Η Λογική της Μετάβασης από την Κλασική στην Κβαντική Φυσική υπό το Πρίσμα Σύγχρονων Μαθηματικών Εξελίξεων

Βασίλης Γ. Σακελλαρίου

Επιβλέπων: Βασίλειος Καρακώστας

Μέλη Συμβουλευτικής Επιτροπής: Αντωνίου Νικόλαος

Μπαλτάς Αριστείδης

Διαπανεπιστημιακό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα

'Ιστορία και Φιλοσοφία των Επιστημών και της Τεχνολογίας'

Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης, ΕΚΠΑ

και

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (ΣΕΜΦΕ)

Τομέας Ανθρωπιστικών και Κοινωνικών Επιστημών και Δικαίου (ΑΚΕΔ), ΕΜΠ

Αθήνα, 2007

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Όταν ο Einstein αναζητούσε τρόπο να εκφράσει τις ιδέες της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, ζήτησε την βοήθεια του παλαιού συμμαθητή και φίλου του, Marcel Grossmann. Εκείνος, ερευνώντας την βιβλιογραφία, ανέσυρε τις εργασίες τού Riemann. Η συμβουλή του στον Einstein ήταν ότι, όντως, υπήρχαν τα κατάλληλα μαθηματικά, αλλά επρόκειτο για ζητήματα εξαιρετικά πολύπλοκα και δυσνόητα, με τα οποία ένας φυσικός δεν έπρεπε ποτέ να αναμειχθεί [1]. Η κατάσταση έκτοτε έχει μεταβληθεί ριζικά, ιδιαίτερα από τις αρχές της δεκαετίας του 1980, όταν η σχέση φυσικής και μαθηματικών εισήλθε σε νέα απροσδόκητη, όσο και γονιμότατη φάση. Σήμερα δεν συνιστά καθόλου παραδοξολογία αν ισχυριστεί κανείς ότι η θεωρία χορδών, ένα από τα κυρίαρχα ερευνητικά προγράμματα στα πλαίσια των κβαντικών θεωριών, «*πρέπει εν τέλει να καταστεί νέος κλάδος της γεωμετρίας*». Η φράση αποδίδεται στον Edward Witten [1], τον άνθρωπο που σπούδασε ιστορία για να αναδειχθεί στην συνέχεια σε πρωταγωνιστή πολλών από τις πλέον μακρόπνοες και ρηξικέλευθες εξελίξεις στην φυσική και τα μαθηματικά των ημερών μας. Κατά μία έννοια, ισχύει όμως και το αντίστροφο. Υπάρχουν τομείς των μαθηματικών σχετικά με τους οποίους, μόλις λίγα χρόνια πριν, θα μπορούσε κανείς κάλλιστα να επαναλάβει τα λόγια τού Grossmann προς τον Einstein. Όπως, λόγου χάριν, το επονομαζόμενο πρόγραμμα Langlands, το οποίο στηρίζεται σε επιτεύγματα μαθηματικών όπως ο Galois και ο Artin, είναι πεδίο έντονης ερευνητικής δραστηριότητας και μάλιστα συνδέεται με την εντυπωσιακή απόδειξη από τον A. Wiles του «τελευταίου θεωρήματος» του Fermat [2]. Η σύγχρονη φυσική, εξ άλλου, έχει τάξει στον εαυτό της καθήκοντα φαινομενικά πιο «γήινα»: μεταξύ αυτών, την διερεύνηση της θεμελιώδους δομής της ύλης και την σύνδεση των κβαντικών θεωριών με την γενική θεωρία της σχετικότητας. Έχουν γεννηθεί έτσι ιδέες σε τομείς όπως οι υπερσυμμετρικές θεωρίες βαθμίδας, η δυϊκότητα ηλεκτρισμού και μαγνητισμού, τα μοντέλα σίγμα, η κατοπτρική συμμετρία, οι βράνες και οι τοπολογικές θεωρίες πεδίου. Σε αυτό το σημείο συντελείται η αναπάντεχη συνάντηση: Σε πρόσφατο άρθρο τους, ο E. Witten και ο A. Kapustin [3] αντλούν από αυτούς ακριβώς τους τομείς προκειμένου να προτείνουν ότι το γεωμετρικό πρόγραμμα Langlands «*μπορεί να νοηθεί ως ένα κεφάλαιο της κβαντικής θεωρίας πεδίου*». Τίποτε δεν δείχνει πιο ανάγλυφα το άλμα στις αντιλήψεις που έχει πραγματοποιηθεί. Θα μπορούσε κανείς, ασφαλώς, να ισχυριστεί ότι η σύγχρονη φυσική έχει καταστεί τόσο «εξωτική», που η συνάντησή της με τα «εξωπραγματικά» μαθηματικά ήταν αναμενόμενη. Η παρούσα εργασία υιοθετεί την αντίθετη άποψη: Ότι τα μαθηματικά αποκαλύπτουν την βαθειά σχέση τους με την πραγματικότητα, καθώς γινόμαστε μάρτυρες της επίπονης και δαιδαλώδους συγκρότησης ενός *νέου εννοιολογικού πλαισίου ως αναγκαίου όρου προκειμένου ο κόσμος της φύσης, όπως γίνεται προσιτός στις αντιληπτικές μας ικανότητες με την αξιοποίηση των σύγχρονων δυνατοτήτων, να καταστεί γνώσιμος*. Από εδώ ακριβώς πηγάζει η ανάγκη να επανεξεταστούν τα φιλοσοφικά ζητήματα τα οποία έθεσε η μετάβαση από το εννοιολογικό πλαίσιο της κλασικής φυσικής σε εκείνο των κβαντικών θεωριών, υπό το πρίσμα των σύγχρονων εξελίξεων στην φυσική και τα μαθηματικά.

Αυτός είναι ο στόχος της εργασίας. Με κριτήριο την αξιολόγηση από τους ίδιους τους φυσικούς και μαθηματικούς επιστήμονες των εξελίξεων στους τομείς τους, επέλεξα ως κατακλείδα δύο εξελίξεις των τελευταίων ετών, οι οποίες προκάλεσαν μεγάλη αίσθηση στους επιστημονικούς κύκλους. Και οι δύο αναπτύχθηκαν στο κλίμα της αντιστροφής στην σχέση μεταξύ μαθηματικών και φυσικής που εγκαινιάστηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1980. Εννοώ το γεγονός ότι η φυσική δεν είναι πλέον μόνο πεδίο εφαρμογής και τροφοδότησης των μαθηματικών, αλλά έχει μετατραπεί η ίδια σε τόπο παραγωγής μαθηματικών προτάσεων και απόδειξης μαθηματικών θεωρημάτων. Οι φυσικές θεωρίες αυτής της πρόσφατης περιόδου φέρουν την σφραγίδα τής με τέτοιον τρόπο αλλαγής κλίματος. Η περίπτωση του E. Witten είναι ίσως η πιο γνωστή, αλλά όχι η μόνη. Αφού εισαχθεί συνοπτικά το νέο πνεύμα, παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο VIII η μία από τις δύο εξελίξεις που επέλεξα. Πρόκειται για την ολοκλήρωση του προγράμματος της *κβάντωσης μέσω παραμορφώσεων* (deformation quantization) στην γενικότερη περίπτωση, με την εργασία τού M. Kontsevich. Μια θεωρία η οποία κινείται σε ένα μετα-επίπεδο, καθόσον εξετάζει σχέσεις θεωριών, αποδείχθηκε ότι εντάσσεται στο πλαίσιο της κβάντωσης μιας ειδικού τύπου θεωρίας πεδίου. Στηρίζει έτσι την θέση ότι, τελικά, η κβαντική φυσική ερμηνεύεται βάσει του εαυτού της και όχι σε αναφορά προς ένα «ξένο», κλασικό πλαίσιο. Η δεύτερη εντυπωσιακή εξέλιξη, την οποία πραγματεύεται το Κεφάλαιο IX, βρίσκεται στην αντίθετη κατεύθυνση. Αντικείμενό της δεν είναι μια μετα-θεωρία, αλλά ο μαθηματικός αναστοχασμός μιας τεχνικής, την οποία δύσκολα και υπό όρους μπορεί να θεωρήσει κανείς ως δόκιμη θεωρία. Εννοώ την τεχνική της *επανακανονικοποίησης* (renormalization), ακρογωνιαίο λίθο των θεωριών πεδίου. Είναι η πρακτική στην οποία επιδόθηκαν και επιδίδονται γενεές φυσικών και η οποία συνδέθηκε με την αντίληψη της φυσικής ως «υπολογιστικής μηχανής» για την πρόβλεψη παρατηρήσεων. Και όμως, αυτή η χωρίς υψιπετείς φιλοδοξίες τεχνική έγινε κατορθωτό να ενταχθεί σε ένα καλώς ορισμένο μαθηματικό πλαίσιο, εκείνο των αλγεβρών Hopf, χάρη στις εργασίες των A. Connes και D. Kreimer, και έτσι να «*υψωθεί σε νοηματικό επίπεδο*», κατά την έκφραση αυτών των ερευνητών. Με αυτόν τον τρόπο, η τεχνική αποκτά χαρακτήρα *a posteriori* αναγκαιότητας (ως μαθηματική αλήθεια), οπότε τίθεται το νέο ερώτημα, *γιατί* η φυσική πραγματικότητα περιγράφεται με έννοιες που εντάσσονται σε *τέτοιο* –σαν το ανακαλυφθέν– πλαίσιο; Πρώτα, όμως, χρειάζονται μερικές παρατηρήσεις.

Οι κβαντικές θεωρίες αριθμούν τώρα έναν και πλέον αιώνα ζωής. Με τον όρο «κβαντικές θεωρίες» εννοώ εκείνον τον τομέα της φυσικής επιστήμης ο οποίος εκτείνεται από την πρώιμη κβαντική μηχανική μέχρι τις σύγχρονες κβαντικές θεωρίες πεδίου, τις θεωρίες των στοιχειωδών σωματιδίων, έως και τις σύγχρονες απόπειρες κατανόησης της φυσικής πραγματικότητας μέσω των θεωριών των υπερχορδών, των υπερμεμβρανών και των μετεξελίξεών τους. Άλλες από αυτές τις θεωρίες έχουν δοκιμαστεί και επιβεβαιωθεί πανηγυρικά από το πείραμα, ενώ οι τεχνολογικές εφαρμογές τους έχουν πλέον καταστεί δομικά στοιχεία της ζωής μας. Άλλες αναπτύσσονται αυτόνομα, ως μεγαλεπήβολα προγράμματα για την επίτευξη μιας μεγάλης σύνθεσης, φιλοδοξώντας να υποβληθούν κάποτε στην –ανέφικτη προς το παρόν– δοκιμασία του πειράματος. Σε κάθε περίπτωση και καθ' όλη την διάρκεια της ιστορίας τους, οι ως άνω θεωρίες συνοδεύονται από ένα διττό πρόβλημα. Είναι πρόβλημα της ίδιας της φυσικής, αφ' ενός, και, αφ' ετέρου, της φιλοσοφίας. Ως προς την φυσική, η κυρίαρχη άποψη μεταξύ των επιστημόνων είναι ότι τουλάχιστον οι ώριμες και εμπειρικά επαρκείς κβαντικές θεωρίες είναι *θεμελιώδεις*, με την έννοια ότι έχουν αμετάκλητα αντικαταστήσει την προγενέστερη κλασική μηχανική –λόγου χάριν, δηλώσεις όπως «η κβαντομηχανική είναι η μοναδική μηχανική που διαθέτουμε» απηχούν εδραιωμένες πεποιθήσεις. Εν τούτοις, επιμένει το αναντίρρητο γεγονός ότι οι κβαντικές θεωρίες *δεν* ερμηνεύουν τον φυσικό κόσμο στο σύνολό του. Εκείνο που συμβατικά ονομάζεται «μακρόκοσμος» δεν υπάγεται προς το παρόν στην δικαιοδοσία τους. Η κυρίαρχη άποψη συνεπώς προσδίδει στο γεγονός τον χαρακτήρα ενοχλητικής *εκκρεμότητας*. Και αυτήν έρχεται να επιτείνει ένα άλλο γεγονός: η καλύτερη φυσική θεωρία που διαθέτουμε για τον μακρόκοσμο είναι *κλασική*, με την έννοια ότι δεν διατυπώνεται με τους όρους των κβαντικών θεωριών. Πρόκειται για την γενική θεωρία της σχετικότητας, επιβεβαιωμένη σε βαθμό κατά πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από την πλέον επιτυχημένη κβαντική θεωρία, την κβαντική ηλεκτροδυναμική. Ως εκ τούτου, η διαχρονική διάκριση μεταξύ παλαιού κλασικού και σύγχρονου κβαντικού, ιστορικής ουσιαστικά σημασίας, μετασχηματίζεται σε, και επισκιάζεται από την παραμένουσα *συγχρονική* ένταση μεταξύ μιας έννοιας κλασικότητας έναντι του αντιθέτου της, της έννοιας του κβαντικού. Το δίπολο κλασικό – κβαντικό δεν έχει έτσι την ιστορική σημασία του παλαιού – νέου, αλλά συγκροτεί μιαν εννοιολογική αντίθεση. Προκειμένου, λοιπόν, να κάνω σαφή την διάκριση, στο εξής θα αναφέρομαι στην παλαιά, νευτώνεια φυσική, ως «κλασικό», με πεζό «κ», ενώ στις σύγχρονες σχετικιστικές θεωρίες του μακρόκοσμου και της κοσμολογίας ως «Κλασικό», με κεφαλαίο «Κ».

Το πρόβλημα που τίθεται, κατά συνέπεια, είναι ότι η μετάβαση από την κλασικότητα στο κβαντικό δεν αφορά αποκλειστικά τα ζητήματα που προκύπτουν από μιαν επιστημονική επανάσταση. Η επιστημονική επανάσταση δεν αποτελεί μόνον το ενδιαφέρον του ιστορικού και του φιλοσόφου της επιστήμης, καθώς τα προβλήματα που θέτει προβάλλουν ως διακύβευμα κατ' εξοχήν για τον ίδιο τον φυσικό επιστήμονα, στο *εσωτερικό* των σύγχρονων κβαντικών θεωριών. Η διαδικασία της «κβάντωσης», ό,τι και αν σημαίνει, συνιστά το σύγχρονο κυνήγι του «άγιου δισκοπότηρου» της φυσικής –και τούτο όχι μόνον όσον αφορά τα ερευνητικά προγράμματα σχετικά με την κβαντική βαρύτητα. Πράγματι, το ερώτημα, πώς συγκροτείται ο φαινομενολογικά γνώριμος κόσμος από τον κόσμο που περιγράφουν οι κβαντικές θεωρίες –όπως, για παράδειγμα, συμπυκνώνεται στο «πρόβλημα της μέτρησης»– συνοδεύεται από το αντίστροφο ερώτημα, το οποίο κωδικοποιείται στην επονομαζόμενη «συνταγή κβάντωσης». Θεωρητικές κατασκευές όπως η «πρώτη» και η «δεύτερη» κβάντωση είναι βήματα θεμελιώδη στην συγκρότηση των σύγχρονων κβαντικών θεωριών. Αναπτύσσονται με αφετηρία μια κλασικού τύπου εικόνα, η οποία «κβαντώνεται» στην συνέχεια. Πανταχού παρούσα, εξ άλλου, είναι η προσέγγιση στο κβαντικό ως μιας σειράς «διορθώσεων» εν είδει μικρών διαταραχών σε ένα κλασικό υπόβαθρο. Το αίτημα της συμπλήρωσης του νοηματικού ελλείμματος που υποδηλώνει ο όρος «συνταγή» έχει μεταφέρει στην δικαιοδοσία της φυσικής επιστήμης ζητήματα που άλλοτε πραγματευόταν αποκλειστικά η φιλοσοφία· δηλαδή, τα ζητήματα που άπτονται της μετάβασης από το εννοιολογικό πλαίσιο μιας φυσικής θεωρίας σε εκείνο μιας άλλης. Σε τούτο έγκειται η δεύτερη όψη του διττού προβλήματος που αναφέρθηκε προηγουμένως: η εκκρεμότητα στην φυσική συνοδεύεται από εκκρεμότητα φιλοσοφικής φύσεως. Τούτο συμβαίνει διότι η φιλοσοφική συζήτηση περί της ως άνω μετάβασης διαπλέκεται άρρηκτα και δεν είναι δυνατόν να διεξαχθεί ερήμην των συναφών προβληματισμών *εντός* της φυσικής. Σύμπτωμα αυτής της διαπλοκής είναι μία από τις ιδιομορφίες της κβαντικής φυσικής: *Είναι ίσως η μόνη επιστημονική θεωρία η οποία περιλαμβάνει ως ιδιαίτερο κλάδο της την μελέτη της θεμελίωσής της*.

Πράγματι, η κβαντική φυσική θέτει με τρόπο ιδιάζοντα και μοναδικό θέμα ερμηνείας. Το θέτει ως ερώτημα, καθώς δεν επιδέχεται μηχανική ερμηνεία –με την έννοια που εξέθεσε ο Poincaré ως απαύγασμα της μεθοδολογίας της φυσικής, όπως θα εξηγηθεί στην συνέχεια– πράγμα που είχε εμπεδωθεί στην κλασική φυσική, οπότε δεν ετίθετο παρόμοιο θέμα. Μη επιδεχόμενη μηχανική ερμηνεία, η κβαντική φυσική εθεωρήθη ότι είναι πρόσφορο να ερμηνευθεί «κατ' αναλογίαν», μέσω μιας αντιστοιχίας προς τις κλασικές έννοιες η οποία κωδικοποιείται στην συνταγή κβάντωσης. Η εκκρεμότητα στην φυσική ευνοεί –χωρίς να οδηγεί ούτε να στηρίζει απαρέγκλιτα– την γνωσιολογικού χαρακτήρα κατεύθυνση που συνδέθηκε με την επονομαζόμενη ερμηνεία της Κοπεγχάγης. Δεν θα ήταν υπερβολικό αν λέγαμε πως το γεγονός ότι η κβαντική φυσική *προς το παρόν* αδυνατεί να ερμηνεύσει τον μακρόκοσμο τροφοδοτεί φιλοσοφικές απόψεις κατά τις οποίες ο μακρόκοσμος οφείλει *μονίμως* να ερμηνεύει την κβαντική φυσική –και κάθε φυσική. Η αναγωγή των κλασικών εννοιών σε όρο δυνατότητας για την μελέτη του φυσικού κόσμου ουσιαστικά θεσμοποιεί την εκκρεμότητα στην φυσική. Παράλληλα, ευνοείται μια αίσθηση «παράδοξου». Η διαίσθηση μένει προσκολλημένη σε ιδέες συμβιβάσιμες με την κλασικότητα και, στον βαθμό που οι αντίστοιχες επιστημονικές έννοιες επιμένουν δίπλα στις έννοιες της κβαντικής φυσικής, οι τελευταίες φαντάζουν σαν παραδοξολογία. Είναι χαρακτηριστικές οι προτάσεις για μια διχασμένη προσέγγιση στην φυσική πραγματικότητα με την συνύπαρξη δύο διαφορετικών λογικών δομών. Αλλά και σε εκλαϊκευτικά κείμενα παρατίθενται δηλώσεις όπως εκείνη του φυσικού D. Greenberger: «*Ο Einstein έλεγε ότι εάν η κβαντομηχανική είναι σωστή, τότε ο κόσμος* *είναι τρελός. Λοιπόν, ο Einstein είχε δίκιο. Ο κόσμος είναι τρελός*» [4]. Ιδιαίτερα πρέπει να σημειωθεί ότι η παράταση της εκκρεμότητας στην φυσική ως προς την σχέση μακρόκοσμου και μικρόκοσμου αφήνει περιθώρια ώστε το φιλοσοφικό ζήτημα της ύπαρξης ή μη οντοτήτων και/ή της αναφορικότητας ή μη των θεωρητικών όρων μιας επιστημονικής θεωρίας να υποκαθίσταται από την διάκριση του «παρατηρήσιμου» έναντι του «μη παρατηρήσιμου». Αφ' ενός, είναι ο δρόμος δια του οποίου ένας ακραίος εμπειρισμός καταφεύγει στην εργαλειοκρατία. Αφ' ετέρου, το πρόβλημα της σχέσης παρατηρήσιμου και μη παρατηρήσιμου –πρόβλημα της φυσικής–, στο φιλοσοφικό επίπεδο μετατίθεται, αποκαλύπτοντας καθαρά φιλοσοφικά κίνητρα πέραν της φυσικής εκκρεμότητας. Αυτό φαίνεται σαφέστερα στην πρώιμη εποχή, όταν η κβαντική φυσική ήταν στα σπάργανα. Έτσι, ο H. Poincaré, λόγου χάριν, αντιμετωπίζει το μη παρατηρήσιμο ως καντιανό πράγμα καθ' εαυτό και το θεωρεί μη γνώσιμο, ενώ ο P. Duhem θεωρεί ότι μια πραγματικότητα πέρα από το πέπλο των εμφανίσεων ανήκει στην σφαίρα της μεταφυσικής και όχι της επιστήμης. Αντιθέτως, ο ύστερος Carnap εκφράζει την άποψη ότι το παρατηρήσιμο δεν διακρίνεται ποιοτικά από το μη παρατηρήσιμο, αλλά διαφέρει ως προς τον βαθμό και την ευκολία επιβεβαίωσης προτάσεων με αντίστοιχο περιεχόμενο· είναι δηλαδή διαφορά ασαφής και πραγματολογική [5].

Σε γενικές γραμμές, θα μπορούσε κανείς να εισηγηθεί ότι βρισκόμαστε σε μια παρατεταμένη κρίση κουνιανού τύπου, όπου οι ίδιοι οι φυσικοί επιστήμονες αισθάνονται την ανάγκη να προσφύγουν στην αρωγή της φιλοσοφίας προκειμένου να ανταποκριθούν στην επιτακτική ανάγκη αναθεώρησης παραδεδεγμένων και ριζωμένων αρχών και προϋποθέσεων. Ή, αλλιώς, θα μπορούσε να υιοθετήσει μια θετικιστικής έμπνευσης θέση κατά την οποία η φιλοσοφία συνίσταται στην γενίκευση των συμπερασμάτων της επιστήμης, οπότε θα πρέπει να τηρεί στάση αναμονής μέχρις ότου η φυσική καταλήξει στην ετυμηγορία της. Τέλος, υπάρχει και η εκδοχή όσων διατείνονται ότι τα κενά και οι θεωρητικές ανεπάρκειες οφείλονται στο ότι οι κβαντικές θεωρίες είναι από την στιγμή της σύλληψής τους *εγγενώς* ατελείς, οπότε απαιτείται η αναζήτηση εναλλακτικών θεωριών. Τέτοια είναι, λόγου χάριν, η προσέγγιση του D. Bohm. Στην εργασία αυτή θα παραμείνω αποκλειστικά εντός του πλαισίου του αποκαλούμενου «κύριου ρεύματος» των κβαντικών θεωριών, αποφεύγοντας εικασίες και ανεπιβεβαίωτες απόπειρες υποκατάστασής τους σε αυτό το πνεύμα. Θα υποστηρίξω επίσης απόψεις αντίθετες προς τις δύο άλλες εκδοχές. Όσον αφορά την πρώτη, το αυξημένο ενδιαφέρον διακεκριμένων φυσικών για την φιλοσοφία, όσο και η παρουσία στοιχείων κουνιανού τύπου κρίσης, είναι πραγματικότητες αναμφισβήτητες. Το κρίσιμο ζήτημα, ωστόσο, είναι ότι δεν αντιμετωπίζουμε εδώ μιαν «ημιτελή επιστημονική επανάσταση» απλώς. Δεν έχουμε τον συναγωνισμό δύο αλληλοαποκλειόμενων θεωριών οι οποίες αντιπαρατίθενται εξωτερικά· παράλληλα με την ανάπτυξη του σύγχρονου Κλασικού, έχουμε το κβαντικό εντός του οποίου έχει *εσωτερικευθεί* η εννοιολογική μετάβαση με την έννοια της συνταγής κβάντωσης. Πρόκειται για γεγονός γνησίως καινοφανές το οποίο αφ' εαυτού εγείρει πρωτότυπα φιλοσοφικά ερωτήματα, ανεξάρτητα από το πότε και πώς θα καλυφθούν οι όποιες εκκρεμότητες στο επίπεδο της φυσικής. Για τον ίδιο λόγο η δεύτερη στάση που θεωρεί την φιλοσοφία παρακολούθημα της επιστήμης πρέπει να απορριφθεί.

Ο φιλοσοφικός αναστοχασμός της φυσικής δεν είναι, ασφαλώς, ουδέτερος. Η στάση που υιοθετώ εντάσσεται στο ευρύτερο ρεύμα του επιστημονικού ρεαλισμού. Δηλαδή, αναγνωρίζεται ότι ο φυσικός κόσμος είναι ανεξάρτητος από την νόηση και καθίσταται γνώσιμος μέσω επιστημονικών αφαιρέσεων οι οποίες δεν ανάγονται σε παρατηρησιακά γεγονότα αλλά έχουν γνωστικό περιεχόμενο, αναφερόμενες σε γεγονότα στον κόσμο ανεξάρτητα από γνωσιολογικές[1] προϋποθέσεις. Συναφώς, γίνεται δεκτό ότι οι σχέσεις και οι διαδικασίες στην νόηση όταν αυτή ιδιοποιείται θεωρητικά το γνωστικό αντικείμενό της αντανακλούν σχέσεις και διαδικασίες στον αντικειμενικό κόσμο. Σε αυτό το πνεύμα, πρέπει να αποδεχθούμε την ύπαρξη των οντοτήτων που απαρτίζουν τόσο τον κόσμο της καθημερινής εμπειρίας, όσο και τον παρατηρησιακά απροσπέλαστο κόσμο στον οποίο αναφέρονται τα επονομαζόμενα «μη παρατηρήσιμα μεγέθη». Το ερώτημα, ποιες από αυτές τις οντότητες είναι θεμελιώδεις ή *sui generis* μπορεί να συζητηθεί *μετά* από αυτό το πρώτο βήμα. Διαφορετικό, ωστόσο, είναι το ερώτημα, ποια φυσική *θεωρία* είναι θεμελιώδης. Σε σχέση με την ως άνω θέση περί της πραγματικότητας των οντοτήτων που συγκροτούν τον φυσικό κόσμο, η θέση ότι η κβαντική θεωρία είναι θεμελιώδης δεν αρκεί. Δεν αρκεί να «έχουμε την συνείδησή μας ήσυχη», ικανοποιημένοι διότι διαθέτουμε μια θεωρία σε βαθύτερο επίπεδο και κατά τα άλλα να επιδιδόμαστε στα ειωθότα στο μακρο-επίπεδο· ούτε να ασχολούμαστε με το «βαθύτερο» σηκώνοντας αδιάφορα τους ώμους απέναντι στην μακροσκοπική του εμφάνιση. Εάν θεωρήσουμε ότι ο «κλασικός κόσμος» αναδύεται από τον κβαντικό, δηλαδή, ότι η *κλασική θεωρία* προσεγγίζει πλευρές του κόσμου τον οποίο η κβαντική θεωρία περιγράφει θεμελιωδώς, τότε η *κβαντική θεωρία* πρέπει να εξηγεί *πώς* αναδύεται η κλασικότητα. Τα ζητήματα, συνεπώς, που φύονται στο έδαφος της μετάβασης από το κλασικό στο κβαντικό εννοιολογικό πλαίσιο δεν περιορίζονται σε εκείνα που εντοπίστηκαν από τις απαρχές της κβαντικής φυσικής και μελετώνται επισταμένως έκτοτε. Προβλήματα καινοφανή, αλλά και νέες ιδέες για την αντιμετώπισή τους –όπως και για την αντιμετώπιση από άλλη οπτική γωνία των παλαιών και γνώριμων–, γεννώνται στο έδαφος των σύγχρονων εξελίξεων.

Ας διευκρινίσω όμως ορισμένα σημεία. Κατ' αρχάς, τα δύο υπό εξέτασιν εννοιολογικά πλαίσια έχουν *μαθηματική μορφή*. Πρόκειται, δηλαδή, για μαθηματικοποιημένες έννοιες με φυσικό περιεχόμενο και για το πλέγμα των μεταξύ τους (μαθηματικών) σχέσεων. Ασφαλώς, οι θεμελιώδεις έννοιες που αποτελούν

[1] Εδώ και στην συνέχεια, ο όρος «γνωσιολογικός» πρέπει να νοείται με το νόημα που έχει στα αγγλικά ο όρος «epistemic» και που στα ελληνικά συχνά αποδίδεται ως «επιστημολογικός».

αντικείμενο φιλοσοφικού στοχασμού δεν ανάγονται στις έννοιες των μαθηματικών, πολύ περισσότερο δεν ταυτίζονται με αυτές. Εν τούτοις, οι μαθηματικοποιημένες φυσικές έννοιες είναι ο συνδετικός κρίκος μεταξύ φυσικής και φιλοσοφίας. Το πρώτο σημείο, λοιπόν, είναι ότι αναγνωρίζεται ρητά το γεγονός ότι η επιστήμη που ονομάζεται θεωρητική φυσική συγκροτήθηκε εξ αρχής ιστορικά –κατά την περίοδο από τον Κοπέρνικο, τον Kepler και τον Galilei ως τον Newton– ως *σύνθεση μαθηματικών και πειράματος*. Ο ρόλος των μαθηματικών στην φυσική επιστήμη δεν είναι «εξωτερικός», δεν αφορά την διαθεσιμότητα μιας βολικής γλώσσας ούτε την «επένδυση», τρόπον τινά, ανεξάρτητων κατά τα άλλα εννοιών της φυσικής. Μία συνέπεια αυτής της αναγνώρισης είναι ότι το γνωστό ζήτημα που συχνά διατυπώνεται ως «πρόβλημα της εφαρμοσιμότητας των μαθηματικών» καθίσταται ουσιαστικά τετριμμένο, καθώς απορροφάται από το ζήτημα της επιτυχίας της επιστήμης της θεωρητικής φυσικής συνολικά, με την έννοια της εμπειρικής επάρκειας, της προβλεπτικής ικανότητας και –το σημαντικότερο πιστεύω– της σκόπιμης τεχνητής αναπαραγωγής των φυσικών φαινομένων στις τεχνολογικές εφαρμογές. Λιγότερο ρητά, το σημείο αυτό συνοδεύεται από μιαν άποψη περί μαθηματικών, την οποία δεν θα αναπτύξω εδώ. Αρκεί να σημειώσω ότι είναι μια φυσικαλιστικού τύπου εκδοχή για την γένεση των μαθηματικών, η οποία θεωρεί την ανάπτυξή τους ως εξής: αν διαμορφώνονται έννοιες με αναφορά στον κόσμο της φύσης, οι μαθηματικές έννοιες συγκροτούνται ως νοητικά εργαλεία, με την δική τους *αυτόνομη* δυναμική, για την μορφοποίηση των φυσικών εννοιών και των μεταξύ τους σχέσεων, και έτσι ως όρος για την νοητική τους επεξεργασία και την συγκρότησή τους ως θεωρία.

Ερχόμαστε έτσι στο δεύτερο σημείο. Η μία όψη της σύνθεσης που συνιστά την θεωρητική φυσική, το πείραμα, δεν εξαντλείται απλώς στην παρατήρηση ή την μέτρηση, όπως πολλές φορές υποδηλώνει μια στενά οπερασιοναλιστική αντίληψη. Η ουσία του είναι η θεωρητικά ενήμερη –άρα θεωρητικά «φορτισμένη»– αναπαραγωγή φυσικών φαινομένων. Συνεπώς, η απαραίτητη αναγνώριση ότι κάθε γνώση έχει εμπειρική καταγωγή πρέπει να συνοδεύεται από την παρατήρηση ότι η αφετηρία της γνώσης δεν είναι το αισθητηριακό αντιληπτικό γεγονός. Ο εξωτερικός αντικειμενικός κόσμος *δίδεται* στις αισθητηριακές αντιλήψεις μας, δεν γίνεται *γνώσιμος* σε αυτές. Γίνεται γνώσιμος μέσω της *νοητικής* δραστηριότητας. Το «γυμνό αισθητηριακό δεδομένο» ως έσχατη γνωσιολογική αρχή είναι πλάσμα της φιλοσοφίας του εμπειρισμού και όχι αναμφισβήτητη αντικειμενική πραγματικότητα. Τίθεται επομένως το εξής κρίσιμο μεθοδολογικό ζήτημα. Η δεύτερη όψη στην σύνθεση της θεωρητικής φυσικής, το εννοιολογικό πλαίσιο –μαθηματικής μορφής– μιας φυσικής θεωρίας, δεν είναι απλή αξιωματικοποίηση της εμπειρίας ούτε εξαντλείται σε τεχνική που παρεμβάλλεται μεταξύ των παρατηρησιακών δεδομένων. Είναι *όρος δυνατότητας* για την συγκρότηση του αντικειμένου της φυσικής επιστήμης. Το αισθητηριακό δεδομένο υφίσταται επεξεργασία υπό το πρίσμα μιας θεωρίας και πάντοτε *εντός πλαισίου* και μόνον τότε μετατρέπεται σε γεγονός της συνείδησης, αντικείμενο επιστημονικής διερεύνησης. Τούτο σημαίνει ότι η συγκρότηση του εννοιολογικού πλαισίου μιας φυσικής θεωρίας πρέπει να προσεγγίζεται υπερβατολογικά και γνωσιοθεωρητικά.

Εν προκειμένω, μας απασχολεί η μετάβαση από ένα εννοιολογικό πλαίσιο σε ένα άλλο. Το ένα, το κβαντικό, αναφέρθηκε ήδη. Το άλλο, το σύγχρονο Κλασικό, συνίσταται στην γενική θεωρία της σχετικότητας και στις αναδιατυπώσεις της νευτώνειας μηχανικής με λαγκρανζιανούς και χαμιλτονιανούς όρους και με τις έννοιες της διαφορικής και της συμπλεκτικής γεωμετρίας. Η σύγκριση των δύο πλαισίων γίνεται στην μεγάλη κλίμακα, οπότε ο λόγος περί αλλαγής θεωριών δεν αφορά εδώ τις «τοπικές» αλλαγές/επαναστάσεις εντός του ευρύτερου πλαισίου της κλασικότητας. Η μετάβαση από το Κλασικό στο κβαντικό αφορά μια σειρά από θεμελιώδη ερωτήματα. Υπάρχει άραγε σχέση μεταξύ των δύο αντίστοιχων εννοιολογικών πλαισίων, ή κουνιανού τύπου ασυμμετρία; Εάν υπάρχει σχέση, σε τι έγκειται; Είναι σχέση συνέχειας, και εάν ναι, ως προς τι; Γύρω από τέτοια ερωτήματα περιστρέφονται φιλοσοφικά ζητήματα, όπως, φερ’ ειπείν, ο ισχυρισμός περί οντολογικής ασυνέχειας ή επιχειρήματα όπως η επονομαζόμενη «απαισιόδοξη μετα-επαγωγή» (pessimistic meta-induction)». Σε συμφωνία με τα προηγηθέντα, θα υποστηρίξω εδώ ότι υπάρχει συνέχεια στην εναλλαγή θεωριών δια μέσου επιστημονικών επαναστάσεων, η οποία εγκαθιδρύεται στην αέναη πορεία της γνωστικής διαδικασίας. Η θέση αυτή, με την σειρά της, έχει νόημα μόνον αν απεγκλωβιστούμε από το δήθεν «γυμνό» αισθητηριακό δεδομένο ως γνωσιολογικό όριο και αναγνωρίσουμε ως θεμέλιο της γνωσιοθεωρίας μας τον εξωτερικό αντικειμενικό κόσμο, ανεξάρτητο από οποιαδήποτε συλλογική, ατομική ή άλλη υποτιθέμενη συνείδηση και βούληση, τον οποίο αποδίδει η φιλοσοφική κατηγορία *ύλη*. Τούτο έρχεται σε αντίθεση με την ευρέως διαδεδομένη και παρωχημένη, πιστεύω, θέση ότι οι κβαντικές θεωρίες απορρίπτουν τον ρεαλισμό. Πρόκειται για μία από τις φιλοσοφικές τοποθετήσεις που επικαλούνται την κβαντική φυσική, αντλώντας το σχετικό δικαίωμα από την παρατεταμένη εκκρεμότητα η οποία επισημάνθηκε προηγουμένως και έχει πλέον αποκτήσει χαρακτήρα μονιμότητας. Εξ άλλου, αυτό ακριβώς κωδικοποιείται ενίοτε στην πρόταση, εν είδει αποφθέγματος, ότι οι κβαντικές θεωρίες απαιτούν τις κλασικές έννοιες για την ερμηνεία τους.

Είναι σκόπιμο, συνεπώς, να τονίσω εδώ ότι μολονότι χρησιμοποιώ τον όρο «ρεαλισμός», η φιλοσοφική θέση την οποία υιοθετώ χαρακτηρίζεται ακριβέστερα ως *υλισμός*. Είναι αναμφισβήτητο γεγονός ότι ένα σύνολο φιλοσοφικών θέσεων που μπορούν να χαρακτηριστούν ως υλιστικές ήταν δυνατόν επί μακρόν να συνυπάρχει με την εξέλιξη των φυσικών θεωριών, μέχρις ότου αποδείχθηκε τελεσίδικα ασύμβατο με την σύγχρονη φυσική. Πρόκειται για εκείνες τις φιλοσοφικές πεποιθήσεις που έχουν ονομαστεί συλλήβδην «απλοϊκός ρεαλισμός» και που ακριβέστερα πρέπει να χαρακτηριστούν ως «μηχανιστικός υλισμός»· δηλαδή εκείνες τις πεποιθήσεις που συνδέθηκαν με την κλασική φυσική κατά την ηρωική περίοδό της αλλά εξακολουθούν να επιμένουν στην σύγχρονη εποχή, αγνοώντας την υπέρβαση της νευτώνειας κλασικότητας από την κβαντική φυσική. Ο ισχυρισμός ότι ο κόσμος του κβαντικού αρνείται τον ρεαλισμό ελέγχεται ως παραπλανητικός, ενώ όσοι τον προβάλλουν επιχαίρουν αδικαιολόγητα και επικαλούνται τις κβαντικές θεωρίες αβάσιμα. Ο λεγόμενος απλοϊκός ρεαλισμός απλούστατα δεν δικαιούται να μονοπωλεί το σύνολο των απόψεων που ανήκουν στο ρεύμα του επιστημονικού ρεαλισμού. Το ζήτημα δεν είναι η απόρριψη του ρεαλισμού αλλά της απλοϊκότητας –ορθότερα, της μηχανιστικής σκέψης.

Ερχόμαστε έτσι στο τρίτο σημείο: σε τι οφείλεται η απορριπτέα «απλοϊκότητα» της μηχανιστικής σκέψης; Η *σκέψη*, η νοητική διαδικασία που κάνει τον κόσμο γνώσιμο, έχει την δική της επιστήμη: την επιστήμη της λογικής. Η λογική, ωστόσο, δεν πρέπει να θεωρείται μόνον ως μελέτη γενικών κανόνων προς τους οποίους οφείλει να συμμορφώνεται κάθε συλλογική ή ατομική «ορθή» σκέψη. Σε αυτό επικεντρώνεται, βεβαίως, η τυπική λογική. Η επιστήμη της νόησης, όμως, είναι πολύ ευρύτερη. Εάν θεωρήσουμε την νόηση στην παράδοση του Spinoza, και την επιστήμη που την μελετά με τον τρόπο που αναπτύχθηκε από τον Αριστοτέλη ως την κλασική γερμανική φιλοσοφία, θα αναγνωρίσουμε την *διαλεκτική λογική* ως την μελέτη των γενικών νόμων που διέπουν την συνολική εξέλιξη της ανθρώπινης γνώσης. Με τον τρόπο αυτόν φαίνεται ότι *η επιστήμη της λογικής είναι γνωσιοθεωρία·* είναι η μελέτη της κάθε εξέλιξης, όχι της εμπειρικά δεδομένης ιστορικής μορφής της αλλά της εσωτερικής της κινητήριας δύναμης. Τούτο εκφράζεται με την διαπίστωση ότι ο λόγος περί του αντικειμένου τείνει να συμπίπτει με τον λόγο περί του λόγου περί του αντικειμένου. Πρέπει να σημειώσω ότι, όσον αφορά αυτό το σημείο, οι συχνές αναφορές στην ορολογία τού Hegel αλλά και στον Kant γίνονται πάντα στο πνεύμα της ανάγνωσής τους από την σκοπιά της γνωσιοθεωρίας, δηλαδή ως όρων δυνατότητας γνώσης. Η σημασία όλων αυτών είναι ότι το επίκεντρο της έρευνας των ζητημάτων τα οποία θέτει μια εννοιολογική μετάβαση πρέπει να είναι ο μηχανισμός της ανάδυσης της εννοιολογικής καινοτομίας και όχι η αποφυγή της αντίφασης που αποτελεί θέσφατο της τυπικής λογικής. Αντιθέτως, η αντίφαση αναδεικνύεται σε σημείο σύνδεσης μεταξύ ανταγωνιστικών θεωριών. Είναι εκείνο το σημείο όπου αποκαλύπτεται η συνέχεια εντός της ρήξης και της ασυνέχειας που συνιστούν την επιστημονική επανάσταση. Οι φυσικές θεωρίες αποκαλύπτουν την μεταξύ τους συνέχεια ακριβώς εκεί όπου φαίνονται περισσότερο ασύμβατες ή, αλλιώς, η ασυμβατότητά τους γίνεται σαφέστερη και πιο συγκεκριμένη εκεί όπου φαίνεται να ταυτίζονται. Όσον αφορά τα δύο εννοιολογικά πλαίσια που μας ενδιαφέρουν, μια υποτιθέμενη μεταξύ τους συνέχεια σε επίπεδο μορφής ή δομής, δηλαδή μαθηματικού φορμαλισμού, είναι αμφίβολη, καθόλου σαφής και ύποπτη, με υποκατάστατο την γνωστή «συνταγή». Σε επίπεδο εμπειρικών νόμων, εξ άλλου, δεν τίθεται θέμα, εφ’ όσον ώριμη θεωρία περί μικρόκοσμου δεν υπήρξε. Αν υπάρχει συνέχεια, πρέπει να αναζητηθεί αλλού: στην λογική της μετάβασης. Η θέση που υποστηρίζω είναι ότι, αν η επιστημονική επανάσταση των αρχών του 20^{ου} αιώνα επιβάλλει ριζική αλλαγή στην *μορφή* του ρεαλισμού, το πνεύμα του αποδίδεται εν όψει της σύγχρονης φυσικής με μιαν *επί πλέον* θέση σχετικά με την αλλαγή εννοιολογικών πλαισίων, συνεπώς με την ως άνω αντίληψη περί λογικής ως γνωσιοθεωρίας. Αλλιώς, ο ρεαλισμός καθίσταται ευάλωτος απέναντι στην επιχειρηματολογία του σκεπτικισμού και των ποικίλων μορφών του ιδεαλισμού.

Προκειμένου να καταλήξουμε στις δύο σημαντικές εξελίξεις που προανέφερα, απαιτούνται ορισμένα βήματα όπου επικαλούμαι μια σειρά εργασιών. Κατ' αρχάς, μεθοδολογικοί ακρογωνιαίοι λίθοι στην ανάπτυξη των θεμάτων της εργασίας θα είναι η πλαισιακότητα, έννοιες που νοηματοδοτούνται προϋποθέτοντας το αντίθετό τους και αντιστρόφως, διαδικασίες αντί της στατικής θεώρησης των πραγμάτων. Το κατάλληλο μαθηματικό πλαίσιο έχει αναπτυχθεί κατά τον τελευταίο μισό και πλέον αιώνα: είναι η θεωρία των κατηγοριών, οι προσεγγίσεις και η ορολογία της οποίας υιοθετούνται όλο και περισσότερο σε καίριους τομείς της θεωρητικής φυσικής. Ειδικότερα, η θεωρία των *τόπων* καταλαμβάνει εξέχουσα θέση, φιλοδοξώντας να φωτίσει από άλλη οπτική γωνία θεμελιώδη ζητήματα των μαθηματικών και να προσφέρει τα θεωρητικά εργαλεία για πρωτότυπες ιδέες στην φυσική. Η εισαγωγή τοπολογικών εννοιών σε αλγεβρικά προβλήματα, η αξιοποίηση των εννοιών του ιδεώδους και του φίλτρου και η επέκταση της δίτιμης λογικής –όπως εκφράζεται με την δομή άλγεβρας Boole– σε λογικές δομές τύπου Heyting είναι αφετηριακά σημεία για μια πρώτη αντιπαραβολή των πλαισίων του Κλασικού και του κβαντικού.

Έτσι, στο Κεφάλαιο I εισάγονται τα μεθοδολογικά και φιλοσοφικά ζητήματα που προκύπτουν από την ως άνω αντιπαραβολή. Στο Κεφάλαιο II αναπτύσσονται τα ίδια ζητήματα λεπτομερέστερα, με έμφαση στην συγκρότηση του κλασικού εννοιολογικού πλαισίου και στην έννοια της μηχανικής ερμηνείας. Η φιλοσοφική παράδοση του *ατομισμού* εντοπίζεται στην βάση της μηχανιστικής σκέψης. Στο Κεφάλαιο III, η μαθηματική έννοια του *σημείου* αναδεικνύεται σε αφετηρία μιας σειράς γενικεύσεων που προσφέρουν την δυνατότητα να εκφραστούν διαδικασίες και δομημένες ολότητες, ενώ εισάγεται η έννοια του locale και η αλγεβρική δομή Heyting ως μια μη κλασική λογική. Στο Κεφάλαιο IV, η έννοια του σημείου ως σχέσης αξιοποιείται σε δύο κατευθύνσεις. Αφ' ενός, εκτίθεται η εργασία τού H. de Groote, όπου η σύγκριση του Κλασικού και του κβαντικού πλαισίου αποκαλύπτει μια δομική ομοιότητα μεταξύ των δύο. Αφ' ετέρου, παρουσιάζεται η εργασία των Isham, Butterfield και Hamilton. Εκεί, με αφετηρία το γνωστό θεώρημα των Kochen και Specker, προτείνεται μια γενικευμένη έννοια «τιμής» ενός κβαντικού φυσικού μεγέθους, βασισμένη στην σχέση με άλλα μεγέθη τα οποία επιδέχονται κλασικού τύπου αποτίμηση. Στην πρώτη περίπτωση, εγκαθιδρύεται μια αντιστοιχία μεταξύ του Κλασικού και ενός *τμήματος* του κβαντικού, το οποίο ονομάζω «κλασικόμορφο»: Το κβαντικό, έτσι, φαίνεται να περιέχει «κλασικόμορφα παράθυρα» τα οποία αδυνατούν να συνενωθούν σε ενιαία, κλασικού τύπου εικόνα λόγω της παρουσίας μη εξαλείψιμων διακένων μεταξύ τους. Τα διάκενα αυτά συνδέονται ευθέως με την μη μεταθεσιμότητα των τελεστών που παριστάνουν τα κβαντικά φυσικά μεγέθη και έτσι με την σταθερά τού Planck. Η κατακερματισμένη εικόνα που εμφανίζει το κβαντικό εισάγει μιαν έννοια *πλαισιακότητας*, η οποία αναπτύσσεται από άλλη άποψη στην δεύτερη εργασία που επικαλείται αυτό το κεφάλαιο. Εκεί, η γενικευμένη τιμή φυσικού μεγέθους συναρτάται με την θέση που αυτό κατέχει σε μιαν αλυσίδα σχέσεων, ενώ το «πλαίσιο» αποκτά τον χαρακτήρα «σταδίου γνώσης». Στο Κεφάλαιο V, εξάγονται δύο συμπεράσματα στο έδαφος όσων έχουν προηγηθεί. Το ένα αφορά τον ρόλο του *τυχαίου* στην φυσική θεωρία. Υποστηρίζεται η οντολογική του αναβάθμιση, με την έννοια ότι δεν θεωρείται «στοιχείο άγνοιας». Σε στενή συνάφεια με αυτό, επανερχόμαστε στην σύγκριση Κλασικού και κβαντικού από την άποψη της σχέσης μεταξύ *δυνάμει* και *ενεργεία*. Το μαθηματικό πλαίσιο που έχει εκτεθεί μέχρι αυτό το σημείο επιτρέπει να επανατοποθετηθεί αυτό το θεμελιώδες φιλοσοφικό ζήτημα και στηρίζει το συμπέρασμα ότι στο κλασικό πλαίσιο η *διάκριση* μεταξύ δυνάμει και ενεργεία συσκοτίζεται, ενώ γίνεται φανερή και μη εξαλείψιμη στο κβαντικό. Τούτο μας οδηγεί στην εξής πρόταση: το κβαντικό πλαίσιο ενσωματώνει την έννοια της *πράξης* ως εσωτερικό του στοιχείο και όχι ως κάτι εξωτερικό με ρόλο επικουρικό, όπως συμβαίνει στο πλαίσιο του Κλασικού. Στο Κεφάλαιο VI συνεχίζεται η σύγκριση των δύο πλαισίων. Παρουσιάζεται κατ’ αρχάς η εργασία τού Mulvey και των συνεργατών του, η οποία θεωρεί το κβαντικό στην ολότητά του και την ένταξη του κλασικόμορφου σε αυτό, με την χρήση της έννοιας του quantale η οποία γενικεύει εκείνη του locale. Ακολούθως, παρουσιάζεται η εργασία τού Landsman, η οποία μελετά μια συναρτητική –με την έννοια της θεωρίας των κατηγοριών– σχέση μεταξύ Κλασικού και κβαντικού. Έχοντας εξετάσει από όλες τις πλευρές την εν λόγω σχέση, προχωρούμε στο Κεφάλαιο VII στην εξέταση της *μετάβασης* από το ένα πλαίσιο στο άλλο. Εδώ εκτίθενται βασικές αρχές των επονομαζόμενων θεωριών κβάντωσης, με ιδιαίτερη έμφαση στην κβάντωση μέσω παραμορφώσεων. Σε αυτό το σημείο στρεφόμαστε, στα δύο επόμενα κεφάλαια, στις εργασίες των Kontsevich και Connes – Kreimer.

Με όλα αυτά υπ’ όψιν, επιχειρείται η εξαγωγή μερικών συμπερασμάτων στο Κεφάλαιο X. Επανεκτιμάται η σχέση μεταξύ δυνάμει και ενεργεία και η ενσωμάτωση της πράξης στο εννοιολογικό πλαίσιο μιας φυσικής θεωρίας ως η κρίσιμη διάκριση που διαφοροποιεί το κβαντικό από το Κλασικό και αποκαλύπτει την λογική της μετάβασης από το ένα στο άλλο. Υποστηρίζεται η θέση ότι η σχέση δυνάμει και ενεργεία, συγκεκριμενοποιημένη και εμπλουτισμένη με τα σύγχρονα δεδομένα, είναι εκείνο το σημείο το οποίο φέρει το βάρος της επανάστασης που σηματοδοτεί η κβαντική φυσική. Αναπτύσσονται ορισμένες σκέψεις σχετικά με τον ρόλο της ένταξης σε ένα μαθηματικό πλαίσιο για την διαδικασία της εξήγησης, καθώς και η συνάφεια με την αναζήτηση αιτιωδών σχέσεων. Τέλος, εκφράζονται ορισμένες θέσεις ως προς τον ρόλο του υποκειμένου στην επιστημονική διαδικασία, κυρίως σε αντιπαράθεση με τις απόψεις της Σχολής της Κοπεγχάγης. Εν κατακλείδι, το συμπέρασμα το οποίο επιχειρεί να προβάλει αυτή η εργασία είναι εκείνο που υπήρξε κύριο κίνητρό της: Η αναγνώριση της ανάγκης να ληφθεί υπ' όψιν στις φιλοσοφικές συζητήσεις η σύγχρονη πρακτική της φυσικής και των μαθηματικών, και η επισήμανση καίριων εξελίξεων που καθιστούν δυνατή μια γόνιμη επανεκτίμηση των προβλημάτων της εννοιολογικής μετάβασης από αυτήν την σκοπιά, με την πεποίθηση ότι η σύγχρονη θεωρητική φυσική στηρίζει τον *ορθό λόγο* απέναντι στον ανορθολογισμό, τον μυστικισμό και την αντι-επιστήμη με τις κάθε λογής μεγαλόσχημες βλέψεις τους.

Μερικές μαθηματικές έννοιες, χρήσιμες για την πληρέστερη κατανόηση του κειμένου, έχουν συγκεντρωθεί σε Παραρτήματα. Εκείνες οι μαθηματικές έννοιες που θεώρησα ότι είναι απαραίτητες για την κατά το δυνατόν ολοκληρωμένη παρουσίαση των θεμάτων που πραγματεύεται η εργασία έχουν ενσωματωθεί στο καθαυτό κείμενο. Η επιστημονική ορολογία ακολουθεί ως επί το πλείστον τις καθιερωμένες ελληνικές μεταφράσεις των όρων, με κάποια ελαστικότητα όπου θεωρήθηκε σκόπιμο. Σε κάθε περίπτωση, εντός παρενθέσεως παρατίθενται οι ξενόγλωσσοι όροι. Λίγες εξαιρέσεις υπάρχουν όπου όροι μένουν αμετάφραστοι. Οι παραπομπές στην βιβλιογραφία γίνονται με αριθμούς εντός αγκύλης και στα Παραρτήματα με κεφαλαία γράμματα εντός αγκύλης.

Ευχαριστίες: Η εργασία αυτή οφείλει πολλά στην συμπαράσταση, την επιμονή στην λεπτομέρεια και τις υποδείξεις του Β. Καρακώστα, ο οποίος την επέβλεψε. Τον ευχαριστώ θερμά. Τα σεμινάρια και οι συζητήσεις με τον Α. Μπαλτά με εισήγαγαν σε άγνωστους σε εμένα προβληματισμούς και ενίσχυσαν την παρόρμηση να εντρυφήσω συστηματικά σε επιστημονικές εξελίξεις που θεωρώ συναρπαστικές. Ο Α. Αραγεώργης, εκτός από όσα με δίδαξε στα μαθήματά του, είχε την καλοσύνη να διαβάσει το κείμενο και να κάνει καίριες διορθώσεις και επισημάνσεις. Στα χρόνια της ενασχόλησής μου με τα θέματα που παρουσιάζονται, είχα την τύχη να γνωρίσω εξαιρετικούς επιστήμονες και ανθρώπους· η αλληλεπίδραση μαζί τους υπήρξε πολύτιμη και συνέβαλε αποφασιστικά στην διαμόρφωση των ιδεών που εκτίθενται εδώ. Δεν είναι δυνατόν να τους μνημονεύσω όλους χωρίς να αδικήσω πολλούς. Εν τούτοις, θα είναι παράληψη να μην αναφέρω τον αείμνηστο Π. Νικολακόπουλο, καθώς και τους Σ. Βιρβιδάκη, Κ. Γαβρόγλου, Κ. Ιεροδιακόνου και Β. Κιντή. Είχα, επί πλέον, την χαρά να συμμετέχω στην «ομάδα των συμμαθητριών και συμμαθητών», με τους Β. Λιβάνιο, Μ. Λογιοτάτου, Ν. Μπισκετζή, Μ. Παναγιωτάτου, Δ. Χατζηδάκη, από τους οποίους πολλά έμαθα και με τους οποίους μοιράστηκα τις ευχάριστες όψεις της μεταπτυχιακής φοίτησης. Τέλος, αυτή η εργασία θα ήταν αδύνατον να ολοκληρωθεί χωρίς την απέραντη υπομονή και την ανεκτίμητη βοήθεια της γυναίκας μου, Σοφίας Νικολαΐδου, στην οποία και την αφιερώνω.

Όποιος μπορεί να διανοηθεί την κβαντομηχανική

χωρίς να ζαλιστεί, δεν την έχει καταλάβει σωστά.

N. Bohr

Κεφάλαιο Ι. Κλασικότητα και «κβάντωση»: σε αναζήτηση νοήματος

1.1 Μια πορεία ρήξεων με την διαίσθηση

Η μετάβαση από την κλασική, νευτώνεια φυσική στις κβαντικές θεωρίες, στις αρχές του προηγούμενου αιώνα, είναι καθ΄ εαυτή αντικείμενο ιστορικής έρευνας. Επιπρόσθετα, παραμένει εξαιρετικά αμφιλεγόμενο πεδίο από την άποψη της *θεμελίωσης*. Στο επίκεντρο εδώ βρίσκεται η αναζήτηση κάποιας/ων θεμελιώδους αρχής/ών, που ενδεχομένως θα έπαιζε ρόλο παρόμοιο με εκείνον της «αρχής της ισοδυναμίας» ή του «γενικού συναλλοίωτου» προκειμένου περί της γενικής θεωρίας της σχετικότητας.

Ένα τέτοιο εγχείρημα πρέπει να αντιμετωπιστεί με αρκετή δόση επιφύλαξης, δεδομένου ότι η όποια αναλογία υπάρχει εδώ υπόκειται σε όρους: Οι κβαντικές θεωρίες στοχεύουν στην υπέρβαση της ίδιας της έννοιας της «κλασικότητας», της οποίας η γενική σχετικότητα είναι το ανώτερο σημείο. Πράγματι, η επιστημονική επανάσταση των αρχών του 20^{ου} αιώνα ανέδειξε *δύο* τομές. Η μία, «κατακόρυφη», αφορά την μετάβαση από το κλασικό στο κβαντικό. Εδώ το «κλασικό» είναι έννοια περιγραφική/διαισθητική. Αναφέρεται στο παλαιό σε αντιδιαστολή προς το νέο. Το νέο αναφέρεται σε ένα καινούργιο γνωστικό πεδίο, το παλαιό στο ήδη γνωστό και καθιερωμένο. Η εννοιολογική τομή σε αυτήν την περίπτωση δεν έχει σαφές και καθολικά αποδεκτό σύστοιχο, είναι, κατά την γνωστή ρήση τού Nelson, «μυστήριο».[2] Η δεύτερη τομή είναι «οριζόντια» και αφορά την μετάβαση από το παλαιό κλασικό στο σύγχρονο Κλασικό. Συντελείται *εντός* του γενικότερου πλαισίου των κλασικών θεωριών. Εδώ οι έννοιες μεταλλάσσονται, κάποτε αποκτούν χαρακτηριστικά αντίθετα από εκείνα που προηγουμένως εθεωρούντο καταστατικά στοιχεία τους. Η ευελιξία των εννοιών σε τέτοιον βαθμό υπογραμμίζει την σημασία του ορισμού –και της αλλαγής ορισμού– μιας θεωρητικής έννοιας. Σε αυτήν την τομή εντός της κλασικότητας είναι που τόσο το Κλασικό, όσο και το κβαντικό, συγκροτούνται ως έννοιες θεωρητικές/αναλυτικές. Το Κλασικό σηματοδοτεί ένα εννοιολογικό πλαίσιο που δεν αναφέρεται σε πρότερη, ξεπερασμένη ή αναθεωρημένη γνώση, αλλά σε

[2] «*Η πρώτη κβάντωση είναι μυστήριο, αλλά η δεύτερη κβάντωση είναι συναρτητής*» (αναφέρεται, π.χ., στο [6]).

σύγχρονα πορίσματα. Είναι «Κλασικό» επειδή, παρότι νέο, εγκολπώνεται στοιχεία του παλαιού που έχουν μεταλλαχθεί σε αρχές και προϋποθέσεις μιας νέας έννοιας κλασικότητας. Έτσι οροθετείται σε αντιδιαστολή προς το εννοιολογικό πλαίσιο του κβαντικού, και αντιστρόφως. Η διαφορά των δύο πεδίων κινείται σε νοηματικό επίπεδο, και τούτο προσδίδει και στα δύο αντίστοιχα πλαίσια θεωρητικό/αναλυτικό χαρακτήρα.

Είναι η επίμονη *συγχρονική* διαμόρφωση αυτού που ονόμασα Κλασικό, και του πλέγματος εννοιών που εγγράφονται στα πλαίσια των κβαντικών θεωριών, που τονίζει τα φιλοσοφικά ερωτήματα σχετικά με το νόημα μιας «διαδικασίας κβάντωσης». Η κβάντωση ως διαδικασία της φυσικής έχει νόημα μόνον στον βαθμό που, παράλληλα με την κβαντική θεωρία, υπάρχει η κλασική φυσική, και ως έγκυρη θεωρία για τμήμα του επιστητού, αλλά και ως προϋπόθεση για την συγκρότηση του κβαντικού. Το ζήτημα έχει δύο όψεις. Αφ΄ ενός, εκεί που οι κβαντικές θεωρίες έχουν ισχύ –στον μικρόκοσμο– πρόκειται για σχέση *εννοιών* και όχι για μετάβαση από την κλασική στην κβαντική εικόνα δεδομένου γνωστικού αντικειμένου: δεν υπάρχει «κλασική» ατομική θεωρία. Τίθενται συνεπώς εδώ προβλήματα γνωσιολογικού χαρακτήρα. Αφ΄ ετέρου, αν οι κβαντικές θεωρίες θεωρούνται θεμελιώδεις και με αξιώσεις καθολικότητας, επιδιώκεται η επέκτασή τους και εκεί που σήμερα δεν ισχύουν –στον μακρό- και μεγά-κοσμο. Παράλληλα, το ερώτημα «τί σημαίνει κβάντωση», παραπέμπει στο ερώτημα «τί είναι αυτό που κβαντώνεται», τί είναι ένα «κβαντικό σύστημα»; Η παλαιότερη ταύτιση του κβαντικού συστήματος με το μικροσκοπικό και οι συναφείς «ερμηνείες» αυτού που ονομάστηκε κβαντικό παράδοξο, δεν είναι ακριβείς. Κβαντικά φαινόμενα παρατηρούνται σε μεσοκοσμική κλίμακα, ενώ κβαντικές θεωρίες διατυπώνονται για ολόκληρο το σύμπαν. Το γεγονός ότι μιλάμε για κβαντική κοσμολογία –π.χ., για την κυματική συνάρτηση του σύμπαντος– την στιγμή που το νόημα μιας κβαντικής περιγραφής ενός μακροσκοπικού αντικειμένου δεν είναι καθόλου σαφές –ποιά είναι η δική του «κυματική συνάρτηση»;– οδηγεί τα προβλήματα θεμελίωσης στην σφαίρα της παραδοξολογίας, όπως μαρτυροί η θρυλική «γάτα τού Schrödinger». Με αυτήν την παρατήρηση υπ΄ όψιν, θα χρησιμοποιώ τον όρο «μικρόκοσμος» συμβατικά, εννοώντας το πεδίο στο οποίο μόνον οι κβαντικές θεωρίες είναι εμπειρικά επαρκείς.

Εδώ θα περιοριστώ να επισημάνω ότι το κβαντικό συνδέεται με την ιδιάζουσα θέση που κατέχει το *μη άμεσα παρατηρήσιμο φυσικό μέγεθος*. Σε κάθε φυσική θεωρία, το φυσικό μέγεθος είναι έννοια θεμελιώδης, ενώ η παρατήρηση και το πείραμα είναι συγκροτητικά στοιχεία. Στις κβαντικές θεωρίες, το γεγονός ότι κάθε γνώση είναι *διαμεσολαβημένη* γνώση τίθεται ρητά, δεδομένου ότι απαιτείται η προσπέλαση του «μη παρατηρήσιμου» μέσω της παρατήρησης και της μέτρησης. Η *ιστορική* και εν πολλοίς πραγματολογική ταύτιση του γνωστικού αντικειμένου των κβαντικών θεωριών με το μη παρατηρήσιμο καθιστά το παρατηρήσιμο *όρο* και *εφαλτήριο* γνωστικής διαδικασίας με τρόπο ιδιάζοντα και διαφορετικό από ό,τι στην κλασική φυσική. Αυτός είναι ο λόγος που, μαζί με τα γνωσιολογικά, τίθενται και οντολογικά προβλήματα: Τί αφορά η διαμεσολαβημένη γνώση του μη παρατηρήσιμου; Είναι γνώση του «όντως όντος» ή του «φαίνεσθαι»; Τελικά, ενώ εδώ δεν πρόκειται για την ιστορική μετάβαση από το «παλαιό» στο «νέο» –από το κλασικό στο κβαντικό– δεν πρόκειται επίσης ούτε απλώς και μόνο για την παρατεταμένη συνύπαρξη δύο διαφορετικών θεωριών, οι οποίες αντιστέκονται πεισματικά στις απόπειρες υπέρβασης της μεταξύ τους αντίθεσης, στα πλαίσια μιας πιο περιεκτικής και ενοποιούσας φυσικής θεωρίας. Αυτό το τελευταίο, βεβαίως, είναι θέμα της φυσικής επιστήμης. Η επίτευξη του εγχειρήματος «κβαντική βαρύτητα» θα είναι ασφαλώς μια επιστημονική επανάσταση η ίδια, και θα επανατοποθετήσει ριζικά θεμελιώδη φιλοσοφικά προβλήματα. Εν τούτοις, στο σημείο που βρισκόμαστε σήμερα, μπορούμε να διατυπώνουμε φιλοσοφικές θέσεις, οι οποίες δεν είναι απλώς επενδύσεις με φιλοσοφική ορολογία των σύγχρονων δεδομένων της επιστήμης, και, συνεπώς, ούτε όμηροι μιας εικοτολογίας περί των μελλοντικών εξελίξεων της φυσικής γίνονται, ούτε τελούν υπό την αίρεσιν της κάθε ανατροπής των σημερινών δεδομένων. Για να το διατυπώσω αλλιώς, ένας φιλόσοφος μπορεί να αναφέρεται στις σύγχρονες εξελίξεις στην φυσική και τα μαθηματικά χωρίς να παύει να είναι φιλόσοφος, εάν δεν θεωρεί την φιλοσοφία «γενίκευση» των συμπερασμάτων της επιστήμης, σύμφωνα με μια θετικιστική προσέγγιση. Σε αυτό το πνεύμα, θα επιχειρήσω να αναδείξω κάποια φιλοσοφικά ζητήματα, ξεκινώντας από την *λογική διάσταση* της σχέσης μεταξύ συνέχειας και ασυνέχειας στους δύο τομείς της επιστημονικής επανάστασης του 20^{ου} αιώνα, δηλαδή της θεωρίας της σχετικότητας και της κβαντικής θεωρίας.

Κατ' αρχάς, υπάρχει το γεγονός ότι και οι δύο αυτοί τομείς συνδέονται μεταξύ τους – εξωτερικά, είναι αλήθεια– λόγω της από κοινού ρήξης τους με την νευτώνεια κλασικότητα. Ειδικότερα, και οι δύο προήλθαν, με την ευρύτερη έννοια, από την μήτρα της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας τού Maxwell. Σε αυτήν τους την κοινότητα, όμως, εδράζεται η εξής μεταξύ τους αντίθεση. Η θεωρία της σχετικότητας αναπτύχθηκε ως υπέρβαση της κλασικής φυσικής, την οποία εξετόπισε συνολικά, μεταβάλλοντας ριζικά το νόημα θεμελιωδών εννοιών όπως χώρος, χρόνος, μάζα, ενέργεια, με τρόπο που η προσήλωση στο κλασικό πλαίσιο να είναι από φυσική άποψη λανθασμένη. Αντιθέτως, οι κβαντικές θεωρίες, έναν και πλέον αιώνα μετά την πρώτη διατύπωσή τους, συνοδεύονται από μια διαρκή εκκρεμότητα. Ενώ, κατά την επικρατούσα άποψη μεταξύ των φυσικών, οι αρχές των κβαντικών θεωριών είναι θεμελιώδεις και έχουν καθολική ισχύ, δεν υπάρχει ωστόσο ολοκληρωμένη και επιβεβαιωμένη φυσική εξήγηση του τρόπου με τον οποίο ο επονομαζόμενος «κλασικός» κόσμος, ή μακρόκοσμος, αναδύεται στο έδαφος εκείνου του τμήματος της φύσης όπου οι κβαντικές θεωρίες είναι αποδεδειγμένα εμπειρικά επαρκείς. Από την άποψη αυτή, μπορούμε να πούμε σχηματικά ότι η θεωρία της σχετικότητας *απορρίπτει* συνολικά την κλασική φυσική ως *λανθασμένη*, ενώ οι κβαντικές θεωρίες *παραμερίζουν* την κλασική φυσική ως *μη ισχύουσα* σε έναν *καινούργιο τομέα* φυσικών φαινομένων, τον τομέα που ονομάστηκε «μικρόκοσμος». Από την αρχή, και οι δύο επιστημονικοί κλάδοι διατύπωσαν μια *κανονιστική αρχή*. Στην περίπτωση της σχετικότητας, ο ίδιος ο Einstein εντοπίζει αυτό το κομβικό σημείο στην ειδική θεωρία της σχετικότητας, την οποία χαρακτηρίζει ως «θεωρία αρχών». Πρόκειται για το αίτημα του αναλλοίωτου των φυσικών νόμων σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς υπό τους μετασχηματισμούς Lorentz (γενικότερα, Poincaré).

Το αντίστοιχο κομβικό σημείο στις κβαντικές θεωρίες είναι οι σχέσεις μεταθετότητας που πρέπει να ικανοποιούν συζυγή ζεύγη φυσικών μεγεθών, αναπαρισταμένων ως τελεστών σε έναν χώρο Hilbert. Σε αντίθεση με την ειδική σχετικότητα, η κανονιστική αρχή που σηματοδοτεί το κβαντικό έναντι του Κλασικού επιβάλλεται, κατά την συμβατική πεποίθηση, ως «*συνταγή*». Ειδικότερα, η μαθηματική έκφραση της ειδικής σχετικότητας έχει μιαν αλγεβρική *μορφή* –την ομάδα Poincaré– που δηλώνει την διατήρηση της *ταυτότητας* ενός φυσικού συστήματος, και ένα τοπολογικό *περιεχόμενο*, εκείνο που ορίζουν οι κώνοι φωτός, το οποίο εκφράζει τις *αιτιακές* σχέσεις μεταξύ χωροχρονικών συμβάντων. Άλγεβρα και τοπολογία *συντίθενται* στην γεωμετρία του χωροχρόνου Minkowski, όπου καταργείται ο απόλυτος χαρακτήρας του χώρου και του χρόνου χωριστά. Το φυσικό περιεχόμενο είναι ο *νόμος* της ύπαρξης ενός ανωτάτου ορίου ταχύτητας στην μετάδοση αλληλεπιδράσεων, το οποίο συμπίπτει με την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Τέλος, η αρχή αυτή επιβεβαιώνεται πειραματικά, και –κυρίως– απαντά στις αντιφάσεις που στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας ήταν ανυπέρβλητες, όπως, λόγου χάριν, η σχέση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου ή τα προβλήματα που φιλοδοξούσε να αντιμετωπίσει η υπόθεση του αιθέρα. Αντιθέτως, στις κβαντικές θεωρίες απουσιάζει η διατύπωση μιας παρόμοιας αρχής με σαφείς όρους φυσικής. Αυτό, άλλωστε, δηλώνει η επικράτηση του όρου «συνταγή κβάντωσης», και η εισαγωγή ενός φορμαλισμού με όρους «μετάφρασης» –η *Umdeutung* κατά Heisenberg– όπως όταν, χαρακτηριστικά, μια αγκύλη Poisson δίνει την θέση της σε έναν μεταθέτη τελεστών.

Η σύγκριση σε αυτό το στάδιο επιγραμματικά συνοψίζεται ως εξής: Στην ειδική σχετικότητα, ένα αίτημα *καθολικότητας* της επιστημονικής θεώρησης συγκεκριμενοποιείται ως στοιχείο μετα-θεωρίας περί φυσικών θεωριών, διατυπωμένο το ίδιο με τους όρους και την μαθηματική μορφή μιας φυσικής θεωρίας. Εξειδικεύεται έτσι σε μιαν αρχή *γενικής* ισχύος η οποία αξιώνει να διέπει κάθε *ειδικό* φυσικό φαινόμενο. Η γενική αρχή είναι ο διαμεσολαβητικός κρίκος μέσω του οποίου η αφηρημένη καθολικότητα, αυτό που κατανοούμε αόριστα ως «φυσική νομοτέλεια», γίνεται συγκεκριμένη, καθώς ενσαρκώνεται σε ένα ιδιαίτερο φαινόμενο. Στις κβαντικές θεωρίες, αντιστρόφως, έχουμε την εξειδίκευση σε επίπεδο μαθηματικού φορμαλισμού μιας *ελλείπουσας* γενικής αρχής, με την αξίωση να διέπει κάθε ειδικό φαινόμενο ενός *επί μέρους* τομέα –του μικρόκοσμου. Το βάρος των προβληματισμών, της αναζήτησης νοήματος, του προσδιορισμού της ρήξης με την κλασικότητα, μεταφέρεται στον *φορμαλισμό*. Έναν φορμαλισμό που, στην πολυσύνθετη ιστορία του επί έναν αιώνα, και θεμελιώθηκε αυστηρά, και σαφές φυσικό περιεχόμενο απέκτησε, αλλά συνεχίζει να αναπτύσσεται ταυτόχρονα με την αναζήτηση της νοηματοδότησής του. Επί πλέον, οι κβαντικές θεωρίες στην ωριμότητά τους είναι *σχετικιστικές*. Δηλαδή, η κανονιστική αρχή της ειδικής σχετικότητας έχει ισχύ *και* στα κβαντικά φαινόμενα, διεκδικώντας την καθολικότητα χωρίς εξαιρέσεις. Μάλιστα, σε αυτό το σημείο οι δύο κλάδοι της σύγχρονης φυσικής δεν είναι ισότιμοι: η σχετικότητα διατυπώνεται ερήμην της κβαντικής θεωρίας, αλλά οι συνθήκες κβάντωσης ρητά *εξαρτώνται* από την σχετικότητα, εφ’ όσον οι μεταθέτες κβαντικών πεδίων αναφέρονται σε χωροειδή (space-like) χωροχρονικά διαστήματα.

Δεν είναι, όμως, αυτή όλη η ιστορία. Μέχρις εδώ, η άρνηση του κλασικού, τόσο από την ειδική σχετικότητα, όσο και από τις κβαντικές θεωρίες, είναι άρνηση ατελής. Αυτό γίνεται σαφές αν στραφούμε στις φιλοσοφικού χαρακτήρα συνδηλώσεις του όρου «κλασικότητα». Ο ίδιος ο Einstein επισημαίνει ότι ναι μεν η ειδική σχετικότητα ανασκευάζει την νευτώνεια κλασική φυσική, κατά το ότι αρνείται τον απόλυτο χαρακτήρα του χώρου και του χρόνου, αλλά παραμένει εντός της κλασικότητας κατά το ότι *επαναφέρει* το απόλυτο, αυτήν την φορά για τον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Για τον Einstein, η πραγματική ρήξη με την κλασικότητα έγκειται στην μετάβαση προς την *γενική* θεωρία της σχετικότητας. Με άλλα λόγια, η ειδική σχετικότητα, ενώ, όπως ανέφερα, *απορρίπτει* την κλασικότητα ως *λανθασμένη* σε κάθε τομέα του επιστητού, την *επαναφέρει* μεταμορφωμένη και ανανοηματοδοτημένη στο δικό της εννοιολογικό πλαίσιο –ως εάν να επρόκειτο για την επάνοδο του «απωθημένου». Αλλά και οι κβαντικές θεωρίες, ενώ, όπως επίσης ανέφερα, *παραμερίζουν* τις κλασικές έννοιες ως *μη ισχύουσες* στον δικό τους ιδιαίτερο τομέα, τις *επικαλούνται* και τις προϋποθέτουν ως αναγκαίες για την ερμηνεία τους –ως εάν να επρόκειτο για έναν νοηματικό δεσμό που επιμένει. Έτσι, διαβάζουμε, για παράδειγμα, ότι «... *η κβαντική μηχανική καταλαμβάνει μια πολύ ασυνήθιστη θέση μεταξύ των φυσικών θεωριών: περιέχει την κλασική μηχανική ως οριακή περίπτωση, ωστόσο ταυτόχρονα απαιτεί αυτήν την οριακή περίπτωση για την δική της διατύπωση*» [7].

Μια διευρυμένη έννοια κλασικότητας διατρέχει και την γενική θεωρία της σχετικότητας, σε άμεση αναφορά προς την φύση και την μαθηματική αναπαράσταση του χωροχρόνου. Η γενική θεωρία της σχετικότητας ίσως είναι η μόνη φυσική θεωρία –και μάλιστα η πιο επιτυχημένη φυσική θεωρία– που ξεκίνησε με την διατύπωση μιας γενικής αρχής. Ο Einstein θεώρησε ότι η άρνηση του απόλυτου γίνεται πλήρης αν κανείς απορρίψει την έννοια ενός χωροχρόνου–υποδοχέα των φυσικών φαινομένων. Όπως το έθεσε ο ίδιος, θα έπρεπε να απορριφθεί ένας χωρόχρονος ο οποίος δρα *επί των υλικών σωμάτων*, αλλά δεν υπόκειται σε δράση *από αυτά*.[3] Η γενική σχετικότητα δεν είναι θεωρία αρχών, όπως η ειδική. Είναι θεωρία περί φυσικών φαινομένων. Και αυτή ξεκινά από ένα αίτημα καθολικότητας, συγκεκριμενοποιημένο στην αρχή του γενικού συναλλοίωτου των φυσικών νόμων. Εν τούτοις, αξίζει να σημειωθεί ότι η πρώτη, «μετριοπαθής» ρήξη με την κλασική μηχανική στην μετάβαση προς την ειδική σχετικότητα οδηγεί σε μιαν αρχή, η οποία παραμένει σε μεταθεωρητικό επίπεδο και έχει γενική εφαρμογή στο επίπεδο της θεωρίας περί των φυσικών φαινομένων, πλην, σημειωτέον, εκείνου της βαρύτητας. Ενώ η ολοκλήρωση της ρήξης –με την γενική σχετικότητα σύμφωνα με τον Einstein– οδηγεί μεν σε μιαν αρχή –το γενικό συναλλοίωτο– σε μεταθεωρητικό επίπεδο, αλλά κατέρχεται τρόπον τινά στο επίπεδο της φυσικής θεωρίας. Το αποτέλεσμα είναι ότι η καθολικότητα γίνεται τώρα συγκεκριμένη ενσαρκωνόμενη σε *ένα* ιδιαίτερο φυσικό φαινόμενο: την βαρύτητα. Ασφαλώς, το ίχνος της καθολικότητας είναι πρόδηλο: πρόκειται για την αληθώς καθολική αλληλεπίδραση, την άλλοτε, κατά Newton, παγκόσμια έλξη.

Ό,τι σημείωσα πιο πάνω σχετικά με την κανονιστική αρχή της ειδικής σχετικότητας σε αντιδιαστολή προς την «συνταγή κβάντωσης», όσον αφορά την μορφή των αντίστοιχων θεωριών, αναπτύσσεται τώρα ως εξής. Οι μεταβάσεις προς την γενική σχετικότητα και το φυσικό τους περιεχόμενο βρήκαν ένα *ήδη ανεπτυγμένο* μαθηματικό πλαίσιο ώστε να διατυπωθούν: την θεωρία τού Riemann. Πρόκειται ασφαλώς για μιαν από τις χαρακτηριστικότερες περιπτώσεις όπου η γενίκευση και εμβάθυνση του πλαισίου των μαθηματικών εννοιών διευρύνει το πλέγμα των σχέσεών τους και την κλίμακα των νοημάτων τους έτσι, ώστε αυτό το πλαίσιο να μπορέσει να επενδύσει με μαθηματική μορφή μια φυσική πραγματικότητα η οποία δεν ήταν, ούτε μπορούσε να είναι εκ των προτέρων προβλέψιμη. Με αυτόν τον τρόπο η θεωρία μπορεί να προηγείται της πειραματικής πρακτικής. Το προϊόν αυτής της ιστορικής συγκυρίας ήταν το εξής. Η μετάβαση από την νευτώνεια μηχανική στην γενική σχετικότητα μπορεί να περιγραφεί *όσον αφορά την μαθηματική μορφή της* με την μετατροπή μιας *άρρητης «υπόθεσης»* –εντός εισαγωγικών– σε *ρητή υπόθεση* –χωρίς εισαγωγικά [10]. Η «υπόθεση», την οποία μπορούμε εξ ίσου να χαρακτηρίσουμε ως «κρυμμένο λήμμα» σύμφωνα με την ορολογία τού Lakatos [11], είναι ο *επίπεδος* ευκλείδειος (ή Minkowski) χώρος και χρόνος, θεωρούμενος ως *a priori* δεδομένος και διαισθητικά αυτονόητος. Η υπόθεση που αντικαθιστά την «υπόθεση» είναι ότι μια *καμπύλη* χωροχρονική πολλαπλότητα έχει ως ειδική περίπτωση τον ευκλείδειο (ή Minkowski) χωρόχρονο όταν η καμπυλότητα είναι μηδέν. Όλα αυτά τα στοιχεία συνυπάρχουν εν σπέρματι στον κρίκο που είναι η ειδική σχετικότητα. Εκεί, η νευτώνεια φυσική, στην *μαθηματική μορφή* της, ανακτάται ως οριακή περίπτωση όταν ο λόγος των ταχυτήτων που υπεισέρχονται στο υπό εξέτασιν

[3] Πρβλ. την παρατήρηση [8] ότι το γενικό συναλλοίωτο σημαίνει ότι δεν υπάρχει μια γεωμετρία «πρότερη» σε σχέση με τα φυσικά φαινόμενα: «“*Πρότερη γεωμετρία” σημαίνει κάθε όψη της γεωμετρίας του χωροχρόνου που παραμένει απαράλλακτα σταθερή, δηλαδή δεν μπορεί να αλλάξει με την αλλαγή της κατανομής των πηγών της βαρυτικής αλληλεπίδρασης*» [9].

φυσικό φαινόμενο προς την ταχύτητα του φωτός τείνει προς το μηδέν. Ταυτόχρονα, η επιμονή του απόλυτου που επισημαίνει ο Einstein, ως ο ομφάλιος λώρος που συντηρεί την παρουσία του παλαιού εντός του νέου, είναι το ελατήριο για το άλμα προς την γενική σχετικότητα. Σε αυτό το πλαίσιο συντελείται σε όλη της την πληρότητα η νέα νοηματοδότηση των εννοιών της μάζας, της ενέργειας, της σχέσης ύλης και χωροχρόνου, και όλα αυτά σε αναφορά προς το φυσικό φαινόμενο της βαρύτητας. Έτσι, η παλαιά αντίληψη φαντάζει σαν οριακή περίπτωση ή προσέγγιση της νέας. Ακριβώς, όμως, αυτή η σύνδεση του παλαιού με το νέο, ως όριο διατυπωμένο μαθηματικά, υπογραμμίζει με τον εντονότερο τρόπο την *ασυμμετρία εννοιών* (incommensurability) –κατά Kuhn [12]– ανάμεσα στο παλαιό και το νέο. Καμία ποσοτική προσέγγιση δεν μπορεί να απαλείψει το εννοιολογικό άλμα εδώ. Στην περίπτωση της σχετικότητας, όσο και να «αποσυνδέεται» η ενέργεια από την ορμή ή ο χώρος από τον χρόνο στην νευτώνεια προσέγγιση, ποτέ δεν αναβιώνει ο απόλυτος αμοιβαίος αποκλεισμός «ύλης» και «ενέργειας», ούτε οι έννοιες χάνουν το περιεχόμενο που έχουν στην θεωρία τού Einstein για να επανακτήσουν εκείνο που είχαν στο νευτώνειο πλαίσιο.

Το ίδιο το γεγονός του εννοιολογικού άλματος σε τέτοιες περιπτώσεις δείχνει ότι μια «υπόθεση», σαν την μηδενική καμπυλότητα του επιπέδου χώρου και χρόνου, περικλείει πολύ περισσότερα από όσα φανερά δηλώνει. Δεν αφορά με μια στενή έννοια τις μαθηματικές μορφές μόνον, αλλά συνδέεται με μιαν ολόκληρη κοσμοαντίληψη και μια σειρά μεταφυσικές παραδοχές [10]. Διότι, μια θεμελιώδης φυσική ή μαθηματική έννοια δεν αιωρείται στον ιδεατό κόσμο των αφαιρέσεων. Περιβάλλεται από, και συσχετίζεται με έναν ωκεανό από αντιλήψεις, προκαταλήψεις, ιδεολογήματα, ένα ολόκληρο συνεχές που, απέναντι στην φύση, μορφοποιείται σε αυτό που θα λέγαμε «διαισθητική φυσική». Μια άρρητη «υπόθεση» με τους όρους μιας φυσικής θεωρίας «αγκιστρώνεται» με ανεπίγνωστους και ανεξερεύνητους τρόπους σε «νησίδες» που ξεφυτρώνουν σε αυτόν τον ωκεανό, κάτω από εξωεπιστημονικές, ιστορικές και κοινωνικές, συνθήκες. Αυτός είναι ο χώρος της συνάντησης φυσικής και φιλοσοφίας. Τα σημεία της επαφής είναι θεμελιώδεις έννοιες: ύλη, κίνηση, χώρος, χρόνος, αλληλεπίδραση. Η φυσική πρέπει να εργαστεί με τέτοιες έννοιες, αλλά ούτε η φυσική, ούτε τα μαθηματικά «διδάσκουν» την τέχνη του χειρισμού των εννοιών: είναι έργο της λογικής και της φιλοσοφίας. Η φυσική συγκροτείται ως επιστήμη διαμορφώνοντας το αντικείμενό της και το πλαίσιο των εννοιών της σε μια *πορεία ρήξης* με την ιδεολογικά φορτισμένη «διαισθητική φυσική». Η φιλοσοφία, εξ άλλου, υποβάλλει σε κριτική το «αυτονόητο», στοχεύει στην επίγνωση στην θέση του ανεπίγνωστου, στην εξερεύνηση του ανεξερεύνητου. Είναι πορείες που συναντώνται σε κρίσιμα σημεία καμπής, αλλά με ευρύτατη σχετική ανεξαρτησία μεταξύ τους. Πολλές φορές η μία προηγείται της άλλης. Μία από τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις σημειώθηκε με το φτερούγισμα της ανθρώπινης σκέψης που ήταν ο κύκλος της γερμανικής κλασικής φιλοσοφίας. Υπό την εμφανέστατη επίδραση της επιστημονικής επανάστασης που θεμελίωσε την θεωρητική φυσική, υπέβαλε σε διεισδυτική κριτική τις «υποθέσεις» της εποχής.

Δύο σημεία έχουν σημασία για το θέμα μας. Και τα δύο αφορούν την αντίληψη για τον χώρο και τον χρόνο. Το πρώτο συνδέεται με τον Kant. Απέναντι στην αντίληψη που θεωρούσε τον απόλυτο χώρο και χρόνο ως αιώνια και πάγια αρχή, ο Kant ανιχνεύει την λογική της καταγωγής της. Στο έργο του «*Μεταφυσικά Θεμέλια των Φυσικών Επιστημών*» [13], θεωρεί ότι ο χώρος εντός του οποίου συγκροτείται η εμπειρία της αισθητηριακής και εξωτερικής εποπτείας πρέπει να είναι ο ίδιος αισθητηριακός, που σημαίνει να είναι σχετικός.[4] Ο χώρος, άρα, ορίζεται από τις σχέσεις των αντικειμένων εντός του. Ένας σχετικός χώρος μπορεί να περικλείεται σε έναν ευρύτερο, επίσης σχετικό χώρο, και ούτω καθ΄ εξής επ' άπειρον, αλλά απόλυτος χώρος δεν υπάρχει. Ο απόλυτος χώρος, συνεπώς, είναι προϊόν αφαίρεσης από τις σχετικές διαφορές των σχετικών χώρων, που εδώ είναι μόνον οι διαφορετικές σχετικές τους ταχύτητες. Αυτή η τοποθέτηση του Kant συνεπάγεται ότι ο κάθε διαφορετικός σχετικός χώρος μπορεί να απολυτοποιηθεί, οπότε η απολυτοποιημένη διαφορετικότητά του γίνεται *αφηρημένη διαφορά*. Αλλά η αφαίρεση «απόλυτος χώρος» προκύπτει εξ ίσου από κάθε σχετικό χώρο, είναι συνεπώς αδιάφορη ως προς τις διαφορετικότητες των σχετικών χώρων, είναι το κοινό εντός του οποίου όλοι τους μπορούν να νοηθούν, και έτσι η αφηρημένη διαφορά μετατρέπεται σε *αφηρημένη ταυτότητα*. Εξετάζοντας την σχετική κίνηση εντός του χώρου, ο Kant μελετά κατόπιν τον τρόπο που συντίθενται δύο κινήσεις στο ίδιο σώμα, και οδηγείται στους γεωμετρικούς κανόνες σύνθεσης δύο ταχυτήτων. Αλλά, οι ταχύτητες είναι μεγέθη εντατά, σημαίνουν μήκη ανά χρονικές μονάδες, και η σύνθεσή τους είναι δυνατή μόνον όταν οι αντίστοιχοι χρόνοι είναι τμήματα ενός ενιαίου και ομοιογενούς χρόνου, όταν δηλαδή ο χρόνος είναι κοινός σε κάθε κίνηση, ως η αφηρημένη ταυτότητα όλων των κινήσεων. Έτσι, συνεπώς, αναφέρεται στον απόλυτο χώρο ως απόλυτος χρόνος. Το συμπέρασμα είναι ότι απόλυτος χώρος και απόλυτος χρόνος στέκονται ή πέφτουν μαζί. Ιστορικά, υπήρξαν ο χώρος και ο χρόνος της αδρανειακής κίνησης στην νευτώνεια μηχανική. Ο τετραδιάστατος χωρόχρονος είναι παρομοίως ο χωρόχρονος της αδρανειακής κίνησης στην σχετικιστική φυσική.

Εάν αυτό το πρώτο σημείο φωτίζει την *καταγωγή* της έννοιας του απόλυτου χώρου και χρόνου, το δεύτερο αφορά την *υπέρβασή* της. Πρόκειται για την διαλεκτική λογική τού Hegel, ο οποίος ασχολείται δια μακρών με ζητήματα φυσικής και μαθηματικών, ειδικά στο κορυφαίο έργο του, «*Επιστήμη της Λογικής*» [14], έστω και αν τα εξορίζει σε εκτενείς σημειώσεις. Κλείνοντας τον κύκλο της κλασικής γερμανικής φιλοσοφίας, ο Hegel ασκεί κριτική στον Kant, και εξετάζει την μέθοδο εκείνη που κρατά χωριστά τους πόλους μιας αντίφασης. Σε σχέση με την

[4] Η έννοια του σχετικού χώρου αναφέρεται εδώ σε πεπερασμένες περιοχές του χώρου και διαφέρει ουσιωδώς από την αντίστοιχη έννοια στην θεωρία της σχετικότητας.

«κοσμολογική αντινομία» που αφορά την διαιρεσιμότητα της ύλης, αναπτύσσει την διαλεκτική του συνεχούς και του διακριτού. Επικαλείται τον Αριστοτέλη, ο οποίος «*Στην άπειρη διαιρετότητα (η οποία, αν φανταστεί κανείς ότι έχει όντως συντελεστεί, είναι το ίδιο με το άπειρα διηρημένο, με τα άτομα)… αντιτάσσει το συνεχές, το οποίο εφαρμόζεται εξ ίσου καλά στον χρόνο όπως και στον χώρο, έτσι ώστε το άπειρο, δηλαδή η* ***αφηρημένη*** *πολλαπλότητα εμπεριέχεται μόνον* ***κατ' αρχήν*** *(an sich), ως* ***δυνατότητα****, στο συνεχές. Αυτό που είναι ενεργώς πραγματικό σε αντίθεση με την αφηρημένη πολλαπλότητα όπως επίσης με το αφηρημένο συνεχές, είναι οι συγκεκριμένες μορφές τους, ο ίδιος ο χώρος και ο χρόνος, ακριβώς όπως αυτοί είναι σχετικοί ως προς την ύλη και την κίνηση. Αυτό που είναι* ***αφηρημένο*** *έχει μόνον ένα εγγενές ή δυνάμει είναι.* ***Είναι*** *μόνον ως στιγμή κάποιου πραγματικού*» ([14], σ. 198, έμφαση στο πρωτότυπο).

Δύο εξαιρετικά επίκαιρες φιλοσοφικές τοποθετήσεις υπάρχουν εδώ. Η πρώτη αφορά την διάκριση μεταξύ της έννοιας του συνεχούς και μιας έννοιας του απείρως διαιρετού που μπορεί να καταλήγει σε ακραία περίπτωση του διακριτού. Η ανεπίτρεπτη ταύτιση των δύο καταργεί το δίπολο συνεχούς – διακριτού, ανάγοντας ουσιαστικά το πρώτο στο δεύτερο, και οδηγεί σε ταυτολογίες. Η δεύτερη τοποθέτηση αφορά τον *σχετικό* χαρακτήρα του χώρου και του χρόνου ως προς την ύλη και την κίνηση. Ανοίγει έτσι ο δρόμος ώστε, στην αντίληψη της κλασικής φυσικής για έναν χώρο (και χρόνο) *εντός* του οποίου συντελείται η κίνηση, να αντιταχθεί η αντίληψη ενός χώρου και χρόνου *της* κίνησης. Τέτοιες σκέψεις μπορούσαν να αναπτύσσονται σε σφαίρες πολύ απόμακρες από τις τρέχουσες φυσικές αντιλήψεις της εποχής, μέχρις ότου, σχεδόν έναν αιώνα μετά, επικαιροποιηθούν όταν δημιουργήθηκαν οι όροι ώστε η φυσική να θέσει με τον δικό της τρόπο αυτά τα ερωτήματα. Και τούτο διότι ένα σώμα φιλοσοφικών αντιλήψεων συνδέεται και αλληλεπιδρά μεν, αλλά δεν καθορίζεται από, ούτε πολύ περισσότερο καθορίζει μονοσήμαντα μια συγκεκριμένη φυσική θεωρία.

1.2 Η λογική της μετάβασης

Επιστρέφω στο ερώτημα της συνέχειας δια μέσου επιστημονικών επαναστάσεων και εννοιολογικών ανατροπών. Θεωρώ ότι, στα πλαίσια της διευρυμένης κλασικότητας, δηλαδή στην μετάβαση από το παλαιό κλασικό στο σύγχρονο Κλασικό, δεν μπορούμε να αναζητάμε την συνέχεια ούτε στο οντικό επίπεδο, με το επιχείρημα ότι τόσο η θεωρία τού Newton όσο και εκείνη του Einstein έχουν το ίδιο γνωστικό αντικείμενο, δηλαδή το φαινόμενο της βαρύτητας. Δεν εννοώ την συζήτηση περί «οντολογικής ασυνέχειας», αλλά το γεγονός ότι η δήθεν «γυμνή αισθητηριακή αντίληψη» μιας καθαρά εμπειριστικής άποψης, τα κοινά πειραματικά δεδομένα, αποκαλύπτονται τόσο «βεβαρημένα με την θεωρία» (Hanson), ακόμη και τόσο αξεδιάλυτα στοιχεία ενός συνολικού συμπλέγματος (Quine), ώστε να χάνει κάθε νόημα η ένα-προς-ένα αντιστοιχία θεωρητικών εννοιών και εμπειρίας. Η έννοια «βαρύτητα» μπορεί να έχει την ίδια αναφορά και στις δύο περιπτώσεις, αλλά η *σημασία* της αλλάζει ριζικά. Η εμπειρία της βαρύτητας μετατρέπεται στο *γνωστικό αντικείμενο* «φαινόμενο βαρύτητας» το οποίο γίνεται αγνώριστο στην μετάβαση από την μία θεωρία στην άλλη. Εισάγεται μια νέα έννοια για το πεδίο, το νόημα του «υλικού σώματος» αναθεωρείται, θεμελιωμένες αντιλήψεις για φιλοσοφικές κατηγορίες όπως ύλη, αλληλεπίδραση, χώρος, χρόνος, επανατοποθετούνται, και όλα αυτά διατυπώνονται με μια διαφορετική μαθηματική μορφή. Ακόμη, λοιπόν, και μέσα στα όρια της σύγχρονης κλασικότητας, η οποιαδήποτε συνέχεια στην μετάβαση από το ένα πλαίσιο στο άλλο, αν υπάρχει, θα πρέπει να αναζητηθεί στην *λογική* της μετάβασης από την «υπόθεση» στην υπόθεση. Με αυτό εννοώ τον τρόπο με τον οποίο συναρθρώνεται κάθε φορά η εννοιολογική καινοτομία σε ένα επίπεδο νοηματικό, με την εμπειρική ανακάλυψη στο οντικό επίπεδο. Είναι μια γενική μεθοδολογική τοποθέτηση, οπότε από αυτήν την σκοπιά θα διερευνήσω και την υπέρβαση της κλασικότητας στην μετάβαση προς τις κβαντικές θεωρίες. Ας τονίσω ότι εδώ υπονοείται μια ορισμένη αντίληψη που θεωρεί την λογική στην προοπτική μιας θεωρίας της γνώσης, ζήτημα στο οποίο θα επιμείνω στην συνέχεια.

Το μεθοδολογικό αυτό ζήτημα απαιτεί διευκρίνιση. Κάθε φυσική θεωρία που προσφέρει μιαν ερμηνεία των φυσικών φαινομένων διατυπώνει, άλλοτε ρητά και τις πιο πολλές φορές άρρητα, ορισμένα ερωτήματα που εμπεριέχονται στις ίδιες τις προϋποθέσεις της. Στην ανάπτυξη της θεωρίας αυτά τα ερωτήματα έρχονται στο προσκήνιο, είτε με την μορφή προβλημάτων στον πειραματικό της έλεγχο, είτε –και αυτό είναι το κυριότερο– με την επεξεργασία και ανάλυση των εννοιών της ως εσωτερικές αντιφάσεις. Χαρακτηριστικότατη περίπτωση, την οποία αναφέρει ο Μπαλτάς [15], είναι ο ορισμός ενός απείρου συνόλου από τον Cantor. Ο Cantor αντιμετώπισε μιαν αντίφαση στην οποία οδηγούσε η διαισθητική αντίληψη για τα σύνολα και την μεταξύ τους σύγκριση. Αφ΄ ενός, το σύνολο των αρτίων (ή των περιττών) αριθμών είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών, άρα «μικρότερο» από αυτό. Αφ΄ ετέρου, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ υποσυνόλου και συνόλου, άρα ίσος αριθμός μελών και στα δύο. Ο Cantor δεν θεώρησε την αντίφαση ως αδιέξοδο, ούτε επεχείρησε να την παρακάμψει. Αντιθέτως, μετέτρεψε το αδιέξοδο σε *ορισμό*, τον ορισμό της έννοιας του απείρου συνόλου.[5] Δηλαδή, σε μια μη-αντιστρεπτή διαδικασία, ένα νέο «παράδειγμα» –κατά Kuhn– *θέτει* αυτό που σε ένα προγενέστερο συνιστούσε «ανωμαλία» και ήταν *αδύνατο*. Εδώ ακριβώς βρίσκεται η πηγή της ασυμμετρίας των εννοιών. Ειδικότερα, η ανάδυση του αδυνάτου σε μια φυσική θεωρία δεν σηματοδοτεί την διάψευση του πλαισίου των εννοιών της. Σηματοδοτεί την διάψευση μιας *καινούργιας υπόθεσης* [11], σύμφωνα με την οποία αυτό το πλαίσιο εννοιών μπορεί να επεκταθεί πέραν των ορίων που

[5] Ο ορισμός του απείρου συνόλου ως εκείνου για το οποίο υπάρχει 1–1 απεικόνιση μεταξύ αυτού και ενός γνήσιου υποσυνόλου του οφείλεται στον Dedekind.

προσδιορίζουν οι εμπειρικές αναφορές του. Η εννοιολογική ρήξη που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο οδηγεί σε δύο ανταγωνιστικά θεωρητικά πλαίσια τα οποία είναι *διαφορετικά* αλλά όχι αμοιβαίως *αδιάφορα*. Το νέο είναι *άρνηση* του παλαιού, με την έννοια της χεγκελιανής *Aufhebung*, που σημαίνει ταυτόχρονα άρνηση, τερματισμό και διατήρηση. Σε αντίθεση με την θεώρηση εκείνη που θέλει τα διαφορετικά «παραδείγματα» να πλέουν σαν νησίδες σε μια θάλασσα αδιαφορίας, αυτός ο χαρακτήρας της άρνησης ως στοιχείο *μετάβασης* συνιστά και τον *συνδετικό* κρίκο μεταξύ διαδοχικών παραδειγμάτων δια μέσου της εννοιολογικής ρήξης, δηλαδή το σημείο συνέχειας εντός της ασυνέχειας. Έτσι, για την κλασική μηχανική που θεωρούσε την μάζα «μέτρο της ποσότητας ύλης ενός σώματος», ένα σώμα με μάζα μηδέν ήταν *contradictio in adjecto*. Αυτό, το αδύνατον, όμως, πραγματοποιείται στο φωτόνιο. Η ρήξη βρίσκεται στην έννοια της μάζας που τώρα σημαίνει το μέτρο της συνολικής κίνησης ενός σώματος που απομένει, αφού αφαιρεθεί εκείνο το τμήμα της κίνησης που εξωτερικεύεται ως μετατόπιση στον χώρο. Θεωρώντας την ορμή ως μέτρο της κίνησης που «εξωτερικεύεται» ως μετατόπιση στον χώρο, και την ενέργεια ως μέτρο της συνολικής αλλαγής που συντελείται «εσωτερικά» με τον χρόνο, μπορούμε να πούμε ότι το φωτόνιο είναι ένα σώμα για το οποίο ό,τι είναι «μέσα» εκδηλώνεται «έξω». Αυτό είναι το νόημα της σύνδεσης ενέργειας και ορμής, χώρου και χρόνου, στην ειδική σχετικότητα.

Η επιτυχημένη θεωρία –και το ίδιο ισχύει για την συμβολή ενός μεγάλου επιστήμονα– δεν κρίνεται μόνον από τον βαθμό επικύρωσής της από τον πειραματικό έλεγχο, αλλά και από την σαφήνεια και την ευστοχία στην διατύπωση τέτοιων ερωτημάτων. Ή, αλλιώς, από τον τρόπο με τον οποίο οι απαντήσεις που μια θεωρία προσφέρει σε προγενέστερα ερωτήματα μετατρέπονται σε νέα ερωτήματα άλλης τάξεως, και έτσι αυτοαναιρούνται. Αυτοαναιρούνται δεν σημαίνει αυτοκαταργούνται, δεν σημαίνει ότι ο δρόμος είναι ανοικτός στην συμβασιοκρατία και τον σχετικισμό. Σημαίνει ότι συγκροτούνται ως σύνδεση και σημείο μετάβασης από ένα ερώτημα σε άλλο, πλατύτερο, βαθύτερο και συνθετότερο. Σύμφωνα με αυτήν την μεθοδολογική τοποθέτηση, δεν νοείται συνέχεια μεταξύ διαφορετικών θεωριών στην βάση μιας τυπικής μαθηματικής προσέγγισης των εξισώσεών τους, αλλά ούτε και στην βάση του προσδιορισμού ενός κοινού γνωστικού αντικειμένου οχυρωμένου πίσω από την ακαμψία κάποιας γυμνής εμπειρίας. Αντιθέτως, αναζητάται στην ανάλυση της διαδικασίας μέσω της οποίας απαντάται ένα ερώτημα το οποίο έχει τεθεί στο πλαίσιο της προγενέστερης θεωρίας και το οποίο, σε εκείνο το πλαίσιο, έχει αναγνωριστεί ως άλυτο. Η μετατροπή της «υπόθεσης» σε υπόθεση επιτρέπει να ανασημασιοδοτηθούν και να ενσωματωθούν στο νέο πλαίσιο έννοιες που διαμορφώθηκαν στο προγενέστερο. Εξ άλλου, αν μπορεί να γίνει λόγος για «πρόβλεψη» πέρα από τα όρια ενός συγκεκριμένου πλαισίου, αυτή έγκειται ακριβώς στα τεθειμένα προβλήματα, τα οποία άλλοτε μπορεί να κατευθύνουν ενεργά την αναζήτηση της λύσης τους, άλλοτε να λανθάνουν κάτω από τα αλλεπάλληλα στρώματα που συσσωρεύει η ιστορία. Και όταν η μεταγενέστερη εξέλιξη δώσει απάντηση στα προβλήματα και ξεπεράσει τις παλαιές αντιφάσεις, όταν έχει βαθύνει τις έννοιες και πυκνώσει το πλέγμα των σχέσεών τους, τότε η θεωρία μπορεί να ατενίσει τις πρώιμες στιγμές και να τις αναγνωρίσει ως στιγμές της δικής της ιστορίας, τις οποίες διατηρεί τώρα μέσα της, μερικές φορές καλά κρυμμένες, ως ειδικές περιπτώσεις.

Με άλλα λόγια, η συνέχεια που διαπερνά τις διαχωριστικές γραμμές μεταξύ παλαιού και νέου εννοιολογικού πλαισίου αποκαλύπτεται στον ιδιαίτερο και πρωτότυπο τρόπο με τον οποίο η φυσική πραγματικότητα, ως περιεχόμενο, *μορφοποιείται* και εκτίθεται μαθηματικά. Ούτε η μορφή ούτε το περιεχόμενο χωριστά, αλλά η μεταξύ τους σχέση είναι η ουσία του ζητήματος. Γενικεύοντας αυτήν την μεθοδολογική προσέγγιση, θεωρώ ότι δεν μπορεί να συνιστά κριτήριο για την συγκρότηση μιας φυσικής θεωρίας η αποφυγή της αντίφασης. Υπογραμμίζω ότι αυτό δεν είναι καθόλου ταυτόσημο με το αίτημα της λογικής συνοχής, προϋπόθεση για κάθε σχετικά ολοκληρωμένη θεωρία. Εννοώ ότι η αντίφαση δεν θεωρείται όριο της γνωστικής ικανότητας, αλλά, αντιθέτως, ως το στοιχείο που σηματοδοτεί την ανάγκη της αναθεώρησης των εννοιών προκειμένου είτε να νοηματοδοτηθεί ένα νέο πεδίο γνώσης, είτε, κυρίως, να μεταβληθεί ριζικά η φυσική θεωρία στο σύνολό της, και ως όρος για την ικανοποίηση αυτής της ανάγκης. Η μετατροπή της αντίφασης σε αδιέξοδο οφείλεται στην «*συνηθισμένη τρυφερότητα για τα πράγματα που μόνη έγνοια της είναι να μην είναι αυτοαντιφατικά*» ([14], σ. 423) και καταλήγει να την θεωρεί υποκειμενική αδυναμία ή ελάττωμα της σκέψης. Έτσι, οι «σχέσεις απροσδιοριστίας», για παράδειγμα, που προκύπτουν από την μη μεταθεσιμότητα των τελεστών ορμής και θέσης στην κβαντομηχανική, δεν συνιστούν μέτρο άγνοιας, αλλά *όρο δυνατότητας* για την ανάπτυξη της θεωρίας. Σε αυτήν την προοπτική, μια θεωρία αντιμετωπίζει την αντίφαση ως συνδετικό κρίκο και σημείο μετάβασης από το παλαιό πλαίσιο εννοιών στο νέο. Έτσι είναι σε θέση να αποσαφηνίσει τις έννοιές της, να οξύνει τα όριά τους και να προσδιορίσει τις μεταξύ τους σχέσεις, και άρα να αντιμετωπίσει ως συνεκτικό όλο το αντικείμενό της. Ισχύει εδώ η διαλεκτική που περιγράφει ο Γ. Φαράκλας: Μια τέτοια θεωρία αντιμετωπίζει την δική της εσωτερική λογική *γνωσιοθεωρητικά*, θεωρεί δηλαδή την συγκρότηση των νοημάτων της ως όρο δυνατότητας για την συγκρότηση του αντικειμένου της. Προς τούτο, ως κεντρικό μεθοδολογικό ζήτημα αναδεικνύεται το πότε και πώς συμβαίνει να συμπίπτουν, μολονότι διακριτοί, ο λόγος περί του αντικειμένου και ο λόγος περί του λόγου περί του αντικειμένου. Ή αλλιώς, πώς νοείται το αντικείμενο στο οντικό επίπεδο, σε διά-κριση από, και σύν-κριση με την ερμηνεία του ως ενταγμένο σε ένα εννοιολογικό πλαίσιο, στο νοηματικό επίπεδο. Συνακόλουθα, η θεωρία γίνεται ικανή να αντιμετωπίζει το αντικείμενό της ως ελεύθερο από τις παγιωμένες αντιλήψεις και τα σχήματά της, είναι άρα μια θεωρία ελεύθερη από προκαταλήψεις, αποδεχόμενη την αυτοαναίρεσή της, και έτσι μπορεί να ανοίγεται στο εννοιολογικά καινούργιο. Κατά τούτο η θεωρία είναι αντικειμενική [16].

Η συνέχεια στην περίπτωση της σχετικότητας, λοιπόν, υπάρχει στον βαθμό που η θεωρία βαρύτητας του Einstein απαντά στο *πρόβλημα* που αναγνώριζε ο ίδιος ο Newton και που μπροστά του δήλωνε «υποθέσεις δεν κατασκευάζω»: πώς μπορεί η «δράση από απόσταση» μεταξύ υλικών σωμάτων να συγκροτηθεί η ίδια ως αντικείμενο φυσικής-πειραματικής εξέτασης και θεωρητικής επεξεργασίας [17, σ. 547]. Το πρόβλημα ενσωματώθηκε στα θεμέλια της νευτώνειας μηχανικής με τον εξής συγκεκριμένο τρόπο. Υπάρχει, αφ΄ ενός, η έννοια μιας «*άψυχης, άμορφης ύλης*», ασύμβατης με κάποιαν ικανότητα –την βαρύτητα– «*εγγενή και ουσιώδη για την ύλη, έτσι ώστε ένα σώμα να μπορεί να δρα πάνω σε ένα άλλο από απόσταση δια μέσου ενός κενού* [χώρου], *χωρίς την διαμεσολάβηση οτιδήποτε άλλου ...*» [17, σ. 634]. Αφ΄ ετέρου, η νευτώνεια θεωρία *ήταν μια επιτυχής θεωρία δράσης από απόσταση* [18]. Στο επίπεδο των εννοιών, είχαμε την αναμέτρηση της νευτώνειας σύνθεσης με την φιλοσοφικής προδιάθεσης καρτεσιανή αντίληψη για το πλήρες. Έτσι, εκείνο που ενσωματώθηκε στην κλασική μηχανική, αρχικά σε λανθάνουσα κατάσταση, ήταν η αντιφατική σχέση μεταξύ *πλήρους* και *σημειακού* ή *διακριτού*. Το λανθάνον έγινε φανερό, όταν, στα ίδια τα πλαίσια της κλασικής μηχανικής, αναπτύχθηκε η ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Η έννοια της *αλληλεπίδρασης* έπαψε να δηλώνει κάποιο αφηρημένο «αίτιο» για τα φυσικά φαινόμενα και απέκτησε εμπράγματη ύπαρξη ως το *πεδίο*, αντικείμενο γνωστικής διαδικασίας το ίδιο. Ένα *νέο* περιεχόμενο αναπτύχθηκε, βεβαρημένο όμως με την παλαιά αντίληψη για την έννοια της ύλης. Για το θέμα μας, αυτά υποδεικνύουν το ερώτημα: Στον βαθμό που η κβαντική θεωρία, καθώς ξεπήδησε μέσα από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία, εμπεριέχει τις αντιφάσεις της κλασικότητας, φέρει άραγε εντός της την αντίφαση «πλήρους» και «διακριτού»; Και αν ναι, με ποιά μορφή; Και ποιά είναι η σχέση με την ανατροπή της αντίληψης για μιαν «άψυχη, άμορφη» ύλη;

1.3 Κλασικό και κβαντικό: η κληρονομιά του ατομισμού

Επιγραμματικά, μπορούμε να πούμε ότι στο σύγχρονο Κλασικό, η ασυνέχεια της ρήξης με το παλαιό, νευτώνειο κλασικό, κυριαρχείται από την συνέχεια. Η ρήξη εκφράζεται από το γεγονός ότι ο χωρόχρονος δεν είναι πλέον μόνον όρος δυνατότητας για τα φαινόμενα, αλλά έχει ο ίδιος την δική του φυσική ενεργό πραγματικότητα. Η κυριαρχία της συνέχειας εκφράζεται από το γεγονός ότι ο ανασημασιοδοτημένος χωρόχρονος εξακολουθεί να υπονοεί μια φιλοσοφική θέση η οποία συνυπάρχει αρμονικά με την μαθηματική του παράσταση ως *διαφορίσιμης πολλαπλότητας* κατά Riemann. Θα επανέλθω στο ερώτημα, για ποιά φιλοσοφική θέση μιλάμε. Προς το παρόν, σημειώνω ότι συντρέχουν τώρα πλέον οι όροι για την εγκατάλειψη από την φυσική της έννοιας ενός χωροχρόνου-υποδοχέα, ενός χωροχρόνου *εντός* του οποίου διαδραματίζονται τα φυσικά φαινόμενα, και για την υιοθέτηση της έννοιας ενός χωροχρόνου *των* φαινομένων. Η γεωμετρικοποίηση της φυσικής και η φυσικοποίηση της γεωμετρίας που επιτυγχάνεται με αυτόν τον τρόπο επιτείνει την ένταση μεταξύ σύγχρονου Κλασικού και κβαντικού, εφ' όσον η κβαντική συνθήκη εξακολουθεί να προϋποθέτει έναν χωρόχρονο ως όρο δυνατότητας, την στιγμή που η γενική σχετικότητα του αποδίδει ενεργό πραγματικότητα. Ασφαλώς, αυτό είναι το φιλοσοφικό ζήτημα που άπτεται του φυσικού προβλήματος στην αιχμή της έρευνας, δηλαδή της αναζήτησης μιας θεωρίας κβαντικής βαρύτητας. Όσο για την σχέση συνέχειας και ασυνέχειας στην σφαίρα του κβαντικού, συμβαίνει το αντίθετο από ό,τι συμβαίνει με το Κλασικό: εδώ η ασυνέχεια κυριαρχεί, ενώ η συνέχεια είναι ακόμη το ζητούμενο. Αυτό δεν είναι ίδιον της κβαντομηχανικής και μόνον, αλλά επεκτείνεται σε όλες τις σύγχρονες κβαντικές θεωρίες. Πράγματι, η διαφορά από το Κλασικό φαίνεται πολύ παραστατικά στις θεωρίες για τις υπερχορδές, τις υπερμεμβράνες κ.λπ. Ενδεικτικά, οι πρωταγωνιστές των υπερχορδών γράφουν στο «μεγάλο πράσινο βιβλίο»: «*...ιστορικά, στην περίπτωση της θεωρίας της γενικής σχετικότητας, ήταν οι έννοιες που προηγήθηκαν. Ο Einstein πρώτα εντόπισε τις έννοιες στις οποίες μια σχετικιστική θεωρία της βαρύτητας έπρεπε να βασιστεί, και μετά διατύπωσε την θεωρία. Με την θεωρία των χορδών έγινε το αντίστροφο ... εφευρέθηκε αρχικά για εντελώς διαφορετικούς λόγους, ... Έγινε τελικά σαφές ότι η θεωρία των χορδών έπρεπε να χρησιμοποιηθεί, αντιθέτως, για να προσφέρει μια θεμελιώδη γενίκευση της θεωρίας της γενικής σχετικότητας και της θεωρίας Yang-Mills. Αλλά οι έννοιες πίσω από αυτήν την γενίκευση παραμένουν σε μεγάλο βαθμό μυστηριώδεις*» [19].

Αλλά και πιο πρόσφατα, διαβάζουμε:

« *...οι "φυσικοί τόποι" της θεωρίας Yang-Mills και της γενικής θεωρίας της σχετικότητας είναι πασίγνωστοι. ... βρίσκονται στο βασίλειο της ακριβούς τοπικής συμμετρίας SU(N) ή του γενικού συναλλοίωτου. ... Με τον ίδιο τρόπο, ίσως το κλειδί για την κατανόηση της γεωμετρίας-υπόβαθρου της θεωρίας των χορδών είναι η κατανόηση του φυσικού της τόπου. ... Υπάρχει μια χρήσιμη αναλογία που φωτίζει το πρόβλημα. Υποθετικά, μπορεί κανείς να αναρωτηθεί τι θα συνέβαινε στην εξέλιξη της φυσικής αν ο Einstein δεν ανεκάλυπτε το έργο τού Riemann και δεν διατύπωνε την γενική θεωρία της σχετικότητας το 1915. Το πιο απαισιόδοξο σενάριο θα ήταν ότι η σχετικότητα θα ανακαλυπτόταν μετά από δεκαετίες, ... όταν οι ειδικοί της θεωρίας πεδίων άρχισαν την συστηματική αναζήτηση εξισώσεων για πεδία με μεγάλο spin. … Το τελικό αποτέλεσμα είναι μια μη-τετριμμένη, μη-πολυωνυμική δράση. Όμως, ίσως να είχε ανακαλυφθεί ότι αυτή η δύσμορφη και περιπλεγμένη δράση κατείχε μυστηριώδεις, σχεδόν θαυματουργές ιδιότητες. Μετά από μακρόχρονους και δύσκολους υπολογισμούς, ίσως να αναγνωριζόταν ότι η θεωρία ήταν ανεξάρτητη από το υπόβαθρο της κλασικής μετρικής. Έτσι, ίσως να άρχιζε ένα κυνήγι για την ανεύρεση του φυσικού τόπου της μη-πολυωνυμικής θεωρίας. Εν τούτοις, ακόμη και αν η δράση ήταν εντελώς γνωστή ως δυναμοσειρά, θα ήταν λογικό άλμα να θεωρήσει κανείς ότι το γενικό συναλλοίωτο ήταν* *η πραγματική πηγή αυτών των θαυμάτων. Με τον ίδιο τρόπο, ακόμη ψάχνουμε για τον φυσικό τόπο της θεωρίας των χορδών*» [20].

Πρόκειται για σκέψεις ερευνητών, που προβάλλουν ένα μεθοδολογικό πρόβλημα. Όταν ανοίγει ένα νέο πεδίο, πώς συγκροτείται το γνωστικό αντικείμενο στην περίπτωση που δεν υπάρχει ήδη διαμορφωμένο το απαραίτητο μαθηματικό πλαίσιο για την θεωρητική του ιδιοποίηση και, το κυριότερο, όταν λείπουν οι έννοιες που θα δώσουν νόημα σε αυτό το πλαίσιο. Το μεθοδολογικό ζήτημα που έθιξα πιο πάνω, η διαλεκτική σχέση, δηλαδή, ανάμεσα στον λόγο περί του αντικειμένου και τον λόγο περί του λόγου περί του αντικειμένου, τίθεται συγκεκριμένα επί τάπητος από τις ανάγκες της φυσικο-μαθηματικής έρευνας. Δεν είναι καθόλου αθώο ζήτημα, δεδομένου ότι συνεπάγεται το εξής πρόβλημα: Πώς μπορεί κανείς να μιλάει *για* ένα πλαίσιο εννοιών μέσω του οποίου γνωρίζει την φύση, την ίδια στιγμή που μιλάει *μέσα* από αυτό το πλαίσιο; Γενικότερα, εάν συμβαίνει, όπως τώρα, να απουσιάζουν άλλα κριτήρια –πειραματικά– αξιολόγησης και επιλογής θεωριών, τότε οι φιλοσοφικοί προσανατολισμοί και προδιαθέσεις αλληλεπιδρούν και επηρεάζουν το έργο των επιστημόνων με τρόπους αναπάντεχα άμεσους [21]. Όπως και να είναι, γενικότεροι προβληματισμοί από διαφορετικές απόψεις τείνουν στο συμπέρασμα ότι η αντίθεση Κλασικού και κβαντικού προβάλλει με τον οξύτερο τρόπο ακριβώς εκεί που συναντώνται αυτοί οι δύο κλάδοι της φυσικής: στην έννοια του χωροχρόνου ως διαφορίσιμης πολλαπλότητας. Από την σκοπιά της φυσικής, το ενδεχόμενο της υπέρβασης της διαφοράς Κλασικού – κβαντικού μέσω μιας ριζικής αναθεώρησης της έννοιας του χωροχρόνου ενισχύεται από την αλματώδη ανάπτυξη της επονομαζόμενης μη-μεταθετικής γεωμετρίας, σε συνδυασμό με ορισμένα συμπεράσματα σε σύγχρονα ερευνητικά προγράμματα [22].

Εκείνο που ενδιαφέρει τις φιλοσοφικές αναζητήσεις είναι ότι αυτού του τύπου οι εξελίξεις στην θεωρητική φυσική προσανατολίζουν σε μια κριτική προσέγγιση στην έννοια του *σημείου* ενός τυχόντος τοπολογικού χώρου, ως έννοιας κατάλληλης για την μαθηματική αναπαράσταση αυτού που κατανοούμε ως «κατάσταση» ενός φυσικού συστήματος.[6] Όμως, μια κριτική ματιά στην έννοια του σημείου σε αυτό το πνεύμα, συναντάται με βαθιά ριζωμένες φιλοσοφικές θέσεις. Συγκεκριμένα, υιοθετώ την θέση τού Howard [24] ότι τα γνωστά προβλήματα θεμελίωσης δεν ανακύπτουν στην σχέση των κβαντικών θεωριών με την ειδική σχετικότητα, αλλά στην σχέση τους με την *γενική* σχετικότητα· και ότι στο επίκεντρο του προβληματισμού βρίσκεται η αμφισβήτηση της φιλοσοφικής παράδοσης του *ατομισμού*. Αυτή είναι η φιλοσοφική θέση την οποία υπονόησα προηγουμένως. Συνδέεται άμεσα με το γνωσιολογικό πρόβλημα του καθορισμού της *ταυτότητας* ενός συστήματος. Θα αναφερθώ εδώ στους προβληματισμούς των Teller [25] και Howard [24], σε σχέση

[6] Ενδιαφέρον από αυτήν την άποψη παρουσιάζει η κριτική τού J. Butterfield σε αυτό που ονομάζει *pointillisme* [23].

και με την έννοια της διαχωρισιμότητας κατά τον Einstein. Για τους δύο ερευνητές, η οντολογική προϋπόθεση που συγκρούεται με τα δεδομένα της κβαντομηχανικής είναι μια φιλοσοφική παράδοση –«particularism» κατά τον Teller, «διαχωρισιμότητα» κατά τον Howard– της οποίας οι απαρχές ανάγονται στους αρχαίους ατομικούς. Είναι η παράδοση που θεωρεί οντολογικά πρωταρχική την ατομικότητα και της αποδίδει ατομικές ιδιότητες. Οι σχέσεις ατομικοτήτων και οι ιδιότητες που απορρέουν από τέτοιες σχέσεις, «σχεσιακές» ιδιότητες, μπορούν να αναχθούν στις πρωταρχικές ατομικές ιδιότητες, «επιγίγνονται» (supervene) αυτών, κατά την ορολογία τού Teller. Ο Howard, αφ' ετέρου, διακρίνει τρεις βασικές «δυναμικές γραμμές» που διατρέχουν αυτήν την παράδοση. Η μία ξεκινά από την διάκριση πρωταρχικών και δευτερευουσών ιδιοτήτων που έκαναν οι αρχαίοι ατομικοί, περνά από την καρτεσιανή και νευτώνεια αντίληψη ότι μόνον μαθηματικές ιδιότητες των φυσικών σωμάτων έχουν αντικειμενική σημασία, και καταλήγει λογικά στην καθαρά γεωμετρική ιδιότητα της θέσης ως του μόνου αντικειμενικού κριτηρίου για την διάκριση των φυσικών συστημάτων. Η δεύτερη γραμμή οδηγεί από την διαιρεσιμότητα της ύλης ως την τελική της συνέπεια, ότι μόνον το απειροστό σημείο-σωματίδιο είναι θεμελιώδες για την θεωρία. Και η τρίτη ξεκινά από την αδυναμία να εξηγηθούν οι αλληλεπιδράσεις με την εξ επαφής δράση μεταξύ τελείως ελαστικών, σκληρών πεπερασμένων ατόμων, για να συμπεράνει ότι ο «χώρος» μεταξύ των ατόμων πρέπει να είναι πλήρης με κάποιο μέσο που διαμεσολαβεί στις αλληλεπιδράσεις.

Ο Howard θεωρεί την πεδιακή θεωρία του 19^{ου} αιώνα ως την επιτομή αυτής της παράδοσης, την οποία κληρονόμησε και υιοθέτησε ο Einstein. Στις επιφυλάξεις του τελευταίου απέναντι στην κβαντομηχανική, ο Howard διακρίνει συνεπώς δύο πλευρές. Πρώτον, μια γνωσιολογική στάση η οποία χαρακτηρίζεται ως συμβασιοκρατία τύπου Duhem και Quine. Δηλαδή, ενώ οι Schlick και Reichenbach διέκριναν ένα συμβατικό μέρος μιας θεωρίας, οροθετούμενο από τους λεγόμενους «ορισμούς συστοίχισης» (coordinative definitions) [26] από την υπόλοιπη θεωρία που ήταν αντικείμενο πειραματικού ελέγχου, ο Einstein θεωρεί ότι το σύνολο της θεωρίας έχει συμβατικό χαρακτήρα και ελέγχεται ως όλον, ότι καμιά πρότασή της δεν είναι άτρωτη από την ανάγκη αναθεώρησης. Επικαλούμενος κείμενα του Einstein του 1948, ο Howard ανιχνεύει σε αυτήν την προσέγγιση την αγωνία τού Einstein να υπάρχει ένας αντικειμενικός τρόπος εξατομίκευσης και αναγνώρισης του φυσικού συστήματος, κάτι που πίστευε ότι απειλείται από την κβαντομηχανική. Για τον Einstein, ο τρόπος προσδιορισμού τού «*Είναι εδώ, τώρα*» ενός συστήματος είναι όρος για την δυνατότητα ύπαρξης φυσικής επιστήμης, όπως και για την δυνατότητα διεξαγωγής μετρήσεων και πειραμάτων. Δεύτερον, αυτά συνδυάζονται με την προσήλωση του Einstein στην πεδιακή αντίληψη. Έχοντας αναγάγει την φυσική στην γεωμετρία, και έχοντας δείξει την σχετικότητα της έννοιας «θέση», ο Einstein βρίσκει ως μόνο μέγεθος που μπορεί να χρησιμεύσει για μιαν αντικειμενική «εξατομίκευση» ενός φυσικού συστήματος το απόλυτο μέγεθος του χωροχρονικού διαστήματος. Ενδεικτικά, στην μηχανική της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας αυτό το χωροχρονικό διάστημα παίζει τον ρόλο που παίζει η λαγκρανζιανή συνάρτηση στην μη-σχετικιστική μηχανική. Επιπρόσθετα, ο Howard ισχυρίζεται ότι η αντίθεση σώματος – πεδίου δεν συμπίπτει με την αντίθεση σημείου – συνεχούς. Διότι το πεδίο είναι η ακραία συνέπεια της ατομιστικής αντίληψης, όπου το απειροστό σημείο θεωρείται ως αυτοτελές φυσικό σύστημα με ατομικές ιδιότητες, και όπου τα φυσικά πεδία είναι γεωμετρικής υφής και καθορίζονται από τις σημειακές τιμές τους. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για εμάς, καθώς διατυπώσαμε στο τέλος της §1.2 ερωτήματα σχετικά με την αντίφαση διακριτού – πλήρους στο κβαντικό πλαίσιο. Ας σημειώσω ακόμη τον τρόπο με τον οποίο η σύγχρονη φυσική ανακαλεί στην επικαιρότητα παλαιότερες φιλοσοφικές αντιπαραθέσεις, σαν εκείνη που είδαμε στην περίπτωση του Kant και του Hegel. Εδώ όμως χρειάζεται προσοχή: το πλήρες δεν ταυτίζεται, όπως θα εξηγήσω πιο κάτω, με το συνεχές. Ακόμη, πρέπει να διευκρινιστεί η έννοια με την οποία το «σημείο» μπορεί να εκπροσωπεί το «υλικό σώμα». Συνοψίζοντας, έχουμε την αντίληψη των λεγομένων χωροχρονικών θεωριών, οι οποίες έχουν ως μαθηματικό υπόβαθρο μια λεία συνεχή πολλαπλότητα, με μια τοπολογία που κατά κανόνα την καθιστά συνδεδεμένη, παρασυμπαγή και Hausdorff, και στην οποία μπορεί να οριστεί μια θεωρία μέτρου κατά το πρότυπο της θεωρίας τού Lebesgue.

1.4 Θεωρητικά πρότυπα: ιστορικότητα και πλαισιακότητα

Προκειμένου να διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο η φιλοσοφία του ατομισμού διαποτίζει τις κλασικές αντιλήψεις, πρέπει να διευκρινίσουμε μερικά μεθοδολογικά σημεία. Μια *θεωρητική*, δηλαδή πειραματική/πρακτική και μαθηματική/νοηματική διερεύνηση ενός φυσικού συστήματος προϋποθέτει ένα «σημείο μηδέν» της εν λόγω έρευνας, πράγμα που σημαίνει το σύνολο των πρακτικών, των διεργασιών, των θεωριών, της γνώσης κ.λπ., που θεωρούνται ως *δεδομένο* αφετηριακό σημείο. Είναι ένα υπόβαθρο το οποίο *δεν* είναι *μόνον* μέρος της επιστημονικής πρακτικής καθ΄ εαυτής. Προσδιορίζεται από μια ποικιλία παραγόντων, οι οποίοι αφορούν την ιστορία γενικά, συμπεριλαμβανομένης της ιστορίας των ιδεών, και την ιστορία του εκάστοτε γνωστικού αντικειμένου ειδικά. Ας ονομάσουμε αυτό το στάδιο «*προθεωρητικό*», σε αντιδιαστολή προς το καθ΄ εαυτό *θεωρητικό*, όπου ο προσανατολισμός είναι προς το άγνωστο, σε αναζήτηση του γνησίως καινούργιου.[7] Το προθεωρητικό συμπεριλαμβάνει μεταξύ άλλων την δεξαμενή των παραδοχών, τόσο μεθοδολογικών/φιλοσοφικών όσο και φυσικών/μαθηματικών, που προϋποτίθενται άρρητα ως αυτονόητες. Ακολουθώντας τον Μπαλτά, τις ονόμασα «υποθέσεις» –εντός εισαγωγικών– σε αντιδιαστολή προς τις υποθέσεις που διατυπώνονται ρητά. Θεώρησα ακόμη ότι αντιστοιχούν στα «κρυμμένα λήμματα» του Lakatos. Συνεπώς, το προθεωρητικό έχει δύο όψεις. Αφ’ ενός, παίζει τον ρόλο ενός «απείρου» που πρέπει να αφαιρεθεί από την απειρία του Όλου, ώστε να οροθετηθεί το πεδίο της

[7] Οι όροι «θεωρητικό» και «προθεωρητικό» αναφέρονται ειδικά στην θεωρητική φυσική και δεν έχουν γενικότερη ισχύ.

έρευνας. Αφ΄ ετέρου, είναι *δυναμικό*, καθώς διαρκώς αναμοχλεύεται από την εισβολή του καινούργιου, μια διαλεκτική που θυμίζει εκείνη των «αποδείξεων και ανασκευών» (Lakatos), και καθώς επιδέχεται διορθώσεις στην συναφή διαδικασία της «ενσωμάτωσης των λημμάτων», ή, αλλιώς, της μετατροπής των «υποθέσεων» σε υποθέσεις. Υπάρχει μια ενδιάμεση επιφάνεια, μια διατομή μεταξύ θεωρητικού και προθεωρητικού, όπου τίθενται μεθοδολογικά και εννοιολογικά ζητήματα. Στο κέντρο τους, βρίσκεται ο προσδιορισμός της έννοιας του *Ενός*. Αφορά το γεγονός ότι, στην αρχή κάθε έρευνας, είμαστε υποχρεωμένοι να «αποκόψουμε», να ακινητοποιήσουμε, να παγώσουμε τρόπον τινά, ένα μέρος του όλου, στο οποίο επικεντρωνόμαστε ως το αντικείμενο της έρευνάς μας, ενώ το υπόλοιπο του όλου περιορίζεται στον ρόλο του «περιβάλλοντος». Αυτή η διαδικασία εισάγει μια «τομή»,[8] οι δύο όψεις της οποίας τίθενται κατά περίπτωσιν από την εκάστοτε θεωρία. Το αποκοπτόμενο Εν σε αυτό το σημείο δεν έχει κανέναν άλλον προσδιορισμό εκτός από ό,τι θεωρείται ήδη γνωστό και δεδομένο.

Αυτό, το θεωρούμενο ως ήδη γνωστό, είναι το όριό του. Δηλαδή, έχουμε κάτι αφηρημένο που οροθετείται, κάτι εντελώς απροσδιόριστο που τίθεται ως προσδιορισμένο, όπου ο προσδιορισμός είναι μόνον ένα όριο γενικά. Είναι το περιεχόμενο της πρότασης, «έστω ένα…», με την οποία αρχίζει ένας συλλογισμός. Για παράδειγμα, στα μαθηματικά, όταν λέμε, λόγου χάριν, «έστω μια ομάδα», θεωρούμε ως γνωστό αυτό που χαρακτηρίζει γενικά την δομή ομάδας, και αυτό είναι το σημείο μηδέν από το οποίο θα προχωρήσουμε για να προσδώσουμε ή να ανακαλύψουμε πιο εξειδικευμένους προσδιορισμούς. Το ίδιο συμβαίνει στην φυσική, όταν λέμε, π.χ., «έστω ένα σώμα…». Αλλά και κατά την προετοιμασία ενός πειράματος, υπάρχει ένα σώμα θεωρίας το οποίο «φορτίζει» τις πρακτικές ενέργειες και τις συναφείς αισθητηριακές αντιλήψεις, ώστε να πληρούνται οι όροι που χαρακτηρίζουν ένα επιστημονικό πείραμα. Το αφηρημένο «Εν», χαρακτηριζόμενο μόνον από ό,τι είναι ήδη γνωστό, είναι με αυτήν την έννοια ένα «*στοιχείο γένους*» (generic). Κλασικά, και σύμφωνα με την τυπική λογική, το στοιχείο γένους είναι το «κοινό» υπόβαθρο όλων των διαφορετικοτήτων. Το χαρακτηρίζει η αφηρημένη ταυτότητα, «a = a». Η σημασία του είναι η *υπαγωγή* όλων των *διαφορετικών* ατομικοτήτων σε μια *κοινή έννοια*. Αυτή, όμως, είναι μια άποψη μονόπλευρη, που «παγώνει» ένα στιγμιότυπο μιας ζωντανής διαδικασίας. Παραμένοντας εντός του πλαισίου της κλασικότητας, παρατηρούμε ότι η ταυτότητα «a = a» παύει να είναι κενή κοινοτοπία και αποκτά περιεχόμενο όταν σημαίνει την εξίσωση οντοτήτων που κατά τα άλλα είναι διαφορετικές. Η ταυτότητα, δηλαδή, αποκτά νόημα όταν *προϋποθέτει* το αντίθετό της, την διαφορά. Και αντιστρόφως, η διαφορά έχει νόημα όταν προϋποθέτει την ταυτότητα. Έχουμε δηλαδή έννοιες οι οποίες ορίζονται *διαφορικά*, προϋποθέτοντας και αναφερόμενες στο αντίθετό τους. Μαθηματικά, αυτό εκφράζεται με την μετατόπιση από την ταυτότητα στην έννοια του *ισομορφισμού*. Για να το πούμε χονδρικά, όταν κόβουμε ένα μήλο σε δύο ίσα μέρη, η ισότητα δεν

[8] Να μην συγχέεται με την επονομαζόμενη «τομή Heisenberg».

σημαίνει ότι τα μέρη ταυτίζονται, αλλά ότι υπάρχει μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ τους. Η *θεωρία των κατηγοριών* είναι το κατάλληλο πλαίσιο για την ανάδειξη της οπτικής που υπερβαίνει τον μονόπλευρο χαρακτήρα της τυπικής αντίληψης [Α, 27]. Ειδικότερα, δεν έχουμε μιαν εναλλακτική μαθηματική θεωρία ως προς την παραδοσιακή προσέγγιση που βασίζεται στην θεωρία των συνόλων. Έχουμε μάλλον μιαν αλλαγή Gestalt. Στην θεωρία των συνόλων, ένα στοιχείο ορίζεται στην βάση κάποιας ιδιότητας την οποία συμμερίζεται με όλα τα στοιχεία του συνόλου, και στην οποία βασίζεται ως πρωταρχική η έννοια του «ανήκειν». Στην θεωρία των κατηγοριών, οι καθοριστικές ιδιότητες «απορροφώνται», τρόπον τινά, στην έννοια της εκάστοτε κατηγορίας, ενώ πρωταρχική έννοια, στην θέση του «ανήκειν», είναι οι μορφισμοί μεταξύ των αντικειμένων της κατηγορίας, των εννοιών δηλαδή που αντιστοιχούν στα στοιχεία ενός συνόλου. Δηλαδή, αντί να επικεντρωνόμαστε σε *δομές*, επικεντρωνόμαστε σε *σχέσεις* μεταξύ δομών. Οι κατηγορικές έννοιες επιτρέπουν μια λεπτομερέστερη ματιά και στην σχέση μέρους και όλου. Η εισαγωγή της διαφοράς μέσα στην ταυτότητα οδηγεί σε μιαν έννοια που συλλαμβάνει τόσο το νόημα του *όλου* όσο και ενός *μέρους* το οποίο είναι το ίδιο ένα όλον: ένα *δομημένο μέρος*. Μια τέτοια έννοια είναι εκείνη μιας κατηγορίας με αντικείμενα και υποαντικείμενα. Από αυτήν την άποψη, ας δούμε μερικά σημεία, χρησιμοποιώντας την παραβολή που αρέσκονται να επικαλούνται οι J. Baez και J. Dolan: την παραβολή με τις βοσκοπούλες και τα κοπάδια τους από πρόβατα [28].

Εδώ, η κατηγορία είναι εκείνη που έχει ως αντικείμενα κοπάδια από πρόβατα. Οι μορφισμοί είναι εκείνοι που χρησιμεύουν για την σύγκριση κοπαδιών μεταξύ τους. Τα υποαντικείμενα αντιστοιχούν σε διαφορετικές συλλογές προβάτων *μέσα στο ίδιο κοπάδι***,** οι οποίες ορίζονται στην βάση διαφόρων ταξινομητικών σχημάτων. Η φαινομενική αυθαιρεσία εδώ σημαίνει ότι ο προσδιορισμός τέτοιων σχημάτων συνδέεται με κριτήρια *πέρα* από την σφαίρα της μαθηματικής περιγραφής: υποτίθεται ότι *γνωρίζουμε* τί είναι ένα «κοπάδι πρόβατα», και τί μπορούμε «φυσιολογικά» να κάνουμε με αυτό. Για παράδειγμα, μια μετάθεση των προβάτων αφήνει το κοπάδι αμετάβλητο. Τα πρόβατα μπορούν να ομαδοποιηθούν σύμφωνα με την ηλικία τους, το χρώμα τους, το βάρος τους, το φύλο τους κ.λπ. Αλλά, και ορισμένα *χαρακτηριστικά συμπεριφοράς* είναι επίσης καθοριστικά. Εάν η βοσκοπούλα κουρεύει τα πρόβατά της, τούτο είναι εγγενώς συμβατό με το νόημα των εννοιών που χρησιμοποιούνται. Δεν συμβαίνει το ίδιο αν η βοσκοπούλα εισαγάγει κάτι ασυνήθιστο, π.χ., πηγαίνοντας τα πρόβατα στο κομμωτήριο ή βάφοντάς τα κόκκινα. Με όλα αυτά, η έννοια «κοπάδι πρόβατα» είναι μια *διαχωριστική γραμμή* μεταξύ αυτού που υποτίθεται ότι ενυπάρχει στον ορισμό της κατηγορίας και εκείνου που θα εξειδικευτεί κατόπιν, ως επί πλέον δομή που θα επιπροστεθεί σε ένα μηδενικό επίπεδο αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι όταν λέμε «ένα κοπάδι πρόβατα» δεν εννοούμε τα *κοινά χαρακτηριστικά* τέτοιων οντοτήτων, όπως θα επέβαλε η τυπική λογική, αλλά μάλλον την σύνδεση με μιαν έννοια *προτύπου***.** Ισοδύναμα, δεν διατυπώνονται ρητά ικανές και αναγκαίες συνθήκες για το τι συνιστά ένα αντικείμενο μιας κατηγορίας·

τούτο προσδιορίζεται εξ ολοκλήρου από το *σύνολο των σχέσεών του* με όλα τα άλλα αντικείμενα της κατηγορίας. Είναι αξιοσημείωτο ότι σε αυτό το σημείο υπάρχει συμφωνία με τον τρόπο που η θεωρία προτύπων (prototype theory) της Eleanor Rosch εξετάζει τον σχηματισμό κατηγοριών (να μην γίνεται σύγχυση με την ομώνυμη μαθηματική έννοια) στα πλαίσια της γνωσιακής επιστήμης [29]. Εάν, λοιπόν, θεωρήσουμε μια κατηγορία φυσικών φαινομένων, τότε το στοιχείο γένους υφίσταται στο *οντικό* επίπεδο ως ένα αντικείμενο αυτής της κατηγορίας, και ταυτόχρονα είναι εκείνο το αντικείμενο που ενσαρκώνει την *ιστορική* διαδικασία διαμόρφωσης της έννοιας της εν λόγω κατηγορίας στο *νοηματικό* επίπεδο. Σε αυτό συμπίπτει η ιστορική, καταγωγική συνιστώσα, με την λογική του σχηματισμού εννοιών. Συνεπώς, είναι εύλογο να θεωρηθεί το στοιχείο γένους–πρότυπο ως *μορφισμός* που ενσωματώνει την ιστορική/λογική διαδρομή μέσω της οποίας οι διαφορετικές ατομικότητες, δηλαδή τα επί μέρους φαινόμενα–αντικείμενα, συνδέονται με το πρότυπο. Ορίζονται έτσι ως αντικείμενα της κατηγορίας όχι επειδή συμμερίζονται μια κοινή «ουσία», αλλά επειδή αποκτούν υπόσταση ως το σύνολο των μεταξύ τους σχέσεων–μορφισμών. Είναι μια ευέλικτη, ανοικτών ορίων, αντι-ουσιοκρατική προσέγγιση, η οποία θυμίζει τις «οικογενειακές ομοιότητες» του Wittgenstein.

Αυτή η παρατήρηση είναι κρίσιμη για την προσπάθεια να ανιχνευθούν οι άρρητες «υποθέσεις», ή τα «κρυμμένα λήμματα», τα οποία, δια της ρητής διατύπωσής τους και της ενσωμάτωσής τους, θα κινήσουν την περαιτέρω γνωστική διαδικασία. Με άλλα λόγια, είναι κρίσιμος ο προσδιορισμός του «σημείου μηδέν», αλλιώς κινδυνεύει κανείς να παγιδευτεί σε μιαν άπειρη οπισθοδρόμηση. Αυτό γίνεται σαφές αν θεωρήσει κανείς, λόγου χάριν, την έννοια ενός μεμονωμένου προβάτου γενικά. Ποιό θα ήταν το «σημείο μηδέν» σε αυτήν την περίπτωση; Η προσέγγιση της τυπικής λογικής θα μας έκανε να παλινδρομούμε ανάμεσα σε κάτι ολοκληρωτικά απροσδιόριστο, όπως «θηλαστικό», ή «ζώο», ή «ζωντανός οργανισμός», και κάτι ολοκληρωτικά προσδιορισμένο, όπως, π.χ., το γονιδίωμα του προβάτου. Αλλά η άπειρη οπισθοδρόμηση δεν σταματά εδώ. Όλη η ιστορία της εξέλιξης των ειδών προϋποτίθεται, και η οπισθοδρόμηση μπορεί να φτάσει μέχρι την αρχική έκρηξη. Από την άποψη των μαθηματικών, είναι σαν ένα αρχικό ή ένα τελικό αντικείμενο μιας κατηγορίας να διαλύεται στην ομίχλη μιας αφηρημένης δυνατότητας. Η σαφής οροθέτηση του τί προϋποτίθεται μετατρέπει την αφηρημένη σε *πραγματική δυνατότητα*, όρο για την *ενεργό πραγματικότητα* της διαδικασίας, τόσο φυσικής όσο και νοητικής, η οποία ενδιαφέρει κάθε φορά. Στο παράδειγμά μας, όταν εξετάζουμε τα υποαντικείμενα του αντικειμένου «κοπάδι», εκείνο που χρειάζεται είναι η έννοια «πρόβατο», που στην περίπτωση αυτή είναι το περιεχόμενο της έννοιας του «Ενός». Έχουμε να κάνουμε με συλλογές από *πρόβατα*, όχι από αυτιά, μύτες, πόδια, κύτταρα ή οτιδήποτε άλλο, αν και τέτοια στοιχεία θα ήταν κατάλληλα εντός διαφορετικών *πλαισίων* (contexts). Άρρητα, περιοριζόμαστε σε ένα πλαίσιο εντός του οποίου το «πρόβατο» είναι το στοιχείο *γένους*, το έσχατο δηλαδή «μηδενικό επίπεδο» της ανάλυσης. Είναι αυτό που είναι, δεν περιέχει τίποτε περισσότερο από αυτό που ήδη περιλαμβάνεται στις υποθέσεις με τις οποίες ξεκινάμε ρητά. Ας μεταφράσουμε όλα αυτά στην γλώσσα της θεωρίας των κατηγοριών. Κατά τους Baez και Dolan, όταν οι βοσκοπούλες συγκρίνουν τα κοπάδια τους, ορίζουν μιαν *απεικόνιση* μεταξύ τους. Εφευρίσκοντας τους *φυσικούς αριθμούς* μέσω της διαδικασίας της *αποκατηγοριοποίησης*, κάνουν αφαίρεση από κάθε ειδική ιδιότητα του μεμονωμένου προβάτου. Είναι μόνον «πρόβατα» γενικά. Η απεικόνιση απαρίθμησης ενός κοπαδιού, Α, σημαίνει ότι ταυτίζουμε το κάθε πρόβατο χωριστά ως «*καθολικό εκπρόσωπο*» της «προβατότητας». Ένα επόμενο βήμα είναι η σύγκριση εντός διαφορετικών πλαισίων (contexts). Για παράδειγμα, το Α μπορεί να διαιρεθεί σε *υποαντικείμενα*. Τα στοιχεία του –πρόβατα– μπορούν να ομαδοποιηθούν, π.χ., σύμφωνα με την ηλικία, σύμφωνα με το φύλο εντός μιας ηλικιακής ομάδας, σύμφωνα με το χρώμα εντός κάθε φύλου κ.λπ. Έχουμε την εικόνα ενός δέντρου, ενός γραφήματος με *κόμβους* (nodes) οι οποίοι είναι τα σημεία διακλάδωσης που χωρίζουν μεταξύ τους τα *στάδια* (stages), δηλαδή τις επιλεγμένες ιδιότητες κατηγοριοποίησης. Οι κόμβοι είναι οι *συνθήκες* που *εξαναγκάζουν* (είναι η μαθηματική έννοια του forcing) τα στοιχεία να ανήκουν εκεί που ανήκουν, και τα στάδια είναι τα *ονόματα* των *πλαισίων* (contexts) εντός των οποίων ταξινομούνται τα στοιχεία. Η συλλογή των κόμβων έχει την δομή μιας *προ-διάταξης* (pre-order), και μοιάζει με ένα *μοντέλο Kripke*: από την στιγμή που φτάνουμε σε ένα στάδιο, αυτό δεν αλλάζει, μόνον εξειδικεύεται περαιτέρω με τρόπο σωρευτικό. Το πρότυπο εντός κάθε κοπαδιού θα είναι ένα μοναδιαίο στοιχείο (singleton) $\{*\}$, και η εξατομίκευση κάθε προβάτου εντός του αντικειμένου Α –δηλαδή του κοπαδιού– της κατηγορίας τέτοιων κοπαδιών, είναι μια απεικόνιση $\{*\} \to A$. Αυτή η απεικόνιση προσδιορίζει ένα μεμονωμένο πρόβατο, a, ως στοιχείο τού Α. Σε αυτό το επίπεδο, η απεικόνιση είναι *πλήρης* (complete) και *διαχωρίζουσα* (separating). Το μοναδιαίο στοιχείο είναι ένα *τελικό αντικείμενο* και έχει ένα *καθολικό στοιχείο* (global element), δηλαδή ένα *σημείο* στο Α. Συγκρατούμε αυτήν την έννοια του σημείου, στην οποία θα επανέλθουμε στην συνέχεια. Με αυτούς τους όρους, ένα «στοιχείο» νοείται ως γενίκευση της απεικόνισης $\{*\} \to A$ σε $B \to A$, ή $\{*\} \to B \to A$ ακριβέστερα, όπου Β είναι ένα άλλο αντικείμενο της ίδιας κατηγορίας. Η έννοια του στοιχείου γένους γενικεύεται επίσης: είναι η ταυτοτική απεικόνιση $A \to A$. Είναι ένας αυτομορφισμός, και σε χαρακτηριστικές περιπτώσεις με φυσικό ενδιαφέρον, είναι ένας *εσωτερικός* (inner) αυτομορφισμός. Θα επανέλθω πιο κάτω λεπτομερέστερα σε αυτές τις έννοιες.[9]

[9] Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι, στο πλαίσιο της μη-μεταθετικής γεωμετρίας που εισήγαγε, ο A. Connes τονίζει την σύνδεση μεταξύ εσωτερικών αυτομορφισμών και *εσωτερικών* (internal) *συμμετριών* [30]. Δεδομένου ότι αυτές εκφράζονται μέσω συμμετριών βαθμίδας (gauge), και δεδομένου ότι τα φυσικά (παρατηρήσιμα) μεγέθη είναι τα αναλλοίωτα υπό συμμετρίες βαθμίδας μεγέθη μιας θεωρίας, αυτά τα φυσικά μεγέθη με τις αντίστοιχες τιμές τους μπορούν να είναι ο σκελετός για την συγκρότηση της έννοιας του στοιχείου γένους της θεωρίας.

1.5 Κλασικό: αμεσότητα της σχέσης καταστάσεων και ιδιοτήτων

Έχουμε, συνεπώς, μιαν έννοια *κατηγοριοποίησης*, ως ανόδου κατά ένα σκαλοπάτι σε μιαν ιεραρχημένη κλίμακα. Τονίζω εδώ ότι η έννοια της κατηγορίας εμπεριέχει τόσο την έννοια της *δομής* όσο και εκείνη του μορφισμού, δηλαδή της *σχέσης*, και έτσι είναι κατάλληλη για να εκφράσει μαθηματικά χαρακτηριστικές όψεις μιας διαδικασίας. Θα επιμείνω σε αυτό το σημείο, εξετάζοντας λεπτομερέστερα την έννοια του στοιχείου γένους. Σύμφωνα με ό,τι έχω αναφέρει, αυτή η θεμελιώδης έννοια συνδέεται στενά με την δυνατότητα και την διαδικασία της *εξατομίκευσης* ενός υπό εξέτασιν φυσικού συστήματος, με άλλα λόγια με την φύση της «τομής» στις απαρχές *κάθε* γνωστικής διαδικασίας, όπως εξήγησα στην §1.4. Ειδικότερα, το κάθε απομονωμένο σύστημα –το «στιγμιότυπο»–, προϊόν της τομής, οροθετείται από έναν αριθμό *ιδιοτήτων*. Αμέσως ανακύπτει το κλασικό ερώτημα: Οι ιδιότητες είναι κάτι που «έχει» εγγενώς το εν λόγω σύστημα, κάτι που η επιστημονική έρευνα αποκαλύπτει ή ανακαλύπτει, ή, αντιθέτως, είναι κάτι που το σύστημα «αποκτά» σε μια διαδικασία αλληλεπίδρασης, άρα και σε μια διαδικασία σκόπιμα σχεδιασμένης αλληλεπίδρασης όπως είναι ένα πείραμα ή μια μέτρηση; Η πρώτη αντίληψη είναι συναφής με την «υπόθεση» της κλασικής φυσικής, ότι ένα τέτοιο σύστημα εμπεριέχει όλες τις πληροφορίες για την πλήρη περιγραφή του. Η *φιλοσοφική* θέση της *μηχανιστικής* σκέψης είναι η *απολυτοποίηση* αυτής της «υπόθεσης». Η αντίστοιχη υπόθεση, δηλαδή η «υπόθεση» που διατυπώνεται ρητά, είναι ότι το σύστημα βρίσκεται σε ορισμένες *καταστάσεις* στις οποίες έχει ιδιότητες. Αυτές εκφράζονται μέσω φυσικών (παρατηρήσιμων) μεγεθών τα οποία έχουν *ορισμένες τιμές* (possessed values principle). Μια *μέτρηση* έγκειται στην *σκόπιμη αναπαραγωγή* ενός φαινομένου με στόχο την απόδοση τιμής σε κάποια φυσικά μεγέθη, με την χρήση μιας *διάταξης συσκευών*. Εν τούτοις, όπως ισχυρίστηκα προηγουμένως, η μηχανιστική φιλοσοφία, και γενικότερα η τυπική σκέψη, *δεν* συνδέεται μονοσήμαντα με την κλασική φυσική. Ειδικότερα αυτό ισχύει για την φιλοσοφική σκέψη που επεκράτησε να ονομάζεται «απλοϊκός ρεαλισμός». Πριν έλθουν οι κβαντικές θεωρίες να τον ανατρέψουν, μπορούσε να ανασκευαστεί στα πλαίσια της κλασικότητας μέσω μιας κριτικής στο φιλοσοφικό επίπεδο, δίνοντας την θέση του σε έναν ρεαλισμό καθόλου απλοϊκό. Αυτό, όμως, προϋποθέτει τον απεγκλωβισμό από την λογική της τυπικής ταυτότητας, διότι προϋποθέτει την μετατόπιση από το αίτημα της μη-αντίφασης, στην διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο σχηματίζονται τα νοήματα ([16], σ. 232). Εννοώ την διαλεκτική λογική ανάλυση, η οποία αντιμετωπίζει την αντίφαση όχι ως φραγμό στην γνωστική διαδικασία, αλλά ως την κινητήρια δύναμη για την ανάδυση του εννοιολογικά καινούργιου.

Από αυτήν την σκοπιά, αν επιστρέψουμε στην έννοια του στοιχείου γένους, θα ανακαλύψουμε μια διχοτομία ήδη από τα πρώτα βήματα, υπαρκτή εντός της κλασικότητας, αναγνωρίσιμη αλλά όχι αναγνωρισμένη. Ας επανέλθουμε, λοιπόν. Από την αρχή της φυσικής περιγραφής ενός συστήματος, *υποθέτουμε* έναν ορισμό με δύο όψεις. Πρώτον, αποδίδουμε ένα νόημα στην πρόταση ότι το σύστημα βρίσκεται σε *μια καθορισμένη κατάσταση*. Θεωρούμε έτσι κάποιον καταστατικό χώρο. Κατόπιν, δεχόμαστε ότι αυτή η κατάσταση συνδέεται εγγενώς με *ιδιότητες* που προσιδιάζουν στο εξεταζόμενο σύστημα, οι οποίες εκφράζονται μέσω κατάλληλα επιλεγμένων, σε μιαν ιστορική διαδικασία, φυσικών μεγεθών.[10] Τέλος, αυτά τα μεγέθη είναι τα στοιχεία εκείνα που εμφανίζονται στις (διαφορικές) εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα και την κίνησή του θεωρητικά, και που έχουν –ή αποκτούν– ορισμένες (πραγματικές) τιμές όταν και εάν μετρηθούν πειραματικά. Είναι σκόπιμο να σημειώσω εδώ μιαν αντιστοιχία με την οπερασιοναλιστικού τύπου ορολογία [31], επικρατούσα στην λεγόμενη «κβαντική λογική» [32, 33], χωρίς αυτό να σημαίνει προσχώρηση στην φιλοσοφία του οπερασιοναλισμού. Η μέτρηση αντιστοιχεί στην «δοκιμή» (test), μια πειραματική διαδικασία σχετική με το εξεταζόμενο σύστημα, όπου έχει οριστεί μια έννοια «θετικής απόκρισης». Για κάποια πραγματοποίηση (realization) του φυσικού συστήματος, μια δοκιμή είναι «σίγουρη» *εάν θα είχε* θετική απόκριση *εάν γινόταν* το αντίστοιχο πείραμα. Στο σύνολο των δοκιμών ορίζεται μια σχέση προ-διάταξης: $\alpha \preccurlyeq \beta$, εάν και μόνον εάν η β είναι σίγουρη όταν η α είναι σίγουρη. Η προ-διάταξη εκδηλώνει έναν «νόμο». Προκύπτουν έτσι κλάσεις ισοδυναμίας δοκιμών, στο σύνολο των οποίων η προ-διάταξη επάγει μια μερική διάταξη. Μια ιδιότητα του συστήματος προσδιορίζεται από μια τέτοια κλάση ισοδυναμίας, και είναι ένα «στοιχείο φυσικής πραγματικότητας» [34]. Εάν μια δοκιμή είναι σίγουρη για κάποια πραγματοποίηση του συστήματος, η ιδιότητα που εκπροσωπεί την αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας είναι «ενεργεία» σε αυτήν την πραγματοποίηση, αλλιώς είναι «δυνάμει». Η μερική διάταξη των ιδιοτήτων μπορεί να ερμηνευθεί ως *σχέση συνεπαγωγής*, κάτι που θα μας χρησιμεύσει στην συνέχεια. Υπάρχει έτσι μια έννοια ιδιοτήτων που είναι «ισχυρότερες» από άλλες. Η κατάσταση του συστήματος θα αντιστοιχεί στην ισχυρότερη ενεργεία ιδιότητα σε μια δεδομένη πραγματοποίησή του.

Η διχοτομία που ανέφερα προηγουμένως συνίσταται στο γεγονός ότι οι ιδιότητες έχουν διπλή όψη. Αφ' ενός, ορίζουν την *κατάσταση* του συστήματος καθ΄ εαυτή. Η κατάσταση *είναι* οι (ισχυρότερες) ιδιότητες και αντιστρόφως. Με αυτήν την έννοια, εκπροσωπούν μια θεωρητική αντίληψη, αρχικά περί του τί αντιλαμβανόμαστε ότι είναι το σύστημα. Σε αυτό το πνεύμα, μπορούμε να τις χαρακτηρίσουμε ως μιαν *αντανάκλαση του όλου*, της ολότητας η οποία νοείται ότι απαρτίζει το σύστημα, *στον εαυτό του*. Αφ' ετέρου, αυτές οι ίδιες ιδιότητες εκφράζονται προς τα έξω, ούτως ειπείν, στην αλληλεπίδραση αυτής της ίδιας ολότητας με *άλλες* τέτοιες ολότητες, τόσο σε φυσικά φαινόμενα όσο και σε πειράματα, όταν παίρνουν τιμές ως αποτέλεσμα πειραμάτων. Από αυτήν την άποψη, οι ιδιότητες είναι *αντανάκλαση σε ένα άλλο*: από δυνάμει γίνονται ενεργεία. Η αντανάκλαση στον εαυτό και η αντανάκλαση στο άλλο

[10] Να σημειωθεί η διάκριση μεταξύ ιδιοτήτων και της έκφρασής τους. Υπάρχει εδώ συνάφεια με την «αιτιακή-περιγραφική» προσέγγιση στο πρόβλημα της αναφοράς των θεωρητικών όρων [5, σ.291 κ.ε.].

είναι αντιστοίχως το *εσωτερικό* και το *εξωτερικό*. Και τα δύο είναι το ίδιο περιεχόμενο, αποκαλύπτοντας την ενότητά τους στην πορεία της *πραγματοποίησης* ενός πειράματος. Αυτή η ενότητα, των ιδιοτήτων ως *περιεχομένου* με την έκφρασή τους ως *μορφής*, εκδηλώνεται με τρόπο *άμεσο* στην κλασική μηχανική με το γεγονός ότι οι ίδιες ιδιότητες, δηλαδή η παρουσία σε μια θέση και η κατοχή μιας ορμής, *και* ορίζουν την κατάσταση ενός συστήματος ως σημείο σε έναν χώρο φάσεων, *και* χρησιμεύουν ως θεμελιώδη μεγέθη, συνάρτηση των οποίων είναι κάθε άλλο μέγεθος. Επιπρόσθετα, η εν λόγω ενότητα αντανακλάται στο γεγονός ότι η μέτρηση ενός μεγέθους ανάγεται σε μιαν *αλλαγή κατάστασης* της χρησιμοποιούμενης συσκευής, μιαν αλλαγή που συνάγεται απ' ευθείας από την τιμή του μεγέθους που αντιστοιχεί σε έναν καλώς ορισμένο συνδυασμό των ιδιοτήτων της συσκευής. Η δυνατότητα *ελέγχου* των καταστάσεων και των αντίστοιχων μεγεθών στην συσκευή υπάρχει επειδή η συσκευή ενσαρκώνει έναν συνδυασμό γνώσεων, είναι η εμπράγματη ύπαρξη ενός σώματος θεωρίας, είναι κατά την έκφραση του Bachelard ένα «πραγμοποιημένο θεώρημα» (théorème réifié) [35]. Αυτή ακριβώς η γνωστική διαδρομή είναι που εδραιώνει τις αναζητούμενες συνδέσεις στο εξεταζόμενο σύστημα, ταξινομώντας το έτσι και νοηματοδοτώντας το. Η «υπόθεση», συμβατή μεν με το πλαίσιο της κλασικής φυσικής, αλλά όχι επιβεβλημένη, είναι ότι η τομή-όρος της γνωστικής διαδικασίας δεν αλλοιώνει την ταυτότητα ενός εξεταζομένου φυσικού συστήματος. Οι σχέσεις αιτίας και αποτελέσματος, μορφής και περιεχομένου, μέρους και όλου, όλες εμπεριέχονται σε αυτήν την «υπόθεση». Η μηχανιστική αντίληψη –η ακριβής ονομασία για τον «απλοϊκό ρεαλισμό»– απολυτοποιεί, όπως ανέφερα, αυτήν την «υπόθεση». Έτσι, εξαφανίζει την διάκριση του «εσωτερικού» από το «εξωτερικό», της κατάστασης ενός φυσικού συστήματος από την τιμή που μια μέτρηση αποδίδει στα φυσικά μεγέθη τα οποία εκφράζουν τις χαρακτηριστικές ιδιότητές του. Ακριβέστερα, υποθέτει ότι η κατάστασή του σε κάθε δεδομένη στιγμή συμπίπτει με αυτό που φιλοσοφικά θα χαρακτηρίζαμε ως το Είναι του, ενώ η μέτρηση των φυσικών του ιδιοτήτων μας αποκαλύπτει πλευρές αυτού του Είναι, οι οποίες συντιθέμενες προσδιορίζουν την σύνολη ύπαρξή του.[11]

Στο κλασικό εννοιολογικό πλαίσιο, λοιπόν, ενώ *κατάσταση* φυσικού συστήματος, *φυσικό μέγεθος* (ε.ε. ΦΜ) και *τιμή* φυσικού μεγέθους, είναι διακριτά, εν τούτοις αλληλοσυσχετίζονται *άμεσα*, με την έννοια ότι η μεταξύ τους σχέση εκτείνεται εντός των ορίων που θέτει η αρχετυπική *σύμπτωση* και των τριών. Τούτο εκφράζεται μαθηματικά ως εξής: Το *πρότυπο* της φυσικής περιγραφής είναι ένας *καταστατικός χώρος*, S, ο οποίος συνήθως είναι η συνεφαπτομένη δέσμη, T*M, μιας κατάλληλης πολλαπλότητας, M, που νοείται ως ο χώρος των συναπεικονίσεων, ή, αλλιώς, ως μια συν-συναφής (co-adjoint) τροχιά υπό την δράσιν μιας κατάλληλης ομάδας συμμετριών του συστήματος. Ο χώρος S είναι επίσης εφοδιασμένος με μια συμπλεκτική δομή έτσι ώστε μια δεδομένη χαμιλτονιανή συνάρτηση να συμπυκνώνει

[11] Όσον αφορά την κβαντομηχανική, συναφής με τα ανωτέρω είναι η ανάλυση του Καρακώστα [36] σχετικά με ένα *έσω* και ένα *έξω* επίπεδο πραγματικότητας.

την δυναμική του συστήματος. Το πρότυπο φυσικών μεγεθών είναι το ζεύγος *θέση – ορμή* και οι γενικεύσεις του κατά τον χαμιλτονιανό φορμαλισμό. Εδώ, κατάσταση φυσικού συστήματος και τιμές ΦΜ είναι *ένα και το αυτό*: είναι τα σημεία του χώρου S. Αυτό γενικεύεται στην έννοια του ΦΜ ως μιας *πραγματικής συνεχούς (ή και λείας) συνάρτησης* στον S. Το αίτημα της πραγματικότητας των τιμών ανταποκρίνεται στο γεγονός ότι ως έσχατο σημείο αναφοράς για την αποτίμηση ενός ΦΜ θεωρείται ένα φυσικό σύστημα για το οποίο η αμεσότητα της σχέσης κατάστασης – τιμής ΦΜ είναι γνωστή και δεδομένη, αφ' ενός, και, αφ' ετέρου, η τιμή που αναζητάμε είναι ένα χωρο-χρονικό σημείο με την μορφή της ένδειξης ενός μετρητή άμεσα προσβάσιμης στην αισθητηριακή παρατήρηση. Με άλλα λόγια, είναι ένα φυσικό σύστημα το οποίο συναπαρτίζεται από δύο μέρη. Πρώτον, από το εξεταζόμενο σύστημα, και, δεύτερον, από μια συσκευή μέτρησης η οποία στην κατασκευή της ενσωματώνει την ήδη αποκτημένη γνώση για την κατηγορία φαινομένων που ενδιαφέρει κάθε φορά (το «πραγμοποιημένο θεώρημα»). Σε αυτήν την διαδικασία υπονοείται η παραδοχή ότι ένα όλον είναι το άθροισμα των μερών του. Το εξεταζόμενο σύστημα ως μέρος του όλου που συναπαρτίζει με την συσκευή διατηρεί την ταυτότητά του ως ένα άλλο όλον, έτσι ώστε η κατάστασή του να αντανακλάται στην αλλαγή κατάστασης της συσκευής όπως αυτή με την σειρά της εκφράζεται στην ένδειξη του μετρητή. Αυτό όμως συντελείται με τέτοιον τρόπο, ώστε η εν λόγω τιμή να ανήκει σε ένα ΦΜ που αντιστοιχεί στην κατάσταση του μέρους «εξεταζόμενο σύστημα». Επί πλέον, το αίτημα της συνέχειας ή/και της διαφορισιμότητας της συνάρτησης που αντιστοιχεί στο κάθε φυσικό μέγεθος, καθώς και το αίτημα ο καταστατικός χώρος S να είναι μια πολλαπλότητα, ανταποκρίνονται στην υπόθεση ότι η χρονική εξέλιξη του συστήματος γίνεται με τρόπον ομαλό και περιγράψιμο με κάποιου είδους (διαφορικές) εξισώσεις. Όλες αυτές οι παραδοχές είναι συμβατές με την φιλοσοφική παράδοση του ατομισμού.[12]

Τα ανωτέρω αποδίδονται μαθηματικά ως εξής: Στο ΦΜ Α αντιστοιχεί μια συνάρτηση f_A: $S \to \nabla$ (∇ είναι το σώμα των πραγματικών αριθμών), δηλαδή ένα στοιχείο του εκθετικού συνόλου ∇^S, η οποία αποδίδει στην κατάσταση $s \in S$ τον πραγματικό αριθμό $a \in \nabla$. Αυτή είναι η τιμή τού Α στην κατάσταση s, συμβολιζόμενη, έστω, με $V^s(A)$. Η διατύπωση «τιμή τού Α *στην κατάσταση* s»[13] γίνεται με την *ύστερη* γνώση της ανάγκης να επισημανθεί η διάκριση κατάστασης – τιμής του ΦΜ, διάκριση που ιστορικά άρχισε να γίνεται μόνον με την ανάπτυξη της στατιστικής φυσικής και που είναι αναγκαία στις κβαντικές θεωρίες. Στην κλασική μηχανική αρχικά

[12] Τα ανωτέρω, για την ακρίβεια, αναφέρονται στην κλασική μηχανική. Στην ειδική σχετικότητα, ο φασικός χώρος, αλλά και η χαμιλτονιανή συνάρτηση και ο τρόπος καθορισμού των τροχιών, είναι όλα διαφορετικά. Μπορούμε όμως να παραβλέψουμε τις διαφορές διότι εδώ εξετάζουμε τον φασικό χώρο μόνον ως τοπολογικό χώρο, αγνοώντας την συμπλεκτική δομή. Μάλιστα, πολλά από όσα αναφέρω γενικεύονται στην πολυσυμπλεκτική, συναλλοίωτη χαμιλτονιανή προσέγγιση στην κλασική θεωρία πεδίων, στο πνεύμα των de Dodner και Weyl. Δεν θα επεκταθώ καθόλου σε αυτό.

[13] Η απόδοση ακριβούς τιμής σε ένα μέγεθος με συνεχές φάσμα τιμών, και η κατάσταση ως σημείο, είναι λεπτό ζήτημα μαθηματικά και αμφιλεγόμενο φιλοσοφικά, συνδεόμενο με το γεγονός ότι ένα σημείο έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue. Αυτό δεν επηρεάζει τον συλλογισμό μου.

διατυπώνονται λογικές κρίσεις του τύπου: το ΦΜ Α έχει ή δεν έχει τιμή a. Πρόκειται δηλαδή για κρίσεις της ποιότητας (και, δυϊκά, κρίσεις της ύπαρξης). Πιο συγκεκριμένα, στο ζεύγος $s \in S$ και $a \in \nabla$ αντιστοιχεί μία και μοναδική συνάρτηση $f_A \in \nabla^S$ τέτοια, ώστε $f_A(s) = a$. Αλλιώς: Στο *σύνολο* S και στο *σύνολο* ∇, αντιστοιχεί το *σύνολο* ∇^S και μια συνάρτηση αποτίμησης (evaluation) ev: $\nabla^S \times S$ ™ ∇, τέτοια ώστε: ev: (f_A , s) # a. Εδώ ο τονισμός είναι στο ότι το ∇^S είναι ένα *σύνολο* συναρτήσεων, είναι όμως ταυτόχρονα ένα σύνολο *συναρτήσεων*. Δηλαδή, στο ζεύγος (f_A , s) αντιστοιχεί μια συναρτησιακή (functional) σχέση, έστω $\hat{s}(f_A)$, η οποία δεν είναι παρά ο μετασχηματισμός Gelfand, $\hat{s}(f_A) = f_A(s) = a$. Η μετατόπιση τονισμού εδώ δεν συνιστά ουσιαστική διάκριση. Εν τούτοις, μαζί με τον μετασχηματισμό Gelfand, αναδεικνύει μιαν άλλη όψη των σημείων s του χώρου S: είναι οι χαρακτήρες, αλλιώς τα στοιχεία του φάσματος, αλλιώς οι καθαρές καταστάσεις της πραγματικής μεταθετικής C*-άλγεβρας, C(S) □ ∇^S (ή $C^\infty(S)$) [B]. Η απάλειψη των διακρίσεων μεταξύ των πλευρών του χαρακτήρα της συνάρτησης f_A που εκπροσωπεί το ΦΜ Α, στο κλασικό πλαίσιο, δεν οφείλεται μόνον στο ότι εδώ παίρνουν μια μάλλον τετριμμένη μορφή από μαθηματική άποψη. Συναρτάται και με το φυσικό γεγονός της άμεσης σχέσης μεταξύ καταστάσεων και τιμών των φυσικών μεγεθών. Η συνάρτηση f_A *διαμεσολαβεί* μεν μεταξύ των δύο, αλλά η διαμεσολάβηση επισκιάζεται και κυριαρχείται από την *αμεσότητα*.

1.6 Κβαντικό: διαμεσολάβηση μεταξύ καταστάσεων και ιδιοτιμών

Στο κβαντικό πλαίσιο, η αμεσότητα της σχέσης κατάστασης – τιμής ΦΜ διαρρηγνύεται. Ακριβέστερα, οι δύο αυτοί πόλοι απομακρύνονται, η άμεση ενότητά τους υποχωρεί και υποκαθίσταται από μιαν αλυσίδα ενδιάμεσων κρίκων που διαμεσολαβούν μεταξύ τους. Ο διαμεσολαβητής, που στην κλασική περίπτωση ήταν μάλλον σκιώδης με την μορφή της συνάρτησης f_A, γίνεται τώρα κυρίαρχος με την έννοια του παρατηρήσιμου μεγέθους (ΠΜ – observable), μαθηματική μορφή του οποίου είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής σε έναν κατάλληλο χώρο Hilbert, H, ο οποίος αντικαθιστά εν μέρει τον κλασικό καταστατικό χώρο S (λέω «εν μέρει» διότι η αντικατάσταση αφορά τις καταστάσεις, όχι τις τιμές ΦΜ).[14] Μάλιστα, στην αξιωματική διατύπωση των κβαντικών θεωριών στην βάση C*-αλγεβρών, πρωταρχική έννοια είναι το ΠΜ ενώ ο χώρος Hilbert είναι παράγωγος ως στοιχείο αναπαράστασης μιας C*-άλγεβρας μέσω της κατασκευής Gelfand-Naimark-Segal (GNS). Όσο για την αποτίμηση του ΠΜ που γίνεται με την μέτρηση, μετατρέπεται σε *πρόβλημα της μέτρησης* που συνιστά *σημείο κρίσης* για την θεμελίωση των κβαντικών θεωριών [37, 38]. Εάν δεχτεί κανείς τον ορισμό τού Marx [39] για το τί σημαίνει

[14] Το γεγονός ότι οι τελεστές ορμής και θέσης δεν είναι φραγμένοι, και γενικότερα η περίπτωση μη φραγμένων τελεστών, και οι αναπροσαρμογές των χώρων Hilbert (π.χ., εξοπλισμένοι –rigged– ή εφοδιασμένοι –equipped– χώροι Hilbert) δεν αλλάζει την συλλογιστική που θέλω να εκθέσω εδώ και δεν εξετάζεται.

«κρίση», ότι δηλαδή συνίσταται στην βίαιη βεβαίωση της ενότητας δύο πόλων (εδώ της κατάστασης και των τιμών ΠΜ) που, μολονότι χωρισμένοι, εν τούτοις παραμένουν ενωμένοι, παρατηρεί ότι αυτό αποδίδεται με μια σειρά δηλώσεων του τύπου: «*εάν* ένα σύστημα βρίσκεται σε μια κατάσταση, και *εάν* αυτή είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή που παριστά ένα ΠΜ, και *εάν* γίνει μια μέτρηση αυτού του μεγέθους, τότε η τιμή που θα προκύψει θα είναι η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στην εν λόγω ιδιοκατάσταση». Στην θέση της κλασικής συνάρτησης f_A, η οποία εξέφραζε μιαν *αναγκαία* σύνδεση κατάστασης και τιμών ενός ΦΜ, βρίσκεται τώρα η *αναμενόμενη τιμή* ενός ΠΜ που εκφράζει το σύνολο των *δυνατοτήτων* για την έκβαση μιας μέτρησης. Έτσι, «*... ένα κβαντικό αντικείμενο συνιστά μιαν ολότητα οριζόμενη από όλες τις δυνατές σχέσεις ... στις οποίες αυτό το αντικείμενο μπορεί να ενέχεται .... η απόδοση μιας ιδιότητας σε ένα κβαντικό αντικείμενο σημαίνει την αναγνώριση σε αυτό το αντικείμενο μιας **οντικής δυνατότητας** να παραγάγει φαινόμενα οποτεδήποτε εμπλέκεται σε διάφορες πιθανές σχέσεις με άλλα πράγματα ή οποτεδήποτε εμβαπτίζεται σε ένα κατάλληλο πειραματικό πλαίσιο*»· και «*... ένα κβαντικό αντικείμενο υπάρχει, ανεξάρτητα από οποιεσδήποτε λειτουργικές διαδικασίες, μόνο με την έννοια της "δυνατότητας", δηλαδή, ως χαρακτηριζόμενο από ένα σύνολο δυνάμει πιθανών τιμών των διάφορων φυσικών ποσοτήτων οι οποίες πραγματώνονται όταν το αντικείμενο αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του ή με ένα κατάλληλο πειραματικό πλαίσιο*» ([38], έμφαση στο πρωτότυπο). Τέλος, η άλγεβρα C(S) αντικαθίσταται από την *μη μεταθετική* άλγεβρα των ΠΜ, ή των αντίστοιχων τελεστών, πράγμα που φέρνει στο προσκήνιο την έννοια μιας *μη μεταθετικής γεωμετρίας* στην θέση της κλασικής γεωμετρίας [40].

Επιστρέφοντας στο κλασικό πλαίσιο, αναδιατυπώνω την σύνδεση καταστάσεων και τιμών των ΦΜ ως εξής: Στην κατηγορία **Set** των μικρών συνόλων (δηλαδή συνόλων που δεν είναι γνήσιες κλάσεις αλλά ανήκουν σε ένα προκαθορισμένο και αρκετά μεγάλο σύμπαν συνόλων) και συναρτήσεων μεταξύ συνόλων, το αντικείμενο ∇^S είναι η εκθετοποίηση (exponentiation) που αντιστοιχεί στα αντικείμενα S και ∇. Το καρτεσιανό γινόμενο $\nabla^S \times S$ είναι και κατηγορικό γινόμενο, το οποίο είναι pullback πάνω από το αντικείμενο ∇. Η απεικόνιση αποτίμησης έχει το ίδιο νόημα στο κατηγορικό πλαίσιο. Τέλος, όταν ο χώρος S είναι συμπαγής και Hausdorff, τότε ο συναρτητής (functor) που τον αντιστοιχεί στην αβελιανή C*-άλγεβρα των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων πάνω του είναι μια ισοδυναμία κατηγοριών. Τα πράγματα διαφέρουν στην περίπτωση που αντί συνόλων έχουμε χώρους Hilbert, έστω H. O φορμαλισμός της κβαντικής θεωρίας υποδεικνύει ως φυσικό γινόμενο το τανυστικό γινόμενο δύο ανυσμάτων τού H, το οποίο όμως δεν είναι κατηγορικό γινόμενο –δεν πληροί τους όρους για ένα pullback. Ακόμη, ενώ στην κατηγορία **Set** υπάρχει ένα τελικό αντικείμενο, το μοναδιαίο (singleton) σύνολο {∗}, καθώς και ένα ειδικό αντικείμενο, ο ταξινομητής υποαντικειμένων (subobject classifier), που είναι το σύνολο {0 , 1}, δεν υπάρχουν τα αντίστοιχά τους στην κατηγορία των χώρων Hilbert [Γ]. Αλλιώς, ενώ η κατηγορία **Set** είναι *τόπος*, η κατηγορία χώρων Hilbert δεν είναι.

Αυτές οι διαφορές στην γλώσσα της θεωρίας των κατηγοριών, ισοδυναμούν με την παρουσία *υπερθέσεων* που παίζουν τόσο καίριο ρόλο και εκφράζουν την κβαντική μη διαχωρισιμότητα [37, 41]. Μια άλλη συνέπεια είναι ότι σε μια (καθαρή) συνεζευγμένη κατάσταση ενός σύνθετου κβαντικού συστήματος δεν υφίστανται (καθαρές) καταστάσεις των μερών του [42].

Ανακεφαλαιώνοντας, λοιπόν, αρχικά έχουμε δύο εννοιολογικά πλαίσια, το κλασικό και το κβαντικό, ασύμβατα μεταξύ τους. Η ασυμβατότητά τους σε αυτό το στάδιο συμπίπτει με την ασυμμετρία εννοιών κατά Kuhn, πράγμα που σημαίνει ότι η διαφορά τους *τίθεται*, είναι η διαφορά μιας ποικιλίας θεωριών. Η κατά σύμβασιν πεποίθηση εντοπίζει την διάκρισή τους σε μια *συνταγή*: στις κβαντικές θεωρίες τα φυσικά μεγέθη αναπαρίστανται από τελεστές σε χώρους Hilbert, γενικά μη μετατιθέμενους μεταξύ τους. Αυτοί οι τελεστές ορίζουν άλγεβρες von Neumann, ή, γενικότερα, C*-άλγεβρες. Μια πρώτη σύγκριση του κλασικού με το κβαντικό επισημαίνει ότι ειδική μορφή C*-άλγεβρας σχηματίζουν και οι πραγματικές συναρτήσεις σε έναν κλασικό φασικό χώρο. Από εδώ πηγάζει η διαίσθηση ότι η μετάβαση στο κβαντικό πλαίσιο συνδέεται με μιαν έννοια «μη μεταθετικού» χώρου. Ένας τέτοιος χώρος, όμως, δεν έχει σημεία με την κλασική έννοια. Στην κλασική περίπτωση, το «σημείο» στο οποίο αναφερόμαστε είναι σημείο ενός φασικού χώρου και αντιστοιχεί στην πρωτογενή έννοια της *κατάστασης ενός φυσικού συστήματος*. Είναι αυτό που ονόμασα «εσωτερικό» και το οποίο εκδηλώνεται μέσω της τιμής που λαμβάνουν κατάλληλα φυσικά μεγέθη-ιδιότητες, συνιστώντας το «εξωτερικό». Τα φυσικά μεγέθη διαμεσολαβούν μεταξύ εσωτερικού και εξωτερικού, εν τούτοις η σχέση τους είναι διαφανής, η διαμεσολάβηση κυριαρχείται από αμεσότητα. Καθοδηγούμενος από το γεγονός ότι η άλγεβρα των φυσικών μεγεθών είναι ειδική μορφή C*-άλγεβρας, παρατήρησα ότι στην έννοια του σημείου ενός φασικού χώρου υπάρχει ένας *συγκερασμός* όψεων. Το σημείο είναι ταυτόχρονα κατάσταση του *συστήματος*, *καθαρή κατάσταση* της *άλγεβρας* των φυσικών μεγεθών, *μη αναγώγιμη αναπαράσταση* της ίδιας άλγεβρας. Αντιστοιχεί επίσης σε σημείο του *στοιχειώδους τόπου* που είναι η κατηγορία **Set** των συνόλων, σε σύνδεση με το γεγονός ότι η *τιμή* του φυσικού μεγέθους δίδεται από την απεικόνιση αποτίμησης σε αυτόν τον τόπο.

Από όλες αυτές τις συμπίπτουσες όψεις, στο κλασικό πλαίσιο, εκείνες που αφορούν την C*-άλγεβρα και εκείνη η οποία διατυπώνεται στο πλαίσιο της θεωρίας των τόπων είναι τετριμμένες και η επισήμανσή τους δεν επηρεάζει την φυσική θεωρία. Η σύμπτωσή τους, συνεπώς, θεωρούμενη ως δεδομένη ασυζητητί, είναι μια «υπόθεση» στο πνεύμα της §1.1. Στους αντίποδες, στις κβαντικές θεωρίες, η αντίστοιχη υπόθεση, δηλαδή ότι ισχύει η ως άνω σύμπτωση, κάθε άλλο παρά τετριμμένο ζήτημα είναι. Η εικόνα τώρα έχει ως εξής: Παραδοσιακά, ένας χώρος Hilbert θεωρείται το αντίστοιχο του φασικού χώρου. «Σημεία» με την κλασική έννοια δεν υπάρχουν. Τον ρόλο τους ως εκπροσώπων της κατάστασης ενός φυσικού συστήματος αναλαμβάνουν οι μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της C*-άλγεβρας των «παρατηρήσιμων μεγεθών», αν ακολουθήσει κανείς την αλγεβρική θεμελίωση. Από φυσική άποψη, δεν έχει καν νόημα να πούμε ότι ένα φυσικό σύστημα βρίσκεται πάντα σε κάποια κατάσταση. Ο δε μαθηματικός εκπρόσωπος μιας τέτοιας κατάστασης, δηλαδή οι αναπαραστάσεις της άλγεβρας των μεγεθών, δεν έχουν διαισθητική προφάνεια. Πρωτογενής έννοια είναι τώρα το παρατηρήσιμο μέγεθος, ο διαμεσολαβητικός ρόλος του οποίου μεταξύ κατάστασης συστήματος και τιμής φυσικού μεγέθους είναι κυρίαρχος. Εάν φανταστούμε έναν άξονα, στην μία άκρη του οποίου βρίσκεται η μαθηματική αναπαράσταση της έννοιας «κατάσταση συστήματος», και στην άλλη η έννοια «τιμή φυσικού μεγέθους», η κλασική εικόνα είναι ότι η πρώτη άκρη «αγγίζει» την φυσική πραγματικότητα, ενώ η δεύτερη την αποδίδει ως αντανάκλαση πάλι σε μια φυσική πραγματικότητα, αυτή την φορά σκόπιμα διαμορφωμένη και θεωρητικά φορτισμένη, με την μορφή της μετρητικής συσκευής. Στην κβαντική εικόνα, ο άξονας αυτός μοιάζει να στρέφεται, με σημείο στροφής την έννοια του παρατηρήσιμου μεγέθους. Η άκρη «τιμή μεγέθους» δεν είναι τώρα κατάληξη, αλλά αφετηρία, και η άκρη «κατάσταση» μετατρέπεται σε μαθηματική αφαίρεση χωρίς άμεση επαφή με την φυσική πραγματικότητα. Μάλιστα, εφ' όσον χρησιμοποιείται το αλγεβρικό πλαίσιο, η κατασκευή GNS των αναπαραστάσεων της άλγεβρας μετατρέπει σε σαφώς δευτερογενές και παράγωγο εκείνο που κλασικά εθεωρείτο ως αυτονόητα πρωτογενές. Επί πλέον, σε μια δεδομένη κατάσταση του συστήματος, στην κβαντική περίπτωση, πάντα θα υπάρχουν κάποια φυσικά μεγέθη στα οποία *δεν μπορεί* να αποδοθεί μια ακριβής τιμή, παρά μόνον μια κατανομή πιθανοτήτων. Σε μαθηματικό επίπεδο, αυτό αποδίδεται τώρα με μιαν απεικόνιση της μορφής $\pi\colon O\times\Sigma \rightarrow \Delta : (A\ ,\ s) \mapsto \pi_A(*\mid s)$, όπου O και Σ είναι τα σύνολα των παρατηρήσιμων μεγεθών και των καταστάσεων αντιστοίχως, και Δ είναι το σύνολο των μέτρων πιθανότητας Borel στην πραγματική ευθεία. Το $\pi_A(*\mid s)$ είναι η στατιστική κατανομή των αποτελεσμάτων της μέτρησης των τιμών του μεγέθους $A \in O$ όταν το σύστημα είναι στην κατάσταση $s \in \Sigma$. Από αυτήν την διαφοροποιημένη εικόνα, σε συνδυασμό με την ιδιάζουσα εγγενή πιθανοκρατία, πηγάζει η άποψη ότι οι κβαντικές θεωρίες κάνουν *προβλέψεις*, δεν περιγράφουν –ούτε καν ιδεατά– την *συμπεριφορά φυσικών συστημάτων*, όπως κάνει η κλασική φυσική. Είναι άποψη λανθασμένη, που απομονώνει το ένα σκέλος του ζεύγους κατάσταση – τιμή. Η φυσική επιστήμη, όμως, δεν μπορεί να αυτοκαταργηθεί, να αποβάλει τον επιστημονικό της χαρακτήρα, υποκύπτοντας σε μιαν έντονα εμπειριστική προδιάθεση. Έργο της δεν είναι η παραίτηση από την μελέτη της συμπεριφοράς των φυσικών συστημάτων, αλλά η διερεύνηση του τρόπου που αυτή η συμπεριφορά κωδικοποιείται μαθηματικά μέσα από δαιδαλώδεις διαδρομές. Η αντιστροφή της εικόνας που περιέγραψα συνδέεται στενά με την ιδιαίτερη σημασία που έχει για τις κβαντικές θεωρίες η έννοια των μη παρατηρήσιμων μεγεθών σε διάκριση από τα παρατηρήσιμα μεγέθη. Φιλοσοφικά ζητήματα, όπως ο «υποκαθορισμός της οντολογίας από την παρατήρηση» και ο γνωσιολογικός ή μη χαρακτήρας του μη παρατηρήσιμου, τοποθετούνται στην βάση μιας λιγότερο ή περισσότερο σαφούς διάκρισης μεταξύ των δύο ειδών φυσικών μεγεθών, διάκρισης που σε γενικές γραμμές συμπίπτει με εκείνη μεταξύ μακρόκοσμου και μικρόκοσμου.

Από την σκοπιά που εξετάζω τα πράγματα εδώ, οι ως άνω διακρίσεις συναρτώνται με τις μεταμορφώσεις της έννοιας του σημείου και του περιεχομένου της. Οι όψεις που είδαμε συγκερασμένες στο κλασικό σημείο γίνονται τώρα διακριτές, ως εάν το σημείο να αναλύεται στα εξ ων συνετέθη. Η όψη «καθαρή κατάσταση» της *άλγεβρας*, είναι και αυτή παράγωγη, και συνδέεται ρητά με την μαθηματική κατασκευή των μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων ως αναγκαίος κρίκος, όχι ως αυτοτελής έννοια. Πρέπει να τονίσω κάτι που συνήθως παραβλέπεται. Δεν είναι αλήθεια ότι ο χώρος Hilbert είναι το κβαντικό αντίστοιχο του κλασικού φασικού χώρου. Ακριβέστερα, σημείωσα προηγουμένως ότι αυτό αληθεύει κατά το ήμισυ, στον βαθμό που αφορά την αντιστοιχία κλασικού και κβαντικού χώρου *καταστάσεων του υπό εξέτασιν φυσικού συστήματος*. Η πιο διαφανής έκφραση της σχέσης αμεσότητας – διαμεσολάβησης στην κλασική περίπτωση είναι το γεγονός ότι κατάσταση *συστήματος* και κατάσταση της *άλγεβρας* των μεγεθών *συμπίπτουν* στην έννοια του σημείου του φασικού χώρου. Στην κβαντική θεωρία οι δύο αυτές όψεις απομακρύνονται. Στην ειδική περίπτωση που έχουμε μετατιθέμενους μεταξύ τους τελεστές–φυσικά μεγέθη, η μία όψη ενσωματώνεται στον φορμαλισμό του χώρου Hilbert. Η άλλη, εκείνη που κλασικά θεωρεί τον φασικό χώρο ως πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που ενέχονται στην αναπαράσταση Gelfand και δίνουν τις τιμές ενός μεγέθους, ενσωματώνεται στον χώρο των *χαρακτήρων*, των πολλαπλασιαστικών γραμμικών συναρτησιακών επί της άλγεβρας, δηλαδή του φάσματος Gelfand της άλγεβρας. Με μιαν έννοια, ό,τι ήταν δυσδιάκριτο ή ταυτόσημο στο κλασικό σημείο, γίνεται αυτοτελές μεν, αλλά και κόμβος ενός διευρυνόμενου πλέγματος αλληλοσυνδεδεμένων εννοιών, ενός πλέγματος με όλο και μεγαλύτερο βάθος και εύρος σχέσεων καθώς νέοι κρίκοι παρεμβάλλονται. Ένας τέτοιος κρίκος, λειτουργεί ως ελκτικό σημείο που κάνει όλους τους άλλους να στροβιλίζονται γύρω του, αφ’ ενός, ενώ, αφ’ ετέρου, λειτουργεί και ως εκείνο το στοιχείο που «αγκιστρώνει» το εννοιολογικό πλέγμα στην φυσική πραγματικότητα. Είναι ο κρίκος που αντιστοιχεί στην έννοια «φυσικό/παρατηρήσιμο μέγεθος». Με αυτήν την διαδικασία διαμορφώνεται μια γενικευμένη έννοια σημείου, ικανή να συγκεράσει την πολυπλοκότητα αυτού του πλέγματος, σε αντιδιαστολή με το κλασικό σημείο που πραγματοποιούσε τον συγκερασμό αυτόν ως άμεση αδιαφοροποίητη και αφηρημένη ταυτότητα. Η θέση που κατείχε κλασικά ο φασικός χώρος αντικαθίσταται –στην ειδική περίπτωση μετατιθέμενων τελεστών– από δύο διακριτές έννοιες, τον χώρο Hilbert ως χώρο για τις αναπαραστάσεις της άλγεβρας των μεγεθών, και τον χώρο των χαρακτήρων της ίδιας άλγεβρας. Ο πρώτος συνδέεται με την παραδοσιακή έννοια μιας «κβαντικής λογικής», το πλέγμα των κλειστών υποχώρων ενός χώρου Hilbert, που ως γνωστόν είναι ένα *μη επιμεριστικό*, ορθοσυμπληρωμένο modular πλέγμα [32, 33]. Θα δούμε στην συνέχεια ότι ο δεύτερος γενικεύεται σε μια μη κλασική αλλά *επιμεριστική* λογική, την λογική των λεγομένων *quantales*. Πώς μπορούν τα δύο διαφορετικά πλαίσια, το κλασικό και το κβαντικό, να συν-κριθούν, δηλαδή να κριθούν μαζί; Ισχυρίζομαι ότι η ορθότερη προσέγγιση είναι εκείνη που γίνεται στο φως της ύστερης γνώσης. Αυτό σημαίνει ότι δεν αναζητούμε κάποιον «μέσον όρο» μεταξύ των δύο, ούτε κάποιαν ημικλασική περιοχή όπου τα δύο πλαίσια αλληλοεπικαλύπτονται. Διότι η μετάβαση από το κλασικό στο κβαντικό δεν είναι μια σωρευτική διαδικασία διαδοχικών βημάτων. Αντιθέτως, αναζητούμε έναν κοινό τόπο (locus) ως προϋπόθεση για τον εντοπισμό της *συγκεκριμένης* διαφοράς των δύο πλαισίων. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι η τέτοιου είδους σύγκριση άρχισε να αναπτύσσεται χρονικά τελευταία, όταν και το νέο, κβαντικό πλαίσιο έχει προ πολλού φτάσει σε υψηλό επίπεδο ωριμότητας. Επίσης, η εκ των υστέρων προσέγγιση έκανε δυνατή την αξιοποίηση στα τελευταία χρόνια της θεωρίας των κατηγοριών, και υπ’ αυτό το πρίσμα των θεωριών των χώρων Stone, των δεσμίδων (ή δραγμάτων – sheaves) και των τόπων.

Το πιο ζωτικό χαρακτηριστικό των μαθηματικών είναι ...

η εντελώς ιδιόμορφη σχέση τους ... με κάθε επιστήμη

που ερμηνεύει την εμπειρία σε επίπεδο ανώτερο

από το καθαρά περιγραφικό.

J. von Neumann

Κεφάλαιο ΙΙ. Οι προϋποθέσεις της κλασικότητας

2.1 Το φυσικό σύστημα / γνωστικό αντικείμενο εν τω γεννάσθαι

Προκειμένου να αξιοποιήσουμε όλες τις πλευρές τού ∇^S και ταυτόχρονα να μπορούμε να το θεωρούμε στο ίδιο επίπεδο με το S και το ∇, παρατηρούμε τα εξής: Αφ΄ ενός, το ∇^S είναι ένα αντικείμενο μιας κατηγορίας $\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{C}}$, όπου το **C** συμβολίζει την κατηγορία που περιλαμβάνει ως αντικείμενο το S, π.χ. την κατηγορία των συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων. Αυτό θα μας επιτρέψει πιο κάτω να διερευνήσουμε την δυνατότητα να υπάρχει κάποια σχέση –πιο συγκεκριμένα, μια συναρτητική (functorial) σχέση– με την κατηγορία χώρων Hilbert, ή καλύτερα C*-αλγεβρών, δηλαδή της μαθηματικής δομής που προσιδιάζει στα κβαντικά φαινόμενα. Αφ' ετέρου, και σε αυτό θα επικεντρωθώ προς το παρόν, λαμβάνουμε υπ' όψιν το γεγονός ότι το S δεν είναι μόνον σύνολο, αλλά και ένας *τοπολογικός χώρος*. Τότε, η τοπολογία τού S, δηλαδή το σύνολο O(S) όλων των ανοικτών υποσυνόλων U του S, διατεταγμένο με την σχέση του περιέχεσθαι (inclusion) είναι μια μερική διάταξη, άρα μια κατηγορία. Οι μορφισμοί της είναι V ™ U όταν $V \subseteq U$. Έστω C(U) το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων h: U ™ ∇. Τότε ο περιορισμός τής h, $h|_V$, στο υποσύνολο V είναι μια συνάρτηση C(U) ™ C(V) $\forall V \subseteq U$. Αυτό κάνει το C να είναι ανταλλοίωτος (contravariant) συναρτητής από το O(S) στην κατηγορία **Set.** Είναι η *δεσμίδα* (ή *δράγμα*, sheaf) των σπερμάτων (germs) των συνεχών συναρτήσεων στο S. Σημειώνουμε ότι στην κατηγορία O(S) έχουμε άλλους δύο συναρτητές, έναν συναλλοίωτο και έναν ανταλλοίωτο, που είναι αντιστοίχως:

O(V, ∗) = hom(V, ∗): O(S) ™ **Set,** και

O(∗, U) = hom(∗, U): $(O(S))^{op}$ ™ **Set**.

Υπ’ αυτό το πρίσμα, ας δούμε την κλασικού τύπου διαδικασία της μέτρησης. Αποδίδεται από μια συνεχή απεικόνιση S ™ ∇, που απαντά στο ερώτημα, «έχει ή δεν έχει το ΦΜ Α την τιμή a;», ή, γενικότερα, «βρίσκεται ή δεν βρίσκεται η τιμή τού Α σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \nabla$;». Η πρόταση «Το ΦΜ Α έχει τιμή $a \in \nabla$», μέσω της συνάρτησης f_A που αντιστοιχεί στο Α, ισοδυναμεί με την: «Το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση s», όπου s είναι ένα στοιχείο του *συνόλου* S. Επειδή θέλουμε το S να είναι *τοπολογικός χώρος*, η πρόταση αυτή υπονοεί ότι το υποσύνολο {s} είναι στοιχείο τού O(S) για κάθε s, δηλαδή η τοπολογία είναι η διακριτή (discrete) τοπολογία, που σημαίνει ότι το O(S) ισούται με ολόκληρο το δυναμοσύνολο Π(S) – το σύνολο των υποσυνόλων τού S. Με άλλα λόγια, η διακριτή τοπολογία προϋποτίθεται ως μια άρρητη «υπόθεση». Το ίδιο ισχύει αν η τοπολογία είναι εκείνη που αντιστοιχεί στην σ-άλγεβρα των υποσυνόλων Borel. Και οι δύο τοπολογίες είναι πλήρεις (complete) άλγεβρες Boole, συμβατές δηλαδή με την κλασική λογική που περιλαμβάνει τον νόμο του αποκλειομένου τρίτου: $\neg P \vee P$ [Δ]. Το Π(S), όμως, είναι μια *πλήρης ατομική άλγεβρα Boole*. Αντιστρόφως, κατά το θεώρημα των Lindenbaum-Tarski, μια αφηρημένη άλγεβρα Boole *αναπαρίσταται* ως –δηλαδή είναι ισόμορφη με– την άλγεβρα όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου εάν και μόνον εάν είναι πλήρης και ατομική. Σημασία εδώ έχει το γεγονός ότι το σύνολο φορέας της αναπαράστασης συγκροτείται από τα *στοιχεία* της εν λόγω άλγεβρας Boole. Θεωρώντας αυτήν την άλγεβρα Boole ως την δομή που συλλαμβάνει αφηρημένα την «άλγεβρα κλάσεων», ή μιαν άλγεβρα προτάσεων, αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του *συνόλου* S, ή, στην περίπτωσή μας, τα σημεία του *χώρου* S (με την διακριτή τοπολογία), είναι *μοντέλα* της αφηρημένης δομής.

Τα ανωτέρω είναι όψεις της μαθηματικής μορφής της φιλοσοφικής θέσης ότι η κατάσταση ενός φυσικού συστήματος είναι στιγμή τού Είναι. Εάν, εν τούτοις, παραμένοντας *εντός των ορίων της κλασικότητας*, παρατηρήσουμε ότι σε αυτό το μαθηματικό επίπεδο πρόκειται για μιαν υπόθεση και όχι για αυτονόητη αλήθεια, θα αναγνωρίσουμε ότι η ενεργός πραγματικότητα, το «ενεργεία» του συστήματος, συνίσταται σε μια διαλεκτική σχέση του μέρους με το όλον, όπου το όλον *δεν* ανάγεται απλώς σε άθροισμα των μερών του και των μεταξύ τους σχέσεων. Αυτό μπορεί –ρητά ή άρρητα– να υποτίθεται, αλλά δεν ισχύει εγγενώς και υποχρεωτικά. Ή αλλιώς, δεν είναι *a priori* δεδομένο ότι η τομή στην οποία αναφέρθηκα στην §1.4 διαχωρίζει ένα μέρος το οποίο είναι ήδη διαχωρίσιμο,[15] μολονότι στα πλαίσια της κλασικής φυσικής η επισήμανση αυτή περιττεύει. Το υπό εξέτασιν μέρος δεν

[15] Παρεμπιπτόντως, σημειώνω ότι, στην περίπτωση της κβαντικής φυσικής, η μη διαχωρισιμότητα ενισχύεται από τα πειράματα που έγιναν δυνατά με τις προόδους στην κβαντική οπτική· για παράδειγμα, τα πειράματα της ομάδας τού L. Mandel στο Rochester, τα νοητικά πειράματα που πρότεινε ο M. Scully καθώς και τα ήδη πραγματοποιηθέντα της ομάδας των T. Herzog και P. Kwiat στο Innsbruck, τα πειράματα τύπου Franson κ.λπ., που αφορούν την χρονικώς ύστερη επιλογή (delayed choice) ή τον κβαντικό σβηστήρα (quantum eraser) [43].

περιγράφεται ως αλληλουχία στιγμών κάποιου αφηρημένου Είναι. Αντιθέτως, είναι προϊόν μιας συνεχούς διαδικασίας Γίγνεσθαι, δεν «αποκαλύπτει» τον εαυτό του αλλά είναι *διαρκώς εν τω γεννάσθαι*. Με αυτήν την έννοια, το κάθε σύστημα που γίνεται αντικείμενο γνωστικής διαδικασίας ενέχει αντίφαση: είναι και ταυτόχρονα δεν είναι. Αυτή η αντίφαση είναι ο πυρήνας της ως άνω τομής και αυτή είναι η πηγή της αντιφατικής σχέσης εσωτερικού – εξωτερικού, κατάστασης και τιμής φυσικού μεγέθους, όπως εκφράζεται θεωρητικά στην σφαίρα της νόησης. Το συμπέρασμα μπορεί να συνοψιστεί στην φράση: η κατάσταση ενός φυσικού συστήματος δεν είναι μια στιγμή τού Είναι, αλλά μια στιγμή τού Γίγνεσθαι. Ή, ακόμη, το Είναι πρέπει να νοείται ως στιγμή τού Γίγνεσθαι.[16]

Ας δούμε τώρα όλα αυτά που περιγράφω εδώ από την σκοπιά της θεωρίας των κατηγοριών. Θα αναφερθώ σε μιαν ιδέα τού F. W. Lawvere, ενός από τους πρωτεργάτες της θεωρίας των τόπων [44, 45]: Πρόκειται για την επονομαζόμενη *συναρτητική σημασιολογία αλγεβρικών θεωριών* (functorial semantics of algebraic theories) [46], και αφορά την έννοια μιας μαθηματικής θεωρίας, η οποία με τον πιο γενικό και αφηρημένο τρόπο περιγράφει μιαν αλγεβρική δομή. Μια τέτοια θεωρία ονομάζεται *αλγεβρική* και παρίσταται με έναν αριθμό από n-μελείς πράξεις και αλγεβρικές εξισώσεις. Εάν, π.χ., έχουμε την γενική έννοια της δομής ομάδας, αυτή θα καθορίζεται από μια διμελή πράξη (πολλαπλασιασμό), μια μονομελή πράξη (αντιστροφή) και μια μηδενική πράξη (μονάδα), και εξισώσεις που εκφράζουν τα γνωστά αξιώματα της θεωρίας των ομάδων. Συνήθως αυτή η δομή ορίζεται στην κατηγορία των συνόλων. Αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο, καθώς οι πράξεις και οι εξισώσεις/σχέσεις μπορούν να οριστούν σε κάθε κατηγορία, αρκεί αυτή να έχει πεπερασμένα γινόμενα. Στην περίπτωση ομάδων, ορίζεται έτσι σε τυχούσα κατηγορία ένα «αντικείμενο-ομάδα». Π.χ., στην κατηγορία των λείων πολλαπλοτήτων, ένα «αντικείμενο-ομάδα» είναι μια ομάδα Lie. Υπάρχει τότε μια ειδική κατηγορία με πεπερασμένα γινόμενα, ο αποκλειστικός ρόλος της οποίας είναι να περιέχει ένα «αντικείμενο-ομάδα» γενικά. Αυτό είναι που ονόμασα στοιχείο γένους, και η ειδική κατηγορία είναι η «θεωρία ομάδων». Ο Lawvere ονομάζει μια τέτοια κατηγορία «αφηρημένο γενικό». Ένα αντικείμενο-ομάδα σε τυχούσα κατηγορία με πεπερασμένα γινόμενα είναι τότε ένα «μοντέλο» της θεωρίας ομάδων. Είναι το «συγκεκριμένο μερικό» κατά Lawvere, και ορίζεται από έναν συναρτητή που διατηρεί τα γινόμενα και ο οποίος στέλνει την θεωρία ομάδων στην κατηγορία όπου ορίζονται τα επί μέρους μοντέλα. Έτσι, μια συνηθισμένη ομάδα είναι ένα μοντέλο στην κατηγορία των συνόλων. Επίσης, μπορεί να οριστεί η κατηγορία *όλων* των μοντέλων σε δεδομένη κατηγορία. Ο Lawvere την ονομάζει «συγκεκριμένο γενικό». Τέτοιο είναι, π.χ., η κατηγορία όλων των συνηθισμένων ομάδων. Έχουμε, λοιπόν, μιαν εικόνα όπου, δίπλα στην κατηγορία όλων των μοντέλων κάποιας μαθηματικής δομής, έχουμε ένα *νέο είδος* αφηρημένης οντότητας –το αφηρημένο γενικό δίπλα στο συγκεκριμένο

[16] Κατά τον Baez [42], οι καταστάσεις (και οι χώροι) μπορούν να θεωρηθούν ως πλευρές τού Είναι, ενώ οι διαδικασίες (και οι χωρόχρονοι) μπορούν να θεωρηθούν ως πλευρές τού Γίγνεσθαι.

γενικό. Πρόκειται για μιαν αντίληψη που μπορεί να ενταχθεί στην προοπτική ενός «δομισμού των μοτίβων (pattern structuralism)», ακόμη και ενός «*ante rem* ρεαλισμού» [47]. Με την διαφορά ότι εδώ πρόκειται για κατηγορίες και τις μεταξύ τους σχέσεις, πράγμα που προσδίδει μεγαλύτερη φυσικότητα στην όλη κατασκευή. Πρέπει όμως να αποφύγουμε την φορμαλιστική παγίδα. Η εν λόγω ιδέα είναι η μαθηματική κωδικοποίηση του τελικού *αποτελέσματος* μιας σύνθετης διαδικασίας μέσω της οποίας διαμορφώνεται η έννοια του στοιχείου γένους. Αν αγνοήσουμε την ιστορική διάσταση, θα καταλήξουμε στην άγονη θέση ότι έχουμε να κάνουμε με αποστεωμένα σχήματα, με ακραία συνέπεια τον φετιχισμό της γλωσσικής σύνταξης. Θα είναι σαν να θέλουμε να μάθουμε βιολογία ανατέμνοντας πτώματα, για να παραφράσω τον Lakatos, η καυστική κριτική του οποίου για τον «*τυποκρατικό ουρανό, όπου οι μαθηματικές θεωρίες φτερουγίζουν συντροφιά με τα σεραφείμ, απαλλαγμένες από όλες τις γήινες ματαιότητες*» [11], έχει εδώ την θέση της. Εκείνο που έχει μεγαλύτερη σημασία είναι ότι τόσο το «αφηρημένο» όσο και το «συγκεκριμένο» εξετάζονται στο *ίδιο επίπεδο*: είναι και τα δύο κατηγορίες. Η «ερμηνεία» μετατρέπεται σε συναρτητή. *Αυτό δίνει την δυνατότητα να εξετάζεται το θεωρητικό στο ίδιο επίπεδο με το μετα-θεωρητικό*, ζήτημα που μας έχει ήδη απασχολήσει. Με όλα αυτά υπ΄ όψιν, το ενδιαφέρον είναι ότι το σχήμα τού Lawvere μπορεί να προσαρμοστεί έτσι ώστε να προσφέρει ένα πλαίσιο για την διατύπωση μιας θεωρίας ενός κλασικού δυναμικού συστήματος, δηλαδή μια σχηματοποίηση της κλασικής μηχανικής. Επισημαίνω εδώ δύο φιλοσοφικά ζητήματα που είναι κρίσιμα για την συλλογιστική τού Lawvere. Το ένα αφορά την ατομιστική παράδοση, στην οποία αναφέρθηκα προηγουμένως. Κατά τον Lawvere, «*το βασικό πρόγραμμα του απειροστικού λογισμού, της μηχανικής συνεχών μέσων και της διαφορικής γεωμετρίας είναι ότι όλος ο κόσμος μπορεί να* ***ανακατασκευαστεί από το απείρως μικρό***» ([44], έμφαση δική μου). Είναι σαφώς το πρόγραμμα της ατομιστικής αντίληψης, το οποίο «*υπήρξε πολύ καρποφόρο στα τελευταία 300 χρόνια*», και η αποσαφήνιση του οποίου είναι ο στόχος των σχετικών θεωριών τού Lawvere. Το δεύτερο ζήτημα αφορά την έννοια της κατάστασης ενός φυσικού συστήματος ως στιγμής τού Γίγνεσθαι. Υποστηρίζοντας ότι αυτή η μεθοδολογική και φιλοσοφική τοποθέτηση μπορεί να γίνει εντός της κλασικότητας, παραθέτω το εξής απόσπασμα:

«*Σήμερα*, λέει ο Lawvere, *πολλοί μαθηματικοί μελετούν αφηρημένα αντικείμενα που ονομάζονται δυναμικά συστήματα. Τα δυναμικά συστήματα προορίζονται νοηματικά να είναι αυτό που θα μπορούσε να ονομαστεί ανάλυση τού Γίγνεσθαι. Ήδη με τον Αριστοτέλη επεκράτησε η συνήθεια να αναλύεται το Γίγνεσθαι σε δύο όψεις, σε Χρόνο και Καταστάσεις, με τον Χρόνο να δρα κατά κάποιον τρόπο πάνω στις Καταστάσεις… Η δράση του Χρόνου στις Καταστάσεις είναι ο επί μέρους νόμος κίνησης. Ακριβέστερα, ένα δεδομένο μοντέλο Χρόνου (ένα διακριτό μονοειδές, μια συνεχής ομάδα κ.λπ., κ.λπ.) χρησιμεύει ως Αφηρημένο Γενικό το οποίο συνοδεύεται από το Συγκεκριμένο Γενικό που είναι η κατηγορία όλων των δυναμικών συστημάτων, δηλαδή συστημάτων καταστάσεων επί των οποίων ενεργεί αυτό το μοντέλο του Χρόνου.*

»Αλλά, με μιαν έννοια, μεγάλο μέρος των σύγχρονων εργασιών για τα δυναμικά συστήματα γίνεται εντός ενός πλαισίου που βρίσκεται ακόμη πίσω από τον Γαλιλαίο. Ο Γαλιλαίος έκανε μεγάλη πρόοδο σε σχέση με την βασική ιδέα. Στο βιβλίο του «Διάλογοι σχετικά με δύο νέες επιστήμες»… ο Γαλιλαίος πρόβαλε την δυναμική εκλέπτυνση της ανάλυσης του ζεύγους Χρόνος – Καταστάσεις, η οποία συνδέεται με τα εξής χαρακτηριστικά.

(1) *Οι Καταστάσεις είναι* ***καταστάσεις τού Γίγνεσθαι****. Αυτό πάλι έχει πολλές παραλλαγές: οι Καταστάσεις μπορεί να αφορούν ταχύτητες ή μνήμες, ή πεπρωμένα, αλλά σε κάθε περίπτωση αυτές οι ίδιες θα πρέπει να είναι* ***περισσότερο δομημένες από τα απλά σημεία τα οποία το αφηρημένο στατικό Είναι εξειδίκευσε ως συναπεικονίσεις.*** *[Στο κείμενο του Birkhoff, του Palermo, το 1919, το οποίο εγκαινίασε την θεωρία των δεσμών ινών, οι καταστάσεις σχηματίζουν ίνες επί των συναπεικονίσεων]…*» ([44], έμφαση δική μου).

Οι καταστάσεις είναι «καταστάσεις τού Γίγνεσθαι», η μαθηματική τους αναπαράσταση απαιτεί κάτι πιο δομημένο από το κλασικό σημείο, το οποίο προσιδιάζει στο στατικό Είναι. Αυτά είναι έννοιες-κλειδιά που σηματοδοτούν μια μη τυπική προσέγγιση στην ίδια την γενέθλια διαδικασία της κλασικής φυσικής. Πρέπει τώρα να συνδυαστεί η ατομιστική αντίληψη η οποία, στην ακραία μορφή της, οικοδομεί πάνω στην έννοια του απειροστού, με την έννοια τού Γίγνεσθαι, αυτού που Είναι και ταυτόχρονα δεν Είναι. Προς τούτο, ο δομικός λίθος/απειροστό δεν πρέπει να θεωρηθεί αδιάστατο σημείο, αλλά ούτε και κάτι πεπερασμένων διαστάσεων. Στην γενική του μορφή, ο Lawvere το χαρακτηρίζει a.t.o.m. –amazingly tiny object model. Ειδικότερα, νοείται ως απειροστό διάνυσμα [44]. Αρκεί συνεπώς να οριστεί κατάλληλα μια κατηγορία στην οποία να αποκρυσταλλώνεται η έννοια του «απειροστού», ή, ισοδύναμα, η έννοια του εφαπτομένου διανύσματος, ή, ισοδύναμα, η έννοια της ταχύτητας. Οικοδομώντας πάνω σε αυτό, ορίζεται η έννοια της επιτάχυνσης, του δυναμικού νόμου, της νομοτελειακής κίνησης, της τροχιάς. Μοντέλα μιας τέτοιας θεωρίας είναι τόσο η κίνηση ενός σημειακού σώματος, όσο και η δυναμική συνεχών μέσων, συμπεριλαμβανομένης της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας τού Maxwell. Δεν πρόκειται να ασχοληθούμε με τις τεχνικές λεπτομέρειες τέτοιων θεωριών. Αναφέρθηκα σε αυτές διότι καταδεικνύουν το εξής αξιοσημείωτο. Και στην πιο γενική απόπειρα αξιωματικοποίησης της *κλασικής* φυσικής, και στην πιο αδρή αποκρυστάλλωση των εννοιών της, αναγκαζόμαστε να κινηθούμε σε μια κατηγορία η οποία μοιάζει πολύ με την κατηγορία των συνόλων, αφ' ενός, ενώ, αφ' ετέρου, είναι πολύ γενικότερη: είναι η κατηγορία των *τόπων*. Θα επανέλθω σε αυτό το θέμα, προς το παρόν τονίζω την ανάγκη και την χρησιμότητα να αναπτύξουμε τους συλλογισμούς μας αξιοποιώντας τις εκφραστικές δυνατότητες της θεωρίας των κατηγοριών, και, μάλιστα χωρίς την *a priori*, δογματική προσκόλληση στην τυπική δίτιμη λογική. Άλλωστε, ένα βασικό χαρακτηριστικό της δομής ενός τόπου είναι ότι έχει μιαν «εσωτερική» λογική που δεν είναι μπουλιανή.

2.2 Η συγκρότηση του γνωστικού αντικειμένου

Δεδομένου ότι αναφέρθηκαν οι όροι «αφηρημένο» και «συγκεκριμένο», πρέπει εδώ να διευκρινίσω σε γενικές γραμμές τον τρόπο με τον οποίο τους αντιλαμβάνομαι. Μια ακραία εμπειριστική τοποθέτηση θεωρεί ως συγκεκριμένο το «γυμνό γεγονός», αυτό το οποίο υποτίθεται ότι είναι η αφετηρία μιας ερευνητικής διαδικασίας. Η επιστημονική αφαίρεση θεωρείται έτσι ως απομάκρυνση από το συγκεκριμένο. Το αντίθετο συμβαίνει. Το λεγόμενο «γυμνό γεγονός» είναι εντελώς απροσδιόριστο και αφηρημένο. Οι επιστημονικές αφαιρέσεις στην πορεία της έρευνας είναι έννοιες που εκφράζουν θεωρητικά πλευρές του αντικειμένου, το προσδιορίζουν με όλο και πιο σύνθετους τρόπους, διατυπώνουν κρίσεις. Είναι αφηρημένες στον βαθμό που είναι *μονόπλευρες*. Παύουν να είναι αφηρημένες στον βαθμό που οι κρίσεις συνδυάζονται, όταν γίνονται συν-κρίσεις, οδηγώντας στο συν-κεκριμένο ως *συνδυασμό αφαιρέσεων*. Συνεπώς, η επιστημονική αφαίρεση δεν είναι απομάκρυνση από το γνωστικό αντικείμενο, είναι βήμα σε μια πορεία ανόδου από το αφηρημένο στο συγκεκριμένο, και κατά τούτο είναι διείσδυση εντός του αντικειμένου. Είναι όμως και πορεία αντιφατική. Δεν είναι τυχαίο που ο όρος «κρίση» σημαίνει εξ ίσου τόσο την λογική κρίση όσο και το πρόβλημα, την αντίφαση. Θυμίζω τον ορισμό της έννοιας «κρίση» που υιοθέτησα: Είναι η βίαιη βεβαίωση της ενότητας δύο όρων οι οποίοι κρατιούνται χωριστά, και οι οποίοι, στον αποχωρισμό τους, είναι εν τούτοις ενωμένοι. Θα επιχειρήσω στην συνέχεια να δω πώς εκφράζεται αυτό στην φυσική, και ειδικά στις έννοιες του μοντέλου, του στοιχείου γένους και της ερμηνείας. Πριν προχωρήσουμε, όμως, ας δούμε λεπτομερέστερα την διαδικασία που χαρακτήρισα ως άνοδο από το αφηρημένο στο συγκεκριμένο.

Η συνείδηση «ανοίγεται» στον κόσμο πέρα από την συνείδηση, απλώνοντας ένα «δίχτυ» γύρω από το γνωστικό αντικείμενο. Έτσι είναι που εισάγει την τομή (§1.4), απομονώνοντας και ακινητοποιώντας μια στιγμή τού Γίγνεσθαι η οποία φανερώνεται στην νόηση μορφοποιημένη. Η μορφοποίηση γίνεται δυναμικά. Το «δίχτυ» είναι ένα εννοιολογικό πλέγμα, οι κόμβοι του οποίου είναι οι λογικές κατηγορίες. Αγκιστρώνεται ως όλον στο γνωστικό αντικείμενο, σχηματίζοντας ένα υβρίδιο. Παραφράζοντας την γνωστή μεταφορά τού F. de Saussure για την γλώσσα [48], θα πω ότι μοιάζει με ένα φύλλο χαρτί γραμμένο και από τις δύο πλευρές. Οι δύο σελίδες–όψεις δεν μπορούν να χωριστούν, μπορούν μόνον να σκιστούν. Εντός του δικτύου, οι έννοιες ορίζονται *διαφορικά*. Υπάρχει μια ειδική έννοια που διατρέχει το δίχτυ σαν ηλεκτρικό ρεύμα κάνοντάς το να μοιάζει με ένα μεταβαλλόμενης γεωμετρίας και συνθετότητας κύκλωμα. Είναι η έννοια του μη-εισέτι-εννοιολογημένου. Είναι μια «τρύπα», που γεμίζει με το καινούργιο και αμέσως γίνεται μοχλός και άξονας για μιαν αναδιάταξη–επανατοποθέτηση–επανακαθορισμό (λόγω της διαφορικής δομικής σχέσης) του δικτύου συνολικά. Αλλά η τρύπα πάντα παραμένει κενή, το πραγματικό πάντα γλυστράει και φανερώνεται μορφοποιημένο, *φορτωμένο με θεωρία*. Είναι το μονίμως φευγαλέο, το «αδύνατο». Η τρύπα που μονίμως γεμίζει και μονίμως παραμένει κενή, για να δανειστώ μια χεγκελιανή έκφραση, είναι «το μη υπάρχον που υπάρχει», η μηδενικότητα που επιμένει [14, σ. 397]. Η τρύπα και το δίχτυ γύρω της, δηλαδή η προσλαμβάνουσα συνείδηση, δεν έχει κανένα άλλο *δικό της* περιεχόμενο εκτός από αυτό που της προσδίδεται από έξω με αυτόν τον τρόπο. Το εννοιολογικό πλέγμα εξ αρχής έχει αναφορά στον κόσμο πέρα από την σκέψη· το μόνο περιεχόμενό του είναι η πράξη του φανερώματος. Η σχέση περιγράφεται καλύτερα αν, αντί για την παρομοίωση με το φύλλο χαρτιού, χρησιμοποιήσουμε εκείνη που επικαλείται ο Μπαλτάς [35]: το υβρίδιο είναι σαν ένα νόμισμα με τις δύο όψεις του. Οι δύο όψεις *δεν συμπίπτουν*, το νόμισμα έχει πάντα κάποιο «πάχος». Υπάρχει, δηλαδή, ένα «έλλειμμα», μια «ανοχή» που επιτρέπει στην μία όψη να «γλυστράει» πάνω στην άλλη. Παρεμπιπτόντως, να σημειώσω ότι, ενώ αυτή η προσέγγιση μπορεί να ενταχθεί σε έναν μεθοδολογικού τύπου δομισμό, είναι φανερό ότι αποκλείει την τοποθέτηση του επονομαζόμενου δομικού ρεαλισμού, είτε στην γνωσιολογική, είτε στην οντολογική του εκδοχή [49]. Η διαδικασία που συντελείται σε νοηματικό επίπεδο έχει ένα αντίστοιχο σε οντικό επίπεδο, σε ευθεία αναφορά προς το ίδιο το γνωστικό *υποκείμενο*. Ας προσέξουμε το εξής συμπέρασμα από την μελέτη της φυσιολογίας των αισθητηρίων οργάνων:

«*Αρχίζω να σχηματίζω την εικόνα της γενικής δυναμικής της αντίληψης. Ο εγκέφαλος αναζητά πληροφορίες, κυρίως κατευθύνοντας έναν άνθρωπο να κοιτάξει, να ακούσει και να οσφρανθεί. Η αναζήτηση είναι αποτέλεσμα της αυτοοργανωνόμενης δραστηριότητας στο λιμβικό σύστημα …, το οποίο διοχετεύει μιαν εντολή αναζήτησης στα κινητήρια συστήματα. ... το λιμβικό σύστημα στέλνει το λεγόμενο μήνυμα επαναπροσανατολισμού, θέτοντας όλα τα αισθητήρια συστήματα σε ετοιμότητα ώστε να ανταποκριθούν σε νέες πληροφορίες.*

»*Και ανταποκρίνονται, ... Η συγχρονισμένη δραστηριότητα σε κάθε σύστημα μεταδίδεται πίσω στο λιμβικό σύστημα, όπου συνδυάζεται με τα προϊόντα επεξεργασίας ... άλλων αισθητηρίων συστημάτων, σχηματίζοντας μια* Gestalt. *Τότε, σε κλάσμα δευτερολέπτου, απαιτείται μια άλλη αναζήτηση πληροφοριών, και τα αισθητήρια ετοιμάζονται πάλι με επαναπροσανατολισμό.*

»*Η συνείδηση μπορεί κάλλιστα να είναι η υποκειμενική εμπειρία αυτής της επαναλαμβανόμενης διαδικασίας κινητήριων εντολών, επαναπροσανατολισμού και* *αντίληψης. Εάν είναι έτσι, επιτρέπει στον εγκέφαλο να σχεδιάζει και να προετοιμάζεται για κάθε επόμενη δράση στην βάση της προηγούμενης δραστηριότητας, των αισθητηρίων δεδομένων και της αντιληπτικής σύνθεσης. ...μια πράξη αντίληψης δεν είναι η αντιγραφή ενός εισερχόμενου ερεθίσματος.* ***Είναι ένα βήμα σε μια πορεία στην οποία οι εγκέφαλοι αναπτύσσονται, αναδιοργανώνονται και ανοίγονται στο περιβάλλον τους για να το αλλάξουν προς όφελός τους***» [50, έμφαση δική μου].

Η διαδικασία που περιγράφεται σε αυτό το απόσπασμα, από την άποψη της φυσιολογίας, καθώς και η διαδικασία κατηγοριοποιήσεων, από την άποψη της γνωσιακής επιστήμης, είναι ομόλογες προς την διαδικασία νοηματοδότησης που περιγράφω εδώ. Με κανέναν τρόπο δεν υπονοώ με αυτό ότι η νόηση, ο φιλοσοφικός στοχασμός, η σκέψη με έννοιες, μπορούν να αναχθούν σε φαινόμενα που εξετάζει η φυσιολογία ή η ψυχολογία· αυτό δηλώνει ο όρος «ομόλογες». Θέλω να τονίσω την αντιφατική σχέση μεταξύ γνωρίζοντος υποκειμένου και γνωριζομένου αντικειμένου. Ως υπαρκτό, δρων ον, το γνωρίζον υποκείμενο *δεν* διαφέρει, κατ΄ αρχήν, από το γνωριζόμενο αντικείμενο. Ως *νοήμον* ον, διαφέρει από το αντικείμενο της νόησης. Υποκείμενο και αντικείμενο ανήκουν εξ ίσου στον κόσμο της φύσης. Η γνωστική διαδικασία, η νόηση, είναι φυσικό φαινόμενο. Πρόκειται βεβαίως για την γνωστή θέση τού Spinoza, ότι η φύση δρα πάνω στον εαυτό της και στοχάζεται τον εαυτό της μέσω ενός τμήματος του εαυτού της. Πρέπει εδώ να επανέλθουμε για άλλη μια φορά στο μεθοδολογικό ζήτημα σχετικά με την διαλεκτική σχέση ενός λόγου περί του αντικειμένου με τον λόγο περί του λόγου περί του αντικειμένου. Η σχετική ανάλυση του Φαράκλα [16, σ. 229 κ.ε.] μπορεί να αναδιατυπωθεί προσαρμοσμένη στο θέμα μας.

Ο παρατηρητής ως φυσικό όν, που διαθέτει αναπαραστατική ικανότητα και *νόηση*, και το γνωστικό αντικείμενό του, είναι και τα δύο Φύση. Η *συνείδηση* του παρατηρητή, η νόηση, διακρίνει τον εαυτό της από το αντικείμενό της, θεωρώντας το φύση έξω και πέρα από αυτήν. Έτσι, εάν θεωρούμε ως Φύση –με κεφαλαίο «Φ»– αυτό που δεν έχει «έξω», τότε αυτή η Φύση είναι έννοια γένους στην οποία υπάγονται ως έννοιες είδους τόσο η φύση –με πεζό «φ»– νοούμενη ως αντικείμενο ή, γενικότερα, ως περιβάλλον, όσο και η συνείδηση του νοούντος υποκειμένου. Η Φύση ως έννοια γένους, όσον αφορά την επιστημονική πρακτική, αποκτά *εμπράγματη ύπαρξη* στην πράξη του πειράματος, της μέτρησης, της παρατήρησης. Εκεί η φύση, η οποία *περιλαμβάνει τον παρατηρητή ως δρών όν*, νοηματοδοτείται, γεννά την συνείδηση, μορφοποιείται μαθηματικά. Η εμπράγματη ύπαρξη της Φύσης είναι το περιεχόμενο αυτού που χαρακτήρισα ως «πραγμοποιημένο θεώρημα». Αυτή η θέση μου διαφέρει από την κοινά παραδεδεγμένη, κυρίως σε αναφορά προς την κβαντική φυσική, σε ένα κρίσιμο σημείο. Οι πειραματικές διατάξεις του παρατηρητή, οι μετρητικές συσκευές, η ίδια η δική του φυσική ύπαρξη, *δεν θεωρούνται ότι βρίσκονται εντεύθεν της τομής* που βρίσκεται στην αφετηρία της γνωστικής διαδικασίας. Το πραγματικό αντιθετικό ζεύγος, όσον αφορά την φιλοσοφία, *δεν* είναι το αντικείμενο, αφ΄ ενός, και ο παρατηρητής μαζί με τις συσκευές και τις δραστηριότητές του, αφ΄ ετέρου. Είναι το όλον αντικειμένου και παρατηρητή, αφ΄ ενός, και η *συνείδηση* του παρατηρητή, αφ΄ ετέρου. Η φυσική αλληλεπίδραση αντικειμένου πειραματικής διαδικασίας και πειραματικής διάταξης είναι ειδική περίπτωση φυσικής αλληλεπίδρασης εν γένει. Όπως και στην κλασική φυσική, «*… πρέπει να τονιστεί ότι εδώ δεν πραγματευόμαστε μια διαδικασία μέτρησης στην οποία ο φυσικός – παρατηρητής συμμετέχει. Με τον όρο* ***μέτρηση****, στην κβαντική μηχανική, κατανοούμε οποιαδήποτε διαδικασία αλληλεπίδρασης μεταξύ κλασικών και κβαντικών αντικειμένων, η οποία συντελείται χωριστά και ανεξάρτητα από οποιονδήποτε παρατηρητή*» ([7, σσ. 2-3], έμφαση στο πρωτότυπο). Έτσι, στην περίπτωση των κβαντικών θεωριών, η εντελώς ομιχλώδης πρόταση περί «ανεξαρτησίας του αντικειμένου από τον παρατηρητή», γίνεται σαφής εφ΄ όσον δηλώνει ανεξαρτησία από την *συνείδηση* του παρατηρητή. Αποκλείονται άρα οι μυστικιστικές συνδηλώσεις διατυπώσεων, όπως «κατάρρευση της κυματικής συνάρτησης με την παρατήρηση», ή ερωτημάτων εάν αυτή η κατάρρευση γίνεται στον αμφιβληστροειδή ή στον εγκεφαλικό φλοιό, ή ακόμη οι ακραία υποκειμενιστικές θέσεις ότι μόνον το παρατηρούμενο φαινόμενο είναι φαινόμενο. Το πείραμα και η μέτρηση *δεν διαφέρουν* κατ΄ αρχήν από τα οποιαδήποτε φυσικά φαινόμενα, και *διαφέρουν* διότι είναι συνειδητά σχεδιασμένα φυσικά φαινόμενα. Δεδομένου ότι πρόκειται για γενική μεθοδολογική τοποθέτηση με ισχύ τόσο στην κλασική, όσο και στην κβαντική φυσική, μία συνέπεια είναι ότι απαιτείται η επανεξέταση ενός από τους ακρογωνιαίους λίθους της ερμηνείας της επονομαζόμενης σχολής της Κοπεγχάγης, που αποδίδεται στον N. Bohr· δηλαδή, του νοήματος της φράσης, *οι κλασικές έννοιες είναι αναγκαίο πλαίσιο για την ερμηνεία των κβαντικών θεωριών*. Διότι, αυτές οι κλασικές έννοιες δεν έχουν πλέον το νόημα μιας γλώσσας με την οποία ο παρατηρητής συνδιαλέγεται με ένα τμήμα του επιστητού που έχει προνομιακό *status* εντεύθεν της τομής που οροθετεί το γνωριζόμενο αντικείμενο. Το συμπέρασμα είναι ότι το κλασικό εννοιολογικό πλαίσιο δεν μπορεί να θεωρείται ως καντιανού τύπου *a priori* πλαίσιο για την γνωστική διαδικασία. Αυτή η προσέγγιση αποφεύγει τον *γνωσιολογικό διχασμό* του αντικειμενικού κόσμου, ανάμεσα στις περιοχές που συμβατικά ονομάζονται μακρόκοσμος και μικρόκοσμος. Παραμένει, εν τούτοις, το ερώτημα: Πώς ξεχωρίζει κανείς το αντικείμενο πέρα από την συνείδηση, την στιγμή που αυτό φανερώνεται στην συνείδηση μόνον ως υβρίδιο, ντυμένο με έννοιες; Η απάντηση βρίσκεται στην *πρακτική* της φυσικής και στην τεχνολογία, εκεί που, όπως ανέφερα, η Φύση αποκτά εμπράγματη ύπαρξη. Είναι δύο κινήσεις, από «έξω» προς τα «μέσα» και από τα «μέσα» προς τα «έξω», οι οποίες συναποτελούν μιαν ενιαία κίνηση: εκείνη μέσω της οποίας «*καθώς το φυσικό φαινόμενο μεταμορφώνεται νοηματικά, οι έννοιες αποκτούν νόημα εμπειρικά*» [35]. Από την άποψη της λογικής, είναι οι δύο όψεις μιας κρίσης: Μια *κρίση της ποιότητας*, αφ' ενός, όταν το φαινόμενο υπάγεται σε μιαν έννοια, μια *κρίση της ύπαρξης*, αφ' ετέρου, όταν η έννοια αποδίδεται στο φαινόμενο. Σε αυτήν ακριβώς την διπλή κίνηση το πέραν της σκέψης αντικείμενο φανερώνεται ως περιεχόμενο μιας γνωστικής διαδικασίας, και η σκέψη ενεργεί ως «σκέψη τινός». Το κριτήριο της αντικειμενικότητας, άρα, είναι μια φυσική και νοητική διαδικασία, σαν εκείνη μέσω της οποίας συμπληρώθηκε ο περιοδικός πίνακας των στοιχείων και ανακαλύφθηκε ο πλανήτης Ουρανός ή τα quarks, και, πολύ ισχυρότερα, η διαδικασία μέσω της οποίας το νοηματοδοτημένο, θεωρητικά ιδιοποιημένο φαινόμενο, αναπαράχθηκε σκόπιμα, είτε με το ταξίδι των Voyager, είτε με τις διαπλανητικές εξερευνήσεις από το Spirit και την Opportunity ή τον Huygens.

Μετά από όλα αυτά, επιστρέφοντας στην γνωστική διαδικασία, θα πω ότι το γνωστικό αντικείμενο, το Είναι του ως στιγμή τού Γίγνεσθαι, καθώς μορφοποιείται στην νόηση, αρχικά είναι μια έκφανση, ένα φανέρωμα, ένα *Schein*, για να χρησιμοποιήσω πάλι έναν χεγκελιανό όρο. Θα επικαλεστώ την εύστοχη διάκριση που κάνει ο Μπαλτάς και θα πω ότι αντιστοιχεί στο φυσικό φαινόμενο με την έννοια του «*natural*» [15, 35]. Είναι η πρώτη σκέψη που γεννά η αισθητηριακή αντίληψη. Η ανακατάταξη του νοηματικού πλέγματος με την ένταξη του αντικειμένου σε αυτό, το νοηματοδοτεί επενδύοντάς το με έναν συνδυασμό εννοιών, και το μετατρέπει σε φυσικό φαινόμενο με την έννοια του «*physical*». Έτσι ενταγμένο σε ένα εννοιολογικό πλαίσιο, το υποκείμενο ιδιοποιείται το αντικείμενο, το αναδεικνύει σε στοιχείο μιας θεωρίας και σημείο όπου αρχίζουν να εντοπίζονται ουσιώδεις σχέσεις, δηλαδή νόμοι που του προσιδιάζουν. Συνεχίζοντας με την χρήση των χεγκελιανών εννοιών, είναι μια εμφάνιση, *Erscheinung*. Όλη αυτή η διαδικασία της νοηματοδότησης, της μετατροπής τού «*natural*» σε «*physical*», είναι η διαδικασία της σύνδεσης του υπό εξέτασιν φυσικού συστήματος με το πρότυπο, το στοιχείο γένους όπως αυτό έχει διαμορφωθεί εντός του εννοιολογικού πλαισίου που κινητοποιείται κάθε φορά. Με αυτήν την έννοια, είναι η διαδικασία της *ερμηνείας* και του καθορισμού ενός *μοντέλου*. Είναι ακριβώς η διαδικασία που περιέγραψα προηγουμένως, μιλώντας για τον τρόπο που η Φύση αυτο-νοηματοδοτείται μέσω της πραγμάτωσής της στην δραστηριότητα της θεωρητικής φυσικής.

2.3 Το κλασικό πρότυπο: η μηχανική ερμηνεία

Δηλαδή, ο μορφισμός που συνδέει το πρότυπο μιας κατηγορίας φαινομένων με ένα επί μέρους φαινόμενο συνιστά μιαν *ερμηνεία*, μετατρέποντας το επί μέρους σε *μοντέλο*. Το ιστορικό πρότυπο αυτής της διαδικασίας, όπως διαμορφώθηκε στην ωριμότητα της κλασικής φυσικής, είναι η λεγόμενη «μηχανική ερμηνεία» όπως την ανέπτυξε ο Poincaré, παρουσιάζοντας την θεωρία τού Maxwell [18]. Σε τί συνίσταται μια μηχανική ερμηνεία; Σε όλα τα φυσικά φαινόμενα, λέει ο Poincaré, αντιστοιχεί ένας αριθμός παραμέτρων, q_i, $i = 1, \ldots, n$ (γενικευμένες συντεταγμένες θα τις λέγαμε εμείς), οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν και να μετρηθούν με την βοήθεια του πειράματος. Η ανάλυση του συνόλου των παρατηρήσεων μας οδηγεί στον νόμο της μεταβολής αυτών των παραμέτρων, ο οποίος συνήθως έχει την μορφή διαφορικών εξισώσεων που συσχετίζουν τις παραμέτρους μεταξύ τους και με τον χρόνο, έστω t.

Μια *γεωμετρική ερμηνεία* του φαινομένου επιδιώκει να το εξηγήσει με την κίνηση της «συνηθισμένης ύλης», επιστρατεύοντας ένα ή περισσότερα υποθετικά ρευστά. Αυτά θεωρούνται ότι αποτελούνται από έναν μεγάλον αριθμό, p, από μεμονωμένα μόρια με μάζες m_i, i = 1, …, p. Κατόπιν υποθέτουμε ότι ισχύει ο νόμος διατήρησης της ενέργειας, οπότε θα υπάρχει μια συνάρτηση V των 3p συντεταγμένων, x_i, y_i, z_i , των μορίων. Θα έχουμε τότε 3p εξισώσεις κίνησης των μορίων:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

Το σύστημα θα έχει κινητική ενέργεια $T = \frac{1}{2} m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)$, όπου ο τόνος δηλώνει παράγωγο ως προς t. Η εξίσωση η οποία εκφράζει την διατήρηση της ενέργειας θα είναι: T + V = σταθερά.

Μια πλήρης *μηχανική ερμηνεία*, κατά τον Poincaré, απαιτεί γνώση της συνάρτησης V και του τρόπου με τον οποίο οι συντεταγμένες, x_i, y_i, z_i, μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των n παραμέτρων q. Τότε η V γίνεται μια συνάρτηση των q, η T γίνεται συνάρτηση των q και των πρώτων παραγώγων τους ως προς t, και επί πλέον είναι ομοιογενής δευτέρου βαθμού ως προς αυτές τις παραγώγους. Τότε οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν την μορφή των εξισώσεων του Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0.$$

Τέλος, οι εξισώσεις αυτές συγκρίνονται με το πείραμα. Αντιστρόφως, αν μπορούμε να βρούμε συναρτήσεις T και V με τέτοια χαρακτηριστικά, τότε θα ξέρουμε ότι το φαινόμενο επιδέχεται μηχανική ερμηνεία. Εάν μια τέτοια ερμηνεία είναι δυνατή, τότε υπάρχουν και άπειρες άλλες, εξ ίσου καλές.

Ποιά είναι η σκέψη πίσω από αυτήν την μέθοδο; Ο Poincaré εξηγεί ότι είναι η επιδίωξη της κατασκευής ενός συνεκτικού αξιωματικού συστήματος. Με αφετηρία ένα σύνολο από αυστηρά διατυπωμένες υποθέσεις, συνάγει κανείς συμπεράσματα με την παραγωγική μέθοδο, και τα ελέγχει πειραματικά. Οι υποθέσεις πρέπει να είναι οι ελάχιστες αναγκαίες, και το σύστημα πρέπει να είναι λογικά συνεκτικό, χωρίς αντιφάσεις. Υπάρχει, όμως, και ένα άλλο αίτημα, συμπληρώνει ο Poincaré. Πίσω από την ύλη που φθάνει στις αισθήσεις μας και με την οποία εξοικειωνόμαστε μέσω του πειράματος, «*αναζητάμε μιαν άλλην ύλη, την αληθινή, η οποία έχει μόνον καθαρά γεωμετρικές ιδιότητες και της οποίας τα άτομα είναι μόνον μαθηματικά σημεία που διέπονται μόνον από τους νόμους της δυναμικής*». Και όμως, θέλουμε «*με μιαν ανομολόγητη αντίφαση*» αυτά τα αόρατα και άχρωμα άτομα να «*αντιπροσωπεύουν και συνεπώς να προσεγγίζουν όσο γίνεται πιο πολύ την συνηθισμένη ύλη…*» [18].

Ας δούμε λεπτομερέστερα αυτήν την έννοια της ερμηνείας. Ισχύει και εδώ αυτό που ανέφερα σε σχέση με τις ιδέες τού Lawvere, ότι δηλαδή πρόκειται για κωδικοποίηση του αποτελέσματος μιας ιστορικής διαδικασίας, η οποία ανέδειξε έναν τομέα της φυσικής, εν προκειμένω την μηχανική, σε αυτό που ο Kuhn θα ονόμαζε «υπόδειγμα» (exemplar) της κλασικής φυσικής, και τον ύψωσε σε ένα επίπεδο μετα-θεωρίας. Η μηχανική, συνεπώς, έχει διττό χαρακτήρα. Αφ΄ ενός, ως θεωρία περί των μηχανικών φαινομένων είναι ένας επιστημονικός κλάδος το αντικείμενο του οποίου τοποθετείται σε ένα επίπεδο *οντικό*. Αφ΄ ετέρου, ως ερμηνευτικό πλαίσιο, είναι θεωρία περί μιας θεωρίας περί ενός φυσικού φαινομένου. Δηλαδή, το αντικείμενό της σε αυτήν την δεύτερη περίπτωση τοποθετείται σε επίπεδο *νοηματικό*. Η κλασική θερμοδυναμική, ως στατιστική φυσική, και η ηλεκτρομαγνητική θεωρία επιδέχονται τέτοια μηχανική ερμηνεία. Έχουμε άρα ένα σχήμα, όπου η μηχανική ως ερμηνευτικό πλαίσιο είναι *έννοια γένους*, στην οποία υπάγονται ως *έννοιες είδους* τόσο η στατιστική φυσική και ο ηλεκτρομαγνητισμός, ειδικοί τομείς της φυσικής, όσο και, ισότιμα, η ίδια η μηχανική, τώρα ως ειδικός τομέας με αντικείμενο τα μηχανικά φαινόμενα. Η σκέψη τού Poincaré θυμίζει ένα σχήμα με δύο πόλους. Στον έναν βρίσκονται έννοιες εμπειρικές, παράμετροι και οι μεταξύ τους σχέσεις, όπως προκύπτουν αφαιρετικά με την ανάλυση της εποπτείας του εκάστοτε φαινομένου. Στον άλλον πόλο βρίσκεται το απόσταγμα της ιστορικής διαδικασίας, η φιλοσοφική παράδοση του ατομισμού στην φυσικομαθηματική της έκφραση και η μηχανική ως πρότυπο, αυτό που ο Poincaré ονομάζει αντίληψη για την «συνηθισμένη ύλη». Η αντίληψη αυτή σχηματοποιείται στην κατά Poincaré *γεωμετρική ερμηνεία*. Τόσο οι αφαιρέσεις από την εποπτεία, όσο και οι σχηματοποιημένες φιλοσοφικο-φυσικές αντιλήψεις, κινούνται στο *νοηματικό* επίπεδο. Εκεί, συναντώνται με την αναγκαία διαμεσολάβηση αυτού που ο Poincaré ονομάζει *μηχανική ερμηνεία*. Δηλαδή, έχουμε ένα σχήμα με τρεις όρους που θυμίζει έναν συλλογισμό: οι εμπειρικές έννοιες και οι μεταξύ τους σχέσεις/νόμοι που αφαιρούνται από την εποπτεία είναι το συμπέρασμα, η αντίληψη της «συνηθισμένης ύλης» είναι η μείζων προκειμένη, και η «μηχανική ερμηνεία» είναι η ελάσσων προκειμένη, το διαμεσολαβούν «τρίτο».

Θεωρώ ότι δεν είναι τυχαία η ομοιότητα με την καντιανή σχηματοποίηση των καθαρών εννοιών του νου. Με τον ίδιο τρόπο, η εμπειρική έννοια της στρογγυλότητας, αφαιρούμενη από ένα αντικείμενο όπως ένα πιάτο, συναντάται ως ομοειδής στο νοηματικό επίπεδο με την γεωμετρική έννοια του κύκλου: «*Έτσι η εμπειρική έννοια ενός **πιάτου** είναι ομοειδής με την καθαρά γεωμετρική έννοια ενός **κύκλου**, καθόσον η στρογγυλότητα, η οποία νοείται στο πρώτο, γίνεται στο δεύτερο προσιτή στην εποπτεία*» ([51], έμφαση στο πρωτότυπο). Εδώ θα επιστήσω την προσοχή στην ανάλυση του H. E. Allison [52, σ. 176 κ.ε.]. Ο Allison ασχολείται με την έννοια της «υπαγωγής» που χρησιμοποιεί ο Kant, μιλώντας για υπαγωγή ενός αντικειμένου (π.χ. του πιάτου) κάτω από μιαν έννοια (του κύκλου). Υποστηρίζει ότι δεν πρόκειται για τον τρόπο που χρησιμοποιείται σε μια λογική κρίση, όπου η σχέση είναι εκείνη του καθολικού και του μερικού. Η σχέση είναι μάλλον εκείνη της δομής και του περιεχομένου. Η υπαγωγή, κατά τον Allison, έχει την έννοια που απαντάται σε έναν *συλλογισμό*, όταν ο όρος μιας δυνατής κρίσης υπάγεται στον όρο μιας δεδομένης κρίσης –η ελάσσων και η μείζων προκειμένη αντιστοίχως– με συμπέρασμα μια διαμεσολαβημένη κρίση. Εάν στην θέση του πιάτου και του κύκλου βάλουμε το φυσικό φαινόμενο και την αντίληψη περί συνηθισμένης ύλης, το φιλοσοφικό υπόβαθρο της μηχανικής ερμηνείας γίνεται προφανές. Είναι ο τρίτος όρος, η ελάσσων προκειμένη ενός συλλογισμού, σε μια διατύπωση που θέτει με όρους φυσικής φιλοσοφικά ερωτήματα με έναν τρόπο που εγκαινίασε ο Kant. Αυτός ο ρόλος του «τρίτου» είναι δυνατός, αν δεχτεί κανείς την ερμηνεία τού Allison [52, σσ. 180-182] για το καντιανό υπερβατολογικό σχήμα ως καθαρή εποπτεία με την έννοια της *μορφολογικής εποπτείας*, όπως είναι η γεωμετρική αναπαράσταση του χώρου. Πρέπει δηλαδή να γίνει η διάκριση προς την καθαρή εποπτεία ως *μορφή της εποπτείας*, όπως είναι ο χώρος. Η πρώτη, προσδιορισμένη έννοια της καθαρής εποπτείας είναι εκείνη την οποία «*επικαλείται ο μαθηματικός όταν εκθέτει ή κατασκευάζει τις έννοιές του*», είναι τόσο αισθητηριακή όσο και νοητική, τόσο καθολική όσο και μερική. Προσοχή, όμως, οι έννοιες που αφαιρούνται από το γνωστικό αντικείμενο *διακρίνονται* από το ίδιο το γνωστικό αντικείμενο, το πιάτο και η στρογγυλότητα του πιάτου δεν ταυτίζονται, το αντικείμενο βρίσκεται στο *οντικό* επίπεδο. Η αισθητηριακά αντιληπτή ύλη *διακρίνεται*, αναγνωρίζει ο Poincaré, από αυτό που ονομάζει «αληθινή ύλη». Η «ανομολόγητη αντίφαση», που αναφέρει ο Poincaré, είναι ακριβώς εκείνη που προκύπτει από την *ταύτιση* του νοηματικού και του οντικού επιπέδου. Ταυτιζόμενα με φυσικές οντότητες, τα στοιχεία της θεωρίας στο νοηματικό επίπεδο αποκτούν εμπράγματη ύπαρξη. Όπως φαίνεται από την έκθεση του Poincaré, *η κλασική φυσική με την μηχανική ερμηνεία της είναι συμβατή με μια τέτοια ταύτιση, αγνοώντας την διάκριση μεταξύ νοηματικού και οντικού*. Η κλασική στατιστική είναι χαρακτηριστική περίπτωση. Με σύγχρονους όρους, θα λέγαμε ότι είναι μια επιτυχής θεωρία «κρυμμένων μεταβλητών».

Ακριβώς αυτό όμως δεν είναι –βλέπε θεώρημα Kochen-Specker [53]– το κύριο ρεύμα των κβαντικών θεωριών. Αυτές *δεν* επιδέχονται μηχανική ερμηνεία. Ιστορικά, το κβαντικό σύστημα αναγνωρίστηκε ως το «μικροσκοπικό», αρχικά το άτομο, κατόπιν το «στοιχειώδες σωματίδιο» κ.λπ. Ας ονομάσουμε «σωματίδιο» –εντός εισαγωγικών– το κβαντικό σύστημα γενικά. Ο όρος κάνει προφανή την καταγωγή από το κλασικό εννοιολογικό πλαίσιο, αφ΄ ενός, και αφ΄ ετέρου, δηλώνει το ημιτελές της εννοιολογικής μετάβασης, την επιμονή του ομφάλιου λώρου που συνδέει με την κλασικότητα για τις ανάγκες της ερμηνείας, όπως είναι γενικά παραδεκτό. Ταυτόχρονα, αντιφάσεις εγγενείς στην κλασική θεωρία, που έχουν την πηγή τους στην μη διάκριση του οντικού από το νοηματικό επίπεδο, όπως είδαμε, δεν μπορούν πλέον να λανθάνουν. Συγκεκριμένα, τα νοητά άτομα της «αληθινής ύλης» κατά Poincaré μπορούσαν κλασικά να ταυτίζονται με τα μόρια της «συνηθισμένης ύλης». Η επιστημονική έννοια που αντιστοιχεί, και η οποία ενσωματώνει την «ανομολόγητη αντίφαση», είναι η έννοια του *υλικού σημείου*. Ο «ανομολόγητος» χαρακτήρας της αντίφασης έγκειται στο γεγονός ότι αυτή η έννοια μπορούσε να συνυπάρχει *άκριτα* με την αντίληψη ότι δηλώνει κάτι πολύ μικρό, κατά προσέγγισιν αδιάστατο, σημειακό, κάτι που απέδιδε ο διαισθητικός όρος «σωματίδιο». Η πραγματικότητα της αντίφασης έγκειται στο γεγονός ότι το «υλικό σημείο» *δεν είναι* άλλο ένα όνομα για το «μικροσκοπικό», δεν είναι προϊόν ποσοτικής προσέγγισης, είναι *έννοια* που προκύπτει σε μια διαδικασία *διαλεκτικής άρνησης*. Ως τέτοια, είναι προϋπόθεση για, και προϋποθέτει το αντίθετό της, την έννοια του *δυναμικού πεδίου*. Έτσι, η κβαντική μηχανική εγκαινιάζεται με το εκ πρώτης όψεως παράδοξο, ότι ένα «σωματίδιο» συμπεριφέρεται άλλοτε ως σωματίδιο και άλλοτε ως κύμα. Η ισοδύναμη πρόταση, *ένα «σωματίδιο» είναι και δεν είναι σωματίδιο*, από μεθοδολογική άποψη είναι της ίδιας τάξεως με την πρόταση, *η «μηχανική» είναι και δεν είναι μηχανική*. Το «σωματίδιο» είναι έννοια γένους, δηλώνοντας το κβαντικό σύστημα γενικά, στην οποία υπάγονται ως έννοιες είδους τόσο το σωματίδιο όσο και το κύμα, δηλαδή η εκάστοτε μορφή εμφάνισης του επί μέρους αντικειμένου της έρευνας. Αν θυμηθούμε την παρομοίωση με τις δύο όψεις ενός νομίσματος, η ταύτιση των δύο επιπέδων ισοδυναμεί με τον μηδενισμό του πάχους του νομίσματος, άρα το άκαμπτο «αγκίστρωμα» της μίας όψης πάνω στην άλλη.

Μπορούμε να προσεγγίσουμε το πρόβλημα της σύγχυσης του οντικού και του νοηματικού από την σκοπιά της καντιανής φιλοσοφίας. Χωρίς να ισχυρίζομαι ότι πρόκειται ακριβώς για το ίδιο, σημειώνω ότι, για τον Kant, οι καθαρές έννοιες, αφ' ενός, και, αφ' ετέρου, τα σχήματά τους *διακρίνονται*: μεταξύ τους υπάρχει όχι ταύτιση αλλά *αναλογία* [51, A 181/B 224]. Σε αυτήν την βάση, ο Allison επισημαίνει ότι η διάκριση μιας κατηγορίας από το σχήμα της «*είναι άμεση συνέπεια της υπερβατολογικής διάκρισης που κάνει ο Kant μεταξύ αισθητηριακότητας και κατανόησης*». Η παραγνώριση αυτής της διάκρισης, συνεπώς, συνεπάγεται άρνηση «*της βάσης για κάθε πραγματική διάκριση μεταξύ καθαρής έννοιας και του αισθητηριακού αντίστοιχού της (του σχήματος)*», άρνηση που «*βρίσκεται πίσω από την* ***συνταύτιση, τυπική της ορθολογιστικής φιλοσοφίας, της χρονικής σχέσης αιτίας και αποτελέσματος με την λογική σχέση θεμελίου και συνεπακόλουθου****. Γενικότερα* *οδηγεί επίσης στην “υπερβατολογική ψευδαίσθηση” μέσω της οποίας αυτές οι καθαρές έννοιες αντιμετωπίζονται σαν να είναι οι ίδιες η πηγή μεταφυσικών αρχών που είναι εφαρμόσιμες σε “πραγματικά αντικείμενα”*» ([52, σσ. 196-7], έμφαση δική μου). Δανείζομαι, λοιπόν, τον όρο «υπερβατολογική ψευδαίσθηση» για να χαρακτηρίσω την ταύτιση νοητικού και οντικού. Αυτό έχει σημασία, διότι σημαίνει την «οντοποίηση» μιας ερμηνείας. Για να το διατυπώσω αλλιώς, σημαίνει να θεωρεί κανείς ότι οι «αντιλήψεις για την συνηθισμένη ύλη» είναι εφαρμόσιμες στα «πραγματικά αντικείμενα». Η συζήτηση για την «οντολογική ασυνέχεια» σε μιαν επιστημονική επανάσταση εγγράφεται σε αυτό το πλαίσιο. Με άλλα λόγια, «αντιλήψεις για την συνηθισμένη ύλη», επικρατούσες σε διάφορες εποχές και συνθήκες, όπως αβαρή ρευστά, το φλογιστόν, ο αιθέρας, ήταν επίδοξες *ερμηνείες* φυσικών φαινομένων· ήταν μεν υποθέσεις οντολογικού χαρακτήρα, αλλά η επιστημονική πρακτική *δεν* τις ενέταξε ποτέ στο θεωρητικό – μαθηματικό/πειραματικό– πλαίσιο μιας φυσικής θεωρίας· παρέμειναν υποθέσεις ανεπιβεβαίωτες, απορρίφθηκαν και εγκαταλείφθηκαν, και δεν πρέπει να θεωρούνται ως εναλλακτικές οντολογίες. Η απόρριψή τους σημαίνει απόρριψη μιας ερμηνείας, και όχι οντολογικό άλμα. Τον ίδιο ρόλο παίζει σήμερα, π.χ., το σωματίδιο Higgs –η «σύγχρονη υπόθεση του αιθέρα». Η πειραματική επιβεβαίωση της ύπαρξής του –ό,τι και αν σημαίνει αυτό στα πλαίσια του κυρίαρχου «πρότυπου μοντέλου»– και μόνον θα του αποδώσει οντολογικό *status*.

Επιστρέφοντας στο «σωματίδιο» ως το κβαντικό σύστημα, τονίζω ότι οι έννοιες που συνδέονται με αυτό, σωματίδιο και κύμα, *σέρνουν μαζί τους το κλασικό τους νόημα: αντιστοιχούν στο υλικό σημείο, η πρώτη, και στο πεδίο, η δεύτερη*. Η συνύπαρξή τους – μολονότι ποτέ την ίδια χρονική στιγμή– σε θεωρητικές περιγραφές οφείλεται στο ότι, θεωρούμενες καθ΄ εαυτές, είναι κλασικά κατάλοιπα, και δεν σηματοδοτεί μια περίπτωση «υποκαθορισμού», όπως υποστηρίζεται μερικές φορές. Στο επίπεδο της φυσικής, η «παραδοξολογία» της κβαντομηχανικής σημαίνει απλώς ότι το κβαντικό σύστημα δεν συμπεριφέρεται ως κλασικό υλικό σημείο, δεν επιδέχεται μηχανική ερμηνεία, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Στο επίπεδο της φιλοσοφίας, η λανθάνουσα *ατομιστική* αντίληψη *καταργεί* την αντιφατική σχέση υλικού σημείου και πεδίου, μετατρέποντας την δεύτερη έννοια σε ακραία περίπτωση της πρώτης, ή και αντιστρόφως. Ας σημειώσω εδώ παρεμπιπτόντως, ότι η επιμονή στις κλασικές έννοιες του σημείου και του πεδίου είναι το κίνητρο για αντιθετικές μεταξύ τους προσπάθειες να εξαλειφθεί το κβαντικό παράδοξο. Δεδομένου ότι έχω αναφερθεί στον Lakatos, ας σημειώσω ότι έχουμε, αφ΄ ενός, την προσπάθεια «εκδίωξης των τεράτων», με στόχο μιαν ερμηνεία ανάλογη με την μηχανική ερμηνεία της στατιστικής φυσικής, όπως στις θεωρίες «κρυμμένων μεταβλητών». Αφ΄ ετέρου, την προσπάθεια «εξημέρωσης των τεράτων» με την οροθέτηση του πεδίου εφαρμογής του αντιθετικού ζεύγους εννοιών, όπως γίνεται με την «αρχή της συμπληρωματικότητας» κατά την ερμηνεία της Κοπεγχάγης. Η επισήμανση του Howard που συναντήσαμε προηγουμένως, ότι η αντίθεση σώματος – πεδίου *δεν* συμπίπτει με την αντίθεση σημειακού – συνεχούς, αναδεικνύει ακριβώς την «απώθηση» της αντίφασης. Μια κριτική προσέγγιση υπερβαίνει την μονομέρεια του ατομισμού, δηλαδή της μηχανιστικής σκέψης. Το «σώμα» και το «πεδίο» προκύπτουν ως έννοιες, και η σχέση τους, κατά ακριβέστερη διατύπωση, συμπίπτει με την σχέση διακριτού και πλήρους. Ας δούμε αυτήν την διαδικασία λεπτομερέστερα. Η ατομιστική φιλοσοφία συνδέεται με την απολυτοποίηση μιας οριακής περίπτωσης στην σχέση των δύο αντίθετων προσδιορισμών, του συνεχούς και του διακριτού. Είναι εκείνη η περίπτωση που τα δύο αντίθετα αλληλοδιεισδύουν, καταργούν την διαφορά τους και ταυτίζονται. Δηλαδή, όταν το συνεχές θεωρείται ως *συλλογή ατομικοτήτων*, τόσον ακραίας «πυκνότητας», ώστε τα διάκενα μεταξύ των συστατικών ατομικοτήτων να εξαφανίζονται, προσδίδοντας στην συλλογή την υφή μιας ομοιογενούς και συμπαγούς ολότητας. Με άλλα λόγια, ακραία «πυκνότητα» σημαίνει ότι στην κλασική αντιθετική δυάδα του Δημόκριτου, «άτομα και κενό», το κενό συρρικνώνεται βαθμιαία μέχρι να εξαφανιστεί εντελώς. Έτσι, το συνεχές καταλήγει να συμπίπτει με το *πλήρες*. Αλλά, και αντιστρόφως: Το συνεχές, ως πλήρες, διατηρεί μεν τον χαρακτήρα του ως συλλογή ατομικοτήτων, η κάθε μία όμως από αυτές θεωρείται ως το γεωμετρικό σημείο με την κλασική έννοια. Στην δυάδα «άτομα και κενό», τώρα το άτομο φαίνεται να εξαφανίζεται, και από «μη τμητό» να καταλήγει σε *αδιάστατο*. Η μεταμόρφωση του ζεύγους «συνεχές – διακριτό» σε «πλήρες – αδιάστατο» ισοδυναμεί με την αφαίρεση από κάθε εγγενή ποιοτικό προσδιορισμό. Ο οιοσδήποτε τέτοιος προσδιορισμός θα πρέπει να αποδοθεί από τα έξω. Το πλήρες και το αδιάστατο καταλήγουν να ορίζονται μόνον ποσοτικά, όπου το «ποσοτικό» έχει νόημα ως το «αρνημένο ποιοτικό». Εν τούτοις, η αφαίρεση από κάθε ποιοτικό προσδιορισμό δεν πρέπει να θεωρηθεί ως *απουσία* ποιότητας, αλλά μάλλον ως ποιοτική *απροσδιοριστία*. Αυτό είναι το νόημα του φιλοσοφικού όρου «αρνημένη ποιότητα». Στο *μεταίχμιο* της μετάβασης από το ποιοτικό στο ποσοτικό η ποιοτική απροσδιοριστία μετατρέπεται σε *ποσοτική αδιαφορία*. Με άλλα λόγια, η αφαίρεση κάθε ποιοτικού προσδιορισμού από κάτι, αφήνει ως μοναδικό ποιοτικό κατάλοιπο το γεγονός ότι αυτό το «κάτι» επιδέχεται κάποιον ποσοτικό προσδιορισμό, είναι κατά κάποιον αόριστον τρόπο οροθετημένο. Η μόνη του ποιότητα είναι το όριό του.

Η κατάλληλη μαθηματική μορφή αυτών των εννοιών υπάρχει. Ως γνωστόν, υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί να οριστεί μια συλλογή αντικειμένων. Πρώτον, μπορεί να οριστεί ως *κλάση*, ή ως *λογική συλλογή*, δηλαδή ως η έκταση ενός ορισμένου κατηγορήματος. Δεύτερον, μπορεί να οριστεί ως *συνδυαστική συλλογή*, δηλαδή ως *σύνολο*, κατά τον ορισμό τού Cantor: «*Ένα σύνολο είναι το αποτέλεσμα του συνδυασμού σε ένα όλον, ορισμένων, διακεκριμένων αντικειμένων της σκέψης μας ή της διαίσθησής μας*» [54]. Σε κάθε περίπτωση, ο ορισμός *προϋποθέτει* έναν τρόπο προσδιορισμού των στοιχείων ενός συνόλου ή μιας κλάσης. Στην απουσία κάθε *a priori* προσδιορισμού, συνεπώς, η έννοια του συνόλου ή της κλάσης καθίσταται κενή. Από την άποψη αυτή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ποιοτικά απροσδιόριστο αποδίδεται με το κενό σύνολο, $\varnothing$. Εδώ το «κενό» δεν ταυτίζεται με το «τίποτε».

Αντιστοιχεί μάλλον στο «Μη-Είναι», ως αντίθετο τού Είναι με την χεγκελιανή σημασία του όρου [14]. Αφ' ετέρου, το οροθετημένο μεν, αδιάφορο ως προς το όριό του δε, αποδίδεται με το σύνολο $\{\varnothing\}$.[17] Το ζεύγος $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ χρησιμεύει ως αρχή μιας διαδικασίας που οδηγεί στο σύμπαν τού von Neumann [55]. Είναι μια στιγμή, στην σφαίρα των μαθηματικών, της γενικής διαλεκτικής τού Είναι και του Μη-Είναι, η σύνθεση των οποίων, δηλαδή το Γίγνεσθαι, είναι η απαρχή κάθε διαδικασίας που οδηγεί από το αφηρημένο στο συγκεκριμένο. Στην γενική περίπτωση, όταν δεν προσκολλάται κανείς στην οριακή περίπτωση του συνεχούς/πλήρους και του ατομικού/αδιάστατου, τότε τόσον το συνεχές, όσο και το σημειακό, σχετικοποιούνται. Δηλαδή, η έννοια του συνεχούς, όπως την εισήγαγε ο Cantor, ως απείρου σημειοσυνόλου, αναφέρεται στην *υφή* κάποιου χώρου, όπως εκφράζεται μαθηματικά με την έννοια της *τοπολογίας*. Διαισθητικά, η «συνέχεια» ενός χώρου σημαίνει ότι, στον βαθμό που θεωρείται ως συλλογή θεμελιωδών δομικών λίθων, αυτοί νοούνται ως συμπαγείς και αδιαίρετες μονάδες, ως άτομα, οι οποίες αλληλοεπικαλύπτονται ομαλά έτσι ώστε να προσδίδουν στην ολότητα που συναποτελούν μιαν όψη ομαλή και αδιάσπαστη. Η «όψη» όμως εξαρτάται από την κλίμακα υπό την οποίαν αντικρίζει κανείς αυτήν την ολότητα, αλλά και τις συστατικές μονάδες της. Μια άλλη εικόνα αποκαλύπτεται αν δει κανείς την ίδια ολότητα μέσα από ένα φανταστικό μικροσκόπιο. Το πρώην συνεχές φαίνεται τώρα γεμάτο ρωγμές, οι πρώην συμπαγείς μονάδες-άτομα φαίνονται οι ίδιες σαν συσσωματώσεις από μικρότερους δομικούς λίθους. Η έννοια της συνέχειας, δηλαδή, χάνεται στο επίπεδο μιας πιο λεπτής υφής. Αντιστρόφως, μια ολότητα γεμάτη ρωγμές γίνεται συνεχής ως προς μια κλίμακα υφής αρκετά αδρής, ώστε οι ρωγμές να απαλείφονται και τα διάκενα να εξομαλύνονται. Αυτό που διαισθητικά εκφράζουμε λέγοντας λεπτή ή αδρή υφή, μαθηματικά αντιστοιχεί στην περισσότερο ή λιγότερο λεπτή (αντιστρόφως, αδρή) τοπολογία. Είναι ο αρμός που συνδέει την «αφηρημένη πολλαπλότητα» –το δυνάμει άπειρο– με την πραγματικότητα του συνεχούς [14, σ. 198]. Κεντρική έννοια είναι, βεβαίως, εκείνη του ανοικτού συνόλου. Διαισθητικά, το βασικό χαρακτηριστικό του ανοικτού συνόλου είναι η ομοιογένειά του: κάθε σημείο του ανήκει σε ένα υποσύνολο που και εκείνο είναι ανοικτό σύνολο (ωστόσο αυτό δεν απαιτείται στον μαθηματικό ορισμό του). Μια οικογένεια ανοικτών συνόλων που ικανοποιούν μερικά εύλογα αξιώματα έτσι ώστε οι μεταξύ τους πράξεις να οδηγούν πάλι σε ανοικτά σύνολα, ορίζει μια τοπολογία. Υπάρχουν δύο ακραίες περιπτώσεις. Συναντήσαμε την μία, την διακριτή τοπολογία, που αντιστοιχεί στην λεπτότατη δυνατή υφή. Στο άλλο άκρο, βρίσκεται η αδρή τοπολογία. Σε αυτήν την περίπτωση, μια ολότητα θεωρείται η ίδια ως μονάδα/άτομο. Μοναδικά ανοικτά σύνολα είναι το κενό σύνολο και η ολότητα. Έτσι, μια ολότητα έχει δύο όψεις: Είτε θεωρείται ως ενιαία και αδιαίρετη, ως «Εν», είτε ως σύνθετη-διαιρετή και εκτεταμένη, ως «Πολλά». Κάθε ολότητα έχει αυτόν τον διπλό χαρακτήρα. Ως ποσοτικά προσδιορισμένη και μετρήσιμη, δηλαδή ως μέγεθος, είναι ταυτόχρονα μέγεθος *εντατό* και μέγεθος *εκτατό*, σε αντιστοιχία με τις δύο όψεις. Η σχέση μεταξύ των δύο όψεων

[17] Είναι το *τυχόν* μοναδιαίο σύνολο, το «1», που στην κατηγορική προσέγγιση της θεωρίας των συνόλων είναι τελικό αντικείμενο και παριστάνει το απροσδιόριστο «Εν».

ενός μεγέθους, ή η σχετική υπεροχή της μίας έναντι της άλλης, γίνεται φανερή όταν σε μιαν ολότητα (σύνολο, χώρο, κατηγορία κ.λπ.) ορίζεται ένας *νόμος σύνθεσης*. Η στοιχειωδέστερη περίπτωση είναι ο πολλαπλασιασμός αριθμών. Στο σύμβολο a·b αντιστοιχεί η φράση «a φορές το b», οπότε το a υπεισέρχεται ως μέγεθος εκτατό και το b ως μέγεθος εντατό. Η *μεταθετότητα* του πολλαπλασιασμού, α·b = b·α, εκφράζει συνεπώς την *ισοδυναμία* των δύο όψεων σε αυτήν την περίπτωση. Αν, όμως, έχουμε *τελεστές*, Α και Β, που παριστούν *διαδικασίες*, η μη μεταθετότητα, $A \cdot B \neq B \cdot A$, διαφοροποιεί το εκτατό από το εντατό. Προκειμένου περί διαδικασιών, το Α·Β σημαίνει ότι η διαδικασία Α επιβάλλεται στο τελικό *αποτέλεσμα* της διαδικασίας Β, οπότε η διαφοροποίηση είναι μεταξύ *αποτελέσματος* μιας διαδικασίας και μιας διαδικασίας *εν τω γίγνεσθαι*. Στην κβαντική μη μεταθετότητα τελεστών που παριστούν φυσικά μεγέθη, αποδίδω ακριβώς αυτό το νόημα. Άλλωστε, αυτό συμφωνεί με τον τρόπο που ο Peierls ορίζει την αγκύλη Poisson δύο παρατηρήσιμων μεγεθών, στην βάση της «όψιμης» (retarded) επίδρασης της μίας στην άλλη [56, σ. 15].

Η κλασική ατομιστική αντίληψη περί του συνεχούς, με το αναγκαίο παρακολούθημά της του αδιάστατου σημείου, συμπίπτει με την κατανόηση της φιλοσοφικής κατηγορίας «ύλη» ως *res extensa*. Ιδιαίτερα συμφωνεί με την νευτώνεια αντίληψη ότι οι ποιοτικές ιδιομορφίες στην φύση, πολυσύνθετες και αντιφατικές, αναδύονται στην εμφάνιση των πραγμάτων, ενώ στο βάθος, στην *ουσία*, βασιλεύει η μη αντιφατική νομοτέλεια εκφρασμένη στην γλώσσα των μαθηματικών ως επιστήμης της *ποσότητας*. Η *φιλοσοφική* αυτή τοποθέτηση μπορούσε να συμβαδίζει με την κλασική μηχανική. Κεντρική ιδέα εδώ είναι η κλασική διαχωρισιμότητα, δηλαδή η θέση ότι ένα φυσικό σύστημα, ως μέρος μιας ολότητας, αποτελεί το ίδιο ένα σαφώς ταυτοποιήσιμο όλον σε αλληλεπίδραση με την υπόλοιπη ολότητα, η οποία αντιμετωπίζεται ως «περιβάλλον». Εδώ βασίζεται το αντιθετικό ζεύγος, υλικό σημείο – πεδίο. Από την άποψη της κλασικής μηχανικής, ένα φυσικό σύστημα, ή, μάλλον, ένα υλικό σώμα εν κινήσει, αναλύεται με μιαν αφαιρετική διαδικασία προς δύο αντίθετες κατευθύνσεις. Αφ' ενός, η ταυτότητα του σώματος προσδιορίζεται ποσοτικά, ως μια μάζα. Αυτή νοείται ως το μέτρο του αδιαφοροποίητου κοινού υποστρώματος κάθε υλικού σώματος, ως ποσότητα ύλης γενικά. Εδώ γίνεται αφαίρεση από το *εκτατόν* της ύλης ως *res extensa*, οδηγώντας στην έννοια του *υλικού σημείου*. Ποσοτικός προσδιορισμός είναι επίσης εκείνος που δηλώνει την «ποσότητα κίνησης», δηλαδή η ορμή, $\mathbf{p}$. Η ποιότητα της κίνησης εκφράζεται ως ρυθμός μεταβολής με τον χρόνο αυτής της ορμής, $d\mathbf{p}/dt$, ρυθμός ο οποίος θεωρείται ως αναγκαίο αποτέλεσμα κάποιας αφηρημένης αιτίας, η οποία αποδίδεται με την έννοια της «δύναμης». Αφ' ετέρου, η αφαιρετική διαδικασία προς την αντίθετη κατεύθυνση αφορά το περιβάλλον. Ενώ για το εξεταζόμενο σώμα η αφαίρεση οδηγεί σε ύλη χωρίς έκταση, τώρα έχουμε έκταση χωρίς ύλη. Το υλικό περιεχόμενο του περιβάλλοντος με το οποίο το σώμα αλληλεπιδρά, και από το οποίο γίνεται αφαίρεση, αφήνει πίσω του σαν σκιά την *δυνατότητα* της αλληλεπίδρασης. Το αποτέλεσμα αυτής της δεύτερης αφαίρεσης δεν είναι το αφηρημένο κενό, αλλά το *δυναμικό πεδίο*, δηλαδή ο χώρος προικισμένος με την φυσική ιδιότητα ότι, αν ένα σώμα τεθεί εντός αυτού του χώρου, τότε θα ασκηθούν πάνω του δυνάμεις. Η δυνατότητα φυσικής αλληλεπίδρασης, το δυνάμει, αποδίδεται με την φυσική έννοια του πεδίου, V, ποιοτικός προσδιορισμός του οποίου είναι ο ρυθμός μεταβολής του μέσα στον χώρο, gradV, ρυθμός που συγκεκριμενοποιεί την αφηρημένη έννοια της δύναμης. Το δυνάμει γίνεται ενεργεία με την *σύνθεση* των δύο αντίθετων αφαιρετικών διαδικασιών, όπως εκφράζεται με την εξίσωση των δύο αντίθετων προσδιορισμών, με αντίθετο πρόσημο: $d\mathbf{p}/dt = -\mathrm{grad}V$. Είναι βέβαια η εξίσωση κίνησης, μαθηματική μορφή του τρόπου με τον οποίο εκτυλίσσεται το ενεργεία της φυσικής τροχιάς του σώματος. Κλασικά, λοιπόν, η έννοια του υλικού σημείου *δεν* σημαίνει κάποια προσέγγιση, κάποιο μικρότατο σε διαστάσεις σώμα. Είναι προϊόν λογικής ανάλυσης, και συμπυκνώνει την κλασική έννοια της κατάστασης και της μεταβολής της με τον χρόνο. Η κβαντική θεωρία απορρίπτει όλες αυτές της πλευρές. Για το κβαντικό σύστημα, δεν έχει νόημα η «τροχιά», ούτε η παράσταση του σώματος ως «υλικού σημείου». Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά που διακρίνουν ένα κβαντικό σύστημα συμπυκνώνονται μαθηματικά στην *μη μεταθετότητα* των τελεστών που παριστάνουν τα φυσικά μεγέθη, και φυσικά στην έννοια της *μη διαχωρισιμότητας*. Θα δούμε ότι αυτά τα χαρακτηριστικά διατυπώνονται ισοδύναμα με την απομάκρυνση από την κλασική έννοια του *σημείου*, κάτι που συνδέεται ευθέως με την απομάκρυνση από την κλασική λογική, εκφραζόμενη με τους όρους μιας άλγεβρας Boole. Στο επίπεδο της φιλοσοφίας, έχουμε την απομάκρυνση από την αντίληψη για κάποια «ουσία», η οποία, υποτίθεται, κρύβεται πίσω από την εμφάνιση των φυσικών φαινομένων, και η οποία είναι η έδρα της *μη αντίφασης*. Σε αντίθεση με την εν λόγω αντίληψη, η αντίφαση δεν υπάρχει μόνον στις εμφανίσεις, ούτε μόνον μεταξύ εμφάνισης και ουσίας, αλλά και στην ουσία την ίδια. Το περιεχόμενο αυτού του ισχυρισμού είναι η οντολογική πρωταρχικότητα τού Γίγνεσθαι έναντι του στατικού Είναι.

2.4 Κλασική διαμεσολάβηση: το μοντέλο του χρόνου

Μπορούμε να εμβαθύνουμε περισσότερο σε αυτά τα ζητήματα, αν επιστρέψουμε στην προσέγγιση του Lawvere, η οποία, στα πλαίσια της μαθηματικής θεωρίας των τόπων, συνιστά μια περαιτέρω ανάπτυξη της ερμηνείας τού Poincaré με σύγχρονους όρους. Ας την δούμε πάλι από την σκοπιά που εξέθεσα στα ανωτέρω. Μοιάζει και αυτή με ένα σχήμα με δύο πόλους. Ο ένας είναι το «αφηρημένο γενικό», το πρότυπο που για εμάς είναι ιστορικό προϊόν, το στοιχείο γένους εντός ενός εννοιολογικού πλαισίου. Ο άλλος πόλος είναι το «συγκεκριμένο μερικό» τού Lawvere, το κάθε επί μέρους μοντέλο. Αντιστοιχεί στο υπό εξέτασιν σύστημα, στην διαδικασία, τόσο φυσική/πρακτική όσο και νοητική/μαθηματική, της ένταξής του στο πλαίσιο μιας θεωρίας, της μετατροπής του από φαινόμενο «*natural*» σε «*physical*». Κρίσιμο ρόλο σε αυτό το σχήμα παίζει ένα *μοντέλο του χρόνου*, όπως το περιγράφει ο Lawvere στο απόσπασμα που παρέθεσα. Ας πάρουμε την περίπτωση που ένα τέτοιο μοντέλο είναι μια ομάδα μετασχηματισμών. Είναι η πλησιέστερη περίπτωση στην πρακτική της σύγχρονης φυσικής, όπου θεμελιώδης έννοια είναι εκείνη της *συμμετρίας*. Ο Lawvere χαρακτηρίζει μια τέτοια ομάδα ως το αφηρημένο γενικό, δηλαδή μια θεωρία για ένα μαθηματικοποιημένο φυσικό σύστημα. Το στοιχείο γένους αυτής της θεωρίας, ο καθολικός εκπρόσωπος της δεδομένης κατηγορίας φυσικών συστημάτων, ταυτοποιείται στην βάση των φυσικών μεγεθών που συνδέονται με έναν νόμο διατήρησης υπό την ομάδα μετασχηματισμών. Η συμμετρία, έτσι, και η ομάδα που την πραγματώνει, υψώνεται στο επίπεδο κανονιστικής αρχής. Αυτόν τον ρόλο έπαιζε για την κλασική μηχανική η ομάδα του Γαλιλαίου, σε αυτόν τον ρόλο την υποκατέστησε κατόπιν η ομάδα Poincaré, παρόμοιο ρόλο από άλλη σκοπιά παίζουν οι ομάδες των συμμετριών βαθμίδας. Στο σχήμα τού Lawvere, το «μοντέλο του χρόνου» φαίνεται να διαμεσολαβεί μεταξύ των δύο πόλων, του γενικού και του μερικού, του αφηρημένου και του συγκεκριμένου. Ως «μοντέλο», είναι «συγκεκριμένο μερικό», αλλά ταυτόχρονα, κατά τον Lawvere, είναι «αφηρημένο γενικό». Μετέχοντας και των δύο προσδιορισμών, παίζει τον ρόλο του διαμεσολαβούντος «τρίτου». Συνεχίζοντας τον παραλληλισμό με την καντιανή σχηματοποίηση, έχουμε εδώ το αντίστοιχο του υπερβατολογικού σχήματος ως ενός *υπερβατολογικού προσδιορισμού του χρόνου*. Ακολουθώντας τον Allison, εννοώ με αυτό «*μια νοηματοδότηση του χρόνου σύμφωνα με μιαν a priori έννοια, η οποία αναφέρει τον χρόνο σε ένα αντικείμενο ή τον αντικειμενοποιεί, ενώ αποδίδει επίσης αντικειμενική πραγματικότητα στην εν λόγω έννοια*». Συνεπώς, «*ένας υπερβατολογικός προσδιορισμός του χρόνου πρέπει να θεωρείται ως καθολικό και αναγκαίο χαρακτηριστικό των πραγμάτων μέσα στον χρόνο (φαινομένων), χάρη στο οποίο ο χρόνος μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν προσδιορισμένο τρόπο (αντικειμενικές χρονικές σχέσεις μπορούν να εκφραστούν) μάλλον, παρά ως χαρακτηριστικό του χρόνου per se*» [52, σ. 183].

Όσα αναφέρθηκαν γίνονται σαφέστερα στην βάση του χαμιλτονιανού φορμαλισμού ενός κλασικού φασικού χώρου, σε συνδυασμό με την παρουσία μιας ομάδας συμμετριών. Αν επιστρέψουμε στο κατά Lawvere μοντέλο του χρόνου, συνδεδεμένο με έναν νόμο διατήρησης υπό τους μετασχηματισμούς μιας ομάδας συμμετριών, τότε η έννοια του παρατηρήσιμου φυσικού μεγέθους αποκαλύπτεται ότι έχει μια *διπλή όψη*. Πρώτον, είναι μια λεία πραγματική συνάρτηση στον φασικό χώρο. Δεύτερον, τουλάχιστον τοπικά, είναι γεννήτορας (generator) μιας μονοπαραμετρικής ομάδας κανονικών μετασχηματισμών, εκείνων δηλαδή που διατηρούν την απαραίτητη δομή του φασικού χώρου, γνωστή ως δομή συμπλεκτικής πολλαπλότητας. Έτσι, οι θεμελιώδεις ιδιότητες στην μηχανική, ενέργεια, ορμή, στροφορμή, *και* έχουν μια τιμή σε ένα σημείο του χώρου και σε μια χρονική στιγμή, *και* είναι γεννήτορες των μετατοπίσεων στον χρόνο, των μετατοπίσεων στον χώρο και των στροφών, αντιστοίχως, δηλαδή εκφράζουν την διαδικασία μέσω της οποίας *μεταβάλλεται* το σύστημα. Σε γενικές γραμμές, το σύστημα που υφίσταται την αλλαγή και η αλλαγή, οι ιδιότητες ως στοιχεία που χαρακτηρίζουν την κατάσταση του συστήματος και ως στοιχεία που χαρακτηρίζουν την αλλαγή αυτής της κατάστασης, κινούνται σε δύο *διακριτά* επίπεδα τα οποία εν τούτοις *συμπίπτουν*. Εδώ έχουμε την *αυτοαναφορά* που οδηγεί στην αντίφαση: ένα σώμα, σε μια χρονική στιγμή, είναι και ταυτόχρονα δεν είναι σε μια θέση. Αλλιώς, είναι σε μια θέση και ταυτόχρονα *περνά* από αυτήν την θέση. Αυτό συμπυκνώνεται στο γεγονός ότι η ορμή του έχει μια τιμή σε αυτήν την θέση και ταυτόχρονα εκφράζει την αλλαγή της θέσης. Η αντίφαση που διατύπωσα, δεν είναι παρά ο ορισμός της κίνησης.[18] Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι η αντιφατική σχέση εσωτερικού και εξωτερικού, κατάστασης και τιμής φυσικού μεγέθους, την οποία εξέθεσα στις §§1.5 και 1.6, *εσωτερικεύεται και συμπυκνώνεται στην αντιφατική φύση της ίδιας της έννοιας του φυσικού μεγέθους*. Τονίζω αυτές τις διακρίσεις διότι, μολονότι υπαρκτές, τείνουν να εξαλείφονται στα πλαίσια της κλασικής μηχανικής.

Παρατηρούμε ότι η ύπαρξη της ομάδας μετασχηματισμών, στενά συνδεδεμένης με την συμπλεκτική δομή, είναι εκείνη που κάνει φανερή την διπλή φύση των παρατηρήσιμων μεγεθών. Εάν «ξεχάσουμε» την συμπλεκτική δομή του φασικού χώρου, και, ακόμη περισσότερο, εάν «ξεχάσουμε» ότι ένας φασικός χώρος κατά κανόνα είναι μια δέσμη ινών (fiber bundle) και ακριβέστερα η συνεφαπτομένη δέσμη επί μιας πολλαπλότητας που αναπαριστά τον χώρο των συναπεικονίσεων, τότε απομένει η βασική δομή του φασικού χώρου απλώς ως τοπολογικού χώρου, τα σημεία του οποίου παριστούν τις συντεταγμένες θέσης και τις αντίστοιχες ορμές. Η αντιφατική φύση των φυσικών μεγεθών, το Είναι και ταυτόχρονα μη Είναι, σε αυτό το επίπεδο μπορεί να γίνει φανερή αν υπάρχει μια έννοια απειροστού διανύσματος, σαν αυτή που εισάγει ο Lawvere. Αντιστρόφως, αντί να τίθεται ρητά αυτή η αντιφατικότητα με τον τρόπο τού Lawvere, μπορεί να συγκαλυφθεί σε σχέση με τα σημεία του φασικού χώρου –τα οποία παρουσιάζουν στατική εικόνα– επειδή μεταφέρεται σε μιαν ομάδα μετασχηματισμών με τον τρόπο που περιέγραψα προηγουμένως. Τελικά, η ταυτότητα ενός συστήματος κωδικοποιείται στην έννοια του φασικού χώρου, ή γενικότερα μιας συμπλεκτικής πολλαπλότητας (M, ω), όπου M μια λεία πολλαπλότητα και ω μια συμπλεκτική δομή σε αυτήν. Σε αυτό το σημείο είναι που η έννοια μιας ομάδας μετασχηματισμών παίζει αποφασιστικό ρόλο. Διότι, μπορεί να υπάρχει μια ομάδα Lie η οποία να είναι μια μεταβατική (transitive) ομάδα κανονικών μετασχηματισμών σε έναν φασικό χώρο, μια ομάδα δηλαδή που η δράση της δεν αφήνει αμετάβλητο κανένα σημείο αυτού του χώρου. Έχουμε τότε μια θεωρία για ένα κλασικό στοιχειώδες φυσικό σύστημα [E]. Μπορούμε, όμως, να θέσουμε το ερώτημα: Δεδομένης μιας ομάδας Lie, G, μπορούμε να βρούμε τους φασικούς χώρους που δέχονται αυτήν την ομάδα ως ομάδα των κανονικών μετασχηματισμών τους; Εάν ναί, θα έχουμε επιτύχει να κατηγοριοποιήσουμε τους φασικούς χώρους σύμφωνα με την ομάδα G. Αυτό ισοδυναμεί με την ανύψωση του αιτήματος του αναλλοίωτου υπό την G στο επίπεδο *κανονιστικής αρχής* για κάθε τέτοια κατηγορία.

[18] Είναι η αντίφαση που πρώτος ο Ζήνων επεσήμανε με τα γνωστά παράδοξά του.

Το αναλλοίωτο υπό την G θα κινείται έτσι στο *νοηματικό* επίπεδο, ενώ η G ως κανονικός μετασχηματισμός σε έναν φασικό χώρο θα είναι η εμπράγματη ύπαρξη του νοηματικού στο *οντικό* επίπεδο. Το ερώτημα απαντάται καταφατικά, χάρις στις εργασίες των Kirillov, Kostant και Souriau [57]. Τότε οι φασικοί χώροι (M, ω) ταξινομούνται βάσει της δομής τής G. Επανερχόμαστε έτσι στις έννοιες που συναντήσαμε προηγουμένως, μόνο που τώρα οι σχέσεις νοηματικού – οντικού εκφράζονται εντός ενός καλώς καθορισμένου μαθηματικού πλαισίου.[19] Η «υπερβατολογική ψευδαίσθηση» σε αυτού του τύπου τον φορμαλισμό εκδηλώνεται στους προβληματισμούς γύρω από την κεντρική σημασία της έννοιας της συμμετρίας για την φιλοσοφία της επιστήμης.[20]

Η διατύπωση των εννοιών της κανονιστικής αρχής, του στοιχείου γένους, της ερμηνείας και του μοντέλου με τους όρους της θεωρίας των ομάδων, συνιστά σημείο καμπής από δύο απόψεις: Από την άποψη της φυσικής, είναι το αφετηριακό σημείο για μία από τις καθιερωμένες θεωρίες για την μετάβαση από το κλασικό στο κβαντικό, την επονομαζόμενη *γεωμετρική κβάντωση* [57]. Από την άποψη της φιλοσοφίας, προσφέρεται για μια κριτική ματιά στο καντιανών προδιαγραφών, όπως είδαμε, σχήμα της ερμηνείας σύμφωνα με τον Poincaré ή και στις θεωρίες τού Lawvere. Το κρίσιμο σημείο είναι ότι η *ίδια* μαθηματική έννοια, η ομάδα G, φαίνεται να διατρέχει *όλα* τα επίπεδα και τις σχέσεις του ερμηνευτικού σχήματος, άλλοτε ως ομάδα συμμετριών καταστατική του εκάστοτε συστήματος, άλλοτε ως συν-συναφείς τροχιές που παίζουν τον ρόλο φασικού χώρου, άλλοτε ως ομάδα μετασχηματισμών που περιγράφει την κίνηση του συστήματος. Η εικόνα που προβάλλει δεν είναι εικόνα αυστηρά άκαμπτων πόλων που αντικρίζουν ο ένας τον άλλο αλληλοαποκλειόμενοι, ενώ η όποια μεταξύ τους διαμεσολάβηση είναι εξωτερική προς αυτούς. Αντιθέτως, είναι εικόνα εννοιών ευέλικτων, που μεταμορφώνονται και αλληλοδιεισδύουν παρακολουθώντας την ροή μιας ζωντανής διαδικασίας. Είναι ένα σχήμα που ρέει, το οποίο, σε σύγκριση με την καντιανή σχηματοποίηση, μοιάζει με κινηματογραφική ταινία απέναντι σε ένα στιγμιότυπο αυτής της ταινίας. Αυτή ακριβώς είναι η σχέση της καντιανής σχηματοποίησης με την επέκταση και εμβάθυνσή της από τον Hegel. Ο τρόπος με τον οποίο ο τελευταίος εκθέτει στην «Λογική» του την κίνηση της έννοιας (*Begriff*), την ροή από την πιο απλή στην πιο σύνθετη κρίση, από τον στοιχειωδέστερο στον συνθετότερο συλλογισμό, διαγράφει το μονοπάτι της γνωστικής διαδικασίας. Σε αυτήν την κίνησή της, η έννοια δεν έχει τον χαρακτήρα ούτε μιας «αντικειμενικής ουσίας», ούτε μιας «υποκειμενικής κατασκευής» [16, σ. 61]. Δεν εντάσσεται ούτε σε μια μεταφυσική ουσιοκρατία, ούτε

[19] Διευκρινίζω ότι οι όροι «νοηματικό» και «οντικό» χρησιμοποιούνται με την έννοια της §2.2, και αναφέρονται στο σχήμα που εξηγεί ο Φαράκλας [16].

[20] Είναι ενδεικτική η διάκριση μεταξύ «συμμετριών των νόμων της φυσικής» και «σπασμένων συμμετριών», και γενικότερα οι συζητήσεις που συμπυκνώνονται στο δίπολο, «*Οι συμμετρίες είναι στους νόμους των φαινομένων, όχι στα ίδια τα φαινόμενα*» και «*Τα φαινόμενα παραβιάζουν τις συμμετρίες των νόμων*» [58].

σε μια συμβασιοκρατία. Είναι αυτό που *κάνει*, στην *αυτοδιαφοροποίησή* της συναντάται η κίνηση της σκέψης που γνωρίζει, με την κίνηση και αλλαγή του αντικειμένου της. Η χεγκελιανή έννοια *διορθώνει* το καντιανό σχήμα, στο οποίο το Εγώ αντικρίζει την εποπτεία. Όπως επισημαίνει ο Φαράκλας, η σκέψη «*είναι περιγραφικά κάτι που κινείται …από τον λόγο περί αντικειμένου στον λόγο που έχει ως αντικείμενο τον λόγο περί αντικειμένου, και μόνον εφ' όσον είναι* ***αυτό*** *μπορεί να διακρίνει τα δύο και να ορίσει ρυθμίσεις για την παράκαμψη των αντιφάσεων που γεννά η σύγχυση των δύο επιπέδων*». Η «διόρθωση» που ανέφερα συνίσταται στο ότι «*ο Έγελος θεωρεί ότι η τυπική λογική προκύπτει από την διαλεκτική λογική δι' αφαιρέσεως* [η σχέση «ταινίας» και «στιγμιότυπου»]. *Η τυπική λογική είναι ένα παίγνιο αντιπαλότητας το οποίο προϋποθέτει μια θέσπιση των κανόνων του, και αυτή η νομοθετική λειτουργία ανήκει στην διαλεκτική λογική (ως κληρονόμο της καντιανής* ***υπερβατολογικής*** *λογικής)*» ([16, σσ. 135-6], έμφαση στο πρωτότυπο).

Τα μαθηματικά είναι η τέχνη της απόδοσης του

ίδιου νοήματος σε διαφορετικά αντικείμενα.

H. Poincaré

Κεφάλαιο ΙΙΙ. Το διεσταλμένο σημείο

3.1 Αντίφαση και υπέρβαση: προς τον κβαντικό φορμαλισμό

Ας δούμε τώρα στο φως των ανωτέρω πώς τροποποιείται, στην κβαντική περίπτωση, το σχήμα της ερμηνείας κατά τον Poincaré και τον Lawvere. Ας επαναλάβουμε τον συλλογισμό που συναντήσαμε σχετικά με την μηχανική ερμηνεία για την κλασική φυσική. Ένας πόλος θα είναι πάλι οι εμπειρικές έννοιες που αφαιρούνται με την παρατήρηση και το πείραμα. Ακολουθώ πιστά τον A. Connes [40] στην λογική αναδιατύπωση της ιστορίας του σχηματισμού τους. Κατ΄ αρχάς, η κλασική αντιθετική δυάδα, «ύλη» και «ενέργεια», με την ανάπτυξη της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, έδωσε την θέση της στην δυάδα «ύλης» και «πεδίου». Η απόρριψη, όμως, της υπόθεσης του αιθέρα άφηνε ένα κενό. Αν η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία δεν ήταν ένα κύμα σε κάποιο μέσον που κυμαίνεται, τί ήταν; Το πεδίο, ωστόσο, μυστηριώδες από οντολογική άποψη, ήταν τώρα θεωρητικά επεξεργασμένο και πειραματικά επιβεβαιώσιμο. Το πρόβλημα άρχισε να απαντάται τόσο εκεί που το υλικό σώμα «γεννά» το πεδίο, όσο και εκεί που το πεδίο μεταβάλλει το υλικό σώμα. Η πρώτη σκοπιά ήταν η μελέτη της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος, η εισαγωγή από τον M. Planck της έννοιας του quantum και η παραδοχή της ασυνέχειας –έστω και κατά μια κλασική αντίληψη– στην ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, το 1900. Η δεύτερη ήταν η μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου και η εισαγωγή της έννοιας του φωτονίου από τον Einstein το 1905. Με αυτές τις εξελίξεις, το δεύτερο σκέλος στο πλαίσιο του δυισμού σώματος – πεδίου φαινόταν να αποκτά τον ελλείποντα φορέα του με την ιδιότυπη σωματιδιακή μορφή που του αποδιδόταν. Όμως, ούτε το φωτόνιο ήταν το συνηθισμένο «υλικό σημείο» της μηχανικής, ούτε οι κυματικές ιδιότητες του πεδίου ανάγονταν σε κάτι τέτοιο. Αυτός ο δισυπόστατος χαρακτήρας επεκτάθηκε τελικά στο αντίθετο του πεδίου, την συνηθισμένη ύλη, όταν προχώρησε η μελέτη στα θεωρούμενα ως στοιχειώδη συστατικά της, τα άτομα. Αρχικά, και όταν το άτομο αναγνωρίστηκε ως σύνθετο, επιχειρήθηκε η μελέτη του με την αναζήτηση μιας μηχανικής ερμηνείας για αυτό. Η κατά Poincaré «αντίληψη για την συνηθισμένη ύλη» είχε το πρότυπό της, ήταν η εξαιρετικά επιτυχής ουράνια μηχανική, και η πρώτη προσέγγιση ήταν το πλανητικό υπόδειγμα του Rutherford. Αυτό ήταν το συγκεκριμένο απόσταγμα των κυρίαρχων αντιλήψεων για την «συνηθισμένη ύλη» σε εκείνη την φάση, ο άλλος πόλος του ερμηνευτικού σχήματος. Εδώ, όμως, καταδείχθηκε ένα ανυπέρβλητο πρόβλημα. Αφ’ ενός, το πλανητικό υπόδειγμα έπρεπε να συζευχθεί με την θεωρία τού Maxwell προκειμένου να ερμηνευθούν τα φαινόμενα της εκπομπής και της απορρόφησης ακτινοβολίας από ένα άτομο, και, αφ’ ετέρου, έπρεπε να δοθεί ικανοποιητική εξήγηση για την σταθερότητα των ηλεκτρονικών τροχιών που αποδεχόταν εκείνο το υπόδειγμα. Σύμφωνα με τις έως τότε αντιλήψεις, ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σωματίδιο σε πλανητική τροχιά γύρω από τον ατομικό πυρήνα θα έπρεπε να ακτινοβολεί συνεχώς, με αποτέλεσμα να μην παραμένει σε σταθερή τροχιά αλλά τελικά να πέφτει με μια σπειροειδή κίνηση στον πυρήνα. Τα πειραματικά δεδομένα, όμως, έδειχναν ότι οι ηλεκτρονικές τροχιές ήταν σταθερές και διακριτές, αναγνωρίσιμες ως ξεχωριστές καταστάσεις των εν κινήσει ηλεκτρονίων. Ταυτόχρονα, η μεταβολή της κατάστασης αυτών των ηλεκτρονίων ήταν μακροσκοπικά ανιχνεύσιμη μέσω των διακριτών τύπων ακτινοβολίας που αποτυπώνονταν στα ατομικά φάσματα. Το πρόβλημα επέβαλε την *ad hoc* αναπροσαρμογή των παλαιών αντιλήψεων, θεωρώντας το ηλεκτρόνιο όχι ως κινούμενο σωματίδιο, αλλά ως στάσιμο κύμα (de Broglie), και το πλανητικό υπόδειγμα μετατράπηκε στο υπόδειγμα των Bohr και Sommerfeld. Η εξίσωση του Schrödinger ήταν η λογική προέκταση της νέας ιδέας περί «υλικών κυμάτων» και περιέγραφε την χρονική εξέλιξη των διακριτών καταστάσεων με την μορφή κυματικών συναρτήσεων. Η αποφασιστική τομή, όμως, εκφράστηκε με την –μαθηματικώς ισοδύναμη– θεωρία τού Heisenberg.

Συγκεκριμένα, μελετώντας τα ατομικά φάσματα, στην τελευταία δεκαετία του προ-προηγούμενου αιώνα, ο Rydberg έδειξε ότι οι φασματικές γραμμές ενός σύνθετου ατόμου ταξινομούνται σε σειρές της μορφής:

$$\frac{1}{\lambda} = \mathrm{R}\,(\frac{1}{\mathrm{m}^2} - \frac{1}{\mathrm{n}^2}),$$

όπου R είναι η σταθερά τού Rydberg, m ένας σταθερός ακέραιος, n ένας ακέραιος που αντιστοιχεί στις διαφορετικές φασματικές γραμμές, και λ το μήκος κύματος της ακτινοβολίας. Αυτή η σχέση δηλώνει ότι η συχνότητα $\nu = c/\lambda$ (c: η ταχύτητα του φωτός) είναι πιο φυσική παράμετρος για την ταξινόμηση των φασματικών γραμμών. Επί πλέον, το φάσμα αποτελείται από ένα σύνολο διαφορών συχνοτήτων. Δηλαδή, υπάρχει ένα σύνολο I συχνοτήτων τέτοιο ώστε το φάσμα να είναι το σύνολο των διαφορών $\nu_{ij} = \nu_i - \nu_j$ τυχόντων μελών τού I. Από εδώ και η συνδυαστική αρχή των Ritz-Rydberg, ότι δηλαδή στο φάσμα συχνοτήτων υπάρχει ένας μερικός (partial) νόμος σύνθεσης, σύμφωνα με τον οποίο μόνον συχνότητες της μορφής ν_{ij} και ν_{jk} μπορούν να συνδυαστούν δίδοντας πάλι μια συχνότητα $\nu_{ik} = \nu_{ij} + \nu_{jk}$, που να ανήκει στο φάσμα. Με άλλα λόγια, ο πειραματικά παρατηρούμενος νόμος σύνθεσης δεν δίδει στο φάσμα επιτρεπομένων συχνοτήτων την δομή ομάδας. Όμως, η μελέτη της ατομικής ακτινοβολίας στο πλαίσιο της νευτώνειας μηχανικής και της θεωρίας τού

Maxwell οδηγεί σε ένα φάσμα συχνοτήτων με την δομή ομάδας, αντιφάσκοντας προς τα πειραματικά δεδομένα. Πράγματι, στην πιο απλή περίπτωση ενός ατόμου υδρογόνου, το πλανητικό υπόδειγμα οδηγεί σε ένα ολικά ολοκληρώσιμο δυναμικό σύστημα. Η περιγραφή ενός τέτοιου συστήματος βασίζεται σε παρατηρήσιμα μεγέθη με την μορφή σχεδόν περιοδικών σειρών:

$$(*) \qquad q(t) = \Sigma q_{n_1 \ldots n_n} \exp(2\pi i \langle n , \nu \rangle t),$$

όπου τα n_i είναι ακέραιοι, τα ν_i είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί –οι θεμελιώδεις συχνότητες– και $\langle n , \nu \rangle = \Sigma_i n_i \nu_i$. Η χρονική εξέλιξη δίδεται από την μεταβλητή t. Στην περίπτωση της ακτινοβολίας από ένα τέτοιο άτομο, το βασικό μέγεθος είναι η διπολική ροπή. Σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, κάθε συνιστώσα της διπολικής ροπής έχει την μορφή (*), στην βάση της οποίας υπολογίζεται η ένταση της ακτινοβολίας. Συνεπώς, το σύνολο των συχνοτήτων είναι μια προσθετική υποομάδα Γ των πραγματικών αριθμών, οπότε με κάθε συχνότητα εμφανίζονται και όλα τα ακέραια πολλαπλάσιά της (αρμονικές). Το κρίσιμο σημείο είναι ότι η μεταθετική ομάδα Γ καθορίζει την αλγεβρική δομή του συνόλου των παρατηρήσιμων μεγεθών. Είναι η μεταθετική άλγεβρα συνέλιξης (convolution algebra) των σειρών της μορφής (*). Τα νέα πειραματικά δεδομένα, ωστόσο, υπαγόρευαν κάτι άλλο: Οι επιτρεπόμενες συχνότητες κατατάσσονται σύμφωνα με ζεύγη δεικτών από ένα δεδομένο σύνολο I, δηλαδή $\Delta = \{(i , j) \mid i, j \in I\}$ με τον νόμο σύνθεσης: $(i , j)\cdot(j , k) = (i , k)$. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουν την δομή ομάδας, αλλά ενός *ομαδοειδούς* (groupoid). Η έννοια της άλγεβρας συνέλιξης εξακολουθεί να έχει νόημα, με ένα γινόμενο συνέλιξης που τώρα είναι της μορφής:

$$(ab)_{(i,k)} = \Sigma_j \, a_{(i,j)} \, b_{(j,k)}.$$

Αυτό το γινόμενο είναι ταυτόσημο με το γινόμενο μητρών, και η αντίστοιχη άλγεβρα είναι μη μεταθετική. Η μετάβαση από μιαν ομάδα σε ένα ομαδοειδές σηματοδοτεί την μετάβαση από την κλασική άλγεβρα των φυσικών μεγεθών, κατά την οποία αυτά τα μεγέθη μετατίθενται στον πολλαπλασιασμό ανά δύο, σε μια μη μεταθετική άλγεβρα. Στην αρχική μορφή της, ήταν η μηχανική μητρών, που υπήρξε η μεγάλη συνεισφορά τού Heisenberg. Σε αυτήν, ένα φυσικό μέγεθος δίδεται από τους συντελεστές του, $q_{(i,j)}$, με $(i , j) \in \Delta$. Ακόμη, η χρονική εξέλιξη αυτού του μεγέθους δίδεται μέσω του ομομορφισμού Δ □ (i , j) # $\nu_{ij} \in \nabla$ (∇: οι πραγματικοί αριθμοί), οπότε:

(**) $$q_{(i,j)}(t) = q_{(i,j)} \exp(2\pi i \nu_{ij} t).$$

Η (**) είναι το αντίστοιχο των ποσοτήτων που εμφανίζονται στην κλασική σχέση (*). Εάν τώρα *οριστεί* το κβαντικό αντίστοιχο της κλασικής χαμιλτονιανής ως $H_{(i,j)} = h\nu_i\delta_{ij}$, όπου $\nu_i - \nu_j = \nu_{ij}$, $\forall i, j \in I$, δ_{ij} το δ του Kronecker, και h η σταθερά τού Planck, η (**) ισοδυναμεί με:

$$dq/dt = 2\pi i/h\ (Hq - qH).$$

Είναι το αντίστοιχο της εξίσωσης Hamilton, όπου η αγκύλη Poisson αντικαθίσταται από τον μεταθέτη [H , q] □ (Hq – qH). Κατ' αναλογίαν, τα μεγέθη p, q που αντιστοιχούν στα κλασικά μεγέθη της ορμής και της θέσης θα πρέπει να ικανοποιούν την σχέση μεταθετότητας $[p , q] = - ih/2\pi$. O Jordan αναγνώρισε ότι αυτή η σχέση ισοδυναμεί με τους κανόνες κβάντωσης των Bohr-Sommerfeld. Τέλος, αν «μεταφραστεί» η κλασική έκφραση της H συναρτήσει των p και q, καταλήγουμε στην εξίσωση Schrödinger που προσδιορίζει τις συχνότητες ν_i, δηλαδή το φάσμα τής H. O δρόμος ήταν πλέον ανοικτός για τον φορμαλισμό των χώρων Hilbert και την αναπαράσταση των φυσικών μεγεθών από αυτοσυζυγείς τελεστές. Παρατηρούμε ότι σημειώνεται ήδη μια πρώτη διάκριση μεταξύ καταστάσεων και τιμών φυσικών μεγεθών, η οποία εκφράζεται με τις δύο «εικόνες», κατά Schrödinger και κατά Heisenberg. Η πρώτη περιγράφει τις καταστάσεις, ενώ η δεύτερη προσδιορίζει τον μαθηματικό χαρακτήρα των φυσικών μεγεθών [6]. Ολοκληρώνοντας αυτή την συνοπτική παρουσίαση, ο Connes παρατηρεί ότι ο κβαντικός φορμαλισμός είναι απλούστερος, πιο άκαμπτος (rigid) και πλησιέστερος στην φασματοσκοπία. Και επισημαίνει ότι η ίδια η ύπαρξη μιας συμπλεκτικής δομής σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα όπως ένας φασικός χώρος, δεν είναι παρά η ένδειξη ότι υπάρχει μια παραμόρφωση (deformation) με μία παράμετρο –αυτόν τον ρόλο εδώ παίζει η σταθερά τού Planck, h– από την άλγεβρα των συναρτήσεων σε μια μη μεταθετική άλγεβρα.

Βλέπουμε, συνεπώς, ότι οι επιστημονικές αφαιρέσεις από το πείραμα, οι οποίες, κατά τον Poincaré, θα απεικόνιζαν την «αληθινή ύλη», έστω και αν το νόημα του όρου είναι τώρα ασαφές και ζητούμενο, συγκρούονται με τις τρέχουσες αντιλήψεις για την «συνηθισμένη ύλη», όπως αυτές εκφράζονταν μαθηματικά σε εκείνη την φάση, στο νοηματικό επίπεδο. Η σχέση τους παύει να είναι άμεση, διαμεσολαβείται από εννοιολογικά άλματα που γεννά η μεταξύ τους ένταση. Συγκεκριμένα, κλασικά είχαμε εξατομικευμένες ιδιότητες και καταστάσεις που μπορούσαν να αποδοθούν σε εξατομικευμένα φυσικά συστήματα, και αυτό εκφραζόταν από την κοινή περιγραφή φυσικών μεγεθών και τροχιών ως πραγματικών συναρτήσεων στον φασικό χώρο. Τώρα, οι καταστάσεις αποσυνδέονται από την έννοια της τροχιάς, και το ερώτημα είναι, ποιάς φυσικής οντότητας καταστάσεις είναι, πώς τίθεται τώρα και πώς απαντάται το ερώτημα της εξατομίκευσης των φορέων των φυσικών ιδιοτήτων; Η αποσύνδεση καταστάσεων – τροχιών φαίνεται πολύ καθαρά στο γεγονός ότι η κλασική αγκύλη Poisson δύο φυσικών μεγεθών και η αντίστοιχη αγκύλη για το ζεύγος ορμής – θέσης είναι της ίδιας τάξεως, μάλιστα η δεύτερη είναι ειδική περίπτωση της πρώτης. Αντιθέτως, στον κβαντικό φορμαλισμό ο μεταθέτης των τελεστών ορμής – θέσης εκφράζει μια σχέση που αποτελεί την βάση προκειμένου να καταστρωθούν οι εξισώσεις για τον καθορισμό των καταστάσεων. Με άλλα λόγια, η μη ύπαρξη εξατομικευμένης τροχιάς είναι *όρος δυνατότητας* για τον προσδιορισμό των κβαντικών καταστάσεων ενός συστήματος. Κλασική τροχιά και καταστάσεις όχι μόνον αποσυνδέονται, αλλά και αποκτούν έναν αντιθετικό χαρακτήρα. Επαναλαμβάνεται, λοιπόν, εδώ αυτό που συναντήσαμε στην §1.2: Το αδύνατο τίθεται μέσω του ορισμού μιας νέας έννοιας, εδώ του κβαντικού τελεστή, H, αντίστοιχου της κλασικής χαμιλτονιανής συνάρτησης. Το τεθειμένο αδύνατο εκφράστηκε από το γεγονός ότι η σχέση κλασικού και κβαντικού κατέστη ακατανόητη, όπως επισημαίνει ο Landsman [6], με την πιθανοκρατική ερμηνεία που αποδόθηκε από τους Born και Pauli στις κυματικές συναρτήσεις τού Schrödinger, αποκλείοντας κλασικού τύπου ερμηνείες. Από το σημείο αυτό, η εισαγωγή *νέων* εννοιών ήταν όρος δυνατότητας για την περαιτέρω ανάπτυξη της φυσικής. Μαθηματική έκφραση αυτού ακριβώς του όρου δυνατότητας υπήρξαν οι σχέσεις μεταθετότητας του Heisenberg. Εξ άλλου, η *εμμονή* σε κλασικού τύπου ερμηνείες έκανε την ανυπαρξία τέτοιων ερμηνειών να φαντάζει σαν ένα *κενό*. Ο Landsman σημειώνει ότι, κατά τον Heisenberg, αυτό ακριβώς το κενό ήρθαν να καλύψουν οι εύγλωττα επονομαζόμενες «σχέσεις απροσδιοριστίας», συνέπεια των σχέσεων μεταθετότητας. Έτσι, ο όρος δυνατότητας για την γνώση εκλαμβάνεται ως *όριο* της γνώσης, περιχαρακώνοντάς την στον αισθητηριακό ορίζοντα του «παρατηρητή». Για τον Heisenberg, συνεχίζει ο Landsman, οι σχέσεις απροσδιοριστίας προσέφεραν «*διαισθητικό περιεχόμενο*» στην κβαντική μηχανική, καθώς «*Η ιδέα του ήταν ότι* ***ο κλασικός κόσμος αναδύεται από την κβαντική μηχανική μέσω της παρατήρησης****: “Η τροχιά έρχεται σε ύπαρξη μόνον επειδή την παρατηρούμε”*» ([6], έμφαση στο πρωτότυπο).

Ας δούμε τώρα πιο συστηματικά το πρόβλημα της εξατομίκευσης ενός φυσικού συστήματος, όπως αυτό αντιμετωπίζεται στα πλαίσια των Κλασικών θεωριών. Ακολουθώ εδώ την ανάλυση του Souriau, όπως την παρουσιάζει ο Sternberg [18]. Η κεντρική ιδέα είναι η εξής: Έστω ότι ένα σύστημα κινείται υπό την επήρεια αλληλεπιδράσεων με το περιβάλλον του. Ένα τέτοιο σύστημα δέχεται επιδράσεις και ταυτόχρονα αντεπιδρά. Το πρόβλημα της εξατομίκευσης ανάγεται στην δυνατότητα να διακρίνουμε μια «παθητική» και μιαν «ενεργητική» άποψη εξέτασης του συνόλου που αποτελείται από το επί μέρους σύστημα μαζί με τις αλληλεπιδράσεις του. Η «παθητική» άποψη συνίσταται στην δυνατότητα να «απομονώσουμε» κατά κάποιον τρόπο την κίνηση του συστήματος και να την εξετάσουμε καθ' εαυτήν, ως αποτέλεσμα των αλληλεπιδράσεων. Η «ενεργητική» άποψη συμπληρώνει την προηγούμενη, εξετάζοντας τους όρους υπό τους οποίους πραγματοποιείται η κίνηση του συστήματος ως αυτόνομη φυσική πραγματικότητα, με την μορφή, για παράδειγμα, εξισώσεων που εκφράζουν την παρουσία κάποιου πεδίου ως φορέα αλληλεπιδράσεων. Αυτό το σχήμα γενικεύει όσα έχω αναφέρει για την σχέση υλικού σημείου – πεδίου και την τροχιά ως πραγματοποιούμενη κίνηση στην περίπτωση της νευτώνειας μηχανικής. Έστω, λοιπόν, ότι έχουμε έναν χώρο X και μιαν ομάδα G που δρά σε αυτόν. Γενικά, ο χώρος X μπορεί να είναι οτιδήποτε, για παράδειγμα ένας χώρος μετρικών στον χωρόχρονο ή ένας χώρος συνδέσμων (connections) σε μια δέσμη, και η G μπορεί να είναι απειροδιάστατη, λόγου χάριν, η ομάδα αυτομορφισμών μιας δέσμης. Η κεντρική ιδέα, όμως, μπορεί να εκτεθεί υποθέτοντας ότι ο X είναι μια πολλαπλότητα, ότι η G είναι μια ομάδα Lie, και ότι διάφορες έννοιες που ορίζονται έχουν συμπαγές στήριγμα, όπου αυτό χρειάζεται ώστε να έχουν νόημα. Τότε, με τον όρο *συναλλοίωτη θεωρία* εννοούμε ότι έχουμε μια λεία συνάρτηση F στον χώρο X, αναλλοίωτη υπό την δράση τής G:

$$F(ax) = F(x) \ \forall a \in G, x \in X.$$

Εάν x είναι ένα σημείο τού X, η τροχιά που περνά από το x είναι $B = G| x$. Εάν TXx είναι ο εφαπτόμενος χώρος στον X στο σημείο x, μια γραμμική συνάρτηση, μ, σε αυτόν είναι ένα στοιχείο του συνεφαπτομένου χώρου T*Xx. Εάν, τώρα, η μ μπορεί να εκφραστεί ως διαφορική μορφή μ = dF, τότε μηδενίζεται εάν υπολογιστεί σε όλα τα διανύσματα που εφάπτονται της τροχιάς B:

(1) $$\mu \in TBx^{\perp}$$

Οι διάφορες εξισώσεις κίνησης εμπεριέχονται σε αυτήν την σχέση. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι ο χώρος TX έχει μια σταθερή καθολική τετριμμενοποίηση (global trivialization), οπότε οι χώροι TXx συμπίπτουν με έναν σταθερό διανυσματικό χώρο Z. Τότε, εάν δίδεται μια συνάρτηση $\mu \in Z^*$ (Z^*: ο χώρος των συναρτήσεων επί του Z), μπορούμε να αναζητήσουμε ένα σημείο $x \in X$, τέτοιο ώστε:

(2) $$dFx = \mu$$

Αυτή είναι μια εξίσωση για το x που εμπεριέχει τις διάφορες εξισώσεις πεδίου. Η σχέση (1) είναι αναγκαίος όρος για την (2), πράγμα που σημαίνει ότι οι εξισώσεις κίνησης είναι συνέπεια των εξισώσεων πεδίου. Όλα τα ανωτέρω συγκεκριμενοποιούνται όταν έχουμε διάφορες φυσικές θεωρίες. Για παράδειγμα, στην γενική θεωρία της σχετικότητας η F ορίζεται συναρτήσει του τανυστή Riemann, και η σχέση (*) οδηγεί στην κίνηση πάνω σε μια γεωδεσιακή γραμμή.

Η «παθητική» άποψη συνίσταται στην εξέταση της σχέσης (1) ανεξάρτητα από την σχέση (2). Η μαθηματική μορφή του αιτήματος εξατομίκευσης του υπό εξέτασιν φυσικού συστήματος είναι η δυνατότητα να διατυπωθούν αυτές οι δύο συμπληρωματικές σχέσεις [Z]. Στην περίπτωση που έχουμε μια συμπλεκτική πολλαπλότητα, M, με συμπλεκτική δομή ω, και η G είναι η ομάδα συμπλεκτικών διαφορομορφισμών με συμπαγές στήριγμα, στην πιο απλή περίπτωση, οι εξισώσεις κίνησης και οι εξισώσεις πεδίου παίρνουν αντιστοίχως την μορφή των εξισώσεων Hamilton και της εξίσωσης Hamilton-Jacobi. Το αξιοσημείωτο είναι ότι, στην *μη σχετικιστική* περίπτωση, η μέθοδος της γεωμετρικής κβάντωσης δείχνει μιαν αντιστοιχία μεταξύ της εξίσωσης Hamilton-Jacobi και της εξίσωσης Schrödinger, ενώ το κβαντικό αντίστοιχο των κλασικών εξισώσεων Hamilton δεν είναι κάποιες κβαντικές εξισώσεις κίνησης, αλλά οι συνθήκες Bohr-Sommerfeld [59]. Δηλαδή, ο διαχωρισμός σε εξισώσεις «κίνησης» και «πεδίου» είναι ανέφικτος και στην θέση του έχουμε μόνον το αντίστοιχο των εξισώσεων πεδίου και τους όρους δυνατότητας για αυτές. Στην επικράτεια του κβαντικού, συνεπώς, δεν έχουμε την έννοια της εξατομίκευσης (individuation), την έννοια του ανεξάρτητου αντικειμένου, με τον τρόπο που την έχουμε κλασικά. Άλλη όψη του ίδιου νομίσματος είναι η μη διακρισιμότητα (indistinguishability) του κβαντικού συστήματος. Έχουμε, αντιθέτως, μια μορφή εξατομίκευσης *θεμελιωδών αναλλοίωτων ιδιοτήτων*. Δηλαδή, ιδιότητες όπως μάζα, φορτίο, spin κ.λπ., παρουσιάζουν πλήρη ακαμψία ως προς τις τιμές τους. Άρα, δεν μπορούν να θεωρηθούν ιδιότητες εξατομικευμένων φυσικών συστημάτων, μάλλον προσδιορίζουν *φυσικά είδη*. Το χαρακτηριστικό είναι ότι οι τιμές τέτοιων ιδιοτήτων, και μαζί τους τα φυσικά είδη, αντιστοιχούν σε μη αναγώγιμες *αναπαραστάσεις ομάδων συμμετρίας*, είτε πρόκειται για την ομάδα Poincaré, είτε για τις ομάδες που εμφανίζονται στο καθιερωμένο μοντέλο (standard model) για τα στοιχειώδη σωματίδια ή τις σύγχρονες θεωρίες των υπερμεμβρανών, και οι οποίες υψώνονται έτσι στο επίπεδο κανονιστικής αρχής. Η αντιστοιχία φυσικών ειδών με αναπαραστάσεις ομάδων συμμετρίας αναδεικνύει εντός του κβαντικού την *διπλή φύση* του θεμελιώδους φυσικού μεγέθους, την οποία συναντήσαμε στην §2.4 στα πλαίσια του κλασικού: συνάρτηση και γεννήτορας ομάδας. Εν τούτοις, ενώ στο κλασικό η όψη «τιμή συνάρτησης» χαρακτήριζε τις καταστάσεις, στο κβαντικό αυτές χαρακτηρίζονται από τις αναπαραστάσεις μιας ομάδας και οι τιμές είναι ιδιοτιμές των μεγεθών-γεννητόρων. Φαίνεται, λοιπόν, ο ρόλος του φυσικού μεγέθους ως «άξονα στροφής» για μια μετατόπιση. Την μετατόπιση από την έννοια της ιδιότητας –άρα της κατάστασης– ως μεταβλητού χαρακτηριστικού εξατομικευμένου φυσικού συστήματος, στην έννοια της ιδιότητας ως άκαμπτου δείκτη μη διακρίσιμων μελών ενός φυσικού είδους. Αυτό είναι το νόημα της φυσιολογικής γενίκευσης: από τις θεμελιώδεις ιδιότητες-γεννήτορες, σε όλα τα φυσικά μεγέθη ως τελεστές. Η μαθηματική μορφή της «στροφής» γίνεται φανερή με την δυνατότητα συναγωγής των κβαντικών σχέσεων μεταθετότητας ξεκινώντας από την καθολική περιβάλλουσα άλγεβρα (universal enveloping algebra) της άλγεβρας Lie της ομάδας Poincaré [60]. Θα αναζητήσουμε τώρα την σύνδεση μεταξύ του κλασικού και του κβαντικού πόλου της «στροφής».

3.2 Μια μη-κλασική λογική: άλγεβρες Heyting και χώροι Stone

Ας επιστρέψουμε στον κλασικό φασικό χώρο και στην άλγεβρα Boole που σχηματίζεται από τα υποσύνολά του. Είδαμε ότι σε αυτήν την περίπτωση έχουμε μια πλήρη ατομική άλγεβρα Boole, και ότι τέτοιες άλγεβρες αναπαρίστανται γενικά ως άλγεβρες όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου. Αλλά δεν ισχύει ότι *κάθε* άλγεβρα Boole μπορεί να αναπαρασταθεί με αυτόν τον τρόπο. Ο φορμαλισμός της κβαντικής θεωρίας συνιστά αντιπαράδειγμα. Ειδικότερα, στον φορμαλισμό των χώρων Hilbert, ένας τελεστής εκφράζεται συναρτήσει τελεστών προβολής στην βάση του θεωρήματος της φασματικής ανάλυσης. Ένα σύνολο *μεταθέσιμων* μεταξύ τους τελεστών προβολής έχει την δομή άλγεβρας Boole, η οποία δεν αναπαρίσταται με τον ως άνω τρόπο. Είναι η μορφή, στο μαθηματικό πλαίσιο που περιγράφω, της αντίστροφης σχέσης που υπάρχει μεταξύ αμεσότητας και διαμεσολάβησης στα δύο εννοιολογικά πλαίσια, το κλασικό και το κβαντικό. Η σύγκριση μπορεί να προχωρήσει στην βάση της συνεισφοράς τού Marshal Stone [61], η οποία εισάγει δύο στοιχεία. Πρώτον, την αναγνώριση του γεγονότος ότι μια άλγεβρα Boole είναι ταυτόσημη με έναν *δακτύλιο Boole*, δηλαδή έναν δακτύλιο όλα τα στοιχεία a του οποίου είναι αυτοδύναμα: $a^2 = a$. Αυτό επιτρέπει την αξιοποίηση της έννοιας του *ιδεώδους* (ideal) και ειδικότερα του *πρώτου ιδεώδους* (prime ideal). Δεύτερον, την εισαγωγή της τοπολογίας στην μελέτη αλγεβρικών δομών. Πρώτα, ορισμένες μαθηματικές έννοιες:

Σε ένα σύνολο με την διακριτή τοπολογία, όλα τα υποσύνολα, συνεπώς και εκείνα της μορφής {x} –τα μοναδιαία– είναι και ανοικτά και κλειστά. Στο εξής συμβολίζω ένα σύνολο Σ με την διακριτή τοπολογία O □ Π(Σ) με ⟨Σ, O⟩.

Έστω ⟨X, T⟩ ένας τοπολογικός χώρος X με τοπολογία T. Η συλλογή:

$\propto(X)\ \square\ \{U \subseteq X \mid U$ είναι κλειστό και ανοικτό στον $X\}$

είναι άλγεβρα Boole με τις συνολοθεωρητικές πράξεις της ένωσης, τομής και συμπληρώματος, άρα υποάλγεβρα του $\Pi(X)$ και της T. Η τοπολογία $T(X)$ συνολικά, με τις ίδιες συνολοθεωρητικές πράξεις *εκτός του συμπληρώματος*, γενικεύει την έννοια της άλγεβρας Boole ως εξής: Εάν $U, V_i \in T(X)$, όπου i μια συλλογή δεικτών, τότε η σχέση $\subseteq$ εισάγει στην $T(X)$ μια μερική διάταξη (partial order). Οι πράξεις $\wedge$ και $\vee$ (τομή και ένωση –meet και join, αντιστοίχως) με: $\wedge_i V_i\ \square\ \mathrm{int}(\cup_i V_i)$, $\vee_i V_i\ \square\ \cap_i V_i$, όπου «int» σημαίνει το εσωτερικό ενός συνόλου,[21] κάνουν την μερική διάταξη $\langle T(X), \subseteq\rangle$ ένα *πλήρες πλέγμα* (complete lattice) [Δ]. Επί πλέον, ισχύει η ιδιότητα της πλήρους επιμεριστικότητας (distributivity):

$U\wedge \vee_i V_i = \vee_i U\wedge V_i,$

πράγμα που εξ ορισμού προσδίδει την δομή μιας *πλήρους άλγεβρας Heyting* (cHa). Σε αυτήν την cHa ορίζονται δύο ακόμη πράξεις:

α) συνεπαγωγή: $\forall U, V \in T(X)$, ορίζεται ένα τρίτο στοιχείο της $T(X)$, συμβολιζόμενο με $U \rightarrow V\ \square\ \mathrm{int}\,(U^c \cap V)$, όπου $U^c\ \square\ X\backslash U$

β) άρνηση ή ψευδοσυμπλήρωμα: για κάθε $U \in T(X)$, υπάρχει ένα στοιχείο συμβολιζόμενο με $\neg U\ \square\ U \rightarrow \varnothing = \mathrm{int}U^c$.

Γενικότερα, μια άλγεβρα Heyting είναι ένα πλέγμα $\langle A, \leq, \wedge, \vee\rangle$ όπου, για κάθε ζεύγος (a, b) στοιχείων, υπάρχει ένα στοιχείο $a \rightarrow b$ τέτοιο ώστε $c \leq (a\rightarrow b)$ εάν και μόνον εάν $c\wedge a \leq b$. Η πράξη $\neg$ ορίζεται ως $\neg a = a \rightarrow 0$. Με αυτόν τον συμβολισμό, το στοιχείο c στον ως άνω ορισμό είναι $\neg a\vee b$. Ακόμη, το $\neg a$ είναι το μέγιστο στοιχείο για το οποίο $\neg a\wedge a = 0$. Αλλά, γενικά δεν ισχύει ο νόμος του αποκλειομένου τρίτου, $\neg a\vee a = 1$. Μια τέτοια δομή, συνεπώς, αντιστοιχεί σε μιαν «ιντουισιονιστική» λογική [62]. Δηλαδή, έχουμε μια *μη κλασική* λογική, η οποία παρίσταται με ένα *επιμεριστικό* πλέγμα, διότι μια άλγεβρα Heyting είναι επιμεριστική. Η εισαγωγή των αλγεβρών Heyting σηματοδοτεί μιαν ειδικού τύπου απόκλιση από την κλασικότητα. Αφ' ενός, παραμένουμε στα όρια της επιμεριστικότητας, αφ' ετέρου, έχουμε μιαν αρκούντως

[21] Δηλαδή όλα τα σημεία ενός συνόλου U για κάθε ένα από τα οποία υπάρχει ανοικτό γνήσιο υποσύνολο του U που τα περιέχει.

μη κλασική δομή, κατά το ότι δεν ισχύει ο νόμος του αποκλειομένου τρίτου. Δύο σημεία πρέπει να τονίσουμε σε σχέση με αυτού του τύπου την μη κλασικότητα. Το ένα αφορά μια σημαντική νοηματική μετατόπιση. Στην δομή της άλγεβρας Heyting, η έννοια της *άρνησης*, δηλαδή του συμπληρώματος, γίνεται παράγωγη ενώ πρωτογενής γίνεται στην θέση της η έννοια της *συνεπαγωγής*. Μια *σχέση* στοιχείων, η συνεπαγωγή του ενός από το άλλο, είναι *στοιχείο* η ίδια της δομής. Έχουμε συνεπώς μια λογική όπου η έννοια της σχέσης προβάλλει ρητά. Το δεύτερο σημείο είναι η σύνδεση της μη κλασικότητας με την έννοια της συνέχειας –μέσω της τοπολογίας–, όπως την αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά, και την αντίθεσή της προς την έννοια του διακριτού. Η απαγκίστρωση, όμως, από την κλασική λογική των αλγεβρών Boole και η μετάβαση στην πιο γενική και ευέλικτη λογική των αλγεβρών Heyting καθιστά περιττή την ρητή διατύπωση μιας τοπολογίας, δεδομένου ότι κατά κάποιον τρόπο την απορροφά. Πράγματι, εάν έχουμε δύο τοπολογικούς χώρους, X και Y, με αντίστοιχες τοπολογίες T(X) και T(Y), τότε μια συνεχής απεικόνιση $f\colon X \to Y$ ισοδυναμεί με μιαν απεικόνιση $f^*\colon T(Y) \to T(X)$, η οποία διατηρεί την δομή των τοπολογιών, δηλαδή την δομή πλέγματος που έχουν οι οικογένειες των ανοικτών συνόλων, μια δομή άλγεβρας Heyting εξ ορισμού. Μια κατηγορία, τα αντικείμενα της οποίας είναι άλγεβρες Heyting, και της οποίας οι μορφισμοί είναι σαν τους ανωτέρω, είναι η κατηγορία των *locales,* **Loc.** Η έννοια της συνέχειας είναι εδώ εγγενής. Έτσι, μπορούμε να αναφερθούμε στην εύστοχη παρομοίωση του Vickers με τις πλανητικές τροχιές: Εάν η μη κλασική λογική –των αλγεβρών Heyting– αντιστοιχεί στις ελλειπτικές τροχιές, τότε η κλασική λογική –των αλγεβρών Boole– αντιστοιχεί στους κύκλους και η εισαγωγή μιας τοπολογίας είναι η «διόρθωση» που επιτελούν οι επίκυκλοι [63]. Μια τέτοια άλγεβρα ανάγεται σε άλγεβρα Boole εάν και μόνον εάν $\neg\neg a = a$. Στην περίπτωση ενός *συνόλου* Σ με διακριτή τοπολογία, οι ως άνω πράξεις ανάγονται στην κλασική άρνηση και συνεπαγωγή, $\neg U = U^c$ και $U \to V = U^c \cap V$. Σημειώνω ότι όταν η άλγεβρα Heyting προκύπτει από έναν τοπολογικό χώρο $\langle X, T\rangle$, ισχύει $\neg U = U^c$ εάν και μόνον εάν το U είναι κλειστό και ανοικτό, σε συμφωνία με ό,τι ανέφερα προηγουμένως.

Τίθεται συνεπώς το ερώτημα: Έχουμε *δύο* είδη άλγεβρας Boole, μία που σχετίζεται με το κλασικό και μία που σχετίζεται με το κβαντικό πλαίσιο. Η πρώτη είναι η άλγεβρα Π(S) του καταστατικού χώρου S, η δεύτερη εκείνη που σχηματίζουν οι αμοιβαίως μεταθέσιμοι τελεστές προβολής. Είναι άραγε δυνατόν και οι δύο να συσχετισθούν –πολύ διαφορετικά βεβαίως η μία από την άλλη– με κάποιαν άλγεβρα Boole που θα σχηματίζεται από τα κλειστά και ανοικτά στοιχεία κάποιου χώρου εφοδιασμένου με κατάλληλη τοπολογία; Η απάντηση είναι θετική, και δίδεται στην βάση των *χώρων Stone*. Τονίζω ότι η όποια συσχέτιση υπάρχει, θα γίνεται μεταξύ *ολόκληρης* της κλασικής εικόνας, αφ΄ ενός, και ενός μόνον *τμήματος* της κβαντικής, αφ΄ ετέρου: εκείνου που συγκροτείται από την ειδική περίπτωση αμοιβαίως μεταθέσιμων τελεστών.

Θα προχωρήσω από δύο κατευθύνσεις. Η μία διερευνά τις δυνατότητες να τοποθετηθεί η δομή του χώρου ∇^S σε ένα ευρύτερο εννοιολογικό πλαίσιο, ειδικότερα εκείνο της θεωρίας των δεσμίδων (sheaves) και των τόπων. Η δεύτερη αξιοποιεί αυτήν την γενίκευση, ώστε, εξετάζοντας τα δύο είδη πλεγμάτων, εκείνο που σχηματίζουν τα ανοικτά υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου, αφ' ενός, και, αφ' ετέρου, εκείνο που σχηματίζουν οι υποχώροι ενός χώρου Hilbert, να εντοπιστούν εντός ενός ενιαίου μαθηματικού πλαισίου τα «σημεία καμπής» από τον κλασικό στον κβαντικό φορμαλισμό. Κατ' αρχάς, ας δούμε πώς η κρίσιμη έννοια του *σημείου* μπορεί να γενικευθεί έτσι ώστε να ξεπεραστεί η ανεπάρκεια του στερημένου δομής σημείου ενός κλασικού τοπολογικού χώρου, όπως είναι ένας χώρος φάσεων. Στην περίπτωση ενός συνόλου Σ, ή όταν το Σ θεωρείται τοπολογικός χώρος με διακριτή τοπολογία, ένα *φίλτρο πάνω στο Σ* είναι ένα σύνολο Φ υποσυνόλων τού Σ με τις ιδιότητες:

α) κάθε σύνολο που περιέχει ένα σύνολο του Φ ανήκει στο Φ

β) η τομή δύο συνόλων του Φ ανήκει στο Φ

γ) το σύνολο Σ ανήκει στο Φ, και το κενό υποσύνολο $\varnothing$ του Σ δεν ανήκει στο Φ.

Μια *βάση φίλτρου* πάνω στο Σ είναι ένα σύνολο $\propto$ υποσυνόλων τού Σ τέτοιο ώστε το σύνολο των υποσυνόλων τού Σ που περιέχουν ένα σύνολο του $\propto$ είναι φίλτρο. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\propto$ μια βάση φίλτρου, είναι:

α) η τομή δύο συνόλων τού $\propto$ περιέχει ένα σύνολο του $\propto$

β) το $\propto$ δεν είναι κενό, και το κενό υποσύνολο του Σ δεν ανήκει στο $\propto$.

Η σχέση $\subseteq$ διατάσσει τα φίλτρα. Ένα μέγιστο φίλτρο σύμφωνα με αυτήν την διάταξη είναι ένα ουλτραφίλτρο (ultrafilter). Αν το Φ είναι ένα ουλτραφίλτρο πάνω στο Σ, και αν η ένωση μιας πεπερασμένης σειράς υποσυνόλων τού Σ ανήκει στο Φ, τότε ένα τουλάχιστον από τα υποσύνολα αυτής της σειράς ανήκει στο Φ. Το σύνολο των υποσυνόλων ενός συνόλου Σ που περιέχουν ένα στοιχείο τού Σ είναι ένα ουλτραφίλτρο. Εάν έχουμε έναν τοπολογικό χώρο X με τοπολογία T(X), οι ορισμοί αυτοί μεταφέρονται αυτούσιοι, με την διευκρίνιση ότι τώρα μιλάμε για φίλτρα *στην* τοπολογία T(X), και ότι είναι γνήσια (proper), πράγμα που ισοδυναμεί με το ότι δεν συμπίπτουν με την T(X). Ένα ουλτραφίλτρο είναι ένα φίλτρο τέτοιο ώστε το μόνο φίλτρο που το περιέχει γνησίως είναι η $T(X)$. Εάν Φ είναι ένα ουλτραφίλτρο, τότε $\forall A \in T(X)$, $A \in \Phi$ ή $\neg A \in \Phi$. Ακόμη, ισχύει ότι $U \in \Phi$ και $(U \to V) \in \Phi \Rightarrow V \in \Phi$, για ένα φίλτρο Φ.

΄Ενα (γνήσιο) φίλτρο Φ είναι:

α) *κύριο* (principal) αν είναι της μορφής

$\uparrow(U) \Box \{A \in T(X) \mid U \subseteq A\}$ για κάποιο $U \subseteq T(X)$

β) *πρώτο* (prime) αν $\forall A, B \in T(X)$, $A \cap B \in \Phi \Rightarrow A \in \Phi$ ή $B \in \Phi$.

΄Εστω, λοιπόν, ότι έχουμε έναν τοπολογικό χώρο X με τοπολογία $T(X)$, και ας ορίσουμε $S(T) \Box \{\Phi \mid \Phi$: ουλτραφίλτρο στην $T\}$. Μια *τοπολογία Stone* στο $S(T)$ ορίζεται με βάση τα σύνολα $S_U \Box \{\Phi \in S(T) \mid U \subseteq \Phi\}$, όπου $U \in T(X)$.

Τα σύνολα S_U είναι *ανοικτά–κλειστά* και ο τοπολογικός χώρος $\langle S(T), \{S_U\}\rangle$ είναι συμπαγής, Hausdorff και εντελώς μη συνδεδεμένος (totally disconnected). Είναι ο *χώρος Stone* μιας άλγεβρας Boole που θα προσδιορίσουμε στην συνέχεια [H].

3.3 Το δομημένο σημείο: η κατηγορική προσέγγιση

Προκειμένου να ανιχνεύσω την διαδρομή από την οποία το σημείο – κατάσταση αποσύρεται από το προσκήνιο, ως παρουσία μέσω της άμεσης σχέσης με την τιμή ενός μεγέθους, παραχωρώντας την πρωτοκαθεδρία στο παρατηρήσιμο μέγεθος A, επιχειρώ να παρακολουθήσω τις αλλαγές στους ρόλους και τις σχέσεις μεταξύ σημείων ενός φασικού χώρου S και των αντίστοιχων συναρτήσεων f_A: $S \to \nabla$, στο φως διαδοχικών γενικεύσεων και μετατοπίσεων του μαθηματικού πλαισίου εντός του οποίου τοποθετούνται. Κατ’ αρχάς, υπενθυμίζω την άδηλη και μάλλον τετριμμένη αντιστοιχία μεταξύ δύο όψεων ενός συνόλου X, όταν αυτό θεωρείται ως σύνολο, αφ’ ενός, και, αφ’ ετέρου, όταν θεωρείται ως τοπολογικός χώρος με την διακριτή τοπολογία, έστω $O(X)$. Η αντιστοιχία εκφράζεται με τις σχέσεις $x \leftrightarrow \{x\}$, $x \in X$, και $O(X) = \Pi(X)$. Η τοπολογία $O(X)$ είναι πλέγμα που επί πλέον είναι πλήρης ατομική άλγεβρα Boole. Τα άτομα είναι φυσικά τα σύνολα $\{x\}$. Αυτή η άλγεβρα Boole είναι και η άλγεβρα των προτάσεων του τύπου «η συνεχής συνάρτηση f: $X \to \nabla$ έχει τιμή a όταν $f(x) = a$, όπου $x \in X$», καθώς και «η τιμή τής f βρίσκεται στο διάστημα $\Delta \subset \nabla$

όταν $x \in U \subseteq X$». Αυτή η δεύτερη περίπτωση εκφράζεται και από την χαρακτηριστική συνάρτηση του υποσυνόλου U, $\chi^U(x) = 1$ όταν $x \in U$ και $= 0$ όταν $x \notin U$. Οι δύο όψεις, συνόλου – τοπολογικού χώρου, που εδώ συμπίπτουν, μπορούν να εκφραστούν και διαφορετικά, με τρόπο που να υποδεικνύει έναν δρόμο προς την ρητή διαφοροποίησή τους. Πρώτον, σε μιαν άλγεβρα Boole ένα στοιχείο είναι *πρώτο* εάν και μόνον εάν το συμπλήρωμά του είναι άτομο. «Πρώτο στοιχείο» εδώ σημαίνει ένα στοιχείο a το οποίο γεννά *πρώτα κύρια ιδεώδη* [H], δηλαδή ιδεώδη τής A που είναι της μορφής $\downarrow(a)$ □ $\{b \in A \mid b \leq a\}$ (κατώτερα σύνολα), όπου A η άλγεβρα Boole –εδώ η $O(X) = \Pi(X)$– και η σχέση μερικής διάταξης $\leq$ στην περίπτωσή μας είναι η σχέση $\subseteq$ μεταξύ υποσυνόλων τού X. Τα «πρώτα στοιχεία» εδώ είναι τα υποσύνολα του X της μορφής $X \backslash \{x\}$. Συνεπώς το τυχόν σημείο x αντιστοιχεί μονοσήμαντα στο πρώτο στοιχείο $X \backslash \{x\}$ και στο πρώτο κύριο ιδεώδες υποσυνόλων της μορφής $U \backslash \{x\}$, δηλαδή στις περιοχές που το *περιβάλλουν*. Δεύτερον, και ισοδύναμα, κάθε στοιχείο x αντιστοιχεί σε ένα ουλτραφίλτρο: το σύνολο των περιοχών που το *περιέχουν*. Η διαφοροποίηση των δύο όψεων αρχίζει να γίνεται ρητή όταν θεωρήσουμε μιαν οποιαδήποτε τοπολογία, έστω T(X), διαφορετική της διακριτής. Όταν έχουμε δύο τοπολογικούς χώρους, X και Y, με αντίστοιχες τοπολογίες T(X) και T(Y), είδαμε προηγουμένως ότι μια οποιαδήποτε απεικόνιση, $f\colon X \to Y$, επάγει έναν ομομορφισμό, f^*, πλήρων αλγεβρών Boole από το $\Pi(Y)$ στο $\Pi(X)$. Εάν η f είναι συνεχής, τότε η f^* θα περιορίζεται σε μιαν απεικόνιση $T(Y) \to T(X)$, η οποία διατηρεί τις πράξεις $\wedge$ και $\vee$ της άλγεβρας Boole. Αλλά τα πλέγματα T(X) και T(Y) είναι άλγεβρες Boole μόνον εάν τα στοιχεία τους, δηλαδή τα ανοικτά σύνολα U, είναι *συνήθη* (regular), που σημαίνει ότι $U = \mathrm{int}\bar{U}$, όπου $\bar{U}$ είναι το συναφές σύνολο (adherence) του U.[22] Στην γενική περίπτωση, ισχύει $U \subseteq \mathrm{int}\bar{U}$, και η άλγεβρα των υποσυνόλων είναι πλήρης άλγεβρα Heyting (cHa) –έχουμε δηλαδή απομακρυνθεί από την κλασική λογική. Έχουμε όμως και μια πρώτη διαφοροποίηση που εκφράζεται από τις απεικονίσεις f μεταξύ χώρων X και Y, και τις επαγόμενες απεικονίσεις μεταξύ πλεγμάτων T(X) και T(Y). Οι τελευταίες δεν μπορεί να είναι ομομορφισμός μεταξύ αλγεβρών Heyting –δεν διατηρούν την πράξη της συνεπαγωγής. Στην γλώσσα της θεωρίας των κατηγοριών, έχουμε *δύο* κατηγορίες με τα *ίδια* αντικείμενα, δηλαδή άλγεβρες Heyting. Διαφέρουν όμως στους *μορφισμούς*. Στην πρώτη, αυτοί είναι συναρτήσεις που διατηρούν πεπερασμένες τομές (meets) και αυθαίρετες ενώσεις (joins). Είναι η κατηγορία **Frm** των *πλαισίων* (frames). Η δεύτερη είναι η αντίθετη της πρώτης, και την συναντήσαμε ήδη: είναι η κατηγορία **Loc** των *locales* και οι μορφισμοί της ορίζονται ως *συνεχείς απεικονίσεις*. Τροποποιώντας τον συμβολισμό που χρησιμοποιώ, παριστάνω με $\mathbf{\Omega}$ τον συναρτητή $\mathbf{Sp} \to \mathbf{Loc}$ που στέλνει έναν χώρο, αντικείμενο της κατηγορίας **Sp** των τοπολογικών χώρων, στο πλέγμα των ανοικτών συνόλων του, και μια συνεχή απεικόνιση $f\colon X \to Y$ στην αντίστοιχη συνάρτηση $f^* : \mathbf{\Omega}(Y) \to \mathbf{\Omega}(X)$.

[22] Ακολουθώ την ορολογία τού Bourbaki [64]. Το $\bar{U}$ περιλαμβάνει τα σημεία τού U συν όλα τα σημεία του χώρου X, κάθε περιοχή των οποίων συναντά το U.

Επιστρέφω στις δυνατότητες γενίκευσης της έννοιας του σημείου. Ας θυμηθούμε την μεταθετική C*-άλγεβρα, Α, των λείων συναρτήσεων σε έναν χώρο S, $f: S \to \nabla$ (ή $\Re$). Το σύνολο ομομορφισμών $\hat{s}: A \to \Re$, όπου το $\hat{s}$ αντιστοιχεί στο σημείο s του χώρου S, είναι το *φάσμα*, specA, της Α. Σε αυτήν την περίπτωση, που η Α είναι μεταθετική, η γνώση του φάσματός της ισοδυναμεί με γνώση τής Α. Αυτό είναι το περιεχόμενο του μετασχηματισμού Gelfand. Το φάσμα γίνεται τοπολογικός χώρος, αν θεωρήσουμε ότι ισχύει $\hat{s}_i \to \hat{s}$ όταν $\hat{s}_i(f) \to \hat{s}(f)$ $\forall f \in A$. Κάθε f, στοιχείο τής Α, ορίζει έτσι μια συνεχή συνάρτηση επί του φάσματος της Α: f(s) □ $\hat{s}(f)$. Κατ΄ αναλογίαν, στην περίπτωση κάθε μεταθετικού δακτυλίου Α, το φάσμα του θα συνίσταται σε ένα σύνολο ομομορφισμών, x, από το Α σε κάποιο αλγεβρικό σώμα, έστω k, $x: A \to k$. Είναι προσφορότερο να θεωρήσουμε, αντί για τους ομομορφισμούς x τον πυρήνα τους (kernel), δηλαδή το σύνολο των $a \in A$ για τα οποία x(a) □ 0. Ο πυρήνας ενός ομομορφισμού από έναν δακτύλιο σε έναν άλλο είναι ένα *ιδεώδες* **(**ideal). Είναι δηλαδή ένα σύνολο κλειστό υπό την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με όλα τα στοιχεία τού Α. Εάν έχουμε ομομορφισμό από έναν δακτύλιο σε ένα σώμα, τότε ο πυρήνας του είναι πρώτο (prime) ιδεώδες. Δηλαδή, ένα ιδεώδες γνήσιο υποσύνολο του Α για το οποίο ισχύει ότι, εάν το γινόμενο δύο στοιχείων τού Α ανήκει σε αυτό, τότε θα ανήκει σε αυτό το ένα τουλάχιστον από τα δύο στοιχεία. Αντιστρόφως, εάν δοθεί ένα πρώτο ιδεώδες στο Α, θα υπάρχει πάντα ένα σώμα k και ένας ομομορφισμός, $x: A \to k$, του οποίου πυρήνας είναι το δεδομένο πρώτο ιδεώδες. Με αυτήν την συλλογιστική, είναι εύλογο να θεωρήσουμε ως γενικευμένη έννοια σημείου τα μέλη τού specA, ορίζοντας αυτό το τελευταίο ως το σύνολο των πρώτων ιδεωδών στο Α.

Στην γλώσσα της θεωρίας των κατηγοριών, έχουμε συναντήσει την έννοια του σημείου ενός αντικειμένου Α ως μορφισμό $\{*\} \to A$ από ένα τελικό αντικείμενο $\{*\}$. Στο ίδιο πνεύμα, στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων, τα σημεία ενός χώρου Χ μπορούν να εκπροσωπηθούν από συνεχείς απεικονίσεις της μορφής $\mathbf{1} \to X$, όπου το $\mathbf{1}$ είναι ο χώρος με ένα σημείο [61]. Κατ' αναλογίαν και σύμφωνα με ό,τι ανέφερα προηγουμένως, τα σημεία ενός locale Α μπορούν να οριστούν ως συνεχείς απεικονίσεις της μορφής $\mathbf{\Omega(1)} = \mathbf{2}$ □ $\{0, 1\} \to A$, πράγμα που είναι το ίδιο με έναν ομομορφισμό πλαισίων της μορφής $p: A \to \mathbf{2}$. Ένας τέτοιος ομομορφισμός καθορίζεται πλήρως από τον πυρήνα (kernel) του, $p^{-1}(0)$ ή τον δυικό πυρήνα του, $p^{-1}(1)$. Αντιστοίχως, αυτά είναι ένα κύριο ιδεώδες $p^{-1}(0) = \downarrow(\vee(p^{-1}(0)))$ το ένα, και ένα πλήρως πρώτο (completely prime) φίλτρο το άλλο, που σημαίνει: $\vee S \in p^{-1}(1)$ □ $(\exists s \in S)$ $(s \in p^{-1}(1))$. Το συμπέρασμα είναι ότι η αντιστοιχία σημείων με πρώτα στοιχεία γενικεύεται στην περίπτωση των locales. Έστω ότι pt(A) είναι το σύνολο των σημείων τού Α, και έστω $\phi: A \to \Pi(pt(A))$ ο ομομορφισμός πλαισίων που στέλνει το $a \in A$ στο σύνολο σημείων $p: A \to \mathbf{2}$ τέτοιων ώστε $p(a) = 1$, ή ισοδύναμα στο σύνολο πρώτων στοιχείων $x \in A$ όπου $x \ngeq a$. Τότε, η εικόνα τού ϕ είναι μια τοπολογία επί του pt(A). Σημειώνω τέλος ότι ένας *χώρος Stone* είναι ένας χώρος συμπαγής, Hausdorff και εντελώς μη συνδεδεμένος [H]. Ένας τέτοιος χώρος έχει μηδενική διάσταση, δηλαδή τα κλειστά-ανοικτά υποσύνολά του σχηματίζουν μια βάση της τοπολογίας. Η κατηγορία **Bool** αλγεβρών Boole και ομομορφισμών, κατά το θεώρημα του Stone για την αναπαράσταση αλγεβρών Boole, είναι δυική της κατηγορίας S**tone** των χώρων Stone και των μεταξύ τους συνεχών απεικονίσεων. Δηλαδή, ενώ στην περίπτωση μιας *ατομικής* άλγεβρας Boole, όπως είδαμε, το σύνολο που της αντιστοιχεί για την αναπαράστασή της έχει ως μέλη τα στοιχεία αυτής της άλγεβρας, όταν η άλγεβρα Boole δεν είναι ατομική, όπως στην περίπτωση μεταθέσιμων τελεστών, η αναπαράστασή της γίνεται στην βάση του συνόλου των *πρώτων ιδεωδών* της. Τα στοιχεία της, τότε, αντιστοιχούν στα κύρια ιδεώδη. Η κλασική περίπτωση, όπου έχουμε σημεία-*άτομα*, χωρίς δομή, μετατρέπεται στην περίπτωση όπου τα σημεία είναι δομημένα στην βάση κάποιας διάταξης, με ρητή αναφορά σε μια *σχέση*.

Οι μαθηματικοί είναι σαν τους Γάλλους.

Μεταφράζουν τα πάντα στην δική τους γλώσσα,

και από εκείνη την στιγμή τίποτε δεν είναι πια το ίδιο.

J. W. von Goethe

Κεφάλαιο IV. Το σημείο ως σχέση

4.1 Οι όψεις του σημείου: η κβαντική περίπτωση

Το ερώτημα είναι κατά πόσον αυτές οι έννοιες που αναφέρονται σε τοπολογικούς χώρους και τα αντίστοιχα πλέγματα, πράγμα που περιλαμβάνει την κλασική περίπτωση, μπορούν να μεταφερθούν έτσι ώστε να συναντήσουν την κβαντική περίπτωση. Σε αυτήν την τελευταία, έχουμε βεβαίως χώρους Hilbert αντί για τυχόντες τοπολογικούς χώρους, και τα πλέγματα που είναι εύλογο να αντιστοιχίσουμε στην τοπολογική περίπτωση είναι εκείνα που σχηματίζουν οι κλειστοί υποχώροι ενός χώρου Hilbert. Μία πρώτη και πασίγνωστη διαφορά είναι ότι τέτοια πλέγματα είναι μη επιμεριστικά. Παραδοσιακά θεωρούνται ως η βάση της «κβαντικής λογικής», που αντικαθιστά την κλασική. Εδώ θα υιοθετήσω μιαν άλλη προσέγγιση, η οποία προτείνεται από τον H. F. de Groote [65] και βασίζεται στην έννοια των «κβαντικών δεσμίδων» (quantum sheaves). Παραθέτω τα βασικά σημεία.

Η γενικευμένη έννοια του σημείου, όπως την εξέθεσα, μπορεί να οριστεί για οποιοδήποτε πλέγμα, συμπεριλαμβανομένου του πλέγματος $\not\subset(H)$ των κλειστών υποχώρων ενός χώρου Hilbert, H. Ο ορισμός βασίζεται στην κατάλληλη προσαρμογή της έννοιας του φίλτρου και του ουλτραφίλτρου. Εάν, λοιπόν, f είναι ένας αρκετά μεγάλος πληθάριθμος και $\not\subset$ ένα f-πλήρες πλέγμα (κατάλληλα προσαρμοσμένη παραλλαγή της έννοιας του πλήρους πλέγματος), τότε ένα *σημείο* στο $\not\subset$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο $\heartsuit \subseteq \not\subset$ με τις ιδιότητες:

α) $0 \notin \heartsuit$

β) $a \in \heartsuit, b \in \not\subset, \ a \leq b \ \Rightarrow b \in \heartsuit$

γ) $a, b \in \heartsuit \ \Rightarrow a \wedge b \in \heartsuit$

δ) εάν $(a_i)_{i\in I}$ με $|I| \leq f$ είναι μια οικογένεια στο $\not\subset$ και $\vee_{i\in I} a_i \in$ ♥, τότε $a_i \in$ ♥ για τουλάχιστον ένα $i \in I$.

Θυμίζω ότι βασικά ενδιαφερόμαστε για την *σύνδεση* μεταξύ καταστάσεων ενός συστήματος και τιμών ενός φυσικού μεγέθους, και ότι στην κλασική περίπτωση αυτή η σύνδεση πραγματοποιείται μέσω συνεχών πραγματικών συναρτήσεων σε κάποιον χώρο καταστάσεων, $f \in \nabla^S$. Σημείωσα ακόμη ότι, εάν το S θεωρηθεί ως κατηγορία με αντικείμενα τα ανοικτά υποσύνολα του S και μορφισμούς τις μεταξύ τους σχέσεις τού περιέχεσθαι (inclusion), τότε οι συναρτήσεις f σχηματίζουν την δεσμίδα των σπερμάτων (germs) των συνεχών συναρτήσεων στον χώρο S. Συνεπώς, εκείνο που αναζητάμε είναι ακριβώς κάτι αντίστοιχο για την περίπτωση που ο χώρος S αντικαθίσταται από έναν χώρο Hilbert, και το πλέγμα των ανοικτών υποσυνόλων τού S αντικαθίσταται από το πλέγμα των υποχώρων τού H. Παραθέτω λοιπόν τον ορισμό της έννοιας της δεσμίδας, γενικευμένον ώστε να ισχύει για ένα τυχόν πλέγμα, όπως τον διατυπώνει ο de Groote: Μια *προδεσμίδα* (presheaf) συνόλων (ή ∇-modules[23]) σε ένα πλέγμα $\not\subset$ επισυνάπτει σε κάθε στοιχείο $a \in \not\subset$ ένα σύνολο (ή ∇-module) S(a) και σε κάθε ζεύγος $(\alpha, b) \in \not\subset \square \not\subset$, όπου $a \leq b$, μιαν απεικόνιση (ομομορφισμό ∇-modules), $\rho^b_a : S(b) \to S(a)$, με τις εξής ιδιότητες:

α) $\rho^a_a = Id_{S(a)}\ \forall a \in \not\subset$, Id: η ταυτοτική απεικόνιση,

β) $\rho^b_a \lceil\ \rho^c_b = \rho^c_a\ \forall a, b, c \in \not\subset$ τέτοια ώστε $a \leq b \leq c$.

Η προδεσμίδα $(S(a), \rho^b_a)_{a\leq b}$ είναι μια *δεσμίδα* εάν επί πλέον ισχύει:

γ) εάν $a = \bigvee_{i\in I} a_i \in \not\subset$ και εάν $f_i \in S(a_i)$, $i \in I$, ικανοποιούν την συνθήκη (συγκόλλησης –pasting):

$\forall i, j \in I : (a_i \wedge a_j \neq 0 \Rightarrow \rho^{a_i}_{a_i \wedge a_j}(f_i) = \rho^{a_j}_{a_i \wedge a_j}(f_j))$,

τότε $\exists! f \in S(a)$ τέτοια ώστε $\forall i \in I : \rho^a_{a_i}(f) = f_i$.

Οι απεικονίσεις ρ^b_a ονομάζονται απεικονίσεις *περιορισμού* (restriction).

[23] Διανυσματικών χώρων X τέτοιων ώστε $\forall x \in X$, ισχύει $ax \in X$, όπου $a \in \nabla$.

Μία πρώτη σημαντική παρατήρηση του de Groote είναι ότι τα πλέγματα που σχηματίζονται από μια τυχούσα τοπολογία, καθώς και εκείνα που σχηματίζονται από σύνολα Borel, διαθέτουν σημεία με την γενικευμένη έννοια. Εν τούτοις, τα πλέγματα που σχηματίζονται από τα ανοικτά σύνολα ενός τοπολογικού χώρου, εφ’ όσον αυτά είναι *συνήθη* υποσύνολα, αλλά και εκείνα που σχηματίζουν οι κλειστοί υποχώροι ενός χώρου Hilbert –αυτό που μας ενδιαφέρει– *δεν διαθέτουν* τέτοια σημεία. Επί πλέον, εάν θελήσουμε να κατασκευάσουμε δεσμίδες συνόλων επί του κβαντικού πλέγματος ⊄(H), βρίσκουμε ότι αυτές είναι *τετριμμένες*, ενώ υπάρχουν μη τετριμμένες *προδεσμίδες*. Οδηγούμαστε, συνεπώς, στην εξέταση προδεσμίδων επί του ⊄(H), αφ’ ενός, και, αφ’ ετέρου, στην αναζήτηση ενός κατάλληλου υποκατάστατου της έννοιας του σημείου. Έστω, λοιπόν, μια προδεσμίδα $P = (P(U), \rho^{U}_{V})_{V\subseteq U}$ πάνω σε έναν τοπολογικό χώρο X. Ο *μίσχος* (stalk) της P στο σημείο $x \in X$ είναι το ευθύ όριο:

$$P_x \;\square\; \varinjlim_{U\in U(x)} P(U),$$

όπου □(x) είναι το σύνολο των περιοχών τού x στον X, δηλαδή το σημείο στην τοπολογία T(X) που αντιστοιχεί στο x. Το ευθύ όριο όμως υπάρχει, έστω και αν η T(X) *δεν* διαθέτει τέτοια σημεία, διότι ο ορισμός του χρειάζεται μόνον την ύπαρξη ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου I με την εξής ιδιότητα: $\forall \alpha, \beta \in I\ \exists \gamma \in I$: $\gamma \leq \alpha$ και $\gamma \leq \beta$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι αρκεί να έχουμε μια *βάση φίλτρου*. Επαναλαμβάνω τον ορισμό μιας βάσης φίλτρου, έτσι όπως διατυπώνεται για τυχόν πλέγμα L:

Μια βάση φίλτρου B σε ένα πλέγμα ⊄ είναι ένα μη κενό υποσύνολο B ⊆ ⊄ τέτοιο, ώστε:

α) $0 \notin B$

β) $\forall a, b \in B\ \exists c \in B : c \leq a \wedge b$.

Με αυτόν τον ορισμό, προκειμένου να εξετάσουμε αυτό που ενδιαφέρει, δηλαδή προδεσμίδες επί του ⊄(H), αρκεί να επικεντρωθούμε σε *μέγιστες* (maximal) βάσεις φίλτρου. Για μια τέτοια μέγιστη βάση φίλτρου, ∝, σε ένα πλέγμα ⊄, ισχύει: ∀a ∈ ∝ και ∀b ∈ ⊄ : (a ≤ b ⇒ b ∈ ∝), και ∀a, b ∈ ∝ : a∧b ∈ ∝. Με άλλα λόγια, η ∝ είναι ένα μέγιστο δυικό ιδεώδες (maximal dual ideal) στο πλέγμα ⊄. Ο de Groote ονομάζει μια τέτοια ∝ *οιονεί σημείο* (quasi point) στο ⊄. Διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

α) Έστω X ένας τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff και $\propto$ ένα οιονεί σημείο στο πλέγμα T(X) των ανοικτών υποσυνόλων τού X. Τότε, είτε $X \backslash K \in \propto$ για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X –οπότε μιλάμε για ένα *μη φραγμένο* οιονεί σημείο– ή υπάρχει ένα μοναδικό σημείο $x \in X$ τέτοιο ώστε $pt(\propto)$ □ $\mathop{\mathbf{I}}\limits_{U\in B} \overline{U} = \{x\}$ –οπότε μιλάμε για *φραγμένο* οιονεί σημείο πάνω από το x.

Εάν ο χώρος X δεν είναι συμπαγής, τότε έστω M_∞ □ $M \cap \{\infty\}$ (η συμπαγοποίηση με ένα σημείο). Τα μη φραγμένα οιονεί σημεία στην T(M) μπορούν να θεωρηθούν ως οιονεί σημεία πάνω από το ∞ στην $T(M_\infty)$.

β) Έστω H ένας χώρος Hilbert και $\not\subset(H)$ το πλέγμα των κλειστών υποχώρων του. Τότε, ένα οιονεί σημείο $\propto$ στο $\not\subset(H)$ περιέχει ένα στοιχείο πεπερασμένης διάστασης εάν και μόνον εάν υπάρχει μία μοναδική γραμμή $\Re x_0$ στον H τέτοια ώστε το οιονεί σημείο να είναι $\propto = \{U \in \not\subset(H) \mid \Re x_0 \subseteq U\}$ –οπότε μιλάμε για ένα *ατομικό* οιονεί σημείο. Το $\propto$ δεν περιέχει ένα στοιχείο πεπερασμένης διάστασης εάν και μόνον εάν ισχύει $W \in \propto$ για κάθε $W \in L(H)$ πεπερασμένης συν-διάστασης (codimension) – οπότε μιλάμε για *συνεχές* οιονεί σημείο.

Επομένως, όταν έχουμε ένα τυχόν πλέγμα $\not\subset$, και εάν $Q(\not\subset)$ είναι το σύνολο των οιονεί σημείων του, τα σύνολα $Q_U(\not\subset)$ □ $\{\propto \in Q(\not\subset) \mid U \in \propto\}$ είναι η βάση μιας τοπολογίας, στην οποία τα $Q_U(\not\subset)$ είναι ανοικτά-κλειστά, δηλαδή η τοπολογία έχει μηδενική διάσταση. Το $Q(\not\subset)$ με αυτήν την τοπολογία είναι ο *χώρος Stone του πλέγματος* $\not\subset$. Είναι πλήρως συνήθης (completely regular) χώρος Hausdorff [H]. Αντίθετα με την περίπτωση των αλγεβρών Boole, εάν πρόκειται για πλέγμα της μορφής $\not\subset(H)$, όπου H είναι χώρος Hilbert με διάσταση μεγαλύτερη από το ένα, ο αντίστοιχος χώρος Stone, Q(H), δεν είναι τοπικά συμπαγής. Στην τοπολογική περίπτωση, ο χώρος Stone Q(T(X)) είναι συμπαγής.

4.2 Δομική ομοιότητα κλασικού και κβαντικού

Προχωρώ τώρα, ακολουθώντας τον de Groote, στον τρόπο με τον οποίο ο τελεστής που παριστά το φυσικό μέγεθος αναδεικνύεται ως διαμεσολαβητής μεταξύ δύο άκρων· των πραγματικών αριθμών ως του πεδίου τιμών του μεγέθους, και του χώρου Hilbert ως καταστατικού χώρου. Κατ' αρχάς, σύμφωνα με το φασματικό θεώρημα, ένας αυτοσυζυγής τελεστής Α καθορίζει μία μοναδική οικογένεια $(P_\lambda)_{\lambda\in\nabla}$ τελεστών ορθογώνιας προβολής στην άλγεβρα Λ(H) των φραγμένων γραμμικών τελεστών ενός μιγαδικού χώρου Hilbert, H. Αυτοί οι τελεστές είναι τέτοιοι ώστε:

α) $P_\lambda \leq P_\mu$ αν $\lambda \leq \mu$

β) $P_\lambda = \lim\limits_{\mu \downarrow \lambda} P_\mu \ \forall\lambda \in \nabla$

γ) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} P_\lambda = 0,\ \lim\limits_{\lambda\to\infty} P_\lambda = I.$

Τότε ο Α δίδεται από ένα ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{l}\, dP_{\mathrm{l}}\ .$$

Ισοδύναμα, αυτά αναδιατυπώνονται στην βάση των κλειστών υποχώρων $\sigma_A(\lambda)$ □ $P_\lambda H$ ως εξής:

α) $\sigma_A(\lambda) \subseteq \sigma_A(\mu),\ \lambda \leq \mu$

β) $\sigma_A(\lambda) = \mathbf{|}_{\mu>\lambda}\ \sigma_A(\mu)\ \forall\lambda \in \nabla$

γ) $\mathbf{|}_{\lambda\in IR}\ \sigma_A(\lambda) = 0,\ \bigvee_{\mathrm{l}\in IR} \sigma_A(\lambda) = H.$

Η απεικόνιση $\sigma: \nabla \to \not\subset(H)$ με αυτές τις ιδιότητες ονομάζεται *φασματική οικογένεια* στο πλέγμα $\not\subset(H)$. Ουσιαστικά, τέτοιες φασματικές οικογένειες καλούνται να παίξουν ρόλο αντίστοιχο με εκείνον των ανοικτών υποσυνόλων ενός κλασικού καταστατικού χώρου. Με την σημαντική διαφορά ότι, ενώ στην κλασική περίπτωση τα ανοικτά υποσύνολα καθορίζονται εξωτερικά και ανεξάρτητα όταν εισαχθεί κάποια τοπολογία, εδώ οι υποχώροι Hilbert εξαρτώνται από τον τελεστή Α και είναι συναρτήσεις της πραγματικής μεταβλητής λ. Είναι γνωστό ότι ένα υποπλέγμα $\wp$ του $\not\subset(H)$ είναι επιμεριστικό εάν και μόνον εάν, για κάθε U, V $\in \wp$, οι τελεστές ορθογώνιας προβολής P_U και P_V επί των υποχώρων U και V, αντιστοίχως, μετατίθενται. Τα *μέγιστα* επιμεριστικά πλέγματα $\Im$ του $\not\subset(H)$ είναι πλήρεις άλγεβρες Boole και αντιστοιχούν μία-προς-μία στις μέγιστες αβελιανές υποάλγεβρες von Neunann [B] της Λ(H). Ο de Groote ονομάζει τέτοια πλέγματα *τομείς Boole*. Ένα οιονεί σημείο β $\subseteq \Im$ σε έναν τομέα Boole $\Im$ ονομάζεται αντιστοίχως οιονεί σημείο Boole στο $\not\subset(H)$, και ικανοποιεί την επί πλέον συνθήκη: $\forall U, V \in \beta : P_U P_V = P_V P_U$. Κάθε οιονεί σημείο Boole στο $\not\subset(H)$ περιέχεται σε έναν ακριβώς τομέα Boole, και η διάκριση σε ατομικά και συνεχή τέτοια οιονεί σημεία μεταφέρεται αυτούσια.

Εκείνο που συνάγεται από όλα αυτά είναι το εξής: Εάν $P(\Im)$ είναι η άλγεβρα Boole τελεστών προβολής που αντιστοιχεί στον τομέα Boole $\Im$, και $C^*(\Im)$ η C^*-άλγεβρα που είναι το κάλυμμα (closure) του span$P(\Im)$ στην τοπολογία norm της Λ(H) –μια αβελιανή C^*-άλγεβρα με μονάδα– τότε, κατά το θεώρημα Gelfand, θα είναι ισομετρικά ∗-ισόμορφη με την C^*-άλγεβρα $C(\Omega_\Im)$ των συνεχών συναρτήσεων $\Omega_\Im \to \Re$ σε κάποιον συμπαγή χώρο Hausdorff $\Omega_\Im$. Ο $\Omega_\Im$ είναι το σύνολο όλων των πολλαπλασιαστικών γραμμικών συναρτησιακών τ: $C^*(\Im) \to \Re$ με την ασθενή ∗-τοπολογία, *δηλαδή το φάσμα Gelfand ή ο χώρος των χαρακτήρων τής* C^***($\Im$)**. Αυτός ο χώρος $\Omega_\Im$ είναι ομοιομορφικός με τον χώρο Stone $Q(\Im)$ των οιονεί σημείων στην άλγεβρα Boole $\Im$. Οι ισχυρώς συνεχείς χαρακτήρες αντιστοιχούν στα ατομικά οιονεί σημεία στην $\Im$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η *ταύτιση* σημείων με τους χαρακτήρες της αντίστοιχης C^*-άλγεβρας στην περίπτωση ενός κλασικού φασικού χώρου, αντικαθίσταται στην κβαντική περίπτωση από *ομοιομορφισμό* μεταξύ χαρακτήρων της κβαντικής C^*-άλγεβρας και οιονεί σημείων. Αλλά, και αυτό είναι κρίσιμο, η αναλογία που εγκαθιδρύεται έτσι είναι *μερική*, ισχύει εντός των ορίων των τομέων Boole. Δηλαδή, η έννοια του «σημείου», με τις δύο όψεις της που ταυτίζονταν κλασικά, *διαφοροποιείται***,** οι δύο όψεις *απομακρύνονται* και γίνονται ομοιομορφικές *εντός ορίων*.

Σε έναν χαρακτήρα $\tau \in \Omega_\Im$ αντιστοιχεί το οιονεί σημείο β_τ □ $\{U \in \Im \mid \tau(P_U) = 1\}$, και, αντιστρόφως, στο $\beta \in Q(\Im)$ αντιστοιχεί ο τ_β: $P(\Im) \to \{0,1\}$, όπου $\tau_\beta(P_U)$ □ 1 αν $U \in \beta$ και = 0 αν $U \notin \beta$. Το επόμενο βήμα είναι η κατασκευή μιας προδεσμίδας επί του πλέγματος $\not\subset(H)$. Επαναλαμβάνω ότι ένα φυσικό μέγεθος ενός κβαντικού συστήματος, που αναπαρίσταται από έναν αυτοσυζυγή τελεστή του αντίστοιχου χώρου Hilbert, H, ισοδυναμεί με μια φασματική οικογένεια σ: $\nabla \to \not\subset(H)$. Για τους σκοπούς μας αρκεί να περιοριστούμε –ακολουθώντας τον de Groote– σε φασματικές οικογένειες φραγμένες από πάνω, δηλαδή $\exists \lambda_1 \in \nabla$: $\sigma(\lambda_1) = H$. Τότε, η σ^U: λ # $\sigma(\lambda) \cup U$, $U \in \not\subset(H)$, ο *περιορισμός τής σ στο* U**,** είναι φασματική οικογένεια στο $\not\subset(U)$ επίσης φραγμένη από πάνω. Ορίζεται έτσι η *απεικόνιση περιορισμού*

ρ^U_V: σ^U # σ^V, $V \subseteq U$ στο L(H).

Εάν $\Sigma_{ba}(H)$ και $\Sigma_b(H)$ είναι τα σύνολα των φασματικών οικογενειών που είναι αντιστοίχως φραγμένες από πάνω και φραγμένες, τότε το $(\Sigma_{ba}(U), \rho^{U}_{V})_{V\subseteq U}$ είναι προδεσμίδα στο $\not\subset(H)$, της οποίας υποπροδεσμίδα είναι η $(\Sigma_b(U), \rho^{U}_{V})_{V\subseteq U}$. Εάν $\Re x$ είναι ένας μονοδιάστατος υποχώρος τού H, και εάν $\Re x \subseteq \sigma(\lambda)$ για κάποιον πραγματικό αριθμό, λ, τότε ο ερμιτιανός τελεστής που αντιστοιχεί στην $\sigma^{\Re x}$: $\nabla \rightarrow \not\subset(\Re x)$ είναι ένα πραγματικό πολλαπλάσιο cI_1, του μοναδιαίου τελεστή I_1: $\Re x \rightarrow \Re x$. Τότε, $\sigma^{\Re x}(\lambda) = 0$ για $\lambda < c$ και $= \Re x$ για $\lambda \geq c$. Ακόμη, $c = \inf\{\lambda \in \nabla \mid \Re x \subseteq \sigma(\lambda)\}$. Εάν θεωρήσουμε ότι $\inf\varnothing = \infty$, ορίζεται μια πραγματική συνάρτηση στον προβολικό χώρο $\notin H$,

f_σ: $\notin H \rightarrow \nabla\cap\{\infty\}$,

$f_\sigma(\Re x)$ □ $\inf\{\lambda \in \nabla \mid \Re x \subseteq \sigma(\lambda)\}$.

Έστω επίσης η τοπολογία πηλίκου στον χώρο $\notin H$ η οποία ορίζεται βάσει της προβολής pr: $H\backslash\{0\} \rightarrow \notin H$, $x \# \Re x$. Η συνάρτηση f_σ έχει τις ιδιότητες:

α) είναι κάτω ημισυνεχής στον $\notin H$

β) αν $\Re x$, $\Re y$, $\Re z$ είναι στοιχεία του $\notin H$ τέτοια ώστε $\Re z \subseteq \Re x + \Re y$, τότε

$f_\sigma(\Re z) \leq \max(f_\sigma(\Re x), f_\sigma(\Re y))$

γ) το $f_\sigma^{-1}(\nabla)$ είναι πυκνό στον $\notin H$.

Μπορούμε τώρα να γενικεύσουμε, με δύο βήματα. Πρώτον, να ορίσουμε μια συνάρτηση f: $\notin H \rightarrow \nabla\cap\{\infty\}$ με τις ως άνω ιδιότητες, την οποία ο de Groote ονομάζει *παρατηρήσιμη συνάρτηση*. Τότε, η απεικόνιση $\sigma \# f_\sigma$ □ f_A, όπου A ο αντίστοιχος της σ αυτοσυζυγής τελεστής, είναι 1-1 από το σύνολο των φασματικών οικογενειών στο $\not\subset(H)$ στο σύνολο των παρατηρήσιμων συναρτήσεων στον $\notin H$, και είναι συμβατή με τους περιορισμούς: $f_{\sigma^U} = f_\sigma|_{\notin U}$. Ισχύει ότι $\sigma \in \Sigma_{ba}(H)$ εάν και μόνον εάν $f_\sigma^{-1}(\nabla) = \notin H$, και $\sigma \in \Sigma_b(H)$ εάν και μόνον εάν η f_σ είναι φραγμένη. Το *φάσμα* specA του αντίστοιχου αυτοσυζυγούς τελεστή A είναι τότε: specA = $cl[f_A(f_A^{-1}(\nabla)]$ (cl: κάλυμμα) και specA = $cl[f_A(\notin H)]$ αν ο A είναι φραγμένος από πάνω. Δεύτερον, παρατηρούμε ότι $f(\Re x) = \inf\{\lambda \in \nabla \mid \Re x \subseteq \sigma(\lambda)\} = \inf\{\lambda \in \nabla \mid \sigma(\lambda) \in \propto_{\Re x}\}$, όπου $\propto_{\Re x} \in Q(\not\subset(H))$ είναι το ατομικό οιονεί σημείο που ορίζεται από την $\Re x$ και σ η φασματική οικογένεια που αντιστοιχεί στην f. Έτσι η επόμενη γενίκευση είναι να ορίσουμε την *παρατηρήσιμη συνάρτηση στον χώρο* Q(⊄(H)) *η οποία επάγεται από την* f,

$$\hat{f} : Q(\not\subset(H)) \to \nabla \cap \{\infty\},$$

$$\hat{f}(\propto) \,\square\, \inf\{\lambda \in \nabla \mid \sigma(\lambda) \in \propto\}.$$

Στο εξής γράφουμε την $\hat{f}$ απλώς ως f.

Επιστρέφω στην περίπτωση ενός τοπολογικού χώρου X. Εάν P είναι μια προδεσμίδα από modules στο πλέγμα T(M), είδαμε ότι ο μίσχος τής P στο σημείο x ∈ X ορίζεται ως $P_x \,\square\, \varinjlim_{U \in U(x)} P(U)$, όπου □ το σύνολο των περιοχών του σημείου x. Ο *χώρος étalé* της P είναι η ξένη (disjoint) ένωση □(P) = $\coprod_{x \in X} P_x$.

Στην περίπτωση του κβαντικού πλέγματος ⊄(H), εάν P = (P(U), $\rho^U_V)_{V \leq U}$ είναι προδεσμίδα στο πλέγμα ⊄, η f ∈ P(U) ονομάζεται ισοδύναμη με την g ∈ P(V) στο οιονεί σημείο $\propto \in Q_{U \wedge V}(\not\subset)$ εάν και μόνον εάν $\propto \in Q_U(\not\subset)$, και ∃W ∈ ∝: W ≤ U∧V και $\rho^U_W(f) = \rho^V_W(g)$. Ορίζεται έτσι μια κλάση ισοδυναμίας στο ∝ που συμβολίζεται με $[f]_\propto$ και ονομάζεται το *σπέρμα* (germ) της f στο ∝. Τα σύνολα $\bullet_{f,U} \,\square\, \{[f]_\propto \mid \propto \in Q_U(\not\subset)\}$ ορίζουν μια τοπολογία στον χώρο étalé □(P) του P πάνω από τον Q(⊄). Στην περίπτωση που έχουμε φασματικές οικογένειες σε ένα οιονεί σημείο ∝ ∈ Q(⊄(H)), π.χ. $\sigma \in \Sigma_{ba}(U)$ και $\tau \in \Sigma_{ba}(V)$, και αν αυτές είναι ισοδύναμες στο $\propto \in Q_{U \cup V}(\not\subset(H))$, τότε $f_\sigma(\propto) = f_\tau(\propto)$. Έχουμε συνεπώς μια συνάρτηση v: $\square(\Sigma_{ba}) \to \nabla$ στον χώρο étalé $\square(\Sigma_{ba})$, που ορίζεται από: $v([\sigma]_\propto) = f_\sigma(\propto)$, και ονομάζεται η *τιμή* του σπέρματος $[\sigma]_\propto$. Εάν $\Im \subseteq \not\subset(H)$ είναι ένας τομέας Boole και β ∈ Q(ℑ), τότε η παρατηρήσιμη συνάρτηση f: ∉H → ∇ επάγει μια συνάρτηση $f^{\Im} : Q(\Im) \to \nabla$,

$$f^{\Im}(\beta) \,\square\, \inf\{\lambda \in \nabla \mid \sigma_f(\lambda) \in \beta\},$$

όπου σ_f είναι η αντίστοιχη της f φασματική οικογένεια. Για $\sigma = \sigma_{P_U}$, $f_\sigma^{\Im} = \chi_{Q_U(\Im)}$, η χαρακτηριστική συνάρτηση του υποσυνόλου $Q_U(\Im) \subseteq Q(\Im)$, το οποίο είναι ανοικτό-κλειστό στην τοπολογία Stone, που σημαίνει ότι η $f_\sigma^{\Im}$ είναι συνεχής. Γενικά, αν ℑ είναι τομέας Boole και $C^*(\Im)_{sa}$ η πραγματική υποάλγεβρα των ερμιτιανών στοιχείων τής $C^*(\Im)$ που γεννάται από τα $\{P_U \mid U \in \Im\}$, η συνάρτηση $f_A^{\Im}$, $A \in C^*(\Im)_{sa}$ είναι συνεχής συνάρτηση στον $Q(\Im)$ και η απεικόνιση $C^*(\Im)_{sa} \to C(Q(\Im))$, $A \# f_A^{\Im}$ είναι ο περιορισμός του μετασχηματισμού Gelfand,

$$C^*(\Im) \to C(Q(\Im))$$

$$A \# (\hat{A} : \beta \# \tau_\beta(A))$$

στην πραγματική υποάλγεβρα $C^*(\Im)_{sa}$. Τέλος, αν $\beta \in Q(\Im)$ και αν $\propto \in Q(\not\subset(H))$ είναι ένα οιονεί σημείο που περιέχει το β, τότε $f_A^{\Im}(\beta) = f_A(\propto)$ $\forall A \in W^*(\Im)_{sa}$. Εδώ $W^*(\Im)_{sa}$ είναι η μέγιστη αβελιανή (von Neumann) υποάλγεβρα του πλέγματος των φραγμένων γραμμικών τελεστών που σχηματίζουν αυτοσυζυγείς τελεστές, και ορίζεται ως $P(\Im)''$ για την μπουλιανή άλγεβρα, $P(\Im)$, προβολών σε υποχώρους του τομέα Boole $\Im$. Τα αποτελέσματα αυτά επιτρέπουν να θεωρηθεί η έννοια της παρατηρήσιμης συνάρτησης ως *μη μεταθετική γενίκευση* της έννοιας «μετασχηματισμός Gelfand».

Στην βάση όλων των ανωτέρω, ο de Groote δείχνει ότι αν H είναι ένας χώρος Hilbert, αν $\Im \subseteq \not\subset(H)$ είναι ένας τομέας Boole και ρ μια κατάσταση, δηλαδή ένας θετικός τελεστής στον H με ίχνος 1, και εάν $\varphi \in C(Q(\Im))$, τότε υπάρχει ένας τελεστής A_φ όπου $\varphi = f_{A_j}{}^{\Im}$, η παρατηρήσιμη συνάρτηση που αντιστοιχεί στον A_φ. Η απεικόνιση:

$$\mu_\rho^{\Im}: C(Q(\Im)) \to \Re$$

$$\varphi \# tr(\rho A_\varphi)$$

είναι μέτρο πιθανότητας στον $Q(\Im)$, το οποίο θα είναι ένα σημειακό μέτρο για κάποιο $\beta_0 \in Q(\Im)$ εάν και μόνον εάν υπάρχει ένα $x \in S^1(H)$ τέτοιο ώστε $\Re x \in \Im$, $\beta_0 = \beta_{\Re x}$ και $\rho = P_{\Re x}$. Αυτό σημαίνει ότι το $\langle Ax , x\rangle$, όπου το A είναι ένα φυσικό μέγεθος και το x μια καθαρή κατάσταση, είναι αναμενόμενη τιμή, που, στην περίπτωση που το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A, ισούται με την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Όλη αυτή η κατασκευή έχει ένα κλασικό αντίστοιχο. Πρώτον, η έννοια της φασματικής οικογένειας ορίζεται για τυχόν πλήρες πλέγμα $\not\subset$, ως απεικόνιση $\sigma: \nabla \to \not\subset$ με τις ιδιότητες:

α) $\sigma(\lambda) \leq \sigma(\mu)$ για $\lambda \leq \mu$,

β) $\sigma(\lambda) = \bigwedge_{m>l} \sigma(\mu)\ \forall\lambda \in \nabla$

γ) $\bigwedge_{l \in IR} \sigma(\lambda) = 0$, $\bigvee_{l \in IR} \sigma(\lambda) = 1$.

Εάν τώρα έχουμε το πλέγμα T(X) για κάποιον τοπολογικό χώρο X, και $\sigma: \nabla \to T(X)$ μια φασματική οικογένεια, τότε ορίζουμε:

α) το *αποδεκτό πεδίο ορισμού* τής σ:

$\Delta(\sigma)$ □ $\{x \in X \mid \exists\lambda \in \nabla : x \notin \sigma(\lambda)\}$

β) την *συνάρτηση που επάγεται από την* σ:

$f_\sigma(x)$ □ $\inf\{\lambda \in \nabla \mid x \in \sigma(\lambda)\}, \forall x \in \Delta(\sigma)$

γ) το *φάσμα* τής σ:

Spec(σ) □ ∇\□(σ),

όπου □(σ) □ {λ ∈ ∇ | σ: σταθερά σε μια περιοχή τού λ} είναι το επιλύον σύνολο (resolvent set) της σ.

Τότε: $\mathrm{Spec}(\sigma) = \overline{\mathrm{im} f_\sigma}$.

Μια φασματική οικογένεια $\sigma: \nabla \to T(X)$ είναι *συνεχής* εάν $\forall\lambda < \mu$: $\overline{s(l)} \subseteq \sigma(\mu)$, ή αλλιώς: $\sigma(\lambda)^c \cap \sigma(\mu) = X$. Τότε, οι φραγμένες φασματικές οικογένειες $\sigma: \nabla \to \not\subset(H)$

με τιμές σε τομείς Boole, έστω $\Im \subseteq \not\subset(H)$, και οι φασματικές οικογένειες $\hat{s}(\lambda)$ □ $\wedge_{\mu>\lambda} Q_{\sigma(\mu)}(\Im) \in T(Q(\Im))$, σχετίζονται ως εξής: Εάν f_{σ}: $Q(\Im) \rightarrow \nabla$ είναι η συνάρτηση που επάγεται από την σ, και $f_{\hat{s}}$: $Q(\Im) \rightarrow \nabla$ η συνάρτηση που επάγεται από την $\hat{s}$, τότε $f_{\hat{s}} = f_{\sigma}$. Ακόμη, αν τ: $\nabla \rightarrow T(Q(\Im))$ είναι μια συνεχής φασματική οικογένεια, τότε υπάρχει ένας και μόνον ένας ερμιτιανός τελεστής $A \in C^{*}(\Im)$ τέτοιος ώστε $\hat{s}_{A} = \tau$, όπου σ_{A} είναι η φασματική οικογένεια του Α. Αποδεικνύεται ότι, σε έναν τοπολογικό χώρο, Χ, κάθε συνεχής συνάρτηση, f: $X \rightarrow \nabla$, επάγει μια συνεχή φασματική οικογένεια, σ_{f}, για την οποία το αποδεκτό πεδίο ορισμού είναι ο χώρος Χ και η υπ' αυτής επαγόμενη συνάρτηση είναι η f. Το τελικό συμπέρασμα από όλη αυτήν την συγκριτική εξέταση είναι ότι ένα κλασικό φυσικό μέγεθος περιγράφεται «κβαντομηχανικά», άρα *τόσον τα κλασικά φυσικά μεγέθη όσο και τα κβαντικά μεγέθη, είτε ως πραγματικές συναρτήσεις είτε ως φασματικές οικογένειες, μπορούν να τοποθετηθούν στο ίδιο δομικό πλαίσιο*.

4.3 Κλασικό και κβαντικό: το κλασικόμορφο

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σταθούμε για να αντιμετωπίσουμε μια σειρά ερωτημάτων που προκύπτουν. Κατ' αρχάς, ποιό είναι το νόημα της «δομικής ομοιότητας» που αναλύει ο de Groote. Να θυμίσω ότι επικεντρωθήκαμε στην εργασία τού de Groote λόγω μιας επιλογής μεθοδολογικού χαρακτήρα. Θεωρώ ότι η διερεύνηση της σχέσης κλασικού – κβαντικού, ή/και της μετάβασης από το ένα στο άλλο, δεν αφορά την αναζήτηση κάποιου «κοινού πεδίου εφαρμογής». Πρόκειται μάλλον για την αναζήτηση σχέσεων σαν εκείνες που, όπως σημείωσα σχετικά με την θεωρία των κατηγοριών, θυμίζουν έντονα τις οικογενειακές ομοιότητες του Wittgenstein, και που υπονοούν μιαν «ιστορική», καταγωγική συνιστώσα. Σε τέτοιου τύπου σχέσεις, διαφορετικά αντικείμενα μελέτης φαίνονται να ξεπερνούν την αδιάφορη ποικιλία: Με την ανάδειξη των *ομοιοτήτων* τους ως το σημείο να ταυτίζονται, ως προϋπόθεση, φωτίζονται οι *διαφορές* τους. Η σχέση και/ή η μετάβαση που μελετάμε, μέσα από αυτήν την διαλεκτική πρέπει να αναζητηθεί. Το πρώτο, λοιπόν, σημείο που επισημαίνω είναι ότι ο όρος «δομική ομοιότητα» δεν έχει τίποτε κοινό με μιαν αναγωγιστική αντίληψη, κατά την οποία η κβαντική θεωρία, ως θεμελιωδέστερη, αναπαράγει υπό προϋποθέσεις ή μέσω προσεγγίσεων την κλασική. Πράγματι, το κλασικό και το κβαντικό παραμένουν διακριτά ως προς το περιεχόμενό τους ως φυσικές θεωρίες. Η ανωτέρω ομοιότητα καθόλου δεν υπονοεί ότι έχουμε περιπτώσεις όπου κβαντικά φαινόμενα επιδέχονται κλασική θεωρητική περιγραφή, ούτε φυσικά ότι επιτυγχάνουμε μια κβαντική περιγραφή κλασικών φαινομένων. Η ομοιότητα, συνεπώς, αφορά την μαθηματική μορφή. Αλλά και πάλι, δεν έχουμε ταύτιση ούτε στο επίπεδο αυτό, όπως γίνεται φανερό από τα προηγηθέντα. Εκεί όπου μπορούμε να μιλήσουμε για «ταύτιση» είναι οι *δομές*, δηλαδή όχι απομονωμένες έννοιες καθ' εαυτές, αλλά πλέγματα εννοιών σε αμοιβαίες, αλληλοπροσδιορίζουσες σχέσεις. Η διάκριση από τις προσεγγίσεις του «δομικού ρεαλισμού» [49] είναι σαφής σε δύο σημεία. Πρώτον, η δομική ομοιότητα δεν είναι αόριστη γενικότητα, αλλά ορίζεται αυστηρά με μαθηματική ακρίβεια. Δεύτερον, οι δομές αναφέρονται σε κάποιο φυσικό περιεχόμενο και δεν θεωρούνται πρωτογενείς. Η κατ' αναλογίαν *ομοιότητά* τους δεν είναι απλώς το τελικό συμπέρασμα μιας συγκριτικής εξέτασης, αλλά ο *όρος* για να ανιχνευθούν οι *αλλαγές στο περιεχόμενό τους*. Το νόημα όλων αυτών είναι ότι στοιχεία ή πλευρές του κλασικού εννοιολογικού πλαισίου αλλάζουν φυσικό περιεχόμενο και έτσι μεταμορφωμένα αναγνωρίζονται ως δομικοί λίθοι του κβαντικού πλαισίου. Η εξέταση αυτών που ο de Groote ονομάζει «τομείς Boole» δεν είναι καθόλου μια «κλασική προσέγγιση», ούτε «ειδική περίπτωση». Αποκαλύπτει μάλλον το γεγονός ότι η κβαντική εικόνα εμπεριέχει *κλασικόμορφα*, τρόπον τινά, **«***παράθυρα***»**.[24]

Σύμφωνα με το σκεπτικό που μόλις εξέθεσα, η δομική συγγένεια κλασικού και κλασικόμορφου αναδεικνύει μιαν ειδοποιό διαφορά μεταξύ κλασικού και κβαντικού. Στο πρώτο, τα αντίστοιχα των κλασικόμορφων παραθύρων του δεύτερου συνταιριάζονται ομαλά σε ένα και μόνον παράθυρο που προσφέρει μιαν ενιαία εικόνα του αντικειμένου της φυσικής θεωρίας. Αντιθέτως, στο κβαντικό πλαίσιο, η εικόνα κατακερματίζεται προσφέροντας πολλές «όψεις» του αντικειμένου, οι οποίες εξαρτώνται από το παράθυρο από όπου το αντικρίζει κανείς. Το εμπόδιο να συνταιριαστούν τα παράθυρα, όπως στην κλασική περίπτωση, είναι η αναγκαία ύπαρξη μεταξύ τους «διακένων», μέτρο των οποίων μπορεί να θεωρηθεί η σταθερά τού Planck, και τούτο διότι συνδέεται έτσι η παρουσία τέτοιων μη εξαλείψιμων διακένων με την μη μεταθεσιμότητα τελεστών, άρα την διάκριση μεταξύ *ενεργήματος* και *ενέργειας*, μεταξύ *προϊόντος* διαδικασίας και διαδικασίας *παραγωγής*, σύμφωνα με ό,τι ανέφερα στην §2.3. Εισάγεται έτσι μια συγκεκριμένη έννοια *πλαισιακότητας*, ως αναγκαίο συστατικό στοιχείο μιας κβαντικής θεωρίας. Η απουσία ενός τέτοιου στοιχείου στην κλασική εικόνα είναι έκφραση της αμεσότητας της σχέσης κατάστασης – τιμής φυσικού μεγέθους στην οποία έχω αναφερθεί. Η αναγκαία παρουσία του ίδιου στοιχείου στην κβαντική εικόνα εκφράζει αντιθέτως την εμμεσότητα αυτής της σχέσης και τον πρωταρχικό διαμεσολαβητικό ρόλο της έννοιας του φυσικού μεγέθους. Από εδώ γεννώνται τρία επί μέρους ερωτήματα. Πρώτον, εάν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των κλασικόμορφων παραθύρων του κβαντικού, και αν ναι, σε τί βαθμό χαρακτηρίζει την λογική δομή που του προσιδιάζει. Δεύτερον, εάν μπορεί να εξεταστεί το κβαντικό ως έκφραση του αναγκαίου κατακερματισμού μιας εικόνας σε κλασικόμορφες όψεις, κάνοντας υποχρεωτική την φυσική περιγραφή «εντός πλαισίου», και αν ναι, σε τί βαθμό διαφοροποιεί την κβαντική λογική δομή έτσι ώστε να γίνεται δυνατή η παρεμβολή εμποδίων που απαγορεύουν την ομαλή

[24] Σημειώνω ότι ο όρος «παράθυρα», και ο συναφής όρος «μπουλιανή πολλαπλότητα» –που συγγενεύει με μιαν ορθοάλγεβρα [Δ]– έχει χρησιμοποιηθεί υπό διαφορετική προσέγγιση, με παραπλήσιο όμως νόημα –βλέπε [66]. Εξ άλλου, παρεμφερής είναι ο όρος *μπουλιανές προοπτικές* (Boolean perspectives) που χρησιμοποιεί ο Καρακώστας [37] αναφερόμενος στα πλαίσια (contexts) των μετρήσεων επί κβαντικών συστημάτων.

συγχώνευση των κλασικόμορφων παραθύρων και συνεπώς την κλασικού τύπου θέα του αντικειμένου. Τρίτον, και μετά από αυτά, εάν είναι δυνατή μια μαθηματική έκφραση της σχέσης κλασικού – κβαντικού που να συγκεκριμενοποιεί το φυσικό περιεχόμενο της διαφοράς τους.

4.4 Το μαθηματικό υπόβαθρο της πλαισιακότητας

Διαισθητικά, και χωρίς αξιώσεις μαθηματικής αυστηρότητας, μπορούμε να διακρίνουμε ένα σημείο συνάφειας με την εργασία των Isham et al. [67], η οποία επιστρατεύει την θεωρία των (προ-) δεσμίδων και των *τόπων* [68, 69, 70, 71]. Συγκεκριμένα, ο de Groote κατασκευάζει μια προδεσμίδα από φασματικές οικογένειες επί του πλέγματος $\not\subset(H)$. Σε έναν τομέα Boole, $\Im$, είδαμε ότι αντιστοιχεί μια μέγιστη μεταθετική άλγεβρα von Neumann (και μια αβελιανή C*-άλγεβρα με μονάδα). Εάν P είναι ένας τελεστής προβολής στην προδεσμίδα επί του $\Im$, σύμφωνα με το θεώρημα του Gelfand θα αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση $\hat{P}$ στον χώρο των χαρακτήρων της αντίστοιχης άλγεβρας von Neumann (ή C*-άλγεβρας), η οποία θα παίρνει στον χαρακτήρα τ εξ ορισμού την τιμή $\hat{P}(\tau) = \tau(P)$. Αλλά, ο τ θα είναι εκείνος ο χαρακτήρας, έστω τ_β, που κατά τον de Groote αντιστοιχεί σε ένα οιονεί σημείο Boole, β, του $\Im$. Εάν ο τελεστής P προβάλλει στον υποχώρο $U \in \Im$, εάν δηλαδή είναι $P = P_U$, τότε το σύνολο των τελεστών P_U για τους οποίους $\tau_\beta(P_U) = 1$ ισοδυναμεί με το σύνολο των υποχώρων U για τους οποίους ισχύει $U \in \beta$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\beta \in Q_U(\Im)$. Αντιστρόφως, για δεδομένον P_U, ισοδύναμα για δεδομένον U, το σύνολο των χαρακτήρων τ_β για τους οποίους $\tau_\beta(P_U) = 1$ θα αντιστοιχεί στο σύνολο των β για τα οποία $\beta \in Q_U(\Im)$. Με άλλα λόγια, επαναδιατύπωσα το ήδη γνωστό συμπέρασμα του de Groote με τρόπο που να φαίνεται ότι ένα σύνολο χαρακτήρων τ_β αντιστοιχεί σε ένα ανοικτό-κλειστό σύνολο, μέλος της βάσης της τοπολογίας Stone για τον τομέα Boole $\Im$. Εάν, λοιπόν, αυτό που ονόμασα «κλασικόμορφο» συνδέεται με τους τομείς Boole, και δεδομένου ότι οι τελευταίοι αντιστοιχούν σε μέγιστες αβελιανές άλγεβρες von Neumann, τότε, με ενδιάμεσο, διαμεσολαβητικό κρίκο τους τελεστές προβολής (ή γενικά αυτοσυζυγείς τελεστές), μπορούμε να κινηθούμε σε μιαν άλλη κατεύθυνση. Πάντα μιλώντας διαισθητικά, όπως στο πλαίσιο που θέτει ο de Groote οι τελεστές της μορφής P_U συνδέονται με κλειστά-ανοικτά σύνολα του τύπου $Q_U(\Im)$, έτσι οι ίδιοι τελεστές συνδέονται με κλειστά-ανοικτά *υποσύνολα του φάσματος* –δηλαδή του συνόλου των χαρακτήρων– μιας άλγεβρας von Neumann στην οποία ανήκει ο P_U. Πρόκειται ακριβώς για εκείνα τα υποσύνολα για τα οποία $\tau(P) = 1$, και των οποίων η αντίστοιχη του P συνάρτηση $\hat{P}$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση. Οδηγούμαστε, συνεπώς, στο πλαίσιο των μεταθετικών αλγεβρών von Neumann, όπως τις πραγματεύονται οι Isham et al. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε άλγεβρα von Neumann μπορούμε να θεωρήσουμε όλες τις *μεταθετικές* υποάλγεβρες V. Η σχέση τού περιέχεσθαι (inclusion) προσδίδει σε αυτό το σύνολο την δομή ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου. Όπως ισχύει για κάθε τέτοιο σύνολο, έτσι και εδώ υπάρχει η δομή μιας κατηγορίας, έστω ς, με αντικείμενα τις μεταθετικές άλγεβρες V, και μορφισμούς $V_2 \rightarrow V_1$ εάν $V_2 \subseteq V_1$. Αντιστοίχως, ο de Groote [65] ονομάζει τις μέγιστες αβελιανές υποάλγεβρες von Neumann του Λ(H) «πλαίσια», και ορίζει την μικρή κατηγορία που σχηματίζουν, με μορφισμούς τις σχέσεις του περιέχεσθαι, ως «κατηγορία πλαισίων». Επί πλέον, ορίζει τις καθολικές διατομές μιας κατάλληλης προδεσμίδας επί της κατηγορίας πλαισίων ως «πλαισιακά παρατηρήσιμα μεγέθη (contextual observables)». Τα ως άνω σημεία μας προσφέρουν τα εξής πλεονεκτήματα:

1) Εργαζόμαστε σε άμεση σύνδεση με τους τελεστές που εκπροσωπούν φυσικά μεγέθη, δεδομένου ότι αυτοί σχηματίζουν τις εν λόγω άλγεβρες von Neumann.

2) Έχουμε την δυνατότητα να ανιχνεύσουμε την θέση των *μεταθετικών* υποαλγεβρών, που θεωρούμε ότι σχετίζονται με το «κλασικόμορφο», εντός του ευρύτερου πλαισίου μιας *όχι αναγκαία μεταθετικής* άλγεβρας von Neumann, και έτσι να προσδιορίσουμε ενδεχομένως την θέση του κλασικόμορφου εντός του κβαντικού πλαισίου.

3) Ειδικότερα, ενώ διαισθητικά μια προφανής περίπτωση κλασικόμορφου είναι εκείνη που περιορίζεται, π.χ., σε πλήρη σύνολα μετατιθέμενων τελεστών, εδώ μπορούμε να ασχοληθούμε με το σύνολο *όλων* των τελεστών μιας κβαντικής θεωρίας.

4) Μπορούμε να αξιοποιήσουμε ένα μαθηματικό οπλοστάσιο, σημασιολογικά γόνιμο. Όπως θα δούμε στην συνέχεια, έννοιες όπως «πλαισιακότητα» και «μερική αλήθεια» αποκτούν συγκεκριμένο περιεχόμενο επενδυμένες με την κατάλληλη μαθηματική μορφή.

5) Τέλος, θα δούμε ότι αναδύεται μια *εγγενής* λογική που γενικεύει την κλασική λογική, χωρίς την σκιά της αυθαιρεσίας ή της *ad hoc* κατασκευής.

Θα μας χρησιμεύσει ως οδηγός το γεγονός ότι ο καίριος διαμεσολαβητικός ρόλος των τελεστών-φυσικών μεγεθών μεταξύ της κατάστασης ενός κβαντικού συστήματος και της τιμής ενός μεγέθους προσδίδει ιδιαίτερη σημασία σε σχέσεις και έννοιες όπως η αναπαράσταση κατά Gelfand και η συνάρτηση αποτίμησης, σε συνάφεια με τις έννοιες του χαρακτήρα, της κατάστασης και του φάσματος μιας άλγεβρας von Neumann (ή C*-άλγεβρας). Οι Isham et al. [67], στο πλαίσιο της θεωρίας των τόπων, αναδιατυπώνουν το γνωστό θεώρημα των Kochen και Specker [53] που αποκλείει μια κλασικού τύπου συνάρτηση αποτίμησης στην επικράτεια του κβαντικού. Παράλληλα, όμως, το ίδιο πλαίσιο που επιτρέπει μια διαφορετική ματιά στο γνωστό αυτό θεώρημα, ανοίγει τον δρόμο για την υπέρβαση του φαινομενικού αδιεξόδου. Και τούτο ακριβώς επειδή η «διαφορετική ματιά» που επιτυγχάνεται με την *εννοιολογική γενίκευση* και με την μετάθεση σε έναν *άλλον τομέα* του μαθηματικού πλαισίου *δεν* είναι απλώς φορμαλιστική μεταγλώττιση, ούτε περιττή επιστράτευση ενός βαρύγδουπου φορμαλισμού, ικανού να εντυπωσιάσει χωρίς να προσφέρει τίποτε καινούργιο. Είναι, αντιθέτως, εμπλουτισμός τόσο σε βάθος όσο και σε έκταση. Η γενική ιδέα είναι μια γενίκευση της έννοιας της τοπολογίας, που οφείλεται σε μαθηματικούς σαν τους Grothendieck, Lawvere και πολλούς άλλους, και χρονολογείται εδώ και πάνω από μισόν αιώνα. Στην περίπτωσή μας χρησιμοποιείται μια αρκετά ειδικότερη περίπτωση, και μάλιστα η απλούστερη μορφή της. Είναι αυτό που ονομάζεται τοπολογία Grothendieck και που, αν οριστεί σε μια κατηγορία, την μετατρέπει σε αυτό που ονομάζεται *τοποθεσία* (site**)** [61, 68, 69, 70]. Η πιο απλή έννοια που υπεισέρχεται εδώ είναι εκείνη του *κόσκινου* (sieve, γαλλικά crible) σε μια κατηγορία [70, 71]. Ένα κόσκινο S ορίζεται για τα αντικείμενα A μιας κατηγορίας ως ένα σύνολο μορφισμών f με στόχο (target, codomain) το A και την ιδιότητα ότι αν ο μορφισμός $f: B \to A$ ανήκει στο S και $g: C \to B$, τότε $f \circ g: C \to A$ ανήκει επίσης στο κόσκινο S. Παρεμπιπτόντως, ας παρατηρήσουμε ότι ο ορισμός αυτός προσομοιάζει ή μιμείται τον ορισμό του ιδεώδους (ideal) σε άλλα πλαίσια. Εάν, λοιπόν, έχουμε μια κατηγορία, **X**, τότε ορίζεται η προδεσμίδα $\mathbf{\Omega}\mathbf{:}\ \mathbf{X} \to \mathbf{Set}$ ως εξής: Για τα αντικείμενα A της **X,** το $\mathbf{\Omega}(A)$ είναι το σύνολο των κόσκινων S επί του A. Για μορφισμούς $f: B \to A$, το $\mathbf{\Omega}(f): \mathbf{\Omega}(A) \to \mathbf{\Omega}(B)$ ορίζεται, $\forall S \in \mathbf{\Omega}(A)$, ως εξής: $\mathbf{\Omega}(f)(S)$ □ $\{g: C \to B \mid f \circ g \in S\}$. Το κόσκινο $\mathbf{\Omega}(f)(S)$ ονομάζεται pullback στο B του κόσκινου στο A από τον μορφισμό $f: B \to A$, και συμβολίζεται με $f^*(S)$. Σημειωτέον ότι, από τον ορισμό του κόσκινου, προκύπτει ότι το $f^*(S) = \{g : C \to B\}$ □ $\downarrow B$ είναι το *κύριο κόσκινο* επί του B –το οποίο βεβαίως είναι ένα κατώτερο σύνολο (lower set) στην κατηγορία **X**. Η έννοια του κόσκινου είναι η βάση του ορισμού μιας τοπολογίας Grothendieck ή ενός *καλύμματος* (coverage) σε μια κατηγορία, η οποία με την σειρά της είναι γενίκευση του συνόλου των ανοικτών καλυμμάτων όλων των ανοικτών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου X. Σε αυτήν την τελευταία περίπτωση, επαναλαμβάνω ότι η τοπολογία, O(X), του X είναι μερικώς διατεταγμένη βάσει της σχέσης τού περιέχεσθαι, $\subseteq$, οπότε το $(O(X), \subseteq)$ συνιστά μια κατηγορία, της οποίας αντικείμενα είναι τα ανοικτά υποσύνολα, U, του X, και μορφισμοί $V \to U$ ορίζονται εάν και μόνον εάν $V \subseteq U$. Ένα κόσκινο S σε ένα αντικείμενο U είναι τώρα μια συλλογή ανοικτών υποσυνόλων τού U. Το S *καλύπτει* το U εάν και μόνον εάν το U περιέχεται στην ένωση των συνόλων τού S. Αυτό ακριβώς συνιστά μια τοπολογία Grothendieck στον χώρο X. Ο X με αυτήν την τοπολογία είναι η πιο στοιχειώδης περίπτωση μιας τοποθεσίας (site).

Στην περίπτωση που έχουμε ένα ημιπλέγμα τομής (meet-semilattice), A, ένα κάλυμμα επί του A είναι μια συνάρτηση που σε κάθε $a \in A$ αντιστοιχεί ένα σύνολο C(a) υποσυνόλων τού $\downarrow(a)$ με την ιδιότητα: $S \in C(a) \Rightarrow \{s \wedge b \mid s \in S\} \in C(b)\ \forall b \leq a$. Το ζεύγος (A, C) είναι τοποθεσία. Μας ενδιαφέρει η περίπτωση που το A είναι επιμεριστικό πλέγμα. Τότε το C(a) μπορεί να είναι το σύνολο όλων των πεπερασμένων συνόλων που η ένωσή τους (join) είναι το a. Ένα υποσύνολο I του ημιπλέγματος τομής A, όταν έχουμε ένα κάλυμμα C, είναι ένα C-*ιδεώδες* εάν είναι κατώτερο σύνολο και ισχύει: $(\exists S \in C(a))(S \subseteq I) \Rightarrow a \in I$. Ισχύει ότι για κάθε τοποθεσία (A, C), το σύνολο C-Idl(A) των C-ιδεωδών τού A είναι ένα πλαίσιο (frame). Ειδικότερα, το σύνολο Idl(A) των ιδεωδών ενός επιμεριστικού πλέγματος A είναι ένα πλαίσιο με την διάταξη του περιέχεσθαι. Ακόμη, ένα locale είναι *συνεκτικό* (coherent) εάν και μόνον εάν είναι ισόμορφο με το σύνολο Idl(A) για ένα επιμεριστικό πλέγμα A, αυτή την φορά θεωρούμενο ως locale (δηλαδή με αντεστραμμένους τους μορφισμούς). Αυτό έχει σημασία, διότι κάθε συνεκτικό locale είναι *χωρικό* (spatial), ή, με μια συγκεκριμένη έννοια, *έχει αρκετά σημεία*. Το θεώρημα αναπαράστασης του Stone για επιμεριστικά πλέγματα είναι πόρισμα αυτού του γεγονότος: Η κατηγορία **DLat** των επιμεριστικών πλεγμάτων είναι δυική της κατηγορίας **CohSp** των συνεκτικών χώρων και συνεκτικών απεικονίσεων μεταξύ τους [H, 61].

4.5 Η τιμή φυσικού μεγέθους ως σχέση

Μετά από αυτήν την παρένθεση για την ορολογία και μερικά βασικά δεδομένα, επανέρχομαι στην συλλογιστική των Isham et al. Υπάρχει μια γενίκευση της έννοιας της συνάρτησης αποτίμησης με τρόπον ώστε αυτή να παίρνει τιμές που να είναι κόσκινα επί των αντικειμένων μιας κατάλληλης κατηγορίας. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής. Για κάθε μικρή κατηγορία, **X,** ένας συναρτητής (functor) $\mathbf{X}^{\mathbf{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ είναι μια προδεσμίδα. Όλες οι τέτοιες προδεσμίδες, με φυσικούς μετασχηματισμούς ως μορφισμούς, είναι ένας (στοιχειώδης) τόπος, $\mathbf{Set}^{\mathbf{X}^{\mathbf{op}}}$. Ο *ταξινομητής υποαντικειμένων* (subobject classifier) του τόπου είναι ακριβώς η προδεσμίδα **Ω** που αντιστοιχεί σε κάθε αντικείμενο A της **X** τα κόσκινα επί του A. Το **Ω** είναι άλγεβρα Heyting. Υπάρχουν δύο εννοιολογικά πλεονεκτήματα σε σχέση με την σημασιολογία της προσέγγισης. Τονίζω ότι και τα δύο γίνονται φανερά, όχι στο επίπεδο της διατύπωσης και χρήσης ενός μαθηματικού φορμαλισμού, αλλά στο επίπεδο της επισήμανσης της *εσωτερικής λογικής* αυτού του φορμαλισμού, με την μορφή της άλγεβρας Heyting. Συγκεκριμένα, μια θεωρία, εκφραζόμενη σε μια γλώσσα –με την έννοια της μαθηματικής λογικής– ερμηνεύεται (έχει μοντέλα) σε κάποια κατηγορία. Κατά την συνηθισμένη πρακτική, αυτό γίνεται στην κατηγορία των συνόλων, δεν είναι όμως απαραίτητο. Γενικότερες κατηγορίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Η ερμηνευτική ισχύς της γλώσσας που χρησιμοποιείται, ξεκινώντας από τον λογισμό των προτάσεων και προχωρώντας σε πρωτοβάθμιες, δευτεροβάθμιες κ.λπ. κατηγορηματικές γλώσσες, συνδέεται με την γενικότητα της κατηγορίας στην οποία γίνεται η ερμηνεία. Υπάρχει ένα «πάρε–δώσε» μεταξύ ισχύος της γλώσσας και γενικότητας της κατηγορίας όπου αυτή ερμηνεύεται.[25] Οι τόποι είναι ένα ευνοϊκό ενδιάμεσο έδαφος, όπως είδαμε και στην περίπτωση μοντέλων φυσικών συστημάτων σύμφωνα με τον Lawvere. Προήλθαν από την σύγκλιση αλγεβρικής γεωμετρίας και θεωρίας δεσμίδων, κατηγορικής θεμελίωσης της θεωρίας των συνόλων,[26] λογικής και θεωρίας μοντέλων, της μεθόδου τού *forcing* του Cohen, της τοπολογικής ερμηνείας της ιντουισιονιστικής ανάλυσης [69, 70, 71]. Μία συνέπεια είναι ότι η ιεραρχία δομών που ξεκινά από μια δομή βάσης, κατά την ορολογία τού Bourbaki, και προχωρεί σε δομές échelon που υψώνονται πάνω σε αυτήν, μπορεί να απαγκιστρωθεί από την θεωρία συνόλων ως βάση. Κατά την άποψη του Grothendieck, η γεωμετρία δεν απαιτεί την έννοια του χώρου, αρκεί η έννοια των δεσμίδων πάνω σε αυτόν, ενώ η έννοια του τόπου με την εσωτερική λογική δομή που την συνοδεύει συνδυάζει τις έννοιες γενικευμένου χώρου και γενικευμένου συνόλου και διεκδικεί, κατά τον Grothendieck, τον ρόλο θεμελίου για όλα τα μαθηματικά. Η οπτική της θεωρίας των τόπων, γράφει ο Johnstone, σημαίνει «***απόρριψη** της ιδέας ότι υπάρχει ένα παγιωμένο σύμπαν "σταθερών" συνόλων εντός του οποίου τα μαθηματικά μπορούν και πρέπει να αναπτυχθούν και **αναγνώριση** του γεγονότος ότι η έννοια της "μεταβλητής δομής" αντιμετωπίζεται με προσφορότερο τρόπο εντός ενός σύμπαντος **συνεχώς μεταβαλλόμενων συνόλων** από ό,τι με την μέθοδο, που είναι παραδοσιακή από τότε που αναδύθηκε η αφηρημένη θεωρία συνόλων, της θεώρησης χωριστά ενός πεδίου μεταβολών ... και μιας **διαδοχής σταθερών δομών προσκολλημένων στα σημεία** αυτού του πεδίου*» [70, έμφαση δική μου]. Έτσι, ο τόπος **Set** των συνόλων είναι ο τόπος των δεσμίδων σε έναν χώρο που έχει συρρικνωθεί σε ένα σημείο, οπότε η επιλογή ενός σημείου a ενός τοπολογικού χώρου X ορίζει δύο συναφείς (adjoint) συναρτητές, τους a^*: **Sh**(X) □ **Set** και a_*: **Set** □ **Sh**(X), όπου **Sh**(X) είναι ο τόπος των δεσμίδων επί του X και ο συναρτητής a^* στέλνει κάθε δεσμίδα επί του X στην ίνα της στο σημείο a. Ως εκ τούτου, το «σημείο» έχει επίσης την έννοια ενός «συναρτητή ίνας». Τούτο, σε όλη του την γενικότητα, είναι η επιτομή των διαδοχικών γενικεύσεων της έννοιας του σημείου. Η διευρυμένη έννοια του σημείου με την χρήση πρώτων ιδεωδών ή ουλτραφίλτρων υπεισέρχεται στον λογισμό των προτάσεων μέσω της έννοιας της αποτίμησης, σε αντιστοιχία με ό,τι ισχύει στην θεωρία των πλεγμάτων με τις έννοιες του locale και των χώρων Stone. Τα κόσκινα εντάσσονται σε αυτό το πλαίσιο. Με αυτόν τον τρόπο, έννοιες σαν την σχεσιακότητα, την πλαισιακότητα, την συνεπαγωγή, μπορούν να θεωρηθούν θεμελιώδεις.

Με αυτά υπ΄ όψιν, διευκρινίζω μερικές εξειδικεύσεις. Ένας τόπος E ονομάζεται *μπουλιανός* εάν για κάθε υποαντικείμενο a ενός αντικειμένου A ισχύει $\neg a \vee a \cong A$, πράγμα που ισοδυναμεί με την κλασική αρχή του αποκλειομένου τρίτου. Τότε, η δομή άλγεβρας Heyting που έχει ο ταξινομητής υποαντικειμένων, Ω, του E είναι

[25] Εξετάζεται στην θεωρία των «δογμάτων» (doctrines) τού Lawvere [72].

[26] Έχουν ιδιαίτερη σημασία διότι μπορούν να γίνουν η βάση για την σχετική ανεξαρτησία της θεωρίας των κατηγοριών και των εννοιών της από την θεωρία των συνόλων, με την έννοια ότι η πρώτη μπορεί να θεμελιώσει την δεύτερη, με τον ορισμό της «άλγεβρας Zermelo-Fraenkel» στην αλγεβρική θεωρία συνόλων των Joyal και Moerdijk [73].

δομή άλγεβρας Boole. Ένας τόπος ονομάζεται *καλώς σημειωμένος* (well pointed) εάν δεν είναι εκφυλισμένος (δηλ. $0 \neq 1$) και εάν το τελικό αντικείμενο, 1, είναι γεννήτορας (generator). Αυτό συνεπάγεται ότι κάθε μη μηδενικό αντικείμενο έχει ένα *καθολικό στοιχείο* (global element), ή *σημείο*, ή *(καθολική) διατομή* (section). Ένας καλώς-σημειωμένος τόπος είναι μπουλιανός. Ακόμη, εάν ένα βέλος f: $A \rightarrow B$ σε μια κατηγορία έχει μια διατομή, λέμε ότι είναι *διασπασμένος επιμορφισμός* (split epi). Μια καθολική διατομή του αντικειμένου Α είναι επομένως ένα καθολικό στοιχείο τού Α, δηλαδή μια διατομή της απεικόνισης $A \rightarrow 1$. Λέμε ότι ένας τόπος ικανοποιεί το *αξίωμα της επιλογής* (AC) εάν κάθε επιμορφισμός είναι διασπασμένος. Τούτο διότι ο ορισμός αυτός προφανώς ισοδυναμεί με το αξίωμα της επιλογής στην συνηθισμένη θεωρία των συνόλων. Τέλος, ένας τόπος που ικανοποιεί το αξίωμα της επιλογής είναι μπουλιανός. Με αυτόν τον τρόπο, συνδέονται μεταξύ τους έννοιες όπως αξίωμα της επιλογής, μπουλιανός τόπος, άλγεβρες Boole, καθολικές διατομές, όλες αναφερόμενες σε ένα λογικό περιεχόμενο χαρακτηριστικό ενός κλασικού εννοιολογικού πλαισίου. Οι Isham et al. δεν δηλώνουν ρητά και δεν χρησιμοποιούν αυτές τις διασυνδέσεις, αν και αυτές ενυπάρχουν στην καίρια έννοια του καθολικού στοιχείου, της οποίας κάνουν εκτεταμένη χρήση. Συγκεκριμένα, ορίζουν τρεις κατηγορίες οι οποίες σχετίζονται με τους φραγμένους αυτοσυζυγείς τελεστές στον χώρο Hilbert ενός κβαντικού συστήματος. Είναι οι κατηγορίες με αντικείμενα:

α) τους ίδιους αυτούς τελεστές,

β) τις υποάλγεβρες Boole του πλέγματος $\not\subset$(Η) των τελεστών προβολής στον Η, και

γ) τις μεταθετικές υποάλγεβρες von Neumann της άλγεβρας Λ(Η) των φραγμένων τελεστών στον Η.

Οι δύο τελευταίες, οι οποίες συνδέονται στενά με όσα έχω αναφέρει ώς τώρα σε σχέση με την εργασία τού de Groote, είναι μερικώς διατεταγμένα σύνολα και συνεπώς διαθέτουν μια φυσική κατηγορική δομή. Η πρώτη, που είναι και το θεμέλιο του όλου οικοδομήματος, έχει έναν διπλό χαρακτήρα που αναδεικνύει τόσο την ιδιοτυπία του κβαντικού φορμαλισμού, όσο και την μη κλασικότητα που συνδέεται με αυτόν. Αφ' ενός, η ιδιοτυπία του φορμαλισμού έγκειται στο ότι δεν μπορεί να αποδοθεί ταυτόχρονα σε όλους τους τελεστές–φυσικά μεγέθη μια τιμή κατά τρόπον συνεπή. Αυτό το τελευταίο συμπυκνώνεται στο αίτημα να ισχύει η ιδιότητα της σύνθεσης συναρτήσεων (η ιδιότητα FUNC των Isham et al.), όπως συμβαίνει στην κλασική φυσική, και η οποία ισοδυναμεί με την ύπαρξη μιας συνηθισμένης συνάρτησης αποτίμησης στο σύνολο των εν λόγω τελεστών. Το γεγονός ότι ο κβαντικός φορμαλισμός απαγορεύει αυτήν την δυνατότητα, είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος των Kochen και Specker. Συνεπώς, το ερώτημα εάν ένας τελεστής Α, σε μια κατάσταση s έχει μια τιμή εντός ενός υποσυνόλου, έστω Δ, του φάσματός του, specA, ενδέχεται να μην επιδέχεται σαφή απάντηση του τύπου «ναί - όχι». Εν τούτοις, ενδέχεται να υπάρχουν άλλα μεγέθη, B, τα οποία να επιδέχονται τιμή με μιαν έννοια όμοια με της κλασικής τιμής. Παραπέμποντας για τα τεχνικά ζητήματα στα πρωτότυπα κείμενα, κρατώ την κεντρική ιδέα, προσαρμόζοντας κατά το δυνατόν τον συμβολισμό των Isham et al. σε αυτόν που χρησιμοποιώ εδώ. Έστω, λοιπόν, ένας τελεστής A που παριστά ένα φυσικό μέγεθος, και Δ ένα υποσύνολο Borel του φάσματος specA του A. O τελεστής $P[A \in \Delta]$ προβάλλει στον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στο Δ. Η λογική του ερμηνεία είναι ότι αντιστοιχεί στην πρόταση «το A έχει (ή παίρνει, ανάλογα με την άποψη που υιοθετεί κανείς) μια τιμή στο διάστημα Δ», η οποία συμβολίζεται με «$A \in \Delta$». Όλοι οι τελεστές προβολής τέτοιου τύπου σχηματίζουν την φασματική άλγεβρα W_A του A, η οποία είναι άλγεβρα Boole. Ως γνωστόν, η άλγεβρα von Neumann όλων των φραγμένων τελεστών της θεωρίας περιλαμβάνει όλες τις συναρτήσεις Borel f(A) όλων των κανονικών[27] (normal) τελεστών της θεωρίας. Εάν, λοιπόν, f(Δ) είναι υποσύνολο Borel του φάσματος του τελεστή f(A), θα ισχύει $P[A \in \Delta] \leq P[f(A) \in f(\Delta)]$, που σημαίνει ότι η πρόταση «$A \in \Delta$» συνεπάγεται την πρόταση «$f(A) \in f(\Delta)$», χωρίς απαραιτήτως να ισχύει το αντίστροφο. Το ενδεχόμενο που προανέφερα είναι η πρόταση «$f(A) \in f(\Delta)$» – *συνέπεια* της πρότασης «$A \in \Delta$»– να έχει κλασικού τύπου αληθοτιμή. Δηλαδή, ο τελεστής B □ f(A) να συμπεριφέρεται «κλασικά», ούτως ειπείν. Είναι φανερό ότι σε αυτήν την περίπτωση η κλασικού τύπου συμπεριφορά είναι κληρονομική: ένας τρίτος τελεστής C □ g(B), όπου g είναι συνάρτηση Borel, θα συμπεριφέρεται επίσης «κλασικά», και ούτω καθ’ εξής. Η έννοια της συνεπαγωγής που χρησιμοποιώ εδώ προκύπτει από όσα εξέθεσα στην §1.5 για την λογική προτάσεων που αφορούν την αποτίμηση φυσικών μεγεθών. Εάν υπάρχουν τέτοιες σχέσεις, ορίζουν μορφισμούς: Εάν, δηλαδή, $B = f(A)$, τότε υπάρχει ένας μορφισμός $f: B \to A$. Έτσι, το σύνολο των τελεστών, με αυτού του τύπου τους μορφισμούς, αποκτά την δομή κατηγορίας. Η περίπτωση, δε, μορφισμών με το ως άνω φυσικό περιεχόμενο και την κληρονομική ιδιότητα, δίνει σε όλη την κατασκευή την μορφή ενός δέντρου με «ρίζα» έναν τελεστή A και κλάδους τις ακολουθίες τελεστών που συνδέονται με τον A με μορφισμούς f. Είναι βέβαια δομές που σχηματίζουν κόσκινα πάνω στο A. Επί πλέον, η λογική σχέση «$A \in \Delta$» σημαίνει ότι ένας μορφισμός $B \to A$ αντιστοιχεί σε μια διάταξη προτάσεων στην βάση μιας σχέσης *αποδείξιμης συνεπαγωγής*. Με άλλα λόγια, ένας τέτοιος τελεστής A οδηγεί σε προτάσεις του τύπου «$A \in \Delta$». Αυτές διακλαδίζονται σε ακολουθίες συνεπειών τους, «$f(A) \in f(\Delta)$», με κλάδους που ξεκινούν με διάφορες συναρτήσεις Borel, f. Οι τελεστές $B = f(A)$ είναι τα πρώτα στάδια κόσκινων πάνω στον A, όπου τα βέλη/μορφισμοί είναι $f: B \to A$. Εκείνο που επιτυγχάνεται είναι η δυνατότητα να διατυπωθεί συγκεκριμένα το ερώτημα: Έχουμε δύο ασύμβατα εννοιολογικά πλαίσια, το κλασικό και το κβαντικό. Το θεώρημα των Kochen και Specker είναι ένα απαγορευτικό (no go) θεώρημα που αποκλείει την αναγωγή του δεύτερου στο πρώτο. Αποκλειομένης της αναγωγής, είναι η ασυμβατότητα απόλυτη, ή μήπως υπάρχει κάποια σχέση;

[27] Τελεστές A για τους οποίους $AA^* = A^*A$.

Οι Isham et al., μεταφέροντας το θεώρημα και αναδιατυπώνοντάς το στο πλαίσιο της θεωρίας των προδεσμίδων και των τόπων, ανοίγουν έναν δρόμο για την ανίχνευση μιας σχέσης. Αρχικά, ορίζουν κάποιες προδεσμίδες στις κατηγορίες που εξετάζουν και τις οποίες ανέφερα προηγουμένως. Μία είναι η *φασματική προδεσμίδα* επί της κατηγορίας των τελεστών A με μορφισμούς τις σχέσεις του τύπου f: B → A εάν B = f(A). Αυτή σχηματίζεται με τον ανταλλοίωτο (contravariant) συναρτητή που αντιστοιχεί σε κάθε αυτοσυζυγή τελεστή A το φάσμα του, και στους μορφισμούς f: B → A τις συναρτήσεις f(λ) για κάθε $\lambda \in$ specA. Μια δεύτερη προδεσμίδα ορίζεται πάλι πάνω στην κατηγορία των τελεστών, με την σύνθεση (composition) δύο συναρτητών. Ο ένας είναι συναλλοίωτος και είναι ο συναρτητής *φασματικών αλγεβρών,* **W**, που στέλνει τον τελεστή A στην φασματική του άλγεβρα, W_A, και τον μορφισμό f: B → A στην σχέση του «περιέχεσθαι», $i_{W_B W_A} : W_B \to W_A$. Ο άλλος είναι εκείνος ο ανταλλοίωτος συναρτητής **D**: **Ω** → **Set** που στέλνει τις φασματικές άλγεβρες W στο δυικό τους σύνολο, δηλαδή το σύνολο Hom(W, {0 , 1}) όλων των ομομορφισμών από την άλγεβρα Boole W στην άλγεβρα Boole {0 , 1}. Τους δε μορφισμούς $i_{W_2 W_1}$ στέλνει στους $\mathbf{D}(i_{W_2 W_1})$: $\mathbf{D}(W_1) \to \mathbf{D}(W_2)$, όπου $\mathbf{D}(i_{W_2 W_1})(\chi) \square \chi|_{W_2}$, δηλαδή ο περιορισμός (restriction) του $\chi \in \mathbf{D}(W_1)$ στην υποάλγεβρα $W_2 \subseteq W_1$. Η σύνθεση **D**◦**W** είναι ένας ανταλλοίωτος συναρτητής, που στέλνει έναν τελεστή A στο σύνολο Hom(W_A, {0 , 1}), και τον μορφισμό f: B → A στον $\mathbf{D}\circ\mathbf{W}(f)(\chi) \square \chi|_{W_{f(A)}}$, $W_{f(A)} \subseteq W_A$. Σε αυτήν την βάση, το θεώρημα Kochen-Specker ισοδυναμεί με την πρόταση ότι οι ως άνω προδεσμίδες επί της κατηγορίας των τελεστών *δεν έχουν ένα καθολικό στοιχείο (διατομή)*. Όπως σημειώνουν οι Isham et al., η φυσική σημασία της πρότασης είναι ιδιαίτερα φανερή στην δεύτερη περίπτωση, εφ' όσον τότε η ύπαρξη μιας καθολικής διατομής θα σήμαινε την συνεπή σύνδεση κάθε τελεστή–φυσικού μεγέθους A με ένα στοιχείο τού συνόλου Hom(W_A, {0 , 1}), άρα με κλασικές αληθοτιμές για προτάσεις της μορφής «$A \in \Delta$».

Εδώ, ακριβώς σε αυτό το σημείο που η απαγορευτικότητα του θεωρήματος Kochen-Specker γίνεται πιο διαφανής, εδώ φανερώνονται και τα *όρια* αυτής της απαγορευτικότητας. Και τούτο διότι το διευρυμένο μαθηματικό πλαίσιο εισάγει ένα ευρύτατο πλαίσιο νέων αλληλοσυνδέσεων εννοιών, ανοίγοντας δρόμους που η ύπαρξή τους ήταν προηγουμένως αδιανόητη. Εάν δεν υπάρχουν *καθολικές* διατομές, τίποτε δεν αποκλείει την ύπαρξη *τοπικών* διατομών. Ξεκινώντας από αυτήν την διαπίστωση, οι Isham et al. καταλήγουν σε αυτό που ονομάζουν *γενικευμένες* συναρτήσεις αποτίμησης, και οι οποίες αποδίδουν σε έναν τελεστή A μια «τιμή» που είναι ένα κόσκινο επί του A, με τον τρόπο που περιέγραψα προηγουμένως. Και αυτό το επιτυγχάνουν αξιοποιώντας τον φορμαλισμό της θεωρίας των τόπων.

4.6 Μεταθεωρία και θεωρία: «κόσκινα» και η έννοια της «μερικής αλήθειας»

Έχω ήδη αναφέρει ότι αυτή η προσέγγιση παρουσιάζει δύο κέρδη/πλεονεκτήματα σε ένα νοηματικό επίπεδο. Είναι η εισαγωγή της *πλαισιακότητας* και η εγγενής παρουσία μιας *μη κλασικής* λογικής. Οι Isham et al. τα τονίζουν και δικαιολογημένα τα προβάλλουν και ως κίνητρα για την προσέγγισή τους. Θεωρώ ότι είναι κάτι περισσότερο από κίνητρα, έστω και αν οι επιλογές του συγκεκριμένου φορμαλισμού ασφαλώς δεν είναι μονόδρομος. Ο φορμαλισμός, ή μάλλον η αλλαγή Gestalt που σημαίνει η σκοπιά της θεωρίας των κατηγοριών γενικά, και η θεωρία των τόπων ειδικά, έχει μιαν εσωτερική συνέπεια που υποδεικνύει έναν γόνιμο τρόπο αντιμετώπισης. Το κομβικό σημείο είναι όντως η διατύπωση του θεωρήματος Kochen-Specker με τους όρους αυτής της θεωρίας. Στην συνήθη προσέγγιση, αυτό το θεώρημα δεν αφορά άμεσα το γνωστικό αντικείμενο της φυσικής θεωρίας. Είναι ένα θεώρημα για την φύση της θεωρίας, βρίσκεται δηλαδή σε ένα επίπεδο μετα-θεωρίας, ή μετα-γλώσσας. Η αναδιατύπωσή του από τους Isham et al. το *εσωτερικεύει*, στον βαθμό που η θεωρία διατυπώνεται σε ένα τέτοιο μαθηματικό πλαίσιο, που επιτρέπει την διατύπωση του θεωρήματος ως μιας πρότασης με τους όρους και στο εσωτερικό της θεωρίας, και όχι ως πρόταση που προκύπτει από την εκ των έξω εξέταση της θεωρίας. Είναι περίπτωση της ίδιας τάξεως με εκείνη που συναντήσαμε σχετικά με την συναρτητική σημασιολογία των αλγεβρικών θεωριών, του Lawvere, όταν δηλαδή θεωρία και μεταθεωρία, γλώσσα και μεταγλώσσα, μπορούν, αν και διακριτές, να συμπίπτουν. Αυτό συνιστά μεγάλο νοηματικό κέρδος, το οποίο είναι ακριβώς και η αφετηρία μιας συνεπούς αλυσίδας γενικεύσεων και αλληλοσυσχετισμών. Το πρώτο βήμα: δεν υπάρχουν καθολικές διατομές, ας στραφούμε σε τοπικές. Το δεύτερο βήμα: καθολικές διατομές, ή καθολικά στοιχεία, ή *σημεία* είναι έννοιες που ήδη συναντήσαμε στην εργασία τού de Groote, και σημαίνουν μορφισμούς από το τελικό αντικείμενο μιας κατηγορίας προς κάθε αντικείμενό της. Τοπικές διατομές είναι τέτοιοι μορφισμοί από τα *υποαντικείμενα* του τελικού αντικειμένου. Πώς υπεισέρχονται αυτά και τί είναι; Οι συγκεκριμένες προδεσμίδες επί της κατηγορίας των τελεστών, **O**, που ορίζουν οι Isham et al. είναι αντικείμενα της κατηγορίας των προδεσμίδων με τιμές στην κατηγορία **Set** των συνόλων. Είναι ο τόπος $\mathbf{Set}^{\mathcal{O}^{\mathrm{op}}}$. Μια καθολική διατομή (σημείο) θα σήμαινε την απόδοση ταυτόχρονα σε κάθε τελεστή–αντικείμενο της **O** μιας τιμής του φάσματός του, πράγμα που, όπως είδαμε, θα σήμαινε ότι έχουμε έναν τόπο Boole, που ικανοποιεί το αξίωμα της επιλογής. Αυτό θα μπορούσε να συμβαίνει *εν μέρει τοπικά*, εάν έχουμε συλλογές τελεστών, π.χ., που μετατίθενται αμοιβαίως. Σε αυτήν την περίπτωση, επανερχόμαστε στους κλασικόμορφους τομείς Boole του de Groote, και οι τιμές της τοπικής διατομής θα δίδονται από τις «παρατηρήσιμες συναρτήσεις» που συναντήσαμε. Το γεγονός είναι ότι μια τέτοια εικόνα αποκλείεται να καθολικευτεί. Εν τούτοις, οι προδεσμίδες που χρησιμοποιούνται εδώ παρουσιάζουν μιαν όψη κατακερματισμένη, με άλλα λόγια, ως αντικείμενα του τόπου $\mathbf{Set}^{\mathcal{O}^{\mathrm{op}}}$**,** είναι *δομημένα* αντικείμενα, άρα έχουν υποαντικείμενα. Τα υποαντικείμενα μιας κατηγορίας προδεσμίδων είναι υποπροδεσμίδες. Ο ρόλος του ταξινομητή υποαντικειμένων, **Ω**, του εν λόγω τόπου, είναι ακριβώς να ταξινομεί τέτοια υποαντικείμενα, όπου οι τιμές της προδεσμίδας **Ω** στο αντικείμενο A είναι το σύνολο **Ω**(A) των κόσκινων επί του A. Στην συνέχεια ορίζεται ακόμη μια προδεσμίδα, η προδεσμίδα «χονδροκοκκίωσης» (coarse-graining). Είναι ένας ανταλλοίωτος συναρτητής **G** από την κατηγορία των τελεστών στην κατηγορία των συνόλων, **Set**, που ορίζεται στα αντικείμενα – τελεστές A ως **G**(A) = W_A, η φασματική άλγεβρα του A, και στους μορφισμούς f: B $\rightarrow$ A ως **G**(f)(P[A$\in\Delta$]) = P[f(A)$\in$f(Δ)]. Οι Isham et al. ορίζουν τότε μια γενικευμένη συνάρτηση αποτίμησης στο πλέγμα των τελεστών προβολής P μιας κβαντικής θεωρίας, ως μια συλλογή απεικονίσεων ν_A: $W_A \rightarrow$ **Ω**(A), μία για κάθε αντικείμενο A στην κατηγορία των τελεστών, το οποίο θα δούμε ότι τώρα μπορεί βάσιμα να θεωρηθεί ως «στάδιο αλήθειας». Αυτή η συνάρτηση έχει μια σειρά από εύλογες ιδιότητες που την κάνουν *bona fide* συνάρτηση αποτίμησης. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός, N^{ν} μεταξύ των προδεσμίδων **G** και **Ω** για κάθε συνάρτηση αποτίμησης ν, οι συνιστώσες του οποίου στο στάδιο αλήθειας A, $N_A{}^{\nu}$: **G**(A) $\rightarrow$ **Ω**(A) είναι: $N_A{}^{\nu}(P) = \nu_A(P)$ $\forall P \in W_A$ = **G**(A). Συνεπώς, κάθε μορφισμός N^{ν}: **G** $\rightarrow$ **Ω**, άρα κάθε γενικευμένη συνάρτηση αποτίμησης, αντιστοιχεί σε ένα υποαντικείμενο της προδεσμίδας **G**. Η σημασία αυτού του γεγονότος είναι ότι δεν υπάρχει θεώρημα σαν εκείνο των Kochen-Specker που να απαγορεύει την ύπαρξη καθολικών στοιχείων (διατομών, σημείων), δηλαδή μορφισμών από το στοιχείο **1** του **Ω** προς κάθε υποαντικείμενο του **G.** Ένα τέτοιο καθολικό στοιχείο είναι καθολική διατομή της προδεσμίδας **Ω**$^{\mathbf{G}}$**.** Τούτο συμβαίνει επειδή η εισαγωγή της έννοιας του κόσκινου επιτρέπει την εξέταση αντικειμένων ως δομημένων αντικειμένων, κάτι που εκφράζεται με τις ιεραρχίες μορφισμών που συνιστούν ένα κόσκινο, οπότε έχει νόημα και η έννοια του «*εν μέρει ανήκειν*», όπως εκφράζεται με την μερική επικάλυψη τέτοιων ιεραρχιών. Στην αντίστοιχη γλώσσα των προτάσεων, έχουμε ιεραρχημένες ακολουθίες λογικών συνεπειών κάποιας πρότασης. Το «εν μέρει ανήκειν» δείχνει εδώ πώς σηματοδοτεί μια διαφορετική σκοπιά για το νόημα κάποιας πρότασης. Πράγματι, η προσοχή τώρα δεν στρέφεται στην τυπική αλήθεια ή όχι μιας μεμονωμένης πρότασης. Μετατοπίζεται στο κατά πόσον η αλήθεια μιας πρότασης είναι *κρίκος* σε μιαν αλυσίδα προτάσεων που συνδέονται μεταξύ τους με σχέσεις λογικής συνεπαγωγής. Το εν μέρει ανήκειν σημαίνει ότι μια ομάδα έτσι συνδεδεμένων προτάσεων μπορεί να εντάσσεται σε ένα ευρύτερο πλαίσιο. Δηλαδή, εισάγεται «φυσιολογικά» μια έννοια αληθοτιμών μιας πρότασης που καθορίζεται από το σύνολο των συνεπειών της, οπότε η εν λόγω πρόταση μπορεί να θεωρείται ως η σύζευξη των συνεπειών της [74]. Ακριβώς αυτή η μετατόπιση της προσοχής από την *μεμονωμένη* πρόταση (η οποία αντιστοιχεί σε ένα φυσικό γεγονός όπως η μέτρηση ενός μεγέθους) στην λογική *σχέση* προτάσεων, πλήρως ενταγμένη στο πνεύμα της θεωρίας των κατηγοριών, είναι που εισάγει την *πλαισιακότητα*. Συνεπώς, η εισαγωγή γενικευμένων συναρτήσεων αποτίμησης σημαίνει ότι «*η σημασιολογική αξία ή "περιεχόμενο" μιας πρότασης καθορίζεται από το σύνολο εκείνων εκ των συνεπειών της που είναι (κλασικά) αληθείς*» [67]. Έτσι, η έννοια της μερικής αλήθειας μιας πρότασης ελέγχεται από τις κλασικές (δίτιμες) αληθοτιμές των συνεπειών της. Ο ρόλος των κόσκινων, λοιπόν, ως γενικευμένων συναρτήσεων αποτίμησης, σε συνδυασμό με την σχέση τους με τον ταξινομητή υποαντικειμένων ενός τόπου και την λογική δομή άλγεβρας Heyting, δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό τους ως «διαδρομές προς την αλήθεια» [71].

Σε αυτό το σημείο, αναδεικνύεται ο πρωταρχικός, διαμεσολαβητικός ρόλος του φυσικού μεγέθους, με την μαθηματική μορφή του ως αυτοσυζυγούς τελεστή. Όπως είδαμε, προτάσεις της μορφής «το ΦΜ A έχει τιμή a», ή «η τιμή τού ΦΜ A βρίσκεται στο διάστημα Δ», αντιστοιχούν σε τελεστές προβολής P[A=a] ή P[A∈Δ]. Τέτοιοι τελεστές προβολής εμφανίζονται στην φασματική ανάλυση κάθε φυσικού μεγέθους–αυτοσυζυγούς τελεστή. Ενδέχεται, συνεπώς, ένας και ο αυτός τελεστής προβολής, έστω P, να εμφανίζεται στην φασματική ανάλυση δύο ή περισσοτέρων μεγεθών, έστω A και B. Σε αυτήν την περίπτωση, προτάσεις του τύπου «A = a» και «B = b» ενδέχεται να συμπίπτουν, με την έννοια ότι αντιστοιχούν *στον ίδιο* τελεστή προβολής: P[A=a] = P = P[B=b]. Η γενικευμένη έννοια αποτίμησης επιτρέπει να έχουμε διαφορετικές μεν, αλλά «διασταυρούμενες» με την ανωτέρω έννοια γενικευμένες τιμές των μεγεθών A και B. Η διαφορετικότητα των τιμών οφείλεται στο γεγονός ότι η μία είναι κόσκινο επί του A ενώ η άλλη είναι κόσκινο επί του B· και αυτό ακριβώς συνιστά το πλαίσιο εντός του οποίου αποκτά νόημα μια αποτίμηση. Δηλαδή, μια αποτίμηση του τελεστή προβολής P θα του αποδίδει διαφορετικές (γενικευμένες) τιμές ανάλογα με το αν θεωρείται ότι ανήκει στην φασματική ανάλυση του μεγέθους A ή του μεγέθους B: τα A και B καθορίζουν το πλαίσιο –είναι τα «στάδια αλήθειας»– εντός του οποίου αποτιμάται ο P. Ενδέχεται ακόμη ο ίδιος ο τελεστής προβολής P να παριστά ένα μέγεθος, ή, γενικότερα, να ανήκει στην φασματική ανάλυση ενός άλλου φυσικού μεγέθους που παρίσταται από έναν τρίτο αυτοσυζυγή τελεστή, έστω C. Τότε, στην βάση των ανωτέρω, μπορούμε να πούμε το εξής: Μία και η αυτή πρόταση έχει *διαφορετικό νόημα* εάν ανήκει σε μία λογική αλυσίδα, από το εάν ανήκει σε άλλη τέτοια λογική αλυσίδα. Δηλαδή, δύο κόσκινα, ένα που ξεκινά από έναν τελεστή A και ένα άλλο που ξεκινά από έναν άλλον τελεστή B, ενδέχεται να διασταυρώνονται σε κάποιο σημείο που αντιστοιχεί σε έναν τελεστή C. Τότε η πρόταση «ο C παίρνει τιμές σε ένα διάστημα Δ» *δεν* έχει αφ’ εαυτής νόημα.[28] Αυτό *δεν* σημαίνει αναγκαία την προσχώρηση σε μιαν αντιρρεαλιστική φιλοσοφική θέση. Μια ρεαλιστική προσέγγιση είναι συμβατή με το να πει κανείς: Η πρόταση «C ∈ Δ» έχει ένα νόημα εάν ανήκει σε μιαν ακολουθία λογικών σχέσεων, και ένα άλλο νόημα εάν ανήκει σε άλλη τέτοιαν ακολουθία. Με άλλα λόγια, η απόδοση μιας τιμής στον τελεστή C άλλο σημαίνει εάν αυτός ανήκει σε ένα κόσκινο επί του A και άλλο αν ανήκει σε ένα κόσκινο επί του B. Τότε, ο A και ο B ορίζουν διαφορετικά *πλαίσια*, ενώ αυτοί οι ίδιοι αντιπροσωπεύουν στάδια αλήθειας εντός ενός πλαισίου. Ο C μπορεί να παίρνει τιμές με την γενικευμένη έννοια που έχουν νόημα *εντός πλαισίου*, και η τιμή του άλλο σημαίνει εντός του πλαισίου «A» και άλλο εντός του πλαισίου «B».

[28] Παραπλήσια είναι η ανάλυση του Καρακώστα [38].

4.7 Το πλαίσιο ως σχέση εξειδίκευσης

Ο χώρος των κόσκινων πάνω σε έναν τελεστή A, ως άλγεβρα Heyting, είναι επιμεριστικό πλέγμα. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, κατά το θεώρημα αναπαράστασης του Stone για επιμεριστικά πλέγματα [H], η κατηγορία επιμεριστικών πλεγμάτων, **DLat**, είναι δυική της κατηγορίας συνεκτικών χώρων, **CohSp**. Έτσι, τα πρώτα ιδεώδη του πλέγματος αντιστοιχούν στα σημεία ενός συνεκτικού χώρου. Σε ένα επιμεριστικό πλέγμα, τα μέγιστα ιδεώδη είναι πρώτα. Θα αντιστοιχούν σε κλειστά σημεία x: $\overline{\{x\}}$ □ $\{x\}$. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει: τα πρώτα ιδεώδη δεν είναι απαραιτήτως μέγιστα. Διαισθητικά, τα κόσκινα –ως κατώτερα σύνολα– μπορούν να αντιστοιχηθούν σε ιδεώδη ενός πλέγματος. Αν θεωρήσουμε το σύνολο των κόσκινων επί ενός αρχικού τελεστή–σταδίου A, τόσο το κύριο κόσκινο επί του A, όσο και όλα τα –αναγκαστικά κύρια– κόσκινα επί των σταδίων–«απογόνων» τού A, έστω B, C, …, δηλαδή τα $\downarrow$A, $\downarrow$B, $\downarrow$C κ.λπ., θα είναι πρώτα ιδεώδη. Αλλά, μόνον το $\downarrow$A, όπου A είναι η «ρίζα», είναι μέγιστο ιδεώδες: περιέχει συνολοθεωρητικά όλα τα άλλα. Έχουμε έτσι μια διάταξη των πρώτων ιδεωδών κατά την συνολοθεωρητική σχέση τού περιέχεσθαι, με κορυφή το A. Τα στάδια A, B, C, … θα αντιστοιχούν σε σημεία ενός συνεκτικού χώρου. Σε αυτόν τον χώρο, η διάταξη εξειδίκευσης είναι *αντίθετη* προς την διάταξη του περιέχεσθαι των πρώτων ιδεωδών [H]. Η «ρίζα» A, δηλαδή, θα αντιστοιχεί σε κλειστό σημείο αυτού του χώρου. Είναι μαθηματική έκφραση του γεγονότος ότι, ενώ τα στάδια B, C, … είναι συνέπειες του A, το A δεν είναι συνέπεια κανενός προγενέστερου σταδίου: δεν έχουμε συνάρτηση f και στάδιο (τελεστή) A΄ ώστε να ισχύει A □ f(A΄). Η γενική περίπτωση των ιδεωδών που αντιστοιχούν στα κόσκινα εντάσσεται στην έννοια ενός χώρου Priestley, ισόμορφου προς τον συνεκτικό χώρο που προσδιορίσαμε προηγουμένως [H]. Η ειδική περίπτωση που αυτός ο χώρος είναι T_1 αντιστοιχεί στην περίπτωση είτε κλασικών είτε κλασικόμορφων (μετατιθέμενων) μεγεθών, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα κόσκινα εκφυλίζονται στα μεγέθη A, B, C, …, τα οποία είναι τώρα ισότιμα χωρίς εξειδίκευση. Αντιστοιχούν δηλαδή σε κλειστά σημεία, οπότε όλα τα πρώτα ιδεώδη είναι μέγιστα, έχουμε συνεπώς δομή άλγεβρας Boole.

Μπορούμε να δούμε αυτές τις σχέσεις και από άλλη σκοπιά, αν αντιστρέψουμε την διάταξη των κόσκινων. Δηλαδή, αντί για B $\to$ A όταν B □ f(A), οπότε B $\leq$ A, θα έχουμε A $\to$ B, οπότε A $\leq$ B, όταν το B □ f(A) είναι συνέπεια του A. Τα κόσκινα μετατρέπονται τότε σε άνω σύνολα και τα κύρια κόσκινα $\downarrow$A, $\downarrow$B, … γίνονται $\uparrow$A, $\uparrow$B, …. Έχουμε τώρα μια διάταξη που συμφωνεί με την σχέση συνεπαγωγής, A $\to$ B. Επί πλέον, συμφωνεί με την διάταξη εξειδίκευσης, $\sqsubseteq$, στον συνεκτικό χώρο των «σημείων» A, B, …. Θα έχουμε επίσης μια τοπολογία συμβατή με αυτήν την διάταξη. Για τα στάδια B, C, …, απογόνους τού A, επειδή αντιστοιχούν σε κλασικού τύπου τιμές, θα έχουμε μόνον τα κύρια κόσκινα και, με την νέα διάταξη, τα άνω σύνολα $\uparrow B$, $\uparrow C$, …. Αυτά όμως είναι τα ελάχιστα ανοικτά σύνολα της τοπολογίας που περιέχουν τα B, C, …. Συνεπώς, αν περιοριστούμε στους απογόνους τού A, η τοπολογία θα είναι η τοπολογία Alexandrov. Δηλαδή, τα κόσκινα πάνω στους απογόνους τού A, όπως και το *κύριο* κόσκινο στο ίδιο το A, όλα δηλώνοντας κλασικού τύπου τιμές, θα αντιστοιχούν κατά την διάταξη εξειδίκευσης στα ανοικτά σύνολα της άνω τοπολογίας. Η απόκλιση από την δυνατότητα κλασικού τύπου αποτίμησης –και η δομή Heyting που δεν είναι Boole– αποδίδεται με την ύπαρξη και άλλων κόσκινων επί του A εκτός από το κύριο κόσκινο. Με την διάταξη εξειδίκευσης, όπως είδαμε, το A είναι κλειστό σημείο: $\overline{\{A\}}$ □ $\{\downarrow A\}$ □ $\{A\}$. Η δε τοπολογία θα αποκλίνει από την τοπολογία Alexandrov κατά το ότι θα περιλαμβάνει ανοικτά σύνολα συμπληρωματικά των κάτω συνόλων, τα οποία θεωρούνται κλειστά. Τα κόσκινα επί του A πλην του κύριου θα αντιστοιχούν σε τέτοια ανοικτά σύνολα, συμπληρωματικά τού $\{A\}$ □ $\{\downarrow A\}$. Εάν, δηλαδή, X είναι ο εν λόγω συνεκτικός χώρος, τέτοια ανοικτά σύνολα θα είναι τα $X\backslash\{A\}$, $X\backslash\{\downarrow B\}$, $X\backslash\{\downarrow C\}$, …. Γίνεται φανερό τώρα ότι η απόκλιση από την κλασικού (ή κλασικόμορφου) τύπου περίπτωση συνυφαίνεται με την «αφαίρεση» του σημείου A, κάτι που αποδίδει μαθηματικά το γεγονός ότι το A δεν επιδέχεται κλασικού τύπου αποτίμηση. Τέλος, να σημειώσω ότι έχουμε μιαν ευτυχή σύμπτωση στην ορολογία: Η φράση «το μέγεθος B έχει τιμή εντός του πλαισίου που ορίζει το A», με την χρήση αυτού του μαθηματικού φορμαλισμού, έχει το νόημα ότι *το* A *εξειδικεύει το* B, $A \sqsubseteq B$. Ο *καθορισμός πλαισίου* μέσω διαδοχικών *σταδίων* εκφράζεται έτσι ως *διαδοχή εξειδικεύσεων*.

4.8 Το κλασικό ως βάση γενικευμένων αποτιμήσεων

Μια γενικευμένη συνάρτηση αποτίμησης μπορεί να οριστεί και για κάθε κατάσταση ρ ενός κβαντικού συστήματος ως εξής: $\nu^{\rho}(A \in \Delta)$ □ $\{f : B \rightarrow A \mid tr(\rho P[B \in f(\Delta)]) = 1\}$. Είναι και πάλι ένα κόσκινο. Εδώ μπορούμε να ανιχνεύσουμε τα σημεία επαφής της εργασίας των Isham et al. με εκείνη του de Groote και τις συνέπειές τους. Προς τούτο, ας δούμε πώς οι Isham et al. γενικεύουν την προσέγγισή τους στην περίπτωση προδεσμίδων πάνω σε αβελιανές άλγεβρες von Neumann. Έχουν ήδη οριστεί οι κατηγορίες **O** και **Ω**, δηλαδή η κατηγορία των φραγμένων αυτοσυζυγών τελεστών σε έναν χώρο Hillert, H, και η κατηγορία των υποαλγεβρών Boole του πλέγματος Λ(H) των τελεστών προβολής στον H, αντιστοίχως. Επίσης, η μεταξύ τους σχέση μέσω του συναλλοίωτου συναρτητή **W**: **O** → **Ω**. Στην κατηγορία **O** υπάρχει μια έννοια ισομορφισμού δύο τελεστών, A και B, όταν υπάρχουν συναρτήσεις Borel τέτοιες ώστε $A = f(B)$, και $B = g(A)$. Στην κατηγορία **Ω** υπάρχει η έννοια φυσικής ισοδυναμίας δύο τελεστών, A και B, όταν οι αντίστοιχες φασματικές άλγεβρες W_A και W_B συμπίπτουν. Μπορεί τώρα να οριστεί μια τρίτη κατηγορία η οποία να υπερβαίνει και τις δύο προηγούμενες. Είναι η κατηγορία των μεταθετικών υποαλγεβρών von Neumann, ς, της άλγεβρας $\Im(H)$ των φραγμένων τελεστών στον H. Είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, οπότε οι μορφισμοί είναι $i_{V_2V_1} : V_2 \rightarrow V_1$, εάν $V_2 \subseteq V_1$, όταν V_2 και V_1 είναι αντικείμενα της ς. Στην ς ορίζεται:

α) Η φασματική προδεσμίδα ως ο ανταλλοίωτος συναρτητής **Σ**: ς → **Set,** για τον οποίο:

- Σε αντικείμενα: **Σ**(V) □ specV, το φάσμα της V, δηλαδή το σύνολο όλων των πολλαπλασιαστικών γραμμικών συναρτησιακών $\kappa : V \rightarrow \Re$.

- Σε μορφισμούς: Εάν $i_{V_2V_1} : V_2 \rightarrow V_1$, το $\mathbf{\Sigma}(i_{V_2V_1})$: $spec(V_1) \rightarrow spec(V_2)$, οπότε θα είναι $\mathbf{\Sigma}(i_{V_2V_1})(\kappa)$ □ $\kappa|_{V_2}$, ο περιορισμός τού κ: $V_1 \rightarrow \Re$ στην V_2.

β) Η καταστατική προδεσμίδα ως ο ανταλλοίωτος συναρτητής **S**: ς → **Set**, για τον οποίο:

- Σε αντικείμενα: **S**(V) είναι ο χώρος των καταστάσεων, δηλαδή των γραμμικών, θετικών και κανονικοποιημένων συναρτησιακών ρ: $V \rightarrow \Re$, της V.

- Σε μορφισμούς: το $\mathbf{S}(i_{V_2V_1})$: $\mathbf{S}(V_1) \rightarrow \mathbf{S}(V_2)$ είναι ο περιορισμός των καταστάσεων του $\mathbf{S}(V_1)$ στην $V_2 \subseteq V_1$.

Το θεώρημα Kochen-Specker ισοδυναμεί με την πρόταση ότι η προδεσμίδα **Σ** δεν έχει καθολικά στοιχεία, και με την πρόταση ότι δεν μπορεί να αντιστοιχηθεί μια *καθαρή* κατάσταση σε κάθε μεταθετική υποάλγεβρα στην κατηγορία ς. Η προδεσμίδα χονδροκοκκίωσης πάνω στην ς είναι τότε ο ανταλλοίωτος συναρτητής **G** : ς → **Set** που ορίζεται:

- σε αντικείμενα: **G**(V) είναι το πλέγμα Λ(V) των τελεστών προβολής στην V

- σε μορφισμούς $i_{V_2V_1} : V_2 \rightarrow V_1$ όταν $V_2 \subseteq V_1$, ο συναρτητής της χονδροκοκκίωσης $\mathbf{G}(i_{V_2V_1})$: $\Lambda(V_1) \rightarrow \Lambda(V_2)$ είναι: $\mathbf{G}(i_{V_2V_1})(P)$ □ $\inf\{Q \in \Lambda(V_2) \mid P \leq i_{V_2V_1}(Q)\}$ όταν $P \in \Lambda(V_1)$, και όπου το infimum υπάρχει διότι το πλέγμα $\Lambda(V_2)$ είναι πλήρες.

Εδώ, ο τελεστής προβολής $P \in \Lambda(V)$ ερμηνεύεται ως πρόταση για *ολόκληρο* το στάδιο V και όχι για το φάσμα επί μέρους τελεστών στο οποίο αυτός ανήκει. Αντιστοίχως, προτάσεις της μορφής «$A \in \Delta$» στο στάδιο V, με $A \in V$, συμβολίζουν κάθε πρόταση «$B \in \Delta_B$» για κάθε τελεστή $B \in V$, όταν ο τελεστής προβολής $P[A\in\Delta]$ ανήκει στην φασματική άλγεβρα του B και $P[A\in\Delta] = P[B\in\Delta_B]$. Σε αυτήν την βάση, μια γενικευμένη συνάρτηση αποτίμησης στην κατηγορία ς είναι μια συλλογή απεικονίσεων ν_V: $\Lambda(V) \to \mathbf{\Omega}(V)$ του πλέγματος $\Lambda(V)$ στην άλγεβρα Heyting των κόσκινων επί του σταδίου V, αντικειμένου τής ς. Μια τέτοια αποτίμηση πρέπει πάλι να έχει μια σειρά εύλογες ιδιότητες. Τέλος, μια αποτίμηση ορίζεται στην βάση μιας κβαντικής κατάστασης ρ, ως εξής:

$$\nu_{V1}{}^{\rho}(P) \square \{ i_{V_2V_1} : V_2 \to V_1 \mid \rho[\mathbf{G}(i_{V_2V_1})P] = 1\}.$$

Δηλαδή, η αληθοτιμή του τελεστή προβολής $P \in V_1$ είναι ένα κόσκινο στην V_1 που περιέχει τους μορφισμούς προς την V_1 από όλα τα στάδια V_2 στα οποία η χονδροκοκκίωση του P είναι εντελώς αληθής με την έννοια ότι η αντίστοιχη πιθανότητα ισούται με την μονάδα.

Μπορούμε τώρα να συνοψίσουμε μια σειρά δεδομένων:

- Μια κατάσταση ρ της C*-άλγεβρας των τελεστών σε έναν χώρο Hilbert είναι ειδική περίπτωση χαρακτήρα αυτής της άλγεβρας.

- Οι χαρακτήρες της άλγεβρας $C^*(\Im)$, όπου $\Im$ είναι ένας τομέας Boole κατά τον de Groote, δηλαδή το φάσμα Gelfand της $C^*(\Im)$, $\Omega_{\Im}$, συμπίπτει με τον χώρο Stone, $Q(\Im)$, των οιονεί σημείων στον τομέα $\Im$.

- Στον $Q(\Im)$ ορίζεται ένα μέτρο πιθανότητας με norm $\mathrm{tr}\rho = 1$, όπου ρ είναι κατάσταση στον H. Το μέτρο αυτό είναι σημειακό στον $Q(\Im)$, δηλαδή συγκεντρωμένο στο οιονεί σημείο Boole $\beta_0 \in Q(\Im)$, εάν και μόνον εάν το β_0 περιέχει μιαν ακτίνα $\Re x$ του H, όπου x μια καθαρή κατάσταση του H, και εάν το ρ είναι ο τελεστής προβολής σε αυτήν την ακτίνα, $P_{\Re x}$.

- Εάν $\varphi \in C(Q(\Im))$, το ως άνω μέτρο είναι η απεικόνιση $\varphi \# \mathrm{tr}(\rho A_\varphi)$, όπου A_φ ο ερμιτιανός τελεστής που αντιστοιχεί στην παρατηρήσιμη συνάρτηση $f_{A_j}{}^{\Im} = \varphi$. Τότε το $\mathrm{tr}(\rho A_\varphi)$ είναι αναμενόμενη τιμή, εκτός εάν συντρέχουν οι ως άνω προϋποθέσεις για το μέτρο στον $Q(\mathfrak{I})$, οπότε ισούται με την ιδιοτιμή τού A_φ για την ιδιοκατάσταση x.

- Τα ανωτέρω ισχύουν εφ' όσον βρισκόμαστε σε τομείς Boole. Η περίπτωση δε που η τιμή τού $tr(\rho A_\varphi)$ ισούται με ιδιοτιμή τού A_φ είναι εκείνη στην οποία η δομική ομοιότητα ενός κλασικόμορφου τομέα με μια κλασικού τύπου περίπτωση φτάνει στο οριακό σημείο όπου η *ομοιότητα* μετατρέπεται σε *ταύτιση*.

- Οι γενικευμένες συναρτήσεις αποτίμησης των Isham et al. αποδίδουν σε τελεστές τιμές που είναι κόσκινα άλλων τελεστών, οι οποίοι επιδέχονται τιμές κλασικού τύπου. Έτσι, ένας τελεστής που γενικά έχει μιαν αναμενόμενη τιμή, χωρίς περιορισμό σε τομέα Boole, αποτιμάται με ένα κόσκινο τελεστών που ανήκουν σε ένα κλασικόμορφο «παράθυρο».

- Τα κλασικόμορφα παράθυρα δεν συνενώνονται σε ενιαία κλασικόμορφη εικόνα, διότι δεν υπάρχει καθολικό στοιχείο–καθαρή κατάσταση που να πραγματοποιεί μιαν ομαλή συγκόλληση επί μέρους μεταθετικών αλγεβρών von Neumann. Τούτο σημαίνει ότι δεν υπάρχει ένα καθολικό μέτρο πιθανότητας, που ενδεχομένως θα στήριζε μια θεωρία «κρυμμένων μεταβλητών».

Εν ολίγοις, ο κβαντικός χαρακτήρας υποχρεωτικά περιλαμβάνει αναμενόμενες τιμές τελεστών, και οι γενικευμένες αποτιμήσεις πραγματοποιούν μια σύνδεση με κλασικόμορφες τιμές, δηλαδή αληθοτιμές σε κλασικές άλγεβρες Boole. Τέλος, να παρατηρήσω ότι η «εν μέρει αλήθεια» υπάρχει λόγω της μη μεταθετότητας, συνεπώς συνδέεται με την ύπαρξη διακένων μεταξύ των κλασικόμορφων παραθύρων του κβαντικού. Αυτά τα διάκενα αποτυπώνουν την παρουσία τους στην αδυναμία να αποτιμηθούν ταυτόχρονα όλοι οι τελεστές της θεωρίας, με αποτέλεσμα την ιεραρχία των αλυσίδων που σχηματίζουν τα κόσκινα.

4.9 Τα πλαίσια ως στάδια γνώσης: μοντέλα Kripke

Θα επιμείνω τώρα λεπτομερέστερα στον τρόπο που οι μαθηματικές δομές που συναντήσαμε, στα πλαίσια της κατηγορικής προσέγγισης, συμβάλλουν στην επανατοποθέτηση των σχέσεων μεταξύ κλασικού και κβαντικού. Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι αυτές οι δομές ρητά ή άρρητα στηρίζονται στην έννοια του μερικώς διατεταγμένου συνόλου. Στην περίπτωση των Isham et al., η μερική διάταξη προκύπτει από τους μορφισμούς του τύπου $f: B \to A$ της κατηγορίας των τελεστών. Ακριβέστερα, πρόκειται για προ-διάταξη (pre-order), η οποία γίνεται διάταξη εάν θεωρήσουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας τελεστών, όπου η (φυσική) ισοδυναμία δύο τελεστών A και B σημαίνει ότι υπάρχουν συναρτήσεις Borel f και g τέτοιες ώστε: $B = f(A)$ και $A = g(B)$. Οι άλλες κατηγορίες που χρησιμοποιούν οι Isham et al., όπως, π.χ., οι φασματικές άλγεβρες, είναι μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Πρέπει να προσέξουμε μια σημαντική λεπτομέρεια στον συμβολισμό σχετικά με αυτές τις διατάξεις και το νόημά τους. Κατ' αρχάς, ένας μορφισμός του τύπου f: $B \rightarrow A$ αντιστοιχεί στην σχέση $P(A \in \Delta) \leq P(B \in f(\Delta))$ στο πλέγμα των τελεστών προβολής, η οποία είναι σχέση διάταξης που με την σειρά της αντιστοιχεί στην σχέση λογικής συνεπαγωγής μεταξύ προτάσεων, δηλαδή «$A \in \Delta$» $\Rightarrow$ «$B \in f(\Delta)$». Παράλληλα, ο ίδιος μορφισμός f: $B \rightarrow A$ έχει οριστεί έτσι ώστε ο αντίστοιχος μορφισμός στην κατηγορία των φασματικών αλγεβρών **Ω** να είναι $W(f)$: $W_B \rightarrow W_A$ (ο συναρτητής W είναι συναλλοίωτος), έτσι ώστε να συμφωνεί με την φυσική διάταξη που προκύπτει από την συνολοθεωρητική σχέση: $W_B \subseteq W_A$. Αυτή η τελευταία σχέση είναι βέβαια η μαθηματική έκφραση της συνεπαγωγής «$A \in \Delta$» $\Rightarrow$ «$B \in f(\Delta)$». Γενικότερα, η σχέση διάταξης « $\leq$ » που συμφωνεί με την λογική συνεπαγωγή « $\Rightarrow$ » είναι *αντίθετη* προς την συνολοθεωρητική σχέση του περιέχεσθαι: « $\leq$ » $\Leftrightarrow$ « □ » (πρβλ. §4.7). Αυτό αντανακλάται και στην περίπτωση της κατηγορίας **ς** των μεταθετικών αλγεβρών von Neumann, όταν η φασματική προδεσμίδα **Σ** επί της **ς** ορίζεται ως *ανταλλοίωτος* συναρτητής: ο μορφισμός $i_{V_2V_1}$: $V_2 \rightarrow V_1$ όταν $V_2 \subseteq V_1$, γίνεται $\mathbf{\Sigma}(i_{V_2V_1})$: $spec(V_1) \rightarrow spec(V_2)$, που αντιστοιχεί στον περιορισμό του φάσματος $spec(V_1)$ στο υποσύνολο $spec(V_2)$. Αντιθέτως, οι διατάξεις που προκύπτουν από τις προδεσμίδες χονδροκοκκίωσης, **G**, των Isham et al. *συμφωνούν* με την διάταξη της συνεπαγωγής. Τόσο στην περίπτωση τελεστών, όσο και στην περίπτωση αλγεβρών von Neumann, πρόκειται περί ανταλλοίωτων συναρτητών. Έτσι, για τελεστές έχουμε $\mathbf{G}(f)$: $W_A \rightarrow W_B$, και για άλγεβρες von Neumann: $\mathbf{G}(i_{V_2V_1})$: $\Lambda(V_1) \rightarrow \Lambda(V_2)$. Ο ορισμός από τους Isham et al. των αποτιμήσεων ως κόσκινων, δηλαδή ως *κάτω* συνόλων (που αντιστοιχούν σε δεξιά ιδεώδη για μονοειδή) σύμφωνα με την συνολοθεωρητική σχέση «$\subseteq$», αντανακλάται στο γεγονός ότι οι μορφισμοί στον ταξινομητή υποαντικειμένων, **Ω**, έχουν οριστεί ως: $\mathbf{\Omega}(i_{V_2V_1})$: $\mathbf{\Omega}(V_1) \rightarrow \mathbf{\Omega}(V_2)$, στην περίπτωση της κατηγορίας **ς**, δηλαδή ως η *pullback* των κόσκινων στο $\mathbf{\Omega}(V_1)$ κατά μήκος του μορφισμού $i_{V_2V_1}$. Εάν, λοιπόν, θεωρήσουμε τις εν λόγω κατηγορίες ως μερικώς διατεταγμένα σύνολα, έστω P, έτσι ώστε η σχέση « $\leq$ » να συμφωνεί με την συνεπαγωγή « $\Rightarrow$ », τα κάτω σύνολα (κόσκινα) των Isham et al. θα αντιστοιχούν σε *άνω* σύνολα στο $(P\ ,\ \leq)$. Αυτό εκφράζεται και από το γεγονός ότι υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των προδεσμίδων **G** και **Ω**.

Όλα αυτά δεν είναι σχολαστική λεπτολογία γύρω από τις συμβατικότητες του συμβολισμού. Διότι, εάν μετακινηθούμε στο επίπεδο της σημασιολογίας, γίνεται προφανής η σύνδεση με την θεμελιώδη έννοια ενός *μοντέλου Kripke·* το σημείο σύνδεσης είναι η τροποποιημένη έννοια αποτίμησης βάσει ακολουθιών λογικών σχέσεων. Τα μοντέλα αυτά εισήχθησαν το 1965 από τον Saul Kripke στα πλαίσια της ιντουισιονιστικής λογικής [33, 69, 71, 75]. Όπως και πολλές άλλες μαθηματικές έννοιες, η νοηματική τους αξία και η χρήση τους υπερβαίνει το πλαίσιο στο οποίο αρχικά αναδύθηκαν. Χονδρικά, ένα τέτοιο μοντέλο είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο P, που ονομάζεται και «πλαίσιο» και αντιπροσωπεύει δυνατά στάδια γνώσης, μαζί με το σύνολο P^+ των κληρονομικών υποσυνόλων τού P. Αυτό σημαίνει ότι το A είναι στο P^+ εάν και μόνον εάν το A είναι υποσύνολο του P, και εάν για κάθε x και y, όπου $x \in A$ και $x \leq y$, έχουμε $y \in A$. Με άλλα λόγια, το P^+ είναι το σύνολο των άνω υποσυνόλων τού P σύμφωνα με την σχέση $\leq$. Ακόμη, μια *αποτίμηση* V σε ένα τέτοιο μοντέλο απεικονίζει προτασιακές σταθερές σε μέλη τού P^+. Για ένα τέτοιο μοντέλο M = (P, V), η πρόταση «το α είναι αληθές στο M στο στάδιο p», συμβολιζόμενη με $M\vDash_p\alpha$, ορίζεται επαγωγικά ξεκινώντας από το $M\vDash_p p_i$ εάν και μόνον εάν το p_i είναι στο V(p), για προτασιακές σταθερές p_i. Οι λογικές πράξεις ορίζονται με τρόπο κατάλληλα προσαρμοσμένο σε αυτές τις έννοιες. Σημειωτέον ότι το P^+ είναι μια άλγεβρα Heyting. Ακόμη, τα μέλη τού P^+, δηλαδή τα άνω σύνολα, δηλαδή οι αποτιμήσεις των προτασιακών σταθερών, είναι *βάση* μιας τοπολογίας στο P, της *άνω τοπολογίας*. Η δομή άλγεβρας Heyting του P^+ που προκύπτει από το (P, V) είναι η ίδια με εκείνη που προκύπτει από αυτήν την άνω τοπολογία. Τέλος, η εγκυρότητα (validity) κατά Kripke είναι ειδική περίπτωση της εγκυρότητας κατά Heyting. Η ομοιότητα με τα κόσκινα και τις απεικονίσεις αποτίμησης που εισάγουν οι Isham et al. είναι προφανής.

Γενικότερα, εάν L είναι μια πρωτοβάθμια τυπική γλώσσα με ισότητα, οι L-δομές (στην βάση των οποίων ορίζονται μοντέλα θεωριών που διατυπώνονται στην L) και οι L-μορφισμοί μεταξύ τους (που διατηρούν σχέσεις, πράξεις και σταθερές) σχηματίζουν την κατηγορία **Lmod**. Τότε μια L-δομή Kripke επί ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου (P, $\leq$), θεωρουμένου ως κατηγορίας, είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής από το P στην **Lmod**. Με φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ τέτοιων συναρτητών ως μορφισμούς, σχηματίζεται η κατηγορία K(P, L) τέτοιων δομών Kripke. Στην γλώσσα της θεωρίας των κατηγοριών, μια L-δομή Kripke είναι ένα P-διάγραμμα στην κατηγορία **Lmod.** Αναλυτικά, είναι μια οικογένεια $M = (M_p\,;\,\mu_{pq})$, όπου $p \leq q$ στο P, τα M_p, με $p \in P$, είναι μια οικογένεια L-δομών, τα μ_{pq} είναι L-μορφισμοί μ_{pq}: $M_p \rightarrow M_q$ όταν $p \leq q$ και $\mu_{pp} = Id_{M_p}$, και με την ιδιότητα $\mu_{pr} = \mu_{qr}\circ\mu_{pq}$ εάν $p \leq q \leq r$. Στην βάση αυτών των εννοιών ορίζεται η σημαντική έννοια του «*καταναγκασμού*» (forcing). Στην στοιχειωδέστερη περίπτωση, ορίζεται ως εξής. Έστω (P, $\leq$) ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, $M = (M_p\,;\,\mu_{pq})$ μια L-δομή Kripke επί του P, $\phi(v_1,\ldots, v_n)$ ένας L-τύπος, $p \in P$ και $\overline{x}$ □ $(x_1,\ldots,x_n) \in M_p^n$. Ορίζεται τότε η σχέση $M_p \Vdash \phi[\overline{x}]$, που διαβάζεται «η M_p αναγκάζει την ϕ στο $\overline{x}$», με επαγωγή στην συνθετότητα. Το πρώτο βήμα, εάν ϕ είναι ατομικός τύπος, είναι: $M_p \Vdash \phi[\overline{x}]$, εάν και μόνον εάν $M_p \vDash \phi[\overline{x}]$, δηλαδή το ίδιο με την ικανοποίηση (satisfaction).

Δεν αναφέρομαι σε όλα τα βήματα, παρά μόνον ενδεικτικά στα εξής:

$M_p \Vdash \phi\wedge\psi[\bar{x}] \Leftrightarrow M_p \Vdash \phi[\bar{x}]$ και $M_p \Vdash \psi\,[\bar{x}]$

$M_p \Vdash \neg\phi[\bar{x}] \Leftrightarrow\ \forall q \geq p$, δεν είναι αληθές ότι $M_q \Vdash \phi[\mu_{pq}(\bar{x})]$

$M_p \Vdash \exists v\phi[v\,;\,\bar{x}] \Leftrightarrow\ \exists y \in M_p$ τέτοιο ώστε $M_p \Vdash \phi[y\,;\,\bar{x}]$

$M_p \Vdash \forall v\phi[v\,;\,\bar{x}] \Leftrightarrow\ \forall q \geq p$ και $\forall y \in M_q$, $M_q \Vdash \phi[y\,;\,\mu_{pq}(\bar{x})]$.

Η έννοια του καταναγκασμού γενικεύει την έννοια της ικανοποίησης. Σημειωτέον ότι στην περίπτωση που το p είναι μέγιστο σημείο τού P, δηλαδή $\uparrow(p)=\{p\}$, και $\phi(v_1,\ldots,v_n)$ είναι τύπος στην L, τότε για κάθε $\bar{x} \in M_p^n$ ισχύει ότι $M_p \Vdash \phi[\bar{x}]$ εάν και μόνον εάν ισχύει $M_p \vDash \phi[\bar{x}]$.

Ας σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι η σημασιολογία Kripke μπορεί να οριστεί και στην περίπτωση συνηθισμένων διατυπώσεων κβαντικής λογικής, βάσει ορθοσυμπληρωμένων πλεγμάτων που γενικεύουν την άλγεβρα των κλειστών υποχώρων ενός χώρου Hilbert. Εν τούτοις, υπάρχει μια σημαντική διάκριση μεταξύ της *λογικής της ομοιότητας* (similarity logic) και της *γνωσιολογικής λογικής* (epistemic logic) [33]. Στην πρώτη περίπτωση, οι διμελείς σχέσεις «προσβασιμότητας» (accessibility) που συνδέουν τα διάφορα στάδια μεταξύ τους είναι συμμετρικές και τα αντίστοιχα πλέγματα δεν είναι επιμεριστικά· σε αυτά ανήκουν οι συνήθεις «κβαντικές λογικές». Στην δεύτερη περίπτωση, οι σχέσεις προσβασιμότητας είναι μεταβατικές – στην περίπτωσή μας είναι οι σχέσεις συνεπαγωγής– και τα αντίστοιχα πλέγματα είναι επιμεριστικά· είναι η περίπτωση της ιντουισιονιστικής λογικής. Η πρώτη περίπτωση έχει οντολογικό χαρακτήρα, δηλαδή προσιδιάζει σε φυσικές θεωρίες οι οποίες ενδιαφέρονται για σύνολα φυσικών καταστάσεων που μπορεί να είναι όμοιες, άρα αντιστοιχούν σε *δυνατούς κόσμους*, και όπου οι *καταστάσεις γνώσης* εντοπίζουν κάποια αναλλοίωτα μεγέθη (εδώ υπεισέρχεται η συμμετρία των σχέσεων). Με το θέμα μας συνδέεται η δεύτερη περίπτωση. Είναι ένας φορμαλισμός ο οποίος κινείται σε γνωσιολογικό επίπεδο, καθώς προσιδιάζει σε αναπτυσσόμενες φυσικές θεωρίες, δηλαδή θεωρίες που ενδιαφέρονται για *δυνατές καταστάσεις γνώσης* ως προς έναν σταθερό κόσμο. Ως εκ τούτου, είναι φορμαλισμός κατάλληλος να εκφράσει όψεις της επιστημονικής πρακτικής.[29]

Ένα συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί από όλα αυτά [Θ]. Υπάρχει μια καλώς παγιωμένη μαθηματική δομή, των μοντέλων Kripke, η οποία ορίζεται πάνω σε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο P και, κατ’ επέκτασιν, πάνω στο μερικώς διατεταγμένο

[29] Η περίπτωση που εξετάζουν οι Isham et al. είναι δυνατόν να αποδοθεί με την έννοια του οιονεί μοντέλου Kripke (quasi-model) οπότε η ικανοποίηση των σχετικών συνθηκών θα σημαίνει πραγματοποίηση (realization), σε αντιδιαστολή προς την επαλήθευση (verification) η οποία αντιστοιχεί στην έννοια του μοντέλου [33].

σύνολο που συνιστά το αντίθετο της άνω τοπολογίας, □^{op}, στο P, και η οποία συνδέει το P ή το □^{op} με τους τύπους μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας L. Αυτή η δομή εγγενώς διαθέτει δύο έννοιες:

(α) Την έννοια της *έκτασης*. Διαισθητικά, αυτή εισάγει μια διαβάθμιση στο κατά πόσον ένας τύπος ικανοποιείται ή όχι με το κλασικό νόημα του όρου. Προσφέρει συνεπώς ένα πλαίσιο για την διατύπωση μιας έννοιας μερικής αλήθειας.

(β) Την έννοια της *τιμής*. Αυτή συνδέεται άμεσα με την έννοια της έκτασης, και αποδίδει σε έναν τύπο τιμές που ανήκουν σε άνω (ανοικτά) σύνολα ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου (ή εκείνου που συνιστά η αντίθετη της άνω τοπολογίας σε αυτό).

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο, θα επισημάνω ότι στις εργασίες που επικαλέστηκα, και ιδιαίτερα σε εκείνες των Isham et al., προϋποτίθεται το εξής. Διαισθητικά, αποδίδονται τιμές σε φυσικά μεγέθη συνδεδεμένα με ιδιότητες. Εδώ, όμως, έχουμε μια μετατόπιση προς την απόδοση αληθοτιμών σε *προτάσεις* περί του φυσικού κόσμου. Αντί για μια «φυσική γλώσσα», επικεντρωνόμαστε στην γλώσσα ενός *λόγου* περί του κόσμου. Τούτο αντικατοπτρίζει την εισαγωγή ενός μη διαισθητικού φορμαλισμού, ως όρου για την μετάβαση από την αμεσότητα προς την διαμεσολαβημένη γνώση, γεγονός που ίσχυε εξ ίσου και στην κλασική φυσική επίσης. Εκείνο που δεν ήταν σαφές, και τώρα μπορεί να αρχίσει να αποσαφηνίζεται, είναι ότι δεν υπάρχει *απόλυτη* διαφορά μεταξύ διαμεσολάβησης και αμεσότητας· η διαφορά είναι μεταξύ του διαμεσολαβημένου, αφ' ενός, και, αφ' ετέρου, του υπό διαμεσολάβησιν που ισούται με το αποτέλεσμα της διαμεσολάβησής του. Η συσκότιση της εν λόγω διαφοράς οφείλεται στην σύγχυση μεταξύ διαδικασίας και αποτελέσματος της διαδικασίας. Στην περίπτωση που είδαμε εδώ, η πλαισιακότητα βασίζεται στο γεγονός ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι πραγμάτωσης μιας διαδικασίας. Ισοδύναμα, κάθε φορά πραγματώνεται μία από πολλές δυνατότητες. Επισημαίνω ότι στον φορμαλισμό των μοντέλων Kripke, υπό το πρίσμα του ιντουισιονισμού και της κατασκευαστικής προσέγγισης στα μαθηματικά, «*Η αλήθεια επικαθορίζεται χρονικά*» και «*... κάθε χρονική στιγμή συνδέεται με ένα ορισμένο* ***στάδιο****, ή* ***κατάσταση*** *γνώσης ... Λέμε έτσι ότι οι προτάσεις είναι "αληθείς σε ένα ορισμένο στάδιο" ή "αληθείς σε μια ορισμένη κατάσταση γνώσης"*», οπότε «*Οι θεωρούμενες καταστάσεις δεν ακολουθούν πάντα η μία την άλλη σε γραμμική ακολουθία επειδή είναι* ***δυνατές*** *καταστάσεις γνώσης, όχι απλώς εκείνες που πραγματώνονται ενεργεία*» ([69, σ. 188], έμφαση στο πρωτότυπο). Αλλά, έστω και αν η κατασκευαστικότητα στα μαθηματικά δεν υιοθετείται –και όντως δεν υιοθετείται εδώ–, οι παρατηρήσεις που μόλις παρέθεσα έχουν εφαρμογή στην διαδικασία απόκτησης γνώσης που ακολουθεί η θεωρητική φυσική. Σε μια λεπτομερέστερη εξέταση αυτών των ζητημάτων στρεφόμαστε τώρα.

Μην προσπαθείτε να κάνετε μιαν επανάσταση

και ταυτόχρονα να την ελαχιστοποιήσετε.

H. Putnam

Κεφάλαιο V. Η εισβολή του τυχαίου

5.1 Δυνάμει και ενεργεία

Εάν πάρουμε υπ' όψιν τις παρατηρήσεις που έκανα στην §4.9 σχετικά με τον ορισμό των διατάξεων, μπορούμε να πούμε ότι οι μερικές διατάξεις που χρησιμοποιούν οι Isham et al., μαζί και οι έννοιες της αποτίμησης σε κόσκινα, μπορούν να ενταχθούν σε ένα πλαίσιο παρόμοιο με εκείνο των μοντέλων Kripke. Αυτός είναι ο λόγος που ισχυρίστηκα ότι τα χαρακτηριστικά του φορμαλισμού των Isham et al., τα οποία αυτοί οι συγγραφείς προβάλλουν ως κίνητρο για την προσέγγισή τους, μπορεί να είναι κάτι πολύ περισσότερο. Θυμίζω ότι κυρίως πρόκειται για δύο τέτοια χαρακτηριστικά:

(α) Η φιλοσοφική θέση ότι ο «βαθμός αλήθειας» μιας πρότασης μπορεί να αποτιμηθεί ανάλογα με το πλήθος των λογικών συνεπειών της που αληθεύουν με την κλασική έννοια.

(β) Η κεντρική θέση που κατέχει μια λογική Heyting, η οποία, αφ' ενός, είναι συμβατή με τον τρόπο που διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε την «λογική» ως θεμελιώδεις όρους της σκέψης με την χρήση εννοιών και κατηγοριών, ενώ, αφ' ετέρου, είναι αρκετά «μη κλασική» ώστε να συλλαμβάνει κάποιες όψεις της ιδιαιτερότητας των κβαντικών φαινομένων, υπερβαίνοντας τις κλασικές άλγεβρες Boole, χωρίς όμως να καταφεύγει σε συμβατικές χρήσεις του όρου «λογική».

Η δυνατότητα να ενταχθούν αυτές οι τοποθετήσεις σε ένα συγκροτημένο μαθηματικό πλαίσιο είναι το «κάτι περισσότερο» από κίνητρο. Ασφαλώς, μια τέτοια «μεταγραφή», τρόπον τινά, στο επίπεδο του φορμαλισμού δεν απαντά καθ' εαυτή σε φιλοσοφικά ερωτήματα. Θα πρέπει, άρα, να εξετάσουμε πώς αυτά αναδιατυπώνονται. Κατά βάσιν, η ιδέα ήταν να εκφραστεί το γεγονός ότι, αν το φυσικό μέγεθος A έχει ορισμένη τιμή, τότε έχει ορισμένη τιμή και κάθε f(A) για μια συνάρτηση Borel, f. Τα μοντέλα Kripke, όμως, υπερβαίνουν αυτήν την απλή περίπτωση. Δύο παρατηρήσεις χρειάζονται εδώ:

(i) Η έννοια του *καταναγκασμού* εισάγει ένα στοιχείο κατασκευαστικότητας στην σχέση λογικής συνεπαγωγής, όπως αυτή ενσωματώνεται στον φορμαλισμό των μοντέλων Kripke. Ακριβέστερα, θα έπρεπε να μιλάμε για «αποδείξιμη συνεπαγωγή», εννοώντας μια κατασκευαστικού τύπου απόδειξη.

(ii) Ένα μοντέλο Kripke μπορεί να θεωρηθεί σαν μια γνωσιοθεωρία κατά την οποία τα «στάδια γνώσης» είναι αμετάβλητο κεκτημένο. Η γνώση αναπτύσσεται κατά τρόπον σωρευτικό, χωρίς τα επόμενα στάδια να αναθεωρούν ή να διορθώνουν τα προγενέστερα.

Φυσικά, η μέθοδος της θεωρητικής φυσικής καθόλου δεν μοιάζει με αυτά τα δύο χαρακτηριστικά. Και αναθεωρήσεις επιδέχεται, και διορθώσεις και, βεβαίως, επαναστάσεις. Η εισαγωγή μαθηματικών κατασκευών σαν τις παραπάνω δεν συνιστά προσομοίωση της μεθόδου της φυσικής. Η αξία τους έγκειται στο ότι βοηθούν να γίνει ρητή μια διάκριση μεταξύ δύο όψεων της επιστημονικής διαδικασίας. Η μία είναι η πρακτική, που υποβάλλει την θεωρία σε δοκιμασία, την ελέγχει, την επιβεβαιώνει ή την αναθεωρεί, και κάποτε την ανατρέπει. Η άλλη όψη −και σε αυτήν αναφέρομαι εδώ−, μπορεί να ονομαστεί «θεωρησιακή» (contemplative). Εδώ κινούμαστε στο πλαίσιο του *ήδη γνωστού*. Συνδυάζουμε τις μαθηματικοποιημένες έννοιες μιας φυσικής θεωρίας με στόχο, μέσα από πεπερασμένο πλήθος βημάτων, εν είδει αλγορίθμου, να διατυπώσουμε προβλέψεις επιδεχόμενες έλεγχο. Είναι μια διαδικασία η οποία αντιμετωπίζει τον πρακτικό έλεγχό της σαν κάτι εξωτερικό. Οι δύο αυτές όψεις τέμνουν −χωρίς να ταυτίζονται μαζί τους− τις δύο συνιστώσες οι οποίες στην σύνθεση και αλληλοδιείσδυσή τους συναπαρτίζουν την θεωρητική φυσική: τα μαθηματικά και το πείραμα. Αυτό είναι ένα λεπτό σημείο· να το διευκρινίσω, επισημαίνοντας ότι στον όρο «πρακτική» δίνω γενικευμένη σημασία [76], περιλαμβάνοντας τις διαδικασίες ελέγχου και επικύρωσης που διεξάγονται με την μαθηματική πρακτική και τις τεχνικές της, και όχι μόνον εκείνες που αφορούν την συνιστώσα «πειραματική φυσική». Αντιστοίχως, η μαθηματική επεξεργασία φυσικών εννοιών οδηγεί σε γνήσια καινούργια συμπεράσματα και καθόλου δεν περιορίζεται στο ήδη γνωστό. Έχοντας αυτό υπ΄ όψιν, στην συνέχεια θα περιοριστώ στο μέρος εκείνο της πρακτικής που είναι το πείραμα και η μέτρηση.

Στο θεωρησιακό επίπεδο, λοιπόν, δηλαδή εντός των ορίων του ήδη γνωστού στο πεδίο μιας φυσικής θεωρίας, διατυπώνονται συλλογισμοί και συγκεκριμενοποιούνται προβλέψεις, οι οποίες αφορούν αυτό που *είναι δυνατόν* να συμβεί, *εάν* πραγματοποιηθεί ένα πείραμα ή μια μέτρηση. Το ίδιο συμβαίνει στην περίπτωση μιας *υπόθεσης*, οι λογικές συνέπειες της οποίας, σύμφωνα με την θεωρία, διαμορφώνουν ελέγξιμες προβλέψεις. Με την κρίσιμη παραδοχή ότι οι οντότητες που θέτει η θεωρία μας *έχουν αντικειμενική ύπαρξη*, και με την προϋπόθεση ότι η θεωρία μας είναι ώριμη και εμπειρικά επαρκής ως προς την προβλεπτική της ικανότητα,[30] στην θεωρητική φυσική η πρόβλεψη αφορά το *δυνάμει* και ο προσδιορισμός της γίνεται στα πλαίσια αυτού που ονόμασα θεωρησιακή διαδικασία. Η πραγματοποίηση των προβλεπομένων δυνατοτήτων, η μετάβαση από το δυνάμει στο *ενεργεία*, αφορά την πειραματική όψη της επιστημονικής διαδικασίας. Το μαθηματικό πλαίσιο που επικαλέστηκα προηγουμένως βοηθά να γίνει ρητή η οροθέτηση και ρητή διατύπωση της διαδικασίας που προσδιορίζει το δυνάμει, σε αντιδιαστολή προς την διαδικασία μετάβασης στο ενεργεία. Στην κλασική φυσική, *η διάκριση αυτή συσκοτίζεται*. Άλλωστε, αυτό ακριβώς αντανακλάται στην αμεσότητα της σχέσης κατάστασης και τιμής ενός φυσικού μεγέθους. Εδώ, μια θεωρία που κρίνεται ως πλήρης και επιβεβαιωμένη, ουσιαστικά *ταυτίζει* το δυνάμει με το ενεργεία: το προβλεπόμενο *πρέπει* να πραγματωθεί. Το ενδεχόμενο απόκλισης μεταξύ πρόβλεψης και πειραματικού αποτελέσματος ερμηνεύεται με δύο τρόπους:

α) Ή η θεωρία διαψεύδεται και πρέπει να αναθεωρηθεί ριζικά, ακόμη και να απορριφθεί ολοκληρωτικά.

β) Ή παρεμβαίνει κάποιος παράγοντας, η επίδραση του οποίου *δεν* διαψεύδει την θεωρία, αλλά αντιθέτως την ενισχύει στον βαθμό που σηματοδοτεί την παρουσία ενός στοιχείου, συμβατού μεν με την θεωρία, αλλά που δεν είχε ληφθεί υπ' όψιν διότι η ύπαρξή του ήταν άγνωστη.

Εξ άλλου, η εμφάνιση ενός άγνωστου μέχρι στιγμής στοιχείου που μπορεί να ενσωματωθεί στην υπάρχουσα θεωρία, και έτσι να γίνει γνωστό με τους όρους της θεωρίας, παίρνει την μορφή της *εισβολής του τυχαίου*. Ας το δούμε αυτό στην περίπτωση της κλασικής μηχανικής. Εδώ, μια πρόβλεψη προϋποθέτει δύο στοιχεία, τις εξισώσεις κίνησης και τις αρχικές και οριακές συνθήκες. Όταν οι συνθήκες είναι *δεδομένες*, οι εξισώσεις κίνησης οδηγούν σε προβλέψεις που επιβεβαιώνονται *αναγκαία* από το πείραμα –εάν η θεωρία είναι ορθή. Εάν αυτό δεν συμβεί, ή θα αμφισβητηθεί η ορθότητα της θεωρίας, ή θα παρεισφρύσει το *ενδεχόμενο* (conjuctural), το *τυχαίο*, που θα τροποποιήσει τις *συνθήκες*. Σε αυτήν την προσέγγιση, η αναγκαιότητα είναι πρωταρχική έννοια, ενώ το τυχαίο έχει εξοριστεί στις συνθήκες. Η ύπαρξή του ισοδυναμεί με την διαδικασία της μετατροπής αυτού που δεν είναι ακόμη γνωστό σε αυτό που είναι ήδη γνωστό –δηλαδή, του πράγματος καθ΄ εαυτού

[30] Οι παραδοχές αυτές προσιδιάζουν στο ρεαλιστικό φιλισοφικό ρεύμα και θα εξεταστούν διεξοδικότερα στην συνέχεια.

σε πράγμα για εμάς. Αυτή ακριβώς η αντίληψη εκφράζεται με την ρήση τού Laplace, «εάν ήταν γνωστές όλες οι αρχικές συνθήκες», θα προβλέπαμε με απόλυτη βεβαιότητα τα πάντα. Η κλασική –μηχανιστική– αντίληψη περί φυσικής, στο *οντολογικό* επίπεδο εκφράζεται με την θέση ότι η αντικειμενική σημασία, η «ύπαρξη» ενός φυσικού μεγέθους, *ταυτίζεται* με την δυνατότητα απόδοσης μιας τιμής σε αυτό το μέγεθος. Μέσα στα όρια ανοχής που προσδιορίζει η θεωρία και οι συνθήκες διεξαγωγής ενός πειράματος, μια μέτρηση θα επιβεβαιώνει την προβλεπόμενη τιμή. Η διαδικασία της μέτρησης έχει αποφασιστικό μεν, πλην όμως επικουρικό χαρακτήρα, και δεν κατέχει κάποια θέση στο σώμα της θεωρίας. Στο *γνωσιολογικό* επίπεδο, θεωρείται –ορθώς– ότι δεν υπάρχει *κατ' αρχήν* διάκριση μεταξύ του όχι-ακόμη-γνωστού και του ήδη γνωστού. Το πρώτο διαρκώς μετατρέπεται στο δεύτερο στην πορεία της διερεύνησης της φύσης, η μεταξύ τους διάκριση είναι ένα μετατοπιζόμενο γνωσιολογικό όριο. Αλλά, κατά την μηχανιστική αντίληψη, το τυχαίο έχει μόνον *γνωσιολογικό* χαρακτήρα, εκφράζοντας απλώς αυτό το μετατοπιζόμενο όριο. Δηλαδή, στην –ορθή– ως άνω μη διάκριση, διαλύεται άρρητα η διάκριση μεταξύ τυχαίου και αναγκαίου. Η *απολυτοποίηση* της μηχανιστικής θέσης είναι ασυμβίβαστη με την κβαντική θεωρία. Εδώ ακριβώς αναδεικνύεται μια θεμελιώδης διαφορά ανάμεσα στο κβαντικό και το κλασικό. Στο κβαντικό, τίθεται ρητά η διάκριση ανάμεσα στο *δυνάμει* και το *ενεργεία*. Στο κλασικό, αυτό που είναι *δυνάμει* συμπίπτει με το *ενεργεία*.

Ο φορμαλισμός που εξετάζω αποδίδει σε μια κβαντική πρόταση, η οποία θεωρητικά υπολογίζεται ως *δυνάμει*, ως γενικευμένη τιμή, μιαν ιεραρχία (κόσκινο) λογικών συνεπειών της, για τις οποίες βεβαιώνεται ότι το δικό τους δυνάμει συμπίπτει με το ενεργεία τους, δηλαδή επιδέχονται κλασικού τύπου αποτίμηση. Είναι το πλεονέκτημα του φορμαλισμού ότι μια τέτοια σύγκριση, κατά τα άλλα γνώριμη στο επίπεδο των φιλοσοφικών συζητήσεων γύρω από την φύση του κβαντικού,[31] την ενσωματώνει και την παρουσιάζει ως δικό του θεμελιώδες εσωτερικό στοιχείο. Τώρα, μια φυσική θεωρία ενσωματώνει στο *θεωρητικό* της πλαίσιο και το πέραν του θεωρησιακού: το πείραμα, και ειδικά την μέτρηση. Στην κβαντική θεωρία, η πειραματική πράξη παίζει ρόλο *συνδιαμορφωτικό* του υπό εξέτασιν γεγονότος, λόγω του φαινομένου της συζευξιμότητας (entanglement) και της απορρέουσας από αυτό *μη διαχωρισιμότητας* που διαφοροποιεί από τις κλασικές προσεγγίσεις, καθιστώντας αναγκαία την εισαγωγή της *πλαισιακότητας*. Όπως εξηγεί ο Καρακώστας, «*Η εισαγωγή του πειραματικού πλαισίου προσφέρει ακριβώς τις συνθήκες στη βάση των οποίων ένα κβαντικό γεγονός εκδηλώνει την ύπαρξή του. Δηλαδή, το πειραματικό πλαίσιο λειτουργεί όχι ως διαμεσολαβητικός παράγοντας πιστοποίησης προ-δεδομένων στοιχείων ή γεγονότων, αλλά ως* ***μορφοποιητικός*** *παράγοντας για τον παραγωγικό καθορισμό ενός γεγονότος. Οι ιδιαίτερες συνθήκες του πλαισίου συνιστούν αναπόσπαστη συνιστώσα της συγκρότησης του κβαντικού γεγονότος, και όχι απλώς*

[31] Ήδη ο Heisenberg αναφέρεται στο *δυνάμει*, επικαλούμενος τον Αριστοτέλη, και το συνδέει με τις κβαντικές πιθανότητες [77]. Για μια σύγχρονη προσέγγιση, βλέπε [37, 38] και τις εκεί παραπομπές.

εργαλειακή επέμβαση στο κατά τα λοιπά "αυθεντικό" και "εννοιακά αμόλυντο" περιεχόμενό του» ([36, σ. 240], έμφαση στο πρωτότυπο). Η διάκριση του δυνάμει από το ενεργεία εγκαθίσταται έτσι στα θεμέλια της θεωρίας. Συνεπώς, εάν υποθέσουμε ότι έχουμε μιαν *ισχύουσα* θεωρία, η ενδεχόμενη διαφορά μεταξύ πρόβλεψης και αποτελέσματος μέτρησης δεν οφείλεται μόνον στα περιθώρια σφάλματος ή σε παράγοντες που δεν έχουν ληφθεί υπ' όψιν και επιβάλλουν διορθώσεις ή τροποποιήσεις στην θεωρία. Επιπρόσθετα, η θεωρία η ίδια προβλέπει ένα «έλλειμμα», το οποίο έχει ως γνωστόν ονομαστεί «αβεβαιότητα», και εκφράζεται στον φορμαλισμό με την παρουσία μη μετατιθέμενων τελεστών. Για να το εκφράσω αλλιώς, η θεωρία έχει την δυνατότητα να διατυπώσει μέσα στο δικό της σώμα τα *όριά* της, *χωρίς* να αντιφάσκει με τον εαυτό της, να αναγνωρίζει την ανάγκη να καλυφθεί το έλλειμμά της με την επέκταση *πέραν* του θεωρησιακού, αφήνοντας αυτό το καθήκον στο πείραμα και την μέτρηση. Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίο εκείνο που κλασικά θα εθεωρείτο ως όριο για την γνώση αποκαλύπτεται ότι είναι όρος δυνατότητας για την γνώση. Στο κβαντικό επίπεδο, εκ πρώτης όψεως φαίνεται να υπάρχει *έλλειμμα* εν σχέσει με το κλασικό, κατά το ότι περιοριζόμαστε σε σύνολα αμοιβαίως μετατιθέμενων τελεστών–φυσικών μεγεθών, ή, π.χ., καθ' όσον αποκλείεται ο ταυτόχρονος καθορισμός τιμών συζυγών φυσικών μεγεθών. Η κβαντική εικόνα φαντάζει έτσι ως το «ήμισυ» μιας κλασικής εικόνας. Το αντίθετο συμβαίνει: η «απροσδιοριστία» δεν σημαίνει λιγότερα, αλλά *περισσότερα*. Δεν συρρικνώνονται οι γνωστικές δυνατότητες, *επεκτείνονται οι φυσικές δυνητικότητες*. Έχουμε γνησίως πλουσιότερα *δυνάμει* και όχι την *μονοσήμαντη* μετάβαση σε καθορισμένα ενεργεία. Η παρουσία του τυχαίου, η αβεβαιότητα και το φαινομενικό έλλειμμα πληροφοριών δεν σημαίνουν λιγότερες δυνατότητες γνώσης, σημαίνουν περισσότερες δυνητικότητες στην *φύση*, οι οποίες ανιχνεύονται μέσω της πειραματικής πρακτικής. Πρόκειται για ριζική τομή. Η θεωρία συμπεριλαμβάνει την *πράξη* στο δικό της *θεωρητικό* πλαίσιο, ως την πλέον κρίσιμη κατηγορία της. Αν θυμηθούμε την παρομοίωση του υβριδίου της νοηματοδοτημένης εμπειρίας με τις δύο όψεις ενός νομίσματος, το μη εξαλείψιμο έλλειμμα στο οποίο αναφέρομαι τώρα αντιστοιχεί στο μη μηδενικό «πάχος» του νομίσματος, ενώ η παραγνώριση αυτής της πραγματικότητας είναι αυτό που ονόμασα υπερβατολογική ψευδαίσθηση. Με αυτά τα δεδομένα, μια ρεαλιστική τοποθέτηση μπορεί να υποστηριχτεί στις εξής πολύ γενικές κατευθύνσεις:

α) Με τις διάφορες «εναλλακτικές» θεωρίες (π.χ., κρυμμένες μεταβλητές) που με τον έναν ή τον άλλον τρόπο υποθέτουν ότι η τρέχουσα θεωρία είναι μη πλήρης.

β) Με την διατήρηση της ρεαλιστικής οντολογικής θέσης, συνοδευόμενης όμως από γνωσιολογικές τροποποιήσεις. Σε γενικές γραμμές, οι τελευταίες ερμηνεύουν την «αβεβαιότητα» υιοθετώντας διάφορες παραλλαγές του καντιανού διαχωρισμού μεταξύ πράγματος καθ΄ εαυτού και πράγματος για εμάς. Σε αυτήν την περίπτωση, αυτό που ονόμασα προηγουμένως «γνωσιολογικό όριο» επικαλύπτεται από έναν «γνωσιολογικό φραγμό», πίσω από τον οποίο βρίσκεται το κατ' αρχήν μη γνώσιμο. Το τυχαίο εδώ διατηρεί τον γνωσιολογικό του χαρακτήρα.

γ) Με την διατήρηση της γνωσιολογικής θέσης για την γνωσιμότητα του κόσμου, αλλά με μια σημαντική τροποποίηση στο οντολογικό επίπεδο. Αυτή συνίσταται στην ριζική απομάκρυνση από την κλασική θέση περί γνωσιολογικού χαρακτήρα του τυχαίου, και την απόδοση σε αυτό *οντολογικού* status.

Αυτή η τρίτη θέση είναι εκείνη που υποστηρίζω εδώ. Στο επίπεδο της μαθηματικής μορφής της θεωρίας, τα χαρακτηριστικά του φορμαλισμού που επεσήμανα προσφέρονται για αυτόν τον σκοπό. Με άλλα λόγια, η ρητή διάκριση του δυνάμει από το ενεργεία, και συνεπώς η διατύπωση της θεωρίας έτσι ώστε να περιλαμβάνει το εξω-θεωρησιακό, πρακτικό στοιχείο, όχι ως στοιχείο επιβεβαίωσης, διάψευσης ή διόρθωσης, αλλά ως ουσιώδες βήμα στην γνωστική διαδικασία, συγκεκριμενοποιεί την αρένα όπου αναδύεται το οντολογικά αναβαθμισμένο τυχαίο.

Δύο παρατηρήσεις είναι αναγκαίες:

(i) Δεν καταφεύγουμε σε «εναλλακτικές» θεωρίες. Παραμένουμε στο «κύριο ρεύμα», αλλά αξιοποιούμε τις εμβαθύνσεις, τις μετατοπίσεις και τις αλληλοσυνδέσεις στο μαθηματικό εννοιολογικό πλαίσιο που προσφέρει η σύγχρονη πρακτική των μαθηματικών και της φυσικής.

(ii) Η οντολογική αναβάθμιση του τυχαίου δεν εξαλείφει, φυσικά, την διάκρισή του από το αναγκαίο. Τίθεται άρα το ερώτημα, πώς διακρίνονται αυτά τα δύο στο οντολογικό τώρα επίπεδο;

Για να προσεγγίσουμε αυτό το ερώτημα, θα χρειαστεί να επιστρέψουμε στην ανασκόπηση του μαθηματικού φορμαλισμού, αυτήν την φορά στην σημασία των αλγεβρών Heyting που έχουμε συναντήσει.

5.2 Υπαγωγή του κλασικού στο μη-κλασικό

Το ερώτημα που έθεσα συνδέεται ευθέως με την κβαντική «αβεβαιότητα», η οποία, με την σειρά της, είναι ταυτόσημη με τον φορμαλισμό των γενικά μη μετατιθέμενων τελεστών. Ένα πρώτο βήμα στην προσέγγιση που υιοθετώ είναι ο προσδιορισμός της σημασίας της μη μεταθετότητας, εάν δεχτούμε ότι αυτή δεν συνιστά μαθηματική μορφή της καντιανού τύπου αγνωσιμότητας. Επαναλαμβάνω ότι ακριβώς η μη μεταθεσιμότητα των μαθηματικών εκπροσώπων των φυσικών μεγεθών οδηγεί στην εισαγωγή του φορμαλισμού των χώρων Hilbert (ή των C*-αλγεβρών) με τα επακόλουθα, όπως οι υπερθέσεις, η συζευξιμότητα κ.λπ. Στην γραμμή της μεθόδου που ακολουθώ, θα αναζητήσω την σημασία της μη μεταθετότητας σε σχέση με το αντίθετό της, δηλαδή την σημασία της μεταθετότητας. Προς τούτο, θα αξιοποιήσω το γεγονός ότι η μεταθετότητα συνδέεται με τις άλγεβρες Boole. Αυτό ισχύει τόσο για την κλασική φυσική (ατομικές πλήρεις άλγεβρες Boole), όσο και για τους «κλασικόμορφους» τομείς της κβαντικής θεωρίας (πλήρεις άλγεβρες Boole, χώροι Stone). Είδαμε ότι οι πλήρεις άλγεβρες Heyting, γενικεύσεις των αλγεβρών Boole, είναι η μαθηματική δομή των αντικειμένων ενός locale. Επίσης, ότι μια άλγεβρα Heyting A είναι άλγεβρα Boole εάν και μόνον εάν $\neg\neg a = a$, $\forall a \in A$. Γενικά, ένα στοιχείο a που ικανοποιεί αυτήν την σχέση ονομάζεται σύνηθες (regular). Έστω $A_{\neg\neg}$ το σύνολο των συνήθων στοιχείων ενός locale A. Μας ενδιαφέρει το εάν και πώς μια άλγεβρα Boole μπορεί να υπαχθεί σε ένα οποιοδήποτε locale. Θα θέλαμε, δηλαδή, μια άλγεβρα Boole να θεωρηθεί η ίδια ως locale και με κατάλληλον τρόπο ως υπο-locale κάποιου locale. Αυτό είναι δυνατόν, αλλά όχι τόσο απλό. Εδώ μας είναι απαραίτητος ο πολύ γενικός ορισμός της έννοιας μιας *τοπολογίας*. Αυτή η έννοια περιλαμβάνει την έννοια της τοπολογίας Grothendieck που έχουμε συναντήσει, η οποία μπορεί να αναχθεί στην έννοια ενός «εσωτερικού» πυρήνα στον ταξινομητή υποαντικειμένων σε έναν τόπο.

Ας δούμε πρώτα μια τοπολογική περίπτωση [68, σ. 198]. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, και E η κατηγορία των προδεσμίδων επί του X, δηλαδή των συναρτητών από το αντίθετο του πλέγματος των ανοικτών συνόλων U στην κατηγορία **Set.** Έστω F μια τέτοια προδεσμίδα. Θα μπορούσε να είναι, π.χ., η προδεσμίδα των πραγματικών συναρτήσεων επί του X. Μπορεί τότε να οριστεί μια ενδοσυνάρτηση $\mathbf{j}F$ του συνόλου των υποσυναρτητών (δηλαδή, υποπροδεσμίδων) του F. Αυτό σημαίνει ότι η $\mathbf{j}F$ στέλνει την υποπροδεσμίδα G της F στην υποπροδεσμίδα $\mathbf{j}F(G)$. Η τελευταία ορίζεται ως εξής: Για ένα ανοικτό σύνολο U του X, το σύνολο $\mathbf{j}F(G)(U)$ είναι το σύνολο εκείνων των στοιχείων x του συνόλου F(U) για τα οποία υπάρχει ένα κάλυμμα $\{U_i \to U\}$ τέτοιο ώστε, για κάθε i, να ισχύει $x|_{U_i} \in G(U_i)$. Ο ορισμός αυτός απλώς αναδιατυπώνει την συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται ώστε η προδεσμίδα F να είναι δεσμίδα, δηλαδή την ιδιότητα της «συγκόλλησης» (pasting). Αποδεικνύεται ότι οι απεικονίσεις $\mathbf{j}F$ είναι οι συνιστώσες ενός φυσικού ενδομορφισμού του συναρτητή που στέλνει το αντικείμενο F της κατηγορίας E στο σύνολο των υποαντικειμένων του, δηλαδή ότι ο $\mathbf{j}$ είναι φυσικός μετασχηματισμός. Επί πλέον, έχει τις ιδιότητες: (α) να είναι αυτοδύναμος, $\mathbf{j}\circ\mathbf{j} = \mathbf{j}$, (β) να είναι πληθωριστικός (inflationary), $A_0 \subseteq \mathbf{j}A(A_0)$

για κάθε υποαντικείμενο A_0 ενός αντικειμένου A, και (γ) να διατηρεί την διάταξη, $\mathbf{j}A(A_0) \subseteq \mathbf{j}A(A_1)$ εάν τα A_0 και A_1 είναι υποαντικείμενα του A με $A_0 \subseteq A_1$. Για να κάνουμε φανερό το νόημα αυτών των κατασκευών, ας δούμε από κοντά την γνωστή περίπτωση συναρτήσεων μεταξύ συνόλων, και ας δούμε τα βήματα μιας σταδιακής γενίκευσης. Μια συνεχής απεικόνιση $X \rightarrow Y$ είναι ταυτόσημη με μια συνεχή *διατομή* της προβολής $f: X \times Y \rightarrow X$ για κάποιον σταθερό χώρο Y. Αλλά τότε η f είναι μια *τετριμμένη δέσμη* (trivial bundle) επί του X, ειδική περίπτωση της έννοιας μιας δέσμης επί του X. Μια πρώτη γενίκευση της συνεχούς απεικόνισης είναι λοιπόν η έννοια της *συνεχούς διατομής μιας δέσμης*, δηλαδή η έννοια μιας συνεχούς απεικόνισης $s: X \rightarrow A$, εάν έχουμε μια δέσμη επί του X, δηλαδή $f: A \rightarrow X$, με συνεχή f, όπου $f \circ s = \mathrm{id}_X$, η ταυτοτική απεικόνιση στον X. Τα σύνολα A_x □ $f^{-1}(x)$, $x \in X$, οι ίνες της δέσμης, είναι μια οικογένεια συνόλων $(A_x)_{x \in X}$ με δείκτες στον X. Το A είναι βεβαίως η ξένη (disjoint) ένωση των A_x. Το κρίσιμο σημείο εδώ είναι, ότι εάν ο X είναι τοπολογικός χώρος με τοπολογία Ω(X), τότε η ιδέα ότι η f είναι συνεχής είναι ταυτόσημη με την ιδέα ότι έχουμε μια τοπολογία στο A, πράγμα που με την σειρά του είναι ταυτόσημο με την ιδέα ότι η οικογένεια A_x είναι «συνεχώς παραμετρισμένη» από τον X. Με άλλα λόγια, έχουμε την έννοια μιας οικογένειας *συνεχώς μεταβαλλομένων συνόλων*. Μπορούμε να *αντιστρέψουμε* τα πράγματα και να ορίσουμε πρώτα την έννοια του συνεχώς μεταβαλλομένου συνόλου, ως *ενός γενικευμένου σύμπαντος συνόλων*, ενσωματώνοντας έτσι την έννοια μιας τοπολογίας *χωρίς ρητή αναφορά* σε αυτήν, όπως είδαμε στην §3.2. Σε αυτήν την κατεύθυνση, θεωρούμε το πλέγμα Ω(X) των ανοικτών υποσυνόλων του X. Τότε, αντί για καθολικές διατομές μπορούμε να θεωρήσουμε *μερικές* (partial) διατομές, οι οποίες θα είναι συνεχείς απεικονίσεις $s: U \rightarrow A$, όπου $U \in \Omega(X)$, τέτοιες ώστε η $f \circ s$ να είναι η σχέση «περιέχεσθαι» $U \rightarrow X$. Το σύνολο των διατομών τής $f: A \rightarrow X$ πάνω από το U συμβολίζεται με Γ(A, f)(U). Η Γ(A, f) είναι ένας συναρτητής $\Omega(X)^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$, και είναι φυσικά αυτό που γνωρίζουμε ως προδεσμίδα. Η συνθήκη συγκόλλησης που κάνει αυτόν τον συναρτητή δεσμίδα, ισοδυναμεί με το να πούμε ότι η διατομή s είναι συνεχής. Είδαμε προηγουμένως ότι όλα αυτά ισοδυναμούν με την ύπαρξη ενός κατάλληλου φυσικού ενδομορφισμού **j** στην κατηγορία των προδεσμίδων, $\Omega(X)^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$. Γνωρίζουμε ακόμη ότι αυτή η κατηγορία είναι ένας τόπος. Με κίνητρο όλα αυτά τα δεδομένα, μπορούμε να *ορίσουμε* μια *τοπολογία* σε μια κατηγορία με pullbacks ως έναν φυσικό ενδομορφισμό του συναρτητή υποαντικειμένων που είναι αυτοδύναμος, πληθωριστικός και διατηρεί την διάταξη. Είναι μια γενίκευση σε ακόμη υψηλότερο επίπεδο από εκείνη της τοπολογίας Grothendieck, η οποία με την σειρά της είναι γενίκευση της γνώριμης έννοιας της τοπολογίας [69, 70, 71]. Αποδεικνύεται ότι εάν σε μια κατηγορία τα υποαντικείμενα μπορούν αναπαρασταθούν από ένα αντικείμενο Ω, όπως συμβαίνει με τον ταξινομητή υποαντικειμένων ενός τόπου προδεσμίδων, τότε μια τοπολογία **j** επάγει έναν αυτοδύναμο, πληθωριστικό και διατηρούντα την διάταξη ενδομορφισμό τού Ω, και αντιστρόφως. Ισοδύναμα, ο ενδομορφισμός τού Ω είναι αυτοδύναμος, στέλνει το «αληθές» στο «αληθές» και μετατίθεται με την πράξη της τομής. Θυμίζω ότι, για έναν τόπο, ο ταξινομητής υποαντικειμένων είναι μια άλγεβρα Heyting.

Έστω λοιπόν f: $A \to B$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ locales [61]. Στην αντίθετη κατηγορία, των πλαισίων (frames), συμβολίζουμε με f^*: $B \to A$ τον αντίστοιχο ομομορφισμό, και με f_*: $A \to B$ τον δεξιά συζυγή τού f^*. Ο σύνθετος μορφισμός f_*f^*, δηλαδή $B \xrightarrow{f^*} A \xrightarrow{f_*} B$, είναι ο *πυρήνας* που επάγεται από τον f. Γενικά, ένας *πυρήνας* σε ένα locale B είναι μια απεικόνιση j: $B \to B$, που είναι αυτοδύναμη, πληθωριστική και διατηρεί την ένωση (meet), σε συμφωνία με ό,τι εξέθεσα προηγουμένως. Εάν j είναι ένας πυρήνας στο A, ορίζουμε: $A_j := \{a \in A \mid j(a) = a\}$. Εφ' όσον j j = j, η εικόνα τού j είναι το A_j. Το A_j είναι πλαίσιο, και το j: $A \to A_j$ είναι ομομορφισμός πλαισίων με δεξιά συζυγή την σχέση $A_j \to A$. Αυτό το γεγονός θα δώσει απάντηση στο ερώτημα της υπαγωγής μιας άλγεβρας Boole σε ένα locale. Ισχύει το εξής θεώρημα: Για κάθε locale A, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ πυρήνων στο A και συνήθων (regular) υποαντικειμένων τού A στην κατηγορία **Loc,** δηλαδή κλάσεων ισομορφίας συνήθων μονομορφισμών $B \to A$ [61]. Η εν λόγω αντιστοιχία είναι μεταξύ ενός μονομορφισμού f: $B \to A$ και του επαγόμενου πυρήνα f_*f^*. Σε αυτήν την βάση, ένα *υπο-locale* ενός locale A ορίζεται ως ένα υποσύνολο της μορφής A_j για κάποιον πυρήνα j. Ακόμη, ένα υπο-locale A_j του A είναι πυκνό εάν $j(0) = 0$.

Το κρίσιμο σημείο είναι ότι *η διπλή άρνηση, ¬¬, είναι μια τοπολογία* με την γενική έννοια που μόλις είδαμε, και προκειμένου περί ενός locale A, είναι πυρήνας. Άρα το υποσύνολο $A_{\neg\neg}$ είναι υπο-locale του A. Το $A_{\neg\neg}$ όμως, το σύνολο των συνήθων στοιχείων τού A, είναι άλγεβρα Boole. Τέλος, κάθε locale A έχει ένα ελάχιστο πυκνό υπο-locale, και αυτό είναι το $A_{\neg\neg}$. Αυτή είναι η σχέση που αναζητάμε. Έχουμε δηλαδή μιαν έννοια *κλασικότητας*, όπως αυτή συνδέεται με δομές άλγεβρας Boole, η οποία *υπάγεται* με τρόπον σαφή ως το ελάχιστο πυκνό *υπο-locale* ενός locale, δηλαδή μιας πλήρους άλγεβρας Heyting με την έννοια της *μη κλασικότητας* που συνδέεται με αυτήν. Εδώ ούτε αναγωγή, ούτε «προσέγγιση» έχουμε. Πρόκειται για σαφές κέρδος σε εννοιολογικό επίπεδο, που διευκρινίζει την σχέση κλασικού και μη κλασικού. Εν τούτοις, τονίζω ότι το μη κλασικό εδώ *δεν* είναι ακόμη το κβαντικό, έχει την έννοια της μη κλασικής λογικής, και περιορίζεται στο κλασικόμορφο εντός του κβαντικού. Το επόμενο βήμα είναι να δούμε την σημασία τού $A_{\neg\neg}$. Δεδομένου ότι η πράξη ¬¬ είναι τοπολογία, η «μπουλιανοποίηση» $A_{\neg\neg}$ του locale A ισοδυναμεί με την εισαγωγή μιας τοπολογίας στο A, και την σημασία αυτής της τοπολογίας πρέπει να ανιχνεύσουμε.

Ας θεωρήσουμε αρχικά την απλή περίπτωση ενός τοπολογικού χώρου, X. Γενικά, τα ανοικτά σύνολα U της τοπολογίας στον X δεν είναι συνήθη, πράγμα που σημαίνει ότι ισχύει $U \subset \mathrm{int}\bar{U}$, όπου $\bar{U}$ το συναφές σύνολο (adherence) του U. Αυτό συμβαίνει όταν τα ανοικτά σύνολα έχουν «ρωγμές», ή, στην απλούστερη περίπτωση, όταν τους έχει αφαιρεθεί ένα σημείο. Έστω λοιπόν ότι τα ανοικτά σύνολα U είναι της μορφής V\{x}, όπου το V είναι σύνηθες. Τότε, το ψευδοσυμπλήρωμα του U είναι $U^c = X \setminus \bar{U}$, οπότε έχουμε $U^{cc} = V$. Δηλαδή, η πράξη του διπλού ψευδοσυμπληρώματος *εξαλείφει* την «οπή» {x}, και γενικότερα τις «ρωγμές». Εξ άλλου, τα ανοικτά σύνολα μιας τέτοιας τοπολογίας έχουν την δομή μιας πλήρους άλγεβρας Heyting, στην οποία η πράξη ¬ είναι η ψευδοσυμπλήρωση: $\neg U = U^c$. Ο πυρήνας ¬¬, συνεπώς, στην εν λόγω άλγεβρα Heyting, θεωρούμενη ως locale, είναι εκείνη η τοπολογία που προσδιορίζει μιαν «υφή» αρκετά αδρή ώστε να απαλείφεται η οπή {x}. Εάν, τώρα, θεωρήσουμε την κατηγορία των δεσμίδων, **Sh**X, πάνω σε έναν τοπολογικό χώρο, X, αυτή είναι μια κατηγορία της οποίας τα αντικείμενα είναι συνεχείς συναρτήσεις στον X με τιμές στην κατηγορία **Set,** δηλαδή παραμετρισμένα σύνολα S(x) με $x \in X$. Οι μορφισμοί είναι συναρτήσεις μεταξύ συνόλων. Ξεκινώντας από την περίπτωση συνηθισμένων συνόλων, είναι εύλογο να ξεχωρίσουμε τις πράξεις εκείνες μεταξύ δεσμίδων, έστω S και T, επί του X οι οποίες να δίνουν πάλι δεσμίδες επί του X αν γίνουν σημείο προς σημείο. Για παράδειγμα, το γινόμενο S□T ορίζεται ως (S□T)(x) = S(x)□T(x). Εκείνες οι πράξεις–κατασκευές οι οποίες αν γίνουν σημείο προς σημείο δίνουν πάλι μια δεσμίδα, ονομάζονται *γεωμετρικές* [70, 71]. Μια κατηγορία τέτοιων δεσμίδων (πάνω σε διαφορετικούς χώρους, X, Y κ.λπ.) θα έχει αντικείμενα με την δομή αλγεβρών Heyting και οι μορφισμοί της θα είναι εκείνοι που διατηρούν τις γεωμετρικές κατασκευές. Μπορεί να δειχτεί ότι είναι οι μορφισμοί που διατηρούν αυθαίρετες ενώσεις (∨, joins) και πεπερασμένες τομές (∧, meets). Με άλλα λόγια, είναι αυτό που έχουμε συναντήσει ως ομομορφισμούς πλαισίων (frames). Δεδομένης της δυικής σχέσης μεταξύ πλαισίων και locales, η έννοια της συνέχειας που υπάρχει στους μορφισμούς της κατηγορίας **Loc** των locales ανάγεται με αυτόν τον τρόπο στην έννοια της γεωμετρικής κατασκευής που ενυπάρχει στους ομομορφισμούς πλαισίων.

5.3 Το σημείο ως μοντέλο

Αξιοποιώντας την ενοποιούσα ματιά που προσφέρει το γενικευμένο μαθηματικό πλαίσιο, μπορούμε να μετακινηθούμε σε μιαν άλλη περίπτωση η οποία θα μας φέρει σε επαφή με έννοιες της μαθηματικής λογικής. Κατ' αρχάς, οι κατασκευές που χαρακτηρίζονται ως γεωμετρικές έχουν ένα αντίστοιχο γεωμετρικό τμήμα της λογικής. Είναι εκείνο με τα λογικά σύμβολα ∨, ∧, ∃ και =. Μια λογική θεωρία που παρίσταται με γεωμετρικές κατασκευές χρησιμοποιεί για την παράστασή της (presentation) είδη (sorts), συναρτησιακά σύμβολα, κατηγορηματικά σύμβολα (συμπεριλαμβανομένων προτάσεων) και αξιώματα της μορφής $\phi \vdash \psi$ όπου φ και ψ είναι τύποι σχηματιζόμενοι από τα στοιχεία της γλώσσας με την χρήση των λογικών συμβόλων που ανέφερα. Εάν T είναι μια τέτοια θεωρία, ο χώρος των μοντέλων της, [T], ονομάζεται ταξινομών τόπος τής T. Τα μοντέλα είναι τα σημεία του. Εάν θεωρήσουμε ένα στοιχείο γένους (generic) του [T], δηλαδή ένα μοντέλο γένους, και εφαρμόσουμε τις γεωμετρικές κατασκευές, σχηματίζεται ένα πλαίσιο **S**[T]. Εάν έχουμε τις θεωρίες T και T΄, ένας ομομορφισμός πλαισίων **S**[T] $\to$ **S**[T΄] είναι ένα μοντέλο τής T στο **S**[T΄], το οποίο κατασκευάζεται ξεκινώντας από το μοντέλο γένους τής T΄ και εφαρμόζοντας τις γεωμετρικές κατασκευές. Ο συνδυασμός του χαρακτήρα γένους με την γεωμετρικότητα της κατασκευής ισοδυναμεί με την έννοια μιας συνεχούς απεικόνισης από τον [T΄] στον [T]. Καμιά αναφορά σε τοπολογία δεν γίνεται εδώ.

Ας δούμε την πολύ απλή περίπτωση μιας προτασιακής γεωμετρικής θεωρίας T που παρίσταται με την χρήση ενός τοπολογικού χώρου X. Η θεωρία έχει μόνον προτασιακά σύμβολα, δηλαδή μια πρόταση P_U για κάθε ανοικτό σύνολο U του X, και τα εξής αξιώματα:

$P_U \vdash P_V$, όταν $U \subseteq V$

(αληθές) $T \vdash P_X$

$P_U \wedge P_V \vdash P_{U \cup V}$

$P_{\cap S} \vdash \bigvee_{U \in S} P_U$, όπου S είναι τυχόν σύνολο ανοικτών συνόλων.

Κάθε σημείο $x \in X$ δίνει ένα μοντέλο αυτής της θεωρίας, αποδίδοντας την τιμή «αληθές» στην πρόταση P_U εάν και μόνον εάν $x \in U$. Δηλαδή, η P_U αντιστοιχεί στην χαρακτηριστική συνάρτηση του U. Εάν ο χώρος X είναι νηφάλιος (sober) [H], τα σημεία τού X αντιστοιχούν ακριβώς στα μοντέλα τής T, δηλαδή στα σημεία του ταξινομούντος τόπου [T]. Ακόμη, η κατηγορία των δεσμίδων πάνω στον X, **S**X, ισοδυναμεί με το **S**[T]. Συνεπώς, X = [T] [63]. Έτσι, η περιγραφή ενός τοπολογικού χώρου είναι η γεωμετρική περιγραφή των σημείων του, χωρίς αναφορά σε τοπολογία, και μια συνεχής απεικόνιση f(x) κατασκευάζεται από το x, χωρίς να απαιτείται απόδειξη συνέχειας. Εάν δεν χρησιμοποιήσουμε χώρους, αλλά ασχοληθούμε άμεσα με προτασιακές γεωμετρικές θεωρίες, οι ταξινομούντες τόποι είναι locales. Τα αντίστοιχα πλαίσια είναι σύνολα όλων των γεωμετρικών προτάσεων που μπορούν να εκφραστούν στην θεωρία T modulo ισοδυναμία, πράγμα που σημαίνει ότι είναι γεωμετρικές άλγεβρες Lindenbaum [78]. Εδώ χρειάζεται προσοχή σε ένα λεπτό σημείο. Στην κατηγορία των *δεσμίδων* επί του χώρου X, η δεσμίδα **1** είναι το τελικό αντικείμενο. Για κάθε $x \in X$, η δεσμίδα **1** έχει ένα μοναδιαίο (singleton) σύνολο με ένα στοιχείο. Μια *υποδεσμίδα* S του **1** έχει ένα υποσύνολο S(x) ενός μοναδιαίου συνόλου, το οποίο προσδιορίζεται από το σύνολο των σημείων x στο οποίο το S(x) περιέχει το μοναδικό σημείο του που είναι δυνατόν. Λόγω της συνέχειας, αυτό το τελευταίο είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Άρα, οι υποδεσμίδες τού **1** αντιστοιχούν στα ανοικτά υποσύνολα του X. Το λεπτό σημείο είναι ότι σε ένα μοντέλο τα προτασιακά σύμβολα ερμηνεύονται ως υποαντικείμενα (υποδεσμίδες) του **1**, και αντιστοιχούν σε αληθοτιμές. Βλέπουμε τώρα πώς χάνεται η κλασική λογική. Διότι, το συμπλήρωμα $X\setminus U$ ενός ανοικτού συνόλου δεν είναι κατ' ανάγκην ανοικτό (εκτός εάν η τοπολογία είναι η διακριτή). Επομένως, για κάθε ανοικτό σύνολο U δεν υπάρχει πάντα ένα άλλο ανοικτό σύνολο V τέτοιο ώστε $U\cap V = X$, πράγμα που σημαίνει ότι δεν ισχύει πάντα ο νόμος του αποκλειομένου τρίτου, $P_U\vee\neg P_U = \mathbf{1}$. Έχω ήδη τονίσει ότι στον κλασικό φασικό χώρο, ως τοπολογικό χώρο, υποτίθεται ότι η τοπολογία είναι η διακριτή, και συνεπώς τέτοιο ζήτημα δεν προκύπτει. Από εδώ και η φυσιολογική σύνδεση της κλασικής φυσικής με τις άλγεβρες Boole. Επιστρέφοντας στο ως άνω παράδειγμα γεωμετρικής θεωρίας, οι προτάσεις P_U αντιστοιχούν στις ανοικτές περιοχές U του τοπολογικού χώρου (X, T). Το ερώτημα, πότε μια τέτοια πρόταση P_U έχει αληθοτιμή 1, απαντάται: όταν ένα σημείο x του X ανήκει στο U, $x \in U$. Αυτή η διατύπωση μπορεί να αντιστραφεί ως εξής. Ξεκινώντας από τις προτάσεις P_U, ρωτάμε: Πότε ένα υποσύνολο U του X είναι ανοικτή περιοχή; Η απάντηση τώρα είναι: όταν η αληθοτιμή τής P_U είναι 1. Βλέπουμε ότι δεν γίνεται ρητή αναφορά στα *σημεία* x του χώρου. Έμμεσα, στην δεύτερη διατύπωση, υπονοούνται συλλογικά *όλα* τα στοιχεία του υποσυνόλου U για τα οποία η αντίστοιχη αληθοτιμή τής P_U είναι 1. Το *μεμονωμένο* σημείο x προσδιορίζεται από το γεγονός ότι η απάντηση στο ερώτημα «ποιά» είναι τα ανοικτά $U \subseteq X$ δεν δίνει *ένα* τέτοιο U, αλλά μιαν ολόκληρη ιεραρχία υποσυνόλων εγκιβωτισμένων το ένα μέσα στο άλλο. Διαισθητικά, καταλαβαίνουμε ότι αν η P_U έχει αληθοτιμή 1 επειδή $x \in U$, τότε το ίδιο θα ισχύει για κάθε πρόταση P_V με $U \subseteq V$. Στην ακραία περίπτωση ενός συνόλου, θεωρούμενου ως τοπολογικού χώρου με την διακριτή τοπολογία, ένα μεμονωμένο σημείο x θα ορίζει το ανοικτό σύνολο $\{x\}$, και η ως άνω ιεραρχία θα είναι, όπως έχουμε δει, το σύνολο των περιοχών τού x. Είναι, βέβαια, η απόδοση με όρους προτασιακής λογικής της έννοιας του ουλτραφίλτρου που έχουμε συναντήσει. Γενικεύοντας σε μια τυχούσα τοπολογία, η οποία τώρα θα έχει την δομή ενός επιμεριστικού πλέγματος, έχουμε την έννοια του «σημείου» είτε ως πλήρως πρώτου φίλτρου, είτε, δυικά, ως πρώτου ιδεώδους, όπως ήδη την περιέγραψα στην §3.3. Όπως το γενικευμένο σημείο επιδέχεται «δομή», έτσι, αντιστοίχως, οι προτάσεις της μορφής P_U διατάσσονται με τρόπο που η αληθοτιμή 1 να επιδέχεται «υποαντικείμενα», με την έννοια της θεωρίας κατηγοριών, επιτρέποντας την *μερική* αλήθεια. Αναφέρομαι φυσικά στις έννοιες που έχουμε συναντήσει, προτάσεις P_U που είναι προδεσμίδες επί της τοπολογίας και που μπορούν να τυποποιηθούν στα μοντέλα Kripke με τις συναρτήσεις αποτίμησης και τις άλλες έννοιες που συνυφαίνονται με αυτά.

Πριν προχωρήσουμε, ας σημειώσουμε το εξής γεγονός. Η αντιμετώπιση κάποιας μαθηματικής θεωρίας από την μαθηματική λογική γίνεται με μια τυπική γλώσσα με αξιώματα και κανόνες συνεπαγωγής. Ένα μοντέλο της θεωρίας είναι ένα σύνολο με δομή που αντιστοιχεί στην γλώσσα και ικανοποιεί τα αξιώματα. Το κατηγορικό πλαίσιο επιτρέπει να τεθεί το ερώτημα: Είναι δυνατόν μια θεωρία να αντιμετωπιστεί ως *κατηγορία*, και ένα μοντέλο ως *συναρτητής* βασισμένος στην κατηγορία; Η απάντηση είναι εν μέρει ναι, και είδαμε προηγουμένως στοιχειώδεις περιπτώσεις, με χαρακτηριστικότερη την θεωρία τού Lawvere. Το θέμα κάθε άλλο παρά εξαντλημένο είναι. Μαθηματικές θεωρίες, όπως η θεωρία των ομάδων ή των σωμάτων, διατυπώνονται με αυτόν τον τρόπο, σχηματίζοντας μιαν ιεραρχία με αύξουσα πολυπλοκότητα. Οι αφηρημένες έννοιες στις οποίες περιηγηθήκαμε εν τάχει, εδώ δείχνουν την χρησιμότητά τους για το θέμα που μας απασχολεί. Χωρίς να μπαίνουμε σε λεπτομέρειες, μπορούμε να πούμε ότι η διατύπωση μιας θεωρίας με τον συνηθισμένο τρόπο της μαθηματικής λογικής, και η διατύπωσή της ως *κατηγορίας*, είναι *ισοδύναμες* εάν περιοριστούμε σε αυτό που συναντήσαμε ως *γεωμετρικές θεωρίες*. Από τεχνική άποψη, αυτές οι τελευταίες καθόλου δεν εξαντλούν το φάσμα μιας τυπολογικής κατάταξης των θεωριών που εξετάζονται ως κατηγορίες. Το ενδιαφέρον είναι ότι μια γεωμετρική θεωρία γενικά δεν είναι παρά ένας *τόπος Grothendieck*. Η χρήση της έννοιας του κόσκινου είναι θεμελιώδης. Ένα μοντέλο είναι ένας συναρτητής που είναι το αριστερά συζυγές τμήμα ενός γεωμετρικού μορφισμού. Ένα *σημείο* είναι ένα μοντέλο στην κατηγορία **Set** των συνόλων. Γενικά, υπάρχει η έννοια του *σχεδιαγράμματος* (sketch), στην οποία δεν επεκτείνομαι καθόλου. Αρκεί μόνον να πω ότι ένα γεωμετρικό σχεδιάγραμμα έχει ένα μοντέλο σε μια καθολική γεωμετρική θεωρία, το μοντέλο γένους (generic), το οποίο είναι ο *ταξινομών τόπος* της θεωρίας. Ακριβέστερα, ο ταξινομών τόπος *είναι* η θεωρία.

5.4 Μαθηματικό και μαθηματικοποιημένο

Ακριβώς σε αυτό το μαθηματικό οπλοστάσιο, που περιλαμβάνει τους τόπους Grothendieck και την έννοια του κόσκινου, είναι δυνατόν να ενταχθεί ο φορμαλισμός που χρησιμοποιούν οι Isham et al. για να διατυπώσουν θεμελιώδεις όψεις των κβαντικών θεωριών, σε όλη την γενικότητά τους. Από άλλη σκοπιά, η συναφής θεωρία των δεσμίδων αξιοποιείται από τον de Groote προκειμένου να συγκριθούν οι δομές της κλασικής και της κβαντικής θεωρίας.

Και στις δύο περιπτώσεις δεν πρόκειται για καθ΄ εαυτό φυσικές θεωρίες, μολονότι πασιφανώς χρησιμοποιούν το μαθηματικό τους πλαίσιο, όπως τελεστές σε χώρους Hilbert, άλγεβρες von Neumann κ.λπ. Το χρησιμοποιούν, αλλά η ανάλυσή τους επεκτείνεται στο υπόβαθρο των μαθηματικών όρων της φυσικής, στο πεδίο όπου συγκροτείται το εννοιολογικό πλαίσιο για την ανάγνωση των φυσικών φαινομένων. Άρα, το κυρίαρχο στοιχείο είναι η μαθηματική ανάλυση της θεμελιώδους δομής φυσικών θεωριών. Για να αναφερθώ στον Μπαλτά, είναι χαρακτηριστική περίπτωση όπου το *μαθηματικό* εξετάζει το *μαθηματικοποιημένο* [76]. Σημειώνω, όμως, ότι το μαθηματικοποιημένο εδώ είναι εκείνο που προκύπτει αφαιρετικά με την πρακτική της φυσικής, οπότε έχουμε το αντικείμενο του κλάδου των μαθηματικών που ονομάζεται μαθηματική φυσική. Επιγραμματικά, μπορούμε να πούμε στο πνεύμα τού Lawvere ότι τα μεταμαθηματικά *είναι* μαθηματικά, και η λογική ανάλυση *είναι* κατηγορική ανάλυση. Εν τούτοις, το οντολογικό στοιχείο δεν παύει να είναι παρόν. Μιλάμε για θεωρίες με σαφές γνωστικό αντικείμενο τον κόσμο των κβαντικών φαινομένων. Ταυτόχρονα, το συγκεκριμένο μαθηματικό πλαίσιο κάνει φανερή την συνάντηση του οντολογικού με το γνωσιολογικό. Η «εσωτερίκευση» του θεωρήματος Kochen–Specker είναι συνέπεια αυτής της συνάντησης μιας θεωρίας με μια μετα–θεωρία. Ακόμη περισσότερο. Ό,τι ανέφερα στην προηγούμενη παράγραφο –ο ταξινομών τόπος *είναι* η θεωρία– δείχνουν με την μεγαλύτερη γενικότητα την δυνατότητα διαμόρφωσης ενός μαθηματικού πλαισίου που να προσφέρεται για την διατύπωση και εξέταση του μεθοδολογικού ζητήματος, στο οποίο συνεχώς επανερχόμαστε: Δηλαδή της σχέσης της θεωρίας για τον φυσικό κόσμο με την θεωρία για την θεωρία για τον φυσικό κόσμο, και πώς αυτές καταλήγουν να συμπίπτουν. Αυτή η σύμπτωση ουσιαστικά επιτρέπει να εξετάζεται *ταυτόχρονα* μια φυσική θεωρία, αφ’ ενός, και αφ’ ετέρου, οι *όροι* της ανάδυσής της, οι εννοιολογικές και μεθοδολογικές προϋποθέσεις της. Είναι μια σύμπτωση που, εν τούτοις, *δεν διαλύει* την διάκριση, αλλά αντιθέτως, την προβάλλει.

Τρία σημεία πρέπει να προσεχτούν εδώ. Πρώτον, η σύμπτωση γίνεται εφικτή και φανερή στο επίπεδο της μαθηματικής λογικής. Μακριά από αυτό το επίπεδο, η κβαντική και η κλασική θεωρία φαντάζουν εντελώς ασύμμετρες, με την έννοια που αποδίδει στον όρο ο Kuhn. Δεύτερον, η μαθηματική λογική *δεν είναι* η Λογική· είναι κλάδος των μαθηματικών. Είναι όμως εκείνος ο κλάδος όπου η εσωτερική λογική των μαθηματικών και της θεωρητικής φυσικής συστηματοποιείται και συμπυκνώνεται και έτσι έρχεται σε επαφή με θεμελιώδεις έννοιες, αντικείμενο της επιστήμης της Λογικής και της φιλοσοφίας. Τρίτον, η συγκεκριμένη μαθηματική διατύπωση δεν είναι «μεταγλώττιση» σε ένα μαθηματικό πλαίσιο διαφορετικό από το συνηθισμένο. Περιέχει ρητά τις *φυσικές* αρχές που συνιστούν την ιδιοτυπία της κβαντικής θεωρίας και την ειδοποιό διαφορά της από την κλασική θεωρία. Είναι ο κατακερματισμός σε κλασικόμορφους τομείς και η ρητή διαφορά ανάμεσα σε προτάσεις του τύπου «$A \in \Delta$» που *δεν* έχουν κλασικές αληθοτιμές, και στις προτάσεις όπου αποτιμώνται, δηλαδή τα κόσκινα που αντιστοιχούν σε προτάσεις με κλασικού τύπου αληθοτιμές.

5.5 Το αδύνατο και το τυχαίο

Ας δούμε λεπτομερέστερα την γενικότερη περίπτωση, και ας επανέλθουμε στο παράδειγμα που χρησιμοποίησα προηγουμένως, με ανοικτά σύνολα U της μορφής $U = V \setminus \{a\}$, όπου a ένα τυχόν στοιχείο του χώρου X και V σύνηθες υποσύνολο. Όπως ανέφερα, οι προτάσεις P_U θα αληθεύουν για $x \in U$. Η τιμή $x = a$ *δεν* αποτελεί μοντέλο της θεωρίας. Η άρνηση της πρότασης P_U θα αντιστοιχεί σε εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $x \notin U$, ή $x \in X\backslash U$. Ειδικά, η τιμή $x = a$ περιλαμβάνεται στο $X\backslash U$. Αλλά, η πρόταση $P_{U'}$, $U' \,□\, X\backslash U$, *δεν* είναι πρόταση της θεωρίας όταν το U' δεν είναι ανοικτό. Στα πλαίσια λοιπόν της συγκεκριμένης προτασιακής θεωρίας, η άρνηση της πρότασης P_U αποκτά νόημα εάν στο U αντιστοιχεί ένα άλλο *ανοικτό* σύνολο που να παίζει τον ρόλο του συμπληρώματος, και αυτό είναι το ψευδοσυμπλήρωμα $U^c = X\backslash\bar{U}$. Η άρνηση $\neg P_U$ διατυπώνεται θετικά ως P_{U^c}. Δεδομένου ότι $a \in \bar{U}$, η τιμή a *δεν* επαληθεύει ούτε την P_U *ούτε* την άρνησή της, P_{U^c}. Το a είναι το *αποκλειόμενο τρίτο*. Ας θεωρήσουμε κατόπιν την διπλή άρνηση $\neg\neg P_U$. Στην κλασική περίπτωση, θα είχαμε $\neg\neg P_U = P_U$. Τώρα, όμως, $\neg\neg P_U = \neg P_{U^c} = P_{U^{cc}} \neq P_U$, εφ' όσον $U^{cc} = (X\backslash \bar{U})^c = \mathrm{int}\bar{U}$. Η διαφορά βέβαια βρίσκεται στο ότι $a \notin U$ αλλά $a \in \mathrm{int}\bar{U}$. Με άλλα λόγια, κλασικά οι προτάσεις P_U και $\neg\neg P_U$ ταυτίζονται, και *δεν* χωρεί κανένα «τρίτο». Αντιθέτως, στην περίπτωση που υπάρχει μια *μη τετριμμένη* τοπολογία, η μετάβαση από την P_U στην $\neg\neg P_U$ επιτρέπει στο αποκλειόμενο τρίτο να *παύει να αποκλείεται*. Η τοπολογία «$\neg\neg$» λοιπόν εξομαλύνει την «οπή» a, τρόπον τινά *αίρει* τον αποκλεισμό τού a, ενώ ταυτόχρονα μπουλιανοποιεί την θεωρία, διότι $\neg\neg\neg\neg P_U = \neg\neg P_U$. Στην βάση αυτή, ας υποθέσουμε ότι ο χώρος X είναι το φάσμα τιμών ενός φυσικού μεγέθους (κλασικής συνάρτησης ή κβαντικού αυτοσυζυγούς τελεστού), A, και ότι οι προτάσεις P_U σημαίνουν: «Η τιμή τού A αναμένεται, ή προβλέπεται να ανήκει στο U», δηλαδή «είναι δυνατόν η τιμή τού A να ανήκει (*είναι δυνάμει*) στο U». Εάν, όπως πρίν, $U \,□\, V\backslash\{a\}$, η τιμή a δεν είναι δυνατή. Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η πρόταση $\neg P_U$ σημαίνει «Η τιμή τού A αναμένεται να μην ανήκει στο $\mathrm{int}\bar{U}$», ή «Δεν είναι δυνατόν η τιμή του A να ανήκει στο $\mathrm{int}\bar{U}$». Και η πρόταση $\neg\neg P_U$ σημαίνει «Η τιμή του A αναμένεται να ανήκει στο $\mathrm{int}\bar{U}$», ή «Δεν είναι δυνατόν η τιμή τού A να μην ανήκει στο $\mathrm{int}\bar{U}$». Συνεπώς, στην μετάβαση από το P_U στο $\neg\neg P_U$, οι τιμές x του A για τις οποίες $x \in U$ *εξακολουθούν* να παραμένουν δυνατές, αλλά, επιπροσθέτως, η τιμή a γίνεται και αυτή δυνατή. Αυτά ισχύουν εφ΄ όσον παραμένουμε στην σφαίρα του δυνάμει. Τί συμβαίνει εάν μεταβούμε στο ενεργεία, εάν δηλαδή πραγματοποιηθεί μια μέτρηση και βρεθεί ότι η τιμή τού A είναι $b \in \mathrm{int}\bar{U}$; Στην κλασική φυσική, όπου το U θεωρείται σύνηθες, $U = \mathrm{int}\bar{U}$, θα έχουμε απλώς την επιβεβαίωση της πρόβλεψης. Στην γενική περίπτωση, όμως, θα υπάρχει μια σαφής διάκριση. Εάν μεν εργαζόμαστε με μια τοπολογία αρκετά αδρή ώστε να εξομαλύνονται οι ενδεχόμενες ρωγμές στο U, όπως η «$\neg\neg$» οπότε βρισκόμαστε στην περίπτωση του $\neg\neg P_U$, θα έχουμε κάτι παρόμοιο. Η τιμή $b = a$, εάν *τύχει* να εμφανιστεί δεν συνιστά πρόβλημα. Το σημαντικό είναι ότι τώρα έχει γίνει ρητή η εξάρτηση από την τοπολογία. Στην «μπουλιανοποιημένη» περίπτωση του $\neg\neg P_U$, όλες οι τιμές εντός τού $\mathrm{int}\bar{U}$, συμπεριλαμβανομένης της $b = a$, μπορούν να γίνουν ενεργεία *ισότιμα*. Ενώ, στην αρχική περίπτωση του P_U, σε μια κλίμακα λεπτότερης υφής, η ενεργεία τιμή $b = \alpha$ φαντάζει σαν η *πραγματοποίηση του αδυνάτου*.

Η ίδια συλλογιστική μεταφέρεται στην περίπτωση των αλγεβρών Heyting που σχηματίζουν οι γενικευμένες αποτιμήσεις *à la* Isham et al. Βρισκόμαστε τώρα στον τομέα της κβαντικής φυσικής. Έστω S ένα κόσκινο επί του τελεστή A, δηλαδή θα είναι $S \ \square\ \{f: B \rightarrow A \mid \forall g: C \rightarrow B \Rightarrow$ ο $f \bullet g: C \rightarrow A$ ανήκει στο $S\}$. Τότε το ψευδοσυμπλήρωμά του θα είναι: $\neg S \ \square\ \{f: B \rightarrow A \mid \forall g: C \rightarrow B, f \bullet g \notin S\}$. Είναι δηλαδή όλα τα κόσκινα επί του A που δεν διασταυρώνονται με το S. Η μπουλιανοποίηση που γίνεται με την διπλή άρνηση οδηγεί στο κύριο κόσκινο επί του A, οπότε η άλγεβρα Heyting είναι άλγεβρα Boole. Η έννοια της «μερικής αλήθειας» που επιτρέπει αυτός ο φορμαλισμός, με την εισαγωγή κόσκινων-υποαντικειμένων τού **1**, αφήνει περιθώρια για την εξής εικόνα: Στην θέση μιας θάλασσας τιμών που προσδιορίζονται καθ΄ εαυτές, έχουμε ένα πλέγμα από διασταυρούμενες αλυσίδες σχέσεων συνεπαγωγής. Το αντίστοιχο της «εξάλειψης των ρωγμών» σε αυτήν την περίπτωση, με την μπουλιανοποίηση, είναι ότι οι αλυσίδες διασταυρώνονται όλες με όλες. Οι τελεστές–πλαίσια–στάδια γνώσης κλειδώνονται, κατά κάποιον τρόπο, οι αλυσίδες διογκώνονται και αγκαλιάζουν το σύνολο των τελεστών, οι οποίοι αλληλοσυσχετίζονται ισότιμα ως εάν να επρόκειτο για μεγέθη κλασικού τύπου. Αντί για αλυσίδες, έχουμε τώρα μεμονωμένα σημεία, την εικόνα που συναντήσαμε στην §4.7 από άλλη σκοπιά. Έτσι διαμορφώνεται, σε αυτό το στάδιο, η σημασία της μεταθετότητας έναντι της μη μεταθετότητας.

Εάν τώρα υιοθετήσουμε μια ρεαλιστική προοπτική, δηλαδή εάν δεχθούμε –όπως αναφέρθηκε ήδη στην §5.1– ότι η θεωρία μας θεωρείται καλώς επικυρωμένη και ότι οι οντότητες που θέτει έχουν αντικειμενική ύπαρξη, είναι θεμιτό να δεχθούμε ότι τα δίκτυα λογικών αλυσίδων στο επίπεδο της θεωρίας αντιστοιχούν (χωρίς να ταυτίζονται, προσοχή στην υπερβατολογική ψευδαίσθηση!) –κυριολεκτικά τώρα– σε μια φυσική αιτιώδη δομή στο επίπεδο του γνωστικού αντικειμένου. Από την σκοπιά των ανωτέρω συλλογισμών, μπορούμε άρα να συγκρίνουμε λογικές σχέσεις, οι οποίες εκφράζουν το δυνάμει στο θεωρησιακό επίπεδο, με αιτιακές σχέσεις, οι οποίες εγκαθιδρύονται κατά την πραγμάτωσή τους στο πρακτικό επίπεδο. Πρόκειται ασφαλώς για μια γνωσιολογικού χαρακτήρα δέσμευση: σημαίνει ότι η διαδικασία συγκρότησης ενός εννοιολογικού πλαισίου για την θεωρητική φυσική, ως όρου για την συγκρότηση του αντικειμένου της, και έτσι η θεωρητική του ιδιοποίηση στην οποία συμπεριλαμβάνεται η πρακτική δράση πάνω σε αυτό, είναι η διαδικασία της γνώσης του αντικειμένου. Η γνώση που προσφέρει η κβαντική φυσική αναδεικνύει μιαν εικόνα πολύ διαφορετική από την κλασική. Στην θέση μιας καθολικής αιτιότητας που συνδέει τα πάντα έχουμε τώρα τον κατακερματισμό σε αιτιακές σειρές, σε διαφορετικούς βαθμούς επικαλυπτόμενες ή ξένες μεταξύ τους· είναι το ίχνος της κβαντικής πλαισιακότητας. Τα αίτια και τα αιτιατά θα εναλλάσσονται και θα αλληλομετατρέπονται στους κόμβους αυτών των αιτιωδών σειρών.[32]

[32] Η ενδελεχής πραγμάτευση μεταφυσικών εννοιών, όπως «αιτιότητα», «αίτιο», «αιτιατό», ασφαλώς υπερβαίνει τα όρια της εργασίας αυτής. Όπου συναντώνται τέτοιες έννοιες, πρέπει να εννοούνται

Σε μαθηματικό επίπεδο, οι αλυσίδες δυνάμει (φυσικών) γεγονότων μπορούν να παρασταθούν γραφικά με διαγράμματα· είναι πάλι κόσκινα. Τα γνωστά διαγράμματα Feynman κατ΄ αρχήν εντάσσονται σε αυτό το πλαίσιο. Υπάρχει μια κατάλληλη προς τούτο έννοια, τροποποίηση της έννοιας των μορφισμών μιας κατηγορίας: είναι εκείνη της *φαρέτρας* (quiver, ή προκατηγορία). Συγκεκριμένα, πρόκειται για μια δομή όμοια με την δομή κατηγορίας, με την διαφορά ότι δεν ορίζεται νόμος σύνθεσης των μορφισμών. Μια τέτοια φαρέτρα [79] ορίζεται ως ένα πεπερασμένο προσανατολισμένο γράφημα αποτελούμενο από σύνολα κορυφών και ακμών. Οι ακμές είναι μορφισμοί–βέλη που συνδέουν μια κορυφή–ουρά με μια κορυφή–κεφαλή. Μια κατηγορία, C, μετατρέπεται σε φαρέτρα, Q, αν ξεχάσουμε τον νόμο σύνθεσης των μορφισμών της. Δηλαδή, υπάρχει ένας «ξεχασιάρης» συναρτητής (forgetful functor), F, ο οποίος στέλνει την 2-κατηγορία των μικρών κατηγοριών, **Cat**, στην κατηγορία των φαρετρών, **Quiv**: F: **Cat** → **Quiv**. Ο αριστερά συναφής συναρτητής, P, ορίζεται ως: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(P(Q)\ ,\ C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Quiv}}(Q\ ,\ F(C))$. Η (ελεύθερη) κατηγορία P(Q) ονομάζεται κατηγορία διαδρομών (path category) που γεννάται από την Q. Εάν k είναι ένας δακτύλιος, η k-γραμμική κατηγορία, kP(Q), έχει ως αντικείμενα τα αντικείμενα της P(Q) και μορφισμούς τους ελεύθερους k-modules που γεννούν οι μορφισμοί τής P(Q). Ορίζεται τότε κατάλληλα η άλγεβρα διαδρομών, kQ. Ένας μορφισμός φαρετρών, R: Q → F(k-mod), με τιμές σε μια κατηγορία modules, είναι μια *αναπαράσταση* της Q. Έχουμε έτσι έναν τρόπο να αναφερόμαστε σε φυσικά γεγονότα *χωρίς* αναφορά σε χωροχρονικά σημεία, καθώς και μιαν αντίστοιχη έννοια αναπαράστασης.[33] Ιδιαίτερη σημασία έχει η θεώρηση των διαγραμμάτων Feynman από αυτήν την σκοπιά, και γενικά κάποιας κβαντικής φυσικής διαδικασίας. Τούτο διότι, αν θυμηθούμε τα κόσκινα, μπορούμε να συνδέσουμε τις διαδικασίες με γενικευμένα σημεία, (μη-μεταθετικά) πρώτα ιδεώδη, με τρόπο ανάλογο με εκείνον που χρησιμοποιήθηκε για τον ορισμό των γενικευμένων τιμών.

Ό,τι ανέφερα προηγουμένως για τα κόσκινα, τις διασταυρώσεις μεταξύ τους, τα ψευδοσυμπληρώματά τους και την μπουλιανοποίησή τους, θα έχει το αντίστοιχό του στο οντικό επίπεδο. Η *διασταύρωση* κόσκινων αντιπροσωπεύει τώρα την ανάδυση του τυχαίου. Θυμίζει τον τρόπο που ο Antoine-Augustine Cournot, κατά τον 19ο αιώνα, όρισε το τυχαίο ως εκείνο που παράγεται από την συνάντηση δύο ανεξάρτητων αιτιωδών σειρών [80]. Η απολυτοποίηση του κλασικού εννοιολογικού πλαισίου βρίσκεται μπροστά σε παράδοξο. Υπάρχουν βεβαίως οι γνωστές απόπειρες, είτε να *απορριφθεί*, είτε να *παρακαμφθεί*, να *απωθηθεί* το παράδοξο. Η φιλοσοφική προσέγγιση που υποστηρίζω εδώ επιλέγει την *υπέρβαση* του παραδόξου. Αυτό

«μινιμαλιστικά», *οριζόμενες* ως οι κόμβοι και οι μεταξύ τους σχέσεις στο πλέγμα μιας μη περαιτέρω αναλύσιμης φυσικής αιτιώδους δομής.

[33] Οι φαρέτρες είναι τελευταία πολύ δημοφιλείς για την ανάλυση ιδιομορφιών πολλαπλοτήτων στην θεωρία υπερμεμβρανών, στις θεωρίες για δυικότητες (dualities) και στις λεγόμενες θεωρίες βαθμίδας φαρετρών (quiver gauge theories).

σημαίνει την ρήξη με τον «απλοϊκό ρεαλισμό», διατηρώντας τον ρεαλισμό, και απορρίπτοντας την απλοϊκή μορφή του, με την οντολογική δέσμευση στο δυνάμει και την μη μονοσήμαντη μετάβασή του σε ενεργεία, δηλαδή τον χώρο του τυχαίου. Πιο συγκεκριμένα, το παράδοξο αντιμετωπίζεται στην πηγή του: η «πραγματοποίηση του αδυνάτου» γίνεται αποδεκτή στον βαθμό που το αδύνατο μετατρέπεται σε *ενδεχόμενο*. Και αυτό επιτυγχάνεται με την αποσαφήνιση της σχέσης μεταξύ δυνάμει και ενεργεία, η οποία αφ' ενός αναγνωρίζει τον ρόλο της πράξης –πειράματος, μέτρησης– στην καθ΄ εαυτή γνωστική διαδικασία, ενώ, αφ' ετέρου, αφήνει χώρο ώστε να παρεισφρύσει, τρόπον τινά, η πραγματοποίηση του ενδεχομένου αλλά μη προβλεπτού. Η μετατροπή του αδυνάτου σε ενδεχόμενο είναι εκείνο που συνιστά το *τυχαίο*. Μπορούμε να πούμε ότι το ενεργεία διακρίνεται από το δυνάμει ακριβώς λόγω της εισβολής του τυχαίου. Έτσι, αν μου επιτραπεί να παραφράσω τον Lacan [48, σ. 278], μπορούμε να αναγνωρίσουμε το *αναγκαίο* ως εκείνο το οποίο *δεν παύει* να πραγματώνεται, και το *τυχαίο* ως εκείνο το οποίο *παύει* να *μην* πραγματώνεται. Το πλεονέκτημα του πλαισίου που προσφέρουν οι σύγχρονες μαθηματικές θεωρίες είναι συνεπώς το γεγονός ότι μπορεί να συνάδει με μια τέτοια φιλοσοφική τοποθέτηση, συγκροτώντας την μαθηματική μορφή της.

Όλες οι επιστήμες, συμπεριλαμβανομένων των

πλέον εξελιγμένων, χαρακτηρίζονται από

μια κατάσταση αέναου γίγνεσθαι.

J. Piaget

Κεφάλαιο VI. Το κβαντικό ως επέκταση του κλασικού

6.1 Πέρα από το κλασικόμορφο

Στο φως αυτών των συλλογισμών, μπορούμε να δούμε πώς το κλασικό πλαίσιο μπορεί να αναδιατυπωθεί. Αναφέρθηκα ήδη στο πώς έννοιες όπως κατάσταση, φυσικό μέγεθος και τιμή αυτού του μεγέθους τυποποιούνται στην άμεση σχέση ενός φασικού χώρου με την λογική δομή μιας άλγεβρας Boole. Ακριβώς αυτή η δομή διατυπώνεται σε ένα γενικευμένο πλαίσιο ως εξής: Είδαμε ότι οι άλγεβρες von Neumann γενικεύουν τα χαρακτηριστικά τόσο των τελεστών όσο και των αντίστοιχων φασματικών αλγεβρών στην εργασία των Isham et al. Παράλληλα, τέτοιες άλγεβρες είδαμε ότι αναδύονται στην εργασία τού de Groote. Και στις δύο περιπτώσεις, όμως, συναντήσαμε *μεταθετικές* άλγεβρες von Neumann, οι οποίες συνδέονται με τα κλασικόμορφα παράθυρα των τομέων Boole. Προκειμένου τώρα να ασχοληθούμε με την πλήρως κβαντική, μη-μεταθετική περίπτωση, πρέπει να στραφούμε σε γενικές, μη-μεταθετικές τέτοιες άλγεβρες. Ακόμη γενικότερα, στο εξής θα επικεντρωθούμε σε C*-άλγεβρες. Όσα ακολουθούν, εκτίθενται σε μια σειρά εργασιών των Mulvey et al. [81]. Το κεντρικό ερώτημα είναι, πώς η αναπαράσταση Gelfand γενικεύεται στην περίπτωση μη-μεταθετικών C*-αλγεβρών. Στην μεταθετική περίπτωση, το *φάσμα*, έστω MaxA, μιας C*-άλγεβρας A είναι ένα locale. Η επιδίωξη, συνεπώς, είναι να διατυπωθεί η κατάλληλη γενίκευση του MaxA στην μη-μεταθετική περίπτωση. Τότε, το MaxA θα είναι εύλογος υποψήφιος για ένα μη-μεταθετικό ανάλογο της έννοιας του τοπολογικού χώρου. Θα θέλαμε επιπλέον, τα «σημεία» ενός τέτοιου μη-μεταθετικού τοπολογικού χώρου να είναι οι μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις (ή κλάσεις ισοδυναμίας μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων) της C*-άλγεβρας A, ώστε να υπάρχει συμφωνία με τον τρόπο που η θεωρητική φυσική χρησιμοποιεί τον μαθηματικό φορμαλισμό. Η μέθοδος των Mulvey et al. είναι να επιχειρηθεί η απλούστερη δυνατή γενίκευση, με κριτήριο η αντανάκλασή της [A] στην κατηγορία των locales να συμπίπτει με το κλασικό φάσμα μιας μεταθετικής C*-άλγεβρας A. Πολύ γενικά μιλώντας, ένα locale είναι τελικό αντικείμενο μιας μονοειδούς τανυστικής κατηγορίας, όπου το τανυστικό γινόμενο ⊗ είναι η *μεταθετική* πράξη $\wedge$ που συναντάμε στα locales. Η μη-μεταθετική γενίκευση αυτής της πράξης εισάγει την έννοια ενός *quantale.*

Συγκεκριμένα, έστω A μια μεταθετική C*-άλγεβρα, και $\mathrm{Max}_{\mathrm{Loc}}A$ το κλασικό φάσμα τής A, θεωρούμενο ως locale. Σε συμφωνία με όσα ήδη είδαμε σχετικά με την έννοια του σημείου (§3.3) και την σύνδεσή της με μιαν απλή προτασιακή θεωρία (§5.3), ισχύει ότι: Τα σημεία τού locale αντιστοιχούν σε πλήρως πρώτα φίλτρα στο locale, από την άποψη της θεωρίας των πλεγμάτων. Από την άποψη της λογικής, το locale $\mathrm{Max}_{\mathrm{Loc}}A$ γεννάται από προτάσεις–σύμβολα $a \in P$ οι οποίες αντιστοιχούν σε κάθε $a \in A$, με σχέσεις που εκφράζουν τα αξιώματα της εν προκειμένω θεωρίας, και με μια διάταξη $\leq$ που είναι ερμηνεία της σχέσης συνεπαγωγής (entailment) «$\vdash$». Τα σημεία τού locale αντιστοιχούν σε ερμηνείες των γεννητόρων (generators) και στην επικύρωση (validation) των σχέσεων στην μπουλιανή άλγεβρα **2**. Η εν λόγω θεωρία είναι η θεωρία του συμπληρώματος ενός κλειστού πρώτου ιδεώδους της μεταθετικής C*-άλγεβρας A, καθώς τα κλειστά πρώτα ιδεώδη είναι τα μέγιστα ιδεώδη τής A. Δηλαδή, σε κάθε $a \in A$ αντιστοιχεί η πρόταση $a \in P$, και τα αξιώματα είναι, για κάθε $\alpha, b \in A$:

(αληθές) $T \vdash 1_A \in P$

$0_A \in P \vdash F$ (ψευδές)

$a+b \in P \vdash a \in P \vee b \in P$

$ab \in P \vdash\dashv a \in P \wedge b \in P$

$a \in P \vdash \bigvee_i a_i \in P$ όταν $a \in \overline{\sum_i a_i}$, τον κλειστό γραμμικό υποχώρο τού A που γεννάται από τα στοιχεία $a_i \in A$.

Τότε, το $\mathrm{Max}_{\mathrm{Loc}}A$ είναι το locale των προτάσεων στην θεωρία, διατεταγμένων σύμφωνα με αποδείξιμη συνεπαγωγή modulo αποδείξιμη ισοδυναμία. Τα σημεία είναι τα *κλασικά μοντέλα* της θεωρίας, δηλαδή τα μέγιστα ιδεώδη της A, οπότε το locale είναι το κλασικό φάσμα τής A (ως εκ τούτου και το σύμβολο MaxA). Η επιζητούμενη γενίκευση είναι η θεωρία του φάσματος μιας (μη-μεταθετικής) C*-άλγεβρας A, συμβολιζόμενη με $\subset$axA, η οποία διαφέρει από την προηγούμενη κλασική σε δύο σημεία:

α) Εισάγει ένα ακόμη αξίωμα: $a^* \in P \vdash a \in P^*$, συνδέοντας την ενέλιξη (involution) της A με μιαν ενέλιξη στην προτασιακή γλώσσα.

β) Εισάγει μια μη-μεταθετική σύζευξη (conjunction), &, στην θέση τής $\wedge$.

Αυτή είναι η δομή ενός *ενελικτικού quantale***.** Έχουμε συνεπώς ένα παραγωγικό (deductive) σύστημα το οποίο είναι η άλγεβρα Lindenbaum της θεωρίας $\subset$ax A.

6.2 Από το «και» στο «και τότε»: η έννοια του quantale

Απαιτούνται εδώ μερικοί ορισμοί [81]. Ένα *quantale* Q είναι ένα πλέγμα με τυχούσες ενώσεις $\vee$ και με ένα προσεταιριστικό γινόμενο & που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$a\&\vee b_i = \vee a\&b_i$,

$\vee a_i \&b = \vee\, a_i\&b,\ \ \forall a, b, a_i, b_i \in Q$.

Το Q *έχει μονάδα* όταν υπάρχει ένα στοιχείο $e \in Q$ για το οποίο $e\&a = a = a\&e$ για κάθε $a \in Q$.

Η πρόθεση, όπως εξηγούν οι Mulvey et al., είναι να γενικευθεί η έννοια του πλέγματος των ανοικτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου, οπότε η πράξη & σημαίνει την όχι απαραιτήτως μεταθετική τομή ανοικτών υποσυνόλων. Εάν η πράξη & είναι η τομή του πλέγματος, τότε έχουμε ένα locale. Το *φάσμα* MaxA μιας C*-άλγεβρας A είναι το quantale των κλειστών γραμμικών υποχώρων τής A, με γινόμενο & που ορίζεται ως $M\&N = \overline{M \bullet N}$, το κάλυμμα του γινομένου των γραμμικών υποχώρων για κάθε M, N $\in$ MaxA. Η ένωση στο πλέγμα είναι $\vee_i M_i = \overline{\sum_i M_i}$, το κάλυμμα του αθροίσματος γραμμικών υποχώρων για κάθε οικογένεια $M_i \in$ MaxA. Το φάσμα είναι quantale με μονάδα, όπου η μονάδα είναι ο κλειστός γραμμικός υποχώρος που γεννάται από την μονάδα τής C*-άλγεβρας A. Μια *απεικόνιση quantales* φ: $Q \rightarrow Q'$ είναι μια απεικόνιση φ^*: $Q' \rightarrow Q$, ο *ομομορφισμός της αντίστροφης εικόνας* από το Q΄ στο Q, ο οποίος διατηρεί τις πράξεις & και $\vee$ των quantales. Η απεικόνιση *έχει μονάδα* όταν τα Q και Q΄ έχουν μονάδα και $e \leq \varphi^*(e')$, όπου $e \in Q$, $e' \in Q'$, είναι αντιστοίχως οι μονάδες των Q και Q΄. Με αυτούς τους ορισμούς, ορίζεται η κατηγορία των quantales, **Quant**. Το φάσμα MaxA μιας C*-άλγεβρας A ορίζει έναν συναρτητή, Max: (C*-άλγεβρες)^{op} $\rightarrow$ **Quant**. Όταν η απεικόνιση $\varphi: A \rightarrow A'$ μεταξύ C*-αλγεβρών έχει μονάδα, τότε η απεικόνιση Maxφ: $\mathrm{Max}A' \rightarrow \mathrm{Max}A$ μεταξύ quantales έχει μονάδα. Σε αυτήν την ειδικότερη περίπτωση, ισχύει ότι $e = \varphi^*(e')$. Ένα *ενελικτικό quantale* Q είναι ένα quantale με μιαν ενέλιξη * η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:

$a^{**} = a$

$(a\&b)^* = b^*\&a^*$

$(\vee_i a_i)^* = \vee_i a_i^*, \quad \forall a, b, a_i \in Q.$

Για το quantale Max A, η ενέλιξη είναι $M^* = \{\alpha^* \in A \mid a \in M\}$. Για κάθε quantale με μονάδα e, η μονάδα είναι αυτοσυζυγής: $e = e^*$. Μια *ενελικτική απεικόνιση μεταξύ quantales* $\varphi: Q \rightarrow Q'$ είναι μια απεικόνιση μεταξύ ενελικτικών quantales όπου

$\varphi^*(a^*) = \varphi^*(a)^* \quad \forall a \in Q'.$

Ένα στοιχείο $a \in Q$ ενός quantale Q είναι δεξιόπλευρο (αριστερόπλευρο) όταν ισχύει $a\&1_Q \leq a$ ($1_Q\&a \leq a$), όπου 1_Q είναι το ανώτατο στοιχείο του πλήρους πλέγματος Q. ΄Οταν ισχύουν και τα δύο, το στοιχείο a είναι *αμφίπλευρο*. Ένα *quantale Gelfand* Q είναι ένα quantale με μονάδα, ενελικτικό, και για το οποίο ισχύει $a = a\&a^*\&a$ για κάθε δεξιόπλευρο (ή αριστερόπλευρο) στοιχείο $a \in Q$.

Το φάσμα MaxA μιας C*-άλγεβρας A ορίζει έναν συναρτητή Max: (C*-άλγεβρες)^{op} $\rightarrow$ Quantales Gelfand. Εάν L(Q), R(Q), I(Q) είναι αντιστοίχως τα υποσύνολα του Q που αποτελούνται από αριστερόπλευρα, δεξιόπλευρα και αμφίπλευρα στοιχεία, τότε η ενέλιξη « * » συνιστά αντι-ισομορφισμό μεταξύ R(Q) και L(Q) ως προς το γινόμενο. Το στοιχείο $1_Q \in Q$ είναι δεξιά μονάδα για το R(Q), αριστερά μονάδα για το L(Q), και μονάδα για το I(Q). Τα quantales R(Q) και L(Q) είναι αυτοδύναμα: $a\&a = a$ $\forall a \in R(Q)$ και $\forall a \in L(Q)$. Κάθε στοιχείο τού I(Q) είναι αυτοδύναμο, και το I(Q) είναι locale. Ο συναρτητής I(Max): (μεταθετικές C*-άλγεβρες)^{op} $\rightarrow$ **Loc** που στέλνει κάθε μεταθετική C*-άλγεβρα A στο locale I(MaxA) είναι ο ανταλλοίωτος συναρτητής που στέλνει μια μεταθετική C*-άλγεβρα A στο κλασικό φάσμα τής A, δηλαδή στο locale του χώρου των μεγίστων ιδεωδών τής A.

Επανερχόμενος στην θεωρία $\subset$axA, επισημαίνω το νόημα που αποδίδουν οι Mulvey et al. στην ενέλιξη * και την πράξη &. Το «και» της κλασικής σύζευξης γίνεται «*και τότε*» για την σύζευξη &. Συνεπώς, η ενέλιξη μπορεί να αντιστοιχεί σε μιαν *αντιστροφή* ενός υποδηλούμενου *βέλους του χρόνου*.

6.3 Όψεις του σημείου και μη μεταθετικός χώρος

Αποδεικνύεται ότι το quantale της θεωρίας $\subset$axA του φάσματος μιας C*-άλγεβρας A είναι κανονικά ισόμορφο με το φάσμα MaxA της A, μέσω του ομομορφισμού ενελικτικών quantales με μονάδα που προσδιορίζεται όταν σε κάθε πρωτογενή (primitive) πρόταση $a \in P$ της θεωρίας αποδοθεί ο κλειστός γραμμικός υποχώρος που γεννάται από το στοιχείο $a \in A$ της C*-άλγεβρας A.

Η *λογική* και η *αλγεβρική* προσέγγιση είναι ισοδύναμες με την εξής έννοια. Εάν Q είναι ένα ενελικτικό quantale με μονάδα, και εάν $a \in P$ είναι πρωτογενής πρόταση της θεωρίας $\subset$axA του φάσματος MaxA της C*-άλγεβρας A, τότε η απόδοση σε κάθε πρόταση $a \in P$ ενός στοιχείου $[[a \in P]]$ του quantale Q έτσι, ώστε τα αξιώματα της θεωρίας να επικυρώνονται στο Q, είναι ένα *μοντέλο* της θεωρίας $\subset$axA στο Q. Η επικύρωση (validation) εδώ σημαίνει ότι η σχέση διάταξης του quantale είναι ερμηνεία της συνεπαγωγής, και οι πράξεις στο quantale είναι ερμηνεία των λογικών συνδέσμων της θεωρίας. Η ερμηνεία των λογικών σταθερών «αληθές» και «ψευδές» είναι αντιστοίχως η μονάδα e_Q και το μηδέν 0_Q του Q. Τότε, τα μοντέλα της θεωρίας $\subset$axA σε κάθε τέτοιο quantale Q αντιστοιχούν ακριβώς στους ομομορφισμούς MaxA $\rightarrow$ Q μεταξύ ενελικτικών quantales με μονάδα. Ανέφερα ότι μια ικανοποιητική έννοια σημείου για την γενική μη-μεταθετική περίπτωση αναμένεται να συνδυάζει την έννοια ενός μη-μεταθετικού τοπολογικού χώρου με την έννοια της μη αναγώγιμης αναπαράστασης μιας C*-άλγεβρας, ενώ παράλληλα θα αντανακλάται στις αντίστοιχες κλασικές έννοιες όταν η άλγεβρα είναι μεταθετική. Σε αυτήν την τελευταία, κλασική περίπτωση, το φάσμα μιας μεταθετικής C*-άλγεβρας είναι βεβαίως το σύνολο των πολλαπλασιαστικών γραμμικών συναρτησιακών $\varphi: A \rightarrow \Re$, όπου κάθε τέτοιο φ έχει πυρήνα (kernel) ίσον με ένα μέγιστο ιδεώδες f_φ της A, και, αντιστρόφως, κάθε μέγιστο ιδεώδες είναι πυρήνας ενός τέτοιου συναρτησιακού. Έχω ήδη αναφερθεί στο πώς τα σημεία του φάσματος της A μπορούν να ταυτιστούν με τα μέγιστα ιδεώδη τής A. Επί πλέον, ένα πολλαπλασιαστικό γραμμικό συναρτησιακό είναι ακριβώς μια αναπαράσταση της A στον χώρο των μιγαδικών αριθμών $\Re$.

Ως γνωστόν, όλα αυτά γενικεύονται στην μη-μεταθετική περίπτωση ως εξής. Μια *αναπαράσταση* μιας C*-άλγεβρας A σε έναν χώρο Hilbert H είναι ένας ομομορφισμός φ: A $\rightarrow$ $\propto$(H) από την C*-άλγεβρα A στην C*-άλγεβρα $\propto$(H) των φραγμένων γραμμικών τελεστών στον H. Η έννοια της αναπαράστασης σε χώρους Hilbert, τονίζει ένα στοιχείο που στην κλασική περίπτωση παρέμενε λανθάνον. Όπως υπογραμμίζουν οι Mulvey et al., η άλγεβρα A όχι μόνον *απεικονίζεται* στην C*-άλγεβρα $\propto$(H), αλλά και *δρα* γεωμετρικά στα στοιχεία τού H. Κατά την αναπαράσταση φ, κάθε στοιχείο a $\in$ A αναπαρίσταται από τον φραγμένο γραμμικό τελεστή φ_a: H $\rightarrow$ H, ο οποίος στέλνει κάθε x $\in$ H στο $x\varphi_a \in$ H (σημείωση: κατά τον συμβολισμό των Mulvey et al., ο τελεστής γράφεται δεξιά από το όρισμά του). Έτσι, ο τελεστής φ_a στέλνει κάθε κλειστό γραμμικό υποχώρο M του χώρου Hilbert H στον κλειστό γραμμικό υποχώρο $M\varphi_a = \overline{\{x\varphi_a \in H \mid x \in M\}}$. Γενικά, σε κάθε a $\in$ A αντιστοιχεί μια απεικόνιση που διατηρεί το supremun, φ_a: Π(H) $\rightarrow$ Π(H) η οποία στέλνει το sup-πλέγμα[34] των κλειστών γραμμικών υποχώρων τού H στον εαυτό του. Σε αυτήν την βάση, ορίζεται το *quantale* Θ(H) *του χώρου Hilbert* H ως το quantale εκείνων των απεικονίσεων που διατηρούν το supremum, α: Π(H) $\rightarrow$ Π(H). Οι πράξεις ως προς τις οποίες το Θ(H) είναι quantale, είναι η σημείο-προς-σημείο διάταξη σε τέτοιες απεικονίσεις τού Π(H), και με γινόμενο την σύνθεσή τους. Το supremum δίδεται από $M(\vee_i \alpha_i) = \vee_i M\alpha_i$. Το Θ(H) έχει μονάδα, την ταυτοτική απεικόνιση στο Π(H), και ενέλιξη: $M\alpha^* = (\vee_{Na \leq M^\perp} N)^\perp$, όπου «⊥» σημαίνει το ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός κλειστού γραμμικού υποχώρου τού H. Σε σχέση με αυτήν την πράξη, το quantale Θ(H) ενός χώρου Hilbert H είναι quantale Gelfand. Ισχύει τότε ότι κάθε αναπαράσταση μιας C*-άλγεβρας A σε έναν χώρο Hilbert H προσδιορίζει έναν ομομορφισμό μεταξύ quantales Gelfand, MaxA $\rightarrow$ Θ(H), από το φάσμα της C*-άλγεβρας A στο quantale Θ(H) του χώρου Hilbert H. Επιπρόσθετα, ορίζεται μια κατάλληλη έννοια ισοδυναμίας μεταξύ αναπαραστάσεων. Είναι γνωστό ότι κάθε αναπαράσταση μιας C*-άλγεβρας A ισοδυναμεί με ένα ευθύ άθροισμα μη-αναγώγιμων αναπαραστάσεων της A. Τότε, μέσω της κατασκευής Gelfand–Naimark–Segal, η σχέση της άλγεβρας A και του χώρου Hilbert H, στον οποίο η A αναπαρίσταται, *εσωτερικεύεται* καθιστώντας την άλγεβρα *πρωτογενή* και τον χώρο Hilbert *παράγωγη* έννοια. Αναδεικνύεται έτσι ένας αυτόνομος ρόλος της C*-άλγεβρας, που, από την άποψη της φυσικής, θέλουμε να σχηματίζεται από τα φυσικά μεγέθη της θεωρίας. Συγκεκριμένα, όπως οι Mulvey et al. συνοψίζουν την κατασκευή, οι μη-αναγώγιμες αναπαραστάσεις μιας *μεταθετικής* C*-άλγεβρας A πραγματοποιούνται στον χώρο Hilbert των μιγαδικών αριθμών $\Re$ η κάθε μία, αντιστοιχούν δηλαδή στα πολλαπλασιαστικά γραμμικά συναρτησιακά επί της A, τα οποία με την σειρά τους αντιστοιχούν ακριβώς στα μέγιστα ιδεώδη τής A, διότι το καθένα από αυτά είναι ο πυρήνας (kernel) ενός μοναδικού τέτοιου συναρτησιακού. Στην περίπτωση μιας μη-μεταθετικής C*-άλγεβρας A, η ανωτέρω αντιστοιχία διατηρείται ως αντιστοιχία μεταξύ μη-αναγώγιμων αναπαραστάσεων της A και

[34] sup-πλέγμα: ένας άλλος όρος για το πλήρες πλέγμα.

μεγίστων *δεξιών* ιδεωδών τής A. Κατ' αρχάς, ένας κλειστός γραμμικός υποχώρος M του χώρου Hilbert H είναι *αναλλοίωτος* ως προς μιαν αναπαράσταση φ: $A \to \propto(H)$, εάν $x \in M$ συνεπάγεται $x\varphi_a \in M$ $\forall a \in A$. Η αναπαράσταση φ είναι *μη αναγώγιμη* εάν δεν είναι μηδέν και εάν οι μόνοι αναλλοίωτοι κλειστοί γραμμικοί υποχώροι τού H είναι ο μηδενικός υποχώρος και ολόκληρος ο χώρος H. Για κάθε μη μηδενικό στοιχείο $x \in H$, το υποσύνολο $x\varphi_A$ □ $\overline{\{x\varphi_a \in H | a \in A\}}$ είναι αναλλοίωτος κλειστός υποχώρος τού H. Εξ άλλου, το υποσύνολο της A που ορίζεται ως μ_x □ $\{a \in A \mid x\varphi_a = 0_H\}$ είναι κλειστό και μέγιστο δεξιό ιδεώδες τής A. Ο χώρος-πηλίκον A/μ_x είναι κανονικά ισόμορφος με τον χώρο Hilbert H, και η αρχική αναπαράσταση φ είναι κανονικά ισόμορφη με την φ_x: $A \to \propto(A/\mu_x)$. Αντιστρόφως, έστω μ ένα τυχόν μέγιστο δεξιό ιδεώδες τής A. Τότε, ο *αυτοσυζυγής* κλειστός γραμμικός υποχώρος ν □ $\mu+\mu^*$ είναι επίσης μέγιστο δεξιό ιδεώδες, άρα πυρήνας ενός γραμμικού συναρτησιακού π_μ: $A \to \Re$. Το π_μ είναι *καθαρή κατάσταση* της A, στην βάση της οποίας ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο A/μ, το οποίο συμβολίζεται με $\langle a+\mu\ ,\ b+\mu\rangle = \pi_\mu(ab^*)$ $\forall a, b \in A$. Ο πολλαπλασιασμός από δεξιά συνιστά κανονική δράση τής A στον χώρο A/μ, συνεπώς έχουμε μια μη-αναγώγιμη αναπαράσταση της μορφής φ_μ: $A \to \propto(A/\mu)$ της C*-άλγεβρας A στον χώρο Hilbert A/μ. Ισχύει τότε ότι κάθε μη-αναγώγιμη αναπαράσταση της A σε έναν χώρο Hilbert H προσδιορίζει έναν ομομορφισμό από το φάσμα MaxA στο quantale του H, ο οποίος είναι ισοδύναμος με τον ομομορφισμό φ_μ: MaxA $\to \Theta(A/\mu)$, για κάποιο μέγιστο δεξιό ιδεώδες μ της A. Ακόμη, το μεγαλύτερο ιδεώδες που περιέχεται σε κάποιο μέγιστο δεξιό ιδεώδες τής A ονομάζεται *πρωτογενές* (primitive). Ο πυρήνας p της ως άνω αναπαράστασης είναι ένα τέτοιο πρωτογενές ιδεώδες, ίσον με $p = \mathop{\Big|}\limits_{x\in H,\, x\neq 0} \mu_x$. Αλλά το p προσδιορίζεται επίσης από την έκφραση: $p = \{a \in A \mid a \in P \vDash \text{ψευδές}\}$, όπου «$\vDash$» είναι η συνεπαγωγή στο μοντέλο της θεωρίας $\subset$axA που προσδιορίζεται από την αναπαράσταση.

Στην βάση των ανωτέρω, περιμένουμε τα σημεία του quantale MaxA να είναι ομομορφισμός φ: Max $\to \Theta(H)$, αφ' ενός, και, αφ' ετέρου, να αντιστοιχούν στα μέγιστα δεξιά ιδεώδη τής C*-άλγεβρας A. Αναζητώντας μια τέτοια έννοια σημείου, οι Mulvey et al. διερευνούν έναν τρόπο ώστε τα quantales $\Theta(H)$, να ορίζονται εγγενώς από την A, οπότε η επιζητούμενη έννοια σημείου θα είναι ανεξάρτητη από αυτά. Προς τούτο, εισάγουν δύο νέες βασικές έννοιες, των *quantales Hilbert* και των *quantales von Neumann*. Η πρώτη προκύπτει από το γεγονός ότι το sup-πλέγμα $\Pi(H)$ των κλειστών γραμμικών υποχώρων του χώρου Hilbert H έχει μια πράξη ορθοσυμπλήρωσης, με την οποία συνδέεται η ενέλιξη στην αναπαράσταση. Ένα ορθοσυμπληρωμένο sup-πλέγμα S είναι ένα sup-πλέγμα S με μια πράξη ορθοσυμπλήρωσης «$\perp$» που ικανοποιεί:

$s^{\perp\perp} = s$

$(\vee s_i)^{\perp} = \wedge s_i^{\perp}$

$s \vee s^{\perp} = 1_S$

$s \wedge s^{\perp} = 0_S, \quad \forall s, s_i \in S.$

Ένα quantale Hilbert είναι ένα quantale ισόμορφο με το quantale Θ(S) των απεικονίσεων που διατηρούν το supremum από ένα ορθοσυμπληρωμένο sup-πλέγμα S στον εαυτό του. Το quantale Hilbert Θ(S) ονομάζεται quantale του ορθοσυμπληρωμένου sup-πλέγματος S. Εαν τώρα Q είναι ένα quantale Gelfand, ορίζεται στο sup-πλέγμα R(Q) (αντιστοίχως, L(Q)) ένα *ψευδο-ορθοσυμπλήρωμα*, δηλαδή μια πράξη «⊥» που ικανοποιεί:

$a \leq a^{\perp\perp}$

$(\vee a_i)^{\perp} = \wedge a_i^{\perp}$

$a \wedge a^{\perp} = 0_Q, \quad \forall a, a_i \in R(Q),$

και αντιστοίχως $^{\perp\perp}a$ για το L(Q), εάν ορίσουμε:

$a^{\perp} \square \bigvee_{a^* \& b = 0} b$, $b \in R(Q)$, και αντιστοίχως $^{\perp}a \square \bigvee_{b \& a^* = 0} b$, $b \in L(Q)$.

Ένα quantale Gelfand Q είναι quantale von Neumann εάν $a = a^{\perp\perp}$ $\forall a \in R(Q)$ (ισοδύναμα, $^{\perp\perp}a$, $\forall a \in L(Q)$). Στο quantale Θ(S) οποιουδήποτε ορθοσυμπληρωμένου sup-πλέγματος S ορίζεται μια ενέλιξη «*»: $s\alpha^* = \left(\bigvee_{t\alpha \leq s^{\perp}} t\right)^{\perp}$ $\forall \alpha \in \Theta(S)$ $\forall s \in S$. Τότε το Θ(S) είναι quantale Gelfand. Αποδεικνύεται ότι το locale I(Θ(S)) των αμφίπλευρων στοιχείων τού Θ(S) είναι κανονικά ισόμορφο με την άλγεβρα Boole **2**. Συνεπώς, συμπεραίνουν οι Mulvey et al., *το* Θ(S) *μπορεί να θεωρηθεί ως ενός είδους κβαντωμένη επέκταση της άλγεβρας Boole* **2**, η οποία, στην περίπτωση των locales, προσδιορίζει την έννοια του σημείου. Αποδεικνύεται ακόμη ότι κάθε quantale Hilbert είναι quantale von Neumann, και αντιστρόφως, για κάθε quantale von Neumann Q, η απεικόνιση που στέλνει κάθε $a \in Q$ στην απεικόνιση που διατηρεί το supremum από το R(Q) στον εαυτό του, $b \# a^*\&b$, $\forall b \in R(Q)$, είναι ισομορφισμός μεταξύ quantales

Gelfand εάν το Q είναι quantale Hilbert. Έτσι, τα quantales Hilbert χαρακτηρίζονται εγγενώς εντός της κατηγορίας των quantales von Neumann, άρα και των quantales Gelfand. Το συμπέρασμα από όλα αυτά είναι ότι, εάν μια *αναπαράσταση* ενός quantale Gelfand Q σε ένα ορθοσυμπληρωμένο sup-πλέγμα S ορισθεί ως ένας ομομορφισμός $Q \to \Theta(S)$, τότε κάθε αναπαράσταση φ: $A \to \propto(H)$ μιας C*-άλγεβρας A σε έναν χώρο Hilbert H προσδιορίζει μιαν αναπαράσταση φ_{MaxA}: $MaxA \to \Theta(H)$ του φάσματός της, MaxA, στο ορθοσυμπληρωμένο sup-πλέγμα Π(H) των κλειστών γραμμικών υποχώρων του χώρου Hilbert H.

Χρειάζεται σε αυτό το σημείο μια αναπροσαρμογή των εννοιών της *καθαρής κατάστασης* και της *ατομικότητας* στο πλαίσιο που οικοδομούν οι Mulvey et al. Μια *καθαρή κατάσταση* ν ενός quantale Gelfand Q είναι το μοναδικό γνήσιο αυτοσυζυγές στοιχείο τού Q που περιέχει το μεγαλύτερο δεξιόπλευρο στοιχείο $\mu \in Q$ το οποίο περιέχεται στο $\nu \in Q$. Εάν κάθε στοιχείο s ενός ορθοσυμπληρωμένου sup-πλέγματος S ισούται με την ένωση (join) $\bigvee_{x \leq s} x$ όλων των ατόμων $x \in S$ που βρίσκονται κάτω από αυτό, τότε το πλέγμα S ονομάζεται *ατομικό*. Αποδεικνύεται τότε ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ:

α) Καθαρών καταστάσεων της C*-άλγεβρας A και καθαρών καταστάσεων του φάσματός της, MaxA.

β) Καθαρών καταστάσεων ενός quantale Hilbert Θ(S), όπου S είναι ένα ατομικό ορθοσυμπληρωμένο sup-πλέγμα, και των μεγίστων, δεξιόπλευρων στοιχείων τού Θ(S).

Στην περίπτωση δε που έχουμε μια μη-αναγώγιμη αναπαράσταση φ: $A \to \propto(H)$ μιας C*-άλγεβρας A στον χώρο Hilbert H, ορίζεται μια αντίστοιχη έννοια μη-αναγώγιμης αναπαράστασης του MaxA στο ατομικό ορθοσυμπληρωμένο sup-πλέγμα Π(H). Για ένα τέτοιο πλέγμα S, η αναπαράσταση φ: $MaxA \to \Theta(S)$ ονομάζεται *μη αναγώγιμη* εάν δεν είναι μηδενική και εάν $s\varphi_M \leq s$, $\forall M \in MaxA$, συνεπάγεται $s = 0_S$ ή $s = 1_S$. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συμβαίνει αυτό είναι να ισχύει $1_{MaxA}\varphi^* = 1_{\Theta(S)}$. Ορίζεται ακόμη μια αντίστοιχη έννοια ισοδυναμίας τέτοιων αναπαραστάσεων σε πλέγματα S με τα ως άνω χαρακτηριστικά. Μια αναπαράσταση αυτού του τύπου, φ: $MaxA \to \Theta(S)$, η οποία είναι ισοδύναμη με την αναπαράσταση του MaxA που προέρχεται από μιαν αναπαράσταση της A σε έναν χώρο Hilbert H, ονομάζεται αναπαράσταση Hilbert. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συμβαίνει αυτό, είναι η αναπαράσταση φ να είναι μη τετριμμένη και αλγεβρικά μη αναγώγιμη, όπου: *Μη* *τετριμμένη* ονομάζεται η αναπαράσταση φ: MaxA $\rightarrow$ Θ(S) εάν υπάρχει μια καθαρή κατάσταση ν του MaxA, η αντίστροφη εικόνα του οποίου, νφ*, είναι γνήσιο στοιχείο τού Θ(S). *Αλγεβρικά* μη αναγώγιμη είναι μια αναπαράσταση φ: Max $\rightarrow$ Θ(S) εάν δεν είναι μηδενική, και εάν κάθε άτομο x $\in$ S είναι κυκλικός γεννήτορας (cyclic generator), δηλαδή εάν το υποσύνολο $\{x\varphi_M \in S \mid M \in MaxA\}$ ισούται με όλο το S. Η αλγεβρική μη αναγωγιμότητα αναπαράστασης της A σε χώρο Hilbert H απαιτεί να μην υπάρχει μη τετριμμένος υποχώρος τού H που να παραμένει αμετάβλητος κάτω από την δράση της A. Αυτή η ιδιότητα διακρίνεται στην μη κλασική περίπτωση από την *τοπολογική* μη αναγωγιμότητα, για την οποία ισχύει η πάρα πάνω απαίτηση για *κλειστούς* υποχώρους τού H. Σημειωτέον ότι στην κλασική περίπτωση οι δύο αυτές έννοιες συμπίπτουν. Η διάκριση είναι απαραίτητη, προκειμένου να προσδιοριστούν οι μη-αναγώγιμες αναπαραστάσεις τού quantale Gelfand MaxA που ισοδυναμούν με εκείνες που προέρχονται από μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις τής A με την κλασική έννοια. Αφ' ετέρου, το μη τετριμμένο μιας αναπαράστασης φ: MaxA $\rightarrow$ Θ(S) συνεπάγεται ότι η απεικόνιση ευθείας εικόνας προσδιορίζει μιαν εμφύτευση (embedding) P(φ): P(Θ(S)) $\rightarrow$ P(MaxA) των καθαρών καταστάσεων του quantale Hilbert Θ(S) στις καθαρές καταστάσεις του φάσματος MaxA. Αυτό συνιστά ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η αναπαράσταση φ να είναι αναπαράσταση Hilbert.

Ολη αυτή η συλλογιστική, οι διαδοχικοί ορισμοί εννοιών και οι μεταξύ τους σχέσεις, συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι μια μη-αναγώγιμη αναπαράσταση φ: MaxA $\rightarrow$ Θ(S) του φάσματος της C*-άλγεβρας A σε ένα ατομικό ορθοσυμπληρωμένο sup-πλέγμα S μπορεί να θεωρηθεί ότι προσδιορίζει μια κλάση ισοδυναμίας μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων της A σε έναν χώρο Hilbert με την κλασική έννοια. Συνεπώς, κατ' αναλογίαν προς την κλασική περίπτωση, η αναπαράσταση φ μπορεί βάσιμα να θεωρηθεί υποψήφια για την έννοια ενός γενικευμένου *σημείου* του quantale MaxA, το οποίο, με την σειρά του, είναι υποψήφιο για μιαν έννοια *μη μεταθετικού τοπολογικού χώρου*. Η σχέση κλασικού και μη κλασικού φαίνεται καθαρά στην προσέγγιση των Mulvey et al., καθώς αξιοποιείται ως κίνητρο και μεθοδολογικό εργαλείο η *λογική* σκοπιά. Δηλαδή, η αναζήτηση ενός αντίστοιχου με την μεταθετική περίπτωση –όπου το MaxA είναι locale– του γεγονότος ότι τα σημεία τού MaxA είναι τα *μοντέλα* μιας θεωρίας ⊂axA. Αυτό σημαίνει ότι η θεωρία ⊂axA επικυρώνεται στο locale Ω, το οποίο είναι η τοπολογία **2** = {0, 1} του χώρου **1** με ένα σημείο. Ως γνωστόν, τα σημεία/μοντέλα είναι τότε οι απεικονίσεις ϕ: **1** $\rightarrow$ MaxA, στις οποίες αντιστοιχούν οι ομομορφισμοί αντίστροφης εικόνας φ: MaxA $\rightarrow$ Ω. Στην μη μεταθετική περίπτωση, προκύπτει από όλα τα προηγηθέντα ότι τώρα αυτόν τον ρόλο θα παίζει ο ομομορφισμός φ: MaxA $\rightarrow$ Θ(S), με το quantale Θ(S) να είναι το αντίστοιχο της τοπολογίας ενός, μη-μεταθετικού τώρα, χώρου $\mathbf{1}_S$ με ένα σημείο. Ότι πρόκειται για φυσική γενίκευση προκύπτει από το γεγονός ότι η αντανάκλαση στην κατηγορία των locales κάθε quantale Hilbert είναι ακριβώς το locale Ω, αφ' ενός, και, αφ' ετέρου, ότι ο χώρος $\mathbf{1}_S$ πράγματι έχει ένα σημείο με την εξής έννοια: Για κάθε ατομικό ορθοσυμπληρωμένο sup-πλέγμα S, κάθε αλγεβρικά μη αναγώγιμη αναπαράσταση φ: Θ(S) → Θ(T) του quantale Hilbert Θ(S) σε ένα ατομικό ορθοσυμπληρωμένο sup-πλέγμα T είναι κανονικά ισοδύναμη με την ταυτοτική αναπαράσταση του Θ(S) στο S.

6.4 Ανακεφαλαίωση: προς τον κβαντικό χώρο

Τα βήματα αυτής της συλλογιστικής οδήγησαν διαδοχικά στις εξής γενικεύσεις–αντιστοιχίες με την κλασική περίπτωση. Κατ' αρχάς, η αναζήτηση μιας μη μεταθετικής έννοιας χώρου επιδέχεται φυσικά πολλές προσεγγίσεις, και με διαφορετικά αποτελέσματα. Επέλεξα την προσέγγιση των Mulvey et al. για τα χαρακτηριστικά της που συνόψισα στις προηγούμενες παραγράφους. Αναδεικνύουν το φυσικό περιεχόμενο της θεωρίας, αλλά επί πλέον εντάσσουν το εγχείρημα σε ένα κατηγορικό πλαίσιο και χρησιμοποιούν έναν φορμαλισμό που μας φέρνει σε επαφή με τα μεθοδολογικά ζητήματα που θέλω να τονίσω. Η αλγεβρική μέθοδος με την χρήση C*-αλγεβρών είναι συμβατή με τον ρητά διαμεσολαβητικό ρόλο της έννοιας του φυσικού μεγέθους που συνδέει, και ταυτόχρονα απομακρύνει την κατάσταση του φυσικού συστήματος και την τιμή του φυσικού μεγέθους. Μια πρώτη εννοιολογική αλλαγή, άλλη μια αλλαγή Gestalt θα έλεγα, είναι η πρωταρχικότητα της *σχέσης* ως προσδιοριστικής της σημασίας. Αυτό επέτρεψε την εισαγωγή της έννοιας του γενικευμένου σημείου σε σχέση με την θεωρία των locales, και την ανάδειξη δύο νέων στοιχείων. Το πρώτο είναι η έννοια που ονόμασα κλασικόμορφο σε σχέση με την εργασία τού de Groote. Εδώ καταδεικνύεται το γεγονός ότι το κλασικού τύπου πλαίσιο ανα-σημασιοδοτείται και ενσωματώνεται στο κβαντικό ως δικό του δομικό στοιχείο. Συνεπώς, κοινός τόπος δεν είναι κάτι που περιέχει κάποια δόση κλασικού και κάποια δόση κβαντικού. Το κλασικόμορφο είναι *κβαντικό*. Η σχέση του με το κλασικό είναι η *δομική τους ομοιότητα*. Στον πυρήνα αυτής της ομοιότητας είναι η *ειδική περίπτωση* του κβαντικού, όταν η άλγεβρα των τελεστών είναι *μεταθετική*, πράγμα που επιτρέπει την αξιοποίηση της αναπαράστασης Stone για πλήρεις άλγεβρες Boole και την διευκρίνιση της σχέσης μεταξύ αναπαράστασης Gelfand και του χώρου των οιονεί σημείων που εισάγει ο de Groote. Έτσι, οι δύο πλευρές που κλασικά ταυτίζονταν και κβαντικά έγιναν διακριτές, δηλαδή ο χώρος αναπαραστάσεων και ο χώρος χαρακτήρων της άλγεβρας των φυσικών μεγεθών, γίνεται φανερό ότι, μολονότι *διακριτές*, εν τούτοις παραμένουν άρρηκτα *συνδεδεμένες*. Το δεύτερο στοιχείο είναι η έννοια αποτίμησης που εισάγουν οι Isham et al. Το σημαντικό εδώ είναι η έννοια της τιμής ενός *κβαντικού* μεγέθους στην βάση της λογικής του σχέσης με άλλα κβαντικά μεγέθη τα οποία όμως είναι δυνατόν να αποτιμηθούν με την κλασική έννοια. Εισάγεται έτσι ρητά η *πλαισιακότητα*, και το νόημα ενός μεγέθους ως κόμβου μιας αλυσίδας σχέσεων λογικής συνεπαγωγής. Επανερχόμαστε, επομένως, στην διαπίστωση της συμβατικής πεποίθησης, ότι η διαφορά των πλαισίων επικεντρώνεται στην μετάβαση από μια μεταθετική σε μια μη-μεταθετική άλγεβρα. Τώρα όμως, αυτή η σχέση έχει εμπλουτιστεί έτσι, ώστε η διαφορά κλασικού και κβαντικού να μην είναι η αδιάφορη διαφορά της ποικιλίας, αλλά να αποκτά συγκεκριμένο περιεχόμενο ως *αντίθεση* μεταθετότητας και μη μεταθετότητας.

Έχοντας διαμορφώσει μια τέτοιαν έννοια σημείου, απαιτείται τώρα η συγκεκριμενοποίηση της έννοιας του κβαντικού (μη-μεταθετικού) χώρου. Το πρώτο βήμα είναι η αναζήτηση ενός ενελικτικού quantale με μονάδα, κατάλληλου να παίξει τον ρόλο μιας διακριτής κβαντικής τοπολογίας. Στην βάση των εννοιών που έχουν οριστεί, επισημαίνονται οι εξής αντιστοιχίες

1) Για κάθε quantale *Gelfand* Q, ισχύει ότι κάθε δεξιόπλευρο (αριστερόπλευρο) στοιχείο $a \in R(Q)$ ($L(Q)$), γεννάται από μια προβολή $p \in Q$, δηλαδή $a = p\&1_Q$ ($a = 1_Q\&p$), με συνέπεια κάθε $a \in R(Q)$ ($a \in L(Q)$) να είναι αυτοδύναμο, και κάθε αμφίπλευρο $a \in I(Q)$ να είναι μια προβολή. Συνεπώς τα quantales Gelfand είναι φυσική γενίκευση των locales που σχηματίζουν οι προβολές. Για κάθε C*-άλγεβρα A, το φάσμα MaxA είναι quantale Gelfand, και εάν η A είναι μεταθετική, το locale I(Max A) είναι το κλασικό φάσμα τής A.

2) Ένα quantale *von Neumann* Q είναι η κατάλληλη *μη μεταθετική γενίκευση της έννοιας της πλήρους άλγεβρας Boole*, καθώς για κάθε τέτοιο Q το locale I(Q) είναι πλήρης άλγεβρα Boole. Quantale von Neumann είναι το *ασθενές* φάσμα Max_wB μιας άλγεβρας von Neumman B, όπως και το *quantale Hilbert* Θ(S) ενός ορθοσυμπληρωμένου sup-πλέγματος. Το sup-πλέγμα $R(Max_wB)$ είναι ταυτόσημο με το sup-πλέγμα των προβολών της άλγεβρας von Neumann B. Η ιδιότητα ενός quantale von Neumann Q να είναι *quantale Hilbert* συνιστά αναγκαία συνθήκη ώστε ο κανονικός ομομορφισμός $Q \to \Theta(R(Q))$ να περιορίζεται στον κανονικό ισομορφισμό ορθοσυμπληρωμένων sup-πλεγμάτων από το R(Q) στο R(Θ(R(Q))).

3) Ισχύει ότι, για κάθε C*-άλγεβρα A, επιλέγοντας από κάθε κλάση ισοδυναμίας μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων μια τέτοιαν αναπαράσταση, $\psi_i: A \to \propto(H_i)$ στον χώρο Hilbert H_i, λαμβάνουμε τον ομομορφισμό $\psi: A \to \Pi_i\propto(H_i)$ □ B. Το γινόμενο B είναι ατομική άλγεβρα von Neumann, με την έννοια ότι το πλέγμα Π(B) των προβολών της είναι ατομικό. Το ίδιο είναι το ορθοσυμπληρωμένο sup-πλέγμα $R(Max_wB)$. Ένα quantale von Neumann Q με αυτήν την ιδιότητα ονομάζεται *ατομικό*. Σε αυτήν την περίπτωση, το locale I(Q) είναι *ατομική* πλήρης άλγεβρα Boole.

4) Εάν για ένα quantale von Neumann Q, το locale I(Q) είναι κανονικά ισόμορφο με το locale **2,** τότε το Q ονομάζεται *παράγοντας*. Εάν μια προβολή p ενός quantale Gelfand Q είναι τέτοια ώστε p&a = a&p, τότε η p ονομάζεται *κεντρική*. Για κάθε κεντρική προβολή p ενός quantale Gelfand Q, το Q_p □ $\{a \in Q \mid p\&a = a\}$ είναι και αυτό quantale Gelfand. Εάν το Q είναι quantale von Neumann, τότε το Q_p είναι και αυτό quantale von Neumann, και ατομικό εάν το Q είναι ατομικό. Επί πλέον, εάν $q \in I(Q)$ είναι *άτομο* της πλήρους άλγεβρας Boole I(Q), και εάν $p \in Q$ είναι μια κεντρική προβολή συνυφασμένη με το q, με την έννοια ότι $q = p\&1_Q$, τότε το quantale von Neumann Q_p είναι παράγοντας. Έστω Q ένα ατομικό quantale von Neumann και έστω Min(Q) το σύνολο των ατόμων της ατομικής πλήρους άλγεβρας Boole I(Q). Εάν υπάρχει ένας ισομορφισμός $Q \to \Pi_i Q_i$, όπου Q_i είναι παράγοντες, τότε στον αντίστοιχο ισομορφισμό $I(Q) \to \Pi_i I(Q_i)$, το γινόμενο είναι γινόμενο αντιγράφων της άλγεβρας Boole **2**, το καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε ένα άτομο $q \in \mathrm{Min}(Q)$. Εάν p_q είναι η αντίστροφη εικόνα της μονάδας του παράγοντα που αντιστοιχεί στο άτομο q, τότε ένα *διακριτό* (discrete) quantale von Neumann Q είναι ένα ατομικό quantale von Neumann για το οποίο υπάρχει μια οικογένεια $(p_q)_{q\in \mathrm{Min}(Q)}$ κεντρικών προβολών του Q που ικανοποιούν τις σχέσεις:

α) $\vee_{q\in \mathrm{Min}(Q)} p_q = e_q$

β) $p_q\&1_Q = q, \quad \forall q \in \mathrm{Min}(Q)$.

Η οικογένεια p_q ονομάζεται *κεντρική ανάλυση* της μονάδας e_Q του Q. Κάθε τέτοια οικογένεια p_q προσδιορίζει έναν ισομορφισμό από ένα διακριτό quantale von Neumann Q σε ένα γινόμενο διακριτών παραγόντων: $Q \to \prod_{q\in \mathrm{Min}(Q)} Q_{p_q}$.

Ένας τέτοιος ισομορφισμός είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα ενελικτικό quantale με μονάδα να είναι διακριτό quantale von Neumann. Τέτοια quantales είναι φυσικές γενικεύσεις της έννοιας της ατομικής πλήρους άλγεβρας Boole. Τέλος, αποδεικνύεται ότι για κάθε διακριτό quantale von Neumann Q υπάρχει ένας κανονικός δεξιά ισομορφισμός

$$\varphi: Q \to \prod_{q\in \mathrm{Min}(Q)} \Theta(R(Q)_q).$$

5) Η κεντρική ιδέα είναι τώρα η εξής. Μια C*-άλγεβρα A προσδιορίζει μια μη-μεταθετική τοπολογία, με την έννοια ότι υπάρχει μια εμφύτευση των κλειστών δεξιά ιδεωδών τής A στα ασθενώς κλειστά δεξιά ιδεώδη της ατομικής άλγεβρας von Neumann B που ορίστηκε ως άνω. Δηλαδή, ο ομομορφισμός $\text{Max}\psi_w$: MaxA $\rightarrow$ Max_wB περιορίζεται σε εμφύτευση των δεξιόπλευρων στοιχείων των quantales MaxA και Max_wB. Ένα ενελικτικό quantale με μονάδα, X, ονομάζεται *χωρικό*, εάν υπάρχει ένας ομομορφισμός ψ: X $\rightarrow$ Q σε ένα διακριτό quantale von Neumann Q, με ιδιότητες στις οποίες δεν αναφέρομαι εδώ, και οι οποίες συλλαμβάνουν ακριβώς

Κλασικό

Κατάσταση $\longrightarrow$ σημείο $\quad s \in \overset{\mathrm{ev}}{\ddot{S}}$ (φασικός χώρος) $\sim \mathrm{spec}\mathcal{A} \sim \mathrm{Max}\mathcal{A}$

$\tilde{s}$ (συναρτησιακό) $\qquad \times$

Φυσικό Μέγεθος: $\quad \underset{\cdot\cdot}{\tilde{s}}\; A \longleftrightarrow$ συνάρτηση $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{S} = C(S) := \mathcal{A}$

$\updownarrow \qquad \downarrow$ $\qquad$ ομομορφισμός

Τιμή ΦΜ: $\quad \tilde{A}(s) \sim \chi_{\{s\}}^{(s)} \qquad \mathbb{R}$

Θεωρία: $\quad \mathbb{M}\mathrm{ax}\mathcal{A} \xrightarrow{\text{επικύρωση}} \mathbf{2}$ (άλγεβρα Boole)

Κλασικόμορφο

Σημείο: χαρακτήρας **άλγεβρας:** $\quad \varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\updownarrow$

Σημείο: μέγιστο πρώτο ιδεώδες: $\quad m_\varphi \in \mathrm{spec}\mathcal{A} \sim \mathrm{Max}\mathcal{A}$ (locale) $\longleftarrow$ ομομορφισμός

$\updownarrow$

$m_\varphi + m_\varphi^*$

$\shortparallel$

Σημείο: καθαρή κατάσταση: $\quad \ker \pi_\varphi$

Παρατηρήσιμα μεγέθη: $\quad \mathcal{A} \ni$ (αυτοσυζυγής τελεστής) $\hat{A} \longleftrightarrow$ συνάρτηση $\tilde{A}$

(Μεταθετική W^*- άλγεβρα) $\quad \ddot{x} \in H \qquad \ddot{\varphi} \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}} \in \mathbf{Set}^{W^*(\mathcal{A})^{op}}$ (τόπος) $\longleftrightarrow \mathbf{\Omega}$ (ταξινομητής υποαντικειμένων)

$\updownarrow \qquad \updownarrow$

Σημείο: αναπαράσταση σε χώρο Hilbert H: $\quad x\varphi_A \in H \qquad \varphi(\hat{A}) \sim \varphi(\hat{P}) = \chi_U(\varphi)$

$U := \{\varphi \mid \varphi(\hat{P}) = 1\}$

συνεχής απεικόνιση

Σημείο: στοιχείο χώρου Stone: $\quad \{V \in H \mid \varphi(\hat{P}_V) = 1\} \longleftrightarrow \varphi \in$ (χώρος Stone) $\qquad \mathbf{2}$

ομοιομορφισμός

$\Cup$

Σημείο: κόσκινα επί της άλγεβρας: $\qquad$ Κόσκινα επί της $\mathcal{A}$

επικύρωση

Θεωρία: $\qquad \mathbb{M}\mathrm{ax}\mathcal{A}$

Κβαντικό

Σημείο: μέγιστο δεξιό ιδεώδες μη μεταθετικής C^*- άλγεβρας — m

Σημείο: μη αναγώγιμη αναπαράσταση

$$\varphi_m : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}/m) \quad (\mathcal{A}/m = H)$$

$$\therefore \quad a \longmapsto \varphi_a : \mathcal{P}(H) \longrightarrow \mathcal{P}(H)$$

$$\xRightarrow[\text{quantales Hilbert}]{\text{γινόμενο}} Q_{\mathrm{Max}\mathcal{A}}$$

$Q_{\mathrm{Max}\mathcal{A}}$ ↑ ομομορφισμός χωρικό quantale

∴ τ : κβαντική τοπολογία

Σημείο: ομομορφισμός quantales Gelfand

$$\mathrm{Max}\mathcal{A} \xrightarrow{\text{ομομορφισμός}} Q(\mathcal{A}/m)$$

ορθοσυμπληρωμένο πλέγμα
με ενέλιξη,
$Q(H)$: quantale von Neumann
$I(Q(H))$: locale

$$I(Q(H)) \xleftrightarrow{\text{ισομορφισμός}} \mathbf{2}$$

Σημείο: μοντέλο θεωρίας — μοντέλα

Θεωρία — $\mathrm{Max}\mathcal{A} \ni (a \in P)$

αυτήν την κεντρική ιδέα. Αποδεικνύεται ότι ένα τέτοιο χωρικό X *έχει αρκετά σημεία*, με την έννοια ότι για κάθε διακριτά μεταξύ τους a, a΄ $\in$ R(X), υπάρχει μια αλγεβρικά μη-αναγώγιμη αναπαράσταση φ: $X \to \Theta(S)$ σε ένα ατομικό ορθοσυμπληρωμένο sup-πλέγμα S όπου τα φ(a), φ(a΄) $\in$ R(Θ(S)) είναι διακριτά. Οι Mulvey et al. ορίζουν ένα quantale Gelfand X και έναν ομομορφισμό σαν τον ανωτέρω, τ_X: $X \to Q_X$, σε ένα γινόμενο Q_X διακριτών quantales Hilbert, ως έναν *κβαντικό* χώρο (X, τ_X). Ο ομομορφισμός τ_X είναι η *κβαντική* τοπολογία αυτού του χώρου. Εάν το X είναι locale, τότε η αντίστοιχη τοπολογία είναι τ_X: $X \to B_X$, όπου B_X είναι μια ατομική πλήρης άλγεβρα Boole, ισόμορφη με το δυναμοσύνολο του συνόλου των σημείων τού locale X. Με αυτήν την έννοια, *ένας κβαντικός χώρος εμπεριέχει έναν κλασικό χώρο*. Είναι άλλη μία άποψη του τρόπου με τον οποίο το κβαντικό εγκολπώνεται το ανανοηματοδοτημένο κλασικό.

6) Με βάση όλα αυτά, το quantale MaxA είναι χωρικό. Ο ομομορφισμός τ_A: MaxA $\to Q_{MaxA}$, όπου Q_{MaxA} το γινόμενο quantales Hilbert που προσδιορίζεται από τις μη-αναγώγιμες αναπαραστάσεις τής A σε έναν χώρο Hilbert, είναι *κβαντική τοπολογία*. Οι δύο πίνακες που παρατίθενται συνοψίζουν τα ανωτέρω.

6.5 Η κβάντωση ως συναρτητής

Το ερώτημα τώρα είναι η συγκεκριμένη ένταξη ενός ανα-νοηματοδοτημένου κλασικού μαθηματικού πλαισίου στο κβαντικό πλαίσιο. Ειδικά, αναφέρομαι στον χαμιλτονιανό κλασικό φορμαλισμό, αφ' ενός, και, αφ' ετέρου, στον φορμαλισμό των C*-αλγεβρών. Προς τούτο, στηρίζομαι στα αποτελέσματα του N.P. Landsman [82].

Θα αναδιατυπώσω το ερώτημα ως εξής. Ποιό είναι το νόημα της γνωστής θέσης, *η κβαντική θεωρία χρειάζεται το κλασικό πλαίσιο για την ερμηνεία της*, και τί σημαίνει αντιστοίχως η «συνταγή κβάντωσης». Όσον αφορά το πρώτο σκέλος, η θεώρηση του κλασικού πλαισίου ως δομικού στοιχείου του ίδιου του κβαντικού, και όχι ως πλαισίου μιας διαφορετικής φυσικής θεωρίας, οδηγεί στην θέση ότι το κβαντικό επιδέχεται ερμηνεία με τρόπον εσωτερικό και αυτοδύναμο. Όσον αφορά το δεύτερο σκέλος, και ως συνέπεια του πρώτου, η λεγόμενη «συνταγή» μπορεί να μετατραπεί σε φυσική αρχή.

Κατ' αρχάς, ας δούμε τις φυσικές αφετηρίες και τα κίνητρα της προσέγγισης του Landsman. Στο κλασικό άκρο βρίσκεται η έννοια της συμπλεκτικής αναγωγής (αναγωγή Marsden-Weinstein), σχετικά με την κβάντωση δεσμευμένων (constrained) συστημάτων, που ανάγεται στον Dirac. Έστω λοιπόν μια συνδεδεμένη συμπλεκτική πολλαπλότητα S με μιαν ισχυρώς χαμιλτονιανή δεξιά δράση μιας συνδεδεμένης ομάδας Lie, H, με αντίστοιχη άλγεβρα Lie **h.** Τότε υπάρχει μια ισο-αλλοίωτη (equivariant) **απεικόνιση ορμής** $J: S \to (\mathbf{h}^*)^-$, όπου **h*** η δυική τής **h** και το σύμβολο « – » σημαίνει μείον την αρχική δομή Poisson μιας πολλαπλότητας Poisson.[35] Το αντίστοιχο pullback, $J^*: C^\infty((\mathbf{h}^*)^-) \to C^\infty(S)$, είναι μορφισμός αλγεβρών Poisson. Εάν $O \in \mathbf{h}^*$ είναι μια συν-συναφής (co-adjoint) τροχιά, θα έχουμε μιαν απεικόνιση i_O: O $\to$ **h*,** και αντιστοίχως $\pi_O \circ \iota_O^*: C^\infty(\mathbf{h}^*) \to C^\infty(O)$. Ο ανηγμένος (reduced) χώρος ορίζεται ως $S^O = J^{-1}(O)/H$. Για μιαν υποάλγεβρα Poisson, A, της $C^\infty(S)$ με H-αναλλοίωτα στοιχεία, ο μορφισμός Poisson $\pi^O: A \to C^\infty(S^O)$ μπορεί να θεωρηθεί ως «κλασική αναπαράσταση» της A στον S^O, την οποία επάγει ο μορφισμός Poisson π_O. Γενικότερα, ας υποθέσουμε ότι δίδονται ένας συμπλεκτικός χώρος, S, μια πολλαπλότητα Poisson, P, και δύο απεικονίσεις Poisson $J: S \to P^-$, και $\rho: X \to P$, όπου X είναι συμπλεκτικός χώρος. Τότε, θα πρέπει να υπάρχει μια «επαγόμενη κλασική αναπαράσταση» π^X κάθε υποάλγεβρας Poisson, A, με $A \subset C^\infty(S)$, η οποία Poisson–μετατίθεται[36] με την $J^*C^\infty(P)$, σε κάποιον συμπλεκτικό χώρο S^X. Ένα «κβαντωμένο» αντίστοιχο θα ήταν το εξής: Δύο άλγεβρες τελεστών, A και B, που μετατίθενται μεταξύ τους, και που δρουν σε κάποιον χώρο Hilbert, H από τα αριστερά και τα δεξιά αντιστοίχως, και ένας αριστερά B-module, H_χ. Με σύμβολα, $A \to H \leftarrow B$ και $B \xrightarrow{\rho_C} H_\chi$. Τότε αναζητά κανείς μιαν «επαγόμενη» αναπαράσταση $\pi^\chi(A)$ σε έναν χώρο Hilbert H^χ. Ειδικές περιπτώσεις όπου ισχύει αυτός ο συλλογισμός βρίσκουμε στην θεωρία τού Mackey για τις επαγόμενες αναπαραστάσεις, και στην φυσική στην εξής κατάσταση: Έστω (P, Q, H, p) μια κύρια δέσμη ινών με την προβολή $p: P \to Q$, και μια συμπαγής ομάδα Lie, H, που δρα στον ολικό χώρο P από τα δεξιά. Τα συμπλεκτικά φύλλα της πολλαπλότητας Poisson $P = (T^*P)/H$ αντιστοιχούν ένα-προς-ένα στις συν-συναφείς τροχιές O στην **h***. Το φύλλο S^O παίζει τον ρόλο φασικού χώρου για ένα σωματίδιο με εσωτερικό φορτίο O που κινείται στο Q και είναι συνεζευγμένο με ένα πεδίο Yang-Mills με ομάδα βαθμίδας H. Αυτή η περίπτωση ισοδυναμεί με την συμπλεκτική αναγωγή όπου $S = T^*P$ και $A = C^\infty(T^*P)^H \cong C^\infty((T^*P)/H)$. Τότε, η αντίστοιχη κβαντωμένη κατάσταση θα περιγράφεται με τα εξής δεδομένα:

$$K(L^2(P))^H \to L^2(P) \leftarrow C^*(H) \text{ και } C^*(H) \xrightarrow{\rho_C} H_\chi.$$

[35] Μια πολλαπλότητα Poisson επιδέχεται μια διαστρωμάτωση (stratification), τα φύλλα της οποίας είναι συμπλεκτικές πολλαπλότητες.
[36] Η αγκύλη Poisson μηδενίζεται.

Το σύμβολο $K(L^2(P))^H$ σημαίνει τους H-αναλλοίωτους συμπαγείς τελεστές στον $L^2(P)$. Λαμβάνουμε τότε μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις τής C*-άλγεβρας των H-αναλλοίωτων συμπαγών τελεστών στον $L^2(P)$ σε χώρους H^χ.

Με κίνητρο αυτούς τους συλλογισμούς, ο Landsman επιστρατεύει μια σειρά μαθηματικά δεδομένα. Πρώτον, την γενική έννοια της *ισοδυναμίας Morita* [Ι, 40] μεταξύ πολλαπλοτήτων Poisson, μεταξύ αλγεβρών von Neumann και μεταξύ C*-αλγεβρών. Αυτό επιτρέπει την κατάταξη αυτών των εννοιών σε κατηγορίες με μορφισμούς που ορίζονται με ενιαίον τρόπο στην βάση της αντίστοιχης έννοιας ισοδυναμίας Morita. Δεύτερον, ιδιότητες των *ομαδοειδών* και των *αλγεβροειδών* [Ι]. Αυτό επίσης επιτρέπει την ενιαία εξέταση διαφορετικών εννοιών όπως οι ομάδες ή οι πολλαπλότητες, καθώς όλα αυτά είναι ομαδοειδή. Τρίτον, το γεγονός ότι ένα ομαδοειδές παίζει τον ρόλο γέφυρας μεταξύ πολλαπλοτήτων Poisson και C*-αλγεβρών. Τέταρτον, την θεωρία τού Rieffel για την αυστηρή κβάντωση μέσω παραμορφώσεων (strict deformation quantization) αλγεβρικών δομών, και το γεγονός ότι κάθε C*-άλγεβρα ενός ομαδοειδούς Lie μπορεί να θεωρηθεί αποτέλεσμα μιας τέτοιας διαδικασίας κβάντωσης. Στην βάση των ανωτέρω, ο Landsman αποδεικνύει ότι μια ευρεία έννοια κβάντωσης θεμελιώνει μια συναρτητική σχέση μεταξύ κατηγοριών που προσιδιάζουν από την μία στο κλασικό, και από την άλλη στο κβαντικό μαθηματικό πλαίσιο. Το γεγονός είναι ότι σε περιπτώσεις όπως η γεωμετρική κβάντωση Weyl-Moyal ή Berezin-Toeplitz, υπάρχει τέτοια συναρτητική σχέση υπό πολύ περιοριστικούς όρους. Οι περιορισμοί μπορούν να ξεπεραστούν αν γίνουν οι κατάλληλες γενικεύσεις. Αυτό ακριβώς προτείνει ο Landsman [82]. Έτσι, το πεδίο ορισμού του επιζητούμενου συναρτητή θα είναι οι πολλαπλότητες Poisson, ο στόχος θα είναι μια γενίκευση της έννοιας του *συνεχούς πεδίου* **C***-*αλγεβρών* που εισήγαγε ο Rieffel, και οι μορφισμοί θα είναι οι αντίστοιχες περιπτώσεις ισοδυναμίας Morita.

6.6 Μη-μεταθετικό γινόμενο

Θα παρουσιάσω τώρα τις απαιτούμενες βασικές έννοιες. Για τις τεχνικές λεπτομέρειες παραπέμπω στο Παράρτημα Ι. Συμβολίζουμε με $\mathfrak{R}[[\hbar]]$ τον μεταθετικό δακτύλιο των μιγαδικών τυπικών δυναμοσειρών σε μία μεταβλητή, ħ. Τελικά θέλουμε η ħ να είναι η σταθερά τού Planck διαιρεμένη δια 2π. Εάν P είναι μια πολλαπλότητα Poisson, ένα *γενικευμένο *-γινόμενο* στην P είναι μια προσεταιριστική $\mathfrak{R}[[\hbar]]$-άλγεβρα A με μονάδα, τέτοια ώστε:

1. $A/\hbar A \cong C^\infty(P)$ ως άλγεβρες επί του $\mathfrak{R}$.

2. Υπάρχει μια διατομή $Q: C^{\infty}(P) \rightarrow A$ της κανονικής προβολής $\pi: A \rightarrow A/\hbar A$ για την οποία ισχύει η συνθήκη Dirac, δηλαδή $Q(f)*Q(g)-Q(g)*Q(f)+\iota\hbar Q(\{f\ ,\ g\}) = 0$ στην $A/\hbar^2 A$.

Ο όρος «$\Re[[\hbar]]$-άλγεβρα A» σημαίνει εδώ ότι υπάρχει ένας 1-1 (injective) ομομορφισμός δακτυλίων από τον $\Re[[\hbar]]$ στο κέντρο[37] τής A. Έστω X ένας συμπαγής χώρος Hausdorff. Μια C(X)C*-άλγεβρα είναι μια C*-άλγεβρα × με μιαν εμφύτευση (embedding) με μονάδα τού C(X) στο κέντρο Z της άλγεβρας των πολλαπλασιαστών της, M(×). Δηλαδή, η × είναι εφοδιασμένη με έναν 1-1 (injective) $*$-ομομορφισμό με μονάδα, $C(X) \rightarrow Z(M(\times))$. Ένα *πεδίο* C**-αλγεβρών* είναι μια τριάδα $(X, \{\times_x\}_{x\in X}, \Gamma)$, όπου $\{\times_x\}_{x\in X}$ είναι μια οικογένεια C*-αλγεβρών, και Γ μια οικογένεια διατομών, δηλαδή απεικονίσεων

$f: X \rightarrow \coprod_{x\in X} \times_x$ με $f(x) \in \times_x$, η οποία είναι

1. μια C*-άλγεβρα για πράξεις σημείο προς σημείο και για την norm $||f|| = \sup_{x\in X}||f(x)||_{\times x}$

2. κλειστή για πολλαπλασιασμό με την C(X)

3. πλήρης (full), δηλαδή για κάθε $x \in X$ ισχύει $\{f(x)\} \mid f \in \Gamma\} = \times_x$.

Το πεδίο είναι συνεχές όταν για κάθε $f \in \Gamma$ η συνάρτηση $x \# ||f(x)||$ ανήκει στην C(X), και άνω ημισυνεχές όταν για κάθε $f \in \Gamma$ και κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{x \in X \mid ||f(x)|| \geq \varepsilon\}$ είναι συμπαγές. Μια C(X)C*-άλγεβρα × ορίζει ένα συνεχές πεδίο C*-αλγεβρών, της ως άνω μορφής, $(X, \{\times_x = \times/C(X, x)\times\}_{x\in X}, \Gamma)$, με $\times \cong \Gamma$ (το $A \in \times$ ορίζει ένα $\tilde{A} \in \Gamma$: $\tilde{A}(x) = \pi_x(A)$, με $\pi_x: \times \rightarrow \times_x$), όπου $C(X, x) \square \{f \in C(X) \mid f(x) \square 0\}$, όταν η απεικόνιση $x \# ||\pi_x(A)||$ είναι συνεχής για κάθε $A \in \times$. Μια *αυστηρή κβάντωση μέσω παραμορφώσεων* μιας πολλαπλότητας Poisson P είναι μια C(I)C*-άλγεβρα ×, όπου $I = [0\ ,\ 1]$, τέτοια ώστε

1. $\times_0 = \times/C(I, 0)\times \cong C_0(P)$ ως C*-άλγεβρες.

2. Υπάρχει μια διατομή, Q, της π_0, οριζόμενη σε μια κατάλληλη υποάλγεβρα Poisson της $C_0(P)$, τέτοια ώστε $\lim_{\hbar\rightarrow 0} ||\iota/\hbar\ (Q_\hbar(f)Q_\hbar(g) - Q_\hbar(g)Q_\hbar(f)) - Q_\hbar(\{f\ ,g\})|| = 0$, όπου $Q_\hbar = \pi_\hbar \circ Q$. Εδώ το $\pi_x: \times \rightarrow \times_x$ είναι η κανονική προβολή.

[37] Το σύνολο των στοιχείων τής A που μετατίθενται με όλα τα στοιχεία τής A.

3. Για κάθε $A \in \times$, η συνάρτηση $\hbar \# \|\pi_\hbar(A)\|$ από το I στο R^+ είναι συνεχής.

Έστω X ένας συμπαγής χώρος Hausdorff. Τα αντικείμενα της κατηγορίας **XC*** είναι C(X)C*-άλγεβρες. Τα βέλη είναι κλάσεις μοναδιαίων ισομορφισμών μεταξύ C(X) δι-modules Hilbert. Η σύνθεση των βελών γίνεται μέσω του εσωτερικού τανυστικού γινομένου Rieffel [I]. Το ταυτοτικό βέλος $1_\times$ σε ένα αντικείμενο × είναι η κλάση τής ×, θεωρούμενη ως ο κανονικός ×-× δι-module Hilbert [I]. Οι κατηγορίες **XC*** αντιστοιχούν στις κατηγορίες k-**Alg**, όπου k είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος. Τα αντικείμενα της k-**Alg** είναι προσεταιριστικές άλγεβρες με μονάδα επί του k, και τα βέλη κλάσεις ισομορφισμών μεταξύ δι-modules με σύνθεση το τανυστικό γινόμενο. Όταν X = I, η **IC*** είναι το C*-αλγεβρικό αντίστοιχο της κατηγορίας $\Re[[\hbar]]$-**Alg**. Δύο C(X)C*-άλγεβρες είναι ισόμορφες ως αντικείμενα της **XC*** εάν και μόνον εάν είναι Morita ισοδύναμες ως C(X)C*-άλγεβρες.

6.7 Κλασικό και κβαντικό: αντιστοιχία πλαισίων

Στο Παράρτημα I σημειώνεται ότι μια πολλαπλότητα Poisson P ονομάζεται ολοκληρώσιμη όταν υπάρχει ένα συμπλεκτικό ομαδοειδές επί της P· οπότε, εάν η P είναι ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει ένα s-συνδεδεμένο και s-απλώς συνδεδεμένο συμπλεκτικό ομαδοειδές Γ(P) η βάση του οποίου είναι ισόμορφη με το P ως συμπλεκτικά ομαδοειδή. Η κλάση ισομορφισμών $[P \xleftarrow{t} \Gamma(P) \xrightarrow{s} P]$ είναι αμφίπλευρη μονάδα για το γινόμενο $\circledcirc_P$ [I]. Τα s και t είναι οι απεικονίσεις πηγής και στόχου. Η κατηγορία **Poisson** έχει ως αντικείμενα ολοκληρώσιμες πολλαπλότητες Poisson και ως βέλη κλάσεις ισομορφισμού από συνήθη (regular) δυικά ζεύγη. Δύο πολλαπλότητες Poisson είναι Morita ισοδύναμες εάν και μόνον εάν είναι ισόμορφα αντικείμενα στην **Poisson.** Συνεπώς, μια πολλαπλότητα Poisson είναι ολοκληρώσιμη εάν και μόνον εάν είναι Morita ισοδύναμη με τον εαυτό της. Ας θυμηθούμε τον τρόπο που, στην θεωρία των κατηγοριών, ορίζεται το στοιχείο γένους. Στην παρούσα περίπτωση, θα είναι $P \to P$, για μια πολλαπλότητα Poisson, οπότε οι μορφισμοί στην αντίστοιχη κατηγορία σημαίνουν ισοδυναμία Morita. Το στοιχείο γένους, δηλαδή, είναι η *ολοκληρώσιμη πολλαπλότητα Poisson, ως πρότυπο του κλασικού πλαισίου*. Η κατηγορία **Poisson** είναι ένα κλασικό αντίστοιχο της κατηγορίας των C*-αλγεβρών με βέλη τις μοναδιαίες κλάσεις ισοδυναμίας των δι-modules Hilbert.

Ένα ομαδοειδές Lie, G, με βάση G_0 έχει ένα συναφές αλγεβροειδές Lie, A(G), το οποίο είναι διανυσματική δέσμη επί του G_0. Η δυική δέσμη A*(G) έχει μια κανονική (canonical) γραμμική δομή Poisson. Αντιστρόφως, κάθε τέτοια γραμμική δομή είναι η δυική κάποιου αλγεβροειδούς Lie. Σημασία από την άποψη της φυσικής έχει το γεγονός ότι πολλαπλότητες Poisson της μορφής A*(G) είναι όλες οι συνεφαπτόμενες δέσμες, όλες οι δυικές αλγεβρών Lie και όλες οι πολλαπλότητες με μηδενική αγκύλη Poisson. Εάν G και H είναι δύο ομαδοειδή Lie, έστω ότι το M είναι μια πολλαπλότητα που συνιστά μια G-H δι-δέσμη, $G \rightarrowtail M \leftarrowtail H$. Δηλαδή, το G και το H δρουν επί της M από αριστερά και δεξιά αντιστοίχως και αυτές οι δράσεις είναι λείες και μετατίθενται. Εάν η απεικόνιση βάσης π: $M \to G_0$ της G-δράσης στην M είναι surjective submersion,[38] και εάν το H δρα ελεύθερα και μεταβατικά (transitively) στις ίνες τής π, οπότε $M/H \cong G_0$, λέμε ότι η δι-δέσμη είναι κύρια. Μια γενίκευση της απεικόνισης ορμής συνδέει μια δι-δέσμη με ένα δυικό ζεύγος $A^*(G) \xleftarrow{J_L} T^*(M) \xrightarrow{J_R} A^*(H)$, το οποίο είναι σύνηθες (regular) εάν η δι-δέσμη είναι κύρια.

Η κατηγορία **LPoisson** έχει ως αντικείμενα πολλαπλότητες Poisson της μορφής A*(G) για τυχόν ομαδοειδές G, και ως βέλη συνήθη δυικά ζεύγη της ως άνω μορφής. Η κατηγορία **LG** έχει ως αντικείμενα ομαδοειδή Lie και ως βέλη κλάσεις ισομορφισμών κύριων δι-δεσμών. Η κατηγορία **LG˜** είναι η πλήρης (full) υποκατηγορία τής **LG** τα αντικείμενα της οποίας είναι s-συνδεδεμένα και s-απλώς συνδεδεμένα ομαδοειδή Lie. Τα ως άνω ορίζουν έναν συναρτητή A* από την **LG˜** στην **Poisson,** ο οποίος είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή υπάρχει ο A^{*-1}. Ο A* στέλνει τα αντικείμενα G της **LG˜** στα A*(G), και στα βέλη απεικονίζει την κλάση ισομορφισμών μιας G-H δι-δέσμης M στην κλάση ισομορφισμών του δυικού ζεύγους $A^*(G) \leftarrow T^*(M) \rightarrow A^*(H)$. Το συμπλεκτικό ομαδοειδές επί της ολοκληρώσιμης πολλαπλότητας Poisson A*(G) είναι η συνεφαπτομένη δέσμη T*(G). Η κατηγορία **LPoisson** είναι η εικόνα του συναρτητή A*: **LG˜** → **Poisson.** Στην βάση των ανωτέρω, ο Landsman αποδεικνύει ότι υπάρχει τότε ένας συναρτητής Q: **LPoisson** → **IC*** ο οποίος για κάθε αντικείμενο A*(G) στην **LPoisson** ορίζει μιαν αυστηρή κβάντωση. Ο συναρτητής είναι σύνθεση:

$$\text{Q: } \mathbf{LPoisson} \xrightarrow{(A^*)^{-1}} \mathbf{LG}\tilde{} \xrightarrow{T} \mathbf{LG}\tilde{} \xrightarrow{C^*} \mathbf{IC^*}.$$

Ο συναρτητής T στέλνει το ομαδοειδές G στο εφαπτόμενο ομαδοειδές G^T [40]. Αυτό είναι ένα ομαδοειδές επί του $G_0 \times I$, I = [0, 1]. Η ίνα πάνω από το 0 είναι το αλγεβροειδές Lie A(G), ενώ πάνω από το $\hbar \neq 0$ είναι το G. Η απεικόνιση G # C*(G) είναι εκείνη που συνδέει ένα ομαδοειδές Lie με την αντίστοιχη C*-άλγεβρα συνέλιξης, και η οποία επεκτείνεται σε συναρτητή. Το $C^*(G^T)$ είναι C(I)C*-άλγεβρα. Με βάση αυτά τα δεδομένα, ο Landsman [82] αποδεικνύει ότι υπάρχει μια αυστηρή κβάντωση μέσω παραμορφώσεων της κανονικής δομής Poisson στο δυικό ενός

[38] Surjective: επί. Submersion: λεία απεικόνιση πολλαπλοτήτων τέτοια ώστε σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού το διαφορικό ή η ιακωβιανή είναι επί.

ολοκληρώσιμου αλγεβροειδούς Lie. Ένα τέτοιο αλγεβροειδές A(G) υπάρχει για κάθε ομαδοειδές Lie, G (το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά). Εφ’ όσον πάντα υπάρχει η C*-άλγεβρα C*(G), κάθε τέτοια άλγεβρα μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα μιας τέτοιας διαδικασίας κβάντωσης. Ως ειδική περίπτωση, αυτή η μέθοδος περιλαμβάνει την κβάντωση Weyl, η οποία επιτυγχάνεται με την μέθοδο της επονομαζόμενης γεωμετρικής κβάντωσης.

Η επαφή με την γεωμετρική κβάντωση, το φυσικό περιεχόμενο της οποίας είναι ρητά διατυπωμένο, δεν περιορίζεται σε αυτό το γεγονός. Είναι αξιοσημείωτη η πρόταση τού Landsman [83], με την προσφυγή σε έναν νέον ορισμό της έννοιας της κβάντωσης που οφείλεται στον Raoul Bott, και καθιστά διαφανέστερη την επιζητούμενη συναρτητική σχέση. Η βασική ιδέα της γεωμετρικής κβάντωσης [57] έχει ως εξής. Αφετηρία είναι ένα μαθηματικό πλαίσιο της κλασικής φυσικής, δηλαδή μια συμπλεκτική πολλαπλότητα (S, ω), η οποία υποτίθεται ότι είναι συμπαγής. Εάν η κλάση συνομολογίας $[\omega]/2\pi \in H^2(S, \nabla)$ (∇: οι πραγματικοί αριθμοί, H^2: η 2^η ομάδα συνομολογίας) της συμπλεκτικής δομής ω βρίσκεται στην εικόνα τού $H^2(S, \wedge)$ ($\wedge$: οι ακέραιοι αριθμοί) υπό τον φυσικό ομομορφισμό $H^2(S, \wedge) \square H^2(S, \nabla)$, εάν είναι δηλαδή ακέραιη, τότε η πολλαπλότητα επιδέχεται προκβάντωση. Τούτο σημαίνει ότι υπάρχει μια (όχι μοναδική) γραμμική δέσμη L_ω επί της S, η γραμμική δέσμη προκβάντωσης, τέτοια ώστε ο ως άνω ομομορφισμός απεικονίζει την πρώτη κλάση Chern, $c_1(L_\omega)$, στην κλάση $[\omega]/2\pi$. Έστω ακόμη ότι η S είναι εφοδιασμένη με μιαν ορισμένως θετική μιγαδική πόλωση, ϑ, δηλαδή μιαν υποδέσμη της μιγαδοποιημένης εφαπτομένης δέσμης $(TS)_\Re$ στην S (μιγαδική κατανομή) με τις εξής ιδιότητες: Πρώτον, είναι ολοκληρώσιμη με μια κατάλληλη έννοια (είναι φυλλωσιά (foliation)) [57]. Δεύτερον, η διάσταση του $\vartheta \cup \overline{J} \cup TS$ είναι σταθερή. Τρίτον, για κάθε $s \in S$, η $\vartheta_s \subset (T_sS)_\Re$ είναι λαγκρανζιανή, $\vartheta = \vartheta^\perp$. Εάν ∇ είναι ένας σύνδεσμος στην δέσμη L_ω με καμπυλότητα ω, ο χώρος $H^0(S, L_\omega)$ των πολωμένων διατομών τής L_ω, δηλαδή εκείνων που μηδενίζονται από όλα τα ∇_X, $X \in \vartheta$, είναι ο χώρος Hilbert, H(S), που ορίζει μια κβάντωση της S. Στην περίπτωση που επί πλέον η S φέρει μιαν ισχυρώς χαμιλτονιανή δράση μιας συμπαγούς ομάδας Lie, G, η οποία αφήνει την ϑ αναλλοίωτη, ορίζεται η κβαντωμένη αναγωγή Marsden–Weinstein ως το αναλλοίωτο μέρος, $H^0(S, L_\omega)^G$, του χώρου $H^0(S, L_\omega)$. Τα φυσικά μεγέθη της θεωρίας θα αντιστοιχούν τότε σε μοναδιαίες αναπαραστάσεις τής G σε αυτόν τον χώρο. Εάν S^0 και $L_\omega{}^0$ είναι ο ανηγμένος χώρος και η αντίστοιχη γραμμική δέσμη, οι Guillemin και Sternberg απέδειξαν ότι $H^0(S, L_\omega)^G \cong H^0(S^0, L_\omega{}^0)$, όπου το «≅» δηλώνει ισομορφισμό υπό μοναδιαίους μετασχηματισμούς. Δεδομένου ότι για έναν χώρο Hilbert η μόνη σταθερά υπό τέτοιους μετασχηματισμούς είναι η διάστασή του, η ως άνω σχέση ανάγεται σε ισότητα αριθμών, $\dim H^0(S, L_\omega)^G = \dim H^0(S^0, L_\omega{}^0)$. Η νέα προσέγγιση στην κβάντωση απαιτεί την εισαγωγή εννοιών όπως μια δομή $Spin^c$ στην πολλαπλότητα S και ένας τελεστής Dirac, Đ˜. Για λεπτομέρειες παραπέμπω στον Landsman [83], σημειώνω μόνον ότι η συμπαγής ομάδα $Spin^c(n)$, με $n = \dim S$, είναι συμπαγής ομάδα Lie που ορίζεται ως μη τετριμμένη κεντρική επέκταση της ομάδας SO(n) με την ομάδα U(1), ενώ μια δομή Spin^c στην S είναι μια κατάλληλα οριζόμενη $\mathrm{Spin}^c(n)$-δέσμη επί της S. Η ομάδα $\mathrm{Spin}^c(n)$ έχει μια κανονική μοναδιαία αναπαράσταση σε έναν χώρο Hilbert, βάσει της οποίας ορίζεται μια συναφής (associated) δέσμη spinor, Σ. Ο τελεστής Dirac, Đ, δρα στις διατομές της δέσμης Σ ως πρώτης τάξεως γραμμικός διαφορικός τελεστής, τυπικά αυτοσυζυγής. Ορίζεται τέλος ο φραγμένος αυτοσυζυγής τελεστής Dirac $Đ^{\sim}$ □ $Đ/\sqrt{}(1+ Đ^{*}Đ)$: $L^2(\Sigma)$ □ $L^2(\Sigma)$, όπου $L^2(\Sigma)$ είναι ο χώρος Hilbert των L^2-διατομών της δέσμης Σ. Στην περίπτωση που η διάσταση της S είναι άρτια, η δέσμη Σ αναλύεται σε $\Sigma = \Sigma^{+}\oplus\Sigma^{-}$, και αντιστοίχως ο τελεστής Dirac αναλύεται σε $Đ^{\sim\pm}$: $L^2(\Sigma^{\pm})$ □ $L^2(\Sigma^{\pm})$.

Εάν τώρα επισυνάψουμε κατάλληλα μια δομή Spin^c στην υπό κβάντωση πολλαπλότητα (S, ω), ο ορισμός τού Bott συνδέει με αυτήν απλώς έναν αριθμό, δηλαδή $Q(S, \omega) = \mathrm{index}(Đ^{+}) = \mathrm{dimker}(Đ^{+}) - \mathrm{dimker}(Đ^{-}) = \mathrm{index}(Đ^{\sim})$. Εάν επί πλέον υπάρχει δράση της συμπαγούς ομάδας G, η ως άνω κβάντωση θα αποδίδει τον αριθμό $G\text{-index}(Đ^{+}) = [\mathrm{ker}Đ^{+}] - [\mathrm{ker}Đ^{-}] \in R(G)$. Το σύμβολο […] δηλώνει κλάση μοναδιαίας ισομορφίας των $\mathrm{ker}Đ^{\pm}$ ως χώρων αναπαραστάσεων μιας άλγεβρας τελεστών· R(G) είναι ο δακτύλιος αναπαραστάσεων της ομάδας G, δηλαδή η αβελιανή ομάδα με έναν γεννήτορα [L] για κάθε πεπερασμένης διάστασης χώρο L μιγαδικής αναπαράστασης της G, και με την ικανοποίηση ορισμένων συνθηκών. Κρίσιμο βήμα είναι ο τρόπος με τον οποίο ο Landsman [83] συνδυάζει όλα τα ανωτέρω με την επονομαζόμενη θεωρία KK του Kasparov [40, 84], στα πλαίσια της οποίας εντάσσει την «κβαντική πλευρά» της επιζητούμενης συναρτητικής σχέσης με την μορφή των δι-modules Hilbert που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Αναφέρω μόνο το τελικό αποτέλεσμα. Κατά τον Landsman, υπάρχει μια συναρτητική σχέση μεταξύ κλασικού και κβαντικού μαθηματικού πλαισίου, όπου η μεν *κβάντωση μέσω παραμορφώσεων* απεικονίζει αντικείμενα σε αντικείμενα, η δε *γεωμετρική κβάντωση* απεικονίζει μορφισμούς σε μορφισμούς. Η συναρτητική σχέση που εγκαθιδρύεται με αυτόν τον τρόπο, υπό το πρίσμα της ενσωμάτωσης του κλασικού εντός του κβαντικού, επιτρέπει να μιλάμε συγκεκριμένα για το κλασικό *τού* εκάστοτε κβαντικού. Θα στραφώ τώρα σε μια λεπτομερέστερη εξέταση των επονομαζομένων θεωριών κβάντωσης.

Η κατανόηση συνίσταται στην αναγωγή ενός

τύπου πραγματικότητας σε μιαν άλλη.

C. Levi-Strauss

Κεφάλαιο VII. Γεωμετρική κβάντωση και θεωρία παραμορφώσεων

7.1 Αναζήτηση σύνδεσης κλασικού και κβαντικού πλαισίου

Ο όρος «κβάντωση», με την σημασία της διαδικασίας μετάβασης από ένα κλασικό σε ένα κβαντικό εννοιολογικό πλαίσιο, αναδύθηκε ιστορικά σε δύο επίπεδα. Θα επιχειρήσω εδώ να εντοπίσω την μεταξύ τους διάκριση, αλλά και να ανιχνεύσω τα σημεία σύμπτωσής τους. Κατ' αρχάς, ο όρος αναφέρεται στην μετάβαση από την κλασική στην κβαντική φυσική, προϋποθέτοντας ότι υπάρχει μεταξύ τους κάποιος συνδετικός κρίκος. Μια θεωρία κβάντωσης σημαίνει τότε την αναζήτηση και ανάλυση αυτού του κρίκου. Έχουν αναπτυχθεί διάφορες προσεγγίσεις [6], αλλά θα περιοριστώ στις δύο καλώς ανεπτυγμένες τέτοιες θεωρίες, την «γεωμετρική κβάντωση» [57] και την «κβάντωση μέσω παραμορφώσεων» [40, σσ. 443-446, 85, 86, 87]. Και στις δύο, μια εκ των υστέρων αντίληψη για το «κλασικό» και το νόημά του συνιστά σημείο εκκίνησης και πηγή έμπνευσης. Τονίζω εξ αρχής ότι τέτοιες αντιλήψεις, λίγο ή πολύ φιλοσοφικού χαρακτήρα, δεν συνδέονται μονοσήμαντα με τις εν λόγω θεωρίες, οι οποίες είναι αυτόνομες ως μαθηματικές κατασκευές. Εν τούτοις, είναι ενδεικτικές των φιλοσοφικών ερωτημάτων που προκύπτουν, έστω και αν κανείς απορρίπτει τις απαντήσεις που προτείνουν. Συγκεκριμένα, στην πιο ολοκληρωμένη παρουσίαση της θεωρίας της γεωμετρικής κβάντωσης, ο N. M. J. Woodhouse [57] αναφέρεται από την αρχή στην ερμηνεία της Κοπεγχάγης.

«*Σύμφωνα με την φιλοσοφία της Κοπεγχάγης*, γράφει, *οι φυσικές προβλέψεις μιας κβαντικής θεωρίας πρέπει να διατυπώνονται με τους όρους κλασικών εννοιών. Συνεπώς,...μια εύλογη κβαντική θεωρία πρέπει να περιλαμβάνει μια **συνταγή** για την μετάβαση στο κλασικό όριο και για τον συσχετισμό των κβαντομηχανικών παρατηρήσιμων μεγεθών με εκείνα του αντίστοιχου κλασικού συστήματος*» (έμφαση δική μου). Εν τούτοις, η αντιστοιχία κλασικού και κβαντικού δεν έγκειται στην σύμπτωση των προβλέψεών τους στο όριο $\hbar \to 0$, συνεχίζει ο Woodhouse, αλλά σε «*μιαν αναλογία μεταξύ των μαθηματικών δομών τους: ο πρωταρχικός ρόλος της κλασικής θεωρίας δεν είναι να προσεγγίζει την κβαντική θεωρία, αλλά να προσφέρει ένα πλαίσιο για την ερμηνεία της*» (ο.π.π.). Η γεωμετρική κβάντωση βασίζεται στην αλλαγή της φύσης των φυσικών μεγεθών. Από συναρτήσεις των κανονικών συντεταγμένων ορμής και θέσης, $f(p_a, q^b)$, σε τελεστές της μορφής $f(-\iota\hbar\, \partial/\partial q^a, q^b)$. Αυτή, η επονομαζόμενη κανονική κβάντωση, είναι μαθηματικά αρκετά προβληματική. Έτσι, σε ένα πρώτο επίπεδο, «*ο σκοπός δεν είναι η εισαγωγή νέων φυσικών ιδεών, αλλά η ενοποίηση και διευκρίνιση των διάφορων μορφών κανονικής κβάντωσης και η εξακρίβωση των αναλογιών μεταξύ των δομών των κλασικών και κβαντικών θεωριών*» (ο.π.π.). Με άλλα λόγια, «*η γεωμετρική μέθοδος αναπτύσσεται όχι ως υποκατάστατο της κανονικής αναλυτικής μεθόδου της κβαντικής θεωρίας, αλλά ως μέσον ευκρινέστερης κατανόησης της σχέσης μεταξύ κλασικής και κβαντικής μηχανικής*» (ο.π.π.).

Συγκρατούμε δύο φράσεις κλειδιά: Δεν πρόκειται για *κβαντική* θεωρία, αλλά για θεωρία *κβάντωσης*. Δηλαδή, η γεωμετρική κβάντωση είναι μια θεωρία που κινείται σε ένα *μετα-επίπεδο*, είναι θεωρία περί φυσικών θεωριών και των μεταξύ τους σχέσεων. Δεύτερον, αντικείμενο αυτής της μετα-θεωρίας δεν είναι η αναζήτηση ενός σημείου συνάντησης των προβλέψεων διαφορετικών θεωριών, αλλά η ανίχνευση *δομικών αναλογιών* μεταξύ τους. Το πρώτο από τα δύο αυτά σημεία ισχύει για κάθε τέτοια θεωρία, ειδικότερα και για την κβάντωση μέσω παραμορφώσεων. Το ίδιο αληθεύει και για το δεύτερο σημείο, περί δομικών αναλογιών, με κρίσιμες παραλλαγές. Η ουσιαστική διαφορά της κβάντωσης μέσω παραμορφώσεων –η οποία αναπτύχθηκε, μεταξύ άλλων, από τους F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowitz, D. Sternheimer– είναι ότι δεν αναζητά συνδετικούς κρίκους μεταξύ θεωριών στην βάση της ριζικής αλλαγής στην *φύση* των μεγεθών, αλλά στην βάση της αλλαγής –παραμόρφωσης– του *νόμου σύνθεσης* της αλγεβρικής δομής των μεγεθών.

Είναι μια πολύ πιο ανεπτυγμένη και ευέλικτη θεωρία. Ευέλικτη, με την έννοια ότι η μέθοδός της δεν περιορίζεται αποκλειστικά στην «γεφύρωση», τρόπον τινά, δύο δεδομένων μαθηματικών πλαισίων, όπως συμβαίνει στην γεωμετρική κβάντωση. Ανάλογα με την αφετηρία, το αποτέλεσμα μπορεί να είναι πρωτότυπο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, οι επονομαζόμενες κβαντικές ομάδες οι οποίες προκύπτουν από παραμόρφωση αλγεβρών Hopf. Είναι μία ακόμη περίπτωση κατά την οποία μια μαθηματική μέθοδος, ανεπτυγμένη εντός του μαθηματικοποιημένου τμήματος της θεωρητικής φυσικής, εφαρμόζεται στα «καθαρά» μαθηματικά οδηγώντας σε θεωρήματα. Η έκταση των εφαρμογών είναι ευρύτατη: Η μέθοδος εφαρμόζεται στην θεωρία των δεικτών διαφορικών τελεστών –η αυστηρή κβάντωση μέσω παραμορφώσεων στην περίπτωση $C_0(T^*M) \rightarrow \propto_0(L^2(M))$, όπου M είναι συμπαγής πολλαπλότητα Riemann και ο δείκτης «0» σημαίνει συμπαγές στήριγμα, οδηγεί σε μιαν απόδειξη του γνωστού θεωρήματος των Atiyah-Singer της θεωρίας δεικτών· εφαρμόζεται στην θεωρία αναπαραστάσεων ομάδων και στην θεωρία τού Mackey για τις επαγόμενες αναπαραστάσεις· εντάσσεται στην επονομαζόμενη θεωρία K των C*-αλγεβρών (ως θεωρία E)· ακόμη και τα «κυματίδια» (wavelets) στην ανάλυση σημάτων ορίζονται βάσει των *-γινομένων της κβάντωσης μέσω παραμορφώσεων. Πριν προχωρήσουμε, αξίζει να δούμε την φιλοσοφική αντίληψη που συνόδευσε την ανάπτυξη αυτού του τύπου των θεωριών, όπως την αναφέρουν πρωτεργάτες της:

«*Η περιοχή εφαρμοσιμότητας των φυσικών θεωριών ορίζεται από τις ενεχόμενες αποστάσεις, ταχύτητες, ενέργειες κ.λπ. Αλλά το πέρασμα από μια περιοχή (αποστάσεων, κ.λπ.) σε άλλη δεν γίνεται με ανεξέλεγκτο τρόπο. Μάλλον, εμφανίζονται πειραματικά φαινόμενα τα οποία προκαλούν ένα παράδοξο και αντιφάσκουν με τις αποδεκτές θεωρίες. Τελικά, μια νέα θεμελιώδης σταθερά κάνει την είσοδό της και ο φορμαλισμός τροποποιείται. Τότε, οι συναφείς δομές (συμμετρίες, παρατηρήσιμα μεγέθη, καταστάσεις κ.λπ.)* ***παραμορφώνουν*** *την αρχική δομή. Δηλαδή, έχουμε μια νέα δομή η οποία στο όριο, όταν η νέα παράμετρος τείνει στο μηδέν, συμπίπτει με τον προγενέστερο φορμαλισμό. Το μόνο ερώτημα είναι, σε ποιά κατηγορία αναζητούμε παραμορφώσεις; Συνήθως η φυσική είναι μάλλον συντηρητική, και αν ξεκινήσουμε, π.χ., με την κατηγορία των προσεταιριστικών αλγεβρών ή αλγεβρών Lie, τείνουμε να παραμορφώνουμε στην ίδια κατηγορία, αλλά υπάρχουν σημαντικά παραδείγματα γενικεύσεων αυτής της αρχής*» ([86], έμφαση στο πρωτότυπο). Η διαπίστωση ότι η Γη δεν είναι επίπεδη, παρουσιάζεται ως η πρώτη τέτοια περίπτωση, και ακολουθούν τα συνηθισμένα παραδείγματα, της καμπυλόγραμμης γεωμετρίας, της θεωρίας της σχετικότητας κ.λπ. Πρόκειται σαφώς για μια σωρευτική αντίληψη. Όπως σημείωσα στην §1.1, πρόκειται για την αντίληψη που επισημαίνει μονόπλευρα το γεγονός ότι μια θεωρία, όπως, π.χ., η νευτώνεια μηχανική, ανακτάται με μια προσεγγιστική διαδικασία από την ειδική σχετικότητα, αλλά παραβλέπει την αναμφισβήτητη ασυμμετρία των εννοιών των δύο θεωριών. Ακόμη, από φυσική άποψη, η διαδικασία κατά την οποία μια φυσική *σταθερά* τείνει στο μηδέν είναι τουλάχιστον συζητήσιμη.

Με αυτές τις παρατηρήσεις υπ΄ όψιν, μπορούμε να συνοψίσουμε το θέμα με τα λόγια τού Yuri Manin. Πρώτον, η κβαντομηχανική δεν έχει δική της γλώσσα, δανείζεται ένα τμήμα της γλώσσας της συναρτησιακής ανάλυσης. Άρα, όπως από την αρχή επεσήμανα, τα προβλήματα νοηματοδότησης μεταφέρονται στην μαθηματική μορφή. Δεύτερον, σε κάθε έκθεση του αντικειμένου της θεωρίας, η «γλώσσα» αναμειγνύεται με την «μεταγλώσσα» που παρέχει την ερμηνεία της γλώσσας. Έτσι, τόσο στην περίπτωση της θεωρίας των παραμορφώσεων, όσο και στις θεωρίες πεδίου, η θεωρία κβάντωσης μετατρέπεται σε κβαντική θεωρία. Τρίτον, οι «μονάδες έκφρασης», όπως χώροι Hilbert, παρατηρήσιμα μεγέθη κ.λπ., επιλέγονται σε δύο στάδια: αρχικά ορίζονται κλασικά, μετά εφαρμόζεται η «συνταγή κβάντωσης». Τέταρτον, υπάρχει η χαρακτηριστική ιδιοτυπία, ότι η ερμηνεία της κβαντικής γλώσσας γίνεται σε δύο επίπεδα: εκείνο ενός ελεύθερου συστήματος, και εκείνο που αφορά την παρατήρηση. Αντιστοιχούν στην διάκριση θεωρησιακού και πειραματικού που έκανα στην §5.1 [55, σσ. 84 και 86-87].

7.2 Μερικές αλγεβρικές έννοιες

Για να γίνω πιο συγκεκριμένος, χρειάζονται και εδώ μερικές τεχνικές λεπτομέρειες σχετικά με την θεωρία των συνομολογιών (cohomology). Έστω A μια άλγεβρα πάνω σε ένα μεταθετικό σώμα k. Εάν η A είναι επιμεριστική άλγεβρα, μια *p-συναλυσίδα* (cochain) *Hochschild* είναι μια p-γραμμική απεικόνιση C: $A^p \to A$, με συν-όριο (coboundary) bC, το οποίο είναι η (p+1)-συναλυσίδα:

$$bC(u_0, \ldots, u_p) = u_0C(u_1, \ldots, u_p) - C(u_0u_1, u_2, \ldots, u_p) + \ldots + (-1)^pC(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}u_p) + (-1)^{p+1}C(u_0, \ldots, u_{p-1})u_p.$$

Ισχύει $b^2 = 0$, που σημαίνει ότι έχουμε ένα σύμπλεγμα (complex).

Εάν η A είναι άλγεβρα Lie με αγκύλη {∗ , ∗}, μια *p-συναλυσίδα Chevalley-Eilenberg* είναι μια αντισυμμετρική p-γραμμική απεικόνιση B: $\wedge^p A \to A$, με συν-όριο ∂:

$$\partial B(u_0, \ldots, u_p) = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j \{u_j, B(u_0, \ldots, \hat{u}_j, \ldots, u_p\} +$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j} B(\{u_i , u_j\}, u_0, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, \hat{u}_j, \ldots, u_p).$$

Το σύμβολο $\hat{u}_i$ σημαίνει ότι το u_i παραλείπεται. Και εδώ $\partial^2 = 0$. Μια p-συναλυσίδα C είναι p-συνκύκλος εάν bC = 0, αντιστοίχως $\partial C = 0$. Συμβολίζουμε με $Z^p(A, A)$, αντιστοίχως $Z^p(A, A)$, τον χώρο των p-συνκύκλων και με $B^p(A, A)$, αντιστοίχως με $B^p(A, A)$, τον χώρο των p-συνκύκλων που είναι συν-όρια μιας (p−1)-συναλυσίδας. Τότε, ο p-οστός χώρος συνομολογίας Hochschild, αντιστοίχως Chevalley-Eilenberg, ορίζεται ως $H^p(A, A) = Z^p(A, A)/B^p(A, A)$, και $H^p(A, A) = Z^p(A, A)/B^p(A, A)$ αντιστοίχως. Το σύνολο αυτών των χώρων συμβολίζεται με $H^\bullet$, αντιστοίχως $H^\bullet$.

Έστω τώρα ότι η A είναι οποιαδήποτε άλγεβρα, δηλαδή προσεταιριστική, ή Lie, ή Hopf, ή δι-άλγεβρα, ή τοπολογική άλγεβρα (εφοδιασμένη με μια τοπικά κυρτή τοπολογία για την οποία οι αναγκαίοι αλγεβρικοί νόμοι είναι συνεχείς). Έστω k [[λ]] ο δακτύλιος των τυπικών σειρών σε κάποια παράμετρο λ, επέκταση του δακτυλίου βάσης k. Παίρνουμε τότε τον module $\tilde{A}$ = A[[λ]]. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πάρουμε τον module A [[λ, λ^{-1}]], τις τυπικές σειρές στην λ και πολυώνυμα στην λ^{-1}, θεωρούμενη ως ανεξάρτητη παράμετρο. Τότε, μια *παραμόρφωση Gerstenhaber* (DrG-παραμόρφωση) μιας τέτοιας άλγεβρας A είναι μια k[[λ]]-άλγεβρα Ã τέτοια ώστε Ã/λÃ ≈ A (εάν η A είναι τοπολογική, υποθέτουμε ότι η Ã είναι τοπολογικά ελεύθερη). Δύο παραμορφώσεις Ã και Ã΄ είναι ισοδύναμες εάν είναι ισόμορφες πάνω στο k[[λ]], και η Ã είναι τετριμμένη εάν είναι ισόμορφη με την αρχική άλγεβρα A, θεωρούμενη ως k[[λ]]-άλγεβρα με επέκταση του σώματος βάσης. Εάν η A είναι επιμεριστική ή άλγεβρα Lie, προκύπτει ένα νέο γινόμενο «*», αντιστοίχως νέα αγκύλη [. , .], έτσι ώστε η νέα παραμορφωμένη άλγεβρα να είναι προσεταιριστική, αντιστοίχως Lie. Τότε, για u, v ∈ A, έχουμε:

$$u*v = uv + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^{r} C_r(u, v), \text{ αντιστοίχως:}$$

$$[u , v] = \{u , v\} + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^{r} B_r(u, v),$$

όπου τα C_r είναι 2-συναλυσίδες Hochschild και τα B_r αντισυμμετρικές 2-συναλυσίδες Chevalley, με $(u*v)*w = u*(v*w)$, και $\Sigma[[u , v] , w] = 0$, για u, v, w ∈ A, και όπου το Σ σημαίνει άθροισμα κυκλικών μεταθέσεων. Σε κάθε επίπεδο r, και για j, k ≥ 1, ισχύει:

$$D_r(u, v, w) = \sum_{j+k=r} (C_j(C_k(u, v), w) - C_j(u, C_k(v, w)) = bC_r(u, v, w)$$

$$E_r = \sum_{j+k=r} \Sigma B_j(B_k(u, v), w) = \partial B_r(u, v, w),$$

όπου b και ∂ είναι οι αντίστοιχοι τελεστές συν-ορίου. Τα C_1 και B_1 είναι 2-συνκύκλοι. Τα εμπόδια για την επέκταση μιας παραμόρφωσης από ένα στάδιο στο επόμενο βρίσκονται στην 3-συνομολογία. Η ισοδυναμία δύο παραμορφωμένων αλγεβρών Ã και Ã΄, με γινόμενο * και *΄, στην προσεταιριστική περίπτωση, σημαίνει ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός $T_\lambda = I + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r T_r$, όπου I είναι η ταυτότητα και T_r είναι γραμμικές απεικονίσεις A → A, τέτοιες ώστε $T_\lambda(u*΄v) = (T_\lambda u*T_\lambda v)$. Τα εμπόδια για ισοδυναμία βρίσκονται στην 2-συνομολογία. Για τις φυσικές εφαρμογές, ενδιαφέρει η περίπτωση που έχουμε διαφορίσιμες συναλυσίδες. Η θεωρία των παραμορφώσεων Gerstenhaber αποδεικνύεται συνεπής με αυτόν τον περιορισμό. Γενικά μιλώντας, όταν έχουμε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα X, η άλγεβρα $N = C^{\infty}(X)$ είναι προσεταιριστική, οπότε ορίζεται η συνομολογία Hochschild. Ένας αντισυμμετρικός ανταλλοίωτος 2-τανυστής Λ στο X, με αγκύλη Schouten–Nijenhuis $[\Lambda, \Lambda]_{SN} = 0$,[39] ορίζει μιαν αγκύλη Poisson στην άλγεβρα N: P(u, v) □ i(Λ)(du∧dv), u, v ∈ N (το i(*) δηλώνει εσωτερικό γινόμενο). Η P είναι ένας διδιαφορικός 2-συνκύκλος για την συνομολογία Hochschild της N. Ορίζει μιαν απειροστή παραμόρφωση του σημείο-προς-σημείο γινομένου στην N. Η N με μιαν αγκύλη Poisson γίνεται άλγεβρα Lie, και η συνομολογία Chevalley μπορεί τότε να οριστεί.

Κεντρική, λοιπόν, έννοια είναι εκείνη ενός νέου γινομένου, του ∗-γινομένου, το οποίο παραμορφώνει την προσεταιριστική άλγεβρα $N = C^{\infty}(X)$, όπου X είναι μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μιαν αγκύλη Poisson, P. Αυτό το γινόμενο έχει την μορφή $* = \sum_{n=0}^{\infty} l^{n} C_n$, όπου $C_0(u, v) = uv$, $C_1(u, v) - C_1(v, u) = 2P(u, v)$, u, v ∈ N, και τα C_n είναι διδιαφορικοί τελεστές, πεπερασμένης τάξεως τοπικά. Ένα ∗-γινόμενο ονομάζεται ισχυρώς κλειστό εάν $\int_X (u*v - v*u)dx = 0$, όπου dx είναι στοιχείο όγκου στην X. Στις εφαρμογές στην κβαντική θεωρία, η παράμετρος λ είναι $\lambda = i/2\,\hbar$. Διάφορες περιπτώσεις διακρίνονται, ανάλογα με επί πλέον περιορισμούς στις συναλυσίδες C_n. Για $C_1 = P$, έχουμε την περίπτωση του πρώτου ιστορικά ∗-γινομένου (1949) που διατυπώθηκε από τον Moyal σε άλλο πλαίσιο, και αναπαράγει την αντιστοιχία συναρτήσεων – τελεστών που οφείλεται στους Weyl και Wigner [86]. Ο αντίστοιχος μεταθέτης, $[u\ ,\ v]_{\lambda}$ □ $(2\lambda)^{-1}(u*v - v*u)$, είναι παραμόρφωση της άλγεβρας Lie (N, P). Ορίζονται ακόμη κατάλληλες έννοιες για το αναλλοίωτο και το συναλλοίωτο ενός ∗-γινομένου. Μια ∗-εκθετική συνάρτηση είναι της μορφής Exp(Ht) □ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(t/i\hbar)^{n}(H*)^{n}$, όπου $(H*)^{n}$ είναι η n-στή δύναμη μιας χαμιλτονιανής H ∈ N (ή N[[λ]]). Σε αυτήν την βάση, αναπτύσσεται μια αντίστοιχη φασματική θεωρία. Στις εφαρμογές στην φυσική ενδιαφέρει βεβαίως η περίπτωση όπου οι σειρές που εμφανίζονται συγκλίνουν. Μιλάμε τότε για αυστηρή (strict), σε αντιδιαστολή με την τυπική, κβάντωση μέσω παραμορφώσεων, για την οποία ήδη συναντήσαμε τον ορισμό τού Rieffel στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η ύπαρξη ∗-γινομένων σε κάθε πραγματική συμπλεκτική πολλαπλότητα έχει αποδειχθεί. Σημείο καμπής υπήρξε η

---

[39] Είναι, για k, l ≥ 0, $\xi_i, \eta_j \in \Gamma(X, TX)$:

$$[\xi_0\wedge\ldots\wedge\xi_k\ ,\ \eta_0\wedge\ldots\wedge\eta_l] = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{1}(-1)^{i+j+k}\,[\xi_i\ ,\ \eta_j]\wedge\xi_0\wedge\ldots\xi_{i-1}\wedge\xi_{i+1}\wedge\ldots\wedge\xi_k\wedge\eta_0\wedge\ldots\wedge\eta_{j-1}\wedge\eta_{j+1}\wedge\ldots\wedge\eta_l,$$

και για k ≥ 0, $h \in \Gamma(X, O_X)$, $\xi_i \in \Gamma(X, TX)$:

$$[\xi_0\wedge\ldots\wedge\xi_k\ ,\ h] = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\,\xi_i(h)\bullet(\xi_0\wedge\ldots\wedge\xi_{i-1}\wedge\xi_{i+1}\wedge\ldots\wedge\xi_k).$$

γεωμετρική μέθοδος του Fedosov [88]. Βασίζεται στην κατασκευή ενός συνδέσμου (connection) σε μια κατάλληλη δέσμη. Ένα ∗-γινόμενο ορίζεται στις διατομές αυτής της δέσμης. Ένα πραγματικό άλμα όμως έγινε με την εργασία κυρίως του Maxim Kontsevich [89], με την οποία θα ασχοληθούμε λεπτομερέστερα στην συνέχεια. Άνοιξε νέους ορίζοντες σε πολλούς τομείς, και η απόδειξη ύπαρξης ∗-γινομένων για κάθε λεία πολλαπλότητα Poisson είναι μία μόνο συνέπεια αυτής της εργασίας.

7.3 Δομική αναλογία ή μετάβαση;

Η θεωρία των παραμορφώσεων, ως μαθηματική θεωρία, προσέφερε το πλαίσιο για μιαν αντίστοιχη θεωρία κβάντωσης. Η τελευταία τροφοδότησε και εμπλούτισε την γενικότερη θεωρία σε βαθμό που κατά πολύ υπερβαίνει τις αρχικές προθέσεις των ιδρυτών της, όσο και των πρωτεργατών στις εφαρμογές της στην φυσική. Εδώ την είδαμε να λειτουργεί ως θεωρία κβάντωσης. Το γεγονός είναι ότι αυτή η μέθοδος αναπαράγει τα αποτελέσματα της συμβατικής κβαντομηχανικής στις πιο χαρακτηριστικές ενδεικτικές περιπτώσεις, και μερικές φορές είναι ισχυρότερη. Αυτό επιτρέπει στους Ditto και Sternheimer να γράφουν ότι «*...η κβάντωση μέσω παραμορφώσεων δεν πρέπει να θεωρηθεί ως απλή αναδιατύπωση της κβαντομηχανικής ή των κβαντικών θεωριών γενικά. Στο νοηματικό επίπεδο, είναι η* ***αληθινή μαθηματική διατύπωση*** *της φυσικής πραγματικότητας όποτε κβαντικά φαινόμενα πρέπει να ληφθούν υπ’ όψιν, ... μπορεί κανείς πράγματι να κάνει σημαντικούς κβαντομηχανικούς υπολογισμούς, με* ***αυτόνομο*** *τρόπο, εντελώς στα πλαίσια της κβάντωσης μέσω παραμορφώσεων –και να φτάσει στα αποτελέσματα που λαμβάνονται με την συμβατική κβαντομηχανική. Το αν κανείς χρησιμοποιεί μια διατύπωση με τελεστές ή κάποια μορφή κβάντωσης μέσω παραμορφώσεων είναι συνεπώς βασικά ένα πρακτικό ζήτημα, ποιά διατύπωση είναι πιο αποτελεσματική, τουλάχιστον στις περιπτώσεις που υπάρχει μια απεικόνιση Weyl ή Wigner. Όταν μια τέτοια απεικόνιση δεν υπάρχει, μια ικανοποιητική διατύπωση με τελεστές είναι πολύ δύσκολο να βρεθεί, εκτός από τοπικά στον χώρο φάσεων, και η κβάντωση μέσω παραμορφώσεων είναι η λύση*» ([86], έμφαση δική μου).

Με άλλα λόγια, οι συγγραφείς αυτοί ισχυρίζονται ότι η μέθοδος των παραμορφώσεων δεν είναι μια «εναλλακτική» κβαντική θεωρία, πληρέστερη ή ορθότερη από την συμβατική. Ότι δεν είναι μια τυπική «μετάφραση» του συνηθισμένου φορμαλισμού σε ένα διαφορετικό μαθηματικό πλαίσιο, αλλά η *αληθινή μαθηματική διατύπωση* της φυσικής πραγματικότητας που αφορά κβαντικά φαινόμενα, στο *νοηματικό* επίπεδο. Δεν επιχειρώ να ερμηνεύσω τις σκέψεις των συγγραφέων, παρουσιάζω όμως την δική μου ανάγνωση αυτών των αποσπασμάτων. Οι συμβατικές κβαντικές θεωρίες, με τον φορμαλισμό τους των τελεστών σε χώρους Hilbert, έχουν την δική τους ιστορία ανάπτυξης και πειραματικής επιβεβαίωσης. Η διατήρηση ενός ομφάλιου λώρου με την κλασικότητα, η αναφορά στην οποία εξ αρχής εθεωρείτο αναγκαία για την ερμηνεία της νέας θεωρίας, συνιστούσε πρόβλημα τόσο της φυσικής επιστήμης όσο και της φιλοσοφίας. Η ερμηνεία της Κοπεγχάγης ήταν μια φιλοσοφικού τύπου απάντηση. Περισσότερο προσανατολισμένη προς την φυσική είναι η απόπειρα να δοθεί νόημα στην διαδικασία της κανονικής κβάντωσης, αφαιρώντας της τον χαρακτήρα της «συνταγής». Αυτό είναι ταυτόσημο με την αναζήτηση ενός στοιχείου συνέχειας με φυσικό περιεχόμενο εντός της ασυνέχειας που συνιστά την επιστημονική επανάσταση. Η γεωμετρική κβάντωση, όπως είδαμε, αναζητά αυτό το στοιχείο συνέχειας στην ανίχνευση *δομικών αναλογιών* μεταξύ κλασικού και κβαντικού. Όπως τονίζει ο Woodhouse, αποδέχεται δύο μαθηματικά πλαίσια, όπου το φυσικό μέγεθος αναπαρίσταται με έννοιες *διαφορετικής* φύσης. Αφ' ενός, συναρτήσεις σε έναν κλασικό χώρο φάσεων, αφ' ετέρου, τελεστές σε χώρο Hilbert. Έτσι, η μέθοδος αυτή αναζητά μια *γέφυρα* μεταξύ των δύο πλαισίων χωρίς να τα αλλοιώνει ή να τα υποκαθιστά. Για αυτό και ο Woodhouse αναγνωρίζει ρητά ότι η γεωμετρική κβάντωση δεν είναι κβαντική θεωρία. Σαφώς υπάρχουν αναμφισβήτητες τεχνικές δυσκολίες, αλλά και στο μεθοδολογικό επίπεδο τίθεται η διάκριση μεταξύ θεωρίας περί φυσικής πραγματικότητας και θεωρίας περί θεωριών περί φυσικής πραγματικότητας.

Η κβάντωση μέσω παραμορφώσεων φαίνεται να επιχειρεί το αντίθετο. Δεν ξεκινά από δύο δεδομένα μαθηματικά πλαίσια με έννοιες διαφορετικής φύσης. Βλέπει την διαφορά της φύσης των φυσικών μεγεθών με όρους μιας προσεγγιστικής διαδικασίας. Δεν *γεφυρώνει* διαφορές, αλλά μελετά *μεταβάσεις*, δεν αναζητά *αναλογίες* δομών αλλά *παραμορφώσεις* μιας δεδομένης δομής που οδηγούν σε μιαν άλλη δομή ομαλά. Έτσι, το αποτέλεσμα δεν τίθεται με την βοήθεια μιας συνταγής, αλλά προκύπτει *αυτόνομα*. Την θέση της συνταγής καταλαμβάνει μια *μεθοδολογική αρχή* –εν προκειμένω η σωρευτική αντίληψη. Το προϊόν της μετάβασης, συγκρινόμενο με τον συμβατικό κβαντικό φορμαλισμό, είναι τουλάχιστον ισότιμο με αυτόν ως προς τα αποτελέσματα. Η διαφορά των φορμαλισμών υποβιβάζεται στην διαφορά της αποτελεσματικότητάς τους σε πρακτικές εφαρμογές. Ουσιώδης διαφορά εντοπίζεται στο νοηματικό επίπεδο, εφ' όσον η μέθοδος των παραμορφώσεων *νοηματοδοτεί* την κβαντική «συνταγή», και έτσι οδηγεί στην *αληθινή* θεωρία της φυσικής πραγματικότητας. Η διάκριση των επιπέδων θεωρίας περί γνωστικού αντικειμένου και θεωρίας περί θεωριών, εξαλείφεται, καθώς μια θεωρία κβάντωσης μετατρέπεται βαθμιαία και ομαλά, χωρίς άλματα και εννοιολογικές ρήξεις, σε κβαντική θεωρία. Το γνωσιολογικό καταλήγει να συγχωνεύεται με το οντολογικό. Παρ' όλα αυτά, πρέπει να τονίσω το εξής χαρακτηριστικό και των δύο προσεγγίσεων. Και οι δύο *προϋποθέτουν* την *διαφορά* κλασικού και κβαντικού, με την μαθηματική μορφή της μεταθετότητας για το πρώτο και της μη μεταθετότητας για το δεύτερο. Διακρίνονται μεταξύ τους κατά το ότι: Η μεν γεωμετρική κβάντωση *προϋποθέτει* την διαφορά και αναζητά ένα στοιχείο ταυτότητας στην δομική αναλογία ή ομοιότητα, ενώ η κβάντωση μέσω παραμορφώσεων αναγνωρίζει μεν εξ αρχής την διαφορά, αλλά προϋποθέτει την *ταυτότητα* εντός ενός ευρύτερου πλαισίου –την δομή προσεταιριστικής άλγεβρας– με τρόπον ώστε το κλασικό, εκφραζόμενο από το συνηθισμένο γινόμενο συναρτήσεων, να υπάγεται στο γενικότερο, μη μεταθετικό *-γινόμενο ως οριακή περίπτωση. Έχουμε συνεπώς ένα λογικό σχήμα με δύο πόλους. Στον ένα, η ταυτότητα προϋποθέτει την διαφορά, στον άλλον, η διαφορά προϋποθέτει την ταυτότητα. Και οι δύο αντιθετικοί πόλοι, όμως, υπάγονται σε ένα σχήμα όπου η παρουσία της διαφοράς είναι εξ αρχής στοιχείο κυρίαρχο, αναγνωρισμένο και δεδομένο, ενώ η όποια ταυτότητα είναι το ζητούμενο. Η *υπέρβαση* αυτού του σχήματος είναι το κεντρικό φιλοσοφικό ερώτημα σχετικά με την κβάντωση. Πώς, δηλαδή, η διαφορά με την σειρά της προϋποθέτει την ταυτότητα. Διότι σε αυτό ακριβώς έγκειται η ανάδυση της εννοιολογικής καινοτομίας. Στην πορεία αυτής της υπέρβασης, με την ανάπτυξη της μεθόδου των παραμορφώσεων, ατονεί και εξαφανίζεται η δέσμευση σε σωρευτικές αντιλήψεις, και, με αυτόν τον τρόπο παρεμπιπτόντως, αναδεικνύεται μια άλλη αντίφαση: ανάμεσα σε αυτό που *κάνουν* οι φυσικοί επιστήμονες, και σε αυτό που *πιστεύουν* ότι κάνουν.

Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι η επίκληση της κλασικότητας επανέρχεται με διαφορετική μορφή, ως αφετηριακό σημείο της παραμόρφωσης και ως οριακό σημείο προσέγγισης. Ποιό είναι, όμως, το φυσικό περιεχόμενο της κλασικής αφετηριακής δομής; Σίγουρα, κλασική φυσική θεωρία για το φαινόμενο, π.χ., των φασματικών γραμμών ενός ακτινοβολούντος ατόμου απλούστατα δεν υπάρχει, ούτε κατά προσέγγισιν. Δεύτερον, επεσήμανα ήδη ότι η διαδικασία όπου η σταθερά τού Planck τείνει στο μηδέν δεν έχει θεωρητικό νόημα –πρόκειται για σταθερά!– παρά την όποια πρακτική χρησιμότητά της σε μερικούς υπολογισμούς. Αξίζει να σημειωθεί ότι η σταθερά τού Planck μπορεί να είναι «απείρως» μικρή και ταυτόχρονα να μην ενέχεται σε κάποια προσεγγιστική διαδικασία. Αυτό επιτυγχάνεται αν μετακινηθούμε σε ένα πλαίσιο εννοιών της αλγεβρικής γεωμετρίας. Περιπτώσεις με φυσικό ενδιαφέρον είναι μιγαδικές πολλαπλότητες που είναι πολλαπλότητες Kähler· εάν είναι συμπαγείς και εφοδιασμένες με μιαν ολόμορφη γραμμική δέσμη, μια μετρική και έναν σύνδεσμο, συμβατά μεταξύ τους, και εάν ικανοποιείται μια ορισμένη συνθήκη, τότε είναι «κβαντώσιμες», οπότε εμφυτεύονται σε προβολικές ποικιλίες (varieties). Ο αντίστοιχος χώρος Hilbert είναι ένας κατάλληλα οριζόμενος δακτύλιος συντεταγμένων (coordinate ring). Σε τέτοια αλγεβρογεωμετρικά πλαίσια, μπορούν να εξεταστούν οι αναπαραστάσεις των *-γινομένων της κβάντωσης μέσω παραμορφώσεων, σε στενή αναλογία με την μέθοδο που ακολουθείται στην αλγεβρική θεωρία των τελεστών. Ξεκινώντας από έναν διατεταγμένο δακτύλιο, R, η επέκτασή του, R[[λ]], διατάσσεται επίσης με τρόπο συμβατό με την θεωρία των παραμορφώσεων. Αλλά τότε ο R[[λ]] είναι *μη αρχιμήδειος* δακτύλιος, που σημαίνει ότι $n\lambda < 1$ για κάθε ακέραιο n. Με αυτήν την έννοια το λ, που παίζει τον ρόλο της σταθεράς τού Planck, είναι και σταθερό και «μικροσκοπικό» [90]. Ακόμη σημαντικότερο, υπάρχουν βάσιμα επιχειρήματα ότι η γεωμετρική κβάντωση και η μέθοδος των παραμορφώσεων δεν πρέπει να θεωρούνται τόσο ανεξάρτητες μεταξύ τους όσο φαίνεται. Εκτός από την συναρτητική σχέση που ανιχνεύει ο Landsman και αναφέρθηκε ήδη στην §6.7, φαίνεται ότι η κβάντωση μέσω παραμορφώσεων είναι κάποιου είδους ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της γεωμετρικής κβάντωσης. Το γεγονός είναι ότι η παραμόρφωση οδηγεί σε μια μη μεταθετική άλγεβρα, η οποία περιέχει πληροφορίες για την τοπολογία του υποκείμενου «μη μεταθετικού» χώρου, αλλά όχι για την γεωμετρία του. Η ανίχνευση αυτής της πλευράς, με την εξέταση της κβάντωσης δεσμών ινών, καταλήγει σε συνθήκες που αφορούν χαρακτηριστικές κλάσεις της δέσμης και είναι γενικεύσεις των συνηθισμένων συνθηκών κβάντωσης. Εν τούτοις, διαπιστώνονται και περιορισμοί στην όλη μέθοδο [91].

7.4 Το κλασικό εντός του κβαντικού: μέθοδος BRST και BV

Όλα τα ανωτέρω δείχνουν ότι η σχέση θεωριών κβάντωσης με κβαντικές θεωρίες δεν είναι απλό ζήτημα επιλογής μεταξύ δύο ακραίων πόλων, της απόλυτης διάκρισης ή της συγχώνευσης. Το ζήτημα μπορεί να τεθεί στις βάσεις μιας διαλεκτικής σχέσης σύμπτωσης που δεν συγχωνεύει, αλλά διατηρεί την διάκριση, η οποία με την σειρά της δεν απολυτοποιεί την διαφορά, αλλά συνδέει. Από αυτήν την άποψη, ας τονίσω κάτι στο οποίο μέχρι τώρα δεν έχω επιμείνει. Στις κβαντικές θεωρίες, η έννοια της κβάντωσης δεν εμφανίζεται μόνον στην μετάβαση από την κλασική φυσική στην κβαντομηχανική. Αυτή η τελευταία περιλαμβάνει έννοιες όπως της κυματικής συνάρτησης –στοιχείου ενός χώρου Hilbert– ως έννοιες θεμελιώδεις. Τέτοιες συναρτήσεις και οι εξισώσεις στις οποίες υπεισέρχονται (Schrödinger, Klein-Gordon) είναι *κλασικές*. Οι κβαντικές θεωρίες αποκτούν πληρότητα περιλαμβάνοντας υποχρεωτικά ένα δεύτερο βήμα: Την επονομαζόμενη δεύτερη κβάντωση, όπου η κβαντική συνταγή εφαρμόζεται τώρα σε έννοιες της πρώτης κβάντωσης, οδηγώντας στις κβαντικές θεωρίες πεδίου. Γενικότερα, η κβάντωση εξισώσεων και πεδίων, με διάφορες μεθόδους, είναι βήμα συστατικό του σύγχρονου κβαντικού. Είναι αξιοσημείωτο, εξ άλλου, ότι σε σύγχρονες θεωρίες αναδεικνύεται ένας *αμφίδρομος* χαρακτήρας της σχέσης κβαντικού και Κλασικού: η κβάντωση, με την παραδοσιακή έννοια της κανονικής κβάντωσης, οδηγεί σε εξισώσεις του σύγχρονου *Κλασικού* με την ευρύτερη έννοια. Συγκεκριμένα, η αυτού του τύπου κβάντωση ενός ελεύθερου σημειακού συστήματος με μηδενική μάζα οδηγεί στην εξίσωση Klein-Gordon με μηδενική μάζα. Εάν έχουμε *υπερσυμμετρία*, το ίδιο σύστημα, κβαντωνόμενο, οδηγεί στις εξισώσεις υπερ-Maxwell και στην γραμμική προσέγγιση στην υπερβαρύτητα σε δέκα διαστάσεις. Η γενίκευση στις μη γραμμικές εξισώσεις Yang-Mills και Einstein είναι προφανής. Αλλά όλες αυτές οι εξισώσεις ανήκουν στο Κλασικό [19, σσ. 18-21]. Με άλλα λόγια, τόσο η κλασικότητα όσο και η διαδικασία κβάντωσης επανεμφανίζονται στο *εσωτερικό* των κβαντικών θεωριών. Είναι γνωστό ότι σε αυτό το επίπεδο η απάντηση στα φιλοσοφικά προβλήματα που θέτει η κβαντομηχανική δεν γίνεται ευκολότερη, το αντίθετο μάλιστα. Η ανάπτυξη μιας αξιωματικής θεωρίας πεδίου, με ή χωρίς τον φορμαλισμό των C*-αλγεβρών, παρακάμπτει το πρόβλημα, δεν το λύνει.[40] Και τούτο όχι μόνον λόγω των περιορισμών και τεχνικών προβλημάτων που επιμένουν. Αλλά και διότι πρόκειται για αξιωματική διατύπωση εκ των υστέρων ενός πλαισίου που διαμορφώθηκε ιστορικά με τον συμβατικό τρόπο. Η αξιωματική διατύπωση, χωρίς αυτό το ιστορικό περιεχόμενο, αιωρείται στο κενό.

Θα επισημάνω λοιπόν εδώ μερικά κρίσιμα αποτελέσματα της φυσικής και των μαθηματικών σχετικά με την σχέση κβαντικού και κβάντωσης, όταν η κβάντωση είναι εγγενώς εγγεγραμμένη εντός του κβαντικού. Στην μελέτη (και την κβάντωση) των λεγομένων δεσμευμένων (constrained) χαμιλτονιανών συστημάτων, ειδικότερα στην περίπτωση των θεωριών βαθμίδας (gauge) ή των θεωριών των χορδών, είχε χρησιμοποιηθεί μια ορισμένη τεχνική. Αυτή εισήγαγε έναν τύπο οιονεί (virtual) πεδίων τα οποία ονομάστηκαν «φαντάσματα» Fadeev-Popov, διότι έπαιρναν μέρος μόνον σε οιονεί αλληλεπιδράσεις. Στην συνέχεια όμως αναβαθμίστηκαν και κατέλαβαν ισότιμη θέση με τα πραγματικά πεδία, στα πλαίσια μιας νέου τύπου συμμετρίας η οποία ανακαλύφθηκε από τους Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST). Τελικά, όλα αυτά οδήγησαν στην προσέγγιση των Batalin και Vilkovisky, από την κβάντωση της λαγκρανζιανής συνάρτησης σωματιδίων ως τις θεωρίες πεδίου για υπερχορδές. Η κεντρική ιδέα είναι η ενσωμάτωση τόσο των πραγματικών πεδίων όσο και των φαντασμάτων σε μιαν ενιαία άκαμπτη (rigid) συμμετρία φερμιονικού τύπου, σε έναν κατάλληλα επεκτεταμένο φασικό χώρο, η οποία εμπεριέχει τις όποιες συμμετρίες βαθμίδας. Θα παρουσιάσω συνοπτικά τα στοιχειώδη της μεθόδου BRST [93]. Έχω ήδη αναφερθεί στις έννοιες των συμπλεγμάτων Hochschild και Chevalley-Eilenberg. Αυτά γενικεύονται στην περίπτωση *βαθμωτών* (graded) προσεταιριστικών αλγεβρών. Το σώμα βάσης είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\Re$.

Μια προσεταιριστική άλγεβρα A είναι $\wedge_2$-βαθμωτή-μεταθετική (graded commutative), ή απλώς υπερμεταθετική (supercommutative),[41] αν είναι το ευθύ άθροισμα $A = A_0 \oplus A_1$, δύο συμπληρωματικών υποχώρων, με $xy = (-1)^{e_x e_y} yx$, όπου $\varepsilon_u = 0$ αν $u \in A_0$ και $\varepsilon_u = 1$ αν $u \in A_1$. Το ε_u είναι η ομοτιμία (parity) του u. Στο εξής θεωρώ στοιχεία ομοιογενή, ορισμένης ομοτιμίας, και άλγεβρες A με μονάδα και μια πράξη ενέλιξης «*», δηλαδή μιγαδικής συζυγίας. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι η άλγεβρα $C^\infty(M)$ των λείων (υπερ-) συναρτήσεων σε μια (υπερ-)πολλαπλότητα M, και η εξωτερική άλγεβρα σε μιαν υπερπολλαπλότητα M, δηλαδή η άλγεβρα των p-μορφών στην M. Μιαν άλλη περίπτωση έχουμε όταν υπάρχει μια συμμετρία βαθμίδας, όπου μη-αναγώγιμοι δεσμοί (irreducible constraints) γεννούν τροχιές βαθμίδας, οπότε θεωρούμε την εξωτερική άλγεβρα των επιμήκων (longitudinal)

[40] Μολονότι κορυφαίοι φυσικοί, όπως ο R. Haag, επιμένουν στην αυτοτελή θεμελίωση της αξιωματικής διατύπωσης. Βλέπε, π.χ., [92].

[41] Το πρόθεμα «υπέρ» σημαίνει ότι έχουμε στοιχεία που μετατίθενται και στοιχεία που αντιμετατίθενται. Χονδρικά, και μποζονικού και φερμιονικού τύπου. Μια υπερπολλαπλότητα, π.χ., θα επιδέχεται συντεταγμένες και των δύο τύπων.

μορφών κατά μήκος των τροχιών, ισόμορφη με το τανυστικό γινόμενο $C^{\infty}(\Sigma)\otimes\Re[\omega^a]$ των πολυωνύμων στις μορφές $[\omega^a]$ με συντελεστές στην $C^{\infty}(\Sigma)$, όπου Σ είναι η επιφάνεια των δεσμών. Έστω τώρα ότι V είναι ένας $\wedge_2$-βαθμωτός διανυσματικός χώρος (όπως είναι κάθε υπερμεταθετική άλγεβρα A), $V = V_0 \oplus V_1$. Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί μ: $V \to V$ σχηματίζουν την άλγεβρα των ενδομορφισμών, End(V), η οποία είναι προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός, μ, έχει ορισμένη ομοτιμία ε_μ (0 ή 1) εάν, για κάθε ομοιογενές στοιχείο $x \in V$, το μx έχει ορισμένη ομοτιμία $\varepsilon_\mu+\varepsilon_x$. Κάθε στοιχείο τής End(V) αναλύεται σε έναν άρτιο και έναν περιττό γραμμικό μετασχηματισμό:

$$\mathrm{End}\,(V) = \mathrm{End}_0(V)\oplus\mathrm{End}_1(V).$$

Ο βαθμωτός μεταθέτης δύο μετασχηματισμών μ_1 και μ_2, ορίζεται ως:

$$[\mu_1\,,\,\mu_2] = \mu_1\mu_2 - (-1)^{e_{\mu_1}e_{\mu_2}}\,\mu_2\mu_1.$$

Ισχύει μια αντίστοιχη ταυτότητα Jacobi. Με αυτήν την δομή, ο χώρος End(V) είναι μια βαθμωτή άλγεβρα Lie. Εάν ο V είναι μια υπερμεταθετική άλγεβρα A, ο υποχώρος Der(A) των μετασχηματισμών D που ικανοποιούν τον κανόνα τού Leibniz:

$$D(xy) = xDy + (-1)^{e_D e_y}\,(Dx)y,$$

είναι ο χώρος των βαθμωτών παραγωγίσεων της A. Τέτοιες παραγωγίσεις είναι τα διανυσματικά πεδία σε μιαν υπερπολλαπλότητα M, που είναι παραγωγίσεις της άλγεβρας $C^{\infty}(M)$, και η εξωτερική παραγώγιση d, που είναι παραγώγιση της εξωτερικής άλγεβρας στην M. Μια άλλη περίπτωση βαθμωτών αλγεβρών A έχουμε εάν $A = \bigoplus_n A_n$, όπου n είναι ακέραιος ($\wedge$-βαθμωτές A) ή μη-αρνητικός ακέραιος ($\subseteq$-βαθμωτές A). Εάν $x \in A_n$, τότε λέμε ότι το x έχει βαθμό n, degx = n. Με ανάλογο τρόπο, αυτή η έννοια βαθμίδας επεκτείνεται στους χώρους End(A) και Der(A).

Ένα *ιδεώδες* της άλγεβρας A είναι μια υποάλγεβρα B, με την ιδιότητα $AB \subset B$. Το γινόμενο της A επάγει ένα γινόμενο στον χώρο A/B, το οποίο είναι υπερμεταθετικό και προσεταιριστικό εάν είναι τέτοιο το γινόμενο της A. Ένα *διαφορικό* D είναι μια περιττή παραγώγιση που είναι μηδενοδύναμη (nilpotent) δευτέρας τάξεως, δηλαδή όταν $D^2 \equiv ½[D\ ,\ D] = 0$ και $\varepsilon(D) = 1$. Εάν η A είναι $\subseteq$-βαθμωτή, $A = \bigoplus_n A_n$, το διαφορικό D μειώνει την βαθμίδα και είναι τελεστής ορίου (boundary) εάν $\deg D = -1$, και αυξάνει την βαθμίδα και είναι τελεστής συν-ορίου (coboundary) εάν $\deg(D) = +1$. Αναλόγως ορίζονται αυτές οι έννοιες εάν έχουμε μια $\wedge$-βαθμωτή A. Η βαθμωτή άλγεβρα A με το διαφορικό D ονομάζεται *βαθμωτή διαφορική άλγεβρα* (dg-άλγεβρα). Ένα *διαφορικό σύμπλεγμα* είναι ένας $\subseteq$- (ή $\wedge$-) βαθμωτός διανυσματικός χώρος με έναν μηδενοδύναμο γραμμικό τελεστή βαθμού ±1. Μια βαθμωτή διαφορική άλγεβρα είναι ένα διαφορικό σύμπλεγμα όπου ορίζεται ένας πολλαπλασιασμός, για τον οποίο το διαφορικό D είναι παραγώγιση. Σε μιαν άλγεβρα A με διαφορικό D, ο πυρήνας KerD και η εικόνα ImD ορίζονται ως

$$\mathrm{Ker}D \equiv \{x \in A \mid Dx = 0\},$$

$$\mathrm{Im}D \equiv \{x \in A \mid \exists y \in A : Dy = x\}.$$

Ο υποχώρος ImD είναι ιδεώδες τού KerD, οπότε ορίζεται το πηλίκο KerD/ImD. Το πηλίκο συμβολίζεται με $H^*(D)$ και ονομάζεται άλγεβρα συνομολογίας τού D, εάν $\deg D = 1$, και με $H_*(D)$, οπότε ονομάζεται άλγεβρα ομολογίας τού D, εάν $\deg D = -1$. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε βαθμωτούς χώρους: $H^*(D) = \bigoplus_n H^n(D)$ και $H_*(D) = \bigoplus_n H_n(D)$. Τα στοιχεία τού KerD που δεν ανήκουν στην ImD ονομάζονται μη-τετριμμένοι (συν-)κύκλοι. Τα στοιχεία τού KerD και του ImD ονομάζονται, αντιστοίχως, D-κλειστά και D-ακριβή.

Ας δούμε τώρα πώς όλα αυτά προσφέρουν ένα πλαίσιο για την διατύπωση και επίλυση προβλημάτων φυσικής. Γενικά, αφετηρία είναι ένας φασικός χώρος P και η άλγεβρα των λείων συναρτήσεων σε αυτόν, $C^\infty(P)$. Η παρουσία δεσμών και συμμετριών βαθμίδας σημαίνει τα εξής. Πρώτον, η άλγεβρα $C^\infty(P)$ πρέπει να περιοριστεί στην άλγεβρα $C^\infty(\Sigma)$, όπου Σ είναι η επιφάνεια που καθορίζεται από τους δεσμούς και εμπεριέχεται στον χώρο P. Δεύτερον, τα στοιχεία τής $C^\infty(\Sigma)$ πρέπει να είναι αναλλοίωτα υπό τις συμμετρίες βαθμίδας, δηλαδή να μηδενίζονται από την επιμήκη εξωτερική παράγωγο d στην Σ, ή αλλιώς να υπάρχει ένα σύνολο διανυσματικών πεδίων εφαπτομένων στην Σ, τα οποία να κλείνουν επί της Σ και άρα να ορίζουν τροχιές βαθμίδας. Τα στοιχεία τής $C^\infty(\Sigma)$ που πληρούν αυτούς τους όρους είναι τα φυσικά μεγέθη της θεωρίας. Η συμβατική προσέγγιση στην κβάντωση αντιμετωπίζει ποικίλα προβλήματα, από τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων σε διαδρομές (path integrals) ως την διατήρηση της πρόδηλης (manifest) τοπικότητας και του συναλλοίωτου (covariance). Η μέθοδος BRST παρακάμπτει τέτοια προβλήματα ως εξής. Εισάγονται ορισμένοι γεννήτορες Π_α, οπότε έχουμε τον χώρο των πολυωνύμων στους Π_α με συντελεστές στην $C^\infty(P)$, δηλαδή τον χώρο $\Re(\Pi_\alpha)\otimes C^\infty(P)$. Αναζητάται τότε μια παραγώγιση δ σε αυτόν τον χώρο, τέτοια ώστε η ομολογία τής δ να είναι $H_0(\delta) = C^\infty(\Sigma)$ και $H_k(\delta) = 0$ για $k \neq 0$. Με άλλα λόγια, ο περιορισμός στην άλγεβρα $C^\infty(\Sigma)$ επιτυγχάνεται μέσω της ομολογίας μιας τέτοιας παραγώγισης δ. Ο ρόλος των πρόσθετων γεννητόρων Π_α είναι να εξουδετερώσουν τις συναρτήσεις τής $C^\infty(P)$ οι οποίες μηδενίζονται στην επιφάνεια Σ. Όρος για να είναι αυτά δυνατά είναι, όπως είδαμε, να ισχύει $H_0(\delta) = (\mathrm{Ker}\delta)_0/(\mathrm{Im}\delta)_0 = C^\infty(P)/N$, όπου N είναι το ιδεώδες των συναρτήσεων που μηδενίζονται στην επιφάνεια Σ. Εάν οι δεσμοί στην θεωρία είναι της μορφής $G_a = 0$, τότε ένα τυχόν στοιχείο τού N είναι της μορφής $F = F^a G_a$,[42] όπου F^a είναι συναρτήσεις στον φασικό χώρο P. Αρκεί τότε να εισαχθούν επί πλέον γεννήτορες, Π_a, ισάριθμοι με τους δεσμούς, με την ιδιότητα $\delta\Pi_a = -\,G_a$, οπότε τα στοιχεία τού N είναι $F = \delta(-\,F^a\Pi_a) \in (\mathrm{Im}\delta)_0$. Μπορούμε ακόμη να θέσουμε $\delta z^A = 0$ για κάθε μεταβλητή z^A στον φασικό χώρο. Μια τέτοια παραγώγιση δ και γεννήτορες Π_a πάντα μπορούν να βρεθούν, με την προϋπόθεση ότι θα ορίσουμε κατάλληλα έννοιες *βαθμού* και για την δ και για τα z^A και Π_a, με τρόπο συμβατό μεταξύ τους και με την ομολογία τής δ. Δεν αναφέρω αυτές τις σημαντικές λεπτομέρειες, σημειώνω μόνον ότι με όλες αυτές τις προϋποθέσεις η δ ικανοποιεί την σχέση $\delta^2 = 0$, άρα είναι ένα διαφορικό. Το συμπέρασμα είναι ότι έχουμε αυτό που ονομάζεται *ανάλυση* (resolution) μιας άλγεβρας A. Μια ομολογιακή ανάλυση της A είναι μια $\subseteq$-βαθμωτή διαφορική άλγεβρα A΄ με διαφορικό δ βαθμού −1 έτσι ώστε $H_0(\delta) = A$ και $H_k(\delta) = 0$, $k \neq 0$. Ανάλογα ορίζεται μια συνομολογιακή ανάλυση. Στην περίπτωσή μας, η διαφορική άλγεβρα $[\Re(\Pi_a)\otimes C^\infty(P), \delta]$ προσφέρει μιαν ανάλυση της άλγεβρας των συναρτήσεων στην επιφάνεια δεσμών Σ. Η ανάλυση που επιτυγχάνεται έτσι ονομάζεται ανάλυση Koszul-Tate, το σύμπλεγμα που προκύπτει είναι το σύμπλεγμα Koszul-Tate, και το δ είναι το διαφορικό Koszul-Tate.

Παράλληλα, υπάρχει ένα δεύτερο διαφορικό, η επιμήκης εξωτερική παράγωγος d με την ιδιότητα το $H^0(d)$ να ισούται με το σύνολο των συναρτήσεων στην επιφάνεια Σ που είναι σταθερές κατά μήκος των τροχιών βαθμίδας. Αυτό το διαφορικό d μπορεί να επεκταθεί σε ολόκληρο τον φασικό χώρο P και στους γεννήτορες Π_a, ώστε $\delta d + d\delta = 0$. Αποδεικνύεται τότε ότι το d έχει επί πλέον την ιδιότητα $d^2 = -\,(\delta\Delta + \Delta\delta)$, για κάποια παραγώγιση Δ. Λέμε τότε ότι είναι διαφορικό modulo δ, διότι $d^2 = 0$ στο $H_*(\delta)$. Συνεπώς έχουμε την συνομολογία τού d στο $H_*(\delta)$, $H^k(d|H_*(\delta))$. Με αυτούς τους όρους, το γεγονός ότι το δ ορίζει μιαν ανάλυση, όπως προηγουμένως, επιτρέπει να βρούμε ένα άλλο διαφορικό, s, τέτοιο ώστε $s = \delta + d +$ «άλλοι όροι», με κατάλληλες συνθήκες για τους αντίστοιχους βαθμούς, και $H^k(s) = H^k(d|H_0(\delta))$. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται ομολογιακή θεωρία διαταραχών (homological perturbation

[42] Ισχύει παντού η σύμβαση του Einstein, δηλαδή επαναλαμβανόμενοι εκθέτες ή δείκτες σημαίνουν πρόσθεση σε όλες τις δυνατές τιμές τους.

theory), και το διαφορικό s είναι το διαφορικό BRST. Οι «άλλοι όροι» στον ορισμό τού s είναι μια ακολουθία από παραγωγίσεις, $s^{(1)}$, $s^{(2)}$, …, οι οποίες ορίζονται modulo όρους που είναι δ-ακριβείς, δηλαδή s_n □ $\delta + d + s^{(1)} + s^{(2)} + \ldots + s^{(n)}$, με $2s_n^2$ □ $[s_n , s_n] = \rho^{(n)} + \rho^{(n+1)} + \ldots$, και όπου $[\delta , \rho^{(n)}] = 0$. Εξ άλλου, τα διανυσματικά πεδία που ορίζουν τους απειροστούς μετασχηματισμούς βαθμίδας είναι δυικά 1-μορφών, τις οποίες εδώ συμβολίζω με η^a, οπότε (στην μη-αναγώγιμη περίπτωση όπου περιορίζομαι) οι επιμήκεις μορφές κατά μήκος των τροχιών βαθμίδας αναπαρίστανται ως πολυώνυμα στις μορφές η^a. Άρα, η εξωτερική επιμήκης άλγεβρα είναι ισόμορφη με $C^\infty(\Sigma)\otimes\Re[\eta^a]$.

Το σύμπλεγμα Koszul-Tate και το εξωτερικό επιμήκες σύμπλεγμα έχουν ακριβώς τον ίδιον αριθμό γεννητόρων, οι οποίοι έχουν την ίδια ομοτιμία Grassmann.[43] Μπορούμε συνεπώς να επεκτείνουμε την αρχική αγκύλη του φασικού χώρου P στις μεταβλητές η^a και Π_a, θεωρώντας τες συζυγείς μεταξύ τους:

$$[\Pi_a , \eta^b] = -\,(-1)^{(e_a+1)(e_b+1)}[\,\eta^b , \Pi_a] = -\,\delta_a{}^b.$$

Οι μορφές η^a είναι τα «φαντάσματα», και οι συζυγείς τους γεννήτορες Π_a οι «ορμές των φαντασμάτων». Ο χώρος P μπορεί λοιπόν να επεκταθεί στον *εκτεταμένο φασικό χώρο*, P_{ext}, συμπεριλαμβάνοντας τα φαντάσματα και τις ορμές τους. Η άλγεβρα των υπερσυναρτήσεων στον P_{ext} είναι το τανυστικό γινόμενο $\Re(\Pi_a)\otimes C^\infty(P)\otimes\Re[\eta^a]$. Το διαφορικό δ επεκτείνεται σε ολόκληρον τον εκτεταμένο φασικό χώρο θέτοντας $\delta\eta^a = 0$. Αντιστοίχως, οι συνθήκες συμβατότητας σχετικά με τους απαραίτητους βαθμούς, στους οποίους συνεχίζω χάριν απλότητας να μην αναφέρομαι, επιβάλλουν να θέσουμε $d\Pi_a = (-1)^{e_a}\eta^c C_{ca}{}^b\Pi_b$, οπότε $[\delta , d] = 0$, και το d είναι διαφορικό modulo δ. Το δ ορίζει μιαν ανάλυση της εξωτερικής επιμήκους άλγεβρας $C^\infty(\Sigma)\otimes\Re[\eta^a]$, και η συνομολογία τού d modulo δ συμπίπτει με την συνομολογία της αρχικής επιμήκους εξωτερικής παραγώγου στην επιφάνεια Σ. Τέλος, οι αναγκαίοι βαθμοί που συνοδεύουν αυτούς τους ορισμούς και υπονοούνται εδώ, ονομάζονται χαρακτηριστικά «φαντασματικοί αριθμοί» και «αντιφαντασματικοί αριθμοί».

Υπάρχουν τώρα οι προϋποθέσεις για την ύπαρξη του διαφορικού BRST, $s = \delta + d +$ «άλλοι όροι», με $s^2 = 0$. Αυτό το s μπορεί να επιλεχθεί με τρόπο που η δράση του να είναι κανονική. Αυτό σημαίνει ότι για τυχούσα συνάρτηση F, $sF = [F , \Omega]$ με $\Omega = \Omega^*$.

[43] Εάν μια συνάρτηση, f, έχει ορισμένη ομοτιμία, τότε η ομοτιμία Grassmann, ε_f, είναι 0(mod2) εάν η f είναι άρτια, και 1(mod2) εάν η f είναι περιττή. Με προφανή συμβολισμό, είναι: fg □ $(-1)^{e_f e_g}$ gf.

Το Ω είναι ο γεννήτορας ή *φορτίο BRST*, είναι φερμιονικού τύπου, με [Ω , Ω] = 0 ως συνέπεια της συνθήκης $s^2 = 0$. Ο γεννήτορας Ω αποδεικνύεται ότι υπάρχει, είναι της μορφής

$$\Omega = \eta^a G_a - \frac{1}{2}(-1)^{e_b}\eta^b\eta^c C_{cb}{}^a\Pi_a + \ldots ,$$

και μοναδικός modulo κανονικούς μετασχηματισμούς. Σε αυτό το πλαίσιο ορίζεται μια φυσική δομή άλγεβρας Poisson στον χώρο $H^0(s)$, αντίστοιχες χαμιλτονιανές συναρτήσεις και έτσι μια δυναμική, ενώ ο μετασχηματισμός BRST αναδεικνύεται ως συμμετρία της θεωρίας.

Μέχρις εδώ, παρουσίασα με τον στοιχειωδέστερο δυνατό τρόπο τις βασικές ιδέες της θεωρίας BRST. Τονίζω, όμως, ότι δεν έχουμε βγει από το *κλασικό* πλαίσιο. Η μετάβαση στην κβαντική περίπτωση ακολουθεί το πνεύμα της γενικής «συνταγής». Δηλαδή, τα φαντάσματα, οι συζυγείς τους ορμές και οι μεταξύ τους σχέσεις μετάθεσης πρέπει να αναπαρίστανται σε έναν χώρο Hilbert. Το ίδιο πρέπει να συμβαίνει με το φορτίο BRST, Ω, δηλαδή το Ω θα είναι ένας αυτοσυζυγής, φερμιονικού τύπου τελεστής, άρα θα υπακούει στην σχέση [Ω , Ω] = 0, όπου η αγκύλη σημαίνει εδώ αντιμεταθέτη. Σε αυτήν την βάση, ένα *φυσικό (παρατηρήσιμο) μέγεθος BRST*, Α, θα είναι ένας γραμμικός τελεστής που (αντι-) μετατίθεται με το φορτίο BRST: [Α , Ω] = 0, και όπου η μεταθετότητα έχει γενικευμένην έννοια, περιλαμβάνοντας αναλόγως την αντιμεταθετότητα. Λέμε τότε ότι το μέγεθος Α είναι BRST-κλειστό. Αντιστοίχως, το Α είναι BRST-ακριβές αν υπάρχει ένα άλλο μέγεθος, Β, ώστε να ισχύει Α = [Β , Ω]. Η λογική του φορμαλισμού, μαζί με τα σημεία που αφορούν τους φαντασματικούς/αντιφαντασματικούς αριθμούς που συστηματικά παραλείπω, είναι τέτοια ώστε είναι εντελώς φυσικό να ορίσουμε ως φυσικές καταστάσεις ενός συστήματος εκείνα τα στοιχεία του χώρου Hilbert, ψ, για τα οποία Ωψ = 0. Όπως και με τους τελεστές, λέμε ότι μια κατάσταση ψ, για την οποία Ωψ = 0, είναι BRST-κλειστή, ενώ είναι BRST-ακριβής αν υπάρχει κατάσταση χ, ώστε ψ = Ωχ. Ορίζεται έτσι μια συνομολογία BRST-καταστάσεων, H^*_{st} = KerΩ/ImΩ. Δηλαδή, οι φυσικές καταστάσεις δίδονται από τις κλάσεις ισοδυναμίας της συνομολογίας των BRST καταστάσεων. Αποδεικνύεται ότι ορίζεται αντιστοίχως μια συνομολογία BRST-τελεστών, H^*_{op}, η οποία είναι ισόμορφη με την άλγεβρα των γραμμικών τελεστών που δρουν στην συνομολογία των BRST-καταστάσεων.

Η μέθοδος αποδείχθηκε εξαιρετικά παραγωγική. Εκείνο που ενδιαφέρει εμάς εδώ είναι το γεγονός ότι ο φορμαλισμός της μπορεί να μεταγραφεί από το χαμιλτονιανό στο λαγκρανζιανό πλαίσιο, κάνοντας το συναλλοίωτο του χωροχρόνου ρητά φανερό. Οι γενικές αρχές παραμένουν οι ίδιες, αλλά απαιτούνται οι εξής τροποποιήσεις. Τον ρόλο των μεταβλητών στον φασικό χώρο παίζουν τώρα τα πεδία που εμφανίζονται στην λαγκρανζιανή συνάρτηση, και που είναι αναλλοίωτα υπό μετασχηματισμούς βαθμίδας. Τον ρόλο του φασικού χώρου παίζει ο χώρος I όλων των ιστοριών, και τον ρόλο της επιφάνειας Σ παίζει η στατική (stationary) επιφάνεια, συμβολιζόμενη πάλι με Σ. Τα φυσικά πεδία ορίζονται στον χώρο Σ/G, όπου G είναι ο χώρος των τροχιών βαθμίδας. Προκειμένου να οριστεί ένα σύμπλεγμα Koszul-Tate και η αντίστοιχη ανάλυση, εισάγονται τώρα *αντιπεδία* ισάριθμα με τα πεδία, καθώς και μια ιεραρχία από φαντάσματα και αντιφαντάσματα, όλα συνοδευόμενα από φαντασματικούς και αντιφαντασματικούς αριθμούς. Το γεγονός ότι τώρα δεν είναι διαθέσιμη μια αγκύλη Poisson, αναπληρώνεται με την εισαγωγή μιας *αντιαγκύλης*, (• , •). Το σκεπτικό της συνομολογιακής θεωρίας διαταραχών επαναλαμβάνεται, με την ύπαρξη διαφορικών δ και d όπως προηγουμένως, και την σύνθεση τους: s = δ + d + «άλλοι όροι», με $s^2 = 0$. Ο μετασχηματισμός BRST είναι κανονικός μετασχηματισμός για την αντιαγκύλη, με sA = (A , S), όπου το S παίζει τον ρόλο που έπαιζε το Ω στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό.

Όταν γίνουν όλα αυτά, προκύπτει το αντίστοιχο «modulo ομοτοπία» μιας μαθηματικής δομής που ονομάζεται *άλγεβρα Gerstenhaber* [K]. Το κρίσιμο σημείο είναι ότι ο φορμαλισμός προσαρμόζει κάλλιστα μια διαδικασία διαταραχών βασισμένη στον λαγκρανζιανό φορμαλισμό στην *φυσική*, στο εννοιολογικό πλαίσιο της θεωρίας των παραμορφώσεων στα *μαθηματικά*. Συγκεκριμένα, ξεκινώντας από μιαν ελεύθερη λαγκρανζιανή L_0 και ένα διανυσματικό πεδίο δ_0 που δρα στον χώρο των φυσικών πεδίων φ και αντιπροσωπεύει μια συμμετρία βαθμίδας, αναζητά κανείς μια λαγκρανζιανή με αλληλεπιδράσεις ως παραμόρφωση της L_0: $L = \Sigma t^i L_i$, $\delta = \Sigma t^i \delta_i$. Τα πεδία, τα αντιπεδία, τα φαντάσματα και αντιφαντάσματα, εμφανίζονται στο ανάπτυγμα για την πλήρη λαγκρανζιανή L, ενώ το ανάπτυγμα δ δίνει τα στοιχεία που παράγουν μιαν ανάλυση Koszul-Tate. Τα αναπτύγματα προχωρούν ως το άπειρο, και αποδεικνύεται ότι $(L_\infty , L_\infty) = 0$ και $s_\infty^2 = 0$. Σχηματίζεται έτσι το λεγόμενο *σύμπλεγμα Batalin-Vilkovisky*. Η συνθήκη $s_\infty^2 = 0$ έχει μια πολύπλοκη μορφή που χρησιμοποιεί την αντιαγκύλη και ισοδυναμεί με ταυτότητες οι οποίες ορίζουν μια δομή που ονομάζεται *ισχυρώς ομοτοπική άλγεβρα Lie* (strongly homotopy Lie algebra –shLie, ή L_∞). Όταν προχωρήσουμε στην κβάντωση αυτής της κατασκευής, φτάνουμε σε μιαν *άλγεβρα Batalin-Vilkovisky* [K].

7.5 Κβάντωση και άλγεβρα

Το συμπέρασμα είναι ότι όλη η μέθοδος BRST και η επέκτασή της στην θεωρία Batalin-Vilkovisky, που είναι μια διαδικασία της *φυσικής* για την κβάντωση πεδίων, δεν είναι παρά μια περίπτωση της *μαθηματικής θεωρίας των παραμορφώσεων* [94]. Αυτό το γεγονός στηρίζεται στην ύπαρξη μιας ενοποιούσας αλγεβρικής δομής, της ισχυρώς ομοτοπικής άλγεβρας Lie, L_∞. Το ενοποιητικό εύρος μιας άλγεβρας L_∞ περιλαμβάνει τις περιπτώσεις στις οποίες αναφέρθηκα, όπου προκύπτει από μιαν ομολογιακή ανάλυση μιας δεδομένης άλγεβρας Lie, αλλά εκτείνεται και πέρα από αυτές. Θα αναφερθώ συνοπτικά σε δύο περιπτώσεις που σχετίζονται με το θέμα μας.

Η πρώτη αφορά θεωρίες πεδίου με συμμετρίες βαθμίδας που δεν προκύπτουν από την δράση μιας άλγεβρας Lie, αλλά από την δράση μιας άλγεβρας L_∞ [95]. Πρόκειται για μια γενίκευση της συνηθισμένης περίπτωσης, η οποία βασίζεται στην εισαγωγή μιας *νέας υπόθεσης*: Οι παράμετροι της συμμετρίας βαθμίδας δρουν με τρόπο που *εξαρτάται από τα πεδία* [96]. Εδώ υπάγονται δύο σημαντικές εφαρμογές, μία από τις οποίες αφορά άμεσα την κβάντωση μέσω παραμορφώσεων, και στην οποία θα επανέλθω στην συνέχεια. Η δεύτερη περίπτωση εμφάνισης μιας δομής L_∞ αφορά τις λεγόμενες δομές Dirac. Αυτές είναι συστατικά στοιχεία ενός γεωμετρικού πλαισίου για δεσμευμένα μηχανικά συστήματα, σαν αυτά που συναντήσαμε προηγουμένως, με τον ίδιο τρόπο που οι συμπλεκτικές (ή Poisson) δομές το κάνουν για αδέσμευτα συστήματα [97]. Εάν M είναι μια πολλαπλότητα, και TM και T*M η εφαπτομένη και συνεφαπτομένη δέσμη, αντιστοίχως, έστω μια υποδέσμη $L \subset TM \oplus T^*M$, η οποία είναι σε μέγιστο βαθμό ισότροπη (maximally isotropic) σε σχέση με την κανονική συμμετρική διγραμμική μορφή στο $TM \oplus T^*M$. Είναι δυνατόν να εισαχθεί μια αντισυμμετρική πράξη, η επονομαζόμενη αγκύλη Courant, στον χώρο των διατομών της δέσμης $TM \oplus T^*M$. Η αγκύλη Courant είναι το «διπλό» [98] αντικείμενο για ένα ζεύγος αλγεβροειδών Lie στην M, δομή που ονομάζεται *αλγεβροειδές Courant* [97, 99]. Ένα αλγεβροειδές Courant είναι μια διανυσματική δέσμη $E \rightarrow M$ εφοδιασμένη με μια μορφή $\langle . , . \rangle$ στην δέσμη, μιαν αγκύλη Courant $[. , .]$ στον χώρο των διατομών Γ(E), και μιαν απεικόνιση δεσμών $\rho: E \rightarrow TM$, με ορισμένες ιδιότητες (άγκυρα) [K]. Μια *δομή Dirac* σε ένα αλγεβροειδές Courant είναι μια υποδέσμη L που είναι σε μέγιστο βαθμό ισότροπη ως προς την μορφή $\langle . , . \rangle$ και που οι διατομές της κλείνουν ως προς την αγκύλη $[. , .]$. Μια δομή Dirac είναι αλγεβροειδές Lie ως προς τους περιορισμούς στην L της αγκύλης και της άγκυρας. Έστω ένα αλγεβροειδές Lie [I, IIIβ] οριζόμενο από μια διανυσματική δέσμη $A \rightarrow M$, με αγκύλη $[\ ,\ ]$ και χώρο διατομών Γ(A). Προκύπτουν τότε επιπρόσθετα δύο δομές, δυικές μεταξύ τους. Πρώτον, μια δομή άλγεβρας Gerstenhaber, με μιαν αγκύλη (αγκύλη Schouten, βλέπε σημείωση 39) που είναι βαθμωτή επέκταση στον χώρο $\Gamma(\wedge^* A)$ της αγκύλης Lie στον Γ(A) και της δράσης τού Γ(A) σε συναρτήσεις. Δεύτερον, μια δομή διαφορικής βαθμωτής μεταθετικής άλγεβρας στον χώρο Γ(∧*Α*), με ένα διαφορικό d_A που ορίζεται όπως και το διαφορικό de Rham[44] στην βαθμωτή άλγεβρα Γ(∧*Α*). Ένα ζεύγος (Α, Α*) αλγεβροειδών Lie που είναι δυικά μεταξύ τους ως διανυσματικές δέσμες ορίζουν το ένα στο άλλο τέτοιες δομές. Εάν το επαγόμενο διαφορικό d_{A^*} στο Γ(∧*Α) και το d_A στο Γ(∧*Α*) είναι παραγωγίσεις της αγκύλης Schouten στον Γ(∧*Α) και τον Γ(∧*Α*) αντιστοίχως, τότε το ζεύγος (Α, Α*) ονομάζεται δι-αλγεβροειδές Lie. Εάν τώρα Α και Α* είναι αλγεβροειδή Lie σε μια πολλαπλότητα βάσης Μ με άγκυρες a και a*, αντιστοίχως, ορίζονται κατάλληλα δύο διγραμμικές μορφές $(. \, , .)_{\pm}$, μία συμμετρική και μία αντισυμμετρική, μια αγκύλη [. , .], και μια απεικόνιση ρ □ a + a*. Τότε, εάν το ζεύγος (Α, Α*) είναι δι-αλγεβροειδές Lie, το ευθύ άθροισμα $E = A \oplus A^*$ με τα δεδομένα ([. ,.], ρ, $(. \, , .)_{+}$) είναι αλγεβροειδές Courant. Αντιστρόφως, εάν σε ένα αλγεβροειδές Courant (Ε, ρ, [. , .], ⟨. , .⟩), είναι $E = L_1 \oplus L_2$ όπου L_1 και L_2 είναι δομές Dirac κάθετες μεταξύ τους, τότε το (L_1, L_2) είναι δι-αλγεβροειδές Lie, όπου το L_2 είναι δέσμη δυική τού L_1 ως προς την 2⟨. , .⟩. Τέλος, με έναν φυσιολογικό τρόπο αποδεικνύεται ότι ένα αλγεβροειδές Courant οδηγεί σε μια δομή άλγεβρας L_∞. Η ενοποιητική ισχύς των διαδοχικών γενικεύσεων του μαθηματικού πλαισίου φαίνεται, μεταξύ άλλων, και στο ακόλουθο γεγονός. Ο φορμαλισμός των δι-αλγεβροειδών Lie μπορεί να «μεταγλωττισθεί» από την αλγεβρική στην γεωμετρική γλώσσα, με την χρήση της έννοιας μιας υπερπολλαπλότητας [99]. Παραπέμποντας στις πρωτότυπες πηγές για ορισμούς και λεπτομέρειες, επισημαίνω το συμπέρασμα. Δεδομένου ενός ζεύγους (Α, Α*) όπως πάρα πάνω, τα Α και Α* από γεωμετρική σκοπιά οδηγούν άμεσα σε υπερπολλαπλότητες όπου η παραγώγιση d_A, που υπεισέρχεται στην έννοια του δι-αλγεβροειδούς Lie, ισοδυναμεί με ένα περιττό διανυσματικό πεδίο με $[d_A \, , d_A]$ □ $2d_A = 0$ (ομολογιακό διανυσματικό πεδίο). Στην περίπτωση δομής δι-αλγεβροειδούς Lie, η παραγώγιση d_A (της εξωτερικής άλγεβρας Γ(∧*Α*) είναι βαθμού 1, αλλά χωρίς αυτόν τον περιορισμό έχουμε δομές L_∞. Το αξιοσημείωτο είναι ότι η εκδρομή σε αυτό το γενικευμένο μαθηματικό πλαίσιο καταλήγει στην ενσωμάτωση της φυσικής θεωρίας BRST και του διαφορικού της, ευθέως ως ειδική περίπτωσή του.

Με αυτόν τον τρόπο, εκείνο που ξεκίνησε ως *τεχνική* κατά την διατύπωση φυσικών θεωριών, σχετικά με μια έννοια κβάντωσης, εντάσσεται σε ένα εννοιολογικό πλαίσιο, εκείνο της ομολογιακής άλγεβρας. Κατά την έκφραση του J. Stasheff, «*οι φυσικοί ανακάλυψαν εκ νέου την ομολογιακή άλγεβρα*» [94], θυμίζοντας έντονα την περίπτωση του Monsieur Jourdain. Στο Κεφάλαιο VI, εξ άλλου, συναντήσαμε μιαν άλλην έννοια κβάντωσης, όχι στο επίπεδο φυσικής θεωρίας, αλλά στην ανάλυση των σχέσεων μεταξύ κλασικού και κβαντικού μαθηματικού πλαισίου. Είδαμε εκεί ότι η «κβάντωση» μας παραπέμπει σε καθαρά μαθηματικούς τομείς, όπως με τον ορισμό τού Bott ή την θεωρία KK. Μάλιστα, ο Landsman [83] κάνει ρητή αναφορά στα

[44] Είναι το συνηθισμένο διαφορικό σύμπλεγμα στην αλγεβρική τοπολογία, με διαφορικό την εξωτερική παράγωγο.

επονομαζόμενα «φυσικά μαθηματικά» –την εξέταση μαθηματικών προβλημάτων υπό το πρίσμα φυσικών θεωριών– σε αντιδιαστολή προς την μαθηματική φυσική. Είναι θέμα που φωτίζει από μιαν άλλην άποψη το πρόβλημα που μας απασχολεί, και στο οποίο θα στραφούμε τώρα.

Η ουσία των μαθηματικών

έγκειται στην ελευθερία τους.

G. Cantor

Κεφάλαιο VIII: Το κβαντικό αυτο-ερμηνευόμενο

8.1 Φυσική και μαθηματικά: μια νέα σχέση

Από τις αρχές της δεκαετίας του 1980, έχει αναδυθεί μια αξιοσημείωτη αλλαγή στην σχέση φυσικής και μαθηματικών. Είναι πολλοί εκείνοι που την θεωρούν, δικαίως, ορόσημο μιας νοηματικής επανάστασης. Ενδεικτική είναι η συζήτηση που ξέσπασε στους κόλπους της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρείας [100], και συνεχίζεται μέχρι σήμερα. Επιγραμματικά, στην θεωρητική φυσική, αναπτύσσονται έννοιες και σχέσεις εννοιών με περιεχόμενο την φυσική πραγματικότητα όπως εμφανίζεται στην παρατήρηση και το πείραμα, οι οποίες παρίστανται με μαθηματική μορφή. Τα μαθηματικά μελετούν μαθηματικές μορφές και τις μεταξύ τους σχέσεις. Έτσι, τα μαθηματικά συνιστούν το θεωρητικό εργαλείο για την ανάλυση των μαθηματικοποιημένων θεωρητικών εννοιών που αναφέρονται στην φυσική πραγματικότητα. Αντιστρόφως, η ανάπτυξη της επιστήμης για την φυσική πραγματικότητα τροφοδοτεί τα μαθηματικά με νέα προβλήματα, νέες έννοιες και μεθόδους. Αυτός υπήρξε ο γενικός κανόνας από την εποχή τού Newton ώς σήμερα. Στην πρόσφατη περίοδο, όμως, η σχέση γνώρισε μια θεαματική αντιστροφή [101]. Έννοιες οι οποίες οφείλουν την καταγωγή τους σε σύγχρονες φυσικές θεωρίες, μετατρέπονται οι ίδιες σε θεωρητικά εργαλεία για την μελέτη και επίλυση καθαρά μαθηματικών προβλημάτων. Το πρώην μαθηματικό γίνεται «μαθηματικοποιημένο», το πρώην μαθηματικοποιημένο γίνεται «μαθηματικό». Μια νέου τύπου σχέση αμοιβαίας αλληλεπίδρασης μεταξύ εργαλείου ανάλυσης και αντικειμένου ανάλυσης εγκαθιδρύεται. Έτσι, η ρήση τού Wigner για την *παράλογη αποτελεσματικότητα των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες*, αντιστράφηκε σε *παράλογη αποτελεσματικότητα της φυσικής στα μαθηματικά* [102].

Η περιοχή όπου συντελείται αυτή η εξέλιξη είναι τα δυσεπίλυτα προβλήματα στην πρώτη γραμμή θεωρητικής έρευνας, όσον αφορά την φυσική, και, όσον αφορά τα μαθηματικά, άλυτα προβλήματα σε θεμελιώδεις τομείς, όπως είναι η τοπολογία χώρων με λίγες διαστάσεις, δηλαδή από μία ως τέσσερις. Ειδικότερα, και από την πλευρά της φυσικής, κορυφαίο πρόβλημα είναι αναμφισβήτητα η κβάντωση της γενικής σχετικότητας, δηλαδή η ανάπτυξη μιας γενικά συναλλοίωτης κβαντικής θεωρίας. Από την άλλη, οι σύγχρονες κβαντικές θεωρίες των υπερχορδών, των υπερμεμβρανών και των μετεξελίξεών τους (θεωρία M, θεωρία F), προσφέρουν ισχυρές ενδείξεις ότι σε καθεστώς πολύ υψηλών ενεργειών –απρόσιτο στις σημερινές πειραματικές μεθόδους– πιθανότατα ελλοχεύουν απροσδόκητα φαινόμενα και σχέσεις που φωτίζουν ερωτήματα προς το παρόν αναπάντητα. Κεντρική θέση σε αυτά κατέχει το ερώτημα, πώς προσδιορίζεται η κατάσταση φυσικού κενού, ανάμεσα στα εκατομμύρια καταστάσεων κενού που προκύπτουν από τις πιο παραδοσιακές μορφές τέτοιων κβαντικών θεωριών. Όλα αυτά κατατείνουν στην αναζήτηση θεωριών που δεν χρησιμοποιούν την μέθοδο των μικρών διαταραχών (perturbations), βασισμένη σε επιφάνειες Riemann, όπως έκαναν οι παραδοσιακές θεωρίες υπερχορδών [20, σ. 386]. Η διατύπωση γενικά συναλλοίωτων κβαντικών θεωριών είναι ο στόχος στον οποίο συγκλίνουν όλα τα ως άνω ερωτήματα. Αυτό γενικά σημαίνει θεωρίες οι οποίες είτε δεν εξαρτώνται από κάποια μετρική (θεωρίες τύπου Schwarz), ή, αν μια τέτοια μετρική υπάρχει ως υπόβαθρο, η εξάρτηση από αυτήν εξαλείφεται (θεωρίες τύπου Witten). Με αυτήν την συλλογιστική αναπτύχθηκαν οι λεγόμενες τοπολογικές θεωρίες πεδίου, εξαρτώμενες από τα τοπολογικά και μόνον χαρακτηριστικά ενός χώρου. Στις σχετικές αναζητήσεις, αναπτύχθηκαν διάφορα δοκιμαστικά μοντέλα (toy models) με σκοπό να ανιχνευθούν ιδιότητες και σχέσεις σε απλές περιπτώσεις, οι οποίες ενδεχομένως θα μπορούσαν να ισχύουν ή να υποδεικνύουν απαντήσεις σε πιο ρεαλιστικές καταστάσεις. Τέτοια μοντέλα είναι θεωρίες βαρύτητας σε 2 διαστάσεις, αλλά και κβαντικές θεωρίες πεδίου σε δύο ή τρεις διαστάσεις. Μεταξύ των τελευταίων, σημαντική θέση καταλαμβάνουν εκείνες που ανήκουν στην κατηγορία των επονομαζομένων σ-μοντέλων. Πρόκειται για μοντέλα που ενώ φαντάζουν απλά στην σύλληψή τους, αποκαλύπτουν έναν μεγάλο πλούτο και συνθετότητα στην επεξεργασία και ανάλυσή τους, καθώς και την δυνατότητα να αποκαθιστούν καλώς καθορισμένη και άμεση επαφή με καθαρά μαθηματικούς τομείς όπως η τοπολογία και η αλγεβρική γεωμετρία, ιδιαίτερα η ομολογιακή άλγεβρα.

Το αποτέλεσμα ήταν ότι τέτοια δοκιμαστικά μοντέλα, τα οποία *δεν* υποτίθενται ότι απεικονίζουν πραγματικές φυσικές καταστάσεις, άρχισαν να παίζουν τον ρόλο *εργαστηρίων πειραματισμού επί των θεωρητικών εννοιών της φυσικής*, τρόπον τινά. Έτσι, θεωρητικές έννοιες της φυσικής, με φυσικό περιεχόμενο, άρχισαν να αποκτούν μια σχετική αυτονομία, καθώς μετατράπηκαν *ταυτοχρόνως* σε *αντικείμενο* ανάλυσης αλλά και σε *εργαλείο* ανάλυσης. Οι δύο αυτοί, παραδοσιακά διακριτοί ρόλοι, εναλλάσσονταν τώρα με τρόπο που έκανε τα μεταξύ τους όρια δυσδιάκριτα ή και τα εξαφάνιζε εντελώς. Σε συνδυασμό με το γεγονός της πολυεπίπεδης επαφής με τα καθαρά μαθηματικά που ανέφερα, έννοιες της *φυσικής* άρχισαν να αποκτούν τώρα ένα *status* παρόμοιο με εκείνο των καθαρά μαθηματικών εννοιών, άρα και το δικαίωμά τους να χρησιμοποιούνται όπως αυτές. Η φυσική προμήθευε τώρα δεδομένα νέου τύπου για την αντιμετώπιση μαθηματικών προβλημάτων. Επρόκειτο για μιαν αντιστροφή της καθιερωμένης σχέσης μαθηματικών και φυσικής, κάτι που στον κόσμο των μαθηματικών θεωρήθηκε εξέλιξη επαναστατική [101, 20, σσ. 387-8].

Η τομή έγινε στις αρχές της δεκαετίας του 1980. Ο Simon Donaldson χρησιμοποίησε την θεωρία Yang-Mills σε τέσσερις διαστάσεις για να μελετήσει τετραδιάστατες πολλαπλότητες, περίπτωση με αξιοσημείωτη δυσκολία και μοναδικότητα. Τα αποτελέσματα ήταν θεαματικά: συνθήκες για την ύπαρξη λείων δομών σε τοπολογικές τετραδιάστατες πολλαπλότητες (σε στενή σχέση και με την απόδειξη της εικασίας τού Poincaré στις τέσσερις διαστάσεις από τον M. Freedman την ίδια περίοδο), ένα συνεχές λείων δομών στον ∇^4 και «κάλπικοι» (fake) χώροι ∇^4, αλλά και η ανακάλυψη νέων πολυωνυμικών αναλλοίωτων μεγεθών. Την ίδια εποχή, τέτοια καινούργια πολυωνυμικά αναλλοίωτα μεγέθη ανακαλύφθηκαν από τον Jones στην θεωρία των κόμβων (knots) [103]. Ίσως η εντυπωσιακότερη περίπτωση είναι η απόδειξη από τον Richard Borchers της εικασίας των Conway και Norton σχετικά με το «τερατώδες φεγγαρόφωτο (monstrous moonshine)» με την χρήση εννοιών και αποτελεσμάτων της θεωρίας των υπερχορδών [104]. Παράλληλα, ο E. Witten χρησιμοποιούσε τα σ-μοντέλα που ανέφερα (αυτός εισήγαγε τον όρο «τοπολογική θεωρία πεδίων») στην τοπολογία, ανακαλύπτοντας τοπολογικά αναλλοίωτα μεγέθη για πολλαπλότητες. Η μέθοδός του γενικεύθηκε από τον Floer, ο οποίος πέτυχε παρόμοια αποτελέσματα σε τρεις διαστάσεις, χρησιμοποιώντας ένα άλλο δημοφιλές μοντέλο τριδιάστατης θεωρίας Yang-Mills, την θεωρία Chern-Simons. Εν όψει της πληθώρας αυτών των αποτελεσμάτων, ο M. Atiyah έθεσε το ερώτημα εάν επρόκειτο για φαινομενικά άσχετες εκφάνσεις, οι οποίες να μπορούσαν να υπαχθούν σε ένα ενιαίο πλαίσιο σε βαθύτερο επίπεδο, και εάν ένα τέτοιο πλαίσιο μπορούσε να διαμορφωθεί με την χρήση της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Ο Witten έδειξε ότι η απάντηση είναι καταφατική, και ότι αφορούσε δύο τύπους θεωριών. Ο ένας στηριζόταν σε τοπολογικά μοντέλα χωρίς εξάρτηση από μετρική. Ο άλλος ήταν οι συνομολογιακές θεωρίες πεδίου. Σε αυτόν τον δεύτερο τύπο θεωριών εφαρμόζει κανείς την μέθοδο BRST (ή την επέκτασή της με την μέθοδο Batalin-Vilkovisky) στην οποία αναφέρθηκα στην §7.4. Με αυτόν τον τρόπο υπάρχει η δυνατότητα να διατυπωθούν θεωρίες όπου κάποιο πεδίο θα υπάρχει ως υπόβαθρο, αλλά ο τανυστής ενέργειας-ορμής να είναι BRST-τετριμμένος, δηλαδή να εκφράζεται ως κατάλληλα οριζόμενη αγκύλη $\{Q, V\}$, όπου V είναι κάποιο πεδίο και Q είναι ο τελεστής BRST που ορίζεται με τον τρόπο που έχω εκθέσει στην §7.4. Τότε, όμως, η αντίστοιχη θεωρία είναι τοπικά γενικά συναλλοίωτη, ανεξάρτητη δηλαδή από μετρική [20, 105]. Χωρίς αξιώσεις αυστηρότητας, επισημαίνω το εξής χαρακτηριστικό των τοπολογικών θεωριών. Ενώ στις συνηθισμένες θεωρίες πεδίου οι αντίστοιχες συναρτήσεις Green, και στις απλούστερες περιπτώσεις, έχουν άπειρους βαθμούς ελευθερίας, τώρα εμφανίζεται πεπερασμένος αριθμός[45] και, επί πλέον, οι συναρτήσεις Green δίνουν αριθμητικές τιμές για τοπολογικά αναλλοίωτα μεγέθη. Με άλλα λόγια, *ένα μαθηματικό πλαίσιο εννοιών, που κατάγονται μεν από την φυσική, αλλά έχουν αποσπαστεί από το φυσικό τους περιεχόμενο, οδηγεί σε αναλλοίωτα μεγέθη της*

[45] Αυτό δεν πρέπει να γενικεύεται. Ο τοπολογικός χαρακτήρας των θεωριών οφείλεται στο ότι είναι αναλλοίωτες υπό διαφορομορφισμούς, και όχι στον πεπερασμένον αριθμό βαθμών ελευθερίας. Η γενική σχετικότητα δεν πληροί αυτόν τον όρο, αλλά είναι κατ΄ αρχήν τοπολογική θεωρία πεδίου [106].

τοπολογίας ή της γεωμετρίας τα οποία παίζουν ρόλο αντίστοιχο με εκείνον των φυσικών μεγεθών στην φυσική. Από την στιγμή, όμως, που φυσικές έννοιες μετατρέπονται σε μαθηματικά εργαλεία ανάλυσης, ισότιμα με τα υπόλοιπα μαθηματικά, είναι θεμιτό και δυνατόν να χρησιμοποιηθούν σε προβλήματα φυσικής. Ο κύκλος κλείνει. Η μαθηματικοποιημένη φυσική δρα επί των μαθηματικών, *είναι* μαθηματικά, και έτσι δρα πίσω επί της φυσικής. Μπορούμε να πούμε ότι μέσα στις τελευταίες δύο περίπου δεκαετίες είδαμε συμπυκνωμένες τις διαδικασίες που, στην μακρά διάρκεια, οδήγησαν στην ανάπτυξη όλων των μαθηματικών, της ιστορίας τους και της λογικής της, ως προϊόντα αφαίρεσης και νοητικές μορφές με καταγωγή στον πραγματικό φυσικό κόσμο και την θεωρητική επεξεργασία του στην ιστορία της γνωστικής διαδικασίας.

8.2 Το κλασικό μεταμορφωμένο: σύνδεση με την κβάντωση πεδίων

Ας δούμε τώρα πώς όλα αυτά σχετίζονται με το θέμα μας, και ειδικά με την κβάντωση μέσω παραμορφώσεων. Θυμίζω ότι η βασική δομή που αποτελεί την αφετηρία είναι η δομή πολλαπλότητας Poisson, η οποία γενικεύει την έννοια της συμπλεκτικής πολλαπλότητας που προσιδιάζει στον κλασικό φασικό χώρο. Κατ' αρχάς, η διαδρομή από την φυσική, μέσω των αφηρημένων μαθηματικών, και πίσω στην φυσική, επιτρέπει μια μετάθεση. Ένα πρόβλημα διατυπωμένο με ορισμένους όρους, μπορεί να αναδιατυπωθεί με άλλους, νέους όρους και έτσι να αντιμετωπιστεί από άλλη οπτική γωνία. Θα δούμε δύο περιπτώσεις. Η μία στηρίζεται στο γεγονός ότι κάθε δομή Poisson επάγει μια τοπολογική θεωρία πεδίου σε δύο διαστάσεις, τα επονομαζόμενα σ-μοντέλα Poisson. Η άλλη στηρίζεται στο γεγονός ότι μια συμπλεκτική πολλαπλότητα μπορεί να θεωρηθεί ως επιφάνεια δεσμών ενός δεσμευμένου χαμιλτονιανού συστήματος. Θα ξεκινήσω από την δεύτερη περίπτωση. Μια συμπλεκτική πολλαπλότητα M (κλασικός φασικός χώρος) μπορεί να επεκταθεί κατάλληλα, οδηγώντας σε έναν άλλο χώρο εφοδιασμένο με μια φυσική συμπλεκτική δομή [107]. Αρχικά, ο χώρος M παρουσιάζεται ως επιφάνεια δεσμών δευτέρας τάξεως[46] σε μια δέσμη ινών $T_\rho{}^*M$, η οποία είναι τροποποίηση της συνεφαπτομένης δέσμης. Κατόπιν, το σύστημα δευτέρας τάξεως μετατρέπεται σε σύστημα πρώτης τάξεως με την συνεχή επέκταση των δεσμών. Προκύπτει έτσι ένας νέος συμπλεκτικός χώρος, ο οποίος είναι το ευθύ άθροισμα του χώρου $T_\rho{}^*M$ με την εφαπτομένη δέσμη TM, $T_\rho{}^*M \oplus TM$. Σε αυτό το σημείο, μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος BRST. Το αποτέλεσμα είναι ένας εκτεταμένος φασικός χώρος. Έτσι διαμορφώνεται ένα συνεκτικό πλαίσιο, διαφανές στην λογική του, που κάνει την κβάντωση σχεδόν προφανή. Τούτο διότι μεγάλο τμήμα της τεχνικής της κβάντωσης μεταφέρεται εντός του *κλασικού* πλαισίου της θεωρίας BRST. Αυτό που έχει σημασία είναι ότι σε αυτό το πλαίσιο αναγνωρίζονται όλα τα στοιχεία της «γεωμετρίας Fedosov», εκείνα

[46] Πρώτης τάξεως δεσμοί είναι εκείνοι των οποίων η αγκύλη Poisson με όλους τους δεσμούς μηδενίζεται. Αλλιώς έχουμε δεσμούς δευτέρας τάξεως.

δηλαδή που ορίζονται στον τρόπο με τον οποίον ο Fedosov απέδειξε την ύπαρξη ενός *-γινομένου για κάθε πραγματική συμπλεκτική πολλαπλότητα, όπως ανέφερα στην §7.2 [88]. Το αποτέλεσμα του Fedosov είναι σταθμός για την κβάντωση μέσω παραμορφώσεων. Ως εκ τούτου, είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι αυτή η μέθοδος, η οποία εγκαινιάστηκε για την μελέτη της μετάβασης από την κλασική στην κβαντική *μηχανική*, μπορεί να μετατεθεί με μαθηματικά κομψό τρόπο σε ένα πλαίσιο διαμορφωμένο για *κβαντικές θεωρίες πεδίου*. Φορτίζεται, δηλαδή, με όλο το βάρος της σύγχρονης έρευνας στην φυσική και τα μαθηματικά.

Συγκρίνοντας προηγουμένως το κλασικό με το κβαντικό εννοιολογικό πλαίσιο, τόνισα ότι το κλασικό, ανασημασιοδοτημένο και αναμορφωμένο, ενσωματώνεται στο κβαντικό ως δικός του δομικός λίθος. Τώρα βλέπουμε πώς αυτό λειτουργεί συγκεκριμένα στις τρέχουσες φυσικές θεωρίες. Αυτό είναι το περιεχόμενο της φράσης *η κβάντωση καθίσταται σχεδόν προφανής*, που χρησιμοποίησα προηγουμένως. Και όμως, στις μεθοδολογικές αναζητήσεις, η σχέση κλασικού και κβαντικού κατά κανόνα θεωρείται *εξωτερική*. Το ένα αντικρίζει το άλλο, και το ζήτημα είναι η αναζήτηση κάποιας «γέφυρας» μεταξύ τους, αν τέτοια υπάρχει καν. Η κλασικότητα η οποία είναι *εσωτερική* στις θεωρίες πεδίου, και όπου η παρατήρηση του Manin για την «διώροφη» σχέση γλώσσας και μεταγλώσσας ισχύει πεντακάθαρα, δεν εξετάζεται. Υπάρχει και κάτι άλλο, όμως. Παραδοσιακά, τα φιλοσοφικά προβλήματα γύρω από την επιστημονική επανάσταση που οδήγησε στην κβαντική θεωρία, ζητήματα όπως η διαχωρισιμότητα, η τοπικότητα, η πιθανοκρατία ή το πρόβλημα της μέτρησης, αντιμετωπίζονται σχεδόν αποκλειστικά σε σχέση με την κβαντική μηχανική. Οι φιλοσοφικοί προβληματισμοί σχετικά με κβαντικές θεωρίες πεδίου –και άλλες σύγχρονες εξελίξεις– έχουν μάλλον ανιχνευτικό χαρακτήρα, διότι θεωρείται, και δικαίως, ότι τέτοιες προσεγγίσεις δεν διαφωτίζουν αλλά, αντιθέτως, περιπλέκουν τα προβλήματα. Τώρα, όμως, η κβάντωση μέσω παραμορφώσεων εξομοιώνεται σε νοηματικό επίπεδο με την *κβάντωση πεδίων* και εσωτερικεύεται στις κβαντικές θεωρίες. Αντιστοίχως, ενώ αρχικά η κβάντωση πεδίων προχωρούσε *κατ΄ αναλογίαν* μεταφράζοντας κατάλληλα την πρότυπη κβαντική συνταγή, τώρα το *αναλογούν* «απορροφά» το πρωτότυπο και το ενσωματώνει. Ο ισχυρισμός περί αυτονομίας της μεθόδου των παραμορφώσεων καταλήγει σε τέτοιου τύπου αυτονομία στην κβάντωση πεδίων. Επί πλέον, οι σύγχρονες εξελίξεις προσφέρουν ενδεχομένως δυνατότητες αντιμετώπισης των κλασικών προβλημάτων από μιαν εντελώς διαφορετική σκοπιά. Για παράδειγμα, το δίπολο τοπικότητα έναντι της μη-τοπικότητας εξετάζεται ως τώρα χωρίς να λαμβάνεται υπ' όψιν η εισαγωγή της έννοιας μιας *πολυτοπικής* (multilocal) θεωρίας, όπως οι τοπολογικές θεωρίες ή οι υπερχορδές και οι μετεξελίξεις τους. Η δυνατότητα απάντησης σε μακρόχρονα ερωτήματα μέσω της υπέρβασης των αντιφάσεων που τα προκαλούν είναι παρθένο έδαφος. Εκείνο όμως που διαφαίνεται είναι ότι οι κβαντικές θεωρίες πεδίου, μέσα από τις μεταμορφώσεις που ανέφερα στις τελευταίες παραγράφους, αποκτούν ρόλο πρωτόγνωρο. Στην συνέχεια θα εξετάσω το κατά πόσον τα ως άνω προβλήματα αφορούν την σχέση κλασικού-κβαντικού στην βάση της ανάπτυξης της κβάντωσης μέσω παραμορφώσεων.

8.3 Το θεώρημα τυπικότητας

Στην κβάντωση μέσω παραμορφώσεων, οι δυνατότητες ενός νέου ρόλου του μαθηματικού πλαισίου των κβαντικών θεωριών πεδίου διαγράφονται σαφώς με αφετηρία τις εργασίες τού Kontsevich. Θα απαριθμήσω μερικούς κύκλους θεμάτων σε μιαν απόπειρα να ανιχνεύσω αυτές τις δυνατότητες. Ο πρώτος κύκλος αφορά την δομή μιας πολλαπλότητας Poisson. Είναι εκείνη η δομή που συνιστά το μαθηματικό υπόβαθρο για τις τοπολογικές θεωρίες πεδίου, όπως εξετάζονται συνολικά στα πλαίσια των σ-μοντέλων. Πρόκειται για την πρώτη περίπτωση εννοιολογικής μετάθεσης που ανέφερα στην §8.2. Μια πολλαπλότητα M πεπερασμένων διαστάσεων, d, εφοδιασμένη με μια δομή Poisson α, μπορεί να είναι η αφετηρία για την μελέτη ενός κλασικού συστήματος. Παράλληλα, η «μετάθεση» πραγματοποιείται ως εξής. Τα σημεία, x, της M μπορούν να θεωρηθούν ως οι τιμές μιας συνεχούς απεικόνισης στην M από μιαν άλλη πολλαπλότητα, N, τριών διαστάσεων, το όριο της οποίας, ∂N, θεωρείται ότι είναι η κοσμική επιφάνεια (worldsheet) μιας διδιάστατης θεωρίας πεδίου. Με άλλα λόγια, τα σημεία x της αρχικής πολλαπλότητας M, αντί να είναι πρωτογενείς μεταβλητές, μετατρέπονται τώρα σε συναρτήσεις, X(u), όπου u είναι τα σημεία της δεύτερης πολλαπλότητας, N. Αυτού του τύπου οι συναρτήσεις, X(u), είναι τα βασικά συστατικά ενός σ-μοντέλου. Καταλήγουμε έτσι να εξετάζουμε μια θεωρία πεδίου, X(u). Όπως έχω σημειώσει, σ-μοντέλα μπορούν να οριστούν ξεκινώντας από κάθε πολλαπλότητα Poisson. Ειδικότερα, έστω M ένα ανοικτό σύνολο στον χώρο ∇^d το οποίο είναι εφοδιασμένο με μια δομή Poisson $\{f , g\}(x) = \sum_{i,j=1}^{d} \alpha^{ij}(x)\partial_i f(x)\partial_j g(x)$, όπου $\partial_i \square \partial/\partial x^i$. Η ταυτότητα Jacobi, την οποία ικανοποιεί η α, συνεπάγεται ότι η ροή του χαμιλτονιανού διανυσματικού πεδίου $V_f = \alpha(df , .)$, που αντιστοιχεί σε τυχούσα συνάρτηση f επί της M, αφήνει αμετάβλητη την δομή Poisson. Τα χαμιλτονιανά διανυσματικά πεδία σχηματίζουν μια κλειστή άλγεβρα Lie, η οποία αντιστοιχεί σε μιαν απείρων διαστάσεων υποομάδα, G, της ομάδας των α-μορφισμών. Τότε, εάν θεωρήσουμε μια δέσμη ινών με βάση την N, ίνα την M, και δομική ομάδα G, μπορούμε να πάρουμε έναν σύνδεσμο (connection) η και την αντίστοιχη συναλλοίωτη παράγωγο, D, με καμπυλότητα F. Έχουμε τότε μια θεωρία με G-αναλλοίωτη δράση $S = \int_N F_{,i} \wedge DX^i$, όπου $X^i(u)$ είναι μια συνεχής απεικόνιση από την N στην M. Μια τέτοια δράση S περιγράφει μια τοπολογική θεωρία πεδίου ως φυσική υποπερίπτωσή της [108]. Αντιστρόφως, μπορεί κανείς να ξεκινήσει από μια τοπολογική θεωρία πεδίου και να καταλήξει σε αλγεβρικές δομές σε μια πολλαπλότητα. Τέτοιες θεωρίες μπορούν να αναλυθούν με την μέθοδο των Batalin-Vilkovisky που έχω περιγράψει [109]. Ξεκινά κανείς από μια δράση $S_0[\Phi]$ των πεδίων Φ, με συμμετρία βαθμίδας δ_0. Η δράση S_0 είναι δ_0-αναλλοίωτη, δηλαδή $\delta_0 S_0 = 0$. Κατόπιν, η S_0 και η δ_0 παραμορφώνονται με μικρές διαταραχές:

$$S = S_0 + gS_1 + g^2 S_2 + \ldots,$$

$$\delta\Phi = \delta_0\Phi + g\delta_1\Phi + g^2\delta_2\Phi + \ldots,$$

όπου g είναι μια παράμετρος της παραμόρφωσης. Επί πλέον, πρέπει να ισχύει $\delta S = 0$ και $[\delta_\varepsilon , \delta_{\varepsilon'}] = \delta_{[\varepsilon , \varepsilon']}$, όπου ε, ε΄, είναι παράμετροι της συμμετρίας βαθμίδας στην επιφάνεια που ορίζουν οι λύσεις των εξισώσεων κίνησης (on shell). Αυτές οι συνθήκες ισοδυναμούν με την κλασική εξίσωση master, $(S , S) = 0$, στον φορμαλισμό Batalin-Vilkovisky, όπου (. , .) είναι η αντι-αγκύλη. Ένα είδος τοπολογικών θεωριών που δεν εξαρτώνται από κάποια μετρική (θεωρίες τύπου Schwarz) είναι οι επονομαζόμενες θεωρίες BF. Σε n διαστάσεις, καθορίζονται από μια δράση S, η οποία εξετάζεται ως παραμόρφωση της δράσης S_0 μιας αβελιανής θεωρίας BF. Η τελευταία, σε n διαστάσεις, ορίζεται σε μια πολλαπλότητα βάσης, N, και είναι της μορφής:

$$S_0 = \sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} \int_N (-1)^{n-p} B_{n-p-1\, a_p} dA_p^{a_p} ,$$

όπου $A_p^{a_p}$ είναι ένα πεδίο βαθμίδας με τιμές p-μορφές, a_p είναι δείκτες στον χώρο-στόχο, και B_{n-p-1a_p} είναι ένα βοηθητικό πεδίο με τιμές (n−p−1)-μορφές. Η παραμόρφωση της δράσης S_0 εισάγει παραμέτρους (δομικές συναρτήσεις) εξαρτώμενες από τα πεδία, οι οποίες ικανοποιούν ορισμένες σχέσεις ισοδύναμες με την master εξίσωση. Πρόκειται για γενικεύσεις των σχέσεων που ικανοποιούν οι δομικές σταθερές στην περίπτωση που έχουμε μιαν άλγεβρα Lie. Τα πεδία είναι απεικονίσεις από μια πολλαπλότητα, N, n διαστάσεων, σε μιαν άλλη, M. Οι σχέσεις που ικανοποιούν οι «δομικές συναρτήσεις» ορίζουν μιαν αλγεβρική δομή στον χώρο M των πεδίων. Με κατάλληλους ορισμούς [109], στην γενική περίπτωση n διαστάσεων αυτή η δομή είναι εκείνη μιας άλγεβρας Batalin-Vilkovisky. Αν n = 3, η δομή αυτή είναι εκείνη ενός αλγεβροειδούς Courant (βλ. §7.5). Μας ενδιαφέρει η περίπτωση δύο διαστάσεων, n = 2. Η αντίστοιχη δομή στον χώρο M των πεδίων που πραγματοποιεί την συμμετρία βαθμίδας είναι η δομή αλγεβροειδούς. Στον χώρο-στόχο M επάγεται μια δομή Poisson. Έχουμε την περίπτωση της διδιάστατης μη-γραμμικής θεωρίας βαθμίδας, το λεγόμενο σ-μοντέλο Poisson. Σε αυτήν την τελευταία περίπτωση, των δύο διαστάσεων, διασταυρώνονται και συμπίπτουν οι δύο διαδρομές που περιέγραψα. Η μία διαδρομή ξεκινούσε από μια πολλαπλότητα Poisson και κατασκεύαζε ένα σ-μοντέλο. Η δεύτερη, ξεκινά από το μοντέλο BF σε δύο διαστάσεις και ορίζει μια δομή Poisson στον χώρο-στόχο M. *Η δομή Poisson, αφ' ενός, και το σ-μοντέλο Poisson, αφ' ετέρου, αλληλοκαθορίζονται*. Το ζεύγος, δομής Poisson και σ-μοντέλου, στην ειδική αυτή περίπτωση θα μας απασχολήσει στην συνέχεια.

Στις θεωρίες που μόλις αναφέρθηκα, συναντάμε αλγεβρικές δομές με τις οποίες έχουμε ασχοληθεί και στην §7.4. Πρόκειται για έννοιες όπως άλγεβρες Gerstenhaber, άλγεβρες Batalin-Vilkovisky, ισχυρώς ομοτοπικές άλγεβρες Lie (shLie ή L_∞). Συναπαρτίζουν τον δεύτερο κύκλο θεμάτων που μας ενδιαφέρει εδώ. Αρχικά, παρατηρούμε ότι στην μετάβαση από το κλασικό στο κβαντικό, γενικά συναντάμε την αντικατάσταση μιας πολλαπλότητας M από μια συνήθως μη-μεταθετική άλγεβρα A επί ενός σώματος βάσης k, ως αφετηριακή έννοια για τις αντίστοιχες θεωρίες. Αυτή η αντιστοιχία, πολλαπλότητας – άλγεβρας, επεκτείνεται σε πολλούς θεμελιώδεις τύπους δομής, στην βάση του γενικού σχήματος, από την μεταθετότητα στην μη-μεταθετότητα. Η στοιχειωδέστερη περίπτωση απαντάται όταν έχουμε να κάνουμε με διανυσματικά πεδία: σε κάθε άλγεβρα A αντιστοιχεί η άλγεβρα Lie των παραγωγίσεων της A, Der(A). Αν A είναι η άλγεβρα των λείων συναρτήσεων, $C^\infty(M)$, στην πολλαπλότητα M, το μη-μεταθετικό αντίστοιχό της είναι η άλγεβρα Lie των διανυσματικών πεδίων [110]. Εάν τώρα θεωρήσουμε κάτι πιο σύνθετο, όπως ο βαθμωτός χώρος $\Gamma(M, \wedge^*(TM))$ των πολυδιανυσματικών πεδίων στην M, τότε βρίσκουμε ότι το μη-μεταθετικό αντίστοιχο είναι το σύμπλεγμα των συναλυσίδων Hochschild, $C^*(A, A)$, με το διαφορικό Hochschild δ: $C^*(A, A) \to C^{*+1}(A, A)$ για κάθε άλγεβρα A. Εάν $A = C^\infty(M)$, το υποσύμπλεγμα των συναλυσίδων που είναι πολυδιαφορικοί τελεστές έχει τον χώρο $\Gamma(M, \wedge^*(TM))$ ως συνομολογία του.[47] Είναι ακριβώς η περίπτωση που συναντάμε στην κβάντωση μέσω παραμορφώσεων. Βρισκόμαστε έτσι, στην μη-μεταθετική περίπτωση, στην περιοχή των *διαφορικών βαθμωτών αλγεβρών*. Γενίκευση των τελευταίων είναι οι *άλγεβρες ισχυρής ομοτοπίας* (strong homotopy) [K]. Οι άλγεβρες L_∞ που έχουμε συναντήσει ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία. Όπως οι L_∞ γενικεύουν τις άλγεβρες Lie, έτσι υπάρχουν οι ισχυρώς ομοτοπικές άλγεβρες A_∞ που γενικεύουν τις προσεταιριστικές άλγεβρες. Οι διαφορικές βαθμωτές άλγεβρες ανήκουν στην κατηγορία των ισχυρώς ομοτοπικών αλγεβρών. Η σημασία αυτού του γεγονότος φαίνεται στην περίπτωση που έχουμε το ζεύγος $\Gamma(M, \wedge^*(TM))$ – $C^*(A, A)$. Αφ' ενός, ο χώρος $\Gamma(M, \wedge^{*+1}(TM))$ (το «κλασικό») μετατρέπεται σε βαθμωτή άλγεβρα Lie αν εφοδιαστεί με την αγκύλη Schouten–Nijenhuis $[.\, ,\, .]_S$ (βλ. σημ. 39). Γίνεται διαφορική βαθμωτή άλγεβρα Lie –συνεπώς άλγεβρα L_∞– αν εφοδιαστεί με το τετριμμένο μηδενικό διαφορικό $\delta = 0$. Αφ' ετέρου, το σύμπλεγμα $C^{*+1}(A, A)$ με το διαφορικό Hochschild δ (το «μη-κλασικό») γίνεται

[47] Είναι το θεώρημα των Hochschild–Kostant–Rosenberg.

διαφορική βαθμωτή άλγεβρα Lie –άρα άλγεβρα L_∞ επίσης– αν εφοδιαστεί με την αγκύλη Gerstenhaber $[.\ ,\ .]_G$ [K]. Συνεπώς, αν $A = C^\infty(M)$, λαμβάνουμε *δύο* δομές άλγεβρας L_∞: η μία, που καθορίζεται από τα δεδομένα $(\Gamma(M, \wedge^{*+1}(TM)), 0, [.\ ,\ .]_S)$, προέρχεται από το «κλασικό», η άλλη, με τα δεδομένα $(C^{*+1}(A, A), \delta, [.\ ,\ .]_G)$, από το «μη-κλασικό». Το κρίσιμο σημείο είναι ότι στην κατηγορία των ισχυρώς ομοτοπικών δομών υπάρχει μια ειδική έννοια σχέσης ισοδυναμίας, που ονομάζεται *οιονεί ισομορφισμός* [89], ή ασθενής ισοδυναμία [111]. Δύο ισχυρώς ομοτοπικές δομές είναι οιονεί ισόμορφες εάν υπάρχει ένας μορφισμός από την μία στην άλλη, ο οποίος επάγει έναν ισομορφισμό στο επίπεδο της συνομολογίας. Αυτή η δυνατότητα οφείλεται στον τρόπο που ορίζονται οι μορφισμοί στην κατηγορία των ισχυρώς ομοτοπικών δομών. Αποδεικνύεται τότε ότι οι διαφορικές βαθμωτές άλγεβρες Lie, αφ' ενός η $(C^{*+1}(A, A), \delta, [.\ ,\ .]_G)$, και η $(\Gamma(M, \wedge^{*+1}(TM)), 0, [.\ ,\ .]_S)$, αφ' ετέρου, είναι οιονεί ισόμορφες, άρα ισοδύναμες, ως άλγεβρες L_∞. Αυτό είναι το *θεώρημα τυπικότητας* (formality) του Kontsevich [89]. Το αποτέλεσμα αυτό είναι δυνατόν να γενικευθεί, και κατά κανόνα η δομή που προέρχεται από την μη κλασική περίπτωση είναι ισοδύναμη με μια παραμόρφωση της κλασικής δομής.

Τέτοιες αλγεβρικές δομές, που εξετάζονται από την ομοτοπική και ομολογιακή άλγεβρα, είναι σημείο εντατικής διασταύρωσης των μαθηματικών με την φυσική. Ειδικά οι άλγεβρες L_∞, που γενικεύουν τις συνηθισμένες άλγεβρες Lie, έχουν ξαναανακαλυφθεί και προσεγγιστεί με πολλούς τρόπους από την σκοπιά της φυσικής. Ο λόγος είναι ότι περιγράφουν τις συμμετρίες βαθμίδας πολλών θεωριών πεδίου. Οι θεωρίες που ανέφερα στην §7.5 ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία. Γενικότερα, είναι θεωρίες με συμμετρίες βαθμίδας όπου οι αντίστοιχες παράμετροι εξαρτώνται από τα πεδία. Δηλαδή, αν έχουμε μιαν αναπαράσταση μιας άλγεβρας Ξ παραμέτρων βαθμίδας ξ σε έναν διανυσματικό χώρο Φ πεδίων φ, τότε μια δράση τής Ξ επί του Φ, εξαρτώμενη από τα πεδία, είναι μια απεικόνιση με μορφή πολυωνύμου ή δυναμοσειράς $\delta(\xi)(\phi) = \sum_{i=0} T_i(\xi, \phi)$, όπου τα T_i είναι γραμμικά στα ξ και ομοιογενή πολυώνυμα βαθμού i στα φ. Αυτή η γενίκευση οφείλεται στους Berends, Burgers και van Dam. Δεδομένου του διανυσματικού χώρου Φ (υποτίθεται ότι ορίζεται επί ενός σώματος χαρακτηριστικής 0), έστω $\wedge^*\Phi$ η ελεύθερη συν-άλγεβρα, συν-μεταθετική και συν-γενόμενη[48] από τον Φ με συν-πολλαπλασιασμό Δ. Τότε, ο διανυσματικός χώρος $\mathrm{Hom}(\wedge^*\Phi, \Phi)$ είναι ισόμορφος με τον χώρο των συν-παραγωγίσεων, $\mathrm{Coder}(\wedge^*\Phi)$, στην $\wedge^*\Phi$. Εάν V είναι ο βαθμωτός διανυσματικός χώρος $\Xi\oplus\Phi$, με Ξ σε βαθμό 0, Φ σε βαθμό 1 και μηδέν στους υπόλοιπους βαθμούς, τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια απεικόνιση $D: \wedge^*(\downarrow V) \to (\downarrow V)$ [K], ώστε ο χώρος $\Xi\oplus\Phi$ αποκτά την δομή άλγεβρας L_∞. Σε αυτό το σχήμα εντάσσεται ένα σ-μοντέλο σαν αυτά που ανέφερα πιο

[48] Το πρόθεμα «συν» δηλώνει την δυική έννοια της αναφερομένης. Μια συνάλγεβρα έχει δομή δυική της αλγεβρικής, και αναλόγως προσαρμόζονται οι συναφείς έννοιες, π.χ., συνμετάθεση = μετάθεση σε σχέση με το συνγινόμενο κ.λπ.

πάνω, ως εξής: Με Μ μια τυχούσα πολλαπλότητα Poisson και Σ έναν δίσκο δύο διαστάσεων, ο χώρος των πεδίων Φ είναι όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (Χ, η), όπου Χ: $\Sigma \to M$ είναι τυχούσα λεία απεικόνιση, και η είναι διατομή της δέσμης $X^*(T^*M)\otimes T^*\Sigma \to \Sigma$ [108, 109].

Όλα τα ανωτέρω συγκλίνουν στην διαπίστωση που επανειλημμένα έχω επισημάνει και συνοψίζω πάλι εδώ: Έννοιες που αναπτύχθηκαν στα καθαρά μαθηματικά, όπως οι αλγεβρικές δομές L_∞, αποκαλύπτεται ότι βρίσκονται στην ρίζα μεθόδων που προέκυψαν από την μελέτη προβλημάτων της φυσικής. Ένα ενιαίο εννοιολογικό πλαίσιο διαμορφώνεται στην τελευταία, εντός του οποίου εντάσσονται τεχνικές όπως αυτές της μεθόδου BRST και Batalin-Vilkovisky. Άξονας αυτού του πλαισίου αναδεικνύεται η *θεωρία παραμορφώσεων* αλγεβρικών δομών, η οποία ενοποιεί και νοηματοδοτεί τις ποικίλες, φαινομενικά ασύνδετες, τεχνικές. Ο όρος «νοηματοδοτεί» χρησιμοποιείται εδώ για να δηλώσει την μαθηματικά συνεπή εγκαθίδρυση ενός δικτύου αλληλοσυνδέσεων μεταξύ εννοιών, εντός ενός συνεκτικού και καλώς ορισμένου πλαισίου. Με αυτόν τον τρόπο, οι έννοιες-κόμβοι αυτού του δικτύου, και οι μεταξύ τους λογικές σχέσεις, μπορούν να εξεταστούν ως προς την αναφορά τους σε διαδικασίες του φυσικού κόσμου. Είναι γεγονός, που πολλές φορές έχει επαναληφθεί, μια φυσική θεωρία να «ανακαλύπτει» την συνεπή μαθηματική έκφρασή της σε ένα μαθηματικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε σε σχετική ανεξαρτησία από αυτήν. Κλασική περίπτωση, η γενική θεωρία της σχετικότητας. Εκείνο που έχει σημασία για εμάς εδώ, είναι η ανακάλυψη ότι η μαθηματική μέθοδος των παραμορφώσεων συνιστά το υπόβαθρο της μελέτης λαγκρανζιανών συναρτήσεων για φυσικά συστήματα με *αλληλεπιδράσεις σε θεωρίες πεδίου* [94]. Με άλλα λόγια, όπως είδαμε στο τέλος της §7.4, ξεκινά κανείς από την λαγκρανζιανή ενός ελεύθερου συστήματος, και με μια σειρά διαδοχικών παραμορφώσεών της αναζητά την μετάβαση σε ένα σύστημα με αλληλεπιδράσεις. Αλγεβρικές δομές L_∞ εμφανίζονται με τρόπο φυσιολογικό, έτσι ώστε αυτή η διαδικασία να είναι μαθηματικά συνεπής και να ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες που απαιτεί η φυσική. Δεν θα επεκταθώ εδώ στις λεπτομέρειες αυτής της σημαντικής παρατήρησης, αρκεί να υπογραμμίσω το γεγονός. Το ουσιαστικό είναι ότι οδηγούμαστε κατ' ευθείαν στις μεθόδους και τις τεχνικές των *ολοκληρωμάτων σε διαδρομές* (path integrals), και στην *κβάντωση πεδίων* σε αυτά τα πλαίσια.

Από αυτήν την σκοπιά, ό,τι προανέφερα σχετικά με τις αλγεβρικές δομές L_∞ και την σχέση τους με τα μοντέλα-υποδείγματα σαν τα σ-μοντέλα, αντιμετωπίζεται σε μιαν ευρύτερη προοπτική. Συγκεκριμένα, η μαθηματική θεωρία παραμορφώσεων είναι ο *συνδετικός κρίκος* [94] μεταξύ της ανώτερης ομοτοπικής άλγεβρας, αφ' ενός, και της μαθηματικής φυσικής, αφ' ετέρου. Σε αυτό το δεύτερο σκέλος συμπεριλαμβάνονται τόσο τα μοντέλα-υποδείγματα, όσο και σύγχρονες θεωρίες πεδίου με την αξίωση να περιγράφουν την φυσική πραγματικότητα. Ειδικότερα, αναφέρομαι στην θεωρία πεδίου των κλειστών (αλλά και ανοικτών) χορδών που οφείλεται στον Zwiebach. Σε αυτήν ακριβώς την θεωρία ο Stasheff έχει αποκαλύψει μια δομή άλγεβρας L_∞ [94, 105, 112]. Το ουσιώδες είναι ότι η πρακτική της σύγχρονης φυσικής, με την κβάντωση πεδίων με ολοκληρώματα σε διαδρομές, στο φως της μαθηματικής θεωρίας των παραμορφώσεων αποκαθιστά συγκεκριμένη επαφή και τοποθετεί στο ίδιο πλαίσιο τα μοντέλα-υποδείγματα και θεωρίες που βρίσκονται στην αιχμή της φυσικής έρευνας. Όσον αφορά την φυσική, παραμένει ανοικτό ζήτημα ποιά θα είναι η ακριβής μορφή και οι συνέπειες αυτών των διαφαινομένων σχέσεων. Εν τούτοις, είναι θεμιτό να αναπτύξουμε την φιλοσοφική συλλογιστική στην βάση των ήδη εγκαθιδρυμένων συσχετίσεων σε επίπεδο εννοιών, εκτιμώντας ότι καθ΄ εαυτές αποτελούν σημείο τομής για το πρόβλημα της σχέσης κλασικού – κβαντικού.

8.4 Από την μαθηματική δομή …

Ο τρίτος κύκλος θεμάτων μάς οδηγεί πίσω στην μετάβαση από το κλασικό στο κβαντικό με την κβάντωση μέσω παραμορφώσεων. Ας συνοψίσουμε μερικές έννοιες [K]. Πρώτον, εάν A είναι μια βαθμωτή άλγεβρα, η συνομολογία Hochschild $H^*(A, A)$ είναι άλγεβρα Gerstenhaber. Δεύτερον, οι Batalin και Vilkovisky καταλήγουν στις ομώνυμες άλγεβρες μελετώντας περιττές συμπλεκτικές υπερπολλαπλότητες [105, 113]. Τέλος, ο E. Getzler [113] έχει δείξει ότι η συνομολογία μιας τοπολογικής σύμμορφης θεωρίας πεδίου σε δύο διαστάσεις φέρει μια φυσική δομή άλγεβρας Batalin-Vilkovsky.

Δεν πρόκειται εδώ να υπεισέλθω στις πολυπλοκότητες αυτών των θεωριών πεδίου. Μας ενδιαφέρει μόνον μία πλευρά τους. Οι σύγχρονες κβαντικές θεωρίες για τις *χορδές* προσφέρονται για την ανάδειξη αυτής της πλευράς, που γενικά αντιμετωπίζει τα σωματίδια ως απεικονίσεις ενός διαστήματος στον χώρο (ανοικτές χορδές), ή ενός κύκλου στον χώρο (κλειστές χορδές) [114]. Θα αναφερθώ επομένως συνοπτικά σε αυτές τις θεωρίες. Μια κλειστή χορδή μπορεί να αναπαρασταθεί από μια κλειστή καμπύλη σε μια πολλαπλότητα Riemann, M. Ξεκινώντας από την τοπολογία των συναπεικονίσεων των χορδών [114], κατά κανόνα το φυσικό περιεχόμενο αυτής της εικόνας *εκφράζεται* από κάποια παραμέτριση των κλειστών καμπύλων, ενώ ταυτόχρονα πρέπει να είναι *ανεξάρτητο* από την παραμέτριση. Η προφανής παραμέτριση είναι μια απεικόνιση ενός σταθερού κύκλου S^1 στην πολλαπλότητα M, οπότε ο χώρος των κλειστών καμπύλων θα είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας τέτοιων απεικονίσεων, $\mathrm{Map}(S^1, M)$, υπό όλες τις αλλαγές παραμέτρου, δηλαδή ο χώρος $\mathrm{Map}(S^1, M)/\mathrm{Diff}^+S^1$ (το «+» αναφέρεται στο ότι ο κύκλος S^1 παραμετρίζεται από το 0 ως το 2π). Ο χώρος των *πεδίων* θα είναι κάποιο είδος διατομών (μπορεί να έχουν τιμές σε κάποιον χώρο Hilbert) κάποιας δέσμης επί του χώρου C των κλειστών χορδών, $\mathrm{Map}(S^1, M)$. Τα πεδία μπορούν να αποκτήσουν την δομή άλγεβρας, με τον ορισμό ενός γινομένου. Αυτό δεν μπορεί να είναι το γινόμενο σημείο-προς-σημείο συναρτήσεων. Είναι ένα γινόμενο συνέλιξης, που ορίζεται με την βοήθεια μιας ειδικής πράξης «πολλαπλασιασμού» χορδών. Μια τέτοια πράξη είναι η συγχώνευση δύο χορδών με τον σχηματισμό μιας τρίτης, και το αντίστροφο, η αποσύνθεση μιας χορδής σε δύο. Γραφικά, η σύνθεση δύο χορδών Y και Z, συμβολιζόμενη με $Y*Z$, για τον σχηματισμό μιας τρίτης X, παρίσταται με την σύμπτωση δύο ημικυκλίων, ενός από την Y και ενός από την Z, το δεύτερο με αντεστραμμένη φορά, και τον σχηματισμό τής X από τα δύο εναπομένοντα ημικύκλια. Σχηματικά, έχουμε ένα «Θ». Αυτό το Θ μπορεί να αναπαρασταθεί από την ένωση τριών μέγιστων ημικυκλίων στην μοναδιαία σφαίρα S^2 στον χώρο ∇^3, παραμετριζομένων με το μήκος του τόξου με φορά από τον βόρειο στον νότιο πόλο. Εάν A_i, $\hat{A}_i$ είναι ένα τέτοιο ημικύκλιο κατά την θετική και αρνητική φορά αντιστοίχως, έστω C_i: $S^i \hookrightarrow \Theta$ κάθε ισομετρία η οποία, για μια κυκλική μετάθεση (i, j, k) των (0, 1, 2), συμφωνεί με το A_j στο ένα ημικύκλιο και με το $\hat{A}_k$ στο άλλο [112]. Τότε, για κάθε απεικόνιση X: $\Theta \to M$, και ορίζοντας με $X_i = X \circ C_i$, το X_0 συμβολίζει την συγχώνευση των X_1 και X_2. Με αυτά τα δεδομένα, στον χώρο των πεδίων ορίζεται ένα γινόμενο συνέλιξης:

$$(\Phi*\Psi)(X_0) = \int \Phi(X_1)\Psi(X_2)dX.$$

Το ολοκλήρωμα (συγγενεύει με την επονομαζόμενη «γέφυρα Brown») υπολογίζεται σε όλες τις απεικονίσεις X, τέτοιες ώστε $X_0 = X \circ C_0$, και σε όλες τις ισομετρίες C_i. Συνεπώς, το γινόμενο $\Phi*\Psi$ εξαρτάται από όλους τους τρόπους που το X_0 αποσυντίθεται σε δύο βρόχους X_1 και X_2. Μεταβαίνουμε έτσι στο πεδίο της άλγεβρας. Το γινόμενο συνέλιξης είναι βαθμωτό μεταθετικό, αλλά όχι προσεταιριστικό. Με την βοήθειά του ορίζεται μια αγκύλη θέτοντας $[\Phi , \Psi]$ □ $\Phi*\Psi$. Εδώ μπορεί να διακρίνει κανείς μιαν ομοιότητα με μιαν άλλη αλγεβρική δομή. Στην απλούστερη περίπτωση, είναι η δομή ενός συμπλέγματος στον χώρο των πολυδιανυσμάτων (αντι-συμμετρικών τανυστών), $\wedge V$ □ $\{\wedge^n V\}$, σε έναν πεπερασμένων διαστάσεων διανυσματικό χώρο V επί ενός σώματος k (συνήθως είναι το ∇ ή το $\Re$). Εξ ορισμού $\wedge^0 V = k$. Έστω μια γραμμική απεικόνιση d: $\wedge V \to \wedge V$, με $d\wedge^n V \to \wedge^{n-1} V$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$d^2 = 0$$

$$dv_1 = 0$$

$$d(v_1 \wedge ... \wedge v_n) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} d(v_i \wedge v_j) \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \ldots \wedge \hat{v}_j \ldots \wedge v_n.$$

Το σύμβολο $\hat{v}_i$ σημαίνει ότι ο όρος v_i παραλείπεται. Οι δύο τελευταίες σχέσεις σημαίνουν ότι η d είναι συνπαραγώγιση που προσδιορίζεται από τον περιορισμό τής d στο $\wedge^2 V$, $d|\wedge^2 V$. Αυτός ισοδυναμεί με μιαν αγκύλη: $d(v_1 \wedge v_2) = [v_1, v_2]$. Με αυτόν τον συμβολισμό, η σχέση $d^2 = 0$ ισοδυναμεί με την ταυτότητα Jacobi. Πρόκειται βεβαίως για την δομή της άλγεβρας Lie. Η γενίκευση αυτής της δομής πραγματοποιείται εάν έχουμε μια συνπαραγώγιση $D = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots$, με $D^2 = 0$ και $d_i\colon \wedge^n V \to \wedge^{n-(i-1)} V$, οπότε $d_n(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) \in V$. Αυτό σημαίνει ότι τώρα η αγκύλη γίνεται $[v_1, v_2] = d_2(v_1 \wedge v_2)$, αλλά δεν ισχύει πλέον $d_2^2 = 0$, δηλαδή η αγκύλη δεν ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi. Εάν, επομένως, ορίσουμε πολυγραμμικές αγκύλες, γενικεύοντας σε $[v_1, \ldots, v_n] = d_n(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)$, η σχέση $D^2 = 0$ οδηγεί στις σχέσεις που ορίζουν την δομή άλγεβρας L_∞, όπως την είδαμε στην §7.5. Η σημασία όλων αυτών είναι ότι στον χώρο των πεδίων των κλειστών χορδών ορίζονται παρόμοιες πολυγραμμικές αγκύλες που ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις, αποκαλύπτοντας μια δομή L_∞ σε αυτές τις θεωρίες. Οι πολυγραμμικές αγκύλες σε αυτήν την περίπτωση ορίζονται σε σχέση με τις (κατάλληλα οριζόμενες) συναρτήσεις (N+1)-σημείων, $\langle \Psi_0 \ldots \Psi_N \rangle = \langle \Psi_0 | [\Psi_1, \ldots, \Psi_N] \rangle$, της θεωρίας.

Η γεωμετρία στο υπόβαθρο τέτοιων θεωριών υπεισέρχεται μέσω της αναπαράστασης της σύνθεσης/αποσύνθεσης χορδών με *πολύεδρα*, τα οποία σχηματίζονται με το ίδιο σκεπτικό που οδήγησε αρχικά στην εικόνα τού «Θ». Τα πολύεδρα αυτά συνδέονται με τις αναλυτικές ιδιότητες επιφανειών Riemann και ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες. Επίσης, στην χωροχρονική εξέλιξή τους, οι χορδές διατρέχουν κοσμικές επιφάνειες (worldsheets) που είναι απεικονίσεις μιας επιφάνειας Riemann με όριο, στον χωρόχρονο. Αυτές οι επιφάνειες μοιάζουν με σωληνοειδείς περιοχές ενός γραφήματος, το οποίο δεν είναι παρά ένα διάγραμμα Feynman της φυσικής. Όταν το γράφημα είναι ένα δέντρο, έχουμε επιφάνειες Riemann γένους 0, και μιλάμε για *επίπεδο δέντρου*. «Δέντρο» εδώ σημαίνει ένα γράφημα αποτελούμενο από κορυφές και έδρες που συνδέουν διαφορετικές κορυφές, παρουσιάζοντας την εξής εικόνα: Υπάρχει μια κορυφή «εισόδου», η ρίζα, η οποία καταλήγει σε «εξόδους», δια μέσου διακλαδώσεων, οι οποίες αντιστοιχούν στα «φύλλα». Η κατάληξη όλων αυτών είναι δύο διαπιστώσεις. Η μία είναι ότι μια ακολουθία πολυέδρων που προκύπτει στην μελέτη θεωριών πεδίου για κλειστές χορδές, έστω P_k, $k = 1, 2, \ldots$, χαρακτηρίζεται από μια συγκεκριμένη δομή, σημείο στο οποίο θα επανέλθω αμέσως πάρα κάτω. Το δεύτερο είναι ότι τα πολύεδρα P_k μπορούν να παραμετριστούν από ένα σύνολο επιπέδων διαγραμμάτων με την μορφή δέντρου: μια έδρα μπορεί να επιλεχθεί (έξοδος) και να αντιστοιχηθεί σε μιαν αρχική ακμή ενός δέντρου, ενώ οι άλλες έδρες απεικονίζονται ως ακμές-διακλαδώσεις της αρχικής. Οι πράξεις και οι περιορισμοί των πολυέδρων μεταφράζονται στην γλώσσα τέτοιων «ριζωμένων» (rooted) δέντρων. Αυτή η εικόνα κάνει τα δέντρα και γενικά τα γραφήματα να διαμορφώνουν μια σχέση με το φυσικό τους περιεχόμενο, διαφορετική από την συνηθισμένη. Παραδοσιακά, τέτοια γραφήματα, όπως τα διαγράμματα Feynman, έπαιζαν τον ρόλο βολικής τεχνικής για την γραφική απεικόνιση φυσικών διαδικασιών. Τώρα γίνονται μαθηματικά σύμβολα αυτών των διαδικασιών. Η διάκριση είναι λεπτή, αλλά υπαρκτή και σημαντική. Μπορούμε, π.χ., να πούμε ότι μια γραμμή σε ένα κλασικό διάγραμμα Feynman παριστάνει μια φυσική διαδικασία διάδοσης ενός κβαντικού σωματιδίου (ή ενός quantum διέγερσης ενός πεδίου) από ένα σημείο τοπικής αλληλεπίδρασης σε ένα άλλο, αλλά με κανέναν τρόπο δεν παριστάνει κάποια «κοσμική γραμμή» του σωματιδίου, εφ΄ όσον κάτι τέτοιο δεν έχει νόημα. Τώρα, όμως, όπως είδαμε πιο πάνω, τέτοια διαγράμματα μετατρέπονται σε χώρο παραμέτρων για διαδικασίες σύνθεσης/αποσύνθεσης επιφανειών Riemann, οι οποίες παριστάνουν τις κοσμικές επιφάνειες χορδών.

Η αυστηρή κωδικοποίηση [105] των ανωτέρω έχει ως εξής: Η διατύπωση θεωριών πεδίου για τις χορδές ξεκινά με έναν χώρο Hilbert, H, ως χώρο καταστάσεων. Ο H έχει την δομή μιας *σύμμορφης θεωρίας πεδίου*. Αυτό, σε επίπεδο δέντρου, επιτυγχάνεται με την βοήθεια μιας ακολουθίας $\hat{M}_0 = \{\hat{M}_0(n)\}_{n\geq 1}$, όπου $\hat{M}_0(n)$ είναι ο χώρος moduli[49] μιας μη εκφυλισμένης σφαίρας Riemann, Σ, με n+1 διατρήσεις (punctures), που απαριθμούνται με 1, …, n, ∞, και με ασύνδετους μεταξύ τους ολόμορφους δίσκους με κέντρο σε κάθε διάτρηση. Ορίζεται μια πράξη μεταξύ των $\hat{M}_0(n)$ μέσω της συρραφής (sewing) σφαιρών Riemann στις διατρήσεις. Υπάρχει ακόμη μια δράση της συμμετρικής ομάδας μεταθέσεων επί των διατρήσεων και των δίσκων. Το αναλλοίωτο της θεωρίας υπό τους διαφορομορφισμούς του κύκλου σημαίνει αναλλοίωτο υπό την δράσιν της άλγεβρας Lie των λείων διανυσματικών πεδίων στον κύκλο (δηλαδή της άλγεβρας Virasoro με κεντρικό φορτίο 0). Η μιγαδοποίηση αυτής της άλγεβρας, ς, δρα στον χώρο H. Η σύμμορφη θεωρία πεδίου γίνεται *υπόβαθρο χορδών* όταν μετατραπεί σε σύμπλεγμα BRST, (H, Q). Αυτό επιτυγχάνεται με την μετατροπή τού H σε ∧-βαθμωτό χώρο (στην βάση ενός φαντασματικού αριθμού), την εισαγωγή ενός διαφορικού BRST, Q, μιας αναπαράστασης βαθμού 0, $T\colon ς \to \mathrm{End}(H)$, μιας απεικόνισης βαθμού -1, $b\colon ς \to \mathrm{End}(H)$, με $b(v)^2 = 0 \ \forall v \in ς$ (ο αντιφαντασματικός τελεστής), και με την ικανοποίηση μερικών αξιωμάτων συμβατότητας. Εάν, τώρα, προστεθεί ένας χώρος πεδίων, Φ, μαζί με αντιπεδία, φαντάσματα, αντιφαντάσματα, και μιαν αντιαγκύλη, ο χώρος H γίνεται άλγεβρα Gerstenhaber [112]. Επί πλέον, προκύπτει ότι μπορεί να οριστεί ένας ακόμη τελεστής, Δ, στον H, οπότε ο τελευταίος γίνεται άλγεβρα Batalin-Vilkovisky [113].

[49] Ο χώρος των αναγκαίων παραμέτρων ώστε να υπάρχει σύστημα συντεταγμένων που να τριγωνοποιεί μια πολλαπλότητα.

8.5 … στην μαθηματικοποίηση της δομής …

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να διαπιστώσουμε την αλληλοδιαπλοκή μεταξύ θεωριών που φιλοδοξούν να απεικονίζουν την φυσική πραγματικότητα, μιας πληθώρας αλγεβρικών δομών, και ενός ανανοηματοδοτημένου ρόλου των δέντρων και γενικότερων γραφημάτων. Αυτό το γεγονός οδηγεί στο ερώτημα, αν μπορεί να συλληφθεί η έννοια της *δομής* καθ΄ εαυτή με κάποιου είδους αφαιρετική διαδικασία, και αν ναι, εάν μια τέτοια γενική έννοια της δομής μπορεί η ίδια να πάρει μαθηματική μορφή. Η απάντηση είναι θετική. Αφορά την έννοια της *operad*, που εισήχθη στην τοπολογία από τον May, και την χρήση της οποίας στην φυσική πρότεινε ο Kontsevich. Τα πολύεδρα P_k που συναντήσαμε προηγουμένως είναι χαρακτηριστική περίπτωση μιας operad [105, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117]. Ο ορισμός αυτής της έννοιας γίνεται καλύτερα στα πλαίσια της θεωρίας των κατηγοριών. Υπάρχει εκεί η έννοια της *τριάδας* (triple), η οποία είναι αφαίρεση της έννοιας μιας αλγεβρικής δομής επί κάποιου υποκειμένου χώρου. Έστω X μια κατηγορία και End(X) = Cat(X, X) η κατηγορία των ενδο-συναρτητών, $X \rightarrow X$, με μορφισμούς τους φυσικούς μετασχηματισμούς. Με την σύνθεση ως τανυστικό γινόμενο και τον ταυτοτικό συναρτητή, 1, ως μονάδα, η End(X) είναι μια αυστηρώς μονοειδής κατηγορία. Μια τριάδα (T, μ, η) είναι ένα μονοειδές στην End(X). Αυτό σημαίνει ότι T είναι ένας συναρτητής T: $X \rightarrow X$, μ και η είναι φυσικοί μετασχηματισμοί, μ: T T $\rightarrow$ T και η: 1 $\rightarrow$ T, οι οποίοι ικανοποιούν ορισμένες απλές σχέσεις. Μια άλγεβρα επί μιας τριάδας (T, μ, η) είναι ένα ζεύγος (X, ρ), όπου X είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας X και ρ: TX $\rightarrow$ X είναι ένας μορφισμός, τέτοιος ώστε η σύνθεση $X \xrightarrow{hX} TX \xrightarrow{r} X$ είναι η ταυτότητα, και το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} TTX & \xrightarrow{Tr} & TX \\ \mu X \downarrow & & \downarrow \rho \\ TX & \xrightarrow{r} & X \end{array}$$

μετατίθεται. Στην περίπτωση που η X είναι συμμετρική μονοειδής κατηγορία με συναρτητή τανυστικού γινομένου $*\otimes*$ και μονάδα 1, έχει όλα τα μικρά όρια και συν-όρια, και για κάθε αντικείμενο X ο συναρτητής $X\otimes*$ διατηρεί τα συν-όρια, συμβολίζουμε με S_k, k: φυσικός αριθμός, την συμμετρική ομάδα σε k αντικείμενα, με $V^{(k)}$ το k-πλό τανυστικό γινόμενο ενός αντικειμένου V της X, με S το συμμετρικό ομαδοειδές με αντικείμενα όλα τα πεπερασμένα σύνολα και μορφισμούς τις ένα-προς-ένα απεικονίσεις μεταξύ συνόλων, και με Cat(S, X) την κατηγορία των συναρτητών από το S στην X. Ένα αντικείμενο της Cat(S, X) ονομάζεται S-αντικείμενο. Ένα τέτοιο S-αντικείμενο **v** προσδιορίζει μιαν ακολουθία **v**(k) αντικειμένων στην X με μια δράση της S_k. Ο *συναρτητής Schur* ο συνδεδεμένος με το S-αντικείμενο **v** είναι ο ενδοσυναρτητής S(**v**) στην X που ορίζεται από S(**v**, V) = $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbf{v}(k) \bigotimes_{S_k} V^{(k)}$. Δηλαδή, ο συναρτητής S(**v**) είναι αναλυτικός και το S-αντικείμενο **v** είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές Taylor. Η κατηγορία Cat(S, X) γίνεται μονοειδής κατηγορία με μονάδα **1** εάν εφοδιαστεί με το τανυστικό γινόμενο $*\circ*$ στην κατηγορία των S-αντικειμένων:

$$(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})(S) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k) \bigotimes_{S_k} \Big(\bigoplus_{p\in P(S,k)} \mathbf{b}(\pi)\Big),$$

όπου Π(S, T) είναι το σύνολο των απεικονίσεων από το S στο T, $\pi \in \Pi(S,T)$ είναι μια διαμέριση (partition) του S σε έναν πεπερασμένον αριθμό διακεκριμένων υποσυνόλων της μορφής $\{\pi^{-1}(i) \mid i \in T\}$, και το k στο Π(S,k) είναι το αντικείμενο {1, …, k} του S. Μια *operad* είναι ένα μονοειδές στην μονοειδή κατηγορία Cat(S, X), δηλαδή ένα S-αντικείμενο **a** με μορφισμούς $\mu : \mathbf{a} \circ \mathbf{a} \to \mathbf{a}$ και $\eta : 1 \to \mathbf{a}$, που ικανοποιούν αξιώματα για την προσεταιριστικότητα και την μονάδα. Όταν μια operad ορίζεται σε μια κατηγορία διανυσματικών ή τοπολογικών χώρων, ο ορισμός διαμορφώνεται ως εξής [115, 116]:

Μια operad διανυσματικών χώρων (αντιστοίχως, τοπολογική operad) συνίσταται σε:

1) μια συλλογή διανυσματικών (τοπολογικών) χώρων P(n), $n \geq 0$,

2) μια (συνεχή) δράση της συμμετρικής ομάδας S_n στον P(n) για κάθε n,

3) ένα ταυτοτικό στοιχείο $id_P \in P(1)$,

4) συνθέσεις $m_{(n_1,\dots,n_k)}$: $P(k)\otimes(P(n_1)\otimes\ldots\otimes P(n_k)) \to P(n_1+ \ldots +n_k)$ που είναι (συνεχείς) απεικονίσεις για κάθε $k \geq 0$, και $n_1, ..., n_k \geq 0$, οι οποίες ικανοποιούν μια σειρά εύλογα αξιώματα.

Μια *άλγεβρα επί μιας operad* P, ή P-άλγεβρα, είναι ένας διανυσματικός χώρος A και μια συλλογή πολυγραμμικών απεικονίσεων f_n: $P(n)\otimes A^{\otimes n} \to A$ για όλα τα n, που ικανοποιούν τα αξιώματα :

1) $\forall n \geq 0$, η απεικόνιση f_n είναι S_n-ισοαλλοίωτη (equivariant),

2) $\forall a \in A$, έχουμε $f_1(id_P \otimes a) = a$,

3) όλες οι συνθέσεις στην P απεικονίζονται σε συνθέσεις πολυγραμμικών πράξεων στον A.

Αυτοί οι ορισμοί σημαίνουν ότι η έννοια μιας αλγεβρικής δομής αποδίδεται αφηρημένα με την έννοια της operad, ενώ οι επί μέρους πραγματώσεις αυτής της δομής σε κάποιον διανυσματικό ή τοπολογικό χώρο, δηλαδή δομημένοι χώροι, αποδίδονται με την έννοια της άλγεβρας επί της αντίστοιχης operad. Έτσι, υπάρχουν, π.χ., οι operad **Assoc**, **Assoc₁**, **Lie** κ.λπ, οι άλγεβρες επί των οποίων είναι, αντιστοίχως, άλγεβρες προσεταιριστικές, προσεταιριστικές με μονάδα, Lie κ.λπ.

Αν επιστρέψουμε στις θεωρίες πεδίου χορδών, παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\hat{M}_0 = \{\hat{M}_0(n)\}$ είναι μια operad, και ο χώρος H είναι άλγεβρα επί αυτής της operad. Η αντίστοιχη δράση είναι: $\hat{M}_0(n) \ni \Sigma \mapsto |\Sigma\rangle \in \mathrm{Hom}(H^{\otimes n}, H)$. Η δομή του υπόβαθρου χορδών επιτρέπει επίσης την δράση $C_*(\hat{M}_0(n)) \to \mathrm{Hom}(H^{\otimes n}, H)$, της operad των ιδιόμορφων (singular) αλυσίδων, $C_*(\hat{M}_0) = \{C_*(\hat{M}_0(n))\}_{n\geq 1}$. Αυτό σημαίνει ότι ο χώρος H είναι άλγεβρα επί της operad $C_*(\hat{M}_0)$, άρα το σύμπλεγμα (H, Q) είναι άλγεβρα επί της operad $H_*(\hat{M}_0) = \{H_*(\hat{M}_0(n))\}_{n\geq 1}$. Η δομή άλγεβρας Batalin-Vilkovisky προκύπτει από αυτό το γεγονός. Τέλος, εάν N(n) είναι σφαίρα Riemann με n+1 σημειωμένα στολισμένα (marked decorated) σημεία –ο στολισμός σημαίνει επιλογή μιας πραγματικής εφαπτομένης διεύθυνσης (παράμετρος φάσης)– τότε ο χώρος N(n) έχει μια φυσική συμπαγοποίηση $\hat{N}(n)$ και η συλλογή $\hat{N} = \{\hat{N}(n)\}_{n\geq 2}$ είναι ψευδο-operad (παραλλαγή της operad). Μια *θεωρία πεδίου κλειστής χορδής* στο υπόβαθρο χορδών ορίζεται με την βοήθεια μιας λείας απεικόνισης μεταξύ operad: $s: \hat{N} \to \hat{M}_0$. Οι εικόνες της απεικόνισης είναι οι κορυφές (vertices) της χορδής. Η θεωρία πεδίου κλειστής χορδής, σε επίπεδο δέντρου, είναι μια άλγεβρα επί της operad των ιδιόμορφων αλυσίδων, $C_*(\hat{N}) = \{C_*(\hat{N})(n)\}_{n\geq 1}$. Η δομή άλγεβρας L_∞ εμφανίζεται σε ένα κατάλληλα οριζόμενο υποσύμπλεγμα BRST του (H, Q) [114].

Παρόμοια δομή μπορεί να αποδοθεί στα απλά γραφήματα που ονομάζονται δέντρα. Συγκεκριμένα, Tree(n) είναι το σύνολο των κλάσεων ισομορφίας δέντρων με μια ρίζα και n φύλλα, αριθμούμενα από 1 έως n. Η ακολουθία Tree = $\{\mathrm{Tree}(n)\}_{n\geq 1}$ σχηματίζει μια operad, με την πράξη του μπολιάσματος (grafting) ενός δέντρου σε ένα άλλο [115]. Γενικότερα γραφήματα είναι πιο πολύπλοκα, έχοντας στην θέση των φύλλων σημαίες (flags). Οι μεταξύ τους πράξεις λέγονται ενθέσεις (insertions), οπότε προκύπτουν διαφόρων τύπων operads. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, τέτοιες πράξεις παίζουν κρίσιμο ρόλο στην ανακάλυψη των Connes και Kreimer, ότι οι «πράξεις» που γίνονται σε διαγράμματα Feynman στην διαδικασία της επανακανονικοποίησης, σχηματίζουν μιαν άλγεβρα Hopf [118]. Υπάρχουν γενικεύσεις όπως οι κυκλικές operad και οι modular operad. Οι τελευταίες είναι απαραίτητες στις θεωρίες πεδίου κλειστών χορδών, όταν αυτές επεκταθούν σε επιφάνειες Riemann με αυθαίρετο γένος [115, 119].

Μέχρι τώρα, έχουμε συναντήσει περιπτώσεις οι οποίες περιγράφονται ως «δομική αναλογία», ή «δομική ομοιότητα», ή ως σχέση συναρτητική. Τώρα, έχουμε την σαφώς καθορισμένη έννοια δομικής συγγένειας που σημαίνει ότι διαφορετικοί δομημένοι χώροι είναι *άλγεβρες επί της ίδιας operad*. Είναι περίπτωση καθόλου τετριμμένη, και κάθε άλλο παρά προφανής. Γι' αυτό, η απόδειξη ότι συντρέχει κάτι τέτοιο για συγκεκριμένες δομές υπήρξε αποφασιστικό σημείο καμπής για την κβάντωση μέσω παραμορφώσεων.

Πρόκειται για μιαν ανακάλυψη που ισχύει για κάθε προσεταιριστική άλγεβρα. Συνοψίζεται στο ότι, για κάθε άλγεβρα A που ορίζεται σε ένα σώμα χαρακτηριστικής 0, το σύμπλεγμα Hochschild, C*(A, A), και η συνομολογία του, H*(A, A), είναι άλγεβρες επί της ίδιας operad [120, 121]. Όσον αφορά το πρόβλημα της κβάντωσης, οι κατάλληλες operads είναι εκείνες που ορίζονται στην συμμετρική μονοειδή κατηγορία **Comp** των $\wedge$-βαθμωτών συμπλεγμάτων αβελιανών ομάδων ή διανυσματικών χώρων πάνω σε δεδομένο σώμα. Ονομάζονται *διαφορικές βαθμωτές operads*, ή dg-operads. Κάθε συνιστώσα P(n) μιας τέτοιας operad είναι σύμπλεγμα, δηλαδή $P(n) = \oplus_{i\in\wedge} P(n)^i$, με ένα διαφορικό βαθμού +1, d: $P(n)^i \to P(n)^{i+1}$, $d^2 = 0$. Δεδομένου ενός τοπολογικού χώρου, P, υπάρχει μια τοπολογική κατασκευή σχηματισμού των λεγομένων ιδιόμορφων (singular) αλυσίδων, $C_*(P)$. Εάν ο χώρος P είναι μια τοπολογική operad, {P(n)}, τότε προκύπτει η operad $C_*(P(n))$, η οποία επεκτείνεται σε επίπεδο (συν)ομολογίας, $H_*(P(n))$. Ιδιαίτερη σημασία έχει η operad των *μικρών δίσκων*, κρίσιμη στην τοπολογία. Δεν χρειαζόμαστε τον ορισμό της [115, 116], σημειώνω μόνον ότι συνδέεται στενά με τον χώρο των συναπεικονίσεων πεπερασμένου αριθμού σημείων σε χώρο πεπερασμένων διαστάσεων. Σε δύο διαστάσεις, έχει στενή σχέση με την δομή προσεταιριστικής άλγεβρας, γεγονός με ευρύτατες και σημαντικές συνέπειες. Συγγενική έννοια είναι εκείνη της operad «ελβετικό τυρί» [122].

Αυτού του τύπου οι operads παίζουν αποφασιστικό ρόλο στην γενική περίπτωση της κβάντωσης μέσω παραμορφώσεων. Η σημασία τους για τα μαθηματικά έγκειται στις δυνατότητες γενίκευσης της εξής εικασίας τού Deligne: *Το σύμπλεγμα Hochschild μιας αυθαίρετης προσεταιριστικής άλγεβρας είναι με φυσικόν τρόπο μια άλγεβρα επί* *ενός μοντέλου αλυσίδας της operad των μικρών δίσκων*. Είναι σημαντικότατο μαθηματικό συμπέρασμα. Με δεδομένη την πανταχού παρουσία των προσεταιριστικών αλγεβρών, και την σχέση τής operad των μικρών δίσκων με τις συναπεικονίσεις σημείων στον χώρο, ανοίγει ένα πεδίο γόνιμης αλληλοτροφοδοσίας μεταξύ άλγεβρας και γεωμετρίας, όπου επανεμφανίζεται συστηματικά σε διάφορους ρόλους η έννοια του δέντρου, ως έννοια γνήσια μαθηματικοποιημένη πλέον. Με την βοήθεια εξειδικευμένων εργαλείων από την τοπολογία και την αλγεβρική γεωμετρία, συνάγεται σε αυτό το πλαίσιο το θεώρημα τυπικότητας του Kontsevich το οποίο ανέφερα στην §8.3. Κεντρική έννοια είναι εκείνη του *οιονεί ισομορφισμού*, f: A $\rightarrow$ B, μεταξύ δύο P-αλγεβρών, όπου P είναι μια operad συμπλεγμάτων. Ορίζεται τότε μια έννοια *ομοτοπικής ισοδυναμίας*, με την βοήθεια της οποίας η συλλογή των P-αλγεβρών αποκτά τα χαρακτηριστικά κατηγορίας. Όταν πρόκειται περί διαφορικών βαθμωτών αλγεβρών Lie, καταλήγουμε στην έννοια L_∞-μορφισμών μεταξύ L_∞ αλγεβρών. Ένας τέτοιος μορφισμός συνδέει το σύμπλεγμα των συναλυσίδων Hochschild που απαρτίζεται από πολυδιαφορικούς τελεστές, αφ' ενός, με την βαθμωτή άλγεβρα Lie των πολυδιανυσματικών πεδίων, αφ' ετέρου, όπως αυτά ορίζονται για την άλγεβρα των συναρτήσεων πάνω σε μια λεία πολλαπλότητα [89].

8.6 … και στην μαθηματικοποίηση της κβάντωσης

Η ακριβής έκφραση του L_∞-μορφισμού, καθώς και η απόδειξη των σχέσεων που μόλις ανέφερα, έχουν αντλήσει έντονα από την θεωρία χορδών· άλλη μία περίπτωση όπου μια υπό διερεύνηση θεωρία μπορεί να γίνει πηγή έμπνευσης και τροφοδότης με δεδομένα για πρωτότυπες προσεγγίσεις σε προβλήματα θεμελίωσης. Ειδικότερα, οι ως άνω αποδείξεις εξαρτώνται αποφασιστικά από μια συλλογή γραφημάτων, Γ. Ο Kontsevich [89] ορίζει αυτά, τα λεγόμενα «αποδεκτά γραφήματα», τα οποία ανήκουν σε ένα σύνολο G_n με n+2 τον αριθμό των κορυφών και 2n τον αριθμό των ακμών, και τα χρησιμοποιεί ως έναν χώρο *δεικτών* για δύο άλλες έννοιες. Η μία είναι ένας πολυδιαφορικός τελεστής, $B_{\Gamma,\alpha}$: $A\times A \rightarrow A$, όπου $A = C^\infty(\varsigma)$ για μιαν ανοικτή περιοχή ς στον χώρο ∇^d. Ο τελεστής εξαρτάται από ένα δι-διανυσματικό πεδίο α, όχι απαραιτήτως Poisson, το οποίο ορίζεται στις διατομές μιας δέσμης επί του ς, συγκεκριμένα $\alpha \in \Gamma(\varsigma, \wedge^2 T\varsigma)$. Η δράση τού $B_{\Gamma,\alpha}$ σε συναρτήσεις f, g $\in$ A δίδεται από έναν πολύπλοκο τύπο που κάνει φανερό τον ρόλο των γραφημάτων Γ ως χώρο παραμέτρων. Η δεύτερη έννοια είναι μια συνάρτηση στάθμισης, w_Γ. Αυτή δίδεται από ένα ολοκλήρωμα στο μιγαδικό άνω ημιεπίπεδο μιας έκφρασης που περιλαμβάνει γωνίες, οι οποίες ορίζονται πάλι στην βάση των γραφημάτων Γ. Το αποτέλεσμα είναι ότι, εάν α είναι δι-διανυσματικό πεδίο Poisson σε μια περιοχή του ∇^d, τότε η έκφραση

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \sum_{G \in G_n} w_G B_{G,a}(f, g)$$

ορίζει ένα προσεταιριστικό ∗-γινόμενο. Αλλαγή συντεταγμένων οδηγεί σε ένα ισοδύναμο ∗-γινόμενο. Πρόκειται, δηλαδή, για μια κβάντωση μέσω παραμορφώσεων, οριζόμενη με τρόπο που, σημειωτέον, γενικεύεται για κάθε πολλαπλότητα Poisson.

Αυτό το αποτέλεσμα, στην γενικότερη περίπτωση, έχει πυροδοτήσει πλήθος αποτελεσμάτων, εικασιών, ερευνών, σε τομείς που εκτείνονται στην αλγεβρική γεωμετρία και την θεωρία αριθμών [89, 116, 123]. Εκείνο που ενδιαφέρει εδώ είναι το γεγονός ότι τα γραφήματα, τα ολοκληρώματα, οι υπολογισμοί για το αποτέλεσμα του Kontsevich, αποδείχθηκε ότι συνιστούν τα *διαγράμματα Feynman για μια θεωρία πεδίου!* Είναι η θεωρία ενός μποζονικού τοπολογικού πεδίου που ορίζεται σε έναν δίσκο, D, με ένα πεδίο X: D → M, όπου M είναι μια πολλαπλότητα Poisson [124]. *Πρόκειται ακριβώς για τα σ-μοντέλα που συναντήσαμε στην §8.2***.**

Από μιαν άλλη σκοπιά, αυτά τα μοντέλα εντάσσονται στο πλαίσιο συμμετριών βαθμίδας που συνδέονται με μιαν απλή συμπαγή συνδεδεμένη απλώς συνδεδεμένη ομάδα G. Θεωρίες τύπου Yang-Mills αντιστοιχούν σε σημεία D(G) ενός χώρου (χώρος moduli). Εάν G είναι μια πραγματική ομάδα Lie n διαστάσεων, το D(G) είναι το διπλό (double) αντικείμενο της G [98], δηλαδή μια πραγματική ομάδα Lie 2n διαστάσεων, με την G ως υποομάδα της, τέτοια ώστε η άλγεβρα Lie που της αντιστοιχεί να είναι εφοδιασμένη με μια συμμετρική αναλλοίωτη μη εκφυλισμένη ∇-διγραμμική μορφή, έστω ⟨• , •⟩, ως προς την οποία η άλγεγρα Lie, $\mathfrak{g}$, της G είναι ισότροπος: $\langle \mathfrak{g}, \mathfrak{g} \rangle = 0$. Τα σημεία D(G) είναι οι θεωρίες Poisson-Lie Yang-Mills. Τα σ-μοντέλα που μας ενδιαφέρουν εδώ είναι ιδιαίτερα σημεία του χώρου των D(G) [125].

Το σημαντικό συμπέρασμα από όλα αυτά είναι παρόμοιο με την διαπίστωση στην §8.2 σχετικά με την κβάντωση Fedosov –μόνο που τώρα προβάλλει σε όλη του την γενικότητα: *Μια θεωρία κβάντωσης, με αντικείμενο την μετάβαση από την κλασική στην κβαντική μηχανική, αγκαλιάζει την πιο γενική περίπτωση όταν μεταμορφώνεται σε εσωτερικό στοιχείο μιας οιονεί θεωρίας πεδίου, η οποία κβαντώνεται με την μέθοδο Batalin-Vilkovisky.*

8.7 Η εσωτερίκευση της κβάντωσης

Ας συνοψίσουμε και ας δούμε προσεκτικότερα τα βήματα μιας συλλογιστικής.

Βήμα πρώτο: Στις θεωρούμενες ως καλύτερες θεωρίες στην αιχμή της σύγχρονης έρευνας, αναπτύχθηκε μια μέθοδος για την προσπέλαση δυσεπίλυτων προβλημάτων. Η μαθηματική μορφή αυτών των θεωριών, αφ΄ ενός, φιλοδοξεί να προσφέρει μια θεωρητική αναπαράσταση του φυσικού κόσμου. Σε τί βαθμό αυτό επιτυγχάνεται, αν επιτυγχάνεται καν, είναι ανοικτό ερώτημα. Αφ΄ ετέρου, έγινε δυνατόν να αναπτυχθούν «δοκιμαστικά μοντέλα» ως εργαστήρια μαθηματικής ανάλυσης.

Βήμα δεύτερο: Ως εργαστήρια, αυτά τα μοντέλα θα μπορούσαν να ενταχθούν σε αυτό που ο A. Borel θα χαρακτήριζε ως «πειραματικά μαθηματικά».[50] Το κρίσιμο σημείο είναι, όμως, ότι αυτά τα μοντέλα δεν θεωρούνται μοντέλα της φυσικής πραγματικότητας. Η σύνδεση του «μαθηματικοποιήσιμου» με το «μαθηματικοποιημένο» έχει διαρραγεί. Έχουμε μάλλον μια προσομοίωση της φυσικής πραγματικότητας, με την εξής συγκεκριμένη έννοια: Όχι ως μίμηση κάποιας αναπαράστασης φαινομένων, αλλά ως αναπαράσταση των αμοιβαίων σχέσεων μεταξύ *εννοιών* οι οποίες έλκουν την καταγωγή τους από την θεωρητική ανάλυση των φαινομένων. Δηλαδή, στα δοκιμαστικά μοντέλα έχουμε έννοιες όπως «λαγκρανζιανή», «τελεστής ενέργειας-ορμής», «φυσικό μέγεθος». Αυτοί οι όροι δεν έχουν κανένα νόημα σε αναφορά προς την φυσική πραγματικότητα· δικαιούνται να ονομάζονται έτσι, μόνον διότι υπεισέρχονται σε σχέσεις μεταξύ τους παρόμοιες με εκείνες που ισχύουν σε καθιερωμένες φυσικές θεωρίες. Επί πλέον, μολονότι τα δοκιμαστικά μοντέλα πήγασαν από θεωρητικές αναζητήσεις που δεν έχουν κριθεί ακόμη, δεν κρίνονται τα ίδια στο επίπεδο της φυσικής, αλλά στο επίπεδο και με τα κριτήρια των μαθηματικών. Σε αυτό το επίπεδο, είναι δόκιμες κατασκευές και, όπως είδαμε, αναλαμβάνουν και τον ρόλο του «μαθηματικού», στην επαναστατική αντιστροφή της σχέσης φυσικής και μαθηματικών που τόσο τάραξε τα νερά για την μαθηματική κοινότητα.

Βήμα τρίτο: Με τον ίδιο τρόπο που σε αυτά τα μοντέλα υπάρχουν έννοιες–προσομοιώσεις φυσικών εννοιών, έτσι μπορούν να οριστούν *διαδικασίες* όπως εκείνη της κβάντωσης με την μέθοδο BRST ή Batalin-Vilkovisky. Σε αυτό το πλαίσιο, η

[50] «*[Τα μαθηματικά,] σε αναλογία με την φυσική, έχουν μια πειραματική και μια θεωρητική πλευρά, αλλά λειτουργούν σε έναν νοητικό κόσμο αντικειμένων, εννοιών και εργαλείων. Χονδρικά, η πειραματική πλευρά είναι η έρευνα ειδικών περιπτώσεων … και η θεωρητική πλευρά είναι η αναζήτηση γενικών θεωρημάτων. Και στις δύο, περιμένω φυσικά αποδείξεις, και απορρίπτω κατηγορηματικά μια διαίρεση σε δύο μέρη, το ένα με αποδείξεις, το άλλο χωρίς*» (αναφέρεται στο Atiyah et al. [100], σ. 180).

«κβάντωση» έχει καθαρά μαθηματικό χαρακτήρα ως διαδικασία μετάβασης, από ένα πλαίσιο εννοιών που νοηματικά συνδέεται με την κλασικότητα, σε ένα πλαίσιο εννοιών που νοηματικά συνδέεται με το κβαντικό. Εφ' όσον η πρότυπη αρένα της κλασικής φυσικής, η πολλαπλότητα Poisson, αλληλοκαθορίζεται με το σ-μοντέλο Poisson, η κβάντωση του κλασικού μπορεί να μεταφραστεί στο πλαίσιο της μαθηματικής θεωρίας των δοκιμαστικών μοντέλων.

Βήμα τέταρτο: Έτσι, ένα μαθηματικό πλαίσιο όπου εντάσσεται το φυσικό πρόβλημα της κβάντωσης είναι εκείνο που προσομοιάζει την *κβάντωση πεδίων*. Μια διαδικασία, δηλαδή, που είναι εσωτερική και συστατική των κβαντικών θεωριών, και όχι ζήτημα ιστορικό, ούτε ζήτημα μεταθεωρίας. Ακριβέστερα είναι η αξεδιάλυτη μείξη θεωρίας και μεταθεωρίας που επισημαίνει ο Manin [55]. Με αυτόν τον τρόπο αποδείχθηκε ότι αυτό το πλαίσιο, της κβάντωσης ενός σ-μοντέλου Poisson, ισοδυναμεί με την κβάντωση μέσω παραμορφώσεων μιας γενικής πολλαπλότητας Poisson, όπως την διατύπωσε ο Kontsevich. Με μια μέθοδο, δηλαδή, που ισοδυναμεί με την μετατροπή μιας θεωρίας κβάντωσης σε κβαντική θεωρία, αλλά που, σημειωτέον, έχει στόχο την κβαντική *μηχανική* και όχι την θεωρία πεδίων.

Βήμα πέμπτο: Δεν χρειάζεται να κάνουμε εικασίες για την σημασία αυτών των αποτελεσμάτων. Χρειάζεται να κρατήσουμε μόνον τρία συμπεράσματα. Πρώτον, ότι με αυτόν τον τρόπο η κβάντωση ως αρχικά εξωτερική αντιστοιχία μετατρέπεται σε εσωτερικό συστατικό στοιχείο. Δεύτερον, ότι το μαθηματικό υπόβαθρο είναι η θεωρία της ανώτερης ομοτοπίας και ο δρόμος που οδηγεί σε αυτήν είναι η θεωρία παραμορφώσεων μαθηματικών δομών. Τρίτον, ότι το ίδιο υπόβαθρο και ο ίδιος δρόμος προς αυτό παίζουν τον ίδιο ρόλο όχι μόνον για δοκιμαστικά μοντέλα, αλλά για μοντέλα που αναφέρονται άμεσα στην φυσική πραγματικότητα [114].

Βήμα έκτο: Η κβάντωση ανάγεται τώρα στην σχέση μαθηματικών *δομών*. Όλα τα ανωτέρω διατυπώνονται με ακρίβεια με την βοήθεια της έννοιας της operad, η οποία μαθηματικοποιεί την έννοια «δομή». Η δομική σχέση γίνεται σαφής, με την έννοια αλγεβρών επί της ίδιας operad. Αυτό μπορεί να λειτουργήσει όταν έχουμε διαφορικά συμπλέγματα και ομάδες συνομολογίας, τις κατασκευές δηλαδή εκείνες που εμφανίζονται στην θεωρία των παραμορφώσεων.

Δεν υπάρχει κλάδος των μαθηματικών,

οσοδήποτε αφηρημένος, που να μην μπορεί κάποτε

να εφαρμοστεί στα φαινόμενα του πραγματικού κόσμου.

Ν. Λομπατσέφσκι

Κεφάλαιο IX: Επανακανονικοποίηση: Η προαγωγή μιας τεχνικής σε έννοια

9.1 Μια επιτυχημένη τεχνική

Επανειλημμένα συναντήσαμε την περίπτωση που μια μέθοδος, ένα σύνολο εννοιών, μια μαθηματική πρακτική της φυσικής, μεταμορφώνεται όταν αναπροσαρμόζεται και εντάσσεται σε ένα ευρύτερο ή και διαφορετικό μαθηματικό πλαίσιο. Ασφαλώς το ίδιο ισχύει για την εργασία τού Kontsevich και τα αποτελέσματα που σχετίζονται με αυτήν. Είναι η μία από τις δύο κορυφαίες εξελίξεις της τελευταίας δεκαετίας στην μαθηματική φυσική, τις οποίες επέλεξα θεωρώντας ότι προσφέρονται για την ανάλυση της εννοιολογικής μετάβασης. Η δεύτερη κορυφαία εξέλιξη έχει έναν πιο ακραίο χαρακτήρα. Αφ΄ ενός, έμεινε για σχεδόν μισόν αιώνα στο επίπεδο μιας εξαιρετικά σύνθετης *τεχνικής*, οφείλοντας την επιτυχία της πολύ περισσότερο στην ικανότητά της να προσφέρει ακριβή ελέγξιμα αποτελέσματα, παρά στην εμπεριστατωμένη μαθηματική της θεμελίωση. Αφ΄ ετέρου, σφράγισε τις κβαντικές θεωρίες στο δεύτερο μισό του προηγούμενου αιώνα, καθώς αναδείχθηκε σε κύριο υπολογιστικό εργαλείο, αλλά και σε δοκιμασία κάθε υποψήφιας κβαντικής θεωρίας. Πρόκειται, βεβαίως, για την τεχνική της *επανακανονικοποίησης* (renormalization).

Η εξέλιξη στην οποία αναφέρομαι είναι η ανύψωση αυτής της τεχνικής σε νοηματικό επίπεδο. Με αυτό εννοώ την ανάδειξη μιας υποκείμενης μαθηματικής δομής, αλλά και, αντιστρόφως, την επένδυση με μαθηματικές έννοιες, έτσι ώστε να συγκροτείται ένα καλώς ορισμένο συνεκτικό μαθηματικό πλαίσιο. Έτσι, οι υπολογιστικές διαδικασίες της τεχνικής νοηματοδοτούνται και αποκαλύπτονται ως οι αποδείξιμες σχέσεις που λειτουργούν σύμφωνα με τους μαθηματικούς κανόνες που χαρακτηρίζουν την εν λόγω δομή. Είναι μια διαδικασία που μπορεί να παραλληλιστεί με εκείνη που στην φυσική μετατρέπει το «natural» σε «physical». Σε πολύ αδρές γραμμές, είναι κάτι αντίστοιχο προς την σχέση μεταξύ πρακτικής αριθμητικής και άλγεβρας. Αυτή η, ομολογουμένως χονδρική, αντιστοιχία μας βοηθά εν τούτοις να κάνουμε μια λεπτή διάκριση: Οι πράξεις της πρακτικής αριθμητικής μπορούν να οριστούν με σαφήνεια και αυστηρότητα. Είναι διαφορετικό ζήτημα, όμως, η νοηματοδότησή τους, όπως αυτή επιτυγχάνεται όταν ενταχθούν στο πλαίσιο κάποιας αλγεβρικής δομής. Με παρόμοιο τρόπο, είναι διαφορετικό ζήτημα η διατύπωση των υπολογιστικών βημάτων της επανακανονικοποίησης έτσι ώστε να στέκουν μαθηματικά –πραγματοποιήσιμη ήδη–, και διαφορετικό η νοηματοδότησή τους στην οποία αναφέρομαι. Το πώς αυτό επετεύχθη είναι μια συναρπαστική ιστορία, που μόνον ένα αδρό περίγραμμά της μπορώ να παρουσιάσω εδώ. Ας διευκρινίσω ότι η επανακανονικοποίηση δεν είναι κάτι καινοφανές στις κβαντικές θεωρίες και μόνον. Στοιχειώδεις περιπτώσεις είναι η κίνηση μιας σφαίρας μέσα σε κάποιο ρευστό, ή η επιτάχυνση ενός φορτισμένου αγωγού [126]. Η αλληλεπίδραση της σφαίρας με το ρευστό που την περιβάλλει, ή η αυτεπίδραση του ηλεκτρικού φορτίου, επιβάλλει την «διόρθωση» της μάζας της σφαίρας ή του αγωγού που υπεισέρχεται στις δυναμικές εξισώσεις: ένας όρος επανακανονικοποίησης προστίθεται στην «γυμνή» μάζα. Αλλά, στην κλασική περίπτωση, η γυμνή μάζα ποτέ δεν θεωρείται παρατηρησιακά απρόσιτη, καθώς υποτίθεται ότι πάντα μπορούμε να εξετάσουμε είτε την κίνηση της ίδιας σφαίρας στο κενό, είτε του αγωγού χωρίς φορτίο. Επί πλέον, ο διορθωτικός όρος έχει πάντα μια πεπερασμένη τιμή. Η κβαντική περίπτωση είναι ποιοτικά διαφορετική. Η επανακανονικοποίηση είναι πάντα απαραίτητη, καθώς η αυτεπίδραση των πεδίων είναι στοιχείο εγγενές, από το οποίο δεν μπορεί να γίνει αφαίρεση. Τα «γυμνά» φυσικά μεγέθη είναι συνεπώς παρατηρησιακά απροσπέλαστα. Ακόμη, και αυτό αποδείχθηκε καίριο πρόβλημα, οι όροι της αναγκαίας επανακανονικοποίησης συχνά απειρίζονται. Ας το δούμε λεπτομερέστερα, ακολουθώντας τούς A. Connes και D. Kreimer [127].

Μια κβαντική θεωρία πεδίου σε $D = 4$ διαστάσεις δίδεται από ένα κλασικό συναρτησιακό δράσης (για ένα μονόμετρο πεδίο χωρίς spin),

$$S(A) = \int \Lambda(A) d^4x,$$

όπου το A είναι ένα κλασικό πεδίο, και η λαγκρανζιανή έχει την μορφή:

$$\Lambda(A) = \frac{1}{2}(\partial A)^2 - \frac{1}{2} m^2 A^2 + \Lambda_{int}(A),$$

όπου ο όρος των αλληλεπιδράσεων, Λ_{int}, είναι συνήθως ένα πολυώνυμο στα πεδία και τις παραγώγους τους. Στην κβαντική θεωρία πεδίου με την μέθοδο των διαταραχών (perturbations –ε.ε. pQFT), υπολογίζουμε μεγέθη όπως συναρτήσεις Green, συναρτήσεις partition, στοιχεία της μήτρας S των σκεδάσεων (scattering). Αν πάρουμε μια συνάρτηση Green, αυτή περιγράφει ένα κβαντικό πεδίο φ:

$$G_N(x_1, \ldots, x_N) = \langle 0|T\phi(x_1)\ldots\phi(x_N)|0\rangle.$$

Το σύμβολο T σημαίνει χρονική διάταξη, δηλαδή τα $\phi(x_i)$ γράφονται έτσι ώστε η χρονική συνιστώσα στα x_i να αυξάνει από δεξιά προς τα αριστερά. Το $|0\rangle$ συμβολίζει την κατάσταση κενού, η οποία θέλουμε να είναι κανονικοποιημένη: $\langle 0|0\rangle = 1$. Γενικά, $|*\rangle$ είναι οι καταστάσεις–στοιχεία του αντίστοιχου χώρου Hilbert, με εσωτερικό γινόμενο $\langle *|*\rangle$. Εκ πρώτης όψεως, η συνάρτηση Green θα μπορούσε να υπολογιστεί σε:

$$G_N(x_1, ..., x_N) = N\int \exp(iS(A)/\hbar)\, A(x_1)\ldots A(x_N)[dA],$$

όπου N είναι ένας παράγοντας κανονικοποίησης και [dA] ένα μέτρο στον χώρο των πεδίων. Το $\exp(iS(A)/\hbar)$ είναι το πλάτος πιθανότητας μιας συναπεικόνισης κλασικών πεδίων. Ακόμη, με μια ανώδυνη κατάχρηση του συμβολισμού, τα κλασικά και τα κβαντικά πεδία αποδίδονται με το ίδιο σύμβολο, ϕ. Στην pQFT, ο όρος Λ_{int} στο ως άνω συναρτησιακό ολοκλήρωμα αντιμετωπίζεται ως διαταραχή της ελεύθερης λαγκρανζιανής,

$$\Lambda_0(\phi) = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

Η δράση γράφεται αντιστοίχως: $S(\phi) = S_0(\phi) + S_{int}(\phi)$, και η ελεύθερη δράση, $S_0(\phi)$, δίνει ένα μέτρο Gauß, $d\mu = \exp(iS_0(\phi))[d\phi]$. Τότε, η συνάρτηση Green αναπτύσσεται σε σειρά ολοκληρωμάτων πολυωνύμων:

$$G_N(x_1, \ldots, x_N) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int\phi(x_1)\ldots\phi(x_N)(S_{int}(\phi))^n d\mu\Big) \times$$

$$\times\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int(S_{int}(\phi))^n d\mu\Big)^{-1}.$$

Καταλήγουμε σε έναν αριθμό από πολλαπλά ολοκληρώματα σε πεπερασμένον αριθμό μεταβλητών. Τα *διαγράμματα* ή *γραφήματα Feynman* είναι ένας γραφικός τρόπος απόδοσης αυτών των ολοκληρωμάτων. Αποτελούνται από ακμές και κορυφές, σε συνδυασμούς αύξουσας συνθετότητας, που αντιστοιχούν στους όρους των ολοκληρωμάτων μέσω μιας σειράς λεπτομερών κανόνων, των κανόνων Feynman. Χονδρικά, ανάλογα με τον τύπο των πεδίων, οι ακμές δηλώνουν διάδοση από ένα σημείο σε άλλο, που αντιστοιχεί σε κατάλληλη μαθηματική έκφραση –διαδότη (propagator)– και οι κορυφές δηλώνουν τοπικές αλληλεπιδράσεις, που αντιστοιχούν επίσης σε μαθηματικές εκφράσεις όπου υπεισέρχονται οι σταθερές σύζευξης (coupling) της θεωρίας. Αυτό που εκ πρώτης όψεως οδηγεί σε αυτό το σημείο είναι μόνον η αρχή της πραγματικής διαδικασίας υπολογισμού, καθώς στήνει το σκηνικό για να αναγνωριστούν σοβαρά προβλήματα. Είναι κατά κανόνα δύο ειδών, και έχουν αναπτυχθεί πολλαπλές στρατηγικές αντιμετώπισής τους. Πρώτον, τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται σε αναπτύγματα όπως τα ανωτέρω συνήθως δεν είναι καλώς ορισμένα από μαθηματική άποψη. Υπάρχει τότε η περίπτωση να αντιμετωπίζεται αυτό το πρόβλημα με την μαθηματική τεχνική της «κανονικοποίησης» (regularization). Υπάρχουν πολλοί τρόποι να γίνει αυτό, και ένας πολύ αποτελεσματικός είναι η επονομαζόμενη διαστασιακή κανονικοποίηση (dimensional regularization). Σε αυτήν, ο αριθμός των διαστάσεων επεκτείνεται αναλυτικά στο μιγαδικό επίπεδο, οπότε τα ολοκληρώματα απεικονίζονται σε σειρές Laurent σε μια μεταβλητή $z \in \Re \backslash \{0\}$, με πόλο στην τιμή z □ 0. Έστω και αν επιτευχθεί αυτού του τύπου η μετατροπή, είμαστε ακόμη σε προκαταρκτικό στάδιο. Ο σκληρός πυρήνας του προβλήματος οφείλεται στο ότι τα ολοκληρώματα αποκλίνουν, και έτσι δεν οδηγούν σε τιμές με κάποιο νόημα. Η θεραπεία, που με πολλές προσπάθειες αναπτύχθηκε στην διάρκεια δεκαετιών, είναι τα διάφορα σχήματα επανακανονικοποίησης (renormalization: να μην συγχέεται με την κανονικοποίηση/regularization). Συνίσταται στην εισαγωγή κατάλληλων αντισταθμιστικών όρων για κάθε αποκλίνον ολοκλήρωμα, με στόχο να «σκοτωθούν» οι αποκλίσεις. Ουσιαστικά, συγκροτείται μια απειρία προκειμένου να αφαιρεθεί από μιαν άλλην απειρία, ώστε να προκύψει ένα πεπερασμένο αποτέλεσμα. Ένα από τα συνηθισμένα σχήματα, το σχήμα της ελάχιστης αφαίρεσης (minimal subtraction), απομονώνει τους όρους με τους πόλους των σειρών Laurent.

Η επινόηση της επανακανονικοποίησης, με τις εργασίες των Feynman, Schwinger, Tomonaga, Dyson, στα τέλη της δεκαετίας του 1940, ήταν καινοτομία που επέτρεψε την εκρηκτική ανάπτυξη της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής αρχικά, και των θεωριών πεδίου γενικότερα, καθώς και της σύγχρονης κβαντικής χρωμοδυναμικής, με την μέθοδο των διαταραχών. Δεν επιδέχονται όλες οι θεωρίες επανακανονικοποίηση, με χαρακτηριστική περίπτωση τις υποψήφιες θεωρίες κβαντικής βαρύτητας. Η δυνατότητα της επανακανονικοποίησης θεωρείται κρίσιμη δοκιμασία για την βιωσιμότητα μιας φυσικής θεωρίας. Με την βοήθεια των κανόνων Feynman, η τεχνική μεταφράζεται σε μια πολύπλοκη συνδυαστική γραφημάτων με περίτεχνους χειρισμούς, σε σχήματα μεγάλης εκζήτησης. Το γεγονός είναι ότι η επανακανονικοποίηση απέκτησε, κυρίως με τα μέσα της θεωρίας των κατανομών, μια βάση για μια τυπική μαθηματική θεμελίωση [128]. Έτσι αναπτύχθηκε το σχήμα των Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann (BPHZ), το οποίο εφαρμόζεται στο επίπεδο των υπό ολοκλήρωσιν εκφράσεων, παρακάμπτοντας μάλιστα εντελώς το στάδιο της κανονικοποίησης. Παρ΄ όλα αυτά, «*καμία από αυτές τις σημαντικές προόδους δεν ρίχνει φως στην πραγματική πολύπλοκη συνδυαστική, που χρησιμοποιείται με επιτυχία από τους φυσικούς των στοιχειωδών σωματιδίων για πολλές δεκαετίες, προκειμένου να εξαχθούν πεπερασμένα αποτελέσματα από αποκλίνοντα γραφήματα Feynman, και η οποία είναι η* ***ουσία της επιβεβαιωμένης πειραματικά προβλεπτικής ισχύος*** *της κβαντικής θεωρίας πεδίων*» ([127], έμφαση δική μου). Για μεγάλο διάστημα, αυτή ακριβώς η προβλεπτική ισχύς, που οφειλόταν σε μιαν αποτελεσματική τεχνική, ευνοούσε μια πραγματιστική στάση. Οι φυσικοί μπορούσαν να υπολογίζουν και να προβλέπουν, μαθαίνοντας τους κανόνες του παιχνιδιού, χωρίς να πολυσκοτίζονται για μαθηματική αυστηρότητα, θεμελίωση ή νόημα.

9.2 Η φύση της τεχνικής: δομή άλγεβρας Hopf

Οι σύγχρονες εξελίξεις έχουν αντιστρέψει αυτήν την κατάσταση. Μπορεί τώρα κανείς να διαβάζει σε τεχνικά κείμενα, σχετικά με το νοηματικό έλλειμμα τέτοιων πρακτικών, δηλώσεις σαν αυτή: «*Θα καλύψουμε αυτό το κενό ... παραμερίζοντας το πέπλο που κρύβει* ***την αληθινή φύση*** *αυτής της φαινομενικά πολύπλοκης συνδυαστικής, και αποδεικνύοντας ότι είναι ειδική περίπτωση μιας γενικής μεθόδου εξαγωγής πεπερασμένων τιμών, βασισμένης στο πρόβλημα Riemann-Hilbert*» ([127], έμφαση δική μου).

Πρόκειται για μία από τις πιο εντυπωσιακές εξελίξεις στην σχέση της φυσικής με τα μαθηματικά. Είναι προϊόν της διασταύρωσης δύο, φαινομενικά άσχετων μεταξύ τους, γραμμών έρευνας. Μία, σε καθαρά μαθηματικά, από τους A. Connes και H. Moscovici. Μία άλλη, γύρω από την σχέση της επανακανονικοποίησης με τοπολογικές και αλγεβρικές έννοιες, από τον D. Kreimer σε συνεργασία με τους D. J. Broadhurst και R. Delbourgo. Διερευνώντας την συνδυαστική των γραφημάτων από την σκοπιά της θεωρίας των κόμβων, ο Kreimer ανακάλυψε μια «*συναρπαστική σύνδεση μεταξύ θεωρίας πεδίων, θεωρίας αριθμών και θεωρίας κόμβων*» [129]. Πέτυχε να δείξει ότι «*οι ιδιόμορφες* (singular) *συνεισφορές σε μια pQFT προσδιορίζονται από κόμβους που προκύπτουν από τις τοπολογίες των αντίστοιχων γραφημάτων Feynman*». Και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι «*η θεωρία των κόμβων γνωρίζει την επανακανονικοποίηση, με την έννοια ότι παράγει όλα τα ενεχόμενα δάση με την βοήθεια της σχέσης κουβαριάσματος* (*skein*)» [129]. Η σχέση κουβαριάσματος (skein) που αναφέρεται εδώ είναι μια απλή πράξη στην θεωρία των κόμβων. Ο όρος «δάσος» αναφέρεται στα γραφήματα Feynman που παριστάνουν αποκλίνοντα ολοκληρώματα, και έχει την εξής έννοια: Ένα αποκλίνον ολοκλήρωμα παριστάνεται από ένα γράφημα που ονομάζεται το ίδιο «απόκλιση». Οι πραγματικά δύσκολες περιπτώσεις είναι εκείνες που οφείλονται στις λεγόμενες υπεριώδεις αποκλίσεις. Για παράδειγμα, ένα γράφημα που περιέχει κλειστούς βρόχους σημαίνει ολοκλήρωμα σε όλες τις ορμές που διατρέχουν τις «εσωτερικές» ακμές του, αν εργαζόμαστε σε αναπαράσταση στον χώρο των ορμών. Η απόκλιση προκαλείται όταν οι ορμές παίρνουν πολύ μεγάλες τιμές, εξ ου και η ονομασία «υπεριώδης». Σε μια αναπαράσταση στον χώρο των συναπεικονίσεων, αυτό αντιστοιχεί στην περίπτωση που χωροχρονικές συντεταγμένες συντρέχουν στο ίδιο σημείο. Τα πράγματα είναι σχετικά απλά όταν η απόκλιση αντιστοιχεί σε μια σειρά Laurent, η οποία είναι προϊόν μιας αρχικής κανονικοποίησης, όπως ανέφερα προηγουμένως. Τότε, ο απαραίτητος αντισταθμιστικός όρος για την εξουδετέρωση της απόκλισης, στο σχήμα της ελάχιστης αφαίρεσης (ε.ε. MS), είναι απλώς ο όρος που περιέχει τον πόλο της σειράς. Εάν, όμως, έχουμε ένα αποκλίνον γράφημα το οποίο περιέχει υπογραφήματα που είναι τα ίδια αποκλίνοντα («υπο-αποκλίσεις –subdivergences), οι υπολογισμοί γίνονται πολύ πιο περίπλοκοι, και από εδώ προέρχονται οι κύριες πολυπλοκότητες της συνδυαστικής των γραφημάτων. Αποδεικνύεται με συνολοθεωρητικές μεθόδους ότι οι υποαποκλίσεις βρίσκονται σε υπογραφήματα που είτε είναι διακριτά μεταξύ τους, είτε είναι εγκιβωτισμένα το ένα μέσα στο άλλο [130].

Ένα δάσος, λοιπόν, αποτελείται από κάθε αποκλίνον υπογράφημα. Ο τύπος των δασών, του Zimmermann, συνοψίζει τους αντισταθμιστικούς υπολογισμούς για ένα γράφημα Feynman, Γ:

$$Z(\Gamma) \square -R(\Gamma) - \Sigma_{\gamma\in\Gamma} R(Z(\gamma)\Gamma/\gamma).$$

Το Z σημαίνει τον συνολικό αντισταθμιστικό όρο για το Γ. Τα γ είναι γνήσια υπογραφήματα του Γ. Το σύμβολο Γ/γ σημαίνει το γράφημα που προκύπτει εάν το υπογράφημα γ συρρικνωθεί και αντικατασταθεί από μια κορυφή. Εάν το γ δεν έχει αποκλίσεις, τότε $Z(\gamma) \square 0$. Ο όρος R(Γ) είναι η *απεικόνιση επανακανονικοποίησης*. Στο σχήμα MS, απεικονίζει στον πόλο τού Γ. Εάν ένα γ δεν έχει υποαποκλίσεις, τότε $Z(\gamma) \square -R(\gamma)$. Προσπαθώντας να εξηγήσει την «γνώση της επανακανονικοποίησης» από την θεωρία των κόμβων, ο Kreimer ανακάλυψε ότι οι πράξεις για τον υπολογισμό των αντισταθμιστικών όρων προσδίδουν στα γραφήματα Feynman μιαν αλγεβρική δομή: την δομή μιας άλγεβρας Hopf [Λ, 131]. Συνοπτικά, ο Kreimer συμβολίζει κάθε δάσος με μια λέξη με παρενθέσεις. Κάθε γράμμα x_i της λέξης αντιστοιχεί σε ένα διάγραμμα Feynman, χαρακτηριζόμενο από έναν αριθμό βρόχων που περιέχει, N_i, και χωρίς υποαποκλίσεις. Αυτά τα γράμματα περιέχουν έναν πόλο πρώτης τάξης: $x_i \sim ħ^{N_i}/ε$. Το ε είναι μια παράμετρος κανονικοποίησης. Οι παρενθέσεις εντός μιας λέξης αντιστοιχούν στον κιβωτισμό των υπογραφημάτων. Κάθε τέτοια λέξη οδηγεί σε μια σειρά Laurent στην παράμετρο ε. Το σύνολο, A, των λέξεων με παρενθέσεις αποκτά την δομή διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα των ρητών αριθμών, $\angle$. Προς τούτο, ορίζεται μια μονάδα, η μηδενική λέξη, $e \square (\ )$, μια πράξη πολλαπλασιασμού, $m: A\otimes A \rightarrow A$, και μια απεικόνιση συμβολιζόμενη με $E: \angle \rightarrow A$, με τις εξής ιδιότητες για κάθε $X, Y \in A$, $\forall q \in \angle$:

$$eX \square Xe \square X$$

$$m[X\otimes Y] \square XY \square YX$$

$$E(q) \square qe.$$

Εφ΄ όσον εκείνο που ενδιαφέρει είναι οι αποκλίνοντες όροι, ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας: $X \sim Y$ εάν και μόνον εάν $\lim_{ħ\rightarrow 0}\lim_{ε\rightarrow 0}[X-Y] \square 0$. Τότε, η *απεικόνιση επανακανονικοποίησης* είναι ένας ενδομορφισμός, $R : A \rightarrow A$, τέτοιος ώστε να ισχύει: $[R(X) - X] \sim 0$. Ο χώρος A, στην συνέχεια, γίνεται άλγεβρα Hopf, έστω H_R, εάν εφοδιαστεί με:

α) Μια συνμονάδα, $\bar{e}: A \rightarrow \angle$, με:

$$\bar{e}[e] \square 1$$

$$\bar{e}[X] \square 0,\ \forall X \neq e \in A.$$

β) Ένα συνγινόμενο, $Δ: A \rightarrow A\otimes A$, με:

$$Δ[e] \square e\otimes e$$

$$Δ[(x_i)] \square R[(x_i)]\otimes e + e\otimes(x_i)$$

$$Δ[XY] \square Δ[X]Δ[Y]$$

$$Δ[(Xx_i)] \square R[(Xx_i)]\otimes e + e\otimes(Xx_i) + B_{(x_i)}[P_L[Δ[(X)]]],$$

όπου οι απεικονίσεις $B_{(x_i)}$, P_L: $A \otimes A \to A \otimes A$ είναι:

$$B_{(x_i)}[X \otimes Y] \square X \otimes (Yx_i)$$

$$P_L \square (id - E \bullet \bar{e}) \otimes id,$$

id: η ταυτοτική απεικόνιση

$$\Delta(R[X]) \square \Delta[X\}.$$

Με τον περιοριστικό όρο για την απεικόνιση R :

$$R[\Pi_i R[X_i] \Pi_j Y_j] \square R[\Pi_i X_i \Pi_j Y_j],$$

αποδεικνύεται ότι τα ē και Δ ικανοποιούν τις συνθήκες για να είναι συν-μονάδα και συν-προσεταιριστικό συν-γινόμενο, αντιστοίχως. Το Δ δεν είναι συν-μεταθετικό.

γ) Έναν αντίποδα, S: $A \to A$, με:

$$S[e] \square e$$

$$S[(x_i)] \square -(x_i)$$

$$S[R[(x_i)]] \square -R[(x_i)]$$

$$S[XY] \square S[Y]S[X]$$

$$S[(Xx_i)] \square -(Xx_i) - m[(id \otimes S)P_2(\Delta[(Xx_i)])]$$

$$S[R[(Xx_i)]] \square -R[(Xx_i) + m[(S \otimes id)P_2(\Delta[(Xx_i)])]],$$

όπου $P_2 \square (id - E \bullet \bar{e}) \otimes (id - E \bullet \bar{e})$.

Αυτά σημαίνουν ότι, για το αποκλίνον γράφημα που αντιστοιχεί στην λέξη με παρενθέσεις X, ο συνολικός αντισταθμιστικός όρος, Z_X, ισοδυναμεί με τον *υπολογισμό του αντίποδα* του R[X]. Η επανακανονικοποιημένη πεπερασμένη ποσότητα που προκύπτει, είναι: $m[(S\otimes id)\Delta[X]]$. Με αυτόν τον τρόπο, η άλγεβρα Hopf, H_R, «***προσφέρει το εννοιολογικό πλαίσιο για την κατανόηση των περιπλοκών του τύπου τού Zimmermann για τα δάση***» ([132], έμφαση δική μου). Το εντυπωσιακό είναι ότι, όπως ανέφερα προηγουμένως, η H_R σχετίζεται στενά με τρόπο αναπάντεχο με μιαν άλλην άλγεβρα Hopf, η οποία προέκυψε αυτή την φορά από την μελέτη ενός προβλήματος υπολογισμού του δείκτη (index) των εγκάρσιων υποελλειπτικών τελεστών σε φυλλωσιές (foliations), στα πλαίσια της μη μεταθετικής γεωμετρίας τού Connes [133]. Σε αυτήν την περίπτωση, η μεταγραφή του προβλήματος σε όρους άλγεβρας Hopf «*προσέφερε την ελλείπουσα* ***οργανωτική αρχή***» ([133], έμφαση δική μου).

9.3 Οι πολλές όψεις της τεχνικής: το πρόβλημα Riemann-Hilbert

Η σχέση αυτής της δεύτερης άλγεβρας Hopf, έστω H_T, με την άλγεβρα των γραφημάτων, H_R, διευκρινίστηκε σε μια σειρά κοινών εργασιών των Connes και Kreimer. Το συμπέρασμα μπορεί να εκτεθεί όσο γίνεται απλούστερα εάν προσεγγίσουμε την άλγεβρα H_T στην περίπτωση φυλλωσιάς με συνδιάσταση 1 (η άλγεβρα εξαρτάται από την συνδιάσταση της φυλλωσιάς) [132]. Σε αυτήν την περίπτωση, σχηματίζεται μια άλγεβρα Lie ως το γραμμικό παραγόμενο (span) γεννητόρων X, Y, δ_n, με $n \geq 1$, που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$[Y, X] = X,\ [Y, \delta_n] = n\delta_n,\ [\delta_n, \delta_m] = 0\ \forall n, m \geq 1,\ [X, \delta_n] = \delta_{n+1}\ \forall n \geq 1.$$

Τότε, η H_T είναι η περιβάλλουσα άλγεβρα αυτής της άλγεβρας Lie, και είναι άλγεβρα Hopf με συνγινόμενο Δ :

$$\Delta Y = Y\otimes 1 + 1\otimes Y,\ \Delta X = X\otimes 1 + 1\otimes X + \delta_1\otimes Y,\ \Delta\delta_1 = \delta_1\otimes 1 + 1\otimes\delta_1,$$

όπου το $\Delta\delta_n$ ορίζεται επαγωγικά και χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\Delta(h_1 h_2) = \Delta h_1 \Delta h_2\ \forall h_1, h_2 \in H_T.$$

Ο αντίποδας, S, ορίζεται ως το αντίστροφο του στοιχείου $L(a) = a$ στην άλγεγρα των γραμμικών απεικονίσεων $L: H_T \to H_T$, με το γινόμενο: $(L_1 * L_2)(a) = \Sigma L_1(a_{(1)}) L_2(a_{(2)})$, και $\Delta a = \Sigma a_{(1)} \otimes a_{(2)}$, $a \in H_T$. Το S είναι ο μοναδικός αντιαυτομορφισμός τής H_T που ικανοποιεί:

$$S(Y) = -Y,\ S(\delta_1) = -\delta_1,\ S(X) = -X + \delta_1 Y.$$

Έστω τώρα, για κάθε n, η υποάλγεβρα H_n που γεννάται από τα $\delta_1, \dots, \delta_n$. Θα είναι: $H_n = \{P(\delta_1, ..., \delta_n) \mid P$: πολυώνυμο σε n μεταβλητές$\}$. Στην συνέχεια θεωρούμε την άλγεβρα Lie, A_n^1, των jets τάξης (n+1) των διανυσματικών πεδίων στην γραμμή των πραγματικών αριθμών: $f(x)\partial/\partial x$, με $f(0) = f'(0) = 0 \mathrm{mod} x^{n+2}\partial/\partial x$. Τότε, η H_n είναι η δυική της περιβάλλουσας άλγεβρας $Y(A_n^1)$: $H_n = Y(A_n^1)^*$. Οι άλγεβρες A_n^1 αποτελούν προβολικό σύστημα με όριο την άλγεβρα Lie, A^1, των τυπικών διανυσματικών πεδίων που μηδενίζονται στο 0 στην τάξη 2. Συνεπώς, το επαγωγικό όριο, H^1, των αλγεβρών H_n είναι $H^1 = Y(A^1)^*$. Η A^1 είναι βαθμωτή άλγεβρα Lie, με μια μονοπαραμετρική ομάδα αυτομορφισμών: $\alpha_t(Z_n) = e^{nt} Z_n$, η οποία επεκτείνεται στην $Y(A^1)$ και έχει ανάστροφο (transpose) στην $Y(A^1)^*$ ως εξής:

$$\langle [Y, P]\,,\, a \rangle = \langle P\,,\, \partial/\partial t\ \alpha_t(a)_{t=0} \rangle\ \forall P \in H^1,\ a \in Y(A^1)$$

$(\alpha_t)^{\sim}$: $(\alpha_t)^{\sim}(\delta_n) = e^{nt}\delta_n$, « ~ » σημαίνει ανάστροφο.

Η A^1 επεκτείνεται στην άλγεβρα Α με την προσθήκη ενός στοιχείου Z_{-1}: $[Z_{-1}, Z_n] = Z_{n-1}\ \forall n \geq 2$, και τον ορισμό ενός στοιχείου Z_0: $[Z_{-1}, Z_1] = Z_0$, $[Z_0, Z_k] = kZ_k$. Η Α είναι η άλγεβρα των τυπικών διανυσματικών πεδίων με: $Z_0 = x\partial/\partial x$, $Z_{-1} = \partial/\partial x$, $Z_n = (x^{n+1})/(n+1)!\ \partial/\partial x$. Στην βάση των ανωτέρω, αποδεικνύεται [133] ότι, εάν G_2 είναι η ομάδα των τυπικών διαφορομορφισμών της γραμμής των πραγματικών αριθμών ∇, της μορφής $\psi(x) = x + o(x)$, και εάν, για κάθε n, γ_n είναι το συναρτησιακό επί του G_2: $\gamma(\psi^{-1}) = (\partial_x^n \log\psi'(x))_{x=0}$, τότε η ισότητα $\Theta(\delta_n) = \gamma_n$ ορίζει έναν κανονικό ισομορφισμό της άλγεβρας Hopf H^1 με την άλγεβρα Hopf των συντεταγμένων στην ομάδα G_2.

Από την άλλη κατεύθυνση τώρα, η άλγεβρα των γραφημάτων Feynman μπορεί να αναδιατυπωθεί με την έννοια του *ριζωμένου δέντρου* (πρβλ. §8.4). Ένα ριζωμένο δέντρο, Τ, είναι ένα πεπερασμένο, συνδεδεμένο, απλώς συνδεδεμένο, μονοδιάστατο simplicial σύμπλεγμα, με ένα σημείο βάσης, ∗, την ρίζα: $* \in T^{(0)}$ □ {κορυφές τού Τ}. Ο βαθμός του δέντρου Τ ορίζεται ως deg(T) □ card$T^{(0)}$. Εάν περιοριστούμε σε κλάσεις ισομορφίας, θα έχουμε πεπερασμένο σύνολο ριζωμένων δέντρων Τ με deg(T) □ n ∀n. Σε ένα δέντρο, ορίζεται μια *στοιχειώδης τομή* (cut) ως η τομή σε μία μοναδική ακμή. Μια *αποδεκτή τομή* σχηματίζεται από μια κατανομή στοιχειωδών τομών τέτοια, ώστε κάθε διαδρομή που συνδέει οποιαδήποτε κορυφή του δέντρου με την ρίζα να συναντά το πολύ μία στοιχειώδη τομή. Μια αποδεκτή τομή, C, απεικονίζει ένα δέντρο, Τ, σε ένα μονώνυμο δέντρων C: T → C(T) □ $\prod_{i=0}^{n+1} T_{j_i}$, εάν η τομή C περιέχει n στοιχειώδεις τομές. Μόνον ένα από τα δέντρα T_{j_i} περιέχει την ρίζα τού Τ, και συμβολίζεται με $R^C(T)$. Το μονώνυμο που σχηματίζουν οι υπόλοιποι n–1 παράγοντες συμβολίζεται με $P^C(T)$. Ας συμβολίσουμε με Σ_n το σύνολο των δέντρων βαθμού ≤ n modulo ισομορφία, και με H_n την πολυωνυμική αντιμεταθετική άλγεβρα με γεννήτορες δ_T, παραμετριζόμενους με τα δέντρα $T \in \Sigma_n$. Τότε ορίζεται στην H_n ένα συνγινόμενο Δ:

$$\Delta\delta_T \; \square \; \delta_T \otimes 1 + 1 \otimes \delta_T + \sum_C \Big(\prod_{P^C(T)} d_{T_i} \Big) \otimes d_{R^C(T)} \,,$$

όπου το άθροισμα είναι πάνω σε όλες τις μη τετριμμένες (C≠∅) αποδεκτές τομές C του Τ, και το γινόμενο είναι πάνω σε όλους τους τετμημένους κλάδους. Το Δ είναι συνπροσεταιριστικό. Η άλγεβρα H_R είναι: H_R □ $\cap H_n$.

Οι Connes και Kreimer [133] αποδεικνύουν ότι συνδέεται με ένα πρόβλημα συνομολογίας Hochschild, με τον εξής τρόπο: Έστω μια άλγεβρα Α με επαύξηση (augmentation)[51] ε, και ένας module M, ο οποίος ως διανυσματικός χώρος ισούται με την Α. Μια αριστερά δράση τής Α στον Μ θα είναι (a, ξ) ↦ aξ ∀a ∈ A, ξ ∈ M. Μια δεξιά τέτοια δράση είναι (ξ, a) ↦ ξε(a), ξ ∈ M, a ∈ A. Συμβολίζουμε με $Z_\varepsilon^n(A)$, $B_\varepsilon^n(A)$, $H_\varepsilon^n(A)$, τους αντίστοιχους συνκύκλους, συν-όρια, συνομολογία τής Α με συντελεστές στον Μ. Για παράδειγμα, ένας 1-συνκύκλος θα είναι μια γραμμική απεικόνιση D: A → A, με D(ab) □ D(a)ε(b) + aD(b) ∀a, b ∈ A. Ακολούθως, έστω μια άλγεβρα Hopf, H. Σε αυτήν, ορίζεται μια n-συναλυσίδα, L, ως μια γραμμική απεικόνιση L: H → H⊗…⊗H (n φορές). Ο τελεστής συν-ορίου b, είναι:

$$(bL)(a) \; \square \; (\mathrm{id}\otimes L)\Delta(a) - \Delta_{(1)}L(a) + \Delta_{(2)}L(a) + \ldots +$$

[51] Ουσιαστικά, είναι συν-μονάδα.

$$+ (-1)^j \Delta_{(j)} L(a) + \ldots + (-1)^n \Delta_{(n)} L(a) + (-1)^{n+1} L(a) \otimes 1,$$

όπου οι δείκτες (j) δηλώνουν πού εφαρμόζει το Δ. Οι αντίστοιχες κλάσεις συνομολογίας, συνκύκλοι κ.λπ. είναι $H_\varepsilon^n(H^*)$, $Z_\varepsilon^n(H^*)$ κ.λπ. Τότε υπάρχει ένα ζεύγος (H, L), μοναδικό modulo ισομορφία, όπου H είναι μια μεταθετική άλγεβρα Hopf και όπου $L \in Z_\varepsilon^1(H^*)$, το οποίο είναι καθολικό με την εξής έννοια: Για κάθε άλλο ζεύγος (H_1, L_1), όπου H_1 είναι μια άλλη μεταθετική άλγεβρα Hopf και $L_1 \in Z_\varepsilon^1(H_1^*)$, θα υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός αλγεβρών Hopf, $\rho: H \to H_1$, τέτοιος ώστε $L_1 \bullet \rho = \rho \bullet L$. Αυτό το αποτέλεσμα εφαρμόζεται στην άλγεβρα Hopf των ριζωμένων δέντρων, H_R, με L την απεικόνιση $L(d_{T_1} \cdots_{T_m}) = \delta_T \ \forall T_j \in \Sigma = \cap \Sigma_n$, και όπου T είναι το δέντρο που προκύπτει αν συνδεθεί ένα νέο σημείο βάσης στα σημεία βάσης των δέντρων T_j. Ο ανάστροφος $\rho^\sim$ του ως άνω μορφισμού ορίζει έναν ομομορφισμό αλγεβρών Lie από την μονοδιάστατη άλγεβρα Lie A_1^1 στην άλγεβρα Lie Λ^1 η οποία αντιστοιχεί (κατά το θεώρημα Milnor-Moore) στην μεταθετική άλγεβρα Hopf, H_R. Συγκεκριμένα, έστω Λ^1 το γραμμικό παραγόμενο των στοιχείων Z_T με δείκτες τα ριζωμένα δέντρα T. Ορίζεται μια πράξη $*$ στην Λ^1 ως εξής: $Z_{T_1} * Z_{T_2} = \sum_T n(T_1, T_2; T) Z_T$, όπου ο ακέραιος αριθμός $n(T_1, T_2; T)$ είναι ο αριθμός αποδεκτών τομών C με πληθάριθμο 1, με τρόπον ώστε ο τετμημένος κλάδος να είναι T_1 και ο εναπομένων κορμός να είναι T_2. Τότε, η αγκύλη $[Z_{T_1}, Z_{T_2}] = Z_{T_1} * Z_{T_2} - Z_{T_2} * Z_{T_1}$ ορίζει μια δομή άλγεβρας Lie στην Λ^1. Ακόμη, η άλγεβρα Hopf H_R είναι δυική της περιβάλλουσας άλγεβρας της άλγεβρας Lie Λ^1. Τέλος, η ισότητα: βαθμός του Z_T = αριθμός κορυφών τού T, ορίζει μια βάθμωση στην άλγεβρα Λ^1.

H άλγεβρα Hopf H_R επεκτείνεται, με την προσθήκη των γεννητόρων X, Y της άλγεβρας Lie της affine ομάδας που συναντήσαμε προηγουμένως. Θα είναι $[Y, \delta_T] = \deg(T)\delta_T$, σύμφωνα με την βάθμωση της προηγούμενης παραγράφου. Ο μεταθέτης με τον γεννήτορα X γεννά μια παραγώγιση, N, της H_R, που προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο από: $N\delta_T = \Sigma \delta_{T'}$, όπου τα δέντρα T' παράγονται με προσθήκη μίας κορυφής και μίας ακμής στο T με όλους τους δυνατούς τρόπους χωρίς αλλαγή του σημείου βάσης. Ο αριθμός των προσθετέων στο άθροισμα είναι deg(T). Επεκτείνουμε στην συνέχεια την άλγεβρα Λ^1 προσάπτοντας δύο στοιχεία, Z_0 και Z_{-1}, έτσι ώστε: $[Z_{-1}, Z_1] = Z_0$, $[Z_0, Z_T] = \deg(T) Z_T$, $[Z_{-1}, Z_T] = \Sigma n(T ; T_1) Z_{T_1} \ \forall T$, $\deg(T) > 1$, όπου το $n(T ; T_1)$ ισούται με το πόσες φορές το T προκύπτει με πρόσθεση μίας κορυφής και μίας ακμής στο T_1. H άλγεβρα Lie, Λ, που προκύπτει είναι επέκταση της άλγεβρας Lie των τυπικών διανυσματικών πεδίων με $Z_0 = x\, \partial/\partial x$, $Z_{-1} = \partial/\partial x$, $Z_n = (x^{n+1})/(n+1)!\ \partial/\partial x$. Αυτό συνάδει με το ακόλουθο αποτέλεσμα που προκύπτει από όλα τα προηγηθέντα: Οι ισότητες: $\Theta(Z_T) = n(T) Z_n$, $\Theta(Z_i) = Z_i$, $i = 0, 1$, όπου n(T) ισούται με το πόσες φορές το δ_T εμφανίζεται στην παράσταση $N^{\deg(T)-1}(\delta_1)$, ορίζει έναν επί (surjective) ομομορφισμό αλγεβρών Lie από την Λ στην A.

Συμπερασματικά, η άλγεβρα Hopf, H_R, μπορεί να θεωρηθεί ως η άλγεβρα των συντεταγμένων σε μια μηδενοδύναμη τυπική ομάδα Γ, η άλγεβρα Lie της οποίας είναι η βαθμωτή άλγεβρα Lie Λ^1. Εάν καθοριστεί ένα σώμα k, τα στοιχεία της ομάδας Γ_k θα είναι οι χαρακτήρες της άλγεβρας $H_R \otimes_Q k$. Τέτοιοι χαρακτήρες αντιστοιχούν στα ομαδόμορφα στοιχεία u (group-like –δηλαδή εκείνα για τα οποία $\Delta u = u \otimes u$) μιας κατάλληλης συμπλήρωσης της περιβάλλουσας άλγεβρας της Λ^1. Εάν το σώμα k είναι το σώμα των τυπικών δυναμοσειρών σε μια μεταβλητή ε, τότε τα σημεία τής Γ_k είναι οι ομομορφισμοί από την H_R στο k. Η απεικόνιση η οποία συνδέει κάθε «γυμνό» (όχι επανακανονικοποιημένο) διάγραμμα Feynman, Γ, με την αντίστοιχη σειρά Laurent, είναι *ακριβώς ένας τέτοιος χαρακτήρας*. Με αυτόν τον τρόπο, συμπεραίνουν οι Connes και Kreimer [132], επιτυγχάνεται η «*αναγωγή με την ως άνω νοηματική μαθηματική δομή της αντιστροφής στην Γ, του υπολογισμού της επανακανονικοποίησης στην κβαντική θεωρία πεδίου, στα πρωτογενή στοιχεία της άλγεβρας Hopf, δηλαδή διαγράμματα Feynman χωρίς υποαποκλίσεις*». Έτσι, λοιπόν, οι «*επίπονες λεπτομέρειες των αναπτυγμάτων με την μέθοδο των διαταραχών στην κβαντική θεωρία πεδίων κρύβουν μιαν όμορφη αλγεβρική δομή στο υπόβαθρο, η οποία δεν είναι ορατή εκ πρώτης όψεως*» [134].

Παραμένει, εν τούτοις, ένα σκοτεινό σημείο. Λείπει η «*κατανόηση, σε νοηματικό επίπεδο, του συνεστραμμένου* (twisted) *αντίποδα*» [134], του αντίποδα δηλαδή που στον ορισμό του περιλαμβάνει την απεικόνιση της επανακανονικοποίησης, R. Η κατανόηση «*της εννοιολογικής φύσης της επανακανονικοποίησης*» [133] συνυφαίνεται, για άλλη μια φορά, με ιδιαίτερα κομψό τρόπο με ένα μαθηματικό πλαίσιο. Προς τούτο, οι Connes και Kreimer αναδιατυπώνουν [127] την ανάλυσή τους για την άλγεβρα Hopf των γραφημάτων, αυτή την φορά σε άμεση αναφορά προς τα διαγράμματα Feynman και το φυσικό τους περιεχόμενο. Δηλαδή, στην ανίχνευση των αλγεβρικών δομών που συναρθρώνουν την συνδυαστική των γραφημάτων, προβάλλουν τώρα παράμετροι, όπως μάζες, m_i, και μεταβλητές, όπως ορμές, p_i, με άλλα λόγια φυσικά μεγέθη που ενέχονται στα ολοκληρώματα για τον υπολογισμό παρατηρήσιμων μεγεθών. Στοιχειώδης έννοια είναι τα γραφήματα που είναι μη αναγώγιμα σε σχέση με ένα σωματίδιο (one-particle-irreducible): είναι εκείνα τα οποία είναι συνδεδεμένα και δεν μπορούν να γίνουν μη συνδεδεμένα αν αφαιρεθεί μία ακμή. Σε κάθε τέτοιο γράφημα, Γ, αντιστοιχεί ένας χώρος δοκιμαστικών συναρτήσεων (test functions), $\Sigma(E_\Gamma)$, ο οποίος συνδέεται με τις εξωτερικές γραμμές του γραφήματος: $E_\Gamma = \{(p_i)_{i=1,\ldots,n} \mid \Sigma p_i = 0\}$. Τότε, η *εξωτερική δομή* του γραφήματος δίδεται από μια συνεχή γραμμική απεικόνιση που είναι η κατανομή σ_Γ: $\Sigma(E_\Gamma) \rightarrow \Re$

($\Re$: μιγαδικοί αριθμοί). Εάν $X \in L \square \bigoplus_{G} \Sigma(E_\Gamma)$, η γραμμική μορφή Z_X στην άλγεβρα H των γραφημάτων Γ θα είναι $\langle \Gamma , Z_X \rangle \square \langle \sigma_\Gamma , X_\Gamma \rangle$, όταν το Γ είναι μη αναγώγιμο με την ως άνω έννοια, αλλιώς $\langle \Gamma , Z_X \rangle \square 0$. Το σ_Γ είναι η κατανομή που δίνει την εξωτερική δομή τού Γ και το X_Γ είναι η αντίστοιχη συνιστώσα τού X. Με αυτά τα δεδομένα, και λαμβάνοντας υπ' όψιν τους τύπους στοιχειωδών γραφημάτων, ο γραμμικός χώρος L αποκτά δομή άλγεβρας Lie. Το περιεχόμενο του θεωρήματος Milnor-Moore σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι η άλγεβρα H είναι δυική της περιβάλλουσας άλγεβρας Y(L). Επίσης, εάν G είναι η ομάδα των χαρακτήρων, φ, της H, δηλαδή των απεικονίσεων $\varphi: H \to \Re$, $\varphi(XY) \square \varphi(X)\varphi(Y)$ $\forall X, Y \in H$, τότε ένα φυσικό σύστημα affine συντεταγμένων στην ομάδα G δίδεται από τον γραμμικό υποχώρο τής H που παράγεται από την μονάδα και τα μη αναγώγιμα γραφήματα. Εκείνο που έχει επιτευχθεί ουσιαστικά είναι μια απεικόνιση των γραφημάτων στα στοιχεία της ομάδας G που ορίζεται με τον ως άνω τρόπο. Και αυτό ακριβώς συνιστά το σκηνικό για την επίκληση του προβλήματος των Riemann-Hilbert.

Αυτό το πρόβλημα κατάγεται από το $21^{ο}$ πρόβλημα του Hilbert: «*Να αποδειχθεί ότι υπάρχει πάντα μια γραμμική διαφορική εξίσωση Fuchs με δεδομένα ιδιόμορφα σημεία και δεδομένη μονοδρομία*». Το πρόβλημα έχει πολλές εναλλακτικές διατυπώσεις. Μία από αυτές είναι ότι ισοδυναμεί με την ύπαρξη της λεγόμενης *ανάλυσης* (decomposition) *Birkhoff*. Με αυτήν την μορφή, συνδέεται με την ταξινόμηση ολόμορφων διανυσματικών δεσμών πάνω στην σφαίρα Riemann, $\Re P^1$ (= προβολικός μιγαδικός χώρος μίας διάστασης). Εάν $C \subset \Re P^1$ είναι μια λεία απλή καμπύλη, C_- η συνιστώσα του συμπληρώματος της C που περιέχει το ∞, C_+ η άλλη συνιστώσα, και $\gamma(z)$, $z \in \Re$, ένας βρόχος με τιμές στην ομάδα $GL_n(\Re)$, η ανάλυση Birkhoff σημαίνει ότι η $\gamma(z)$ γράφεται ως $\gamma(z) \square \gamma_-(z)^{-1}\gamma_+(z)$, στην οριακή περίπτωση $z \in C$. Δηλαδή, τα $\gamma_\pm$ είναι οριακές τιμές ολόμορφων απεικονίσεων $\gamma_\pm: C_\pm \to GL_n(\Re)$. Με την συνθήκη κανονικοποίησης, $\gamma_-(\infty) \square 1$, η ανάλυση αυτή είναι μοναδική. Εάν E είναι η ολόμορφη διανυσματική δέσμη επί της $\Re P^1$ που συνδέεται με την καμπύλη γ, δηλαδή η δέσμη με ολικό χώρο $(C_+ \square \Re^n) \cap_\gamma (C_- \square \Re^n)$, τότε η E αναλύεται κατά Birkhoff-Grothendieck σε $E \square \oplus L_j$, όπου L_j είναι ολόμορφες γραμμικές δέσμες. Η ύπαρξη της ανάλυσης Birkhoff ισοδυναμεί με τον μηδενισμό των αριθμών Chern, $c_1(L_j)$, αυτών των δεσμών. Η γενίκευση από την ομάδα $GL_n(\Re)$ σε τυχούσα ομάδα G είναι δυνατή. Εάν η G είναι μια απλώς συνδεδεμένη μηδενοδύναμη μιγαδική ομάδα Lie, η ύπαρξη και μοναδικότητα της ανάλυσης Birkhoff ισχύει για κάθε καμπύλη γ. Όταν η $\gamma: C \to G$ επεκτείνεται σε ολόμορφο βρόχο: $C_+ \to G$, η ανάλυση Birkhoff θα είναι $\gamma_+ \square \gamma$, $\gamma_- \square 1$ [127, 135, 136]. Όπως τονίζουν οι Connes και Kreimer, «*Γενικά, για* $z \in C_+$, *η αποτίμηση* $\gamma \to \gamma_+(z) \in G$, *είναι μια* ***φυσιολογική αρχή για την εξαγωγή μιας πεπερασμένης τιμής από μιαν ιδιόμορφη έκφραση*** $\gamma(z)$. *Αυτή η εξαγωγή πεπερασμένων τιμών συμπίπτει με την αφαίρεση του τμήματος που περιέχει τον πόλο,* *όταν η* G *είναι η προσθετική ομάδα των μιγαδικών αριθμών* $\Re$*, και η* γ *είναι μερόμορφη εντός του* C_+ *με* z *την μόνη ιδιομορφία της*» ([127], έμφαση δική μου).

Η σύνδεση με το πρόβλημα της φυσικής γίνεται ως εξής. Κατ' αρχήν, αυτού του τύπου η νοηματοδότηση της επανακανονικοποίησης ευνοεί το σχήμα της ελάχιστης αφαίρεσης που αναφέρθηκε προηγουμένως, με την έννοια ότι αυτό το σχήμα εντάσσεται αρμονικά στο εννοιολογικό πλέγμα που οικοδομείται. Το ίδιο ισχύει και για το είδος της κανονικοποίησης (regularization) που χρησιμοποιείται. Ευνοείται με την ίδια έννοια η διαστασιακή κανονικοποίηση· αυτή γίνεται θεωρώντας τον αριθμό των χωροχρονικών διαστάσεων, D, ως μεταβλητή, και επεκτείνοντας με αναλυτικά συνεχή τρόπο από την τιμή D □ 4 σε μια μιγαδική τιμή, D □ $4 - 2z$, $z \in \Re$. Η μεταβλητή z είναι η παράμετρος κανονικοποίησης, που εμφανίζεται στην σειρά Laurent που προκύπτει από αυτήν την διαδικασία. Τα πρακτικά πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου κανονικοποίησης είναι πολλά. Αυτά, όμως, «*τώρα προσυπογράφονται από* ***μια νοηματική σκοπιά****. Η παρουσία μιγαδικών περιοχών…επιτρέπει στην επανακανονικοποίηση* ***να προαχθεί σε έννοια***» ([134], έμφαση δική μου). Σε αυτό το σημείο συγκλίνουν όλα όσα αναφέρθηκαν σχετικά προηγουμένως [136]. Για την ομάδα G που ορίστηκε στην βάση της άλγεβρας Hopf των γραφημάτων Feynman, Γ, θα υπάρχει ένας και μοναδικός βρόχος $\gamma(z) \in G$, $z \in \Re$, $|z - D| < 1$, $z \neq D$, όπου z είναι η παράμετρος κανονικοποίησης. Εάν U(Γ) είναι η «γυμνή», μη επανακανονικοποιημένη έκφραση για το γράφημα Γ, τότε οι συντεταγμένες του βρόχου $\gamma(z)$ επί της G θα δίδονται από την U(Γ), στην οποία ο αριθμός χωροχρονικών διαστάσεων, όπου εμφανίζεται, αντικαθίσταται από την παράμετρο z. Οπότε, η επανακανονικοποιημένη τιμή ενός φυσικού μεγέθους O λαμβάνεται εάν, στο ανάπτυγμα του O κατά την μέθοδο των διαταραχών, το $\gamma(D)$ αντικατασταθεί από το $\gamma_+(D)$, όπου $\gamma(z)$ □ $\gamma_-(z)^{-1}\gamma_+(z)$ είναι η ανάλυση Birkhoff του βρόχου $\gamma(z)$ σε τυχόντα κύκλο με κέντρο D και ακτίνα μικρότερη της μονάδας. Ακόμη περισσότερο. Η ομάδα G είναι βαθμωτή. Οι βαθμίδες προέρχονται από εκείνες της βαθμωτής άλγεβρας Hopf των γραφημάτων Γ, οι οποίες ορίζονται βάσει του αριθμού των βρόχων σε ένα γράφημα Γ. Αυτό παίρνει την εξής μορφή. Υπάρχει μια ομάδα αυτομορφισμών, θ_t, $t \in \nabla$, της G. Ο αριθμός που κάνει την G βαθμωτή είναι Y □ $(\partial/\partial t\ \theta_t)_{t□0}$ [135, 136]. Παράλληλα, εάν αλλάξουμε μεταβλητή σε ε □ 2z, αποδεικνύεται ότι η πράξη: $\gamma(\varepsilon) \to \theta_{t\varepsilon}(\gamma(\varepsilon))$ δεν μεταβάλλει την συνιστώσα $\gamma_-(\varepsilon)$. Δηλαδή, η έκφραση $\gamma_-(\varepsilon)\theta_{t\varepsilon}(\gamma_-(\varepsilon)^{-1})$ συγκλίνει για $\varepsilon \to 0$. Το όριο ορίζει τότε μια μονοπαραμετρική υποομάδα, F_t, $t \in \nabla$, της G, η οποία έχει γεννήτορα β □ $(\partial/\partial t\ F_t)_{t□0}$. Ο β συνδέεται με τον αριθμό Y, μέσω του υπολοίπου (residue) το οποίο ορίζεται ως: $\mathrm{Res}_{\varepsilon□0}\gamma$ □ $-(\partial/\partial u\ \gamma_-(1/u))_{u□0}$, με την σχέση: β □ YResγ. Αυτή η σχέση είναι αξιοσημείωτη, όπως φαίνεται στην περίπτωση ενός πεδίου με μηδενική μάζα. Με την βοήθεια της σχέσης μεταξύ της άλγεβρας Hopf των συντεταγμένων στην ομάδα των τυπικών διαφορομορφισμών τού $\Re$ –αυτήν που σχετίζεται με την εργασία των Connes και Moscovici [133]–, αφ΄ ενός, και της άλγεβρας Hopf των γραφημάτων, αφ΄ ετέρου, αποδεικνύεται ότι ο γεννήτορας β αντιστοιχεί με συγκεκριμένον τρόπο στην γνωστή συνάρτηση β της φυσικής [135]. Ακόμη, αυτή η μαθηματική πραγμάτευση οδηγεί σε τύπους σκέδασης (scattering), σε μια «*νοηματική απόδειξη*» της ύπαρξης της έννοιας της ομάδας επανακανονικοποίησης, με τους όρους της ομάδας G και της ανάλυσης Birkhoff [135, 136, 137]. Αυτή η τελευταία μπορεί μάλιστα να συνδεθεί άμεσα με την ομάδα Diff(X) των τυπικών διαφορομορφισμών του χώρου X των αδιάστατων σταθερών σύζευξης της φυσικής θεωρίας. Το αποτέλεσμα, τότε, δεν εξαρτάται από την ομάδα G ή την άλγεβρα H. Η γεωμετρική σημασία είναι η εξής: Εάν θεωρήσουμε πραγματικούς και όχι τυπικούς διαφορομορφισμούς μιας μιγαδικής πολλαπλότητας X, τότε ο βρόχος $\gamma(\varepsilon) \in \mathrm{Diff}(X)$ παρέχει τα αρχικά δεδομένα για την κατασκευή μιας μιγαδικής δέσμης, $P \square (S^{+}\square X)\cap_{\gamma}(S^{-}\square X)$, πάνω στην σφαίρα $S \square \Re P^{1} \square S^{+}\cap S^{-}$, με ένα X: $X \to P \xrightarrow{p} S$. Το νόημα της ανάλυσης Birkhoff είναι τότε ένας ισομορφισμός της δέσμης P με την τετριμμένη δέσμη $S\square X$ [135].

9.4 Συνάντηση με την κβάντωση μέσω παραμορφώσεων

Είναι πράγματι εντυπωσιακό ότι η αλγεβρική δομή της επανακανονικοποίησης, εκτός από την άλγεβρα που εμφανίζεται στην μελέτη των Connes και Moscovici [133], συνδέεται με φαινομενικά άσχετους μεταξύ τους τομείς [118]. Κατ’ αρχάς, η προσέγγιση προσαρμόζεται στην άλλη καθιερωμένη μέθοδο κανονικοποίησης –πλην εκείνης των BPHZ–, δηλαδή την μέθοδο των Epstein και Glaser. Αυτή επιτυγχάνει αυστηρότερη μαθηματική θεμελίωση, αντικαθιστώντας τα ασαφώς οριζόμενα χρονολογικά διατεταγμένα γινόμενα με μιαν ιεραρχία κατανομών με τιμές τελεστές [138]. Εξετάζεται επίσης η εφαρμογή της μεθόδου σε διάφορους τύπους αλληλεπιδρώντων κβαντικών πεδίων [139]· εγκαθιδρύεται άμεση σχέση με την θεωρία επαναλαμβανομένων (iterated) ολοκληρωμάτων [140]· ίσως το πιο χαρακτηριστικό είναι ότι, η ίδια άλγεβρα Hopf και η ίδια ομάδα G ανακαλύφθηκαν ανεξάρτητα, η τελευταία με το όνομα «ομάδα Butcher», στην ανάλυση των επονομαζομένων μεθόδων Runge-Kutta στην αριθμητική ολοκλήρωση [141]. Δεδομένου ότι συναντήσαμε τις σχετικές έννοιες προηγουμένως, δεν πρέπει να παραλείψω το γεγονός ότι η συνδυαστική των γραφημάτων μπορεί να μεταγραφεί στο πλαίσιο της θεωρίας των operads, και ειδικότερα μιας operad των ενθέσεων (insertion operad) [142]. Παρέθεσα αρκετές λεπτομέρειες αυτού που μπορεί να χαρακτηριστεί ως ανακάλυψη από τους Connes, Kreimer και τους συνεργάτες τους. Διότι αξίζει να παρακολουθήσει κανείς, πώς μια υπολογιστική τεχνική της φυσικής, με τους κανόνες της, τα σύμβολά της και τις συμβάσεις της, εγκατεστημένη στο καίριο σημείο συνάντησης της θεωρητικής πρόβλεψης με τον πειραματικό έλεγχο, αναπλάθεται έτσι ώστε να διαφανεί μια εσωτερική ανατομία, επιδεχόμενη επένδυση με τις έννοιες ενός καλώς ορισμένου μαθηματικού πλαισίου. Αυτή η εξέλιξη ανοίγει βέβαια καινούργια κεφάλαια έρευνας στην θεωρία των αλγεβρών Hopf και γύρω από την επανακανονικοποίηση στις κβαντικές θεωρίες πεδίου. Φυσικά, πολλά προβλήματα παραμένουν ανοικτά, σχετικά με τις θεωρίες βαθμίδας, τις περιπλοκές από την παρουσία μητρών γ, καθώς και τις περιπτώσεις που δεν αντιμετωπίζονται με την μέθοδο των μικρών διαταραχών [136]. Στο σημείο αυτό, όμως, σημειώνω ότι έχουμε μια σημαντική, όσο και γόνιμη συνάντηση. Η νοηματοδοτημένη με αυτόν τον τρόπο πρακτική της σύγχρονης κβαντικής θεωρίας πεδίων συναντάται με την ανασημασιοδοτημένη διαδικασία κβάντωσης, εσωτερικευμένη στο πλαίσιο των κβαντικών πεδίων, όπως την είδαμε στην βάση των εργασιών τού Kontsevich. Πράγματι, ο τύπος τού Kontsevich που δίδει το *-γινόμενο σε μια παραμόρφωση της δομής της άλγεβρας των συναρτήσεων πάνω σε τυχούσα πολλαπλότητα Poisson, προσομοιάζει, όπως είδαμε, ένα ανάπτυγμα σε γραφήματα Feynman. Οι συναρτήσεις στάθμισης που εμφανίζονται στον τύπο, και συνδέονται με τα μαθηματικά αντικείμενα που ονομάζονται «περίοδοι» [116], είναι, όπως αποδείχθηκε [124], οιονεί διαδότες. Ακόμη, αποδεικνύεται [143] ότι, για κάθε θεωρία πεδίου που επιδέχεται επανακανονικοποίηση, ο τύπος για τα δάση γραφημάτων, καθώς και η ανάλυση Birkhoff, μπορούν να παρασταθούν ως παραμορφώσεις που οδηγούν σε ένα *-γινόμενο *à la* Kontsevich, και όπου ο διιαφορικός τελεστής στον τύπο τού Kontsevich είναι εκθετική συνάρτηση ενός αθροίσματος κατάλληλα οριζομένων γραφημάτων.

Προβάλλει ωστόσο τώρα μια βαθύτερη σχέση [136, 144], η οποία διαφαίνεται στις εργασίες των Connes – Kreimer και Kontsevich. Είναι δείγμα ενός γενικότερου φαινομένου: η απόδειξη ενός μαθηματικού ισχυρισμού *υπερβαίνει* το αποδεικτέο. Τούτο διότι στο τέλος της απόδειξης επιστρέφουμε φαινομενικά στην αφετηρία, αλλά η αφετηρία έχει τώρα δεχθεί μέσα της όλο τον πλούτο των αλληλοσυνδέσεων που υπεισέρχονται στην μέθοδο και την διαδρομή της απόδειξης.[52] Στην προκειμένη περίπτωση, αναπάντεχες συνδέσεις διαφαίνονται μέσω μιας περιήγησης σε αφηρημένους μαθηματικούς τομείς όπως είναι οι γενικεύσεις της θεωρίας Galois και η μελέτη της εξίσωσης Knizhnik-Zamolodchikov (KZ) και της επονομαζόμενης ομάδας Grothendieck-Teichmüller. Η εξίσωση KZ συνδέεται με την θεωρία σύμμορφων πεδίων και η μελέτη της αποκαλύπτει εξαιρετικά πλούσιες και σύνθετες σχέσεις, μεταξύ άλλων, με την θεωρία των αλγεβρών Hopf [98, σ. 527]. Η ομάδα Grothendieck-Teichmüller (GT) εισήχθη από τον Drinfeld [98, σ. 556] και αποτελεί ιδιαίτερο αντικείμενο έρευνας που σε όλη του την γενικότητα παραμένει ανοικτό. Συνδέεται με συγκεκριμένο τρόπο με την θεμελιώδη ομάδα μιας ποικιλίας (variety) η οποία είναι ισόμορφη με την προβολική ευθεία μείον τα σημεία 0, 1 και ∞. Βασικό χαρακτηριστικό της είναι η σχέση της με την θεωρία Galois, η οποία συνοπτικά αναφέρεται στα εξής. Με ∠, ℜ, $\overline{\mathrm{Q}}$,□συμβολίζουμε τα σώματα των ρητών, των μιγαδικών και των αλγεβρικών αριθμών επί του ∠, αντιστοίχως. Έστω k ένα σώμα με ∠ ⊆ k ⊆ ℜ. Κατ' αρχάς, η γενικευμένη έννοια του σημείου, που έχουμε ήδη

[52] Η εισαγωγή του συμβόλου «□» για το τέλος μιας απόδειξης από τον Bourbaki είναι ορθότερη του «όπερ έδει δείξαι» από αυτή την άποψη.

συναντήσει, έχει το αντίστοιχό της στην αλγεβρική γεωμετρία. Σύμφωνα με την *Nullstellensatz* του Hilbert [145], τα σημεία μιας αλγεβρικής ποικιλίας X αντιστοιχούν στα μέγιστα ιδεώδη ενός δακτυλίου Δ που ορίζεται βάσει του ιδεώδους των πολυωνύμων που μηδενίζονται στην X. Εάν η X ορίζεται στο σώμα ∠, το σύνολο X(k) των k-ρητών σημείων τής X είναι το σύνολο των ∠-γραμμικών αναπαραστάσεων του δακτυλίου Δ στο σώμα k. Η ομάδα Galois, $\mathrm{Gal}(\overline{Q}/\angle)$, απαρτίζεται από τους αυτομορφισμούς τού $\overline{Q}$ που αφήνουν αμετάβλητο το ∠ σημείο προς σημείο. Η ομάδα $\mathrm{Gal}(\overline{Q}/\angle)$ δρα ως ομάδα αυτομορφισμών της προβολικής πεπερασμένης συμπλήρωσης (pro-finite completion) της θεμελιώδους ομάδας τού $X(\Re)$: π□□$(X(\Re), x_0) = \lim\limits_{\leftarrow} \pi_1(X(\Re), x_0)/S$, όπου το x_0 είναι σημείο βάσης και το S διατρέχει όλες τις κανονικές (normal) υποομάδες πεπερασμένου δείκτη της θεμελιώδους ομάδας (δηλαδή, της πρώτης ομάδας ομοτοποίας) [98]. Το αξιοσημείωτο γεγονός είναι ότι η ομάδα $\mathrm{Gal}(\overline{Q}/\angle)$ είναι υποομάδα της ομάδας Grothendieck-Teichmüller, GT.

Εξ άλλου, μια μεταθετική άλγεβρα Hopf, H, επί ενός σώματος k μηδενικής χαρακτηριστικής έχει ένα γεωμετρικό αντίστοιχο. Είναι τα επονομαζόμενα affine σχήματα-ομάδες (group schemes). Είναι το σύνολο πρώτων ιδεωδών της άλγεβρας H, G = SpecH, εφοδιασμένο κατάλληλα με την δομή σχήματος [145]. Το G κληρονομεί επίσης δομή ομάδας από την δομή συν-άλγεβρας της H [136]. Ορίζεται έτσι ένας συναρτητής, G, που συνδέει τυχούσα μεταθετική άλγεβρα με μονάδα, A, ορισμένη επί του k, με μιαν ομάδα G(A), τα στοιχεία της οποίας είναι ομομορφισμοί των k-αλγεβρών H και A: H □ A. Επίσης, ενδιαφέρει η κατηγορία Rep_G των πεπερασμένης διάστασης γραμμικών αναπαραστάσεων του σχήματος-ομάδας G, η οποία έχει την δομή μιας ουδέτερης κατηγορίας Tannaka: Μια κατηγορία Tannaka επί ενός σώματος k χαρακτηριστικής μηδέν, ©, είναι μια k-γραμμική αβελιανή κατηγορία εφοδιασμένη με έναν τανυστικό συναρτητή ⊗: ©□© □ ©, που ικανοποιεί κατάλληλες συνθήκες και έχει ένα αντικείμενο μονάδα (δηλαδή, είναι τανυστική κατηγορία), και είναι ακόμη εφοδιασμένη με έναν συναρτητή ίνας επί ενός σχήματος Σ, δηλαδή έναν κατάλληλα οριζόμενο συναρτητή από την © στις πεπερασμένου βαθμού (rank) τοπικώς ελεύθερες δεσμίδες επί του Σ. Στην περίπτωση που το σχήμα Σ είναι ένα σημείο, Σ = Spec(k), ο συναρτητής ίνας απεικονίζει στην κατηγορία των πεπερασμένης διάστασης διανυσματικών χώρων. Η επονομαζόμενη αντιστοιχία Riemann-Hilbert που βρίσκεται στο επίκεντρο της εργασίας των Connes-Kreimer αφορά την ισοδυναμία μιας κλάσης ιδιόμορφων διαφορικών συστημάτων με τα δεδομένα μιας ορισμένης κλάσης αναπαραστάσεων και είναι μαθηματικό συμπέρασμα ευρύτατης εμβέλειας (ο Grothendieck την αποκαλούσε *le théorème du bon Dieu* [136]). Εν προκειμένω, αποδεικνύεται [136] ότι κάθε στοιχείο της άλγεβρας Lie, **g**, της ομάδας G αντιστοιχεί σε έναν ορισμένον επίπεδο σύνδεσμο (connection) μιας κύριας δέσμης ινών. Η δέσμη αυτή ενσωματώνει τα χαρακτηριστικά της φυσικής θεωρίας ως προς μια διαδικασία διαστασιακής κανονικοποίησης. Ο εν λόγω σύνδεσμος παίρνει τιμές στο σχήμα-ομάδα G που ορίζει η άλγεβρα Hopf των διαγραμμάτων Feynman της θεωρίας. Οι Connes και Marcolli [136] το ονομάζουν *σχήμα-ομάδα διαφορογραφισμών*. Οι σύνδεσμοι που κατασκευάζονται με τέτοιον τρόπο και έχουν το ως άνω φυσικό περιεχόμενο οργανώνονται σε κατηγορία Tannaka, η οποία είναι ισοδύναμη με την κατηγορία των πεπερασμένης διάστασης αναπαραστάσεων ενός άλλου affine σχήματος-ομάδας, U*. Το σχήμα-ομάδα U* ορίζεται με σαφήνεια θεωρούμενο ως ομάδα, ως ημι-ευθύ γινόμενο μιας βαθμωτής προβολικής μονοδύναμης ομάδας Lie, U, με την βάθμωσή της. Η ομάδα U δρα επί των αδιάστατων σταθερών σύζευξης των φυσικών θεωριών μέσω της σχέσης με την ομάδα G των διαφορογραφισμών της θεωρίας, η οποία με την σειρά της σχετίζεται στενά με την ομάδα των διαφορομορφισμών του χώρου των λαγκρανζιανών. Σε αυτήν την βάση, αναδιατυπώνεται η επανακανονικοποίηση, ενώ παράλληλα αποσαφηνίζεται η σχέση με τον τύπο των Connes και Moscovici για τον τοπικό δείκτη (local index) [133].

Με αυτόν τον τρόπο, επισημαίνουν οι Connes-Marcolli, η δομή άλγεβρας Hopf[53] αναδύεται σε ένα τρίτο επίπεδο, μετά την άλγεβρα Hopf των ριζωμένων δένδρων και την άλγεβρα Hopf των Connes-Kreimer για τα διαγράμματα Feynman. Πρόκειται για την άλγεβρα Hopf που αντιστοιχεί στο σχήμα-ομάδα U*, η οποία, σημειωτέον, είναι *καθολική* ως προς το σύνολο των φυσικών θεωριών. Εξάλλου, οι σύνδεσμοι που αναφέρθηκαν προηγουμένως αποδεικνύεται ότι έχουν αριθμητική δομή, και η κατηγορία Tannaka την οποία συγκροτούν έχει ιδιότητες που θυμίζουν εκείνες του φορμαλισμού των επονομαζόμενων «μεικτών μοτίβων Tate (mixed Tate motives)».[54] Ιδιαίτερα, η ομάδα U συνδέεται με την «motivique (στα αγγλικά, motivic)» θεωρία Galois, και χαρακτηρίζεται ως «motivique ομάδα Galois». Η ομάδα U στο υπόβαθρο της θεωρίας της επανακανονικοποίησης, ανεξάρτητη από την φυσική θεωρία, κατά τους Connes και Marcolli είναι η «*κοσμική ομάδα Galois*» την ύπαρξη της οποίας είχε διείδει ο Cartier, λέγοντας χαρακτηριστικά, «*έχω ένα όνειρο …*» [148]. Η θεωρία των μοτίβων και η συναφής «motivique» θεωρία Galois αναδείχθηκαν τελικά σε πεδίο συνάντησης της ανασημασιοδοτημένης θεωρίας της επανακανονικοποίησης σύμφωνα με τους Connes και Kreimer, αφ’ ενός, με την κβάντωση μέσω παραμορφώσεων όπως την διατύπωσε ο Kontsevich, αφ’ ετέρου. Επιστρατεύοντας τις ίδιες αυτές έννοιες, ο Kontsevich [116] διατυπώνει μια σειρά εικασίες. Μία από αυτές, αφορά την δράση τής motivique ομάδας Galois, την σχέση της με την ομάδα Grothendieck-Teichmüller και την ενδεχόμενη δράση της στις τιμές ολοκληρωμάτων Feynman. Μένει να αποδειχθεί εάν η εικασία αληθεύει. Εκείνο, όμως, που αληθεύει, και ο

[53] Ας σημειώσω ότι η άλγεβρα Hopf των Connes-Kreimer αποκαλύπτεται ως το αρχικό αντικείμενο μιας γενικότατης κατηγορίας μεταθετικών αλγεβρών [146], ενώ συνδέεται με τις επονομαζόμενες άλγεβρες Rota-Baxter [147].

[54] Η θεωρία των *μοτίβων* εγκαινιάστηκε από τον Grothendieck. Η ιδέα είναι ότι μία καθολική συνομολογία διατρέχει –ως κοινό μοτίβο– όλες τις γνωστές θεωρίες συνομολογίας, οι οποίες θεωρούνται πραγματώσεις της. Στο ίδιο πνεύμα, εισάγεται η «motivique ομάδα Galois».

Kontsevich θεωρεί ως μόνη, προς το παρόν, επικύρωση της εικασίας του, είναι «*η ιστορία της κβάντωσης μέσω παραμορφώσεων*» [116]. Η εκπλήρωση του «ονείρου» τού Cartier, λοιπόν, σήμαινε παράλληλα την συνάντηση αυτών των δύο τόσο σημαντικών εξελίξεων στην μαθηματική φυσική.

9.5 Χωρόχρονος: έννοια παράγωγη

Όλες οι ως άνω οι εξελίξεις εξειδικεύονται σε δύο ζητήματα. Το πρώτο αφορά την δυνατότητα, οι καταστάσεις ενός κβαντικού συστήματος να μην απεικονίζονται με τους όρους ενός χωροχρόνου σαν αυτόν που συναντάμε κλασικά, αλλά με όρους *διαδικασιών*, οδηγώντας σε μιαν έννοια καταστατικού χώρου από διαγράμματα Feynman [149]. Μαθηματικά, αυτό συμφωνεί με την ιδέα της γενίκευσης της έννοιας του σημείου, από πρώτο ιδεώδες–σημείο ενός κλασικού χώρου, σε πρώτο ιδεώδες–λογική ή αιτιακή αλυσίδα, ή φαρέτρα, ως σημείο ενός μη μεταθετικού χώρου. Από αυτήν την σκοπιά, η διαδικασία της επανακανονικοποίησης θα πρέπει να θεωρηθεί ως αναγκαία αναπροσαρμογή ενός υπολογισμού που γίνεται στην βάση ενός κλασικού τύπου χωροχρόνου–υποδοχέα, ώστε να αποκτήσει νόημα στην βάση ενός χώρου πραγματικών φυσικών διαδικασιών. Οι απειρίες και οι αποκλίσεις των ολοκληρωμάτων Feynman θα αντιστοιχούν τότε σε ένα πλεονασματικό περίβλημα – το σύνολο των δυνατοτήτων, το αφηρημένο *δυνάμει*–, που πρέπει να παραμεριστεί για να εντοπιστούν οι πραγματικές δυνατότητες οι οποίες πραγματώνονται στο *ενεργεία* του εκάστοτε φαινομένου. Τέτοιες σκέψεις εναρμονίζονται πλήρως με το πνεύμα της μεθόδου τού Feynman για την κβάντωση, με τα «αθροίσματα πάνω σε ιστορίες». Ακόμη, προσφέρονται για την θεώρηση των φυσικών διαδικασιών ή ιστοριών ως αντικειμένων μιας κατηγορίας, η οποία γενικεύει την έννοια του συνηθισμένου χωροχρόνου. Υπάρχουν ήδη ενδιαφέρουσες απόπειρες προς αυτήν την κατεύθυνση [150]. Το δεύτερο ζήτημα είναι συναφές με το πρώτο σε αυτό το τελευταίο σημείο. Είναι αξιοπρόσεκτη η ακόλουθη δήλωση των Connes και Kreimer σχετικά με το νόημα της συνεισφοράς τους: «[είναι] *πεποίθησή μας ότι κατά κάποιον τρόπο η αληθινή γεωμετρία του χωροχρόνου στην πραγματικότητα υπαγορεύεται από κβαντικές θεωρίες πεδίου, όπως αυτές σήμερα χρησιμοποιούνται από τους φυσικούς των στοιχειωδών σωματιδίων σε υπολογισμούς διορθώσεων ακτινοβολίας*» [118]. Επί πλέον, η σύνδεση με την θεωρία δεικτών επιτρέπει στους Connes και Marcolli [136] να κάνουν λόγο για «*επανακανονικοποίηση της γεωμετρίας*», με την γενίκευση σε χωροχρόνους μιγαδικών διαστάσεων ή μη μηδενικής καμπυλότητας, ή σε χωροχρόνους στο πνεύμα της μη μεταθετικής γεωμετρίας.

Οι ισχυρισμοί αυτοί γίνονται συγκεκριμένοι στην βάση της *κβαντωμένης ανάλυσης* (quantized calculus) που εισήγαγε ο Connes στα πλαίσια της μη μεταθετικής γεωμετρίας [40, σσ. 287 κ.ε.]. Γενικά μιλώντας, η κβαντωμένη ανάλυση βασίζεται στην κατασκευή των επονομαζόμενων *modules Fredholm* σε έναν μη μεταθετικό χώρο, γενικεύοντας την θεωρία των ελλειπτικών διαφορικών τελεστών σε μια πολλαπλότητα. Έχει πάμπολλες εφαρμογές στα μαθηματικά, στην θεωρία πεδίων, στην ανάλυση του κβαντωμένου φαινομένου Hall από τον J. Bellissard. Η κεντρική στόχευση είναι η επέκταση της έννοιας του διαφορικού, df, μιας συνάρτησης σε μια πολλαπλότητα. Η συνάρτηση f γενικεύεται ώστε να δηλώνει ένα στοιχείο μιας ενελικτικής άλγεβρας, A, τελεστών σε έναν χώρο Hilbert, H. Κρίσιμο ρόλο παίζει ένας αυτοσυζυγής τελεστής, F, με F^2 □ 1, στον H. Τότε το εν λόγω διαφορικό θα είναι df □ [F, f]. Ο Connes σημειώνει ότι αυτή η έκφραση με όρους τελεστών αντιστοιχεί στην γνωστή συνταγή κβάντωσης, όπου αγκύλες Poisson αντικαθίστανται από μεταθέτες. Παράλληλα, η γενικευμένη έκφραση ανάγεται στο συνηθισμένο διαφορικό όταν η A είναι η άλγεβρα συναρτήσεων σε μια πολλαπλότητα. Επί πλέον, η ύπαρξη κβαντωμένων, ακέραιων τιμών σε προβλήματα κβαντικής φυσικής έχει το αντίστοιχό της στις ακέραιες τιμές του δείκτη (index) ενός συγκεκριμένου διαφορικού τελεστή. Τέλος, όπως σημείωσα στο Κεφάλαιο VII, η κβάντωση μέσω παραμορφώσεων εντάσσεται σε αυτό το πλαίσιο ως ειδική περίπτωση (θεωρία E) της θεωρίας K για τις C*-άλγεβρες.

Ο πυρήνας του προγράμματος της μη μεταθετικής γεωμετρίας είναι ο καθορισμός των εννοιών που επεκτείνουν στην μη μεταθετική περίπτωση τις θεμελιώδεις έννοιες της γεωμετρίας Riemann, δηλαδή την έννοια της πολλαπλότητας και την έννοια του γραμμικού στοιχείου. Για την πρώτη, ο στόχος απαιτεί τις μεθόδους της ομολογιακής άλγεβρας. Όσο για το στοιχειώδες διάστημα, ds, γίνεται δυνατή η έκφρασή του με τους όρους της θεωρίας των τελεστών. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό, πρέπει να εντοπιστεί ένα αντίστοιχο της έννοιας του *απειροστού*. Πιο συγκεκριμένα, η σχέση κλασικού και κβαντικού αντιστοιχεί σε μια μιγαδική μεταβλητή έναν τελεστή στον χώρο H, και σε μια πραγματική μεταβλητή έναν αυτοσυζυγή τελεστή. Η αντιστοιχία συμπληρώνεται εάν το μη μεταθετικό «απειροστό» θεωρηθεί ως ένας *συμπαγής τελεστής*, με ιδιοτιμές μ_n που ικανοποιούν:

$$\mu_n \;\square\; O(n^{-\alpha}) \text{ όταν } n \to \infty.$$

Τότε, το ολοκλήρωμα ενός απειροστού πρώτης τάξης, T, θα είναι ο συντελεστής της λογαριθμικής απόκλισης του ίχνους τού T, συμβολιζόμενο με ⬇T (ίχνος Dixmier). Η έννοια του συμπαγούς τελεστού ορίζεται ως εξής: Εάν A είναι μια άλγεβρα με αναπαράσταση ως κλειστή υποάλγεβρα της άλγεβρας B(H) όλων των φραγμένων τελεστών σε έναν χώρο Hilbert, H, η άλγεβρα K των *συμπαγών* τελεστών στον H είναι το κάλυμμα στην τοπολογία norm όλων των τελεστών με πεδίο τιμών πεπερασμένης διάστασης (τελεστές πεπερασμένου βαθμού). Συναφής έννοια είναι εκείνη των *τελεστών Fredholm*: Συνιστούν την υποάλγεβρα Φ των στοιχείων $P \in B(H)$ για τα οποία οι χώροι Ker(P) και Coker(P) (ο υποχώρος στον οποίο ο τελεστής P μηδενίζεται και ο συμπληρωματικός του) έχουν πεπερασμένη διάσταση. Το μέγεθος ενός μη μεταθετικού απειροστού, δηλαδή ενός συμπαγούς τελεστού, μετράται από την τάξη κατά την οποία η ακολουθία μ_n φθίνει όταν $n \to \infty$. Για θετικό πραγματικό α, η σχέση μ_n □ $O(n^{-\alpha})$ ορίζει ένα απειροστό τάξης α. Ο Connes επισημαίνει ότι ακριβώς η μη μεταθετότητα επιτρέπει την συνύπαρξη απειροστών μεταβλητών με μεταβλητές των οποίων το φάσμα δεν είναι διακριτό, αλλά Lebesgue. Είναι σημείο κρίσιμο για την μέτρηση διαστημάτων. Έχουμε λοιπόν τον εξής ορισμό:

Εάν A είναι μια ενελικτική άλγεβρα πάνω στο σώμα των μιγαδικών αριθμών, ένας *περιττός module Fredholm* πάνω στην A δίδεται από:

α) μιαν ενελικτική αναπαράσταση π της A σε έναν χώρο Hilbert H

β) έναν τελεστή $F = F^*$, $F^2 = 1$, στον H τέτοιον ώστε $[F, \pi(a)]$ είναι συμπαγής τελεστής για κάθε $a \in A$.

Ένας *άρτιος* module Fredholm δίδεται από έναν περιττό module Fredholm, (H, F), μαζί με μια Z/2 βάθμωση γ, με $\gamma = \gamma^*$, $\gamma^2 = 1$, του H τέτοια ώστε:

α) $\gamma\pi(a) = \pi(a)\gamma \ \forall a \in A$

β) $\gamma F = -F\gamma$.

Εάν, τώρα, η A θεωρηθεί ως άλγεβρα των «συντεταγμένων», x, σε έναν μη μεταθετικό χώρο, X, και εάν (H, F) είναι ένας module Fredholm πάνω στην A, μπορεί να οριστεί μια μετρική στον χώρο X [30, 40 σσ. 539 κ.ε.]. Προς τούτο ορίζεται ένας τελεστής G, ο οποίος θέλουμε να αντιστοιχεί στο ds^2 της γεωμετρίας Riemann, οπότε το στοιχειώδες διάστημα θα είναι η θετική τετραγωνική ρίζα $ds = G^{½}$. O G θα είναι της μορφής:

$$G = \sum_{1}^{q} (dx^{m})^{*} g_{mn} (dx^{n}),$$

όπου $dx = [F, x] \ \forall x \in A$, τα x^{μ} είναι στοιχεία τής A, και $g = (g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\ldots,q}$ είναι θετικό στοιχείο της άλγεβρας μητρών $M_q(A)$. Με την προϋπόθεση ότι $dG = 0$ ($[F, G] = 0$) και ότι $\mathrm{Ker}G = 0$, ορίζεται ο αυτοσυζυγής τελεστής $D = FG^{-½}$. O F είναι το σημείο τού D, οπότε $G = D^{-2}$. Κατά συνέπεια, μπορούμε να ξεκινήσουμε με την λεγόμενη *φασματική τριάδα* (A, H, D), με D έναν *μη φραγμένο* αυτοσυζυγή τελεστή, που ικανοποιεί:

α) ο [D, a] είναι φραγμένος για κάθε $a \in A$

β) ο $(D - \lambda)^{-1}$ είναι συμπαγής για κάθε $\lambda \notin \nabla$.

Το σημαντικό είναι ότι, στην περίπτωση μιας συνηθισμένης πολλαπλότητας εφοδιασμένης με μια δομή spin, ο τελεστής D είναι ο αντίστοιχος *τελεστής Dirac*, ο οποίος θα προσδιορίζει έναν module Fredholm πάνω στην άλγεβρα των λείων συναρτήσεων. Στην μη μεταθετική περίπτωση, ο «χώρος» δεν θα έχει συνηθισμένα σημεία. Μπορεί, όπως έχω ξαναεπισημάνει, να θεωρηθεί ως ένας χώρος «διαδικασιών». Σε αυτό το πνεύμα, ο Connes θεωρεί φυσικές διαδικασίες σαν αυτές που περιγράφονται με τα διαγράμματα Feynman. Εάν τότε έχουμε δύο πολύ γειτονικά σημεία του χωροχρόνου, στα οποία αντιστοιχούν κορυφές ενός διαγράμματος Feynman, ένας φερμιονικού τύπου διαδότης (propagator) που τα συνδέει, *----*, θα είναι 1/D. Το *στοιχειώδες διάστημα* μπορεί τότε να οριστεί ως ds □ D^{-1}, συναρτήσει του τελεστή Dirac *μιας φυσικής διαδικασίας*. Πρόκειται, όμως, για τον «γυμνό» τελεστή Dirac, ο οποίος πρέπει να επανακανονικοποιηθεί. Το ζήτημα παραμένει ανοικτό, και εμπλέκει την λεγόμενη εξίσωση Schwinger-Dyson [118]. Η ουσία είναι ότι αναπτύσσεται μια έννοια χωροχρόνου ως *παράγωγης* έννοιας, με το στοιχειώδες διάστημα να καθορίζεται από τις φυσικές διαδικασίες που αποτυπώνουν το *ενεργεία* ενός κβαντικού φυσικού φαινομένου, με την ανανοηματοδοτημένη έννοια της επανακανονικοποίησης την οποία περιέγραψα.

Δεν θα είναι πολύ υπερβολικό να πούμε ότι η καλή φυσική

έχει κατά καιρούς κακοπάθει από την κακή φιλοσοφία.

W. Heisenberg

Κεφάλαιο X. Το «αδαμάντινο δίχτυ» της κατανόησης

10.1 Όταν η γνώση ανάγεται σε τεχνογνωσία

Ο τίτλος του προηγούμενου κεφαλαίου συνοψίζει το νόημα των υπογραμμισμένων φράσεων στα αποσπάσματα που παραθέτω εκεί. Η εφαρμογή του στην τεχνική της επανακανονικοποίησης είναι ίσως η πιο θεαματική. Θα μπορούσε, όμως, να αποδοθεί και σε μια σειρά από άλλες περιπτώσεις που έχουμε συναντήσει, όπως:

- Η ένταξη της μεθόδου των μικρών διαταραχών στην ομολογιακή άλγεβρα.
- Η ένταξη της μεθόδου BRST και της επέκτασής της κατά Batalin–Vilkovisky στην ομολογιακή άλγεβρα.
- Η ένταξη της μεθόδου BRST στο πλαίσιο εννοιών της συμπλεκτικής γεωμετρίας, όπως τα αλγεβροειδή Courant.
- Η ένταξη της τεχνικής των διαγραμμάτων στο πλαίσιο της θεωρίας των κατηγοριών (φαρέτρες) και η ανανοηματοδότησή τους ως μιας operad.
- Η ένταξη φυσικών θεωριών των (κλειστών) χορδών στο πλαίσιο των ισχυρώς ομοτοπικών αλγεβρών Lie.
- Η ένταξη των τοπολογικών θεωριών πεδίου στο πλαίσιο της θεωρίας των κατηγοριών.
- Η ένταξη των θεωριών των χορδών στο πλαίσιο των operads.

Σε άλλοτε στενότερη, άλλοτε ευρύτερη αλληλοσύνδεση με αυτές τις εξελίξεις, η διαδικασία της κβάντωσης έφτασε και αυτή, στην γενικότερη μορφή της, να ενταχθεί σε ένα πολυσύνθετο μαθηματικό πλαίσιο. Παράλληλα, πραγματοποιήθηκε με τον τρόπο που είδαμε η νοηματοδότηση της τεχνικής της επανακανονικοποίησης και διερευνώνται οι συσχετισμοί της με την κβάντωση μέσω παραμορφώσεων. Το γεγονός, όμως, αυτό ενισχύει ταυτόχρονα μια θεμελιώδη αντιστροφή στις αντιλήψεις για την σχέση φυσικής και μαθηματικών, άμεσα, και, έμμεσα πλην σαφώς, την σχέση επιστήμης και φιλοσοφίας. Εννοώ τις αντιλήψεις που κυριάρχησαν μεταξύ των φυσικών επιστημόνων στο δεύτερο ήμισυ του 20^{ού} αιώνα. Πιο συγκεκριμένα, οι σύγχρονες εξελίξεις προσφέρουν το κίνητρο και το θεμέλιο ώστε να αντιστραφεί μια αντίληψη, η οποία, με την σειρά της, ήταν προϊόν η ίδια μιας άλλης, προγενέστερης, αντιστροφής: της απομάκρυνσης από το πνεύμα που επικρατούσε στα χρόνια της προπολεμικής γενεάς των θεμελιωτών της σύγχρονης φυσικής. Πράγματι, ο σύγχρονος φιλοσοφικός προβληματισμός γύρω από ζητήματα θεμελίωσης [21, 101] δεν είναι απλώς προέκταση των φιλοσοφικών ρευμάτων της πρόσφατης περιόδου. Για να εκτιμηθεί το καινούργιο που σηματοδοτεί, πρέπει να εντοπίσουμε την πρώτη εκείνη τομή, που τοποθετείται στην δεκαετία του 1940. Επιστήμονες όπως οι Einstein, Bohr, Heisenberg, Pauli, Dirac και πολλοί άλλοι, με πλατιά φιλοσοφική παιδεία, θεωρούσαν αυτονόητη την στενή αλληλεπίδραση της εργασίας τους με τον αναστοχασμό γύρω από τις εννοιολογικές ανατροπές και καινοτομίες στις οποίες οι ίδιοι πρωτοστάτησαν.

Τόσο τα προβλήματα στα οποία προσέκρουσε η νεοσύστατη κβαντική ηλεκτροδυναμική, όσο και οι βαθιές αλλαγές κοινωνικού χαρακτήρα που συνέβησαν κατά την διάρκεια και αμέσως μετά τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο, έστησαν το σκηνικό ώστε μια διαφορετική θεώρηση να διαποτίσει την νεότερη γενεά των φυσικών. Η εξέλιξη–κλειδί ήταν ακριβώς η επινόηση της τεχνικής της επανακανονικοποίησης, κάνοντας εφικτή αρχικά την κβαντική ηλεκτροδυναμική και κατόπιν τις θεωρίες πεδίου. Η τομή που σηματοδότησε λειτουργεί σε δύο επίπεδα. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η τεχνική αυτή άνοιξε μεν τον δρόμο για θεωρίες με εκπληκτική συμφωνία με την παρατήρηση και το πείραμα, εν τούτοις αυτές οι θεωρίες εξ αρχής μαστίζονταν από ανεπαρκή, ακόμη και έντονα αμφισβητούμενη μαθηματική θεμελίωση. Μια τέτοια εσωτερική αντίφαση σε καινούργιες φυσικές θεωρίες δεν είναι καθ' εαυτή ούτε κάτι καινοφανές, ούτε και ανυπέρβλητο εμπόδιο. Το αντίθετο: η περίπτωση του Newton και της ανάπτυξης του απειροστικού λογισμού ή, στην εποχή μας, της συνάρτησης δ του Dirac και της θεωρίας των κατανομών, είναι μαρτυρίες για την γονιμότητα τέτοιων προβλημάτων. Η ιδιοτυπία που συνδέεται με την επανακανονικοποίηση οφείλεται στο γεγονός που έθιξα στο προηγούμενο κεφάλαιο: Σε συγκεκριμένες συνθήκες, στις οποίες δεν υπεισέρχομαι εδώ, μια στενά *πραγματιστική* αντίληψη αξιοποίησε ακριβώς την εντυπωσιακή προβλεπτική ικανότητα της νέας *τεχνικής* προκειμένου να υποτιμήσει και να περιθωριοποιήσει την μαθηματική της θεμελίωση. Δεν έχουμε, δηλαδή, μόνον έλλειψη ενός συνεκτικού μαθηματικού πλαισίου. Το φυσιολογικό αυτό γεγονός συνοδεύεται και επικαλύπτεται από την πεποίθηση ότι ένα τέτοιο πλαίσιο *δεν χρειάζεται*. Η κατάσταση που διαμορφώθηκε περιγράφεται με λεπτομέρειες από τον E. Prugovecki, ο οποίος εκθέτει πώς, από τότε που αναπτύχθηκε η τεχνική της επανακανονικοποίησης, «*κυριάρχησε μια στάση που αγνοούσε τα* ***αντικειμενικά*** *μαθηματικά κριτήρια της αλήθειας και της συνέπειας, και που τα υποκαθιστούσε αντιθέτως με συμβατικά αποδεκτές μαθηματικές διαδικασίες, δηλαδή* ***τυπικούς*** *υπολογιστικούς κανόνες που* ***συμβατικά*** *θεωρούνται έγκυρα αποτελέσματα στον βαθμό που έχουν ανακηρυχθεί αποδεκτά από εκείνους που ο Dyson (1983) περιγράφει ως "μανδαρίνους" της μεταπολεμικής γενεάς φυσικών*» ([151], έμφαση δική μου). Την στάση αυτή ο Prugovecki ονομάζει «συμβασιοκρατική εργαλειοκρατία». Ο Popper, εξ άλλου, ασκώντας κριτική την συνοψίζει στην θέση ότι, στις σύγχρονες φυσικές θεωρίες για τα κβαντικά φαινόμενα, «*δεν υπάρχει τίποτε που να απαιτεί κατανόηση …: δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτε περισσότερο από το* ***να μάθουμε πολύ καλά τον μαθηματικό φορμαλισμό****, και μετά να μάθουμε πώς να τον εφαρμόζουμε*» ([152], έμφαση στο πρωτότυπο).

Το άμεσο διακύβευμα είναι η σχέση φυσικής–μαθηματικών. Δεν εννοώ την εμμονή σε κάποιαν «αποστειρωμένη» αντίληψη μαθηματικής αυστηρότητας, που μπορεί να αποβεί στείρα όταν έχουμε να κάνουμε με υπό διαμόρφωσιν νέους επιστημονικούς τομείς (Atiyah et al. [100]). Εννοώ βασικές μεθοδολογικές αρχές, όρους για κάθε δημιουργική πρωτοβουλία. Από αυτήν την άποψη, επιστήμονες σαν τον Heisenberg ή τον Dirac δεν ήταν καθόλου ευτυχείς με το νέο πνεύμα. «*Θέλω να τονίσω*, λέει ο Dirac, *ότι πολλές από αυτές τις σύγχρονες κβαντικές θεωρίες πεδίου δεν είναι καθόλου αξιόπιστες, έστω και αν πολλοί δουλεύουν με αυτές και μερικές φορές η δουλειά τους έχει λεπτομερή αποτελέσματα*» [153]. Αλλά και σημαίνοντες εκπρόσωποι της νέας γενεάς συμμερίζονταν αυτές τις επιφυλάξεις. «*Οι μεταπολεμικές εξελίξεις της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής*, σημειώνει ο J. Schwinger, *έχουν σε μεγάλο βαθμό κυριαρχηθεί από ζητήματα φορμαλισμού και τεχνικής, και δεν περιέχουν καμιά θεμελιώδη βελτίωση στα φυσικά θεμέλια της θεωρίας*» [154].

Ήταν επόμενο, από την στιγμή που η εργαλειοκρατία εγκαταστάθηκε στον πυρήνα της νέας φυσικής, να επεκτείνει τις συνέπειές της πολύ πέρα από αυτόν. Αν η «αποτελεσματικότητα», ό,τι και αν σημαίνει αυτό, συνοδεύεται από μια συγκαταβατική, τουλάχιστον, στάση απέναντι στην ανάγκη μαθηματικής θεμελίωσης, γιατί να μην υποθάλπει την αφ' υψηλού αντιμετώπιση γενικότερων μεθοδολογικών και φιλοσοφικών ζητημάτων; Πάλι ο Dirac, αναφερόμενος ειδικά στην επανακανονικοποίηση, γράφει ότι αυτή, μεταπολεμικά, εκπροσωπεί «*μια δραστική απομάκρυνση από την* ***λογική****. Αλλάζει όλο τον* ***χαρακτήρα της θεωρίας****, από την λογική παραγωγή σε μιαν απλή κατάστρωση κανόνων εργασίας*» ([155], έμφαση δική μου). Οξύτερος ο Popper, αντικρούει τον αυτάρεσκο ισχυρισμό της εργαλειοκρατίας αυτού του είδους ότι δήθεν εκπροσωπεί την στάση που αρμόζει στην τελευταία λέξη της επιστήμης. Επισημαίνει ότι η αλαζονική παραγνώριση της φιλοσοφίας είναι η ίδια ένα είδος φιλοσοφίας· και μάλιστα, ότι δεν είναι παρά η νεκρανάσταση της ίδιας εκείνης εργαλειοκρατικής αντίληψης για την επιστήμη με την οποία η εκκλησία, δια του καρδιναλίου Bellarmini απέναντι στον Γαλιλαίο και του επισκόπου Berkeley απέναντι στον Newton, πολέμησε την επιστήμη της φυσικής στην εποχή της γέννησής της [152]. Μιλώντας για την ομάδα εκείνη των φυσικών που υποκύπτουν στις αντιλήψεις «του συρμού», ο Popper εξηγεί ότι «*Σε αυτήν την ομάδα ανήκουν πολλοί νεότεροι φυσικοί που ανδρώθηκαν σε μια περίοδο υπερειδίκευσης, και στην πρόσφατα αναπτυσσόμενη λατρεία της στενότητας, και την περιφρόνηση για την μη ειδικευμένη παλαιότερη γενεά: μια παράδοση που εύκολα μπορεί να οδηγήσει στο* ***τέλος της επιστήμης και στην αντικατάστασή της από την τεχνολογία***» ([152], έμφαση δική μου).

Είναι κεντρικής σημασίας φιλοσοφικό ζήτημα, το εάν η θεωρητική γνώση μπορεί να υποκατασταθεί από την τεχνογνωσία. Το γεγονός είναι ότι, εκτός από εκείνους τους επιστήμονες που επαγγελματικά ασχολούνται με ζητήματα θεμελίωσης, η συντριπτική πλειονότητα των ενεργών φυσικών κρατούν τον στοχασμό για την εργασία τους μακριά από την εργασία τους. Οι φιλοσοφικού χαρακτήρα αντιπαραθέσεις στις δεκαετίες του 1920-1930, οι λεπτομέρειες της διαμάχης γύρω από τις θέσεις του ρεαλισμού ή του λογικού θετικισμού, πολύ λίγο βαρύνουν για τον μέσο φυσικό. Αυτός συνήθως αρκείται σε μιαν επιφανειακή πληροφόρηση για εκείνα τα ζητήματα, κατά κανόνα τα συμπυκνώνει σε μιαν υπεραπλουστευμένη περιγραφή της διαμάχης μεταξύ Bohr και Einstein και, χωρίς πολλούς προβληματισμούς, αποδέχεται την ερμηνεία της Κοπεγχάγης ως το «κύριο ρεύμα» των κβαντικών θεωριών. Έτσι, όροι όπως «ερμηνεία της Κοπεγχάγης», «αβεβαιότητα», «πιθανοκρατία» κ.λπ. αποφορτίζονται από τις φιλοσοφικές τους συνδηλώσεις και μετατρέπονται σε φραστικά στερεότυπα περιγραφικού χαρακτήρα. Δεν είναι τυχαίο που, όπως παραθέτει ο Prugovecki [151], ένας φυσικός σαν τον M. Gell-Mann έφτασε να μιλά για «*πλύση εγκεφάλου*» που έπεισε «*μιαν ολόκληρη γενεά φυσικών να πιστεύουν ότι το έργο* [μιας επαρκούς ερμηνείας της κβαντομηχανικής] *είχε συντελεστεί πριν από 50 χρόνια*» [156]. Για «σχίσμα στην φυσική», μίλησε ο Popper. Και ο B. d΄ Espagnat το εκφράζει επιγραμματικά, λέγοντας ότι η μεγάλη επιτυχία της υπολογιστικής τεχνικής στην φυσική ευνοεί την εργαλειοκρατία έτσι ώστε, με την εξαίρεση όσων ασχολούνται με την φιλοσοφία της φυσικής, «*...υπάρχει ένα είδος χάσματος ανάμεσα στις δραστηριότητες του θεωρητικού φυσικού και την σκέψη του.* ***Ή σκέπτεται, ή αναπτύσσει την φυσική***» ([157], έμφαση δική μου). Αυτός ο «διχασμός προσωπικότητας» ενσαρκώνει δραματικά την αντιστροφή στην οποία αναφέρθηκα, σε σχέση με το πνεύμα των πρωτοπόρων, και σε άμεση αναφορά προς την επινόηση της επανακανονικοποίησης. Οι τελευταίες θεαματικές εξελίξεις στην θεωρία αλλά και στο πειραματικό πεδίο –για «δεύτερη κβαντική επανάσταση» γίνεται λόγος– δημιουργούν όρους ευνοϊκούς για την επιστροφή του ορθού λόγου, και στο γραφείο του θεωρητικού, και στο εργαστήριο του πειραματιστή.

Εν τούτοις, η πραγματιστική νοοτροπία που μόλις περιέγραψα, όσο και αν διαποτίζει ευρύτατα διαδεδομένες συμπεριφορές, ασφαλώς δεν μπορεί να θεωρηθεί καθολικά κυρίαρχη. Υπήρξαν και πάντα υπάρχουν κορυφαίοι φυσικοί οι οποίοι αναγνωρίζουν και τονίζουν ρητά τον ρόλο που διαδραματίζει η φιλοσοφία στο επιστημονικό τους έργο. Ένας από τους συγχρόνους είναι ο J. A. Wheeler. Μιλώντας στο Συμπόσιο Heisenberg, το οποίο πραγματοποιήθηκε το 1981 στο Μόναχο, παραφράζοντας την γνωστή ρήση τού Clémenceau δήλωσε ότι, «*Σιγά σιγά, η φυσική είδε ότι η φιλοσοφία είναι πολύ σημαντική για να εγκαταλειφθεί στους φιλοσόφους*» [158]. Όταν, ωστόσο, ο Clémenceau έλεγε ότι ο πόλεμος είναι πολύ σοβαρή υπόθεση για να αφεθεί στους στρατιωτικούς, ασφαλώς δεν εννοούσε ότι μπορεί να διεξαχθεί πόλεμος χωρίς τους στρατιωτικούς. Με τον ίδιο τρόπο, οι φυσικοί *ως φυσικοί* δεν μπορούν να φιλοσοφούν χωρίς τους φιλοσόφους. Εννοώ με τούτο ότι αντικείμενο της φιλοσοφίας της φυσικής *δεν* είναι η φυσική ούτε η γενίκευση των συμπερασμάτων της, όπως σημείωσα ήδη στο Κεφάλαιο Ι. Είναι μάλλον η *σχέση* της φιλοσοφίας με την φυσική, με επίκεντρο την διερεύνηση των εννοιολογικών θεμελίων και την συγκρότηση της μεταφυσικής βάσης της φυσικής επιστήμης. Άλλωστε, δεν έχουμε να κάνουμε με μια νοητική δραστηριότητα κατακερματισμένη σε «φιλοσοφία της φυσικής», «φιλοσοφία των μαθηματικών» και άλλες «φιλοσοφίες» επί μέρους επιστημών· έχουμε να κάνουμε με *την* φιλοσοφία. Η φιλοσοφία καθορίζει η ίδια το αντικειμενό της, σε στενή αλληλεπίδραση με τις επιστήμες, είναι αλήθεια. Οι επιστήμες, και πρώτη η φυσική μεταξύ αυτών, γονιμοποιούν και τροφοδοτούν τον φιλοσοφικό στοχασμό. Η φιλοσοφία θέτει, διερευνά, επανεξετάζει, αναθεωρεί ή αναπτύσσει τα προβλήματά της στην αρένα που μορφοποιούν οι επιστήμες στην επιδίωξη των δικών τους στόχων. Εδώ είναι ένα λεπτό σημείο, που αφορά την «κακή φιλοσοφία» στην οποία αναφέρεται ο Heisenberg· και αυτή είναι ίσως περισσότερο ζημιογόνος από την υπεροπτική αδιαφορία απέναντι στα φιλοσοφικά προβλήματα. Όταν ο S. Weinberg, στην συζήτηση σχετικά με την υπόθεση Sokal, λόγου χάριν, δηλώνει απαξιωτικά ότι «*Τα συμπεράσματα της φυσικής ίσως αποκτήσουν σημασία για την φιλοσοφία και την κουλτούρα όταν μάθουμε την καταγωγή του σύμπαντος ή τους έσχατους νόμους της φύσης, αλλά όχι προς το παρόν*» [159], αδικεί την φιλοσοφία μολονότι αντιδρά δικαιολογημένα απέναντι στην κακομεταχείριση της φυσικής από ορισμένους φιλοσοφούντες του συρμού. Η κακομεταχείριση της φυσικής από φιλοσόφους και, αντιστρόφως, η κακομεταχείριση της φιλοσοφίας από φυσικούς καλλιεργεί το πεδίο όπου παρεισφρέει και ευδοκιμεί ο τσαρλατάνος (για μιαν ανάλυση του φαινομένου, αναφέρω ενδεικτικά το [160]). Αυτός επιχειρεί να πείσει τους μη φιλοσοφικά ενημερωμένους φυσικούς ότι ηθελημένα θολές διατυπώσεις και η εισαγωγή μιας πομπώδους αλλά κενής ορολογίας εκφράζουν γνήσια το νόημα του επιστημονικού τους έργου. Παράλληλα, επιχειρεί απέναντι στους –δικαιολογημένα– αδαείς περί τα φυσικά και μαθηματικά πράγματα φιλοσόφους να στηρίξει την κακή φιλοσοφία του χρησιμοποιώντας τις ασαφείς δηλώσεις φυσικών και επικαλούμενος το κύρος και την αυθεντία τους. Το πραγματικό κέρδος για τον ενεργό φυσικό από τον σοβαρό προβληματισμό γύρω από την αλληλεπίδραση φυσικής και φιλοσοφίας είναι η άσκηση του κριτικού και αυτοκριτικού αναστοχασμού της εργασίας του, ο οποίος δεν «διαφωτίζει» απλώς πλευρές της θεωρίας, αλλά ενίοτε παράγει νέα φυσική.

10.2 Ποιο είναι το στοιχείο που φέρει το βάρος της επανάστασης;

Με αυτές τις σκέψεις, θα προχωρήσω τώρα σε μια συστηματική έκθεση των συμπερασμάτων από όλα τα προηγηθέντα. Δεδομένου ότι μας απασχολεί η σύγκριση εννοιολογικών πλαισίων φυσικών θεωριών, παραθέτω χάριν σαφήνειας τα γενικά χαρακτηριστικά της θεωρητικής δομής της φυσικής, όπως τα απαριθμεί ο C. J. Isham, σε βιβλίο του που βασίστηκε σε μαθήματα προπτυχιακού επιπέδου [161]. Μια τέτοια δομή, λοιπόν, περιλαμβάνει:

1) Τον προσδιορισμό του πεδίου εφαρμοσιμότητας που οροθετεί την κλάση φυσικών συστημάτων στα οποία πρέπει να εφαρμόζεται η θεωρία.

2) Την ταυτοποίηση ορισμένων φυσικών εννοιών οι οποίες σχετίζονται με την κλάση των συστημάτων εντός αυτού του πεδίου.

3) Τον προσδιορισμό του γενικού μαθηματικού πλαισίου εντός του οποίου θα παρασταθεί η θεωρία.

4) Μια συλλογή κανόνων οι οποίοι συσχετίζουν τις φυσικές έννοιες με τα στοιχεία των μαθηματικών δομών.

5) Ένα συνολικό εννοιολογικό σχήμα για την ανάλυση του νοήματος των θεμελιωδών όρων οι οποίοι υπεισέρχονται στην διατύπωση των κανόνων.

6) Ένα σύνολο τεχνικών για την εφαρμογή των κανόνων σε ειδικά φυσικά συστήματα εντός της κλάσης που πληροί τους όρους του πεδίου εφαρμοσιμότητας της θεωρίας.

Επί πλέον, είναι επιθυμητό να ικανοποιούνται τα εξής κριτήρια:

1) Το πεδίο εφαρμοσιμότητας να είναι το ευρύτερο δυνατόν.

2) Η θεωρία να διακρίνεται από εμπειρική επάρκεια εντός αυτού του πεδίου.

3) Οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται κατά την διατύπωση της θεωρίας (μερικές από τις οποίες πιθανόν αφορούν νέα μαθηματικά) πρέπει να διακρίνονται από εσωτερική συνέπεια με την μαθηματική έννοια.

4) Οι ιδέες, τόσο σε επίπεδο φυσικής όσο και σε επίπεδο εννοιών, οι οποίες χρησιμοποιούνται για την διευκρίνιση του «νοήματος» της θεωρίας, πρέπει να είναι συνεπείς με μια γνήσια φιλοσοφική έννοια.

5) Ο συνολικός φορμαλισμός πρέπει να είναι απλός και κομψός.

Εδώ, την μεν μαθηματική συνέπεια πρέπει να εννοήσουμε ως απουσία λογικών αντιφάσεων, την δε φιλοσοφική ως την εσωτερική συνοχή που πρέπει να χαρακτηρίζει ένα ολοκληρωμένο σύστημα εννοιών. Το θέμα μας επικεντρώνεται σε ζητήματα που άπτονται κυρίως των σημείων 3, 4, και 5 του καταλόγου των χαρακτηριστικών μιας θεωρίας και του σημείου 4 των επιθυμητών κριτηρίων. Κατ' αρχάς, το γεγονός ότι η ανάδυση της κβαντικής φυσικής στις αρχές του προηγούμενου αιώνα συνιστά επιστημονική επανάσταση δεν μπορεί να αμφισβητηθεί σοβαρά. Μάλλον, το αμφιλεγόμενο ζήτημα –όπως ανέφερα από την αρχή– είναι εάν έχουμε εναλλαγή αυστηρά ασύμβατων «παραδειγμάτων» *à la* Kuhn ή εάν εντός της ασυνέχειας υπάρχει συνέχεια και, εάν ναι, πού εντοπίζεται. Ο στόχος της σύγκρισης, εν προκειμένω του κλασικού με το κβαντικό εννοιολογικό πλαίσιο, είναι συνεπώς ο εντοπισμός του σημείου καμπής, εκείνου που σηματοδοτεί την ποιοτική διαφορά και έτσι φέρει το βάρος της επιστημονικής επανάστασης. Προς τούτο, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει μια σαφής *μη αντιστρεψιμότητα* στην διαδοχή των εν λόγω θεωριών. Από το πλαίσιο των κβαντικών θεωριών, είναι δυνατόν να μιλήσουμε για το Κλασικό πλαίσιο· από το Κλασικό πλαίσιο είναι αδύνατον να μιλήσουμε για εκείνο των κβαντικών θεωριών.[55] Συνεπώς, υπό το πρίσμα της νεότερης θεωρίας, είναι δυνατόν να γίνει η διάκριση εντός του παλαιότερου πλαισίου της Κλασικής φυσικής μεταξύ όσων στοιχείων εμπίπτουν στον ανωτέρω κατάλογο και εκείνων που μπορεί να συνοδεύουν την θεωρία χωρίς να είναι ευθέως απαραίτητα για την δομή της. Δηλαδή, η διάκριση μεταξύ:

α) άρρητων υποθέσεων, ιδεολογημάτων, φιλοσοφικών αντιλήψεων που ήταν δυνατόν να *συνυπάρχουν* με την κλασική φυσική, έστω και αν η κριτική ανάλυση μπορούσε να αμφισβητήσει την εξάρτηση της κλασικής φυσικής από αυτές· και

β) εννοιών και υποθέσεων που ήταν *αναγκαίες* για την εικόνα του κόσμου που προσέφερε η κλασική φυσική, δηλαδή, συγκροτούσαν ακριβώς εκείνο το πλαίσιο που νοηματοδοτούσε τους θεωρητικούς όρους που υπεισέρχονται στην διατύπωση των κανόνων της θεωρίας.

[55] Η πρωτότυπη ανάλυση από τον Biagioli [162] αυτού του είδους της μη αντιστρεψιμότητας, σε σχέση με την διαμάχη του «μαθηματικού» Γαλιλαίου με τους αριστοτελικούς φιλοσόφους της εποχής του, παρουσιάζει σύγχρονο ενδιαφέρον καθώς οι φυσικοί, κατά τον 20^{ο} αιώνα, εισέβαλαν ορμητικά στο πεδίο των φιλοσοφικών αντιγνωμιών.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν αυτήν την διάκριση, η σύγκριση των δύο πλαισίων δείχνει ότι: Αφ' ενός, εκείνο που ήταν *δυνατόν* να απορριφθεί μέσω κριτικής ανάλυσης ακόμη και στα πλαίσια της κλασικής φυσικής, τώρα, στα πλαίσια της κβαντικής φυσικής είναι *αδύνατον* να διατηρείται. Η κβαντική φυσική κάνει εντελώς φανερό τον χαρακτήρα τέτοιων υποθέσεων ως πλάνης, ψευδούς συνείδησης ή δογματικής πεποίθησης. Αφ' ετέρου, εκείνο που ήταν *όρος* για την κλασική φυσική ακολουθεί την τύχη της εν όψει των επιστημονικών εξελίξεων. Η απόρριψη και αντικατάστασή του είναι η διαδικασία αλλαγής της εικόνας για την φύση, δηλαδή η γνωστική διαδικασία καθ' εαυτή. Ειδικότερα, στην πορεία αυτής της εργασίας έχουμε εντοπίσει:

Πρώτον, τις εξής μεθόδους, έννοιες και όρους της κλασικής θεωρίας:

α) Την *μεθοδολογική* αρχή της αναζήτησης *μηχανικής ερμηνείας* για το σύνολο των φυσικών φαινομένων. Σχετικά με το αποκορύφωμα της νευτώνειας φυσικής στα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα, ο Poincaré εκθέτει αυτήν την μεθοδολογία που υψώνει την μηχανική σε πρότυπο, όπως είδαμε στην §2.3.

β) Στο *εννοιολογικό* επίπεδο και σε συνάφεια με το ανωτέρω σημείο: τις έννοιες της κινηματικής και της δυναμικής που χρησιμοποιούνται για την διατύπωση εξισώσεων κίνησης και πεδίου, και οι οποίες συνδέονται με:

1) Μια γενική έννοια χώρου και χρόνου ή χωροχρόνου στην περίπτωση της θεωρίας της σχετικότητας.

2) Την παράδοση του *ατομισμού*, όπως εκτίθεται στην §1.3. Τούτο συνεπάγεται μιαν *αναγωγιστική* προσέγγιση στα φυσικά συστήματα και μιαν αντίληψη για την σχέση μέρους και όλου, κατά την οποία οι ιδιότητες του όλου καθορίζονται από τις ιδιότητες των μερών και τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις.

3) Την *διαχωρισιμότητα* των φυσικών συστημάτων, βασισμένη στην κινηματική ανεξαρτησία αλληλεπιδρώντων μεν, αλλά ταυτοποιήσιμων και αυτοτελών συστημάτων, όπως αυτή εκφράζεται στην δυνατότητα διάκρισης μεταξύ «παθητικής» και «ενεργητικής» όψης, ή μεταξύ εξισώσεων κίνησης και εξισώσεων πεδίου, με τον τρόπο που αναπτύχθηκε στην §3.1.

4) Την αναπαράσταση των *καταστάσεων* φυσικών συστημάτων ως σημείων ενός φασικού χώρου, σε άμεση συναρτησιακή σχέση με τις τιμές φυσικών μεγεθών (§1.5.)

Δεύτερον, τις ακόλουθες άρρητες υποθέσεις φιλοσοφικής έμπνευσης, οι οποίες συνυπήρχαν μεν, μπορούσαν δε να απορριφθούν με κριτική ανάλυση και οι οποίες είναι αναγκαστικά απορριπτέες εν όψει της κβαντικής φυσικής:

α) Την παραγνώριση της διαλεκτικής τού Είναι και του Γίγνεσθαι, της στιγμής και της διαδικασίας, με συνέπεια την ουσιαστική εξάλειψη του Γίγνεσθαι με την διάλυσή του σε αλληλοδιαδοχή καταστάσεων Είναι. Τόσο η φιλοσοφική κριτική (διαλεκτική λογική), αλλά και η μαθηματική–φυσική ανάλυση –όπως φαίνεται από τις παρατηρήσεις τού W. Lawvere που παρατίθενται στην §2.1– αποκαθιστούν την διαλεκτική σχέση και την πρωταρχικότητα του Γίγνεσθαι έναντι του στατικού Είναι ως στιγμής του. Ήδη στα πλαίσια της κλασικότητας μπορούσε να αναγνωριστεί ότι τα φυσικά συστήματα, οι οντότητες και οι ιδιότητες είναι διαρκώς *εν τω γεννάσθαι*. Αν, αντιθέτως, μια στατική αντίληψη μπορούσε να συμβαδίζει με την κλασική φυσική, τούτο οφείλεται στην σύγχυση μεταξύ διαδικασίας και αποτελέσματος διαδικασίας, δεδομένου ότι η διάκριση των δύο μπορούσε να μένει *απαρατήρητη* στον βαθμό που η σχέση διαδικασίας και αποτελέσματος ήταν *μονοσήμαντη*.

β) Την αντίληψη ότι «θεωρία» και «πράξη» έχουν σχέση *εξωτερική*, παρά την πρακτική των φυσικών επιστημόνων που ασκούν μιαν επιστήμη η οποία εξ αρχής συγκροτήθηκε ως σύνθεση μαθηματικών και πειράματος. Για την Κλασική φυσική, (όπως άλλωστε για κάθε πειραματική επιστήμη συμπεριλαμβανομένης της κβαντικής φυσικής), το πείραμα, η μέτρηση κ.λπ. *τροφοδοτεί* την θεωρία με στοιχεία και δεδομένα και κατόπιν *ελέγχει*, επικυρώνει, τροποποιεί, απορρίπτει –εν τούτοις, *ειδικά όσον αφορά την κλασικότητα*, δεν θεωρείται ότι *ανήκει* στο εννοιολογικό πλαίσιο της θεωρίας. Η συνύπαρξη αυτής της αντίληψης με το Κλασικό –και εδώ συμπεριλαμβάνεται και η θεωρία της σχετικότητας– εννοιολογικό πλαίσιο βασίζεται στην *άμεση σχέση* κατάστασης και τιμής φυσικού μεγέθους εντός του εν λόγω πλαισίου, οπότε μπορούσε άκριτα να επικρατεί η αντίληψη ότι το πείραμα και η μέτρηση *αποτυπώνει* ή καταγράφει ή αποκαλύπτει καταστάσεις του αντικειμένου της γνώσης χωρίς κατ' ανάγκην να τις *συνδιαμορφώνει* –στην ιδανική περίπτωση μπορούμε να μιλήσουμε για *παρατηρησιακή ουδετερότητα*.

γ) Την αντίληψη ότι τα φυσικά μεγέθη έχουν εγγενώς και πάντα ορισμένες τιμές τις οποίες αποκαλύπτει η μέτρηση εντός ελεγχόμενων ορίων ανοχής. Είναι η βαθύτερα ριζωμένη, ίσως, αντίληψη, θεωρούμενη ως ακλόνητα συνδεδεμένη με το Κλασικό πλαίσιο. Απορρέει και αυτή, όπως εξετέθη στην §1.5, από την ισοπέδωση της σχέσης Είναι και Γίγνεσθαι, διαδικασίας και αποτελέσματος διαδικασίας, οπότε χάνεται η διάκριση μεταξύ του γεγονότος «ένα φυσικό μέγεθος *έχει* τιμή»[56] και της διαδικασίας «ένα φυσικό μέγεθος *λαμβάνει* τιμή». Είναι τόσο ισχυρά παγιωμένη αντίληψη, ώστε η αναγνώριση ότι μια φυσική οντότητα είναι διαρκώς εν τω γεννάσθαι, με ένα φάσμα δυνητικοτήτων χωρίς μονοσήμαντα καθορισμένη την πραγμάτωσή τους, φαντάζει ως «απώλεια της ταυτότητας» της εν λόγω οντότητας. Σημειωτέον ότι εξαφανίζεται και η διάκριση μεταξύ του νοήματος της φράσης «ένα φυσικό μέγεθος έχει κάποια τιμή», του νοήματος της φράσης «η μαθηματική έννοια –συνάρτηση, τελεστής– που αναπαριστά ένα φυσικό μέγεθος έχει κάποια τιμή» και του νοήματος της φράσης «η πρόταση "ένα φυσικό μέγεθος –ή η μαθηματική έννοια που το αναπαριστά– έχει κάποια τιμή" επιδέχεται αληθοτιμές».[57]

δ) Μια γενικότερη φιλοσοφική αντίληψη της νευτώνειας κλασικής φυσικής περί χώρου και χρόνου, η οποία δεν αναγνωρίζει ότι πρόκειται για *μορφές ύπαρξης* ύλης σε κίνηση (μολονότι δεν συμβιβάζεται με την γενική σχετικότητα ήδη εντός της κλασικότητας), και η οποία είχε πολύ νωρίτερα υποστεί φιλοσοφική κριτική, όπως φαίνεται από την παραπομπή στον Hegel στην §1.1.

ε) Μια αντίληψη που αντιπαραθέτει εξωτερικά την αναγκαιότητα με το τυχαίο[58] (§5.1). Στηρίχτηκε στην παραδοχή της κινηματικής ανεξαρτησίας αλληλεπιδρώντων συστημάτων, οπότε η αναγκαιότητα περιορίζεται στις εξισώσεις κίνησης και το τυχαίο απωθείται στις αρχικές και οριακές συνθήκες. Με την σειρά τους, οι συνθήκες αυτές έχουν διαμορφωθεί, οπότε το τυχαίο συμπυκνώνει το σύνολο και τελικό αποτέλεσμα μιας απειρίας διαδικασιών που καταλήγουν στην αποκρυστάλλωση των συνθηκών. Συνεπώς, το τυχαίο έχει αποκλειστικά *γνωσιολογικό* χαρακτήρα. Στην §5.1 υποστήριξα ότι, στο κβαντικό πλαίσιο, πρέπει να αποδοθεί στο τυχαίο οντολογικός χαρακτήρας.

ς) Τέλος, την αντίληψη περί μονοσήμαντης και ευθείας σχέσης μεταξύ δυνάμει και ενεργεία. Τότε, το πραγματικό ταυτίζεται με το *ήδη πραγματωμένο*. Δεν αναγνωρίζεται ότι το πραγματικό είναι η *διαδικασία πραγμάτωσης*, δηλαδή, δεν είναι το ήδη συντελεσμένο ενεργεία, είναι η *μετάβαση* από το δυνάμει στο ενεργεία. Όπως εξηγήθηκε στην §5.1, η σχέση δυνάμει και ενεργεία είναι η πλέον συγκεκριμένη εκδήλωση της διαλεκτικής τού Είναι και του Γίγνεσθαι από την σκοπιά της μετάβασης από το Κλασικό στο κβαντικό εννοιολογικό πλαίσιο, καθ' όσον εκείνο που από την σκοπιά της κλασικότητας θεωρείται ως όριο και συρρίκνωση των

[56] Στην κβαντική φυσική, η πρόταση «ένα φυσικό μέγεθος έχει ορισμένη τιμή κάθε χρονική στιγμή, μολονότι άγνωστη σε εμάς» οδηγεί σε λογική αντίφαση.

[57] Να παραβληθεί με την διάκριση δυνάμει και ενεργεία ιδιοτήτων που αναφέρθηκε στην §1.5.

[58] Εάν, βεβαίως, δεχθούμε ότι οι φυσικοί νόμοι δεν ανάγονται απλώς σε κανονικότητες, κατά την χιουμιανή άποψη, αλλά εκφράζουν φυσική αναγκαιότητα.

δυνατοτήτων της γνώσης, από την σκοπιά του κβαντικού αναγνωρίζεται ως όρος δυνατότητας της γνώσης η οποία ανιχνεύει τον πλούτο των δυνητικοτήτων στην φύση (§ 5.1).

Έχοντας αναφέρει όλα αυτά, επισημαίνω ότι υπάρχει ένα *σημείο κρίκος* το οποίο συνδέει τις άκριτα αποδεκτές, άρρητες υποθέσεις, αφ' ενός, με τις έννοιες και τους όρους που έχουν ενσωματωθεί στο Κλασικό πλαίσιο, αφ' ετέρου: πρόκειται για την μαθηματική έννοια του *σημείου*, στην οποία συναντάται η στατική αντίληψη περί Είναι και Γίγνεσθαι με την μηχανική ερμηνεία στον φορμαλισμό της κλασικής φυσικής.

Οι κβαντικές θεωρίες ανατρέπουν όλα τα σημεία και των δύο κατηγοριών που μόλις απαριθμήθηκαν. Ειδικότερα, η κβαντική φυσική υποχρεώνει να απαλλαγούμε από τις άκριτα αποδεκτές, συνυπάρχουσες με την Κλασική φυσική υποθέσεις και ιδεολογήματα. Τότε, εντοπίζονται εκείνες οι θεμελιώδεις φιλοσοφικές θέσεις που είναι δυνατόν να υποστηριχθούν σε σχέση με την θεωρητική φυσική γενικά, είτε Κλασική είτε κβαντική, οπότε απογυμνώνεται ο *πυρήνας* της αντίθεσης μεταξύ κλασικότητας και κβαντικού και τοποθετείται στο πεδίο της εκ μέρους τους περιγραφής της φύσης. Κατά συνέπεια, η απάντηση στο ερώτημα, «ποιο είναι το σημείο που φέρει το βάρος της επιστημονικής επανάστασης», προκύπτει από την απάντηση στο ερώτημα, «τι μαθαίνουμε για την φύση» με το πείραμα και την ενδελεχή εννοιολογική ανάλυση των θεμελίων της κβαντικής φυσικής, σε σύγκριση με εκείνο που πιστεύαμε βάσει της κλασικής φυσικής. Το σημείο καμπής, λοιπόν, πρέπει να εντοπιστεί βάσει εκείνου που η φυσική θεωρία μας λέει για την φύση, και όχι στα γνωσιολογικά (epistemic) προαπαιτούμενα και κριτήρια, ούτε αποκλειστικά στα χαρακτηριστικά του φορμαλισμού ή των θεμελιωδών εννοιών της θεωρίας στα οποία αποτυπώνεται το ζητούμενο σημείο καμπής (μολονότι ο διαχωρισμός έχει δόση αυθαιρεσίας και συμβατικότητας) –όπως, λόγου χάριν, η «αβεβαιότητα» ή η πιθανοκρατία έναντι του ντετερμινισμού, οι σχέσεις υποκειμένου και αντικειμένου της γνώσης ή οτιδήποτε άλλο. Τούτο το κριτήριο υποδεικνύει ως σημείο της ποιοτικής αλλαγής από την κλασική στην κβαντική εικόνα για τον κόσμο το θεωρητικά επεξεργασμένο και πειραματικά διαπιστωμένο φυσικό φαινόμενο της *συζευξιμότητας* (entanglement) και, συνεπώς, της μη διαχωρισιμότητας που επιβάλλει μιαν *ολιστική* θεώρηση στο πεδίο των κβαντικών φαινομένων. Όσον αφορά, εξ άλλου, αυτό που κατανοούμε ως «μακρόκοσμο», πρέπει να προκύπτει μέσα από φυσικές διαδικασίες που καταλήγουν σε αποσύζευξη και διαχωρίσιμα συστήματα, πράγμα που φιλοδοξούν να εξηγήσουν θεωρίες περί αποσυνοχής (decoherence), συνεπών ιστοριών (consistent histories) ή άλλες.

Στο επίπεδο των εννοιών, οι προσεγγίσεις στην επιστημονική επανάσταση που επικεντρώνονται στο μαθηματικό πλαίσιο των θεωριών δεν εξαντλούν το ζήτημα. Ενδεικτικά, όπως ήδη σημείωσα στο σχετικό κεφάλαιο, η θεωρία κβάντωσης μέσω παραμορφώσεων –η οποία αποδείχθηκε τόσο γόνιμη– συνοδεύτηκε από απόψεις φιλοσοφικές περί ομαλής μετάβασης, στηριγμένες σε συγκεκριμένες προσεγγιστικές μαθηματικές διαδικασίες, στην προκειμένη περίπτωση τον μηδενισμό της σταθεράς τού Planck. Εξ άλλου, προσεγγίσεις όπως του δομικού ρεαλισμού αναζητούν σημεία συνέχειας στις μαθηματικές δομές. Αλλά, πάντα είναι δυνατές τέτοιες επιλογές ώστε «ομοιότητες» να ορίζονται, να αναγνωρίζονται ή ακόμη και να εμφυτεύονται σε κάθε περίπτωση. Το ερώτημα παραμένει, εάν σημεία σύνδεσης υφίστανται αντικειμενικά, δηλαδή ανεξάρτητα από γνωσιολογικά (epistemic) ή άλλα κριτήρια. Η προσέγγιση την οποία υποστηρίζω θεωρεί ότι η επιστημονική επανάσταση καθ’ εαυτή είναι συγκεκριμένη διαδικασία η οποία έχει ιστορία και λογική. Ο όρος «λογική», παραπέμπει στην διαδικασία δια της οποίας το φαινόμενο «natural» μετατρέπεται σε φαινόμενο «physical» με την έννοια που εξήγησα στην §2.2. Η ρήξη έγκειται ακριβώς στην ριζική αλλαγή αυτής της διαδικασίας μετατροπής, με συνέπεια να εκτίθεται στην μεταβολή των θεωρητικών όρων που συγκροτούν το εννοιολογικό πλαίσιο μιας φυσικής θεωρίας –δηλαδή εκείνο που χαρακτήρισα με τον κουνιανό όρο «ασυμμετρία εννοιών». Έτσι, εάν πρόκειται για αλλαγή θεωρίας περί ενός και του αυτού φυσικού φαινομένου «natural», όπως στην περίπτωση της βαρύτητας, η ρήξη βρίσκεται στους ριζικά διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους η βαρύτητα ως φαινόμενο «physical» εντάσσεται στο νευτώνειο ή στο σχετικιστικό πλαίσιο. Στην διαφορετική περίπτωση που έχουμε ένα νέο γνωστικό πεδίο, όπως συνέβη με τις κβαντικές θεωρίες, φαινόμενα «natural» –εν προκειμένω τα σχετικά με τα φάσματα ακτινοβολίας και τα συναφή– απαίτησαν την διαμόρφωση πλαισίου κατάλληλου για την ένταξή τους ως φαινομένων «physical» καθώς οι απόπειρες να επιτευχθεί το ίδιο βάσει του κλασικού μηχανικού πλαισίου αποδείχθηκαν εγγενώς αντιφατικές. Εφ’ όσον, λοιπόν, έχουμε ριζική διαφορά διαδικασιών σχηματισμού εννοιών, η οποιαδήποτε ενδεχόμενη συνέχεια σε μιαν αλλαγή θεωριών πρέπει να αναζητηθεί στις *διαδικασίες* συγκρότησης των εννοιών και όχι απλώς στην αφετηρία ή στο αποτέλεσμά τους. Δηλαδή, δεν μπορεί να βρίσκεται μόνον στην αλλαγή μαθηματικού πλαισίου ως συστήματος μαθηματικών σχέσεων που εκφράζουν το αποτέλεσμα της διαδικασίας, ούτε στα κοινώς αναγνωρισμένα εμπειρικά δεδομένα που συνιστούν τις εκφάνσεις τού υπό εξέτασιν φαινομένου και συνήθως γίνονται αφετηρία θεωρητικών πραγματεύσεων. Από μεθοδολογική άποψη, χρησιμοποιήθηκε το εξής κριτήριο για τον εντοπισμό της αντιθετικής σχέσης του ζεύγους κλασικότητα–κβαντικό: η αντίθεση προβάλλει σαφέστερα εκεί όπου είναι σαφέστερα τα κοινά τους σημεία. Με τον τρόπο αυτό, τα σημεία καμπής αναζητήθηκαν στην έννοια του χωροχρόνου και του χωροχρονικού σημείου, υπό το πρίσμα της κριτικής σε μια φιλοσοφία αναγωγιστική και ατομιστική. Οι φυσικές–μαθηματικές θεωρίες που επικαλέστηκα, και στις οποίες κεντρικό ρόλο διαδραματίζει η έννοια του γενικευμένου σημείου, στηρίζουν την άποψη ότι η ανασημασιοδότηση των εννοιών στην επιστημονική επανάσταση που οδήγησε στις κβαντικές θεωρίες στηρίζεται στην υπέρβαση της μονομέρειας ενός στατικού Είναι και ενός Γίγνεσθαι ως έννοιας παράγωγης και στην αναγνώριση της πρωταρχικότητας του Γίγνεσθαι ως δυναμικής διαδικασίας. Με προνομιακό πεδίο μαθηματικών διατυπώσεων την θεωρία των κατηγοριών και των τόπων, τούτο προκύπτει από τις εργασίες που μελετούν τις δομικές ομοιότητες, την γενικευμένη έννοια της αποτίμησης, την έννοια του κλασικόμορφου και την εγκόλπωσή του εντός του κβαντικού με σχέσεις συναρτητικές ή βάσει της θεωρίας των quantales. Στο επίπεδο του μαθηματικού φορμαλισμού, όλα αυτά κατατείνουν στο να υποδείξουν την έννοια της μη μεταθεσιμότητας των φυσικών μεγεθών ως έκφραση της μετάβασης προς την πρωταρχικότητα του Γίγνεσθαι. Η μη μεταθεσιμότητα οδηγεί –και έτσι συνέβη ιστορικά– στον φορμαλισμό των χώρων Hilbert και την παράσταση των φυσικών μεγεθών ως τελεστών και σε εντελώς μη κλασικές έννοιες όπως οι υπερθέσεις, οι συνεζευγμένες καταστάσεις ή ο ιδιάζων χαρακτήρας των κβαντικών πιθανοτήτων, όλα με εξαιρετικό βαθμό πειραματικής επιβεβαίωσης. Στο φιλοσοφικό επίπεδο και ως συμπέρασμα από αυτές τις φυσικομαθηματικές εξελίξεις, το αρχικά αφηρημένο Γίγνεσθαι πήρε σάρκα και οστά με την διάκριση μεταξύ δυνάμει και ενεργεία και την πολυσήμαντη μετάβαση από το δυνάμει στο ενεργεία, με επί μέρους όψεις την οντολογική αναβάθμιση του τυχαίου σε οντικό επίπεδο και την ρητή ενσωμάτωση της *πράξης* στο θεωρητικό πλαίσιο των κβαντικών θεωριών σε νοηματικό επίπεδο. Καταλήγω, συνεπώς, στο ότι αυτό ακριβώς το φιλοσοφικό ζήτημα, αναφερόμενο στα εν λόγω φυσικά φαινόμενα και με τις συγκεκριμένες μαθηματικές μορφές, φέρει το βάρος της επανάστασης που εγκαινίασε το κβαντικό. Επί πλέον, το παλαιότερο εννοιολογικό πλαίσιο μπορεί εκ των υστέρων να αναγνωριστεί ως προϊόν περιορισμών και συνθηκών που επιβάλλονται στο *νέο* πλαίσιο, οπότε η άρνηση του παλαιού αναγνωρίζεται ως υπέρβαση των ορίων του. Με αυτόν τον τρόπο, το ανατρεπτικό στοιχείο στην επιστημονική επανάσταση αναδεικνύεται ταυτοχρόνως σε στοιχείο σύνδεσης, σε μια διαδικασία η οποία αντιπροσωπεύει την καθόλου «σωρευτική», ωστόσο προοδευτική ανάπτυξη της επιστημονικής θεωρίας.

10.3 Εξειδίκευση και μορφοποίηση

Έχοντας καταλήξει σε αυτά τα συμπεράσματα, μπορούμε τώρα να εξετάσουμε το εάν και πώς οι εξελίξεις στην φυσική και τα μαθηματικά, με τις οποίες ασχοληθήκαμε σε αυτήν την εργασία, μπορούν να στηρίξουν μια ρεαλιστική φιλοσοφική προσέγγιση. Πριν προχωρήσω, χρειάζονται ορισμένες διευκρινίσεις σχετικά με την χρήση του όρου «ρεαλισμός» σε σχέση με την φυσική. Θα κάνω την παρατήρηση ότι εκφράζονται δύο προσεγγίσεις, τις οποίες θα ονομάσω «από πάνω προς τα κάτω» και «από κάτω προς τα πάνω». Ενώ ο στόχος είναι κοινός, δηλαδή η διερεύνηση των θεμελίων και των μεθόδων της επιστήμης με τα νοηματικά εργαλεία που επεξεργάζεται ο φιλοσοφικός λόγος, σε πολύ γενικές γραμμές παρατηρείται η εξής διάκριση: Η πρώτη προσέγγιση, «από πάνω προς τα κάτω», αφορά κατά κανόνα την κοινότητα των φιλοσόφων. Ο ρεαλισμός, έχοντας οροθετηθεί ως φιλοσοφικό ρεύμα, στρέφεται στα φιλοσοφικά προβλήματα των φυσικών επιστημών, οπότε *εξειδικεύεται*, συνοδευόμενος από τον επιθετικό προσδιορισμό «επιστημονικός». Η δεύτερη προσέγγιση, «από κάτω προς τα πάνω», αφορά κατά κανόνα την κοινότητα των φυσικών επιστημόνων. Σε αυτήν την περίπτωση, εντοπίζονται εκείνες οι παραδοχές των φυσικών θεωριών που αναγνωρίζεται ότι συμπυκνώνουν την ρεαλιστική φιλοσοφική τοποθέτηση. Έτσι, ο ρεαλισμός *μορφοποιείται* με τους όρους των θεωρούμενων ως καλύτερων θεωριών κάθε φορά. Η πορεία από την φιλοσοφία στις επιστήμες και η πορεία από τις επιστήμες στην φιλοσοφία, αντιστοίχως η εξειδίκευση της γενικής έννοιας του ρεαλισμού στις επιστήμες, αφ' ενός, και, αφ' ετέρου, η συγκρότηση στο έδαφος των επιστημών της εκάστοτε μορφής που συλλαμβάνει σε συγκεκριμένες συνθήκες το πνεύμα του, σηματοδοτούν χονδρικά δύο αλληλένδετες προοπτικές. Η μία, αντιμετωπίζει τον ρεαλισμό υπό το πρίσμα μιας αντίληψης για τον κόσμο, βασισμένης στις φυσικές θεωρίες. Η άλλη, τον αντιμετωπίζει υπό το πρίσμα μιας αντίληψης για τις θεωρίες που μιλούν για τον κόσμο. Με την πεποίθηση ότι η διάκριση που κάνω έχει την σημασία της, θα την αποσαφηνίσω επικαλούμενος δύο αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις.

Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί στην προσέγγιση «από πάνω προς τα κάτω». Ο D. Papineau [163] αναφέρει τις εξής δύο θέσεις ως ελάχιστες προϋποθέσεις του ρεαλισμού –είτε επιστημονικού είτε όχι:

α) *Θέση περί ανεξαρτησίας*: οι κρίσεις μας αποτιμώνται ως προς την αλήθεια τους από έναν κόσμο ο οποίος υπάρχει ανεξάρτητα από το εάν έχουμε ή δεν έχουμε επίγνωση αυτού του κόσμου.

β) *Θέση περί γνωσιμότητας*: σε γενικές γραμμές, μπορούμε να γνωρίζουμε ποιες από αυτές τις κρίσεις είναι αληθείς.

Παρατηρούμε ότι το πρώτο σημείο υπονοεί και μια θέση περί θεωριών, εφ' όσον κάνει λόγο για την διατύπωση κρίσεων, δηλαδή προτάσεων οι οποίες επιδέχονται αληθοτιμές. Επί πλέον, υπονοεί μια δέσμευση, καθώς συνεπάγεται ότι οι *αληθοποιητές* των προτάσεων/κρίσεων ανήκουν στον ανεξάρτητο από την νόηση κόσμο. Δεν τίθεται ρητά, ωστόσο, τίποτε περί *αναφορικότητας* των θεωρητικών όρων της θεωρίας σε οντότητες υπαρκτές στον κόσμο.

Όσο για την δεύτερη προσέγγιση, «από κάτω προς τα πάνω», θα επικαλεστώ και πάλι το βιβλίο τού Isham στο οποίο αναφέρθηκα προηγουμένως. Αξίζει να σημειωθεί ότι, σε προπτυχιακό εγχειρίδιο φυσικής, ο συγγραφέας θέτει ευθέως φιλοσοφικά ερωτήματα και μάλιστα τονίζει ότι «*Είναι εκπληκτικό ότι, μεταξύ όλων των συγχρόνων επιστημών, μόνον η κβαντική φυσική φαίνεται να υποχρεώθηκε να αντιμετωπίσει το ζήτημα του Είναι άμεσα*» [161, σ. 65]. Εδώ, λοιπόν, προβάλλονται τα εξής ελάχιστα προαπαιτούμενα για την ρεαλιστική τοποθέτηση:

α) Οι φυσικές ποσότητες «έχουν» τιμές σε όλες τις χρονικές στιγμές.

β) Ο χειρισμός των προτάσεων σχετικά με τέτοιες εγγενείς τιμές (possessed values) μπορεί να γίνει με τα εργαλεία της συμβατικής προτασιακής λογικής.

Η θέση περί εγγενών τιμών των φυσικών μεγεθών θεωρείται πρωταρχική, υποκαθιστώντας την θέση περί οντολογικής ανεξαρτησίας από την νόηση. Ο λόγος, ωστόσο, περί «φυσικών ποσοτήτων» και «τιμών», δηλαδή περί *εννοιών* μέσω των οποίων αναφερόμαστε στον κόσμο, εισάγει μια προοπτική διαθλασμένη μέσα από τις γνωσιολογικές (epistemic) προϋποθέσεις της φυσικής. Ακόμη, υπονοείται και εδώ μια στάση έναντι θεωριών: δεν γίνεται αναφορά στην γνωσιμότητα του κόσμου ευθέως, παρά μόνον λέγοντας ότι έχουμε προτάσεις σχετικές με εγγενείς τιμές φυσικών μεγεθών. Η αλήθεια των προτάσεων και η αναφορικότητα των θεωρητικών όρων δεν αναφέρονται ρητά. Ενδέχεται να υπονοούνται στην αρχή περί εγγενών τιμών των φυσικών μεγεθών, ενδέχεται όμως να μένει ανοικτός ο δρόμος στην αναγωγή σε *παρατηρησιακά* γεγονότα. Παράλληλα, η απαίτηση περί «συμβατικής προτασιακής λογικής» πρέπει να νοηθεί ως απαίτηση για μια λογική τύπου άλγεβρας Boole, οπότε οι προτάσεις επιδέχονται *δίτιμες* (ναι – όχι) αληθοτιμές. Ρητή δέσμευση περί *αληθοποιητών* δεν γίνεται πέραν της επίκλησης της αρχής περί εγγενών τιμών των φυσικών μεγεθών. Συνεπώς, τα αιτήματα περί οντολογικής ανεξαρτησίας και γνωσιμότητας του κόσμου αποδίδονται ως σύζευξη της αρχής περί εγγενών τιμών των φυσικών μεγεθών και συμβατικής προτασιακής λογικής.

Βάσει της διάκρισης που έκανα προηγουμένως μεταξύ φιλοσοφικών άρρητων προϋποθέσεων της κλασικότητας και αναγκαίων εννοιών/όρων για αυτήν, φαίνεται ότι εν προκειμένω προσδίδεται στην φιλοσοφική θέση του ρεαλισμού μια αρκετά περιοριστική μορφή, πλήρως προσαρμοσμένη σε αντιλήψεις παραδοσιακά συνδεδεμένες με την κλασική φυσική.[59] Θεωρώ ότι πρόκειται για άποψη βεβαρημένη από την αδόκιμη –όσο και άδικη– ταύτιση του ρεαλισμού με την κλασική φυσική, και

[59] Είναι αδιαμφισβήτητο γεγονός ότι μία παραδοσιακή μορφή επιστημονικού ρεαλισμού αναπτύχθηκε στο έδαφος της κλασικής φυσικής, η οποία υπήρξε επί τρεις περίπου αιώνες το κατ' εξοχήν επιστημονικό παράδειγμα, ωστόσο τα ίχνη της στις *σύγχρονες* φιλοσοφικές αντιπαραθέσεις περί επιστήμης είναι εντονότατα.

από το «πνεύμα της Κοπεγχάγης» γενικά –δηλαδή, όλα όσα λέγονται σχετικά με το πώς «η κβαντική φυσική απορρίπτει τον ρεαλισμό». Είναι άποψη η οποία οδηγεί σε στάση «αμυντική», τρόπον τινά, και σε ένα είδος *φιλοσοφικού κεντρισμού* που αναζητά μια «μέση οδό» μεταξύ δύο απευκταίων ακραίων τοποθετήσεων: της «σκληρής» ρεαλιστικής θέσης, υποτίθεται της κλασικής φυσικής, και των ιδεαλιστικών και σκεπτικιστικών θέσεων που επικαλούνται την κβαντική φυσική. Πράγματι, ο Isham, από κοινού με τον Butterfield, στο πρώτο από τα άρθρα που επικαλέστηκα στις §§4.4, 4.5 και 4.6 [67], δηλώνει ότι «*ο ρεαλισμός καταρρέει εν όψει του θεωρήματος Kochen–Specker*», αναφέρει μια «*via media*» υπό διερεύνηση και χαρακτηρίζει την γενίκευση της άλγεβρας Boole σε άλγεβρα Heyting ως «*νεορεαλισμό*». Εν τέλει, ο Isham, στο εγχειρίδιό του, τονίζει ότι «*ο φορμαλισμός της κλασικής φυσικής είναι επί τούτου διαμορφωμένος ώστε να εκφράζει ακριβώς αυτό*», δηλαδή την αρχή περί εγγενών τιμών των φυσικών μεγεθών. Θα παρατηρήσω όμως ότι, άπαξ και μια διαισθητική έννοια οριστεί και διατυπωθεί με μαθηματική μορφή και ενταχθεί κατά τρόπον συνεπή σε ένα εννοιολογικό πλαίσιο, αποκαλύπτεται ότι αποκτά σημασίες ευρύτερες και βαθύτερες εκείνων που αρχικά προοριζόταν να εκφράσει. Σε σχέση με τις μαθηματικές μορφές των φυσικών μεγεθών, οι παρατηρήσεις στην §2.4 αυτό ακριβώς δείχνουν.

Οι δύο περιπτώσεις στις οποίες αναφέρθηκα είναι ενδεικτικές. Πρέπει, ωστόσο, να συγκεκριμενοποιήσουμε την διαδικασία εξειδίκευσης, αφ' ενός, και μορφοποίησης, αφ' ετέρου, από μία ακόμη οπτική γωνία: εκείνη που αφορά τις αναγκαίες διαφοροποιήσεις του ρεαλισμού έναντι του πλαισίου της κλασικής φυσικής. Θα καταφύγω στην καταγραφή των συνιστωσών του ρεαλισμού, με την μορφή με την οποία προσδέθηκε στενά με την κλασική φυσική, την οποία παρουσιάζει ο Β. Καρακώστας [36], διότι είναι η πλέον εμπεριστατωμένη και αντιπροσωπευτική. Παράλληλα, θα παραθέσω την πληρέστερη, καθ' όσον γνωρίζω, παρουσίαση των αρχών του επιστημονικού ρεαλισμού από τον Σ. Ψύλλο [5, 164].[60] Ακολούθως θα παρουσιάσω μερικές σκέψεις που προκύπτουν από την παρούσα εργασία.

Αρχίζοντας από τις βασικές αρχές του επιστημονικού ρεαλισμού, αυτές κατά τον Ψύλλο [5, Εισαγωγή] κατατάσσονται ως εξής:

1) *Μεταφυσική θέση*: Ο κόσμος δομείται με ορισμένο και ανεξάρτητο από την νόηση τρόπο από φυσικά είδη.

[60] Βλέπε και Α. Αραγεώργης [165, σ. 124].

2) *Σημασιολογική θέση*: Οι επιστημονικές θεωρίες πρέπει να λαμβάνονται κυριολεκτικά (at face value), καθ' όσον συνιστούν υπαγόμενες σε συνθήκες αληθείας (truth-conditioned) περιγραφές του ιδιαίτερου τομέα τους, τόσο παρατηρήσιμου όσο και μη παρατηρήσιμου. Άρα, μπορούν να είναι αληθείς ή ψευδείς. Οι θεωρητικές βεβαιώσεις δεν ανάγονται σε ισχυρισμούς περί της συμπεριφοράς παρατηρήσιμων μεγεθών, ούτε είναι απλώς εργαλειακοί μηχανισμοί για την εγκαθίδρυση συνδέσεων μεταξύ παρατηρήσιμων μεγεθών. Γίνεται δεκτό ότι οι θεωρητικοί όροι που φιγουράρουν στις θεωρίες αναφέρονται σε γεγονότα. Επομένως, εάν οι επιστημονικές θεωρίες είναι αληθείς, οι μη παρατηρήσιμες οντότητες που θέτουν υπάρχουν στον κόσμο.

3) *Γνωσιολογική θέση*: Οι ώριμες και επιτυχείς ως προς την προβλεπτική τους ικανότητα επιστημονικές θεωρίες θεωρούνται κατά προσέγγισιν αληθείς σχετικά με τον κόσμο. Οπότε, οι οντότητες που θέτουν ή, ούτως ή άλλως, οντότητες αρκετά παρόμοιες με εκείνες που οι θεωρίες θέτουν, όντως υπάρχουν στον κόσμο.

Οι θέσεις αυτές συνοδεύονται από τις εξής επεξηγηματικές παρατηρήσεις:

Η 1η θέση αντιτίθεται σε όλες τις προσεγγίσεις που ανάγουν το περιεχόμενο του κόσμου σε ό,τι επιτρέπει ένα σύνολο γνωσιολογικών (epistemic) πρακτικών και όρων. Ειδικότερα και όσον αφορά τα μη παρατηρήσιμα φυσικά είδη που θέτουν οι θεωρίες, στον βαθμό που υπάρχουν καν, υπάρχουν ανεξάρτητα από τις δυνατότητες του ανθρώπου να γνωρίσει, να επαληθεύσει ή να αναγνωρίσει την ύπαρξή τους. Οι επιστημονικές θεωρίες δεν προβάλλουν μια δομή στον κόσμο, ανακαλύπτουν και αναπαριστάνουν έναν ήδη δομημένο και ανεξάρτητο από την νόηση κόσμο.

Η 2η θέση αντιτίθεται στην εξαλειπτική εργαλειοκρατία και τον αναγωγιστικό εμπειρισμό, θεωρώντας ότι το θεωρητικό μέρος των επιστημονικών θεωριών είναι *μη εξαλείψιμο*.

Η 3η θέση αντιτίθεται στον αγνωστικιστικό ή τον σκεπτικιστικό εμπειρισμό, αναγνωρίζοντας ότι οι επιστημονικές θεωρίες μπορούν να επιτύχουν και όντως επιτυγχάνουν κατά προσέγγισιν την αλήθεια.

Επιπρόσθετα, οι θέσεις αυτές συμπληρώνονται [164] με τα εξής:

1) Όπως εκτίθεται, ο επιστημονικός ρεαλισμός είναι επίσης άποψη περί θεωριών.

2) Ο επιστημονικός ρεαλισμός έχει μια θεωρία αλήθειας. Θεωρεί την πραγματικότητα ως ολότητα γεγονότων, οπότε αληθής αναπαράσταση της πραγματικότητας σημαίνει αναπαράσταση γεγονότων. Τα γεγονότα είναι οι αληθοποιητές των προτάσεων μιας επιστημονικής θεωρίας.

3) Η αλήθεια μιας πρότασης δεν είναι απαραιτήτως μεταφυσικά διαφανής, δηλαδή δεν είναι σαφές σε τι γεγονότα δεσμεύει. Είναι, συνεπώς, αναγκαία η διάκριση μεταξύ γεγονότων και *θεμελιωδών* γεγονότων. Ο επιστημονικός ρεαλισμός αφορά το πραγματικό –δηλαδή το γεγονοτικό– και όχι το θεμελιωδώς πραγματικό. Η κυριολεκτική ανάγνωση των προτάσεων μιας επιστημονικής θεωρίας δεσμεύει σε γεγονότα και όχι σε θεμελιώδη γεγονότα. Η φύση των αληθοποιητών των προτάσεων, δηλαδή των γεγονότων, είναι χωριστό ζήτημα και εξετάζεται σε δεύτερο στάδιο.

4) Οι επιστημονικές θεωρίες κρίνονται από τον ανεξάρτητο από την νόηση κόσμο και όχι από το κατά πόσον ικανοποιούν γνωσιολογικά (epistemic) κριτήρια. Η αλήθεια *διακρίνεται* από την γνωσιολογική ορθότητα, ο κόσμος δεν είναι όπως είναι επειδή έτσι τον περιγράφει μια γνωσιολογικώς ορθή θεωρία. Αναγνωρίζεται, συνεπώς, η δυνατότητα *απόκλισης* μεταξύ αυτού που υπάρχει στον κόσμο και αυτού που υπάρχει σύμφωνα με μια γνωσιολογικώς ορθή θεωρία.

Επισημαίνω ότι στην ως άνω παρουσίαση των αρχών του επιστημονικού ρεαλισμού πέφτει έντονα η σκιά της διαμάχης με αντιρρεαλιστικές απόψεις –πράγμα που επισημαίνει και ο Ψύλλος [164]. Αυτό φαίνεται ειδικότερα στην ιδιαίτερη αναφορά σε μη παρατηρήσιμες οντότητες, καθώς η ύπαρξή τους ή μη είναι κρίσιμο σημείο αντιγνωμιών. Είναι αξιοσημείωτο ότι ο Ψύλλος, διερωτώμενος σχετικά με το νόημα του επιθέτου «επιστημονικός» στον όρο «επιστημονικός ρεαλισμός», πέρα από την κοινοτοπία ότι αφορά τις επιστήμες, βρίσκει ότι στην γενικότερη περίπτωση μπορεί μόνο να αφορά την ύπαρξη μη παρατηρήσιμων οντοτήτων. Το παράδοξο –όπως παρατηρεί ο ίδιος– ότι μια μεταφυσική θέση εξαρτάται έτσι από έννοιες γνωσιολογικού χαρακτήρα ή, ακόμη χειρότερα, πραγματολογικές, αντιμετωπίζεται μόνον εξετάζοντας συγκεκριμένα την σχέση με επί μέρους επιστήμες. Τελικά, το ειδοποιό στοιχείο για τον επιστημονικό ρεαλισμό είναι η κυριολεκτική ανάγνωση μιας επιστημονικής θεωρίας ως προς γεγονότα –όχι θεμελιώδη γεγονότα.[61] Η

[61] Επί παραδείγματι, εάν ευοδωθούν οι προσπάθειες των θεωρητικών των υπερχορδών, τα στοιχειώδη σωματίδια θα εξακολουθούν να αναγνωρίζονται ως αντικειμενικές οντότητες, μολονότι όχι πλέον ως

κυριολεκτική ανάγνωση δεν αφορά τα πάντα: Σχετικά με τα ερωτήματα, ποια είναι θεμελιώδη γεγονότα, ποιοι είναι οι όροι και οι τρόποι ύπαρξης των οντοτήτων στον κόσμο, όπως λέει ο Ψύλλος, «*οι ρεαλιστές δεν χρειάζεται να υποκλέψουν το προνόμιο των επιστημόνων*» σε αυτά τα ζητήματα [164]. Εάν κάποιες οντότητες, όπως, λόγου χάριν, τα ηλεκτρόνια, είναι παρατηρήσιμες ή όχι, πώς συμπεριφέρονται και με ποιους τρόπους υπάρχουν, είναι πρωτίστως πρόβλημα της φυσικής. Η διαχωριστική γραμμή μπορεί να χαραχθεί με το κριτήριο της εξήγησης που προσφέρει μια επιστημονική θεωρία. Η σημασιολογική θέση του ρεαλισμού αρκείται να βεβαιώσει «*ότι δεν υπάρχει λόγος να θεωρήσουμε ότι όλα όσα θέτει η επιστήμη είναι πλάσματα της φαντασίας ούτε ότι όλα τα επιστημονικά γεγονότα είναι προσποιητά* (impostors). *Αυτό εξασφαλίζει, σε τελευταία ανάλυση, η κυριολεκτική ανάγνωση ως προς τα γεγονότα*» [164]. Αυτό είναι αρκετό από την σκοπιά της φιλοσοφίας. Είναι σύμφωνο με την σκέψη που διατύπωσα, για την φιλοσοφία που εξειδικεύεται και την φυσική που μορφοποιεί.

Ας στραφούμε τώρα στην μορφή που έδωσε η κλασική φυσική σε ρεαλιστικές αντιλήψεις, δηλαδή την μορφή που η κβαντική φυσική απορρίπτει. Ο Καρακώστας, κατ' αρχάς, προσθέτει έναν επί πλέον επιθετικό προσδιορισμό, μιλώντας για *κλασικό* επιστημονικό ρεαλισμό. Είναι σαφές ότι εννοείται ο ρεαλισμός που στηρίζεται σε συγκεκριμένες παραδοχές οι οποίες αναπτύχθηκαν στο υπόβαθρο της κλασικής φυσικής και τις οποίες συνοψίζω στην συνέχεια, συνεπώς οροθετείται με αυτήν την έννοια «*από την επιστήμη του 19ου αιώνα*» [36, σ. 228], ενώ ο «*κλασικός ρεαλιστής*», μολονότι δρα στον 21ο αιώνα, λειτουργεί «*στο πλαίσιο του νευτώνειου παραδείγματος*» [36, σ. 227]. Θα ομαδοποιήσω τις συνιστώσες του κλασικού ρεαλισμού που αναφέρει ο Καρακώστας ως εξής:

α) *Μεταφυσικές παραδοχές*: Σε αυτές ανήκουν ο ατομισμός, ο αναγωγισμός, η διαχωρισιμότητα και η συναφής σχέση όλου και μέρους, κατά την οποία οι ιδιότητες του όλου προσδιορίζονται πλήρως από τις ιδιότητες των μερών και των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων.

β) *Σημασιολογική παραδοχή*: Οι θεωρητικοί όροι είναι «*οντολογικώς αναφερόμενοι*», με την έννοια ότι «*αναπαριστούν και αντιστοιχούν στις ιδιότητες διακριτών οντοτήτων, εξατομικευμένων υλικών αντικειμένων, των οποίων η παρατηρούμενη συμπεριφορά υποδεικνύει και επικυρώνει το οντολογικό περιεχόμενο που προϋποτίθεται από την φυσική θεωρία*» [36, σ. 228]. Διαπιστώνεται επί πλέον σχέση με την επονομαζόμενη χιουμιανή επιγένεση.

θεμελιώδεις. Είναι, άλλωστε, ρητός στόχος των οπαδών των υπερχορδών, οπότε παραμερίζονται και οι επιφυλάξεις περί «οντολογικής ασυνέχειας».

γ) *Γνωσιολογική παραδοχή*: Σε συμφωνία με τα ανωτέρω, η διαχωρισιμότητα υψώνεται σε *γνωσιολογική αρχή*, ως «*πρωτεύουσα συνθήκη της αντίληψής μας για τον φυσικό κόσμο, ως συνθήκη που χαρακτηρίζει τη δομή της σκέψης μας όσον αφορά στη σύλληψη της φυσικής πραγματικότητας*». Την διαπερνά ως άρρητη προϋπόθεση η «***απόλυτη κινηματική ανεξαρτησία** μεταξύ του γνωρίζοντος υποκειμένου και του γνωριζομένου αντικειμένου, του παρατηρητή και του παρατηρούμενου, ή, ειδικότερα, του συστήματος μέτρησης και του συστήματος υπό μέτρηση*» ([36, σσ. 225-6], έμφαση στο πρωτότυπο). Άρα η μέτρηση –διαδικασία αλληλεπίδρασης μεταξύ του προς μέτρηση συστήματος και της συσκευής μέτρησης– δεν μεταβάλλει την κατάσταση, δεν αλλοιώνει την ταυτότητα του εξεταζομένου συστήματος. Αναδεικνύει *προϋπάρχουσες* τιμές φυσικών μεγεθών. Οι ιδιότητες είναι *εγγενή χαρακτηριστικά* του συστήματος, οι τιμές τους είναι καθορισμένες και ανεξάρτητες από τον πειραματικό προσδιορισμό τους. Οι καταστάσεις των συστημάτων είναι όντως πραγματικές και όχι δυνάμει υπαρκτές, ενώ η διάκριση μεταξύ δυνάμει και ενεργεία δεν είναι ουσιώδης, απλώς καθίσταται περιττή.

Εκτός από τα ανωτέρω χαρακτηριστικά, ο Καρακώστας παραθέτει και γενικότερες φιλοσοφικές θέσεις, οι οποίες θεωρεί ότι προσιδιάζουν στον κλασικό επιστημονικό ρεαλισμό. Ξεχωρίζω τις ακόλουθες δύο:

α) Μια αντίληψη περί *αντικειμενικότητας* βασισμένη στην παραδοχή της κινηματικής ανεξαρτησίας, κατά την οποία «*Το γνωρίζον υποκείμενο, ο παρατηρητής, εκλαμβάνεται ως αποσπασμένος από το προς παρατήρηση αντικείμενο, το οποίο χαρακτηρίζεται από συντελεσμένες, εγγενείς ιδιότητες. Η αδιαμφισβήτητη, "αντικειμενική", υπόσταση αυτών των ιδιοτήτων αντλείται από το γεγονός ότι θεωρούνται ως αντιστοιχούσες σε ιδιότητες εξατομικευμένων οντοτήτων, οι οποίες υφίστανται **αυτοτελώς** ανεξάρτητα από τις πειραματικές συνθήκες και περιστάσεις υπό τις οποίες εκδηλώνεται η ύπαρξή τους. Έτσι, η εξιδανίκευση της κινηματικής ανεξαρτησίας στην κλασική φυσική και η συνακόλουθη αρχή της διαχωρισιμότητας ανέδειξαν μια, σύμφωνη προς τον κοινό νου, ρεαλιστική άποψη του εξωτερικού κόσμου ως αποσπασμένου από το δρων υποκείμενο* ([36, σ. 227], έμφαση στο πρωτότυπο).

β) Μια *αντιστοιχιστική θεωρία της αλήθειας* ως ενός είδους «*μορφισμού μεταξύ του τρόπου που ο κόσμος πραγματικά είναι και του τρόπου που εμείς παρατηρούμε τον κόσμο ότι είναι*» [36, σ. 228].

Επί πλέον, ο Καρακώστας επισημαίνει το εξής μεθοδολογικό ζήτημα: «*Η κλασική φυσική (και πρακτικά κάθε πειραματική επιστήμη)*, γράφει, *βασίζεται περαιτέρω στον* ***καρτεσιανό δυισμό***» ([36, σ. 224], έμφαση στο πρωτότυπο), που σημαίνει «*ριζικό διαχωρισμό του εξωτερικού κόσμου από την ανθρώπινη νόηση κατά τρόπο που καθιστά αδύνατη τη συμμετοχή οποιουδήποτε ενδιάμεσου φορέα εσωτερικής αλληλεπίδρασης ή αλληλοδιείσδυσης*» [36, σ. 225].

Οι ως άνω μεταφυσικές, σημασιολογικές και γνωσιολογικές συνιστώσες του κλασικού επιστημονικού ρεαλισμού παραβιάζονται από την κβαντική φυσική. Ο Καρακώστας προτείνει ως εκδοχή του ρεαλισμού συμβατή με την κβαντική φυσική αυτό που ονομάζει «ενεργό επιστημονικό ρεαλισμό». Πολύ συνοπτικά, αυτή η πρόταση προϋποθέτει την «*αποδοχή της οντικής πραγματικότητας ως οντότητας* ***οντολογικώς*** *αυτόνομης, απρόσβλητης από τον επιστημονικό λόγο και συμμετέχουσας σε αυτόν κατά τρόπο διαλεκτικό. Η ύπαρξή της αναγνωρίζεται ως λογικώς* ***πρότερη*** *της εμπειρίας και της γνώσης· δεν συνιστά μόρφωμα της ανθρώπινης νόησης ούτε αποτέλεσμα εκλεπτυσμένης γνωστικής ιδιοποίησης*» ([36, σ. 245], έμφαση στο πρωτότυπο). Είναι σαφέστατη διατύπωση αυτού που πρέπει να χαρακτηριστεί ως μεταφυσική θέση του ρεαλισμού, την οποία, παρεμπιπτόντως, η παρούσα εργασία υιοθετεί πλήρως. Εκεί που διαφοροποιείται ο Καρακώστας –και που δικαιολογεί το επίθετο «ενεργός»– είναι στις γνωσιολογικές παραδοχές του. Θεωρεί ότι, στο πεδίο αναφοράς της κβαντικής φυσικής, «*οποιαδήποτε γνωστική προσέγγιση της πραγματικότητας εμπεριέχει ως αδιαχώριστη συνιστώσα την* ***προθετικότητα του υποκειμένου****, του παρατηρητή. Η παρατηρούμενη πραγματικότητα δεν συνιστά πλέον κάτι που απλώς αναμένεται να "ανακαλυφθεί" από το υποκείμενο, αλλά* ***συνδιαμορφώνεται*** *από την ίδια την ερευνητική διερώτηση και ορθολογική δράση του υποκειμένου*» ([36, σ. 246], έμφαση δική μου). Η εν λόγω «συνδιαμόρφωση» αναφέρεται στην πρακτική, πειραματική διαδικασία, κατά την οποία υπεισέρχεται κατά τρόπο μη εξαλείψιμο η ελευθερία του γνωρίζοντος υποκειμένου ως προς την επιλογή ενός συγκεκριμένου πλαισίου. Αυτή η ελευθερία «*οδηγεί στην κβαντική μηχανική προς μια βαθμιαίως εκδιπλούμενη εικόνα της πραγματικότητας, η οποία, εν γένει, δεν καθορίζεται* ***μόνο*** *από το αρχικώς διερευνούμενο τμήμα του φυσικού κόσμου*» και, σύμφωνα «*με τη φυσικο-μαθηματική δομή της πρότυπης κβαντικής μηχανικής ... καθιστά δυνατή την άσκηση ανεξίτηλων επιδράσεων στη δυναμική εξέλιξη όπως και στη φύση ενός κβαντικού συστήματος*» ([36, σ. 246], έμφαση στο πρωτότυπο]. Εν τέλει, εξηγεί ο Καρακώστας, «*κατά τη διεξαγωγή μιας ακολουθίας μετρήσεων, η κατάσταση του συστήματος μεταφέρει στον χρόνο κατά ανεξίτηλο, μη-αντιστρέψιμο, τρόπο το πληροφοριακό περιεχόμενο της επιλογής του κάθε πειραματικού πλαισίου, η δε μεταφορά συντελείται εις τρόπον ώστε να επιτυγχάνεται κβαντομηχανικώς ο στατιστικός έλεγχος των αποτελεσμάτων των διαδοχικών μετρήσεων*» [36, σ. 247].

Στρέφομαι τώρα στις προσεγγίσεις της παρούσας εργασίας. Προκειμένου να προσδιορίσω επακριβώς τις παραδοχές και τις δεσμεύσεις που υιοθετώ, ας διευκρινίσω ότι, στα πλαίσια του ρεαλισμού γενικά, η φιλοσοφική στάση που προτιμώ είναι η στάση του υλισμού, η οποία αναγνωρίζει την πρωταρχικότητα της ύλης έναντι κάθε μορφής συνείδησης. Ο όρος «ύλη» δε, είναι η φιλοσοφική κατηγορία η οποία δηλώνει κάθε τι που υπάρχει πριν, πέρα και ανεξάρτητα από κάθε συνείδηση και που άμεσα ή έμμεσα είναι κατ' αρχήν δυνατόν να ανιχνευθεί με τρόπο αντιληπτό από τις αισθήσεις μας· αντίκειται συνεπώς σε κάθε μορφή ιδεαλισμού. Η θέση αυτή συμπληρώνεται από την θέση ότι ο υλικός κόσμος είναι γνώσιμος μέσω επιστημονικών θεωρητικών αφαιρέσεων· αντίκειται συνεπώς στον αγνωστικισμό, τον σκεπτικισμό και την εργαλειοκρατία. Οι επιστημονικές θεωρίες εκλαμβάνονται κυριολεκτικά, κατ' αρχάς ως προς τον επονομαζόμενο μακρόκοσμο, και *κατόπιν* κρίνεται αν αυτός ανάγεται σε κάτι πιο θεμελιώδες, αν οι θεωρητικές προτάσεις περί του μακροκόσμου είναι διαφανείς ή όχι. Η αναφορικότητα των θεωρητικών όρων δεν υποκαθιστά τις διάφορες σημασίες υπό συνθήκες ή εντός πλαισίων –δηλώνει ότι οι θεωρητικοί όροι είναι μη εξαλείψιμοι, ότι έχουν γνωστικό περιεχόμενο, ότι δεν είναι συντομογραφίες συμπλεγμάτων παρατηρησιακών όρων, ούτε σύμβολα γνωσιοθεωρητικών συνθηκών και κριτηρίων, ούτε όροι υπολογιστικών αλγορίθμων μεταξύ παρατηρήσεων. Συνεχίζω, λοιπόν, να χρησιμοποιώ τον όρο «ρεαλισμός» με την διευκρίνιση ότι του προσδίδω ακριβώς το νόημα που μόλις εξέθεσα.

Έχοντας παραθέσει τους δύο συγγραφείς, διακρίνουμε αμέσως μία διαφορά η οποία εντοπίζεται με την μεγαλύτερη σαφήνεια στο ζήτημα της κυριολεκτικής ανάγνωσης των θεωριών και της αναφορικότητας των όρων τους. Αφ' ενός, ο Ψύλλος εξειδικεύει τον ρεαλισμό στις επιστήμες και προτείνει την κυριολεκτική ανάγνωση ως ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του, αλλά και ως όριο της δικαιοδοσίας του, αναγνωρίζοντας το προνόμιο των επιστημόνων για τα θέματα του τομέα τους. Αφ' ετέρου, ο Καρακώστας εκθέτει τις εννοιολογικές προϋποθέσεις της *κλασικής* φυσικής και, απορρίπτοντάς τες όπως άλλωστε επιτάσσει η κβαντική φυσική, αρνείται την κυριολεκτική ανάγνωση με τον εξής τρόπο: «*… η προαναφερθείσα θέση του κλασικού ρεαλισμού ότι το σημασιολογικό περιεχόμενο των θεωρητικών όρων μιας επιτυχούς φυσικής θεωρίας* ***γνησίως*** *αναφέρεται σε αυθύπαρκτες οντότητες του κόσμου –συνιστά* ***κυριολεκτική περιγραφή*** *αυτοτελών οντοτήτων παρατηρήσιμων ή μη– είναι αδόκιμη, διότι η εγκυρότητά της προϋποθέτει μια ειδοποιό, προσχηματισμένη δομή του κόσμου: Ότι, δηλαδή, ο κόσμος αποτελείται ή οικοδομείται από καλώς-ορισμένα, εξατομικευμένα αντικείμενα, τα οποία, ως εκ τούτου, απολαύουν αυτόνομης, ανεξάρτητης ύπαρξης. Υπό τη θεώρηση της σύγχρονης κβαντικής θεωρίας, όμως, η εκ των προτέρων ταυτοποίηση φυσικών αντικειμένων με στοιχεία της φυσικής πραγματικότητας είναι μη αποδεκτή, διότι –ανεξάρτητα από την όποια ακριβή σημασία του όρου περί φυσικών αντικειμένων– κάθε μικροφυσικό αντικείμενο υπόκειται, σύμφωνα με τη θεωρία, στο φαινόμενο της κβαντικής μη-διαχωρισιμότητας, και, κατ'* *επέκταση, στερείται καθορισμένης ατομικότητας, δηλαδή πάγια προσδιορισμένης μόνο μέσω αμετάβλητων ιδιοτήτων*» ([36, σ. 229], έμφαση στο πρωτότυπο).

Θεωρώ ότι ως προς αυτό το σημείο η αντίθεση είναι παραπλανητική. Έχουμε διασταύρωση επιχειρημάτων με διαφορετικές στοχεύσεις, που προσπερνούν το ένα το άλλο κινούμενα σε μη τεμνόμενες τροχιές. Ο Καρακώστας περιγράφει την *μορφή* που παραδοσιακά πήρε ο ρεαλισμός βάσει της κλασικής φυσικής και, φυσικά, την απορρίπτει. Ο Ψύλλος ενδιαφέρεται για την ρεαλιστική προσέγγιση στις επιστήμες και, φυσικά, επιμένει ότι κάποιοι θεωρητικοί όροι αναφέρονται σε κάποια γεγονότα. Ο ένας μιλάει για τον κόσμο· ο άλλος μιλάει για τις θεωρίες που μιλούν για τον κόσμο. Η διαφαινόμενη αντίθεση μεταξύ των δύο προσεγγίσεων αίρεται, αν παρατηρήσουμε τα εξής. Οι μεταφυσικές προϋποθέσεις της κλασικότητας που απορρίπτει η κβαντική φυσική είναι σαφώς ενσωματωμένες στο κλασικό εννοιολογικό πλαίσιο με τον τρόπο που ο Poincaré εξηγεί την *μηχανική ερμηνεία*, ως σχέση μορφισμού με μιαν έννοια προτύπου διαμορφωμένου με τους όρους της νευτώνειας *μηχανικής*. Αυτό δικαιολογεί την ονομασία «μηχανιστικός ρεαλισμός» για την φιλοσοφική θέση η οποία απολυτοποιεί και επεκτείνει και πέραν της κλασικής φυσικής αυτό το πλαίσιο.[62] Τούτο, ως προς τον ατομισμό, επεκτείνεται και στην γενική σχετικότητα, όπως επισημαίνει ο Howard (§1.3). Η φιλοσοφική θέση του ρεαλισμού, δηλαδή η ανεξαρτησία του κόσμου από την νόηση, εξειδικευόμενη διερμηνεύεται με τις μεταφυσικές παραδοχές που απαριθμεί ο Καρακώστας, και οι οποίες συμπίπτουν με εκείνες τις οποίες προηγουμένως διέκρινα ως αναγκαίες για την κλασικότητα. Αλλά, πρόκειται για *επί πλέον* φιλοσοφικές παραδοχές, οι οποίες εμπλέκονται κατά την συγκρότηση του εννοιολογικού πλαισίου της φυσικής σε μιαν ιστορικά προσδιορισμένη φάση. Όταν η επιστήμη καθιστά αναγκαία την ριζική αντικατάσταση του εν λόγω πλαισίου, αναθεωρούνται οι *επί πλέον* παραδοχές –τούτο σημαίνει ότι ο φιλοσοφικός ρεαλισμός υφίσταται *επαναστατική αλλαγή ως προς την μορφή του, όχι* ότι ανατρέπεται. Το τελευταίο ισχυρίζονται μόνον όσοι ταυτίζουν τον ρεαλισμό με μία σχετική ιστορική μορφή του. Η εμμονή σε ό,τι εντυπώθηκε, παγιώθηκε και θεωρείται διαισθητικά αυτονόητο –άκριτα–, αγκιστρωμένο με την δύναμη της συνήθειας και από αδράνεια στις προϋποθέσεις της κλασικότητας, οι οποίες κατά το μάλλον ή ήττον έχουν διαποτίσει τις αυθόρμητες αντιλήψεις για την φύση, είναι το περιεχόμενο του όρου «απλοϊκός ρεαλισμός». Η απλοϊκότητα και η διαίσθηση, ωστόσο, έχουν σχετικό χαρακτήρα, εξελίσσονται: το σημερινό απλοϊκό δεν ήταν καθόλου απλοϊκό χθες. Ο Καρακώστας, όπως παρέθεσα προηγουμένως, συνδέει την διαχωρισιμότητα με την «*σύμφωνη προς τον κοινό νου, ρεαλιστική άποψη του εξωτερικού κόσμου ως αποσπασμένου από το δρών υποκείμενο*»· και εξηγεί ότι αναφέρεται στην παθητική πρόσληψη δεδομένων με την υπόθεση ότι οι ιδιότητες ενός υλικού συστήματος ανήκουν ενδογενώς στο σύστημα καθ' εαυτό, ανεξάρτητα από το είδος της πειραματικής πράξης. Ασφαλώς, η ρεαλιστική άποψη του

[62] Να μην συγχέεται με την επονομαζόμενη μηχανοκρατία, η οποία χαρακτήριζε την φιλοσοφία τού Descartes και ξεπεράστηκε με την νευτώνεια δυναμική.

εξωτερικού κόσμου, γενικά, αφορά έναν εξωτερικό κόσμο ανεξάρτητο από την νόηση. Εν τούτοις, σε δεδομένες ιστορικές συνθήκες και στο έδαφος της κλασικής φυσικής, μία μορφή ρεαλισμού όντως ταυτίστηκε με την αρχή της διαχωρισιμότητας και έτσι με το αποσπασμένο υποκείμενο. Η προσήλωση σε αυτήν την θέση με τρόπο που αγνοεί την κβαντική φυσική είναι η σύγχρονη απλοϊκότητα. Λόγω της συνάφειάς της με τις κλασικές αντιλήψεις, θεώρησα αυτού του τύπου τον απλοϊκό ρεαλισμό ως συνώνυμο του μηχανιστικού ρεαλισμού.

10.4 Εννοιολογική καινοτομία και ο κόσμος του ανοικτού ερωτήματος

Εάν ο ρεαλισμός δεν ανατρέπεται ως προς το γενικό πνεύμα του, αυτό δεν σημαίνει ότι μια επιστημονική επανάσταση τον αφήνει αλώβητο παρατηρητή, ο οποίος αρκείται αφ' υψηλού να απαιτεί την κυριολεκτική ανάγνωση της γλώσσας μιας νέας επιστημονικής θεωρίας. Αντιθέτως, υπόκειται σε κριτική, η οποία δεν τον αποδυναμώνει, δεν τον μετριάζει, αλλά τον κάνει βαθύτερο και πιο συγκεκριμένο. Ειδικότερα και ως προς την σημασιολογική θέση, το ζήτημα δεν είναι η αναφορικότητα των όρων. Το αίτημα για την αναφορά *κάποιων* θεωρητικών όρων – όχι απαραιτήτως όλων– σε *κάποιες* οντότητες ή φυσικές διαδικασίες είναι ευρύτατο και αφήνει ανοικτό το ζήτημα της θεωρητικής υπόδειξης της εμβέλειας της αναφορικότητας, η οποία βεβαίως παράγει όρους ως προς την παραστατικότητα της θεωρίας. Επίσης, η οροθέτηση της δικαιοδοσίας της φιλοσοφίας και της επιστήμης αναγνωρίζει την σχετική τους αυτονομία. Το πραγματικό ζήτημα βρίσκεται στο ότι η αυτονομία αυτή είναι σχετική, φιλοσοφία και επιστήμη αλληλοδιεισδύουν και διαμορφώνονται σε αμοιβαία επίδραση. Εκεί που η φιλοσοφία οφείλει να σταθεί αυτοκριτικά εν όψει μιας επιστημονικής επανάστασης είναι η *λογική* αυτής της αλληλεπίδρασης, η οποία δεν είναι άλλη από την λογική της επιστημονικής ανακάλυψης. Τον όρο «λογική» τον εννοώ εδώ σε δύο αλληλένδετα αλλά διακριτά επίπεδα. Το ένα είναι το επίπεδο της μαθηματικής λογικής. Το κβαντικό φαινόμενο της μη διαχωρισιμότητας, η ενυπάρχουσα σε αυτό εγγενής πιθανοκρατία και η έννοια της δυνητικότητας ως συμβατή ερμηνεία της οδηγούν σε διαφορετικούς τύπους κωδικοποίησης, με τους όρους της μαθηματικής λογικής, και έτσι επιβάλλουν τροποποιήσεις στην σημασιολογική θέση του ρεαλισμού. Η διατύπωση του Ψύλλου κάνει λόγο για «υποκείμενες σε συνθήκες αληθείας περιγραφές» της πραγματικότητας. Εάν αυτό σημαίνει ότι οι προτάσεις της θεωρίας επιδέχονται αληθοτιμές, τότε πρέπει να συμβιβαστεί με το γεγονός ότι η λογική των προτάσεων της κβαντικής φυσικής δεν είναι η «συμβατική προτασιακή λογική». Είδαμε ότι ο Isham θεωρεί αυτήν την δεύτερη ως μία από τις δύο θεμελιώδεις συνιστώσες του ρεαλισμού. Ισχύει και εδώ ό,τι αναφέρθηκε σχετικά με την επανάσταση στην μορφή του ρεαλισμού, ωστόσο το ζήτημα αυτό αγγίζει το περιεχόμενό του. Υπάρχει ήδη η παραδοσιακή (Birkhoff–von Neumann) κβαντική λογική ως αντικαταστάτρια της δίτιμης λογικής Boole και οι μετεξελίξεις της [32, 33]. Όπως παρατήρησα στην §5.1, φαίνεται εκ πρώτης όψεως ότι οι προτάσεις τις οποίες νομιμοποιεί η κβαντική θεωρία περιορίζονται σε σύγκριση με τις προτάσεις της κλασικής φυσικής. Λόγου χάριν, μια πρόταση του τύπου «το φυσικό μέγεθος "θέση" ενός σωματιδίου λαμβάνει καθορισμένη τιμή εντός ενός διαστήματος Δ των πραγματικών αριθμών, και την ίδια χρονική στιγμή το φυσικό μέγεθος "ορμή" του ίδιου σωματιδίου λαμβάνει καθορισμένη τιμή εντός ενός διαστήματος Δ΄» δεν είναι πρόταση της θεωρίας, οπότε δεν τίθεται θέμα αληθοτιμών της. Επί πλέον, υπάρχουν προτάσεις νέου τύπου, όπως, φερ' ειπείν, «η προβολή τού spin ενός ηλεκτρονίου σε συνεζευγμένη κατάσταση έχει τιμή ½ ως προς κάποια διεύθυνση». Και αυτή η πρόταση στερείται νοήματος, οπότε ούτε τώρα τίθεται θέμα αληθοτιμών. Εν τούτοις, εάν η σημασιολογική θέση του ρεαλισμού πρέπει να συρρικνωθεί παρακολουθώντας την συστολή της εμβέλειας των κβαντικών προτάσεων λόγω της κβαντικής μη διαχωρισιμότητας, το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο και φτωχό. Στην §5.1 ισχυρίστηκα ότι δεν συρρικνώνονται οι γνωστικές δυνατότητες, γίνεται αντιληπτός ο πλούτος των φυσικών δυνητικοτήτων. Η παρατήρηση που κάνει ο Ψύλλος, ότι τα γεγονότα στα οποία δεσμεύει η θεωρία δεν θεωρούνται εκ των προτέρων ως θεμελιώδη,[63] είναι κρίσιμη σε αυτό το σημείο, προσδίδοντας στην ρεαλιστική θέση εκείνη την ευελιξία που της επιτρέπει να αγκαλιάσει τον πλούτο της πραγματικότητας. Η ευελιξία, όμως, λειτουργεί και προς τις δύο κατευθύνσεις. Μία εκδοχή είναι να θεωρηθεί η κβαντική λογική τμήμα μιας *επέκτασης* της λογικής Boole, της πρωτοβάθμιας και μη αξιωματικοποιήσιμης φιλικής προς την ανεξαρτησία (independence–friendly) λογικής των Hintikka και Sandu[64] [166]. Εισάγει την έννοια της εξάρτησης/ανεξαρτησίας ποσοδεικτών, και επιτρέπει εκφράσεις οι οποίες έχουν διαφορετικό νόημα εντός διαφορετικών πλαισίων και των οποίων το πληροφορικό περιεχόμενο δεν ανάγεται σε άθροισμα των περιεχομένων των συνιστωσών τους. Εν προκειμένω, η μη μεταθεσιμότητα τελεστών αποδίδεται ως εξάρτηση ποσοδεικτών. Η εργασία των Isham et al., εξ άλλου, στην οποία έχω αναφερθεί εκτενώς, προτείνει έναν άλλο τρόπο να παρασταθεί ο πλούτος της πραγματικότητας με μιαν εμπλουτισμένη λογική των προτάσεων, με τα χαρακτηριστικά που την συνοδεύουν: γενικευμένες συναρτήσεις αποτίμησης και γενικευμένες αληθοτιμές βασισμένες σε αλυσίδες σχέσεων, γενίκευση της δίτιμης λογικής, «αγκίστρωμα» σε «κλασικού τύπου» αποτιμήσεις –όλα συμπυκνωμένα σε μιαν έννοια κβαντικής πλαισιακότητας, η οποία συνδυάζεται με τα «κλασικόμορφα παράθυρα» της εργασίας τού de Groote, από άλλη κατεύθυνση. Είναι κάποιες από τις δυνατές απαντήσεις, ασφαλώς όχι οι μόνες. Μας οδηγούν όμως στο δεύτερο επίπεδο χρήσης του όρου «λογική», το επίπεδο της επιστήμης της Λογικής ως μελέτης των γενικών σχημάτων της νόησης. Σε αυτό το δεύτερο επίπεδο, θεωρώ ότι η

[63] Με την έννοια, λόγου χάριν, ότι εάν η θεωρία, σε ένα ορισμένο στάδιο, θέτει την οντότητα «πρωτόνιο», τότε η θέση της οντότητας «quark» την οποία η θεωρία, στην περαιτέρω ανάπτυξή της, δέχεται ως θεμελιωδέστερη δεν καταργεί –ενάντια στον εξαλειπτισμό– την πραγματικότητα του πρωτονίου. Πρβλ. και Σημείωση 56.

[64] Ο Hintikka [166] αναφέρει την πρόταση του Putnam, να αλλάξει η λογική χάριν της φυσικής, και αντιτείνει ότι η λογική πρέπει να αλλάξει χάριν της λογικής, δηλαδή της εκφραστικής ισχύος. Από την σκοπιά αυτής της εργασίας, είναι άλλη μία περίπτωση κατά την οποία μια δομή που προκύπτει στην βάση της φυσικής εντάσσεται σε μια δομή που προκύπτει από την ανεξάρτητη δυναμική των μαθηματικών.

επιστημονική επανάσταση επιβάλλει τομή στην φιλοσοφία του ρεαλισμού. Εάν η «ευελιξία» του ρεαλισμού στην οποία αναφέρθηκα προηγουμένως δεν εκφυλίζεται σε αυθαιρεσία και σοφιστεία, θα πρέπει να σημαίνει τον αναπροσανατολισμό στον τρόπο ανάπτυξης των εννοιών, στην λογική της αναθεώρησης έως και ριζικής ανασκευής τους. Σε αυτό ακριβώς το σημείο υπεισέρχεται η σχέση μεταξύ λόγου περί του αντικειμένου και λόγου περί του λόγου περί του αντικειμένου, στην οποία έχω επανειλημμένα αναφερθεί. Ο εξωτερικός αντικειμενικός κόσμος *δίδεται* στις αισθητηριακές αντιλήψεις μας, δεν γίνεται *γνώσιμος* σε αυτές. Γίνεται γνώσιμος μέσω της *νοητικής* δραστηριότητας. Εάν γίνεται λόγος για όρους δυνατότητας γνώσης, αυτοί συγκεκριμενοποιούνται στην συγκρότηση ενός πλαισίου επιστημονικών εννοιών που θα ανταποκρίνεται στην φυσική πραγματικότητα. Η νόηση ανοίγεται στον κόσμο όπου κυριαρχεί το άγνωστο. Το καθιστά γνώσιμο, σκέπτεται περί αυτού και έτσι σκέπτεται τον εαυτό της: συγκροτεί το αντικείμενό της συγκροτώντας τις έννοιές της. *Το άνοιγμα στην εννοιολογική καινοτομία είναι άνοιγμα στον κόσμο του ανοικτού ερωτήματος*. Θεωρία και μεταθεωρία, σκέψη για τον κόσμο και σκέψη για την σκέψη, με *αυτήν* την έννοια συμπίπτουν· η κίνηση της νόησης και στα δύο επίπεδα πραγματοποιεί την σύμπτωσή τους και αυτό είναι όρος ώστε η νόηση να κάνει τις μεταξύ τους *διακρίσεις*, να αποφύγει την «υπερβατολογική ψευδαίσθηση» και τις παρεπόμενες συγχύσεις.[65] Είναι η λογική η οποία αναγνωρίζει ότι τα όρια εντός των οποίων ύψιστο κριτήριο είναι η συνοχή και η μη αντίφαση καθορίζονται από την *αντίσταση* που προβάλλει το αντικείμενο στην θεωρητική του ιδιοποίηση, ότι οι αντιφάσεις σηματοδοτούν την παρουσία του αντικειμένου και ότι η υπέρβαση των αντιφάσεων είναι η διείσδυση της νόησης στο αντικείμενο –η γνώση του.[66]

Υπό το πρίσμα της κβαντικής φυσικής, η καινοτομία σημαίνει ότι η κυριολεκτική ανάγνωση της θεωρίας και οι όροι της θα αναφέρονται τώρα σε πλέγματα σχέσεων στον αντικειμενικό κόσμο όπου το αναγκαίο βρίσκεται σε διαλεκτική σχέση με το τυχαίο και όπου η δυνητικότητα έχει πραγματικότητα. Όπως γράφει ο Καρακώστας, «*Η κβαντική δυνητικότητα αναφέρεται σε μια δυναμική, "εν τω γίγνεσθαι", διαδικασία ως προς τη μορφοποίηση μιας πραγματικότητας*», συνεπώς «*ανήκει στον* ***τρόπο ύπαρξης*** *του συστήματος καθεαυτόν*», είναι άρα «***φυσικώς πραγματική και αντικειμενική οντότητα***» ([36, σ. 236], έμφαση στο πρωτότυπο). Αυτή η διαλεκτική συμπυκνώνεται σε «κυτταρική», τρόπον τινά, μορφή στο φαινόμενο της συζευξιμότητας. Ένα συνεζευγμένο σύστημα δύο σωματιδίων δεν αφορά την σχέση δύο αυτοτελών οντοτήτων. Κλασικά και σύμφωνα με μια τυπική λογική θεώρηση, δύο οντότητες, αφ' ενός, και η μεταξύ τους σχέση, αφ' ετέρου, θα συγκροτούσαν ένα δίπολο, «σχέση – συσχετιζόμενο», όπου φαίνεται να αντιπαρατίθενται δύο αλληλοαποκλειόμενα αντίθετα. Εδώ, όμως, και σε συμφωνία με την κβαντική φυσική, έχουμε την υπέρβαση του τυπικού διπόλου η οποία οδηγεί σε σχέση της

[65] Τέτοιες συγχύσεις από την μη διάκριση των δύο επιπέδων, στην ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Gödel, εξετάζονται στο [167].
[66] Μπορεί να συγκριθεί με την σχέση χεγκελιανής παράδοσης και αναλυτικής φιλοσοφίας που διαπιστώνει ο Φαράκλας [16, σ. 135].

οποίας οι πόλοι θα είναι *και* οντότητες *και* σχέσεις. Όπως πάλι γράφει ο Καρακώστας, «*το κβαντικό αντικείμενο, εν αντιθέσει προς κάθε μηχανιστική ή απλοϊκή ρεαλιστική αντίληψη, συνιστά οντότητα και ταυτοχρόνως δυναμική ολότητα σχέσεων. Ως οντότητα συγκροτείται από το σύνολο των ενεργεία και δυνάμει ιδιοτήτων του. Ως ολότητα συνίσταται από το σύνολο των δυνατών σχέσεων στις οποίες το αντικείμενο είναι δυνατόν να ευρεθεί*» [36, σ. 243]. Αυτή η διαλεκτική της σχέσης και του συσχετιζόμενου, η οποία ξεπερνά την κυκλικότητα που συνεπάγεται ο τυπικός διαχωρισμός τους κατανοώντας τα ως συν-εξελισσόμενες αντιθετικές όψεις μίας ενιαίας δυναμικής ολότητας, βρίσκεται στον πυρήνα της διαλεκτικής λογικής ως μεθόδου υπέρβασης των αντιφάσεων και εξέλιξης των εννοιών· είναι η «διόρθωση» του καντιανού υπερβατολογικού σχήματος όπως αναφέρθηκε στο τέλος τής §2.4. Η υπέρβαση της τυπικής λογικής από την διαλεκτική λογική[67] οξύνει, αναπτύσσει και επικαιροποιεί τον επιστημονικό ρεαλισμό· σε αντίθετη περίπτωση, αυτός καθίσταται ευάλωτος στα επιχειρήματα του ιδεαλισμού και του σκεπτικισμού. Επομένως, προβάλλει η εξής δυναμική εικόνα. Η διαλεκτική λογική ως μέθοδος που προσανατολίζει στον τρόπο συγκρότησης των εννοιών, επιστημονικών αφαιρέσεων οι οποίες αναφέρονται (σημασιολογική θέση) σε οντότητες με την ανωτέρω έννοια που υπαγορεύει η φυσική και σε πλέγματα σχέσεων, υπαρκτών ανεξάρτητα από την νόηση (μεταφυσική θέση), διαμορφώνει τους όρους για την θεωρητική ιδιοποίηση, την γνώση (γνωσιολογική θέση) της φυσικής πραγματικότητας. Ως εκ τούτου, η διαλεκτική λογική αποκτά τον χαρακτήρα γνωσιοθεωρίας. Παράλληλα, ο επιστημονικός ρεαλισμός, ως προς την εξειδίκευση και την μορφοποίησή του στην οποία αναφέρθηκα, δεν πρέπει να εκλαμβάνεται ως ένας «σκληρός» πυρήνας επί του οποίου επικάθηται μια μορφή εν είδει «περιβλήματος»· έχει τον χαρακτήρα μεθόδου για την συγκεκριμένη κάθε φορά διερεύνηση του ερωτήματος «πώς αναπτύσσεται η γνώση μέσω της επιστήμης». Δεν πρόκειται, δηλαδή, για δύο μονοδρόμους με αντίθετη φορά· ούτε από τον κόσμο προς την συνείδηση, ούτε από την συνείδηση προς τον κόσμο. Η δραστηριότητα της σκέψης με έννοιες, στα γενικά της σχήματα και τα βαθύτερα μοτίβα της, έχει με το πλέγμα των σχέσεων και των αλληλεπιδράσεων στον εξωτερικό κόσμο σχέση ομόλογη: Όχι ως ένα-προς-ένα αντιστοιχία, όχι ως μηχανική αποτύπωση, αλλά ως θεωρητική παράσταση αυτού του πλέγματος σχέσεων και αλληλεπιδράσεων, με τον τρόπο που περιέγραψα στην §2.2. Το μόνο περιεχόμενο της νόησης είναι αυτό που αντλείται από τον εξωτερικό κόσμο, η δραστηριότητά της με τον αναστοχασμό και την διαμόρφωση θεωριών είναι η ανάπτυξη της γνώσης για τον εξωτερικό κόσμο. Στην διαλεκτική αυτή σχέση, νοητική αναπαράσταση και εξωτερικός κόσμος συν-εξελίσσονται, με τον εξωτερικό κόσμο να είναι πάντα πρωταρχικός, πηγή και τελικός κριτής της θεωρητικής γνώσης.

[67] Αξίζει να σημειωθεί ότι και ο Καρακώστας [36], εκθέτοντας την διαλεκτική τού δυνάμει και του ενεργεία, αναφέρεται στον Hegel.

10.5 Παλιοί και νέοι μύθοι

Στην §2.2, έθιξα το ζήτημα της σχέσης υποκειμένου της γνώσης και αντικειμένου της γνώσης. Σε σχέση με αυτό, θα αναφερθώ κατ' αρχάς στο ζήτημα της αντικειμενικότητας. Υπό το πρίσμα της προηγηθείσας συζήτησης σχετικά με τον επιστημονικό ρεαλισμό, το ζήτημα της αντικειμενικότητας απομυθοποιείται. Αντικειμενικότητα δεν σημαίνει «παρατηρησιακή ουδετερότητα», σημαίνει ελευθερία από δόγματα (§1.2), κριτική και αυτοκριτική στάση έναντι των θεωριών, που φτάνει και μέχρι το σημείο της αυτοαναίρεσής τους. Ως προς το ζήτημα της σχέσης υποκειμένου–αντικειμένου, που δικαίως καταλαμβάνει κεντρική θέση στην φιλοσοφία της κβαντικής φυσικής, θεωρώ ότι πρέπει να τεθεί στα συμφραζόμενα της αναθεωρημένης σχέσης μεταξύ δυνάμει και ενεργεία, η οποία, όπως υποστήριξα, φέρει το βάρος της επιστημονικής επανάστασης. Επαναλαμβάνω δύο σημεία που εξέθεσα στην §2.2. Πρώτον, το πείραμα και η μέτρηση από άποψη αρχής δεν διαφέρουν από οποιοδήποτε φυσικό φαινόμενο που εκτυλίσσεται ερήμην κάποιου παρατηρητή, και το γεγονός αυτό δεν μεταβάλλεται στις κβαντικές θεωρίες. Δεύτερον, στο πείραμα και την μέτρηση, η έννοια της Φύσης η οποία συμπεριλαμβάνει τον παρατηρητή ως δρών και νοήμον ον αποκτά εμπράγματη ύπαρξη, σε μια πράξη φυσική και ταυτόχρονα νοητική. Τα λόγια τού von Weizsäcker που επικαλείται ο Heisenberg [77, σ. 43], ότι «*η φύση είναι αρχαιότερη από τον άνθρωπο, αλλά ο άνθρωπος* [είναι] *αρχαιότερος από τις φυσικές επιστήμες*», έχουν γενική ισχύ. Κάθε φυσική θεωρία είναι προϊόν νοητικής και φυσικής ανθρώπινης δραστηριότητας, και τούτο είναι γεγονός τετριμμένο. Η παρατήρηση και η μέτρηση έχει ως κατάληξη μιαν αλλαγή σε ένα αντικείμενο μακροσκοπικό (ένδειξη δείκτη, οθόνη, δεδομένα σε υπολογιστή κ.λπ.). Είναι διαπίστωση τετριμμένη –είμαστε μακροσκοπικά όντα, στο κάτω – κάτω! Αλλά, η έννοια του μακροσκοπικού έναντι του κβαντικού είναι ασαφής όσο και τα μεταξύ τους όρια. Αποκτά νόημα μόνον αν πούμε ότι αναδύεται ένα σύστημα *διαχωρίσιμο* στο έδαφος της *μη διαχωρίσιμης* πραγματικότητας. Το *πώς* γίνεται αυτό, η φυσική θεωρία δεν το ερμηνεύει ακόμη – είναι η φυσική εκκρεμότητα την οποία έχω επισημάνει. Εάν το πραγματατολογικό γεγονός υψωθεί σε μεθοδολογική αρχή, δηλαδή σε όρο δυνατότητας για την γνώση, τότε: Ή το «μακροσκοπικό» θα θεωρηθεί ως όρος με τον τρόπο που το θέτει η φυσική –που σημαίνει ότι η λεγόμενη τομή Heisenberg θα αναγνωριστεί ως πρόβλημα της φυσικής [6]. Τότε προκύπτει ότι όρος δυνατότητας για την γνώση είναι η διαδικασία της *αποσύζευξης* (disentanglement) [38]. Ή, εναλλακτικά, το «μακροσκοπικό» θα θεωρηθεί ως *γνωσιολογικά προνομιακό*, καταλήγοντας σε καντιανού τύπου *a priori* εκμαγείο για την αισθητηριακή εποπτεία. Αλλά, το «μακροσκοπικό» γνωσιολογικά συναρτάται, ή μάλλον συμπίπτει με το «μακροσκοπικό» όπως το εννοεί η φυσική, και η εκκρεμότητα ως προς το δεύτερο θέτει το πρώτο σε ομηρία, καθώς τα όριά του μετατοπίζονται και το ίδιο υπόκειται σε διαρκή αναθεώρηση. Έτσι, η εκκρεμότητα στην φυσική επάγει εκκρεμότητα φιλοσοφικής φύσεως. Οι φιλόσοφοι στρέφονται στην φυσική[68] και προβληματίζονται για την πραγματολογική διάκριση παρατηρήσιμου και μη παρατηρήσιμου, ενώ η πραγματική διάκριση είναι μεταξύ διαχωρίσιμου –προϋπόθεσης για το παρατηρήσιμο– και μη διαχωρίσιμου. Οι φυσικοί, εξάλλου, υπό το βάρος του «κβαντικού παράδοξου» επιχειρούν να απεκδυθούν των παραδοσιακών εννοιών της κλασικότητας. Η πίεση για προσαρμογή στο «παράδοξο» και η επίδραση μιας γενικευμένης απλουστευτικής αντίληψης για αυτό που επεκράτησε να ονομάζεται «πνεύμα της Κοπεγχάγης», έχουν αφήσει έντονα ίχνη στην ορολογία της κβαντικής φυσικής, προσδίδοντας ανθρωποκεντρική χροιά στις θεμελιώδεις έννοιες βάσει των οποίων οικοδομείται ολόκληρη η θεωρία, όπως παρατηρητής, παρατηρήσιμα μεγέθη, μέτρηση. Πολύ χαρακτηριστική είναι η παραπομπή στους Landau και Lifshitz [7] που παρέθεσα στην §2.2, όπου ο όρος «μέτρηση» ορίζεται πρακτικά ως ισοδύναμος με την κάθε φυσική αλληλεπίδραση, ερήμην οιουδήποτε παρατηρητή. Επιγραμματικά, εάν η συνδεδεμένη με την κλασικότητα μηχανιστική άποψη μυθοποιούσε την σχέση θεωρίας και πράξης με τον απόλυτο αποχωρισμό τους, η άκριτη αντίδραση σε αυτήν την άποψη τείνει να οδηγείται στο άλλο άκρο, με την μυθοποίηση της σχέσης υποκειμένου–αντικειμένου. Ο μύθος του ουδέτερου παρατηρητή δίνει την θέση του στον μύθο της κατασκευασμένης πραγματικότητας. Για τον ρεαλισμό όπως εξήγησα ότι τον αντιλαμβάνομαι, ο ανθρωποκεντρισμός στην φυσική είναι εξοβελιστέος.

Όσον αφορά τους πρωτοπόρους της κβαντικής φυσικής, ο Heisenberg, θεωρεί ότι «*Η οντολογία του υλισμού βασιζόταν στη χίμαιρα, πως μπορεί κανείς να επεκτείνει το χαρακτήρα της ύπαρξης, το άμεσα πραγματικό του κόσμου που μας περιβάλλει, και στις συνθήκες της ατομικής περιοχής. Αλλά η επέκταση αυτή είναι αδύνατη*» [77, σ. 146]. Σε άλλο σημείο, ωστόσο, γράφει ότι, «*Σίγουρα η θεωρία των κβάντων ... δεν εισάγει το πνεύμα ή τη συνείδηση του φυσικού σαν ένα μέρος του ατομικού φαινομένου*» [77, σ. 42]. Ο Bohr, εξ άλλου, όπως σημειώνει ο Landsman [6], δεν κάνει διάκριση μεταξύ πειραματικής/μετρητικής συσκευής και παρατηρητή και «*ποτέ δεν απέδωσε ιδιαίτερο ρόλο στον νου του παρατηρητή ούτε επικρότησε μιαν υποκειμενική άποψη για την φυσική*». Ο Howard, αναφερόμενος στον Bohr, είναι πιο κατηγορηματικός: «*Είναι προτιμότερο να μιλάμε μόνο για* ***συσκευή*** *και* ***αντικείμενο*** *μάλλον, παρά για παρατηρητή και αυτό που παρατηρείται, προκειμένου να αποφύγουμε την σύγχυση σχετικά με τον ρόλο της υποκειμενικής συνείδησης ενός ανθρώπινου παρατηρητή. ... ο Bohr επιμένει ρητά, πάλι και πάλι, ότι τα κρίσιμα ζητήματα αφορούν την σχέση μεταξύ συσκευών μέτρησης και παρατηρούμενων αντικειμένων, μια σχέση εντεταγμένη εξ ολοκλήρου εντός της φυσικής σφαίρας, και ότι κάθε λόγος περί "υποκειμένων" πρέπει να αποφεύγεται. Λέγει, επί πλέον: "Εφ' όσον, στην φιλοσοφική βιβλιογραφία, γίνεται μερικές φορές αναφορά σε διαφορετικά επίπεδα αντικειμενικότητας ή υποκειμενικότητας ή ακόμη πραγματικότητας, μπορεί να τονιστεί ότι η έννοια ενός έσχατου υποκειμένου καθώς και αντιλήψεις όπως ο ρεαλισμός και ο ιδεαλισμός δεν έχουν θέση στην αντικειμενική περιγραφή όπως την έχουμε ορίσει" (...). Σίγουρα,*

[68] Εντός του «κυρίου ρεύματος» των κβαντικών θεωριών στο οποίο περιορίζομαι.

*πάντα μπορούμε να συμπεριλάβουμε τον ανθρώπινο παρατηρητή, ως άλλο ένα φυσικό σύστημα, στην διάταξη των συσκευών, αλλά το σημαντικό σημείο είναι ότι, κατά την άποψη τού Bohr, η ανθρώπινη **συνείδηση** δεν παίζει ρόλο στην διευκρίνιση της παρατηρησιακής κατάστασης στην κβαντική μηχανική*» ([168, σσ. 201-229], έμφαση στο πρωτότυπο).

Η διαδικασία της μέτρησης, του πειράματος, της παρατήρησης, ούτως ή άλλως είναι συμμετοχή και συνδιαμόρφωση του υπό έρευνα φυσικού συστήματος, ως πρώτο στάδιο της γνωστικής διαδικασίας, και αυτό ίσχυε και στα πλαίσια της κλασικής φυσικής: *η γνωστική διαδικασία είναι ενιαία*. Μολονότι είναι καίριο και καθοριστικό συστατικό της γνωστικής διαδικασίας και μάλιστα του πειράματος, η μέτρηση δεν παύει να είναι συστατικό: η ανάδειξή της σε ιδιάζον γνωσιοθεωρητικό στοιχείο συρρικνώνει την διαδικασία και απηχεί μια διάθεση οπερασιοναλιστική. Η ουσιώδης διαφορά σε εννοιολογικό επίπεδο έγκειται στο γεγονός ότι το πλαίσιο της κλασικότητας περιλαμβάνει ως θεμελιώδες στοιχείο την αρχή των εγγενών τιμών φυσικών μεγεθών, την οποία η κβαντική θεωρία παραβιάζει, παραγνωρίζοντας τον συνδιαμορφωτικό ρόλο της πειραματικής πράξης, τον οποίο η κβαντική θεωρία ρητά αναγνωρίζει: «*... το πειραματικό πλαίσιο λειτουργεί όχι ως διαμεσολαβητικός παράγοντας πιστοποίησης προ-δεδομένων στοιχείων ή γεγονότων, αλλά ως **μορφοποιητικός** παράγοντας για τον παραγωγικό καθορισμό ενός γεγονότος*» ([36, σ. 240], έμφαση στο πρωτότυπο· πρβλ. και §5.1). Και πάλι, όταν η κβαντική φυσική αντικρούει τον τυπικό διαχωρισμό θεωρίας και πράξης ενσωματώνοντας το πείραμα στην θεωρία, η προσκόλληση στην απόλυτη διάκρισή τους παραχωρεί την θέση της σε μια παραπλανητική αποτίμηση του ρόλου του πειράματος. Η φυσική διαδικασία, που διέπεται από φυσικούς νόμους, της αλληλεπίδρασης πειραματιζόμενου υποκειμένου και πειραματικού συστήματος, συνιστά προσομοίωση αυτού που γίνεται στην φύση ανεξάρτητα από κάθε νόηση όπου συγκροτούνται μακροσκοπικά αντικείμενα. Στο υπέδαφος του θεμελιώδους κβαντικού κόσμου, αναδύεται μέσω αποσύζευξης ένα σύστημα επιδεχόμενο εξατομίκευση και απόδοση τιμών σε καθορισμένα φυσικά μεγέθη, κατά την διαδικασία της μέτρησης. Το ίδιο γίνεται ερήμην οποιουδήποτε παρατηρητή όταν σχηματίζεται ένα φυσικό σύστημα όπως ένα δέντρο ή ένας δεινόσαυρος ή ένα μόριο DNA ή ένα SQUID.[69] Η ποιοτική διαφορά, για άλλη μία φορά, δεν βρίσκεται στην διαφορετική σχέση υποκειμένου–αντικειμένου, αλλά στην διαφορά συζευξιμότητας και αποσύζευξης. Η αναγκαία εισαγωγή της *πλαισιακότητας* δεν σημαίνει εξάρτηση από την νόηση, εκφράζει την μη μονοσήμαντη σχέση μεταξύ δυνάμει και ενεργεία την οποία αποκαλύπτει η κβαντική φυσική, το στοιχείο που αλλάζει ριζικά την εικόνα για τον κόσμο.

Υπάρχουν ουσιαστικά δύο επιλογές ως προς τον ρόλο της μέτρησης. Η μία είναι εκείνη που υποστηρίζω και επανέλαβα στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο.

[69] S(uperconducting) QU(antum) I(nterference) D(evice).

Οδηγεί κατ' ευθείαν στα συμπεράσματα της §5.1 σχετικά με τον φορμαλισμό της κβαντικής θεωρίας: μακράν από το να εκφράζει γνωστικούς περιορισμούς, εισάγει στο εννοιολογικό της πλαίσιο την πράξη ως κορυφαία στιγμή για την περιγραφή του φυσικού κόσμου. Το υποκειμενικό τίθεται έτσι με τρόπο αντικειμενικό, στο έδαφος της αλληλομετατροπής τού δυνάμει και του ενεργεία στην φύση, ανεξάρτητα από νόηση και γνωσιολογικές (epistemic) προϋποθέσεις. Το εκφράζει σαφώς και ο Καρακώστας όταν γράφει: «*…η κβαντική κατάσταση είναι δυνατόν να ερμηνευθεί στο **οντικό** επίπεδο ως το μέτρο της συνύπαρξης ενός συνόλου πολλαπλών δυνητικοτήτων. Ενώ στο **επιστημικό** επίπεδο, η πραγμάτωση μιας συγκεκριμένης δυνητικότητας επιτυγχάνεται, κατά την κβαντική θεωρία, μέσω της πράξης της μέτρησης ή της αυθόρμητης αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον, επιβάλλοντας τη μετάβαση από τη δυνάμει στην ενεργεία ύπαρξη*» ([36, σ. 235], έμφαση στο πρωτότυπο). Η δεύτερη επιλογή αποδίδει στην μέτρηση/παρατήρηση ένα ιδιόμορφο *status*. Παράλληλα με τον ρόλο της από άποψη γνωσιολογική, θεωρείται ότι έχει συνέπειες σε επίπεδο *οντολογικό*. Σημειωτέον ότι σε αυτήν την περίπτωση η μέτρηση συνδυάζεται με την υπόθεση ότι η μετρητική διάταξη είναι σύστημα που περιγράφεται *κλασικά*, για το οποίο δεν ισχύει ο κβαντικός φορμαλισμός (και πάλι, βλέπε την παραπομπή στους Landau και Lifshitz [7] στην §2.2). Ο Isham [161] αναφέρεται στον ρόλο της μέτρησης ως εξής: «*Εάν δεν αποδίδεται κανένα νόημα στην τιμή ενός φυσικού μεγέθους παρά μόνον ως αποτέλεσμα μιας μέτρησης, τότε η έννοια της "μέτρησης" θα παίζει θεμελιώδη ρόλο στην διατύπωση της θεωρίας*». Ως ακραία περίπτωση, αναφέρει την πρόταση του von Neumann, κατά την οποία «*η διαδικασία περιγραφής των μετρήσεων με την καθιερωμένη κβαντική θεωρία λειτουργεί μέχρι του σημείου όπου τα αποτελέσματα συλλαμβάνονται από μιαν ανθρώπινη νόηση, οπότε ο φορμαλισμός παύει να ισχύει*». Δηλαδή, «*ο ανθρώπινος νους είναι η ύστατη μετρητική συσκευή, δηλαδή, η κίνηση από το δυνάμει στο ενεργεία συντελείται τελικά όταν το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης κατά την μέτρηση φτάνει στην ανθρώπινη συνείδηση*» [161, σσ. 180-181].

Κατ' αυτόν τον τρόπο υπονοείται ότι η συνείδηση έχει υλική, αιτιακή σχέση με τα φυσικά φαινόμενα. Ουσιαστικά είναι θέση της ίδιας τάξεως με την εκδοχή ότι το κβαντικό σύστημα *έρχεται σε ύπαρξη* κατά την παρατήρηση μέσω μιας *κλασικής* πειραματικής διάταξης. Είτε το δυνάμει γίνεται ενεργεία όταν κάποια συνείδηση το συνειδητοποιεί, είτε το κβαντικό σύστημα οφείλει την ύπαρξή του στην –κλασικών προδιαγραφών– υποκειμενική δράση, όλα αυτά σημαίνουν ότι γνωρίζουμε τον κόσμο που κατασκευάζουμε: φαινόμενο είναι το παρατηρούμενο φαινόμενο. Αλλά, τότε, τι συμβαίνει με τον κόσμο της συνηθισμένης εμπειρίας, τον οποίο δεν υποβάλλουμε σε κβαντικές μετρήσεις –ούτε τον υπέβαλε ποτέ η ανθρωπότητα σε όλη την ιστορία της; Τρεις επιλογές υπάρχουν εδώ. Ή θα δεχτούμε δύο κόσμους, τον κβαντικό και τον «κλασικό», πράγμα που οδηγεί σε έναν οντολογικό διχασμό. Ή θα δεχτούμε ότι ο «μακρόκοσμος» είναι θεμελιώδης και περιγράφεται κλασικά· τότε η κβαντική θεωρία αναγκαστικά μετατρέπεται σε υπολογιστική μηχανή ή ανάγεται πλήρως σε παρατηρησιακά δεδομένα. Και στις δύο περιπτώσεις δεν εξηγείται πώς, δίπλα στον θεμελιώδη κλασικό κόσμο, παρατηρούνται φαινόμενα ριζικά αντίθετα με κάθε κλασική περιγραφή. Και πάλι οδηγούμαστε σε οντολογικό διχασμό. Ή, τέλος, θα δεχτούμε ότι ο κβαντικός κόσμος είναι θεμελιώδης και ο μακρόκοσμος αναδύεται από αυτόν. Εφ' όσον ο κβαντικός κόσμος έρχεται σε ύπαρξη μέσω της δράσης του υποκειμένου –ή της συνείδησής του– και είναι θεμελιώδης, τότε και ο μακρόκοσμος υπάρχει όταν το υποκείμενο τον παρατηρεί. Αν αποκλείσουμε τον οντολογικό διχασμό, αυτή η τελευταία είναι η μόνη λογικά συνεπής θέση που ξεκινά από τις ως άνω περί υποκειμένου γνωσιολογικές προϋποθέσεις. Τόσο αυτή, όσο και ο οντολογικός διχασμός, είναι ριζικά αντίθετες προς τις θέσεις που υποστηρίζω στην παρούσα εργασία.

Με την διαδικασία της μέτρησης στην κβαντική φυσική συνδέεται άμεσα το ζήτημα ενός υποτιθέμενου καρτεσιανού δυισμού. Ο Isham συνδέει με την μέτρηση αυτό που χαρακτηρίζει ως «σχίσμα υποκειμένου–αντικειμένου» ως εξής: «*Η φυσική απαντά στο γνωσιολογικό ερώτημα, πώς μπορούμε να αποκτήσουμε γνώση των ιδιοτήτων ενός αντικειμένου, με την έννοια της* ***μέτρησης****, δηλαδή, κάθε φυσικού ενεργήματος μέσω του οποίου η τιμή μιας φυσικής ποσότητας μπορεί να προσδιοριστεί (ίσως με ακρίβεια εντός κάποιων ορίων μόνον) και να καταγραφεί. Μια τέτοια εικόνα βρίσκεται σε συμφωνία με το γενικό σχίσμα αντικειμένου–υποκειμένου της επιστημονικής μεθοδολογίας, δια του οποίου ένα τμήμα του φυσικού κόσμου απομονώνεται σκόπιμα από το περιβάλλον του έτσι ώστε οι θεωρητικές και πειραματικές έρευνες να μπορούν να προχωρήσουν ανεμπόδιστες από οποιαδήποτε επίδραση του υπόλοιπου σύμπαντος*» ([161, σ. 68], έμφαση στο πρωτότυπο). Από την δική μας σκοπιά, αν μπορεί να γίνει λόγος για «σχίσμα», δεν αφορά την σχέση υποκειμένου–αντικειμένου· αφορά το θεμελιώδες γνωσιοθεωρητικό γεγονός ότι, όπως εξηγήθηκε στην §1.4, μια «τομή» εισάγεται στην αρχή κάθε έρευνας, δεδομένου ότι είμαστε υποχρεωμένοι να «αποκόψουμε» ένα μέρος του όλου, στο οποίο επικεντρωνόμαστε ως το αντικείμενο της έρευνάς μας, ενώ το υπόλοιπο του όλου περιορίζεται στον ρόλο του περιβάλλοντος. Εντελώς διαφορετικό νόημα έχει η τοποθέτηση του Heisenberg:

«*... το σχίσμα αυτό*, γράφει, *ήταν εξαιρετικά τελεσφόρο στην φυσική επιστήμη για μερικούς αιώνες. Η νευτώνεια μηχανική κι όλα τ' άλλα τμήματα της κλασσικής φυσικής, που ήσαν οικοδομημένα κατά το πρότυπό της, βασίζονταν στην υπόθεση, πως μπορεί να περιγράψει κανείς τον κόσμο* ***χωρίς να μιλήσει για το Θεό ή για μας τους ίδιους****. Η δυνατότητα αυτή θεωρούνταν σχεδόν σαν μια απαραίτητη προϋπόθεση για όλες τις φυσικές επιστήμες.*

»*Αλλά ίσα – ίσα σ' αυτό το σημείο η κατάσταση έχει αλλάξει απ' τα θεμέλια με τη σύγχρονη θεωρία των κβάντων· ... Η φυσική επιστήμη δεν περιγράφει και δεν εξηγεί τη* *φύση απλώς όπως είναι "καθ' εαυτή". Είναι μάλλον ένα κομμάτι του αμοιβαίου παιχνιδιού ανάμεσα στη φύση κι εμάς τους ίδιους. Περιγράφει τη φύση που είναι εκτεθειμένη στις ερωτήσεις μας και τις μεθόδους μας. Τη δυνατότητα αυτή δεν μπορούσε να τη σκεφθεί ακόμα ο Καρτέσιος αλλά έτσι* ***γίνεται αδύνατος ένας σαφής διαχωρισμός μεταξύ του κόσμου και του Εγώ***» ([77, σσ. 71-72], έμφαση δική μου).

Εξέθεσα την άποψή μου σχετικά στην §2.2. Το «υποκείμενο», ο παρατηρητής, είναι το δρών, νοήμον ανθρώπινο όν, τμήμα της φυσικής πραγματικότητας. Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την θέση τού Bohr όπως την εκθέτει ο Howard και την παρέθεσα προηγουμένως –ότι «*πάντα μπορούμε να συμπεριλάβουμε τον ανθρώπινο παρατηρητή,* ***ως άλλο ένα φυσικό σύστημα****, στην διάταξη των συσκευών*» [έμφαση δική μου]– είναι εντελώς θεμιτό να παρατίθεται ισότιμα το υποκείμενο μαζί με το σύστημα μέτρησης, από την άποψη ότι το ανθρώπινο ον και μια συσκευή *δεν διαφέρουν* κατ' αρχήν, εφ' όσον είναι αμφότερα υλικά συστήματα εμπλεκόμενα σε φυσικά φαινόμενα. Εν τούτοις, *διαφέρουν* εφ' όσον στο νοήμον ον εκδηλώνεται ένας «τρόπος» της ύλης που δεν εκδηλώνεται σε άλλα υλικά σώματα: η σκέψη. Η σκέψη δεν είναι ύλη, είναι τρόπος της ύλης. Το εργαλείο είναι προέκταση του χρήστη του εργαλείου *μόνον* ως προς την αύξηση της εμβέλειας της υλικής, φυσικής δραστηριότητάς του –δεν είναι προέκταση της σκέψης του, «πραγμοποιεί» (Bachelard) την σκέψη του. Η σχέση υποκειμένου υπό την ανωτέρω έννοια του δρώντος νοήμονος σώματος με το αντικείμενο είναι ζήτημα της φυσιολογίας, της ψυχολογίας, της κοινωνιολογίας και της ιστορίας –ίσως κάπου στο βάθος να έχει και η κβαντική φυσική κάτι να πει. Αλλά από φιλοσοφική σκοπιά, το ζήτημα υποκειμένου–αντικειμένου είναι το ζήτημα της σχέσης της νόησης με το αντικείμενό της, ή της συνείδησης με την ύλη, συμπεριλαμβανομένου του σώματος–φορέα συνείδησης. Η μεγάλη συνεισφορά τού Descartes υπήρξε η αποσαφήνιση αυτής της σχέσης ως σχέσης αντιθετικής. Ο ιστορικός του περιορισμός, υπό την επήρεια του μηχανοκρατικού πνεύματος της εποχής του, ήταν ο *δυισμός* του, ο αποχωρισμός των δύο αντιθέτων ως *res extensa* και *res cogitans*. Η *υπέρβαση* αυτού του σχήματος σημαίνει υπέρβαση του *δυισμού*, όχι οπισθοδρόμηση πίσω από τον Descartes σε μια νεφελώδη αντίληψη για την νόηση και την υλική ύπαρξη. Η υπέρβαση του καρτεσιανισμού πραγματοποιήθηκε ιστορικά με την φιλοσοφία τού Spinoza. Η ίδια φύση που εκτείνεται είναι η ίδια που σκέπτεται. Η σχέση νόησης και σώματος δεν είναι σχέση αιτίας–αποτελέσματος, διότι πρόκειται για σχέση του σώματος με μία λειτουργία του, για ένα και το αυτό πράγμα ιδωμένο υπό δύο διαφορετικές απόψεις. Το σώμα που υπό το κατηγόρημα της έκτασης κινείται και δρα στον χώρο, υπό το κατηγόρημα της σκέψης σκέπτεται. Η σπινοζική Υπόσταση ουσιαστικά συμπίπτει με την καθολική νομοτέλεια, όχι ως κάτι οντολογικά αυτοτελές αλλά ως υπάρχουσα μέσω των τρόπων και των κατηγορημάτων. Αυτό υποδηλώνουν η *natura naturans* και η *natura naturata*, δηλαδή, όπως λέει ο Spinoza, η φύση ως ενεργός, ελεύθερη αιτία, ή τα κατηγορήματα που εκφράζουν αιώνια και άπειρη ουσία, και ταυτόχρονα η φύση ως παθητική, ως οι τρόποι των κατηγορημάτων που απορρέουν και υπάρχουν αναγκαία [169, Μέρος I, πρόταση XXIX, σημείωση]. Σε αντίθεση με την μηχανοκρατική καρτεσιανή αντίληψη, το σκεπτόμενο σώμα γίνεται τόσο περισσότερο αναγκαία σκεπτόμενο, όσο επεκτείνει το πεδίο της δραστηριότητάς του ανάμεσα στα αντικείμενα του κόσμου, και, αντιστοίχως, η μελέτη του σκεπτόμενου σώματος δεν περιορίζεται σε ένα μεμονωμένο άτομο, αλλά στην λίγο ή πολύ ενεργό αλληλεπίδρασή του με τον γύρω του κόσμο, δηλαδή το «ανόργανο σώμα» του (βλέπε, λόγου χάριν, [169, Μέρος II, πρόταση XIII, σημείωση]). Με την σειρά της, η σπινοζική φιλοσοφία είχε τις δικές της αδυναμίες, με την μορφή ενός άκαμπτου καθολικού ντετερμινισμού. Στο τελευταίο τούτο σημαντικό ζήτημα, η «διόρθωση» του σπινοζισμού συντελέστηκε με την ανάπτυξη της διαλεκτικής λογικής στην κλασική γερμανική φιλοσοφία. Όλες αυτές οι φιλοσοφικές εξελίξεις που οδήγησαν πολύ πέρα από τον Descartes πραγματοποιήθηκαν στο έδαφος μιας κλασικής φυσικής η οποία δεν είχε καν φτάσει στην κορύφωσή της. Ο ενεργός ρόλος του υποκειμένου, πέρα από διφορούμενες διατυπώσεις και νοηματικές ασάφειες, συμπυκνώνεται στο σχήμα που δανείστηκα από τον Φαράκλα και αναπροσάρμοσα στην §2.2 και το οποίο αποτυπώνεται στις κβαντικές θεωρίες με τον τρόπο που εξέθεσα στην §5.1, δηλαδή με την εισαγωγή της έννοιας της *πράξης* ως της ανώτερης κατηγορίας στο κβαντικό εννοιολογικό πλαίσιο. Εάν δεν ακολουθήσουμε τον δρόμο υπέρβασης του καρτεσιανού δυισμού που χάραξε ο Spinoza, ανοίγει ο δρόμος για να οδηγηθούμε στον Berkeley –και τότε μπορούμε να μιλάμε για εμάς τους ίδιους και για τον θεό, για να θυμηθούμε τα λόγια τού Heisenberg. Ο Wheeler είναι εντελώς συνεπής ως προς την φιλοσοφική του τοποθέτηση όταν, στο ίδιο συνέδριο προς τιμήν τού Heisenberg που προανέφερα [158], διατυπώνει την συχνά επαναλαμβανόμενη φράση, «*Κανένα στοιχειώδες κβαντικό φαινόμενο δεν είναι φαινόμενο μέχρις ότου το φαινόμενο καταγραφεί (αποτυπωθεί ή "παρατηρηθεί" ή "τερματιστεί με μια μη αναστρέψιμη πράξη ενίσχυσης")*». Και συνοψίζει, αναφερόμενος στο «*... σημείο που τόνισαν με όλο και μεγαλύτερη ένταση και σαφήνεια ο Leibniz, ο Kant και ο Mach. Όλα όσα ονομάζουμε "πραγματικότητα", μας θυμίζουν, ανάγονται σε τελευταία ανάλυση στην παραγωγή τάξης μέσα από τις αισθητηριακές εντυπώσεις: δεν προηγούνται οι νόμοι και έπονται οι αισθητηριακές εντυπώσεις, αλλά προηγούνται οι αισθητηριακές εντυπώσεις και από αυτές προκύπτει ο "νόμος"· δηλαδή, οι κανονικότητες*». Η αναγνώριση της φιλοσοφικής κληρονομιάς υπογραμμίζει αυτό που επανειλημμένα έχω υποστηρίξει, ότι η κβαντική φυσική δεν ταυτίζεται ούτε υπαγορεύει μονοσήμαντα μιαν οποιαδήποτε ερμηνεία της, της ερμηνείας της Κοπεγχάγης συμπεριλαμβανομένης. Οι πρωτοπόροι θεμελιωτές της κβαντικής θεωρίας δεν αντιμετώπιζαν το έργο τους με φιλοσοφική παρθενικότητα. Είναι εύλογο, μπροστά στον επαναστατικό χαρακτήρα των ιδεών που ανέπτυξαν για την φυσική πραγματικότητα, να επιστράτευσαν τις ήδη διαμορφωμένες κοσμοθεωρητικές απόψεις τους, ακόμη και να θεώρησαν το επιστημονικό τους έργο ως επιβεβαίωση αυτών των απόψεων. Αλλά, σε καμία περίπτωση δεν νομιμοποιείται ο ισχυρισμός ότι η ερμηνεία της Κοπεγχάγης –ή κάθε άλλη ερμηνεία– προκύπτει από τις εξελίξεις στην φυσική. Αναφέρεται σε αυτές, στηρίζεται σε αυτές, ασφαλώς· αλλά δεν *απορρέει* μόνον από αυτές. Ως εκ τούτου, η αμφισβήτηση μιας ερμηνείας δεν συνεπάγεται αμφισβήτηση της φυσικής θεωρίας. Είναι εντελώς θεμιτό να παραμένει κανείς εντός του «κύριου ρεύματος» των κβαντικών θεωριών, να προσβλέπει στον εμπλουτισμό, την αναθεώρηση ή την ανάπτυξή τους, χωρίς να τις θεωρεί *a priori* ατελείς και να αναζητά εναλλακτικές θεωρίες. Αυτή η στάση όχι μόνον είναι συμβατή, αλλά και απαιτεί την κριτική εξέταση κάθε ερμηνείας που τείνει να παγιωθεί δογματικά σε «κύριο ρεύμα», καθώς και την δεκτικότητα στην εννοιολογική καινοτομία που αρμόζει στην επαναστατικότητα της σύγχρονης φυσικής.

10.6 Το κβαντικό ερμηνεύεται βάσει του εαυτού του

Παραμένοντας, λοιπόν, εντός του κύριου ρεύματος των κβαντικών θεωριών, ας εξετάσουμε το ζήτημα της ερμηνείας του κβαντικού από την σκοπιά των σύγχρονων εξελίξεων μέσω των οποίων, όπως είδαμε, η διαδικασία κβάντωσης έφτασε να ενταχθεί σε ένα πολυσύνθετο μαθηματικό πλαίσιο. Εάν κοιτάξουμε πίσω, στα βήματα που κάναμε σε αυτήν την προσέγγιση, μπορούμε να διακρίνουμε το αποτύπωμα διαδοχικών μεταμορφώσεων του κλασικού. Αρχικά, το κλασικό είναι βεβαίως το πλαίσιο της κλασικής φυσικής. Η κβάντωση σε αυτήν την φάση δεν είναι παρά συνταγή: δηλαδή, μια τεχνική συγκρότηση του κβαντικού φορμαλισμού σε αντιστοιχία προς τις κλασικές έννοιες. Το «αγκίστρωμα» του κβαντικού στο κλασικό για τις ανάγκες της ερμηνείας του, έχει εδώ την εξής έννοια: Τελεστές του κβαντικού φορμαλισμού αναγορεύονται σε εκπροσώπους φυσικών μεγεθών στην βάση της *δομικής ομοιότητας* των δύο φορμαλισμών, αποκτώντας δηλαδή νόημα επειδή είναι κόμβοι ενός εννοιολογικού πλέγματος σε ομόλογη σχέση προς τους κόμβους του κλασικού αντίστοιχου. Στο τελευταίο, οι μαθηματικοί εκπρόσωποι των φυσικών μεγεθών –ή, το ίδιο, θεμελιωδών ιδιοτήτων– δεν χρειάζονται περαιτέρω νομιμοποίηση. *Τίθενται* ως αυτό που δηλώνεται ότι είναι. Δύο ενδεχόμενα προβάλλουν εδώ. Είτε το κλασικό πλαίσιο είναι καντιανού τύπου εκμαγείο για την συγκρότηση της αισθητηριακής εποπτείας, πάγιο και *a priori*, οπότε μοιραία θα χρησιμεύει μονίμως ως η κοίτη εντός της οποίας θα διοχετεύονται τα ρεύματα των φυσικών θεωριών. Ή το κλασικό πλαίσιο είναι ιστορικά προσδιορισμένο, σχετικό και επιδεχόμενο αναίρεση. Χονδρικά, η πρώτη εκδοχή παραμένει εντός των ορίων της τυπικής σκέψης, η δεύτερη, την οποία υιοθετώ, εντάσσεται στην διαλεκτική που νομοθετεί τους κανόνες του παιγνίου της πρώτης, όπως σημείωσα στην §2.4, παραθέτοντας τον Φαράκλα. Ανιχνεύοντας την νομοθετική αυτή διαδικασία προκειμένου περί της κλασικής φυσικής, είδαμε ότι η απλούστατη έννοια του υλικού σημείου αποκαλύπτεται ως σύντηξη όψεων. Η αντιφατική σχέση σωματιδίου/πεδίου, συνεχούς και διακριτού, που έρχεται στο προσκήνιο με την κβαντική φυσική, γίνεται κινητήρια δύναμη για το ξεδίπλωμα και την διάκριση των όψεων του σημείου, μεταλλάσσοντάς το σε πλέγμα σχέσεων. Έτσι, το κβαντικό πλαίσιο εγκολπώνεται ένα κατακερματισμένο κλασικό, σωστότερα κλασικόμορφο, εισάγοντας την μη εξαλείψιμη διάκριση πλαισίων για την αποτίμηση των φυσικών μεγεθών. Μια αποτίμηση που μπορεί να θεωρηθεί ως κρίκος μιας λογικής αλυσίδας συνεπαγωγών, μιας ιεραρχημένης έννοιας αλήθειας, απεικονίζοντας το δυνάμει των πραγματώσεων φυσικών ιδιοτήτων. Το σήμα κατατεθέν του κβαντικού, η μη μεταθετότητα των μαθηματικών εκπροσώπων των φυσικών μεγεθών, στο πλαίσιο της έννοιας των quantales και με την μετατροπή τού «και» σε «και τότε», μεταμορφώνει την φυσική ιδιότητα, από μέγεθος επιδεχόμενο άμεση αποτίμηση σε διαδικασία διακλαδιζόμενη σε δυνατές απολήξεις.

Το κβαντικό σε σχέση με το κλασικό αναδεικνύεται έτσι ως η θεωρία που θέτει εντός της την διάκριση του δυνάμει από το ενεργεία. Το κλασικό δεν είναι πλέον εκείνο που αρχικά ετίθετο ως πλαίσιο άλλης θεωρίας. Έχει μετεξελιχθεί σε στοιχείο του κβαντικού. Εν τούτοις, η σχέση των δύο πλαισίων παραμένει *εξωτερική*, σχέση αντιστοιχίας, με ανώτερη μαθηματική της έκφραση την συναρτητική σχέση που εξηγεί ο Landsman. Από το κλασικό ως πλαίσιο φυσικής θεωρίας *θέσει*, στο κλασικό ως κλασικόμορφο του κβαντικού σε *εξωτερική* αντιστοιχία με αυτό: είναι μια πορεία μέσω της οποίας η ίδια η έννοια της κβάντωσης ανασημασιοδοτείται. Η μέθοδος της κβάντωσης μέσω παραμορφώσεων είναι η αρένα της κρίσιμης μετάβασης. Αναπλάθει την εξωτερική σχέση κλασικού και κβαντικού, την εσωτερικεύει και την μεταλλάσσει σε κβαντική θεωρία. Η μαθηματικοποίηση της άλλοτε «συνταγής κβάντωσης» στηρίζει τον ισχυρισμό ότι τώρα έχουμε την «αληθινή θεωρία» σε νοηματικό επίπεδο. Η εξωτερική σχέση κλασικού και κβαντικού υποσκελίζεται από την μετάβαση του πρώτου στο δεύτερο, αλλά δεν καταργείται. Η όποια ενιαία συγκρότηση των δύο αντιθετικών πλαισίων κυριαρχείται ακόμη από την μεταξύ τους διαφορά, όπως σημείωσα στην §7.3. Η πορεία από την τεθειμένη αντίθεση του κλασικού έναντι του κβαντικού, στην εξωτερική σχέση των δύο, ολοκληρώνεται με την ανάδυση μιας *αλληλοπροσδιορίζουσας* σχέσης του ενός προς το άλλο. Τότε συντελείται η αντιστροφή δια της οποίας η διαφορά είναι εκείνη που κυριαρχείται από την ενότητα.[70] Και αυτό επιτυγχάνεται με την αλληλοδιαπλοκή των πορισμάτων στην φυσική και τα μαθηματικά, γύρω από τις θεωρίες τού Kontsevich. Η «συνταγή κβάντωσης», όπως ενσωματώνεται στην μέθοδο Batalin–Vilkovisky για την κβάντωση της θεωρίας του σ-μοντέλου Poisson που εμπλέκεται στον τύπο τού Kontsevich, «εμβαπτίζεται», τρόπον τινά, στο πολυσύνθετο και καλώς ορισμένο μαθηματικό πλαίσιο της θεωρίας των παραμορφώσεων. Αυτό ακριβώς το γεγονός της αφαιρεί τον χαρακτήρα της «συνταγής» και την *ορίζει*, αποδίδοντάς της ως περιεχόμενο το σύνολο αυτών των σχέσεων.

Η ενότητα στην οποία αναφέρομαι εδώ σημαίνει ότι η διαδικασία κβάντωσης δεν είναι πλέον η μετάβαση από το κλασικό στο κβαντικό, αλλά μια μαθηματική θεωρία που διερευνά αλληλοσυνδέσεις εννοιών στο *εσωτερικό* του κβαντικού. Όπως επανειλημμένα είχα την ευκαιρία να τονίσω, έννοιες όπως, π.χ., πολλαπλότητες

[70] Σκόπιμα χρησιμοποιώ όρους παραπλήσιους προς τους χεγκελιανούς: *θέτουσα, εξωτερική* και *προσδιορίζουσα* αντανάκλαση –Reflexion = αντανάκλαση αλλά και *αναστοχασμός* [14, σσ. 399-408].

Poisson, δεν αφορούν κάποιο δήθεν «κλασικό αντίστοιχο» μιας κβαντικής θεωρίας. Συνδέονται με αυτό που ονόμασα κλασικόμορφο, και ανήκουν πλήρως στο κβαντικό. Για άλλη μία φορά επαναλαμβάνω ότι η τύχη όλων των θεωριών που ανέφερα, είναι έργο της φυσικής και των μαθηματικών να το κρίνουν. Τα φιλοσοφικά ζητήματα που μας ενδιαφέρουν έχουν εν τούτοις τεθεί κάτω από την οπτική της σύγχρονης έρευνας. Σε αυτό το σημείο, συνοψίζονται στο ερώτημα: Τί σημαίνει ο όρος «κλασικόμορφο», ο οποίος υπονοεί κάποια συσχέτιση με το κλασικό, και πού έγκειται η διαφορά κλασικού – κβαντικού μεταμορφωμένη στην διάκριση του κλασικόμορφου εντός του ενιαίου κβαντικού; Εφ' όσον το ενσωματωμένο κλασικό, ως κλασικόμορφο του κβαντικού, *δεν έχει* μια «δική του», δηλαδή *κλασική* αναφορά στον φυσικό κόσμο, θα πρέπει να αναρωτηθούμε σχετικά με την γνωσιολογική του σημασία. Και μάλιστα καθώς τώρα αντιμετωπίζεται από την σκοπιά της σύγκρισης δομών, σε ένα επίπεδο καθαρά μαθηματικό. Με δεδομένη αυτού του τύπου την μετάθεση, θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει το κλασικό/κλασικόμορφο εννοιολογικό πλαίσιο ως ένα είδος σκαλωσιάς, απαραίτητης για την οικοδόμηση του πλαισίου των κβαντικών θεωριών, οι οποίες, μόνες αυτές, είναι υποχρεωμένες να αναμετρηθούν με τα φυσικά φαινόμενα. Έχοντας επιτελέσει αυτή την απαραίτητη λειτουργία, η «σκαλωσιά» δεν παίζει πλέον ρόλο. Είναι ένα ενδεχόμενο που παραπέμπει στην σκάλα τού Wittgenstein. Προκαλεί, όμως, και το ερώτημα, τί είδους φυσική θεωρία είναι αυτή όταν τα γνωσιολογικά θεμέλιά της είναι απαραιτήτως λειτουργικά και χρήσιμα ακριβώς όταν μπορούν να απορριφθούν ως άχρηστα και μη λειτουργικά για την ενεργό θεωρία;

Μια άλλη απάντηση μπορεί να στηριχθεί στην διάκριση κλασικού και κβαντικού από την άποψη της σχέσης μεταξύ δυνάμει και ενεργεία, όπως την εξέθεσα στην §5.1 και συνόψισα σε αυτό το κεφάλαιο. Εκεί, η ιδιομορφία του κβαντικού εντοπίστηκε στην ικανότητα της θεωρίας να ενσωματώνει το πέραν του θεωρησιακού, καθώς εσωτερικεύει την σχέση θεωρησιακού και πρακτικού, κάνοντας ρητή με τους όρους της θεωρίας την διάκριση μεταξύ δυνάμει και ενεργεία. Αντιθέτως, στο πλαίσιο του παλαιού κλασικού και του σύγχρονου Κλασικού, η θεωρούμενη ως ορθή θεωρία *δεν* διακρίνει το δυνάμει από το ενεργεία. Μπορούμε, συνεπώς, να πούμε ότι το κλασικόμορφο αφορά εκείνη την περίπτωση όπου το δυνάμει συμβαίνει να συμπίπτει με το ενεργεία στα πλαίσια της *κβαντικής* θεωρίας. Αυτός ο χαρακτήρας του συνιστά την ομοιότητά του με το κλασικό, αυτός το διακρίνει ως ένα «παράθυρο»–πλαίσιο για την αποτίμηση των φυσικών μεγεθών, εντός του κβαντικού σε όλη του την γενικότητα. Όταν, λοιπόν, θεωρούμε ότι η ερμηνεία των κβαντικών εννοιών απαιτεί ένα κλασικό πλαίσιο, θα πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι η προσεκτική ανάγνωση των σύγχρονων μαθηματικών αναλύσεων προσανατολίζει σε μια διόρθωση: δεν απαιτείται το κλασικό, αλλά το κλασικόμορφο. Με άλλα λόγια, το κβαντικό δεν ερμηνεύεται συναρτήσει ενός «άλλου» εννοιολογικού πλαισίου. Ερμηνεύεται σε αναφορά προς τον εαυτό του: το κβαντικό στο σύνολό του απαιτεί για την ερμηνεία του εκείνη την περίπτωση κατά την οποία, *σύμφωνα με την κβαντική θεωρία*, το δυνάμει συμπίπτει με το ενεργεία –όταν, δηλαδή, το διαχωρίσιμο αναδύεται στο έδαφος του μη διαχωρίσιμου. Είναι τοποθέτηση του ζητήματος της ερμηνείας του κβαντικού απαλλαγμένη από κάθε εξάρτηση από τον ιδιαίτερο τρόπο με τον οποίο η φυσική θα περιγράψει την ανάδυση του διαχωρίσιμου –σε συμφωνία με την θέση ότι η φιλοσοφία δεν είναι απλό παρακολούθημα της φυσικής επιστήμης. Ακόμη, αυτή η προσέγγιση αποδίδει κεντρική σημασία σε ό,τι συνδέεται με το ενεργεία: το πείραμα, την μέτρηση, το φυσικό μέγεθος. Έχει όμως το πλεονέκτημα ότι υπερβαίνει την εργαλειοκρατία και τον στενό οπερασιοναλισμό.

Με αυτές τις σκέψεις κατά νου, ας επιστρέψουμε στην δεύτερη από τις δύο σημαντικές καμπές στην μαθηματική φυσική τις οποίες επέλεξα να εκθέσω δια μακρών: τις εργασίες των Connes, Kreimer και των συνεργατών τους. Στην περίπτωση αυτή, επαναλαμβάνω ότι εκείνο που φαινόταν ως «*ανεπιθύμητο αποτέλεσμα μιας όχι καλώς ορισμένης μαθηματικής θεωρίας*» αποκαλύπτεται ότι κρύβει μια «*πολύ πλούσια βαθειά μαθηματική δομή*» [136]. Έχουμε μια φαινομενικά «προσγειωμένη» πρακτική, αποτελεσματικό εργαλείο των φυσικών που εργάζονται στην τελευταία λέξη της κβαντικής θεωρίας πεδίων, της φυσικής υψηλών ενεργειών και των στοιχειωδών σωματιδίων. Η ανύψωση της τεχνικής σε έννοια με τον τρόπο που είδαμε θέτει το ερώτημα, σε τί συνίσταται αυτό που αντιλαμβανόμαστε ως «κατανόηση»; Αισθανόμαστε άραγε την ικανοποίηση που προσφέρει η στιγμή κατά την οποία θα πούμε «το κατάλαβα!» απλώς και μόνον αν γίνουμε κύριοι των λεπτομερειών μιας υπολογιστικής τεχνικής, ή μήπως αυτό ισοδυναμεί με αναδίπλωση εν όψει της αναζήτησης του «γιατί» και του «πώς»; Το ερώτημα είναι ρητορικό: από την εποχή του Δημοκρίτου, η διερεύνηση των αιτίων είναι θεμελιώδες διακύβευμα της φιλοσοφίας. Επίσης, θεωρώ ότι η έννοια της κατανόησης εμπεριέχεται στην έννοια της εξήγησης και υποστηρίζω ότι η ένταξη σε ένα εννοιολογικό πλαίσιο είναι προϋπόθεση για την κατανόηση. Για να αναφερθώ και πάλι στον Hegel, πρόκειται για «*το αδαμάντινο δίχτυ που μέσα του φέρνουμε κάθε περιεχόμενο και έτσι το καθιστούμε κατανοητό*» [170, σ. 32]. Ο Hegel, βεβαίως, αναφέρεται στην «μεταφυσική» ως «*το σύνολο των καθολικών νοητικών προσδιορισμών*», θεωρώ ωστόσο ότι η μαθηματική φυσική, λειτουργώντας στο μετα-επίπεδο της ανάλυσης των θεωριών περί του φυσικού κόσμου συγκροτεί ακριβώς ένα τέτοιο «αδαμάντινο δίχτυ». Αυτό επιτυγχάνει η μαθηματική νοηματοδότηση της επανακανονικοποίησης και για αυτόν τον λόγο καθίσταται εφαλτήριο για την διεύρυνση των οριζόντων της έρευνας.

Η μαθηματική νοηματοδότηση της επανακανονικοποίησης προσφέρει το έδαφος προκειμένου να προσεγγίσουμε το ζήτημα από την σκοπιά της σύνθεσης την οποία τόνισα στην §10.4: ενός λόγου για τον κόσμο και ενός λόγου περί του λόγου για τον κόσμο. Στο τέλος τής §10.4 διατύπωσα την άποψη περί ομόλογης σχέσης μεταξύ νόησης και κόσμου, και περί «συν-ανάπτυξης» γνώσης και κόσμου. Χρησιμοποιώ τον όρο «ομόλογη σχέση» για να δηλώσω μιαν αντιστοιχία του πλέγματος των εννοιών με τις φυσικές αιτιώδεις δομές,[71] και όχι ασφαλώς μιαν αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ φυσικών οντοτήτων και φιλοσοφικών εννοιών. Ας επικεντρωθούμε στην συγκεκριμένη περίπτωση κατά την οποία αναδύεται, σε επίπεδο μαθηματικού φορμαλισμού, το ομόλογο νοητικό σύστοιχο της διαλεκτικής τού δυνάμει και του ενεργεία στον εξωτερικό φυσικό κόσμο. Όπως είδαμε, η κλασική έννοια του στερούμενου οποιασδήποτε δομής σημείου μετασχηματίζεται στην έννοια του πρώτου ιδεώδους ενός πλέγματος. Όσον αφορά την φυσική, το κλασικό σημείο είναι θεμελιώδες στοιχείο του νευτώνειου απόλυτου χώρου, σηματοδοτώντας προϋπάρχουσες *θέσεις* τις οποίες καταλαμβάνουν τα υλικά συμβεβηκότα. Απεναντίας, σύμφωνα με την σχετικιστική φυσική, τα σημεία παίζουν τον ρόλο ένδειξης για την σηματοδότηση χωροχρονικών γεγονότων. Όσον αφορά τα μαθηματικά, η έννοια του χωρίς δομή σημείου ενσωματώνεται στην έννοια του συνόλου –κατά Bourbaki– ως συντιθέμενου από στοιχεία–φορείς ιδιοτήτων, ικανά να σχετίζονται μεταξύ τους και με στοιχεία άλλων συνόλων. Όπως παρατηρεί ο P. Cartier [148], φιλοσοφικός πρόγονος αυτής της προσέγγισης μπορεί να θεωρηθεί η έννοια των μονάδων τού Leibniz και των μεταξύ τους σχέσεων. Μια διαφοροποίηση παρατηρείται αν συγκρίνουμε την παραδοσιακή με την σύγχρονη αντίληψη για το συνεχές και για τα γεωμετρικά σχήματα. Παραδοσιακά –μέχρι τον $18^{ο}$ αιώνα– το συνεχές νοείται ως ιεραρχία απειροστών και απείρων μεγεθών, ενώ η νεότερη άποψη δέχεται μόνον δύο επίπεδα: το σημείο και το συνεχές. Εν τούτοις, είδαμε στην §2.3 πώς η εισαγωγή μιας τοπολογίας μπορεί να σχετικοποιήσει την διαισθητική έννοια του συνεχούς. Παράλληλα, η έννοια του απειροστού επανατοποθετείται είτε με την μη πρότυπη ανάλυση είτε με την μέθοδο του Connes [40] που συναντήσαμε στην §9.5. Εξ άλλου, η φυσική προσφέρει ερεθίσματα για μια πιθανή αναβίωση της έννοιας του ιεραρχημένου συνεχούς [55, σ. 173]. Όσον αφορά τα γεωμετρικά σχήματα, κατά την παραδοσιακή ευκλείδεια άποψη αυτά αλληλοπροσδιορίζονται. Μια ευθεία γραμμή ορίζεται από δύο σημεία, ένα σημείο ορίζεται ως τομή δύο γραμμών. Αλλά η ευθεία και γενικά τα γεωμετρικά σχήματα δεν νοούνται ως σημειοσύνολα, όπως τα θεωρεί η σύγχρονη άποψη. Ο Cartier [148] χαρακτηρίζει την παραδοσιακή άποψη γενετική και την σύγχρονη οντολογική. Κατά την πρώτη, σημεία και σχήματα είναι γεννήτορες· κατά την δεύτερη, τα σημεία προϋπάρχουν και τα σχήματα ορίζονται από τις σχέσεις σημείων. Ως εκ τούτου, ο Cartier διαβλέπει μιαν ενδιαφέρουσα αναλογία με την τυπική λογική. Η *συντακτική* άποψη θεωρεί βασικούς τύπους και κανόνες για την διατύπωση νέων, αντιστοιχεί έτσι στην δυνάμει παραγωγή τύπων επ' άπειρον. Η *σημασιολογική* άποψη, απεναντίας, θεωρεί ότι το σύνολο των τύπων έχει συμπληρωθεί, αντιστοιχεί έτσι στο ενεργεία. Η αναλογία μεταφέρεται και στην άλγεβρα. Το δυνάμει αντιστοιχεί στον ορισμό αλγεβρικών δομών με γεννήτορες και σχέσεις, ενώ το ενεργεία αντιστοιχεί στον ορισμό τους ως συνόλων που δομούνται βάσει πράξεων. Γενικεύοντας σε αυτό το πνεύμα, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια ευρύτερη αντιστοιχία μεταξύ του ζεύγους δυνάμει και ενεργεία στην νόηση και ενός συνόλου κανόνων για την παραγωγή μαθηματικών εκφράσεων, αφ' ενός, και, αφ' ετέρου, μιας ορισμένης μαθηματικής δομής, της

[71] Ισχύει και εδώ ό,τι δήλωσα στην υποσημείωση 32.

οποίας η ως άνω διαδικασία είναι μοντέλο. Τότε, η ομόλογη σχέση –με την ανωτέρω έννοια– μεταξύ του δυνάμει και του ενεργεία στην νόηση, αφ' ενός, και, αφ' ετέρου, του δυνάμει και του ενεργεία στην φύση συγκεκριμενοποιείται στον τρόπο που το αντικειμενικό δυνάμει και ενεργεία αντανακλάται θεωρητικά, το μεν πρώτο στο ανάπτυγμα μαθηματικών εκφράσεων που οριακά απεικονίζουν φυσικά φαινόμενα με τον φορμαλισμό των διαγραμμάτων Feynman και την τεχνική της επανακανονικοποίησης, το δε δεύτερο στην μαθηματική δομή των αλγεβρών Hopf που συμπυκνώνει τις σχέσεις που εκτίθενται καθώς εκτυλίσσεται η αλγοριθμική διαδικασία. Έτσι πρέπει να κατανοηθούν οι εκφράσεις «νοηματοδότηση» και «ύψωση της τεχνικής σε έννοια».

Αυτός ο συλλογισμός, με την αποδοχή της θέσης ότι η κατανόηση προϋποθέτει την ένταξη σε ένα εννοιολογικό πλαίσιο, απαντά σε ένα ερώτημα που διατυπώνεται ως εξής: Η μέθοδος των «αθροισμάτων ιστοριών» τού Feynman, συμπληρωμένη με την τεχνική της επανακανονικοποίησης, παράγει με θαυμαστή ακρίβεια φυσικά αποτελέσματα. Η μαθηματική ανάλυση αποκαλύπτει ότι η τεχνική εντάσσεται στο γενικό πλαίσιο της αντιστοιχίας Riemann–Hilbert ως μεθόδου εξαγωγής πεπερασμένων τιμών μαθηματικών εκφράσεων που απειρίζονται. Το *μαθηματικό* αυτό συμπέρασμα, εφ' όσον είναι αληθές, είναι αναγκαίο. Τότε, τίθεται ή όχι ζήτημα να εξηγηθεί *γιατί* η δεδομένη φυσική θεωρία εντάσσεται αναγκαία σε αυτό ειδικά το πλαίσιο; Πρόκειται, άραγε, για αναγκαιότητα *in dicto* ή, μήπως, αυτή αντανακλά μιαν αναγκαιότητα *de re*; Χρησιμοποιώντας την διατύπωση[72] του Kripke [171, σ. 142], το ερώτημα τίθεται ως εξής: Μολονότι δεν θα μπορούσε να προκύψει ένα διαφορετικό μαθηματικό συμπέρασμα, μήπως θα ήταν δυνατόν, σε κατάλληλες ποιοτικά ταυτόσημες παρατηρησιακές καταστάσεις, μια αντίστοιχη κατάλληλη ποιοτική πρόταση να είναι ψευδής; Δηλαδή, θα ήταν δυνατόν τα ίδια φυσικά αποτελέσματα να παραχθούν με ένα θεωρητικό σχήμα που *δεν* υπάγεται στην αντιστοιχία Riemann–Hilbert; Η εργαλειοκρατική αντίληψη έχει πρόχειρη την απάντηση. Πρόκειται για την ανωτέρου επιπέδου συστηματοποίηση και εμπεριστατωμένη παρουσίαση ενός υπολογιστικού αλγορίθμου –ουσιαστικά, ερώτημα περί του «τι εκφράζει» η τέτοια ένταξη δεν υφίσταται καν. Μάλιστα, δεν υφίσταται θέμα εξήγησης. Παραμένει, ωστόσο, το κραυγαλέο γεγονός της θαυμαστής προβλεπτικής ικανότητας του συγκεκριμένου «αλγορίθμου», το οποίο, πιστεύω, δεν είναι δυνατόν να παρακάμψει το αίτημα της εξήγησης. Η εργαλειοκρατία που τόσο πολύ βασίστηκε στην επιτυχία της τεχνικής της επανακανονικοποίησης υπονομεύεται από την ίδια αυτή επιτυχία. Ο ρεαλισμός προσφέρει την καλύτερη εξήγηση: η ένταξη σε ένα πλαίσιο εξαγωγής πεπερασμένων τιμών από απειριζόμενες μαθηματικές εκφράσεις αποδεικνύεται κατάλληλη για την συγκεκριμένη περίπτωση, *διότι* εκφράζει σε νοηματικό επίπεδο μια διαδικασία σε οντικό επίπεδο, μέσω της οποίας πραγματώνεται μία δυνητικότητα από μια απειρία τέτοιων δυνητικοτήτων. Ο ισχυρισμός των Connes και Kreimer

[72] Περιορίζομαι στην διατύπωση του Kripke χωρίς να αναφέρομαι στις ειδικότερες αντιλήψεις του περί αναγκαιότητας· το πώς την αντιλαμβάνομαι θα εκτεθεί στην συνέχεια.

(§9.5) για την παραγωγή της γεωμετρίας του χωροχρόνου βάσει των κβαντικών θεωριών πεδίου, όπως και ο λόγος περί «*επανακανονικοποίησης της γεωμετρίας*» [136], στηρίζει μια τέτοια άποψη. Εξ άλλου, με τον φορμαλισμό της θεωρίας των κατηγοριών, τα διαγράμματα Feynman μπορούν να θεωρηθούν είτε ως αντικείμενα μιας κατηγορίας, είτε ως μορφισμοί που συνδέουν καταστάσεις «εισόδου» με καταστάσεις «εξόδου», επεκτείνοντας κατάλληλα τις ιδέες της τοπολογικής θεωρίας πεδίων [8, 28, 146, 172]· τέτοιοι μορφισμοί μπορούν να ερμηνευθούν ως αναπαραστάσεις φυσικών διαδικασιών.

Η προσέγγιση αυτή αποκτά συνεκτικότητα με την αναγνώριση μιας νομοειδούς υφής στην φύση, πράγμα που θέτει το καίριο ζήτημα της φυσικής αναγκαιότητας. Σε σχέση με αυτό, χρειάστηκαν οι «απελευθερωτικές απόψεις» τού Kripke [173, σ. 281 κ.ε.] για να αρχίσει να αμφισβητείται σοβαρά η άλλοτε κυρίαρχη αντίληψη, κατά την οποία η μεν αναγκαιότητα νοείται μόνον ως *λογική*, ενώ οι αποφάνσεις που δηλώνουν αλήθεια είναι γνωστές *a priori*. Κατά τον Kripke,[73] υπάρχει αναγκαιότητα στην φύση η οποία δεν είναι λογική και γίνεται γνωστή *a posteriori* [171, σ. 38 κ.ε.]. Η «ύψωση της τεχνικής σε έννοια» εκφράζει την μετάβαση από το δυνάμει στο ενεργεία στην νόηση. Η προκύπτουσα μαθηματική δομή αναπαριστά μια πραγματωμένη φυσική διαδικασία, δηλαδή την μετάβαση από το δυνάμει στο ενεργεία στον αντικειμενικό κόσμο. Στην πορεία της πραγμάτωσης, το δυνάμει και το ενεργεία αλληλομετατρέπονται και στην φύση και στην νόηση, αναιρώντας την φαινομενική τους αυτοτέλεια και θέτοντας ως έννοια όντως ανεξάρτητη την μεταξύ τους *σχέση* [170, σ. 70]. Η διαλεκτική των εννοιών αντανακλά την διαλεκτική σχέση, σε οντικό επίπεδο, οντοτήτων οι οποίες ταυτόχρονα είναι δυναμικές ενότητες σχέσεων, όπως είδαμε στο τέλος της §10.4. Έτσι, λοιπόν, «*Αυτή η* ***απόλυτη αναταραχή τού γίγνεσθαι*** *αυτών των δύο προσδιορισμών* [της δυνητικότητας και της ενεργού πραγματικότητας] *είναι η* ***ενδεχομενικότητα****. Αλλά ακριβώς επειδή έκαστος μετατρέπεται αμέσως στο αντίθετό του, σε αυτό το άλλο* ***απλώς ενώνεται με τον εαυτό του*** *εξ ίσου, και αυτή η ταυτότητα αμφοτέρων, του ενός εντός του άλλου είναι η* ***αναγκαιότητα***» ([14, σ. 545], έμφαση στο πρωτότυπο). Το τυχαίο είναι η αμεσότητα της πραγματοποιημένης δυνατότητας (πρβλ. §5.5). Η αναγκαιότητα, εξ άλλου, δεν είναι υπερ-φυσική, υπερ-ιστορική ειμαρμένη, αλλά εγκαθιδρύεται πάντα *εκ των υστέρων*, όταν οι συνθήκες είναι παρούσες και οι δυνατότητες έχουν πραγματωθεί: «*Εάν ένα πράγμα είναι δυνατόν ή αδύνατον, εξαρτάται ολοκληρωτικά από το υπό εξέτασιν θέμα: δηλαδή, από το* ***σύνολο των στοιχείων της ενεργού πραγματικότητας****, η οποία, καθώς εκτυλίσσεται,* ***αποκαλύπτεται*** *ως αναγκαιότητα*» ([174], έμφαση δική μου). Με την έννοια αυτήν, η αναγκαιότητα δεν έχει κανονιστικό χαρακτήρα αλλά είναι εμμενής, δεν «διέπει» αλλά εγκαθιδρύεται στην αέναη διαδικασία πραγμάτωσης και ανάδυσης δυνητικοτήτων, δια της οποίας δημιουργούνται όροι και συνθήκες ώστε, σε κάθε συγκεκριμένη περίπτωση, να αναδεικνύεται ένας ιδιαίτερος συνδυασμός αιτιακών σχέσεων. Σε σχέση με την φυσική επιστήμη, η δράση του επιστήμονα με ένα πείραμα

[73] Ισχύει και εδώ ό,τι ελέχθη στην σημείωση 66.

ή μια μέτρηση είναι πλήρης δυνατοτήτων. Δεδομένου ότι, όπως έχω υποστηρίξει, πρόκειται για την εκδίπλωση ενός πολυσύνθετου υλικού, φυσικού φαινομένου, η εμμενής έννοια της αναγκαιότητας έχει ως περιεχόμενο το σύνολο των ενεργειών για την προετοιμασία του πειράματος ή της μέτρησης ως αποτέλεσμα της επίκλησης και ενεργοποίησης όλης της αποκτημένης σχετικής επιστημονικής γνώσης, στην οποία βασίζονται οι επιλογές του επιστήμονα. Όπως σε κάθε άλλο φυσικό φαινόμενο, η αναγκαιότητα έγκειται στην πραγμάτωση δυνητικοτήτων όταν συντρέχουν όροι και ικανοποιούνται καθορισμένες συνθήκες, όταν δηλαδή έχει συγκροτηθεί το εκάστοτε κατάλληλο πλαίσιο, και όχι στην αδιατάρακτη μόνιμη σύνδεση της πειραματικής διαδικασίας ή της μέτρησης με ένα μονοσήμαντα προκαθορισμένο αποτέλεσμα. Αν κάτι τέτοιο συμβαίνει, όπως απαιτούν οι κανόνες της κλασικής φυσικής, δεν έπεται ότι επιβάλλεται κάποια υπερβατική αναγκαιότητα, αλλά ότι συμβαίνει, στο «γίγνεσθαι των δύο εννοιών», το δυνάμει να συμπίπτει με αυτό που τελικά γίνεται ενεργεία. Αντιστρόφως, εάν το δυνάμει δεν μετατρέπεται απαρέγκλιτα σε ένα *a priori* γνωστό ενεργεία, όπως κατά κανόνα συμβαίνει στα κβαντικά φαινόμενα, δεν έπεται ότι παραβιάζεται κάποια έννοια αδήριτης αναγκαιότητας. Και στις δύο περιπτώσεις, η «αναγκαιότητα» για την οποία γίνεται λόγος αξιώνει αβάσιμα καθολική ισχύ και ως εκ τούτου είναι αφηρημένη και μονόπλευρη. Για άλλη μία φορά, η ουσιαστική, συγκεκριμένη διάκριση έγκειται στην σχέση του δυνάμει με το ενεργεία.

10.7 Συμπέρασμα

Όπως σημείωσα από την αρχή, οι σύγχρονες κβαντικές θεωρίες, παρ' όλη την εμπειρική τους επικύρωση και καθολική αποδοχή, αντιμετωπίζουν μονίμως ένα ανοικτό πρόβλημα σε επίπεδο φυσικής. Είναι η επίμονη αντίσταση του επονομαζόμενου μακρόκοσμου να υπαχθεί σε κβαντική εξήγηση. Φιλοσοφικό παρακολούθημα της μόνιμης αυτής εκκρεμότητας υπήρξε η παγίωση σκέψεων που κατά καιρούς εξέφρασαν πρωταγωνιστές της κβαντικής φυσικής, και η ανάδειξή τους σε ένα είδος ορθοδοξίας, μολονότι δεν αποτέλεσαν ποτέ μιαν ενιαία και συνεκτική φιλοσοφική πρόταση· ήταν μάλλον ψήγματα στοχασμών που έφεραν την σφραγίδα των φιλοσοφικών προτιμήσεων εκείνων που τους διατύπωσαν. Όπως η κλασική φυσική συνοδευόταν από τον μύθο της μηχανιστικής σκέψης –αλλιώς, του «απλοϊκού ρεαλισμού»–, έτσι και η κβαντική φυσική απέκτησε τον δικό της μύθο. Όπως η μηχανιστική σκέψη έβρισκε πρόσκαιρο στήριγμα στις βεβαιότητες της φυσικής του $19^{ου}$ αιώνα, έτσι και ένα ευμετάβλητο αμάλγαμα βρίσκει συγκυριακά στήριγμα στα ανοικτά προβλήματα της σύγχρονης φυσικής. Η γνωσιοθεωρία της μηχανιστικής σκέψης, όμως, ήταν συμβατή με τις οντολογικές παραδοχές της κλασικής φυσικής. Η απόρριψη της κλασικής οντολογίας και, ταυτόχρονα, η εμμονή στις κλασικές γνωσιοθεωρητικές προϋποθέσεις, οδηγεί μόνο σε έναν εκλεκτικισμό –η υπέρβαση του δογματισμού της μηχανιστικής σκέψης δεν μπορεί να επιτευχθεί με την στείρα άρνηση που παραμένει ωστόσο δέσμια των προϋποθέσεών του. Τα φιλοσοφικά προβλήματα που εγείρει αυτό το σύμπλεγμα απόψεων δεν είναι παρά η *θεσμοποίηση της εκκρεμότητας* ως προς το φυσικό πρόβλημα. Οι διάφορες παραλλαγές θετικιστικών αντιλήψεων μετατρέπουν την εκκρεμότητα σε *αρετή*, με τον ισχυρισμό ότι η φυσική είναι ένας αλγόριθμος που συνδέει «γεγονότα». Τα δε «γεγονότα» ταυτίζονται με τις αισθητηριακές αντιλήψεις, και η καταγραφή τους θεωρείται ότι ισοδυναμεί με την απόδοση τιμών σε φυσικά μεγέθη –«παρατηρήσιμα μεγέθη». Το φιλοσοφικό πρόβλημα των σχέσεων ύλης και συνείδησης μετατρέπεται παραπλανητικά σε πρόβλημα σχέσεων μεταξύ «αντικειμένου» και αισθητηριακών δεδομένων του παρατηρητή. Η συνέπεια είναι ότι η παρατήρηση και η μέτρηση, αντί να αναγνωρίζονται ως φυσική δραστηριότητα μέσω της οποίας η ίδια η φύση νοηματοδοτείται, θεωρούνται ως δίαυλος μέσω του οποίου η φύση κατασκευάζεται από την νόηση. Εξ άλλου, εάν οι εντυπωσιακές επιδόσεις των κβαντικών θεωριών ερμηνευθούν ως λόγος πραγματιστικού εφησυχασμού γύρω από μιαν επιτυχημένη τεχνική, θεωρητικής ολιγάρκειας και αυτοπεριορισμού στην τεχνογνωσία, τότε ανοίγει ο δρόμος προς τον ανορθολογισμό, με ευρύτερη και μακροπρόθεσμη συνέπεια μια «*γενική αντι-ορθολογική ατμόσφαιρα που έχει καταστεί μέγιστη απειλή στην εποχή μας, και η καταπολέμηση της οποίας είναι καθήκον κάθε στοχαστή που νοιάζεται για τις παραδόσεις του πολιτισμού μας*» [152]. Σε αυτό το καθήκον, στην υπόθεση του ορθού λόγου έναντι του ανορθολογισμού, ανταποκρίνεται η ουσιαστική αλληλεπίδραση φυσικών και φιλοσόφων, καθώς ο φιλοσοφικός στοχασμός γονιμοποιείται από εκείνες τις εξελίξεις τις οποίες οι ίδιοι οι ενεργοί φυσικοί και μαθηματικοί θεωρούν επιστημονικά ορόσημα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Α. Θεωρία Κατηγοριών

Μια μετα-κατηγορία [27] σχηματίζεται από μια συλλογή *αντικειμένων* και από μια συλλογή *μορφισμών* (ονομάζονται και *βέλη*) για κάθε ζεύγος αντικειμένων, που στέλνουν το ένα στο άλλο. Υπάρχει ένας νόμος σύνθεσης, «∘», των μορφισμών, ένας ταυτοτικός μορφισμός που αφήνει τα αντικείμενα αμετάβλητα, και ικανοποιούνται μερικά εύλογα αξιώματα. Μια κατηγορία είναι μια μετα-κατηγορία ερμηνευμένη στην θεωρία των συνόλων, δηλαδή όταν οι συλλογές αντικειμένων και μορφισμών είναι σύνολα.

Αν X είναι μια κατηγορία, το σύμβολο X^{op} δηλώνει την *αντίθετη* κατηγορία, με τα ίδια αντικείμενα, και μορφισμούς τους ίδιους με της X αλλά με αντίθετη φορά.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι η κατηγορία **Set** των μικρών συνόλων (δηλαδή συνόλων που δεν είναι γνήσιες κλάσεις αλλά ανήκουν σε ένα προκαθορισμένο και αρκετά μεγάλο σύμπαν συνόλων) και των μεταξύ τους συναρτήσεων, η κατηγορία **Gr** των ομάδων και των μεταξύ τους ομομορφισμών, η κατηγορία **Vect** των διανυσματικών χώρων και των μεταξύ τους γραμμικών απεικονίσεων, η κατηγορία **Sp** των τοπολογικών χώρων και των μεταξύ τους συνεχών απεικονίσεων, κ.λπ.

Μια κατηγορία είναι *μικρή*, αν τα σύνολα των αντικειμένων και των μορφισμών της είναι μικρά.

Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις τα αντικείμενα μπορεί να είναι δομές (ομάδες, διανυσματικοί χώροι, διαφορίσιμες πολλαπλότητες κ.λπ.) που επικαθορίζονται πάνω σε σύνολα. Αλλά, τέτοιες δομές θεωρούνται γενικά ως αντικείμενα κατηγοριών, αφηρημένα, χωρίς να προϋποτίθεται ένα συνολοθεωρητικό υπόβαθρο. Αυτό είναι γόνιμη γενίκευση και νοηματικό κέρδος.

Ένας γενικός μορφισμός ονομάζεται ομομορφισμός. Ένας μορφισμός $f: Y \to X$ σε μια κατηγορία είναι:

1. μονομορφισμός αν, για κάθε δύο μορφισμούς $u, v: Z \to Y$, η σχέση $f \circ u = f \circ v$ συνεπάγεται $u = v$,

2. επιμορφισμός αν, για κάθε δύο μορφισμούς $u, v: X \to Z$, $u \circ f = v \circ f$ συνεπάγεται $u = v$,

3. ισομορφισμός αν είναι αμφιμονοσήμαντος (δύο αντικείμενα ονομάζονται ισόμορφα αν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ τους),

4. ενδομορφισμός αν είναι surjective από ένα αντικείμενο στον εαυτό του,

5. αυτομορφισμός αν είναι ισομορφισμός από ένα αντικείμενο στον εαυτό του.

Ένα *αρχικό* (*τελικό*) αντικείμενο σε μια κατηγορία είναι ένα αντικείμενο A τέτοιο ώστε για κάθε άλλο αντικείμενο B υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $A \to B$ και αντιστοίχως $B \to A$. Συνήθως ένα αρχικό, αντιστοίχως τελικό αντικείμενο συμβολίζεται με 0 ή $\varnothing$, αντιστοίχως με 1 ή $\{\varnothing\}$ ή $\{*\}$.

Μια απεικόνιση μεταξύ κατηγοριών που στέλνει αντικείμενα σε αντικείμενα και μορφισμούς σε μορφισμούς ονομάζεται *συναρτητής* (functor). Ένας συναρτητής μπορεί να είναι συναλλοίωτος ή ανταλλοίωτος.

Ένας συναρτητής $T: C \to B$ είναι *πλήρης* (full) όταν για κάθε ζεύγος αντικειμένων c, c΄ της C και βέλος $g: Tc \to Tc'$ της B, υπάρχει βέλος $f: c \to c'$ της C με $g \square Tf$. Μια *υποκατηγορία* (κατά μιαν εύλογη έννοια) S της C είναι πλήρης όταν ο συναρτητής που στέλνει την S στην C, $S \to C$, είναι πλήρης.

Το *γινόμενο* μιας οικογένειας $\{X_i\}$ αντικειμένων μιας κατηγορίας, αν ορίζεται, είναι ένα αντικείμενο $P \square \prod X_i$, μαζί με μια οικογένεια μορφισμών $\{p_i: P \to X_i\}$, τέτοια ώστε για κάθε αντικείμενο Q και κάθε οικογένεια μορφισμών $\{q_i: Q \to X_i\}$ υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $q: Q \to P$ τέτοιος ώστε $p_i \circ q = q_i$ για κάθε i. Το γινόμενο είναι μοναδικό modulo ισομορφισμούς. Στις κατηγορίες των συνόλων και των ομάδων το γινόμενο είναι αντιστοίχως το καρτεσιανό γινόμενο και το ευθύ γινόμενο.

Δυϊκή προς το γινόμενο έννοια είναι το *συν-γινόμενο* (coproduct) μιας οικογένειας $\{X_i\}$ αντικειμένων το οποίο, αν ορίζεται, είναι ένα αντικείμενο $C = \coprod X_i$, μαζί με μιαν οικογένεια μορφισμών $\{c_i: X_i \to C\}$, τέτοια ώστε για κάθε αντικείμενο D και κάθε οικογένεια μορφισμών $\{d_i: X_i \to D\}$ υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $d: C \to D$ τέτοιος ώστε $d \circ c_i = d_i$ για κάθε i. Το συν-γινόμενο είναι μοναδικό modulo ισομορφισμούς. Στις κατηγορίες των συνόλων και των ομάδων το συν-γινόμενο είναι, αντιστοίχως, η ξένη ένωση και το ευθύ άθροισμα.

Εάν σε μια κατηγορία υπάρχουν μορφισμοί της μορφής $f: B \to A \leftarrow D :g$, τότε ένας *κώνος* είναι ένα ζεύγος μορφισμών από ένα αντικείμενο C, $h: C \to B$ και $k: C \to D$ με $h \circ f \square k \circ g$. Δηλαδή, το C είναι κορυφή ενός μεταθετικού τετραγώνου. Ένας *καθολικός κώνος* είναι ένα τέτοιο μεταθετικό τετράγωνο με κορυφή $B \times_A D$ και μορφισμούς p, q με $p \circ f \square q \circ g$, τέτοιο ώστε για κάθε άλλο τετράγωνο με κορυφή C και αντίστοιχους μορφισμούς k, h, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $r: C \to B \times_A D$ με $k \square q \circ r$, $h \square p \circ r$. Αυτό το τετράγωνο ονομάζεται τετράγωνο pullback ή καρτεσιανό τετράγωνο, και το αντικείμενο $B \times_A D$ ονομάζεται pullback πάνω από το αντικείμενο A.

Όταν έχουμε κατηγορίες **C** και **D**, και δύο συναρτητές, $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ και $G: \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, λέμε ότι ο F είναι *αριστερά συναφής* (left adjoint) του G, εάν υπάρχει 1-1 απεικόνιση, φυσική στις μεταβλητές A και B, μεταξύ μορφισμών f: A → GB στην **C** και f΄: FA → B στην **D**. Ο φυσικός μετασχηματισμός η: id_C → GF ονομάζεται μονάδα της συνάφειας. Έχει έναν δυϊκό, τον ε, που είναι η συν-μονάδα.

Ο συναρτητής **C** → **Set** που στέλνει την κατηγορία **C** στο σύνολο που είναι το υπόστρωμά της και τους μορφισμούς σε συναρτήσεις, ονομάζεται ξεχασιάρης (forgetful). Ο αριστερά συζυγής του, **Set** → **C**, είναι ο *ελεύθερος συναρτητής*.

Σε μιαν *αντανάκλαση*, η συν-μονάδα, ε_B: FGB → B, είναι ισομορφισμός για κάθε B.

Μια κατηγορία με γινόμενο × έχει *εκθετοποίηση* (exponentiation) όταν για κάθε αντικείμενα A, B υπάρχει αντικείμενο B^A και ένας μορφισμός *αποτίμησης* (evaluation), ev: $B^A \times A$ → A, με μια κατάλληλα οριζόμενη έννοια καθολικότητας. Λέμε τότε ότι είναι μια καρτεσιανή κλειστή κατηγορία. Στην κατηγορία **Set**, η εκθετοποίηση B^A είναι το σύνολο hom(A, B).

Σε μια κατηγορία με τελικό αντικείμενο, 1, ένας *ταξινομητής υποαντικειμένων* (subobject classifier) είναι ένα αντικείμενο Ω με έναν μορφισμό tr: 1 → Ω, με την ιδιότητα ότι για κάθε μονομορφισμό f: A → B υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός χ_f: B → Ω, τέτοιος ώστε, αν $!_A$: A → 1, να ισχύει $\chi_f \circ f$ □ $tr \circ !_A$. Η ορολογία προέρχεται από το γεγονός ότι το Ω γενικεύει την δίτιμη μπουλιανή άλγεβρα της θεωρίας των συνόλων, οπότε ο μορφισμός tr αντιστοιχεί στην αληθοτιμή «αληθές».

Ένας (στοιχειώδης) *τόπος* είναι μια κατηγορία με τελικό αντικείμενο, pullbacks, εκθετοποίηση και ταξινομητή υποαντικειμένων. Ισοδύναμα, είναι μια κατηγορία με πεπερασμένα όρια [27], με ταξινομητή υποαντικειμένων, η οποία είναι καρτεσιανή κλειστή. Οι κατηγορίες **Set** και $\mathbf{Set}^{C^{\mathbf{op}}}$, για κάθε μικρή κατηγορία C, είναι τόποι.

Κατηγορίες και οι μεταξύ τους συναρτητές μπορούν να συγκροτούν μια κατηγορία κατηγοριών, μια *δικατηγορία* ή *2-κατηγορία*. Σε αυτό το δεύτερο επίπεδο, οι αντίστοιχοι μορφισμοί ονομάζονται *φυσικοί μετασχηματισμοί* και ικανοποιούν μια σειρά εύλογων αξιωμάτων. Υπάρχει η γενική έννοια της *n-κατηγορίας*, αλλά προς το παρόν δεν υπάρχει συναίνεση ως προς τον ορισμό της.

Β. Άλγεβρες Τελεστών

Ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος, ×, εφοδιασμένος με ένα προσεταιριστικό γινόμενο, μια πράξη ενέλιξης (involution), «*», που αποδίδει στο στοιχείο a το συναφές του (adjoint), a*, και μια norm ||•||, είναι χώρος Banach όταν ο × είναι πλήρης σε σχέση με την τοπολογία τής norm. Εάν στον × ισχύει $||ab|| \leq ||a||||b||$, ο × είναι άλγεβρα Banach. Αν, επί πλέον, $||aa^*||$ □ $||a||^2$, η × είναι *C*-άλγεβρα*. Αν η × έχει μονάδα, είναι μοναδιαία (unital).

Μια *κατάσταση*, ω, επί μιας C*-άλγεβρας × με μονάδα, 1, είναι ένα συναρτησιακό ω: × → $\Re$, το οποίο είναι γραμμικό, θετικό, δηλαδή $\omega(aa^*) \geq 0$ $\forall a \in$×, και κανονικοποιημένο, δηλαδή ω(1) □ 1. Το σύνολο των καταστάσεων μιας C*-άλγεβρας × είναι κυρτό σύνολο, τα ακραία σημεία του οποίου είναι οι *καθαρές καταστάσεις*. Αν η × είναι μεταθετική (commutative), μια κατάσταση είναι καθαρή εάν και μόνον εάν είναι πολλαπλασιαστικό συναρτησιακό, οπότε το σύνολο των καθαρών καταστάσεων είναι το *φάσμα* της ×.

Σύμφωνα με το θεώρημα των Gelfand, Naimark και Segal (κατασκευή GNS), κάθε κατάσταση ω μιας C*-άλγεβρας ορίζει έναν ομομορφισμό της σε μια συγκεκριμένη C*-άλγεβρα τελεστών σε έναν χώρο Hilbert. Η κατάσταση ω απεικονίζεται σε ένα συναρτησιακό που εκφράζει αναμενόμενη τιμή.

Μια *άλγεβρα von Neumann* N είναι μια C*-άλγεβρα φραγμένων τελεστών σε έναν χώρο Hilbert, κλειστή στην ασθενή τοπολογία τελεστών, για την οποία Λ(N)´´ □ N´´ □ N, όπου Λ(N) είναι το πλέγμα των προβολών της N και ο τόνος, Λ(N)´, δηλώνει το σύνολο των τελεστών που μετατίθενται με τους τελεστές στο Λ(N). Ο διπλός τόνος ορίζεται παρόμοια. Το *φάσμα* μιας *μεταθετικής* τέτοιας άλγεβρας, σ(N), είναι το σύνολο των πολλαπλασιαστικών συναρτησιακών, κ: N $\rightarrow \Re$. Το φάσμα είναι συμπαγής χώρος Hausdorff αν εφοδιαστεί με την ασθενή ∗-τοπολογία, δηλαδή την ασθενέστερη τοπολογία για την οποία, για κάθε a $\in$ N υπάρχει μια απεικόνιση â: σ(N) $\rightarrow \Re$, τέτοια ώστε ο *μετασχηματισμός Gelfand*, â(κ) □ κ(a), να είναι συνεχής (βλέπε, π.χ., [175]).

Γ. Η κατηγορία Hilb χώρων Hilbert

Ένας χώρος Hilbert είναι ένα σύνολο H με την δομή μιγαδικού διανυσματικού χώρου, εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle * , * \rangle$: $H \times H \rightarrow \Re$, όπου $\Re$ είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών. Εκτός από τις ιδιότητες των μιγαδικών διανυσματικών χώρων, ισχύει ότι, για κάθε $\phi, \psi, \psi' \in H$, και κάθε $c \in \Re$, έχουμε τις σχέσεις: $\langle \phi , c\psi \rangle = c\langle \phi , \psi \rangle$, $\langle \phi , \psi+\psi' \rangle = \langle \phi , \psi \rangle + \langle \phi , \psi' \rangle$, $\langle \phi , \psi \rangle = \overline{\langle y , f \rangle}$ και $\langle \psi , \psi \rangle \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνον αν $\psi = 0$. Η norm που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο πρέπει να είναι πλήρης. Αν H και H΄ είναι χώροι Hilbert, μια συνάρτηση T: $H \rightarrow H'$ που διατηρεί όλη την δομή είναι ένας γραμμικός τελεστής που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, $\langle T\phi , T\psi \rangle = \langle \phi , \psi \rangle$, για κάθε $\phi, \psi \in H$, και ονομάζεται ισομετρία.

Για τις ανάγκες της φυσικής, οι μορφισμοί της κατηγορίας **Hilb** χώρων Hilbert δεν μπορούν να είναι τέτοιες ισομετρίες, γιατί οι αυτοσυζυγείς τελεστές που χρησιμοποιούνται δεν είναι ισομετρίες (οι μοναδιαίοι τελεστές είναι). Κατάλληλοι μορφισμοί είναι οι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Τότε, όμως, υπάρχει το πρόβλημα ότι το εσωτερικό γινόμενο, τόσο στην περίπτωση πεπερασμένων, όσο και σε εκείνη απείρων διαστάσεων, φαίνεται να μην παίζει κανέναν ρόλο. Η προσέγγιση του J. Baez [42] χρησιμοποιεί το εσωτερικό γινόμενο προκειμένου να μετατρέψει την κατηγορία **Hilb** σε ***-***κατηγορία*, μια κατηγορία δηλαδή όπου για κάθε μορφισμό (τελεστή) T ορίζεται ένας συναφής (adjoint), T*, που με μια γενική έννοια μοιάζει με «αντιστροφή χρόνου».

Για την αναπαράσταση σύνθετων φυσικών συστημάτων έχει σημασία η δυνατότητα να ορίζεται ένα *τανυστικό γινόμενο,* $\otimes$, μεταξύ αντικειμένων μιας κατηγορίας. Όταν αυτό είναι δυνατό, έχουμε μια *μονοειδή* κατηγορία. Στην κατηγορία των συνόλων, το τανυστικό γινόμενο είναι το καρτεσιανό γινόμενο. Αλλά στην κατηγορία των χώρων Hilbert είναι το συνηθισμένο τανυστικό γινόμενο. Η έννοια του καρτεσιανού γινομένου ορίζεται σε ένα επίπεδο αφαίρεσης έτσι ώστε να συλλαμβάνει γενικά αυτό που διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε ως συλλογή διατεταγμένων ζευγών. Με αυτούς τους όρους, το τανυστικό γινόμενο χώρων Hilbert *δεν* είναι καρτεσιανό γινόμενο.

Δ. Πλέγματα και άλγεβρες Boole

Σε ένα μεταθετικό μονοειδές, δηλαδή ημιομάδα με μονάδα, $(A, \vee, 0)$, όπου κάθε στοιχείο a είναι αυτοδύναμο, $a \vee a$ □ a, υπάρχει μια μοναδική *μερική διάταξη*, δηλαδή μια αντανακλαστική, μεταβατική και αντισυμμετρική διμελής πράξη, $\leq$, τέτοια ώστε το $a \vee b$ να είναι ο ελάχιστος ανώτερος φραγμός (join) των στοιχείων a και b, και το 0 να είναι το ελάχιστο στοιχείο. Ένα τέτοιο μονοειδές ονομάζεται *(join)-ημιπλέγμα* (semilattice). Δυϊκά, αν αντιστραφούν οι ανισότητες, ορίζεται το ημιπλέγμα $(A, \wedge, 1)$, όπου τώρα έχουμε μέγιστους κατώτερους φραγμούς (meet) και το 1 ως μέγιστο στοιχείο (meet-ημιπλέγμα). Ένα *πλέγμα* (lattice) είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο A, κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του οποίου έχει και ελάχιστο ανώτερο φραγμό, και μέγιστο κατώτερο φραγμό. Το A έχει δύο δομές ημιπλέγματος, $(A, \vee, 0)$

και (A, $\wedge$, 1), με δύο πράξεις $\vee$ και $\wedge$, και δύο διακεκριμένα στοιχεία, 0 και 1, έτσι ώστε οι αντίστοιχες μερικές διατάξεις να είναι αντίθετες μεταξύ τους. Εάν σε ένα πλέγμα ισχύει: $a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ για όλα τα a, b, c, τότε το πλέγμα είναι *επιμεριστικό*. Ένα στοιχείο x για το οποίο: $x\wedge a = 0$ και $x\vee a = 1$, ονομάζεται *συμπλήρωμα* του a. Σε ένα επιμεριστικό πλέγμα, τα συμπληρώματα, αν υπάρχουν, είναι μοναδικά. Ένα επιμεριστικό πλέγμα, εφοδιασμένο με μια μονομελή πράξη, $\neg$, τέτοια ώστε το $\neg a$ να είναι συμπλήρωμα του a, είναι μια *άλγεβρα Boole*.

Ένα πλέγμα είναι *πλήρες* αν ορίζονται πράξεις $\wedge$ και $\vee$ σε *άπειρα* υποσύνολα στοιχείων του. Ένα στοιχείο μιας άλγεβρας Boole με την ιδιότητα ότι κανένα άλλο στοιχείο δεν βρίσκεται μεταξύ αυτού και του ελαχίστου στοιχείου, ονομάζεται *άτομο*. Μια άλγεβρα Boole στην οποία για κάθε στοιχείο $a \neq 0$, υπάρχει ένα άτομο b με $b \leq a$, ονομάζεται *ατομική*. Το σύνολο των υποσυνόλων ενός συνόλου S έχει την δομή πλήρους ατομικής άλγεβρας Boole, με τις πράξεις $\cap$ και $\cup$, την μερική διάταξη $\subseteq$, ελάχιστο στοιχείο το $\varnothing$ και μέγιστο στοιχείο το S [61].

Κατά τι ασθενέστερη είναι η έννοια μιας *ορθοάλγεβρας*. Είναι ένα μερικώς διατεταγμένο πλέγμα, A, με μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο, 1 και 0 αντίστοιχα, και με μια πράξη *καθετότητας*, $\perp$. Εάν δύο στοιχεία, α και β, είναι μεταξύ τους κάθετα, $\alpha\perp\beta$, τότε ορίζεται ένα τρίτο στοιχείο, $\alpha\oplus\beta \in A$. Υπάρχει η πράξη της *άρνησης*, $\neg$, με $\neg\alpha\oplus\alpha = 1$. Ισχύει ότι $\alpha \leq \beta$ εάν και μόνον εάν υπάρχει στοιχείο $\gamma \in A$ τέτοιο ώστε $\beta = \alpha\oplus\gamma$.

E. Φασικοί χώροι και Ομάδες Μετασχηματισμών

Χωρίς τεχνικές λεπτομέρειες, οι γενικές γραμμές είναι οι εξής: Έστω G μια συνδεδεμένη (connected) απλά συνδεδεμένη ομάδα Lie, **g** η Lie άλγεβρά της, και **g*** ο δυϊκός χώρος της **g**. Τότε η G δρα στην **g*** ως ομάδα γραμμικών μετασχηματισμών (συν-συναφής –coadjoint– αναπαράσταση).

Εάν $Mfo = \{g\bullet f_0 \mid g \in G\}$, $f_0 \in \mathbf{g}^*$, είναι μια τροχιά τού G στην **g***, κάθε $X \in G$ ορίζει μια ροή στην Mfo. Εάν ξ_X είναι το εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο σε αυτήν την ροή, και αν $f \in Mfo$, έστω η απεικόνιση $\mathbf{g} \to T_f Mfo : X \mapsto X_f = (\xi_X)_f$.

Τότε, η μορφή $\omega_f(X_f , Y_f) = f([X , Y])$, όπου $X, Y \in \mathbf{g}$ και [. , .] η αγκύλη Lie στην **g**, είναι μια καλώς ορισμένη αντισυμμετρική μη-εκφυλισμένη 2-μορφή στην $T_f Mfo$. Μεταβαλλομένης της f, η ω ορίζει μια μη-εκφυλισμένη 2-μορφή στην Mfo η οποία είναι κλειστή ($d\omega = 0$), άρα ορίζει μια συμπλεκτική δομή, και είναι αναλλοίωτη υπό την δράση της ομάδας G στην M .

Άρα, κάθε τροχιά στην **g*** έχει την δομή ενός φασικού χώρου. Και, υπό μερικές ουσιώδεις προϋποθέσεις, *όλοι* οι κλασικοί φασικοί χώροι με την G ως μεταβατική ομάδα αμεταβλητότητας προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο.

Οι ουσιώδεις προϋποθέσεις αφορούν την δυνατότητα, μια συμπλεκτική πολλαπλότητα (M, ω) να είναι αυτό που ονομάζεται χαμιλτονιανός G-χώρος για την ομάδα G, δηλαδή να υπάρχει μια απεικόνιση από την **g** στις λείες πραγματικές συναρτήσεις στην M (φυσικά παρατηρήσιμα μεγέθη), $C_\nabla^\infty(M)$, η οποία να είναι ομομορφισμός αλγεβρών Lie όταν η $C_\nabla^\infty(M)$ είναι άλγεβρα Lie με γινόμενο την αγκύλη Poisson.

Ζ. Η «ενεργητική» και η «παθητική» άποψη

Ας δούμε τί συμβαίνει στην περίπτωση που έχουμε μια συμπλεκτική πολλαπλότητα, M, με συμπλεκτική δομή ω, και η G είναι η ομάδα συμπλεκτικών διαφορομορφισμών με συμπαγές στήριγμα. Η άλγεβρα Lie της G σχηματίζεται από χαμιλτονιανά διανυσματικά πεδία με συμπαγές στήριγμα. Ας δεχτούμε ότι στην M κάθε τέτοιο πεδίο είναι καθολικά χαμιλτονιανό, δηλαδή είναι της μορφής ξ_f, όπου f είναι μια λεία συνάρτηση στην M και $i(\xi_f)\rfloor\, \omega = -df$ [$i(*)\rfloor\, \omega$ συμβολίζει τον υπολογισμό τής ω σε ένα διανυσματικό πεδίο].

Τότε, για κάθε συνάρτηση h στην M, η παράγωγος Lie που αντιστοιχεί στο ξ_f είναι: $D\xi_f = \{f , h\}$, όπου $\{* , *\}$ είναι η αγκύλη Poisson. Η άλγεβρα Lie της G μπορεί να ταυτιστεί με την άλγεβρα των λείων συναρτήσεων με συμπαγές στήριγμα εφοδιασμένη με την αγκύλη Poisson.

Ο χώρος X της γενικής περίπτωσης θα είναι ο διανυσματικός χώρος των λείων συναρτήσεων στην M, και ένα σημείο του, x, θα είναι μια τέτοια συνάρτηση, έστω H. Οι χώροι TX_H ταυτίζονται με τον X, το ίδιο και η τετριμμενοποίηση Z. Εστω Z_0 ο υπο-χώρος των λείων συναρτήσεων με συμπαγές στήριγμα. Η πιο γενική συνεχής γραμμική συνάρτηση, μ, στον Z_0 γράφεται ως:

$$(\mu , f) = \; ! \;\; u f \omega^n,$$

όπου $f \in Z_0$, dimM = 2n, ω το μέτρο Liouville στην M, και u μια γενικευμένη συνάρτηση στην M. Ο εφαπτόμενος χώρος, TB_H, στην τροχιά B_H, σχηματίζεται από όλες τις παραγώγους $D\xi_f = \{f , H\}$, f με συμπαγές στήριγμα. Τότε, η σχέση (1) της §3.1 ισοδυναμεί με την συνθήκη $\{u , H\} = 0$, που σημαίνει ότι η u είναι αναλλοίωτη υπό την ροή που παράγει η H. Εάν η u επικεντρώνεται σε μια καμπύλη, αυτή η καμπύλη θα είναι τροχιά της H. Εάν, επί πλέον, εισαγάγουμε κανονικές συντεταγμένες (p, q) στην M, θα καταλήξουμε στις εξισώσεις κίνησης του Hamilton.

Η σχέση (2) της §3.1 είναι πολύ πιο περίπλοκη. Μια πολύ απλή περίπτωση, εν τούτοις, δείχνει την κεντρική ιδέα. Έστω ότι ο χώρος X είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένων διαστάσεων, n. Για μια συνάρτηση F, η απεικόνιση που στέλνει το σημείο $x \in X$ στην dF_x είναι μια απεικόνιση από τον X στον X* (μετασχηματισμός Legendre). Ο χώρος $T^*X = X \oplus X^*$ έχει μια φυσική συμπλεκτική δομή. Η γραφική παράσταση (x , dF_x) είναι μια λαγκρανζιανή υποπολλαπλότητα, Λ, του T*X, n διαστάσεων. Ακόμη, υπάρχουν προβολές π_X και π_{X^*} στους χώρους X και X* αντιστοίχως. Τότε, η λύση τής (2) ισοδυναμεί με την εύρεση ενός $\lambda \in \Lambda$, ώστε, με δεδομένη μια συνάρτηση μ, να ισχύει $\pi_{X^*}(\lambda) = \mu$. Το ζητούμενο σημείο $x \in X$ θα είναι τότε $x = \pi_X(\lambda)$.

΄Ο,τι έχουμε πει ισχύει τοπικά. Με αυτόν τον περιορισμό πάντα, η πολλαπλότητα Λ έχει σε κάθε σημείο της, m, έναν μιγαδοποιημένο εφαπτόμενο χώρο ο οποίος είναι ένας σε μέγιστο βαθμό ισότροπος (maximally isotropic) υποχώρος του μιγαδοποιημένου εφαπτομένου χώρου στον T*X. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται μια φυλλωσιά (foliation) του T*X η οποία ονομάζεται πόλωση. Αλλάζοντας τον συμβολισμό μας ώστε να συμφωνεί με καθιερωμένες έννοιες της μηχανικής, μια τέτοια πόλωση Q του T*X ορίζεται τοπικά από κάθε οικογένεια λείων συναρτήσεων n παραμέτρων, S_k, $k = (k_1,\ldots,k_n) \in \nabla^n$, όπου S_k: X T ∇ : x # S(k,x), με την ιδιότητα οι εικόνες των απεικονίσεων της μορφής φ_k: X T T*X: x # (x, $(dS_k)_x$) να καλύπτουν ένα ανοικτό σύνολο στον T*X. Για κάθε σημείο $m = (x, p) \in T^*X$, το Q_m είναι ο μιγαδοποιημένος εφαπτόμενος χώρος στον $\varphi_k(X)$ μέσω του m –τα φύλλα (leaves) της φυλλωσιάς.

Εάν, επί πλέον, η S είναι τέτοια ώστε για κάθε $k \in \nabla^n$ να ισχύει η συνθήκη: $H\lfloor\varphi_k$ = σταθερά, για μια συνάρτηση H: T*X T ∇, τότε το χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο ξ_H που αντιστοιχεί στην H θα είναι εφαπτόμενο στις καμπύλες $\varphi_k(X)$. Σε τοπικές συντεταγμένες q^a , η συνθήκη αυτή γράφεται:

$$H(q^a , \partial Sk/\partial q^a) = \text{σταθερά.}$$

Αυτή δεν είναι παρά η ανεξάρτητη από τον χρόνο εξίσωση Hamilton–Jacobi, που σημαίνει ότι οι συναρτήσεις S_k πρέπει να είναι πλήρες ολοκλήρωμά της, κάτι που τοπικά υπάρχει πάντα. Οι συναρτήσεις S_k είναι βέβαια οι συναρτήσεις δράσης της μηχανικής. Στην πολύ απλή περίπτωση της μονοδιάστατης κίνησης, χρησιμοποιώντας κανονικές συντεταγμένες (q, p), έχουμε dS = pdq, δηλαδή μια 1-μορφή. Αυτές οι μορφές αντιστοιχούν στην συνάρτηση μ, που εκφράζει την δυνατότητα εξατομίκευσης του συστήματος σύμφωνα με όσα προανέφερα. Στην γενικότερη περίπτωση, η μ αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του δυϊκού χώρου των διαφορικών μορφών n-1 διαστάσεων, οι οποίες ορίζονται ως πυκνότητα ρεύματος J. Η σχέση (1) τότε σημαίνει την διατήρηση του ρεύματος: dJ = 0 (στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού, είναι η συνθήκη διατήρησης της πυκνότητας ρεύματος dj = 0) [18].

Η. Τοπολογικές έννοιες και ορισμοί

Ένας τοπολογικός χώρος, X, είναι:

1. *T_0*, εάν όλα τα διακριτά μεταξύ τους σημεία του X έχουν διακριτά μεταξύ τους καλύμματα.

2. *T_1*, εάν όλα τα σημεία τού X είναι κλειστά.

3. *T_2*, ή *Hausdorff*, εάν για όλα τα διακριτά μεταξύ τους σημεία, $p, q \in X$, υπάρχουν ξένα μεταξύ τους ανοικτά υποσύνολα, U και V, τέτοια ώστε $p \in U$ και $q \in V$.

4. *Συνήθης* (regular), εάν είναι Hausdorff και για όλα τα ζεύγη αποτελούμενα από ένα σημείο p και ένα κλειστό υποσύνολο F, έτσι ώστε $p \notin F$, υπάρχουν ξένα μεταξύ τους ανοικτά υποσύνολα, U και V, τέτοια ώστε $p \in U$ και $F \subset V$.

5. *Πλήρως συνήθης* (completely regular), εάν για όλα τα ζεύγη τα οποία αποτελούνται από ένα σημείο p και ένα κλειστό υποσύνολο F, υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $f: X \to [0 , 1]$, τέτοια ώστε η f είναι σταθερά ίση με 1 στο F και f(p) □ 0.

6. *Συμπαγής*, εάν και μόνον εάν κάθε ανοικτό κάλυμμα έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα.

7. *Παρασυμπαγής*, εάν και μόνον εάν είναι συνήθης και για κάθε ανοικτό κάλυμμα, A, υπάρχει τοπικά ένα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα όλα τα μέλη του οποίου είναι υποσύνολα μελών του A.

8. *Νηφάλιος* (sober), εάν κάθε κλειστό υποσύνολο του X που δεν μπορεί να γραφεί σαν ένωση άλλων υποσυνόλων (είναι μη αναγώγιμο) είναι κάλυμμα ενός μοναδικού σημείου τού X.

9. *Εντελώς μη συνδεδεμένος* (totally disconnected) εάν τα μόνα συνδεδεμένα υποσύνολα του X είναι μεμονωμένα σημεία.

10. *Εντελώς διαχωρισμένος* (totally separated) εάν, για διακριτά σημεία x και y του X, υπάρχει ένα κλειστό-ανοικτό υποσύνολο του X που περιέχει το x αλλά όχι το y.

11. *Μηδενοδιάστατος* εάν τα κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του X συνιστούν βάση της τοπολογίας.

Ένα στοιχείο a ενός πλήρους πλέγματος, A, ονομάζεται *πεπερασμένο* εάν για κάθε υποσύνολο $S \subseteq A$ με $\vee S \geq a$ υπάρχει πεπερασμένο $F \subseteq S$ με $\vee F \geq a$.

Ένα locale A ονομάζεται *συνεκτικό* (coherent) εάν κάθε στοιχείο του εκφράζεται ως ένωση πεπερασμένων στοιχείων, και εάν τα πεπερασμένα στοιχεία του σχηματίζουν ένα υποπλέγμα τού A.

Ένα υποσύνολο I ενός ημιπλέγματος ένωσης, A, ονομάζεται *ιδεώδες* (ideal) εάν:

1. Το I είναι υπο-ημιπλέγμα ένωσης του A, δηλαδή $0 \in I$, και εάν $a \in I$, $b \in I$ συνεπάγονται $a \vee b \in I$.

2. Το I είναι *κατώτερο σύνολο*, δηλαδή εάν $a \in I$ και $b \leq a$, τότε $b \in I$.

Για κάθε $a \in A$, το υποσύνολο $\downarrow(a) \,\square\, \{b \in A \mid b \leq a\}$ είναι ιδεώδες τού A, είναι το μικρότερο ιδεώδες που περιέχει το a, και ονομάζεται το *κύριο* (principal) ιδεώδες που γεννάται από το a. Αντιστοίχως, ορίζεται: $\uparrow(a) \,\square\, \{b \in A \mid b \geq a\}$.

Ένα locale A είναι συνεκτικό εάν και μόνον εάν είναι ισόμορφο προς το locale των ιδεωδών, Idl(B), ενός επιμεριστικού πλέγματος B: A □ Idl(B). Σε ένα τέτοιο locale A, το υποπλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων του, έστω K(A), αποτελείται από τα κύρια ιδεώδη του πλέγματος B. Μια συνεχής απεικόνιση $f: B \to A$ μεταξύ συνεκτικών locales είναι *συνεκτική* εάν η απεικόνιση f^* στέλνει το K(A) στο K(B).

Η κατηγορία των επιμεριστικών πλεγμάτων, **Dlat**, είναι δυϊκή (dual) της κατηγορίας **CohLoc** των συνεκτικών locales και συνεκτικών απεικονίσεων μεταξύ τους.

Εάν A είναι ένα επιμεριστικό πλέγμα, το σύνολο των ιδεωδών του, Idl(A), είναι ένα πλαίσιο με την διάταξη του περιέχεσθαι (inclusion).

Ένα πλέγμα B αντιστοιχεί στον χώρο pt(Idl(B)) των πρώτων ιδεωδών του B, ή, ισοδύναμα, των πρώτων φίλτρων του B. Αυτός ο χώρος είναι το (πρώτο) *φάσμα* (prime spectrum) του B, specB. Τα ανοικτά σύνολα είναι τυχόντα ιδεώδη του B, και ένα σημείο P ανήκει σε ένα ανοικτό σύνολο I εάν και μόνον εάν $P \not\supseteq I$, ή, ισοδύναμα (εάν τα σημεία θεωρηθούν ως πρώτα φίλτρα), εάν και μόνον εάν $P \cup I \neq \emptyset$. Τέλος, το υποσύνολο του specB που αποτελείται από τα κλειστά σημεία του είναι το *μέγιστο φάσμα* (maximal spectrum) του B, maxB, διότι αντιστοιχεί στα μέγιστα πρώτα ιδεώδη του B.

Αυτές οι έννοιες εξειδικεύονται στην περίπτωση ενός τοπολογικού χώρου X και του πλέγματος Ω(X) των ανοικτών συνόλων της τοπολογίας του, ως εξής:

Σε έναν τοπολογικό χώρο X, ένα ανοικτό υποσύνολο, U, είναι πεπερασμένο στο πλέγμα Ω(X) εάν και μόνον εάν είναι συμπαγές ως υποσύνολο του X. Το locale Ω(X) είναι συνεκτικό εάν και μόνον εάν η οικογένεια KΩ(X) των συμπαγών ανοικτών υποσυνόλων τού X είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές και σχηματίζει βάση της τοπολογίας. Ένας νηφάλιος τοπολογικός χώρος για τον οποίο ισχύει αυτή η συνθήκη ονομάζεται *συνεκτικός*.

Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται *χώρος Stone* εάν ικανοποιεί τις εξής ισοδύναμες συνθήκες [61]:

1. Είναι συμπαγής, Hausdorff, και εντελώς μη συνδεδεμένος.
2. Είναι συμπαγής και εντελώς διαχωρισμένος.
3. Είναι συμπαγής, T_0, και μονοδιάστατος.
4. Είναι Hausdorff και συνεκτικός.
5. Είναι T_1 και συνεκτικός.

Σε κάθε T_0 χώρο, X, μπορεί να οριστεί μια μερική διάταξη: $x \sqsubseteq y$, εάν και μόνον εάν $\{\bar{x}\} \subseteq \{\bar{y}\}$, όπου $\{\bar{*}\}$ συμβολίζει το κάλυμμα (closure) ενός σημείου [61]. Σε αυτήν την περίπτωση το x ονομάζεται *εξειδίκευση* του y.

Σε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, (X, ≤), μπορεί να βρεθεί μια T_0 τοπολογία, Ω, για την οποία η διάταξη ≤ είναι η διάταξη εξειδίκευσης. Αυτή η τοπολογία θα βρίσκεται μεταξύ δύο άκρων: $\Phi \subseteq \Omega \subseteq \Upsilon$. Φ είναι η *τοπολογία των άνω διαστημάτων*, για την οποία όλα τα σύνολα της μορφής $\downarrow$(x) είναι κλειστά. Υ είναι η *τοπολογία Alexandrov*, δηλαδή η συλλογή όλων των *άνω συνόλων* U, για τα οποία, εάν $x \in U$ και $x \leq y$, τότε θα είναι και $y \in U$.

Στην περίπτωση που κάθε σημείο ενός T_0 χώρου, (X, Ω), έχει μιαν ελάχιστη ανοικτή περιοχή, η τοπολογία Ω συμπίπτει με την τοπολογία Alexandrov για την μερική διάταξη που επάγει.

Σε έναν συνεκτικό χώρο, X, με τοπολογία Ω, ορίζεται η patch τοπολογία, Ω΄, ως εξής: Έστω A το πλέγμα των συμπαγών ανοικτών υποσυνόλων τού X, και A* το σύνολο των συμπληρωμάτων στο Π(X) των μελών τού A. Η τοπολογία Ω΄ έχει ως βάση τα σύνολα της μορφής C □ $\{U \wedge V \mid U \in A, V \in A^*\}$. Ο χώρος (X, Ω΄) είναι χώρος Stone [61].

Ένας διατεταγμένος τοπολογικός χώρος είναι *εντελώς διατακτικά διαχωρισμένος* (totally order separated) [61] εάν, για κάθε ζεύγος σημείων x και y με $x \nleq y$, υπάρχει ένα κλειστό-ανοικτό άνω σύνολο που περιέχει το x αλλά όχι το y. Ένας *χώρος Priestley* ή *διατεταγμένος χώρος Stone* είναι ένας συμπαγής χώρος εφοδιασμένος με μια μερική διάταξη που τον κάνει εντελώς διατακτικά διαχωρισμένον. Ακόμη, σε έναν χώρο Priestley, (X, Ω΄, ≤), το σύνολο Ω των ανοικτών ως προς την τοπολογία Ω΄ άνω υποσυνόλων τού X είναι μια συνεκτική τοπολογία στον X, και η διάταξη ≤ είναι η διάταξη εξειδίκευσης για αυτήν την τοπολογία.

Η κατηγορία **CohSp** των συνεκτικών χώρων και συνεκτικών απεικονίσεων είναι ισόμορφη προς την κατηγορία **Pries** των χώρων Priestley και συνεχών απεικονίσεων που διατηρούν την διάταξη. Ένα πόρισμα από αυτό είναι [61] ότι ένα επιμεριστικό πλέγμα είναι άλγεβρα Boole εάν και μόνον εάν όλα τα πρώτα ιδεώδη του είναι μέγιστα.

Θ. Για τα Μοντέλα Kripke

Θα χρειαστούμε τους εξής συμβολισμούς:

- $M_* \square \coprod_{p\in P} M_p = \bigcap_{p\in P} M_p \square \{p\}$.
- Για ακέραιο $n \geq 1$, $\langle \bar{x}\ ,\ \bar{p} \rangle \square \langle\langle x_1\ ,\ p_1\rangle,\ldots,\langle x_n\ ,\ p_n\rangle\rangle \in M_*^n$.
- $\mathbf{p}$: η σταθερή n-ακολουθία $\langle p,\ldots p\rangle_{n\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$, οπότε $\langle \bar{x}\ ,\ \mathbf{p}\rangle = \langle\langle x_1\ ,\ p\rangle,\ldots,\langle x_n\ ,\ p\rangle\rangle$.
- Εάν $\bar{p} \in P^n$ και $q \in P$, η σχέση $q \geq \bar{p}$ σημαίνει ότι $q \geq p_1,\ldots, p_n$.
- Εάν $\langle \bar{x}\ ,\ \bar{p} \rangle \in M_*^n$ και $q \geq \bar{p}$, τότε $\mu_{\bar{p}\,q}(\bar{x}) = \langle \mu_{p_1 q}(x_1),\ldots, \mu_{p_n q}(x_n)\rangle \in M_q^n$.
- Για $\langle \bar{x}\ ,\ \bar{p} \rangle \in M_*^n$, η *έκταση* του $\langle \bar{x}\ ,\ \bar{p} \rangle$ είναι $E\langle \bar{x}\ ,\ \bar{p} \rangle = \bigcup_{i=1}^n \uparrow(p_i)$. Ειδικότερα, $E\langle x\ ,\ p\rangle = \uparrow(p)$.

Μια άλλη ενδεικτική σκοπιά για αυτές τις έννοιες βασίζεται στην *γνήσια κλάση* V(P) που ορίζεται για το μερικώς διατεταγμένο σύνολο P με την μονάδα 1 ως *ελάχιστο* στοιχείο. Τα μέλη του P ονομάζονται *κόμβοι*, *στάδια* ή *συνθήκες*. Η κλάση V(P) ορίζεται με υπερπεπερασμένη επαγωγή:

$$V_\alpha(P) = \bigcap\{\Pi(V_\beta(P)\square P) \mid \beta\in\alpha\}$$

$$V(P) = \bigcap_{\alpha\in ON} V_\alpha(P),\ ON : \text{διατακτικοί αριθμοί.}$$

Η σχέση $x \in V(P)$ είναι συντομογραφία για την: $(\exists\alpha)(ON(\alpha)\wedge x\in V_\alpha(P))$.

Το x είναι ένα *όνομα*:

$x \in V(P) \Rightarrow x \in V_\alpha(P)$ για κάποιο α

$\Rightarrow x \in \Pi(V_\beta(P)\square P)$ για κάποιο $\beta\in\alpha$

$\Rightarrow x \subseteq V_\beta(P)\square P$.

Δηλαδή το x είναι ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $\langle\langle x_1\ ,\ p_1\rangle,\ldots,\langle x_n\ ,\ p_n\rangle,\ldots\rangle$, όπου κάθε x_i είναι το ίδιο ένα όνομα και το p_i είναι ένα στάδιο, μέλος τού P.

Εάν $M = (M_p\ ;\ \mu_{pq})$ είναι μια L-δομή Kripke επί ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου P, και $\phi(v_1,\ldots, v_n)$ ένας τύπος στην L, ορίζεται η απεικόνιση:

$$[[\phi(\bullet)]]_M\colon M_*^n \rightarrow 2^P,$$

η οποία ονομάζεται $\square$-*τιμή* τής φ, όπου $\square$ είναι η άνω τοπολογία στο P, για ένα ζεύγος $\langle \bar{x}\ ,\ \bar{p} \rangle \in M_*^n$, ως εξής:

$$[[\phi(\langle \overline{x}, \overline{p}\rangle)]]_M = \{q \in E\langle \overline{x}\ ,\ \overline{p}\rangle \mid M_q \Vdash \phi[\mu_{\overline{p}\,q}(\overline{x})]\} = \{q \geq \overline{p} \mid M_q \Vdash \phi[\mu_{\overline{p}\,q}(\overline{x})]\}$$

Ισχύει ότι:

(α) $\forall\langle \overline{x}\ ,\ \overline{p}\rangle \in M_*^n$, $[[\phi(\langle \overline{x}, \overline{p}\rangle)]]$ είναι ανοικτό σύνολο στην άνω τοπολογία.

(β) $\forall p \in P$ και $\overline{x} \in M_p^n$, ισχύει $M_p \Vdash \phi[\overline{x}]$ εάν και μόνον εάν $p \in [[\phi(\langle \overline{x}, \mathbf{p}\rangle)]]$

(γ) εάν σ είναι μια *φράση* (sentence) στην L, δηλαδή ένας τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές, τότε η τιμή $[[\sigma]] = \{p \in P \mid M_p \Vdash \sigma\}$ είναι ανοικτό σύνολο στο P, η □-*τιμή* τής σ σχετικά με την δομή Kripke M.

Η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ένας τύπος στο $\langle \overline{x}\ ,\ \overline{p}\rangle \in M_*^n$ είναι $E\langle \overline{x}\ ,\ \overline{p}\rangle$. Συνεπώς, είναι εύλογο να οριστεί η έννοια: «*Η δομή Kripke M αναγκάζει τον τύπο* φ *στο* $\langle \overline{x}\ ,\ \overline{p}\rangle$», συμβολιζόμενη με $M \Vdash \phi[\langle \overline{x}\ ,\ \overline{p}\rangle]$, εάν και μόνον εάν $[[\phi(\langle \overline{x}, \overline{p}\rangle)]] = E\langle \overline{x}\ ,\ \overline{p}\rangle$. Εάν σ είναι φράση (sentence) στην γλώσσα L, τότε $M \Vdash \sigma$ εάν και μόνον εάν $[[\sigma]] = P$. Αυτή η έννοια είναι εκείνη που αντιστοιχεί στην κλασική έννοια της ικανοποίησης.

Αποδεικνύεται ότι, εάν $\phi(v_1,\ldots, v_n)$ είναι ατομικός τύπος στην L, τότε θα ισχύει ότι: $[[\phi(\langle \overline{x}, \overline{p}\rangle)]] = \{q \in E\langle \overline{x}\ ,\ \overline{p}\rangle \mid M_q \vDash \phi[\mu_{\overline{p}\,q}(\overline{x})]\}$. Πιο πολύπλοκες σχέσεις ισχύουν για πράξεις και ποσοδείκτες, συνδέοντας την έννοια της *τιμής* με την έννοια της *έκτασης*.

Τέλος, μπορεί να οριστεί μια δομή Kripke πάνω στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο που είναι η αντίθετη της *άνω τοπολογίας*, $□^{op}$, σε ένα αρχικό μερικώς διατεταγμένο σύνολο –η επονομαζόμενη *συμπλήρωση* (completion) της αρχικής δομής Kripke. Ουσιαστικά, είναι μια (προ)δεσμίδα πάνω στην τοπολογία και ορίζεται ως εξής: Για κάθε $U \in □(P) = □$ = η άνω τοπολογία,

$$□\mathbf{M}(U) = \{x \in \Pi_{r\in U}M_r \mid \forall p, q \in U, p \leq q \Rightarrow \mu_{pq}(x(p)) = x(q)\}.$$

Το $□\mathbf{M}(U)$ έχει μια L-δομή που επάγεται από το γινόμενο $\Pi_{r\in U}M_r$. Επίσης, εάν $V \subseteq U$, δηλαδή $U \subseteq □^{op}$, υπάρχει η φυσική απεικόνιση ρ_{UV}: $□\mathbf{M}(U) \to □\mathbf{M}(V)$, που δίνεται από $\rho_{UV}(x) = x|_V$. Η ρ_{UV} είναι L-μορφισμός. Η δομή Kripke πάνω στην $□^{op}$, δηλαδή $□\mathbf{M} = \langle □\mathbf{M}(U)\ ;\ \rho_{UV}\rangle$, είναι η συμπλήρωση της **M** πάνω στην $□^{op}$. Το σύνολο P μπορεί να εμφυτευτεί στο $□^{op}$: υπάρχει γ: $P \to □^{op}$, οριζόμενο ως $\gamma p = \uparrow(p)$. Με τον ίδιο τρόπο, για κάθε $p \in P$ υπάρχει ένας L-ισομορφισμός g_p: $M_p \to □\mathbf{M}(\uparrow(p))$, $g_p(z) = \langle \mu_{qp}(x)\rangle_{q\geq p}$, τέτοιος ώστε για κάθε $q \geq p$, $\rho_{\gamma p,\gamma q}\circ g_p = g_q\circ\mu_{pq} : M_p \to □\mathbf{M}(\gamma q)$.

I. Ορισμοί, Ισοδυναμία Morita, Ομαδοειδή, Αλγεβροειδή

I. Όταν έχουμε δύο πολλαπλότητες Poisson, P και Q, ένα *δυϊκό ζεύγος* (κατά Weinstein), $Q \leftarrow S \rightarrow P$, αποτελείται από μια συμπλεκτική πολλαπλότητα S και δύο απεικονίσεις Poisson, $q: S \rightarrow Q$ και $p: S \rightarrow P^{-}$, τέτοιες ώστε $\{q^*f , p^*g\} = 0$ για κάθε $f \in C^{\infty}(Q)$ και κάθε $g \in C^{\infty}(P)$. Δύο Q-P δυϊκά ζεύγη $Q \leftarrow q_i S_i \tilde{}\, p_i \rightarrow P$, i=1, 2, είναι ισόμορφα όταν υπάρχει ένας συμπλεκτομορφισμός $\varphi: S_1 \tilde{} \rightarrow S_2 \tilde{}$ για τον οποίο $q_2\varphi = q_1$ και $p_2\varphi = p_1$.

Εάν R είναι μια τρίτη ολοκληρώσιμη πολλαπλότητα Poisson, και εάν $Q \leftarrow S_1 \rightarrow P$ και $P \leftarrow S_2 \rightarrow R$ είναι δύο συνήθη (regular) δυϊκά ζεύγη, τότε η εμφύτευση (embedding) $S_1 \square_P S_2 \subset S_1 \square S_2$ είναι συνισότροπη (coisotropic), και το αντίστοιχο συμπλεκτικό πηλίκο, συμβολιζόμενο με $S_1 \circledcirc_P S_2$, είναι ο μέσος χώρος του συνήθους δυϊκού ζεύγους $P \leftarrow S_1 \circledcirc_P S_2 \rightarrow R$. Η πράξη $\circledcirc$ είναι προσεταιριστική modulo ισομορφισμούς.

Σημειωτέον ότι το γινόμενο $\circledcirc$ έχει ως ειδική περίπτωση την αναγωγή Marsden–Weinstein.

Εάν Q, P, S είναι πολλαπλότητες Poisson, ένα δυϊκό ζεύγος $Q \leftarrow S \rightarrow P$ ονομάζεται δυϊκό ζεύγος ισοδυναμίας όταν:

1. Οι απεικονίσεις $p: S \rightarrow P$ και $q: S \rightarrow Q$ είναι surjective submersions.

2. Τα σύνολα επιπέδων (level sets) της p και της q είναι συνδεδεμένα και απλώς συνδεδεμένα.

3. Οι φυλλωσιές τού S που ορίζονται από τα επίπεδα της p και της q είναι αμοιβαίως συμπλεκτικά ορθογώνιες (δηλαδή, οι εφαπτόμενες δέσμες σε αυτές τις φυλλωσιές είναι το συμπλεκτικό ορθογώνιο συμπλήρωμα η μία της άλλης).

Δύο πολλαπλότητες Poisson που συνδέονται μέσω ενός δυϊκού ζεύγους *ισοδυναμίας* ονομάζονται *Morita ισοδύναμες*.

II. Ένας *module Hilbert* πάνω σε μια C*-άλγεβρα $\propto$ είναι ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος E εφοδιασμένος με μια δεξιά δράση τής $\propto$ στον E και ένα συμβατό εσωτερικό γινόμενο με τιμές στην $\propto$, δηλαδή μια απεικόνιση $\langle\ ,\ \rangle_{\propto} : E \square E \rightarrow \propto$, γραμμική στην δεύτερη και αντιγραμμική στην πρώτη θέση, για την οποία $\langle \Psi , \Phi \rangle_{\propto}{}^* = \langle \Phi, \Psi \rangle_{\propto}$, και $\langle \Psi , \Psi \rangle_{\propto} \geq 0$, με $\langle \Psi , \Psi \rangle_{\propto} = 0$ εάν και μόνον εάν $\Psi = 0$. Ο χώρος E πρέπει να είναι πλήρης στην norm $||\Psi||^2 = ||\langle \Psi , \Psi \rangle_{\propto}||$. Η δε συνθήκη συμβατότητας είναι $\langle \Psi , \Phi B \rangle_{\propto} = \langle \Psi , \Phi \rangle_{\propto} B$.

Εάν συμβολίσουμε με $\Lambda_{\propto}(E)$ τον χώρο όλων των απεικονίσεων $A: E \rightarrow E$ για τις οποίες υπάρχει μια συζυγής απεικόνιση $A^* : E \rightarrow E$, με $\langle \Psi , A\Phi \rangle_{\propto} = \langle A^*\Psi , \Phi \rangle_{\propto}$, τότε η απεικόνιση A # A* ορίζει μιαν ενέλιξη σε αυτόν τον χώρο, ο οποίος έτσι γίνεται C*-άλγεβρα.

Ένας ×-∝ *δι-module Hilbert*, όπου × και ∝ είναι C*-άλγεβρες, είναι ένας module Hilbert E επί της ∝, μαζί με έναν ∗-ομομορφισμό τής ∝ στην $\Lambda_\propto(E)$. Συμβολίζεται με: $\times \rightarrowtail E \rightleftharpoons \propto$.

Εάν έχουμε έναν ×-∝ δι-module E, και έναν ∝-□ δι-module Φ, ορίζεται κατάλληλα το λεγόμενο *εσωτερικό τανυστικό γινόμενο* του Rieffel, $E\hat{\otimes}_\propto\Phi$, το οποίο είναι ×-□ δι-module. Δύο ×-∝ δι-modules E και Φ ονομάζονται ισόμορφοι όταν υπάρχει ένα μοναδιαίο $U \in \Lambda_\propto(E, \Phi)$.

Εάν × και ∝ είναι C(X)C*-άλγεβρες, ένας ×-∝ C(X) δι-module Hilbert είναι ένας C*-module Hilbert E επί της ∝ με έναν μη-εκφυλισμένο C(X)-γραμμικό ∗-ομομορφισμό $\psi: \times \to \Lambda_\propto(E)$.

Ένας τέτοιος δι-module είναι ένα πεδίο $(E_x)_{x\in X}$ από $\times_x$ - $\propto_x$ δι- modules Hilbert, όπου $E_x = E\hat{\otimes}_\propto\propto_x$ είναι το εσωτερικό τανυστικό γινόμενο Rieffel. Η αριστερά δράση τού ∝ στο $\propto_x$ ορίζεται μέσω της $\pi_x: \propto \to \propto_x$ και του αριστερά πολλαπλασιασμού, η δεξιά δράση τού $\propto_x$ στον εαυτό του ορίζεται μέσω του δεξιά πολλαπλασιασμού, και το εσωτερικό γινόμενο στο $\propto_x$ είναι $\langle A, B\rangle = A^*B$. Τότε, η απεικόνιση $\psi\otimes id_{\propto x}: \times \to \Lambda_{\propto x}(E_x)$ ορίζει ένα μοναδικό $\psi_x: \times_x \to \Lambda_{\propto x}(E_x)$ τέτοιο, ώστε $\psi\otimes id_{\propto x} = \psi_x \circ \pi_x$.

Η κατηγορία **C*** έχει ως αντικείμενα C*-άλγεβρες και ως βέλη κλάσεις ισομορφισμών μεταξύ δι- modules Hilbert. Η σύνθεση βελών είναι το εσωτερικό τανυστικό γινόμενο του Rieffel, και οι μονάδες $1_\propto$ είναι οι κανονικοί δι-modules Hilbert $\propto \rightarrowtail \propto \rightleftharpoons \propto$.

Ένας δι-module Hilbert $M \in (\times, \propto)$ ονομάζεται δι-module Hilbert ισοδυναμίας όταν:

1. Το γραμμικό span του πεδίου τιμών τής $\langle\ ,\ \rangle_\propto$ είναι πυκνό στην ∝.

2. Ο ∗-ομομορφισμός τής × στην $\Lambda_\propto(E)$ είναι ένας ισομορφισμός $\times \cong K_\propto(M)$ (ο οποίος γίνεται $\times \cong \Lambda_\propto(M)$ εάν η × έχει μονάδα). $K_\propto(M)$ είναι η C*-άλγεβρα των συμπαγών τελεστών σε έναν module Hilbert M επί της ∝.

Δύο C*-άλγεβρες που συσχετίζονται μέσω ενός δι-module Hilbert ισοδυναμίας ονομάζονται *(ισχυρώς) Morita ισοδύναμες*. Δύο C*-άλγεβρες είναι Morita ισοδύναμες εάν και μόνον εάν είναι ισόμορφα αντικείμενα στην **C***.

Η κατηγορία αναπαραστάσεων Rep(×) μιας C*-άλγεβρας × έχει ως αντικείμενα μη-εκφυλισμένες ∗-αναπαραστάσεις τής × σε έναν χώρο Hilbert, και ως βέλη φραγμένους γραμμικούς intertwiners. Ισομορφισμός σε αυτήν την κατηγορία είναι η μοναδιαία ισοδυναμία.

Εάν δύο C*-άλγεβρες είναι Morita ισοδύναμες, τότε έχουν ισοδύναμες κατηγορίες αναπαραστάσεων.

III. Ομαδοειδή, Αλγεβροειδή

α) Ένα *ομαδοειδές* είναι μια μικρή κατηγορία στην οποία όλοι οι μορφισμοί είναι αντιστρέψιμοι. Ειδικότερα [40], ένα ομαδοειδές συμβολίζεται ως όλον με G και αποτελείται από ένα σύνολο G_1, ένα ξεχωριστό υποσύνολο (βάση) $G_0 \subset G_1$, δύο απεικονίσεις r (ή t), s: $G \to G_0$, και έναν νόμο σύνθεσης m, συμβολιζόμενο με $\circ$:

$$\circ: G^{(2)} = \{(\gamma_1 , \gamma_2) \in G{\times}G \mid s(\gamma_1) = r(\gamma_2)\} \to G$$

τέτοιον ώστε

1. $s(\gamma_1 \circ \gamma_2) = s(\gamma_2)$, $r(\gamma_1 \circ \gamma_2) = r(\gamma_1)$ $\forall (\gamma_1 , \gamma_2) \in G^{(2)}$

2. $s(x) = r(x) = x$ $\forall x \in G_0$

3. $\gamma \circ s(\gamma) = \gamma$, $r(\gamma) \circ \gamma = \gamma$ $\forall \gamma \in G$

4. $(\gamma_1 \circ \gamma_2) \circ \gamma_3 = \gamma_1 \circ (\gamma_2 \circ \gamma_3)$

5. κάθε γ έχει ένα αμφίπλευρο αντίστροφο, γ^{-1}, με $\gamma\gamma^{-1} = r(\gamma)$, $\gamma^{-1}\gamma = s(\gamma)$.

Η ταυτοτική απεικόνιση συμβολίζεται με I. Οι απεικονίσεις r (t) και s ονομάζονται απεικονίσεις πεδίου τιμών (ή στόχου) και πηγής.

Ομαδοειδή, μεταξύ άλλων, είναι οι σχέσεις ισοδυναμίας, οι ομάδες, οι δράσεις ομάδων κ.λπ.

Ένα *λείο ομαδοειδές* είναι ένα ομαδοειδές G με μια διαφορίσιμη δομή στα G_1 και G_0, έτσι ώστε οι απεικονίσεις r (t) και s να είναι submersions, και η απεικόνιση του περιέχεσθαι αντικειμένων, $G_0 \to G_1$, όπως και η απεικόνιση σύνθεσης, m: $G^{(2)} \to G$, να είναι λείες.

β) Ένα *αλγεβροειδές* Lie σε μια πολλαπλότητα M είναι μια διανυσματική δέσμη E επί του M, η οποία, εκτός από την προβολή τ: $E \to M$, είναι εφοδιασμένη με μιαν απεικόνιση διανυσματικών δεσμών, την άγκυρα, ρ: $E \to TM$, όπως και με μιαν αγκύλη Lie, $[\ ,\ ]_E$ στον χώρο $C^\infty(M, E)$ των λείων διατομών τής E, η οποία πρέπει να ικανοποιεί την σχέση $\rho \circ [X , Y]_E = [\rho \circ X , \rho \circ Y]$, όπου η δεξιά πλευρά είναι ο συνήθης μεταθέτης διανυσματικών πεδίων στον $C^\infty(M, TM)$, και

$$[X , fY]_E = f[X , Y]_E + ((\rho \circ X)f)Y, \ \forall X, Y \in C^{\infty}(M, E) \text{ και } f \in C^{\infty}(M).$$

Για παράδειγμα, μια άλγεβρα Lie είναι το αλγεβροειδές Lie μιας ομάδας Lie, και η εφαπτομένη δέσμη TG_0 είναι το αλγεβροειδές Lie του ομαδοειδούς ζεύγους $G_1 = G_0 \times G_0$.

Παραπέμποντας στις πρωτότυπες πηγές [40] για τις τεχνικές λεπτομέρειες, με την βοήθεια εννοιών όπως οι ημι-πυκνότητες (half-densities), ορίζεται η άλγεβρα συνέλιξης ενός ομαδοειδούς. Τότε ορίζονται δύο C*-άλγεβρες, $C^*(G)$ και $C_r^*(G)$ που αντιστοιχούν στο G.

IV. Έστω G ένα ομαδοειδές και M ένα σύνολο εφοδιασμένο με μιαν «απεικόνιση βάσης» τ: $M \to G_0$. Μια αριστερά G-δράση στο M (ακριβέστερα, στην τ) είναι μια απεικόνιση (x, m) # xm από το $G_1 \times_{G_0}^{s,\tau} M$ (□ $\{(x, m) \in G_1 \times M \mid s(x) = \tau(m)\}$) στο M, τέτοια ώστε $\tau(xm) = t(x)$, xm=M $\forall x \in G_0$, και $x(ym) = (xy)m$ όταν $s(y) = \tau(m)$ και $t(y) = s(x)$.

Όταν δίδεται μια απεικόνιση βάσης ρ: $M \to H_0$, μια δεξιά δράση του ομαδοειδούς H στο M (στην ρ) είναι μια απεικόνιση (m, h) # mh από το $M \times_{H_0}^{\rho,t} H_1$ στο M για την οποία $\rho(mh) = s(h)$, mh = m $\forall h \in H_0$, και $(mh)k = m(hk)$ όταν $\rho(m) = t(h)$ και $t(k) = s(h)$.

Μια αριστερά (δεξιά) G δέσμη M επί ενός συνόλου X αποτελείται από μιαν αριστερά (δεξιά) G-δράση στο M και μιαν απεικόνιση π: $M \to X$ που είναι αναλλοίωτη κάτω από την G-δράση.

Μια (αριστερά) G δέσμη M επί του X ονομάζεται κύρια όταν η π είναι surjective και η G-δράση είναι ελεύθερη (xm = m εάν και μόνον εάν $x \in G_0$) και μεταβατική κατά μήκος των ινών της π.

Μια G-H δι-δέσμη M φέρει μια αριστερά G-δράση και μια δεξιά H-δράση στο M οι οποίες μετατίθενται. Συμβολίζεται με $G \rightarrowtail M \leftarrowtail H$. Η δι-δέσμη ονομάζεται αριστερά κύρια όταν η σ είναι surjective submetsion, η G-δράση είναι ελεύθερη (xm=m εάν και μόνον εάν $x \in G_0$) και μεταβατική κατά μήκος των ινών τής σ. Ισοδύναμα, η απεικόνιση $G_1 \times_{G_0}^{s,\tau} M \to M \times_{H_0} M$ που δίδεται από (x, m) # (xm, m) είναι διαφορομορφισμός. Μια G-H δι-δέσμη ονομάζεται αριστερά (δεξιά) κύρια όταν είναι κύρια για την G (H)-δράση σε σχέση με το $X = H_0$ ($X = G_0$) και $\pi = \rho$ ($\pi = \tau$), και αμφικύρια όταν είναι κύρια και για την αριστερά και για την δεξιά δράση.

Μια G-H δι-δέσμη M ονομάζεται συνήθης (regular) όταν είναι αριστερά κύρια και η δεξιά H-δράση είναι proper (η απεικόνιση (m, h)#(m, mh) από το $M \times_{H_0} H$ στο $M \times M$ είναι proper). Δύο G-H δι-δέσμες M, N ονομάζονται ισόμορφες εάν υπάρχει ένας διαφορομορφισμός $M \to N$ που intertwines τις απεικονίσεις $M \to G_0$, $M \to H_0$ με τις απεικονίσεις $N \to G_0$, $N \to H_0$, και intertwines τις G και H-δράσεις.

Ένα τανυστικό γινόμενο ⊛, όταν έχουμε δύο δεξιά κύριες δι-δέσμες, G↣M↢H και H↣N↢K, ορίζεται ως εξής. Το γινόμενο στις ίνες $M□_H{}^0 N$ φέρει μια δεξιά H-δράση, h : (m, n)#(mh, h^{-1}n). Το γινόμενο δίδεται από τον χώρο των τροχιών $M⊛_H N = (M□_H N)/H$.

Η κατηγορία **G** έχει ως αντικείμενα ομαδοειδή και ως βέλη κλάσεις ισομορφισμών δεξιά κυρίων δι-δεσμών, με σύνθεση το γινόμενο ⊛, κατερχόμενο σε κλάσεις ισομορφισμών, και μονάδες τις κλάσεις ισομορφισμών των κανονικών (canonical) δι-δεσμών, δηλαδή των G-G δι-δεσμών G, οριζομένων θέτοντας $M = H = G$, $\tau = t$, $\sigma = s$.

Μια δεξιά κύρια G-H δι-δέσμη M ονομάζεται δι-δέσμη ισοδυναμίας όταν είναι αμφικύρια. Δύο ομαδοειδή που συσχετίζονται μέσω μιας δι-δέσμης ισοδυναμίας ονομάζονται *Morita ισοδύναμα*. Δύο ομαδοειδή είναι Morita ισοδύναμα εάν και μόνον εάν είναι ισόμορφα αντικείμενα στην **G** και εάν και μόνον εάν είναι ισοδύναμα ως κατηγορίες.

Η κατηγορία αναπαραστάσεων Rep(G) ενός ομαδοειδούς G έχει ως αντικείμενα αριστερά G-δράσεις. Ένα βέλος μεταξύ μιας δράσης στο $\tau: M \to G_0$ και μιας δράσης στο $\rho: N \to G_0$ είναι μια απεικόνιση $\varphi: M \to N$ που ικανοποιεί $\rho\varphi = \tau$ και intertwines την G-δράση. Δύο Morita ισοδύναμα ομαδοειδή έχουν ισοδύναμες κατηγορίες αναπαραστάσεων.

V. Οι ορισμοί για τα ομαδοειδή εξειδικεύονται ανάλογα για την κατηγορία **LG** των ομαδοειδών Lie και την κατηγορία **SG** των συμπλεκτικών ομαδοειδών. Οι έννοιες της δι-δέσμης, του τανυστικού γινομένου, της ισοδυναμίας Morita, προσαρμόζονται αντιστοίχως, με τις κατάλληλες τροποποιήσεις, όπως λείες πολλαπλότητες, και απεικονίσεις που είναι διαφορομορφισμοί ή συμπλεκτομορφισμοί.

α) Ένα ομαδοειδές Lie είναι ένα ομαδοειδές για το οποίο το G_1 και το G_0 είναι πολλαπλότητες, οι απεικονίσεις s και t είναι surjective submersions, και η σύνθεση m και η ταυτότητα I είναι λείες.

β) Ένα συμπλεκτικό ομαδοειδές είναι ένα ομαδοειδές Lie Γ για το οποίο το Γ_1 είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα, με την ιδιότητα ότι το γράφημα του $\Gamma_2 \subset \Gamma□\Gamma$ είναι λαγκρανζιανή υποπολλαπλότητα του $\Gamma□\Gamma□\Gamma^-$.

Σε ένα συμπλεκτικό ομαδοειδές Γ:

1. Το Γ_0 είναι λαγκρανζιανή υποπολλαπλότητα του Γ_1.

2. Η αντιστροφή είναι απεικόνιση αντι-Poisson.

3. Υπάρχει μια μοναδική δομή Poisson στο Γ_0 τέτοια ώστε το t να είναι απεικόνιση Poisson και το s απεικόνιση αντι-Poisson.

4. Οι φυλλωσιές τού Γ που ορίζονται από τα επίπεδα του s και του t είναι αμοιβαίως συμπλεκτικά ορθογώνιες.

5. Εάν το Γ είναι s-συνδεδεμένο, τότε οι $s^*C^\infty(\Gamma_0)$ και $t^*C^\infty(\Gamma_0)$ είναι commutant το ένα του άλλου.

VI. Εάν δύο τοπικά συμπαγή ομαδοειδή με σύστημα Haar είναι Morita ισοδύναμα, τότε οι αντίστοιχες C*-άλγεβρες συνέλιξης είναι ισχυρώς Morita ισοδύναμες. Το ίδιο ισχύει για ομαδοειδή Lie. Επί πλέον, εάν δύο Morita ισοδύναμα ομαδοειδή Lie είναι s-συνδεδεμένα και s- απλώς συνδεδεμένα, τότε οι πολλαπλότητες Poisson που είναι οι δυικές δέσμες των αντίστοιχων αλγεβροειδών Lie είναι Morita ισοδύναμες.

Κ. Αλγεβρικές Δομές

1. Ένα *αλγεβροειδές Courant* [97, 99] είναι μια διανυσματική δέσμη $E \to M$ εφοδιασμένη με μια μη εκφυλισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή $\langle . , . \rangle$ στην δέσμη, μια αντισυμμετρική αγκύλη $[. , .]$ στον χώρο των διατομών Γ(Ε), και μια απεικόνιση δεσμών $\rho: E \to TM$, με τις εξής ιδιότητες:

$\forall\, e_1, e_2, e_3 \in \Gamma(E),\ J(e_1, e_2, e_3) = \Delta T(e_1, e_2, e_3)$

$\forall\, e_1, e_2 \in \Gamma(E),\ \rho[e_1, e_2] = [\rho e_1, \rho e_2]$

$\forall\, e_1, e_2 \in \Gamma(E)$ και $f \in C^\infty(M)$, $[e_1, fe_2] = f[e_1, e_2] + (\rho e_1)f)e_2 - \langle e_1, e_2\rangle \Delta f$

$\rho \circ \Delta = 0$, δηλαδή $\forall f, g \in C^\infty(M), \langle \Delta f , \Delta g\rangle = 0$

$\forall\, e, h_1, h_2 \in \Gamma(E),\ \rho(e)\langle h_1, h_2\rangle = \langle [e , h_1] + \Delta\langle e , h_1\rangle , h_2\rangle + \langle h_1 , [e , h_2] + \Delta\langle e , h_2\rangle\rangle$,

όπου έχει τεθεί: $T(e_1, e_2, e_3)$ □ $1/3 \langle [e_1 , e_2] , e_3\rangle$ + κυκλικές μεταθέσεις, $J(e_1, e_2, e_3)$ □ $[[e_1, e_2] , e_3]$ + κυκλικές μεταθέσεις, το Δ είναι η απεικόνιση $C^\infty(M) \to \Gamma(M)$ η οποία ορίζεται ως Δ □ $\frac{1}{2} \beta^{-1}\rho^* d_0$, με β τον ισομορφισμό μεταξύ Ε και Ε* που δίδεται από την διγραμμική μορφή και d_0 είναι το διαφορικό de Rham. Ισχύει: $\langle \Delta f , e\rangle = \frac{1}{2} \rho(e)f$.

2. Μια *άλγεβρα Gerstenhaber* [110] είναι ένας βαθμωτός χώρος A^* εφοδιασμένος με δύο πράξεις:

α) $\bullet : A^i \otimes A^j \to A^{i+j}$

β) $[. , .]: A^{i+1} \otimes A^{j+1} \to A^{i+j+1}$,

τέτοιες ώστε ο χώρος A^* είναι βαθμωτή αντιμεταθετική άλγεβρα ως προς το γινόμενο $\bullet$, ο χώρος A^{*+1} είναι βαθμωτή άλγεβρα Lie ως προς την αγκύλη $[. , .]$, και οι δύο πράξεις ικανοποιούν την ταυτότητα του Leibniz,

$$[a , b\bullet c] = [a , b]\bullet c + (-1)^{(|a|-1)|b|} b\bullet[a ,c],$$

για τυχόντα ομοιογενή στοιχεία α, b, c του A^*.

Η συνομολογία Hochschild $H^*(A, A)$, του συμπλέγματος $C^*(A, A)$ έχει την δομή άλγεβρας Gerstenhaber. Συγκεκριμένα [113], ο Gerstenhaber ορίζει μια πράξη $\circ$ στις συναλυσίδες Hochschild $C^*(A, A) = \Sigma_{k=0}{}^{\infty}\mathrm{Hom}(A^{(k)} , A)$ ως εξής:

$$(c_1\circ c_2)(a_1, \ldots, a_n) =$$

$$\Sigma_{0\leq i\leq j\leq n}(-1)^{(|c2|-1)(|a1|+\ldots+|ai|-i)}c_1(a_1, \ldots, a_i, c_2(a_{i+1}, \ldots, a_j), a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Η αγκύλη $[c_1 , c_2] = c_1\circ c_2 - (-1)^{(|c1|-1)(|c2|-1)}c_2\circ c_1$ προσδίδει στο σύμπλεγμα $\Sigma C^*(A, A)$ την δομή άλγεβρας Lie (το σύμβολο $\Sigma^n C^*$ είναι η n-οστή suspension του C^*, $(\Sigma^n C)_i = C_{i-n}$). Το διαφορικό Hochschild είναι η πράξη $[m, *]$, όπου m είναι η συναλυσίδα που ορίζεται από το γινόμενο στην A, $m(a_1, a_2) = (-1)^{|a1|}a_1a_2$. Η εξίσωση $[m, [m, *]] = 0$ ισοδυναμεί με την προσεταιριστικότητα της A. Αλλιώς, $m\circ m = 0$.

Το γινόμενο cup στο $C^*(A, A)$ είναι:

$$(c_1\cap c_2)\ (a_1, \ldots, a_n) = \Sigma_{i=0}{}^{n}c_1(a_1, \ldots, a_i)c_2(a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Είναι προσεταιριστικό, είναι αντιμεταθετικό μόνον εάν η A είναι αντιμεταθετική, και δεν ικανοποιεί την σχέση Poisson ως προς την αγκύλη. Αλλά, στο επίπεδο της συνομολογίας ικανοποιούνται οι συνθήκες που ορίζουν μιαν άλγεβρα Gerstenhaber.

Εάν η A είναι η άλγεβρα $C^{\infty}(M)$ σε μια πολλαπλότητα M, έχουμε ήδη αναφέρει ότι η συνομολογία Hochschild είναι ισόμορφη με τον χώρο των πολυδιανυσμάτων στην M, $\Gamma(M, \wedge^*(TM))$. Τότε, το γινόμενο $\cap$ ταυτίζεται με το γινόμενο $\wedge$ στην $\Gamma(M, \wedge^*(TM))$ και η αγκύλη Gerstenhaber ταυτίζεται με την αγκύλη Schouten-Nijenhuis.

3. Μια *άλγεβρα Batalin-Vilkovisky* (BV) είναι μια άλγεβρα Gerstenhaber, A^* με έναν τελεστή Δ: $A^* \to A^{*-1}$, βαθμού 1 και με $\Delta^2 = 0$, όπου

$$\Delta(ab) = \Delta(a)b + (-1)^{|a|}a\Delta(b) + (-1)^{|a|}[a , b],$$

για τυχόντα ομογενή στοιχεία a και b της A^* [110, 113].

Μια **περιττή συμπλεκτική υπερπολλαπλότητα** M είναι μια υπερπολλαπλότητα M με μια κλειστή, μη-εκφυλισμένη 2-μορφή, ω, περιττής parity. Σε μια συνάρτηση $\varphi \in C^{\infty}(M)$ αντιστοιχεί ένα χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο H_f μέσω του τύπου $i(H_f)\omega = df$. Εάν επί πλέον οριστεί μια αγκύλη Poisson, $[f , g] = (-1)^{|f|-1}H_f(g)$, τότε η $C^{\infty}(M)$ γίνεται άλγεβρα Gerstenhaber, η οποία, σε αυτήν την περίπτωση, είναι μόνον Z/2 – βαθμωτή.

Ακόμη, στην M ορίζεται μια γραμμική δέσμη (line bundle), η οποία γενικεύει τις δέσμες πυκνοτήτων: είναι η δέσμη Berezin, Ber(M), της M. Χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη ενός ολοκληρώματος σε διατομές με συμπαγές στήριγμα (όπου το στήριγμα μιας διατομής είναι ένα κλειστό υποσύνολο της πολλαπλότητας που υποβαστάζει την M), $\int: \Gamma_c(M, Ber(M)) \to \Re$. Εάν μ είναι μια διατομή τής Ber(M) (μπερεζινιανή) η οποία δεν μηδενίζεται πουθενά, ορίζεται ένα ολοκλήρωμα στις συναρτήσεις με συμπαγές στήριγμα στην M: $f \in C_c^{\infty}(M) \mapsto \int_\mu f$. Με αυτά τα δεδομένα, ορίζεται ένας τελεστής div_μ που απεικονίζει διανυσματικά πεδία X στην M, σε συναρτήσεις f, βάσει του τύπου $\int_\mu(div_\mu X)f = -\int_\mu X(f)$.

Ο περιττός τελεστής Δ που δρα σε συναρτήσεις f στην M και ορίζεται ως $\Delta f = div_\mu H_f$, μετρά σε ποιάν έκταση το χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο H_f δεν διατηρεί την μπερεζινιανή μ. Σε αντίθεση με την συμπλεκτική γεωμετρία όπου τα χαμιλτονιανά διανυσματικά πεδία διατηρούν το μέτρο Liouville, εδώ το Δ δεν μηδενίζεται για καμία μπερεζινιανή μ.

Μια περιττή συμπλεκτική υπερπολλαπλότητα με μπερεζινιανή μ, (M, ω, μ), τέτοια ώστε $\Delta^2 = 0$, ονομάζεται *υπερπολλαπλότητα Batalin–Vilkovisky*. Η άλγεβρα των συναρτήσεων $C^{\infty}(M)$ είναι άλγεβρα Batalin–Vilkovisky. Εάν S είναι μια συνάρτηση στην M, και Δ_S ο τελεστής που αντιστοιχεί στην μπερεζινιανή exp(S)μ, τότε $\Delta_S = \Delta - H_S$ και $\Delta_S^2 = H_{\Delta S+1/2[S\ ,S]}$.

Η εξίσωση $\Delta_S^2 = 0$, ή $\Delta S+1/2[S\ ,S] = 0$, ονομάζεται εξίσωση master Batalin–Vilkovisky.

Το κίνητρο των Batalin–Vilkovsky ήταν η λαγκρανζιανή προσέγγιση σε θεωρίες πεδίου και η κβάντωσή τους. Σε αυτό το πλαίσιο, η συνάρτηση S είναι το ανάπτυγμα S_t κατά την μέθοδο των διαταραχών ενός συναρτησιακού δράσης, $S_t = \Sigma t^i S_i$, με παράμετρο t, όπου S_0 είναι η αρχική δράση. Το ολοκλήρωμα της μπερεζινιανής (expS)μ αντιστοιχεί σε ένα ολοκλήρωμα σε διαδρομές που ορίζει την συνάρτηση partition της θεωρίας. Με την χρήση της αντι-αγκύλης (. , .) και την εισαγωγή της σταθεράς τού Planck, η εξίσωση master γράφεται $(S_t, S_t) = -i\hbar\Delta S_t$ [94].

4. Έστω ότι (V, d) είναι ένα σύμπλεγμα συναλυσίδων, με διαφορικό d βαθμού 1. Τότε, μια *δομή L_∞* στον χώρο V είναι μια συλλογή αντισυμμετρικών γραμμικών απεικονίσεων $l_n: V^{\otimes n} \to V$, βαθμού 2−n, που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\Sigma_{i+j=n+1}\Sigma_\sigma e(\sigma)(-1)^\sigma(-1)^{i(j-1)}l_j(l_i(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = 0.$$

Οι μεταθέσεις σ ονομάζονται $(a_1, \ldots, a_n)$ unshuffles και ορίζονται ως εξής: Για $1 \le s \le n$, ισχύει $\sigma(a_1+ \ldots +a_{s-1}+1) < \sigma(a_1+ \ldots + a_{s-1}+2) < \ldots < \sigma(a_1+ \ldots +a_s)$. Τα σ στον ως άνω τύπο είναι μεταθέσεις σε όλα τα (i, n–i) unshuffles. Το e(σ) είναι το σημείο που οφείλεται στους βαθμούς των μετατιθέμενων στοιχείων, και $(-1)^\sigma$ το σημείο της μετάθεσης σ.

Ορίζοντας $\downarrow V$ ως τον βαθμωτό χώρο με $(\downarrow V)_n$ □ V_{n+1} (desuspension), η δομή L_∞ περιγράφεται και ως μια συν-παραγώγιση $D^\blacklozenge$, βαθμού 1, επί της συν-άλγεβρας $\wedge^*(\downarrow V)$, με $D^{\blacklozenge 2} = 0$. Ισοδύναμα, περιγράφεται με μια γραμμική απεικόνιση $D: \wedge^*(\downarrow V) \rightarrow (\downarrow V)$ με $D \circ D^\blacklozenge = 0$.

Λ. Άλγεβρες Hopf

Έστω H ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα, k, χαρακτηριστικής μηδέν (όπως τα ℜ, ∇, ∠).

Ορίζονται οι εξής απεικονίσεις [98 σ. 101 κ.ε., 176]:

Γινόμενο: $m: H \otimes H \rightarrow H$. Συνγινόμενο: $\Delta: H \rightarrow H \otimes H$, Δa □ $a_1 \otimes a_2$. Μονάδα: $e: k \rightarrow H$, $e(1)$ □ **1**. Συνμονάδα: $\varepsilon: H \rightarrow k$. Αντίποδας: $S: H \rightarrow H$.

Ο H είναι *άλγεβρα*, αν ικανοποιούνται τα αξιώματα:

α) $m(id_H \otimes m)$ □ $m(m \otimes id_H)$	$(H \otimes H \rightarrow H)$	$a(bc)$ □ $(ab)c$
β) $m(id_H \otimes e)$ □ id_H	$(H \otimes k \cong H \rightarrow H)$	$a(\mathbf{1}k)$ □ ka
$m(e \otimes id_H)$ □ id_H	$(k \otimes H \cong H \rightarrow H)$	$(\mathbf{1}k)a$ □ ka

Ο H είναι *συνάλγεβρα* (coalgebra, cogébre), αν:

γ) $\Delta^{(2)}$ □ $(id_H \otimes \Delta)\Delta$	$(H \rightarrow H \otimes H)$	$a_1 \otimes a_{23} \otimes a_{24}$ □
□ $(\Delta \otimes id_H)\Delta$		□ $a_{13} \otimes a_{14} \otimes a_2$
δ) $(id_H \otimes \varepsilon)\Delta$ □ id_H	$(H \rightarrow H \otimes k \cong H)$	$a_1 \varepsilon(a_2)$ □ a
$(\varepsilon \otimes id_H)\Delta$ □ id_H	$(H \rightarrow k \otimes H \cong H)$	$\varepsilon(a_1)a_2$ □ a

Ο H είναι *δι-άλγεβρα*[74] (bialgebra, bigébre), αν, επί πλέον των ανωτέρω:

ε) Δm □ $m \otimes (\Delta \otimes \Delta)$	$(H \otimes H \rightarrow H \otimes H)$	$\Delta(ab)$ □ $(\Delta a)(\Delta b)$
ς) Δe □ $e \otimes e$	$(k \cong k \otimes k \rightarrow H \otimes H)$	$\Delta(k\mathbf{1})$ □ $k\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$
ζ) εm □ $\varepsilon \otimes \varepsilon$	$(H \otimes H \rightarrow k \cong k \otimes k)$	$\varepsilon(ab)$ □ $\varepsilon(a)\varepsilon(b)$
η) εe □ id_k	$(k \rightarrow k)$	$\varepsilon[e(k)]$ □ k

Ο H είναι *άλγεβρα Hopf*, αν, επί πλέον:

[74] Δεδομένου ότι το πρόθεμα «αλ» δηλώνει άρθρο στον ενικό, μάλλον είναι ορθότερος ο γαλλικός όρος, bigébre.

θ) $p \square m(id_H \otimes S)\Delta \square m(S \otimes id_H)\Delta$ $\qquad (H \to H) \qquad$ $a_1(Sa_2) \square (Sa_1)a_2$

$\square\ e\varepsilon \qquad\qquad \square\ (\varepsilon a)\mathbf{1}$

$S*id \square id*S \square e\varepsilon$

Ισχύει ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία (short exact sequence) του ε είναι διασπασμένη (split) με lift e:

$$0 \to H^{+} \square \mathrm{Ker}\varepsilon \ \varepsilon \rightleftarrows e \ k \to 0,$$

σε αντιστοιχία με την ανάλυση σε ευθύ άθροισμα: $H \square H^{+} \otimes k\mathbf{1}$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. L. Mlodinow, *Euclid’s Window, The Story of Geometry from Parallel Lines to Hyperspace*, Touchstone, Simon & Schuster, New York, 2001

2. G. Cornell, J. H. Silverman, G. Stevens, eds., *Modular Forms and Fermat’s Last Theorem*, Springer, 1997 – E. Frenkel, *Lectures on the Langlands Program and Conformal Field Theory*, arXiv:hep-th/0512172

3. A. Kapustin, E. Witten, *Electric-Magnetic Duality And The Geometric Langlands Program*, arXiv:hep-th/0604151

4. J. Horgan, Quantum Philosophy, *Scientific American*, July 1992

5. S. Psillos, *Scientific Realism – How science tracks truth*, Routledge, London & New York, 1999

6. N. P. Landsman, *Between Classical and Quantum*, υπό δημοσίευση στο J. Earman, J. Butterfield, eds., *Handbook of the Philosophy of Science*, Vol. 2: *Philosophy of Physics*, arXiv:quant-ph/0506082

7. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics – Non-relativistic Theory*, 2η έκδοση, Pergamon Press, 1965, σ. 3

8. J. Baez, J. Dolan, *Higher – Dimensional Algebra and Topological Quantum Field Theory*, arXiv:q-alg/9503002

9. C. Misner, K. Thorne, J. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973, σ. 429

10. A. Baltas, *Ideological “Assumptions” in Physics: Social Determinations of Internal Structures*, στο A. Fine, P. Machamer, eds., *PSA 1986*, V. 2, 1987, σσ. 130-151

11. I. Lakatos, *Αποδείξεις και Ανασκευές – Η Λογική της Μαθηματικής Ανακάλυψης*, Τροχαλία, 1996

12. T. S. Kuhn, *Η Δομή των Επιστημονικών Επαναστάσεων*, μετάφραση Γ. Γεωργακόπουλος, Β. Κάλφας, 6η έκδοση, Σύγχρονα Θέματα

13. I. Kant, *Metaphysical Foundations of Natural Sciences*, στο "Philosophy of Material Nature", αγγλική μετάφραση J. W. Ellington, Hackett, 1985

14. "Hegel΄s Science of Logic", αγγλική μετάφραση A. V. Miller, London: George Allen & Unwin, 1969, New York: Humanities Press, 1976

15. A. Baltas, *On Some Grammatical Aspects of Scientific Discovery*, αδημοσίευτο κείμενο

16. Γ. Φαράκλας, *Θέση και Αλήθεια*, εκδ. Κριτική, 1997, σσ. 234-35

17. sir Isaac Newton, *Principia*, Vol. II , University of California Press, 1962

18. S. Sternberg, *On the role of field theories in our physical conception of geometry*, στο K. Bleuler, H. R. Petry, A. Reetz, eds., "Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics II", Lecture Notes in Mathematics No 676, Springer

19. M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1987, Vol. 1, σσ. 26-7

20. M. Kaku, *Strings, Conformal Fields, and M–Theory*, 2nd edn., Springer, 2000, σσ. 385-6

21. Ενδεικτικά: J. Butterfield, C. Isham, *Spacetime and the philosophical challenge of quantum gravity*, στο C. Callender, N. Huggett, eds., *Physics Meets Philosophy at the Planck Scale*, Cambridge, 2001 – J. C. Baez, *Higher–dimensional algebra and Planck scale physics*, στο ίδιο, και passim στο ίδιο

22. Ενδεικτικά: N. Seiberg, E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, arXiv:hep-th/9908142 – A. Connes, M. R. Douglas, A. Schwarz, Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori, *JHEP* **9802**, 003 (1998) [arXiv:hep-th/9711162] – M. R. Douglas, C. Hull, D-branes and the noncommutative torus, *JHEP* **9802** 008 (1998) [arXiv:hep-th/9711165] – J. Wess, Non-Abelian Gauge Theories on Non-Commutative Spaces, *Commun. Math. Phys.* **219**, 247-257 (2001) – J. C. Várilly, *Noncommutative Geometry and Quantization*, arXiv:hep-th/9912171 – L. Castellani, *Noncommutative geometry and physics: a review of selected recent results*, arXiv:hep-th/0005210 – M. R. Douglas, N. A. Nekrasov, *Noncommutative Field Theory*, arXiv:hep-th/0106048 – J. W. Moffat, *Noncommutative Quantum Gravity*, arXiv:hep-th/0007181

23. J. Butterfield, *Against Pointillisme about Geometry*, arXiv:physics/0512063, και *Against Pointillisme about Mechanics*, arXiv:physics/0512064

24. D. Howard, *Holism, Separability, and the Metaphysical Implications of the Bell Experiments*, στο J. Cushing, E. McMullin, eds., *Philosophical Consequences of Quantum Theory – Reflections on Bell's Theorem*, University of Notre Dame Press, 1989

25. P. Teller, *Relativity, Relational Holism, and the Bell Inequalities*, στο J. Cushing, E. McMullin, eds., *Philosophical Consequences of Quantum Theory – Reflections on Bell's Theorem*, University of Notre Dame Press, 1989

26. H. Reichenbach, *The Philosophy of Space and Time*, Dover, 1958, σ. 37 και passim

27. S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, 2nd edn., 1998, Springer

28. J. C. Baez, J. Dolan, *Categorification*, arXiv:math.QA/9802029, και *From finite sets to Feynman diagrams*, στο B. Engquist, W. Schmid, eds., *Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond*, Springer, V. 1, σσ. 29-50

29. G. Lakoff, *Women, Fire, and Dangerous Things – What Categories Reveal about the Mind*, The University of Chicago Press, 1987

30. A. Connes, *Noncommutative Geometry – Year 2000*, arXiv:math.QA/0011193

31. B. Coecke, *Quantum Logic in Intuitionistic Perspective*, arXiv:math.LO/0011208

32. B. Coecke, D. Moore, A. Wilce, *Operational quantum logic: An overview*, στο B. Coecke, D. Moore, A. Wilce, eds., *Current Research in Operational Quantum Logic*, Kluwer, 2000, σσ. 1-36. – G. W. Mackey, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin, 1963. – V. S. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory*, van Nostrand, V. 1: 1968, V. 2: 1970.

33. M. L. Dalla Chiara, R. Giuntini, *Quantum Logics*, arXiv:quant-ph/0101028

34. A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Can Quantum-Mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.* **47**, 777, 1935

35. A. Baltas, *On the Structure of Physics as a Science*, στο D. Batens, J. P. van Bendegem, eds., *Theory and Experiment*, 1988, D. Reidel, σσ. 207-225

36. Β. Καρακώστας, Περί της φύσεως και ερμηνείας της κβαντικής πραγματικότητας – Το πρότυπο του ενεργού επιστημονικού ρεαλισμού, *Δευκαλίων 23/2*, Δεκέμβριος 2005, σσ. 223-257

37. V. Karakostas, Forms of quantum nonseparability and related philosophical consequences, *Journal for General Philosophy of Science* **00:** 1-30, Kluwer, 2004

38. V. Karakostas, Nonseparability, Potentiality and the Context-Dependence of Quantum Objects, υπό δημοσίευση στο *Dialectica*

39. K. Marx, *A Contribution to the Critique of Political Economy*, K. Marx – F. Engels, “Collected Works”, V. 32, Progress, Moscow, 1989, σ. 140

40. A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994 – J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, LMS Lecture Note Series 206, Cambridge, 1995

41. K.-G. Schlesinger, *Towards Quantum Mathematics Part I: From Quantum Set Theory to Universal Quantum Mechanics*, http:/www.esi.ac.at/Preprint-shadows/esi537.html, και *Part II: Manifold Notions*, http://www.esi.ac.at/Preprint-shadows/esi556.html

42. J. C. Baez, *Quantum Quandaries: A Category-Theoretic Perspective*, προδημοσίευση, Απρίλιος 2004, Department of Mathematics, University of California, Riverside, υπό δημοσίευση στο S. French, D. Rickles, J. Saatsi, eds., *Structural Foundations of Quantum Gravity*, Oxford

43. Yoon-Ho Kim, R. Yu, S. P. Kulik_, Y. H. Shih, M. O. Scully, *A Delayed Choice Quantum Eraser*, arXiv:quant-ph/9903047 – S. Aerts, P. Kwiat, J.-A. Larsson, M. Zukowski, *Two-photon Franson-type experiments and local realism*, arXiv:quant-ph/9912064

44. F. W. Lawvere, *Toposes of Laws of Motion*, ομιλία στο Montreal, 1997

45. F. W. Lawvere, *Outline of Synthetic Differential Geometry*, ομιλία σε Σεμινάριο Γεωμετρίας στο Buffalo, 1998

46. F. W. Lawvere, *Functorial Semantics of Algebraic Theories and Some Algebraic Problems in the Context of Functorial Semantics of Algebraic Theories*, Reprints in Theory and Applications of Categories, http://www.tac.mta.ca/tac/reprints

47. E. H. Reck, M. P. Price, Structures and Structuralism in Contemporary Philosophy of Mathematics, *Synthese* **125** : 341-383, 2000

48. Αναφέρεται στο Joël Dor, *Εισαγωγή στην Ανάγνωση του Lacan*, Πλέθρον, τ. 1, σ. 55

49. Βλέπε τα άρθρα στο ειδικό τεύχος, *Stud. Hist. Phil. Sci.*, V. 29, No 3, 1998

50. W. J. Freeman, The Physiology of Perception, *Scientific American*, February 1991, σσ. 34-41

51. I. Kant, *Κριτική του Καθαρού Λόγου*, εισαγωγή-μετάφραση-σχόλια Α. Γιανναράς, «Περί της Σχηματοποιήσεως των Καθαρών Εννοιών του Νου», Α 137, Παπαζήσης, τόμος Β΄, σ. 157

52. H. E. Allison, *Kant´s Transcendental Idealism – An Interpretation and Defense*, Yale University Press, 1983

53. S. Kochen, E. P. Specker, The problem of hidden variables in quantum mechanics, *Journal of Mathematics and Mechanics* **17** (1967), 59-87. – A. Döring, *Kochen-Specker theorem for von Neumann algebras*, arXiv:quant-ph/0408106

54. F. A. Muller, Sets, Classes and Categories, *British Journal for the Philosophy of Science* **52** (2001) 539-573

55. Y. I. Manin, *A Course in Mathematical Logic*, Graduate Texts in Mathematics 53, Springer, 1977, σ. 95 κ.ε.

56. B. S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Blackie, 1965

57. D. J. Simms, N. M. J. Woodhouse, *Lectures on Geometric Quantization*, Lecture Notes in Physics No 53, Springer, 1977. – N. M. J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, 2nd edition, Oxford, 1991

58. J. Earman, *Laws, Symmetry, and Symmetry Breaking; Invariance, Conservation Principles, and Objectivity*, Philosophy of Science Assoc. 18th Biennial Mtg-PSA 2002 Symposia

59. V. Aldaya, J. de Azcarraga, Quantization as a consequence of the symmetry group: An approach to geometric quantization, *J. Math. Phys*. **23**(7), July 1982

60. L. Martinez Alonso, Group-theoretical foundations of classical and quantum mechanics. I. Observables associated with Lie algebras, *J. Math. Phys*. **18**(8), August 1977

61. P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge studies in advanced mathematics 3, Cambridge, 1982

62. Δ. Α. Αναπολιτάνος, *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, Νεφέλη, 1985, σ. 272

63. S. Vickers, *Toposes pour les nuls*, http://www.cs.bham.ac.uk/~sjv/TopPLN.ps. - *Toposes pour les vraiment nuls*, http://www.cs.bham.ac.uk/~sjv/TopPLVN.ps

64. N. Bourbaki, *XVI, Éléments de Mathématique, Livre III, Topologie Générale, Fascicule de Résultats*, Hermann, 1964

65. H. F. de Groote, *Quantum Sheaves – An Outline of Results*, arXiv:math-phys/0110035 – *Observables*, arXiv:math-ph/0507019 – *Observables I. Stone Spectra*, arXiv:math-ph/0509020 – *Observables II. Quantum Observables*, arXiv:math-ph/0509075

66. C. J. Isham, *Topos Theory and Consistent Histories: The Internal Logic of the Set of all Consistent Sets*, arXiv:gr-qc/9607069

67. C. J. Isham, J. Butterfield, A Topos Perspective on the Kochen – Specker Theorem: I. Quantum States as Generalized Valuations, *Int. J. Theor. Phys.* **37**

(1998), 2669-2733 [arXiv:quant-ph/9803055] – II. Conceptual Aspects, and Classical Analogues, *Int. J. Theor. Phys*. **38** (1999), 827-859 [arXiv:quant-ph/9808067] – (με τον J. Hamilton), III. von Neumann Algebras as the Base Category, *Int. J. Theor. Phys*. **39** (2000), 1413-1436 [arXiv:quant-ph/9911020] – IV. Interval Valuations, *Int. J. Theor. Phys*. **41 (2002),** No 4, 613-639 [arXiv:quant-ph/0107123] – C. J. Isham, J. Butterfield, *Some Possible Roles for Topos Theory in Quantum Theory and Quantum Gravity*, Imperial/TP/98-99/76 [arXiv:gr-qc/9910005]

68. M. Barr, C. Wells, *Toposes, Triples and Theories*, Springer, New York, 1985, και Version 1.1, 6 January 2001, http://www.cwru.edu/artsci/math/wells/pub/ttt.html, σ. 226

69. R. Goldblatt, *Topoi, The Categorical Analysis of Logic*, North Holland, 1984

70. P. T. Johnstone: *Topos Theory*, London Mathematical Society Monographs no. 10, Academic Press, 1977

71. S. MacLane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic - A First Introduction to Topos Theory*, Springer, 1994

72. F. W. Lawvere. *Ordinal Sums and Equational Doctrines*, Springer Lecture Notes in Mathematics No. 80, Springer-Verlag (1969), 141-155.

73. A. Joyal, I. Moerdijk, *Algebraic Set Theory*, LMS Lecture Note Series 220, Cambridge, 1995

74. J. Butterfield, *Topos Theory as a Framework for Partial Truth*, στο P. Gardenfors, K. Kijania-Placek, J. Wolenski, eds., *Proceedings of the 11th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Kluwer

75. F. Miraglia, *Partial Orders, Logic and Topology*, αδημοσίευτο κείμενο, σ. 44 κ.ε.

76. Α. Μπαλτάς, *Συνιστούν τα μαθηματικά επιστημονική ήπειρο;* Νεύσις, 3 (1995), σσ. 97-108

77. W. Heisenberg, *Φυσική και φιλοσοφία*, μετάφραση Δ. Κούρτοβικ, Κάλβος, 1978

78. J. L. Bell, M. Machover, *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland, 1977

79. M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalǿ, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics 36, Cambridge, 1995 – D. Happel, *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, LMS Lecture Note Series 119, Cambridge, 1988 – M. Prest, *Model Theory and Modules*, LMS Lecture Note Series 130, 1988 – L. M. Ionescu, *Remarks on quantum physics and noncommutative geometry*, arXiv:math.HO/0006024

80. Αναφέρεται στο Πέρυ Άντερσον, *θεωρίες για το τέλος της ιστορίας*, εκδόσεις Στάχυ, 1994, σ. 30

81. C. J. Mulvey, M. Nawaz, *Quantales: Quantal Sets*, στο Non-Classical Logics and their Application to Fuzzy Subsets: A Handbook of the Mathematical Foundations of Fuzzy Set Theory, Kluwer, σσ. 159-217, 1995 – C. J. Mulvey, J. W. Pelletier, On the quantisation of points, *J. Pure Applied Algebra*, **159** (2001), 231-295 – On the quantisation of spaces, υπό δημοσίευση στο *J. Pure Applied Algebra – A quantisation of the calculus of relations*, στο Category Theory 1991, CMS Conference Proceedings, **13**, 345-360, AMS, 1992 – J. Paseka, J. Rosický, *Quantales*, στο B. Coecke, D. Moore, A. Wilce, eds., *Current Research in Operational Quantum Logic*, Kluwer, 2000, σσ. 245-262

82. N. P. Landsman, *Rieffel induction as generalized quantum Marsden – Weinstein reduction*, arXiv:hep-th/9305088 – *Bicategories of operator algebras and Poisson manifolds*, arXiv:math-ph/0008003 – *Quantized reduction as a tensor product*, στο N. P. Landsman, M. J. Pfaum, M. Schlichenmaier, eds., *Singular Symplectic Quotients*, Basel: Birkhäuser, 2001, σσ. 137-180 [arXiv:math-ph/0008004] – *Quantization of Poisson algebras associated to Lie algebroids*, arXiv:math-ph/0001005 – *Functoriality and Morita equivalence of operator algebras and Poisson manifolds associated to groupoids*, arXiv:math-ph/0008036 – Quantization as a functor, *Contemporary Mathematics*, 315, 9-24, 2002 [arXiv:math-ph/0107023]

83. N. P. Landsman, *Functorial quantization and the Guillemin-Sternberg conjecture*, στο S. T. Ali et al., eds., *Proceedings of the XXth Workshop on Geometric Methods in Physics* [arXiv:math-ph/0307059]

84. B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras*, Springer, 1986

85. A. Lichnerowicz, *Deformations and Quantization*, Lecture Notes in Mathematics No 775, Springer – F. Bayen, *Deformation of Symplectic Structure and Quantization*, Lecture Notes in Physics No 94, Springer – M. Karasev, *Geometric Star Products*, στο Symplectic Geometry and Quantization, Contemporary Mathematics No 179, AMS, 1994, σ. 115 – J. Huebschmann, *On the Quantization of Poisson Algebras*, στο P. Donato, C. Duval, J. Elhadad, G. M. Tuynman, eds., *Symplectic Geometry and Mathematical Physics*, Birkhäuser, 1991, σσ. 204-233 – A. Weinstein, *Noncommutative Geometry and Geometric Quantization*, στο ίδιο, σσ. 446-461

86. G. Ditto, D. Sternheimer, *Deformation quantization: genesis, developments and metamorphoses*, arXiv:math.QA/0201168

87. E. Hawkins, *Quantization of multiply connected manifolds*, arXiv:math.QA/0304246

88. M. Bordemann, N. Neumaier, S. Waldmann, Homogeneous Fedosov Star Products on Cotangent Bundles I: Weyl and Standard Ordering with Differential Operator Representation, *Commun. Math.*

Phys. **198**, 363-396 (1998), και *II: GNS Representations, the WKB Expansion, and Applications*, arXiv:q-alg/9711016 – P. Xu, Fedosov ∗-Products and Quantum Momentum Maps, *Commun. Math. Phys.* **197**, 167-197 (1998)

89. M. Kontsevich, *Deformation Quantization of Poisson Manifolds, I*, arXiv:q-alg/9709040 – A. A. Voronov, *Quantizing Poisson Manifolds*, arXiv:q-alg/9701017

90. M. Schlichenmaier, *Singular Projective Varieties and Quantization*, arXiv:math.QA/0005288 – S. Waldmann, *On the Representation Theory of Deformation Quantization*, στο G. Halbout, ed., *Deformation Quantization*, vol. 1, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, de Gruyter, 2002, σσ. 107-133 [arXiv:math.QA/0107112]

91. E. Hawkins, Quantization of Equivariant Vector Bundles, *Commun. Math. Phys.*, **202** No 3 (1999), σσ. 517-546 – Geometric Quantization of Vector Bundles and the Correspondence with Deformation Quantization, *Commun. Math. Phys.*, **215** No 2 (2000), σσ. 409-432 – Noncommutative Rigidity, *Commun. Math. Phys.*, **246**, 211-235 (2004)

92. D. Buchholtz, R. Haag, The Quest for Understanding in Relativistic Quantum Physics, *J. Math. Phys.*, ειδική έκδοση 2000 [arXiv:hep-th/9910243]

93. M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton, 1992

94. J. Stasheff, *Deformation theory and the Batalin – Vilkovisky master equation*, arXiv:q-alg/9702012

95. G. Barnich, R. Fulp, T. Lada, J. Stasheff, *The sh Lie structure of Poisson brackets in field theory*, arXiv:hep-th/9702176

96. R. Fulp, T. Lada, J. Stasheff, *Sh-Lie Algebras induced by Gauge Transformations*, arXiv:math.QA/0012106

97. D. Roytenberg, A. Weinstein, Courant Algebroids and Strongly Homotopy Lie Algebras, *Lett. Math. Phys.* **46** (1998) 81-93 [arXiv:math.QA/9802118]

98. V. Chari, A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, 1994

99. D. Roytenberg, *Courant algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds*, arXiv:math.DG/9910078, και *On the structure of graded symplectic supermanifolds and Courant algebroids*, arXiv:math.SG/0203110

100. A. Jaffe, F. Quinn, “Theoretical Mathematics”: Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics, *Bulletin of the American Mathematical Society* 29, σσ. 1-13, 1993 – M. Atiyah et al., Responses to “Theoretical Mathematics : Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics”, *Bulletin of the American Mathematical Society* 30, σσ. 178-207, 1994

101. J. M. F. Labastida, *Math and Physics*, USC-FT-9-01, arXiv:hep-th/0107079

102. A. Jaffe, Proof and the Evolution of Mathematics, *Synthese* 111, σσ. 133-146, 1997

103. C. Nash, *Differential Topology and Quantum Field Theory*, Academic Press, 1991

104. R. E. Borchers, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* 109, 405-444 (1992)

105. Y. I. Manin, *Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology, and Moduli Spaces*, AMS Colloquium Publications Vol. 47, 1999

106. C. Rovelli, *Are Knots Quantum States of Space Time?* στο L. Lusanna, ed., *Knots, Topology and Quantum Field Theories,* World Scientific, 1989, σ. 51

107. M. A. Grigoriev, S. L. Lyakhovich, Fedosov Deformation Quantization as a BRST Theory, *Commun. Math. Phys*. **218**, 437-457, 2001

108. P. Schaller, T. Strobl, *Poisson-σ-models: A generalization of 2d Gravity-Yang- Mills Systems*, TUW-94-21, PITHA-94-49, arXiv:hep-th/9411163 – *Poisson Structure Induced (Topological) Field Theories*, TUW-94-03, arXiv:hep-th/9405110 – *A Brief Introduction to Poisson σ-Models*, arXiv:hep-th/9507020

109. N. Ikeda, *Topological Field Theories and Geometry of Batalin-Vilkovisky Algebras*, arXiv:hep-th/0209042 – *A Deformation of Three Dimensional BF Theory*, arXiv:hep-th/0010096 – *Deformation of BF Theories, Topological Open Membrane and A Generalization of The Star Deformation*, arXiv:hep-th/0105286

110. D. Tamarkin, B. L. Tsygan, *Noncommutative Differential Calculus, Homotopy BV Algebras and Formality Conjectures*, arXiv:math.KT/0002116

111. E. Getzler, J. Jones, *Operads, homotopy algebra, and iterated integrals for double loop spaces*, arXiv:hep-th/9403055

112. B. Zwiebach, Closed string field theory: Quantum action and the Batalin-Vilkovisky master equation, *Nucl. Phys*. **390** (1993), 33-152, και: *Oriented open – closed string theory revisited,* arXiv:hep-th/9705241

113. E. Getzler, Batalin-Vilkovisky Algebras and Two–Dimensional Topological Field Theories, *Commun. Math. Phys*. **159** (1994) 265-285, [arXiv:hep-th/9212043] – D. Fiorenza, *An introduction to the Batalin-Vilkovisky Formalism,* arXiv:math.QA/0402057

114. J. Stasheff, *Closed string field theory, strong homotopy Lie algebras and the operad actions of moduli spaces*, UNC-MATH-93/1, arXiv:hep-th/9304061, και From operads to “physically” inspired theories, *Contemporary Mathematics*, Vol. 00, 19xx, 2000

115. M. Markl, S. Shnider, J. Stasheff, *Operads in Algebra, Topology and Physics*, AMS Mathematical Surveys and Monographs Vol. 96, 2002 – A. A. Voronov, *Notes on universal algebra*, arXiv:math.QA/0111009

116. M. Kontsevich, Operads and Motives in Deformation Quantization, *Lett. Math. Physics* **48:** 35-72,1999

117. M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Deformation of algebras over operads and Deligne´s conjecture*, arXiv:math.QA/0001151

118. A. Connes, D. Kreimer, Lessons from Quantum Field Theory – Hopf Algebras and Spacetime Geometries, *Lett. Math. Phys*. **48** (1999) 85 [arXiv:hep-th/9904044]

119. E. Getzler, M. M. Kapranov, *Modular Operads*, arXiv:dg-ga/9408003

120. D. E. Tamarkin, *Another Proof of M. Kontsevich Formality Theorem for* ∇^n, arXiv:math.QA/9803025

121. D. E. Tamarkin, *Formality of Chain Operad of Small Squares*, arXiv:math.QA/9809164

122. A. A. Voronov, *The Swiss – Cheese Operad*, arXiv:math.QA/9807037

123. M. Kontsevich, Deformation Quantization of Algebraic Varieties, *Lett. Math. Physics* **56:** 271-294, 2001

124. A. S. Cattaneo, G. Felder, A path integral approach to the Kontsevich quantization formula, *Commun. Math. Phys*. **212** (2000), 591-611 [arXiv: math.QA/9902090] – A. S. Cattaneo, G. Felder, L. Tomassini, *From local to global deformation quantization of Poisson manifolds*, arXiv:math.QA/0012228 – A. S. Cattaneo, *Formality and Star Products*, arXiv:math.QA/0403135

125. C. Klimčík, The Formulae of Kontsevich and Verlinde from the Perspective of the Drinfeld Double, *Commun. Math. Phys*. 217, 203-228, 2001

126. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1963, σσ. 31-36, και των ιδίων, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, 1962, σ. 102

127. A. Connes, D. Kreimer, Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I: the Hopf algebra structure of graphs and the main theorem, *Commun. Math. Phys*. **210**, 249 (2000) [arXiv:hep-th/9912092]

128. J. Collins, *Renormalization*, Cambridge monographs in mathematical physics, Cambridge, 1984 – H. Epstein, V. Glaser, *The role of locality in perturbation theory*, Ann. Inst. H. Poincaré A **19** (1973) 211-295 – N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the theory of quantized fields*, Wiley, 1980 – W. Zimmermann, Convergence of Bogoliubov´s method of renormalization in momentum space, *Commun. Math. Phys*. **15** (1969) 208-234

129. D. Kreimer, Renormalization and Knot Theory, *J. Knot Th. Ram*. **6** (1997) 479-581 [arXiv:q-alg/9607022]

130. D. Kreimer, On overlapping divergences, *Commun. Math. Phys*. **204** (1999), 669-689 [arXiv:hep-th/9810022]

131. D. Kreimer, On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories, *Adv. Theor. Math. Phys*. 2 (1998) 303-334 [arXiv:q-alg/9707029] – D. Manchon, *Hopf Algebras, from basics to applications to renormalization*, arXiv:math.QA/0408405

132. A. Connes, D. Kreimer, Hopf Algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry, *Commun. Math. Phys*. **199** (1998) 203-242 [arXiv:hep-th/9808042]

133. A. Connes, H. Moscovici, Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem, *Commun. Math. Phys*. **198** (1998) 199 [arXiv:math.DG/9806109]

134. A. Connes, D. Kreimer, Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem, *J. High Energy Phys*. **09**, 024 (1999) [arXiv:hep-th/9909126]

135. A. Connes, D. Kreimer, Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem II: the β-function, diffeomorphisms and the renormalization group, *Commun. Math. Phys*. **216** (2001) 215 [arXiv:hep-th/0003188]

136. A. Connes, M. Marcolli, *From Physics to Number Theory via Noncommutative Geometry, II*, arXiv:hep-th/0411114

137. F. Girelli, T. Krajewski, P. Martinetti, *An algebraic Birkhoff decomposition for the continuous renormalization group*, arXiv:hep-th/0401157

138. C. Bergbauer, D. Kreimer, *The Hopf algebra of rooted trees in Epstein-Glaser renormalization*, arXiv:hep-th/0403207 – A. Lange, *The Epstein-Glaser approach to pQFT: Graphs and Hopf algebras*, arXiv:hep-th/0403246

139. J. M. Gracia-Bondia, S. Lazzarini, *Connes-Kreimer-Epstein-Glaser Renormalization*, arXiv:hep-th/0006106

140. D. Kreimer, Chen´s Iterated Integral represents the Operator Product Expansion, *Adv. Theor. Math. Phys*. **3.3** (1999) [arXiv:hep-th/9901099]

141. Ch. Brouder, Runge-Kutta methods and renormalization, *Eur. Phys. J.* **C12** (2000) 521 [arXiv:hep-th/9904014]

142. D. Kreimer, *Combinatorics of (perturbative) Quantum Field Theory*, arXiv:hep-th/0010059 – P. van der Laan, *Operads and the Hopf algebras of renormalization*, arXiv:math-ph/0311013 – R. M. Kaufmann, *On spineless cacti, Deligne´s conjecture and Connes-Kreimer´s Hopf algebra*, arXiv:math.QA/0308005

143. M. Rosenbaum, J. D. Vergara, *The Hopf Algebra of Renormalization, Normal Coordinates and Kontsevich Deformation Quantization*, arXiv:hep-th/0404233

144. A. Connes, M. Marcolli, *Renormalization and motivic Galois theory*, arXiv:math.NT/0409306 – A. Connes, *Symétries Galoiasiennes et renormalisation*, arXiv:math.QA/0211199 – D. Tamarkin, *A formalism for the renormalization procedure*, arXiv:math.QA/0312219

145. D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, Lecture Notes in Mathematics No 1358, Springer, 1988

146. I. Moerdijk, *On the Connes-Kreimer construction of Hopf Algebras*, arXiv:math-ph/9907010

147. K. Ebrahimi-Fard, L. Guo, *Rota-Baxter Algebras in Renormalization of Perturbative Quantum Field Theory,* arXiv:hep-th/0604116

148. P. Cartier, A Mad Day's Work: From Grothendieck to Connes and Kontsevich – The Evolution of Concepts of Space and Symmetry, *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 38, No. 4, σελ. 389-408, 2001

149. L. M. Ionescu, *Perturbative Quantum Field Theory and Configuration Space Integrals*, arXiv:hep-th/0307062, και *A Combinatorial Approach to Coefficients in Deformation Quantization*, arXiv:math:QA/0404389

150. C. J. Isham, A new approach to quantising space-time: I. Quantising on a General Category, *Adv. Theor. Math. Phys*. **7** 331-367 (2003) [gr-qc/0303060], *II. Quantising on a category of sets*, gr-qc/0304077, *III. State vectors as functions on arrows*, gr-qc/0306064

151. E. Prugovecki, *Quantum Geometry*, Ch. 12: "Historical and Epistemological Perspectives on Developments in Relativity and Quantum Theory", Kluwer, 1992

152. K. Popper, *Quantum Theory and the Schism in Physics,* Hutchinson, London, 1982

153. B. N. Kursunoğlu, E. P. Wigner, eds., *Reminiscences About a Great Physicist: Paul Adrian Maurice Dirac,* Cambridge University Press, 1987

154. J. Schwinger, ed., *Quantum Electrodynamics,* Dover, New York, 1958

155. P. A. M. Dirac, Quantum Electrodynamics without Dead Wood, *Phys. Rev*., **139B**,

684-90, 1965

156. D. Huff, O. Prewett, eds., *The Nature of the Physical Universe: 1976 Nobel conference,* Wiley, New York, 1979

157. B. d´ Espagnat, *Reality and the Physicist*, Cambridge University Press, 1989

158. J. A. Wheeler, *Particles and Geometry,* στο P. Breitenlohner, H. P. Dürr, eds., *Unified Theories of Elementary Particles,* Proceedings, Lecture Notes in Physics No. 160, Springer, München, 1982

159. S. Weinberg, Sokal's Hoax, *The New York Review of Books*, Volume XLIII, No 13, pp. 11-15, August 8, 1996

160. J. Bouveresse, *Γοητευτικές και παραπλανητικές ακροβασίες της φιλοσοφίας*, επιμέλεια Σ. Βιρβιδάκης, μετάφραση Τ. Μπούκη, εκδόσεις Πατάκη, 2002

161. C. J. Isham, *Lectures on Quantum Theory*, Imperial College Press, London, 1995

162. M. Biagioli, *Galileo Courtier – The Practice of Science in the Culture of Absolutism,* The University of Chicago Press, Chicago, 1993

163. D. Papineau, ed., *Oxford Readings in Philosophy, The Philosophy of Science*, Oxford

University Press, 1996

164. S. Psillos, Scientific Realism and Metaphysics, *Ratio*, No 18, 2005

165. Α. Αραγεώργης, Φιλοσοφία και σύγχρονη φυσική, *Δευκαλίων 23/2*, Δεκέμβριος 2005

166. J. Hintikka, Quantum logic as a fragment of independence-friendly logic, *Journal of Philosophical Logic*, **31:** 197-209, 2002

167. Ε. Γερονικόλας, Μ. Μυτιληναίος, Ο μαθηματικός ξέρει για τι μιλάει, *Νεύσις* 11, Φθινόπωρο 2002, 33-73

168. D. Howard, *What Makes a Classical Concept Classical? Toward a Reconstruction of Niels Bohr's Philosophy of Physics*, στο J. Faye, H. Folse, eds., *Niels Bohr and Contemporary Philosophy*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1994

169. B. Spinoza, *The Ethics*, στο *The Rationalists*, pp. 179-406, Anchor Books, 1960

170. Αναφέρεται στο Γ. Φαράκλας, *Γνωσιοθεωρία και Μέθοδος στον Έγελο*, «Εστία», Αθήνα, 2000

171. S. A. Kripke, *Naming and Necessity*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1980

172. L. Crane, D. N. Yetter, *Examples of Categorification*, arXiv:q-alg/9607028

173. S. Psillos, *Causation and Explanation*, Central Problems of Philosophy, Acumen, Chesham, 2002

174. Hegel's Logic, Being Part One of the Encyclopaedia of the Philosophical Sciences (1830), αγγλική μετάφραση W. Wallace, Oxford University Press, Oxford, 1975, σ. 204

175. R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 15, American Mathematical Society, 1997

176. D. Kastler, *Connes-Moscovici-Kreimer Hopf Algebras*, Fields Inst. Communications Volume XX, 2001 [arXiv:math-ph/0104017] – C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics No 155, Springer, 1995, σσ. 39-71