ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ε.Κ.Π.Α.
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ε.Μ.Π.

Φ Ι Λ Ι Π Π Ο Σ   Α.   Φ Ο Υ Ρ Ν Α Ρ Α Κ Η Σ

Μια νέα ερμηνεία της γεωμετρικής ανάλυσης των αρχαίων Ελλήνων και μια νέα θεώρηση των Δεδομένων *του Ευκλείδη, υπό το φως της διάκρισης μεταξύ των μαθηματικών όρων «δοθέν» και «δεδομένον»*

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΘΗΝΑ 2005

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ε.Κ.Π.Α.
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ε.Μ.Π.

Φ Ι Λ Ι Π Π Ο Σ   Α.   Φ Ο Υ Ρ Ν Α Ρ Α Κ Η Σ

Μια νέα ερμηνεία της γεωμετρικής ανάλυσης των αρχαίων Ελλήνων και μια νέα θεώρηση των **Δεδομένων** *του Ευκλείδη, υπό το φως της διάκρισης μεταξύ των μαθηματικών όρων «δοθέν» και «δεδομένον»*

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:
Δ. ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ (επιβλέπων, καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.)
Β. ΚΑΡΑΣΜΑΝΗΣ (αναπληρωτής καθηγητής Ε.Μ.Π.)
Ι. ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ (επίκουρος καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.)

ΑΘΗΝΑ 2005

Ευχαριστίες

Με την πεποίθηση ότι κάθε επιστημονικό εγχείρημα, εκτός από την προσπάθεια του κυρίως εμπλεκόμενου σε αυτό, απαιτεί για την επιτυχή ολοκλήρωσή του τη συνεργασία και άλλων, θα ήθελα να ευχαριστήσω κάποιους ανθρώπους που συνέβαλαν, ο καθένας με τον τρόπο του, ώστε να καταστεί δυνατή η εκπόνηση αυτής της διδακτορικής διατριβής.

Καταρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επίκουρο καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Ιωάννη Χριστιανίδη, ο οποίος με υπομονή και μεθοδικότητα με καθοδήγησε και με βοήθησε με ποικίλους τρόπους κατά τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Διονύσιο Αναπολιτάνο, που για δεύτερη φορά με εμπιστεύτηκε και με καθοδήγησε ουσιαστικά στην επιλογή του ερευνητικού πεδίου των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών, καθώς και τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Βασίλη Καρασμάνη, ο οποίος έκανε χρήσιμες υποδείξεις και διορθώσεις στο τελικό κείμενο της διατριβής.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους καθηγητές κκ. Σπύρο Αργυρό, Κώστα Γαβρόγλου, Δημήτρη Διαλέτη και Παύλο Καλλιγά, οι οποίοι δέχθηκαν ευγενικά να συμμετάσχουν στην εξεταστική επιτροπή συμβάλλοντας με το επιστημονικό και προσωπικό τους κύρος στην ουσιαστική αξιολόγηση αυτής της εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στη μητέρα μου Κωνσταντίνα Φουρναράκη και τη γυναίκα μου Μαρία Αρκέντη για την αγάπη με την οποία με περιέβαλαν και την υπομονή που επέδειξαν όλα αυτά τα χρόνια της ερευνητικής και συγγραφικής μου προσπάθειας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το υπόμνημα του Μαρίνου του Φιλοσόφου στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Φιλοσοφική διάκριση «δοθέντος» – «δεδομένου»

Ο τυχαίος – ενδεχομενικός χαρακτήρας του δοθέντος
και ο «βεβαιωτικός» χαρακτήρας του «δεδομένου»

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Γεωμετρική ανάλυση. Μια νέα ερμηνεία

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Οι θεωρητικές περιγραφές
και η πρακτική της γεωμετρικής ανάλυσης στον Πάππο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Η γεωμετρική ανάλυση πριν από τον Πάππο:
Μέναιχμος, Αρχιμήδης, Απολλώνιος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον», τα *Δεδομένα* και η αξία του Ευκλείδη ως ερευνητή

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή ερευνάται καταρχάς η σημασία των όρων «δοθέν» και «δεδομένον» και ο τρόπος λειτουργίας τους στο έργο *Δεδομένα* του Ευκλείδη. Το χαρακτηριστικό γνώρισμα αυτού του έργου είναι η συνεχής χρήση των όρων «δοθέν» και «δεδομένον». Ο όρος «δοθέν» εμφανίζεται σε αυτό 923 φορές, ενώ ο όρος «δεδομένον» 478 φορές. Τους όρους «δοθέν» και «δεδομένον» τους συναντούμε επίσης στα σχετικώς λίγα παραδείγματα επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων με τη μέθοδο της ανάλυσης και σύνθεσης, που διασώζονται από την αρχαιοελληνική μαθηματική παράδοση. Οι εν λόγω όροι χρησιμοποιούνται στο αναλυτικό στάδιο της επίλυσης των προβλημάτων και συγκεκριμένα στο δεύτερο μέρος του.

Η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» έχει προκαλέσει και συνεχίζει να προκαλεί προβλήματα κατανόησης στα κείμενα των ελληνικών Μαθηματικών στα οποία χρησιμοποιείται. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι τόσο τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη όσο και το δεύτερο μέρος της γεωμετρικής ανάλυσης δεν έχουν ακόμη τύχει, το καθένα χωριστά, μιας κοινά αποδεκτής ερμηνείας του περιεχομένου, του τρόπου που λειτουργούν αλλά ούτε καν του λόγου και της αναγκαιότητας της ύπαρξής τους. Ο Πάππος έχει συνδέσει τα *Δεδομένα* με τη γεωμετρική ανάλυση με ρητό τρόπο στην εισαγωγή του 7^{ου} βιβλίου της *Συναγωγής*, όπου χαρακτηρίζει τα *Δεδομένα* ως το πρώτο τη τάξει βιβλίο της ανάλυσης. Στην εργασία αυτή θα προσπαθήσουμε να κάνουμε φανερό ότι το θέμα της ορολογίας και του περιεχομένου των *Δεδομένων* δεν μπορούσε να μελετηθεί παρά μόνο σε συνδυασμό με το θέμα της γεωμετρικής ανάλυσης και αντίστροφα. Έτσι τα κύρια θέματα αυτής της διατριβής είναι δύο. Πρώτον τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, ο τρόπος που λειτουργούν με την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» και η αναγκαιότητα της ύπαρξής τους και δεύτερον η γεωμετρική ανάλυση των ελληνικών Μαθηματικών και ο τρόπος που αυτή λειτουργεί, στο δεύτερο και ίσως πιο σημαντικό για την ερμηνεία της μέρος, με την ίδια ορολογία. Δύο θέματα που όπως θα γίνει φανερό με την παρούσα διατριβή οι απαντήσεις τους συνδέονται άμεσα.

Η διατριβή μας δομείται σε εννέα κεφάλαια. Ειδικότερα, στο εισαγωγικό κεφάλαιο με τίτλο «*Η ‘νέα’ ιστοριογραφία των Μαθηματικών, οι μεθοδολογικοί άξονες* *και τα ερωτήματα της παρούσας διατριβής*», παρουσιάζουμε συνοπτικά τις δύο κύριες μεθοδολογικές τάσεις της σύγχρονης ιστορίας των Μαθηματικών: την παραδοσιακή ιστορία των Μαθηματικών και τη «νέα» ιστορία των Μαθηματικών. Μετά από σύγκριση των δύο τάσεων, αιτιολογούμε γιατί ακολουθούμε τη δεύτερη από την οποία και αντλούμε τους μεθοδολογικούς άξονες της έρευνάς μας που συνοπτικά συνίστανται: στο να κατανοήσουμε τα μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος *ιστορικά,* λαμβάνοντας υπόψη το ιστορικό και πολιτισμικό πλαίσιο μέσα στο οποίο εντάσσονται, να δείξουμε σε ποιο βαθμό οι παρελθούσες ιδέες ήταν διαφορετικές από τις σύγχρονες και τελικά να προσπαθήσουμε να ανασυγκροτήσουμε, όσο αυτό είναι δυνατόν, τις αυθεντικές προθέσεις του συγγραφέα τους. Στη συνέχεια του κεφαλαίου, στα πλαίσια της νέας αυτής ιστοριογραφίας, θέτουμε τα ερωτήματα που απασχολούν τη διατριβή μας και αφορούν τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, τη γεωμετρική ανάλυση και τον ουσιαστικό συνδετικό τους κρίκο, την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον».

Στο κεφάλαιο 1, με τίτλο «*Οι έρευνες για τα* Δεδομένα *του Ευκλείδη*», παρουσιάζουμε, συζητάμε και ομαδοποιούμε τις απόψεις των διαφόρων μελετητών για την αξία, το περιεχόμενο και την ορολογία που χρησιμοποιούν τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη. Απόψεις οι οποίες εμφανίζονται πολλές φορές αντικρουόμενες, αποσπασματικές και στο σύνολό τους όχι ιδιαίτερα διαφωτιστικές. Επίσης, στο κεφάλαιο 1, ερευνούμε το πώς εμφανίζεται σε πρώτη ανάγνωση η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» στα κείμενα του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου και καταλήγουμε ότι η ορολογία αυτή συνδέεται αποκλειστικά με προβλήματα και όχι με θεωρήματα.

Στο κεφάλαιο 2, με τίτλο «*Οι όροι 'δοθέν' και 'δεδομένον': γλωσσική διάκριση*», αναδεικνύουμε δύο σημαντικά στοιχεία που αφορούν τον τρόπο με τον οποίο εμφανίζεται και αποδίδεται η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» στα διάφορα κείμενα και ειδικότερα στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη. Το πρώτο είναι, ότι στην πορεία του χρόνου ο όρος «δεδομένον» έχει σχεδόν ταυτιστεί εννοιολογικά με τον όρο «δοθέν» από τους διάφορους μελετητές και δεν γίνεται πια καμία διάκριση ανάμεσά τους. Το δεύτερο είναι ότι οι δύο όροι, ως ένας όρος πλέον, έχουν φτάσει σήμερα να σημαίνουν το «γνωστό». Οι πρώτοι μετά τους αρχαίους Έλληνες που χρησιμοποίησαν τον όρο «γνωστό» αντί του όρου «δεδομένον» στην γεωμετρική ανάλυση ήταν οι Άραβες μαθηματικοί. Έκτοτε πολλοί, από τη λατινική κυρίως παράδοση, τους ακολούθησαν, για να φτάσουμε σήμερα τα «δεδομένα» ενός αλγεβρικού προβλήματος ή ενός προγράμματος του υπολογιστή[1] να σημαίνουν αποκλειστικά τα «γνωστά» στοιχεία του, σε αντιδιαστολή με αυτά που ψάχνουμε, δηλαδή τα άγνωστα. Μια προσεκτικότερη όμως ανάγνωση των πρωτότυπων ελληνικών μαθηματικών κειμένων, μας δείχνει ότι οι δύο όροι δεν εναλλάσσονται τυχαία στα ελληνικά Μαθηματικά. Το ερώτημα που τίθεται επομένως με αφετηρία τη γλώσσα είναι: Υποδηλώνει η χρήση διαφορετικών χρόνων στα αρχαία μαθηματικά κείμενα, όπως είναι τα *Δεδομένα*, διαφοροποίηση στον τρόπο που οι συγγραφείς τους αντιλαμβάνονται τη λειτουργία των όρων «δεδομένον» και «δοθέν» αντίστοιχα; Αν ισχύει αυτό -όπως εμείς υποστηρίζουμε- τότε η χωρίς διάκριση απόδοσή τους, όπου δεν προκαλεί σύγχυση στο σημερινό αναγνώστη, τουλάχιστον δεν του επιτρέπει την ορθή και πλήρη κατανόηση των κειμένων που περιλαμβάνουν τους δύο όρους. Το βασικό εργαλείο που χρησιμοποιούμε στο κεφάλαιο 2, προκειμένου να αναδείξουμε τη διάκριση ανάμεσα στους δύο όρους είναι το «ποιόν ενεργείας» των χρόνων των ρημάτων στα αρχαία Ελληνικά.

Στο κεφάλαιο 3, με τίτλο «*Το υπόμνημα του Μαρίνου του Φιλοσόφου στα* Δεδομένα *του Ευκλείδη*», παρουσιάζουμε για πρώτη φορά στα Νέα Ελληνικά το κείμενο του Μαρίνου του Φιλοσόφου, νεοπλατωνικού φιλοσόφου του 5^{ου} μ. Χ. αιώνα, που αναλύει την κεντρική έννοια «δεδομένον» των *Δεδομένων* του Ευκλείδη και περιλαμβάνει το μοναδικό ορισμό της που φτάνει σε εμάς από την αρχαιότητα. Ένα κείμενο που μέχρι τώρα έχει αντιμετωπισθεί αποσπασματικά από τη διεθνή έρευνα, αν και περιλαμβάνει σημαντικές θέσεις που βοηθούν στην κατανόηση του όρου «δεδομένον» και κατ' επέκταση των *Δεδομένων*. Συγκεκριμένα, ο Μαρίνος, διακρίνει το «δοθέν» από το «δεδομένον», συνδέει άμεσα το «δεδομένον» με τον στωικό όρο «καταληπτόν» και κατ' επέκταση με τη νοητική σύλληψη και επεξεργασία. Επίσης, με τον ορισμό του «δεδομένον» που μας παραδίδει συνδέει άμεσα τον όρο με τη «δυνατότητα» η οποία έχει υπάρξει. Οι θέσεις αυτές είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην κατεύθυνση της έρευνας της φιλοσοφικής διάκρισης –με απώτερο στόχο τη μαθηματική διάκριση– ανάμεσα στο «δοθέν» και το «δεδομένον», που ακολουθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

---

[1] Τα data ενός προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή, έχει επικρατήσει σήμερα ως όρος να σημαίνει αποκλειστικά τις γνωστές πληροφορίες που πρέπει να εισαχθούν στο πρόγραμμα από τον χρήστη.

Στο κεφάλαιο 4, με τίτλο «*Φιλοσοφική διάκριση 'δοθέντος' – 'δεδομένου'*», αναλύοντας τους διάφορους ορισμούς των δύο όρων που φτάνουν σε εμάς σήμερα και τους ορισμούς των ειδών του «δεδομένου» από τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, δείχνουμε ότι η διάκριση «δοθέν» – «δεδομένον» συνδέεται στα αρχαία κείμενα εννοιολογικά με τη φιλοσοφική διάκριση «ενδεχόμενον» – «δυνατόν». Διάκριση, η οποία με τη σειρά της, προσδίδει στο «δοθέν» τον χαρακτήρα του *όχι αδύνατου και ταυτόχρονα τυχαίου-ενδεχομένου*, ενώ στο «δεδομένον» τον χαρακτήρα του *όχι αδυνάτου αλλά, υπό ορισμένες συνθήκες, λογικά αναγκαίου*. Αυτός ακριβώς υποστηρίζουμε ότι είναι ο τρόπος που λειτουργεί η διάκριση «δοθέν» – «δεδομένον» στην ελληνική γεωμετρία. Τις θέσεις μας αυτές τις επιβεβαιώνουμε στη συνέχεια, μέσα από την ίδια την πρακτική των μαθηματικών κειμένων, όπως είναι οι προτάσεις των *Δεδομένων* αλλά και οι θεωρητικές περιγραφές και η πρακτική του Πάππου, μέσα από ένα πρώτο συγκεκριμένο παράδειγμα, στη γεωμετρική ανάλυση. Από τη μελέτη της μαθηματικής αυτής πρακτικής, αναδεικνύεται ο βεβαιωτικός χαρακτήρας των προτάσεων των *Δεδομένων* αλλά και του δεύτερου μέρους της γεωμετρικής ανάλυσης. Έτσι γίνεται φανερό πλέον ότι η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο λειτουργούν οι προτάσεις των *Δεδομένων*, μπορεί να μας οδηγήσει σε καλύτερη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο λειτουργεί το αινιγματικό μέχρι τώρα δεύτερο μέρος της ανάλυσης και αντίστροφα.

Στο κεφάλαιο 5, με τίτλο «*Γεωμετρική ανάλυση. Μια νέα ερμηνεία*», αρχικά παραθέτουμε τους ορισμούς της γεωμετρικής ανάλυσης που έχουν σωθεί, διατυπώνουμε και συζητάμε τα ερωτήματα που την αφορούν καθώς και τις μέχρι σήμερα απαντήσεις που έχουν δοθεί αλλά και τις βασικές ερμηνείες που έχουν υπάρξει για αυτή τη μέθοδο των ελληνικών Μαθηματικών. Από τις ερμηνείες αυτές αναδεικνύουμε κάποια στοιχεία που θα μας είναι χρήσιμα στη συνέχεια, προκειμένου να συνθέσουμε παρακάτω τη δική μας ερμηνεία. Η θέση μας συνοπτικά είναι ότι σε αυτό το μέρος της ανάλυσης, το «βεβαιωτικό» όπως εμείς το ονομάζουμε πλέον, παράγεται από τον γεωμέτρη-ερευνητή η «δυνατότητα», με την έννοια της «υποθετικής αναγκαιότητας», να λυθεί το πρόβλημα. Με άλλα λόγια ο ερευνητής απαντά στο εσωτερικό του ερώτημα, βεβαιώνεται ότι *μπορεί* να λύσει το πρόβλημα. Επίσης, προσπαθούμε να δείξουμε ότι η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» συνδέεται με την έκφραση της διαλεκτικής έρευνας του Πλάτωνα «λόγον ἑαυτῷ διδόναι». Έτσι η συνολική ερμηνεία μας για την ανάλυση περιλαμβάνει το πρώτο μέρος της ανάλυσης, «υποθετικό» όπως το ονομάζουμε, στο οποίο ο γεωμέτρης-ερευνητής κάνει μια «πορεία προς τα πάνω», δηλαδή μια πορεία αναζήτησης προκειμένων με πρώτο αυτό της λήψης του ζητουμένου και στόχο να καταλήξει σε κάτι που είναι αληθές ανεξάρτητα του ζητουμένου, από το οποίο *υποθέτει* ότι μπορεί να παραχθεί το ζητούμενο. Ακολουθεί το δεύτερο μέρος της ανάλυσης –το «βεβαιωτικό»– η «προς τα κάτω» πορεία, μια σειρά συμπερασμών που έχει στόχο να απαντήσει ο γεωμέτρης-ερευνητής στον εαυτό του, να βεβαιωθεί δηλαδή κατά πόσο αυτά που προηγήθηκαν στο «υποθετικό» μέρος, εφόσον αντιστραφούν, συγκροτούν έναν παραγωγικό συμπερασμό ο οποίος *μπορεί* να λύσει το πρόβλημα.

Στο κεφάλαιο 6, με τίτλο «*Οι θεωρητικές περιγραφές και η πρακτική της γεωμετρικής ανάλυσης στον Πάππο*», υπό το πρίσμα πλέον της ερμηνείας μας για τη γεωμετρική ανάλυση, αναλύουμε τις τρεις θεωρητικές περιγραφές του Πάππου για αυτήν, δείχνουμε ότι δεν αντιφάσκουν μεταξύ τους, ούτε χρειάζεται κάποια από αυτές να θεωρηθεί ως παρεμβολή, αντίθετα μπορούν και οι τρεις για πρώτη φορά να αλληλοσυμπληρωθούν και να συνυπάρξουν κάτω από την ίδια ερμηνεία. Στη συνέχεια δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργούσε η γεωμετρική ανάλυση στην πράξη, παρουσιάζοντας ένα ακόμη αντιπροσωπευτικό και ίσως το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο από τους σύγχρονους ερευνητές παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου από τον Πάππο.

Στο κεφάλαιο 7, με τίτλο «*Η γεωμετρική ανάλυση πριν από τον Πάππο: Μέναιχμος, Αρχιμήδης, Απολλώνιος*», μετά από έρευνα και μελέτη των αναλύσεων του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου που διασώθηκαν, καθώς και ενός αποσπάσματος γεωμετρικής ανάλυσης του Μέναιχμου (που διασώθηκε από τον Ευτόκιο) και τη σύγκρισή τους τόσο με τις περιγραφές του Πάππου όσο και με τη συνολικότερη πρακτική του, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ουσία, η δομή και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο της γεωμετρικής ανάλυσης παραμένουν ίδια από την κλασική εποχή μέχρι την ύστερη αρχαιότητα. Μοναδική, ίσως, παραφωνία δείχνουμε ότι αποτελούν οι απόπειρες κάποιων σχολιαστών κυρίως της ύστερης αρχαιότητας και του Πάππου, να εισάγουν για λόγους που δεν αφορούσαν τη μαθηματική παραγωγή αλλά μάλλον το κοινωνικό- πολιτισμικό πλαίσιο της εποχής τους, τη λεγόμενη «θεωρητική ανάλυση», μέσα από λίγες προτάσεις και μια τεχνητή διάκριση της γεωμετρικής ανάλυσης, που δεν βρίσκουν όμως στήριγμα στη μαθηματική βιβλιογραφία της κλασικής εποχής ούτε είναι ικανές να τροποποιήσουν την εικόνα της ελληνικής γεωμετρικής ανάλυσης.

Στο κεφάλαιο 8, με τίτλο «*Η ορολογία 'δοθέν' – 'δεδομένον', τα* Δεδομένα *και η αξία του Ευκλείδη ως ερευνητή*», έχοντας κατανοήσει πλέον σε σημαντικό βαθμό τον τρόπο με τον οποίο εμφανίζεται και λειτουργεί η ορολογία «δοθέν» - «δεδομένον» στη γεωμετρική ανάλυση και στα *Δεδομένα*, κάνουμε μια τελική αποτίμηση για αυτήν. Με βάση αυτή την αποτίμηση, την όλη συζήτηση που έχει προηγηθεί για τα *Δεδομένα* αλλά και την αντιπαραβολή που κάνουμε ανάμεσα σε προτάσεις των *Στοιχείων* και των *Δεδομένων* που φαίνεται να έχουν το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο, ολοκληρώνουμε την εικόνα μας τόσο για τον τρόπο που λειτουργούν οι προτάσεις των *Δεδομένων* όσο και για την αναγκαιότητα και την ερευνητική φύση του έργου. Αυτή ακριβώς η ερευνητική φύση των *Δεδομένων* και συνολικά ο ερευνητικός χαρακτήρας της ανάλυσης, μας οδηγούν τέλος σε μια νέα αποτίμηση της αξίας του Ευκλείδη ως ερευνητή.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Η «νέα» ιστοριογραφία των Μαθηματικών, οι μεθοδολογικοί άξονες και τα ερωτήματα της παρούσας διατριβής

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τις δύο κύριες μεθοδολογικές τάσεις της σύγχρονης ιστορίας των Μαθηματικών: την παραδοσιακή ιστορία των Μαθηματικών και την «νέα» ιστορία των Μαθηματικών. Τις συγκρίνουμε και, εν τέλει, τοποθετούμαστε για το βαθύτερο περιεχόμενο των διαφορών τους. Στόχος μας είναι να γίνουν σαφείς οι μεθοδολογικοί άξονες της έρευνάς μας η οποία εντάσσεται στην νέα ιστοριογραφία των Μαθηματικών. Στη συνέχεια, στα πλαίσια της νέας αυτής ιστοριογραφίας, θέτουμε και αναπτύσσουμε τα ερωτήματα που απασχολούν το σύνολο της διατριβή μας και αφορούν: τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, τη γεωμετρική ανάλυση και τον ουσιαστικό συνδετικό τους κρίκο, την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον».

1. *Η νέα ιστοριογραφία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών και οι μεθοδολογικοί άξονες της παρούσας έρευνας*

Ίσως το πρώτο ερώτημα που αυθόρμητα έρχεται στο νου του καθενός που αντικρίζει ένα διδακτορικό πάνω στην Ιστορία των ελληνικών Μαθηματικών είναι: «Τι υπάρχει άραγε ακόμη για να ειπωθεί σε σχέση με τα ελληνικά Μαθηματικά; Δεν είναι ένα πεδίο ερευνητικά κορεσμένο;» Είναι γεγονός ότι έχουν γραφεί πολλά για τα ελληνικά Μαθηματικά, από πολλούς και σημαντικούς μελετητές. Τα περισσότερα αρχαία κείμενα που έχουν διασωθεί, έχουν εκδοθεί και μελετηθεί και σπάνια πια κάποιο νέο κείμενο έρχεται στο φως. Όσο μεγάλο και αν είναι χρονικά το εύρος των ελληνικών Μαθηματικών, περίπου από τον 6^{o} αιώνα π.Χ. μέχρι τον 6^{o} αιώνα μ.Χ., και όσο μεγάλος ο όγκος των κειμένων που έχουν διασωθεί, εξίσου μεγάλη φαίνεται πως υπήρξε η προσπάθεια της σύγχρονης ιστοριογραφίας γύρω από αυτά. Μια ιστοριογραφία η οποία αρχίζει χοντρικά από τα μέσα του 18ου αιώνα όταν ο Montucla δημοσίευσε τη δίτομη *Histoire des Mathématiques* αφιερώνοντας έναν μεγάλο αριθμό σελίδων στην ιστορία των Μαθηματικών των αρχαίων Ελλήνων, και φτάνει μέχρι την αρχή της δεκαετίας του 1970, που φαινόταν να έχει απαντήσει οριστικά, στο σύνολο των βασικών τουλάχιστον ερωτημάτων που αφορούσαν στα ελληνικά Μαθηματικά. Η ιστοριογραφία αυτή, είχε ως βασικό εργαλείο προσέγγισης των ελληνικών Μαθηματικών, την λογικο-μαθηματική ανάλυσή τους, με άλλα λόγια την ανάγνωση των αρχαίων μαθηματικών κειμένων, με τη βοήθεια των μοντέρνων μαθηματικών, των όρων, των συμβολισμών, των σημασιών και των μεθόδων τους. Το εργαλείο αυτό η παραδοσιακή ιστοριογραφία το χρησιμοποιούσε με στόχο να αποκαλύψει την ουσία των αρχαίων μαθηματικών κειμένων στο σύγχρονο αναγνώστη, πολλές φορές όμως παραβίαζε ή στην καλύτερη περίπτωση αγνοούσε τον εννοιολογικό ορίζοντα της εποχής που γράφτηκαν και λειτούργησαν τα κείμενα αυτά. Έναν εννοιολογικό ορίζοντα εντελώς διαφορετικό από αυτόν του σύγχρονου αναγνώστη.

Κάπου εκεί όμως στα μέσα της δεκαετίας του 1970, η ιστοριογραφία των ελληνικών Μαθηματικών έκανε μια σημαντική στροφή προς αυτό που σήμερα ονομάζεται «νέα» ιστοριογραφία των ελληνικών μαθηματικών. Ίσως το πρώτο σημαντικό επεισόδιο αυτής της στροφής στην ιστοριογραφία των ελληνικών Μαθηματικών, υπήρξε το αιρετικό-ανατρεπτικό, για την εποχή του, άρθρο του Sabetai Unguru το 1975 με τίτλο: «On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics». Στην εισαγωγή αυτού του άρθρου ο Unguru, περιγράφει με γλαφυρό τρόπο το πώς λειτουργεί ο παραδοσιακός ιστορικός των Μαθηματικών μέχρι εκείνη τη στιγμή, ενώ καλεί τη νέα γενιά των ιστορικών να ξαναγράψουν την ιστορία των μαθηματικών σε μια νέα και ιστορικά υγιή βάση: «…ο σκοπός του ιστορικού των Μαθηματικών είναι να ξεμπερδέψει και να ξεδιαλύνει τα μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος και να τα μεταγράψει στη μοντέρνα γλώσσα των Μαθηματικών, κάνοντάς τα έτσι εύκολα διαθέσιμα για όλους όσους ενδιαφέρονται. …Πράγματι είναι ο στόχος αυτού του άρθρου να δείξουμε τι είναι ιστορικά λάθος με τον παραδοσιακό τρόπο, με τον οποίο έχει γραφεί η ιστορία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών, και να καλέσουμε τη νέα γενιά των ιστορικών των ελληνικών Μαθηματικών να ξαναγράψει την ιστορία σε μια νέα και ιστορικά υγιή βάση.» (Unguru, 1975, 69)

Η αιρετική αυτή πρόταση, για απόρριψη ουσιαστικά της παραδοσιακής ιστορίας των Μαθηματικών και των συμπερασμάτων της και για στροφή σε μια νέα ιστοριογραφία των ελληνικών Μαθηματικών, ιστορικά υγιέστερη από την προηγούμενη, είχε ως αφορμή τη γνωστή στη συνέχεια «διαμάχη για τη ‘γεωμετρική άλγεβρα’». Αυτό που ο ίδιος ο Unguru (1975, 69) περιγράφει ως: «…τη θεώρηση ότι τα ελληνικά Μαθηματικά, ειδικά μετά την ανακάλυψη της ‘ασυμμετρίας’ από τη σχολή των Πυθαγορείων, είναι *άλγεβρα* ντυμένη, με γεωμετρικό ένδυμα, πρωτίστως για χάρη της αυστηρότητας.»

Η μετάφραση του αρχαίου τρόπου γραφής, με όρους σύγχρονης άλγεβρας, ήταν απαράδεκτη για τη νέα ιστοριογραφία. Δεν επρόκειτο μόνο για ένα θέμα συμβολισμού, ήταν κάτι πολύ ουσιαστικότερο. Σύμφωνα με τον Unguru (1975, 80): «Η γλώσσα είναι η άμεση πραγματικότητα της σκέψης. …Διαφορετικοί τρόποι σκέψης υπονοούν διαφορετικούς τρόπους έκφρασης.» Θέση η οποία μας βρίσκει απόλυτα σύμφωνους και αποτελεί σημείο εκκίνησης αλλά και έναν από τους μεθοδολογικούς άξονες της παρούσας διατριβής.

Η πρότασή του Unguru αφορούσε την αποκάλυψη του πραγματικού τρόπου σκέψης των αρχαίων μαθηματικών, μέσα από τον τρόπο που οι λέξεις, οι όροι, οι έννοιες νοηματοδοτούνται, λειτουργούν και αποκτούν σημασία στα πλαίσια του ελληνικού μαθηματικού λόγου. Οι απόψεις αυτές, σε συνδυασμό με τις σύγχρονες αντιλήψεις για τη σημασία της γλώσσας και πως αυτή διαμορφώνεται μέσα από τη χρήση της, σε αλληλεπίδραση με το κοινωνικό και πολιτισμικό περιβάλλον, που είναι επηρεασμένες από τις όψιμες θέσεις τόσο του Wittgenstein όσο και άλλων εκπροσώπων της αναλυτικής φιλοσοφίας και είχαν ως αφετηρία τους τη φιλοσοφία των Μαθηματικών, έμελλε τώρα να επηρεάσουν με καθοριστικό τρόπο την ιστοριογραφία των Μαθηματικών.

Η ανάγνωση των αρχαίων μαθηματικών κειμένων, με τη βοήθεια των μοντέρνων μαθηματικών, των όρων, των συμβολισμών, των σημασιών και των μεθόδων τους, είναι σύμφωνα με τον Unguru, η ασφαλέστερη μέθοδος για την παρανόηση του χαρακτήρα των αρχαίων μαθηματικών, στα οποία οι φιλοσοφικές τους προϋποθέσεις και οι μεταφυσικές δεσμεύσεις έπαιξαν ένα πολύ περισσότερο θεμελιώδη και αποφασιστικό ρόλο, από αυτόν που παίζουν στα μοντέρνα μαθηματικά.

Οι υποστηρικτές[2] της «γεωμετρικής άλγεβρας» ήταν επόμενο να απαντήσουν και να υπερασπιστούν, βέβαια, κατ’ αυτόν τον τρόπο το κύρος της ιστοριογραφίας που είχε υπάρξει μέχρι τότε, ενάντια σε οποιαδήποτε αιρετική πρόταση για νέα ιστοριογραφία, όπως αυτή που είχε εκφράσει ο Unguru. Ο χρόνος όμως έμελλε να δικαιώσει την επιστημονική αξία αυτής της πρότασης.

---

[2] Βλέπε: Weil (1978), Van Der Waerden (1976) και Freudenthal (1977).

Παρόμοιες θέσεις για την ιστορία των μαθηματικών είχαν εκφραστεί και από άλλους στο παρελθόν, όπως αυτή του Mahoney (1973, XII-XIII): «Οποιοσδήποτε ιστορικός των Μαθηματικών συνειδητοποιεί τους κρυφούς και φανερούς κινδύνους της Whig ιστορίας, ανακαλύπτει γρήγορα ότι η μετάφραση των Μαθηματικών του παρελθόντος σε μοντέρνο συμβολισμό και ορολογία, αντιπροσωπεύει το μεγαλύτερο από όλους τους κινδύνους. Τα σύμβολα και οι όροι των μοντέρνων μαθηματικών είναι οι φορείς των εννοιών και των μεθόδων τους. Η εφαρμογή τους σε ιστορικό υλικό περιλαμβάνει πάντοτε το ρίσκο να επιβαρυνθεί το υλικό με κάποιο περιεχόμενο που δεν του ανήκει στην πραγματικότητα.»

Όπως αναφέρει επίσης στο άρθρο του ο Unguru, θέσεις που συμφωνούσαν με τις δικές του και ήταν σοβαρά τεκμηριωμένες, είχαν εκφραστεί στο παρελθόν τόσο από τον Jacob Klein (1934-6/1968), όσο και από τον Áprad Szabó (1969). Ο πρώτος είχε δομήσει το έργο του, με μεθοδολογικό άξονα την εννοιολογική εξέλιξη της έννοιας του αριθμού, από τα ελληνικά στα μοντέρνα Μαθηματικά, τονίζοντας ότι η άλγεβρα είναι ένα προϊόν της νεώτερης επιστήμης και υπάρχουν μεγάλες διαφορές ανάμεσα στον αλγεβρικό και γεωμετρικό τρόπο σκέψης. Ενώ ο δεύτερος, που επίσης είχε αμφισβητήσει ευθέως την ιστορική αξία της έννοιας της «γεωμετρικής άλγεβρας», θεωρεί ότι η μέθοδός του είναι που διαφοροποιεί το έργο του από αυτό των υπολοίπων, αναφέρει ότι ανατρέχει στις πηγές μέσα από τα πρωτότυπα κείμενα, γιατί οι κατά τα άλλα ορθές φιλολογικές μεταφράσεις δεν προσφέρουν σχεδόν τίποτα στην ιστορία των Μαθηματικών, και προτείνει την εμπεριστατωμένη γλωσσική και ιστορική ανάλυση, λέξεων και εκφράσεων μέσα στο πλαίσιο της ελληνικής επιστήμης.

Τα επιχειρήματα που αντάλλαξαν οι υποστηρικτές τόσο της νέας όσο και της παραδοσιακής ιστοριογραφίας μπορεί να τα μελετήσει και να τα κρίνει κάποιος διαβάζοντας τα συγκεκριμένα άρθρα. Ωστόσο, αν και η αφορμή της διαμάχης είναι η «γεωμετρική άλγεβρα», η ουσία της δεν βρίσκεται εκεί αλλά στις βαθύτερες μεθοδολογικές διαφορές που χωρίζουν τις δύο ιστοριογραφίες. Η αφετηρία αυτών των διαφορών βρίσκεται στο πως αντιλαμβάνονται το αντικείμενο της ιστορίας των Μαθηματικών και κατ' επέκταση το έργο του ιστορικού των Μαθηματικών οι οπαδοί των δύο σχολών. Οι οπαδοί της παραδοσιακής ιστοριογραφίας, οι οποίοι κατά κανόνα είναι ή έχουν υπάρξει ερευνητές μαθηματικοί, αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος ως ουδέτερα, αυτοτελή αντικείμενα, μέσα στα οποία είναι ενσωματωμένες ρητά ή υπόρρητα όλες οι ιδέες και τα μηνύματά τους. Αυτές οι ιδέες και τα μηνύματα, αν και εμφανίζονται στα κείμενα διαφόρων εποχών με τη μια ή με την άλλη μορφή, αντιπροσωπεύουν ουσιαστικά διαφορετικές εκφάνσεις των ίδιων αναλλοίωτων μαθηματικών Μορφών που είναι απρόσβλητες από την ιστορική εξέλιξη και διαπερνούν τα πολιτισμικά και ιστορικά περιβάλλοντα μέσα στα οποία αναδύονται. Κάτω από μια τέτοια οντολογία, το αντικείμενο της ιστορίας των Μαθηματικών είναι η διερεύνηση της «νομοθετικής» πλευράς των Μαθηματικών, η μελέτη δηλαδή του «αντικειμενικού» σημασιολογικού περιεχομένου των μαθηματικών κειμένων, η αποστολή δε του ιστορικού των Μαθηματικών είναι να συλλάβει και να αποκαλύψει αυτό το περιεχόμενο. Έτσι, το έργο του ιστορικού των Μαθηματικών περιορίζεται σε μια απλή αναγνώριση των αναλλοίωτων, τελικά, παρά την ποικιλία των ιστορικών τους εκφάνσεων, μαθηματικών Μορφών, που παρουσιάζονται στο έργο του κάθε ιστορικού συγγραφέα και η απονομή της δέουσας τιμής σε εκείνον τον μαθηματικό ο οποίος έδωσε πρώτος έκφραση σε μια από αυτές τις Μορφές, σε εκείνον που πρώτος την κατέβασε από το Πλατωνικό βασίλειο των Ιδεών στον κόσμο της ανθρώπινης συνείδησης.

Οι οπαδοί της νέας ιστοριογραφίας, από την πλευρά τους, θεωρούν ότι η παραπάνω προσέγγιση δεν μπορεί να γίνει δεκτή ως ιστορική προσέγγιση και ως εκ τούτου πρέπει να απορριφθεί. Τα μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος δεν είναι μόνο τα αυτάρκη, καλώς ορισμένα αντικείμενα για τα οποία μπορεί κάποιος σύγχρονος αναγνώστης να προσδιορίσει ποιες μοντέρνες ιδέες λανθάνουν μέσα τους και ποιες όχι, αλλά ταυτόχρονα είναι προϊόντα της ανθρώπινης δραστηριότητας η οποία είναι συμφυώς εμπρόθετη, εκφράζει τη βούληση, τις προθέσεις, τις επιθυμίες και τους στόχους του εκάστοτε συγγραφέα. Εστιάζοντας την προσοχή μόνο στη «νομοθετική» πλευρά, στο «αντικειμενικό» σημασιολογικό περιεχόμενο των κειμένων του παρελθόντος, η παραδοσιακή ιστοριογραφία παραβλέπει το σπουδαιότερο καθήκον που πρέπει να επιτελεί η ιστορία των Μαθηματικών, που είναι η μελέτη των «ιδιογραφικών» πλευρών της δραστηριότητας των μαθηματικών του παρελθόντος.[3] Υπ'

---

[3] Οι όροι «νομοθετικός» και «ιδιογραφικός» εισήχθηκαν από τον Γερμανό φιλόσοφο Wilhelm Winderband (1848-1915) και χρησιμοποιήθηκαν στο παρελθόν για να χαρακτηρίσουν τις διάφορες επιστήμες. Έτσι, «νομοθετικές» έχουν χαρακτηριστεί οι επιστήμες οι οποίες, κατά το πρότυπο των φυσικών επιστημών, επιζητούν να κατανοήσουν γεγονότα και διαδικασίες μέσα από την αναζήτηση γενικών, καθολικών νόμων που τα διέπουν στην επ' άπειρον επανάληψή τους· αντίθετα «ιδιογραφικές» έχουν χαρακτηριστεί οι επιστήμες που επιζητούν να κατανοήσουν το κάθε γεγονός ως μοναδικό και μη επαναλαμβανόμενο. Με βάση αυτή τη διάκριση τα Μαθηματικά ανήκουν στις «νομοθετικές» επιστήμες. Αντίθετα, ο χώρος της ιστορίας είναι ο χώρος του «ιδιογραφικού».

αυτή την έννοια, η αποστολή του ιστορικού των Μαθηματικών δεν μπορεί να περιοριστεί μόνο στο να βλέπει τα Μαθηματικά του παρελθόντος απλά και μόνο ως προάγγελους των σύγχρονων Μαθηματικών, στο να διερευνά κάθε φορά ποιες σύγχρονες μαθηματικές ιδέες μπορεί να αναγνωρίσει στο ένα ή στο άλλο κείμενο του παρελθόντος. Η κύρια προσπάθειά του θα πρέπει να κατευθύνεται στο να κατανοεί τα μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος *ιστορικά,* να λαμβάνει υπόψη του το ιστορικό και πολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο εντάσσονται, να προσπαθεί να ανασυγκροτεί, όσο αυτό είναι δυνατόν τις αυθεντικές προθέσεις του κάθε ιστορικού συγγραφέα, να απορρίπτει τις ανιστορικές ερμηνείες, να δείχνει τελικά σε ποιο βαθμό οι παρελθούσες ιδέες είναι διαφορετικές από τις σύγχρονες. «Η ιστορία των Μαθηματικών», γράφει ο Unguru, «είναι ιστορία, όχι Μαθηματικά. Είναι η μελέτη των ιδιογραφικών πλευρών της δραστηριότητας των μαθηματικών, οι οποίοι ασχολούνται οι ίδιοι με τη μελέτη του νομοθετικού, δηλαδή αυτού που ισχύει δια νόμου. Αν κάποιος πρόκειται να γράψει την ιστορία των Μαθηματικών, και όχι τα Μαθηματικά της ιστορίας, αυτός ο συγγραφέας οφείλει να προσέξει ώστε να μην υποκαταστήσει το ιδιογραφικό από το νομοθετικό, δηλαδή να μην πραγματευθεί τα Μαθηματικά του παρελθόντος σαν να μην είχαν τα Μαθηματικά παρελθόν, πέραν των τετριμμένων διαφορών στην εξωτερική εμφάνιση ενός κατά βάση αναλλοίωτου σκληρού περιεχομένου.»

Στα πλαίσια αυτής της νέας ιστοριογραφίας των ελληνικών Μαθηματικών, οι παλιές ερμηνείες επανεξετάζονται και αναδεικνύονται νέα ερωτήματα. Τόσο όμως τα ερωτήματα όσο και οι ερμηνείες-προτάσεις για την απάντησή τους θα πρέπει να έχουν ένα βασικό χαρακτηριστικό, δεν θα πρέπει να παραβιάζουν τον εννοιολογικό ορίζοντα της εποχής που αναφέρονται. Πρέπει όμως ταυτόχρονα να μπορούν να αναμετρηθούν και να σταθούν επάξια απέναντι στις παλιές ερμηνείες.

Το τοπίο της επιστήμης της ιστορίας των ελληνικών Μαθηματικών, μετά και τη σημαντική αυτή παρέμβαση του Unguru, διεθνώς είχε αρχίσει να διαφοροποιείται σε σχέση με το παρελθόν. Ενδεικτικό για το πόσο αυτή η νέα αντίληψη για την ιστοριογραφία των ελληνικών Μαθηματικών επηρέασε την έρευνα μέσα στην επόμενη δεκαετία, είναι το απόσπασμα από ένα άρθρο επισκόπησης του J.L. Berggren (1984, 395): «… η ιστορία των ελληνικών Μαθηματικών, μακράν από το να περιμένει τη συμπλήρωση κάποιων λεπτομερειών, είναι ένα πεδίο στο οποίο υπάρχει ακόμη διαμάχη πάνω σε κάποια από τα κύρια χαρακτηριστικά του και που θέματα σημαντικής ιστορικής σημασίας είναι ακόμη εκκρεμή.»

Η αντιπαράθεση που ακολούθησε, με θέμα την ύπαρξη ή όχι της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής στα ελληνικά Μαθηματικά, ανάμεσα στον Unguru και τον Fowler[4], ήταν το επόμενο σημαντικό επεισόδιο στην αντιπαράθεση παραδοσιακής και «νέας» ιστοριογραφίας, που έδειξε ότι η επικράτησή της τελευταίας σε συνδυασμό με τις σύγχρονες αντιλήψεις περί σημασίας, γλώσσας και γενικότερα επιστήμης ήταν σχεδόν βέβαιη. Σύμφωνα με αυτές τις αντιλήψεις, η επιστήμη, τείνει όλο και περισσότερο, προς μια κατανόηση των εννοιών, όχι πια με την κλασική αίσθηση της έννοιας-υπόσταση-περιεχόμενο, αλλά ως σχέση ή λειτουργική έννοια μέσα σε ένα συγκεκριμένο περιβάλλον και σε αλληλεπίδραση με αυτό. Οι έννοιες δεν είναι ονόματα ή προσδιορισμοί πραγμάτων, αλλά σχέσεων ανάμεσα σε πράγματα. Τα Μαθηματικά δεν μπορούν πλέον να αντιμετωπίζονται ως καθολικές και αιώνιες αλήθειες, οι οποίες βρίσκονταν ανέκαθεν εκεί και γίνονταν αντιληπτές με τον ίδιο τρόπο, απλά σε διαφορετικές εποχές εκφράζονταν σε μια μορφή γλώσσας, που ήταν αδέξια, δυσκίνητη και αναίτια δύσκολη.

Μελετώντας τις παραπάνω επιστημονικές διαμάχες και έχοντας κατά νου τα θέματα που μας ενδιαφέρουν, αποκαλύφθηκε μπροστά μας ένα ερευνητικό πεδίο που κάθε άλλο παρά ερευνητικά κορεσμένο είναι. Αντίθετα είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον και ανοιχτό σε νέα ερωτήματα, όπως και σε νέες απαντήσεις και ερμηνείες σε παλιά ερωτήματα. Τα μεθοδολογικά του εργαλεία και πλαίσια επίσης έχουν ανανεωθεί και εκτός από τις λογικο-μαθηματικές ανακατασκευές που πλέον αντιμετωπίζονται ως εύλογες υποθέσεις που αναζητούν την επαλήθευση στα υπάρχοντα κείμενα, έχουν συμπεριλάβει τη μελέτη της γλώσσας και της μορφής ενός έργου, της δομής του, του φιλοσοφικού και γενικότερα πολιτισμικού περιβάλλοντος του στο οποίο λειτούργησε, τη μελέτη του συνόλου των έργων ενός συγγραφέα αλλά και άλλων μαθηματικών παραδόσεων που προηγήθηκαν ή ακολούθησαν.

Θεωρούμε ότι μέσα στα πλαίσια αυτής της νέας, ζωντανής ιστοριογραφίας των ελληνικών Μαθηματικών μπορούμε να μελετήσουμε νέα ερωτήματα αλλά και να δώσουμε νέες ερμηνείες σε παλιά, που θα έχουν όμως σε κάθε περίπτωση να μετρηθούν με τις παλιές και να αποδείξουν την αξία τους. Η άρνηση μιας ερμηνείας της παραδοσιακής ιστοριογραφίας για ένα θέμα δεν αποτελεί με κανένα τρόπο νέα ερ-

[4] Βλέπε: Unguru (1991), Fowler (1994) και Unguru (1994).

μηνεία. Πρέπει να παρουσιαστεί μια νέα ερμηνεία επεξεργασμένη και πλήρως τεκμηριωμένη. Το γεγονός ότι αυτή η ερμηνεία θα χρησιμοποιεί νέα εργαλεία και θα εντάσσεται στη νέα ιστοριογραφία δεν την καθιστά αυτόματα καλύτερη ή ορθότερη της παραδοσιακής. Έχουμε πλέον στα χέρια μας τους μεθοδολογικούς άξονες σύμφωνα με τους οποίους το να γράφει κάποιος την ιστορία της αρχαίας μαθηματικής επιστήμης, συνίσταται σε μια συνεχή αλληλεπίδραση ανάμεσα στον ιστορικό και τις πηγές που έχει στη διάθεσή του. Ο ιστορικός επιχειρεί την ανασύσταση του παρελθόντος βασιζόμενος σε ό,τι εκείνο του έχει κληροδοτήσει. Ωστόσο, οφείλει να χειρίζεται το υλικό του με σεβασμό, χωρίς να το παραποιεί ή να το διαστρεβλώνει. Η μελέτη των πηγών είναι εύλογο να γεννά προβληματισμούς και νέα ερωτήματα. Είναι απαραίτητο όμως τα ερωτήματα αυτά να διατυπώνονται προσεκτικά, ώστε να μην παραβιάζουν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του πολιτισμικού πλαισίου στο οποίο αναφέρονται και που ο ιστορικός των Μαθηματικών οφείλει επίσης να γνωρίζει. Επιπλέον, η συλλογιστική των προτεινομένων ερμηνειών και των υποθέσεων του πρέπει να συνοδεύεται πάντα από τεκμήρια, τα οποία δεν θα υπερβαίνουν ή προσβάλλουν τα εννοιολογικά και θεωρητικά πλαίσια της ιστορικής περιόδου που ενδιαφέρει κάθε φορά.

2. *Τα ερωτήματα της διατριβής και η νέα ιστοριογραφία*

Αρκετά από τα ερωτήματα που απασχολούν τη διατριβή μας και τα οποία θέτουμε αμέσως παρακάτω, ίσως στα πλαίσια της παραδοσιακής ιστοριογραφίας των Μαθηματικών να μην είχαν μεγάλη αξία, ενώ κάποια άλλα ίσως να μην είχαν καν νόημα. Στα πλαίσια της νέας ιστοριογραφίας όμως έχουν νόημα, και οι απαντήσεις τους βοηθούν με ουσιαστικό τρόπο στην ανασύσταση δύο σημαντικών τμημάτων του μαθηματικού παρελθόντος, όπως είναι τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη και η γεωμετρική ανάλυση.

Τα ερωτήματα που απασχολούν τη διατριβή μας, κάποια από τα οποία έχουν τεθεί και από άλλους μελετητές στο παρελθόν, είναι τα εξής:

Α) Ποιος ο λόγος και ποια η αναγκαιότητα της ύπαρξής του έργου του Ευκλείδη *Δεδομένα*; Σε ποιους απευθυνόταν;

Β) Τι σημαίνει ο όρος «δεδομένον» στα ελληνικά Μαθηματικά; Γιατί ο Ευκλείδης δεν έχει χρησιμοποιήσει πουθενά αλλού στα συγγράμματά του αυτόν τον όρο; Έχει το ίδιο περιεχόμενο με τον όρο «δοθέν» που εμφανίζεται και στα *Στοιχεία;* Αν συμβαίνει αυτό γιατί τα *Δεδομένα* δεν αποτέλεσαν απλώς ένα επιπλέον βιβλίο των *Στοιχείων* συμπληρωματικό των έξι πρώτων, όπως πολλοί υποστηρίζουν, αλλά ο Ευκλείδης το έγραψε ως διαφορετικό έργο χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιόμορφη ορολογία «δοθέντων»-«δεδομένων»;

Γ) Τι σημαίνει η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» και γιατί εμφανίζεται αποκλειστικά στα *Δεδομένα* και στο δεύτερο μέρος της γεωμετρικής ανάλυσης; Διαφέρουν σημαντικά οι δύο όροι μεταξύ τους ή όχι; Αποτελούσε αυτή η ορολογία μια απλή ιδιομορφία στη γλώσσα των Ελλήνων που θα μπορούσε σήμερα να αντικατασταθεί συνολικά από τον όρο «γνωστό»;

Δ) Βοηθάει το υπόμνημα του Μαρίνου του Φιλοσόφου για τα *Δεδομένα* προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια του «δεδομένου»; Μήπως έχει αντιμετωπισθεί αποσπασματικά και τελικά υποτιμηθεί από τη σύγχρονη έρευνα;

Ε) Σε τι χρησιμεύει στην ανάλυση η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον»; Ποια είναι η αναγκαιότητα του δευτέρου μέρους της γεωμετρικής ανάλυσης, στο οποίο αυτή η ορολογία εμφανίζεται; Ποια είναι η δομή της γεωμετρικής ανάλυσης και πως λειτουργεί αυτή η μέθοδος στην πράξη; Η γεωμετρική ανάλυση έχει κατεύθυνση και αν ναι ποια είναι αυτή;

ΣΤ) Η ανάλυση ήταν μόνο προβληματική ή υπήρχε και θεωρη(μα)τική όπως ισχυρίζεται ο Πάππος στην εισαγωγή του 7^{ου} βιβλίου της *Συναγωγής*;

Ζ) Ποια ήταν η ευρετική αξία της μεθόδου και ποια η σημασία της για τα ελληνικά Μαθηματικά;

Η) Αν η σημασία της μεθόδου της γεωμετρικής ανάλυσης ήταν πράγματι μεγάλη, όπως πολλοί ισχυρίζονται ότι ήταν, τότε γιατί διασώζεται σε τόσο μικρό αριθμό κειμένων; Οι αρχαίοι προσπάθησαν να κρύψουν την αναλυτική μέθοδο από τους μεταγενέστερους προκειμένου να φανεί ακόμη μεγαλύτερη η αξία τους ως μαθηματικών, όπως υποθέτουν ο Descartes και άλλοι μαθηματικοί της νεώτερης εποχής; Η μήπως υπάρχει κάποια άλλη πιο πειστική εξήγηση που θα πρέπει ενδεχομένως να αναζητηθεί στην κατεύθυνση της έρευνας του κοινού προς το οποίο απευθυνόταν η γεωμετρική ανάλυση και το οποίο κατ' ανάγκη ήταν πολύ περιορισμένο;

Θ) Οι τρεις θεωρητικές περιγραφές του Πάππου για τη γεωμετρική ανάλυση που περιλαμβάνονται στην εισαγωγή του 7^{ου} βιβλίου της *Συναγωγής,* μπορούν να συνυπάρξουν κάτω από μια ερμηνεία της ανάλυσης, ή θα πρέπει πάντα να θεωρούμε ως παρεμβολή κάποια από αυτές, όπως κάνουν οι μέχρι σήμερα υπάρχουσες ερμηνείες; Ο Πάππος χρησιμοποιεί στην πρακτική του την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» με τον ίδιο τρόπο που την χρησιμοποιούσαν ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος και τελικά είναι στην ουσία της ίδια η μέθοδος που εφαρμόζει, με αυτήν που εφαρμόζουν οι μεγάλοι μαθηματικοί της κλασικής εποχής;

Από τη συζήτηση που θα ακολουθήσει πιστεύουμε ότι θα γίνει σαφές το γεγονός ότι για τα περισσότερα από τα ερωτήματα που θέσαμε και έχουν τεθεί και στο παρελθόν, όχι μόνο δεν υπάρχουν οριστικές απαντήσεις αλλά αντίθετα υπάρχουν αρκετά σοβαρές διχογνωμίες οι οποίες κρατάνε πολλά χρόνια. Οι απαντήσεις που εμείς θα προσπαθήσουμε να δώσουμε σε αυτά τα ερωτήματα αλλά και στα καινούργια ερωτήματα στην παρούσα διατριβή, άλλες φορές θα χρησιμοποιήσουν στοιχεία των παλιών απαντήσεων και άλλες φορές θα αναμετρηθούν μαζί τους, αποδεικνύοντας πάντα ότι δεν παραβιάζουν αλλά αντίθετα σέβονται τον εννοιολογικό ορίζοντα της εποχής που αναφέρονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Οι έρευνες για τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη

Απαραίτητη προϋπόθεση, πριν από οποιαδήποτε προσπάθεια απάντησης των ερωτημάτων που τέθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι η διερεύνηση του διεθνούς ερευνητικού τοπίου γύρω από τα κείμενα που τα ερωτήματα αυτά αφορούν. Στο κεφάλαιο αυτό θα παραθέσουμε και θα συζητήσουμε τα αποτελέσματα της σύγχρονης έρευνας σχετικά με τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη και την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» που χρησιμοποιούν. Επίσης θα καταγράψουμε την εμφάνιση των όρων «δοθέν» και «δεδομένον» όπως παρουσιάζονται σε πρώτη ανάγνωση στα κείμενα του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου.

1.1. *Τα* Δεδομένα *του Ευκλείδη. Οι απόψεις για την αξία, το περιεχόμενο και την ορολογία που χρησιμοποιούν*

Ο Μαρίνος ο φιλόσοφος τον 5$^{\text{ο}}$ αι. μ.Χ., όταν έγραφε στις πρώτες γραμμές του υπομνήματός του «Ὁρίζονται δὴ τὸ δεδομένον πολλαχῶς, καὶ ἄλλως μὲν οἱ παλαιότεροι, ἄλλως δὲ οἱ νεώτεροι· διὸ καὶ συνέβη χαλεπὴν εἶναι τὴν ἀληθῆ περὶ αὐτοῦ ἀπόδοσιν. καὶ ἔνιοι μὲν οὐδὲ ὁρισμόν τινα αὐτοῦ ἀποδεδώκασιν,» (234. 4-7), γνώριζε μόνο τις δυσκολίες που είχε προκαλέσει μέχρι εκείνη τη στιγμή η προσπάθεια κατανόησης και απόδοσης του περιεχομένου του όρου «δεδομένον» στα μαθηματικά. Μάλλον δεν θα μπορούσε να φανταστεί την πορεία του όρου στο μέλλον, ή τις δυσκολίες που θα προκαλούσε τόσο ο ίδιος ο όρος όσο και τα *Δεδομένα,* στους μαθηματικούς και τους ιστορικούς των μαθηματικών τους δεκαπέντε αιώνες που θα ακολουθούσαν. Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με το διεθνές τοπίο της έρευνας που έχει υπάρξει γύρω από τα *Δεδομένα* και την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» με την οποία διατυπώνονται.

Ο Ευκλείδης έγραψε ένα ολόκληρο έργο, που φέρει τον τίτλο *Δεδομένα*[1]*,* στο οποίο περιέλαβε 14 ορισμούς και 94 προτάσεις[2], με αντικείμενο την επίπεδη γεωμε-

---

[1] Οι τίτλοι σε αρκετά αρχαία και μεσαιωνικά κείμενα δίνονταν από την πρώτη λέξη του κειμένου. Αυτό ακριβώς συνέβη και με τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη.

[2] 90 θεωρήματα σύμφωνα με την εκδοχή του Πάππου, από το Jones (1986, 85, 638.2-3).

τρία και περιεχόμενο που εκ πρώτης όψεως φαίνεται να είναι ανάλογο των έξι πρώτων βιβλίων των *Στοιχείων*. Από το 7^{o} βιβλίο της *Συναγωγής* του Πάππου, αντλούμε τις πληροφορίες ότι τα *Δεδομένα* είναι το πρώτο ως προς την τάξη βιβλίο της ανάλυσης[3] (*Αναλυόμενος*), η ύλη της οποίας[4] είναι ιδιαίτερη και επινοήθηκε *μετά την σύνθεση των κοινών στοιχείων*, για αυτούς που ήθελαν να αποκτήσουν ευρετική δύναμη στη Γεωμετρία, που θα τους βοηθούσε στην επίλυση των προβλημάτων.

Οι απόψεις των σύγχρονων μελετητών του έργου για αρκετά στοιχεία του όπως η αξία του, το περιεχόμενό του, η ανάγκη ύπαρξής του δεν συμφωνούν πάντα μεταξύ τους. Είναι χαρακτηριστικές δύο από τις πρώτες χρονολογικά αξιολογήσεις του έργου, που παραθέτει ο Ito (1980, 12):

> Ο Heiberg αξιολόγησε τα *Δεδομένα* με βεβαιότητα ως ανήκοντα στην ανώτερη γεωμετρία, ενώ ο Cantor σημείωσε ότι ήταν μόνο ένα τετράδιο ασκήσεων για να φρεσκάρει κανείς τα *Στοιχεία*.

Δύο θέσεις που είναι προφανώς εκ διαμέτρου αντίθετες για την αξία των *Δεδομένων* και κατά συνέπεια για το πώς το έργο πρέπει να γίνεται κατανοητό και ποιους αφορά. Με τη σειρά του ο Heath (1926, 8), κάνει μια πιο εκτενή αξιολόγηση για τα *Δεδομένα* που είναι πιο διπλωματική και μάλλον βρίσκεται στο ενδιάμεσο των δύο προηγουμένων:

> Τα *Δεδομένα* αφορούν τη στοιχειώδη γεωμετρία, αν και αποτελούν ένα μέρος της εισαγωγής στην ανώτερη ανάλυση. Η μορφή τους είναι αυτή προτάσεων που αποδεικνύουν ότι, αν συγκεκριμένα πράγματα είναι δεδομένα (are given) (ως προς το μέγεθος, το είδος, κ.ά) σε ένα σχήμα, κάτι άλλο είναι δεδομένο (is given). Το αντικείμενό τους είναι εν πολλοίς το ίδιο όπως αυτό των βιβλίων της επιπεδομετρίας των *Στοιχείων,* προς τα οποία τα *Δεδομένα* είναι συμπληρωματικά (supplementary). Θα το κατανοήσουμε αυτό καλύτερα αργότερα όταν θα έρθουμε να συγκρίνουμε τις προτάσεις στα *Στοιχεία* οι οποίες μας δίνουν τα μέσα για την επίλυση της γενικής δευτεροβάθμιας εξίσωσης με τις αντίστοιχες προτάσεις των *Δεδομένων* οι οποίες δίνουν τις λύσεις. Τα *Δεδομένα* μπορούν στην πραγματικότητα να θεωρηθούν ως στοιχειώδεις ασκήσεις στην ανάλυση.

Το κύριο χαρακτηριστικό των *Δεδομένων* κατά τον Heath επομένως είναι η συμπληρωματικότητά τους προς τα *Στοιχεία.* Τα εντάσσει επίσης, έστω και με υπόρρη-

---

[3] Jones (1986, 85, 636.18-19).
[4] Jones (1986, 83, 634.3-5).

το τρόπο, σε αυτό που ονομάζεται «γεωμετρική άλγεβρα» όταν αναφέρει ότι κάποιες από τις προτάσεις του έργου «δίνουν τις λύσεις της γενικής δευτεροβάθμιας εξίσωσης». Θέση η οποία θα υποστηριχθεί με ρητό τρόπο στη συνέχεια και από άλλους επιφανείς εκπροσώπους της παραδοσιακής ιστοριογραφίας. Ο Heath (1921, τόμ. I, 422), όμως, έχει παρατηρήσει σε προηγούμενο έργο του κάτι σημαντικό για το είδος των προτάσεων των *Δεδομένων,* που σε πρώτη ανάγνωση φαίνεται να αντιτίθεται στην προηγούμενη δήλωσή του ότι οι προτάσεις των *Στοιχείων* δίνουν τα μέσα για την επίλυση της δευτεροβάθμιας ενώ οι προτάσεις των *Δεδομένων* δίνουν τις λύσεις:

> Ας σημειωθεί ότι αυτή η μορφή πρότασης [των *Δεδομένων*] δεν προσδιορίζει στην πραγματικότητα το αντικείμενο ή τη σχέση η οποία αποδεικνύεται ότι δίνεται, αλλά απλώς αποδεικνύει ότι μπορεί να προσδιορισθεί (can be detrmined), όταν τα γεγονότα που διατυπώνονται στην υπόθεση είναι γνωστά (are known).

Μια δήλωση η οποία από τη μια αναγνωρίζει και αναδεικνύει τη «δυνητικότητα» των αποτελεσμάτων και των προτάσεων των *Δεδομένων,* ενός στοιχείου που είναι πολύ σημαντικό όπως θα δείξουμε παρακάτω στην έρευνά μας, από την άλλη όμως δεν αποφεύγει την ταύτιση των «δεδομένων» έστω της υπόθεσης με τα «γνωστά».

Ο Van Der Waerden (2000, 198), ένας από τους βασικούς υποστηρικτές της παραδοσιακής ιστοριογραφίας και θιασώτης της θεωρίας της «γεωμετρικής άλγεβρας» όπως έχουμε αναφέρει, βλέπει με τη σειρά του στα *Δεδομένα* ένα έργο σημαντικό για την ιστορία της άλγεβρας, όπως δηλώνει. Μια δήλωση ή αλήθεια της οποίας του φαίνεται σχεδόν προφανής γι' αυτό και αρκείται να την αιτιολογήσει παραθέτοντας απλώς στη συνέχεια του κειμένου του μερικές προτάσεις από τα *Δεδομένα* μεταφρασμένες σε αλγεβρική γλώσσα με τη βοήθεια εξισώσεων:

> Τα *Δεδομένα* είναι ένα βιβλίο μεγάλης σπουδαιότητας για την ιστορία της άλγεβρας. Το έργο αποτελείται από προτάσεις της ακόλουθης μορφής: όταν ορισμένα μεγέθη είναι δεδομένα (are given) ή καθορισμένα (determined), τότε άλλα μεγέθη είναι επίσης καθορισμένα (determined).

Υποσημειώνει επίσης την υπόδειξη που έχει δεχθεί από τον Dijksterhuis για την απόδοση του όρου «δεδομένον» με τον όρο «καθορισμένο», χωρίς να αιτιολογεί το γιατί ο ίδιος την έχει αποδεχτεί: «Το κείμενο μιλάει παντού για 'δεδομένα' (given), αλλά ο Dr.Dijksterhuis επέστησε την προσοχή μου στο γεγονός ότι ο όρος 'καθορισμένο' εκφράζει καλύτερα το νόημα.» Συνοψίζοντας θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο

Van Der Waerden θεωρεί τα *Δεδομένα* ως ένα αλγεβρικό έργο προφανής στόχος των προτάσεων του οποίου είναι να καθοριστούν κάποια μεγέθη με τη βοήθεια κάποιων άλλων που είναι ήδη καθορισμένα. Ένα ακόμη τυπικό δείγμα δηλαδή της «γεωμετρικής άλγεβρας».

Στη σύνδεση των *Δεδομένων* με την άλγεβρα έχει προηγηθεί όμως ο Neugebauer (1936, 249), βασιζόμενος σε απόψεις του Zeuthen όπως ο ίδιος αναφέρει:

> Σε πολλά σημεία αυτός [ο Zeuthen], έκανε ιδιαίτερη μνεία για το ότι στα παραδείγματα «παραβολής χωρίων» από το 6^{o} βιβλίο και τις αντίστοιχες προτάσεις των *Δεδομένων*, υπάρχει η πλήρης συζήτηση γύρω από τις εξισώσεις 2^{ου} βαθμού.

Επηρεασμένος από τις παραπάνω θέσεις ο Ε. Σταμάτης[5] αναφέρει για τα *Δεδομένα*: «Το υπό τον τίτλον Δεδομένα βιβλίον περιλαμβάνει 94 θεωρήματα, εις μερικά των οποίων σπουδάζονται αλγεβρικαί και τριγωνομετρικαί προτάσεις υπό γεωμετρικήν μορφήν. Ενδεικτικώς αναφέρομεν το 93 θεώρημα, όπου σπουδάζεται γεωμετρικώς η πρότασις: $[2\eta\mu\gamma + 2\eta\mu(\alpha + \gamma)] : 2\eta\mu(\frac{a}{2} + \gamma) = 2\eta\mu\alpha : 2\eta\mu\frac{a}{2}$ …Τα πρώτα θεωρήματα τριγωνομετρίας απαντούν εις την πραγματείαν Δεδομένα του Ευκλείδου.» Μια θέση η οποία προφανώς εντάσσεται στην ιστοριογραφία της εποχής του και ειδικότερα στις απόψεις περί «γεωμετρικής άλγεβρας».

Στην ίδια κατεύθυνση με τους προηγούμενους, ο Mahoney (1968, 331), συνδέει επίσης τα *Δεδομένα* με τη «γεωμετρική άλγεβρα», παρόλο που στη συνέχεια, θεωρητικά τουλάχιστον, όπως είδαμε, διατύπωσε απόψεις υπέρ της νέας ιστοριογραφίας. Συγκεκριμένα αναφέρει:

> Η γεωμετρική άλγεβρα ήταν ένα από τα βασικά εργαλεία του μαθηματικού αναλυτή. Στα *Δεδομένα,* ο σκοπός των οποίων ήταν να επαναδιατυπώσουν και να αναδιατάξουν το υλικό των *Στοιχείων* σε μια μορφή πιο εύκολα εφαρμόσιμη στην ανάλυση νέων προβλημάτων, ο Ευκλείδης έδωσε εξέχουσα θέση στο δόγμα της παραβολής χωρίων, το οποίο είναι η ουσία της ελληνικής γεωμετρικής άλγεβρας.

---

[5] *Μεγάλη Παιδαγωγική Εγκυκλοπαίδεια*, λήμμα Ευκλείδης, σ. 756.

Θεωρεί δηλαδή ο Mahoney ότι τα *Δεδομένα* είναι μια απλή αναδιατύπωση της ύλης που είναι ήδη γνωστή από τα *Στοιχεία,* με στόχο αυτή η ύλη να εφαρμόζεται ευκολότερα σε αναλύσεις νέων προβλημάτων. Με άλλα λόγια το αντίστοιχο του περιεχομένου κάποιας ήδη γνωστής πρότασης των *Στοιχείων* απλά επαναδιατυπώνεται με τη βοήθεια της ορολογίας «δοθέντων» – «δεδομένων». Προφανώς η επαναδιατύπωση είναι κάτι που ακολουθεί την πρώτη διατύπωση, κάτι που σημαίνει ότι ο Mahoney αναγνωρίζει και χρονική προτεραιότητα στο υλικό των *Στοιχείων* έναντι αυτού των *Δεδομένων.* Μια θέση η οποία όπως θα φανεί στη συνέχεια της διατριβής μας δεν μας βρίσκει καθόλου σύμφωνους. Θα μπορούσαμε ενδεχομένως να αποδεχθούμε τη συζήτηση για χρονική προτεραιότητα της ανάγνωσης των *Στοιχείων* έναντι των *Δεδομένων* από κάποιον που ασχολείται με τα Μαθηματικά*,* λόγω της διαφορετικής στόχευσης του κάθε έργου που θα υποστηρίξουμε παρακάτω, αλλά όχι και αυτήν της ύπαρξης και της λειτουργίας του υλικού τους. Θα ήταν σα να υποστηρίζαμε τη χρονική προτεραιότητα της σύνθεσης ενός προβλήματος έναντι της ανάλυσής του. Ο Mahoney (1968, 341), χωρίς να ξεφεύγει και αυτός από τον γενικό κανόνα της μέχρι σήμερα ιστοριογραφίας για ταύτιση των όρων «δοθέν» και «δεδομένον» και απόδοσή τους με το «γνωστό» γράφει:

> Από τη στιγμή που αυτός που κάνει την ανάλυση υπέθεσε στο ξεκίνημα ότι το πρόβλημα ήταν λυμένο, λειτούργησε για όλες τις ποσότητες στο σχήμα του σαν να ήταν γνωστές (known). Τα *Δεδομένα* εξυπηρέτησαν το σκοπό να του υπενθυμίσουν τι πραγματικά ήταν γνωστό (known) και τι άγνωστο (unknown) και να παραθέσουν τα λιγότερα δυνατόν αναγκαία στοιχεία για να εκτελεστούν συγκεκριμένες κατασκευές.

Ο Freudenthal (1977, 194) με τη σειρά του, ως ένας ακόμη από τους γνήσιους εκπροσώπους της παραδοσιακής ιστοριογραφίας και στα πλαίσια της διαμάχης για τη «γεωμετρική άλγεβρα», θα πάρει θέση που εντάσσει ευθέως τα *Δεδομένα* στη «γεωμετρική άλγεβρα»:

> …τα *Στοιχεία* δεν είναι εγχειρίδιο για την επίλυση εξισώσεων. Ένα τέτοιο κείμενο εντούτοις υπάρχει: είναι τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη. …Το ύφος του γραψίματος των *Δεδομένων,* που δεν μεταβάλλεται, είναι: Δεδομένων (Given) ορισμένων μεγεθών a, b, c και μιας σχέσης F (a, b, c, x), τότε το x είναι επίσης δεδομένον

(given), και η απόδειξη μιας τέτοιας δήλωσης συνίσταται στην έκθεση του κάθε επιμέρους βήματος που οδηγεί από το a, b, και c στο x.

Μια θέση την οποία σχολίασε ιδιαίτερα αρνητικά από ιστοριογραφική άποψη ο Unguru (1979, 560), θεωρώντας τη ως μια τυπική έκφραση της παραδοσιακής ιστοριογραφίας η οποία χρησιμοποιεί όρους, σύμβολα και έννοιες των μοντέρνων Μαθηματικών για να αποδώσει με εντελώς εσφαλμένο τρόπο κείμενα του παρελθόντος. Με την ευκαιρία αυτής της κριτικής ο Unguru διατύπωσε τη δική του άποψη για τα *Δεδομένα*:

> Αλλά το γεγονός παραμένει ότι η ελληνική γεωμετρία δεν περιείχε εξισώσεις. Δεν μπορεί κανείς να βρει ούτε μια εξίσωση σε όλο το κείμενο των *Δεδομένων*. Απόδειξη (όπως θα έλεγε ένας Ινδός μαθηματικός): Εκτός αν κάποιος έχει στη διάθεσή του την αλγεβρική γλώσσα και την ικανότητα να μεταφράζει σε αυτή, είναι αδύνατο να συνοψίσει αυτή τη μικρή πραγματεία του μάλλον ποικίλου περιεχομένου τόσο απερίσκεπτα όσο έχει κάνει ο Freudenthal. …Κάθε περίπτωση στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη είναι μοναδική, έχοντας τη δική της μέθοδο της ανάλυσης, και καμία δεν μπορεί να υπαχθεί κάτω ή να αναχθεί σε άλλες περιπτώσεις. Βεβαίως η περιγραφή του Freudenthal είναι μαθηματικά ορθή. Ιστορικά όμως είναι ανεπαρκής.

Παρόλο που θα συμφωνήσουμε με την κριτική του Unguru στη θέση του Freudenthal για τα *Δεδομένα*, θα πρέπει επίσης να σημειώσουμε ότι και η δική του θέση για τα *Δεδομένα,* μέχρι εδώ τουλάχιστον, θα πρέπει να χαρακτηριστεί από ελάχιστα διαφωτιστική έως ανεπαρκής. Τονίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η κριτική στην παραδοσιακή ιστοριογραφία θα πρέπει να συνοδεύεται από νέες θέσεις οι οποίες θα πρέπει να είναι σε θέση να αναμετρηθούν επάξια με τις παλιές και να αποδείξουν την υπεροχή τους. Αυτό δυστυχώς δεν είναι κάτι που μπορούμε να το ισχυριστούμε στην παρούσα διαμάχη και αποτελεί ίσως μια αφορμή για να κατανοήσουμε το γεγονός ότι δεν είναι εξορισμού ούτε συνολικά οι θέσεις της νέας ιστοριογραφίας καλύτερες ή επιστημονικά επαρκέστερες από τις θέσεις της παραδοσιακής ιστοριογραφίας. Η απόρριψη των θέσεων της παραδοσιακής ιστοριογραφίας για ένα συγκεκριμένο ζήτημα δεν αποτελεί θέση από μόνη της. Πρέπει να παρουσιαστεί μια θέση επεξεργασμένη και πειστική για να μπορέσει να ανατρέψει ή να τροποποιήσει μια προηγούμενη θέση. Αυτή η νέα θέση πρέπει επιπλέον να έχει όλα τα απαραίτητα ποιοτικά χαρακτηριστικά που προαναφέραμε, τα οποία θα της επιτρέψουν να ενταχθεί στη νέα ιστοριογραφία.

Συνεχίζοντας παρακάτω, ο Unguru (1979, 560), θα δεχτεί ότι ο Heath είναι πιο κοντά στην αλήθεια με τις θέσεις του για τα *Δεδομένα*, ενώ θα καταλήξει ότι το έργο αυτό αποτελεί μια άλλου είδους προσέγγιση στη στοιχειώδη γεωμετρία από αυτή των *Στοιχείων*. Μπορεί ο Unguru με μην θέση του για τα *Δεδομένα* να μην προσφέρει τίποτε αξιόλογο, άλλωστε είναι ένα πεδίο με το οποίο δεν έχει ασχοληθεί ιδιαίτερα, αλλά οι τοποθετήσεις των διαφόρων μελετητών, σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο και το λόγο ύπαρξης των *Δεδομένων,* είναι αρκετά πιο συγκρατημένες, μετά από τις παρεμβάσεις του για τη νέα ιστοριογραφία. Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι έκτοτε οι τοποθετήσεις των διαφόρων μελετητών δεν αναφέρονται πλέον στη σχέση των *Δεδομένων* με την άλγεβρα.

Η εκτίμηση του Jones (1986, 68) για τα *Δεδομένα* είναι ότι το έργο: «περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό θεωρημάτων σχετικά με την κατασκευασιμότητα (constructability) των αντικειμένων, τα οποία είναι ιδιαίτερα πολύτιμα στην ανάλυση ενός προβλήματος.» Μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η άποψή του για την ορολογία «δοθέν»-«δεδομένον» που έχει διατυπώσει στην προηγούμενη σελίδα:

> Ουσιώδης για την ανάλυση των προβλημάτων ήταν η έννοια του «δεδομένου» (being given), η οποία αφορούσε και τα αντικείμενα της υπόθεσης στην αρχή ενός προβλήματος, και σε όλα τα άλλα αντικείμενα που καθορίζονται από τις υποθέσεις. Ο όρος «δεδομένον» (given) είχε στην αρχαιότητα μια μεγάλη γκάμα εννοιολογικών αποχρώσεων αλλά οι πιο κοινές σημασίες ήταν «εξελήφθει ως αληθές», «καθορισμένο», και «καθορισμένο και κατασκευάσιμο»

Αναγνωρίζει δηλαδή ο Jones τη σπουδαιότητα του όρου «δεδομένον» γι' αυτό και θα επανέλθει σε αυτό στην προσπάθειά του να αναλύσει τον ορισμό του πορίσματος, όταν θα αναφερθεί στα λεγόμενα του Πάππου (7.652.10-15) σχετικά με τη δυσκολία κατανόησης των πορισμάτων, εξαιτίας της λακωνικότητά τους. Μιας λακωνικότητας, που αφήνει πολλά πράγματα να κατανοηθούν με τον συνήθη εθιμικό τρόπο. Γεγονός όμως, που έχει ως αποτέλεσμα, σύμφωνα με τον Πάππο: «ὥστε πολλοὺς τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ μὲν μέρους ἐκδέχεσθαι, τὰ δὲ ἀναγκαιότερα ἀγνοεῖν τῶν σημαινομένων.» Αναδεικνύει δηλαδή ο Jones (1986, 552), το γεγονός ότι και ο ίδιος ο Πάππος αμφιβάλει κατά πόσο όλοι οι γεωμέτρες αντιλαμβάνονται πλήρως τα σπουδαιότερα από τα σημαινόμενα των εκφωνήσεων. Ως παράδειγμα αναφέρει την εκφώνηση του πρώτου από τα *Πορίσματα* του Ευκλείδη με την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον».[6]

Για το περιεχόμενο και τη σχέση των *Δεδομένων* με τα *Στοιχεία* η άποψη του Knorr δεν έχει να προσφέρει κάτι ιδιαίτερο:

> Τα *Δεδομένα* είναι ένα συμπλήρωμα των *Στοιχείων,* αναπλασμένο σε μια μορφή πιο κατάλληλη για χρήση στην ανάλυση προβλημάτων. …Πραγματικά, μόνο σε σπάνιες περιπτώσεις τα *Δεδομένα* παρουσιάζουν ένα αποτέλεσμα χωρίς ένα παραλληλισμό με τα *Στοιχεία.* (Knorr, 1986, 109) … Τα *Δεδομένα* ήταν πρωτότυπα μόνο στη μορφή, το περιεχόμενό τους εν πολλοίς επαναλαμβάνει αυτό των *Στοιχείων.* (Knorr, 1986, 138)

Είναι όμως αξιοσημείωτο το γεγονός ότι ενώ προηγουμένως ο ίδιος ο Knorr, έχοντας αναπτύξει έναν λίγο πολύ γνωστό συλλογισμό σύμφωνα με τον οποίο τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη δεν προσδίδουν στο συγγραφέα τους καμία ιδιαίτερη ερευνητική αξία, δεδομένου ότι τα σημαντικότερα από τα περιεχόμενά τους αποδίδονται σε άλλους μαθηματικούς, δηλώνει για τα *Δεδομένα* ότι:

> Έτσι το κατάλληλο μέτρο για τις γεωμετρικές έρευνες που διεξήχθησαν από τον Ευκλείδη και τους συγχρόνους του δεν πρέπει να αναζητηθεί στα *Στοιχεία,* αλλά στα *Δεδομένα* και στα χαμένα *Πορίσματα* και *Κωνικά,* που συνελήφθησαν για να βοηθήσουν στην επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων. (Knorr, 1986, 102)

Με άλλα λόγια, ο Knorr αν και από τη μια υποστηρίζει ότι τα *Δεδομένα* είναι ένα συμπλήρωμα των *Στοιχείων* και η πρωτοτυπία τους είναι μόνο η μορφή τους, από

[6] Jones (1986, 552): «Η μια εκφώνηση που έχουμε με τα λόγια του Ευκλείδη υποδηλώνει ήδη κάποιους πιθανούς κινδύνους. Το πιο επικίνδυνο είναι η αμφισημία του όρου 'given'. Ο όρος χρησιμοποιείται ή υπονοείται στην εκφώνηση έξι φορές … 656.1-5… Στις περιπτώσεις (1), (2), (3) και (4) το 'given' προφανώς σημαίνει 'εξελήφθει ως αληθές'. Δεν είναι άμεσα προφανές αν η (5) και η (6) αναφέρονται σε πράγματα 'given' με την έννοια ότι εξελήφθησαν ως αληθή ή με την έννοια ότι καθορίστηκαν από άλλα πράγματα που εξελήφθησαν ως αληθή.» Φαίνεται δηλαδή ότι ο Jones, αντιλαμβάνεται κάποια διαφοροποίηση στο περιεχόμενο των όρων «δοθέν» και «δεδομένον», παρόλο που τους αποδίδει όλους με το «given». Σημειώνουμε ότι οι λέξεις στο αρχαίο κείμενο είναι κατά σειρά: (1) «δεδομένων», (2) «δεδομένην», (3) «δεδομένης», (4) «δεδομένω», (5) δεν υπάρχει, ο Jones όμως, υποθέτει ότι θα πρέπει να εννοήσουμε «given in position», και (6) «δοθέντα». Μπορεί δηλαδή τελικά ο Jones να μην κάνει τη διάκριση «δοθέντος»-«δεδομένου», αλλά είναι από τους ελάχιστους που δηλώνουν ότι κάτι διαφορετικό ίσως υπάρχει κάτω από αυτό που στα αγγλικά όλοι αποδίδουν ως «given».

την άλλη θεωρεί ότι αποτελούν, μαζί με τα *Πορίσματα* και τα *Κωνικά* που χάθηκαν, το μέτρο για τις γεωμετρικές έρευνες της εποχής του Ευκλείδη. Οι δύο αυτές θέσεις του μάλλον δεν συμβιβάζονται εύκολα μεταξύ τους.

Επίσης, ο Knorr (1986, 110), γράφει σε σχέση με την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» και αναφερόμενος σε ένα παράδειγμα σύνθεσης γεωμετρικού τόπου που αντλεί από τα *Μετεωρολογικά* του Αριστοτέλη, και του οποίου έχει προσπαθήσει να ανασυστήσει τη χαμένη ανάλυση με βάση την ορολογία άλλων αναλύσεων που διασώθηκαν:

> Αναφερόμενος πάλι στο δείγμα μας της ανάλυσης, κάποιος παρατηρεί πως η παράγραφος του συμπεράσματος σχηματίζεται από μια σειρά από «δεδομένα» (givens), που το καθένα καθορίζεται από τα προηγούμενα, μέχρι να φτάσει στο ζητούμενο της κατασκευής ως δεδομένο (given). Η υιοθέτηση αυτής της ορολογίας δεν είναι απλώς ένας φορμαλισμός· εξυπηρετεί ένα κρίσιμο στόχο κρατώντας χωριστές δύο ομάδες όρων που έχουν αρκετά διαφορετική λογική υπόσταση. Κάποιοι όροι είναι γνωστοί μόνο υποθετικά, επειδή προέρχονται από την υπόθεση ότι η κατασκευή έχει πραγματοποιηθεί· αλλά άλλοι όροι είναι γνωστοί λόγω του ορισμού της κατασκευής που πρόκειται κάποιος να παράγει. Τα τελευταία είναι τα «δεδομένα» (givens)…Χωρίς ένα τέτοιο τέχνασμα της ορολογίας όπως αυτό των «δεδομένων» (givens), η λογική υπόσταση αυτών των σειρών σύντομα θα μπερδευόταν απελπιστικά.(Knorr, 1986, 110)

Γίνεται φανερό δηλαδή από τα λεγόμενά του, ότι ο Knorr δεν διακρίνει ανάμεσα στον όρο γνωστό (Known) και τον όρο «δεδομένον». Διαισθάνεται όμως μια διαφορετικότητα στη λογική υπόσταση των όρων της ανάλυσης και πιο συγκεκριμένα των «δοθέντων» και των «δεδομένων» αν και τα αποδίδει ενιαία ως «givens». Αυτή τη διαφορετικότητα όμως δεν την κάνει πολύ σαφή ούτε συγκεκριμένη. Θα προσπαθήσει και στη συνέχεια να προσδιορίσει τη σημασία του όρου «given» μέσα από αποσπάσματα φιλοσοφικών κειμένων, κυρίως του Αριστοτέλη, που είναι προγενέστερα των *Δεδομένων,* στα πρωτότυπα των οποίων περιλαμβάνεται άλλοτε ο όρος «δοθέν» και άλλοτε ο όρος «δεδομένον» χωρίς ιδιαίτερα αποτελέσματα. Κάτι που είναι φυσικό κατά την άποψή μας γιατί προσπαθεί να προσδιορίσει τη σημασία δύο διαφορετικών όρων αντιμετωπίζοντάς τους ως έναν.

Ο Taisbak (1991), που έχει ασχοληθεί με τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη πιο συστηματικά και σε βάθος από όλους τους προηγούμενους, στο άρθρο του με τίτλο:

«Elements of Euclid's Data», δεν προβαίνει σε κρίσεις ή αξιολογήσεις των *Δεδομένων* αναγνωρίζοντας ότι πρέπει να προηγηθεί μια καλύτερη εκτίμηση του περιεχομένου του όρου «δεδομένον». Σχετικά όμως με τα λεγόμενα του Knorr ότι τα *Δεδομένα* πρέπει να αποτελέσουν μαζί με τα *Πορίσματα* και τα *Κωνικά* το μέτρο για τις γεωμετρικές έρευνες της εποχής του Ευκλείδη, ο Taisbak (1991, 136-137) αναφέρει:

> Ο Knorr προφανώς χάνει το κύριο σημείο. Είναι κοινή η πίστη στη θεώρηση του μαθηματικού και του ιστορικού, ότι γνωρίζει τι σημαίνει να «είναι δεδομένο» (be given). Ο καθένας το γνωρίζει αυτό βεβαίως, αν και καθένας που έχει προσπαθήσει να κατανοήσει «τις κοινές έννοιες» του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* οφείλει να έχει υποψίες για διαισθητικά κατανοητούς όρους στα ελληνικά Μαθηματικά. …με δυσκολία οποιοσδήποτε σύγχρονος μαθηματικός θα χρησιμοποιούσε το κατηγόρημα «είναι δεδομένο» για κάτι που έχει βρεθεί ή αποδειχθεί ότι είναι αληθές. Αλλά οι Έλληνες το έκαναν, και αυτό είναι ένα γεγονός όχι οικείο για εμάς το οποίο πρέπει να κατανοηθεί εάν πρόκειται να αποτιμηθούν σωστά τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη. Σε αυτό το άρθρο θα προσπαθήσω να καθορίσω τι σημαίνει το κατηγόρημα «είναι δεδομένο» (is given) στα *Δεδομένα.*

Είναι φανερό λοιπόν, ότι ο Taisbak έχει κατανοήσει περισσότερο από πολλούς άλλους ότι το «δεδομένον» ως έννοια είναι αρκετά σύνθετη και καθόλου αυτονόητη, κατά συνέπεια κάθε προσπάθεια για σωστή αποτίμηση των *Δεδομένων,* πρέπει να συνεκτιμήσει απαραίτητα το γεγονός ότι η χρήση του «δεδομένου» από τους Έλληνες μαθηματικούς είναι αρκετά διαφορετική. Κάτι που θα κάνει ακόμη πιο σαφές με τον υπότιτλο του τελευταίου βιβλίου του: «*The Imporatance of Being Given*». Τοποθετώντας δηλαδή ως εναλλακτικό τίτλο την φράση: «Η Σπουδαιότητα του να Είναι Δεδομένον». Συμφωνώντας απόλυτα με την άποψη αυτή, θα λέγαμε ότι κάθε προσπάθεια, για κατανόηση των *Δεδομένων*, πριν ή έστω χωρίς ταυτόχρονη προσπάθεια για κατανόηση του όρου «δεδομένον», είναι θεμελιωμένη στην άμμο, είναι καταδικασμένη να αποτύχει. Διαφωνούμε όμως κάθετα με την εκτίμησή του για την κρίση του Knorr για την ερευνητική αξία των *Δεδομένων*, και στη συνέχεια της διατριβής μας θα μας δοθεί η ευκαιρία να αποδείξουμε αυτή μας τη θέση.

Ο Taisbak αναγνωρίζοντας και ο ίδιος ότι πολλά ερωτήματα σχετικά με τα *Δεδομένα* και ειδικότερα με την έννοια «δεδομένον» παραμένουν αναπάντητα και ότι οι κάποιες απαντήσεις που προσπάθησε να δώσει με την προηγούμενη εργασία του, απέχουν από το να είναι ικανοποιητικές επανέρχεται το 2003 με το βιβλίο του με τον χαρακτηριστικό τίτλο: «ΔΕΔΟΜΕΝΑ *Euclid's* Data *or The Importance of Being Given*» και συνοψίζει τις απόψεις του τόσο για τα *Δεδομένα* όσο και για το περιεχόμενο του «δεδομένου». Τις απόψεις του αυτές αφού τις παρουσιάσουμε συνοπτικά θα τις συζητήσουμε για να διαπιστώσουμε αν και κατά πόσο έχουν μετακινηθεί σε σχέση με αυτές που είχε διατυπώσει προηγουμένως. Στον πρόλογό του βιβλίου του (2003, 8) αναφέρει:

> …τα *Δεδομένα* δεν συνελήφθησαν ως μια συνεκτική παρουσίαση της γεωμετρικής ανάλυσης, αλλά μάλλον ως μια συλλογή θεωρημάτων διατυπωμένη με το ιδίωμα των δεδομένων (givens) – στην οποία δεν υπάρχει φυσικό τέλος.

Στην αρχή της εισαγωγής του ο Taisbak (2003, 13), δηλώνει επίσης για τα *Δεδομένα*:

> Στα *Δεδομένα* ο Ευκλείδης αποδεικνύει παραγωγικά ότι αν κάποια είδη είναι δεδομένα (are given), κάποια άλλα είδη είναι επίσης δεδομένα (are also given)…

Για να καταλήξει στο τέλος της εισαγωγής του (2003, 15-16) να προσυπογράψει όπως αναφέρει τις απόψεις που έχει εκφράσει ο Knorr (1986, 109) και παλιότερα ο Heath (1921, 421-422) για το περιεχόμενο των *Δεδομένων,* όπως ότι αποτελούν ένα συμπλήρωμα των *Στοιχείων* επαναδιατυπωμένο σε μια μορφή που μπορεί να εξυπηρετήσει καλύτερα την ανάλυση των προβλημάτων. Για τον όρο «given» αντίστοιχα (με τον οποίο και αυτός αποδίδει και το «δοθέν» και το «δεδομένον»), ο Taisbak στο βιβλίο του αν και αναγκάζεται να πάρει κάποια θέση δεν γίνεται ξεκάθαρος αλλά ούτε και ιδιαίτερα πειστικός. Συνεχίζει να θεωρεί τον όρο ιδιαίτερα σημαντικό, κάτι που φανερώνει άλλωστε όπως προαναφέραμε και ο υπότιτλος του βιβλίου του, αλλά αφενός τοποθετεί τον όρο «given» εννοιολογικά κοντά στο σημερινό όρο «γνωστό», αν και αναγνωρίζει (2003, 18) ότι ο Ευκλείδης δεν το κάνει, αφετέρου αμφιβάλει (2003, 22) και κατά πόσο ο όρος «given» μπορεί να οριστεί:

> Αυτά που έχουμε διδαχθεί [στα *Δεδομένα*] είναι κάποιες έννοιες για δεδομένα (given) μεγέθη, λόγους και είδη, αλλά η καθαρή έννοια του *δεδομένου* (*given*), παραμένει μη ορισμένη (και μη δυνάμενη να οριστεί αν δεν κάνω λάθος).

Κλείνοντας την αναφορά μας στον Taisbak, θα επαναλάβουμε ότι δεν διακρίνει ανάμεσα στους όρους «δεδομένον» και «δοθέν», αφού τους αποδίδει και τους δύο με το «given». Γεγονός που γίνεται αμέσως φανερό, με μια απλή αντιπαραβολή της απόδοσης των προτάσεων των *Δεδομένων* που κάνει στα αγγλικά, με το πρωτότυπο κείμενο του Ευκλείδη. Μια έλλειψη διάκρισης που στην πορεία της διατριβής μας θα αποδειχθεί ότι είναι καθοριστικής σημασίας. Για να μην είμαστε άδικοι όμως με τον Taisbak, σημειώνουμε πως αυτό συμβαίνει τόσο στο λατινικό κείμενο του Menge, που παρατίθεται δίπλα στο πρωτότυπο κείμενο, των *Δεδομένων*, με τον όρο «datum», όσο και στην συντριπτική πλειοψηφία όσων μεταφράζουν από τα λατινικά ή ακόμη και από το πρωτότυπο, αλλά έχουν ως μητρική, γλώσσα που προέρχεται από τα λατινικά. Μερικοί μόνο από αυτούς είναι οι: Heath, Van Der Waerden, Morrow, Mueller, Fowler, Unguru και τους ακολουθούν πάρα πολλοί άλλοι. Εξαίρεση σε αυτόν τον κανόνα αποτελεί η μετάφραση των G.L. McDowell & M.A.Sokolik (1993) στα αγγλικά, που αποδίδει σε κάποια σημεία σωστά χρονικά τους δύο όρους ενώ σε άλλα όχι. Το γεγονός αυτό της ενιαίας απόδοσης των δύο όρων, εξηγείται εν μέρει αν αναλογισθεί κανείς ότι στη λατινική γλώσσα, ο χρόνος που αντιστοιχεί σε πράξη που συνέβη στο παρελθόν είναι ο Perfectum, ο οποίος έχει άλλες φορές σημασία Αορίστου και άλλες Παρακειμένου, ανάλογα με τα συμφραζόμενα. Οι μετοχές αντίστοιχα της λατινικής γλώσσας, στη μεν ενεργητική φωνή, υπάρχουν μόνο στον Ενεστώτα και τον Μέλλοντα, ενώ για την παθητική φωνή υπάρχουν μόνο μια μετοχή, στον Παρακείμενο (π.χ. datum). Κάτι αντίστοιχο ισχύει για την παθητική μετοχή στα αγγλικά του ρήματος «give», που είναι το «given». Κάτι ανάλογο συμβαίνει ενώ δεν θα έπρεπε και στα γερμανικά, όπου η παθητική μετοχή του ρήματος είναι «gegeben».[7] Η αλήθεια είναι ότι ούτε οι ίδιοι οι Έλληνες από τον Μαρίνο (500 μ. Χ) και μετά, φαίνεται να διακρίνουν ανάμεσα στο «δεδομένον» και το «δοθέν».

Εξαίρεση στη χωρίς διάκριση απόδοση του «δοθέντος» και του «δεδομένου» αποτελεί μόνο ο R.Schmidt. Εισάγοντας την προσέγγιση του στο θέμα (1987, 2), αναφέρει:

> Το ευδιάκριτο χαρακτηριστικό στα παραδείγματα της ελληνικής γεωμετρικής ανάλυσης που διασώζονται, είναι η συνεχής επανάληψη του όρου «δεδομένον».

[7] Ο Σταμάτης στην εισαγωγή του Γ΄ τόμου του *Αρχιμήδους Άπαντα* (1974, XXX), παρατηρώντας την απόδοση του όρου «δεδομένον» σε γερμανικά κείμενα με τον όρο «γνωστό» αναφέρει: «…οι οποίοι αποδίδονται εκ της αραβικής εις την γερμανικήν εσφαλμένως δια της λέξεως Erkannt αντί (statt) gegeben.». Ο Σταμάτης δηλαδή φαίνεται να κάνει σωστά την διάκριση ανάμεσα στο «γνωστό» και το «δεδομένον» αφού την υποδεικνύει στους γερμανόφωνους. Δεν διακρίνει όμως δυστυχώς, όπως είναι φανερό σε πολλά σημεία στο έργο του, ανάμεσα στο «δοθέν» και το «δεδομένον». Στο ίδιο σημείο (τόμ. Γ΄, XXIX-XXX), ο Σταμάτης αναφέρεται και σε χαμένο έργο του Αρχιμήδη με τίτλο «*Δεδομένα*» που υπήρξε σύμφωνα με τον αραβικό κατάλογο έργων Ελλήνων μαθηματικών Fihrist.

> …Θα μπορούσε κανείς να πει ότι η ουσία της ελληνικής μεθόδου της ανάλυσης και της σύνθεσης διυλίζεται μέσα σε αυτή τη μοναδική λέξη.

Παρακάτω ο Schmidt (1987, 3), αντιδιαστέλλει το «δεδομένον» με την αλγεβρική έννοια του «γνωστού» (Known), επισημαίνοντας, ότι από τους περισσότερους χρησιμοποιούνται ως όροι ανάλογοι, ενώ έχουν εντελώς διαφορετική αποβλεπτικότητα, αφού ο ένας αφορά τον γεωμετρικό, ενώ ο άλλος τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Ο στόχος του είναι όπως αναφέρει:

> Να παρουσιάσει μια γεωμετρική κατάσταση η οποία μπορεί να σχηματοποιηθεί γραμματικά ως ακολούθως: ένα αντικείμενο έχει κάτι άλλο δοσμένο σε αυτό τόσο αμετάκλητα που γίνεται μόνιμο κτήμα του αντικειμένου, υπό τέτοιες συνθήκες που είναι δυνατόν να του αποδώσει την ευθύνη για αυτή την πράξη. Δηλαδή πρέπει να δείξω τη γεωμετρική σημασία του ρήματος «to give» από την εμφάνισή του στον συντελεσμένο χρόνο (perfect tense), και πρέπει να υποδείξω ένα ευθύ και ένα έμμεσο αντικείμενο αυτού του δοσίματος.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο προβληματισμός του Schmidt αφορά την εμφάνιση του «δεδομένου» σε συντελεσμένο χρόνο. Τον απασχολεί δηλαδή η συνιστώσα του χρόνου που αναφέρεται στο κεκτημένο, το οριστικό της πράξης του δοσίματος, με την έννοια όμως ότι το κατηγόρημα που τελικά αποδίδεται στο αντικείμενο έχει την αιτία του στο ίδιο το αντικείμενο. Προσπαθεί επίσης όπως αναφέρει, να διακρίνει ένα ευθύ και ένα έμμεσο αντικείμενο αυτής της πράξης δοσίματος. Η δική μας θέση για διάκριση ανάμεσα στο «δοθέν» και το «δεδομένον», η οποία όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο έχει ως αφετηρία της τους διαφορετικούς χρόνους στους οποίους εμφανίζονται οι δύο όροι, είναι πολύ διαφορετική από αυτήν που υποστηρίζει ο Schmidt.

Ο Schmidt συνεχίζει παραθέτοντας κάποια παραδείγματα γεωμετρικών καταστάσεων που παρόλο που δεν το αναφέρει, είναι ανάλογα προτάσεων από τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, και καταλήγει (1987, 12):

> … η έννοια «του γνωστού» (the known) όπως μόλις συζητήθηκε αντιστοιχεί στην ελληνική επιθετική μετοχή «δοθέν»… και αυτή αντιστοιχεί στο ευθύ αντικείμενο μιας πράξης δοσίματος για την οποία εμείς είμαστε το αίτιο. Αλλά η ελληνική τέχνη της ανάλυσης επικεντρώθηκε γύρω από το «δεδομένον», το οποίο ήταν το έμμεσο αντικείμενο μιας πράξης δοσίματος για την οποία τα άλλα γεωμετρικά σχήματα ήταν υπεύθυνα.

Παρόλο που δεν συμφωνούμε με την ερμηνεία που αποδίδει στη διάκριση «δοθέν» – «δεδομένον» ο Shmidt, θα πρέπει να επισημάνουμε δύο πολύ θετικά στοιχεία της δουλειάς του. Το πρώτο είναι, ότι από όσο γνωρίζουμε, είναι ο πρώτος και ο μόνος στη σύγχρονη εποχή που προσπαθεί να διακρίνει εννοιολογικά ανάμεσα στο «δοθέν» και το «δεδομένον». Το δεύτερο είναι, ότι έχει ως αφετηρία του τη γλώσσα. Δεν προχωράει όμως στη σωστή κατά τη γνώμη μας κατεύθυνση της γλωσσικής και κατόπιν φιλοσοφικής ανάλυσης των δύο όρων, αντίθετα προσπαθεί μέσα από τις ίδιες τις γεωμετρικές καταστάσεις, με τη βοήθεια του δικού μας, του σύγχρονου εννοιολογικού πλαισίου, που είναι σίγουρα επηρεασμένο από το διανοητικό και πολιτισμικό μας περιβάλλον, να προσεγγίσει έννοιες, και να ανακαλύψει τον τρόπο που τις αντιλαμβάνονταν οι αρχαίοι, μη λαμβάνοντας υπόψη τυχόν φιλοσοφικές τους δεσμεύσεις.

Μέχρι εδώ παραθέσαμε και συζητήσαμε το σύνολο των αποτελεσμάτων της σύγχρονης έρευνας, που έχουμε τουλάχιστον υπόψη μας, σχετικά με την αξία, το περιεχόμενο και την ορολογία που χρησιμοποιούν τα *Δεδομένα.*

1) Οι απόψεις καταρχήν για την αξία των *Δεδομένων,* θα λέγαμε ότι διαβαθμίζονται από τη θέση του Cantor ότι τα *Δεδομένα* δεν είναι τίποτε περισσότερο από ένα εγχειρίδιο ασκήσεων επιπεδομετρίας, μέχρι τη θέση του Knorr ότι αποτελούν το μέτρο της γεωμετρικής έρευνας της εποχής του Ευκλείδη. Η αξία που αποδίδονταν στο έργο από τους εκπροσώπους της παραδοσιακής ιστοριογραφίας ήταν μάλλον μεγαλύτερη σε σχέση με την αξία που του αναγνωρίστηκε στη συνέχεια, δεδομένου ότι αποτελούσε για αυτούς ένα από τα φανερά αλγεβρικά έργα των αρχαίων και κατά συνέπεια αποτέλεσε ένα από τα πιο ισχυρά επιχειρήματά τους στην κατεύθυνση της «γεωμετρικής άλγεβρας». Η αξία του έργου στη συνέχεια μάλλον υποβιβάστηκε σε συνδυασμό με την υποτίμηση της «γεωμετρικής άλγεβρας» και θεωρήθηκε πλέον ως μια αναδιατύπωση γνωστών προτάσεων από τα *Στοιχεία* με το γλωσσικό ιδίωμα «δοθέντων» – «δεδομένων», σε μορφή δηλαδή που χωρίς να είναι γίνεται σαφές από την έρευνα με ποιο τρόπο, εξυπηρετεί καλύτερα την επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο της ανάλυσης. Μια θέση που χωρίς να είναι ιδιαίτερα διαφωτιστική είναι διαφορετική από την προηγούμενη που πλέον έχει αποκηρυχθεί. Η εξαίρεση σε αυτή την τοποθέτηση για την αξία των *Δεδομένων* ήρθε από τον Knorr ο οποίος δήλωσε ότι στα *Δεδομένα* και σε δύο άλλα χαμένα έργα του Ευκλείδη θα πρέπει να αναζητή-

σουμε το μέτρο για τις γεωμετρικές έρευνες της εποχής του Ευκλείδη. Μια θέση που παρόλο που ο ίδιος δεν την τεκμηρίωσε ιδιαίτερα, προβλημάτισε αρκετά επόμενους ερευνητές[8], κάποιοι από αυτούς την αποδέχθηκαν έστω με έμμεσο τρόπο.[9] Ανάμεσα σε αυτούς που υποστηρίζουν αυτή την άποψη είμαστε και εμείς και θα την υποστηρίξουμε με συγκεκριμένα επιχειρήματα σε επόμενα κεφάλαια της διατριβής μας.

2) Σε ότι αφορά το περιεχόμενο των *Δεδομένων,* η άποψη της παραδοσιακής ιστοριογραφίας ήταν ότι αποτελεί ένα έργο που ανήκει στο χώρο της άλγεβρας και περιλαμβάνει όλη τη συζήτηση γύρω από την επίλυση της γενικής δευτεροβάθμιας εξίσωσης, κατά συνέπεια περιλαμβάνει εξισώσεις. Οι νεώτεροι μελετητές όπως οι Knorr και Taisbak μάλλον συμφωνούν και προσυπογράφουν τη θέση που έχει διατυπώσει ο Heath ότι τα *Δεδομένα* αποτελούν ένα συμπλήρωμα των *Στοιχείων,* επαναδιατυπωμένο (με τη βοήθεια της ορολογίας «δοθέν» – «δεδομένον») σε μια μορφή που μπορεί να εξυπηρετήσει καλύτερα την ανάλυση των προβλημάτων. Μια θέση για την οποία έχουμε να παρατηρήσουμε ότι εκτός του ότι δεν είναι ιδιαίτερα διαφωτιστική για τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί αυτή η επαναδιατύπωση γνωστών προτάσεων και βοηθάει στην ανάλυση προβλημάτων, φανερώνει έστω και έμμεσα μια χρονική προτεραιότητα των προτάσεων των *Στοιχείων* έναντι αυτών των *Δεδομένων* η οποία δεν τεκμηριώνεται και όπως θα δείξουμε δεν ισχύει.

3) Τέλος σε σχέση με την ορολογία «δοθέν»-«δεδομένον» την οποία χρησιμοποιούν τα *Δεδομένα,* παρόλο που οι περισσότεροι αντιλαμβάνονται ότι πρέπει να κατανοηθεί ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί προκειμένου να γίνει κατανοητό το έργο –ο Taisbak είναι αυτός ο οποίος διατυπώνει σαφέστερα από όλους αυτή την αναγκαιότητα– δεν υπάρχουν σαφείς θέσεις για τη σημασία της, τον τρόπο που λειτουργεί ή την αναγκαιότητά της. Σύμφωνα με την πλέον σύγχρονη μελέτη του Taisbak (2003), η έννοια «δεδομένον» παραμένει μη ορισμένη (ο ίδιος θεωρεί ότι δεν μπορεί και να οριστεί) και δεν βρίσκει κάποιο σημαντικό λάθος στην απόδοση του «δεδομένου» με το «γνωστό», με τη δικαιολογία ότι δεν μπορεί να σκεφτεί κάποια καλύτερη λέξη για να το αποδώσει. Η συντριπτική πλειοψηφία των σύγχρονων μελετητών δεν

---

[8] Όπως ο Taisbak (2003, 7), που προαναφέραμε τη δήλωσή του ότι η έρευνά του στοίχειωσε ανάμεσα στη θέση του Knorr και την απαξιωτική για τα *Δεδομένα* θέση του δάσκαλού του των ελληνικών Μαθηματικών.

[9] Οι Berggren & Van Brummelen (2000), όπως θα μας δοθεί η ευκαιρία να αναλύσουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

διακρίνει ανάμεσα στο «δοθέν» και το «δεδομένον» και τα αποδίδει ενιαία, με μοναδική εξαίρεση όπως προαναφέραμε τον Schmidt.

Κλείνοντας την ενότητα της ιστοριογραφικής έρευνας γύρω από τα *Δεδομένα* θα αναφερθούμε στις αρχαίες πηγές που ασχολούνται με το έργο. Έχουμε αναφέρει ήδη ότι ο Πάππος θεωρεί τα *Δεδομένα* το πρώτο ως προς την τάξη βιβλίο της ανάλυσης και περιγράφει συνοπτικά το περιεχόμενό του. Σύμφωνα με τον Μαρίνο τον Φιλόσοφο, ο Πάππος θα πρέπει να είχε γράψει και «υπομνηματισμούς» για το έργο που δυστυχώς δεν σώθηκαν. Το μόνο κείμενο που έχει σωθεί και αφορά τα *Δεδομένα* γενικά αλλά και την έννοια του «δεδομένου» ειδικότερα, είναι το «*Υπόμνημα εις τα Δεδομενα Ευκλείδου από φωνής Μαρίνου Φιλοσόφου*». Το κείμενο του Μαρίνου δεν έχει αξιολογηθεί θετικά μέχρι σήμερα από τη σύγχρονη έρευνα. Η θέση μας για το κείμενο αυτό είναι διαφορετική όπως θα μας δοθεί η ευκαιρία να δείξουμε στη συνέχεια της διατριβής μας. Εδώ θα αναφέρουμε μόνο συνοπτικά ότι ο Μαρίνος αντιλαμβάνεται τη διαφορετικότητα των όρων «δοθέν» και «δεδομένον», αποκαλύπτει ότι αρκετοί έχουν αντιληφθεί το «δεδομένον», αποσπασματικά ή με όχι σωστό τρόπο, αναλύει τους προηγούμενους τρόπους, τους συγκρίνει, υποδεικνύει τις ατέλειές τους και καταλήγει στον κατά τη γνώμη του σωστό ορισμό του «δεδομένου» που είναι αρκετά χρήσιμος για την έρευνά μας. Θεωρεί τέλος, ότι η γνώση των *Δεδομένων* είναι απολύτως αναγκαία για όσους ασχολούνται με την ανάλυση.

Στην επόμενη ενότητα, και πριν προσπαθήσουμε να δείξουμε αν και με ποιο τρόπο διαφοροποιείται το «δοθέν» από το «δεδομένον», θα καταγράψουμε απλά την εμφάνιση των δύο όρων όπως αυτοί εμφανίζονται στα κείμενα των τριών μεγάλων μαθηματικών της αρχαιότητας Ευκλείδη, Αρχιμήδη και Απολλώνιο.

1.2. *Η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» όπως εμφανίζεται σε πρώτη ανάγνωση στα κείμενα των Ευκλείδη, Αρχιμήδη και Απολλώνιου*

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε το πώς η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» παρουσιάζεται σε πρώτη ανάγνωση στα κείμενα του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου.

1.2.1. Η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» στα κείμενα του Ευκλείδη

Στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη ο όρος «δεδομένον» δεν εμφανίζεται ούτε μία φορά! Στα *Δεδομένα* ο όρος «δεδομένον» εμφανίζεται 478 φορές και δεν εμφανίζεται σε κανένα άλλο έργο του! Ο όρος «δοθέν» αντίστοιχα εμφανίζεται 309 φορές στα *Στοιχεία* και 923 φορές στα *Δεδομένα*.

Μια πρώτη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε παρακολουθώντας την εμφάνιση του όρου «δοθέν» στα *Στοιχεία*, είναι ότι μπορούμε να διακρίνουμε τις προτάσεις τους σε προβλήματα και θεωρήματα ανάλογα με το αν περιλαμβάνουν τον όρο «δοθέν» ή όχι αντίστοιχα. Ο διαχωρισμός των προτάσεων των Ελληνικών μαθηματικών, σε προβλήματα και θεωρήματα, γνωρίζαμε μέχρι τώρα ότι γίνεται όπως αναφέρει ο Πρόκλος σύμφωνα με το περιεχόμενό τους:

> Πάλιν δ᾽ αὖ τὰ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν εἰς <προβλήματα> διαιρεῖται καὶ <θεωρήματα>, τὰ μὲν τὰς γενέσεις περιέχοντα τῶν σχημάτων καὶ τὰς τομὰς καὶ τὰς ἀφαιρέσεις ἢ προσθέσεις καὶ ὅλως τὰ παθήματα τὰ γιγνόμενα περὶ αὐτά, τὰ δὲ καθ᾽ αὑτὰ συμβεβηκότα ἑκάστοις δεικνύοντα. (77, 7-12) … τὰ μὲν γὰρ ποίησιν ἐπαγγέλλεταί τινος, τὰ δὲ δεῖξιν καὶ εὕρεσιν ὄντος. (210, 8-10)

Με άλλα λόγια, οι προτάσεις που ακολουθούν τις πρώτες αρχές διαιρούνται, σύμφωνα με τον Πρόκλο, ανάλογα με το περιεχόμενό τους σε προβλήματα και θεωρήματα. Τα πρώτα περιλαμβάνουν τις κατασκευές των σχημάτων, τις τομές τους, τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις τους, και γενικά τις ιδιότητες που προκύπτουν από τέτοιες διαδικασίες. Τα θεωρήματα ασχολούνται με την απόδειξη των καθαυτό ιδιοτήτων του κάθε σχήματος. Μια διάκριση που δεν θα λέγαμε ότι είναι απόλυτα σαφής. Με ανάλογο τρόπο, και πάλι όχι ιδιαίτερα διαφωτιστικό, κάνει τη διάκριση προβλήματος-θεωρήματος και ο Πάππος στη *Συναγωγή* (650, 14-20). Πρέπει όμως να λάβουμε υπόψη μας επίσης το γεγονός, ότι στην αρχαιότητα υπήρχε ένας ολόκληρος διάλογος για το ποιες προτάσεις πρέπει να θεωρούνται προβλήματα και ποιες θεωρήματα. Χαρακτηριστικά κάποιοι όπως ο Σπεύσιππος και ο Αμφίνομος, θεωρούσαν ότι όλες οι προτάσεις των Μαθηματικών είναι θεωρήματα αφού ασχολούνται με τη θεώρηση αιώνιων αντικειμένων. Αντίθετα, μια άλλη τάση εκπρόσωπος της οποίας ήταν ο Μέναιχμος, υποστήριζε ότι όλες οι προτάσεις είναι προβλήματα, αφού προκύπτουν ως αποτέλεσμα έρευνας. Πέρα από τις όποιες θεωρητικές τοποθετήσεις των αρχαίων, θεωρούμε ότι η διάκριση με βάση το περιεχόμενο των προτάσεων, όπως την παρουσιάζει ο Πρόκλος, ανταποκρίνεται σε μεγάλο βαθμό στην πρακτική των κειμένων που σώζονται.

Ο τρόπος που αυτός ο διαχωρισμός γίνεται φανερός στη Γεωμετρία, και ειδικότερα στα *Στοιχεία*, πάλι σύμφωνα με τον Πρόκλο, είναι οι χαρακτηριστικές εκφράσεις που εμφανίζονται στο τέλος των προβλημάτων και των θεωρημάτων, «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι» και «ὅπερ ἔδει δεῖξαι» αντίστοιχα: «Ἀλλ' ὅτι μὲν ἔστι τις διαφορὰ τοῦ τε προβλήματος καὶ τοῦ θεωρήματος, δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι δὲ καὶ ἡ Εὐκλείδου στοιχείωσις ἔχει τὰ μὲν προβλήματα τὰ δὲ θεωρήματα, φανερὸν ἔσται τοῦτο διὰ τῶν καθ' ἕκαστον καὶ αὐτοῦ προστιθέντος ἐπὶ τέλει τῶν δεικνυμένων ὅπου μὲν τὸ "ὅπερ ἔδει ποιῆσαι" ὅπου δὲ τὸ "ὅπερ ἔδει δεῖξαι"» (81.5-11).

Εμείς θα δείξουμε ότι κάποιος μπορεί ακόμη να διακρίνει τα προβλήματα από τα θεωρήματα, τουλάχιστον στα γεωμετρικά βιβλία των *Στοιχείων*[10], διαβάζοντας απλά τις εκφωνήσεις ή τις εκθέσεις τους χωρίς να μπει στο μαθηματικό τους περιεχόμενο. Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, στη μεγάλη πλειοψηφία των προβλημάτων εμφανίζεται κάποιος τύπος του όρου «δοθέν», όρος που δεν εμφανίζεται σε κανένα από τα θεωρήματα.

Για παράδειγμα στα τρία πρώτα προβλήματα του 1ου βιβλίου του Ευκλείδη εκτός από τις εκφωνήσεις που περιέχουν τον όρο «δοθέν», οι εκθέσεις είναι αντίστοιχα: «Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ. … Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, … Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ,… » Ενώ στα επόμενα δύο θεωρήματα ούτε οι εκφωνήσεις περιέχουν τον όρο «δοθέν» και οι εκθέσεις είναι αντίστοιχα: «Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ … Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ…» Είναι φανερό ότι τόσο ο τρόπος που δίνονται στην εκφώνηση τα αντικείμενα των προβλημάτων και στη συνέχεια «εκθέτονται» στην έκθεση, συμπεριλαμβάνει και τον όρο «δοθέν». Κάτι που δεν συμβαίνει με τα αντικείμενα των θεωρημάτων, τα οποία δεν εμφανίζουν το «δοθέν» πουθενά.

Ο όρος «δοθέν» στις διάφορες μορφές του εμφανίζεται όπως προαναφέραμε 309 φορές στα βιβλία των *Στοιχείων* ως εξής:

1ο βιβλίο. Στις προτάσεις: 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 22, 23, 31, 42, 44, 45, 46. Οι προτάσεις αυτές είναι φανερό με βάση το περιεχόμενό τους ότι είναι προβλήματα.

---

[10] Το ίδιο θα δείξουμε παρακάτω και στα κείμενα του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου.

Όλες αποδείξεις των προτάσεων αυτών και μόνο αυτές, τελειώνουν με το «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι», ενώ όλες οι υπόλοιπες με το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι».

$2^{ο}$ βιβλίο. Στις προτάσεις: 11, 14. Οι δύο αυτές προτάσεις είναι τα μόνα προβλήματα του βιβλίου. Οι αποδείξεις των δύο αυτών προτάσεων και μόνο αυτές τελειώνουν με το «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι», ενώ όλες οι υπόλοιπες με το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι».

$3^{ο}$ βιβλίο. Στις προτάσεις: 1, 17, 25, 30, 33, 34. Οι προτάσεις αυτές με βάση το περιεχόμενό τους είναι προβλήματα. Εκτός της $1^{ης}$ πρότασης, όλες οι άλλες αποδείξεις και μόνο αυτές, τελειώνουν με το «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι», ενώ όλες οι υπόλοιπες με το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι». Στην $1^{η}$ πρόταση ανάμεσα στο τέλος της απόδειξης και το «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι», μεσολαβεί ένα πόρισμα. Θεωρούμε ότι το «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι», αντιστοιχεί στο σύνολο της απόδειξης της πρότασης πάλι. Κατά συνέπεια, και εδώ η εμφάνιση του «δοθέντος» προσδιορίζει την ύπαρξη προβλήματος.

$4^{ο}$ βιβλίο. Στις προτάσεις: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16. Οι προτάσεις αυτές όλες είναι προβλήματα δεδομένου ότι αναφέρονται σε κατασκευές. Όλες αυτές οι προτάσεις εμφανίζουν στο τέλος της απόδειξης το «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι», ενώ οι υπόλοιπες εμφανίζουν το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι», εκτός μιας εξαίρεσης. Πρόκειται για την $10^{η}$ πρόταση, η οποία παρόλο που δεν εμφανίζει τη λέξη «δοθέν», είναι φανερό από το περιεχόμενο ότι πρόκειται για κατασκευή και η απόδειξή της τελειώνει με το «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι».

$5^{ο}$ βιβλίο. Στο πέμπτο βιβλίο δεν εμφανίζεται πουθενά ο όρος «δοθέν», οι προτάσεις είναι όλες θεωρήματα, οι αποδείξεις των οποίων καταλήγουν όλες με το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι».

$6^{ο}$ βιβλίο. Στις προτάσεις: 9, 10, 11, 12, 13, 18, 25, 28, 29, 30. Οι προτάσεις αυτές είναι προβλήματα. Οι αποδείξεις όλων αυτών των προτάσεων καταλήγουν με το «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι», ενώ των υπολοίπων με το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι». Σημειώνουμε απλά την $8^{η}$ πρόταση που εμφανίζει το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι» σε αγκύλες. Γεγονός που σημαίνει ότι δεν υπήρχε στα πρωτότυπα κείμενα, αλλά έχει προστεθεί από τον Heiberg, ο οποίος θεωρεί ότι είναι θεώρημα. Συμφωνούμε με την άποψη αυτή τόσο από πλευράς περιεχομένου, όσο και γιατί στην πρόταση δεν υπάρχει ο όρος «δοθέν».

$7^{ο}$ βιβλίο. Στις προτάσεις: 2, 3, 33, 34, 36, 39. Οι αποδείξεις όλων αυτών των προτάσεων, όπως και όλων των υπολοίπων του $7^{ου}$ βιβλίου, καταλήγουν με το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι». Εκτός της πρότασης 2, στην οποία πάλι ο Heiberg, τοποθετεί το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι» σε αγκύλες.

8^{ο} βιβλίο. Στις προτάσεις 2, 4, 5. Οι αποδείξεις αυτών των προτάσεων, όπως και όλων των υπολοίπων του 8^{ου} βιβλίου, καταλήγουν με το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι».

9^{ο} βιβλίο. Στις προτάσεις 18, 19. Οι αποδείξεις αυτών των προτάσεων, όπως και όλων των υπολοίπων του 9^{ου} βιβλίου, καταλήγουν με το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι».

Παρατηρούμε ότι στα αριθμητικά βιβλία (7^{ο}, 8^{ο} και 9^{ο}) του Ευκλείδη, υπάρχει μια διαφοροποίηση στον τρόπο γραφής τουλάχιστον, αν όχι στον τρόπο που γίνονται αντιληπτά τα μαθηματικά αντικείμενα ίσως και από τον συγγραφέα τους. Σε ότι αφορά τις ιστορικές υποθέσεις για την καταγωγή των αριθμητικών βιβλίων έχουν εκφραστεί αρκετά διαφορετικές απόψεις από πολλούς σύγχρονους μελετητές.[11] Είναι χαρακτηριστικό ότι ο Πρόκλος[12] στο σχολιασμό του για το πρώτο βιβλίο του Ευκλείδη, μεταξύ των άλλων αναφέρει ότι υπάρχουν αρκετά προβλήματα στα αριθμητικά βιβλία (VII, VIII, IX), όπου οι εκφωνήσεις τους δεν περιλαμβάνουν το τι δίνεται. Αναγνωρίζει δηλαδή την ύπαρξη προτάσεων που χαρακτηρίζει ως προβλήματα και στα αριθμητικά βιβλία. Αν και ο ίδιος όμως ακολουθεί την εμφάνιση της έκφρασης «ὅπερ ἔδει δεῖξαι» για την αναγνώριση των θεωρημάτων και έχει μπροστά του τα αριθμητικά βιβλία με τη μορφή που τα έχουμε εμείς σήμερα, όπου όλες οι προτάσεις καταλήγουν με την έκφραση «ὅπερ ἔδει δεῖξαι», δεν θα έπρεπε να αναφέρεται στην ύπαρξη προβλημάτων σε αυτά. Κατά συνέπεια είναι πιθανό ο Πρόκλος να διαβάζει από κάποιο χειρόγραφο το οποίο δεν περιέχει ως κατάληξη όλων των προτάσεων για τα αριθμητικά βιβλία την έκφραση «ὅπερ ἔδει δεῖξαι». Ίσως στο χειρόγραφο που έχει μπροστά του ο Πρόκλος τα προβλήματα να αντιστοιχούν σε κάποιες από τις προτάσεις που εμείς εντοπίζουμε την ύπαρξη του «δοθέντος».

10^{ο} βιβλίο. Στις προτάσεις 3, 4, 12, και στο λήμμα της πρότασης 13. Οι αποδείξεις αυτών των προτάσεων καταλήγουν με το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι», εκτός αυτής της πρότασης 4, που η έκφραση μπαίνει σε αγκύλες, δηλαδή είναι προσθήκη του Heiberg. Οι περισσότερες από τις υπόλοιπες αποδείξεις των προτάσεων του 10^{ου} βιβλίου, καταλήγουν με το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι», αλλά υπάρχουν και κάποιες οι οποίες δεν εμφανίζουν καμία από τις γνωστές εκφράσεις «ὅπερ ἔδει δεῖξαι» ή «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι» και ο Heiberg δεν κάνει καμία προσθήκη. Η προηγούμενη αναφορά του Πρόκλου αφορά και το 10^{ο} βιβλίο.

---

[11] Για μια συνολική θεώρηση των απόψεων αυτών βλέπε Χριστιανίδης (2003, 88-89).
[12] Friedlein (1873, 205.9-10).

11^{ο} βιβλίο. Στις προτάσεις 11, 12, 23, 26, 27. Οι προτάσεις αυτές με βάση το περιεχόμενό τους είναι προβλήματα. Οι αποδείξεις όλων αυτών των προτάσεων καταλήγουν με το «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι», ενώ των υπολοίπων με το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι». Επανέρχεται δηλαδή στο 11^{ο} βιβλίο, ο κανόνας σε σχέση μα τον όρο «δοθέν» και τα προβλήματα, που έχουμε διαπιστώσει να λειτουργεί στα πρώτα έξι βιβλία, ενώ δεν φαίνεται να συμβαίνει το ίδιο, τουλάχιστον στη μορφή που φτάνουν σε εμάς σήμερα, με τα αριθμητικά βιβλία (7^{ο}, 8^{ο}, 9^{ο}) και το 10^{ο}.

12^{ο} βιβλίο. Στις προτάσεις 16, 17. Οι δύο αυτές προτάσεις με βάση το περιεχόμενό τους είναι προβλήματα. Οι αποδείξεις αυτών των προτάσεων καταλήγουν με το «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι», ενώ των υπολοίπων με το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι».

13^{ο} βιβλίο. Στις προτάσεις 13, 14, 15, 16, 17, 18. Οι προτάσεις αυτές θεωρούμε ότι είναι προβλήματα. Παρόλο που φανερά πρόκειται για κατασκευές, αυτό ζητούν άλλωστε και οι εκφωνήσεις και υπάρχει σε όλες ο όρος «δοθέν», το κείμενο του Heiberg καταλήγει στο τέλος όλων των παραπάνω αποδείξεων, όπως και των υπολοίπων με το «ὅπερ ἔδει δεῖξαι». Ο Heath (1926, τόμ. III, 477), ονομάζει επίσης τις 13 και 14 προβλήματα. Κατά τη γνώμη μας, οι εκφράσεις «ὅπερ ἔδει δεῖξαι» που εμφανίζονται στο τέλος αυτών των προτάσεων, έχουν εισαχθεί στο κείμενο που έφτασε σε μας κάποια στιγμή μετά τον Ευκλείδη. Ίσως ένα ακόμη σημείο παραφθοράς του κειμένου του 13^{ου} βιβλίου, που προστίθεται στις απόψεις όσων έχουν διατυπώσει αντιρρήσεις για την αυθεντικότητα του περιεχομένου των πέντε πρώτων προτάσεων του ίδιου βιβλίου.[13]

Επειδή δεν είμαστε σε θέση να αιτιολογήσουμε τη θέση μας ότι η χρήση της ορολογίας των «δοθέντων» προσιδιάζει στα προβλήματα και όχι στα θεωρήματα στα κείμενα της γεωμετρίας, στο σημείο αυτό θα εικάσουμε μόνο ότι αυτή η ορολογία αυτή μπορεί να έχει σχέση με την προβληματική ανάλυση η οποία διατυπώνεται και λειτουργεί με την ορολογία «δοθέντων» – «δεδομένων» και όπως θα υποστηρίξουμε στο δεύτερο μέρος της διατριβής μας υπήρξε η μέθοδος για την επίλυση πολλών από αυτά.

Τέλος θα αναφέρουμε ότι ο όρος «δοθέν» εμφανίζεται 9 φορές στα *Οπτικά* του Ευκλείδη[14].

---

[13] Jones (1986, 67).

[14] Στην έκδοσή των *Οπτικών* που αποδίδεται στον Θέωνα εμφανίζεται 10 φορές.

1.2.2. Η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» στα κείμενα του Αρχιμήδη

Ο όρος «δεδομένον», στο σύνολο του έργου του Αρχιμήδη που σώζεται σήμερα στα Ελληνικά, εμφανίζεται μόνο 14 φορές! Και οι 14 εμφανίσεις του όρου εντοπίζονται στο έργο του *Περί Ελίκων* και πιο συγκεκριμένα στις προτάσεις 6, 7, 8, 9 και 19.

Ο όρος «δοθέν» με τη σειρά του εμφανίζεται συνολικά 124 φορές στο έργο του Αρχιμήδη που σώζεται στα Ελληνικά. Πιο συγκεκριμένα στα εξής έργα του:

Περί σφαίρας και κυλίνδρου α΄

Στο έργο αυτό ο όρος «δοθέν» εμφανίζεται στις προτάσεις 2, 3, 5, και 6. Ο Αρχιμήδης δεν ακολουθεί αυστηρά τον Ευκλείδειο τρόπο διατύπωσης σε ότι αφορά το τέλος των αποδείξεων χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις «ὅπερ ἔδει δεῖξαι» ή «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι». Η εκφώνηση της πρότασης 2 για παράδειγμα αρχίζει: «Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων…» και συνεχίζει αναφέροντας το λόγο των δύο «δοθέντων» μεγεθών που προφανώς είναι με τη σειρά του «δοθείς». Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, ότι η ύπαρξη «δοθέντων» φανερώνει πρόβλημα, θα έπρεπε η απόδειξη να τελειώνει με το «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι», πράγμα που δεν συμβαίνει. Η απόδειξη όμως τελειώνει με την έκφραση: «Εὑρημέναι εἰσὶν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι ποιοῦσαι τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα». Ο τρόπος με τον οποίο είναι διατυπωμένη αυτή η έκφραση και το γεγονός ότι περιλαμβάνει τον όρο «ποιοῦσαι», θα μπορούσαμε να πούμε ότι αντιστοιχεί στην έκφραση του Ευκλείδη «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι». Κατά την άποψή μας σύμφωνα με το περιεχόμενό της πρόκειται για πρόβλημα, όπως για τον ίδιο λόγο προβλήματα είναι και οι υπόλοιπες προτάσεις στις οποίες περιλαμβάνεται ο όρος «δοθέν», παρόλο που ο Σταμάτης (1974, τόμ. Γ΄, XXXVIII) σε συγκεντρωτικό του πίνακα για το είδος των προτάσεων στα έργα του Αρχιμήδη, αναφέρει ότι δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα στο έργο αυτό. Στα επόμενα έργα του Αρχιμήδη θα έχουμε περισσότερα στοιχεία για να υποστηρίξουμε την άποψή μας για συσχέτιση «δοθέντος» – προβλήματος.

Περί σφαίρας και κυλίνδρου β΄

Στο έργο αυτό του Αρχιμήδη ο όρος «δοθέν» εμφανίζεται σε έξι προτάσεις, συγκεκριμένα τις 1, 3, 4, 5, 6 και 7, οι οποίες θα πρέπει σύμφωνα με το ισχυρισμό μας να είναι προβλήματα. Επίσης εμφανίζεται στο τέλος της εισαγωγικής επιστολής του έργου, που απευθύνεται στον Δοσίθεο, στην εκφώνηση αυτού που ο ίδιος ο Αρχιμήδης ονομάζει πρώτο πρόβλημα.

Στην επιστολή του προς τον Δοσίθεο, ο Αρχιμήδης αναφέρει: «Πρότερον μὲν ἐπέστειλάς μοι γράψαι τῶν προβλημάτων τὰς ἀποδείξεις, ὧν αὐτὸς τὰς προτάσεις ἀπέστειλα Κόνωνι·» Ίσως αυτή η φράση του Αρχιμήδη οδηγεί τον Σταμάτη, να γράψει στον πίνακα για το είδος των προτάσεων που προαναφέραμε, ότι το έργο περιέχει 9 μόνο προβλήματα και κανένα θεώρημα.

Παρακάτω όμως στην επιστολή, ο ίδιος ο Αρχιμήδης αφού αναφέρει κάποια θεωρήματα με τη βοήθεια των οποίων αποδεικνύονται τα περισσότερα από αυτά, τις αποδείξεις των οποίων έχει ήδη στείλει, συνεχίζει: «Οσα μὲν οὖν τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων γράφεται διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων, ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἀπέσταλκά σοι,» Χωρίο που ο Σταμάτης αποδίδει ως εξής: «Όσα μεν λοιπόν εκ των θεωρημάτων και των προβλημάτων αποδεικνύονται δια των θεωρημάτων τούτων, σου τα αποστέλλω αφού τα έγραψα εις το βιβλίο τούτο,...» Άρα ο ίδιος ο Αρχιμήδης, διευκρινίζει ότι στέλνει – συμπεριλαμβάνει και κάποια θεωρήματα στο έργο του αυτό. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε με βάση την υπόθεσή μας να τα διαχωρίσουμε.

Η επιστολή τελειώνει όπως προαναφέραμε με την εκφώνηση του **πρώτου προβλήματος** πριν από τη διατύπωση και απόδειξη της πρώτης πρότασης: «Τὸ δὲ πρῶτον ἦν τῶν προβλημάτων τόδε· Σφαίρας δοθείσης ...» Διατύπωση που κάνει φανερή τη σύνδεση «δοθέντος» – προβλήματος, με τον τρόπο που την είδαμε να λειτουργεί στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και θα τη δούμε στη συνέχεια και στον Αρχιμήδη.

Η πρώτη πρόταση του έργου την οποία ακολουθεί απόδειξη, είναι το **δεύτερο πρόβλημα** σύμφωνα με την αρίθμηση του Αρχιμήδη: «Τὸ δεύτερον ἦν· Κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου **...»** Για να πει παρακάτω: «Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ Α· ...» Διατύπωση που ακολουθεί το ευκλείδειο πρότυπο. Η απόδειξη όμως, πάλι δεν τελειώνει με την φράση «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι».

Η δεύτερη πρόταση του βιβλίου, δεν περιλαμβάνει τον όρο «δοθέν» ούτε στην εκφώνηση, ούτε στην έκθεση και το διορισμό, κατά συνέπεια σύμφωνα με την υπόθεσή μας είναι θεώρημα. Το **πρώτο θεώρημα.** Επίσης στο τέλος της απόδειξής της, υπάρχει η έκφραση «ὅπερ ἔδει δεῖξαι». Η καλύτερη επιβεβαίωση όμως θα έρθει παρακάτω από τον ίδιο τον Αρχιμήδη.

Στην τρίτη πρόταση του βιβλίου αναφέρει: «Τρίτον ἦν πρόβλημα τόδε· Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, …» Άρα γίνεται φανερό ότι η προηγούμενη πρόταση, που μεσολαβεί ανάμεσα σε αυτό που ο ίδιος ο Αρχιμήδης ονομάζει δεύτερο και σε αυτό που ονομάζει τρίτο πρόβλημα, δεν θα μπορούσε να είναι επίσης πρόβλημα.

Τις επόμενες προτάσεις 4, 5, 6, 7, ο Αρχιμήδης δεν τις ονομάζει προβλήματα στις εκφωνήσεις τους, ούτε οι αποδείξεις τους τελειώνουν με το «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι». Περιέχουν όμως όλες τόσο στις εκφωνήσεις, όσο και στις εκθέσεις ή τους διορισμούς τους τον όρο «δοθέν», γεγονός που μας οδηγεί καταρχήν να τις χαρακτηρίσουμε ως προβλήματα. Ακόμη υπάρχουν και σημεία μέσα στις αποδείξεις τους που ο ίδιος ο Αρχιμήδης αναφέρει τον όρο πρόβλημα. Για παράδειγμα στη σύνθεση της 4^{ης} πρότασης θα αναφέρει: «Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος …» Κατά συνέπεια οι προτάσεις 4, 5, 6, και 7, αποτελούν τα **4^{ο}, 5^{ο}, 6^{ο} και 7^{ο} πρόβλημα** αντίστοιχα.

Στις προτάσεις 8 και 9 με τις οποίες τελειώνει το βιβλίο, δεν εμφανίζεται ούτε μια φορά ο όρος «δοθέν», δεν υπάρχει το «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι», δεν περιλαμβάνουν κατασκευές, χρησιμοποιούν κυρίως ιδιότητες των αναλογιών από το πέμπτο βιβλίο του Ευκλείδη και δεν εμφανίζουν πουθενά όπως οι προηγούμενες, τον όρο πρόβλημα. Κατά συνέπεια θεωρούμε ότι πρόκειται για θεωρήματα. Πρόκειται κατά την άποψή μας για το **2^{ο} και 3^{ο} θεώρημα** του βιβλίου.

Συνοψίζοντας θεωρούμε ότι το έργο *Περί σφαίρας και κυλίνδρου β΄,* περιλαμβάνει 7 προβλήματα, και 3 θεωρήματα θέση η οποία υποστηρίζεται και από άλλους μελετητές του Αρχιμήδη που ξεκινούν όμως από διαφορετική αφετηρία.[15] Επίσης πρέπει να τονιστεί ότι η σύνδεση «δοθέντος» – προβλήματος που είναι εμφανής και σε αυτό το έργο, δεν θα μπορούσε να βρει καλύτερο υποστηρικτή από τον ίδιο τον Αρχιμήδη.

Περί ελίκων

Στο έργο αυτό του Αρχιμήδη ο όρος «δοθέν» εμφανίζεται σε επτά προτάσεις, συγκεκριμένα τις 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9, οι οποίες θα πρέπει σύμφωνα με το υπόθεσή μας να

[15] Με τη θέση αυτή συμφωνούν τόσο ο Heath (1921, τόμ.II, 61), όσο και ο Panza (1997, 393).

είναι προβλήματα. Επίσης εμφανίζεται στην εισαγωγική επιστολή του έργου, που απευθύνεται πάλι στον Δοσίθεο, όπου ο Αρχιμήδης περιγράφοντας κάποια προβλήματα που στο παρελθόν είχε στείλει στον Κόνωνα, αναφέρει: «Πρῶτον δὴ τῶν προβλημάτων ἦν· σφαίρας δοθείσας … Δεύτερον δέ· κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου … Τρίτον δέ· τὰν δοθεῖσαν σφαῖραν … Τέταρτον δέ· τὰν δοθεῖσαν σφαῖραν … Πέμπτον δέ· τὸ δοθὲν τμᾶμα σφαίρας τῷ δοθέντι τμάματι σφαίρας … Ἕκτον δέ· δύο δοθέντων τμαμάτων σφαίρας … Ἕβδομον· ἀπὸ τᾶς δοθείσας σφαίρας…» Χωρίο που επιβεβαιώνει για μια ακόμη φορά τη σύνδεση που είναι φανερό ότι υπάρχει ανάμεσα στο πρόβλημα και τον όρο «δοθέν», στα έργα του Αρχιμήδη.

Μηχανικά β΄

Στο βιβλίο αυτό ο όρος «δοθέν» εμφανίζεται μία μόνο φορά στην πρόταση 6.

Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων

Στο βιβλίο αυτό του Αρχιμήδη, ο όρος «δοθέν» εμφανίζεται σε έξι προτάσεις, συγκεκριμένα τις 5, 7, 8, 9, 19 και 20, οι οποίες θα πρέπει σύμφωνα με το ισχυρισμό μας να είναι προβλήματα. Επίσης εμφανίζεται στην εισαγωγική επιστολή που υπάρχει στο βιβλίο και απευθύνεται στον Δοσίθεο, επιβεβαιώνοντας πάλι το συσχετισμό «δοθέντος» – προβλήματος: «πρόβλημα δὲ οἷον καὶ τόδε· ἀπὸ τοῦ δοθέντος σφαιροειδέος σχήματος ἢ κωνοειδέος … παρὰ δοθὲν ἐπίπεδον … ἴσον τῷ δοθέντι κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ἢ σφαίρᾳ τᾷ δοθείσᾳ. …». Ενώ αντίστοιχα στο θεώρημα που έχει αναφέρει ο Αρχιμήδης αμέσως πριν δεν περιλαμβάνεται ούτε μια φορά ο όρος «δοθέν».

Συνοψίζοντας με την εμφάνιση των όρων «δοθέν» και «δεδομένον» στα κείμενα του Αρχιμήδη θα μπορούσαμε να πούμε ότι ισχύουν πράγματα ανάλογα με αυτά που παρατηρήσαμε για την εμφάνιση αυτής της ορολογίας στα κείμενα του Ευκλείδη. Δηλαδή ο όρος «δεδομένον» εμφανίζεται μόνο σε ένα έργο του και μάλιστα ελάχιστες φορές. Αναφέρεται επίσης από κάποια πηγή η ύπαρξη έργου με τίτλο «Δεδομένα» που όμως δυστυχώς δεν σώζεται. Σε ότι αφορά τον όρο «δοθέν» εμφανίζεται πολύ περισσότερες φορές με τρόπο πάλι που κάνει εμφανή τη σύνδεσή του με τα προβλήματα.

1.2.3. Η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» στα κείμενα του Απολλώνιου

Ο όρος «δεδομένον»[16] στα έργα του Απολλώνιου που σώζονται σήμερα στα Ελληνικά εμφανίζεται μόνο 11 φορές![17] Οι τρεις πρώτες φορές που εμφανίζεται ο όρος είναι στο πρώτο βιβλίο των *Κωνικών* του, ενώ οι υπόλοιπες 8, είναι στο δεύτερο βιβλίο του ίδιου έργου.

Συγκεκριμένα στο πρώτο βιβλίο των *Κωνικών* του Απολλώνου, ο όρος «δεδομένον» εμφανίζεται στις προτάσεις: 52, 55 και 56.

Στο δεύτερο βιβλίο των *Κωνικών* του Απολλώνιου, ο όρος «δεδομένον» εμφανίζεται 8 φορές. Συγκεκριμένα στις προτάσεις: 46, 47, 49, 50, και 51. Είναι χαρακτηριστικός ο τρόπος που προκύπτει το «δεδομένον» στις τρεις πρώτες από αυτές τις προτάσεις ως συνέπεια ενός συλλογισμού που έχει προηγηθεί. Για παράδειγμα στην πρόταση 46 διαβάζουμε ως κατάληξη ενός συλλογισμού που έχει προηγηθεί: «…δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Δ.» Για να συνεχίσει στην επόμενη πρόταση: «διὰ δεδομένου ἄρα τοῦ Δ …». Με ανάλογο τρόπο εμφανίζονται ως «δεδομένα» αντικείμενα και στις προτάσεις 47 και 49 από το δεύτερο βιβλίο των *Κωνικών*.[18]

Ο όρος «δοθέν» εμφανίζεται συνολικά 180 φορές στα *Κωνικά* του Απολλωνίου.

Ειδικότερα στο 1ο βιβλίο των *Κωνικών* ο όρος «δοθέν» εμφανίζεται 40 φορές στις προτάσεις: 8, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59 και 60. Στην πρόταση 8 που είναι θεώρημα, το «δοθείσα» περιλαμβάνεται σε μια φανερή συνέπεια του θεωρήματος. Στην πρόταση

---

[16] Ο Μαρίνος αναφέρεται στον Απολλώνιο στην αρχή του υπομνήματός του για τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη. Συγκεκριμένα αναφερόμενος στους πολλούς και διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους κατά καιρούς έχει οριστεί ή χρησιμοποιηθεί ο όρος «δεδομένον», μιλάει για κάποιους που όρισαν το «δεδομένον» με κάποιο απλούστερο τρόπο και προσπάθησαν να το περιγράψουν με βάση κάποιο χαρακτηριστικό του γνώρισμα. Ανάμεσα τους περιλαμβάνει τον Απολλώνιο και αναφέρει ότι αυτός θεώρησε το «δεδομένον» ως «τεταγμένον», στα έργα του *Περί Νεύσεων* και *Καθόλου Πραγματεία*. Δύο έργα που αποδίδονται στον Απολλώνιο αλλά δυστυχώς δεν σώθηκαν και έτσι δεν μπορούμε να επιβεβαιώσουμε αν ο Απολλώνιος αντιλαμβάνονταν πράγματι με αυτόν τον τρόπο το «δεδομένον».

[17] Πολύ λίγες όπως και στο έργο του Αρχιμήδη, ειδικά αν τις συγκρίνει κάποιος με τη χρήση του όρου που γίνεται σήμερα από τους μαθηματικούς. Η χρήση του όρου «δεδομένον» σήμερα, είναι σίγουρα πολύ διαφορετική από αυτήν των αρχαίων και είναι ουσιαστικά πολύ κοντά στη σημασία με το «γνωστό».

[18] Σε αυτή μας την παρατήρηση θα επανέλθουμε σε επόμενα κεφάλαια όταν θα ασχοληθούμε με το πώς παράγονται και πως λειτουργούν τα «δεδομένα» τόσο στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη όσο και γενικότερα στην γεωμετρική ανάλυση προβλημάτων, δείγματα της οποίας είναι οι προτάσεις στις οποίες αναφερόμαστε σύμφωνα και με τον Knorr (1986, 314).

52, εμφανίζεται ο όρος «δοθείσα» 4 φορές στην εκφώνηση αλλά και σύμφωνα με το περιεχόμενο της είναι φανερό ότι πρόκειται για μια κατασκευή. Εμείς θεωρούμε ότι πρόκειται για πρόβλημα και ως τέτοιο το αναφέρει σε υποσημείωσή του και ο F. Hultsch, στο έργο του για τον Πάππο[19]. Ανάλογα πράγματα ισχύουν και για τις υπόλοιπες προτάσεις του 1ου βιβλίου των *Κωνικών* όπου εμφανίζεται το «δοθέν». Κατά την άποψή μας πρόκειται για προβλήματα. Θα πρέπει να διαφωνήσουμε πάλι με τον Σταμάτη (1975, τόμ. I, 41), ο οποίος σε συγκεντρωτικό πίνακα, για το είδος των προτάσεων των *Κωνικών* του Απολλώνιου, αναφέρει ότι το πρώτο βιβλίο περιλαμβάνει 60 θεωρήματα και κανένα πρόβλημα. Εμείς θεωρούμε, με βάση το περιεχόμενο των προτάσεων αλλά και τον ισχυρισμό μας για σύνδεση προβλημάτων – «δοθέντων», ότι το βιβλίο περιλαμβάνει 51 θεωρήματα και 9 προβλήματα (τα 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, και 60). Άποψη με την οποία συμφωνεί και ο R. Ferrier (1983)[20] φέρνοντας τα *Κωνικά* ως παράδειγμα έργου των Ελληνικών μαθηματικών στο οποίο έχουν προηγηθεί 51 θεωρήματα πριν διατυπωθεί το πρώτο πρόβλημα.

Στο 2ο βιβλίο των *Κωνικών*, ο όρος «δοθέν» εμφανίζεται 140 φορές, στις προτάσεις: 4, 14, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51 και 53. Ο Απολλώνιος αναφέρει τη λέξη πρόβλημα, στις 49, 50, 51, ενώ στην 53 αναφέρει: «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι». Ο Σταμάτης στον ίδιο συγκεντρωτικό πίνακα, αναγνωρίζει ότι οι τελευταίες 8 προτάσεις από αυτές που αναφέρουμε παραπάνω είναι προβλήματα. Εμείς θεωρούμε ότι και η 4 είναι πρόβλημα, τόσο με βάση το περιεχόμενό της όσο και γιατί περιλαμβάνει τον όρο «δοθέν», ενώ διατηρούμε κάποιες επιφυλάξεις για την 14 λόγω του περιεχομένου της, παρόλο που περιλαμβάνει τον όρο «δοθέν».

Τα υπόλοιπα βιβλία των *Κωνικών* του Απολλώνιου, το 3ο και το 4ο, δεν περιλαμβάνουν τον όρο «δοθέν» αλλά και καθόλου προβλήματα. Σε ότι αφορά τα βιβλία 5ο, 6ο και 7ο, δεν έχει νόημα να τα μελετήσουμε ως προς την εμφάνιση της ορολογίας «δοθέν» – «δεδομένον» γιατί δεν σώζονται στα Ελληνικά, αλλά τα έχει μεταφράσει ο Ε. Σταμάτης στη δωρική διάλεκτο από τα γαλλικά, που είναι μετάφραση από λατινικό κείμενο το οποίο με τη σειρά του έχει μεταφραστεί από το σωζόμενο αραβικό κείμενο.

---

19 Πάππος, εκδ. F. Hultsch, Βερολίνο 1876, 273, υποσημ.5.
20 Στην εισαγωγή του G. Mc Dowell & M. Sokolik (1993, XX).

Κλείνοντας την καταρχήν έρευνά μας για την εμφάνιση των όρων «δοθέν» και «δεδομένον» στα κείμενα του Ευκλείδη, Αρχιμήδη και Απολλώνιου, καταλήγουμε στα εξής: ο όρος «δεδομένον» εμφανίζεται αρκετά σπάνια σε ελάχιστα έργα, ειδικά στα κείμενα των δύο τελευταίων. Στον Ευκλείδη εμφανίζεται μόνο στα *Δεδομένα* αρκετές φορές. Ο όρος «δοθέν» εμφανίζεται σε περισσότερα έργα και σε αριθμό σημαντικά μεγαλύτερο από το «δεδομένον». Είναι φανερό ότι ο όρος «δοθέν» προσιδιάζει στα προβλήματα στα κείμενα και των τριών, με κάποιες εξαιρέσεις βέβαια τις οποίες προαναφέραμε. Συμπεράσματα για την αναγκαιότητα της ύπαρξης καθώς και τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί αυτή η ορολογία στα κείμενα των ελληνικών Μαθηματικών δεν είμαστε ακόμη σε θέση να βγάλουμε. Αυτό θα γίνει σε επόμενα κεφάλαια της διατριβής μας. Μπορούμε όμως να συμπεράνουμε ότι η ορολογία «δοθέντων» – «δεδομένων» δεν αποτελεί ένα χαρακτηριστικό που εμφανίζεται τυχαία ή μια γλωσσική ιδιομορφία των ελληνικών Μαθηματικών (ειδικότερα των *Δεδομένων* και της γεωμετρικής ανάλυσης) αλλά ένα συστατικό στοιχείο τους που χρησιμοποιείται με συγκεκριμένο τρόπο, που όπως θα φανεί στη συνέχεια μπορεί να βοηθήσει σημαντικά στην κατανόησή τους.

Συμπέρασμα

Όπως έγινε φανερό από τη συζήτηση που προηγήθηκε σε αυτό το κεφάλαιο, τα αποτελέσματα της μέχρι σήμερα έρευνας γύρω από τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, την αξία, το περιεχόμενο και την ορολογία που χρησιμοποιούν, δεν είναι ούτε οριστικά ούτε ιδιαίτερα ικανοποιητικά. Παρουσιάζονται ανάμεσα σε αυτά αντικρουόμενες απόψεις, ερμηνείες που οι ίδιοι οι υποστηρικτές τους αναγνωρίζουν ότι δεν είναι πλήρεις αλλά και πολύ σημαντικά και ενδιαφέροντα στοιχεία τα οποία θα είναι χρήσιμα για εμάς στην πορεία της διατριβής μας προκειμένου να συνθέσουμε τις δικές μας θέσεις. Επίσης η καταρχήν έρευνα της εμφάνισης της ορολογίας «δοθέν» – «δεδομένον» στα κείμενα του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου φανερώνει τον κοινό και όχι τυχαίο τρόπο εμφάνισής της σε αυτά. Ένα ακόμη στοιχείο που μας προτρέπει σε περισσότερο διεξοδική έρευνα, στη συνέχεια, για τη συγκεκριμένη ορολογία, την αναγκαιότητα της και τον τρόπο που αυτή λειτουργεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Οι όροι «δοθέν» και «δεδομένον»: γλωσσική διάκριση

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε γλωσσικά τους όρους «δοθέν» και «δεδομένον» προκειμένου να αναδείξουμε τη διάκριση που υπάρχει ανάμεσά τους.

2.1. *Γιατί γλωσσική ανάλυση δύο όρων των Μαθηματικών;*

Οι σύγχρονοι μελετητές των *Δεδομένων* αισθάνονται τουλάχιστον αμηχανία όταν έρχονται αντιμέτωποι με την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον», όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αναγνωρίζουν ότι αποτελεί ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των ελληνικών Μαθηματικών ουσιώδες για την ανάλυση των προβλημάτων, το οποίο δεν είναι καθόλου αυτονόητο πώς λειτουργούσε και με ποιόν τρόπο θα πρέπει να ερμηνευθεί. Ο Jones (1986, 552) αναφέρεται χαρακτηριστικά σε πιθανές παγίδες που κρύβονται πίσω από αυτή την ορολογία και στην επικινδυνότητα που παρουσιάζει λόγω της αμφισημίας της, αφού άλλες φορές –χωρίς να είναι φανερό ποιες– αναφέρεται σε πράγματα τα οποία έχουν εκληφθεί ως αληθή εξαρχής και άλλες φορές σε πράγματα που καθορίστηκαν από τη διαδικασία ως αληθή. Κάποιοι, όπως είδαμε, κατά καιρούς έχουν επικαλεστεί τον έναν ή τον άλλο λόγο για την ύπαρξή της, ουδείς όμως έχει προτείνει κάποια ουσιαστική και λειτουργική ερμηνεία της. Ο Taisbak, που όπως αναφέραμε έχει ασχοληθεί συστηματικότερα από όλους μέχρι τώρα με τα *Δεδομένα*, έχει εκφράσει την ανάγκη ύπαρξης μιας τέτοιας ερμηνείας και το έχει κάνει με ρητό τρόπο:

> …σχεδόν κανένας σύγχρονος μαθηματικός δεν θα χρησιμοποιούσε το κατηγόρημα «είναι δεδομένο» για κάτι που έχει βρεθεί ή αποδειχθεί ότι είναι αληθές. Αλλά οι Έλληνες το έκαναν, και αυτό είναι ένα γεγονός όχι οικείο για εμάς το οποίο πρέπει να κατανοηθεί εάν πρόκειται να αποτιμηθούν σωστά τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη. (Taisbak, 1991, 136-137) … ο Ευκλείδης δεν σκέφτηκε με αυτόν τον τρόπο: τα «δεδομένα» (‘givens’) του ζουν σε ένα δικό τους κόσμο τον οποίο πρέπει να κατέχουμε απεριόριστα αν θέλουμε να τον κατανοήσουμε. (Taisbak, 1991, 170)

Συμφωνούμε απόλυτα με τον Taisbak για την ανάγκη ουσιαστικής κατανόησης της ορολογίας «δοθέν» – «δεδομένον», αλλά δεν θα συμφωνήσουμε με τη μέθοδο που προτείνει για αυτό. Προτείνει συγκεκριμένα να αντιληφθούμε τα «δεδομένα» ως έννοιες μόνο από τα αποτελέσματά τους:

> «Θα τα γνωρίσουμε από τους καρπούς τους» (Κατά Ματθαίον 7.20) …ο Ευκλείδης (ή όποιος άλλος έγραψε τα *Δεδομένα*) …αποδεικνύει ισχυρισμούς με αξιώματα και ορισμούς που δεν δηλώνονται πουθενά, ενώ αποτυγχάνει να χρησιμοποιήσει ένα αναλυτικό ορισμό όπου αυτός χρειάζεται. …Ένας τρόπος για να θεραπεύσουμε τα πράγματα είναι να εκμαιεύσουμε τους ορισμούς και τα αξιώματα από τα αποτελέσματα που έχουμε: να γνωρίσουμε από τους καρπούς ποια ήταν η σπορά. (Taisbak, 1991, 137)

Μας προτρέπει δηλαδή να αναζητήσουμε τις απαντήσεις στα ερωτήματα που αφορούν την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» αποκλειστικά μέσα από τα ίδια τα μαθηματικά κείμενα. Οι απαντήσεις όμως αυτές είναι πιθανό να έχουν προεκτάσεις γλωσσικού και φιλοσοφικού χαρακτήρα όπως θα δείξουμε παρακάτω. Εμείς θεωρούμε ότι μία μεθοδικότερη μελέτη της ορολογίας σε γλωσσικό επίπεδο, σε συνδυασμό με τις πιθανές φιλοσοφικές προεκτάσεις της, σε αλληλεπίδραση πάντα με τα κείμενα –μαθηματικά και άλλα– και τελικά μια ερμηνεία και επαλήθευσή της στα μαθηματικά κείμενα, θα αποτελούσε έναν μάλλον πιο πειστικό τρόπο απάντησης, για πολλά από τα ερωτήματα που έχουν ήδη τεθεί και ίσως την αρχή μιας ουσιαστικής απάντησης τους.

Αναφερθήκαμε ήδη σε προηγούμενο κεφάλαιο, στη γλώσσα ως ένα από τα μεθοδολογικά εργαλεία της σύγχρονης ιστοριογραφίας των ελληνικών Μαθηματικών. Επειδή όμως είναι ενδεχόμενο η γλωσσική ανάλυση που ακολουθεί να ξενίσει κάποιους (μαθηματικούς κυρίως), ή να δημιουργήσει ερωτηματικά για την αναγκαιότητα της ύπαρξής της θα παραθέσουμε αντί άλλων επιχειρημάτων ένα απόσπασμα από τον Szabó (1969, 36-37):

> Η φιλολογική πλευρά όμως δεν είναι αυτοσκοπός, αλλά βοηθεί την μαθηματικήν και ιστορικήν κατανόησιν. Είμαι πράγματι πεπεισμένος ότι σπουδαία δεδομένα της αρχαίας επιστήμης δεν ημπορούν να κατανοηθούν ορθώς, όχι μόνον από ιστορικής πλευράς, αλλά και από της πλευράς του μαθηματικού των περιεχομένου, χωρίς την ακριβή φιλολογικήν ανάλυσιν…. Δια τους λόγους αυτούς επιθυμώ να τονίσω με όσον περισσοτέραν έμφασιν, ότι δεν είναι δυνατόν να ερευνηθή η ιστορία των Μαθηματικών, εάν δεν ερευνηθή συγχρόνως κατά βάθος και διεξοδικώς το γλωσσικόν ακριβώς μέρος. Δεν πρέπει να λησμονώμεν ότι η μαθηματική

σκέψις ήτο τότε στενώτατα συνδεδεμένη με την γλώσσαν. …και αι λέξεις ελαμβάνοντο –ακόμη και αυταί αι οποίαι εξελίχθησαν εις ειδικούς μαθηματικούς όρους– ως επί το πλείστον, από τη συνήθη καθημερινήν γλώσσαν ή από την γλώσσαν της Φιλοσοφίας. Δι' αυτό μόνον μέσω της γλώσσης ημπορούμεν να εννοήσωμεν την ιδιορρυθμίαν της αρχαίας μαθηματικής σκέψεως, η οποία συχνά διαφέρει αισθητώς από τον μεταγενέστερον μαθηματικόν τρόπον σκέψεως.

Ο Szabó σκιαγραφεί με απλά λόγια την πιθανή πορεία μιας λέξης πριν φτάσει να γίνει ειδικός μαθηματικός όρος των ελληνικών Μαθηματικών: ξεκινάει από την απλή καθημερινή γλώσσα ή τη γλώσσα της φιλοσοφίας, ζυμώνεται με το γενικότερο πολιτισμικό πλαίσιο και τον τρόπο σκέψης της εποχής που λειτουργεί και καταλήγει μέσα από κάποιες σημασιολογικές διαφοροποιήσεις να γίνει ειδικός μαθηματικός όρος. Ο μαθηματικός αυτός όρος όμως δεν παύει να μεταφέρει σε κάποιο βαθμό τις όποιες φιλοσοφικές ή άλλες προεκτάσεις και δεσμεύσεις του καθώς και τον τρόπο σκέψης αυτών που τον διαμόρφωσαν και τον χρησιμοποίησαν. Αν θέλουμε λοιπόν να κατανοήσουμε πλήρως τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί στα μαθηματικά κείμενα η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» θα πρέπει να αρχίσουμε από μια γλωσσική ανάλυση και διάκριση των δύο όρων της («δοθέν» και «δεδομένον») χωρίς να αποδεχθούμε ως αυτονόητη ούτε την ταύτιση τους ούτε και την ενιαία απόδοσή τους με τον όρο «γνωστό». Η αρχή της ταύτισης των δύο όρων για τη σύγχρονη εποχή βρίσκεται στις λατινικές αποδόσεις των *Δεδομένων* όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

2.2. *Δεδομένον = δοθέν = datum ;*

Ο ισχυρισμός του Μαρίνου ότι: «Ορίζουν βέβαια το δεδομένον με πολλούς τρόπους, διαφορετικά οι παλαιότεροι από τους νεώτερους μελετητές. Γι' αυτό το λόγο κατέστη δύσκολη η σωστή εξήγηση σχετικά με αυτό…» (Menge, 234, 4-6) αφορούσε το παρελθόν αλλά εμείς θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι ισχύει μέχρι τις μέρες μας. Η έλλειψη διάκρισης ανάμεσα στο «δεδομένον» και το «δοθέν» μέχρι σήμερα, αποτελεί μόνο μια άλλη όψη του ίδιου προβλήματος. Τα χωρία που θα αντιπαραβάλουμε παρακάτω προέρχονται από τη στερεότυπη έκδοση των *Δεδομένων* του Ευκλείδη στη Bibliotheca Teubneriana από τον H. Menge (1896), στην οποία περιλαμβάνεται και το υπόμνημα του Μαρίνου. Στη λατινική μετάφραση που συνοδεύει την έκδοση μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι οι όροι «δεδομένον» και «δοθέν» αποδίδονται ενιαία με τον όρο «datum».

Α) Μαρίνος: καὶ τὸ ἐν ὑποθέσει δὲ παρὰ τοῦ προβάλλοντος ἐκτιθέμενον δεδομένον εἶναί τινες ὑπειλήφασιν. λέγουσι δὲ καὶ ἄλλον τρόπον ἐν ταῖς πρώταις στοιχειώσεσι τὸ δοθὲν καὶ τὴν δοθεῖσαν, τουτέστιν ἡλίκην ἄν τις ἀφορίσῃ καὶ δῷ εὐθεῖαν. (236.1-6)

Menge: … et quidam id **datum** esse statuerunt, quod in hypothesi ab eo, qui proponit, exponitur. dicunt etiam alio modo in primis elementis punctum **datum** et rectam **datam,** hoc est quantamcumque rectam quis determinant et dat. (237.1-4)

Β) Μαρίνος: καὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν· (238.15-16)

Menge: …et **datam** rectam in **datam** proportionem secare (239.16-17)

Γ) Μαρίνος: ἔτι μὴν καὶ τὰ τοιάδε γνώριμα λέγεται, ὡς τὸ μίαν εἶναι τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἕλικος ἀπὸ τοῦ ἔξω δοθέντος σημείου ἐπὶ θάτερα μέρη. (240.3-5)

Menge: …praeterea etiam talia nota esse dicuntur, ut unam rectam esse contigentem lineam spiralem ex puncto extra **dato** ad alteram utram partem.(241.3-5)

Από τα παραπάνω χωρία διαπιστώνουμε ότι οι όροι «δεδομένον» και «δοθέν», που είναι παθητικές μετοχές διαφορετικών χρόνων του ρήματος «δίδωμι», συγκεκριμένα παρακειμένου και αορίστου αντίστοιχα, αποδίδονται από τον Menge ενιαία ως «datum». O Menge κάνει το ίδιο και στην απόδοση των *Δεδομένων* του Ευκλείδη:

Α) Ευκλείδης: Δεδομένα τῷ μεγέθει λέγεται χωρία τε καὶ γραμμαὶ καὶ γωνίαι, οἷς δυνάμεθα ἴσα πορίσασθαι. (2, 2-3)

Menge: **Data** magnitudine dicuntur et spatia et lineae et anguli, quibus aequalia comparare possumus. (3, 2-3)

Β) Ευκλείδης: Μέγεθος μεγέθους δοθέντι μεῖζόν ἐστιν, ὅταν, ἀφαιρεθέντος τοῦ δοθέντος, τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἴσον ᾖ. (4, 3-5)

Menge: Magnitudo magnitudine maior est **data**, ubi, ablata **data**, quae reliquitur, eidem aequalis est. (5, 3-4)

Γ) Ευκλείδης: κείσθω γὰρ <u>δεδομένον</u> μέγεθος τὸ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ <u>δοθεὶς</u> ὁ τοῦ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΓ… (10, 9-10)

Menge: nam ponatur **<u>data</u>** magnitudo ΔΖ. et quoniam ratio ΒΑ:ΑΓ **<u>data</u>** est…(11, 9-10)

Η ενιαία αυτή απόδοση του «δοθέντος» και του «δεδομένου» στα λατινικά, όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, γραμματικά θα μπορούσε να εξηγηθεί εν μέρει από το γεγονός ότι στη λατινική γλώσσα ο χρόνος που αντιστοιχεί σε πράξη που συνέβη στο παρελθόν είναι ο Perfectum (με σημασία αορίστου ή ενεστώτα ανάλογα με τα συμφραζόμενα) ενώ για την παθητική φωνή υπάρχει μια μετοχή στον παρακείμενο (εδώ «datum»). Η αντιπαραβολή όμως των αρχαίων ελληνικών κειμένων που περιλαμβάνουν την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» και της λατινικής απόδοσής τους (όπως στη συνέχεια και της αγγλικής απόδοσής τους με το «given» και της γερμανικής με το «gegeben») εγείρει ένα σοβαρό ιστοριογραφικό ερώτημα.

2.2.1. Το ιστοριογραφικό ερώτημα

Το ιστοριογραφικό ερώτημα που εγείρεται από τα παραπάνω είναι το ακόλουθο: Η χρήση διαφορετικών χρόνων στα πρωτότυπα κείμενα, υποδηλώνει άραγε διαφοροποίηση στον τρόπο που αντιλαμβάνεται τη λειτουργία των όρων «δεδομένον» και «δοθέν» ο συγγραφέας; Στην περίπτωση που η απάντηση είναι καταφατική, τότε η χωρίς διάκριση απόδοσή τους στα λατινικά ή σε οποιαδήποτε σύγχρονη γλώσσα, αν δεν προκαλεί σύγχυση στον αναγνώστη τουλάχιστον δεν του επιτρέπει την ορθή και πλήρη κατανόηση των λεγομένων του Μαρίνου και των διαφόρων μαθηματικών κειμένων που περιλαμβάνουν τους δύο όρους.

Επιπλέον τίθενται τα εξής ερωτήματα: Ποιο είναι το μαθηματικό περιεχόμενο αυτής της διαφοροποίησης για τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς; Η διάκριση αυτή σε ποιο βαθμό θα βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση των ελληνικών μαθηματικών κειμένων που περιλαμβάνουν τους δύο όρους και ειδικότερα στην κατανόηση των *Δεδομένων* του Ευκλείδη; Τα δύο τελευταία ερωτήματα θα τα απαντήσουμε σε επόμενα κεφάλαια της διατριβής μας. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με τη γλωσσική διάκριση των δύο όρων.

2.3. *Γλωσσική ανάλυση των όρων «δοθέν» και «δεδομένον»*

Το πεδίο από το οποίο θα πρέπει να ξεκινήσει η έρευνα για την απάντηση του ιστοριογραφικού ερωτήματος που θέσαμε είναι η αρχαία ελληνική γραμματική και το συντακτικό. Οι όροι «δοθέν» και «δεδομένον» προέρχονται από το ρήμα της αρχαίας ελληνικής «δίδωμι». Οι χρόνοι του ρήματος είναι: μελ. δώσω, αόρ.α΄ έδωκα, αόρ. β΄ έδων, πρκ. δέδωκα—Παθητική, μελ. δοθήσομαι, αόρ. εδόθην, πρκ. δέδομαι. (Σταματάκος, 1949, 270) Το «δεδομένον» είναι μετοχή παθητικού παρακειμένου ενώ το «δοθέν» είναι μετοχή παθητικού αορίστου του ρήματος «δίδωμι».

Παρακάτω θα επιχειρήσουμε τη γλωσσική ανάλυση των όρων «δοθέν» και «δεδομένον» σε δύο επίπεδα: στο επίπεδο των χρόνων και της έγκλισης και στο επίπεδο της παθητικής φωνής. Η ανάλυση αυτή θα στηριχθεί κυρίως σε αποσπάσματα από τα έργα: *Συντακτικόν της Αρχαίας Ελληνικής Γλώσσης* του J. Humbert (1957), *Ιστορική Γραμματική της Αρχαίας Ελληνικής* του Ι. Σταματάκου (1949), *Η Σύνταξη της Αρχαίας Ελληνικής Γλώσσας* του E. Schwyzer (2002) και το *Ιστορικό Συντακτικόν της Αρχαίας Ελληνικής* του Π. Λορεντζάτου (1989).

2.3.1. Πρώτο επίπεδο γλωσσικής ανάλυσης: Χρόνοι, εγκλίσεις και «ποιόν ενεργείας»

Η έρευνά μας για τους χρόνους των ρημάτων στα αρχαία Ελληνικά απέδωσε αρκετά ενδιαφέροντα στοιχεία. Πριν περάσουμε στην αναλυτικότερη παρουσίασή τους θα τα αναφέρουμε εδώ συνοπτικά:

α) Οι χρόνοι της Οριστικής στα αρχαία ελληνικά δηλώνουν δύο πράγματα: τον χρόνο και το «ποιόν ενεργείας». Ο χρόνος ή χρονικό σημείο, εκφράζει το *πότε* γίνεται αυτό που σημαίνει το ρήμα (παρόν - παρελθόν - μέλλον). Το «ποιόν ενεργείας» ή χρονικό ποιόν ή τρόπος, εκφράζει τον *τρόπο* με τον οποίο παρουσιάζεται αυτό που σημαίνει το ρήμα, δηλαδή το *πώς* γίνεται η πράξη. Με άλλα λόγια οι χρόνοι στην Οριστική εκφράζουν το πότε και το πώς γίνεται κάτι.

β) Οι χρόνοι στις υπόλοιπες εγκλίσεις όπως και στο απαρέμφατο και τη μετοχή, δηλώνουν κατά κύριο λόγο το «ποιόν ενεργείας» ενώ η ένδειξη του χρόνου, όταν υπάρχει, είναι δευτερεύουσα. Δηλαδή οι χρόνοι στη μετοχή που μας ενδιαφέρει ειδικότερα εκφράζουν κυρίως τον τρόπο που γίνεται αυτό που σημαίνει το ρήμα.

γ) Το «ποιόν ενεργείας», δηλαδή ο τρόπος που γίνεται αυτό που σημαίνει το ρήμα, θεωρείται όχι από αντικειμενικής απόψεως αλλά από απόψεως υποκειμενικής.

Με άλλα λόγια εκφράζει την άποψη-θεώρηση του συγγραφέα για την πράξη που παρουσιάζει, όταν πρόκειται για γραπτά κείμενα.

Τα στοιχεία αυτά μπορούν να στηρίξουν τη θέση μας ότι οι δύο όροι, «δοθέν» ως παθητική μετοχή αορίστου και «δεδομένον» ως παθητική μετοχή παρακειμένου, δεν εναλλάσσονται τυχαία στα ελληνικά κείμενα που αφορούν τα μαθηματικά, αλλά αντίθετα φανερώνουν την άποψη του συγγραφέα για τον χαρακτήρα της πράξης στην οποία αναφέρεται κάθε φορά.

Αναλυτικότερα σε σχέση με το τι φανερώνουν οι χρόνοι των ρημάτων στα αρχαία ελληνικά[1], καταρχήν στην οριστική, έχει μεγάλη αξία να κατανοήσουμε το γεγονός ότι φανερώνουν δύο στοιχεία: το «χρονικό σημείο» και το «ποιόν ενεργείας» ή «ποιόν της δράσεως» όπως αναφέρονται στις διάφορες γραμματικές. Η εντύπωση που είχαμε μέχρι τώρα ήταν ότι οι χρόνοι του ρήματος δηλώνουν απλά τη χρονική τοποθέτηση της πράξης που φανερώνει το ρήμα. Η αναζήτησή μας όμως σε διάφορες ιστορικές γραμματικές και συντακτικά της αρχαίας ελληνικής μάς αποκάλυψε ότι οι χρόνοι στα αρχαία ελληνικά κυρίως δηλώνουν το είδος και τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η πράξη που σημαίνει το ρήμα. Είναι χαρακτηριστική η τοποθέτηση του Ι. Σταματάκου (1949, 234) για αυτό το θέμα στο έργο του *Ιστορική Γραμματική της Αρχαίας Ελληνικής*:

> οι καλούμενοι *χρόνοι* αρχήθεν εχρησιμοποιήθησαν ουχί δια να δηλώσουν το *χρονικόν σημείον* (το παρόν δηλ. ή το παρελθόν, ή το μέλλον), αλλά μάλλον το *ποιόν της δράσεως,* τ.έ. το είδος και τον τρόπον καθ’ όν λαμβάνει χώραν η υπό του ρήματος σημαινομένη ενέργεια (ήτοι: το διαρκές, στιγμιαίον, τετελεσμένον).

Αναφέρει δηλαδή, ότι οι χρόνοι χρησιμοποιήθηκαν περισσότερο για να δηλώσουν το είδος και την ποιότητα της πράξης που φανερώνει το ρήμα και λιγότερο για να δηλώσουν τη χρονική τοποθέτησή της.

Στην ίδια κατεύθυνση ο Humbert (1957, 126) αναφέρει:

> §226. Τα «χρονικά» θέματα παρά το όνομά των, εκφράζουν κατ’ ουσίαν όχι τον χρόνον αλλά το ποιόν ενεργείας και θεωρούν την ρηματικήν ενέργειαν από απόψεως υποκειμενικής και όχι αντικειμενικής.

---

[1] Αλλά και στα νέα ελληνικά όπως αναφέρει ο Α.Β. Μουμτζάκης στο Συντακτικό της Αρχαίας Ελληνικής (2000, 71) που διδάσκεται στα Λύκεια.

Συμφωνεί δηλαδή και αυτός ότι οι χρόνοι στα αρχαία ελληνικά εκφράζουν στην ουσία όχι τη χρονική στιγμή αλλά την ποιότητα –τον χαρακτήρα της ενέργειας. Συμπληρώνει επίσης κάτι πολύ σημαντικό: ότι αυτή η ενέργεια θεωρείται από απόψεως υποκειμενικής και όχι αντικειμενικής. Με άλλα λόγια ο γραμματικός χρόνος στον οποίο παρουσιάζεται το ρήμα φανερώνει την άποψη του γράφοντος ή του λέγοντος για την ποιότητα της πράξης. Χαρακτηριστικά αναφέρει επίσης παρακάτω ο Humbert:

> § 227. Αι γραμματικαί μάς έχουν συνηθίσει να διαιρώμεν νοερώς την διάρκειαν εις τρεις ζώνας : *παρελθόν, παρόν, μέλλον*. … Η ελληνική, γλώσσα λαού με διαισθητικάς ικανότητας, δεν εμερίμνησε ποτέ να εκφράσει τας αφηρημένας αυτάς σχέσεις. Επιδιώκει αντιθέτως να παρουσιασθούν αι ιδιότητες της πράξεως εν τω γίγνεσθαι και εν αναφορά προς εκείνον, ο οποίος ενεργεί. Η ελληνική είναι ευαίσθητος εις το ποιόν ενεργείας, διότι τούτο είναι *συγκεκριμένον* και *υποκειμενικόν*.

Αναγνωρίζει δηλαδή ότι οι περισσότερες σύγχρονες γραμματικές μας οδηγούν στο χωρισμό του χρόνου σε παρελθόν, παρόν και μέλλον. Η αρχαία ελληνική όμως με τους χρόνους δεν είχε ως στόχο, όπως δηλώνει ο Humbert, να παρουσιάσει αυτόν το χωρισμό του χρόνου αλλά τις ιδιότητες και την ποιότητα ή αλλιώς το χαρακτήρα της πράξης.

Με αυτή την έννοια του «ποιού ενεργείας» (Aktionsart ή Zeitart στα γερμανικά και aspect verbal στα αγγλικά), που ο Humbert χαρακτηρίζει «θεμελιώδη» για την ελληνική γλώσσα, θα ασχοληθούμε περισσότερο στη συνέχεια. Είδαμε προηγουμένως ότι ο Ι. Σταματάκος την ονομάζει αντίστοιχα «ποιόν της δράσεως» και αναφέρει ότι αυτό μπορεί να χαρακτηρίζεται ως: «διαρκές, στιγμιαίον, τετελεσμένον». Ο Humbert αντίστοιχα αναφέρει ότι μια πράξη μπορεί να θεωρηθεί κατά την ανάπτυξή της (διαρκής), ή ως συγκεντρωμένη σε ένα σημείο (στιγμιαία), ή ως ενέργεια που τείνει προς ένα σκοπό (προσδιορισμένη) ή αντίθετα χωρίς αντικείμενο (απροσδιόριστη), ή ως προσπάθεια προορισμένη σε αποτυχία (ατελής), ή ως εκφράζουσα αποτέλεσμα ή οριστική κατάσταση. Παραδειγματικά αναφέρει ότι στα αρχαία αγγεία βλέπουμε τις επιγραφές «*εποίει*» (παρατατικός) ή «*εποίησε*» (αόριστος), ανάλογα αν ο καλλιτέχνης βλέπει τον εαυτό του ως δρώντα ή απλώς ως τον δημιουργό του έργου. Αντίθετα στις αφιερώσεις δεν εμφανίζεται παρά μόνο ο αόριστος «*ανέστησε*» γιατί περιγράφεται απλά η στιγμιαία πράξη της αφιέρωσης. Επίσης στη φράση: «*Σωκράτης γενναίως απέθανε*» οι λεπτομέρειες του θανάτου δεν ενδιαφέρουν, το ρήμα είναι στον αόριστο και φανερώνει στιγμιαίο ποιόν ενέργειας. Αντίθετα σε μια αφήγηση του γεγονότος που ενδιαφέρει ο τρόπος και ίσως η διάρκεια της μετάβασης το ρήμα είναι στον παρακείμενο: «*Σωκράτης τοιώδε τω τρόπω ... τέθνηκε*». Προφανώς οι αντικειμενικές συνθήκες του θανάτου του φιλοσόφου, δεν μεταβλήθηκαν εξαιτίας του τρόπου με τον οποίο εμφανίζεται στη μία ή την άλλη πρόταση η άποψη του συγγραφέα. Το σημαντικό που αναδεικνύεται μέχρι εδώ και ενδιαφέρει άμεσα τη διατριβή μας, είναι το γεγονός ότι στα αρχαία ελληνικά η διαφορετική οπτική γωνία με την οποία αντιλαμβάνεται μια πράξη ένας συγγραφέας και οι τυχόν διαφορετικές σημασιολογικές αποχρώσεις που θέλει να της προσδώσει, αποδίδονται από αυτόν με τους διαφορετικούς χρόνους της γραμματικής που χρησιμοποιεί.

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε στο τι δηλώνουν γενικά οι χρόνοι των αρχαίων ελληνικών στην Οριστική. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός, όπως αναφέρουν οι διάφορες γραμματικές, ότι οι χρόνοι στις άλλες εγκλίσεις και στο απαρέμφατο και στη μετοχή εκφράζουν σχεδόν αποκλειστικά το «ποιόν ενεργείας» ενώ η ένδειξη του χρόνου αν υπάρχει είναι δευτερεύουσα. Ο Ι. Σταματάκος (1949, 234) συγκεκριμένα αναφέρει: «Και οι μεν τύποι των άλλων εγκλίσεων δηλούν μόνον το ποιόν τούτο της ενεργείας, οι δε της Οριστικής αναφέρονται συγχρόνως και εις το χρονικόν σημείον της ενεργείας.» Ο Humbert (1957, 127) είναι ακόμη πιο κατηγορηματικός για το τι φανερώνουν οι χρόνοι στις άλλες εγκλίσεις: «*Εκείνο, το οποίον εκφράζουν τα λεγόμενα χρονικά θέματα, είναι το ποιόν ενεργείας.* Ώστε κατ' αρχήν δεν δυνάμεθα να ομιλώμεν περί χρόνων εν κυριολεξία ειμή μόνον εις την οριστικήν. Η διάκρισις αύτη ενέπνευσε το σχέδιον, το οποίον θα ακολουθήσωμεν ενταύθα: θα πραγματευθώμεν τους χρόνους εις την οριστικήν –έγκλισις εις την οποίαν χρόνος και ποιόν ενεργείας είναι στενώς ηνωμένα– δια να έλθωμεν εν συνεχεία εις τας άλλας εγκλίσεις (υποτακτικήν, ευκτικήν, απαρέμφατον και μετοχήν), εις τας οποίας η ένδειξις του χρόνου, όταν υφίσταται, δεν είναι παρά δευτερεύουσα.» Με άλλα λόγια, οι χρόνοι στη μετοχή που μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα, γιατί σε αυτή εμφανίζονται οι όροι «δοθέν» και «δεδομένον», δηλώνουν κυρίως το ποιόν της ενεργείας ή δράσεως που είναι ο υποκειμενικός τρόπος με τον οποίο κάποιος αντιλαμβάνεται και παρουσιάζει την πράξη και μόνο δευτερευόντως το σημείο του χρόνου που αφορά η πράξη.

Η διαφορετικότητα στην ποιότητα της ενέργειας που φανερώνουν οι χρόνοι στους οποίους εμφανίζονται οι όροι «δοθέν» και «δεδομένον», θα είναι το κεντρικό στοιχείο στην ανάλυσής μας στη συνέχεια. Θα ασχοληθούμε ειδικότερα με το «ποιόν ενεργείας» του αορίστου και του παρακειμένου, χρόνων στους οποίους βρίσκονται το «δοθέν» και το «δεδομένον» αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα η έρευνά μας έδειξε ότι ενώ ο αόριστος εκφράζει είσοδο σε μια νέα κατάσταση, στιγμιαία, απότομα και χωρίς διάρκεια, ο παρακείμενος «οδηγεί» το αντικείμενο στην παρούσα κατάσταση τείνοντας να αποδώσει περισσότερη σπουδαιότητα στην προηγηθείσα πράξη της οποίας οι συνέπειες επηρεάζουν την παρούσα κατάσταση. Επίσης, ο τελευταίος αν και αναφέρεται στο παρελθόν, μετέχει σε μεγάλο βαθμό του παρόντος, προσθέτοντάς του την εννοιολογική απόχρωση του οριστικού.

Ο Ι. Σταματάκος (1949, 235), αναφέρει σχετικά με την ποιότητα της ενέργειας που εκφράζει ο αόριστος: «***ο αόριστος*** (*έφαγον* π.χ.) εκφράζει τι ως γενόμενον εν μια χρόνου στιγμή (και μάλιστα αναφέρεται ειδικώς άλλοτε εις την αρχήν της πράξεως και άλλοτε εις το τέρμα της· δηλοί τ.έ. ***το στιγμιαίον:*** *επυροβόλησα – τον ετραυμάτισα*). Είναι δια τούτο ο αόριστος ο κατ' εξοχήν χρόνος της αφηγήσεως: perfectum historicum της Λατινικής.» Αντίστοιχα ο Humbert (1957, 135-136) σημειώνει για την ποιότητα της ενέργειας που εκφράζει ο αόριστος: «…ο αόριστος είναι τι το *απηλλαγμένον υποκειμενικών εννοιών διάρκειας* ή *συντελικότητος*, εννοιών, ας εκφράζουν ο ενεστώς και ο παρακείμενος... Εις τον αόριστον η ρηματική έννοια εστερημένη πάσης διαρκείας τείνει να περιορισθή εις *εν σημείον* (*στιγμιαίον* ποιόν ενεργείας). Υπό τοιούτους όρους υποτεθείσθω ότι κατάστασιν, …διαδέχεται *νέα κατάστασις*. Το γεγονός της *εισόδου εις την νέαν κατάστασιν πραγμάτων* δεν δύναται τότε να εκφρασθή ει μη δι' αορίστου.» Συμφωνούν δηλαδή και οι δύο ότι ο αόριστος έχει στιγμιαίο ποιόν ενεργείας. Με άλλα λόγια εκφράζει είσοδο σε μια νέα κατάσταση, κάτι που γίνεται σε μια χρονική στιγμή, απότομα, χωρίς διάρκεια.

Για τη σημασία του παρακειμένου και την ποιότητα της ενέργειας που αυτός ο χρόνος εκφράζει, ο Ι. Σταματάκος (1949, 252-253) αναφέρει: «Ο παρακείμενος χρησιμοποιείται εν τη Ελληνική μόνον όταν πρόκειται να δηλωθή πράξις, η οποία συνέβη κάποτε εις το παρελθόν, το αποτέλεσμά της όμως εξακολουθεί να υφίσταται και εις το παρόν: *ούτω πεπαίδευκα τον υιόν* = τοιουτοτρόπως εμόρφωσα τον υιόν μου (εις το παρελθόν) και ο υιός μου εξακολουθεί βέβαια και εις το παρόν να έχει την μόρφωσιν αυτήν (συνυποδηλοί δ' ακόμη ότι: ετελείωσα, συνεπλήρωσα, την μόρφωσιν του υιού μου) – *Αλέξανδρος ίδρυκεν Αλεξάνδρειαν* = την ίδρυσε τότε και εξακολουθεί υφιστάμενη αύτη και σήμερον.» Δηλαδή ο παρακείμενος, σε αντίθεση με τον αόριστο που εκφράζει κάτι το στιγμιαίο, φανερώνει διάρκεια μέσω του αποτελέσματος της πράξης, η οποία μπορεί να συνέβη στο παρελθόν, συνεχίζει όμως να επηρεάζει το παρόν. Και χρησιμοποιείται μόνο όταν πρόκειται να δηλώσει αυτή τη συμμετοχή στο παρόν. Με άλλα λόγια ο παρακείμενος στα αρχαία ελληνικά μετέχει στο παρόν, παρόλο που είναι χρόνος που αναφέρεται στο παρελθόν. Κάτι που δεν ισχύει γενικά για τον παρακείμενο στα λατινικά, ο οποίος αντιστοιχεί πολλές φορές με τον αόριστο και το στιγμιαίο «ποιόν ενεργείας», όπως παρατηρεί ο Ι. Σταματάκος (1949, 252-253): «Ο παρακείμενος της Ελληνικής είναι πολύ σπανιώτερος της Λατινικής· *educavi* π.χ. αντιστοιχεί ως επί το πλείστον προς τον αόρ. *επαίδευσα* (διό και λέγεται *perfectum historicum*) και ουχί προς τον παρακ. *πεπαίδευκα*...». Το γεγονός ότι ο παρακείμενος στα λατινικά αντιμετωπίζεται ως ιστορικός χρόνος δηλαδή ως χρόνος της αφήγησης και αντιστοιχεί ως επί το πλείστον με τον αόριστο, μπορεί να εξηγήσει ίσως σε κάποιο βαθμό την έλλειψη διαφοροποίησης στην απόδοση του «δοθέντος» και του «δεδομένου» τόσο στη λατινική απόδοση των *Δεδομένων* του Ευκλείδη από τον Menge όσο και στις πιο σύγχρονες μεταφράσεις του έργου στις γλώσσες που προέρχονται από τα λατινικά.

Την σημασία του παρακειμένου της αρχαίας ελληνικής ως χρόνου που μετέχει του παρόντος, παρουσιάζει μόνο κάποιες φορές ο παρακείμενος της λατινικής σε αντίθεση με αυτόν της ελληνικής που την παρουσιάζει πάντα τουλάχιστον μέχρι κάποια χρονική περίοδο, όπως αναφέρει ο Ι. Σταματάκος (1949, 252-253): «Τοιαύτην έννοιαν έχει και εν τη Λατινική ενίοτε ο παρακείμενος (*perfectum presens*)*: novi = έμαθον, εγνώρισα* (και εξακολουθώ να γνωρίζω και τώρα). Πάντες οι παρακείμενοι της κλασσικής Ελληνικής είναι *perfecta presentia* λόγω της σημασίας των, και είναι άρα *αρχικοί* (και ουχί *ιστορικοί*) χρόνοι. Μόνον εν μεταγενεστέρα περιόδω (από του 2ου π.Χ. αι. περίπου) εχρησιμοποιήθη ο παρακείμενος της Ελληνικής εν τη εννοία του perfectum historicum της Λατινικής (ως χρόνος δηλ. αφηγήσεως).» Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι ο παρακείμενος στα αρχαία ελληνικά τουλάχιστον τη χρονική περίοδο που μας ενδιαφέρει δεν χρησιμοποιείται με την έννοια του αορίστου αλλά αντίθετα διαφοροποιείται έντονα από αυτόν ως προς το «ποιόν ενεργείας» που εκφράζει.

Ανάλογες είναι και οι θέσεις που διατυπώνει για τον παρακείμενο και το τι είδους ενέργεια εκφράζει ο Humbert (1957, 141) διακρίνοντας ιστορικά δύο τύπους του, τον αρχαιότερο και τον νεώτερο όπως αναφέρει: «…υπό τον πλέον αρχαίον αυτού τύπον ο παρακείμενος ορίζεται από απόψεως *ποιού ενεργείας* ως εκφράζων κατάστασιν και από απόψεως *χρόνου* ως κείμενος αν μη εν τω *παρόντι* τουλάχιστον εν τω ενεργώ: Απολλώνιος ο Δύσκολος απεκάλει τούτον δικαίως συντέλειαν ενεστώσαν.[2]» Δηλαδή ο αρχαιότερος τύπος του παρακειμένου που χρονικά φτάνει μέχρι τον Όμηρο εκφράζει την οριστικότητα της κατάστασης. Χρονικά, είναι άμεσα συνδεδεμένος με το παρών στο οποίο αν δεν βρίσκεται τουλάχιστον φανερώνει ότι είναι ενεργός. Ο νεώτερος τύπος που σύμφωνα με τον Humbert ονομάζεται μεταβατικός ή αποτελεσματικός παρακείμενος και αναπτύσσεται ταχύτατα από την εποχή του Πλάτωνα μέχρι την εποχή του Δημοσθένη, «*άγει το αντικείμενον εις την παρούσαν κατάστασιν*» και έχει «την τάσιν να αποδώσει περισσοτέραν σπουδαιότητα *εις την προηγηθήσαν ενέργειαν, η οποία κατέληξεν εις την παρούσαν κατάστασιν…ενέργειαν την παράγουσαν διαρκές αποτέλεσμα.*» Και συμπληρώνει: «Κατά την διατύπωσιν του Chantraine[3] ‘η πράξις εκτείνεται εν τω παρόντι, αλλ’ η αφετηρία της κείται εν τω παρελθόντι, *μόνον δε δια του παρωχημένου πρέπει να αποδίδηται*’». Δηλαδή ο παρακείμενος «οδηγεί» το αντικείμενο στην παρούσα κατάσταση τείνοντας να αποδώσει περισσότερη σπουδαιότητα στην προηγηθείσα πράξη, οι συνέπειες της οποίας επηρεάζουν την παρούσα κατάσταση. Προκειμένου να γίνει περισσότερο κατανοητή η θέση του Humbert για τον παρακείμενο θα χρησιμοποιήσουμε ένα απλό παράδειγμα. Η σωστή ερώτηση που πρέπει να απευθύνουμε σε ένα μαθητή που εξετάζουμε στον πίνακα είναι: «Έχεις διαβάσει;» και όχι «Διάβασες;». Γιατί η ενέργεια του διαβάσματος που έκανε την προηγουμένη, είναι η πράξη που συνεχίζει να επηρεάζει το σήμερα και θα έχει ως αποτέλεσμα να πει ή όχι μάθημα σήμερα. Δηλαδή μετέχει – υπάρχει, με αυτόν τον τρόπο, η χθεσινή του ενέργεια στο παρόν και είναι σημαντική. Κάτι σημαντικό τέλος που ο Humbert (1957, 142) δηλώνει για τον αποτελεσματικό παρακείμενο είναι ότι αυτός ακριβώς ο τύπος παρακειμένου που αντιτίθεται προς τον αόριστο και δεν μπορεί να εναλλάσσεται με αυτόν: «Ο αποτελεσματικός παρακείμενος κείται ακόμη εν ευρεί μέτρω εν τω *παρόντι* προσθέτων εις αυτό την εννοιολογική απόχρωσιν *οριστικού*, αύτη δι’ ιδιαιτέρως είναι η περίπτωσις, καθ’ ην ο παρακείμενος αντιτίθεται προς αόριστον. …Εν πάση περιπτώσει, τουλάχιστον εν τη αττική, ει και η διάκρισις μεταξύ παρακειμένου και αορίστου είναι λεπτή και εξαρ-

[2] Αρχαίος Γραμματικός Απολλώνιος ο Δύσκολος, από ηλεκτρονική βιβλιοθήκη TLG, De Constructione, 2.2.287.5-2.2.288.1: «…πειθόμεθα ὅτι οὐ παρῳχημένου συντέλειαν σημαίνει ὁ παρακείμενος, τήν γε μὴν ἐνε στῶσαν…»

[3] Chantraine. P. *Histoire du parfait grec*, Paris, 1926, σ. 19.

τάται πολλάκις περισσότερον εκ του ύφους παρά εκ της γραμματικής, ο παρακείμενος δεν δύναται να εναλλάσσηται προς τον αόριστον.» Είναι φανερό πιστεύουμε από όσα προηγήθηκαν ότι οι δύο χρόνοι στα αρχαία ελληνικά εκφράζουν διαφορετική ποιότητα πράξης σύμφωνα με την υποκειμενική άποψη του συγγραφέα και δεν εναλλάσσονται τυχαία. Γεγονός που εμείς σήμερα φαίνεται να έχουμε ξεχάσει αποδίδοντας με τον ίδιο τρόπο τη μετοχή παρακειμένου «δεδομένον» και τη μετοχή αορίστου «δοθέν». Κλείνοντας την αναφορά μας στους χρόνους και το πώς χρησιμοποιούνται στα αρχαία ελληνικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι όροι «δεδομένον» και «δοθέν» δεν θα πρέπει να εναλλάσσονται τυχαία στα κείμενα των ελληνικών όπως είναι αυτά του Ευκλείδη ή του Μαρίνου. Καθένας τους προσδίδει διαφορετική ποιότητα ενέργειας στις προτάσεις που περιλαμβάνεται και εκφράζει διαφορετικό τρόπο «δοσίματος» για τα αντικείμενα που αφορά. Το ποιος ακριβώς είναι αυτός ο τρόπος για τον καθένα από τους δύο όρους θα το αναλύσουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

2.3.2. Δεύτερο επίπεδο γλωσσικής ανάλυσης: Παθητική φωνή και ποιητικό αίτιο

Το δεύτερο επίπεδο της γλωσσικής ανάλυσης μας για τους όρους «δοθέν» και «δεδομένον» είναι αυτό της Παθητικής φωνής στην οποία οι δύο όροι εμφανίζονται. Η εμφάνιση των δύο όρων στην Παθητική φωνή θα πρέπει να γίνει κατανοητή σε συνδυασμό με τη γενικευμένη χρήση παθητικής προστακτικής συντελεσμένου χρόνου στις κατασκευές της ελληνικής γεωμετρίας και με τη δυνατότητα που παρέχει η παθητική σύνταξη να μην δηλώνεται το ποιητικό αίτιο της πράξης κάτι που έχει ως συνέπεια τον τονισμό της πράξης.

Στη γενικευμένη χρήση της Παθητικής προστακτικής και την εμφάνιση των όρων και των εκφράσεων των κατασκευών της ελληνικής γεωμετρίας στην Παθητική φωνή αναφέρεται με χαρακτηριστικό τρόπο ο Heath (1926, I, 242) σχολιάζοντας στην απόδειξη της πρώτης πρότασης του πρώτου προβλήματος του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη την έκφραση: Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ. … κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ…, . Συγκεκριμένα γράφει:

> **Έστω ότι η ΑΒ είναι η δοθείσα πεπερασμένη ευθεία γραμμή. (Let AB be the given finite straight line.)** Για να ακριβολογήσουμε θα έπρεπε να την μεταφράσουμε με την αντίστροφη σειρά «έστω ότι η δοθείσα ευθεία γραμμή είναι η (ευ-

θεία γραμμή) ΑΒ»· … **έστω ότι ο κύκλος ΒΓΔ περιγράφεται (let the circle BCD be described).** Δύο πράγματα θα πρέπει να σημειωθούν εδώ, (1) η κομψή και πρακτικά καθολική χρήση της παθητικής προστακτικής συντελεσμένου χρόνου (perfect passive imperative) στις κατασκευές, γεγράφθω σημαίνει βεβαίως «έστω ότι έχει περιγραφεί» ή «υποθέστε τον περιγραμμένο», (2) η αδυναμία να εκφραστεί σύντομα σε μια μετάφραση η δύναμη των λέξεων στην αυθεντική σειρά τους.

Διακρίνει δηλαδή ο Heath, τον κομψό και πρακτικά καθολικό τρόπο χρήσης της παθητικής προστακτικής συντελεσμένου χρόνου στις κατασκευές και παράλληλα αναγνωρίζει ότι αδυνατεί να εκφράσει με τη μετάφρασή του τη δύναμη των λέξεων στο πρωτότυπο με τη σειρά που εμφανίζονται δηλαδή τη σύνταξή τους. Αντιλαμβάνεται με άλλα λόγια ότι οι κατασκευές στα προβλήματα της ελληνικής γεωμετρίας γίνονται με έναν ιδιαίτερο τρόπο που φανερώνεται μέσα από τη σειρά και τη χρονική τοποθέτηση των όρων που συντάσσονται για να τον αποδώσουν, για την οικονομία της μετάφρασης όμως επιλέγει να προχωρήσει στην απόδοση τους με άλλο τρόπο που βοηθάει τη σύνταξη στη σύγχρονη γλώσσα αλλά πιθανότατα δεν αποδίδει τον ιδιαίτερο τρόπο με τον οποίο ο αρχαίος συγγραφέας παρουσιάζει τις όποιες πράξεις ή σκέψεις του. Οι περισσότεροι σύγχρονοι μελετητές όμως, που θα δεχτούν αυτή τη μετάφραση και δεν θα γυρίσουν στο πρωτότυπο κείμενο, θα θεωρήσουν ότι αυτός ο τρόπος έκφρασης φανερώνει τον τρόπο με τον οποίο ο συγγραφέας γράφει και είναι πιθανό να οδηγηθούν σε λάθος συμπεράσματα. Είναι απαραίτητη επομένως η μελέτη της σύνταξης των όρων στο πρωτότυπο προκειμένου να κατανοήσουμε τον πραγματικό τρόπο γραφής και ίσως σκέψης του συγγραφέα.

Ο Taisbak (2003, 28-29) επίσης, στην προσπάθειά του να αποδώσει τον τρόπο με τον οποίο άγονται γραμμές, δίδονται σημεία, γράφονται κύκλοι και γενικά θεωρούνται γεωμετρικά αντικείμενα στην ελληνική γεωμετρία (κείσθω ή δεδόσθω σημείον, επεζεύχθω ευθεία, κύκλος γεγράφθω), κάτω από τη λεκτική μάσκα της παθητικής προστακτικής συντελεσμένου χρόνου εισάγει την *Χείρα Βοηθείας* (*Helping Hand*) όπως την ονομάζει. Δηλώνει για αυτήν:

> *Η Χείρα Βοηθείας* είναι πάντα εκεί, πρώτα για να διαπιστώσει ότι τα πράγματα γίνονται, και για να γλιτώσει το εγχείρημα από τη μόλυνση των θνητών δακτύλων μας. Παρόλα αυτά δεν ενέχει μαγεία· η *Χείρα Βοηθείας* μπορεί να κάνει μόνο ό,τι

> βασίζεται σε αξιώματα ή προτάσεις. … Η κύρια σημασία της και το ενδιαφέρον της είναι να *σε* κρατήσει έξω από τις δραστηριότητες. Η ελληνική γεωμετρία δεν αφορά «το τι μπορείς να κάνεις» αλλά « το τι μπορεί να γίνει». (Taisbak, 2003, 28-29)

Αναγνωρίζει δηλαδή ο Taisbak την *Χείρα Βοηθείας* ως το ποιητικό αίτιο αυτών των πράξεων (στις οποίες συμπεριλαμβάνει και τον τρόπο που εμφανίζονται το «δοθέν» και το «δεδομένον») που ενώ δεν παρουσιάζει τίποτε μαγικό όπως ο από μηχανής Θεός, έχει ως στόχο, όπως αναφέρει, να κρατήσει τον γεωμέτρη έξω από αυτές. Δεν δίνει βέβαια κάποια σαφή εξήγηση γιατί γίνεται αυτό αλλά από τα συμφραζόμενα για μιάσματα και θνητά χέρια του γεωμέτρη που αναφέρει, είναι εύκολο να κατανοήσει κανείς ότι υπονοεί την Πυθαγόρεια–Πλατωνική καταγωγή αυτών των εκφράσεων, κάτι που αποτελεί μια πιθανή εξήγηση. Σημειώνει τέλος χαρακτηριστικά ότι η ελληνική γεωμετρία δεν αφορά το τι μπορείς να κάνεις αλλά το τι μπορεί να γίνει.

Αυτή ακριβώς η αίσθηση για το τι και ποιόν αφορά η δεν αφορά η ελληνική γεωμετρία, μπορεί να προκύψει όχι ως απλή αίσθηση πλέον αλλά με τη βοήθεια της γλωσσικής ανάλυσης και πιο συγκεκριμένα του τρόπου με τον οποίο λειτουργεί η Παθητική φωνή και γενικότερα η παθητική σύνταξη στα αρχαία ελληνικά. Συγκεκριμένα το παθητικό δεν είναι όπως συνηθίζουμε να πιστεύουμε απλώς το αντίστροφο του ενεργητικού. Μπορεί να έχει ανεξάρτητη λειτουργία όταν δεν οφείλει να εκφράσει το ποιητικό αίτιο της πράξης. Ενώ στην ενεργητική σύνταξη δίνουμε έμφαση μάλλον στο υποκείμενο, στην παθητική σύνταξη τονίζουμε περισσότερο την πράξη του υποκειμένου. Στην περίπτωση αυτή αυτό που αναδεικνύεται είναι η πράξη και το ποιητικό της αίτιο μπορεί να μην το γνωρίζουμε, να μη θέλουμε να το πούμε για κάποιο λόγο ή να μην έχει σημασία.

Κάποια αποσπάσματα από το *Συντακτικόν της Αρχαίας Ελληνικής Γλώσσης* του J. Humbert (1957) είναι ιδιαίτερα διαφωτιστικά σε σχέση με την Παθητική φωνή και τη δημιουργία της στα αρχαία ελληνικά:

> § 170. Το ινδοευρωπαϊκόν ρήμα, το οποίον εχρησιμοποιείτο δια την έκφρασιν της *ενεργείας* (ενεργητικόν) ή του *δρώντος* (μέσον), αναμφιβόλως δεν ησθάνετο ποσώς την ανάγκην να έχη ανεξάρτητον σχηματισμόν του *παθητικού.* … Η δημιουργία παθητικού τη βοηθεία μέσων καταλήξεων είναι *δημιουργία* της ελληνικής. … Πράγματι το παθητικόν δεν είναι απλώς, όπως τείνει τις να πιστεύει, το

αντίστροφον του ενεργητικού· ει και οι δύο φράσεις, ο Πέτρος αγαπά τον Παύλον και ο Παύλος αγαπάται υπό του Πέτρου, είναι λογικώς ισοδύναμοι, η πρώτη αντιστοιχεί προς θεμελιώδη τύπον, ενώ δύναταί τις εις αυτήν ακόμη την ελληνικήν να παρακολουθήση την *προοδευτικήν ανάπτυξιν* της δευτέρας. Ιδιαιτέρως η δήλωσις του *υπευθύνου αιτίου υφισταμένης καταστάσεως* δεν είναι απαραίτητος, διό και ελλείπει κανονικώς από ορισμένων θεμάτων, ως το του *παρακειμένου*, όπερ ακριβώς συνέβαλε σπουδαίως εις την σύστασιν του παθητικού. … §172. Η ανεξαρτησία του παθητικού εν αναφορά προς το ενεργητικόν φαίνεται σαφώς εις πολλά σημεία. Το ποιητικόν αίτιον της προξενηθείσης καταστάσεως (ο Πέτρος αγαπάται υπό του Παύλου) οφείλει απαραιτήτως να εκφρασθεί όταν το παθητικόν δεν θεωρείται ή [παρά μόνο] ως το ενεργητικόν αντεστραμμένον.

Δηλαδή, ο Humbert τονίζει ότι το παθητικό δεν είναι απλώς το αντίστροφο του ενεργητικού. Οι προτάσεις: «Ο Πέτρος αγαπά τη Μαρία» και «Η Μαρία αγαπιέται από τον Πέτρο» είναι λογικά ισοδύναμες, μόνο η πρώτη όμως αντιστοιχεί σε θεμελιώδη τύπο. Το ποιητικό αίτιο της δεύτερης οφείλει να εκφρασθεί απαραίτητα μόνο όταν το παθητικό θεωρείται ως το ενεργητικό αντεστραμμένο. Διαφορετικά το παθητικό είναι ανεξάρτητο του ενεργητικού, κάτι το οποίο φανερώνεται ακριβώς από την έλλειψη ποιητικού αιτίου, όπως για παράδειγμα στη φράση: *'ταύτα πέπρακται εμοί'* που σημαίνει: 'αυτά έχουν γίνει (ποιηθέντα) κατά την άποψή μου', δεν υπάρχει ποιητικό αίτιο. Κάτι που συμβαίνει και στα 15 παραδείγματα παθητικής φωνής στο Α της Ιλιάδας. Η δήλωση του ποιητικού αιτίου υφιστάμενης κατάστασης δεν είναι απαραίτητη στην παθητική φωνή, για αυτό και λείπει σύμφωνα με τους γραμματικούς κανόνες από ορισμένους χρόνους όπως από τον παρακείμενο, γεγονός που συνέβαλε σημαντικά στη σύσταση του παθητικού. Επίσης αυτή η έλλειψη του ποιητικού αιτίου της πράξης έχει ως αποτέλεσμα τον τονισμό της πράξης. Η πράξη δηλαδή αποκτά ακόμη μεγαλύτερη βαρύτητα όταν λείπει το ποιητικό της αίτιο. Για παράδειγμα στην πρόταση: «σε αυτή τη φυλακή εκτελέστηκαν τριάντα κρατούμενοι» δεν αναφέρονται οι εκτελεστές, γεγονός που τονίζει την πράξη της εκτέλεσης.

Ο E. Schwyzer (2002, 299), αναδεικνύει επίσης τη δυνατότητα που προσφέρει η παθητική στα αρχαία ελληνικά να μην δηλωθεί ο αίτιος μιας πράξης όταν αναφέρει: «Η παθητική σύνταξη προσέφερε και τη δυνατότητα να έλθει απόλυτα στο προσκήνιο το πάσχον αντικείμενο της ενεργητικής σύνταξης, ασχέτως αν ήταν έμψυχο ή άψυχο, ενώ συγχρόνως ο αίτιος της πράξης, το υποκείμενο της ενεργητικής σύνταξης παρέμενε στην αφάνεια. Αυτό ήταν καλοδεχούμενο, όταν δεν ήταν γνωστός ή η αναφορά του δεν είχε καμία σημασία ή όταν κάποιος δεν ήθελε να τον κατονομάσει.» Δηλαδή, ο Schwyzer θεωρεί ως δυνατότητα της παθητικής σύνταξης την παράλειψη του ποιητικού αιτίου, που επιτρέπει στο συγγραφέα για παράδειγμα να λειτουργήσει ακόμη και όταν δεν γνωρίζει τον αίτιο μιας πράξης ή δεν θέλει να τον κατονομάσει ή δεν έχει σημασία για αυτόν.

Ο Π. Λορεντζάτος (1989, 73-74) αντίστοιχα δηλώνει ότι ο σχηματισμός της παθητικής υπήρξε αποτέλεσμα της υποχώρησης του φορέα της πράξης απέναντι στην αύξηση του βάρους της πράξης. Σε αυτόν τον σχηματισμό βοήθησε πολύ ο παρακείμενος με την ποιότητα της ενέργειας που εκφράζει: «Έτσι καταλαβαίνουμε με τι τρόπο σχηματίστηκε η παθητική διάθεση· έφτανε δηλαδή να υποχωρήσει στη συνείδηση το υποκείμενο, που ήταν '*ο ενεργός φορεύς της πράξεως*' και να πέσει το βάρος στην ενέργεια πού έπαιρνε επάνω του το υποκείμενο για να γεννηθεί η παθητική σημασία. …Για να γεννηθεί η παθητική διάθεση βοήθησε πολύ προπάντων ο παρακείμενος, που αυτός φανέρωνε μια κατάσταση και που στην κατάσταση αυτή βρίσκεται το γραμματικό υποκείμενο: δέδοται, κέκλειται κ.ά.» Συμφωνώντας δηλαδή περισσότερο με τον Humbert αντιλαμβάνεται την υποχώρηση του ποιητικού αιτίου και τον αντίστοιχο τονισμό της πράξης ως γενεσιουργό αιτία της παθητικής σύνταξης και τον παρακείμενο ως ένα χρόνο που βοήθησε ιδιαίτερα σε αυτήν την κατεύθυνση.

Μετά από όσα προηγήθηκαν, θεωρούμε ότι γίνεται φανερό το γεγονός ότι στην ελληνική γεωμετρία η γενικευμένη χρήση παθητικής σύνταξης αφενός τονίζει τη σημασία των πράξεων και αφετέρου παρέχει τη δυνατότητα να μη δηλώνεται το ποιητικό τους αίτιο. Κατά συνέπεια, αντίστοιχα για κάτι που «δέδοται» ή είναι κατά παραχώρηση «δοθέν», στα κείμενα της ελληνικής γεωμετρίας δεν δηλώνεται από τον συγγραφέα το ποιητικό αίτιο αυτής της πράξης, για λόγους που πιθανώς έχουν να κάνουν με τη φιλοσοφική αντίληψη του συγγραφέα για τις συγκεκριμένες πράξεις. Τους λόγους αυτούς θα τους διερευνήσουμε σε επόμενο κεφάλαιο της διατριβής μας.

Καταλήγοντας, έχουμε να παρατηρήσουμε ότι αν και σε μικρότερο βαθμό ο Heath και σε μεγαλύτερο ο Taisbak, διαισθάνονται το ρόλο και τη σημασία της γλώσσας σε ότι αφορά το μαθηματικό περιεχόμενο εκφράσεων ή όρων της ελληνικής γεωμετρίας –με άλλα λόγια αντιλαμβάνονται το γεγονός ότι η γλώσσα που είναι διατυπωμένες οι εκφράσεις της ελληνικής γεωμετρίας μεταφέρει ουσιαστικά τον τρόπο σκέψης αυτών που την έγραψαν– δεν στέκονται με την απαιτούμενη προσοχή σε αυτήν και στη γραμματική και τη σύνταξή της που κατά την άποψή μας έχουν πολλά πράγματα να πουν.

Συμπέρασμα

Στο κεφάλαιο αυτό με τη βοήθεια της γραμματικής και του συντακτικού των αρχαίων ελληνικών δείξαμε ότι δεν θα πρέπει να θεωρείται τυχαία η εναλλαγή των όρων «δοθέν» και «δεδομένον» στα ελληνικά Μαθηματικά. Αντίθετα, φανερώνει διαφοροποίηση στον τρόπο που οι Έλληνες συγγραφείς αντιλαμβάνονταν τη λειτουργία των δύο όρων. Το «δοθέν» φανερώνει το στιγμιαίο «ποιόν ενέργειας», την είσοδο σε μια νέα κατάσταση, ενώ το «δεδομένον» αποδίδει περισσότερη σπουδαιότητα στην προηγηθείσα πράξη (ενέργεια) της οποίας είναι αποτέλεσμα. Το «δεδομένον» επίσης αν και αναφέρεται στο παρελθόν, μετέχει σε μεγάλο βαθμό στο παρόν, προσδίδοντάς του την εννοιολογική απόχρωση του οριστικού. Επίσης και για τους δύο όρους, δεν δηλώνεται το ποιητικό αίτιο της πράξης - ενέργειας με την οποία δόθηκαν ή έχουν δοθεί κάτι που τονίζει τη σημασία αυτών των πράξεων. Η γλωσσική ανάλυση και τελικά η διάκριση ανάμεσα στους όρους «δοθέν» και «δεδομένον» όπως δηλώσαμε εξ αρχής δεν αποτελεί τον σκοπό της έρευνάς μας αλλά ένα από τα μέσα στην προσπάθειά μας για την αποκάλυψη, σε επόμενα κεφάλαια της διατριβής μας, των φιλοσοφικών ή άλλων προεκτάσεων και δεσμεύσεων και τελικά του πραγματικού μαθηματικού περιεχομένου των δύο όρων, δηλαδή του τρόπου που αυτοί λειτουργούν στο πλαίσιο των ελληνικών Μαθηματικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το υπόμνημα του Μαρίνου του Φιλοσόφου στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη

Ο Μαρίνος, Νεοπλατωνικός φιλόσοφος από τη Νεάπολη της Παλαιστίνης, διαδέχθηκε τον Πρόκλο στη διεύθυνση της Πλατωνικής Ακαδημίας της Αθήνας περίπου το 485 μ.Χ. Έγραψε σχόλια στον Πλάτωνα και στον Αριστοτέλη, ένα έργο με τίτλο *Βίος του Πρόκλου* ή *Περί Ευδαιμονίας* και ένα υπόμνημα στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, το οποίο περιλαμβάνεται στην έκδοση των *Δεδομένων* του Menge (Leipzig 1896).[1] Στο τελευταίο αυτό κείμενο ο Μαρίνος προσπαθεί να αναλύσει το περιεχόμενο του όρου «δεδομένον» στα Μαθηματικά, αναγνωρίζοντας ότι παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες στην κατανόησή του, οι οποίες οφείλονται τόσο στην απουσία συγκεκριμένου ορισμού από τον ίδιο τον Ευκλείδη, όσο και στη διαφορετική αντίληψη και χρήση του όρου από τους μαθηματικούς, επώνυμους και μη, στους οκτώ αιώνες που μεσολάβησαν από τη συγγραφή των *Δεδομένων*.

Στο κεφάλαιο αυτό, αφού παραθέσουμε τις νεότερες απόψεις των ερευνητών για το κείμενο του Μαρίνου[2], θα το αποδώσουμε ολόκληρο για πρώτη φορά στα Νέα Ελληνικά και στη συνέχεια θα αναδείξουμε τις σημαντικές θέσεις που προκύπτουν μέσα από αυτό για την κατανόηση της έννοιας του «δεδομένου» και κατ' επέκταση των *Δεδομένων* του Ευκλείδη. Τέλος, συνεκτιμώντας τα παραπάνω θα είμαστε σε θέση να αξιολογήσουμε καλύτερα το κείμενο του Μαρίνου.

3.1. *Οι απόψεις για το κείμενο του Μαρίνου*

Οι απόψεις των σύγχρονων μελετητών της ιστορίας και της φιλοσοφίας των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών δεν είναι πάντοτε κολακευτικές για το κείμενο του Μαρίνου, ενώ οι περισσότερες αναφορές σε αυτό είναι ευκαιριακές και αποσπασματικές.

---

1 Στα χειρόγραφα το έργο αναφέρεται με διάφορους τίτλους: «Ὑπόμνημα εἰς τὰ δεδομένα Εὐκλείδους ἀπὸ φωνῆς Μαρίνου φιλοσόφου», «Προθεωρία τῶν Εὐκλείδου δεδομένων ἀπὸ φωνῆς Μαρίνου φιλοσόφου», «Προλεγόμενα τῶν δεδομένων Εὐκλείδου ἀπὸ φωνῆς Μαρίνου φιλοσόφου». Από τους τίτλους συμπεραίνουμε ότι, πιθανότατα, το κείμενο δεν γράφτηκε από τον ίδιο τον Μαρίνο αλλά από κάποιον μαθητή του.

2 Το κείμενο του Μαρίνου στα αρχαία ελληνικά θα το παραθέσουμε στο Παράρτημα στο τέλος της διατριβής μας.

Χαρακτηριστικά ο Jones (1986, 68), με αφορμή αναφορά του στην έννοια του «δεδομένου» και στις διάφορες σημασίες του στην αρχαιότητα υποσημειώνει: «Συζητιούνται μάλλον μπερδεμένα, από τον Μαρίνο (τον πέμπτο αιώνα μ.Χ.) στην εισαγωγή του στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη.»

Ο Taisbak (1991, 171), σε παρόμοιο τόνο και στην προσπάθειά του να διερευνήσει το περιεχόμενο των *Δεδομένων*, αναφέρει για το κείμενο του Μαρίνου: «Στο σχολιασμό του για τα *Δεδομένα* ο συνονόματός μου Μαρίνος, διευθυντής της Ακαδημίας του Πλάτωνος το 485μ.Χ., δεν ήταν λιγότερο σαστισμένος από όσο είμαι εγώ σχετικά με τη σημασία του δεδομένου (being given). Τολμά να ισχυρισθεί στο τέλος ότι η θεωρία των δεδομένων (givens) είναι πολύ χρήσιμη, αλλά φοβάμαι ότι κάποιοι παρά ταύτα δεν θα την χρειαστούν εάν γνωρίζουν τα *Στοιχεία*.» Στο τελευταίο του έργο, ο Taisbak (2003, 242-249), επίσης δεν φαίνεται να προσθέτει κάτι καινούργιο στην κατεύθυνση της καλύτερης κατανόησης και αξιολόγησης του κειμένου του Μαρίνου, εκτός ίσως από την πρώτη – εξ όσων γνωρίζουμε – πλήρη μετάφραση του κειμένου στα Αγγλικά.

Ο Mahoney (1968, 342-345), επικαλείται διάφορα αποσπάσματα από το κείμενο του Μαρίνου, τα οποία και αποδέχεται στην προσπάθειά του να προσεγγίσει τη σημασία του όρου «πόριμον». Χαρακτηριστικά αναφέρει: «Στη συζήτηση … για τα *Δεδομένα*, ο σχολιαστής του Ευκλείδη, Μαρίνος του Sichem, έριξε φως στο ρόλο του έργου στην Ανάλυση»· και παρακάτω: «Ο ορισμός του Μαρίνου … αμέσως διακρίνει τη διαφορά ανάμεσα στα *Δεδομένα* και τα *Πορίσματα* και ρίχνει φως στην πιθανή φύση ενός πορίσματος …». Όπως φαίνεται ο Mahoney αποδέχεται ότι το κείμενο του Μαρίνου είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την κατανόηση εννοιών των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών.

Οι Hintikka & Remes (1974, 49-51,70,77), με τη σειρά τους, επικαλούνται διάφορα αποσπάσματα του κειμένου του Μαρίνου, προκειμένου να θεμελιώσουν την ερμηνεία τους για τη γεωμετρική ανάλυση. Αλλά φαίνεται να αποδέχονται και συνολικά το κείμενο του Μαρίνου ως αξιόπιστη πηγή για τη μελέτη της ορολογίας του Πάππου, αφού το συμπεριλαμβάνουν στο έγκυρο ερευνητικό υλικό που διαθέτουμε σε αυτή την κατεύθυνση. Αναφέρουν χαρακτηριστικά μεταξύ άλλων: «Μπορούμε να αποδεχθούμε τον σχολιασμό του Μαρίνου για τα *Δεδομένα*.»

Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε μια χρονικά προγενέστερη και πολύ πιο εμπεριστατωμένη μελέτη 75 σελίδων για την πραγματεία του Μαρίνου, του Maurice

Michaux (1947). Μια μελέτη ιστορικο-φιλολογική, όπως ο ίδιος την χαρακτηρίζει, που στο συμπέρασμά της για τη φύση και την αξία της πραγματείας είναι αρκετά κολακευτική, αφού θεωρεί ότι όχι μόνο δεν έχει σημαντικά λάθη αλλά αποτελεί μια αρκετά στέρεη λογική κατασκευή που επιτρέπει να συμπεράνουμε την αλήθεια, στηριζόμενοι πάνω σε αιώνιους κανόνες της νόησης.[3] Σε κάποιο σημείο δε της μελέτης αναφέρει χαρακτηριστικά (1947, 36): «Κατά τα λοιπά, το κείμενο του Ευκλείδη και αυτό του Μαρίνου αλληλοσυμπληρώνονται θαυμάσια.» Θεωρεί δηλαδή ότι τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη και το κείμενο του Μαρίνου αλληλοσυμπληρώνονται, επεξηγώντας ότι, αν ο γεωμέτρης μπορεί να κατηγορηθεί ότι δεν έδωσε ένα γενικό ορισμό του «δεδομένου» αλλά μόνο ορισμούς για τα διάφορα είδη «δεδομένων», η εργασία του φιλοσόφου είναι απρόσιτη και γενική, αν δεν φωτιστεί με τις διευκρινήσεις του γεωμέτρη. Η μελέτη του Michaux, παρόλο που έχει στοιχεία και χαρακτηριστικά ιστορικής-φιλολογικής μελέτης, δεν διστάζει να εισέλθει στο επίπεδο της λογικής ανάλυσης του κειμένου του Μαρίνου και ειδικότερα στο μαθηματικό περιεχόμενό του, αναπαράγοντας κυρίως απόψεις των μαθηματικών της εποχής, γιατί ο ίδιος δεν είναι μαθηματικός.

Στο σημείο αυτό έχουμε να παρατηρήσουμε δύο πράγματα σε σχέση με τη μελέτη του Michaux, τα οποία αφορούν και το σύνολο των μέχρι σήμερα προσεγγίσεων του κειμένου του Μαρίνου, και θεωρούμε ότι είναι καθοριστικά για την κατανόησή του. Το πρώτο είναι η έλλειψη διάκρισης μεταξύ των δύο όρων «δεδομένον» – «δοθέν», οι οποίοι αποδίδονται ενιαία με το «donnée», και το δεύτερο η ουσιαστική λειτουργική εξίσωση και των δύο με τον σύγχρονο όρο «γνωστό» – «connu». Η έλλειψη διάκρισης ανάμεσα στους δύο όρους, όπως έχουμε επισημάνει,[4] εμφανίζεται τόσο στο λατινικό κείμενο του Menge που παρατίθεται δίπλα στο ελληνικό κείμενο του Μαρίνου αλλά και του συνόλου των *Δεδομένων*,[5] όσο και στη συντριπτική πλειοψηφία όσων τα μεταφράζουν σε γλώσσες που προέρχονται από τα λατινικά, όπως στα Αγγλικά (given), στα Γαλλικά (donnée) ή στα Γερμανικά (gegeben). Η αυθαίρετη εξίσωση και αντικατάσταση των δύο όρων με έναν όρο από το σύγχρονο

[3] Michaux (1947, 72).

[4] Πρώτη φορά παρουσιάσαμε αυτή τη διάκριση στην εισήγησή μας με τίτλο «Dothen = Dedomenon = Datum?», στο συμπόσιο για τα αρχαία Μαθηματικά που πραγματοποιήθηκε στους Δελφούς, 18-21 Ιουλίου 2002.

[5] Η αλήθεια του ισχυρισμού μας αποδεικνύεται με μια απλή αντιπαραβολή του ελληνικού και του λατινικού κειμένου, για παράδειγμα στα εδάφια 236.1-6, 238.15-16 και αλλού.

εννοιολογικό πλαίσιο, τον όρο «γνωστό»,[6] είναι ένα γεγονός που τουλάχιστον εμποδίζει την αναζήτηση και πιθανή ανακάλυψη του τρόπου που πραγματικά λειτουργούσαν οι δύο όροι για τους αρχαίους, μέσα στο συγκεκριμένο πολιτισμικό περιβάλλον με τις τυχόν φιλοσοφικές τους δεσμεύσεις και προεκτάσεις.

Συνοψίζοντας, θεωρούμε ότι μέχρι σήμερα το κείμενο του Μαρίνου έχει μείνει αναξιοποίητο, δεν έχει αξιόλογες αναφορές και δεν έχει βοηθήσει ουσιαστικά όσους έχουν ασχοληθεί με τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη. Ίσως αυτό να αποτελεί ένα ακόμη στοιχείο της κοινής μοίρας με την οποία η ιστορία συνέδεσε το κείμενο του Μαρίνου με τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη. Γιατί και τα *Δεδομένα* θεωρούνται το λιγότερο κατανοητό από τα έργα του Ευκλείδη, και πηγή αρκετών δυσκολιών για τους μαθηματικούς, παρόλο που όλοι συμμερίζονται τη δήλωση του Πάππου ότι αποτελεί το πρώτο ως προς την τάξη βιβλίο της «ανάλυσης».

Στη συνέχεια, θα αποδώσουμε[7] το κείμενο του Μαρίνου στα Νέα Ελληνικά, υπό το πρίσμα των δικών μας απόψεων για τη διάκριση καθώς και για το περιεχόμενο των δύο όρων «δοθέν» και «δεδομένον». Προηγουμένως όμως θα περιγράψουμε συνοπτικά τη δομή του.

3.2. *Η δομή του κειμένου του Μαρίνου*

Η δομή του κειμένου του Μαρίνου είναι ξεκάθαρη. Καταρχάς τίθενται οι στόχοι του που είναι τρεις: Ο ορισμός του «δεδομένου», η χρησιμότητα της μελέτης του και η επιστήμη στην οποία αναφέρεται. Ο πρώτος στόχος βέβαια θα μελετηθεί σε σημαντικά μεγαλύτερη έκταση σε σχέση με τους υπόλοιπους. Η μελέτη του θα ξεκινήσει με την παράθεση του συνόλου των διαφορετικών απόψεων και ορισμών που έχουν άμεσα ή έμμεσα διατυπωθεί για το «δεδομένον» μέχρι εκείνη τη στιγμή. Θα περάσει στην ανάλυση των «απλών όρων» (μονολεκτικών ορισμών) με τους οποίους αποδίδεται, όπως είναι το «τεταγμένον», το «γνώριμον», το «πόριμον» και το «ρητόν» χρησιμοποιώντας παραδείγματα από τη γεωμετρία. Θα συνεχίσει με τη συσχέτιση

[6] Όπως για παράδειγμα στα κείμενα των: Taisbak (2003,18), Berggren & Van Brummelen (2000, 10) και Knorr (1986, 110).

[7] Η απόδοση αυτή δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την ουσιαστική βοήθεια του έγκριτου φιλολόγου του Λεοντείου Λυκείου Νέας Σμύρνης, Νίκου Δεσύπρη, τον οποίο θέλουμε να ευχαριστήσουμε για μια ακόμη φορά θερμά. Η τελική ευθύνη βέβαια βαρύνει αποκλειστικά εμάς.

των όρων αυτών μεταξύ τους πάλι με παραδείγματα, αναδεικνύοντας τις ομοιότητες και τις διαφορές τους. Θα απορρίψει όσους κατά τη γνώμη του δεν περιγράφουν σωστά και με πληρότητα το «δεδομένον», για να καταλήξει τέλος στον σωστό και πλήρη κατά την άποψή του ορισμό του. Αυτόν τον ορισμό, θα τον συγκρίνει στην συνέχεια με τους υπόλοιπους ορισμούς προκειμένου να αναδείξει την επάρκειά του, σε συνδυασμό με τη δική τους ανεπάρκεια και θα κλείσει αναφερόμενος σχετικά σύντομα στη χρησιμότητα και στην αναγκαιότητα της συνολικής μελέτης σχετικά με το δεδομένο για την «ανάλυση» και στη διαίρεση των προτάσεων του βιβλίου ανάλογα με το περιεχόμενό τους.

3.3. *Απόδοση του κειμένου του Μαρίνου στα Νέα Ελληνικά*

[Menge 234][8] Καταρχάς πρέπει να καθορισθεί τι είναι το *δεδομένον*· στη συνέχεια, πρέπει να λεχθεί ποια είναι η χρησιμότητα της σχετικής με αυτό μελέτης· και τρίτον, σε ποια επιστήμη αναφέρεται.

Ορίζουν βέβαια το *δεδομένον* με πολλούς τρόπους, διαφορετικά οι παλαιότεροι από τους νεότερους μελετητές. Γι’ αυτό τον λόγο κατέστη δύσκολη η σωστή εξήγηση σχετικά με αυτό και μερικοί αφενός δεν έχουν διατυπώσει ούτε καν κάποιο ορισμό του *δεδομένου*, αφετέρου προσπάθησαν να βρουν κάποιο ιδιαίτερο γνώρισμα του *δεδομένου.* Άλλοι πάλι, συνδυάζοντας όσα εκείνοι <οι παλαιότεροι>[9] είχαν διατυπώσει, επιχείρησαν να το ορίσουν αλλά και αυτοί δεν συμφωνούν μεταξύ τους. Όλοι όμως δίνουν την εντύπωση ότι λένε κάτι σχετικά με αυτό έχοντας ξεκινήσει από μια και την αυτή έννοια και αντίληψη: Θεώρησαν δηλαδή ότι το *δεδομένον* είναι κάτι που μπορεί να συλλάβει η νόηση (καταληπτὸν)[10]. Γι’ αυτό τον λόγο, από εκείνους που όρισαν το *δεδομένον* με απλούστερο τρόπο και προσπάθησαν να το περιγράψουν με βάση ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα, άλλοι μεν το θεώρησαν ως *τεταγμένον*, όπως ο Απολλώνιος στο <έργο του> *Περί νεύσεων* και στην *Καθόλου πραγμα-*

---

[8] Διατηρούμε τη σελιδοποίηση της έκδοσης του Menge για τη διευκόλυνση των αναφορών που θα κάνουμε παρακάτω αλλά και για ενδεχόμενη αντιπαραβολή που θα ήθελε κάποιος να κάνει με το αρχαίο κείμενο.

[9] Οι λέξεις ή φράσεις σε αγκύλες δεν υπάρχουν στο πρωτότυπο κείμενο και έχουν προστεθεί από εμάς για την καλύτερη κατανόηση του κειμένου.

[10] Σε όλο το κείμενο θα αποδίδουμε το καταληπτὸν με τη φράση: αυτό που μπορεί να συλλάβει η νόηση.

τεία, άλλοι δε ως *γνώριμον*, όπως ο Διόδωρος· έτσι, για παράδειγμα, λέει ότι είναι δεδομένες οι ακτίνες και οι γωνίες και καθετί που περιήλθε σε γνώση με κάποιο τρόπο, ακόμη κι αν δεν ήταν *ρητόν*. Μερικοί όμως υποστηρίζουν ότι αυτό <το δεδομένον> είναι *ρητόν*, όπως ακριβώς πιστεύει ο Πτολεμαίος, που ονομάζει *δεδομένα* εκείνα, των οποίων το μέγεθος μπορεί να γίνει γνωστό [Menge 236] είτε με απόλυτη ακρίβεια είτε κατά προσέγγιση. Εξάλλου, κάποιοι έχουν θεωρήσει ότι είναι *δεδομένον* ακόμη και εκείνο που αναφέρεται κατά την υπόθεση, από αυτόν που διατυπώνει την πρόταση. Το λένε ακόμη <κάποιοι το δεδομένον> στις πρώτες στοιχειώσεις και ως άλλη έκφραση για το *δοθέν* <σημείο> και την *δοθείσαν* <ευθεία>, δηλαδή όποια τυχόν ευθεία καθορίσει κάποιος και δώσει. Όλα αυτά όμως θέλουν να υποδηλώσουν με κάποια έννοια τη νοητική σύλληψη. Γι’ αυτό και από τους ορισμούς αποκτούν τη μεγαλύτερη εγκυρότητα όσοι φανερώνουν στον ανώτατο βαθμό αυτό που μπορεί να συλλάβει η νόηση, όπως άλλωστε θα φανεί ξεκάθαρα, καθώς θα προχωρούμε στη μελέτη μας.

Τώρα όμως ας εκθέσουμε τις διαφορετικές απόψεις και εκείνων που δεν χαρακτηρίζουν τη φύση του *δεδομένου* απλά και μόνο με ένα <χαρακτηριστικό όρο>, αλλά που διατυπώνουν κάποιο ορισμό του. Αν συνοψισθούν, οι τρόποι αυτών δεν είναι πολλοί. Πράγματι, κατέληξαν να ορίσουν το *δεδομένον*, ως αυτό που είναι *τεταγμένον* μαζί και *πόριμον*, άλλοι ως το *τεταγμένον* και *γνώριμον* και κάποιοι ως το *γνώριμον* και *πόριμον*. Φαίνεται όμως ότι όλοι αυτοί έδωσαν ορισμό με τον τρόπο που αναφέρθηκε, διότι απέβλεπαν στη νοητική σύλληψη, δηλαδή στη σύλληψη και στην εύρεση του δεδομένου. Προκειμένου όμως να συλλάβουμε αυτή τη σκέψη τους και επιπλέον, προκειμένου να επιλέξουμε, από τους πολλούς όρους που έχουν παραδοθεί, τον σωστό όρο γι’ αυτό που μελετάμε, πρέπει προηγουμένως να εξετάσουμε τη σημασία του καθενός από τους απλούς όρους και των αντιθέτων τους, συγκεκριμένα του *ατάκτου*, του *αγνώστου*, του *απόρου* και του *αλόγου* στον χώρο της γεωμετρίας. Διότι οι τέτοιου είδους όροι εκτείνονται και στα αντικείμενα της φυσικής και στις άλλες μαθηματικές επιστήμες.

[Menge 238] Περιγράφουν λοιπόν ως *τεταγμένον* εκείνο που διατηρείται πάντοτε το ίδιο – με την έννοια που λέγεται *τεταγμένον* – δηλαδή κατά το μέγεθος, το σχήμα ή κάτι παρόμοιο. Με άλλες λέξεις, εκείνο ακριβώς που δεν είναι δυνατόν να ποικίλει ανάλογα με τις περιστάσεις, αλλά μένει αμετάβλητο σε κάποιο καθορισμένο μέρος.

Για να συνοψίσουμε, η ευθεία για παράδειγμα που διέρχεται από δύο ορισμένα σημεία λέγεται τεταγμένη, επειδή δεν μπορεί να αχθεί με διαφορετικό και όχι σταθερό τρόπο. *Άτακτος* όμως είναι η περιφέρεια <που διέρχεται> από δύο σημεία, διότι μπορεί να σχηματισθεί με πολλούς και όχι σταθερούς τρόπους, καθώς από τα δύο σημεία μπορεί να γράφεται και μεγαλύτερος και μικρότερος κύκλος επ' άπειρον. Αντίθετα, *τεταγμένη* είναι η περιφέρεια <που διέρχεται> από τρία σημεία. Και τα παρόμοια ανήκουν στα *τεταγμένα*, όπως ο σχηματισμός ισοπλεύρου τριγώνου πάνω σε *δοθείσα* ευθεία. Διότι, έστω και αν γίνεται με δύο τρόπους, ωστόσο σχηματίζεται από την καθεμιά πλευρά της ευθείας με ένα μοναδικό και απαράλλακτο τρόπο. Και ο χωρισμός της *δοθείσας* ευθείας σε *δοθέντα* λόγο· διότι και αυτό θα μπορούσε να γίνει με έναν και μοναδικό τρόπο από την κάθε πλευρά του μέσου. Από την άλλη, *άτακτα* είναι τα αντίθετα προς αυτά <τα παραπάνω>, όπως <για παράδειγμα> ο σχηματισμός του σκαληνού τριγώνου και ο μη καθορισμένος χωρισμός της ευθείας. Συνυπάρχει όμως με τον όρο, αυτό ως προς το οποίο είναι τεταγμένο, διότι υπάρχει η δυνατότητα ένα και το αυτό πράγμα να είναι με κάποια έννοια *τεταγμένον*, ενώ με κάποια άλλη *άτακτον*, όπως <για παράδειγμα> το ισόπλευρο τρίγωνο, το οποίο, ως προς το γεγονός ότι είναι ισόπλευρο, είναι *τεταγμένον*, ενώ ως προς το μέγεθος δεν είναι καθορισμένο.

Εξάλλου, *γνώριμον* είναι αυτό που μαθαίνεται, όπως είναι το φανερό σε μας και αντιληπτό από τη νόησή μας, ενώ *άγνωστον* αυτό που ούτε μαθαίνεται ούτε συλλαμβάνεται από τη νόησή μας. Για παράδειγμα, το μήκος μιας οδού λέγεται ότι είναι *γνώριμον*, με την έννοια ότι συνελήφθη από τη νόηση από ποιο αριθμό σταδίων αποτελείται [Menge 240] και ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές και ότι η <ευθεία> *εκ δύο ονομάτων* είναι *άλογος*. Επιπλέον, και τα ακόλουθα λέγονται *γνώριμα*, όπως ότι είναι μια η εφαπτομένη σε κάθε πλευρά της έλικας από ένα *δοθέν* εξωτερικό σημείο. Διότι, αν υπήρχε και άλλη, θα έπρεπε να συμπεράνουμε ότι δύο ευθείες θα περικλείσουν ένα χωρίο, πράγμα αδύνατο. *Άγνωστα* όμως δεν είναι τα *άλογα*, αλλά όσα δεν μαθαίνονται ούτε συλλαμβάνονται από τη νόησή μας.

Πόριμον εξάλλου είναι εκείνο το οποίο είμαστε ήδη σε θέση να κάνουμε και να κατασκευάσουμε, δηλαδή να φέρουμε σε αυτό που έχει επεξεργαστεί η νόησή μας. Διαφορετικά όμως ορίζουν το *πόριμον*, δηλαδή ως αυτό που προκύπτει μέσω αποδείξεως ή αυτό που είναι φανερό ακόμη και χωρίς απόδειξη. Όπως είναι <πόριμον>

το να γράψουμε κύκλο αν γνωρίζουμε το κέντρο και την ακτίνα, το να σχηματίσουμε τρίγωνο όχι μόνο ισόπλευρο αλλά και σκαληνό και το να βρούμε την <ευθεία> *εκ δύο ονομάτων* και τρεις ρητές ευθείες σύμμετρες μόνο στο τετράγωνο. *Πόριμα* όμως είναι και όσα γίνονται με άπειρους τρόπους, όπως ακριβώς ο σχηματισμός κύκλου που διέρχεται από δύο σημεία. *Άπορον* από την άλλη είναι το αντίθετο, όπως ο τετραγωνισμός του κύκλου· διότι αυτό το πρόβλημα δεν έχει ακόμα πορισθεί αν και είναι δυνατόν να πορισθεί και είναι γνωστό· διότι η γνώση του δεν έχει ακόμα συλληφθεί από τη νόηση. Τώρα όμως αποδίδεται ο χαρακτηρισμός σε αυτό που ήδη έχει ποριστεί, το οποίο ακριβώς ονομάζουν και κυριολεκτικά *πόριμον*. Διότι, αυτό που δεν έχει ακόμη ποριστεί, αλλά ενδέχεται να πορισθεί, το ονομάζουν ξεχωριστά *ποριστόν*. *Άπορον* είναι, καθώς έχει λεχθεί, το αντίθετο του *πορίμου*, δηλαδή εκείνο του οποίου η έρευνα δεν έχει φθάσει σε αίσιο πέρας.

Ρητόν εξάλλου είναι εκείνο του οποίου είμαστε σε θέση να αναφέρουμε το μέγεθος, το σχήμα ή τη θέση· [Menge 242] αλλά αυτός ο όρος είναι γενικότερος. Πιο συγκεκριμένα, *ρητόν* καθ' αυτό είναι εκείνο το οποίο γνωρίζουμε σύμφωνα με κάποιον αριθμό σε σχέση με κάποιο συμβατικό μέτρο, για παράδειγμα την παλάμη ή τον δάκτυλο.

Εφόσον λοιπόν <οι προηγούμενοι όροι> έχουν προσδιορισθεί κατ' αυτόν τον τρόπο, θα είναι πιο εύκολο να εξετάσουμε στη συνέχεια τόσο τα κοινά σημεία όσων έχουν λεχθεί, όσο και τις διαφορές και καταρχήν, ποια είναι η σχέση του *τεταγμένου* προς το *γνώριμον* και τα αντίθετα αυτών μεταξύ τους. Δεν ανήκουν βέβαια σε αυτούς που είναι αντίστροφοι, ούτε βέβαια σε εκείνους τους όρους, των οποίων ο ένας είναι πιο γενικός από τον άλλο. Διότι, μολονότι έχουν αυτοί πολλά κοινά στοιχεία, όπως για παράδειγμα το να φέρουμε ευθεία που να διέρχεται από δύο σημεία και το να σχηματίσουμε κύκλο ή ισόπλευρο τρίγωνο δια τριών σημείων· ωστόσο ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι μεν *τεταγμένον* αλλά και *άγνωστον*. Επίσης το γεγονός ότι είναι μια η εφαπτομένη σε μια έλικα από ένα σημείο, ανήκει στα *τεταγμένα* και σε εκείνα που δεν ενδέχεται να συμβούν με άλλο τρόπο· δεν έχει γίνει όμως και γνωστή η απόδειξή του, δηλαδή η κατασκευή του. Από την άλλη πάλι, η επ' άπειρον τομή και ο σχηματισμός σκαληνού τριγώνου είναι μεν *γνώριμα* αλλά όχι *τεταγμένα*. Επομένως γίνεται φανερό, ότι από τα *τεταγμένα* άλλο μεν θα είναι *γνώριμον*, άλλο δε *άγνωστον*, και αντίστροφα από τα *γνώριμα* άλλο μεν είναι *τεταγμένον*, άλλο δε *άτακτον*. Και αυτά βρίσκονται σε τέτοια σχέση μεταξύ τους, όπως η τέχνη του πεζού λόγου και η πεζή ομιλία· ούτε δηλαδή ταυτίζονται μεταξύ τους ούτε όμως το ένα είναι γενικότερο του άλλου.

Στην ίδια σχέση όμως βρίσκεται και το *τεταγμένον* και το *άτακτον* προς το *πόριμον* και το *άπορον*· υπάρχουν δηλαδή σ' αυτά πάρα πολλά κοινά σημεία και διαφέρουν μεταξύ τους με τον τρόπο που αναφέρθηκε. [Menge 244] Γιατί η έλικα είναι μεν *τεταγμένον* αλλά δεν ήταν *πόριμον* για όσους έζησαν πριν από τον Αρχιμήδη. Επιπλέον, εκείνα που γίνονται με άπειρους και όχι καθορισμένους τρόπους είναι μεν *πόριμα*, εάν κάποιος επινοήσει την κατασκευή και τη δομή τους, αλλά όχι και *τεταγμένα*. Όπως το να επινοήσει κάποιος ένα σκαληνό τρίγωνο και να οδηγήσει τη σκέψη του στην κατασκευή του ξεκινώντας από το ισόπλευρο τρίγωνο, δεν είναι δύσκολο αλλά αντίθετα εύκολο, αν και ανήκει στα *άτακτα* και στα *άπειρα*.

Σε τέτοια σχέση βρίσκονται και το *τεταγμένον* και το *άτακτον* προς το *ρητόν* και το *άλογον*. Ενώ δηλαδή έχουν πολλά κοινά σημεία μεταξύ τους, διαφέρουν κατά τον τρόπο που έχει αναφερθεί. Δηλαδή ούτε έχουν το ίδιο εύρος ούτε το ένα είναι ευρύτερο του άλλου. Γιατί η <ευθεία> *εκ δύο ονομάτων* και οι *άλογες* <ευθείες> που έχουν κατ' αυτόν τον τρόπο συλληφθεί από τη νόηση, είναι *τεταγμένες* αλλά όχι *ρητές*, και <ομοίως είναι τεταγμένος αλλά όχι ρητός> ο λόγος της διαγωνίου προς την πλευρά. Πολλά μάλιστα από τα *ρητά* είναι *άτακτα*, όπως εκείνα που γίνονται με πολλούς και όχι ορισμένους τρόπους. Γιατί. είναι δυνατόν να μετρηθεί ακόμα και ένα σκαληνό τρίγωνο με βάση ένα ρητό και συμβατικό μέτρο που ορίσθηκε από πριν, μολονότι είναι *άτακτον*.

Σε ό,τι αφορά όμως στη σχέση του *γνωρίμου* προς το *πόριμον*, από τη μια είναι εύκολο στον καθένα να διακρίνει την ομοιότητα, από την άλλη όμως είναι δύσκολο να βρει τη διαφορά. Διότι η φύση του ενός προσεγγίζει τόσο πολύ τη φύση του άλλου, ώστε να δίνουν την εντύπωση ότι ταυτίζονται. Ωστόσο, εάν κάποιος τα εξετάσει με λεπτομέρεια, θα διακρίνει ότι υπάρχει κάποια διαφορά: Είναι δηλαδή εξίσου φανερό και *γνώριμον* ότι μια είναι η εφαπτομένη στην έλικα από ένα σημείο· αλλά δεν είναι γι' αυτόν τον λόγο ήδη *πόριμον* το πρόβλημα, αν δεν έχει ακόμα συλληφθεί από τη νόηση. [Menge 246] Κατά συνέπεια, κάθε *γνώριμον* δεν είναι και *πόριμον*· όμως καθετί *πόριμον* είναι και *γνώριμον*. Επομένως, το *γνώριμον* είναι πιο γενικό από το *πόριμον*.

Εξάλλου, το *γνώριμον* και το *ρητόν* σε κάποιες περιπτώσεις έχουν κοινά σημεία, σε άλλες όμως διαφέρουν μεταξύ τους κατά τον τρόπο που προαναφέρθηκε. Οι *άλο-*

γες δηλαδή <γραμμές>, που έχουν αναφερθεί είναι μεν *γνώριμες* αλλά όχι και *ρητές*· ενώ ο κάθε αριθμός είναι μεν *ρητός* αλλά όχι και *γνώριμος*. Και το μεν *ρητόν* είναι κατά τον ίδιο τρόπο *ρητόν* γι' αυτούς που έχουν τις ίδιες συνήθειες και κάποιο μήκος δεν θα είναι για τον ένα *ρητόν* και για τον άλλο όχι, διότι θα αναφερθούν στο ίδιο μέτρο. Το ίδιο όμως μήκος γίνεται για τον ένα *γνώριμον*, για τον άλλο όμως όχι, έστω και αν έχουν τις ίδιες συνήθειες. Ίσως μάλιστα ακόμα και σε αυτό το σημείο να είναι δύσκολο να βρει κανείς τι είναι *ρητόν* μεν αλλά και *άγνωστον*, διότι φαίνεται ότι το *γνώριμον* είναι πιο γενικό από το *ρητόν*.

Είναι φανερό από αυτά που ακολουθούν ότι το *πόριμον* και το *άπορον* διαφέρουν από το *ρητόν* και το *άλογον*. Είναι δυνατόν δηλαδή κάποια να είναι *πόριμα* και να ανήκουν στα *άλογα*, κανένα όμως από τα *ρητά* δεν μπορεί να είναι *άλογον*. Η συγγένεια αυτών όπως και των άλλων όρων είναι ολοφάνερη στον καθένα. Τέτοια όμως είναι η σχέση μεταξύ τους, ώστε το *πόριμον* να φαίνεται ότι είναι πιο γενικό από το *ρητόν*.

Είναι δυνατόν όμως να μελετήσει κανείς τη διαφορά όσων έχουν αναφερθεί προηγουμένως και κατά τον εξής τρόπο: *Ρητόν* και *άλογον* λέγονται ανάλογα με το αν αναφερόμαστε σε ένα μέτρο, όχι στη δική μας γνώση. Μπορεί δηλαδή κάτι που είναι *ρητόν* να μη μας είναι *γνώριμο* με ποιο τρόπο είναι *ρητόν* ούτε να έχει ακόμα συλληφθεί από τη νόηση μας ότι είναι *ρητόν*. Το *τεταγμένον* όμως και το *άτακτον* [Menge 248] ανήκουν στα καθ' αυτό <χαρακτηριστικά> και σ' αυτά που εξετάζονται σύμφωνα με τη δική τους ξεχωριστή φύση, έστω και αν δεν συλλαμβάνονται ακόμα από τη νόηση μας. Πολλά βέβαια που είναι *τεταγμένα* από τη φύση τους απέδειξε αργότερα ο Αρχιμήδης ότι οι προγενέστεροί του δεν τα είχαν θεωρήσει ως *τεταγμένα*. *Γνώριμον* όμως και *άγνωστον* ονομάζονται με βάση την αναφορά τους σε μας. Επομένως, όσα αναφέρθηκαν θα διέφεραν μεταξύ τους εάν το ένα αναφέρεται σε μας, το άλλο στη φύση του και το άλλο σε κάποιο μέτρο.

Εφόσον εξηγήθηκαν η ομοιότητα και η διαφορά όσων αναφέρθηκαν, θα ήταν επόμενο να εξετασθεί τι τέλος πάντων είναι το *δεδομένον*. Όσοι λοιπόν νομίζουν ότι το *δεδομένον* είναι εκείνο που δίδεται κατά την υπόθεση από εκείνον που διατυπώνει την πρόταση, απομακρύνονται εντελώς από το αντικείμενο της έρευνάς τους. Διότι όλα τα *στοιχεία* των *δεδομένων* έχουν συνταχθεί όχι σχετικά με αυτό που δίδεται από την υπόθεση, όπως μπορεί να διαπιστώσει κάποιος όταν διατρέξει τις πραγματείες σχετικά με αυτό <το δεδομένον>. Γι' αυτό πρέπει και εμείς, αφήνοντας στην άκρη την άποψη αυτή, να εξετάσουμε τους λόγους εκείνων που το ορίζουν διαφορετικά· θα θεωρηθεί δε αυτό που δίδεται καθ’ υπόθεσιν ως εκείνο που εξετάζεται σύμφωνα με τις αρχές. Εκείνοι λοιπόν που χρησιμοποιούν ονομαστικούς όρους, το ορίζουν <το δεδομένον> χαρακτηρίζοντάς το με έναν από αυτούς που έχουν αναφερθεί στην αρχή. Σχεδόν όλοι μάλιστα δίνουν την εντύπωση ότι έχουν σχηματίσει μια κοινή άποψη για το *δεδομένον*· θεώρησαν δηλαδή ότι αυτό είναι κάτι που μπορεί να συλληφθεί από τη νόηση, όπως φανερώνει το ίδιο το όνομα του *δεδομένου*, και κυρίως αυτοί που το περιγράφουν ως *δεδομένον* από την υπόθεση. Μερικοί μάλιστα στράφηκαν προς το παραχωρούμενο. Χρησιμοποιώντας λοιπόν και εμείς ό,τι έχει λεχθεί, ως κανόνα και κριτήριο, θα μπορέσουμε [Menge 250] να βρούμε τον ακριβή ορισμό του *δεδομένου*. Είναι φανερό βέβαια ότι θα χρειαστεί να τον συγκρίνουμε και να τον αντιστρέψουμε σε σχέση προς αυτό που μπορεί να ορισθεί· διότι και αυτό πρέπει να είναι το χαρακτηριστικό των σωστών ορισμών. Τέτοιος ορισμός του <δεδομένου> είναι στην παρούσα περίπτωση, στους μεν απλούστερους ορισμούς που προαναφέρθηκαν, εκείνος που το όρισε ως το *πόριμον*, ενώ στους πιο σύνθετους εκείνος που το όρισε ως το *γνώριμον* μαζί και *πόριμον*· όλοι οι υπόλοιποι είναι ατελείς. Διότι ούτε εκείνος που το ταυτίζει με το *τεταγμένον* είναι επαρκής ως προς την έκταση του *δεδομένου*, επειδή ούτε κάθε *τεταγμένον* ούτε μόνον το *τεταγμένον* μπορεί να συλληφθεί από τη νόηση, αλλά και μερικά από τα *άτακτα*, όπως έχει δειχθεί. Ούτε εκείνος ο ορισμός που το ορίζει ως το *γνώριμον* είναι επαρκής, διότι δεν μπορεί κάθε τέτοιο <γνώριμο>, να συλληφθεί από τη νόηση, έστω και αν μόνο αυτό <μπορεί να συλληφθεί από τη νόηση>· διότι το *άγνωστον* δεν θα μπορούσε να συλληφθεί από τη νόηση. Ούτε όμως ο ορισμός που το παρουσιάζει ως *ρητόν* θα είναι πλήρης, διότι ούτε αυτό μόνον μπορεί να το συλλάβει η νόηση, εφόσον και κάποια από τα *άλογα* <μπορεί>. Ίσως όμως ούτε καθένα το οποίο είναι *ρητόν* να μην μπορεί να συλλάβει η νόηση, όπως αυτό έχει ορισθεί προηγουμένως. Απομένει βέβαια ανάμεσα σε αυτούς <τους ορισμούς> που αποδίδονται ονομαστικά, το *πόριμον*, το οποίο φαίνεται ότι περισσότερο από όλα φανερώνει τη νοητική σύλληψη. Πράγματι, κάθε *πόριμον* μπορεί να συλληφθεί από τη νόηση και μόνον αυτό. Έναν τέτοιο ορισμό χρησιμοποίησε και ο Ευκλείδης κατά τη περιγραφή όλων των ειδών του *δεδομένου*. Από τους σύνθετους δε ορισμούς, ο μόνος πλήρης είναι αυτός που ορίζει το *δεδομένον* ως *γνώριμον* μαζί και *πόριμον*, που έχει ως έννοια γένους το *γνώριμον* και ως ειδοποιό διαφορά το *πόριμον*. Αντίθετα, εκείνος που θεωρεί το *δεδομένον* ως *τεταγμένον* μαζί και *πόριμον* είναι ατελής, διότι δεν είναι *δεδομένα* μόνον αυτά που είναι τέτοιου είδους. Και εκείνος <που το ορίζει ως> *τεταγμένον* μαζί και *ρητόν* περιέχει ομοίως με ελλιπή τρόπο το [Menge 252] *δεδομένον*. Εκείνος πάλι <που το ορίζει ως> το *γνώριμον μαζ*ί και το *τεταγμένον*, επειδή υπερβαίνει το εύρος του δεδομένου, δεν θα είναι σωστός· διότι ούτε καθετί τέτοιο είναι *δεδομένον*. Επομένως, οι μόνοι που φαίνονται ότι προσέγγισαν την έννοια του *δεδομένου* είναι εκείνοι που υποστήριξαν ότι αυτό είναι συγχρόνως *γνώριμον* και *πόριμον*. Διότι κάθε τέτοιο μπορεί να συλληφθεί από τη νόηση και μόνον αυτό. Και τα δύο αυτά πρέπει να υπάρχουν στους ορισμούς που αποδίδονται με επιστημονική επάρκεια. Κοντά σε αυτούς είναι και εκείνοι που προβαίνουν στην ακόλουθη διατύπωση: *Δεδομένον* είναι εκείνο που μπορούμε να πορισθούμε με βάση εκείνα που ετέθησαν από εμάς στις πρώτες υποθέσεις και αρχές. Ανάμεσα σε αυτούς που προαναφέρθηκαν θα μπορούσε να συμπεριληφθεί και ο Ευκλείδης, καθώς χρησιμοποιεί συνεχώς τον όρο *πορίσασθαι*, αν και παραλείπει το *γνώριμον* ως συνέπεια του *πορίμου*. Θα μπορούσε μάλιστα κάποιος να τον κατηγορήσει δικαιολογημένα ότι δεν όρισε πρώτα το *δεδομένον* στο σύνολό του αλλά κατευθείαν το καθένα από τα είδη του, μολονότι στη γεωμετρική στοιχείωση φαίνεται ότι όρισε τη γραμμή γενικώς πριν από τα είδη της γραμμής και τα υπόλοιπα κατά παρόμοιο τρόπο.

Αφού λοιπόν εξετάστηκε με πιο γενικούς όρους και σύμφωνα με την παρούσα ανάγκη το *δεδομένον*, καλό θα ήταν στη συνέχεια να παρουσιαστεί η χρησιμότητα της σχετικής με αυτό μελέτης. Ανήκει βέβαια και αυτό σε εκείνα τα στοιχεία που αναφέρονται σε κάτι άλλο: Η γνώση του είναι απολύτως αναγκαία για τον λεγόμενο *αναλυόμενον τόπον*. Πόσο μεγάλη σημασία έχει ο *αναλυόμενος τόπος* στις μαθηματικές επιστήμες και στις συγγενείς προς αυτές επιστήμες της οπτικής και της κανονικής, έχει καταδειχτεί σε άλλα σημεία, <όπως> και ότι η ανάλυση είναι [Menge 254] διαδικασία εύρεσης απόδειξης και το πώς συμβάλλει στην εύρεση της απόδειξης των ομοίων και ότι είναι σημαντικότερο να αποκτήσει κάποιος την ικανότητα για ανάλυση από το να γνωρίζει πολλές αποδείξεις των επιμέρους <προτάσεων>.

Καθώς λοιπόν η θεωρία σχετικά με το *δεδομένον* είναι χρήσιμη σε όλες τις τέτοιου είδους επιστήμες, εφόσον βέβαια έχει και εξαιρετική σημασία στην ανάλυση, εύλογα θα μπορούσε να λεχθεί ότι υπάγεται όχι σε μια κάποια επιστήμη, αλλά στη λεγόμενη γενική μαθηματική επιστήμη. Αυτή δε είναι εκείνη που ασχολείται με τις ποσότητες, τα μεγέθη, τους χρόνους και τις ταχύτητες και όλους τους παρόμοιους όρους, όπως ακριβώς και αυτή που μελετά τις σχέσεις, τις αναλογίες και τις μεσότητες κάθε είδους. Γι' αυτή λοιπόν την επιστημονική νοητική σύλληψη των *δεδομένων*, που είναι εξαιρετικά χρήσιμη, ο Ευκλείδης συνέγραψε το βιβλίο των *Δεδομένων*· γι' αυτό και σωστά τον ονόμασαν «στοιχειωτή». Γιατί για κάθε σχεδόν κλάδο της μαθηματικής επιστήμης πρόταξε στοιχεία με τη μορφή εισαγωγής, όπως όλης της γεωμετρίας στα δεκατρία βιβλία και της αστρονομίας στα *Φαινόμενα*, κατά τον ίδιο τρόπο έχει παραδώσει στοιχεία μουσικής και οπτικής. Στο προκείμενο μάλιστα βιβλίο, περί του *δεδομένου*, εξέθεσε την αναλυτική βάση προσέγγισης της συνολικής μελέτης σχετικά με το *δεδομένον*. Εξάλλου, ως ο κατεξοχήν γεωμέτρης, εφάρμοσε τους κοινούς λόγους σχετικά με το *δεδομένον* ειδικά στα μεγέθη, με όποιον τρόπο έκανε και με τους γενικούς λόγους, καθώς μελέτησε αυτούς ιδιαιτέρως στο χώρο των μεγεθών στο πέμπτο βιβλίο της επιπέδου <γεωμετρίας>.

Με κοινά αποδεκτούς λοιπόν όρους έχει λεχθεί τι είναι το *δεδομένον* και σε ποια [Menge 256] επιστήμη αναφέρεται και ότι είναι πολύ χρήσιμη η σχετική με αυτό θεωρία. Ας προστεθεί όμως σε όσα έχουν ειπωθεί και η περιγραφή της σχετικής με αυτό επιστήμης. Θα είναι δε αυτή, όπως είναι φανερό από όσα ελέχθησαν, η νοητική σύλληψη των *δεδομένων* κάθε είδους και όσων σχετίζονται με αυτά. Ιδιαιτέρως δε και ως προς το προκείμενο βιβλίο, ας λεχθεί ότι είναι επιστημονική πραγματεία που περιέχει τα στοιχεία της συνολικής επιστήμης της σχετικής με τα *δεδομένα*. Συνεπώς και αυτή και τα άλλα θα αποκτήσουν τη χρησιμότητά τους με βάση τη σχέση τους προς το *δεδομένον*. Έχει διαιρεθεί μάλιστα το βιβλίο με βάση τα είδη του *δεδομένου* ως εξής: Το πρώτο τμήμα του περιέχει τα *δεδομένα* ως προς το λόγο, το δεύτερο τα <δεδομένα> ως προς τη θέση· μετά από αυτά τα <δεδομένα> ως προς το είδος. Διότι, αν και ήταν ένα είδος τα *δεδομένα* ως προς το μέγεθος, έχουν κατανεμηθεί και αυτά τμηματικά στα άλλα και κυρίως στα *δεδομένα* ως προς το είδος. Άρχισε μάλιστα από τα *δεδομένα* ως προς τον λόγο και τη θέση επειδή τα *δεδομένα* ως προς το είδος αποτελούνται και από αυτά. Η διαίρεση δε του βιβλίου έχει γίνει από αυτόν και με άλλα κριτήρια: Στα γενικά μεγέθη, και στις γραμμές, στις επιφάνειες και στα θεωρήματα για τον κύκλο. Την ίδια κατάταξη χρησιμοποίησε και στον χώρο των όρων, δηλαδή των υποθέσεων του βιβλίου. Εδώ χρησιμοποίησε ως τρόπο διδασκαλίας όχι το συνθετικό αλλά τον αναλυτικό, όπως ο Πάππος επαρκώς απέδειξε στους υπομνηματισμούς του στο βιβλίο.

3.4. *Θέσεις του Μαρίνου οι οποίες προκύπτουν από το κείμενο*

Από το κείμενο του Μαρίνου προκύπτουν τουλάχιστον τρεις ενδιαφέρουσες θέσεις: Ι) Ο Μαρίνος διακρίνει το «δεδομένον» από το «δοθέν», ΙΙ) συνδέει άμεσα τον Στωικό όρο «κατάληψις» με το «δεδομένον» του Ευκλείδη και ΙΙΙ) ορίζει το «δεδομένον» ως το «πόριμον». Ας τις δούμε όμως αναλυτικά με τη βοήθεια συγκεκριμένων χωρίων.

3.4.1. Ο Μαρίνος διακρίνει το «δεδομένον» από το «δοθέν»

Ο Μαρίνος φαίνεται να συνηγορεί στη θέση που έχουμε διατυπώσει, για διάκριση ανάμεσα στους όρους «δοθέν» και «δεδομένον», όταν από τις πρώτες ακόμη γραμμές του κειμένου του αναφέρει:

> Εξάλλου, κάποιοι έχουν θεωρήσει ότι, είναι δεδομένον, ακόμη και εκείνο που αναφέρεται κατά την υπόθεση, από αυτόν που διατυπώνει την πρόταση. Το λένε ακόμη <κάποιοι το δεδομένον> στις πρώτες στοιχειώσεις[11] και ως άλλη έκφραση για το δοθέν <σημείο> και τη δοθείσαν <ευθεία>, δηλαδή όποια τυχόν ευθεία καθορίσει κάποιος και δώσει. Όλα αυτά όμως θέλουν να υποδηλώσουν με κάποια έννοια τη νοητική σύλληψη. (236.1-7)

Η πρώτη από τις τρεις προτάσεις του αποσπάσματος του Μαρίνου, αναφέρεται σε αυτούς που έχουν θεωρήσει ως «δεδομένον» αυτό που δίδεται στην υπόθεση από αυτόν που παρουσιάζει μια μαθηματική πρόταση. Αυτή η θέση δεν φανερώνει την αλήθεια αλλά μόνο κάποια πλευρά της, όπως ισχυρίζεται ο Μαρίνος στην τρίτη πρότασή του. Είναι, όπως θα λέγαμε, ένα μέρος της αλήθειας που τις περισσότερες φορές έχει ως αποτέλεσμα την παρανόηση και το λάθος. Πράγματι, παρακάτω ο Μαρίνος θα επανέλθει και θα δηλώσει κατηγορηματικά ότι πρόκειται για λανθασμένη θέση, που μας απομακρύνει από την έννοια και το σωστό ορισμό του «δεδομένου»:

> Όσοι λοιπόν νομίζουν ότι το δεδομένον είναι εκείνο που δίδεται κατά την υπόθεση (το καθ' υπόθεσιν διδόμενον) από εκείνον που διατυπώνει την πρόταση, απομακρύνονται εντελώς από το αντικείμενο της έρευνάς τους. Διότι όλα τα στοιχεία

[11] Εννοεί τις στοιχειώσεις που προηγήθηκαν αυτής του Ευκλείδη, όπως του Ιπποκράτη, του Λέοντος και του Θεύδιου που περιλαμβάνονται στον κατάλογο του Πρόκλου.

των δεδομένων έχουν συνταχθεί όχι σχετικά με αυτό που δίδεται από την υπόθεση, όπως είναι δυνατόν να διαπιστώσει κάποιος όταν διατρέξει τις μελέτες σχετικά με αυτό <το δεδομένον>. Γι' αυτό πρέπει και εμείς, αφήνοντας στην άκρη την άποψη αυτή, να εξετάσουμε τους λόγους εκείνων που το ορίζουν διαφορετικά. (248.11-18)

Η δεύτερη πρόταση του Μαρίνου ότι το χρησιμοποιούν ακόμη κάποιοι το «δεδομένον» στις πρώτες στοιχειώσεις και ως άλλη έκφραση για το «δοθέν» και τη «δοθείσα», έρχεται σε συνέχεια των προηγούμενων λανθασμένων θεωρήσεων, συμπεριλαμβάνεται σε αυτές και στην ουσία αποτελεί προέκταση της προηγούμενης πρότασης και της θεώρησης που προκύπτει από εκείνη. Γιατί αυτό που «δίδεται» στην υπόθεση των προτάσεων τουλάχιστον στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, δεν είναι άλλο από το «δοθέν». Το ότι η θέση της δεύτερης πρότασης αποτελεί συνέχεια της προηγούμενης, λανθασμένης θεώρησης, επαληθεύεται και από το γεγονός ότι ο Μαρίνος δεν μπαίνει καν στον κόπο να την αντικρούσει και απορρίψει ως αυθύπαρκτη θέση στη συνέχεια του κειμένου του, όπως κάνει με όλες τις άλλες με σχολαστικότητα. Αυτό που τελικά ενδιαφέρει όμως τη δική μας άποψη, για διάκριση ανάμεσα στους δύο όρους «δεδομένον» και «δοθέν», είναι το γεγονός ότι από την εποχή του Μαρίνου και νωρίτερα, κάποιοι λανθασμένα έχουν θεωρήσει τα «δοθέντα» ως τα «δεδομένα», θεώρηση με την οποία και ο Μαρίνος διαφωνεί.

3.4.2. Ο Μαρίνος συνδέει άμεσα το στωικό όρο «κατάληψις» με το «δεδομένον» του Ευκλείδη

Η επίμονη αναφορά του Μαρίνου στον στωικό όρο «κατάληψις» αναδεικνύει την άμεση σχέση του όρου «δεδομένον» με την ενέργεια της νόησης που έχει προηγηθεί πριν κάτι χαρακτηριστεί ως έγκυρο ερευνητικό αποτέλεσμα δηλαδή επιστημονική γνώση.

Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι στο κείμενό του Μαρίνου ο όρος «κατάληψις» εμφανίζεται στις διάφορες μορφές του 24 φορές. Από τις πρώτες γραμμές της μελέτης του, στη δεύτερη παράγραφο, παίρνει θέση επισημαίνοντας ότι όλοι όσοι προσπάθησαν να δώσουν κάποιο ορισμό για το «δεδομένον» έχουν κάτι κοινό. Δίνουν την εντύπωση ότι το κάνουν έχοντας ξεκινήσει από μια και την αυτή έννοια: «… καταληπτὸν γάρ τι τὸ δεδομένον εἶναι ὑπέλαβον» (234.12-13), δηλαδή «θεώρησαν ότι το δεδομένον είναι κάτι που μπορεί να συλλάβει η νόηση». Λίγο παρακάτω, μετά από μια συνοπτική αναφορά όλων των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους έχει οριστεί κατά καιρούς το «δεδομένον» δηλώνει: «ταῦτα δὲ πάντα κατάληψίν τινα βούλεται σημαίνειν» (236.6-7), δηλαδή «όλα αυτά όμως θέλουν να υποδηλώσουν με κάποια έννοια τη νοητική σύλληψη.»

Ακόμη, μετά από τη διατύπωση από τον ίδιο του ορισμού του «δεδομένου» ως το «πόριμον» για τους μονολεκτικούς ορισμούς, το «καταληπτόν» αποτελεί το μόνο κριτήριό του για τον έλεγχο και την απόρριψη των υπόλοιπων μονολεκτικών ορισμών:

> Όλοι οι υπόλοιποι είναι ατελείς. Διότι ούτε εκείνος που το ταυτίζει με το τεταγμένον είναι επαρκής ως προς την έκταση του δεδομένου, επειδή ούτε κάθε τεταγμένον ούτε μόνον το τεταγμένον μπορεί να συλληφθεί από τη νόηση (*καταληπτόν*), αλλά και μερικά από τα άτακτα, όπως έχει δειχθεί. Ούτε εκείνος ο ορισμός που το ορίζει ως το γνώριμον είναι επαρκής, διότι δεν μπορεί κάθε τέτοιο <γνώριμο>, να συλληφθεί από τη νόηση (*καταληπτόν*), έστω κι αν μόνο αυτό <μπορεί να συλληφθεί από τη νόηση>· διότι το άγνωστον δε θα μπορούσε να συλληφθεί από τη νόηση (*καταληπτόν*). Ούτε όμως ο ορισμός που το παρουσιάζει ως ρητόν θα είναι πλήρης, διότι ούτε αυτό μόνον μπορεί να το συλλάβει η νόηση (*καταληπτόν*), εφόσον και κάποια από τα άλογα <μπορεί>. Ίσως όμως ούτε καθένα το οποίο είναι ρητόν να μην μπορεί να συλλάβει η νόηση (*καταληπτόν*), όπως αυτό έχει ορισθεί προηγουμένως. (250.7-18)

Τελικά ο Μαρίνος φτάνει να ταυτίσει την έκταση του «δεδομένον» (ως «πόριμον» πλέον) με αυτήν του «καταληπτόν», καθώς, έχοντας απορρίψει τους υπόλοιπους μονολεκτικούς ορισμούς, αναφέρει: «Λείπεται δὴ ἐν τοῖς ὀνομαστικῶς ἀποδεδομένοις τὸ πόριμον, ὅπερ δοκεῖ μάλιστα τὴν κατάληψιν ἐμφαίνειν» (250.18-20), δηλαδή «απομένει βέβαια ανάμεσα σε αυτούς <τους ορισμούς> που αποδίδονται ονομαστικά, το πόριμον, το οποίο φαίνεται ότι περισσότερο από όλα φανερώνει τη νοητική σύλληψη.» Για να καταλήξει: «Καὶ γὰρ πᾶν τὸ πόριμον καταληπτὸν καὶ μόνον» (250.20-21) δηλαδή «πράγματι, κάθε πόριμον μπορεί να συλληφθεί από τη νόηση και μόνον αυτό.» Δήλωση που θα επαναλάβει μετά την κρίση του (γνώριμον άμα και πόριμον) ως του μόνου σωστού και πλήρους σύνθετου ορισμού: «τὸ γὰρ τοιοῦτο πᾶν καταληπτὸν καὶ μόνον» (252.6)

Το ερώτημα βέβαια που εύλογα μας απασχόλησε ήταν το πώς θα έπρεπε να γίνουν αντιληπτοί από εμάς και να αποδοθούν οι όροι «κατάληψις», «καταληπτόν», «καταληφθέν» που προέρχονται από την ορολογία των Στωικών. Για την απάντησή του αναζητήσαμε τις απόψεις κάποιων ειδικών στη στωική ορολογία.

Η αναζήτησή μας στο λήμμα «κατάληψις» της § 4. με τίτλο: «*Κατάληψις, επιστήμη, τέχνη*» του δεύτερου τόμου του έργου *Stoicorum Veterum Fragmenta*, του Ioannes Von Arnim,[12] μας έδωσε τα εξής αποσπάσματα:

90 Sextus *Adv. Math* 7.151.1-7.153.1: τρία γὰρ εἶναί φασιν ἐκεῖνοι τὰ συζυγοῦντα ἀλλήλοις, ἐπιστήμην καὶ δόξαν καὶ τὴν ἐν μεθορίῳ τούτων τεταγμένην κατάληψιν, ὧν ἐπιστήμην μὲν εἶναι τὴν ἀσφαλῆ καὶ βεβαίαν καὶ ἀμετάθετον ὑπὸ λόγου κατάληψιν, δόξαν δὲ τὴν ἀσθενῆ καὶ ψευδῆ συγκατάθεσιν, κατάληψιν δὲ τὴν μεταξὺ τούτων, ἥτις ἐστὶ καταληπτικῆς φαντασίας συγκατάθεσις· καταληπτικὴ δὲ φαντασία κατὰ τούτους ἐτύγχανεν ἡ ἀληθὴς καὶ τοιαύτη οἵα οὐκ ἂν γένοιτο ψευδής. … τὴν δὲ κατάληψιν … ταύτην κριτήριον ἀληθείας καθεστάναι.

Στο παραπάνω απόσπασμα ο Σέξτος Εμπειρικός, στο έργο του *Προς μαθηματικούς*, αναφέρει ότι για τους Στωικούς η «κατάληψις» βρίσκεται στα σύνορα της «επιστήμης» και της «δόξας». Ορίζουν δε ως «επιστήμην» την ασφαλή και βέβαιη και αμετάβλητη σύλληψη από τη νόηση, ενώ ως «δόξα» την όχι ισχυρή, ανάξια της νόησης και απατηλή συγκατάθεση. Ανάμεσά τους τοποθετούν την «κατάληψιν» ως συγκατάθεση της αληθινής φαντασίας (*καταληπτικής*) που είναι τέτοια που δεν θα γίνει ποτέ ψευδής. Καταλήγει αναφέροντας ότι η «κατάληψις» έχει επικρατήσει για τους Στωικούς ως κριτήριο της αλήθειας. Τελικά φαίνεται ότι η «κατάληψις» για τους Στωικούς είναι η βάσανος που είναι απαραίτητη για να περάσει κάτι από το επίπεδο της απλής γνώμης ή εικασίας στο επίπεδο της επιστημονικής γνώσης. Θα λέγαμε ότι είναι η νοητική επεξεργασία που προδίδει την εγκυρότητα σε μια νοητική σύλληψη.

Το δεύτερο απόσπασμα προέρχεται πάλι από το ίδιο έργο του Σέξτου Εμπειρικού:

91 Sextus *Adv. Math* 8.397.1-8.398.2: ἔστι μὲν οὖν ἡ κατάληψις, ὡς ἔστι παρ' αὐτῶν ἀκούειν, καταληπτικῆς φαντασίας συγκατάθεσις, ἥτις διπλοῦν ἔοικεν εἶναι πρᾶγμα, καὶ τὸ μέν τι ἔχειν ἀκούσιον, τὸ δὲ ἑκούσιον καὶ ἐπὶ τῇ ἡμετέρᾳ κρίσει κείμενον. τὸ μὲν γὰρ φαντασιωθῆναι ἀβούλητον ἦν, … τὸ δὲ συγκαταθέσθαι τού-

[12] Ioannes Von Arnim (ed.), *Stoicorum Veterum Fragmenta,* vol. II, Chrysippi Fragmenta Logica et Physica, Lipsiae et Berolini, 1923.

τῳ τῷ κινήματι ἔκειτο ἐπὶ τῷ παραδεχομένῳ τὴν φαντασίαν. ὥστε ἡ κατάληψις προηγουμένην ἔχει τὴν καταληπτικὴν φαντασίαν, ἧς ἐστι συγκατάθεσις.

Στο δεύτερο απόσπασμα ο Σέξτος επανέρχεται και προσδιορίζει καλύτερα τι σημαίνει «συγκατάθεση της καταληπτικής φαντασίας» που ανέφερε προηγουμένως ως ορισμό των Στωικών για τον όρο «κατάληψις», λέγοντας ότι φαίνεται να είναι διπλό πράγμα, δηλαδή να έχει δύο συστατικά: Το μεν ένα από τα δύο έχει κάτι το ακούσιο ενώ το άλλο κάτι το εκούσιο που βρίσκεται στη δική μας κρίση. Γιατί το μεν «φαντασιωθήναι», τη δύναμη δηλαδή του νου να συλλάβει κάτι αναφέρει ότι φανέρωνε κάτι ανεξάρτητο της θέλησης· αλλά το να συγκατατεθεί κάποιος σε αυτήν την κίνηση εξαρτιόταν από αυτόν που παραδεχόταν τη νοητική σύλληψη. Καταλήγει λέγοντας ότι η «κατάληψις» ακολουθεί χρονικά την «καταληπτική φαντασία», της οποίας είναι η συγκατάθεση. Παρουσιάζεται τελικά δηλαδή όλη η ενέργεια της νόησης σε δύο διαδοχικά μέρη. Το πρώτο είναι η νοητική σύλληψη που είναι ανεξάρτητη της θέλησης, και ονομάζεται «καταληπτική φαντασία», ίσως αυτό που σήμερα θα ονομάζαμε ενόραση. Το δεύτερο μέρος είναι η «συγκατάθεση» στο πρώτο· εξαρτάται από την κρίση του ερευνητή, με την έννοια ότι αυτός θα αποφασίσει μέσα από νοητική επεξεργασία για το αν μπορεί η προηγούμενη νοητική σύλληψη να αποκτήσει εγκυρότητα να γίνει δηλαδή «ασφαλής», «βεβαία» και «αμετάπτωτος» «κατάληψις» της νόησης, που σημαίνει πλέον επιστημονική γνώση.

Στην ίδια κατεύθυνση ο Γαληνός ορίζει την επιστήμη με τη βοήθεια της «κατάληψις»:

93 Galenus *Definitiones medicae* 19.350.3-6: Ἐπιστήμη ἐστὶ κατάληψις ἀσφαλὴς καὶ ἀμετάπτωτος ὑπὸ λόγου. δυνατὸν δὲ καὶ οὕτως ὁρίσασθαι. ἐπιστήμη ἐστὶν ἕξις ἀμετάπτωτος ἐκ φαντασιῶν δόξαν ἀμέμπτως ὑπὸ λόγου παρεχομένη.

Ορίζει δηλαδή και ο Γαληνός την επιστήμη ως την ασφαλή και βεβαία «κατάληψη» η οποία παρέχεται από τη λογική σκέψη.

Επίσης οι Στωικοί, σύμφωνα με τον Διογένης Λαέρτιο, συνδέουν άμεσα την επιστήμη με την «κατάληψη» και την τελευταία με τον ορθό λόγο:

Diogenes Laert. 7.46.1-3: τῆς δὲ φαντασίας τὴν μὲν καταληπτικήν, τὴν δὲ ἀκατάληπτον· καταληπτικὴν μέν, ἣν κριτήριον εἶναι τῶν πραγμάτων φασί, …

7.46.7-7.47.5: Αὐτὴν δὲ τὴν διαλεκτικὴν ἀναγκαίαν εἶναι καὶ ἀρετὴν ἐν εἴδει περιέχουσαν ἀρετάς· τήν τ' ἀπροπτωσίαν ἐπιστήμην τοῦ πότε δεῖ συγκατατίθεσθαι καὶ μή· τὴν δ’ ἀνεικαιότητα ἰσχυρὸν λόγον πρὸς τὸ εἰκός, ὥστε μὴ ἐνδιδόναι αὐτῷ· τὴν δ’ ἀνελεγξίαν ἰσχὺν ἐν λόγῳ, ὥστε μὴ ἀπάγεσθαι ὑπ’ αὐτοῦ εἰς τὸ ἀντικείμενον· τὴν δ’ ἀματαιότητα ἕξιν ἀναφέρουσαν τὰς φαντασίας ἐπὶ τὸν ὀρθὸν λόγον. αὐτήν τε τὴν ἐπιστήμην φασὶν ἢ κατάληψιν ἀσφαλῆ ἢ ἕξιν ἐν φαντασιῶν προσδέξει ἀμετάπτωτον ὑπὸ λόγου.

Έχοντας υπόψη όλα τα παραπάνω όταν στο κείμενο του Μαρίνου συναντήσαμε επανειλημμένα τον όρο «καταληπτόν» τον αποδώσαμε στα Νέα Ελληνικά ως «αυτό που μπορεί να συλλάβει η νόηση»[13].

Τελικά θεωρούμε ότι η επίμονη αναφορά του Μαρίνου στους όρους «καταληπτόν», «κατάληψις» και «καταληφθέν» έχει στόχο να αναδείξει την άμεση σύνδεση της έννοιας του «δεδομένου» στη γεωμετρική ανάλυση με την ενέργεια της νόησης του γεωμέτρη-ερευνητή, η οποία είναι υπεύθυνη για να δώσει βέβαια και ασφαλή συμπεράσματα τα οποία θα χαρακτηρίζονται πλέον επιστημονικά. Άρα το αν είναι κάτι «δεδομένον» εξαρτάται από το κατά πόσο μπορεί αυτό να αποτελέσει αντικείμενο της νόησης του ερευνητή, δηλαδή να το συλλάβει και επεξεργαστεί η νόησή του. Με άλλα λόγια, πρέπει να υπάρξει η ενέργεια της νόησης (*κατάληψις*) στις δύο διαστάσεις της – ακούσια σύλληψη και εκούσια συγκατάθεση ως αποτέλεσμα κρίσης – για να κατοχυρωθεί κάτι ως «δεδομένον».

Ο Μαρίνος όμως δεν είναι ο μόνος που αντιλαμβάνεται το «δεδομένον» σε σχέση με την «κατάληψιν». Έχει προηγηθεί ο Πάππος, ο οποίος στο έβδομο βιβλίο της *Συναγωγής*, που αναφέρεται στη γεωμετρική ανάλυση, γράφει: «… ἐν δὲ τῇ συνθέσει ἐξ ὑποστροφῆς τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὕστατον ὑποστησάμενοι γεγονὸς ἤδη» (634.19-20). Αναφέρεται δηλαδή σε αυτό που «κατελήφθη» τελευταίο στο αναλυτικό στάδιο της γεωμετρικής ανάλυσης πριν αρχίσει η σύνθεση. Αυτό όμως, για κάποιον που έχει μελετήσει τις γεωμετρικές αναλύσεις του Πάππου, δεν είναι άλλο από το «δεδομένον», με το οποίο καταλήγει το δεύτερο και τελευταίο βήμα της αναλυτικής διαδικασίας (resolution)[14].

---

[13] Με τον ίδιο τρόπο ο Σκουτερόπουλος (1991, 184-186) αποδίδει την έκφραση του Σέξτου από το *Προς μαθηματικούς*, VII 65.6-8: «...δεύτερον ὅτι εἰ καὶ ἔστιν, ἀκατάληπτον ἀνθρώπῳ, τρίτον ὅτι εἰ καὶ καταληπτόν ...» ως: «δεύτερον ότι και αν έχει υπόσταση είναι αδύνατο στον άνθρωπο να το συλλάβει με τη νόηση· τρίτον ότι και αν το συλλάβει με τη νόηση…»

[14] Οι Hintikka & Remes (1974, 77), θεωρούν επίσης ότι για τον Πάππο «καταληφθέν» = «δεδομένον», ενώ για τον όρο «καταληφθέν» αναφέρουν (1974, 91), ότι προέρχεται από τη Στωική ορολογία, αν και τον χρησιμοποιούσαν και οι αντίπαλοι των Στωικών.

3.4.3. Το «δεδομένον» ορίζεται από το Μαρίνο ως το «πόριμον» αλλά πώς ορίζεται το «πόριμον»;

Το σημαντικότερο στοιχείο του κειμένου του Μαρίνου, είναι κατά την άποψή μας ο μοναδικός ορισμός του «δεδομένου» που φτάνει σε μας από την αρχαιότητα:

> ἔστι δὲ τοῦ προκειμένου <δηλ. του δεδομένου> τοιοῦτος <τέλειος και ορθώς αποδιδόμενος ορισμός> ἐν μὲν τοῖς ἁπλούστερον εἰρημένοις ὁρισμοῖς ὁ τὸ πόριμον ὁρισάμενος, ἐν δὲ τοῖς συμπεπλεγμένοις ὁ τὸ γνώριμον ἅμα καὶ πόριμον (250.4-7).

Στον ορισμό αυτό ο Μαρίνος δεν φτάνει αυθαίρετα αλλά αφού έχει ήδη παρουσιάσει, κρίνει και τελικά απορρίψει ως ανεπαρκείς κατά τη γνώμη του τους υπόλοιπους ορισμούς που κατά καιρούς έχουν υπάρξει. Προκειμένου όμως να κατανοήσουμε αυτόν τον «τέλειο» και «ορθώς αποδιδόμενο» ορισμό του «δεδομένου», όπως τον χαρακτηρίζει ο Μαρίνος, είναι απαραίτητο να ανατρέξουμε στο ορισμό του «πόριμον» που έχει δώσει ο ίδιος προηγουμένως: «Πόριμον δέ ἐστιν, ὃ δυνατοί ἐσμεν ἤδη ποιῆσαι καὶ κατασκευάσαι, τουτέστιν εἰς ἐπίνοιαν ἀγαγεῖν» (240.9-10). Αναφέρει δηλαδή ότι «πόριμον» είναι αυτό το οποίο είμαστε ήδη ικανοί να «ποιήσουμε» και να «κατασκευάσουμε» που σημαίνει να φέρουμε «εις επίνοιαν». Ορισμός ο οποίος δεν είναι εύκολα κατανοητός σε μας λόγω των όρων που περιέχει όπως είναι το «ποιήσαι» και το «επίνοια».

«Ποιήσεις» κατά τον Αριστοτέλη[15] λέγονται οι υπόλοιπες γενέσεις εκτός των φυσικών και προέρχονται: «ἢ ἀπὸ τέχνης ἢ ἀπὸ δυνάμεως ἢ ἀπὸ διανοίας». Ως παράδειγμα αναφέρει το πώς από το είδος «υγεία» μέσω της νόησης του γιατρού φτάνουμε στη δυνατότητα της «ποίησης» της «υγείας». Είναι χαρακτηριστικές οι φράσεις: «ἡ δὲ ὑγίεια ὁ ἐν τῇ ψυχῇ λόγος καὶ ἡ ἐπιστήμη. γίγνεται δὲ τὸ ὑγιὲς νοήσαντος οὕτως». Κατόπιν αρχίζει να περιγράφει τη νοητική ενέργεια του γιατρού από την «υγεία» που αφορά τη νόηση μέχρι την «ποίηση»: «καὶ οὕτως ἀεὶ νοεῖ, ἕως ἂν ἀγάγῃ εἰς τοῦτο ὃ αὐτὸς δύναται ἔσχατον ποιεῖν. εἶτα ἤδη ἡ ἀπὸ τούτου κίνησις ποίησις καλεῖται». Συνοψίζοντας αναφέρει για τις διαδοχικές διαδικασίες της «νόησης» και της «ποίησης»: «Τῶν δὴ γενέσεων καὶ κινήσεων ἡ μὲν νόησις καλεῖται ἡ δὲ

[15] *Μετά τα Φυσικά* Ζ 6, 1032a25-b17.

ποίησις, ἡ μὲν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ εἴδους νόησις ἡ δ᾽ ἀπὸ τοῦ τελευταίου τῆς νοήσεως ποίησις». Αντίστοιχη πορεία ανάμεσα στη «νόηση» και την «ποίηση», περιγράφεται και αλλού από τον Αριστοτέλη,[16] όπου εκτός από την ιατρική τα παραδείγματα αφορούν και τα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα η φράση από τα *Ηθικά Ευδήμεια* αναφέρει: «ὥσπερ γὰρ ταῖς θεωρητικαῖς αἱ ὑποθέσεις ἀρχαί, οὕτω καὶ ταῖς ποιητικαῖς τὸ τέλος ἀρχὴ καὶ ὑπόθεσις. ἐπειδὴ δεῖ τόδε ὑγιαίνειν, ἀνάγκη τοδὶ ὑπάρξαι, εἰ ἔσται ἐκεῖνο, ὥσπερ ἐκεῖ, εἰ ἔστι τὸ τρίγωνον δύο ὀρθαί, ἀνάγκη τοδὶ εἶναι. τῆς μὲν οὖν νοήσεως ἀρχὴ τὸ τέλος, τῆς δὲ πράξεως ἡ τῆς νοήσεως τελευτή» (1227b28-33) ενώ η φράση από τα *Ηθικά Νικομάχεια*, που αναφέρεται στην «εύρεση» και την γεωμετρική «ανάλυση» αναφέρει: «τὸ ἔσχατον ἐν τῇ ἀναλύσει πρῶτον εἶναι ἐν τῇ γενέσει» (1112b23-24). Εδώ εμφανίζεται η «ανάλυση» να αντιστοιχεί με τη «νόηση», τη νοητική ενέργεια δηλαδή του γεωμέτρη-ερευνητή που προηγείται της «ποιήσεως». Αντιστοιχία που έχουμε επισημάνει προηγουμένως με αφορμή το κείμενο του Μαρίνου, το οποίο συνέδεσε την έννοια του «δεδομένου» που ανήκει στην ανάλυση με το «καταληπτόν» και την ενέργεια της νόησης (*νου*) του γεωμέτρη-ερευνητή.

Ο Mahoney (1968, 345), αντιλαμβάνεται επίσης το «πόριμον», μέσα από τα λόγια του Μαρίνου, ως «κάτι που μπορεί, και έχει αποκτηθεί μαθηματικά». Σε προηγούμενο σημείο είχε δηλώσει πάλι ερμηνεύοντας τον Μαρίνο: «Το ρήμα *πορίζειν*, η βασική σημασία του οποίου είναι να ‘αποκτήσω, να εφοδιάσω, να προμηθεύσω (με έναν απόηχο επινοητικότητας)’». Και παρακάτω, αναφερόμενος στο «πόριμον», μεταφράζει τον Μαρίνο (240.22-24): «Η συζήτηση εδώ αφορά αυτό το οποίο έχει ήδη αποκτηθεί, αυτό το οποίο ορθά αποκαλείται *πόριμον*». Με άλλα λόγια ο Mahoney θεωρεί ως «πόριμον» αυτό που έχει ήδη αποκτηθεί (με έναν απόηχο επινοητικότητας) και μπορεί και πάλι να αποκτηθεί.

Το σημαντικό στοιχείο τελικά που αναδεικνύεται από την πρώτη πρόταση του ορισμού του Μαρίνου για το «πόριμον», με βάση όλη την παραπάνω συζήτηση, είναι ότι για να είμαστε ικανοί «ποιῆσαι καὶ κατασκευάσαι» κάτι, πρέπει να έχει

[16] Σύμφωνα με τον Ross (1924, τόμ. II, 183): «Αυτή η εκτίμηση της παραγωγής μπορεί να συγκριθεί με την εκτίμηση της ηθικής διαβούλευσης και ενέργειας, στην οποία «τὸ ἔσχατον ἐν τῇ ἀναλύσει» λέγεται «πρῶτον εἶναι ἐν τῇ γενέσει.» (*Ηθ. Νικ.* 1112b23). Ακόμη πιο κοντά είναι το χωρίο *Ηθ. Ευδ.* 1227b28-33.»

προηγηθεί, να έχει υπάρξει η ενέργεια της «νόησης» η οποία θα μας καθοδηγήσει σε αυτό. Με άλλα λόγια, μπορούμε να προβούμε σε «ποίηση και κατασκευή», επειδή έχει προηγηθεί η διαδικασία της νόησης, η οποία έχει επεξεργαστεί και τελικά κρίνει τη λογική δυνατότητα να χαρακτηριστεί κάτι ως «πόριμον» ή «δεδομένον».[17]

Αυτή ακριβώς τη θέση ενισχύει και η δεύτερη, επεξηγηματική της πρώτης, πρόταση του ορισμού του Μαρίνου για το «πόριμον», η οποία προφανώς είναι ισοδύναμη με την πρώτη, γιατί διατυπώνει με άλλα λόγια τον ορισμό, αφού εισάγεται με το «τουτέστιν» που είναι ισχυρό και λειτουργεί ως ταύτιση. Θα μπορούσαμε δηλαδή να διαβάσουμε πάλι την πρόταση ως: «πόριμον δέ ἐστιν, ὃ δυνατοί ἐσμεν ἤδη … εἰς ἐπίνοιαν ἀγαγεῖν».

Ο όρος «επίνοια» είναι στωικός. Η αναζήτησή μας στο λήμμα «επίνοια» της § 3 με τίτλο «Περί εννοημάτων», του έργου *Stoicorum Veterum Fragmenta*, του I. Von Arnim (1921-1923, τόμ. II, 29), μας έδωσε τον εξής ορισμό ο οποίος συμπεριλαμβάνεται στο έργο του Γαληνού *Definitiones medicae*: «Ἐπίνοιά ἐστιν ἐναποκειμένη νόησις, νόησις δὲ λογικὴ φαντασία» (19.381.12-13) Νόηση ή ενέργεια του νου δηλαδή, η οποία έχει υπάρξει και βρίσκεται αποθησαυρισμένη μέσα στο μυαλό κάποιου. Κατά συνέπεια σύμφωνα με την ισοδύναμη δεύτερη πρόταση του ορισμού του Μαρίνου, «πόριμον» είναι αυτό το οποίο είμαστε ήδη σε θέση να το οδηγήσουμε προς αυτό που έχει επεξεργαστεί και υπάρχει στη νόησή μας. Αναδεικνύεται πάλι επομένως η σπουδαιότητα της προηγηθείσας ενέργειας της νόησης, εξαιτίας της οποίας μπορούμε να προχωρήσουμε στα επόμενα βήματά μας με λογική βεβαιότητα.

Συνοψίζοντας θα λέγαμε ότι ο Μαρίνος μέσα από τον ορισμό του «πόριμου» τονίζει τη σημασία της διαδικασίας της νόησης του γεωμέτρη-ερευνητή, η οποία έχει υπάρξει προκειμένου να χαρακτηριστεί κάτι ως «πόριμον» («δεδομένον» κατά τον Ευκλείδη, «καταληφθέν» κατά τον Πάππο), να αποκτήσει δηλαδή λογική βεβαιότητα.

[17] Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι στη γεωμετρική ανάλυση του Πάππου, που έχει υπόψη του ο Μαρίνος, τα δύο τμήματα της σύνθεσης που ακολουθούν και ονομάζονται «κατασκευή» και «απόδειξη», τελειώνουν με τις εκφράσεις «ποιούσι το πρόβλημα» και «ποιεί το πρόβλημα» αντίστοιχα.

Συμπέρασμα

Ο χαρακτηρισμός του κειμένου του Μαρίνου ως σχόλια ή προλεγόμενα μάλλον αδικεί τη δουλειά του. Δεν είναι απλά σχόλια κάποιου που προλογίζει ένα σημαντικό έργο, όπως είναι τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη. Είναι μια επιστημονική, λογική κατασκευή ενός φιλοσόφου της αρχαιότητας που αφορά την εννοιολογική διασάφηση ενός σημαντικού όρου, όπως το «δεδομένον» για τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, την οποία θα μπορούσαμε να ονομάσουμε μελέτη. Μια μελέτη, η οποία ως προς τον τρόπο γραφής, δηλαδή τη δομή και την επιχειρηματολογία, δεν θα είχε πολλά να ζηλέψει από μια αντίστοιχη σημερινή. Την αξία της όμως σε σχέση με το περιεχόμενό της, δηλαδή το κατά πόσο αυτή η μελέτη είναι επαρκής ή όχι για την έννοια του «δεδομένου» που πραγματεύεται, και αν ο Μαρίνος δεν την έχει πλήρως κατανοήσει, θα μπορέσουμε να την κρίνουμε και να την αξιολογήσουμε, μόνο αφού έχουμε εμείς οι ίδιοι κατανοήσει το σημασιολογικό περιεχόμενο και τη λειτουργία του όρου τουλάχιστον στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, αν όχι στο σύνολο της γεωμετρικής ανάλυσης.

Είναι επίσης φανερό ότι οι τόσο λεπτές εννοιολογικές αποχρώσεις που έχει χρησιμοποιήσει στη μελέτη του ο Μαρίνος απαιτούν διακρίσεις που μόνο ένας φιλόσοφος της αρχαιότητας, ο οποίος γνωρίζει τη λειτουργία των όρων στο πεδίο των Μαθηματικών αλλά και τις όποιες φιλοσοφικές δεσμεύσεις ή προεκτάσεις τους, θα μπορούσε να κάνει. Ένας γνώστης των απόψεων του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη, που έχουν επηρεάσει καθοριστικά την επιστήμη και τη φιλοσοφία της εποχής που γράφτηκαν τα *Δεδομένα*, ο οποίος όχι μόνο αντιλαμβάνεται πώς ο όρος «δεδομένον» λειτουργεί στο έργο του Ευκλείδη, αλλά έχει στη διάθεσή του πολύ περισσότερα κείμενα από αυτά που φτάνουν σε εμάς σήμερα και έχει διαβάσει, όπως ο ίδιος αναφέρει, πέρα από το έργο του Πάππου για την ανάλυση και ένα κείμενο που δεν έφτασε σε εμάς, τους υπομνηματισμούς του Πάππου πάνω στα *Δεδομένα*. Με βάση αυτά που προηγήθηκαν θεωρούμε ότι θα πρέπει τουλάχιστον να σκύψουμε πάνω στη δουλειά του Μαρίνου με μεγαλύτερη προσοχή.

Στο κείμενο του Μαρίνου τέλος, περιλαμβάνεται ο μοναδικός ορισμός του «δεδομένου» που φτάνει σε εμάς από την αρχαιότητα. Ενός όρου που είναι φανερό ότι η κατανόησή του προκαλούσε προβλήματα από την αρχαιότητα και συνεχίζει να προκαλεί ακόμη και σήμερα στους μελετητές των Ελληνικών μαθηματικών. Το γεγονός της ύπαρξης αυτού του ορισμού είναι από μόνο του αρκετά σημαντικό, αλλά μπορεί να γίνει ακόμα περισσότερο αν συνδυαστεί με την καλύτερη κατανόηση τόσο του πρώτου βιβλίου της ανάλυσης, των *Δεδομένων* του Ευκλείδη όσο και της ίδιας της μεθόδου της γεωμετρικής ανάλυσης στα Ελληνικά μαθηματικά όπως σκοπεύουμε να δείξουμε σε επόμενα κεφάλαια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Φιλοσοφική διάκριση «δοθέντος» – «δεδομένου»

Ο «τυχαίος – ενδεχομενικός» χαρακτήρας του «δοθέντος» και ο «βεβαιωτικός» χαρακτήρας του «δεδομένου»

Μέχρι τώρα έχουμε παρατηρήσει τη διάκριση ανάμεσα στο «δοθέν» και το «δεδομένον» σε διάφορα κείμενα των ελληνικών Μαθηματικών, έχουμε αναλύσει τη γλωσσική τους διάκριση και έχουμε αναφερθεί στη διαφοροποίησή τους σύμφωνα με την άποψη του Μαρίνου[1]. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την ανάλυση της φιλοσοφικής διάκρισης των όρων «δοθέν» και «δεδομένον» και τον τρόπο που αυτή φαίνεται να λειτουργεί στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη καθώς και στις αναλύσεις γεωμετρικών προβλημάτων του 7^{ου} βιβλίου της *Συναγωγής* του Πάππου.

4.1. *Οι ορισμοί του «δοθέντος» και του «δεδομένου» που διαθέτουμε*

Η διάκριση «δεδομένον» – «δοθέν», όπως θα φανεί από τους ορισμούς των δύο όρων που διασώζονται, συνδέεται στα αρχαία κείμενα εννοιολογικά με τη φιλοσοφική διάκριση «δυνατόν» – «ενδεχόμενον», η οποία, όπως θα δούμε, προσδίδει με τη σειρά της στο «δοθέν» τον χαρακτήρα του *όχι αδύνατου και ταυτόχρονα τυχαίου-ενδεχομένου*, ενώ στο «δεδομένον» τον χαρακτήρα του *όχι αδυνάτου αλλά, υπό ορισμένες συνθήκες, λογικά αναγκαίου*.

Ας δούμε κατ' αρχάς πώς συνδέονται τα δύο ζεύγη των όρων στα ίδια τα κείμενα. Ο ίδιος ο Ευκλείδης στα *Δεδομένα* δεν δίνει ορισμό του «δεδομένον». Όμως, στους δύο πρώτους ορισμούς του των ειδών του «δεδομένον» στα *Δεδομένα*, συνδέει ευθέως τα εν λόγω είδη με την έννοια της «δυνατότητας». Πράγματι αναφέρει:

a. Δεδομένα τῷ μεγέθει λέγεται χωρία τε καὶ γραμμαὶ καὶ γωνίαι, οἷς ***δυνάμεθα*** ἴσα πορίσασθαι.
b. Λόγος δεδόσθαι λέγεται, ᾧ ***δυνάμεθα*** τὸν αὐτὸν πορίσασθαι.

[1] Του οποίου η ανάλυση αφορά βέβαια κατά κύριο λόγο το «δεδομένον» ενώ αναφέρεται μόνο παρεμπιπτόντως στο «δοθέν».

Ο μόνος ορισμός που διασώζεται για το «δεδομένον» είναι του Μαρίνου. Σύμφωνα με αυτόν «δεδομένον» είναι για μεν τους μονολεκτικούς ορισμούς το «πόριμον» για δε τους σύνθετους ορισμούς το «γνώριμον» και ταυτόχρονα «πόριμον» (250, 4-7)[2]. Το «πόριμον» με τη σειρά του ορίζεται από τον Μαρίνο ως αυτό: «ὃ δυνατοί ἐσμεν ἤδη ποιῆσαι καὶ κατασκευάσαι» (240, 9-10). Όπως παρατηρούμε λοιπόν, κοινό στοιχείο των παραπάνω ορισμών, που αναφέρονται στο «δεδομένον» και στα είδη του, είναι η «δυνατότητα»[3].

Για το «δοθέν», εξ άλλου, ο Μαρίνος δεν παραθέτει κάποιον ορισμό, ωστόσο μας δίνει την ακόλουθη χρήσιμη επεξήγηση του όρου: «τὴν δοθεῖσαν, τουτέστιν ἡλίκην ἄν τις ἀφορίσῃ καὶ δῷ εὐθεῖαν.» (236, 4-6) δηλαδή «την δοθείσα, όσο τυχόν μεγάλη ευθεία καθορίσει κάποιος και δώσει». Η επεξήγηση αυτή του Μαρίνου συνδέει το «δοθέν» με το τυχαίο. Έναν ορισμό του «δοθέντος» βρίσκουμε στο 7ο βιβλίο της *Συναγωγής* του Πάππου: «ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατὸν ᾖ καὶ ποριστόν, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθέν»[4]. Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, «δοθέν» λέγεται από τους μαθηματικούς αυτό που είναι «δυνατόν» και «ποριστόν». Λιγότερο κατανοητός από τους δύο είναι ο όρος «ποριστόν». Σε αυτό το σημείο η βοήθεια του Μαρίνου είναι πολύτιμη. Αναφέρει: «Διότι, αυτό που δεν είναι ακόμη σε αυτήν την κατάσταση, αλλά *ενδέχεται* να πορισθεί, το ονομάζουν ξεχωριστά ποριστόν» (240, 24-26)[5]. Η συσχέτιση από τον Πάππο του «δοθέντος» με το «ποριστόν» και αυτού του τελευταίου (σύμφωνα με τον Μαρίνο) με το «ενδεχόμενον», μας οδηγεί στη συσχέτιση του «δοθέντος»[6] με το τυχαίο-«ενδεχόμενον». Από όλα τα παραπάνω χωρία

---

2 ἔστι δὲ τοῦ προκειμένου τοιοῦτος ἐν μὲν τοῖς ἁπλούστερον εἰρημένοις ὁρισμοῖς ὁ τὸ πόριμον ὁρισάμενος, ἐν δὲ τοῖς συμπεπλεγμένοις ὁ τὸ γνώριμον ἅμα καὶ πόριμον·

3 Η «δυνατότητα» ως έννοια διαπερνά τελικά το σύνολο των *Δεδομένων* του Ευκλείδη, αφού αποτελεί συστατικό στοιχείο των πρώτων ορισμών που είναι θεμελιώδεις για ολόκληρο το έργο.

4 Jones (1986, 85.5-7)

5 τὸ γὰρ μήπω ὂν ἐν πόρῳ, ἐνδεχόμενον δὲ πορισθῆναι ποριστὸν ἰδίως προσαγορεύουσιν.

6 Θα μπορούσαμε να πούμε εδώ προκαταβολικά ότι διακρίνουμε παραπάνω από ένα είδος «δοθέντων». Τα «δοθέντα» από την υπόθεση, όπως αυτά στην αναφορά του Μαρίνου που περιλαμβάνονται για παράδειγμα στα προβλήματα των *Στοιχείων*. Τα «δοθέντα» ως αποτέλεσμα παραχώρησης από τα «δεδομένα» στα *Δεδομένα* και τα «δοθέντα» ως αποτέλεσμα νοητικού συλλογισμού που προηγήθηκε όπως αυτά που εμφανίζονται στην πορεία ή στο τέλος του δεύτερου μέρους της γεωμετρικής ανάλυσης ('resolution'). Φαίνεται όμως ότι όλα έχουν δύο κοινά χαρακτηριστικά τα οποία αποδίδει ο ορισμός του Πάππου: τη δυνατότητα να συμβούν (δηλ. όχι αδύνατα) και την τυχαιότητα. Η διαφορά τους όπως θα αναλύσουμε καλύτερα παρακάτω, φαίνεται να είναι ότι ενώ κάποια από αυτά αποτελούν απλά αντικείμενα της νοητικής σύλληψης, άλλα φανερώνουν το αποτέλεσμα μιας νοητικής επεξεργασίας, ενός συλλογισμού ο οποίος γίνεται τώρα ή έχει γίνει προηγουμένως.

που παραθέσαμε προκύπτει ότι το ζεύγος των εννοιών «δεδομένον» – «δοθέν» συνδέεται εννοιολογικά στα αρχαία κείμενα με το ζεύγος των εννοιών «δυνατόν» - «ενδεχόμενον», το περιεχόμενο του οποίου θα διερευνήσουμε στην επόμενη ενότητα.

4.2. *Η φιλοσοφική διάκριση «δυνατόν» – «ενδεχόμενον»*

Η διάκριση «δυνατόν» - «ενδεχόμενον» είναι μια φιλοσοφική διάκριση που έχει απασχολήσει έντονα τους ιστορικούς της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας, και ιδίως τους μελετητές της σκέψης του Αριστοτέλη[7]. Χαρακτηριστικά ο Düring[8] αναφέρει:

> Είναι σημαντική η διαφορά ανάμεσα στο ενδεχόμενον και το δυνατόν. Σύμφωνα με τα *Αναλυτικά πρότερα* Α 13, 32 α 18 το ενδεχόμενον σημαίνει το τυχαίο, το οποίο δεν είναι ούτε αναγκαίο ούτε αδύνατο, ή αυτό το οποίο είναι δυνατό τόσο θετικά όσο και αρνητικά. Σύμφωνα με το *Θήτα* 3, 1047 α 24-26 το δυνατό είναι το αδιακρίτως δυνατό, δηλαδή αυτό το οποίο δεν είναι αδύνατο, υπό ορισμένες συνθήκες όμως μπορεί να είναι αναγκαίο. Βασικά ο Αριστοτέλης επιμένει σε αυτή τη διάκριση. [9]

Τα λόγια του Düring μας ανοίγουν το δρόμο για τη φιλοσοφική διάκριση ανάμεσα στο «δυνατόν» και το «ενδεχόμενον» αλλά δεν μπορούμε να πούμε ότι μας οδηγούν μέχρι το τέλος της, μας την κάνουν δηλαδή ξεκάθαρη και λειτουργική. Τα δύο χωρία στα οποία αναφέρεται μοιάζουν αρκετά ως περιεχόμενο όπως θα φανεί παρακάτω, αλλά ταυτόχρονα φαίνεται να αντιστοιχούν σε δυο διαφορετικούς όρους. Προκειμένου να καταλάβουμε τι ακριβώς σημαίνει αυτή η διάκριση είναι απαραίτητο να ανατρέξουμε στα πρωτότυπα κείμενα του Αριστοτέλη, σε έγκυρους σχολια-

---

[7] Ενδεικτικά αναφέρουμε το βιβλίο του Schuhl P.M, «*Le Dominateur et les Possibles»*, Παρίσι 1960, και τη βιβλιοκρισία του από τον K. von Fritz, Gnomon 1962, 138-152, επιπλέον αρκετά άρθρα από το βιβλίο του Hintikka J., «*Time and Necessity*», Oxford at the Clarendon Press, 1973.

[8] Düring I., «*ARISTOTELES. Darstellung und Inerpretation seines Denkens»* Heidelberg 1966, για τα Ελληνικά έκδοση ΜΙΕΤ, Αθήνα 1994, τόμ. II, 456-457, υποσ. 207.

[9] Düring I.: *ARISTOTELES Darstellung und Inerpretation seines Denkens*, Heidelberg 1966, Carl Winter Universtitätsverlag, σ. 618, υποσημ. 204: «Der Unterschied zwischen το ενδεχόμενον und το δυνατόν ist wichtig. Nach An. Pr. I 13, 32a 18 bedeutet το ενδεχόμενον das kontigente, das, was weder notwendig noch unmöglich, oder das, was sowohl positiv wie negativ möglich ist. Nach Theta 3, 1047a 24-26 ist το δυνατόν das indifferent mögliche, d. h. das, was nicht unmöglich ist, wohl aber unter Umständen notwendig sein kann. Im Prinzip hält Aristoteles an dieser Unterscheidung fest.»

στές του αλλά και στην πολύτιμη βοήθεια του J. Hintikka ο οποίος έχει ασχοληθεί ιδιαίτερα με τις έννοιες αυτές στον Αριστοτέλη.

Για το «ενδεχόμενον» ο Αριστοτέλης στα *Αναλυτικά Πρότερα* (32 α 18-20)[10] αναφέρει ότι εννοεί αυτό το οποίο ενώ δεν είναι αναγκαίο να είναι, όταν υποτεθεί ότι υπάρχει, δε θα απορρέει από αυτό τίποτε το αδύνατο. Την ίδια έκφραση για το «ενδεχόμενον» χρησιμοποιεί ο Αριστοτέλης και αλλού[11] στο έργο του. Για το «δυνατόν» ο Αριστοτέλης στα *Μεταφυσικά* (1047 α 24-26)[12] αναφέρει αντίστοιχα ότι είναι δυνατόν τούτο σε όποιο αν υπάρξει η ενέργεια που ανταποκρίνεται στη δύναμη που λέμε ότι το πράγμα αυτό έχει δε θα προκύψει τίποτε αδύνατο. Ο Ross (1924, τόμ. II, 245) σχολιάζει ότι στο σημείο αυτό ο Αριστοτέλης δίνει το ίδιο κριτήριο[13] που έδωσε για το «ενδεχόμενον» στα προηγούμενα χωρία και επισημαίνει ότι σε αρκετά χωρία από *τα Αναλυτικά Πρότερα* και *Αναλυτικά Ύστερα*, οι δύο όροι χρησιμοποιούνται ως συνώνυμα[14]. Λέγοντας συνώνυμα εννοεί ότι βρίσκονται κάτω από τον ίδιο, κοινό όρο και τον ίδιο ορισμό αλλά εκφέρονται και με διαφορετικό όνομα. Το κοινό όνομα, υπό το οποίο αναφέρονται από τον Ross το «δυνατόν» και το «ενδεχόμενον» ως συνώνυμα είναι το «possible». Η άποψη αυτή του Ross χρειάζεται σύμφωνα με τον Hintikka αρκετή προσοχή και περαιτέρω διερεύνηση. Ο ίδιος θα μιλήσει για «ομωνυμία» και όχι για συνωνυμία.

Ο J. Hintikka έχει ασχοληθεί ιδιαίτερα με την έννοια του «δυνατόν» (possible) στο βιβλίο του «*Time and Necessity*»[15] καθώς και σε διάφορα άρθρα του που ακολούθησαν[16]. Στο δεύτερο κεφάλαιο του βιβλίου, με τον χαρακτηριστικό τίτλο «Aris-

---

[10] λέγω δ' ἐνδέχεσθαι καὶ τὸ ἐνδεχόμενον, οὗ μὴ ὄντος ἀναγκαίου, τεθέντος δ' ὑπάρχειν, οὐδὲν ἔσται διὰ τοῦτ' ἀδύνατον·

[11] *Φυσικά* 243 α 1: τοῦ δ' ἐνδεχομένου τεθέντος οὐδὲν προσήκει γίγνεσθαι διὰ τοῦτο ἀδύνατον.

[12] ἔστι δὲ δυνατὸν τοῦτο ᾧ ἐὰν ὑπάρξῃ ἡ ἐνέργεια οὗ λέγεται ἔχειν τὴν δύναμιν, οὐθὲν ἔσται ἀδύ νατον.

[13] Το θεωρεί κριτήριο ο Ross και όχι ορισμό όπως αναφέρει: «Θεωρούμενη αυτή η δήλωση ως ένας ορισμός του *δυνατόν,* θα ήταν προφανώς κυκλικός και άρα χωρίς αξία. Αλλά δεν διεκδικεί το να είναι ένας ορισμός. Αυτή σημαίνει ότι πριν αποφανθείς για κάτι ότι είναι δυνατόν, θα πρέπει να πειστείς ότι καμιά από τις συνέπειές του δεν είναι αδύνατη. Είναι ένα κριτήριο για την εξακρίβωση της δυνατότητας σε αμφίβολες περιπτώσεις.»

[14] Συνώνυμα κατά τον Αριστοτέλη στο (*Κατηγ.* 1 α 6-7) λέγονται : «συνώνυμα δὲ λέγεται ὧν τό τε ὄνομα κοινὸν καὶ ὁ κατὰ τοὔνομα λόγος τῆς οὐσίας ὁ αὐτός, οἷον ζῷον ὅ τε ἄνθρωπος καὶ ὁ βοῦς·» Φέρνει δε ως παράδειγμα τον όρο ζώο στον οποίο αναφέρονται και το βόδι και ο άνθρωπος.

[15] Hintikka J., «*Time and Necessity, Studies in Aristotle's Theory of Modality*», Oxford at the Clarendon Press, 1973.

[16] Για παράδειγμα στο Hintikka J., (1976) «Necessity, Universality, and Time in Aristotle».

totle's Different Possibilities», το οποίο έχει ως στόχο: «…να αναλύσει την αντίληψή του [του Αριστοτέλη] για τη δυνατότητα (possibility)», ο Hintikka αναφέρει ότι στα κείμενα του Αριστοτέλη περιλαμβάνονται περισσότερες από μια αντιλήψεις της «δυνατότητας». Συγκεκριμένα θεωρεί ότι ο Αριστοτέλης έχει δύο έννοιες–αντιλήψεις για την δυνατότητα[17] στο μυαλό του, την «possibility proper» και την «contingency», όπως τις ονομάζει προκειμένου να τις διακρίνει, να αποδείξει την ύπαρξή τους και να τις επεξεργαστεί. Η ύπαρξη τους φανερώνεται κατά τον Hintikka κυρίως μέσα από το *Περί Ερμηνείας* (κεφ.12-13). Αυτές διαφέρουν μεταξύ τους στο ότι: «στην 'possibility proper' η εμβέλεια της πιθανότητας εμπεριέχει κάθε τι που είναι αναγκαίο, ενώ στην 'contingency' η δυνατότητα και η αναγκαιότητα είναι ξένες-ασυμβίβαστες.» Η «possibility proper» βασίζεται στην αντίληψη ότι το δυνατόν και το αδύνατο είναι συμπληρωματικά μεταξύ τους· το αναγκαίο, επομένως, δεν μπορεί να εντάσσεται στο αδύνατο παρά μόνο στο δυνατόν. Αντίθετα, η «contingency» βασίζεται στην αντίληψη ότι αναγκαίο, δυνατόν, και αδύνατο είναι συμπληρωματικά μεταξύ τους. Σύμφωνα με αυτή την έννοια της δυνατότητας[18], που προέρχεται από την καθημερινή γλώσσα, κάτι που είναι δυνατόν δεν είναι αναγκαίο.

Σύμφωνα με τον Hintikka, ο Αριστοτέλης μπορεί να μη διέκρινε λεκτικά τις δύο έννοιες της δυνατότητας, είχε αντιληφθεί όμως ότι η ουσία της δυσκολίας βρισκόταν στη σχέση της δυνατότητας με την αναγκαιότητα[19]. Ένα από τα σημεία που αυτό γίνεται φανερό όπως αναφέρει[20], είναι στα *Αναλυτικά Πρότερα* μετά τον ορισμό του «ενδέχεσθαι» και του «ενδεχομένου» (32 α 18-20) που ο Αριστοτέλης συνεχίζει λέγοντας: «τὸ γὰρ ἀναγκαῖον ὁμωνύμως ἐνδέχεσθαι λέγομεν.» Αυτό το κάνει κατά τον Hintikka, γιατί θέλει να διακρίνει τις δύο έννοιες του «δυνατόν» (possible), δηλαδή αυτή που μόλις όρισε (contingency) και δεν περιλαμβάνει το «αναγκαίον», από την άλλη, η οποία περιλαμβάνει και το «αναγκαίον» (possibility proper).Δύο διαφορετικές εκδοχές του «δυνατόν» που όμως ο Αριστοτέλης τις ονομάζει όμως «ομωνύμως»[21]. Κάτι ανάλογο φαίνεται ότι συμβαίνει κατά τον Hintikka και σε αρκετούς

[17] «The two notions of possibility», όπως τις αναφέρει.
[18] «Ενδεχομενικότητα» θα την αποδίδαμε στα Ελληνικά.
[19] 2η ενότητα του ίδιου κεφαλαίου, 28-29.
[20] 4η ενότητα του ίδιου κεφαλαίου με τίτλο: «Aristotle's definition of contingency», 30-31.
[21] Ομώνυμα κατά τον Αριστοτέλη στο (*Κατηγ.* 1 α 1-2) λέγονται: «Ὁμώνυμα λέγεται ὧν ὄνομα μόνον κοινόν, ὁ δὲ κατὰ τοὔνομα λόγος τῆς οὐσίας ἕτερος, οἷον ζῷον ὅ τε ἄνθρωπος καὶ τὸ γεγραμμένον·» Φέρνει δηλαδή ως παράδειγμα ομωνυμίας το «ζώον», που σημαίνει και τον άνθρωπο και τη γραμμένη λέξη «ζώον».

από τους συλλογισμούς του Αριστοτέλη στα *Αναλυτικά Πρότερα*[22], όπου ο ίδιος ο φιλόσοφος επισημαίνει ότι το συμπέρασμα του συλλογισμού είναι έγκυρο, μόνο αν κάποιος δεν εκλάβει το «ενδεχόμενον» (possible) με τον τρόπο που ορίστηκε (contingency) αλλά με την έννοια του συμπληρωματικού του αδύνατου. Ο Hintikka καταλήγει λέγοντας ότι ο ορισμός του Αριστοτέλη για το «contingency» (*An. Pr.* I13. 32a 18-21)[23], εγκαθιστά μια διασύνδεση ανάμεσα στην «contingency» και στην «possibility proper»: «ενδεχόμενο (contingent) είναι αυτό το οποίο είναι 'properly possible' αλλά όχι αναγκαίο». Θεωρεί δηλαδή ότι υπάρχει κάποιο κοινό στοιχείο (επικάλυψη) στον ορισμό της «contingency» και της «possibility proper» και είναι αυτό ακριβώς που προκαλεί αρκετές δυσκολίες στην κατανόησή τους.

Αναγνωρίζοντας ότι τα λεγόμενα του Hintikka είναι αρκετά σημαντικά αλλά όχι πάντα τόσο ευνόητα, θα παραθέσουμε ένα μόνο από τα λογικά του διαγράμματα[24], το οποίο αφορά τη δυνατότητα που παραπάνω ονομάστηκε «possibility proper»:

[possible][impossible]
[necessary][contingent]

Το διάγραμμα αυτό αφορά αυτό που ο Hintikka ονομάζει «possibility proper» και είναι αυτή ακριβώς η έννοια της δυνατότητας («δυνατόν») που μας ενδιαφέρει στη γεωμετρία προκειμένου να προσεγγίσουμε παρακάτω το μαθηματικό περιεχόμενο των ορισμών του «δοθέντος» και του «δεδομένου».

Πριν περάσουμε όμως στο μαθηματικό περιεχόμενο της διάκρισης «δοθέν» – «δεδομένον», θα παραθέσουμε σύντομα μερικές ακόμη από τις απόψεις του Hintikka, οι οποίες έχουν ενδιαφέρον για το πώς η έννοια του «δυνατόν» μπορεί να συνδέεται με τη γεωμετρία ή να επεκτείνεται πέρα από τις «γενέσεις» και να αφορά «αληθείς δηλώσεις και προσδιορισμούς» δηλαδή λογικές αναγκαιότητες και δυνατότητες που μας αφορούν.

---

22 *Αναλ. Προτ.* 33β30-33, 34β27-32, 35β 32-34, 36β 33-3439$^{\alpha}$11-13.

23 Συμπεριλαμβανομένης δηλαδή πλέον και της δεύτερης επεξηγηματικής πρότασης: «λέγω δ' ἐνδέχεσθαι καὶ τὸ ἐνδεχό μενον, οὗ μὴ ὄντος ἀναγκαίου, τεθέντος δ' ὑπάρχειν, οὐδὲν ἔσται διὰ τοῦτ' ἀδύνατον· τὸ γὰρ ἀναγκαῖον ὁμωνύμως ἐνδέχεσθαι λέγομεν.»

24 Αντίστοιχα το διάγραμμα της δυνατότητας ως «contingency» είναι σύμφωνα με τον Hintikka:

[necessary][possible][impossible]
[not impossible]

Ο Hintikka στο τρίτο κεφάλαιο[25] του βιβλίου του, στην όγδοη παράγραφο με τον χαρακτηριστικό τίτλο: «Aristotle's different possibilities again», προκειμένου να στηρίξει ακόμη καλύτερα τις προηγούμενες θέσεις του, επανέρχεται στη διάκριση ανάμεσα στις διαφορετικές έννοιες της δυνατότητας, αλλά και στις διαφορετικές χρήσεις τους και ειδικότερα της «possibility proper» που μας ενδιαφέρει. Αναφέρεται συγκεκριμένα στο *Περί Ερμηνείας* 13, (23 α 6-7): «ἔνιαι δὲ δυνάμεις ὁμώνυμοί εἰσιν· τὸ γὰρ δυνατὸν οὐχ ἁπλῶς λέγεται,» και παρατηρεί ότι σε αυτές τις δύο προτάσεις ο Αριστοτέλης κάνει δύο ειδών διακρίσεις. Η πρώτη πρόταση αφορά τη διάκριση των δύο εννοιών του «δυνατόν», φανερώνεται υπό τον όρο «ομωνυμία»[26], αναφέρεται δηλαδή σε αυτά που ο ίδιος ονόμασε προηγουμένως «possibility proper» και «contingency». Η δεύτερη πρόταση αναφέρεται σε δύο διαφορετικές χρήσεις της μίας από τις παραπάνω έννοιες της δυνατότητας, συγκεκριμένα της «possibility proper», όπως αυτό αποδεικνύεται κατά την άποψή του από το χωρίο που ακολουθεί τις δύο προτάσεις:

> ἀλλὰ τὸ μὲν ὅτι ἀληθὲς ὡς ἐνεργείᾳ ὄν, οἷον δυνατὸν βαδίζειν ὅτι βαδίζει, καὶ ὅλως δυνατὸν εἶναι ὅτι ἤδη ἔστι κατ' ἐνέργειαν ὃ λέγεται δυνατόν, τὸ δὲ ὅτι ἐνεργήσειεν ἄν, οἷον δυνατὸν βαδίζειν ὅτι βαδίσειεν ἄν. (*Περί Ερμηνείας* 13, 23 α 8-11)

Οι δύο χρήσεις του «δυνατόν» που εμφανίζονται στο χωρίο αυτό: α) «δυνατὸν βαδίζειν ὅτι βαδίζει» και β) «δυνατὸν βαδίζειν ὅτι βαδίσειεν ἄν», καλύπτονται κατά τον Hintikka από την έννοια του «δυνατόν» (possible) η οποία λειτουργεί ως συμπλήρωμα στο αδύνατον (impossible), δηλαδή την «possibility proper». Το σημαντικό για τη δικές μας θέσεις σχετικά με το «δεδομένον» και τη σχέση του με το «δυνατόν» στο χωρίο αυτό, είναι ότι ο Αριστοτέλης θεωρεί ως κατεξοχήν «δυνατόν» αυτό το οποίο «ἤδη ἔστι κατ' ἐνέργειαν», όπως είναι η ενέργεια της νόησης που ήδη υπάρχει ή έχει υπάρξει για το «πόριμον» – «δεδομένον» όπως αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Αλλά ο Αριστοτέλης θεωρεί «δυνατόν» και αυτό που *μπορεί – ενδέχεται να είναι κατ' ενέργειαν με την έννοια ότι δεν είναι αδύνατο να συμβεί.* Δύο τρόποι χρήσης του «δυνατόν», οι οποίοι όπως θα δούμε παρακάτω θα μας είναι αρκετά χρήσιμοι προκειμένου να κατανοήσουμε τον τρόπο που λειτουργούν το «δεδομένον» και το «δοθέν» αντίστοιχα.

---

[25] «On the Interpretation of *DE INTERPRETATIONE 12-13*»

[26] Ίδιος όρος – όνομα αλλά διαφορετικό περιεχόμενο υπό διαφορετικές συνθήκες.

Παρακάτω ο Hintikka (1973, 57-58) αναφέρει ότι αν και θεωρεί ότι όσα περιλαμβάνονται στο προηγούμενο χωρίο αποτελούν το τελικό συμπέρασμα της διάκρισης του Αριστοτέλη, ανάλογου περιεχομένου αναφορές του μπορούμε να βρούμε και σε άλλα έργα του. Για παράδειγμα αναφέρεται στο *Μετά τα Φυσικά* Δ12 (1019β 30-34). Θεωρεί ότι ο παραλληλισμός του Δ12 με τα προηγούμενα ενισχύεται αν αντιληφθούμε ως υποσύνολα του «possibility proper» το «αληθές [είναι]» και το «ενδεχόμενον αληθές είναι»:

> Αυτή λοιπόν είναι, όπως είπαμε, η μια σημασία του δυνατού, δηλαδή αυτό που δεν είναι κατ' αναγκαιότητα ψεύδος· ακόμη σημαίνει το δυνατό αυτό που αλήθεια λέμε όταν λέμε ότι υπάρχει και ακόμη αυτό που είναι ενδεχόμενο να είναι αληθινό. Ο γεωμετρικός όρος δύναμη λέγεται έτσι με μεταφορική σημασία.[27]

Θεωρούμε ως σημαντικό επιχείρημα στην κατεύθυνση της ερμηνεία μας το γεγονός ότι ο ίδιος ο Αριστοτέλης στο χωρίο αυτό αναφέρει τη γεωμετρία ως ένα από τα πεδία εφαρμογής των παραπάνω διακρίσεων της «δυνατότητας» και του «δυνατού».

Τέλος ένα ακόμη χωρίο που αναφέρει ο Hintikka (1973, 59-61) θέλοντας να ενισχύσει τις απόψεις του, και φαίνεται έστω με έμμεσο τρόπο να αφορά την επιστήμη –στην οποία συμπεριλαμβάνεται η γεωμετρία με τις λογικές της «δυνατότητες» και «αναγκαιότητες» που μας ενδιαφέρουν– είναι το Ι15, 34 α 12-15 από τα *Αναλυτικά Πρότερα*.[28] Κατά την άποψή του Hintikka σε αυτό ο Αριστοτέλης επεκτείνει την εμβέλεια του «δυνατόν» πέρα από τις «γενέσεις» και στις περιπτώσεις «αληθών δηλώσεων – βεβαιώσεων (*αληθεύσθαι*) και κατηγορήσεων (*υπάρχειν*)». Επιχειρηματολογεί για το ότι και σ' αυτό το χωρίο το «δυνατόν» αναφέρεται με την ευρεία έννοια, που περιέχει και το αναγκαίο, αυτή που ο ίδιος ονομάζει «proper possibility».

---

27 «τὸ μὲν οὖν δυνατὸν ἕνα μὲν τρόπον, ὥσπερ εἴρηται, τὸ μὴ ἐξ ἀνάγκης ψεῦδος σημαίνει, ἕνα δὲ τὸ ἀληθές [εἶναι], ἕνα δὲ τὸ ἐνδεχόμενον ἀληθὲς εἶναι. **κατὰ μεταφορὰν δὲ ἡ ἐν γεωμετρίᾳ λέγεται δύναμις.**» (*Μετά τα Φυσικά* Δ12, 1019 β 30-34). Φαίνεται δηλαδή ότι κατά μεταφορά η δυνατότητα – το δυνατόν στη Γεωμετρία λέγεται με ανάλογο τρόπο. Με τον ίδιο τρόπο αντιλαμβάνεται και αποδίδει το χωρίο και ο C. Kirwan (1971, 48) στο *Aristotles Metaphysics Book Γ, Δ, Ε*, Clarendon Aristotle series, general editor J.L. Ackrill, OXFORD at THE CLARENDON PRESS. Επίσης, συζητάει το «δυνατόν» στο χωρίο με σχήμα που είναι ανάλογο με αυτό του Hintikka που παραθέσαμε δύο σελίδες πριν.

28 «δεῖ δὲ λαμβάνειν μὴ μόνον ἐν τῇ γενέσει τὸ ἀδύνατον καὶ δυνατόν, ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ ἀληθεύεσθαι καὶ ἐν τῷ ὑπάρχειν, καὶ ὁσαχῶς ἄλλως λέγεται τὸ δυνατόν· ἐν ἅπασι γὰρ ὁμοίως ἕξει.»

4.3. *Η μαθηματική διάκριση «δεδομένον» – «δοθέν» είναι σε αντιστοιχία με τη φιλοσοφική διάκριση «δυνατόν» – «ενδεχόμενον»*

Θεωρούμε ότι η διάκριση που κάνουμε στα ελληνικά Μαθηματικά ανάμεσα στο «δοθέν» και το «δεδομένον» αποτελεί ένα παράδειγμα εφαρμογής της φιλοσοφικής διάκρισης ανάμεσα στο «δυνατόν» και το «ενδεχόμενον». Οι απόψεις κυρίως του Hintikka για τη φιλοσοφική διάκριση ανάμεσα στο «δυνατόν» και το «ενδεχόμενον» που παραθέσαμε στην προηγούμενη ενότητα θα μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη συνέχεια προκειμένου να αποκαλύψουμε το περιεχόμενο της μαθηματικής διάκρισης «δοθέντος» - «δεδομένου». Για το λόγο αυτό θα προσπαθήσουμε εδώ να τις συνοψίσουμε επιλέγοντας από αυτές τα στοιχεία που μας είναι χρήσιμα για την απόδοση της διάκρισης του «δοθέντος» από το «δεδομένον».

Στον Αριστοτέλη θα λέγαμε ότι το λογικά[29] «δυνατόν» χρησιμοποιείται με δύο έννοιες. 1^{ον}) το «δυνατόν» με την έννοια του αντιθέτου στο αδύνατο. Σε αυτό το «δυνατόν» συμπεριλαμβάνονται το αναγκαίο και το ενδεχόμενο ως συμπληρωματικά[30]. 2^{ον}) το «δυνατόν» με την έννοια του όχι αδύνατου αλλά και ταυτόχρονα όχι αναγκαίου. Θα λέγαμε δηλαδή ότι η δεύτερη είναι η στενή έννοια του «δυνατόν» η οποία δεν περιλαμβάνει το αναγκαίο, ενώ η πρώτη είναι η ευρεία έννοια του «δυνατόν» η οποία περιλαμβάνει και το αναγκαίο. Η πρώτη ονομάζεται όπως προαναφέραμε από τον Hintikka «possibility proper» ενώ η δεύτερη «contingency».

Είδαμε στην αρχή του κεφαλαίου ότι οι όροι «δοθέν» και «δεδομένον» στα διάφορα χωρία που εμφανίζονται (είτε είναι ορισμοί είτε απλές επεξηγήσεις των δύο όρων) έχουν ως συστατικό στοιχείο την έννοια της «δυνατότητας». Από τα ίδια χωρία είναι σχετικά εύκολο να συμπεράνουμε ότι οι όροι «δοθέν» και «δεδομένον» λειτουργούν στη γεωμετρία μόνο αν κατανοήσουμε τη «δυνατότητα» με την έννοια της «possibility proper» του Hintikka. Πιο συγκεκριμένα: ο όρος «δεδομένον» αντιστοιχεί στο «αναγκαίον» ενώ ο όρος «δοθέν» στο «ενδεχόμενον» της «possibility proper». Η άλλη περίπτωση της «δυνατότητας», η «contingency» δεν λειτουργεί για τους ορισμούς του «δοθέντος» και του «δεδομένου» που φτάνουν σε εμάς σήμερα.

[29] Οι όροι «δυνατόν», «ενδεχόμενο», «αναγκαίο», στη συνέχεια του κειμένου μας θα χρησιμοποιούνται και θα πρέπει να γίνονται κατανοητοί ως: λογικά δυνατό, λογικά ενδεχόμενο και λογικά αναγκαίο αντίστοιχα.

[30] Όπως στο λογικό διάγραμμα παραπάνω.

Πράγματι, όσον αφορά κατ' αρχάς τον ορισμό του «δοθέντος» ως «δυνατὸν καὶ ποριστὸν» (σύμφωνα με τον Πάππο), οι όροι «δυνατὸν» και «ποριστὸν» δεν θα μπορούσαν να αναφέρονται και οι δύο ταυτόχρονα στο ίδιο χαρακτηριστικό της «δυνατότητας», το τυχαίο-ενδεχόμενο, όπως θα προέκυπτε αν η «δυνατότητα» εκλαμβανόταν με την εκδοχή του «contingency». Και αυτό γιατί κανένας από τους δύο δεν αντιστοιχεί ούτε στο αναγκαίο ούτε στο αδύνατο που απομένουν ως εκδοχές. Αντίθετα, αν η «δυνατότητα» εκληφθεί με την εκδοχή της «possibility proper», τότε ο όρος «ποριστὸν» (= ἐνδεχόμενον πορισθῆναι) στον παραπάνω ορισμό του «δοθέντος» απλά εξειδικεύει την έννοια του «δυνατὸν» (=όχι αδύνατον), και καθιστά τον ορισμό λειτουργικό.[31]

Όσον αφορά τώρα τον ορισμό του «δεδομένον» ως «πόριμον», «ὃ δυνατοί ἐσμεν ἤδη ποιῆσαι καὶ κατασκευάσαι» (σύμφωνα με τον Μαρίνο), το «δυνατοί ἤδη» δεν μπορεί παρά να εκληφθεί ως το αντίθετο του αδυνάτου αλλά με την έννοια του λογικά αναγκαίου πλέον. Αναγκαιότητα η οποία προκύπτει από το σύνολο του νοητικού συλλογισμού που έχει ήδη υπάρξει («ενεργεία»). Ο ίδιος ο Αριστοτέλης αναφέρει χαρακτηριστικά ότι: «γενικά το δυνατόν είναι λέγεται για ότι ήδη είναι κατ' ενέργεια»[32], ενώ παρακάτω σχετίζει την έννοια του αναγκαίου με αυτήν του «δυνατού», λέγοντας ότι: «αυτού που υπάρχει από ανάγκη, ακολουθεί αυτό που είναι δυνατό».[33]

Συνοψίζοντας, υποστηρίζουμε ότι για να χαρακτηριστεί κάτι ως «δεδομένον» στη γεωμετρία, πρέπει να έχει προκύψει ως αποτέλεσμα έγκυρου συλλογισμού. Με άλλα λόγια, το «δεδομένον» είναι η κατάληξη ενός συλλογισμού ο οποίος εκτυλίσσεται με «δοθέντα». Εδώ εντοπίζεται κατά την άποψή μας η ουσία της διάκρισης στο μαθηματικό περιεχόμενο των δύο όρων και η διάκριση αυτή θα έπρεπε να είναι συνεχώς εμφανής στα ίδια τα κείμενα, αν οι συγγραφείς τους χρησιμοποιούσαν με απόλυτη συνέπεια στην πρακτική τους τούς δύο όρους.

---

[31] Για παράδειγμα «δοθέν» είναι ένα τρίγωνο η «επιλογή» του οποίου δεν είναι αδύνατη (ούτε προκαλεί στην πορεία κάτι αδύνατο) ενώ συγχρόνως έχει τυχαίο-ενδεχομενικό χαρακτήρα.

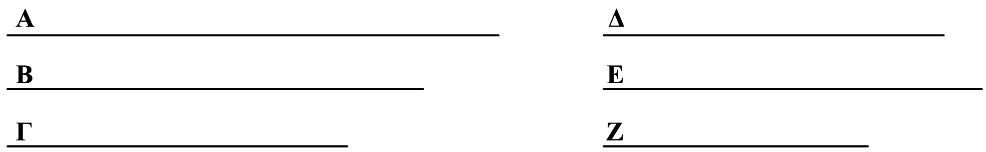
[32] «...ὅλως δυνατὸν εἶναι ὅτι ἤδη ἔστι κατ' ἐνέργειαν ὃ λέγεται δυνατόν,» *Περ. Ερμην.* XIII, 23 α 9-10.

[33] «τῷ ἐξ ἀνάγκης ὄντι ἕπεται τὸ δύνασθαι εἶναι» *Περ. Ερμην.* XIII, 23 α 17-19.

4.4. *Τα* Δεδομένα *του Ευκλείδη ακολουθούν τη διάκριση «δοθέν» – «δεδομένον»*

Η παραπάνω θέση μας, όσον αφορά τον Ευκλείδη, επιβεβαιώνεται περίπου στο ένα τρίτο των προτάσεων των *Δεδομένων*. Συγκεκριμένα, στις προτάσεις: 9, 17-18, 35-38 [σε αυτές τις τέσσερις προτάσεις η κατάληξη «δεδομένον» δεν αναφέρεται αλλά εννοείται], 39-47, 52, στη δεύτερη περίπτωση της πρότασης 54, 55, 61-62, 64-65, 67, 74, 78, 80, 82-83, ο αποδεικτικός συλλογισμός εκτυλίσσεται σχεδόν αποκλειστικά με «δοθέντα» η κατάληξη όμως είναι πάντοτε «δεδομένον». Ως παράδειγμα θα παραθέσουμε τον αποδεικτικό συλλογισμό της πρότασης 9 των *Data*:

> ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, τοῦ δὲ Α πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ τοῦ Δ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τοῦ Β πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν, ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ δοθείς, τοῦ δὲ Β πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ τοῦ Ε ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸ Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· τὰ Δ, Ε, Ζ ἄρα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον.



Στο παράδειγμα αυτό ο Ευκλείδης, μετά από μία σειρά ενδιάμεσων συλλογισμών που γίνονται όλοι με «δοθέντες» λόγους καταλήγει σε ένα συμπέρασμα το οποίο χαρακτηρίζεται ως «δεδομένον».

Πρέπει να σημειώσουμε ότι σε μερικές από τις προαναφερθείσες προτάσεις (17-18, 35-47, 61-62, 64-65, 67, 80) η ακολουθία «δοθέν … δοθέν … δοθέν, άρα δεδομένον» εμφανίζεται και σε ενδιάμεσους συλλογισμούς. Υπάρχουν επίσης 15 επιπλέον προτάσεις (48, 54, 57-58, 66, 69-70, 73, 75-76, 84-88) στις οποίες εμφανίζεται η ακολουθία «δοθέν … δοθέν … δοθέν, άρα δεδομένον» μόνο σε ενδιάμεσους συλλογισμούς. Ένα παράδειγμα είναι ο παρακάτω ενδιάμεσος συλλογισμός που περιέχεται στην απόδειξη της πρότασης 40: «δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΔΖ, ΔΕ, ΕΖ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΔΖΕ τρίγωνον τῷ εἴδει.»

Όλες οι παραπάνω προτάσεις επιβεβαιώνουν τον ισχυρισμό μας ότι το «δεδομένον» είναι η κατάληξη ενός συλλογισμού ο οποίος εκτυλίσσεται χρησιμοποιώντας «δοθέντα». Οι αποδείξεις αυτών των προτάσεων συγκροτούνται από μία ή περισσότερες συλλογιστικές αλυσίδες οι οποίες έχουν τη μορφή «δοθέν … δοθέν … δοθέν, άρα δεδομένον». Ο Ευκλείδης, σε αυτές τουλάχιστον τις προτάσεις, ακολουθεί με συνέπεια αυτήν την πρακτική.

Πρέπει, όμως, να σημειώσουμε ότι η αρχή αυτή δεν εμφανίζεται στην καθαρή της μορφή στο σύνολο των σωζόμενων κειμένων της γεωμετρικής ανάλυσης. Έτσι, σε μία μεγάλη κατηγορία προτάσεων των *Δεδομένων*, οι αποδείξεις εκτυλίσσονται με «δοθέντα» και καταλήγουν με «δοθέν».[34] Αυτό σημαίνει ότι στην πρακτική του ο Ευκλείδης δεν ακολουθεί με απόλυτη συνέπεια τη θέση που υποστηρίξαμε παραπάνω ότι η κατάληξη ενός συλλογισμού που εκτυλίσσεται με «δοθέντα» πρέπει να είναι το «δεδομένον». Αυτό θα μπορούσε κατά τη γνώμη μας να εξηγηθεί αν λάβουμε υπ' όψιν ότι το «δοθέν» χρησιμοποιείται από τον Ευκλείδη με δύο τρόπους: 1) Χρησιμοποιείται κατ' αρχάς για να δηλώσει την έναρξη μίας υποθετικής αποδεικτικής αλυσίδας (και αυτή είναι μία συνεπής χρήση του όρου με βάση την ανάλυσή μας – όχι αδύνατο και ταυτόχρονα τυχαίο). 2) Χρησιμοποιείται επίσης σχεδόν πάντα για να δηλώσει την κατάληξη ενός επιμέρους βήματος μίας υποθετικής αποδεικτικής αλυσίδας, και σε αρκετές περιπτώσεις για να δηλώσει και την κατάληξη ολόκληρης της υποθετικής αποδεικτικής αλυσίδας.

Υποστηρίζουμε ότι στη δεύτερη περίπτωση ο όρος «δοθέν» χρησιμοποιείται ως υποκατάστατο του «δεδομένον» (όχι αδύνατο αλλά υπό ορισμένες συνθήκες αναγκαίο). Αυτό φαίνεται πολύ καθαρά στις περιπτώσεις εκείνες των προτάσεων των *Δεδομένων* όπου οι αποδείξεις καταλήγουν με το ζητούμενο ως «δοθέν» παρόλο που στην εκφώνησή τους ζητείται να αποδειχθεί ότι είναι «δεδομένον». Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου είδους πρότασης είναι η πρόταση 5 των *Δεδομένων*:

> Ἐὰν μέγεθος πρὸς ἑαυτοῦ τι μέρος λόγον ἔχῃ **δεδομένον**, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἕξει **δεδομένον**.
>
> μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς ἑαυτοῦ τι μέρος τὸ ΑΓ λόγον ἐχέτω **δεδομένον**· λέγω, ὅτι καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ ΒΓ λόγον ἔχει **δεδομένον**.

---

[34] Υπάρχει επίσης μία πολύ μικρή κατηγορία προτάσεων των *Δεδομένων*, οι 2, 3 και 4, στις αποδείξεις των οποίων χρησιμοποιείται αποκλειστικά ο όρος «δεδομένον».

κείσθω γὰρ δεδομένον μέγεθος τὸ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ δοθεὶς ὁ τοῦ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΓ, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεπορίσθω ὁ τοῦ ΖΔ πρὸς ΔΕ. λόγος ἄρα ἐστὶν ὁ τοῦ ΖΔ πρὸς ΔΕ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΖΔ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΔΕ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΖ δοθέν ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΔΖ δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΔΖ πρὸς ΔΕ, οὕτως καὶ τὸ ΑΒ πρὸς ΑΓ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ. λόγος δὲ τοῦ ΔΖ πρὸς ΖΕ δοθείς, ὡς δέδεικται· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ δοθείς.

Στο σημείο αυτό, κάνοντας μια μικρή παρέκβαση, η πρόταση 5 των *Δεδομένων*, θα μας φανεί χρήσιμη εκτός από την υποστήριξη του ισχυρισμού μας για τη λειτουργία του «δοθέντος» ως υποκατάστατου του «δεδομένον» και για την ανάδειξη του τρόπου με τον οποίο εμφανίζονται αρχικά τα «δοθέντα» στις προτάσεις των *Δεδομένων*. Παρατηρούμε ότι πάντα τα «δοθέντα» στην αρχή του αποδεικτικού συλλογισμού μιας πρότασης των *Δεδομένων* προκύπτουν κατά παραχώρηση (με παθητική προστακτική) μέσα από τα αρχικά «δεδομένα» της πρότασης. Με σύγχρονο συμβολισμό θα λέγαμε: «Έστω + δεδομένον = δοθέν». Ο τρόπος αυτός είναι φανερό ότι προσδίδει στα αρχικά «δοθέντα» της απόδειξης ένα χαρακτήρα τυχαιότητας – ενδεχομενικότητας. Συγκεκριμένα στην «έκθεση» της πρότασης 5 που παραθέσαμε διαβάζουμε: «μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς ἑαυτοῦ τι μέρος τὸ ΑΓ λόγον ἐχέτω δεδομένον». Δύο γραμμές παρακάτω στην απόδειξη ο λόγος χαρακτηρίζεται πλέον «δοθείς»: «καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ δοθεὶς ὁ τοῦ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΓ». Στην αρχή της ίδιας απόδειξης διαβάζουμε: «κείσθω γὰρ δεδομένον μέγεθος τὸ ΔΖ». Δυο γραμμές παρακάτω: «δοθὲν δὲ τὸ ΖΔ». Παρατηρούμε δηλαδή ότι ο αποδεικτικός συλλογισμός χρησιμοποιεί στο μεγαλύτερο μέρος του «δοθέντα», από τα οποία τα αρχικά προκύπτουν κατά παραχώρηση από τα αντίστοιχα αρχικά «δεδομένα».

Το σημαντικό όμως στη συζήτηση της πρότασης 5, για την υποστήριξη της θέσης μας για τη λειτουργία του «δοθέντος» ως υποκατάστατου του «δεδομένου», είναι ο τρόπος με τον οποίο προκύπτουν τα επόμενα «δοθέντα» του συλλογισμού. Έτσι παρατηρούμε ότι αν και τα «δοθέντα» που χρησιμοποιούνται ως προκείμενες στον συλλογισμό έχουν το χαρακτηριστικό της τυχαιότητας – ενδεχομενικότητας, τα επιμέρους βήματα όπως και το σύνολο τελικά του συλλογισμού λειτουργούν με παραγωγικό συμπερασμό, ο οποίος είναι αποτέλεσμα της χρήσης των προκειμένων σε συνδυασμό με γνωστές προτάσεις, ορισμούς και αξιώματα που τις περισσότερες φορές δεν αναφέρονται αλλά η χρήση τους γίνεται φανερή τόσο από τη λογική διαδοχή των βημάτων του συλλογισμού όσο και από τις εκφράσεις που χρησιμοποιούνται σε αυτόν όπως: «λόγος ἄρα ἐστὶν δοθείς», «δοθὲν ἄρα καὶ τὸ», «καὶ λοιπὸν ἄρα… δοθέν ἐστιν», «καὶ ἐπεί ἐστιν… οὕτως καὶ… λόγος ἄρα… δοθείς». Βέβαια, το χαρακτηριστικό αυτό της τυχαιότητας – ενδεχομενικότητας που έχουν όπως προαναφέραμε τα αρχικά «δοθέντα» που προκύπτουν κατά παραχώρηση, θα το «μεταδώσουν» στα «δοθέντα» που ακολουθούν και προκύπτουν από λογικά αναγκαίους συνδυασμούς των προηγουμένων «δοθέντων» με τα αξιώματα –ορισμούς και τις ήδη γνωστές προτάσεις. Οι ίδιες όμως οι διαδικασίες μετάβασης από το ένα «δοθέν» στο επόμενο είναι φανερό ότι έχουν λογική αναγκαιότητα όπως τελικά και το σύνολο του συλλογισμού. Ανάμεσα σε αυτή την ακολουθία των «δοθέντων» του αποδεικτικού πλέον συλλογισμού μεσολαβούν επίσης κάποια «δοθέντα» τα οποία συνοδεύονται από το μόριο «δε» και δεν ακολουθούν από εκφράσεις όπως «ἄρα», «ὡς… οὕτως», «ἐπεί… ἄρα», «ἀναστρέψαντι ἄρα». Στην πρόταση 5 συγκεκριμένα διαβάζουμε: «δοθὲν δὲ τὸ ΖΔ», «ἔστι δὲ καὶ τὸ ΔΖ δοθέν», «λόγος δὲ τοῦ ΔΖ πρὸς ΖΕ δοθείς, ὡς δέδεικται». Αυτά τα «δοθέντα» είναι είτε αυτά τα οποία έχουν προκύψει ήδη κατά παραχώρηση από τα «δεδομένα» (*δέδονται)* όπως προείπαμε, είτε αυτά που έχουν δειχθεί ήδη (*δέδεικται*) σε προηγούμενο βήμα του συλλογισμού. Ως σύνολο άρα ο συλλογισμός που μας ενδιαφέρει παρουσιάζει λογική αναγκαιότητα. Θεωρούμε ότι τα «δοθέντα» αντικείμενα ενός τέτοιου συλλογισμού, τόσο τα αρχικά όσο και αυτά που προκύπτουν στην πορεία, δεν είναι συγκεκριμένα αλλά αυτό που θα ονομάζαμε «δυνητικά» αντικείμενα, τα οποία *μπορούν* να παραχθούν από τα λογικά έγκυρα βήματα του συλλογισμού σε συνδυασμό με τα «δυνητικά» αρχικά αντικείμενα. Με άλλα λόγια τα «δοθέντα» αντικείμενα δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένα, αλλά έχουν μια τυχαιότητα – ενδεχομενικότητα που τα χαρακτηρίζει από την αρχή του συλλογισμού.[35] Η δε αναγκαιότητα την οποία παρουσιάζουν τόσο τα επιμέρους βήματα όσο και το σύνολο του αποδεικτικού συλλογισμού με αυτού του είδους τα

[35] Παρόμοια είναι η άποψη που υποστηρίζει ο J. Klein (1968, 164): «Αυτό το 'δυνατό-πιθανό δόσιμο' (possible givenness) εμφανίζεται στη γεωμετρική ανάλυση στο γεγονός ότι η κατασκευή η οποία θεωρείται ως ήδη πραγματοποιημένη… δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσει τα 'δοθέντα' (given) μεγέθη ως μονοσήμαντα καθορισμένα *αλλά μόνο ως έχοντα το χαρακτήρα του 'δοθέντος'*.» Επίσης ο Heath (1921, τόμ. II, 507) σημειώνει αναφερόμενος στις προτάσεις των *Δεδομένων*: «Ας σημειωθεί ότι αυτή η μορφή πρότασης δεν προσδιορίζει στην πραγματικότητα το αντικείμενο ή τη σχέση η οποία αποδεικνύεται ότι δίνεται, αλλά απλώς αποδεικνύει ότι μπορεί να προσδιορισθεί, όταν τα γεγονότα που διατυπώνονται στην υπόθεση είναι γνωστά.»

«δυνητικά» αντικείμενα, ονομάζεται «δυνητική αναγκαιότητα» και είναι αυτού του είδους η αναγκαιότητα την οποία έχει και το τελικό «δοθέν» του αποδεικτικού συλλογισμού.

Εις επίρρωση του ότι οι αρχαίοι είχαν γνώση και χρησιμοποιούσαν τέτοιου είδους συλλογισμούς παραθέτουμε[36] το ακόλουθο χωρίο από τα *Αναλυτικά Πρότερα*, στο οποίο ο Αριστοτέλης, επεκτείνοντας την εμβέλεια του «δυνατόν» στο πεδίο των αληθών δηλώσεων και των κατηγορήσεων, αναφέρει:

> Θα πρέπει πρώτα να επισημάνουμε ότι αν από την παρουσία του Α απορρέει αναγκαστικά η ύπαρξη του Β, από τη δυνατότητα [με την έννοια της ενδεχομενικότητας] της παρουσίας του Α θα ακολουθήσει αναγκαστικά η δυνατότητα [ενδεχομενικότητα] της ύπαρξης του Β.[37]

Τονίζει δηλαδή ο Αριστοτέλης ότι η μετάβαση από το ένα «δυνατόν»[38] στο επόμενο έχει λογική αναγκαιότητα. Παρακάτω αναφέρει ότι το «δυνατόν» θα πρέπει να εφαρμόζεται και στην περίπτωση των αληθών δηλώσεων και κατηγορήσεων κατά τον ίδιο τρόπο και διευκρινίζει:

> Ακόμη, όταν κάποιος λέει ότι από την παρουσία του Α απορρέει η ύπαρξη του Β, δεν πρέπει να εννοούμε με αυτό ότι αν ένα συγκεκριμένο πράγμα, παραδείγματος χάριν το Α, είναι παρόν, θα υπάρξει το Β, διότι τίποτε δεν απορρέει από την παρουσία ενός και μόνου συγκεκριμένου πράγματος, αλλά απαιτούνται τουλάχιστον δύο, αυτό ακριβώς που συμβαίνει με τις προκείμενες, όταν τελούν στα πλαίσια του συλλογισμού, με τον τρόπο που ελέχθη. Διότι αν το Γ αποδίδεται στο Δ και το Δ στο Ζ, τότε το Γ αποδίδεται επίσης αναγκαστικά στο Ζ· και αν καθεμιά από τις προτάσεις αυτές είναι δυνατή [ενδεχόμενη], θα είναι και το συμπέρασμα δυνατόν [ενδεχόμενον]. Όπως ακριβώς λοιπόν αν κάποιος θέτει τις προκείμενες Α και το συμπέρασμα Β, θα μπορούσε να συναχθεί πως όχι μόνο αν το Α είναι αναγκαίο

[36] Η απόδοση των χωρίων που ακολουθούν έγινε σύμφωνα με τις θέσεις και την ερμηνεία του Hintikka (1973, 27-61) για το «δυνατόν» και το «ενδεχόμενον».

[37] «Πρῶτον δὲ λεκτέον ὅτι εἰ τοῦ Α ὄντος ἀνάγκη τὸ Β εἶναι, καὶ δυνατοῦ ὄντος τοῦ Α δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ Β ἐξ ἀνάγκης» (*A.Pr.* 34*a*5-7).

[38] «Δυνατόν» με την έννοια του «ενδεχομένου» όπως έχουμε προαναφέρει και όχι βέβαια του «αναγκαίου» που είναι φανερό ότι περιλαμβάνεται στην προηγούμενη πρόταση του συλλογισμού.

είναι και το Β αναγκαίο, αλλά και ότι αν το Α είναι δυνατόν [ενδεχόμενον] είναι [αναγκαία] και το Β δυνατόν [ενδεχόμενον].[39]

Επανερχόμενοι πάλι στα *Δεδομένα,* είμαστε πλέον σε θέση, με τη βοήθεια του ισχυρισμού μας, να κατανοήσουμε καλύτερα γιατί αν και το σύνολο του αποδεικτικού συλλογισμού της πρότασης 5, όπως και του συνόλου των προτάσεων των Δεδομένων, υλοποιείται σχεδόν αποκλειστικά με τα «δοθέντα», εντούτοις μπορεί να παρουσιάζει «δυνητική αναγκαιότητα» για τον Ευκλείδη, η οποία καλύπτει την «δυνητική αναγκαιότητα» που χαρακτηρίζει τις εκφωνήσεις της μορφής: «αν το Α είναι δεδομένον τότε το Β είναι δεδομένον». Πράγματι, στην πρόταση 5 ο όρος «δεδομένον» εμφανίζεται στην «πρόταση» και στην «έκθεση» ενώ ο αποδεικτικός συλλογισμός γίνεται σχεδόν αποκλειστικά με τα «δοθέντα» και καταλήγει με «δοθέν»: «λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ δοθείς.» Τόσο όμως η «πρόταση» ζητούσε ως κατάληξη «δεδομένον λόγον»: «καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἕξει δεδομένον» αλλά και η «έκθεση» ισχυριζόταν: «καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ ΒΓ λόγον ἔχει δεδομένον». Προφανώς όμως οι αποδεικτικοί συλλογισμοί, όπως αυτός της «πρότασης» 5, χρονικά προηγούνται της διατύπωσης της αντίστοιχης εκφώνησης, άσχετα αν στη γραπτή παρουσίαση του κειμένου παρουσιάζεται αντίστροφα, δηλαδή η εκφώνηση προηγείται του αποδεικτικού συλλογισμού του οποίου είναι αποτέλεσμα. Κατά συνέπεια η διατύπωση της εκφώνησης με τη βοήθεια των «δεδομένων» πλέον, που έχουν αποκτήσει αναγκαιότητα μέσω του έγκυρου αποδεικτικού συλλογισμού που χρονικά προηγήθηκε, είναι δικαιολογημένη. Ο ισχυρισμός μας για τη λειτουργία του «δοθέντος» ως υποκατάστατου του «δεδομένον», δικαιολογείται αν λάβουμε υπ' όψιν ότι ο αποδεικτικός συλλογισμός στο σύνολό του έχει «δυνητική αναγκαιότητα». Υπ' αυτήν την έννοια το «δοθέν» πρέπει να εκλαμβάνεται σε αυτήν την περίπτωση ως υποκατάστατο του «δεδομένον». Αυτό το παρατηρούμε επίσης να εφαρμόζεται σε μεγαλύτερο βαθμό στην πρακτική της γεωμετρικής ανάλυσης, όπως θα μας δοθεί η ευκαιρία να αναλύσουμε στο παράδειγμα του Πάππου που θα συζητήσουμε αναλυτικά παρακάτω στο έκτο κεφάλαιο της διατριβής.

---

[39] «ἔτι τὸ ὄντος τοῦ Α τὸ Β εἶναι, οὐχ ὡς ἑνός τινος ὄντος τοῦ Α τὸ Β ἔσται δεῖ ὑπολαβεῖν· οὐ γὰρ ἔστιν οὐδὲν ἐξ ἀνάγκης ἑνός τινος ὄντος, ἀλλὰ δυοῖν ἐλαχίστοιν, οἷον ὅταν αἱ προτάσεις οὕτως ἔχωσιν ὡς ἐλέχθη κατὰ τὸν συλλογισμόν. εἰ γὰρ τὸ Γ κατὰ τοῦ Δ, τὸ δὲ Δ κατὰ τοῦ Ζ, καὶ τὸ Γ κατὰ τοῦ Ζ ἐξ ἀνάγκης· καὶ εἰ δυνατὸν ἑκάτερον, καὶ τὸ συμπέρασμα δυνατόν. ὥσπερ οὖν εἴ τις θείη τὸ μὲν Α τὰς προτάσεις, τὸ δὲ Β τὸ συμπέρασμα, συμβαίνοι ἂν οὐ μόνον ἀναγκαίου τοῦ Α ὄντος ἅμα καὶ τὸ Β εἶναι ἀναγκαῖον, ἀλλὰ καὶ δυνατοῦ δυνατόν.» *Αν. Πρότ.* Ι 15, 34 α 16-24.

Η θέση που υποστηρίξαμε, ότι για να χαρακτηριστεί κάτι ως «δεδομένον» πρέπει να έχει προκύψει ως αποτέλεσμα έγκυρου συλλογισμού, μας βοηθάει επίσης στην προσπάθειά μας να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια «δεδομένον» μέσα από τους ορισμούς των ειδών του «δεδομένου» στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη. Διαπιστώσαμε στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου, ότι η «δυνατότητα» αποτελεί βασικό συστατικό για τους δύο πρώτους ορισμούς των *Δεδομένων* του Ευκλείδη και μέσω αυτών για το σύνολο του έργου. Στην αρχή της απόδειξης των δύο πρώτων προτάσεων των *Δεδομένων* διαβάζουμε την έκφραση: «ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ Α, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι» και στο ίδιο σημείο της τρίτης και τέταρτης πρότασης αντίστοιχα: «ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ ΑΒ, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι». Που σημαίνει ότι επειδή κάτι «έχει δοθεί», «είναι δυνατόν» τώρα να «πορισθούμε» ένα ίσο με αυτό. Το σημαντικό ερώτημα που τίθεται εδώ και έχει να κάνει κατεξοχήν με την ουσία του ορισμού του «δεδομένου» που μας απασχολεί ως έννοια, είναι με ποιο τρόπο «έχει δοθεί» αυτό το κάτι; Έχει δοθεί τυχαία όπως στα *Στοιχεία* ή έχει επιλεγεί και έχει ένα συγκεκριμένο μέγεθος; Αν ίσχυε το πρώτο, τότε ποια η ανάγκη να ονομαστεί «δεδομένον» και όχι «δοθέν» όπως στα προβλήματα των *Στοιχείων* και ακόμη να γραφεί ένα ολόκληρο έργο για τα «δεδομένα»; Αν έχει δοθεί ως ένα συγκεκριμένο μέγεθος ή έχει επιλεγεί ως τέτοιο γιατί θα πρέπει να δικαιολογηθεί ότι είμαστε «δυνατοί» να «πορισθούμε» ένα ίσο με αυτό; Δεν είναι αυτονόητο ότι μπορούμε να πάρουμε κάτι ίσο με κάτι του οποίου γνωρίζουμε το μέγεθος; Ο Μαρίνος έχοντας συνδέσει το «δεδομένον» με τη νοητική σύλληψη και επεξεργασία η οποία έχει ήδη υπάρξει, έμμεσα μας δείχνει το δρόμο για την απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα. Πιο συγκεκριμένα θα λέγαμε διερμηνεύοντας τα λεγόμενά του Μαρίνου, σε συνδυασμό με τη φιλοσοφική ανάλυση του «δυνατόν» που κάναμε: αυτό που έχει συλληφθεί και έχει γίνει αντικείμενο επεξεργασίας στη νόησή μας μέσα από έναν έγκυρο συλλογισμό, *μπορούμε* να το παράγουμε με λογική αναγκαιότητα. Έτσι για παράδειγμα, το μέγεθος ενός ευθυγράμμου τμήματος το οποίο έχει προκύψει μέσα από έναν έγκυρο συλλογισμό, παρουσιάζει λογική αναγκαιότητα και όσες φορές και αν παραχθεί ως αποτέλεσμα του ίδιου συλλογισμού με τις ίδιες προκείμενες και αρχικές συνθήκες το αποτέλεσμα θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο. Για αυτό τη φράση «ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ Α, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι» πρέπει να την κατανοήσουμε ως: «επειδή έχει υπάρξει το Α ως αποτέλεσμα έγκυρου συλλογισμού για το λόγο αυτό *μπορούμε με λογική αναγκαιότητα* να πάρουμε ένα ίσο με αυτό». Και όχι ως: «επειδή έχει δοθεί το μέγεθος του Α (άρα τώρα το Α έχει συγκεκριμένο μέγεθος που είναι γνωστό) μπορούμε να πάρουμε ένα ίσο με αυτό, όπως λανθασμένα υποστηρίζει ο Taisbak (2003, 23-24) σχολιάζοντας τον πρώτο ορισμό των *Δεδομένων*:

> Ο Ορισμ. 1 των *Δεδομένων* μπορεί να γίνει κατανοητός *διαμέσου* της ισότητας των μεγεθών. … Για ένα σύγχρονο μυαλό εξοικειωμένο με το «σύμβολο της ισότητας» =, αυτό σημαίνει ότι εάν η μια πλευρά της ισότητας είναι γνωστή (known), η άλλη πλευρά είναι επίσης γνωστή (known). Αυτός μου φαίνεται ότι είναι ο *λόγος ύπαρξης* (*raison d'etre*) για την απόδειξη ισοτήτων: να πάρεις ένα στοιχείο μέσω ενός άλλου το οποίο είναι ίσο με αυτό αλλά ευκολότερο (?) να το βρείς. *Αγόρασε ένα πάρε ένα δωρεάν.* Ένα μέγεθος Μ που δεν είναι αμέσως δεδομένο (given) με προφανή τρόπο, αποδεικνύεται ότι είναι δεδομένο (given) εάν υπάρχει ένα άλλο γνωστό (known) μέγεθος Ν τέτοιο ώστε Μ=Ν.
>
> Το μέγεθος Ν πρέπει να είναι γνωστό (known) για να λειτουργήσει η ισότητα. *Το πώς* είναι γνωστό (known) είναι μικρότερου ενδιαφέροντος· μπορεί να είναι προσπελάσιμο με έναν από κάποιους τρόπους – να έχει δωριθεί από τον Κύριο (Master), κατασκευαστεί (με κάποιο ακαθόριστο τρόπο ονομάζεται «πορισθεί») ή απλά ληφθεί (κείσθω) – μερικές φορές με την έξτρα διευκρίνιση ή περιορισμό «δεδομένο ως προς το μέγεθος» (given in magnitude).

Εμείς αντίθετα υποστηρίζουμε ότι ενδιαφέρει ο τρόπος με τον οποίο κάτι έχει φτάσει να χαρακτηριστεί «δεδομένον» και ο τρόπος αυτός δεν είναι κάποια «*Χείρα βοηθείας*» (helping hand) ή αόρατος Κύριος (Master) αλλά μια έγκυρη νοητική πορεία σύλληψης και επεξεργασίας που έχει προσδώσει πλέον σε αυτό το κάτι λογική αναγκαιότητα. Ίσως να μην ενδιαφέρει τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, όπως για παράδειγμα στην εκφώνηση της πρώτης πρότασης πως προέκυψαν τα «δεδομένα» μεγέθη ή στην πορεία μιας προβληματικής ανάλυσης πως προκύπτει κάτι ως «δεδομένον» από μια πρόταση των *Δεδομένων*, είναι σίγουρο όμως ότι και αυτά είναι αποτελέσματα έγκυρων λογικών συλλογισμών και όχι συγκεκριμένες και αυθαίρετες επιλογές. Θα λέγαμε καλύτερα ότι τα «δεδομένα» στην αρχή των προτάσεων έχουν προκύψει από προηγούμενους λογικά έγκυρους συλλογισμούς ενώ τα αποτελέσματα του παρόντος συλλογισμού θα είναι τα «δεδομένα» για τους επόμενους.[40]

---

[40] Θα επανέλθουμε στον πρώτο ορισμό του «δεδομένου ως προς το μέγεθος» του Ευκλείδη παρακάτω στην § 8.1.2, όταν θα αναλύσουμε τα είδη του «δεδομένου» κατά τον Ευκλείδη, όπου και θα δείξουμε ότι η ερμηνεία του Taisbak κάνει τον ορισμό κυκλικό.

Τελικά η ύπαρξη του «δυνατόν» ως βασικού συστατικού των *Δεδομένων,* φανερώνει ακριβώς αυτή τη «δυνατότητα» που υπάρχει πλέον ως αποτέλεσμα της ενέργειας η οποία ήδη έχει υπάρξει και δεν είναι άλλη από την ενέργεια της νόησης του γεωμέτρη –ερευνητή. Η «δυνατότητα» των *Δεδομένων* έχει την έννοια της «δυνητικής αναγκαιότητας» η οποία προκύπτει από το σύνολο του νοητικού συλλογισμού που προηγήθηκε[41], υπήρξε δηλαδή «ενεργεία».[42] Κλείνοντας αυτή την ενότητα θεωρούμε ότι το κείμενο των *Δεδομένων* του Ευκλείδη υποστηρίζει τη θέση μας ότι τα «δεδομένα» προκύπτουν συλλογισμό ο οποίος παρουσιάζει «δυνητική αναγκαιότητα». Γίνεται επίσης πλέον φανερό ότι για αυτού του είδους τα «δεδομένα» γράφτηκαν από τον Ευκλείδη τα *Δεδομένα*, όπως τονίζει και ο Μαρίνος.

Από όλα τα παραπάνω συνάγεται ότι η διάκριση των όρων «δοθέν» – «δεδομένον» δεν είναι απλώς μία γλωσσική διάκριση χωρίς μαθηματικό περιεχόμενο, αλλά φανερώνει ότι οι δύο όροι βρίσκονται σε διαφορετική λογική κατάσταση.[43] Ο πρώτος όρος σημαίνει το τυχαίο-ενδεχόμενο που χρησιμοποιείται ως εργαλείο στον συλλογισμό ενώ ο δεύτερος το «υποθετικά αναγκαίο» που έχει προκύψει ως αποτέλεσμα έγκυρου συλλογισμού. Την ύπαρξη διαφορετικών λογικών επιπέδων μέσα στη «givens»-ορολογία διαπιστώνουν τόσο ο Knorr (1986, 110), ο οποίος σημειώνει ότι: «η υιοθέτηση αυτής της [‘givens’] ορολογίας δεν είναι ένας απλός φορμαλισμός· εξυπηρετεί ένα κρίσιμο σκοπό διατηρώντας χωριστές δύο ομάδες όρων που έχουν αρκετά διαφορετική λογική υπόσταση», όσο και ο Jones (1986, 552) την άποψη του οποίου παραθέσαμε και συζητήσαμε στο πρώτο κεφάλαιο της διατριβής μας (§ 1.1).

Στον τρόπο με τον οποίο εμείς αντιλαμβανόμαστε τη λειτουργία των «δοθέντων» και των «δεδομένων» στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη και τη σύνδεση των όρων

[41] Θέση την οποία θα αναπτύξουμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

[42] Η άποψη αυτή είναι συνεπής με την άποψη του Αριστοτέλη για προτεραιότητα της «ενέργειας» ως προς τη «δύναμη» (και «λόγω» και «ουσία» και «χρόνω» στο *Μετά τα Φυσικά* Θ8). Είναι τυχαίο άραγε το γεγονός ότι ο Αριστοτέλης στην αμέσως επόμενη ενότητα Θ9 δίνει ως παράδειγμα προτεραιότητας της «ενέργειας» ως προς τη «δύναμη» (1051 α 21-33) τον τρόπο με τον οποίο «ευρίσκονται» οι αποδείξεις στη γεωμετρία; Στο απόσπασμα αυτό από τα *Μετά τα Φυσικά,* που παρουσιάζει την ανάλυση ως ανάλυση σχήματος, θα αναφερθούμε εκτενώς στο επόμενο κεφάλαιο.

[43] Η χρήση του όρου «δοθέν» σε κάποιες περιπτώσεις ως υποκατάστατο του «δεδομένον» στη μαθηματική πρακτική, αν και βοήθησε στην κατεύθυνση της παρανόησης και τελικά της εννοιολογικής ταύτισης των δύο όρων στην πορεία του χρόνου, δεν είναι σε θέση να ανασκευάσει την εγγενή διάκριση που καταδείξαμε και στοιχειοθετήσαμε ανάμεσα στους δύο όρους.

αυτών με τη φιλοσοφική διάκριση «δυνατόν» - «ενδεχόμενον», συνηγορεί όπως φαίνεται εκτός από τον ίδιο τον Ευκλείδη και τον Μαρίνο και ο Πάππος, τόσο με την πρακτική του στην ανάλυση γεωμετρικών προβλημάτων όσο και με την θεωρητική του τοποθέτηση για την προβληματική ανάλυση στην αρχή του 7ου βιβλίου του της Συναγωγής.

Υπάρχουν επίσης 14 ακόμη προτάσεις των *Δεδομένων* στις οποίες εμφανίζεται να λειτουργεί ο ισχυρισμός μας σε επιμέρους κομμάτια του αποδεικτικού τους συλλογισμού.[44] Δηλαδή πρόκειται για ενδιάμεσους συλλογισμούς της «απόδειξης» που γίνονται με «δοθέντα» αλλά καταλήγουν σε «δεδομένα». Για παράδειγμα στην 40η πρόταση των *Δεδομένων* διαβάζουμε: «…δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΔΖ, ΔΕ, ΕΖ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΔΖΕ τρίγωνον τῷ εἴδει.» Μετά από το συλλογισμό δηλαδή ο οποίος απέδωσε την καθεμιά από τις πλευρές του τριγώνου ως «δοθείσα» καταλήγει ως συμπέρασμα ότι το τρίγωνο είναι «δεδομένον». Τέλος υπάρχουν προτάσεις, όπως η 2, 3 και 4 των *Δεδομένων* στις οποίες χρησιμοποιείται αποκλειστικά ο όρος «δεδομένον».

4.5. *Ο Πάππος επιβεβαιώνει με τις περιγραφές του και με την πρακτική του, τη συσχέτιση των διακρίσεων «δεδομένου» – «δοθέντος» και «δυνατού» – «ενδεχομένου»*

Πριν ξεκινήσουμε να παρουσιάσουμε και να συζητήσουμε τις θεωρητικές περιγραφές του Πάππου για τη γεωμετρική ανάλυση και κάποια παραδείγματα από την πρακτική του, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι θέσεις μας για τη διάκριση «δοθέν» – «δεδομένον» αφορούν μόνο την προβληματική γεωμετρική ανάλυση γιατί εκεί εμφανίζεται η συγκεκριμένη ορολογία.[45] Στην ίδια κατεύθυνση, ο Knorr (1986, 358-360) αναφέρει: «…η μέθοδος της ανάλυσης, η μέθοδος κατεξοχήν για την επίλυση προβλήματος, μεταφέρεται στα θεωρήματα διαμέσου του τεχνάσματος της ‘θεωρητικής ανάλυσης’», ή όπως χαρακτηριστικά σημειώνει ο Netz (2000, 147): «Οτιδήποτε κάνουν οι αναλύσεις το κάνουν καλύτερα για τα προβλήματα παρά για τα θεωρή-

---

[44] Οι προτάσεις αυτές είναι οι 48, 54, 57, 58, 66, 69, 70, 73, 76, 84, 85, 86, 87 και 88.

[45] Θεωρούμε ότι η γεωμετρική ανάλυση της κλασικής εποχής αφορούσε αποκλειστικά τα προβλήματα, θέση την οποία θα υποστηρίξουμε στο κεφάλαιο 7 (§ 7.5) της παρούσας διατριβής.

ματα.» Στο έβδομο κεφάλαιο (§ 7.5) παρακάτω, θα υποστηρίξουμε αναλυτικά τη θέση ότι η γεωμετρική ανάλυση της κλασσικής εποχής αφορούσε μόνο προβλήματα.

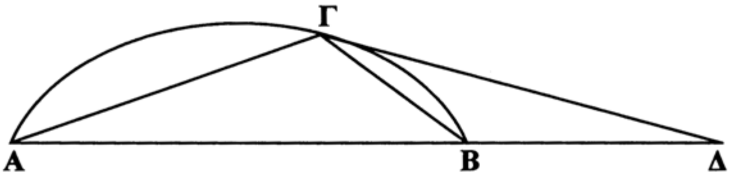
Ο Πάππος στην εισαγωγή του 7ου βιβλίου της *Συναγωγής* που αναφέρεται στην ανάλυση, στο σημείο που κάνει τη διάκριση θεωρη(μα)τικής και προβληματικής ανάλυσης περιγράφει τη διαδικασία που ακολουθείται στην τελευταία ως εξής:

> ἐπὶ δὲ τοῦ προβληματικοῦ γένους τὸ προταθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον, ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατὸν ᾖ καὶ ποριστόν, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθέν, δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ προταθέν…

Δηλαδή ενώ προηγουμένως ο Πάππος έχει αναφέρει ότι στην θεωρη(μα)τική ανάλυση μας ενδιαφέρει το «αληθές του ζητουμένου», είναι στόχος δηλαδή η αλήθεια, στην προβληματική ανάλυση αντίστοιχα μας ενδιαφέρει το «δυνατόν του προταθέντος». Εκφράζει δηλαδή τη θέση, που στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να κάνουμε ακόμη περισσότερο φανερή και συγκεκριμένη χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα από τη *Συναγωγή*, ότι η κατάληξη της προβληματικής γεωμετρικής ανάλυσης είναι η «δυνατότητα του προταθέντος». Με άλλα λόγια η «δυνητική αναγκαιότητα» του ζητουμένου, που εμείς αντιστοιχούμε στην έννοια του «δεδομένου» με το οποίο ουσιαστικά τελειώνει η ανάλυση. Ο Πάππος χρησιμοποιεί τους όρους «δυνατόν» και «ποριστόν», δηλαδή «δοθέν», όπως ο ίδιος επεξηγεί, για το «ομολογούμενον», με το οποίο αρχίζει ο υποθετικός λόγος που θα δώσει ως αποτέλεσμα τη «δυνατότητα του προταθέντος». Αλλά χρησιμοποιεί και τον όρο «δυνατόν» για το «προταθέν», την κατάληξη δηλαδή του υποθετικού λόγου, η οποία αποτελεί κατάληξη και της ανάλυσης. Θεωρούμε ότι ο υποθετικός αυτός λόγος που χρησιμοποιεί ο Πάππος σηματοδοτεί το δεύτερο μέρος (resolution) της ανάλυσης, που υλοποιείται με την ορολογία «δοθέντων-δεδομένων», και φανερώνει την «δυνητική αναγκαιότητα» που το χαρακτηρίζει. Προκειμένου να κατανοήσουμε όμως καλύτερα με ποιόν τρόπο εννοεί τους όρους «δυνατόν» και «ποριστόν» για το «ομολογούμενον» και «δυνατόν» για το «προταθέν» ο Πάππος, θα παραθέσουμε και θα συζητήσουμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα προβληματικής γεωμετρικής ανάλυσης από το 7ο βιβλίο του.

4.5.1. Παράδειγμα προβληματικής ανάλυσης από τον Πάππο (VII, 155)

Τμήματος δοθέντος [ενός κύκλου, που βρίσκεται] επάνω στην ΑΒ, να αποκόψετε (κλάσαι) ευθεία γραμμή την ΑΓΒ, [σε ΑΓ, ΓΒ] σε δοθέντα λόγο.[46]



Ανάλυση

α) transformation ή proper analysis: Ας έχει γίνει και ας έχει αχθεί από το Γ εφαπτομένη, η ΓΔ. Άρα όπως είναι το [τετράγωνο] της ΑΓ προς το [τετράγωνο] της ΒΓ, έτσι είναι και η ΑΔ προς τη ΒΔ. [$ΑΓ^2:ΒΓ^2$ = ΑΔ:ΔΒ]. [γιατί: Λήμμα απλό- ΑΓΔ~ΓΔΒ, αφού Δ κοινή και $Γ_1=Α_1$, υπό χορδής και εφαπτομένης (ΙΙΙ, 32). Άρα από αναλογίες της ομοιότητας βγαίνει]

β) resolution: Αλλά ο λόγος του [τετραγώνου] του ΑΓ προς το [τετράγωνο] του ΒΓ είναι δοθείς, [ΑΓ:ΓΒ ήταν δοθέν από την υπόθεση άρα και το τετράγωνό του (VI 22)] ώστε και ο λόγος του ΑΔ προς το ΒΔ είναι δοθείς. Και τα σημεία Α, Β είναι δοθέντα. Άρα το Δ είναι δοθέν [ιδιότητα αναλογιών V19 και Data 2 κ 27] [Άρα εύκολα και η εφαπτομένη ΔΓ από Data 90]. Άρα το Γ είναι δοθέν.

Σύνθεση

α) κατασκευή

Θα συντεθεί λοιπόν το πρόβλημα έτσι. Έστω το μεν τμήμα το ΑΒΓ, ο δε λόγος της Ε προς τη Ζ και ας γίνει όπως [είναι το τετράγωνο] της Ε προς το [τετράγωνο]

---

46 Πάππος, *Συναγωγή* (7.904.17 – 7.906.12): Τμήματος δοθέντος τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ, κλάσαι εὐθεῖαν τὴν ΑΓΒ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι.
Γεγονέτω, καὶ διήχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ.
λόγος δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ δοθείς, ὥστε καὶ ὁ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. καὶ ἔστιν δοθέντα τὰ Α Β· δοθὲν ἄρα ἐστὶν τὸ Δ, ὥστε καὶ τὸ Γ δοθέν.
Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω τὸ μὲν τμῆμα τὸ ΑΒΓ, ὁ δὲ λόγος ὁ τῆς Ε πρὸς τὴν Ζ, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΔΓ, καὶ ἐπεζεύ χθωσαν αἱ ΑΓ ΓΒ·
λέγω ὅτι αἱ ΑΓ ΓΒ ποιοῦσι τὸ πρό βλημα. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ (διὰ τὸ ἐφάπτεσθαι τὴν ΓΔ), καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ· ὥστε καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἡ ΑΓΒ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

της Ζ, το ΑΔ προς το ΔΒ [ΑΔ : ΔΒ = $Ε^2$: $Ζ^2$] και ας αχθεί εφαπτομένη η ΔΓ και ας αχθούν οι ΑΓ, ΓΒ. Λέγω ότι οι ΑΓ, ΓΒ **ποιούσι το πρόβλημα.**

β) Απόδειξη: Επειδή είναι όπως το [τετράγωνο] από το Ε προς το [τετράγωνο] από το Ζ, έτσι [είναι] η ΑΔ προς τη ΔΒ [$Ε^2$: $Ζ^2$ = ΑΔ : ΔΒ], όπως δε η ΑΔ προς τη ΔΒ, έτσι [είναι] το [τετράγωνο] της ΑΓ προς το [τετράγωνο] από την ΓΒ [ΑΔ : ΔΒ = $ΑΓ^2$: $ΓΒ^2$] επειδή η ΓΔ είναι εφαπτομένη [από το λήμμα που δείξαμε] και όπως είναι άρα το [τετράγωνο] από το Ε προς το [τετράγωνο] από το Ζ, έτσι [είναι] το [τετράγωνο] από το ΑΓ προς το τετράγωνο από το ΓΒ [$Ε^2$: $Ζ^2$ = $ΑΓ^2$:$ΓΒ^2$], ώστε και όπως η Ε προς τη Ζ, έτσι η ΑΓ προς τη ΓΒ. Άρα η ΑΓΒ **ποιεί το πρόβλημα**.

Έχοντας τώρα μπροστά μας το συγκεκριμένο παράδειγμα προβληματικής ανάλυσης του Πάππου μπορούμε να αντιληφθούμε καλύτερα την περιγραφή του για την προβληματική ανάλυση: «ἐπὶ δὲ τοῦ προβληματικοῦ γένους **τὸ προταθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι**, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον, ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον **δυνατὸν ᾖ καὶ ποριστόν**, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθέν, **δυνατὸν** ἔσται καὶ τὸ προταθέν…» Αυτό που ο Πάππος ονομάζει «προταθέν» είναι εδώ το ζητούμενο σημείο Γ πάνω στην περιφέρεια του κύκλου το οποίο αν βρεθεί θα ικανοποιεί το πρόβλημα. Η ανάλυση αρχίζει με την προτροπή «ας έχει γίνει», δηλαδή ας έχει βρεθεί το σημείο Γ για το οποίο ο λόγος ΑΓ:ΓΒ είναι ο «δοθείς». Αυτό είναι που υποθέτοντας ότι γνωρίζουμε, «γνωσθέν υποθέμενοι», θα «οδηγηθούμε»[47] μέσω κάποιων κατεξοχήν δημιουργικών βημάτων (νοητικά άλματα θα τα ονομάσουμε σε επόμενο κεφάλαιο), όπως είναι η εφαπτομένη από το Γ και η ομοιότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΓΒΔ που προκύπτουν, σε μια βοηθητική σχέση [$ΑΓ^2$:$ΒΓ^2$ = ΑΔ:ΔΒ], η οποία θεωρούμε ότι είναι ικανή να λύσει το πρόβλημα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η σχέση αυτή είναι που ο Πάππος ονομάζει «ομολογούμενον». Αυτή σημαίνει και το τέλος του πρώτου σταδίου της ανάλυσης δηλαδή του transformation ή proper analysis[48] όπως το ονομάζουν.

---

[47] Από το συνδυασμό της διαισθητικής και διανοητικής ικανότητας και της εμπειρίας του γεωμέτρη –ερευνητή καθώς και της εκμετάλλευσης της δομής του ίδιου του προβλήματος.

[48] Εδώ κατά την άποψή μας τελειώνει η «προς τα πάνω πορεία» της ανάλυσης. Θα ακολουθήσει η «προς τα κάτω πορεία» στο «resolution», η οποία θα πρέπει να βεβαιώσει ότι αυτά έχουν πραγματική αξία για την επίλυση του προβλήματος. Αυτές οι δύο «πορείες» και το αν συμβαίνουν και που συμβαίνουν μέσα στην ανάλυση ή τη σύνθεση και τι στόχο έχουν, έχουν γίνει η αφορμή για να χυθεί το περισσότερο μελάνι γύρω από την έννοια της ανάλυσης, όπως θα μας δοθεί η ευκαιρία να αναπτύξουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Το «ομολογούμενον» όμως έχει ακόμη μόνο υποθετικό χαρακτήρα (και πως θα μπορούσε να μην έχει αφού έχει χρησιμοποιηθεί το ζητούμενο – «προταθέν» για την εύρεσή του), άρα πρέπει να ακολουθήσει ο νοητικός έλεγχος της λογικής εγκυρότητας του, να πάψει δηλαδή να έχει υποθετικό χαρακτήρα και να αποκτήσει βεβαιωτικό χαρακτήρα. Από το «ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον» αρχίζει το δεύτερο μέρος της ανάλυσης, το «resolution», που όπως έχουμε παρατηρήσει υλοποιείται σχεδόν αποκλειστικά με τα «δοθέντα». Πρέπει καταρχήν να ελεγχθεί σύμφωνα με τον Πάππο, κατά πόσον το «ομολογούμενον» στο οποίο καταλήξαμε στο προηγούμενο βήμα της ανάλυσης [$ΑΓ^2$:$ΒΓ^2$ = ΑΔ:ΔΒ], «δυνατὸν ᾖ καὶ ποριστόν, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθέν». Πράγματι στο συγκεκριμένο παράδειγμα το δεύτερο βήμα της ανάλυσης ξεκινάει: «λόγος δε[49] του από ΑΓ προς το από ΒΓ δοθείς, ώστε και ο της ΑΔ προς την ΒΔ δοθείς». Πρώτο του μέλημα δηλαδή είναι να ελέγξει τόσο ότι το «ομολογούμενον» δεν είναι αδύνατο αλλά και «ενδέχεται» με αυτά που έχουν δοθεί να «ποριστεί», δηλαδή είναι και αυτό «δοθέν»[50]. Αυτός ο έλεγχος ο οποίος σηματοδοτεί την αρχή της «προς τα κάτω πορείας» θα ξεκινήσει με υλικά κάποια «δοθέντα» από την υπόθεση, όπως είναι ο λόγος ΑΓ προς ΒΓ ο οποίος είναι «δοθείς», θα συνδυάσει κάποια θεωρήματα από τα *Στοιχεία* ή «προτάσεις» των *Δεδομένων* προκειμένου να μπορέσει να ελέγξει αν και το «ομολογούμενον» είναι «δοθέν». Αν είναι, τότε το «ομολογούμενον» που κατέληξε ήδη να είναι «δοθέν», μαζί με κάποια άλλα «δοθέντα» όπως είναι τα σημεία Α, Β και τη χρήση ήδη γνωστών «προτάσεων» από τα *Δεδομένα* ή θεωρήματα από τα *Στοιχεία*, ο Πάππος θα καταλήξει ότι θα είναι (ἔσται)[51] «δυνατόν» και το Γ (το «προταθέν»). Το Γ «δυνατόν έσται» σύμφωνα με τη

[49] Στο σημείο αυτό θυμόμαστε το μόριο «δε» και τον τρόπο που παρατηρήσαμε ότι το χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης στα *Δεδομένα* για να δηλώσει κάτι «δοθέν» που έχει προκύψει κατά παραχώρηση από «δεδομένον» ή για κάτι που έχει ήδη δειχθεί (δέδεικται). Ο Πάππος φαίνεται να το χρησιμοποιεί με τον ίδιο τρόπο.

[50] Ίσως εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι σταματάει η εμβέλεια της άποψης των Hintikka & Remes, ότι στόχος του «resolution» είναι η ανεξαρτησία της βοηθητικής κατασκευής από το ζητούμενο που χρησιμοποιήθηκε. Το παραδέχονται άλλωστε και οι ίδιοι όταν αναφέρουν (Hintikka & Remes 1974, 17) ότι η περιγραφή τους ειδικά για αυτό το μέρος της ανάλυσης: «… just cannot be the whole story.»

[51] Ο υποθετικός λόγος που χρησιμοποιεί ο Πάππος στην πρότασή του αυτή: «ἐὰν + δυνατὸν ᾖ καὶ ποριστόν (υποτακτική)» ως υπόθεση και «δυνατὸν ἔσται (μέλλοντας οριστικής)» ως απόδοση, είναι ο υποθετικός λόγος του «προσδοκωμένου», ο οποίος είναι το ένα από τα δύο είδη που αποκλειστικά χρησιμοποιούνται στα *Δεδομένα* από τον Ευκλείδη. Το γεγονός αυτό ενισχύει την άποψή μας, που θα αναπτύξουμε στο όγδοο κεφάλαιο της διατριβής, ότι το κομμάτι του «resolution» είναι το αντίστοιχο των προτάσεων των *Δεδομένων* μέσα σε μια γεωμετρική προβληματική ανάλυση. Ο υποθετικός αυτός λόγος του Πάππου, έχει ως απόδοση την αναμενόμενη και βάσιμη μελλοντική συνέπεια της υπόθεσης που είναι η «δυνατότητα του ζητουμένου». Στο παράδειγμα όμως από την πρακτική του Πάππου που παραθέσαμε, είναι φανερό ότι αυτή η μελλοντική συνέπεια αποτελεί πλέον γεγονός στο τέλος του «resolution», έχει υπάρξει δηλαδή το «δυνατόν του προταθέντος».

φιλοσοφική ανάλυση του «δυνατόν» που κάναμε, σημαίνει αφενός λογικά όχι αδύνατο και αφετέρου πλέον λογικά έγκυρο –αναγκαίο υπό ορισμένες συνθήκες. Έχει αποκτήσει δηλαδή μέσα από το σύνολο του νοητικού συλλογισμού (resolution) που προηγήθηκε, βεβαιωτικό χαρακτήρα (θα μπορούσε να ονομαστεί πλέον «δεδομένον») και θα σημάνει το τέλος της ανάλυσης την οποία θα ακολουθήσει η σύνθεση. Την «δυνητική αναγκαιότητα» του συνόλου του συλλογισμού που περιλαμβάνεται στο δεύτερο μέρος της γεωμετρικής ανάλυσης (resolution), προαναφέραμε ότι την εξασφαλίζουν η λογική εγκυρότητα του καθενός από τα βήματα που έχουν προηγηθεί, με πρώτο αυτό της εξασφάλισης ότι το «ομολογούμενον» είναι «δοθέν». Όλη αυτή η διαδικασία άλλωστε στην οποία χρησιμοποιήθηκε αυτή η «περίεργη» ορολογία «δοθέντων-δεδομένων» είχε ως στόχο, όπως θα αναλύσουμε σε επόμενο κεφάλαιο, την εξασφάλιση της «δυνητικής αναγκαιότητας».

Το ρητορικό ερώτημα που θα μπορούσαμε να θέσουμε σε αυτό το σημείο κλείνοντας το κεφάλαιο, είναι το γιατί ενώ στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη δεχόμαστε ότι η «προς τα κάτω» (παραγωγική) πορεία των «αποδείξεων» –που γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο με τη βοήθεια των «δοθέντων»– παράγει βεβαιότητα – λογική εγκυρότητα και τις χαρακτηρίζουμε «αποδείξεις», να μη συμβαίνει το ίδιο και με τα «resolution» της προβληματικής γεωμετρικής ανάλυσης όπως το συγκεκριμένο που αναλύσαμε από το παράδειγμα του Πάππου; Γιατί να αρνηθούμε την «προς τα κάτω πορεία» ως αναπόσπαστο τμήμα της ανάλυσης και να κατηγορούμε τον Πάππο για ασυνέπεια των λεγομένων του ή ασυνέπεια θεωρίας και πράξης, ενώ στην πραγματικότητα εμείς δεν αντιλαμβανόμαστε το πως πραγματικά λειτουργεί η ανάλυση;

Στο επόμενο κεφάλαιο θα μας δοθεί η ευκαιρία να αναλύσουμε διεξοδικά τις δύο πορείες («προς τα πάνω» και «προς τα κάτω» αντίστοιχα) οι οποίες κατά την άποψή μας συμπεριλαμβάνονται στην ανάλυση. Κλείνοντας εδώ το κεφάλαιο της φιλοσοφικής διάκρισης «δοθέντος» – «δεδομένου» και έχοντας παρατηρήσει ότι οι δύο όροι αναφέρονται αποκλειστικά στο δεύτερο μέρος (resolution) των γεωμετρικών προβληματικών αναλύσεων, θα επαναλάβουμε ότι στόχος αυτού του μέρους της ανάλυσης είναι η «δυνατότητα του προταθέντος» που όπως αποδείξαμε έχει την έννοια της «δυνητικής αναγκαιότητας» του «προταθέντος» (ζητουμένου).

Συμπέρασμα

Η διάκριση «δοθέν» – «δεδομένον» όπως φάνηκε καταρχήν από τους ορισμούς των δύο όρων που διασώζονται στα αρχαία μαθηματικά κείμενα, συνδέεται εννοιολογικά με τη φιλοσοφική διάκριση «δυνατόν» – «ενδεχόμενον», η οποία, όπως είδαμε, προσδίδει με τη σειρά της στο «δοθέν» τον χαρακτήρα του *όχι αδύνατου και ταυτόχρονα τυχαίου-ενδεχομένου*, ενώ στο «δεδομένον» τον χαρακτήρα του *όχι αδυνάτου αλλά, υπό ορισμένες συνθήκες, λογικά αναγκαίου*. Παρακολουθώντας στη συνέχεια τη διάκριση «δοθέν»–«δεδομένον» να λειτουργεί με αυτόν τον τρόπο σε κείμενα όπως αυτά της γεωμετρικής ανάλυσης του Ευκλείδη και του Πάππου, δείξαμε ότι δεν πρόκειται απλώς για μια γλωσσική διάκριση χωρίς μαθηματικό περιεχόμενο αλλά για μια διάκριση που λειτουργεί και φανερώνει το διαφορετικό λογικό επίπεδο των δύο όρων. Συγκεκριμένα καταλήξαμε ότι ο τρόπος που λειτουργεί το «δοθέν» στα μαθηματικά κείμενα σημαίνει το τυχαίο-ενδεχόμενο που χρησιμοποιείται στον συλλογισμό ενώ ο τρόπος που λειτουργεί το «δεδομένον», σημαίνει το «υποθετικά αναγκαίο» που έχει προκύψει (στο “resolution”, όπως θα δείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο) ως αποτέλεσμα συλλογισμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Γεωμετρική ανάλυση. Μια νέα ερμηνεία

Αναφερθήκαμε από την εισαγωγή ακόμη της διδακτορικής μας διατριβής στο δεύτερο ιστοριογραφικό πρόβλημα που συνδέεται με την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον»: τη γεωμετρική ανάλυση στα ελληνικά Μαθηματικά και τον τρόπο που λειτουργεί, στο δεύτερο και ίσως πιο σημαντικό για την ερμηνεία της μέρος («resolution»). Η γεωμετρική ανάλυση ως μέθοδος[1] των Ελληνικών μαθηματικών για την εύρεση λύσεων προβλημάτων[2], αποτέλεσε στο παρελθόν και αποτελεί μέχρι σήμερα ένα από τα πιο ενδιαφέροντα –και πάντα ανοιχτά– ερευνητικά πεδία της ιστορίας των μαθηματικών. Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφουμε αρχικά το διεθνές ερευνητικό τοπίο και τις ερμηνείες που έχουν υπάρξει για τη γεωμετρική ανάλυση και αναδεικνύουμε τα ενδιαφέροντα στοιχεία καθεμιάς τους. Τα στοιχεία αυτά ανεξάρτητα αν προέρχονται από τη μια ή την άλλη ερμηνεία, θα μας είναι χρήσιμα παρακάτω προκειμένου να επιχειρηματολογήσουμε για θέσεις που και εμείς υποστηρίζουμε. Στη συνέχεια συνδυάζοντας τις θέσεις αυτές, με άλλες στις οποίες έχουμε φτάσει σε προηγούμενα κεφάλαια, στην πορεία της προσπάθειάς μας να κατανοήσουμε τη διάκριση των μαθηματικών όρων «δοθέν» – «δεδομένον», προτείνουμε τη δική μας ερμηνεία για τη γεωμετρική ανάλυση.

---

1 Ο Mahoney (1968) χαρακτηρίζει την ανάλυση «διαδικασία» ή «τεχνική», ο Jones (1986) «προσέγγιση», οι Hintikka & Remes (1974) και οι Berggren & Van Brummelen (2000) τη χαρακτηρίζουν «μέθοδο».

2 Πάππου: *Συναγωγή*, VII, 636.3-7: «τῶν προτεινομένων αὐτοῖς προβλημάτων, καὶ εἰς τοῦτο μόνον χρησίμη καθεστῶσα.», Πρόκλου: *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, 242.14-17: «…οὕτω γὰρ τὰ ἀσα φέστερα θηρᾶται τῶν προβλημάτων.» Αλλά και σύγχρονοι σχολιαστές υποστηρίζουν ότι η ανάλυση χρησιμοποιούνταν από τους αρχαίους Έλληνες κυρίως για την επίλυση προβλημάτων. (Βλ. λ.χ. τη μονογραφία *The Ancient Tradition of Geometric Problems* του W.R. Knorr (1986, 358-360), όπου αναφέρεται: «…η μέθοδος της ανάλυσης, η μέθοδος κατ' εξοχήν της επίλυσης προβλημάτων, μεταφέρθηκε στα θεωρήματα διαμέσου του τεχνάσματος της 'θεωρητικής ανάλυσης'.») Στην παρούσα διδακτορική διατριβή, όπως αναφέραμε, θα ασχοληθούμε μόνο με την προβληματική ανάλυση, η οποία είναι άλλωστε η μόνη που λειτουργεί με την ορολογία «δοθέντων» – «δεδομένων».

5.1. *Οι ορισμοί της γεωμετρικής ανάλυσης που έχουν σωθεί*

Η γεωμετρική ανάλυση επινοήθηκε για την εύρεση λύσεων δύσκολων γεωμετρικών προβλημάτων, η αποτελεσματικότητά της ήταν σε γενικές γραμμές αποδεκτή από τους μαθηματικούς της αρχαιότητας, ενώ η χρήση της από τον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη τον Απολλώνιο και τον Πάππο φαίνεται ότι ήταν λίγο πολύ συνεπής. Ωστόσο, από τις θεωρητικές περιγραφές, τους ορισμούς και τους σχολιασμούς της ανάλυσης από τους αρχαίους συγγραφείς, προκύπτουν μια σειρά ερωτήματα όσον αφορά τη λογική δομή της, τον τρόπο με τον οποίο λειτουργούσε, τη σημασία της, αλλά και τα εργαλεία που χρησιμοποιούσε (όπως είναι λ.χ. η ορολογία «δοθέντων» – «δεδομένων»). Στα ερωτήματα αυτά θα αναφερθούμε στη συνέχεια. Η παρακμή των ελληνικών Μαθηματικών, εξάλλου, και η διακοπή της προφορικής παράδοσης που τα συνόδευε, είχαν ως αποτέλεσμα να δημιουργηθούν στους μεταγενέστερους επιπλέον ερωτήματα για τη λειτουργία και την ευρετική αξία της ανάλυσης, ερωτήματα στα οποία η έρευνα στην ιστορία και τη φιλοσοφία της επιστήμης προσπαθεί ακόμη σήμερα να δώσει πειστικές απαντήσεις. Αναφέρουμε, εκτός από την ιστορία, και τη φιλοσοφία της επιστήμης, επειδή η Ελληνική γεωμετρική ανάλυση είναι ένα θέμα που βρίσκεται στα όρια της φιλοσοφίας και της ιστορίας της επιστήμης, και γι’ αυτό έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης από σημαντικούς ερευνητές που προέρχονται και από τους δύο αυτούς χώρους.[3]

Όπως ήταν φυσικό η έρευνα γύρω από τη γεωμετρική ανάλυση στράφηκε από την αρχή σε κείμενα τα οποία ενδεχομένως περιείχαν κάποιους ορισμούς ή θεωρητικές περιγραφές της. Στις μέρες μας έχουν φτάσει δύο μόνο τέτοιου είδους μαθηματικά κείμενα. Το ένα είναι η εισαγωγή του Πάππου στο 7^{ο} βιβλίο της *Συναγωγής*, ενώ το άλλο ανήκει πιθανότατα σε κάποιον σχολιαστή του Ευκλείδη ο οποίος το συμπεριέλαβε μαζί με τις εναλλακτικές αποδείξεις των πέντε πρώτων προτάσεων στη αρχή του XIII βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

Το σύνολο σχεδόν των ερευνητικών προσπαθειών των μαθηματικών, των φιλοσόφων και των ιστορικών της επιστήμης που κατά καιρούς ασχολήθηκαν με τη γεω-

[3] Hankel (1874), Zeuthen (1896, 1902), Heath (1921,1926), Cornford (1932), Robinson (1936), Cherniss (1951), Gulley (1958), Mahoney (1968), Hintikka & Remes (1974, 1976), Szabó (1974), Knorr (1986), Karasmanis (1987), Rashed (1991α, 1991β, 1993), Behboud (1994), Otte & Panza (1997), Berggren & Van Brummelen (2000), Netz (2000).

μετρική ανάλυση έχει εστιάσει στο απόσπασμα από την εισαγωγή του 7ου βιβλίου της *Συναγωγής* του Πάππου, το οποίο κατά τον T.L. Heath αποτελεί «την περισσότερο επεξεργασμένη Ελληνική διατύπωση επάνω σε αυτό το θέμα» (1921, 400). Η σημασία του εν λόγω αποσπάσματος για την κατανόηση της λειτουργίας της γεωμετρικής ανάλυσης των αρχαίων είναι σήμερα σε γενικές γραμμές αποδεκτή, ωστόσο έχουν κατά καιρούς διατυπωθεί προβληματισμοί για την εσωτερική συνέπεια, ακόμη και για την αυθεντικότητα του κειμένου του Πάππου. Λόγου χάριν, κατά τον M.S. Mahoney, το απόσπασμα του Πάππου «είναι γεμάτο–φορτωμένο (‘fraught’) με δυσκολίες» (1968, 322) και προκειμένου να λειτουργήσει πρέπει να αφαιρεθούν από αυτό οι γραμμές 10-18 [Hultsch 7.636. 13-23] που περιλαμβάνουν τον δεύτερο «ορισμό»[4] της ανάλυσης, «επειδή αποτελεί παρεμβολή» (1968, 325).

Επειδή στη συνέχεια θα αναφερθούμε αρκετές φορές στο κείμενο του Πάππου είναι σκόπιμο να το παραθέσουμε εδώ:

Πάππου *Συναγωγή*, VII, ed. Hultsch:

634.11 ἀνάλυσις τοίνυν ἐστὶν ὁδὸς ἀπὸ τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ἐπί τι ὁμολογούμενον συνθέσει· 634.13 ἐν μὲν γὰρ τῇ ἀναλύσει τὸ ζητούμενον ὡς γεγονὸς ὑποθέμενοι τὸ ἐξ οὗ τοῦτο συμβαίνει σκοπούμεθα καὶ πάλιν ἐκείνου τὸ προηγούμενον, ἕως ἂν οὕτως ἀναποδίζοντες καταντήσωμεν εἴς τι τῶν ἤδη γνωριζομένων ἢ τάξιν ἀρχῆς ἐχόντων· καὶ τὴν τοιαύτην ἔφοδον ἀνάλυσιν καλοῦμεν, οἷον ἀνάπαλιν λύσιν. 634.18 ἐν δὲ τῇ συνθέσει ἐξ ὑποστροφῆς τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὕστατον ὑποστησάμενοι γεγονὸς ἤδη, καὶ ἑπόμενα τὰ ἐκεῖ [ἐνταῦθα] προηγούμενα κατὰ φύσιν τάξαντες καὶ ἀλλήλοις ἐπισυνθέντες, εἰς τέλος ἀφικνούμεθα τῆς τοῦ ζητουμένου κατασκευῆς· καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν. 634.24 Διττὸν δ’ ἐστὶν ἀναλύσεως γένος, τὸ μὲν ζητητικὸν τἀληθοῦς, ὃ καλεῖται θεωρητικόν, τὸ δὲ ποριστικὸν τοῦ προταθέντος [λέγειν], ὃ καλεῖται προβληματικόν. 634.26 ἐπὶ μὲν 7.636 οὖν τοῦ θεωρητικοῦ γένους τὸ ζητούμενον ὡς ὂν ὑποθέμενοι καὶ ὡς ἀληθές, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀλη θῶν καὶ ὡς ἔστιν καθ’ ὑπόθεσιν προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον, ἐὰν μὲν ἀληθὲς ᾖ ἐκεῖνο τὸ ὁμολογούμενον, ἀληθὲς ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον, καὶ ἡ

[4] Κάποιοι, όπως ο Heath (1926, τομ.I, 139) και ο Mahoney (1968, 323-325), έχουν αποκαλέσει τα αποσπάσματα αυτά του Πάππου «ορισμούς», όμως άλλοι όπως οι Cornford, Gulley και Hintikka & Remes είναι περισσότερο επιφυλακτικοί και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούν για τα ίδια αποσπάσματα τους όρους: «description», «account» και «characterization».

ἀπόδειξις ἀντί στροφος τῇ ἀναλύσει, ἐὰν δὲ ψεύδει ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ψεῦδος ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον. ἐπὶ δὲ τοῦ προβληματικοῦ γένους τὸ προταθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον, ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατὸν ᾖ καὶ ποριστόν, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθέν, δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ προταθέν, καὶ πάλιν ἡ ἀπόδειξις ἀντί στροφος τῇ ἀναλύσει, ἐὰν δὲ ἀδυνάτῳ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ἀδύνατον ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα.

Το δεύτερο κείμενο που περιλαμβάνει έναν ορισμό της ανάλυσης βρίσκεται στην αρχή του $13^{ου}$ βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και αποδίδεται σε κάποιον ανώνυμο σχολιαστή ο οποίος αναφέρει:

Τί ἐστιν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστι σύνθεσις. Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον. Σύνθεσις δὲ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον. <την του ζητουμένου κατάληξιν ήτοι κατάληψιν>.

Αυτό το σχόλιο πρέπει να γράφτηκε όπως αναφέρει ο Heath (1926, τομ.III, 442) πριν από την εποχή του Θέωνα, ενώ από τον Heiberg στην έκδοση των *Στοιχείων* (τομ. 5, lxxxiv) πιθανολογήθηκε ότι υπήρξε κατάλοιπο των αναλυτικών ερευνών του Θεαίτητου ή του Ευδόξου. Ο ίδιος ο Heiberg αργότερα (1903, 58), αναθεωρώντας την προηγούμενη υπόθεσή του, διατυπώνει την εικασία ότι το σχόλιο πρέπει να αποδοθεί στον Ήρωνα με βάση την ομοιότητα του κειμένου με τις παρατηρήσεις και τα σχόλια που ο Ήρωνας έγραψε για το δεύτερο βιβλίο των *Στοιχείων*. Η εικασία αυτή του Heiberg είναι μέχρι σήμερα αποδεκτή σε γενικές γραμμές από τους σύγχρονους ερευνητές (Hintikka & Remes 1974, 30).

5.2. *Τα ερωτήματα που αφορούν τη γεωμετρική ανάλυση*

Τα ερωτήματα που κατά καιρούς έχουν διατυπωθεί και αφορούν τη γεωμετρική ανάλυση γενικότερα και το κείμενο του Πάππου ειδικότερα είναι πολλά. Μερικά από αυτά είναι τα ακόλουθα: Το κείμενο του Πάππου περιέχει έναν ή περισσότερους αυστηρούς ορισμούς της γεωμετρικής ανάλυσης; Μήπως περιλαμβάνει απλώς κάποιες περιγραφές της; Αυτές οι περιγραφές/ορισμοί συμφωνούν μεταξύ τους ή μήπως αντιφάσκουν; Η θεωρητική περιγραφή της γεωμετρικής ανάλυσης από τον Πάππο είναι σύμφωνη με τον τρόπο τον οποίο ο ίδιος την ασκεί στην πράξη; Η γεωμετρική ανάλυση έχει κατεύθυνση, και αν ναι ποια είναι αυτή; Η σύνθεση είναι το αντίστροφο της ανάλυσης; Ποια είναι η δομή της αναλυτικής μεθόδου και πώς λειτουργεί η μέθοδος στην πράξη; Ποια είναι η σημασία για τους Έλληνες μαθηματικούς των όρων «δοθέν» και «δεδομένον» που χρησιμοποιούνται στο δεύτερο μέρος («resolution») της γεωμετρικής ανάλυσης; Ποιος ο λόγος ύπαρξης του δευτέρου μέρους της ανάλυσης; Η ανάλυση είναι μόνο προβληματική ή υπάρχει και θεωρη(μα)τική ανάλυση; Ποια είναι η ευρετική αξία της μεθόδου και ποια ήταν η σημασία της για τα ελληνικά Μαθηματικά; Αν η σημασία της ήταν πράγματι μεγάλη, τότε γιατί διασώζεται σε τόσο μικρό αριθμό κειμένων; Οι αρχαίοι προσπάθησαν να κρύψουν την αναλυτική μέθοδο από τους μεταγενέστερους προκειμένου να φανεί ακόμη μεγαλύτερη η αξία τους ως μαθηματικών, όπως αναφέρει ο Descartes και άλλοι μαθηματικοί της νεότερης εποχής;

Οι απαντήσεις που έχουν δοθεί κατά καιρούς σε αρκετά από αυτά τα ερωτήματα δεν συμφωνούν πάντα μεταξύ τους και όπως αναγνωρίζουν αρκετοί σύγχρονοι ερευνητές δεν είναι ακόμη πλήρεις. Ενδεικτική είναι η ομολογία των Hintikka & Remes (1974, 17): «Η ερμηνεία μας…απλά δεν μπορεί να είναι όλη η ιστορία». Φράση την οποία θα επαναλάβουν στο τέλος του έκτου κεφαλαίου της εργασίας τους σε ένα από τα πιο κρίσιμα όπως αναγνωρίζουν σημεία της ερμηνείας τους (σελ. 50), για το δεύτερο μέρος της γεωμετρικής ανάλυσης («resolution»): «…είναι φανερό ότι αυτό δεν μπορεί να είναι όλη η ιστορία.» Επίσης, ο Ali Behboud (1994, 53) αναγνωρίζοντας ότι δεν είναι ακόμη σε θέση να αποτιμήσει την ευρετική αξία της μεθόδου γράφει: «αυτό το τμήμα του συμπεράσματος μου… ελπίζω ότι θα βοηθήσει σε μια μελλοντική εξήγηση της ευρετικής επιτυχίας της μεθόδου της ανάλυσης και της σύνθεσης στην Ελληνική γεωμετρία.»

Στα παραπάνω ερωτήματα για τη γεωμετρική ανάλυση θα μπορούσαν, ίσως, να προστεθούν και άλλα, όμως ο σκοπός μας εδώ δεν είναι να κάνουμε μια πλήρη καταγραφή των ερωτημάτων αλλά να προσπαθήσουμε να απαντήσουμε κάποια από αυτά, με σεβασμό στα κείμενα, στη μαθηματική πρακτική με την οποία λειτούργησαν, και στο πολιτισμικό και κοινωνικό περιβάλλον μέσα στο οποίο παρήχθησαν. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν σε αυτό το κεφάλαιο να απαντήσουμε στο σύνθετο ερώτημα, τι είναι το «resolution», πώς λειτουργεί, ποια η αναγκαιότητά του, και τι σημαίνει η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» που χρησιμοποιεί; Τα στοιχεία και οι θέσεις μας που θα αναδειχθούν στην πορεία απάντησης αυτού του ερωτήματος, θα μας βοηθήσουν στη συνέχεια να προτείνουμε μία νέα ερμηνεία της γεωμετρικής ανάλυσης των αρχαίων.

Προηγουμένως όμως θα σκιαγραφήσουμε συνοπτικά τις ερμηνείες οι οποίες έχουν υπάρξει μέχρι σήμερα.

5.3. *Οι υπάρχουσες ερμηνείες της γεωμετρικής ανάλυσης*

Οι σημαντικότερες σύγχρονες ερμηνείες της γεωμετρικής ανάλυσης στηρίζουν τα επιχειρήματά τους κυρίως στο πρώτο από τα δύο παραπάνω κείμενα, καθώς και σε συγκεκριμένα παραδείγματα από τον Πάππο, τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο. Το κεντρικό ερώτημα στο οποίο αυτές προσπάθησαν και προσπαθούν να απαντήσουν είναι αν η γεωμετρική ανάλυση είναι μια παραγωγική λογική διαδικασία ή όχι. Ένα ερώτημα το οποίο μάλλον δεν απασχολούσε ούτε είχε νόημα για τους αρχαίους, τουλάχιστον όχι με τη μορφή που παρουσιάζεται σήμερα. Η μορφή με την οποία παρουσιάζεται σήμερα θα λέγαμε ότι καλύπτει ουσιαστικά τις σημερινές – σύγχρονες εννοιολογικές ανάγκες μας για καλύτερη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο λειτουργούσε η μέθοδος στα Ελληνικά μαθηματικά.

Παρά το πλήθος των ερωτημάτων που έχουν προκύψει, οι ερμηνείες που δόθηκαν μέχρι σήμερα για τη γεωμετρική ανάλυση ομαδοποιούνται σε δύο βασικές. Από τη μια είναι η «κλασική» ερμηνεία, που θεωρεί την ανάλυση ως παραγωγική διαδικασία που ξεκινά από το ζητούμενο και μέσω των συνεπειών του φτάνει σε κάτι που είναι «κατά κοινή ομολογία αληθές (‘admittedly true’)». Στη συνέχεια το τελευταίο βήμα της ανάλυσης γίνεται πρώτο για τη σύνθεση, η οποία με αντίστροφη σειρά, επίσης παραγωγικά, αποδεικνύει το ζητούμενο. Σύμφωνα με την ερμηνεία αυτή «η αλυσίδα των συμπερασμών θα πρέπει να είναι αντιστρεπτή χωρίς περιορισμούς» (Heath 1926, τομ.I, 139-141). Με άλλα λόγια οι υπέρμαχοι αυτής της ερμηνείας αντιλαμβάνονται την ανάλυση που μας ενδιαφέρει περισσότερο ως μια παραγωγική - «προς τα κάτω» πορεία από το ζητούμενο προς κάτι αναμφισβήτητα αληθές. Η παραπάνω ερμηνεία έχει υποστηριχθεί από τους Hankel, Cantor, Zeuthen, Heath, Robinson, Cherniss και Mahoney.[5] Σύμφωνα με τη δεύτερη βασική ερμηνεία, η οποία υποστηρίχθηκε πρώτα κατά κύριο λόγο από τον Cornford (1932, 43-50), η ανάλυση δεν είναι μία παραγωγική λογική διαδικασία αλλά μία ενορατική διαδικασία εύρεσης προκειμένων («προς τα πάνω πορεία-κίνηση της ενόρασης» όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Cornford στη σελίδα 43) από τις οποίες θα ξεκινήσει η απόδειξη του ζητουμένου. Με αυτήν την έννοια μόνο η σύνθεση είναι παραγωγική λογική διαδικασία. Η ερμηνεία αυτή στη συνέχεια υιοθετήθηκε και υποστηρίχθηκε, τουλάχιστον εν μέρει, με επιπλέον επιχειρήματα από τους Hintikka & Remes[6] (1974, 17) οι οποίοι όμως φτάνουν να αναγνωρίσουν μετά από σοβαρή μελέτη των στοιχείων και έντονο προβληματισμό ότι: «Η ερμηνεία μας για την ανάλυση στον Πάππο ως μια πορεία προς τα πάνω…απλά δεν μπορεί να είναι όλη η ιστορία.» Ενώ παρακάτω παραδέχονται ότι: «Η ιδέα ότι η ανάλυση μπορεί μετά από όλα αυτά να προχωρά-διεξάγεται προς τα κάτω θα πρέπει συμπερασματικά να υποστηριχθεί» (σελ. 36). Βλέπουμε δηλαδή ότι ενώ οι Hintikka & Remes ερμηνεύουν με βάση τα στοιχεία τη γεωμετρική ανάλυση κατά κύριο λόγο ως μια «προς τα πάνω» πορεία, με άλλα λόγια πορεία αναζήτησης προκειμένων, δεν μπορούν να μην παραδεχτούν με βάση άλλα στοιχεία που έχουν μπροστά τους και τα οποία είναι κυρίως η μαθηματική πρακτική του Πάππου αλλά και κάποια σημεία των θεωρητικών περιγραφών του, ότι η ανάλυση μπορεί να διεξάγεται «προς τα κάτω».

Το αξιοσημείωτο είναι ότι και οι δύο παραπάνω ερμηνείες, τόσο η «κλασική» όσο και ερμηνεία της ανάλυσης ως «προς τα πάνω» πορείας, στηρίζονται σε πολύ μεγάλο βαθμό στο κείμενο του Πάππου, από το οποίο οι υποστηρικτές της καθεμίας αντλούν τα επιχειρήματά τους. Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη ερμηνεία στηρίζεται στα χωρία (1) (634, 11-13) και (3) (634, 26-636, 14), τα οποία φαίνεται να συμφωνούν τόσο μεταξύ

---

[5] Heath (1926/1956, τόμ. I,138-142), Robinson (1936/1970, 464-473), Cherniss (1951, 414-419) και Mahoney (1968). Η εργασία του Hankel «Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter», (1874, 137-150) υπήρξε η κατευθυντήριος γραμμή, για τον τρόπο με τον οποίο θεωρήθηκε η ανάλυση στη συνέχεια, από τους υποστηρικτές της «κλασικής ερμηνείας»: Zeuthen, Cantor και Heath. Η ονομασία των σταδίων μιας τυπικής ανάλυσης (transformation, resolution construction και demonstration) οφείλεται επίσης σε αυτή την εργασία. Ακόμη και οι Mahoney (1968) και Hintikka & Remes (1974, 1976), αναφέρονται συχνά σε αυτή, ακολουθούν κάποιους όρους της, όπου βέβαια δεν αισθάνονται την ανάγκη να της αντιπαρατεθούν.

[6] Η μονογραφία των Hintikka & Remes (1974), με τίτλο «The Method of Analysis», αποτελεί μέχρι σήμερα κατά γενική ομολογία την πιο πλήρη και εμπεριστατωμένη μελέτη για τη γεωμετρική ανάλυση και σημείο αναφοράς για όλες τις ερευνητικές προσπάθειες. Χωρίς όμως να δίνει οριστικές απαντήσεις στα μεγάλα ζητήματα που αφορούν τη γεωμετρική ανάλυση όπως παραδέχονται και οι ίδιοι οι συγγραφείς της.

τους όσο και με τον ορισμό του σχολιαστή του 13ου βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Η δεύτερη ερμηνεία στηρίζεται κυρίως στο χωρίο (2) (634, 13-18).

Ο Gulley (1958), επίσης μη αποδεχόμενος ως οριστική την «κλασική» ερμηνεία της ανάλυσης συνέλεξε και παρουσίασε στοιχεία που φανερώνουν ότι τόσο σε συγγραφείς προγενέστερους του Πάππου, όσο και σε μεταγενέστερους, η επικρατούσα ιδέα για την ανάλυση ήταν ότι επρόκειτο για μια πορεία «προς τα πάνω». Στην προσπάθειά του ο Gulley (1958, 4) να συμβιβάσει τις δύο αντικρουόμενες ερμηνείες, διατύπωσε την άποψη ότι ο Πάππος: «… αν και προφανώς παρουσιάζει μια μόνο μέθοδο με ένα μόνο σύνολο κανόνων, στην πραγματικότητα επαναλαμβάνει δύο διαφορετικές εκτιμήσεις-περιγραφές της γεωμετρικής ανάλυσης, που αντιστοιχούν σε δυο διαφορετικές μορφές της μεθόδου, και υποθέτει την ισοδυναμία της (Ι) και (ΙΙ) για όλες τις περιπτώσεις της ανάλυσης, παραβλέποντας τις ασυνέπειες που συνδέονται με αυτή την υπόθεση.» Μια θέση που είναι καταρχήν βολική και φαίνεται να συμβιβάζει τις δύο αντικρουόμενες ερμηνείες χωρίς όμως να δίνει ουσιαστική απάντηση για το πώς μπορούν αυτές οι ερμηνείες να συνυπάρχουν ταυτόχρονα στο ίδιο κείμενο του Πάππου αν αυτός δεν βρίσκεται σε σύγχυση όπως εύλογα αναρωτιούνται οι Hintikka & Remes (1974, 13). Γι' αυτό και οι ίδιοι δηλώνουν ότι θα προσπαθήσουν με τη μελέτη τους να αναδείξουν στοιχεία που να απαλλάσσουν τον Πάππο από τις κατηγορίες για σύγχυση και ασυνέπειες. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ως αφετηρία τους σε αυτή τους την προσπάθεια έχουν τη γλώσσα και ειδικότερα την ερμηνεία του όρου «ακόλουθον» που εμφανίζεται στο κείμενο του Πάππου.

Ο Knorr (1986, 339-370) εξ άλλου θεωρεί ότι ένα μέρος της θεωρητικής περιγραφής της ανάλυσης από τον Πάππο προέρχεται από προγενέστερες πηγές και ένα άλλο μέρος ανήκει σε αυτόν τον ίδιο, το σύνολο όμως της θεωρητικής περιγραφής είναι επηρεασμένο από τις φιλοσοφικές του δεσμεύσεις. Έτσι είναι πιθανό η θεωρητική περιγραφή του να περιλαμβάνει τόσο στοιχεία που αντιτίθενται μεταξύ τους όσο και στοιχεία που δεν είναι συμβατά με την πρακτική του. Κατά συνέπεια κρίνει ότι πρέπει να ασχοληθούμε περισσότερο με τη μαθηματική πρακτική του Πάππου και να μη δίνουμε υπερβολικό βάρος στην εισαγωγή 7ου βιβλίου της *Συναγωγής* ή στα αποσπάσματα κάποιων σχολιαστών, και να προσπαθούμε μόνο από αυτά να εξάγουμε τη λογική δομή και την κατεύθυνση της γεωμετρικής ανάλυσης. Στην ίδια κατεύθυνση, οι Berggren & Van Brummelen (2000, 9) εστιάζουν την προσοχή τους σε ερωτήματα που σχετίζονται με τη χρήση της γεωμετρικής ανάλυσης στη μαθηματική πρακτική και συμφωνώντας με την ερμηνεία των Hintikka & Remes αναφέρουν: «Κάποιος θα πρέπει από τα στοιχεία να αποδεχθεί το γεγονός ότι και η αναγωγή (αναζήτηση-έρευνα για προκείμενες) και ο παραγωγικός συμπερασμός (αναζήτηση-έρευνα για συνέπειες) θεωρούνταν από τους αρχαίους συγγραφείς ως δραστηριότητες που περιλαμβάνονται κάτω από τον τίτλο της 'ανάλυσης'.»

Κλείνοντας την ενότητα που αφορά τις μέχρι σήμερα υπάρχουσες ερμηνείες της γεωμετρικής ανάλυσης, τουλάχιστον σε ότι αφορά την κατεύθυνση της, αν και δεν υπάρχει οριστική απάντηση θα μπορούσαμε να πούμε ότι διακρίνουμε μια συμφωνία τουλάχιστον ανάμεσα στους πιο σύγχρονους ερευνητές, για την ύπαρξη αφενός στοιχείων και επιχειρημάτων που στηρίζουν την ερμηνεία της ανάλυσης ως «προς τα πάνω πορείας» -αναζήτησης προκειμένων αλλά και άλλων στοιχείων και επιχειρημάτων που στηρίζουν την ερμηνεία της ανάλυσης ως «προς τα κάτω πορεία» -παραγωγική διαδικασία. Σε προγενέστερες εποχές, η αναγνώριση από τους υποστηρικτές της μιας ή της άλλης ερμηνείας στοιχείων που δεν συμφωνούν με τις θέσεις τους αλλά αντίθετα υποστηρίζουν την αντίθετη θέση, δεν υπήρξε καθόλου εύκολη υπόθεση και στην καλύτερη περίπτωση αυτά αντιμετωπίζονταν ως παρεμβολή ή παραφθορά των κειμένων αν δεν γινόταν προσπάθεια να αντιστραφούν ως επιχειρήματα. Έχοντας φτάσει όμως σήμερα στο σημείο οι περισσότεροι μελετητές της ανάλυσης να συμφωνούν ότι υπάρχουν στοιχεία και επιχειρήματα τόσο για την «προς τα πάνω» όσο και για την «προς τα κάτω» πορεία στην ανάλυση, το επόμενο ιστοριογραφικό ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι πως αυτά είναι δυνατόν να συνυπάρχουν και τι σημαίνει αυτή η συνύπαρξή τους για την ερμηνεία της ανάλυσης. Μήπως δεν σημαίνει απαραίτητα σύγχυση του Πάππου, ή προσπάθειά του να παρουσιάσει δύο διαφορετικές μορφές της μεθόδου, ή προσπάθεια συμβιβασμού ανάμεσα στις φιλοσοφικές του δεσμεύσεις και τη μαθηματική πρακτική του; Μήπως θα μπορούσε να σημάνει απλά την ύπαρξη δύο διαφορετικών μερών της ανάλυσης που το ένα λειτουργεί ως «προς τα πάνω» πορεία και το άλλο ως «προς τα κάτω» πορεία; Θα μπορούσε αυτή η ερμηνεία να επαληθευτεί μέσα από τις θεωρητικές περιγραφές αλλά και από τη μαθηματική πρακτική των αναλύσεων που έφτασαν ως εμάς σήμερα; Μια τέτοια συνθετική ερμηνεία θα επιχειρήσουμε στη συνέχεια του κεφαλαίου. Μια ερμηνεία, η οποία εκτός από τα νέα στοιχεία και επιχειρήματα θα χρησιμοποιήσει και θα συνθέσει στοιχεία και από τις δύο υπάρχουσες μέχρι σήμερα ερμηνείες, ιδωμένα όμως μέσα από μια νέα οπτική.

5.3.1. Ανάδειξη στοιχείων από τις υπάρχουσες ερμηνείες της γεωμετρικής ανάλυσης τα οποία είναι χρήσιμα για τη δική μας ερμηνεία

Οι υπάρχουσες ερμηνείες της γεωμετρικής ανάλυσης διαθέτουν σημαντικά στοιχεία τα οποία θα μας είναι χρήσιμα στη συνέχεια προκειμένου να συνθέσουμε και να υποστηρίξουμε τις δικές μας θέσεις για τη γεωμετρική ανάλυση. Για το λόγο αυτό θα αναφερθούμε σε αυτά τα στοιχεία πιο διεξοδικά

Όπως προαναφέραμε όσοι ερμηνεύουν την ανάλυση ως λογική παραγωγική διαδικασία στηρίζονται πέρα από τα συγκεκριμένα παραδείγματα γεωμετρικής ανάλυσης που έχουν σωθεί και στα δύο χωρία του Πάππου: (1^{o})(634, 11-13) και (3^{o})(634, 26-636,14), τα οποία περιέχουν την έκφραση «διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων». Έκφραση την οποία αποδίδουν ως «through its logical consequences», δηλαδή ως «διαμέσου των λογικών συνεπειών της» που σημαίνει για αυτούς απαραίτητα «πορεία προς τα κάτω». Αυτή ακριβώς η απόδοση έγινε αντικείμενο έντονης αμφισβήτησης από τον Cornford (1932, 47) ο οποίος θεώρησε ότι η έκφραση και ως συνέπεια αυτής η κατεύθυνση της ανάλυσης παρανοήθηκε αξιοθρήνητα («was lamentably misunderstood») από όλους τους προγενέστερούς μελετητές και ότι κατά τη γνώμη του θα πρέπει να αποδοθεί ως «through the succession of sequent steps» που σημαίνει «διαμέσου της συνεχούς σειράς των βημάτων». Ερμηνεία που σημαίνει κατά την άποψή του ότι, στο στάδιο της ανάλυσης η πορεία είναι «προς τα πάνω» σε αντίθεση με αυτή της σύνθεσης που είναι «προς τα κάτω». Το επιχείρημα όμως που χρησιμοποίησε ο Conford για να υποστηρίξει την άποψή του ήταν τουλάχιστον ατυχές: «Δεν μπορείς να ακολουθήσεις την ίδια σειρά βημάτων πρώτα προς τη μια κατεύθυνση, κατόπιν στην αντίθετη κατεύθυνση, και να και να φτάσεις σε λογικές συνέπειες και προς τις δύο κατευθύνσεις.» Επιχείρημα το οποίο προφανώς δεν ισχύει στα Μαθηματικά, όπου πολλές από τις προτάσεις αν όχι οι περισσότερες, με τη προσθήκη ίσως κάποιων συνθηκών, αντιστρέφονται. Αυτό έδωσε την αφορμή για να δεχτεί η άποψη του Conford σφοδρές επιθέσεις[7] και να μπει κατά κάποιο τρόπο στο περιθώριο μέχρι το 1974 που την υποστήριξαν εκ νέου οι Hintikka & Remes με νέα επιχειρήματα.

Οι Hintikka & Remes (1974, 14) διατύπωσαν την άποψη ότι στον Πάππο ο όρος «ακόλουθον»:

---

7 Με χαρακτηριστικότερη ίσως αυτή του Robinson (1936, 464).

> …δεν σημαίνει μια λογική συνέπεια, αλλά είναι ένας πολύ περισσότερο ασαφής όρος για το «οτιδήποτε αντιστοιχεί σε», ή καλύτερα «πηγαίνει μαζί με» το επιθυμητό αποτέλεσμα, τις προκείμενες από τις οποίες αυτό μπορεί να παραχθεί, ίσως με την έννοια του να καθιστά κάποιον ικανό να παράγει συμπερασματικά το αποτέλεσμα από αυτές. Για αυτό το λόγο η ερμηνεία μας «ακόλουθο» αντί για το συνηθισμένο «συνέπεια».

Οι Hintikka & Remes τεκμηρίωσαν την άποψή τους πολύ καλύτερα από τον Cornford χρησιμοποιώντας χωρία από τον Πάππο και άλλους συγγραφείς και σχολιαστές, στα οποία γίνεται φανερό ότι ο όρος «ακόλουθον» όπου χρησιμοποιείται δεν έχει την έννοια της λογικής συνέπειας που ως τότε του είχαν αποδώσει. Παρατήρησαν επίσης, ότι όπου ο Πάππος αναφέρεται σε μια λογική παραγωγική διαδικασία, χρησιμοποιεί τον όρο «συμβαίνει»[8] και όχι τον όρο «ακολουθεί» κάτι που αποτέλεσε σημαντικό επιχείρημα υπέρ της άποψής τους. Σύμφωνα με την ερμηνεία τους λοιπόν για τον όρο «ακόλουθον» και τη λειτουργία του στον Πάππο, αρκετές από τις προηγούμενες «ασυνέπειες –αντιθέσεις» του κειμένου μπορούσαν πλέον να ξεπεραστούν σε μεγάλο βαθμό. Για παράδειγμα το χωρίο (2) το οποίο έπρεπε κατά την άποψη του Mahoney να παραλειφθεί φαινόταν τώρα να επεξηγεί καλύτερα την προηγηθείσα σύντομη «αρχική εκτίμηση» (initial account) της ανάλυσης από τον Πάππο στο χωρίο (1). Το σημαντικότερο όμως ήταν ότι με την νέα ερμηνεία του όρου «ακόλουθον» τα λεγόμενα του Πάππου μπορούσαν πλέον να σημαίνουν εκτός από μια λογική παραγωγική διαδικασία και μια «προς τα πάνω πορεία». Με την άποψη αυτή φαίνεται να συντάσσονται πλέον αρκετοί από τους σύγχρονους μελετητές όπως οι οι Berggren & Van Brummelen (2000, 9) οι οποίοι σε πρόσφατο άρθρο τους για την ανάλυση, παραθέτοντας σχετική θέση του Knorr (1986) που είναι στην ίδια κατεύθυνση, αναφέρουν:

> …ο Knorr κάνει πολύ σωστά μεταφράζοντας τη φράση «αναζητώντας διαμέσου των συνεπειών» αντί του πιο συνηθισμένου «αναζητώντας διαμέσου των συνεπειών του», από τη στιγμή που η λέξη «του» δεν εμφανίζεται στα Ελληνικά. Ως εκ τούτου ο Πάππος δεν λέει προς ποια κατεύθυνση πάνε οι συνέπειες που αναζητούμε.

[8] Hintikka & Remes (1974, 14) και Καρασμάνης (1993, 186).

Οι Hintikka & Remes (1974, 17-18) αναγνώρισαν ωστόσο ταυτόχρονα, ότι πολλά ερωτήματα σχετικά με τη γεωμετρική ανάλυση, παρά το ξεκαθάρισμα του όρου «ακόλουθον», παραμένουν ακόμη ανοιχτά. Ένα από τα σημεία που εκ πρώτης όψεως φαίνεται να αντιτίθεται στην ερμηνεία τους, όπως οι ίδιοι αναφέρουν, είναι οι τελευταίες γραμμές της «περιγραφής» (description) του Πάππου για την θεωρητική και προβληματική ανάλυση αντίστοιχα[9], οι οποίες απαιτούν είτε ανάλυση ως «προς τα κάτω πορεία», την οποία η ερμηνεία τους έχει απορρίψει, είτε αντιστρεψιμότητα της ανάλυσης. Επιπλέον θεωρούν ότι είναι διπλός ο χαρακτήρας της μεθόδου που «περιέγραψε» (*described*) ο Πάππος ως «ανάλυση» και το γεγονός αυτό αποτελεί πρόσκομμα για μια απλή ερμηνεία της.[10] Αναγνωρίζουν ότι η ερμηνεία του γενικού «χαρακτηρισμού» της «ανάλυσης» του Πάππου, με τρόπο κυριολεκτικό (δηλαδή ως ανάλυση, κάτι που το έχουν κάνει και οι ίδιοι) έχει ως αποτέλεσμα τη μη αναγκαιότητα της σύνθεσης. Από τα παραπάνω οι Hintikka & Remes καταλήγουν να αναγνωρίσουν ότι η ερμηνεία τους για την ανάλυση του Πάππου ως μια «προς τα πάνω» κίνηση, αν και έχει αρκετά στοιχεία για να στηριχτεί, δεν επαρκεί.[11] Καταλήγουν επίσης στην άποψη ότι η γενική «εκτίμηση» του Πάππου για την ανάλυση και τη σύνθεση δεν είναι μια πιστή αναπαραγωγή ούτε αυτού που ο ίδιος κάνει στη μαθηματική πρακτική του ούτε αυτού που έκαναν άλλοι αρχαίοι μαθηματικοί. Άρα ένας από τους στόχους τους παρακάτω είναι να «εναρμονίσουν» *(reconcile)* τη γενική «περιγραφή» της ανάλυσης του Πάππου με την πραγματική πρακτική των αρχαίων μαθηματικών[12]. Διατυπώνουν την άποψη ότι η «επίσημη περιγραφή» του Πάππου

---

[9] «ἐὰν δὲ ψεύδει ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ψεῦδος ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον.» (636, 6-7) «ἐὰν δὲ ἀδυνάτῳ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ἀδύνατον ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα.» (636, 13-14) Για τα συγκεκριμένα χωρία οι Hintikka & Remes (1974, 17) αναφέρουν: «Εδώ ο Πάππος φαίνεται να υποθέτει ότι η αλήθεια – ή, στην προβληματική περίπτωση, η δυνατότητα - του ‘ομολογουμένου’ θα ακολουθήσει από την αλήθεια – ή τη δυνατότητα του ζητουμένου. Αυτή η υπόθεση θα προϋπέθετε είτε την ερμηνεία της ανάλυσης ως μιας προς τα κάτω κίνησης, η οποία διαγράφηκε ήδη, ή αλλοιώς την αντιστρεψιμότητα της ανάλυσης.»

[10] Hintikka & Remes (1974, 17): «Αυτό που περικλείεται στην περιγραφή του είναι μια μέθοδος ανάλυσης και σύνθεσης, και όχι μια μέθοδος ανάλυσης μόνο.»

[11] Hintikka & Remes (1974, 17): «Ως εκ τούτου η ερμηνεία μας για την ανάλυση του Πάππου ως μια κίνηση προς τα πάνω, αν και υποστηρίζεται ισχυρά από μια προσεκτική ανάγνωση των στοιχείων, απλά δεν μπορεί να είναι όλη η ιστορία.»

[12] Θεωρούμε ότι μάλλον θα πρέπει οι σύγχρονοι μελετητές της ιστορίας των μαθηματικών να προσπαθήσουμε να βελτιώσουμε τα εργαλεία που χρησιμοποιούμε και αφορούν τη γλώσσα και γενικότερα το πολιτισμικό και κοινωνικό πλαίσιο μέσα στο οποίο τα συγκεκριμένα κείμενα γράφτηκαν και λειτούργησαν, προκειμένου να βελτιώσουμε την κατανόησή μας ως προς τη μέθοδο της γεωμετρικής ανάλυσης και την ερμηνεία μας ως προς τα λεγόμενα αλλά και την μαθηματική πρακτική του Πάππου, πριν προσπαθήσουμε να τα «εναρμονίσουμε».

αντανακλά περισσότερο τη βαθιά γνώση του (*his insight*) στη συνολική λογική κατάσταση, όπου ανάλυση σημαίνει βασικά μια «προς τα πάνω» διαδικασία, παρά τη γεωμετρική πρακτική του η οποία παραπέμπει σε μια «προς τα κάτω» κίνηση καθώς και στο πρόβλημα της αντιστρεψιμότητας.[13]

Αρκετές από τις υπόλοιπες απόψεις των Hintikka & Remes είναι επίσης ιδιαίτερα σημαντικές για την ερμηνεία της γεωμετρικής ανάλυσης. Με άλλες από αυτές συμφωνούμε ενώ με άλλες διαφωνούμε όπως θα μας δοθεί και παρακάτω η ευκαιρία να εξηγήσουμε. Δεν μπορούμε όμως παρά να αναγνωρίσουμε ότι η εργασία των Hintikka & Remes αποτελεί σημείο αναφοράς[14] για τη γεωμετρική ανάλυση. Επίσης αρκετά στοιχεία από την ερμηνεία του Cornford για τη γεωμετρική ανάλυση θα είναι χρήσιμα για την ερμηνεία μας, για το λόγο αυτό θα αφιερώσουμε σε αυτά την επόμενη ενότητα.

5.3.2. Σημαντικά στοιχεία από την ερμηνεία του Cornford για τη γεωμετρική ανάλυση

Στην αρχαία παράδοση περιλαμβάνονται τρία χωρία που συνδέουν την ανακάλυψη της γεωμετρικής ανάλυσης και σύνθεσης με τον Πλάτωνα και τον Λεωδάμαντα τον Θάσιο. Όπως σημειώνει ο Καρασμάνης (1993, 174), στο πρώτο, από τον Διογένη τον Λαέρτιο (III, 24) αναφέρεται ότι ο Πλάτων «εισηγήσατο» στον Λεωδάμαντα τη μέθοδο της ανάλυσης. Στο δεύτερο, από τον Πρόκλο (Friedlein 1873, 211.18-23) αναφέρεται ότι ο Πλάτων δίδαξε («παραδέδωκεν») τη μέθοδο στον Λεωδάμαντα, ο οποίος όπως λένε, πραγματοποίησε πολλές ανακαλύψεις στη γεωμετρία μέσω αυτής. Στο τρίτο, ο αρχαίος συγγραφέας του Academ. Philos. Index Herculanensis (ed

[13] Μια άποψη την οποία σε γενικές γραμμές θα διατηρήσουν μέχρι τέλους, γιατί μάλλον τους είναι απαραίτητη για να καλύψουν κάποια από τα ερωτήματα τα οποία ήδη έχουν αναγνωρίσει ότι παραμένουν ανοιχτά: «Έχει ήδη γίνει κατανοητό ότι η γενική συζήτηση του Πάππου…είναι μόνο μια ατελής αναπαράσταση της πολύ περισσότερο πολύπλοκης δομής των πραγματικών αναλύσεων, όπως απαντώνται στη μαθηματική πρακτική. Υπό το φως αυτής της περισσότερο πολύπλοκης δομής, η δήλωση του Πάππου που αφορά την ανεπιτυχή ανάλυση γίνεται απόλυτα κατανοητή. (Hintikka & Remes, 1974, 78-79)

[14] Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι ο J.L.Berggren (1984), στο (review) άρθρο του «History of Greek Mathematics: A Survey of Recent Research», σχετικά με τη μέθοδο της γεωμετρικής ανάλυσης, αναφέρει τις εργασίες των Mahoney(1968) και Hintikka & Remes (1974), ως τις δύο σημαντικότερες κατά τη γνώμη του εργασίες που αφορούν την ανάλυση. Για τη δεύτερη ειδικότερα αναφέρει: «…η εργασία είναι μια προσπάθεια να χρησιμοποιήσουν τη φιλοσοφία των μαθηματικών για να ρίξουν φως σε ιστορικά ερωτήματα, μια προσέγγιση που είναι περισσότερο κοινή αλλού στην ιστορία της επιστήμης.»

Meckler, 17) μιλά για τη γέννηση της ανάλυσης στα χρόνια του Πλάτωνα χωρίς όμως να την αποδίδει σ' αυτόν τον ίδιο.

Με αφετηρία τα παραπάνω χωρία, που συνδέουν την ανάλυση με τον Πλάτωνα, ξεκίνησε και στη συνέχεια υποστηρίχθηκε από τον Cornford, μια αρκετά διαφορετική ερμηνεία για τη μέθοδο της γεωμετρικής ανάλυσης. Η ερμηνεία του Cornford για τη γεωμετρική ανάλυση περιλαμβάνεται στο άρθρο του με τίτλο «Mathematics and Dialectic in the *Republic* VI-VII». Στο άρθρο αυτό εκτός από την άποψή του για τον όρο «ακόλουθον» και την «προς τα πάνω πορεία» στην ανάλυση που προαναφέραμε, διατυπώνει και αρκετές άλλες ενδιαφέρουσες απόψεις, που αφορούν άμεσα ή έμμεσα τη γεωμετρική ανάλυση τις οποίες θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια. Ειδικότερα διερευνά τη σχέση του Πλάτωνα με την ανάλυση, αναδεικνύει τη ενορατική ικανότητα (intuition) ως σημαντικό εργαλείο του διαλεκτικού και διακρίνει το επίπεδο της «νόησης» στο οποίο λειτουργεί ο διαλεκτικός-ερευνητής κατά τον Πλάτωνα από το επίπεδο της «διάνοιας» στο οποίο λειτουργεί ο δάσκαλος.

Στο άρθρο του ο Cornford θέτει αρχικά δύο στόχους: 1ον) να οριοθετήσει τα τμήματα της ψυχής (του «νοητού») που ο Πλάτων (511D) διακρίνει με τους όρους «νόηση» και «διάνοια» αναφερόμενος στα πεδία των μαθηματικών και της διαλεκτικής και 2ον) να κάνει σαφέστερο το σχήμα του Πλάτωνα στην *Πολιτεία* που αφορά την ανώτατη εκπαίδευση (higher education) διακρίνοντας σε αυτό δύο προγράμματα: το ένα της εκπαίδευσης και το άλλο της έρευνας.

Στα πλαίσια του πρώτου στόχου θα αναφερθεί σε τέσσερα στοιχεία της διάκρισης «νόηση» – «διάνοια»: α) στα αντικείμενα, β) στις μεθόδους της κάθε διαδικασίας, γ) στις κινήσεις της σκέψης, παραγωγικές και ενορατικές (deductive and intuitive) όπως αυτές εμφανίζονται στις διαδικασίες και δ) στις καταστάσεις του πνεύματος (mind) που είναι χαρακτηριστικές για τον μαθηματικό και τον ολοκληρωμένο διαλεκτικό. Αναπτύσσοντας το τρίτο στοιχείο ο Cornford, δηλαδή τις δύο κινήσεις της σκέψης, υποστηρίζει ότι ο Πλάτων με τον όρο «νόηση» (κατά μια έννοια) εννοεί την «προς τα πάνω» πορεία-κίνηση της ενόρασης (intuition) και με τον όρο «διάνοια» την «προς τα κάτω κίνηση» της αιτιολόγησης σε παραγωγικό επιχείρημα.[15] Ο Πλάτων αντιλήφθηκε ότι ο νους πρέπει να έχει τη δύναμη να κάνει βήματα ή άλματα

[15] Cornford (1932, 43): «…νόηση (υπό μία έννοια) σημαίνει την προς τα πάνω κίνηση της ενόρασης, διάνοια (υπό μια έννοια) σημαίνει την προς τα κάτω κίνηση της αιτιολόγησης στο παραγωγικό επιχείρημα…»

τα ή άλματα προς τα πάνω, δηλαδή από το συμπέρασμα προς τις προκείμενες που υπονοούνται από αυτό. Οι αλήθειες που προηγούνται, δεν μπορούν να εξαχθούν παραγωγικά ή να αποδειχθούν από το συμπέρασμα. Πρέπει να γίνουν αντιληπτές – συλληφθούν νοητικά («άψασθαι», 511B) με μια πράξη αναλυτικής διείσδυσης (analytical penetration), δηλαδή μια αναρρίχηση. Αυτή ακριβώς η «προς τα πάνω» κίνηση ήταν το κοινό στοιχείο, κατά τον Cornford, που έκανε μάλλον τον Πρόκλο να συνδέσει τη μέθοδο της διαλεκτικής αναρρίχησης (dialectical ascent) του Πλάτωνα[16] με τη μέθοδο της γεωμετρικής ανάλυσης. Μια σύνδεση η οποία σύμφωνα με τον Heath (1921, τομ.I, 291) οφείλεται σε παρανόηση γιατί το επίτευγμα του Πλάτωνα ήταν μόνο: «…να παρατηρήσει τη μεγάλη σημασία … της βεβαιωτικής σύνθεσης που ακολουθεί την ανάλυση.» Ο Cornford με τη σειρά του, συμφωνεί ότι ο Πλάτωνας δεν επινόησε κυριολεκτικά τη μέθοδο της ανάλυσης, αλλά ταυτόχρονα θεωρεί ότι θα μπορούσε κάποιος να πει κάτι τέτοιο, με την ίδια έννοια που θα μπορούσε κάποιος να πει ότι ο Αριστοτέλης «επινόησε» το συλλογισμό· δηλαδή ήταν ο πρώτος που αναστοχάστηκε πάνω στη διαδικασία της σκέψης που γίνεται στην ανάλυση και την περιέγραψε σε αντίθεση με τη διαδικασία της σύνθεσης. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτού του αναστοχασμού κατά τον Cornford, στη θεώρησή του για τη διαλεκτική αναρρίχηση (dialectical ascent) ο Πλάτωνας ουσιαστικά περιγράφει την «προς τα πάνω» κίνηση της σκέψης η οποία φανερώνεται στη γεωμετρική ανάλυση.

Μια από τις σημασίες[17] αυτού που ο Πλάτων ονομάζει «νόηση» –το ανώτερο από τα δύο μέρη του «νοητού»- φαίνεται να είναι η ενόραση (intuition) η οποία χρησιμοποιείται σε αυτό το άλμα της σκέψης προς τα πάνω. Αυτή την έννοια της «νόησης» ο Cornford την εξάγει από τις μεταφορές και τους όρους που ο Πλάτων χρησιμοποιεί στις περιγραφές του όπως είναι: «άψασθαι, κατιδείν, θεάσθαι..». Το σημαντικό κατά τη γνώμη του δεν είναι το όνομα αλλά η αναγνώριση αυτής της ενορατικής (intuitive) κίνησης. Η «προς τα κάτω» ή παραγωγική αιτιολόγηση φανερώνεται για τη «διάνοια» αντίστοιχα από εκφράσεις που χρησιμοποιούνται για αυτήν όπως: «πορευομένη» (510B) και «διεξιόντες τα λοιπά» (510D).

[16] Έχει αναφερθεί προηγουμένως στην «υποθετική μέθοδο» που εμφανίζεται στον Πλατωνικό διάλογο *Μένων*, 86. Για μια πληρέστερη και εμπεριστατωμένη συσχέτιση των Πλατωνικών διαλόγων με τη γεωμετρική ανάλυση, θα αναφερθούμε παρακάτω στη διδακτορική διατριβή του Β. Καρασμάνη: «*The Hypothetical method in Plato's Middle Dialogues»,* Oxford University, 1987.

[17] Cornford (1932, 47-48): «ενόραση…είναι μια από τις σημασίες της νόησης.»

Το σημαντικό στις θέσεις του Cornford μέχρι εδώ που είναι και χρήσιμο για τη δική μας ερμηνεία, είναι ότι διατυπώνει με ρητό τρόπο τη σχέση της διαλεκτικής του Πλάτωνα με την ανάλυση αλλά και αναδεικνύει μέσω αυτής και της ερμηνείας του για το «ακόλουθον», το σημαντικότερο ίσως στοιχείο της γεωμετρικής ανάλυσης, που είναι η ενορατική ικανότητα του γεωμέτρη-ερευνητή. Ικανότητα την οποία χρησιμοποιεί ως εργαλείο στην «προς τα πάνω κίνηση», στην κατεύθυνση της ανακάλυψης της δομής του προβλήματος.

Σημαντικό είναι επίσης το ότι ο Cornford εντοπίζει και επισημαίνει τη «νόηση» ως το «ανώτερο τμήμα του νοητού» που αυτά λαμβάνουν χώρα, «επίπεδο όμως στο οποίο δε φτάνουν όλοι» όπως τονίζει παρακάτω, αναλύοντας το τέταρτο στοιχείο (states of mind) της διάκρισης «νόησης» – «διάνοιας», αλλά μόνο οι φιλόσοφοι-ερευνητές. Αυτό γίνεται φανερό στην *Πολιτεία* (511 C-D) σύμφωνα με τον Conrnford (1932, 50), όταν ο Γλαύκων κατανοεί ότι όσα αποκαλύπτονται με τη διαλεκτική επιστήμη του «όντος» και του «νοητού» είναι σαφέστερα από τις άλλες που λένε (μαθηματικές) τέχνες, αφού οι υποθέσεις τους είναι τα θεμέλια:

> και ότι παρόλο που οι μαθητές υποχρεώνονται κατά τη μελέτη αυτών των τεχνών να χρησιμοποιήσουν αφαιρετική αιτιολόγηση (διανοίᾳ) και όχι τις αισθήσεις, ακόμη, επειδή συνεχίζουν-προχωρούν από τις υποθέσεις χωρίς να πηγαίνουν προς τα επάνω προς μια πρώτη αρχή, αυτοί δεν νομίζεις ότι έχουν νου (νοῦν οὐκ ἴσχειν), μολονότι τα αντικείμενά τους μπορεί να είναι αντικείμενα του *νου* και συνδέονται με μια πρώτη αρχή (καίτοι νοητῶν ὄντων μετὰ ἀρχῆς). Σε κατανοώ να περιγράφεις την κατάσταση του πνεύματος (ἕξιν) των γεωμετρών (γεωμετρικῶν) και των άλλων μαθηματικών όχι ως *νου* (νοῦν) αλλά ως *διάνοια* (διάνοιαν), θεωρώντας τη *διάνοια* (διάνοιαν) ως κάτι ανάμεσα στη δοξασία και το *νου* (νοῦ) (511C-D).[18]

Αναφέραμε ότι δεύτερος στόχος της εργασίας του Cornford, είναι να κάνει σαφέστερο το σχήμα του Πλάτωνα που αφορά την ανώτατη εκπαίδευση. Άποψή του είναι ότι ανάμεσα στην εκπαίδευση και την έρευνα μπορεί να γίνει διάκριση σύμφωνα με τον Πλάτωνα αλλά όχι διαχωρισμός· ο ερευνητής συνεχίζει πάντα να μαθαίνει

[18] Ο «χωρισμός» του Πλάτωνα θυμίζουμε ότι είναι: «νους, διάνοια, δόξα, εικασία». Είναι ίσως χαρακτηριστικό ότι τόσο σε αυτό το χωρίο όσο και στο 526 D 5 όπου ο Πλάτωνας αναφέρεται σε αυτούς που ασκούν την τέχνη της γεωμετρίας σε αντιδιαστολή με τους διαλεκτικούς – φιλοσόφους – ερευνητές τους αποκαλεί «γεωμετρικούς» και όχι γεωμέτρες.

και στην επικοινωνία των αποτελεσμάτων του διδάσκει.[19] Διάκριση η οποία είναι επίσης χρήσιμη για την ερμηνεία μας. Για να τεκμηριώσει την άποψή του ο Cornford αρχικά παραθέτει συνοπτικά το αναλυτικό πρόγραμμα της Μαθηματικής εκπαίδευσης όπως παρουσιάζεται στο 7^{ο} κεφάλαιο της *Πολιτείας* (536D-537C). Τα στάδια της εκπαίδευσης μέχρι του σημείου που αρχίζει η διαλεκτική έχουν ως εξής όπως αναφέρει: 1) η βασική εκπαίδευση στη μουσική και τη γυμναστική η οποία έχει περιγραφεί στα κεφάλαια II και III της *Πολιτείας*, 2) η μαθηματική «προπαιδεία» στη διαλεκτική των παιδιών πρέπει να έχει ολοκληρωθεί μέχρι την ηλικία των 17-18 ετών με τη μορφή παιχνιδιού και όχι με καταναγκασμό (536D-537A), 3) κατόπιν ακολουθούν δύο έως τρία χρόνια άσκησης του σώματος η οποία είναι αρκετά κοπιαστική για να επιτρέπει ταυτόχρονα και πνευματική προσπάθεια (537B) και 4) στην ηλικία των 20 ένας αριθμός επιλεγμένων παιδιών που θα έχουν διακριθεί προηγουμένως θα προωθηθούν σε μια δεκάχρονη μελέτη των ίδιων μαθημάτων που τους έγιναν σκόρπια («χύδην μαθήματα») με ένα τρόπο συνολικό και συνοπτικό («συνακτέον εις σύνοψιν») ώστε να μπορούν εύκολα να διακρίνουν τη σχέση που έχουν οι επιστήμες μεταξύ τους αλλά και με τη φύση του όντος-πραγματικότητας (537C). Μόνο με αυτό τον τρόπο θα στερεωθούν («βέβαιος») μέσα τους οι γνώσεις που θα αποκτήσουν. Επιπλέον αυτή η διαδικασία θα αποκαλύψει ποιοι από αυτούς είναι ικανοί να προχωρήσουν στη διαλεκτική· γιατί ο ικανός να αντιλαμβάνεται με μια ματιά τη συνάφεια, είναι διαλεκτικός, κάθε άλλος όμως όχι. Αυτή η ίδια δεκαετής διαδικασία έχει περιγραφεί πρώτη φορά κατά τον Cornford στο 531C-D όπου έχει διατυπωθεί η άποψη ότι θα είναι επιτυχής και χρήσιμη μόνο αν οδηγήσει στη γνωριμία και τον αναστοχασμό της συγγένειας και της στενής σχέσης και επίδρασης που έχουν μεταξύ τους όλες αυτές οι επιστήμες που διδάχθηκαν. Αλλά το μεγάλο αυτό χρονικό διάστημα που απαιτείται, κατά τον Cornford υπονοεί ότι οι ώριμοι αυτοί μαθητές θα εισαχθούν στα αποτελέσματα της προχωρημένης μαθηματικής έρευνας.

Την πρώτη αυτή αναφορά στη «συνοπτική» μελέτη των μαθηματικών και των άλλων επιστημών (531D), ακολουθεί μια προκαταρκτική περιγραφή της διαλεκτικής (της ηθικής) ως το τελικό στάδιο της εκπαίδευσης. Στο στάδιο αυτό βέβαια δεν φτάνουν όλοι όσοι έφτασαν στο προηγούμενο αντίθετα φτάνουν πολύ λίγοι. Η προκαταρκτική αυτή περιγραφή απορρίπτει όσους δεν είναι ικανοί «να δώσουν και να α-

---

[19] Cornford (1932, 173).

ποδεχθούν το λόγο» για το κάθε τι που χρησιμοποιούν ως «υπόθεση».[20] Στη συνέχεια κατά τον Cornford (1932, 176), ο Πλάτων περιγράφει συνοπτικά δύο διαφορετικά είδη και μεθόδους για έρευνα, στο πεδίο των μαθηματικών (533A-534B) και της ηθικής αντίστοιχα (534B-D).

Αυτό που είναι σημαντικό και ενδιαφέρον και για τη δική μας ερμηνεία της γεωμετρικής ανάλυσης είναι το πρώτο είδος, η «Διαλεκτική στην Μαθηματική Έρευνα». Σε αυτή την ενότητα, σύμφωνα με τον Conford, ο Πλάτων δίνει μια ταξινόμηση των τεχνών και επιστημών κατά σειρά αξίας· περιγράφει την τελειοποίηση της μαθηματικής επιστήμης με τη διαλεκτική κριτική των υποθέσεων που χρησιμοποιεί και αναβιώνει την αντίθεση ανάμεσα στην υπάρχουσα κατάσταση του πνεύματος του μαθηματικού («διάνοια») και την υψηλότερη κατάσταση της φωτισμένης κατανόησης, που προηγουμένως ονόμασε «νόηση» (νούν έχειν) και τώρα ονομάζει «επιστήμη». Η γενική ιδέα του κειμένου σύμφωνα με τον Cornford (1932, 176-177) είναι ότι:

> Η δύναμη της διαλεκτικής μόνο μπορεί να αποκαλύψει την αλήθεια σε κάποιον ειδικευμένο στη μαθηματική επιστήμη: δεν υπάρχει άλλος τρόπος. Κανείς δεν θα αρνηθεί ότι τα μαθηματικά (όπως διδάσκονται παραγωγικά στην *προπαιδεία*) δεν επαρκούν για να οδηγήσουν στο πιάσιμο της αληθινής φύσης των αντικειμένων της· απαιτείται κάποια άλλη μέθοδος. Καμιά από τις υπόλοιπες υπάρχουσες «τέχνες» δεν θα χρησιμεύσει· κάποιες ασχολούνται με τις ανθρώπινες δοξασίες και επιθυμίες, άλλες με την παραγωγή φυσικών ή τεχνητών πραγμάτων, ή με τη συντήρησή τους όταν παραχθούν. (Αυτό καλύπτει όλες τις τέχνες που ασκούνται στον κόσμο των αισθητών: οι καλές (μιμητικές) τέχνες, γεωργία, μεταποίηση, ιατρική, γυμναστική, κ.ά.). Απομένουν μαθηματικά-γεωμετρία και οι υπόλοιπες. Αυτές οι «τέχνες» έχουν περιγραφεί ως «να έρχονται σε κάποια επαφή με το καθαυτό όν», αλλά παρατηρούμε ότι είναι σε ένα είδος ονείρου και δεν μπορούν να δουν την πραγματικότητα στον ξύπνο τους, όσο οι υποθέσεις που χρησιμοποιούν επιτρέπεται να παραμένουν ανέγγιχτες και οι μαθηματικοί δεν μπορούν να δώσουν λόγο για αυτές. Η αληθινή πρώτη αρχή είναι ακόμη άγνωστη, και τα συμπεράσματα και η συνολική δομή (της παραγωγικής απόδειξης) αποτελούνται από στοιχεία που δεν είναι γνωστά. «Πώς μπορεί μια τέτοια *ομολογία* (ὁμολογίαν) να

[20] «Ἀλλὰ δή, εἶπον, μὴ δυνατοὶ οἵτινες **δοῦναί** τε καὶ ἀποδέξασθαι **λόγον** εἴσεσθαί ποτέ τι ὧν φαμεν δεῖν εἰδέναι;» *Πολιτεία* (531E 4-5)

ονομαστεί γνώση (ἐπιστήμην);» Μονάχα η διαλεκτική μέθοδος προχωρά αναιρώντας τις υποθέσεις (τὰς ὑποθέσεις ἀναιροῦσα), προς την πρώτη αρχή, με σκοπό να τις βεβαιωθεί (ἵνα βεβαιώσηται). Χρησιμοποιεί τα μαθηματικά ως αρωγό στο έργο της που είναι να καθαρίσει το μάτι της ψυχής και να το τραβήξει απαλά προς τα πάνω. Αλλά οι μαθηματικές «τέχνες» στην παρούσα τους κατάσταση δεν θα έπρεπε να καλούνται επιστήμες (ἐπιστήμας). Η κατάσταση του πνεύματος κάποιου που μόνο μελετά υπάρχοντα μαθηματικά είναι απλή *διάνοια* – πιο καθαρή από τη «δοξασία», αλλά πιο σκοτεινή από την γνώση (ἐπιστήμης).

Κλείνοντας την αναφορά μας στον Cornford, θα συνοψίσουμε τις δύο πιο ενδιαφέρουσες για τη δική μας ερμηνεία απόψεις του για τη γεωμετρική ανάλυση, που έχουν ως αφετηρία την *Πολιτεία* του Πλάτωνα: α) Η γεωμετρική ανάλυση είναι η διαλεκτική έρευνα στο πεδίο της γεωμετρίας, που πραγματοποιείται στο επίπεδο της «νόησης», το ανώτερο τμήμα του «νοητού» κατά τον Πλάτωνα και β) την έρευνα αυτή δεν μπορούν να τη διεξάγουν όσοι απλώς ασχολούνται και γνωρίζουν γεωμετρία, όπως είναι λ.χ. οι δάσκαλοι ή οι μαθητές, οι οποίοι λειτουργούν στο επίπεδο της «διάνοιας», αλλά μόνον όσοι είναι ικανοί να φτάνουν στο επίπεδο της «νόησης», δηλαδή να κάνουν έρευνα με τη διαλεκτική μέθοδο. Αυτό σημαίνει ότι έχοντας ειδικευτεί στη γεωμετρία, είναι σε θέση να προχωρούν και να αποκαλύπτουν την αλήθεια πέρα από τις «υποθέσεις» που οι άλλοι θεωρούν ως θεμέλια.

Στο σημείο αυτό θυμίζουμε ότι έχουμε συναντήσει και αναδείξει τη σύνδεση της γεωμετρικής ανάλυσης με τη «νόηση» εν γένει[21] και προηγουμένως στη διατριβή μας, μέσα από το κείμενο του Μαρίνου του Φιλοσόφου για τα *Δεδομένα,* όπου είχαμε παρατηρήσει τη σύνδεση ανάμεσα στο στωικό όρο «κατάληψις» με το «δεδομένον» του Ευκλείδη. Εκεί στα πλαίσια της προσπάθειας ουσιαστικής κατανόησης της ορολογίας «δοθέν»– «δεδομένον», είχαμε επισημάνει ότι ο Μαρίνος επιμένει και αναδεικνύει την άμεση σχέση του κεντρικού όρου της γεωμετρικής ανάλυσης, του «δεδομένου», με την ενέργεια της νόησης του γεωμέτρη–ερευνητή, που έχει προηγηθεί πριν κάτι χαρακτηριστεί ως έγκυρο ερευνητικό αποτέλεσμα δηλαδή επιστημονική γνώση. Στην επόμενη ενότητα θα διερευνήσουμε περαιτέρω τη σχέση της γεωμετρικής ανάλυσης με τη «νόηση» και τον γεωμέτρη – ερευνητή – επιστήμονα.

[21] Η έννοια της «νόησης», όπως αυτή τροποποιείται από τον Πλάτωνα στον Αριστοτέλη και στη συνέχεια στον Πάππο και τον Μαρίνο.

5.4. *Σύνδεση της γεωμετρικής ανάλυσης με τη «νόηση» και τον γεωμέτρη – ερευνητή*

Η θέση που θα υποστηρίξουμε σε αυτήν την ενότητα είναι ότι η γεωμετρική ανάλυση (τόσο το «transformation» όσο και το «resolution») πραγματοποιείται στο επίπεδο της «νόησης» και αφορά μόνο τους γεωμέτρες – ερευνητές. Σε αυτή μας τη θέση φαίνεται να συμφωνούν ο Πλάτων, ο Αριστοτέλης, ο Πάππος, ο Μαρίνος και ο Άραβας μαθηματικός Ibrahim ibn Sinan (9ος αιώνας).

5.4.1. Ο Αριστοτέλης και η «ενέργεια της νόησης» στην «εύρεση» των μαθηματικών «διαγραμμάτων»

Εκτός από τον Πλάτωνα ο οποίος συνδέει όπως είδαμε τη γεωμετρική ανάλυση με τη «νόηση» και την έρευνα στα μαθηματικά, ο Αριστοτέλης συνδέει επίσης τη «νόηση» με την ανάλυση («ευρετική»).

Ο Αριστοτέλης αναφέρεται στην ανάλυση[22] στο έργο του *Ηθικά Νικομάχεια* παρομοιάζοντάς την με τη σκέψη – περίσκεψη («βούλευση»). Παρομοιάζει δηλαδή την «προς τα πίσω» διαδικασία σκέψης για την λύση ενός πρακτικού προβλήματος με την ανάλυση ενός μαθηματικού «διαγράμματος», όπου το τελευταίο βήμα της ανάλυσης γίνεται το πρώτο στη «γένεση» που ακολουθεί:

ὁ γὰρ βουλευόμενος ἔοικε ζητεῖν καὶ ἀναλύειν τὸν εἰρημένον τρόπον ὥσπερ διάγραμμα … καὶ τὸ ἔσχατον ἐν τῇ ἀναλύσει πρῶτον εἶναι ἐν τῇ γενέσει.

Ο Αριστοτέλης περιγράφει επίσης τη διαδικασία ανάλυσης[23] ενός μαθηματικού «διαγράμματος» στο χωρίο 1051^{α} 21-33 των *Μετά τα Φυσικά*[24] :

---

22 Το χωρίο 1112β 22-26 από τα *Ηθικά Νικομάχεια* είναι ίσως η χαρακτηριστικότερη αναφορά του Αριστοτέλη στην ανάλυση και αναφέρεται στις εργασίες όλων όσων έχουν κατά καιρούς ασχοληθεί με τη γεωμετρική ανάλυση. Ένα επίσης χαρακτηριστικό χωρίο του Αριστοτέλη, το οποίο αναφέρεται στην ανάλυση και περιλαμβάνει τη «νόηση» είναι κατά τον Gulley (1958, 7-8) το 1227β 31-33 από τα *Ηθικά Ευδήμεια*: «εἰ ἔστι τὸ τρίγωνον δύο ὀρθαί, ἀνάγκη τοδὶ εἶναι. τῆς μὲν οὖν νοήσεως ἀρχὴ τὸ τέλος, τῆς δὲ πράξεως ἡ τῆς νοήσεως τελευτή.»

23 Ο Heath (1949, 216-217), αμφισβητεί το ότι ο Αριστοτέλης στο χωρίο αυτό αναφέρεται στη γεωμετρική ανάλυση λέγοντας: «…δεν υπάρχει αναφορά στη μέθοδο της μαθηματικής ανάλυσης.» Αν αποδεχθούμε αυτό που λέει, τότε με τη μετάφραση του χωρίου στις πρώτες πέντε γραμμές που κάνει ο ίδιος ο Heath, φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι η «δύναμη» προηγείται της «ενέργειας» (ως «ενέργεια» επεξηγεί ότι θεωρεί την πραγματική κατασκευή της βοηθητικής ευθείας) και ως προς την έννοια και ως προς το χρόνο, κάτι που είναι εντελώς αντίθετο σε σχέση με αυτά που υποστηρίζει ο Αριστοτέλης στο Θ8, αλλά δε συμφωνούν και με το σχολιασμό του Ross για το σύνολο του χωρίου όπως θα δούμε παρακάτω. Οι Cornford (1932, 44-45), Gulley (1958, 7-8), Hintikka & Remes (1974, 2,4, 86, 87, 89 και 95) και Καρασμάνης (1993, 184) συμφωνούν όμως ότι πρόκειται για γεωμετρική ανάλυση και αναφέρονται στο συγκεκριμένο χωρίο με αυτόν τον τρόπο.

24 Μετάφραση Κ.Δ. Γεωργούλης (1973), Αριστοτέλους Πρώτη Φιλοσοφία, «*Τα Μετά τα Φυσικά*».

Ακόμη και **οι γεωμετρικές κατασκευές ανακαλύπτονται έπειτα από ενέργεια**· γιατί τις ανακαλύπτουν διαιρώντας τα σχήματα· αν ήταν δα τα σχήματα διηρημένα θα ήταν φανερή η κατασκευή. Στην πραγματικότητα όμως ενυπάρχει μέσα στο αδιαίρετο σχήμα η κατασκευή δυναμικά. Γιατί οι γωνίες του τριγώνου ισούνται με δύο ορθές; Γιατί οι γωνίες που σχηματίζονται γύρω από ένα σημείο είναι ίσες με δύο ορθές. Εάν λοιπόν ήταν φερμένη η παράλληλη προς τη μια πλευρά του τριγώνου γραμμή με την πρώτη ματιά θα ήταν το πράγμα φανερό. Γιατί είναι η μέσα σε ημικύκλιο γωνία γενικά ορθή; η αιτία είναι το να έχουμε τρεις γραμμές ίσες δηλ. δύο ίσες γραμμές που φτιάνουν τη βάση των τριγώνων και τρίτη ίση γραμμή που υψώθηκε επάνω στη βάση από τη μέση της βάσης. Με πρώτη ματιά όποιος από τη σχέση εκείνη είδηση έχει καταλαβαίνει την αιτία, ώστε τα δυνάμει όντα τα ανακαλύπτουμε αφού τα ανάγουμε στην ενέργεια. **Αίτιο δα είναι ότι η ενέργεια είναι νόηση**· ώστε η δύναμη βγαίνει από την ενέργεια· και γι’ αυτό μαθαίνει κανείς χρησιμοποιώντας ενεργητική δημιουργική συμπεριφορά· εννοείται ότι η κατ’ αριθμητική ατομικότητα θεωρημένη ενέργεια είναι κατά τη γένεση υστερώτερη.[25]

Στο χωρίο αυτό ο Αριστοτέλης αναφέρει ότι «εὑρίσκεται» τα μαθηματικά διαγράμματα «ἐνεργείᾳ», και διευκρινίζει παρακάτω το λόγο: «αἴτιον δὲ ὅτι ἡ νόησις ἐνέργεια». Δηλαδή η «νόηση» του γεωμέτρη-ερευνητή, η πραγματικότητα της σκέψης του είναι η πραγματικότητα στην οποία «ευρίσκονται» – ανακαλύπτονται οι γεωμετρικές κατασκευές – αποδείξεις. Άποψη η οποία φαίνεται να συμφωνεί με τις προηγούμενες του Πλάτωνα για τη «νόηση» ως επίπεδο του «νοητού» στο οποίο γίνεται η έρευνα, αλλά προχωρά χαρακτηρίζοντας τη «νόηση» ως «ενέργεια». Στην ανάλυση και το σχολιασμό του παραπάνω χωρίου θα βασιστούμε σε μεγάλο βαθμό στον W.D. Ross (1924, τόμ. II, 267-273) ο οποίος αρχίζει επισημαίνοντας ότι:

[25] «**εὑρίσκεται δὲ καὶ τὰ διαγράμματα ἐνεργείᾳ**· διαιροῦντες γὰρ εὑρίσκουσιν. εἰ δ’ ἦν διῃρημένα, φανερὰ ἂν ἦν· νῦν δ’ ἐνυπάρχει δυνάμει. διὰ τί δύο ὀρθαὶ τὸ τρίγωνον; ὅτι αἱ περὶ μίαν στιγμὴν γωνίαι ἴσαι δύο ὀρθαῖς. εἰ οὖν ἀνῆκτο ἡ παρὰ τὴν πλευράν, ἰδόντι ἂν ἦν εὐθὺς δῆλον διὰ τί. ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθὴ καθόλου διὰ τί; ἐὰν ἴσαι τρεῖς, ἥ τε βάσις δύο καὶ ἡ ἐκ μέσου ἐπισταθεῖσα ὀρθή, ἰδόντι δῆλον τῷ ἐκεῖνο εἰδότι. ὥστε φανερὸν ὅτι τὰ δυνάμει ὄντα εἰς ἐνέργειαν ἀγόμενα εὑρίσκεται· **αἴτιον δὲ ὅτι ἡ νόησις ἐνέργεια**· ὥστ’ ἐξ ἐνεργείας ἡ δύναμις, καὶ διὰ τοῦτο ποιοῦντες γιγνώσκουσιν (ὕστερον γὰρ γενέσει ἡ ἐνέργεια ἡ κατ’ ἀριθμόν).»

21. Οι γεωμετρικές σχέσεις ανακαλύπτονται «ευρίσκεται» με την πραγματοποίηση… Ότι υπάρχει δυνητικά ανακαλύπτεται με το να πραγματοποιηθεί. Ο λόγος είναι ότι **η σκέψη του γεωμέτρη είναι μια πραγματικότητα.**

Χαρακτηριστικά αποδίδοντας το χωρίο ο Ross σχολιάζει παρακάτω:

22… «οι γεωμετρικές κατασκευές ανακαλύπτονται μέσω μιας ενέργειας· γιατί τις βρίσκουμε διαιρώντας». Η **ενέργεια** περιγράφεται αργότερα (στ. 30) ως ***νόησις***, και αυτό μπορεί να φαίνεται ασυνεπές με την περιγραφή της ως διαίρεσης. Αλλά δεν είναι πραγματικά έτσι, γιατί η διαίρεση εδώ δεν σημαίνει το σχηματισμό γραμμών με κιμωλία ή στυλό αλλά **την κατανόηση** ότι τα γεωμετρικά σχήματα με τα οποία ασχολούμαστε είναι διαιρετά με συγκεκριμένους τρόπους. **Ο γεωμέτρης ασχολείται με σχήματα τα οποία είναι *νοητά* (Ζ.1063$^{\alpha}$ 3), και η ουσιαστική του δραστηριότητα είναι η *νόησις*, και όχι η κατασκευή του οτιδήποτε που είναι *αισθητόν*· το τελευταίο είναι απλά μια βοήθεια στο προηγούμενο.**

Παρακάτω ο Ross συνεχίζει προκειμένου να αποδώσει τη σημαντικότερη ίσως αλλά και ταυτόχρονα δυσκολότερη φράση του χωρίου:

29-33…Αλλά η λειτουργία – δράση που περιγράφεται εδώ είναι αυτή του μαθηματικού· με την έννοια «οι κατασκευές που υπάρχουν δυνητικά ανακαλύπτονται με το να πραγματοποιούνται»… (2) Η ανάγνωση του χειρογράφου *αίτιον δε ότι νόησις η ενέργεια* είναι δύσκολη. «Οι κατασκευές που υπάρχουν δυνητικά ανακαλύπτονται με το να μεταφερθούν στην πραγματικότητα· **ο λόγος είναι ότι η πραγματικότητα είναι μια πράξη της σκέψης**.» *…νόησις η ενέργεια* μπορεί να προέκυψε από το *η νόησις ενέργεια* (cf. Λ. 1072b 16)…

Τονίζει δηλαδή ο Αριστοτέλης, σύμφωνα με την ανάλυση του Ross, ότι η νοητική ενέργεια –πραγματικότητα της σύλληψης, είναι αυτή που προηγείται στην «εύρεση» των γεωμετρικών κατασκευών. Το πρώτο βήμα δηλαδή της ανάλυσης σχήματος είναι νοητικό και η πραγματικότητα της αρχικής σύλληψης και επεξεργασίας είναι η «νόηση»- το υψηλότερο επίπεδο της σκέψης του γεωμέτρη ερευνητή. Εμείς θεωρούμε ότι είναι το επίπεδο της «νόησης», στο οποίο θα απαντήσει στον εαυτό του ο ερευνητής αν *μπορεί* να φτάσει στο ζητούμενο, πριν περάσει στο επόμενο στάδιο (στη σύνθεση) να το διδάξει στους άλλους. Ο ίδιος ο Αριστοτέλης έχει περιγράψει και αλλού την «προς τα πάνω πορεία» από το ζητούμενο προς τις προκείμενες ως «νόηση» στο Ζ7, 1032β 6-29 των *Μετά τα Φυσικά*, στο παράδειγμα του γιατρού – επιστήμονα ο οποίος έχει ως ζητούμενο την υγεία:

> Η υγεία είναι το λογικό είδος [η έννοια] που ευρίσκεται στην ψυχή [πνεύμα του γιατρού] και στην επιστήμη. Γίνεται δε η υγεία έπειτα από μια νοητική ενέργεια όπως η ακόλουθη: επειδή υγεία είναι τούτο εδώ, είναι ανάγκη, αν πρόκειται κάτι να γίνει υγιές, να υπάρξει τούτο εδώ, π.χ. να ισορροπηθούν τα υγρά του σώματος. Για να γίνει όμως αυτό χρειάζεται θερμότητα. Και κατ' αυτόν τον τρόπο εξακολουθεί τη νοητική ενέργεια (νοεῖ) [ο γιατρός], έως ότου οδηγήσει το πράγμα προς ένα τελευταίο που ο ίδιος μπορεί να πραγματοποιήσει (δύναται ποιεῖν). Έπειτα πια η κίνηση που αρχίζει από το τελευταίο τούτο [νοητικό βήμα] και μας πάει προς την απόκτηση της υγείας λέγεται ποίηση… Από τις γενέσεις δα και κινήσεις η μια καλείται νόηση και η άλλη ποίηση, αυτή βέβαια που λαμβάνει την αφετηρία της από την αρχή και το είδος είναι η νόηση, και αυτή που αρχίζει από τον τελευταίο κρίκο της νόησης είναι η ποίηση.[26]

Μέχρι εδώ είδαμε ότι ο Πλάτωνας αναφέρεται στην έρευνα και στην «προς τα πάνω κίνηση» που αυτή απαιτεί και στο ανώτερο επίπεδο του νοητού τη «νόηση». Ο Αριστοτέλης επίσης μιλάει για μια «προς τα πάνω-πίσω πορεία», την οποία τοποθετεί στο επίπεδο της «νόησης», αναφερόμενος στην εύρεση σχήματος που στα *Ηθικά Νικομάχεια* παρομοιάζει με τη σκέψη της γεωμετρικής ανάλυσης.

5.4.2. Ο Πάππος και ο Μαρίνος ο Φιλόσοφος συνδέουν τη γεωμετρική ανάλυση με τη «νόηση»

Ο Πάππος με τη σειρά του ονομάζει το αποτέλεσμα της ανάλυσης «καταληφθέν»[27]. Χρησιμοποιεί δηλαδή έναν όρο που προέρχεται από την ορολογία των Στωικών, ο οποίος παραπέμπει στη νοητική σύλληψη και επεξεργασία που έχει προηγηθεί, όπως έχουμε αναλύσει προηγουμένως στην § 3.4.2. Με άλλα λόγια συνδέει και αυτός τη γεωμετρική ανάλυση με τη «νόηση».

[26] Μετάφραση Κ.Δ. Γεωργούλης (1973), Αριστοτέλους Πρώτη Φιλοσοφία, «*Τα Μετά τα Φυσικά*».

[27] Πάππου *Συναγωγή* 7^{ο} βιβλίο, ed. Hultsch 634, 17-19: «ἐν δὲ τῇ συνθέσει ἐξ ὑποστροφῆς τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει **καταληφθὲν** ὕστατον ὑποστησάμενοι γεγονὸς ἤδη,». Το αποτέλεσμα της ανάλυσης («καταληφθέν») είναι το «δεδομένον», σύμφωνα με όσα έχουμε συζητήσει στο κεφάλαιο 3. Τη θέση αυτή υποστηρίζουν επίσης οι Hintikka & Remes (1974, 77).

Αυτός όμως που επιμένει ιδιαίτερα και αναδεικνύει τη σύνδεση της γεωμετρικής ανάλυσης, διαμέσου της κεντρικής της έννοιας του «δεδομένου», με την ενέργεια της «νόησης» του γεωμέτρη, είναι ο Μαρίνος όπως έχουμε αναλύσει στην § 3.4.2 και θα επαναλάβουμε εδώ συνοπτικά. Στο υπόμνημά του χρησιμοποιεί και αυτός τον στωικό όρο «κατάληψις», σε διάφορες μορφές του, 24 φορές. Από την αρχή επισημαίνει ότι όλοι όσοι προσπάθησαν να δώσουν κάποιον ορισμό του «δεδομένου» έχουν κάτι κοινό: «δίνουν την εντύπωση ότι λένε κάτι σχετικά με αυτό έχοντας ξεκινήσει από μία και την αυτή έννοια και αντίληψη· θεώρησαν δηλαδή ότι το 'δεδομένον' είναι κάτι που μπορεί να συλλάβει η νόηση (καταληπτὸν)» (234, 11-13). Ο Μαρίνος φτάνει μάλιστα μέχρι του σημείου να χρησιμοποιήσει τελικά το «καταληπτόν» ως καθοριστικό κριτήριο για έναν ακριβή ορισμό του «δεδομένον». Όπως γράφει, μόνο το «πόριμον» είναι ο σωστός και πλήρης ορισμός του «δεδομένου», επειδή «το πόριμον φαίνεται ότι περισσότερο από όλα φανερώνει τη νοητική σύλληψη. Πράγματι κάθε πόριμον μπορεί να συλληφθεί από τη νόηση και μόνον αυτό» (250, 19-21). Η σύνδεση του «δεδομένου» με τη «νόηση» γίνεται με ακόμα πιο σαφή τρόπο εμφανής στον ορισμό του Μαρίνου για το «πόριμον»: «πόριμον δέ ἐστιν, ὃ δυνατοί ἐσμεν ἤδη ποιῆσαι καὶ κατασκευάσαι, τουτέστιν εἰς ἐπίνοιαν ἀγαγεῖν» (240, 9-10). Σύμφωνα με την ορολογία των Στωικών «επίνοια» είναι η «εναποκειμένη νόησις»[28], η νόηση δηλαδή η οποία έχει υπάρξει. Άρα το «δεδομένον» (ως «πόριμον», σύμφωνα με τον Μαρίνο) είναι, η κατάληξη της νοητικής επεξεργασίας.

Η γεωμετρική ανάλυση, όπως προκύπτει από τα λεγόμενα του Πλάτωνος, του Αριστοτέλη, του Πάππου και του Μαρίνου, λαμβάνει χώρα στο επίπεδο της «νόησης». Από το συμπέρασμα αυτό συνάγεται εύλογα η απάντηση στο ερώτημα: «Ποιους αφορά η γεωμετρική ανάλυση;» Η γεωμετρική ανάλυση στα δύο πρώτα της στάδια («transformation» και «resolution»), αφορά μόνο τους γεωμέτρες – ερευνητές, αυτούς με άλλα λόγια που λειτουργούν στο επίπεδο της «νόησης». Την ίδια άποψη για τον ερευνητικό χαρακτήρα της γεωμετρικής ανάλυσης και των κειμένων στα οποία αυτή περιλαμβάνεται συμμερίζονται ως έναν βαθμό και άλλοι σύγχρονοι μελετητές, οι οποίοι ξεκινούν ωστόσο από διαφορετικές αφετηρίες. Για παράδειγμα,

[28] Von Arnim (1921-1923), τόμ. II, 29, υποσημ. 89. Γαληνού *Definitiones medicae* (19.381.12-13): «Ἐπίνοιά ἐστιν ἐναποκειμένη νόησις, νόησις δὲ λογικὴ φαντασία»

ο Knorr (1986, 102), αξιολογώντας τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, αναφέρει: «…το κατάλληλο μέτρο για τις γεωμετρικές έρευνες που διεξήχθησαν από τον Ευκλείδη και του συγχρόνους του δεν θα πρέπει να αναζητηθεί στα *Στοιχεία* αλλά στα *Δεδομένα* και στα χαμένα *Πορίσματα* και *Κωνικά*» ενώ πιο κάτω (σελ. 110) σημειώνει: «Ως εκ τούτου απέχοντας πολύ από το να είναι περιττά τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη ανταποκρίνονται στην τυπική αναγνώριση του προχωρημένου σταδίου των αναλυτικών ερευνών της εποχής τους.» Οι Berggren & Van Brummelen (2000, 15-16), επίσης, αναφερόμενοι στα κείμενα του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου που περιλαμβάνουν ανάλυση σημειώνουν: «Έχουμε μόνο να κάνουμε τη διστακτική παρατήρηση ότι οι αναλύσεις δεν εμφανίζονται σχεδόν ποτέ σε ένα διδακτικό πλαίσιο, αλλά μόνο στο πλαίσιο που θα μπορούσε κάποιος να ονομάσει ερευνητικές πραγματείες. Για το λόγο αυτό δεν υπάρχουν αναλύσεις στα *Στοιχεία.*»

Αξίζει τέλος, να σημειώσουμε, ότι παρόμοιες απόψεις για το σε ποιους αφορά η ανάλυση, διατυπώνει στο κείμενό του «*On Analysis and Synthesis*» ο Άραβας μαθηματικός Ibrahim ibn Sinan (9ος αιώνας), ο οποίος γράφει:

> Αυτοί που μιλούν έτσι [ότι η ανάλυση και η σύνθεση θα έπρεπε να είναι πανομοιότυπες – ταυτόσημες, εκτός από τη σειρά της παρουσίασης] δεν καταλαβαίνουν τη μέθοδο της ανάλυσης που εκτελείται από τους γεωμέτρες, ούτε τη διαδικασία που υιοθετούν στις αναλύσεις τους: αν ήταν έτσι [δηλ. αν καταλάβαιναν], δεν θα έπρεπε να βρίσκουν διαφορά, εκτός από το γεγονός ότι οι γεωμέτρες συντομεύουν την ανάλυση, **επειδή η ανάλυση δεν είναι ο δρόμος για να εκπληρώσουν το σκοπό του ερωτώντος, αλλά μια μέθοδος με τα μέσα της οποίας οι γεωμέτρες παγιδεύουν τα στοιχεία που αναζητούν, για τον εαυτό τους,** ενώ στην πορεία της σύνθεσης φέρνουν σε πέρας μια απάντηση για χάρη της οποίας χρειάζονται εξηγήσεις.[29]

Στο σημείο αυτό και αφού έχουμε διερευνήσει τη σύνδεση της ανάλυσης με τη «νόηση» στην οποία σύμφωνα με τα στοιχεία φαίνεται να φτάνουν μόνο οι γεωμέτρες – ερευνητές τους οποίους αφορά η γεωμετρική ανάλυση, θα επεκτείνουμε τη σκέψη μας λέγοντας ότι: η γραπτή παρουσίαση μιας επιτυχημένης ανάλυσης, όπως αυτές που έφτασαν σε εμάς, εκτός από τους συναδέλφους ερευνητές οι οποίοι θα μπορούσαν να την ελέγξουν και να την χρησιμοποιήσουν ως μέρος επόμενων ανα-

---

[29] Περιλαμβάνεται στο Berggren & Van Brummelen (2000, 21-22).

λύσεων, πρέπει να απευθύνονταν και στους μελλοντικούς ερευνητές. Στο σημείο αυτό, θα μπορούσε κάποιος εύλογα να υποστηρίξει ότι αυτή η παρουσίαση της επιτυχημένης ανάλυσης δεν αποκαλύπτει το σύνολο των ευρετικών προσπαθειών του γεωμέτρη – ερευνητή για να φτάσει στη λύση του προβλήματος, αλλά μόνο ένα μέρος τους. Πράγματι, οι αποτυχημένες απόπειρες που πιθανότατα έκανε ο γεωμέτρης-ερευνητής, είτε σε επιμέρους βήματα είτε και στο σύνολο της προσπάθειάς του, δεν έχουν καταγραφεί και γι' αυτό δεν είναι δυνατόν να συζητηθούν εδώ. Η ανάλυση που καταλήγει να παρουσιαστεί μέσω της χειρόγραφης παράδοσης δεν αποτελεί την καταγραφή σε πραγματικό χρόνο της ευρετικής πορείας που ακολούθησε ο ερευνητής αλλά είναι η τυπική παρουσίαση μιας επιτυχημένης αναλυτικής πορείας. Ωστόσο, αποτελεί μία αρκετά πιστή αναπαράσταση της νοητικής του προσπάθειας, που περιλαμβάνει τους σημαντικούς σταθμούς της πορείας που ακολούθησε, και έχει αξία για τους μελλοντικούς ερευνητές. Στην ίδια κατεύθυνση με εμάς ο W.R. Knorr (1986, 9) αναφέρει ότι αυτή η παρουσίαση του αναλυτικού μέρους της λύσης ενός προβλήματος «οφείλεται χωρίς αμφιβολία στην σκοπιμότητα του να εκθέσει τους μαθητές στη χρήση αυτής της μεθόδου ως προπαρασκευή για τις δικές τους ερευνητικές προσπάθειες στο μέλλον.» Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι το κοινό στο οποίο απευθύνονται τα μαθηματικά κείμενα που περιλαμβάνουν ανάλυση, είτε περιλαμβάνει τους μελλοντικούς ερευνητές είτε όχι, είναι αρκετά περιορισμένο κάτι που μπορεί να εξηγήσει ικανοποιητικά το μικρό αριθμό και τη διάδοση τέτοιου είδους κειμένων, χωρίς να καταφύγουμε σε υποθέσεις του τύπου: οι αρχαίοι Έλληνες έκρυβαν τις μεθόδους τους όπως ή αναλυτική προκειμένου να φανούν ακόμη σπουδαιότεροι ως μαθηματικοί.

5.5. *Το δεύτερο μέρος της ανάλυσης («resolution») η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» και η σχέση τους με την έκφραση «λόγον ἑαυτῷ διδόναι»*

Με τις θέσεις που έχουμε υποστηρίξει σε προηγούμενα κεφάλαια σε σχέση με την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» μαζί με αυτές που υποστηρίζουμε σε αυτό το κεφάλαιο θα μπορέσουμε να απαντήσουμε στο σύνθετο ερώτημα που θέσαμε στη δεύτερη ενότητα (§ 5.2) του κεφαλαίου: τι είναι το «resolution», πώς λειτουργεί, ποια η αναγκαιότητά του, και τι σημαίνει η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» που χρησιμοποιεί;

Το δεύτερο μέρος της γεωμετρικής ανάλυσης –που έχει ονομαστεί από τον Hankel (1874, 137-150) «resolution»– αν και αποτελεί ουσιαστικό συστατικό της λειτουργίας της, προκαλούσε και συνεχίζει να προκαλεί σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση της μεθόδου. Ενδεικτικό των δυσκολιών αυτών είναι το γεγονός ότι οι Hintikka & Remes (1974), αφιερώνουν στο «resolution» το ένα πέμπτο της μελέτης τους για τη γεωμετρική ανάλυση, για να καταλήξουν στο κεφάλαιο VI που επιγράφεται «The problem of the 'Resolution'»:

> Ίσως είναι ώρα να συνοψίσουμε αυτά που θέλουμε να πούμε –*τουλάχιστον διστακτικά*– για τη φύση του «resolution». Τέθηκε ως εικασία ότι η δεύτερη αποστολή [δηλαδή η ανεξαρτησία των βοηθητικών κατασκευών] είναι που υποκινεί την παρουσία του «resolution» σε ένα αναλυτικό αποδεικτικό σύστημα. Ακόμα και αν το δείγμα μας του «resolution» [από το παράδειγμα που προηγήθηκε] δείχνει ότι το (2) είναι πραγματικά αυτό που εκπληρώνει το «resolution», είναι ξεκάθαρο ότι **αυτό δεν μπορεί να είναι όλη η ιστορία.**… Είναι ένα ειρωνικό και διδακτικό γεγονός το ότι σε σχέση με αυτήν την καθαρότερη μορφή αναλυτικής διαδικασίας [το «resolution»] η διαφορά της ανάλυσης και της σύνθεσης και η κατεύθυνση μιας αναλυτικής διαδικασίας έγινε ιδιαίτερα ασαφής. (Hintikka & Remes, 1974, 66-67)

Χαρακτηριστικό γνώρισμα του «resolution» είναι η χρήση της ορολογίας «δοθέν» – «δεδομένον». Η αποσαφήνιση της σημασίας και της λειτουργίας αυτής της ορολογίας, αποτελεί όπως αναφέραμε και αλλού ουσιαστική προϋπόθεση προκειμένου να κατανοήσουμε στη συνέχεια τον ρόλο και τη λειτουργία του «resolution».

Όσα έχουμε αναφέρει ως τώρα για τη σύνδεση της γεωμετρική ανάλυσης με τη «νόηση», στην οποία φτάνουν μόνο οι γεωμέτρες-ερευνητές, ενισχύονται από τη σχέση που, όπως φαίνεται, υπάρχει ανάμεσα στην ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» του «resolution» και στην έκφραση «λόγον ἑαυτῷ διδόναι» της διαλεκτικής του Πλάτωνα στην *Πολιτεία*.[30] Συγκεκριμένα υποστηρίζουμε ότι η διαδικασία του «λόγον ἑαυτῷ διδόναι» της διαλεκτικής έρευνας, αντιστοιχεί στο «resolution», την «προς τα κάτω πορεία» της γεωμετρικής ανάλυσης που υλοποιείται με τη βοήθεια της ορολογίας «δοθέν» – «δεδομένον».

[30] Πλάτωνος *Πολιτεία*: 510*c*6-*d*1, 531*e*4-5, 533*c*2-3, 534*b*3-5.

Σε ανάλογη κατεύθυνση ο Knorr (1986, 111), στην προσπάθεια του να ερμηνεύσει την «givens terminology» αναζητά, όπως έχουμε αναφέρει, την προέλευσή της σε φιλοσοφικά κείμενα του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη. Αν και η αναζήτησή αυτή που δεν του αποφέρει κάτι ιδιαίτερο καταλήγει:

> Εν όψει τέτοιου είδους παραλληλισμών, εντούτοις, δεν θα έπρεπε κανείς να διαγράψει την πιθανότητα ότι **γεωμετρία και διαλεκτική αλληλεπίδρασαν στην ανάπτυξη αυτής της χρήσης** [της «givens terminology»], σε χρόνο που και τα δύο πεδία αναζητούσαν να τυποποιήσουν τα στοιχεία της έρευνας.

Διαισθάνεται δηλαδή ο Knorr την πιθανή σχέση της ορολογίας «δοθέν»–«δεδομένον» με τη διαλεκτική, χωρίς βέβαια να κάνει αυτή τη σχέση πιο συγκεκριμένη αναφερόμενος σε κάποια στοιχεία.[31]

Τη σύνδεση ωστόσο της ανάλυσης με την έκφραση «λόγον διδόναι» δεν την κάνουμε για πρώτη φορά εμείς. Την κάνει επίσης ο Αλβίνος, ένας Πλατωνιστής του 2ου μ.Χ. αιώνα, ο οποίος σε ένα χωρίο (*Διδασκαλικός* V 6,1-6), το οποίο θυμίζει μάλιστα σε αρκετά σημεία το κείμενο του Πάππου για τη γεωμετρική ανάλυση, αναφέρει τα εξής:

> Η δὲ ἐξ ὑποθέσεως **ἀνάλυσίς** ἐστι τοιαύτη· ὁ ζητῶν τι ὑποτίθεται αὐτὸ ἐκεῖνο, εἶτα τῷ ὑποτεθέντι σκοπεῖ τί ἀκολουθεῖ, καὶ μετὰ τοῦτο εἰ δέοι **λόγον ἀποδιδόναι** τῆς ὑποθέσεως, ἄλλην ὑποθέμενος ὑπόθεσιν, ζητεῖ εἰ τὸ πρότερον ὑποτεθὲν πάλιν ἐστὶν ἀκόλουθον ἄλλῃ ὑποθέσει, καὶ τοῦτο μέχρις οὗ ἂν ἐπί τινα ἀρχὴν ἀνυπόθετον ἔλθῃ ποιεῖ.

Το λεξικό Liddell-Scott σημειώνει ανάμεσα στις άλλες σημασίες στο λήμμα «λόγος»: «the inward thought or reason itself». Ως τέτοιου είδους χρήση αναφέρει την έκφραση «λόγον ἑαυτῷ διδόναι», «to allow himself reflexion, i.e. to think over a thing». Η ελληνική έκδοση του ίδιου λεξικού αναφέρει: «δίδωμι λόγον ἑαυτῷ», «διασκέπτεσθαι». Τα πρώτα παραδείγματα χρήσης της έκφρασης εντοπίζονται από το λεξικό στον Ηρόδοτο. Η αναζήτηση της έκφρασης στον Ηρόδοτο με τη βοήθεια της ηλεκτρονικής βιβλιοθήκης TLG, μας δίνει ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της

[31] Την κοινή ορολογία και μεθοδολογία στην έρευνα των μαθηματικών και της διαλεκτικής γενικότερα, καθώς και το πρόβλημα της προτεραιότητας ανάμεσα τους, έχει αναδείξει και διερευνήσει και ο Á. Szabó (1969), στο έργο του *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*, στο Γ΄ Μέρος §§ 6-10.

έκφρασης που περιλαμβάνεται σε χωρίο σύμφωνα με το οποίο ο βασιλιάς Καμβύσης οργισμένος διέταξε εκστρατεία στην Αιθιοπία, χωρίς να παραγγείλει καμία προπαρασκευή ούτε να σκεφτεί–εξετάσει διεξοδικά ότι μπορεί να το κάνει δεδομένου ότι επρόκειτο να εκστρατεύσει στα άκρα της γης:

Ἀπαγγειλάντων δὲ ταῦτα τούτων αὐτίκα ὁ Καμβύσης ὀργὴν ποιησάμενος ἐστρατεύετο ἐπὶ τοὺς Αἰθίοπας, οὔτε παρασκευὴν σίτου οὐδεμίαν παραγγείλας, **οὔτε λόγον ἑωυτῷ δοὺς** ὅτι ἐς τὰ ἔσχατα γῆς ἔμελλε στρατεύεσθαι· (Βιβλίο 3.25.2–5)

Το λεξικό της αρχαίας Ελληνικής Σταματάκου, επίσης για την έκφραση «λόγον ἑαυτῷ διδόναι» αναφέρει: «λόγον ἐμαυτῷ δίδωμι», «επιτρέπω (αναθέτω) στον εαυτό μου να σκεφθεί περί τινός πράγματος». Αντίστοιχα το λεξικό Δημητράκου αναφέρει: «λόγον ἑαυτῷ διδόναι», «ησύχως καθ’ εαυτόν και συνετώς διαλογίζεσθαι, σκέπτεσθαι». Παραδειγματικά αναφέρει το χωρίο (2.162. 22-25) από τον Ηρόδοτο:

Ὡς δὲ ἀπικέσθαι αὐτὸν πρὸς τὸν Ἀπρίην οὐκ ἄγοντα τὸν Ἄμασιν, οὐδένα **λόγον ἑωυτῷ δόντα** ἀλλὰ περιθύμως ἔχοντα περιταμεῖν προστάξαι αὐτοῦ τά τε ὦτα καὶ τὴν ῥῖνα.

Ο ίδιος ο Πλάτων χρησιμοποιεί την έκφραση και σε άλλα έργα του εκτός της *Πολιτείας*[32] ως κριτήριο του επιστήμονα ή της επιστημονικής γνώσης. Ένα χαρακτηριστικό χωρίο, για τον τρόπο με τον οποίο ο Πλάτων αντιλαμβάνεται και χρησιμοποιεί την έκφραση, περιλαμβάνεται στο *Συμπόσιο* (202, 5-9):

Τὸ ὀρθὰ δοξάζειν καὶ ἄνευ τοῦ ἔχειν **λόγον δοῦναι** οὐκ οἶσθ’, ἔφη, ὅτι οὔτε ἐπίστασθαί ἐστιν—ἄλογον γὰρ πρᾶγμα πῶς ἂν εἴη ἐπιστήμη; —οὔτε ἀμαθία—τὸ γὰρ τοῦ ὄντος τυγχάνον πῶς ἂν εἴη ἀμαθία; —ἔστι δὲ δήπου τοιοῦτον ἡ ὀρθὴ δόξα, μεταξὺ φρονήσεως καὶ ἀμαθίας.

Το κριτήριο δηλαδή σε αυτό το χωρίο, σύμφωνα τον Πλάτωνα, για να μπορεί να χαρακτηριστεί κάποιος ως επιστήμονας και αντίστοιχα η γνώση που παράγει επιστημονική, είναι το να «δύναται τον λόγον διδόναι». Κατ’ αναλογία εμείς υποστηρίζουμε τη θέση, ότι το δεύτερο μέρος της γεωμετρικής ανάλυσης («resolution») έχει στόχο να παράγει τη λογική εγκυρότητα του συλλογισμού, να τον κάνει δηλαδή επι-

[32] Μεταξύ άλλων στα: *Φαίδων* 76b5-8 και 101d5-e1, *Θεαίτητος* 202c2 και *Πρωταγόρας* 336b9, d1.

στημονικό, καταλήγοντας στο «δεδομένον» – «καταληφθέν».[33] Με άλλα λόγια σε αυτό το μέρος της γεωμετρικής ανάλυσης ο γεωμέτρης-ερευνητής εξετάζει διεξοδικά και βεβαιώνεται ότι αυτά που υπέθεσε *μπορούν* με έγκυρο τρόπο να καταλήξουν στο ζητούμενο αποτέλεσμα ή όπως θα έλεγε ο Πλάτων «δύναται τον λόγον διδόναι», εξ αυτού δε και η συγγένεια της έκφρασης αυτής με την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον».

Οι παραπάνω ερμηνείες και χρήσεις της έκφρασης «λόγον διδόναι» είναι σύμφωνες, όπως θα δείξουμε παρακάτω, αφενός με το περιεχόμενο των χωρίων από την *Πολιτεία* του Πλάτωνα που αναφέρονται στην έρευνα στη γεωμετρία και στη διαλεκτική και την περιέχουν, αλλά και αφετέρου με τη θέση μας για νοητική επεξεργασία και βεβαίωση του συλλογισμού του, από τον ίδιο τον γεωμέτρη- ερευνητή, στο δεύτερο μέρος («resolution») της γεωμετρικής ανάλυσης, που χαρακτηρίζεται από την ορολογία «δοθέντων» – «δεδομένων».

Θα παραθέσουμε και θα συζητήσουμε στη συνέχεια κάποια χωρία από την *Πολιτεία* του Πλάτωνα, που περιέχουν την έκφραση «λόγον διδόναι», τα οποία υπήρξαν και η αφορμή για την περαιτέρω έρευνά μας στην κατεύθυνση αυτή. Το πρώτο χωρίο (510, c2-d3) περιλαμβάνεται στο έκτο (VI) βιβλίο της *Πολιτείας,* στην ενότητα που αναφέρεται στο «νοητόν» και το «ορατόν» ως αντικειμένων της γνώσης. Συγκεκριμένα, ο Σωκράτης έχει μόλις κάνει το χωρισμό του «νοητού» σε δύο επίπεδα το ανώτερο της «νόησης» και το δεύτερο της «διάνοιας», κάτι που ο Γλαύκων δεν φαίνεται να κατανοεί. Έτσι ο Σωκράτης αναγκάζεται να κάνει αυτόν το χωρισμό σαφέστερο με ένα παράδειγμα που αναφέρεται στα μαθηματικά[34]:

> Ξέρεις, υποθέτω, πως αυτοί που καταγίνονται με τις γεωμετρίες, με τα μαθηματικά και τα παρόμοια, παίρνοντας ως βάση το άρτιο και το περιττό, τα τρία είδη της γωνίας κι' όσα άλλα τέτοια αναλόγως με την απόδειξη που ζητούν, τα θεωρούν αυτά ως θεμέλια (ποιησάμενοι ὑποθέσεις αὐτά), που εκτιμούν ότι δεν αξίζει να δίνουν λόγο (λόγον… διδόναι) γι' αυτά ούτε στον εαυτό τους ούτε στους άλλους,

---

[33] Είναι χαρακτηριστικός ο τρόπος με τον ο τρόπος με τον οποίο ορίζουν την επιστήμη οι Στωϊκοί σε δύο από τα χωρία που αφορούν την «κατάληψιν» και έχουμε παραθέσει ήδη στο τρίτο κεφάλαιο (§3.4.2) της διατριβής μας: Sextus adv. Math. VII 151 «…ἐπιστήμην μὲν εἶναι τὴν ἀσφαλῆ καὶ βεβαίαν καὶ ἀμετάθετον ὑπὸ λόγου κατάληψιν…», Galennus defin. Medicae 7. Vol. XIX p. 350. «Ἐπιστήμη ἐστὶ κατάληψις ἀσφαλὴς καὶ ἀμετάπτωτος ὑπὸ λόγου.»

[34] Η απόδοση του χωρίου στα Νέα Ελληνικά, όπως και των τριών επομένων χωρίων από την *Πολιτεία,* έχει γίνει από τον Ι. Γρυπάρη και τις εκδόσεις Ι. Ζαχαρόπουλος.

> σα να είναι πράγματα ολοφάνερα στον καθένα, και αρχίζοντας από αυτές τις αρχές και περνώντας τα επίλοιπα, φτάνουν στο τέλος με λογική συνέπεια σε εκείνο που ξεκίνησαν να αποδείξουν.[35]

Στο χωρίο αυτό, ο Πλάτων αναφέρεται σε αυτούς που ασχολούνται με τη γεωμετρία, τους «γεωμετρικούς» όπως τους ονομάζει στα 511d3 και 526d5, οι οποίοι λαμβάνουν κάποια πράγματα ως «υποθέσεις» χωρίς να «δίνουν λόγο» για αυτά, με άλλα λόγια χωρίς να εξετάζουν με επιστημονικό τρόπο και να βεβαιώνονται αφού σκεφτούν ότι αυτά μπορούν να ισχύουν. Ο Πλάτων περιγράφει και αναδεικνύει αυτό το χαρακτηριστικό του τρόπου δουλειάς των «γεωμετρικών», προκειμένου παρακάτω να τον αντιδιαστείλει και διακρίνει εύκολα από τον τρόπο που δουλεύουν οι ερευνητές-διαλεκτικοί.

Το δεύτερο χωρίο που περιέχει την έκφραση «λόγον διδόναι» περιλαμβάνεται στο έβδομο (VII) κεφάλαιο της *Πολιτείας* στην ενότητα της «Διαλεκτικής». Το μεγάλο έργο του προσδιορισμού της «διαλεκτικής» και των «διαλεκτικών», ξεκινά από τον Σωκράτη με κάποιες ερωτήσεις προς τον Γλαύκωνα που στόχο έχουν να αναδείξουν τι δεν είναι «διαλεκτική» και ποιοι δεν είναι «διαλεκτικοί». Η προκαταρκτική αυτή περιγραφή της «διαλεκτικής» ως τελικού σταδίου της εκπαίδευσης απορρίπτει όσους δεν είναι ικανοί «δοῦναί τε καὶ ἀποδέξασθαι λόγον»:

> Γιατί δεν νομίζεις βέβαια πως όσοι καταγίνονται και κατέχουν αυτά που αναφέραμε, <Αριθμητική, Γεωμετρία, Στερεομετρία, Αστρονομία και Αρμονική>, είναι και διαλεκτικοί.
>
> Όχι βέβαια, εκτός από πολύ λίγους από όσους έτυχε να συναντήσω.
>
> Αλλά μήπως είναι σε θέση να μάθουν τίποτε από όσα λέμε πως πρέπει να ξέρει κανείς, άνθρωποι που δεν είναι ικανοί να δώσουν και να αποδεχθούν λόγο (μὴ δυνατοὶ οἵτινες δοῦναί τε καὶ ἀποδέξασθαι λόγον) για το κάθε τι;
>
> Ουτ' αυτό δεν το πιστεύω.

[35] *Πολιτεία* (510, c2-d3): «οἶμαι γάρ σε εἰδέναι ὅτι οἱ περὶ τὰς γεωμετρίας τε καὶ λογισμοὺς καὶ τὰ τοιαῦτα πραγματευόμενοι, ὑποθέμενοι τό τε περιττὸν καὶ τὸ ἄρτιον καὶ τὰ σχήματα καὶ γωνιῶν τριττὰ εἴδη καὶ ἄλλα τούτων ἀδελφὰ καθ' ἑκάστην μέθοδον, ταῦτα μὲν ὡς εἰδότες, ποιησάμενοι ὑποθέσεις αὐτά, οὐδένα λόγον οὔτε αὑτοῖς οὔτε ἄλλοις ἔτι ἀξιοῦσι περὶ αὐτῶν διδόναι 510.d ὡς παντὶ φανερῶν, ἐκ τούτων δ' ἀρχόμενοι τὰ λοιπὰ ἤδη διεξιόντες τελευτῶσιν ὁμολογουμένως ἐπὶ τοῦτο οὗ ἂν ἐπὶ σκέψιν ὁρμήσωσι.»

Και δεν είναι Γλαύκων, αυτή ίσα ίσα η μελωδία η δουλειά που βγάζει πέρα η διαλεκτική; και που ενώ είναι νοητή (***νοητόν***)… Έτσι και όταν κανείς επιχειρεί με τη διαλεκτική, χωρίς να χρησιμοποιεί καμία αίσθηση, μονάχα με το λόγο ορμά (διὰ τοῦ λόγου ὁρμᾶν) να γνωρίσει την ουσία του καθαυτού όντος, και αν δεν αφήσει το δρόμο του και παραιτηθεί προτού συλλάβει με την ίδια τη νόηση (νοήσει λάβῃ) εκείνο που είναι το καθαυτό αγαθό, φτάνει τέλος στο ίδιο το τέρμα του νοητού (νοητοῦ)…[36]

Στο χωρίο αυτό ο Πλάτων διακρίνει τους «διαλεκτικούς» από αυτούς που ασχολούνται και κατέχουν όσα προανέφερε, με βασικό κριτήριο το «λόγον διδόναι». Δηλώνει ότι ελάχιστοι από τους Μαθηματικούς, Αστρονόμους και άλλους που έτυχε να συναντήσει ήταν «διαλεκτικοί». Τονίζει ότι το «δυνατός δοῦναί τε καὶ ἀποδέξασθαι λόγον» χαρακτηρίζει τον «διαλεκτικό». Η προϋπόθεση δηλαδή διευκρινίζει παρακάτω, για να χαρακτηριστεί κάποιος «διαλεκτικός» είναι να επιχειρεί με τη σκέψη να συλλάβει το αντικείμενό της έρευνάς του και να μην παραιτηθεί από αυτό πριν το συλλάβει με τη «νόηση», οπότε έχει φτάσει στο ανώτερο τμήμα του «νοητού»[37]. Σημαντικό επίσης είναι το γεγονός ό,τι εδώ ο Πλάτων αναδεικνύει τη «νόηση» ως τον κατεξοχήν χώρο στον οποίο λειτουργεί η «διαλεκτική». Θυμίζουμε όμως ότι η «νόηση» του γεωμέτρη-ερευνητή αντίστοιχα, είναι η πραγματικότητα στην οποία λειτουργεί η έρευνα στα Μαθηματικά και πιο συγκεκριμένα στη γεωμετρική ανάλυση, όπως έχουμε δείξει προηγουμένως μέσα από κείμενα του Αριστοτέλη, του Πάππου, του Μαρίνου αλλά και του ίδιου του Πλάτωνα και θα δείξουμε και στη συνέχεια.

---

[36] *Πολιτεία* (531d9–532 b2): «οὐ γάρ που δοκοῦσί γέ σοι οἱ ταῦτα δεινοὶ διαλεκτικοὶ 531.e εἶναι. Οὐ μὰ τὸν Δί’, ἔφη, εἰ μὴ μάλα γέ τινες ὀλίγοι ὧν ἐγὼ ἐντετύχηκα. Ἀλλὰ δή, εἶπον, μὴ δυνατοὶ οἵτινες δοῦναί τε καὶ ἀποδέξασθαι λόγον εἴσεσθαί ποτέ τι ὧν φαμεν δεῖν εἰδέναι; Οὐδ’ αὖ, ἔφη, τοῦτό γε. 532.a Οὐκοῦν, εἶπον, ὦ Γλαύκων, οὗτος ἤδη αὐτός ἐστιν ὁ νόμος ὃν τὸ διαλέγεσθαι περαίνει; ὃν καὶ ὄντα νοητὸν μιμοῖτ’ ἂν ἡ τῆς ὄψεως δύναμις, ἣν ἐλέγομεν πρὸς αὐτὰ ἤδη τὰ ζῷα ἐπιχειρεῖν ἀποβλέπειν καὶ πρὸς αὐτὰ <τὰ> ἄστρα τε καὶ τελευταῖον δὴ πρὸς αὐτὸν τὸν ἥλιον. οὕτω καὶ ὅταν τις τῷ διαλέγεσθαι ἐπιχειρῇ ἄνευ πασῶν τῶν αἰσθήσεων διὰ τοῦ λόγου ἐπ’ αὐτὸ ὃ ἔστιν ἕκαστον ὁρμᾶν, καὶ μὴ ἀποστῇ πρὶν 532.b ἂν αὐτὸ ὃ ἔστιν ἀγαθὸν αὐτῇ νοήσει λάβῃ, ἐπ’ αὐτῷ γίγνεται τῷ τοῦ νοητοῦ τέλει»

[37] Σε επόμενο χωρίο που αφορά τη διαλεκτική στη μαθηματική έρευνα, θα εξηγήσει ακριβώς τι σημαίνει να φτάσει τη σκέψη του μέχρι το τέλος, να το συλλάβει δηλαδή με τη νόησή του και να μην παραιτηθεί.

Τα δύο επόμενα και τελευταία χωρία που περιέχουν την έκφραση «λόγον διδόναι» περιλαμβάνονται επίσης στο 7^{o} κεφάλαιο της *Πολιτείας* στην ενότητα της «Διαλεκτικής». Στο ερώτημα του Γλαύκωνα προς τον Σωκράτη για τον «τρόπο τῆς τοῦ διαλέγεσθαι δυνάμεως», τα είδη της «διαλεκτικής» και τις μεθόδους της, ο Πλάτων απαντά μερικά και συνοπτικά όσο του επιτρέπεται από τους περιορισμούς του έργου που γράφει, για δύο είδη «διαλεκτικής» κατάλληλα για έρευνα: τη «διαλεκτική στη μαθηματική έρευνα» (533α-534β) και τη «διαλεκτική στην έρευνα της ηθικής» (534b-d).[38]

Η «διαλεκτική στη μαθηματική έρευνα» αντιπαραβάλλεται από τον Πλάτωνα με τις «τέχνες» που έχει περιγράψει προηγουμένως, όπως είναι η γεωμετρία και οι συναφείς της, ως προς τη μέθοδο που χρησιμοποιεί :

> …και οι επίλοιπες που είπαμε πως έρχονται σε κάποια επαφή με το καθαυτό όν, όπως η γεωμετρία και οι σχετικές της [«τέχνες» τις αποκαλεί στο 511β2 και c6], βλέπουμε πως ονειρεύονται σα στον ύπνο τους το ον, και τους είναι αδύνατον να το δουν ποτέ πραγματικά στον ξύπνο τους, όσο θα στηρίζονται απάνω σε υποθέσεις που τις αφήνουν άγγιχτες όσο δεν μπορούν να δώσουν το λόγο τους (μὴ δυνάμεναι λόγον διδόναι αὐτῶν). Γιατί ποιος τρόπος υπάρχει να γίνει ποτέ και να ονομαστεί επιστήμη η απόδειξη εκείνη που αρχή της έχει κάτι που δεν γνωρίζει, και το συμπέρασμά της και όλη η μεταξύ ανάπτυξη είναι ένα σύμπλεγμα από πράγματα που δεν γνωρίζει;
>
> Πραγματικά δεν υπάρχει τρόπος.
>
> Ώστε μονάχα η διαλεκτική [στη μαθηματική έρευνα][39], πορεύεται το δρόμο προς την αρχή αναιρώντας τον υποθετικό χαρακτήρα των υποθέσεων (τὰς ὑποθέσεις ἀναιροῦσα) για να τις βεβαιωθεί (ἵνα βεβαιώσηται) … τις ονομάσαμε πολλές φορές επιστήμες αυτές τις τέχνες [όπως τη γεωμετρία] έτσι από συνήθεια, αν και

[38] Αυτή την διάκριση υποστηρίζει και αναλύει εμπεριστατωμένα ο Cornford (1932, 176-183). Αναφέρει χαρακτηριστικά ότι στο πρώτο είδος, της διαλεκτικής στη μαθηματική έρευνα, δεν υπάρχει αναφορά στο «αγαθό» αλλά μόνο στο «αληθές» και το πραγματικό «όν». Επίσης ο Καρασμάνης (1987, 227), υποστηρίζει ότι το χωρίο 533β6-d1, συνδέεται ευθέως με τα Μαθηματικά και τη μεθοδολογία τους.

[39] Για τη διαλεκτική στην ηθική η μέθοδος είναι διαφορετική. Η υπόθεση εδώ είναι ένας ανεπαρκής αβέβαιος ορισμός ο οποίος προτείνεται προς έλεγχο. Κάτι που στη συνέχεια θα τροποποιηθεί ή και θα εγκαταλειφθεί συνολικά και δεν θα «βεβαιωθεί» με παραγωγικό τρόπο. Οι υποθέσεις αυτές είναι: «mere stepping stones which are kicked away in the ascent to the correct definition.», όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Cornford (1932, 182).

χρειαζότανε κάποιο άλλο όνομα φωτεινότερο από τη δοξασία και σκοτεινότερο από την επιστήμη· τον όρο διάνοια μεταχειριστήκαμε, μου φαίνεται κάπου πρωτύτερα.[40]

Δηλαδή το χαρακτηριστικό στοιχείο που διακρίνει τη γεωμετρία και τις άλλες «τέχνες» από τη διαλεκτική σύμφωνα με τον Πλάτωνα και σε αυτό το χωρίο, είναι το ότι δεν είναι σε θέση «τον λόγον διδόναι» για αυτά που χρησιμοποιούν ως «υποθέσεις». Επίσης το όνομα «επιστήμες» χρησιμοποιήθηκε για αυτές από συνήθεια, όπως αναφέρει ο Πλάτων, ενώ θα τους άρμοζε κάτι λιγότερο όπως είναι ο όρος «διάνοια» (προηγουμένως στο 511, b-c τις αποκάλεσε «τέχνες»). Τοποθετεί δηλαδή μόνο τη «διαλεκτική έρευνα στα μαθηματικά» στο χώρο της «επιστήμης» (την είχε ονομάσει «νου» προηγουμένως (στο 511d) ως ανώτερο μέρος του «νοητού»), ενώ τη γεωμετρία και τις υπόλοιπες στο χώρο της «διάνοιας». Μια δήλωση η οποία ισχυροποιεί τη θέση μας για διάκριση ανάμεσα σε αυτούς οι οποίοι είναι γεωμέτρες - ερευνητές –διαλεκτικοί και λειτουργούν στο επίπεδο της «νόησης» (στο στάδιο της ανάλυσης) και αυτούς που διδάσκουν ή μαθαίνουν γεωμετρία[41] και λειτουργούν στο επίπεδο της «διάνοιας» (στο στάδιο της σύνθεσης). Είναι φανερό βέβαια ότι οι ερευνητές -διαλεκτικοί μπορούν να λειτουργήσουν και στο επίπεδο της «διάνοιας» ενώ το αντίστροφο δεν συμβαίνει κατά κανόνα.

Στο τελευταίο χωρίο που περιέχει την έκφραση «λόγον διδόναι» και κλείνει ουσιαστικά την ενότητα «διαλεκτική στη μαθηματική έρευνα», ο Πλάτων συνοψίζει τις απόψεις του βάζοντας τον Σωκράτη να τις επαναλάβει με τη μορφή ερώτησης στον Γλαύκωνα:

Δεν ονομάζεις λοιπόν διαλεκτικό αυτόν που μπορεί να γνωρίσει με το λογισμό (τὸν λόγον λαμβάνοντα) την ουσία του κάθε πράγματος; Και δεν θα πεις για έναν

---

[40] *Πολιτεία* (533, β6-d7): «αἱ δὲ λοιπαί, ἃς τοῦ ὄντος τι ἔφαμεν ἐπιλαμβάνεσθαι, γεωμετρίας τε καὶ τὰς ταύτῃ ἑπομένας, ὁρῶμεν ὡς ὀνειρώττουσι μὲν 533.c περὶ τὸ ὄν, ὕπαρ δὲ ἀδύνατον αὐταῖς ἰδεῖν, ἕως ἂν ὑποθέσεσι χρώμεναι ταύτας ἀκινήτους ἐῶσι, μὴ δυνάμεναι λόγον διδόναι αὐτῶν. ᾧ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδεν συμπέπλεκται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι; Οὐδεμία, ἦ δ’ ὅς. Οὐκοῦν, ἦν δ’ ἐγώ, ἡ διαλεκτικὴ μέθοδος μόνη ταύτῃ πορεύεται, τὰς ὑποθέσεις ἀναιροῦσα, ἐπ’ αὐτὴν τὴν ἀρχὴν 533.d ἵνα βεβαιώσηται,… ἃς ἐπιστήμας μὲν πολλάκις προσείπομεν διὰ τὸ ἔθος, δέονται δὲ ὀνόματος ἄλλου, ἐναργεστέρου μὲν ἢ δόξης, ἀμυδροτέρου δὲ ἢ ἐπιστήμης—διάνοιαν δὲ αὐτὴν ἔν γε τῷ πρόσθεν που ὡρισάμεθα»

[41] Είναι τυχαίο ότι ο Πλάτων τους ονομάζει «γεωμετρικούς» και όχι γεωμέτρες στο 511d3 στο σημείο που καταθέτει την άποψή του ότι αυτοί χρησιμοποιούν τη «διάνοια» και όχι το «νου» όπως οι «διαλεκτικοί» ή μήπως το κάνει σκόπιμα για να τους διακρίνει; Η «διάνοια» βρίσκεται σύμφωνα με το «χωρισμό» του Πλάτωνα ανάμεσα στο «νου» και τη «δοξασία».

που δεν είναι ικανός να κάνει αυτόν το λογισμό, ούτε με τον εαυτό του ούτε και με άλλον (λόγον αὑτῷ τε καὶ ἄλλῳ διδόναι), πως δεν έχει νου (νοῦν) για αυτό το πράγμα;[42]

Τονίζει δηλαδή ο Πλάτων και σε αυτό το χωρίο, τη διαφορά όσων είναι «διαλεκτικοί» από αυτούς που δεν είναι, εστιάζοντας στο «λόγον διδόναι». Αναφέρει επίσης ότι αυτοί που δεν είναι «διαλεκτικοί» δεν έχουν «νούν» κάτι που αφορά και έχει επαναλάβει προηγουμένως για τους «γεωμετρικούς» στο (511 d 1-4), αυτούς δηλαδή που ασκούν την «τέχνη» της γεωμετρίας. Επιβεβαιώνει με άλλα λόγια για μια ακόμη φορά τη θέση μας ότι ο γεωμέτρης – ερευνητής – διαλεκτικός λειτουργεί στο επίπεδο της «νόησης» όπως έχουμε επισημάνει ότι κάνουν για τη γεωμετρική ανάλυση ο Αριστοτέλης, ο Πάππος και ο Μαρίνος.

Κάτι σημαντικό τέλος, το οποίο ενισχύει τη θέση μας για βεβαιωτικό χαρακτήρα και «προς τα κάτω πορεία» στο δεύτερο μέρος («resolution») της γεωμετρικής ανάλυσης, είναι η αντιστοιχία του με την «προς τα κάτω πορεία» (καταβαίνει) της διαλεκτικής έρευνας, όπως αναφέρεται από τον Πλάτωνα στην *Πολιτεία* (511, b3-c2)[43]. Το πώς αυτή η πορεία λειτουργεί το περιγράφει ο Πλάτων συνοπτικά στο χωρίο 533,c7-d2 της *Πολιτείας* που αφορά τη διαλεκτική έρευνα στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, η διαλεκτική μέθοδος στα μαθηματικά «πορεύεται τας υποθέσεις αναιρούσα… ίνα βεβαιώσηται». Αυτό που «αναιρείται» – καταστρέφεται με τη διαλεκτική μέθοδο δεν είναι οι ίδιες οι υποθέσεις, δηλαδή η ορθότητά τους, αλλά ο υποθετικός χαρακτήρας τους,[44] προκειμένου να αποκτήσουν βεβαιωτικό χαρακτήρα. Αν ο γεωμέτρης δεν καταφέρει να τις κάνει να αποκτήσουν βεβαιωτικό χαρακτήρα, δηλαδή, πηγαίνοντας «πίσω» ή «πάνω» από αυτές, δεν καταφέρει να φτάσει πάλι σε αυτές με παραγωγικό συμπερασμό, προσδίδοντας έτσι στον συλλογισμό του λογική εγκυρό-

[42] *Πολιτεία* (534 β 3-6): «Ἦ καὶ διαλεκτικὸν καλεῖς τὸν λόγον ἑκάστου λαμβάνοντα τῆς οὐσίας; καὶ τὸν μὴ ἔχοντα, καθ᾽ ὅσον ἂν μὴ ἔχῃ λόγον αὑτῷ τε καὶ ἄλλῳ διδόναι, κατὰ τοσοῦτον νοῦν περὶ τούτου οὐ φήσεις ἔχειν;»

[43] *Πολιτεία* (511, b3-c2): «Τὸ τοίνυν ἕτερον μάνθανε τμῆμα τοῦ νοητοῦ λέγοντά με τοῦτο οὗ αὐτὸς ὁ λόγος ἅπτεται τῇ τοῦ διαλέγεσθαι δυνάμει, τὰς ὑποθέσεις ποιούμενος οὐκ ἀρχὰς ἀλλὰ τῷ ὄντι ὑποθέσεις, οἷον ἐπιβάσεις τε καὶ ὁρμάς, ἵνα μέχρι τοῦ ἀνυποθέτου ἐπὶ τὴν τοῦ παντὸς ἀρχὴν ἰών, ἁψάμενος αὐτῆς, πάλιν αὖ ἐχό μενος τῶν ἐκείνης ἐχομένων, οὕτως ἐπὶ τελευτὴν **καταβαίνῃ**, αἰσθητῷ παντάπασιν οὐδενὶ προσχρώμενος, ἀλλ᾽ εἴδεσιν αὐτοῖς δι᾽ αὐτῶν εἰς αὐτά, καὶ τελευτᾷ εἰς εἴδη.»

[44] Θέση την οποία έχουν υποστηρίξει ικανοποιητικά τόσο ο Cornford (1932, 177, 182) όσο και ο Καρασμάνης (1987, 226-228).

τητα, δεν έχει πετύχει το έργο του, δεν «δύναται τὸν λόγον διδόναι», και οι «υποθέσεις» δεν έχουν από μόνες τους επιστημονική αξία. Αν όμως ολοκληρώσει το έργο του, αίροντας τον υποθετικό χαρακτήρα των «υποθέσεων» ώστε να γίνουν αυτές βεβαιώσεις, – και αυτό θα συμβεί όχι μόνο έχοντας ανακαλύψει την προς τα πάνω πορεία αλλά έχοντας ολοκληρώσει στο «νου» του και την προς τα κάτω, «βεβαιωτική» πορεία – τότε μόνο ο γεωμέτρης θα χαρακτηριστεί «δυνατὸς τον λόγον διδόναι» και οι θέσεις του επιστημονικές. Αυτή όμως ακριβώς τη μετατροπή μιας υπόθεσης σε βεβαιότητα την έχουμε εντοπίσει και αναλύσει με τη φιλοσοφική διάκριση ανάμεσα στο «δοθέν» και το «δεδομένον», στο δεύτερο μέρος της γεωμετρικής ανάλυσης («resolution»)[45], το «βεβαιωτικό», όπως θα το ονομάζουμε από δω και στο εξής.

Συνοψίζοντας: Η «προς τα κάτω πορεία» της διαλεκτικής έρευνας στα μαθηματικά αποκαλύπτεται τώρα πάλι μπροστά μας, μέσα από το «βεβαιωτικό» μέρος της ανάλυσης.[46] Η σύνδεση πλέον του «λόγον διδόναι» με την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» είναι άμεση. Αυτό που ο γεωμέτρης-ερευνητής ονομάζει «δεδομένον» είναι αυτό για το οποίο «δύναται δοῦναι τὸν λόγον», δηλαδή κάτι το οποίο όχι μόνο το έχει συλλάβει με τη «νόηση» αλλά το έχει στη συνέχεια επεξεργαστεί και παράγει ως αποτέλεσμα έγκυρου συλλογισμού.

5.5.1. Η απάντηση στο σύνθετο ερώτημα του «resolution»

Από την ανάλυση που έχει προηγηθεί, είμαστε πλέον σε θέση να απαντήσουμε στο σύνθετο ερώτημα που θέσαμε στην αρχή του κεφαλαίου για το τι είναι και πώς λειτουργεί το «resolution», ποια η αναγκαιότητά του και τι σημαίνει η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» που χρησιμοποιεί.

Το «resolution» είναι μια πορεία μέσω συμπερασμών στο επίπεδο της «νόησης» του γεωμέτρη – ερευνητή, η οποία έχει στόχο να προσδώσει εγκυρότητα στο συλλογισμό του. Ο χαρακτήρας του «resolution» είναι βεβαιωτικός, λειτουργεί ως μια σειρά παραγωγικών συμπερασμών (deduction), σε αντίθεση με το «transformation», το

[45] Αλλά και στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη με τα οποία θα ασχοληθούμε εκτενέστερα σε επόμενο κεφάλαιο.

[46] Οι περισσότεροι μελετητές μέχρι σήμερα εντοπίζουν την «προς τα κάτω πορεία» της γεωμετρικής ανάλυσης στο στάδιο της σύνθεσης. Αυτό κατά την άποψή μας δεν θα μπορούσε να συμβαίνει, γιατί η σύνθεση πραγματοποιείται στο επίπεδο της «διάνοιας» στο οποίο φτάνουν όλοι όσοι ασχολούνται με τη γεωμετρία και όχι μόνο οι γεωμέτρες-ερευνητές στους οποίους αναφέρεται ο Πλάτων στα χωρία από την *Πολιτεία* που μνημονεύσαμε.

πρώτο μέρος της ανάλυσης, που λειτουργεί, ως αναζήτηση προκειμένων (reduction) [«intuitive apprehension» σύμφωνα με τον Cornford (1932, 51)] και έχει υποθετικό χαρακτήρα. Το «βεβαιωτικό» αυτό μέρος της ανάλυσης είναι αναγκαίο προκειμένου να απαντήσει στον εαυτό του ο ερευνητής κατά πόσο αυτά που προηγήθηκαν μπορούν να αποτελέσουν τη βάση προκειμένου να συγκροτηθεί ένας παραγωγικός συμπερασμός που *μπορεί* να λύσει το πρόβλημα. Με άλλα λόγια βεβαιώνεται για το αν ο συλλογισμός του παρουσιάζει «δυνητική αναγκαιότητα». Η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» που χρησιμοποιείται αποκλειστικά στο δεύτερο μέρος της ανάλυσης («resolution»), φανερώνει ακριβώς αυτή την νοητική πορεία του ερευνητή η οποία αναιρεί τον υποθετικό χαρακτήρα όσων προηγήθηκαν «δίνοντας λόγο» γι' αυτά, μετατρέποντάς τα έτσι σε βεβαιώσεις. Γι' αυτό η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» δεν εμφανίζεται παρά μόνο σε ερευνητικά κείμενα όπως είναι αυτά της ανάλυσης. Σε ό,τι αφορά τα *Δεδομένα*, αντίστοιχα, όπως θα αναλύσουμε στο $8^{ο}$ κεφάλαιο της διατριβής μας, είναι έτοιμες «προς τα κάτω πορείες» της «νόησης» που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έτοιμα εργαλεία σε μελλοντικές αναλύσεις πάντα από γεωμέτρες – ερευνητές και όχι από όσους απλά ασχολούνται με τη γεωμετρία.

5.5.2. Μια νέα ερμηνεία της γεωμετρικής ανάλυσης

Με βάση όσα έχουμε αναφέρει ως τώρα, προτείνουμε στη συνέχεια μια νέα ερμηνεία της γεωμετρικής ανάλυσης.

Η γεωμετρική ανάλυση περιλαμβάνει δύο μέρη: α) το «υποθετικό», που είναι μία πορεία αναζήτησης προκειμένων (reduction), και είναι αυτό που σήμερα ονομάζεται «transformation» και β) το «βεβαιωτικό», που είναι μία σειρά παραγωγικών συμπερασμών (deduction), και είναι αυτό που σήμερα ονομάζεται «resolution». Το «υποθετικό» μέρος ξεκινάει με τη λήψη του ζητουμένου και έχει στόχο να καταλήξει σε κάτι που είναι αληθές ανεξάρτητα του ζητουμένου, από το οποίο ο γεωμέτρης-ερευνητής *υποθέτει* ότι μπορεί να ξεκινήσει η πορεία παραγωγής του ζητουμένου στο «βεβαιωτικό» μέρος που ακολουθεί. Στο «βεβαιωτικό» μέρος ο γεωμέτρης-ερευνητής, έχει στόχο να απαντήσει στον εαυτό του, να βεβαιωθεί δηλαδή κατά πόσο αυτά που προηγήθηκαν στο «υποθετικό» μέρος, εφόσον αντιστραφούν και ενδεχομένως συμπληρωθούν κατάλληλα, συγκροτούν έναν παραγωγικό συμπερασμό ο οποίος *μπορεί* να λύσει το πρόβλημα. Βεβαιώνεται δηλαδή ότι αυτή η νοητική του πορεία – συλλογισμός έχει «δυνητική αναγκαιότητα» και κατάληξη το ζητούμενο.

Οι δύο αυτές πορείες, «υποθετική» και «βεβαιωτική», πραγματοποιούνται (γίνονται «ενεργεία») στο ανώτερο επίπεδο του «νοητού», τη «νόηση» του γεωμέτρη-ερευνητή, που είναι ο μόνος ικανός να κάνει ανάλυση. Η ανάλυση η οποία έχει ολοκληρωθεί μπορεί να χρησιμεύσει μόνο σε άλλους ερευνητές ως μέρος επόμενων αναλύσεων ή για την εκπαίδευση των μελλοντικών ερευνητών. Τα κείμενα που περιέχουν ανάλυση είναι ερευνητικά κείμενα και απευθύνονται από τη φύση τους σε περιορισμένο κοινό. Σε αυτό οφείλεται η μικρή διάδοση και ο αριθμός τους, παρά την ευρετική αξία της μεθόδου, και όχι σε κάποια θρυλούμενη τάση των αρχαίων να κρύβουν τις μεθόδους τους.[47] Η σύνθεση, με τη σειρά της, που ακολουθεί την επιτυχημένη ανάλυση, διδάσκεται κατόπιν με πληρότητα στους άλλους από τον γεωμέτρη – ερευνητή, ο οποίος λειτουργεί πλέον ως δάσκαλος. Η σύνθεση πραγματοποιείται στο δεύτερο επίπεδο του «νοητού», τη «διάνοια», και μπορεί από τώρα και στο εξής να γίνει αντικείμενο μάθησης και διδασκαλίας. Απευθύνεται στον καθένα που ασχολείται με τη γεωμετρία και λειτουργεί στο επίπεδο της «διάνοιας».

Συμπέρασμα

Με αφετηρία τη διάκριση ανάμεσα στους όρους «δοθέν» και «δεδομένον» που μας έδωσε τη δυνατότητα να αντιληφθούμε αυτή την «περίεργη» μέχρι τώρα ορολογία, κατανοήσαμε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί το δεύτερο μέρος της ανάλυσης το οποίο ονομάσαμε «βεβαιωτικό». Η κατανόηση αυτού του μέρους της ανάλυσης μας άνοιξε το δρόμο για μια νέα ερμηνεία της γεωμετρικής ανάλυσης στην οποία συμπεριλαμβάνεται μια πορεία προς τα πάνω που αντιστοιχεί στο πρώτο μέρος της ανάλυσης, αυτό που ονομάσαμε «υποθετικό» και μια πορεία προς τα κάτω που αντιστοιχεί στο δεύτερο μέρος της ανάλυσης το «βεβαιωτικό». Έτσι η ερμηνεία μας μπορεί να συνδυάσει τα σωστά επιχειρήματα και από τις δύο υπάρχουσες μέχρι σήμερα ερμηνείες της ανάλυσης, τα οποία μέχρι τώρα ήταν δύσκολο να συνυπάρξουν χωρίς να γίνονται αναφορές σε ασυνέπειες ανάμεσα στις θεωρητικές περιγραφές του Πάππου ή παρεμβολές στα κείμενα. Αυτός ακριβώς θα είναι ο στόχος του επομένου κεφαλαίου της διατριβής μας. Να δείξουμε δηλαδή, υπό το πρίσμα της ερμηνείας μας, ότι οι τρεις θεωρητικές περιγραφές του Πάππου δεν αντιφάσκουν μεταξύ τους αλλά αντίθετα συμπληρώνουν η μια την άλλη.

[47] Βλέπε Netz (2000) για μία διαφορετική προσέγγιση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Οι θεωρητικές περιγραφές και η πρακτική της γεωμετρικής ανάλυσης στον Πάππο

Στο κεφάλαιο αυτό, υπό το πρίσμα της ερμηνείας μας για τη γεωμετρική ανάλυση, αναλύουμε τις τρεις θεωρητικές περιγραφές του Πάππου για αυτήν και δείχνουμε ότι δεν αντιφάσκουν μεταξύ τους. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργούσε η ανάλυση στην μαθηματική πρακτική, αναλύοντας ένα αντιπροσωπευτικό και συχνά χρησιμοποιούμενο από τους σύγχρονους ερευνητές παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου από τον Πάππο.

6.1. *Οι θεωρητικές περιγραφές της γεωμετρικής ανάλυσης στον Πάππο*

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το ερώτημα για το τι ακριβώς ήταν και πως λειτουργούσε η γεωμετρική ανάλυση στα Ελληνικά μαθηματικά, έχει προκαλέσει και συνεχίζει να προκαλεί πλήθος συζητήσεων και το έντονο ενδιαφέρον των ερευνητών. Όλες οι προσπάθειες προσέγγισης της γεωμετρικής ανάλυσης στα Ελληνικά μαθηματικά, με τον ένα ή άλλο τρόπο περνούν μέσα από το απόσπασμα της εισαγωγής του 7^{ου} βιβλίου της *Συναγωγής* του Πάππου, που περιλαμβάνει κάποιες θεωρητικές περιγραφές της ανάλυσης, το οποίο και παραθέσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Ο Mahoney (1968, 323-325) αποκαλεί αυτές τις θεωρητικές τοποθετήσεις του Πάππου «ορισμούς», οι οποίοι μάλιστα όπως υποστηρίζει αντιφάσκουν μεταξύ τους. Επειδή συγκεκριμένα υποστηρίζει, όπως έχουμε προαναφέρει (§ 5.1), ότι ο δεύτερος «ορισμός» αποτελεί παρεμβολή, θεωρεί ότι δεν θα πρέπει να λαμβάνεται υπ’ όψιν προκειμένου να έχει νόημα το υπόλοιπο του κειμένου του Πάππου.

Οι Hintikka & Remes (1974) από την άλλη, είναι περισσότερο προσεκτικοί όταν αναφέρονται στα λεγόμενα του Πάππου για την ανάλυση, δεν χρησιμοποιούν πουθενά τον όρο «ορισμός» αλλά επιμένουν σε όρους όπως «description» (σσ. xii, xv, 17), «general description» (σσ. 17, 18, 70), «official description» (18), «account» (σ. 16), «initial account», (σ. 16), «general account» (σ. 17) και «general characterization» (σ. 17). Μια προσέγγιση η οποία ξεκινάει από τον Cornford (1932, 46), που χρησιμοποιεί την έκφραση «clear account» και συνεχίζεται με τον Gulley (1958), ο οποίος χρησιμοποιεί εκφράσεις όπως: «Pappus's describing», «two different accounts», «Pappus's account», «first description» και «second description», σε όλη την έκταση του άρθρου του χωρίς να χρησιμοποιεί πουθενά τον όρο «ορισμός».

Αυτές οι δύο διαφορετικές προσεγγίσεις των λεγομένων του Πάππου για τη γεωμετρική ανάλυση, αν και σε πρώτη ανάγνωση δεν φαίνεται να σηματοδοτούν σημαντική διαφοροποίηση στον τρόπο με τον οποίο τα αντιλαμβανόμαστε, θα αποδειχθεί στη συνέχεια ότι είναι καθοριστικές τόσο για τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε το περιεχόμενό τους, όσο και το αν αυτά συμφωνούν ή αντιφάσκουν μεταξύ τους αλλά και με την πρακτική του Πάππου στη γεωμετρική ανάλυση. Η δεύτερη προσέγγιση των Cornford, Gulley και Hintikka & Remes, είναι πιο κοντά στη δική μας ερμηνεία για την ανάλυση, όπως θα μας δοθεί η ευκαιρία να αναλύσουμε παρακάτω.

Η θέση που θα υποστηρίξουμε είναι ότι τα τρία συγκεκριμένα χωρία από το κείμενο του Πάππου: 1^{o}) (634, 11-13), 2^{o}) (634, 13-17) και 3^{o}) (634, 24-636, 14) όπως θα αναλύσουμε στη συνέχεια, πάντα μέσα από το πρίσμα της δικής μας ερμηνείας, αποτελούν απλές περιγραφές των σημαντικότερων κατά την άποψη του στοιχείων της ανάλυσης και όχι αυστηρούς ορισμούς της. Περιγραφές οι οποίες όχι μόνο δεν αντιφάσκουν μεταξύ τους αλλά αντίθετα συμπληρώνουν η μια την άλλη. Το γεγονός ότι σε κάποιες από αυτές εμφανίζονται στοιχεία που σηματοδοτούν «προς τα πάνω» πορεία ενώ σε άλλες στοιχεία που σηματοδοτούν πορεία «προς τα κάτω», δεν αποτελεί πρόβλημα για τη δική μας ερμηνεία σύμφωνα με την οποία η ανάλυση συμπεριλαμβάνει και τις δύο πορείες.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδοση και συζήτηση καθεμιάς από τις τρεις περιγραφές του Πάππου για τη γεωμετρική ανάλυση, θα παραθέσουμε σε συντομία και θα παραστήσουμε σχηματικά τις ερμηνείες της ανάλυσης και της σύνθεσης που έχουν υπάρξει μέχρι σήμερα και τον τρόπο που αυτές συνδέονται με το κείμενο του Πάππου. Επίσης θα αποδώσουμε σχηματικά και τη δική μας ερμηνεία.

6.1.1. Οι υπάρχουσες ερμηνείες της ανάλυσης και της σύνθεσης και η σχέση τους με τις θεωρητικές περιγραφές του Πάππου

Οι υποστηρικτές της κλασικής ερμηνείας της γεωμετρικής ανάλυσης, όπως είναι οι Hankel, Cantor, Heath, και Robinson, μπορούμε να πούμε ότι συντάσσονται πίσω από το επόμενο σκεπτικό, όπως τουλάχιστον με ρητό τρόπο το εκφράζει ο Robinson (1936) στην εισαγωγή του άρθρου του για την ανάλυση στην Ελληνική γεωμετρία: «Έστω ότι θέλουμε να δείξουμε, αν είναι δυνατόν, την πρόταση Ζ. Σύμφωνα με τη μέθοδο της ανάλυσης προχωράμε ως εξής: πρώτα υποθέτουμε ότι το Ζ είναι αληθές και στη συνέχεια μελετάμε τι ακολουθεί από το Ζ. Ας πούμε ότι βρίσκουμε ότι το Ζ συνεπάγεται το Π_1. Στη συνέχεια μελετάμε τι ακολουθεί από το Π_1. Ας πούμε ότι βρίσκουμε ότι το Π_1 συνεπάγεται το Π_2. Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο μέχρι να φτάσουμε σε μια πρόταση Ι που είναι ήδη γνωστό ότι είναι αληθής, με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστή ανεξάρτητα από το Ζ. Όταν έχουμε φτάσει σε μια τέτοια πρόταση η ανάλυση έχει τελειώσει και μπορεί να αρχίσει η σύνθεση.» Επομένως μπορούμε να παραστήσουμε την ανάλυση, σύμφωνα με την περιγραφή του Robinson, σχηματικά ως εξής:

Ανάλυση: $Ζ \Rightarrow \Pi_1 \Rightarrow \Pi_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \Pi_\nu \Rightarrow Ι$

Η σύνθεση συνίσταται στην εκτέλεση των ίδιων βημάτων με την αντίστροφη φορά, σύμφωνα με τον Robinson. Επομένως σχηματικά μπορούμε να την παραστήσουμε ως εξής:

Σύνθεση: $Ι \Rightarrow \Pi_\nu \Rightarrow \dots \Rightarrow \Pi_2 \Rightarrow \Pi_1 \Rightarrow Ζ$

Για να λειτουργήσει αυτή η μέθοδος, όπως σημειώνει ο Robinson, ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι να αντιστρέφονται όλες οι συνεπαγωγές της. Ο έλεγχος της αντιστροφής των προτάσεων της ανάλυσης γίνεται στη σύνθεση. Με αυτόν τον τρόπο η σύνθεση ελέγχει την ανάλυση. Αν δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα και όλες οι συνεπαγωγές της σύνθεσης λειτουργούν, τότε η σύνθεση αποτελεί την απόδειξη που θέλουμε. Στην περίπτωση που η πρόταση Ι είναι γνωστό, ανεξάρτητα της Ζ, ότι είναι ψευδής, η ανάλυση μας έχει δείξει ότι η Ζ ήταν ψευδής, υποστηρίζει ο Robinson (γιατί προφανώς δεν μπορεί αληθείς προκείμενες μέσα από ορθές συνεπαγωγές να οδηγήσουν σε ψευδές συμπέρασμα). Κατά συνέπεια η απαγωγή σε άτοπο είναι μια ειδική περίπτωση της μεθόδου της ανάλυσης σύμφωνα με την κλασική ερμηνεία της ανάλυσης.

Η παραπάνω ερμηνεία της ανάλυσης και της σύνθεσης, φαίνεται να τα πηγαίνει καλά με την πρώτη και ακόμη καλύτερα με την τρίτη θεωρητική περιγραφή της γεωμετρικής ανάλυσης του Πάππου με δεδομένο ότι η τελευταία περιλαμβάνει και την απαγωγή σε άτοπο. Δεν φαίνεται όμως να τα πηγαίνει το ίδιο καλά με την δεύτερη περιγραφή του Πάππου, στην οποία φαίνεται να ταιριάζει καλύτερα η ερμηνεία της μεθόδου που προτείνει ο Cornford όπως θα δούμε παρακάτω. Για αυτή τη δεύτερη περιγραφή του Πάππου η οποία φαίνεται να φανερώνει πορεία «προς τα πάνω», ο Heath (1926, τομ.I, 139-140), ένας από τους βασικούς υποστηρικτές της «κλασικής» ερμηνείας, προσπαθώντας να δικαιολογήσει τον τρόπο με τον οποίο διατυπώνεται, ισχυρίζεται ότι υποδηλώνει την αντιστρεψιμότητα των βημάτων μιας επιτυχημένης ανάλυσης, κάτι το οποίο δεν κάνει ξεκάθαρο η πρώτη περιγραφή του Πάππου. Έτσι, αυτή η δεύτερη περιγραφή, νομιμοποιείται, σύμφωνα με τον Heath, να αναφέρεται σε αναζήτηση προκειμένων γιατί και στην πρακτική τους οι Έλληνες εξασφάλιζαν το ζητούμενο επιμένοντας πάντα στην επιβεβαίωση της ανάλυσης από τη σύνθεση που ακολουθούσε. Μια ερμηνεία όχι ιδιαίτερα ικανοποιητική, την οποία ήρθε να συμπληρώσει ο Robinson (1936, 473) λέγοντας ότι η δεύτερη περιγραφή του Πάππου, δεν είναι λάθος σύμφωνα με την «κλασική» ερμηνεία αλλά απλώς «απρόσμενη». Κάτι όμως που μπορεί να δικαιολογηθεί σε μια επιτυχημένη ανάλυση στην οποία οι συνεπαγωγές αντιστρέφονται. Επομένως, ο λόγος που ο Πάππος εκφράζεται με αυτόν τον «απρόσμενο» τρόπο, είναι το γεγονός ότι αντιλαμβάνεται την ανάλυση ως υπάρχουσα για χάρη της σύνθεσης. Αυτό τον κάνει να περιγράφει τα βήματα της ανάλυσης, όχι όπως φαίνονται όταν κάνεις την ανάλυση αλλά όπως φαίνονται στην επακόλουθη σύνθεση. Αυτές οι προσπάθειες για τη δικαιολόγηση της ύπαρξης της δεύτερης περιγραφής του Πάππου σύμφωνα με την «κλασική» ερμηνεία φαίνεται όμως ότι δεν ήταν αρκετά πειστικές ούτε για τον Mahoney (1968), ο οποίος ασπάζεται την «κλασική» ερμηνεία, αλλά υποστηρίζει ότι η δεύτερη περιγραφή της ανάλυσης είναι εμβόλιμη στο κείμενο του Πάππου.

Έχουμε αναφερθεί ήδη στην ερμηνεία της ανάλυσης και της σύνθεσης από τον Cornford, ο οποίος θεωρεί την ανάλυση ως μια «προς τα πάνω» πορεία που γίνεται με τη βοήθεια της ενόρασης, αναζητώντας προκείμενες από τις οποίες κάθε φορά προκύπτει το ζητούμενο. Αυτή η ερμηνεία φαίνεται να ταιριάζει καλύτερα στη δεύτερη περιγραφή του Πάππου αλλά και στην πρώτη όπως υποστηρίζει ο Cornford, αν αντιληφθούμε, όπως αναφέρει, σωστά την ορολογία της και ειδικότερα την έκφραση: «δια των εξής ακολούθων». Η προς τα «πάνω πορεία», σύμφωνα με τον Cornford, σταματάει όταν φτάσουμε σε μια πρόταση η οποία είναι γνωστό ότι είναι αληθής. Μπορούμε να παραστήσουμε σχηματικά την άποψη του Cornford για την ανάλυση ως εξής:

Ανάλυση: $Z \Leftarrow \Pi_1 \Leftarrow \Pi_2 \ldots \Leftarrow \Pi_\nu \Leftarrow I$

Από την άλλη, σύμφωνα με τον Cornford, στη σύνθεση η οποία είναι μια «προς τα κάτω» πορεία, ακολουθούμε απλά τα ίδια βήματα αλλά με την αντίθετη σειρά, δηλαδή από τη γνωστή πρόταση προς το ζητούμενο. Έτσι σχηματικά η άποψη του Cornford για τη σύνθεση παριστάνεται ως εξής:

Σύνθεση: $I \Rightarrow \Pi_\nu \Rightarrow \ldots \Rightarrow \Pi_2 \Rightarrow \Pi_1 \Rightarrow Z$

Είναι προφανές, όπως υποστηρίζουν αρκετοί, ότι σε αυτή την ερμηνεία της γεωμετρικής ανάλυσης δεν υπάρχει ανάγκη για τη σύνθεση. Αυτό γιατί η σύνθεση καταλήγει να είναι ίδια με την ανάλυση απλά γραμμένη ανάποδα, όπως γίνεται φανερό και από το σχήμα. Η σύνθεση έτσι καταλήγει να είναι περιττή. Επίσης δεν χρειάζεται η αντιστρεψιμότητα των συνεπαγωγών, κάτι όμως που αποκλείει και την απαγωγή σε άτοπο ως μια μορφή ανάλυσης, με αποτέλεσμα η τρίτη περιγραφή του Πάππου να μην λειτουργεί με αυτήν την ερμηνεία. Την ερμηνεία αυτή του Cornford για «προς τα πάνω» πορεία στην ανάλυση, την υποστηρίζουν εν μέρει τουλάχιστον οι Hintikka & Remes (1974) αν και αντιλαμβάνονται και αναγνωρίζουν τα προβλήματα που παρουσιάζει ειδικότερα με την τρίτη περιγραφή του Πάππου και εν τέλει αναγκάζονται να αναγνωρίσουν ότι δεν είναι πλήρης.

Η δική μας ερμηνεία για την γεωμετρική ανάλυση, όπως τη διατυπώσαμε ήδη στο προηγούμενο κεφάλαιο, αναγνωρίζοντας την «προς τα πάνω» πορεία στο υποθετικό μέρος και την «προς τα κάτω» πορεία στο βεβαιωτικό μέρος με την ορολογία «δοθέντων» – «δεδομένων», όπου ελέγχεται η «δυνατότητα» (δ) των αντίστροφων βημάτων ($\delta\Pi_\iota$) αφού πρώτα ελεγχθεί η «δυνατότητα» (δ) να παραχθεί η αληθήςικανή πρόταση (δΙ) από τα στοιχεία του προβλήματος τις γνωστές προτάσεις και τα αξιώματα (Γ), σχηματικά παριστάνεται ως εξής:

Ανάλυση:

υποθετικό μέρος: $Z \Rightarrow \Pi_1 \Rightarrow \Pi_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \Pi_\nu \Rightarrow I$

βεβαιωτικό μέρος: $\Gamma \Rightarrow \delta I \Rightarrow \delta\Pi_\nu \Rightarrow \ldots \Rightarrow \delta\Pi_2 \Rightarrow \delta\Pi_1 \Rightarrow \delta Z$

Για τη σχηματική παράσταση της σύνθεσης συμφωνούμε με την κοινή παράσταση των προηγούμενων ερμηνειών ως:

Σύνθεση: $\mathrm{I} \Rightarrow \Pi_\nu \Rightarrow \dots \Rightarrow \Pi_2 \Rightarrow \Pi_1 \Rightarrow \mathrm{Z}$

Η ερμηνεία μας για τη γεωμετρική ανάλυση, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, δεν αντιμετωπίζει προβλήματα με καμία από τις τρεις θεωρητικές περιγραφές του Πάππου.

6.2. *Οι τρεις περιγραφές του Πάππου για τη γεωμετρική ανάλυση υπό το φως της ερμηνείας μας*

Μέχρι εδώ παρουσιάσαμε τον τρόπο με τον οποίο αποδόθηκαν και αντιμετωπίστηκαν από τους διάφορους μελετητές, οι τρεις περιγραφές του Πάππου για την ανάλυση, υπό το πρίσμα της ερμηνείας που ο καθένας τους είχε για την αναλυτική μέθοδο. Στην ενότητα που ακολουθεί θα αποδώσουμε και θα συζητήσουμε τις τρεις περιγραφές του Πάππου υπό το φως της ερμηνείας μας για τη γεωμετρική ανάλυση, με στόχο να δείξουμε ότι αυτές συμφωνούν τόσο μεταξύ τους όσο και με την ερμηνεία μας.

6.2.1. Πρώτη περιγραφή του Πάππου για τη γεωμετρική ανάλυση

Ειδικότερα στην πρώτη περιγραφή της γεωμετρικής ανάλυσης (634, 11-13), ο Πάππος αναφέρει (η μετάφραση είναι δική μας):

> Η ανάλυση λοιπόν είναι μία πορεία [του σκέπτεσθαι], από το ζητούμενο, ως να ήταν δεκτό, διαμέσου των κατά σειρά ακολούθων[1], προς κάτι που γίνεται δεκτό δια συνθέσεως.[2]

Στο απόσπασμα αυτό του Πάππου, περιέχεται μια καταρχήν και αρκετά συνοπτική, γενική περιγραφή του συνόλου της μεθόδου της γεωμετρικής ανάλυσης, που στη συνέχεια θα χρειαστεί επεξήγηση[3]. Με άλλα λόγια το απόσπασμα αυτό αποτελεί μια αφαιρετική – ελλειπτική περιγραφή της ανάλυσης, με την οποία ο Πάππος έχει στόχο να αναδείξει από τις πρώτες γραμμές του κειμένου του, το σημαντικότερο και

---

[1] Δηλαδή αυτών που πάνε μαζί του, είτε ως προκείμενες είτε ως συνέπειες, όπως υποστηρίζουν οι Hintikka & Remes (1974, 15-16) και οι Berggren & Van Brummelen (2000, 9) με επιχειρήματα στα οποία συμφωνούμε και θα παραθέσουμε παρακάτω.

[2] Πάππου *Συναγωγή*, Hultsch 634.11-13: «ἀνάλυσις τοίνυν ἐστὶν ὁδὸς ἀπὸ τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ἐπί τι ὁμολογούμενον συνθέσει·»

[3] Την ίδια άποψη έχουν διατυπώσει και υποστηρίξει επαρκώς οι Hintikka & Remes (1974, 16-17).

ταυτόχρονα πρωτοποριακό χαρακτηριστικό αυτής της μεθόδου, που είναι η λήψη του ζητουμένου ως αληθούς ή «ομολογουμένου».

Δεν αποτελεί κατά κανένα τρόπο αυτή η πρώτη περιγραφή ένα πλήρη και αυστηρό «ορισμό» της μεθόδου της ανάλυσης. Ο Mahoney (1968), ο οποίος υποστήριξε ότι αυτή η πρώτη περιγραφή του Πάππου είναι ένας ορισμός της ανάλυσης, αναγκάστηκε να χαρακτηρίσει ως παρεμβολή την επόμενη περιγραφή (ορισμό πάλι κατά την άποψή του), και ένας από τους βασικούς λόγους ήταν ότι αυτές οι δύο περιγραφές δεν είναι ισοδύναμες, κάτι που θα έπρεπε πράγματι να ισχύει εάν επρόκειτο πραγματικά για δύο ορισμούς. Οι υπόλοιποι μελετητές ήταν περισσότερο προσεκτικοί αποκάλεσαν τα λεγόμενα του Πάππου «περιγραφές» τις οποίες και προσπάθησαν να κατανοήσουν και να εναρμονίσουν όπως θα κάνουμε και εμείς στη συνέχεια.

Θεωρούμε ότι αν ο Πάππος ήθελε να δώσει ορισμό, όπως κάνει σε άλλες περιπτώσεις θα χρησιμοποιούσε ενδεχομένως τη λέξη «όρος» (με την έννοια του ορισμού)[4] ή τουλάχιστον έναρθρο κατηγορούμενο που δηλώνει ταύτιση ή ορισμό, όπως κάνει στο χωρίο (650, 14-20) από τη *Συναγωγή*, στο οποίο αναφέρεται στους ορισμούς του θεωρήματος, του προβλήματος και του πορίσματος στους αρχαίους:

> τὴν δὲ διαφορὰν τῶν τριῶν τούτων ὅτι βέλτιον ᾔδεσαν οἱ ἀρχαῖοι, δῆλον ἐκ τῶν **ὅρων**· ἔφασαν γὰρ θεώρημα μὲν **εἶναι τὸ** προτεινόμενον εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου, πρόβλημα δὲ [**εἶναι**] τὸ προβαλλόμενον εἰς κατασκευὴν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου, πόρισμα δὲ [**εἶναι**] τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐ τοῦ τοῦ προτεινομένου.

Αντίστοιχα ο Μαρίνος όταν ορίζει έννοιες γράφει: «γνώριμον δέ ἐστι **τὸ** γιγνωσκόμενον… πόριμον δέ ἐστιν, **ὃ** δυνατοί ἐσμεν… ῥητὸν δέ ἐστιν, **οὗπερ**… καθ’ αὐτὸ ῥητόν ἐστιν, **ὃ** κατά τινα... ἄπορον δέ ἐστι **τὸ** ἀντικειμένως ἔχον… ἔσται δὲ **τὸ** καθ’ ὑπό θεσιν διδόμενον **τὸ** ἀκολούθως ταῖς ἀρχαῖς…» Χρησιμοποιεί επίσης επανειλημμένως τις λέξεις «ορίζονται», «ορισμόν», «ορίζεσθαι», «όρω». Σύμφωνα με τα παραπάνω, λοιπόν, ένας αυστηρός ορισμός μιας τόσο σημαντικής μεθόδου, όπως είναι η μέθοδος της ανάλυσης, θα απαιτούσε να περιέχει το κείμενο του Πάππου αν όχι κάποια μορφή της λέξης «όρος», τουλάχιστον το άρθρο «η» μπροστά στον όρο «οδός» που όμως δεν υπάρχει. Η περιγραφή αυτή, όπως προαναφέραμε,

[4] Με αυτόν τον τρόπο το αντιλαμβάνεται και ο Jones (1986, 96): «Το ότι οι αρχαίοι γνώριζαν άριστα τη διάκριση ανάμεσα σε αυτά τα τρία πράγματα, είναι σαφές από τους ορισμούς τους.»

έχει στόχο απλά την ανάδειξη του σημαντικότερου χαρακτηριστικού της ανάλυσης που είναι το να ληφθεί ως αληθές («ομολογούμενον») το ζητούμενο, με βασική συνέπεια την εκμετάλλευση της δομής του ίδιου του προβλήματος. Δεν αναφέρεται σε συγκεκριμένες «κατευθύνσεις» μέσα στη μέθοδο της ανάλυσης, όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω, κατά συνέπεια δεν μπορεί να «αντικρούει» την περιγραφή που ακολουθεί.

Κάτι τέλος που έχει απασχολήσει έντονα προηγούμενες σημαντικές εργασίες που αφορούν τη γεωμετρική ανάλυση[5] και έχει αποτελέσει συστατικό στοιχείο της λεγόμενης μη κλασικής ερμηνείας της, είναι η απόδοση του όρου «ακόλουθον» και η κατεύθυνση που αυτός προσδίδει στην ανάλυση ή δεν προσδίδει. Η απόδοση του όρου «ακόλουθον» από τον Cornford, ταύτισε τον όρο με την «προς τα πάνω» πορεία και υπήρξε αιρετική για την εποχή της. Για το λόγο αυτό έτυχε ιδιαίτερα σκληρής κριτικής μέχρι να φτάσουμε σε αυτή που σήμερα είναι η πλέον αντιπροσωπευτική και αποδεκτή ερμηνεία του όρου και οφείλεται στους Hintikka & Remes (1974, 14):

> Θέλουμε να προτείνουμε ότι *το ακόλουθον* στην περιγραφή του Πάππου για την ανάλυση και τη σύνθεση δεν σημαίνει μια λογική συνέπεια, αλλά είναι ένας πολύ περισσότερο ασαφής όρος για το «οτιδήποτε αντιστοιχεί σε», ή καλύτερα «πηγαίνει μαζί με» το επιθυμητό αποτέλεσμα, τις προκείμενες από τις οποίες αυτό μπορεί να παραχθεί, ίσως με την έννοια του να καθιστά κάποιον ικανό να παράγει συμπερασματικά το αποτέλεσμα από αυτές. Για αυτό το λόγο η ερμηνεία μας «ακόλουθο» (concomitant) αντί για το συνηθισμένο «συνέπεια».

Ακόμη όμως και οι ίδιοι οι Hintikka & Remes που προτείνουν αυτή την ερμηνεία του όρου «ακόλουθον», η οποία πράγματι τους λύνει πολλά προβλήματα, αναρωτιούνται αν αυτή η ερμηνεία είναι συμβατή με την ανάλυση και ως «προς τα κάτω» πορεία. Την «προς τα κάτω» πορεία που επιμένει να εμφανίζεται, όπως οι ίδιοι αναγνωρίζουν (σσ. 17-18), τόσο στην τρίτη περιγραφή του Πάππου που αφορά τη θεωρη(μα)τική και προβληματική ανάλυση όσο και στην πρακτική της ανάλυσης. Έτσι αναγκάζονται να παραδεχθούν: «… η ερμηνεία μας για την ανάλυση στον Πάππο ως μια κίνηση προς τα πάνω, αν και υποστηρίζεται ισχυρά από μια προσεκτική ανάγνωση των στοιχείων, απλά δεν μπορεί να είναι όλη η ιστορία.» (σ. 17) Παρακάτω μετακινούμενοι ακόμη περισσότερο προς την κατεύθυνση της «προς τα κά-

---

[5] Βλέπε Cornford (1932), και Hintikka & Remes (1974).

τω» πορείας, μετά από μια επεξεργασία της μεθόδου με όρους λογικής, θα φτάσουν να αναγνωρίσουν: «Η ιδέα ότι η ανάλυση μπορεί μετά από όλα αυτά να προχωρά-διεξάγεται προς τα κάτω θα πρέπει κατά συνέπεια να στηριχθεί.» (σ. 36)

Τοποθετούμενοι στο ζήτημα της κατεύθυνσης οι Berggren & Van Brummelen (2000, 9) υποστηρίζουν μία θέση που συμφωνεί με αυτή των Hintikka & Remes. Συγκεκριμένα αναφέρουν:

> Μια λογική λύση στο δίλημμα, είναι, να σημειώσουμε ότι ο Knorr κάνει πολύ σωστά μεταφράζοντας τη φράση «αναζητώντας διαμέσου των συνεπειών», αντί του πιο συνηθισμένου «αναζητώντας διαμέσου των συνεπειών του», από τη στιγμή που η λέξη «του» δεν εμφανίζεται στα Ελληνικά. Ως εκ τούτου, ο Πάππος δεν λέει προς ποια κατεύθυνση πάνε οι συνέπειες που αναζητούμε. Πιστεύουμε ότι ο Πάππος απλά έγραφε ακαθόριστα για αναζήτηση μιας σειράς λογικών συνεπειών που –όπως ενισχύει τη σκέψη του στην επόμενη πρόταση– θα *καταλήξουν* σε αυτό που κάποιος προσπαθεί να βρει.
>
> Θα πρέπει κανείς, από τα στοιχεία, να αποδεχθεί το γεγονός ότι και η αναγωγή (έρευνα για προκείμενες) και ο παραγωγικός συμπερασμός (έρευνα για συνέπειες), θεωρούνταν από τους αρχαίους συγγραφείς ως δραστηριότητες που περιλαμβάνονται κάτω από τον τίτλο της «ανάλυσης».

Στην ίδια κατεύθυνση ο Καρασμάνης (1993, 186) αναφέρει για το «ακόλουθον»:

> Η λέξη «ακόλουθον» δείχνει ακριβώς αυτό που λέει. Το ακόλουθο ακολουθεί κάτι άλλο. Μπορεί να είναι λογική συνέπεια μπορεί όμως και όχι.

Το σημαντικό για εμάς στις παραπάνω θέσεις, οι οποίες είναι πλέον σε γενικές γραμμές αποδεκτές από το σύνολο των σύγχρονων ερευνητών, είναι ότι όλοι αναγνωρίζουν ότι τόσο κάτω από τις θεωρητικές περιγραφές του όρου ανάλυση όσο και πίσω από την πρακτική της ανάλυσης των Ελλήνων, υπάρχουν στοιχεία που δείχνουν και «προς τα πάνω» πορεία αλλά και «προς τα κάτω» πορεία[6]. Με άλλα λόγια αποδέχονται ότι υπάρχουν και οι δύο κατευθύνσεις μέσα στο αναλυτικό μέρος της

[6] Μια ακόμη ενδιαφέρουσα θέση που υποστηρίζει ότι το «δια ων ακολούθων» έχει και «deductive» σημασία, διατυπώνεται από την Ιεροδιακόνου (1990, 184), όταν αναφέρει ότι η φράση χρησιμοποιείται και στον ορισμό της σύνθεσης του ανωνύμου σχολιαστή του XIII βιβλίου του Ευκλείδη, που είναι σίγουρα «deductive process».

γεωμετρικής ανάλυσης (πριν τη σύνθεση), χωρίς όμως να μπορούν να ερμηνεύσουν με ποιόν ακριβώς τρόπο και γιατί. Αυτό ακριβώς επιχειρούμε με τη δική μας ερμηνεία για την ανάλυση, δείχνοντας ότι μέσα στην ανάλυση υπάρχει αφενός μια πορεία «προς τα πάνω» και είναι συγκεκριμένη, είναι αυτό που ονομάσαμε υποθετικό μέρος, και αφ' ετέρου μία πορεία «προς τα κάτω» επίσης συγκεκριμένη, που είναι το βεβαιωτικό μέρος. Το πρώτο λειτουργεί ως αναζήτηση προκειμένων (reduction) ενώ το δεύτερο λειτουργεί ως σειρά παραγωγικών συμπερασμών (deduction). Η πρώτη περιγραφή του Πάππου με τον όρο «ακόλουθον» και τη χαλαρή σημασία με την οποία αυτός ο όρος εισάγει ως προς την κατεύθυνση, δεν μπορεί να αντικρούει τις επόμενες περιγραφές που θα δούμε στη συνέχεια.

6.2.2. Δεύτερη περιγραφή του Πάππου για τη γεωμετρική ανάλυση

Στη δεύτερη περιγραφή του για τη γεωμετρική ανάλυση ο Πάππος (634, 13-17), αναφέρει (η μετάφραση είναι δική μας):

> Δηλαδή, στη μεν ανάλυση υποθέτοντας το ζητούμενο ως γεγονός, ερευνούμε αυτό από το οποίο αυτό [το ζητούμενο] προκύπτει και πάλι το προηγούμενο εκείνου, μέχρις ότου, κατ' αυτόν τον τρόπο αναστρέφοντας τα βήματά μας, φτάσουμε σε κάτι από αυτά που ήδη γνωρίζουμε ή που ανήκει στην τάξη των αρχών· και καλούμε αυτού του είδους τη μέθοδο ανάλυση, όπως λύση προς τα πίσω. [7]

Η δεύτερη περιγραφή είναι επεξηγηματική της πρώτης συνοπτικής περιγραφής της ανάλυσης. Σε αυτήν ο Πάππος αναφέρει ότι υποθέτοντας ότι ισχύει το ζητούμενο, ερευνούμε από ποιες προκείμενες προκύπτει αυτό, κάτι που επαναλαμβάνουμε μέχρι να φτάσουμε σε κάποιο από αυτά που ήδη γνωρίζουμε.

Είναι σαφές ότι η δεύτερη περιγραφή του Πάππου σηματοδοτεί πορεία «προς τα πάνω» όπως παραδέχονται άλλωστε οι περισσότεροι ερευνητές. Μια πορεία η οποία μόνο μετά από μια επιτυχημένη προσπάθεια ανάλυσης, της οποίας πιθανότατα έχουν προηγηθεί άλλες αποτυχημένες, καταγράφεται σε αυτό που στην ερμηνεία μας ονομάσαμε υποθετικό μέρος της ανάλυσης. Θεωρούμε ταυτόχρονα ότι η φράση «τὸ ἐξ

---

[7] Πάππου *Συναγωγή*, Hultsch 634.13-17: «ἐν μὲν γὰρ τῇ ἀναλύσει τὸ ζητούμενον ὡς γεγονὸς ὑποθέμενοι τὸ ἐξ οὗ τοῦτο συμβαίνει σκοπούμεθα καὶ πάλιν ἐκείνου τὸ προηγούμενον, ἕως ἂν οὕτως ἀναποδίζοντες καταντήσωμεν εἴς τι τῶν ἤδη γνωριζομένων ἢ τάξιν ἀρχῆς ἐχόντων· καὶ τὴν τοιαύτην ἔφοδον ἀνάλυσιν καλοῦμεν, οἷον ἀνάπαλιν λύσιν.»

οὗ τοῦτο συμβαίνει σκοπούμεθα», που σημαίνει την έρευνα για το από ποια προκείμενη «τοῦτο» προκύπτει, σημαίνει αναπόφευκτα και την εξέταση για την εξαγωγή συμπερασμάτων για το αν πραγματικά η προκείμενη μας μπορεί να το παράγει «τοῦτο» κάτι που δείχνει αναπόφευκτα και πορεία «προς τα κάτω». Η άποψη του Cornford είναι σαφές ότι υπονοεί κάτι τέτοιο. Αλλά και οι Hintikka & Remes (1974, 17) συμφωνώντας με αυτή την άποψη και με αφορμή τη δεύτερη περιγραφή του Πάππου αναφέρουν:

> Αλλά αν μπορούσαμε να πάρουμε το γενικό χαρακτηρισμό της ανάλυσης του Πάππου κυριολεκτικά (όπως το μεταφράσαμε), δεν θα υπήρχε η ανάγκη της σύνθεσης για να τη συμπληρώσει. Γιατί μόλις έχουμε βρει μια προκείμενη από την οποία προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα, και έχουμε συνδέσει αυτό το αποτέλεσμα διαμέσου μιας ακολουθίας από τέτοιες προκείμενες με αξιώματα και προηγούμενα θεωρήματα, τότε δεν απαιτείται περαιτέρω δικαιολόγηση και δεν απομένει τίποτα περισσότερο για να γίνει. Ως εκ τούτου η ερμηνεία μας για την ανάλυση του Πάππου ως μια προς τα πάνω κίνηση, αν και υποστηρίζεται ισχυρά από μια προσεκτική ανάγνωση των στοιχείων, απλά δεν μπορεί να είναι όλη η ιστορία.

Σε ανάλογη κατεύθυνση ο Καρασμάνης (1993, 185) αναφέρει:

> …ο σκοπός μας κατά την ανάλυση είναι να επιβεβαιωθεί κάτι. Η ερώτηση λοιπόν «πως μπορώ να το επιβεβαιώσω;» πάει μαζί με την ερώτηση «τι συνεπαγωγές μπορώ να φέρω;». Άρα στην ανάλυση συνυπάρχουν αλληλένδετα δύο διαφορετικές πράξεις: 1) εξαγωγή συμπερασμάτων (ή συνεπαγωγών) και 2) έρευνα για προκείμενες.

Πράγματι ο όρος «σκοπέω», που σημαίνει ερευνώ–εξετάζω, έχει ως ένα συστατικό του το «βεβαιώνω». Κάθε ερευνητική προσπάθεια για την προκείμενη από την οποία προκύπτει κάτι ως αποτέλεσμα, εμπεριέχει και την προσπάθεια του ερευνητή για την εξαγωγή του αποτελέσματος από αυτή την προκείμενη. Διαφορετικά η ερευνητική προσπάθεια είναι μισή. Το «βεβαιώνω» δεν έχει βέβαια ακόμη στη φάση της έρευνας την έννοια της δικαιολόγησης προς τους άλλους, αλλά της δικαιολόγησης του ερευνητή προς τον εαυτό του ότι ο συλλογισμός του διαθέτει λογική εγκυρότητα. Το λεξικό Σταματάκου επίσης, στο λήμμα «σκοπέω», δίνει ως ερμηνεία τους όρους: «ερευνώ, εξετάζω, εξακριβώνω, βεβαιώνω». Εξάλλου το «συμβαίνει» στην ορολογία του Πάππου φανερώνει, όπως διαπιστώνουν διάφοροι ερευνητές[8], παραγωγικό συμπερασμό από την προκείμενη στο συμπέρασμα, δηλαδή «προς τα κάτω» πορεία. Πράγμα που επιβεβαιώνει ότι η έρευνα, του από ποια προκείμενη προκύπτει κάτι, έχει ως αναπόσπαστο κομμάτι της τον έλεγχο από τον ερευνητή, κατά πόσο παράγεται πράγματι αυτό το κάτι από αυτή την προκείμενη.

Η διαδικασία της ανάλυσης δηλαδή, φαίνεται και από αυτή την δεύτερη περιγραφή του Πάππου, όπως αναγνωρίζουν και άλλοι ερευνητές[9], ότι περιλαμβάνει δύο κινήσεις: αναζήτηση προκειμένων αλλά και εξέταση διαμέσου συνεπειών· που σημαίνει κινήσεις «προς τα πάνω» που έχουν υποθετικό χαρακτήρα αλλά και κινήσεις «προς τα κάτω», οι οποίες έχουν βεβαιωτικό-παραγωγικό χαρακτήρα. Οι τελευταίες θα αποτελέσουν ενδεχομένως μετά από μια επιτυχημένη ανάλυση κομμάτια του βεβαιωτικού μέρους της ανάλυσης, που αφορά τα «δοθέντα» και τα «δεδομένα». Με αυτήν την έννοια λοιπόν το δεύτερο κομμάτι των λεγομένων του Πάππου, αποτελεί μια πιο εξειδικευμένη περιγραφή του τρόπου που λειτουργεί στην πράξη η ανάλυση χωρίς πάλι να μπορεί να πει κανείς ότι είναι ένας ορισμός της μεθόδου.

Πριν προχωρήσουμε στην τρίτη περιγραφή της γεωμετρικής ανάλυσης από τον Πάππο, επειδή ο τρόπος που αντιλαμβανόμαστε τη δεύτερη περιγραφή του μας θυμίζει τη μέθοδο της «απαγωγής» των Ελληνικών μαθηματικών, θα κάνουμε μια παρένθεση προκειμένου να αναφερθούμε σε αυτήν τη μέθοδο, που αρκετοί υποστηρίζουν ότι υπήρξε πρόγονος της γεωμετρικής ανάλυσης. Στα πλαίσια της προσπάθειας κατανόησης της ανάλυσης, πέρα από την έρευνα για την απόδοση της πατρότητας της μεθόδου, που προαναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, υπήρξε και η προσπάθεια για την ανεύρεση «προγόνων» της μεθόδου. Αρκετοί ιστορικοί των μαθηματικών θεωρούν ότι η πρώιμη μορφή της γεωμετρικής ανάλυσης ήταν η «απαγωγή».[10] Η «απαγωγή» ως μέθοδος χρησιμοποιήθηκε συστηματικά από τον Ιπποκράτη τον Χίο ($5^{ο}$ αι.). Με την άποψη αυτή συμφωνεί και ο Καρασμάνης (1987, 44-52), που προχωράει στη σύγκριση και στην ανάδειξη της διαφοράς ανάμεσα στις δύο μεθόδους. Συγκεκριμένα θεωρεί (Καρασμάνης 1987, 49) ότι η βασική διαφορά της «απα-

8 Hintikka & Remes (1974, 14) και Καρασμάνης (1993, 185-186) ο οποίος χαρακτηριστικά αναφέρει: «Επιπλέον ο σκοπός μας κατά την ανάλυση είναι να επιβεβαιωθεί κάτι. Η ερώτηση λοιπόν ‘πως μπορώ να το επιβεβαιώσω;’ πάει μαζί με την ερώτηση ‘τι συνεπαγωγές μπορώ να φέρω;’»

9 Hintikka & Remes (1974, 14-16) και Berggren & Van Brummelen (2000, 8-10).

10 Heath (1921), “Greek Mathematics”, vol. I, 291, Hintikka & Remes (1974), 85, Knorr (1986), 23.

γωγής» από τη μέθοδο της ανάλυσης και σύνθεσης είναι ό,τι ενώ στη δεύτερη οι δύο πορείες («προς τα πάνω» – αναγωγή και «προς τα κάτω» – παραγωγή αντίστοιχα) διαχωρίζονται, αντίθετα στην «απαγωγή» δεν διαχωρίζονται αλλά εμπλέκονται σε κάθε βήμα. Δηλαδή στην «απαγωγή», την κάθε «προς τα πάνω» (ή προς τα πίσω) κίνηση (αναγωγή) ακολουθεί μια «προς τα κάτω» κίνηση (παραγωγικού συμπερασμού), πριν ακολουθήσει η επόμενη «προς τα πάνω» κίνηση. Καταλήγει επίσης μετά από εμπεριστατωμένη έρευνα[11] στο συμπέρασμα, ότι η υποθετική μέθοδος την οποία χρησιμοποιεί ο Πλάτων στους διαλόγους του *Μένων* και *Φαίδων*, είναι ή «απαγωγή», μια μέθοδος η οποία ήταν ήδη γνωστή στους μαθηματικούς[12], ενώ αντίθετα η διαλεκτική μέθοδος του Πλάτωνα στην *Πολιτεία* ακολουθεί το πρότυπο της γεωμετρικής ανάλυσης και της σύνθεσης, δηλαδή εδώ οι πορείες- κινήσεις «προς τα πάνω» και «προς τα κάτω» διαχωρίζονται συνολικά και δε συμβαίνουν σε κάθε βήμα της μεθόδου και οι δύο.[13]

Οι θέσεις του Καρασμάνη (1987), είναι αρκετά σημαντικές, και συνταχθήκαμε με αυτές αρκετές φορές μέχρι τώρα στην έρευνά μας για την ερμηνεία της γεωμετρικής ανάλυσης. Δε θα συμφωνήσουμε όμως μαζί του στο ότι η «προς τα κάτω» πορεία της διαλεκτικής στην *Πολιτεία* του Πλάτωνα, που αφορά τη μαθηματική έρευνα, αντιστοιχεί στη σύνθεση της γεωμετρικής ανάλυσης. Εμείς θεωρούμε σύμφωνα με την ερμηνεία μας για τη γεωμετρική ανάλυση, ότι αυτή η «προς τα κάτω» πορεία βρίσκεται μέσα στο στάδιο της ανάλυσης και όχι στη σύνθεση και είναι συγκεκριμένα το βεβαιωτικό μέρος της.

6.2.3. Τρίτη περιγραφή του Πάππου για τη γεωμετρική ανάλυση

Η τρίτη περιγραφή του Πάππου για τη γεωμετρική ανάλυση αναφέρεται στα δύο είδη ανάλυσης που κατά την άποψή του υπάρχουν: τη θεωρη(μα)τική και την προβληματική. Θεωρούμε ότι η γεωμετρική ανάλυση της κλασσικής εποχής αφορούσε αποκλειστικά τα προβλήματα. Αυτοί που εισήγαγαν και υποστήριξαν την έννοια της «θεωρητικής ανάλυσης» ήταν ιστορικοί, σχολιαστές και μαθηματικοί της ύστερης αρχαιότητας, όπως ο Γεμίνος, ο Ήρωνας και ο Πάππος και το έκαναν για φιλοσοφι-

[11] Καρασμάνης (1987), Κεφάλαια 3, 5 και 6 αντίστοιχα της διδακτορικής του διατριβής.
[12] Καρασμάνης (1987, 93, 155).
[13] Καρασμάνης (1987, 265-266, 307).

κούς και άλλους λόγους κοινωνικού και πολιτισμικού πλαισίου. Τη θέση αυτή θα την αναπτύξουμε στο επόμενο κεφάλαιο αφού θα έχουμε μελετήσει τις αναλύσεις που εμφανίζονται στον Μέναιχνο, τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο, οι οποίες επίσης αφορούν μόνο προβλήματα. Ως εκ τούτου δεν θα ασχοληθούμε με την περιγραφή του Πάππου που αφορά την θεωρητική ανάλυση, γιατί πιστεύουμε ότι δεν συμβάλλει με οποιοδήποτε τρόπο στην κατανόηση της λειτουργίας της γεωμετρικής ανάλυσης, αντίθετα μπορεί να προκαλέσει σύγχυση.

Η τρίτη περιγραφή της γεωμετρικής ανάλυσης, που αφορά σύμφωνα με τον Πάππο ειδικότερα την προβληματική ανάλυση (636, 7-14), αναφέρει: (η μετάφραση είναι δική μας):

> Στο προβληματικό είδος δε [της ανάλυσης] υποθέτοντας αυτό που προτάθηκε ως γνωστό, έπειτα προχωράμε διαμέσου των κατά σειρά ακολούθων, ως να ήταν αληθή, μέχρι να φτάσουμε σε κάτι που γίνεται δεκτό. Εάν μεν αυτό που γίνεται δεκτό μπορεί κάποιος να προσδοκά ότι είναι δυνατό [δεν είναι αδύνατο] και ταυτόχρονα είναι ενδεχόμενο να ποριστεί, δηλαδή αυτό που οι μαθηματικοί ονομάζουν δοθέν, θα είναι δυνατό και αυτό που προτάθηκε, και θα είναι πάλι η απόδειξη αντίστροφη της ανάλυσης· εάν όμως πετύχουμε κάτι που είναι δεκτό ότι είναι αδύνατο, θα είναι και το πρόβλημα αδύνατο.[14]

Με άλλα λόγια η τρίτη περιγραφή του Πάππου, αναφέρει ότι στην ανάλυση προβλημάτων, υποθέτοντας ότι ισχύει το ζητούμενο προχωράμε διαμέσου αυτών που πάνε μαζί του στη σειρά (χωρίς να διακρίνει αν πρόκειται για προκείμενες ή συνέπειες) σαν να είναι αληθή, μέχρι να φτάσουμε σε κάτι που γίνεται δεκτό («ομολογούμενον», με βάση τα όσα υποθετικά προηγήθηκαν). Στη συνέχεια εάν μεν (κατά τον έλεγχο στο βεβαιωτικό μέρος) αυτό που έγινε δεκτό μπορεί να προσδοκά κάποιος ότι είναι «δυνατόν» και «ποριστόν» (με την έννοια ότι μέσα από έναν λογικά έγκυρο συλλογισμό, που χρησιμοποιεί ό,τι δίνεται στην εκφώνηση του προβλήματος και τις γνωστές προτάσεις, καταλήγει να χαρακτηριστεί έτσι), δηλαδή αυτό που οι μαθηματικοί ονομάζουν «δοθέν», τότε (από τη συνέχεια του έγκυρου συλλογισμού)

---

[14] Πάππου *Συναγωγή*, Hultsch 636, 7-14: «ἐπὶ δὲ τοῦ προβληματικοῦ γένους τὸ προταθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον, ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατὸν ᾖ καὶ ποριστόν, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθέν, δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ προταθέν, καὶ πάλιν ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει, ἐὰν δὲ ἀδυνάτῳ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ἀδύνατον ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα.»

θα είναι «δυνατόν» (υποθετικά αναγκαίο) και αυτό που προτάθηκε ως ζητούμενο και η απόδειξη θα είναι αντίστροφη της ανάλυσης (που έγινε προηγουμένως στο υποθετικό μέρος)[15]. Εάν όμως, αυτό που έγινε δεκτό (δηλαδή το «προταθέν» του προβλήματος) πετύχουμε (μέσα από έγκυρο συλλογισμό στο βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης) να είναι αδύνατο, θα είναι και το πρόβλημα αδύνατο (γιατί αυτό που προτάθηκε από το πρόβλημα ως ζητούμενο θα είναι αδύνατο).

Θεωρούμε ότι αυτή η τρίτη περιγραφή της γεωμετρικής ανάλυσης του Πάππου είναι πιο πλήρης και ενισχύει περισσότερο από τις προηγούμενες την ερμηνεία μας. Σε αυτή την περιγραφή της προβληματικής ανάλυσης περιλαμβάνονται και τα δύο μέρη της ανάλυσης, το υποθετικό και το βεβαιωτικό. Το υποθετικό μέρος ξεκινά με το να υποθέσουμε ότι ισχύει το ζητούμενο και διαμέσου αυτών που πάνε μαζί του καταλήγει σε κάτι που γίνεται δεκτό («ομολογούμενον»). Είναι αυτό που υποστηρίξαμε στην ερμηνεία μας ότι φανερώνει πορεία «προς τα πάνω». Το βεβαιωτικό μέρος που ακολουθεί στην περιγραφή του Πάππου, διατυπώνεται με τη μορφή δύο υποθετικών λόγων. Οι δύο αυτοί υποθετικοί λόγοι θεωρούμε ότι φανερώνουν πορεία «προς τα κάτω».

Το ότι ο δεύτερος υποθετικός λόγος φανερώνει πορεία «προς τα κάτω» (deduction), δεν το υποστηρίζουμε μόνο εμείς ή όσοι ακολουθούν την «κλασική» ερμηνεία της ανάλυσης όπως είναι οι Heath (1926, τόμ. I, 140), Robinson (1936, 465), οι οποίοι βλέπουν την απαγωγή σε άτοπο ως μια ειδική μορφή ανάλυσης. Το αντιλαμβάνεται και ο Gulley (1958, 13), αλλά το σημαντικό είναι ότι το αναγνωρίζουν και οι υποστηρικτές της ανάλυσης ως «προς τα πάνω» πορείας οι Hintikka & Remes. Είναι αυτή ακριβώς η τρίτη περιγραφή της γεωμετρικής ανάλυσης η οποία δημιουργεί πρόβλημα στην ερμηνεία των Hintikka & Remes (1974, 17), οι οποίοι αναγκάζονται να αναγνωρίσουν ότι για να έχει νόημα ο δεύτερος υποθετικός λόγος («αδύνατον ομολογούμενον» – «αδύνατον πρόβλημα») θα πρέπει: είτε η ανάλυση να είναι πορεία «προς τα κάτω», κάτι που προηγουμένως οι ίδιοι έχουν απορρίψει, είτε να προϋποτίθεται η αντιστρεψιμότητα της ανάλυσης (δηλαδή αν και η ανάλυση είναι πορεία «προς τα πάνω» υποθέτοντας ότι αντιστρέφεται ισχύει εκ των προτέρων και η

---

[15] Με σύγχρονους όρους θα λέγαμε ότι ελέγχει αν αυτά που υπέθεσε στο υποθετικό μέρος μπορούν να βεβαιωθούν. Θα μπορούσαμε, με άλλα λόγια, να πούμε ότι ελέγχει αν μπορούν, με κάποια έννοια, να αντιστραφούν με δυνητική αναγκαιότητα. Αν βεβαιωθεί ότι μπορούν, τότε η ανάλυση έχει τελειώσει και η απόδειξη θα είναι, το αντίστροφο με κάποια έννοια, του υποθετικού μέρους της ανάλυσης.

«προς τα κάτω» πορεία). Τελικά, και προκειμένου να ξεπεράσουν αυτό το πρόβλημα της ερμηνείας τους, επειδή δεν μπορούν να αρνηθούν ότι η διατύπωση του Πάππου είναι αυτή, το αποδίδουν στην ατελή όπως αναφέρουν[16] (Hintikka & Remes (1974, 17, 77-79, 82) θεωρητική παρουσίαση από τον Πάππο, της πολύ περισσότερο πολύπλοκης δομής της ανάλυσης, όπως αυτή εμφανίζεται στη μαθηματική πρακτική. Συμπερασματικά παρατηρούμε ότι σε ακόμη ένα σημείο, που μία από τις πιο έγκυρες μέχρι σήμερα ερμηνείες της γεωμετρικής ανάλυσης –αν όχι η πιο έγκυρη– αυτή των Hintikka & Remes αντιμετωπίζει σημαντικό πρόβλημα, η ερμηνεία μας για την ανάλυση όχι μόνο δεν αντιμετωπίζει πρόβλημα αλλά αντίθετα επιβεβαιώνεται με την έννοια ότι περιλαμβάνει και αναδεικνύει την «προς τα κάτω πορεία» μέσα στην ανάλυση.

Επίσης, υπό το πρίσμα της ερμηνεία μας θεωρούμε -όπως άλλωστε θεωρούν και οι υποστηρικτές της «κλασικής» ερμηνείας της ανάλυσης και ο Gulley (1958, 1) –ότι όπως ο δεύτερος έτσι και ο πρώτος υποθετικός λόγος («δυνατόν και ποριστόν ομολογούμενον»– «δυνατόν προταθέν») σημαίνει πορεία «προς τα κάτω». Συγκεκριμένα η έκφραση: «Εάν μεν αυτό που γίνεται δεκτό μπορεί κάποιος να προσδοκά ότι είναι δυνατό και ταυτόχρονα είναι ενδεχόμενο να ποριστεί, δηλαδή αυτό που οι μαθηματικοί ονομάζουν δοθέν, θα είναι δυνατό και αυτό που προτάθηκε», σημαίνει τη διαδικασία του συλλογισμού μέσα από την οποία θα φτάσει καταρχήν να χαρακτηριστεί «δοθέν» το «ομολογούμενον» και η οποία στη συνέχεια έχει ως συνέπεια τη δυνητική αναγκαιότητα του «προταθέντος». Με άλλα λόγια, σημαίνει το βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης, σύμφωνα με την ερμηνεία μας, όπως θα το παρουσιάσουμε στη συνέχεια να λειτουργεί και μέσα από το παράδειγμα της πρακτικής του Πάππου στην ανάλυση. Εκεί θα δούμε συγκεκριμένα ότι το πρώτο βήμα του βεβαιωτικού μέρους, θα είναι η παραγωγή του συμπεράσματος ότι το «ομολογούμενον» με τη βοήθεια μόνο όσων δίδονται από την εκφώνηση και των γνωστών προτάσεων είναι «δοθέν», ενώ ο τελικός στόχος θα είναι η «δυνατότητα» του «προταθέντος».

Από τη συζήτηση που προηγήθηκε, προκύπτει ότι οι τρεις θεωρητικές περιγραφές του Πάππου που αφορούν τη γεωμετρική ανάλυση, μπορούν να αληθεύουν

---

[16] «Έχει ήδη γίνει κατανοητό ότι η γενική συζήτηση του Πάππου…είναι μόνο μια ατελής αναπαράσταση της πολύ περισσότερο πολύπλοκης δομής των πραγματικών αναλύσεων, όπως απαντώνται στη μαθηματική πρακτική. Υπό το φως αυτής της περισσότερο πολύπλοκης δομής, η δήλωση του Πάππου που αφορά την ανεπιτυχή ανάλυση γίνεται απόλυτα κατανοητή.»

χωρίς η μια να αντικρούει την άλλη. Δε θα λέγαμε επίσης ότι μπορούν από κοινού να συγκροτήσουν ένα πλήρη και αυστηρό ορισμό της μεθόδου, όπως δεν το αναφέρει και ο ίδιος ο Πάππος, αλλά τρεις συμπληρωματικές περιγραφές της. Η πρώτη, είναι αρκετά γενική και αναδεικνύει το πρωτοποριακό χαρακτηριστικό της μεθόδου που είναι η λήψη του ζητουμένου. Η δεύτερη, είναι επεξηγηματική της πρώτης και σε ότι αφορά το αναλυτικό μέρος της μεθόδου αναδεικνύει την «προς τα πάνω» πορεία, το κατεξοχήν ευρετικό τμήμα της μεθόδου αλλά αναφέρεται έστω και έμμεσα στην «προς τα κάτω» πορεία. Τέλος η τρίτη περιγραφή που είναι πιο πλήρης, σκιαγραφεί τα βήματα της ανάλυσης αποκαλύπτοντας ότι περιλαμβάνει πορεία και «προς τα πάνω» και «προς τα κάτω», ενώ περιγράφει και την απαγωγή σε άτοπο ως μια περίπτωση ανάλυσης.

Όλο το απόσπασμα της εισαγωγής του 7^ου^ βιβλίου της *Συναγωγής* του Πάππου, στο οποίο περιλαμβάνονται αυτές οι τρεις περιγραφές της ανάλυσης, ανήκει σε αυτό που η Cuomo (2000, 170) χαρακτηρίζει «μεταμαθηματικές ή δεύτερης τάξης διατυπώσεις» στις οποίες «ο Πάππος μιλάει για τα μαθηματικά αντί να *κάνει* μαθηματικά». Αυτό το κάνει όπως αναφέρει χαρακτηριστικά η Cuomo (2000, 90):

> στοχεύοντας αρκετούς στόχους από τον *έξω κόσμο*: πιθανούς ή πραγματικούς μαθητές, πιθανούς ή πραγματικούς ανταγωνιστές, πιθανά τρίτα μέρη που θα μπορούσαν να βεβαιώσουν και να υποστηρίξουν την αυθεντία του και να συγκροτήσουν τη βάση για ένα ευρέως διαδεδομένο καλό όνομα.

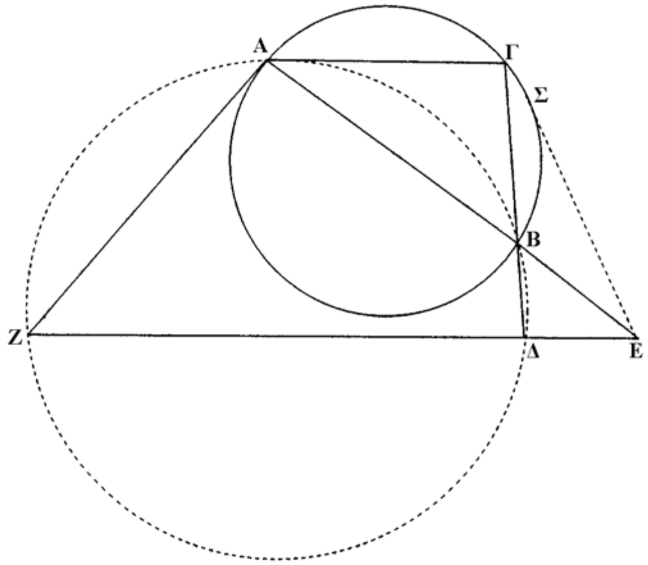
Ο Πάππος δεν είναι ένας φιλόσοφος, όπως ο Μαρίνος για παράδειγμα που προσπαθεί να αποδώσει ορισμούς με ακρίβεια και να κάνει λεπτές εννοιολογικές διακρίσεις, αλλά ένας μαθηματικός της πράξης, ένας παραγωγικός μαθηματικός. Ίσως ήταν περισσότερο η δική μας σύγχρονη ανάγκη, για έναν πλήρη ορισμό ή ο σύγχρονος τρόπος που αντιλαμβανόμαστε τις έννοιες, μεταξύ αυτών και την ανάλυση, ως υπόσταση- περιεχόμενο και όχι ως λειτουργίες, που μας έκανε να διακρίνουμε αντιφάσεις, παραφθορές ή ανακολουθίες λεγομένων και πράξεων στον Πάππο. Δεν θεωρούμε άλλωστε ότι θα μπορούσε να υπάρξει ένας πλήρης και ακριβής ορισμός μιας μεθόδου που είναι τόσο δημιουργική στην ουσία της και καθόλου μηχανική. Στην καλύτερη περίπτωση θα μπορούσε να υπάρξει μια περιγραφή της πορείας που ο γεωμέτρης- ερευνητής ακολουθεί για να «εύρει» τις απαντήσεις στα ερωτήματά του και να τις τεκμηριώσει λογικά πρώτα στον εαυτό του (λόγον ἑαυτῷ διδόναι) και στη συνέχεια να τις διδάξει στους άλλους. Τα βασικά χαρακτηριστικά της πορείας αυτής περιγράφονται ικανοποιητικά κατά την άποψή μας από τα λεγόμενα του Πάππου. Ο ίδιος ο Πάππος δεν έχει ανάγκη από έναν πλήρη και αυστηρό ορισμό της ανάλυσης γιατί απλά την πραγματεύεται, τη λειτουργεί και τη χρησιμοποιεί στην πράξη. Αναδεικνύει απλά με τα λεγόμενά του α) το κύριο χαρακτηριστικό της μεθόδου που είναι η λήψη του ζητουμένου και β) το πραγματικά σημαντικό και δημιουργικό μέρος της, το δυσκολότερο κομμάτι, (το ευρετικό), στο οποίο ο γεωμέτρης -ερευνητής αναζητά προκείμενες κάνει υποθέσεις αλλά προβαίνει και σε παραγωγικούς συμπερασμούς οι οποίοι βεβαιώνουν τις προηγούμενες. Μια διαδικασία που εκμεταλλεύεται τη δομή του προβλήματος που ερευνάται αλλά απαιτεί το συνδυασμό της διανοητικής ικανότητας του γεωμέτρη, της γνώσης και της εμπειρίας του. Ένα συνδυασμό που ο Πάππος γνωρίζει ότι δεν παράγει με μηχανικό τρόπο σίγουρα αποτελέσματα, δεν ακολουθεί συγκεκριμένη πορεία, ούτε μπορεί να κλειστεί σε συνταγές και αυστηρούς ορισμούς.

Στην επόμενη ενότητα θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα ανάλυσης από τον Πάππο προκειμένου να αποδείξουμε την έλλειψη αντίφασης ανάμεσα στη θεωρητική προσέγγιση και την πρακτική του αλλά και να παρουσιάσουμε για πρώτη φορά πώς πραγματικά λειτουργεί η προβληματική γεωμετρική ανάλυση και ποια η αναγκαιότητα του δευτέρου μέρους της, του βεβαιωτικού όπως το ονομάσαμε, το οποίο χρησιμοποιεί την ορολογία «δοθέντων» – «δεδομένων». Στο 7^{ο} βιβλίο της *Συναγωγής* του Πάππου, στο οποίο περιλαμβάνονται 240 περίπου προτάσεις, υπάρχουν 16 προβλήματα – κατασκευές από τα οποία τα 13 αντιμετωπίζονται με τη μέθοδο της ανάλυσης. Αυτά είναι τα: 72, 85, 87, 105, 107-109, 117, 155, 164, 176, 204 και 218 σύμφωνα με την έκδοση του Jones (1986). Το συγκεκριμένο παράδειγμα προβληματικής ανάλυσης που θα αναλύσουμε παρακάτω είναι το VII 105, έχει χρησιμοποιηθεί συχνά από τους νεότερους μελετητές της γεωμετρικής ανάλυσης των αρχαίων, και θεωρείται ένα από τα χαρακτηριστικότερα δείγματά της.[17]

[17] Βλ. λ.χ. Hankel (1874, 141), Heath (1926, τομ.I, 140-141), Hintikka & Remes (1976, 256), Ito (1980, 10) και Jones (1986, 237).

6.3. *Παράδειγμα γεωμετρικής ανάλυσης από τον Πάππο (VII 105)* [18]

Θέσει δοθέντος κύκλου, του ΑΒΓ και δύο δοθέντων [σημείων] των Δ, Ε, αν καμφθεί η ΔΒΕ [στα ευθύγραμμα τμήματα ΔΒ και ΕΒ που τέμνουν τον κύκλο στο Β] και προεκταθεί [μέχρι δηλαδή να τμήσουν οι προεκτάσεις πάλι τον κύκλο στα Γ και Α αντίστοιχα] να κάνει την ΑΓ παράλληλη στη ΔΕ.



[18] Πάππος, *Συναγωγή* (7.830.4 – 7.832.20): Θέσει δοθέντος κύκλου τοῦ ΑΒΓ, καὶ δύο δοθέντων τῶν Δ Ε, ἀπὸ τῶν Δ Ε ἂν κλασθῇ ἡ ΔΒΕ καὶ ἐκ βληθῇ, ποιεῖν παράλληλον τὴν ΑΓ τῇ ΔΕ. Γεγονέτω· καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΖΑ. ἐπεὶ οὖν παράλληλος ἡ ΑΓ τῇ ΔΕ, ἴση ἐστὶν ἡ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ Γ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΖΑΕ (ἐφάπτεται γὰρ καὶ τέμνει)· καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΕ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΓΔΕ· ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶν τὰ Α Β Δ Ζ σημεῖα· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΕΒ τῷ ὑπὸ ΖΕΔ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ ΑΕΒ (ἴσον γάρ ἐστιν τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης)· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΖ. καὶ δοθεῖσα ἡ ΔΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΖ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει. καὶ ἔστιν δοθὲν τὸ Ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ. ἀπὸ δὴ δεδομένου σημείου τοῦ Ζ θέσει δεδομένου κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἦκται ἡ ΖΑ· δέδοται ἄρα καὶ ἡ ΖΑ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστιν δοθὲν τὸ Ζ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Ε δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ. θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος· δοθὲν ἄρα τὸ Β σημεῖον. ἔστιν δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν Δ Ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΒ ΒΕ τῇ θέσει. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ὁ μὲν κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὰ δὲ δοθέντα δύο σημεῖα τὰ Δ Ε. κείσθω τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἴσον τὸ ὑπὸ τῆς ΔΕ καὶ ἄλλης τινὸς τῆς ΕΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΖΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΒ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΔΕ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΖΕΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης, ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης, ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΕΒ τῷ ὑπὸ ΖΕΔ· ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶν τὰ Α Β Δ Ζ σημεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΕ γωνίᾳ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΕ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΒΔΕ γωνίᾳ. καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΕ.

Ανάλυση

α) Υποθετικό μέρος:

Y.1 Ας έχει γίνει [δηλαδή ας έχει βρεθεί το σημείο Β του κύκλου, ας έχει ενωθεί με τα Δ, Ε και αυτά ας έχουν προεκταθεί μέχρι να κόψουν τον κύκλο στα Γ και Α αντίστοιχα]·

Y.2 και ας έχει αχθεί εφαπτομένη η ΖΑ.

Y.3 Τότε αφού είναι παράλληλη η ΑΓ στη ΔΕ, είναι ίση η γωνία Γ με τη [γωνία] ΓΔΕ [ως εντός εναλλάξ].

Y.4 Αλλά η [γωνία] Γ είναι ίση και με τη [γωνία] ΖΑΕ (εφάπτεται γαρ και τέμνει) [ως γωνίες υπό χορδής και εφαπτομένης, *Στοιχ.* ΙΙΙ, 32]·

Y.5 άρα και η [γωνία] ΖΑΕ είναι ίση με τη [γωνία] ΓΔΕ·

Y.6 άρα τα Α, Β, Δ, Ζ είναι σημεία πάνω σε κύκλο [ομοκυκλικά από 1^{o} κριτήριο εγγραψιμότητας: εξωτερική γωνία τετραπλεύρου ίση με την απέναντι εσωτερική]·

Y.7 άρα το [ορθογώνιο] υπό των ΑΕΒ [ΑΕ×ΕΒ] είναι ίσο με το [ορθογώνιο] υπό των ΖΕΔ [ΖΕ×ΕΔ]. [Δηλαδή τελικά ΑΕ×ΕΒ = ΖΕ×ΕΔ. Κάτι που πράγματι ισχύει και μπορεί εύκολα να αποδειχθεί από την αναλογία των πλευρών των ομοίων τριγώνων ΕΒΔ και ΕΖΑ].

β) Βεβαιωτικό μέρος:

B.1 Αλλά το [ορθογώνιο] υπό των ΑΕΒ [ΑΕ×ΕΒ] είναι «δοθέν» [τῷ μεγέθει εννοεί, ενώ αμέσως παρακάτω θα εξηγήσει το γιατί:]·

B.2 επειδή είναι ίσο με το [τετράγωνο] της εφαπτομένης [εννοεί την εφαπτομένη ΕΣ από το Ε στον αρχικό κύκλο, άρα από *Δεδομ.* 90, 52 και 91 ισχύει: $ΕΣ^2$=ΑΕ×ΕΒ]·

B.3 άρα «δοθέν» [τῷ μεγέθει] και το [ορθογώνιο] υπό των ΔΕΖ [ΔΕ×ΕΖ].

B.4 Και «δοθείσα» η ΔΕ [τῷ μεγέθει και τῇ θέσει από *Δεδομ.* 26]·

B.5 άρα «δοθείσα» και η ΕΖ [τῷ μεγέθει από *Δεδομ.* 57].

B.6 Αλλά [είναι «δοθείσα» η ΕΖ] και τῇ θέσει.

B.7 Και είναι «δοθέν» το Ε [από την υπόθεση του προβλήματος]·

B.8 άρα είναι «δοθέν» και το Ζ [από *Δεδομ.* 27].

B.9 Από «δεδομένου» λοιπόν σημείου του Ζ, θέσει «δεδομένου» κύκλου του ΑΒΓ, έχει αχθεί εφαπτομένη ευθεία η ΖΑ. «Δέδοται» άρα η ΖΑ και τῷ μεγέθει [από *Δεδομ.* 90].

Β.10 Και το Ζ είναι «δοθέν»·

Β.11 άρα «δοθέν» και το Α [από *Δεδομ.* 91].

Β.12 Αλλά και το Ε «δοθέν» [από την υπόθεση του προβλήματος]·

Β.13 άρα η ΑΕ «δοθείσα» τῇ θέσει [από *Δεδομ.* 26].

Β.14 Και ο κύκλος [ΑΒΓ] είναι τῇ θέσει [«δοθείς» από το πρόβλημα]·

Β.15 άρα και το Β σημείο «δοθέν» [από *Δεδομ.* 25].

Β.16 Είναι δε και καθένα των Δ, Ε «δοθέν» [από την υπόθεση του προβλήματος]·

Β.17 άρα είναι «δοθείσα» τῇ θέσει καθεμιά των ΔΒ και ΒΕ [από *Δεδομ.* 26].

Σύνθεση

α) Κατασκευή:

Θα συντεθεί λοιπόν το πρόβλημα έτσι. Έστω ο μεν κύκλος ο ΑΒΓ, τα δε δύο δοθέντα σημεία Δ, Ε. Ας είναι το [τετράγωνο] της εφαπτομένης [από το Ε] ίσο με το [ορθογώνιο] που περιέχεται από τη ΔΕ και κάποια άλλη ΕΖ [ΔΕ×ΕΖ], και από το Ζ ας αχθεί εφαπτομένη του κύκλου ΑΒΓ ευθεία γραμμή η ΖΑ, και ας αχθεί η ΑΕ και ας αχθεί η ΔΒ και ας προεκταθεί μέχρι το Γ, και ας αχθεί η ΑΓ· λέγω ότι η ΑΓ είναι παράλληλη στη ΔΕ.

β) Απόδειξη:

Αφού λοιπόν το [ορθογώνιο] υπό των ΖΕΔ [ΖΕ×ΕΔ] είναι ίσο με το [τετράγωνο] της εφαπτομένης [από το Ε], αλλά και το [ορθογώνιο] υπό των ΑΕΒ [ΑΕ×ΕΒ] είναι ίσο με το [τετράγωνο] της εφαπτομένης, άρα είναι ίσο και το [ορθογώνιο] υπό των ΑΕΒ με το [ορθογώνιο] υπό των ΖΕΔ· άρα τα σημεία Α, Β, Δ, Ζ είναι πάνω σε κύκλο· άρα είναι ίση η γωνία ΖΑΕ με τη γωνία ΒΔΕ. Αλλά και η γωνία ΖΑΕ είναι ίση με την ΑΓΒ στο εναλλάξ τμήμα [υπό χορδής και εφαπτομένης]· άρα και η ΑΓΒ γωνία είναι ίση με τη ΒΔΕ γωνία και είναι εναλλάξ· άρα είναι παράλληλη η ΑΓ στη ΔΕ.

Η «προς τα πάνω» πορεία, δηλαδή το υποθετικό μέρος της ανάλυσης, αρχίζει με την υπόθεση ότι το ζητούμενο έχει γίνει.[19] Είναι μία πορεία αναζήτησης προκειμένων, τα βήματα της οποίας είναι υποθετικά, αφού βασίζονται όλα στην αρχική υπό-

[19] «ἀπὸ τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου» ή «τὸ προταθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι» σύμφωνα με τις περιγραφές του Πάππου.

θεση ότι το ζητούμενο έχει γίνει και ταυτόχρονα κάποια από αυτά αποτελούν νοητικά άλματα του γεωμέτρη. Αυτά τα νοητικά άλματα έχουν σκοπό την ανακάλυψη της δομής του προβλήματος και η εύρεση του καθενός απ' αυτά, δεν οδηγεί μονοσήμαντα και με σίγουρο τρόπο στην εύρεση του επομένου, αλλά απαιτεί τον συνδυασμό παραγόντων όπως είναι η διανοητική ικανότητα, η γνώση, η εμπειρία αλλά και η ενόραση του γεωμέτρη. Ο στόχος της υποθετικής αυτής πορείας, δηλαδή η εύρεση του «ομολογουμένου» που ισχύει ανεξάρτητα από το ζητούμενο, μπορεί να μην επιτευχθεί μέσα από τη συγκεκριμένη διαδρομή· στην περίπτωση αυτή ο γεωμέτρης θα έχει κάνει μία αποτυχημένη προσπάθεια ανάλυσης, οπότε θα πρέπει ή να την τροποποιήσει ή να ακολουθήσει εντελώς διαφορετική πορεία.

Στο παραπάνω παράδειγμα, ο Πάππος αρχίζει το υποθετικό μέρος της ανάλυσης με την υπόθεση **(Υ.1)** ότι έχει γίνει το ζητούμενο. Υποθέτει δηλαδή ότι έχει βρεθεί το σημείο Β πάνω στην περιφέρεια του κύκλου, άρα και καθεμιά των ΔΒ και ΔΕ, που οι προεκτάσεις τους δίνουν τα σημεία Γ και Α και ισχύει η παραλληλία της ΑΓ με τη ΔΕ. Το επόμενο νοητικό άλμα **(Υ.2)** είναι η βοηθητική κατασκευή της εφαπτομένης από το Α,[20] η οποία θα του χρησιμεύσει στη μεταφορά γωνιών. Η μεταφορά γωνιών **(Υ.3-5)** μέσω της εφαπτομένης αλλά και της παραλληλίας που έχει υποθέσει, «οδηγούν» τον γεωμέτρη στο επόμενο νοητικό άλμα **(Υ.6),** που είναι η θεώρηση κάποιου άλλου κύκλου, πάνω στον οποίο βρίσκονται τα σημεία Α, Β, Δ, Ζ. Οι μετρικές σχέσεις στον νέο κύκλο τον «οδηγούν» στην ισότητα των ορθογωνίων **(Υ.7)** *ορθ.* (ΑΕ, ΕΒ) = *ορθ.* (ΖΕ, ΕΔ), την οποία θεωρεί επαρκή – ικανή[21] για να ξεκινήσει τη λύση του προβλήματος. Αυτή η σχέση σημαίνει και το τέλος του υποθετικού μέρους της ανάλυσης όχι όμως και της ανάλυσης συνολικά. Γιατί ακόμη και τώρα που ερευνητής υποθέτει ότι έχει φτάσει σε κάτι που ισχύει ανεξάρτητα του ζητουμένου, δεν μπορεί να απαντήσει ούτε στον εαυτό του αν έχει κάνει μια επιτυχημένη προσπάθεια ανάλυσης, πολύ περισσότερο δεν είναι ακόμα σε θέση να τη διδάξει σε άλλους. Αυτή η υποθετική-νοητική πορεία που έχει κάνει για τον εαυτό του δεν είναι παραγωγικός συλλογισμός, απλά ο γεωμέτρης υποθέτει ότι μπορεί να μετε-

[20] Κατεξοχήν δημιουργικό βήμα που το κάνει ο γεωμέτρης ερευνητής για να τον βοηθήσει στην ανακάλυψη της δομής του προβλήματος, που αφορά μεταφορά γωνιών. Αν το πρώτο νοητικό άλμα που ήταν η λήψη του ζητουμένου μπορούσε να αποδοθεί στην αναλυτική μέθοδο, το δεύτερο δεν μπορεί παρά να αποδοθεί σε παράγοντες όπως η γνώσεις, η πείρα, η διανοητική ικανότητα αλλά κυρίως η ενόραση του ερευνητή.

[21] «τι τῶν ἤδη γνωριζομένων ἢ τάξιν ἀρχῆς ἐχόντων» σύμφωνα με την περιγραφή του Πάππου.

ξελιχθεί σε τέτοιον, με αρχή αυτό που ισχύει ανεξάρτητα του ζητουμένου και κατάληξη το ζητούμενο. Αυτό ακριβώς θα επιχειρήσει στο επόμενο μέρος της ανάλυσης το βεβαιωτικό.

Η «προς τα κάτω» πορεία, δηλαδή ο παραγωγικός συμπερασμός που *μπορεί* να οδηγήσει στο ζητούμενο, και για τον οποίο οι περισσότεροι αν όχι όλοι μέχρι σήμερα υποστηρίζουν ότι εμφανίζεται στη σύνθεση, εμφανίζεται εδώ να λειτουργεί στο βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης. Στόχος αυτού του μέρους της ανάλυσης, είναι να βεβαιωθεί πρώτα ο ίδιος ο γεωμέτρης κατά πόσον αυτά που προηγήθηκαν, εφόσον αντιστραφούν, συγκροτούν έναν παραγωγικό συμπερασμό που *μπορεί* να λύσει το πρόβλημα.

Έτσι, το υποθετικό μέρος λοιπόν είναι κατά κύριο λόγο το στάδιο της νοητικής σύλληψης της δομής του προβλήματος και αφορά περισσότερο την ενόραση του ερευνητή, ενώ το βεβαιωτικό μέρος είναι το στάδιο της νοητικής επεξεργασίας των προηγουμένων στοιχείων σε μία σειρά λογικά έγκυρων παραγωγικών συμπερασμών και αφορά περισσότερο την κρίση του. Σε αυτό το μέρος της ανάλυσης πρέπει κατ’ αρχάς να ελεγχθεί κατά πόσο αυτό στο οποίο κατέληξε το υποθετικό μέρος *μπορεί* να αποκτηθεί (ως αποτέλεσμα έγκυρου συλλογισμού), δηλαδή να παραχθεί από τα στοιχεία της υπόθεσης του προβλήματος, τις γνωστές προτάσεις και τα αξιώματα, με άλλα λόγια ανεξάρτητα από το ζητούμενο. Στη συνέχεια, με τον ίδιο τρόπο, πρέπει να ελεγχθεί κατά πόσο η λογική εγκυρότητα και των άλλων βημάτων και, τελικά, του συνόλου του συλλογισμού, *μπορεί* να παράγει την αναγκαιότητα του ζητουμένου.[22] Στο σημείο αυτό πρέπει να επαναλάβουμε κάτι που έχουμε ήδη αναφέρει στην § 4.4, για τα «δοθέντα» αντικείμενα ενός τέτοιου συλλογισμού. Θεωρούμε ότι τα «δοθέντα» αντικείμενα ενός τέτοιου συλλογισμού, τόσο τα αρχικά όσο και αυτά που προκύπτουν στην πορεία, δεν είναι συγκεκριμένα αλλά αυτό που θα ονομάζαμε «δυνητικά» αντικείμενα, τα οποία *μπορούν* να παραχθούν από τα λογικά έγκυρα βήματα του συλλογισμού σε συν-

[22] Σύμφωνα με την τρίτη θεωρητική περιγραφή του Πάππου (για την προβληματική ανάλυση): «ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατὸν ᾖ καὶ ποριστόν, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθέν, δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ προταθέν.») Το «δυνατὸν», με την έννοια του υποθετικά αναγκαίου, σύμφωνα με την ερμηνεία μας, θα το προσδώσει στο «προταθέν» το σύνολο αυτής της νοητικής πορείας. Το «προταθέν», στο πρόβλημα που μελετάμε εδώ, είναι η θέση του Β πάνω στον κύκλο, η οποία σε συνδυασμό με τα «δοθέντα» σημεία Δ και Ε, θα κάνει «δοθείσες» τῇ θέσει τις ΔΒ και ΔΕ. Αυτή οφείλει να είναι η κατάληξη του δευτέρου βήματος της ανάλυσης. Και είναι πράγματι, όπως διαπιστώνουμε στο συγκεκριμένο πρόβλημα αλλά και στα υπόλοιπα.

δυασμό με τα «δυνητικά» αρχικά αντικείμενα. Τον χαρακτηριστικό τρόπο με τον οποίο υπάρχουν αυτά τα «δοθέντα» αντικείμενα στη γεωμετρική ανάλυση χωρίς να είναι μονοσήμαντα καθορισμένα, ο J. Klein (1968, 164), τον αποκαλεί «πιθανό δόσιμο» (possible giveness). Η αναγκαιότητα την οποία παρουσιάζουν τόσο τα επιμέρους βήματα όσο και το σύνολο του αποδεικτικού συλλογισμού με αυτού του είδους τα «δοθέντα» αντικείμενα, ονομάζεται δυνητική αναγκαιότητα. Αυτού του είδους την αναγκαιότητα παρουσιάζει στο τέλος του βεβαιωτικού μέρους της ανάλυσης και το ζητούμενο του προβλήματος.

Ο Πάππος αρχίζει το βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης με την έκφραση **(Β.1)** «δοθὲν δὲ» το *ορθ.* (ΑΕ, ΕΒ), και δίνει αμέσως μετά τον *λόγο* (λόγον ἑαυτῷ διδόναι) **(Β.2)** για τον οποίο αυτό το ορθογώνιο είναι «δοθέν» ως προς το μέγεθος. Ο *λόγος* είναι ότι από τη στιγμή που είναι «δοθείς» ο κύκλος, ο ΑΒΓ, από την υπόθεση του προβλήματος (δηλαδή είναι «δυνατός» και «ποριστός»[23]) και είναι επίσης από την υπόθεση του προβλήματος «δοθέντα» τα σημεία, τα Δ και Ε, (ως προς τη θέση τους), τότε η δυνατότητα να αποκτηθεί, η εφαπτομένη του κύκλου ΑΒΓ από το Ε, έχει δυνητική αναγκαιότητα. Δηλαδή (από *Δεδομ.* 90) είναι «δοθείσα» ως προς το μέγεθος της η ΕΣ. Η δυνητική αναγκαιότητα του μεγέθους της ΕΣ παράγει, με τη σειρά της, τη δυνητική αναγκαιότητα του μεγέθους του *τετρ.* (ΕΣ). Δηλαδή το *τετρ.* (ΕΣ) είναι «δοθέν» ως προς το μέγεθος (από *Δεδομ.* 52). Η ισότητα *τετρ.* (ΕΣ) = *ορθ.* (ΑΕ, ΕΒ) μεταφέρει αυτή τη δυνητική αναγκαιότητα του μεγέθους του *τετρ.* (ΕΣ) στο μέγεθος του *ορθ.* (ΑΕ, ΕΒ), που καθίσταται και αυτό με τη σειρά του «δοθέν» ως προς το μέγεθος (*Δεδομ. Ορισμ.* 1). Άρα, τελικά, από τον παραπάνω συλλογισμό (που αντιστοιχεί στη *Δεδομ.* 91), έχει δοθεί ο *λόγος* για τον οποίο το *ορθ.* (ΑΕ, ΕΒ) χαρακτηρίστηκε «δοθέν» ως προς το μέγεθος.

Η δυνητική αναγκαιότητα του μεγέθους του *ορθ.* (ΑΕ, ΕΒ) μεταφέρεται με τη σειρά της, διαμέσου της ισότητας των μεγεθών *ορθ.* (ΑΕ, ΕΒ) = *ορθ.* (ΖΕ, ΕΔ) στο

---

[23] Με την έννοια ότι η πιθανή κατασκευή ή επιλογή του κέντρου και της ακτίνας του κύκλου ΑΒΓ, δεν είναι αδύνατη, ούτε προκαλεί στην πορεία κάτι αδύνατο, αλλά ταυτόχρονα έχει τυχαιότητα – ενδεχομενικότητα. Με άλλα λόγια τα αρχικά «δοθέντα» της υπόθεσης του προβλήματος συνεπή προς την ανάλυσή μας και την έννοια του contingent της «proper possibility» έχουν τυχαίο – ενδεχομενικό χαρακτήρα, τον οποίο θα μεταδώσουν στα επόμενα «δοθέντα» του συλλογισμού.

ορθ. (ΖΕ, ΕΔ) ως μέγεθος. Έχει δοθεί άρα ο *λόγος* **(Β.3)** για τον οποίο το *ορθ.* (ΖΕ, ΕΔ) χαρακτηρίστηκε «δοθέν» ως προς το μέγεθος.

Όμως η ΔΕ είναι επίσης «δοθείσα» ως προς το μέγεθός της, που εδώ μας ενδιαφέρει **(Β.4)**, γιατί τα πέρατά της είναι «δοθέντα» ως προς τη θέση από το πρόβλημα (*Δεδομ. 26*). Άρα το μέγεθός της παρουσιάζει δυνητική αναγκαιότητα, η οποία σε συνδυασμό με τη δυνητική αναγκαιότητα του μεγέθους του *ορθ.* (ΖΕ, ΕΔ), παράγει τη δυνητική αναγκαιότητα της ΕΖ ως προς το μέγεθος (*Δεδομ.* 57) αλλά και τη θέση. Έχει δοθεί, έτσι, ο *λόγος* **(Β.5)** για τον οποίο η ΕΖ είναι επίσης «δοθείσα» ως προς το μέγεθος και τη θέση **(Β.6).**

Όμως το Ε είναι «δοθέν» **(Β.7)** ως προς τη θέση από το πρόβλημα, ενώ για το μέγεθος και τη θέση του ΕΖ μόλις παραπάνω δόθηκε ο *λόγος* για τον οποίο είναι επίσης «δοθέντα». Άρα από το *Δεδομ.* 27 έχουμε τον *λόγο* για τον οποίο το Ζ είναι «δοθέν» ως προς τη θέση **(Β.8)**.[24]

Έτσι, **(Β.9)** από τη δυνητική αναγκαιότητα της θέσης του «δεδομένου» πλέον από το συλλογισμό που προηγήθηκε, σημείου Ζ (δὴ δεδομένου σημείου τοῦ Ζ) και τη δυνητική αναγκαιότητα της θέσης του «δεδομένου» πλέον από το πρόβλημα, κύκλου ΑΒΓ (θέσει δεδομένου κύκλου τοῦ ΑΒΓ) παράγεται η δυνητική αναγκαιότητα της θέσης και του μεγέθους της ΖΑ (δέδοται ἄρα καὶ ἡ ΖΑ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει) βάσει την *Δεδομ.* 90, την εκφώνηση της οποίας ο Πάππος αισθάνεται την ανάγκη να παραθέσει.

---

[24] Παρατηρούμε ότι το σημείο Ζ εδώ ονομάζεται «δοθέν». Όμως, το σημείο Ζ είναι προϊόν έγκυρου συλλογισμού και παρουσιάζει δυνητική αναγκαιότητα, όπως φαίνεται από την ανάλυση που προηγήθηκε. Κατά συνέπεια το σημείο Ζ έχει τον χαρακτήρα που έχουμε αποδώσει στο «δεδομένον». Έχουμε επομένως εδώ μία περίπτωση χρήσης του όρου «δοθέν» ως υποκατάστατου του όρου «δεδομένον». Παρόμοιες περιπτώσεις συναντούμε συχνά σε σωζόμενα παραδείγματα γεωμετρικής ανάλυσης καθώς και στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη. Όπως έχουμε επισημάνει ήδη (§ 4.4) ο όρος «δοθέν» χρησιμοποιείται αφ’ ενός για να δηλώσει την έναρξη μίας υποθετικής αποδεικτικής αλυσίδας και αφ’ ετέρου ως υποκατάστατο του όρου «δεδομένον». Η χρήση στην προκειμένη περίπτωση του όρου «δοθέν» με τη δεύτερη αυτή σημασία επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι αμέσως παρακάτω, στο Β.9, ο Πάππος ονομάζει το σημείο Ζ «δεδομένον». Προφανώς κρίνει ότι έτσι πρέπει να πράξει καθώς, στην πραγματικότητα, στο Β.9 παραθέτει αυτούσια την εκφώνηση της πρότασης 90 των *Δεδομένων*, στην οποία ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί αποκλειστικά τον όρο «δεδομένον». Όπως θα δούμε στη συνέχεια, στο Β.10 ο Πάππος θα χρησιμοποιήσει και πάλι για το σημείο Ζ τον χαρακτηρισμό «δοθέν», καθώς με αυτό αρχίζει ένα νέο στάδιο της υποθετικής αποδεικτικής αλυσίδας. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι δύο όροι ταυτίζονται.

Αφού όμως έχει δοθεί ο *λόγος* για τη θέση και το μέγεθος της ΑΖ, και το ένα πέρας της το Ζ είναι επίσης «δοθέν» **(Β.10)**, έχουμε τον «*λόγο*» για τον οποίο το Α είναι «δοθέν» **(Β.11)** ως προς τη θέση του.

Όμως και το Ε είναι «δοθέν» **(Β.12)** ως προς τη θέση του από το πρόβλημα, άρα η ΑΕ είναι «δοθείσα» **(Β.13)** ως προς τη θέση από την *Δεδομ.* 26, δηλαδή η θέση της πλέον παρουσιάζει «δυνητική αναγκαιότητα».

Αλλά και ο κύκλος ΑΒΓ είναι «δοθείς» **(Β.14)** ως προς τη θέση του από το πρόβλημα, άρα είναι «δοθέν» **(Β.15)** το σημείο Β, αφού από την *Δεδομ.* 25 έχει δοθεί ο *λόγος* γι' αυτή τη θέση.

Είναι όμως και καθένα από τα Ε, Δ «δοθέν» **(Β.16)** ως προς τη θέση του από το πρόβλημα, άρα μαζί με το Β που είναι επίσης «δοθέν» πλέον ως προς τη θέση του, παράγουν με δυνητική αναγκαιότητα τις ΔΕ και ΔΒ, οι οποίες είναι «δοθείσες» **(Β.17)** ως προς τη θέση (*Δεδομ.* 26).

Αυτό ακριβώς που εδώ είναι η κατάληξη του βεβαιωτικού μέρους ήταν η αρχή του προηγούμενου υποθετικού μέρους της ανάλυσης. Όπως γίνεται φανερό από τη συζήτηση του συγκεκριμένου παραδείγματος, η πρακτική του Πάππου συμφωνεί απόλυτα με την τρίτη περιγραφή του, που η ανάλυση αρχίζει υποθέτοντας ως γνωστό το «προταθέν» και καταλήγει με τη «δυνατότητα του προταθέντος».

Έτσι τελειώνει το βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης, στόχος του οποίου προφανώς δεν είναι να διδάξει τη λύση του προβλήματος, αφού ούτε καμιά κατασκευή κάνει, ούτε ως κατάληξη απαντά με προφανή τρόπο και στο τελευταίο ζητούμενο της παραλληλίας της ΑΓ με τη ΔΕ. Αυτό θα το κάνει παρακάτω στη σύνθεση η «απόδειξη», στόχος της οποίας είναι να διδάξει με πληρότητα και το τελευταίο στοιχείο στους μαθητές. Στόχος του βεβαιωτικού μέρους της ανάλυσης είναι, όπως προαναφέραμε, να απαντήσει ο ίδιος ο γεωμέτρης στον εαυτό του, να δώσει τον *λόγο* (λόγον ἑαυτῷ διδόναι), κατά πόσο οι υποθέσεις του αποκτούν λογική εγκυρότητα και, αφού αυτό συμβεί, ο ίδιος είναι σε θέση να καταλάβει ότι αυτό αρκεί για να αποδειχθεί παρακάτω και η τελευταία λεπτομέρεια. Στο παράδειγμα που προηγήθηκε, η σχέση *ορθ.* (ΑΕ, ΕΒ) = *ορθ.* (ΖΕ, ΕΔ) και η θέση του σημείου Β (οι οποίες πλέον παρουσιάζουν δυνητική αναγκαιότητα), επαρκούν προκειμένου να βεβαιωθεί ο ερευνητής ότι τα σημεία Α, Β, Δ, Ζ είναι ομοκυκλικά και κατά συνέπεια με τη μεταφορά γωνιών, μπορεί να δειχθεί και η παραλληλία των ΑΓ και ΔΕ. Ο ερευνητής, δεν χρειάζεται να διατυπώσει αυτό το τελευταίο τμήμα του συλλογισμού, ούτε να ελέγξει την εγκυρότητά του στο βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης, αφού είναι ο ίδιος που το συνέλαβε στο υποθετικό μέρος. Θα χρειαστεί να αναφερθεί πάλι σε αυτό μόνο όταν, ως δάσκαλος πλέον, θα το διδάξει συνθετικά στους άλλους με πληρότητα.

Έτσι τελειώνει το αναλυτικό μέρος του προβλήματος με τρόπο που θεωρούμε ότι συμφωνεί πλήρως με την ερμηνεία μας για τη μέθοδο. Η σύνθεση που ακολουθεί και περιλαμβάνει την «κατασκευή» και την «απόδειξη», δεν παρουσιάζει προβλήματα κατανόησης και ως προς την ερμηνεία της υπάρχει ομοφωνία από το σύνολο των μελετητών. Για το λόγο αυτό δεν κρίνουμε σκόπιμο να ασχοληθούμε αναλυτικά με την παρουσίασή της.

Συμπέρασμα

Στο κεφάλαιο αυτό δείξαμε, με τη βοήθεια της ερμηνεία μας για τη γεωμετρική ανάλυση, ότι ουσιαστικά ο Πάππος στην εισαγωγή του 7^{ου} βιβλίου της *Συναγωγής* κάνει τρεις συμπληρωματικές περιγραφές της γεωμετρικής ανάλυσης. Οι περιγραφές αυτές όχι μόνο δεν αντιφάσκουν μεταξύ τους, όπως μέχρι τώρα υποστηριζόταν από διάφορους ερευνητές, αλλά συμφωνούν και με την πρακτική του Πάππου στη γεωμετρική ανάλυση. Μέσα από το αντιπροσωπευτικό παράδειγμα της πρακτικής του Πάππου για τη γεωμετρική ανάλυση που αναλύσαμε, μας δόθηκε η ευκαιρία να αναπτύξουμε περισσότερο την ερμηνεία μας και να δείξουμε τον τρόπο που αυτή λειτουργεί στην πράξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Η γεωμετρική ανάλυση πριν από τον Πάππο: Μέναιχμος, Αρχιμήδης, Απολλώνιος

Το κεντρικό ερώτημα που εξετάζουμε στο κεφάλαιο αυτό, είναι αν και σε ποιο βαθμό στα κείμενα των Ελλήνων μαθηματικών της κλασικής εποχής, που περιέχουν προβληματική γεωμετρική ανάλυση, η μέθοδος λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο που την είδαμε να λειτουργεί στον Πάππο, και χρησιμοποιούνται τα ίδια εργαλεία, όπως είναι τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη και η ορολογία «δοθέντων» – «δεδομένων». Με άλλα λόγια, αναλύοντας μερικά από τα πιο αντιπροσωπευτικά παραδείγματα γεωμετρικής ανάλυσης που έχουν σωθεί, ερευνούμε σε ποιο βαθμό η γεωμετρική ανάλυση του Πάππου αποτελεί συνέχεια της πρακτικής του Μέναιχμου, του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου. Επίσης, εξετάζουμε στο τέλος του κεφαλαίου και αφού έχουμε συζητήσει τα παραδείγματα γεωμετρικής ανάλυσης, τη θέση του Πάππου για ύπαρξη δύο ειδών ανάλυσης: την προβληματική και την θεωρη(μα)τική.

Η θέση που υποστηρίζουμε, όπως θα αναπτυχθεί και θα τεκμηριωθεί στη συνέχεια του κεφαλαίου, είναι ότι η μέθοδος της ανάλυσης που περιγράφει αλλά και εφαρμόζει στην πρακτική του ο Πάππος, είναι στην ουσία η ίδια με αυτή που αρκετές εκατοντάδες χρόνια πριν εφάρμοζαν ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος και ακόμη πριν από αυτούς, ο Μέναιχμος. Οι αναλύσεις βέβαια, που περιέχονται στο έργο των διαφόρων μαθηματικών, δεν είναι πανομοιότυπες, σε ό,τι αφορά τον ακριβή χωρισμό των μερών για παράδειγμα ή την πληρότητα και το μέγεθος του κάθε μέρους της ανάλυσης («υποθετικό» – «βεβαιωτικό»). Αυτό δεν θα περιμέναμε να συμβαίνει, αν λάβουμε υπόψη, τόσο ότι αναφερόμαστε σε μια κατεξοχήν δημιουργική ερευνητική μέθοδο, σε διαφορετικούς ερευνητές που προφανώς έχουν ένα προσωπικό τρόπο γραφής αλλά και αντιμετώπισης του μεγέθους και της δυσκολίας των πραγμάτων στα οποία αναφέρονται, απευθύνονται σε άλλους συναδέλφους ερευνητές, δεν γράφουν την ίδια εποχή, απέχουν μεταξύ τους χρονικά από μερικές δεκάδες έως αρκετές εκατοντάδες χρόνια αλλά και τη δυσκολία της μεταφοράς των κειμένων από τον καθένα στον επόμενο. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, δεν θα σταθούμε σε επιφανειακές διαφορές των μαθηματικών κειμένων που περιέχουν γεωμετρική ανάλυση αλλά αντίθετα, θα προσπαθήσουμε να διαπιστώσουμε κατά πόσο η ουσία της μεθόδου διατηρείται αναλλοίωτη στα κείμενα διαφορετικών ερευνητών-μαθηματικών.

Ο ίδιος ο Πάππος πάντως, στην εισαγωγή του 7^{ου} βιβλίου της *Συναγωγής*, δηλώνει ότι, η μέθοδος της ανάλυσης έχει γραφτεί από μαθηματικούς της κλασικής εποχής, όπως ο Ευκλείδης και ο Απολλώνιος: «γέγραπται δὲ ὑπὸ τριῶν ἀνδρῶν, Εὐκλείδου τε τοῦ στοιχειωτοῦ καὶ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου καὶ Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου,»[1] Καθιστά σαφές δηλαδή, από την αρχή της θεωρητικής περιγραφής του που αφορά τη γεωμετρική ανάλυση, ότι η μέθοδος δεν αποτελεί δική του καινοτομία.

7.1. *Οι απόψεις για την καταγωγή και τη συνέχεια της γεωμετρικής ανάλυσης στα ελληνικά Μαθηματικά*

Ερωτήματα με ανάλογο περιεχόμενο, όπως αυτό που θέσαμε στην αρχή του κεφαλαίου, έχουν απασχολήσει και εν μέρει τουλάχιστον έχουν απαντηθεί από σύγχρονους μελετητές της γεωμετρικής ανάλυσης, χωρίς όμως να υπάρχει ομοφωνία σε ότι αφορά τις απαντήσεις που έχουν δοθεί. Έτσι, πριν περάσουμε στη συζήτηση των αναλύσεων του Μέναιχμου, του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου που έχουν σωθεί, θα παραθέσουμε συνοπτικά τις απόψεις διαφόρων ερευνητών σε σχέση με αυτά, προκειμένου να έχουμε μια εικόνα του διεθνούς τοπίου της έρευνας που έχει προηγηθεί.

Σε σχέση με την καταγωγή της ανάλυσης του Πάππου στους γεωμέτρες της κλασικής εποχής, οι Hintikka & Remes (1974, 7) αναφέρουν ότι:

> Είναι σε κάθε περίπτωση καθησυχαστικό να δούμε ότι οι αναλύσεις που βρίσκονται, για παράδειγμα στα έργα του Αρχιμήδη (τουλάχιστον στη μορφή που έχουν μεταφερθεί σε εμάς) είναι ουσιαστικά όμοιες με αυτές που εκτελούνται από τον Πάππο.

Ενώ υποσημειώνουν παρακάτω σε σχέση με αυτή τη διαπίστωσή τους και προκειμένου να την ισχυροποιήσουν:

---

[1] Hultsch 7.634.8-10.

> Στους σχολιασμούς του Ευτόκιου, υπάρχουν επίσης αναλύσεις που αποδίδονται σε άλλους εκτός του Αρχιμήδη, για παράδειγμα … στον Μέναιχμο και … τον Διοκλή. – Όλες αυτές οι αναλύσεις δείχνουν πειστικά ότι οι αναλυτικές τεχνικές του Πάππου δεν αποτελούν καινοτομία του αλλά είναι μάλλον δανεισμένες από προγενέστερους γεωμέτρες. … Όσο για τον Απολλώνιο … Τα *Κωνικά* του … χρησιμοποιούν αναλυτική μέθοδο μόνο κατ' εξαίρεση. Αλλά οι αναλύσεις του είναι όμοιες με αυτές που βρίσκονται στον Πάππο και τον Αρχιμήδη, συνεπώς υποστηρίζουν την υπόθεσή μας για την προέλευση των τεχνικών του Πάππου.

Με άλλα λόγια, οι Hintikka & Remes, υποστηρίζουν ότι η μέθοδος της γεωμετρικής ανάλυσης, δεν μεταβάλλεται αλλά αντίθετα παραμένει η ίδια στην ουσία της στα κείμενα του Μέναιχμου, του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου και τελικά του Πάππου.

Ο Knorr (1986, 340), επίσης, με αφορμή τη μελέτη του 7ου βιβλίου της *Συναγωγής* του Πάππου, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι:

> η εκτενής ανασκόπηση των έργων της ανάλυσης από τον Πάππο, στο 7ο βιβλίο της *Συναγωγής*, σπάνια μόνο βρίσκεται πάνω από το επίπεδο που κάποιος θα περίμενε να βρει στα περιθώρια των σχολιασμένων αντιγράφων αυτών των πραγματειών, όπως ακριβώς της πηγής την οποία αξιοποίησε ο Ευτόκιος για την παραγωγή των σχολίων του για τον Απολλώνιο. Τα πιο ενδιαφέροντα τμήματα του 7ου βιβλίου συνήθως φέρουν σημάδια της προέλευσή τους από τις πηγές· … Είναι ιδιαίτερα σημαντικό το γεγονός, ότι το σύνολο της ύλης της ανάλυσης που εξετάζεται στο 7ο βιβλίο, έλκει την καταγωγή του από τους γεωμέτρες του 3ου αιώνα, κυρίως τον Απολλώνιο και τον Ευκλείδη.

Μελετώντας τις πηγές δηλαδή, και ο Knorr, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η ύλη της γεωμετρικής ανάλυσης οφείλεται κατά κύριο λόγο σε μαθηματικούς του 3ου αιώνα, όπως είναι ο Ευκλείδης και ο Απολλώνιος, κάτι το οποίο όπως προαναφέραμε, έχει αναγνωρίσει και ο ίδιος ο Πάππος.

Ο Panza (1997, 393 κ.έ.), στην ίδια κατεύθυνση, σημειώνει ότι αν θεωρήσουμε ως αξιόπιστη την μετάφραση του Halley από τα αραβικά, του έργου του Απολλώνιου *Περί λόγου αποτομής*, μπορούμε να φτάσουμε στο συμπέρασμα όχι μόνο ότι ο Απολλώνιος προχώρησε με τον ίδιο τρόπο που αναφέρει η μέθοδος του Πάππου σε ένα μικρό απόσπασμα από τα *Κωνικά* του (στα προβλήματα του δεύτερου βιβλίου), αλλά ότι ο Απολλώνιος συνέγραψε επίσης μια γνήσια αναλυτική πραγματεία (όπως την εννοεί ο Πάππος). Παρακάτω ο Panza, αναφέρει επίσης, ότι μπορούμε να βρούμε στοιχεία όμοια με αυτά που υπάρχουν στο αναλυτικό έργο του Πάππου, στο έργο του Αρχιμήδη *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β΄*. Μπορεί δηλαδή, ο Panza να μην δηλώνει με ρητό τρόπο, όπως οι προηγούμενοι, ότι οι αναλύσεις του Πάππου αποτελούν συνέχεια των αναλύσεων του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου, αλλά συζητά και συγκεντρώνει στοιχεία που οδηγούν τον αναγνώστη της εργασίας του σε αυτήν την κατεύθυνση.

Οι Berggren & Van Brummelen (2000, 5), αντίθετα, θεωρούν ότι ακόμη και μια βιαστική εξέταση της ανάλυσης και της σύνθεσης, που παραθέτει ο Ευτόκιος ως το απόσπασμα της λύσης του 4^{ου} προβλήματος του έργου του Αρχιμήδη *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β'*, αποκαλύπτει την παραφωνία με την περιγραφή του Πάππου για την ανάλυση και τη σύνθεση, είτε ως μια «προς τα εμπρός», είτε ως μια «προς τα πίσω» αλυσίδα συμπερασμών. Με άλλα λόγια, θεωρούν ότι η δομή της μεθόδου που εφαρμόζει ο Αρχιμήδης, είναι πολύ πιο σύνθετη από αυτή που περιγράφει ο Πάππος. Γι' αυτό το λόγο, δεν τους είναι ξεκάθαρο, όπως αναφέρουν, κατά πόσο η διαδικασία του Αρχιμήδη μπορεί να συμβιβαστεί με το γνωστό κείμενο του Πάππου για την ανάλυση. Έτσι, στη συνέχεια της εργασίας τους, οι Berggren & Van Brummelen, προσπαθούν να απαντήσουν σε αυτό ακριβώς το ζήτημα, εξετάζοντας τη μέθοδο που προηγήθηκε χρονικά της ανάλυσης, την λεγόμενη «απαγωγή». Για να καταλήξουν ότι, σε αυτό το πλαίσιο (της σχετικής απόδειξης ή αναγωγής), η πρώτη περιγραφή του Πάππου ταιριάζει με την πρακτική του Αρχιμήδη, πράγμα όμως που δεν φαίνεται να συμβαίνει με τη δεύτερη περιγραφή του. Γενικά, φαίνεται να αντιλαμβάνονται μια δυσαρμονία ανάμεσα στις θεωρητικές περιγραφές του Πάππου και την πρακτική του Αρχιμήδη, χωρίς όμως να συγκρίνουν διεξοδικά τις πρακτικές των δύο μαθηματικών, όπως σκοπεύουμε να κάνουμε εμείς παρακάτω.

Καταλήγοντας με τις απόψεις των διαφόρων σύγχρονων μελετητών της ιστορίας των Μαθηματικών, θα μπορούσαμε να πούμε ότι διακρίνουμε μια σχετική συμφωνία σε ότι αφορά την κοινή πρακτική εφαρμογή της μεθόδου της γεωμετρικής ανάλυσης στα διάφορα ελληνικά μαθηματικά κείμενα διαχρονικά, συμφωνία η οποία δεν αφορά όμως και τη θεωρητική περιγραφή της μεθόδου από τον Πάππο και τη σχέση της με την πρακτική του, ούτε με την πρακτική των υπολοίπων.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου, μέσα από τη μελέτη των ίδιων των μαθηματικών κειμένων του Μέναιχμου, του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου που περιέχουν γεωμετρική ανάλυση, θα δείξουμε ότι στην ουσία της η μέθοδος δεν μεταβάλλεται αλλά είναι η ίδια με αυτή που εμφανίζεται αρκετούς αιώνες αργότερα, τόσο στην πρακτική όσο και στις θεωρητικές περιγραφές του Πάππου, τις οποίες ήδη μελετήσαμε και ερμηνεύσαμε. Ακόμη θα δείξουμε, ότι ο τρόπος που εμφανίζεται και λειτουργεί η μέθοδος στα κείμενα του Μέναιχμου, του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου συνηγορεί υπέρ της ερμηνείας της γεωμετρικής ανάλυσης που ήδη παρουσιάσαμε με τη βοήθεια της ορολογίας «δοθέντων» – «δεδομένων».

7.2. *Μέναιχμος*

Ο Μέναιχμος έζησε περίπου το 350 π.Χ., υπήρξε ένας από του μαθητές του Ευδόξου και το όνομά του έχει συνδεθεί με την ανακάλυψη των κωνικών τομών αλλά και τη χρησιμοποίησή τους για την επίλυση του προβλήματος της εύρεσης των δύο μέσων αναλόγων, παρόλο που δεν σώζεται κανένα κείμενό του. Ο Πρόκλος (67, 9-13), τον σχετίζει με τον Αμύκλα τον Ηρακλεώτη, φίλο του Πλάτωνα καθώς και με τον Δεινόστρατο, αναφέροντας χαρακτηριστικά ότι αυτοί: «ἔτι τελεωτέραν ἐποίησαν τὴν ὅλην γεωμετρίαν.»

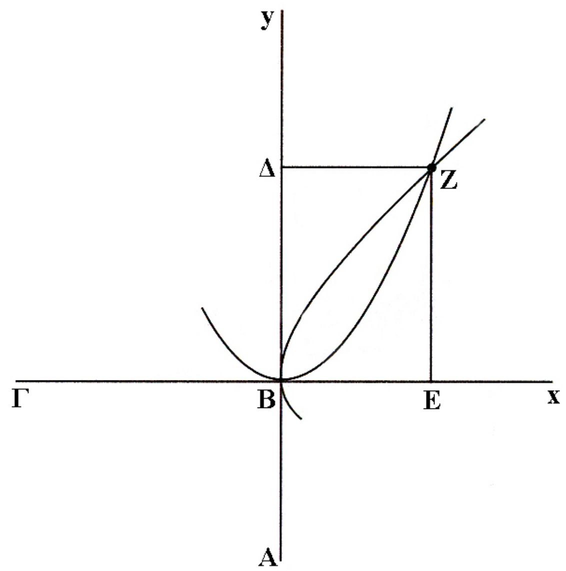
Η ανακάλυψη των κωνικών τομών από τον Μέναιχμο, υπήρξε μια διαδεδομένη άποψη στην ιστορία των Μαθηματικών για αρκετά χρόνια (λ.χ. Van Der Waerden, 1954, 223). Η άποψη αυτή όμως σήμερα αμφισβητείται, με κάποια επιχειρήματα, γιατί στηρίζεται ουσιαστικά, όπως αναφέρει ο Χριστιανίδης (2003, 97), σε μια μόνο φράση που περιέχεται στην επιστολή του Ερατοσθένη ($3^{ο}$ π.Χ αιώνας) προς τον βασιλιά της Αιγύπτου Πτολεμαίο, φράση, το νόημα της οποίας όμως, είναι αρκετά διφορούμενο. Στη φράση αυτή, ο Ερατοσθένης, προτρέπει όσους ασχολούνται με την επίλυση του Δηλίου προβλήματος να μην χρησιμοποιούν τις τριάδες του Μεναίχμου: «μηδὲ Μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας». Η φράση αυτή, δεν αρκεί από μόνη της για να αποδώσει με ασφάλεια την πατρότητα των κωνικών τομών στον Μέναιχμο. Αντίθετα, θεωρούμε, ότι η ίδια αυτή φράση του Ερατοσθένη, όπως περιέχεται σε ένα επίγραμμα χαραγμένο σε μια μαρμάρινη πλάκα στο ναό του Πτολεμαίου στην Αλεξάνδρεια, σε συνδυασμό με τη λύση του «Δηλίου» προβλήματος με τη χρησιμοποίηση κωνικών τομών, την οποία παραθέτει ο σχολιαστής Ευτόκιος (530 μ.Χ) και αποδίδει στον Μέναιχμο, μας επιτρέπουν, με πολύ μεγαλύτερη ασφάλεια, να αποδώσουμε τη λύση αυτή, που γίνεται με τη μέθοδο της γεωμετρικής ανάλυσης, στον Μέναιχμο.

7.2.1. Ένα παράδειγμα προευκλείδειας γεωμετρικής ανάλυσης από τον Μέναιχμο

Αυτό το μεμονωμένο δείγμα γεωμετρικής ανάλυσης, που αποδίδεται στον Μέναιχμο από τον Ευτόκιο αλλά και από τα μέχρι τώρα στοιχεία της ιστορικής έρευνας, θα αποτελέσει το πρώτο μιας σειράς επιχειρημάτων, που στηρίζουν τη θέσης μας για συνέχεια της μεθόδου από την κλασική εποχή μέχρι τον Πάππο. Ο Πάππος δεν αναφέρει αυτό το παράδειγμα πουθενά στο έργο του, ενώ αναφέρεται σε αναλύσεις του Ευκλείδη και του Απολλώνιου. Το δείγμα αυτό της γεωμετρικής ανάλυσης του Μέναιχμου, ανήκει στην προευκλείδεια γεωμετρία (4^{ος} π.Χ αιώνας), αφορά την επίλυση του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου («Δήλιο» πρόβλημα), με την αναγωγή του στην εύρεση δύο μέσων αναλόγων. Μπορεί η μοναδική μορφή με την οποία φτάνει σε εμάς σήμερα αυτό το πρόβλημα να είναι μέσα από τα κείμενα του σχολιαστή Ευτόκιου, δηλαδή του 6^{ο} μ.Χ. αιώνα, το περιεχόμενο όμως, ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί η μέθοδος της ανάλυσης και η ορολογία «δοθέντων»-«δεδομένων» που χρησιμοποιείται σε αυτό, δεν μας αφήνουν καμία αμφιβολία ότι έχει νόημα να συζητηθεί ως υλικό του 4^{ου} π.Χ. αιώνα. Επίσης, το παράδειγμα αυτό, επιβεβαιώνει, όπως θα φανεί στη συνέχεια, την ερμηνεία μας για τη γεωμετρική ανάλυση και επεκτείνει χρονικά το πεδίο εφαρμογής και λειτουργίας της. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Knorr (1986, 75-76), είναι παραδείγματα όπως αυτό, που του επιτρέπουν να δηλώσει: «Πραγματικά το πεδίο της ανάλυσης είχε προοδεύσει επαρκώς γύρω στα μέσα του 4^{ου} αιώνα π. Χ., ώστε ορισμένα ειδικά χαρακτηριστικά της λογικής δομής της ανάλυσης άρχισαν να έλκουν την προσοχή των φιλοσόφων.»

Από τον Ευτόκιο, αποδίδονται στον Μέναιχμο, δύο παραλλαγές της λύσης του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου με τη μέθοδο της γεωμετρικής ανάλυσης και τη χρήση κωνικών τομών. Στη μια παραλλαγή, η λύση προκύπτει ως σημείο τομής μιας παραβολής («ορθογωνίου κώνου τομή» για τον Μέναιχμο) και μιας υπερβολής («αμβλυγωνίου κώνου τομής»), ενώ στην άλλη, η λύση προκύπτει ως σημείο τομής δύο παραβολών. Με σύγχρονο συμβολισμό οι δύο παραλλαγές αντιστοιχούν στα συστήματα των εξισώσεων: 1) $\chi^2=\alpha\psi$ και $\chi\psi=\alpha\beta$ και 2) $\chi^2=\alpha\psi$ και $\psi^2=\beta\chi$. Αυτή τη δεύτερη παραλλαγή, θα παραθέσουμε στη συνέχεια[2] όπως φτάνει σε μας σήμερα μέσα από τα κείμενα του Ευτόκιου.[3]

Έστω οι δύο δοθείσες άνισες ευθείες οι ΑΒ, ΒΓ· πρέπει να βρεθούν δύο μέσες ανάλογοι των ΑΒ, ΒΓ.



[2] Χωρισμένη σε στάδια, σύμφωνα με την ερμηνεία μας για τη γεωμετρική ανάλυση.

[3] Ευτόκιος, σχόλια στο βιβλίο του Αρχιμήδη *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* (TLG 82.2 – 84.7): Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ Α, Ε· δεῖ δὴ τῶν Α, Ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ γεγονέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ ΔΒ, ΒΕ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως τὴν ΒΔ πρὸς ΒΕ καὶ τὴν ΒΕ πρὸς ΒΑ, καὶ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ ΔΖ, ΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΒΕ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τουτέστι τῆς ΕΖ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ, τὸ Ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν ΒΕ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΒΕ πρὸς ΒΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΒΔ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΒ, τουτέστι τῆς ΔΖ· τὸ Ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν ΒΔ. ἧπται δὲ καὶ ἑτέρας δοθείσης τῆς περὶ τὴν ΒΕ· δοθὲν ἄρα τὸ Ζ. καὶ κάθετοι αἱ ΖΔ, ΖΕ· δοθέντα ἄρα τὰ Δ, Ε. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐ θεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ ἄπειρον ἀπὸ τοῦ Β, καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν ΒΕ παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν ΒΕ δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν ΒΓ. πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν ΔΒ παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν ΑΒ· τεμοῦσιν δὴ ἀλλήλας αἱ παραβολαί. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΔ, ΖΕ. ἐπεὶ οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ΖΕ, τουτέστιν ἡ ΔΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ 84 ΒΔ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ. πάλιν, ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ΖΔ, τουτέστιν ἡ ΕΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΒ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΒΕ πρὸς ΒΑ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ἡ ΒΔ πρὸς ΒΕ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Ανάλυση

α) Υποθετικό μέρος:

Έστω οι δύο δοθείσες ευθείες κάθετες μεταξύ τους οι ΑΒ, ΒΓ, και ας έχουν γίνει μέσες [ανάλογοι] αυτών οι ΔΒ, ΒΕ, ώστε να είναι όπως η ΓΒ προς τη ΒΔ, έτσι η ΒΔ προς τη ΒΕ και η ΒΕ προς τη ΒΑ. Και ας έχουν αχθεί κάθετες οι ΔΖ και ΖΕ [από τα άκρα των ΒΔ και ΒΕ αντίστοιχα]. Επειδή λοιπόν είναι όπως η ΓΒ προς τη ΒΔ η ΔΒ προς ΒΕ, άρα το [ορθογώνιο] υπό ΓΒΕ, δηλαδή το υπό της δοθείσης [της ΓΒ] και της ΒΕ, είναι ίσο με το [τετράγωνο] της ΒΔ, δηλαδή της ΕΖ. Επειδή λοιπόν το [ορθογώνιο] υπό της δοθείσης [ΒΓ] και της ΒΕ είναι ίσο με το [τετράγωνο] της ΕΖ, άρα το Ζ βρίσκεται σε παραβολή που έχει άξονα τη ΒΕ. Πάλι επειδή είναι, όπως η ΑΒ προς τη ΒΕ, η ΒΕ προς τη ΒΔ, το [ορθογώνιο] υπό ΑΒΔ, δηλαδή το υπό της δοθείσης [ΑΒ] και της ΒΔ, είναι ίσο με το [τετράγωνο] της ΕΒ, δηλαδή της ΔΖ· άρα το Ζ βρίσκεται σε παραβολή με άξονα τη ΒΔ.

β) Βεβαιωτικό μέρος:

Έχει βρεθεί όμως και σε άλλη δοθείσα [παραβολή] αυτήν περί την ΒΕ· άρα είναι δοθέν [ως προς τη θέση] το Ζ [αφού προκύπτει ως τομή δύο δοθεισών γραμμών]. Και οι ΖΔ, ΖΕ είναι κάθετες [στις δοθείσες από την υπόθεση επίσης κάθετες ΑΒ, ΒΓ και τις προεκτάσεις τους]. Άρα είναι δοθέντα τα Δ, Ε [από την ίδια πρόταση· δοθέν όμως ήταν και το Β, ως τομή των δοθέντων από την υπόθεση ΑΒ και ΒΓ, άρα τα τμήματα ΔΒ και ΒΕ είναι δοθέντα πλέον ως προς το μέγεθος αφού τα άκρα τους είναι δοθέντα].

Σύνθεση

α) Κατασκευή:

Θα συντεθεί λοιπόν κατ' αυτό τον τρόπο· ας είναι οι δύο δοθείσες ευθείες ΑΒ, ΒΓ κάθετες μεταξύ τους και ας έχουν προεκταθεί επ' άπειρον προς το Β, και ας έχει γραφεί παραβολή γύρω από άξονα την ΒΕ, ώστε τα τετράγωνα των καθέτων στη ΒΕ να είναι ίσα με το γινόμενο των τμημάτων πάνω στη ΒΓ (δηλ. με σύγχρονη ορολογία να κατασκευαστεί παραβολή με παράμετρο τη ΓΒ, με άλλα λόγια να ισχύει $ΓΒ\times ΒΕ= ΕΖ^2$). Πάλι ας έχει γραφεί παραβολή γύρω από άξονα την ΔΒ, ώστε τα τετράγωνα των καθέτων να είναι ίσα με το γινόμενο των καθέτων πάνω στην ΑΒ (δηλ. να κατασκευαστεί παραβολή με παράμετρο ΑΒ, με άλλα λόγια να ισχύει $ΑΒ\times ΒΔ$

$=ΔΖ^2$)· θα τέμνουν λοιπόν η μια την άλλη οι παραβολές. Ας τέμνονται στο Ζ, και από του Ζ ας έχουν αχθεί κάθετες οι ΖΔ και ΔΕ.

β) Απόδειξη:

Επειδή λοιπόν σε παραβολή η ΖΕ έχει αχθεί κάθετη, δηλαδή η ΔΒ, άρα το [ορθογώνιο] ΓΒΕ είναι ίσο με το [τετράγωνο] της ΒΔ· άρα είναι όπως η ΓΒ προς τη ΒΔ, η ΔΒ προς τη ΒΕ. Πάλι επειδή σε παραβολή έχει αχθεί κάθετη η ΖΔ, δηλαδή η ΕΒ, το [ορθογώνιο] άρα ΔΒΑ είναι ίσο με το [τετράγωνο] της ΕΒ· άρα είναι όπως η ΔΒ προς τη ΒΕ, η ΒΕ προς τη ΒΑ. Αλλά όπως είναι η ΔΒ προς τη ΒΕ έτσι είναι η ΓΒ προς τη ΒΔ· και όπως άρα η ΓΒ προς τη ΒΔ, η ΒΔ προς τη ΒΕ και η ΕΒ προς τη ΒΑ· αυτό ακριβώς το οποίο έπρεπε να βρεθεί.

Ανάπτυξη του υποθετικού μέρους της ανάλυσης. Το υποθετικό μέρος της ανάλυσης του Μέναιχμου, με τη βοήθεια του σύγχρονου συμβολισμού αναφέρει: Έστω ότι έχει γίνει το ζητούμενο. Ως πρώτο βήμα του υποθετικού μέρους, δηλαδή, και στην ανάλυση του Μέναιχμου υποτίθεται ότι έχει γίνει το ζητούμενο. Στην προκειμένη περίπτωση αυτό σημαίνει ότι έχουν βρεθεί οι μέσες ανάλογοι δύο δοθέντων ευθυγράμμων τμημάτων των ΑΒ και ΒΓ (που λαμβάνονται κάθετα μεταξύ τους) και αυτές είναι συγκεκριμένα οι ΔΒ και ΒΕ. Με άλλα λόγια, όπως θα λέγαμε σήμερα, ισχύουν οι αναλογίες ΒΓ:ΒΔ=ΒΔ:ΒΕ=ΒΕ:ΑΒ. Επίσης, οι ΒΔ και ΒΕ θεωρούνται ως τοποθετημένες στις προεκτάσεις αντίστοιχα των ΑΒ και ΓΒ, που σημαίνει ότι από τα άκρα τους μπορούν υποθετικά να αχθούν οι κάθετες στους δύο άξονες, που θα τέμνονται σε ένα σημείο Ζ. Αυτό αποτελεί ένα ακόμη υποθετικό βήμα που έχει ως αποτέλεσμα τις ΔΖ και ΕΖ. Με τη βοήθεια αυτών των δύο τελευταίων υποθετικά κατασκευασμένων ευθυγράμμων τμημάτων και των δύο πρώτων όρων της παραπάνω αναλογίας φτάνουμε στην ισότητα $ΓΒ·ΒΕ=ΔΒ^2$. Η ΔΒ όμως στο υποθετικά κατασκευασμένο σχήμα είναι ίση με την ΕΖ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Κατά συνέπεια, φτάνουμε στην ισότητα $ΓΒ·ΒΕ = ΕΖ^2$. Σχέση από την οποία ο Μέναιχμος συνάγει ότι το Ζ άπτεται παραβολής με άξονα την ΒΕ. Ένα πολύ σημαντικό νοητικό άλμα που αφορά τη δομή του προβλήματος. Στη σύγχρονη γλώσσα των μαθηματικών θα αποδίδαμε την τελευταία ισότητα $ΓΒ·ΒΕ = ΕΖ^2$, την οποία περιγράφει ο Μέναιχμος, με μια εξίσωση της μορφής $2ρχ= ψ^2$, όπου το ΓΒ=2ρ είναι η παράμετρος της παραβολής. Όμως το ΒΓ είναι «δοθέν» από το πρόβλημα, όπως «δοθείς» είναι ως προς τη θέση του και ο άξονας ΒΕ της παραβολής, αφού αποτελεί την προέκταση του «δοθέντος» τμήματος ΒΓ. Ο Μέναιχμος στη συνέχεια, εργαζόμενος με ανάλογο τρόπο, συνάγει ότι το Ζ άπτεται και άλλης παραβολής με άξονα τη ΒΔ αυτή τη φορά. Πράγματι, με τη βοήθεια των δύο τελευταίων όρων της αρχικής αναλογίας (αντεστραμμένων), φτάνουμε στην ισότητα $ΑΒ \cdot ΒΔ = ΒΕ^2$. Η ΒΕ όμως, πάλι από το υποθετικά κατασκευασμένο σχήμα, είναι ίση με τη ΔΖ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Κατά συνέπεια φτάνουμε στην ισότητα $ΑΒ \cdot ΒΔ = ΔΖ^2$. Αυτή η ισότητα στη σύγχρονη γλώσσα των μαθηματικών μπορεί να αποδοθεί με μια εξίσωση της μορφής $2ρψ=χ^2$, όπου το ΑΒ=2ρ είναι η παράμετρος της παραβολής που είναι «δοθείσα» από το πρόβλημα. Επίσης «δοθείς» είναι, ως προς τη θέση του και ο άξονας ΒΔ της παραβολής, αφού αποτελεί την προέκταση του «δοθέντος» τμήματος ΑΒ. Στο σημείο αυτό, θεωρούμε ότι τελειώνει το υποθετικό μέρος της ανάλυσης του Μεναίχμου. Αυτό το μέρος της ανάλυσης, είχε ως στόχο να αποκαλύψει τη δομή του προβλήματος, πράγμα που έκανε βρίσκοντας ότι η θέση του σημείου Ζ (που μπορεί να καθοριστεί με δυνητική αναγκαιότητα όπως θα βεβαιώσει παρακάτω), *μπορεί* να λύσει το πρόβλημα.

Ανάπτυξη του βεβαιωτικού μέρους της ανάλυσης. Το βεβαιωτικό μέρος της συγκεκριμένης ανάλυσης, είναι πολύ περιορισμένο σε έκταση. Επιπλέον, δεν είναι με τόσο σαφή τρόπο διαχωρισμένο από το υποθετικό μέρος, με τη χρήση της ορολογίας «δοθέν»-«δεδομένον», όπως συμβαίνει σε άλλες αναλύσεις που ακολουθούν χρονικά. Αυτό φανερώνεται τόσο από την εμφάνιση του όρου «δοθείσα»[4] τρεις φορές σε αυτό που ονομάσαμε υποθετικό μέρος της ανάλυσης όσο και των εκφράσεων «τὸ Ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν ΒΕ.» και «τὸ Ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν ΒΔ» οι οποίες θα μπορούσαμε να πούμε ότι δηλώνουν περιφραστικά το γεγονός ότι οι δύο παραβολές που περιγράφουν είναι «δοθείσες». Αυτές ακριβώς τις δύο τελευταίες εκφράσεις, επικαλείται ο Μέναιχμος για να ξεκινήσει αυτό που ονομάσαμε βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης. Αν και θα μπορούσε να βεβαιώσει αναλυτικά το γιατί οι δύο παραβολές είναι «δοθείσες» με βάση τα «δοθέντα» (ως προς το μέγεθος και τη θέση) ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΒΓ, δεν

[4] Ενός όρου που έχουμε εξηγήσει ότι αφορά κατεξοχήν το βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης.

το κάνει ίσως γιατί το έκανε φανερό μόλις προηγουμένως στο υποθετικό μέρος και επιπλέον έχει την πεποίθηση ότι απευθύνεται σε συναδέλφους ερευνητές. Θα είναι περισσότερο αναλυτικός όταν θα το περιγράψει παρακάτω στη σύνθεση που απευθύνεται σε ευρύτερο κοινό. Αρχίζει λοιπόν το βεβαιωτικό μέρος, με την έκφραση «ἧπται δὲ καὶ ἑτέρας δοθείσης [παραβολής] τῆς περὶ τὴν ΒΕ·». Γεγονός που επιβεβαιώνει τη θέση μας, ότι ο Μέναιχμος θεωρεί «δοθείσα» τόσο την παραβολή με την οποία κατέληξε το υποθετικό μέρος, όσο και την άλλη που προηγήθηκε με άξονα την ΒΕ και τώρα την ονομάζει «δοθείσα». Έτσι, έχοντας τις δύο παραβολές «δοθείσες», που σημαίνει ότι μπορεί να τις κατασκευάσει με δυνητική αναγκαιότητα από τη στιγμή που είναι «δοθέντα» από την υπόθεση τα ΑΒ και ΒΓ (ως προς το μέγεθος και τη θέση), συμπεραίνει ότι είναι «δοθέν» και το σημείο στο οποίο αυτές οι δύο παραβολές τέμνονται, δηλαδή το Ζ. Με άλλα λόγια, και η θέση του σημείου Ζ προκύπτει πλέον με δυνητική αναγκαιότητα από τα προηγούμενα «δοθέντα». Η πρόταση που φαίνεται να χρησιμοποιεί ο Μέναιχμος για να φτάσει με δυνητική αναγκαιότητα στη θέση του σημείου τομής δύο γραμμών, που επίσης προκύπτουν με δυνητική αναγκαιότητα, πρέπει να είναι αναλόγου περιεχομένου με την πρόταση 25 των *Δεδομένων* του Ευκλείδη: «η τομή δύο δεδομένων γραμμών είναι σημείο δεδομένο ως προς τη θέση»[5]. Επίσης οι κάθετες ΖΔ και ΖΕ από το «δοθέν» σημείο Ζ στις «δοθείσες» ως προς τη θέση ευθείες ΑΒ και ΒΓ μπορούν να κατασκευαστούν με δυνητική αναγκαιότητα. Πράγμα που σημαίνει, ότι και τα σημεία τομής τους με τις ευθείες προς τις οποίες κατασκευάζονται ως κάθετες, μπορούν να βρεθούν με δυνητική αναγκαιότητα ως προς τη θέση τους. Με άλλα λόγια, τα σημεία Δ και Ε είναι «δοθέντα» ως προς τη θέση τους. Σε αυτό το σημείο σταματά η αναλυτική διαδικασία για τον Μέναιχμο. Θα περίμενε ίσως κανείς η κατάληξη του βεβαιωτικού μέρους που σημαίνει και το τέλος της αναλυτικής διαδικασίας να είναι η δυνητική αναγκαιότητα του μεγέθους των ΔΒ και ΔΕ. Αυτή όμως η δυνητική αναγκαιότητα του μεγέθους των δύο ευθυγράμμων τμημάτων, που είναι οι μέσες ανάλογοι, μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει ήδη εξασφαλιστεί, αφού οι θέσεις των άκρων αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων βεβαιώθηκε η «δυνατότητα» να βρεθούν (με δυνητική αναγκαιότητα), όπως φάνηκε στην πορεία του βεβαιωτικού μέρους. Όπως συζητήσαμε και στο ανάλογο σημείο από το παράδειγμα του Πάππου, ο Μέναιχμος με την ανάλυσή του απευθύνεται σε

[5] Τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη βέβαια, δεν έχουν ακόμη γραφεί όταν γράφει ο Μέναιχμος, ο οποίος χρονικά προηγείται του Ευκλείδη.

συναδέλφους ερευνητές, οι οποίοι είναι σε θέση να αντιληφθούν ότι η ανάλυση είναι πλήρης και με το τέλος της έχει εξασφαλιστεί η δυνητική αναγκαιότητα του ζητουμένου. Με άλλα λόγια, βεβαιώθηκε με πληρότητα για τους ερευνητές, μέσα από μια σειρά έγκυρων συμπερασμών, το γεγονός ότι, η λύση του προβλήματος μπορεί να προκύψει με δυνητική αναγκαιότητα χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τα δεδομένα του προβλήματος.

Παρακάτω στη σύνθεση, ο Μέναιχμος, κατασκευάζει καταρχήν το σχήμα και στη συνέχεια αποδεικνύει διεξοδικά και με όλες τις λεπτομέρειες ότι ΔΒ και ΒΕ αποτελούν λύση του προβλήματος. Η παρουσίαση του αυτή, αφορά το ευρύτερο κοινό που ασχολείται με τα Μαθηματικά και δεν παρουσιάζει κάποια ιδιαιτερότητα ή δυσκολία. Δεν αφορά τον τρόπο με τον οποίο βρέθηκε η πιθανή λύση και βεβαιώθηκε στη συνέχεια ότι *μπορεί*, με δυνητική αναγκαιότητα, να αποτελέσει λύση του προβλήματος, αλλά αυτό που έχει επικρατήσει να ονομάζεται σήμερα «ευκλείδειος τρόπος» παρουσίασης μιας μαθηματικής πρότασης, που είναι πολύ οικείος και κατανοητός σε όλους μας, γι' αυτό και δεν θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με την ανάπτυξή αυτού του μέρους της λύσης του προβλήματος.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της συζήτησης που προηγήθηκε, θεωρούμε ότι από τη σύγκριση του παραδείγματος γεωμετρικής ανάλυσης προβλήματος του Μεναίχμου, που αφορά τον τέταρτο αιώνα π.Χ., με την πρακτική αλλά και τις θεωρητικές περιγραφές του Πάππου που αφορούν τον τέταρτο μ.Χ. αιώνα, γίνεται φανερό το γεγονός ότι η ουσία της μεθόδου και η λογική δομή της παραμένουν αναλλοίωτες στα κείμενα των δύο μαθηματικών. Οι όποιες επιφανειακές διαφορές υπάρχουν ανάμεσά τους θα λέγαμε ότι είναι δικαιολογημένες ακόμη και για δύο ερευνητές της ίδιας εποχής, πόσο μάλλον για κάποιους που απέχουν μεταξύ τους χρονικά περίπου οκτώ αιώνες.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου, θα εξετάσουμε κατά πόσο τα αποσπάσματα γεωμετρικής ανάλυσης από το έργο του Αρχιμήδη, λειτουργούν με τον τρόπο που παρουσιάσαμε στον Πάππο, χρησιμοποιούν δηλαδή, τα ίδια εργαλεία, όπως είναι τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη και ακολουθούν την ορολογία «δοθέντων»–«δεδομένων». Ταυτόχρονα θα εξετάσουμε αν και σε ποιο βαθμό οι θεωρητικές προσεγγίσεις της γεωμετρικής ανάλυσης του Πάππου περιγράφουν την πρακτική του Αρχιμήδη στη γεωμετρική ανάλυση.

7.3. *Αρχιμήδης*

Ο Αρχιμήδης (περ. 287-212 π.Χ.) φέρεται ως συγγραφέας περισσότερων από 30 έργα, από τα οποία σώζονται σήμερα περίπου τα μισά. Τα έργα του, όπως προκύπτει από τους προλόγους που είχε προτάξει σε πολλά από αυτά ο ίδιος, απευθύνονταν σε συναδέλφους του επαγγελματίες μαθηματικούς και μηχανικούς και επομένως απευθύνονταν από τη φύση τους σε ένα περιορισμένο ακροατήριο. Έτσι, η διάσωση των έργων του Αρχιμήδη, ήταν ευθύς εξαρχής εξαιρετικά επισφαλής[6] (Χριστιανίδης 2003, 145). Στο έργο του Αρχιμήδη που έφτασε ως τις μέρες μας, η μέθοδος της γεωμετρικής ανάλυσης εμφανίζεται μόνο στο βιβλίο του *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β΄*.

7.3.1. Παραδείγματα προβληματικής γεωμετρικής ανάλυσης στον Αρχιμήδη

Στο έργο του Αρχιμήδη *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β΄* και συγκεκριμένα στις προτάσεις[7] 1, 3, 4, 5, 6, και 7, ο Αρχιμήδης εφαρμόζει την αναλυτική μέθοδο, με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που ήδη συζητήσαμε στον Πάππο. Αυτές είναι και οι μοναδικές προτάσεις στο έργο του Αρχιμήδη στις οποίες εφαρμόζεται η μέθοδος[8] ή αναφέρεται με ρητό τρόπο[9].

Ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζεται η μέθοδος της ανάλυσης από τον Αρχιμήδη, θα δείξουμε ότι περιλαμβάνει τα ίδια ακριβώς βασικά στοιχεία που αναδείξαμε και συζητήσαμε στην εφαρμογή της μεθόδου από τον Πάππο. Αυτά είναι: η λήψη του ζητουμένου ως σημείου εκκίνησης, τα δύο μέρη στην ανάλυση, που το δεύτερο δια-

---

6 Ανάμεσα σε αυτά που χάθηκαν υπήρχε σύμφωνα με κάποιες πηγές και ένα με τον τίτλο *Δεδομένα*, όπως έχουμε αναφέρει στο πρώτο κεφάλαιο (§ 1.1).

7 Προτάσεις τις οποίες έχουμε χαρακτηρίσει «προβλήματα» σε προηγούμενο κεφάλαιο (§ 1.2.2) και τις έχουμε διακρίνει από τα θεωρήματα του ίδιου βιβλίου με τη βοήθεια της ορολογίας «δοθέντων»-«δεδομένων». Ως «προβλήματα» τις χαρακτηρίζει επίσης ο Panza (1997, 393), ενώ ο Heath (1921, τομ.II, 68), χαρακτηρίζει ως «προβλήματα» τις 1, 3, 5, 6 και 7.

8 Knorr (1986, 170): «Από το σωζόμενο έργο του Αρχιμήδη, μόνο το *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β΄* περιλαμβάνει εφαρμογές της μεθόδου της ανάλυσης και σύνθεσης.»

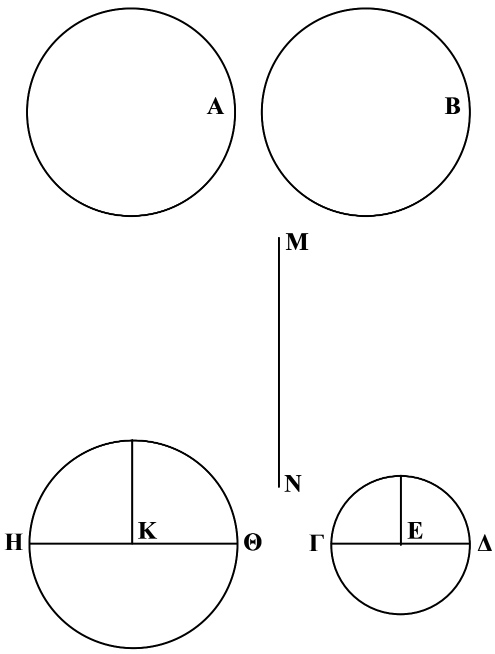
9 Συγκεκριμένα στα πλαίσια της επίλυσης του προβλήματος 4, ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί κάτι το οποίο δεν έχει ακόμη αποδείξει και προαναγγέλλει την «ανάλυση» και «σύνθεσή» του παρακάτω στο έργο του: «ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεταί τε καὶ συντεθήσεται.», υλικό που δυστυχώς δε φτάνει μέσα από το ίδιο το κείμενό του Αρχιμήδη σε εμάς σήμερα αλλά μόνο διαμέσου του σχολιασμού του Ευτόκιου για το πρόβλημα. Παρακάτω στη «σύνθεση» του ίδιου προβλήματος ο Αρχιμήδης αναφέρει: «ὡς ἐδείξαμεν ἐν τῇ ἀναλύσει». Επίσης στο πρόβλημα 6 του ίδιου βιβλίου, ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί τον όρο «ανάλυση», όταν στο στάδιο της «σύνθεσης» και συγκεκριμένα στην κατασκευή αναφέρει: «καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως…»

τυπώνεται και χαρακτηρίζεται από την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον», καθώς και η χρήση άλλων «δεδομένων» που προέρχονται είτε από τα *Δεδομένα*, είτε από αναλύσεις που έχουν προηγηθεί.

Στη συνέχεια, θα παραθέσουμε και θα συζητήσουμε μόνο την ανάλυση του πρώτου προβλήματος του βιβλίου *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* Β’ του Αρχιμήδη, χωρισμένη στο υποθετικό και το βεβαιωτικό μέρος, σύμφωνα με τη δική μας διάκριση και ερμηνεία.

Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β΄, *1^{ο} πρόβλημα*[10]

Κώνου δοθέντος ή κυλίνδρου να βρεθεί σφαίρα ίση προς τον κώνο ή τον κύλινδρο.



[10] Αρχιμήδης, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β΄* (TLG 1.102.8-103.14): Κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου σφαῖραν εὑρεῖν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ ἴσην. Ἔστω διδόμενος κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ Α καὶ τῷ Α ἴση ἡ Β σφαῖρα, καὶ κείσθω τοῦ Α κώνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος ὁ ΓΖΔ, τῆς δὲ Β σφαίρας ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΗΘ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΚΛ ἴσος τῇ διαμέτρῳ τῆς Β σφαίρας· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε 1.103 κύλινρδος τῷ Κ κυλίνδρῳ [τῶν δὲ ἴσων κυλίνδρων ἀντι πεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]· ὡς ἄρα ὁ Ε κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΕΖ. Ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΗΘ [ὁ γὰρ ἡμιόλιος κύλινδρος τῆς σφαίρας ἴσον ἔχει τὸν ἄξονα τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, καὶ ὁ Κ κύκλος μέγιστός ἐστι τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ]· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἔστω τῷ ἀπὸ ΗΘ ἴσον τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΜΝ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΜΝ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, τουτέστιν ἡ ΗΘ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΜΝ καὶ ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΕΖ. Καί ἐστιν δοθεῖσα ἑκατέρα τῶν ΓΔ, ΕΖ· δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΓΔ, ΕΖ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΗΘ, ΜΝ· δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΜΝ.

Ανάλυση

α) Υποθετικό μέρος:

Έστω διδόμενος κώνος ή κύλινδρος ο Α και προς τον Α ίση η Β σφαίρα και έστω ο κύλινδρος ΓΔΖ [Ε] ίσος με τα 3/2 του Α κώνου ή κυλίνδρου και έστω κύλινδρος [Κ] ίσος με τα 3/2 της σφαίρας Β, του οποίου βάση είναι ο περί την διάμετρο ΗΘ κύκλος, ύψος δε το ΚΛ ίσο με τη διάμετρο της σφαίρας Β· άρα ο κύλινδρος Ε είναι ίσος προς τον κύλινδρο Κ <των δε ίσων κυλίνδρων οι βάσεις είναι αντιστρόφως ανάλογοι των υψών> [από *Στοιχ.* XII 15]· άρα όπως είναι ο κύκλος Ε προς τον κύκλο Κ, δηλαδή όπως είναι το [τετράγωνο] της ΓΔ προς το [τετράγωνο] της ΗΘ [*Στοιχ.* XII 2], έτσι είναι η ΚΛ προς την ΕΖ. Είναι δε η ΚΛ ίση με την ΗΘ <γιατί ο κύλινδρος, ο οποίος είναι τα 3/2 της σφαίρας έχει ύψος ίσο με τη διάμετρο της σφαίρας και ο κύκλος Κ είναι μέγιστος κύκλος της σφαίρας>· άρα είναι $ΓΔ^2 : ΗΘ^2 = ΗΘ : ΕΖ$. Έστω $ΗΘ^2 = ΓΔ \times ΜΝ$· άρα είναι $ΓΔ : ΜΝ = ΓΔ^2 : ΗΘ^2$, δηλαδή $ΗΘ : ΕΖ$, και εναλλάξ $ΓΔ: ΜΝ = ΗΘ : ΜΝ = ΜΝ : ΕΖ$.

β) Βεβαιωτικό μέρος:

Και είναι «δοθείσα» καθεμιά των ΓΔ, ΕΖ·

δύο άρα «δοθεισών» ευθειών, των ΓΔ, ΕΖ δύο μέσες ανάλογοι είναι οι ΗΘ, ΜΝ·

άρα καθεμιά από τις ΗΘ, ΜΝ είναι «δοθείσα».

Το υποθετικό μέρος του πρώτου προβλήματος, καταλήγει σε μια σχέση, από την οποία ο Αρχιμήδης θεωρεί ότι μπορεί να ξεκινήσει η λύση του προβλήματος («ομολογούμενον» σύμφωνα με τον Πάππο): $ΓΔ: ΜΝ = ΗΘ : ΜΝ = ΜΝ : ΕΖ$. Η σχέση αυτή, απαιτεί την εύρεση των δύο μέσων αναλόγων. Με άλλα λόγια, ο Αρχιμήδης, καταφέρνει να ανάγει το αρχικό πρόβλημα στο πρόβλημα της εύρεσης των δύο μέσων αναλόγων. Το υποθετικό μέρος δεν θα μπορούσε να τελειώσει εδώ, αν ο Αρχιμήδης δεν θεωρούσε την εύρεση των δύο μέσων αναλόγων ως κάτι «δεδομένον». Με άλλα λόγια, αν δεν θεωρούσε ότι *μπορούν* να γίνουν «δοθείσες» οι ΗΘ και ΜΝ, όταν τα άλλα δύο ευθύγραμμα τμήματα, που εμφανίζονται στις αναλογίες τα ΓΔ και ΕΖ είναι ήδη «δοθέντα» από την υπόθεση, ή μπορούν να εξασφαλιστούν με δυνητική αναγκαιότητα από αυτήν με στοιχειώδη τρόπο. Πράγματι, από το σημείο της ανάλυσης που αρχίζουν να εμφανίζονται τα «δοθέντα», που εμείς θεωρούμε ότι αρχίζει το βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης, ο Αρχιμήδης βεβαιώνει καταρχήν ότι είναι «δοθέντα» τα δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΕΖ, που εμφανίζονται στις αναλογίες, των οποίων τα ζητούμενα τμήματα ΗΘ και ΜΝ θα αποτελέσουν τις μέσες αναλόγους. Είναι «δοθέντα» προφανώς, γιατί, *μπορεί* να κατασκευαστεί (με δυνητική αναγκαιότητα), ο «ημιόλιος» κύλινδρος Ε που έχει διάμετρο βάσης ίση με τη διάμετρο βάσης του «δοθέντος» κυλίνδρου Α και ύψος που είναι τα 3/2 του ύψους του Α. Ο Αρχιμήδης συνεχίζει το βεβαιωτικό μέρος, συμπεραίνοντας ότι οι δύο μέσες ανάλογοι των δύο προηγουμένων «δοθέντων» τμημάτων είναι «δοθείσες». Γεγονός, που σημαίνει, ότι ο Αρχιμήδης έχει υπόψη του προηγούμενη ανάλυση, που τον βεβαιώνει ότι οι δύο μέσες ανάλογοι «δοθέντων» ευθυγράμμων τμημάτων είναι «δοθείσες». Με άλλα λόγια, ο Αρχιμήδης, όπως γίνεται φανερό από την πρακτική του, θεωρεί ως «δεδομένα» και στοιχεία που δεν περιέχονται στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη. Αυτό μπορεί να σημαίνει δύο πράγματα. Ή ότι έχει υπάρξει και άλλο έργο με περιεχόμενο ανάλογο των *Δεδομένων,* που δεν σώζεται σήμερα, είτε του ίδιου του Αρχιμήδη, όπως αναφέρεται στις αραβικές πηγές, είτε άλλου γεωμέτρη. Ή απλά, ότι ο Αρχιμήδης, χρησιμοποιεί ως «δεδομένα» ότι έχει «αποδειχθεί» στο παρελθόν με τη μέθοδο της ανάλυσης από τον ίδιο ή από άλλους Όπως είναι για παράδειγμα, η λύση του Μεναίχμου στο πρόβλημα των μέσων αναλόγων, η οποία χρονικά προηγείται και έχει βρεθεί με τη μέθοδο της ανάλυσης.

Το εύλογο ερώτημα, που μπορεί να τεθεί μετά από μια πρώτη ανάγνωση του παραπάνω παραδείγματος γεωμετρικής ανάλυσης, είναι το γιατί το βεβαιωτικό μέρος της συγκεκριμένης ανάλυσης είναι τόσο συνοπτικό. Πως μπορεί, δηλαδή, η εύρεση των δύο μέσων αναλόγων δύο ευθυγράμμων τμημάτων να βεβαιώνει τον ερευνητή για την κατασκευή με δυνητική αναγκαιότητα, σφαίρας ίσης με κύλινδρο ή κώνο; Η απάντηση στο ερώτημα έχει δοθεί ήδη με έμμεσο τρόπο, με τη συζήτηση που μόλις προηγήθηκε, για τη χρήση «δεδομένων» εκτός προβλήματος. που αναφέραμε πριν παραθέσουμε το πρόβλημα, με άλλα λόγια, ο γεωμέτρης - ερευνητής βεβαιώνεται ότι έχοντας ανάγει το πρόβλημα του στο πρόβλημα της εύρεσης δύο μέσων αναλόγων, εκ των οποίων η μια είναι η διάμετρος της ζητούμενης σφαίρας, η εύρεση των δύο μέσων αναλόγων, που έχει επιτευχθεί σε προγενέστερη ανάλυση με δυνητική αναγκαιότητα του εξασφαλίζει με δυνητική αναγκαιότητα το ζητούμενο.

Τα άλλο ερώτημα, που τίθεται επίσης από το πρώτο πρόβλημα, αλλά αφορά και τα υπόλοιπα προβλήματα του βιβλίου και ειδικότερα το $4^{ο}$, είναι κατά πόσο στα «δεδομένα» μπορούν να περιληφθούν και κωνικές τομές. Από το βεβαιωτικό μέρος του πρώτου προβλήματος, μπορούμε να θεωρήσουμε πιθανό το γεγονός να αντιλαμβάνεται ο Αρχιμήδης και να χρησιμοποιεί αναλύσεις που περιλαμβάνουν κωνικές τομές, ως «δεδομένα». Ο Knorr (1986, 196), συζητώντας αυτό ακριβώς το ερώτημα, καταλήγει ότι ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί επιδέξια κωνικές τομές στο *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β΄*, αφού προηγουμένως (σ. 170) έχει συζητήσει κάποια από τα προβλήματα του ίδιου βιβλίου του Αρχιμήδη, στην ενότητα με τίτλο «Επίλυση προβλημάτων με κωνικές τομές». Οι Berggren & Van Brummelen (2000, 11) στην ίδια κατεύθυνση, σημειώνουν χαρακτηριστικά ότι ενώ:

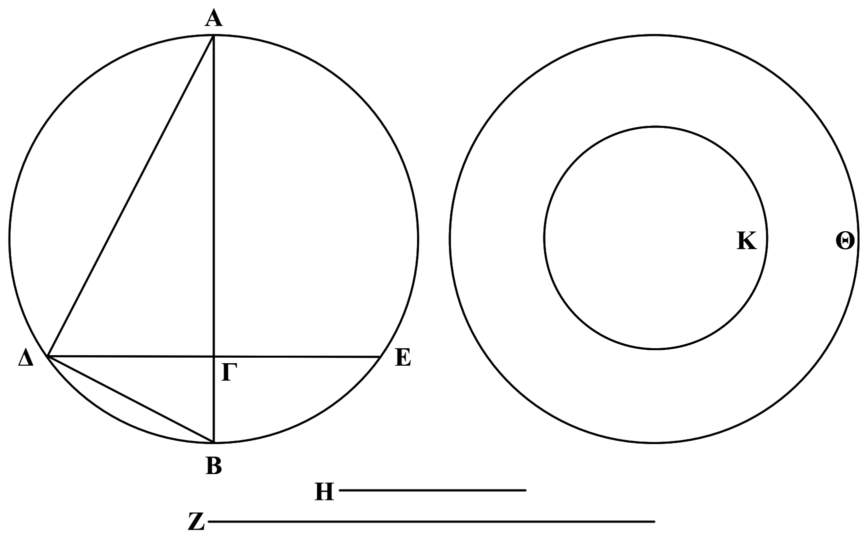
> Τα *Δεδομένα* περιορίζονται σε Ευκλείδεια εργαλεία, το παράδειγμα που αναλύσαμε, της διαίρεσης ενός ευθυγράμμου τμήματος [*Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β΄*, 4] από τον Αρχιμήδη, δείχνει φανερά πως τα επιχειρήματα με «δεδομένα» επεκτάθηκαν και περιέλαβαν κωνικές τομές.

Δηλαδή, θα πρέπει να θεωρούμε στο εξής ως πιθανότατη τη χρησιμοποίηση κωνικών τομών στα πλαίσια της ανάλυσης, ως «δεδομένων» στοιχείων, εκτός των Ευκλείδειων *Δεδομένων*.

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα 3 από το *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β΄*, που είναι αντιπροσωπευτικό του τρόπου με τον οποίο λειτουργούν και τα υπόλοιπα προβλήματα του ίδιου βιβλίου και σχετικά πιο σύντομο από άλλα. Η συζήτησή μας, θα εστιαστεί και σε αυτό το πρόβλημα, στο υποθετικό και το βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης, τα οποία και παρουσιάζουν τη μεγαλύτερη δυσκολία κατανόησης του τρόπου με τον οποίο λειτουργούν, σε σχέση με αυτά της «κατασκευής» και της «απόδειξης» που περιλαμβάνονται στη σύνθεση.

Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β΄, *3ο πρόβλημα* [11]

Τρίτο πρόβλημα ήταν το εξής· η δοθείσα σφαίρα να τμηθεί δι' επιπέδου, έτσι ώστε οι επιφάνειες των τμημάτων [χωρίς τη βάση τους] να έχουν λόγο τον αυτό προς τον δοθέντα.



Ανάλυση

α) Υποθετικό μέρος:

Ας έχει γίνει [δηλαδή ας έχει τμηθεί η σφαίρα από επίπεδο σε δοθέντα λόγο]

[11] Αρχιμήδης, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β΄* (TLG 1.109.14-110.20): Τρίτον ἦν πρόβλημα τόδε· Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὅπως αἱ τῶν τμημάτων ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσιν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. Γεγονέτω, καὶ ἔστω τῆς σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ ΑΔΒΕ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθόν, καὶ ποιείτω τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ ΑΔΒΕ κύκλῳ τομὴν τὴν ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΒΔ. Ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ΔΑΕ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΔΒΕ τμήματος, ἀλλὰ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΑΕ τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΔ, τῇ δὲ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΒΕ τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΔΒ, ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστιν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, λόγος ἄρα τῆς ΑΓ πρὸς ΓΒ δοθείς· ὥστε δοθέν ἐστι τὸ Γ σημεῖον. 1.110 Καί ἐστι τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ· θέσει ἄρα καὶ τὸ διὰ τῆς ΔΕ ἐπίπεδον.
Συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΔΕ καὶ διάμετρος ἡ ΑΒ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς Ζ πρὸς Η, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΑΓ πρὸς ΒΓ, οὕτως τὴν Ζ πρὸς Η, καὶ διὰ τοῦ Γ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ σφαῖρα πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐκκείσθωσαν δύο κύκλοι οἱ Θ, Κ, ὁ μὲν Θ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΑΔ, ὁ δὲ Κ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσην ἔχων τῇ ΔΒ· ἔστιν ἄρα ὁ μὲν Θ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΑΕ τμήματος, ὁ δὲ Κ τοῦ ΔΒΕ τμήματος· τοῦτο γὰρ προδέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ καὶ κάθετος ἡ ΓΔ, ἔστιν, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, τουτέστιν ἡ Ζ πρὸς Η, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Θ κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Κ κύκλου, τουτέστιν ὁ Θ κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΔΑΕ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΔΒΕ τμήματος τῆς σφαίρας.

και έστω μέγιστος κύκλος της σφαίρας ο ΑΔΒΕ,

διάμετρος δε αυτού η ΑΒ και ας έχει αχθεί το προς την ΑΒ κάθετο επίπεδο

και ας σχηματίσει με το επίπεδο του μεγίστου κύκλου ΑΔΒΕ τομή την ΔΕ

και ας αχθούν οι ΑΔ, ΒΔ.

β) Βεβαιωτικό μέρος:

Επειδή λοιπόν είναι [δοθείς] ο λόγος της επιφάνειας του σφαιρικού τμήματος ΔΑΕ προς την επιφάνεια του τμήματος ΔΒΕ [από το πρόβλημα],

αλλά με την επιφάνεια του τμήματος ΔΑΕ είναι ίσος ο κύκλος, του οποίου η ακτίνα είναι ίση με την ΑΔ [*Περί σφαιρ. Α΄*, 43],

προς δε την επιφάνεια του τμήματος ΔΒΕ είναι ίσος ο κύκλος, του οποίου η ακτίνα είναι ίση προς τη ΔΒ [*Περί σφαιρ. Α΄*, 42],

όπως δε είναι οι κύκλοι που ειπώθηκαν, μεταξύ τους, έτσι είναι το [τετράγωνο] της ΑΔ προς το [τετράγωνο] της ΔΒ [*Στοιχ.* XII, 2],

δηλαδή, η ΑΓ προς την ΓΒ [από μετρικές σχέσεις (*Στοιχ.* VI, 8) ξέρω $ΑΔ^2 = ΑΒ\cdot ΑΓ$ (το τετράγωνο της κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή του σε αυτή) και $ΔΒ^2 = ΑΒ\cdot ΓΒ$, άρα διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε το λόγο $ΑΔ^2{:}ΔΒ^2 = ΑΓ{:}ΓΒ$]

άρα ο λόγος της ΑΓ προς τη ΓΒ είναι «δοθείς» [και ίσος με το λόγο των επιφανειών που είναι «δοθείς» από το πρόβλημα,]

ώστε είναι «δοθέν» το σημείο Γ [από *Δεδομ.* 7].

Και η ΔΕ είναι κάθετη προς την ΑΒ [στο Γ]·

Άρα είναι [δοθέν] ως προς τη θέση, το επίπεδο που διέρχεται δια της ΔΕ.

Σύνθεση

α) Κατασκευή:

Θα συντεθεί λοιπόν το πρόβλημα έτσι· έστω σφαίρα της οποίας μέγιστος κύκλος είναι ο ΑΒΔΕ και διάμετρος η ΑΒ και ο δοθείς λόγος [είναι ο λόγος] της Ζ προς την Η και ας τμηθεί η ΑΒ κατά το σημείο Γ, ώστε να είναι η ΑΓ προς τη ΒΓ όπως είναι η Ζ προς την Η [$ΑΓ{:}ΒΓ = Ζ{:}Η$] και ας τμηθεί η σφαίρα δι' επιπέδου που περνάει από το Γ και είναι κάθετο στην ευθεία ΑΒ και έστω κοινή τομή [επιπέδου και μεγίστου κύκλου] η ΔΕ και ας αχθούν οι ΑΔ, ΔΒ και ας ληφθούν δύο κύκλοι οι Θ, Κ, ο μεν Θ που έχει ακτίνα ίση με την ΑΔ, ο δε Κ που έχει ακτίνα ίση με τη ΔΒ·

β) Απόδειξη:

Είναι άρα ο μεν κύκλος Θ ίσος με την επιφάνεια του ΔΑΕ τμήματος [*Περί σφαιρ. Α΄*, 43], ο δε Κ προς την επιφάνεια του ΔΒΕ τμήματος [*Περί σφαιρ. Α΄*, 42]· διότι τούτο έχει αποδειχθεί προηγουμένως εις το πρώτο βιβλίο. Και επειδή η γωνία ΑΔΒ είναι ορθή [*Στοιχ.* ΙΙΙ, 31] και η ΓΔ είναι κάθετη [στην ΑΒ] είναι όπως η ΑΓ προς τη ΓΒ, δηλαδή η Ζ προς την Η, το τετράγωνο της ΑΔ προς το τετράγωνο της ΔΒ, δηλαδή το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου Θ προς το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου Κ, δηλαδή ο κύκλος Θ προς τον κύκλο Κ [*Στοιχ.* ΧΙΙ, 2] δηλαδή η επιφάνεια του σφαιρικού τμήματος ΔΑΕ προς την επιφάνεια του σφαιρικού τμήματος ΔΒΕ.

Τα προβλήματα του έργου *Περί σφαίρας και Κυλίνδρου Β΄*, αναφέρονται σε σφαιρικά χωρία. Για την επίλυσή τους χρησιμοποιούνται προτάσεις, οι οποίες έχουν ήδη αποδειχθεί *στο Περί σφαίρας και κυλίνδρου Α΄*. Προκειμένου να διευκολύνουμε τη συζήτηση της ανάλυσης του προβλήματος που προηγήθηκε, θεωρούμε σκόπιμο να κάνουμε μια παρέκβαση για να παραθέσουμε δύο από τις προτάσεις που εμφανίζονται και χρησιμοποιούνται σε αυτό. Συγκεκριμένα τις προτάσεις 42 και 43 αντίστοιχα:

(42): Η επιφάνεια παντός τμήματος σφαίρας που είναι μικρότερο του ημισφαιρίου, είναι ίση με κύκλο, του οποίου η ακτίνα είναι ίση με την ευθεία που άγεται από την κορυφή του τμήματος μέχρι την περιφέρεια του κύκλου, ο οποίος είναι βάση του σφαιρικού τμήματος … (43): Και αν το τμήμα είναι μεγαλύτερο του ημισφαιρίου, η επιφάνεια αυτού είναι ομοίως ίση με κύκλο, του οποίου η ακτίνα είναι ίση με την ευθεία που άγεται από την κορυφή προς την περιφέρεια του κύκλου, ο οποίος είναι βάση του τμήματος.

Ανάπτυξη του υποθετικού μέρους της ανάλυσης. Το μέρος αυτό της ανάλυσης, όπως εμείς το διακρίνουμε από το ακόλουθο βεβαιωτικό μέρος και το ερμηνεύουμε, είναι αρκετά περιορισμένο, ίσως επειδή το πρόβλημα είναι σχετικά απλό για τον Αρχιμήδη[12]. Κάτι ανάλογο παρατηρούν και οι Berggren & Van Brummelen

---

[12] Αυτό δεν συμβαίνει με όλα τα υποθετικά μέρη των προβλημάτων στα οποία εφαρμόζει τη μέθοδο της ανάλυσης ο Αρχιμήδης. Συγκεκριμένα, στο επόμενο παράδειγμα προβληματικής ανάλυσης που θα παρουσιάσουμε, το υποθετικό μέρος της ανάλυσης έχει μεγαλύτερη έκταση και τα βήματά του είναι περισσότερο φανερά.

(2000, 12), όταν αναφέρουν ότι σε απλούστερες περιπτώσεις το υποθετικό μέρος της ανάλυσης μπορεί να μην είναι καν αναγκαίο. Επίσης, το υποθετικό μέρος της παρούσας ανάλυσης, παρόλο που αρχίζει με τη λήψη του ζητουμένου, στη συνέχεια δεν παρουσιάζει την μορφή που μας είναι γνωστή από τον Πάππο, αλλά περισσότερο μοιάζει με «νοητική κατασκευή» που δεν περιλαμβάνει δικαιολογήσεις για το πέρασμα από το ένα βήμα στο άλλο, είναι όμως προφανές ότι δεν γίνεται στην τύχη αλλά πίσω της υπάρχει μια νοητική επεξεργασία, που ακόμη δεν ανακοινώνεται. Με άλλα λόγια, δεν αναπτύσσεται κάπως περισσότερο προκειμένου να γίνει εμφανής η στόχευσή της που σύμφωνα με τις περιγραφές του Πάππου θα έπρεπε να είναι το «ομολογούμενον». Η σχέση την οποία ο Πάππος θα ονόμαζε «ομολογούμενον», αν υπήρχε εδώ, θα ήταν περίπου η εξής: ο λόγος των σφαιρικών χωρίων ισούται με το λόγο των τμημάτων που χωρίζει το κάθετο επίπεδο στη διάμετρο του μεγίστου κύκλου (ΔΑΕ):(ΔΒΕ) = ΑΓ:ΒΓ πράγμα που εξασφαλίζει τη θέση του Γ πάνω στη διάμετρο. Η σχέση αυτή δεν εμφανίζεται λεκτικά στο κείμενο αλλά θα μπορούσε να την αντιληφθεί κανείς και να τη συμπληρώσει, εν μέρει από τη «νοητική – υποθετική κατασκευή» του καθέτου επιπέδου στη διάμετρο του μέγιστου κύκλου αλλά κυρίως από την υποθετική κατασκευή των ΑΔ και ΔΒ, που όπως γίνεται φανερό από το βεβαιωτικό μέρος που ακολουθεί, οδηγούν τη νόηση του γεωμέτρη – ερευνητή προς τις επιφάνειες των κύκλων που τις έχουν ακτίνες και στη συνέχεια προς το λόγο των τετραγώνων τους που ισούται με τη σειρά του με το λόγο των τμημάτων της διαμέτρου. Η γνώση των προτάσεων που απαιτούνται, προκειμένου να συλλάβει ο γεωμέτρης-ερευνητής αυτά τα υποθετικά βήματα, είναι δεδομένη και ίσως ο Αρχιμήδης θεωρεί περιττό το να γίνει περισσότερο αναλυτικός. Τέλος, όλη αυτή η νοητική κατασκευή έχει υποθετικό χαρακτήρα, όπως οι αντίστοιχες του Πάππου, γιατί γίνεται υπό την αίρεση ότι έχει ληφθεί το ζητούμενο.

Ανάπτυξη του βεβαιωτικού μέρους της ανάλυσης. Από τη στιγμή που στο υποθετικό μέρος της ανάλυσης, ο Αρχιμήδης συνέλαβε τη σκέψη που φανέρωσε στο υποθετικό σχήμα του, ότι δηλαδή, ο προσδιορισμός του λόγου των τμημάτων της διαμέτρου του μεγίστου κύκλου ή αλλιώς του σημείου που τη χωρίζει στο συγκεκριμένο λόγο, είναι μια σχέση[13] από την οποία μπορεί να αρχίσει το βεβαιωτικό μέρος,

[13] Το «ομολογούμενον» σύμφωνα με την ορολογία του Πάππου.

επόμενο βήμα του είναι να εξασφαλίσει γι' αυτήν τον βεβαιωτικό της χαρακτήρα – τη δυνητική αναγκαιότητα. Αυτό το κάνει με τη βοήθεια της ορολογίας των «δοθέντων» – «δεδομένων». Το πρώτο κομμάτι λοιπόν του βεβαιωτικού μέρους της ανάλυσης θα το αφιερώσει (όπως κάνει και ο Πάππος) για να βεβαιώσει στον εαυτό του (λόγον ἑαυτῷ διδόναι) ότι ο λόγος του ΑΓ προς την ΓΒ είναι «δοθείς».

Αρχίζει παραγωγικά τώρα ο Αρχιμήδης, λέγοντας ότι αφού λοιπόν είναι «δοθείς» από το πρόβλημα, ο λόγος της επιφάνειας του σφαιρικού τμήματος ΔΑΕ προς την επιφάνεια του τμήματος ΔΒΕ, αλλά γνωρίζοντας επίσης από την πρόταση Α΄ 43 ότι με την επιφάνεια του τμήματος ΔΑΕ είναι ίσος ο κύκλος, του οποίου η ακτίνα είναι ίση με την ΑΔ, και από την πρόταση Α΄ 42 ότι με την επιφάνεια του τμήματος ΔΒΕ είναι ίσος ο κύκλος, του οποίου η ακτίνα είναι ίση προς τη ΔΒ, όπως και από την πρόταση των *Στοιχείων* XII, 2, ότι ο λόγος των κύκλων που αναφέρθηκαν ισούται με το λόγο των τετραγώνων των ακτίνων τους, συμπεραίνει (από *Στοιχ.* VI, 8), ότι ο λόγος των τετραγώνων των ακτίνων των κύκλων είναι η ΑΓ προς την ΓΒ.[14] Άρα έχει δοθεί τελικά ο *λόγος*, για τον οποίο ο λόγος της ΑΓ προς την ΓΒ έχει πλέον «δυνητική» αναγκαιότητα, άρα είναι «δοθείς».

Κατά συνέπεια είναι «δοθέν» το σημείο Γ (από *Δεδομ. 7*), με άλλα λόγια, και η θέση του Γ προκύπτει από τα προηγούμενα με δυνητική αναγκαιότητα ή αλλιώς έχει δοθεί ο *λόγος* για τη θέση του Γ.

Και η ΔΕ είναι κάθετη προς την ΑΒ στο Γ, δηλαδή υπάρχει και η δυνητική αναγκαιότητα της καθετότητας της ΔΕ στην ΑΒ, η οποία μαζί με τη δυνητική αναγκαιότητα της θέσης του Γ που προηγήθηκε παράγουν τη δυνητική αναγκαιότητα του επιπέδου που περνά από τη ΔΕ ή αλλιώς έχει δοθεί ο *λόγος* για τη θέση του επιπέδου.

Άρα, βάσει των προηγουμένων είναι υποθετικά αναγκαίο («δεδομένον») ως προς τη θέση και το επίπεδο που διέρχεται δια της ΔΕ.

Βλέπουμε δηλαδή τελικά, ότι ο τρόπος με τον οποίο ο Αρχιμήδης στην ανάλυση, αρχικά υποθέτει και στη συνέχεια βεβαιώνεται για το κατά πόσο μπορεί να λυθεί το πρόβλημα μέσα από τη συγκεκριμένη πορεία, πριν αυτή παρουσιαστεί στους άλλους μέσα από τη σύνθεση, είναι ουσιαστικά ο ίδιος με αυτόν που μελετήσαμε και πα-

---

[14] Γιατί από τις μετρικές σχέσεις στο ορθογώνιο (*Στοιχ.* VI, 8) γνωρίζουμε ότι $ΑΔ^2 = ΑΒ·ΑΓ$ (τετράγωνο κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή του σε αυτή) και $ΔΒ^2 = ΑΒ·ΓΒ$, άρα διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε το λόγο $ΑΔ^2 : ΔΒ^2 = ΑΓ:ΔΒ$.

ρουσιάσαμε στον Πάππο. Μπορεί το μέγεθος ή η διεξοδικότητα των βημάτων του υποθετικού ή του βεβαιωτικού μέρους να διαφέρουν από τον ένα ερευνητή στον άλλο, η σειρά όμως είναι η ίδια, όπως και η αναγκαιότητα της ύπαρξης των δύο μερών, η ορολογία «δοθέντων» – «δεδομένων» επίσης καθώς και τα εργαλεία (οι έτοιμες νοητικές πορείες όπως είναι τα *Δεδομένα* ή άλλα «δεδομένα») που χρησιμοποιούν.

Το τέταρτο πρόβλημα του *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β΄*, δεν θα λέγαμε ότι είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ανάλυσης, τουλάχιστον με τον τρόπο που την περιγράφει αλλά και την ασκεί στην πράξη ο Πάππος. Μια πρώτη ανάγνωση της ανάλυσης του τέταρτου προβλήματος, δείχνει ότι αλλάζει τουλάχιστον ο τρόπος της διατύπωσης, αφού εξαρχής πραγματεύεται «δοθέντα» αντικείμενα. Επίσης, δεν είμαστε σε θέση να διακρίνουμε δύο μέρη (υποθετικό – βεβαιωτικό) σε αυτήν την ανάλυση αλλά μάλλον μια προσπάθεια να αναχθεί το πρόβλημα σε κάποιο άλλο («απαγωγή»), του οποίου την ανάλυση ο Αρχιμήδης, αν και υπόσχεται ότι θα παραθέσει στο τέλος της πρότασης, δεν περιλαμβάνει στο κείμενο που φτάνει στις μέρες μας (Σταμάτης, 1970, τόμ. Α΄, μέρος Β, 184). Την ανάλυση όμως αυτού του προβλήματος, όπως την έκανε ο Αρχιμήδης, ισχυρίζεται ότι αποκατέστησε και παραθέτει ο Ευτόκιος (6^{ος} μ.Χ. αι.) στα σχόλια του για το έργο *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* του Αρχιμήδη (Σταμάτης, 1970, τόμ. Α΄, μέρος Α, 66 και TLG, 132, 19 – 136, 14). Σε αυτή την ανάλυση που έφτασε σε εμάς διαμέσου του Ευτόκιου, αν δεχθούμε ότι είναι του Αρχιμήδη, μπορούμε να διακρίνουμε το υποθετικό από το βεβαιωτικό μέρος που είναι διατυπωμένο με την ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον». Επειδή όμως αφενός δεν είμαστε βέβαιοι ότι η ανάλυση αυτή ανήκει στον Αρχιμήδη και αφετέρου όπως είπαμε το 4^{ο} πρόβλημα δεν αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα ανάλυσης, δεν θα ασχοληθούμε περισσότερο με αυτό.

Ένα ακόμη αντιπροσωπευτικό παράδειγμα προβληματικής γεωμετρικής ανάλυσης από τον Αρχιμήδη, είναι η έκτη πρόταση του ίδιου βιβλίου, της οποίας θα παρουσιάσουμε την ανάλυση και τη σύνθεση αλλά θα σχολιάσουμε μόνο την ανάλυση και ειδικότερα το βεβαιωτικό μέρος, που ενδιαφέρει περισσότερο την εργασία μας.

Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β΄, *6ο πρόβλημα* [15]

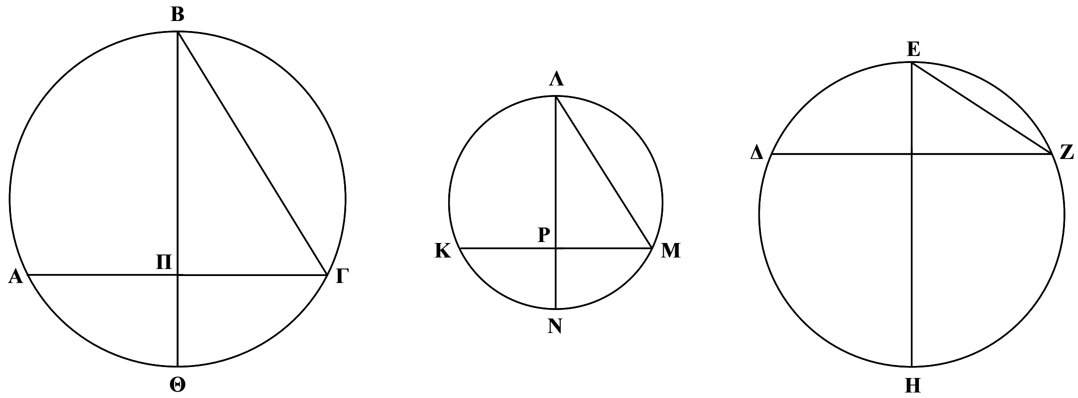
Δοθέντων δύο σφαιρικών τμημάτων, είτε της ίδιας σφαίρας είτε όχι, να βρεθεί σφαιρικό τμήμα, το οποίο να είναι με ένα μεν των δοθέντων όμοιο, η επιφάνειά του δε να είναι ίση με την επιφάνεια του άλλου τμήματος.

---

[15] Αρχιμήδης, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β΄* (TLG 1.118.12-120.23):
Δύο δοθέντων σφαίρας τμημάτων εἴτε τῆς αὐτῆς εἴτε μὴ εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται ἑνὶ μὲν τῶν δοθέντων ὅμοιον, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἕξει ἴσην τῇ τοῦ ἑτέρου τμήματος ἐπιφανείᾳ.

Ἔστω τὰ δοθέντα τμήματα σφαιρικὰ κατὰ τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ περιφερείας, καὶ ἔστω, ᾧ μὲν δεῖ ὅμοιον εὑρεῖν, τὸ κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν, οὗ δὲ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ κατὰ τὴν ΔΕΖ. 1.119 Καὶ γεγενήσθω, καὶ ἔστω τὸ ΚΛΜ τμῆμα τῆς σφαίρας τῷ μὲν ΑΒΓ τμήματι ὅμοιον, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσην ἐχέτω τῇ τοῦ ΔΕΖ τμήματος ἐπιφανείᾳ, καὶ νοείσθω τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν, καὶ δι᾽ αὐτῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω ὀρθὰ πρὸς τὰς τῶν τμημάτων βάσεις, καὶ ἐν μὲν ταῖς σφαίραις τομαὶ ἔστωσαν οἱ ΚΛΜΝ, ΒΑΓΘ, ΕΖΗΔ μέγιστοι κύκλοι, ἐν δὲ ταῖς βάσεσι τῶν τμημάτων αἱ ΚΜ, ΑΓ, ΔΖ εὐθεῖαι, διάμετροι δὲ τῶν σφαιρῶν πρὸς ὀρθὰς οὖσαι ταῖς ΚΜ, ΑΓ, ΔΖ ἔστωσαν αἱ ΛΝ, ΒΘ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΜ, ΒΓ, ΕΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ ΚΛΜ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τῇ τοῦ ΔΕΖ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἄρα ἐστὶν καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΛΜ, τῷ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΕΖ [αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων ἴσαι ἐδείχθησαν κύκλοις, ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν ταῖς ἀπὸ τῶν κορυφῶν τῶν τμημάτων ἐπὶ τὰς βάσεις ἐπιζευγνυούσαις]· ὥστε καὶ ἡ ΜΑ τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν. Ἐπεὶ δὲ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΛΜ τῷ ΑΒΓ τμήματι, ἔστιν, ὡς ἡ ΛΡ πρὸς ΡΝ, ἡ ΒΠ πρὸς ΠΘ· καὶ ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΝΛ πρὸς ΛΡ, οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΒΠ. Ἀλλὰ καί, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΜ, οὕτως ἡ ΒΠ πρὸς ΓΒ [ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα]· ὡς ἄρα ἡ ΝΛ πρὸς ΛΜ, τουτέστι πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΒΓ. Καὶ ἐναλλάξ· λόγος δὲ τῆς ΕΖ πρὸς ΒΓ δοθείς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΛΝ πρὸς ΒΘ δοθείς. Καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ΒΘ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΛΝ· ὥστε ἄρα καὶ ἡ σφαῖρα δοθεῖσά ἐστιν.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω τὰ δοθέντα δύο τμήματα σφαίρας τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ μὲν ΑΒΓ, ᾧ δεῖ ὅμοιον, τὸ δὲ 1.120 ΔΕΖ, οὗ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ, καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως, καὶ πεποιή σθω, ὡς [μὲν] ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΛΝ, καὶ περὶ διάμετρον τὴν ΛΝ κύκλος γεγράφθω, καὶ νοείσθω σφαῖρα, ἧς μέγιστος ἔστω κύκλος ὁ ΛΚΝΜ, καὶ τετμήσθω ἡ ΝΛ κατὰ τὸ Ρ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΘΠ πρὸς ΠΒ, τὴν ΝΡ πρὸς ΡΛ, καὶ διὰ τοῦ Ρ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ ἐπιφάνεια ὀρθῷ πρὸς τὴν ΛΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΜ· ὅμοια ἄρα ἐστὶν τὰ ἐπὶ τῶν ΚΜ, ΑΓ εὐθειῶν τῶν κύκλων τμήματα· ὥστε καὶ τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν ἐστιν ὅμοια. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΠ, οὕτως ἡ ΝΛ πρὸς ΛΡ· καὶ γὰρ τὰ κατὰ διαίρεσιν· ἀλλὰ καί, ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΡΛ πρὸς ΛΜ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΝΛ, ἡ ΒΓ πρὸς ΛΜ. Ἦν δὲ καί, ὣς ἡ ΘΒ πρὸς ΛΝ, ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΛΜ· ὥστε καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΕΖ, ἴσος ἐστὶ τῷ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση 1.120.23 ἐστὶ τῇ ΛΜ. Καὶ ὁ μὲν τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων τὴν ΕΖ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ τμήματος, ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΛΜ, ἴσος ἐστὶ ἐπιφανείᾳ τῇ τοῦ ΚΛΜ τμήματος· τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται· ἴση ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΚΛΜ τμή ματος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ τμήματος τῆς σφαίρας. Καί ἐστιν ὅμοιον τὸ ΚΛΜ τῷ ΑΒΓ.



Ανάλυση

α) Υποθετικό μέρος:

Έστω τα «δοθέντα» σφαιρικά τμήματα κατά τα τόξα ΑΒΓ, ΔΕΖ και έστω εκείνο μεν προς το οποίο πρέπει να βρεθεί όμοιο [το σφαιρικό τμήμα] το κατά το τόξο ΑΒΓ και του οποίου η επιφάνεια να είναι ίση με την επιφάνεια [του σφαιρικού τμήματος] κατά το τόξο ΔΕΖ.

Και έστω ότι έχει γίνει,

και έστω το σφαιρικό τμήμα ΚΛΜ όμοιο μεν στο τμήμα ΑΒΓ, ας έχει δε την επιφάνεια του ίση με την επιφάνεια του ΔΕΖ και

ας *νοηθούν*[16] τα κέντρα των σφαιρών και δι' αυτών ας αχθούν επίπεδα κάθετα προς τις βάσεις των τμημάτων και ας είναι στις μεν σφαίρες τομές οι μέγιστοι κύκλοι, στις δε βάσεις των τμημάτων οι ευθείες ΚΜ, ΑΓ, ΔΖ,

διάμετροι δε των σφαιρών κάθετες προς τις ΚΜ, ΑΓ, ΔΖ, ας είναι οι ΛΝ, ΒΘ, ΕΗ και ας αχθούν οι ΛΜ, ΒΓ, ΕΖ.

Και αφού είναι ίση η επιφάνεια του σφαιρικού τμήματος ΚΛΜ με την επιφάνεια του τμήματος ΔΕΖ, είναι ίσος άρα και ο κύκλος, του οποίου η ακτίνα είναι ίση με τη ΛΜ, με τον κύκλο του οποίου η ακτίνα είναι ίση με την ΕΖ (γιατί οι επιφάνειες των τμημάτων που ειπώθηκαν δείχθηκαν ίσες με κύκλους των οποίων οι ακτίνες είναι ίσες με τις ευθείες που άγονται από τις κορυφές των τμημάτων προς τις βάσεις) [*Περί σφαίρας και κυλίνδρου Α'*, 42-43]·

ώστε και η ΜΛ είναι ίση προς την ΕΖ [*Στοιχ.* XII, 2].

---

[16] Σε αρκετά σημεία ο Αρχιμήδης ζητά να «νοηθούν» κάποια πράγματα. Στο σημείο αυτό, ο όρος έχει ιδιαίτερη αξία αφού έχουμε υποστηρίξει ότι η ανάλυση αφορά κατεξοχήν τη «νόηση» του γεωμέτρη – ερευνητή.

Επειδή δε το ΚΛΜ είναι όμοιο με το ΑΒΓ τμήμα, είναι όπως η ΛΡ:ΡΝ = ΒΠ:ΠΘ.

Και αντιστρέφοντας και προσθέτοντας τους παρονομαστές στους αριθμητές είναι ως η ΝΛ:ΛΡ = ΘΒ:ΒΠ [*Στοιχ.* V, 7 πορ. και V,18].

Αλλά και ως η ΡΛ:ΛΜ = ΒΠ:ΓΒ (διότι τα τρίγωνα είναι όμοια)·

ως άρα είναι η ΝΛ:ΛΜ, δηλαδή ΝΛ:ΕΖ έτσι είναι η ΘΒ:ΒΓ [*Στοιχ.* V, 22, προκύπτει αντιστρέφοντας τη δεύτερη από τις προηγούμενες και διαιρώντας κατά μέλη].

Και εναλλάξ [*Στοιχ.* V, 16 δηλ. ΕΖ:ΒΓ = ΝΛ:ΘΒ. Αυτή η τελευταία σχέση φαίνεται να είναι επαρκής για τον Αρχιμήδη, προκειμένου να ξεκινήσει από αυτή τη λύση του προβλήματος, αυτό δηλαδή που ο Πάππος θα ονόμαζε «ομολογούμενον».]

β) Βεβαιωτικό μέρος:

Είναι όμως «δοθείς» ο λόγος της ΕΖ:ΒΓ·

διότι είναι «δοθείσα» καθεμιά [*Δεδομ.* 1]·

άρα και ο λόγος της ΝΛ προς ΒΘ είναι «δοθείς» [από την ισότητα του «ομολογούμενου»]

και η ΒΘ είναι «δοθείσα» [ως προς το μέγεθος από το πρόβλημα, αφού η σφαίρα στην οποία είναι διάμετρος η ΒΘ είναι «δοθείσα»]

άρα είναι «δοθείσα» και η ΛΝ [*Δεδομ.* 2]

ώστε είναι «δοθείσα» και η σφαίρα [γιατί είναι «δοθείς» ο μέγιστος κύκλος της από *Δεδομ.* ορισμ. 5].

Σύνθεση

α) Κατασκευή: Θα συντεθεί λοιπόν έτσι· έστω τα δύο δοθέντα σφαιρικά τμήματα, τα ΑΒΓ, ΔΕΖ, το μεν ΑΒΓ προς το οποίο πρέπει [το ζητούμενο να είναι] όμοιο, το δε ΔΕΖ προς του οποίου την επιφάνεια να έχει ίση την επιφάνεια [το ζητούμενο] και ας κατασκευαστούν τα ίδια με αυτά της αναλύσεως και ας γίνει ως (μεν) η ΒΓ:ΕΖ = ΒΘ:ΛΝ [κατασκευή 4^{ης} αναλόγου, δηλαδή της ΛΝ] και ας γραφεί κύκλος περί διάμετρο την ΛΝ και ας νοηθεί σφαίρα της οποίας μέγιστος κύκλος έστω ο ΛΚΝΜ, και ας τμηθεί η ΝΛ κατά το σημείο Ρ, ώστε να είναι ως ΘΠ : ΠΒ = ΝΡ : ΡΛ [Ευκλ. VI, 10] και δια του Ρ ας τμηθεί η επιφάνεια δια [επιπέδου] καθέτου προς τη ΛΝ και ας αχθεί η ΛΜ·

β) Απόδειξη: είναι άρα όμοια τα κυκλικά τμήματα επί των ευθειών ΚΜ και ΑΓ· ώστε και τα σφαιρικά τμήματα είναι όμοια. Και επειδή είναι, όπως η ΘΒ:ΒΠ = ΝΛ:ΛΡ διότι έτσι λαμβάνεται δια διαιρέσεως· αλλά και όπως η ΠΒ:ΒΓ = ΡΛ:ΛΜ, και άρα όπως η ΘΒ:ΝΛ = ΒΓ:ΛΜ [*Στοιχ.* V, 9]. Ήταν δε και ως η ΘΒ:ΛΝ = ΒΓ:ΕΖ· είναι άρα ίση η ΕΖ με τη ΛΜ· ώστε και ο κύκλος του οποίου η ακτίνα είναι ίση με την ΕΖ είναι ίσος με τον κύκλο του οποίου η ακτίνα είναι η ΛΜ. Και ο μεν κύκλος ακτίνας ΕΖ είναι ίσος με την επιφάνεια του τμήματος ΔΕΖ, ο δε κύκλος, του οποίου η ακτίνα είναι ίση με τη ΛΜ, είναι ίσος με την επιφάνεια του τμήματος ΚΛΜ· διότι τούτο έχει αποδειχθεί στο πρώτο βιβλίο [*Περί σφαίρας και κυλίνδρου Α΄*, 42-43]· είναι άρα και η επιφάνεια του τμήματος ΚΛΜ ίση προς την επιφάνεια του τμήματος της σφαίρας ΔΕΖ. Και είναι όμοιο το ΚΛΜ με το ΑΒΓ.

Ανάπτυξη του βεβαιωτικού μέρους της ανάλυσης. Παρατηρούμε ότι το βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης σε αυτό το πρόβλημα, είναι αρκετά περιορισμένο και σταματάει αφού επιτευχθεί η δυνητική αναγκαιότητα της σφαίρας, ενώ θα μπορούσε να συνεχίσει παίρνοντας το μέγιστο κύκλο αυτής που έχει διάμετρο τη ΛΝ και να την χωρίσει σε σημείο Ρ, σε λόγο που θα πάρει από το όμοιο σφαιρικό τμήμα με ένα επίπεδο κάθετο προς τη ΛΝ. Πράγματα για τα οποία όμως έχει διαχειριστεί ήδη και δείξει την «δυνητική» τους αναγκαιότητα στο πρόβλημα 3 που προηγήθηκε, έτσι, ο Αρχιμήδης μάλλον θεωρεί ότι δεν χρειάζεται να επαναληφθούν, αφού έχουν υπάρξει ως μέρος ανάλυσης που έχει προηγηθεί. Άλλωστε τα «υλοποιεί» και τα δικαιολογεί επαρκώς στη σύνθεση που ακολουθεί . Το γεγονός ότι με το βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης απαντάει στον εαυτό του και στους άλλους ερευνητές – γεωμέτρες του επιτρέπει να σταματήσει εδώ. Το σημαντικό είναι, ότι και σε αυτό το πρόβλημα, ο Αρχιμήδης κάνει στην ανάλυση τα ίδια βασικά βήματα που είναι: λήψη του ζητουμένου και υποθετικά βήματα μέχρι κάποιου σημείου που θεωρεί ικανό για να ξεκινήσει τη λύση του προβλήματος, στη συνέχεια αφού εξασφαλίσει την «δυνητική» αναγκαιότητα του ικανού, προχωρεί προς την «δυνητική» αναγκαιότητα του ζητουμένου. Θα λέγαμε απλά ότι ο Αρχιμήδης εμφανίζεται φαίνεται να είναι πιο συνοπτικός στις αναλύσεις του από τον Πάππο. Θα εξετάσουμε παρακάτω αν το ίδιο συμβαίνει και με τον Απολλώνιο.

Συνοψίζοντας με τον Αρχιμήδη και τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζει τη μέθοδο της γεωμετρικής ανάλυσης, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι επιφανειακές διαφορές στον τρόπο που γράφει εμφανίζονται ακόμη και ανάμεσα στα ίδια του τα προβλήματα. Στο πρώτο πρόβλημα, μετά από μια σχετικά πλήρη υποθετική πορεία φτάνει σε μια σχέση – αναλογία («ομολογούμενον») την οποία υποθέτει ότι είναι επαρκής για να ξεκινήσει τη λύση του προβλήματος. Έτσι τελειώνει το υποθετικό μέρος της ανάλυσης. Το βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης που ακολουθεί αντίστοιχα είναι σημαντικά περιορισμένο. Σε αυτό χρησιμοποιείται από τον Αρχιμήδη ως «δεδομένον», η ανάλυση του προβλήματος της εύρεσης των δύο μέσων αναλόγων δύο «δοθέντων» ευθυγράμμων τμημάτων. Κατά συνέπεια, το βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης είναι πολύ σύντομο σε σχέση με το υποθετικό μέρος που προηγήθηκε. Στο τρίτο πρόβλημα ο Αρχιμήδης αντίθετα, κάνει πολύ μικρό υποθετικό βήμα, το περιεχόμενο του οποίου ουσιαστικά φανερώνεται με το σημαντικά μεγαλύτερο τώρα βεβαιωτικό βήμα. Αυτό ίσως γίνεται, γιατί δεν υπάρχουν στην ουσία μεγάλα νοητικά άλματα στο υποθετικό μέρος όπως τα αντιλαμβάνεται ο Αρχιμήδης αλλά μάλλον μια σχετικά απλή υποθετική νοητική βοηθητική κατασκευή και ονομασία των μερών της. Στο έκτο πρόβλημα, όπως και στο πρώτο, έχουμε μεγάλο υποθετικό μέρος και μικρό βεβαιωτικό μέρος στην ανάλυση. Το βεβαιωτικό μέρος βεβαιώνει την εύρεση της τετάρτης αναλόγου, που σημαίνει την «δυνητική» αναγκαιότητα της σφαίρας που ζητάμε αλλά δεν προχωρά στη βεβαίωση ότι ατή η σφαίρα *μπορεί* να λύσει το πρόβλημα γιατί είναι κάτι που το έχει διαχειριστεί και έχει δείξει την «δυνητική» του αναγκαιότητα στο πρόβλημα 3 που προηγήθηκε. Έτσι, μπορεί να γίνει κατανοητό γιατί το βεβαιωτικό μέρος είναι συνοπτικό.

Καταλήγοντας για την πρακτική του Αρχιμήδη στη γεωμετρική ανάλυση προβλημάτων, θα επαναλάβουμε τη θέση μας ότι αυτή δεν διαφοροποιείται στην ουσία της από τη μέθοδο που εφαρμόζει και περιγράφει θεωρητικά ο Πάππος αρκετούς αιώνες αργότερα. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κατά πόσο η μαθηματική πρακτική του Απολλώνιου είναι ίδια με αυτή που εμφανίζεται να λειτουργεί στον Πάππο και τον Αρχιμήδη.

7.4. *Απολλώνιος ο Περγαίος*

Ο Απολλώνιος (περ. 210 π.Χ.), είναι ο ένας από τους τρεις μαθηματικούς στους οποίους αποδίδει τη συγγραφή της ανάλυσης ο Πάππος στη εισαγωγή του 7ου βιβλίου της *Συναγωγής*. Τα έργα του Απολλώνιου που διασώθηκαν είναι δύο. 1ον) Τα *Κωνικά,* από τα οποία διασώθηκαν τα επτά από τα οκτώ βιβλία. Από αυτά τα τέσσερα πρώτα στα Ελληνικά και τα υπόλοιπα τρία σε Αραβική μετάφραση, από την οποία στη συνέχεια μεταφράστηκαν στα λατινικά. 2ον) Το *Περί λόγου αποτομής,* σε δύο βιβλία που διασώθηκαν στα Αραβικά, μεταφράστηκαν στα λατινικά και εκδόθηκαν από τον Edmund Halley το 1706. Από τα υπόλοιπα έξι έργα του Απολλώνιου που δεν διασώθηκαν, τα πέντε αναφέρονται και σχολιάζονται από τον Πάππο στον *Αναλυόμενο* και είναι τα: *Περί χωρίου αποτομής, Περί διωρισμένης τομής, Περί επαφών, Επίπεδοι τόποι* και *Νεύσεις*, ενώ ένα ακόμη έργο του, το *Περί συγκρίσεως του δωδεκαέδρου με το εικοσάεδρον,* αναφέρεται από τον Υψικλή στον πρόλογο του λεγόμενου XIV βιβλίου του Ευκλείδη. Επίσης, ο Μαρίνος ο Φιλόσοφος, στην αρχή του υπομνήματος του για τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, αναφέρει ότι ο Απολλώνιος χρησιμοποίησε τον όρο «τεταγμένον» για να περιγράψει το «δεδομένον» στο έργο του *Περί Νεύσεων* και στην *Καθόλου Πραγματεία.* Ένα ακόμη, ίσως, έργο του Απολλώνιου που δεν διασώθηκε.

Από τα έργα που αποδίδονται όμως στον Απολλώνιο, όπως αναφέραμε, διασώθηκαν στα Ελληνικά μόνο τα *Κωνικά.* Στα *Κωνικά*, εφαρμόζεται η μέθοδος της ανάλυσης σε λίγα μόνο προβλήματα (44-51) από το δεύτερο βιβλίο, με τα οποία θα ασχοληθούμε παρακάτω. Επίσης, για το *Περί λόγου αποτομής*, που αποδίδεται στον Απολλώνιο και διασώθηκε στα Αραβικά, ο Panza (1997, 393) αναφέρει ότι αν θεωρήσουμε αξιόπιστη τη μετάφραση του Halley, μπορούμε εύκολα να φτάσουμε στο συμπέρασμα, ότι το έργο αυτό αποτελούσε μια γνήσια αναλυτική πραγματεία όπως την εννοεί ο Πάππος. Την ίδια περίπου θέση, σχετικά με το *Περί λόγου αποτομής*, έχει διατυπώσει και ο Heath (1921, τόμ. II, 218): «Ο Απολλώνιος εφαρμόζει σε όλες τις περιπτώσεις την ορθόδοξη μέθοδο της ανάλυσης και της σύνθεσης.» Αλλά και ο Πάππος (*Συναγωγή* VII, 640.6-13), αναφέρει ότι το έργο αυτό περιελάμβανε αναλύσεις και συνθέσεις. Επιπλέον, μπορούμε μόνοι μας εύκολα να παρατηρήσουμε ότι και η εκφώνηση της μοναδικής πρότασης, που στις διάφορες εκδοχές της πραγματεύεται το έργο, διατυπώνεται όπως διασώθηκε από τον Πάππο στα Ελληνικά με την ορολογία «δοθέντων» – «δεδομένων». Ορολογία με την οποία διατυπώνονται και οι εκφωνήσεις σε όλα τα υπόλοιπα έργα του Απολλώνιου, τα οποία περιγράφει ο Πάππος και δεν έχουν σωθεί. Το γεγονός αυτό, μας κάνει να πιστεύουμε ότι τα έργα του Απολλώνιου που χάθηκαν, ήταν επίσης πραγματείες γραμμένες με αναλυτικό τρόπο, όπως το εννοεί ο Πάππος, τις οποίες αν είχαμε στα χέρια μας σήμερα θα είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε πολύ καλύτερα τον τρόπο που οι γεωμέτρες της κλασικής εποχής αντιλαμβάνονταν και λειτουργούσαν τη μέθοδο της προβληματικής γεωμετρικής ανάλυσης, και δεν θα είμαστε αναγκασμένοι να προσπαθούμε να βγάλουμε νόημα μόνο μέσα από ψήγματα εφαρμογής της μεθόδου. Αν και ο Πάππος, φαίνεται ότι τελικά είχε δίκιο στο γεγονός ότι ο Απολλώνιος υπήρξε ένας από τους πιο σημαντικούς συγγραφείς της γεωμετρικής ανάλυσης, εμείς σήμερα θα πρέπει να αρκεστούμε στις λίγες περιπτώσεις προβληματικής γεωμετρικής ανάλυσης που σώζονται στο δεύτερο βιβλίο των *Κωνικών*.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι οι προτάσεις 44-51 του δεύτερου βιβλίου των *Κωνικών* είναι ότι απέμεινε στα Ελληνικά από τη μεγάλη παραγωγή του Απολλώνιου με τη μέθοδο της γεωμετρικής ανάλυσης. Τα προβλήματα αυτά –καθώς και το 52 και 53– ο Knorr (1986, 314-315), θεωρεί ότι προστέθηκαν από τον Απολλώνιο ως παράρτημα στο τέλος του 2ου βιβλίου των *Κωνικών*, γιατί οι ιδιότητες που πραγματεύονται δεν έχουν μεγάλη σχέση με τις ιδιότητες που πραγματεύονται οι υπόλοιπες προτάσεις του βιβλίου, αλλά με άλλες ιδιότητες της προ-Απολλώνιας μαθηματικής παραγωγής. Πιθανολογεί επίσης, ότι αυτά τα προβλήματα πρέπει να υπήρξαν το αποτέλεσμα ενός πρώιμου σταδίου της μελέτης του για τις κωνικές, αφού δεν εφαρμόζονται σε αυτά καθόλου οι αντιλήψεις του Απολλώνιου που θεωρούνται δικές του καινοτομίες. Το γεγονός επίσης που τα διαφοροποιεί από τις υπόλοιπες προτάσεις του 2ου βιβλίου των Κωνικών, σύμφωνα με την άποψη του Knorr, είναι η εμμονή του Απολλώνιου στη μέθοδο της ανάλυσης – σύνθεσης που δεν εμφανίζεται σε καμία άλλη πρόταση του ίδιου βιβλίου.

7.4.1. Παραδείγματα προβληματικής γεωμετρικής ανάλυσης στον Απολλώνιο

Μια πρώτη παρατήρηση που αφορά τις εκφωνήσεις των 44-51 προτάσεων του δεύτερου βιβλίου των *Κωνικών*, που είναι προβληματικές αναλύσεις, είναι ότι είναι διατυπωμένες με τη βοήθεια της ορολογίας «δοθέν» – «δεδομένον», όπως και κάποια τμήματα από τις αναλύσεις τους που εμείς υποστηρίζουμε ότι είναι τα βεβαιωτικά μέρη τους. Εξαίρεση αποτελεί η πρόταση 48, η οποία αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο, ειδική περίπτωση ανάλυσης σύμφωνα με την τρίτη θεωρητική περιγραφή του Πάππου όπως έχουμε αναλύσει στο 6^{o} κεφάλαιο. Επίσης, στα προβλήματα 46, 47, και 49, το «δεδομένον» εμφανίζεται ως συνέπεια ενός συλλογισμού ο οποίος έχει προηγηθεί, με τον τρόπο που ήδη έχουμε παρατηρήσει, σε κείμενα του Ευκλείδη (§ 4.4) και του Πάππου (§ 6.3). Για παράδειγμα, στην πρόταση 46 του δεύτερου βιβλίου των *Κωνικών* διαβάζουμε ως κατάληξη ενός συλλογισμού που έχει προηγηθεί: «δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Δ.» Για να συνεχίσει στην επόμενη πρόταση: «διὰ δεδομένου ἄρα τοῦ Δ…». Γεγονός που σημαίνει ότι υπάρχει κοινό σκεπτικό πίσω από τον τρόπο που παράγονται τα «δεδομένα» ως αποτέλεσμα νοητικού συλλογισμού –όπως έχουμε υποστηρίξει– τόσο στον Απολλώνιο όσο και στον Ευκλείδη και τον Πάππο.

Στη συνέχεια, θα προσπαθήσουμε μελετώντας συγκεκριμένα παραδείγματα προβληματικής γεωμετρικής ανάλυσης να δείξουμε ότι ουσιαστικά η δομή της μεθόδου της ανάλυσης που εφαρμόζει ο Απολλώνιος είναι αυτή που κληρονομεί από τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη και θα εφαρμόσει αρκετούς αιώνες αργότερα και ο Πάππος.

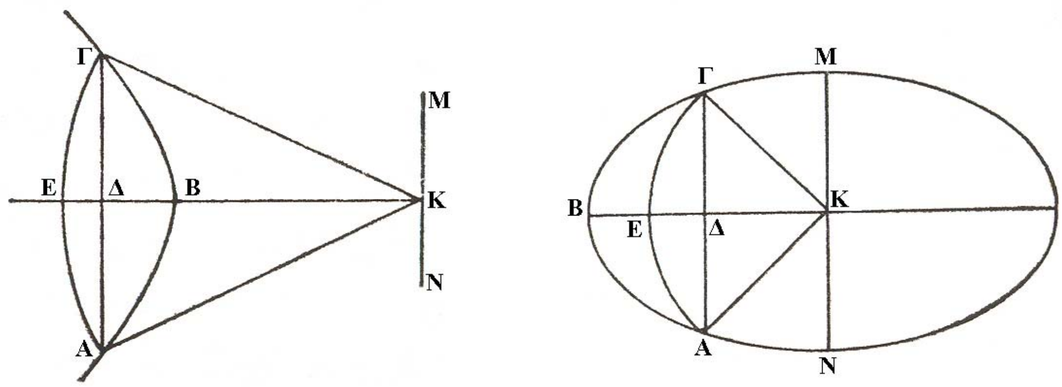
Κωνικών Β΄, ***47^{o} πρόβλημα*** [17]

Να βρεθεί ο άξονας της «δοθείσης» υπερβολής ή ελλείψεως.

Έστω [η δοθείσα] υπερβολή ή έλλειψη η ΑΒΓ· πρέπει λοιπόν να βρεθεί ο άξονας αυτής.

---

[17] Απολλώνιος, *Κωνικά* (TLG 2.47.1-32): Τῆς δοθείσης ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως τὸν ἄξονα εὑρεῖν. ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ· δεῖ δὴ αὐτῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν. εὑρήσθω καὶ ἔστω ὁ ΚΔ, κέντρον δὲ τῆς τομῆς τὸ Κ· ἡ ἄρα ΚΔ τὰς ἐπ᾽ αὐτὴν τεταγμένως κατα γομένας δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. ἤχθω κάθετος ἡ ΓΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ, ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΑ. ἐὰν οὖν τάξωμεν δοθὲν τὸ Γ, ἔσται δοθεῖσα ἡ ΓΚ. ὥστε ὁ κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Α καὶ ἔσται θέσει δε δομένος. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ τομὴ δοθεῖσα θέσει· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ δοθέν· θέσει ἄρα ἡ ΓΑ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα τῇ θέσει ἡ ΔΚ.
συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα ὑπερ βολὴ ἢ ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω αὐτῆς κέντρον τὸ Κ· εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΚΔ, ΚΑ, καὶ διήχθω ἡ ΚΔ ἐπὶ τὸ Β. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΚ, δύο ἄρα αἱ ΓΔΚ δύο ταῖς ΑΔΚ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΚΑ τῇ ΚΓ ἴση. ἡ ἄρα ΚΒΔ τὴν ΑΔΓ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. ἄξων ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΔ.



Ανάλυση

α) Υποθετικό μέρος:

Ας έχει ευρεθεί [ο άξονας] και έστω [ότι είναι] ο ΚΔ,

κέντρο δε της τομής το Κ·

άρα η ΚΔ τέμνει αυτές που είναι κάθετες στον οριζόντιο άξονα («τὰς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως καταγομένας») στο μέσον και κάθετα [*Κων.* Ι , ορισμ. 7].

Ας αχθεί κάθετη η ΓΔΑ,

και ας αχθούν οι ΚΑ, ΚΓ.

Επειδή λοιπόν είναι ίση η ΓΔ με τη ΔΑ, θα είναι ίση και η ΓΚ με την ΚΑ [*Στοιχ.* Ι, 4].

β) Βεβαιωτικό μέρος:

Αν λοιπόν θέσουμε το Γ «δοθέν» [ως ένα τυχαίο σημείο της κωνικής],

[έχοντας επίσης από την υπόθεση «δοθείσα» την κωνική τομή ΑΒΓ, είναι «δοθέν» το κέντρο της, από την *Κων. ΙΙ*, 45]

θα είναι και η ΓΚ «δοθείσα» [*Δεδομ.* 26]

Ώστε ο κύκλος που γράφεται με κέντρο το Κ και ακτίνα τη ΓΚ, θα διέλθει και από το Α και θα είναι «δεδομένος»[18] ως προς τη θέση. [*Δεδομ.* ορισμ. 6].

Είναι δε και η τομή [υπερβολή ή έλλειψη] ΑΒΓ «δοθείσα» ως προς τη θέση·

άρα το Α είναι «δοθέν» [ως προς τη θέση, από *Δεδομ.* 25, ως τομή δύο γραμμών].

---

[18] Είναι μια από τις περιπτώσεις που έχουμε αναφέρει ότι το αποτέλεσμα ενός συλλογισμού καλείται πλέον «δεδομένον». Πράγματι, στη συγκεκριμένη περίπτωση, το κέντρο του κύκλου είναι το κέντρο της κωνικής και είναι «δοθέν» και η ακτίνα του κύκλου δόθηκε επίσης. Κατά συνέπεια, ο κύκλος πλέον παρουσιάζει δυνητική αναγκαιότητα, με άλλα λόγια είναι «δεδομένος».

Είναι όμως και το Γ «δοθέν»·

άρα είναι η ΓΑ «δοθείσα» ως προς τη θέση [*Δεδομ.* 26].

Και είναι η ΓΔ ίση με τη ΔΑ· [ο άξονας της καμπύλης γραμμής διχοτομεί καθεμία από τις «τεταγμένες επί την διάμετρον» και μάλιστα «καθέτως». *Κων. Ι*, ορισμ. 4, 7.]

είναι άρα το Δ «δοθέν». [*Δεδομ.* 7]

Αλλά και το Κ είναι «δοθέν»· [είναι «δοθείσα» η κωνική, άρα από το *Κων. ΙΙ*, 45, *μπορούμε* να βρούμε τη θέση του κέντρου της]

άρα είναι «δοθείσα» η ΔΚ ως προς τη θέση. [*Δεδομ.* 26]

Σύνθεση

α) Κατασκευή:

θα συντεθεί λοιπόν [το πρόβλημα] ως εξής·

Έστω η «δοθείσα» υπερβολή ή έλλειψη η ΑΒΓ,

και ας ληφθεί κέντρο αυτής το Κ· [*Κων*. ΙΙ, 45]

ας ληφθεί δε πάνω στην [κωνική] τομή τυχόν σημείο το Γ,

και με κέντρο το Κ, ακτίνα δε την ΚΓ ας γραφεί κύκλος ο ΓΕΑ,

και ας αχθεί η ΓΑ

και ας διχοτομηθεί στο Δ

και ας αχθούν οι ΚΓ, ΚΔ, ΚΑ

και ας προεκταθεί η ΚΔ μέχρι του Β [σημείου της κωνικής τομής]

β) Απόδειξη:

Επειδή λοιπόν είναι ίση η ΑΔ με τη ΓΔ [Δ μέσο της ΓΑ],

κοινή δε η ΔΚ,

οι δύο άρα πλευρές ΓΔ και ΔΚ είναι [αντίστοιχα] ίσες με την ΑΔ και ΔΚ,

και η βάση ΚΑ είναι ίση με τη βάση ΚΓ [ακτίνες ίδιου κύκλου].

Άρα η ΚΒΔ τέμνει την ΑΔΓ στο μέσον [από κατασκευή] και υπό ορθές γωνίες [*Στοιχ.* Ι, 8]

Άρα είναι άξονας [της κωνικής από *Κων.* Ι, ορισμ. 7] η ΚΔ

Ας αχθεί δια του Κ η ΜΚΝ παράλληλη προς την ΓΑ· η ΜΝ άρα είναι άξονας της τομής συζυγής προς την ΒΚ.

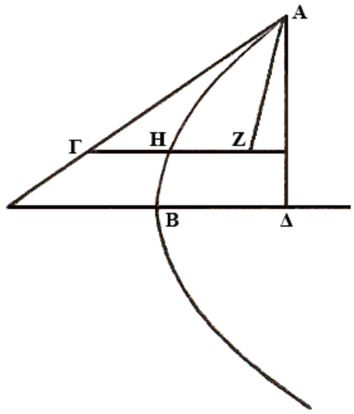
Ανάπτυξη του υποθετικού μέρους της ανάλυσης. Το υποθετικό μέρος της συγκεκριμένης ανάλυσης, είναι σχετικά σύντομο. Αρχίζει με τη λήψη του ζητουμένου, έχει τη μορφή «νοητικής κατασκευής» η οποία δικαιολογεί το πέρασμα από το ένα βήμα στο επόμενο, με στόχο που εδώ φαίνεται να είναι η σχέση ΓΚ = ΚΑ (το «ομολογούμενον» σύμφωνα με τον Πάππο). Αυτή τη σχέση θεωρεί ο Απολλώνιος, όπως θα φανεί από το βεβαιωτικό μέρος, ότι είναι επαρκής ως αφετηρία προκειμένου να του εξασφαλίσει τη δυνητική αναγκαιότητα της θέσης του άξονα της κωνικής τομής. Βέβαια, θα επαναλάβουμε ότι όλη αυτή η «νοητική κατασκευή» έχει υποθετικό χαρακτήρα γιατί γίνεται υπό την αίρεση ότι ισχύει το ζητούμενο.

Ανάπτυξη του βεβαιωτικού μέρους της ανάλυσης. Το βεβαιωτικό μέρος της παρούσας ανάλυσης, δεν αρχίζει με βεβαίωση του «ομολογουμένου», όπως στον Πάππο, αλλά με τη θεώρηση ενός «δοθέντος» (τυχαίου) σημείου της έλλειψης. Κατόπιν, επειδή ο Απολλώνιος γνωρίζει από προηγούμενη πρόταση (*Κων.* ΙΙ, 45) ότι το κέντρο Κ «δοθείσης» υπερβολής ή έλλειψης είναι «δοθέν», συμπεραίνει με δυνητική αναγκαιότητα ότι θα είναι «δοθείσα» και η ΓΚ, που ενώνει το κέντρο με το «δοθέν» σημείο Γ. Κατά συνέπεια, ο κύκλος που γράφεται με κέντρο το «δοθέν» Κ και ακτίνα την «δοθείσα» ΓΚ θα είναι «δεδομένος» (έχει δηλαδή δοθεί ο *λόγος* για τη θέση του και το μέγεθός του), και θα διέλθει από το σημείο Α το, οποίο προς το παρόν μόνο ονομάζεται, ενώ αμέσως μετά θα καθοριστεί και η θέση του με δυνητική αναγκαιότητα.. Είναι όμως, συνεχίζει ο συλλογισμός, και η τομή ΑΒΓ «δοθείσα» ως προς τη θέση, κάτι που σημαίνει από την πρόταση 25 των *Δεδομένων* ότι η θέση του σημείου Α (σημείου τομής του κύκλου και της έλλειψης) είναι «δοθείσα» ή αλλιώς έχει καθοριστεί με δυνητική αναγκαιότητα. Όμως είναι και το Γ «δοθέν» ως προς τη θέση από την υπόθεση. Γιατί αν και η επιλογή του ήταν τυχαία, πλέον η θέση του δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας. Άρα με δυνητική αναγκαιότητα είναι «δοθείσα» και η θέση της ΑΓ πλέον, σύμφωνα με την πρόταση 26 των *Δεδομένων*. Και είναι η ΓΔ ίση με τη ΔΑ· άρα είναι και η θέση του Δ πάνω στην ΓΑ «δοθείσα», έχει δηλαδή δυνητική αναγκαιότητα, από την πρόταση 7 των *Δεδομένων.* Όμως «δοθείσα» είναι και η θέση του κέντρου Κ της κωνικής, επειδή έχει προσδιοριστεί με δυνητική αναγκαιότητα, από προηγούμενη ανάλυση (*Κων.* ΙΙ, 45), άρα συμπεραίνουμε από την πρόταση 26 των *Δεδομένων,* ότι η θέση της ΔΚ έχει πλέον προσδιοριστεί με δυνητική αναγκαιότητα.

Παρατηρούμε δηλαδή, και στην ανάλυση του Απολλώνιου, μια κατά γράμμα εφαρμογή προτάσεων των *Δεδομένων* καθώς και αποτελεσμάτων προηγούμενων αναλύσεων, που στόχο έχουν να βεβαιώσουν τον γεωμέτρη – ερευνητή, ότι τα όσα υποθετικά κατασκεύασε στη νόησή του μπορούν να παράγουν τη δυνητική αναγκαιότητα του ζητουμένου, όπως ακριβώς θα κάνει και ο Πάππος αρκετούς αιώνες αργότερα. Στην ουσία της η μέθοδος εμφανίζεται αμετάβλητη, αν εξαιρέσουμε μερικές επιφανειακές ή στυλιστικές διαφορές, οι οποίες θα ήταν λογικό να υπάρχουν ανάμεσα σε διαφορετικούς ερευνητές ακόμη και της ίδιας εποχής.

Η περίπτωση της πρότασης 49 των *Κωνικών* II, που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια, αποτελεί ένα ακόμη χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής της προβληματικής ανάλυσης από τον Απολλώνιο, και αναφέρεται στην εύρεση εφαπτομένης σε «δοθείσα» κώνου τομή από «δοθέν» σημείο. Από το πρόβλημα αυτό, θα παρουσιάσουμε και θα συζητήσουμε μόνο την περίπτωση της παραβολής που το «δοθέν» σημείο βρίσκεται πάνω στην παραβολή. Οι αναλύσεις των υπολοίπων περιπτώσεων του προβλήματος λειτουργούν με ανάλογο τρόπο.

Κωνικών Β΄, *49ο πρόβλημα* [19]



«Δοθείσης» κώνου τομής και [«δοθέντος»] σημείου που δεν βρίσκεται εντός της τομής, να αχθεί από του σημείου ευθεία που εφάπτεται της τομής σε ένα σημείο.

Έστω η «δοθείσα» κώνου τομή πρώτα[20] παραβολή, της οποίας άξονας [έστω] ο ΒΔ. Πρέπει λοιπόν από του «δοθέντος» σημείου, το οποίο δεν βρίσκεται εντός της τομής, να αχθεί ευθεία όπως προϋποτέθηκε.

---

[19] Απολλώνιος, *Κωνικά* (TLG 2.49.1-20): Κώνου τομῆς δοθείσης καὶ σημείου μὴ ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ σημείου εὐθεῖαν καθ᾽ ἓν ἐπι ψαύουσαν τῆς τομῆς. ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΒΔ. δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐντὸς τῆς τομῆς, ἀγαγεῖν εὐθεῖαν, ὡς πρόκειται. τὸ δὴ δοθὲν σημεῖον ἤτοι ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἐστιν ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ ἐν τῷ λοιπῷ ἐκτὸς τόπῳ. ἔστω οὖν ἐπὶ τῆς γραμμῆς, καὶ ἔστω τὸ Α, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΑΕ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ θέσει. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΔ· καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΕ. καί ἐστι τὸ Β δοθέν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΕ.
συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΔ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. φανερὸν δή, ὅτι ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

[20] Ακολουθούν οι αναλύσεις των ανάλογων περιπτώσεων για υπερβολή και για έλλειψη.

Το «δοθέν» σημείο λοιπόν ή θα είναι επάνω στη γραμμή ή επάνω στον άξονα ή στον εκτός υπόλοιπο τόπο.

Ανάλυση

α) Υποθετικό μέρος:

έστω λοιπόν [το «δοθέν» σημείο] επάνω στην γραμμή και ας είναι το Α,

και ας έχει αχθεί η εφαπτομένη, και ας είναι η ΑΕ [το Ε προφανώς είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης και της προέκτασης του άξονα της παραβολής. Ο άξονας «δοθείσης» κωνικής μπορεί να βρεθεί σύμφωνα με το *Κων*. ΙΙ, 46]

και ας έχει αχθεί κάθετη [στον άξονα] η ΑΔ·

β) Βεβαιωτικό μέρος:

Θα είναι λοιπόν [«δεδομένη» η ΑΔ] ως προς τη θέση. [*Δεδομ.* 30]

Και είναι ίση η ΒΕ με τη ΒΔ· [*Κων. Ι*, 35]

και είναι «δοθείσα» η ΒΔ·

άρα είναι «δοθείσα» και η ΒΕ.

Και είναι το Β «δοθέν»·

είναι άρα «δοθέν» και το Ε. [*Δεδομ.* 27]

αλλά και το Α είναι «δοθέν»· [από το πρόβλημα]

άρα είναι η [εφαπτομένη] ΑΕ «δοθείσα» [ως προς τη θέση από (*Δεδομ.* 28)]

Σύνθεση

θα συντεθεί λοιπόν [το πρόβλημα] ως εξής·

α) Κατασκευή:

Ας αχθεί από το Α κάθετη η ΑΔ

και ας ληφθεί ίση με τη ΒΔ η ΒΕ

και ας αχθεί η ΑΕ.

β) Απόδειξη:

Είναι λοιπόν φανερό ότι [η ΑΕ] εφάπτεται της τομής. [Η απόδειξη είναι φανερή για τον Απολλώνιο γιατί στην πρόταση (*Κων*. Ι, 33[21]) αποδεικνύει ακριβώς αυτό.

---

[21] *Κωνικά* Ι, 33: Εάν σε παραβολή ληφθεί κάποιο σημείο και από αυτού «καταχθεί τεταγμένως» ευθεία πάνω στη διάμετρο και από το σημείο τομής της διαμέτρου μέχρι της κορυφής ληφθεί από το άλλο μέρος της κορυφής ευθεία ίση, η από του γενομένου σημείου επί το ληφθέν σημείο της τομής «επιζευγνυμένη» ευθεία θα εφάπτεται της τομής.

Οι παραλλαγές του προβλήματος, σε ότι αφορά τη θέση του σημείου από το οποίο πρέπει να αχθεί η εφαπτομένη, δεν παρουσιάζουν κάτι διαφορετικό στην εφαρμογή της μεθόδου της ανάλυσης, για το λόγο αυτό δεν κρίνουμε σκόπιμο να τις παρουσιάσουμε και να τις συζητήσουμε.

Ανάπτυξη του υποθετικού μέρους της ανάλυσης. Το υποθετικό μέρος της συγκεκριμένης προβληματικής ανάλυσης είναι πολύ σύντομο. Περιλαμβάνει μόνο τη λήψη του ζητουμένου, τη νοητική κατασκευή του άξονα της παραβολής καθώς και τη νοητική κατασκευή της καθέτου από το σημείο στον άξονα. Το νοητό αυτό σχήμα πιθανότατα αρκεί για τον Απολλώνιο, ο οποίος έχει αποδείξει προηγουμένως προτάσεις όπως τις 33 και 35 από το πρώτο βιβλίο των *Κωνικών*, για να αντιληφθεί ότι μπορεί να βεβαιώσει τη «δυνατότητα» της ζητούμενης κατασκευής. Για αυτό το λόγο αμέσως μετά από αυτό το πολύ σύντομο υποθετικό μέρος ο Απολλώνιος περνά στο βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσής του.

Ανάπτυξη του βεβαιωτικού μέρους της ανάλυσης. Το βεβαιωτικό μέρος αρχίζει με τη βεβαίωση της θέσης της καθέτου ΑΔ. Εξασφαλίζεται, δηλαδή, (από *Δεδομ.* 30), η δυνητική αναγκαιότητα της θέσης της ΑΔ, από τη στιγμή που είναι «δοθέντα» τόσο το σημείο Α όσο και ο άξονας της «δοθείσης» παραβολής προς τον οποίο πρέπει να αχθεί κάθετη η ΑΔ. Επίσης, ισχύει και η ισότητα ΒΕ = ΒΔ από γνωστή πρόταση (*Κων.* Ι, 35). Διαμέσου αυτής της ισότητας μεταφέρεται η δυνητική αναγκαιότητα του μεγέθους της ΒΔ στη δυνητική αναγκαιότητα του μεγέθους της ΒΕ. Η ΔΒ, (από *Δεδομ.* 26), είναι «δοθείσα» ως προς το μέγεθος και τη θέση, έχει δηλαδή δυνητική αναγκαιότητα γιατί τα άκρα της Β, Δ έχουν δυνητική αναγκαιότητα ως προς τη θέση τους. Το Β, (από *Δεδομ.* 25), ως τομή της «δοθείσας» κωνικής και του άξονα της, και το Δ, (από *Δεδομ.* 25), ως τομή του άξονα της κωνικής και της «δοθείσα» πλέον καθέτου ΑΔ. Όμως, η ΒΕ, εκτός από τη δυνητική αναγκαιότητα του μεγέθους που της εξασφάλισε η ισότητα ΒΕ=ΒΔ, είναι «δοθείσα» και ως προς τη θέση, γιατί βρίσκεται επάνω στον άξονα της παραβολής και εκτός της κωνικής τομής. Αυτό σημαίνει ότι η θέση του Ε προσδιορίζεται με δυνητική αναγκαιότητα, (από *Δεδομ.* 27), δηλαδή, γίνεται «δοθέν» το Ε ως προς τη θέση. Έτσι, έχοντας τη δυνητική αναγκαιότητα της θέσης του σημείου Α και του σημείου Ε, εξασφαλίζεται, (από *Δεδομ.* 26), η δυνητική αναγκαιότητα, της θέσης της εφαπτομένης ΑΕ. Με άλλα λόγια εξασφαλίζεται η «δυνατότητα» (με την έννοια της δυνητικής αναγκαιότητας) κατασκευής του ζητουμένου.

Παρατηρούμε δηλαδή, και σε αυτό το πρόβλημα του Απολλώνιου την παραγωγή ενός συμπερασμού ο οποίος έχει δυνητική αναγκαιότητα. Ο συλλογισμός αυτός γίνεται με τη βοήθεια προτάσεων από τα *Δεδομένα* και αποτελεσμάτων από προηγούμενες αναλύσεις, και έχει στόχο την παραγωγή «της δυνατότητας του προταθέντος», όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Πάππος στην περιγραφή του για την προβληματική ανάλυση. Ειδικότερα σε ότι αφορά το βεβαιωτικό μέρος της συγκεκριμένης ανάλυσης, δεν διαφέρει σε τίποτε από τα βεβαιωτικά μέρη των αναλύσεων του Πάππου και θα μπορούσε να είναι ένα από αυτά. Για ακόμη μια φορά, παρατηρούμε ότι αν εξαιρέσουμε ορισμένες επιφανειακές διαφορές, που εντοπίζονται κυρίως στο υποθετικό μέρος της συγκεκριμένης ανάλυσης και ίσως αφορούν τη διαφορετικότητα στην έκφραση ή τη διαφορετική εκτίμηση της δυσκολίας κάποιων χειρισμών από τον Απολλώνιο και σίγουρα διαφορετικά προβλήματα, η ουσία και η δομή της μεθόδου της ανάλυσης φανερώνεται αμετάβλητη και σύμφωνη με τις περιγραφές του Πάππου.

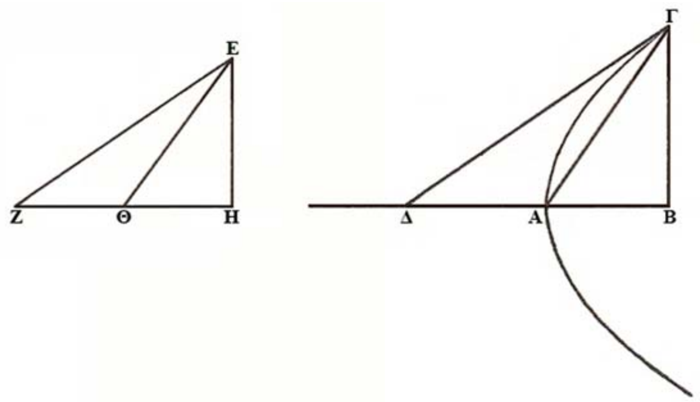
Κωνικών Β΄, *50ο πρόβλημα* [22]

Σε «δοθείσα» κώνου τομή να φέρουμε εφαπτομένη, η οποία με τον άξονα να σχηματίζει γωνία προς το μέρος της τομής ίση με «δοθείσα» οξεία γωνία.

---

[22] Απολλώνιος, *Κωνικά* (TLG 2.50.1-34): Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι γωνίαν ποιήσει ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ. ἔστω κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς, ἥτις πρὸς τῷ ΑΒ ἄξονι γωνίαν ποιήσει ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ τομῇ ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία. ἤχθω κάθετος ἡ ΒΓ· ἔστι δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Β δοθεῖσα. λόγος ἄρα τῆς ΔΒ πρὸς ΒΓ δοθείς. τῆς δὲ ΒΔ πρὸς ΒΑ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καί ἐστι δοθεῖσα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. καί ἐστι πρὸς θέσει τῇ ΒΑ καὶ δοθέντι τῷ Α· θέσει ἄρα ἡ ΓΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Γ. καὶ ἐφάπτεται ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.
συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ, καὶ εἰ λήφθω σημεῖον ἐπὶ τῆς ΕΖ τὸ Ε, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΗ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΖΗ τῷ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΕ, καὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΗΘΕ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΒΓ, καὶ τῇ ΒΑ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ. ἐφαπ τομένη ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς τομῆς. λέγω δή, ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΒ τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖΗ ἐστιν ἴση. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΕ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Η, Β γωνίαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ Δ γωνίᾳ.

Έστω πρώτα[23] η τομή του κώνου παραβολή, της οποία [είναι] άξονας ο ΑΒ· πρέπει λοιπόν να φέρουμε εφαπτομένη της τομής η οποία να σχηματίσει με τον άξονα ΑΒ γωνία προς το μέρος της τομής, ίση με «δοθείσα» οξεία γωνία.



Ανάλυση

α) Υποθετικό μέρος:

Ας έχει γίνει και έστω [εφαπτομένη] η ΓΔ·

είναι άρα «δοθείσα» η γωνία ΒΔΓ.

Ας αχθεί κάθετη η ΒΓ·

β) Βεβαιωτικό μέρος:

είναι λοιπόν και η παρά το Β γωνία «δοθείσα»[ορθή].

Ο λόγος άρα ΔΒ:ΒΓ είναι «δοθείς».[*Δεδομ.* 40 (στο ΔΒΓ) και *Δεδομ. ορισμ.* 3]

Είναι όμως «δοθείς» και ο λόγος ΒΔ:ΒΑ· [*Κων. Ι*, 35 και *Δεδομ.* 6]

είναι άρα και ο λόγος ΑΒ:ΒΓ «δοθείς». [*Δεδομ.* 8]

Και είναι «δοθείσα» η παρά το Β γωνία· [ορθή]

άρα είναι «δοθείσα» και η γωνία ΒΑΓ [*Δεδομ.* 41]

Και βρίσκεται [η γωνία ΒΑΓ] πάνω στη [«δοθείσα»] ως προς τη θέση ΒΑ και [έχει την κορυφή της] στο «δοθέν» Α·

άρα η ΓΑ είναι «δοθείσα» ως προς τη θέση [*Δεδομ.* 29].

Είναι όμως [«δοθείσα»] ως προς τη θέση και η τομή [από το πρόβλημα]·

άρα είναι και το Γ «δοθέν». [*Δεδομ.* 25]

Και εφάπτεται της τομής η ΓΔ·

άρα είναι «δοθείσα» ως προς τη θέση η ΓΔ. [*Κων. ΙΙ*, 49]

---

[23] Ακολουθούν οι περιπτώσεις της υπερβολής και της έλλειψης.

Σύνθεση

θα συντεθεί λοιπόν [το πρόβλημα] ως εξής·

α) Κατασκευή:

Έστω πρώτα [ότι είναι] παραβολή η «δοθείσα» κώνου τομή, της οποίας [είναι] άξονας ο ΑΒ,

η δε «δοθείσα» οξεία γωνία η ΕΖ,

και ας ληφθεί επάνω στην ΕΖ το σημείο Ε,

και ας αχθεί κάθετη η ΕΗ,

και ας χωριστεί στα δύο η ΖΗ στο Θ,

και ας αχθεί η ΘΕ,

και προς τη γωνία ΗΘΕ ας κατασκευαστεί ίση η ΒΑΓ,

και ας αχθεί κάθετος η ΒΓ,

και ας ληφθεί η ΑΔ ίση με την ΒΑ,

και ας αχθεί η ΓΔ.

β) Απόδειξη:

Άρα είναι η ΓΔ εφαπτομένη της τομής. [*Κων. Ι*, 33]

Λέγω λοιπόν, ότι η γωνία ΓΔΒ είναι ίση με την ΕΖΗ.

Διότι, επειδή είναι, όπως η ΖΗ:ΗΘ = ΔΒ:ΒΑ [= 2, από την κατασκευή]

Είναι δε και ΘΗ:ΗΕ = ΑΒ:ΒΓ [*Στοιχ. VI,* 4]

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη είναι: ΖΗ:ΗΕ = ΔΒ:ΒΓ [*Στοιχ. V*, 20]

Και είναι ορθές οι παρά τα Η και Β γωνίες· [από την κατασκευή]

άρα είναι ίση η γωνία Ζ με τη γωνία Δ. [*Στοιχ. VI,* 6].

Ανάπτυξη του υποθετικού μέρους της ανάλυσης. Το υποθετικό μέρος της ανάλυσης του Απολλώνιου είναι πάλι, όπως και στην πρόταση 49 που αναλύσαμε προηγουμένως, πολύ σύντομο έως ανύπαρκτο. Μια πιθανή εξήγηση γι' αυτό, αποτελεί ίσως το γεγονός ότι έχουν προηγηθεί αρκετές αναλύσεις με παρόμοιο χαρακτήρα. Κατά συνέπεια, τα υποθετικά – νοητικά άλματα που χρειάζεται να κάνει ο γεωμέτρης-ερευνητής δεν είναι τόσο δύσκολα ούτε απαιτούν πλέον κάποια ιδιαίτερη περιγραφή. Αυτό που απομένει λοιπόν, ως περιεχόμενο του σχεδόν ανύπαρκτου υποθετικού μέρους, είναι η ονομασία της υποθετικής εφαπτομένης ΑΓ και της υποθετικής καθέτου ΓΒ. Στην ίδια κατεύθυνση, οι Berggren & Van Brummelen (2000, 12), αναφέρουν, ότι για τον Απολλώνιο, το πρώτο μέρος της ανάλυσης στις απλούστερες περιπτώσεις μπορεί να μην είναι απαραίτητο.

Αυτό που έχουμε επίσης να παρατηρήσουμε στο υποθετικό μέρος της παρούσας ανάλυσης, είναι ότι το δεύτερο βήμα του, που αναφέρει ότι η γωνία ΒΔΓ είναι «δοθείσα», δεν είναι απαραίτητο σε αυτό το σημείο της ανάλυσης. Η υπόθεση ότι έχει γίνει η κατασκευή, με την οποία αρχίζει το υποθετικό μέρος, συμπεριλαμβάνει το ότι η εφαπτομένη έχει αχθεί υπό «δοθείσα» γωνία σε σχέση με τον άξονα της παραβολής. Σύμφωνα με την ερμηνεία μας για την ανάλυση, θεωρούμε ότι το δεύτερο αυτό βήμα του υποθετικού μέρους θα έπρεπε να βρίσκεται μια πρόταση παρακάτω και να αποτελεί το πρώτο βήμα του βεβαιωτικού μέρους. Με άλλα λόγια, να ακολουθεί το επόμενο βήμα της κατασκευής της καθέτου ΒΓ. Διαφορετικά εδώ φαίνεται σα να έχει αναμειχθεί ένα βήμα του βεβαιωτικού μέρους, που αναφέρεται σε «δοθείσα» γωνία, στο υποθετικό μέρος της ανάλυσης, και μάλιστα χωρίς να προσφέρει κάτι εκεί που βρίσκεται ενώ είναι απαραίτητο για το βεβαιωτικό μέρος που ακολουθεί. Διαφορετικά, ο Απολλώνιος δεν αισθάνεται την ανάγκη να διακρίνει με σαφή όρια τα δύο μέρη της ανάλυσης. Οι Berggren & Van Brummelen (2000, 12), επίσης, σημειώνουν ότι ο Απολλώνιος ανέμειξε τα δύο μέρη της ανάλυσης σε κάποιες από τις αναλύσεις του, χωρίς να αναφέρονται συγκεκριμένα σε ποιες ούτε στο λόγο για τον οποίο το έκανε.

Ανάπτυξη του βεβαιωτικού μέρους της ανάλυσης. Σύμφωνα με το χωρισμό του υποθετικού από το βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης, όπως εμείς τον αντιλαμβανόμαστε, ως πρώτο βήμα του βεβαιωτικού μέρους πρέπει να θεωρηθεί το ότι η γωνία ΒΔΓ είναι «δοθείσα» από το πρόβλημα. Επόμενο βήμα, είναι η βεβαίωση ότι και η γωνία Β είναι «δοθείσα», γιατί προφανώς μπορεί να θεωρηθεί ως ορθή. Το επόμενο βήμα είναι η βεβαίωση ότι ο λόγος ΔΒ:ΒΓ είναι «δοθείς», δηλαδή, μπορεί να κατασκευαστεί με δυνητική αναγκαιότητα. Αυτό γίνεται γιατί το τρίγωνο ΔΒΓ έχει «δοθείσες» τις γωνίες του ως προς το μέγεθος, άρα σύμφωνα με την πρόταση 40 των *Δεδομένων*, το τρίγωνο είναι «δεδομένον» ως προς το είδος. Αυτό όμως, σύμφωνα με τον 3$^{\text{ο}}$ ορισμό των *Δεδομένων*, σημαίνει ότι και οι λόγοι των πλευρών του τριγώνου ΔΒΓ είναι «δεδομένοι», παρουσιάζουν δηλαδή δυνητική αναγκαιότητα. Είναι όμως «δοθείς» και ο λόγος ΒΔ:ΒΑ, με άλλα λόγια παρουσιάζει δυνητική αναγκαιότητα. Η αιτία είναι, ότι από την πρόταση 35 του πρώτου βιβλίου των *Κωνικών* γνωρίζουμε ότι ΑΒ=ΑΔ, σχέση που σε συνδυασμό με την πρόταση 6 των *Δεδομένων* παράγει τη δυνητική αναγκαιότητα του λόγου (ΑΒ+ΑΔ):ΑΒ, δηλαδή του ΒΔ:ΒΑ. Η δυνητική αναγκαιότητα των δύο παραπάνω λόγων όμως, μέσω της πρότασης 8 των *Δεδομένων* παράγει και τη δυνητική αναγκαιότητα του λόγου ΑΒ:ΒΓ. Με σύγχρονη ορολογία, θα λέγαμε ότι το πηλίκο δύο «δοθέντων» λόγων είναι επίσης «δοθείς» λόγος. Και η γωνία παρά το Β είναι «δοθείσα» (ως ορθή). Από το συνδυασμό του «δοθέντος» λόγου των πλευρών της γωνίας Β και του «δοθέντος» μεγέθους της, από την πρόταση 41 των *Δεδομένων*, παράγεται η δυνητική αναγκαιότητα του είδους του τριγώνου ΑΒΓ, που σημαίνει (τρίγωνο «δεδομένον» ως προς το είδος) ότι οι γωνίες του έχουν δοθεί μια προς μια. Κατά συνέπεια και η γωνία ΒΑΓ είναι «δοθείσα», μπορεί δηλαδή να κατασκευαστεί με δυνητική αναγκαιότητα. Η γωνία αυτή όμως, έχει κορυφή της το «δοθέν» σημείο Α (η θέση του μπορεί να βρεθεί με δυνητική αναγκαιότητα από την πρόταση 25 των *Δεδομένων* ως τομή της παραβολής και του άξονά της), και τη μια πλευρά της πάνω στον «δοθέντα» πλέον άξονα ΑΒ. Κατά συνέπεια, από την πρόταση 29 των *Δεδομένων*, μπορεί να κατασκευαστεί με δυνητική αναγκαιότητα η άλλη πλευρά ΑΓ της γωνίας ή αλλιώς είναι «δοθείσα» ως προς τη θέση. Όμως και η παραβολή είναι «δοθείσα», μπορεί δηλαδή να κατασκευαστεί με δυνητική αναγκαιότητα. Κατά συνέπεια, και η τομή τους που είναι το σημείο Γ, μπορεί να κατασκευαστεί με δυνητική αναγκαιότητα, σύμφωνα με την πρόταση 25 των *Δεδομένων*. Με άλλα λόγια, το σημείο Γ είναι «δοθέν» ως προς τη θέση του πάνω στην παραβολή. Σύμφωνα με το πρόβλημα 49 που προηγήθηκε, η εφαπτομένη από «δοθέν» σημείο «δοθείσης» παραβολής μπορεί επίσης να κατασκευαστεί με δυνητική αναγκαιότητα. Άρα η ΓΔ είναι «δοθείσα» ως προς τη θέση. Γίνεται φανερό δηλαδή από το τελευταίο αυτό βήμα του βεβαιωτικού μέρους, ότι η ανάλυση του προηγούμενου προβλήματος χρησιμοποιείται ως «δεδομένον» για την παρούσα ανάλυση. Με αυτόν τον τρόπο χρησιμοποιείται κάθε προηγούμενη επιτυχημένη ανάλυση ως εργαλείο για κάθε επόμενη. Άλλωστε όπως έχουμε ήδη αναφέρει και θα τεκμηριώσουμε περαιτέρω στο επόμενο κεφάλαιο, και οι προτάσεις των *Δεδομένων* είναι επιτυχημένες νοητικές πορείες, δηλαδή βεβαιωτικά μέρη αναλύσεων που έχουν γίνει στο παρελθόν και χρησιμοποιούνται πλέον ως έτοιμα νοητικά εργαλεία από τους γεωμέτρες – ερευνητές σε επόμενες αναλύσεις.

Κλείνοντας την αναφορά μας στον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο και τη σχέση τους με τη γεωμετρική ανάλυση, θεωρούμε ότι είναι πλέον φανερό από τα υπολείμματα της μαθηματικής πρακτικής τους, ότι η ουσία της μεθόδου διατηρείται η ίδια από την εποχή τους μέχρι και τον Πάππο. Επαληθεύεται επίσης η δήλωση του Πάππου στην αρχή της εισαγωγής του 7^{ου} βιβλίου της *Συναγωγής,* σύμφωνα με την οποία: η ανάλυση έχει τις ρίζες της αρκετούς αιώνες πριν από την εποχή του, και ανάμεσα στους τρεις βασικούς συγγραφείς της περιλαμβάνει τον Ευκλείδη και τον Απολλώνιο. Ο Ευκλείδης εκτός από τα χαμένα έργα του που αναφέρονται στην ανάλυση, έγραψε το πρώτο ως προς την τάξη βιβλίο για αυτήν, τα *Δεδομένα,* που αποτέλεσε το βασικό εργαλείο για όλους τους μεταγενέστερους γεωμέτρες-ερευνητές. Αλλά και ο Απολλώνιος είναι φανερό, τόσο από τον τρόπο που γράφει αλλά και από τις αναφορές στα χαμένα έργα του, ότι ασχολήθηκε ιδιαίτερα με τη μέθοδο της ανάλυσης με τρόπο που δεν διαφέρει σχεδόν καθόλου από τον τρόπο που την χρησιμοποίησε αλλά και την περιέγραψε ο Πάππος αρκετούς αιώνες αργότερα. Τέλος, έγινε φανερό ότι η αρχική δήλωση του Πάππου στο 7^{ο} βιβλίο της *Συναγωγής,* για τη χρήση της ανάλυσης στην επίλυση προβλημάτων, είναι σε συμφωνία με το γεγονός ό,τι όσες αναλύσεις σώθηκαν, όπως αυτές του Μεναίχμου, του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου, είναι αναλύσεις προβλήματος. Αυτό που ίσως ξενίζει και φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με την παραπάνω δήλωση του Πάππου, είναι η διάκριση ανάμεσα σε προβληματική και θεωρη(μα)τική ανάλυση που κάνει ο ίδιος στο κειμενό του μερικές γραμμές παρακάτω. Ένα ζήτημα με το οποίο θα ασχοληθούμε στη συνέχεια του κεφαλαίου.

7.5. *Η Ελληνική γεωμετρική ανάλυση της κλασικής εποχής αφορούσε μόνο προβλήματα*

Το ερώτημα που θα εξετάσουμε σε αυτή την ενότητα, είναι το αν υπήρχε θεωρη(μα)τική ανάλυση στην Ελληνική γεωμετρία. Θεωρούμε, με βάση τα μέχρι τώρα στοιχεία της έρευνας, ότι η γεωμετρική ανάλυση της κλασικής εποχής αφορούσε αποκλειστικά τα προβλήματα. Αυτοί που εισήγαγαν και υποστήριξαν την έννοια της θεωρητικής ανάλυσης, ήταν ιστορικοί, σχολιαστές και μαθηματικοί της ύστερης αρχαιότητας, όπως ο Γεμίνος, ο Ήρων και ο Πάππος, και το έκαναν για φιλοσοφικούς και πιθανόν άλλους λόγους. Σε αυτή τη θέση, μας οδηγούν τόσο η προηγούμενη μελέτη μας και η διαπίστωση του γεγονότος ότι όλες οι αναλύσεις της κλασικής εποχής που έχουν σωθεί αφορούν προβλήματα, όσο και το γεγονός ότι οι εκφωνήσεις όλων των προτάσεων στα έργα της ανάλυσης της κλασικής εποχής, στα οποία ο Πάππος αναφέρεται στην εισαγωγή του στο 7^{o} βιβλίο της *Συναγωγής,* τα οποία δυστυχώς δεν έφτασαν στις μέρες μας, διατυπώνονται με την ορολογία «δοθέν»-«δεδομένον». Μια ορολογία που είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα της προβληματικής γεωμετρικής ανάλυσης και μπορεί, όπως δείξαμε ήδη από το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας μας, να αποτελέσει κριτήριο διάκρισης ανάμεσα σε προβλήματα και θεωρήματα. Επίσης, οι περισσότεροι σύγχρονοι μελετητές της γεωμετρικής ανάλυσης, όπως θα φανεί και από τις τοποθετήσεις τους, που θα παραθέσουμε συνοπτικά παρακάτω, φαίνεται να συμφωνούν ότι η Ελληνική γεωμετρική ανάλυση αφορούσε κατά κύριο λόγο τα προβλήματα.

Τη θέση ότι υπήρχε θεωρητική ανάλυση, όμως, φαίνεται να στηρίζουν τόσο το κείμενο του Πάππου που διακρίνει την ανάλυση σε δύο είδη: την θεωρητική και την προβληματική (634, 24 - 636, 1) μαζί με κάποιες ελάχιστες προτάσεις από τη μαθηματική πρακτική του, όσο και οι πέντε πρώτες παρεμβλημένες στο XIII βιβλίο του Ευκλείδη προτάσεις, που κατά τον Mahoney (1968, 329) αποτελούν παραδειγματικές περιπτώσεις θεωρητικής ανάλυσης.

Αντίθετα, τη θέση ότι η ανάλυση αφορούσε μόνο προβλήματα, εμφανίζεται να υποστηρίζει ο Πρόκλος[24] (242, 14-20) όταν αναφέρει:

> καὶ ἐπὶ μὲν τῶν προβλημάτων μία τις ἔστιν ὁδὸς ἡ διὰ τῆς ἀναλύσεως εὑρημένη κοινή, καθ' ἣν προιόντες δυνάμεθα κατορθοῦν. οὕτω γὰρ τὰ ἀσα φέστερα θηρᾶται τῶν προβλημάτων. ἐπὶ δὲ τῶν θεωρημάτων δύσληπτος ἡ μεταχείρησις, ὡς μέχρις ἡμῶν, φησί, μηδένα δύνασθαι κοινὴν παραδοῦναι μέθοδον τῆς τούτων [θεωρημάτων] εὑρέσεως,

Επίσης, ο ίδιος ο Πάππος δηλώνει, στις πρώτες φράσεις της εισαγωγής του 7^{ου} βιβλίου της *Συναγωγής* (7.634. 3-7), ότι η ανάλυση χρησιμεύει στην επίλυση προβλημάτων:

> Ὁ καλούμενος ἀναλυόμενος, Ἑρμόδωρε τέκνον, κατὰ σύλληψιν ἰδία τίς ἐστιν ὕλη παρεσκευασμένη μετὰ τὴν τῶν κοινῶν στοιχείων ποίησιν τοῖς βουλομένοις

[24] Αποδίδοντάς τα ως θέσεις του Κάρπου του Αντιοχέως, τις οποίες ασπάζεται.

ἀναλαμβάνειν ἐν γραμμαῖς δύναμιν εὑρετικὴν τῶν προτεινομένων αὐτοῖς προβλημάτων, καὶ εἰς τοῦτο μόνον χρησίμη καθεστῶσα.

Ο Πάππος, στο ίδιο κείμενο, μερικές γραμμές παρακάτω (7.634. 22-23) αναφέρει:

εἰς τέλος ἀφικνούμεθα τῆς τοῦ ζητουμένου κατασκευῆς· καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν.

Δηλαδή, η κατάληξη της σύνθεσης είναι η «κατασκευή» του ζητουμένου. Κατασκευή, όμως, δεν έχουμε στα θεωρήματα αλλά μόνο στα προβλήματα. Ο Πάππος επίσης, περιγράφοντας τα σημαντικότερα βιβλία της ανάλυσης (7.648. 18-20), αναφέρει ότι το έργο του Ευκλείδη *Πορίσματα* χρησιμεύει για την ανάλυση των σπουδαιότερων προβλημάτων:

Μετὰ δὲ τὰς ἐπαφὰς ἐν τρισὶ βιβλίοις πορίσματά ἐστιν Εὐκλείδου [πολλοῖς] ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων…

Από τους νεώτερους μελετητές των ελληνικών Μαθηματικών, ο Heath (1926, τομ.I, 140), με αφορμή το σχόλιο του Πρόκλου δηλώνει ότι η αρχαία ανάλυση έχει τη βαρύνουσα σημασία της σε σχέση με τα προβλήματα.

Ο Mahoney (1968, 319-320), εκφράζει επίσης την άποψη ότι η Ελληνική γεωμετρική ανάλυση αφορά τα προβλήματα. Αναφέρει χαρακτηριστικά, ότι σκοπός της εργασίας του είναι να αποδείξει ότι για τον Έλληνα μαθηματικό η λέξη «ανάλυση» σήμαινε ένα διαρκώς αυξανόμενο σώμα συσχετιζόμενων τεχνικών για την επίλυση προβλημάτων, προς το οποίο μπορούσε να στραφεί για βοήθεια προκειμένου να λύσει δύσκολα προβλήματα. Οι θέσεις του Mahoney όπως αναπτύσσονται παρουσιάζουν δύο ενδιαφέροντα σημεία. Το πρώτο είναι, ότι στόχος των Ελλήνων μαθηματικών είναι να λύσουν προβλήματα. Η δυνατότητα εύρεσης λύσης είναι στο κέντρο του ενδιαφέροντος τους και αναπόσπαστο τμήμα της έρευνας. Αυτή τους η ερευνητική δραστηριότητα δευτερευόντως ίσως τους οδηγεί σε θεωρήματα. Αυτή τη θεώρηση, ως αναπόσπαστο τμήμα της γεωμετρικής ανάλυσης, δεν μπορούσαν να την αντιληφθούν οι φιλόσοφοι της εποχής του Πάππου και οι προγενέστεροι, όντας εκτός της μαθηματικής έρευνας, έτσι μπέρδεψαν τον τρόπο με τον οποίο μια απόδειξη ενός θεωρήματος μπορεί να βρέθηκε με τη διαδικασία το καθαυτό θεώρημα είχε βρεθεί ως λύση κάποιου προβλήματος. Το δεύτερο ενδιαφέρον σημείο των θέσεων του Mahoney, είναι ότι ο Πάππος προσπαθεί μέσα από τη γλώσσα των φιλοσόφων και στα πλαίσια του φιλοσοφικού περιβάλλοντος της εποχής του να περιγράψει μια μαθηματική έννοια όπως αυτή της ανάλυσης, που ο ίδιος την αντιλαμβάνεται και χρησιμοποιεί στις έρευνές του, απευθυνόμενος σε ένα κοινό που δεν είναι ερευνητές μαθηματικοί. Ένας συλλογισμός που, αν προεκταθεί λίγο, μπορεί να μας οδηγήσει στην υπόθεση ότι ο Πάππος αναφέρεται στη θεωρητική ανάλυση με στόχο να συμβιβάσει από τη μια την ερευνητική μαθηματική παράδοση και από την άλλη το φιλοσοφικό-κοινωνικό πλαίσιο μέσα στο οποίο καλείται να τη διαχειριστεί.

Οι Berggren & Van Brummelen (2000, 14), συμφωνούν με την άποψη του Mahoney, ότι η ανάλυση ήταν μια συλλογή τεχνικών για την επίλυση προβλημάτων, αναγνωρίζοντας ταυτόχρονα ότι υπήρξαν έστω και ελάχιστες θεωρητικές αναλύσεις, ενώ προσθέτουν ότι ιδιαίτερα στην Ισλαμική γεωμετρία οι γεωμετρικές αναλύσεις που αφορούν θεωρήματα είναι ακόμη πιο σπάνιες, κάτι που θεωρούν ότι ενισχύει επιπλέον το επιχείρημα του Mahoney.

Αρκετοί ακόμη σύγχρονοι μελετητές υποστηρίζουν τη θέση του Mahoney, ότι η ανάλυση αφορά τα προβλήματα, κυρίως με το επιχείρημα της σπανιότητας της εμφάνισης θεωρητικών αναλύσεων. Ανάμεσά τους ο Jones (1986, 67), ο Behboud (1994, 57) και ο Netz (2000, 147-148), ο οποίος μεταξύ των άλλων αναφέρει ως πρώτο από τα σημεία στα οποία θεωρεί ότι υπάρχει ομοφωνία στην τρέχουσα βιβλιογραφία για την ανάλυση: «Οτιδήποτε κάνουν οι αναλύσεις το κάνουν καλύτερα για τα προβλήματα παρά για τα θεωρήματα».

Οι Hintikka & Remes (1974, 22,28), αναλύοντας ένα από τα ελάχιστα παραδείγματα θεωρητικής ανάλυσης όπως αναφέρουν, από το 4^{ο} βιβλίο του Πάππου (4^{η} πρόταση), παρατηρούν ότι είναι πολύ σύντομο έως ανύπαρκτο το βεβαιωτικό μέρος της. Παραδέχονται επίσης, ότι αυτό το μέρος είναι πολύ σημαντικό για μια ανάλυση, και ήταν αυτό ακριβώς το μέρος της προβληματικής ανάλυσης που ο Hankel (1874) θεώρησε ως «την» ανάλυση, για αυτό και το ονόμασε «resolution», που σημαίνει ανάλυση. Παρόλο που παρατηρούν και συζητούν όμως αυτή τη διαφορά, ανάμεσα στη θεωρητική και την προβληματική ανάλυση, σε άλλα σημεία της εργασίας τους (1974, 47, 59), δηλώνουν ότι τα δύο είδη ανάλυσης, μεθοδολογικά και επιστημολογικά, είναι το ίδιο. Αυτή την άποψή τους τη στηρίζουν στο γεγονός ότι βρίσκουν τρία θεωρήματα, όπως λένε, που το βεβαιωτικό μέρος τους είναι παρόμοιο με αυτό της προβληματικής ανάλυσης. Ο Καρασμάνης (1993, 190), όμως, σωστά υποστηρίζει ότι αυτές οι τρεις προτάσεις δεν είναι θεωρήματα αλλά πορίσματα, που σημαίνει ούτε θεωρήματα ούτε προβλήματα σύμφωνα με τον Πάππο. Εμείς, στο σημείο αυτό, θα προσθέσουμε ότι σύμφωνα με την τρίτη περιγραφή του Πάππου, που διακρίνει δύο είδη αναλύσεων θεωρητική και προβληματική, δεν διακρίνεται κάποια διαφορά ως προς τη δομή των δύο ειδών ανάλυσης, γεγονός που επίσης αντιτίθεται στην πραγματικότητα της ανυπαρξίας του βεβαιωτικού μέρους της λεγόμενης θεωρητικής ανάλυσης. Θεωρώντας, σύμφωνα με την ερμηνεία μας για τη γεωμετρική ανάλυση, ότι το βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης είναι ένα συστατικό στοιχείο της μεθόδου[25], θα συνταχθούμε με τη θέση του Mahoney, ότι η ανάλυση που αφορούσε τα θεωρήματα αν υπήρξε, υπήρξε ως ένα δευτερεύον και μεταγενέστερο στάδιο της ανάλυσης προβλημάτων.

Τέλος, οι Hintikka & Remes (1974, 84-85), κάνοντας μια ιστορική αναδρομή της γεωμετρικής ανάλυσης, αναγνωρίζουν ότι τα κείμενα τα οποία αναφέρονται στη γεωμετρική ανάλυση πριν από τον Ήρωνα αφορούν «σχεδόν αποκλειστικά»[26] την προβληματική ανάλυση. Αναφέρουν χαρακτηριστικά ότι αν ο Ιπποκράτης και οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν πραγματικά τη μέθοδο, θα τη εφάρμοζαν μόνο σε προβλήματα αλλά δυστυχώς δεν διασώθηκε κανένα γνήσιο κείμενο που αφορά ανάλυση πριν τον Αριστοτέλη. Για τον Αριστοτέλη αναγνωρίζουν ότι το παραδειγματικό είδος ανάλυσης ήταν η προβληματική ανάλυση. Επίσης, δηλώνουν ότι τα δύο αρχαιότερα παραδείγματα ανάλυσης που αποδίδονται από τον Ευτόκιο στον Μέναιχμο είναι προβληματικές αναλύσεις. Με άλλα λόγια, αναγνωρίζουν ουσιαστικά, έχοντας αναφερθεί και στον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο, κάτι που υποστηρίζουμε και εμείς, ότι όλες οι αναλύσεις της κλασικής εποχής που έχουν σωθεί, αφορούν την προβληματική ανάλυση.

Διάφοροι μελετητές της γεωμετρικής ανάλυσης όταν θέλουν να αναφερθούν στη θεωρητική ανάλυση επικαλούνται τις πέντε παρεμβλημένες προτάσεις στο XIII βιβλίο του Ευκλείδη, οι οποίες συνήθως αποδίδονται στον Ήρωνα (1^{ος} μ.Χ αι.). Ο Knorr (1986, 358), μετά από συζήτηση, καταλήγει ότι η παρουσίαση αυτών των

---

[25] Ο Hankel (1874), δεν το ονόμασε τυχαία ανάλυση και οι Hintikka & Remes (1974, 67) παραδέχονται ότι είναι το «περισσότερο αναλυτικό μέρος της ανάλυσης».

[26] Χωρίς να διευκρινίζουν το αν υπάρχει κείμενο της κλασικής εποχής που αφορά τη θεωρητική ανάλυση και ποιο είναι αυτό. Πιθανόν να εννοούν τις πέντε εμβόλιμες προτάσεις στο XIII βιβλίο του Ευκλείδη, οι οποίες όπως θα φανεί παρακάτω αφενός δεν ανήκουν στην κλασική εποχή και αφετέρου κάποιοι εύλογα θεωρούν ότι δεν πρέπει να θεωρούνται ως αναλύσεις.

προτάσεων ως περιπτώσεων ανάλυσης είναι εντελώς τεχνητή («completely artificial»), γιατί ο συγγραφέας τους θεωρεί την ανάλυση από την ερμηνευτική της μορφή, χωρίς να παρουσιάζει τον ευρετικό της ρόλο. Ο Καρασμάνης (1993, 182-183), επίσης, αποδεικνύει τεκμηριωμένα ότι δεν πρόκειται για περιπτώσεις ανάλυσης σύνθεσης αλλά: «συνθετικής μόνο απόδειξης δύο αντίστροφων προτάσεων.» Έτσι μειώνονται ακόμη περισσότερο οι περιπτώσεις θεωρητικής ανάλυσης που περιλαμβάνονται στα ελληνικά Μαθηματικά.

Αυτός που υποστήριξε εντονότερα από όλους το ρόλο των προβλημάτων στα ελληνικά Μαθηματικά, αλλά και ειδικότερα στη γεωμετρική ανάλυση της κλασικής εποχής είναι ο Knorr (1986). Στο τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου του, το οποίο έχει τίτλο «Appraisal of the Analytic Field in Antiquity», σκιαγραφεί την πορεία της ανάλυσης από την κλασική εποχή ως την ύστερη αρχαιότητα. Το χαρακτηριστικό επίθετο με το οποίο ο Knorr (1986, 358-360) αναφέρεται στη θεωρητική ανάλυση και την ύπαρξή της, είναι «τεχνητή» («artificial»). Αφού αναφερθεί στην ανυπαρξία θεωρητικών αναλύσεων στη μαθηματική βιβλιογραφία της κλασικής εποχής και την ύπαρξη μικρού αριθμού ήσσονος μαθηματικής αξίας θεωρητικών αναλύσεων της εποχής των σχολιαστών (στους οποίους συμπεριλαμβάνει και τον Πάππο), ο Knorr (1986, 360), αναζητά στην αιτία για την οποία υπήρξε αυτό το «τέχνασμα», όπως χαρακτηρίζει την θεωρητική ανάλυση. Αναφέρει συγκεκριμένα, ότι οι σχολιαστές της ύστερης αρχαιότητας τυφλωμένοι από την Πλατωνική οντολογία, επιχειρούν να επιβάλλουν στην κλασική γεωμετρία μια ερμηνεία την οποία αυτή δεν υποστηρίζει. Προσπαθούν επιπλέον, υποστηρίζει (1986, 367-370), να εισάγουν φιλοσοφικά στοιχεία στις περιγραφές, την ερμηνεία και τις κριτικές των έργων της παλιότερης παράδοσης ενώ χρησιμοποιούν και τη γλώσσα της φιλοσοφίας. Η προτεραιότητα των θεωρημάτων έναντι των προβλημάτων που είχε τη ρίζα της στη ιδεαλιστική φύση των γεωμετρικών οντοτήτων, τους οδηγεί να υποστηρίξουν την άποψη ότι η μέθοδος της ανάλυσης είχε εφαρμογή και στην έρευνα των θεωρημάτων. Ένας ισχυρισμός ο οποίος δεν έχει βάση στην πραγματική βιβλιογραφία της γεωμετρίας. Κατά συνέπεια, καταλήγει ο Knorr, δεν θα πρέπει, όπως κάνουν μερικοί σύγχρονοι ερευνητές, να δίνουμε σε ένα απόσπασμα από τον Πάππο μεγαλύτερο βάρος σε σχέση με τη φύση της μεθόδου από ότι στο σύνολο των προβλημάτων της γεωμετρικής ανάλυσης.

Κλείνοντας τη συζήτηση γύρω από τη διάκριση ανάμεσα σε προβληματική και θεωρητική ανάλυση, θα επαναλάβουμε ότι η Ελληνική γεωμετρική ανάλυση στην ουσία της ήταν και παρέμεινε η προβληματική ανάλυση, παρά τις προσπάθειες κάποιων για φιλοσοφικούς ή άλλους λόγους κοινωνιοπολιτισμικού πλαισίου[27] που δεν αφορούν την ίδια τη μαθηματική παραγωγή να εισάγουν τη λεγόμενη «θεωρητική ανάλυση». Η «θεωρητική ανάλυση» δεν λειτούργησε την κλασική εποχή, όπως αποδεικνύει η παντελής απουσία παραδειγμάτων και αναφορών σε αυτήν και όταν εμφανίστηκε στη σκηνή των μαθηματικών κατά την ύστερη αρχαιότητα, το κυρίως έργο της Ελληνικής γεωμετρικής ανάλυσης είχε ήδη παιχθεί.

Συμπέρασμα

Μετά από τη μελέτη των αναλύσεων του Μέναιχμου, του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου που διασώθηκαν, και τη σύγκρισή τους τόσο με τις περιγραφές του Πάππου όσο και με τη συνολικότερη πρακτική του, μπορούμε να πούμε ότι η δομή της μεθόδου της γεωμετρικής ανάλυσης παραμένει ίδια σε όλη την πορεία των ελληνικών Μαθηματικών. Επίσης, τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται σε αυτήν την μέθοδο, όπως είναι τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη και άλλες αναλύσεις που έχουν προηγηθεί αλλά και η ορολογία «δοθέντων» – «δεδομένων» που χρησιμοποιείται στο βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης, παραμένουν στην ουσία τους αναλλοίωτα παρά τη μεσολάβηση αρκετών αιώνων. Οι όποιες επιφανειακές διαφορές στα διάφορα κείμενα γεωμετρικής ανάλυσης, ακόμη και των ίδιων συγγραφέων, όπως είναι ο ακριβής χωρισμός ή το μέγεθος κάθε φορά των μερών της ανάλυσης (υποθετικό- βεβαιωτικό), δεν έχουν να κάνουν με την ουσία και τη δομή της μεθόδου, αλλά με το διαφορετικό τρόπο γραφής και αντίληψης της δυσκολίας από τον κάθε ερευνητή για το διαφορετικό κάθε φορά και σε διαφορετικό πλαίσιο πρόβλημα. Αν συνυπολογίσουμε δηλαδή, τις διαφορετικές εποχές, τη δυσκολία διάδοσης των μεθόδων, τη διαφορετικότητα των

[27] Στο ρόλο που πιθανότατα έπαιξε το κοινωνικό και το πολιτισμικό πλαίσιο της εποχής που γράφει ιδιαίτερα ο Πάππος, έχουν αναφερθεί όπως είδαμε ο Mahoney (1968), ο Knorr (1986) και εκτενέστερα και πιο τεκμηριωμένα η Cuomo (2000). Η Cuomo, στις θέσεις της οποίας θα αναφερθούμε πάλι στην τελευταία ενότητα του επομένου κεφαλαίου, αναφέρει ότι ο Πάππος γράφει απευθυνόμενος στο κοινωνιοπολιτισμικό περιβάλλον της εποχής του από το οποίο εξαρτάται και έναντι του οποίου θέλει να ισχυροποιήσει τη θέση του, αναδεικνύοντας αλλά και ταυτόχρονα περιχαρακώνοντας το χώρο των Μαθηματικών.

προβλημάτων, τη διαφορετικότητα αλλά και τη μεγάλη δημιουργικότητα του καθενός από αυτούς τους ερευνητές, δεν μπορούμε παρά να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος της γεωμετρικής προβληματικής ανάλυσης παραμένει αναλλοίωτη. Μοναδική ίσως παραφωνία, οι απόπειρες κάποιων σχολιαστών κυρίως της ύστερης αρχαιότητας και του Πάππου να εισάγουν, για λόγους που δεν αφορούσαν τη μαθηματική παραγωγή, τη λεγόμενη «θεωρητική ανάλυση», μέσα από λίγες προτάσεις και μια τεχνητή διάκριση της γεωμετρικής ανάλυσης, που δεν βρίσκουν όμως στήριγμα στη μαθηματική βιβλιογραφία της κλασικής εποχής ούτε είναι ικανές να τροποποιήσουν την εικόνα Ελληνικής γεωμετρικής ανάλυσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον», τα *Δεδομένα* και η αξία του Ευκλείδη ως ερευνητή

Σε αυτό το τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής μας θα κάνουμε καταρχήν μια τελική αποτίμηση της ορολογίας «δοθέν» – «δεδομένον» στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά. Με βάση τα συμπεράσματά μας για την ορολογία αυτή και την ερμηνεία μας για τη γεωμετρική ανάλυση, στη συνέχεια, θα επανέλθουμε στο έργο του Ευκλείδη *Δεδομένα* και θα συζητήσουμε τον «αναλυτικό» τρόπο με τον οποίο είναι γραμμένο καθώς και τον τρόπο που λειτουργούν οι προτάσεις του, κάνοντας αντιπαραβολή με αντίστοιχες προτάσεις των *Στοιχείων*. Τέλος, θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε κάτι που ως τώρα δεν είχε αναδειχθεί: την αξία του Ευκλείδη ως ερευνητή.

8.1. *Η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον»*

Ως τώρα στη διατριβή μας, αναφερθήκαμε τόσο στην έλλειψη διάκρισης ανάμεσα στους όρους «δοθέν» και «δεδομένον» όσο και στην αδυναμία ουσιαστικής κατανόησης που υπήρχε μέχρι σήμερα, σχετικά με τον τρόπο που οι όροι αυτοί λειτουργούν στα ελληνικά Μαθηματικά κείμενα, όπως είναι *Δεδομένα* του Ευκλείδη και τα προβλήματα από τον Αρχιμήδη, τον Απολλώνιο και τον Πάππο που αντιμετωπίζονται με τη μέθοδο της γεωμετρικής ανάλυσης. Αναδείξαμε τη σύνδεση[1] της ορολογίας «δοθέν» – «δεδομένον» με κείμενα εκτός μαθηματικών, για παράδειγμα φιλοσοφικά και ιστορικά, όπως έχουν προσπαθήσει να κάνουν και άλλοι στο παρελθόν[2]. Αναπτύξαμε τη γλωσσική αλλά και φιλοσοφική διάκριση των δύο όρων, με τη βοήθεια των οποίων προχωρήσαμε στην ερμηνεία του «βεβαιωτικού» μέρους της γεωμετρικής ανάλυσης αλλά και αντίστροφα, επιβεβαιώσαμε αυτές τις διακρίσεις των δύο όρων μέσα από τα παραδείγματα της γεωμετρικής ανάλυσης. Αυτά που απομέ-

---

1 Αναφερόμαστε σε σύνδεση της ορολογίας με την έκφραση «λόγον διδόναι» και όχι σε όρους όπως προέλευση – καταγωγή που θα προσέδιδαν την έννοια της προτεραιότητας, χρονικής ή εννοιολογικής, που θα ήταν και δύσκολο να αποδοθεί αλλά είναι και έξω από τους στόχους της παρούσας διατριβής.

2 Knorr (1986, 110-111).

νουν να κάνουμε, με στόχο μια όσο το δυνατόν πληρέστερη αποτίμηση της ορολογίας αυτής, είναι η αποσύνδεση καταρχήν των δύο όρων από τον όρο «γνωστό», η ανάπτυξη στη συνέχεια των ορισμών των ειδών του «δεδομένου» του Ευκλείδη και τέλος η μελέτη των διαφόρων τρόπων με τους οποίους εμφανίζονται στα κείμενα το «δοθέν» και το «δεδομένον».

8.1.1. Οι όροι «δοθέν» και «δεδομένον» δεν σημαίνουν «γνωστό»

Η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» είναι ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των Ελληνικών Μαθηματικών, όχι τόσο κατανοητό σε εμάς μέχρι σήμερα, που συνδέεται ειδικότερα με τα προβλήματα και το δεύτερο στάδιο της γεωμετρικής τους ανάλυσης το «βεβαιωτικό», όπως είδαμε μέσα από τα κείμενα του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη, του Απολλώνιου και του Πάππου. Ειδικότερα, το έργο του Ευκλείδη *Δεδομένα*, χαρακτηρίζεται από αυτή την ορολογία.

Η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» δεν χρησιμοποιείται όμως στα σύγχρονα μαθηματικά και αν κάπου κάποιος από τους δύο όρους χρησιμοποιηθεί σήμερα αυτό γίνεται με αρκετά διαφορετικό τρόπο, που όπως έχουμε προαναφέρει συνήθως παραπέμπει στον όρο «γνωστό». Χαρακτηριστικά ο Taisbak (2003) στην πρώτη σελίδα της εισαγωγής του βιβλίου του αναφέρει:

> Ο Manitius (και επίσης ο Toomer 70 χρόνια αργότερα…) ήταν πεπεισμένος ότι ουδείς σύγχρονος μαθηματικός θα χρησιμοποιούσε το κατηγόρημα «είναι δεδομένον» για κάτι το οποίο έχει βρεθεί ή αποδειχθεί. Αλλά οι Έλληνες το έκαναν, και αυτό είναι ένα ασυνήθιστο γεγονός το οποίο πρέπει να γίνει κατανοητό, προκειμένου να αποτιμηθούν σωστά τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη.

Ο Taisbak έχει δίκιο ότι αν δεν κατανοήσουμε την έννοια του «δεδομένου» δεν θα είμαστε ικανοί να κατανοήσουμε και να εκτιμήσουμε τα *Δεδομένα.* Μας προβληματίζει όμως όταν παρακάτω (σ. 22), επανέρχεται στην έννοια του «δεδομένου» δηλώνοντας ότι: «η καθαυτό έννοια του δεδομένου παραμένει μη ορισμένη (και δεν μπορεί να οριστεί, αν δεν κάνω λάθος)». Με άλλα λόγια φαίνεται να θεωρεί ότι, το γεγονός ότι μέχρι σήμερα δεν είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε και να δώσουμε ένα σαφή τον ορισμό του «δεδομένου» μπορεί να σημαίνει ότι δεν ήταν ούτε ο ίδιος ο Ευκλείδης ή οι άλλοι μαθηματικοί που το χρησιμοποιούσαν. Μια δήλωση με την οποία δεν θα συμφωνήσουμε.

Θεωρούμε ότι μια από τις βασικές αιτίες έλλειψης ουσιαστικής κατανόησης της λειτουργίας των όρων «δοθέν» και «δεδομένον», εκτός από την έλλειψη διάκρισης ανάμεσα τους που έχουμε ήδη αναλύσει σε προηγούμενα κεφάλαια της διατριβής μας, είναι και η λανθασμένη απόδοση των δύο όρων με έναν όρο από το σύγχρονο εννοιολογικό πλαίσιο το «γνωστό». Η σημερινή λειτουργία του όρου «δεδομένον» στην καθημερινή ομιλία αλλά και στη μαθηματική ορολογία ταυτίζεται με το «γνωστό»[3]. Η λανθασμένη αυτή απόδοση φαίνεται ότι ξεκινά από την αρχαιότητα και φτάνει μέχρι τις μέρες μας. Ας δούμε όμως πως οι κατά καιρούς μελετητές έχουν διολισθήσει στον όρο «γνωστό», αρχίζοντας από τους πιο σύγχρονους και πηγαίνοντας προς την αρχαιότητα.

Ο Taisbak (2003), αναφέρει χαρακτηριστικά για τον όρο “given”:

> Στα μαθηματικά εντούτοις, ο όρος *given*[4] χρησιμοποιείται κατά ιδιωματικό τρόπο για τις συνθήκες στην αρχή του προβλήματος. Συχνά το Given σου πετάγεται, την ίδια ώρα, ώστε να μην μπορείς να το ξεφορτωθείς, ούτως ώστε να πρέπει να χρησιμοποιήσεις αυτό το αντικείμενο και να πειθαρχήσεις σε αυτή τη σχέση και όχι σε άλλα. Αν αφήσουμε τους εαυτούς μας να οδηγηθούν από αυτό που περιμένουμε ότι εννοεί ο μαθηματικός με το «given», έρχεται στο μυαλό μας κάποια λέξη όπως το «γνωστό»: Τι είναι λάθος τότε με τη λέξη «γνωστό»; Τίποτε βέβαια, (και οι μαθηματικοί του μεσαιωνικού Ισλάμ το χρησιμοποίησαν στις αναλύσεις τους με συνέπεια), αλλά ο Ευκλείδης για κάποιο λόγο δεν το χρησιμοποίησε. Στα σχόλιά μου χρησιμοποιώ (απρόθυμα) μερικές φορές το ρήμα «γνωρίζω», γιατί δεν μπορώ να σκεφτώ καλύτερη λέξη για να περιγράψω την πληροφορία που αφορά [εννοεί ο όρος «given»].

Ο Knorr (1986, 110) αναφερόμενος σε ένα παράδειγμα γεωμετρικού τόπου από τα *Μετεωρολογικά* του Αριστοτέλη διατηρεί τον όρο «given» για να αποδώσει τόσο το «δοθέν» όσο και το «δεδομένον», όπως κάνουν άλλωστε οι περισσότεροι σύγχρονοι μελετητές. Στην προσπάθειά του όμως, να αποσαφηνίσει τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνεται ότι τα διάφορα στοιχεία της χαμένης ανάλυσης που ανακατασκευά-

[3] Αναφερόμαστε για παράδειγμα στα Data ενός προγράμματος του ηλεκτρονικού υπολογιστή, εννοώντας τα αριθμητικά ή άλλα γνωστά στοιχεία που πρέπει να εισάγουμε στον υπολογιστή προκειμένου να τρέξει το πρόγραμμα.

[4] Ο Taisbak (1991, 2003) δεν διακρίνει ανάμεσα στους όρους «δοθέν» και «δεδομένον» και αναφέρεται και στους δύο με τον κοινό όρο «given».

ζει είναι «δοθέντα» – «δεδομένα», αναφέρεται και αυτός σε αυτά σε αυτά ως τα «γνωστά»:

> Αναφερόμενοι πάλι στο δείγμα της ανάλυσης που έχουμε παραθέσει, παρατηρούμε πως το καταληκτικό τμήμα σχηματίζεται από μια σειρά από «givens», το κάθε ένα από τα οποία καθορίζεται από τα προηγούμενα, μέχρι να καταλήξουμε στο ζητούμενο της κατασκευής ως given. Η υιοθέτηση αυτής της ορολογίας δεν είναι απλά και μόνο ένας φορμαλισμός· εξυπηρετεί ένα κρίσιμο σκοπό, να διαχωρίζει δύο ομάδες όρων οι οποίες είναι εντελώς διαφορετικού λογικού επιπέδου. Κάποιοι όροι είναι γνωστοί (are known) μόνο υποθετικά, υπό την έννοια ότι έπονται της υπόθεσης της ανάλυσης ότι δηλαδή η κατασκευή έχει πραγματοποιηθεί· άλλοι όροι όμως είναι γνωστοί (are known) συνεπεία του ορισμού της κατασκευής η οποία πρόκειται να παραχθεί. Οι τελευταίοι είναι τα «givens».

Ο Michaux (1947, 43) επηρεασμένος από τις απόψεις των μαθηματικών της εποχής του, αναφερόμενος στη σπουδαιότητα της αναλυτικής μεθόδου για τα μαθηματικά[5], βλέπει μέσα στα *Δεδομένα* προτάσεις, οι οποίες αφορούν μετασχηματισμούς που οδηγούν από το ένα «γνωστό» στο επόμενο. Συγκεκριμένα, αναφέρει ως παράδειγμα, το μαθηματικό περιεχόμενο της πρότασης 5 των *Δεδομένων* όπως εκείνος το αντιλαμβάνεται:

> Έτσι, για παράδειγμα, αν ο λόγος $\frac{a}{b}$ είναι γνωστός (connu), συμπεραίνουμε αμέσως, παραπέμποντας στην πρόταση 5, ότι ο $\frac{a}{a-b}$ είναι γνωστός (connu).

Η πρόταση 5 των *Δεδομένων* όμως αναφέρει αντίστοιχα: «Ἐὰν μέγεθος πρὸς ἑαυτοῦ τι μέρος λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἕξει δεδομένον.» Βλέπουμε δηλαδή, ότι και ο Michaux χρησιμοποιεί τον όρο «γνωστό» προκειμένου να αποδώσει τον ελληνικό όρο «δεδομένον», κάτι που κάνει σε αρκετά σημεία της μελέτης του.

Ο Schmidt (1987, 12), ο οποίος όπως έχουμε ήδη αναφέρει (§ 1.1), είναι ο μόνος από τους σύγχρονους ερευνητές που προσπάθησε να διακρίνει ανάμεσα στο «δοθέν»

---

[5] Δηλαδή την άλγεβρα, όπως ο ίδιος αναφέρει στην ίδια σελίδα της μελέτης του.

και το «δεδομένον», κατέληξε στο συμπέρασμα ότι μόνο το «δοθέν» αντιστοιχεί στο «γνωστό»:

> … η έννοια του «γνωστού» όπως μόλις συζητήθηκε [ως η κεντρική αλγεβρική έννοια] αντιστοιχεί στενά στην Ελληνική προσδιοριστική (επιθετικού προσδιορισμού) μετοχή δοθέν … Και αυτή αντιστοιχεί στο ευθύ αντικείμενο μιας πράξης δοσίματος της οποίας εμείς είμαστε το αίτιο. Αλλά η ελληνική τέχνη της Ανάλυσης επικεντρώθηκε γύρω από το δεδομένον, το οποίο ήταν το έμμεσο αντικείμενο μιας πράξης δοσίματος για την οποία ήταν υπεύθυνα τα άλλα γεωμετρικά σχήματα.

Διαφοροποιείται με άλλα λόγια από τους υπόλοιπους ερευνητές αποδίδοντας μόνο το «δοθέν» με το «γνωστό». Το «γνωστό»με την έννοια του αλγεβρικά γνωστού, όπως ο ίδιος ο Schmidt αναγνωρίζει παρακάτω, όταν στην προσπάθειά του να αντιδιαστείλει την έννοια του «δεδομένου» με την έννοια του «γνωστού» επισημαίνει ότι από τους περισσότερους χρησιμοποιούνται ως όροι ανάλογοι, ενώ έχουν εντελώς διαφορετική αποβλεπτικότητα, αφού ο ένας αφορά τον γεωμετρικό, ενώ ο άλλος τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Δεν καταφέρνει τελικά και αυτός να αποδεσμευτεί από το σύγχρονο εννοιολογικό μας πλαίσιο προκειμένου να διακρίνει το «δοθέν» από το «γνωστό».

Στα αραβικά μαθηματικά, επίσης, ο όρος «γνωστό» χρησιμοποιείται αντί των όρων «δοθέν» και «δεδομένον», σύμφωνα με τους Bergrren & Van Brummelen (2000, 25-28). Οι Bergrren & Van Brummelen θέτουν το ερώτημα: «Τι σημαίνει ‘given’, ή ‘known’, και υπάρχει κάποιο νόημα στην αλλαγή της διατύπωσης από την Ελλάδα στο Ισλάμ;» (What does «given», or «known», mean, and is there any significance to the change in wording from Greece to Islam?) O τρόπος με τον οποίο είναι διατυπωμένο το ερώτημα, φανερώνει ότι δεν αντιλαμβάνονται το «given» και το «known» ως δύο διαφορετικούς όρους αλλά ως έναν όρο, που ίσως στην πορεία του χρόνου έχει τροποποιηθεί κάπως η σημασία του. Διαφορετικά η ερώτηση τους θα έπρεπε να αρχίζει: «What do ‘given’ or ‘known’ mean…». Αλλά και σε προηγούμενη υποσημείωσή τους, που αφορά τον όρο «given» (2000, 10, υποσημ. 23) προαναγγέλλουν τη συζήτηση που θα ακολουθήσει γράφοντας: «Θα συζητήσουμε πιθανές εναλλακτικές σημασίες για τον όρο ‘given’ (or ‘known’) αργότερα σε αυτή την εργασία.» Έκφραση η οποία επιβεβαιώνει για μια ακόμη φορά το γεγονός ότι οι Bergrren & Van Brummelen αντιλαμβάνονται τους δύο όρους ως έναν.

Όμως το πρόβλημα της απόδοσης των δύο όρων «δοθέν» και «δεδομένον», με το «γνωστό», φαίνεται ότι έχει τις ρίζες του στην αρχαιότητα, αφού ο Μαρίνος (234, 17) κατονομάζει τον Διόδωρο ως έναν από αυτούς που όρισαν το «δεδομένον» ως το «γνώριμον». Συνεχίζει ακόμη (244, 21-246, 3), θέλοντας να κάνει φανερή τη διαφορά του «γνώριμον» από το «πόριμον» που τον ενδιαφέρει ιδιαίτερα, εξαιτίας του ότι παρακάτω θα αποτελέσει για αυτόν τον μόνο επαρκή ορισμό για το «δεδομένον»:

> Σε ό,τι αφορά όμως στη σχέση του *γνωρίμου* προς το *πόριμον*, από τη μια είναι εύκολο στον καθένα να διακρίνει την ομοιότητα, από την άλλη όμως είναι δύσκολο να βρει τη διαφορά. Διότι η φύση του ενός προσεγγίζει τόσο πολύ τη φύση του άλλου, ώστε να δίνουν την εντύπωση ότι ταυτίζονται. Ωστόσο, εάν κάποιος τα εξετάσει με λεπτομέρεια, θα διακρίνει ότι υπάρχει κάποια διαφορά: είναι δηλαδή εξίσου φανερό και *γνώριμον* ότι μια είναι η εφαπτομένη στην έλικα από ένα σημείο· αλλά δεν είναι γι’ αυτό το λόγο ήδη *πόριμον* το πρόβλημα, αν δεν έχει ακόμα συλληφθεί από τη νόηση. [Menge 246] Κατά συνέπεια, κάθε *γνώριμον* δεν είναι και *πόριμον*· όμως καθετί *πόριμον* είναι και *γνώριμον*. Επομένως, το *γνώριμον* είναι πιο γενικό από το *πόριμον*.

Όταν παρακάτω ο Μαρίνος χρειαστεί να απορρίψει όλους τους άλλους μονολεκτικούς ορισμούς του «δεδομένου» εκτός από το «πόριμον», θα αναφέρει (250, 12-14) πάλι για το «γνώριμον»:

> Ούτε εκείνος ο ορισμός που το ορίζει [το δεδομένον] ως το *γνώριμον* είναι επαρκής, διότι δεν μπορεί κάθε τέτοιο [γνώριμον] να συλληφθεί από τη νόηση, έστω και αν μόνο αυτό [μπορεί να συλληφθεί από τη νόηση]· διότι το *άγνωστον* δεν θα μπορούσε να συλληφθεί από τη νόηση.

Ο παραπάνω συλλογισμός του Μαρίνου δεν είναι τόσο εύκολα κατανοητός. Αν χρησιμοποιήσουμε ένα απλό ανάλογο συνολοθεωρητικό παράδειγμα, αντικαθιστώντας στο συλλογισμό του Μαρίνου, στη θέση του «γνώριμον» την ιδιότητα του κατοίκου Αττικής και στη θέση του «καταληπτόν» (αυτού που μπορεί να συλληφθεί από τη νόηση) την ιδιότητα του κατοίκου Χολαργού γίνεται ευκολότερα κατανοητός: «αν κάποιος είναι κάτοικος Αττικής δεν είναι αναγκαία και κάτοικος Χολαργού, γιατί δεν μπορεί κάθε κάτοικος Αττικής να είναι κάτοικος Χολαργού, αν και μόνο οι κάτοικοι Αττικής μπορούν – γιατί οι εκτός Αττικής κάτοικοι δεν θα μπορούσαν να είναι κάτοικοι Χολαργού». Εδώ δηλαδή ο Μαρίνος επανέρχεται για να απορρίψει το «γνώριμον» ως επαρκή ορισμό για το «δεδομένον» με την αιτιολογία ότι δεν μπορεί κάθε «γνώριμον» να συλληφθεί από τη νόηση, κάτι που συμβαίνει όπως αναφέρει αμέσως παρακάτω μόνο για το «πόριμον» που είναι ο μόνος επαρκής ορισμός για το «δεδομένον». Επαναλαμβάνει ουσιαστικά τη θέση που διατύπωσε προηγουμένως ότι το «γνώριμον» είναι πιο γενικό από το «πόριμον», επειδή για να χαρακτηριστεί κάτι ως «πόριμον» πρέπει να πληροί επιπλέον το κριτήριο του να έχει συλληφθεί από τη νόηση. Ερμηνεύοντας τα λεγόμενα του Μαρίνου συνολοθεωρητικά, μπορούμε να πούμε ότι το «καταληπτόν» είναι γνήσιο υποσύνολο του «γνώριμον».[6] Θέση που επιβεβαιώνει και ο Μαρίνος αμέσως μετά (250, 23-24), όταν αποδέχεται ως μόνο τέλειο μη μονολεκτικό ορισμό του «δεδομένου» το «γνώριμον και ταυτόχρονα πόριμον».

Η διαφορά ανάμεσα στο «γνώριμον» και το «δεδομένον», που θέλει ο Μαρίνος να τονίσει ιδιαίτερα είναι η «κατάληψις». Η ενέργεια της νόησης δηλαδή, όπως έχουμε ήδη συζητήσει στην § 3.4, που περιλαμβάνει τη νοητική σύλληψη και την επεξεργασία. Είναι φανερό ότι οι αρχαίοι διέκριναν ανάμεσα στους όρους «γνώριμον» και «πόριμον». Με σύγχρονους όρους θα λέγαμε ότι η διαφορά τους είναι η ενέργεια της νόησης που απαιτεί τόσο τη νοητική σύλληψη όσο και τη νοητική επεξεργασία που χαρακτηρίζει μόνο την ενεργητική γνώση, αυτή που αναγνωρίζει δηλαδή την αιτία και τη λογική αναγκαιότητα του πράγματος που γνωρίζει και όχι μόνο την επιφάνεια. Είναι η διαφορά ανάμεσα στην ενεργητική και την παθητική γνώση. Το ότι γνωρίζω κάτι δεν σημαίνει ότι το κατανοώ κιόλας και μπορώ να το αιτιολογήσω να το παρουσιάσω ως λογική αναγκαιότητα, ενώ αν έχω κατανοήσει κάτι και μπορώ να το αιτιολογήσω προφανώς είμαι σε θέση να το γνωρίσω. Θα θυμίσουμε στο σημείο αυτό ότι οι Στωικοί στην «κατάληψη» διακρίνουν δύο μέρη: ένα ακούσιο και ένα εκούσιο. Το πρώτο φαίνεται να αντιστοιχεί στη νοητική σύλληψη που γίνεται με τη βοήθεια της ενόρασης-intuition[7] ενώ το δεύτερο αφορά μάλλον τη νοητική επεξεργασία που ακολουθεί χρονικά και αφορά περισσότερο την κρίση του ερευνητή.[8]

---

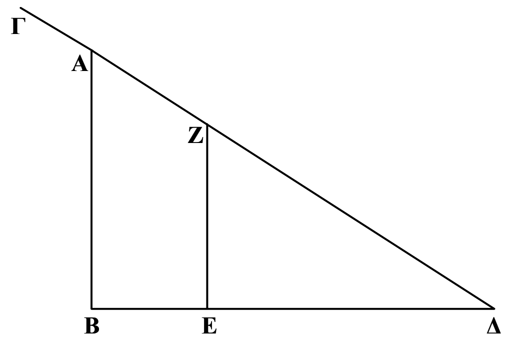
[6] Στην ίδια κατεύθυνση ο Michaux (1947, 77), αποδίδοντας το ίδιο χωρίο του Μαρίνου, παριστάνει το «καταληπτόν» ως γνήσιο υποσύνολο του «γνώριμον», χρησιμοποιώντας διαγράμμα του Venn, όπου ο κύκλος του «καταληπτόν» είναι εσωτερικός του κύκλου του «γνώριμον».

[7] Διαβάζουμε στο λήμμα intuition στο λεξικό Hornby Oxford Dictionary, «the immediate understanding of something without conscious reasoning or study».

[8] Θυμίζουμε τη χαρακτηριστική και πολύ διαφωτιστική διατύπωση του Σέξτου Εμπειρικού, *Adv. Math* (8.397.1-8.398.2): «ἔστι μὲν οὖν ἡ κατάληψις, ὡς ἔστι παρ᾽ αὐτῶν ἀκούειν, καταληπτικῆς φαντασίας συγκατάθεσις, ἥτις διπλοῦν ἔοικεν εἶναι πρᾶγμα, καὶ τὸ μέν τι ἔχειν ἀκούσιον, τὸ δὲ ἑκούσιον καὶ ἐπὶ τῇ ἡμετέρᾳ κρίσει κείμενον.»

Όπως διαπιστώσαμε επίσης μετά από έρευνα (με τη βοήθεια του προγράμματος TLG), σε κανένα από τα κείμενα των Ελληνικών μαθηματικών Ευκλείδη, Αρχιμήδη, Απολλώνιου και Πάππου, δεν εμφανίζεται ο όρος «γνώριμον». Γεγονός που επιβεβαιώνει τη θέση μας ότι οι Έλληνες μαθηματικοί δεν ταύτιζαν, ούτε αντικαθιστούσαν τους όρους «δοθέν» ή «δεδομένον» με το «γνώριμον» (γνωστό). Μοναδική εξαίρεση στα αποτελέσματα της έρευνάς μας αποτελεί η εμφάνιση του όρου «γνώριμον» στο έργο του Ευκλείδη *Οπτικά,* στις προτάσεις 18-21. Ακριβώς όμως σε αυτές τις προτάσεις επιβεβαιώνεται για μια ακόμη φορά, η θέση μας για διαφορετικότητα ανάμεσα στο «δοθέν» και το «γνώριμον», γιατί ζητιέται από την εκφώνηση τους «δοθέντα» μεγέθη (όπως ύψος, βάθος, και μήκος) να γίνουν «γνώριμα». Αυτό και γίνεται μέσα από αποδεικτικούς συλλογισμούς στις συγκεκριμένες προτάσεις, όπου τα μεγέθη ενώ είναι αρχικά «δοθέντα» καταλήγουν να γίνουν «γνώριμα»[9]. Το γεγονός αυτό από μόνο του, αποδεικνύει ότι ο ίδιος ο Ευκλείδης θεωρεί ότι το «γνώριμον» δεν ταυτίζεται με το «δοθέν», αλλά ότι μπορεί υπό συγκεκριμένες συνθήκες να παραχθεί από αυτό. Ως παράδειγμα μιας τέτοιας διαδικασίας παραθέτουμε την πρόταση 18 από τα *Οπτικά* του Ευκλείδη:

Τὸ δοθὲν ὕψος γνῶναι, πηλίκον ἐστίν, ἡλίου φαίνοντος.



9 Μόνο στην έκδοση των *Οπτικών* που αποδίδεται στον Θέωνα, στις προτάσεις 19 και 20, σε κάποια σημεία εμφανίζεται ο όρος «δοθέν» στη θέση του «γνώριμον» που κανονικά θα έπρεπε να υπάρχει. Για παράδειγμα στο τέλος της πρότασης 20, το «βάθος» φτάνει στο τέλος να χαρακτηριστεί «δοθέν» αντί για «γνώριμον», που ζητά η εκφώνηση της πρότασης. Αλλά «δοθέν» ήταν το «βάθος» και πριν γίνει όλος ο αποδεικτικός συλλογισμός. Η προφανής απάντηση στο πρόβλημα που ανακύπτει είναι ότι πρόκειται για λάθος του αντιγραφέα που δεν υπάρχει στην άλλη έκδοση των *Οπτικών*, την οποία οι περισσότεροι αποδίδουν άλλωστε στον Ευκλείδη θεωρώντας ότι προέρχεται από αρχαιότερο πρωτότυπο, εκτός του W.R. Knorr που δεν συμμερίζεται αυτή τη θέση και επιχειρηματολογεί για το αντίθετο. Κατά συνέπεια η παρατήρησή μας, θα μπορούσε, σε πρώτη ανάγνωση, να αποτελέσει ένα επιπλέον επιχείρημα στην πλευρά όσων υποστηρίζουν ότι το αντίγραφο του Θέωνα είναι μεταγενέστερο. Θα μπορούσε από την άλλη βέβαια να υποστηριχθεί ότι υπάρχει κάτι βαθύτερο πίσω από την προφανή εξήγηση την οποία εμείς δίνουμε. Στο σημείο αυτό, ίσως υπάρχει ένα ερώτημα που μένει να απαντηθεί στο μέλλον μέσα από μια πιο διεξοδική και εμπεριστατωμένη έρευνα και μελέτη του συνόλου των *Οπτικών.*

ἔστω τὸ δοθὲν ὕψος τὸ ΑΒ, καὶ δέον αὐτὸ γνῶναι, πηλίκον ἐστίν. ἔστω μὲν ὄμμα τὸ Δ, ἡλίου δὲ ἀκτὶς ἡ ΓΑ συμβάλλουσα τῷ πέρατι τοῦ ΑΒ μεγέθους καὶ διήχθω μέχρι τοῦ Δ ὄμματος. ἔστω δὲ σκιὰ ἡ ΔΒ τοῦ ΑΒ. καὶ κείσθω ἕτερόν τι μέγεθος τὸ ΕΖ συμβάλλον τῇ ἀκτῖνι μὴ πάντως καταυγαζόμενον ὑπ᾽ αὐτῆς κατὰ τὸ Ζ πέρας. ἥρμοσται οὖν εἰς τὸ ΑΒΔ τρίγωνον ἕτερόν τι τρίγωνον τὸ ΕΖΔ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ. ἀλλ᾽ ὁ τῆς ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ γνώριμος· καὶ ὁ τῆς ΔΒ ἄρα πρὸς τὴν ΒΑ λόγος ἐστὶ γνώριμος. γνώριμον δὲ τὸ ΔΒ. γνώριμον ἄρα καὶ τὸ ΑΒ.

Από τη συγκεκριμένη πρόταση γίνεται φανερό ότι το «δοθὲν» μέγεθος (ὕψος) έγινε στο τέλος της απόδειξης «γνώριμον». Είναι σαφές επίσης ότι δεν θα είχε νόημα ύπαρξης μια τέτοια πρόταση και πολύ περισσότερο η απόδειξή της, από τον ίδιο τον Ευκλείδη, αν αυτός θεωρούσε ότι οι δύο όροι ταυτίζονται. Άρα πρέπει να καταλήξουμε ότι η ταύτιση και απόδοση των όρων «δοθέν» και «δεδομένον» με το «γνωστό» δεν είναι στη σωστή κατεύθυνση, ακόμη και αν κάποιοι στην πορεία της ιστορίας, όπως οι Άραβες, το έκαναν.

Καταλήγοντας, θα επαναλάβουμε τη θέση μας ότι κανένας από τους όρους «δοθέν» και «δεδομένον» δεν σημαίνει «γνωστό». Η θέση μας αυτή ενισχύεται επιπλέον από την ερμηνεία των ορισμών των ειδών του «δεδομένου» από τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη που ακολουθεί στην επόμενη ενότητα.

8.1.2. Τα είδη του «δεδομένου» σύμφωνα με τον Ευκλείδη

Θεωρώντας ότι έχουμε διαχωρίσει πλέον την έννοια του «δεδομένου» από το «γνωστό» και έχουμε επιπλέον κατανοήσει την έννοια του «δεδομένου», ως το αποτέλεσμα ενός συλλογισμού που έχει «δυνητική» αναγκαιότητα, στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε καλύτερα τους ορισμούς των ειδών του «δεδομένου» από τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη.

Ο πρώτος ορισμός των *Δεδομένων* αφορά τα «δεδομένα ως προς το μέγεθος». Συγκεκριμένα ο Ευκλείδης αναφέρει:

Δεδομένα τῷ μεγέθει λέγεται χωρία τε καὶ γραμμαὶ καὶ γωνίαι, οἷς δυνάμεθα ἴσα πορίσασθαι.

Δηλαδή, ένα χωρίο, μια γωνία ή ένα ευθύγραμμο τμήμα λέγεται «δεδομένον ως προς το μέγεθος», όταν είμαστε ικανοί μέσα από μια λογικά έγκυρη διαδικασία να φτάσουμε σε ένα ίσο με αυτό. Αυτό που ενδιαφέρει σε αυτόν τον ορισμό, δεν είναι το απόλυτο (το «γνωστό» του μεγέθους) ή αυτό καθ' αυτό το συγκεκριμένο μέγεθος, αλλά η «δυνατότητα» να «πορισθούμε» ένα ίσο με αυτό. Δηλαδή η δυνατότητα μέσα από μια έγκυρη διαδικασία να φτάσουμε με δυνητική αναγκαιότητα σε ένα ίσο μέγεθος.

Το μέγεθος που αναφέρεται στην έκφραση «δεδομένον ως προς το μέγεθος» δεν αποτελεί ένα απόλυτο –για παράδειγμα αριθμητικό– μέγεθος αλλά έχει μια «δυνητικότα» που εξαρτάται από τις όποιες «δυνητικές» επιλογές των αρχικών «δοθέντων» που προηγήθηκαν. Έτσι στο παράδειγμά προβληματικής ανάλυσης (VII 105) που συζητήσαμε και αναλύσαμε από τον Πάππο στην § 6.3, το μέγεθος του ορθογωνίου $AE \times EB$ (*ορθ.* ΑΕ, ΕΒ) είναι «δοθέν» (θα μπορούσε να χαρακτηριστεί πλέον «δεδομένον» αφού είναι αποτέλεσμα έγκυρου συλλογισμού), γιατί είναι ίσο με το τετράγωνο της εφαπτομένης ΕΣ. Όμως το μέγεθος της εφαπτομένης εξαρτάται από τον «δοθέντα» κύκλο («δοθέντος» κέντρου και «δοθείσης» ακτίνας) και τη θέση του σημείου Ε που είναι επίσης «δοθείσα» από την υπόθεση του προβλήματος και ο χαρακτήρας αυτών των αντικειμένων είναι «δυνητικός» όπως τονίσαμε αλλού (§ 4.4 και § 6.3). Κατά συνέπεια το μέγεθος της ΕΣ έχει «δυνητικότητα» που προκύπτει από την «δυνητικότητα» των προηγούμενων «δοθέντων». Γίνεται έτσι φανερό ότι αυτό που ενδιαφέρει το συλλογισμό, δεν είναι το απόλυτο μέγεθος της ΕΣ, αλλά η «δυνατότητα» να προκύπτει αυτό με έγκυρο τρόπο, δηλαδή με δυνητική αναγκαιότητα, ως αποτέλεσμα της νοητικής διαδικασίας που έχει ξεκινήσει με κάποιες επιλογές «δοθέντων» στοιχείων του σχήματος. Οι επιλογές αυτές των «δοθέντων» έχουν το χαρακτήρα του όχι αδυνάτου να συμβούν αλλά και τυχαίου – ενδεχομένου όπως έχουμε τονίσει. Δεν έχουν το χαρακτήρα αυτού του συγκεκριμένου κατασκευασμένου σχήματος. Πρέπει να υπάρξουν όμως έστω με αυτόν τον «δυνητικό» τρόπο και να ονομαστούν τα αντικείμενα και οι σχέσεις για να μπορούν να διαχειριστούν σε μια διαδικασία που κάθε βήμα της χωριστά αλλά και ως σύνολο έχει δυνητική αναγκαιότητα.

Είναι λανθασμένη η ερμηνεία του Taisbak (2003, 21-24)[10] για τον πρώτο ορισμό των *Δεδομένων* το «δεδομένο ως προς το μέγεθος»:

[10] Στις σελίδες 21-24 συζητάει και αναλύει και τους 4 ορισμούς των Δεδομένων.

Το να πεις ότι το A είναι δεδομένον (given) (ή: είναι ένα δεδομένο (given) μέγεθος, ή: είναι δεδομένο (given) ως προς το μέγεθος) σημαίνει να πεις ότι υπάρχει (?) [ως δεδομένο (given) – όπως εξηγεί στην επόμενη σελίδα] ένα μέγεθος Γ τέτοιο ώστε A = Γ (2003, 21).

Ο Taisbak, επίσης διατυπώνει παρακάτω (2003, 29), έναν ορισμό που τον θεωρεί όπως αναφέρει ισοδύναμο με τον πρώτο ορισμό του Ευκλείδη:

Ορισμ. 1* Ένα σχήμα ή μια γραμμή ή μια γωνία είναι δεδομένο (given) ως προς το μέγεθος αν και μόνο αν είναι ίσο με κάποιο που είναι δεδομένο (given).

Δεν συμφωνούμε με την αντικατάσταση από τον Taisbak της έκφρασης του Ευκλείδη: «δυνάμεθα ίσα πορίσασθαι» με την φράση: «που είναι δεδομένο» ή «υπάρχει ως δεδομένο». Την θεωρούμε αυθαίρετη, δεν προκύπτει με κανένα τρόπο από τα λεγόμενα του Ευκλείδη αλλά επιπλέον κάνει και τον ορισμό κυκλικό.[11] Ο ίδιος ο Taisbak φτάνει στο σημείο να αναγνωρίσει (2003, 22):

…αλλά η καθαρή έννοια του δεδομένου (given) παραμένει μη ορισμένη (και μη δυνάμενη να οριστεί, αν δεν κάνω λάθος).

Επιβεβαιώνει δηλαδή, ότι ο ίδιος δεν πιστεύει ότι η έννοια του «δεδομένον» μπορεί να οριστεί. Σε άλλο σημείο ο Taisbak (2003, 23-24) αναφέρει:

Ο ορισμ. 1 των *Δεδομένων* μπορεί να γίνει κατανοητός *διαμέσου* της ισότητας των μεγεθών. … Σε ένα σύγχρονο μυαλό εξοικειωμένο με το «σύμβολο της ισότητας» =, αυτό σημαίνει ότι αν μια πλευρά μιας ισότητας είναι γνωστή, η άλλη πλευρά είναι επίσης γνωστή. Αυτός μου φαίνεται ότι είναι ο *λόγος ύπαρξης* (raison d'être) της απόδειξης ισοτήτων: το να πάρεις ένα είδος μέσω ενός άλλου το οποίο είναι ίσο με αυτό αλλά ευκολότερο (;) να το αποκτήσεις. *Αγόρασε ένα, πάρε ένα δωρεάν.* Ένα μέγεθος M που δεν είναι αμέσως δεδομένο (given) με τον προφανή τρόπο, αποδεικνύεται ότι είναι δεδομένο (given) αν υπάρχει ένα άλλο γνωστό (known) μέγεθος το N, τέτοιο ώστε M=N. Το μέγεθος N πρέπει να είναι γνωστό (known) για να κάνει την ισότητα να λειτουργήσει. *Το πώς* αυτό είναι γνωστό (known) είναι μικρότερου ενδιαφέροντος·

[11] Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι σε ιδιωτική επικοινωνία μας με τον καθηγ. Taisbak μας είπε ότι δεν παραξενεύεται που βρήκαμε την ερμηνεία του για τον πρώτο ορισμό των *Δεδομένων* κυκλική, ο ίδιος την έκανε έτσι, γιατί την αντιλαμβάνεται ως προσπάθεια να ορίσει αυτό που δεν μπορεί να οριστεί!

Με άλλα λόγια, ο Taisbak διατυπώνει τη θέση του, ότι για να χαρακτηριστεί κάτι «δεδομένον ως προς το μέγεθος» πρέπει ένα άλλο μέγεθος, ίσο με αυτό, να είναι γνωστό απαραίτητα προκειμένου να λειτουργήσει η ισότητα. Θέση με την οποία δεν συμφωνούμε, τόσο για τη χρήση του «γνωστό», όσο και για το ότι πρέπει να το γνωρίζουμε από πριν και χωρίς να μας ενδιαφέρει και πολύ ο τρόπος που αποκτήθηκε. Ο όρος «πορίσασθαι» που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης στον ορισμό 1, έχει τη ρίζα του στη λέξη «πόρος» η οποία σύμφωνα με το λεξικό Lidell-Scott σημαίνει: «ένα τρόπο ή τα μέσα για να επιτευχθεί κάτι» (a way or means of achieving). Ο όρος «δυνάμεθα» όπως έχουμε αναλύσει, φανερώνει εκτός από την ικανότητά μας να βρούμε ένα δρόμο (του σκέπτεσθαι) ή τα μέσα για να αποκτήσουμε ένα ίσο μέγεθος και τη «δυνητική» αναγκαιότητά τους. Με αυτή την έννοια, θεωρούμε ότι ακριβώς ο «πορισμός» (η εύρεση του έγκυρου δρόμου) του Ν με «δυνητική» αναγκαιότητα είναι το κρίσιμο βήμα προκειμένου να χαρακτηριστεί το Μ «δεδομένον ως προς το μέγεθος» και όχι η ύπαρξη ενός «γνωστού» Ν το οποίο λίγο μας ενδιαφέρει και το πως βρέθηκε.

Η θέση μας, για το πώς λειτουργεί ο πρώτος ορισμός των *Δεδομένων,* ενισχύεται και από την ίδια την πρακτική του Ευκλείδη. Στην πρόταση 3 των *Δεδομένων,* διαβάζουμε: «αν προστεθούν οσαδήποτε δεδομένα μεγέθη και το άθροισμά τους θα είναι δεδομένον [ως προς το μέγεθος]». Μετά από μια παραγωγική διαδικασία, η απόδειξη καταλήγει: «έχει δοθεί άρα το ΑΓ· διότι έχει πορισθεί ίσο με αυτό το ΔΖ.» Αυτό φανερώνει ότι από τη στιγμή που στην πρόταση έχουμε αναπτύξει έναν λογικά έγκυρο συλλογισμό που μας έχει προμηθεύσει με δυνητική αναγκαιότητα το μέγεθος ΔΖ («δεδομένον ως προς το μέγεθος» πλέον), μπορούμε να ονομάσουμε και το ίσο του ΑΓ «δεδομένον ως προς το μέγεθος». Φανερώνεται δηλαδή από την πρακτική του Ευκλείδη, ότι το σημαντικό στοιχείο του πρώτου ορισμού, είναι η ύπαρξη (σε προηγούμενο χρόνο) ενός τέτοιου έγκυρου συλλογισμού, προκειμένου να φτάσουμε να χαρακτηρίσουμε κάτι «δεδομένον ως προς το μέγεθος».

Οι δύο επόμενοι ορισμοί των *Δεδομένων*, όπως φανερώνει η διατύπωσή τους λειτουργούν με ανάλογο τρόπο έχοντας ως βασικό στοιχείο τη «δυνατότητα» να «πορισθούμε».

Ο τέταρτος ορισμός των *Δεδομένων*, αφορά τα «δεδομένα ως προς τη θέση» και φαίνεται να διαφοροποιείται ως προς τη διατύπωση από τους προηγούμενους. Συγκεκριμένα ο Ευκλείδης αναφέρει:

Τῇ θέσει δεδόσθαι λέγονται σημεῖά τε καὶ γραμμαὶ καὶ γωνίαι, ἃ τὸν αὐτὸν ἀεὶ τόπον ἐπέχει.

Δηλαδή, είναι «δεδομένα ως προς τη θέση», τα σημεία οι γραμμές και οι γωνίες που διατηρούνται πάντα στο ίδιο μέρος, με άλλα λόγια δεν μεταβάλλεται η θέση τους. Εμείς θα λέγαμε ότι ένα σημείο, μια γραμμή ή μια γωνία είναι «δεδομένα» ως προς τη θέση, όταν είμαστε ικανοί μέσα από μια έγκυρη διαδικασία να φτάσουμε στο ότι η θέση τους είναι καθορισμένη με δυνητική αναγκαιότητα σε σχέση με τα άλλα στοιχεία του σχήματος και υπ' αυτή την έννοια δεν μεταβάλλεται. Πάλι εδώ, δεν ενδιαφέρει η συγκεκριμένη θέση αλλά η «δυνατότητα» να φτάσουμε σε αυτή με τρόπο βέβαιο μέσα από μια διαδικασία έγκυρη, αποτέλεσμα της οποίας θα είναι η θέση που θα παρουσιάζει πλέον δυνητική αναγκαιότητα και δεν θα μεταβάλλεται.

Δεν αποκλείεται ο Άραβας μαθηματικός Nasir al-Din al-Tusi[12], που συμπληρώνει τον ορισμό του «γνωστού ως προς τη θέση» που αντιστοιχεί στο ελληνικό «δεδομένον ως προς τη θέση»: «που κατέχει πάντα την ίδια θέση», με την έκφραση: «αν μπορούμε να βρούμε αυτή τη θέση», να κατανοεί καλύτερα ότι ο Ευκλείδης δεν εννοεί κάποια συγκεκριμένη θέση αλλά την «δυνατότητα» μας να προσδιορίσουμε τη θέση του σημείου και με αυτή του την έκφραση να θέλει να την επεξηγήσει. Με άλλα λόγια, ίσως θέλει να πει ότι είμαστε ικανοί, με δυνητική αναγκαιότητα, να προσδιορίσουμε τη θέση του σημείου σε σχέση με τα υπόλοιπα μέρη του σχήματος.

Το ότι είμαστε ικανοί να δείξουμε ότι το σημείο «αεί τον αυτόν τόπον επέχει», σημαίνει σύμφωνα με την ερμηνεία μας, ότι είμαστε ήδη σε θέση να δώσουμε τον «λόγο» για τον οποίο η θέση του σημείου προκύπτει με δυνητική αναγκαιότητα, από μια έγκυρη νοητική διαδικασία, η οποία έχει προηγηθεί και αυτό είναι το σημαντικό του τέταρτου και τελευταίου ορισμού των ειδών του «δεδομένου». Τελειώνοντας με τους ορισμούς των ειδών του «δεδομένου» που περιλαμβάνονται στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, είναι σκόπιμο να συνοψίσουμε τους τρόπους με τους οποίους έχουμε ήδη αναφέρει σε διάφορα σημεία της διατριβής μας ότι εμφανίζονται το «δοθέν» και το «δεδομένον».

[12] Σύμφωνα με τους Berggren & Van Brummelen (2000, 27, υποσημείωση 54).

8.1.3. Οι τρόποι που εμφανίζονται το «δοθέν» και το «δεδομένον»

Για τον όρο «δοθέν», καταρχάς θα μπορούσαμε να πούμε ότι εμφανίζεται στα διάφορα μαθηματικά κείμενα με τρεις συνολικά τρόπους. Τα «δοθέντα» από την υπόθεση, όπως αυτά που εμφανίζονται στις εκφωνήσεις των προβλημάτων των *Στοιχείων*, τα οποία έχουν ως βασικό τους χαρακτηριστικό την τυχαιότητα, με βάση το οποίο έχει υπάρξει πολύ μεγάλη συζήτηση για το αν πρόκειται για συγκεκριμένα αντικείμενα ή για «γενικά» αντικείμενα και αν κατά συνέπεια οι αποδείξεις των προτάσεων των *Στοιχείων* στερούνται γενικότητας ή όχι. Τα «δοθέντα» ως αποτέλεσμα παραχώρησης από τα «δεδομένα» της εκφώνησης, όπως εμφανίζονται στην αρχή των αποδεικτικών συλλογισμών των προτάσεων των *Δεδομένων*, όπως αυτά που συζητήσαμε στην απόδειξη της πρότασης 5 στην § 4.4 και τονίσαμε ότι δεν πρόκειται για πραγματικά αντικείμενα αλλά για «δυνητικά» αντικείμενα, τα οποία επίσης χαρακτηρίζονται από τυχαιότητα – ενδεχομενικότητα. Τέλος τα «δοθέντα» στα οποία φτάνουμε μετά από παραγωγικό συλλογισμό, όπως εμφανίζονται στην πορεία της απόδειξης των προτάσεων των *Δεδομένων* ή στο «βεβαιωτικό» μέρος της γεωμετρικής ανάλυσης, που υποστηρίξαμε (§ 4.4) ότι λειτουργούν ως υποκατάστατο του «δεδομένον» και τα οποία τονίσαμε ότι αν και παράγονται μέσα από διαδικασίες που έχουν δυνητική αναγκαιότητα αυτά έχουν και το χαρακτήρα της τυχαιότητας, τη «δυνητικότητα», που τους έχει μεταδοθεί από τα αρχικά «δοθέντα». Έτσι και στους τρεις τρόπους με τους οποίους εμφανίζονται τα «δοθέντα» έχουν τα δύο κοινά χαρακτηριστικά, τα οποία αποδίδει ικανοποιητικά ο ορισμός του Πάππου για το «δοθέν»: τη δυνατότητα να συμβούν (δηλ. δεν είναι αδύνατο να συμβούν) και την τυχαιότητα – ενδεχομενικότητα.

Η διαφορά αντίστοιχα στους τρόπους με τους οποίους εμφανίζεται το «δοθέν», φαίνεται να είναι ότι ενώ τα «δοθέντα» των δύο πρώτων περιπτώσεων αποτελούν απλά αντικείμενα της νοητικής σύλληψης που προκύπτουν κατά παραχώρηση προκειμένου να αρχίσει η διαδικασία, τα «δοθέντα» της τρίτης περίπτωσης προκύπτουν ως αποτέλεσμα συλλογισμού που έχει δυνητική αναγκαιότητα. Έτσι η «δυνητικότητα» των τελευταίων αυτών «δοθέντων» εξαρτάται με δυνητική αναγκαιότητα από τη «δυνητικότητα» των αρχικών «δοθέντων» της πρότασης. Είναι ακριβώς αυτά τα «δοθέντα» του τρίτου είδους με τα οποία καταλήγουν αρκετές από τις προτάσεις των *Δεδομένων,* τα οποία είναι φανερό ότι επαρκούν προκειμένου να χαρακτηριστεί τελικά το ζητούμενο ως «δεδομένον» και με αυτήν την έννοια είπαμε ότι λειτουργούν ως υποκατάστατο του «δεδομένον». Θεωρούμε επίσης, ότι ο τρόπος με τον οποίο προκύπτουν τα αρχικά «δοθέντα» των προτάσεων των *Δεδομένων* (και έμμεσα και των προβλημάτων της γεωμετρικής ανάλυσης), φανερώνει κάποιου είδους διαφοροποίηση σε σχέση με τον περισσότερο τυχαίο – αυθαίρετο τρόπο με τον οποίο εμφανίζονται τα «δοθέντα» στα προβλήματα των *Στοιχείων*. Δηλαδή, ενώ στα *Στοιχεία* η επιλογή των «δοθέντων» απλά με τυχαίο τρόπο, σε ότι αφορά τα «δοθέντα» των *Δεδομένων»,* ο τυχαίος αυτός χαρακτήρας τους είναι πιο περιορισμένος, γιατί η επιλογή τους γίνεται μέσα από τη δεξαμενή των «δεδομένων», που έχουν υπάρξει ως αποτέλεσμα προηγούμενου συλλογισμού που διαθέτει «δυνητική» αναγκαιότητα.

Για τον όρο «δεδομένον» με τη σειρά του, θα μπορούσαμε να πούμε ότι εμφανίζεται στα διάφορα μαθηματικά κείμενα επίσης με τρεις συνολικά τρόπους. Τα «δεδομένα» που αναφέρονται στην αρχή της υπόθεσης των προτάσεων των *Δεδομένων*, για τα οποία δεν ενδιαφέρει τη συγκεκριμένη στιγμή η διαδικασία μέσα από την οποία έγιναν «δεδομένα», η οποία όμως είναι σίγουρο ότι έχει υπάρξει προηγουμένως και τη χαρακτηρίζει δυνητική αναγκαιότητα, σύμφωνα με τους ορισμούς των ειδών του «δεδομένου» που συζητήσαμε και αναλύσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Τα «δεδομένα» που έχουν υπάρξει πριν και από τα «δεδομένα» της υπόθεσης, όπως είναι τα αποτελέσματα προηγούμενων αναλύσεων ή των προηγούμενων προτάσεων των *Δεδομένων* που χρησιμοποιούνται στις επόμενες προτάσεις ή στα προβλήματα της γεωμετρικής ανάλυσης (όπως η *Δεδομ.* 90, στην § 6.3), και είναι επίσης αποτελέσματα έγκυρων συλλογισμών που έχουν προϋπάρξει και τους χαρακτηρίζει δυνητική αναγκαιότητα. Τέλος τα «δεδομένα» που προκύπτουν ως αποτέλεσμα του παρόντος συλλογισμού ο οποίος έχει δυνητική αναγκαιότητα, όπως είναι οι προτάσεις των *Δεδομένων* των οποίων ο αποδεικτικός συλλογισμός καταλήγει σε «δεδομένον». Έτσι παρατηρούμε ότι το κοινό στοιχείο των τριών τρόπων εμφάνισης των «δεδομένων» είναι ότι αποτελούν αποτελέσματα συλλογισμών που έχουν δυνητική αναγκαιότητα και έχουν ήδη υπάρξει.

Ο έγκυρος συλλογισμός του γεωμέτρη – ερευνητή είναι που κάθε φορά αποδίδει τη δυνητική αναγκαιότητα στα διάφορα αντικείμενα του στην διάρκεια της νοητικής πορείας απάντησης του εσωτερικού ερωτήματος του, ότι έχει τη «δυνατότητα» να τα «ποριsθεί». Τη δυνητική αναγκαιότητα την αποκτούν τα αντικείμενα του συλλογισμού τόσο από τη σχέση τους με τα υπόλοιπα αντικείμενα του συλλογισμού όσο και με αυτά που έχουν γίνει «δεδομένα» σε άλλους προηγούμενους συλλογισμούς. Η ύπαρξή τους ως «δεδομένα» και η αιτιολόγηση στο μέλλον από τον γεωμέτρη- ερευνητή, μέσω επόμενων νοητικών συλλογισμών του, της δυνητικής αναγκαιότητας κάποιων άλλων αντικειμένων, είναι που θα αποδώσει τα μελλοντικά «δεδομένα». Με άλλα λόγια, φαίνεται να συνδέεται με μια έννοια καθεμιά από τις προτάσεις που παράγουν κάποιο «δεδομένον» με όλες τις προηγούμενες προτάσεις και τους ορισμούς που παρήγαγαν τα «δεδομένα» με τα οποία έγινε η ανάλυση της, αλλά και τις επόμενες που θα παραχθούν με τη βοήθειά της.[13]

Καταλήγοντας, θεωρούμε ότι τα «δεδομένα», ανεξάρτητα του τρόπου με τον οποίο εμφανίζονται, είναι τα αποτελέσματα έγκυρων συλλογισμών οι οποίοι έχουν ήδη υπάρξει. Είναι αυτά για τα οποία «έχει δοθεί ο λόγος» από τον γεωμέτρη – ερευνητή ο οποίος λειτουργεί στο επίπεδο της νόησης, έχει δηλαδή αναιρεθεί ήδη ο υποθετικός χαρακτήρας τους και έχουν πλέον γίνει βεβαιότητες για αυτόν. Με άλλα λόγια, μπορεί να έχουν «δυνητικό» χαρακτήρα όπως εξηγήσαμε αλλά ο συλλογισμός από τον οποίο έχουν προέλθει έχει δυνητική αναγκαιότητα. Οι προτάσεις των *Δεδομένων* αντίστοιχα είναι επιτυχημένες νοητικές παραγωγικές[14] πορείες, οι οποίες έχουν ως αποτέλεσμα νέα «δεδομένα» και αφορούν μόνο ερευνητές. Δεν γίνεται καμία πραγματική κατασκευή μέσα σε αυτές όπως γίνεται στα συνθετικά έργα. Σε κανένα συνθετικό έργο (όπως είναι τα *Στοιχεία)* δεν επικαλείται κανείς Έλληνας μαθηματικός πρόταση των *Δεδομένων* γιατί δεν θα είχε νόημα. Οι προτάσεις των *Δεδομένων* χρησιμεύουν μόνο σε άλλες αναλύσεις ως έτοιμα εργαλεία. Τις θέσεις μας για το έργο θα τις συζητήσουμε και θα τις αναλύσουμε στην επόμενη ενότητα, υπό το φως πλέον της ερμηνείας μας της ερμηνείας μας για τη γεωμετρική ανάλυση και την ορολογία «δοθέντων» – «δεδομένων».

[13] Στην ίδια κατεύθυνση ο Πλωτίνος συζητώντας το ερώτημα πως υπάρχει μια «ουσία» σε πολλές «ψυχές», φέρνει ως παράδειγμα τη γνώση και το πώς αυτή αποτελεί ένα «όλο» παρόλο που τα «μέρη» του παράγονται από το «όλο». Είναι δυνατό, όπως υποστηρίζει, γιατί η γνώση που είναι το όλο περιλαμβάνει όλα τα άλλα μέρη δυνητικά (δυνάμει). Ως παράδειγμα γνώσης φέρνει τη γεωμετρική ανάλυση (Enneades 4.9.5.23–26): καὶ ὁ γεωμέτρης δὲ ἐν τῇ ἀναλύσει δηλοῖ, ὡς τὸ ἓν ἔχει τὰ πρὸ αὐτοῦ πάντα, δι᾽ ὧν ἡ ἀνάλυσις, καὶ τὰ ἐφεξῆς δέ, ἃ ἐξ αὐ τοῦ γεννᾶται. Ο Πλωτίνος, κλείνει την ενότητα, αναφέροντας ότι όλα τα παραπάνω δεν μας είναι εύκολο να τα πιστέψουμε εξαιτίας της αδυναμίας μας και επειδή επισκιάζονται από το σώμα μας αλλά εκεί (στον κόσμο της νόησης) φανερώνονται όλα και το καθένα ξεχωριστά.

[14] Ο Taisbak (2003, 13) στην εισαγωγή του βιβλίου του μιλάει επίσης για «αλυσίδες» και αναφέρει ότι ο Ευκλείδης «αποδεικνύει παραγωγικά» (proves deductively).

8.2. *Τα* Δεδομένα *του Ευκλείδη*

Έχουμε αναφερθεί μέχρι τώρα στη διατριβή μας, σε διάφορες κρίσεις σε ότι αφορά την αξία, το λόγο και την αναγκαιότητα ύπαρξης των *Δεδομένων* του Ευκλείδη. Έχοντας πλέον κατανοήσει και ερμηνεύσει αρκετά από τα συστατικά στοιχεία του έργου και έχοντας μια καλύτερη ερμηνεία της γεωμετρικής ανάλυσης, είμαστε σε θέση να συνθέσουμε μια πληρέστερη εικόνα του έργου, απαντώντας με σαφήνεια σε δύο σημαντικά ερωτήματα που το αφορούν και κατά την άποψή μας συνδέονται άμεσα μεταξύ τους. Τα ερωτήματα αυτά είναι: α) τι σημαίνει η δήλωση του Μαρίνου ότι τα *Δεδομένα* είναι γραμμένα με αναλυτικό τρόπο; β) Αφού τα *Δεδομένα* περιλαμβάνουν προτάσεις που λίγο πολύ έχουν το ίδιο περιεχόμενο με τα έξι πρώτα βιβλία των *Στοιχείων,* ενώ ακόμη κάποιες από αυτές διαβασμένες από ένα σύγχρονο αναγνώστη, φαίνεται να έχουν το ίδιο ακριβώς μαθηματικό περιεχόμενο, γιατί γράφτηκαν πάλι με την ορολογία «δοθέντων» – «δεδομένων»;

Ως απάντηση στα δύο παραπάνω ερωτήματα, θεωρούμε ότι ο αναλυτικός τρόπος γραφής δεν αποδεικνύει, όπως κάνει ο συνθετικός που πραγματοποιεί αποδείξεις, απλά δείχνει ότι η απόδειξη *μπορεί* να πραγματοποιηθεί. Έτσι μια πρόταση από τα *Δεδομένα* μπορεί να δείχνει τη *δυνατότητα* μιας κατασκευής και η αντίστοιχη πρόταση από τα *Στοιχεία* να την πραγματοποιεί και να την αποδεικνύει. Αυτό θα το δείξουμε παρακάτω με αντιπαραβολή προτάσεων από τα *Στοιχεία* και τα *Δεδομένα* αντίστοιχα.

8.2.1. Τα *Δεδομένα* είναι γραμμένα με αναλυτικό τρόπο

Ο Μαρίνος, στο υπόμνημά του, αναφέρει για τον τρόπο με τον οποίο είναι γραμμένα τα *Δεδομένα* από τον Ευκλείδη:

> Εδώ χρησιμοποίησε ως τρόπο διδασκαλίας όχι τον συνθετικό αλλά τον αναλυτικό, όπως ο Πάππος επαρκώς απέδειξε στους υπομνηματισμούς του στο βιβλίο.[15]

Δηλαδή, ο Μαρίνος αναγνωρίζει ότι τα *Δεδομένα* είναι γραμμένα με άλλο τρόπο και όχι συνθετικά όπως είναι άλλα βιβλία του Ευκλείδη, για παράδειγμα τα *Στοιχεία.*

---

[15] Μαρίνος (256, 22-25): «τρόπῳ δὲ τῆς διδασκαλίας οὐ τῷ κατὰ σύνθεσιν ἐνταῦθα ἠκολούθησεν, ἀλλὰ τῷ κατὰ ἀνάλυσιν, ὡς ὁ Πάππος ἱκανῶς ἀπέδειξεν ἐν τοῖς εἰς τὸ βιβλίον ὑπομνήμασιν.»

Με το γεγονός αυτό, φαίνεται σύμφωνα με τον Μαρίνο, ότι είχε ασχοληθεί και το είχε αποδείξει ο Πάππος, στους υπομνηματισμούς του στο έργο, οι οποίοι όμως δυστυχώς δεν έφτασαν ως εμάς. Ας δούμε όμως, πως οι σύγχρονοι ερευνητές των ελληνικών Μαθηματικών, αντιλαμβάνονται τη διαφορά ανάμεσα στον αναλυτικό και το συνθετικό τρόπο γραφής.

Ο Heath (1921, τόμ. I, 371), αναφέρει χαρακτηριστικά:

> Τα *Στοιχεία*, είναι μια συνθετική πραγματεία κατά το ότι, αναπτύσσονται σε όλη τους την πορεία προς τα εμπρός, προχωρώντας πάντοτε από το γνωστό προς το άγνωστο, από το απλό και ειδικό προς το ποιο σύνθετο και γενικό· για αυτό το λόγο η *ανάλυση,* η οποία ανάγει το άγνωστο ή το πιο σύνθετο στο γνωστό, δεν έχει θέση στην έκθεση, αν και θα έπαιζε ένα σημαντικό ρόλο στην εύρεση των αποδείξεων.

Με άλλα λόγια, ο Heath εννοεί ότι τα *Στοιχεία* και οι άλλες συνθετικές πραγματείες αφορούν το τελικό στάδιο της παρουσίασης των μαθηματικών αποδείξεων. Δηλαδή, όπως θα λέγαμε, την τελική μορφή των κειμένων που έφτασε σε εμάς. Αντίθετα η ανάλυση και ο αναλυτικός τρόπος σκέψης χρησιμοποιήθηκε με στόχο την εύρεση των μαθηματικών αποδείξεων. Θέση με την οποία συμφωνούμε σε γενικές γραμμές, δεν θα λέγαμε όμως ότι είναι ιδιαίτερα διαφωτιστική. Παρακάτω ο Heath (1921, τόμ. I, 422), στο κεφάλαιο για τον Ευκλείδη και για το έργο του *Δεδομένα*, αναφέρει ειδικά για τις προτάσεις των *Δεδομένων:*

> Ας σημειωθεί ότι αυτή η μορφή πρότασης δεν προσδιορίζει στην πραγματικότητα το αντικείμενο ή τη σχέση η οποία αποδεικνύεται ότι δίνεται, αλλά απλώς αποδεικνύει ότι μπορεί να προσδιορισθεί, όταν τα γεγονότα που διατυπώνονται στην υπόθεση είναι γνωστά. … Θα έπρεπε φυσικά να αναμένουμε ότι μεγάλο μέρος της ύλης των *Στοιχείων* θα εμφανίζεται και πάλι στα *Δεδομένα,* υπό το πρίσμα όμως του συγκεκριμένου βιβλίου· πράγματι αποδεικνύεται ότι έτσι συμβαίνει.

Στο παραπάνω απόσπασμα, ο Heath γίνεται περισσότερο σαφής, και αναδεικνύει το γεγονός ότι τα *Δεδομένα* είναι γραμμένα με διαφορετικό τρόπο σε σχέση με τα *Στοιχεία.* Θα λέγαμε ότι αντιλαμβάνεται τον «δυνητικό» χαρακτήρα με τον οποίο είναι γραμμένες οι προτάσεις των *Δεδομένων.* Αντιλαμβάνεται δηλαδή τα *Δεδομένα* περίπου ως «δυνητικά» *Στοιχεία.*

Στην ίδια κατεύθυνση με τη δική μας θεώρηση, για διαφοροποίηση ανάμεσα στα κομμάτια του μαθηματικού λόγου που είναι γραμμένα με αναλυτικό τρόπο και σε αυτά που είναι γραμμένα με συνθετικό, ο Klein (1968, 163-164), όταν κατηγορεί τον Hankel ότι δεν έχει αντιληφθεί την ουσιώδη διαφορά ανάμεσα στην ανάλυση και τη σύνθεση, αναφέρει:

> Η ανάλυση απλά δείχνει τη *δυνατότητα* (*possibility*) μιας απόδειξης ή μιας κατασκευής. Ένα θεώρημα έχει «αποδειχθεί» μόνο όταν τα ζητούμενα στοιχεία έχουν *πραγματικά (actually)* «παραχθεί» από τις «δοθείσες» («given») σχέσεις ανάμεσα στις «δοθείσες» («given») ποσότητες. Η κατασκευή ενός σχήματος καθορισμένου από ορισμένες συγκεκριμένες συνθήκες έχει λάβει χώρα μόνο όταν αυτό το σχήμα έχει σχεδιαστεί πραγματικά χρησιμοποιώντας τις «δοθείσες» («given») ποσότητες με *αυτές ακριβώς τις συγκεκριμένες διαστάσεις.* Το «δόσιμο» («giveness») το οποίο χρησιμοποιεί η ανάλυση θα πρέπει, αντίθετα, να γίνει κατανοητό μόνο ως *«δυνατό δόσιμο»* («*possible giveness*»)… Αυτό το *«δυνατό δόσιμο»* («*possible giveness*») φανερώνεται στη γεωμετρική ανάλυση από το γεγονός ότι η κατασκευή η οποία θεωρείται ως ήδη πραγματοποιημένη (the «quaesitum tanquam concessum») δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσει τις «δοθείσες» («given») ποσότητες ως μονοσήμαντα προσδιορισμένες *αλλά μόνο ως έχουσες τον χαρακτήρα των «δοθέντων»* («*given*»).

Στο σημείο αυτό ο Klein, προκειμένου να αντιληφθούμε τον τρόπο που οι Έλληνες έκαναν τέτοιου είδους συλλογισμούς και αλλού, μας προτρέπει να παραβάλουμε το εξής χωρίο από τα έργο του Αριστοτέλη *Περί Μνήμης και Αναμνήσεως* (450α 1-5):

> συμβαίνει γὰρ τὸ αὐτὸ πάθος ἐν τῷ νοεῖν ὅπερ καὶ ἐν τῷ διαγράφειν· ἐκεῖ τε γὰρ οὐθὲν προσχρώμενοι τῷ τὸ ποσὸν ὡρισμένον εἶναι τοῦ τριγώνου, ὅμως γράφομεν ὡρισμένον κατὰ τὸ ποσόν, καὶ ὁ νοῶν ὡσαύτως, κἂν μὴ ποσὸν νοῇ, τίθεται πρὸ ὀμμάτων ποσόν, νοεῖ δ᾽ οὐχ ᾗ ποσόν·

Δηλαδή, ο Klein, φαίνεται να διακρίνει ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στον τρόπο γραφής και τη στόχευση της ανάλυσης από της σύνθεσης. Πιθανότατα αναφέρεται στο συγκεκριμένο των αποδείξεων της σύνθεσης καθώς και στο δυνητικό χαρακτήρα των αποδείξεων της ανάλυσης. Γεγονός είναι, ότι δεν μπορούμε να είμαστε απολύτως σίγουροι για το τι ακριβώς εννοεί ο Klein με την «δυνατότητα» (possibility), την έκφραση «possible giveness» και πως εννοεί τα «δοθέντα» και τα «δεδομένα», γιατί η αναφορά του στην ανάλυση είναι αρκετά συνοπτική, δεδομένου ότι γίνεται με κύριο στόχο την «αριθμητική» ανάλυση οπότε η γεωμετρική ανάλυση χρησιμοποιείται παρεμπιπτόντως και δεν συνοδεύεται από κάποιο συγκεκριμένο παράδειγμα ή κάποια περαιτέρω επεξήγηση των λεγομένων του.

Είναι γεγονός όμως, ότι οι προτάσεις των *Δεδομένων* διακρίνονται για αυτή τη «δυνητικότητα» των αντικειμένων τους και των σχέσεών τους και αποτελούν τμήματα του «βεβαιωτικού» μέρους των γεωμετρικών αναλύσεων, στις οποίες είτε αναφέρονται με ρητό τρόπο[16] είτε όχι. Χρησιμοποιούνται δηλαδή ως έτοιμα τμήματα αναλύσεων επόμενων προτάσεων, δείχνοντας όπως αναφέραμε, ότι οι αποδείξεις αυτών των προτάσεων *μπορούν* να πραγματοποιηθούν ή αλλιώς έχουν «δυνητική» αναγκαιότητα. Αντίθετα οι προτάσεις των *Στοιχείων* και των άλλων συνθετικών έργων, πραγματοποιούν τις αποδείξεις σε συγκεκριμένα σχήματα. Η διαφορά ανάμεσα στον αναλυτικό τρόπο γραφής και τον συνθετικό, θα γίνει ακόμη περισσότερο εμφανής και κατανοητή στην επόμενη ενότητα, όπου θα αντιπαραβάλουμε προτάσεις από τα *Δεδομένα* και τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη αντίστοιχα.

8.2.2. Αντιπαραβολή προτάσεων από τα *Δεδομένα* και τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη

Όπως ήδη τονίσαμε, η «δυνατότητα» είναι συστατικό στοιχείο των ειδών του «δεδομένου». Θυμίζουμε στους ορισμούς του Ευκλείδη για τα είδη του «δεδομένου» εκφράσεις όπως: «δυνάμεθα ἴσα πορίσασθαι… δυνάμεθα τὸν αὐτὸν πορίσασθαι.». Η «δυνατότητα» του «δεδομένου» στη γεωμετρία, όπως έχουμε αναλύσει, έχει την έννοια της δυνητικής αναγκαιότητας, η οποία προκύπτει ως αποτέλεσμα έγκυρου συλλογισμού που έχει υπάρξει και όχι την έννοια της απλής πιθανότητας να συμβεί κάτι.

Ερμηνεύοντας σε προηγούμενη ενότητα (§ 8.1.2) τους ορισμούς των ειδών του «δεδομένου», αναλύσαμε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η «δυνατότητα» σε αυτούς τους ορισμούς των *Δεδομένων*. Εδώ, θα αναλύσουμε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η «δυνατότητα» στις προτάσεις των *Δεδομένων.* Προκειμένου να γίνει κατανοητός ο τρόπος που λειτουργούν οι προτάσεις των *Δεδομένων* στη βάση της

---

[16] Όπως για παράδειγμα στο βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης του προβλήματος VII, 105 που παραθέσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, ο Πάππος χρησιμοποιεί και διατυπώνει την πρόταση 90 των *Δεδομένων.*

«δυνατότητας» του «δεδομένου», θα αντιπαραβάλουμε για κάθε πρόταση των *Δεδομένων* που θα αναλύσουμε την αντίστοιχη πρόταση των *Στοιχείων,* την πρόταση δηλαδή που όπως διάφοροι υποστηρίζουν έχει το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο. Τέτοιου είδους προτάσεις από τα *Στοιχεία* και τα *Δεδομένα* αντίστοιχα αναφέρει ο Heath (1921, τόμ. I, 507, 509 και 1926, τόμ. II, 250): οι II 5, 6 αντιστοιχούν στις Data 85, 86, οι III 35, 36 στις Data 91, 92, η VI 25 στην Data 70, ο Taisbak (2003, 250-251 και 1991, 170): η I 22 στην Data 39 και η VI 28 στην Data 58, ο Knorr (1986, 142): η VI 26 στην Data 58. Αυτά ακριβώς τα ζευγάρια προτάσεων που σε μια πρώτη σύγχρονη ανάγνωση φαίνεται να έχουν ισοδύναμο μαθηματικό περιεχόμενο, είναι που συνέβαλλαν σημαντικά στη διαμόρφωση ερωτημάτων όπως: «αφού τα *Δεδομένα* δεν περιλαμβάνουν τίποτε καινούργιο γιατί γράφτηκαν;» ή «τι θέλουν να πουν οι προτάσεις των *Δεδομένων* που δεν το έχουν πει ήδη οι προτάσεις των *Στοιχείων*;»

Στην πρώτη σελίδα της εισαγωγής του βιβλίου του για τα *Δεδομένα*, ο Taisbak (2003), παραθέτει τη χαρακτηριστική δήλωση του δάσκαλου του των ελληνικών Μαθηματικών, καθηγητή Olaf Schmidt: «Εάν κανείς δεν είχε γράψει τα Δεδομένα του Ευκλείδη, δεν θα μου είχαν λείψει ποτέ.» Η δήλωση αυτή, είναι φανερό, ότι προέρχεται από κάποιον ο οποίος προσεγγίζει τα ελληνικά Μαθηματικά από τη σκοπιά του μαθηματικού, και μάλιστα του σύγχρονου μαθηματικού. Αντιλαμβάνεται τα μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος ως αυτοτελή αντικείμενα, μέσα στα οποία είναι ενσωματωμένες όλες οι ιδέες, τα μηνύματα και τα διδάγματά τους. Για αυτόν οι ιδέες, αν και εμφανίζονται στα κείμενα διαφόρων εποχών με διαφορετικές μορφές, αντιπροσωπεύουν ουσιαστικά εκφάνσεις των ίδιων αναλλοίωτων Μαθηματικών, άσχετα με πολιτισμικά και κοινωνικά περιβάλλοντα μέσα στα οποία αναδύονται και λειτουργούν. Για έναν τέτοιο μελετητή της ιστορίας των Μαθηματικών, όπως ο Olaf Schmidt, κατεξοχήν εκπρόσωπο της παραδοσιακής ιστοριογραφίας των Μαθηματικών, όπως την περιγράψαμε στο εισαγωγικό κεφάλαιο της διατριβής μας, τα ερωτήματα που θέσαμε παραπάνω και η αντιπαραβολή των προτάσεων που θα ακολουθήσει, στερούνται νοήματος.

Εμείς αντίθετα, θεωρούμε ότι τα ερωτήματα αυτά είναι μεστά νοήματος και οι προτάσεις που θα αντιπαραβάλλουμε, οι οποίες φαινομενικά εγείρουν κάποια ερωτηματικά σε σχέση με το λόγο της ύπαρξής τους, με τη σωστή ανάγνωσή τους μπορούν να βοηθήσουν σημαντικά όχι μόνο στο να απαντηθούν τα συγκεκριμένα ερωτήματα αλλά και να έχουμε μια πλήρη και ικανοποιητική ερμηνεία τόσο του τρόπου με τον οποίο λειτουργούν στο σύνολό τους οι προτάσεις των *Δεδομένων* αλλά και του λόγου και της αναγκαιότητας της ύπαρξης του έργου. Συνοπτικά θεωρούμε, ότι στις προτάσεις των *Δεδομένων*, αυτό που εξασφαλίζεται μέσα από την έγκυρη παραγωγική διαδικασία είναι η «δυνατότητα», με την έννοια της δυνητικής αναγκαιότητας, να βρεθούν – κατασκευαστούν, τα «δεδομένα», «δυνητικά» μαθηματικά αντικείμενα. Δηλαδή, καταγράφεται από τον ερευνητή, μια επιτυχημένη πορεία ανάλυσης μέσα από την οποία ο ίδιος «βεβαιώθηκε» ότι *μπορεί* να αποδείξει το ζητούμενο της πρότασης. Με άλλα λόγια, δεν γίνονται κανονικές αποδείξεις ούτε βρίσκονται-κατασκευάζονται συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα όπως γίνεται στις προτάσεις των *Στοιχείων*.

Ο Heath (1926, τόμ. II, 250), επίσης μέσα από την οπτική της παραδοσιακής ιστοριογραφίας των Μαθηματικών, βλέποντας τις προτάσεις VI 23 των *Στοιχείων* και 70 των *Δεδομένων* αντίστοιχα, θεωρεί ότι έχουν το ίδιο ακριβώς μαθηματικό περιεχόμενο όταν αναφέρει:

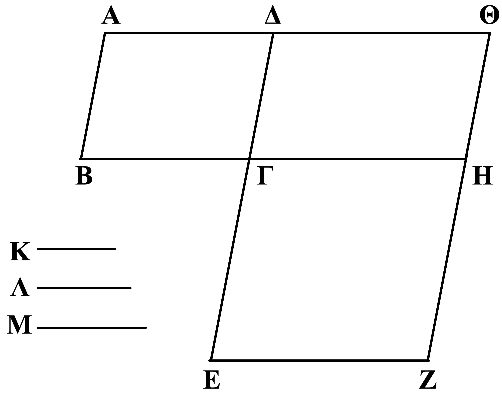
> Τελικά μπορούμε να αναφερθούμε στην Προτ. 70 των *Δεδομένων,* το πρώτο τμήμα της οποίας [εννοεί την περίπτωση των ισογώνιων παραλληλογράμμων] αποδεικνύει ακριβώς αυτό που αντιστοιχεί στη VI 23, … .

Εμείς στη συνέχεια, αφού παραθέσουμε τις δύο αυτές προτάσεις θα τις συζητήσουμε και θα τις αναλύσουμε με σύγχρονη γλώσσα και ορολογία, χωρίς όμως να προσβάλουμε το εννοιολογικό πλαίσιο μέσα στο αναδύθηκαν, προκειμένου να γίνουν αντιληπτά, τόσο ο τρόπος που λειτουργεί η καθεμιά τους και που διαφοροποιούνται μεταξύ τους, όσο και ο λόγος ύπαρξης τους και η λογική χρονική προτεραιότητα που προκύπτει από την νέα ανάγνωσή τους.

***Στοιχεία VI* 23** [17]

Τα ισογώνια παραλληλόγραμμα έχουν μεταξύ τους λόγο τον συγκείμενο εκ των λόγων των πλευρών.

Έστω ισογώνια παραλληλόγραμμα τα ΑΓ, ΓΖ που έχουν τη γωνία ΒΓΔ ίση με τη γωνία ΕΓΗ. Λέγω ότι το παραλληλόγραμμο ΑΓ προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ έχει λόγο τον αποτελούμενο (τὸν συγκείμενον) εκ των λόγων των πλευρών.



Διότι ας έχει ληφθεί σε ευθεία η ΒΓ με την ΓΗ· άρα είναι στην ίδια ευθεία και η ΔΓ με τη ΓΕ και ας έχει συμπληρωθεί το παραλληλόγραμμο ΔΗ και ας έχει ληφθεί κάποια ευθεία η Κ, και ας έχει γίνει όπως μεν η ΒΓ προς τη ΓΗ, έτσι η Κ προς τη Λ, όπως δε η ΔΓ προς τη ΓΕ, έτσι η Λ προς τη Μ.

Οι λόγοι άρα της Κ προς τη Λ είναι οι ίδιοι με τους λόγους των πλευρών, της ΒΓ προς τη ΓΗ και της ΔΓ προς τη ΓΕ. Αλλά ο λόγος της Κ προς τη Μ αποτελείται εκ του λόγου της Κ προς τη Λ και εκ του λόγου της Λ προς τη Μ ($\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}}=\frac{\mathrm{K}}{\Lambda}\cdot\frac{\Lambda}{\mathrm{M}}$). Ώστε

[17] Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ. καὶ συμπε πληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ. Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἀλλ' ὁ τῆς Κ πρὸς Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς Λ λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς Μ· ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ, ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλ ληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

και η Κ προς την Μ έχει λόγο τον αποτελούμενο εκ του λόγου των πλευρών. Και επειδή είναι όπως η ΒΓ προς τη ΓΗ, έτσι το παραλληλόγραμμο ΑΓ προς το ΓΘ [από *Στοιχ.* VI. 1], αλλά όπως είναι η ΒΓ προς τη ΓΗ έτσι η Κ προς τη Λ, και όπως άρα η Κ προς τη Λ, έτσι το ΑΓ παραλληλόγραμμο προς το ΓΘ [από *Στοιχ.* VI. 11]. ($\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Gamma\mathrm{H}}=\frac{\mathrm{A\Gamma}(\#)}{\Gamma\Theta(\#)}=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}}{\Gamma\Delta\cdot\Gamma\mathrm{H}}=\frac{\mathrm{K}}{\Lambda}$). Πάλι επειδή είναι όπως η ΔΓ προς τη ΓΕ, έτσι το παραλληλόγραμμο ΓΘ προς το ΓΖ, αλλά όπως η ΔΓ προς τη ΓΕ , έτσι η Λ προς τη Μ, και όπως άρα η Λ προς τη Μ έτσι το παραλληλόγραμμο ΓΘ προς το ΓΖ ($\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}}=\frac{\Gamma\Theta(\#)}{\Gamma\mathrm{Z}(\#)}=\frac{\Gamma\mathrm{H}\cdot\mathrm{H}\Delta}{\Gamma\mathrm{H}\cdot\mathrm{EZ}}=\frac{\Lambda}{\mathrm{M}}$). Επειδή λοιπόν εδείχθη όπως μεν η Κ προς τη Λ, έτσι το παραλληλόγραμμο ΑΓ προς το παραλληλόγραμμο ΓΘ, όπως δε η Λ προς τη Μ έτσι το παραλληλόγραμμο ΓΘ προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ δι' ίσου άρα [από *Στοιχ.* V. 22] είναι όπως η Κ προς τη Μ έτσι το παραλληλόγραμμο ΑΓ προς το ΓΖ. Η δε Κ προς Μ έχει λόγο τον αποτελούμενο από τον λόγο των πλευρών. Άρα και το ΑΓ προς το ΓΖ έχει λόγο τον αποτελούμενο από τους λόγους των πλευρών.

Τα ισογώνια άρα παραλληλόγραμμα έχουν μεταξύ τους λόγο τον αποτελούμενο από τους λόγους των πλευρών. «ὅπερ ἔδει δεῖξαι».

Δεδομένα, 70 [18]

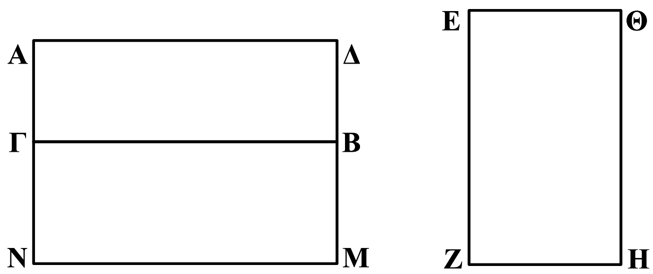
Εάν δύο παραλληλογράμμων με ίσες γωνίες (ἢ περὶ ἀνίσους μέν, δεδομένας δέ[19]) οι πλευρές μεταξύ τους έχουν λόγο δεδομένο και τα ίδια τα παραλληλόγραμμα μεταξύ τους θα έχουν λόγο δεδομένο.

---

[18] Ἐὰν δύο παραλληλογράμμων περὶ ἴσας γωνίας ἢ περὶ ἀνίσους μέν, δεδομένας δέ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλή λας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ αὐτὰ τὰ παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον. δύο γὰρ παραλληλογράμμων τῶν ΑΒ, ΕΗ περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Γ, Ζ ἢ περὶ ἀνίσους μέν, δεδομένας δέ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, τουτέστι λόγος ἔστω τῆς μὲν ΑΓ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς, τῆς δὲ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ· λέγω, ὅτι καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἔστω γὰρ ἰσογώνιον τὸ ΓΔ τῷ ΖΘ, καὶ παρα βεβλήσθω παρὰ τὴν ΓΒ εὐθεῖαν τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΓΝ· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΒΜ ἐστιν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΝ τῷ ΖΘ· ἔστι δὲ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΒΝ, ΘΖ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΓΝ. λόγος δὲ τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΓΝ δοθείς. τῆς δὲ ΕΖ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΝ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΜ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἔστι δὲ τὸ ΓΜ τῷ ΖΘ ἴσον· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς.

[19] Δεν θα ασχοληθούμε εδώ με την περίπτωση των μη ισογωνίων παραλληλογράμμων, γιατί δεν αφορά τον παραλληλισμό που κάνουμε με την πρόταση VI 23.

Διότι δύο παραλληλογράμμων των ΑΒ, ΕΗ με ίσες τις γωνίες των κορυφών Γ, Ζ ας έχουν οι πλευρές λόγο δεδομένο, δηλαδή έστω ο λόγος της ΑΓ προς την ΕΖ δοθείς, και της ΒΓ προς τη ΖΗ· λέγω ότι και του ΓΔ [παρ/μου] προς το ΖΘ ο λόγος είναι δοθείς.



Διότι έστω ότι το ΓΔ είναι ισογώνιο με το ΖΘ, και ας έχει τοποθετηθεί στη ΓΒ ευθεία το παραλληλόγραμμο ΓΜ ίσο με το ΖΘ. Και ας έχει τοποθετηθεί έτσι ώστε η ΑΓ να είναι στην ευθεία με τη ΓΝ [από *Στοιχ.* Ι. 45]· άρα και η ΔΒ είναι στην ίδια ευθεία με τη ΒΜ [από *Στοιχ.* Ι. 29, Ι. 14]. Και είναι ίσο το [παρ/μο] ΒΝ με το ΖΘ. Είναι δε και ισογώνια. Άρα [από *Στοιχ.* VI. 14] οι πλευρές των ΒΝ και Ζθ οι περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες· είναι άρα όπως η ΓΒ προς τη ΖΗ, έτσι η ΖΕ προς τη ΓΝ. Όμως ο λόγος της ΓΒ προς τη ΖΗ είναι δοθείς. Επομένως ο λόγος της ΕΖ προς τη ΓΝ είναι δοθείς [*Δεδομ. ορισμ. 2*]. Αλλά και ο λόγος της ΕΖ προς την ΑΓ είναι δοθείς [υπόθεση]· άρα και της ΑΓ προς τη ΓΝ ο λόγος είναι δοθείς [από *Δεδομ. 8*]· ώστε και ο λόγος του ΓΔ [παρ/μου] προς το ΓΜ [παρ/μο] είναι δοθείς [από *Στοιχ. VI. 2, Δεδομ. ορισμ. 2*]. Αλλά είναι και το ΓΜ [παρ/μο] ίσο με το ΖΘ [παρ/μο]. Άρα ο λόγος του ΓΔ [παρ/μου] προς το ΕΗ είναι δοθείς [από *Στοιχ. V. 7, Δεδομ. ορισμ. 2*].

Αντιπαραβάλλοντας τις δύο προτάσεις, γίνεται φανερό, ότι ενώ στην πρώτη, που περιλαμβάνεται στα Στοιχεία, προσδιορίζεται ο συγκεκριμένος λόγος των ισογώνιων παραλληλογράμμων ως το γινόμενο των λόγων των πλευρών, στην δεύτερη, που περιλαμβάνεται στα *Δεδομένα*, αποδεικνύεται απλά η «δυνατότητα» να βρεθεί ο λόγος των παραλληλογράμμων, αν με τη σειρά τους υπάρχουν κάποιες άλλες δυνατότητες που έχουν προσδιοριστεί στην εκφώνηση προηγουμένως, χωρίς όμως να καταλήγει στον συγκεκριμένο λόγο. Έτσι, θεωρούμε ότι πρόκειται για δύο προτάσεις που κάνουν αρκετά διαφορετικά πράγματα μεταξύ τους, τόσο ως προς τον τρόπο που λειτουργούν όσο και ως προς τα αποτελέσματά τους. Η μία υλοποιεί – κατασκευάζει συγκεκριμένα αντικείμενα – σχέσεις και αποδεικνύει ότι το έκανε με έγκυρο τρόπο, ενώ η άλλη χωρίς να κατασκευάζει τίποτε συγκεκριμένο, εξασφαλίζει μέσω μιας νοητικής κατασκευής τη «δυνατότητα» (δυνητική αναγκαιότητα) να μπορούν να βρεθούν κάποια αντικείμενα – σχέσεις. Κατά συνέπεια, δεν μπορούμε να συμφωνήσουμε με τη δήλωση, ότι οι δύο προτάσεις έχουν το ίδιο ή ισοδύναμο μαθηματικό περιεχόμενο.

Στο σημείο αυτό θα μπορούσαμε να κάνουμε μια υπόθεση, που εκτός από τις δύο παραπάνω προτάσεις αφορά επίσης όσες προτάσεις από τα *Στοιχεία* και τα *Δεδομένα* φαίνεται να έχουν αντίστοιχο περιεχόμενο: Ίσως σε κάποια χρονική στιγμή οι δύο προτάσεις που αντιπαραβάλλαμε, να αποτελούσαν μια πρόταση η οποία αντιμετωπιζόταν με τη μέθοδο της γεωμετρικής ανάλυσης και η μεν πρόταση 70 των *Δεδομένων* αποτελούσε μέρος της ανάλυσης ενώ η πρόταση VI 23 των *Στοιχείων* αποτελούσε τη σύνθεση. Αυτή η υπόθεση – πρόταση που κάνουμε εδώ, υποστηρίζεται ισχυρά από την επόμενη αντιπαραβολή προτάσεων που θα κάνουμε παρακάτω, στην οποία πολλά στοιχεία των δύο προτάσεων φανερώνουν την κοινή καταγωγή τους.

Η πρόταση 39 των *Δεδομένων* και το πρόβλημα Ι.22 από τα *Στοιχεία*, είναι ένα από τα ζεύγη προτάσεων που ο Taisbak (2003, 123) υποστηρίζει ότι έχουν το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο. Συγκεκριμένα, περιγράφοντας την κατασκευή που εμφανίζεται στην πρόταση 42 των *Δεδομένων,* υποστηρίζει ότι η ύπαρξη της πρότασης 39 των *Δεδομένων* δεν είναι απαραίτητη αν γίνει χρήση της πρότασης Ι.22 των *Στοιχείων* όπως αναφέρει:

> …η κατασκευή που υποτίθεται ότι έχει γίνει είναι η ίδια όπως αυτή που εκπονήθηκε στην Dt 39, δηλαδή η Ι.22.

Φαίνεται να κατανοεί όμως ταυτόχρονα και να αναγνωρίζει ο Taisbak παρακάτω ότι:

> Περιττή ή όχι, η Dt 39 είναι μια οδός διαφυγής για να κατανοήσουμε τα *Δεδομένα* από αυτά που κάνουν και όχι από τους ορισμούς τους, και να εξερευνήσουμε σε βάθος την εξάρτησή τους και τη συνάφειά τους με τα *Στοιχεία*. Ευθυγραμμίζεται με άλλες που εμπνέουν παρόμοιες υπόνοιες, την Dt. 2 και την Dt. 25, για να αναφέρουμε ένα ζεύγος από τις πιο σημαντικές.

Αυτή όμως την οδό διαφυγής που αναφέρει για την κατανόηση των *Δεδομένων* ο Taisbak δεν την εκμεταλλεύεται πουθενά στο βιβλίο του. Απλά, ο Taisbak παραπέμπει στο παράρτημα B του βιβλίου του, όπου πριν αντιπαραβάλλει την πρόταση 39 των *Δεδομένων* με το πρόβλημα I.22 των *Στοιχείων* δηλώνει (2003, 250):

> Mutatis mutandis το κείμενο της Dt 39 είναι **σχεδόν αυτολεξεί (verbatim) το ίδιο με της I.22 των *Στοιχείων*. Ο συγγραφέας των *Δεδομένων* πήρε το κείμενο του I.22 και εισήγαγε το ιδίωμα «δοθέν»** (given) όπου χρειαζόταν, πράγμα το οποίο εξηγεί τις συντακτικές συγκοπές οι οποίες είναι ευδιάκριτες σε αυτή τη σύνοψη.

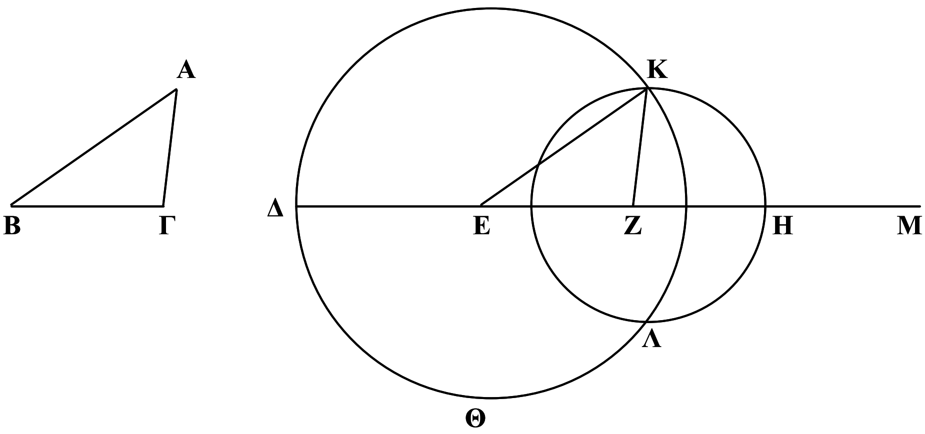
Δηλαδή, ο Taisbak, συνολικά με τις παραπάνω δηλώσεις του, εμφανίζεται πρώτον, να συντάσσεται έστω και μερικώς, με την άποψη που έχουν εκφράσει και άλλοι, ότι οι προτάσεις των *Δεδομένων* δεν είναι απαραίτητες από τη στιγμή που υπάρχουν αντίστοιχες στα *Στοιχεία* που έχουν το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο, δεύτερον, να μην αντιλαμβάνεται ποια είναι η διαφοροποίηση ανάμεσα σε αυτές τις προτάσεις εκτός από τον όρο «δοθέν» και τρίτον, να θεωρεί ότι τα *Στοιχεία* προϋπήρξαν των *Δεδομένων*, αφού ο συγγραφέας της πρότασης 39 των *Δεδομένων*, πήρε απλά την πρόταση 22 των *Στοιχείων* που προϋπήρχε και εισήγαγε τον όρο «δοθέν». Με άλλα λόγια, θεωρεί ότι οι συνθέσεις προϋπήρξαν των αντιστοίχων αναλύσεων, άποψη με την οποία προφανώς δεν συμφωνεί η δική μας πρόταση, σύμφωνα με την οποία οι προτάσεις των *Δεδομένων* θα πρέπει να υπήρξαν κάποια στιγμή τα βεβαιωτικά μέρη των αναλύσεων των αντίστοιχων προτάσεων των *Στοιχείων*. Οι παραπάνω θέσεις του Taisbak δεν μας βρίσκουν σύμφωνους και θα εξηγήσουμε αναλυτικότερα τους λόγους αμέσως μετά την αντιπαραβολή των προτάσεων Θα συμφωνήσουμε ως εδώ μαζί του μόνο, στο γεγονός ότι η αντιπαραβολή αυτών των δύο συγκεκριμένων προτάσεων αποτελεί μια από τις καλύτερες διόδους, προκειμένου να περάσει κάποιος από τα *Δεδομένα* στα *Στοιχεία* και αντίστροφα καθώς και να κατανοήσει καλύτερα τις προτάσεις των *Δεδομένων* και τον τρόπο που πραγματικά αυτές λειτουργούν.

Ας προχωρήσουμε όμως στην αντιπαραβολή των δύο προτάσεων προκειμένου να αντιληφθούμε καλύτερα τη σχέση τους.

Δεδομένα, 39 [20]

Εάν καθεμιά των πλευρών ενός τριγώνου είναι δεδομένη ως προς το μέγεθος έχει δοθεί το τρίγωνο ως προς το είδος.

Γιατί έστω ότι καθεμιά από τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ είναι δεδομένη ως προς το μέγεθος· λέγω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δοθεί ως προς το είδος.



Γιατί έστω μια ευθεία δεδομένη ως προς τη θέση η ΔΜ, η οποία έχει περατωθεί μεν προς το Δ, είναι δε απεριόριστη προς το άλλο μέρος [του Μ], και έστω ότι είναι η ΔΕ ίση με την ΑΒ. Όμως η ΑΒ είναι δοθείσα [ως προς το μέγεθος]· άρα είναι δοθείσα και η ΔΕ [ως προς το μέγεθος από *Δεδομ. Ορισμ. 1*]· αλλά και ως προς τη θέση· και το Δ είναι δοθέν, άρα είναι δοθέν και το Ε [*Δεδομ. 27*]. Και [έστω] η ΕΖ ίση με τη ΒΓ· αλλά η ΒΓ είναι δοθείσα· άρα είναι δοθείσα και η ΕΖ [ως προς το μέγεθος από *Δεδομ. ορισμ. 1*]. Αλλά και ως προς τη θέση. Και είναι δοθέν το Ε· άρα είναι δοθέν και το Ζ [*Δεδομ. 27*]. Και [έστω] η ΖΗ ίση με την ΑΓ. Αλλά η ΑΓ είναι δοθείσα· άρα είναι δοθείσα και η ΖΗ [ως προς το μέγεθος από *Δεδομ. Ορισμ. 1*], αλλά και ως

[20] Ἐὰν τριγώνου ἑκάστη τῶν πλευρῶν δεδομένη ᾖ τῷ μεγέθει, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει. τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἑκάστη τῶν πλευρῶν δεδομένη ἔστω τῷ μεγέθει· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει. ἐκκείσθω γὰρ εὐθεῖα τῇ θέσει δεδομένη ἡ ΔΜ, πεπερατωμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ λοιπόν, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ· δοθεῖσα δὲ ἡ ΑΒ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΔΕ· ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει· καί ἐστι δοθὲν τὸ Δ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε· τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΕΖ· δοθεῖσα δὲ ἡ ΒΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΖ· ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει· καί ἐστι δοθὲν τὸ Ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ· τῇ δὲ ΑΓ ἴση ἡ ΖΗ. δοθεῖσα δὲ ἡ ΑΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει. καί ἐστι δοθὲν τὸ Ζ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Η. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΕΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΘ· θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ ΔΚΘ. πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ· θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ ΗΚΛ· θέσει δὲ καὶ ὁ ΔΘΚ κύκλος· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Κ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΚΕ, ΕΖ, ΖΚ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΚΕΖ τρίγωνον τῷ εἴδει. καί ἐστιν ἴσον τε καὶ ὅμοιον τῷ ΑΒΓ· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

προς τη θέση. Και το Ζ είναι δοθέν, άρα είναι δοθέν και το Η [*Δεδομ. 27*]. Και με κέντρο το Ε και ακτίνα την ΕΔ ας έχει γραφεί κύκλος ο ΔΚΘ· άρα ο ΔΚΘ είναι [δοθείς] ως προς τη θέση [*Δεδομ. ορισμ. 6*]. Πάλι με κέντρο το Ζ και ακτίνα τη ΖΗ ας έχει γραφεί κύκλος ο ΗΚΛ· άρα ο ΗΚΛ είναι [δοθείς] ως προς τη θέση [*Δεδομ. ορισμ. 6*]. Όμως και ο κύκλος ΔΚΘ είναι [δοθείς] ως προς τη θέση· άρα είναι δοθέν και το σημείο Κ [*Δεδομ. 25*]. Είναι δοθέν και καθένα από τα Ε και Ζ· άρα είναι δοθείσα καθεμιά των ΚΕ, ΕΖ, ΖΚ ως προς τη θέση και ως προς το μέγεθος [*Δεδομ. 26*]. Άρα έχει δοθεί το τρίγωνο ΚΕΖ ως προς το είδος [*Δεδομ. ορισμ. 3*]. Και είναι ίσο και όμοιο με το ΑΒΓ [*Στοιχ. Ι.8, Ι.4, VΙ. ορισμ. 1*]· έχει δοθεί άρα το ΑΒΓ τρίγωνο ως προς το είδος [*Δεδομ. ορισμ. 3*].

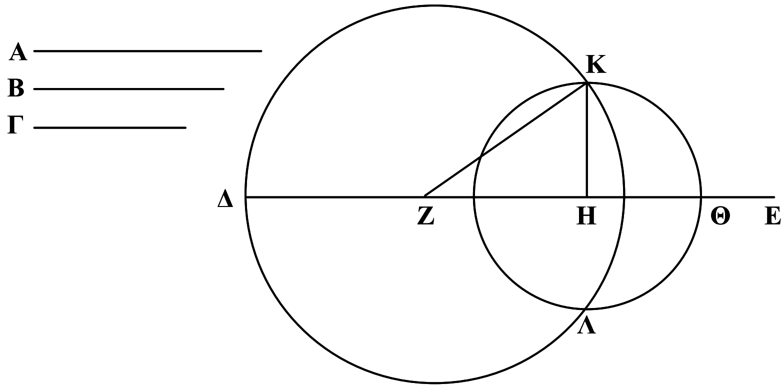
Στοιχεία Ι 22 [21]

Από τρεις ευθείες οι οποίες είναι ίσες προς τρεις δοθείσες [ευθείες] να κατασκευασθεί τρίγωνο· πρέπει δε οι δύο ευθείες με οποιοδήποτε τρόπο και αν λαμβάνονται να είναι μεγαλύτερες της τρίτης [γιατί οι δύο πλευρές τριγώνου με οποιονδήποτε τρόπο και αν λαμβάνονται είναι μεγαλύτερες από την τρίτη πλευρά].

Έστω οι τρεις δοθείσες ευθείες οι Α, Β, Γ από τις οποίες οι δύο [το άθροισμά τους] είναι μεγαλύτερες από την τρίτη με οποιονδήποτε τρόπο και αν ληφθούν, οι μεν Α, Β μεγαλύτερες της Γ, οι δε Α, Γ μεγαλύτερες της Β και οι Β, Γ της Α· πρέπει να κατασκευαστεί τρίγωνο από ευθείες ίσες με τις Α, Β, Γ.

---

[21] Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις [εὐθείαις], τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας]. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι. Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω, ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ.
Επεὶ γὰρ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστιν ἴση. καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστιν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν. Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Ας έχει ληφθεί η ευθεία ΔΕ, πεπερασμένη μεν κατά το Δ, άπειρη δε κατά το Ε, και ας έχει ληφθεί η μεν ΔΖ ίση με την Α, η δε ΖΗ ίση με τη Β, η δε ΗΘ ίση με τη Γ· και ας έχει γραφεί κύκλος με κέντρο μεν το Ζ, ακτίνα δε τη ΖΔ ο ΔΚΛ. Με κέντρο πάλι το Η και ακτίνα ΗΘ ας έχει γραφεί κύκλος ο ΚΛΘ και ας έχουν αχθεί οι ΚΖ, ΚΗ· λέγω ότι από τις τρεις ευθείες που είναι ίσες με τις Α, Β, Γ έχει κατασκευαστεί το τρίγωνο ΚΖΗ.[22]

Γιατί, επειδή το σημείο Ζ είναι κέντρο του κύκλου ΔΚΛ, η ΖΔ είναι ίση με τη ΖΚ. Αλλά η ΖΔ είναι ίση με την Α. Άρα και η ΚΖ είναι ίση με την Α. Πάλι επειδή το σημείο Η είναι κέντρο του κύκλου ΛΚΘ, η ΗΘ είναι ίση με την ΗΚ. Αλλά η ΗΘ είναι ίση με τη Γ· άρα και η ΚΗ είναι ίση με τη Γ. Είναι δε και η ΖΗ ίση προς τη Β· άρα οι τρεις ευθείες οι ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ είναι ίσες με τις τρεις Α, Β, Γ.

Άρα από τρεις ευθείες τις ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, οι οποίες είναι ίσες με τις τρεις δοθείσες ευθείες τις Α, Β, Γ έχει κατασκευασθεί το τρίγωνο ΚΖΗ· «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι».

Συγκρίνοντας τις δύο αυτές προτάσεις, παρατηρούμε πάλι αυτό που αναδείξαμε και στην προηγούμενη αντιπαραβολή προτάσεων, δηλαδή το γεγονός ότι ενώ στο τέλος της πρότασης 39 των *Δεδομένων* εξασφαλίστηκε παραγωγικά η «δυνατότητα» (δυνητική αναγκαιότητα) της κατασκευής του τριγώνου στο τέλος της πρότασης Ι.22 έχει γίνει η κατασκευή του συγκεκριμένου τριγώνου ΚΖΗ και έχει αιτιολογηθεί παραγωγικά με την «απόδειξη». Κάτι που προφανώς σημαίνει ότι οι δύο προτάσεις δεν έχουν το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο για τους Έλληνες μαθηματικούς, ακόμη και αν

[22] Ο Taisbak (2003, 250) σταματάει σε αυτό το σημείο που τελειώνει η «κατασκευή» της σύνθεσης την αντιπαραβολή της πρότασης Ι.22 με την πρόταση 39 των *Δεδομένων,* χωρίς να παραθέτει την απόδειξη, θεωρώντας προφανώς ότι μόνο η «κατασκευή» της Ι.22 αρκεί αν εμπλουτισθεί με το ιδίωμα «δοθέν – δεδομένον» για να δώσει την πρόταση 39 των *Δεδομένων.*

το βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης μοιάζει επιφανειακά με την «κατασκευή» του συνθετικού μέρους, αλλά εξυπηρετούν εντελώς διαφορετικούς στόχους. Αυτό δεν φαίνεται να το αντιλαμβάνεται ο Taisbak, ο οποίος προσπαθώντας να διαβάσει το καθαρό μαθηματικό περιεχόμενο, αγνοεί πάνω από τη μισή πρόταση Ι. 22, βάζοντας απλά την έκφραση «'given' – idiom». Πράγματι, όπως μπορεί πολύ εύκολα να παρατηρήσει κάποιος στην αντιπαραβολή που κάνει ο Taisbak (2003, 250), αυτό που λείπει στο τμήμα αυτό της Ι.22 των *Στοιχείων,* είναι η δικαιολόγηση από το κάθε βήμα στο επόμενο. Κάτι που είναι λογικό γιατί το τμήμα της πρότασης Ι.22 που παραθέτει ο Taisbak για αντιπαραβολή με το σύνολο της πρότασης 39 των *Δεδομένων,* είναι μόνο η «κατασκευή» αυτού που θα ήταν το συνθετικό μέρος μιας ολοκληρωμένης ανάλυσης, σύμφωνα με την πρότασή μας.. Τη δικαιολόγηση ο Ευκλείδης την κάνει αμέσως μετά στην «απόδειξη». Στην πρόταση όμως των *Δεδομένων* κάνει ταυτόχρονα και τη νοητική κατασκευή και την παραγωγή μέσω συμπερασμών, της «δυνατότητας» (δυνητικής αναγκαιότητας). Έτσι ο Taisbak, στην ουσία αντιπαραβάλλει την «κατασκευή» της σύνθεσης από την πρόταση των *Στοιχείων*, με το «βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης από τα *Δεδομένα* και βρίσκει ότι είναι ίδια ως περιεχόμενο, ενώ διαφέρουν απλά κατά το ιδίωμα «δοθέν» – «δεδομένον». Ίσως το κάνει στην προσπάθειά του να συνταχθεί με τη γραμμή των Hintikka & Remes (1974), σύμφωνα με την οποία το βεβαιωτικό μέρος της ανάλυσης είναι η ανακάλυψη μιας βοηθητικής κατασκευής που βοηθάει τη σύνθεση. Το γεγονός όμως ότι κάνει την αντιπαραβολή με αυτόν τον τρόπο δείχνει ότι δεν αντιλαμβάνεται ούτε το περιεχόμενο, ούτε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί μια αντιπροσωπευτική πρόταση των *Δεδομένων.*

Μέσα από την παραπάνω αντιπαραβολή και την μεγάλη ομοιότητα ακόμη και των εκφράσεων που χρησιμοποιούνται που παραπέμπει σε κοινή καταγωγή, ισχυροποιείται η θέση μας, ότι οι προτάσεις των *Δεδομένων*, είναι βεβαιωτικά μέρη αναλύσεων που έχουν υπάρξει. Σε αυτά τα βεβαιωτικά μέρη επιτυχημένων αναλύσεων που έχουν υπάρξει, γίνεται εκτός από τη νοητική κατασκευή του ζητουμένου, ταυτόχρονα και ο έλεγχος – δικαιολόγηση από τον ερευνητή της εγκυρότητας του παραγωγικού συμπερασμού, που εξασφαλίζει τελικά τη δυνητική αναγκαιότητα του συλλογισμού και τελικά του ζητουμένου. Τα βεβαιωτικά μέρη όσων προβλημάτων πιθανόν βρέθηκαν με τη μέθοδο της γεωμετρικής ανάλυσης, όπως του Ι. 22, δεν είχαν καμία θέση στη συνθετική παρουσίαση των λύσεων. Πιθανότατα κάποια από αυτά, που δεν συμπεριλήφθηκαν σε κάποιο αναλυτικό έργο ξεχάστηκαν. Τα υπόλοιπα χάθηκαν μαζί με τα αναλυτικά έργα που χάθηκαν στην πορεία της ιστορίας. Η μη συμπερίληψή του σε κάποιο συνθετικό έργο λόγω της δυσκολίας τους και του περιορισμένου κοινού στο οποίο απευθύνονταν, βοήθησε στο να χαθούν.

Ο Πάππος, στο 5ο βιβλίο της *Συναγωγής* (410.23 - 412.7), το αναφέρει ξεκάθαρα ότι επιλέγει να παρουσιάσει κάποιες αποδείξεις με τη συνθετική μέθοδο αντί για τις αντίστοιχες αποδείξεις με τον αναλυτικό τρόπο, τον οποίο ακολουθούσαν κάποιοι από τους «παλαιούς», που πιθανότατα όμως από τον τρόπο που αναφέρεται σε αυτόν είναι πιο δύσκολος και ασαφής για το συγκεκριμένο ακροατήριο στο οποίο απευθύνεται που περιλαμβάνει πολλούς που θέλουν να μάθουν αλλά δεν είναι ειδικοί:

> ἑξῆς δὲ τούτοις γράψομεν, ὡς ὑπεσχόμεθα, τὰς συγκρίσεις τῶν ἴσην ἐπιφάνειαν ἐχόντων πέντε σχημάτων, πυραμίδος τε καὶ κύβου καὶ ὀκταέδρου δωδεκαέδρου τε καὶ εἰκοσαέδρου [καὶ τὴν ἔφοδον τῶν ἀποδείξεων ἐχούσας], οὐ διὰ τῆς ἀναλυτικῆς λεγομένης θεωρίας, δι᾽ ἧς ἔνιοι τῶν παλαιῶν ἐποιοῦντο τὰς ἀποδείξεις [τῶν προειρημένων σχημάτων], ἀλλὰ διὰ τῆς κατὰ σύνθεσιν ἀγωγῆς ἐπὶ τὸ σαφέστερον καὶ συντομώτερον ὑπ᾽ ἐμοῦ διεσκευασμένας [ἐπεὶ καὶ τὰ λήμματα πάντα μικρά τε καὶ μεγάλα διὰ τοὺς πολλοὺς τῶν φιλομαθούντων κατέταξα τὸν ἀριθμὸν ἑκκαίδεκα, ὧν ἐστιν ἐνταῦθα χρεία]. προγράφεται δὲ [τῶν συγκρίσεων] τάδε.

Με άλλα λόγια, ο Πάππος γίνεται ο πολύτιμος διαμεσολαβητής ανάμεσα στη μαθηματική γνώση και το μη ειδικό ακροατήριο των «φιλομαθούντων»[23] και επιλέγει να παρουσιάσει τη σύνθεση των συγκεκριμένων προβλημάτων, ενώ είναι φανερό ότι υπάρχει και η ανάλυση τους. Και όταν βέβαια ο Πάππος αναφέρει την απόδειξη με την αναλυτική θεωρία εννοεί την ανάλυση αυτών των προβλημάτων (υποθετικό και βεβαιωτικό μέρος) ειδικούς-ερευνητές των Μαθηματικών. Αυτού όμως του είδους η επιλογή της παρουσίασης του προβλήματος συνθετικά και η όλο και σπανιότερη παρουσίασή του αναλυτικά, πιθανόν λόγω αντικειμενικών δυσκολιών, όπως είναι η έλλειψη ειδικού κοινού και η δυσκολία τους, ήταν που βοήθησε σημαντικά να ξεχαστούν αυτές οι αναλύσεις και τελικά να εξαφανιστούν, μέχρι να φτάσουμε σήμερα οι να αναρωτιόμαστε αν πραγματικά υπήρξαν ποτέ και να χρειάζεται να πιθανολογούμε και να επιχειρηματολογούμε για την ύπαρξή τους.

---

[23] Όπως χαρακτηριστικά παρατηρεί και συζητά και η Cuomo (2000, 86-87).

Κλείνοντας την αναφορά μας στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, θα επαναλάβουμε ότι οι προτάσεις αυτού του έργου είναι έτοιμα τμήματα ανάλυσης (δηλαδή, νοητικές πορείες με στόχο τη δυνητική αναγκαιότητα του ζητουμένου), που μπορούν να χρησιμεύσουν σε μελλοντικές αναλύσεις και ειδικότερα στο δεύτερο μέρος τους το βεβαιωτικό. Με άλλα λόγια είναι βεβαιωτικά μέρη αναλύσεων που έχουν υπάρξει. Για το λόγο αυτό ποτέ δεν χρησιμοποιήθηκαν σε κανένα συνθετικό έργο. Η χρησιμότητά τους υπήρξε ξεκάθαρη για όσους για όσους ασχολήθηκαν ερευνητικά με τη γεωμετρική ανάλυση, οι οποίοι ήταν βέβαια λίγοι, γεγονός που εξηγεί, όπως έχουμε αναφέρει και τη μικρή διάδοση του έργου αλλά και γενικότερα των κειμένων που περιέχουν γεωμετρική ανάλυση.

8.3. *Η αξία του Ευκλείδη ως ερευνητή*

Μέχρι τώρα, έχει υποστηριχθεί ευρύτατα, ότι ο Ευκλείδης ήταν ένας πολύ καλός δάσκαλος και κωδικοποιός και όχι ερευνητής μαθηματικός. Με άλλα λόγια η συνεισφορά του υπήρξε η πολύ καλή οργάνωση και διατύπωση πραγμάτων, που στη συντριπτική τους πλειοψηφία είχαν ανακαλυφθεί από άλλους μαθηματικούς πριν από αυτόν. Στην ενότητα αυτή με τη βοήθεια όσων προηγήθηκαν, θα υποστηρίξουμε τη θέση ότι ο Ευκλείδης εκτός από καλός δάσκαλος και κωδικοποιός, υπήρξε και ερευνητής.

Ο τρόπος με τον οποίο περιγράφει τον Ευκλείδη ο Van Der Waerden, στο κλασικό έργο του *Η Αφύπνιση της Επιστήμης,* είναι χαρακτηριστικός και ταυτόχρονα αντιπροσωπευτικός της άποψης που επικρατεί μέχρι σήμερα για τον Ευκλείδη. Ο Van Der Waerden (1954, 230), αναφερόμενος στον υποδειγματικό τρόπο με τον οποίο ο Ευκλείδης συγκέντρωσε στο έργο του όλα τα μαθηματικά που καλλιεργήθηκαν στη σχολή του Πλάτωνος και τη τεράστια απήχηση που έχουν τα *Στοιχεία* ως μια από τις μεγαλύτερες επιτυχίες της παγκόσμιας γραμματείας γράφει:

> Ο Ευκλείδης δικαιούται απόλυτα αυτή τη φήμη για τις αξιοζήλευτες διδακτικές αρετές του. Είναι ο μέγιστος δάσκαλος που γνώρισε η ιστορία των μαθηματικών.

Ενώ συνεχίζει ο Van Der Waerden (1954, 231-232), διατυπώνοντας με ρητό τρόπο τη θέση του για την αξία του Ευκλείδη ως μαθηματικού – ερευνητή:

Ο Ευκλείδης κατ' ουδένα τρόπο είναι μέγας μαθηματικός. Όπως ήδη έχουμε δει, τα πιο σημαντικά και πιο δύσκολα μέρη των *Στοιχείων* έχουν αντληθεί από άλλους συγγραφείς, ιδιαίτερα από τον Θεαίτητο (τα βιβλία X και XIII) και τον Εύδοξο (τα βιβλία V και XII). Τα μέρη αυτά, καθώς και τα αριθμητικά βιβλία VII και IX, είναι εξαιρετικά υψηλού μαθηματικού επιπέδου, ενώ άλλα μέρη, ιδίως το μεσαίο από τα αριθμητικά βιβλία (βιβλίο VIII) και η συναφής Κατατομή κανόνος, υπολείπονται κατά πολύ αυτού του επιπέδου. Περιέχουν λογικά σφάλματα και οι διατυπώσεις φανερώνουν μερικές φορές σύγχυση. Το επίπεδο του Ευκλείδη καθορίζεται φανερά από εκείνο των προγενεστέρων του τους οποίους ακολουθεί. Όταν καθοδηγείται από έναν συγγραφέα πρώτης γραμμής όπως ο Θεαίτητος ή ο Εύδοξος, είναι και ο ίδιος εξαιρετικός. Αλλά όταν αντλεί από έναν λιγότερο διαπρεπή συγγραφέα το επίπεδό του πέφτει. Ο Ευκλείδης είναι πάνω από όλα ένας παιδαγωγός, όχι ένας μεγαλοφυής δημιουργός.

Μέχρι σήμερα, δεν έχει υπάρξει κάποιος αντίλογος σε ότι αφορά την παραπάνω θέση του Van Der Waerden, αντίθετα μπορούμε να πούμε ότι αυτή η θέση έχει επικρατήσει. Είναι ίσως μια θέση σε μεγάλο βαθμό αιτιολογημένη σε ότι αφορά τα *Στοιχεία* («συμπίλημα μαθηματικών αποσπασμάτων διαφόρων εποχών και άνισης αξίας» τα χαρακτηρίζει στον πρόλογο του ο Van Der Waerden), για τα οποία είναι γνωστό ότι είχαν προϋπάρξει έργα ανάλογου περιεχομένου και η πατρότητα των περισσοτέρων από τις προτάσεις που περιλαμβάνουν, είναι γνωστό ότι δεν ανήκει στον Ευκλείδη. Αυτή η θέση όμως, γενικεύτηκε μάλλον με ευκολία και χωρίς βάσανο και για τα υπόλοιπα έργα του Ευκλείδη, με τρόπο ώστε να συμπεριλάβει και τα *Δεδομένα*, χωρίς να υπάρχει ανάλογη τεκμηρίωση, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια. Είναι μία από τις περιπτώσεις που η ιστορία επαναλαμβάνει κάποια θέση χωρίς έλεγχο και τεκμηρίωση από τις πηγές και η θέση αυτή φτάνει να θεωρείται γεγονός. Είναι μια από τις περιπτώσεις που ο ίδιος ο Van Der Waerden στον πρόλογο του πάλι, αναφέρει ότι συμβαίνει σε πολλά βιβλία της ιστορίας των Μαθηματικών, με τη χαρακτηριστική έκφραση: «Πόσοι μύθοι δεν κυκλοφορούν ως 'καθολικώς αναγνωρισμένες αλήθειες'!» Η αφετηρία αυτού του μύθου μπορεί να βρίσκεται κάπου αλλού και θα προσπαθήσουμε να την ανιχνεύσουμε παρακάτω σε αυτήν την ενότητα. Φαίνεται όμως ότι είναι καιρός για μια νέα ανάγνωση του συγκεκριμένου θέματος, μέσω των πηγών και με τη βοήθεια νέων μεθοδολογικών εργαλείων, τα οποία προσφέρει η νέα ιστοριογραφία των Μαθηματικών.

Έχουμε υποστηρίξει στη διατριβή μας ως τώρα, επαρκώς τη θέση ότι τόσο η ανάλυση όσο και οι προτάσεις των *Δεδομένων* που χρησιμοποιούνται ως εργαλεία σε αυτήν, αφορούν τους γεωμέτρες – ερευνητές. Με άλλα λόγια τα κείμενα που περιλαμβάνουν αναλύσεις όπως και τα *Δεδομένα* είναι ερευνητικά κείμενα. Εφόσον όμως, μέχρι σήμερα, δεν έχουν ανακαλυφθεί προγενέστερα κείμενα με ανάλογο περιεχόμενο με τα *Δεδομένα,* ούτε αναφέρεται, όπως προκύπτει από την έρευνά μας, ότι έχει προϋπάρξει κάποιο έργο ανάλογου περιεχομένου[24] στις πηγές που έχουν φτάσει σε εμάς, θα πρέπει κατ' ανάγκην να αποδώσουμε τη συγγραφή του έργου στον ίδιο τον Ευκλείδη.

Οι Hintikka & Remes (1974, 85), διατυπώνουν την υπόθεση ότι είχαν υπάρξει προτάσεις παρόμοιες με αυτές των *Δεδομένων* του Ευκλείδη, επικαλούμενοι το παράδειγμα ανάλυσης από τα *Μετεωρολογικά* του Αριστοτέλη, από το οποίο φαίνεται να προκύπτει ότι ο Αριστοτέλης γνώριζε ήδη τις προτάσεις 1, 25 και 26 των *Δεδομένων.* Επειδή επιπλέον, η αυθεντικότητα των *Μετεωρολογικών* δεν έχει σοβαρά αμφισβητηθεί, αναφέρουν επίσης τη θέση του Heiberg (1882, 1904), που έχει προηγηθεί, σύμφωνα με την οποία τα *Δεδομένα* ήταν μεν η πρώτη συλλογή προτάσεων αυτού του είδους, αλλά το υλικό του βιβλίου δημιουργήθηκε νωρίτερα.

Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε στην κατεύθυνση της επιχειρηματολογίας των προηγουμένων, ότι αναλύσεις που φανερώνουν γνώση προτάσεων αναλόγου μαθηματικού περιεχομένου όπως οι 1, 25 και 26 των *Δεδομένων* αλλά και προτάσεων με «δεδομένα» που αφορούν κωνικές τομές, μπορεί να βρει κανείς και στις δύο εναλλακτικές λύσεις του προβλήματος των δύο μέσων αναλόγων (με τη μέθοδο της ανάλυσης) που αποδίδονται στον Μέναιχμο από τον Ευτόκιο. Ο Μέναιχμος έζησε σύμφωνα με τις πηγές περίπου στα μέσα του 4^{ου} αιώνα π. Χ. και σίγουρα πριν τον Ευκλείδη. Το γεγονός της ύπαρξης όμως, κάποιων τέτοιων παραδειγμάτων που περιλαμβάνουν στοιχεία ανάλυσης πριν τον Ευκλείδη –που κανείς άλλωστε δεν αμφισβητεί ούτε και προσπαθεί να αποδώσει την πατρότητα της μεθόδου της ανάλυσης στον Ευκλείδη– δεν μπορεί από μόνο του, να τεκμηριώσει την ύπαρξη του συνόλου ή έστω μεγάλου μέρους των προτάσεων των *Δεδομένων* πριν από τον Ευκλείδη. Με

[24] Αντίθετα, φαίνεται πιθανότερο ότι ακολούθησαν έργα με ανάλογο περιεχόμενο. Ο Σταμάτης (1974, τόμ. Γ΄, XXIX) στο *Αρχιμήδους Άπαντα,* αναφέρει ότι από τον αραβικό κατάλογο έργων Ελλήνων Μαθηματικών (Fihrist), αποδίδεται στον Αρχιμήδη, ένα έργο με τίτλο *Δεδομένα*, ενώ στην ύπαρξη του ίδιου έργου, γίνεται έμμεση αναφορά και από τον Άραβα μαθηματικό Ibn al-Haitam.

άλλα λόγια το γεγονός της ύπαρξης ανάλυσης πριν από την εποχή του Ευκλείδη, της οποίας τα ελάχιστα ίχνη είναι λογικό να αντιστοιχούν σε κάποιες πολύ λίγες προτάσεις από τα *Δεδομένα,* δεν μπορεί να υποστηρίξει με αξιώσεις τη θέση ότι τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη είναι απλά μια κωδικοποίηση προϋπαρχουσών αναλύσεων. Άλλωστε η έρευνά μας αποδεικνύει, ότι δεν έχουμε καθόλου στοιχεία ή αναφορές σε έργα ανάλυσης που υπήρξαν έστω πριν την εποχή του Ευκλείδη και χάθηκαν, όπως έχουμε αντίστοιχα για την εποχή από τον Ευκλείδη μέχρι τον Απολλώνιο.

Το ερώτημα όμως, που παραμένει ανοιχτό και απαιτεί απάντηση –ακόμη και αν δεχτούμε για χάρη της συζήτησης ότι η ύλη των *Δεδομένων* είχε ανακαλυφθεί από άλλους– είναι το πώς θα μπορούσε ένας καλός κωδικοποιός ή δάσκαλος των μαθηματικών να συγγράψει το βασικό εγχειρίδιο της ανάλυσης, όταν ο ίδιος δεν είναι ερευνητής; Με σύγχρονους όρους θα ήταν σαν να ισχυριζόμαστε ότι ένας καλός συγγραφέας σχολικών βιβλίων και δάσκαλος των μαθηματικών, θα μπορούσε να συγγράψει ένα εγχειρίδιο, που αφορά τα αποτελέσματα της μέχρι σήμερα έρευνας σε κάποιο προχωρημένο πεδίο των μαθηματικών, το οποίο πρόκειται να χρησιμοποιηθεί από τους ερευνητές του χώρου, προκειμένου να διευκολύνει την παραπέρα έρευνά τους. Η δική μας απάντηση στο παραπάνω ερώτημα, είναι ότι ο ίδιος ο Ευκλείδης ήταν ερευνητής, τουλάχιστον στο πεδίο των ερευνών της εποχής του, που περιλαμβάνεται η γεωμετρική ανάλυση.

Ο Πάππος στην εισαγωγή του 7^{ου} βιβλίου της *Συναγωγής* που αφορά την γεωμετρική ανάλυση αναφέρει χαρακτηριστικά τον Ευκλείδη πρώτο ανάμεσα στους τρεις «παλαιούς» συγγραφείς της ανάλυσης: «γέγραπται δὲ [η ανάλυση] ὑπὸ τριῶν ἀνδρῶν, Εὐκλείδου τε τοῦ στοιχειωτοῦ καὶ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου καὶ Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου…». Το έργο του Ευκλείδη *Δεδομένα*, το κατατάσσει πρώτο ως προς την τάξη βιβλίο της ανάλυσης, ενώ αναφέρει άλλα δύο αναλυτικά έργα του: τα *Πορίσματα* (τρία βιβλία) και το *Τόπων προς Επιφάνειες* (δύο βιβλία), από τα οποία σώζονται μόνο κάποια μικρά αποσπάσματα. Το 7^{ο} βιβλίο της *Συναγωγής* του Πάππου, όμως, όπως διαπιστώνει και επιχειρηματολογεί σε αυτήν την κατεύθυνση η Cuomo (2000, 73), απευθύνεται σε κάποιον που το μαθηματικό του επίπεδο είναι πολύ υψηλό, ανώτερο όπως αναφέρει και από ενός δασκάλου των Μαθηματικών. Κάποιον, όπως ο Ερμόδωρος, ο οποίος έχει πρόσβαση στο προχωρημένο επίπεδο των Μαθηματικών που απαιτεί η ανάλυση. Ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο με τα υπόλοιπα κεφάλαια της *Συναγωγής*. Επομένως ο Πάππος δεν θα είχε κάποιο λόγο να κατονομάσει τον Ευκλείδη ως έναν από τους βασικούς δημιουργούς της ανάλυσης, να τον αναβιβάσει δηλαδή σε ερευνητή μαθηματικό, αν αυτός ήταν ένας απλός κωδικοποιός ή δάσκαλος των Μαθηματικών. Ακόμη και η προσπάθεια του Πάππου να οικειοποιηθεί την μεγάλη μαθηματική παράδοση η οποία έχει προϋπάρξει της εποχής του, για λόγους πολιτισμικού και κοινωνικού πλαισίου, που αναδεικνύει πολύ εύστοχα η Cuomo (2000), δεν είναι λογικό να τον οδηγήσει στην οικειοποίηση ενός έστω και μεγάλου δασκάλου ή κωδικοποιού, γιατί είναι από αυτήν ακριβώς την τάξη, αυτών που απλά γνωρίζουν και ασχολούνται με τα μαθηματικά, από την οποία θέλει να διακρίνει τον εαυτό του ο Πάππος, προκειμένου να γίνει φανερό ότι ο ανήκει στη υψηλή διανόηση (Cuomo 2000, 89) των Μαθηματικών. Η Cuomo, που διερευνά τα όρια με όρους πολιτισμικού και κοινωνικού πλαισίου που ο Πάππος προσπαθεί να χαράξει μέσα από τη *Συναγωγή*, ανάμεσα σε αυτόν και τους φιλοσόφους, αναδεικνύει ένα πρόβλημα, το οποίο ίσως να αποτελεί την αρχαία αρχή του μύθου, ότι ο Ευκλείδης δεν ήταν μεγάλος μαθηματικός αλλά ένας καλός δάσκαλος που απλά διαχειριζόταν καλά τα μαθηματικά. Το πρόβλημα που αναδεικνύει η Cuomo (2000, 81), είναι αυτό του συμβιβασμού ανταγωνιστικών παραδόσεων, όπως είναι η Φιλοσοφία και τα Μαθηματικά, οι οποίες μοιράζονται τα ίδια ζητήματα προσπαθούν να τα οικειοποιηθούν η καθεμιά για τον εαυτό της αλλά τα προσεγγίζουν με διαφορετικούς τρόπους. Έτσι η προσπάθεια οικειοποίησης των Μαθηματικών από τους εκπροσώπους της φιλοσοφίας έχει δύο εκφάνσεις. Η πρώτη είναι του Ιάμβλιχου, ο οποίος διαλέγει να επιτεθεί στον Ευκλείδη με διάφορες ευκαιρίες, προκειμένου να μειώσει την αξία του ως μαθηματικού, δείχνοντας έτσι ότι δεν χρειάζεται να είναι κανείς μεγάλος μαθηματικός προκειμένου να διαχειρίζεται θέματα που αφορούν τα Μαθηματικά. Η δεύτερη, είναι του Πρόκλου, ο οποίο ακολουθεί χρονικά τον Πάππο, δεν κατηγορεί με κανένα τρόπο τον Ευκλείδη αλλά τον παρουσιάζει ως καλό δάσκαλο και κωδικοποιό, απλό διαχειριστή δηλαδή των Μαθηματικών, όπως είναι και ο ίδιος, κατά συνέπεια νομιμοποιείται απόλυτα αυτός και οι άλλοι φιλόσοφοι και σχολιαστές να διαχειρίζονται ως νόμιμοι κληρονόμοι αυτής της παράδοσης τα Μαθηματικά. Αυτές οι συμπεριφορές προφανώς μειώνουν την αξία του Ευκλείδη ως μαθηματικού στη συνείδηση των συγχρόνων τους αλλά και των κατοπινών αναγνωστών των κειμένων τους. Είναι βέβαια σε ευθεία αντίθεση με τις αναφορές του Πάππου στον Ευκλείδη. Τελικά όμως το στίγμα για την αξία του Ευκλείδη ως μαθηματικού δημιουργού, φαίνεται να υπάρχει από τότε και ίσως μόνο τα έργα του και ειδικότερα τα *Δεδομένα*, μπορούν να μας βοηθήσουν να αντιληφθούμε ποιος πραγματικά έχει δίκιο.

Παρόμοια θέση με τη δική μας, στην κατεύθυνση της ορθής αποτίμησης της ερευνητικής αξίας του Ευκλείδη, διατυπώνει και ο Knorr (1986, 102), ο οποίος αφού αναφέρεται στη γνωστή θέση, ότι το περιεχόμενο των άλλων έργων του Ευκλείδη είχε προϋπάρξει, διακρίνοντας τα *Δεδομένα* από τα υπόλοιπα έργα καταλήγει:

> Για αυτό το λόγο, το κατάλληλο μέτρο για τις γεωμετρικές έρευνες που διεξήχθησαν από τον Ευκλείδη και τους σύγχρονούς του δεν θα πρέπει να αναζητηθεί στα *Στοιχεία,* αλλά στα *Δεδομένα* και στα χαμένα *Πορίσματα* και στα *Κωνικά,* που τα συνέλαβαν για να βοηθήσουν στην επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων.

Ενώ παρακάτω, μετά από τη μελέτη ενός παραδείγματος που περιλαμβάνει την ορολογία «δοθέντων – δεδομένων» και έναν ολόκληρο συλλογισμό για την αναγκαιότητα των «δεδομένων» στην ανάλυση ο Knorr (1986, 110) επανέρχεται και δηλώνει:

> Για αυτό το λόγο, το έργο του Ευκλείδη *Δεδομένα,* κάθε άλλο παρά περιττό, παρέχει τυπική αναγνώριση στο προχωρημένο επίπεδο των αναλυτικών ερευνών της εποχής του.

Αναγνωρίζει δηλαδή, ο Knorr, τόσο την αναγκαιότητα της ύπαρξης των *Δεδομένων*, όσο και την πρωτοτυπία του έργου, το οποίο κατατάσσει στην πρωτοπορία των ερευνητικών έργων της συγκεκριμένης εποχής. Μια θέση η οποία αν και δεν είναι ιδιαίτερα τεκμηριωμένη με κάποια άλλα συγκεκριμένα επιχειρήματα στο έργο του Knorr, ωστόσο είναι φανερό ότι αμφισβητεί την μέχρι τώρα επικρατούσα άποψη για ανύπαρκτη ερευνητική αξία του Ευκλείδη.

Κλείνοντας την ενότητα αυτή, θεωρούμε ότι με την πληρέστερη ερμηνεία του περιεχομένου και του τρόπου που τα *Δεδομένα* λειτουργούν στην ανάλυση, μία από τις κατεξοχήν ερευνητικές μεθόδους των ελληνικών Μαθηματικών, αναδεικνύεται έστω και με έμμεσο τρόπο, η αξία του Ευκλείδη ως ερευνητή μαθηματικού. Μια αξία που στην πάροδο του χρόνου είχε μάλλον ξεχασθεί και υποτιμηθεί.

Συμπέρασμα

Έχοντας κατανοήσει πλέον σε σημαντικό βαθμό, τον τρόπο με τον οποίο εμφανίζεται και λειτουργεί η ορολογία «δοθέν» – «δεδομένον» στη γεωμετρική ανάλυση και στα *Δεδομένα*, καταφέραμε να την διακρίνουμε με σαφήνεια και συγκεκριμένα επιχειρήματα από τον όρο «γνωστό» με τον οποίο είχε σχεδόν ταυτιστεί στην πορεία του χρόνου, να αναλύσουμε και να καταστήσουμε κατανοητούς και λειτουργικούς τους ορισμούς του Ευκλείδη για τα είδη του «δεδομένου», καθώς και να συνοψίσουμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους εμφανίζονται και λειτουργούν το «δοθέν» και το «δεδομένον» στα διάφορα μαθηματικά κείμενα. Αυτή η συνολική αποτίμηση της ορολογίας «δοθέν» – «δεδομένον», μας επέτρεψε μια καλύτερη θεώρηση των *Δεδομένων* και πιο συγκεκριμένα του «αναλυτικού» τρόπου με τον οποίο είναι γραμμένα, του τρόπου που λειτουργούν οι προτάσεις τους αλλά και της αναγκαιότητας και της ερευνητικής φύσης τους. Τέλος η ερευνητική φύση του έργου μάς οδήγησε σε μια καλύτερη εκτίμηση της αξίας του Ευκλείδη ως ερευνητή, που στην πορεία του χρόνου είχε υποτιμηθεί.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΤΟ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΤΟΥ ΜΑΡΙΝΟΥ ΣΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

[234] Πρῶτον δεῖ θέσθαι, τί τὸ δεδομένον· ἔπειτα, τί τὸ χρήσιμον τῆς περὶ τούτου πραγματείας, εἰπεῖν· καὶ τρίτον, ὑπὸ τίνα ἐπιστήμην ἀνάγεται. Ὁρίζονται δὴ τὸ δεδομένον πολλαχῶς, καὶ ἄλλως μὲν οἱ παλαιότεροι, ἄλλως δὲ οἱ νεώτεροι· διὸ καὶ συνέβη χαλεπὴν εἶναι τὴν ἀληθῆ περὶ αὐτοῦ ἀπόδοσιν. καὶ ἔνιοι μὲν οὐδὲ ὁρισμόν τινα αὐτοῦ ἀποδεδώκασιν, ἴδιον δέ τι τοῦ δεδομένου εὑρίσκειν ἐπειράθησαν· ἕτεροι δὲ συμπλέξαντες ἤδη τὰ παρ᾽ ἐκείνων ὁρίζεσθαι αὐτὸ ἐπεχείρησαν καὶ οὐδὲ οὗτοι συμφώνως ἑαυτοῖς. ἐοίκασι δὲ πάντες ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐννοίας καὶ ὑπολήψεως ὁρμηθέντες λέγειν τι περὶ αὐτοῦ· καταληπτὸν γάρ τι τὸ δεδομένον εἶναι ὑπέλαβον. διὸ τῶν ἁπλούστερον καὶ μιᾷ τινι διαφορᾷ περιγράφειν τὸ δεδομένον προθεμένων οἱ μὲν τεταγμένον, ὡς Ἀπολλώνιος ἐν τῷ περὶ νεύσεων καὶ ἐν τῇ καθόλου πραγματείᾳ, οἱ δὲ γνώριμον, ὡς Διόδωρος· οὕτω γὰρ τὰς ἀκτῖνας καὶ τὰς γωνίας δεδόσθαι λέγει καὶ πᾶν τὸ εἰς γνῶσίν τινα ἐλθόν, καὶ εἰ μὴ ῥητὸν εἴη. ἔνιοι δὲ ῥητὸν αὐτὸ εἶναι ἀπεφήναντο, ὥσπερ δοκεῖ ὁ Πτολεμαῖος, δεδομένα ἐκεῖνα προσαγορεύων, ὧν τὸ μέτρον ἐστὶ γνώριμον [236] ἤτοι πρὸς ἀκρίβειαν ἢ τὸ σύνεγγυς. καὶ τὸ ἐν ὑποθέσει δὲ παρὰ τοῦ προβάλλοντος ἐκτιθέμενον δεδομένον εἶναί τινες ὑπειλήφασιν. λέγουσι δὲ καὶ ἄλλον τρόπον ἐν ταῖς πρώταις στοιχειώσεσι τὸ δοθὲν καὶ τὴν δοθεῖσαν, τουτέστιν ἡλίκην ἄν τις ἀφορίσῃ καὶ δῷ εὐθεῖαν. ταῦτα δὲ πάντα κατάληψίν τινα βούλεται σημαίνειν. ὅθεν καὶ μάλιστα τῶν ὅρων ἐκεῖνοι εὐδοκιμοῦσιν, ὅσοι γε μάλιστα τὸ καταληπτὸν ἐμφανίζουσιν, ὡς προϊοῦσιν ἡμῖν ἔσται καταφανές. νυνὶ δὲ καὶ τῶν μὴ μόνον ψιλῶς καὶ ἑνί τινι χαρακτηριζόντων τὴν τοῦ δεδομένου φύσιν, οἷον δὲ ὁρισμὸν αὐτοῦ ποιούντων, τὰς διαφορὰς ἐκθώμεθα. συγκεφαλαιούμενοι δὲ καὶ τούτων οἱ τρόποι εὐαρίθμητοι γίνονται. οἱ μὲν γὰρ τεταγμένον ἅμα καὶ πόρι μον τὸ δεδομένον εἶναι ἀφωρίσαντο, ἕτεροι δὲ τὸ τεταγμένον ἅμα καὶ γνώριμον, τινὲς δὲ τὸ γνώριμον ἅμα καὶ πόριμον. φαίνονται δὲ καὶ οὗτοι πάντες πρὸς τὴν κατάληψιν ἤτοι λῆψιν καὶ εὕρεσιν τοῦ δεδομένου ἀφεωρακότες τὸν εἰρημένον τρόπον ὁρίζεσθαι. ἵνα δὲ ταύτην τε αὐτῶν τὴν ἔννοιαν καταδησώμεθα, ἔτι γε μὴν καὶ τὸν ἀληθῆ τοῦ προκειμένου ὅρον ἐκ πολλῶν τῶν παραδεδομένων ἕλωμεν, ἐπισκεπτέον πρότερον ἑκάστου τῶν ἁπλῶν τὸ σημαινόμενον καὶ τῶν τούτοις ἀντικειμένων, τοῦ τε ἀτάκτου

λέγω καὶ ἀγνώστου καὶ ἀπόρου καὶ ἀλόγου, ὡς πρὸς τὴν ἐνεστῶσαν γεωμετρικὴν ὕλην. ἐπιτείνεται γὰρ τὰ τοιαῦτα καὶ ἐπὶ τὰ φυσικὰ πράγματα καὶ τὰς ἄλλας δὲ μαθηματικὰς ἐπιστήμας. [238] ὑπογράφουσι τοίνυν τὸ τεταγμένον τὸ ἀεὶ ταὐτὸν σωζόμενον, καθ' ὃ τετάχθαι λέγεται, ἤτοι κατὰ μέγεθος ἢ εἶδος ἢ ἄλλο τι τῶν τοιούτων· ἢ καὶ ἑτέρως· ὅπερ μὴ ἐνδέχεται ἄλλοτε ἄλλως γίνεσθαι, ἀλλὰ μοναχῶς ἐν ἀφωρισμένῳ τινὶ τόπῳ. οἷον, ὡς τύπῳ εἰπεῖν, ἡ διὰ δύο σημείων ἑστηκότων γραφομένη εὐθεῖα τετάχθαι λέγεται τῷ μὴ ἄλλως καὶ ἀστάτως ἄγεσθαι. ἄτακτος δέ ἐστιν ἡ διὰ δυεῖν περιφέρεια· πολλαχῶς γὰρ καὶ ἀστάτως γράφεται, καὶ μείζονος καὶ ἐλάττονος κύκλου ἐπ' ἄπειρον γραφομένων διὰ τῶν δύο σημείων. πάλιν δὲ τεταγμένη ἐστὶν ἡ διὰ τριῶν σημείων περιφέρεια. ἔστι δὲ καὶ τὰ τοιαῦτα τῶν τεταγμένων, ὡς τὸ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἰσόπλευρον τρίγωνον συστήσασθαι· εἰ γὰρ καὶ διχῶς γίγνεται, ἀλλὰ καθ' ἑκάτερον μέρος τῆς εὐθείας μοναχῶς καὶ ἀμεταπτώτως· καὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν· μοναχῶς γὰρ ἂν καὶ τοῦτο γένοιτο ἐπὶ θάτερα τῆς διχοτομίας. ἄτακτα δέ ἐστι τὰ τούτοις ἀντικειμένως ἔχοντα, ὡς τὸ σκαληνὸν συστήσασθαι καὶ τὴν εὐθεῖαν ἀορίστως τεμεῖν. πρόσκειται δὲ τῷ ὅρῳ τὸ καθ' ὃ τέτακται, ἐπεὶ δύναταί τι ἓν καὶ ταὐτὸν ὂν πῇ μὲν τεταγμένον, ἄλλως δὲ ἄτακτον εἶναι, οἷον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, ᾗ μὲν ἰσόπλευρόν ἐστιν, τέτακται, μεγέθει δὲ οὐχ ὥρισται πᾶν. γνώριμον δέ ἐστι τὸ γιγνωσκόμενον ὡς τὸ δῆλον ἡμῖν καὶ καταλαμβανόμενον, ἄγνωστον δὲ τὸ μὴ γιγνωσκόμενον μηδὲ καταλαμβανόμενον ὑφ' ἡμῶν· οἷον τὸ μῆκος τῆς ὁδοῦ γνώριμον εἶναι λέγεται, καθ' ὅ, πόσων [240] ἐστὶ σταδίων, κατέλαβον, καὶ τοῦ τριγώνου ὅτι αἱ ἐν τὸς δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, καὶ ὅτι ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων ἄλογός ἐστιν. ἔτι μὴν καὶ τὰ τοιάδε γνώριμα λέγεται, ὡς τὸ μίαν εἶναι τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἕλικος ἀπὸ τοῦ ἔξω δοθέντος σημείου ἐπὶ θάτερα μέρη. εἰ γὰρ καὶ ἄλλη εἴη, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἀδύνατον. ἄγνωστα δὲ οὐ τὰ ἄλογά ἐστιν, ἀλλὰ τὰ μὴ γιγνωσκόμενα μηδὲ καταλαμβανόμενα ὑφ' ἡμῶν. πόριμον δέ ἐστιν, ὃ δυνατοί ἐσμεν ἤδη ποιῆσαι καὶ κατασκευάσαι, τουτέστιν εἰς ἐπίνοιαν ἀγαγεῖν. ἄλλως δὲ πάλιν ὁρίζονται τὸ πόριμον ἤτοι τὸ δι' ἀποδείξεως ποριζόμενον, ἢ ὅταν τι φαινόμενον ᾖ καὶ χωρὶς ἀποδείξεως· οἷόν ἐστι τὸ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψαι καὶ τὸ τρίγωνον συστήσασθαι οὐ μόνον ἰσόπλευρον, ἀλλὰ καὶ σκαληνόν, καὶ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων εὑρεῖν καὶ τρεῖς εὐθείας ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους· καὶ τὰ ἀπειραχῶς δὲ γινόμενα πόριμά ἐστιν, ὥσπερ τὸ διὰ δύο σημείων κύκλον γράψαι.

ἄπορον δέ ἐστι τὸ ἀντικειμένως ἔχον, ὡς ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμός· οὔπω γάρ ἐστιν ἐν πόρῳ, εἰ καὶ οἷόν τε αὐτὸ πορισθῆναι καί ἐστιν ἐπιστητόν· ἐπιστήμη γὰρ αὐτοῦ οὔπω κατείληπται. νῦν δὲ περὶ τοῦ ἤδη ὄντος ἐν πόρῳ ὁ λόγος ἀποδίδοται, ὅπερ καὶ κυρίως πόριμον ἐπονομάζουσιν. τὸ γὰρ μήπω ὂν ἐν πόρῳ, ἐνδεχόμενον δὲ πορισθῆναι ποριστὸν ἰδίως προσαγορεύουσιν. ἄπορον δέ ἐστιν, ὡς εἴρηται, τὸ τῷ πορίμῳ ἀντικείμενον, τουτέστιν οὗ ἡ ζήτησις ἀδιάκριτός ἐστιν. ῥητὸν δέ ἐστιν, οὗπερ ἔχομεν εἰπεῖν μέγεθος ἢ εἶδος [242] ἢ θέσιν· ἀλλ᾽ οὗτος μὲν ὁ ὅρος κοινότερός ἐστιν, ἰδίως δὲ καὶ καθ᾽ αὑτὸ ῥητόν ἐστιν, ὃ κατά τινα γιγνώσκομεν ἀριθμὸν πρὸς τὸ τῇ θέσει μέτρον, παλαιστήν, εἰ τύχοι, ἢ δάκτυλον. οὕτω δὴ προδιωρισμένων ῥᾷον ἔσται λοιπὸν ἐπι σκοπεῖν τήν τε κοινωνίαν τῶν εἰρημένων καὶ τὴν δια φοράν, καὶ πρῶτον, ὅπως ἔχει τὸ τεταγμένον πρὸς τὸ γνώριμον καὶ τὰ τούτοις ἀντικείμενα πρὸς ἄλληλα. οὐκ ἔστι δὴ τῶν ἀντιστρεφόντων τὰ τοιαῦτα οὐδὲ μὴν ἐκείνων, ἐν οἷς τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου ἐπὶ πλέον ἐστίν. εἰ γὰρ καὶ κοινὰ αὐτοῖς πολλὰ ὑπάρχει, ὡς τὸ διὰ δύο σημείων εὐθεῖαν γράψαι καὶ διὰ τριῶν κύκλον καὶ ἰσόπλευρον συστήσασθαι, ἀλλὰ τὸ τετραγωνίζειν τὸν κύκλον τεταγμένον μέν, ἄγνωστον δέ· καὶ ὅτι μία τῆς ἕλικος ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου ἐφάπτεται, τῶν τεταγμένων καὶ μὴ ἐνδεχομένων ἄλλως ἔχειν ἐστίν· οὐ μὴν καὶ ἔγνωσται αὐτοῦ ἡ ἀπόδειξις ἤτοι κατασκευή. πάλιν δ᾽ αὖ ἡ ἐπ᾽ ἄπειρον τομὴ καὶ ἡ τοῦ σκαληνοῦ σύστασις ἔγνωσται μέν, οὐκέτι δὲ καὶ τέτακται, ὥστε φανερόν, ὅτι ἔσται τοῦ τεταγμένου τὸ μὲν γνώριμον, τὸ δὲ ἄγνωστον, καὶ ἀνάπαλιν δὲ τοῦ γνωρίμου τὸ μὲν τεταγμένον, τὸ δὲ ἄτακτον. καὶ οὕτως ἔχει ταῦτα πρὸς ἄλληλα, ὡς τὸ λογικὸν πρὸς τὸ πεζόν· οὔτε γὰρ ἐξισάζει τὰ τοιαῦτα οὔτε μὴν τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου ἐπὶ πλέον ἐστίν. ὁμοίως δὲ ἔχει· καὶ τὸ τεταγμένον καὶ τὸ ἄτακτον πρὸς τὸ πόριμον καὶ τὸ ἄπορον· κοινωνία τε γὰρ αὐτοῖς ἔνεστι πλείστη καὶ διαφέρει ἀλλήλων τὸν εἰρημένον [244] τρόπον. ἡ γὰρ ἕλιξ τέτακται μέν, ἀλλ᾽ οὐκ ἦν τοῖς πρὸ Ἀρχιμήδους πορίμη. καὶ τὰ ἀπειραχῶς δὲ γιγνόμενα καὶ ἀτάκτως πόριμα μέν ἐστιν, ἐὰν τὴν κατα σκευὴν ἐπινοῇ τις αὐτῶν καὶ τὴν σύστασιν, οὐκέτι δὲ καὶ τεταγμένα. οἷον σκαληνὸν τρίγωνον ἐπινοῆσαι καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν αὐτοῦ ἀναγαγεῖν τὴν διάνοιαν ἀπὸ τοῦ ἰσοπλεύρου οὐ χαλεπὸν ἀλλ᾽ εὐπόριστόν ἐστιν, καί τοι τῶν ἀτάκτων ὂν καὶ ἀπείρων. οὕτω δὲ ἔχει καὶ πρὸς τὸ ῥητὸν καὶ ἄλογον τὸ τεταγμένον τε καὶ τὸ ἄτακτον· κοινωνοῦντα γὰρ ἀλλήλοις πολλαχῇ καὶ διενήνοχε τὸν εἰρημένον τρόπον. οὐδὲ γὰρ ταῦτα ἐξισάζει ἀλλήλοις οὐδὲ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου ἐστὶ περιληπτικόν· ἡ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ οὕτως κατειλημμέναι ἄλογοι τεταγμέναι μέν εἰσιν, οὐκέτι δὲ καὶ ῥηταί, καὶ ὁ τῆς διαμέτρου λόγος πρὸς τὴν πλευράν. πολλὰ δὲ καὶ τῶν ῥητῶν ἄτακτά ἐστιν, ὡς τὰ πολλαχῶς καὶ ἀορίστως γινόμενα· δύναται γὰρ καὶ σκαληνὸν τρίγωνον μετρεῖσθαι ὑπὸ τοῦ προτεθέντος καὶ ὁρισθέντος ῥητοῦ μέτρου, καίτοι ἄτακτον ὑπάρχον. τοῦ δὲ γνωρίμου πρὸς τὸ πόριμον τὴν μὲν ὁμοιότητα παντί γε διϊδεῖν ῥᾴδιον, τὴν δὲ διαφορὰν χαλεπὸν ἑλεῖν· σύνεγγυς γάρ ἐστι τὴν φύσιν ἀλλήλων, ὥστε καὶ ἐξισάζειν δοκεῖν. οὐ μὴν ἀλλὰ κἀν τούτοις ἀκριβῶς ἐπιβλέψαντι ὀφθήσεταί τις ἐνοῦσα διαφορά· ὅτι μὲν γὰρ μία ἐστὶν ἡ τῆς ἕλικος ἀφ' ἑνὸς σημείου ἐφαπτομένη, συμφανές ἐστι καὶ γνώριμον· ἀλλ' οὐ διὰ τοῦτο ἤδη καὶ πόριμόν ἐστι τὸ πρόβλημα μήπω κατειλημμένον [246]. ὥστε τὸ γνώριμον πᾶν οὐκέτι πόριμον· τὸ μέντοι πόριμον πᾶν καὶ γνώριμον· ἐπὶ πλέον ἄρα τὸ γνώριμον τοῦ πορίμου. πάλιν δ' αὖ τὸ γνώριμον καὶ τὸ ῥητὸν πῇ μὲν κοινωνεῖ, πῇ δὲ καὶ διαφέρετον ἀλλήλων τὸν προειρημένον τρόπον. αἱ γὰρ εἰρημέναι ἄλογοι γνώριμοι μέν εἰσιν, οὐκέτι δὲ καὶ ῥηταί· ὁ δὲ ἀριθμὸς πᾶς ῥητὸς μέν ἐστιν, οὐκέτι δὲ καὶ γνώριμος πᾶς. καὶ τὸ μὲν ῥητὸν τοῖς κατὰ ταὐτὸν ἔθος ὁμοίως ῥητόν ἐστιν, καὶ οὐ τῷ μὲν ῥητὸν ἔσται τι μῆκος, τῷ δὲ οὔ· ἐπὶ γὰρ ταὐτὸν ἀνοίσουσι μέτρον. γνώριμον δὲ τῷ μὲν γίγνεται ταὐτὸν μῆκος, τῷ δὲ οὔ, κἂν ἐν τῇ αὐτῇ συνηθείᾳ ὦσιν. ἴσως δὲ κἀνταῦθα χαλεπόν τί ἐστιν εὑρεῖν ῥητὸν μέν, ἄγνωστον δέ· δοκεῖ γὰρ καὶ τοῦ ῥητοῦ ἐπὶ πλέον εἶναι τὸ γνώριμον. ὅτι δὲ καὶ τὸ πόριμον καὶ τὸ ἄπορον διαφέρει τοῦ τε ῥητοῦ καὶ ἀλόγου, φανερὸν ἐκ τούτων· πόριμα γὰρ εἶναι δυνατὸν καὶ τῶν ἀλόγων τινά, οὐδὲν δὲ τῶν ῥητῶν ἄλογον. ἡ δὲ συγγένεια τούτων αὐτῶν καθάπερ καὶ τῶν ἄλλων παντὶ καταφανής· οὕτω μέντοι καὶ ταῦτα ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὥστε τὸ πόριμον ἐπὶ πλέον εἶναι δοκεῖν τοῦ ῥητοῦ. ἔξεστι δὲ τῶν προειρημένων τὴν διαφορὰν ἐπισκοπεῖν καὶ τῇδε. ῥητὸν μὲν γὰρ καὶ ἄλογον κατὰ τὴν ἐπὶ τὸ μέτρον ἀναφορὰν λέγεται, οὐ πρὸς τὴν ἡμετέραν γνῶσιν ἀναπεμπόμενον. δύναται γάρ τι ῥητὸν ὂν μὴ εἶναι ἡμῖν γνώριμον, ὅπως ῥητόν ἐστιν, μηδὲ κατειλῆφθαί πω, ὅτι ῥητόν ἐστιν. τὸ δὲ τεταγμένον καὶ [248] ἄτακτον τῶν καθ' αὑτὸ καὶ κατ' ἰδίαν φύσιν θεωρουμένων ἐστίν, κἂν ὑφ' ἡμῶν μήπω καταλαμβάνηται. πολλὰ γοῦν τεταγμένα φύσει ὕστερον Ἀρχιμήδης ἔδειξε τοῖς πρὶν οὐ θεωρηθέντα, ὅτι τέτακται. γνώριμον δὲ καὶ ἄγνωστον κατὰ τὴν πρὸς ἡμᾶς ἀναφορὰν λέγεται. ὥστε διαφέροι ἂν τὰ εἰρημένα ἀλλήλων, εἴπερ τὸ μὲν πρὸς ἡμᾶς ἔχει τὴν ἀναφοράν, τὸ δὲ πρὸς τὴν φύσιν, τὸ δὲ πρὸς τὸ μέτρον. διωρισμένης δὲ καὶ τῆς κοινωνίας καὶ διαφορᾶς τῶν προτεθέντων ἑπόμενον ἂν εἴη λοιπόν, τί ποτέ ἐστι τὸ δεδομένον ἐπισκέψασθαι. ὅσοι τοίνυν τὸ καθ’ ὑπόθεσιν διδόμενον ὑπὸ τοῦ προβάλλοντος οἴονται εἶναι τὸ δεδομένον, διαμαρτάνουσι τοῦ ζητουμένου. τὰ γὰρ στοιχεῖα πάντα τῶν δεδομένων συντέτακται οὐ περὶ τοῦ καθ’ ὑπόθεσιν τοιούτου, ὡς ἔξεστιν ἰδεῖν ἐπιοῦσι ταῖς περὶ τούτου πραγματείαις. διὸ δεῖ καὶ ἡμᾶς ἀφέντας τὴν τοιαύτην ὑπόληψιν τοὺς παρὰ τῶν ἄλλως ὁριζομένων λόγους ἐξετάσαι· ἔσται δὲ τὸ καθ’ ὑπόθεσιν διδόμενον τὸ ἀκολούθως ταῖς ἀρχαῖς θεωρούμενον. ὁρίζονται δὴ οἱ μὲν ὀνομαστικοῖς ὅροις χρώμενοι ἑνί τινι τῶν εἰρημένων αὐτὸ χαρακτηρίζοντες, ὡς ἐν ἀρχῇ εἴρηται. πάντες δὲ σχεδὸν ὥσπερ κοινὴν ἔννοιαν περὶ τοῦ δεδομένου δοκοῦσιν ἐσχηκέναι· καταληπτὸν γάρ τι αὐτὸ εἶναι ὑπέλαβον, ὡς αὐτὸ ἐμφαίνει τὸ τοῦ δεδομένου ὄνομα, καὶ μάλιστα οἱ τὸ καθ’ ὑπόθεσιν δεδομένον ὑπογράφοντες. ἔνιοι δὲ πρὸς τὸ συγχωρούμενον ἀπέβλεψαν. χρώμενοι δὴ καὶ ἡμεῖς τῷ εἰρημένῳ ὥσπερ κανόνι καὶ κριτηρίῳ δυνησόμεθα [250] εὑρίσκειν τὸν τέλειον τοῦ δεδομένου ὁρισμόν. δῆλον δέ, ὅτι καὶ ἐξισάζειν ἤτοι ἀντιστρέφειν αὐτὸν δεήσει πρὸς τὸ ὁριστόν· καὶ γὰρ τοῦτο ὑπάρχειν δεῖ τοῖς ὀρθῶς ἀποδιδομένοις ὁρισμοῖς. ἔστι δὲ τοῦ προκειμένου τοιοῦτος ἐν μὲν τοῖς ἁπλούστερον εἰρημένοις ὁρισμοῖς ὁ τὸ πόριμον ὁρισάμενος, ἐν δὲ τοῖς συμπεπλεγμένοις ὁ τὸ γνώριμον ἅμα καὶ πόριμον· ἀτελεῖς δὲ οἱ λοιποὶ πάντες. οὔτε γὰρ ὁ τὸ τεταγμένον ὁριζόμενος αὐτάρκης πρὸς τὴν τοῦ δεδομένου περιοχὴν διὰ τὸ μήτε πᾶν μήτε μόνον τὸ τεταγμένον εἶναι καταληπτόν, ἀλλὰ καὶ τῶν ἀτάκτων τινά, ὡς ἐπιδέδεικται· οὔτε ἐκεῖνος ἱκανὸς ὁ γνώριμον αὐτὸ ἀφοριζόμενος· οὐδὲ γὰρ τοῦτο πᾶν ἐστι καταληπτόν, εἰ καὶ μόνον· τὸ γὰρ ἄγνωστον οὐκ ἂν εἴη καταληπτόν. οὐδὲ μὴν ὁ ῥητὸν αὐτὸ ἀποφαινόμενος ὅρος τέλειος ἔσται· οὐδὲ γὰρ τοῦτο μόνον καταληπτόν, ἐπεὶ καὶ τῶν ἀλόγων τινά· ἴσως δὲ οὐδὲ πᾶν τὸ ῥητὸν καταληπτόν, ὡς καὶ τοῦτο διώρισται πρότερον. λείπεται δὴ ἐν τοῖς ὀνομαστικῶς ἀποδεδομένοις τὸ πόριμον, ὅπερ δοκεῖ μάλιστα τὴν κατάληψιν ἐμφαίνειν· καὶ γὰρ πᾶν τὸ πόριμον καταληπτὸν καὶ μόνον. τῷ δὲ τοιούτῳ καὶ ὁ Εὐκλείδης ἐχρήσατο ὅρῳ τὰ εἴδη τοῦ δεδομένου πάντα ὑπογράφων. τῶν δὲ συνθέτων ὁρισμῶν μόνος τέλειός ἐστιν ὁ γνώριμον ἅμα καὶ πόριμον τὸ δεδομένον ἀφοριζόμενος, γένει μὲν ἀνάλογον ἔχων τὸ γνώριμον, διαφορᾷ δὲ τὸ πόριμον. ὁ δὲ τεταγμένον ἅμα καὶ πόριμον λέγων ἀτελής· οὐ μόνα γὰρ τὰ τοιαῦτά ἐστι δεδομένα. καὶ ὁ τεταγμένον καὶ ῥητὸν ὁμοίως ἐλλειπῶς περιέχει τὸ [252] δεδομένον. ὁ δὲ τὸ γνώριμον ἅμα καὶ τεταγμένον διὰ τὸ ὑπερβάλλειν τὸ προκείμενον οὐχ ὑγιὴς ἔσται· οὐδὲ γὰρ πᾶν τὸ τοιοῦτο δεδομένον ἐστίν. μόνοι δὴ λοιπὸν δοκοῦσι καθικνεῖσθαι τῆς ἐννοίας τοῦ δεδομένου οἱ γνώριμον ἅμα καὶ πόριμον αὐτὸ εἶναι ἀποφηνάμενοι· τὸ γὰρ τοιοῦτο πᾶν καταληπτὸν καὶ μόνον· ταῦτα δὲ ἀμφότερα δεῖ ὑπάρχειν τοῖς ἐπιστημονικῶς ἀποδεδομένοις ὁρισμοῖς. ἐγγὺς δὲ τούτων εἰσὶν οἱ συντιθέντες καὶ οὕτως· δεδομένον ἐστίν, ὃ πορίσασθαι δυνάμεθα διὰ τῶν κειμένων ἡμῖν ἐν ταῖς πρώταις ὑποθέσεσί τε καὶ ἀρχαῖς. τῶν δὲ προειρημένων εἴη ἂν καὶ ὁ Εὐκλείδης πανταχοῦ τῷ πορίσασθαι χρώμενος, εἰ καὶ παραλιμπάνει τὸ γνώριμον ὡς παρεπόμενον τῷ πορίμῳ· αἰτιάσαιτο δ᾽ ἄν τις αὐτὸν εὐλόγως ὡς οὐ πρότερον κοινῶς τὸ δεδομένον ὁρισάμενον, ἀλλ᾽ ἀμέσως τῶν εἰδῶν αὐτοῦ ἕκαστον, καίτοι ἐν τῇ γεωμετρικῇ στοιχειώσει φαίνεται πρὸ τῶν εἰδῶν τῆς γραμμῆς τὴν ἁπλῶς γραμμὴν ὁρισάμενος καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως. διακριθέντος τοίνυν κοινότερον καὶ ὡς πρὸς τὴν παροῦσαν χρείαν τοῦ δεδομένου ἐφεξῆς ἂν εἴη τὸ χρήσιμον τῆς περὶ αὐτοῦ πραγματείας ἀποδοῦναι. ἔστι δὴ καὶ τοῦτο τῶν πρὸς ἄλλο ἐχόντων τὴν ἀναφοράν· πρὸς γὰρ τὸν ἀναλυόμενον λεγόμενον τόπον ἀναγκαιοτάτη ἐστὶν ἡ τούτου γνῶσις. ὅσην δὲ ἔχει δύναμιν ἐν ταῖς μαθηματικαῖς ἐπιστήμαις καὶ ταῖς συγγενῶς ἐχούσαις ὀπτικῆς τε καὶ κανονικῆς ὁ ἀναλυόμενος τόπος, ἐν ἄλλοις διώρισται, καὶ ὅτι ἀποδείξεώς ἐστιν [254] εὕρεσις ἡ ἀνάλυσις καὶ ὅπως πρὸς εὕρεσιν τῆς τῶν ὁμοίων ἀποδείξεως ἡμῖν συμβάλλεται καὶ ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ δύναμιν ἀναλυτικὴν κτήσασθαι τοῦ πολλὰς ἀποδείξεις τῶν ἐπὶ μέρους ἔχειν. εἰς πάσας τοίνυν τὰς τοιαύτας ἐπιστήμας χρησίμη οὖσα ἡ περὶ τοῦ δεδομένου θεωρία, ἐπείπερ καὶ εἰς ἀνάλυσιν μέγα συμβάλλεται, εἰκότως ἂν ῥηθείη ἀνάγεσθαι οὐχ ὑπὸ μίαν τινὰ ἐπιστήμην, ἀλλ᾽ εἰς τὴν καθόλου λεγομένην μαθηματικήν. αὕτη δέ ἐστιν ἡ περί τε πλήθη καὶ μεγέθη καὶ χρόνους καὶ τάχη ἔχουσα καὶ τὰ τοιαῦτα πάντα, καθάπερ δὴ καὶ ἡ περὶ λόγους καὶ ἀναλογίας καὶ τὰς πανταχοῦ μεσότητας πραγματευομένη. πρὸς ταύτην τοίνυν τὴν τῶν δεδομένων ἐπιστημονικὴν κατάληψιν χρησιμωτάτην οὖσαν τὸ τῶν δεδομένων βιβλίον ὁ Εὐκλείδης ἐξεπόνησεν, ὃν καὶ στοιχειωτὴν κυρίως ἐπωνόμασαν. πάσης γὰρ σχεδὸν μαθηματικῆς ἐπιστήμης στοιχεῖα καὶ οἷον εἰσαγωγὰς προέταξεν, ὡς γεωμετρίας μὲν ὅλης ἐν τοῖς ιγ βιβλίοις καὶ τῆς ἀστρονομίας ἐν τοῖς Φαινομένοις, καὶ μουσικῆς δὲ καὶ ὀπτικῆς ὁμοίως στοιχεῖα παραδέδωκεν· καὶ δὴ καὶ τῆς περὶ τοῦ δεδομένου πάσης πραγματείας ἐν τῷ προκειμένῳ βιβλίῳ στοιχείωσιν ἀναλυτικὴν ἐποιήσατο. γεωμετρικὸς δὲ ὢν ὁ ἀνὴρ διαφερόντως τοὺς κοινοὺς περὶ τοῦ δεδομένου λόγους τοῖς μεγέθεσιν ἰδίως ἐφήρμοσεν, ὃν τρόπον ἐποίησε καὶ ἐπὶ τῶν καθόλου λόγων ὡς ἐπὶ μεγεθῶν ἰδίως αὐτοὺς πραγματευσάμενος ἐν τῷ πέμπτῳ βιβλίῳ τῆς ἐπιπέδου. κοινῶς μὲν οὖν εἴρηται, τί τὸ δεδομένον καὶ ὑπὸ [256] ποίαν ἐπιστήμην ἀνάγεται καὶ ὅτι χρησιμωτάτη ἐστὶν ἡ περὶ αὐτοῦ θεωρία. προσκείσθω δὲ τοῖς εἰρημένοις καὶ ἡ περιγραφὴ τῆς περὶ αὐτοῦ ἐπιστήμης. ἔσται δὴ αὕτη, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων φανερόν, κατάληψις τῶν δεδομένων κατὰ πάντα τρόπον καὶ τῶν περὶ αὐτὰ συμβαινόντων. ἰδίως δὲ καὶ ὡς πρὸς τὸ προκείμενον βιβλίον λεγέσθω εἶναι μέθοδος στοιχείωσιν περιέχουσα τῆς ὅλης περὶ τῶν δεδομένων ἐπιστήμης· ἕξει δὲ καὶ αὐτὴ τὸ χρήσιμον ἀκολούθως καὶ τὰ ἄλλα κατὰ τὴν ἀναφορὰν τὴν πρὸς τὸ δεδομένον. διῄρηται δὲ τὸ βιβλίον πρὸς τὰ τοῦ δεδομένου εἴδη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον αὐτοῦ τμῆμα περιέχει τὰ κατὰ λόγον δεδομένα, τὸ δὲ δεύτερον τὰ τῇ θέσει· ἐπὶ δὲ τούτοις τὰ τῷ εἴδει· ἁπλοῦν γὰρ ἦν τὸ περὶ τῶν μεγέθει δεδομένων, κατέσπαρται δὲ καὶ ταῦτα μερικῶς ἐν τοῖς ἄλλοις καὶ μάλιστα ἐν τοῖς κατὰ τὸ εἶδος δεδομένοις. ἤρξατο δὲ ἀπὸ τῶν λόγῳ καὶ θέσει δεδομένων, ἐπεὶ καὶ ἐκ τούτων συνίσταται τὰ τῷ εἴδει δεδομένα. καὶ ἄλλως δὲ ἡ διαίρεσις αὐτῷ τοῦ βιβλίου γεγένηται, εἴς τε τὰ καθ’ ὅλου μεγέθη καὶ εἰς γραμμὰς καὶ ἐπίπεδα καὶ κυκλικὰ θεωρήματα. τῇ δὲ ὁμοίᾳ τάξει ἐχρήσατο καὶ ἐπὶ τῶν ὅρων ἤτοι ὑποθέσεων τοῦ βιβλίου. τρόπῳ δὲ τῆς διδασκαλίας οὐ τῷ κατὰ σύνθεσιν ἐνταῦθα ἠκολούθησεν, ἀλλὰ τῷ κατὰ ἀνάλυσιν, ὡς ὁ Πάππος ἱκανῶς ἀπέδειξεν ἐν τοῖς εἰς τὸ βιβλίον ὑπομνήμασιν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

VON ARNIM, J. (ed.) 1921-1923. *Stoicorum Veterum Fragmanta*. 3 vols. Leipzig: Teubner.

BEHBOUD, A. 1994. Greek Geometrical Analysis. *Centaurus*, **37**. 52-86.

BERGGREN, J.L. 1984. History of Greek Mathematics: A Survey of Recent Research. *Historia Mathematica,* **11.** 394-410.

BERGGREN, J.L. & VAN BRUMMELEN, G. 2000. The Role and Development of Geometric Analysis and Synthesis in Ancient Greece and Medieval Islam. In P. SUPPES et al. (eds.), *Ancient & Medieval Traditions in the Exact Sciences. Essays in Memory of Wilbur Knorr.* Stanford, California: CSLI Publications.

ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ, Κ.Δ. 1973. *Αριστοτέλους Πρώτη Φιλοδοφία,* Τα Μετά τα Φυσικά. Αθήνα: εκδόσεις Παπαδήμα.

CHERNISS, H. 1951. Plato as Mathematician. *The Review of Metaphysics*, **4**. 395-425.

CORNFORD, F.M. 1932. Mathematics and Dialectic in the Republic VI-VII. *Mind*, **41**. 37-52; 173-190.

CUOMO, S. 2000. *Pappus of Alexandria and the mathematics of late antiquity.* Cambridge: Cambridge University Press.

MC DOWELL, G.L & SOKOLIC, M.A. 1993. *The DATA of EUCLID.* Baltimore: Union Square Press.

DÜRING, I. 1966. *Aristoteles. Darstellung und Interpretation seines Denkens*. Heidelberg: Carl Winter Universitätsverlag.

FOWLER, D.H. 1994. Could the Greeks have used mathematical induction? Did they use it? *Physis* **31.** 252-265.

FREUDENTHAL, H. 1977. What is Algebra and What has it been in History? *Archive for History of Exact Sciences*, **17.** 189-200.

FRIEDLEIN, G. (ed.) 1873. *Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii.* Leipzig: Teubner.

GULLEY, N. 1958. Greek Geometrical Analysis. *Phronesis*, **3**. 1-14.

HANKEL, H. 1874. *Beiträge zur Geschichte der Mathematic im Altertum und Mittelalter*. Leipzig: Teubner; repr. Hildesheim: G. Olms, 1965.

HEATH, T.L. 1921. *A History of Greek Mathematics*. 2 Vols. Oxford: Clarendon Press; repr. New York: Dover, 1981.

HEATH, T.L. 1926. *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* 3 Vols. Cambridge: Cambridge University Press; repr. New York: Dover, 1956.

HEATH, T.L. 1949. *Mathematics in Aristotle.* Oxford: Clarendon Press.

HEIBERG, J.L. & MENGE, H. (eds.) 1883-1888. *Euclidis Opera Omnia.* Vols. 1-5: *Elementa.* Leipzig: Teubner.

HEIBERG, J.L. (ed.) 1895. *Euclidis Opera Omnia.* Vol. 7: *Optica, Opticorum recensio Theonis, Catoptrica.* Leipzig: Teubner.

HEIBERG, J.L. 1903. Paralipomena zu Euclid. *Hermes,* **38**. 52-68.

HINTIKKA, J. 1973. *Time and Necessity: Studies in Aristotle's Theory of Modality.* Oxford: Clarendon Press.

HINTIKKA, J. & REMES, U. 1974. *The Method of Analysis: Its Geometrical Origin and its General Significance.* Dordrecht: Reidel. (Boston Studies in the Philosophy of Science, XXV)

HINTIKKA, J. & REMES, U. 1976. Ancient Geometrical Analysis and Modern Logic. In R.S. COHEN et al. (eds.), *Essays in the Memory of Imre Lakatos*. Dordrecht: Reidel. 253-276. (Boston Studies in the Philosophy of Science, XXXIX.)

HULTSCH, F. (ed.) 1876-1878. *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*, 3 vols. Berlin: Weidmann.

HUMBERT, J. 1957. *Συντακτικόν της Αρχαίας Ελληνικής Γλώσσης*. Εξελληνισθέν υπό Γ. Κουρμούλη. Αθήναι.

ITO, S. (ed.) 1980. *The Medieval Latin Translation of the Data of Euclid*. Tokyo: University of Tokyo Press, and Basel: Birkhäuser.

JONES, A. (ed.) 1986. *Pappus of Alexandria: Book 7 of the* Collection. 2 Vols. New York: Springer-Verlag.

KARASMANIS, V. 1987. *The Hypothetical Method in Plato's Middle Dialogues*. Ph.D dissertation. Oxford: Brasenose College.

ΚΑΡΑΣΜΑΝΗΣ, Β. 1993. Που έγκειται η ευρετική ικανότης της γεωμετρικής μεθόδου της ανάλυσης και σύνθεσης. Στο Δ.Α. Αναπολιτάνος-Β. Καρασμάνης (επιμ.), *Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά, Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας*. Αθήνα: εκδόσεις Τροχαλία.

KLEIN, J. 1968. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. English translation by E. Brann. Cambridge, Mass., M.I.T. Press; repr. New York: Dover, 1992.

KNORR, W.R. 1986. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Boston: Birkhäuser.

ΛΟΡΕΝΤΖΑΤΟΣ, Π. 1989. *Ιστορικόν Συντακτικόν της Αρχαίας Ελληνικής*. Αθήνα: εκδόσεις Κακουλίδη.

MAHONEY, M.S. 1968. Another Look at Greek Geometrical Analysis. *Archive for History of Exact Sciences*, **5**. 318-348.

MAHONEY, M.S. 1973. *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601-1665).* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

MENGE, H. (ed.) 1896. *Euclidis Data*. Leipzig: Teubner. (Euclidis Opera Omnia, VI.)

MICHAUX, M. 1947. *Le commentaire de Marinus aux Data d'Euclide. Etude Critique*, Louvain: Bibliothèque de l'Université.

MORROW, G.R. 1970. *PROCLUS A Commentary on the First Book of Euclid's* Elements. Princeton N.J.: Princeton University Press.

ΜΟΥΜΤΖΑΚΗΣ, Α.Β. 2000. *Συντακτικό της Αρχαίας Ελληνικής*. Αθήνα: Οργανισμός εκδόσεως διδακτικών βιβλίων.

MUELLER, I. 1981. *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's* Elements. Massachusetts: The MIT Press.

NETZ, R. 1999. *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

NETZ, R. 2000. Why did Greek Mathematicians Publish their Analyses? In P. SUPPES et al. (eds.), *Ancient & Medieval Traditions in the Exact Sciences. Essays in Memory of Wilbur Knorr.* Stanford, California: CSLI Publications.

NEUGEBAUER, O. 1936. Zur geometrishen Algebra. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, **3B**. 245-259.

OTTE, M & PANZA, M (eds.), 1997. *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

PANZA, M. 1997. Classical Sources for the Concepts of Analysis and Synthesis. In M. OTTE & M. PANZA (eds.), *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

RASHED, R. 1991a. L'analyse et la synthèse selon Ibn al-Haytam. In R. RASHED (ed.), *Mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'âge classique: Études en hommage à Jules Vuillemin*. Paris: Éditions du C.N.R.S. 131-162.

RASHED, R. 1991b. La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytam – L'analyse et la synthèse. *MIDEO*, **20**. 31-231.

RASHED, R. 1993. La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytam – Les Connus. *MIDEO*, **21**. 87-275.

ROBINSON, R. 1936. Analysis in Greek Geometry. *Mind*, **45**. 464-473.

ROSS, W.D. 1924. *Aristotle's Metaphysics.* 2 Vols. Oxford: Clarendon Press; repr. Guilford and London: Billing and Sons, 1966.

SCHMIDT, R.H. 1987. The Analysis of the Ancients and the Algebra of the Moderns. New York: Golden Hind Press.

SCHWYZER, E. *Η Σύνταξη της Αρχαίας Ελληνικής Γλώσσας.* Αθήνα 2002: εκδόσεις Παπαδήμα.

ΣΚΟΥΤΕΡΟΠΟΥΛΟΣ, Ν. Μ. 1991. *Η Αρχαία Σοφιστική*. Αθήνα: Εκδόσεις Γνώση.

ΣΤΑΜΑΤΑΚΟΣ, Ι. 1949. *Λεξικόν της Αρχαίας Ελληνικής Γλώσσης.* Αθήνα: εκδόσεις Φοίνιξ.

ΣΤΑΜΑΤΑΚΟΣ, Ι. 1949. *Ιστορική Γραμματική της Αρχαίας Ελληνικής.* Αθήνα: εκδόσεις Φοίνιξ.

ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε. (εκδ.) 1953. *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ.* Τόμος ΙΙ (Βιβλία V, VI, VII, VIII, IX). Αθήνα: Οργανισμός εκδόσεως σχολικών βιβλίων.

ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε. (εκδ.) 1957. *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ: ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ.* Τόμος IV (Βιβλία XI, XII, XIII). Αθήνα: Οργανισμός εκδόσεως σχολικών βιβλίων.

ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε. (εκδ.) 1975. *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.* Τόμος Ι (Βιβλία 1, 2, 3, 4). Αθήνα: Οργανισμός εκδόσεως διδακτικών βιβλίων.

ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε. (εκδ.) 1975. *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ: ΠΕΡΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ.* Τόμος ΙΙΙ (Βιβλίον Χ). Αθήνα: Οργανισμός εκδόσεως διδακτικών βιβλίων.

ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε. 1970-1974. *ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΠΑΝΤΑ.* 4 Τόμοι. Αθήνα: Έκδοσις Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος.

ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε. 1975-1976. *ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ.* 4 Τόμοι. Αθήνα: Έκδοσις Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος.

SZABÓ, Á. 1969. *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών.* Αθήνα: Έκδοσις Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος 1973.

SZABÓ, Á. 1974. Working Backwards and Proving by Synthesis. In HINTIKKA, J. & REMES, U. *The Method of Analysis: Its Geometrical Origin and its General Significance*. Dordrecht: Reidel. 118-130.

TAISBAK, C.M. 1991. Elements of Euclid's *Data*. In I. MUELLER (ed.), *Peri Tōn Mathēmatōn*. Edmonton: Academic Printing & Publishing. 135-171.

TAISBAK, C.M. 2003. *Euclid' s Data or The Importance of Being Given*. Copenhagen: Museum Tusculanum Press.

UNGURU, S. 1975. On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics. *Archive for History of Greek Mathematics,* **15.** 67-114.

UNGURU, S. 1979. History of Ancient Mathematics. Some Reflections on the State of the Art. *Isis,* **70.** 555-565.

UNGURU, S. 1991. Greek mathematics and Mathematical induction. *Physis,* **28**. 273-289.

UNGURU, S. 1994. Fowling after induction. *Physis* **31.** 267-272.

VAN DER WAERDEN, B.L. 2000. *Η Αφύπνιση της Επιστήμης.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης· μετάφραση από την αγγλική έκδοση του 1954. Πρώτη έκδοση στα ολλανδικά 1950.

VAN DER WAERDEN, B.L. 1976. Defence of a "Shocking" Point of view. *Archive for History of Exact Sciences*, **15.** 199-210.

WEIL, A. 1978. Who Betrayed Euclid? (Extract from a letter to the Editor). *Archive for History of Exact Sciences*, **19.** 91-93.

ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ, Γ. 2003. *Θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

ZEUTHEN, H.G. 1902. *Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen age*. Transl. by J. Mascart. Paris: Gauthier-Villars.