ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ & ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ ΒΑΣΙΚΗ ΚΑΙ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΝΩΣΙΑΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

Εννοιολογική αλλαγή στα Μαθηματικά: Η κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών

Διδακτορική Διατριβή

Ξανθής Βαμβακούση

Αθήνα, Φεβρουάριος 2004

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Φτάνοντας στο τέλος αυτής της εργασίας, νιώθω την ανάγκη να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όσους με στήριξαν σε όλη τη διάρκεια της πραγματοποίησής της. Έτσι, ευχαριστώ θερμά:

Την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου Στέλλα Βοσνιάδου, για τον σημαντικό, από τον πολύτιμο, χρόνο της που διέθεσε για να με στηρίξει επιστημονικά. Επίσης, για την εμπιστοσύνη, με την οποία με τιμά τα τελευταία πέντε χρόνια.

Τον καθηγητή Δ. Αναπολιτάνο, οποίος υπήρξε μέλος της τριμελούς επιτροπής και στη διπλωματική μου εργασία, στο Μαθηματικό Τμήμα.

Το μέλος της τριμελούς επιτροπής, επ. καθηγητή Ι. Χριστιανίδη.

Τους φίλους και συναδέλφους Βασίλη Κόλλια, Ειρήνη Σκοπελίτη, Ειρήνη Μπιζά, Χριστίνα Σταθοπούλου και, ιδιαίτερα, τον Νεκτάριο Μαμαλούγκο και τον Κωνσταντίνο Χρήστου, για τη βοήθεια που μου προσέφεραν τη στιγμή που πραγματικά τη χρειαζόμουν.

Το συνεργάτη και φίλο μαθηματικό Γιώργο Καργιωτάκη, που με στήριξε σε όλες τις φάσεις της εργασίας. Για την πρόσβαση στο σχολείο τους που μου εξασφάλισαν, ευχαριστώ την Ελισάβετ Καμπάνη, το Θανάση Μωλ και, ιδιαίτερα, την Πότα Κοταρίνου.

Τον φίλο μου Δημήτρη Μπουλαμάτση, ειδικό στη Στατιστική, που μπήκε στον κόπο να με καθοδηγήσει βήμα-βήμα στην επιλογή των κατάλληλων στατιστικών αναλύσεων.

Τη διευθύντρια του σχολείου «Σταυράκη», κ. Αννίτα Σταυράκη, και την εκπαιδευτικό κ. Στέλλα Τσάτσαρη, για την κατανόηση και τη συμπαράστασή τους.

Στους κοντινούς και αγαπημένους μου ανθρώπους Άγγελο και Ιωάννα, Πέτρο και Νεκτάριο, για την αγάπη, την υπομονή και την αδιάλειπτη συμπαράστασή τους που ποτέ δεν παύει να με εκπλήσσει.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διατριβή κινήθηκε στα πλαίσια του χώρου της γνωσιακής επιστήμης. Ευρύτερος στόχος μας ήταν να ελέγξουμε κατά πόσο μια γόνιμη θεωρητική προσέγγιση στη μάθηση, η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής, μπορεί αξιοποιηθεί στην περίπτωση των μαθηματικών.

Υιοθετήσαμε ένα συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο και αναλύσαμε τις προϋποθέσεις του. Βάσει της ανάλυσής μας, μπορέσαμε να εντοπίσουμε την περίπτωση της ανάπτυξης μιας μαθηματικής έννοιας, για την οποία υποθέσαμε ότι απαιτεί εννοιολογική αλλαγή. Ελέγξαμε εμπειρικά την υπόθεσή μας, προβλέποντας και εξηγώντας τις παρανοήσεις που προκύπτουν.

Πιο συγκεκριμένα, κεντρική υπόθεση της εμπειρικής μελέτης είναι ότι τα παιδιά ξεκινούν με μια αρχική «θεωρία» για τον αριθμό, θεμελιώδης προϋπόθεση της οποίας είναι η ιδέα της διακριτότητας των αριθμών. Θεωρήσαμε ότι η ιδέα της διακριτότητας, μαζί με το γνωσιακό περιορισμό που δημιουργεί η τάση των παιδιών να ομαδοποιούν τους αριθμούς στη βάση επιφανειακών κριτηρίων, περιορίζει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται κατανοητή η δομή των ρητών. Προβλέψαμε ότι η κατανόηση θα είναι δύσκολη, σταδιακή και θα συνοδεύεται από παρανοήσεις, οι οποίες αντανακλούν τους δύο περιορισμούς που αναφέρθηκαν και την προσπάθεια των μαθητών να ενσωματώσουν καινούργιες γνώσεις για τους ρητούς αριθμούς στις προϋπάρχουσες γνωσιακές δομές για τους φυσικούς.

Η υπόθεση ελέγχθηκε με δύο εμπειρικές μελέτες.

Στην πρώτη έρευνα, με δείγμα 16 παιδιά της Γ' Γυμνασίου, διερευνήσαμε την υπόθεση, συλλέγοντας δεδομένα με ατομικές συνεντεύξεις.

Υπό το φως των ευρημάτων της πρώτης, σχεδιάστηκε η δεύτερη έρευνα, με δείγμα 301 παιδιά, από δύο διαφορετικές τάξεις, την Γ' Γυμνασίου και την Β' Λυκείου. Στην έρευνα αυτή χρησιμοποιήθηκαν ερωτηματολόγια.

Τα αποτελέσματα των δύο ερευνών είναι σύμφωνα προς τις προβλέψεις μας.

Περιεχόμενα

0. Εισαγωγή

0.1. Εννοιολογική αλλαγή: Απαρχές , αρχές και σύνδεση με τη μάθηση στο χώρο των Μαθηματικών

0.1.1. Εννοιολογική αλλαγή: Απαρχές και βασικές αρχές

Στα τέλη της δεκαετίας του 70, η θεωρία του Piaget για την ανάπτυξη της νόησης λειτουργούσε περίπου ως παράδειγμα για την αναπτυξιακή ψυχολογία, αλλά και την ψυχολογία της μάθησης. Ο Piaget (1952) περιέγραψε τη γνωσιακή ανάπτυξη ως αποτέλεσμα ωρίμανσης -διαμέσου της δυναμικής αλληλεπίδρασης του ατόμου με το περιβάλλον του- και συνακόλουθης αλλαγής στην ικανότητα λογικής σκέψης. Οι μηχανισμοί μάθησης που υποστηρίζουν τη λογική ικανότητα, η αφομοίωση και η συμμόρφωση, περιγράφονταν ως γενικοί μηχανισμοί, ανεξάρτητοι από το περιεχόμενο της γνώσης. Κατά συνέπεια, η ικανότητα των παιδιών να δομήσουν γνώσεις σε οποιοδήποτε γνωστικό πεδίο χαρακτηρίζονταν από ολικές αναδιοργανώσεις, γνωστές ως στάδια ανάπτυξης.

Ωστόσο, είχαν ήδη αρχίσει να εμφανίζονται ερευνητικά δεδομένα, τα οποία η θεωρία του Piaget δεν μπορούσε να εξηγήσει (Vosniadou, 1999). Τα δεδομένα αυτά προέρχονταν από δύο διαφορετικούς χώρους, τη γνωσιακή-αναπτυξιακή ψυχολογία και την εκπαιδευτική έρευνα για τη μάθηση στο πεδίο της Φυσικής. Από τη μια μεριά, η εκπαιδευτική έρευνα αναδείκνυε περιπτώσεις στις οποίες οι μαθητές παρουσίαζαν παρανοήσεις για έννοιες της Φυσικής, οι οποίες ήταν αντίθετες με την αρχή της ολικής αναδιοργάνωσης (Driver and Easley,1978). Παράλληλα, από την ψυχολογική έρευνα προέκυπτε ότι τα παιδιά αναπτύσσουν ικανότητες λογικής σκέψης σε συγκεκριμένα πεδία γνώσης πολύ νωρίτερα από ό,τι προέβλεπε η θεωρία του Piaget (Gelman and Gallistel,1978). Έτσι, τόσο από τη μεριά της αναπτυξιακής ψυχολογίας, όσο και από την πλευρά της εκπαιδευτικής έρευνας, άρχισε η προσπάθεια ανάπτυξης εναλλακτικών θεωρητικών πλαισίων, τα οποία να διατηρούν τον κονστρουκτιβιστικό χαρακτήρα της θεωρίας του Piaget, εγκαταλείποντας την αρχή της ολικής αναδιοργάνωσης.

Από τη μεριά της εκπαιδευτικής έρευνας, οι ερευνητές αναζήτησαν ένα θεωρητικό πλαίσιο, το οποίο, αφενός να εξηγεί την ανθεκτικότητα των παρανοήσεων των μαθητών για κάποιες έννοιες της Φυσικής, αφετέρου να επιτρέπει τη χάραξη συγκεκριμένων διδακτικών πρακτικών. Στην προσπάθειά τους αυτή, στράφηκαν στην Ιστορία και τη Φιλοσοφία της επιστήμης της Φυσικής (Posner, Strike, Hewson, & Gertzog, 1982) και ανάδειξαν μια αναλογία ανάμεσα στην «αφομοίωση» και «συμμόρφωση» της πιαζετιανής θεωρίας και τους όρους «φυσιολογική επιστήμη» και «επιστημονικής επανάσταση» της θεωρίας του Kuhn (1970). Πιο συγκεκριμένα, απέδωσαν σε βασικές αρχικές αντιλήψεις των μαθητών για τις έννοιες της Φυσικής χαρακτηριστικά μιας επιστημονικής θεωρίας, όπως η συνέπεια και η συνεκτικότητα και περιέγραψαν τους μαθητές που λειτουργούν στα πλαίσια αυτού του «θεωρητικού πλαισίου» ως επιστήμονες που εργάζονται στα πλαίσια ενός παραδείγματος, εν καιρώ φυσιολογικής επιστήμης. Θεωρώντας ότι η αναλογία αυτή δίνει μια ικανοποιητική περιγραφή της αιτίας των παρανοήσεων, οι Posner, Strike, Hewson & Gertzog (1982) εδραίωσαν στη βάση της μια διδακτική πρακτική για την Φυσική. Σύμφωνα με την πρότασή τους, η αλλαγή των αρχικών αντιλήψεων μπορεί να συμβεί, αν δημιουργηθεί μια διδακτική κατάσταση, στην οποία το παιδί θα έρθει αντιμέτωπο με ένα πρόβλημα που η αρχική του «θεωρία» δεν μπορεί να αντιμετωπίσει, ή μια περίπτωση η οποία διαψεύδει την αρχική «θεωρία» - το αντίστοιχο της κουνιανής «ανωμαλίας».Με την πρόταση αυτή, που ανήγαγε τη γνωσιακή σύγκρουση σε διδακτική πρακτική, το θεωρητικό πλαίσιο του Posner και των συνεργατών του έγινε αφορμή για το ξεκίνημα μιας πλούσιας ερευνητικής και εκπαιδευτικής παράδοσης στο χώρο της Φυσικής.

Οι αναπτυξιακοί ψυχολόγοι, ξεκινώντας από την Carey (1985), η οποία εμπνεύστηκε από τις ιδέες του Kuhn για την αλλαγή θεωρίας στην επιστήμη της Φυσικής, προέταξαν την ιδέα ότι η γνωσιακή ανάπτυξη μπορεί να περιγραφεί ως αναδιοργάνωση γνωσιακών δομών κατά γνωστικό πεδίο. Η Carey διατύπωσε την υπόθεση ότι τα παιδιά ξεκινούν με ένα περιορισμένο πλήθος γνωσιακών δομών, για συγκεκριμένα πεδία, όπως η ψυχολογία – ως θεωρία για τα έμβια όντα-και η φυσική. Οι αρχικές αυτές γνωσιακές δομές οργανώνονται γύρω από θεμελιώδεις αρχές - για παράδειγμα, ότι τα έμψυχα αντικείμενα έχουν την ικανότητα να κινούνται, για την περίπτωση της ψυχολογίας- οι οποίες έχουν, ενδεχομένως, νευροβιολογικές βάσεις και έχουν προκύψει ως αποτέλεσμα της εξέλιξης του ανθρώπινου είδους (Carey & Spelke, 1996). Έτσι, μπορούσε να εξηγηθεί η ικανότητα που εμφανίζουν τα παιδιά μικρής ηλικίας να εξηγούν και να ερμηνεύουν, κατά συνεκτικό τρόπο, φαινόμενα του φυσικού και κοινωνικού τους περιβάλλοντος. Η Carey υπέθεσε ότι οι αρχικές γνωσιακές δομές έχουν χαρακτηριστικά «θεωρίας». Σε αναλογία με τις ιδέες τουKuhn, περιέγραψε τη γνωσιακή ανάπτυξη ως αναδιοργάνωση των αρχικών γνωσιακών δομών, η οποία κάποτε πρέπει να είναι ριζική.

Δεδομένου ότι οι θεωρίες για την εννοιολογική αλλαγή συνδέθηκαν εξαρχής με έννοιες που άπτονται των φυσικών επιστημών, υπάρχει πλήθος ερευνών για τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά αναπτύσσουν τέτοιου είδους έννοιες, τόσο στο χώρο της αναπτυξιακής ψυχολογίας, όσο και στο χώρο της εκπαιδευτικής έρευνας (ενδεικτικά, Mason, 2001; Spelke, 1999; Vosniadou, 1994a). Ωστόσο, η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής έχει υιοθετηθεί για να εξηγήσει τις δυσκολίες στη μάθηση και σε πεδία με εντελώς διαφορετικά χαρακτηριστικά, όπως, για παράδειγμα, η Ιστορία (Limon, 2002). Θα υποστηριχθεί ότι η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής μπορεί να εφαρμοσθεί και στην περίπτωση των Μαθηματικών.

Στο γενικότερο θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής έχουν αναπτυχθεί διάφορες απόψεις για το τι σημαίνει εννοιολογική αλλαγή και ποιοι μηχανισμοί την υποστηρίζουν (Vosniadou, 1999). Ωστόσο, μπορούν να σκιαγραφηθούν κάποια στοιχεία, τα οποία συγκεντρώνουν ευρεία αποδοχή.

Καταρχήν, θεωρείται δεδομένο ότι η μάθηση εξαρτάται από την προϋπάρχουσα γνώση: Κάθε νέα πληροφορία ερμηνεύεται στη βάση των όσων ήδη γνωρίζουμε και στις περισσότερες περιπτώσεις αφομοιώνεται ομαλά στο προϋπάρχον γνωσιακό πλαίσιο (Bransford, Brown, & Cocking, 1999, Vosniadou, 2001a). Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες η προϋπάρχουσα γνώση έρχεται σε αντίθεση με τις καινούργιες, επιστημονικά αποδεκτές εξηγήσεις και θεωρίες. Η μάθηση στις περιπτώσεις αυτές απαιτεί αναδιοργάνωση της προηγούμενης γνώσης. Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής (Carey, 1985; Chi, 1992; Vosniadou, 1994, 2000; Vosniadou & Brewer, 1992; 1994), η προϋπάρχουσα γνώση οργανώνεται στη βάση κάποιων διαισθητικών «θεωριών» του κοινού νου. Ο όρος «θεωρία» δεν πρέπει να εκλαμβάνεται ως το γνωσιακό ανάλογο της «επιστημονικής θεωρίας». Βασικό χαρακτηριστικό των «θεωριών» είναι ότι οι αρχές τους δεν βρίσκονται συνήθως υπό το συνειδητό έλεγχο του παιδιού (Vosniadou, 2002). Ωστόσο, χρησιμοποιούνται σε μεγάλο βαθμό με συνέπεια, όταν το παιδί προσπαθεί να εξηγήσει κάποιο σχετικό φαινόμενο. Το γεγονός αυτό εξηγεί γιατί υπάρχει συνήθως μικρό πλήθος διαφορετικών παρανοήσεων, για συγκεκριμένες έννοιες (Vosniadou, 1994b; Vosniadou and Brewer, 1994, 1992).

Τα τελευταία χρόνια, εμφανίζεται και μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα θεώρηση, η οποία συνδέει την εννοιολογική αλλαγή, από τη μεριά της γνωσιακής-αναπτυξιακής ψυχολογίας με την εννοιολογική αλλαγή, υπό το πρίσμα της εκπαιδευτικής έρευνας. Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση, οι πιθανά έμφυτες ικανότητες, με τις οποίες είναι εφοδιασμένα τα παιδιά από πολύ μικρές ηλικίες, λόγω της εξέλιξης του είδους, επηρεάζουν τις διαδικασίες μάθησης και πολύ μεταγενέστερα. Πιο συγκεκριμένα, υποστηρίζεται ότι οι άνθρωποι γεννιούνται προδιατεθειμένοι να αναπτύξουν γνώσεις που σχετίζονται με τα αρχικά γνωσιακά τους υποσυστήματα. Επομένως, μαθαίνουν ευκολότερα ό,τι σχετίζεται με αυτά, τόσο πριν, όσο και κατά τη διάρκεια της τυπικής εκπαίδευσης (Stern , 2003; Gelman, 2002).Στα επόμενα θα γίνει ιδιαίτερη αναφορά στην άποψη αυτή, ειδικά για την περίπτωση των Μαθηματικών.

Στη συνέχεια της ενότητας αυτής θα υποστηριχτεί ότι, το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής μπορεί να μεταφερθεί στο χώρο της μάθησης των μαθηματικών, για να περιγράψει και να εξηγήσει δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εκμάθηση ορισμένων μαθηματικών εννοιών.

0.1.2. Η φύση της μαθηματικής γνώσης: Προκύπτει πάντα η μαθηματική γνώση ως προϊόν επαύξησης της προηγούμενης γνώσης;

Η επιστήμη των Μαθηματικών παραδοσιακά θεωρείται ως ένας χώρος με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, τα οποία τον διαφοροποιούν σε σχέση με τις άλλες επιστήμες, ακόμα και από τις πιο κοντινές του, τις φυσικές επιστήμες. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν, στη βάση της διαφοράς του γνωστικού αντικειμένου, μπορεί να διατυπωθεί κάποια επιφύλαξη για τη μεταφορά του θεωρητικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής στο χώρο της μάθησης των μαθηματικών εννοιών Αν ο χαρακτήρας της μαθηματικής γνώσης είναι πολύ διαφορετικός από αυτόν που υποτίθεται για τη γνώση που άπτεται των φυσικών επιστημών, γιατί να είναι σκόπιμη η μεταφορά ενός θεωρητικού πλαισίου για τη μάθηση από τον ένα χώρο μάθησης στον άλλο; Να επισημανθεί ότι, σε παραδοσιακά εκπαιδευτικά πλαίσια, ο ιδιαίτερος χαρακτήρας των Μαθηματικών καθορίζει τις παραδοχές των εκπαιδευτικών για τον τρόπο που μαθαίνουν οι μαθητές. Η εικόνα των Μαθηματικών ως ιεραρχημένης δομής, στα πλαίσια της οποίας κάθε έννοια προκύπτει λογικά από προηγούμενή της, θεωρείται ότι επιτρέπει στους μαθητές να μαθαίνουν, εμπλουτίζοντας σταδιακά τις γνώσεις τους (Danzig, 1954, όπως αναφέρεται στη Σταφυλίδου, 2001).

Ανάμεσα σε άλλους, υπάρχει ένας ισχυρισμός για τα Μαθηματικά που είναι ιδιαίτερα σχετικός με την παρούσα συζήτηση. Πρόκειται για τον ισχυρισμό ότι η μαθηματική γνώση έχει αθροιστικό χαρακτήρα (Crowe, 1992; Kitcher, 1992). Αυτή η άποψη για τη μαθηματική γνώση βασίζεται εν μέρει στην πεποίθηση ότι, όταν μια μαθηματική πρόταση αποδειχτεί, μπορεί να προστεθεί με ασφάλεια και για πάντα στο σώμα της μαθηματικής γνώσης. Αλλά ο αθροιστικός χαρακτήρας της μαθηματικής γνώσης μπορεί να αποδοθεί στην πεποίθηση ότι, μια μαθηματική θεωρία, εφόσον θεμελιωθεί, δεν αντικαθίσταται από μια άλλη θεωρία (Crowe, 1975).

Το επιχείρημα αυτό ήταν ένα από τα κεντρικά κατά της πιθανότητας να συμβαίνουν, κατ' αναλογία με τις φυσικές επιστήμες, επαναστάσεις στα Μαθηματικά. Σύμφωνα με τον Mahoney (1997) μια μαθηματική θεωρία, ακόμα και όταν παύει να φαίνεται γόνιμη, «δεν παύει να θεωρείται μέρος των Μαθηματικών, όπως έπαψε να θεωρείται μηχανική η μηχανική του Αριστοτέλη» (Mahoney, 1997, σελ.2). Η συνύπαρξη της Ευκλείδειας και των μη Ευκλείδειων γεωμετριών επίσης αναφέρεται ως παράδειγμα: Μια μαθηματική θεωρία , όπως η Ευκλείδια γεωμετρία, παραμένει σε ισχύ, ακόμα και μετά από μια τόσο μεγάλη αλλαγή, όπως η εισαγωγή των μη Ευκλείδειων γεωμετριών, χωρίς να εμφανίζονται φαινόμενα ασυμμετρίας. Ας σημειωθεί ότι ο Kuhn δεν προσπάθησε να εξηγήσει τις αλλαγές στα Μαθηματικά με τους όρους της θεωρίας του, καθώς διατηρούσε την πεποίθηση ότι αυτό δεν είναι εφικτό (Mahoney, 1992). Παρά το γεγονός ότι, σύμφωνα με ορισμένες αναλύσεις, τα Μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες έχουν περισσότερες ομοιότητες, από όσο προέβλεπαν οι παραδοσιακές απόψεις(Kitcher, 1992, και παρά το γεγονός ότι η άποψη ότι η προσέγγιση του Kuhn θεωρείται αξιοποιήσιμη στο χώρο των Μαθηματικών από πολλούς μελετητές (Corry, 1993; Dauben, 1984), ας υποτεθεί ότι πράγματι οι αλλαγές στα Μαθηματικά δεν είναι περιγράψιμες με τους όρους της θεωρίας του Kuhn. Η χρησιμότητα του ερωτήματος, αν γίνονται ή όχι επαναστάσεις, ανάλογες με αυτές που ο Kuhn περιγράφει για τις φυσικές επιστήμες, έγκειται στον αντίκτυπο που είχε στον τρόπο με τον οποίο μελετάται η ιστορία των Μαθηματικών.

Στα πλαίσια της γενικότερης συζήτησης που, εν μέρει, οφείλεται στη διατύπωση των επαναστατικών απόψεων του Kuhn (1970), νέες θεωρήσεις της ιστορίας των Μαθηματικών έπληξαν τον ισχυρισμό ότι «η δομή των μαθηματικών αντανακλά επακριβώς την ιστορία τους» (Crowe, 1992) και αποκάλυψαν ότι οι μαθηματικές *έννοιες* υφίστανται αλλαγές, οι οποίες δεν προκύπτουν αθροιστικά. Για παράδειγμα, όσον αφορά στην έννοια του αριθμού, το πέρασμα από τον πυθαγόρειους αριθμούς, στους πραγματικούς αριθμούς του Dedekind ενέχει πολλά περισσότερα από την επέκταση της αρχικής έννοιας. Και μόνο το πέρασμα από τις άρρητες ποσότητες στους άρρητους αριθμούς ενείχε μια αλλαγή της έννοιας του αριθμού, η οποία «*ήταν κάτι παραπάνω από την επέκταση της πρότερης έννοιας του αριθμού, με την προσθήκη των αρρήτων –η έννοια του αριθμού άλλαξε, σχεδόν μεταλλάχτηκε, από μία θεώρηση κατά την οποία μόνο οι ακέραιοι ήταν αριθμοί, σε μια θεώρηση κατά την οποία η έννοια του αριθμού συνδέθηκε με την πληρότητα του συστήματος των πραγματικών αριθμών*» (Dauben, 1984, σελ.57). Συνδέοντας την ιστορική διαδρομή της έννοιας του αριθμού με την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού στα παιδιά, η Sfard εστιάζει στο κοινό σημείο (1991) της οντολογικής αλλαγής από την κατηγορία των διαδικασιών, στην κατηγορία των (μαθηματικών) αντικειμένων.

Αν οι μαθηματικές έννοιες, οι οποίες αποτελούν το μαθησιακό στόχο για τα παιδιά, δεν προκύπτουν αθροιστικά , τότε δεν υπάρχει βάση για την επιφύλαξη που διατυπώθηκε στην αρχή της παραγράφου. Ωστόσο, τα επιχειρήματα που στηρίζουν κατ' ουσία τη σκοπιμότητα της μεταφοράς του θεωρητικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής στο χώρο της μάθησης των μαθηματικών, προέρχονται από το χώρο της αναπτυξιακής ψυχολογίας και της εκπαιδευτικής έρευνας.

0.1.3. Υπάρχει νευρο-βιολογική βάση της μαθηματικής γνώσης;

Αναφέρθηκε στην παράγραφο 1.2 ότι η βασική υπόθεση της domain-specific προσέγγισης στη γνωσιακή ανάπτυξη είναι ότι η ανθρώπινη νόηση χτίζεται στη βάση ειδικευμένων γνωσιακών συστημάτων, τα οποία υποτίθεται ότι έχουν νευρο-βιολογική βάση και έχουν αναπτυχθεί με την εξέλιξη του ανθρώπινου είδους (Carey and Spelke, 1996). Υπάρχει αυξανόμενο πλήθος ερευνών με ζώα και βρέφη, καθώς και διαπολιτισμικές μελέτες, τα ευρήματα των οποίων υποδεικνύουν ότι υπάρχει ένα εξειδικευμένο γνωσιακό σύστημα που αφορά στον αριθμό (Butterworth, 1999; Dehaene, 1998; Gelman, 2000; Lipton and Spelke, 2003). Σύμφωνα με τα ευρήματα, τα βρέφη αναγνωρίζουν την πληθικότητα ως ιδιότητα συνόλων διακριτών αντικειμένων (Dehaene, 1998; Wynn, 1990). Η διακριτότητα θεωρείται ως βασική αρχή του αρχικού γνωσιακού συστήματος που αφορά στον αριθμό και από ερευνητές που ασχολούνται με παιδιά μικρής ηλικίας (Carey and Spelke, 1994; Galistel and Gelman, 1992). Η Gelman διατυπώνει την άποψη ότι «δεδομένων των ευρημάτων από μελέτες σε διαφορετικούς ερευνητικούς χώρους, τα οποία αυξάνουν συνεχώς, συγκλίνοντας σε ένα σημείο, είναι δύσκολο να αποφύγει κανείς το συμπέρασμα ότι υπάρχει μια καθολική, εξειδικευμένη ικανότητα να μαθαίνουμε για τους φυσικούς αριθμούς και να πραγματοποιούμε συλλογισμούς με αυτούς» (Gelman, 2002, σελ. 27). Στην ίδια εργασία, η Gelman διατυπώνει τον ισχυρισμό ότι τα παιδιά, ήδη από την προσχολική ηλικία, έχουν διαμορφώσει μια κατανόηση για τους φυσικούς αριθμούς, βασισμένη σε συγκεκριμένες αρχές. Θα μπορούσε να θεωρηθεί μια αρχική «θεωρία» για τον αριθμό, με την έννοια που αναφέρθηκε στην παράγραφο 1.2. Ισχυρή προϋπόθεση της «θεωρίας» αυτής είναι ότι οι αριθμοί είναι μετρητές διακριτών ποσοτήτων και οι αρχές της «θεωρίας» αφορούν στην απαρίθμηση. Συγκεκριμένα, η Gelman προσδιορίζει πέντε αρχές, οι οποίες κατακτούνται από τα παιδιά ήδη από την προσχολική ηλικία: (α) Την αρχή της αντιστοίχησης ένα προς ένα που επιβάλλει ότι, σε κάθε αντικείμενο που απαριθμείται αντιστοιχεί ένα μόνο όνομα αριθμού και κάθε όνομα αριθμού χρησιμοποιείται μόνο μια φορά. (β) Την αρχή της σταθερής διάταξης που επιβάλλει τα ονόματα των αριθμών να διατάσσονται με τον ίδιο πάντα τρόπο. (γ) Την αρχή της πληθικότητας, που επιβάλλει ότι το τελευταίο όνομα αριθμού που χρησιμοποιείται κατά την απαρίθμηση αντιπροσωπεύει την πληθικότητα του συνόλου που απαριθμήθηκε. (δ) Την αφαιρετική αρχή που επιβάλλει ότι, όταν ακολουθούνται οι προηγούμενες αρχές για την απαρίθμηση, δεν έχει σημασία το είδος των αντικειμένων που απαριθμούνται. (ε) Η αρχή που επιβάλλει ότι η σειρά, με την οποία απαριθμούνται τα αντικείμενα δεν έχει σημασία. (Gelman and Galistell, 1978; Gelman, 2000).

Το επακόλουθο της ύπαρξης μιας αρχικής «θεωρίας» για τον αριθμό, ειδικά αν υποτεθούν η ύπαρξη νευρο-βιολογικών βάσεων, είναι ότι η μάθηση, όσον αφορά στους αριθμούς ευνοείται, όταν η καινούργια γνώση είναι συμβατή με την αρχική «θεωρία» του αριθμού, ενώ συναντά δυσκολίες στην περίπτωση που η καινούργια γνώση έρχεται σε αντίθεση με την αρχική «θεωρία» (Gelman, 2000; Stern, 2003). Αυτό ισχύει τόσο πριν, όσο και μετά την παρέμβαση της τυπικής εκπαίδευσης. Υπάρχει πληθώρα στοιχείων που επαληθεύουν την πρόβλεψη αυτή. Για παράδειγμα, η αρχική κατανόηση των παιδιών προσχολικής ηλικίας για τον αριθμό τα υποστηρίζει στο να συμπεράνουν την αρχή της ύπαρξης του επόμενου αριθμού στους φυσικούς, επιδεικνύοντας κατανόηση και για την έννοια του εν δυνάμει απείρου, με μικρή εξωτερική υποστήριξη (Hartnett and Gelman, 1998). Αντίθετα, η μάθηση για τους ρητούς αριθμούς, τις αναπαραστάσεις τους και τις ιδιότητές τους είναι δύσκολη και συνοδεύεται από πληθώρα παρανοήσεων από την πρωτοβάθμια, μέχρι το τέλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Carpenter, Fennema, & Romperg, 1993; Hartnett and Gelman, 1998).

0.1.4. Η προϋπάρχουσα μαθηματική γνώση στηρίζει πάντα την απόκτηση της καινούργιας γνώσης; Η περίπτωση των ρητών αριθμών.

Οι ρητοί αριθμοί είναι μια από τις πιο θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες, με τις οποίες έρχονται σε επαφή τα παιδιά κατά τη σχολική τους ζωή. Φαίνεται ότι είναι και μια από τις μαθηματικές έννοιες που δημιουργούν σημαντικές δυσκολίες, αλλά και αισθήματα άγχους στα παιδιά (NCR, 1989). Η εκπαιδευτική έρευνα έχει καταγράψει πλήθος παρανοήσεων που αφορούν στους ρητούς αριθμούς, η οποίες εμφανίζονται σε ένα ευρύ φάσμα ηλικιών, από την πρωτοβάθμια ως τη δευτεροβάθμια . Θα επικεντρωθούμε σε αυτές που εξηγούνται ως συνέπεια της μεταφοράς της προϋπάρχουσας γνώσης των φυσικών αριθμών, στο πεδίο των ρητών αριθμών. Οι παρανοήσεις αυτές μπορούν να διακριθούν, ανάλογα με το αν αφορούν :

- Την οντολογία του αριθμού, ή διαφορετικά, τι θεωρείται *αριθμός*

Σύμφωνα με τη σημαντική εργασία της Sfard (1989), οι φυσικοί αριθμοί γίνονται αντιληπτοί από νωρίς ως μαθηματικά *αντικείμενα*, σε αντίθεση με τα κλάσματα, τα οποία θεωρούνται *διαδικασίες*. Η θεώρηση αυτή είναι συμβατή με την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του αριθμού (Sfard, 1989; Σταφυλίδου, 2001). Πραγματικά, για τα παιδιά από νωρίς τα κλάσματα έχουν τα χαρακτηριστικά μιας διαδικασίας, από το «χωρίζω τη μονάδα σε ίσα μέρη και παίρνω κάποια από αυτά» στο επίπεδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, μέχρι το «διαιρώ τον αριθμητή με τον παρονομαστή και βρίσκω το αποτέλεσμα» της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Τα παιδιά ξεκινούν ταυτίζοντας την έννοια του αριθμού με την έννοια του φυσικού αριθμού (Σταφυλίδου, 2001, Stafylidou & Vosniadou, in press) και δυσκολεύονται να αποδώσουν την ίδια θέση στα κλάσματα (Chi, 1992; Gelman, Cohen & Hartnett,1989).

- Τον αριθμό ως αντικείμενο, πιο συγκεκριμένα τη μορφή και τις σχετικές ιδιότητές του.

Φαινομενικές ομοιότητες των ρητών αριθμών με τους φυσικούς έχει δειχθεί ότι επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά ερμηνεύουν τη μορφή των ρητών αριθμών και τους αποδίδουν ιδιότητες. Συγκεκριμένα, τα παιδιά ερμηνεύουν επιφανειακά το κλάσμα ως δύο φυσικούς αριθμούς, που χωρίζονται με μια γραμμή (Σταφυλίδου, 2001). Ως αποτέλεσμα, ανάγουν τις πράξεις των κλασμάτων σε πράξεις μεταξύ των αριθμητών και των παρονομαστών, θεωρώντας, για παράδειγμα ότι $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{3+5}$. Στην περίπτωση των δεκαδικών αριθμών, οι παρανοήσεις είναι περισσότερες, δεδομένου ότι, πέρα από τη φαινομενική, υπάρχουν και ουσιαστικές ομοιότητες στη μορφή των δεκαδικών και των φυσικών αριθμών. Συγκεκριμένα, τόσο οι φυσικοί, όσο και οι δεκαδικοί αριθμοί αναπαριστώνται βάσει του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Τα παιδιά χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους για τη μορφή των φυσικών αριθμών στους δεκαδικούς, γεγονός που προκαλεί πλήθος παρανοήσεων (Moskal and Magone, 2000). Για παράδειγμα, πολλά παιδιά θεωρούν ότι, όσα περισσότερα ψηφία έχει ένας αριθμός, τόσο μεγαλύτερος είναι (Hiebert and Wearne, 1986) ή ότι με την προσθήκη ενός μηδενικού στο τέλος του δεκαδικού μέρους ενός αριθμού, προκύπτει ένας αριθμός δέκα φορές μεγαλύτερος (Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson, & Peled,1989).

- Τις πράξεις των αριθμών

Με μια σημαντική εργασία, οι Fischbein, Deri, Nello, και Marino (1985) αναφέρθηκαν στις παρανοήσεις που αφορούν τις πράξεις ρητών αριθμών και ανέδειξαν τη σχέση ανάμεσα στις συγκεκριμένες παρανοήσεις και την προϋπάρχουσα γνώση για τις πράξεις των φυσικών. Συγκεκριμένα, εντόπισαν τη δυσκολία των παιδιών να κατανοήσουν τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση των ρητών αριθμών και να αναγνωρίσουν πότε είναι κατάλληλη η χρήση τους στην πεποίθησή τους ότι το γινόμενο δύο αριθμών οφείλει να είναι μεγαλύτερο από τους αριθμούς και το πηλίκο οφείλει να είναι μικρότερο από το διαιρετέο («ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει (τους αριθμούς)», ενώ «η διαίρεση μικραίνει (τον διαιρετέο)»). Οι παρανοήσεις αυτές προκύπτουν από τον περιορισμό της έννοιας των δύο πράξεων στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση φυσικών αριθμών ξεκινούν από τις ηλικίες που αντιστοιχούν στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, υφίστανται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και επιμένουν να εμφανίζονται σε ενήλικες (Graeber and Tirosh,1988, 1990; Tirosh and Graeber, 1989).

- Τους αριθμούς ως στοιχεία διαφορετικών συνόλων.

Στην περίπτωση αυτή, γίνεται αναφορά στην εννοιολογική κατανόηση της σχέσης μεταξύ των διαφορετικών συμβολικών αναπαραστάσεων ενός ρητού αριθμού, για παράδειγμα ότι οι συμβολικές αναπαραστάσεις 0,5 και $\frac{1}{2}$ αναφέρονται στον ίδιο αριθμό. Η έμφαση στην *εννοιολογική* κατανόηση γίνεται σε αντιδιαστολή με την ικανότητα εκτέλεσης αλγοριθμικών διαδικασιών, δεδομένου ότι, ενώ πολλά παιδιά είναι σε θέση να εκτελέσουν αλγοριθμικές διαδικασίες που αφορούν στους ρητούς αριθμούς, δεν επιδεικνύουν κατανόηση της ουσίας της διαδικασίας (Lamon, 2001; Streefland,1991). Έτσι, ακόμα και παιδιά που είναι σε θέση να μετατρέψουν τη συμβολική αναπαράσταση ενός ρητού σε μια άλλη, για παράδειγμα, να μετατρέψουν ένα κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό, δεν κατανοούν απαραίτητα ότι οι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις αναφέρονται στον ίδιο αριθμό. Η συνειδητοποίηση της σημασίας της συγκεκριμένης εννοιολογικής γνώσης, από την μεριά της εκπαιδευτικής έρευνας, αντανακλάται στη στοχοθεσία καινούργιων αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών (NCTM,2000), τα οποία δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στη συγκεκριμένη γνώση.

- Την δομή του συνόλου των ρητών αριθμών.

Η κατανόηση της δομής των ρητών αποτελεί το αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Θα ακολουθήσει μια πιο εκτενής ανάλυση, η οποία είναι απαραίτητη, προκειμένου να διατυπωθούν οι υποθέσεις της έρευνας

1. Θεωρητική προσέγγιση

1.1. Θεωρητικό πλαίσιο και υποθέσεις

1.1.1. Η κατανόηση της δομής του συνόλου των ρητών: Δυσκολίες και γνωσιακοί περιορισμοί.

Μπορούν να διακριθούν δύο συνιστώσες που αφορούν στην κατανόηση της δομής του συνόλου των ρητών αριθμών.

Η πρώτη συνιστώσα αφορά στη σχέση που συνδέει τα υποσύνολα των ρητών αριθμών και συγκεκριμένα, το γεγονός ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι υποσύνολο των ρητών, ενώ το σύνολο των δεκαδικών (ρητών) αριθμών και το σύνολο των κλασμάτων ταυτίζονται. Προκειμένου να γίνουν κατανοητές αυτές οι σχέσεις, προϋποτίθεται η κατάκτηση της εννοιολογικής γνώσης που προαναφέρθηκε, ότι οι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις ενός ρητού αναφέρονται στον ίδιο αριθμό. Επιπλέον, προϋποτίθεται ότι τα παιδιά θα ξεπεράσουν ένα ισχυρό γνωσιακό περιορισμό, συγκεκριμένα την τάση να ομαδοποιούν αντικείμενα βάσει των επιφανειακών χαρακτηριστικών τους (Markman, 1989; Vosniadou and Ortony, 1989). Λαμβάνοντας υπόψη τον περιορισμό αυτό, είναι αναμενόμενο τα παιδιά να ομαδοποιούν τους φυσικούς με τους φυσικούς, τους δεκαδικούς με τους δεκαδικούς και τα κλάσματα με τα κλάσματα, θεωρώντας ότι σχηματίζουν ξένα μεταξύ τους υποσύνολα των ρητών αριθμών.

Η δεύτερη συνιστώσα αφορά ιδιότητα της πυκνότητας που χαρακτηρίζει το σύνολο των ρητών αριθμών. Σε αντίθεση με το σύνολο των φυσικών αριθμών, το σύνολο των ρητών αριθμών έχει πυκνή δομή. Συγκεκριμένα, ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός. Αντίθετα, ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς ρητούς αριθμούς υπάρχει άπειρο πλήθος ρητών αριθμών. Ως συνέπεια, στο σύνολο των ρητών αριθμών καταργείται η αρχή της διαδοχής, η οποία χαρακτηρίζει το σύνολο των φυσικών αριθμών, για κάθε στοιχείο του οποίου ορίζεται μοναδικός επόμενος αριθμός. Η προϋπάρχουσα γνώση για τη διακριτή δομή των φυσικών αριθμών έρχεται σε αντίθεση με τα καινούργια δεδομένα που αφορούν στο σύνολο των ρητών, προκαλώντας δυσκολίες στην κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών σε μαθητές από ένα ευρύ φάσμα ηλικιών, μέχρι το τέλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης[1]

---

[1] Ενίοτε, και στους ίδιους τους ερευνητές, δεδομένου ότι, σε μία από τις προαναφερθείσες μελέτες, οι ερευνητές έχουν βαθμολογήσει ως σωστή την απάντηση των συμμετε-

(Malara, 2001; Merenluoto and Lehtinen, in press, 2002, 1997; Hannula, Maijala, Pehkonen & Soro, 2001; Vamvakoussi and Vosniadou, in press, 2003, 2002).

Η κατανόηση της πυκνής δομής του συνόλου των ρητών δεν είναι ανεξάρτητη από την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι φυσικοί, οι δεκαδικοί και τα κλάσματα σχετίζονται, συνθέτοντας τους ρητούς. Πραγματικά, προκειμένου να κατανοήσουν τα παιδιά ότι σε ένα διάστημα των ρητών υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί, ανεξάρτητα από την αναπαράστασή τους, πρέπει να είναι σε θέση να αντιληφθούν το σύνολο των ρητών ως ένα «ομοιογενές» σύνολο, σε αντίθεση με την αναμενόμενη εικόνα του συνόλου που συντίθεται από τα «ομοιογενή», ξένα μεταξύ τους σύνολα των φυσικών, των κλασμάτων και των ρητών.

Επιπλέον, στην κατανόηση της πυκνότητας, εμπλέκεται και μια έκφανσης της έννοιας του απείρου, η οποία είναι συγγενής με την έννοια του πραγματικού απείρου. Οι δυσκολίες που συνοδεύουν την έννοια του πραγματικού απείρου και μάλιστα σε διάφορες ηλικίες και διάφορα επίπεδα μαθηματικής παιδείας έχουν εντοπιστεί και έχουν συζητηθεί ευρέως (Fischbein, 1987; Lakoff and Nunez, 2000; Tirosh, 1991; Tall and Tirosh, 2001), συχνά με αναφορές στην μακρά και επίπονη ιστορία της έννοιας του απείρου

1.1.2. Υποθέσεις

Η κεντρική υπόθεση της έρευνας είναι ότι η κατανόηση της πυκνής δομής του συνόλου των ρητών προϋποθέτει εννοιολογική αλλαγή. Υιοθετείται το θεωρητικό πλαίσιο που έχει αναπτύξει η Vosniadou (1994b, 2001a, 2002) για να περιγράψει και να εξηγήσει την εννοιολογική αλλαγή σε στο χώρο της αστρονομίας και της φυσικής. Τα βασικά συστατικά στοιχεία του συγκεκριμένου θεωρητικού πλαισίου μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

(α) Η μάθηση εξαρτάται από τις προϋπάρχουσες γνωσιακές δομές: Η πρόσληψη και ερμηνεία των πληροφοριών γίνεται στη βάση κάποιων γνωσιακών περιορισμών, οι οποίοι διαμορφώνουν την κατανόηση της καινούργιας γνώσης.

(β) Η διαδικασία απόκτησης γνώσης δεν είναι πάντα μια διαδικασία εμπλουτισμού της προηγούμενης γνώσης. Σε κάποιες περιπτώσεις, απαιτείται ριζική αναδιοργάνωση των γνωσιακών δομών που προϋ-

---

χόντων που υποστηρίζουν ότι ο αριθμός που βρίσκεται πιο κοντά, από αριστερά, στον αριθμό 1 είναι ο αριθμός 0,99999...

πάρχουν. Οι περιπτώσεις αυτές προκύπτουν, όταν η καινούργια, επιστημονικά ορθή γνώση έρχεται σε αντίθεση με όσα είναι ήδη γνωστά. Χαρακτηρίζοντας ως *αρχικές θεωρίες* των παιδιών τις γνωσιακές δομές που υποστηρίζονται από κάποιες βασικές αρχές, η Vosniadou ονομάζει τις αρχές αυτές *θεμελιώδεις προϋποθέσεις* των αρχικών θεωριών.

(γ) Όταν η μάθηση απαιτεί αναδιοργάνωση των γνωσιακών δομών που προϋπάρχουν συναντά μεγαλύτερες δυσκολίες και χρειάζεται περισσότερο χρόνο, σε σύγκριση με τη μάθηση που επιτυγχάνεται μέσω εμπλουτισμού της προηγούμενης γνώσης. Επιπλέον, η διαδικασία της αναδιοργάνωσης συχνά συνοδεύεται από παρανοήσεις.

(δ) Πολλές παρανοήσεις μπορούν να εξηγηθούν ως συνθετικά μοντέλα, που αντανακλούν την προσπάθεια των παιδιών να ενσωματώσουν καινούργιες πληροφορίες στην προϋπάρχουσα γνωσιακή τους βάση.

Περιγράφοντας την κεντρική υπόθεση της εργασίας με τους όρους του θεωρητικού πλαισίου της Vosniadou, και βάσει της συζήτησης που έχει προηγηθεί, στηρίζεται η υπόθεση ότι η κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών αριθμών προϋποθέτει εννοιολογική αλλαγή, ως εξής:

- Τα παιδιά ερμηνεύουν τις πληροφορίες για τις διάφορες αναπαραστάσεις των αριθμών στη βάση της τάσης τους να ομαδοποιούν αντικείμενα με επιφανειακά κριτήρια.
- Τα παιδιά διαθέτουν μια καλά εμπεδωμένη αρχική θεωρία για τους αριθμούς, η οποία διέπεται από τη θεμελιώδη αρχή της διακριτότητας των αριθμών. Επιπλέον,
- Η δομή του συνόλου των ρητών αριθμών είναι ριζικά διαφορετική από αυτήν του συνόλου των φυσικών. Στον πίνακα 1-1 παρουσιάζονται οι διαφορές του συνόλου των ρητών, σε σχέση με το σύνολο των φυσικών. Οι όροι «ομοιογενής», «ανομοιογενής» δομή αφορούν την διαφορά που υποτίθεται ότι υφίσταται για τα παιδιά, στη βάση της υπόθεσης ότι τα παιδιά ομαδοποιούν τους αριθμούς.

Πίνακας 1-1

Σύνολο	Χαρακτηριστικά	
	Στοιχεία	**Δομή**
Φυσικοί αριθμοί	▪ Κάθε στοιχείο έχει μοναδική συμβολική αναπαράσταση ▪ Για κάθε στοιχείο ορίζεται ένας επόμενος	**Διακριτή:** Ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς φυσικούς, υπάρχει πεπερασμένο πλήθος φυσικών αριθμών **«Ομοιογενής»**: Όλα τα στοιχεία έχουν παρόμοια συμβολική αναπαράσταση
Ρητοί αριθμοί	▪ Κάθε στοιχείο έχει παραπάνω από μία συμβολικές αναπαραστάσεις ▪Για κανένα στοιχείο δεν ορίζεται επόμενος	**Πυκνή:** Ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς ρητούς υπάρχει άπειρο πλήθος ρητών **«Ανομοιογενής»** : Τα στοιχεία του μπορούν να ομαδοποιηθούν, ανάλογα με την αναπαράστασή τους

Βάσει του συγκεκριμένου θεωρητικού πλαισίου , προβλέπεται ότι:

- Η κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας είναι μια δύσκολη και αργή διαδικασία. Το πέρασμα από την αρχική στην πιο εκλεπτυσμένη μορφή κατανόησης γίνεται σταδιακά και χαρακτηρίζεται από ενδιάμεσα στάδια κατανόησης.
- Τα ενδιάμεσα στάδια κατανόησης συνοδεύονται από παρανοήσεις. Οι παρανοήσεις αυτές αντανακλούν τη θεμελιώδη προϋπόθεση της διακριτότητας, καθώς και την τάση ομαδοποίησης των αριθμών και μπορούν να εξηγηθούν ως συνθετικά μοντέλα. Επιπλέον, οι παρανοήσεις είναι ανθεκτικές, τόσο στην επίδραση της ηλικίας, όσο και στην επίδραση της τυπικής εκπαίδευσης.

Οι ισχυρισμοί αυτοί ελέγχθηκαν πειραματικά με δύο εμπειρικές μελέτες, την Έρευνα Ι και την Έρευνα ΙΙ. Σε κάθε μία από τις έρευνες, εκτός από την κεντρική υπόθεση, ελέγχθηκαν και κάποιες επιπλέον υποθέσεις. Συγκεκριμένα:

❑ Στην Έρευνα Ι, ελέγχθηκε η υπόθεση ότι οι ιδιότητες των ρητών αριθμών που υποστηρίζονται από την προηγούμενη γνώση και εμπειρία των παιδιών για τους φυσικούς είναι πιο εύκολα κατανοητές, όπως προβλέπεται από το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής. Πιο συγκεκριμένα, υποτέθηκε ότι η γνώση ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί, εκτός από το μηδέν, έχουν αντίθετο και αντίστροφο αριθμό, υποστηρίζει τα παιδιά στο να αποδώσουν τις ίδιες ιδιότητες σε μη φυσικούς αριθμούς, ακόμα και σε περιπτώσεις στις οποίες δεν είναι εξοικειωμένα με τη μορφή των εμπλεκόμενων αριθμών.

❑ Στην Έρευνα ΙΙ,

- διερευνήθηκε η επίδραση της ηλικίας, στην κατανόηση της έννοιας της πυκνής δομής του συνόλου των ρητών. Βάσει του θεωρητικού πλαισίου για την εννοιολογική αλλαγή που έχει υιοθετηθεί (Vosniadou 1994a, 2001a, 2002), υποτέθηκε ότι η κατανόηση βελτιώνεται υπό την επίδραση της ηλικίας και την παράλληλη επίδραση της εκπαίδευσης, ωστόσο οι δυσκολίες παραμένουν σε σημαντικό βαθμό.
- διερευνήθηκε η επίδραση μιας εξωτερικής αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών, της ευθείας των πραγματικών, στον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά αναφέρονται στη δομή των ρητών. Με βάση την συζήτηση που διεξάγεται στο χώρο της έρευνας για την εννοιολογική αλλαγή, σχετικά με το ρόλο των εξωτερικών αναπαραστάσεων (Vosniadou, Skopeliti, & Ikospentaki, in press) υποτέθηκε ότι: Η παρουσία της ευθείας των πραγματικών αριθμών εκμαιεύει καλύτερες απαντήσεις για τη δομή των ρητών από τα παιδιά. Ωστόσο, η επίδραση της ευθείας είναι προσωρινή και παύει να υφίσταται, όταν αποσύρεται το αναπαραστασιακό μέσο . Η υπόθεση αυτή είναι συμβατή με ευρήματα από το χώρο της εκπαιδευτικής έρευνας (Bright, Behr, Post & Wachsmuth, 1988).
- διερευνήθηκε η επίδραση του τύπου του ερευνητικού εργαλείου στην επίδοση των παιδιών σε έργα που αφορούν την πυκνότητα. Με βάση την συζήτηση που διεξάγεται στο χώρο της έρευνας για την εννοιολογική αλλαγή, σχετικά με την επίδραση του τύπου (ανοικτού/κλειστού) του ερωτηματολογίου στην επίδοση των παιδιών (Vosniadou, Skopeliti, & Ikospentaki, in press), υποτέθηκε ότι τα παιδιά θα παρουσιάσου καλύτερη επίδοση στην περίπτωση που καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών, δηλαδή σε ερωτηματολόγια κλειστού τύπου.
- διερευνήθηκε η συσχέτιση του επιπέδου κατανόησης των παιδιών για την πυκνότητα, με τη βεβαιότητα που τα ίδια τα παιδιά αισθάνονται για τις απαντήσεις τους. Με βάση προηγούμενες έρευνες για την συσχέτιση κατανόησης-βεβαιότητας στο χώρο της ανάπτυξης της έννοιας του αριθμού (Merenluoto and Lehtinen, 2003; Merenluoto and Lehtinen, in press) υποτέθηκε ότι η επίδοση και η βεβαιότητα των παιδιών δεν είναι απαραίτητα θετικά συσχετισμένες. Πιο συγκεκριμένα, προβλέπεται ότι τα παιδιά που απαντούν σύμφωνα με την αρχική «θεωρία» για τον αριθμό εμφανίζουν συχνά μεγαλύτερη βεβαιότητα για τις απαντήσεις τους, σε σύγκριση με παιδιά που βρίσκονται σε ενδιάμεσα στάδια κατανόησης.
- διερευνήθηκαν οι διαφορές λόγω φύλου στην επίδοση σε έργα για την πυκνότητα. Με βάση έρευνες για τις διαφορές λόγω φύλου στη μαθηματική επίδοση γενικά (Pisa 2000; Fennema and Hart, 1994), αλλά από

ευρήματα στο χώρο της έρευνας για την κατανόηση της έννοιας του αριθμού (Hannula, Maijala, Pehkonen, Soro, 2001) υποτέθηκε ότι τα αγόρια θα έχουν καλύτερη επίδοση από τα κορίτσια, υπό τις συνθήκες που παρουσιάζουν μεγαλύτερη δυσκολία. Συγκεκριμένα, υποτέθηκε ότι τα αγόρια θα έχουν καλύτερη επίδοση στα ερωτηματολόγια ανοικτού τύπου.

1.2. Τι προβλέπει το τρέχον ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για την κατανόηση της πυκνότητας.

Η έννοια της πυκνότητας δεν είναι δηλωμένος στόχος του Αναλυτικού Προγράμματος[2]. Ωστόσο, η διδακτέα ύλη του Γυμνασίου και του Λυκείου περιλαμβάνει γνώσεις και δεξιότητες που σχετίζονται με την έννοια της πυκνότητας.

Οι δεκαδικοί αριθμοί και κλάσματα εισάγονται στο Δημοτικό, αλλά στο Γυμνάσιο επαναεισάγονται και μελετώνται από την αρχή. Ήδη από την Α' Γυμνασίου, παρουσιάζονται οι δεκαδικοί, η σύγκριση δεκαδικών και οι πράξεις με δεκαδικούς, τα κλάσματα, η σύγκριση και διάταξη κλασμάτων, η έννοια του ισοδύναμου κλάσματος και οι πράξεις κλασμάτων. Στην παράγραφο για τη σύγκριση των κλασμάτων, συγκεκριμένη εφαρμογή αφορά στην εύρεση ενός κλάσματος μεγαλύτερου από το $\frac{1}{5}$ και μικρότερου από το $\frac{2}{5}$ και ακολουθούν παρόμοιες ασκήσεις. Η συγκεκριμένη εφαρμογή ξεκινά με τη δήλωση: «Παρατηρούμε ότι δεν φαίνεται να υπάρχει κλάσμα με παρονομαστή 5 που να είναι μεγαλύτερο από το το $\frac{1}{5}$ και μικρότερο από το $\frac{2}{5}$. Όμως υπάρχουν "πάρα πολλά"» Τέλος, στην ίδια τάξη παρουσιάζεται η μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό.

Στη Β' Γυμνασίου εισάγεται αρχικά η έννοια του ρητού αριθμού και οι πράξεις των ρητών. Στη συνέχεια, εισάγεται η έννοια του πραγματικού αριθμού. Κατά την παρουσίαση των αρρήτων, μέρος της διδακτέας ύλης αποτελεί η προσέγγιση ενός αρρήτου, από δύο ρητούς αριθμούς. Συγκεκριμένα, στο σχολικό βιβλίο παρουσιάζεται σταδιακά η προσέγγιση του $\sqrt{2}$, αρχικά από τους 1,4 και 1,5 και τελικά από τους 1,41421 και 1,41422.

[2] Το 2003, χρονιά κατά την οποία διεξήχθη η παρούσα έρευνα, τα σχολικά βιβλία ήταν τα εγχειρίδια που εκδόθηκαν από τον ΟΑΕΔ για πρώτη φορά το 1981(;). Δεν υπάρχει Αναλυτικό Πρόγραμμα, στο οποίο να βασίστηκε η συγγραφή των βιβλίων αυτών.

Στη Γ' Γυμνασίου, στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου, γίνεται επανάληψη και επέκταση των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών. Βασική κατηγορία ασκήσεων στο κεφάλαιο αυτό είναι ασκήσεις του τύπου «Αν ισχύει ότι 2<x<5, βρες που κυμαίνεται η τιμή της παράστασης 3x+2». Ως παρόμοια με τις ασκήσεις αυτές, προτείνεται για λύση η εξής άσκηση: «Γνωρίζουμε ότι 3,14<π<3,15. Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται το εμβαδόν του κύκλου που έχει ακτίνα ρ=10cm».

Στην Α' Λυκείου, τα παιδιά διδάσκονται την ονομασία, το συμβολισμό και τη σχέση μεταξύ των διάφορων υποσυνόλων των πραγματικών αριθμών, με τη βοήθεια των διαγραμμάτων του Venn.

Στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο, το βασικό μέσο αναπαράστασης των αριθμών είναι η ευθεία των πραγματικών. Στο Δημοτικό, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την αριθμογραμμή, με τη μορφή μιας ευθείας στην οποία «τοποθετούνται» οι φυσικοί αριθμοί. Η αριθμογραμμή χρησιμοποιείται κυρίως ως εργαλείο για την κατανόηση της έννοιας της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Στον πίνακα 1-2 παρουσιάζεται συνοπτικά ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιείται η ευθεία για την αναπαράσταση των αριθμών στα σχολικά εγχειρίδια. Αναφέρεται ότι για την «τοποθέτηση» κλασμάτων στην ευθεία των πραγματικών προτείνεται η μετατροπή τους σε δεκαδική μορφή.

Πίνακας 1-2. Τυπικές αναπαραστάσεις των αριθμών σε πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση

	Δημοτικό	**Γυμνάσιο**			**Λύκειο**	
		Α	**Β**	**Γ**	**Α**	**Β**
Αναπαράσταση (μόνο) των φυσικών αριθμών σε αριθμογραμμή	✓					
Παρεμβολή δεκαδικών ανάμεσα σε φυσικούς πάνω σε ευθεία		✓				
Εμφάνιση κλασμάτων στην ευθεία			✓			
Παράσταση των ρητών με σημεία μιας ευθείας		✓	✓			
Τοποθέτηση άρρητων αριθμών πάνω σε ευθεία			✓			
Η ευθεία των πραγματικών αριθμών			✓	✓	✓	✓
Χρήσης της ευθείας ως εργαλείο για την επίλυση ανισώσεων			✓		✓	
Διαγράμματα Venn για την αναπαράσταση του συνόλου των πραγματικών αριθμών					✓	

2. Έρευνα Ι

2.1. Υποθέσεις

Στόχος της έρευνας αυτής είναι να διερευνήσει αν και κατά πόσο η προηγούμενη γνώση για τους φυσικούς αριθμούς επηρεάζει την κατανόηση των μαθητών Γ΄ Γυμνασίου για τους πραγματικούς αριθμούς, όσον αφορά τους εξής δύο άξονες:

- Τις αλγεβρικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών
- Την έννοια της πυκνότητας του συνόλου των ρητών αριθμών

Υπενθυμίζεται ότι οι υποθέσεις της έρευνας είναι οι εξής:

- Η γνώση ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί, εκτός από το μηδέν, έχουν αντίθετο και αντίστροφο αριθμό, υποστηρίζει τα παιδιά στο να αποδώσουν τις ίδιες ιδιότητες σε μη φυσικούς αριθμούς
- Η γνώση της χαρακτηριστικής ιδιότητας του συνόλου των φυσικών αριθμών εμποδίζει την κατανόηση της πυκνότητας του συνόλου των ρητών αριθμών.

Βάσει των υποθέσεων αυτών αναμένεται ότι:

- τα παιδιά είναι σε θέση να αποδώσουν τις ιδιότητες της ύπαρξης αντίθετου και αντίστροφου αριθμού, ακόμα και σε περιπτώσεις στις οποίες δεν είναι εξοικειωμένα με τη μορφή των εμπλεκόμενων αριθμών.
- τα παιδιά θα δυσκολευτούν με τα έργα που αφορούν στην πυκνή δομή των ρητών. Πιο συγκεκριμένα, αναμένεται ότι θα κάνουν λάθη, τα οποία τα οποία αντανακλούν την ιδέα της διακριτότητας, ως θεμελιώδους προϋπόθεσης, καθώς και την τάση τους να ομαδοποιούν τους αριθμούς με βάση επιφανειακά χαρακτηριστικά τους (δεκαδικούς με δεκαδικούς, κλάσματα με κλάσματα).

2.2. Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 16 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου, από το ίδιο τμήμα ενός σχολείου στην περιοχή του Κορυδαλλού, στην Αττική. Ζητήθηκε η συμβουλή του καθηγητή των μαθηματικών του τμήματος, καθώς και του φιλολόγου, προκειμένου να επιλεγούν παιδιά διαφορετικών επιπέδων επίδοσης. Τη χρονική στιγμή που πραγματοποιήθηκαν οι συνεντεύξεις (μέσα Δεκεμβρίου), τα παιδιά είχαν ήδη ολοκληρώσει τα πρώτο κεφάλαιο στο σχολικό τους εγχειρίδιο. Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται στους πραγματικούς αριθμούς. Σύμφωνα με τους συγγραφείς του βιβλίου, στο κεφάλαιο αυτό γίνεται επανάληψη και εμβάθυνση στις πράξεις και τη διάταξη των πραγματικών αριθμών, καθώς και η απόδειξη ιδιοτήτων, οι οποίες έχουν διαπιστωθεί εμπειρικά σε προηγούμενες τάξεις (Βιβλίο Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου, έκδοση ΙΕ', 2003, πρόλογος (σελ.10)). Όταν ζητήθηκε η εκτίμηση του καθηγητή των μαθηματικών των παιδιών που συμμετείχαν στην έρευνα, ο οποίος δίδασκε στο τμήμα τους από τη Β' Γυμνασίου, για τη δυσκολία που θα παρουσίαζαν οι ερωτήσεις για τους μαθητές του, ο καθηγητής προέβλεψε ότι οι μαθητές θα συναντούσαν αρκετές δυσκολίες. Ωστόσο, απέδωσε τις δυσκολίες αυτές στο γεγονός ότι τα ζητούμενα «είναι ύλη της Β' Γυμνασίου και οι μαθητές μπορεί να τα έχουν ξεχάσει».

2.3. Υλικά

Στο παράρτημα Ι, Τμήμα Α, παρουσιάζεται το ερωτηματολόγιο που επιδόθηκε στους συμμετέχοντες. Οι ερωτήσεις παρουσιάζονται ομαδοποιημένες.

Όσον αφορά τις ερωτήσεις A_1, A_2 για την ύπαρξη αντίθετου και αντίστροφου αριθμού, επιλέχθηκαν οι αριθμοί $\sqrt{3}$ και 0,02506 με το εξής σκεπτικό:

- Στην τάξη, επαναλαμβάνεται συχνά ότι «οι ρίζες είναι θετικοί αριθμοί», όπως επίσης και ότι «απαγορεύεται να εμφανίζεται "-" κάτω από τη ρίζα». Θεωρήθηκε ότι το γεγονός αυτό ενδεχομένως δημιουργεί μια επιπρόσθετη δυσκολία για τα παιδιά, τα οποία συχνά παρανοούν και υπεργενικεύουν τέτοιου είδους «κανόνες», στο να δεχτούν ως «νόμιμο» τον αριθμό $-\sqrt{3}$.
- Τα παιδιά δεν είναι εξοικειωμένα με κλάσματα με όρους δεκαδικούς αριθμούς, ιδιαίτερα με δεκαδικούς αριθμούς που έχουν περισσότερα από 3 δεκαδικά ψηφία, όπως ο 0,02506. Το γεγονός αυτό, ενδεχομένως, τα δυσκολεύει να αποδεχτούν ως «νόμιμο» τον αριθμό $\frac{1}{0,02506}$.

Όσον αφορά τις ερωτήσεις για την πυκνότητα, όλοι οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να απαντήσουν τις ερωτήσεις **Π_1,Π_2, Π_3** , καθώς και την **Πε**. Σύμφωνα με το σχεδιασμό, οι ερωτήσεις **Π_4** και **Π_5** προορίζονταν μόνο για όσους θα απαντούσαν ότι υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών ανάμεσα στους δεδομένους αριθμούς, σε κάθε μία από τις ερωτήσεις **Π_1,Π_2, Π_3.** Στόχος των ερωτήσεων **Π_4** και **Π_5** ήταν να εξετάσουν κατά πόσο ένα παιδί έχει επιτύχει βαθιά κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας –

συγκεκριμένα, αν είναι σε θέση να απαντήσει ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς, ανεξάρτητα από τη συμβολική τους αναπαράσταση. Σε αυτή την περίπτωση, θεωρήθηκε ότι πρέπει να μπορεί να απαντήσει τις **Π4 ,Π5**,χωρίς να μετατρέψει τα δύο κλάσματα σε ομώνυμα και χωρίς να μετατρέψει το κλάσμα σε δεκαδικό ή αντίστροφα. Ας σημειωθεί ότι οι ερωτήσεις **Π4 ,Π5** συνοδεύονταν από την πληροφορία ότι οι εμπλεκόμενοι αριθμοί δεν είναι ίσοι.

2.4. Διαδικασία

Κάθε παιδί έδωσε μια ατομική συνέντευξη, η οποία πραγματοποιήθηκε στο περιβάλλον του σχολείου, κατά τη διάρκεια σχολικών ωρών. Κάθε συνέντευξη διάρκεσε περίπου μία σχολική ώρα και μαγνητοφωνήθηκε. Κάθε συνέντευξη ξεκίνησε με γενικές ερωτήσεις σχετικά με τη στάση του παιδιού απέναντι στα Μαθηματικά. Στη συνέχεια, η ερευνήτρια ζήτησε από κάθε παιδί να περιγράψει το σύνολο των πραγματικών αριθμών («Ας πούμε ότι θες να δώσεις σε κάποιο φίλο σου να καταλάβει τι εννοούμε όταν λέμε 'το σύνολο των πραγματικών αριθμών'. Τι θα του έλεγες;»). Στην περίπτωση που δεν αναφερόταν από το παιδί, η ερευνήτρια έδινε την εξής πληροφορία: «όλοι οι αριθμοί που γνωρίζεις, ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών». Η διευκρίνιση αυτή γινόταν για να αποφευχθούν παρεξηγήσεις, οφειλόμενες σε λάθος χρήση της ορολογίας -συγκεκριμένα, η απόδοση του ονόματος «πραγματικός» σε συγκεκριμένης μορφής αριθμούς, όπως για παράδειγμα στους φυσικούς. Στη συνέχεια, η ερευνήτρια έδινε στο παιδί το ερωτηματολόγιο και του ζητούσε να το συμπληρώσει. Με την ερώτηση (**α**), η ερευνήτρια διασφάλιζε ότι το παιδί θεωρεί τα κλάσματα, τους δεκαδικούς και τους ακέραιους ως «πραγματικούς αριθμούς». Οι ερωτήσεις (**β**) και (**γ**) χρησιμοποιήθηκαν για να διαπιστωθεί αν τα παιδιά γνώριζαν τη σημασία των όρων «αντίθετος» και «αντίστροφος». Όλοι οι συμμετέχοντες ήταν εξοικειωμένοι με τους όρους αυτούς. Ωστόσο, κάποια παιδιά αντιστοίχισαν λανθασμένα τους όρους, λέγοντας, για παράδειγμα, ότι ο αντίστροφος του 2 είναι ο -2, ή αντίστροφα. Στις περιπτώσεις αυτές, η ερευνήτρια υπενθύμιζε τη σωστή χρήση των όρων.

Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, η ερευνήτρια προέτρεπε τα παιδιά να σκέφτονται «φωναχτά» και να σχολιάζουν τις απαντήσεις τους. Οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν από την ερευνήτρια

2.5. Βαθμολόγηση

2.5.1. Ερωτήσεις για τις αλγεβρικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

Ο τρόπος με τον οποίο βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις στις ερωτήσεις $Α_1$,$Α_2$ παρουσιάζονται στον πίνακα2-2. Ας σημειωθεί ότι οι απαντήσεις «υπάρχει ο αντίστροφος/ ο αντίθετος» βαθμολογήθηκαν με 1 βαθμό, ανεξάρτητα με τη σωστή ή όχι αναφορά του συγκεκριμένου αριθμού.

2.5.2. Ερωτήσεις για την πυκνότητα των ρητών αριθμών

Ο τρόπος με τον οποίο βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις στις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_5$ και $Π_ε$ παρουσιάζεται στον πίνακα 2-1.

Πίνακας 2-1. Βαθμολόγηση των ερωτήσεων $Π_1$-$Π_5$ και $Π_ε$

Κατηγορίες απαντήσεων στις $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$	**Βαθμός**
Μη κατατάξιμη απάντηση	**0**
Δεν υπάρχει κανένας αριθμός	**1**
Υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών (>0)	
Υπάρχουν άπειροι αριθμοί	**2**
Κατηγορίες απαντήσεων στις $Π_4$, $Π_5$	**Βαθμός**
Δεν μπορώ να απαντήσω «άπειροι», χωρίς πρώτα να μετατρέψω τους αριθμούς έτσι, ώστε να έχουν κοινή μορφή	**0**
Μπορώ να απαντήσω «άπειροι», χωρίς πρώτα να μετατρέψω τους αριθμούς έτσι, ώστε να έχουν κοινή μορφή	**1**
Κατηγορίες απαντήσεων στην Πε	**Βαθμός**
Μη κατατάξιμη απάντηση	**0**
Ο επόμενος φυσικός	**1**
Κάποιος δεκαδικός αριθμός	**2**
Δεν μπορεί να προσδιοριστεί	**3**

2.6. Αποτελέσματα

2.6.1. Ερωτήσεις για τις αλγεβρικές ιδιότητες

Στον πίνακα ..... παρουσιάζεται η συχνότητα κάθε κατηγορίας απάντησης, για κάθε μία από τις ερωτήσεις A_1, A_2 .

Πίνακας 2-2 : Βαθμολόγηση των ερωτήσεων A_1, A_2 και αποτελέσματα.

Ερώτηση	Κατηγορίες απαντήσεων	Βαθμός	Συχνότητα της απάντησης
A_1	Μη κατατάξιμη απάντηση	**0**	**0**
	Δεν υπάρχει ο αντίστροφος του $\sqrt{3}$	**1**	**0**
	Υπάρχει ο αντίθετος του $\sqrt{3}$	**2**	**16**
A_2	Μη κατατάξιμη απάντηση	**0**	**0**
	Δεν υπάρχει ο αντίθετος του 0,025506	**1**	**2**
	Υπάρχει ο αντίθετος του 0,025506	**2**	**14**

Οι συμμετέχοντες εμφάνισαν μια ισχυρή τάση να ξεκινούν με την προϋπόθεση ότι ο αντίθετος/αντίστροφος των συγκεκριμένων αριθμών υπάρχουν και στη συνέχεια να προσπαθούν να τους βρουν. Αυτή η τάση αντανακλάται στις απαντήσεις τους. Στα παρακάτω παραδείγματα εμφανίζονται τυπικοί τρόποι προσέγγισης του συγκεκριμένου προβλήματος:

<u>Παράδειγμα 1</u>

«Πιστεύω ότι υπάρχει...Δεν ξέρω αν μπορώ να τον γράψω σωστά».

<u>Παράδειγμα 2</u>

«Ο αντίθετος; Πρέπει να υπάρχει... Είναι η τετραγωνική ρίζα του -3. Έτσι νομίζω, δηλαδή.» .

Μια λιγότερο τυπική απάντηση είναι η ακόλουθη:

<u>Παράδειγμα 3</u>

«Αν υπάρχει ο αντίθετος του $\sqrt{3}$ ....(....)Δεδομένου ότι οι ρίζες πρέπει να υπάγονται στους πραγματικούς αριθμούς, ε, ο μείον ρίζα τρία θα γράφεται απλά. Θα υπάρχει, αλλά δεν έχει χρηστικότητα, για να πω την αλήθεια»

Η τάση αυτή εμφανίστηκε πιο έντονα στην περίπτωση της ερώτησης A_2:

<u>*Παράδειγμα* 4</u>

«Υπάρχει. Το ξέρω ότι υπάρχει.. Αλλά δεν ξέρω ποιος είναι ,εγώ».

<u>*Παράδειγμα* 5</u>

«Υπάρχει ο αντίστροφος...Πρώτα πρέπει να κάνουμε αυτόν τον αριθμό κλάσμα...Ναι...Σίγουρα υπάρχει... Δεν θυμάμαι, όμως ,πώς να κάνω το κλάσμα δεκαδικό.»

<u>*Παράδειγμα* 6</u>

- **Μ**: *Ο αντίστροφός του! Ναι, υπάρχει. Να τον γράψουμε εδώ...Βέβαια, δεν έχω δει ποτέ τέτοιον αριθμό. Έτσι; Δεν έχουμε δει ποτέ τέτοιον αριθμό.*

- **Ε**: *Σε προβληματίζει αυτό;*

- *Το ότι δεν έχω δει τέτοιου τύπου αριθμό; Βέβαια, είναι ένα πρόβλημα., Αλλά, θεωρητικά, πάλι κι αυτό γίνεται. (...) Αυτού του τύπου το κλάσμα δεν χρησιμεύει ποτέ. Δηλαδή, μέχρι τώρα δεν μας έχει χρησιμεύσει ποτέ.*

Τα δύο παιδιά που απάντησαν ότι δεν υπάρχει ο αντίστροφος του 0,02506 ακολούθησαν διαφορετικό τρόπο σκέψης. Συγκεκριμένα, προσπάθησαν να βρουν το συγκεκριμένο αριθμό, πριν αποφασίσουν αν υπάρχει ή όχι. Στην περίπτωσή τους, η μορφή των δεδομένων αριθμών καθόρισε την απάντησή τους. Αυτό αντανακλάται στις απαντήσεις τους:

<u>*Παράδειγμα* 7</u>

«Ο αντίστροφος αυτού του αριθμού...Μπορεί να υπάρχει αυτό το πράγμα που σκέφτομαι; Δεν νομίζω ότι υπάρχει.... Είναι παράξενο να έχεις δεκαδικό στον παρονομαστή. Δεν έχω δει ποτέ τέτοιο πράγμα. Μάλλον δεν επιτρέπεται.»

<u>*Παράδειγμα* 8</u>

- **Μ**: *Θυμάμαι τι είναι ο αντίστροφος. Στο 2 είναι το ένα δεύτερο. Εδώ, όμως, έχουμε δεκαδικό. Άρα, είναι ένα προς...Αυτό δεν γίνεται, όμως....*

- **Ε**: *Γιατί δεν γίνεται; Τι το εμποδίζει;*

- **Μ**: *Ο δεκαδικός.*

- **Ε**: *Δηλ. δεν μπορείς να τον βάλεις στο παρονομαστή ή...;*

- **Μ**: *Γενικώς, στο κλάσμα. Δεν έχω δει ποτέ κλάσμα με δεκαδικούς. Υπάρχουν;*
- **Ε**:*Δεν μπορώ να πω ούτε «ναι», ούτε «όχι»..*
- **Μ**: *Μάλλον δεν υπάρχουν.*

2.6.2. Ερωτήσεις για την πυκνότητα των ρητών αριθμών

2.6.2.1. Ερωτήσεις $Π_1$-$Π_5$

Στον πίνακα 2-3 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των συμμετεχόντων σε κάθε μία από τις ερωτήσεις $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$, $Π_4$, $Π_5$, καθώς και για τη ερώτηση Πε. Εμφανίζεται ο βαθμός που αποδόθηκε σε κάθε απάντηση, ο οποίος αντανακλά και την κατηγοριοποίηση των απαντήσεων, σύμφωνα με τις κατηγορίες του πίνακα 2-3. Τέλος, παρουσιάζεται η συχνότητα με την οποία εμφανίστηκε κάθε απάντηση.

Πίνακας 2-3:Συχνότητα των απαντήσεων στις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_5$ και $Π_ε$

Ερωτήσεις	Απαντήσεις	Βαθμός	Συχνότητα της απάντησης
$Π_1$ (0,001,0,01)	δεν υπάρχει κανένας άλλος αριθμός	**1**	3
	...υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών	**1**	10
	...υπάρχουν άπειροι αριθμοί	2	3
	.... δεν υπάρχει κανένας αριθμός	1	1
$Π_2$ **($\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$)**	...υπάρχει ένας μόνο αριθμός	**1**	8
	...υπάρχουν «άπειροι» αριθμοί, όλοι ίσοι με το $\frac{4}{8}$	**1**	2
	...υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών (>1)	**2**	3
	...υπάρχουν άπειροι αριθμοί	**2**	2
$Π_3$ (0,005,0,006)	... δεν υπάρχει κανείς αριθμός	1	9
	...υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών	1	4
	...υπάρχουν άπειροι αριθμοί	2	3

Π_4 $(\frac{5}{6}, 8.5)$	Δεν μπορώ να απαντήσω «άπειροι», χωρίς πρώτα να μετατρέψω το κλάσμα σε δεκαδικό (ή αντίστροφα).	**0**	1
	Μπορώ να απαντήσω «άπειροι», χωρίς πρώτα να μετατρέψω το κλάσμα σε δεκαδικό (ή αντίστροφα).	**1**	
Π_5 $(\frac{2}{5}, \frac{4}{7})$	Δεν μπορώ να απαντήσω «άπειροι», χωρίς πρώτα να μετατρέψω τα κλάσμα τα σε ισοδύναμα.	**0**	--
	Μπορώ να απαντήσω «άπειροι», χωρίς πρώτα να μετατρέψω τα κλάσματα σε ισοδύναμα.	**1**	--

Μετρώντας την επίδοση στις ερωτήσεις Π_1-Π_3 ως άθροισμα των βαθμολογιών σε κάθε μία από τις ερωτήσεις, οι συμμετέχοντες τοποθετήθηκαν σε τρεις κατηγορίες. Δεδομένου ότι ο βαθμός 0 δεν εμφανίστηκε σε καμία από τις ερωτήσεις, η επίδοση των υποκειμένων κυμαίνεται από 3 έως 7. Στον πίνακα 2-4 παρουσιάζονται ο τρόπος με τον οποίο συντάχθηκαν οι κατηγορίες και η συχνότητα της κάθε κατηγορίας. Στην κατηγορία «πάντα Π» τοποθετήθηκαν τα παιδιά που απάντησαν ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών ανάμεσα στους δεδομένους αριθμούς, σε όλες τις ερωτήσεις Π_1-Π_3. Αντίστοιχα, στην κατηγορία «πάντα Α» τοποθετήθηκαν τα παιδιά που απάντησαν ότι υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών ανάμεσα στους δεδομένους αριθμούς, σε όλες τις ερωτήσεις Π_1-Π_3. Στην κατηγορία «Π και Α» συμπεριελήφθησαν τα παιδιά που απάντησαν ότι υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών στα δεδομένα διαστήματα σε κάποιες, αλλά όχι σε όλες τις ερωτήσεις.

Πίνακας 2-4: Κατηγορίες βάσει συνολικής επίδοσης στις Π_1-Π_5 και συχνότητα κάθε κατηγορίας

Συνολική Βαθμολογία (β)	**Κατηγορία**	**Συχνότητα της κατηγορίας**
β=3	$1^η$: Πάντα «Π»	11
$β \in \{4,5\}$	$2^η$: Π και Α	4
β=6	$3^η$: Πάντα «Α»	1

Ακολουθούν παραδείγματα από τις απαντήσεις παιδιών, τυπικά της κατηγορίας «πάντα Π».

<u>*Παράδειγμα* 1 (κατηγορία «Πάντα Π»)</u>

- **Π1**: *«Το 0,001 είναι το ίδιο με το 0,010. Άρα, ξεκινάει από το 0,002, 0,003, μέχρι το 0,009».*
- **Π2**: *«Είναι μόνο ένας, ο* $\frac{4}{8}$. *Και γι' αυτό, είμαι σίγουρη!».*
- **Π3**: *«Δεν υπάρχει άλλος αριθμός, γιατί μετά το 0,005 είναι το 0,006».*

<u>*Παράδειγμα* 2 (κατηγορία «Πάντα Π»)</u>

- **Π2**: *«Έχει όσους αριθμούς χρειάζεται για να καλύψεις το διάστημα ανάμεσα στο 3 και στο 5: 3,1, 3,2, 3,3, μέχρι το 9.»*
- **Π3**: *«Σ' αυτούς τους δύο, μπορείς να βρεις* (γράφει) *0,0051, 0,0052, ...,0,0059».*

Μόνο ένα παιδί συγκέντρωσε 6 βαθμούς από τις ερωτήσεις Π1-Π3, φτάνοντας έτσι στην κατηγορία «Πάντα Α». Πρέπει να αναφερθεί ότι το παιδί αυτό άλλαξε την αρχική του απάντηση στην Π1 , μετά την ερώτηση Π3, χωρίς να παρέμβει η ερευνήτρια με άλλον τρόπο. Να σημειωθεί επίσης ότι η ερώτηση Π3 δεν τέθηκε αμέσως μετά την Π1. Στα επόμενα, εμφανίζεται ένα παράδειγμα παιδιού, το οποίο αναθεωρεί την άποψή τους μετά από παρέμβαση της ερευνήτριας, η οποία επισημαίνει τη αντίφαση στις απαντήσεις του. Παρέμβαση τέτοιου τύπου έγινε μετά τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου, προκειμένου να εξηγήσουν τα παιδιά την άποψή τους. Σε αυτή την περίπτωση, το παιδί βαθμολογείται με βάση την αρχική του απάντηση.

<u>*Παράδειγμα* 3 («Πάντα Α»)</u>

- **Π1(**αρχική απάντηση**):**

- **Μ**: *Ασφαλώς και δεν υπάρχει μόνο ένας αριθμός…μισό λεπτάκι...Δεν υπάρχει μόνο ένας αριθμός- καλά, σίγουρα απορρίπτω το «δεν υπάρχει κανένας αριθμός»…αλλά, δεν είναι μόνο ένας αριθμός στο, μπορεί να είναι το 0,002, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9….για να φτάσουμε στο 0,010 και μετά 0, 0 1 . Άρα, θα προτιμήσω το άλλο.* (ξαναδιαβάζει την εκφώνηση)
- Ερευνητής**:** *Τι σε προβληματίζει εδώ;*
- **Μ**: *Τίποτα, να σιγουρευτώ ήθελα. Από το 0,002 μπορεί να υπάρχει, ως και το 0,009…. γιατί μετά πάει το 0, 01.*

- Ερευνητής: *Μάλιστα…Κι έτσι τους πετυχαίνουμε όλους;*
- **Μ**: *Ναι.*

➢**Π3, Π1:**

- **Μ :***Μπορώ να βρω άλλους αριθμούς: Μπορεί να είναι το 0,051, μηδέν κόμμα μηδέν μηδέν πέντε χιλιάδες τετρακόσια τόσο, ώσπου να φτάσουμε στο 6. Μπορεί να είναι πάρα πολλοί αριθμοί.. Κι εδώ πέρα* (αναφέρεται στην **Π1**), *τελικά, η απάντησή μου δεν είναι και τόσο σωστή. θα μπορούσε να είναι απ' το 0,001111, μέχρι το 0,012345678, μέχρι να φτάσουμε στο 0,01. Δηλαδή, πάρα πολλοί αριθμοί.* ()
- Ερευνητής: Θα μπορούσαμε να τους βάλουμε σε μια σειρά;
- **Μ** : *Δεν λέω ....Λέω ότι δεν θα μπορούσε να είναι μόνο το 0,21, θα μπορούσε να ήταν το μηδέν μηδέν δύο εκατομμύρια ένα, μέχρι να φτάσουμε στα δέκα εκατομμύρια, που είναι το 0,01.*
- Ερευνητής: Ναι.. Οπότε;
- **Μ** : *Μάλλον αλλάζω τότε το άλλο, και δεν είναι το 0,002 μέχρι το 0,009 – απλά, ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί, τους οποίους δεν θα μπορούσαμε να τους προσδιορίσουμε …Όχι δεν υπάρχει κανένας, ούτε ότι υπάρχει μόνο ένας, υπάρχουν άπειροι. Μπορώ να την αλλάξω;*

➢**Π2:**

- **Μ:** *Το ότι δεν υπάρχει μόνο ένας αριθμός, είναι πάλι σίγουρο. Το ότι δεν βρίσκεται κανένας αριθμός, το αποκλείω και πάλι.(3) Οπότε, πάλι στο άλλο θα πάω (3). Αλλά, τώρα, δεν ξέρω, δεν τό'χω συναντήσεις ποτέ, να σας πω την αλήθεια, αν μπορούμε να κάνουμε, ο αριθμητής του κλάσματος να είναι δεκαδικός.*
- **Ε:** *Αν υποθέσουμε ότι μπορείς;*
- **Μ:** *Υπάρχουν πάλι άπειροι αριθμοί – αν μπορούσαμε ο αριθμητής να είναι 3,5.*
- **Ε**: *Αν δεν μπορούσες; Αν δεν μπορείς να τον κάνεις;*
- **Μ:** *Αν δεν μπορώ να το κάνω…και χωρίς να το κάνω δεκαδικό, είπαμε, ε;*
- **Ε**: *Αν το κάνεις δεκαδικό, τι απαντάς;*
- **Μ:** *Αν το κάνουμε δεκαδικό, νομίζω ότι πάλι υπάρχουν άπειροι. Σκέφτομαι τώρα ... Και με κλάσματα, πάλι πρέπει να υπάρχουν άπειροι ανάμεσά τους, διότι…(3)…δεν θυμάμαι τώρα ακριβώς…*

- **Ε**: *Τι δεν θυμάσαι;*
- **Μ:** *'Όχι δεν θυμάμαι,…προσπαθώ να…Τρία όγδοα με πέντε όγδοα- Θα μπορούσε να είναι ένα άλλο κλάσμα, με διαφορετικό παρονομαστή. Σωστά! Πάλι υπάρχουν άπειροι!*

➤ **Π$_4$:**

- **Ε**:*Αν έχω αυτούς του δύο (γράφει το $\frac{5}{6}$ και το 8.2) και σου λέω ότι αυτοί δεν είναι ίσοι...*
- **Μ:** *Δεν είναι, γιατί το 5 είναι μικρότερο από το 6.*
- **Ε**: *Οπότε;*
- **Μ:** *Οπότε...Αφού το 8,2 είναι μεγαλύτερο από το 1!*
- **Ε**: *Σωστά. Υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα σε αυτούς τους δύο;*
- **Μ:** *Αν υπάρχει άλλος αριθμός ανάμεσά τους;*
- **Ε**: *Ναι.*
- **Μ**: *Ναι, αλλά θα έπρεπε, για να το δούμε καλύτερα, μάλλον να κάνουμε και το πέντε έκτα δεκαδικό.*

Το εκτεταμένο αυτό παράδειγμα παρατέθηκε για να γίνουν δύο επισημάνσεις:

α) Η μορφή των εμπλεκόμενων αριθμών παίζει σημαντικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο οι συμμετέχοντες αντιμετωπίζουν τις πανομοιότυπες, κατά τα άλλα, ερωτήσεις Π$_1$-Π$_3$. Το φαινόμενο διαφορετικής αντιμετώπισης κλασμάτων και δεκαδικών όσον αφορά την πυκνότητα, παρά τη δυνατότητα μετατροπής από τη μια μορφή στην άλλη, είναι χαρακτηριστικό της κατηγορίας «Π και Α», όπως φαίνεται από τα παραδείγματα 3 και 4 στη συνέχεια. Στο παράδειγμα 2 φαίνεται επίσης η διαφορετική αντιμετώπιση και των δεκαδικών με ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, σε σχέση με την αντιμετώπιση των δεκαδικών με διαφορετικό πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Με το συγκεκριμένο παράδειγμα των δεκαδικών 0,001, 0,01, 3 από τους συμμετέχοντες απάντησαν ότι δεν υπάρχει άλλος αριθμός ενδιάμεσα, δίνοντας διαφορετικές εξηγήσεις. Συγκεκριμένα, ένα από αυτά τα παιδιά δικαιολόγησε την απάντησή του, λέγοντας ότι πρόκειται για τον ίδιο αριθμό. Τα δύο άλλα παιδιά, όμως, φάνηκαν διστακτικά ως προς τη συγκεκριμένη ερώτηση, εκφράζοντας τη σκέψη ότι η ερώτηση δεν έχει νόημα. Δεν ήταν σε θέση να εξηγήσουν γιατί απαντούν ότι δεν υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στους δύο συγκεκριμένους αριθμούς. Παρόμοια παραδείγματα θα συναντήσουμε και στην κατηγορία «Π και Α».

β) Το παιδί που αναφέρεται στο παράδειγμα 3 δεν έχει επιτύχει βαθιά κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας, παρά το γεγονός ότι καταλήγει στο συμπέρασμα ότι τόσο ανάμεσα στους δεκαδικούς, όσο και ανάμεσα στα κλάσματα υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Πράγματι, δεν ικανοποιείται από το συμπέρασμά του ότι υπάρχουν άπειροι δεκαδικοί αριθμοί ανάμεσα στα δύο κλάσματα της ερώτησης $Π_2$ και αναζητά αριθμούς σε μορφή κλάσματος. Επιπλέον, δεν είναι σε θέση να απαντήσει ότι ανάμεσα στους δυο διαφορετικής μορφής αριθμούς της ερώτησης $Π_4$ υπάρχουν άπειροι αριθμοί, αλλά θεωρεί αναγκαίο να τους μετατρέψει και τους δύο σε μορφή δεκαδικού. Η περίπτωση η μετατροπή να αποσκοπεί στη σύγκριση των δύο αριθμών προφανώς δεν ισχύει.

Στη συνέχεια παρατίθενται δύο παραδείγματα από την κατηγορία «Π και Α». Το παιδί που αναφέρεται στο παράδειγμα 3 ήταν, σύμφωνα με τους καθηγητές του, ο καλύτερος μαθητής της χρονιά του στο σχολείο.

<u>*Παράδειγμα*</u> <u>4</u>

- **$Π_1$:**

«Ε, ανάμεσα σε αυτά τα δύο, υπάρχουν όλοι οι αριθμοί μικρότεροι από 0,01 και μεγαλύτεροι από 0,001. Τώρα, οι αριθμοί αυτοί είναι…πόσοι είναι; Εκατό, νομίζω. Ή ενενήντα εννιά; Είναι…εκατό πρέπει να είναι. Λάθος! Ούτε ενενήντα εννιά, εννιά υπάρχουν. Αφού είναι <u>ένας</u> δεκαδικός πιο κάτω…Εννιά! Ναι! Αριθμοί υπάρχουν εννιά.»

- **$Π_2$:**

«Βρίσκονται άπειροι αριθμοί. Να γράψω 'άπειροι''»;

Ούτε όταν, μετά τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου, του ζητήθηκε να επανεξετάσει τις γραπτές απαντήσεις του στις **$Π_1$, $Π_2$** αντιλήφθηκε την αντίφαση. Εξήγησε την άποψή του ως εξής:
«Ναι, με δεκαδική μορφή υπάρχουν μόνο εννιά ενδιάμεσα σε αυτούς τους αριθμούς. Εννιά ή δέκα, τώρα, εντάξει…Είναι λίγο…Αλλά…αν αλλάξεις τον τύπο και πας σε αυτή την αξία, με άλλο τέτοιο…με άλλη μορφή αριθμού, και, συγκεκριμένα, κλάσματος, μπορείς να βρεις, πιστεύω, περισσότερους αριθμούς ενδιάμεσα από αυτούς.
Περισσότερους απ' ό,τι βρίσκεις μέσω των δεκαδικών».

Μόνο όταν του δόθηκε ως άμεσο αντιπαράδειγμα ο αριθμός 0,0051, τον ο ποίο είχε ο ίδιος αναφέρει ως ενδιάμεσο των αριθμών 0,005 και 0,006 στην προφορική ερώτηση $Π_3$, αναθεώρησε την απάντησή του, λέγοντας: *«Ναι, μπράβο…αυτό…ναι… Γιατί αναλύεται κι άλλο με…παρακάτω…το είχα ξεχάσει…Είχα ξεχάσει, ουσιαστικά, εντελώς το τέταρτο, το επόμενο ψηφίο…Ναι…Γιατί είναι αυτό, ότι πολλές φορές δε σου έρχεται στο μυαλό ότι το επόμενο ψηφίο ταιριάζει σε αυτήν την παράσταση. Μπράβο, ναι, αυτό είναι! Πάλι άπειροι είναι!»*

Παράδειγμα 5 (Ενδιάμεση κατηγορία)

➢ **$Π_1$:**

«Το 0,01 είναι ίσο με το 0,010, ας πούμε. Κι έχουμε και το 0,001. Άρα θα είναι οι τιμές από το 0,002 μέχρι και τις τιμές 0,009»

➢ **$Π_3$:**

«Ναι, είναι πάρα πολλοί ανάμεσα σε αυτούς. Είναι ο 0,0051, 52, 53 – ή μπορούσε να είναι και πολύ παραπάνω: 511 ή 5.831 και παραπάνω»

Πάλι χρειάστηκε να του επισημανθεί η αντίφαση, για την οποία εξήγησε: *«Εδώ πέρα είναι…είναι στην ίδια…είναι στα χιλιοστά και οι δύο αριθμοί…είναι στην ίδια -πώς να το πω, ομάδα να το πω; Στο ίδιο μέρος. Ως αποτέλεσμα, στο πέντε, στο μηδέν κόμμα μηδέν μηδέν πέντε, μέχρι στο μηδέν κόμμα μηδέν μηδέν έξι, στο πέντε να μπορούν να προστεθούν πάρα πολλές τιμές από δεξιά, ώσπου να φτάσει στο μηδέν κόμμα μηδέν μηδέν έξι. Εδώ πέρα, όμως, έχουμε τον αριθμό 0,001 και τον αριθμό 0,01. Άρα, θα είναι οι αριθμοί που θα βρίσκονται ανάμεσα σ'αυτά τα δύο μέρη».*

Παράδειγμα 6 (Ενδιάμεση κατηγορία)

Το παιδί που αναφέρεται στο παράδειγμα 6 απάντησε ότι υπάρχουν «πάρα πολλοί» αριθμοί στις ερωτήσεις **$Π_1$,$Π_3$**, δίνοντας παραδείγματα αριθμών με περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Ωστόσο, αντιμετώπισε διαφορετικά την ερώτηση **$Π_2$** που αφορά στα κλάσματα, αναφέροντας τις ισοδύναμες αναπαραστάσεις του ίδιου αριθμού.

➢ **$Π_2$:**

- **Μ**: *Το τέσσερα όγδοα. Αλλά, μόνο;*
- **Ε**: *Αν σε ενοχλεί κάτι σε αυτό, σκέψου το…*

- *Θα μπορούσε να είναι κι ένας δεκαδικός, ή μια ρίζα. Θα μπορούσα να βάλω ρίζα. Θα μπορούσα, ανάμεσα σ' αυτά τα δύο, να βάλω ρίζα οκτώ* (αντί του ορθού $\sqrt{16}$) *προς οκτώ. Αν έβγαζα τη ρίζα, θα ήταν πάλι τέσσερα. Άρα κι αυτός είναι ανάμεσα.*
- **Ε**: *Υπάρχουν κι άλλοι;*
- **Μ**: *Ναι. Ναι. Το τέσσερα κόμμα μηδέν προς οκτώ. Είναι πάρα πολλοί*!

Το φαινόμενο να θεωρούνται διαφορετικοί αριθμοί οι διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αριθμού, εμφανίστηκε και σε ένα παιδί, το οποίο, βάσει της συνολικής επίδοσής του, τοποθετήθηκε στην κατηγορία «Πάντα Π».

Παράδειγμα 7 («Πάντα Π»)

➢ **$Π_2$:**

- **Μ** : *Δεν υπάρχει άλλος αριθμός. Αν γράψεις* $\frac{4}{8}$ *, αυτό γίνεται* $\frac{1}{2}$.
- **Ε**: *Οπότε;*
- **Μ**: *Δεν είναι ανάμεσα!*

2.6.2.2. Η ερώτηση Πε.

Πίνακας 2-5: Βαθμολογία απαντήσεων στην $Π_ε$ και αντίστοιχες συχνότητες.

Κατηγορίες απαντήσεων στην Πε	Βαθμός	Συχνότητα
Μη κατατάξιμη απάντηση	**0**	**1**
Ο επόμενος φυσικός (1000)	**1**	**5**
Κάποιος δεκαδικός αριθμός (π.χ.999,001)	**2**	**4**
Δεν μπορεί να προσδιοριστεί	**3**	**6**

Η **$Π_ε$** ακολουθήθηκε από αρκετές ερωτήσεις, προκειμένου να διασφαλιστεί ότι η διατύπωση είναι κατανοητή από τα παιδιά. Τα παιδιά που βαθμολογήθηκαν με 1 παρουσιάστηκαν ιδιαίτερα ανθεκτικές απόψεις. Το ίδιο συνέβη και στην περίπτωση των παιδιών που βαθμολογήθηκαν με 2.

Παράδειγμα 1

- **Μ:** Μεγαλύτερο...Το 1000 είναι.

- **Ε:** Θα ήθελα να σε ρωτήσω κάτι, επειδή θέλω να είμαι σίγουρη ότι εγώ έχω διευκρινίσει καλά στην εκφώνηση κι εσύ έχεις αποφασίσει για το σωστό λόγο. Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος, το 999,001 ή το 999;
- **Μ**: Το 999,001, εντάξει, γιατί προέχει εδώ πέρα το 1.
- **Ε:** Σωστά. Ποιος είναι πιο κοντά στο 999, αυτός ή το 1000;
- **Μ:** Αυτός. Εντάξει, και το 1000 είναι κοντά στο 999, αλλά όχι όσο είναι το 999,001. Αναρωτιέμαι τώρα...
- **Ε:** Μπορείς να το εκφράσεις;
- **Μ:** Δεν ξέρω, αλλά εγώ πιστεύω ότι το σωστό είναι το 1000.

<u>Παράδειγμα 2</u>

- **Μ:** Δεν είναι το 1000. Μπορεί να πάρει και το 999…κόμμα…εεε…001. Η πρώτη του τιμή, ε;
- **Ε:** Εσύ θα μου πεις.
- **Μ**: Είναι η πρώτη τιμή -έστω και για ένα, αλλά είναι μεγαλύτερο από το 999. Να βάλω αυτό.
- **Ε:** Για εξασφαλίζω ότι το βάζεις για το σωστό λόγο, θα σε ρωτήσω…Αν είναι το 999,001 όντως η πρώτη-πρώτη τιμή, σημαίνει ότι δεν υπάρχει άλλος πιο πριν από αυτόν, πιο κοντά στο 999;
- **Μ:** Ε, όχι . Δεν υπάρχει…να'ναι πιο κοντά, αλλά να είναι μεγαλύτερος από το 999…Μόνο αυτό. Μετά πάει…ε, ναι…κόμμα δύο, τρία…και φτάνει.

Τα παιδιά που βαθμολογήθηκαν με 3 αναφέρθηκαν σε αριθμούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία, κυρίως στη μορφή 999,0...01. Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, διαπιστώθηκε η αδυναμία της **Π**$_ε$, να διακρίνει ανάμεσα στα παιδιά που πιστεύουν ότι υπάρχει πράγματι ο επόμενος του 999, αλλά δεν μπορεί να προσδιοριστεί ακριβώς και στα παιδιά που πιστεύουν ότι δεν υπάρχει.

<u>Παράδειγμα 3 (υπάρχει επόμενος)</u>

«Μια πιθανή απάντηση θα ήταν ότι, δεν μπορώ να τον προσδιορίσω, γιατί θα μπορούσε να είναι…αντί για ένα χιλιοστό, μια πολύ μικρότερη μονάδα….ας πούμε, όχι εκατομμυριοστό, -εντάξει, είναι μια πολύ μικρότερη-κάτι άλλο. Ότι υπάρχει, υπάρχει! Αλλά θα μπορούσε να είναι…αναλόγως, τώρα, και τι μέγεθος μετράμε.»

<u>Παράδειγμα 4 (δεν υπάρχει επόμενος)</u>

« Ψάχνουμε να βρούμε τον πιο μικρό αριθμό, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από 999... Δεν υπάρχει, λογικά, γιατί…μετά το κόμμα –που από εκεί και

πέρα υπάρχουν οι δεκαδικοί- υπάρχουνε…οι αριθμοί δε σταματάνε. Άρα, δεν μπορείς να προσδιορίσεις. Λογικά, θα είναι 999 κόμμα και θα έβρισκες τη μικρότερη τιμή από τους…μετά το κόμμα, τους υπόλοιπους αριθμούς και θα έβαζες τη μονάδα σ' αυτόν που θα ήταν ο τελευταίος, για να δώσει τον μικρότερο. Αλλά, εφόσον αυτοί οι αριθμοί, από το κόμμα και μετά, δε σταματάνε, δεν μπορείς να πεις το μικρότερο αριθμό πιο κοντά στο 999.»

Παράδειγμα 5 (αδιευκρίνιστο)

- **Μ:** *Δηλαδή η πρώτη τιμή που επιτρέπεται να πάρει ο άλφα μετά το 999. Δεν μπορεί να είναι 999 κόμμα ένα εκατομμυριοστό;*
- ***Ε:*** *Μπορεί; Εσύ θα μου πεις!*
- **Μ:** Ναι! Άρα, θα πω ότι δεν μπορούμε να το προσδιορίσουμε ακριβώς, γιατί….μπορεί να συνεχιστεί.

2.6.3. Ενδιάμεσα στάδια κατανόησης

Από τις απαντήσεις των παιδιών, όπως αυτές στα παραδείγματα 1 και 2 (2.6.2), προέκυψε ότι είναι δυνατή μια πιο λεπτή ανάλυση των απαντήσεων που δόθηκαν από τα παιδιά της κατηγορίας «πάντα Π». Επιπλέον, θεωρήθηκε απαραίτητη μια πιο αυστηρή περιγραφή της κατηγορίας που αντιστοιχεί στην βέλτιστη επίδοση στις ερωτήσεις για την πυκνότητα. Συγκεκριμένα, για να συμπεριληφθεί στην κατηγορία αυτή, ένα παιδί πρέπει να είναι σε θέση να απαντήσει ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε διαφορετικούς ρητούς αριθμούς, ανεξάρτητα από τη μορφή τους . Βάσει τη θεώρησης αυτής, μια επίδοση όπως αυτή του μαθητής του παραδείγματος 3 (2.6.2) απέχει από αυτήν που θεωρείται βέλτιστη. Οι 5 κατηγορίες (**Δ**ιακριτότητα, **Δ**ιακριτότητα+, **Δ**ιακριτότητα/ Πυκνότητα, **Π**υκνότητα-, **Π**υκνότητα), η περιγραφή τους και το πλήθος των παιδιών που κατατάχτηκαν σε κάθε κατηγορία παρουσιάζεται στον πίνακα 2-6.

Πίνακας 2-6: Πέντε κατηγορίες και αντίστοιχες συχνότητες

Κατηγορία	**Περιγραφή**	**Συχνότητα της κατηγορίας**
	Όλες οι απαντήσεις «Υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών ανάμεσα σε δύο ρητούς»	

Δ	και υπάρχει απάντηση «Δεν υπάρχει αριθμός α-νάμεσα σε δύο ρητούς»	9
Δ+	Όλες οι απαντήσεις «Υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών ανάμεσα σε δύο ρητούς» και καμία απάντηση «Δεν υπάρχει αριθμός ανά-μεσα σε δύο ρητούς»	2
Π/Δ	Υπάρχει απάντηση «Υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών ανάμεσα σε δύο ρητούς» και Υπάρχει απάντηση «Υπάρχουν άπειροι α-ριθμοί ανάμεσα σε δύο ρητούς»	4
Π-	Όλες οι απαντήσεις «Υπάρχουν άπειροι α-ριθμοί ανάμεσα σε δύο ρητούς» και Η μορφή των αριθμών επηρεάζει	1
Π	Όλες οι απαντήσεις «Υπάρχουν άπειροι α-ριθμοί ανάμεσα σε δύο ρητούς» και Η μορφή των αριθμών δεν επηρεάζει	0

2.7. Η επίδραση της ευθείας των πραγματικών

Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, προέκυψε η ιδέα να χρησιμοποιηθεί η ευθεία των πραγματικών αριθμών ως εξωτερική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών. Η ευθεία παρουσιάστηκε στους συμμετέχοντες μετά τη συμπλήρωση των απαντήσεων στις ερωτήσεις για την πυκνότητα, προκειμένου να προκληθεί γνωστική σύγκρουση. Καθώς δεν ανήκε στις αρχικές υποθέσεις της Έρευνας Ι, η χρήση της ευθείας δεν έγινε κατά συστηματικό τρόπο και έτσι τα αποτελέσματα δεν έχουν αναλυθεί. Ωστόσο, προέκυψαν ενδείξεις ότι η παρουσία της ευθείας δεν ήταν ικανή να προκαλέσει τη γνωσιακή σύγκρουση που αναμενόταν. Παραθέτουμε κάποια παραδείγματα από τις απαντήσεις των παιδιών.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Η ερευνήτρια σχεδιάζει την ευθεία και ζητά από το παιδί να σημειώσει τους αριθμούς 0,005 και 0,006 σε αυτήν.

«Το 0,005 είναι κάπου εδώ, και δίπλα του το 0,006. Δεν έχουν μεγάλο διάστημα, ώστε να δείχνει ότι υπάρχει αριθμός ανάμεσά τους».

Παράδειγμα 2

Η ερευνήτρια σχεδιάζει την ευθεία και ζητά από το παιδί να σημειώσει τους αριθμούς 0,005 και 0,006 σε αυτήν.

«Δεν υπάρχει άλλος μέσα, γιατί μετά το 0,005 πάει απευθείας το 0,006»

Παράδειγμα 3

Η ερευνήτρια σχεδιάζει την ευθεία και σημειώνει τον αριθμό 0,005 σε αυτήν.

- **Ε:** *Εδώ είναι το 0,005, έτσι;*
- **Μ:** *Ναι*
- **Ε:** *Το 0,006 πού ακριβώς είναι;*
- **Μ:** *Είναι ακριβώς δίπλα του. Και η απόστασή τους είναι αυτή, του πέντε…του 0, 05 και του έξι.*
- **Ε:** *Α, υπάρχει δηλαδή μια απόσταση εδώ_*
- **Μ:***Ναι, αλλά δεν υπάρχει κάποιος αριθμός ανάμεσά τους.*

Παράδειγμα 4

Η ερευνήτρια σχεδιάζει την ευθεία και σημειώνει τους αριθμούς $\frac{3}{8}$ και $\frac{5}{8}$ σε αυτήν.

- **Ε:** *Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσά τους;*
- **Μ:** *Ένας! Είναι το 4/8, γιατί, ανάμεσα στο 3/8 και στο 5/8, έχουν απόσταση…αν κάνουμε μια αφαίρεση, θα δούμε ότι έχουν απόσταση 2/8. Είναι το διάστημα 2/8, ο αριθμός ανάμεσα σε αυτό το διάστημα, αυτά τα 2/8, είναι ένας αριθμός, το 4/8.*

Παράδειγμα 5

Η ερευνήτρια σχεδιάζει την ευθεία και σημειώνει τους αριθμούς 0,001 και 0,01 σε αυτήν.

- **Μ:** *Υπάρχει κάποιος αριθμός, αλλά…βρε παιδί μου…Πώς τα λένε αυτά που είναι εδώ πέρα, τα…* (τραβάει γραμμούλες ανάμεσα στο 0.001 και το 0.01*)…τά 'χω ξεχάσει.*
- **Ε:** *Τα χιλιοστά; Τα εκατοστά; Αυτά λες;*
- **Μ:** *Ναι… Αυτά μου ήρθαν.*
- **Ε :** *Σκέφτηκες το χάρακα;*
- **Μ:** *Ναι*

Το παιδί που αναφέρεται στο παράδειγμα 5 είναι το μόνο από όσα ρωτήθηκαν που άλλαξε την αρχική του απάντηση. Στην ερώτηση **Π1** είχε απαντήσει ότι δεν υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στους δεδομένους αριθμούς, γιατί οι αριθμοί 0,001 και 0,01 είναι «ίδιοι».

2.8. Συζήτηση των αποτελεσμάτων

Βάσει του γενικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγή, και ειδικότερα του πλαισίου της Vosniadou (1994, 2001a, 2002)προβλέφτηκε ότι υπάρχουν ιδιότητες των ρητών, οι οποίες υποστηρίζονται από την προηγούμενη γνώση των παιδιών για τους φυσικούς αριθμούς, και άρα τα παιδιά δεν αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες στην εκμάθησή τους. Αντίθετα, υπάρχουν ιδιότητες των ρητών που έρχονται σε αντίθεση με την αρχική «θεωρία» των παιδιών για τους αριθμούς. Σε αυτήν την περίπτωση, προβλέφτηκε ότι η κατανόηση θα είναι δύσκολη, σταδιακή και θα συνοδεύεται από παρανοήσεις, οι οποίες εξηγούνται ως συνθετικά μοντέλα. Τα αποτελέσματα της Έρευνας Ι ήταν σύμφωνα με τις υποθέσεις μας.

2.8.1. Ύπαρξη αντίστροφου και αντίθετου στους ρητούς

Όσον αφορά στις ερωτήσεις για τις αλγεβρικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, τα παιδιά δεν ήταν πράγματι εξοικειωμένα με τους ζητούμενους αριθμούς, ιδιαίτερα στην περίπτωση του $\frac{1}{0{,}02506}$. Παρά το γεγονός αυτό και παρά το γεγονός ότι δεν ήταν πάντα σε θέση να αναφέρουν σωστά τον αντίστροφο ή τον αντίθετο των δεδομένων αριθμών, τα παιδιά αντιμετώπισαν με ευκολία το ζήτημα της ύπαρξης των ζητούμενων αριθμών. Συγκεκριμένα, εμφάνισαν την ισχυρή τάση να προϋποθέτουν ότι οι ζητούμενοι αριθμοί υπάρχουν και στη συνέχεια να προσπαθούν να βρουν ποιοι ακριβώς είναι. Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, αυτό μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι η προηγούμενη εμπειρία και εξοικείωσή των παιδιών με τις αντίστοιχες ιδιότητες τους υποστηρίζει στην απόδοση των αντίστοιχων ιδιοτήτων σε μη φυσικούς αριθμούς, ακόμα και όταν δεν είναι εξοικειωμένα με τη μορφή τους και παρά τις δυσκολίες που συχνά συνοδεύουν την κατανόηση των ρητών αριθμών (Hartnett and Gelman, 1998; Vosniadou, 2002, 2001a,1994b)

2.8.2. Κατανόηση για τη δομή του συνόλου των ρητών: Δυσκολίες και ενδιάμεσα στάδια κατανόησης

Όσον αφορά στις ερωτήσεις για την πυκνότητα του συνόλου των ρητών, τα παιδιά αντιμετώπισαν σημαντικές δυσκολίες. Σε κάθε μία από τις ερωτήσεις **Π1, Π2, Π3**, η πλειοψηφία των παιδιών απάντησε ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών ανάμεσα στους δεδομένους αριθμούς. Οι απαντήσεις των παιδιών αντανακλούν, αφενός την τάση τους να ομαδοποιούν τους αριθμούς, αφετέρου τη θεμελιώδη προϋπόθεση της διακριτότητας (Merenluoto and Lehtinen, 2002; Vamvakoussi and Vosniadou, in press, 2003, 2002; Vosniadou, 2002, 2001a,1994b). Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά που απαντούν, για παράδειγμα, ότι ανάμεσα στους αριθμούς 0,005 και 0,006 δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί, αναφέρονται σε ένα υποσύνολο των ρητών, το οποίο διατηρεί την ιδιότητα της διακριτότητας των φυσικών. Στη δεδομένη περίπτωση, ομαδοποιούνται οι δεκαδικοί αριθμοί με 3 δεκαδικά ψηφία. Το ίδιο ισχύει και για τα παιδιά που απαντούν ότι ανάμεσα στο $\frac{3}{8}$ και το $\frac{5}{8}$ υπάρχει μόνο ο αριθμός $\frac{4}{8}$, τα οποία αναφέρονται στο υποσύνολο των ομώνυμων κλασμάτων με παρονομαστή 8. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση του μοναδικού παιδιού που απάντησε ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί ανάμεσα στους δεδομένους αριθμούς, για όλες τις ερωτήσεις **Π1, Π2, Π3**. Το παιδί αυτό φάνηκε να ξεπερνά, κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, την αρχική του δέσμευση στην ιδέα της διακριτότητας, διορθώνοντας την πρώτη από τις απαντήσεις του, χωρίς την παρέμβαση της ερευνήτριας. Ωστόσο, όπως είναι φανερό από την απάντησή του στην ερώτηση **Π4,** το παιδί δεν αναφέρεται στο σύνολο των ρητών ως «ομοιογενές» σύνολο. Αντίθετα, φαίνεται να ομαδοποιεί τους αριθμούς σε δεκαδικούς και κλάσματα, δεδομένου ότι θεωρεί πως είναι απαραίτητο να μετατρέψει τους αριθμούς $\frac{5}{6}$ και 8.5 στην ίδια μορφή, πριν απαντήσει ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί ανάμεσά τους (και αυτό, ενώ γνωρίζει ότι οι δεδομένοι αριθμοί δεν είναι ίσοι).

Τα ευρήματα της έρευνας είναι σύμφωνα και με την πρόβλεψη ότι κατά την ανάπτυξη της έννοιας της πυκνότητας, υπάρχουν ενδιάμεσα στάδια κατανόησης. Πραγματικά, η πλειοψηφία των παιδιών και, συγκεκριμένα, τα παιδιά που ανήκουν στην κατηγορία **Δ**(ιακριτότητα), φάνηκε να χρησιμοποιεί με συνέπεια την αρχική «θεωρία» των φυσικών αριθμών, προκειμένου να αντιμετωπίσει τα ζητούμενα. Τα παιδιά που ανήκουν στις κατηγορίες **Δ+, Π/Δ, Π-** βρίσκονται σε ενδιάμεσα στάδια κατανόησης. Τα παιδιά στην κατηγορία **Δ+,** χρησιμοποιούν τη γνώση που έχουν π.χ. για τους δεκαδικούς αριθμούς, για να συμπεράνουν ότι ανάμεσα στο 0,005 και το 0,006, βρίσκονται οι αριθμοί 0,0051, 0,0052, ...,0,0059. Ας παρατηρηθεί ότι, παρά το γεγονός ότι έχουν κάνει το πρώτο βήμα για να συμπεράνουν την ύπαρξη άπειρων αριθμών ανάμεσα στους δεδομένους αριθμούς, το δεύτερο βήμα δεν είναι αυτονόητο. Τα παιδιά της κατηγορίας **Π/Δ**, απαντούν με διαφορετικό τρόπο, για διαφορετικές ομάδες αριθμών. Για παράδειγμα, το παιδί που αναφέρεται στο παράδειγμα 4 (2.6.2.1) ισχυρίζεται ότι ανάμεσα στα κλάσματα υπάρχουν άπειροι αριθμοί, ενώ ανάμεσα στους δεκαδικούς υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών. Μάλιστα, εκδηλώνει ξεκάθαρα τον τρόπο με τον οποίο ομαδοποιεί τους α-ριθμούς και σκέπτεται για κάθε ομάδα με διαφορετικό τρόπο. Συγκεκρι-μένα, ισχυρίζεται ότι, ανάμεσα στους 0,001 και 0,01 υπάρχει πεπερασμέ-νο πλήθος δεκαδικών, ενώ αν οι ίδιοι αριθμοί μετατραπούν σε κλάσματα, έχουν άπειρους ενδιάμεσους αριθμούς.

2.8.3. Κατανόηση για τη δομή του συνόλου των ρητών: Συνθε-τικά μοντέλα

Μέχρι την Γ΄ Γυμνασίου, τα παιδιά έχουν ήδη έρθει σε επαφή, μέσω και της τυπικής εκπαίδευσης, με πολλές πληροφορίες που αφορούν στους ρητούς αριθμούς. Οι πληροφορίες αυτές φιλτράρονται διαμέσου της προ-ηγούμενης γνώσης τους για του φυσικούς αριθμούς, προκαλώντας πα-ρανοήσεις (Chi, 1992; Hiebert and Wearne, 1986; Fischbein, Deri, Nello, . & Marino, 1985; Σταφυλίδου, 2001; Stafylidou & Vosniadou, in press; Moskal and Magone, 2000).

Στην προσπάθειά τους να αντιμετωπίσουν τα ζητούμενα, τα παιδιά που συμμετείχαν στην Έρευνα Ι, ανακάλεσαν και επικαλέστηκαν διάφορες γνώσεις για τους ρητούς αριθμούς, οι οποίες δεν ανήκουν στη αρχική «θεωρία» για το φυσικό αριθμό. Για παράδειγμα, η γνώση ότι «ο αριθμός 0,0051 είναι μεγαλύτερος από τον 0,005 και μικρότερος από τον 0,006» που φαίνεται να ενεργοποιούν τα παιδιά στην κατηγορία **Δ+.** Η γνώση ότι ένα κλάσματα μπορεί να γραφτεί με «πολλούς διαφορετικούς τρόπους», που δηλώνει το παιδί στο παράδειγμα 6 (2.6.2.1). Το παιδί αυτό, προσπαθώ-ντας να εντάξει την πληροφορία στην αρχική «θεωρία» του αριθμού, βά-σει της οποίας, κάθε αριθμός έχει μοναδική συμβολική αναπαράσταση, καταλήγει να θεωρεί ότι κάθε ένα από τα ισοδύναμα κλάσματα είναι δι-αφορετικός αριθμός. Επίσης, η γνώση ότι ένας δεκαδικός αριθμός μπορεί να μετατραπεί σε κλάσμα, την οποία χρησιμοποιεί το παιδί του παρα-δείγματος 4 (2.6.2.1). Ενεργοποιώντας τις γνώσεις αυτές –κάποιες εκ των οποίων είναι ήδη ερμηνευμένες στη βάση της αρχικής «θεωρίας» για τον αριθμό- και δεσμευμένα από τη θεμελιώδη προϋπόθεση της διακριτότη-τας και την αρχή της ομαδοποίησης, τα παιδιά των κατηγοριών **Δ+, Π/Δ** και **Π-** καταλήγουν σε εναλλακτικές περιγραφές για τη δομή των ζητού-μενων διαστημάτων των ρητών.

Για παράδειγμα, τα παιδιά της κατηγορίας **Δ+** αναφέρονται σε υποσύνο-λα των ρητών της μορφής 0,0051, 0,0052,...,0,0059 ή $\frac{3,1}{4},\frac{3,2}{4},...,\frac{3,9}{4}$ και αρκού-νται σε αυτά. Το παιδί του παραδείγματος 4 (2.6.2.1)γνωρίζει ότι μπορεί να μετατρέψει τα άκρα 0,001 και 0,01 του δεδομένου διαστήματος σε κλάσματα, αλλά αναφέρεται στα διαστήματα (0,001, 0,01) και $(\frac{1}{1000},\frac{1}{100})$ σαν να έχουν διακριτή και πυκνή δομή, αντίστοιχα. Το παιδί στην κατηγορία **Π-**, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι ένα διάστημα με άκρα δεκαδικούς αριθμούς είναι πυκνό και ένα διάστημα με άκρα κλασματικούς αριθμούς είναι πυκνό, αλλά δεν μπορεί να συμπεράνει άμεσα ότι ένα διάστημα με άκρα έναν δεκαδικό και ένα κλασματικό αριθμό είναι επίσης πυκνό. Ενδεχομένως, θεωρεί ότι ανάμεσα στους δεκαδικούς υπάρχουν άπειροι αριθμοί σε δεκαδική μορφή, ενώ ανάμεσα στα κλάσματα υπάρχουν άπειροι αριθμοί σε κλασματική μορφή.

Με βάση τις παρατηρήσεις αυτές, οι εναλλακτικές περιγραφές των διαστημάτων των ρητών αριθμών, τις οποίες αναφέρουν τα παιδιά, είναι συνθετικά μοντέλα (Vosniadou, 1992, 1994b) που αντανακλούν την προσπάθειά τους να εντάξουν τις γνώσεις τους για τους ρητούς στο προϋπάρχον πλαίσιο της γνώσης τους για τους φυσικούς αριθμούς.

2.9. Μετά την Έρευνα Ι: Καινούργιες ιδέες και μεθοδολογικά ζητήματα.

Από την Έρευνα Ι στηρίχτηκε επαρκώς η υπόθεσή μας, ότι η κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών προαπαιτεί εννοιολογική αλλαγή. Ωστόσο, θεωρήθηκε σημαντικό να στηριχτεί η υπόθεση και με έρευνα σε μεγαλύτερο δείγμα παιδιών της ίδιας ηλικίας. Επιπλέον, θεωρήθηκε σημαντική η διερεύνηση των δυσκολιών που συνοδεύουν την ανάπτυξη της έννοιας της πυκνότητας σε παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας, προκειμένου να εξεταστεί κατά πόσο ισχύει η πρόβλεψη του θεωρητικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής, ότι οι παρανοήσεις που οφείλονται σε ισχυρούς γνωσιακούς περιορισμούς είναι ανθεκτικές στην επίδραση της ηλικίας και την παράλληλη επίδραση της συνεχιζόμενης εκπαίδευσης.

Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, ένα εξωτερικό αναπαραστασιακό μέσο των αριθμών, η ευθεία των πραγματικών, δεν είχε την αναμενόμενη επίδραση. Το ζήτημα αυτό χρήζει καλύτερης διερεύνησης. Επίσης, κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, παρατηρήθηκε ότι τα παιδιά που κατατάχτηκαν στην κατηγορία **Δ** εμφάνισαν μεγάλη βεβαιότητα για τις απαντήσεις τους, σε αντίθεση με τα παιδιά των άλλων κατηγοριών, τα οποία επέδειξαν μεγαλύτερο προβληματισμό και λιγότερη βεβαιότητα για τις απαντήσεις τους. Η παρατήρηση αυτή είναι συμβατή με παρατηρήσεις των Merenluoto και Lehtinen (2003), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι το φαινόμενο αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα παιδιά που βρίσκονται σε πολύ αρχικό στάδιο κατανόησης μιας έννοιας, δεν αμφισβητούν τις προΰποθέσεις του αρχικού επεξηγηματικού τους πλαισίου. Παρά το γεγονός ότι, η αίσθηση της βεβαιότητας μπορεί να οφείλεται και σε ιδιοσυγκρασιακούς λόγους –για παράδειγμα, το παιδί του παραδείγματος 4, κατά τη διάρκεια της συνέντευξης επέδειξε μεγάλη αυτοπεποίθηση και σιγουριά για τις ικανότητές του στα μαθηματικά- είναι ενδιαφέρον να διερευνηθεί κατά πόσο η βεβαιότητα των παιδιών για τις απαντήσεις τους σχετίζεται με το στάδιο κατανόησης στο οποίο βρίσκονται.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, διαπιστώθηκε η αδυναμία της διατύπωσης της ερώτησης $\mathbf{\Pi}_{\varepsilon}$ να διαχωρίσει τα παιδιά που πιστεύουν ότι υπάρχει ο επόμενος ενός ρητού αριθμού, αλλά δεν μπορεί να προσδιοριστεί γιατί, για παράδειγμα, έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, από αυτούς που πιστεύουν ότι δεν υφίσταται επόμενος ενός ρητού αριθμού. Είναι φανερό ότι η $\mathbf{\Pi}_{\varepsilon}$ χρήζει πιο λεπτομερούς διατύπωσης.

Τέλος, υπό το φως των ευρημάτων, θεωρήθηκε ότι η λέξη «ανάμεσα» στο πλαίσιο της φράσης «αριθμοί που βρίσκονται *ανάμεσα* σε δύο δεδομένους αριθμούς» ενδεχομένως ενισχύει την τάση των παιδιών να ομαδοποιούν τους αριθμούς. Στη θέση της, προκρίθηκε η έκφραση «αριθμοί, οι οποίοι να είναι μεγαλύτεροι από .... και συγχρόνως μικρότεροι από...».

Οι παρατηρήσεις αυτές λήφθηκαν υπόψη κατά το σχεδιασμό της Έρευνας ΙΙ.

3. Κεφάλαιο τρίτο: Έρευνα ΙΙ

Η κεντρική υπόθεση της παρούσας εργασίας είναι ότι η κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών αριθμών προϋποθέτει εννοιολογική αλλαγή. Στη βάση της κεντρικής υπόθεσης και των ευρημάτων από την Έρευνα Ι, σχεδιάστηκε η Έρευνα ΙΙ.

3.1. Υποθέσεις και σχεδιασμός της Έρευνας ΙΙ

Υπενθυμίζεται ότι, στο πλαίσιο της κεντρικής υπόθεσης της παρούσας εργασίας, οι επιπλέον υποθέσεις της Έρευνας ΙΙ αφορούν :

- Την επίδραση της ηλικίας, στην κατανόηση της πυκνής δομής του συνόλου των ρητών.
- Την επίδραση του τύπου του ερωτηματολογίου (ανοικτού/κλειστού) στην επίδοση των συμμετεχόντων
- Την επίδραση της ευθείας των πραγματικών, στον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά αναφέρονται στη δομή των ρητών.
- Τη συσχέτιση του επιπέδου κατανόησης των παιδιών για την πυκνότητα, με τη βεβαιότητα που τα ίδια τα παιδιά αισθάνονται για τις απαντήσεις τους.
- Τις διαφορές λόγω φύλου στην επίδοση των συμμετεχόντων.

Προκειμένου να συγκεκριμενοποιηθούν οι υποθέσεις, προαναφέρεται ότι, σύμφωνα με το σχεδιασμό της Έρευνας ΙΙ, οι συμμετέχοντες είναι παιδιά της Γ΄ τάξης του Γυμνασίου και της Β΄ τάξης του Λυκείου. Όπως περιγράφεται αναλυτικά στην παράγραφο **3.3.1**, τα ερευνητικά εργαλεία είναι ερωτηματολόγια ανοικτού και κλειστού τύπου. Οι ερωτήσεις και στους δύο τύπους ερωτηματολογίων διακρίνονται σε ερωτήσεις στις οποίες παρουσιάζεται η ευθεία των πραγματικών αριθμών και σε ερωτήσεις, στις οποίες δεν εμφανίζεται η ευθεία των πραγματικών αριθμών. Στο τέλος κάθε ερώτησης, τα παιδιά καλούνται να αυτο-αξιολογηθούν, ως προς τη βεβαιότητα με την οποία απάντησαν την ερώτηση. Τέλος, η συμπλήρωση των ερωτηματολογίων γίνεται σε δύο φάσεις: Στην πρώτη φάση οι μισοί συμμετέχοντες λαμβάνουν και απαντούν τις ερωτήσεις, στις οποίες εμφανίζεται η ευθεία των πραγματικών αριθμών, ενώ οι υπόλοιποι τις ερωτήσεις στις οποίες δεν εμφανίζεται η ευθεία των πραγματικών (βλ. παράγραφο **3.4**). Στη δεύτερη φάση, αποσύρονται οι αρχικές ερωτήσεις και τα υποκείμενα λαμβάνουν και απαντούν τις υπόλοιπες ερωτήσεις.

Με δεδομένες τις διευκρινίσεις αυτές και στη βάση της συζήτησης της παραγράφου **1.2.2,** οι υποθέσεις συγκεκριμενοποιούνται ως εξής:

- Τα παιδιά της Β' Λυκείου έχουν καλύτερη επίδοση από τα παιδιά της Γ' Γυμνασίου.
- Τα έχουν καλύτερη επίδοση στις ερωτήσεις με τη παρουσία της ευθείας, σε σύγκριση με την επίδοση στις ερωτήσεις χωρίς την παρουσία της ευθείας.
- Τα παιδιά που δίνουν τις πιο «αφελείς» απαντήσεις, έχουν συχνά μεγαλύτερη βεβαιότητα από τα παιδιά που δίνουν πιο εκλεπτυσμένες.
- Τα αγόρια έχουν καλύτερη επίδοση στα ερωτηματολόγια ανοικτού τύπου, σε σύγκριση με τα κορίτσια.

Σύμφωνα με την κεντρική υπόθεση της παρούσας εργασίας και το θεωρητικό πλαίσιο που έχει υιοθετηθεί, προβλέπεται ότι, τόσο για τα παιδιά στη Γ' Γυμνασίου, όσο και για τα παιδιά στη Β' Λυκείου, τα έργα για την πυκνότητα παρουσιάζουν δυσκολίες. Πιο συγκεκριμένα, προβλέπεται ότι:

- Θα διαγνωσθούν ενδιάμεσα στάδια κατανόησης της πυκνής δομής των ρητών.
- Τα ενδιάμεσα στάδια κατανόησης συνοδεύονται από παρανοήσεις. Οι παρανοήσεις αυτές αντανακλούν τη θεμελιώδη προϋπόθεση της διακριτότητας, καθώς και την τάση ομαδοποίησης των αριθμών και μπορούν να εξηγηθούν ως συνθετικά μοντέλα.

3.2. Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 306 μαθητές από τη Γ' Γυμνασίου και την Β' Λυκείου. Οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου προέρχονται από δύο σχολεία, ένα στην περιοχή του Αλίμου και ένα στην περιοχή του Κορυδαλλού, στην Αττική. Οι μαθητές της Γ' Λυκείου προέρχονται επίσης από δύο σχολεία, ένα στην περιοχή του Αλίμου και ένα στην περιοχή του Ιλίου, στην Αττική. Κατά την αξιολόγηση των ερωτηματολογίων, θεωρήθηκαν άκυρα 5 από τα ερωτηματολόγια ανοικτού τύπου, 3 στα οποία εμφανίστηκε μεγάλος αριθμός αναπάντητων ερωτήσεων και 2 στα οποία εμφανίστηκαν απαντήσεις άσχετες με το θέμα. Έτσι, απέμειναν συνολικά 301 ερωτηματολόγια. Τα χαρακτηριστικά του δείγματος παρουσιάζονται συνοπτικά στον Πίνακα 3-1.

Πίνακας 3-1: Χαρακτηριστικά του δείγματος στην έρευνα ΙΙ

	Κορίτσια	Αγόρια	Δεν δήλωσαν φύλο	
Γ' Γυμνασίου	69	82	13	164
Β' Λυκείου	68	60	9	137

Σύνολο	137	142	22	301

3.3. Υλικά

3.3.1. Τύποι ερωτηματολογίων

Σύμφωνα με το σχεδιασμό μας, κατασκευάστηκαν ερωτηματολόγια ανοιχτού και κλειστού τύπου (**Α/Κ**), τα οποία παρουσιάζονται στο παράρτημα .... . Μια δεύτερη διαφοροποίηση των ερωτηματολογίων προκύπτει από 6 από τις ερωτήσεις που αφορούν την πυκνότητα. Πρόκειται για τις ερωτήσεις $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$, $Π_4$, $Π_5$, $Π_6$[3], οι οποίες αφορούν στον προσδιορισμό του πλήθους και του είδους των αριθμών σε ένα δεδομένο διάστημα. Οι ερωτήσεις αυτές διαφοροποιούνται από την παρουσία ή όχι της ευθείας των πραγματικών αριθμών, ως βοηθητικό εποπτικό μέσο. Οι ερωτήσεις $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$ θα χαρακτηρίζονται στο εξής ως ερωτήσεις **Χε (**χωρίς ευθεία**),** ενώ οι ερωτήσεις $Π_4$, $Π_5$, $Π_6$ θα χαρακτηρίζονται στο εξής ως ερωτήσεις **Με** (με ευθεία). Εκτός από τη συνθήκη (**Α/Κ**), η συνθήκη που διαφοροποιεί τον τύπο των ερωτηματολογίων προκύπτει από τη σειρά κατά την οποία επιδόθηκαν στους συμμετέχοντες οι ερωτήσεις **Με** και **Χε.** Πιο συγκεκριμένα, σε ένα μέρος των συμμετεχόντων επιδόθηκαν πρώτα οι ερωτήσεις **Με**, και ακολούθησαν οι ερωτήσεις **Χε.** Στους υπόλοιπους οι ερωτήσεις **Με** και **Χε** επιδόθηκαν με την αντίστροφη σειρά. Προέκυψαν τελικά 4 διαφορετικοί τύποι ερωτηματολογίων, οι οποίοι παρουσιάζονται στον πίνακα.... Στον ίδιο πίνακα εμφανίζονται και οι κωδικοί οι οποίοι αντιστοιχούν σε κάθε τύπο ερωτηματολογίου: **εΑ** (ευθεία στην πρώτη φάση:(Με, Χε)**)** και **εΒ** (ευθεία στη δεύτερη φάση: (Χε,Με)).

Πίνακας 3-2 Τύποι ερωτηματολογίων στην Έρευνα Ι.

	(Με, Χε)	(Χε, Με)
Ανοιχτό	Α/ε**Α**	Α/ε**Β**
Κλειστό	Κ/ε**Α**	Κ/ε**Β**

3.3.2. Σχεδιασμός του περιεχομένου των ερωτηματολογίων

Τα ερωτηματολόγια κλειστού και ανοικτού τύπου περιλαμβάνουν 3 ζευγάρια ερωτήσεων, κάθε ένα από τα οποία αφορά αριθμούς που μοιράζονται κάποια κοινά χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα :

[3] Χρησιμοποιήθηκε η ίδια ονομασία ($Π_1$, $Π_2$, $Π_3$, $Π_4$, $Π_5$, $Π_6$,Ε) για τις αντίστοιχες ερωτήσεις στα ανοιχτά και στα κλειστά ερωτηματολόγια. Η ονομασία των ερωτήσεων δεν είναι αντίστοιχη της ονομασίας των ερωτήσεων στο ερωτηματολόγιο της Έρευνας Ι.

α. Οι ερωτήσεις $Π_1$, $Π_4$ αφορούν δεκαδικούς αριθμούς με το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων (0,005, 0,006 και 0,1, 0,2 , αντίστοιχα).

β. Οι ερωτήσεις $Π_2$, $Π_5$ αφορούν ομώνυμα κλάσματα ($\frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ και $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, αντίστοιχα).

γ. Οι ερωτήσεις $Π_3$, $Π_6$ αφορούν αριθμούς παρόμοιας μορφής, με διαφορετικό πλήθος δεκαδικών ψηφίων (0,001 , 0,01 και 0,01 , 0,1, αντίστοιχα.)

Ο σχεδιασμός των ερωτηματολογίων κλειστού τύπου προβλέπει την εμφάνιση της «σωστής» απάντησης ανάμεσα στις πολλαπλές επιλογές. Συγκεκριμένα, σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$ θεωρείται η απάντηση «Υπάρχουν άπειροι αριθμοί: απλοί δεκαδικοί, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, κλάσματα, ρίζες». Θεωρήθηκε ότι η επιλογή της συγκεκριμένης απάντησης από κάποιο παιδί πιστοποιεί ότι το παιδί έχει υπερβεί, τόσο τη θεμελιώδη προϋπόθεση της διακριτότητας, όσο και τον περιορισμό της ομαδοποίησης των αριθμών σύμφωνα με την αναπαράστασή τους. Ιδιαίτερη δυσκολία προέκυψε για τη διατύπωση μιας επιλογής, η οποία να διακρίνει τα παιδιά που θεωρούν ότι ανάμεσα στους δεκαδικούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι αριθμοί σε δεκαδική μορφή και ανάμεσα στα κλάσματα υπάρχουν άπειροι αριθμοί σε κλασματική μορφή, κατ' αντιστοιχία με τα παιδί της κατηγορίας Π-, στην Έρευνα Ι. Η δυσκολία έγκειται στο γεγονός ότι, η πρόταση «ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχουν άπειροι δεκαδικοί» είναι, από μαθηματική άποψη, ορθή. Παρά το γεγονός ότι η συνειδητοποίηση πως με τον όρο «δεκαδικοί» καλύπτονται στην πραγματικότητα όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι εξαιρετικά εκλεπτυσμένη, ακόμα και για τα παιδιά της Β' Λυκείου, δεν μπορεί να αποκλειστεί η περίπτωση να έχει επιτύχει κάποιο παιδί αυτή τη βαθιά κατανόηση. Το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε με την τακτική της ελεύθερης επιλογής ανάμεσα στις πολλαπλές επιλογές. Αξίζει να αναφερθεί ότι 2 παιδιά της Β' Λυκείου πράγματι διατύπωσαν την άποψη ότι «ανάμεσα στους δεκαδικούς υπάρχουν άπειροι δεκαδικοί και ανάμεσα στα κλάσματα υπάρχουν άπειροι δεκαδικοί, γιατί όλοι οι αριθμοί μπορούν να γίνουν δεκαδικοί». Ένα από τα δύο παιδιά αναφέρθηκε καθαρά και στους ρητούς και στους άρρητους αριθμούς.

3.4. Διαδικασία

Σε κάθε ένα από τα τμήματα των σχολείων που συμμετείχαν στην έρευνα επιδόθηκαν και τα 4 ειδών ερωτηματολόγια (Α/ε**Α**, Α/ε**Β**, Κ/ε**Α**, Κ/ε**Β**), με εξαίρεση τα τμήματα από το Γυμνάσιο Κορυδαλλού, στο οποίο επιδόθηκαν δύο ειδών ερωτηματολόγια (Α/ε**Β**, Κ/ε**Β**).

Τα ερωτηματολόγια επιδόθηκαν από τον ίδιο ερευνητή, εκτός από την περίπτωση του Λυκείου Ιλίου, στο οποίο τα ερωτηματολόγια επέδωσε διαφορετικό άτομο, καθηγήτρια στο ίδιο σχολείο. Στην περίπτωση αυτή, η καθηγήτρια ακολούθησε τις οδηγίες που περιγράφονται στην επόμενη παράγραφο.

Τα ερωτηματολόγια επιδόθηκαν στα παιδιά στο περιβάλλον της τάξης του σχολείου τους. Η ερευνήτρια συστήθηκε και ανέφερε τους λόγους για τους οποίους πραγματοποιείται η έρευνα, συγκεκριμένα για να διερευνήσει τις ιδέες τους σχετικά με τους αριθμούς. Διάβασε τις οδηγίες που αναφέρονται στην αρχική σελίδα του ερωτηματολογίου και έδωσε έμφαση στο γεγονός ότι ο όρος «αριθμός» στις επερχόμενες ερωτήσεις αναφέρεται σε στοιχεία του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Για την περίπτωση των ερωτήσεων κλειστού τύπου (όλες οι ερωτήσεις στα ερωτηματολόγια τύπου **Κ**, οι ερωτήσεις ... στα ερωτηματολόγια τύπου **Α**), η ερευνήτρια απέτρεψε τα παιδιά από το να προσπαθήσουν να ανακαλύψουν τη σωστή απάντηση στις προτεινόμενες επιλογές. Συγκεκριμένα, διευκρίνισε ότι οι επιλογές προέκυψαν από απαντήσεις παιδιών της ίδιας με τους συμμετέχοντες ηλικίας. Προέτρεψε τα παιδιά να μη διστάσουν να διατυπώσουν τις προσωπικές τους απόψεις, στην περίπτωση που δεν συμφωνούν εντελώς με καμία από τις προτεινόμενες επιλογές. Για την περίπτωση των ερωτήσεων ανοιχτού τύπου, η ερευνήτρια ζήτησε από τα παιδιά να προσπαθήσουν να είναι όσο το δυνατόν πιο σαφή στις απαντήσεις τους. Πιο συγκεκριμένα, για τις ερωτήσεις $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$, $Π_4$, $Π_5$, $Π_6$, η ερευνήτρια εξήγησε στα παιδιά ότι είναι στην επιλογή τους να προσδιορίσουν –αν θεωρούν ότι μπορούν- πόσοι αριθμοί βρίσκονται στο δεδομένο διάστημα, να τους αναφέρουν –αν θεωρούν ότι μπορούν- ή να τους περιγράψουν. Ζήτησε επίσης αιτιολόγηση των απαντήσεων.

Η συμπλήρωση των ερωτηματολογίων έγινε στη διάρκεια μιας σχολικής ώρας, με τη δυνατότητα των παιδιών να αξιοποιήσουν και την ώρα του διαλείμματος, εφόσον το επιθυμούσαν. Καθ’ όλη τη διάρκεια της ώρας, η ερευνήτρια ήταν στη διάθεση των παιδιών για οποιαδήποτε ερώτηση ή διευκρίνιση.

Η συμπλήρωση των ερωτηματολογίων έγινε σε δύο φάσεις: Τα παιδιά που έλαβαν ερωτηματολόγιο τύπου **εΑ,** απάντησαν στην Α' φάση τις ερωτήσει **Με.** Τα παιδιά που έλαβαν ερωτηματολόγιο τύπου **εΒ,** απάντησαν στην Α' φάση τις ερωτήσει **Χε.** Με τη συμπλήρωση των ερωτήσεων της Α' φάσης, κάθε ένα παιδί παρέδωσε το φύλλο με τις απαντήσεις του και πήρε τις αντίστοιχες ερωτήσεις της Β' φάσης.

3.5. Επεξεργασία των δεδομένων

3.5.1. Βαθμολόγηση σε επίπεδο ερώτησης

Στα επόμενα, οι κωδικοί «Π», «Αδ» και «Α» αναφέρονται στις απαντήσεις «*Υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών*», «*Υπάρχει αδιευκρίνιστο πλήθος αριθμών*» και «*Υπάρχουν άπειροι αριθμοί*» αντίστοιχα, στις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$. Η απάντηση «Αδ» προέκυψε στα ανοιχτά ερωτηματολόγια, στις περιπτώσεις στις οποίες τα υποκείμενα δήλωσαν υπάρχουν αριθμοί σε κάποιο δεδομένο διάστημα, επιλέγοντας την απάντηση «Ναι», χωρίς να δίνουν άλλη πληροφορία σχετικά με το πλήθος ή το είδος των αριθμών αυτών. Κατά τη βαθμολόγηση, στην απάντηση «Αδ» αποδόθηκε μεγαλύτερος βαθμός από την απάντηση «Π» και μικρότερος από την απάντηση «Α». Η απόφαση αυτή στηρίχτηκε στο εξής σκεπτικό:

- Το παιδί, το οποίο δεν είναι σε θέση να χαρακτηρίσει το πλήθος των περιεχομένων σε ένα διάστημα αριθμών ως «άπειρο», βαθμολογείται με μικρότερο βαθμό από το παιδί, το οποίο χρησιμοποιεί την έκφραση αυτή.
- Το παιδί που δεν μπορεί να βρει παραδείγματα αριθμών σε ένα δεδομένο διάστημα, αλλά παρ' όλ' αυτά θεωρεί δεδομένη την ύπαρξή τους, βαθμολογείται με μεγαλύτερο βαθμό από το παιδί που θεωρεί ότι δεν υπάρχουν αριθμοί στο διάστημα αυτό.

3.5.1.1. Βαθμολόγηση των ερωτηματολογίων τύπου Α

Στην περίπτωση αυτή, οι απαντήσεις σε κάθε μία ερώτηση ομαδοποιήθηκαν σε 4 κατηγορίες. Με 0 βαθμολογήθηκαν οι μη κατατάξιμες απαντήσεις. Οι απαντήσεις «Π» ομαδοποιήθηκαν και βαθμολογήθηκαν με 1. Οι απαντήσεις «Αδ» βαθμολογήθηκαν με 2, βάσει του σκεπτικού που περιγράφτηκε παραπάνω. Οι απαντήσεις «Α» βαθμολογήθηκαν με 3.

3.5.1.2. Βαθμολόγηση των ερωτηματολογίων τύπου Κ

Στην περίπτωση αυτή, οι απαντήσεις σε κάθε μία από τις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$ ομαδοποιήθηκαν σε 3 κατηγορίες. Οι απαντήσεις «Π» αποτέλεσαν μια κατηγορία και βαθμολογήθηκαν με 1, ενώ οι απαντήσεις «Α» αποτέλεσαν μια δεύτερη κατηγορία και βαθμολογήθηκαν με 2. Με 0 βαθμολογήθηκαν οι μη κατατάξιμες απαντήσεις. Ειδικά για τις ερωτήσεις $Π_3$ και $Π_6$, με 0 βαθμολογήθηκε και η απάντηση «Η ερώτηση δεν έχει νόημα για τους συγκεκριμένους αριθμούς». Η βαθμολόγηση για κάθε μία από τις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$ παρουσιάζεται αναλυτικά στον πίνακα ....

3.5.2. Βαθμολόγηση σε επίπεδο ομάδας ερωτήσεων

Προκειμένου να συγκριθούν τα δεδομένα από τα ανοιχτά και τα κλειστά ερωτηματολόγια, τα υποκείμενά κατατάχθηκαν σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες, με βάση τις απαντήσεις τους σε όλες τις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$.

Στην πρώτη κατηγορία, ομαδοποιήθηκαν τα υποκείμενα που έδωσαν την απάντηση «Π» και στις έξι ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$. Στην ίδια κατηγορία ομαδοποιήθηκαν και τα υποκείμενα, τα οποία έδωσα την απάντηση «Ο» σε 2, το πολύ, ερωτήσεις από τις $Π_1$-$Π_6$ και την απάντηση «Π» σε όλες τις υπόλοιπες. Στην τρίτη κατηγορία ομαδοποιήθηκαν τα υποκείμενα που έδωσαν την απάντηση «Α» σε κάθε μία από τις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$. Στην ενδιάμεση κατηγορία, εντάχθηκαν όλες οι υπόλοιπες κατηγορίες απαντήσεων. Στον πίνακα 3-3 περιγράφονται οι τρεις κατηγορίες, σε σχέση με τις απαντήσεις στις επιμέρους ερωτήσεις.

Πίνακας 3-3:Απαντήσεις στις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$ και αντίστοιχες κατηγορίες

Κατηγορία	Απαντήσεις στις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$
1	{Π, Π, Π, Π, Π, Π} ή {Π, Π, Π, Π, Π,0} ή {Π, Π, Π, Π,0,0}
2	{α, β, γ, δ, ε, ζ, η } με α, β, γ, δ, ε, ζ, η ∈ {Π,Δ,Α,Ο}
3	{Α, Α, Α, Α, Α, Α}

Π: Υπάρχει **πεπερασμένο** πλήθος αριθμών ανάμεσα στους δύο αριθμούς (≥ 0)
Αδ: Υπάρχει **αδιευκρίνιστο** πλήθος αριθμών ανάμεσα στους δύο αριθμούς
Α: Υπάρχει **άπειρο** πλήθος αριθμών ανάμεσα στους δύο αριθμούς

Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη κατηγορία ως «πάντα Π», «Ενδιάμεση» , «Πάντα Α» αντίστοιχα.

3.6. Αναλύσεις και αποτελέσματα

3.6.1.1. Αποτελέσματα ανά ερώτηση

3.6.1.2. Επίδοση ανά ερώτηση

Στον πίνακα 3-4 παρουσιάζεται η συχνότητα κάθε απάντησης στην ερώτηση Πε.

Πίνακας 3-4: Απαντήσεις στην $Π_ε$ και αντίστοιχη συχνότητα

	Ανοιχτά				**Κλειστά**			
Ο επόμενος του 999...	**Γ**		**Λ**		**Γ**		**Λ**	
	Ν	**%**	**Ν**	**%**	**Ν**	**%**	**Ν**	**%**
Καμία απάντηση	32	38,6	27	40,9	4	4,9	3	4,2
1000	31	37,3	18	27,3	25	30,9	26	36,6
π.χ. 999,001	6	7,2	5	7,6	23	28,4	11	15,5
Υπάρχει, αλλά δεν μπορεί να προσδιοριστεί 999,00...01	6	7,2	10	15,2	17	21,0	19	26,8
Δεν υπάρχει	8	9,6	6	9,1	12	14,8	12	16,9
Σύνολο	**83**		**66**		**81**		**71**	

Στον πίνακα 3-5 παρουσιάζεται η συχνότητα κάθε κατηγορίας απάντησης σε κάθε μία από τις ερωτήσεις Π1-Π6.

Πίνακας 3-5: Συχνότητα και ποσοστό % ε κάθε κατηγορίας απάντησης ανά ερώτηση Π1-Π6

Ερωτήσεις	Κατηγορίες απαντήσεων	Α				Κ			
		Γ		Λ		Γ		Λ	
		Ν	%	Ν	%	Ν	%	Ν	%
Π1 (Χε) 0,005-0,006	**0**	1	1,2	6	9,1	2	2,5	0	0
	Π	60	72,3	28	42,4	42	51,9	22	31,0
	Αδ	4	4,8	17	25,8	-	-	-	-
	Α	18	21,7	15	22,7	37	45,7	49	69,0
	Σύνολο	83		66		81		71	
Π4 (Με) 0,1-0,2	**0**	0	0,0	0	0	1	1,2	1	1,4
	Π	56	67,5	33	50	39	48,1	24	33,8
	Αδ	8	9,6	16	24,2	-	-		
	Α	19	22,9	17	25,8	41	50,6	46	64,8
	Σύνολο	83		66		81		71	
Π2 (Χε) $\frac{3}{8},\frac{5}{8}$	**0**	4	4,8	3	4,5	1	1,2	0	0,0
	Π	60	72,3	30	45,5	54	66,7	30	42,3
	Αδ	7	8,4	20	30,3	-	-	-	-
	Α	12	14,5	13	19,7	26	32,1	41	57,7
	Σύνολο	83		66		81		71	
Π5 (Με) $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$	**0**	2	2,4	4	6,1	1	1,2	2	2,8
	Π	54	65,1	27	40,9	43	53,1	24	33,8
	Αδ	15	18,1	19	28,8	-	-	-	-
	Α	2	14,5	16	24,2	37	45,7	45	63,4
	Σύνολο	83		66		81		71	
Π3 (Χε) 0,001-0,01	**0**	5	6	1	1,5	14	17,3	10	14,1
	Π	49	59	17	25,8	37	45,7	22	31,0
	Αδ	10	12	23	34,8	-	-	-	-
	Α	19	22,9	25	37,9	30	37,0	39	54,9
	Σύνολο	83		66		81		71	
Π6 (Με) 0,01-0,1	**0**	2	2,4	2	3	7	8,6	5	7,0
	Π	44	53	30	45,5	38	46,9	25	35,2
	Αδ	15	18,1	17	25,8	-	-	-	-
	Α	22	26,5	17	25,8	36	44,4	41	57,7
	Σύνολο	83		66		81		71	

Από τον πίνακα φαίνεται ότι:

- Στα ερωτηματολόγια ανοικτού τύπου **(Α)**,

  - η επικρατούσα απάντηση είναι η «Π», εκτός από την περίπτωση της $Π_3$ για τη Β' Λυκείου.
  - Η απάντηση «Αδ» εμφανίζεται πιο συχνά στην περίπτωση της Β' Λυκείου, στηρίζοντας την εκτίμηση ότι η απάντηση αυτή είναι «καλύτερη» από την απάντηση «Π». Στην περίπτωση της Γ' Γυμνασίου, η απάντηση «Αδ» εμφανίζεται πιο συχνά στις ερωτήσεις $Π_5$ και $Π_6$, οι οποίες είναι ερωτήσεις **Με.**
  - Στις ερωτήσεις **Με** ($Π_4$, $Π_5$,$Π_6$), μειώνεται το πλήθος των απαντήσεων «0». Συγκεκριμένα, υπάρχουν 20 συνολικά απαντήσεις «0» στις ερωτήσεις **Χε**, αλλά 10 συνολικά απαντήσεις «0» στις ερωτήσεις **Με.**

- Στα ερωτηματολόγια κλειστού τύπου **(Κ)**,

  - η επικρατούσα κατηγορία απαντήσεων είναι σταθερά «Α» για τη Β' Λυκείου, ενώ είναι «Π» για την Γ' Γυμνασίου, εκτός από την περίπτωση της $Π_4$.
  - Στην περίπτωση της $Π_3$, εμφανίζεται η απάντηση «0» σε σημαντικά μεγαλύτερο ποσοστό, συγκριτικά με τις υπόλοιπες ερωτήσεις. Αυτό οφείλεται στη συχνότητα επιλογής της απάντησης «Η ερώτηση δεν έχει νόημα, γιατί οι συγκεκριμένοι αριθμοί ανήκουν σε διαφορετική ομάδα: Ο ένας έχει 2 και ο άλλος έχει τρία δεκαδικά ψηφία». Η επιλογή της απάντησης αυτής μειώνεται σημαντικά στην $Π_6$, στην οποία εμφανίζεται επιπλέον η ευθεία των πραγματικών αριθμών.
  - Στις ερωτήσεις **Με** ($Π_4$, $Π_5$,$Π_6$), μειώνεται το πλήθος των απαντήσεων «0». Συγκεκριμένα, υπάρχουν 27 συνολικά απαντήσεις «0» στις ερωτήσεις **Χε**, αλλά 17 απαντήσεις «0» στις ερωτήσεις **Με.**

Συνοψίζοντας,

- Στην Γ' Γυμνασίου, τόσο στα ερωτηματολόγια **Α** , όσο και στα ερωτηματολόγια κλειστού τύπου, η $Π_2$ είναι η ερώτηση που λαμβάνει την απάντηση «Π» με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Η απάντηση «Α» δίνεται με μεγαλύτερη συχνότητα στην ερώτηση $Π_6$, στην περίπτωση των ερωτηματολογίων **Κ** . Στην περίπτωση των ερωτηματολογίων **Α,** η απάντηση «Α» δίνεται με μεγαλύτερη συχνότητα στην ερώτηση $Π_4$. Και οι δύο ερωτήσεις αφορούν δεκαδικούς και είναι ερωτήσεις **Με.**
- Στην Β' Λυκείου, η $Π_2$ λαμβάνει την απάντηση «Π» με μεγάλη συχνότητα, τόσο στα ερωτηματολόγια **Α** , όσο και στα ερωτηματολόγια **Κ** (επικρατούσα στα **Κ**, δεύτερη στη σειρά στα **Α**). Τα ερωτηματολόγια **Α**

και **Κ** διαφοροποιούνται, όσον αφορά τη συχνότητα της απάντησης **«Α»:** Στα ερωτηματολόγια **Α,** η απάντηση «Α» δίνεται με τη μεγαλύτερη συχνότητα στην ερώτηση $Π_3$. Στα ερωτηματολόγια **Κ,** η απάντηση «Α» δίνεται με τη μεγαλύτερη συχνότητα στην ερώτηση $Π_1$. Τόσο η $Π_1$, όσο και η $Π_3$ είναι ερωτήσεις **Χε**, οι οποίες αφορούν δεκαδικούς.

- Στην ερώτηση $Π_ε$ παρατηρείται η μεγαλύτερη δυσκολία των παιδιών να παρουσιάσουν κάποια απάντηση, τόσο στα ανοικτά, όσο και στα κλειστά ερωτηματολόγια.

3.6.1.3. Βεβαιότητα ανά ερώτηση

Στον πίνακα... παρουσιάζεται η κατάταξη των ερωτήσεων $Π_1$-$Π_3$ βάσει δύο κριτηρίων: Το μέσο όρο της επίδοσης σε κάθε ερώτηση ($\overline{E}$)και το μέσο όρο του βαθμού βεβαιότητας ($\overline{B}$)με τον οποίο αυτοαξιολογήθηκε κάθε παιδί.

Πίνακας 3-6: Φθίνουσα κατάταξη των ερωτήσεων $Π_1$-$Π_6$, βάσει των μέσων όρων επίδοσης ($\overline{E}$) και βεβαιότητας ($\overline{B}$) στα ερωτηματολόγια **Α** και **Κ.**

Ερωτηματολόγια ανοικτού τύπου							
Γυμνάσιο				**Λύκειο**			
$\overline{E}$ min=0,max=3	**$Π_i$** με $\overline{E}$	$\overline{B}$ min=1,max=5	**$Π_i$** με $\overline{B}$	$\overline{E}$ min=0,max=3	**$Π_i$** με $\overline{E}$	$\overline{B}$ min=1,max=5	**$Π_i$** με $\overline{B}$
1,69 ,896	**$Π_6$**	3,96 1,224	**$Π_2$**	2,09 ,836	**$Π_3$**	3,92 ,950	**$Π_4$**
1,55 ,845	**$Π_4$**	3,84 1,292	**$Π_3$**	1,76 ,842	**$Π_6$**	3,91 1,486	**$Π_2$**
1,52 ,915	**$Π_3$**	3,819 1,2797	**$Π_6$**	1,74 ,882	**$Π_4$**	3,864 1,1353	**$Π_6$**
1,47 ,846	**$Π_1$**	3,77 1,162	**$Π_4$**	1,71 ,907	**$Π_5$**	3,74 1,339	**$Π_3$**
1,45 ,769	**$Π_5$**	3,76 1,143	**$Π_1$**	1,65 ,850	**$Π_2$**	3,53 1,551	**$Π_1$**
1,33 ,783	**$Π_2$**	3,54 1,272	**$Π_5$**	1,62 ,941	**$Π_1$**	3,42 1,359	**$Π_5$**
Ερωτηματολόγια κλειστού τύπου							
Γ				**Λ**			
$\overline{E}$ min=0 max=2	**$Π_i$** με $\overline{E}$	$\overline{B}$ min=1 max=5	**$Π_i$** με $\overline{B}$	$\overline{E}$ min=0 max=2	**$Π_i$** με $\overline{E}$	$\overline{B}$ min=1 max=5	**$Π_i$** με $\overline{B}$
1,49 ,527	**$Π_4$**	3,98 ,967	**$Π_4$**	1,69 ,466	**$Π_1$**	4,042 ,7058	**$Π_6$**
1,44 ,524	**$Π_5$**	3,80 1,030	**$Π_1$**	1,63 ,514	**$Π_4$**	3,97 ,828	**$Π_4$**
1,43 ,546	**$Π_1$**	3,77 1,052	**$Π_2$**	1,61 ,547	**$Π_5$**	3,76 ,948	**$Π_3$**
1,36 ,639	**$Π_6$**	3,728 1,0841	**$Π_6$**	1,58 ,497	**$Π_2$**	3,76 ,963	**$Π_1$**
1,31 ,491	**$Π_2$**	3,67 1,000	**$Π_5$**	1,51 ,630	**$Π_6$**	3,75 9,52	**$Π_5$**
1,20 ,714	**$Π_3$**	3,67 1,118	**$Π_3$**	1,41 ,729	**$Π_3$**	3,66 ,970	**$Π_2$**

Με μια πρώτη εκτίμηση των στοιχείων του πίνακα φαίνεται ότι η επίδοση ανά ερώτηση δεν είναι απαραίτητα θετικά συσχετισμένη με τη βεβαιότητα με την οποία απαντήθηκε.

Η ερώτηση $Π_2$ παρουσιάζει τη μεγαλύτερη διαφορά ανάμεσα στις θέσεις στις οποίες κατατάσσεται με βάση την επίδοση των συμμετεχόντων και με βάση το βαθμό βεβαιότητας με τον οποίο αυτοαξιολογήθηκαν. Για παράδειγμα, τα παιδιά της Γ' Γυμνασίου αναφέρουν ότι είναι περισσότερο σίγουρα για την απάντησή τους στην ερώτηση $Π_2$, σε σύγκριση με τις υπόλοιπες ερωτήσεις, ενώ παρουσιάζουν τη μικρότερη επίδοση στην ερώτηση αυτή. Αντίστοιχα για τα παιδιά της Β' Λυκείου, κατά λιγότερο ακραίο τρόπο. Να σημειωθεί ότι τα παιδιά της Β' Λυκείου, ενώ έχουν στην $Π_3$ τη μεγαλύτερη μέση επίδοση, δεν αναφέρουν αντίστοιχη βεβαιότητα.

Πράγματι, στα ερωτηματολόγια ανοικτού τύπου, για το Γυμνάσιο, προκύπτει ότι η βεβαιότητα είναι θετικά συσχετισμένη με την επίδοση, σε σημαντικό βαθμό, μόνο στις ερωτήσεις $Π_5$,Κ ($p=0{,}011$) και $Π_4$ Δ($p<0.001$) .Στην περίπτωση του Λυκείου, η βεβαιότητα είναι θετικά συσχετισμένη με την επίδοση, σε σημαντικό βαθμό, μόνο στις ερωτήσεις $Π_1$, Δ($p=<0.001$) και $Π_3$ Δ($p=0{,}026$) και η $Π_5$ ($p=0{,}008$)Κ. (κριτήριο Spearman, βλ.Πίνακα....). Επιπλέον, διερευνήθηκαν οι διαφορές που παρουσιάζουν ως προς τη βεβαιότητα οι συμμετέχοντες, ανάλογα με την απάντηση την οποία δίνουν σε κάθε μία ερώτηση (κριτήριο Kruskal-Wallis, βλ. Πίνακα...). Για την ανάλυση αυτή, οι απαντήσεις ανά ερώτηση κατηγοριοποιήθηκαν σε τρεις κατηγορίες Α,Β,Γ. Η κατηγορία Α περιλαμβάνει τις απαντήσεις «0» και «Π», η κατηγορία Β την απάντηση «Αδ» και η κατηγορία Γ την απάντηση «Α». Από την ανάλυση προέκυψε ότι στατιστικά σημαντικές διαφορές στη βεβαιότητα με την οποία απαντούν οι συμμετέχοντες, ανάλογα με την κατηγορία στην οποία ανήκουν, εμφανίζονται στις ερωτήσεις $Π_3$ ($p=0{,}016$), $Π_4$ ($p=0{,}003$), $Π_5$ ($p=0{,}001$) (για το Γυμνάσιο) και $Π_1$ ($p=0{,}002$), $Π_3$ ($p=0{,}016$), $Π_5$ ($p=0{,}021$) (για το Λύκειο). Οι ερωτήσεις αυτές σημειώνονται με ✓ στον πίνακα 3-7 .Στον ίδιο πίνακα, εμφανίζονται στην 3ης και στην 8ης στήλης τονισμένες οι τιμές τις μέσης βεβαιότητας που αντιστοιχούν στις ερωτήσεις, στις οποίες οι συμμετέχοντες που ανήκουν στην κατηγορία Β απάντησαν με μικρότερη βεβαιότητα, συγκριτικά με τους συμμετέχοντες της κατηγορίας Α.

Πίνακας 3-7

Ερωτηματολόγια ανοικτού τύπου						
	Γυμνάσιο			**Λύκειο**		
Πi	$\overline{B}$, $\overline{E}$	Διαφορές της $\overline{B}$ ανά κατηγορία απάντησης	$\overline{B}$ ανά κατηγορία απάντησης	$\overline{B}$, $\overline{E}$	Διαφορές της $\overline{B}$ ανά κατηγορία απάντησης	$\overline{B}$ ανά κατηγορία απάντησης
Π1 0,005-0,006	--	--	**Α:** 3,64 **Β: 4,00** **Γ: 3,77**	+	✓	Α: 3,15 Β:3,82 Γ:4,53
Π2 $\frac{3}{8},\frac{5}{8}$	--	**--**	**Α: 3,94** **Β: 3,86** **Γ:** 4,50	--	**--**	**Α: 3,78** **Β: 3,60** **Γ:** 4,38
Π3 0,001-0,01	--	✓	**Α: 3,74** **Β: 3,60** **Γ:** 4,47	+	✓	**Α: 3,61** **Β: 3,43** **Γ:** 4,28
Π4 0,1-0,2	+	✓	**Α:** 3,50 **Β:** 4,13 **Γ:** 4,42	--	**--**	**Α: 3,85** **Β: 3,69** **Γ:** 4,29
Π5 $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$	+	✓	**Α: 3,39** **Β: 3,33** **Γ:** 4,67	+	✓	Α: 3,10 Β: 3,47 Γ: 4,19
Π6 0,01-0,1	---	**--**	**Α: 3,74** **Β: 3,60** **Γ:** 4,27	--	**--**	Α: 3,78 Β: 3,71 Γ: 4,24

Από τα στοιχεία του πίνακα 3-7 φαίνεται ότι οι συμμετέχοντες, σε γενικές γραμμές, δίνουν απαντήσεις με αρκετά μεγάλη βεβαιότητα στο ερωτηματολόγιο, δεδομένου ότι η $\overline{B}$ είναι σταθερά μεγαλύτερη από την τιμή 3, που αντιστοιχεί στο μέσον της κλίμακας που χρησιμοποιήθηκε. Γενικά, δεν προκύπτει ότι αυτοί που απαντούν καλύτερα στις ερωτήσεις, έχουν μεγαλύτερη βεβαιότητα για την απάντησή τους. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με την υπόθεσή μας. Ωστόσο, οι συμμετέχοντες της Γ' κατηγορίας, που έχουν και τη μεγαλύτερη επίδοση στη δεδομένη ερώτηση, απαντούν σταθερά με μεγαλύτερη βεβαιότητα από τους υπόλοιπους, εκτός από την περίπτωση της $Π_1$, για το Γυμνάσιο. Δεδομένου ότι οι συμμετέχοντες της κατηγορίας αυτής είναι σε θέση να δώσουν την απάντηση «Α» σε ερωτήσεις ανοικτού τύπου, χωρίς την υποστήριξη των πολλαπλών επιλογών, το επίπεδο της κατανόησής τους πρέπει να είναι αρκετά υψηλό και φαίνεται ότι συνοδεύεται με την αίσθηση της βεβαιότητας. Αν και παράγοντες που συνδέονται με την ιδιοσυγκρασία του κάθε συμμετέχοντα, όπως, για παράδειγμα, η υψηλή ή όχι αυτοπεποίθηση θα πρέπει να ληφθούν υπόψη, το αποτέλεσμα αυτό υποδεικνύει ότι, στην περίπτωση της κατηγορίας Γ, εμφανίζεται και μεγαλύτερη μεταγνωσιακή επίγνωση.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ερωτήσεις εκείνες, στις οποίες οι συμμετέχοντες της κατηγορίας Α απάντησαν με μεγαλύτερη βεβαιότητα, σε σύγκριση με τους συμμετέχοντες της κατηγορίας Β, κάτι που επίσης είναι σύμφωνο προς την υπόθεσή μας. Συγκεκριμένα, οι απαντήσεις της κατηγορίας «Α» είναι αυτές που αντιστοιχούν στα χαμηλότερα επίπεδα κατανόησης για την κάθε ερώτηση και δίνονται από συμμετέχοντες που δεν έχουν καλή επίγνωση των προβλημάτων που ενυπάρχουν. Επίσης, πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα η περίπτωση της ερώτησης $Π_2$, η οποία συνδυάζει τα μεγαλύτερα ποσοστά απαντήσεων «Π», τόσο στην περίπτωση του Γυμνασίου, όσο και στην περίπτωση του Λυκείου ταυτόχρονα με υψηλό μέσο όρο βεβαιότητας (βλ. Πίνακα....). Και στην περίπτωση αυτή, οι συμμετέχοντες στην κατηγορία Β έχουν μικρότερο βαθμό βεβαιότητας, συγκριτικά με τους συμμετέχοντες στην κατηγορία Α.

Στα ερωτηματολόγια κλειστού τύπου **(Κ)**, για το Γυμνάσιο, προκύπτει ότι η βεβαιότητα είναι θετικά συσχετισμένη με την επίδοση, σε σημαντικό βαθμό, μόνο στην ερώτηση $Π_3$, ($p=0{,}011$). Στην περίπτωση του Λυκείου, η βεβαιότητα είναι θετικά συσχετισμένη με την επίδοση, σε σημαντικό βαθμό, στις ερωτήσεις $Π_3$, ($p=0{,}011$) και $Π_4$ ($p=0{,}008$) και $Π_5$ ($p=0{,}001$) (κριτήριο Spearman, βλ. Πίνακα ....). Επιπλέον, διερευνήθηκαν οι διαφορές που παρουσιάζουν ως προς τη βεβαιότητα οι συμμετέχοντες, ανάλογα με την απάντηση την οποία δίνουν σε κάθε μία ερώτηση (κριτήριο Kruskal-Wallis, βλ. Πίνακα...). Για την ανάλυση αυτή, οι απαντήσεις ανά ερώτηση κατηγοριοποιήθηκαν σε τρεις κατηγορίες Α,Γ. Η κατηγορία Α περιλαμβάνει τις απαντήσεις «0» και «Π» και η κατηγορία Γ την απάντηση «Α». Από την ανάλυση προέκυψε ότι στατιστικά σημαντικές διαφορές στη βεβαιότητα με την οποία απαντούν οι συμμετέχοντες, ανάλογα με την κατηγορία στην οποία ανήκουν, εμφανίζονται στις ερωτήσεις $Π_3$ ($p=0{,}011$) (για το Γυμνάσιο) και $Π_3$ ($p=0{,}23$), $Π_4$ ($p=0{,}008$), $Π_5$ ($p=0{,}001$) (για το Λύκειο). Οι ερωτήσεις αυτές σημειώνονται με ✓ στον πίνακα.... Στις ερωτήσεις αυτές, η κατηγορία Γ είναι σημαντικά συσχετισμένη με μεγαλύτερη βεβαιότητα. Στον ίδιο πίνακα, εμφανίζονται στην 3ης και στην 8ης στήλης τονισμένες οι τιμές τις μέσης βεβαιότητας που αντιστοιχούν στις ερωτήσεις, στις οποίες οι συμμετέχοντες που ανήκουν στην κατηγορία Γ απάντησαν με μικρότερη βεβαιότητα, συγκριτικά με τους συμμετέχοντες της κατηγορίας Α. Φαίνεται ότι, στην περίπτωση του Γυμνασίου, οι συμμετέχοντες που έδωσαν την «καλύτερη» απάντηση στις $Π_1$,$Π_2$, $Π_4$ το έκαναν με μικρότερη βεβαιότητα, σε σύγκριση με αυτούς που έδωσαν τη «χειρότερη» απάντηση. Αυτό είναι σύμφωνο με την υπόθεσή μας, δεδομένου ότι κάποια από τα παιδιά που δίνουν την απάντηση «Α» στα κλειστά ερωτηματολόγια φαίνεται να υποβοηθούνται από την ύπαρξη πολλαπλών επιλογών. Στην περίπτωση του Λυκείου, η κατηγορία Γ χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερο βαθμό βεβαιότητας και μάλιστα, η συσχέτιση είναι στατιστικά σημαντική σε τρεις από τις έξι ερωτήσεις.

Πίνακας 3-8

<table>
<tr><th colspan="7">Ερωτηματολόγια κλειστού τύπου</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Π_i</th><th colspan="3">Γυμνάσιο</th><th colspan="3">Λύκειο</th></tr>
<tr><th>Σημαντική συσχέτιση των $\overline{B}$, $\overline{E}$</th><th>Διαφορές της $\overline{B}$ ανά κατηγορία απάντησης</th><th>$\overline{B}$ ανά κατηγορία απάντησης</th><th>Σημαντική συσχέτιση των $\overline{B}$, $\overline{E}$</th><th>Διαφορές της $\overline{B}$ ανά κατηγορία απάντησης</th><th>$\overline{B}$ ανά κατηγορία απάντησης</th></tr>
<tr><td>**Π1** 0,005-0,006</td><td>--</td><td>**--**</td><td>**Α: 3,86**
Γ: 3,76</td><td>--</td><td>**--**</td><td>**Α:** 3,50
Γ: 3,88</td></tr>
<tr><td>**Π2** $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$</td><td>--</td><td>**--**</td><td>**Α: 3,80**
Γ: 3,73</td><td>--</td><td>**--**</td><td>**Α:** 3,50
Γ: 3,80</td></tr>
<tr><td>**Π3** 0,001-0,01</td><td>+</td><td>✓</td><td>**Α:** 3,43
Γ: 4,10</td><td>+</td><td>✓</td><td>**Α:** 3,37
Γ: 4,00</td></tr>
<tr><td>**Π4** 0,1-0,2</td><td>--</td><td>**--**</td><td>**Α: 4,13**
Γ: 3,85</td><td>+</td><td>✓</td><td>**Α:** 3,52
Γ: 4,22</td></tr>
<tr><td>**Π5** $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$</td><td>--</td><td>**--**</td><td>**Α:** 3,50
Γ: 3,89</td><td>+</td><td>✓</td><td>**Α:** 3,27
Γ: 4,04</td></tr>
<tr><td>**Π6** 0,01-0,1</td><td>--</td><td>**--**</td><td>**Α:** 3,64
Γ: 3,86</td><td>--</td><td>**--**</td><td>**Α:** 3,83
Γ: 4,20</td></tr>
</table>

3.6.1.4. Διαφορές την επίδοση ανά ερώτηση

Από τον πίνακα 3-6 φαίνεται ότι ο μέσος όρος της επίδοσης σε κάθε μία ερώτηση είναι πάντα μεγαλύτερος για τα παιδιά της Β' Λυκείου.

Εξετάζοντας (κριτήριο Mann Whitney,...)την επίδοση σε κάθε μία ερώτηση σε σχέση με την ηλικία, προέκυψε ότι, στο σύνολο των 6 ερωτήσεων, στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα παιδιά της Γ' Γυμνασίου και της Β' Λυκείου εμφανίζονται:

- Στα ερωτηματολόγια **Κ,** στις ερωτήσεις $Π_1$ (p=0,003), $Π_2$(p=0,001) και $Π_5$ (p=0,043). Οι $Π_2$ και οι $Π_5$ αφορούν τα κλάσματα, ενώ η $Π_1$ τους ψευδο-διαδοχικούς δεκαδικούς 0,005, 0,006. στα κλειστά.
- Στα ερωτηματολόγια **Α,** στις ερωτήσεις $Π_2$ (p=0,005), $Π_5$ (p=0,040).

Οι ερωτήσεις, οι οποίες προκαλούν στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση της Β' Λυκείου, σε σύγκριση με τη Γ' Γυμνασίου, τόσο στα ερωτηματολόγια ανοικτού τύπου, όσο και στα ερωτηματολόγια κλειστού τύπου είναι οι ερωτήσεις που αφορούν τα κλάσματα.

3.6.1.5. Αποτελέσματα σε επίπεδο ομάδας ερωτήσεων

Μετρώντας την επίδοση ως άθροισμα των επιμέρους βαθμών στις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$, εξετάστηκαν η επίδραση της ηλικίας, του φύλου και της συνθήκης **εΑ/εΒ** (δια-υποκειμενικές συνθήκες)**.** Εξετάστηκαν επίσης η επίδραση της (ενδοϋποκειμενικής) συνθήκης **Με/Χε.**

3.6.1.6. Ανοιχτά ερωτηματολόγια

Η μεταβλητή της επίδοσης φαίνεται ότι δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή (Πίνακας $Α_1$). Το ενδιαφέρον είναι ότι αυτό συμβαίνει γιατί υπάρχει μεγάλη συγκέντρωση σε τιμή, συγκεκριμένα στην τιμή 6. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί στην απάντηση (Π,Π,Π,Π,Π,Π). Με μη παραμετρικά κριτήρια (Mann-Whitney, βλ. Πίνακα $Α_2$) προκύπτει ότι το φύλο και η ηλικία είναι σημαντικά συσχετισμένα ((p=.022, p=.004 αντίστοιχα)με την επίδοση. Δεν συμβαίνει το ίδιο και με τη συνθήκη **εΑ/εΒ** (p=.960).

Με επιφύλαξη χρησιμοποιήθηκε το παραμετρικό κριτήριο t για διμεταβλητό έλεγχο της επίδοσης σε σχέση με κάθε μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές (βλ. Πίνακες $Α_3$), το οποίο έδειξε ανά δύο συσχέτιση μεταξύ επίδοσης και φύλου, ηλικίας αντίστοιχα, αλλά όχι και με την **εΑ/εΒ.** Στη συνέχεια, από πολυμεταβλητή ανάλυση (two way anova, βλ.Πίνακα $Α_4$) προέκυψε ότι τόσο το φύλο, όσο και η ηλικία είναι σημαντικά συσχετισμένες (p=.011, p=.014) με την επίδοση. Συγκεκριμένα, τα αγόρια και οι μαθητές της Β' Λυκείου έχουν καλύτερη επίδοση.

Η επίδραση της **Με/Χε** είναι στατιστικά σημαντική (p=.001, κριτήριο Wilcoxon) μόνο για την Γ' Γυμνασίου (βλ.Πίνακα $Α_5$).

3.6.1.7. Κλειστά ερωτηματολόγια

Η μεταβλητή της επίδοσης φαίνεται ότι δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή (Πίνακας $Β_1$). Το μη παραμετρικό κριτήριο Mann-Whitney δείχνει ότι μόνο η ηλικία είναι σημαντικά συσχετισμένη (p=.011) με την επίδοση

(Πίνακες B_2). Το ίδιο δείχνει και το παραμετρικό κριτήριο t (p=.007, βλ.Πίνακες B_3).

Η επίδραση της **Με/Χε** είναι στατιστικά σημαντική (p=.002, κριτήριο Wilcoxon) μόνο για την Γ' Γυμνασίου, ενώ δεν είναι σημαντική στην περίπτωση της Β' Λυκείου.

Συνοψίζοντας:

- Τόσο στα ερωτηματολόγια ανοικτού, όσο και κλειστού τύπου, τα παιδιά της Β' Λυκείου έχουν καλύτερη συνολική επίδοση στις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$, κάτι που είναι σύμφωνο με την υπόθεσή μας.
- Η επίδραση του φύλου στη συνολική επίδοση ανιχνεύεται στα ανοιχτά ερωτηματολόγια, υπέρ των αγοριών. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με την υπόθεσή μας, δεδομένου ότι το έργο της συμπλήρωσης των ερωτηματολογίων αποδεικνύεται πιο δύσκολο, σε σύγκριση με τη συμπλήρωση των κλειστών ερωτηματολογίων, τόσο για τα παιδιά της Γ' Γυμνασίου, όσο και για τα παιδιά της Β' Λυκείου.
- Στην περίπτωση του Λυκείου, ο μέσος όρος της επίδοσης των συμμετεχόντων στις ερωτήσεις, στις οποίες είναι παρούσα η ευθεία, δεν διαφέρει γενικά σημαντικά από το μέσο όρο της επίδοσή τους, όταν η ευθεία δεν είναι παρούσα. Αντίθετα, στην περίπτωση του Γυμνασίου, η παρουσίας της ευθείας βελτιώνει την επίδοση των παιδιών. Ωστόσο, η θετική επίδραση της ευθείας υφίσταται μόνο όταν αυτή είναι πράγματι παρούσα, δεδομένου ότι η επίδοση των παιδιών που ξεκινούν τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου με τις ερωτήσεις στις οποίες εμφανίζεται η ευθεία των πραγματικών αριθμών, δεν διαφέρει σημαντικά από την επίδοση αυτών που ξεκινούν τη συμπλήρωση με τις ερωτήσεις που δεν συνοδεύονται από την ευθείας.

3.6.1.8. Συνολική επίδοση και στάδια κατανόησης

Στον πίνακα... παρουσιάζεται οι συχνότητες και τα αντίστοιχα ποσοστά. σύμφωνα με τα οποία κατατάχτηκαν οι συμμετέχοντες σε κάθε μια από τις κατηγορίες «Πάντα Π», «Ενδιάμεση», «Πάντα Α», ανάλογα με την ηλικία τους και τον τύπο του ερωτηματολογίου που απάντησαν.

Πίνακας 3-9. Κατάταξη σε τρεις κατηγορίες: Συχνότητες και ποσοστά

Κατηγορία	Ανοικτού τύπου				Κλειστού τύπου			
	Γ		Λ		Γ		Λ	
	N	%	N	%	N	%	N	%

Πάντα «Π»	39	47	13	19,7	29	35,8	15	21,13
Ενδιάμεση	36	43,4	44	66,6	33	40,74	30	42,25
Πάντα «Α»	8	9,6	9	13,6	19	23,46	26	36,7
Σύνολο	83		66		81		71	

Από τον πίνακα 3-9 φαίνεται ότι στα ερωτηματολόγια κλειστού τύπου αυξάνει σημαντικά το ποσοστό της κατηγορίας «πάντα Α», σε σύγκριση με τα ερωτηματολόγια ανοικτού τύπου. Στην περίπτωση της Β' Λυκείου, μειώνεται σημαντικά το ποσοστό της ενδιάμεσης κατηγορίας, ενώ παρατηρείται αύξηση και στο ποσοστό της κατηγορίας «πάντα Π». Το τελευταίο αποτελεί ένδειξη για τον τρόπο που επιδρά το ερωτηματολόγιο κλειστού τύπου: Αφενός καθοδηγεί τις επιλογές των συμμετεχόντων, αυξάνοντας την επίδοση, αφετέρου δρα περιοριστικά σε κάποιες περιπτώσεις. Τα μεγάλα ποσοστά στην ενδιάμεση κατηγορία, στην περίπτωση των ανοικτών ερωτηματολογίων οφείλεται στην παρουσία των απαντήσεων Δ.

Η επίδραση της ηλικίας, του φύλου, της **εΑ/εΒ** και του **Α/Κ** στη συγκεκριμένη περίπτωση εξετάστηκε με χρήση του κριτηρίου Chi-square (βλ. Πίνακες $Γ_1$-$Γ_9$). Βρέθηκε να είναι στατιστικά σημαντική για όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές, εκτός από την **εΑ/εΒ.**

Συγκεκριμένα,

- τα κορίτσια κατατάσσονται συχνότερα στην Ενδιάμεση κατηγορία και λιγότερο συχνά στην κατηγορία «πάντα Α», σε σχέση με τα αγόρια.
- τα παιδιά της Γ' Γυμνασίου κατατάσσονται συχνότερα στην κατηγορία «πάντα Π» και λιγότερο «ενδιάμεση», «πάντα Α», σε σύγκριση με τα παιδιά της Β' Λυκείου.
- τα παιδιά που απαντούν σε ανοικτά ερωτηματολόγια κατατάσσονται συχνότερα στην πρώτη κατηγορία και λιγότερο συχνά στη δεύτερη και τρίτη κατηγορία, σε σύγκριση με τα παιδιά που απαντούν σε ερωτηματολόγια κλειστού τύπου.

Για πολυμεταβλητή ανάλυση χρησιμοποιήθηκε η ανάλυση των log-linear models, η οποία έδειξε ότι και οι τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές σχετίζονται τελικά με την επίδοση. (Πίνακας $Γ_{10}$) .

3.6.1.9. Χαρακτηριστικά των σταδίων κατανόσης, με όρους συνέπειας/ ασυνέπειας

Προκειμένου να διερευνηθούν τα χαρακτηριστικά της Ενδιάμεσης κατηγορίας τόσο σε σχέση με την ηλικία, όσο και σε σχέση με τη συνθήκη **Α/Κ**, οι απαντήσεις των συμμετεχόντων κατηγοριοποιήθηκαν με όρους συνέπειας και ασυνέπειας. Πιο αναλυτικά, οι αριθμοί που εμφανίστηκαν στις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$ διακρίνονται σε τρεις ομάδες, ως εξής: Οι δεκαδικοί 0,005και 0,006, 0,1και 0,2 που εμφανίζονται στις ερωτήσεις $Π_1$ και $Π_4$ αντίστοιχα ορίζονται ως δεκαδικοί τύπου 1 και συμβολίζονται με **$δ_1$**.Το κοινό χαρακτηριστικό τους είναι ότι είναι ψευδο-διαδοχικοί δεκαδικοί. Οι δεκαδικοί αριθμοί 0,001 και 0,01, 0,01 και 0,1 που εμφανίζονται στις ερωτήσεις $Π_3$,$Π_6$ αντίστοιχα, ορίζονται ως δεκαδικοί τύπου 2 και συμβολίζονται με **$δ_2$**. Πρόκειται για δεκαδικούς με διαφορετικό πλήθος δεκαδικών ψηφίων, οι οποίοι επιπλέον έχουν και την ιδιαιτερότητα της παρουσίας μηδενικών. Οι κλασματικοί αριθμοί των ερωτήσεων $Π_2$ και $Π_5$ συμβολίζονται με **κ.** Έτσι, ορίζεται ως

- *εσωτερικά συνεπής* η απάντηση, κατά την οποία ο συμμετέχων απαντά με τον ίδιο τρόπο για τα δύο ζευγάρια των αριθμών μιας ομάδας. Υπάρχουν 3 ειδών εσωτερικά συνεπείς απαντήσεις, αυτές που είναι συνεπείς ως προς τους **δ1, δ2, κ** αντίστοιχα. Οι απαντήσεις αυτές θα συμβολίζονται με **[δ1], [δ2], [κ]** αντίστοιχα**.** Διακρίνονται 3 επίπεδα εσωτερικής συνέπειας:
  - Στο επίπεδο 3, ο συμμετέχων δίνει εσωτερικά συνεπή απάντηση για κάθε μία από τις ομάδες **δ1, δ2, δ3.**
  - Στο επίπεδο 2, ο συμμετέχων δίνει εσωτερικά συνεπή απάντηση για 2 από τις ομάδες **δ1, δ2, δ3.**
  - Στο επίπεδο 1, ο συμμετέχων δίνει εσωτερικά συνεπή απάντηση για 1 μόνο από τις ομάδες **δ1, δ2, δ3.**
- *εξωτερικά συνεπής* η απάντηση, κατά την οποία ο συμμετέχων απαντά με τον ίδιο τρόπο για διαφορετικές ομάδες από τις **δ1, δ2, κ.** Διακρίνονται 2 επίπεδα εξωτερικής συνέπειας:
  - Στο επίπεδο 3, ο συμμετέχων δίνει εξωτερικά συνεπή απάντηση και για τις τρεις ομάδες **δ1,δ2, κ.**
  - Στο επίπεδο 2, ο συμμετέχων δίνει εξωτερικά συνεπή απάντηση για δύο μόνο από τις τρεις ομάδες **δ1, δ2, κ.**

Συνδυάζοντας την εσωτερική και την εξωτερική συνέπεια, για όλα τα επίπεδα, προκύπτουν οι περιπτώσεις που εμφανίζονται στον πίνακα 3-10. συνοδευόμενες από παραδείγματα.

Πίνακας 3-10

	Ενδεικτική περίπτωση, συμβολισμός	Ενδεικτική περίπτωση, περιγραφή
Α **Εξωτερική συνέπεια 3, Εσωτερική συνέπεια 3**	{[δ1], [δ2], [δ3] }	Απάντηση «Π» για όλες τις ομάδες **δ1,δ2,δ3**.
Β **Εξωτερική συνέπεια 2, Εσωτερική συνέπεια 3**	{ [δ1], [δ2]}, [κ]	Απάντηση «Α» για **δ1,δ2** και «Π» για **κ**
Γ **Εξωτερική συνέπεια 2, Εσωτερική συνέπεια 2**	{ [δ1],[δ2]}, κ	Απάντηση «Α» για **δ1, δ2,** ασυνεπής απάντηση για **κ**
Δ **Εσωτερική συνέπεια 2**	[δ1], [δ2], κ	Απάντηση «Α» για **δ1,** απάντηση «Π» για **δ2,** ασυνεπής απάντηση για **κ.**
Ε **Εσωτερική συνέπεια 1**	[δ1], δ2, κ	Απάντηση «Α» για **δ1**, ασυνεπής απάντηση για **δ2, κ**
Ζ **Καμία συνέπεια**	δ1, δ2, κ	Ασυνεπής απάντηση για δ1, δ2,κ

Προφανώς, η περίπτωση Α περιλαμβάνει τις απαντήσεις που κατατάσσονται στις κατηγορίες «Όλα Π» και «Όλα Α». Περιλαμβάνει επίσης και ένα τύπο απάντησης που προέκυψε από τα ερωτηματολόγια ανοικτού τύπου, συγκεκριμένα την απάντηση «Αδ» σε όλες τις ερωτήσεις $Π_1 – Π_6$. Αυτός ο τύπος απάντησης, μαζί με τους τύπος απάντησης των περιπτώσεων Β-Ζ, αντιστοιχούν στην Ενδιάμεση κατηγορία. Στον πίνακα… παρουσιάζεται η συχνότητα με την οποία εμφανίστηκε κάθε μια από τις περιπτώσεις Β-Ζ και η ειδική περίπτωση της Α στην Ενδιάμεση κατηγορία, η οποία συμβολίζεται με $Α^*$.

Πίνακας 3-11: Συχνότητα και ποσοστό των κατηγοριών $Α^*$, Β, Γ, Δ, Ε

	Γυμνάσιο				**Λύκειο**					
	Ανοικτά		**Κλειστά**		**Ανοικτά**		**Κλειστά**		**Συνολικά**	
	Ν	**%**	**Ν**	**%**	**Ν**	**%**	**Ν**	**%**	**Ν**	**%**
$Α^*$	2	5,6	0	0,0	5	11,4	0	0,0	7	4,9
Β	8	22,3	4	12,1	2	4,5	3	10,0	17	11,8
Γ	13	36,0	15	45,5	14	31,8	16	53,4	58	40,5
Δ	3	8,4	4	12,1	5	11,4	2	6,6	14	9,8

Ε	6	16,7	7	21,2	16	36,4	6	20,0	35	24,5
Ζ	4	11,2	3	9,1	2	4,5	3	10,0	12	8,4
Σύνολο	**36**		**33**		**44**		**30**		**143**	

Α* :Εξωτερική συνέπεια **3**, Εσωτερική συνέπεια **3 (Αδ,Αδ,Αδ,Αδ,Αδ,Αδ)**
Β: Εξωτερική συνέπεια **2,** Εσωτερική συνέπεια **3**
Γ: Εξωτερική συνέπεια **2,** Εσωτερική συνέπεια **2**
Δ: Εσωτερική συνέπεια **2**
Ε: Εσωτερική συνέπεια **1**
Ζ: Καμία συνέπεια

Από τα στοιχεία του πίνακα 3-11 φαίνεται ότι η κατηγορία με τη μεγαλύτερη συγκέντρωση τιμών είναι η Γ. Ένα ποσοστό 57,2 % των συμμετεχόντων της Ενδιάμεσης κατηγορίας διατηρεί σε μεγάλο βαθμό τη συνέπειά του, δεδομένου ότι απαντά τουλάχιστον με εξωτερική συνέπεια 2 και εσωτερική συνέπεια 2. Παραδείγματα τέτοιων απαντήσεων είναι η απάντηση «Α» για τις ομάδες δ1, δ2 των δεκαδικών και «Π» για τα κλάσματα, ή αντίστροφα.

Ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατηγορία Ζ. Από τα 12 παιδιά στην κατηγορία αυτή, 7 απάντησαν με τελείως διαφορετικό τρόπο τις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_3$ χωρίς την παρουσία της ευθείας, σε σύγκριση με τον τρόπο που απάντησαν τις ερωτήσεις $Π_4$-$Π_6$, με την παρουσία της ευθείας. Προκύπτει ότι, 5 από τα 7 παιδιά απάντησαν «υπάρχει πεπερασμένο πλήθος» στις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_3$, ενώ απάντησαν «υπάρχει άπειρο πλήθος στις ερωτήσεις $Π_4$-$Π_6$, υποστηριζόμενα από την παρουσία της ευθείας. Επομένως, από όλα τα παιδιά που βοηθήθηκαν από την παρουσία της ευθείας, για αυτά τα πέντε μόνο η παρουσία της ευθείας ήταν πραγματικά καταλυτική. Για τα υπόλοιπα δύο παιδιά, ισχύει ακριβώς το αντίστροφο, δηλαδή σε αυτούς η παρουσία της ευθείας μάλλον λειτούργησε αρνητικά.

Διερευνήθηκε η συχνότητα με την οποία κάθε μία από τις ομάδες **δ1, δ2, κ** και σε προκαλεί ασυνέπεια στις απαντήσεις από τους συμμετέχοντες. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 3-12.

Πίνακας 3-12

	Γυμνάσιο		**Λύκειο**		
	Ανοικτά	**Κλειστά**	**Ανοικτά**	**Κλειστά**	**Συνολικά**

	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
δ1	2		3		6		1		7	
δ2	3		7		7		7		24	
κ	11		9		6		10		36	
δ1, δ2	2		2		2		3		9	
δ1, κ	1		2		7		1		11	
δ2, κ	3		3		5		2		13	
δ1, δ2,κ										
Σύνολο	**3..**		**3..**		**4..**		**3..**		**14..**	

Από τα στοιχεία του πίνακα φαίνεται ότι η ομάδα **κ,** δηλαδή τα κλάσματα, είναι αυτή που προκαλεί τα μεγαλύτερα ποσοστά ασυνέπειας στους συμμετέχοντες της Ενδιάμεσης κατηγορίας. Αν μάλιστα, συνυπολογιστεί η ασυνέπεια που προκαλούν τα κλάσματα στις περιπτώσεις δ1,κ , δ2,κ, τότε το ποσοστό φτάνει το 60%.

Στον πίνακα 3-13 παρουσιάζονται αναλυτικά οι κατηγορίες απαντήσεων που δόθηκαν από όλο το δείγμα, με τη συχνότητα της κάθε μίας απάντησης. Χρησιμοποιήθηκε χρωματικός κωδικός, προκειμένου να διαχωριστούν οι περιπτώσεις, στις οποίες οι συνεπείς απαντήσεις είναι «πεπερασμένο πλήθος» (γαλάζιο χρώμα), «άπειρο πλήθος» (κίτρινο χρώμα) και «αδιευκρίνιστο πλήθος» (μοβ χρώμα) στις ερωτήσεις της κάθε ομάδας. Με κόκκινο χρώμα σημειώνονται οι εσωτερικά ασυνεπείς απαντήσεις.

Πίνακας 3-13: Κατηγορίες απαντήσεων για όλο το δείγμα.

	Γυμνάσιο, Α	**Λύκειο, Α**	**Γυμνάσιο, Κ**	**Λύκειο, Κ**	
Α					
{[δ1],[δ2],[κ]}	39	13	29	15	**96**
{[δ1],[δ2],[κ]}	8	9	19	26	**62**
Α* {[δ1],[δ2],[κ]}	2	5	-	-	**7**
Β					
{[δ1] , [δ2] }, [κ]	1				1
{[δ1] , [κ] }, [δ2]	1		1		2
{[δ1] , [δ2]}, [κ]	3			1	4
{ [δ1] , [κ]}, [δ2]}				1	1
{[δ2] , [κ] }, [δ1]			3	1	4
{[δ1] , [κ] }, [δ2]	1				1
{[δ2] , [κ] }, [δ1]	2	2			4

Σύνολο	**8**	**2**	**4**	**3**	**17**
Γ					
{[δ1] , [δ2] }, κ	4	2	3	4	13
{[δ1] , [κ] }, δ2	2	3	4		9
{[δ1] , [δ2]}, [κ	4	1	4	5	14
{ [δ1] , [κ]}, δ2			2	6	8
{[δ2] , [κ] }, δ1	1	1	2		4
{[δ2] , [κ] }, δ1	1			1	2
{[δ1] , [δ2] }, κ		2			2
{[δ1] , [κ] }, δ2	1	2			3
{[δ2] , [κ] }, δ1		3			3
Σύνολο	**13**	**14**	**15**	**16**	**58**
Δ					
[δ1] , [δ2] , κ	2				2
[δ1], [δ2], κ	1	1			2
[δ1] , [δ2], κ			2	1	3
[δ1] , [κ], δ2			1	1	2
[δ2] , [κ] , δ1			1		1
[δ1] , [κ] , δ2		1			1
[δ1] , [κ] , δ2		1			1
[δ2] , [κ], 1		2			2
Σύνολο	**3**	**5**	**4**	**2**	**14**
Ε					
[δ1] ,[δ2] , κ	2	3			5
[δ1] ,[δ2] , κ	1	1	3	2	7
[δ2] ,[δ1] , κ		2	1	1	4
[δ2] ,[δ1] , κ		4	1		5
[κ] ,[δ1] , δ2	2	2		2	6
[κ] , [δ1] , δ2			2	1	3
[δ1] ,[δ2] , κ		1			1
[δ2] ,[δ1] , κ	1	1			2
[κ] ,[δ1] , δ2		2			2
Σύνολο	**6**	**16**	**7**	**6**	**35**
Ζ					
	4	2	3	3	**12**
Σύνολο	**83**	**66**	**81**	**71**	**301**

Από τα στοιχεία του πίνακα 3-13 προκύπτει η συχνότητα, με την οποία δίνονται συνεπείς απαντήσεις, για κάθε μία από τις ομάδες δ1, δ2, κ, στις κατηγορίες Α*, Β, Γ, Δ, Ε (συνολικά, 131 άτομα), που αντιστοιχούν στην Ενδιάμεση κατηγορία. Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στον Πίνακα.... Να ληφθεί υπόψη ότι, δεδομένου ότι τα αποτελέσματα είναι για κάθε μία από τις κατηγορίες δ1, δ2, κ, οι συνεπείς απαντήσεις για δύο ομάδες α-ριθμών, όπως για παράδειγμα, η {[δ1], [δ2]}, προσμετρώνται και για την δ1 και για τη δ2. Στον επόμενο πίνακα (....) παρουσιάζονται οι συχνότητες των συνεπών απαντήσεων που αντιστοιχούν στην Ενδιάμεση κατηγορία για το Γυμνάσιο και το Λύκειο ξεχωριστά, ανάλογα με το αν είναι «πεπερασμένο πλήθος» (γαλάζιο χρώμα), «άπειρο πλήθος» (κίτρινο χρώμα) και «αδιευκρίνιστο πλήθος» (μοβ χρώμα) στις ερωτήσεις της κάθε ομάδας. Έτσι, για παράδειγμα στη δεύτερη γραμμή και δεύτερη στήλη του υποπίνακα με το μπλε χρώμα, παρουσιάζεται η συχνότητα της απάντησης {[δ1], [δ2]}, η οποία είναι εσωτερικά συνεπής για κάθε μία από τις ομάδες δ1, δ2 και εξωτερικά συνεπής για τις δύο ομάδες, ενώ, επιπλέον, το μπλε χρώμα αντιστοιχεί στην πληροφορία ότι η δόθηκε η απάντηση «πεπερασμένο πλήθος» για όλα τα ζευγάρια αριθμών. Στις διαγωνίους των υποπινάκων με το μπλε, κίτρινο και μως χρώμα, αντίστοιχα καταχωρούνται οι συνεπείς απαντήσεις για μία μόνο ομάδα αριθμών. Για παράδειγμα, στη δεύτερη γραμμή, δεύτερη στήλη του υποπίνακα με το μπλε χρώμα, αντιστοιχεί η συχνότητα της απάντησης «πεπερασμένο πλήθος» για τους αριθμούς της ομάδας δ2.

Πίνακας 3-14: Χαρακτηριστικά των συνεπών απαντήσεων σε Γυμνάσιο και Λύκειο για την Ενδιάμεση κατηγορία

	Γυμνάσιο								
	[δ1]	**[δ2]**	**[κ]**	**[δ1]**	**[δ2]**	**[κ]**	**[δ1]**	**[δ2]**	**[κ]**
[δ1]	7	8	9	10	11	2	2	2	3
[δ2]	8	3	6	11	5	1	2	7	4
[κ]	9	6	6	2	1	3	3	4	2
	24	**17**	**21**	**23**	**17**	**6**	**1**	**7**	**9**
Σύνολο απαντήσεων στις κατηγορίες Α*, Β, Γ, Ε: 62									
	Λύκειο								
	[δ1]	**[δ2]**	**[κ]**	**[δ1]**	**[δ2]**	**[κ]**	**[δ1]**	**[δ2]**	**[κ]**
[δ1]	7	6	3	6	7	7	6	5	7
[δ2]	6	5	2	7	5	1	7	10	10
[κ]	3	2	8	7	1	1	7	10	9
	16	**13**	**13**	**20**	**13**	**9**	**20**	**25**	**26**
Σύνολο απαντήσεων στις κατηγορίες Α*, Β, Γ, Ε: 69									

Από τον πίνακα φαίνεται ότι, τόσο στο Γυμνάσιο, όσο και στο Λύκειο,

- η ομάδα **κ** των κλασμάτων απαντήθηκε με μικρότερη συνέπεια από τις δύο άλλες ομάδες, όπως ήταν αναμενόμενο από τα προηγούμενα αποτελέσματα. Επίσης, οι συνεπείς απαντήσεις «πεπερασμένο πλήθος» είναι περισσότερες από τις «άπειρο πλήθος». Ωστόσο, η απάντηση «αδιευκρίνιστο πλήθος» είναι πρώτη σε συχνότητα, που σημαίνει ότι οι συμμετέχοντες ήταν πιο πρόθυμοι να απαντήσουν ότι υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στους αριθμούς της ομάδας κ, ακόμα και όταν δεν ήταν σε θέση να διευκρινίσουν ποιοι ή πόσοι είναι αυτοί.
- Η ομάδα που απαντήθηκε με τη μεγαλύτερη συνέπεια ήταν η **δ1** των ψευδο-διαδοχικών δεκαδικών αριθμών 0,005-0,006 και 0,1-0,2. Ωστόσο,

φαίνεται ότι ομάδα δ1 έλαβε την απάντηση «πεπερασμένο πλήθος» συχνότερα σε σύγκριση με τις δύο άλλες ομάδες και, στην περίπτωση του Γυμνασίου, συχνότερα από την απάντηση «άπειρο πλήθος».

- Η δ2 έλαβε τις απαντήσεις «πεπερασμένο πλήθος» και «άπειρο πλήθος» με την ίδια συχνότητα. Επίσης, οι συμμετέχοντες ήταν πιο πρόθυμοι να απαντήσουν ότι υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στους αριθμούς της ομάδας δ2, σε σύγκριση με τους αριθμούς της δ1, ακόμα και όταν δεν ήταν σε θέση να διευκρινίσουν ποιοι ή πόσοι είναι αυτοί.
- Ο συνδυασμός ομάδων που απαντήθηκε με τη μεγαλύτερη εξωτερική και εσωτερική συνέπεια είναι ο συνδυασμός των δ1, δ2, δηλ. οι ομάδες των δεκαδικών. Στην περίπτωση αυτή, δόθηκε πιο συχνά η απάντηση «άπειρο πλήθος», σε σχέση με την απάντηση πεπερασμένο πλήθος.

Συνοψίζοντας, περιγράφοντας τις απαντήσεις της Ενδιάμεσης κατηγορίας με όρους συνέπειας, η εικόνα που προκύπτει για το Γυμνάσιο και αυτή που προκύπτει για το Λύκειο είναι παρόμοιες. Και στις δύο περιπτώσεις, η ομάδα δ1 απαντιέται με μεγαλύτερη συνέπεια, αλλά η συνέπεια αυτή οφείλεται και σε ένα μεγάλο πλήθος από συνεπείς απαντήσεις «πεπερασμένο πλήθος», στις οποίες υπερτερεί έναντι των δύο άλλων ομάδων. Προκειμένου να δοθεί μια ερμηνεία του αποτελέσματος αυτού, υπενθυμίζεται ότι οι αριθμοί της ομάδας δ1 είναι αυτοί που παραπέμπουν στη διαδοχή των φυσικών περισσότερο, σε σύγκριση με τους αριθμούς των δύο άλλων ομάδων. Η συχνότερη συνέπεια της απάντησης «πεπερασμένο πλήθος» ενδεχομένως οφείλεται στη μεγαλύτερη δυσκολία των παιδιών να εγκαταλείψουν το μοντέλο των φυσικών στη δεδομένη περίπτωση. Η μεγάλη ασυνέπεια που εμφανίζεται, όσον αφορά στην ομάδα των κλασμάτων μπορεί ενδεχομένως να εξηγηθεί και βάσει της διαφοράς που υπάρχει ανάμεσα στα δύο ζευγάρια αριθμών της ομάδας. Συγκεκριμένα, ενώ οι αριθμοί $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ της ερώτησης Π_5 είναι ψευδο-διαδοχικοί, οι αριθμοί $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ δεν είναι. Στο βαθμό που η ασυνέπεια μπορεί να αποδοθεί στη διαφορά αυτή, το αποτέλεσμα είναι θεωρητικά σημαντικό, γιατί υποδεικνύει ότι η προϋπόθεση της διακριτότητας μπορεί να συνεχίζει να επιδρά, ανάλογα με το πλαίσιο της ερώτησης, ακόμα και σε περιπτώσεις που η συνολική εικόνα που δίνει κάποιο παιδί είναι πολύ πιο εκλεπτυσμένη. Στο σημείο αυτό, είναι ενδιαφέρον να γίνει ιδιαίτερη αναφορά σε μια ομάδα παιδιών, η οποία παρουσιάζει ακριβώς αυτή την εικόνα. Συγκεκριμένα, 9 παιδιά από αυτά που απάντησαν τα κλειστά ερωτηματολόγια (ποσοστό 9/149 =6%) απάντησαν με συνέπεια «υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών» για όλες τις ερωτήσεις Π_i, εκτός από την ερώτηση Π_5, η οποία αφορά τα κλάσματα $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}$, στην οποία έδωσαν την απάντηση «υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών». Από τα παιδιά αυτά, τα 6 προτίμησαν, ειδικά για την ερώτηση αυτή, την απάντηση «υπάρχει μόνο ο αριθμός $\frac{4}{8}$ και όλα τα κλάσματα που είναι ισοδύναμα με αυτόν». Τα παιδιά αυτά είναι ικανοποιημένα με τη συγκεκριμένη απάντηση, πιθανότατα γιατί θεωρούν ότι οι άπειρες ισοδύναμες αναπαραστάσεις του κλάσματος $\frac{4}{8}$ αντιστοιχούν σε άπειρους διαφορετικούς αριθμούς. Με αυτή τη θεώρηση, είναι πεπεισμένα ότι έχουν απαντήσει «υπάρχουν άπειροι αριθμοί» ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}$.

Η ασυνέπεια, όσον αφορά στα κλάσματα, είναι δυνατόν να στηρίξει και μια υπόθεση, σχετικά με ποια ομάδα αριθμών είναι αυτή που υποστηρίζει περισσότερο το πέρασμα από το διακριτό στο πυκνό μοντέλο για τους ρητούς. Υπενθυμίζεται ότι, από τις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$, αυτές για τις οποίες εμφανίζεται στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση ανάμεσα στο παιδιά του Γυμνασίου και του Λυκείου, είναι τα οι ερωτήσεις που αφορούν στα κλάσματα. Ενδεχομένως, τα κλάσματα, για κάποια παιδιά, παραπέμπουν στους φυσικούς λιγότερο από τους δεκαδικούς και τα υποστηρίζουν στο πέρασμα από τη διακριτότητα στην πυκνότητα. Συνδυάζοντας την υπόθεση αυτή, με το γεγονός ότι στην Ενδιάμεση ομάδα, η μεγαλύτερη εξωτερική και εσωτερική συνέπεια στην απάντηση «υπάρχουν άπειροι αριθμοί» δίνεται για τις ομάδες των δεκαδικών, είναι δυνατόν να διατυπωθεί ο εξής ισχυρισμός:

Κάποια παιδιά, φτάνουν επαγωγικά στο συμπέρασμα «υπάρχουν άπειροι αριθμοί» ανάμεσα στους δεκαδικούς, χρησιμοποιώντας τις αλγοριθμικές δεξιότητες που διαθέτουν, όσον αφορά στους δεκαδικούς αριθμούς (π.χ. πρόσθεση δεκαδικών ψηφίων στο τέλος των δεκαδικών αριθμών). Άλλα παιδιά, αντιμετωπίζοντας αριθμούς που δεν τα παραπέμπουν άμεσα στο μοντέλο των φυσικών, αναγκάζονται να επιστρατεύσουν άλλου είδους βοήθεια –πιθανόν να ανακαλούν και την πληροφορία ότι στα διαστήματα των ρητών υπάρχουν άπειροι αριθμοί, η οποία έχει δοθεί στο περιβάλλον της τάξης ή αλλού. Πρέπει επίσης να ληφθεί υπόψη ότι, ενδεχομένως, τα παιδιά του Λυκείου έχουν αναπτύξει περισσότερο την ικανότητα χειρισμού των κλασμάτων, οπότε δεν αποκλείεται να επιστρατεύουν συχνότερα από τα παιδιά του Γυμνασίου τη στρατηγική μετατροπής των κλασμάτων σε δεκαδικούς, έστω και νοερά.

3.6.1.10. Μια πιο λεπτή ανάλυση των κατηγοριών «Όλα Π» και «Όλα Α».

Θα επιχειρηθεί μια πιο λεπτομερής ανάλυση της κατηγορίας «Όλα Π» στα ερωτηματολόγια κλειστού και ανοικτού τύπου. Επίσης, θα επιχειρηθεί το ίδιο και για την κατηγορία «Όλα Α», μόνο στην περίπτωση των ερωτηματολογίων κλειστού τύπου, προκειμένου να γίνει περισσότερο κατανοητό κατά πόσο η μορφή των αριθμών που εμφανίζονται στις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$ επηρεάζει τα παιδιά που απαντούν «υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών» σε κάθε μία από τις ερωτήσεις αυτές. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η περιγραφή της κάθε μίας από τις 5 κατηγορίες και το ποσοστό των συμμετεχόντων που συμπεριλήφθηκαν σε αυτή, στην περίπτωση των ερωτηματολογίων κλειστού τύπου.

Πίνακας 3-15: Υποκατηγορίες των κατηγοριών «πάντα Π» και «πάντα Α» και ποσοστό % των συμμετεχόντων σε κάθε κατηγορία

Περιγραφή της κατηγορίας	Ονομασία	Ποσοστό %	
		Γ	Λ
▪ Δεν υπάρχει αριθμός ανάμεσα στους 0,005, 0,006 (αντ. 0,01, 0,02) ▪ Υπάρχει μόνο ένας αριθμός ανάμεσα στους $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ (αντ.κανένας ανάμεσα στους $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$) ▪ Ανάμεσα στους 0,001, 0,001 (αντ.0,01, 0,1) υπάρχουν οι 0,002, 0,003,...,0,009 ή δεν υπάρχει κανείς (αντ.) ή ➢ Τουλάχιστον τέσσερα από τα παραπάνω και μη κατατάξιμη απάντηση σε 2 από τις $Π_1$-$Π_6$	Διακριτότητα **(Δ)**	4,0	12
Υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών για τις $Π_1$-$Π_6$ και τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω: ▪ Υπάρχει πεπερασμένο (>0) πλήθος αριθμών ανάμεσα στους 0,005, 0,006 (0,01, 0,02) ή ▪ Υπάρχει πεπερασμένο (>1) πλήθος αριθμών ανάμεσα στους $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ (αντ. περισσότεροι από 0 ανάμεσα στους $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$). ή ▪ Υπάρχει πεπερασμένο (>9) πλήθος αριθμών ανάμεσα στους 0,005, 0,006 (αντ. 0,01, 0,02)	Διακριτότητα+ **(Δ+)**	32,2	17,6
Υπάρχουν άπειροι αριθμοί, ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς αριθμούς, αλλά έχουν συγκεκριμένη μορφή (π.χ. κλάσματα ανάμεσα στα κλάσματα, δεκαδικοί ανάμεσα στους δεκαδικούς)	**Πυκνότητα – (Π-)**	12,19	16,17
Υπάρχουν άπειροι αριθμοί, όλων των ειδών, ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς αριθμούς	Πυκνότητα **(Π+)**	10,97	22,5

Πιο αναλυτικά, στην κατηγορία **Δ** συμπεριελήφθησαν τα παιδιά, τα οποία, αντιμετωπίζουν τους 0,005 και 0,006, 0,1 και 0,2, $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{8}$ και $\frac{4}{8}$ ως διαδοχικούς, ενώ στην περίπτωση των 0,001 και 0,01, 0,01και 0,1 αναφέρονται στις πεπερασμένες ακολουθίες των αριθμών 0,002, 0,003,...,0,009 και 0,01, 0,02,...,0,09 αντίστοιχα.

Στην κατηγορία Δ+ συμπεριελήφθησαν τα παιδιά, τα οποία επίσης αναφέρονται σε υποσύνολα των ρητών, τα οποία διατηρούν τη διακριτότητα των φυσικών. Ωστόσο, επιλέγουν και απαντήσεις, στις οποίες οι αρχικοί δεδομένοι αριθμοί δεν αντιμετωπίζονται ως «διαδοχικοί», αλλά η ιδιότητα αυτή εξακολουθεί να αποδίδεται στους αριθμούς που επιλέγουν ως ενδιάμεσους. Για παράδειγμα, τους αριθμούς 0,0051, 0,0052, 0,0053,...,0,059 ως ενδιάμεσους των 0,005, 0,006 ή τους 0,11, 0,12, 0,13,....0,99 ως ενδιάμεσους των 0,01, 0,1.

Έχει ενδιαφέρον να αναφερθεί ότι στην περίπτωση των ερωτηματολογίων ανοικτού τύπου, η σχέση των κατηγοριών Δ, Δ+ είναι εντελώς διαφορετική. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση των παιδιών του Γυμνασίου 22,8% (19/83) κατατάχτηκαν στην κατηγορία Δ, σε σύγκριση με 25,3% (21/83) των παιδιών που κατατάχτηκαν στην κατηγορία Δ+ . Αντίστοιχα, 19,69% (13/66) από τα των παιδιών του Λυκείου που κατατάχτηκαν στην κατηγορία «πάντα Π», 7,5% (5/66)αντιστοιχεί στην κατηγορία Δ και το υπόλοιπο 12,1% (8/66) αντιστοιχεί στην κατηγορία Δ+. Φαίνεται ότι η παρουσία συγκεκριμένων επιλογών βοηθά τα παιδιά της κατηγορίας «Δ+» να δώσουν μια πιο εκλεπτυσμένη απάντηση, παραμένοντας σπα πλαίσια της κατηγορίας «πάντα Π». Με τη συγκεκριμένη κατηγοριοποίηση, είναι εφικτή μια διαφοροποίηση ανάμεσα στα παιδιά που απάντησαν σε όλες τις ερωτήσεις ότι υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς ρητούς αριθμούς. Μόνο ένα μέρος αυτών των παιδιών δήλωσε ότι οι αριθμοί που βρίσκονται ανάμεσα σε δύο δεδομένους αριθμούς μπορούν να έχουν οποιαδήποτε μορφή (δεκαδικού, κλάσματος αλλά και ρίζας), επιλέγοντας με συνέπεια τη συγκεκριμένη απάντηση, σε κάθε μία από τις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_4$. Τα υπόλοιπα παιδιά περιόρισαν την απάντησή τους σε αριθμούς μιας συγκεκριμένης μορφής σε τουλάχιστον μία από τις ερωτήσεις $Π_1$-$Π_6$.

3.6.1.11. Η ερώτηση Πε

Στον πίνακα 3-16 παρουσιάζεται η κατανομή των απαντήσεων των συμμετεχόντων στην ερώτηση $Π_ε$, ανάλογα με την κατηγορία (**«Όλα Π», «Π+Α», «Όλα Α»**) στην οποία ανήκουν.

Πίνακας 3-16

	Ανοιχτά						
Ο επόμενος του 999…	**Γ**			**Λ**			
	Όλα «Π»	**«Π» + «Α»**	**Όλα «Α»**	**Όλα «Π»**	**«Π» + «Α»**	**Όλα «Α»**	
Καμία απάντηση	14	16	2	5	20	3	
1000	18	13	-	6	12	-	
π.χ. 999,001	3	1	2	2	3	-	
Υπάρχει, αλλά δεν μπορεί να προσδιοριστεί (999,00…01)	1	3	2	-	5	5	
Δεν υπάρχει	3	3	2	-	4	2	
	39	36	8	13	44	9	
Σύνολο	**83**			**66**			
	Κλειστά						
Ο επόμενος του 999…	**Γ**			**Λ**			
	Όλα «Π»	**«Π» + «Α»**	**«Α»**	**Όλα «Π»**	**«Π» + «Α»**	**«Α»**	
Καμία απάντηση	1	3	-	-	1	2	
1000	12	12	1	9	10	7	
π.χ. 999,001	12	10	1	6	5	-	
Υπάρχει, αλλά δεν μπορεί να προσδιοριστεί (999,00…01)	1	4	12	-	8	11	
Δεν υπάρχει	3	4	5	-	6	6	
	29	33	9	15	30	26	
Σύνολο	**81**			**71**			

Από τα στοιχεία του πίνακα προκύπτει ότι τα παιδιά της κατηγορίας «Όλα Π» επιλέγουν με μεγαλύτερη συχνότητα τις απαντήσεις «1000» και «κάποιος άλλος δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων». Ωστόσο, στη μεμονωμένη περίπτωση του Γυμνασίου, στα ανοικτά ερωτηματολόγια, εμφανίζονται και παιδιά της κατηγορίας αυτής, που δίνουν πολύ πιο εκλεπτυσμένες απαντήσεις στη συγκεκριμένη ερώτηση. Το μεγαλύτερο μέρος των παιδιών της κατηγορίας «Π +Α», επιλέγει επίσης τις απαντήσεις «1000» και «κάποιος άλλος δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων». Επισημαίνεται ιδιαίτερα το μεγάλο ποσοστό των παιδιών της κατηγορίας αυτής, τα οποία, στα ανοικτά ερωτηματολόγια, δεν δίνουν καμία απάντηση. Ενδεχομένως, η ερώτηση αυτή τους προκάλεσε το μεγαλύτερο προβληματισμό. Ωστόσο, από την κατηγορία ατή προέρχεται και ένα σημαντικό μέρος των σωστών απαντήσεων, ενώ στην περίπτωση των ανοικτών ερωτηματολογίων, από την κατηγορία «Π+Α» δεν έχει προέλθει καμία απάντηση «1000» και «κάποιος άλλος δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων». Επισημαίνεται ιδιαίτερα ότι η κατάταξη στην κατηγορία «Όλα Α» δεν εξασφαλίζει απαραίτητα εκλεπτυσμένες απαντήσεις στην ερώτηση $Π_ε$.

3.7. Συζήτηση των αποτελεσμάτων

Τα αποτελέσματα της Έρευνας ΙΙ είναι σύμφωνα με τις υποθέσεις.

3.7.1. Δυσκολίες, ηλικία, φύλο

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο για την εννοιολογική που υιοθετήθηκε (Vosniadou, 1994b, 2001, 2002) και την ανάλυση που παρατέθηκε στην παράγραφο **1.2**, η κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας αποδείχτηκε μια δύσκολη και σταδιακή διαδικασία, η οποία συνοδεύεται από παρανοήσεις. Παρά το γεγονός ότι η ηλικία και η παράλληλη εκπαίδευση βελτιώνει την εικόνα που παρουσιάζουν οι μαθητές, όσον αφορά στην κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών, μεγάλο ποσοστό των μαθητών της Β' Λυκείου εξακολουθεί να περιορίζεται από τη θεμελιώδη προϋπόθεση της διακριτότητας. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα ξεκάθαρο στην περίπτωση των παιδιών της Β' Λυκείου που κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτηματολόγια ανοικτού τύπου, χωρίς την υποστήριξη των πολλαπλών επιλογών. Πραγματικά, σε όλες, πλην μίας, από τις ερωτήσεις σχετικά με το πλήθος των αριθμών σε ένα διάστημα ρητών, η συνηθέστερη απάντηση των παιδιών αυτών ήταν «υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών». Αντίθετα, στα παιδιά της ίδια ηλικίας που είχαν την δυνατότητα των πολλαπλών επιλογών, επικρατούσα ήταν η απάντηση «υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών». Το αποτέλεσμα αυτό αντανακλά και την επίδραση του ερευνητικού εργαλείου στην επίδοση των συμμετεχόντων και προέκυψε και για τις δύο ηλικίες συμμετεχόντων, επιβεβαιώνοντας την υπόθεση: Η παρουσία πολλαπλών επιλογών διευκολύνει τα παιδιά στο να ανακαλέσουν πληροφορίες σχετικές με το περιεχόμενο των ερωτήσεων, με αποτέλεσμα να δίνουν καλύτερη εικόνα κατανόησης (Vosniadou, Skopeliti & Ikospentaki, in press). Η υπόθεση ότι μεγαλύτερη επίδοση επιτυγχάνουν οι συμμετέχοντες που απαντούν σε κλειστού τύπου ερωτήσεις επιβεβαιώθηκε και για τις δύο ηλικίες των συμμετεχόντων, υποδεικνύοντας ότι η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου ανοικτού τύπου ήταν το πιο δύσκολο από τα δύο έργα. Στο δυσκολότερο αυτό έργο, καλύτερη επίδοση πέτυχαν τα αγόρια, αποτέλεσμα που είναι συμβατό με την υπόθεσή μας και με προηγούμενες έρευνες σχετικά με τις διαφορές λόγω φύλου στη μαθηματική επίδοση (Fennema & Hart , 1988; PISA ,2000) και ειδικά στο χώρο κατανόησης των αριθμών (Hannula, Maijala, Pehkonen & Soro, 2001).

3.7.2. Η επίδραση της ευθείας των πραγματικών

Όπως είχε υποτεθεί, η επίδραση της ευθείας ήταν περιορισμένη, υπό την εξής έννοια: Ενώ τα παιδιά της Γ' Γυμνασίου είχαν γενικά καλύτερες επιδόσεις στις ερωτήσεις με την παρουσία της ευθείας, η καλύτερη αυτή επίδοση δεν διατηρήθηκε όταν το αναπαραστασιακό μέσο αποσύρθηκε. Τα παιδιά του Λυκείου δεν παρουσίασαν σημαντικές διαφορές στην επίδοση λόγω της παρουσίας της ευθείας. Η διαφορά αυτή ανάμεσα στις δύο ηλικίες μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι, στην Γ' Γυμνασίου, η ευθεία ως μέσο αναπαράστασης των πραγματικών είναι ακόμα ένα καινούργιο εργαλείο και είναι ακριβώς σε αυτή την περίοδο που έχει τη μεγαλύτερη επίδραση. Για τα παιδιά του Λυκείου, φαίνεται ότι η επίδραση της ευθείας έχει ήδη συντελεστεί –ενδεχομένως, συμβάλλοντας και στην καλύτερη γενική επίδοση των παιδιών. Πέρα από την ποσοτική διάσταση του θέματος, έχει ενδιαφέρον να αναφερθεί το μεγάλο ποσοστό των παιδιών, τόσο στη Γ' Γυμνασίου, όσο και στη Β' Λυκείου, το οποίο απαντά σταθερά «υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών» ανάμεσα στους δεδομένους αριθμούς, είτε με, είτε χωρίς την παρουσία της ευθείας. Επιπλέον, υπάρχει και ένας αριθμός παιδιών που έχει μικρότερη επίδοση στις ερωτήσεις με την ευθεία. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ενδεικτικό της ερμηνείας της ευθείας των πραγματικών αριθμών, στη βάση πραγματιστικών αναπαραστάσεων, όπως ο χάρακας.

3.7.3. Βεβαιότητα και συνέπεια

Τα παιδιά που είναι περισσότερο δεσμευμένα από τη θεμελιώδη προϋπόθεση της διακριτότητας, επιδεικνύουν συχνά μεγαλύτερη βεβαιότητα για τις απαντήσεις τους, αποτέλεσμα που είναι συμβατό με την πρόβλεψη των Merenluoto και Lehtinen (in press, 2003) και με τις παρατηρήσεις κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων της Έρευνας Ι. Αντίθετα, τα παιδιά που βρίσκονται σε ενδιάμεσα στάδια κατανόησης, συχνά εμφανίζονται λιγότερο σίγουρα για τις απαντήσεις τους, γεγονός που υποδεικνύει ότι αποκτούν αίσθηση των αντιφάσεων, ανάμεσα στην αρχική τους θεωρία για τους αριθμούς και τις αυξανόμενες γνώσεις τους για τους ρητούς αριθμούς, αλλά δεν παύουν να δεσμεύονται από τη θεμελιώδη προϋπόθεση της διακριτότητας. Η ένδειξη αυτή ενισχύεται από το γεγονός ότι, από τα παιδιά που βρίσκονται στην ενδιάμεση κατηγορία, αυτά που επιδεικνύουν μεγαλύτερη συνέπεια στην απάντηση «υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών» είναι τα παιδιά της Γ' Γυμνασίου. Δεν πρέπει να αποκλειστεί το ενδεχόμενο, τα παιδιά της Β' Λυκείου που επιδεικνύουν μεγαλύτερη ασυνέπεια στις απαντήσεις τους, να αρχίζουν να αναθεωρούν τις αρχικές τους απαντήσεις κατά τη διάρκεια της συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου, ειδικά στην περίπτωση των παιδιών που έχουν τη δυνατότητα επιλογής από πολλαπλές απαντήσεις.

3.7.4. Ενδιάμεσα στάδια κατανόησης-συνθετικά μοντέλα

Εκτός από τα παιδιά που ανήκουν στην ενδιάμεση κατηγορία «Π+Α», μια πιο λεπτή ανάλυση των κατηγοριών «Όλα Π» και «Όλα Α», έδειξε ότι και εκεί μπορούν να διαγνωσθούν ενδιάμεσα στάδια κατανόησης. Τα παιδιά που συμπεριλήφθηκαν στην κατηγορία «Διακριτότητα +», ενώ ξεπερνούν το στάδιο όπου, για παράδειγμα, οι αριθμοί 0,005 και 0,006 θεωρούνται διαδοχικοί και αναγνωρίζουν τους 0,0051, 0,0052, ...,0,0059 ως ενδιάμεσους, δεν προχωρούν στο επόμενο βήμα της προσθήκης ενός ακόμα δεκαδικού ψηφίου. Συνεχίζουν έτσι να αναφέρονται σε ένα υποσύνολο των ρητών που διατηρεί τη διακριτή δομή των φυσικών.

Τα παιδιά που συμπεριλήφθηκαν στην κατηγορία «Πυκνότητα –», ενώ έχουν υπερβεί τη θεμελιώδη προϋπόθεση της διακριτότητας, συνεχίζουν να δεσμεύονται από την τάση τους να ομαδοποιούν τους αριθμούς. Έτσι, επιλέγουν να απαντήσουν ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς της ίδιας «ομάδας», π.χ. κλάσματα, υπάρχουν άπειρα κλάσματα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα παιδιά, τα οποία επιλέγουν να απαντήσουν ότι ανάμεσα στο $\frac{3}{8}$ και στο $\frac{5}{8}$ υπάρχει ο αριθμός $\frac{4}{8}$ και όλα τα ισοδύναμα με αυτόν κλάσματα, ιδιαίτερα δε αυτά που απαντούν «υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών» σε όλες τις υπόλοιπες ερωτήσεις. Υπενθυμίζεται ότι παρόμοιες απαντήσεις είχαν εμφανιστεί και στα ευρήματα της Έρευνας Ι. Τα παιδιά αυτά φαίνεται να θεωρούν ότι, τα άπειρα κλάσματα που είναι ισοδύναμα με το $\frac{4}{8}$ αντιστοιχούν σε άπειρους διαφορετικούς αριθμούς.

Γενικά, οι ερωτήσεις που αφορούν κλάσματα αποδείχτηκαν ιδιαίτερα δύσκολες για τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα Ι και μάλιστα, είναι ακριβώς οι ερωτήσεις που διαφοροποιούν την επίδοση των μαθητών της Β' Λυκείου, από την επίδοση των μαθητών της Γ' Γυμνασίου. Το γεγονός αυτό αποτελεί μια ένδειξη για το ότι, για τα περισσότερα παιδιά, η ανάπτυξη της έννοιας της πυκνότητας αρχίζει στους δεκαδικούς αριθμούς. Πραγματικά, φαίνεται ότι η προσθήκη δεκαδικών ψηφίων στο τέλος του δεκαδικού μέρους του 0,01, προκειμένου να προκύψουν αριθμοί ενδιάμεσοι του 0,01 και του 0,1, από τη στιγμή που το παιδί αρχίζει να την επαναλαμβάνει, είναι μια διαδικασία που το οδηγεί βήμα –βήμα στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί στο διάστημα. Πρέπει όμως, να επισημανθεί, ότι αυτό είναι ακόμα μια ένδειξη για το ότι πολλά παιδιά σκέφτονται διαφορετικά για τη δομή των κλασμάτων, και διαφορετικά για τη δομή των δεκαδικών και, μάλιστα, η πιο εκλεπτυσμένη κατανόηση στο ένα πεδίο, δεν μεταφέρεται απαραίτητα και στο άλλο.

Με βάση τις παρατηρήσεις αυτές, οι εναλλακτικές περιγραφές των διαστημάτων των ρητών αριθμών, τις οποίες αναφέρουν τα παιδιά, είναι συνθετικά μοντέλα (Vosniadou, 1992, 1994b) που αντανακλούν την προσπάθειά τους να εντάξουν τις γνώσεις τους για τους ρητούς στο προϋπάρχον πλαίσιο της γνώσης τους για τους φυσικούς αριθμούς. Να επισημάνουμε ιδιαίτερα ότι, οι γνώσεις που φαίνεται να ενεργοποιούν τα παιδιά, είναι κυρίως διαδικαστικές, ενώ φαίνεται να λείπει η βασική εννοιολογική γνώση, ότι οι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις ενός αριθμού, αναφέρονται στον ίδιο αριθμό.

3.8. Γενικότερη συζήτηση

3.8.1. Η γνωσιακή άποψη

Η παρούσα εργασία κινήθηκε στα πλαίσια του χώρου της γνωσιακής επιστήμης. Ευρύτερος στόχος μας ήταν να ελέγξουμε κατά πόσο μια γόνιμη θεωρητική προσέγγιση στη μάθηση, η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής, μπορεί αξιοποιηθεί στην περίπτωση των μαθηματικών. Η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως, ήδη από τα τέλη της δεκαετίας του 70, για να περιγράψει τις συνθήκες, υπό τις οποίες η ανάπτυξη μιας έννοιας είναι δύσκολη για τα παιδιά και να εξηγήσει τις παρανοήσεις που δημιουργούνται στο χώρο της μάθησης που άπτεται των φυσικών επιστημών (ενδεικτικά: Carey and Spelke,1996, 1994; Driver and Easley,1978; Mason, 2001; Posner, Strike, Hewson, and Gertzog, 1982; Vosniadou, 1994a). Ωστόσο, οι απόπειρες μεταφοράς της στο πεδίο των μαθηματικών είναι σχετικά πρόσφατες (Lehtinen, Merenluoto & Kasanen, 1997; Merenluoto and Lehtinen, in press, 2002; Vamvakoussi and Vosniadou, in press, 2003,2002; Verschaffel and Vosniadou, in press).

Στη συγκεκριμένη εργασία, υιοθετήσαμε ένα συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο (Vosniadou, 1994b, 2001, 2002) και αναλύσαμε θεωρητικά τις προϋποθέσεις του. Βάσει της ανάλυσής μας, μπορέσαμε να εντοπίσουμε την περίπτωση της ανάπτυξης μιας μαθηματικής έννοιας, για την οποία υποθέσαμε ότι απαιτεί εννοιολογική αλλαγή. Ελέγξαμε εμπειρικά την υπόθεσή μας, προβλέποντας και εξηγώντας τις παρανοήσεις που προκύπτουν. Πλησιάζοντας στο κλείσιμο της συγκεκριμένης εργασίας, είμαστε πεπεισμένοι ότι η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής, και μάλιστα το συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά συστηματικό τρόπο για να προβλέψει δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην ανάπτυξη μαθηματικών γνώσεων και να εξηγήσει τις παρανοήσεις που τις συνοδεύουν. Στηρίζοντας την πεποίθησή μας αυτή με τα ευρήματα της έρευνας, ελπίζουμε ότι η παρούσα εργασία θα αποτελεί μια μικρή συμβολή στο χώρο της έρευνας της γνωσιακής επιστήμης. Στην πορεία της εργασίας αυτής, αναδείχθηκε ως κομβικό σημείο στην κατανόηση των ρητών αριθμών η συνειδητοποίηση ότι οι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις ενός αριθμού αναφέρονται στον ίδιο αριθμό, κάτι που είναι συμβατό με την άποψη που έχει διαμορφωθεί στο χώρο της εκπαίδευσης (NCTM, 2000). Σύμφωνα με την ανάλυσή μας στην παράγραφο **1.2.1**, οι πολλαπλές συμβολικές αναπαραστάσεις είναι χαρακτηριστικό των ρητών, αλλά όχι των φυσικών (στο σύνολο των φυσικών). Αν και απαιτείται διεξοδικότερη βιβλιογραφική και εμπειρική, έρευνα, θα διατυπώσουμε τον ισχυρισμό ότι, ενδεχομένως, η αρχική θεωρία των παιδιών για τον αριθμό, όπως περιγράφεται από τους Gelman και Galistell (1978) και Gelman (2000) για τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας, εμπλουτίζεται, υπό την επίδραση της βασικής τυπικής εκπαίδευσης, με μία ακόμα αρχή: Ότι κάθε αριθμός έχει μοναδική συμβολική αναπαράσταση. Βάσει της εικασίας αυτής, η επέκταση της αρχικής θεωρίας για τον αριθμό, μπορεί να εξηγήσει μεγάλο μέρος των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν τα παιδιά από την πρωτοβάθμια, ως το τέλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην κατανόηση της έννοιας του ρητού αριθμού.

3.8.2. Η εκπαιδευτική άποψη

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας δεν είναι να αξιολογήσει κατά πόσο η ελληνική μαθηματική εκπαίδευση επιτυγχάνει ή όχι, όσον αφορά την έννοια της πυκνότητας, πόσο μάλλον όταν η έννοια της πυκνότητας δεν είναι δηλωμένος στόχος του τρέχοντος Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών. Ωστόσο, τόσο από τη θεωρητική μας ανάλυση, όσο και από τα ευρήματα της έρευνας, ανακύπτουν ζητήματα που αφορούν τη μαθηματική εκπαίδευση γενικά και ,ειδικότερα, όσον αφορά τους η διδασκαλία των ρητών αριθμών που είναι ανάμεσα στους σκοπούς της.

Μια απλουστευτική, αν και εύλογη άποψη για τα ζητήματα της εννοιολογικής αλλαγής είναι ότι οι όλες οι δυσκολίες στην κατανόηση οφείλονται είτε στις αδυναμίες της εκπαίδευσης –της μαθηματικής εκπαίδευσης, στην προκειμένη περίπτωση- είτε στην αδιαφορία, την αμέλεια και ενίοτε την αδύναμη μνήμη των ίδιων των μαθητών (ας θυμηθούμε τον καθηγητή των παιδιών που συμμετείχαν στην Έρευνα Ι). Από την άλλη μεριά, ενώ η πεποίθηση, ότι τα Μαθηματικά είναι κατεξοχήν το μάθημα, στο οποίο η προηγούμενη γνώση είναι εξαιρετικά σημαντική, είναι ισχυρή στους χώρους των εκπαιδευτικών, ο τρόπος με τον οποίο επηρεάζει την πρόσληψη της καινούργιας γνώσης γίνεται κατανοητός σε στενά πλαίσια. Συγκεκριμένα, η προϋπάρχουσα γνώση θεωρείται ότι είτε επιδρά θετικά, δια της παρουσίας της, είτε επιδρά αρνητικά δια της απουσίας της (τα περίφημα «κενά» των μαθητών) (Vamvakoussi, Kollias, Vosniadou, Skopeliti, Ikospentaki, 2002). Επομένως, μια πρώτη παράμετρος είναι η ενημέρωση των εκπαιδευτικών για το ζήτημα της εννοιολογικής αλλαγής. Η βαθύτερη κατανόηση των περιορισμών που κρύβονται πίσω από τις περιπτώσεις, στις οποίες οι μαθητές «επιμένουν» να ξεχνούν, να κάνουν λάθη ή να μην αντιλαμβάνονται την ασυνέπεια των συλλογισμών τους, θα είναι οπωσδήποτε βοηθητική στις καταστάσεις προβληματικής επικοινωνίας στην τάξη (Sfard, 1994): Μεταξύ κάποιου που συλλογίζεται με όρους «ρητών», και κάποιου που συλλογίζεται με όρους «δεκαδικών» και «κλασμάτων», οπωσδήποτε υπάρχει ένα κενό επικοινωνίας.

Δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην αναγκαιότητα ενημέρωσης της εκπαιδευτικής κοινότητας για το ζήτημα της εννοιολογικής αλλαγής, καθώς και τις συγκεκριμένες δυσκολίες και παρανοήσεις που μπορεί αυτό το θεωρητικό πλαίσιο να προβλέψει, αναφέρουμε τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζεται το σύνολο των ρητών αριθμών στο τρέχον ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο της Β' Γυμνασίου:

«Όλοι οι γνωστοί μας αριθμοί, δηλαδή οι φυσικοί, τα κλάσματα και οι δεκαδικοί, μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς, σχηματίζουν το σύνολο των ρητών αριθμών»

(Βιβλίο της Β' Γυμνασίου, Έκδοση ΙΖ', 2003, σελ.298).

Ας παρατηρηθεί ότι η παρουσίαση αυτή είναι πλήρως συμβατή με την τάση της ομαδοποίησης των αριθμών που προβλέψαμε για τους μαθητές και η οποία ανιχνεύεται με διάφορους τρόπους στα ευρήματα της παρούσας εργασίας.

Μια δεύτερη παράμετρος που αφορά στην εκπαίδευση είναι η ευαισθησία σχετικά με το χρόνο που απαιτείται, προκειμένου να αναδιοργανωθούν οι βαθιά ριζωμένες «θεωρίες» των μαθητών (Vosniadou, 2001b). Η αλλαγές αυτές μπορεί να αποδειχτούν αργές, σταδιακές, επίπονες και ανθεκτικές ακόμα και σε μια διδασκαλία προσεκτικά σχεδιασμένη, η οποία λαμβάνει υπόψη τους γνωσιακούς περιορισμούς των μαθητών (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, in press).

Ειδικά για το ζήτημα της διδασκαλίας των ρητών αριθμών, διεξάγεται διεθνώς μια μεγάλη συζήτηση για τα προβλήματα στην κατανόηση και τις επιπτώσεις για την εκπαίδευση. Αναφέρουμε ως παράδειγμα, ένα πρόγραμμα διάγνωσης και διδακτικής αντιμετώπισης των δυσκολιών που αφορούν στην κατανόηση των ρητών, που διεξάγεται στο Πανεπιστήμιο της Μινεσότα ήδη από το 1979 με τη συμμετοχή των Behr, Cramer, Harel, Lesh και Post [4] . Από τα βασικά ευρήματα των ερευνών τους είναι η διάσταση ανάμεσα στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση των μαθητών (Post, Behr, Lesh, & Wachsmuth, 1986).

Θα εστιάσουμε στο συγκεκριμένο ζήτημα της κατανόησης ότι οι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις ενός αριθμού αναφέρονται στον ίδιο αριθμό, το οποίο αναδείχθηκε ως κεντρικό στην παρούσα εργασία. Θεωρούμε ότι πρόκειται για μια κεντρική, για την κατανόηση των ρητών, εννοιολογική γνώση, η οποία δεν εξασφαλίζεται από την κατοχή των αντίστοιχων διαδικαστικών γνώσεων. Πράγματι, από τα ευρήματα της Έρευνας Ι προέκυψε ότι, ακόμα και όταν κατέχουν την διαδικαστική γνώση της μετατροπής ενός κλάσματος σε δεκαδικό και αντίστροφα, οι μαθητές θεωρούν ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αριθμού αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς. Στην προκειμένη περίπτωση, υφίσταται διάσταση ανάμεσα στην διαδικαστική και την εννοιολογική γνώση των μαθητών. Η πρόταση για την εκπαίδευση συμβαδίζει με το διεθνή προσανατολισμό της εκπαίδευσης στην εξισορρόπηση της έμφασης μεταξύ της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης των μαθητών.

Τέλος, θα επισημάνουμε ότι, το αν και σε ποιο βαθμό η κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών πρέπει να είναι δηλωμένος στόχος του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών στην ελληνική εκπαίδευση, είναι ζήτημα ενός ευρύτερου σχεδιασμού και στοχοθεσίας της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ωστόσο, θεωρούμε ότι, ακόμα και αν η κατανόηση της πυκνότητας δεν είναι καθεαυτή εκπαιδευτικός στόχος, η προσπάθεια για την ανάπτυξη της έννοιας της πυκνότητας ενδεχομένως να υποστηρίξει τους μαθητές στην υπέρβαση των αρχικών «θεωριών» τους και την κατάκτηση εννοιολογικής γνώσης για τους ρητούς αριθμούς.

[4] The Rational Number Project
http://education.umn.edu/rationalnumberproject/default.html

4. Βιβλιογραφία

Behr,M., Harel,G., Post,T., and Lesh,R.(1994). Units of quantity: A conceptual basis common to additive and multiplicative structures. In G.Harel and J.Confrey.(Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*(pp.121-176). NY: The State University of New York Press.

Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching About Fractions: What, When, and How? In P. Trafton (Ed.), *National Council of Teachers of Mathematics 1989 Yearbook: New Directions For Elementary School Mathematics* (pp. 156-167). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bransford, J., Brown A., & Cocking, R. (Eds.) (1999).*How people Learn: Brain, Mind, Experience and School* . Washington DC: National Academy Press.

Bright, G., Behr, M., Post, T., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. Journal for Research in Mathematics Education., 19(3), 215-232.

Butterworth, B., (1999). *The mathematical brain.* London: Macmillan.

Boyer, C.B. (1959). *The history of calculus and its conceptual development.* (Originally print in 1949). NY:Dover publications.

Carey, S. & Spelke, E. (1996). Science and core knowledge. *Philosophy of Science,63,* 515-533.

Carey, S. & Spelke, E. (1994). Domain specificity and conceptual change. In Hirschfeld, L.A. & Gelman, S.A. (Eds.), *Mapping the mind: Domain specificity in Cognition and Culture,* (pp.169-200). New York: Cambridge University Press.

Carey, S. (1985). *Conceptual change in childhood*. Cambridge, MA:MIT Press.

Carpenter, T.P., Fennema, E. & Romperg, T.A. (Eds.) (1993). *Rational numbers*: *An integration of research.* Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Chi, M.T.H.(1992). Conceptual change within and across ontological categories: Implications for learning and discovery in sciences. In R.N.Giere (Ed.), *Cognitive models of science: Minnesota studies in the philosophy of science*, Vol(15). Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.

Chi, M.T.H., Slotta, J.D. & de Leeuw, N. (1994). From things to processesA theory of conceptual change for learning science concepts. *Learning and Instruction*, 4, 27-43.

Corry, L. (1993). Kuhnian issues, scientific revolutions and the history of mathematics. *Studies in history and philosophy of science, 24(1)*, 95-117.

Crowe, M. (1975). Ten "laws" concerning patterns of change in the history of mathematics. Originally appeared in *Historia Mathematica,* 2, 161-166. Reprinted in Gilies, D. (Ed.) *Revolutions in mathematics*, (pp.15-20). Oxford University Press, 1992.

Crowe, M. (1992). Afterword: A revolution in historiography of mathematics? In Gilies, D. (Ed.) *Revolutions in mathematics*, (pp.306-316). Oxford University Press, 1992.

Crowe, M. (1975). Ten "laws" concerning paterns of change in the history of mathematics. *Historia Mathematica,* 2, p.p. 161-166.

Dauben, J., (1984). Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge. Originally appeared in Mendelsohn, E. (Ed.) *Transformation and tradition in the sciences, Essays in honor of I. Bernard Cohen,* (pp.81-103). Cambridge University Press. Reprinted in Gilies, D. (Ed.) *Revolutions in mathematics*, (pp.15-20). Oxford University Press, 1992.

Dauben, J. (1992). Revolutions revisited. In Gilies, D. (Ed.) *Revolutions in mathematics*, (pp.15-20). Oxford University Press, 1992.

Dehaene, S. (1998). *The number sense: How the mind creates mathematics.* Harmondsworth Middlesex England: The Penguin Press. First published by Oxford University Press, 1997.

Driver, R.& Easley, J.(1978). Pupils and paradigms: A review of the literature related to concept development in adolescent science students. *Studies in Science Education*, 5, 61-84.

di Sessa, A. (1988). Knowledge in pieces. In G. Forman & P.B. Pufall (Eds.) *Constructivism in the computer age* (p.p.49-70). Hillsdale, NJ:Erlbaum.

Fennema, E. & Hart, L.E. (1994). Gender and the JRME. *Journal for research in Mathematics Education*, 24 (6), p.p. 648-659.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education*, *16*, 3-17.

Fischbein, E., (1987). *Intuition in science and mathematics*. Kluwer Academic Press.

Galistel, C.R. & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, *44*, 43-74.

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of applied developmental psychology, 21(1)*, 27-37.

Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gelman, R., Cohen, M. & Hartnett, P. (1989). To know mathematics is to go beyond thinking that "fractions aren't numbers„. *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of the North American Chapter, International Group for the Psychology of Mathematics Education*. New Branswick, NJ.

Gray, J. (1994). The nineteenth-century revolution in mathematics ontology. In Gilies, D. (Ed.) *Revolutions in mathematics*, (pp.226-248). Oxford University Press, 1992.

Graeber,A.O. and Tirosh,D.(1988).Multiplication and division involving decimals: Preservice elementary teachers' performance and beliefs. Journal of Mathematical Behavior,7(3),263-280.

Graeber,A.O. and Tirosh,D.(1990). Insights fourth and fifth graders bring to multiplication and division with decimals. Educational Studies in Mathematics,21,565-588.

Gillies, D.(Ed.) (1992). *Revolutions in mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Hannula, M., Maijala, H., Pehkonen, E.& Soro, R. (2001). Taking a step to infinity: Students' confidence with infinity tasks in school mathematics. *Proceedings of the Third European Symposium on Conceptual Change, Turku, Finland.*

Hartnett, P. M., & Gelman, R. (1998). Early Understandings of Number: Paths or Barriers to the Construction of new Understandings? *Learning and instruction*, *8(4)*, 341-374.

Hiebert, J. and Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. In Hiebert, J. Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Erlbaum, Hillsdale, NJ, p.p.199-223

Kitcher, P. (1992). *The nature of mathematical knowledge*. New York, Oxford: Oxford University Press.

Kieren, T. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. In Leinhardt, G., Putnam, R. & Hattrup, R. (Eds) *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. NJ: Lawrence Erlbaum, 323-371.

Kline, J. (1968). Greek mathematical thought and the origin of Algebra. NY: Dover.

Kuhn, T. (1970).*The structure of scientific revolutions* (2nd edition). Chicago: Chicago Press. First edition: 1962.

Lakoff, G. & Nunez, R. (2000).*Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*, (pp.155-333). New York: Basic Books.

Lamon, S.J.(2001). Presenting and representing from fractions to rational numbers. *Yearbook (National Council of Teachers of Mathematics) 2001 146-65*

Lehtinen, E., Merenluoto, K. & Kasanen, E. (1997). Conceptual change in mathematics: From rational to (un)real numbers. *European Journal of Psychology of Education,* 12(2), p.p.131-145.

Limon, M. & Mason, L. (2002). *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Limon, M. (2002). Conceptual change in History. In Limon, M. & Mason, L. (Eds.) *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice*, (pp.259-289). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lipton, J.S. & Spelke, E.S (2003). Origins of number sense: Large numbers discrimination in human infants. *Psychological science*, *4(5)*, 396-401.

Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (5), 422-441.

Malara, N. (2001). From fractions to rational numbers in their structure: Outlines for an innovative didactical strategy and the question of density. *Proceedings of the European research in mathematics education II,* (pp35-46). February 24-27, 2001, Czech Republic.

Markman, E.M.(1989). *Categorization and naming in children: Problems of induction*. Cambridge: The MIT Press.

Mason, L. (Ed.) (2001). *Instructional practices for conceptual change in science domains*. *Special Issue of Learning and Instruction, 11 (4/5).*

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. (in press). Number concept and conceptual change: Outlines for new teaching strategies. *Special Issue of Learning and Instruction.*

Merenluoto, K., Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In Limon, M. & Mason, L. (Eds.) *Recon-*

sidering conceptual change: Issues in theory and practice, (pp.233-258). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Moskal, B.M. & Magone, M.E. (2000). Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. *Educational Studies in Mathematics*, *43*, 313-335.

National Research Council (1989). Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education. Washington DC: National Academy Press.

NCTM (2000). NCTM's 1989 and 2000 standards on teaching decimals. *Retrieved in 2004, January, from the NCTM website (*www.decimalsquares.com/NCTMstands.html*).*

Nunez, R. & Lakoff, G. (1998). What did Weirstrass really define? The cognitive structure of natural and ε-δ continuity. *Mathematical Cognition,* 4(2) p.p. 85-101.

Orton, R., Post, T., Behr, M., Cramer, K., Harel, G., & Lesh, R. (1995). Logical and psychological aspects of rational number pedagogical reasoning. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 3, 63-75.

Piaget, J.(1950). The psychology of intelligence. London: Routledge & Kegan Paul.

PISA (2000) *Gender differences in reading, mathematical and scientific literacy.* Retrieved in 2004, January, from the OECD web site (http://www.pisa.oecd.org/knowledge/chap5/b.htm)

Posner, G.J., Strike, K.A., Hewson, P.W. & Gertzog, W.A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Towards a theory of conceptual change. *Science education*, *66*, 211-227.

Post, T., Behr, M., Lesh, R., Wachsmuth, I. (1986). Selected Results from the Rational Number Project. In *Proceedings of Ninth Psychology of Mathematics Education Conference the Netherlands* (pp. 342-351). International Group for the Psychology of Mathematics Education, ANTWERP The Netherlands. Reprinted in *The Math Times Journal-Official Journal of the Minnesota Council of Teachers of Mathematics,* Vol. 1, No. 1

Resnick, L.B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S.& Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Reasearch in Mathematics Education. 20(1),* 8-27.

Schnotz, W., Vosniadou, S.& Carretero, M. (1999).*New Perspectives in conceptual change*. Elsevier Science Ltd.

Sfard, A. (1994). Mathematical practices, anomalies and classroom communication problems. In Ernest, P. (Ed.) *Constructing mathematical knowledge: Epistemology and mathematics education*, *Studies in mathematics education, 4*. The Falmer press.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*, 1-36.

Spelke, E.S. (1991). Physical knowledge in infancy: Reflections on Piaget's theory. In S.Carey and R.Gelman (Eds.), *Epigenesis of Mind: Studies in Biology and Cognition,* pp.133-170.

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (in this issue.).Students' understanding of the numerical value of fractions: A conceptual change approach.

Stavy, R., Tsamir, P.& Tirosh, D. (2002). Intuitive rules: The case of "more A-more B". In Limon, M. & Mason, L. (Eds.) *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice*, (pp.217-217-232). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Stern, E. (2003). Knowledge restructuring as a powerful mechanism of cognitive development: How to lay an early foundation for conceptual understanding in science and mathematics. Keynote address in EARLI 10th Biennal Conference, Padova, Italy, August 26-30.

Streefland, L. (1991). Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Tall, D. (2001).Conceptual and formal infinities. Educational Studies in Mathematics 48 (2&3), 199–238.

Tall, D. & Tirosh, D. (2001). Infinity — The never-ending struggle, Educational Studies in Mathematics, 48 (2&3), 129–136.

Tirosh, D. (1991). The role of students' intuition of infinity in teaching the cantorian theory. In Tall, D. (Ed.) Advanced mathematical thinking, (pp.133–166). Dordrecht: Kluwer.

Tirosh,D. and Graeber,A.O.(1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. Educational Studies in Mathematics,20,79-96.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (in press). Understanding the structure of rational numbers: A conceptual change approach. Special Issue of Learning and Instruction for Conceptual Change in Mathematics

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2003). Conceptual change in mathematics: Why should mathematics teaching take into consideration the conceptual change approach to learnig? Proceedings of the EARLI 10th Biennal Conference, Padova, Italy, August 26-30.

Vamvakoussi, X., Kollias, V., Vosniadou, S., Skopeliti, I. & Ikospentaki, K. (2002). How does participation in a CSCL project influence greek teachers preferences for teaching practices based on conceptual change? *Proceedings of the Third European Symposium on Conceptual Change, Turku, Finland.*

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2002). Conceptual change in Mathematics: From the set of natural to the set of rational numbers. *Proceedings of the Third European Symposium on Conceptual Change, Turku, Finland.*

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L.(in press). Remedying secondary school students' illusion of linearity: A teaching experiment striving for conceptual change. *Special Issue of Learning and Instruction for Conceptual Change in Mathematics*

Verschaffel, L. & Vosniadou, S. (in press). *Conceptual change in mathematics. Special Issue of Learning and Instruction.*

Vosniadou, S., Skopeliti, I. & Ikospentaki, K. (in press). More on the Development of Children's Knowledge about the Earth and the Day/Night Cycle: Theoretical and Methodological Issues. *Cognitive Development*.

Vosniadou, S. (2002). Exploring the relationships between conceptual change and intentional learning. In G.M. Sinatra and P.R. Pintrich (Eds.) *Intentional conceptual change*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vosniadou, S. (2001a). On the Nature of Naïve Physics. In M. Limon and L. Mason (Eds.). *Reframing the Processes of Conceptual Change*. Kluwer Academic Publishers.

S. Vosniadou (2001b). *How Children Learn.* Educational Practices Series, The International Academy of Education (IAE) and the International Bureau of Education (UNESC0)

Vosniadou, S. (2000) Conceptual Change Research and the Teaching of Science. In H. Behrendt, H. Dahnck, R. Duit, W. Graber, M. Komorek, A. Kross and P. Reiska (Eds.), Research in Science Education: Past, Present and Future. Kluwer Academic Publishers

Vosniadou, S. (1999). Conceptual Change Research: State of the art and future directions. In Schnotz, W., Vosniadou, S. & Carretero, M. (Eds.) *New Perspectives on Conceptual Change,* (pp. 3-13). Elsevier Sciences Ltd.

Vosniadou, S. (Ed.).(1994a). Conceptual Change in the physical sciences. Special issue of Learning and Instruction, 4.

Vosniadou, S. (1994b) Capturing and modelling the process of conceptual change. In S. Vosniadou (Guest Editor) *Conceptual Change*. *Special issue of Learning and Instruction*, 4, 45-69.

Vosniadou, S. & Brewer, W.F. (1994b). Mental models of the day/night cycle. Cognitive Science,18,123-183.

Vosniadou, S. & Brewer, W.F. (1992) Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood. Cognitive Psychology, 24, 535-585.

Vosniadou, S. & Ortony, A. (Eds.).(1989). Similarity and analogical reasoning. NY: Cambridge University Press.

Wynn, K.(1990). Children's understanding of counting. Cognition, 36, pp.155-193.

.

5. Παραρτήματα

5.1. Έρευνα Ι : Ερωτηματολόγιο

Προκαταρκτικές ερωτήσεις:

α. Ποιοι από τους παρακάτω είναι πραγματικοί αριθμοί; Βάλε τους σε κύκλο.

$$\frac{2}{-4} \qquad 3.21 \qquad \sqrt{2} \qquad 0.99999999\ldots \qquad \frac{1}{2} \qquad 3\sqrt[3]{5}-2 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

β. Ο αντίθετος του αριθμού 2 είναι ο αριθμός…………………………

γ. Ο αντίστροφος του αριθμού 2 είναι ο αριθμός…………………………

Ερωτήσεις για τις αλγεβρικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών:

Α1. Υπάρχει ο αντίθετος του $\sqrt{3}$;

i) Ναι, και είναι ο ....

ii) Όχι, γιατί ....

Α2. Υπάρχει ο αντίστροφος του 0,02506;

iii) Ναι, και είναι ο ....

iv) Όχι, γιατί ....

Ερωτήσεις για την πυκνότητα

Π1. Ανάμεσα στον αριθμό 0,001 και τον αριθμό 0,01

i) υπάρχει ακριβώς ένας (1) αριθμός και είναι ο ………………………

ii) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

iii) (άλλο:)…………………………………………………………..

Π2. Ανάμεσα στον αριθμό $\frac{3}{8}$ και τον αριθμό $\frac{5}{8}$

i) βρίσκεται ακριβώς ένας (1) αριθμός και είναι ο αριθμός ………………..

ii) δεν βρίσκεται κανένας αριθμός

iii) (άλλο)……………………………………………………………………

π. Αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ισχύει ότι α>999, τότε η πρώτη τιμή που επιτρέπεται να πάρει ο α

i) είναι ο αριθμός 1000

ii) είναι ο αριθμός 999,001

iii) είναι ο αριθμός …….

iv) δεν μπορεί να προσδιοριστεί, γιατί ………………………………

Συμπληρωματικές ερωτήσεις για την πυκνότητα (προφορικά)

Π3: Υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στους αριθμούς 0,005 και 0,006;

Π$_4$: Υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{5}{6}$ και 8.5;

Π$_5$: Υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{2}{5}$ και $\frac{4}{7}$ **;**

5.2. Έρευνα II: Ερωτηματολόγια.

Α. Η κοινή πρώτη σελίδα των Α/εΑ, Α/εΒ, Κ/εΑ, Κ/εΒ ερωτηματολογίων

Ερωτηματολόγιο

✰ **Ονομάζομαι ………………………………………………………………………**
✰ **Γεννήθηκα στις ………………………………………………….του έτους**
✰ **Είμαι στην ……………τάξη του …………………………………………….**

(Α) Βάλε σε κύκλο την επιλογή που σε εκφράζει περισσότερο:

✰**Τα Μαθηματικά …**

i. είναι το αγαπημένο μου μάθημα
ii. είναι ένα από τα αγαπημένα μου μαθήματα
iii. δεν είναι από τα μαθήματα που προτιμώ
iv. δεν μου αρέσουν καθόλου

✰**Πιστεύω ότι …**

i. τα πηγαίνω πολύ καλά στα Μαθηματικά
ii. τα πηγαίνω αρκετά καλά στα Μαθηματικά
iii. δεν τα πηγαίνω και τόσο καλά στα Μαθηματικά
iv. δεν τα πηγαίνω καθόλου καλά στα Μαθηματικά

(Β) Διάλεξε αυτό που σε εκφράζει περισσότερο και συμπλήρωσε την αντίστοιχη πρόταση:

i. Πιστεύω ότι είμαι πολύ καλός / καλή στα Μαθηματικά γιατί………………………………………………………………
ii. Πιστεύω ότι θα μπορούσα να είμαι πολύ καλός / καλή στα Μαθηματικά, αν……………………………………
Πιστεύω ότι δεν θα μπορούσα να είμαι από τους πολύ καλούς στα Μαθηματικά, γιατί ………………………………………………………………………………

Στα επόμενα, να προσέξεις ότι...

- **....**όπου χρησιμοποιούμε τη λέξη «**αριθμός**» χωρίς άλλη διευκρίνιση, εννοούμε «**πραγματικός αριθμός**». <u>**Να θυμάσαι**</u>: Όλοι οι αριθμοί που γνωρίζεις ανήκουν στους πραγματικούς αριθμούς!
- **....** όπου εμφανίζεται η λέξη «**απλός δεκαδικός**», εννοούμε τους δεκαδικούς που έχουν συγκεκριμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων (π.χ. ο 37,0303). Χρησιμοποιούμε αυτόν τον όρο για να διακρίνουμε τους απλούς δεκαδικούς από τους δεκαδικούς που έχουν **άπειρα** δεκαδικά ψηφία (όπως, για παράδειγμα, ο 37,0303030303.... ή ο π=3,14...).
- **....** κάθε φορά που θα απαντάς μια από τις ερωτήσεις που ακολουθούν, θα σου ζητείται να αξιολογήσεις **πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντησή σου είναι σωστή**, κυκλώνοντας τον κατάλληλο αριθμό στις παρακάτω επιλογές:

1:Σίγουρα λάθος **2**:Μάλλον λάθος **3**: Δεν μπορώ να το αξιολογήσω **4:**Μάλλον σωστή **5**:Σίγουρα σωστή

Σε ευχαριστούμε που συμπληρώνεις αυτό το ερωτηματολόγιο!

<u>Β. Το ανοιχτά ερωτηματολόγια (Α/εΑ, Α/εΒ)</u>

Π1. Υπάρχουν αριθμοί που να είναι μεγαλύτεροι από το 0,005 και *<u>συγχρόνως</u>* μικρότεροι από το 0,006;

Ναι ☐ **Όχι** ☐

✫ Αν απάντησες **Ναι**, προσδιόρισε πόσοι / ποιοι πιστεύεις ότι είναι αυτοί οι αριθμοί

✫ Αν απάντησες **Όχι,** εξήγησε γιατί

………

✫ Πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντηση που έδωσες στην (4) είναι σωστή;

1:Σίγουρα λάθος	**2:**Μάλλον λάθος	**3**: Δεν μπορώ να το αξιολογήσω	**4:**Μάλλον σωστή	**5:**Σίγουρα σωστή

Π2. Υπάρχουν αριθμοί που να είναι μεγαλύτεροι από τον 0,001 και *<u>συγχρόνως</u>* μικρότεροι από τον 0,01;

Ναι ☐ **Όχι** ☐

✫ Αν απάντησες **Ναι**, προσδιόρισε πόσοι / ποιοι πιστεύεις ότι είναι αυτοί οι αριθμοί.

✫ Αν απάντησες **Όχι,** εξήγησε γιατί

………

✫ Πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντηση που έδωσες στην (1) είναι σωστή;

1:Σίγουρα λάθος	**2:**Μάλλον λάθος	**3**: Δεν μπορώ να το αξιολογήσω	**4:**Μάλλον σωστή	**5:**Σίγουρα σωστή

Π3. Υπάρχουν αριθμοί που να είναι μεγαλύτεροι από τον $\frac{3}{8}$ και *<u>συγχρόνως</u>* μικρότεροι από τον $\frac{5}{8}$;

Ναι ☐ **Όχι** ☐

✫ Αν απάντησες **Ναι**, προσδιόρισε πόσοι / ποιοι πιστεύεις ότι είναι αυτοί οι αριθμοί

✫ Αν απάντησες **Όχι,** εξήγησε γιατί

………

✫ Πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντηση που έδωσες στην (3) είναι σωστή;

1:Σίγουρα λάθος	**2:**Μάλλον λάθος	**3**: Δεν μπορώ να το αξιολογήσω	**4:**Μάλλον σωστή	**5:**Σίγουρα σωστή

Π$_ε$. Η μεταβλητή *α* παίρνει τιμές στους πραγματικούς αριθμούς και ισχύει ότι *α*>999. Μπορείς να προσδιορίσεις από ποιον αριθμό ξεκινά να παίρνει τιμές η *α*; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

....

....

✫ Πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντηση που έδωσες στην (10) είναι σωστή;

1:Σίγουρα λάθος **2:**Μάλλον λάθος **3**: Δεν μπορώ να το αξιολογήσω **4:**Μάλλον σωστή **5**:Σίγουρα σωστή

Π$_4$: Σημείωσε τον αριθμό 0,2 πάνω στην ευθεία των πραγματικών.

- **Υπάρχουν αριθμοί που να είναι μεγαλύτεροι από τον 0,1 και <u>*συγχρόνως*</u> μικρότεροι από τον 0,2;**

Ναι ☐ **Όχι ☐**

✫ Αν απάντησες **Ναι**, προσδιόρισε πόσοι / ποιοι πιστεύεις ότι είναι αυτοί οι αριθμοί
✫ Αν απάντησες **Όχι,** εξήγησε γιατί

....

✫ Πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντηση που έδωσες στην (11) είναι σωστή;

1:Σίγουρα λάθος **2:**Μάλλον λάθος **3**: Δεν μπορώ να το αξιολογήσω **4:**Μάλλον σωστή **5**:Σίγουρα σωστή

Π$_5$. Σημείωσε τον αριθμό $\frac{2}{3}$ πάνω στην ευθεία των πραγματικών.

(Παρατήρησε ότι το $\frac{2}{3}$ είναι μικρότερο από τη μονάδα).

- **Υπάρχουν αριθμοί που να είναι μεγαλύτεροι από τον $\frac{1}{3}$ και <u>*συγχρόνως*</u> μικρότεροι από τον $\frac{2}{3}$;**

Ναι ☐ **Όχι ☐**

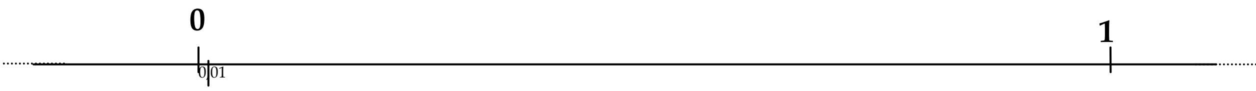
✫ Αν απάντησες **Ναι**, προσδιόρισε πόσοι / ποιοι πιστεύεις ότι είναι αυτοί οι αριθμοί
✫ Αν απάντησες **Όχι,** εξήγησε γιατί

....

✰ Πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντηση που έδωσες στην (12) είναι σωστή;

1:Σίγουρα λάθος **2**:Μάλλον λάθος **3**: Δεν μπορώ να το αξιολογήσω **4:**Μάλλον σωστή **5**:Σίγουρα σωστή

Π6. Σημείωσε τον αριθμό 0,1 πάνω στην ευθεία των πραγματικών.



- **Υπάρχουν αριθμοί που να είναι μεγαλύτεροι από τον 0,01 και *<u>συγχρόνως</u>* μικρότεροι από τον 0,1;**

Ναι ☐ **Όχι ☐**

✰ Αν απάντησες **Ναι**, προσδιόρισε πόσοι / ποιοι πιστεύεις ότι είναι αυτοί οι αριθμοί
✰ Αν απάντησες **Όχι,** εξήγησε γιατί

……………………………………………………………………………………………………

✰ Πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντηση που έδωσες στην

1:Σίγουρα λάθος **2**:Μάλλον λάθος **3**: Δεν μπορώ να το αξιολογήσω **4:**Μάλλον σωστή **5**:Σίγουρα σωστή

<u>Β. Τα κλειστά ερωτηματολόγια (Κ/εΑ, Κ/εΒ)</u>

<u>Ερωτήσεις Χε (Π1-Π3)</u>

Π1. Πόσοι αριθμοί υπάρχουν που να είναι μεγαλύτεροι από τον 0,005 και *<u>συγχρόνως</u>* μικρότεροι από τον 0,006;

i. Δεν υπάρχει κανένας τέτοιος αριθμός
ii. Υπάρχουν άπειροι αριθμοί :απλοί δεκαδικοί, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, κλάσματα, ρίζες
iii. Υπάρχουν οι εξής 9 αριθμοί :0,0051, 0,0052, 0,0053, 0,0054, 0,0055, 0,0056, 0,0057, 0,0058, 0,0059.
iv. Υπάρχουν άπειροι αριθμοί, οι οποίοι είναι όλοι δεκαδικοί.
v. Δεν με ικανοποιεί καμία από τις παραπάνω επιλογές. Εγώ πιστεύω ότι ....

1:Σίγουρα λάθος **2:**Μάλλον λάθος **3**: Δεν μπορώ να το αξιολογήσω **4:**Μάλλον σωστή **5:**Σίγουρα σωστή

☆ Πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντηση που έδωσες στην (6) είναι σωστή;

1:Σίγουρα λάθος **2:**Μάλλον λάθος **3**: Δεν μπορώ να το αξιολογήσω **4:**Μάλλον σωστή **5:**Σίγουρα σωστή

Π3. Πόσοι αριθμοί υπάρχουν που να είναι μεγαλύτεροι από τον $\frac{3}{8}$ και συγχρόνως μικρότεροι από τον $\frac{5}{8}$;

i. Υπάρχουν οι εξής 19 αριθμοί: $\frac{3,1}{8}$, $\frac{3,2}{8}$, $\frac{3,3}{8}$, ..., $\frac{3,9}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{4,1}{8}$, $\frac{4,2}{8}$, $\frac{4,3}{8}$, ..., $\frac{4,9}{8}$
ii. Υπάρχουν άπειροι αριθμοί :απλοί δεκαδικοί, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, κλάσματα, ρίζες
iii. Υπάρχει ένας αριθμός, ο $\frac{4}{8}$
iv. Υπάρχει μόνο ο αριθμός $\frac{4}{8}$ και όλα τα κλάσματα που είναι ισοδύναμα με το $\frac{4}{8}$ (π.χ. το $\frac{8}{16}$)
v. Υπάρχουν άπειροι αριθμοί, οι οποίοι είναι όλοι κλάσματα
vi. Δεν με ικανοποιεί καμία από τις παραπάνω επιλογές. Εγώ πιστεύω ότι ....

☆ Πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντηση που έδωσες στην (4) είναι σωστή;

1:Σίγουρα λάθος **2:**Μάλλον λάθος **3**: Δεν μπορώ να το αξιολογήσω **4:**Μάλλον σωστή **5:**Σίγουρα σωστή

Π2. Πόσοι αριθμοί υπάρχουν που να είναι μεγαλύτεροι από τον 0,001 και *<u>συγχρόνως</u>* μικρότεροι από τον 0,01;

i. Υπάρχουν άπειροι αριθμοί: απλοί δεκαδικοί, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, κλάσματα, ρίζες

ii. Δεν υπάρχει κανένας τέτοιος αριθμός

iii. Υπάρχουν οι εξής 8 αριθμοί: 0,002, 0,003, 0,004, 0,005, 0,006, 0,007, 0,008, 0,009

iv. Υπάρχουν άπειροι αριθμοί, οι οποίοι είναι όλοι δεκαδικοί.

v. Υπάρχουν οι εξής 89 αριθμοί: 0,0011, 0,0012, 0,0013,..., 0,0097, 0,0098, 0,0099

vi. Η ερώτηση αυτή δεν έχει νόημα για τους συγκεκριμένους αριθμούς, γιατί οι αριθμοί αυτοί ανήκουν σε διαφορετική ομάδα: ο ένας έχει 2 και ο άλλος έχει 3 δεκαδικά ψηφία.

vii. Δεν με ικανοποιεί καμία από τις παραπάνω επιλογές. Εγώ πιστεύω ότι ....

✰ Πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντηση που έδωσες στην (5) είναι σωστή;

1:Σίγουρα λάθος **2**:Μάλλον λάθος **3**: Δεν μπορώ να το αξιολογήσω **4:**Μάλλον σωστή **5**:Σίγουρα σωστή

Ερωτήσεις *Με* (Π4-Π6)

Π4. Σημείωσε τον αριθμό 0,2 πάνω στην ευθεία των πραγματικών.

☆ **Πόσοι αριθμοί υπάρχουν που να είναι μεγαλύτεροι από τον 0,1 και *<u>συγχρόνως</u>* μικρότεροι από τον 0,2;**

i. Δεν υπάρχει κανένας τέτοιος αριθμός
ii. Υπάρχουν άπειροι αριθμοί :απλοί δεκαδικοί, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, κλάσματα, ρίζες
iii. Υπάρχουν άπειροι αριθμοί, οι οποίοι είναι όλοι δεκαδικοί.
iv. Υπάρχουν οι εξής 9 αριθμοί: 0,11, 0,12, 0,13, 0,14, 0,15, 0,16, 0,17, 0,18, 0,19
v. Δεν με ικανοποιεί καμία από τις παραπάνω επιλογές. Εγώ πιστεύω ότι ....

☆ **Πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντηση που έδωσες στην (10) είναι σωστή;**

1:Σίγουρα λάθος **2:**Μάλλον λάθος **3**: Δεν μπορώ να το αξιολογήσω **4:**Μάλλον σωστή **5**:Σίγουρα σωστή

Π5. Σημείωσε τον αριθμό $\frac{2}{3}$ πάνω στην ευθεία των πραγματικών.

☆ **Πόσοι αριθμοί υπάρχουν που να είναι μεγαλύτεροι από τον $\frac{1}{3}$ και *<u>συγχρόνως</u>* μικρότεροι από τον $\frac{2}{3}$; (Παρατήρησε ότι το $\frac{2}{3}$ είναι μικρότερο της μονάδας)**

i. Υπάρχουν οι εξής 9 αριθμοί: $\frac{1,1}{3}$, $\frac{1,2}{3}$, $\frac{1,3}{3}$, $\frac{1,4}{3}$, $\frac{1,5}{3}$, $\frac{1,6}{3}$, $\frac{1,7}{3}$, $\frac{1,8}{3}$, $\frac{1,9}{3}$
ii. Υπάρχουν άπειροι αριθμοί, οι οποίοι όλοι είναι όλοι κλάσματα
iii. Δεν υπάρχει κανένας τέτοιος αριθμός
iv. Υπάρχουν άπειροι αριθμοί :απλοί δεκαδικοί, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, κλάσματα, ρίζες
v. Δεν με ικανοποιεί καμία από τις παραπάνω επιλογές. Εγώ πιστεύω ότι ....

☆ **Πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντηση που έδωσες στην (11) είναι σωστή;**

1:Σίγουρα λάθος **2:**Μάλλον λάθος **3**: Δεν μπορώ να το αξιολογήσω **4:**Μάλλον σωστή **5**:Σίγουρα σωστή

Π$_6$. Σημείωσε τον αριθμό 0,1 πάνω στην ευθεία των πραγματικών.

✩ Πόσοι αριθμοί υπάρχουν που να είναι μεγαλύτεροι από τον 0,01 και *<u>συγχρόνως</u>* μικρότεροι από τον 0,1;

i. Δεν υπάρχει κανένας τέτοιος αριθμός
ii. Υπάρχουν οι εξής 89 αριθμοί: 0,011, 0,012, 0,013,…, 0,020, 0,021, …, 0,099
iii. Υπάρχουν άπειροι αριθμοί, οι οποίοι είναι όλοι δεκαδικοί.
iv. Υπάρχουν άπειροι αριθμοί:απλοί δεκαδικοί, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, κλάσματα, ρίζες
v. Αυτή η ερώτηση δεν έχει νόημα για τους συγκεκριμένους αριθμούς, γιατί οι αριθμοί αυτοί ανήκουν σε διαφορετική ομάδα: ο ένας έχει 1 και ο άλλος έχει 2 δεκαδικά ψηφία.
vi. Υπάρχουν οι εξής 8 αριθμοί: 0,02, 0,03, 0,04, 0,05, 0,06, 0,07, 0,08, 0,09
Δεν με ικανοποιεί καμία από τις παραπάνω επιλογές. Εγώ πιστεύω ότι ……………………………………

✩ Πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντηση που έδωσες στην (12) είναι σωστή;

1:Σίγουρα λάθος **2:**Μάλλον λάθος **3:** Δεν μπορώ να το αξιολογήσω **4:**Μάλλον σωστή **5:**Σίγουρα σωστή

Ε. Αν η μεταβλητή α παίρνει τιμές στους πραγματικούς αριθμούς και ισχύει ότι α>999, τότε

i. η α ξεκινά να παίρνει τιμές από τον αριθμό 1000
ii. δεν υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος αριθμός, από τον οποίο να ξεκινά να παίρνει τιμές η α
iii. η α ξεκινά να παίρνει τιμές από τον αριθμό 999,001
iv. η α ξεκινά να παίρνει τιμές από κάποιον αριθμό που υπάρχει, αλλά δεν μπορεί να προσδιοριστεί
v. Δεν με ικανοποιεί καμία από τις παραπάνω επιλογές. Εγώ πιστεύω ότι

✩ Πόσο βέβαιος / βέβαιη είσαι ότι η απάντηση που έδωσες στην (9) είναι σωστή;

1:Σίγουρα λάθος **2:**Μάλλον λάθος **3:** Δεν μπορώ να το αξιολογήσω **4:**Μάλλον σωστή **5:**Σίγουρα σωστή

5.3. Βαθμολόγηση των κλειστών ερωτηματολογίων

Κατηγορίες απαντήσεων (Χε)	Κατηγορίες απαντήσεων (Με)	Βαθμός
Π1	**Π6**	
Καμία / μη κατατάξιμη απάντηση	Καμία / μη κατατάξιμη απάντηση	**0**
Δεν υπάρχει κανένας αριθμός	Δεν υπάρχει κανένας αριθμός	**1**
Υπάρχουν οι εξής 9 αριθμοί : 0,0051, 0,0052,.... , 0,0058, 0,0059..	Υπάρχουν οι εξής 9 αριθμοί : 0,011, 0,012, 0,013,.... , 0,018, 0,019..	
Υπάρχουν άπειροι αριθμοί, οι οποίοι είναι όλοι δεκαδικοί	Υπάρχουν άπειροι αριθμοί, οι οποίοι είναι όλοι δεκαδικοί	**2**
Υπάρχουν άπειροι αριθμοί: απλοί δεκαδικοί, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, κλάσματα, ρίζες	Υπάρχουν άπειροι αριθμοί: απλοί δεκαδικοί, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, κλάσματα, ρίζες	
Π2	**Π5**	
Καμία / μη κατατάξιμη απάντηση	Καμία / μη κατατάξιμη απάντηση	**0**
Υπάρχει μόνο ο αριθμός 4/8	Δεν υπάρχει κανένας αριθμός	**1**
Υπάρχουν οι εξής 9 αριθμοί : $\frac{3{,}1}{8}, \frac{3{,}2}{8}, \dots, \frac{3{,}9}{8}$	Υπάρχουν οι εξής 9 αριθμοί: $\frac{1{,}1}{3}, \frac{1{,}2}{3}, \frac{1{,}3}{3}, \dots, \frac{1{,}8}{3}, \frac{1{,}9}{3}$	
Υπάρχει μόνο ο αριθμός 4/8 και όλα τα κλάσματα που είναι ισοδύναμα με το 4/8		
Υπάρχουν άπειροι αριθμοί, οι οποίοι είναι όλοι κλάσματα	Υπάρχουν άπειροι αριθμοί, οι οποίοι είναι όλοι κλάσματα	**2**
Υπάρχουν άπειροι αριθμοί: απλοί δεκαδικοί, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, κλά-	Υπάρχουν άπειροι αριθμοί: απλοί δεκαδικοί, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία,	

σματα, ρίζες	κλάσματα, ρίζες	
Π3	**Π6**	
Καμία / μη κατατάξιμη απάντηση	Καμία / μη κατατάξιμη απάντηση	**0**
Η ερώτηση δεν έχει νόημα για τους συγκεκριμένους αριθμούς, γιατί είναι σε διαφορετική ομάδα: Ο ένας έχει 2 και ο άλλος έχει 3 δεκαδικά ψηφία	Η ερώτηση δεν έχει νόημα για τους συγκεκριμένους αριθμούς, γιατί είναι σε διαφορετική ομάδα: Ο ένας έχει 2 και ο άλλος έχει 3 δεκαδικά ψηφία	
Δεν υπάρχει κανένας αριθμός	Δεν υπάρχει κανένας αριθμός	**1**
Υπάρχουν οι εξής 8 αριθμοί: 0,002, 0,003, 0,004, ..., ,0,008, 0,009	Υπάρχουν οι εξής 8 αριθμοί: 0,02, 0,03, 0,04, ..., ,0,08, 0,09	
Υπάρχουν οι εξής 89 αριθμοί: 0,0011, 0,0012, 0,0013,...., 0,0098, 0,0099.	Υπάρχουν οι εξής 89 αριθμοί: 0,011, 0,012, 0,013,...., 0,098, 0,099.	
Υπάρχουν άπειροι αριθμοί, οι οποίοι είναι όλοι δεκαδικοί	Υπάρχουν άπειροι αριθμοί, οι οποίοι είναι όλοι δεκαδικοί	**2**
Υπάρχουν άπειροι αριθμοί: απλοί δεκαδικοί, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, κλάσματα, ρίζες	Υπάρχουν άπειροι αριθμοί: απλοί δεκαδικοί, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, κλάσματα, ρίζες	

5.4. Στατιστικά κριτήρια για την ανάλυση των δεδομένων

Αναλύσεις σε επίπεδο ερώτησης

Πίνακας.....

Κριτήριο Mann-Whitney για την επίδραση της ηλικίας στην επίδοση ανά ερώτηση

(Ερωτηματολόγια ανοικτού τύπου)

Ranks

	Τάξη (Ηλικία)	N	Mean Rank	Sum of Ranks
0.005-0.006, 3categories	Γ΄ Γυμνασίου	83	71,23	5912,00
	Β΄ Λυκείου	66	79,74	5263,00
	Total	149		
0.1-0.2, 3 categories	Γ΄ Γυμνασίου	83	70,25	5830,50
	Β΄ Λυκείου	66	80,98	5344,50
	Total	149		
3/8-5/8, 3 categories	Γ΄ Γυμνασίου	83	67,31	5587,00
	Β΄ Λυκείου	66	84,67	5588,00
	Total	149		
1/3-2/3, 3 categories	Γ΄ Γυμνασίου	83	69,14	5738,50
	Β΄ Λυκείου	66	82,37	5436,50
	Total	149		
0.001-0.01, 3 categories	Γ΄ Γυμνασίου	83	63,44	5265,50
	Β΄ Λυκείου	66	89,54	5909,50
	Total	149		
0.01-0.1, 3 categories	Γ΄ Γυμνασίου	83	73,60	6108,50
	Β΄ Λυκείου	66	76,77	5066,50
	Total	149		

Test Statistics[a]

	0.005-0.006, 3categories	0.1-0.2, 3 categories	3/8-5/8, 3 categories	1/3-2/3, 3 categories	0.001-0.01, 3 categories	0.01-0.1, 3 categories
Mann-Whitney U	2426,000	2344,500	2101,000	2252,500	1779,500	2622,500
Wilcoxon W	5912,000	5830,500	5587,000	5738,500	5265,500	6108,500
Z	-1,354	-1,720	-2,781	-2,052	-3,917	-,483
Asymp. Sig. (2-tailed)	,176	,086	,005	,040	,000	,629

a. Grouping Variable: Τάξη (Ηλικία)

Πίνακας.....

Κριτήριο Mann-Whitney για την επίδραση της ηλικίας στην επίδοση ανά ερώτηση

(Ερωτηματολόγια κλειστού τύπου)

Ranks

	Τάξη (Ηλικία)	N	Mean Rank	Sum of Ranks
0.005-0.006	Γ΄ Γυμνασίου	81	67,94	5503,50
	Β΄ Λυκείου	71	86,26	6124,50
	Total	152		
0.01-0.1	Γ΄ Γυμνασίου	81	71,87	5821,50
	Β΄ Λυκείου	71	81,78	5806,50
	Total	152		
3/8-5/8	Γ΄ Γυμνασίου	81	67,21	5444,00
	Β΄ Λυκείου	71	87,10	6184,00
	Total	152		
1/3-2/3	Γ΄ Γυμνασίου	81	70,60	5718,50
	Β΄ Λυκείου	71	83,23	5909,50
	Total	152		
0.001-0.01	Γ΄ Γυμνασίου	81	70,53	5713,00
	Β΄ Λυκείου	71	83,31	5915,00
	Total	152		
0.1-0.2	Γ΄ Γυμνασίου	81	71,56	5796,50
	Β΄ Λυκείου	71	82,13	5831,50
	Total	152		

Test Statistics[a]

	0.005-0.006	0.01-0.1	3/8-5/8	1/3-2/3	0.001-0.01	0.1-0.2
Mann-Whitney U	2182,500	2500,500	2123,000	2397,500	2392,000	2475,500
Wilcoxon W	5503,500	5821,500	5444,000	5718,500	5713,000	5796,500
Z	-2,966	-1,550	-3,218	-2,028	-1,943	-1,716
Asymp. Sig. (2-tailed)	,003	,121	,001	,043	,052	,086

a. Grouping Variable: Τάξη (Ηλικία)

Τμήμα Α: Ερωτηματολόγια τύπου Α

Πίνακας Α1

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test για τη μεταβλητής της επίδοσης

		Επίδοση
N		149
Normal Parameters(a,b)	Mean	9,70470
	Std. Deviation	4,26726 0
Most Extreme Differences	Absolute	,193
	Positive	,193
	Negative	-,152
Kolmogorov-Smirnov Z		2,359
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a Test distribution is Normal.

b Calculated from data.

Statistics

Επίδοση

N	Valid	149
	Missing	0
Mean		9,70470
Median		8,00000
Std. Deviation		4,26726 0
Minimum		4,000
Maximum		18,000

<u>Πίνακας Α2</u>

Κριτήριο Mann-Whitney για την επίδραση του φύλου, της ηλικίας, της εΑ/εΒ στην επίδοση

Πίνακας Α21: Φύλο

Test Statistics(a)

	Επίδο-ση
Mann-Whitney U	1825,500
Wilcoxon W	4036,500
Z	-2,287
Asymp. Sig. (2-tailed)	,022

a Grouping Variable: Φύλο

Πίνακας Α22: Ηλικία

Test Statistics(a)

	Επίδο-ση
Mann-Whitney U	2006,000
Wilcoxon W	5492,000
Z	-2,862
Asymp. Sig. (2-tailed)	,004

a Grouping Variable: Τάξη (Ηλικία)

Πίνακας Α23: εΠ/εΜ

Γυμνάσιο

Ranks

	Ευθεία Πριν / Ευθεία Μετά	N	Mean Rank	Sum of Ranks
Επίδοση	Ευθεία Μετά	59	42,11	2484,50
	Ευθεία Πριν	24	41,73	1001,50
	Total	83		

Test Statistics[a]

	Επίδοση
Mann-Whitney U	701,500
Wilcoxon W	1001,500
Z	-,068
Asymp. Sig. (2-tailed)	,946

a. Grouping Variable: Ευθεία Πριν / Ευθεία Μετά

Λύκειο

Ranks

	Ευθεία Πριν / Ευθεία Μετά	N	Mean Rank	Sum of Ranks
Επίδοση	Ευθεία Μετά	34	35,50	1207,00
	Ευθεία Πριν	32	31,38	1004,00
	Total	66		

Test Statistics[a]

	Επίδοση
Mann-Whitney U	476,000
Wilcoxon W	1004,000
Z	-,880
Asymp. Sig. (2-tailed)	,379

a. Grouping Variable: Ευθεία Πριν / Ευθεία Μετά

Πίνακες A_3

Κριτήριο t για διμεταβλητό έλεγχο της επίδοσης με ηλικία, φύλο, εA/εB

Πίνακας $A_{3,1}$: Επίδοση, Φύλο

Group Statistics

	Φύλο	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Επίδοση	Αγόρι	71	10,46479	4,619310	,548211
	Κορίτσι	66	8,81818	3,906244	,480825

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
Equal variances assumed	3,491	,064	2,244	135	**,026**	1,64661	,733664	,195645	3,097569
Equal variances not assumed			2,258	133,832	**,026**	1,64661	,729197	,204365	3,088849

Πίνακας Α$_{3,2}$: Επίδοση, Ηλικία

Group Statistics

	Τάξη (Ηλικία)	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Επίδοση	Γ' Γυ-μνασίου	83	9,01205	4,189109	,459814
	Β' Λυ-κείου	66	10,5757 6	4,235602	,521367

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
Equal variances assumed	,093	,761	-2,252	147	,026	-1,56371	,694283	-2,935774	-,191645
Equal variances not assumed			-2,249	138,852	,026	-1,56371	,695164	-2,938184	-,189234

Πίνακας $A_{3,3}$: Επίδοση, εΑ/εΒ

Group Statistics

	Ευθεία Πριν / Ευθεία Μετά	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Επίδοση	Ευθεία Μετά	93	9,61290	4,165156	,431907
	Ευθεία Πριν	56	9,85714	4,465743	,596760

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
Equal variances assumed	,492	,484	-,337	147	,736	-,24424	,723954	-1,674941	1,186462
Equal variances not assumed			-,332	109,714	,741	-,24424	,736659	-1,704166	1,215687

Πίνακας Α4

Πολυμεταβλητή two way anova για την επίδραση φύλου και ηλικίας στην επίδοση

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Επίδοση

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	203,106(a)	2	101,553	5,729	,004
Intercept	12730,603	1	12730,603	718,240	,000
Φύλο	116,999	1	116,999	6,601	**,011**
Ηλικία	110,367	1	110,367	6,227	**,014**
Error	2375,113	134	17,725		
Total	15393,000	137			
Corrected Total	2578,219	136			

a R Squared = ,079 (Adjusted R Squared = ,065)

Πίνακες A5:

Wilcoxon test για την επίδραση της Με/Χε στην επίδοση

Πίνακας Α.5.1. Γυμνάσιο:

Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Επίδοση με ευθεία - Επίδοση χωρίς ευθεία	Negative Ranks	6[a]	14,67	88,00
	Positive Ranks	21[b]	13,81	290,00
	Ties	56[c]		
	Total	83		

a. Επίδοση με ευθεία < Επίδοση χωρίς ευθεία

b. Επίδοση με ευθεία > Επίδοση χωρίς ευθεία

c. Επίδοση χωρίς ευθεία = Επίδοση με ευθεία

Test Statistics[b]

	Επίδοση με ευθεία - Επίδοση χωρίς ευθεία
Z	-2,467[a]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,014

a. Based on negative ranks.

b. Wilcoxon Signed Ranks Test

Πίνακας Α.5.2. Λύκειο:

Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Επίδοση με ευθεία - Επίδοση χωρίς ευθεία	Negative Ranks	20[a]	19,35	387,00
	Positive Ranks	16[b]	17,44	279,00
	Ties	30[c]		
	Total	66		

a. Επίδοση με ευθεία < Επίδοση χωρίς ευθεία

b. Επίδοση με ευθεία > Επίδοση χωρίς ευθεία

c. Επίδοση χωρίς ευθεία = Επίδοση με ευθεία

Test Statistics[b]

	Επίδοση με ευθεία - Επίδοση χωρίς ευθεία
Z	-,870[a]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,384

a. Based on positive ranks.

b. Wilcoxon Signed Ranks Test

Τμήμα Β: Ερωτηματολόγια τύπου Κ

Πίνακας Β1:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test για τη μεταβλητή της επίδοσης

		Επίδο- ση
N		152
Normal Parameters(a,b)	Mean	8,78947
	Std. Deviation	2,74677 8
Most Extreme Differences	Absolute	,184
	Positive	,174
	Negative	-,184
Kolmogorov-Smirnov Z		2,272
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a Test distribution is Normal.

b Calculated from data.

Statistics

Επίδοση

N	Valid	152
	Missing	0
Mean		8,78947
Median		9,00000
Std. Deviation		2,74677 8
Minimum		4,000
Maximum		12,000

Πίνακας Β2:

Κριτήριο Mann-Whitney για την επίδραση του φύλου, της ηλικίας, της εA/εB στην επίδοση

Test Statistics(a)

	Επίδο-ση
Mann-Whitney U	2032,500
Wilcoxon W	4243,500
Z	-,223
Asymp. Sig. (2-tailed)	,823

a Grouping Variable: **Φύλο**

Test Statistics(a)

	Επίδο-ση
Mann-Whitney U	2202,500
Wilcoxon W	5523,500
Z	-2,537
Asymp. Sig. (2-tailed)	**,011**

a Grouping Variable: **Τάξη (Ηλικία)**

Test Statistics(a)

Λύκειο

Ranks

	εA / εB	N	Mean Rank	Sum of Ranks
Επίδοση	Ευθεία Μετά	34	36,99	1257,50
	Ευθεία Πριν	37	35,09	1298,50
	Total	71		

Test Statistics[a]

	Επίδοση
Mann-Whitney U	595,500
Wilcoxon W	1298,500
Z	-,398
Asymp. Sig. (2-tailed)	,691

a. Grouping Variable: εA / εB

Γυμνάσιο

Ranks

	εA / εB	N	Mean Rank	Sum of Ranks
Επίδοση	Ευθεία Μετά	54	38,64	2086,50
	Ευθεία Πριν	27	45,72	1234,50
	Total	81		

Test Statistics[a]

	Επίδοση
Mann-Whitney U	601,500
Wilcoxon W	2086,500
Z	-1,297
Asymp. Sig. (2-tailed)	,195

a. Grouping Variable: εA / εB

<u>Πίνακες Β3</u>:

Κριτήριο t για την επίδραση του φύλου, της ηλικίας, της εΑ/εΒ στην επίδοση

Πίνακας Β3,1: Επίδοση, Φύλο

Group Statistics

	Φύλο	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Επί-δοση	Αγόρι	63	8,65079	2,885776	,363574
	Κορί-τσι	66	8,60606	2,583252	,317976

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Vari-ances	t-test for Equality of Means

		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
Επίδοση	Equal variances assumed	2,539	,114	,093	127	,926	,04473	,481759	-,908581	,998047
	Equal variances not assumed			,093	123,950	,926	,04473	,483006	-,911275	1,000741

Πίνακας Β3,2: Επίδοση, Φύλο

Group Statistics

	Τάξη (Ηλικία)	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Επίδοση	Γ' Γυ-μνασίου	81	8,23457	2,707728	,300859
	Β' Λυ-κείου	71	9,42254	2,670805	,316966

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Επίδοση	Equal variances assumed	,020	,888	-2,716	150	,007	-1,18797	,437414	-2,052256	-,323678
	Equal variances not assumed			-2,718	147,904	,007	-1,18797	,437017	-2,051570	-,324364

Πίνακες Β.4.

Κριτήριο Wilcoxon για την Επίδοση σε σχέση με την Με/Χε.

Β.4.1. Γυμνάσιο

Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Επίδοση Με - Επίδοση Χε	Negative Ranks	8[a]	19,75	158,00
	Positive Ranks	31[b]	20,06	622,00
	Ties	42[c]		
	Total	81		

a. Επίδοση Με < Επίδοση Χε

b. Επίδοση Με > Επίδοση Χε

c. Επίδοση Χε = Επίδοση Με

Test Statistics[b]

	Επίδοση Με - Επίδοση Χε
Z	-3,395[a]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,001

a. Based on negative ranks.

b. Wilcoxon Signed Ranks Test

Β.4.2. Λύκειο

Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Επίδοση Με - Επίδοση Χε	Negative Ranks	10[a]	15,25	152,50
	Positive Ranks	16[b]	12,41	198,50
	Ties	45[c]		
	Total	71		

a. Επίδοση Με < Επίδοση Χε

b. Επίδοση Με > Επίδοση Χε

c. Επίδοση Χε = Επίδοση Με

Test Statistics[b]

	Επίδοση Με - Επίδοση Χε
Z	-,602[a]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,547

a. Based on negative ranks.

b. Wilcoxon Signed Ranks Test

Πίνακες Γ

Πίνακας Γ1: Επίδοση 2

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	All finite	95	31,6	31,6	31,6
	Mixed	143	47,5	47,5	79,1
	All infinite	63	20,9	20,9	100,0
	Total	301	100,0	100,0	

Πίνακας Γ2: Επίδοση 2, Φύλο: crosstabs

			3 categories			Total
			All finite	Mixed	All infinite	
Φύλο	Αγόρι	Count	45	56	33	134
		% within Φύλο	33,6%	41,8%	24,6%	100,0%
	Κορίτσι	Count	45	70	17	132
		% within Φύλο	34,1%	53,0%	12,9%	100,0%
Total		Count	90	126	50	266
		% within Φύλο	33,8%	47,4%	18,8%	100,0%

<u>Πίνακας Γ3:</u> Επίδοση 2, Φύλο: Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	6,661(a)	2	,036
Likelihood Ratio	6,755	2	,034
Linear-by-Linear Association	1,976	1	,160
N of Valid Cases	266		

a 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 24,81.

<u>Πίνακας Γ4:</u> Επίδοση 2, Ηλικία: Crosstab

			3 categories			
			All finite	Mixed	All infinite	Total
Τάξη (Ηλικία)	Γ' Γυμνασίου	Count	68	69	27	164
		% within Τάξη (Ηλικία)	41,5%	42,1%	16,5%	100,0%
	Β' Λυκείου	Count	27	74	36	137
		% within Τάξη (Ηλικία)	19,7%	54,0%	26,3%	100,0%
Total		Count	95	143	63	301
		% within Τάξη (Ηλικία)	31,6%	47,5%	20,9%	100,0%

<u>Πίνακας Γ5:</u> Επίδοση 2, Ηλικία: Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	16,869(a)	2	,000
Likelihood Ratio	17,329	2	,000
Linear-by-Linear Association	14,436	1	,000
N of Valid Cases	301		

a 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 28,67.

Πίνακας Γ6: Επίδοση 2, Α/Κ: Crosstab

			3 categories			
			All finite	Mixed	All infinite	Total
Ανοιχτά / Κλειστά	Ανοιχτό	Count	51	80	18	149
		% within Ανοιχτά / Κλειστά	34,2%	53,7%	12,1%	100,0%
	Κλειστό	Count	44	63	45	152
		% within Ανοιχτά / Κλειστά	28,9%	41,4%	29,6%	100,0%
Total		Count	95	143	63	301
		% within Ανοιχτά / Κλειστά	31,6%	47,5%	20,9%	100,0%

Πίνακας Γ7: Επίδοση 2, Α/Κ: Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	14,080(a)	2	,001
Likelihood Ratio	14,467	2	,001
Linear-by-Linear Association	7,594	1	,006
N of Valid Cases	301		

a 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 31,19.

Πίνακας Γ8: Επίδοση 2, εΑ/εΒ: Crosstab

			3 categories			
			All finite	Mixed	All infinite	Total
Ευθεία Πριν / Ευθεία Μετά	Ευθεία Μετά	Count	57	91	33	181
		% within Ευθεία Πριν / Ευθεία Μετά	31,5%	50,3%	18,2%	100,0%
	Ευθεία Πριν	Count	38	52	30	120
		% within Ευθεία Πριν / Ευθεία Μετά	31,7%	43,3%	25,0%	100,0%
Total		Count	95	143	63	301
		% within Ευθεία Πριν / Ευ-	31,6%	47,5%	20,9%	100,0%

θεία Μετά				

Πίνακας Γ9: Επίδοση 2, εΑ/εΒ: Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	2,312(a)	2	,315
Likelihood Ratio	2,293	2	,318
Linear-by-Linear Association	,609	1	,435
N of Valid Cases	301		

a 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 25,12.

Ξεχωριστά για Γυμνάσιο, κλειστά

Ranks

	εΑ / εΒ	N	Mean Rank	Sum of Ranks
Επίδοση	Ευθεία Μετά	54	38,64	2086,50
	Ευθεία Πριν	27	45,72	1234,50
	Total	81		

Test Statistics[a]

	Επίδοση
Mann-Whitney U	601,500
Wilcoxon W	2086,500
Z	-1,297
Asymp. Sig. (2-tailed)	,195

a. Grouping Variable: εΑ / εΒ

Πίνακας Γ10: Πολυμεταβλητή ανάλυση για διακριτές μεταβλητές: Επίδραση της ηλικίας, του φύλου , Α/Κ ερωτηματολόγιο

* * * * * * * * H I E R A R C H I C A L L O G L I N E A R * * * * * * * *

DATA Information
266 unweighted cases accepted.
0 cases rejected because of out-of-range factor values.
35 cases rejected because of missing data.
266 weighted cases will be used in the analysis.

FACTOR Information

Factor	Level	Label
GENDER	2	Φύλο
GRADE	2	Τάξη (Ηλικία)
CLOP	2	Ανοιχτά / Κλειστά
MODEL3	3	3 categories

- -

* * * * * * * * H I E R A R C H I C A L L O G L I N E A R * * * * * * * *

Backward Elimination (p = ,050) for DESIGN 1 with generating class
CLOP*GRADE
CLOP*MODEL3
CLOP*GENDER
GRADE*MODEL3
GRADE*GENDER
MODEL3*GENDER

Likelihood ratio chi square = 7,13526 DF = 9 P = ,623

- -

If Deleted Simple Effect is	DF	L.R. Chisq Change	Prob	Iter
CLOP*GRADE	1	,147	,7013	3
CLOP*MODEL3	2	7,832	,0199	3
CLOP*GENDER	1	,776	,3783	3
GRADE*MODEL3	2	12,809	,0017	3
GRADE*GENDER	1	2,797	,0945	3
MODEL3*GENDER	2	8,075	,0176	3

Step 1
The best model has generating class
CLOP*MODEL3
CLOP*GENDER
GRADE*MODEL3
GRADE*GENDER
MODEL3*GENDER

Likelihood ratio chi square = 7,28239 DF = 10 P = ,699
- -

If Deleted Simple Effect is	DF	L.R. Chisq Change	Prob	Iter
CLOP*MODEL3	2	8,262	,0161	3
CLOP*GENDER	1	,856	,3548	3
GRADE*MODEL3	2	13,238	,0013	3
GRADE*GENDER	1	2,877	,0899	3
MODEL3*GENDER	2	8,120	,0172	2

_
* * * * * * * * H I E R A R C H I C A L L O G L I N E A R * * * * * * * *
Step 2
The best model has generating class
CLOP*MODEL3
GRADE*MODEL3
GRADE*GENDER
MODEL3*GENDER
Likelihood ratio chi square = 8,13875 DF = 11 P = ,701
- -

If Deleted Simple Effect is	DF	L.R. Chisq Change	Prob	Iter
CLOP*MODEL3	2	7,643	,0219	3
GRADE*MODEL3	2	13,238	,0013	2
GRADE*GENDER	1	2,877	,0899	2
MODEL3*GENDER	2	7,473	,0238	2

Step 3

The best model has generating class
CLOP*MODEL3
GRADE*MODEL3
MODEL3*GENDER

Likelihood ratio chi square = 11,01572 DF = 12 P = ,528

- -

If Deleted Simple Effect is	DF	L.R. Chisq Change	Prob	Iter
CLOP*MODEL3	2	7,643	,0219	2
GRADE*MODEL3	2	12,520	,0019	2
MODEL3*GENDER	2	6,755	,0341	2

Step 4
The best model has generating class
CLOP*MODEL3
GRADE*MODEL3
MODEL3*GENDER
Likelihood ratio chi square = 11,01572 DF = 12 P = ,528
_* * * * * * * * H I E R A R C H I C A L L O G L I N E A R * * * * * * * *
The final model has generating class
CLOP*MODEL3
GRADE*MODEL3
MODEL3*GENDER
The Iterative Proportional Fit algorithm converged at iteration 0.
The maximum difference between observed and fitted marginal totals is
,000
and the convergence criterion is ,250

- -

Goodness-of-fit test statistics

Likelihood ratio chi square = 11,01572 DF = 12 P = ,528
Pearson chi square = 10,50058 DF = 12 P = ,572

- -

5.4.1. Μοντέλα απαντήσεων στα κλειστά ερωτηματολόγια

		Γυμνάσιο		Λύκειο	
Α **Εξωτερική συνέπεια 3,** **Εσωτερική συνέπεια 3**	**{[..], [..], [..] }**				
	{[δ1],[δ2],[κ]}	29		15	
	{[δ1],[δ2],[κ]}	19		26	
Β **Εξωτερική συνέπεια 2,** **Εσωτερική συνέπεια 3**	**{ [..], [..] }, [..]**				
	{[δ1] , [δ2] }, [κ]				
	{ [δ1] , [δ2] }, [κ]		1		
	{[δ1] , [κ] }, [δ2]	1			
	{ [δ1] , [κ]}, [δ2] }		1		
	{[δ2] , [κ] }, [δ1]	3	1		
	{[δ2] , [κ] }, [δ1]				
Γ **Εξωτερική συνέπεια 2,** **Εσωτερική συνέπεια 2**	**{ [..], [..] }, [..]**				
	{[δ1] , [δ2] }, [κ]	3	4		
	{[δ1] , [δ2]}, [κ]	4	5		
	{[δ1] , [κ] }, [δ2]	4			
	{ [δ1] , [κ]}, [δ2]	2	6		
	{[δ2] , [κ] }, [δ1]	2			
	{[δ2] , [κ] }, [δ1]		1		
Δ **Εσωτερική συνέπεια 2**	**[..], [..], [..]**				
	[δ1] , [δ2] , [κ]				
	[δ1] , [δ2], [κ]	2	1		
	[δ1] , [δ2] , [κ]				
	[δ1] , [δ2] , [κ],	1	1		
	[δ1] , [δ2], [κ]				
	[δ1] , [δ2] , [κ]	1			
Ε **Εσωτερική συνέπεια 1**	[δ1] , [δ2] , [κ]				
	[δ1] , [δ2] , [κ]	3	2		
	[δ2] , [δ1] , [κ]	1	1		
	[δ2] , [δ1] , [κ]	1			
	[κ] , [δ1] , [δ2]		2		

	[κ] , [δ1] , [δ2]	2	1		
Ζ Καμία συνέπεια	[δ1] , [δ2] , [κ]	3	3		
	Σύνολο	81		71	

5.4.2. Μοντέλα απαντήσεων στα ανοιχτά ερωτηματολόγια

Α Εξωτερική συνέπεια 3, Εσωτερική συνέπεια 3	{[..], [..], [..] }	Γυμνάσιο		Λύκειο	
	{[δ1],[δ2],[κ]}	39		13	
	{[δ1],[δ2],[κ]}	8		9	
	{[δ1],[δ2],[κ]}	2		5	
Β Εξωτερική συνέπεια 2, Εσωτερική συνέπεια 3	{ [..], [..] }, [..]				
	{[δ1] , [δ2] }, [κ]	1			
	{[δ1] , [δ2] }, [κ]				
	{[δ1] , [δ2] }, [κ]				
	{[δ1] , [δ2] }, [κ]				
	{ [δ1] , [δ2] }, [κ]				
	{ [δ1] , [δ2] }, [κ]	3			
	{[δ1] , [κ] }, [δ2]	1			
	{[δ1] , [κ] }, [δ2]	1			
	{[δ1] , [κ] }, [δ2]				
	{[δ1] , [κ] }, [δ2]				
	{ [δ1] , [κ] }, [δ2]				
	{ [δ1] , [κ] }, [δ2]				
	{[δ2] , [δ2] }, [δ1]				
	{[δ2] , [δ2] }, [δ1]				
	{[δ2] , [κ] }, [δ1]				
	{[δ2] , [κ] }, [δ1]	2		2	
	{ [δ2] , [κ] }, [δ1]				
	{ [δ2] , [κ] }, [δ1]				
Γ Εξωτερική συνέπεια 2, Εσωτερική συνέπεια 2	{ [..], [..] }, [..]				
	{[δ1] , [δ2] }, [κ]	4		2	
	{[δ1] , [δ2] }, [κ]			2	
	{[δ1] , [δ2]}, [κ]	4		1	

	{[δ1] , [κ] }, [δ2]	2		3	
	{[δ1] , [κ] }, [δ2]	1		2	
	{ [δ1] , [κ]}, [δ2]				
	{[δ2] , [κ] }, [δ1]	1		1	
	{[δ2] , [κ] }, [δ1]			3	
	{[δ2] , [κ] }, [δ1]	1			
Δ **Εσωτερική συνέπεια 2**	**[..], [..], [..]**				
	[δ1] , [δ2] , [κ]	2			
	[δ1], [δ2], [κ]	1		1	
	[δ1] , [δ2], [κ]				
	[δ1] ,[δ2], [κ]				
	[δ1] , [δ2] , [κ]				
	[δ1] , [δ2] , [κ]				
	[δ1] , [κ] , [δ2]			1	
	[δ1], [κ], [δ2]				
	[δ1] , [κ], [δ2]				
	[δ1] ,[κ], [δ2]				
	[δ1] , [κ] , [δ2]				
	[δ1] , [κ] , [δ2]			1	
	[δ2] , [κ] , [δ1]				
	[δ2], [κ], [δ1]				
	[δ2] , [κ], [δ1]			2	
	[δ2] ,[κ], [δ1]				
	[δ2] , [κ] , [δ1]				
	[δ2] , [κ] , [δ1]				
Ε **Εσωτερική συνέπεια 1**	[δ1] ,[δ2] , [κ]	1		1	
	[δ1] ,[δ2] , [κ]			1	
	[δ1] ,[δ2] , [κ]	2		3	
	[δ2] ,[δ1] , [κ]			4	
	[δ2] ,[δ1] , [κ]	1		1	
	[δ2] ,[δ1] , [κ]			2	
	[κ] ,[δ1] , [δ2]				
	[κ] ,[δ1] , [δ2]			2	

	[κ] ,[δ1] , [δ2]	2		2	
Z **Καμία συνέπεια**		4		2	
Σύνολο		83		66	