασης '# f' δεν μπορεί να επικυρωθεί παρά μόνο με τη βοήθεια μιας a posteriori διαδικασίας.

Για παράδειγμα, η πρόταση «O Jack ο αντεροβγάλτης είναι ο δράστης της δεδομένης σειράς φόνων» ως έμμεσος ορισμός της έκρασης 'Jack ο αντεροβγάλτης' θεωρείται από τους Hale & Wright ότι είναι αλαζονικός, διότι χρειάζεται a posteriori επικύρωση της ύπαρξης του συγκεκριμένου δράστη, ο οποίος μπορεί να υπάρχει, μπορεί όμως και να μην υπάρχει. Οι Wright και Hale προτείνουν στην προκειμένη περίπτωση, αντί της προηγούμενης πρότασης, μια υποθετική πρόταση : «Εάν κάποιος διέπραξε τη δεδομένη σειρά φόνων, τότε αυτός ήταν ο Jack ο αντεροβγάλτης». Η εναλλακτική πρόταση των Wright και Hale αποφεύγει την αλαζονεία, λόγω της μορφής της ως υποθετικής πρότασης (Hale, B., & Wright, C., 2001, 127-9)

Το πρόβλημα των έμμεσων ορισμών φαίνεται πιο καθαρά στην περίπτωση των επιστημονικών θεωριών, όπου οι θεωρητικοί όροι ορίζονται έμμεσα από την ίδια τη θεωρία. Η δυσκολία στην περίπτωση αυτή έγκειται στο γεγονός ότι οι επιστημονικές θεωρίες είναι διαψεύσιμες, κατά συνέπεια, ενώ το νόημα της έκφρασης 'f' καθορίζεται μέσω του ορισμού της πρότασης '#f' ως αληθούς, δεν μπορούμε να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο η '#f' να αποβεί ψευδής. Οι Hale & Wright αναφέρουν ότι για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος θα έπρεπε να σκεφθούμε μήπως το «*όχημα του έμμεσου ορισμού στην περίπτωση της επιστημονικής θεωρίας, δεν είναι η ίδια η επιστημονική θεωρία αλλά μάλλον μια άλλη πρόταση. Η πρόταση αυτή θα σχετίζεται με τέτοιο τρόπο με τη θεωρία, ούτως ώστε ο ορισμός της ως αληθούς, από τη μια πλευρά επαρκεί για να προσδώσει νόημα στον οριζόμενο θεωρητικό όρο αλλά από την άλλη πλευρά παραμένει αλώβητος από την a posteriori αναγνώριση της ύπαρξης μαρτυριών εναντίον της θεωρίας*» (op.cit. 139). Αυτό σημαίνει ότι δεδομένης μιας επιστημονικής θεωρίας Τ και μιας έκφρασης ή ενός επιστημονικού όρου ' f ', δεδομένης επίσης μιας σειράς προτάσεων '#f ' που εκφράζουν τις βασικές αρχές της θεωρίας και οι οποίες εμπεριέχουν τον όρο ' f ' , τότε είναι δυνατό να σχεδιάσουμε έναν (μη αλαζονικό) έμμεσο ορισμό της έκφρασης 'f'. Κάτι τέτοιο είναι εφικτό στο βαθμό που μπορεί να βρεθεί μια πρόταση 'φ(#f)', η οποία να συνδέεται με την επιστημονική θεωρία με τέτοιο τρόπο ώστε, *αφενός να ορίζει το νόημα του όρου 'f' και αφετέρου να μένει ανεπηρέαστη από οποιαδήποτε διάψευση των βασικών αρχών ' #f '.*

Τον ρόλο μιας τέτοιας πρότασης θα μπορούσε να παίξει η '*υποθετική πρόταση Carnap*', σύμφωνα με την οποία ισχύει '$\exists x(\#x) \rightarrow \#f$ ' (x είναι μεταβλητή, f είναι η έκφραση που αντιστοιχεί στην έννοια πχ. 'ηλεκτρόνιο', # είναι το σύμβολο που αντιστοιχεί σε ένα σύνολο νόμων ή αξιωμάτων ή αρχών της θεωρίας). Η αλήθεια αυτής της πρότασης είναι πραγματικά ανεπηρέαστη από το επιστημολογικό status της επιστημονικής θεωρίας. Καθορίζει τον τρόπο χρήσης του όρου ' f ' και ταυτόχρονα δεν διαθέτει εμπειρικό περιεχόμενο και μπορεί να θεωρηθεί a priori αληθής. Ενα παράδειγμα αυτής της πρότασης θα μπορούσε να είναι: «εάν υπάρχουν οντότητες που ικανοποιούν δεδομένους νόμους, τότε τα ηλεκτρόνια τους ικανοποιούν». Σ' αυτήν την περίπτωση, ο όρος 'ηλεκτρόνιο' ορίζεται έμμεσα.

Αλλά, η '*υποθετική πρόταση Carnap*' δεν είναι η μοναδική που θα μπορούσε να παίξει τον ρόλο της '$\varphi(\#f)$'. Μία πρόταση που επίσης θα εξυπηρετούσε τους ίδιους σκοπούς, θα μπορούσε να είναι και η εξής: '$\forall x(x = f \rightarrow \#x)$' (η '*αντι-Carnap υποθετική πρόταση*' η οποία προκύπτει αν αντιστρέψουμε την πρόταση Carnap). Συνεπώς, εάν η πρόταση του παραπάνω παραδείγματος αντιστραφεί, θα πάρουμε την αντεστραμμένη υποθετική πρόταση Carnap: «Για κάθετί που είναι ηλεκτρόνιο έπεται ότι αυτό ικανοποιεί δεδομένους νόμους». Ο υποθετικός χαρακτήρας των συγκεκριμένων προτάσεων τις απαλλάσσει από την ιδιότητα της αλαζονείας αφού τις καθιστά ανεπηρέαστες από τυχόν διάψευση της συνολικής επιστημονικής θεωρίας. Τέτοιου είδους προτάσεις θα μπορούσαν να σταθούν ως έμμεσοι ορισμοί επιστημονικών θεωρητικών όρων.

Οι Hale και Wright (op.cit.131) αναφέρουν ότι ο έμμεσος ορισμός έχει την ικανότητα να εισάγει νοήματα, δηλαδή να εξηγεί έννοιες τις οποίες δεν κατείχαμε προηγουμένως ούτε μπορούσαμε να τις εκφράσουμε με τα ήδη γνωστά γλωσσικά μέσα. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της ανάδειξης ενός συγκεκριμένου μοντέλου χρήσης μιας έκφρασης με τέτοιο τρόπο ώστε η πρόταση που την εμπεριέχει να είναι a priori αληθής. Ενας έμμεσος ορισμός εξηγεί το νόημα του οριζόμενου έτσι ώστε να μπορεί να γίνει κατανοητό από καθέναν ο οποίος δεν το γνώριζε πριν. Ο γνώστης εξοικειώνεται με το μοντέλο χρήσης της έκφρασης, πχ. με το μοντέλο χρήσης της έκφρασης 'ο αριθμός της έννοιας...' μέσω της ισοδυναμίας N=. Γι αυτό και η ανάδειξη ενός μοντέλου χρήσης μιας συγκεκριμένης έκφρασης αποτελεί και το κύριο χαρακτηριστικό ενός έμμεσου ορισμού, σε αντίθεση με τη μεταφρασιμότητα που αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό ενός άμεσου (ρητού) ορισμού.

Ηδη προαναφέρθηκε ότι ένας ικανοποιητικός έμμεσος ορισμός αποφεύγει την αλαζονεία. Ενα δεύτερο χαρακτηριστικό ενός ικανοποιητικού έμμεσου ορισμού είναι η συντηρητικότητα (conservativeness): ο ορισμός δεν θα πρέπει να εισάγει νέες δεσμεύσεις που αφορούν την πριν απ' αυτόν αναγνωρίσιμη οντολογία αντικειμένων, οι οποίες δεν υπήρχαν ήδη στο παλαιό λεξιλόγιο. Τέλος ένας ικανοποιητικός έμμεσος ορισμός πρέπει να χαρακτηρίζεται από συνέπεια. Για παράδειγμα η πρόταση " $\forall F \forall G\, [\{x{:}Fx\}=\{x{:}Gx\} \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)]$" που χρησιμοποίησε ο Frege όταν στράφηκε στον εκτασιακό ορισμό του, θα μπορούσε να θεωρηθεί έμμεσος ορισμός των κλάσεων, όμως χαρακτηρίζεται από ασυνέπεια.

3. Η N= ως έμμεσος ορισμός

Σύμφωνα με τους Hale και Wright, η ισοδυναμία N= αποτελεί έμμεσο ορισμό της έννοιας του φυσικού αριθμού, ακριβέστερα της έννοιας του πεπερασμένου πληθυκού αριθμού. Ο Wright απέδειξε πως η ισοδυναμία N= και η λογική 2ης τάξης συνιστούν ένα σύστημα από το οποίο έπονται τα αξιώματα Peano. Μπορούμε να θεωρήσουμε το σύστημα της N= μαζί με τη λογική 2ης τάξης ως μια θεωρία '#f', αντίστοιχη προς τις επιστημονικές θεωρίες στις οποίες έγινε αναφορά προηγουμένως. Αυτή η θεωρία περιλαμβάνει την έννοια του αριθμού, όπως οι εμπειρικές επιστημονικές θεωρίες που προαναφέρθηκαν, περιλαμβάνουν τον θεωρητικό όρο 'f'. Τότε, για να οριστεί έμμεσα η έννοια του αριθμού, απαιτείται και πάλι μια πρόταση 'φ(#f)' η οποία να συνδέεται με τη θεωρία με τέτοιο τρόπο ώστε, α) να ορίζει έμμεσα την έννοια f και β) να μένει ανεπηρέαστη από τυχόν διαψεύσεις της θεωρίας. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι μια τέτοια πρόταση είναι η *αντεστραμμένη υποθετική πρόταση* Carnap, που περιγράφτηκε προηγουμένως. Σ'αυτή την περίπτωση θα έχει τη μορφή:

N^{**} $\forall F \forall G \forall u \forall v((u = NxFx \land v = NxGx) \rightarrow (u = v \leftrightarrow F \text{ 1-1 } G))$

(δηλαδή, για κάθε F, G, u, v, εάν u είναι ο αριθμός της έννοιας F και v ο αριθμός της έννοιας G τότε : u = v αν και μόνο αν οι F, G βρίσκονται μεταξύ τους σε μια 1-1 αντιστοιχία) (πρλ. την αντεστραμμένη πρόταση Carnap : για κάθε x που είναι f ισχύει ότι το x ικανοποιεί κάποιες δεδομένες αρχές). Οι Hale & Wright συμβολίζουν την προηγούμενη πρόταση N** (2001, 143-4). Η πρόταση N** ως *αντεστραμμένη υποθετική πρόταση Carnap* αποτελεί, σύμφωνα με τα μέχρι τώρα προαναφερθέντα, έναν έμμεσο ορισμό για την έκφραση ‘ο αριθμός της έννοιας...’. Με την πρόταση N** ως έμμεσο ορισμό της έννοιας του αριθμού, δεν θα διαφωνούσε για παράδειγμα ούτε ο Field, διότι η μορφή της εν λόγω πρότασης μοιάζει πολύ με τη δική του.

Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι η υποθετική μορφή των προτάσεων που είναι υποψήφιες για το ρόλο της ζητούμενης πρότασης 'φ(#f)', τις καθιστά ανεπηρέαστες από την τυχόν διάψευση της αντίστοιχης θεωρίας. Η N** είναι βέβαια μια πολύ καλή υποψήφια για το ρόλο του έμμεσου ορισμού της έννοιας του αριθμού, διότι ανήκει στον τύπο της αντεστραμμένης υποθετικής πρότασης Carnap αλλά οι Hale και Wright θέτουν το ερώτημα: μήπως και η N= δεν αποτελεί μια εξίσου ικανοποιητική υποψήφια για το ρόλο του έμμεσου ορισμού της έννοιας του αριθμού;

Οι Hale και Wright δεν αρνούνται στην N** το status ενός ικανοποιητικού έμμεσου ορισμού. Το ερώτημα που θέτουν ουσιαστικά (2001, 144) είναι κατά πόσον υπάρχει συγκεκριμένος λόγος για να προτιμηθεί η N** στο ρόλο της 'φ(#f)' , αντί της ίδιας της N=. Γι αυτό, ελέγχουν το εάν η N= αποτελεί έναν εξίσου ικανοποιητικό έμμεσο ορισμό. Αλλωστε, ο λόγος που επιμένουν στην N=, είναι ότι μέσω αυτής της ισοδυναμίας προκύπτει η ύπαρξη των αριθμών γι αυτό και της αποδίδεται η θεμελιώδης θέση που έχει στο πρόγραμμα του νεολογικισμού. Το ενδιαφέρον ερώτημα λοιπόν είναι αν η ίδια η N= αποτελεί έναν ικανοποιητικό έμμεσο ορισμό της έννοιας του αριθμού.

Ο Boolos (1998) έχει αποδείξει ότι είναι δυνατό να δώσει κανείς μοντέλα της N= και ότι η N= είναι συνεπής σε σχέση με την κλασική ανάλυση. Επίσης ο Burgess (1984) απέδειξε ότι το σύστημα της N= και της λογικής $2^{ης}$ τάξης είναι συνεπές αν και μόνο αν η κλασική ανάλυση είναι συνεπής. Σε ότι αφορά λοιπόν το χαρακτηριστικό της συνέπειας, υπάρχουν ισχυρές εγγυήσεις ότι η N= είναι συνεπής. Επιπλέον, η N= είναι συντηρητική διότι δεν εισάγει νέες συνέπειες και δεσμεύσεις για την ήδη προυπάρχουσα οντολογία οι οποίες δεν υπήρχαν ήδη στο προηγούμενο λεξιλόγιο.

Επιπλέον όμως, για να συνιστά η N= καλό έμμεσο ορισμό, οφείλει να αποφεύγει την αλαζονεία. Εχει γίνει ήδη αναφορά στην προηγούμενη ενότητα σε παραδείγματα αλαζονικών έμμεσων ορισμών όπως πχ. 'το φεγγάρι είναι f ', μία ολόκληρη θεωρία που καθορίζει μια σειρά νόμους για το ηλεκτρόνιο, η πρόταση 'Ο Jack ο αντεροβγάλτης είναι ο δράστης της δεδομένης σειράς φόνων' κλπ. Στις αλαζονικές προτάσεις απαιτείται a posteriori επικύρωση της ύπαρξης μιας συγκεκριμένης οντότητας, όπως για παράδειγμα συμβαίνει στην περίπτωση 'το φεγγάρι είναι f'. Η οντότητα φεγγάρι μπορεί να υπάρχει αλλά αν δεν υπάρχει τότε διαψεύδεται η αντίστοιχη θεωρία. Γι αυτό το λόγο, οι Hale & Wright πιστεύουν ότι η υποθετική μορφή ενός έμμεσου ορισμού τον απαλλάσσει από την αλαζονεία. Σε ότι αφορά την N= , πιστεύουν (op.cit. 145-6) ότι αυτή δεν είναι αλαζονική διότι αποτελεί μια υποθετική πρόταση διπλής κατεύθυνσης της οποίας η αλήθεια δεν χρειάζεται a posteriori επικύρωση. Ο υποθετικός της χαρακτήρας την αφήνει ανεπηρέαστη άλλωστε από τυχόν διάψευση. Μία διάψευση της N= δεν θα ήταν δυνατή, δεδομένου ότι κάτι τέτοιο θα συνέβαινε μόνο εάν μπορούσαν να προκύψουν απ'αυτήν εμπειρικές συνέπειες που στη συνέχεια επρόκειτο να διαψευσθούν. Από την άλλη πλευρά, μία διάψευση θα συνέβαινε εάν εμφανιζόταν η περίπτωση να υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των εννοιών F και G και ταυτόχρονα ο αριθμός των Fx να μην συμπίπτει με τον αριθμό των Gx. Αλλά, για να διαπιστωθούν τέτοιου είδους διαψεύσεις, θα έπρεπε να είναι διαθέσιμο κάποιο ανεξάρτητο κριτήριο για την ταυτότητα ή μη, του αριθμού της F με τον αριθμό της G, το οποίο δεν διαθέτουμε.

Πράγματι, η ισοδυναμία N= είναι μιας διπλής κατεύθυνσης υποθετική πρόταση που καθορίζει ποιες αληθείς προτάσεις (στις οποίες δεν εμπεριέχεται η οριζόμενη έννοια) αποτελούν αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι αληθείς κάποιες προτάσεις που εμπεριέχουν την οριζόμενη έννοια. Η σύνθεσή της είναι τέτοια ώστε να περιγράφει τις συνθήκες αλήθειας κάποιων αριθμητικών ταυτοτήτων με βάση τις αντίστοιχες συνθήκες αλήθειας κάποιων άλλων προτάσεων που εκφράζουν 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ εννοιών. Επιπλέον, η N= δεν είναι αλαζονική διότι δεν εισάγει κατά δογματικό ή αξιωματικό τρόπο την ύπαρξη μιας οντολογίας αριθμών, αντίθετα, η ύπαρξη των αριθμών είναι κάτι το οποίο *προκύπτει* μέσω της ισοδυναμίας, κάθε φορά που στη δεξιά πλευρά της, τοποθετείται μια διαπιστωμένα αληθής πρόταση (βλ. τέλος προηγούμενου κεφαλαίου). Το ότι η ύπαρξη των επί μέρους αριθμών αποτελεί ένα συμπέρασμα που προκύπτει με κατάλληλους συλλογισμούς τονίζεται με έμφαση από τον Wright σε κάθε ευκαιρία: "*δεν έχει γίνει καμιά υπόθεση υπαρκτικού χαρακτήρα ... η ύπαρξη των Nx:Fx για μια δεδομένη έννοια F, είναι ένα θέμα όχι κάποιας υπόθεσης αλλά κάτι που προκύπτει από την αλήθεια κατάλληλων προτάσεων στην ανώτερης τάξης λογική*" (1983, 148). Ο χαρακτηρισμός της N= ως αλαζονικής θα ήταν ορθός μόνον εάν η τιμή αλήθειας της αριστερής πλευράς της ισοδυναμίας ήταν αποτέλεσμα ενός απευθείας ορισμού, ενός ισχυρισμού, αλλά κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει. Η αλήθεια της αριστερής πλευράς εξαρτάται από την αλήθεια της δεξιάς πλευράς (1983, 146). Και η αλήθεια της δεξιάς πλευράς, όταν ισχύει, είναι ένα επιβεβαιώσιμο γεγονός στη λογική 2ης τάξης.

Το εκπληκτικό στη φιλοσοφία του νεολογικισμού είναι ότι ένα σύστημα αξιωμάτων πχ. τα αξιώματα Peano, θεωρείται έμμεσος ορισμός αλλά αλαζονικός έμμεσος ορισμός. Κατ'αρχήν ένα σύστημα αξιωμάτων μιας θεωρίας μπορεί να θεωρηθεί ως έμμεσος ορισμός κάποιου ή κάποιων όρων, πχ. το σύστημα αξιωμάτων της ευκλείδειας γεωμετρίας αποτελεί έναν έμμεσο ορισμό του σημείου, της ευθείας, του επιπέδου ενώ τα αξιώματα Peano αποτελούν έναν έμμεσο ορισμό του φυσικού αριθμού. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να δικαιολογήσουμε το επιστημολογικό status των αξιωμάτων των θεωριών μας χωρίς να χρειαστεί να επικαλεστούμε κάποιο είδος μαθηματικής εποπτείας. Εάν λοιπόν ένα σύστημα αξιωμάτων, στην προκειμένη περίπτωση, το σύστημα PA είναι ένας έμμεσος ορισμός του φυσικού αριθμού τότε τι θα μας εμπόδιζε να επιλέγαμε εξ' αρχής τα αξιώματα Peano αντί της N= ; Κατ'αρχήν η N= έχει μια επιστημολογική προτεραιότητα έναντι του συστήματος PA αφού αποτελεί στη λογική 2ης τάξης τη βάση από την οποία τα αξιώματα PA μπορούν να παραχθούν. Αλλά όπως επισημαίνουν οι Hale & Wright (2001, 147) σχετικά με αυτό το ερώτημα, τα αξιώματα ισχυρίζονται άμεσα ότι ένα μεγάλο πλήθος (άπειρο) οντοτήτων υπάρχει και γι αυτό το λόγο, ως έμμεσος ορισμός, χαρακτηρίζονται από αλαζονεία. Ο Wright πχ. θεωρεί παρόμοια αλαζονικό τον έμμεσο ορισμό του ' $\in$' από ένα σύνολο αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων. Ενα σύστημα αξιωμάτων ως έμμεσος ορισμός είναι αλαζονικός διότι ισχυρίζεται την ύπαρξη μιας οντολογίας άπειρων αντικειμένων (πχ. συνόλων). Η αλαζονία των αξιωμάτων φαίνεται και από το ότι μπορεί κάποιος να ζητήσει την a posteriori επιβεβαίωση της ύπαρξης των σχετικών οντοτήτων που εισάγονται.

Οι Hale & Wright (op.cit., 129, 145-6) τονίζουν με ιδιαίτερη έμφαση ότι το χαρακτηριστικό της αλαζονείας δεν αγγίζει την ισοδυναμία Ν= λόγω του διπλού υποθετικού χαρακτήρα της. *Η Ν= δεν ισχυρίζεται ούτε προυποθέτει την ύπαρξη των αριθμών αλλά ορίζει αναγκαίες και ικανές συνθήκες γι αυτή την ύπαρξη.* Το κρίσιμο σημείο σε έναν υποθετικό έμμεσο ορισμό είναι ότι ο ορισμός είναι υποθετικός *με τέτοιο τρόπο ώστε να μην εμπεριέχει καμία δέσμευση σε επιτυχή απόδοση αναφοράς της οριζόμενης έκφρασης.* Γι αυτό μια *ελκυστική γενική πρόταση θα ήταν η εξής: αυτό που ένας οποιοσδήποτε ορισμός οφείλει να κάνει είναι να θέτει αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ταυτότητα του οριζόμενου, δηλαδή να καθορίζει την αναγκαία και ικανή συνθήκη για να αναφέρεται η οριζόμενη έκφραση* (op.cit., 129). Ο καθορισμός τέτοιου είδους συνθηκών θα μπορούσε να αποτελεί το γενικό πρότυπο. *Κάποιος θα μπορούσε να καθορίσει τι σημαίνει ένα αντικείμενο να ικανοποιεί ένα δεδομένο κατηγόρημα, ή μια έννοια να ικανοποιεί μια δεδομένη ποσοδεικτική έκφραση ή ένα αντικείμενο να ικανοποιεί μια οριστική περιγραφή… Ολοι αυτοί οι ορισμοί θα μπορούσαν να δοθούν με τη μορφή υποθετικών σχημάτων. Συνεπώς, επειδή ένας μη αλαζονικός ορισμός της συνθήκης ταυτότητας ενός ενικού όρου θα έχει φυσικά ένα υποθετικό σχήμα, η πρόταση εργασίας μας θα είναι ότι προκειμένου να αποφευχθεί η αλαζονεία στους έμμεσους ορισμούς και ανεξάρτητα από τον συντακτικό τύπο της οριζόμενης έκφρασης, θα αρκεί γενικά να περιορίσουμε την προσοχή μας σε προτάσεις που είναι με κατάλληλο τρόπο υποθετικές* (op.cit., 130) .

Συμπερασματικά, η Ν= συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά της συνέπειας, της συντηρητικότητας και της μη-αλαζονικότητας, αποτελεί λοιπόν έναν ικανοποιητικό έμμεσο ορισμό της έννοιας του φυσικού αριθμού. Ο MacBride (2003, 120-121), δίνει έμφαση στην έννοια της *αφαίρεσης* που χαρακτηρίζει τέτοιου είδους ισοδυναμίες. Κάποιοι έμμεσοι ορισμοι έχουν τον τύπο αφαιρετικών αρχών. Η Ν= χαρακτηρίζεται ως αφαιρετική αρχή που λειτουργεί ως εξής: ας υποθέσουμε ότι μιλάμε μια γλώσσα και χρησιμοποιούμε κάποιες εκφράσεις $α_1$, $α_2$, ..., $α_k$ καθώς και μια σχέση ισοδυναμίας $\approx$ μεταξύ δύο τέτοιων εκφράσεων, τότε μπορούμε, μέσω μιας αφαιρετικής μεθόδου, να επεκτείνουμε τις εκφραστικές δυνατότητες αυτής της γλώσσας εισάγοντας ένα νέο τελεστή Σ ως εξής:

$(\forall \alpha_{\kappa})(\forall \alpha_{\lambda})\ [(\Sigma(\alpha_{\kappa}) = \Sigma(\alpha_{\lambda})) \leftrightarrow (\alpha_{\kappa} \approx \alpha_{\lambda})]$

Η πρόταση «$\alpha_{\kappa} \approx \alpha_{\lambda}$» είναι εκφρασμένη στην οικεία γλώσσα ενώ η πρόταση «$\Sigma(\alpha_{\kappa}) = \Sigma(\alpha_{\lambda})$» εκφράζεται στην επέκταση της γλώσσας που δημιουργήσαμε. Ετσι σ' αυτή την επέκταση, ο τελεστής Σ ορίζεται σιωπηρά, έμμεσα (και όχι ρητά), μέσω εκφράσεων που έχουν μια οικεία και καθιερωμένη, στη αρχική γλώσσα, χρήση. Η παραπάνω ισοδυναμία είναι ένας έμμεσος ή υπόρρητος ορισμός του τελεστή Σ. Χάρη σ'αυτήν, καθορίζονται οι συνθήκες αλήθειας των πλαισίων ταυτότητας «$\Sigma(\alpha_{\kappa}) = \Sigma(\alpha_{\lambda})$» ως ταυτόσημες με τις συνθήκες αλήθειας προτάσεων του τύπου «$\alpha_{\kappa} \approx \alpha_{\lambda}$». Με αυτόν τον τρόπο, εισάγουμε ενικούς όρους εξηγώντας τη χρήση των προτάσεων ταυτότητας που τους περιέχουν, αφού ξεκινήσουμε από την καθιερωμένη και θεμελιωμένη χρήση οικείων σε μας προτάσεων. Στην περίπτωση της N= , ο τελεστής ο οποίος εισάγεται είναι ακριβώς ο αριθμητικός τελεστής N: '*ο αριθμός της έννοιας ...*'. Επεκτείνουμε ένα λεξιλόγιο το οποίο περιλαμβάνει εκφράσεις για έννοιες, σε μια γλώσσα η οποία περιλαμβάνει αριθμητικούς όρους. Η ισοδυναμία ορίζει έμμεσα τον αριθμητικό τελεστή N.

Στον τρόπο που λειτουργεί η N= ως αφαιρετική αρχή, έχει σημασία το ότι η αριστερή πρόταση (η αριθμητική ταυτότητα) προκύπτει όταν το περιεχόμενο της δεξιάς πρότασης (1-1 αντιστοιχίας) 'ανακατανεμηθεί' με έναν διαφορετικό τρόπο. Αυτή είναι μια αρχή που επικαλέστηκε ο Frege όταν εισήγαγε την ισοδυναμία D= για να εξηγήσει την έννοια της διεύθυνσης στην §64 των Grundlagen. Εκεί, το περιεχόμενο της παραλληλίας δύο ευθειών φέρεται να ανακατανέμεται με άλλο τρόπο στην αριστερή πλευρά της D= ούτως ώστε να προκύπτει η ταυτότητα διευθύνσεων. Η διαφορετική παρουσίαση του περιεχομένου μιας πρότασης μέσα σε μια άλλη, είναι μια 'ανακατανομή' του 'περιεχομένου' (content) αυτής της πρότασης. Το περιεχόμενο μπορεί να νοηθεί ως οι καταστάσεις πραγμάτων (states of affairs) που περιγράφονται από την πρόταση (2001, 277). Το ότι οι δύο προτάσεις περιγράφουν τις ίδιες καταστάσεις πραγμάτων σημαίνει επίσης ότι η ίδια οντολογία που απαιτείται από τη μια πρόταση απαιτείται και από την άλλη, παρά το γεγονός ότι κάτι τέτοιο δεν είναι άμεσα προφανές.

4. *Ειδικά προβλήματα για την N=*

Μία αντίρρηση που έχει εκφρασθεί σχετικά με την N= συνδέεται με το τι είδους έννοιες μπορεί να περιλαμβάνει το πεδίο ποσόδειξης της ισοδυναμίας αυτής. Για παράδειγμα, ο αριθμός 0 στο νεολογικισμό είναι ο αριθμός Nx: x ≠ x δηλαδή ο αριθμός της έννοιας 'x ≠ x' (μη ταυτόσημο με το εαυτό του). Ο Boolos έθεσε το ερώτημα ποιος είναι ο αριθμός της έννοιας 'x = x' (ταυτόσημο με τον εαυτό του) που αποτελεί το συμπλήρωμα της έννοιας 'x ≠ x'. Όμως αυτός ο αριθμός θα ήταν ο αριθμός όλων των πραγμάτων (anti-zero), κάτι το οποίο για τον Boolos (1997, 313-4) δεν συμβιβάζεται με την κατά ZF θεωρία συνόλων. Είναι γνωστό ότι η τελευταία δεν κάνει δεκτό το σύνολο όλων των συνόλων.

Εχουν δοθεί δύο απαντήσεις από τον Wright σ'αυτή την αντίρρηση (2001, 313-4). Σύμφωνα με την πρώτη απάντηση, δεν έχει τεθεί καμιά αξίωση από τους νεολογικιστές ότι οι αριθμοί είναι κατ'ανάγκην σύνολα και άρα ότι ο αριθμός στον οποίο αναφέρεται ο Boolos οφείλει να είναι σύνολο. Ο Boolos συνδέει τους αριθμούς με τη θεωρία συνόλων χωρίς κάτι τέτοιο να είναι απαραίτητο κατ'ανάγκην. Η δεύτερη απάντηση του Wright αναγνωρίζει το γεγονός ότι είναι απαραίτητο να περιορισθούν οι έννοιες εκείνες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο πεδίο ποσόδειξης της N=. Αυτό σημαίνει ότι δεν ισχύει ότι για κάθε έννοια F υπάρχει ο αριθμός Nx:Fx. Ο περιορισμός που εισηγήθηκε αρχικά ο Wright συνίσταται στο να ληφθούν υπόψη μόνον οι *ειδικές έννοιες* (sortal concepts). Μία ειδική έννοια προσδιορίζει ένα είδος αντικειμένων, πχ. ειδικές έννοιες είναι οι εξής: 'άνθρωπος', 'αιλουροειδές', 'δέντρο', 'πρόσωπο', 'αριθμός', 'βιβλίο'. Οι ειδικές έννοιες συνήθως συνοδεύονται από κριτήρια ταυτότητας και εφαρμογής. Δηλαδή υπάρχουν τρόποι να διαπιστώσει κάποιος εάν πχ. το δέντρο a ταυτίζεται με το δέντρο b καθώς επίσης και εάν μία συγκεκριμένη οντότητα c εμπίπτει στην έννοια του δέντρου. Αντίθετα, άλλες έννοιες όπως πχ. 'ριγέ', 'καφέ', 'ταυτόσημο' δεν είναι ειδικές έννοιες. Γι αυτό, ενώ μπορεί κάποιος να αναφερθεί στις έννοιες 'βιβλίο στη βιβλιοθήκη', 'δέντρο στην αυλή' κλπ και να θέσει το ερώτημα πόσα F υπάρχουν, δεν μπορεί να κάνει το ίδιο με τις μη ειδικές έννοιες. Η έννοια του ταυτόσημου στο παράδειγμα του Boolos δεν αποτελεί ειδική έννοια και γι αυτό πρέπει να αποκλεισθεί από το πεδίο που διατρέχει η μεταβλητή F.

Όταν οι μεταβλητές 2ης τάξης της N= διατρέχουν πεπερασμένες ειδικές έννοιες, τότε οι αριθμοί που λαμβάνουμε είναι οι γνωστοί μας πεπερασμένοι πληθυκοί αριθμοί.

Η αντίρρηση του Boolos ωστόσο έχει γενικευθεί με ερωτήματα για το αν υπάρχει ο αριθμός όλων των πληθυκών αριθμών, ο αριθμός όλων των διατακτικών αριθμών κλπ. Οι έννοιες ‘πληθυκός αριθμός’, ‘διατακτικός αριθμός’ κλπ είναι ειδικές έννοιες (αλλά όχι πεπερασμένες), συνεπώς με βάση την προηγούμενη επιχειρηματολογία του Wright δεν θα έπρεπε να αποκλεισθούν από το πεδίο των μεταβλητών 2ης τάξης της ισοδυναμίας N=. Τέτοιου είδους έννοιες έχουν χαρακτηρισθεί ως ‘απροσδιόριστα επεκτάσιμες’[32] οι οποίες αφορούν σε ολότητες που χαρακτηρίζονται με τον ίδιο τρόπο. Απροσδιόριστα επεκτάσιμη είναι μια ολότητα όταν κάθε προσπάθεια να θεωρηθεί αυτή ως μια καθορισμένη συλλογή αντικειμένων, προσκρούει στο ότι υπάρχει ένα άλλο αντικείμενο που διαισθητικά θα έπρεπε να ανήκει στην ολότητα αλλά δεν μπορεί να ανήκει σ’αυτήν, χωρίς το κόστος μιας αντίφασης. Οι έννοιες ‘κλάση’, ‘διατακτικός’ αποτελούν συνήθη παραδείγματα. Οι προσπάθειες των υποστηρικτών του νεολογικισμού συντείνουν στον περιορισμό της N=, έτσι ώστε να αποκλείονται από το πεδίο ποσόδειξης και οι απροσδιόριστα επεκτάσιμες έννοιες, ενώ το θέμα παραμένει ανοικτό σχετικά με τους περιορισμούς που πρέπει να επιβληθούν στην N=. Αυτό που έχει σημασία ωστόσο είναι ότι δεν ισχύει πως για κάθε έννοια F υπάρχει ένας αριθμός[33].

Ένα συναφές θέμα που συνδέεται επίσης με το status της N= είναι η μη κατηγορηματικότητα που χαρακτηρίζει την ισοδυναμία. Ο Dummett (1991, 234-6) θεωρεί ότι αυτό αποτελεί ένα μειονέκτημα δεδομένου ότι απουσιάζει ένας εκ των προτέρων χαρακτηρισμός του πεδίου ποσόδειξης της N=. Το πρόβλημα είναι ότι ενώ η ισοδυναμία είναι αυτή που εισάγει και εξηγεί (για πρώτη φορά) σε κάθε ανυποψίαστο περί τους αριθμούς, την έννοια του αριθμού, ωστόσο οι ίδιοι οι αριθμοί μπορούν να λάβουν μέρος στο πεδίο ποσόδειξης της ισοδυναμίας, αφού δεν τίθεται κάποιο εμπόδιο.

---

[32] ‘Indefinitely extensible’ πρλ. Dummett, M. (1991)

Είναι δηλαδή δυνατό να έχουμε ως έννοιες F, G τις έννοιες 'περιττός αριθμός μεταξύ 5 και 17' , 'πρώτος αριθμός μεταξύ 1 και 12'. Η κριτική του Dummett συνίσταται στο ότι η N= κατηγορείται για κυκλικότητα. Επειδή η ισοδυναμία διατείνεται ότι καθορίζει αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την αλήθεια μιας αριθμητικής ταυτότητας (αριστερή πρόταση), δεν θα έπρεπε να επιτρέπεται παρουσία του αριθμητικού τελεστή N στη δεξιά πρόταση. Συμβαίνει όμως η αλήθεια της ταυτότητας μεταξύ δύο αριθμών να εξαρτάται από μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ δύο κατηγορημάτων τα οποία εμπεριέχουν ήδη φυσικούς αριθμούς, όπως στην περίπτωση της παραγωγής του αριθμού $1=Ny:[y=Nx:x\neq x]$. Κάτι τέτοιο όχι μόνο συμβαίνει αλλά είναι και απαραίτητο για την παραγωγή των φυσικών αριθμών μέσω της N=, όπως στην περίπτωση της παραγωγής του 1 που είναι δυνατή μόνο όταν στη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας N= τοποθετηθεί η πρόταση «x=0 1-1 x=0». Αλλά στη δεξιά πλευρά χρησιμοποιούμε κατηγορήματα που εμπεριέχουν ήδη αριθμούς όπως πχ. το κατηγόρημα 'x=0'. Το πρόβλημα που θέτει ο Dummett είναι κατά πόσον σε μια ανώτερης τάξεως αφαιρετική αρχή όπως η N=, επιτρέπεται στη δεξιά της πλευρά να περιλαμβάνονται έννοιες στις οποίες εμπίπτουν τα ίδια αντικείμενα (πχ. αριθμοί) που εισάγονται μέσω της αριστερή της πλευράς. Όπως ο ίδιος αναφέρει, ο Frege είχε παραβλέψει την κυκλικότητα αφού προσπαθούσε ταυτόχρονα να καθορίσει αφενός τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες αληθείας των προτάσεων (της αριστερής πλευράς) και αφετέρου το πεδίο που διατρέχουν οι μεταβλητές (1991, 232-33).

Η απάντηση των Hale & Wright (2001, 247-53) συνίσταται στο ότι πρόκειται για «αβλαβή» μη κατηγορηματικότητα της ισοδυναμίας N=. Το πρόβλημα μπορεί να διευθετηθεί μέσω της ιεράρχησης των κατηγορημάτων που χρησιμοποιούνται στη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας. Η ιεράρχηση ξεκινάει από ένα επίπεδο όπου διαπιστώνεται η 1-1 αντιστοιχία μεταξύ εννοιών στα κατηγορήματα των οποίων δεν παρεμβάλλεται ο αριθμητικός τελεστής πχ. 'μήλο στο τραπέζι', 'δορυφόρος του Δία' ή επίσης '$x\neq x$' και συνεπώς η κατανόηση της δεξιάς πρότασης δεν προυποθέτει γνώση περί αριθμών. Επειτα ακολουθούν τα επόμενα επίπεδα με διαδοχικούς βαθμούς συνθετότητας του αριθμητικού τελεστή. Η εφαρμογή του αριθμητικού τελεστή μπορεί να γίνει μόνον σε

---

[33] Αυτό σημαίνει ότι στο νεολογικισμό δεν γίνεται αποδεκτή η καθολική αρχή αρίθμησης, σύμφωνα με την οποία, για κάθε έννοια F υπάρχει ο αριθμός Nx:Fx. O Wright άλλωστε χαρακτηρίζει τη συγκεκριμένη αρχή ως αλαζονική διότι ισχυρίζεται άμεσα την ύπαρξη άπειρων αντικειμένων

κατηγορήματα που είναι ήδη κατανοητά από προηγούμενα επίπεδα της ιεραρχίας. Πχ. ξεκινάμε με το κατηγόρημα '$x \neq x$' στο οποίο δεν παρεμβάλλεται κανένας αριθμητικός τελεστής. Με βάση αυτό το κατηγόρημα, μπορούμε από την αριστερή πρόταση της ισοδυναμίας να λάβουμε τον αριθμό $0 = Nx{:}x \neq x$. Στη συνέχεια, είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε το κατηγόρημα '$y = Nx{:}x \neq x$' δηλ. το κατηγόρημα '$y = 0$'. Με βάση αυτό το κατηγόρημα μπορούμε από την αριστερή πρόταση της ισοδυναμίας να λάβουμε τον αριθμό $1 = Ny{:}[y = 0]$ κ.ο.κ. Η αντιμετώπιση αυτή του προβλήματος της μη κατηγορηματικότητας από τους Hale & Wright (op.cit., 245 κ.ε.) εγγυάται τον σημαντικότατο ρόλο της N= και εκφράζει το πνεύμα του Frege ο οποίος πίστευε στην τεράστια εμβέλεια της θεωρίας των αριθμών. Η θεωρία των αριθμών έχει τέτοια γενικότητα που της επιτρέπει να είναι εφαρμόσιμη ακόμα και στα δικά της αντικείμενα δηλαδή στους πεπερασμένους πληθυκούς αριθμούς: «*Ας προσπαθήσουμε να αρνηθούμε οποιαδήποτε από τις θεμελιώδεις προτάσεις της επιστήμης των αριθμών και τότε προκύπτει ολοκληρωτική σύγχυση. Ακόμα και το να σκεφτούμε δεν φαίνεται πια δυνατό. Η βάση της αριθμητικής βρίσκεται βαθύτερα, από εκείνη οποιασδήποτε εμπειρικής επιστήμης ακόμα και της γεωμετρίας. Οι αλήθειες της αριθμητικής διέπουν οτιδήποτε είναι αριθμήσιμο. Αυτό είναι το ευρύτερο πεδίο απ'όλα· σ'αυτό ανήκει όχι μόνο το ενεργεία, όχι μόνο το εποπτεύσιμο αλλά οτιδήποτε αποτελεί αντικείμενο της σκέψης*» (Grundlagen, §14).

Σε αυτό το κεφάλαιο, έγινε προσπάθεια να διευκρινισθεί το status της ισοδυναμίας N=. Η συγκεκριμένη ισοδυναμία κατατάσσεται στους έμμεσους ορισμούς, συνεπώς η αλήθεια της N= είναι a priori. Επίσης η N= θεωρείται και ως μια αρχή αφαίρεσης. Η N= συνοδεύεται από δύο σημαντικότατα πλεονεκτήματα: α) λόγω των ιδιοτήτων που την χαρακτηρίζουν, δηλαδή: συνέπεια, συντηρητικότητα, μη αλαζονικότητα, μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκει στους ικανοποιητικούς και αποδεκτούς έμμεσους ορισμούς. β) οι Hale & Wright θεωρούν την N= θεμελιώδους σημασίας διότι τους έδωσε τη δυνατότητα να υποστηρίξουν έναν τύπο μετριοπαθούς λογικισμού, δικαιώνοντας ως ένα βαθμό τις προσδοκίες του Frege, αφού στη λογική 2ης τάξης παρέχει ένα συνεπές σύστημα από το οποίο μπορούν να παραχθούν ως θεωρήματα, όλα τα αξιώματα της αριθμητικής. Αυτά τα δύο πλεονεκτήματα είναι που δίνουν στην N= τη θέση που κατέχει, αν και δεν αποκλείεται εντελώς η διατύπωση και άλλων προτάσεων που να αποτελούν ικανοποιητικές εξηγήσεις της έννοιας του αριθμού, με βάση το πρότυπο είτε πχ. της ‘υποθετικής πρότασης Carnap’ ή της ‘αντεστραμμένης υποθετικής πρότασης Carnap’ ή κάποιο άλλο.

Κεφ. 7

Προβλήματα για μια ρεαλιστική ερμηνεία της αναφοράς των μαθηματικών όρων

Στα κεφάλαια που προηγήθηκαν εξετάστηκαν α. η πρώτη προκείμενη του επιχειρήματος των Hale & Wright για την ύπαρξη των φυσικών αριθμών δηλ. ότι οι αριθμητικές εκφράσεις συμπεριφέρονται συντακτικά ως ενικοί όροι και β. η δεύτερη προκείμενη του επιχειρήματος, σχετικά με την αλήθεια των προτάσεων της αριθμητικής. Σε σχέση με τους δύο αυτούς ισχυρισμούς, μελετήθηκαν μια σειρά από προβλήματα. Σε ότι αφορά την πρώτη προκείμενη, παρά το γεγονός ότι το προτεινόμενο σύνολο συντακτικών κριτηρίων δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως πλήρες, διαπιστώσαμε ότι ο χαρακτηρισμός των αριθμητικών όρων ως ενικών, είναι ο πιο ενδεδειγμένος για μια σειρά από λόγους, μεταξύ των οποίων και ο υπερπλεονασμός αριθμητικών ταυτοτήτων στην αριθμητική και στα μαθηματικά γενικότερα. Σε ότι αφορά τη δεύτερη προκείμενη, διαπιστώθηκε ότι η κριτική του Field δεν έχει καταφέρει να πλήξει την μαθηματική αλήθεια.

Από αυτό το κεφάλαιο και μετά, θα ασχοληθούμε με το συμπέρασμα του επιχειρήματος, σύμφωνα με το οποίο υπάρχουν τα αντικείμενα αναφοράς των ενικών αριθμητικών όρων. Θα μας απασχολήσει δηλαδή το εξής πρόβλημα: εάν υποτεθεί ότι οι ισχυρισμοί των νεολογικιστών είναι ορθοί, δηλαδή ότι οι αριθμητικοί όροι Nx:Fx, Nx:Gx συμπεριφέρονται πράγματι ως ενικοί όροι και ότι μπορεί να διαπιστωθεί όντως η αλήθεια της πρότασης «Nx:Fx = Nx:Gx», τότε κατά πόσον προκύπτει η ύπαρξη των αντικειμένων αναφοράς των αριθμητικών όρων; Κατ'αρχήν αυτό το συμπέρασμα προκύπτει από τη σημασιολογία. Ο νεολογικισμός χρησιμοποιεί μια σημασιολογία τέτοια ώστε: εάν διαπιστωθεί με κάποιον τρόπο η αλήθεια της ταυτότητας «$t_1=t_2$» (αν πχ. η ταυτότητα αυτή είναι ισοδύναμη με μια άλλη αληθή πρόταση) και οι t_1, t_2 είναι ενικοί όροι, τότε προκύπτει η ύπαρξη αντικειμένων αναφοράς για τους όρους t_1, t_2. Διότι διαφορετικά, εάν δηλαδή δεν υπήρχαν τα αντικείμενα αναφοράς τότε η ταυτότητα «$t_1=t_2$» θα έπαυε να είναι αληθής. Θα μας απασχολήσει όμως εδώ κυρίως το θέμα της ρεαλιστικής ερμηνείας της αναφοράς των αριθμητικών όρων. Το επιχείρημα των νεολογικιστών για παράδειγμα, λειτουργεί ως εξής: Εάν F είναι η έννοια 'γάντι της Ελένης' και G είναι η έννοια 'χέρι της Ελένης' τότε οι δύο έννοιες βρίσκονται μεταξύ τους σε μια 1-1 αντιστοιχία. Αρα η πρόταση «ο αριθμός των γαντιών της Ελένης είναι ο ίδιος με τον αριθμό των χεριών της Ελένης» είναι αληθής. Μέσα σ'αυτή την αληθή πρόταση, οι εκφράσεις 'ο αριθμός των γαντιών της Ελένης' και 'ο αριθμός των χεριών της Ελένης' λειτουργούν συντακτικά ως ενικοί όροι, κατά συνέπεια (συμπεραίνουν οι Hale & Wright) θα πρέπει να υπάρχει το κοινό αντικείμενο αναφοράς των εκφράσεων αυτών. Όμως το ερώτημα που τίθεται είναι κατά πόσον το αντικείμενο αναφοράς (ο αριθμός 2) είναι ένα πραγματικό αντικείμενο.

Ας δούμε όμως πρώτα τον τρόπο με τον οποίο ο Crispin Wright (2001, 309) οδηγείται σε οντολογικά συμπεράσματα για την ύπαρξη των φυσικών αριθμών με βάση την ισοδυναμία N=.

Οι προτάσεις που μπορεί να τοποθετηθούν στη δεξιά πλευρά της N= εκφράζουν 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ εννοιών. Για παράδειγμα, η πρόταση

(1) « $x \neq x$ 1-1 $x \neq x$ »

που εκφράζει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στην έννοια '$x \neq x$' και στον εαυτό της είναι μια λογική αλήθεια στη λογική 2ης τάξης. Την τοποθετούμε λοιπόν στη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας. Τότε η N= σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η (1) είναι αληθής, μας οδηγεί σε κάποια συμπεράσματα. Αφού η δεξιά πρόταση είναι αληθής τότε και η ισοδύναμη αριστερή πρόταση θα είναι αληθής.

Συνεπώς η ταυτότητα

«$Nx{:}x \neq x = Nx{:}x \neq x$» θα είναι[34] αληθής

Τότε όμως, οι ενικοί όροι που ανήκουν στην εν λόγω αληθή ταυτότητα θα πρέπει να αναφέρονται σε κάποιο αντικείμενο. Επομένως θα υπάρχει το αντικείμενο αναφοράς του όρου 'ο αριθμός της έννοιας $x \neq x$'. (πρόκειται για τον αριθμό 0). Η ύπαρξη του 0 στο νεολογικισμό προκύπτει από την ισοδυναμία N= και από τη λογική αλήθεια 2ης τάξης (1) ως ελάχιστη προυπόθεση (2001, 309).

Δεδομένης τώρα της ύπαρξης του μηδενός, μπορούμε να συνεχίσουμε με ανάλογο τρόπο και να πάρουμε τον αριθμό 1.

---

[34] Παρατηρούμε ότι στην απόδειξη του Wright, η αλήθεια της ταυτότητας δεν βασίζεται στις ιδιότητες της ταυτότητας αλλά προκύπτει μέσω της N= από την αλήθεια της δεξιάς πρότασης. Αυτό θα σχολιαστεί στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου

Σ' αυτήν την περίπτωση, η επίσης αληθής πρόταση

(2) « $x = 0$ 1-1 $x = 0$ »

τοποθετείται στη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας N=

Αφού η δεξιά πρόταση είναι αληθής τότε θα είναι αληθής και η ισοδύναμη αριστερή πρόταση «Nx:x=0 = Nx:x=0». Οι αριθμητικοί όροι που ανήκουν σ'αυτήν την αληθή ταυτότητα είναι ενικοί όροι, συνεπώς θα πρέπει να αναφέρονται. Επομένως υπάρχει το αντικείμενο αναφοράς του όρου 'ο αριθμός της έννοιας x=0' (ο αριθμός 1). Οπως ακριβώς έγινε και με τον αριθμό 0, έτσι και η ύπαρξη του αριθμού 1 έπεται από την N= μαζί με την αληθή πρόταση (2) ως ελάχιστη προϋπόθεση.

Αυτό που πρέπει να τονιστεί είναι ότι η ύπαρξη των συγκεκριμένων αριθμών δεν έπεται από την ισοδυναμία μόνον, αλλά από την ισοδυναμία μαζί με μία ακόμα αληθή πρόταση (την δεξιά πρόταση που τίθεται ως ελάχιστη προϋπόθεση). Αυτό το σημείο δείχνει ακριβώς ότι οι αριθμοί δεν 'ξεπροβάλλουν' κατά μαγικό τρόπο μέσα από τις ισοδυναμίες, όπως ισχυρίζονται οι επικριτές του νεολογικισμού. Οι φυσικοί αριθμοί που προκύπτουν είναι οι εξής:

$0 = Nx: x \neq x$

$1 = Nx: x = 0$

$2 = Nx : [x = 0 \vee x = 1]$

…..

$n+1 = Nx : [x = 0 \vee x = 1 \vee \ldots \vee x = n]$

Η γενικότερη αντίληψη για την αναφορά των ενικών όρων που υιοθετείται από το νεολογικισμό είναι εφαρμογή της αρχής του πλαισίου του Frege. Οι γνωστές ισοδυναμίες χρησιμοποιούνται ως μέσα προσδιορισμού της αναφοράς ενικών όρων. Οι αριθμοί σύμφωνα με τον Frege δεν μας δίνονται μέσω της αισθητηριακής αντίληψης, δεν αποτελούν νοητικές παραστάσεις, δεν μας δίνονται ούτε μέσω της καντιανής εποπτείας. Πώς λοιπόν θα μπορούσαμε να αναφερθούμε στους αριθμούς, όταν η αισθητηριακή αντίληψη αλλά ούτε και η καντιανή εποπτεία δεν μπορούν να μας βοηθήσουν; Ο ίδιος ο Frege θέτει αυτά τα ερωτήματα στα Grundlagen (§ 62) και απαντά ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε τους αριθμούς ως «αυθύπαρκτα» αντικείμενα, με τη βοήθεια προτάσεων ταυτότητας: αρκεί να γνωρίζουμε πότε οι ταυτότητες της μορφής «Nx:Fx = Nx:Gx» είναι αληθείς. Ο ρόλος της ισοδυναμίας N= είναι ακριβώς αυτός, δηλαδή να καθορίσει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να είναι αληθής μία αριθμητική ταυτότητα της μορφής «Nx:Fx = Nx:Gx». Στη συνέχεια παίζει σημαντικό ρόλο η ‘αρχή του πλαισίου’, με βάση την οποία το νόημα ενός οποιουδήποτε όρου δεν μπορεί να προσδιοριστεί παρά μόνον στο πλαίσιο μιας πρότασης. Σύμφωνα με το νεολογικισμό, η αναφορά δεν μπορεί να προσδιοριστεί παρά μόνον στο πλαίσιο μιας πρότασης. Οι προτάσεις της μορφής «Nx:Fx = Nx:Gx» είναι το πλαίσιο προσδιορισμού της αναφοράς των αριθμητικών όρων Nx:Fx, Nx:Gx. Ετσι το πρόβλημα του προσδιορισμού της αναφοράς αριθμητικών και γενικότερα ενικών όρων μετατίθεται στο πρόβλημα καθορισμού των συνθηκών αληθείας προτάσεων-πλαισίων, όπως η προηγούμενη.

Κατά συνέπεια, κάθε φορά που εξασφαλίζουμε την αλήθεια μιας αριθμητικής ταυτότητας και εάν υποτεθεί ότι οι αριθμητικοί όροι συμπεριφέρονται όντως ως ενικοί όροι, τότε αυτοί θα πρέπει πράγματι να αναφέρονται σε αντικείμενα. Για τον μαθηματικό ρεαλισμό, τίθεται ωστόσο, ακριβώς σ’αυτό το σημείο ένα πρόβλημα σχετικά με τη φύση των αντικειμένων αναφοράς. Υπάρχει κάτι το οποίο να εξασφαλίζει ότι τα αντικείμενα αναφοράς τέτοιων όρων υπάρχουν πραγματικά και μάλιστα ανεξάρτητα από τον ανθρώπινο νου και την γλώσσα; (cf. Hale, 1987, 11).

Τα προβλήματα που θα εξετάσουμε σ’ αυτό το κεφάλαιο, αφορούν ακριβώς τη φύση της αναφοράς των αριθμητικών όρων και τους τρόπους ερμηνείας της. Θα ελέγξουμε κατά πόσον προκύπτει από τις δύο προκείμενες το συμπέρασμα ότι υπάρχουν τα αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων ως πραγματικές οντότητες.

1. Η ερμηνεία του Dummett για την αναφορά των αριθμητικών όρων: η ισχνή ή η «εσωτερική της γλώσσας» αναφορά.

Ας υποτεθεί ότι η αριθμητική ταυτότητα «Nx:Fx = Nx:Gx» είναι αληθής δηλαδή ότι υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των εννοιών F, G. Ας υποτεθεί επίσης ότι οι αριθμητικοί όροι Nx:Fx και Nx:Gx λειτουργούν συντακτικά ως ενικοί όροι. Τότε, σύμφωνα με τους Hale & Wright, οι όροι αυτοί θα αναφέρονται σε αντικείμενα εκπληρώνοντας τον σημασιολογικό τους ρόλο.

Θα μας απασχολήσει η άποψη του Dummett που είναι διατεθειμένος να δεχθεί κατ'αρχήν ότι οι αριθμητικοί όροι της πρότασης «Nx:Fx = Nx:Gx» συμπεριφέρονται συντακτικά ως γνήσιοι ενικοί όροι και ότι η πρόταση αυτή είναι αληθής, διαφωνεί ωστόσο με τη ρεαλιστική ερμηνεία των Hale & Wright. Πιστεύει δηλαδή ότι δεν εξασφαλίζεται πραγματική ύπαρξη αντικειμένων στα οποία αναφέρονται οι εν λόγω όροι.

Το πρόβλημα βρίσκεται στη φύση της αναφοράς. Ο Dummett υιοθετεί κατ' αρχήν μια διάκριση μεταξύ δύο διαφορετικών ερμηνειών της αναφοράς: α) η αναφορά είναι δυνατό να σημαίνει τη σχέση μεταξύ μιας έκφρασης και μιας εξωτερικής και ανεξάρτητης από το νου και τη γλώσσα οντότητας του κόσμου και β) είναι δυνατό να σημαίνει απλώς τον σημασιολογικό ρόλο μιας έκφρασης δηλ. τη συμβολή της στον προσδιορισμό της τιμής αλήθειας της όλης πρότασης (χωρίς να προϋποτίθεται σύνδεση της έκφρασης με κάποια πραγματική οντότητα). Στην πρώτη περίπτωση, πρότυπο παράδειγμα αποτελούν τα κύρια ονόματα που αναφέρονται σε οντότητες οι οποίες ανήκουν στον 'εξωτερικό από τη γλώσσα' κόσμο.

Σε ότι αφορά την αναφορά εκείνων των ενικών όρων που είναι αφηρημένοι, πχ. των αριθμητικών όρων, ο Dummett πιστεύει πως, παρά το γεγονός ότι η περίπτωση αυτή παρουσιάζει μια φαινομενική ομοιότητα με το πρότυπο παράδειγμα των κυρίων ονομάτων, η ομοιότητα καταρρέει σε ένα πολύ κρίσιμο σημείο: στο ότι δεν μπορεί να εξασφαλιστεί με κανένα τρόπο ότι υπάρχουν πραγματικές οντότητες, ανεξάρτητες από τη γλώσσα και το νου (mind independent) οι οποίες να αποτελούν την αναφορά των όρων αυτών. Είναι χαρακτηριστικό το ότι τα αντικείμενα αναφοράς των αφηρημένων ενικών όρων αντιμετωπίζονται από τον Dummett ως ένα θέμα εξ ολοκλήρου «εσωτερικό της γλώσσας» (1973, 494-510). Τέτοιου είδους όροι (πχ. αριθμητικοί όροι, όροι διεύθυνσης) διαθέτουν μία «ισχνή» (thin) αναφορά (1991, 191 κ.ε.) ή ακόμα και σημασιολογικά αδρανή (idle) αναφορά και τελικά ακατάλληλη για τους σκοπούς του μαθηματικού πλατωνισμού του Frege.

Φυσικά, το πρόβλημα της ερμηνείας της φύσης της αναφοράς τίθεται και γενικότερα: σε ποια κατηγορία θα μπορούσαμε να εντάξουμε την αναφορά ενός όρου της θεωρητικής φυσικής; πχ. το quark; Είναι μια πραγματική οντότητα; ή μήπως ένα αντικείμενο εσωτερικό της επιστημονικής γλώσσας; Το θέμα αυτό βέβαια αφορά τον επιστημονικό ρεαλισμό.

Για να επιστρέψουμε όμως στους αριθμούς, σε ποια κατηγορία θα μπορούσαμε να κατατάξουμε την αναφορά ενός αριθμητικού όρου 'Nx:Fx', που εισάγεται μέσω της N= ; ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος είναι μια πραγματική οντότητα στην οποία αναφέρεται ο αντίστοιχος αριθμητικός όρος ή ένα εσωτερικό στη γλώσσα αντικείμενο;

Ο Dummett πιστεύει ότι καθώς μεταβαίνουμε από τους εμπειρικούς όρους στους αφηρημένους, η απόδοση αναφοράς απομακρύνεται σταδιακά και σταθερά από το βασικό κλασικό πρότυπο, που είναι η αναφορά των κυρίων ονομάτων. Η αναφορά ενός κυρίου ονόματος συνδέει το όνομα με μια πραγματική οντότητα. Ο Dummett πιστεύει ότι η απομάκρυνση από το πρότυπο της αναφοράς του κυρίου ονόματος συμβαίνει κλιμακωτά, όταν από τους εμπειρικούς όρους προχωράμε ολοένα και σε πιο αφηρημένους. Η κλιμάκωση της απομάκρυνσής μας από το βασικό πρότυπο φτάνει κάποτε σε κάποιο κρίσιμο σημείο στο οποίο έχουμε να κάνουμε με γνήσια αφηρημένους ενικούς όρους πχ. τους αριθμητικούς όρους. Τότε, χάνεται εντελώς η έννοια της «εξωτερικής» (από τη γλώσσα) αναφοράς, χάνεται δηλαδή η έννοια της σύνδεσης του αφηρημένου όρου με μια πραγματική οντότητα του κόσμου : «*Μόνο όταν φτάνουμε στους όρους που αντιπροσωπεύουν καθαρά αφηρημένα αντικείμενα, ωστόσο το νήμα σπάει ολοκληρωτικά και τότε ενδιαφερόμαστε για τη χρήση όρων οι οποίοι δεν έχουν καμιά εξωτερική αναφορά*» (1973, 510).

Η υποτιθέμενη δυσαναλογία ανάμεσα στην αναφορά ενός κυρίου ονόματος (γενικότερα ενός εμπειρικού ή συγκεκριμένου (concrete) όρου) και στην αναφορά ενός αφηρημένου όρου εντοπίζεται κυρίως στα εξής:

Ενα σημείο της δυσαναλογίας σχετίζεται με τη συμβολή της αναφοράς ενός όρου στον προσδιορισμό της τιμής αλήθειας της πρότασης στην οποία ανήκει. Η αναφορά ενός εμπειρικού όρου, πχ. η αναφορά του όρου 'Ελένη', συμβάλλει στον προσδιορισμό της τιμής αλήθειας της πρότασης «Η Ελένη ποτίζει τον κήπο» (1) δεδομένου ότι η πρόταση αυτή είναι όντως αληθής με βάση το γεγονός ότι η Ελένη (και όχι πχ. η Μαρία) είναι πράγματι εκεί, στον κήπο και τον ποτίζει. Διαπιστώνουμε ότι η μη-γλωσσική πραγματικότητα και το ίδιο το αντικείμενο αναφοράς παίζει συγκεκριμένο ρόλο στον προσδιορισμό της τιμής αλήθειας της πρότασης που περιέχει τον αντίστοιχο ενικό όρο. Αντίθετα, στην περίπτωση των αριθμών, η αλήθεια της αριστερής πρότασης «Nx:Fx=Nx:Gx» (1)΄ της ισοδυναμίας N= εξαρτάται από το αν υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των εννοιών F και G. Κατά συνέπεια στην περίπτωση αυτή, θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι η τιμή αλήθειας της πρότασης (1)΄ προσδιορίζεται μέσα από το ίδιο το γλωσσικό πλαίσιο. Εδώ τα πράγματα λειτουργούν μάλιστα αντίστροφα απ'ότι στην περίπτωση (1), διότι έχοντας ήδη συμπεράνει την τιμή αλήθειας της πρότασης «Nx:Fx=Nx:Gx», οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι ενικοί όροι Nx:Fx, Nx:Gx θα πρέπει να αναφέρονται σε κάποια αντικείμενα. Επομένως, δεν ξεκινάμε από την ύπαρξη του συγκεκριμένου αριθμού για να επιβεβαιώσουμε την αλήθεια της εν λόγω πρότασης (όπως στην περίπτωση της Ελένης) αλλά καταλήγουμε στην ύπαρξη των αντικειμένων αναφοράς δηλαδή των αριθμών, έχοντας ήδη επιβεβαιώσει την αλήθεια της πρότασης. Η αναφορά εδώ προσδιορίζεται στο πλαίσιο ήδη αληθών προτάσεων.

Μία δυσαναλογία εμφανίζεται επίσης στο επίπεδο της γνωστικής προσέγγισης του αντικειμένου αναφοράς. Στην περίπτωση πχ. των αριθμητικών όρων, δεν είναι δυνατή μια αιτιακή σχέση μεταξύ όρου και αντικειμένου αναφοράς, δηλ. δεν μπορεί να λειτουργήσει κάποια αιτιακή θεωρία αναφοράς. Ετσι, ενώ ακόμα και για τους αφηρημένους όρους της φυσικής, μπορεί κάποιος να ισχυριστεί ότι κάποια μορφή της αιτιακής θεωρίας αναφοράς εφαρμόζεται, πχ. κάποιος 'βάπτισε' ως ηλεκτρόνιο την οντότητα η οποία προκάλεσε μια σειρά φυσικών αλληλεπιδράσεων και κατά συνέπεια μια αιτιακή αλυσίδα συνδέει την οντότητα αυτή με τους σύγχρονους ερευνητές που χρησιμοποιούν τον αντίστοιχο όρο, δεν είναι ωστόσο δυνατό να υποστηρίξει κανείς κάτι ανάλογο για τους αριθμητικούς όρους. Οι αριθμοί, όπως όλα τα μαθηματικά αντικείμενα, είναι αιτιακώς αδρανείς και ακόμα περισσότερο, όπως έχει επισημάνει ο Field, δεν βρίσκονται σε οποιαδήποτε φυσική αλληλεπίδραση με τους γνώστες τους.

Συναφές με το προηγούμενο είναι το θέμα της αναγνωρισιμότητας του αντικειμένου αναφοράς. Ετσι, στην περίπτωση ενός εμπειρικού όρου, η αναγνώριση του αντικειμένου αναφοράς γίνεται με τον προφανή τρόπο, δηλαδή η αναγνώριση της αναφοράς του κυρίου ονόματος 'Ελένη', είναι μια ικανότητα που έχουμε κάθε φορά που η Ελένη βρίσκεται μπροστά μας. Εχουμε αισθητηριακή πρόσληψη του αντικειμένου, μπορούμε ακόμα να το «δείξουμε». Με άλλα λόγια, πρόκειται για μια άμεση ανταπόκριση που διαθέτουμε μπροστά στην παρουσία του αντικειμένου αναφοράς.

Παρατηρείται λοιπόν μια δυσαναλογία ανάμεσα στην αναφορά των εμπειρικών ή συγκεκριμένων (concrete) ενικών όρων και των αφηρημένων ενικών όρων. Όμως, οι Hale και Wright υποστηρίζουν ότι η θέση του Dummett παρουσιάζει ορισμένα προβλήματα. Κατ'αρχήν του καταλογίζουν ότι αποδίδει διαφορετικούς βαθμούς ύπαρξης στα αντικείμενα αναφοράς των διαφόρων ενικών όρων. Οι αριθμοί ή οι διευθύνσεις, έστω και ως αντικείμενα μιας ισχνής αναφοράς, θα πρέπει να υπάρχουν κατά κάποιο τρόπο. Διότι εάν πχ. ισχυριστούμε ότι τελικά δεν υπάρχουν τα αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων Nx:Fx, Nx:Gx που εμφανίζονται στην αληθή πρόταση «Nx:Fx=Nx:Gx» τότε δημιουργείται πρόβλημα, διότι η εν λόγω πρόταση θα έπαυε να είναι αληθής. Συνεπώς, τα αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων «υπάρχουν». Αραγε διαθέτουν ένα είδος ύπαρξης διαφορετικό από το είδος ύπαρξης που όλοι κατανοούμε; Τα πράγματα δυσκολεύουν περισσότερο όταν ο Dummett αναφέρεται σε ένα είδος ύπαρξης το οποίο μας επιτρέπει, από τη μια πλευρά να ισχυριζόμαστε ότι οι αριθμοί δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα και από την άλλη να συνεχίζουμε κατά τις συνήθειές μας, να επιβεβαιώνουμε τις υπαρκτικές προτάσεις της αριθμητικής, όπως πχ. την πρόταση «υπάρχει ένας τέλειος αριθμός μεταξύ 7 και 30» (1973, 497). Με ποιο τρόπο υπάρχει το αντικείμενο αναφοράς του όρου ‘ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος’ ο οποίος εμφανίζεται στην αληθή πρόταση «ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος είναι ο 9»; Αλλά μια διάκριση μεταξύ διαφορετικών τρόπων ύπαρξης των πραγμάτων δεν φαίνεται να αποτελεί και την καλύτερη φιλοσοφική επιλογή στο συγκεκριμένο σημείο. Ο Dummett βέβαια αναφέρεται σε κλιμάκωση της υποτιθέμενης δυσαναλογίας μεταξύ της αναφοράς αφηρημένων και εμπειρικών ενικών όρων, καθώς προχωράμε από τους εμπειρικούς όρους σε όλο και περισσότερο αφηρημένους και καθώς απομακρυνόμαστε από το κλασσικό πρότυπο αναφοράς των κυρίων ονομάτων. Αραγε, αυτή η κλιμάκωση αντιστοιχεί σε μια ανάλογη κλιμάκωση βαθμών ύπαρξης; ρωτά τον Dummett ο Bob Hale (1987, 156). Μπορούν κάποια είδη αντικειμένων να απολαμβάνουν έναν ανώτερο βαθμό πραγματικότητας από ότι άλλα είδη αντικειμένων;

Ας σημειωθεί ότι η άποψη του Dummett προϋποθέτει κατ'αρχήν, αν μη τι άλλο, έναν σαφή διαχωρισμό μεταξύ εμπειρικών ή συγκεκριμένων (concrete) και αφηρημένων (abstract) όρων. Ο ίδιος βέβαια αναφέρεται επίσης σε λιγότερο ή περισσότερο αφηρημένα αντικείμενα και τέλος σε γνήσια ή καθαρά (pure) αφηρημένα αντικείμενα. Ωστόσο, δεν έχει δώσει έναν σαφή διαχωρισμό μεταξύ συγκεκριμένου και αφηρημένου, πέρα βέβαια από την χωροχρονικότητα η οποία προφανώς αποτελεί ένα χαρακτηριστικό των εμπειρικών αντικειμένων.

Ο Dummett αποδέχεται ωστόσο μια διάκριση μεταξύ αντικειμένων τα οποία μπορεί κανείς να «καταδείξει» (possible objects of ostension) και αντικειμένων για τα οποία δεν είναι δυνατό κάτι τέτοιο. Οι εμπειρικοί ενικοί όροι αναφέρονται σε φυσικά αντικείμενα τα οποία μπορούν να καταδειχθούν. Μπορεί πχ. κάποιος να δείξει τον Ολυμπο και να χρησιμοποιήσει την πρόταση «αυτός είναι ο Ολυμπος» ή να δείξει το όπλο που αναζητούν οι αρχές για την εξιχνίαση κάποιου φόνου χρησιμοποιώντας την πρόταση «αυτό είναι το περίστροφο του εγκλήματος». Η μέθοδος της κατάδειξης δεν εφαρμόζεται στην περίπτωση της αναφοράς ενός αφηρημένου ενικού όρου. Τα αντικείμενα αναφοράς των αφηρημένων ενικών όρων δεν είναι δυνατό να καταδειχθούν αλλά προσεγγίζονται μόνον μέσω πλαισιακών ορισμών, πχ. των ισοδυναμιών N= και D=.

Είναι σημαντικό όμως το γεγονός ότι ο Wright έχει χαρακτηρίσει τη διάκριση των αντικειμένων ως συγκεκριμένων και αφηρημένων, μέσω της δυνατότητας κατάδειξης, ως προϊόν σύγχυσης (1983, 43-4). Η απάντηση του Wright είναι πολύ ενδιαφέρουσα: το ότι έχουμε τη δυνατότητα να καταδεικνύουμε το αντικείμενο αναφοράς ενός εμπειρικού ενικού όρου δεν αποτελεί κριτήριο που εξασφαλίζει την ανεξαρτησία αυτού του αντικειμένου από τη γλώσσα και την ύπαρξή του σε μια «εξωτερική» πραγματικότητα. Αυτό, πιστεύει ο Wright, είναι κάτι που δεν εξασφαλίζεται ούτε για τα αντικείμενα αναφοράς των κυρίων ονομάτων τα οποία βέβαια, κατά τον Dummett, αποτελούν το πρότυπο της αναφοράς. Το γεγονός ότι πχ. χρησιμοποιούμε τη φράση «αυτός είναι ο Γιάννης», καταδεικνύοντας συγχρόνως το αντικείμενο αναφοράς του κυρίου ονόματος ‘Γιάννης’, δεν είναι κάτι το οποίο μπορεί από μόνο του να εξασφαλίσει την ύπαρξη του Γιάννη σε μια εξωτερική από τη γλώσσα πραγματικότητα. Ο Wright εξηγεί γιατί συμβαίνει αυτό. Οταν κάποιος δείχνει τον Γιάννη σ'έναν άγνωστο, λέγοντας ‘αυτός είναι ο Γιάννης’, τότε για να κατανοήσει ο άγνωστος ποιος πραγματικά είναι ο Γιάννης (για να προσδιορίσει δηλαδή το αντικείμενο αναφοράς του κυρίου ονόματος) δεν επαρκεί η κατάδειξη, αλλά *προυποτίθενται* επιπλέον τα εξής : α) η εξοικείωση του αγνώστου στην πράξη με τη διάκριση μεταξύ ενικών όρων και κατηγορημάτων, προκειμένου να μην γίνει παρανόηση και νομίσει ο άγνωστος ότι ο Γιάννης είναι κάποια ιδιότητα β) η κατοχή εκ μέρους του αγνώστου της ειδικής έννοιας του *προσώπου*, προκειμένου να μη νομίσει ο άγνωστος ότι ο Γιάννης είναι κάποιο άλλο είδος αντικειμένου αλλά να καταλάβει ότι είναι πρόσωπο γ) ένας τρόπος αναγνώρισης του συγκεκριμένου προσώπου, όταν ο άγνωστος το ξανασυναντήσει σε άλλες συνθήκες και καταστάσεις, δηλ. ένα *κριτήριο ταυτότητας* του αντικειμένου. Με αυτό το επιχείρημα, ο Wright επιθυμεί να αποδείξει ότι η μέθοδος της κατάδειξης από μόνη της δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό της αναφοράς *ακόμα και ενός κυρίου ονόματος*. Ενας ήδη υπάρχων γλωσσικός εξοπλισμός και μια εξοικείωση με τις χρήσεις της γλώσσας αποτελούν αναγκαίες προυποθέσεις προκειμένου το καταδεικνυόμενο αντικείμενο αναφοράς να προσδιοριστεί. Χαρακτηριστικά αναφέρει ο Wright: «... *Εάν αυτό γίνει κατανοητό, τότε δεν υπάρχει κανένα νόημα στην άποψη ότι κάποιος μπορεί να κατανοήσει έναν καταδεικτικό προσδιορισμό της αναφοράς ενός ενικού όρου χωρίς ήδη να κατέχει τον υποκείμενο εξοπλισμό του είδους που έχει περιγραφεί. Ειδικότερα, πρέπει να είναι ήδη χρήστης προτάσεων...*». Η κατάδειξη είναι βέβαια χρήσιμη προκειμένου να βάλει κανείς τέλος σε μια επαναληπτική χρήση όρων, με τη βοήθεια των οποίων η αναφορά ενός όρου πρόκειται να προσδιοριστεί. Αλλά αυτό συμβαίνει «*...μόνο εάν κάποιος είναι ήδη κάτοχος της χρήσης ενός αρκετά ευρέος πεδίου πλαισίων ενός είδους, στο οποίο η προσδιορισμένη έκφραση μπορεί να συνεχίσει να εμφανίζεται: ειδικότερα, πρέπει να είναι ικανός, μέσω της χρήσης των προτάσεων, να συλλαμβάνει τη γενικότερη ειδική έννοια κάτω από την οποία, η αναφορά του προσδιοριζόμενου, μέσω της κατάδειξης, όρου εμπίπτει..*». Και κατά συνέπεια: «*... εάν ο υποκείμενος εξοπλισμός δεν προϋποτίθεται, τότε δεν υπάρχει τέτοιο πράγμα όπως η κατανόηση του προσδιοριζόμενου όρου...*» (1983, 45).

Αυτό που θέλει να τονίσει το προηγούμενο επιχείρημα του Wright, είναι ότι κατά τον προσδιορισμό της αναφοράς ενός ενικού όρου, είτε αυτός είναι αφηρημένος είτε συγκεκριμένος (concrete) είτε ακόμα και κύριο όνομα, προϋποτίθεται η χρήση της γλώσσας και ειδικότερα η ορθή χρήση *πλήρων προτάσεων*. Η αρχή του πλαισίου του Frege έχει εδώ τη θέση της: *το νόημα μιας λέξης δεν πρέπει να αναζητείται ανεξάρτητα από την πρόταση στην οποία ανήκει η λέξη*. Η χρήση πλήρων προτάσεων προϋποτίθεται του προσδιορισμού της αναφοράς σ'όλες ανεξαιρέτως τις περιπτώσεις. Συνεπώς ο ισχυρισμός του Dummett ότι η αναφορά των αφηρημένων ενικών όρων αποτελεί θέμα «εσωτερικό» της γλώσσας, δεν μπορεί να στηριχθεί σε μια διάκριση μεταξύ αντικειμένων που μπορούν να καταδειχτούν και αντικειμένων που δεν μπορούν να καταδειχτούν. Αρα, η κριτική του Dummett δεν παρέχει μια σαφή διάκριση μεταξύ αντικειμένων αναφοράς τα οποία μετέχουν περισσότερο ή λιγότερο σε μια πραγματικότητα «εξωτερική» από τη γλώσσα.

Σύμφωνα με μια παρατήρηση του Fraser Mac Bride (2003, 120-1), χωρίς μια επαρκή κατανόηση της γλώσσας και χωρίς την ικανότητα στη χρήση πλήρων προτάσεων, δεν διαθέτει κανείς τον απαραίτητο εννοιολογικό εξοπλισμό για να απομονώσει το αντικείμενο αναφοράς από το ευρύτερο περιβάλλον του. Ο προσδιορισμός του αντικειμένου, η απομόνωσή του από το ευρύτερο πλαίσιο, είναι κάτι στο οποίο μεσολαβεί η χρήση προτάσεων με αναπόφευκτο τρόπο. Κατ'αυτή την έννοια όμως δεν μπορούμε να διακρίνουμε με σαφήνεια κάτι το οποίο είναι «εσωτερικό» στη γλώσσα από κάτι το οποίο είναι «εξωτερικό».

Αν δεν έχουμε κάποιο ασφαλές κριτήριο για να χαρακτηρίσουμε τις αναφορές κάποιων ενικών όρων ως ανεξάρτητες από τη γλώσσα οντότητες ενώ τις αναφορές κάποιων άλλων ενικών όρων ως εσωτερικές στη γλώσσα, τότε πώς θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε την άποψη του Dummett για την ισχνή αναφορά των αφηρημένων αριθμητικών όρων; Τι θα μπορούσε να είναι ένα τέτοιο αντικείμενο αναφοράς;

Κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι τα αντικείμενα αναφοράς των μαθηματικών ενικών όρων είναι μυθολογικές κατασκευές (fictions). Σύμφωνα με μια τέτοια ερμηνεία, οι αριθμοί και οι διευθύνσεις ως αντικείμενα αναφοράς των αντίστοιχων αφηρημένων ενικών όρων, θα ήταν μυθολογικές κατασκευές όπως τα αντικείμενα αναφοράς του όρου 'Κένταυρος' ή του όρου 'Πήγασος'. Εδώ ωστόσο υπάρχει ένα πρόβλημα το οποίο απορρέει από το θέμα της αλήθειας των προτάσεων στις οποίες εμφανίζονται οι αντίστοιχοι ενικοί όροι. Εχουμε υποθέσει ότι ως προς το θέμα «αλήθεια» δεν υπάρχει αντίρρηση και με αυτό ως προϋπόθεση, ερευνούμε το θέμα «αναφορά». Ο Dummett άλλωστε δεν αρνείται ότι η πρόταση «ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος είναι ο 10» είναι αληθής. Ετσι τα πράγματα είναι εδώ διαφορετικά από ότι είναι στην πρόταση «ο Πήγασος άνοιξε τα φτερά του». Η αλήθεια των προτάσεων στις οποίες οι αριθμητικές και άλλες εκφράσεις λειτουργούν συντακτικά ως ενικοί όροι είναι το εμπόδιο για μια φιξιοναλιστική ερμηνεία. Ο φιξιοναλισμός είναι αλληλένδετος με μια αρνητική στάση απέναντι στο θέμα της αλήθειας. Ο Dummett όμως *δεν θέτει* ζήτημα αμφισβήτησης της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων αλλά *θέτει* ζήτημα ερμηνείας της αναφοράς των αφηρημένων ενικών όρων. Η άποψή του επομένως δεν μπορεί να ερμηνευθεί φιξιοναλιστικά. Ο Dummett μιλά για 'ισχνή' αναφορά των ενικών αριθμητικών όρων που λειτουργούν έτσι μέσα σε αληθείς προτάσεις.

Ωστόσο η άποψη του Dummett για την αναφορά των αριθμητικών όρων πάσχει, όπως είδαμε, σε συγκεκριμένα σημεία που αφορούν την υποτιθέμενη δυσαναλογία μεταξύ της αναφοράς εμπειρικών και της αναφοράς αφηρημένων ενικών όρων. Χρησιμοποιώντας απλώς ως πρότυπο την αναφορά των κυρίων ονομάτων, ερμηνεύει την αναφορά των άλλων ενικών όρων με βάση τον βαθμό απομάκρυνσης ή μη, από το πρότυπο αυτό. Χαρακτηρίζει επίσης την αναφορά κάποιων αφηρημένων όρων, επαρκώς απομακρυσμένων από το κύριο πρότυπο, ως εσωτερική της γλώσσας, χωρίς ωστόσο να παρέχει σαφή κριτήρια που να καθορίζουν από ποιο σημείο απομάκρυνσης και μετά, η αναφορά αρχίζει να λειτουργεί ως εσωτερική. Επομένως, η ερμηνεία του Dummett χαρακτηρίζεται από κάποιου βαθμού ασάφεια, έτσι ώστε να μην μπορεί να γίνει αποδεκτή ως άποψη που καταρρίπτει την ύπαρξη των αριθμών ως πραγματικών αντικειμένων.

2. Η σχέση γλώσσας και πραγματικότητας στο πλαίσιο του νεολογικισμού

Το πρόβλημα της αναφοράς των αφηρημένων ενικών όρων συνδέεται στενά με την αντίληψη που διαθέτουμε για τη σχέση γλώσσας και πραγματικότητας. Σύμφωνα με μια άποψη, η πραγματικότητα είναι ήδη διαμορφωμένη και διαθέτει μια δομή και κάποια χαρακτηριστικά ανεξάρτητα από τη γλώσσα. Στην περίπτωση αυτή η γλώσσα αντικαθρεπτίζει την πραγματικότητα. Σύμφωνα με μια άλλη άποψη, η δομή της πραγματικότητας είναι τέτοια ώστε να αντανακλά τη δομή της γλώσσας μας. Σ’αυτή την περίπτωση η γλώσσα επιβάλλεται στην πραγματικότητα. Οι απόψεις των νεολογικιστών ως προς τη σχέση γλώσσας και πραγματικότητας είναι κρίσιμη σ'αυτό το σημείο. Ο Mac Bride ακολουθώντας τον Wittgenstein (1953, §§26-38) τονίζει ιδιαιτέρως την προϋπόθεση ενός κατάλληλου γλωσσικού εξοπλισμού σε οποιαδήποτε προσπάθεια αναγνώρισης μιας συγκεκριμένης δομής της πραγματικότητας. Αυτό που μπορεί εδώ να γίνει δεκτό είναι κατ’αρχήν ότι χωρίς την κατάλληλη εξοικείωση στη χρήση προτάσεων δεν μπορούν να απομονωθούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της πραγματικότητας ούτε και τα επί μέρους αντικείμενα. Η χρήση των προτάσεων είναι το μέσο της σχέσης μας με τον κόσμο και μέσω γλωσσικών όρων (και όχι αιτιακών ή αισθητηριακών), γινόμαστε ικανοί να αναγνωρίζουμε και να προσδιορίζουμε οντολογικές κατηγορίες όπως πχ. το 'αντικείμενο' (MacBride, 2003, 120).

Οπως έχουμε τονίσει και σε προηγούμενο κεφάλαιο, ο Wright δίνει ιδιαίτερη έμφαση στην αρχή του πλαισίου του Frege. Είναι χαρακτηριστική η παρατήρηση του Frege στην § 62 των Grundlagen : «*...πώς τότε, οι αριθμοί πρόκειται να δοθούν σε μας, εάν δεν είναι δυνατό να αποκτήσουμε ιδέες ή εποπτεία γι αυτούς; επειδή μόνον στο πλαίσιο μιας πρότασης συμβαίνει οι λέξεις να έχουν οποιοδήποτε νόημα, το πρόβλημά μας είναι το εξής: να προσδιορίσουμε την έννοια μιας πρότασης στην οποία εμφανίζεται ένας αριθμός...*».

Ο Frege επεσήμανε το γεγονός ότι για τον αριθμό δεν μπορούμε να σχηματίσουμε κάποια ιδέα και δεν διαθέτουμε καμιά εποπτεία. Οι εμπειριστές πχ. ξεκινούν από αυτές τις δύο προυποθέσεις για να προσδιορίσουν τα αντικείμενα του κόσμου. Αλλά για τον Frege, δεν διαθέτουμε εποπτεία για τον αριθμό, ούτε a posteriori ούτε καν a priori. Ο Frege ήταν, όπως είδαμε, αντίθετος τόσο προς την εμπειριστική αντίληψη για τους αριθμούς όσο και προς την καντιανή αντίληψη. Αλλά το γεγονός ότι δεν προϋποτίθεται εποπτεία στην περίπτωση των αριθμών, δεν αποτελεί λόγο για να μην θεωρήσουμε τους αριθμούς ως αντικείμενα. Υπενθυμίζουμε ότι είχε μάλιστα εκφράσει την άποψη ότι ο μαθηματικός δεν δημιουργεί αντικείμενα κατά βούληση όπως και ο γεωγράφος δεν δημιουργεί περιοχές αλλά και οι δύο ανακαλύπτουν αυτά που ήδη υπάρχουν (§96) και μετά τους δίνουν ονόματα. Επομένως, κάτι το οποίο πρέπει να έχουμε υπόψη μας είναι ότι δεν μπορούμε να παραβλέψουμε τον μαθηματικό πλατωνισμό του Frege.

Από την άλλη πλευρά όμως έχουμε κυρίαρχη την παρουσία του παράγοντα 'γλώσσα'. Πράγματι, «*μόνον στο πλαίσιο μιας πρότασης συμβαίνει οι λέξεις να έχουν οποιοδήποτε νόημα*». Ο αριθμός μπορεί βέβαια να μην μας δίνεται στην εποπτεία αλλά η έννοια του αριθμού προκύπτει μέσα στο πλαίσιο προτάσεων. Όπως έχουμε δει στα προηγούμενα κεφάλαια, ο Frege πρότεινε προτάσεις ταυτότητας για να προσδιορίσει τους αριθμούς. Αυτό που έχει λοιπόν σημαντική αξία είναι η σύζευξη γλώσσας και πραγματικότητας. Διότι ο μαθηματικός πλατωνισμός του Frege συνυπάρχει με την κυριαρχία της γλώσσας και μάλιστα των προτάσεων. Πρόκειται για ένα κρίσιμο σημείο που μπορεί κανείς να διερωτηθεί: εάν ακολουθήσουμε τον πλατωνισμό του Frege για τους αριθμούς, τότε δεν μπορούμε να δεχθούμε την άποψη του Dummett ότι οι αριθμοί ως αναφορές των αριθμητικών όρων είναι αντικείμενα «εσωτερικά της γλώσσας». Εάν, από την άλλη πλευρά ακολουθήσουμε την αρχή του πλαισίου του Frege, τότε οι αριθμοί φαίνονται σαν να εξαρτώνται από τις προτάσεις μας. Ο Dummett θεωρεί ότι ο τρόπος που ερμηνεύουν οι Hale & Wright τον Frege δεν παρέχει αντικείμενα αναφοράς κατάλληλα για τον πλατωνισμό του Frege. Πώς μπορεί λοιπόν να υποστηριχθεί η ρεαλιστική θέση του Frege για τους αριθμούς; Εδώ πρέπει να αναζητήσουμε τον τρόπο με τον οποίο η αρχή πλαισίου του Frege, συμβιβάζεται με τον πλατωνισμό του.

Ο Wright ερμηνεύει τη σκέψη του Frege, με βάση την προτεραιότητα της σύνταξης έναντι της οντολογίας: «*Για τον Frege είναι η συντακτική κατηγορία που βρίσκεται σε προτεραιότητα ενώ η οντολογική ακολουθεί*» (1983, 13, 25). Με βάση τη σύνταξη των προτάσεων θεμελιώνεται η οντολογική κατηγορία του αντικειμένου. Η συντακτική προτεραιότητα είναι η «*... η θέση ότι ... δεν μπορεί να δοθεί καλύτερη γενική εξήγηση της έννοιας του αντικειμένου παρά με όρους που εκφράζονται με τη βοήθεια της έννοιας του ενικού όρου και της έννοιας της αναφοράς' ...*» (op.cit. 24). Οπως μάλιστα ο Wright αναφέρει: «*Το κλειδί στον πλατωνισμό του Frege, σύμφωνα με την ερμηνεία μας, είναι η θέση περί της συντακτικής προτεραιότητας: η κατηγορία των αντικειμένων ειδικότερα πρέπει να εξηγηθεί ως η κατηγορία που περιλαμβάνει κάθετί στο οποίο θα μπορούσε να αναφέρεται ένας ενικός όρος, όπου εννοούμε ότι η δυνατότητα να αναφέρεται ένας ενικός όρος του δίνεται μέσω της παρουσίας του σε αληθείς κατάλληλες προτάσεις*» (op.cit., 13, 53).

Το γεγονός λοιπόν ότι η σύνταξη είναι η αφετηρία μας, είναι άλλωστε και ο λόγος για τον οποίο έχουμε τη δυνατότητα να χαρακτηρίσουμε ως αντικείμενο κάτι (πχ. τον αριθμό) για το οποίο δεν μπορούμε να σχηματίσουμε μια νοητική παράσταση ή δεν μπορούμε να προσλάβουμε μέσω της αισθητηριακής αντίληψης. Δεν ξεκινάμε από τα δεδομένα των αισθήσεων ή από μια νοητική εικόνα ή μια ιδέα για να αποδεχθούμε κάτι ως ένα αντικείμενο (όπως κάνουν οι εμπειριστές) αλλά αντίθετα, ξεκινάμε από τις ίδιες τις προτάσεις της γλώσσας και από την παρουσία ενικών όρων σ'αυτές. Αυτό που κάνουμε πάντοτε στην πραγματικότητα είναι να προσδιορίζουμε τις διάφορες ειδικές έννοιες πχ. την έννοια του ζώου, την έννοια του θηλαστικού, την έννοια του δέντρου, την έννοια του ποταμού, την έννοια του αριθμού, την έννοια της διεύθυνσης, την έννοια του προσώπου κ.λ.π. Στο ερώτημα πώς διακρίνουμε τι είδους αντικείμενα περιλαμβάνονται στον πραγματικό κόσμο, είναι αδύνατο να μη λάβουμε υπόψη τη συντακτική δομή της γλώσσας μας. Πράγματι, ξεχωρίζουμε τα διάφορα είδη αντικειμένων μόνον με το σχηματισμό ειδικών εννοιών και αυτό είναι κάτι που προηγείται κάθε οντολογικής θέσης. Οι ειδικές έννοιες εδραιώνονται με κατάλληλα κριτήρια ταυτότητας, σε αντίθεση με τις άλλες έννοιες. Πχ. μιλάμε για το ίδιο άλογο, για την ίδιο πεύκο, για το ίδιο ποτάμι και για το ίδιο κορίτσι αλλά δεν μιλάμε για το ίδιο άσπρο ή για το ίδιο βαρύ. Τα αντικείμενα είναι οι πραγματώσεις της ειδικής έννοιας δηλαδή οι οντότητες που εμπίπτουν σ'αυτήν. Φυσικά μπορεί να μην υπάρχουν ή τουλάχιστον να αμφισβητούνται οι πραγματώσεις μιας έννοιας, όπως πχ. της έννοιας 'κένταυρος'. Υπάρχουν άραγε οι πραγματώσεις της ειδικής έννοιας του προσώπου ή της ειδικής έννοιας του αριθμού; Πράγματι, στο σημείο αυτό δεν επαρκεί η σύνταξη και παρεμβαίνει ένας δεύτερος παράγοντας ο οποίος δεν είναι άλλος από την αλήθεια κατάλληλων προτάσεων.

Οπως ερμηνεύουν οι νεολογικιστές τον Frege, η αρχή του πλαισίου δεν έρχεται σε κανένα είδος αντίθεσης ή ρήξης με τον μαθηματικό ρεαλισμό του. Στη σκέψη του Frege, η σύνταξη προηγείται κάθε οντολογικής αξίωσης. Η δομή της γλώσσας είναι αυτή που υποδεικνύει κατ'αρχήν ποιες είναι οι ειδικές έννοιες και ποιες οι πιθανές πραγματώσεις τους. Στη συνέχεια όμως παίζει καθοριστικό ρόλο η αλήθεια κατάλληλων προτάσεων. Αν δεν συνδυαστούν τα δύο προηγούμενα γεγονότα, δεν μπορούμε να μιλήσουμε για πραγματικά αντικείμενα αναφοράς. Για να οδηγηθούμε στο οντολογικό συμπέρασμα της ύπαρξης των αριθμών, χρειάζεται τόσο μια συγκεκριμένη συντακτική συμπεριφορά των αριθμητικών εκφράσεων όσο και η αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων. Ο Wright εξηγεί με εξαιρετική σαφήνεια την θέση αυτή σε ότι αφορά τους αριθμούς : «*... Η πρόταση του Frege είναι πως το γεγονός ότι η αριθμητική μας γλώσσα έχει τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά είναι αρκετό για να εδραιώσει τον φυσικό αριθμό ως μια ειδική έννοια, της οποίας οι πραγματώσεις, εάν έχει, θα είναι αντικείμενα που συγκροτούν τον εξοπλισμό του κόσμου, το ίδιο αντικειμενικά, όπως τα βουνά, τα ποτάμια και τα δέντρα. Και πάλι, το ότι η έννοια έχει όντως πραγματώσεις εδραιώνεται από την αλήθεια των κατάλληλων αριθμητικών προτάσεων...*»(1983, 13-4).

Εδώ χρειάζεται μια διευκρίνιση. Η ίδια η ισοδυναμία N= αναλαμβάνει το ρόλο να περιγράψει τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την αλήθεια κατάλληλων προτάσεων-πλαισίων με βάση τις οποίες μπορεί να υποστηριχθεί η ύπαρξη των αριθμών. Αυτό σημαίνει ότι από μόνη της η N= δεν μπορεί να επιβεβαιώσει τίποτα αφού έχει (διπλό) υποθετικό χαρακτήρα. Μόνον εάν διαπιστωθεί το αληθές μιας 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ εννοιών στη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας, τότε εξασφαλίζεται η αλήθεια της αριστερής πρότασης 'Nx:Fx = Nx:Gx', η οποία περιλαμβάνει τους αριθμητικούς όρους. Τότε μόνον προκύπτει η ύπαρξη των αντικειμένων αναφοράς των αριθμητικών όρων. Επομένως, η ύπαρξη των αριθμών είναι κάτι το οποίο συμπεραίνουμε (op.cit., 148) (κατά την έκφραση του Wright) μόνον με βάση την αλήθεια των αντίστοιχων μαθηματικών προτάσεων.

Πώς όμως θα αποφύγουμε τον χαρακτηρισμό της ύπαρξης των αριθμών ως ενός θέματος εσωτερικού στη γλώσσα; Κάτι τέτοιο θα ήταν δικαιολογημένο μόνο στην περίπτωση που η αλήθεια της 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ δύο εννοιών ήταν απλώς ένα θέμα γλωσσικής σύμβασης, μια κενή προϋπόθεση. Ωστόσο, το ότι η έννοια ‘χέρι του Νίκου’ μπορεί να τεθεί σε 1-1 αντιστοιχία με την έννοια ‘πόδι του Νίκου’ είναι ένα ανεξάρτητο αντικειμενικό γεγονός. Το ότι η έννοια ‘πιάτο στο τραπέζι’ μπορεί να τεθεί σε 1-1 αντιστοιχία με την έννοια ‘καλεσμένος στο τραπέζι’ είναι επίσης ένα ανεξάρτητο αντικειμενικό γεγονός. Και το ότι η έννοια ‘x≠x’ τίθεται σε 1-1 αντιστοιχία με τον εαυτό της είναι μια λογική αλήθεια (2^{ης} τάξης), μια αλήθεια με καθολικό εύρος. Θα ήταν επίσης λάθος να θεωρήσουμε τις λογικές αλήθειες ως συμβάσεις αφού ο Quine (1936) περιέγραψε την περιπέτεια στην οποία εμπλέκεται καθένας που επιχειρεί να δείξει κάτι τέτοιο. Γενικότερα, για να θεωρηθεί η 1-1 αντιστοιχία μεταξύ δύο εννοιών ως ένα πραγματικό γεγονός, ανεξάρτητο από το νου και τη γλώσσα, χρειάζεται η έννοια της αλήθειας αυτής της πρότασης να είναι αρκετά εύρωστη ώστε να την συνδέει με τον αντικειμενικό και πραγματικό κόσμο. Να αποφασίζει ο κόσμος για το εάν αυτού του είδους οι αντιστοιχίες ισχύουν ή όχι. Μόνον έτσι θα αποφευχθεί ο ισχυρισμός του Dummett για ‘εσωτερικά’ της γλώσσας αντικείμενα.

Συνεπώς, η συντακτική δομή των μαθηματικών προτάσεων σε συνδυασμό με μια εύρωστη έννοια αλήθειας είναι οι δύο προϋποθέσεις στις οποίες μπορεί να στηριχθεί η ύπαρξη των αριθμών. Μόνον τότε, μπορεί να πραγματοποιηθεί αυτό που αναφέρει χαρακτηριστικά ο Wright, ότι δηλαδή δεν μπορεί να τεθεί ανεξάρτητο φιλοσοφικό ζήτημα για το αν υπάρχουν πραγματικά τέτοια αντικείμενα, για το αν ο κόσμος περιλαμβάνει πραγματικά τους φυσικούς αριθμούς. Αυτό που εντυπωσιάζει βέβαια στη διατύπωση του Wright είναι η βεβαιότητα : «*...δεδομένων των σχετικών γεγονότων της συντακτικής δομής και της αλήθειας, δεν υπάρχει απλά, καμιά περαιτέρω συνεπής αμφισβήτηση για το θέμα*» (op.cit., 13-4). Η βεβαιότητα αυτή για την οποία μιλά ο Wright δεν πρέπει να ερμηνευθεί ψυχολογικά. Ο ίδιος ο Wright εξηγεί γιατί εκφράζεται με τον συγκεκριμένο τρόπο. Θεωρεί ότι μετά την εξασφάλιση της συγκεκριμένης σύνταξης των μαθηματικών προτάσεων της αριθμητικής και επιπλέον της αλήθειάς τους, δεν υπάρχει «περαιτέρω ευφυής ερώτηση για το αν τέτοιοι όροι έχουν πράγματι αναφορά, για το αν υπάρχουν πράγματι τέτοια αντικείμενα». Με αυτόν τον τρόπο αποκλείει την ύπαρξη ανεξάρτητου φιλοσοφικού ζητήματος, το οποίο θα ισοδυναμούσε με το να προσπαθούμε να διερευνήσουμε την ικανότητα αναφοράς των αριθμητικών όρων, χωρίς να λάβουμε υπόψη τον ρόλο που παίζουν αυτοί μέσα στις προτάσεις. Κάτι τέτοιο θα ήταν ισοδύναμο με το να προσπαθούμε να λύσουμε το πρόβλημα, παραβιάζοντας την αρχή του πλαισίου του Frege. Όμως δεν μπορούμε να προσεγγίσουμε το θέμα της αναφοράς απομονώνοντας τους αριθμητικούς όρους από τις προτάσεις στις οποίες εμφανίζονται. Ακολουθώντας την αρχή του πλαισίου, για να αποδεχθούμε ότι συγκεκριμένες εκφράσεις έχουν αναφορά σε πραγματικά αντικείμενα, δεν απαιτείται ούτε να καταδείξουμε τα αντικείμενα αναφοράς ούτε να βρεθούμε σε κάποια αιτιακού τύπου σχέση μαζί τους.

Αντιλαμβανόμαστε ότι το θέμα της σχέσης μεταξύ γλώσσας και πραγματικότητας στην ερμηνεία του Frege από τον Wright είναι ιδιαίτερα λεπτό. Σημαίνει −όπως εξηγεί ο MacBride− ότι η συντακτική δομή των αληθών μας προτάσεων δεν μπορεί να μας εξαπατά και ότι η πραγματικότητα δεν είναι δυνατό να αποτύχει στο να συμπεριλαμβάνει τα αντικείμενα που οι (αληθείς) προτάσεις μας περιγράφουν (2003, 108). Κάθε ερώτημα σχετικά με την αναφορά συγκεκριμένων όρων και κάθε οντολογική θέση (είτε αφορά αφηρημένα αντικείμενα είτε φυσικά αντικείμενα) τίθεται επομένως, σύμφωνα με την προκείμενη ερμηνεία, στη βάση της συντακτικής δομής αληθών προτάσεων. Αυτή είναι η μόνη απάντηση η οποία συμβιβάζει την αρχή του πλαισίου του Frege με τον μαθηματικό πλατωνισμό του.

Αυτός είναι άλλωστε ο λόγος για τον οποίο και ο Macbride, αντιμετωπίζει την ένταση που δημιουργεί συνήθως το πρόβλημα σχέσης μεταξύ γλώσσας και πραγματικότητας με έναν καθησυχαστικό τρόπο: σε κάθε περίπτωση, αυτό που οφείλουμε και αυτό που μπορούμε να αναζητούμε είναι το αν η χρήση αληθών προτάσεων της γλώσσας μας αποκαλύπτει την παρουσία αντικειμένων (op.cit. 127-8).

3. Η ερμηνεία του αναγωγισμού

Η κριτική από την πλευρά του αναγωγισμού παρουσιάζει κάποιες διαφορές σε σχέση με την κριτική του Dummett. Συγκεκριμένα αμφισβητεί τη γνησιότητα των αριθμητικών όρων Nx:Fx, Nx:Gx ως ενικών όρων στην αριστερή πλευρά της

(N =) $(\forall F)(\forall G)\ [(Nx : Fx = Nx : Gx) \leftrightarrow (F\ 1 - 1\ G)]$

Παρόμοια, αμφισβητεί τη γνησιότητα των όρων διεύθυνσης D(a), D(b) ως ενικών όρων στην αριστερή πλευρά της

(D=) $(\forall a)(\forall b)\ [(D(a) = D(b)) \leftrightarrow (a//b)]$

Και θεωρεί την εμφάνιση των υποτιθέμενων ενικών όρων ως παραπλανητική. Συγκεκριμένα, επιχειρηματολογεί με τον ακόλουθο τρόπο: η αριστερή πρόταση της N= (δηλ. «Nx:Fx = Nx:Gx») δεν είναι δυνατό να περιλαμβάνει ενικούς όρους με αναφορά σε αριθμούς επειδή *είναι ισοδύναμη* με τη δεξιά πρόταση («F 1-1 G») όπου δεν υπάρχουν όροι με τέτοιου είδους αναφορά. Δηλαδή: εάν η αριστερή πρόταση περιελάμβανε πράγματι όρους με αναφορά σε αριθμούς τότε το ίδιο θα έπρεπε να κάνει και η ισοδύναμή της δεξιά πρόταση. (Ανάλογα διατυπώνεται το επιχείρημα σε ότι αφορά την αριστερή πρόταση της D= δηλ. την πρόταση «D(a) = D(b)»). Είναι δηλαδή δυνατή μια ερμηνεία, σύμφωνα με την οποία οι αριθμητικοί όροι εξαλείφονται καθώς μεταβαίνουμε από αριστερά προς τα δεξιά της ισοδυναμίας. Και ακριβώς αυτό το γεγονός, το ότι στη δεξιά πρόταση δεν υπάρχουν καθόλου ενικοί όροι που να αναφέρονται σε αριθμούς αποτελεί για τον αναγωγισμό απόδειξη ότι είναι φαινομενική και παραπλανητική η παρουσία τέτοιων ενικών όρων στην αριστερή πρόταση. Συνεπώς, οι αριθμητικοί όροι δεν αποτελούν γνήσιους ενικούς όρους, παρά το γεγονός ότι συμπεριφέρονται φαινομενικά με αυτόν τον τρόπο. Η δυνατότητα αναφοράς των υποτιθέμενων ενικών όρων της αριστερής πρότασης των ισοδυναμιών, αποτελεί παραπλανητικό γραμματικό φαινόμενο. Το επιχείρημα συνοψίζεται ως εξης: *εάν οι αριθμητικοί όροι και οι όροι διεύθυνσης ήταν γνήσιοι ενικοί όροι τότε δεν θα υπήρχε δυνατότητα απαλοιφής τους στη δεξιά ισοδύναμη πρόταση.*

Αρχικά, ο Wright προσπάθησε να αντιμετωπίσει τον αναγωγισμό με τα δικά του όπλα, αντιστρέφοντας δηλαδή το ίδιο το αναγωγιστικό επιχείρημα. Η απάντησή του την οποία διατυπώνει (1983, 31-2) για την περίπτωση των διευθύνσεων (ανάλογη είναι η απάντηση για τους αριθμούς) είναι ότι αυτό που στην πραγματικότητα συνιστά παραπλανητικό φαινόμενο είναι η *απουσία* όρων με αναφορά σε διευθύνσεις στη δεξιά πρόταση της ισοδυναμίας D= και όχι η *παρουσία* όρων με αναφορά σε διευθύνσεις στην αριστερή πρόταση. Αφηνε έτσι ανοιχτό το ενδεχόμενο, στη δεξιά πρόταση να υπονοείται εμμέσως αναφορά σε διευθύνσεις, που όμως δεν είναι πρόδηλη. Κάτι τέτοιο όμως είναι αρκετά περίεργο. Ας φανταστούμε ένα σύνολο ανθρώπων οι οποίοι σκέφτονται και μιλούν με το λεξιλόγιο της δεξιάς πρότασης της ισοδυναμίας D= ή της ισοδυναμίας N= . Μιλούν επομένως για ευθείες που είναι παράλληλες ή για έννοιες που βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ τους. Επειδή όμως δεν έχουν συλλάβει τις ισοδύναμες αριστερές προτάσεις, δεν έχουν ιδέα ούτε για διευθύνσεις ούτε για αριθμούς. Τι συμβαίνει τότε; είναι δυνατό να αναφέρονται υπόρρητα ή έμμεσα σε αριθμούς και σε διευθύνσεις, χωρίς να το γνωρίζουν; Σύμφωνα με ένα άλλο παράδειγμα, όταν κανείς χρησιμοποιεί την πρόταση «η Ειρήνη και ο Νίκος είναι δεύτερα εξαδέρφια», ίσως να μην συνειδητοποιεί ότι αυτή η πρόταση είναι ισοδύναμη με την πρόταση «οι πλησιέστεροι κοινοί πρόγονοι της Ειρήνης και του Νίκου είναι οι προπάπποι τους». Μήπως όμως, χρησιμοποιώντας την πρώτη πρόταση, αναφέρεται υπόρρητα στους προπάππους της Ειρήνης και του Νίκου; Ο Wright αναζήτησε απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα και με αυτόν τον τρόπο κατέληξε σε έναν διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης του αναγωγισμού.

Πρέπει να παρατηρηθεί ότι τόσο η άποψη του αναγωγισμού όσο και η αρχική απάντηση που έδωσε σ'αυτόν ο Wright, στηρίζονται σε μια κοινή παραδοχή, ότι η αριστερή και η δεξιά πρόταση κάθε ισοδυναμίας οφείλουν να περιλαμβάνουν όρους με αναφορές στα ίδια αντικείμενα, επειδή είναι ισοδύναμες. Ο Wright όμως στη συνέχεια κατανόησε (2001, 165) ότι κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο, κατάλαβε δηλαδή πως το γεγονός ότι η αριστερή και η δεξιά πρόταση είναι ισοδύναμες δεν συνεπάγεται ότι οι δύο προτάσεις οφείλουν να έχουν όρους με τις ίδιες αναφορές. Ετσι η νέα απάντηση του Wright επιχειρεί ακριβώς να λύσει αυτή την παρεξήγηση στην οποία στηρίζεται το επιχείρημα του αναγωγισμού.

Γι αυτό ο Wright προχώρησε σε μια διασαφήνιση της έννοιας της ισοδυναμίας και έδωσε έμφαση στη διάκριση μεταξύ αναφοράς και οντολογικής δέσμευσης. Με βάση αυτή τη διάκριση, όποιος χρησιμοποιεί λεξιλόγιο για ευθείες, χωρίς να γνωρίζει τις ισοδύναμες προτάσεις περί διευθύνσεων, *δεσμεύεται οντολογικά* τόσο σε ευθείες όσο και σε διευθύνσεις. Όμως, δεν *αναφέρεται* κατ'ανάγκην σε διευθύνσεις. Ομοίως, όποιος χρησιμοποιεί λεξιλόγιο 2ης τάξης για 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ εννοιών, χωρίς να γνωρίζει τις ισοδύναμες προτάσεις για την ταυτότητα αριθμών, δεσμεύεται οντολογικά σε αριθμούς, χωρίς όμως να μπορεί να αναφερθεί σε αυτούς. Με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζεται και το παράδειγμα με τα δεύτερα εξαδέρφια, διότι όποιος χρησιμοποιεί την πρόταση για τα δεύτερα εξαδέρφια, δεσμεύεται οντολογικά στην ύπαρξη των προπάππων χωρίς να αναφέρεται σε αυτούς. Είναι δυνατόν, ενώ δεσμεύεται οντολογικά στην ύπαρξη προπάππων να μην μπορεί να αναφερθεί σε προπαππούδες, είτε επειδή τυχαίνει να μην γνωρίζει την αντίστοιχη έννοια του προπάππου είτε επειδή δεν γνωρίζει τα συγκεκριμένα πρόσωπα. Η διάκριση μεταξύ αναφοράς των ενικών όρων και οντολογικής δέσμευσης μιας πρότασης είναι ιδιαίτερα σημαντική στο σημείο αυτό. Η διαφορά ανάμεσα στην οντολογική δέσμευση και στην αναφορά έγκειται στο γεγονός ότι κάποιος που χρησιμοποιεί μια πρόταση είναι δυνατό να δεσμεύεται οντολογικά σε κάποιες οντότητες ενώ ταυτόχρονα δεν διαθέτει τον τρόπο να απομονώσει το συγκεκριμένο είδος οντότητας από το περιβάλλον της και να αναφερθεί σε αυτό.

Από την άλλη πλευρά, πρέπει να διασαφηνισθεί το τι σημαίνει πραγματικά η καθεμιά από τις προηγούμενες ισοδυναμίες. Όπως έχει ξανά τονιστεί, το γεγονός ότι η αριστερή και η δεξιά πρόταση, πχ. της ισοδυναμίας D=, είναι ισοδύναμες σημαίνει πως οι δύο αυτές προτάσεις έχουν τις ίδιες τιμές αλήθειας και ότι είναι αληθείς κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Επομένως αντιπροσωπεύουν τις ίδιες καταστάσεις και έχουν τις ίδιες οντολογικές δεσμεύσεις. Αυτό σημαίνει η ισοδυναμία μεταξύ αριστερής και δεξιάς πρότασης. Εάν λοιπόν συμβεί η μια από αυτές τις ισοδύναμες προτάσεις να περιλαμβάνει όρους με αναφορές σε κάποιο είδος αντικειμένων, τότε αυτό δεν σημαίνει υποχρεωτικά ότι και η άλλη πρόταση πρέπει να περιλαμβάνει αναφορές στο ίδιο είδος αντικειμένων. Εχουν επομένως ίδιες οντολογικές δεσμεύσεις αλλά δεν περιλαμβάνουν αναγκαστικά όρους με τις ίδιες αναφορές. Συνεπώς δεν είναι τελικά προβληματικό το γεγονός ότι η αριστερή και η δεξιά πρόταση της ισοδυναμίας D= δεν περιλαμβάνουν όρους με την ίδια αναφορά. Το ότι η αριστερή πλευρά της D= περιλαμβάνει ενικούς όρους με αναφορά σε διευθύνσεις δεν υποχρεώνει καθόλου και τη δεξιά πλευρά να κάνει το ίδιο. Η δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας D= αναφέρεται μόνον σε ευθείες, αν και *δεσμεύεται οντολογικά τόσο σε ευθείες όσο και σε διευθύνσεις*. Εάν λοιπόν ληφθεί υπόψη αυτή η καινούργια διευθέτηση των πραγμάτων που κάνει διάκριση μεταξύ οντολογικής δέσμευσης και αναφοράς, τότε δεν ευσταθεί πλέον το επιχείρημα του αναγωγισμού. Αυτή είναι και η πιο πρόσφατη μορφή απάντησης του Wright στον αναγωγισμό (2001, 165-6).

4. Η αριθμητική πραγματικότητα

Μία συμφιλίωση του αναγωγισμού με τον ρεαλισμό είναι δυνατή με βάση τον τρόπο που υποδεικνύεται στο (Psillos, 2005) και στο (Χριστοπούλου, Δ. και Ψύλλος, Σ., 2005): μπορούμε να υιοθετήσουμε μια διάκριση μεταξύ δύο τρόπων θεώρησης της πραγματικότητας, από τους οποίους ο πρώτος αφορά μια θεμελιώδη και ο δεύτερος μια γεγονοτική πραγματικότητα. Η θεμελιώδης πραγματικότητα περιλαμβάνει τα βασικά και μη περαιτέρω αναγώγιμα γεγονότα. Η γεγονοτική πραγματικότητα περιλαμβάνει γεγονότα τα οποία είναι δυνατό να ανάγονται στα θεμελιώδη. Τα γεγονότα που εκ πρώτης όψεως φαίνεται να αναπαριστά μια αληθής πρόταση δεν είναι κατ'ανάγκην θεμελιώδη. Είναι δυνατό μάλιστα να ανάγονται σε κάποια θεμελιώδη. Για παράδειγμα, κάποια βιολογικά γεγονότα είναι δυνατό να ανάγονται σε φυσικά γεγονότα. Σύμφωνα με αυτή τη διάκριση μεταξύ γεγονοτικής και θεμελιώδους πραγματικότητας, τα αριθμητικά αντικείμενα που περιγράφουν οι αληθείς προτάσεις της αριθμητικής και ιδιαίτερα οι ταυτότητες της αριστερής πρότασης της N= (δηλ. οι ταυτότητες «Nx:Fx = Nx:Gx), είναι δυνατό να μην είναι θεμελιώδη και να ανάγονται σε θεμελιώδη λογικά γεγονότα. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι τα αριθμητικά αντικείμενα δεν είναι sui generis αλλά δεν σημαίνει καθόλου ότι δεν είναι πραγματικά. Το ότι ανάγονται σε άλλα θεμελιωδέστερα, όπως πχ. στο λογικό γεγονός της 1-1 αντιστοιχίας που περιγράφεται από τη δεξιά πρόταση της N=, δεν σημαίνει ότι υστερούν σε πραγματικότητα. Επομένως, μπορεί κάποιος να υιοθετήσει μια αναγωγιστική στάση απέναντι στους αριθμούς η οποία δεν είναι κατ'ανάγκην εξαλειπτιστική. Με άλλα λόγια μπορεί να είναι αναγωγιστής ως προς τα αριθμητικά αντικείμενα, χωρίς αυτό να τον υποχρεώνει στη θεώρηση των αντικειμένων αυτών ως μη πραγματικών.

Η εν λόγω προσέγγιση έχει δύο χαρακτηριστικά. Το πρώτο συνίσταται στο ότι αναφέρεται σε δύο πραγματικότητες και το δεύτερο στο ότι δίνει οντολογική προτεραιότητα στη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας N=.

Ο Wright (1983, 31 κ.ε.) υποστήριξε ότι μπορούμε να ισχυριστούμε κατ'αρχήν ότι η δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας έχει επιστημολογική ή εξηγητική προτεραιότητα, αφού με βάση αυτήν ορίστηκε το νόημα του τελεστή N στην αριστερή πλευρά. Αλλωστε η δεξιά πλευρά είναι πιο οικεία σε μας και γνωσιολογικά προσβάσιμη διότι ανήκει στη λογική (2ης τάξης). Επίσης ο Frege (Grundlagen, §64) αναφερόμενος στην ισοδυναμία D= εξήγησε ότι η παραλληλία δύο ευθειών είναι πιο οικεία σε μας απ'ότι η ταυτότητα δύο διευθύνσεων και έτσι έδωσε προφανή γνωσιολογική προτεραιότητα στη δεξιά πλευρά της D=. Όπως σημειώθηκε στο κεφάλαιο 6 σχετικά με τις αφαιρετικές αρχές, κάποιος που είναι αρχικά ανυποψίαστος για μια έννοια πχ. την έννοια της διεύθυνσης ή την έννοια του αριθμού, την οικειοποιείται μέσω κατάλληλων αφαιρετικών αρχών, ξεκινώντας πάντοτε από τη δεξιά πλευρά τους την οποία ήδη κατανοεί. Συνεπώς, κάποιος οικειοποιείται την έννοια του φυσικού αριθμού, ξεκινώντας από τη δεξιά πλευρά της N= , κατανοώντας δηλαδή ήδη τις 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ εννοιών.

Το ερώτημα είναι εάν κάποια από τις δύο πλευρές έχει *οντολογική* προτεραιότητα. Η αναγωγή των αριθμητικών αντικειμένων σε λογικές σχέσεις μεταξύ εννοιών όπως εξηγήθηκε προηγουμένως, προϋποθέτει ότι η δεξιά πλευρά έχει επίσης οντολογική προτεραιότητα.

Ο Frege (§64 των Grundlagen) αναφερόμενος και πάλι στο υπόδειγμά του (στην ισοδυναμία D=) θεωρεί ότι ανακατανέμουμε το *περιεχόμενο* της δεξιάς πρότασης (της παραλληλίας) με διαφορετικό τρόπο στην αριστερή πρόταση (ταυτότητα διευθύνσεων) λαμβάνοντας μια καινούργια έννοια, την έννοια της διεύθυνσης. Ο προσδιορισμός του τι σημαίνει 'περιεχόμενο' στην περίπτωση αυτή, έτυχε του σχετικού ενδιαφέροντος και προκάλεσε συζητήσεις. Οι νεολογικιστές δοκίμασαν αρχικά να το ερμηνεύσουν ως 'σημασία' και να εξετάσουν εάν οι δύο πλευρές της ισοδυναμίας D= για παράδειγμα, θα έπρεπε να θεωρηθούν ότι έχουν την ίδια σημασία. Η ερμηνεία αυτή προσέκρουε όμως στο εξής πρόβλημα. Ας υποθέσουμε ότι οι δύο πλευρές έχουν την ίδια σημασία, άρα κάποιος που κατανοεί τη σημασία της αριστερής, κατανοεί συγχρόνως και της σημασία της δεξιάς πλευράς. Όταν όμως κάποιος κατανοεί τη σημασία της αριστερής ταυτότητας («D(a)=D(b)») κατέχει ήδη[35] την έννοια της διεύθυνσης. Συνεπώς, όταν κατανοεί τη σημασία της δεξιάς πρότασης («a//b») που είναι η ίδια σημασία, κατέχει ήδη την έννοια της

[35] Εδώ προυποτίθεται ότι η σημασία μιας σύνθετης έκφρασης αποτελεί σύνθεση των σημασιών των επί μέρους συστατικών της

διεύθυνσης. Αλλά αυτό είναι λάθος γιατί τότε καταργείται ο ίδιος ο ρόλος της ισοδυναμίας ως αφαιρετικής αρχής που εισάγει ως μία *νέα* έννοια, την έννοια της διεύθυνσης και την εξηγεί σε καθέναν που ήταν εξοικειωμένος μόνον με το παλαιό είδος αντικειμένων δηλ. τις ευθείες.

Μία πιο προσεκτική ερμηνεία του όρου 'περιεχόμενο' την ερμηνεύει ως *καταστάσεις πραγμάτων* ('states of affairs'). Σύμφωνα με αυτή την ερμηνεία, το ότι οι δύο πλευρές της ισοδυναμίας D= έχουν το ίδιο περιεχόμενο, σημαίνει ότι έχουν τις ίδιες καταστάσεις αληθείας, δηλαδή περιγράφουν τις ίδιες καταστάσεις πραγμάτων. Ομοίως, οι δύο πλευρές της ισοδυναμίας N= περιγράφουν τις ίδιες καταστάσεις πραγμάτων (cf. 2001,196). Τότε συμβαίνει μια επανεννοιολογιοποίηση («reconceptualization») μίας και της αυτής κατάστασης πραγμάτων. Μπορούμε δηλαδή να περιγράψουμε τη σχέση παραλληλίας μεταξύ δύο ευθειών με ένα νέο τρόπο έτσι ώστε να συνιστά ταυτότητα μεταξύ διευθύνσεων. Και μπορούμε να περιγράψουμε ανάλογα τη σχέση αντιστοιχίας 1-1 μεταξύ δύο εννοιών με ένα νέο τρόπο έτσι ώστε να συνιστά ταυτότητα μεταξύ αριθμών. Με αυτόν τον τρόπο ερμηνεύεται και η *ανακατανομή* του *περιεχομένου* (2001, 148-149, 276-277). Μία διαφορετική παρουσίαση-περιγραφή του περιεχομένου μιας πρότασης γίνεται μέσα σε μια άλλη πρόταση. Η 'reconceptualization' συνιστά περιγραφή, με άλλους όρους και με καινούργιες έννοιες, της ίδιας κατάστασης πραγμάτων. Στην προσέγγιση αυτή, οι ίδιες καταστάσεις πραγμάτων περιγράφονται και από τις δύο πλευρές της ισοδυναμίας.

Η προσέγγιση αυτή μπορεί ωστόσο και πάλι να λάβει δύο διαφορετικές ερμηνείες. Το πώς οι ίδιες καταστάσεις πραγμάτων παρουσιάζονται με δύο διαφορετικούς τρόπους έχει να κάνει είτε *α.* με το πώς εμείς την προσλαμβάνουμε και την περιγράφουμε είτε *β.* με το πώς η ίδια από μόνη της υπάρχει σε διαφορετικές ίσως εκφάνσεις. Στην περίπτωση α., η προσέγγιση έχει έναν υποκειμενικό χαρακτήρα και αφήνει περιθώρια μη ρεαλιστικής ανάγνωσης των αριθμών και των διευθύνσεων. Στην περίπτωση β., η ίδια η πραγματικότητα έχει δύο διαφορετικές εκφάνσεις. Σίγουρα, η σκέψη των Hale & Wright βρίσκεται με το μέρος της περίπτωσης β. (και όχι της α.) αφού οι ίδιοι καθιστούν σαφές το ότι: η ιδέα της reconceptualization δεν πρέπει να εκληφθεί ότι συνεπάγεται πως τα αφηρημένα αντικείμενα (αριθμοί και διευθύνσεις) είναι καινούργιες νοητικές κατασκευές που εισάγονται μέσω ορισμών (2001, 16). Ο Hale μάλιστα διευκρινίζει χαρακτηριστικά (2001, 343) αυτό το σημείο: οι αριθμοί-αντικείμενα στα οποία δεσμεύεται η αριστερή πλευρά της ισοδυναμίας N= υπάρχουν ούτως ή άλλως. Το ότι τα θεωρούμε καινούργια σημαίνει ότι εμείς τα ανακαλύπτουμε. Γιατί εάν εμείς δεν ορίζαμε την κατάλληλη (καινούργια) ειδική έννοια, δηλαδή την έννοια του φυσικού αριθμού, δεν θα είχαμε ποτέ αντιληφθεί την ύπαρξή τους. Ανάλογα, εάν δεν ορίζαμε την κατάλληλη (καινούργια) ειδική έννοια, δηλαδή την έννοια της διεύθυνσης, δεν θα είχαμε ποτέ αντιληφθεί την ύπαρξη διευθύνσεων.

Εδώ θα υιοθετήσουμε την περίπτωση β. δηλαδή τη ρεαλιστική ανάγνωση. Η περίπτωση α. θα ήταν αποδεκτή μόνον εάν επρόκειτο για ισοδυναμίες που δημιουργούν από μόνες τους και φέρνουν στην ύπαρξη αντικείμενα-κατασκευές. Όμως, όπως έχει ξανατονιστεί, οι ισοδυναμίες του Frege από μόνες τους δεν ορίζουν την ύπαρξη πραγματώσεων για τις έννοιες (του αριθμού και της διεύθυνσης) που εισάγουν. Τα οντολογικά συμπεράσματα προκύπτουν από τις ισοδυναμίες μόνον όταν αληθείς προτάσεις τοποθετηθούν στη δεξιά πλευρά των ισοδυναμιών αυτών.

Συνεπώς, θεωρούμε ότι έχουμε δύο διαφορετικές εκφάνσεις της πραγματικότητας της 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ εννοιών Αλλά, πώς είναι δυνατό η ίδια πραγματικότητα να έχει διαφορετικές εκφάνσεις; Κάτι τέτοιο είναι τελικά πάρα πολύ οικείο. Ας φανταστούμε ένα δέντρο γεμάτο από κλαδιά και φύλλα. Μία έκφανση της πραγματικότητας αφορά αυτό ακριβώς, το δέντρο με τα κλαδιά και τα φύλλα του. Μια διαφορετική έκφανση της ίδιας πραγματικότητας αφορά όμως το δέντρο με τα μόρια από τα οποία αποτελείται. Και οι δύο εκφάνσεις είναι εξίσου πραγματικές. Στην περίπτωση αυτή, παρεισφρύει η δυνατότητα αναγωγής που συζητήθηκε στην αρχή αυτής της ενότητας και που είναι συμβατή με το ρεαλισμό. Διότι έχουμε τη δυνατότητα να αναγάγουμε την πραγματικότητα των κλαδιών και των φύλλων στα μόρια, χωρίς να υιοθετήσουμε εξαλειπτιστική στάση απέναντι στα αναγόμενα αντικείμενα.

Κατά συνέπεια, λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα καθώς και τη δυνατότητα συμφιλίωσης ρεαλισμού και αναγωγισμού που υποστηρίχθηκε στην αρχή της ενότητας, θεωρούμε ότι είναι δυνατή μια προσέγγιση, όπου και οι δύο πλευρές της N= περιγράφουν τις ίδιες καταστάσεις πραγμάτων υπό διαφορετικές εκφάνσεις. Η αριστερή έκφανση συνίσταται στους φυσικούς αριθμούς, οι οποίοι ανάγονται στην δεξιά, δηλαδή στην ύπαρξη 1-1 αντιστοιχιών μεταξύ εννοιών, χωρίς ωστόσο η αναγωγή αυτή να έχει εξαλειπτικό χαρακτήρα για τους αριθμούς. Γι αυτό το λόγο, οι φυσικοί αριθμοί είναι πραγματικά αντικείμενα, αν και όχι sui generis αντικείμενα. Η αριστερή πλευρά της N= αποτελεί το αποτέλεσμα επανεννοιολογιοποίησης (reconceptualization) της δεξιάς πλευράς, με άλλα λόγια περιγράφει με τη βοήθεια μιας νέας έννοιας το θεμελιώδες λογικό γεγονός της 1-1 αντιστοιχίας που περιγράφει η δεξιά πρόταση.

5. Το θέμα της αναφοράς των αριθμητικών εκφράσεων που είναι οριστικές περιγραφές

Στο κεφ.3 (3.3), επισημάνθηκε ότι οι Hale & Wright χειρίζονται όλες τις αριθμητικές εκφράσεις 'ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος', 'ο αριθμός των δορυφόρων του Δία', 'το τετράγωνο του 3', '5', '0' κλπ. όπως τα κύρια ονόματα, θεωρώντας, όπως είδαμε, ότι καλύπτουν τα συγκεκριμένα προτεινόμενα κριτήρια αναγνώρισης των ενικών όρων. Στη συνέχεια τους απασχολεί το αν κατάλληλες προτάσεις όπου εμφανίζονται οι εν λόγω ενικοί όροι είναι αληθείς. Ωστόσο δεν τους έχει απασχολήσει καθόλου η προβληματική πχ. του Russell για τις οριστικές περιγραφές παρά το γεγονός ότι οι αριθμητικές εκφράσεις τις οποίες μελετά ο νεολογικισμός ανήκουν σε μεγάλο βαθμό σε αυτή την κατηγορία εκφράσεων. Αν και δεν είναι ίσως φανερό εκ πρώτης όψεως, η κυριαρχία των οριστικών περιγραφών στην προβληματική του νεολογικισμού είναι καταλυτική. Δεν πρόκειται μόνο για τις εκφράσεις 'ο αριθμός των δορυφόρων του Δία', 'ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος', 'ο αριθμός των παικτών μιας ομάδας βόλεϋ' κ.ο.κ. που κυριαρχούν στα διάφορα παραδείγματα και εκπροσωπούνται από τον γενικό τύπο 'ο αριθμός της έννοιας F' αλλά ακόμα και τα απλά νούμερα '0', '1', κλπ αποτελούν συντομεύσεις σύνθετων αριθμητικών εκφράσεων, αφού το '0' είναι 'ο αριθμός της έννοιας '$x \neq x$'', το '1' είναι 'ο αριθμός της έννοιας '$x = 0$'' κ.ο.κ.

Το γεγονός ότι οι Hale & Wright δεν αναφέρονται στην προβληματική των οριστικών περιγραφών έχει σχολιαστεί αρνητικά πχ. από τους John MacFarlane (2004) και Ian Rumfit (2003)[36]. Το θέμα γι αυτούς είναι σοβαρό επειδή μια οριστική περιγραφή της μορφής 'ο αριθμός της έννοιας F' μπορεί να μην έχει αντικείμενο αναφοράς, και αν έχει, αυτό δεν είναι κατ'ανάγκην μοναδικό.

[36] Book Symposium για το RPS, 2003, Oxford, Blackwell

Οι τακτικές αντιμετώπισης των οριστικών περιγραφών που έχουν αναπτυχθεί μέχρι τώρα, ποικίλλουν. Ο ίδιος ο Frege αναγνώρισε την ύπαρξη κάποιων προβληματικών οριστικών περιγραφών που δεν αναφέρονται. Στο κεφάλαιο 3 περί των ενικών όρων, αναφερθήκαμε επίσης στην τακτική του Russell απέναντι στις προβληματικές οριστικές περιγραφές, ο οποίος τις εξαλείφει από τη θέση υποκειμένου που αρκετές φορές καταλαμβάνουν στις προτάσεις. Ο Russell χρησιμοποιεί μια μέθοδο απαλοιφής τους που συνίσταται σε έναν διαφορετικό τρόπο παρουσίασης των προτάσεων. Η πρόταση πχ. (1) ‘ο νυν βασιλιάς της Γαλλίας είναι φαλακρός’ μπορεί να παρουσιασθεί με τον εξής τρόπο: ‘Υπάρχει κάποιος x τέτοιος ώστε (x βασιλιάς της Γαλλίας) και για κάθε y, αν (y βασιλιάς της Γαλλίας) τότε x = y και ο x είναι φαλακρός’

Η πρόταση αυτή θεωρείται ψευδής εάν, είτε δεν υπάρχει νυν βασιλιάς της Γαλλίας είτε υπάρχουν περισσότεροι του ενός. Ετσι αντιμετωπίζεται το προβληματικό χαρακτηριστικό μιας οριστικής περιγραφής δηλαδή το να μην έχει αντικείμενο αναφοράς ή το να έχει αλλά να μην είναι μοναδικό.

Θα μπορούσε όμως κανείς να ισχυρισθεί ότι και η μαθηματική πρόταση (2) ‘ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος είναι περιττός’ μπορεί να παρουσιαστεί ως εξής:

‘ Υπάρχει κάποιος x τέτοιος ώστε (x αριθμός των πλανητών του ηλ.συστήματος) και για κάθε y, αν (y αριθμός των πλανητών του ηλ.συστήματος) τότε x = y και ο x είναι περιττός’

Η τακτική αυτή του Russell δείχνει ότι υπάρχει και εναλλακτικός τρόπος χειρισμού των εκφράσεων της μορφής ‘ο αριθμός της έννοιας F’ πχ. ‘ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος’, ‘ο αριθμός των δορυφόρων του Δία’, ‘ο αριθμός των τροχών της άμαξας’ κλπ. όπου οι εν λόγω εκφράσεις δεν αντιμετωπίζονται ως κύρια ονόματα.

Άλλες τακτικές αντιμετώπισης των οριστικών περιγραφών υπήρξαν ηπιότερες. Ο Meinong πχ. ακολούθησε διαφορετική τακτική, θεωρώντας κατά κάποιο τρόπο ότι οι οριστικές περιγραφές αναφέρονται σε κάποια αντικείμενα που δεν είναι βέβαια ενεργεία υπαρκτά αλλά δυνατά κατά κάποιο τρόπο. Μια άλλη τακτική που παρουσιάζει επίσης ενδιαφέρον είναι εκείνη του Field ο οποίος θεωρεί ψευδείς τις προτάσεις που περιλαμβάνουν προβληματικές οριστικές περιγραφές σε θέσεις ενικών όρων. Μια ακόμα αντιμετώπιση των προτάσεων που περιλαμβάνουν προβληματικές οριστικές περιγραφές είναι να θεωρηθούν ότι στερούνται αληθοτιμής ή να τους αποδοθεί μια τρίτη αληθοτιμή. Επίσης ο Strawson διαφωνώντας με τον Russell υποστήριξε ότι η πρόταση ‘Ο νυν βασιλιάς της Γαλλίας είναι φαλακρός’ δεν συνεπάγεται την πρόταση ‘Υπάρχει ένας νυν βασιλιάς της Γαλλίας’ αλλά αντίθετα, την προϋποθέτει. Επειδή λοιπόν η πρόταση ‘Υπάρχει ένας νυν βασιλιάς της Γαλλίας’ είναι ψευδής, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η πρόταση ‘Ο νυν βασιλιάς της Γαλλίας είναι φαλακρός’ δεν είναι ούτε αληθής ούτε ψευδής.

Στην περίπτωση τώρα μιας αριθμητικής έκφρασης της μορφής ‘Ο αριθμός της έννοιας F’, δεν υπάρχει γενική συμφωνία για το αν αυτή συνιστά προβληματική ή μη προβληματική οριστική περιγραφή, ενώ αντιθέτως, στην περίπτωση ‘ο νυν βασιλιάς της Γαλλίας’, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η οριστική περιγραφή ανήκει στις προβληματικές. Αλλες οριστικές περιγραφές όπως ‘ο νυν πρόεδρος της ελληνικής δημοκρατίας’, ‘η νυν βασίλισσα της Αγγλίας’ δεν παρουσιάζουν πρόβλημα. Οι Hale & Wright πιστεύουν ότι η αριθμητική έκφραση ‘Ο αριθμός της έννοιας F’ δεν παρουσιάζει προβλήματα, διότι τίποτα δεν μας εμποδίζει να τη θεωρήσουμε ως ενικό όρο του οποίου η αναφορά προσδιορίζεται στο πλαίσιο αληθών αριθμητικών ταυτοτήτων. Είναι γνωστό ότι στις περιπτώσεις αυτές έχουμε τη δυνατότητα να γνωρίζουμε αν μια ταυτότητα της μορφής «Nx:Fx = Nx:Gx» είναι αληθής. Αρα, όταν έχει εξακριβωθεί η αλήθεια της αριθμητικής ταυτότητας, δεν μπορούμε να υιοθετήσουμε μία από τις τακτικές που προαναφέρθηκαν, δηλαδή δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η εν λόγω ταυτότητα πχ. στερείται αληθοτιμής.

Ας θεωρήσουμε την πρόταση «ο αριθμός των μαχαιριών στο τραπέζι = ο αριθμός των πιάτων στο τραπέζι». Σύμφωνα με τους Hale & Wright, εάν διαπιστώσουμε με βάση τη γνωστή διαδικασία, ότι η πρόταση αυτή είναι αληθής τότε μέσω της κλασικής λογικής προκύπτει ότι οι εκφράσεις ‘ο αριθμός των μαχαιριών στο τραπέζι’ και ‘ο αριθμός των πιάτων στο τραπέζι’ αναφέρονται. Συνεπώς υπάρχει το κοινό αντικείμενο αναφοράς. Όμως, έχουν εκφραστεί σοβαρές επιφυλάξεις ακόμα και ως προς το ότι οι οριστικές περιγραφές πχ. ‘ο αριθμός των μαχαιριών στο τραπέζι’ και ‘ο αριθμός των πιάτων στο τραπέζι’ έχουν αντικείμενα αναφοράς σ’αυτή την περίπτωση. Ορισμένοι επικριτές των Hale & Wright (πχ. οι Rumfit (2003) και Shapiro & Weir (2000)) πιστεύουν ότι στην περίπτωση της N= απαιτείται μια ελεύθερη λογική δεδομένου ότι πρέπει να επιτρέπονται ταυτότητες της μορφής «α=β» ακόμα και όταν δεν υπάρχει η αναφορά των ταυτιζόμενων όρων. Ο Rumfit (2003, 207) αναφέρει: «*Χρειάζεται να εργαστούμε σε μια λογική που είναι ελεύθερη* *στο βαθμό που αυτή επιτρέπει σε καλώς διατυπωμένους ενικούς όρους να στερούνται αναφοράς*».

Γενικά, δύο αναγνώσεις της «α = β» μπορούν να υιοθετηθούν: σύμφωνα με την ισχυρή ανάγνωση, η ταυτότητα «α = β» δεν μπορεί να είναι αληθής εάν οι όροι ‘α’ και ‘β’ δεν αναφέρονται σε αντικείμενα ενώ σύμφωνα με την ασθενή ανάγνωση, η ταυτότητα «α = β» μπορεί να είναι αληθής ακόμα και όταν ούτε ο όρος ‘α’ ούτε ο όρος ‘β’ αναφέρεται σε κάποιο αντικείμενο. Είναι προφανές ότι οι Hale και Wright υιοθετούν την πρώτη (την ισχυρή) ανάγνωση. Δηλαδή πιστεύουν ότι αν α και β είναι ενικοί όροι και η πρόταση «α = β» είναι αληθής τότε υπάρχει το κοινό αντικείμενο αναφοράς των όρων ‘α’ και ‘β’, διότι αν δεν υπήρχε τότε η ταυτότητα θα έπαυε να είναι αληθής.

Οι υποστηρικτές της άποψης ότι μια ελεύθερη λογική χρειάζεται στην περίπτωση της N= θεωρούν ότι κάτι τέτοιο είναι αναγκαίο επειδή επιτρέπει στην ταυτότητα «Nx:Fx = Nx:Gx» να είναι αληθής ακόμα και όταν οι όροι Nx:Fx, Nx:Gx δεν αναφέρονται. Όμως, ένα άλλο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό της ελεύθερης λογικής είναι η εξάλειψη του κανόνα της υπαρκτικής γενίκευσης. Στην κλασική λογική, ο κανόνας της υπαρκτικής γενίκευσης επιτρέπει σε κάποιον να συναγάγει ότι «υπάρχει ένας ψεύτης» από το «ο Επιμενίδης είναι ένας ψεύτης». Η ελεύθερη λογική δεν αποδέχεται τον κανόνα στη μορφή αυτή. Επιτρέπει μόνον να συναγάγουμε: «υπάρχει ένας ψεύτης» από «ο Επιμενίδης είναι ένας ψεύτης και ο Επιμενίδης υπάρχει». Εάν υιοθετήσουμε μια ελεύθερη λογική, τότε η «α = β» μπορεί να είναι αληθής ενώ οι όροι ‘α’, ‘β’ δεν αναφέρονται και σ’αυτή την περίπτωση δεν έπεται από τη δεδομένη ισότητα ότι υπάρχει το κοινό αντικείμενο αναφοράς των όρων. Κάτι τέτοιο βέβαια ανακόπτει το επιχείρημα των νεολογικιστών για την ύπαρξη των αριθμών. Όμως η αναγκαιότητα μιας ελεύθερης λογικής δεν φαίνεται αρκούντως πειστική για τους εκπροσώπους του νεολογικισμού. Ο Wright εκφράζει την αντίθεσή του στον ισχυρισμό ότι μια ελεύθερη λογική απαιτείται και καλεί οποιονδήποτε έχει αυτή τη γνώμη, να αποδείξει προηγουμένως ότι οι οριστικές περιγραφές της μορφής ‘ο αριθμός της έννοιας F’ είναι προβληματικές.

Ο Rumfit (2003, 208-10) κατηγορεί επίσης τους Hale & Wright ότι *προυποθέτουν* την ύπαρξη αναφοράς των όρων Nx:Fx, Nx:Gx, δηλαδή ότι στην προσέγγισή τους η N= εμπεριέχει ως «*κρυμμένη προυπόθεση*» το ότι ο κάθε όρος Nx:Fx αναφέρεται. Πιστεύει λοιπόν ότι απεναντίας, χρειάζεται μια ελεύθερη λογική η οποία θα επιτρέπει αφενός στην έκφραση ‘ο αριθμός της έννοιας F’ να στερείται αναφοράς και αφετέρου στο συναρτησιακό μηχανισμό[37] N να συμπεριφέρεται ως *μερική* συνάρτηση.

Ενώ οι επικριτές του νεολογικισμού έχουν δίκιο να επισημαίνουν ότι οι Hale & Wright δεν συζήτησαν το θέμα των οριστικών περιγραφών όταν προσπάθησαν να διαχωρίσουν την κατηγορία των ενικών όρων, ωστόσο πρέπει να παρατηρήσουμε κατ'αρχήν ότι, όχι μόνον οι οριστικές περιγραφές αλλά και διάφορα κύρια ονόματα εμφανίζουν προβλήματα ως προς την αναφορά. Η παρουσία σημασιολογικά σύνθετων εκφράσεων πχ. οριστικών περιγραφών σε μια αρχή όπως η N=, δεν αποτελεί ιδιαίτερο πρόβλημα διότι και πολλοί σημασιολογικά απλοί όροι, όπως κύρια ονόματα (πχ. 'Πήγασος'), συμβαίνει επίσης να αποτυγχάνουν στην αναφορά. Δεν υπάρχει λοιπόν πειστικός λόγος για να θεωρήσουμε μια ελεύθερη λογική ως κατάλληλη για την περίπτωση των σημασιολογικά σύνθετων εκφράσεων και μια κλασική λογική κατάλληλη για την περίπτωση των σημασιολογικά απλών εκφράσεων.

Ένα δεύτερο και πιο ουσιαστικό σημείο είναι ότι η ένταση που έχει δημιουργηθεί σχετικά με το status των οριστικών περιγραφών για τις αριθμητικές εκφράσεις μπορεί να μειωθεί εξαιρετικά εάν ληφθεί υπόψη ότι αυτό που χρειάζεται για να καθορίζει πότε μια τέτοια έκφραση έχει αναφορά, είναι μια κατάλληλη συνθήκη. Απαιτείται μια συνθήκη αναγκαία και ικανή τέτοια ώστε όταν εκπληρώνεται, να υπάρχει το αντικείμενο αναφοράς της συγκεκριμένης οριστικής περιγραφής. Το ίδιο ισχύει και για την περίπτωση της οριστικής περιγραφής 'ο αριθμός της έννοιας F'. Σ' αυτό το πνεύμα κινείται η απάντηση του Wright (2003, 259-62) προς τον προηγούμενο προβληματισμό.

Ο ίδιος επισημαίνει μια μεγάλη παρεξήγηση που γίνεται συχνά σχετικά με την ισοδυναμία N= και δίνει ορισμένες διευκρινίσεις που έχουν άλλωστε δοθεί και σε πολλά σημεία στο *Reason's Proper Study*.

Α. Αυτό που η N= ορίζει είναι το τι απαιτείται ώστε μια αριθμητική ταυτότητα να είναι αληθής και κατ'αυτόν τον τρόπο η N= θέτει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να αναφέρονται οι όροι της αριθμητικής ταυτότητας. Η εν λόγω συνθήκη είναι η «F 1-1 G». Η ισοδυναμία η ίδια δεν ισχυρίζεται καθόλου ότι αυτή η συνθήκη ικανοποιείται (op.cit., 262). Συνεπώς η N= δεν εμπεριέχει την προυπόθεση ότι ο όρος

[37] Ο συναρτησιακός μηχανισμός N (αριθμητικός τελεστής) αντιστοιχίζει στην έννοια F τον αριθμό Nx:Fx

Nx:Fx αναφέρεται. Το μόνο που ορίζεται εξ αρχής στο νεολογικισμό είναι μια καθολικά ποσοδεικτούμενη ισοδυναμία. Η ύπαρξη των αριθμών-αντικειμένων *δεν είναι κάτι που προϋποτίθεται* ούτε είναι κάτι γνωστό από την αρχή αλλά *προκύπτει* όταν κατάλληλες αληθείς προτάσεις τοποθετηθούν στη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας.

Β. Επίσης οι *αποδείξεις* της ύπαρξης καθενός εκάστου φυσικού αριθμού δεν βασίζονται σε κάποια προυπόθεση ότι οι αριθμητικοί όροι αναφέρονται. Γιατί «*αν υποτεθεί ότι υπήρχε εξ αρχής αυτή η προϋπόθεση, τότε κάποιος θα μπορούσε χωρίς μεγάλη φασαρία να θεωρήσει ότι κάθε ταυτότητα «Nx:Fx = Nx:Fx» είναι αληθής − μόνο με βάση τις ιδιότητες της ταυτότητας και χωρίς να χρησιμοποιήσει την N= − και έτσι να προχωρήσει στην ύπαρξη του αριθμού κάθε έννοιας F. Αλλά τότε η N= θα χρησίμευε μόνο για να διακρίνει μεταξύ τους τους αριθμούς*» (op.cit.260). Αντιθέτως, «*…απαιτείται η απόδειξη των βασικών αριθμητικών ταυτοτήτων*[38] *και αυτές οι αποδείξεις παρέχονται μέσω συλλογισμών από δεξιά προς τα αριστερά, κατά μήκος της N= με προκείμενες κατάλληλες προτάσεις 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ εννοιών»* (op.cit., 260) .

Γ. Όπως προαναφέρθηκε, το αν η συνθήκη που βρίσκεται στη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας ικανοποιείται, είναι ένα αντικειμενικό ερώτημα. Το αν πχ. ισχύει η παραλληλία δύο ευθειών είναι ένα θέμα «αντικειμενικό» και «ανεξάρτητο». Το ίδιο και το αν δύο έννοιες μπορούν να τεθούν σε 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τους. Συμβαίνει όμως στην περίπτωση της N= , «*…συγκεκριμένες περιπτώσεις της δεξιάς πρότασης να ισχύουν a priori ή ακόμα από λογική αναγκαιότητα…» (2001, 278).* Ένα σημαντικό συστατικό στοιχείο του νεολογικισμού είναι ότι η συνθήκη που εκφράζεται από τη δεξιά πρόταση *πράγματι ικανοποιείται σε βασικές περιπτώσεις της λογικής*. Αλλά εδώ, η λογική παίζει το ρόλο της εισαγωγής *ουσιαστικών δεδομένων* στη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας (2003, 262).

Με βάση τα παραπάνω, γίνεται φανερό ότι δεν υφίσταται ουσιαστικό πρόβλημα σχετικά με τις οριστικές περιγραφές της μορφής ‘ο αριθμός της έννοιας F’. Το ότι μια οριστική περιγραφή αυτής της μορφής ενδεχομένως να μην αναφέρεται, δεν συνιστά πρόβλημα για τον πλατωνισμό των Hale & Wright. Ισα-ίσα, που εκ των

---

[38] Βλ. τις σχετικές αποδείξεις στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου. Ακόμα: (2001, 309).

προτέρων δεν τίθεται μέσω της N= καμιά προϋπόθεση ότι οι αριθμητικές εκφράσεις αναφέρονται. Η απάντηση του Wright που προηγήθηκε είναι διευκρινιστική και βασίζεται στην ορθή κατανόηση του τρόπου λειτουργίας της ισοδυναμίας N=. Οι αριθμητικοί όροι είναι δυνητικά ικανοί να αναφέρονται, όμως αυτή η δυνατότητα πραγματοποιείται μόνον όταν κατάλληλα γεγονότα συμβαίνουν και οι αντίστοιχες αληθείς προτάσεις που τα περιγράφουν, τίθενται στη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας.

Αντί λοιπόν να ισχυριστούμε ότι η πρόταση 't = t' είναι αληθής επειδή ο όρος t αναφέρεται σε ένα αντικείμενο x και αυτό το αντικείμενο είναι ταυτόσημο με τον εαυτό του, εμείς ισχυριζόμαστε αντίστροφα ότι ο όρος t αναφέρεται επειδή η ταυτότητα 't = t' αποδείχθηκε αληθής και αυτό προκύπτει από το ότι μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ εννοιών είναι ένα αντικειμενικό γεγονός.

Ο Wright πολύ συχνά επαναλαμβάνει[39] ότι αυτό που μια αρχή αφαίρεσης (όπως η ισοδυναμία N=) οφείλει απλώς να κάνει, είναι το να θέτει την αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ύπαρξη των αντικειμένων αναφοράς των όρων της αριστερής της ταυτότητας. Η N= θέτει λοιπόν τη συνθήκη *ύπαρξης* των αριθμών. Το ότι μας παρέχει την ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη του κοινού αντικειμένου αναφοράς των εκφράσεων 'ο αριθμός της έννοιας F' και 'ο αριθμός της έννοιας G' σημαίνει ότι η ισοδυναμία εκφράζει τη δυνατότητα πραγμάτωσης του συγκεκριμένου αντικειμένου. Κάθε φορά όμως που είναι σε ισχύ μια κατάσταση πραγμάτων τέτοια ώστε να ισχύει «F 1-1 G», τότε ο αντίστοιχος αριθμός πραγματώνεται. Ανάλογα ισχύουν για την D= . Οποτεδήποτε δύο ευθείες είναι παράλληλες συμβαίνει να έχουμε πραγμάτωση της κοινής τους διεύθυνσης. Οποτεδήποτε ισχύει μια κατάσταση πραγμάτων τέτοια ώστε τα πιάτα και τα μαχαίρια στο τραπέζι να βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τους, λαμβάνουμε ενεργεία το κοινό αντικείμενο αναφοράς των αριθμητικών εκφράσεων 'ο αριθμός των πιάτων στο τραπέζι' και 'ο αριθμός των μαχαιριών στο τραπέζι'. Αυτή είναι η λειτουργία μιας αφαιρετικής αρχής τύπου Frege, σύμφωνα με τον Wright. Επομένως, το ότι πολλές αριθμητικές εκφράσεις είναι οριστικές περιγραφές δεν δημιουργεί προβλήματα στη διαπραγμάτευση του θέματος.

[39] Ο ίδιος χαρακτηριστικά σχολιάζει την επανάληψη: «…όπως συνεχίζω να επαναλαμβάνω…» (2001, 295) η οποία αποσκοπεί στο να εμποδίσει μια συχνή παραπλανητική προσέγγιση της N= που θέλει την ισοδυναμία από μόνη της να ισχυρίζεται την ύπαρξη του αντικειμένου αναφοράς του όρου 'Nx:x≠x'

Κεφ.8

Αρκεί η συνέπεια της N= για τη ρεαλιστική θέση του νεολογικισμού;

1. Η N= λειτουργεί ως ανακαλυπτικός ορισμός

Από την αλληλογραφία μεταξύ Frege και Hilbert (Resnik, 1974, 386-403) πληροφορούμαστε ότι ο Hilbert θεωρούσε τη συνέπεια των συστημάτων του ως αυτό που εξασφαλίζει την ύπαρξη των αντίστοιχων αντικειμένων. Αντί αυτού, ο Frege πίστευε ότι αν τα αξιώματα που θέτουμε είναι αληθή για ένα συγκεκριμένο πεδίο μαθηματικών αντικειμένων τότε τα αντικείμενα είναι υπαρκτά. Δηλαδή, θεωρούσε ότι η αλήθεια είναι αυτή που εξασφαλίζει την ύπαρξη. Όταν βέβαια ο Hilbert έγραφε ότι η συνέπεια εξασφαλίζει την ύπαρξη εννούσε ότι υπάρχει ένα πεδίο αντικειμένων που ικανοποιεί τα αξιώματα. Αλλά αυτό δεν ήταν ξεκάθαρα μια ρεαλιστική άποψη, όπως ήταν αυτή του Frege. Ανέκαθεν η συνέπεια ήταν το ζητούμενο από τους μαθηματικούς και τους φιλοσόφους. Όμως ακόμα και οι (αντιρεαλιστές) φιλόσοφοι τους οποίους επικρίνει ο Frege (πχ. Hankel) έδιναν μεγάλη σημασία στη συνέπεια ως αποφυγή αντιφάσεων. Ο Hankel για παράδειγμα θεωρούσε ότι οι αριθμοί δεν είναι πραγματικά αντικείμενα αλλά κατασκευές του νου, όμως συνιστούσε στους μαθηματικούς να είναι προσεκτικοί ως προς τη συνέπεια των κατασκευών τους. Ο Frege πίστευε ότι οι αντιρεαλιστές που επικαλούνταν τη συνέπεια των κατασκευαστικών ορισμών, βρίσκονται σε μια σύγχυση. Διότι ενώ έκαναν πολύ καλά να επιδιώκουν τη συνέπεια, ωστόσο δεν παρείχαν προτάσεις για το πώς αποδεικνύεται ή εξασφαλίζεται η συνέπεια. Εδώ διατυπώνεται έμμεσα η άποψη ότι δεν υπάρχουν απόλυτες αποδείξεις της συνέπειας (σήμερα γνωρίζουμε ότι η συνέπεια ενός συστήματος αποδεικνύεται πάντοτε σε σχέση με ένα άλλο ισχυρότερο σύστημα).

Ο Frege όμως θεωρούσε ότι μία έννοια είναι ελεύθερη από αντιφάσεις όταν βρούμε ένα αντικείμενο που να εμπίπτει στην έννοια. Οι ορισμοί, είχαν για τον Frege χαρακτήρα ανακάλυψης αντικειμένων.

Ο Balaguer (1998) πιστεύει ότι αν εξασφαλιστεί η συνέπεια μιας θεωρίας τότε τα αντίστοιχα αντικείμενα που περιγράφει η θεωρία, είναι λογικά δυνατά. Και επιπλέον πιστεύει ότι κάθε λογικά δυνατό μαθηματικό αντικείμενο είναι υπαρκτό. Αλλά τι ακριβώς εκφράζει η συνέπεια; Η συνέπεια ενός συστήματος προτάσεων σημαίνει ότι αυτές οι προτάσεις μπορούν να είναι ταυτόχρονα αληθείς υπό μια ερμηνεία. (Αυτό και πάλι θα μπορούσε να σημαίνει ότι είναι δυνατή η πραγμάτωση των αντικειμένων που περιγράφουν αυτές οι προτάσεις). Σε μια μοντελοθεωρητική γλώσσα, ένα συνεπές σύστημα προτάσεων έχει μοντέλο. Θα μπορούσε άραγε να υποστηριχθεί ότι μια οποιαδήποτε συνεπής αφαιρετική αρχή που εισάγει ένα είδος αφηρημένων αντικειμένων, εκφράζει –χάρη στη συνέπειά της– τη δυνατότητα ύπαρξης αυτών των αντικειμένων; Ναι. Για παράδειγμα, η N= ως συνεπής αφαιρετική αρχή εκφράζει τη δυνατότητα πραγμάτωσης της έννοιας του φυσικού αριθμού σε επί μέρους αντικείμενα. Για την ενεργεία ύπαρξη ωστόσο των επί μέρους αντικειμένων, χρειάζεται κάτι παραπάνω. Η πραγμάτωση των επί μέρους αντικειμένων γίνεται ενεργεία όταν αληθείς προτάσεις τοποθετηθούν στη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας.

Η συνέπεια εκφράζεται πολλές φορές ως 'δυνατότητα'. Στο κεφάλαιο 4 είδαμε ότι ακόμα και οι προκείμενες του αντιρεαλιστή φιλοσόφου Field οδηγούν στην παραδοχή της δυνατότητας ύπαρξης μαθηματικών αντικειμένων. Αλλά, η συνέπεια δεν αρκεί για τον ρεαλισμό.

Θα μπορούσε, για παράδειγμα κάποιος να υποστηρίξει ότι πρέπει να αντικαταστήσουμε το 'είναι δυνατό να υπάρχουν' με το 'είναι δυνατό να επινοηθούν', το οποίο θα μας οδηγούσε σε μια αντιρεαλιστική προσέγγιση. Στην περίπτωση αυτή όμως τα μαθηματικά αντικείμενα δεν θα ήταν δυνάμει πραγματικά αλλά δυνάμει κατασκευάσιμα ή επινοήσιμα. Ενδιαφέρουσα είναι η άποψη του Grandy πάνω σ'αυτό το θέμα. Σύμφωνα με τον Grandy υπάρχει ένα εκλεπτυσμένο είδος δυνατότητας γνωστικά διαθέσιμης στον άνθρωπο που τον κάνει να επινοεί μαθηματικά αντικείμενα *περιοριζόμενος* ωστόσο από *ότι είναι δυνατό*. Αυτό σημαίνει ότι ο ανθρώπινος νους δεν είναι ελεύθερος όταν επινοεί μαθηματικά αντικείμενα αλλά έχει μια ικανότητα να κατασκευάζει συνεπείς μαθηματικές ιστορίες. Ετσι, όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Grandy, η προσέγγισή του προυποθέτει μόνον ένα θαύμα ενώ ο μαθηματικός ρεαλισμός προυποθέτει[40] δύο θαύματα (Grandy, R. E, 1996, 172). Ωστόσο ο ίδιος δεν χαρακτηρίζει ως αντιρεαλισμό τη θέση του επειδή πιστεύει ότι αφού τα μαθηματικά αντικείμενα κατασκευαστούν, τότε υπάρχουν.

Βεβαίως η πολύ ενδιαφέρουσα αυτή σύζευξη μεταξύ *σύλληψης* και *επινοητικότητας* στην προσέγγιση του Grandy, συνιστά ένα ακόμα «θαύμα» το οποίο ο ίδιος δεν έχει συνυπολογίσει. Επομένως, εάν το θέμα εξαρτιόταν από τον αριθμό των «θαυμάτων» που επιδιώκουμε να ερμηνεύσουμε, τότε θα ήταν καλύτερο να επιστρέψουμε στη ρεαλιστική θέση. Ο άνθρωπος έχει βέβαια τη δυνατότητα να επινοεί πολλούς μύθους και ιστορίες αλλά αυτό που είναι ενδιαφέρον στην περίπτωση των μαθηματικών είναι το ότι περιορίζεται για κάποιους λόγους *εκ των πραγμάτων* να επινοήσει οτιδήποτε, εάν υποτεθεί ότι επινοεί τα μαθηματικά αντικείμενα. Ο περιορισμός προέρχεται βέβαια ως ένα βαθμό και από την πολύ εκλεπτυσμένη έννοια της μαθηματικής συνέπειας που του «επιβάλλεται», κατά τη συγκρότηση των συστημάτων των αξιωμάτων του. Τότε ανοίγονται μπροστά του οι δυνατές ερμηνείες και τα δυνατά μοντέλα των συνεπών συστημάτων του και μόνον αυτά. Όμως ο μαθηματικός έχει την αίσθηση ότι βρίσκεται σε μια κατάσταση στην οποία δεν διαθέτει περιθώρια απεριόριστης ελεύθερης κατασκευής, όχι μόνο λόγω της συνέπειας αλλά και άλλων περιορισμών. Οι περιορισμοί υποδεικνύουν ότι το ανθρώπινο υποκείμενο δεν δημιουργεί, δεν επινοεί και δεν κατασκευάζει τα μαθηματικά αντικείμενα αλλά ανακαλύπτει με ποιους ακριβώς τρόπους αυτά μπορούν να υπάρχουν.

Το θέμα αυτό αγγίζει επίσης τη συμβασιοκρατική διάσταση του προβλήματος. Υποστηρίζοντας ότι ένα συνεπές σύστημα αξιωμάτων ή ένας συνεπής έμμεσος ορισμός εξασφαλίζει τη δυνατή ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων μπορεί κάποιος να προκαλέσει το εξής εύλογο ερώτημα: μήπως κάτι τέτοιο μπορεί να ερμηνευθεί συμβασιοκρατικά; Μήπως οι άνθρωποι έχουμε τη δυνατότητα να θέτουμε έμμεσους ορισμούς ως συνεπείς συμβάσεις με αποτέλεσμα να προκύπτουν διάφορες σειρές δυνατών αφηρημένων αντικειμένων που ενδεχομένως να αποτελούν επινοήσεις δηλαδή νοητικές κατασκευές; Αυτό το ερώτημα συνδέεται με τη διατύπωση αφαιρετικών αρχών της γενικής μορφής $(\forall \alpha_\kappa)(\forall \alpha_\lambda)\ [(\Sigma(\alpha_\kappa) = \Sigma(\alpha_\lambda)) \leftrightarrow (\alpha_\kappa \approx \alpha_\lambda)]$.

[40] Ως θαύματα του μαθηματικού ρεαλισμού εννοεί την αξίωση ότι τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν και το ότι κατορθώνουμε να τα γνωρίσουμε. Ως θαύμα της δικής του προσέγγισης εννοεί την ύπαρξη μιας ανθρώπινης ικανότητας να συλλαμβάνει δυνατότητες συνεπών μαθηματικών κατασκευών.

Εχουν διατυπωθεί διάφορες συνεπείς αφαιρετικές αρχές και άλλες θα μπορούσαν να διατυπωθούν, με αποτέλεσμα να σχηματίζει κανείς την εντύπωση ότι το ανθρώπινο υποκείμενο μπορεί, υπό κάποιους περιορισμούς, να αποκαλύπτει τις δυνατότητες ύπαρξης (ή επινόησης) διαφόρων αφηρημένων αντικειμένων. Τα αντικείμενα που προκύπτουν μέσω συνεπών αφαιρετικών αρχών είναι όμως πραγματικά ή μήπως είναι αφηρημένες γλωσσικές κατασκευές;

Ας σημειωθεί γενικότερα ότι οι συμβασιοκρατικές ερμηνείες δεν είναι οι καλύτερες δυνατές διότι ο άνθρωπος δεν είναι ανεξέλεγκτος ακόμα και στη δημιουργία συνεπών συμβάσεων. Ο Quine επιπλέον άσκησε κριτική στη συμβασιοκρατία αποδεικνύοντας ότι κάθε προσπάθεια να ερμηνεύσουμε τις λογικές αλήθειες ως συμβάσεις απαιτεί άλλες λογικές αλήθειες κ.ο.κ. Από την άλλη πλευρά, δεν μπορεί να γίνει δεκτή μια γενική άποψη σύμφωνα με την οποία ένα οποιοδήποτε σύστημα αξιωμάτων ή μία οποιαδήποτε αφαιρετική αρχή, μπορεί μόνο και μόνο χάρη στη συνέπειά της να αποκαλύψει την ύπαρξη οντοτήτων. Στο κεφάλαιο περί έμμεσων ορισμών, επισημάνθηκε επιπλέον ότι οι αφαιρετικές αρχές διακρίνονται μεταξύ τους με βάση κάποιες ιδιότητες που παρουσιάζουν και ότι εκείνοι μόνον οι έμμεσοι ορισμοί και εκείνες μόνον οι αφαιρετικές αρχές λειτουργούν ικανοποιητικά όταν χαρακτηρίζονται από συνέπεια, συντηρητικότητα και μη αλαζονικότητα. Η N= έχει το προνόμιο να ανήκει σ’αυτό το είδος έμμεσων ορισμών. Σύμφωνα με τους Hale και Wright, η λειτουργία της συγκεκριμένης αφαιρετικής αρχής βασίζεται, όπως είδαμε, στο ότι έχει την ιδιότητα να αναδεικνύει και να περιγράφει καταστάσεις πραγμάτων. Ο νεολογικισμός προβάλλει τον ισχυρισμό ότι με τη βοήθεια της N= μπορούμε να ανακαλύψουμε (και όχι να επινοήσουμε) υπαρκτά αντικείμενα (τους φυσικούς αριθμούς που είναι εξίσου πραγματικοί με τα «βουνά», «τα ποτάμια» κλπ. κατά τη ρήση του Wright).

Ομως δεν είναι ικανή η οποιαδήποτε αφαιρετική αρχή, ακόμα και αν είναι συνεπής, να λειτουργεί με τον προηγούμενο τρόπο. Με άλλα λόγια *η συνέπεια δεν αρκεί ώστε ένας έμμεσος ορισμός να λειτουργεί ως μέσο ανακάλυψης οντοτήτων*. Υπενθυμίζουμε ότι ο Frege παρομοίαζε τον μαθηματικό με τον γεωγράφο διότι και οι δύο ανακαλύπτουν τα αντικείμενά τους και απέδιδε στους ορισμούς τον ρόλο του μέσου της ανακάλυψης. Αλλά για να διαπιστώσουμε πώς οι αφαιρετικές αρχές διαφέρουν μεταξύ τους, θα χρειαστεί μια αναφορά στο πρόβλημα των «κακών» αφαιρετικών αρχών («bad company objection»).

Στις χαρακτηριζόμενες ως «κακές» αφαιρετικές αρχές, δηλαδή στις *μη αποδεκτές* αφαιρετικές αρχές, ανήκουν κατ'αρχήν κάποιες μη συνεπείς αρχές, όπως για παράδειγμα η αρχή που χρησιμοποίησε ο Frege ως κριτήριο ταυτότητας των κλάσεων: $\forall F \forall G\ [\{x{:}Fx\}=\{x{:}Gx\} \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)]$ μετά από τη διατύπωση των εκτασιακών ορισμών του.

Μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν όμως συνεπείς αφαιρετικές αρχές που όμως είναι ασύμβατες σε σχέση με την N=, δηλαδή δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα με την N=. Μία ισοδυναμία αυτού του τύπου είναι η Nuisance Principle (2001, 290-7) που προκύπτει όταν ορισθεί μια σχέση ισοδυναμίας ≈ μεταξύ δύο εννοιών F και G έτσι ώστε πεπερασμένο πλήθος αντικειμένων να είναι F−και−όχι−G ή G−και−όχι−F. Συμβολίζουμε αυτή τη σχέση ισοδυναμίας ως Δ(F,G). Τότε η Nuisance Principle είναι μια δεύτερης τάξης ποσοδεικτούμενη ισοδυναμία που εισάγει την έννοια 'nuisance':

$\forall F)(\forall G)\ [\upsilon(F)=\upsilon(G) \leftrightarrow \Delta(F,G)]$.

Μια άλλη αφαιρετική αρχή του ίδιου τύπου, που διατύπωσε ο Boolos (1990, 273) είναι η Parity Principle (αρχή ισοτιμίας):

$(\forall F)(\forall G)\ [p(F) = p(G) \leftrightarrow$ (F και G διαφέρουν άρτια)]

Η σχέση ισοδυναμίας ≈ που διατυπώνεται σ'αυτή την περίπτωση μεταξύ των εννοιών F και G είναι η εξής: οι έννοιες F και G διαφέρουν άρτια εάν ο αριθμός των αντικειμένων που εμπίπτουν στην F−και−όχι στη−G ή στη G−και−όχι στην−F είναι πεπερασμένος άρτιος. Η Parity Principle είναι κι αυτή μια δεύτερης τάξης ποσοδεικτούμενη ισοδυναμία που εισάγει την έννοια 'parity'.

Η Nuisance Principle και η Parity Principle αποτελούν παραδείγματα συνεπών αρχών που όμως είναι ασύμβατες με την N= και αυτό εκ πρώτης όψεως συμβαίνει επειδή οι δύο πρώτες έχουν μόνον πεπερασμένα μοντέλα ενώ η N= έχει άπειρα μοντέλα. Για παράδειγμα, η Nuisance Principle ισχύει μόνον σε πεπερασμένα μοντέλα δίνοντας την εντύπωση ότι μπορούμε να οργανώσουμε έτσι τις έννοιές μας ούτως ώστε το σύμπαν να είναι πεπερασμένο. Το πρόβλημα εδώ δεν βρίσκεται φυσικά στο 'πεπερασμένο' αλλά σε ένα είδος θεώρησης που απομακρύνεται πολύ από την προσέγγιση της *ανακάλυψης* που υιοθετεί ο Frege.

Εξετάζοντας προσεκτικότερα, διαπιστώνουμε (cf. Hale & Wright, 2001, 290-7) ότι το χαρακτηριστικό γνώρισμα των Nuisance Principle και Parity Principle που τις διαφοροποιεί από την N= είναι ότι στερούνται την ιδιότητα της ‘συντηρητικότητας’. Υπενθυμίζουμε ότι μια αφαιρετική αρχή είναι συντηρητική ως προς μια δεδομένη θεωρία Τ όταν η προσθήκη της στη θεωρία δεν παρέχει νέες συνέπειες σχετικά με την παλαιά οντολογία που δεν εκφράζονταν ήδη στο παλαιό λεξιλόγιο. Ενας έμμεσος ορισμός είναι συντηρητικός όταν δεν παρέχει νέες συνέπειες για την οντολογία του προυπάρχοντος (πριν την εισαγωγή της οριζόμενης έκφρασης) λεξιλογίου. Οι δύο παραπάνω αρχές όμως παρέχουν συνέπειες σχετικά με το μέγεθος των εκτάσεων εννοιών της προϋπάρχουσας οντολογίας, εννοιών που μπορεί μάλιστα να μην έχουν καμία σχέση με τις οριζόμενες έννοιες ‘nuisance’ και ‘parity’. Το γεγονός αυτό καταστρατηγεί την ιδιότητα της συντηρητικότητας. Υπενθυμίζουμε ότι στο κεφ.6, η N= χαρακτηρίστηκε ως αποδεκτός έμμεσος ορισμός επειδή, μεταξύ των άλλων, είναι συντηρητική. Είναι γεγονός ότι η N= παρέχει νέες συνέπειες για την οντολογία αλλά αυτές οι συνέπειες αφορούν μόνον τους αριθμούς (παρέχει δηλαδή το συμπέρασμα για την ύπαρξη άπειρων αριθμών αλλά αυτό το συμπέρασμα αφορά μόνον την έννοια του αριθμού που εισάγει η ισοδυναμία και όχι τις όποιες έννοιες F, G του προυπάρχοντος λεξιλογίου). Η Nuisance Principle και η Parity Principle παρέχουν συνέπειες σχετικά με το μέγεθος οποιωνδήποτε εννοιών F, G, είτε αυτές έχουν σχέση με τα ‘nuisances’ και ‘parities’ είτε όχι. Οι συνέπειες αυτές επιβάλλουν ότι οι πραγματώσεις των εννοιών της προϋπάρχουσας οντολογίας πρέπει να είναι πεπερασμένες στο πλήθος. Κατά μία έννοια, επιβάλλουν περιορισμούς στο μέγεθος του προϋπάρχοντος πεδίου οντοτήτων, δηλαδή του σύμπαντος.

Μία ακόμα διαφορά των παραπάνω αφαιρετικών αρχών με την N= είναι η εξής: Είδαμε ότι η N= εισάγει την έννοια του αριθμού και αυτό το επιτυγχάνει καθορίζοντας τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες που απαιτούνται για να είναι αληθείς ταυτότητες της μορφής «Nx:Fx = Nx:Gx». Δεν κάνει όμως τίποτα περισσότερο από αυτό, δηλαδή η ίδια δεν καθορίζει εκ των προτέρων εάν η έννοια του φυσικού αριθμού που εισάγει, έχει ή δεν έχει πραγματώσεις. Το εάν καλύπτονται οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να αληθής η ταυτότητα «Nx:Fx = Nx:Gx» αποτελεί ένα ανεξάρτητο θέμα «για το οποίο αποφασίζει ο κόσμος». Πχ. ένα τέτοιο ανεξάρτητο θέμα είναι ότι υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των εννοιών ‘χέρι του Νίκου’ και ‘πόδι του Νίκου’. Σύμφωνα με ένα άλλο παράδειγμα, η 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στην έννοια ‘x≠x’ και στον εαυτό της αποτελεί επίσης ένα ανεξάρτητο θέμα που επιπλέον συμβαίνει να ισχύει στη λογική 2ης τάξης. Μόνον εάν στη δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας τοποθετηθούν αληθείς προτάσεις, προκύπτει η ύπαρξη αφηρημένων αντικειμένων από την αριστερή πλευρά. Αντιθέτως, «*η Nuisance Principle δεν μπορεί* *να θεωρηθεί ως μια αρχή που απλώς εισάγει μια έννοια, καθορίζοντας αναγκαίες και ικανές συνθήκες για προτάσεις που αφορούν πραγματώσεις αυτής της έννοιας και που ύστερα αφήνει τον κόσμο ν' αποφασίσει ποιες από αυτές τις συνθήκες αλήθειας ικανοποιούνται»* (2001, 296). *Εάν έκανε μόνον αυτό, τότε δεν θα έφερε δεσμεύσεις για την πληθυκότητα των εκτάσεων εννοιών που είναι ούτως ή άλλως άσχετες με την έννοια nuisance την οποία εισάγει* (δεν θα επέβαλλε περιορισμούς στην πληθυκότητα του κόσμου), τονίζει ο Wright.

Το συμπέρασμα από τη σύγκριση της N= με τις δύο παραπάνω αφαιρετικές αρχές είναι ότι η συνέπεια αποτελεί αναγκαίο χαρακτηριστικό όλων των αποδεκτών από το νεολογικισμό αφαιρετικών αρχών, αλλά χρειάζεται κάτι περισσότερο για να λειτουργήσει μια αφαιρετική αρχή με τον τρόπο που απαιτεί ο ρεαλισμός. Η ιδιότητα της 'μετριοπάθειας' (modesty) που χαρακτηρίζει τις αποδεκτές αλλά όχι τις «κακές» αφαιρετικές αρχές συνδέεται με τη ρεαλιστική προσέγγιση.

Ειδικότερα, οι αρχές που, όπως η N=, θέτουν απλώς τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη αφηρημένων αντικειμένων και αφήνουν σε *ανεξάρτητα και αντικειμενικά* γεγονότα να δείξουν το κατά πόσον αυτές οι συνθήκες καλύπτονται, ανήκουν στην ίδια κατηγορία με την N=. Αφήνουν, κατά την έκφραση του Wright τον κόσμο, δηλαδή το σύμπαν να απαντήσει για το αν οι συγκεκριμένες συνθήκες καλύπτονται και αν τα εν λόγω αντικείμενα υπάρχουν. Οι αρχές αυτές συνήθως αναγνωρίζονται από το ότι δεν καθορίζουν ένα ανώτερο αριθμητικό όριο στο μέγεθος του σύμπαντος και καλούνται επίσης μετριοπαθείς (modest). Αυτές εξυπηρετούν τον ανακαλυπτικό ρόλο που ο Frege απαιτούσε από τους ορισμούς. Με άλλα λόγια, δεν πρόκειται για συμβάσεις χάρη στις οποίες επινοούνται αφηρημένα αντικείμενα αλλά για ρεαλιστικές αρχές οι οποίες μπορούν να αποκαλύψουν «αντικείμενα για τα οποία προηγουμένως είμαστε ανυποψίαστοι» (Wright, 1983, 13 & MacBride, 2003, 111). Όπως και πάλι ο Wright το θέτει, διαχωρίζονται οι αφαιρετικές αρχές που εκφράζουν *πραγματικές σχέσεις* από εκείνες που αποτελούν απλώς *γλωσσικές κατασκευές*.

2. Η γνωσιολογική διάσταση της 'μετριοπάθειας' της N=

Η ιδιότητα της μετριοπάθειας (modesty) της N= που περιγράφτηκε στην προηγούμενη ενότητα έχει, σύμφωνα με τον Hale (2001, 343), επίσης μια

γνωσιολογική διάσταση: οτιδήποτε μας καθιστά ικανούς να γνωρίζουμε την αλήθεια σχετικά με 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ εννοιών, είναι επίσης αρκετό για να γνωρίσουμε ταυτότητες αριθμητικών όρων της μορφής «Nx:Fx=Nx:Gx». Ηδη στο κεφ.2 (2.2γ.) παρουσιάστηκε η προσέγγιση του νεολογικισμού στο θέμα της αριθμητικής γνώσης και ειδικότερα στο θέμα της σύνδεσης του γνώστη με τις συνθήκες αλήθειας αριθμητικών ταυτοτήτων. Η εξήγηση αυτή, όπως είδαμε, συνιστά ένα είδος απάντησης του νεολογικισμού στο δίλημμα του Benacerraf (1973). Σε ότι αφορά επίσης το γνωσιολογικό επίπεδο, επισημάνθηκε το αποτέλεσμα του Wright ότι από την ισοδυναμία N= και τη λογική 2^{ης} τάξης μπορούν να παραχθούν όλα τα αξιώματα Peano. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα αποτελεί ουσιαστικά την απόδειξη ότι η γνώση των αξιωμάτων της αριθμητικής (και κατ'επέκταση των προτάσεων της αριθμητικής) θεμελιώνεται στην ισοδυναμία N= και στη λογική 2^{η}ς τάξης. Για το νεολογικισμό, αυτό σημαίνει ότι η γνώση της αριθμητικής έχει λογική προέλευση, δηλαδή ότι δικαιώνεται η θέση του Frege για τη θεμελίωση της αριθμητικής στη λογική. (Ως προϋπόθεση εδώ έχει τεθεί το ότι η λογική 2^{ης} τάξης συνιστά πράγματι λογική).

Στο κεφ.6 αναφέρθηκε ότι οι Hale & Wright αρνούνται το status της λογικής αλήθειας ή του ρητού ορισμού στην ισοδυναμία N= και εξηγούν ότι αυτή δεν είναι αναλυτική με βάση τους ορισμούς του Frege για την αναλυτικότητα. Δεν προκύπτει από λογικές αλήθειες μέσω λογικών νόμων και ορισμών. Δεν μπορεί να θεωρηθεί η ίδια ως ορισμός με την αυστηρή σημασία. Και όσες φορές συμβαίνει να την αποκαλούν «αναλυτική» σπεύδουν απευθείας να επισημάνουν ότι δεν είναι αναλυτική σύμφωνα με τους ισχύοντες ορισμούς της αναλυτικότητας αλλά θα μπορούσε να χαρακτηρίζεται έτσι μόνον υπό μια ευρύτερη σημασία, κατά την οποία

η N= αποτελεί μια «εξήγηση»[41] της ειδικής έννοιας του αριθμού. Οπως επισημάνθηκε και στο κεφ.6, ο Wright διαπιστώνοντας το status της N= (1983, 135 κ.ε.) κατανόησε ότι δεν μπορούσε να στηρίξει σ'αυτήν, την φιλόδοξη εκδοχή του λογικισμού σύμφωνα με την οποία κάθε πρόταση της αριθμητικής θα μπορούσε να μεταφραστεί σε λογικές αλήθειες, αλλά μια πιο μετριοπαθή εκδοχή του λογικισμού

[41] (Πρλ. 2001, 219) για παράδειγμα όπου ο Wright αναφέρει: «*Στο Frege's Conception of Numbers as Objects, υποστήριξα ότι το θεώρημα Frege υπηρετεί έναν μετριοπαθή πλατωνικό λογικισμό: ότι η N= θα έπρεπε να θεωρηθεί, πράγματι, όχι ως λογική αλήθεια ούτε ως ορισμός με την αυστηρή σημασία αλλά μάλλον ως ο πυρήνας μιας εξήγησης της έννοιας του πληθυκού αριθμού, που θα μπορούσε να τρέξει ως μια αναλυτική αλήθεια με τον ίδιο τρόπο και για τους ίδιους λόγους που κάθε εξηγητικός ορισμός μιας καινούργιας έννοιας το επιτυγχάνει*»

που επίσης δικαιώνει τον Frege. Η παραπάνω όμως αδυναμία του νεο-λογικισμού επισημαίνεται αρνητικά από τους επικριτές του, πχ. ο Boolos έχει εκφράσει την αντίρρηση ότι η άποψη που ο Wright περιγράφει θα ήταν λογικισμός μόνον εάν μπορούσε να υποστηριχθεί ότι η N= αποτελεί λογική αλήθεια (1990, 274). Ωστόσο ο νεολογικισμός κατά τους Hale & Wright συνιστά ένα είδος λογικισμού υπό μία ασθενέστερη έννοια, αφού συνοψίζεται στο θεμελιώδες αποτέλεσμα που ο Wright απέδειξε, ότι τελικά οι νόμοι της αριθμητικής μπορούν να παραχθούν μέσα από ένα σύστημα λογικής $2^{ης}$ τάξης όπου έχει προστεθεί ως μοναδικό μη λογικό αξίωμα η N=. Αυτό ενδεχομένως να συνιστά και ό,τι καλύτερο μπορεί να υποστηριχθεί για τη θέση του λογικισμού. Μια πιθανή διεύρυνση της έννοιας της αναλυτικότητας τέτοια που να συμπεριλαμβάνει και την N=, μπορεί να επανατοποθετήσει το θέμα της γνησιότητας του λογικισμού στο εγχείρημα των Hale & Wright.

Εδώ όμως πρέπει να σημειωθεί ότι ακόμα και αν δεν εξασφαλίζεται η γνήσια διάσταση του λογικισμού στο εγχείρημα των Hale & Wright, λόγω των προβλημάτων που προαναφέρθηκαν, αυτό δεν επηρεάζει την υπαρκτική διάσταση του εγχειρήματος σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή τη ρεαλιστική του θέση. Ο Wright (1983, xxi) παρατηρεί για παράδειγμα ότι οι διαστάσεις του λογικισμού και του ρεαλισμού είναι ανεξάρτητες θέσεις με την έννοια ότι η μία δεν προυποθέτει τη βασιμότητα της άλλης. Ο λογικισμός δεν μπορεί να υποστηρίξει τον ρεαλισμό διότι η διαμάχη μεταξύ ρεαλισμού και αντιρεαλισμού μπορεί να μεταφερθεί και να λάβει χώρα ακόμα και μέσα στη λογική. Επιπλέον ο ρεαλισμός δεν μπορεί να υποστηρίξει τον λογικισμό γιατί θα μπορούσε μια ρεαλιστική προσέγγιση να ισχύει χωρίς οι αριθμητικές αλήθειες να θεμελιωθούν στη λογική.

Σε ότι αφορά το γνωσιολογικό επίπεδο, δεδομένου ότι το σύστημα των αξιωμάτων Peano παράγεται από την ισοδυναμία N= στη λογική $2^{ης}$ τάξης, οι προτάσεις της αριθμητικής έχουν a priori προέλευση. Κατ'επέκταση η αριθμητική γνώση θεμελιώνεται στη λογική $2^{ης}$ τάξης και στη γνώση της N= . Πώς γνωρίζουμε πχ. ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι; Η συνήθης απάντηση είναι ότι το γνωρίζουμε επειδή το θέτουν έτσι τα αξιώματα Peano. Αλλά τότε είναι σα να αποδεχόμαστε κάτι που δογματικά καθορίζουν τα εν λόγω αξιώματα. Ο νεολογικισμός όμως, θεωρεί ότι η γνώση των ίδιων των αξιωμάτων βασίζεται σε μια αρχή που βρίσκεται πιο βαθιά, που είναι πιο θεμελιώδης και που έχει τον ρόλο να εξηγεί τη φύση των πληθυκών αριθμών. Η αρχή αυτή μάλιστα έχει το ρόλο να διευκολύνει την απόδειξη της ύπαρξής τους. Κατά συνέπεια, ακόμα και αν η αριθμητική γνώση δεν ανάγεται με καθαρά λογικά μέσα στη λογική, είναι δυνατή και συνιστά a priori γνώση.

Κεφ. 9

Το πρόβλημα της απροσδιοριστίας της αναφοράς των αριθμητικών όρων.

Ένα πρόβλημα το οποίο μας απασχολεί όταν στοχεύουμε στο να ερμηνεύσουμε ρεαλιστικά την αναφορά των αριθμητικών όρων, συνδέεται με φαινόμενα απροσδιοριστίας ή –για να είμαστε ακριβέστεροι– με τον μη μονοσήμαντο χαρακτήρα της. Το φαινόμενο αυτό εκδηλώνεται στην προβληματική που εκφράζει ο Benacerraf στο άρθρο του 1965, η οποία και αποτελεί ένα είδος σημασιολογικής κριτικής στο μαθηματικό ρεαλισμό.

1. Το σημασιολογικό δίλημμα του Benacerraf (1965)

Απευθυνόμενος προς τους μαθηματικούς ρεαλιστές, ο Benacerraf έθεσε το ερώτημα: εάν υποτεθεί ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι αντικείμενα τότε ποια από τις δύο συνολοθεωρητικές εκδοχές τους είναι τα αντικείμενα αυτά; Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να τεθεί ως εξής: ποια είναι η αναφορά του αριθμητικού όρου 'ο αριθμός των τροχών του αυτοκινήτου μου'; Ο αριθμός 4; Μήπως το σύνολο $\{\{\{\varnothing\}\}\}$; Ή μήπως το σύνολο $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$;

Ο Benacerraf διηγείται (1965) μια ενδιαφέρουσα ιστορία. Δύο παιδιά, ο Johnny και ο Ernie μεγαλώνουν μαθαίνοντας συνολοθεωρία αλλά κάποτε έρχεται η στιγμή να μάθουν αριθμητική. Τότε οι δάσκαλοι του ενός παιδιού το πληροφορούν ότι οι φυσικοί αριθμοί δεν είναι άλλοι από τους:

$\varnothing,\quad \{\varnothing\},\quad \{\varnothing, \{\varnothing\}\},\quad \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\},\ \ldots$ (Von Neumann)

ενώ, του άλλου παιδιού ότι οι φυσικοί αριθμοί δεν είναι άλλοι από τους:

$\varnothing,\quad \{\varnothing\},\quad \{\{\varnothing\}\},\quad \{\{\{\varnothing\}\}\},\ \ldots$ (Zermelo)

Στις δύο αυτές περιπτώσεις έχουμε ένα αρχικό στοιχείο και μια σχέση διαδόχου. Στην περίπτωση των συνόλων von Neumann, *ο διάδοχος του x είναι το σύνολο που περιέχει το x και όλα τα μέλη του x*. Στην περίπτωση των συνόλων Zermelo, ο διάδοχος του x είναι το μονοσύνολο που περιέχει ως μοναδικό μέλος το x.

Τα παιδιά προσπαθούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους αλλά κάποια προβλήματα ασυνεννοησίας παρουσιάζονται. Στο ερώτημα πχ. εάν ο 3 ανήκει στον 17, το πρώτο παιδί απαντά καταφατικά ενώ το δεύτερο παιδί απαντά αρνητικά.

Στα σύνολα του von Neumann η έκφραση ‘x Є y’ σημαίνει: x <y, ενώ στα σύνολα του Zermelo, η ίδια έκφραση σημαίνει: το y είναι διάδοχος του x.

Μια άλλη διαφωνία συνδέεται με την έννοια του πληθυκού αριθμού.
Για το ένα παιδί (von Neumann), ένα σύνολο έχει n μέλη αν και μόνο αν μπορεί να τεθεί σε 1-1 αντιστοιχία με τον «αριθμό» n. Για παράδειγμα, ο «αριθμός» 17 έχει 17 μέλη. Για το άλλο παιδί (Zermelo), αυτό δεν μπορεί να ισχύει, δεδομένου ότι κάθε «αριθμός» έχει μόνο ένα μέλος. Για παράδειγμα, ο «αριθμός» 17 έχει 1 μέλος.

Μια επόμενη διαφωνία αφορά το ερώτημα: «ποιος είναι ο αριθμός 3;» Το πρώτο παιδί απαντά ότι είναι το σύνολο $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ ενώ το δεύτερο παιδί απαντά ότι είναι το $\{\{\{\varnothing\}\}\}$.

Το ερώτημα αν ισχύει ‘$3 = \{\{\{\varnothing\}\}\}$’ ή ‘$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$’ ισοδυναμεί με το ερώτημα ποια από τις δύο προηγούμενες μεικτές ταυτοτικές προτάσεις είναι αληθής. Σχετικά με τις ταυτότητες ο Benacerraf πιστεύει τα εξής:
Θα μπορούσαμε να ξεχωρίσουμε τρεις κατηγορίες ταυτοτήτων στα μαθηματικά. Η πρώτη αφορά ταυτότητες της μορφής ‘n = s’, όπου οι εκφράσεις n και s είναι αριθμητικοί όροι πχ. 3, 7, 12 κλπ. Η δεύτερη κατηγορία θα αφορά ταυτότητες της μορφής ‘n = s’, όπου οι n και s είναι αριθμητικές εκφράσεις του τύπου ‘ο αριθμός των δορυφόρων του Δία’, ‘ο αριθμός των μαχαιριών στο τραπέζι’ κλπ. Η τρίτη κατηγορία αφορά μεικτές ταυτότητες της μορφής ‘n = s’, όπου οι εκφράσεις n και s μπορεί να είναι αριθμητικές εκφράσεις ή μη, πχ. 3, Ιούλιος Καίσαρ, $\{\varnothing\}$ κλπ. Ο Benacerraf εκφράζει λοιπόν την άποψη ότι οι ταυτότητες της τρίτης κατηγορίας δεν έχουν νόημα. Για να έχει νόημα μια ταυτότητα ‘n = s’ πρέπει να διατυπώνεται εντός ενός πλαισίου που καθορίζεται από μια θεωρία. Πρέπει τα n, s να ανήκουν στην ίδια κατηγορία την οποία η θεωρία-πλαίσιο υποδεικνύει. Εάν έχουμε μια θεωρία περί προσώπων και μια θεωρία περί αριθμών τότε δεν έχει νόημα να ρωτούμε εάν ένας αριθμός και ένα πρόσωπο ταυτίζονται. Γενικά, δεν έχει νόημα να ρωτούμε εάν είναι ταυτόσημες δύο οποιεσδήποτε οντότητες, διότι η έννοια ‘οντότητα’ είναι πάρα πολύ ευρεία έννοια (Benacerraf, P. & Putnam, H. 1983, 285-6). Επομένως, ο Benacerraf θεωρεί ότι ο Frege έκανε λάθος όταν προβληματιζόταν πάνω στο θέμα του Καίσαρα επειδή δεν μπορούσε να αξιολογήσει σωστά τη μεικτή ταυτότητα «1 = Ιούλιος Καίσαρ»..

Η προηγούμενη άποψη ότι δεν πρέπει να μας απασχολούν καθόλου οι μεικτές ταυτότητες δεν είναι αρκετά ισχυρή, δεδομένου ότι η γλώσσα της εφαρμοσμένης αριθμητικής είναι μεικτή (περιλαμβάνει τόσο αριθμητικούς όρους όσο και όρους που αναφέρονται σε διάφορα αντικείμενα) και κατά συνέπεια, δεν μπορούμε να αποφύγουμε εντελώς ερωτήματα σχετικά με τις συνθήκες αλήθειας μεικτών ταυτοτήτων. Επιπλέον, παρουσιάζουν ενδιαφέρον μεικτές ταυτότητες που προέρχονται από το συνδυασμό διαφορετικών κλάδων των μαθηματικών, όπως '3 = 6/2' , '2 = τετραγωνική ρίζα του 4'. Οι ταυτότητες αυτές συνδέουν εκφράσεις από διαφορετικές μαθηματικές θεωρίες-πλαίσια (θεωρία φυσικών αριθμών, θεωρία ρητών, θεωρία πραγματικών). Σε κάθε περίπτωση, αν ισχύει αυτό που πιστεύει ο Benacerraf, δηλαδή αν οι οντολογικές κατηγορίες μας δίνουν τη δυνατότητα να ξεχωρίζουμε και να αγνοούμε εκείνες τις ταυτότητες που στερούνται νοήματος τότε τίθεται το ερώτημα πώς ορίζονται οι διάφορες κατηγορίες οντοτήτων. Ορίζονται από τις θεωρίες-πλαίσια, απαντά ο Benacerraf. Ποιος μπορεί όμως να αποκλείσει με επιχειρήματα το ενδεχόμενο της εμφάνισης μιας θεωρίας–πλαισίου πχ. με αριθμούς και πρόσωπα; Το πιο ορθό είναι να θεωρήσουμε ότι οι οντολογικές κατηγορίες καθορίζονται με βάση συγκεκριμένα κριτήρια ταυτότητας. Αν κάθε οντολογική κατηγορία έχει το δικό της κριτήριο ταυτότητας, τότε για να ταυτίζονται δύο οντότητες από δύο διαφορετικές οντολογικές κατηγορίες, θα πρέπει οι κατηγορίες αυτές να εμπίπτουν σε ένα ευρύτερο κοινό κριτήριο ταυτότητας. Επομένως, για να ταυτίζεται ένας αριθμός με ένα σύνολο, θα πρέπει οι οντολογικές κατηγορίες στις οποίες ανήκουν, να εμπίπτουν σε ένα κοινό κριτήριο ταυτότητας, ένα ενδεχόμενο που δεν μπορεί να αποκλειστεί. Στη καθημερινή πρακτική ωστόσο, συνηθίζουμε να αποφεύγουμε τη σύγχιση μεταξύ αντικειμένων που προέρχονται από διαφορετικές θεωρίες-πλαίσια, κάνοντας χρήση και εντασιακού χαρακτήρα πληροφοριών, επιπλέον. Πχ. σκεφτόμαστε ότι τα σύνολα παρουσιάζουν την ιδιότητα του μέλους ενώ οι φυσικοί αριθμοί παρουσιάζουν τις ιδιότητες να είναι άρτιοι ή περιττοί, να είναι πρώτοι ή σύνθετοι, τέλειοι κλπ., τα πρόσωπα παρουσιάζουν τις ιδιότητες να έχουν χρονολογία γέννησης, να έχουν αξιώματα (πχ. ρωμαίος αυτοκράτορας), να διαπράττουν συγκεκριμένες ενέργειες (πχ. διάβαση του Ρουβίκωνα) κλπ. Στο επόμενο κεφάλαιο, όταν θα έχουμε την ευκαιρία να εξετάσουμε ειδικότερα το πρόβλημα του Καίσαρος, θα διαπιστώσουμε για ποιο λόγο, όλες αυτές οι πιθανές «θεραπείες» δεν βοηθούν καθόλου στην απαλλαγή από το πρόβλημα των «μεικτών ταυτοτήτων» στην περίπτωση που αντιμετώπισε ο ίδιος ο Frege αλλά και στην περίπτωση του νεολογικισμού.

Ο Benacerraf λοιπόν απορρίπτει τις μεικτές ταυτότητες ως στερούμενες νοήματος. Αλλά τότε κάποιος μπορεί να θεωρήσει ότι ο ίδιος ο Benacerraf υπονομεύει το δίλημμά του. Διότι εκείνος έθεσε το ερώτημα κατά πόσον οι φυσικοί αριθμοί ταυτίζονται με τα σύνολα του von Neumann ή με τα σύνολα του Zermelo. Στην πραγματικότητα, αυτό που επιθυμεί να εκφράσει με το παρόν δίλημμα, είναι ότι μέσω της μοντελοποίησης των φυσικών αριθμών σε διαφορετικές ιεραρχίες συνόλων, προκύπτει ένα ζήτημα σχετικά με το status τους ως αντικείμενα. Ισχυρίζεται δηλαδή κατ’αρχήν ότι από τις διάφορες αναγωγές των φυσικών αριθμών στη συνολοθεωρία, δεν μπορεί να διαχωρισθεί εκείνη η ακολουθία συνόλων που υποτίθεται ότι συμπίπτει με την ακολουθία των φυσικών αριθμών. Στη συνέχεια επεκτείνει αυτόν τον ισχυρισμό σε κάθε ακολουθία αντικειμένων που διατηρεί τις αμοιβαίες (δομικές) ιδιότητες των φυσικών αριθμών. Καμία απ’αυτές τις ακολουθίες αντικειμένων δεν μπορεί να διαχωρισθεί ως η καταλληλότερη η οποία συμπίπτει με τους φυσικούς αριθμούς. Ολες οι ακολουθίες αντικειμένων που διατηρούν τις δομικές ιδιότητες των φυσικών αριθμών είναι εξίσου υποψήφιες για να θεωρηθούν ως οι φυσικοί αριθμοί.

Μια δυνατή απάντηση ενός μαθηματικού ρεαλιστή θα ήταν να ισχυριστεί ότι δεν είναι αναγκαίο να ταυτίσουμε τους αριθμούς με κάποιο είδος συνόλων, δηλαδή ότι οι αριθμοί είναι sui generis αντικείμενα, ανεξάρτητα από τα σύνολα και δεν ανάγονται σε σύνολα ή σε οτιδήποτε. Αρα δεν τίθεται ερώτημα για το αν ταυτίζονται με τη μια ή με την άλλη κατηγορία συνόλων. Εάν δεχθούμε μια τέτοια απάντηση τότε συνεχίζουμε να θεωρούμε τους φυσικούς αριθμούς αντικείμενα, χωρίς να υποχρεωνόμαστε να τους ταυτίσουμε με οποιαδήποτε από τις δύο ιεραρχίες συνόλων. Το πρόβλημα τίθεται όταν ο μαθηματικός ρεαλιστής αναγκαστεί να εμπλακεί στο δίλημμα του Benacerraf για κάποιο λόγο που σχετίζεται με τις προκείμενες του δικού του συστήματος. Εάν οι αριθμοί είναι σύνολα τότε θα πρέπει να επιλεγεί η κατάλληλη συνολοθεωρητική εκδοχή με την οποία ταυτίζονται. Επειδή δεν υπάρχει τρόπος να γίνει αυτή η επιλογή, ούτε και οποιαδήποτε άλλη επιλογή μεταξύ ακολουθιών αντικειμένων με την ίδιες δομικές ιδιότητες με τους φυσικούς αριθμούς, άρα οι φυσικοί αριθμοί δεν είναι αντικείμενα. Ο Benacerraf οδηγεί το συλλογισμό στο συμπέρασμα, κατ’αρχήν ότι οι αριθμοί δεν είναι σύνολα και στη συνέχεια ότι δεν είναι αντικείμενα. Συνήθως το πρόβλημα εκφράζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να συνδέεται με την αναφορά των αριθμητικών όρων, με την έννοια ότι δεν είναι σαφές εάν η αναφορά του αριθμητικού όρου πχ. ‘ο αριθμός των τροχών του αυτοκινήτου μου’ είναι το σύνολο $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ή το σύνολο $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Χαρακτηρίζεται λοιπόν και ως πρόβλημα απροσδιοριστίας της αναφοράς των αριθμητικών όρων με την έννοια ότι οι (ενικοί) αριθμητικοί όροι δεν επιτυγχάνουν να αναφερθούν σε μονοσήμαντα καθορισμένα αντικείμενα.

Ο ίδιος ο Benacerraf σχολιάζει το ζήτημα της αριθμητικής αναφοράς, κάνοντας τον ισχυρισμό ότι δεν υπάρχει λόγος τελικά να διαχωρίζουμε τους αριθμητικούς όρους από τα αντικείμενα αναφοράς τους. Πιστεύει ότι οι περισσότερες γλώσσες περιλαμβάνουν ακολουθίες από αριθμητικές εκφράσεις αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι υπάρχουν πραγματικά αντικείμενα στα οποία αυτές αναφέρονται. Οι αριθμοί αποτελούν κατά τη γνώμη του ένα μέτρο του μεγέθους των συνόλων και όπως δεν ρωτούμε για τις αναφορές των μερών ενός κανόνα, έτσι δεν έχει νόημα να ρωτούμε για τις αναφορές των αριθμητικών εκφράσεων. Αυτό το οποίο έχει σημασία είναι ποια θέση υποδεικνύει μια αριθμητική έκφραση σε μια αριθμητική ακολουθία. Υποδεικνύει πχ. την τρίτη θέση, την $50^{η}$ θέση, την $500^{η}$ θέση της ακολουθίας.

Με βάση τα παραπάνω, ο Benacerraf διασαφηνίζει τη θέση του που είναι στρουκτουραλιστική: ο*ι αριθμοί δεν είναι αντικείμενα* και δεν ταυτίζονται με οποιαδήποτε άλλα αντικείμενα. Ενας αριθμός από μόνος του δεν έχει κανένα νόημα αλλά αποκτά το νόημά του με βάση τη θέση του μέσα σε μια δομή και με βάση τη *σχέση του* με τον προηγούμενο και τον επόμενο αριθμό. Οι ιδιότητες των αριθμών είναι μόνον ιδιότητες που απορρέουν από τις σχέσεις που έχουν οι αριθμοί μεταξύ τους, δηλαδή *αμοιβαίες* ιδιότητες στο πλαίσιο μιας δομής και αυτές τις ιδιότητες μελετούν τα μαθηματικά. Για παράδειγμα, ο 3 είναι το $3^{ο}$ στοιχείο μιας συγκεκριμένης δομής αλλά θα μπορούσε οποιοδήποτε αντικείμενο που βρίσκεται σ'αυτή τη θέση, να παίξει τον ρόλο του 3. Επομένως, οι φιλόσοφοι κάνουν λάθος όταν αναζητούν ιδιότητες για τους αριθμούς άλλες και πέρα από τις δομικές τους ιδιότητες που είναι καθαρά μαθηματικές (Benacerraf & Putnam, 1983, 272-94). Ετσι, η θεωρία αριθμών δεν μελετά αντικείμενα αλλά μια πρόοδο (progression) που απαρτίζεται από ένα καθορισμένο αρχικό στοιχείο και από μια σειρά άλλων, έτσι ώστε, πάντοτε να είναι καθορισμένο το επόμενο (το διάδοχο) στοιχείο χωρίς να εμφανίζονται επαναλήψεις. Κάθε ακολουθία αντικειμένων που ακολουθεί αυτή τη δομή μπορεί να θεωρηθεί ότι παρουσιάζει τους φυσικούς αριθμούς, όπως για παράδειγμα οι τρέχουσες συνολοθεωρητικές αναπαραστάσεις τους, δηλαδή τα σύνολα του von Neumann και τα σύνολα του Zermelo.

2. Η πρόταση του στρουκτουραλισμού

Οι απόψεις που διατυπώθηκαν στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου ανήκουν σε μια εκδοχή του μαθηματικού στρουκτουραλισμού. Βασική αρχή όλων των μορφών του στρουκτουραλισμού είναι ότι οι φυσικοί αριθμοί νοούνται μόνον ως προς τη θέση τους μέσα σε μια συγκεκριμένη δομή και οι ιδιότητες τις οποίες έχουν είναι αμοιβαίες ιδιότητες με άλλους αριθμούς. Η γενική αυτή προσέγγιση επιδέχεται διάφορες ερμηνείες ανάλογα με τη στρουκτουραλιστική εκδοχή την οποία κανείς επιλέγει να υιοθετήσει.

Υπάρχει μια δυνατότητα ερμηνείας σύμφωνα με την οποία οι φυσικοί αριθμοί θεωρούνται ως μία δομή που αποτελεί ένα καθόλου ον (ante rem structuralism). Η πλατωνική εκδοχή αυτής της προσέγγισης υποστηρίζει ότι η δομή ως καθόλου οντότητα υπάρχει ανεξάρτητα από οποιεσδήποτε πραγματώσεις της, προϋπάρχει των πραγματώσεών της και θα υπήρχε ούτως ή άλλως, ακόμα και αν δεν υπήρχαν καν πραγματώσεις. Η κατάσταση αυτή είναι ανάλογη με εκείνη που χαρακτηρίζει τα καθόλου όντα 'δικαιοσύνη', 'ερυθρότητα' κλπ. τα οποία, κατά μία άποψη, υπάρχουν ανεξάρτητα από τα δίκαια πράγματα και ανεξάρτητα από τα ερυθρά πράγματα. Μία λιγότερο πλατωνική και περισσότερο αριστοτελική εκδοχή της ίδιας προσέγγισης θεωρεί ότι η δομή των φυσικών αριθμών είναι ένα καθόλου ον που όμως δεν υπάρχει ανεξάρτητα των πραγματώσεών της αλλά υπάρχει μέσα σ' αυτές. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να θεωρήσουμε ότι η δομή των φυσικών αριθμών υπάρχει μέσα στην ακολουθία των συνόλων του Zermelo ή των συνόλων του Von Neumann ή σε οποιαδήποτε άλλη έκφανσή της. Η περίπτωση αυτή είναι παρόμοια με την περίπτωση της δικαιοσύνης ή της ερυθρότητας, όταν κάθε μία απ' αυτές θεωρηθεί ως ένα καθόλου ον που ενυπάρχει στα δίκαια πράγματα ή στα ερυθρά πράγματα. Εάν όμως τα ερυθρά πράγματα έπαυαν να υπάρχουν τότε θα έπαυε να υπάρχει και η ερυθρότητα. Είτε επιλέξουμε την πλατωνική είτε την αριστοτελική ερμηνεία της συγκεκριμένης προσέγγισης, έχουμε να κάνουμε με μια δομή-οντότητα, συνεπώς η προσέγγιση αυτή εκφράζει έναν πολύ ισχυρό ρεαλισμό.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός είναι μια συγκεκριμένη θέση στη δομή των φυσικών αριθμών, με τον ίδιο τρόπο που το γραφείο κάθε υπουργού είναι μια θέση στη δομή της κυβέρνησης. Τότε όπως εξηγεί ο Shapiro

(2000, 285-6) είναι δυνατό να διακρίνουμε τον αριθμό 2 από ένα οποιοδήποτε αντικείμενο που παίζει τον ρόλο του 2 όταν έχουμε μπροστά μας μια πραγμάτωση της δομής των φυσικών αριθμών. Στην περίπτωση αυτή, η αναφορά ενός αριθμητικού όρου είναι η συγκεκριμένη θέση. Επειδή όμως δεν έχει νόημα μια ταυτότητα μεταξύ μιας θέσης της δομής και ενός αντικειμένου που τοποθετείται σ'αυτή τη θέση, γι αυτό το λόγο δεν μπορούν να τεθούν και προβλήματα για τον αν ο 2 ταυτίζεται με το σύνολο { ∅, {∅ }} (Von Neumann) ή με το σύνολο {{∅}} (Zermelo). Αυτά τα σύνολα παίζουν τον ρόλο του 2 σε διαφορετικές πραγματώσεις της δομής των φυσικών αριθμών. Το να ρωτάμε εάν το { ∅, {∅ }} ή το {{∅}} ταυτίζεται με το 2 είναι σα να ρωτάμε εάν ο Κ. Στεφανόπουλος ή ο Κ. Παπούλιας ταυτίζεται με τη θέση της Προεδρίας. Αλλά δεν μπορούμε να ταυτίσουμε τη θέση με το πρόσωπο, δεν μπορούμε να ταυτίσουμε το γραφείο με τον κάτοχο του γραφείου. Κατά συνέπεια, η εν λόγω ερμηνεία έχει ως αποτέλεσμα, το δίλημμα του Benacerraf για το αν ο 2 ταυτίζεται με το ένα ή το άλλο σύνολο να μπορεί να χαρακτηρισθεί ως ψευδοδίλημμα.

Στην πραγματικότητα, όπως και πάλι ο Shapiro εξηγεί, ο ante rem στρουκτουραλισμός έχει δύο προσανατολισμούς. Ο ένας αντιμετωπίζει τις θέσεις ως γραφεία (όπως προηγουμένως) και ο άλλος αντιμετωπίζει τις θέσεις ως αντικείμενα. Στον δεύτερο προσανατολισμό ωστόσο, αλλάζει η σχέση μεταξύ του γραφείου και του κατόχου του γραφείου, και όπως ο Shapiro επισημαίνει, αυτή γίνεται σχετική, διότι αυτό που είναι αντικείμενο σύμφωνα με μια οπτική μπορεί να συνιστά θέση σύμφωνα με μια άλλη οπτική. Αυτό φαίνεται για παράδειγμα όταν σκεφτούμε ότι στον προσανατολισμό 'οι θέσεις είναι γραφεία', το οντολογικό υπόβαθρο μπορεί να αποτελείται από άλλες θέσεις μιας άλλης δομής. Κάτι τέτοιο συμβαίνει στη δομή των φυσικών αριθμών όπου το οντολογικό υπόβαθρο μπορεί να είναι οι αρνητικοί ακέραιοι οι οποίοι όμως είναι κι αυτοί θέσεις σε μια άλλη δομή. Είναι δυνατό δηλαδή να έχουμε θέσεις σε θέσεις. Επιπλέον, η ίδια η δομή των φυσικών αριθμών αποτελεί ένα εξηγητικό παράδειγμα της δομής των φυσικών αριθμών. Η σχετικότητα που χαρακτηρίζει τον ante rem στρουκτουραλισμό, έχει ένα όχι και τόσο ελκυστικό αποτέλεσμα: υπό αυτή την έννοια, θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι προϋπάρχει μια υπερδομή, την οποία μοιράζονται τόσο η δομή των φυσικών αριθμών όσο και τα συστήματα συνόλων Von Neumann και συνόλων Zermelo κλπ (Shapiro 2000, ελλην.μετ. 2005, 288-90). Το πρόβλημα της σχετικότητας δεν είναι το μοναδικό για την προσέγγιση του ante rem στρουκτουραλισμού. Όπως και να έχει, είτε μιλάμε για την υπερδομή είτε για την αρχική δομή των φυσικών αριθμών ως δομή θέσεων, οφείλουμε να αναγνωρίσουμε ότι όλα τα παραδοσιακά προβλήματα του οντολογικού ρεαλισμού κληρονομούνται στον στρουκτουραλισμό αυτού του είδους από τη στιγμή που χαρακτηρίζει τη δομή ως μια καθόλου οντότητα.

Είναι δυνατό ωστόσο να γίνει μια εναλλακτική προσέγγιση στη δομή των φυσικών αριθμών. Εάν θεωρήσουμε όλα τα συστήματα του τύπου των φυσικών αριθμών τότε ενδεχομένως να μπορούμε να γενικεύσουμε επί όλων αυτών των συστημάτων. Η δομή των φυσικών αριθμών δεν είναι πια ένα καθόλου ον αλλά προκύπτει από τη γενίκευση ή την αφαίρεση επί όλων των συστημάτων αυτού του τύπου. Στην περίπτωση αυτή έχουμε έναν in re στρουκτουραλισμό. Μπορούμε να θεωρήσουμε λοιπόν ότι η ίδια η δομή δεν είναι κάποια οντότητα. Τότε το πρόβλημα αφορά το οντολογικό status των ίδιων των πραγμάτων που απαρτίζουν τη δομή. Για παράδειγμα, ο Benacerraf (Benacerraf & Putnam, 1983, 290-1) που απορρίπτει το status του αντικειμένου στους φυσικούς αριθμούς, είναι οπαδός μιας εξαλειπτικής αντίληψης για τον στρουκτουραλισμό. Στον εξαλειπτικό στρουκτουραλισμό, οι αριθμοί οι οποίοι απαρτίζουν τη δομή των φυσικών αριθμών δεν είναι αντικείμενα, είναι κενές θέσεις. Ο εξαλειπτικός στρουκτουραλισμός φαίνεται να αποφεύγει τα προβλήματα του οντολογικού ρεαλισμού, σχετικά με τα καθόλου όντα και τις οντότητες-αντικείμενα, όμως αντιμετωπίζει ένα διαφορετικό πρόβλημα. Οι κενές θέσεις των δομών του, οφείλουν να «γεμίσουν» με αντικείμενα, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι απαιτούνται και προϋποτίθενται κάποιες συγκεκριμένες οντολογίες-υπόβαθρα. Επίσης ένα δεύτερο πρόβλημα που ενισχύει το πρώτο, προκύπτει από το ότι οι οντολογίες αυτές πρέπει να είναι άπειρες για να γεμίσουν τις άπειρες κενές θέσεις της δομής. Προαπαιτούνται λοιπόν συγκεκριμένες οντολογίες άπειρων αντικειμένων για να συμπληρωθούν οι κενές θέσεις της δομής των φυσικών αριθμών. Αυτό γίνεται περισσότερο έκδηλο στην περίπτωση της δομής των πραγματικών αριθμών, που βέβαια απαιτεί (για το «γέμισμα» των κενών θέσεών της) μια οντολογία με έναν πολύ μεγάλο πληθάριθμο, τον πληθάριθμο του συνεχούς (Shapiro,2000, ελλην.μετ.2005, 292-3). Τι είναι αυτές οι υποκείμενες οντολογίες οι οποίες καλούνται να συμπληρώσουν τις κενές θέσεις των υποτιθέμενων δομών; Κατά συνέπεια, ο εξαλειπτικός στρουκτουραλισμός απαιτεί τεράστιες οντολογίες πραγμάτων (όπως πχ εκείνες τις οποίες παρέχει η συνολοθεωρία) και επομένως δεν αποφεύγει τελικά τα προβλήματα που αντιμετωπίζει ο ante rem στρουκτουραλισμός, προσπαθώντας να χαρακτηρίσει το status των οντοτήτων που συγκροτούν τις δομές του. Αλλά υπάρχει ένα επιπλέον πρόβλημα για τον εξαλειπτικό στρουκτουραλισμό. Διότι εάν πχ. η υποκείμενη οντολογία που απαιτείται για τη συμπλήρωση των κενών μιας τέτοιας δομής είναι μία συνολοθεωρητική οντολογία, η οποία και λόγω μεγέθους είναι η πλέον κατάλληλη για ένα τέτοιο ρόλο, τότε το ερώτημα που τίθεται είναι εάν και αυτή ακόμα μπορεί επίσης να ερμηνευθεί στρουκτουραλιστικά, δηλαδή και πάλι ως δομή. Αν όμως θεωρηθεί και αυτή ως δομή τότε θα απαιτεί επίσης μια υποκείμενη οντολογία για να γεμίσει τις θέσεις της, κ.ο.κ. επομένως οδηγούμαστε σε μια συνεχή αναδρομή.

Μια εναλλακτική λύση θα ήταν να θεωρήσουμε έναν στρουκτουραλισμό, τροπικού χαρακτήρα, χωρίς να δεχθούμε δομές–οντότητες ή αντικείμενα–οντότητες που τις απαρτίζουν. Δεχόμαστε απλώς όλα τα δυνατά αντικείμενα τα οποία ακολουθούν ένα κατάλληλο σύστημα αρχών ή αξιωμάτων και επίσης όλες τις δυνατές δομές οι οποίες μπορεί να προκύπτουν από τη γενίκευση επί τέτοιων δυνατών συστημάτων. Στην περίπτωση αυτή δεν αναζητούμε τα ενεργεία αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων αλλά τα δυνατά αντικείμενα αναφοράς τους. Μπορούμε πχ να γενικεύσουμε πάνω σε όλες τις αριθμήσιμες δυνατές συλλογές ή πάνω στις μη αριθμήσιμες κλπ Οι ίδιες οι δομές δεν αποτελούν οντότητες αλλά γενικεύσεις επί όλων των δυνατών συστημάτων.

Με βάση τα προβλήματα που περιγράφτηκαν για την ante rem και την εξαλειπτιστική προσέγγιση, φαίνεται ως προτιμότερη η στρουκτουραλιστική εκδοχή που θεωρεί τις δομές, όχι ως οντότητες, αλλά ως γενικεύσεις επί όλων των δυνατών συστημάτων αντικειμένων, του τύπου του φυσικού αριθμού.

Σε ότι αφορά γενικότερα τον στρουκτουραλισμό ως δυνατή λύση στο πρόβλημα που μας απασχολεί, πρέπει να επισημάνουμε τα εξής: οι λύσεις που προσφέρει *προσκρούουν, όπως είδαμε, σε μια σειρά από εσωτερικά προβλήματα των ίδιων των στρουκτουραλιστικών προσεγγίσεων*. Πέρα απ'αυτό, τίθεται ένα θέμα συνέπειας του ίδιου του στρουκτουραλισμού ως θέσης, δεδομένου ότι κάνει αποδεκτές μόνον τις «μαθηματικά ενδιαφέρουσες» ιδιότητες των αριθμών, δηλαδή τις ιδιότητες που εμφανίζουν σε σχέση ο ένας προς τον άλλο σε μια συγκεκριμένη δομή (δομικές ιδιότητες). Σύμφωνα με τις γενικότερες στρουκτουραλιστικές απόψεις, οι αριθμοί δεν έχουν άλλες ιδιότητες και σε περίπτωση που γίνεται αναφορά σε άλλες ιδιότητες, αυτό αποτελεί σφάλμα των φιλοσόφων. Όμως, όπως ο Balaguer (1998, 10) παρατηρεί, δεν είναι αυτονόητο το γιατί θα έπρεπε κάποιος να παραβλέψει ιδιότητες όπως πχ. το ότι οι αριθμοί είναι εκτός χωροχρονικού πλαισίου, ότι είναι άχρωμοι και αιτιακώς αδρανείς. Επιπλέον, ο ίδιος ο ισχυρισμός ότι *οι αριθμοί έχουν την ιδιότητα να μην έχουν άλλες ιδιότητες πέρα από τις δομικές*, αφορά σε μια μη δομική ιδιότητα. Επομένως ο στρουκτουραλισμός κάνει ο ίδιος έναν ισχυρισμό για μια μη δομική ιδιότητα των αριθμών. Και εδώ ακριβώς εμφανίζει μια ασυνέπεια προς τον εαυτό του.

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό της στρουκτουραλιστικής προσέγγισης είναι ότι τονίζει περισσότερο την αντίληψη της διάταξης παρά την αντίληψη της πληθυκότητας. Η ταυτότητα και η διαφορά μεταξύ των φυσικών αριθμών εκφράζεται σε μία δομή με όρους θέσεων και αμοιβαίων σχέσεων, πχ ο 3 είναι διαφορετικός από τον 4 και από τον 2 διότι ο 4 είναι ο επόμενος του 3 και ο 3 είναι ο επόμενος του 2. Ο τρόπος χειρισμού των αριθμών σε μια στρουκτουραλιστική προσέγγιση γίνεται με αναφορά στη δομή και σε διαδοχικές θέσεις μέσα σ'αυτή τη δομή. Όμως ο αριθμητικός πλατωνισμός του τύπου που εξετάζουμε εδώ και ο οποίος βασίζεται στην ισοδυναμία N=, θέτει την ταυτότητα και τη διαφορά δύο αριθμών πάνω στη βάση 1-1 αντιστοιχιών μεταξύ εννοιών και ερμηνεύει την έννοια του αριθμού με όρους πληθυκότητας και όχι με όρους ακολουθιών (progressions). Ο χειρισμός των αριθμών στη δεδομένη προσέγγιση συνδέεται με ειδικές (sortal) έννοιες και το πλήθος των πραγματώσεών τους. Δεν πρέπει να μας διαφεύγει ότι η έννοια του αριθμού που εισάγει η N= είναι η έννοια του *πληθυκού* αριθμού. Συνεπώς μια στρουκτουραλιστική προσέγγιση παρουσιάζει ορισμένα μειονεκτήματα, αν κληθεί να αντιμετωπίσει το πρόβλημα.

3. Η πρόταση του Balaguer

Ο Mark Balaguer πιστεύει ότι η λύση του υπό συζήτηση προβλήματος για τον μαθηματικό ρεαλισμό είναι η εγκατάλειψη της αντίληψης για τη μοναδικότητα των μαθηματικών αντικειμένων και ιδιαίτερα των φυσικών αριθμών. Δηλαδή ο μαθηματικός ρεαλιστής θα πρέπει να αποδεχθεί την άποψη ότι οι μαθηματικές θεωρίες δεν περιγράφουν μοναδικές συλλογές αντικειμένων. Ο παραδοσιακός μαθηματικός ρεαλισμός μπορεί να ισχυρίζεται ότι οι συλλογές αυτές είναι μοναδικές αλλά δεν υπάρχει λόγος να κάνει κάποιος έναν τόσο ισχυρό ισχυρισμό (1998, 84-5).

Ειδικότερα για τους φυσικούς αριθμούς ο Balaguer θεωρεί ότι υπάρχουν άπειρες ω-ακολουθίες αντικειμένων που ικανοποιούν τα αξιώματα Peano και που ακόμα μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους με τρόπους που ο άνθρωπος δεν μπορεί να σκεφτεί (op.cit., 85). Ο ίδιος θεωρεί ότι το σύνηθες επιχείρημα εναντίον της άποψής του (την ονομάζει: full blooded platonism) είναι ότι οι αριθμητικές εκφράσεις συμπεριφέρονται ως ενικοί όροι και επομένως θα περίμενε κάποιος, όταν αναφέρονται, να αναφέρονται σε μοναδικά αντικείμενα. Το να μην έχουν μονοσήμαντα καθορισμένη αναφορά, θεωρείται από τους κλασικούς ρεαλιστές ως ένδειξη ότι αποτυγχάνουν στην αναφορά. Αλλά ο Balaguer απαντά ότι ο προηγούμενος ισχυρισμός σχετικά με τους ενικούς όρους δεν είναι ούτε αυτονόητος ούτε αυταπόδεικτος στην περίπτωση των μαθηματικών. Επομένως αυτοί που τον εκφράζουν θα έπρεπε να τον δικαιολογήσουν, θα έπρεπε δηλαδή να υποδείξουν κάτι που μπορεί να εμποδίσει έναν μαθηματικό ρεαλιστή να αποδεχθεί το γεγονός ότι οι ενικοί αριθμητικοί όροι είναι δυνατό να έχουν μη μονοσήμαντη αναφορά.

Το σημαντικότερο ίσως ερώτημα που μπορεί κάποιος να θέσει στον Balaguer είναι κατά πόσον η προσέγγισή του εξακολουθεί να διατηρεί την καθιερωμένη σημασιολογία του μαθηματικού ρεαλισμού. Σ'αυτό, ο ίδιος απαντά ότι η καθιερωμένη σημασιολογία για την αριθμητική αποδίδει αντικείμενα σε ενικούς όρους, σύνολα αντικειμένων σε κατηγορήματα μιας θέσης, σύνολα διατεταγμένων ζευγών αντικειμένων σε κατηγορήμτα δύο θέσεων κλπ. και ότι αυτό μπορεί να συνεχίσει να ισχύει εξίσου και στη δική του προσέγγιση. Εάν υποτεθεί ότι κάποιος του θέσει το ερώτημα, τι σημαίνει στην προσέγγισή του «συνθήκες αλήθειας της πρότασης 'ο 3 είναι πρώτος'» τότε ο Balaguer απαντά ότι αφενός η προσέγγισή του προβλέπει πολλά τριάρια, αφετέρου το προηγούμενο ερώτημα μεταφράζεται ως: «πώς θα έπρεπε να είναι ο κόσμος ώστε η πρόταση 'ο 3 είναι πρώτος' να είναι αληθής;». Τα 'τριάρια' του Balaguer είναι εκείνα τα αντικείμενα που εμφανίζονται στην τρίτη θέση κάθε ω-ακολουθίας που εκφράζει τους φυσικούς αριθμούς. Συνεπώς το ερώτημα «πώς θα έπρεπε να είναι ο κόσμος ώστε η πρόταση 'ο 3 είναι πρώτος' να είναι αληθής;» μπορεί να απαντηθεί. Ο ίδιος απαντά (op.cit. 89-90) ότι για να είναι αληθής η πρόταση 'ο 3 είναι πρώτος' απαιτείται να υπάρχει ένα τουλάχιστον κλασικό μοντέλο της αριθμητικής και η πρόταση 'ο 3 είναι πρώτος' να είναι αληθής σε όλα τα κλασικά μοντέλα της αριθμητικής. Αυτό είναι κάτι που ισχύει και στον παραδοσιακό ρεαλισμό. Αυτό που τώρα αλλάζει είναι ότι μπορεί να υπάρχουν άπειρα αντικείμενα στα οποία να αναφέρεται ο όρος '3', δηλαδή περισσότερα από ένα αντικείμενα που αποτελούν 'τριάρια' μέσα στα κλασικά μοντέλα της αριθμητικής.

Κατά συνέπεια, ο Balaguer αντιμετωπίζει την μη μοναδικότητα των φυσικών αριθμών ως συμβατή με τον μαθηματικό ρεαλισμό. Το ότι η αναφορά των αριθμητικών όρων δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι τα αντικείμενα αναφοράς δεν είναι κατ'ανάγκην τα ίδια σε όλες τις ερμηνείες της αριθμητικής γλώσσας.

Γνωρίζουμε γενικά ότι διαφορετικές ερμηνείες της γλώσσας μιας μαθηματικής θεωρίας είναι δυνατές. Ειδικότερα, μια ερμηνεία της πρωτοβάθμιας γλώσσας L της μαθηματικής θεωρίας T λέγεται μοντέλο της θεωρίας όταν σ' αυτή την ερμηνεία, τα αξιώματα της θεωρίας είναι αληθή. (Αναπολιτάνος, Δ., 1985, 174-5) Συνεπώς είναι δυνατό να ερμηνεύσουμε το σύμβολο '2' της αριθμητικής γλώσσας με διάφορους τρόπους σε μια σειρά από διαφορετικά μοντέλα. Το αντικείμενο αναφοράς πχ. του αριθμητικού όρου '2' δεν είναι μοναδικό αλλά μπορεί να διαφέρει από μοντέλο σε μοντέλο της αριθμητικής. Αυτό ωστόσο δεν στερεί στις επί μέρους πραγματώσεις του '2' την ιδιότητα να συνιστούν αντικείμενα. Στην περίπτωση βέβαια που έχουμε να κάνουμε με μια κατηγορική θεωρία, έχουμε μοντέλα τα οποία είναι ισόμορφα μεταξύ τους. Τα μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν ότι περιγράφουν μια δυναμική πραγματικότητα η οποία μπορεί να *«τμηθεί»* ή να «*ανακατανεμηθεί*» (be carved up) κατά πολλούς δυνατούς διαφορετικούς τρόπους, όπως αυτοί εκδηλώνονται στα μοντέλα των μαθηματικών θεωριών.

Η παρουσία διαφορετικών μοντέλων των μαθηματικών θεωριών αποδεικνύει ότι ένα σύστημα αξιωμάτων δεν έχει μία και μοναδική πραγμάτωση. Θα μπορούσαμε δηλ. να ισχυριστούμε ότι μια θεωρία έχει διάφορες πραγματώσεις. Επομένως, ο μαθηματικός ρεαλισμός δεν θίγεται από τη στιγμή που επιλέγουμε να θεωρήσουμε εναλλακτικές πραγματώσεις ή εκφάνσεις των μαθηματικών θεωριών. Η μοναδικότητα μπορεί να εξασφαλιστεί το πολύ-πολύ μέχρι ισομορφισμού εφόσον έχουμε μια θεωρία 2^{ης} τάξης.

Κεφ. 10

Το πρόβλημα του Καίσαρος.

1. Ερμηνείες του προβλήματος

Στο κεφ.2 έγινε σύντομη αναφορά στη διαπίστωση από τον Frege ενός σημαντικού προβλήματος σχετικά με τις ισοδυναμίες D= και N= που επρόκειτο να παίξει στη συνέχεια καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη του λογικισμού του.

Ο Frege αποσκοπούσε μέσω των ισοδυναμιών D= και N= να παρουσιάσει κριτήρια ταυτότητας για τις ειδικές έννοιες της διεύθυνσης και του αριθμού. Αυτό που χρειαζόταν για να προσδιορίσει τους αριθμούς ως αντικείμενα, ήταν αναγκαίες και ικανές συνθήκες αλήθειας για κατάλληλες αναγνωριστικές προτάσεις, δηλαδή για ταυτότητες της μορφής «Nx:Fx = Nx:Gx». Η ισοδυναμία N= έχει το ρόλο να καθορίσει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την αλήθεια μιας τέτοιας ταυτότητας. Συνεπώς, εάν οι Nx:Fx, Nx:Gx θεωρηθούν ως ενικοί όροι και εάν η ταυτότητα «Nx:Fx = Nx:Gx» αποδειχθεί αληθής (το οποίο συμβαίνει όταν οι έννοιες F, G βρίσκονται σε μια 1-1 αντιστοιχία) τότε υπάρχει το κοινό αντικείμενο αναφοράς των ενικών αυτών όρων. Ετσι προκύπτει η ύπαρξη των αριθμών ως αντικειμένων. Για παράδειγμα, «ο αριθμός των παικτών μιας ομάδας κρίκετ είναι ο ίδιος με τον αριθμό των παικτών μιας ομάδας ποδοσφαίρου» συνιστά μία αληθή ταυτότητα, αφού υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των εννοιών 'παίκτης σε ομάδα κρίκετ' και 'παίκτης σε ομάδα ποδοσφαίρου'. Αρα, οι ενικοί όροι 'ο αριθμός των παικτών μιας ομάδας κρίκετ' και 'ο αριθμός των παικτών μιας ομάδας ποδοσφαίρου' αναφέρονται σε κάποιο αντικείμενο. Ετσι, στο πλαίσιο μιας αληθούς αριθμητικής ταυτότητας της μορφής «Nx:Fx = Nx:Gx», επιχειρείται ο προσδιορισμός της αναφοράς των αριθμητικών όρων. Αυτό που επιδίωκε δηλαδή ο Frege, είναι η λειτουργία των συγκεκριμένων ταυτοτήτων ως αναγνωριστικών προτάσεων, επειδή χάρη σ'αυτές μπορούμε να αναγνωρίσουμε έναν αριθμό ως τον ίδιο ξανά όταν τον συναντούμε. Ανάλογα ισχύουν για τις διευθύνσεις. Εάν η ταυτότητα «D(a) = D(b)» αποδειχθεί αληθής (το οποίο ισχύει όταν οι ευθείες a και b είναι παράλληλες) τότε οι ενικοί όροι D(a) και D(b) αναφέρονται σε κάποιο αντικείμενο. Ο προσδιορισμός της αναφοράς των όρων διεύθυνσης επιχειρείται στο πλαίσιο ταυτοτήτων της μορφής «D(a) = D(b)».

Ο Frege στην § 66 των Grundlagen έκανε την παρατήρηση ότι η ισοδυναμία D= δεν μας βοηθά να απαντήσουμε στο ερώτημα: «είναι η Αγγλία ταυτόσημη με τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής της γης;» Στο ερώτημα αν η Αγγλία είναι διεύθυνση, όλοι θα απαντούσαμε χωρίς δισταγμό: ασφαλώς όχι. Ομως πρέπει να παραδεχθούμε ότι η γνώση μας πως η Αγγλία δεν είναι διεύθυνση δεν προκύπτει από την ίδια την ισοδυναμία D=. Κανονικά, η ισοδυναμία θα έπρεπε να απαντά στο προηγούμενο ερώτημα αλλά δεν δείχνει καθόλου ικανή για κάτι τέτοιο. Γενικότερα δεν μπορεί να μας πληροφορήσει σχετικά με τις συνθήκες αλήθειας (μεικτών) ταυτοτήτων «D(a) = q» όπου η έκφραση ‘q’ δεν έχει την ίδια μορφή με το πρώτο μέλος της ταυτότητας, δηλ. δεν είναι της μορφής ‘D(b)’. Σ’αυτές τις ταυτότητες, μόνον ένας από τους όρους που ταυτίζονται ανήκει στο είδος που εισάγει η ισοδυναμία. Η σημασία του προβλήματος έγκειται στο ότι η D= δεν μπορεί να αποκλείσει την Αγγλία ή οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο από το πεδίο εφαρμογής της έννοιας της διεύθυνσης. Εάν τώρα μεταφέρουμε το πρόβλημα στην περίπτωση της ισοδυναμίας N=, τότε θα μπορούσε να μας τεθεί το ερώτημα «είναι ο Ιούλιος Καίσαρ ταυτόσημος με τον αριθμό των δορυφόρων της γης;» Οπως και στην προηγούμενη περίπτωση, γνωρίζουμε όλοι ότι ο Καίσαρ δεν θα μπορούσε να είναι ταυτόσημος με έναν αριθμό αλλά και πάλι πρέπει να παραδεχθούμε πως η γνώση μας αυτή δεν απορρέει από την ίδια την ισοδυναμία N= . Η N= δεν μπορεί να μας πληροφορήσει σχετικά με τις συνθήκες αληθείας μεικτών ταυτοτήτων «Nx:Fx = q» όπου η έκφραση ‘q’ δεν είναι της ίδιας μορφής με το πρώτο μέλος της ταυτότητας, δηλ. της μορφής ‘Nx:Gx’.

Κατά συνέπεια, δεν μπορεί να προσδιοριστεί (μέσω των ισοδυναμιών του Frege) η τιμή αληθείας μεικτών προτάσεων όπως πχ. : «ο αριθμός των δορυφόρων της γης = Ιούλιος Καίσαρ», «ο αριθμός των δορυφόρων της γης = {∅}», «η διεύθυνση του άξονα της γης = Αγγλία» κλπ.

Ο Frege (Grundlagen, § 68) θεώρησε[1] πολύ σοβαρό το ‘πρόβλημα του Καίσαρος’ διότι αποκάλυπτε μια σημαντική αδυναμία των ισοδυναμιών του στο να λειτουργήσουν ως ικανοποιητικοί πλαισιακοί ορισμοί. Γι αυτό το λόγο, ο ίδιος

[1] Πρλ. σχετική αναφορά στο κεφ.2. Το πρόβλημα του Καίσαρος διαπιστώθηκε για πρώτη φορά στην §56 των Grundlagen, αφού ο Frege πρότεινε τον επαγωγικό ορισμό για την έκφραση ‘ο αριθμός n ανήκει στην έννοια F’. Παρουσιάζεται επιπλέον για δεύτερη φορά στην §66 μετά την εισαγωγή της ισοδυναμίας D=.

αποφάσισε να κάνει μια κρίσιμη στροφή. Εγκατέλειψε την προσπάθεια διατύπωσης πλαισιακών ορισμών και στράφηκε σε ορισμούς στους οποίους έκανε χρήση εκτάσεων εννοιών. Ορισε δηλαδή την διεύθυνση της ευθείας a ως την *έκταση της έννοιας «παράλληλη με την ευθεία a»* δηλαδή ως την *κλάση των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία a*. Παρόμοια, όρισε τον αριθμό της έννοιας F ως την *έκταση της έννοιας «ισοπληθυκή με την έννοια F»* δηλαδή ως την *κλάση των εννοιών που είναι ισοπληθυκές με την έννοια F*. Στο θέμα αυτό αναφερθήκαμε στο κεφ.2.

Τι πραγματικά συμβαίνει όμως στις ισοδυναμίες D= και N= ; Χρειάζεται να διασαφηνίσουμε περαιτέρω το πρόβλημα του Καίσαρος, κάνοντας μερικές ακόμα επισημάνσεις.

α. Το πρόβλημα μπορεί να γίνει κατανοητό αν αναλογισθούμε τον ρόλο των ισοδυναμιών αυτών. Οι ισοδυναμίες D= και N= στοχεύουν στην εισαγωγή και εξήγηση των εννοιών της διεύθυνσης και του φυσικού αριθμού αντίστοιχα. Για να εκπληρώσει το ρόλο της πχ. η N=, δηλαδή για να εισαγάγει με επιτυχία την ειδική έννοια του αριθμού, οφείλει να εκπληρώνει δύο στόχους: *1) να καθιστά σαφές πότε δύο αντικείμενα που εμπίπτουν σ'αυτή την έννοια είναι ταυτόσημα και πότε διακριτά (κριτήριο ταυτότητας) και 2) να καθιστά σαφές πότε ένα ήδη γνωστό αντικείμενο εμπίπτει στην έννοια και πότε όχι (κριτήριο εφαρμογής)*. Ετσι, για να χρησιμοποιήσουμε ένα απλό παράδειγμα, η ειδική έννοια του «αιλουροειδούς» εισάγεται επιτυχώς όταν έχουμε στα χέρια μας ένα κριτήριο ταυτότητας το οποίο θα μας πληροφορεί πότε δύο αιλουροειδή ταυτίζονται και όταν έχουμε στα χέρια μας ένα κριτήριο εφαρμογής το οποίο θα μας πληροφορεί πότε μια οποιαδήποτε οντότητα εμπίπτει στην έννοια του αιλουροειδούς.

Ας σημειωθεί ότι η N= λειτουργεί ως κριτήριο ταυτότητας επειδή μας δίνει τη δυνατότητα να διακρίνουμε εάν ο αριθμός της έννοιας F και ο αριθμός της έννοιας G είναι ταυτόσημοι ή όχι. Αυτό το οποίο, ωστόσο, αποκαλύπτει το πρόβλημα του Καίσαρος, είναι ότι η N= δεν μπορεί να ανταποκριθεί ως προς το δεύτερο, δηλαδή αδυνατεί να λειτουργήσει επαρκώς ως κριτήριο εφαρμογής. Αυτό σημαίνει ότι δεν μας δίνει τη δυνατότητα να διακρίνουμε εάν η έννοια του αριθμού εφαρμόζεται σε ένα ήδη γνωστό αντικείμενο. Δεν μας δίνει επομένως τη δυνατότητα να απαντήσουμε στο ερώτημα εάν ο Ιούλιος Καίσαρ είναι αριθμός ή όχι και –για να χρησιμοποιήσουμε ένα λιγότερο ακραίο παράδειγμα– εάν πχ. η κλάση $\{\varnothing\}$ είναι αριθμός ή όχι. Μπορεί το παράδειγμα του Frege για τον Ιούλιο Καίσαρα να είναι ακραίο αλλά σε κάθε περίπτωση αποκαλύπτει την αδυναμία της N= να διαχωρίσει ποια αντικείμενα εμπίπτουν στην έννοια του αριθμού και ποια όχι.

β. Το πρόβλημα του Καίσαρος έχει ωστόσο μια ακόμα διάσταση που συνδέεται με την απροσδιοριστία της αναφοράς. Τόσο στην περίπτωση της D= όσο και στην περίπτωση της N=, δεν μπορούμε να αποκλείσουμε αντίστοιχα την Αγγλία από αντικείμενο αναφοράς του όρου D(a) και τον Ιούλιο Καίσαρα από αντικείμενο αναφοράς του όρου Nx:Fx. Δεν μπορούμε δηλαδή να προσδιορίσουμε με μονοσήμαντο τρόπο την αναφορά των κρίσιμων όρων, την αναφορά του όρου ‘ο αριθμός της έννοιας’ και την αναφορά του όρου ‘η διεύθυνση της ευθείας’. Για παράδειγμα, ποια είναι η αναφορά της έκφρασης ‘ο αριθμός των δορυφόρων της γης’; Μπορεί να είναι ο Ιούλιος Καίσαρ; μπορεί να είναι το σύνολο $\{\varnothing\}$; ο γνωστός μας αριθμός 1; Το πρόβλημα λοιπόν συνδέεται με το δίλημμα του Benacerraf που παρακολουθήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επειδή η ισοδυναμία N= δεν μπορεί να περιχαρακώσει τα αντικείμενα αναφοράς των όρων Nx:Fx, γι αυτό δεν μας βοηθά να αποκλείσουμε τον Ιούλιο Καίσαρα ή άλλο συγκεκριμένο ή αφηρημένο αντικείμενο από αντικείμενο αναφοράς ενός τέτοιου όρου. Ανάλογα, η D= δεν μπορεί να αποκλείσει την Αγγλία ή κάποιο άλλο αντικείμενο από αντικείμενο αναφοράς του όρου D(a).

Οπως επισημάνθηκε στο κεφ.7, η αναφορά ενός όρου στην προσέγγιση του νεολογικισμού δεν προσδιορίζεται με μεθόδους αιτιακές ή μεθόδους «κατάδειξης». Θεωρείται ως ένα από τα προβλήματα του μαθηματικού ρεαλισμού, το γεγονός ότι τα αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων δεν μπορούν να προσδιοριστούν με οποιοδήποτε *φυσικό* τρόπο, αφού καμία φυσική αλληλεπίδραση του γνώστη μαζί τους δεν είναι δυνατή. Όμως τονίζουμε και πάλι ότι στη φιλοσοφία του Frege, ο προσδιορισμός της αναφοράς ενός όρου –σε αντίθεση με ό,τι πιστεύουν οι εμπειριστές φιλόσοφοι- δεν απαιτεί αιτιακές θεωρίες αναφοράς ή εμπειρικές μεθόδους κατάδειξης κλπ. αλλά επιτυγχάνεται μέσω του καθορισμού των συνθηκών αλήθειας κατάλληλων προτάσεων–πλαισίων. Η αντίληψη του Frege εκφράζεται μέσω της *αρχής του πλαισίου*, σύμφωνα με την οποία ποτέ δεν πρέπει να προσδιορίζουμε το νόημα[2] ενός όρου ανεξάρτητα από τη θέση του μέσα σε μία αληθή πρόταση-πλαίσιο. Ο νεολογικισμός ερμηνεύει την αρχή του πλαισίου με τον ισχυρισμό ότι ποτέ δεν

[2] Όταν διατύπωσε ο Frege την αρχή του πλαισίου δεν είχε διαχωρίσει ακόμα τη σημασία από την αναφορά.

πρέπει να προσδιορίζουμε την αναφορά ενός όρου ανεξάρτητα από μια αληθή πρόταση-πλαίσιο. Συνεπώς, η αναφορά των όρων Nx:Fx, Nx:Gx θα έπρεπε να προσδιορίζεται στο πλαίσιο της ταυτότητας «Nx:Fx = Nx:Gx», όταν αποδειχθεί ότι αυτή είναι αληθής. Όμως, η ερμηνευτική προσέγγιση του προβλήματος του Καίσαρος που εξετάζουμε εδώ υποδεικνύει ότι η N= δεν μπορεί από μόνη της να αποκλείσει διάφορες οντότητες από αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων, συνεπώς θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι δεν είναι εφικτός μέσω της N= ο προσδιορισμός των αντικειμένων αναφοράς των αριθμητικών όρων κατά μονοσήμαντο τρόπο. Αρα, η αδυναμία που η N= παρουσιάζει ως πλαισιακός ορισμός αποτελεί σημαντικό πρόβλημα για την απαίτηση που θέτει η φιλοσοφία του Frege σχετικά με τη μοναδικότητα των αριθμών ως αντικειμένων.

γ. Μια άλλη μορφή του προβλήματος του Καίσαρος εκθέτει ο Harrold Hodes (1984, 134-5). Πιστεύει ότι κάθε ενικός όρος Nx:Fx προκύπτει με τη συμπλήρωση της συναρτησιακής έκφρασης ‘ο αριθμός της έννοιας ( )’ με την έκφραση μιας έννοιας F. Θεωρεί ότι στην πραγματικότητα έχουμε έναν συναρτησιακό μηχανισμό $2^{ης}$ τάξης ο οποίος αντιστοιχίζει στην έννοια F το αντικείμενο αναφοράς του όρου Nx:Fx (τον αριθμό της έννοιας F). Όπως έχουμε δει, μέσω της ισοδυναμίας N= , οι αντιστοιχίσεις αυτές γίνονται ως εξής: στην έννοια ‘x≠x’ αντιστοιχίζεται το *μηδέν* του Frege, δηλ. το αντικείμενο αναφοράς του όρου Nx:x≠x. Στην έννοια ‘x=0’ αντιστοιχίζεται το *ένα* του Frege, δηλ. το αντικείμενο αναφοράς του όρου Nx:x=0 κ.ο.κ. Όπως αναφέρει ο Hodes στο ίδιο σημείο, σε κάθε έννοια που δεν έχει πραγματώσεις αντιστοιχίζεται ο αριθμός μηδέν, σε κάθε έννοια που έχει μία πραγμάτωση αντιστοιχίζεται ο αριθμός ένα, σε κάθε έννοια που έχει δύο πραγματώσεις αντιστοιχίζεται ο αριθμός δύο, κ.ο.κ.

Ο Gideon Rosen (2003, 231-2) επίσης ακολουθώντας την ίδια ιδέα, αναφέρεται στον παραπάνω συναρτησιακό μηχανισμό, τον οποίο ονομάζει αριθμητή. Στη συνέχεια, θα τον αποκαλούμε «αριθμητικό τελεστή». Τόσο ο Hodes όσο και ο Rosen πιστεύουν ότι ο εν λόγω αριθμητικός τελεστής ή αριθμητής μπορεί να λάβει διάφορες σημασιολογικές ερμηνείες. Μία από αυτές μας δίνει τον «καθιερωμένο» (standard) τελεστή που μόλις περιγράψαμε. Η σκοπούμενη (intended) ερμηνεία του αριθμητικού τελεστή N είναι ο καθιερωμένος αριθμητής για τον οποίο ισχύει ότι $Nx{:}Fx = n \leftrightarrow \exists_n x\, Fx$. Ο καθιερωμένος αριθμητής συνδέει την αριθμητική που προκύπτει από το σύστημα της λογικής $2^{ης}$ τάξης + N= (δηλ. την $2^{ης}$ τάξης αριθμητική Frege) με τη γνωστή μας αριθμητική που χρησιμοποιούμε με επιτυχία στις φυσικές εφαρμογές. Θεωρούν ωστόσο ότι ο καθιερωμένος αριθμητής δεν είναι ο μοναδικός. Η δυνατότητα πολλών ερμηνειών και η επακόλουθη δυνατότητα θεώρησης διαφορετικών αριθμητών έχει ως αποτέλεσμα η έκφραση Nx:Fx να δέχεται διαφορετικές αναφορές. Κατά συνέπεια, δεν έχει νόημα να ρωτά κανείς γενικά ποια είναι η αναφορά του αριθμητικού όρου Nx:Fx αλλά έχει νόημα να ρωτά ποια είναι η αναφορά του όρου αυτού σε μια συγκεκριμένη ερμηνεία. Σε διαφορετικές αποδεκτές ερμηνείες, ο εν λόγω αριθμητικός όρος αναφέρεται σε διαφορετικά αντικείμενα. Φυσικά, μια αποδεκτή ερμηνεία θα πρέπει βέβαια να αποδίδει στον όρο Nx:Fx και στον όρο Nx:Gx την ίδια αναφορά όταν και μόνο όταν υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των εννοιών F και G. Το ποιο αντικείμενο αναφοράς τους αποδίδεται, είναι ωστόσο κάτι που διαφέρει από ερμηνεία σε ερμηνεία.

Οι Rosen και Hodes επισημαίνουν ότι ο καθιερωμένος αριθμητικός τελεστής έχει μια προτεραιότητα και μια ειδική βαρύτητα την οποία ένας μαθηματικός ρεαλιστής οφείλει να εξηγήσει. Οφείλει δηλαδή να εξηγήσει με ποιο τρόπο ο καθιερωμένος αριθμητικός τελεστής κατορθώνει να προσελκύει τις σκοπούμενες αναφορές των αριθμητικών όρων. Το βέβαιο είναι πάντως ότι η ίδια η ισοδυναμία N= δεν μπορεί από μόνη της να δικαιολογήσει αυτή την ιδιαίτερη βαρύτητα του καθιερωμένου τελεστή. Χρειάζεται κάτι περισσότερο για να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο ο καθιερωμένος αριθμητής προσελκύει στον εαυτό του την σκοπούμενη αναφορά. Ο Hodes μάλιστα παρατηρεί ότι αυτό το «κάτι περισσότερο» λείπει κάθε φορά που επιδιώκουμε να αποδόσουμε την αναφορά σε έναν αφηρημένο όρο, ακριβώς επειδή δεν μπορούμε να αντλήσουμε βοήθεια από εμπειρικές πηγές όπως η αισθητηριακή αντίληψη, η κατάδειξη ή η αιτιακή σχέση.

2. Απόπειρες των Hale & Wright για τη θεραπεία του προβλήματος του Καίσαρος

Για το πρόβλημα του Καίσαρος, έχει αναπτυχθεί και διεξάγεται μεγάλη συζήτηση. Όπως έχουμε ξανά τονίσει, η σημασία της ισοδυναμίας N= για το νεολογικισμό είναι μεγάλη επειδή θεωρείται έμμεσος ορισμός της έννοιας του φυσικού αριθμού και επειδή παρέχει τους φυσικούς αριθμούς όταν αληθείς προτάσεις τοποθετηθούν στη δεξιά πλευρά της. Συνεπώς καθετί που εμφανίζεται ως αποτυχία της να εισαγάγει τους φυσικούς αριθμούς, υπονομεύει το όλο πρόγραμμα ανασυγκρότησης των βασικών αρχών της φιλοσοφίας των αριθμών του Frege.

Όπως είδαμε, σύμφωνα με μια ερμηνευτική προσέγγιση, το πρόβλημα του Καίσαρος επηρεάζει αρνητικά το θέμα του προσδιορισμού της αναφοράς των αριθμητικών όρων, με την έννοια ότι η N= δεν αποκλείει ένα αντικείμενο πχ. τον Καίσαρα ή το σύνολο $\{\{\varnothing\}\}$ από αντικείμενο αναφοράς ενός αριθμητικού όρου ‘Nx:Fx’ για κάποια έννοια F. Ο Wright αναφερόμενος σε ένα είδος *απροσδιοριστίας* σχετικά με την αναφορά, σχολιάζει ότι δεν πρόκειται για κάτι που αφορά ειδικά την περιοχή της αριθμητικής. Γι αυτό το λόγο, υπενθυμίζει το επιχείρημα του Quine για την γενικότερη απροσδιοριστία που χαρακτηρίζει την αναφορά των όρων. Όπως είναι γνωστό, ο Quine (1973, 53−4) έχει θέσει γενικά το ζήτημα αυτό, υποστηρίζοντας ότι διάφορες ερμηνείες μιας συγκεκριμένης έκφρασης είναι δυνατές, φτάνει μάλιστα στο σημείο να θεωρεί ότι ακόμα και η αναφορά ενός εμπειρικού όρου πχ. «λαγός» χαρακτηρίζεται από απροσδιοριστία. Στην προκειμένη περίπτωση των αριθμητικών όρων, θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι έχουμε ένα ισχυρό παράδειγμα της απροσδιοριστίας της μετάφρασης της γλώσσας της αριθμητικής στη γλώσσα πχ. των κλάσεων. Οπως ο Wright συμπληρώνει, αυτή η δυσκολία δεν χαρακτηρίζει μόνον την αναφορά των αριθμητικών εκφράσεων. Δεν πρόκειται για μια αδυναμία που αφορά ειδικά και μόνο την αριθμητική γλώσσα και επομένως η αδυναμία αυτή δεν μας δίνει το δικαίωμα να αμφισβητήσουμε την αναφορά των αριθμητικών εκφράσεων ως μη γνήσια. Ο ισχυρισμός του Wright είναι ακριβώς ότι: *όπως τα επιχειρήματα του Quine για την απροσδιοριστία της αναφοράς δεν μας οδηγούν κατ'ανάγκην στην απόρριψη της αναφοράς των ενικών όρων που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή γλώσσα, έτσι και στην ειδικότερη περίπτωση των μαθηματικών, δεν πρέπει να κλονίζεται η εμπιστοσύνη μας στην αναφορά των μαθηματικών ενικών όρων (Wright, 1983, 127).*

Κάποιοι θεωρούν ότι η περίπτωση των μαθηματικών είναι εντελώς διαφορετική. Παρουσιάζει ενδιαφέρον πχ. μια διαφωνία μεταξύ των Hazen και McGinn σχετικά με το αν η απροσδιοριστία της μαθηματικής αναφοράς αποτελεί ή όχι μια ειδική περίπτωση. Σύμφωνα με την άποψη McGinn, η απροσδιοριστία της μετάφρασης της λέξης ΄gavagai' εξαρτάται από την απροσδιοριστία μετάφρασης άρθρων, αντωνυμιών, κατηγορημάτων και μάλιστα του κατηγορήματος ταυτότητας της πρωτόγονης γλώσσας, δηλαδή το να μεταφράσουμε τη λέξη 'gavagai' ως 'λαγός' ή ως 'λαγο−κατάσταση' ή ως 'αδιαχώριστο τμήμα λαγού' εξαρτάται από το πώς εννοούμε το πρωταρχικό (primitive) κατηγόρημα ταυτότητας, έτσι ώστε να προκύπτουν οι ακόλουθες μεταφράσεις των ταυτοτικών προτάσεων : 'α είναι ο ίδιος λαγός με β', 'α είναι μια κατάσταση του ίδιου λαγού όπως β' , 'α είναι ένα αδιαχώριστο τμήμα του ίδιου λαγού όπως β' (McGinn, M., 1984, 69−72). Ενώ στην περίπτωση των μαθηματικών, η αποδοχή πχ. της κατά Zermelo ή της κατά Von Neumann εκδοχής των αριθμών δεν προϋποθέτει τη μετάφραση του κατηγορήματος ταυτότητας. Αυτό συμβαίνει γιατί η απροσδιοριστία δεν πλήττει τη συνολική μαθηματική γλώσσα αλλά μόνον τους ενικούς της όρους. Γι αυτό το λόγο, η περίπτωση της απροσδιοριστίας των μαθηματικών όρων είναι διαφορετική από την γενικότερη απροσδιοριστία την οποία θίγει ο Quine και επομένως ο μαθηματικός ρεαλιστής οφείλει να μάθει να ζει μαζί της (McGinn, op.cit., 71−2). Ο Allen Hazen διαφωνεί με το προηγούμενο επιχείρημα. Πιστεύει ότι είναι λανθασμένη η προαναφερθείσα άποψη ότι δηλαδή, ενώ στην περίπτωση της μετάφρασης της λέξης 'gavagai' προϋποτίθεται μετάφραση του κατηγορήματος ταυτότητας της πρωτόγονης γλώσσας, αυτό δεν απαιτείται στην περίπτωση της μετάφρασης των αριθμών σε συνολοθεωρητική γλώσσα. Και η άποψη αυτή είναι λανθασμένη διότι κατά τη μετάφραση των φυσικών αριθμών σε συνολοθεωρητική γλώσσα, η ταυτότητα μεταξύ φυσικών αριθμών πρέπει επίσης να μεταφραστεί ως 1−1 αντιστοιχία. Κατά συνέπεια, η απροσδιοριστία στην περίπτωση των μαθηματικών δεν διαφέρει σε τίποτα από το γενικότερο φαινόμενο απροσδιοριστίας της αναφοράς. Επομένως ο μαθηματικός ρεαλιστής δεν έχει να αντιμετωπίσει ένα ιδιαίτερο πρόβλημα που αφορά μόνο την περιοχή του και δεν εμφανίζεται σε άλλες περιοχές της φιλοσοφίας.

Είτε θεωρήσουμε την απροσδιοριστία της μαθηματικής αναφοράς ως μια υπο−περίπτωση της γενικότερης απροσδιοριστίας της αναφοράς είτε ως μια τελείως ειδική περίπτωση για τα μαθηματικά, χρειάζεται να την αποδεχθούμε και να την αντιμετωπίσουμε. Το ερώτημα που τίθεται είναι κατά πόσον ένας μαθηματικός ρεαλιστής μπορεί να μάθει να ζεί με την απροσδιοριστία της αναφοράς, (cf. Hale, 1987, 199).

Οι επικριτές του νεολογικισμού θεωρούν ότι η σοβαρότητα του προβλήματος του Καίσαρος δικαιώνει τον Frege, ο οποίος εγκατέλειψε την προσπάθεια ορισμού των φυσικών αριθμών μέσω ενός πλαισιακού ορισμού. Αντίθετα, οι Hale και Wright πιστεύουν ότι ο Frege έπρεπε να διατηρήσει την ισοδυναμία Ν= στο πρόγραμμά του στην αρχική της θέση και να μην προχωρήσει σε ορισμούς μέσω εκτάσεων. Αλλωστε, επισημαίνουν, το γεγονός ότι ο Frege στράφηκε σε εκτασιακούς ορισμούς, τον οδήγησε σε ασυνέπεια και τελικά σε κατάρρευση του προγράμματός του. Οι ίδιοι οι νεολογικιστές διατηρούν στο πρόγραμμά τους την ισοδυναμία Ν= και της δίνουν μάλιστα θεμελιώδη θέση ως έμμεσο ορισμό της έννοιας του φυσικού αριθμού, κάτι τέτοιο όμως καθιστά συγχρόνως επιτακτική τη λύση του προβλήματος του Καίσαρος. Γι αυτό το λόγο, οι Hale & Wright έχουν καταβάλει επανειλημμένα προσπάθειες για τη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος.

Μία προσπάθεια των Hale & Wright (2001, 389-93) για την αντιμετώπιση του προβλήματος του Καίσαρος συνδέεται με τα κριτήρια ταυτότητας των ειδικών εννοιών. Μία τέτοια προσπάθεια συνίσταται στον διαχωρισμό των ‘ειδών’. Κάθε *είδος* αντικειμένων περιγράφεται από μια ειδική έννοια και κάθε ειδική έννοια συνδέεται με ένα κριτήριο ταυτότητας. Το ερώτημα που οι Hale & Wright εξετάζουν, είναι κατά πόσον οι αριθμοί και τα πρόσωπα μπορεί να μοιράζονται τα ίδια κριτήρια ταυτότητας. Για παράδειγμα, οι ειδικές έννοιες ‘τίγρης’, ‘αιλουροειδές’, ‘θηλαστικό’ μοιράζονται κριτήρια ταυτότητας με την ειδική έννοια ‘ζώο’. Μπορεί να υποστηριχθεί ότι κάποιες διαφορετικές ειδικές έννοιες υπάγονται σε μια ευρύτερη ειδική έννοια, που ονομάζεται ‘κατηγορία’. Τότε, όλες οι υπο-ειδικές έννοιες μοιράζονται μεταξύ τους ένα κριτήριο ταυτότητας, το κριτήριο ταυτότητας της ευρύτερης κατηγορίας. Είδη που δεν μοιράζονται κριτήρια ταυτότητας δεν μπορούν να ανήκουν στην ίδια κατηγορία. Για παράδειγμα, η ειδική έννοια ‘τίγρης’ υπάγεται στην ειδική έννοια ‘ζώο’ και η ειδική έννοια ‘φιλόσοφος’ υπάγεται στην ειδική έννοια ‘πρόσωπο’ αλλά μπορεί να υποστηριχθεί ότι οι ειδικές έννοιες ‘αριθμός’ και ‘πρόσωπο’ δεν υπάγονται στην ίδια κατηγορία. Στις δύο τελευταίες έννοιες, τα κριτήρια ταυτότητας δεν συμπίπτουν αλλά και δεν υπάγονται σε κάποιο άλλο κοινό κριτήριο ταυτότητας. Με αυτόν τον τρόπο, οι Hale & Wright πιστεύουν ότι ο Καίσαρ πρέπει να αποκλεισθεί, δεδομένου ότι οι έννοιες ‘αριθμός’ και ‘πρόσωπο’ δεν είναι δυνατό να υπαχθούν σε κάποια ευρύτερη κοινή κατηγορία.

Όμως, η συγκεκριμένη προσπάθεια αντιμετώπισης του προβλήματος πάσχει από διάφορα προβλήματα όπως πχ. κυκλικότητα. Κατ’αρχήν δεν αποδεικνύει την μη ύπαρξη ευρύτερης κατηγορίας στην οποία, οι έννοιες 'πρόσωπο' και 'αριθμός' θα μπορούσαν να υπάγονται. Μια τέτοια απόδειξη δεν θα μπορούσε άλλωστε να δοθεί δεδομένου ότι.οι Hale & Wright δεν διαθέτουν άλλον, ανεξάρτητο τρόπο ορισμού της έννοιας του αριθμού, πέρα από την ίδια την N=. Αυτή αποτελεί για το νεολογικισμό, το πρωταρχικό μέσο εισαγωγής της έννοιας του αριθμού. Μέσω της N= υποτίθεται ότι ο οποιοσδήποτε ανυποψίαστος περί τους αριθμούς μπορεί να κατανοήσει την έννοια του αριθμού. Αφού λοιπόν –σύμφωνα με το νεολογικισμό- δεν υπάρχει ανεξάρτητος τρόπος εισαγωγής της έννοιας του αριθμού, η οντολογική κατηγορία των αριθμών δεν μπορεί να καθοριστεί με άλλον τρόπο παρά μόνο μέσω της ίδιας της N=. Ωστόσο, το πρόβλημα του Καίσαρος έχει δείξει ότι η N= δεν μπορεί να καθορίσει την οντολογική κατηγορία των αριθμών με τέτοιο τρόπο, ώστε να αποκλείεται η εφαρμογή της σε πρόσωπα. Επομένως, καταλήγουμε και πάλι στο σημείο απ'όπου ξεκινήσαμε.

Μία άλλη προσπάθεια του Wright (1983, 122) για την αντιμετώπιση του προβλήματος του Καίσαρος δεν χαρακτηρίζεται από κυκλικότητα όπως η προηγούμενη αλλά υστερεί εξίσου σε αποτελεσματικότητα. Συμβαίνει συχνά, όπως προαναφέρθηκε, μια ειδική έννοια να είναι ευρύτερη και να περιλαμβάνει κάποια άλλη. Πχ. η έννοια 'αιλουροειδές' είναι ευρύτερη από την έννοια 'τίγρης'. Οταν συμβαίνει κάτι τέτοιο, όταν δηλαδή η έκταση της μιας ειδικής έννοιας περιλαμβάνει την έκταση μιας άλλης, τότε προϋποτίθεται ότι *γεγονότα που αφορούν την ταυτότητα ή τη διάκριση των αντικειμένων της δεύτερης συνιστούν ταυτόχρονα και γεγονότα που αφορούν την ταυτότητα ή τη διάκριση αντικειμένων της πρώτης* (sortal inclusion principle). Κατά συνέπεια εάν αυτή η αρχή εφαρμοστεί, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι: για να είναι κάποια αντικείμενα ταυτόσημα με τους φυσικούς αριθμούς, θα πρέπει η ταυτότητα ή η διαφορά τους να εξαρτάται από γεγονότα σχετικά με την ύπαρξη μιας 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ εννοιών. Με βάση την προηγούμενη αρχή, θα μπορούσε κάποιος να ισχυρισθεί ότι η ισοδυναμία N= δεν αποτελεί απλώς και μόνον ένα κριτήριο ταυτότητας αλλά λειτουργώντας ως κριτήριο ταυτότητας παρέχει ταυτόχρονα και ένα κριτήριο εφαρμογής.

Με τον τρόπο αυτό, ο Wright συμπεραίνει ότι ο Καίσαρ ή άλλα πρόσωπα δεν μπορεί να ταυτίζονται με αριθμούς, αφού οι συνθήκες αλήθειας της ταυτότητας ή της διάκρισης των προσώπων δεν μπορούν να εκφρασθούν με όρους 1-1 αντιστοιχιών μεταξύ εννοιών. Ας εξετάσουμε όμως ένα λιγότερο ακραίο παράδειγμα από αυτό του Ιούλιου Καίσαρος. Τι θα αποφασίζαμε σχετικά με τις κλάσεις; Οπως παρατηρεί απαισιόδοξα ο Mac Bride (2003, 130), ακόμα και αν πεισθούμε ότι η έννοια του αριθμού − έτσι όπως εισάγεται από την N= − δεν εφαρμόζεται στον Ιούλιο Καίσαρα, και πάλι δεν μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα όταν στη θέση του Καίσαρος σκεφτούμε μια κλάση. Πώς θα αντιμετωπίσουμε την πιθανή ταυτότητα αριθμών και κλάσεων;

Ο Hale αναλαμβάνει να απαντήσει στο προηγούμενο ερώτημα (1987, 199) για τα σύνολα ή τις κλάσεις που είναι συμβατά με την N= δηλαδή:

a) τα σύνολα του Zermelo

$\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\{\{\varnothing\}\}\}$, ...

b) τα σύνολα του Von Neumann

$\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, ...

c) τις κλάσεις εννοιών που βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με την έννοια F

d) τις κλάσεις κλάσεων που βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με μια δεδομένη κλάση a.

Ο Hale επιχειρεί να εφαρμόσει την αρχή του Wright που προαναφέρθηκε (sortal inclusion principle) για να εξετάσει ποια σύνολα μπορούν να αποκλειστούν ως υποψήφια να θεωρηθούν αριθμοί. Θέτει το ερώτημα (op.cit. 201 κ.ε.): ποια σύνολα υπακούουν στο κριτήριο ταυτότητας των φυσικών αριθμών; Εάν οποιαδήποτε αντικείμενα είναι φυσικοί αριθμοί τότε θα πρέπει να υπάγονται σ'αυτό το κριτήριο ταυτότητας. Αλλά και τα σύνολα έχουν τα δικά τους κριτήρια ταυτότητας (τα οποία κυρίως βασίζονται στο τι συνιστά μέλος), συνεπώς ο Hale αισθάνεται υποχρεωμένος να εξετάσει σε ποιες περιπτώσεις τα ερωτήματα για την ταυτότητα ή τη διάκριση των συνόλων ερμηνεύονται τελικά ως ερωτήματα σχετικά με 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ εννοιών. Όπως θα διαπιστώσουμε, η μέθοδος του Hale δεν τον οδηγεί στο επιθυμητό γι αυτόν αποτέλεσμα το οποίο θα ήταν να καταλήξει σε ένα μοναδικό είδος κλάσεων για το ρόλο των φυσικών αριθμών.

Ας τον ακολουθήσουμε, εξετάζοντας πρώτα τα σύνολα του Zermelo. Ο Hale ισχυρίστηκε ότι αυτά τα σύνολα μπορούν να αποκλειστούν ως υποψήφια αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων. Με βάση την αρχή που προαναφέρθηκε, για να είναι κάποια αντικείμενα αριθμοί, θα πρέπει γεγονότα που αφορούν την ταυτότητα ή τη διαφορά τους να συνιστούν γεγονότα που αφορούν 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ εννοιών. Σε ότι αφορά τα σύνολα του Zermelo, παρατηρούμε ότι η ταυτότητα ή η διαφορά δύο τέτοιων συνόλων δεν μπορεί να εκφραστεί με όρους 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ εννοιών. Πράγματι, αυτό οφείλεται στο ότι, αν εξαιρέσουμε το πρώτο σύνολο αυτής της κατηγορίας δηλαδή το κενό σύνολο, τότε όλα τα υπόλοιπα σύνολα έχουν ακριβώς ένα μέλος, είναι δηλαδή ισοπληθυκά μεταξύ τους. Γι αυτό το λόγο δεν έχει νόημα να θεωρήσουμε ότι οποιοδήποτε ερώτημα για την ταυτότητα δύο τέτοιων συνόλων θα μπορούσε να απαντηθεί με βάση μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ δύο εννοιών.

Ας προχωρήσουμε τώρα στο επόμενο είδος. Στην περίπτωση των συνόλων του Von Neumann, τα πράγματα είναι διαφορετικά. Εδώ κάθε σύνολο έχει διαφορετική πληθυκότητα από το προηγούμενό του και για να ταυτίζονται δύο τέτοια σύνολα πρέπει υποχρεωτικά να έχουν την ίδια πληθυκότητα. Αρα στην περίπτωση αυτή, η έννοια της 1-1 αντιστοιχίας φαίνεται να συνδέεται στενά με την ταυτότητα δύο συνόλων (cf. Hale, 1987, 203). Ερωτήματα σχετικά με την ταυτότητα δύο συνόλων του Von Neumann συνδέονται ασφαλώς με ερωτήματα σχετικά με την ύπαρξη 1-1 αντιστοιχιών. Τι σημαίνει όμως αυτό; Ότι τα σύνολα του Von Neumann μοιράζονται με τους αριθμούς το ίδιο κριτήριο ταυτότητας;

Μπορούμε να αντιδράσουμε με τους εξής τρόπους: α. να δεχθούμε ότι τα σύνολα του von Neumann εμπίπτουν στο κριτήριο ταυτότητας των αριθμών, δεδομένου ότι η ταυτότητα ή η διαφορά δύο τέτοιων συνόλων μπορεί να εκφραστεί με όρους 1-1 αντιστοιχίας. β. να αποκλείσουμε τα σύνολα του von Neumann από υποψήφιους αριθμούς. Για να γίνει αυτό, πρέπει να ισχυροποιήσουμε το κριτήριο ταυτότητας των αριθμών, έτσι ώστε τα σύνολα του von Neumann να μην εμπίπτουν σ'αυτό. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να ισχυροποιήσουμε τη σύνδεση μεταξύ της ταυτότητας δύο αντικειμένων και της 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ εννοιών. Μπορούμε δηλαδή να εισαγάγουμε μια περιοριστική αρχή (P) σύμφωνα με την οποία, δύο αντικείμενα εμπίπτουν στην έννοια του αριθμού όταν και μόνο όταν για την κατανόηση της ταυτότητάς τους είναι απολύτως αναγκαία η διαπίστωση μιας 1-1 αντιστοιχίας. Με άλλα λόγια, εάν δύο ενικοί όροι παριστάνουν όντως αριθμούς τότε κανείς δεν θα μπορεί να κατανοήσει την ταυτότητά τους χωρίς να διαπιστώσει την ύπαρξη μιας 1-1 αντιστοιχίας. Ετσι, εάν για δύο αντικείμενα συμβαίνει να είναι δυνατή η κατανόηση της ταυτότητάς τους και χωρίς τη διαπίστωση μιας 1-1 αντιστοιχίας τότε τα αντικείμενα αυτά δεν θα είναι κατ'ανάγκην αριθμοί. Στην προκειμένη περίπτωση των συνόλων του von Neumann, συμβαίνει λοιπόν να είναι δυνατή η κατανόηση της ταυτότητας δύο τέτοιων συνόλων με βάση και μόνον τα μέλη τους και χωρίς να διαπιστωθεί η ύπαρξη μιας 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ εννοιών.

Αφού λοιπόν μπορούμε να διαπιστώσουμε την ταυτότητα δύο συνόλων του von Neumann και χωρίς το κριτήριο ταυτότητας των αριθμών, τότε μπορούμε και να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι αυτά τα σύνολα δεν είναι κατ'ανάγκη αριθμοί (περίπου αυτή την στάση κρατά ο Hale, 1987, 207).

Στη συνέχεια εξετάζουμε τις κλάσεις που μπορούμε να ονομάζουμε *κλάσεις πληθυκότητας (cardinality classes)*, δηλαδή τις κλάσεις που ορίζονται ως εξής: Εστω πχ. α) η κλάση των εννοιών που είναι ισοπληθυκές με μια δεδομένη έννοια F (δηλ. η κλάση όλων των εννοιών που μπορούν να τεθούν σε 1-1 αντιστοιχία με μια δεδομένη έννοια F). Πρόκειται για τις κλάσεις του Frege. β) Εστω η κλάση των κλάσεων που είναι ισοπληθυκές με μια δεδομένη κλάση a (δηλ. η κλάση όλων των κλάσεων που μπορούν να τεθούν σε 1-1 αντιστοιχία με μια δεδομένη κλάση a). Είναι αλήθεια ότι και στις δύο αυτές περιπτώσεις, για να είναι κανείς σε θέση να κατανοήσει την ταυτότητα μεταξύ δύο κλάσεων, προϋποτίθεται εκ των πραγμάτων η διαπίστωση μιας 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ εννοιών. Αυτό συμβαίνει διότι η ίδια η *ιδιότητα του μέλους* μιας τέτοιας κλάσης προϋποθέτει την 1-1 αντιστοιχία. Είναι γεγονός ότι σ'αυτές τις δύο περιπτώσεις, η κατανόηση της ταυτότητας δύο κλάσεων δεν μπορεί να γίνει με άλλο τρόπο χωρίς να ληφθεί υπόψη μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ εννοιών. Αυτό που κάνει πραγματικά τις κλάσεις πληθυκότητας να διαφέρουν από τα σύνολα του Zermelo και ακόμα από τα σύνολα του von Neumann, είναι ακριβώς ότι τα ερωτήματα για την ταυτότητα ή τη διάκριση αυτών των κλάσεων ερμηνεύονται ακριβώς ως ερωτήματα σχετικά με 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ εννοιών. Κάτι τέτοιο βέβαια σημαίνει ότι δεν μπορούμε να αποκλείσουμε τα δύο είδη κλάσεων πληθυκότητας από υποψήφιους αριθμούς, αφού αυτές μοιράζονται τελικά το ίδιο κριτήριο ταυτότητας με τους αριθμούς.

Μια δυσκολία, ωστόσο, που συνδέεται με τις συγκεκριμένες κλάσεις μας οδηγεί πίσω στις αρχές του 20^{ου} αι. Υπενθυμίζουμε ότι ο ίδιος ο Frege επέλεξε τελικά να εκφράσει ρητά τους αριθμούς κάνοντας χρήση εκτάσεων εννοιών. Θεωρώντας ότι το πρόβλημα του Καίσαρος καθιστά προβληματικούς τους πλαισιακούς ορισμούς, στράφηκε σε εκτασιακούς ορισμούς τόσο του αριθμού όσο και της διεύθυνσης. Οι κλάσεις που χρησιμοποίησε ο Frege είναι αυτές που εξετάστηκαν στο α) της προηγούμενης παραγράφου. Η επιλογή αυτή του Frege συνοδεύτηκε από την ανεξέλεγκτη χρήση του καταστροφικού αξιώματος: αν F είναι μια έννοια τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την κλάση $\{x : Fx\}$. Όμως το εν λόγω αξίωμα δεν ήταν τόσο αθώο όσο έδειχνε φαινομενικά και οδήγησε τον Frege σε μια διατύπωση από την οποία προέκυψε το παράδοξο του Russell. Το γεγονός αυτό μας δημιουργεί φυσικά επιφυλάξεις ως προς τις κλάσεις πληθυκότητας της προηγούμενης παραγράφου. Εάν τις θεωρήσουμε ως υποψήφιες για τον ρόλο του φυσικού αριθμού, θα οδηγηθούμε και πάλι στους ίδιους δρόμους από τους οποίους το παράδοξο θα κάνει ξανά την εμφάνισή του. Σημειώνουμε παρεπιμπτόντως ότι στη σύγχρονη συνολοθεωρία, είμαστε πολύ προσεκτικοί όταν πρόκειται να αποδεχθούμε ένα σύνολο. Η ιδέα ότι ένα σύνολο μπορεί να ορισθεί με βάση την ανεξέλεγκτη χρήση μιας ιδιότητας έχει περιοριστεί κατάλληλα στη Zermelo-Frankel θεωρία συνόλων, έτσι ώστε να μην οδηγούμαστε σε παράδοξα. Ετσι, για να ορίσουμε ένα σύνολο με βάση μια ιδιότητα των μελών του, προϋποτίθεται να αναφερθούμε στα στοιχεία ενός ήδη προϋπάρχοντος συνόλου. Συνεπώς, αν λάβουμε υπόψη τα προηγούμενα, πρέπει να σταθούμε επιφυλακτικά απέναντι στις κλάσεις πληθυκότητας που προαναφέρθηκαν.

Ο στόχος του Hale να αποκλείσει κάποια είδη συνόλων από υποψήφια για το ρόλο των φυσικών αριθμών και να καταλήξει στην αποδοχή ενός μόνο είδους δεν επιτεύχθηκε. Αλλωστε, ακόμα και αν κατόρθωνε να αποκλείσει τα προαναφερθέντα είδη συνόλων, και πάλι θα μπορούσαν να υπάρχουν άλλα αντικείμενα εξίσου υποψήφια για να θεωρηθούν φυσικοί αριθμοί. Η συγκεκριμένη τακτική του Hale κρίνεται λοιπόν αναποτελεσματική.

Πρέπει να επισημανθεί ότι οι Hale & Wright, σε αντίθεση με τον Frege που χρησιμοποίησε τελικά κλάσεις για να ορίσει τους αριθμούς, προτίμησαν να διατηρήσουν στο δικό τους πρόγραμμα τον πλαισιακό ορισμό που δίνεται μέσω της ισοδυναμίας N= και τη λογική 2ης τάξης. Για τη συνέπεια της N= έχουν εκφραστεί αρκετές εγγυήσεις. Συγκεκριμένα, τη συνέπεια του συστήματος που προκύπτει εάν στη λογική 2ης τάξης προστεθεί ως αξίωμα η ισοδυναμία N=, έχουν υποστηρίξει ανεξάρτητα τόσο ο Wright (1983, 154-8) όσο και οι Boolos (1987, 6-10) και Burgess (1984)[3]. Το κόστος της επιλογής του Frege να προχωρήσει σε εκτασιακούς ορισμούς ήταν μεγάλο, οδήγησε στο παράδοξο και σε κατάρρευση του προγράμματός του. Από την άλλη πλευρά, το κόστος της επιλογής των Hale & Wright να διατηρήσουν τον πλαισιακό ορισμό N= , είναι ακριβώς το πρόβλημα του Καίσαρος, δεδομένου ότι καμιά ικανοποιητική λύση δεν έχει δοθεί μέχρι αυτή τη στιγμή που να απαντά στο πρόβλημα αυτό.

---

[3] Οι Boolos και Burgess έχουν δείξει, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, ότι η N= μαζί με τη λογική 2ης τάξης, δίνουν ένα σύστημα το οποίο είναι συνεπές αν και μόνο αν η κλασική ανάλυση είναι συνεπής.

Κεφ. 11

Το θέμα της μοναδικότητας

Τα δύο προηγούμενα κεφάλαια αναφέρθηκαν στο θέμα της απροσδιοριστίας της αναφοράς των αριθμητικών όρων. Ειδικότερα στο κεφ.10, παρουσιάστηκαν οι κυριότερες ερμηνευτικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα του Καίσαρος, μία από τις οποίες συνδέεται με τον μη μονοσήμαντο προσδιορισμό της αναφοράς των αριθμητικών όρων που εισάγει η N=. Επίσης εκτέθηκαν οι μέχρι τώρα αναποτελεσματικές απόπειρες των νεολογικιστών Hale & Wright για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού. Όπως είδαμε, το πρόβλημα συνιστά την αδυναμία της N= να λειτουργήσει ως κριτήριο εφαρμογής της έννοιας του φυσικού αριθμού. Σύμφωνα επίσης με μία από τις πιο αντιπροσωπευτικές ερμηνευτικές προσεγγίσεις, η N= δεν μπορεί να αποκλείσει ένα ήδη γνωστό αντικείμενο από αντικείμενο αναφοράς ενός αριθμητικού όρου κατά συνέπεια δεν εξασφαλίζει το μονοσήμαντο προσδιορισμό των αντικειμένων αναφοράς των αριθμητικών όρων. Διαπιστώσαμε επίσης ότι το πρόβλημα του Καίσαρος δεν μπορεί να λυθεί ούτε μέσω της διάκρισης των οντολογικών κατηγοριών ούτε με τη βοήθεια της αρχής του Wright, σύμφωνα με την οποία ένα είδος αντικειμένων εμπίπτει στην έννοια του αριθμού όταν ερωτήματα σχετικά με την ταυτότητα και τη διαφορά των αντικειμένων αυτών εκφράζονται με όρους 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ εννοιών. Και δεν μπορεί να λυθεί ούτε μ’ αυτόν τον τρόπο, διότι όπως αποδείχθηκε από τους ελέγχους του Hale, δεν μπορεί κανείς να καταλήξει και να υποδείξει *τη μοναδική* συλλογή αντικειμένων που ικανοποιούν το κριτήριο ταυτότητας των φυσικών αριθμών.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι το πρόβλημα του Καίσαρος αποτελεί ένα χαρακτηριστικό των έμμεσων ορισμών γενικότερα. Γι αυτό το λόγο, θα βοηθήσει η περιγραφή της διαμάχης των Frege & Hilbert για το θέμα των ορισμών όπως προκύπτει από την μεταξύ τους αλληλογραφία. Από αυτή τη διαμάχη μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα σχετικά με την N=, το status της ως έμμεσου ορισμού και το πρόβλημα του Καίσαρος.

1. Η διαφωνία Frege – Hilbert για τους ορισμούς και τα αξιώματα

Η μελέτη ορισμένων σημείων της αλληλογραφίας των Hilbert και Frege βασίζεται στον Resnik (1974, 386-403). Ο Hilbert είχε κάποιες αντιλήψεις περί ορισμών με τις οποίες ο Frege ήταν εντελώς αντίθετος, γι αυτό και ο δεύτερος είχε εκφράσει έντονα τη διαφωνία του στη μεταξύ τους αλληλογραφία. Ο Hilbert θεωρούσε την αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας του ως έναν ορισμό σύμφωνα με τον οποίο οι εκφράσεις «σημείο», «ευθεία» και «επίπεδο» ορίζονται με βάση τις σχέσεις που έχουν η μία προς την άλλη. Ο Frege διαμαρτυρόταν γιατί πίστευε ότι η αξιωματικοποίηση δεν είναι δυνατό να συνιστά ορισμό, δεδομένου ότι ένας ορισμός καθορίζει το νόημα μιας νέας έκφρασης με όρους εκ των προτέρων κατανοητών εκφράσεων ενώ ένα αξίωμα εκφράζει μια αλήθεια για εκ των προτέρων γνωστά πράγματα. Επιπλέον, είναι ολοφάνερο ότι η αξιωματικοποίηση του Hilbert δεν μας λέει τι είναι «σημείο», τι είναι «ευθεία», τι είναι «επίπεδο» κλπ. Ετσι, εάν κανείς βάλει στη θέση του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου οποιαδήποτε αντικείμενα, τέτοια ώστε οι μεταξύ τους σχέσεις να υπακούουν σε κατάλληλα αξιώματα, τότε αυτά τα αντικείμενα μπορούν να θεωρηθούν ως σημεία, ευθείες και αξιώματα. Ο Hilbert δεν ενοχλείτο όμως καθόλου από τη σχετική ελευθερία με την οποία μπορούσε κανείς να ερμηνεύσει τα «σημεία», τις «ευθείες» και τα «επίπεδά» του.

Ο Frege, όταν είδε τις σημειώσεις του Hilbert (οι οποίες αργότερα έγιναν τα Grundlagen του Hilbert), έσπευσε να τον κατηγορήσει για έλλειψη αυστηρότητας. Θεώρησε ότι ο Hilbert συνέχεε τους ορισμούς με τα αξιώματα, δεν όριζε τη σημασία του «μεταξύ», του «σημείου», της «ευθείας». Κατά τη γνώμη του Frege, έπρεπε να προηγούνται κάποιοι ορισμοί και να ακολουθούν τα αξιώματα. Τα αξιώματα δεν μπορούν να είναι ορισμοί και μόνο για τον λόγο ότι δεν καθορίζουν με μοναδικό τρόπο αντικείμενα. Ο Hilbert απάντησε ότι το συνολικό σύστημα αξιωμάτων του καθορίζει τις πρωταρχικές έννοιες της γεωμετρίας και ότι το γεγονός ότι ένα σύνολο αξιωμάτων δεν καθορίζει κατά μοναδικό τρόπο μία έννοια δεν αποτελεί καθόλου πρόβλημα. Ισα-ίσα, αυτό αποτελεί το μεγαλύτερο πλεονέκτημα της μεθόδου του. Πχ. οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι ούτε ακολουθίες ούτε τομές Dedekind αλλά είναι ένα σύστημα πραγμάτων που ικανοποιούν συγκεκριμένες σχέσεις με βάση δεδομένα αξιώματα. Ετσι και το σημείο, η ευθεία γραμμή, το επίπεδο θα μπορούσαν να είναι πχ. ζεύγη αριθμών, συλλογές αριθμών κλπ. που ικανοποιούν συγκεκριμένες σχέσεις. Το πλεονέκτημα της μεθόδου του Hilbert ήταν τέτοιο ώστε νέες άλγεβρες και νέες γεωμετρίες μπορούσαν να αναπτυχθούν, πέρα από τις παραδοσιακές θεωρίες.

Το πρόβλημα της μαθηματικής ύπαρξης και της μαθηματικής αλήθειας συνδέονται άμεσα με τη διαφωνία των Frege-Hilbert. Ο πρώτος πίστευε ότι *οι μαθηματικές οντότητες έπρεπε να καθοριστούν με όρους άλλων πρωταρχικών οντοτήτων προφανούς ύπαρξης και ότι η αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων έπρεπε να αναχθεί μέσω της αξιωματικοποίησης και ενός συνόλου ορισμών, σε αυταπόδεικτες ή προφανείς αλήθειες*. Ο Hilbert ωστόσο, είχε διαφορετική γνώμη: αυτό που έχει σημασία είναι η συνέπεια του συστήματος των αξιωμάτων, γιατί *η συνέπεια εξασφαλίζει την ύπαρξη*. Για παράδειγμα, η ασυνέπεια που χαρακτήριζε τότε τους πληθάριθμους του Cantor ήταν μια απόδειξη, κατά τη γνώμη του Hilbert, της μη ύπαρξής τους. Για τα δικά του αξιώματα, ο Hilbert έδειξε ότι ισχύει η αρχή της ικανοποιησιμότητας, δηλαδή ότι υπάρχει μοντέλο (στο οποίο χρησιμοποίησε πραγματικούς αριθμούς).

Ο Frege πίστευε ότι αν τα αξιώματα είναι αληθή για ένα συγκεκριμένο πεδίο μαθηματικών αντικειμένων τότε οι αποδείξεις συνέπειας είναι περιττές. Ο Hilbert από την άλλη πλευρά, πίστευε ότι εάν τα αξιώματα που έχουν τεθεί δεν είναι ασύμβατα μεταξύ τους έτσι ώστε να οδηγούν σε κάποια αντίφαση τότε αυτά είναι αληθή και τα πράγματα που ορίζονται μέσω αυτών των αξιωμάτων υπάρχουν (κριτήριο αλήθειας-ύπαρξης). Ο Frege είχε μια πολύ εύλογη αντίρρηση: εάν υποτεθεί ότι η συνέπεια είναι κριτήριο ύπαρξης τότε μας δίνει μια άλλη εκδοχή του οντολογικού επιχειρήματος για την ύπαρξη του Θεού. Το να είναι πχ μια οντότητα, «άπειρη», «τέλεια», «αιώνια ύπαρξη» είναι κάτι το οποίο πιθανώς διαθέτει μια συνέπεια αλλά αυτό δεν εξασφαλίζει την ύπαρξή του. Σύμφωνα άλλωστε με την κριτική που άσκησε ο Kant στον Ανσελμο, όσο καλά και αν διατυπωθεί μια έννοια, δεν έχει κατ'ανάγκην πραγματώσεις. Αλλά όπως ο Resnik επισημαίνει, δεν θα έπρεπε να ερμηνεύσουμε σ'αυτό το σημείο τον Hilbert κυριολεκτικά. Φυσικά ο Hilbert δεν ήθελε να πει ότι η συνέπεια αρκεί για να υπάρχει μια συγκεκριμένη οντότητα, γνώριζε άλλωστε ότι υπάρχουν συνεπή αλλά ασύμβατα μεταξύ τους αξιωματικά συστήματα (γεωμετρίες) με διαφορετικές οντολογικές δεσμεύσεις. Αυτό που εννοούσε λέγοντας ότι η συνέπεια είναι το κριτήριο της ύπαρξης είναι ότι εάν ένα σύστημα είναι συνεπές τότε υπάρχει ένα πεδίο οντοτήτων για το οποίο τα αξιώματα είναι αληθή. Αυτό συνδέεται κυρίως με τη μεταγενέστερη αντίληψη ότι κάθε συνεπές σύνολο αξιωμάτων έχει ένα μοντέλο.

2. Η σχέση του προβλήματος του Καίσαρος με το status της N= ως έμμεσου ορισμού

Οι απόψεις του Hilbert αποτελούν μία πρώιμη μορφή της αντίληψης ότι ένα σύστημα αξιωμάτων αποτελεί έναν έμμεσο ορισμό. Πχ., το σύστημα αξιωμάτων για την ευκλείδεια γεωμετρία αποτελεί έμμεσο ορισμό για τις έννοιες του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου. Το σύστημα PA (αξιώματα Peano) είναι επίσης ένας έμμεσος ορισμός του φυσικού αριθμού. Όπως είδαμε στο κεφ.6, η N= αποτελεί έμμεσο ορισμό του φυσικού αριθμού σύμφωνα με την επίσημη άποψη του νεολογικισμού. Διαπιστώσαμε επιπλέον ότι, λόγω της αδυναμίας της N= να λειτουργήσει ως κριτήριο εφαρμογής της έννοιας του φυσικού αριθμού, μια σειρά από διαφορετικά αντικείμενα θα μπορούσαν να είναι υποψήφια για το ρόλο του φυσικού αριθμού. Όμως αυτό το γεγονός συνιστά μια σημαντική ομοιότητα με την περίπτωση των αξιωμάτων του Hilbert, όπου μια σειρά από διαφορετικά αντικείμενα θα μπορούσαν να παίξουν το ρόλο του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου. Το πρόβλημα του Καίσαρος φαίνεται να χαρακτηρίζει γενικότερα τους έμμεσους ορισμούς (cf. Χριστοπούλου, Δ. & Ψύλλος, Σ. (2005)). Τώρα κατανοούμε καλύτερα γιατί ο Frege, διαπιστώνοντας το πρόβλημα, θεώρησε την N= ως ακατάλληλη για τον ρόλο του πλαισιακού ορισμού για τον οποίο την προόριζε. Ενας *έμμεσος* ή *υπόρρητος* ορισμός διαφέρει από έναν *ρητό* ορισμό, δεδομένου ότι ο ρητός ορισμός ερμηνεύει ευθέως ή μεταφράζει μία έκφραση με βάση άλλες ήδη γνωστές εκφράσεις. Η ουσιαστική διαφορά μεταξύ ενός έμμεσου και ενός ρητού ορισμού είναι ότι, ενώ ένας ρητός ορισμός καθορίζει με σαφήνεια *ποια* είναι τα αντικείμενα που εμπίπτουν στην οριζόμενη έννοια, ένας έμμεσος ορισμός δεν καθορίζει με μονονοσήμαντο τρόπο τα αντικείμενα αυτά.

Σύμφωνα με μία έννοια, οι έμμεσοι ορισμοί χαρακτηρίζονται επομένως από ένα γενικότερο πρόβλημα ως προς τη «μοναδικότητα» των αντικειμένων αναφοράς της οριζόμενης έκφρασης. Ο Horwich (1998, 132-3) υποστηρίζει ότι σε έναν έμμεσο ορισμό αναζητούμε το *νόημα* μιας έκφρασης ‘f ’ έτσι ώστε η πρόταση ‘#f’ να είναι αληθής. Όμως δεν εγγυάται κανείς ότι το *νόημα* αυτό είναι μοναδικό. Υπάρχει περίπτωση κάποιος να ξεχωρίσει το μοναδικό νόημα, με το οποίο θα συμπληρώσει την μη πλήρη έκφραση ‘#**...**’ για να προκύψει αληθής πρόταση αλλά στις περισσότερες περιπτώσεις τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά και για τη συμπλήρωση της έκφρασης ‘#**...**’ μπορεί να είναι υποψήφια περισσότερα του ενός *νοήματα*. Παρόμοιο πρόβλημα αντιμετωπίζει κάποιος στην περίπτωση της μη πλήρους έκφρασης: $(\forall F)(\forall G)$ $(\ldots F = \ldots G \leftrightarrow F\ 1\text{-}1\ G)$ λόγω της απροσδιοριστίας του τελεστή N.

Στην παρατήρηση του Horwich δεν διευκρινίζεται εάν το ‘νόημα’ πρέπει να ερμηνευθεί ως ‘αναφορά’ ή ως ‘σημασία’. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ένα είδος απροσδιοριστίας της αναφοράς ή τον μη μονοσήμαντο καθορισμό της *αναφοράς*, με άλλα λόγια μία από τις ερμηνείες του προβλήματος του Καίσαρος που εξετάσαμε ως τώρα. Στη δεύτερη περίπτωση, αν δηλαδή θεωρήσουμε ότι πρόκειται για απροσδιοριστία της σημασίας της οριζόμενης έκφρασης τότε έχουμε μια διαφορετική ερμηνεία του προβλήματος δηλαδή έχουμε να αντιμετωπίσουμε τον μη μονοσήμαντο προσδιορισμό της *σημασίας* της οριζόμενης έκφρασης ‘ο αριθμός της έννοιας F’. Σύμφωνα λοιπόν με τη δεύτερη ερμηνεία, θεωρούμε ότι το πρόβλημα του Καίσαρος σηματοδοτεί για τους έμμεσους ορισμούς τον μη μονοσήμαντο προσδιορισμό της σημασίας της οριζόμενης έκφρασης.

3. Είναι αναγκαία η «μοναδικότητα» των αριθμών για τη ρεαλιστική θέση του νεολογικισμού;

Σε ότι αφορά την ερμηνεία του προβλήματος του Καίσαρος ως «ο μη μονοσήμαντος προσδιορισμός της αναφοράς των αριθμητικών εκφράσεων», έχουμε προαναφέρει ότι θεωρείται επιχείρημα εναντίον του μαθηματικού πλατωνισμού.

Σύμφωνα με μια αρκετά διαδεδομένη αντίληψη, ο μαθηματικός πλατωνισμός και ακόμα περισσότερο το είδος του μαθηματικού πλατωνισμού που εκπροσωπείται από τους Hale & Wright σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς ως αντικείμενα εξίσου πραγματικά, όπως τα «βουνά» και τα «ποτάμια» κλπ. (κατά τη ρήση του Wright (1983, 13-14)), οφείλει να εξασφαλίσει τη μοναδικότητα των μαθηματικών αντικειμένων. Κατ'αυτή την έννοια, οι φυσικοί αριθμοί θεωρούνται ότι θα έπρεπε να αποτελούν αυτό που μια πολύ ισχυρή διαίσθηση συνήθως επιβάλλει, δηλαδή «μοναδικά» αντικείμενα.

Εάν το πρόβλημα του Καίσαρος συνδέεται πράγματι με το status της N= ως έμμεσου ορισμού, τότε εξηγείται ο λόγος που οι επανειλλημένες προσπάθειες που γίνονται στη σύγχρονη φιλοσοφική συζήτηση για την εξάλειψη αυτού του προβλήματος, βαίνουν άκαρπες. Ας μην ξεχνάμε επίσης ότι ο Frege έδωσε στο πρόβλημα τη δέουσα σημασία αλλά για να το αποφύγει, επέλεξε να στραφεί σε άλλους ορισμούς και να εμπλακεί στη γνωστή περιπέτεια. Εμείς δεν θα ακολουθήσουμε τον Frege στη στροφή του προς εκτασιακούς ορισμούς αλλά θα αρκεστούμε στην ισοδυναμία N= ως έμμεσο ορισμό, έχοντας αναγνωρίσει τη θεμελιώδη σημασία που της αποδίδει ο νεολογικισμός.

Το πρόβλημα της εξασφάλισης της «μοναδικότητας» των αριθμών μέσω ορισμού, άλλωστε δεν λύθηκε ούτε με την στροφή του Frege στους εκτασιακούς ορισμούς. Στο κεφ.2 είδαμε ότι σύμφωνα με τον εκτασιακό ορισμό του Frege, ο αριθμός της έννοιας F ορίζεται ως η έκταση της έννοιας «ισοπληθυκή με την έννοια F». Δηλαδή, ο αριθμός της έννοιας F είναι η κλάση όλων των εννοιών που βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με την F. Ο Frege χρησιμοποίησε κλάσεις για να παρουσιάσει τους φυσικούς αριθμούς ως μοναδικά αντικείμενα. Αλλά, δεν είχε λάβει υπόψη του ότι ακόμα και μέσω της εκτασιακότητας, η μοναδικότητα δεν εξασφαλίζεται γενικά. Η εκτασιακότητα εξασφαλίζει τη μοναδικότητα μιας κλάσης όταν έχουμε παράθεση των στοιχείων της και όταν τα στοιχεία της είναι πεπερασμένα στο πλήθος. Στη γενικότερη περίπτωση όμως, χρειάζεται ένα κριτήριο ταυτότητας *και* για τις κλάσεις. Ο Frege κατανόησε αυτή την ανάγκη και χρησιμοποίησε ένα τέτοιο κριτήριο ταυτότητας:

$\forall F \forall G\ [\{x{:}Fx\}=\{x{:}Gx\} \ \leftrightarrow\ \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)]$

Πέρα από το γεγονός ότι αυτή η ισοδυναμία τον οδήγησε στη γνωστή περιπέτεια της ασυνέπειας, πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι ως κριτήριο ταυτότητας δεν αποφεύγει *επίσης* το πρόβλημα του Καίσαρος. Διότι και σ'αυτή την περίπτωση, το κριτήριο αδυνατεί να προσδιορίσει τις συνθήκες αλήθειας μεικτών ταυτοτήτων της μορφής «{x: Fx}= q ». Συνεπώς ο Frege δεν έλυσε το πρόβλημα μέσω της στροφής του στις εκτάσεις, ίσα-ίσα που πρόσθεσε ένα ακόμα, δηλαδή την ασυνέπεια.

Ο νεολογικισμός υπερασπίζεται βέβαια τη θέση ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι μοναδικά αντικείμενα, όπως το οριστικό άρθρο στην έκφραση '*ο* αριθμός της έννοιας F' υποδηλώνει. Μια επιθυμητή για το νεολογικισμό περιγραφή θα αφορούσε την ύπαρξη μιας μοναδικής άπειρης ακολουθίας αντικειμένων την οποία μελετά η αριθμητική. Κατ'αυτή την έννοια, οι φυσικοί αριθμοί θα ήταν απλώς και μόνον οι φυσικοί αριθμοί, δεν θα ήταν σύνολα, δεν θα ήταν οτιδήποτε άλλο, ανεξάρτητα από το αν συμβαίνει να υπάρχουν ταυτόχρονα και άλλες ακολουθίες αντικειμένων που πιθανώς εκφράζουν την ίδια δομή με τους φυσικούς αριθμούς. Σ'αυτή την περίπτωση θα είχαμε πολλές ακολουθίες αντικειμένων με την ίδια δομή, *μία μόνο εκ των οποίων* θα ήταν η ακολουθία των φυσικών αριθμών.

Το πρόβλημα είναι πώς μπορεί να διασφαλιστεί ότι η έκφραση 'ο αριθμός της έννοιας F' υποδηλώνει τη μοναδικότητα του αντικειμένου στο οποίο αναφέρεται. Ο νεολογικισμός πιστεύει για παράδειγμα ότι ο αριθμητικός όρος $Nx{:}x\neq x$ αναφέρεται σε ένα αντικείμενο που είναι *το μηδέν* του Frege. Αλλά αν λάβουμε υπόψη την ερμηνεία του προβλήματος του Καίσαρος ως το μη μονοσήμαντο του προσδιορισμού της αναφοράς, δεν αποκλείεται οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο να αποτελεί επίσης αντικείμενο αναφοράς του ίδιου όρου. Από την άλλη πλευρά, εάν λάβουμε υπόψη την ερμηνευτική προσέγγιση σύμφωνα με την οποία, το μη μονοσήμαντο χαρακτηρίζει όχι την αναφορά αλλά τη σημασία της αριθμητικής έκφρασης τότε είναι δυνατό να θεωρήσουμε ότι το αντικείμενο αναφοράς του όρου $Nx{:}x\neq x$ είναι μοναδικό αλλά η σημασία του ερμηνεύεται με περισσότερους από έναν τρόπους μέσα σε μια σειρά από ερμηνείες ή μοντέλα.

Στο κεφ.9 (συγκεκριμένα 9.2 και 9.3) συζητήθηκε η προσέγγιση του Balaguer καθώς και οι προσεγγίσεις του στρουκτουραλισμού ως πιθανές διέξοδοι στο πρόβλημα του μη μονοσήμαντου προσδιορισμού των αριθμών. Είδαμε ότι στην προσέγγιση του Balaguer, η μη μοναδικότητα των φυσικών αριθμών είναι συμβατή με τον μαθηματικό ρεαλισμό. Γενικότερα, ο Balaguer δέχεται ότι κάθε ενικός μαθηματικός όρος είναι δυνατό να δέχεται περισσότερα από ένα αντικείμενα αναφοράς, χωρίς να θίγεται η ρεαλιστική απαίτηση. Τα μοντέλα της αριθμητικής μπορούν να θεωρηθούν ως διαφορετικοί κόσμοι ή έστω ως οι δυνατές πραγματώσεις της μαθηματικής θεωρίας και τα αντικείμενα αναφοράς των ενικών αριθμητικών όρων ως μη μονοσήμαντα ορισμένα. Για παράδειγμα, μπορεί να θεωρηθεί ότι η αναφορά του όρου '2' έχει διαφορετικές πραγματώσεις από μοντέλο σε μοντέλο της αριθμητικής, πράγμα που δεν θίγει την ρεαλιστική διάσταση.

Όπως διαπιστώσαμε στα προηγούμενα, αυτό που επισημαίνεται στη διαφωνία μεταξύ Hilbert και Frege για τους ορισμούς, είναι ότι τα αξιώματα του Hilbert για τη γεωμετρία, δεν καθορίζουν με μονοσήμαντο τρόπο τα αντίστοιχα αντικείμενα που εισάγουν. Κάτι τέτοιο για τον Hilbert δεν συνιστούσε ιδιαίτερο πρόβλημα ενός ορισμού, αντίθετα, το ίδιο γεγονός αποτελούσε σκάνδαλο για τον Frege! Ο τελευταίος πίστευε ότι τα συστήματα αξιωμάτων δεν μπορούν να αποτελούν ορισμούς, για τον λόγο ότι δεν καθορίζουν με μοναδικό τρόπο αντικείμενα. Ο Hilbert όμως μιλούσε για συστήματα αξιωμάτων τα οποία λειτουργούν κατά τρόπο παρόμοιο με αυτόν που εμείς σήμερα θεωρούμε έμμεσο ορισμό. Ο Frege κατηγορούσε τον Hilbert ότι δεν όριζε τη σημασία του 'μεταξύ', του 'σημείου', της 'γραμμής', του 'επιπέδου'. Πράγματι, δεν τα όριζε ρητά. Τον ρόλο αυτών των όρων μπορούσαν να παίξουν ζεύγη αριθμών, συλλογές αριθμών κλπ. Ο Frege έλεγε χαρακτηριστικά ότι η εν λόγω αξιωματικοποίηση δεν απαντούσε στο ερώτημα *εάν το ρολόι του είναι ένα σημείο (βλ.Ιούλιο Καίσαρα)*. Αποτελεί ειρωνία το γεγονός ότι και η ισοδυναμία N= (επινόηση του Frege) παρουσιάζει παρόμοιο «πρόβλημα». Ως έμμεσος ορισμός, η N= δεν μας λέει *ποια* αντικείμενα είναι οι αριθμοί.

Ο Shapiro (1999, 5) αναφέρει χαρακτηριστικά: «Εάν υπάρχει ένας τρόπος να ορισθεί 'ο αριθμός της έννοιας…' έτσι ώστε η N= να είναι αληθής τότε υπάρχουν πολλοί τρόποι για να γίνει αυτό. … Αυτό το οποίο λαμβάνουμε από την ισοδυναμία N= είναι τελικά μια *δομή* που οδηγεί σε μια άλλη έννοια του 'έμμεσου ορισμού'». Η έννοια αυτή του έμμεσου ορισμού, κατά τον Shapiro, είναι εκείνη του '*δομικού* έμμεσου ορισμού'.

Ο ίδιος παραλληλίζει το σύστημα αξιωμάτων του Hilbert με την περίπτωση της N= . Θεωρεί ότι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε *δομικούς έμμεσους ορισμούς*. Το σύστημα αξιωμάτων του Hilbert αποτελεί πχ. έναν δομικό έμμεσο ορισμό για τις έννοιες του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου. Ο Hilbert απέδειξε ότι ο «δομικός» έμμεσος ορισμός του έχει μοντέλο (κατασκεύασε μοντέλο χρησιμοποιώντας τους πραγματικούς αριθμούς). Επίσης απέδειξε ότι η αξιωματικοποίησή του έχει ισόμορφα μοντέλα.

Μια σημαντική παρατήρηση που κάνει επίσης ο Shapiro (op.cit., 7), είναι ότι αυτού του είδους οι έμμεσοι ορισμοί έχουν μια μορφή κατηγορικότητας (quasi-categoricity). Αυτό σημαίνει ότι εάν για παράδειγμα, Μ και Μ΄ είναι δύο μοντέλα της N= , τότε εάν Μ και Μ΄ έχουν την ίδια πληθυκότητα, τότε οι αριθμοί του μοντέλου Μ είναι ισόμορφοι με τους αριθμούς του μοντέλου Μ΄. Εάν όμως έχουν διαφορετικές πληθυκότητες τότε οι αριθμοί του ενός μοντέλου είναι ισόμορφοι με ένα εσωτερικό τμήμα των αριθμών του άλλου μοντέλου.

Τα όσα αναφέρει ο Shapiro είναι πολύ χρήσιμα, δεν θα συμφωνήσουμε ωστόσο με τη θέση του ότι η δομή που εκφράζει ένας έμμεσος ορισμός, και στην προκειμένη περίπτωση η N= , αποτελεί μια δομή με κενές θέσεις. Πρόκειται για εξαλειπτική στρουκτουραλιστική θέση την οποία χαρακτηρίσαμε στο 9.2 προβληματική επειδή οδηγείται σε παλινδρομήσεις κατά την προσπάθεια να «γεμίσουν» οι κενές θέσεις. Εάν είμαστε υποχρεωμένοι να αποδεχθούμε οπωσδήποτε μια στρουκτουραλιστική προσέγγιση, θα προτιμούσαμε μια in re προσέγγιση με θέσεις όχι κενές αλλά θέσεις-αντικείμενα. Όμως έχουμε δει ότι ο στρουκτουραλισμός αντιμετωπίζει τόσο εσωτερικά προβλήματα των διάφορων προσεγγίσεών του, όσο και γενικότερα προβλήματα τα οποία παρουσιάστηκαν στο 9.2.

Ο Hale (2001, 342) αναφέρει ότι αν ερωτηθούμε *τι είδους αντικείμενα* υποδηλώνουν οι αριθμητικοί όροι Nx:Fx, θα πρέπει να απαντήσουμε: «*οποιαδήποτε αντικείμενα που συνδέονται με δύο έννοιες F και G κατά τέτοιο τρόπο ώστε να είναι ταυτόσημα μόνον όταν υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των εννοιών αυτών*». Συνεπώς, όλα τα αντικείμενα που ικανοποιούν τη συνθήκη ταυτότητας που τίθεται από την N=, μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων της και να χαρακτηρισθούν ως αριθμοί.

Ενώ λοιπόν ο Hale δίνει μια απάντηση όπως αυτή που προαναφέρθηκε, ο νεολογισμός ωστόσο επιμένει στη μοναδικότητα των φυσικών αριθμών. Πώς μπορούν να συμβιβαστούν οι δύο αυτές όψεις; Εδώ θα πρέπει να επισημάνουμε ότι παρ'όλο που υπάρχουν προσεγγίσεις στις οποίες γίνεται αποδεκτός ο μη μονοσήμαντος προσδιορισμός της αριθμητικής αναφοράς κατά τρόπο συμβατό με τη θέση γενικότερα του ρεαλισμού (πχ. Balaguer), ωστόσο ειδικότερα στην περίπτωση του νεολογικισμού δεν είναι δυνατό κάτι τέτοιο, γιατί η μη μοναδικότητα ανακόπτει την παραγωγή ενός εκάστου των φυσικών αριθμών, από την N= (ανακόπτει δηλαδή τις αποδείξεις ύπαρξης του Wright): αν θεωρήσουμε για παράδειγμα ότι ο αριθμητικός όρος ‘Nx:x≠x’ δεν έχει μοναδική αναφορά, το οποίο σημαίνει ότι το 0 δεν είναι μοναδικό αντικείμενο, τότε δημιουργείται πρόβλημα στην απόδειξη της ύπαρξης των αμέσως επόμενων φυσικών αριθμών. Πράγματι, αμέσως μετά, προκαλείται εμπλοκή στην παραγωγή του 1 ως αντικειμένου αναφοράς του όρου ‘Ny:y=0’ δηλαδή του όρου ‘‘Ny: [y = Nx:x≠x]’. Η έννοια ‘y=0’ έχει μια μοναδική πραγμάτωση, πράγμα που προϋποθέτει ότι το 0 έχει καθοριστεί με σαφήνεια ως μοναδικό αντικείμενο από το προηγούμενο βήμα. Εάν το 0 δεν έχει καθορισθεί μονοσήμαντα ως αντικείμενο, σταματά η απόδειξη του ‘θεωρήματος Frege’ από το πρώτο κιόλας βήμα. Δεν είναι τελικά περίεργο το γεγονός ότι το πρόβλημα του Καίσαρος έχει δημιουργήσει τόσο μεγάλη συζήτηση στο χώρο της σύγχρονης φιλοσοφίας των μαθηματικών σε ότι αφορά το θέμα του νεο-λογικισμού! Γίνεται φανερό πόσο ενοχλητική και κρίσιμη είναι η παρουσία του προβλήματος του Καίσαρος από την εποχή του Frege ως την εποχή του νεολογικισμού, εάν βέβαια αυτό ερμηνευθεί ως ο μη μονοσήμαντος προσδιορισμός της αναφοράς. Βεβαίως, όπως είδαμε, υπάρχει και η εναλλακτική ερμηνεία.

Το θέμα της μοναδικότητας των φυσικών αριθμών είναι επομένως ένα κρίσιμο θέμα για την υπόθεση του νεολογικισμού. Απαιτείται μια αντίληψη περί μοναδικότητας τέτοια ώστε το αντικείμενο αναφοράς κάθε αριθμητικού όρου να θεωρείται με βάση αυτή την αντίληψη, μοναδικό. Οι Hale & Wright υποστηρίζουν ότι επειδή η *αριθμητική Frege* που προκύπτει στη λογική $2^{ης}$ τάξης από την N= , είναι $2^{ης}$ τάξης αριθμητική, έχει ένα είδος κατηγορικότητας συνεπώς έχει ισόμορφα μοντέλα. Η μοναδικότητα των αριθμών σ’αυτή την περίπτωση εξασφαλίζεται μέχρι ισομορφισμού. Αυτός ο τρόπος ερμηνείας της μοναδικότητας είναι και ο ενδεδειγμένος τρόπος λύσης του προβλήματος, προκειμένου να θεωρηθεί βάσιμη η ρεαλιστική θέση του νεολογικισμού. Δηλαδή πρέπει να θεωρηθεί εξ αρχής ότι το *μηδέν* του Frege (το αντικείμενο αναφοράς του όρου ‘Nx:x≠x’) είναι όντως *μοναδικό αντικείμενο μέχρι ισομορφισμού*.

Συμπερασματικά, έχουμε λοιπόν έμμεσους ορισμούς όπως η N= (ή όπως διάφορα αξιωματικά συστήματα ή άλλες αφαιρετικές αρχές) για τους οποίους υπάρχει μοντέλο και κάποιο είδος κατηγορικότητας που επιτρέπει ισόμορφα μοντέλα. Τα αντικείμενα των μοντέλων αυτών είναι αντίστοιχα μέσω ισομορφισμού. Ετσι, το αντικείμενο αναφοράς του όρου ‘Nx:x≠x’ είναι μοναδικό αλλά είναι δυνατό να επιδέχεται διαφορετικές ερμηνείες και παρουσιάσεις. Υπό αυτή την έννοια πρέπει να ερμηνευθεί και η παραπάνω αναφορά του Hale ότι αριθμοί είναι *οποιαδήποτε* αντικείμενα που συνδέονται με δύο έννοιες F και G με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι ταυτόσημα μόνον όταν υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των εννοιών αυτών. Και κατ'αυτή την έννοια μπορεί να εκτονωθεί η ένταση ανάμεσα στη μοναδικότητα των αριθμών που απαιτεί ο νεολογικισμός και στο πρόβλημα του Καίσαρος. Αυτό που διαφοροποιεί τις διαφορετικές εκφάνσεις ή εμφανίσεις του μοναδικού αντικειμένου $Nx{:}x\neq x$ από μοντέλο σε μοντέλο, είναι μια μορφή επανεννοιολογιοποίησης (reconceptualization) (cf. 7.4). Δηλαδή, η περιγραφή του ίδιου αντικειμένου μπορεί να διαφέρει[44] από μοντέλο σε μοντέλο, λόγω της παρουσίασής του με τη βοήθεια διαφορετικών εννοιών.

Κατά συνέπεια, χρειαζόμαστε μια κατάλληλη ερμηνεία της έννοιας της μοναδικότητας των φυσικών αριθμών ως αντικειμένων. Η έννοια αυτή είναι αναγκαία για τη ρεαλιστική θέση που αναπτύσσεται στο πλαίσιο του νεολογικισμού και για το πρόγραμμα του νεολογικισμού γενικότερα. Πράγματι, η 'μοναδικότητα' των αριθμών μπορεί να ερμηνευθεί ως μοναδικότητα μέχρι ισομορφισμού στο πλαίσιο της 2[ης] τάξης αριθμητικής Frege

[44] Για παράδειγμα, το μοναδικό αντικείμενο αναφοράς του όρου '$Nx{:}x\neq x$' μπορεί να εμφανίζεται ως 0 ή ως $\varnothing$ κλπ.

Συμπεράσματα

Ακολουθεί συνοπτική παρουσίαση των συμπερασμάτων των κεφαλαίων 1-11. Στο κεφ.1 παρουσιάστηκαν οι *μη φρεγκιανού* τύπου μορφές του σύγχρονου μαθηματικού ρεαλισμού που ακολουθούν κυρίως δύο βασικές παραδόσεις, την παράδοση του Goedel και την παράδοση των Quine-Putnam (επιχειρήματα του αναπόδραστου). Εγινε επίσης αναφορά στο δίλημμα του Benacerraf (1973) που πλήττει τις δύο προηγούμενες παραδόσεις του ρεαλισμού και στις απαντήσεις που επιχειρήθηκαν από τους εκπροσώπους τους.

Στο κεφ.2 παρουσιάστηκαν οι βασικές θέσεις του Frege στα Grundlagen σύμφωνα με τις οποίες οι φυσικοί αριθμοί αποτελούν αντικείμενα και η αριθμητική γνώση θεμελιώνεται στη λογική. Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάστηκε το πρόγραμμα ανασυγκρότησης των βασικών αρχών του Frege από το νεολογικισμό και προαναγγέλθηκε ο έλεγχος των θέσεων του προγράμματος αυτού. Οι θέσεις του αφορούν στην ύπαρξη των φυσικών αριθμών ως πραγματικών αντικειμένων και τη θεμελιώδη σημασία της ισοδυναμίας N= του Frege στη θεμελίωση της αριθμητικής γνώσης. Με βάση την N= , διατυπώνεται και η απάντηση του νεολογικισμού στο δίλημμα του 1973.

Στα κεφάλαια που ακολούθησαν, μελετήθηκε η θέση του νεολογικισμού σύμφωνα με την οποία οι φυσικοί αριθμοί είναι πραγματικά αντικείμενα. **Η θέση αυτή εξετάστηκε με βάση τον έλεγχο του επιχειρήματος των Hale & Wright** ότι **οι αριθμητικές εκφράσεις έχουν συντακτική λειτουργία ενικών όρων μέσα στις αληθείς προτάσεις της αριθμητικής και κατά συνέπεια θα πρέπει να υπάρχουν τα αντικείμενα αναφοράς τους**.

Εξετάστηκαν κατ'αρχήν οι **προκείμενες** του επιχειρήματος ως προς τα σημεία στα οποία είναι επιδεκτικές κριτικής. Στο κεφ. 3 μελετήθηκε η πρώτη προκείμενη του επιχειρήματος για τις αριθμητικές εκφράσεις ως ενικούς όρους. Περιγράφτηκε και αξιολογήθηκε ένα σύνολο συντακτικών κριτηρίων που προτείνονται από τους νεολογικιστές για τον διαχωρισμό των ενικών όρων από άλλους τύπους εκφράσεων. Εκεί διαπιστώθηκε ότι το προτεινόμενο σύνολο κριτηρίων αποκλείει ως ακατάλληλες για τον χαρακτηρισμό του ενικού όρου, τις ποσοδεικτικές εκφράσεις, τις αόριστες ονοματικές εκφράσεις, τους επιθετικούς προσδιορισμούς και τα κατηγορήματα. Αντίθετα, οι αριθμητικοί όροι περνούν με επιτυχία τον έλεγχο των κριτηρίων και χαρακτηρίζονται ως **ενικοί όροι**. Επίσης επισημάνθηκε το γεγονός ότι πολλές αριθμητικές εκφράσεις που αποτελούν οριστικές περιγραφές χαρακτηρίζονται και αυτές ως ενικοί όροι, σύμφωνα με τα ίδια κριτήρια. Το σύνολο των κριτηρίων θεωρήθηκε αποτελεσματικό για μια μεγάλη κατηγορία εκφράσεων αλλά όχι σε όλες τις περιπτώσεις. Στο τέλος του ίδιου κεφαλαίου, διερευνήθηκε η **εναλλακτική** προσέγγιση που θεωρεί ότι οι αριθμητικές εκφράσεις αναπαριστάνουν **ιδιότητες εννοιών.** Η προσέγγιση αυτή θεωρήθηκε ότι γενικά προσκρούει στη δυσκολία ενός σαφούς καθορισμού της ταυτότητας δύο ιδιοτήτων, επειδή αυτές μπορεί να ταυτίζονται σε επίπεδο έκτασης αλλά όχι έντασης ή αντίστροφα. **Το κεφάλαιο αυτό κλείνει με το συμπέρασμα ότι ο υπερπλεονασμός ταυτοτήτων στην αριθμητική μαζί με τις υπόλοιπες ενδείξεις που συζητήθηκαν, συνηγορούν για την επιλογή του status του ενικού όρου για τις αριθμητικές εκφράσεις, παρά τις αδυναμίες που παρουσιάζει το προτεινόμενο από το νεολογικισμό, σύνολο συντακτικών κριτηρίων.**

Στα κεφ. 4, 5 μελετήθηκε η δεύτερη προκείμενη του επιχειρήματος δηλαδή το ότι οι προτάσεις της αριθμητικής είναι αληθείς, ως προς την κριτική που ασκεί ο νομιναλιστής Hartry Field. Επισημάνθηκε ότι **η κριτική του Field δεν έχει καταφέρει το καίριο πλήγμα στη μαθηματική αλήθεια**, στο οποίο αποσκοπεί. **Η συντηρητικότητα δεν καταργεί ούτε υποκαθιστά την αλήθεια**, αποτελεί απλώς μια ανεξάρτητη έννοια. **Οι προκείμενες γενικότερα του προγράμματος του Field τον οδηγούν στην αποδοχή απλώς της ενδεχομενικότητας της ύπαρξης μαθηματικών οντοτήτων**. Ο ίδιος αναγνωρίζει ότι υιοθετεί έναν **ενδεχομενικό νομιναλισμό**, σύμφωνα με τον οποίο τα μαθηματικά αντικείμενα θα μπορούσαν να υπάρχουν άρα οι αντίστοιχες υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις θα μπορούσαν να είναι αληθείς. **Ο ισχυρισμός του ότι τα μαθηματικά αντικείμενα τελικά δεν υπάρχουν, δεν έχει αποδειχθεί από τον ίδιο διότι απαιτείται ένα ανεξάρτητο επιχείρημα γι αυτό**. Απαιτείται δηλαδή να ευοδοθεί η προσπάθειά του στο να δείξει ότι οι μαθηματικές οντότητες δεν είναι αναπόδραστες κατά τη συγκρότηση των επιστημονικών θεωριών. Στο βαθμό που κάτι τέτοιο δεν έχει επιτευχθεί ακόμα, **ο Field δεν μπορεί να καταλήξει σε κάτι καλύτερο πέρα από ένα αγνωστικιστικό συμπέρασμα.** Ιδιαίτερα στο κεφ.5, περιγράφεται η διαμάχη μεταξύ Field και Wright σχετικά με την αλήθεια των αριθμητικών ταυτοτήτων όπως συνάγεται μέσω της ισοδυναμίας N= , από αληθείς προτάσεις που αφορούν 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ εννοιών.

Στο κεφ.6 διερευνήθηκε το status της ισοδυναμίας N= , της θεμελιώδους αρχής του νεολογικισμού. Συγκεκριμένα επισημάνθηκαν οι παρατηρήσεις του Wright ότι **η N= δεν συνιστά άμεσο ή ρητό ορισμό** ούτε λογική αλήθεια. Το γεγονός αυτό θεωρήθηκε υπεύθυνο για το ότι η εν λόγω ισοδυναμία δεν μπορεί να υποστηρίξει έναν ισχυρό λογικισμό, στο βαθμό τουλάχιστον που επιδίωκε ο Frege, όπου κάθε αριθμητική πρόταση θα μεταφραζόταν σε μια λογική ή αναλυτική αλήθεια. Η N= χαρακτηρίζεται με βάση τις επίσημες απόψεις του νεολογικισμού ως **έμμεσος ορισμός** της έννοιας του φυσικού αριθμού, πράγμα που δικαιολογεί και τον **a priori αληθή χαρακτήρα της**. Το γεγονός ότι το status της N= ως έμμεσου ορισμού (και όχι αυστηρού ορισμού) δεν αρκεί για να δικαιολογήσει με αρκετά εύρωστο τρόπο τη λογικιστική διάσταση του εγχειρήματος του νεολογισμού, **δεν επηρεάζει τη διάσταση του ρεαλισμού**.

Επειδή λοιπόν ο χαρακτηρισμός των αριθμητικών εκφράσεων ως ενικών όρων έγινε αποδεκτός και επειδή με βάση το status της ισοδυναμίας N= , δικαιολογήθηκε ο ισχυρισμός του νεολογικισμού για την αλήθεια αριθμητικών ταυτοτήτων της μορφής «Nx:Fx=Nx:Gx», όταν προτάσεις της μορφής «F 1-1 G» είναι αληθείς, στη συνέχεια μελετήθηκε το επιχείρημα ως προς το συμπέρασμα, δηλαδή ως προς την ύπαρξη αντικειμένων αναφοράς των ενικών αριθμητικών όρων Nx:Fx, Nx:Gx.

Από το κεφ. 7 και μετά, μελετήθηκε εκτενώς **το θέμα της αναφοράς των αριθμητικών εκφράσεων**. **Με βάση το ότι οι αριθμητικές εκφράσεις πράγματι συμπεριφέρονται συντακτικά ως ενικοί όροι μέσα σε όντως αληθείς προτάσεις της αριθμητικής, προκύπτει πράγματι η ύπαρξη αντικειμένων αναφοράς των εν λόγω όρων. Αυτό είναι κατ'αρχήν ένα σημασιολογικό συμπέρασμα. Αλλά το πρόβλημα που τίθεται είναι εάν αυτή η αναφορά μπορεί να ερμηνευθεί ρεαλιστικά**. Γι αυτό το λόγο, από το κεφ.7 άρχισε **η μελέτη των προβλημάτων εκείνων που αντιμετωπίζει η ρεαλιστική ερμηνεία της ύπαρξης αντικειμένων αναφοράς**. Η κριτική του Dummett, η κριτική του αναγωγισμού, το πρόβλημα των οριστικών περιγραφών είναι ορισμένα από τα θέματα που διερευνήθηκαν στο κεφ.7.

Σε ότι αφορά τον ισχυρισμό του Dummett ότι η αναφορά των αφηρημένων όρων είναι '**ισχνή**' και ότι τα αντικείμενα αναφοράς είναι 'εσωτερικά στη γλώσσα' αντικείμενα, υποστηρίχθηκε ότι ο ίδιος δεν διασαφηνίζει την διάκριση των αφηρημένων από τους εμπειρικούς όρους ούτε την κλιμάκωση που κατά τη γνώμη του παρουσιάζουν κατά τη μετάβαση από τους εμπειρικούς σε ολοένα και περισσότερο αφηρημένους και τελικά σε γνήσια αφηρημένους όρους. Σχετικά με τη διάκριση που υιοθετεί ανάμεσα σε αντικείμενα που είναι δυνατό να καταδειχθούν και σε αντικείμενα που δεν μπορούν να καταδειχτούν, επισημάνθηκε ότι η διαδικασία της «**κατάδειξης**», ακόμα και στην περίπτωση των αντικειμένων αναφοράς των κυρίων ονομάτων, **προϋποθέτει ήδη μία ικανότητα χειρισμού** της γλώσσας και ειδικότερα χειρισμού **πλήρων προτάσεων**. Συνεπώς, η αναφορά των ενικών όρων δεν μπορεί να προσδιοριστεί παρά μόνο στο πλαίσιο αληθών προτάσεων-πλαισίων. Επιχειρήθηκε ακόμα η ερμηνεία της σχέσης γλώσσας και πραγματικότητας στο πλαίσιο του νεολογικισμού, έτσι ώστε να στηρίζεται αφενός στη συντακτική δομή και αφετέρου στην αλήθεια των προτάσεων της αριθμητικής. Επιπλέον υποστηρίχθηκε ότι για να αποφύγουν τα αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων, τον χαρακτηρισμό ‘εσωτερικό στη γλώσσα’ απαιτείται μια εύρωστη έννοια αλήθειας για τις προτάσεις που περιγράφουν 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ εννοιών. Στο ίδιο κεφάλαιο έγινε αναφορά στις επικρίσεις που προέρχονται από την πλευρά του αναγωγισμού και στις απαντήσεις των νεολογικιστών. Τέλος επιχειρήθηκε μια συμφιλίωση του **αναγωγισμού** με τον **ρεαλισμό**, έτσι ώστε οι φυσικοί αριθμοί να θεωρούνται **πραγματικά αλλά όχι sui generis αντικείμενα**. Επίσης διευκρινίστηκε ότι οι δύο ισοδύναμες πλευρές της N= έχουν τις ίδιες συνθήκες αλήθειας και περιγράφουν τις ίδιες καταστάσεις πραγμάτων. Η αριθμητική ταυτότητα (αριστερή πλευρά της N=) προκύπτει από **επανεννοιολογιοποίηση** (**reconceptualization**) της 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ δύο εννοιών (δεξιά πλευρά της N=).

Ειδικότερα τονίστηκε ο τρόπος χειρισμού της αναφοράς που προτείνεται από το πρόγραμμα του νεολογικισμού και ο οποίος βασίζεται στην αρχή του πλαισίου του Frege. **Η αναφορά θεωρείται προσδιορίσιμη μέσω αληθών προτάσεων-πλαισίων.** Για τον προσδιορισμό πχ. της αναφοράς των αριθμητικών όρων, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε πότε μια κατάλληλη πρόταση-πλαίσιο που περιλαμβάνει τους όρους αυτούς είναι αληθής. Τέτοιες προτάσεις-πλαίσια λειτουργούν ως αναγνωριστικές των αντίστοιχων αντικειμένων. Τις συνθήκες αλήθειας της εν λόγω ταυτότητας αναλαμβάνει να καθορίσει η ισοδυναμία N= .

Στο ίδιο κεφάλαιο εξετάστηκε επίσης το επιχείρημα των Rumfit και Macfarlane ότι οι νεολογικιστές δεν έπρεπε να συμπεριλάβουν στη συντακτική κατηγορία των ενικών όρων τις αριθμητικές εκφράσεις επειδή είναι στην πλειονότητά τους **οριστικές περιγραφές**. Οι δύο επικριτές του νεολογικισμού πιστεύουν ότι απ’αυτό το γεγονός προκύπτουν ιδιαίτερα προβλήματα για την αναφορά των αριθμητικών εκφράσεων επειδή το αντικείμενο αναφοράς μιας οριστικής περιγραφής μπορεί να μην υπάρχει καθόλου ή να μην είναι μοναδικό. Επικαλούνται μάλιστα τον χειρισμό των οριστικών περιγραφών από τον Russell που δείχνει πως οι οριστικές περιγραφές είναι εξαλείψιμες από τη θέση του υποκειμένου. Ένα κρίσιμο σημείο στην κριτική του Rumfit είναι ο ισχυρισμός του ότι η N= υποκρύπτει ήδη ως εσωτερική υπόθεση την ύπαρξη της αναφοράς κάθε έκφρασης της μορφής ‘ο αριθμός της έννοιας F’. Σε ότι αφορά την εν λόγω κριτική, αξιολογήθηκε και έγινε αποδεκτή η διευκρινιστική απάντηση του Wright σύμφωνα με την οποία: α. Προβληματικές ως προς την αναφορά δεν είναι μόνον πολλές οριστικές περιγραφές αλλά και πολλά κύρια ονόματα (πχ. ‘Πήγασος’) συνεπώς δεν προκύπτουν ιδιαίτερα προβλήματα από το status πολλών αριθμητικών εκφράσεων ως οριστικών περιγραφών. β. Η N= θέτει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την αλήθεια της ταυτότητας «Nx:Fx=Nx:Gx» και κατ’επέκταση για την ύπαρξη αντικειμένων αναφοράς των αριθμητικών όρων, χωρίς η ίδια να προϋποθέτει ότι αυτές οι συνθήκες πληρούνται. Συνεπώς η N= δεν εμπεριέχει κάποια «εσωτερική υπόθεση» περί ύπαρξης του αντικειμένου αναφοράς μιας αριθμητικής έκφρασης της μορφής ‘ο αριθμός της έννοιας F’. Αντίθετα, **η ύπαρξη** του αντικειμένου αναφοράς **προκύπτει ως συμπέρασμα** όταν κατάλληλες συνθήκες ικανοποιούνται. Με άλλα λόγια, η N= εισάγει και εξηγεί την έννοια του φυσικού αριθμού αλλά δεν προϋποθέτει ότι υπάρχουν οι **πραγματώσεις** αυτής της έννοιας. Το ότι υπάρχουν οι πραγματώσεις της έννοιας του φυσικού αριθμού, δηλαδή τα αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων, προκύπτει ως συμπέρασμα, μόνον όταν ισχύουν **αντικειμενικές καταστάσεις πραγμάτων** που αφορούν 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ εννοιών. Αυτό το γεγονός έχει μεγάλη σημασία για τη ρεαλιστική διάσταση του εγχειρήματος του νεολογικισμού.

Ηδη, τα επί μέρους συμπεράσματα των προηγούμενων κεφαλαίων συγκλίνουν στο ότι μία ρεαλιστική θέση στο πλαίσιο του νεολογικισμού μπορεί να θεωρηθεί βάσιμη, για την ύπαρξη των φυσικών αριθμών ως πραγματικών (αν και όχι απαραίτητα sui generis) αντικειμένων τα οποία θεμελιώνονται σε καταστάσεις πραγμάτων που αφορούν 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ εννοιών.

Για την περαιτέρω ισχυροποίηση αυτής της θέσης ακολούθησαν τα παρακάτω κεφάλαια με την αντιμετώπιση των αντίστοιχων προβλημάτων.

Στο κεφ.8 εξετάστηκε εάν η N= μπορεί να λειτουργήσει ως **ανακαλυπτικός ορισμός**, δηλαδή με τον τρόπο που επιθυμούσε ο Frege για τους ορισμούς του.

Επισημάνθηκε ότι η ισοδυναμία δεν φέρνει από μόνη της στην ύπαρξη ούτε επινοεί αντικείμενα Υποστηρίχθηκε **επιπλέον ότι η συνέπεια ενός έμμεσου ορισμού και ειδικότερα μιας αφαιρετικής αρχής δεν αρκεί για να εξασφαλιστεί η ανακαλυπτική διάσταση της λειτουργίας του ορισμού, προς υποστήριξη της ρεαλιστικής θέσης**, αλλά απαιτούνται άλλου είδους ιδιότητες των έμμεσων ορισμών, όπως πχ. η 'μετριοπάθεια' (modesty). Η N= χαρακτηρίζεται από αυτή την ιδιότητα. Η μετριοπάθειά της (modesty) συνίσταται στο ότι αναλαμβάνει απλώς να καθορίσει αναγκαίες και ικανές συνθήκες αλήθειας για ταυτότητες της μορφής «Nx:Fx=Nx:Gx» (που αφορούν αριθμητικούς όρους), χωρίς να προϋποθέτει ότι οι συνθήκες αυτές καλύπτονται και χωρίς να επιβάλλει περιορισμούς στο αρχικό πεδίο οντοτήτων. Σύμφωνα με τη διατύπωση του Wright, η N= *αφήνει τον κόσμο ν' αποφασίσει εάν οι συνθήκες που θέτει, ικανοποιούνται.* Στο κεφ. 8 έγινε επίσης αναφορά στη γνωσιολογική διάσταση του θέματος και στη συμβολή της N= σε μία θεμελίωση της αριθμητικής γνώσης τουλάχιστον ως a priori γνώσης, με βάση την παραγωγή από τον Wright των αξιωμάτων της αριθμητικής από την N= στη λογική 2^{ης} τάξης. Επισημάνθηκε εκεί ότι ακόμα και με την αποδοχή των επιφυλάξεων σχετικά με τη γνησιότητα της διάστασης του λογικισμού στο εγχείρημα των Hale & Wright, **η αριθμητική γνώση μπορεί να θεμελιωθεί στην N= ως a priori γνώση**.

Στα κεφ. 9, 10 και 11 μελετήθηκαν άλλου είδους προβλήματα σχετικά με τη ρεαλιστική ερμηνεία της αναφοράς: **το πρόβλημα** της απροσδιοριστίας της αναφοράς ή του **μη μονοσήμαντου προσδιορισμού της αναφοράς** των αριθμητικών όρων, η σημασιολογική κριτική του Benacerraf (1965) στο μαθηματικό ρεαλισμό (κεφ.9) και οι απαντήσεις που προέρχονται από τις διάφορες εκδοχές του στρουκτουραλισμού και την προσέγγιση του Balaguer οι οποίες και αξιολογήθηκαν. Παρουσιάστηκαν επίσης οι ερμηνευτικές προσεγγίσεις του **προβλήματος του Καίσαρος** (κεφ.10) με το οποίο ήρθε αντιμέτωπος ο ίδιος ο Frege στα Grundlagen. Η σημασία του έγκειται στο ότι **η ισοδυναμία N=** που προοριζόταν στα Grundlagen για το ρόλο του πλαισιακού ορισμού, **αδυνατεί να λειτουργήσει ως κριτήριο εφαρμογής της έννοιας** του φυσικού αριθμού που εισάγει. Σύμφωνα με μία από τις ερμηνείες η οποία συνδέει το πρόβλημα του Καίσαρος με τη μαθηματική αναφορά, είναι δυνατό οι ενικοί αριθμητικοί όροι τους οποίους εισάγει η N= να αναφέρονται αλλά δεν εξασφαλίζεται ο μονοσήμαντος προσδιορισμός των αντικειμένων αναφοράς. Σύμφωνα με μια άλλη ερμηνεία, το πρόβλημα του Καίσαρος αποτελεί μία εκδήλωση του μη μονοσήμαντου προσδιορισμού της σημασίας της έκφρασης ‘ο αριθμός της έννοιας F’. Στο κεφ.11 το πρόβλημα του Καίσαρος συνδέθηκε με το status της N= ως έμμεσου ορισμού. Η διαμάχη Frege-Hilbert στη μεταξύ τους αλληλογραφία, παρουσιάστηκε για να τονίσει αυτό το γεγονός.

Σε ότι αφορά το θέμα της ‘**μοναδικότητας**’ ή μη, των φυσικών αριθμών, διερευνήθηκε κατ’αρχήν (κεφ.11) σε ποιο βαθμό και με βάση ποιες συγκεκριμένες ερμηνείες του, το πρόβλημα του Καίσαρος επηρεάζει τη ρεαλιστική θέση του νεολογικισμού. Συγκεκριμένα, διαπιστώθηκε ότι υπάρχουν προσεγγίσεις που αποδέχονται ακόμα και τον μη μονοσήμαντο προσδιορισμό της αναφοράς των αριθμητικών όρων και οι οποίες θεωρούνται συμβατές με τον μαθηματικό ρεαλισμό γενικότερα. Ειδικά όμως στην περίπτωση του νεολογικισμού, είναι αναγκαία μια αντίληψη μοναδικότητας του αντικειμένου αναφοράς κάθε αριθμητικού όρου, προκειμένου να διεξαχθούν οι διαδοχικές αποδείξεις ύπαρξης που δίνει ο Wright. **Συνεπώς η ρεαλιστική θέση του νεολογικισμού ειδικότερα απαιτεί μια έννοια μοναδικότητας των φυσικών αριθμών. Ωστόσο, είναι δυνατό να δοθεί μια κατάλληλη ερμηνεία της μοναδικότητας, με βάση ένα είδος κατηγορικότητας που ισχύει στην περίπτωση αυτή και επιτρέπει ισόμορφα μοντέλα. Η απαίτηση της μοναδικότητας των φυσικών αριθμών μπορεί να εξασφαλιστεί ως ‘μοναδικότητα μέχρι ισομορφισμού’ στο πλαίσιο της 2^{ης} τάξης αριθμητικής Frege.**

Συνεπώς, υπό τις προϋποθέσεις που επισημάνθηκαν στα συμπεράσματα των επί μέρους κεφαλαίων, μπορεί να υποστηριχθεί η θέση του ρεαλισμού για τους φυσικούς αριθμούς η οποία συγκροτείται στο πλαίσιο του προγράμματος του νεολογικισμού και μπορεί να θεωρηθεί βάσιμη η θεμελίωση της αριθμητικής γνώσης στην ισοδυναμία N= και τη λογική (2^{ης} τάξης) ως a priori γνώση.

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

Αναπολιτάνος, Δ., (1985), *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, Αθήνα, Νεφέλη

Benacerraf, P., (1965) "What Numbers could not be", Philosophical Review, 74, 47-73,
επαναδημοσιεύθηκε στο Benacerraf, P. & Putnam, H., (1983), *Philosophy of Mathematics*, 2nd edition, Cambridge, Cambridge University Press, 272-94

Benacerraf, P., (1973), "Mathematical Truth", Journal of Philosophy, 70, 661-680 επαναδημοσιεύθηκε στο Benacerraf, P. & Putnam, H., (1983), *Philosophy of Mathematics*, 2nd edition, Cambridge, Cambridge University Press, 403-20

Bernays, P. (1934) «On Platonism in Mathematics», στο Benacerraf, P. & Putnam, H. (1983), *Philosophy of Mathematics*, 2nd edition, Cambridge, Cambridge University Press

Bonjour,L., (1998), *In Defense of Pure Reason: A Rationalist Account of a Priori Justification*, Cambridge, Cambridge University Press

Brown, J.R., "π In T he Sky", στο Irvine, A., (1990), *Physicalism in Mathematics*, London, Kluwer Academic Publishers, 95-120

Boolos, G. (1990), «The Standard of Equality of Numbers» στο Boolos (1990), *Meaning and Method: Essays in Honor of Hilary Putnam*, Cambridge, Cambridge University Press, 261-77

Boolos, G. (1997), «Is (HP) Analytic?», στο Boolos (1998) *Logic, Logic and Logic*, Harvard, Harvard University Press, 301-14

Boolos, G. (1998), *Logic, Logic and Logic*, Harvard, Harvard University Press

Carnap, R., "Empiricism, semantics and ontology" στον τόμο των Benecerraf, P. & Putnam, H., *Philosophy of Mathematics*, 2nd edition, Cambridge, Cambridge University Press,

Chihara, C. S. (1982), "A Goedelian Thesis Regarding Mathematical Objects. Do they exist? And Can We
Perceive Them?", Philosophical Review, 91, 211-27

Chihara, C. S. (1990), *Constructibility and Mathematical Existence*, Clarendon Press

Clark, P. (1998), «Dummet's argument for the indefinite extensibility of set and real number», *Grazer Philosophische Studien*, 55, 51-63

Demopoulos, W (1995), *Frege's Philosophy of Mathematics*, Harvard, Harvard University Press

Demopoulos, W. (1998), «The Philosophical Basis of our Knowledge of Number», Noûs, 32, 481-503

Dummett, M., (1978), *Truth and Other Enigmas*, Cambridge, Harvard University Press

Dummett, M., (1991), *Frege:Philosophy of Mathematics*, London, Duckworth

Dummett, M., (1973), *Frege: Philosophy of Language*, London, Duckworth (2nd edition: London, Duckworth, 1981)

Field, H., (1980), *Science without Numbers* , Oxford, Blackwell

Field, H., (1984), "Is Mathematical Knowledge Just Logical Knowledge?", Philosophical Review, 93, 509-552

Field, H., (1984), "Critical Notice of Wright [1983]", Canadian Journal of Philosophy, 14, 637-62

Field H., (1985), "On Conservativeness and Incompleteness" Journal of Philosophy, 82, 239-60

Field, H., (1989), *Realism, Mathematics and Modality*, Oxford, Basil Blackwell

Frege, G., (1884), *The Foundations of Arithmetic* (μετ. Ρουσσόπουλου, Γ., (1990) *Τα Θεμέλια της Αριθμητικής*, Αθήνα, Νεφέλη)

Geach, P. T. (1951), «Frege's Grundlagen», *Philosophical Review*, 60, 535-44

Goedel, K., (1944) "Russel's Mathematical Logic", στον τόμο των Benacerraf, P. & Putnam, H., (1983), *Philosophy of Mathematics*, 2nd edition, Cambridge, Cambridge University Press, 447-69

Goedel, K., (1947), What is Cantor's continuum problem? The American Mathematical Monthly, 54, 515-5, το οποίο έχει αναδημοσιευθεί στον τόμο των Benacerraf, P. & Putnam, H. (1983), *Philosophy of Mathematics*, 2nd edition, Cambridge, Cambridge University Press, 470-85

Grandy, R. E. (1977), «In defense of a Modest Platonism», Philosophical Studies, 32, 359-69

Hale, B., (1987), *Abstract Objects*, Oxford, Basil Blackwell

Hale, B., "Nominalism", στο Irvine, A. D., (1990), *Physicalism in Mathematics*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers

Hale, B. (2001) «A Response to Potter and Smiley: Abstraction by Recarving», *Proceedings of the Aristotelian Society*, 101, 339-58

Hale B. & Wright C., (1992), "Nominalism and the Contingency of Abstract Objects", The Journal of Philosophy, 1, 121-126

Hale B.& Wright Cr., (1994), "A Reductio Ad Surdum? Field on the Contingency of Mathematical Objects", Mind, 103, 169-183

Hale. B., και Wright, C., (2001), *The Reason's Proper Study*, Oxford,Clarendon Press, 2001

Hale. B., και Wright, C., (2002), «Benacerraf's dilemma revisited», European Journal of Philosophy 10, 101-129

Hazen, A. (1985), «McGinn's reply to Wright's reply to Benacerraf», *Analysis*, 44, 69-72

Heck, R. (1997) «The Julius Caesar Objection» στο Heck, R. *Language, Thought and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett*, 273-308

Hellman, G. (1989), *Mathematics Without Numbers*, Oxford, Oxford University Press

Hodes, H. (1984) «Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic», *Journal of Philosophy*, 81, 123-49

Hodes, H. (1990) «Ontological commitment: thick and thin» στο Boolos, G. *Meaning and Method: Essays in Honour of Hilary Putnam*, Cambridge, Cambridge University Press, 235-60

Horwich, P., (1998), Meaning, Oxford, Clarendon Press

Irvine, A.D., (1990), Physicalism in Mathematics, Dordrecht/Boston/London, Kluwer Academic Publishers,

Katz, J., (1995), "What Mathematical Knowledge Could Be?", Mind, 104, , 491-522

Katz, J., (1998), *Realistic Rationalism*, Cambridge/Massachusetts/London, MIT Press

Kneale W.& Kneale M. (1962), *The development of Logic*, Oxford, Clarendon Press

MacBride F., (2003), "Speaking with Shadows: A study of Neo-Logicism", British Journal of Philosophy of Science, 554, 120-121

MacFarlane, J., (2004), «Double Vision: Two Questions about the Neo-Fregean Programme», Draft of March 24, 2004

McGinn, M. (1984), «Wright's reply to Benacerraf», *Analysis*, 44, 69-72

Maddy, P., (1980), «Perception and Mathematical Intuition», Philosophical Review, 89, 163-96

Maddy, P., (1990), *Realism in Mathematics*, Oxford, Clarendon Press

Morton, A. & Stich, S. (1996) (ed.), *Benacerraf and his critics*, Oxford, Blackwell

Potter, M. & Smiley, T. (2001), «Abstraction by recarving», *Proceedings of the Aristotelian Society*, 101, 327-38

Potter, M. & Sullivan, P. (1997), «Hale on Caesar», *Philosophia Mathematica*, 5, 135-52

Psillos, S., (1999), *Scientific Realism: How science tracks truth*, London/N. York, Routledge

Psillos, S., (2005), «Scientific Realism and Metaphysics», Ratio

Putnam, H., "What is Mathematical Truth?" στο Putnam (1979), *Mathematics, Matter and Method* (Philosophical Papers I), Cambridge, Cambridge University Press, 60-78

Quine,W.V.O., (1936), «Truth by Convention», στο Quine (1976), *The Ways of Paradox and other Essays*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 77-106

Quine,W.V.O., (1969), *Ontological Relativity and Other Essays*, N. York, Columbia University Press

Quine,W.V.O., (1970), *Philosophy of Logic*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall

Quine, W.V.O., (1973), *Word and Object*, MIT press

Quine, W.V., "On Carnap's views on ontology", Philosophical Studies, vol.2, 1951, 67-71

Quine, W.V.,"On what there is" στο Quine, W.V., (1953), *From a Logical Point of View*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1-18

Resnik, D., (1974), «The Frege-Hilbert Controversy», Philosophy and Phenomenological Research, 34, 386-403

Romanos, G. D., *Quine and Analytic Philosophy*, Cambridge, Mass., MIT Press, 1986

Rumfitt, I. (2001), «Hume's Principle and the Number of all Objects», *Noûs,* 35, 515-41

Russell, B., (1919), *Introduction to Mathematical Philosophy*, London, Allen, G. & Unwin, Ltd., ch. 16 (Descriptions)

Shapiro, S., (1999), «Implicit Definition and Abstraction», Abstraction Day 99

Shapiro, S., (2000), *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*, Oxford, Oxford Univ.Press

Shapiro, S. & Weir, A. (2000) ‘‘Neologicist logic’ is not epistemically innocent’, *Philosophia Mathematica* 8, 163-89

Tennant, N. (1987), *Anti-realism and Logic*, Oxford, Oxford University Press

Tennant, N. (1997), «On the Necessary Existence of Numbers», *Noûs*, 31, 307-36

Wittgenstein, L. (1953), *Philosophical Investigations*, trans. G. E. M. Anscombe, Oxford, Blackwell

Wright, C., (1983), *Frege's Conception of Numbers as Objects, Aberdeen*, Aberdeen University Press

Wright, C., (1988), "Why Numbers Can Believably Be", Revue Internationale de Philosophie, 42, 425-73

Χριστοδουλίδης, Π., (1993), Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών, Αθήνα, Γ.Α. Πνευματικός

Book Symposium για το RPS (*The Reason's Proper Study*), 2003, Oxford, Blackwell