ΣΤΟΙΧΕΙ͂Α
ΤΗ͂Σ
ἈΡΙΘΜΗΤΙΚΗ͂Σ ϗ ἈΛΓΈΒΡΑΣ

Συνταχθέντα μὲν κατά τινα νεωτέραν, ἀξιόλογον, ϗ ἀκατάληπτον Μέθοδον

ὑπὸ τȣ͂ ποτε

... ΜΕΤΖΒΟΥΡΓ

Περιφήμȣ Διδασκάλȣ τῆς Μαθηματικῆς ἐν Βιέννῃ.

Νῦν δὲ πρῶτον

Εἰς τὴν κανονικωτέραν καθ᾽ ἡμᾶς ἁπλοελληνίδα μετενεχθέντα μετὰ προσθήκης ϗ τινος μεταβολῆς

ΠΑΡᾺ

ΜΙΧΑΉΛ ΧΡΗΣΤΑΡΗ͂

Τȣ͂ ἐξ Ἰωαννίνων

Εἰς χρῆσιν τῶν ἐν τῇ Ἑλλάδι ϗ ἀλλαχȣ͂

ἙΛΛΗΝΙΚΩ͂Ν ΣΧΟΛΕΙ͂ΩΝ,

Καὶ πρὸς κοινὴν τȣ͂ Γένȣς ὠφέλειαν.

Φιλοτίμῳ δὲ δαπάνῃ τȣ͂ τιμιωτάτȣ ϗ φιλογενȣ͂ς

Κυρίȣ Κυρίȣ

ΕΥ̓ΣΤΑΘΕΊΟΥ ΜΊΤΖΗ.

ἘΚΔΟΣΙΣ ΠΡΏΤΗ

ἘΝ ΠΑΤΑΒΊΟΙΣ κατὰ τὸ 1804. ἔτ@.
Ἐν τῇ Τυπογραφίᾳ τȣ͂ Σεμιναρίȣ
Con regia approvazione.

ΤΩ͂ ΣΟΦΟΛΟΓΙΩΤΑΤΩ͂ ΔΙΔΑΣΚΑΛΩ͂
ΤΟΥ͂ ΕΝ ΒΟΥΚΟΥΡΕΣΤΙΟΙΣ

ΗΓΕΜΟΝΙΚΟΥ͂ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κυρίῳ μοι Κυρίῳ

ΛΑΜΠΡΩ͂ ΦΩΤΙΑΔῌ

Τῷ ἐξ Ἰωαννίνων, Ἐμῷ Εὐεργέτῃ.

Ἄγε δὴ ἄγε θυμέ! μηκέτι νῦν πάπταινε, μηδ᾽ ἐπέχε σαυτὸν, ἀλλ᾽ εἴπερ σοί ποτε καθήκοντος νόμος ἀγνωμοσύνης

νόον ὑπὸ γλυκυτά-
ταις ἔθηκε φροντίσιν,

ἀπόθου ἤδη πᾶσαν ἀναβολὴν, καὶ σπεῦσον πλέσαι ὅλῳ ποδὶ, ἣν καὶ πάλαι προείλου ὁμολογίαν ἀγνώμονα· ὅτι πολὺς ἤδη γενόμενος ὁ μεταξὺ χρόνος, ἴσως

ἀμὸν κατῄσχυνε βαθὺ χρέος.

σπεῦσόν, φημι, ἀγαθῇ τύχῃ, καὶ οἷς ἔχεις καὶ δύνασαι, τούτοις γοῦν τὸ ἄγνωμον ἐνδεῖξαι, πρὸς ὃν πάντως οὐκ ἔλαθες σαυτὸν πολλῶν καὶ μεγάλων ἕνεκα ἀποινῶν κατάχρεως ὅλως γενόμενος.

* 2 Η

Ἦ ἄρ' ἤδη με εὐεργέτει, καὶ μοι πρόξενε τῶν καλῶν! κατὰ τοὺς ἀσυντελεῖς, ἵν' οὕτως εἴπω, Κηφῆνας τὸν βίον διατελεῖν, καὶ ταυτὶ πεπονθέναι τοῖς ἐν ἀμελοῦς, ὃ δὴ λέγεται, τυχὸν δὲ καὶ ἀγνώμονος, γωνίᾳ καθεύδειν προελομένοις· ἀλλὰ μὴ καὶ αὐτὴν, ἥ φασι, τὸν ἀπὸ γραμμῆς λίθον κινῆσαι, ὥστε μάλιστα μὲν ξυνωφελῆσαί τι κἀμὲ ἑλλήνων γένει καὶ προγόνων ἐμῶν· μάλιστα δὲ καὶ τῷ θεσπεσίῳ σοῦ ΟΝΤΙ ὡς ἀπαρχὰς τὴν πρώτην ταυτηνὶ τῶν ἐμῶν καμάτων ἐπικαρπίαν προσενεγκεῖν· πῶς γάρ; ὅτε καὶ κατ' ἡλικίαν ἐπὶ τῆς ἱερᾶς σοῦ ψυχῆς ὡς ἐπί τινος κρηπῖδος ἅπαξ τὴν ἐμαυτοῦ πηξάμενος καλιὰν, θαυμάσια ἡλίκα τῆς σῆς κοινωνίας ἀπολέλαυκα ἀγαθὰ, οὐ μὰ Δία μόνον ὄψα τε καὶ σίτους καὶ τράπεζαν Ἀλκινόου καλὴν, οὔτε μὴν ὅσα μέχρι λαιμοῦ, τυχὸν καὶ καρδίας παρέχειν πεφύκασι τὸ ἡδύ. μόνα γὰρ τὰ τοιαῦτα μικρὰ ἄττ' ἂν εἴη, μᾶλλον δὲ μηδὲ τοῦ τυχόντος λόγου ἄξια παρὰ σοί· ἀλλὰ καὶ οἷα Μουσῶν καὶ Ἀπόλλωνος λειμῶνες ἀεννάους βρύειν εἰώθασι, καὶ ὅσα ψυχὴν ἐξημεροῖ, καὶ τρόπων ἤθη διακοσμεῖ, καὶ σωφροσύνην ἐντίθησι, καὶ ἔρωτα τῶν καλῶν ἐμποιεῖ, τὴν ἐν λόγοις λέγω παιδείαν, ὑπερτάτης καὶ θειοτάτης δυνάμεως θειότατον καὶ ὑπέρτατον δώρημα. Τοιούτων ἄρα καὶ τηλικούτων καὶ ἑτέρων ἀγαθῶν οὐκ εὐαριθμήτων προεῖλου φιλοφρόνως ποιῆσαι κἀμὲ κοινωνόν· καθάπερ ἔτι καὶ νῦν οὐ διαλείπεις πλείστην ὅσην τῶν κατ' ἐμὲ

ποιοῦποιούμενος πρόνοιαν· εἰ δέ μοι δίδως καὶ κοινότερον ἀποτεῖναι λόγον τῆς σῆς ἀρετῆς, οὐ μόνον ἐμοὶ τοιούτου σμήνους ἀγαθῶν γέγονας πρόξενος, ἀλλὰ καὶ ἑτέροις οὐκ ὀλίγοις τῶν σῶν Οὕτω τὴν ἀπόλαυσιν ἀφῆκας ἀκώλυτον κομιδῇ. καὶ νῦν ἔτι ἐπ' οὐδενὶ οὕτω χαίρεις, ὡς μὲν εὖ ποιῶν καὶ παρέχων τῶν ἐνόντων σοι ἀγαθῶν δαψιλῶς· ἀμοιβὰς δ' ἀντὶ τούτου δεχόμενος, οὐχ ὅσα φιλοῦσι ψυχαί τινες ἀγεννεῖς, καὶ τὸ αὐταῖς συμφέρον μόνον διώκουσαι, ἀλλ' ὅσα ἀρετῆς καὶ παιδείας ἐχόμενα, πρὸς τὴν κοινὴν τοῦ γένους ἀφορῶσι βελτίωσιν· τῷ δὲ σεμνῷ τοῦ Σοῦ πολιτεύματος, καὶ τῇ τοῦ λόγου δυνάμει ῥυθμίζεις καὶ βίον καὶ λόγον τῶν περὶ Σὲ σπουδαζόντων, ξύμπαντας πρὸς τοῦ ὄντως ἐφετοῦ τὴν ἐπίτευξιν τὸν ἐνόντα τρόπον παρακαλῶν. Ταύτῃ τοι τύπος μὲν καὶ ὑπογραμμὸς τῆς κατὰ τὸν βίον κοσμιότητος ἀκριβὴς, εὐδαιμονία δὲ μεγίστη τῷ γένει τυγχάνεις προκείμενος· κἀντεῦθεν ἄρα εὐδαίμονες καὶ εὐτυχεῖς ἐς τὰ μάλιστα, ὅσοι τῶν Δακῶν καὶ τῶν καθ' ἡμᾶς ἑλλήνων παῖδες χρηστῷ χρησάμενοι δαίμονι, ὡμιλήκασί Σοι, μαθητεύοντες, καὶ ὁμιλοῦντες, ὁσημέραι τῆς θαυμαστῆς τῶν λόγων Σου αὐδῆς προσακούουσι. ΣΟΙ' τοιγαροῦν φίλτατε πάτερ! (δὸς δὲ κἀμοὶ οὕτω σε διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους προσαγορεῦσαι) δικαίως προσανῆκεν ἡ τῆς βίβλου αὕτη ἀνάθεσις· καὶ ἰδοὺ ἀπέχεις μὲν ὡς τεκμήριον τῆς ἐμῆς διὰ βίου εὐγνωμοσύνης ταυτασὶ τῶν ἐμῶν πόνων τὰς

ἀπαρ-

ἀπαρχάς, χρῆμα λιτὸν μὲν καὶ πλεῖστον ὅσον τῆς ἀξίας ἀπολειπόμενον, εὐγνωμοσύνης ὅμως ἀνάμεστον καὶ ἀποδοχῆς ἴσως οὐκ ἀνάξιον, τὸ μὲν, ὅτι πρὸς διδάσκαλον εὐεργέτην, οἷος ΑΥΤΟΣ εἶ, τὸ δέ, ὅτι παρὰ μαθητοῦ εὐγνώμονος ἐς τὰ μάλιστα τοῦτο τὸ δῶρον προσάγεται· χαίροις δέ μοι διαμπερές, εἰς γῆρας λιπαρὸν καὶ βαθύτατον ὑπὸ τῆς πανσθενοῦς τοῦ κρείττονος δεξιᾶς περιφρουρούμενος πρὸς ἀγαλλίασιν καὶ θυμηδίαν τῶν Σῶν, καὶ πρὸς κοινὴν τοῦ γένους ὠφέλειαν!.

Ἐν Παταυΐοις αωδʹ.
κατὰ μῆνα ὀκτώβρ.

Ὁ ἐν μαθηταῖς εὐγνώμων
ΜΙΧΑΗ'Λ ΧΡΗΣΤΑΡΗ'Σ.

ΚΕΦΑΛΑΙΩ'ΔΗΣ ΠΙ'ΝΑΞ

Τῶν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ περιεχομένων Κεφαλαίων.

Σελίδι

Τῶν ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ Κεφαλαίων.

Ἐὰν ᾖς φιλομαθὴς, ἔσῃ καὶ Πολυμαθής·

Ἰσοκρ. Παραίν. πρὸς Δημόνικ.

ΕʹΚΘΕΣΙΣ ΤΩ͂Ν ΚΑΛΟΥΜΕʹΝΩΝ

ΑʹΠΟΦΑΝΤΙΚΩ͂Ν ΛΕʹΞΕΩΝ.

Οἱ Μαθηματικοὶ μάλιστα μεταχειρίζονται εἰς [illegible] πραγματείαν τῆς Μαθηματικῆς ϗ τινα τάξιν ἀναγκαίαν ϗ ἐπωφελῆ, Μέθοδον Μαθηματικὴν αὐτὴν ὀνομάζοντες, κατ' αὐτὴν τὴν Μέθοδον τὸ ἓν μετὰ τοῦ ἄλλου διμεθόδως ἐπιπλέκεται ϗ παράγεται. τουτέστιν ἐκ τῶν Ὁρισμῶν μεταβαίνουσιν εἰς ἀξιώματα ἢ εἰς αἰτήματα, ἔπειτα ἐπὶ τούτων οἰκοδομοῦσι Θεωρήματα ἢ Προβλήματα, ϗ ἐντεῦθεν ἐξάγουσι Πορίσματα, ϗ ἔνθα ἡ χρεία τὸ καλεῖ, ἐπισυνάπτουσιν Ὑποθέσεις τινας ϗ Σχόλια ἢ λήμματα. ὅθεν ἀναγκαῖον ἐστὶ νὰ ἑρμηνεύσωμεν πρότερον ϗ τὴν σημασίαν ἑκάστης τούτων τῶν καλουμένων ἀποφαντικῶν λέξεων.

ΟʹΡΙΣΜΟʹΣ λοιπὸν εἶναι μία ἀνάπτυξις ϗ σαφὴς ἑρμηνεία πράγματός τινος, ἢ ὀνόματος διὰ ἐκείνων τῶν Ἰδεῶν ἀποτελουμένη, αἱ ὁποῖαι μόνον εἰς αὐτὸ τὸ πρᾶγμα ἀνήκουσι, ϗ τὸ διακωλύουσιν ἐκ παντὸς ἄλλου· ὅθεν ὁ Ὁρισμὸς ἢ ὀνοματώδης ἐστὶν, ἢ πραγματιώδης, ϗ ὀνοματώδης μὲν καλεῖται, ὅτε γίνεται ἑρμηνεία ὀνόματός τινος, ἢ λέξεως, πραγματιώδην δὲ Ὁρισμὸν ὀνομάζομεν ἐκεῖνον, διὰ τῦ ὁποίυ ἑρμηνδύομεν αὐτὸ τὸ πρᾶγμα, ἢ, τὴν δύναμιν αὐτῦ, ἢ τὴν ἰδιότητα τῆς ὑπάρξεώς τυ. ΙʹΔΕΑΙ δὲ ὀνομάζονται αἱ παραστάσεις τῶν πραγμάτων, ἢ αἱ εἰκόνες, αἱ ὁποῖαι διὰ τῶν αἰσθήσεων πηγαίνανται εἰς τὸν νῦν μας, ϗ πρέπει νὰ εἶναι ϗ αὗται σαφεῖς, ϗ καθαραὶ, ϗ ἀκατάληπται.

ΑʹΞΙʹΩΜΑ δὲ εἶναι μία ἀλήθεια τοσῦτον ἐναργὴς ϗ καθαρὰ, ὥςε ὐδεὶς δύναται νὰ τὴν ἀρνηθῇ ὑγιῆ τὸν ἐγκέφαλον ἔχων. ὅθεν ϗ ἐπὶ τῶν ἀξιωμάτων ἀποδείξεως ὐδὲν δεόμεθα. π. χ. τὸ ὅλον μεῖζον ἐςὶ τῦ ἰδίυ μέρυς.

ΘΕΩʹΡΗΜΑ δὲ εἶναι μία ἀλήθεια θεωρίας ϗ ἀποδείξεως δεομένη, ϗ συνίςαται ἐκ δύω μερῶν, δηλαδὴ ἐκ τῆς προτάσεως, ἥτις περιέχει τὴν θεωρηθεῖσαν ἀλήθειαν, ϗ ἐκ τῆς ἀποδείξεως αὐτῆς τῆς ἀληθείας· ὅθεν Θεώρημά ἐςι πρότασις θεωρητικὴ, ἥτις πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ. ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ἢ διὰ ἀρχῶν καθ' ἑαυτὰς βεβαίων ϗ αὐτοπίςων, ὅ, τι λογῆς εἶναι οἱ Οʹρισμοὶ, τὰ ἀξίωματα, ἢ διὰ τοιύτων, τὰ ὁποῖα εἰσὶν προδεδοκιμασμένα ϗ βεβεβαιωμένα διὰ τῶν ἀνωτέρω.

Τὸ δὲ ΠΡΟʹΒΛΗΜΑ εἶναι μία πρότασις, ἥτις ἀπαιτεῖ τι, τὸ ὁποῖον πρέπει, ἢ μέλλει νὰ γένῃ, ϗ ἔχει τρία μέρη, πρῶτον, τὴν ἐρώτησιν τῦ προβλητῦ ϗ πρακτῦ πράγματος, δεύτερον, τὴν λύσιν τῆς ἐρωτήσεως, δεικνύυσαν τὸν τρόπον, πῶς πρέπει νὰ ἀποτελεσθῇ τὸ προβαλλόμενον, τρίτον, ἔχει τὴν δεῖξιν αὐτῆς τῆς λύσεως, καθὼς ἐν τῇ πράξει τῶν προβλημάτων τρανώτερον δείκνυνται.

κύνται. ὅθεν Πρόβλημα ἐστι πρακτικὴ ἀλήθεια ἀποδείξεως δεομένη.

Τὸ δὲ ΑΙΤΗΜΑ εἶναι μία πρακτικὴ ἀλήθεια, ἥτις δὲν χρειάζεται ἀποδείξεως, καθὼς ὅταν ζητῇ τινας νὰ ἀγάγῃ μίαν εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀφ᾽ ἑνὸς Σημείου εἰς ἕτερον, ἢ νὰ μηκύνῃ ἔτι τὴν δοθεῖσαν Γραμμὴν, καὶ τὰ τοιαῦτα. ἡ πρακτικὴ λύσις τούτων τῶν αἰτημάτων εἶναι τόσον σαφὴς καὶ καθαρὰ, ὥστε δὲν εἶναι χρεία τινὸς ἀποδείξεως.

ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ δὲ εἰσὶ πράγματα καὶ σημεῖα, ἢ σχήματα πραγμάτων κατὰ τὸ δοκοῦν λαμβανόμενα, καθὼς εἶναι αἱ ὀνομασίαι τῶν πραγμάτων, οἱ χαρακτῆρες τῶν ἀριθμῶν, κ. τ. τὰ ὁποῖα μεταχειριζόμεθα εἰς δήλωσιν καὶ σαφήνειαν τῶν πραγμάτων. εἰς τὴν Φυσικὴν ἐννοοῦμεν διὰ Υπόθεσιν μίαν πιθανὴν καὶ ἀβέβαιον ἀλήθειαν, τὴν ὁποίαν οἱ Φυσικοὶ ἐξ ἀνάγκης μεταχειρίζονται, ὅταν δὲν ἔχωσιν ἀρχὰς ἀναμφιβόλους, καὶ κρείττονας γνώσεις τῶν πραγμάτων. καθὼς ὅταν λέγηται, ὅτι τὸ σχῆμα τῆς γῆς εἶναι σφαιροειδὲς, καὶ ὅτι αὐτὴ κινεῖται περὶ τὸν Ἥλιον, καὶ ἄλλα τοιαῦτα. Εἰς δὲ τὴν Μαθηματικὴν ἐνίοτε προϋποτίθεταί τι, ἢ λαμβάνεται κατάτινα συνθήκην, ὅθεν ἐξάγονται ἀλήθειαι ἴδιαι καὶ ἀνήκουσαι τοῖς λαμβανομένοις πράγμασιν, ἔπειτα ἐπὶ τούτων θεμελιοῦται τὸ Θεώρημα. π. χ. ἀποδεχόμεθα πρῶτον, ὅτι δύο Γραμμαὶ εἰσὶ παράλληλοι, καὶ ἐξ αὐτῆς τῆς ὑποθέσεως ἀποδεικνύομεν τὴν ἰσότητα τῶν ἀπέναντι Γωνιῶν, ἐὰν ἄλλη τρίτη Γραμμὴ ἐμπέσῃ καὶ διαχωρίσῃ αὐτὰς, ἔπειτα ἐκ τούτου ποιοῦμεν τὸ ἑξῆς Θεώρημα.„ Ἐὰν αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι Ἴσαι, παράλληλοι ἔσονται τότε καὶ αἱ Γραμμαί.

Τὸ δὲ ΛΗΓΜΜΑ εἶναι μία πρότασις, ἥτις τρόπον τινὰ ἐξ ἄλλης γνώσεως καὶ πραγματείας λαμβάνεται, καὶ δι' αὐτῆς δεικνυταί τι, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εἶναι ἡ βάσις μιᾶς περαιτέρω ἀποδείξεως.

ΠΕΓΡΑ δὲ εἶναι μία γνῶσις, τὴν ὁποίαν ἀποκτῶμεν διὰ τῆς παρατηρήσεως τῶν πραγμάτων, τὰ ὁποῖα διὰ τῶν αἰσθήσεων ἐμπίπτουσιν εἰς τὸν ἡμέτερον νοῦν. π. χ. ὅτι ὁ Ἥλιος λάμπει. ὅτι τὸ πῦρ καίει, ὅτι τὰ σώματα εἰσὶν βαρέα. κ. τ. ἐντεῦθεν ἐξάγει τινὰς ἀποδείξεις διὰ μερικὰ πράγματα, ἔπειτα μεταχειρίζεται αὐτὰς τὰς Ἰδέας εἰς γενικὰς ἀληθείας, ἐὰν πλείονα τοιαῦτα πράγματα συμφωνῶσιν ἀλλήλοις.

Τὸ δὲ ΠΟΡΙΣΜΑ εἶναι μία ἀλήθεια, ἥτις προκύπτει καὶ πηγάζει ἐξ ἀληθειῶν ἤδη ἀποδεδειγμένων, καθὼς εἰς τὴν χρῆσιν τῶν Πορισμάτων σαφέστατα δείκνυται. διὰ τοῦτο καὶ ἐπὶ τούτων δὲν ἔχομεν χρείαν ἄλλης δευτέρας ἀποδείξεως.

Τὸ δὲ ΣΧΟΛΙΟΝ μεταχειριζόμεθα ἢ εἰς πλείονα σαφήνειαν καὶ πίστωσίν τινος προτεθέντος πράγματος, ἢ εἰς λύσιν ἀμφιβολίας τινός, ἢ δι' αὐτοῦ ποιοῦμέν τινα ἀναγκαίαν προσθήκην, ἢ ἀνάμνησιν ἱστορίας, συγγραφέως, ἐφευρέσεως, καὶ ἄλλων τοιούτων.

Ἰδοὺ τοίνυν ἐν συντόμῳ παρεθέσαμεν ϗ τὴν ἑρμηνείαν ἑκάστης τῶν ἀποφαντικῶν τούτων λέξεων, εἰς τὰς ὁποίας συνίσταται ἡ Μαθηματικὴ αὕτη Μέθοδος, τὴν ὁποίαν ἐν ταῖς πράξεσι ϗ μελέταις τῶν Μαθηματικῶν ϗ ἄλλων Ἐπιστημῶν φυλάττοντες, ϗ κατ᾽ ἀξίαν διατηροῦντες, οὐχὶ μόνον προχωροῦμεν, ϗ φθάνομεν εἰς τὸ σκοπούμενον, ἀπονώτερον τῆς ἀληθείας ἁπτόμενοι, ἀλλὰ δὴ βασιμωτέρας ϗ συστηματικωτέρας ἔχομεν τότε ϗ τὰς ἰδέας μας, ϗ δυνάμεθα ἐκ τῆς οὕτω καλῆς μελέτης νὰ κρίνωμεν ὀρθότερον, πόσης τιμῆς ϗ ἀποδοχῆς εἰσὶν ἄξια τὰ συγγράμματα ἐκείνων, οἵτινες ὀλίγον τῆς Μεθόδου ταύτης φροντίζοντες, μόλις ποτὲ μέρος αὐτῆς σποράδην ϗ ἀτάκτως κατὰ τὸ δοκοῦν αὐτοῖς μεταχειρίζονται εἰς τὰ συγγράμματά των, ἢ τῶν πραγμάτων αὐτῶν παραμελοῦντες, μόνον εἰς τὰς ἤδη ἐξηγηθείσας λέξεις προσέχουσι, ϗ ἐπ᾽ αὐτῶν παρ᾽ ἀξίαν οἰκοδομοῦσι βεβαιώσεις ϗ ἀποδείξεις ἀναντιρρήτους, ὡς αὐτοὶ νομίζουσι κατὰ τὴν ματαιότητα ϗ φαντασίαν των· καθάπερ δὴ ϗ ἄλλοι τινὲς μ᾽ ὅλον ὁποῦ ἐκ τῆς ἐπιπολαίου ϗ ἀτάκτου μελέτης των ἔχουσί τινας ἰδέας συγκεχυμένας ϗ ἀτελεῖς, ἐπιχειροῦσιν ὅμως νὰ ἀνακρίνωσι ϗ νὰ ἐπικρίνωσι μὲ ἄκραν κουφότητα τὰ συγγράμματα ἐκείνων, τῶν ὁποίων ἴσως δὲν εἶναι ἄξιοι νὰ λύσωσι, διὰ νὰ εἰπῶ οὕτω, μήτε τὸν ἱμάντα τῶν ὑποδημάτων, ϗ ὅταν τύχωσιν εἰς τινὰ συναναστροφὴν μάλιστα ἀμαθῶν ἀνθρώπων, βαβαὶ τῆς τόλμης των! συνηθίζουσι τότε νὰ ἀποφαίνωνται ὥσπερ ἐπὶ Τρίποδος, πάντα μᾶλλον, ἢ τὴν ἀλήθειαν, ϗ νὰ ἐπιφέρωσι παρ᾽ ὅλην τὴν διατριβὴν τὰς μαμμακουθείους κρίσεις των περὶ παντὸς εἴδους μαθήσεως, ϗ οὕτω μάλα κακῶς διατρεπόμενοι, διατρέπουσι ϗ τοὺς δυστυχεῖς ἐκείνους ἀκολούθως ἐκ τῆς ὀρθῆς ϗ ἀληθείας ὄξου τῶν πραγμάτων, ϗ τὸ κακὸν τοῦτο διαδιδόμενον ϗ πολλαπλασιαζόμενον, μεγάλην ϗ τὴν ζημίαν προξενεῖ εἰς τὸ ἀνθρώπινον.

Ἀλλὰ πρωτοῦ νὰ κάμωμεν ἀρχὴν τοῦ σκοπουμένου ἔργου, μένει ἐπιτὰ παραθέσωμέν τινα ϗ περὶ τῆς Ἀναλύσεως ϗ Συνθέσεως ὡς ἀναγκαῖα ϗ ταῦτα ϗ ὠφέλιμα εἰς εὕρεσιν τῆς ἀληθείας.

ἈΝΑΛΥΣΙΣ τοίνυν Μέθοδός ἐστι, τὴν ὁποίαν μεταχειριζόμεθα εἰς ἀποκάλυψιν ϗ φανέρωσιν τινὸς προβαλλομένης ἀληθείας. διὰ αὐτῆς τῆς ἀναλυτικῆς Μεθόδου διαβαίνομεν ἀπὸ μίας ὡρισμένης ϗ μερικῆς ἀληθείας εἰς ἄλλην ἀόριστον, ϗ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον προβαίνομεν, ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν πρώτην πηγὴν ἐκείνης τῆς ἀληθείας· οὕτως εὑρίσκει τινὰς τὴν πρώτην ἀρχήν, ἢ Ρίζαν μιᾶς γενεαλογίας, ϗ ἴσω εἰς παράδειγμα ἄγνωστος ἡ σειρὰ τῆς γενεᾶς, ἐξ ἧς κατάγεται φέρ' εἰπεῖν, ὁ Καῖσαρ, ὅθεν πρῶτον ἄρχεταί τινας τὴν ἔρευναν ἀπὸ τοῦ Καίσαρος, ϗ ἔρχεται κατ' εὐθεῖαν Γραμμὴν εἰς τὸν πατέρα αὐτοῦ, ἔπειτα ἀπὸ τοῦ πατρὸς ἀναβαίνει εἰς τὸν πάππον, ϗ ἐντεῦθεν εἰς τὸν προπάππον, ϗ οὕτω προβαίνει ἕως οὗ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν Γενάρχην, τουτέστιν εἰς τὸν πρῶτον ἐκεῖνον, ἐξ οὗ αὕτη ἡ γενεὰ τοῦ Καίσαρος ἔχει τὴν ἀρχήν της. οὕτως εὑρίσκονται ϗ αἱ πρῶται ἀρχαὶ τοῦ κατὰ Γραμματικοὺς λόγου, οἷον· ὁ λόγος σύγκειται ἐκ λέξεων, αἱ δὲ λέξεις γίνονται ἐκ συλλαβῶν, αἱ δὲ συλλαβαὶ ἐκ γραμμάτων, τὰ δὲ γράμματα εἶναι αἱ ἀρχαί.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ δὲ εἶναι μία Μέθοδος ἐναντία τῇ ἀναλυτικῇ Μεθόδῳ· ἐπειδὴ διὰ τῆς συνθετικῆς Μεθόδου

κατα-

καταβαίνομεν ἀπὸ γενικὰς ἀληθείας, ϗ διαβαίνοντες διὰ μέσȣ μιᾶς συνεχȣ̃ς σειρᾶς ἀληθειῶν, φθάνομεν εἰς μερικὰς ἀληθείας· ϗ εἰς πλειόνα κατάληψιν, ἔστω πάλιν τὸ προτεθὲν παράδειγμα τῆς γενεαλογίας·· ὅθεν ἀρχόμενος τινας ἀπὸ τȣ̃ εὑρεθέντος Γενάρχȣ, μεταβαίνει εἰς τὸν ὑὸν αὐτȣ̃, ϗ ἐκ τȣ́τȣ εἰς τὸν ἔγγονον, ϗ ȣ̃τω καταβαίνει ἕως ȣ̃ νὰ φθάσῃ πάλιν εἰς τὸν Καίσαρα. τὸν ἴδιον τρόπον ἀκολȣθȣ̃μεν ϗ ἐπὶ τȣ̃ προτεθέντος λόγȣ. οἷον· τὰ γράμματα εἶναι πρῶται ἀρχαὶ τῶν συλλαβῶν, αἱ συλλαβαὶ τῶν λέξεων, ἐκ δὲ τῶν λέξεων γίνεται ὁ λόγος. ἐν ἑνὶ λόγῳ ϗ αἱ δύω αὗται Μέθοδοι ὡς ἀναγκαῖαι εἰς εὕρεσιν πάσης ἀληθείας, εἶναι πρόξενοι μεγάλης ὠφελείας. ϗ ἡ μὲν Συνθετικὴ Μέθοδος ἔχει τὰ πρωτεῖα εἰς τὴν κατ᾽ ἐπιστήμας διδασκαλίαν, ἡ δὲ ἀνάλυσις συμβάλλει μᾶλλον εἰς ζήτησιν ϗ εὕρεσιν τῶν ἀληθειῶν.

Τὰ δὲ χρειωδέστερα ἀξιώματα, ἐπὶ τῶν ὁποίων θεμελιȣ̃ται ἡ Μαθηματικὴ, εἰσὶ τὰ ἑπόμενα.

α.) Τὸ Ὅλον εἶναι μεῖζον τȣ̃ ἰδίȣ μέρȣς.

β'.) Τὸ Ὅλον εἶναι Ἴσον τοῖς ἰδίοις μέρεσιν ὁμȣ̃ λαμβανομένοις.

γ'.) Τὰ πράγματα τὰ ὄντα Ἴσα μὲ ἓν ἕτερόν, εἶτι ϗ ἀλλήλοις Ἴσα. π. χ. ἂν $6 - 2$ εἶναι Ἴσον μὲ 4, ϗ $7 - 3$ εἶναι αὖθις Ἴσον μὲ 4, ἔσαι τότε ϗ $6 - 2$ Ἴσον τῷ $7 - 3$.

δʹ.) Ἐὰν εἰς Ἴσα προστεθῶσιν ἕτερα Ἴσα, ἔσονται τότε ϗ τὰ ἀθροίσματα (κεφάλαια) τούτων Ἴσα ἀλλήλοις. ὡσαύτως ϗ ἐὰν ἀπὸ Ἴσων ἀφαιρεθῶσιν Ἴσα, τὰ ἐγκαταλειπόμενα ἔσονται Ἴσα.

εʹ.) Ἴσα πράγματα δύνανται νὰ πθῶσι διὰ Ἴσα.

ΣΤΟΙΧΕΙ͂Α ΤΗ͂Σ ΑʼΡΙΘΜΗΤΙΚΗ͂Σ

ΚΕΦΑ´ΛΑΙΟΝ α´.

ΓΕΝΙΚΑΙ` ΑʼΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ` ἸΔΕ´ΑΙ

ΟʼΡΙΣΜΟ´Σ α´.

§. 1. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ´ (*) ὀνομάζεται ἡ διδάσκουσα ἐπιστήμη, τίνι τρόπῳ νὰ ἑνώνωμεν τὰ μέρη τινὸς διακεκριμένου Ποσοῦ (**) καὶ πῶς πάλιν νὰ διαχωρίζωμεν αὐτὰ ἀπ' ἀλλήλων κατὰ τὴν τυχοῦσαν, καὶ προσήκουσαν ἑκάστου χρείαν.

ΣΧΟ´ΛΙΟΝ

(*) Τὸν Ὁρισμὸν τῆς ἀριθμητικῆς ἄλλοι μὲν οὕτως, ἄλλοι δὲ ἄλλως ἀποδιδόασιν. ἡ χρῆσις ὅμως αὐτῆς γίνεται παρὰ πᾶσι διὰ τὸ αὐτὸ τέλος καὶ ἀποτέλεσμα.

(**) Ποσόν, Ποσότης, ἢ Μέγεθος ὀνομάζεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον εἶναι, ἢ δύναται νὰ νοηθῇ ἐκ μερῶν συντεθειμένον, καὶ

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 2. Ἡ ἀριθμητικὴ θεωρεῖ τὰ πράγματα εἴτε ἀφῃρημένως καὶ ἀορίστως, ὅτε καὶ ἀριθμητικὴ θεωρητικὴ καλεῖται, εἴτε συγκεκριμένως καὶ διωρισμένως, ὅτε καὶ πρακτική, ἢ, ὡς παρ' ἄλλοις, ἀλγόριθμος ὀνομάζεται ἐκ τοῦ εὑρετοῦ αὐτῆς, καθὼς λέγεται, φιλοσόφου τινὸς Ἄλγου (*).

ΟΡΙΣΜΟΣ β'.

§. 3. Μονὰς σημαίνει ἓν μόνον πρᾶγμα καθ' ἑαυτὸ λαμβανόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

τὸ ὁποῖον διὰ μὲν τῆς προσθέσεως δύναται νὰ αὐξηθῇ, διὰ δὲ τῆς ἀφαιρέσεως δύναται νὰ ἐλαττωθῇ. Πρὸς τούτοις τὸ Μέγεθος θεωρεῖται τριχῶς, δηλαδὴ ἢ εἶναι Διακεκριμένον, ἢ Συνεχές, ἢ Διαδεκτικόν.

Διακεκριμένον Ποσὸν ὀνομάζεται ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου τὰ μέρη εἰσὶν ἀπ' ἀλλήλων κεχωρισμένα, οἷον στρατός τις, ἢ σωρὸς Σίτου, ἄμμου, καὶ ἄλλων τοιούτων.

Συνεχὲς δέ, ἢ Ἐκτεταμένον Ποσὸν καλεῖται ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου τὰ μέρη εἰσὶν συνημμένα καὶ συνδεδεμένα μεταξύ των, οἷον ῥάβδος τις, γραμμή, κύβος, καὶ ἄλλα τοιοῦτα.

Διαδεκτικὴ δὲ Ποσότης λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας τὰ μέρη δὲν ὑπάρχουσιν ὁμοῦ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, ἀλλὰ τὸ ἓν διαδέχεται τὸ ἄλλον, καὶ οὕτω διαδοχικῶς συναθροίζονται εἰς ἕν, οἷον ἡ ὥρα, ἡ ἡμέρα. καὶ ἁπλῶς κάθε χρόνου Ποσόν.

(*) L' Aritmetica pratica, compendiosamente fu data in luce da un Filosofo, detto Algo; e per questo fu chiamata Algorismo, ovvero Algoritmo. ὅρα Trattato Aritmetico di Giuseppe Maria Figatelli, cap. 11.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ.

§. 4. Κάθε ἄρα Ποσότης ὡς ἓν πρᾶγμα θεωρουμένη, δύναται νὰ ὀνομασθῆ Μονάς, οἷον ἕνας ἄνθρωπος, ἓν Γρόσιον, μία Ἑβδομάς. κ. τ.

Ο΄ΡΙΣΜΟ΄Σ γ΄

§. 5. Ἀριθμὸς εἶναι ἓν ἄθροισμα πολλῶν, ἢ τοὐλάχιστον δύω Μονάδων ὁμοειδῶν, οἷον δέκα Παράδες, δύω Γρόσια, κ. τ.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 6. Ἕκαστον τῶν μερῶν, τὰ ὁποῖα συνιστῶσί τινα ἀριθμὸν ἀναφερόμενον μὲν πρὸς ἐκεῖνον τὸν ἀριθμὸν, ὀνομάζεται Μονάς, θεωρούμενον δὲ πρὸς ἕτερα Ὁμοειδῆ ὑπ᾽ αὐτὸ μέρη (ἂν δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς τοιαῦτα), λέγεται καὶ αὐτὸ ἀριθμὸς, τὰ δὲ αὐτῷ μέρη ὀνομάζονται τότε Μονάδες. ἠξεύρομεν π. χ. ὅτι δέκα μὲν στρατιῶται συνιστῶσι μίαν δεκαρχίαν, δέκα δὲ δεκαρχίαι συνιστῶσι μίαν ἑκατονταρχίαν, δέκα δὲ ἑκατονταρχίαι ποιοῦσι μίαν χιλιαρχίαν, κ. τ. ὅθεν ἑκάστη ἑκατονταρχία ὡς μὲν πρὸς τὴν χιλιαρχίαν ὀνομάζεται Μονάς, ὡς δὲ πρὸς τὰς δεκαρχίας ὀνομάζεται ἀριθμός, καθὼς δὴ καὶ ἑκάστη δεκαρχία ἀναφερομένη πρὸς τὴν ἑκατονταρχίαν, λέγεται Μονάς, θεωρουμένη δὲ πρὸς τοὺς δέκα στρατιώτας, ὀνομάζεται ἀριθμὸς, οἱ δὲ δέκα στρατιῶται καλοῦνται Μονάδες. ὡσαύτως δὲ καὶ ἕκαστος τῶν τεσσαράκοντα τουρκικῶν Παράδων ὡς μὲν πρὸς τὸ Γρόσιον, εἶναι Μονάς, ὡς δὲ πρὸς τὰ ὑπ᾽ αὐτὸν ὁμοειδῆ μέρη, τουτέστι πρὸς τὰ λεγόμενα ἄσπρα, ἢ Τριτημόρια, εἶναι ἀριθμὸς, ἕκαστον δὲ τῶν Τριτημορίων καλεῖται Μονάς.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ ά.

§. 7. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἄρα γίνεται φανερὸν πρῶτον, ὅτι ἡ Μονὰς εἶναι ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ Στοιχεῖον παντὸς ἀριθμοῦ, δεύτερον, ὅτι γίνεται ἀριθμὸς, ἂν Μονὰς ἐπὶ Μονάδος ὁμοειδοῦς προστεθῇ.

θῇ, π. χ. ἕνας Παρᾶς εἰς ἄλλον τοιοῦτον, ϗ ὅσον πλείονες Μονάδες προστίθενται, τοσοῦτον μᾶλλον ἐπαυξάνει ὁ ἀριθμός, καθὼς ἐξ ἐναντίας ἐλαττοῦται ϗ σμικρύνεται, ὅταν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρῇ τις Μονάδας·

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ β'.

§. 8. Εἶναι ἀδύνατον ἄρα νὰ γένη ἓν ἄθροισμα, ἢ ἓν ὅλον ἐκ Μονάδων ἑτερογενῶν, ϗ νὰ συσταθῇ οὕτως ἕνας ἀριθμός, πρέπει νὰ ἀναχθῶσιν αὗται εἰς ἓν ϗ τὸ αὐτὸ εἶδος, ϗ νὰ γένωσιν ἀλλήλαις ὁμοειδεῖς, καθὼς περὶ τούτου θέλομεν πραγματευθῇ ἐν καιρῷ πλατύτερον. οἷον εἶναι τῶν ἀδυνάτων νὰ προκύψη ἕνας ἀριθμός, ἢ ἓν ὅλον διὰ τῆς ἁπλῆς ἀθροίσεως ἑνὸς Γροσίου, τριῶν Παράδων, ϗ δύω Τριτημορίων. ἐπειδὴ αὐτὰ τὰ μέρη διαφέρουσιν ἀλλήλων κατὰ τὸ εἶδος, ϗ ἐκ τῆς τοιαύτης ἀθροίσεως αὐτῶν δὲν δύναται νὰ συσταθῇ ἀριθμὸς μήτε ἐξ Γροσίων, μήτε ἐξ Παράδων, μήτε ἐξ ἄσπρων. τρεῖς ὅμως Παράδες ϗ πέντε Παράδες ὁμοῦ ἀθροιζόμενοι, ποιοῦσιν ἕνα ἀριθμὸν σημαντικὸν ὀκτὼ Παράδων. ἐπειδὴ αἱ Μονάδες ἐνταῦθα εἶσιν ὁμοειδεῖς. ϗ οὕτως ἐφεξῆς.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 9. Πρὸς ἔκθεσιν ϗ ἐκδήλωσιν τῶν Μονάδων, ἢ ἀριθμῶν ἐγένοντο εἰς χρῆσιν κατὰ καιρὸν διάφορα εἴδη Σημείων· οἱ Ἕλληνες εἶχον εἰς χρῆσιν τὰ Γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, α, β, γ, δ κ. τ. καθὼς ϗ οἱ Λατῖνοι μετεχειρίζοντο τὰ Στοιχεῖα τοῦ παρ' αὐτοῖς ἀλφαβήτου, ποικίλως ὅμως, ϗ ὄχι κατὰ τὴν τάξιν τῆς Ἑλληνικῆς χρήσεως. ἔπειτα ἐγκατελείφθη αὕτη ἡ χρῆσις, ϗ διεδόθη κοινῶς εἰς ὅλην τὴν Εὐρώπην ἡ χρῆσις τῶν καλουμένων ἀραβικῶν χαρακτήρων οἷον

1	2	3	4	5	6	7	8
ἕν,	δύω,	τρία,	τέσσαρα,	πέντε,	ἕξ,	ἑπτὰ,	ὀκτώ,

9	0
ἐννέα,	ϗ τὸ Μηδενικόν.

οἱ ὁποῖοι κοινότερον ὀνομάζονται Κύφραι, ἰδίως δὲ τὸ Μηδενικὸν ο καλεῖται ϗ Ζῆρος. Πολλοὶ θέλουσιν, ὅτι πρῶτοι εὑρεταὶ τούτων

τῶν

τῶν χαρακτήρων ἐγνώθησαν οἱ Ἰνδοί, ἔπειτα παραλαβόντες ἐξ αὐτῶν οἱ Ἄραβες, τοὺς μετεκόμισαν εἰς τὴν Ἱσπανίαν, καὶ οὕτως ἐκοινώθη ἡ χρῆσις αὐτῶν καὶ εἰς τὰ λοιπὰ γένη, ὡς πλέον εὐχρήστων καὶ ἁρμοδίων ὄντων διὰ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις.

ΥΠΟΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 10. Καὶ ἡμεῖς αὐτοὺς τοὺς χαρακτῆρας θέλομεν μεταχειρισθῇ ἐνταῦθα, ἑρμηνεύσαντες πρῶτον καὶ ἐκείνην τὴν Σημασίαν αὐτῶν, τὴν ὁποίαν λαμβάνουσι κατά τινα τοπικὴν Συνθήκην τῶν ταξαμένων αὐτούς. ἐπειδὴ διὰ νὰ δύνωνται ἐννέα ὄντες ἅπαντες, νὰ ἐκδηλῶσι, καὶ νὰ ἐκφράζωσιν ὁποιανδήποτε πληθὺν ἀριθμοῦ, ἔχουσιν ἐκτὸς τῆς ἰδικῆς αὐτῶν Σημασίας, καὶ τινὰ ἄλλην σημασίαν, ἡ ὁποία ὁρίζεται κατά τινα Συνθήκην ἀπὸ τῆς κατὰ τόπον θέσεως καὶ σχέσεως αὐτῶν. τουτέστιν ἕνας χαρακτὴρ δύναται νὰ σημαίνῃ ἄλλοτε πλέον, καὶ ἄλλοτε ἔλαττον κατὰ τὸν τόπον, εἰς τὸν ὁποῖον κεῖται τεθειμένος.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 11. Ἐκεῖνος ὁ χαρακτήρ, ὁ ὁποῖος κατέχει τὸν πρῶτον τόπον (οἱ τόποι ἄρχονται ἀπὸ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ προαγόμενοι) μιᾶς Σειρᾶς πολλῶν χαρακτήρων, σημαίνει πάντοτε Μονάδας ἁπλᾶς, ἐκεῖνος δὲ ὁ χαρακτήρ, ὁ ὁποῖος τίθεται ἐν τῷ δευτέρῳ τόπῳ, σημαίνει πάντοτε Δεκάδας ἁπλᾶς. Ὁ δὲ χαρακτὴρ ὁ κείμενος ἐν τῷ τρίτῳ τόπῳ, εἶναι σημαντικὸς Ἑκατοντάδων ἁπλῶν, καὶ ἕως ὧδε περιλαμβάνεται ἡ πρώτη Κλάσις· οἷον εἰς τὸν 536 ἀριθμὸν ὁ μὲν 6 χαρακτὴρ ἐπειδὴ κατέχει τὸν πρῶτον τόπον, σημαίνει ἤδη μόνον ἓξ ἁπλᾶς Μονάδας, ὁ δὲ 3 χαρακτὴρ ἐπειδὴ εἶναι τεθειμένος εἰς τὸν δεύτερον τόπον, σημαίνει μόνον τρεῖς Δεκάδας ἁπλᾶς, ὁ δὲ 5 χαρακτ. κατέχων τὸν τρίτον τόπον, εἶναι σημαντικὸς πέντε Ἑκατοντάδων ἁπλῶν, ὥστε ὅλος ὁ 536 ἀριθμὸς σημαίνει πεντακόσια τριάκοντα ἕξ. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς, ἢ ἡ Σειρὰ σύγκειται ἐκ τεσσάρων, ἢ πέντε, ἢ καὶ πλειόνων χαρακτήρων, τότε ὁ ἐν τῷ τετάρτῳ τόπῳ κείμενος χαρατὴρ, σημαίνει Μονάδας χιλιάδος, ἢ χιλιάδων, ὁ δὲ ἐν τῷ πέμπτῳ χαρακτὴρ, Δεκάδας χιλιάδων, ὁ δὲ ἕκτος χαρακτὴρ σημαίνει Ἑκατοντάδας χιλιάδων, καὶ ἕως ὧδε πληρώνει ἡ δευτέρα Κλάσις, ἥτις Κλάσις τῶν χιλιάδων ὀνομάζεται, οἷον ἂν ἐν τῷ προτεθέντι 536 ἀριθμῷ προστεθῶσιν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ καὶ οὗτοι οἱ τρεῖς χαρακτῆρες 478, γίνεται τότε ἡ Σειρὰ αὕτη 478536, καὶ ὁ τέταρτος χαρακτὴρ, τουτέστιν ὁ 8, σημαίνει ὀκτὼ Μονάδας χιλιάδων, ὁ δὲ πέμπτος χαρακτὴρ σημαίνει ἑπτὰ Δεκάδας χιλιάδων, ὁ δὲ ἕκτος χαρακτὴρ σημαίνει τέσσαρας Ἑκατοντάδας χιλιάδων, ὥστε ὅλη αὕτη ἡ Σειρὰ τῶν χαρακτήρων σημαίνει τετρακοσίας ἑβδομήκοντα ὀκτὼ χιλιάδας πεντακόσια τριάκοντα ἕξ. ἐὰν δὲ ἐν τῇ Σειρᾷ τύχωσιν ἔτι πλείονες τῶν ἓξ χαρακτήρων, τότε ὁ ἐν τῷ ἑβδόμῳ τόπῳ κείμενος χαρακτὴρ ἐμφαίνει Μονάδας τῶν χιλιάκις χιλίων, ἢ (ὡς κοινότερον λέγομεν) Μιλλιονίων, ὁ δὲ ὄγδοος χαρακτὴρ σημαίνει Δεκάδας Μιλλιονίων, ὁ δὲ ἔννατος χαρακτὴρ Ἑκατοντάδας Μιλλιονίων, καὶ ἕως ὧδε λαμβάνει τέλος καὶ ἡ τρίτη Κλάσις, ἥτις ὀνομάζεται Κλάσις τῶν Μιλλιονίων. ὁ δὲ δέκατος χαρακτὴρ φανερώνει Μονάδας χιλιάδος Μιλλιονίων, ὁ δὲ ἑνδέκατος χαρακτὴρ σημαίνει Δεκάδας χιλιάδων Μιλλιονίων, ὁ δὲ δωδέκατος χαρακτὴρ ἐμφαίνει Ἑκατοντάδας χιλιάδων Μιλλιονίων, καὶ ἕως ὧδε συλλαμβάνεται ἡ τετάρτη Κλάσις, ἥτις καλεῖται Κλάσις τῶν χιλιάδων Μιλλιονίων, καὶ οὕτω χωροῦσιν οἱ χαρακτῆρες μέχρι Διλλιονίων, Τριλλιονίων, Τετραλ-

λιονίων,

λιονίων, κ. τ. καθὼς καὶ ἐν τούτῳ τῷ Δειγματικῷ Πινακιδίῳ ἐμφαίνεται.

κλάσ. πρώτη	6	Μονάδες	τῶν ἁπλῶν
	3	Δεκάδες	
	5	Ἑκατοντάδες	
κλ. δεύτ.	8	Μονάδες	τῶν χιλιάδων
	7	Δεκάδες	
	4	Ἑκατοντάδες	
κλ. τρίτη	3	Μονάδες	τῶν Μιλλιονίων
	5	Δεκάδες	
	9	Ἑκατοντάδες	
κλ. τετάρτη	6	Μονάδες	τῶν χιλιάδων τῶν Μιλλιονίων
	4	Δεκάδες	
	8	Ἑκατοντάδες	
κλ. πέμπτη	2	Μονάδες	τῶν Διλλιονίων
	7	Δεκάδες	
	3	Ἑκατοντάδες	
κλάσ. ἕκτη	4	Μονάδες	τῶν χιλιάδων τῶν Διλλιονίων.
	5	Δεκάδες	
	6	Ἑκατοντάδες	

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 11. Ὁ χαρακτὴρ οὗτος 0 καθ' ἑαυτὸν δὲν σημαίνει τινὰ ἀριθμὸν, καὶ διατοῦτο Μηδενικὸν αὐτὸν ὀνομάζουσι. παρατιθέμενος ὅμως εἰς τὰ δεξιὰ τῶν ἄλλων χαρακτήρων, συμβάλλει εἰς τὰς ἀριθμήσεις παραπολὺ, καὶ ὁσάκις μᾶλλον οὗτος προστίθεται,

τοσάκις

πτάκις ἡ Δύναμις, ἢ ἡ Σημασία τῶν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ κειμένων χαρακτήρων αὐξάνει κατὰ τὸ δεκαπλάσιον, π. χ. ὁ χαρακτὴρ ὄντος 1, μόνος κείμενος, σημαίνει ἕν, ἐὰν δὲ προστεθῇ αὐτῷ εἰς τὰ δεξιὰ τὸ Μηδενικὸν 0 ἅπαξ, οἷον 10. λαμβάνει τότε σημασίαν δεκαπλασίως μείζονα τῆς προτέρας, τουτέστι γίνεται σημαντικὸς δέκα Μονάδων. ἐὰν δὲ προστεθῇ πάλιν αὐτῷ τὸ Μηδενικόν, καὶ γένηται 100, τότε ὁ πρώην σημαίνων δέκα, αὐξάνει δεκαπλασίως καὶ Ἰσοδυναμεῖ μὲ ἑκατόν. ἐὰν δὲ εἰς τὸν ἑκατὸν προστεθῇ αὖθις ἓν Μηδενικόν, καὶ γένη 1000, ὁ ἀριθμὸς τότε σημαίνει δεκάκις ἑκατόν, τουτέστι χίλια, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, καθὼς καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου Πινακιδίου γίνεται κατάδηλον.

1. . . . . ἕν
10. . . . . δέκα
100. . . . . ἑκατὸν
1000. . . . . χίλια
10000. . . . . . . δέκα χιλιάδες
100000 . . . . . ἑκατὸν χιλιάδες
1000000. . . . . ἓν Μιλλιόνιον
10000000 . . . . δέκα Μιλλιόνια
100000000. . . . ἑκατὸν Μιλλιόνια. κ. τ.

ΠΟΡΙΣΜΑ ά.

§. 13. Ἐκ τῶν προειρημένων ἄρα γίνεται φανερὸν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ μὲν τῆς Μονάδος μέχρι τῶν ἐννέα ἐμφαίνονται μόνον δι' ἑνὸς τῶν προτεθέντων ἐννέα χαρακτήρων, τουτέστι δι' ἑνὸς τῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. ἀπὸ δὲ τῶν δέκα μέχρι τῶν ἐννενήκοντα ἐννέα ἐμφαίνονται μόνον μὲ δύω χαρακτῆρας, καὶ πρὸς πλείονα κατάληψιν τῶν πρωτοπείρων ἐκθέτομεν αὐτοὺς ὧδε κατὰ τάξιν.

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,
20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29,
30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39,
40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49,
50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59,

60,

60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69,
70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79,
80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89,
90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99.

Ἀπὸ δὲ τῶν ἑκατὸν μέχρι τῶν ἐννεακοσίων ἐννενήκοντα ἐννέα δηλοῦνται μόνον διὰ τριῶν χαρακτήρων, οἷον 100 ἑκατὸν, 101 ἑκατὸν ἕν. 102 ἑκατὸν δύω, κ. τ. ἀπὸ δὲ τῶν χιλίων μέχρι τῶν ἐννέα χιλιάδων ἐννεακοσίων ἐννενήκοντα ἐννέα ἐμφαίνονται μόνον διὰ τεσσάρων χαρακτήρων· οἷον 1000 χίλια, 1001 χίλια ἕν, 1002 χίλια δύω. κ. τ. ἀπὸ δὲ τῶν δέκα χιλιάδων μέχρι τῶν ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδων ἐννεακοσίων ἐννενήκοντα ἐννέα γράφονται μὲ πέντε χαρακτῆρας· οἷον 10000 δέκα χιλιάδες, 10001 δέκα χιλιάδες καὶ ἕν, 10002 δέκα χιλιάδες καὶ δύω. κ. τ. καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον χωροῦσιν οἱ ἀριθμοὶ ἐφεξῆς.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ β΄.

§. 14. Ἕκαστος ἄρα χαρακτὴρ δύναται νὰ λάβῃ ἐκ τῆς κατὰ τόπον θέσεως δεκαπλασίαν αὔξησιν, τουτέστιν ὁ αὐτὸς χαρακτὴρ ἐν τῷ δευτέρῳ τόπῳ ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ τιθέμενος, γίνεται σημαντικὸς τοσούτων Δεκάδων, ὅσας Μονάδας ἐμφαίνει ἐν τῷ πρώτῳ τόπῳ κείμενος, τιθέμενος δὲ ἐν τῷ τρίτῳ τόπῳ, γίνεται σημαντικὸς τοσούτων Ἑκατοντάδων, ὅσας Δεκάδας σημαίνει ἐν τῷ δευτέρῳ τόπῳ ὤν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ΄.

§. 15. Τὰ Ἑκατὸν ἄρα, ἢ ἡ Ἑκατοντὰς εἶναι δεκάκις δέκα Μονάδες· τὰ δὲ χίλια, ἢ ἡ χιλιὰς εἶναι δεκάκις Ἑκατὸν, ἢ ἑκατοντάκις δέκα· τὸ δὲ Μιλλιόνιον εἶναι δεκάκις ἑκατὸν χιλιάδες, ἢ χιλιάκις χίλια. τὸ δὲ Διλλιόνιον εἶναι δεκάκις ἑκατὸν χιλιάδες Μιλλιονίων, ἢ χιλιάκις χίλια Μιλλιόνια. τὸ δὲ Τριλλιόνιον εἶναι δεκάκις ἑκατὸν χιλιάδες Διλλιονίων, ἢ χιλιάκις χίλια Διλλιόνια, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ά.

§. 16. Νά ἀπαγγέλλωμεν, ἢ νά προφέρωμεν ὁποιονδήποτε ἀριθμόν κατά τὴν προταχθεῖσαν τοπικὴν Σημασίαν τῶν χαρακτήρων.

ΠΡΑΚΤΕ'Α.

Α'ν μὲν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ δύω, ἢ τρεῖς χαρακτῆρας μόνον, κ᾽ ἐπομένως σημαίνῃ ἔλαττον χιλιάδος, ἀρχόμεθα εὐθὺς ἀπὸ τοῦ μείζονος χαρακτῆρος, τουτέστιν ἀριστερόθεν, κ᾽ χωροῦμεν ἐπὶ τὰ δεξιὰ, ἐπαριθμοῦντες, κ᾽ ἐκφράζοντες τὴν δύναμιν ἑκάστου χαρακτῆρος κατὰ τὰ προδιδαχθέντα (§. 11.). π. χ. ἐπὶ μὲν τοῦ 28. λέγομεν „ εἴκοσι ὀκτὼ, ἐπὶ δὲ τοῦ 428 λέγομεν „ τετρακόσια εἴκοσι ὀκτὼ. κ. τ.

Ὅτε δὲ τις ἀριθμὸς συνίσταται ἐκ πλειόνων χαρακτήρων, ἀρχόμεθα πρῶτον ἀπὸ τῶν δεξιῶν, κ᾽ διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς (,) χωρίζομεν εἰς Κλάσεις ὅλον τὸν ἀριθμὸν ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας, καθὼς προείρηται (§. 11.), κ᾽ καθὼς κατωτέρω ἐν τοῖς Παραδείγμασιν ὁρᾶται τοῦτο σαφέστερον. ἔπειτα ἐπάνω μὲν τοῦ τετάρτου χαρακτῆρος (ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἄρχεται κ᾽ ἡ δευτέρα Κλάσις, τουτέστιν ἡ Κλάσις τῶν χιλιάδων) γράφομεν πρὸς διάγνωσιν μίαν στιγμὴν, οἷον (.)· ἐπὶ δὲ τοῦ ἑβδόμου χαρακτῆρος (ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἄρχεται ἡ τρίτη Κλάσις, τουτέστιν ἡ Κλάσις τῶν Μιλλιονίων) γράφομεν ἓν Γραμμικὸν Σημεῖον· οἷον (´), ἐπάνω δὲ τοῦ δεκάτου χαρακτῆρος (ἐκ τοῦ ὁποίου ἄρχεται κ᾽ ἡ τετάρτη Κλάσις, τουτέστιν ἡ Κλάσις τῶν χιλλιάδων Μιλλιονίων) θέτομεν αὖθις μίαν στιγμὴν (·) ἐπὶ δὲ τοῦ δεκάτου τρίτου χαρακτῆρος (ἀφ᾽ οὗ ἄρχεται κ᾽ ἡ πέμπτη Κλάσις, τουτέειν ἡ Κλάσις τῶν Διλλιονίων) γράφομεν δύω Γραμμικὰ Σημεῖα (″). ἐπάνω δὲ τοῦ δεκάτου ἕκτου χαρακτῆρος (ἐκ τοῦ ὁποίου ἄρχεται ἡ Κλάσις τῶν χιλιάδων Διλλιονίων) γράφομεν πάλιν μίαν στιγμήν, καὶ οὕτω περαιτέρω ἀκολουθοῦμεν, διακρίνοντες, καὶ διαγινώσκοντες τὰς Κλάσεις διὰ τῆς στιγμῆς, καὶ διὰ τῶν Γραμμικῶν Σημείων, ὥστε ὅπου εἶναι χιλιάδες, ἐπιγράφομεν μίαν στιγμήν, ὅπου δὲ εἶναι Μιλλιόνια, ἐπιγράφομεν μόνον ἓν Γραμμικὸν Σημεῖον, ὅπου δὲ ἐννοοῦνται Διλλιόνια, ἐπιθέτομεν δύω Γραμμικὰ Σημεῖα· ὅπου δὲ εἰσὶν Τριλλιόνια, ἐπιγράφομεν τρία, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, τέλος δὲ ἀριθμοῦμεν τὸν ἀριθμόν, κάμνοντες ἀρχὴν ἀριστερόθεν, τουτέστιν ἀπὸ τοῦ μείζονος χαρακτῆρος, καὶ προφέροντες τὴν δύναμιν ἑκάστου χαρακτῆρος κατὰ τὰ ἐν τῷ (§. 11.) προτεθέντα.

Πρὸς Παράδειγμα ἔστω ὁ ἀριθμὸς 4134685427325. ὅθεν χωρίζομεν πρῶτον εἰς Κλάσεις τοὺς χαρακτῆρας ἀνὰ τρεῖς, καὶ ἐπιγράφομεν ἑκάστῃ Κλάσει τὰ προσήκοντα Σημεῖα· οἷον 4″, 134˙, 685′, 427˙, 325.

Ἔπειτα ἀρξάμενοι ἀπὸ τοῦ μείζονος χαρακτῆρος, τουτέστιν ἀπὸ τοῦ 4″, ἀριθμοῦμεν οὕτως „ τέσσαρα Διλλιόνια, ἑκατὸν τριάκοντα τέσσαρες χιλιάδες, ἑξακόσια ὀγδοήκοντα πέντε Μιλλιόνια, τετρακόσιαι εἴκοσι ἑπτὰ χιλιάδες καὶ τριακόσια εἴκοσι πέντε.

Κατὰ τοὺς Ἰδίους Κανόνας ἀριθμοῦμεν καὶ τοὺς ἀκολούθους ἀριθμούς, οἷον τόν:

8568437659284332794

ὁμοίως καὶ τὸν

74538642794369845.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ ά.

§. 17. Ἡ τελευταία πρὸς τὰ ἀριστερὰ Κλάσις δύναται νὰ περιέχῃ ϗ ἕνα μόνον χαρακτῆρα, ἢ δύω, καθὼς ϗ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ Παραδείγματι ἔτυχε.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 18. Πρέπει ἔτι νὰ προσέχωμεν ϗ τὸ ἑξῆς, ὅτι ἐν τοῖς ἀριθμοῖς τυγχάνουσι πολλάκις μεταξὺ ϗ τινες τόποι κενοὶ χαρακτήρων, τοὺς ὁποίους σημειοῦμεν διὰ τῶν Μηδενικῶν, ϗ ἐν τῇ ἀριθμήσει δὲν τοὺς ἀπαγγέλλομεν· οἷον 307 τριακόσια ἑπτά. 4003 τέσσαρες χιλιάδες ϗ τρία. κ. τ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 19. Γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, καθ' ὃν ἀριθμοῦμεν αὐτοὺς, ἀπαγγέλλοντες τὴν δύναμιν τῶν χαρακτήρων, τουτέστι γράφομεν ἕκαστον ἀριθμὸν, ἀρχόμενοι ἀριστερόθεν ἀπὸ τοῦ μείζονος χαρακτῆρος, ϗ χωροῦντες ἐπὶ τὰ δεξιά. οἷον ἂν ἔχωμεν νὰ γράψωμεν ἕνα ἀριθμὸν, ὅστις σημαίνει, φέρ' εἰπεῖν, δύω Μιλλιόνια, πεντακοσίας ἐννενήκοντα τρεῖς χιλιάδας, ϗ ἑπτακόσια τεσσαράκοντα ὀκτὼ, ἀρχόμεθα ἀπὸ τοῦ χαρακτῆρος 2, ϗ ἐκθέτομεν τοῦτον τὸν ἀριθμὸν οὕτως· 2', 593', 748, κ. τ. Ὅταν δὲ εἰς τινὰ Κλάσιν ἐλλείπῃ ἀριθμός τις Μονάδων, ἢ Δεκάδων, ἢ Ἑκατοντάδων, ἀναπληροῦμεν τότε τὴν ἔλλειψιν μὲ Μηδενικὰ, ὡς ϗ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ Σχολίῳ εἴρηται, οἷον ἂν ἔχωμεν νὰ γράψωμεν ἑκατὸν Μιλλιόνια, τετρακοσίας πέντε χιλιάδας, ϗ ἑπτακόσια δύω, γράφομεν πρῶτον τὴν Κλάσιν τῶν Μιλλιονίων οὕτως 100', ἔπειτα γράφομεν τὴν Κλάσιν τῶν χιλιάδων οὕτως 405, ϗ τελευταῖον γράφομεν τὴν Κλάσιν τῶν Μονάδων οὕτως 702, ὥστε προκύπτει οὗτος ὁ ἀριθμὸς 100', 405", 702. κ. τ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ δ'.

§. 20. Ἡ μετ' ἀλλήλων ἕνωσις τῶν Μονάδων, ἢ ἀριθμῶν ἀποτελεῖται κατὰ δύω τρόπους, τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος ὀνομάζεται Σύ-

ναψις,

ναψις, ὁ δεύτερος λέγεται Πολλαπλασιασμὸς, καθὼς δὴ ϗ ἡ ἀπ' ἀλλήλων διαχώρισις αὐτῶν γίνεται κατ' ἄλλους δύω τρόπους, τῶν ὁποίων ὁ μὲν πρῶτος ὀνομάζεται Ἀφαίρεσις, ὁ δὲ δεύτερος καλεῖται Διαίρεσις. ὥστε οἱ ἀριθμοὶ ὑπόκεινται εἰς τέσσαρα εἴδη Ἐργασίας, ἢ Πράξεως, τὰ ὁποῖα ϗ Πάθη ὀνομάζουσι τινὲς τῶν περὶ τὰς ἀριθμητικὰς πραγματείας ἐνασχολουμένων, περὶ ἑκάστου τούτων ἀρχόμεθα ἤδη ϗ ἡμεῖς νὰ πραγματευθῶμεν πλατύτερον, ϗ νὰ δώσωμεν ἰδίους Κανόνας.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ β'.

Περὶ τῶν ἀριθμητικῶν Πράξεων, ἢ λογισμῶν.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ α'.

§. 21. Σύναψις, ἢ Πρόσθεσις ἐστιν ἕνωσις δύω, ἢ πλειόνων ἀριθμῶν εἰς ἓν ὅλον ἴσον τοῖς συναπτομένοις.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ β'.

§. 22. Οἱ συναπτόμενοι ἀριθμοὶ ὀνομάζονται Συναπτέοι, ἢ Προσθετέοι· ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς Συνάψεως τούτων, καλεῖται Συμποσούμενον, ἢ Κεφάλαιον, ἢ Ἄθροισμα.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ά.

§. 23. Νὰ συνάπτωμεν τὲς διδομένες ἀριθμές.

ΠΡΑΚΤΕ'Α ἡ ΛΥ'ΣΙΣ.

Καν. ά.) Γράφομεν τὲς δοθέντας ἀριθμὲς σιχηδὸν ὕτως, ὥσε οἱ μὲν τῶν Μονάδων Σημαντικοὶ χαρακτῆρες νὰ εἶναι ὑπὸ τὲς χαρακτῆρας τῶν Μονάδων, οἱ δὲ τῶν Δεκάδων ὡσαύτως ὑπὸ τὲς χαρακτῆρας τῶν Δεκάδων, οἱ δὲ τῶν Ἑκατοντάδων ὑπὸ τὲς Ἑκατοντάδων χαρακτῆρας, κ) ὕτως ἐφεξῆς.

Καν. β'.) Ἄγομεν ὑποκάτω αὐτῶν μίαν ἐυθεῖαν Γραμμήν, διὰ νὰ γράφωμεν τὸ Συμποσέμενον ὑπ' αὐτὴν ἄνευ συγχύσεως.

Καν. γ'.) Ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς πρώτης σήλης, τῶν Μονάδων, ἀθροίζομεν ὁμὲ τὲς χαρατῆρας αὐτῶν, κ) ἂν μὲν τὸ ἐκ τῶν Μονάδων ἀθροισθὲν δύναται νὰ ἐκτεθῆ δι ἑνὸς μόνε χαρακτῆρ☉, τὅπέσιν ἂν τὸ ἀθροιζόμενον εἶναι ἔλαττον τῶν δέκα, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν σήλην τῶν Μονάδων κάτωθεν τῆς Γραμμῆς. ὅτε ὅμως εἶναι μεῖζον τὲ δέκα, κ) ἑπομένως πρέπει νὰ ἐκτεθῆ μὲ δύω, ἢ κ) μὲ πλείονας χαρακτῆρας, τότε ὑπὸ τὴν σήλην τῶν Μονάδων γράφομεν μόνον τὸ ὑπερεκπίπτον τῶν Δεκάδων, λεγῶ τὸν χαρακτῆρα τὸν σημαίνοντα μόνον ἁπλᾶς Μονάδας, τὸ δὲ λοιπὸν, τὸ ὁποῖον ἐσαι Δεκάδων σημαντικὸν, μεταφέρομεν εἰς τὴν δευτέραν σήλην, ὅπε εἰσὶν γεγραμμένοι οἱ χαρακτῆρες οἱ τῶν Δεκάδων σημαντικοὶ, κ) τότε ἀθροίζομεν αὐτὸ μετὰ τέτων, κ) ἂν τὸ ἐκ τῶν Δεκάδων ἀθροισθὲν δύναται νὰ ἐκδηλωθῆ δι ἑνὸς μόνε

χα-

χαρακτῆρ⊛, γράφομεν αὐτὸ ὡσαύτως ὑπὸ τὴν σήλην τῶν Δεκάδων· ὅταν ὅμως ἄλλως ἔχῃ, τότε γράφομεν ὑπὸ τὴν σήλην τῶν Δεκάδων μόνον τὸν χαρακτῆρα τὸν σημαίνοντα τὸ ὑπερεκπίπτον, τὸν δὲ χαρακτῆρα τὸν σημαντικὸν τȣ̃ λοιπȣ̃, ἐπειδὴ ἐπέχει τόπον Ἑκατοντάδων, μεταφέρομεν εἰς τὴν τρίτην σήλην, ὅπȣ εἰσὶν γεγραμμένοι οἱ χαρακτῆρες τῶν Ἑκατοντάδων, ϗ συνάπτομεν αὐτὸν μετὰ τȣ́των κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὁ ὁποῖ⊛ ϗ περὶ τῶν Μονάδων, ϗ Δεκάδων εἴρηται, ȣ̃τω δὲ ποιȣ̃μεν ϗ περὶ τῶν χιλιάδων, ϗ περὶ τῶν ἑξῆς. καθὼς ϗ ἐν τοῖς ἑπομένοις Παραδείγμασι καθορᾶται ὁ τρόπ⊛ σαφέστατα.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ ά.

Ἔςωσαν συναπτέοι ȣ̃τοι οἱ ἀριθμοὶ 242, 2423, 1214. ὅθεν ποιȣ̃μεν

242	4, 3, ϗ 2 εἰσὶν 9 Μονάδες.	1 δέ
2423	ϗ 2, ϗ 4 εἰσὶν 7 Δεκάδες.	2 δέ
1214	ϗ 4, ϗ 2 εἰσὶν 8 Ἑκατοντάδες.	1 δέ
———	ϗ 2, εἰσὶν μόνον 3 χιλιάδες.	
3879	τὸ Συμποσȣ́μενον, ἢ τὸ Κεφάλαιον.	

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ β́.

Ἔςωσαν Συναπτέοι ȣ̃τοι οἱ ἀριθμοὶ 3564, 4878, 7345, ϗ 8596. ὅθεν

3564 4878 7345 8596 ——— 24383	6 ϗ 5 γίνονται 11, ϗ 8 σὺν αὐτοῖς, γίνονται 19 ϗ 4 γίνονται 23. ἀλλ' ἐπειδὴ ȣ̃τος ὁ 23 σύγκειται ἐκ δύω χαρακτήρων, τῶν ὁποίων ὁ μὲν 3 σημαίνει ἐνταῦθα Τρεῖς Μονάδας, ὁ δὲ 2 εἶναι δύω Δεκάδων σημαντικός, διὰ τȣ̃το τὸν μὲν 3 γράφομεν μόνον ὑπὸ τὴν σήλην τῶν Μονάδων, τὸν δὲ 2 ἀριθμȣ̃μεν εἰς τὴν τάξιν τῶν Δεκάδων,

 ὥςε

ὥστε 2 ἢ 9, ϰ 4, ἢ 7, ϰ 6 ὁμοῦ ἀθροισθέντα παρέχουσιν 28. ἀλλ' ἐπειδὴ ϰ οὗτος ὁ 28 σύγκειται ἐκ δύω χαρακτήρων, τῶν ὁποίων ὁ μὲν 8 σημαίνει ὀκτὼ Δεκάδας, ὁ δὲ 2 ἐμφαίνει δύω Ἑκατοντάδας, διά τοι τοῦτο μόνον τὸν 8 γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Δεκάδων, τὸν δὲ 2 ἀριθμοῦμεν μὲ τοὺς χαρακτῆρας τοὺς Ἑκατοντάδων Σημαντικούς· ὥστε 2 ϰ 5 ϰ 3 ϰ 8 ϰ 5 ὁμοῦ ληφθέντες ποιοῦσιν 23. ὅθεν διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸν μὲν 3 γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Ἑκατοντάδων, τὸν δὲ 2, ἐπειδὴ ἐπέχει τόπον χιλιάδων, ἀριθμοῦμεν μετὰ τῶν χιλιάδων κ. τ. ὥστε ὅλον τὸ συμποσούμενον εἶναι 24383.

Α'ΠΟ'ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ Σύναψις εἶναι μία ἕνωσις, ἡ Συνάθροισις πολλῶν ἀριθμῶν εἰς ἓν ὅλον Ἴσον τοῖς δοθεῖσιν (§. 21.). ἀλλὰ μὴν ἐνταῦθα ἡ Σύναψις τῶν Μονάδων, Δεκάδων, Ἑκατοντάδων κ. τ. γέγονε κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἔστι δὲ ϰ τὸ εὑρεθὲν συμποσούμενον Ἴσον μὲ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. τὸ πραχθὲν ἄρα γέγονε κατὰ τὸ δέον.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ α'.

§. 24. Ὅταν τύχωσι πολλαὶ αἱ Σειραὶ τῶν συναπτέων ἀριθμῶν, ϰ θέλη τις νὰ συνάψη αὐτοὺς μερικώτερον ϰ εὐκολώτερον ἄνευ συγχύσεως, ἀθροίζει πρῶτον τὰς Σειρὰς ἀνὰ τέσσαρας, ἢ ἀνὰ πέντε, κατὰ τὸν ἐν τῷ Προβλήματι (§. 23.) προτεθέντα τρίτον Κανόνα, ϰ τὰ ἐκ τούτων μερικὰ Συμποσούμενα καταγράφει ἐπὶ τὰ δεξιὰ στοιχηδὸν, ἔπειτα ἀθροίζει αὐτὰ εἰς ἓν γενικώτερον Κεφάλαιον, ὡς ἐν τῷ ἀκολούθῳ καθορᾶται Παραδείγματι

29	
57	
118	
49	
.....	253
79	
88	
109	
58	
.....	334
28	
99	
19	
59	
.....	205

τὰ μερικὰ Συμποσούμενα

792 τὸ ἐξ αὐτῶν Συμποσούμενον, ἢ Κεφάλαιον.

ΣΧΟΛΙΟΝ β.

§. 25. Ὅταν οἱ χαρακτῆρες οἱ τῶν Μονάδων Σημαντικοὶ ἀθροισθέντες ὁμοῦ, ποιῶσι τὸν 10, ἢ 20, ἢ 30, ἢ ἄλλον τοιοῦτον ἀριθμὸν, τότε γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Μονάδων μόνον τὸ Μηδενικὸν 0, τὸν δὲ λοιπὸν χαρακτῆρα ὡς Δεκάδων Σημαντικὸν ἀριθμοῦμεν μετὰ τῶν χαρακτήρων τῶν Δεκάδων, καὶ αὐτὸ τοῦτο ποιοῦμεν καὶ περὶ τῶν λοιπῶν, ὡς

38542
19653
96475
15670

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ γ΄.

§. 26. Ὅταν δὲ ἀθροίζοντες, ἀπαντῶμεν μεταξύ τινος στήλης Μηδενικά, δὲν ἀριθμοῦμεν αὐτά· ἐπειδὴ τὸ Μηδενικὸν ὡς καὶ προείρηται, δὲν σημαίνει τινὰ ἀριθμόν. ὅταν ἔτι ἐντύχωμεν τινὰ στήλην ἔχουσαν μόνον τοιαῦτα Μηδενικά, γράφομεν ὑπὸ τὴν Γραμμὴν τότε πάλιν Μηδενικόν, ἂν ὅμως ἔχωμεν ἐκ τῆς προτέρας στήλης τινὰ χαρακτῆρα, ὅπερ πολλάκις συμβαίνει, ἐν τῇ αὐτῇ προσθέσει, ἀντὶ τοῦ Μηδενικοῦ γράφομεν αὐτὸν τὸν χαρακτῆρα ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Μηδενικῶν, ὡς

$$\begin{array}{r} 30706 \\ 40502 \\ 10300 \\ \hline 81508 \end{array}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ δ΄.

§. 27. Πολλάκις ἐξ ἀπροσεξίας καὶ παραδρομῆς συμβαίνει νὰ πράττωμεν ἐσφαλμένως τὰς πράξεις. διὰ τοῦτο ἐπενοήθη καὶ Μέθοδος, τὴν ὁποίαν Βάσανον, ἢ Δοκιμὴν ὀνομάζουσιν, ὅτι διὰ ταύτης δύναταί τις νὰ πληροφορηθῇ, ἂν αἱ πράξεις ὦσιν ὀρθῶς καὶ κατὰ τὸ δέον τετελεσμέναι; μεταχειρίζονται δὲ τὴν κατὰ Σύναψιν Βάσανον πολλαχῶς· καὶ ἄλλοι μὲν τελοῦσι τὴν Βάσανον τῆς Συνάψεως διὰ τῆς κατ' ἀφαίρεσιν πράξεως, καθὼς δὴ καὶ τὴν τῆς ἀφαιρέσεως Βάσανον ποιοῦσι διὰ τῆς κατὰ Σύναψιν πράξεως, ἄλλοι δὲ πάλιν κοινότερον βασανίζουσι τὰ τῆς Συνάψεως διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 9 ἀριθμοῦ, ἐκ τοῦ ὁποίου δύναται νὰ συμβῇ καὶ ἀπάτη ποτέ. γίνεται ὅμως ἡ Βάσανος πλέον ὑγιὴς, καὶ βεβαία, ὅταν ἐπαναλαμβάνωμεν πάλιν τὴν πρᾶξιν τῆς ἀθροίσεως τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, ἄνωθεν ἐπὶ τὰ κάτω ἀριθμοῦντες, καὶ προκύψῃ τὸ αὐτὸ αὖθις Κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον καὶ πρότερον προέκυψε·

ΣΧΟΛΙΟΝ ι'.

§. 28. Ὁ λόγος ἕως ὧδε περὶ τῶν Ὁμοειδῶν μόνον ἐγένετο· περὶ δὲ τῆς προσαθροίσεως τῶν ἑτεροειδῶν θέλομεν ὁμιλήσει μετὰ μικρὸν ὕστερον, ὅτι καὶ περὶ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις ἔχομεν ἐντελέστερον.

ΟΡΙΣΜΟΣ γ'.

§. 29. Ἀφαίρεσις καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μεταξὺ δύω ἀριθμῶν εὑρίσκεται ἕτερος ἀριθμὸς δεικνύων τὴν ὑπεροχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ μείζων ἀριθμὸς ὑπερέχει τοῦ ἐλάττονος. τούτων ὁ μὲν μείζων καλεῖται ἀριθμὸς ἐλαττούμενος, ἢ ἐλαττωτέος, ὁ δὲ ἐλάττων λέγεται ἀφαιρούμενος, ἢ ἀφαιρετέος, ἡ δὲ μεταξὺ τούτων θεωρουμένη ὑπεροχὴ καλεῖται Διαφορά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β'.

§. 30. Νὰ ἀφαιρῶμέν τινα ἐλάσσονα ἀριθμὸν ἀφ' ἑτέρου τινὸς μείζονος.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

α'.) Γράφομεν τὸν ἐλάττονα ὑποκάτω τοῦ μείζονος οὕτως, ὥστε αἱ μὲν Μονάδες νὰ ὑπάρχωσιν ὑπὸ τὰς Μονάδας, αἱ δὲ Δεκάδες ὑπὸ τὰς Δεκάδας, καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ θέτομεν τοὺς χαρακτῆρας κατὰ τὴν περὶ Συνάψεως εἰρημένην τάξιν.

β'.) Ἀρχόμενοι ἐκ τῶν δεξιῶν, ἀφαιροῦμεν τὰς Μονάδας τοῦ ἐλάττονος ἀπὸ τῶν Μονάδων τοῦ μείζονος

τὴν

τὴν δὲ τούτων Διαφορὰν γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Μονάδων ὑποκάτω τῆς Γραμμῆς. ἀφαιροῦμεν ὡσαύτως τὰς Δεκάδας ἀπὸ τῶν Δεκάδων, καὶ τὰς Ἑκατοντάδας ἀπὸ τῶν ἑκατοντάδων καὶ ἐφεξῆς, γράφοντες τὰ ἐναπολειπόμενα καταλλήλως, καθὼς κατωτέρω ἐν τῷ α΄. Παραδείγματι. Ὅταν δὲ τις χαρακτὴρ τοῦ κατωτέρου ἀριθμοῦ εἶναι Ἰσοδύναμος μὲ ἕτερον (κείμενον ὅμως ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ) χαρακτῆρα τοῦ ἀνωτέρου, τότε ἡ τούτων Διαφορὰ εἶναι Ἴση μὲ 0, τουτέστι μηδὲν, ὅθεν ἐν τῇ ἀφαιρέσει γράφομεν ὑπὸ τὴν Γραμμὴν ἓν Μηδενικὸν, καθὼς καὶ κατωτέρω ἐν τῷ β΄. Παραδείγματι δείκνυται. Ὅταν δὲ πάλιν τύχῃ ὁ χαρακτὴρ τοῦ κατωτέρου νὰ εἶναι μείζων τοῦ χαρακτῆρος τοῦ ἀνωτέρου, λαμβάνομεν τότε κατ' ἐπίνοιαν μίαν Μονάδα ἀπὸ τὸν χαρακτῆρα τὸν ἐγγὺς τούτου τοῦ ἐλάττονος, καὶ ὡς Δεκάδα αὐτὴν λογιζόμενοι, τὴν προστίθεμεν δυνάμει εἰς τοῦτον τὸν ἐλάσσονα χαρακτῆρα, καὶ οὕτως ἀπ' αὐτοῦ τοῦ προσαυξηθέντος χαρακτῆρος ποιοῦμεν τὴν προσήκουσαν ἀφαίρεσιν τοῦ κατωτέρω χαρακτῆρος· ἐπ' ἐκείνου δὲ τοῦ χαρακτῆρος, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλήφθη ἡ Μονὰς, γράφομεν μίαν στιγμὴν πρὸς διάκρισιν, ὅτι οὗτος ὁ χαρακτὴρ ἠλαττώθη κατὰ μίαν Μονάδα, καθὼς καὶ κατωτέρω ἐν τῷ γ΄. Παραδείγματι ταύτην τὴν ἀφαίρεσιν ἐκτίθεμεν· Ὅταν δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω καὶ ἐπὶ τῆς κατωτέρω Σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν τύχωσιν ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ μόνον Μηδενικὰ, γράφομεν τότε ὑπὸ τὴν Γραμμὴν ὡς Διαφορὰν πάλιν Μηδενικὸν. Ὅταν δὲ πάλιν ὁ μὲν ἀνωτέρω χαρακτὴρ εἶναι Σημαντικὸς ἀριθμοῦ, ὁ δὲ κατωτέρω εἶναι Μηδενικὸν, γράφομεν τότε ὑποκάτω τῆς Γραμμῆς Διαφορὰν αὐτὸν τὸν ἀνωτέρω χαρακτῆρα, ὡς ἐν τῷ δ΄. Παραδείγματι. Ὅταν δὲ τύχῃ τοὐναντίον, τουτέστιν ὁ μὲν

ἀνωἀνώτερω χαρακτὴρ νὰ εἶναι Μηδενικὸν, ὁ δὲ κατώτερω νὰ εἶναι Σημαντικὸς ἀριθμὸς, πρῶτον προσαυξάνομεν δυνάμει τὸ Μηδενικὸν, λαμβάνοντες μίαν Μονάδα ἐκ τοῦ χαρακτῆρος, ὅστις κεῖται πλησίον τούτου τοῦ Μηδενικοῦ, καθὼς ϗ πρὸ ὀλίγου πρότερον εἴρηται. ἂν ὅμως τύχῃ ϗ οὗτος ὁ πλησίον χαρακτὴρ νὰ εἶναι Μηδενικὸν, λαμβάνομεν τότε μίαν Μονάδα ἀπὸ τοῦ πορρωτέρω κειμένου χαρακτῆρος, ϗ τὴν προσθέτομεν Δυνάμει εἰς τὸ πρῶτον Μηδενικὸν, ϗ ἔπειτα ποιοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν· ἀλλὰ πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι τότε τὸ δεύτερον, ϗ τρίτον Μηδενικὸν (ἂν τύχωσι δηλονότι) δύναται ἕκαστον ἴσον μὲ 9, μὲ ἐννέα ὅμως Ἑκατοντάδας, ἢ χιλιάδας, ϗ ἐν ἑνὶ λόγω κατὰ τὴν τοπικὴν ἑκάστου Δύναμιν. ἐπάνω δὲ τοῦ χαρακτῆρος, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐλήφθη ἡ Μονάς, γράφομεν μίαν στιγμὴν, διὰ νὰ γνωρίζηται, ὅτι ἠλαττώθη οὗτος μίαν Μονάδα, Μονάδα ὅμως σημαντικὴν κατὰ τὸν τόπον, εἰς τὸν ὁποῖον αὐτὸς ὁ χαρακτὴρ τυγχάνει τεθειμένος· διὰ τοῦ α. Παραδείγματος γίνεται καταφανὲς τὸ λεγόμενον.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ α'.

ὁ ἐλαττωτέος	6795	„ 4 ἀφαιρεθέντων ἀπὸ τῶν 5, μένει 1 Μονάς.
ὁ ἀφαιρετέος	1324	„ 2 ἀφαιρ. ἀπὸ τῶν 9, μένουσι 7 Δεκάδες.
	———	„ 3 ἀφαιρ. ἀπὸ τῶν 7, μένουσι 4 Ἑκατοντάδες.
ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς, ὅστις ϗ Διαφορὰ καλεῖται.	5471.	„ 1 ἀφαιρ. ἀπὸ τῶν 6, μένουσι 5 χιλιάδες.

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ β'.

ὁ ἐλατ. 4685 „ 5 ἀφαιρεθέντων ἀπὸ τῶν 5, μένει 0.
ὁ ἀφαιρ. 1675 „ 7 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῶν 8, μένει 1 Δεκάς.
——— „ 6 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῶν 6, μένει 0.
ἡ Διαφορά 3010 „ 1 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῶν 4, μένουσι 3 χιλιάδες.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ γ'.

ὁ ἐλατ. 35421 „ 1 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῆς 1, μένει 0.
ὁ ἀφαιρ. 25761 „ 6 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῶν 12, μένουσι 6 Δεκάδ.
———— 7 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῶν 13, μένουσι 6 Ἑκατοντ.
ἡ Διαφ. 9660 „ 5 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῶν 14, μένουσι 9 χιλιάδ.
„ 2 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῶν 2, μένει Μηδενικόν, 0.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ δ'.

6840
3500
————
3340

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ ἑ.

90000 „ 0 ἀπὸ 0, μένει 0.
2340 „ 4 ἀπὸ 10, μένουσι 6 Δεκάδες.
———— „ 3 ἀπὸ 9, μένουσι 6 Ἑκατοντάδες.
87660 „ 2 ἀπὸ 9, μένουσι 7 χιλιάδες.
„ Μηδὲν ἀπὸ 8, μένουσι 8 Δεκάδ. χιλιαδ.

ΛΕΞΙΣ.

Τὸ σκοπούμενον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι ἡ εὕρεσις ἑνὸς τρίτου ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος ἐμφαίνει τὴν Διαφορὰν μεταξὺ

δύω

δύω δοθέντων ἀριθμῶν. ἀλλὰ μὴν ἕκαστος τῶν ἐν τοῖς ἀνωτέρω Παραδείγμασιν εὑρεθέντων ἀριθμῶν δεικνύει ἀληθῶς τὴν Διαφορὰν, καθ' ἣν διαφέρει ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου. γέγονεν ἄρα ἡ πρᾶξις ὀρθῶς καὶ κατὰ τοὺς προσήκοντας Κανόνας.

ΣΧΟΛΙΟΝ ά.

§. 31. Ἡ κατὰ ἀφαίρεσιν βάσανος γίνεται διὰ τῆς Συνάψεως, συνάπτεται δηλαδὴ ἡ εὑρισκομένη Διαφορὰ μετὰ τοῦ ἐλάττονος ἀριθμοῦ, τὸ δὲ ἐκ τῆς Συνάψεως Συμποσούμενον ἐστὶ Ἴσον μὲ τὸν μείζονα ἀριθμὸν, ὅταν ἡ ἀφαίρεσις ὑπάρχῃ πεπλεσμένη ὀρθῶς. καὶ ἂς βασανίσωμεν τὰ τοῦ πρώτου Παραδείγματος

συνάπτονται 1324 ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς
5471 ἡ εὑρεθεῖσα Διαφορά

6795 τὸ ἐξ αὐτῶν Συμποσούμενον, τὸ ὁποῖον εἶναι Ἴσον μὲ τὸν μείζονα ἀριθμόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ πρὸς ΓΥΜΝΑΣΙΝ.

ά.) Ἐδανείσθη τις πραγματευτὴς ἄλλου Γρόσια, φέρ' εἰπεῖν, 1795, ἐκ τῶν ὁποίων ἀπέδωκεν εἰς ἐκεῖνον μόνον Γρόσια 1741. Πόσα ἄραγε μένει χρεώστης ἔτι;

β'.) Ἔχων τις 51985, ἐδαπάνησεν ἐξ αὐτῶν τὰ 34060. Πόσα ἄραγε ἔχει ἔτι λοιπά;

γ'.) Συνίσατο πρὸ τῆς μάχης ἓν σῶμα Στρατιωτῶν ἀπὸ 51094, εἰς τὴν μάχην ὅμως ἐξ αὐτῶν ἐφονεύθησαν 3004. γίνεται λοιπὸν ἐρώτησις, πόσοι Στρατιῶται ἔμειναν ἔτι;

ὉΡΙΣΜΌΣ δ'.

§. 32. Πολλαπλασίασις, ἢ Πολλαπλασιασμὸς ὀνομάζεται ἡ Πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας

Πολ-

πολλαπλασιασθέντων δύω ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τις τρίτος, ὅστις περιέχει τὸν ἕνα τούτων τοσάκις, ὁσάκις περιέχεται ἡ Μονὰς εἰς τὸν ἕτερον.

ΟΡΙΣΜΟΣ ί.

§. 33. Τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ πρῶτος ὀνομάζεται Πολλαπλασιαζόμενος, ἢ Πολλαπλασιαστέος, ὁ δὲ δεύτερος καλεῖται Πολλαπλασιάζων, ἢ Πολλαπλασιαστής, ἀμφότεροι δὲ λέγονται Παράγοντες· ὁ δὲ ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως αὐτῶν προκύπτων ἀριθμὸς καλεῖται Παραγόμενον, ἢ Γινόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 34. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἕπεται, ὅτι ἕκαστος Πολλαπλασιαζόμενος δύναται νὰ ληφθῇ ὡς Πολλαπλασιάζων, καὶ οὕτως καθὲ Πολλαπλασιάζων δύναται νὰ εἶναι Πολλαπλασιαζόμενος· ἐπειδὴ εἴτε τὸ 3 λάβωμεν τετράκις, εἴτε τὸ 4 λάβωμεν τρὶς, Παραγόμενον προκύπτει τὸ αὐτὸ ὁ 12. Ὅταν δὲ ὁ εἷς τῶν Παραγόντων ὑπάρχῃ Μονάς, τότε ὁ ἄλλος Παράγων λαμβάνεται ἅπαξ, τουτέστι γράφεται, καθὼς εἶναι, διὰ τοῦτο καὶ λέγεται, ὅτι ἡ Μονὰς δὲν πολλαπλασιάζει.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 35. Διὰ νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως ὁπωσοῦν εὐκολώτερον, προθέτομεν τὸν ἀκόλουθον Πυθαγορικὸν Πίνακα, εἰς τὸν ὁποῖον εὑρίσκονται τὰ Παραγόμενα τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς Μονάδος μέχρι τῶν ἐννέα πρὸς ἀλλήλους πολλαπλασιαζομένων, καὶ εἶναι λίαν ἐπωφελὲς νὰ ἔχωμεν αὐτὸν πάντοτε διὰ μνήμης.

ΠΥΘΑ-

ΠΥΘΑΓΌΡΕΙΟΣ ΠΊΝΑΞ.

α΄ β΄

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

γ΄

Εἰς μὲν τὰς δύω πλευρὰς α΄β΄ ϗ α΄γ΄ εὑρίσκονται γεγραμμένοι οἱ χαρακτῆρες, οἱ ἀπὸ τῆς μονάδος ἕως τῶν ἐννέα, ϗ ἤτοι εἰσὶν οἱ Παράγοντες· τὸ δὲ Παραγόμενον δύω Παραγόντων εὑρίσκεται ἐν ἐκείνῳ τῷ τετραγώνῳ, ὅπε συνέρχονται οἱ δύω ἤτοι Παράγοντες, ὁ Πολλαπλασιάζων δηλονότι ϗ ὁ Πολλαπλασιαζόμενος. οἷον τὸ Παραγόμενον τῶν 2, ϗ 3 (Παραγόντων) εἶναι ὁ 6, τὸ δὲ Παραγόμενον τῶν 3, ϗ 3 (Παραγόντων) εἶναι ὁ 9. τὸ δὲ Παραγόμενον τῶν 4 ϗ 5 Παραγόντων εἶναι ὁ 20. κ. τ.

ΠΡΌΒΛΗΜΑ γ΄

§. 36. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν πρὸς ἀλλήλους τοὺς διδομένους ἀριθμούς.

ΠΡΑΚΤΈΑ, ἢ ΛΎΣΙΣ.

Καν. α'.) Γράφομεν τὸν μικρότερον Παράγοντα ὑποκάτω τοῦ μείζονος οὕτως, ὥστε αἱ Μονάδες τοῦ ἑνὸς νὰ ὑπάρχωσιν ὑπὸ τὰς Μονάδας τοῦ ἑτέρου, αἱ δὲ Δεκάδες ὑπὸ τὰς Δεκάδας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Καν. β'.) Ὑποκάτω τῶν Παραγόντων φέρομεν μίαν Γραμμήν.

Καν. γ'.) Κάθε χαρακτῆρα τοῦ μείζονος Παράγοντος, τουτέστι τοῦ Πολλαπλασιαζομένου, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον μετὰ μόνου τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τοῦ μικροτέρου Παράγοντος, τουτέστι τοῦ Πολλαπλασιάζοντος, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν, καὶ προχωροῦντες ἐπὶ τὰ ἀριστερά· τὰ δὲ ἐκ τούτων Παραγόμενα γράφομεν ὑπὸ τὴν Γραμμὴν οὕτως, ὥστε τὸ μὲν Γινόμενον τῶν Μονάδων νὰ εἶναι ὑποκάτω τῆς στήλης τῶν Μονάδων, τὸ δὲ Γινόμενον τῶν Δεκάδων νὰ ὑπάρχῃ ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Δεκάδων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, καθὼς καὶ ἐν τῷ πρώτῳ Παραδείγματι καθορᾶται πραγματικώτερον. ἐνταῦθα ὅμως πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν ὅτι ὅταν τὸ μερικώτερον Γινόμενόν τινος χαρακτῆρος ὑπερέχῃ τοῦ 10, καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ ἐκτεθῇ μὲ δύω χαρακτῆρας, γράφομεν τότε ὑπὸ τὴν Γραμμὴν ἐν τῷ προσήκοντι τόπῳ μόνον τὸν πρῶτον χαρακτῆρα, λέγω τὸν Σημαντικὸν τῶν Μονάδων, τὸν δὲ δεύτερον χαρακτῆρα συνάπτομεν μετὰ τοῦ Παραγομένου τοῦ ἀκολούθου χαρακτῆρος, καὶ αὐτὸν τὸν τρόπον μεταχειριζόμεθα, ὁσάκις ἂν ταύτην τὴν περίστασιν ἀπαντήσωμεν, καθὼς καὶ κατωτέρω ἐν τῷ δευτέρῳ Παραδείγματι παρατίθεμεν αὐτὴν τὴν περίστασιν. ἂς οὖν λοιπὸν πληρώσωμεν ταύτην τὴν πρώτην

Πολ-

Πολλαπλασίασιν κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον, μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὴν δευτέραν, τουτέστιν ἂν ὁ Πολλαπλασιάζων ἀριθμὸς ὑπάρχῃ συγκείμενος ἐκ δύω, ἢ πλειόνων χαρακτήρων, πολλαπλασιάζομεν πάλιν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἅπαντας τοὺς χαρακτῆρας τοῦ Πολλαπλασιαζομένου μετὰ μόνου τοῦ δευτέρου χαρακτῆρος τοῦ Πολλαπλασιάζοντος, λέγω μετὰ τοῦ ἐν τῇ στήλῃ τῶν Δεκάδων κειμένου χαρακτῆρος, τὸ δὲ ἐκ τούτων Παραγόμενον ἐκθέτομεν ὑποκάτω τοῦ ἐκ τῆς πρώτης Πολλαπλασιάσεως Παραγομένου. ἡ ἀρχὴ ὅμως τῆς ἐκθέσεως αὐτοῦ τοῦ δευτέρου Γινομένου γίνεται τότε ἀπὸ τῆς δευτέρας στήλης, εἰς τὴν ὁποίαν ἵσταται καὶ αὐτὸς ὁ Πολλαπλασιάζων χαρακτήρ. κατ᾽ αὐτὴν δὲ τὴν τάξιν ἀποτελοῦμεν καὶ τὴν τρίτην, καὶ τετάρτην, καὶ πέμπτην, ἂν τύχῃ, Πολλαπλασίασιν, καθὼς καὶ κατωτέρω ἐν τῷ τρίτῳ Παραδείγματι γίνεται σαφέστερος οὗτος ὁ τρόπος τῆς Πολλαπλασιάσεως.

δʹ.) Συνάπτομεν ὁμοῦ πάντα ταῦτα τὰ μερικὰ Παραγόμενα κατὰ τοὺς Κανόνας τῆς Συνάψεως, καὶ οὕτως ἀπαρτίζεται ἓν γενικώτερον Παραγόμενον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. αʹ.

1342 ὁ Πολλαπλασιαζόμενος, ἢ ὁ μείζων Παράγων.
2 ὁ Πολλαπλασιάζων, ἢ ὁ ἐλάττων Παράγων

2684 τὸ ἐξ αὐτῶν Παραγόμενον, ἢ Γινόμενον. Ποιοῦμεν τὴν Πολλαπλασίασιν λέγοντες οὕτως „ ὁ 2 ληφθεὶς δὶς, παρέχει 4 Μονάδας. ὁ 4 ληφθεὶς δὶς, ποιεῖ 8 Δεκάδας. ὁ 3 ληφθεὶς δὶς, παράγει 6 Ἑκατοντάδας. ὁ 1 ληφθεὶς δὶς. ποιεῖ αὖθις 2 χιλιάδας. ὥστε ὅλον τὸ Παραγόμενον εἶναι 2684.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β'.

986	ὁ Πολλαπλασιαζόμενος.
3	ὁ Πολλαπλασιάζων.
2958	τὸ ἐξ αὐτῶν Παραγόμενον.

Πολλαπλασιάζοντες, δυνάμεθα νὰ λέγωμεν καὶ οὕτω κοινότερα, ,, 3 φοραῖς 6 ἴσον 18, ὅθεν τὸν μὲν 8 γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Μονάδων, τὸν δὲ 1, ὅστις εἶναι Σημαντικὸς μιᾶς Δεκάδος, συνάπτομεν μετὰ τοῦ προσεχοῦς Παραγομένου, λέγοντες οὕτω ,, 3 φοραῖς 8 ἴσον 24, καὶ ἕν, τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἐκ τῆς προτέρας στήλης, γίνεται ἴσον 25. ὅθεν τὸν 5 γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Δεκάδων, τὸν δὲ 2, ὅστις εἶναι Σημαντικὸς δύω Ἑκατοντάδων, συνάπτομεν μετὰ τοῦ ἑξῆς Παραγομένου, λέγοντες οὕτως ,, 3 φοραῖς 9 ἴσον 27, καὶ 2 πρότερον, ἴσον 29.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ'.

53684	ὁ Πολλαπλασιαζόμενος.
325	ὁ Πολλαπλασιάζων.
268420	τὸ ἐκ τῆς πρώτης Πολλαπλασιάσεως Παραγ.
107368	τὸ ἐκ τῆς δευτέρας Πολλαπ. Παραγόμενον.
161052	τὸ ἐκ τῆς τρίτης Πολλαπ. Παραγόμενον.
17447300	τὸ γενικὸν αὐτῶν Παραγόμενον.

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Ἕκαστον τῶν ἐν τοῖς ἀνωτέρω Παραδείγμασιν εὑρεθέντων Παραγομένων περιέχει τὸν αὐτοῦ Πολλαπλασιαζόμε-

νον

νον τοσάκις, ὁσάκις ὁ Πολλαπλασιάζων περιέχει τὴν Μονάδα, ἀλλὰ μὴν τοῦτο ἔχει τὴν αὐτοῦ Σύστασιν ἐκ τοῦ Ὀρισμοῦ τῆς Πολλαπλασιάσεως· ἄρα ἡ πρᾶξις κατὰ τοὺς προτεθέντας Κανόνας γίνεται ὀρθῶς.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ α΄.

§. 37. Ἡ πλέον ἀσφαλὴς Βάσανος τῆς Πολλαπλασιάσεως εἶναι ἡ κατὰ Διαίρεσιν πρᾶξις, τουτέστι τὸ ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως Παραγόμενον διαιροῦμεν δι' ἑνὸς τῶν Παραγόντων, καὶ ὅταν μὲν ἐκ τῆς Διαιρέσεως προκύπτῃ ἀριθμὸς Ἴσος μὲ τὸν ἄλλον Παράγοντα, τότε ἡ πρᾶξις τῆς Πολλαπλασιάσεως εἶναι τετελεσμένη ἄνευ τινὸς σφάλματος· ὅταν ὅμως ἄλλως προκύπτῃ, πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν πάλιν τὴν Πολλαπλασίασιν ἀκριβέστερον. ἐπειδὴ πρότερον γέγονεν ἐσφαλμένως.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ β΄.

§. 38. Ὅταν ὁ ἕνας τῶν Παραγόντων, ἢ καὶ οἱ δύω ἔχωσιν ἐπὶ τὰ δεξιὰ ἐν τῷ τέλει μόνον Μηδενικὰ, δυνάμεθα νὰ διακόπτωμεν τὰ Μηδενικὰ χωρὶς, καὶ νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἀλλήλους μόνον τοὺς Σημαντικοὺς χαρακτῆρας τῶν Παραγόντων κατὰ τοὺς ἤδη γνωστοὺς ἡμῖν Κανόνας, ἔπειτα νὰ προσθέτωμεν εἰς τὸ γενικὸν Παραγόμενον, ὅσα Μηδενικὰ διεχωρίσαμεν, π. χ. ἔστωσαν εἰς Πολλαπλασίασιν οὗτοι οἱ

ἀριθμοὶ $\left\{ \begin{array}{r} 24000 \\ 300 \end{array} \right.$. ὅθεν πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς Σημαντικοὺς χαρακτῆρας οὕτω

$$\begin{array}{r} 24 \\ 3 \\ \hline 72 \end{array}$$

ἔπειτα προσθέτομεν εἰς τοῦτον τὸν 72 τὰ πέντε Μηδενικὰ, ὅπου ἀπὸ τῶν Παραγόντων ἐχωρίσαμεν. ὥστε ὅλον τὸ Παραγόμενον εἶναι 7200000.

ΣΧΌΛΙΟΝ γ΄.

§. 39. Εἰσὶ καὶ ἕτεραι παρατηρήσεις καὶ τρόποι Πολλαπλασιάσεως, ἀλλὰ πέραν τοῦ ἀναγκαίου αὐτὰ λογιζόμενοι, παραλιμπάνομεν τὴν τούτων Ἔκθεσιν. περὶ δὲ τῆς Πολλαπλασιάσεως τῶν ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν θέλομεν ὁμιλήσει μετὰ μικρὸν ὕστερον.

ΟʹΡΙΣΜΟʹΣ ϛʹ.

§. 40. Διαίρεσις καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας διαιρεῖται μέζων τις ἀριθμὸς δι' ἑτέρου ἐλάττονος, καὶ προκύπτει ἐκ τούτου τρίτος τις ἀριθμὸς, ἐν τῷ ὁποίῳ περιέχεται ἡ Μονὰς τοσάκις, ὁσάκις ὁ ἐλάττων περιέχεται ἐν τῷ μέζονι. τούτων ὁ μὲν μέζων ἀριθμὸς λέγεται Διαιρούμενος, ἢ Διαιρετέος, ὁ δὲ ἐλάττων ὀνομάζεται Διαιρῶν, ἢ Διαιρέτης· ὁ δὲ διὰ τῆς Διαιρέσεως προκύπτων ἀριθμὸς καλεῖται Πηλίκον, ἢ Πηλικότης.

ΣΧΌΛΙΟΝ.

§. 41. Ὁ μὲν μέζων ἀριθμὸς ἐμφαίνει τὸ ὅλον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διαιρεθῇ, ὁ δὲ ἐλάττων δεικνύει, εἰς πόσα μέρη πρέπει νὰ μερισθῇ τοῦτο τὸ ὅλον, ὁ δὲ τρίτος, τουτέστι τὸ Πηλίκον, δηλοῖ, πόσα μέρη ἐκ τοῦ ὅλου πίπτουσιν ἑκάστῳ, π. χ. ἂν μερισθῶσιν 20. Γρόσια, εἰς 10 πτωχοὺς, λαμβάνει ἕκαστος τούτων 2. Γρόσια.

ΠΌΡΙΣΜΑ.

§. 42. Ὅταν ὁ Διαιρέτης εἶναι Μονὰς, τότε καὶ τὸ Πηλίκον εἶναι ἴσον μὲ τὸν Διαιρετέον ἀριθμόν. διότι ἐπειδὴ τὸ Πηλίκον ποιεῖ

τὸ

νὰ περιέχῃ τὴν Μονάδα τοσάκις, ὁσάκις ὁ Διαιρέτης περιέχεται ἐν τῷ Διαιρετέῳ, ὁ δὲ Διαιρέτης ὅταν τυγχάνῃ Μονὰς περιέχεται τοσάκις, ὅσας ὁ Διαιρετέος περιέχει Μονάδας, διὰ τοῦτο ἄρα ἐν τοιαύτῃ περιστάσει δὲν δύναται νὰ προκύψῃ ἄλλο Πηλίκον, παρὰ μόνον αὐτὸς ὁ Διαιρετέος ἀριθμός. ἐντεῦθεν λέγεται, ὅτι ἡ Μονὰς δὲν διαιρεῖ.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ δ'.

§. 43. Νὰ Διαιρῶμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν δι' ἑνὸς Διαιροῦντος ἁπλοῦ, τουτέστι δι' ἑνὸς Διαιρέτου συνισταμένου ἐξ ἑνὸς μόνου χαρακτῆρος.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Καν. α'.) Ἐκθέτομεν τὸν Διαιρεθησόμενον ἀριθμὸν εἰς ἓν μέρος, καὶ μετ' αὐτὸν ἄγομεν δύω Γραμμὰς ἐπὶ τὰ δεξιὰ τὴν μίαν κατὰ κάθετον, τὴν δὲ ἄλλην Ὁριζόντιον.

Καν. β'.) Γράφομεν πρῶτον τὸν Διαιρέτην μεταξὺ τῶν δύω Γραμμῶν πλησίον τῆς γωνίας, ἔπειτα παρατηροῦμεν, ἂν ὁ ἐν τοῖς ἀριστεροῖς πρῶτος χαρακτὴρ τοῦ Διαιρεθησομένου ὑπάρχῃ μείζων, ἢ ἐλάττων αὐτοῦ τοῦ Διαιρέτου. καὶ ὅταν μὲν ὑπάρχῃ μείζων, παρεξετάζομεν, ποσάκις αὐτὸς ὁ χαρακτὴρ μόνος περιέχει τὸν Διαιρέτην. ὅταν δὲ ὑπάρχῃ ἐλάττων, καὶ ἐπομένως δὲν δύνηται νὰ μετρηθῇ οὐδὲ ἅπαξ ὑπὸ τοῦ Διαιρέτου, τότε λαμβάνομεν σὺν τῷ πρώτῳ καὶ τὸν ἐγγὺς αὐτοῦ δεύτερον χαρακτῆρα, καὶ θεωροῦμεν, ποσάκις οὗτοι οἱ δύω χαρακτῆρες περιέχουσιν αὐτὸν τὸν Διαιρέτην, τὸ δὲ εὑρεθὲν Πηλίκον γράφομεν ὑποκάτω τῆς ὁριζοντίου Γραμμῆς.

Καν. γ'.) Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν Πηλίκον μετὰ τȣ Διαιρέτȣ, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον θέτομεν ὑποκάτω τῶν προδιαιρεθέντων χαρακτήρων τȣ Διαιρετέȣ, ϗ μετὰ τȣτο τραβῶμεν μίαν Γραμμὴν, ϗ ἀφαιρȣμεν αὐτὸ τὸ Γινόμενον ἀπὸ τῶν Διαιρεθέντων χαρακτήρων, γράφοντες ὑπὸ τὴν Γραμμὴν τὴν εὑρισκομένην Διαφορὰν, ἢ τὸ ἐναπολειπόμενον.

Καν. δʹ.) Καταβιβάζομεν τὸν ἀκόλȣθον χαρακτῆρα τȣ Διαιρετέȣ, ϗ τὸν γράφομεν πλησίον τῆς εὑρεθείσης Διαφορᾶς, ϗ ποιȣμεν αὖθις τὴν προσήκȣσαν Διαίρεσιν, ϗ τὸν αὐτὸν τρόπον μεταχειριζόμεθα, ἕως ȣ νὰ διαιρεθῶσιν ἅπαντες οἱ χαρατῆρες τȣ Διαιρετέȣ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ αʹ.

Ἔςω Διαιρετέος ὁ ἀριθμὸς 7638, ϗ Διαιρέτης 3. ὅθεν τιθȣμεν

	7638	3
πρῶτον Γινόμενον	6	2546 ὅλον τὸ ἐκ τῆς Διαιρέσεως προκύψαν Πηλίκον.
	16	τὸ ἐναπολειπόμενον μετὰ τȣ 6.
δεύτερον Γινόμενον	15	
	13	τὸ ἐναπολειπ. μετὰ τȣ καταβιβασθέντος 3,
τρίτον Γινόμενον	12	
	18	τὸ ἐναπολειπ. μετὰ τȣ καταβιβασθέντος 8.
τέταρτον Γινόμενον	18	
	00	ἐναπολείπεται Μηδέν.

Πραγματευόμεθα δηλονότι τὴν πρᾶξιν ὅτως. „ ἐπειδὴ ὁ 7 μετρεῖται ὑπὸ τȣ Διαιρέτȣ, τετέςι περιέχει τὸν 3 δύω φοραῖς. τὸ Πηλίκον ἄρα ὑπάρχει 2, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὴν Γραμμὴν, ϗ

μετ

μετ᾽ αὐτὸ πολλαπλασιάζομεν τὸν Διαιρέτην 3, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν Παραγόμενον 6 γράφομεν ὑποκάτω τοῦ διαιρεθέντος χαρακτῆρος 7. Καὶ ἀφαιροῦντες τὸν 6 ἀπὸ τοῦ 7, γράφομεν τὴν εὑρεθεῖσαν Διαφορὰν 1 ὑποκάτω μιᾶς μικρᾶς Γραμμῆς, ἔπειτα καταβιβάζοντες τὸν ἑπόμενον χαρακτῆρα 6, τάττομεν αὐτὸν πλησίον τῆς Διαφορᾶς. ὥστε γίνεται ὁ ἀριθμὸς 16. καὶ ἐπειδὴ οὗτος ὁ 16 περιέχει τὸν Διαιρέτην 3 μόνον πέντε φοραῖς, τὸ Πηλίκον ἄρα εἶναι 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὸν τόπον τοῦ Πηλίκου πλησίον τοῦ προκύψαντος 2, καὶ μετ᾽ αὐτὸ τὸν 5 πολλαπλασιάζομεν αὖθις τὸν Διαιρέτην 3, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν Παραγόμενον 15 θέτομεν ὑποκάτω τῶν προδιαιρεθέντων χαρακτήρων 16, καὶ ἀφαιροῦντες τὸν 15 ἀπὸ τοῦ 16, σημειοῦμεν τὴν Διαφορὰν 1 ὑπὸ μίαν μικρὰν Γραμμήν· ἔπειτα καταβιβάζομεν πάλιν πλησίον ταύτης τῆς Διαφορᾶς τὸν ἀκόλουθον χαρακτῆρα τοῦ Διαιρετέου, ἤτοι τὸν 3, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ποιοῦμεν, καθὼς ἀνωτέρω, τὴν προσήκουσαν Διαίρεσιν. Καὶ κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον διαιροῦμεν ἅπαντας τοὺς χαρακτῆρας τοῦ δοθέντος, ὥστε γενικὸν Πηλίκον προκύπτει ὁ 1546 ἀριθμός.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β.

ὁ Διαιρετέος	1576	4	ὁ Διαιρέτης
τὸ Γινόμενον	12	394	τὸ Πηλίκον
	037	τὸ ἐναπολειπ. μετὰ τοῦ καταβιβασθέντος 7.	
τὸ δεύτερον Γινόμ.	36		
	16	τὸ ἐναπολειπόμενον μετὰ τοῦ 6.	
τὸ τρίτον Γινόμ.	16		
	00	δὲν ἐναπολείπεται τίπ.	

Ἐνταῦθα ἐπειδὴ ὁ Διαιρέτης 4 εἶναι μείζων τοῦ πρώτου χαρακτῆρος 1, καὶ ἑπομένως δὲν δύναται νὰ μετρήσῃ αὐτὸν οὐδ᾽ ἅπαξ, διὰ τοῦτο λαμβάνομεν μετ' αὐτοῦ ϗ τὸν ἐγγὺς χαρακτῆρα 5, ϗ λέγομεν οὕτως, ὁ 15 διαιρεθεὶς διὰ τοῦ 4, παρέχει Πηλίκον 3, ϗ μένει ἔτι λειπόμενον 3, ϗ οὕτω ποιοῦμεν ἅπασαν τὴν Διαίρεσιν, καθὼς ϗ ἀνωτέρω.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Τὸ σκοπούμενον τῆς Διαιρέσεως εἶναι νὰ εὑρεθῇ τις ἀριθμὸς, πρὸς τὸν ὁποῖον νὰ ἔχῃ ἡ Μονὰς οὕτω, καθὼς ὁ Διαιρέτης πρὸς τὸν Διαιρούμενον ἀριθμόν. ἀλλὰ μὴν πρὸς ἕκαστον τῶν ἐν τοῖς ἀνωτέρω Παραδείγμασιν εὑρεθέντων Πηλίκων ἔχει ἡ Μονὰς οὕτως, ὡς ὁ Διαιρέτης πρὸς τὸν Διαιρετέον· ἄρα τὰ ἄνω εὑρεθέντα Πηλίκα εἰσὶν ἀληθῶς τὰ ζητούμενα, ϗ ἡ πρᾶξις κατὰ τοὺς προτεθέντας Κανόνας γίνεται ὀρθῶς ϗ κατὰ τὸ δέον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ έ.

§. 44. Νὰ διαιρῶμέν τινα διδόμενον ἀριθμὸν δι' ἑνὸς Διαιροῦντος Συνθέτου, τουτέστι διά τινος Διαιρέτου συγκειμένου ἐκ πολλῶν χαρακτήρων.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Καν. ά. Ἀφ' οὗ ἐκθέτωμεν τὸν Διαιρεθησόμενον ἀριθμὸν, ἄγομεν δύω Γραμμὰς ἐπὶ τὰ δεξιὰ, ὡς ϗ πρότερον, ϗ ἐντὸς αὐτῶν γράφομεν τὸν Διαιρέτην.

Καν. β'.) Παρατηροῦμεν, ἐὰν ὁ πρῶτος χαρακτὴρ τοῦ Διαιρουμένου εἶναι μείζων, ἢ ἐλάσσων τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τοῦ Διαιρέτου. ϗ ὅταν μὲν μείζων ὑπάρχῃ, ποιοῦμεν τὴν πρώτην Διαίρεσιν, λαμβάνοντες ἀπὸ τοῦ Διαιρουμένου τόσους χαρακτῆρας, ὅσους ἂν ἔχῃ ὁ Διαιρέτης, καὶ παρεξετάζοντες, ποσάκις οἱ ληφθέντες χαρακτῆρες τοῦ Διαιρουμένου περιέχουσιν ὅλον τόν Διαιρέτην· τὸ δὲ εὑρεθὲν Πηλίκον γράφομεν εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων, ὡς καὶ ἐν τῷ προτεθέντι Προβλήματι γέγονεν. ὅταν δὲ ὁ πρῶτος χαρακτὴρ τοῦ Διαιρουμένου εἶναι ἐλάσσων τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τοῦ Διαιρέτου, τότε λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ Διαιρουμένου ἕνα χαρακτῆρα περισσότερον, τουτέστιν ἂν ὁ Διαιρέτης ἔχῃ δύω χαρακτῆρας, λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ Διαιρουμένου τρεῖς χαρακτῆρας, ἂν ὅμως ἐκεῖνος ἔχῃ τρεῖς, λαμβάνομεν τότε τέσσαρας, κ. τ., καὶ ποιοῦμεν τὴν πρώτην Διαίρεσιν κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον.

Καν. γ΄.) Πολλαπλασιάζομεν τὸ εὑρεθὲν Πηλίκον μεθ' ὅλου τοῦ Διαιρέτου, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν Παραγόμενον καταστρώνομεν ὑποκάτω τῶν προδιαιρεθέντων χαρακτήρων τοῦ Διαιρουμένου, καὶ ὑπ' αὐτὸ ἄγομεν μίαν μικρὰν γραμμὴν, καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὸ τὸ Παραγόμενον ἀπὸ τῶν διαιρεθέντων χαρακτήρων· τὴν δὲ Διαφορὰν γράφομεν ὑπὸ τὴν Γραμμὴν ἐν τῷ προσήκοντι τόπῳ. πρέπει ὅμως νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι ἂν τὸ Παραγόμενον ὑπερέχῃ ποτὲ τῶν Διαιρεθέντων χαρακτήρων, τότε τὸ Πηλίκον ἐτέθη πλέον τοῦ δέοντος, καὶ ἀνάγκη νὰ ἐλαττωθῇ αὐτὸ τὸ Πηλίκον κατὰ μίαν, ἢ δύω Μονάδας.

Καν. δ΄.) Πλησίον τῆς Διαφορᾶς (ἂν τύχῃ νὰ εἶναι) καταβιβάζομεν ἀπὸ τοῦ Διαιρουμένου τὸν ἀκόλουθον χαρακτῆρα, ἐκεῖνον δηλαδὴ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου δὲν ἐγένετο ἔτι καμμία ἀφαίρεσις, καὶ ἐπ' αὐτῶν ποιοῦμεν τὴν προσήκουσαν Διαίρεσιν διὰ τοῦ Διαιρέτου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἕως οὗ διέλωμεν ἅπαντας τοὺς χαρακτῆρας τοῦ Διαιρουμένου.

ΠΑΡΑ΄-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ α'.

Ἔστω ὁ μὲν Διαιρούμενος οὗτος 36448. ὁ δὲ Διαιρέτης 68, καὶ ζητηθήτω τὸ Πηλίκον. ὅθεν

36448	68	
340	536	τὸ εὑρεθὲν Πηλίκον.
244		
204		
0408		
408		
000		

Ἐνταῦθα ἐπειδὴ ὁ πρῶτος χαρακτὴρ τοῦ Διαιρουμένου, τουτέστιν ὁ 3 εἶναι ἐλάσσων τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τοῦ Διαιρέτου, τουτέστιν τοῦ 6, καὶ ἐπειδὴ ὅλος ὁ Διαιρέτης συνίσταται ἐκ δύω χαρακτήρων, διὰ τοῦτο κατὰ πρώτην Διαίρεσιν πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου τρεῖς χαρακτῆρας ὁμοῦ, τουτέστιν 364. ὅθεν οὗτος ὁ 364 περιέχει τὸν 68 πεντάκις, καὶ ἐναπολείπεται ἔτι 24. γράφομεν τὸ Πηλίκον 5 ἐν τῷ οἰκείῳ αὐτοῦ τόπῳ, καὶ ἔπειτα πλησίον τοῦ ἐναπολειφθέντος 24 καταβιβάζομεν τὸν ἀκόλουθον χαρακτῆρα τοῦ Διαιρετέου ὥστε γίνεται 244, καὶ διαιροῦμεν τοῦτον διὰ τοῦ Διαιρέτου 68. καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ β'.

ὁ Διαιρετέ͂ος	861	21	ὁ Διαιρέτης
τὸ πρῶτον Γινόμ.	84	41	τὸ Πηλίκον
	21	τὸ ἐναπολειπ. μετὰ τοῦ καταβιβασθέντος 1.	
τὸ δεύτερον Γινομ.	21		
	00		

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ γ'.

ὁ Διαιρετέος	177448	82	ὁ Διαιρέτης
τὸ πρῶτον Γινόμ.	164	,2164	τὸ Πηλίκον
	134	τὸ ἐναπολειπ. μετὰ τοῦ καταβιβασθέντος 4.	
τὸ δεύτερον Γινόμ.	82		
	524	τὸ ἐναπολειπ. μετὰ τοῦ 4.	
τὸ τρίτον Γινόμ.	492		
	328	τὸ ἐναπολειπ. μετὰ τοῦ 8.	
τὸ τέταρτον Γινόμ.	328		
	000		

ΣΧΟΛΙΟΝ α.

§. 45. Ὅταν ἐν τῷ τέλει μετὰ τὴν πλδυτικίαν ἀφαίρεσιν μένῃ τι λείψανον, τὸ ὁποῖον ἔλαττον ὂν τοῦ Διαιρέτου, δὲν δύναται πλέον νὰ διαιρεθῇ, γράφομεν αὐτὸ πλησίον τοῦ Πηλίκου ἐν τοῖς δεξιοῖς, καὶ ἄγοντες ὑπ' αὐτὸ μίαν Γραμμὴν, γράφομεν ὑποκάτω καὶ τὸν Διαιρέτην. π. χ.

$$\begin{array}{r|l} 22 & 5 \\ \cline{2-2} 20 & 4\frac{2}{5} \\ \cline{1-1} 2 & \text{λείψανον.} \end{array}$$

ΕΤΕΡΟΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

$$\begin{array}{r|l} 1165 & 4 \\ \cline{2-2} 8 & 291\frac{1}{4} \\ \cline{1-1} 36 & \\ 36 & \\ \cline{1-1} 05 & \\ 4 & \\ \cline{1-1} 1 & \text{ἕν ἀπολειπόμενον.} \end{array}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 46. Ὅταν ἄρα τύχῃ νὰ εἶναι ὁ Διαιρούμενος ἀριθμὸς ἐλάσσων τοῦ Διαιρέτου, δὲν δύναται τότε νὰ γένῃ ἡ Διαίρεσις ἐπ' αὐτοῦ

κατὰ

κατὰ τοὺς προτεθέντας Κανόνας. π. χ. ὁ 5 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 6 δὲν δύναται, ὅθεν ἐκθέτομεν αὐτοὺς οὕτως: $\frac{5}{6}$, τὸ ὁποῖον σημαίνει, ὅτι ὁ 5 πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς 6 μέρη, καθὼς περὶ τούτου θέλομεν ὁμιλήσει πλατύτερον καὶ σαφέστερον ἐν τῷ περὶ Κλασμάτων.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 47. Ὅταν μεταξὺ τῆς πράξεως τύχῃ περίστασις, ὥστε μετὰ τινὰ ἀφαίρεσιν ὁ καταβιβασθεὶς χαρακτὴρ μόνος ὢν ἢ μετά τινος ἐγκαταλειφθέντος, ὑπάρχει ἐλάττων τοῦ Διαιρέτου, καὶ ἑπομένως δὲν ἐπιδέχεται τινὰ Διαίρεσιν, τότε γράφομεν πρῶτον ἀντὶ Πηλίκου ἓν Μηδενικόν, ἔπειτα καταβιβάζομεν ἀπὸ τοῦ Διαιρουμένου τὸν ἀκόλουθον χαρακτῆρα, καὶ ἂν πάλιν δὲν ἐγχωρῇ νὰ γένῃ Διαίρεσις, γράφομεν ἔτι ἀντὶ τοῦ Πηλίκου ἓν Μηδενικόν, καὶ μετὰ ταῦτα καταβιβάζομεν ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου ἕτερον χαρακτῆρα, καὶ οὕτω ποιοῦμεν τὴν συνήθη Διαίρεσιν. π. χ.

ὁ Διαιρετέος	812	2	ὁ Διαιρέτης
	8	406	τὸ Πηλίκον
	012		
	12		
	00		

Ἐνταῦθα μετὰ τὴν Διαίρεσιν τοῦ 8, καταβιβάζεται ὁ 1, ἀλλ' ἐπειδὴ οὗτος, μόνος μάλιστα ὤν, ὑπάρχει ἐλάσσων τοῦ Διαιρέτου, καὶ δὲν δύναται νὰ διαιρεθῇ δι' αὐτοῦ, διὰ τοῦτο γράφομεν πρῶτον ὡς Πηλίκον ἓν Μηδενικόν, καὶ ἔπειτα καταβιβάζομεν τὸν 2, καὶ γράφοντες αὐτὸν πλησίον τοῦ 1, ποιοῦμεν τὴν Διαίρεσιν.

ΕΤΕΡΟΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

92115	23
92	4005
00115	
115	
000	

ΣΧΟΛΙΟΝ γ΄.

§. 43. Ὅταν τύχῃ νὰ ἔχῃ καὶ ὁ Διαιρέτης καὶ ὁ Διαιρετέος ἐν τῷ τέλει Μηδενικὰ, δυνάμεθα τότε νὰ πλῶμεν τὴν Διαίρεσιν εὐκολώτερον, καὶ συντομώτερον κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Διακόπτομεν δηλονότι καὶ ἀπὸ τοῦ Διαιρέτου καὶ ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου ἕνα ἴσον ἀριθμὸν Μηδενικῶν, καὶ ἀφέντες αὐτὰ τὰ Μηδενικὰ εἰς ἓν μέρος, ποιοῦμεν τὴν συνήθη Διαίρεσιν μόνον ἐπὶ τῶν λοιπῶν χαρακτήρων. π. χ. ἔστω Διαιρούμενος ὁ 84900 διὰ τοῦ 300. ὅθεν διαχωρίζομεν καὶ ἀπὸ τοῦ Διαιρουμένου καὶ ἀπὸ τοῦ Διαιρέτου τὰ Μηδενικὰ, καὶ διαιροῦμεν μόνον 849 διὰ τοῦ 3 ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει τὸ ζητούμενον Πηλίκον 283.

ΕΤΕΡΟΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Ἔστω ὁ Διαιρετέος 60, ὁ δὲ Διαιρέτης 20. ὅθεν ποιοῦμεν

ὁ Διαιρούμενος	6	2	ὁ Διαιρέτης
	6	3	τὸ Πηλίκον
	0		

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ γ.

§. 49. Ὅταν δὲ τύχῃ ἔχων μόνον ὁ Διαιρέτης ἐν τῷ τέλει Μηδενικὰ, τότε διακόπτομεν δεξιόθεν καὶ ἀπὸ τοῦ Διαιρετοῦ τόσους χαρακτῆρας, ὅσα Μηδενικὰ ἔχει ὁ Διαιρέτης. Καὶ μετὰ τοῦτο ποιοῦμεν τὴν Διαίρεσιν τοῖς λοιποῖς. καὶ ἐὰν μὲν εἰς τὸ τέλος τῆς Διαιρέσεως ἐναπολειφθῇ τι λείψανον, προστίθεμεν αὐτὸ εἰς ἐκείνους τοὺς κεχωρισμένους χαρακτῆρας τοῦ Διαιρετοῦ, καὶ ἀγαγόντες μίαν Γραμμὴν ὑποκάτω αὐτῶν, γράφομεν ὅλον τὸν Διαιρέτην, καὶ τέλος προστίθεμεν τοῦτο τὸ Κλάσμα πλησίον τοῦ εὑρεθέντος Πηλίκου, ἐὰν δὲ μετὰ τὴν Διαίρεσιν δὲν ἐναπολειφθῇ τι, τότε πλησίον τοῦ Πηλίκου γράφομεν ἐν Κλάσματι μόνον τοὺς κεχωρισμένους χαρακτῆρας, καὶ ὅλον τὸν Διαιρέτην. π. χ.

Ἔστω Διαιρούμενος ὁ 563874 διὰ τοῦ 2300, ὅθεν διαχωρίζομεν ἀπὸ μὲν τοῦ Διαιρέτου τὰ δύω Μηδενικὰ, ἀπὸ δὲ τοῦ Διαιρουμένου ὡσαύτως δύω χαρακτῆρας τουτέστι τὸν 74, ὥστε διαιροῦμεν μόνον τὸν 5638 διὰ τοῦ 23 οὕτως

5638 | 23

244 $\frac{374}{2300}$ τὸ Πηλίκον

46

103

92

118

115

003 λείψανον.

Ἔστω αὖθις Διαιρούμενος ὁ 7245 διὰ τοῦ 600, ὥστε διακόπτομεν ἀπὸ μὲν τοῦ Διαιρουμένου τὸν 45, ἀπὸ δὲ τοῦ Διαιρέτου τὰ δύω Μηδενικὰ, καὶ διαιροῦμεν μόνον τὸν 72 διὰ τοῦ 6 οὕτω.

7216

45

12 ——

600

6

——

12

12

——

00

Ἐνταῦθα δὲν ἐναπελείφθη τι λείψανον, ὅθεν γράφομεν πλησίον τοῦ Πηλίκου μόνον τοὺς δύω κεχωρισμένους χαρακτῆρας τουτέστι τὸν 45 καὶ ὅλον τὸν Διαιρέτην ἐν Κλάσματι.

ΣΧΟΛΙΟΝ ε΄.

§. 50. Ὅταν δὲ ὁ Διαιρέτης ἔχῃ ἀριστερόθεν τὸν πρῶτον χαρακτῆρα 1 μόνον, τοὺς δὲ λοιποὺς χαρακτῆρας Μηδενικά, οἷον 10, 100, 1000, κ. τ. διαστέλλομεν δεξιόθεν ἀπὸ τοῦ Διαιρουμένου τόσους χαρακτῆρας, ὅσα Μηδενικὰ ἔχει αὐτὸς ὁ Διαιρέτης, καὶ τότε οἱ μὲν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ καταλειφθέντες χαρακτῆρές εἰσιν αὐτὸ τὸ ζητούμενον Πηλίκον. ἐπειδὴ διὰ τῆς Μονάδος, ὡς εἴρηται, Διαίρεσις δὲν γίνεται. τοὺς δὲ κεχωρισμένους Ἰσοπληθεῖς τοῖς Μηδενικοῖς χαρακτῆρας, καὶ ὅλον τὸν Διαιρέτην γράφομεν ἐν Κλάσματι πλησίον τοῦ Πηλίκου. π. χ. ἐὰν διαιρεθῇ ὁ 684375 διὰ τοῦ 1000, τὸ Πηλίκον ἔσται

$$684\ \frac{375}{1000}.$$

ΣΧΟΛΙΟΝ ς΄.

§. 51. Ἡ δὲ κατὰ Διαίρεσιν Βάσανος γίνεται διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως. τουτέστι πολλαπλασιάζομεν μετὰ τὴν Διαίρεσιν τὸ εὑρισκόμενον Πηλίκον μετὰ τοῦ Διαιρέτου· καὶ ἂν ἡ Διαίρεσις εἶναι τετελεσμένη ἀκριβῶς ἄνευ τινὸς συμπτώματος, προκύπτει πάντως αὐτὸς ὁ Διαιρετέος ἀριθμός.

ΚΕΦΑ΄-

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ γ'.

Περὶ λογισμῶν τῶν Ἑτεροειδῶν Ποσοτήτων, ἢ Μεγεθῶν.

ΟΡΙΣΜΟ'Σ α'.

§. 52. Ἑτεροειδεῖς Ποσότητες, ἢ Ἑτεροειδῆ Μεγέθη καλοῦνται ἐν τῇ ἀριθμητικῇ μόνον τὰ διαφέροντα ἀλλήλων κατά τινα ἀξίαν ἢ δύναμιν, τουτέστι θεωρούμενον τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο δύναται μεῖζον, ἢ ἔλαττον· καὶ τὸ μὲν ἔλαττον εἶναι μέρος τοῦ μείζονος, καὶ περιέχεται ἐν αὐτῷ πλέον, ἢ ἅπαξ. οἷον τὰ διάφορα εἴδη τῶν Νομισμάτων, τὰ διάφορα εἴδη τῶν Γεωγραφικῶν Μέτρων κ. τ. τὰ δὲ ἄλλως ἔχοντα κληθήτωσαν Ἑτερογενῆ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 53. Ὅταν ἔχωμεν νὰ συνάπτωμεν, νὰ ἀφαιρῶμεν, νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἢ νὰ διαιρῶμεν διαφόρου εἴδους Ποσά, πρέπει πρῶτον νὰ ἠξεύρωμεν, πόσαι Μονάδες τοῦ μικροτέρου εἴδους Ἰσοδυναμοῦσι μὲ μίαν Μονάδα τοῦ μείζονος. ὅθεν δὴ καὶ πρὸς βοήθειάν τινα παραθέτομεν συντόμως τοὺς ἑξῆς Πίνακας, ἐν τοῖς ὁποίοις ὁρᾶται, πόσαι Μονάδες ἑνὸς ἐλάττονος Ποσοῦ συμπληροῦσι μίαν Μονάδα ἑτέρου μείζονος.

Χρῆσις τῶν Νομισμάτων, ἢ τῶν κοινότερον λεγομένων Μονέδων.

3 Ἄσπρα (*) δύνανται ἴσον μὲ ἕνα Παρᾶν.

10 Παράδες συνισῶσιν ἓν Δεκάριον.

20 Παράδες, ἢ 2 Δεκάρια ποιοῦσιν ἓν εἰκοσάριον.

40 Παράδες, ἢ 4 Δεκάρια ποιοῦσιν ἓν Γρόσιον. κ. τ.

Χρῆσις τῶν Γεωγραφικῶν Μέτρων.

4 Δάκτυλοι συνισῶσι μίαν Παλάμην.

4 Παλάμαι συμπληροῦσιν ἕνα Πόδα.

5 Πόδες ποιοῦσιν ἓν Βῆμα.

4000 Βήματα συμπληροῦσιν ἓν Μίλλιον Γερμανικόν.

Χρῆσις τῶν Μέτρων τοῦ χρόνου.

60 Δεύτερα λεπτὰ δύνανται ἴσον μὲ ἓν λεπτὸν πρῶτον,

60 Πρῶτα λεπτὰ ποιοῦσι μίαν ὥραν.

24 Ὧραι συνισῶσι μίαν ἡμέραν.

30 Ἡμέραι συμπληροῦσιν ἕνα Μῆνα (**).

12 Μῆνες ἢ 365 $\frac{1}{4}$ ἡμέραι συνισῶσιν ἓν ἔτος.

ΥΠΟ-

(*) Τὸ ἄσπρον λαμβάνεται ϗ ἐνταῦθα ὡς ἓν Τριτημόριον τοῦ Τουρκικοῦ Παρᾶ. εἰς Ἔκθεσιν ἔτι τῶν Νομισμάτων ἀναγκάζομαι νὰ μεταχειρισθῶ ϗ λέξεις Βαρβαρικωτέρας, ἐπειδὴ εἰς τὴν Ἑλλάδα ϗ εἰς ὅλον σχεδὸν τὸ Ὀθωμανικὸν κράτος τοιαῦται λέξεις εἰσὶν ἤδη γνωσταὶ, ϗ εἰς χρῆσιν.

(**) Ἐκτὸς τῶν Μηνῶν, οἵτινες ἔχουσιν ἡμέρας 31, ϗ τοῦ Φεβρουαρίου ἔτι, ὅστις κατὰ μὲν τὸ κοινὸν ἔτος ἔχει ἡμέρας 28, κατὰ δὲ τὸ καλούμενον δίσεκτον ἔχει 29.

ΥΠΟΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Δὲν παραθέτομεν ἐνταῦθα Πίνακά τινα περὶ τῶν Σηκωμάτων ϗ Σταθμῶν, ἢ τῶν κοινότερον λεγομένων Ζυγίων, ἐπειδὴ τὸ νὰ διορίσωμεν γενικῶς τὴν χρῆσιν αὐτῶν εἶναι δύσκολον, διότι δὲν εἶναι πανταχȣ̃ εἰς τὸ γένος μας ἡ αὐτὴ χρῆσις. ὅθεν πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν πρῶτον τὴν κατὰ ταῦτα τοπικὴν χρῆσιν, ϗ πόσα μέρη τȣ̃ ἐλάττονος ὑπόκεινται εἰς τὸ μεῖζον, ἔπειτα δυνάμεθα εὐκόλως νὰ τελέσωμεν ἐπὶ τȣ́των τὸν τυχόντα λογισμὸν κατὰ τὴν ἑξῆς Μέθοδον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α΄.

§. 54. Νὰ συνάπτωμεν πλείονας Ποσότητας διαφόρων εἰδῶν ȣ̃σας.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἢ ΛΥΣΙΣ.

Καν. α΄.) Γράφομεν τὰς ὁμοειδεῖς Ποσότητας ὑπ᾽ ἀλλήλας. τȣτέστι τὰ ἄσπρα ὑπὸ τὰ ἄσπρα, τȣ̀ς Παράδας ὑπὸ τȣ̀ς Παράδας, τὰ Γρόσια ὑπὸ τὰ Γρόσια. κ. τ.

Καν. β΄.) Ἀφ᾽ ȣ̃ κατατάξωμεν τὰ Ποσὰ κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον, ἀρχόμεθα πρῶτον ἀπὸ τȣ̃ μικροτέρȣ εἴδȣς, ϗ κατὰ τȣ̀ς Κανόνας τῆς Συνάψεως ἀθροίζομεν τȣ̀ς χαρακτῆρας τȣ́τȣ τȣ̃ εἴδȣς εἰς ἓν γενικώτερον Κεφάλαιον, ϗ μετὰ τȣ̃το ἐξετάζομεν, πόσαι Μονάδες ἐκ τȣ́τȣ τȣ̃ ἐλάττονος εἴδȣς δύνανται νὰ συστήσωσι μίαν Μονάδα τȣ̃ ἐγγὺς μείζονος εἴδȣς. ϗ τότε ἀφαιρȣ̃μεν ἐξ αὐτȣ̃ τȣ̃ ἀθροισθέντος Κεφαλαίȣ τόσας Μονάδας, ὅσαι ἀπαιτȣ̃νται διὰ νὰ προκύψωσιν ἐξ αὐτῶν ἄλλαι Μονάδες μείζονες ϗ ὁμοειδεῖς μὲ τὰς Μονάδας αὐτȣ̃ τȣ̃ ἐγγὺς μείζονος εἴδους, καὶ τότε συνάπτομεν ταύτας τὰς νεοφανεῖς Μονάδας μετὰ τῶν χαρακτήρων αὐτοῦ τοῦ ἐγγὺς μείζονος εἴδους εἰς ἓν γενικὸν Κεφάλαιον, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφαιροῦμεν ὡσαύτως τὰς ἐναπαιτουμένας Μονάδας, καὶ ἀποκαθιστῶμεν ἐξ αὐτῶν πάλιν ἑτέρας Μονάδας μείζονας καὶ ὁμοειδεῖς μὲ τὰς Μονάδας τοῦ παρακειμένου μείζονος εἴδους, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ά.

Γρόσια		Παράδες		Ασπρα
20	:	16	:	2
35	:	18	:	1
6	:	18	:	2
62	:	13	:	2

Τὸ Κεφάλαιον τῶν ἄσπρων εἶναι 5, καὶ ἐπειδὴ πέντε ἄσπρα ποιοῦσι μόνον ἕνα Παρᾶν, καὶ μένουσιν ἔτι ἐξ αὐτῶν δύω, γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ἄσπρων μόνον τὰ 2 ἄσπρα, τὸν δὲ Παρᾶν συνάπτομεν μετὰ τῶν Παράδων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 53 Παράδες. καὶ ἐπειδὴ 53 Παραδ. δύνανται ἴσον μὲ ἓν Γρος. καὶ δέκα τρεῖς Παραδ. γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Παραδ. μόνον 13 Παράδες, τὸ δὲ Γρόσιον ἀθροίζομεν μετὰ τῶν Γροσίων, καὶ οὕτως ἑπομένως.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

Βήματα		Πόδες		Παλάμαι		Δάκτυλοι
30	:	4	:	2	:	3
12	:	3	:	3	:	2
6	:	2	:	0	:	1
50	:	0	:	2	:	2.

ΠΑΡΑ'-

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ γ΄.

Μῆνες	Ἡμέραι	Ὧραι	Λεπτὰ πρῶτα	λεπτὰ δεύτερα
4 :	25 :	20 :	40 :	35
6 :	4 :	3 :	19 :	25
11 :	0 :	0 :	0 :	00

ΠΡΟ΄ΒΛΗΜΑ β΄.

§. 55. Νὰ ἀφαιρῶμεν Ἑτεροειδεῖς Ποσότητας.

ΠΡΑΚΤΕ΄Α, ἢ ΛΥ΄ΣΙΣ.

Καν. α΄.) Γράφομεν τὰς Ὁμοειδεῖς Ποσότητας ὑπὸ τὰς Ὁμοειδεῖς, καθὼς καὶ ἐν τοῖς ἀνωτέρω Παραδείγμασι γέγονε.

Καν. β΄.) Ἀφαιροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ὁμοειδῶν ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν τῶν Ὁμοειδῶν, τὴν δὲ ἀποσκομένην Διαφορὰν γράφομεν ὑπὸ τὴν Γραμμήν. ὅταν ὅμως τὸ ἀφαιρετέον εἶδος τύχῃ νὰ εἶναι μεῖζον τοῦ ἐλαττωτέου, τότε προσαυξάνομεν αὐτὸ, λαμβάνοντες ἀπὸ τοῦ πλησίον κειμένου μείζονος εἴδους, μίαν Μονάδα, τὴν ὁποίαν, ἐπειδὴ εἶναι μείζων μιᾶς τῶν Μονάδων αὐτοῦ τοῦ κατωτέρου εἴδους πλέον, ἢ ἅπαξ, ἀναλύομεν κατ᾽ ἐπίνοιαν εἰς Μονάδας τοῦ αὐτοῦ εἴδους, τοῦ ὁποίου εἶναι καὶ αἱ Μονάδες αὐτοῦ τοῦ κατωτέρου εἴδους, καὶ οὕτω ποιοῦμεν τὴν προσήκουσαν ἀφαίρεσιν.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ά.

Γρόσια		Παράδες		Ἄσπρα
55	:	8	:	2
15	:	4	:	1
40	:	4	:	1

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β́.

Πρόσια		Παράδες		Ἄσπρα
103	:	4	:	1
16	:	15	:	2
86	:	28	:	2

2. Ἄσπρα νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ 1 δὲν δύνανται, ὅθεν λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ ἐγγὺς μείζονος εἴδους, τουτέστι ἀπὸ τῶν 4 Παράδων μίαν Μονάδα, ϗ ἀναλύοντες αὐτὴν εἰς 3 ἄσπρα, (ἐπειδὴ ἴσον μὲ 3 ἄσπρα δύναται ὁ Παρᾶς) προσμιξάνομεν κατ' ἐπίνοιαν δὲ αὐτῶν τὸ 1 ἄσπρον, ὥστε 3 ϗ 1 γίνονται 4 ἄσπρα, ἀφ' οὗ δὲ ἐκ τούτων ἀφαιρεθῶσι τὰ 2 ἄσπρα, ἐναπολείπονται ὡς Διαφορὰ ἔτι 2, τὰ ὁποῖα γράφομεν ὑπὸ τὴν Γραμμήν, ἔπειτα μεταβαίνομεν εἰς τὴν στήλην τῶν Παράδων, ϗ ἐπειδὴ οἱ 15 Παράδες δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τῶν 3 Παράδων (ὁ 4 χαρακτὴρ δύναται ἤδη ἴσον μὲ τρεῖς Παράδες, ἐπειδὴ ἠλαττώθη πρότερον μίαν Μονάδας), λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ ἐγγὺς μείζονος εἴδους, τουτέστιν ἀπὸ τῶν 103 Γροσίων μίαν Μονάδα, τὴν ὁποίαν διαλύομεν εἰς 40 Παράδας, ϗ δι' αὐτῶν προσμιξάνομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν 3 Παράδων, ὥστε 40 ϗ 3 γίνονται 43 Παράδες, ἀπὸ τῶν ὁποίων γίνεται ἡ ἀφαίρεσις τῶν 15, ϗ ἐναπολείπεται Διαφορὰ 28 Παράδ. ἔπειτα μεταβαίνομεν εἰς ἀφαίρεσιν τῶν Γροσίων, ϗ ποιοῦ-

ποιοῦμεν ἐφεξῆς τὴν προσήκουσαν ἀφαίρεσιν. ὥστε ἐναπολείπεται ϗ ἐπὶ τούτων Διαφορὰ 86 Γρόσια.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ'.

Ἐργαζόμενός τις κατά τινα χρόνον ἐκέρδισε Γρόσια 2300, Παράδες 18, ϗ ἄσπρα 2, κατ' αὐτὸν ὅμως τὸν χρόνον ἐξαπάνησε Γρόσια 1250, Παράδες 20, ϗ 1 ἄσπρον. ὅθεν ζητεῖται πόσα ἔπ ἔμειναν αὐτῷ.

Γρόσια		Παράδες		Ἄσπρα
2300	:	18	:	2
1250	:	20	:	1
1049	:	38	:	1

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. δ'.

Ἡμέραι		Ὧραι		Λεπτὰ
18	:	15	:	40
14	:	19	:	20
3	:	20	:	20

κατ' αὐτοὺς τοὺς εἰρημένους Κανόνας ἀφαιροῦνται ἀπ' ἀλλήλων ϗ ἑκάστου εἴδους τὰ δυνατὰ διδόμενα.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ'.

§. 56. Νὰ Πολλαπλασιάζωμεν Ποσὰ διαφόρου εἴδους ὄντα, ϗ πολλαχῶς διδόμενα.

ΠΡΑΚΤΕ'Α ἤ ΛΥ'ΣΙΣ.

Καν. ά.) Ὅτι τὸ μὲν Πολλαπλασιασέον Ποσὸν ὑπάρχει μόνον ἑνὸς εἴδους, ὁδὲ Πολλαπλασιαστὴς σύγκειται ἐκ πλειόνων εἰδῶν, γίνεται ἡ Πολλαπλασίασις τοῦ Πολλαπλασιασέου ἐφ' ἕκαστον εἶδος τοῦ Πολλαπλασιαστοῦ χωρὶς, τουτέστι πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ τὸ Πολλαπλασιαζόμενον Ποσὸν πρῶτον μετὰ τοῦ μείζονος εἴδους τοῦ Πολλαπλασιαστοῦ, ἔπειτα μετὰ τοῦ ἐγγὺς μικροτέρου, καὶ ἐφεξῆς, καθὼς κατωτέρω ἐπὶ τοῦ πρώτου Παραδείγματος δείκνυται τοῦτο πραγματικώτερον. δύναται δὲ νὰ γένη ἡ πρᾶξις εἰς τοιαύτην περίστασιν καὶ κατὰ ἄλλον τρόπον, ἀνάγομεν δηλονότι πρῶτον τὰ εἴδη τοῦ Πολλαπλασιαστοῦ εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ εἶδος τουτέστι τὰς Μονάδας τῶν μειζόνων εἰς Μονάδας ὁμοειδεῖς μὲ τὰς Μονάδας τοῦ μικροτέρου εἴδους αὐτοῦ, καὶ ἔπειτα τελοῦμεν ἐπὶ τούτων μίαν Πολλαπλασίασιν, ὡς ἐν τῷ δευτέρῳ Παραδείγματι δεικνύομεν τὸν τρόπον σαφέστερον.

Καν. β.) Ὅτε δὲ τὸ μὲν Πολλαπλασιαζόμενον Ποσὸν συνίσταται ἐκ πολλῶν εἰδῶν, τὸ δὲ Πολλαπλασιάζον τυγχάνει ἑνὸς μόνου εἴδους, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ μεῖζον εἶδος τοῦ Πολλαπλασιασέου διὰ τοῦ Πολλαπλασιαστοῦ, ἔπειτα διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ ἕκαστον μικρότερον εἶδος αὐτοῦ, λαμβάνομεν ἐκ τοῦ Πολλαπλασιαστοῦ ἓν μέρος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἔχη πρὸς αὐτὸν τὸν Πολλαπλασιαστὴν τὸν ἴδιον λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Μονὰς τούτου τοῦ μικροτέρου εἴδους πρὸς τὴν Μονάδα τοῦ μείζονος εἴδους αὐτοῦ τοῦ Πολλαπλασιασέου. τουτέστιν ἂν μὲν ἡ Μονὰς τοῦ ἔλαττον δυναμένου εἴδους, τὸ ὁποῖον ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν, περιέχηται εἰς τὴν

Μο-

Μονάδα τοῦ μείζονος εἴδους τοῦ Πολλαπλασιαστέου φερ' εἰπεῖν, τετράκις, λαμβάνομεν καὶ ἡμεῖς τότε τὸ τέταρτον μέρος τοῦ κειμένου Πολλαπλασιαστοῦ, ἂν δὲ περιέχηται πεντάκις, λαμβάνομεν ἓν πέμπτον μέρος, κ. τ. καὶ διὰ αὐτοῦ τοῦ μέρους πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ τὸ μικρότερον εἶδος τοῦ Πολλαπλασιαστέου, καθὼς καὶ κατωτέρω διὰ τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου Παραδείγματος ἐκθέτομεν σαφέστερον αὐτὴν τὴν περίστασιν.

Κατ. γ΄.) Ὅταν δὲ καὶ τὸ Πολλαπλασιαζόμενον καὶ καὶ τὸ Πολλαπλασιάζον ὑπάρχῃ Πολυειδές, τότε πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ μεῖζον εἶδος τοῦ Πολλαπλασιαζομένου διὰ τοῦ μείζονος εἴδους αὐτοῦ τοῦ Πολλαπλασιάζοντος, δεύτερον πολλαπλασιάζομεν τὸ ἴδιον μεῖζον εἶδος τοῦ Πολλαπλασιαζομένου μετὰ τοῦ ἐλάττονος εἴδους τοῦ Πολλαπλασιάζοντος, εἶτα δὲ πολλαπλασιάζομεν τὸ μικρότερον εἶδος τοῦ Πολλαπλασιαζομένου διὰ τοῦ ἀναλόγου μέρους ὅλου, τοῦ Πολλαπλασιάζοντος Ποσοῦ, καθὼς ἀνωτέρω ἐν τῷ δευτέρῳ Κανόνι εἴρηται, κ. τ. καὶ καθὼς ἐν τῷ πέμπτῳ καὶ ἕκτῳ Παραδείγματι καθορᾶται τρανώτερον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. α΄.

Πωλεῖται ἓν εἶδος, φερ' εἰπεῖν, σίτου πρὸς 5 Γρόσια, καὶ 15 Παράδ. τὸ Μόδιον, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀγοράζει τις μόνον 4 Μόδια, καὶ ζητεῖ νὰ μάθῃ, πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ διὰ ταῦτα. ὅθεν

4
5 : 15

τὰ 4 Μόδια πολλαπλασιασθέντα διὰ τῶν 5 ,

Γρο-

Γροσίων, παρέχουσι Γινόμενον . . . Γροσ. 20
τὰ 4 πολλαπλασιασθέντα αὖθις διὰ τῶν 15 Παράδων, παρέχουσι Γινόμενον Παράδες 60, οἵτινες ἀναχθέντες εἰς Γρόσια ποιοῦσι . . . . 1 : 20

———————

21 : 20

πρέπει ἄρα νὰ καταβάλῃ ὁ ἀγοράσας εἴκοσι ἓν Γρόσιον, καὶ εἴκοσι Παράδ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

Ἔστωσαν τὰ ἴδια ὡς ἀνωτέρω, πλὴν τὰ εἴδη τοῦ Πολλαπλασιαστοῦ γενέσθωσαν πρῶτον εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ εἶδος, τουτέστι τὰ Γροσ. εἰς Παράδ. ὅθεν

4 Μόδια
πρὸς 215 Παράδ.

———————

20
4
8

———————

860 Παράδ, τουτέστι Γρόσια 21 Παράδ. 20.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. γ'.

Ἀγοράζει τις, δὸς εἰπεῖν, ἕνα τόπον Βημάτων 10, καὶ Ποδῶν 4, πρὸς 10 Γρόσ, τὸ Βῆμα, πόσα τοίνυν πρέπει νὰ καταβάλῃ οὗτος ἀντὶ τούτων τῶν εἴκοσι Βημάτων καὶ τεσσάρων Ποδῶν;

20 : 4
10

———————

τὰ

τὰ 20 βήματα πολλαπλασιασθέντα διὰ τοῦ 10, διδόασι Γινόμενον . . . Γρόσ. 200
ἐπειδὴ δὲ ἕνας Ποῦς περιέχεται ἐν τῷ Βήματι πεντάκις, τουτέστι πέντε πόδες συνιστῶσιν ἓν Βῆμα, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ τοῦ Πολλαπλασιασοῦ 10 τὸ πέμπτον μέρος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ 2 ἀριθμὸς, καὶ δι' αὐτοῦ πολλαπλασιάζομεν τοὺς 4 Πόδας, ὥστε προκύπτει Γινόμενον . . . . Γρόσ. 8

ἅπαν τὸ Γινόμενον Γρόσια 208

ΠΑΡΑ'Δ. δ'.

Ἐν εἶδος ὑφάσματος πωλεῖται πρὸς 6 Γρόσια τὸν Πῆχυν, λοιπὸν διὰ ὀκτὼ Πήχεις καὶ ἥμισυν ἐκ τούτου τοῦ ὑφάσματος πόσα πρέπει τινὰς νὰ πληρώσῃ; ὅθεν

$$\begin{array}{r} 8\ \frac{1}{2} \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

οἱ 8 Πήχεις πολλαπλασιασθέντες διὰ τῶν 6 Γροσίων, ποιοῦσι . . . . Γρόσ. 48
τὸ δὲ $\frac{1}{2}$ ἐπειδὴ δύναται τὸ ἥμισυ τοῦ Πήχεως, πρέπει νὰ εἶναι καὶ ἡ τιμὴ αὐτοῦ τὸ ἥμισυ τοῦ Πολλαπλασιασοῦ, τουτέστιν ὁ 3, ὥστε τὸ Γινόμενον εἶναι 3

Γρόσια 51

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ε.

Ἐρωτᾷ τις, πόσα Βήματα δύναται νὰ περιέχῃ ἕνας τόπος, ὁ ὁποῖος τὸ μὲν μῆκος εἶναι Βήματα 8, καὶ $\frac{1}{2}$, τὸ δὲ πλάτος εἶναι Βήματα 10 καὶ 4 Πόδες. ὅθεν

8 :	$\frac{1}{2}$
10 :	4

τὰ 8 Βήματα πολλαπλασιασθέντα διὰ τῶν 10 Βημάτων, παρέχουσι 80

καὶ πάλιν πολλαπλασιασθέντα τὰ 8 Βήματα διὰ τῶν 4 Ποδῶν, παρέχουσι Γινόμενον 32 Πόδας, τουτέστι Βήματα . . . 6 : καὶ 2 Πόδας

τοῦ δὲ $\frac{1}{2}$, ἐπειδὴ σημαίνει τὸ ἥμισυ τοῦ Βήματος, ἔσται . . . . 5 : 2

91 : 4

τὸ περιεχόμενον ἄρα τοῦ τόπου τούτου εἶναι Βήματα ἐννενήκοντα ἕν, καὶ τέσσαρες Πόδες.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ϛ'.

Ἠγόρασέ τις 15 Βήματα καὶ 3 Πόδας τόπου πρὸς Γρόσια 10 καὶ Παράδ. 20 τὸ Βῆμα, καὶ ἐπιθυμεῖ νὰ μάθῃ πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ ἀντὶ τῶν 15 Βημάτων, καὶ 3 Ποδ. ὅθεν

15 :	3
10 :	20

τῶν 15 Βημάτων πολλαπλασιασθέντων

διὰ

διὰ τῶν 10 Γροσ. τὸ Γινόμενον . . 150
πολλαπλασθέντων δὲ καὶ διὰ τῶν 20 Παράδων, προκύπτει Γινόμενον 300 Παράδ. τουτέστι Γρόσια . . . . . 7 : 20
οἱ δὲ 3 Πόδες πολλαπλασιασθέντες διὰ τοῦ πέμπτου μέρους τῶν 10, τουτέστι διὰ τοῦ 2, παρέχουσι Γρόσια . . . 6
πολλαπλασιασθέντες ἔτι καὶ διὰ τοῦ πέμπτου μέρους τῶν 20, τουτέστι διὰ τοῦ 4 ἀριθμοῦ, παρέχει Παράδ. . . . 12

163 : 32
Γρόσ. Παράδ.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 57. Τῆς κατὰ ταῦτα πράξεως εἰσὶ καὶ ἄλλοι τρόποι, τοὺς ὁποίους μεταχειρίζονται ἕτεροι. ἀλλ' ἡμεῖς διὰ νὰ μὴ φύγωμεν ἀπὸ τῆς τάξεως τῆς καθ' ἡμᾶς προθέσεως, μακρολογοῦντες ἴσως ἀνωφελῶς καὶ ἄνευ ἀνάγκης, παραλιμπάνομεν τὴν τούτων Ἔκθεσιν· εἰσὶ δὲ πρὸς τοῖς εἰρημένοις καὶ ἄλλαι περιστάσεις, ἀλλὰ περὶ τούτων θέλομεν ὁμιλήσει πλατύτερον εἰς τὴν ἄλγεβραν, ὅτε πραγματευσώμεθα περὶ τῆς Μεθόδου τῶν τελῶν κ. τ.

ΠΡΟ΄ΒΛΗΜΑ γ.

§. 58. Νὰ διαιρῶμεν, ἢ νὰ μερίζωμεν Ποσὰ Ἑτεροειδῆ.

ΠΡΑΚΤΕ΄Α ἡ ΛΥ΄ΣΙΣ.

Καν. α΄) Ὅταν ὁ μὲν Διαιρετέος ὑπάρχῃ Πολυειδής, ὁ δὲ Διαιρέτης τύχῃ μόνον ἑνὸς εἴδους ὤν, τότε διαιροῦ-

μεν

μεν διὰ τοῦ Διαιρέτου πρῶτον τὸ μεῖζον εἶδος τοῦ Διαιρετέου, καθ' ὃν τρόπον προείρηται ἐν τῷ περὶ Διαιρέσεως τῶν ὁμοειδῶν, γράφοντες καὶ τὸ Πηλίκον ὑπὸ τὴν Γραμμήν, ἔπειτα ἂν μὲν ἐκ ταύτης τῆς Διαιρέσεως δὲν μένῃ τὶ λείψανον, μεταβαίνομεν εὐθὺς εἰς Διαίρεσιν τοῦ ἐγγὺς ἐλάττονος εἴδους. ἂν ὅμως ἐναπολειφθῇ τι, διαλύομεν αὐτὸ εἰς Μονάδας Ἰσοδυνάμους μὲ τὰς τοῦ ἐγγὺς ἐλάττονος εἴδους, καὶ συνάψαντες αὐτὰς ὁμοῦ μὲ τὸν ἀριθμὸν τούτου τοῦ ἐλάττονος εἴδους, ποιοῦμεν αὖθις ἐπ' αὐτῶν τὴν συνήθη Διαίρεσιν, καὶ γράφομεν τὸ Πηλίκον χωρὶς, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον διαιροῦμεν ἅπαντα τὰ εἴδη τοῦ Διαιρετέου. καθὼς καὶ κατωτέρω ἐπὶ τοῦ πρώτου Παραδείγματος γίνεται.

Καν. β΄) Ὅταν δὲ ὁ Διαιρετέος εἶναι ἑνὸς μόνου εἴδους, ὁ δὲ Διαιρέτης τυγχάνῃ ἐκ πολλῶν συγκείμενος, διαλύομεν πρῶτον τὰ μεγαλήτερα εἴδη τοῦ Διαιρέτου εἰς τὸ μικρότερον εἶδος, ἔπειτα ἂν ὁ ἀριθμὸς τούτου τοῦ διαλυθέντος Διαιρέτου εἶναι ἐλάττων τοῦ Διαιρετέου, ποιοῦμεν τὴν συνήθη Διαίρεσιν, ἂν ὅμως μετὰ τὴν διάλυσιν ὁ ἀριθμὸς τοῦ Διαιρέτου γένηται μεῖζον τοῦ Διαιρετέου, τότε αὐξάνομεν πρῶτον καὶ τὸν ἀριθμὸν τούτου τοῦ Διαιρετέου, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν δὶ ἐκείνου τοῦ ἀριθμοῦ, διὰ τοῦ ὁποίου διελύσαμεν καὶ τὰ μείζονα εἴδη τοῦ Διαιρέτου, ἔπειτα ποιοῦμεν τὴν Διαίρεσιν ἐπ' αὐτῶν, καθὼς διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ τρίτου Παραδείγματος ἐμφαίνομεν ταῦτα σαφέστερον.

Καν. γ΄. Ὅτε δὲ καὶ ὁ Διαιρετέος καὶ ὁ Διαιρέτης συνίστανται ἐκ πολλῶν εἰδῶν, καὶ σημαίνουσι ἑκάτεροι Ποσότητας ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ γένους, διαλύομεν πρῶτον καὶ τοὺς δύω εἰς τὸ μικρότερον εἶδος, καὶ τοὺς ἀποκαθιστῶμεν ὁμοειδεῖς,

δεῖς, ἔπειτα ποιοῦμεν ἐπ' αὐτῶν τὴν Διαίρεσιν, καθὼς καὶ κατωτέρω εἰς τὸ τέταρτον Παράδειγμα ταύτην τὴν περίςασιν παραθέτομεν. ὅταν δὲ καὶ ὁ Διαιρετέος καὶ ὁ Διαιρέτης ὑπάρχωσι συγκείμενοι ἐκ πολλῶν εἰδῶν, πλὴν σημαίνωσι Ποσὰ ἑτερογενῆ, τότε διαλύομεν ἑκάτερον εἰς τὸ μικρότερον εἶδος αὐτοῦ, ἔπειτα διαιροῦμεν αὐτούς, ὡς καὶ ἐν τῷ πέμπτῳ Παραδείγματι ποιεῖται.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. α'.

Νὰ διαιρεθῶσι 453 Γρόσια καὶ 8 Παράδ. εἰς 4 ὑποκείμενα. ὅθεν

	Γράσια	Παράδ.	
	453	8	4
	4	40	
	——	——	
	05	48	
	——	4	
	13	——	
	12	08	
	——	8	
λείψανον	1	——	
		0	

τὰ 453 Γρόσια διαιρεθέντα διὰ τῶν 4, παρέχουσι Πηλίκον Γρόσια 113. καὶ μένει ἐξ αὐτῶν ἀδιαίρετον ἓν Γρόσιον, τούτου δὲ εἰς 40 Παράδ. διαλυθέντος, καὶ συναφθέντος μετὰ τῶν λοιπῶν Παράδων, ἀναφύεται ὁ ἀριθμὸς 48, ὁ ὁποῖος διαιρεθεὶς διὰ τῶν 4, παρέχει Πηλίκον Παράδ. 12. ὥστε ἕκαστον τῶν 4 ὑποκειμένων λαμβάνει 113 Γρόσ. καὶ 12 Παράδ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

Ταχυδρόμος τις πεπαγμένως ὁδεύων, εἰς 5 ἡμέρας καὶ 7 ὥρας διήλασε δρόμον 762 Μίλλια, καὶ ζητεῖται, πόσα Μίλλια διήνυσεν οὗτος καθ' ἑκάστην ἡμέραν.

Διαλύομεν πρῶτον τὰς 5 ἡμέρας εἰς ὥρας, πολλαπλασιάζοντες τὸν 5 ἀριθμὸν διὰ τοῦ 24. ὅτι εἴκοσι τέσσαρας ὥρας ἔχει ἡ ἡμέρα, ὥστε προκύπτει ἀριθμὸς ἡμερῶν 120, ἔπειτα συνάψαντες τοῦτον τὸν ἀριθμὸν μετὰ τῶν λοιπῶν 7 ἡμερῶν, ποιοῦμεν τὴν Διαίρεσιν, οὕτω

Μίλλια

762 | 127 ὧραι

6

762

000

γίγονεν ἄρα φανερὸν ὅτι οὗτος ὁ Ταχυδρόμος ἔτρεχε τὴν ὥραν 6 Μίλλια, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιασθέντα διὰ τῶν 24 ὡρῶν, δεικνύουσιν, ὅτι ὥδευε καθ' ἑκάστην ἡμέραν 144 Μίλλια.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ'.

Ἄνθρωπός τις εἰς 2 ὥρας καὶ 20 λεπτὰ ἔτρεξεν 28 Μίλλια ζητεῖται λοιπὸν, πόσα Μίλλια διέτρεξε καθ' ἑκάστην ὥραν.

Ἀφ' οὗ διαλυθῶσιν αἱ 2 ὧραι διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως τῶν 60 (ἐπειδὴ ἑξήκοντα λεπτὰ συμπληροῦσι μίαν ὥραν), προκύπτει ἀριθμὸς 120 λεπτὰ, σὺν αὐτοῖς δὲ συναφθέντων καὶ τῶν 20, γίνονται ἅπαντα 140 λεπτὰ, διὰ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ διαιρεθῶσι τὰ 28 Μίλλια, ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ 28 δὲν δύνανται νὰ διαιρεθῶσι διὰ τῶν 140, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ αὐξήσωμεν καὶ αὐτὰ διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως τοῦ ἀριθμοῦ 60, ἐπειδὴ δι' αὐτοῦ διελύσαμεν καὶ τὸ μεῖζον εἶδος τοῦ Διαιρέτου, τουτέστι τὰς 2 ὥρας εἰς λεπτά. ὅθεν τὰ 28 Μίλ-

λια

λια πολλαπλασιασθέντα διὰ τῶν 60, παρέχουσιν ἀριθμὸν 1680, ἐπὶ τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ Διαίρεσις οὕτως.

1680 | 140

12

140

0280

280

000

ὅθεν γίνεται φανερὸν, ὅτι εἰς κάθε ὥραν ἔτρεξεν 12 Μίλλια.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ δ'.

Νὰ διαιρεθῶσι 16 Γροσ. καὶ 10 Παράδ. διὰ 4 Γροσίων καὶ 2 Παράδων.

Τὰ 16 Γρόσια τοῦ Διαιρετέου διαλυθέντα πρῶτον εἰς Παράδ. καὶ συναφθέντα ἔπειτα μετὰ τῶν λοιπῶν 10 Παράδων, παρέχουσιν ἀριθμὸν 650 Παράδ. διαλυθέντα δὲ καὶ τὰ 4 Γρόσ. τοῦ Διαιρέτου εἰς Παράδ. καὶ συναφθέντα μετὰ τῶν λοιπῶν 2 Παράδων, ποιοῦσιν ἀριθμὸν 162. ὅθεν γίνεται

650 | 162

$4 + \frac{2}{162}$

648

002 ἐναπολειπόμενον.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. ϛ΄.

Ἐργαζόμενός τις, ἔλαβε μισθὸν εἰς 4 Μῆνας καὶ 6 ἡμέρας, Γρόσια 37 καὶ 32 Παράδ. καὶ ζητεῖ νὰ μάθῃ, πόσος εἶναι ὁ μισθὸς ἑκάστου Μηνός.

Διαλυθέντων τῶν 4 Μηνῶν εἰς ἡμέρας, καὶ σὺν αὐταῖς ληφθεισῶν καὶ τῶν 6 λοιπῶν ἡμερῶν, γίγνεται ἀριθμὸς 126 ἡμερῶν. διαλυθέντων δὲ καὶ τῶν 37 Γροσίων εἰς τὸ μικρότερον αὐτῶν εἶδος, τουτέστιν εἰς Παράδ. καὶ σὺν αὐτοῖς ληφθέντων καὶ τῶν 32 Παράδων, προκύπτει ἀριθμὸς 1512 Παράδ. ὅθεν γίνεται ἡ Διαίρεσις οὕτως

Παράδες	Ἡμέραι
1512	126
126	12

0252	
252	

δῆλον ἄρα, ὅτι καθ' ἑκάστην μὲν ἡμέραν ἦν αὐτῷ ὁ μισθὸς 12 Παράδες, καθ' ἕκαστον δὲ Μῆνα ἐγένοντο Παράδες 360 τουτέστι Γρόσια 9.

ΥΠΟΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 59. Αἱ Δείξεις τούτων τῶν πονχέρων Προβλημάτων, ἐπειδὴ εἰσὶν αἱ αὐταὶ μὲ τὰς Δείξεις τῶν ὁμοειδῶν, δὲν παραθέτονται ἐνταῦθα, ὡς περιτταί.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ δ'.

Γενικαὶ Ἰδέαι τῶν Κλασμάτων.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ ά.

§. 60. Κλάσμα τοίνυν ἐστὶ μέρος τινὸς ὅλου ὡς Μονάδος θεωρουμένου, ἢ μέρος ἐστὶ τῆς μονάδος, ὅθεν καὶ τῆς Μονάδος ἐκείνης ἔλαττον ὑπάρχει.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 61. Ἐὰν τι ὅλον, ἢ Μονάς τις διαιρεθῇ εἰς πλείονα μέρη, καὶ ἐξ αὐτῶν ληφθῶσί τινα, λέγεται τότε Κλάσμα. οἷον, ἐὰν διέλωμεν ἓν ὅλον εἰς ἓξ ἴσα μέρη, καὶ ἐξ αὐτῶν ἔχωμεν νὰ λάβωμεν δύω μόνα μέρη, ἐκθέτομεν αὐτὰ οὕτως $\frac{2}{6}$, καὶ τότε καλοῦμεν καὶ αὐτὸ Κλάσμα. ἂν διαιρεθῇ τὸ Γρόσιον εἰς τεσσαράκοντα ἴσα μέρη, ἕκαστον μέρος αὐτῶν δύναται ἴσον μὲ ἕνα Παρᾶν. ὅθεν ἂν θέλωμεν νὰ λάβωμεν ἐξ αὐτῶν μόνον 30 Παράδας, ἐμφαίνομεν οὕτως $\frac{30}{40}$. οὕτω δὴ καὶ $\frac{3}{4}$ σημαίνει, ὅτι τὸ ὅλον, ἢ ἡ Μονὰς διηρέθη εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, καὶ ἐλήφθησαν μόνον τρία τεταρτημόρια. ὥστε ἕκαστον Κλάσμα ἔχει δύω μέρη, τὸ μὲν ἓν δεικνύει εἰς πόσα μέρη τὸ ὅλον διῄρηται, τὸ δὲ ἄλλο ἐμφαίνει πόσα μέρη τοῦ ὅλου παρείληπται ἐπ' αὐτοῦ τοῦ Κλάσματος,

ΟʹΡΙΣΜΟʹΣ β'.

§. 62. Αʹριθμητὴς μὲν Κλάσματος ἐςὶν ἐκεῖνος ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος κεῖται ὑπεράνω τῆς Γραμμῆς, ϗ δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν ληφθέντων μερῶν ἐκ τȣ͂ ὅλȣ. Παρωνυμῶν δὲ, ἢ Παρονομαςὴς Κλάσματος ἐςὶν ὁ ὑποκάτω τῆς Γραμμῆς κείμενος ἀριθμὸς, ὅςις ἐμφαίνει, εἰς πόσα Ἴσα μέρη τὸ ὅλον διῄρηται. ϗ οἱ δύω δὲ κοινῶς ὀνομάζονται Οʹροι τȣ͂ Κλάσματος.

ΟʹΡΙΣΜΟʹΣ γ'

§. 63. Κυρίως μὲν Κλάσματά εἰσιν ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ἐλάττων τȣ͂ Παρομαςȣ͂ οἷον $\frac{3}{4}$, ἢ $\frac{2}{6}$. Καταχρηςικὰ δὲ Κλάσματά εἰσιν ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχȣσι τὸν ἀριθμητὴν ἢ Ἴσον, ἢ μείζονα τȣ͂ Παρονομαςȣ͂, οἷον $\frac{5}{5}$, ϗ $\frac{18}{6}$, ϗ $\frac{13}{4}$, ἐπειδὴ ὅταν ληφθῶσι μέρη πλείονα τῶν, εἰς ὅσα τὸ ὅλον διῄρηται, τὸ Κλάσμα τότε εἶναι μεῖζον

τȣ͂

τοῦ ὅλου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῷ τοῦ Κλάσματος Ὁρισμῷ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 64. Τὰ Καταχρηστικὰ Κλάσματα δύνανται διὰ τῆς Διαιρέσεως νὰ ἀνάγωνται ἢ εἰς ἓν ὅλον μόνον, ἢ (ὅταν ἐναπολείπηταί τι) εἰς ἀκέραιον μετὰ Κλάσματος κυρίου· τουτέστι διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὸν τοῦ Καταχρηστικοῦ Κλάσματος διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ, καὶ τότε τὸ Προκύπτον εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, καθὼς ἐκ τῶν ἀνωτέρω τεθέντων Καταχρηστικῶν Κλασμάτων γίνεται. οἷον ἐκ μὲν τοῦ $\frac{5}{5}$ προκύπτει ἀκέραιος ἀριθμὸς 1, ἐκ δὲ τοῦ $\frac{18}{6}$ γίνεται 3, ἐκ δὲ τοῦ $\frac{13}{4}$ προκύπτει 3 καὶ $\frac{1}{4}$.

ὉΡΙΣΜΌΣ δ'.

§. 65. Ἁπλοῦν Κλάσμα ὀνομάζεται τὸ ἐξ ἑνὸς ἀριθμητοῦ καὶ ἐξ ἑνὸς Παρονομαστοῦ συνιστάμενον· οἷον $\frac{2}{4}$, $\frac{10}{17}$. Σύνθετον δὲ Κλάσμα, ἢ (ὡς ἄλλοι λέγουσι) Κλάσμα Κλάσματός ἐστι μόριον, ἢ μόρια μερῶν τινος ὅλου, τουτέστι τὸ ἐκ πολλῶν ἁπλῶν Συγκείμενον. ὡς τὸ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{1}{2}$. π. χ. ἀπὸ τοῦ ἡμίστεώς ποιος όλε πρέπει να ληφθώσι πάλιν δύω τριτημόρια, αυτά δε τα Κλάσματα ανάγονται εις απλώς Κλάσμα, εάν πολλαπλασιασθώσι μετ' αλλήλων κατά τες ρηθησομένες Κανόνας εν τω (§. 84.).

ΘΕΩΡΗΜΑ α.

§. 66. Τοσάκις περιέχεται εν Κλάσμα εις το όλον, οσάκις ο αριθμητής αυτέ εις τον Παρονομαστήν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ο μεν Παρονομαστής τε Κλάσματος περιέχει τόσα μέρη, εις όσα διηρέθη το όλον, ο δε αριθμητής παρίστησιν, όσα μέρη ελήφθησαν εκ τε Διαιρεθέντος όλε, τετ' έστιν εμφαίνει αυτό το Κλάσμα (§. 62). άρα το Κλάσμα έχει προς το όλον τον αυτόν λόγον, τον οποίον έχει ο αριθμητής αυτέ προς τον Παρονομαστήν.

ΠΟΡΙΣΜΑ α.

§. 67. Τα Κλάσματα άρα, των οποίων οι αριθμηταί έχεσι προς τες Παρονομαστάς τον αυτόν λόγον, τετέστι περιέχονται ισάκις εν τοις ιδίοις Παρονομασταίς, ίσα αλλήλοις εισίν. π. χ. $\frac{2}{4}$ και $\frac{3}{6}$. επειδή ο 2 αριθμητής περιέχεται εν τω 4 Παρονομασὶ τοσάκις, ὁσάκις ὁ 3. Ἀριθμητὴς τῷ ἑτέρε Κλάσματος ἐν τῷ αὐτῷ Παρονομαςῇ 6. ὡσαύτως $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{90}{270}$ Ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἔλαττον δὲ Κλάσμα εἶναι ἐκεῖνο, τῷ ὁποίε ὁ Ἀριθμητὴς περιέχεται ἐν τῷ οἰκείῳ Παρονομαςῇ πλειονάκις, παρὰ ὁ Ἀριθμητὴς τῷ ἑτέρε Κλάσματος ἐν τῷ αὐτῷ Παρονομαςῇ. π. χ. τὸ $\frac{3}{24}$ ὑπάρχει ἔλαττον τῷ $\frac{1}{6}$. ὡσαύτως καὶ τὸ $\frac{4}{7}$ ἔλαττόν ἐστι τῷ $\frac{5}{8}$. ὁ δὲ τούτε λόγος εἶναι, ὅτι ἐπειδὴ ὁ μὲν Παρονομαςὴς ἐμφαίνει τὰ μέρη τῷ Διαιρεθέντος ὅλε, ὁ δὲ Ἀριθμητὴς σημαίνει τὰ ἐκ τούτε ληφθέντα μέρη, πρέπει νὰ λαμβάνωνται καὶ τὰ δύω πάντοτε κατά τινα λόγον, καὶ ἂν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὅλον διαιρεθῇ εἰς διάφορα μέρη π. χ. ἤδη μὲν εἰς 12 μέρη, ἔπειτα εἰς 18, καὶ πάλιν εἰς 24, κατ' ἀνάγκην ἐλαττοῦνται ταῦτα τὰ μέρη τοσοῦτον, ὅσον πλεῖον διαιροῦνται. ὥστε πρέπει νὰ αὐξάνηται καὶ ὁ Ἀριθμητὴς δι' ἀναλόγων Ποσοτήτων, ἂν εἶναι χρεία νὰ μένῃ ἡ Ἰσότης. τουτέστιν ἂν πρότερον ἐλήφθη ἐκ τῷ ὅλε τὸ $\frac{6}{12}$, μετὰ ταῦτα διὰ νὰ μένῃ τὸ Ἴσον, πρέπει νὰ ληφθῇ $\frac{9}{18}$, ἢ $\frac{12}{24}$. ὅθεν ἂν μὲν καὶ τὰ δύω μέρη αὐξυνθῶσι διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως ἴσων Ποσοτήτων, τὸ Κλάσμα μένει Ἴσον. ἂν δὲ ὁ Ἀριθμητὴς πολλαπλασιασθῇ μετὰ Ποσότητος μείζονος, παρὰ ὁ Παρονομαςής, τὸ Κλάσμα ἔσαι μεῖζον. ὅταν ὅμως ὁ Παρονομαςὴς πολλαπλασιασθῇ μετὰ μείζονος, παρὰ ὁ Ἀριθμητής, ἔσεται ἐξ ἐναντίας τούτε τὸ Κλάσμα ἔλαττον.

ΠΟΡΙΣΜΑ β.

§. 68. Ἐντεῦθεν εὐκόλως δύναται νὰ γένῃ δῆλον, ποῖα Κλάσματα εἶναι Ἴσα ἀλλήλοις, ἢ διαφέροντα, τὸ ὁποῖον εὐθὺς ἅμα ἐν τῇ ἀρχῇ δὲν ἦτον γνωςόν. πολλαπλασιάζομεν δηλονότι τὸν Ἀριθ-

μητὴν

μητὴν ἑκατέρου Κλάσματος μετὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ ἑτέρου, ϗ ἂν μὲν τὰ ἐξ αὐτῶν Γινόμενα ὦσιν ἴσα, εἰσὶ ϗ τὰ Κλάσματα ἴσα, οὗτινος δὲ Κλάσματος ὁ Ἀριθμητὴς πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ ἑτέρου, ἤθελε δώσῃ μεῖζον Γινόμενον, ϗ τὸ Κλάσμα ἐκεῖνο ἔσται μεῖζον. ὅθεν τὸ $\frac{8}{24}$ ϗ $\frac{1}{3}$ εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις. ἐπειδὴ ϗ τὰ Γινόμενα ἑνὸς ἑκάστου τῶν Ἀριθμητῶν εἰσὶν ἀλλήλοις ἴσα. τὸ δὲ $\frac{5}{8}$ Κλάσμα εἶναι μεῖζον τοῦ $\frac{4}{7}$. ἐπειδὴ πολλαπλασιασθεὶς ὁ Ἀριθμητὴς 5 μετὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 7, παρέχει Γινόμενον 35, πολλαπλασιασθεὶς ὅμως ὁ 4 μετὰ τοῦ 8, παρέχει Γινόμενον 32 μόνον, ὅταν δὲ Κλάσματα ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστάς, τότε μεῖζον Κλάσμα ἔσται τὸ ἔχον Ἀριθμητὴν μείζονα, π. χ. τὸ $\frac{5}{7}$ εἶναι μεῖζον τοῦ $\frac{3}{7}$. ὅταν δὲ οἱ Ἀριθμηταὶ ὑπάρχουσιν ἴσοι, μεῖζον Κλάσμα ἔσεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει Παρονομαστὴν ἐλάττονα, οἷον $\frac{4}{6}$ ἐστὶ μεῖζον τοῦ $\frac{4}{8}$. ἐπειδὴ τὸ Κλάσμα ἔχει πρὸς τὸ ὅλον πάντοτε, ὡς ὁ Ἀριθμητὴς πρὸς τὸν αὐτοῦ Παρονομαστὴν §. 66.

ΟΡΙΣΜΟΣ ι'.

§. 69. Μικτὴ Ποσότης ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐξ ἀκεραίου ϗ Κλάσματος. οἷον $8\frac{3}{4}$.

ΘΕΩ'-

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ β'.

§. 70. Α῎ν καὶ οἱ δύω Ο῎ροι ἑνὸς Κλάσματος, τουτέστιν ὁ Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ἡ Δύναμις τοῦ Κλάσματος δὲν λαμβάνει τινὰ μεταβολήν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πολλαπλασιασθέντος μὲν τοῦ ἀριθμητοῦ, γίνεται μεῖζον τὸ Κλάσμα τοσάκις, ὅσας Μονάδας περιέχει ὁ Πολλαπλασιαστής, διὰ τοῦ ὁποίου ἐπολλαπλασιάσθη αὐτὸς ὁ ἀριθμητής. π. χ. ἂν τοῦ $\frac{3}{5}$ ὁ ἀριθμητὴς πολλαπλασιασθῇ διὰ τοῦ 2, γίνεται $\frac{6}{5}$, τὸ ὁποῖον δύναται μεῖζον δὶς τόσον, ὅσον ἐδύνατο πρότερον. πολλαπλασιασθέντος δὲ τοῦ Παρονομαστοῦ, ἐλαττοῦται τὸ Ποσὸν τοσάκις, ὁσάκις περιέχει τὴν Μονάδα ὁ Πολλαπλασιαστής, π. χ. ἂν τοῦ ἀνωτέρου $\frac{6}{5}$ πολλαπλασιασθῇ ὁ Παρονομαστὴς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 2, γίνεται ἓν Ποσὸν $\frac{6}{10}$, τὸ ὁποῖον σημαίνει μόνον ἓν δεύτερον τοῦ ὅσον ἐσήμαινε πρότερον: ὥστε τὸ $\frac{6}{10}$ δύναται ἴσον μὲ τὸ $\frac{3}{5}$. ἂν δὲ τοῦ $\frac{6}{10}$ ὁ ἀριθμη-

τής

της διαιρεθῇ διὰ τῦ 2, μένει $\frac{3}{10}$, τυτέςι τὸ ἥμισυ τῦ προτέρυ, ἂν δὲ διαιρεθῇ καὶ ὁ Παρονομαςὴς τῦ $\frac{3}{10}$ διὰ τῦ 2, προκύπτει $\frac{3}{5}$ τυτέςι γίνεται διπλασίως μεῖζον, καὶ ἑπομένως $\frac{6}{10}$ εἶναι Ἴσον τῷ $\frac{3}{5}$. ἄρα ἂν καὶ οἱ δύω Ὅροι ἑνὸς Κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ ... κ. τ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 71. Ἐντεῦθεν πληροφορεῖταί τις, κατὰ ποῖον τρόπον δύνανται διάφορα Κλάσματα (ἔςωσαν καὶ ἐξ ὁποσωνδήποτε μεγίςων ἀριθμῶν συνιςάμενα) νὰ ἰσοδυναμῶσι μὲ ἓν ἕτερον Κλάσμα (κᾂν ἐξ ἐλαχίςων ἀριθμῶν συγκείμενον ᾖ) καὶ νὰ ἀναχθῶσιν εἰς τῦτο, ἐπειδὴ ἀφ' ὗ εὑρεθῇ ὁ κοινὸς Παράγων, καὶ μάλιςα ὁ μέγιςος, ὅςις διαιρεῖ καὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν Παρονομαςὴν ἀκριβῶς, δύναται νὰ γένῃ δι' αὐτῦ ἡ Διαίρεσις, καὶ ἀντὶ τῶν προτέρων Ποσοτήτων γράφονται τὰ ἀ[illegible]όμενα Πηλίκα, τὰ ὁποῖα εἶναι Ἰσοδύναμα μὲ τὸ πρότερον Κλάσμα. ὁ τοιῦτος κοινὸς Παράγων ὀνομάζεται Κοινὸν καὶ Μέγιςον Μέτρον, ἢ Κοινὸς Μέγιςος Διαιρέτης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α'.

§. 72. Νὰ εὑρίσκωμεν τὸ Κοινὸν Μέγιςον Μέτρον τῦ Κλάσματος.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἢ ΛΥΣΙΣ.

Καν. α'.) Διαιρῦμεν τὸν Παρονομαςὴν διὰ τῦ ἀριθμητῦ, καὶ ἂν μετὰ τὴν Διαίρεσιν δὲν μείνῃ τι λείψανον,

αὐτὸς

αὐτὸς ὁ ἀριθμητὴς τότε ὑπάρχει τὸ Κοινόν Μέγισον Μέτρον. π. χ. $\frac{7}{56}$. ἐπειδὴ διαιρεθέντων τῶν 56 διὰ τοῦ 7, δὲν ἐναπολείπεταί τι, ἐστιν ἄρα ὁ 7 τὸ Κοινόν Μέτρον.

Κάν. β΄.) Ἂν δὲ μετὰ τὴν πρώτην Διαίρεσιν ἐναπολειφθῇ τι λείψανον εἶναι δῆλον, ὅτι δὲν εὑρέθη ἔτι τὸ Κοινὸν Μέτρον, ὅθεν χωροῦμεν αὖθις εἰς τὸ ἔργον, διαιροῦντες ἐπὶ πλέον, οὕτως ὅμως, ὥστε τὸν μὲν ὄντα πρότερον Διαιρέτην ποιοῦμεν Διαιρετέον, τὸ δὲ μετὰ τὴν Διαίρεσιν ἐναπολειπόμενον λαμβάνομεν ὡς Διαιρέτην, τοῦ Πηλίκου μηδένα λόγον ποιούμενοι, ἕως οὗ μετά τινα Διαίρεσιν δὲν ἐναπολείπηται οὐδὲν, ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ κατὰ τὴν ἐσχάτην Διαίρεσιν Διαιρέτης γενόμενος, αὐτὸς εἶναι τὸ Κοινὸν καὶ Μέγισον Μέτρον. ὅταν ὅμως μετά τινα Διαίρεσιν ἐναπολείπηται Μονὰς, τότε εἶναι Σημεῖον, ὅτι ἐκεῖνο τὸ Κλάσμα δὲν ἔχει ἕτερον Κοινὸν Μέγισον Μέτρον, παρὰ τὴν Μονάδα, ἡ ὁποία δὲν διαιρεῖ, ὡς πρότερον εἴρηται. οἷον $\frac{53}{120}$ κ. τ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. α΄.

Ζητηθήτω τὸ Κοινὸν Μέγισον Μέτρον τοῦ Κλάσματος $\frac{252}{315}$.

διαιροῦμεν τὰ 315 διὰ τῶν 252 κατὰ τοὺς ἤδη γνωστοὺς Κανόνας τῆς Διαιρέσεως,

$$\begin{array}{r|l} 315 & 252 \\ \hline & 1 \\ 252 & \\ \hline 63 & \end{array}$$

ὥστε

ὥςε μετὰ τὴν πρώτην ταύτην Διαίρεσιν ἐναπολείπονται 63, τὰ ὁποῖα Διαιρέτην ποιοῦντες, διαιροῦμεν ἤδη τὰ 252 οὕτως .

$$\begin{array}{r|l} 252 & 63 \\ \hline & 4 \\ 252 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ἐπειδὴ τοίνυν ὁ 63 διαιρεῖ τὰ 252 ἀκριβῶς, τουτέςι χωρὶς νὰ μείνῃ τι μετὰ τὴν Διαίρεσιν λείψανον, γίνεται δῆλον, ὅτι οὗτος ὁ 63 ἀριθμὸς εἶναι τὸ Κοινὸν Μέγιςον Μέτρον τοῦ $\frac{252}{315}$ Κλάσματος· ἡ δὲ Δεῖξις εἶναι δήλη ἐξ αὐτῆς τῆς Πράξεως.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

Ἔςω εἰς εὕρεσιν τὸ Κοινὸν Μέγιςον Μέτρον τοῦ Κλάσματος $\frac{189}{513}$.

διαιρεθέντων τῶν 513 διὰ τῶν 189, προκύπτει Πηλίκον 2, καὶ μένει λείψανον 135, τὰ ὁποῖα Διαιρέτην ποιοῦντες, διαιροῦμεν δι᾽ αὐτῶν τὰ 189 οὕτως . . . .

$$\begin{array}{r|l} 513 & 189 \\ \hline & 2 \\ 378 & \\ \hline 135 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 189 & 135 \\ \hline & 1 \\ 135 & \\ \hline 54 & \end{array}$$

ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ μετὰ τὴν δευτέραν ταύτην Διαίρεσιν ἐναπολείπονται 54 εἶναι δῆλον, ὅτι τὰ 135 δὲν εἶναι τὸ Κοινὸν Μέγιςον

Μέτρον, ὅθεν διὰ τῶν ἐναπολειφθέντων 54 διαιροῦμεν τοὺς 135 οὕτως . . . . 135 | 54

2

108

——

27

ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ μετὰ τὴν τρίτην Διαίρεσιν ἐναπελείφθησαν 27, πρέπει νὰ γένῃ πάλιν Διαίρεσις, ὅθεν διαιροῦμεν τοὺς 54 διὰ τῶν 27 οὕτως . . . . 54 | 27

2

54

——

0

ὁ 27 ἄρα ἀριθμὸς εἶναι τὸ Κοινὸν καὶ Μέγιστον Μέτρον τοῦ Κλάσματος $\frac{189}{513}$. ὅστις δύναται νὰ διέλῃ καὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν Παρονομαστὴν ἐπ' ἀκριβές. κ. τ.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ β'.

§. 73. Νὰ ἀγάγωμεν τὸ δοθὲν Κλάσμα εἰς ἐλαχίστους Ὅρους χωρὶς νὰ λυμανθῇ ἡ Δύναμις αὐτοῦ, λέγω, νὰ εὕρωμεν ἕτερον Κλάσμα Ἴσον τῷ δοθέντι, καὶ ἐν Μικροτάτοις ἀριθμοῖς ἐμφαινόμενον.

ΠΡΑΚ-

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Καν. α΄.) Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ Κοινὸν Μέγιστον Μέτρον κατὰ τοὺς προτεθέντας Κανόνας.

Καν. β΄,) Διαιροῦμεν ἔπειτα δι᾽ αὐτοῦ τοῦ Κοινοῦ Μέτρου καὶ τοὺς δύω Ὅρους τοῦ δοθέντος Κλάσματος, λέγω τόντε ἀριθμητὴν καὶ Παρονομαστὴν, καὶ τότε τὰ ἐκ τῆς Διαιρέσεως ταύτης προκύψαντα Πηλίκα εἶναι αὐτὸ τὸ Κλάσμα ἐν ἐλαχίστοις Ὅροις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Τὸ μὲν $\frac{252}{315}$ διὰ τῆς Διαιρέσεως τοῦ Κοινοῦ Μέτρου 63 ἀνάγεται εἰς $\frac{4}{5}$. τὸ δὲ $\frac{189}{513}$ διὰ τῆς Διαιρ. τοῦ Κοινοῦ Μέτρου 27 ἀνάγεται εἰς τὸ $\frac{7}{19}$. τὸ δὲ $\frac{255}{663}$ εἶναι Ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{5}{13}$. τὸ δὲ $\frac{6}{264}$ μὲ τὸ $\frac{1}{44}$. τὸ δὲ $\frac{481}{629}$ ἀνάγεται εἰς τὸ $\frac{13}{17}$. τὸ δὲ $\frac{171}{399}$ εἰς τὸ $\frac{3}{4}$. τὸ δὲ $\frac{83}{415}$ εἶναι Ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{1}{5}$. τὸ δὲ $\frac{60}{90}$ μὲ τὸ $\frac{6}{9}$ καὶ $\frac{2}{3}$, τὸ δὲ $\frac{100}{\text{[illegible]}}$ ἀνάγεται εἰς τὸ $\frac{10}{15}$ καὶ εἰς τὸ $\frac{2}{3}$. τὸ δὲ $\frac{125}{450}$ εἰς τὸ $\frac{25}{90}$ ἢ εἰς τὸ $\frac{5}{18}$ ἐκ δὲ τοῦ $\frac{192}{256}$ γίνονται κατὰ τὸ ἥμισυ τὰ ἑξῆς,

$\frac{96}{128}$, $\frac{48}{64}$, $\frac{24}{32}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{3}{4}$. διότι ἐπειδὴ ἕκαστον τούτων, τῶν Κλασμάτων ἔχει ἐν τῷ τέλει ἄρτιον ἀριθμὸν, δύναται νὰ γίνηται ἡ Διαίρεσις πάντοτε διὰ τοῦ 2 συνεχῶς. ἀρτίους δὲ ἀριθμοὺς ὀνομάζομεν ἐκείνους, οἵτινες δύνανται νὰ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ 2, οἷον 2, 4, 6, 8, κ. τ. Περιττοὶ δὲ ἀριθμοί εἰσι τοὐναντίον, οἷον, 3, 5, 7, κ. τ.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ὅταν διαιρῆται καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος, τότε ἡ Δύναμις τοῦ Κλάσματος δὲν λυμαίνεται κατὰ τὸ προσηθὲν (§. 70.) Θεώρημα, ἐνταῦθα δὲ διαιρεῖται καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς διὰ τοῦ κοινοῦ Μέτρου, καθὼς διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος. ἡ Δύναμις ἄρα τοῦ Κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τὸ Κοινὸν Μέτρον εἶναι τὸ Μέγιστον, καὶ ὡς τοιοῦτον παρέχει τὰ μικρότατα Πηλίκα, ἄρα κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἄγεται τὸ Κλάσμα εἰς ἐλαχίστους Ὅρους.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ'.

§. 74. Νὰ μεταποιήσωμεν, ἢ νὰ ἀγάγωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς Κλάσμα.

ΠΡΑΚΤΕ'Α ἡ ΛΥ'ΣΙΣ.

Γράφομεν ὑποκάτω τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ μίαν Μονάδα ὡς Παρονομαστὴν, π. χ. ἐκ τοῦ 8 γίνεται $\frac{8}{1}$, ἐκ δὲ τοῦ 32 ποιοῦμεν $\frac{32}{1}$.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἕκαστος ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρεθῇ διὰ τῆς Μονάδος, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ποσῶς ἡ Δύναμις αὐτοῦ, ὅθεν δύναταί τις νὰ γράψῃ ὑποκάτω τινὸς ἀκεραίου τὴν Μονάδα ὡς Διαιρέτην. ἀλλὰ μὴν κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον ἐμφαίνεται ἀριθμὸς κεκλασμένος, ἄρα ἕκαστος ἀριθμὸς δύναται οὕτω νὰ μεταποιηθῇ εἰς Κλάσμα.

ΠΡΟ΄ΒΛΗΜΑ δ΄.

§. 75. Νὰ μεταποιήσωμεν τινα ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς Κλάσμα, δοθέντος τοῦ Παρονόματος.

ΠΡΑΚΤΕ΄Α ἡ ΛΥ΄ΣΙΣ.

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ ὅλον μετὰ τοῦ δοθέντος Παρονομαστοῦ, τὸ δὲ ἐκ τούτων Γινόμενον ποιοῦμεν ἀριθμητήν, καὶ γράφομεν ἔπειτα ὑποκάτω αὐτοῦ τὸν δοθέντα Παρονομαστήν. π. χ. μεταποιεῖται ὁ 8 ἀριθμὸς εἰς Κλάσμα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δίδοται ὁ Παρονομαστὴς 6, ἂν πολλαπλασιασθῇ πρῶτον ὁ 8 διὰ τοῦ 6, καὶ ἔπειτα γραφθῇ ὁ 6 ὑποκάτω τοῦ Γινομένου, οἷον $\frac{48}{6}$.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς πολλαπλασιάζωνται καὶ διαιροῦνται διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος, ἡ Δύναμις

ναμις τότε δὲν λαμβάνει τινὰ μεταβολὴν, ἀλλὰ μὴν ἐνταῦθα τὸ δοθὲν ἀκέραιον ἐπολλαπλασιάσθη κ̀ διῃρέθη διὰ τᾶ αὐτᾶ ἀριθμᾶ, ἡ Δύναμις ἄρα δὲν μεταβέβληται, κ̀ ἑπομένως τὸ ἀκέραιον κατὰ τὸν ἀνωτέρω Κανόνα μεποιήθη ὀρθῶς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 76. Γίνεται τᾶτο καταδηλον, ἂν διὰ τᾶ αὐτᾶ Παρονομαςᾶ διαιρεθῆ πάλιν ὁ ἀριθμητὸς, ἐπειδὴ μετὰ τὴν Διαίρεσιν θέλει π.οιύψει ὁ πρότερον ἀκέραιΘ ἀριθμός. διότι ἡ Διαίρεσις πρέπει να διαλύη ἐκεῖνο, ὅτι διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως συνθέτεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ έ.

§. 77. Νὰ ἀγάγωμεν Κλάσματα διαφόρας Παρονομαςὰς ἔχοντα ἐπὶ τὰς αὐτὰς Παρονομαςάς.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

Καν. ά.) Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν ἑκάςα Κλάσματος διὰ πάντων τῶν Παρονομαςῶν ἐκτὸς τᾶ ἰδία μόνον, τᾶτέςι πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν τᾶ πρώτα Κλάσματος διὰ τᾶ Παρονομαςᾶ τᾶ δευτέρα, κ̀ πάλιν τὸ ἐκ τάτων Γινόμενον διὰ τᾶ Παρονομαςᾶ τᾶ τρίτα Κλάσματος, κ̀ αὖθις τὸ ἐκ τάτων Παραγόμενον πολλαπλασιάζομεν διὰ τᾶ Παρονομαςᾶ τᾶ τετάρτα Κλάσματος, κ̀ ἅτως ἐφεξῆς. ἔπειτα ἀρχόμεθα πάλιν κ̀ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τᾶ δευτέρα Κλάσματος διὰ τᾶ Παρονομαςᾶ τᾶ πρώτα Κλάσματος, μετὰ ταῦτα δὲ διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ τρίτου, τοῦ τετάρτου, κ. τ. ὥστε κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πολλαπλασιάζομεν ἅπαντας τοὺς ἀριθμητὰς τῶν τυχόντων Κλασμάτων. τὸ δὲ Γινόμενον, ὁποῦ παράγεται ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως τοῦ ἑνὸς ἀριθμητοῦ καὶ Παρονομαστῶν τῶν ἄλλων Κλασμάτων, ἔσται ἀριθμητὴς αὐτοῦ τοῦ Κλάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς ἐπολλαπλασιάσθη.

Καν. β.) Εἶτα δὲ πολλαπλασιάζομεν ἅπαντας τοὺς Παρονομαστὰς μετ' ἀλλήλων, καὶ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον ἔσται ὁ Κοινὸς Παρονομαστὴς εἰς ἐκεῖνα τὰ δοθέντα Κλάσματα.

Π. χ. διὰ νὰ φέρωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν τὰ Κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{5}$, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὸν 2 διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 5, ὥστε προκύπτει Γινόμενον ὁ 10, καὶ οὗτος γίνεται ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου Κλάσματος· ἔπειτα μεταβαίνομεν, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν 4 ἤτοι τὸν ἀριθμητὸν τοῦ δευτέρου Κλάσματος, διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 3, ὥστε παράγεται ἀριθμὸς 12, ὅστις ἔσται ἤδη ἀριθμητὴς τοῦ δευτέρου Κλάσματος. τέλος πολλαπλασιάζομεν καὶ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ πρώτου Κλάσματος μετὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ δευτέρου, λέγω τὸν 3 μετὰ τοῦ 5. ὥστε προκύπτει Γινόμενον 15, καὶ οὗτος ὁ 15 ὑπάρχει ὁ κοινὸς Παρονομαστὴς καὶ τοῖς δυσὶ Κλάσμασιν. οἷον $\frac{10}{15}$ καὶ $\frac{12}{15}$, ἢ $\frac{10 \text{ καὶ } 12}{15}$.

Διὰ νὰ ἀγάγωμεν αὖθις εἰς τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστὰς αὐτὰ τὰ Κλάσματα $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{8}$, καὶ $\frac{4}{5}$, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν 3 διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 3, ὥστε προκύπτει Γινόμενον ὁ 9, τοῦτον δὲ τὸν 9 πολλαπλασιάζομεν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 5, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον, τὸ ὁποῖον εἶναι 45, ὑπάρχει ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου Κλάσματος, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὸν

τοῦ

τοῦ δευτέρου Κλάσματος, λέγω τὸν 2 διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 7, ϗ τὸ ἐξ αὐτῶν Παραγόμενον 14 πολλαπλασιάζομεν αὖθις διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 5, ὥστε προκύπτει ἐξ αὐτῶν Γινόμενον 70, ϗ εἶναι ἀριθμητὴς τοῦ δευτέρου Κλάσματος, κατ' αὐτὸν δὲ τὸν τρόπον πολλαπλασιάζομεν ϗ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ τρίτου Κλάσματος μετὰ τῶν 7 ϗ 3 Παρονομαστῶν, ὥστε τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον εἶναι 84. τέλος δὲ πολλαπλασιάζομεν ὁμοῦ ϗ ἅπαντας τοὺς Παρονομαστάς, λέγω τὸν 7, 3, ϗ 5, ὥστε ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως αὐτῶν προκύπτει ὁ 105, ϗ οὗτος εἶναι ὁ κοινὸς Παρονομαστὴς ϗ εἰς τὰ τρία ταῦτα Κλάσματα· οἷον $\frac{45}{105}$, $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$. ἅπαντα ὁμοῦ

$$\frac{45 \text{ ϗ } 70 \text{ ϗ } 84}{105}.$$

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὅταν ϗ οἱ δύω Ὅροι τινὸς Κλάσματος τουτέστι ϗ ὁ ἀριθμητὴς ϗ ὁ Παρονομαστὴς πολλαπλασιασθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος, ἡ Δύναμις τοῦ Κλάσματος δὲν βλάπτεται, ἀλλὰ μὴν κατὰ τοὺς ἀνωτέρω Κανόνας ϗ ὁ ἀριθμητὴς ϗ ὁ Παρονομαστὴς ἑκάστου Κλάσματος πολλαπλασιάζεται διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος, ἄρα ἡ Δύναμις δὲν μεταβάλλεται. ϗ ἐπειδὴ δὲ οἱ αὐτοὶ Παράγοντες, παρέχουσι τὸ αὐτὸ Γινόμενον, ὁ Παρονομαστὴς ἄρα ἑκάστου Κλάσματος πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τῶν ἄλλων Παρονομαστῶν, παρέχει τὸ αὐτὸ Γινόμενον, ϗ ἑπομένως Παρονομασταὶ εἰσὶν Ἴσοι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

S. 78, Δύναται ἔτι νὰ γίνηται ἡ ἀγωγὴ τῶν Κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν ϗ κατὰ τὸν ἑπόμενον τρόπον. πολλαπλασιάζομεν δηλονότι τοὺς Παρονομαστὰς μετ' ἀλλήλων, τὸ δὲ ἐκ τούτῶν Γινομένων ὑπάρχει ὁ Κοινὸς τοῖς Κλάσμασι Παρονομαστής. ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ἀριθμητὴν διὰ τοῦ κοινοῦ Παρονομαστοῦ, καὶ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον διαιροῦμεν με τὸν πρότερον Παρονομαστὴν ἐκείνου τοῦ Κλάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς ἐπολλαπλασιάσθη, τὸ δὲ ἐκ τῆς Διαιρέσεως Πηλίκον εἶναι ὁ νέος ἀριθμητής.

Π. χ. $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{7}$ ἀναχθέντα, γίνονται $\frac{105}{280}$, $\frac{112}{280}$, $\frac{200}{280}$,

Ὁμοίως καὶ $\frac{9}{10}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{6}$ γίνονται $\frac{648}{720}$, $\frac{420}{720}$, $\frac{600}{720}$.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ έ.

Περὶ τῶν ἀριθμητικῶν Πράξεων, ἢ λογισμῶν ἐν Κλάσμασι.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ά.

§. 79. Νὰ συνάπτωμεν Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥ'ΣΙΣ.

Καν. ά.) Α'ν τὰ συναφθησόμενα Κλάσματα δὲν ἔχωσι τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, ἀνάγομεν αὐτὰ εἰς ἕνα κοινὸν Παρονομαστὴν κατὰ τὰς γνωστὰς ἤδη Κανόνας.

Καν. β'.) Ἔπειτα συνάπτομεν τὰς ἀριθμητὰς πάντων, ϗ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν κοινὸν Παρονομαστήν.

Π. χ. ἐκ τῶ $\frac{2}{5}$ ϗ $\frac{4}{5}$ γίνεται $\frac{6}{5}$

τὰ δὲ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ γίνονται $\frac{8}{12}$ ϗ $\frac{9}{12}$, τυτέςι $\frac{17}{12}$

τὰ δὲ $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$ γίνονται $\frac{35}{70}$, $\frac{42}{70}$, $\frac{20}{70}$ τυτέςι $\frac{97}{70}$.

ΔΕΙ̃ΞΙΣ.

Ὅταν τὰ Κλάσματα ἔχωσι διαφόρυς Παρονομαςὰς, εἰσὶ Ποσότητες Ἑτεροειδεῖς, ἐπειδὴ ἐν αὐτοῖς καθορᾶται, ὅτι τὰ ὅλα εἰσὶ διῃρημένα ἑτεροειδῶς, ϗ δὲν δύνανται νὰ συναφθῶσιν ἀλλήλοις, πρὸτῦ νὰ γένωσιν ὁμοειδῆ ἀναχθέντα ἐπὶ τὸν κοινὸν Παρονομαςήν. πλὴν δὲ, ἐπειδὴ οἱ ἀριθμηταὶ δεικνύυσι τὴν πληθὺν τῶν μερῶν, ἡ δὲ Σύναψις εἶναι μία ἄθροισις τῶν μερῶν, πρέπει ἄρα νὰ συναφθῶσιν οἱ ἀριθμηταὶ μόνον, διὰ νὰ ἀναφανῇ τὸ Κεφάλαιον ὅλων τῶν ληφθέντων μερῶν.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ α.

§. 80. Ὅταν δὲ ἔχωμεν νὰ συνάψωμεν Μικτὸν τινὰ ἀριθμὸν, ἀκέραιον δηλονότι ϗ Κλάσμα, τότε μεταποιῦμεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον εἰς Κλάσμα, ὡς ἐν τῷ (§. 74.) ἐδείχθη, ἔπειτα ἀγχγόντες αὐτὰ εἰς κοινὸν Παρονομαστὴν, συνάπτομεν τοὺς τούτων ἀριθμητάς. π. χ. ἔσωται εἰς Σύναψιν τὸ 8 & $\frac{1}{3}$. ὅθεν ποιοῦμεν πρῶτον $\frac{8}{1}$ καὶ $\frac{1}{3}$, ἔπειτα $\frac{24}{3}$ $\frac{1}{3}$ τουτέστι $\frac{25}{3}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

§. 81. Ὅταν δὲ τὸ ἄθροισμα ὑπάρχῃ Κλάσμα καταχρηστικὸν, μεταποιοῦμεν αὐτὸ εἰς ἀκέραιον ἀριθμὸν, διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ. π. χ. ἐκ τῶν ἀνωτέρω Κλασμάτων τὸ μὲν $\frac{6}{5}$ μεταποιεῖται εἰς 1 $\frac{1}{5}$, τὸ δὲ $\frac{8}{8}$ εἰς 1. τὸ δὲ $\frac{17}{12}$ ἄγεται εἰς 1 $\frac{5}{12}$. τὸ δὲ $\frac{97}{70}$ εἰς 1 $\frac{27}{70}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β'.

§. 82. Νὰ ἀφαιρῶμεν Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

Καν. α'.) Ἄγομεν πρῶτον τὰ δοθέντα Κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, ἐὰν δὲν ἔχωσι τὸν αὐτόν.

Καν. β'.) Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὸν ἐλάσσονα ἀριθμητὴν ἀπὸ τοῦ μείζονος, καὶ οὕτω γέγονε τὸ ζητούμενον.

Π. χ. ἀφαιρεθέντος τοῦ $\frac{2}{5}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{4}{3}$, μένει $\frac{2}{5}$.

ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{5}{6}$, μένει $\frac{3}{18}$.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἐπειδὴ Ποσὰ, καθὼς εἶναι τὰ Κλάσματα, ἔχοντα διαφόρους Παρονομαστὰς, δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπ᾽ ἀλλήλων. πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναχθῶσιν εἰς ἕνα κοινὸν Παρονομαστὴν, ἐπειδὴ δὲ ζητεῖται ἡ Διαφορὰ τῶν μερῶν, ἀφαιρεῖται ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς τῶν μερῶν ἀπὸ τοῦ μείζονος, τουτέστιν ὁ μικρότερος ἀριθμητὴς ἀπὸ τοῦ μεγαλητέρου.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 83. Ὅταν τύχωσι Μικτοὶ ἀριθμοὶ, μεταποιοῦμεν πρῶτον τοὺς ἀκεραίους εἰς Κλάσματα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. π. χ. ἐὰν ζητῆται νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τοῦ $2\frac{1}{2}$, μεταποιοῦμεν πρῶτον τὸ $2\frac{1}{2}$ εἰς $\frac{5}{2}$, ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὸ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{5}{2}$ κατὰ τοὺς ἀνωτέρω Κανόνας, τουτέστιν ἀφ᾽ οὗ ἀναχθῶσι τὸ $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{5}{2}$ εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν καὶ γένωνται $\frac{4}{6}$, $\frac{15}{6}$, ἀφαιροῦμεν τὸ $\frac{4}{6}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{15}{6}$ ὥστε ἀπολείπεται Διαφορὰ $\frac{11}{6}$ Κλάσμα καταχρηστικὸν τὸ ὁποῖον μεταποιηθὲν, ἔσεται $1\frac{5}{6}$.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ'.

§. 84. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕ'Α ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Καν. α'.) Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς ἀριθμητὰς πρὸς ἀλλήλους. τὸ δὲ ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως Γινόμενον ἔσται ὁ καινὸς ἀριθμητής.

Καν. β'.) Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς Παρονομαστὰς πρὸς ἀλλήλους, τὸ δὲ ἐκ τούτων Γινόμενον ὑπάρχει ὁ νέος Παρονομαστής. π. χ. τὸ $\frac{3}{4}$ πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ $\frac{7}{8}$, παρέχει $\frac{21}{32}$ καθάπερ δὴ καὶ τοῦ $\frac{9}{15}$ πολλαπλασιασθέντος μετὰ τοῦ $\frac{2}{3}$, προκύπτει $\frac{18}{45}$.

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Πολλαπλασίασις ἐστὶν ἡ Πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τοιοῦτός τις ἀριθμὸς, εἰς τὸν ὁποῖον περιέχεται ὁ ἕνας Παράγων τοσάκις, ὁσάκις περιέχεται ἡ Μονὰς εἰς τὸν ἕτερον Παράγοντα, ἀλλὰ μὴν ἐν τοῖς ἀνωτέρω οὕτως ἔχει, τουτέστι τὸ $\frac{3}{4}$ περιέχεται ἐν τῷ $\frac{21}{32}$ τοσάκις, ὁσά-

κις

κις ἡ 1 περιέχεται ἐν τῷ $\frac{7}{8}$. ἄρα ὕτω πρέπει νὰ γίνηται ἡ Πολλαπλασίασις τῶν Κλασμάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ δ'.

§. 85. Νὰ διαιρῶμεν Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

Καν. ά.) Ἀναςρέφομεν πρῶτον τὺς Ὅρυς τῦ Διαιρέτυ ὕτως, ὥςε ὁ μὲν πρώην ἀριθμητὴς νὰ γένῃ Παρονομαςὴς ὁ δὲ πρώην Παρονομαςὴς νὰ γένῃ ἀριθμητής.

Καν. β'.) Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὰ Κλάσματα, καθὼς ἐν τῷ ἀνωτέρω Προβλήματι εἴρηται, τυτέςι τὺς ἀριθμητὰς μετὰ τῶν ἀριθμητῶν, καὶ τὺς Παρονομαςὰς μετὰ τῶν Παρονομαςῶν. π. χ. ἔςω διαιρεθησόμενον τὸ $\frac{3}{4}$ διὰ τῦ $\frac{1}{2}$. ὅθεν ἀναςρέφομεν πρῶτον τὸν $\frac{1}{2}$ εἰς $\frac{2}{1}$, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν δι' αὐτῦ τὸ $\frac{3}{4}$, ὥςε προκύπτει διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως τὸ $\frac{6}{4}$, καὶ αὐτὸ εἶναι τὸ ζητύμενον Πηλίκον. ὡσαύτως καὶ τὸ $\frac{4}{9}$ διαιρεθὲν διὰ τῦ $\frac{2}{5}$ παρέχει τὸ $\frac{20}{18}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἴτε Κλάσμα δι᾽ ἀκεραίου, εἴτε ἀκέραιον διὰ Κλάσματος, εἴτε καὶ Κλάσμα διὰ Κλάσματος διαιρεῖται, εἰς κάθε περίστασιν ὁ Διαιρέτης σημαίνει, εἰς πόσα μέρη πρέπει νὰ διαιρεθῇ τὸ ὅλον, ἀλλὰ μὴν τοῦτο ἐν τοῖς Κλάσμασιν ὁ Παρονομαστὴς δεικνύει, ἄρα πρέπει τῷ ὄντι νὰ γένῃ Διαιρέτης ὁ Παρονομαστὴς καὶ οὐχὶ ὁ ἀριθμητής. ἂν τὰ 2 ἤθελον διαιρεθῇ εἰς 3 μέρη, ἔπρεπε νὰ εἶναι 3 ὁ Παρονομαστής. ὅθεν ἂν τὸ $\frac{1}{2}$ προτεθῇ νὰ διαιρεθῇ εἰς 3 μέρη, πρέπει νὰ εἶναι καὶ ὁ Παρονομαστὴς 3. ἀλλ᾽ ἐπειδὴ αὐτὸ τὸ ὅλον προελήφθη ὡς εἰς δύω μέρη διῃρημένον, καὶ ἤδη πάλιν πρόκειται νὰ διαιρεθῶσιν αὐτὰ τὰ ἡμίσεα εἰς 3 μέρη, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσι πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱ δύω οὗτοι Διαιρέται, καὶ οὕτω, διαιρεθέντος τοῦ $\frac{1}{2}$ διὰ τοῦ 3, προκύπτει $\frac{1}{6}$. διότι ἂν τὸ ἀκέραιον ἐκτεθῇ ἐν Κλάσματι, ἔσται $\frac{1}{2}$ διαιρούμενον διὰ τοῦ $\frac{3}{1}$, καὶ ἀναστραφέντος τοῦ $\frac{3}{1}$ εἰς $\frac{1}{3}$, διὰ νὰ πλεσθῇ ἐπ᾽ αὐτῶν ὁ Πολλαπλασιασμός, ἔσται $\frac{1}{2}$ πολλαπλαζόμενον μετὰ τοῦ $\frac{1}{3}$, τουτέστι $\frac{1}{6}$ τὸ Πηλίκον.

Ἀκεραίου διαιρουμένου διὰ Κλάσματος, π. χ. 3 διὰ

τοῦ

τῦ $\frac{1}{2}$ · ἴσαι, ἄν τὸ ὅλον διαιρεθῇ διὰ 1, τὸ Πηλίκον ἴσον μὲ τὸ ὅλον. ἄν δὲ τὸ ἀκέραιον διαιρεθῇ διὰ Κλάσματος, πρέπει νὰ εἶναι τὸ πηλίκον μεῖζον τῦ ἀκεραίυ, ἢ τὰ μέρη τῦ ἀκεραίυ πρέπει νὰ εἶναι τοσῦτον πλείονα, ὅσον μικρότερα λαμβάνονται. ἄν ληφθῇ τὸ ἥμισυ τῶν μερῶν, πρέπει νὰ εἶναι δύω φοραῖς ὀλιγότερα, ἐὰν δὲ ληφθῶσι τὸ τρίτον τῶν μερῶν, πρέπει νὰ εἶναι τριπλασίως πλείονα, κ̀ ὕτως ἐφεξῆς. ὅθεν ἄν εἶναι νὰ διαιρεθῇ τὸ 3 διὰ τῦ $\frac{1}{2}$, τυτέςι νὰ ληφθῇ τὸ ἥμισυ αὐτῦ, πρέπει νὰ μεταβληθῇ εἰς μέρη διπλασίως πλείονα, λέγω νὰ πολλαπλασιασθῇ διὰ τῦ 2. ἄρα πρέπει ὁ Παρονομαςὴς τῦ Κλάσματος νὰ πολλαπλασιασθῇ μετὰ τῦ ἀκεραίυ. ἀφ᾽ ὗ δὲ τὸ ἀκέραιον ἐκτεθῇ ὡς Κλάσμα, τυτέςι $\frac{3}{1}$, πρέπει νὰ ἀναςραφῶσι κ̀ οἱ Ὅροι τῦ $\frac{1}{2}$, τυτέςι νὰ γένηται $\frac{2}{1}$, διὰ νὰ τελεσθῇ ἐπ᾽ αὐτῶν ἡ Πολλαπλασίασις, ὥςε ὁ Πολλαπλασιασμὸς γίνεται ἐν τοῖς Κλάσμασιν, ἀναστραφέντος τῦ Διαιρέτυ. Ὄντος δὲ Κλάσματος νὰ διαιρεθῇ διὰ Κλάσματος π. χ. τῦ $\frac{3}{4}$ διὰ τῦ $\frac{2}{5}$, πρέπει (ἐπειδὴ $\frac{3}{4}$ ἔχει νὰ μεταποιηθῇ εἰς πεμπτημόρια) νὰ γένωσι πλείονα κ̀ μικρότερα μέρη, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως τῦ 3 μετὰ τῦ 5. κ̀ ἐπειδὴ ἔχει νὰ διαιρεθῇ εἰς 2 τοιαῦτα μέρη, πρέπει ὁ Παρονομαστὴς 4 νὰ ληφθῇ δίς, νὰ πολλαπλασιασθῇ δηλονότι διὰ τοῦ 2. γίνεται ἄρα καὶ ἐνταῦθα ὁ Πολλαπλασιασμὸς, ἀναστραφέντος τοῦ Διαιρέτου. Ἡ αὐτὴ Δεῖξις ὑπάρχει, καὶ ὅταν τὰ Κλάσματα ἔχωσι τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν, ἔνθα ὁ ἀριθμητὴς τοῦ Διαιρετέου διαιρούμενος διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ Διαιρέτου, παρέχει τὸ Πηλίκον. $\frac{3}{4}$ διαιρεθὲν διὰ τοῦ $\frac{1}{2}$, τουτέστι $\frac{6}{8}$ διὰ τοῦ $\frac{4}{8}$, παρέχει $\frac{48}{32}$, τὸ ὁποῖον ἐκτεθὲν διὰ μικροτέρων ἀριθμῶν, εἶναι $\frac{6}{4}$, ὡς πρότερον εἴρηται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 86. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι διὰ μὲν τῆς Πολλαπλασιάσεως τῶν Κλασμάτων ἡ Δύναμις ἐλαττοῦται, διὰ δὲ τῆς Διαιρέσεως αὐξάνει. ἐπειδὴ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίστασιν γίνεται τῷ ὄντι Διαίρεσις, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν γίνεται Πολλαπλασιασμός· διότι ἂν ληφθῇ τὸ ἥμισυ τῆς Ποσότητος, τὸ ὁποῖον γίνεται διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως μὲ $\frac{1}{2}$, ἢ μὲ ἕτερόν τι Κλάσμα, διαιρεῖται αὐτὸ εἰς δύο μέρη, ἢ εἰς πλείονα κατὰ τὸ σημαινόμενον τοῦ Παρονομαστοῦ, ἂν ὅμως εἶναι νὰ διαιρεθῇ εἰς ἡμίσεια, εἰς τρίτα, ἢ τέταρτα, τὸ ὁποῖον πράττεται διὰ τῆς Διαιρέσεως τῶν Κλασμάτων. πρέπει κατ' ἀνάγκην νὰ προκύψωσι πλείονα μέρη, ἢ μείζων τις ἀριθμός, π. χ. 4 πολλαπλασιασθὲν διὰ τοῦ $\frac{1}{2}$, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ 4 εἶναι 2. ἐξ ἐναντίας δὲ 4 διαιρεθὲν εἰς ἡμίσεια, ἢ διαιρεθὲν διὰ τὸ $\frac{1}{2}$, ἔσται 8.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ ϛʹ.

Περὶ Δεκαδικῶν Κλασμάτων.

ΟΡΙΣΜΟ'Σ αʹ.

§. 87. Κλάσμα Δεκαδικὸν ἐστὶ τὸ ἔχον Παρονομαστὴν 10, ἢ 100, ἢ 1000, καὶ ὅλως, τὸ ἔχον Παρονομαστὴν μίαν Μονάδα μετὰ Μηδενικῶν χαρακτήρων προσκειμένην. π. χ. $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{5}{1000}$ κ. τ. τρία δηλονότι Δεκατημόρια, ἑπτὰ Ἑκατοστημόρια, πέντε χιλιοστημόρια.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ αʹ.

§. 88. Ἐπειδὴ τοίνυν πάντα ταῦτα τὰ Κλάσματα διαφέρουσι μόνον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐν τῷ Παρονομαστῇ Μηδενικῶν χαρακτήρων, διὰ τοι τοῦτο δύναται νὰ ἐκλείπωσιν οἱ Παρονομασταὶ, φθάνει μόνον νὰ δεικνύωνται ἐν τοῖς ἀριθμηταῖς, Πόσα Μηδενικὰ πρέπει νὰ ὑπάρχωσιν ἐν τῷ Παρονομαστῇ πλησίον τῆς Μονάδος. τοῦτο δὲ δύναται νὰ γένῃ μόνον διὰ τοῦ τόπου, τὸν ὁποῖον κατέχουσιν οἱ ἀριθμηταὶ ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ, τουτέστιν ἂν μὲν ὁ ἀριθμητὴς κατέχῃ ἐν τοῖς ἀριστεροῖς τὸν πρῶτον τόπον, ὁ Παρονομαστὴς ἔσται

Μονὰς

Μονὰς μεθ' ἑνὸς Μηδενικοῦ, λέγω, 10 ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὸς εὑρίσκηται ἐν τῷ δευτέρῳ τόπῳ, ὁ Παρονομαστὴς ἔσαι Μονὰς μετὰ δύω Μηδενικῶν, λέγω, 100. ἂν δὲ ὁ ἀριθμητὸς ἔχῃ τὸν τρίτον τόπον, ὁ Παρονομαστὴς ἔσαι 1000. κ̀ οὕτως ἐφεξῆς. π. χ. 375 εἰσὶν $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{5}{1000}$, ἤτ' οὖν 3 Δεκατημόρια, 7 Ἑκατοσημόρια, 5 χιλιοστημόρια, ὡς κ̀ ἀνωτέρω.

Διὰ νὰ διακρίνωνται τὰ Δεκαδικὰ ταῦτα Κλάσματα ἀπὸ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὅταν ὑπάρχωσι, γράφομεν μετὰ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς μίαν ὑποδιαστολὴν, κ̀ οὕτω διαςέλλονται τὰ Δεκαδικὰ ἀπὸ τῶν ἀκεραίων, οἷον 25, 37, τὸ ὁποῖον δηλοῖ ὅτι εἰσὶν εἴκοσι πέντε ἀκέραιοι ἀριθμοὶ, τρία Δεκατημόρια, ἑπτὰ Ἑκατοσημόρια.

Ὅταν δὲ πρὸ τῶν Δεκαδικῶν δὲν προηγῆται ἀκέραιός τις ἀριθμὸς, θέτομεν πρὸς δήλωσιν τούτε ἓν Μηδενικὸν, οἷον, 0, 375, ἤτοι μόνον τρία Δεκατημόρια, ἑπτὰ Ἑκατοσημόρια, πέντε χιλιοστημόρια.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 89. Ὅταν ἐν τοῖς Δεκαδικοῖς Κλάσμασι μένωσί τινες τόποι κενοὶ κ̀ ἄνευ σημασίας Δεκαδικῆς, πληροῦμεν τότε προσηκόντως τούτους τοὺς τόπους διὰ τῶν Μηδενικῶν χαρακτήρων. π. χ. Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἐκθέσωμεν μόνον τρία χιλιοστημόρια, γράφομεν 0, 003. ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει μήτε ἀκέραιός τις ἀριθμὸς, μήτε τι Δεκατημόριον, μήτε Ἑκατοσημόριον, ἀλλὰ μόνον 3 χιλιοστημόρια. καθάπερ δὴ κ̀ 2, 3004 δηλοῖ δύω μὲν ἀκεραίους ἀριθμοὺς, τρία δὲ Δεκατημόρια, οὐδὲν Ἑκατοσημόριον, οὐδὲν χιλιοστημόριον, τέσσαρα Δεκαχιλιοστημόρια.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 90. Ἐπειδὴ ταῦτα τὰ Κλάσματα, κατὰ τοὺς ἑαυτῶν Παρονομαστὰς θεωρούμενα, αὐξάνουσιν ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ, διὰ τοῦτο τὰ ἐν τῷ τέλει προστιθέμενα Μηδενικὰ ὅτι μείζονα ἔτι ἐλάσσονα παρέχουσι δύναμιν. π. χ. 0, 3 σημαίνει οὐδὲν μὲν ἀκέριαιον, τρία δὲ μόνον Δεκατημόρια, ὅπερ ταυτὸν ὑπάρχει μὲ τὸ 0, 3000000. ἐπειδὴ καὶ ἐνταῦθα τυγχάνει ἀκέραιον μὲν οὐδὲν, ἀλλὰ τρία Δεκατημόρια, οὐδὲν Ἑκατοστημόριον, οὐδὲν χιλιοστημόριον, οὐδὲν Δεκαχιλιοστημόριον κ. τ. διότι καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς πολλαπλασιασμένος ἐστὶ διὰ τοῦ 10 ὅπερ τὴν Δύναμιν δὲν μετατρέπει. ὅθεν δύναταί τις χωρὶς νὰ λαμβάνη τινὰ μεταβολὴν ἡ Δύναμις, νὰ προσθέτη ἐν τῷ τέλει, ὅσα Μηδενικὰ καὶ βούλεται, τὸ ὁποῖον καὶ ἐνίοτε γίνεται χρήσιμον, διὰ νὰ ἠμπορῶμεν νὰ φέρωμεν δύω, τρία Κλάσματα τοῦ αὐτοῦ εἴδους εἰς ἕνα Ἴσον ἀριθμὸν χαρακτήρων, καὶ ὅλως ὠφελεῖ εἰς τὰς κατὰ ταῦτα πράξεις.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ'.

§. 91. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι οὗτοι οἱ χαρακτῆρες ἐνταῦθα δύνανται νὰ ἔχωσι μόνον μίαν Δύναμιν ὡς Δεκαδικήν. ἐπειδὴ δέκα Δεκατημόρια, τουτέστι $\frac{10}{10}$ εἰσὶν Ἴσα μὲ ἓν ἀκέραιον. τὸ δὲ $\frac{10}{100}$ Ἰσοδυναμεῖ μὲ ἓν Δεκατημόριον. ἐπειδὴ ἐξαλειφθέντος ἄνωθεν καὶ κάτωθεν ἑνὸς Μηδενικοῦ, μένει $\frac{1}{10}$. ὡσαύτως καὶ $\frac{10}{1000}$ δύναται Ἴσον μὲ ἓν Ἑκατοστημόριον. ἐπειδὴ ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῶν δύω μερῶν ἓν Μηδενικὸν, καταλείπεται $\frac{1}{100}$. καθὼς δὴ καὶ $\frac{10}{10000}$ εἶναι Ἴσον μὲ ἓν χιλιοστημόριον ἤτοι $\frac{1}{1000}$. ἡ δύναμις λοιπὸν αὐξάνει κατὰ τὸ Δεκαπλάσιον, καθὼς καὶ ἐν τοῖς ἀκεραίοις ἀριθμοῖς, καὶ ὁσάκις τις χαρακτὴρ μέχρι τῶν 10 αὐξάνει, τοσάκις πρέπει νὰ μεταφέρηται μία Μονὰς ἐν τῷ προηγουμένῳ τόπῳ ἀπὸ τῶν δεξιῶν εἰς τὰ ἀριστερὰ, καθὼς καὶ ἐν τοῖς ἀκεραίοις ἀριθμοῖς. ὅθεν γίνεται δῆλον, ὅτι ἡ Σύναψις, καὶ ἀφαίρεσις τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων δύνανται νὰ γίνωνται οὕτω, καὶ νὰ λαμβάνωνται κατὰ τοὺς ἰδίους Κανόνας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ δ΄.

§. 92. Ἐντεῦθεν εὐκόλως δύναταί τις νὰ συλλάβῃ, δύω Δεκαδικῶν Κλασμάτων ποῖον εἶναι μεῖζον τοῦ ἑτέρου, ὅταν ϗ τὰ δύω ἔχωσιν Ἴσον ἀριθμὸν χαρακτήρων, ἐκεῖνο ἔσαι μεῖζον, τοῦ ὁποίου οἱ χαρακτῆρες λαμβανόμενοι κατὰ τὴν συνήθη Σημασίαν, σημαίνουσι μείζονα Ποσότητα. π. χ. 4, 72 εἶναι μεῖζον τοῦ 4, 69, ἐπειδὴ τὰ ἑβδομήκοντα δύω εἰσὶ πλείονα τῶν ἑξήκοντα ἐννέα. ὁμοίως ϗ 4, 7211 δύναται πλεῖον τοῦ 4, 6999. ἐὰν δὲ δὲν ἔχωσιν Ἰσοπληθεῖς χαρακτῆρας, δυνάμεθα νὰ τὰ ἀποκαταστήσωμεν εἰς Ἰσοπληθεῖς, προσθέτοντες ἐν τῷ τέλει Μηδενικὰ, τὰ ὁποῖα ϗ δὲν μεταβάλλουσι τὴν δύναμιν, ὡς ἐν τῷ §. 90. εἴρηται, ϗ τότε μεῖζον Κλάσμα ἔσαι τὸ ἐμφαῖνον μείζονα Ποσότητα. π. χ. εἰσὶ Κλάσματα 4, 7, ϗ 4, 69999. ἀφ᾽ οὗ δὲ προστεθῶσιν εἰς τὸ 7 τέσσαρα Μηδενικὰ, τουτέσι 70000, εἶναι φανερὸν, ὅτι τὰ 70000 εἰσὶ πλείονα τῶν 69999, ἐπειδὴ ἂν ὑπογραφῶσιν εἰς αὐτὰ Ἴσοι Παρονομασαὶ, ἔσαι μεῖζον Κλάσμα ἐκεῖνο, ὅπερ ἔχει μείζονα ἀριθμητὴν, ὡς ἐν τῷ §. 67.

ΠΟΡΙΣΜΑ έ.

§. 93. Κατάδηλον δ᾽ ἔτι ἐσὶν, ὅτι ὅσον πλείονες Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες προστίθενται, τοσοῦτον μᾶλλον τὸ Κλάσμα ἐγγίζει πρὸς τὸ ἀκέραιον, ὅμως οὐδέποτε ἐξισοῦται αὐτῷ. π. χ. τὸ 4, 999 εἶναι πλησιέσερον τοῦ νὰ γένῃ ἀκέραιος ἀριθμὸς 5, παρὰ τὸ 4, 99. ἐπειδὴ τὸ μὲν πρῶτον Κλάσμα διὰ νὰ γένῃ ἀριθμὸς ἀκέραιος, ἐλλείπει μόνον ἓν χιλιοσημόριον $\frac{1}{1000}$. τοῦ δὲ δευτέρου ἐλλείπει ἓν Ἑκατοσημόριον $\frac{1}{100}$. λοιπὸν ὅσον πλείονα ἐννέα προσγίνονται, τοσοῦτον μᾶλλον τὸ Κλάσμα πλησιάζει πρὸς τὸ νὰ γένῃ ἀκέραιον, πλὴν ἐπειδὴ ταῦτα τὰ προσγινόμενα μέρη εἰσὶ πάντοτε

ἐλάτ-

ἐλάττονα τοῦ Παρονομαστοῦ, εἶναι ἀδύνατον οὕτω νὰ ἀπαρτισθῇ ἐν ἀκέραιον, ἂν δὲν προστεθῇ ἐν τοῖς τελευταίοις χαρακτῆρσιν ἓν μέρος ἴσον μὲ τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, τουτέστιν ἂν προσθέσωμεν ἐν τῷ 4, 999 ἓν χιλιοστημόριον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ὀνομασίαν τοῦ τελευταίου Παρονομαστοῦ, πορίζομεθα ἀκέραιον ἀριθμὸν 5.

ΠΌΡΙΣΜΑ ϛ'.

§. 94. Ἐπειδὴ τοίνυν τὸ Κλάσμα διὰ τῆς προσθέσεως τινὸς Δεκαδικοῦ χαρακτῆρος πλησιάζει μᾶλλον πρὸς τὸ γενέσθαι ἀκέραιον, καὶ ἐκ τούτου προκύπτει Πηλίκον τι ἀκριβέστερον, δύναταί τις νὰ ἐπαναλαμβάνῃ ἐφ' ὅσον ἐθέλει μίαν Διαίρεσιν, ἐπὶ τῆς ὁποίας πρὸς τῷ ζητουμένῳ Πηλίκῳ μένει καὶ λείψανόν τι, προστίθεται δηλονότι ἐν τῷ λειψάνῳ ἓν Μηδενικὸν καὶ οὕτω διαιρεῖ αὐτὸν τὸν νέον Διαιρετέον διὰ τοῦ προτέρου Διαιρέτου, τὸ δὲ ἐκ ταύτης τῆς Διαιρέσεως Πηλίκον ἔσται Δεκατημόρια. προσθέσας δ' αὖθις (ἐὰν ἀπολειφθῇ τι) καὶ ἕτερον Μηδενικὸν, ποιεῖ ἐπ' αὐτῶν ἔτι τὴν Διαίρεσιν, τὸ δὲ ἐκ τῆς Διαιρέσεως προκύπτον ἔσεται Ἑκατοστημόρια καὶ οὕτω ποιεῖ ἐφεξῆς. π. χ. ἐκ τῆς Διαιρέσεως τοῦ 26 διὰ τοῦ 8 ἀναφαίνεται πρῶτον Πηλίκον ἀκέραιος ἀριθμὸς 3, καὶ ἐναπολείπεται ἔτι καὶ 2, προστεθέντος δὲ ἐν τούτῳ τῷ 2 ἑνὸς Μηδενικοῦ, καὶ διαιρεθέντων τῶν 20 πάλιν διὰ τοῦ 8, προκύπτει Πηλίκον 2 Δεκατημόρια, καὶ μένει ἔτι λείψανον 4. εἰς τὸ ὁποῖον προστεθέντος αὖθις ἑνὸς Μηδενικοῦ, γίνονται 40, τὰ ὁποῖα διαιρεθέντα διὰ τοῦ 8, παρέχουσι Πηλίκον 5 Ἑκατοστημόρια ἄνευ τινὸς λειψάνου, ὥστε τὸ ἀληθὲς Πηλίκον ἐκ τούτων τῶν Διαιρέσεων εἶναι 3, 25, τουτέστιν ἀκέραιος ἀριθμὸς 3, δύω Δεκατημόρια, καὶ πέντε Ἑκατοστημόρια. κατ' αὐτὸν δὲ τὸν τρόπον δυνάμεθα καὶ ὁποιονδήποτε Κλάσμα νὰ μεταποιήσωμεν εἰς Δεκαδικὸν, προσθέτομεν δηλονότι ἐν τῷ ἀριθμητῇ ἓν Μηδενικὸν, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸν οὕτω διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ, τὸ δ' προκύπτον Πηλίκον ἔσται τότε Δεκαδικόν. π. χ. τὸ μὲν $\frac{1}{2}$ μεταποιεῖται εἰς τὸ 0, 5. τὸ δὲ $\frac{1}{4}$ εἰς τὸ 0, 25. τὰ δὲ $\frac{3}{4}$ ἀνάγεται εἰς τὸ 0, 75. τὸ δὲ $\frac{7}{8}$ εἰς τὸ 0, 875. τὸ δὲ $\frac{5}{9}$ εἰς τὸ 0, 5555. κ. τ. τοῦτο δ' ὅμως τὸ τελευταῖον Κλάσμα οὐδέποτε παρέξει ἀκριβὲς Πηλίκον. ἐπειδὴ ἐφ' ὅσον συνεχίζεται ἡ Διαίρεσις, μένει λείψανόν τι, καθὼς δὴ καὶ τὸ $\frac{4}{7}$ διαιρούμενον, ἀνάγεται εἰς τὸ 0, 571428571 κ. τ. καὶ δὲν δύναται νὰ φθάσῃ ποτὲ ἐπ' ἀκριβῆ Διαίρεσιν, τὰ τοιαῦτα ὀνομάζονται Κλάσματα προσεγγίζοντα, τὰ δὲ ἄλλα, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει Πηλίκον ἀκριβὲς, καλοῦνται Κλάσματα ἀκριβῆ.

ΠΡΟ´ΒΛΗΜΑ α΄.

§. 95. Νὰ συνάπτωμεν Δεκαδικὰ Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕ´Α ἡ ΛΥ´ΣΙΣ.

Καν. α΄.) Γράφομεν πρῶτον τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς ὑπ' ἀλλήλους ἐν τῷ προσήκοντι τόπῳ κατὰ τὸν ἤδη γνωςόν ἡμῖν τρόπον, ὥστε καὶ αἱ τούτων ὑποδιαστολαὶ νὰ εἶναι ἐν τῇ αὐτῇ Στήλ. ἔπειτα γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ τὰ Δεκαδικὰ Κλάσματα ὑπ' ἄλληλα, τουτέστι τὰ Δεκατημόρια ὑπὸ τὰ Δεκατημόρια, τὰ Ἑκατοστημόρια ὑποκάτω τῶν Ἑκατοστημορίων. κ. τ. ὅταν δέ τις Σειρὰ τύχῃ ἔχουσα πλείονας Δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς, ἀναπληροῦμεν τότε τοὺς κενοὺς τόπους τῶν ἄλλων διὰ Μηδενικῶν Ἰσαρίθμων.

Καν. β΄.) Συνάπτομεν πλέονταῖον αὐτὰ κατὰ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς, ὡς καὶ ἐν τῷ κατωτέρῳ παραδείγματι.

οἷον

οἷον ἔστωσαν συναφθησόμεια 3,0506. ϗ 4,789, ϗ 6,62, ϗ 4, 753547. ὅθεν

3 , 050600
4 , 789000
6 , 620000
4 , 753647
19 , 213247

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β.

§. 96. Νὰ ἀφαιρῶμεν Δεκαδικὰ Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἢ ΛΥΣΙΣ.

Καν. Γράφομεν τοὺς χαρακτῆρας τοῦ ἀφαιρετέου ὑπὸ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ ἐλαττωτέου κατὰ τὸν ἀνωτέρω Κανόνα τῆς Συνάψεως, ἔπειτα πλοῦμεν ἐπ' αὐτῶν τὴν ἀφαίρεσιν κατὰ τὴν κοινὴν τῆς ἀφαιρέσεως Μέθοδον. π. χ. ἔστω ἀφαιρεθησόμενον τὸ 5, 0294 ἀπὸ τοῦ 16, 4325. ὅθεν

τὸ ἐλαττωτέον	16 , 4325.	ὡσαύτως ϗ	7 , 30000
τὸ ἀφαιρετέον	5 , 0294.		3 , 79468
ἡ διαφορὰ	11 , 4031.		3 , 50532

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ.

§. 97. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν Δεκαδικὰ Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

Καν. α΄) Γράφομεν πρῶτον τὰ Κλάσματα ὑπ' ἄλληλα, ὡς ἀκεραίους ἀριθμοὺς, χωρὶς νὰ ἐκκόπτωμεν τοὺς χαρακτῆρας διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν Πολλαπλασιαστέον διὰ τοῦ Πολλαπλασιαστοῦ κατὰ τὸν κοινὸν τρόπον τῆς Πολλαπλασιάσεως.

Καν. β΄.) Μετὰ δὲ τὴν Πολλαπλασίασιν ἐκκόπτομεν δεξιόθεν ἀπὸ τοῦ Γινομένου τοσούτους χαρακτῆρας, ὅσοι Δεκαδικοὶ χαρακτῆρές εἰσιν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς Παράγουσι. π. χ. ἔστω Πολλαπλασιασθησόμενον 4, 26 διὰ τοῦ 3, 62. ὅθεν

$$
\begin{array}{r}
426 \\
362 \\
\hline
852 \\
2556 \\
1278 \\
\hline
154212
\end{array}
$$

ἐπειδὴ τοίνυν κ᾽ εἰς τοὺς δύω Παράγοντάς εἰσι τέσαρες Δεκαδικοί χαρακτῆρες, πρέπει νὰ ἐκκοπῶσι δεξιόθεν κ᾽ ἀπὸ τοῦ Γινομένου ὁμοίως τέσαρες χαρακτῆρες διὰ τὰ Δεκαδικὰ Κλάσματα. ὅθεν τὸ ζητούμενον Γινόμενόν ἐστι 15, 4212.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τῷ Πολλαπλασιασμῷ τῶν Κλασμάτων πολλαπλασιάζομεν τοὺς μὲν ἀριθμητὰς μετὰ τῶν ἀριθμητῶν, τοὺς

δὲ

δὲ Παρονομαστὰς μετὰ τῶν Παρονομαστῶν (§. 84.). τὰ δὲ δοθέντα Δεκαδικὰ Κλάσματα μετὰ τῶν ἀκεραίων, ἢ ἄνευ τούτων, εἰσὶν ἀριθμηταὶ, ἄρα πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσι ταῦτα πρὸς ἄλληλα κατὰ τοὺς κοινοὺς Κανόνας. τὸ δὲ Γινόμενον τῶν Παρονομαστῶν θέλει ἔχῃ τοσαῦτα Μηδενικὰ, ὅσα ὁμοῦ εἰσιν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς Παράγουσι Παρονομασταῖς, τὸ Γινόμενον ἄρα τῶν ἀριθμητῶν θέλει ἔχῃ τοιοῦτον Παρονομαστὴν, ὅστις ἔχει τοσαῦτα Μηδενικὰ, ὅσοι Δεκαδικοὶ χαρακτῆρές εἰσιν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς Παράγουσιν. ὅθεν πρέπει νὰ ἐκκοπῶσιν ἀπὸ τοῦ Γινομένου τοσοῦτοι χαρακτῆρες διὰ τὰ Δεκαδικὰ Κλάσματα. τὸ ἀνωτέρω Παράδειγμα δύναται νὰ ἐκτεθῇ μετὰ τοῦ οἰκείου Παρονομαστοῦ οὕτω $\dfrac{426}{100}$ πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ $\dfrac{362}{100}$, ποιεῖ $\dfrac{154212}{10000}$, ἤτοι 15,4212. ὡσαύτως καὶ 3, 503 πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ 1, 2 παρέχει Γινόμενον 4, 2036.

ΣΧΟΛΙΟΝ α′.

§. 98. Ἂν ἐν τῷ Γινομένῳ προκύψωσι μόνον τοσοῦτοι χαρακτῆρες, ὅσοι Δεκαδικοὶ χαρακτῆρές εἰσιν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς Παράγουσιν, ἅπαντες οἱ χαρακτῆρες τούτου τοῦ Γινομένου ἔσονται τότε Δεκαδικοὶ π. χ. 4, 134 πολλαπλασιασθὲν διὰ τοῦ 0, 2 παρέχει Γινόμενον 8268, καὶ ἐπειδὴ εἰς τοὺς δύω Παράγοντας εἰσὶ τέσσαρες Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες, πρέπει ἅπαντες οἱ τέσσαρες χαρακτῆρες τούτου τοῦ Γινομένου νὰ εἶναι Δεκαδικοὶ, καὶ γράφονται οὕτω 0, 8268. ἡ δὲ Δεῖξις τούτου εἶναι ἡ αὐτὸ μὲ τὴν προτεθεῖσαν. ἐπειδὴ δύνανται ταῦτα νὰ ἐκτεθῶσι μετὰ τῶν ἑαυτῶν Παρονομαστῶν $\dfrac{4134}{1000}$, καὶ $\dfrac{2}{10}$, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιασθέντα πρὸς ἄλληλα, παρέχȣσι $\frac{8268}{10000}$, κ᾽ ἐπειδὴ ὁ Παρονομαςὴς εἶναι μείζων τȣ̃ ἀριθμητȣ̃, τὸ Κλάσμα εἶναι ἀληθὲς ϗ κύριον, τὸ ὁποῖον ϗ ἀκέραιον ἀριθμὸν δὲν παρέχει.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 99. Ὅταν δὲ ὦσιν ἐν τῷ Γινομένῳ χαρακτῆρες ὀλιγότεροι τῶν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς Παράγȣσιν ὄντων, τότε πρέπει νὰ προσθέτωμεν ἐν αὐτῷ ἐπὶ τὰ ἀριςερὰ τόσα Μηδενικὰ, ὅσα εἶναι ἀναγκαῖα πρὸς συμπλήρωσιν τȣ̃ ἀριθμȣ̃ τῶν Δεκαδικῶν χαρακτήρων, ἐν δὲ τῷ τόπῳ τῶν ἀκεραίων πρέπει ἔτι νὰ γράφωμεν ἓν Μηδενικόν. τȣτέςιν ἂν ἐν τῷ Γινομένῳ εἰσὶ μόνοι τρεῖς χαρακτῆρες, ἐν ᾧ ἐν ἀμφοτέροις τοῖς Παράγȣσιν εἰσὶν ἕξ, πρέπει νὰ γράψωμεν πρὸ τȣ̃ Γινομένȣ πρὸς συμπλήρωσιν τρία Μηδενικὰ, ϗ ἔτι ἓν εἰς τὸν τόπον τῶν ἀκεραίων π. χ. 0, 02 πολλαπλασιασθὲν διὰ τȣ̃ 0, 0083, τȣτέςι 2 διὰ τȣ̃ 83, παρέχει Γινόμενον 166, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐκτεθῇ ȣ̔́τω 0, 000166. ἐπειδὴ εἶναι $\frac{2}{100}$ πολλαπλασιαζόμενον μετὰ τȣ̃ $\frac{83}{10000}$, τῶν ὁποίων τὸ Γινόμενον ὑπάρχει $\frac{166}{1000000}$, ἤγȣν 0, 000166.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ δ'.

§. 100. Νὰ διαιρῶμεν Δεκαδικὰ Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕ'Α ἡ ΛΥ'ΣΙΣ.

Καν. α') Γράφομεν τὰ διαιρεθησόμενα Κλάσματα κατὰ τὸν τρόπον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, χωρὶς νὰ ἐκκόπτωμεν

κόπτωμεν τοὺς Δεκαδικοὺς χαρακτῆρας διά τινος ὑποδιαστολῆς, ποιοῦμεν ἔπειτα ἐπ' αὐτῶν τὴν Διαίρεσιν, καθὼς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων.

Καν. β'.) Μετὰ τὴν Διαίρεσιν ἐκκόπτομεν διὰ τὰ Δεκαδικὰ ἀπὸ τοῦ Πηλίκου τοσούτους χαρακτῆρας, ὅσους ὑπερέχουσιν οἱ Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες τοῦ Διαιρετέου τῶν Δεκαδικῶν χαρακτήρων τοῦ Διαιρέτου. π. χ. ἔστω διαιρεθησόμενον 3,7036. διὰ τοῦ 4,7. ὅθεν γράφομεν αὐτὰ οὕτω

```
37036 | 47
      |----
        788
329
---
 413
 376
 ---
  376
  376
  ---
    0
```

Μετὰ τὴν Διαίρεσιν προέκυψε Πηλίκον 788, ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες τοῦ Διαιρουμένου εἰσὶ τέσσαρες, οἱ δὲ Δεκαδικοὶ τοῦ Διαιροῦντος μόνον ἕνας, καὶ ἡ ὑπεροχὴ μεταξὺ τούτων εἰσὶ τρεῖς χαρακτῆρες, ἐκκόπτομεν διὰ Δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ Πηλίκου τρεῖς χαρακτῆρας, τουτέστιν ἐνταῦθα λαμβάνομεν ὅλον τὸ Πηλίκον 788 ὥστε τὸ ζητούμενον εἶναι 0, 788.

ΕΤΕΡΟΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Ἔστω διαιρούμενον τὸ 12, 236 διὰ τοῦ 2, 3. ὅθεν γίνεται

```
12236  | 23
         532
115
----
 073
  69
----
  046
   46
----
    0
```

ὥστε τὸ ζητούμενον Πηλίκον ἐστὶ 5, 32.

ΣΧΟΛΙΟΝ ά.

§. 101. Ὅταν μὲν οἱ Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες τοῦ Διαιρετέου ὑπάρχωσιν Ἰσάριθμοι μὲ τοὺς Δεκαδικοὺς χαρακτῆρας τοῦ Διαιρέτου, τότε δὲν ἐκκόπτομεν ἀπὸ τοῦ Πηλίκου χαρακτῆρά τινα διὰ Δεκαδικά, ἀλλ᾽ ὅλον τὸ Πηλίκον μένει ἀνῆκον εἰς τὸν ἀκέραιον ἀριθμόν. ὅταν δὲ εἰς τὸν Διαιρετέον εἶναι Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες ὀλιγώτεροι τῶν ἐν τῷ Διαιρέτῃ ὄντων Δεκαδικῶν, προσθέτομεν πρῶτον εἰς τὸν Διαιρετέον ἐν τοῖς δεξιοῖς τοσαῦτα Μηδενικά, ὅσα ἀρκοῦσι διὰ νὰ γίνωνται οἱ Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες τοῦ Διαιρετέου Ἰσάριθμοι μὲ τοὺς Δεκαδικοὺς τοῦ Διαιρέτου, ἔπειτα τελοῦμεν τὴν Διαίρεσιν, καὶ τὸ πρῶτον Πηλίκον ἔσται Σημαντικὸν Ποσότητος ἀκεραίας. ἂν ὅμως προσθέσωμεν πλείονα Μηδενικά, ὁ ἀριθμὸς τῶν Δεκαδικῶν χαρακτήρων θέλει αὐξήσει ἐν τῷ Πηλίκῳ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν προ-

στιθε-

στιθεμένων Μηδενικῶν. π. χ. ἔςω διαιρεθησόμενον τὸ 181, 23 διὰ τῦ 25, 89. ὅθεν

18123 | 2589
18123 | 7 τὸ Πηλίκον, ὅπερ

καὶ Ποσότης ἀκέραιός ἐστι.

ἔςω ἔτι διαιρεθησόμενον τὸ 43, 5 διὰ τῦ 5, 26. ὅθεν προστεθέντος ἑνὸς Μηδενικῦ, γίνεται

4350 | 526
 | 8
4208

142

ὥςε Πηλίκον πρῶτον προέκυψε 8 καὶ ἐναπολείπεται ἔτι τὰ 142, εἰς τὰ ὁποῖα προστεθέντος ἑνὸς Μηδενικῦ, ἄρχονται τὰ Δεκαδικὰ Κλάσματα, καὶ δύναται νὰ συνελίζηται ἡ Διαίρεσις, ἐφ' ὅσον τις ἐθέλει νὰ προσθέτη Μηδενικὰ ἐν τῷ λειψάνῳ.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ β.

§. 101. Ἐὰν ὁ Διαιρέμενος ἐλάττων τῦ Διαιρῦντος τυγχάνη, ἡ Διαίρεσις δὲν δύναται νὰ γένη ἐν ἀκεραίοις ἀριθμοῖς. ἐπειδὴ εἰς τοιαύτην περίςασιν ὑπάρχει Κλάσμα γνήσιον, τυτέςι κύριον. π. χ. ἔςω διαιρεθησόμενον τὸ 0, 045 διὰ τῦ 9 ἀκεραίυ, ἐκτεθέντων δὲ τύτων μετὰ τῶν οἰκείων Παρονομαςῶν, γίνεται $\frac{45}{1000}$ διαιρετέον διὰ τῦ $\frac{9}{1}$, ἢ γενομένης τῆς Διαιρέσεως, προκύπτει Πηλίκον $\frac{45}{9000}$, τὸ ὁποῖον εἶναι Κλάσμα κύριον, καὶ ἑπομένως δὲν δύναται

νὰ

νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ. ἐὰν δὲ τοῦτο τὸ Κλάσμα ἤθελε μεταποιηθῇ εἰς Κλάσμα Δεκαδικὸν κατὰ τὸ προτεθὲν τέταρτον Πόρισμα, πρέπει νὰ προστεθῶσιν ἐν τῷ ἀριθμητῇ Μηδενικά. καὶ ἐπειδὴ ἡ πρώτη Διαίρεσις δύναται νὰ ἀρχίσῃ, προστεθέντων μόνων τριῶν Μηδενικῶν, εἶναι δῆλον, ὅτι καὶ τὸ Πηλίκον ἐν μὲν τῇ ἀρχῇ θέλει ἔχῃ τρία Μηδενικά, τὸν δὲ ἐν τῷ τετάρτῳ τόπῳ χαρακτῆρα ἀριθμὸν πρῶτον, ὁ ὁποῖος ὑπάρχει χιλιοστημόριον. ἡ Διαίρεσις δύναται νὰ πραχθῇ οὕτω

```
  45      1 9000
          ------
           0,005
0000
-----
  450
  0000
  -----
  4500
  0000
  -----
  45000
  45000
  -----
      0
```

ΣΤΟΙΧΕΙ͂Α ΤΗ͂Σ ἈΛΓΈΒΡΑΣ

ΚΕΦΆΛΑΙΟΝ α΄.

ΓΕΝΙΚΑΙ῍ ἈΛΓΕΒΡΑΪΚΑΙ῍ ἸΔΈΑΙ.

ὉΡΙΣΜΌΣ α΄.

§. 1. ἌΛΓΕΒΡΑ ἐστὶ Γενικὴ ἀριθμητική, ἢ Ἐπιστήμη τῶν ἀφῃρημένων καὶ ἀορίστων, ἢ τῶν ἐν γένει καὶ καθόλου λαμβανομένων Ποσῶν, τὰ ὁποῖα ἐμφαίνονται διὰ τῶν τοῦ ἀλφαβήτου Γραμμάτων, τῶν ὁποίων ἡ σημασία εἶναι ἐπίσης ἀόριστος.

ΣΧΌΛΙΟΝ.

§. 2. Τρία πρέπει νὰ παρατηρῶμεν εἰς τὴν ἄλγεβραν προσεκτικῶς· πρῶτον, αὐτὰ τὰ Ποσά. δεύτερον, τὰς Μεταβολάς, ἢ τὰ Πάθη, εἰς τὰ ὁποῖα ὑπόκεινται αὐτὰ τὰ Ποσά, καὶ τρίτον, τὰς σχέσεις, τὰς ὁποίας πρὸς ἄλληλα ἔχουσι τὰ Ποσά, περὶ ἑκάστου τούτων τῶν

τριῶν

τερῶν μεταχειριζόμεθα ἴδια Σημεῖα, ἢ Γράμματα, ὡς ἀκολούθως.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ α'.

§. 3. Κάθε Ποσὸν ἐκφράζεται ϗ ἐκδηλοῦται διὰ τῶν Γραμμάτων α, β, γ, δ, κτ. ϗ αὐτὰ εἶναι τὰ Σημεῖα τῶν ποσῶν. ὡς τόσον τὰ μὲν ἐγνωσμένα, ἢ διδόμενα Ποσὰ ἐμφαίνομεν διὰ τῶν πρότων Γραμμάτων α, β, γ, μέχρι τοῦ μ. Τὰ δὲ ἄγνωσα, ἢ ζητούμενα, διὰ τῶν πλευταίων, φ, χ, ψ, ω, ἐντεῦθεν ἕπεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ β'.

§. 4. Ἔκθεσις ἀλγεβραϊκὴ ἐςὶν ἕν, ἢ πλέονα Μεγέθη (Ποσὰ) παρισάμενα δι' ἑνὸς, ἢ πλειόνων Γραμμάτων. ὅθεν τὰ Ποσὰ τὰ δι' ἑνὸς μόνου Γράμματος παρισάμενα, ὀνομάζονται ἁπλᾶ, ὡς α, β, γ, ὁμοῦ δὲ λαμβανόμενα ϗ διὰ πλειόνων Γραμμάτων ἐκτεθέμενα, ὀνομάζονται σύνθετα. ὡς αβ, βδε, κ. τ. ἐπ τὰ ἁπλᾶ ϗ Σύνθετα Ποσὰ μόνα τιθέμενα ὀνομάζονται ἀσύμπλεκτα, ὡς α, αβ, αβγ, δε, χχ· τὰ ὁποῖα λέγονται ϗ Μέλη, ἢ Ὅροι. ὅταν δὲ μετ' ἄλλων συμπλέκωνται, ϗ συνάπτωνται διὰ τῶν (§. 6.) Σημείων, τότε λέγονται Ποσότητες Συμπεπλεγμέναι, ὡς αβ+εδ. ἢ α+β, ἢ γ−δ. κάθε δὲ

Πο-

Ποσότης, ἥτις συνίςαται ἐξ ἑνὸς μόνου μέλους ὀνομάζεται Μονομερὴς, ἢ Μονομελὴς, καθὼς $\alpha\beta\gamma$, ἢ α, ἢ $\gamma\delta$. ἥτις δὲ σύγκειται ἐκ δύω Μελῶν, ὀνομάζεται Διμερὴς, ἢ Δεμελὴς, ὡς $\alpha\beta + \gamma\delta$. ἐὰν δὲ σύγκειται ἐκ τριῶν, λέγεται Τριμερὴς, ὡς $\alpha - \gamma\delta + \varepsilon$, καὶ ὅλως, ὅταν σύγκειται ἐκ πολλῶν μελῶν, καλεῖται Πολυμερής. Τὰ Ποσὰ ἔτι εἰσὶν ἢ Ὁμοειδῆ, ἢ Ἑτεροειδῆ. καὶ Ὁμοειδῆ μὲν ὀνομάζονται, ὅσα διὰ τῶν ἰδίων Γραμμάτων ἐμφαίνονται, ἔχοντα ἅμα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν Γραμμάτων. οἷον $\alpha\beta$ καὶ $\alpha\beta$. $\gamma\gamma\delta$ καὶ $\gamma\gamma\delta$. καὶ ὅσα πρὸς τούτοις ἔχουσι καὶ τὸν αὐτὸν Δυναμοδείκτην (ἢ Βαθμοδείκτην κατ' ἄλλους) (*) ἐπὶ τοῦ ἰδίου Γράμματος κείμενον, οἷον $\alpha^2\beta$ καὶ $\alpha^2\beta$, τὰ ὁποῖα ἂν τύχῃ νὰ ἔχωσι καὶ Σημεῖα, ἢ Συνεργοὺς διαφόρους, οἷον $3\alpha^2\beta$ καὶ $-2\alpha^2\beta$, πάλιν εἰσὶν ὁμοειδῆ. ἐπειδὴ ἡ ταυτότης, ἢ ἡ ἑτερότης τῶν Σημείων, ἢ Συνεργῶν δὲν συνεργεῖ καθόλου εἰς τὸ νὰ εἶναι ὁμοειδῆ ἢ Ἑτεροειδῆ τὰ Ποσά. Ἑτεροειδῆ δὲ Ποσὰ προηγουμένως καὶ κυρίως ὀνο-

(*) Τί δὲ σημαίνει αὕτη ἡ λέξις, ὅρα ἐν τοῖς ἑπομ. §. 44.

ὀνομάζονται, ὅσα δὲν ἐμφαίνονται διὰ τῶν ἰδίων Γραμμάτων, μήτε ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμάτων. π. χ. τὸ αβγ εἶναι Ἑτεροειδὲς τοῦ αβ. ἐπειδὴ τὸ γ ἐκ τοῦ ἑτέρου Μέρους ἐλλείπει. ἑπομένως δὲ Ἑτεροειδῆ Ποσά εἰσι, καὶ ὅσα δὲν ἔχουσι τὸν ἴδιον Δυναμοδείκτην, ἢ ὅσα ἔχουσι μὲν τὸν ἴδιον, δὲν τὸν ἔχουσιν ὅμως ἐπὶ τοῦ ἰδίου Γράμματος ἐπικείμενον. π. χ. τὸ Ποσὸν $α^2βγ$ εἶναι Ἑτεροειδὲς τοῦ αβγ. ἐπειδὴ μόνον τὸ α τὸ ἐν ἐκείνῳ ἔχει ἐφ' ἑαυτοῦ Δυναμοδείκτην τὸν 2. μάλιστα δὲ Ἑτεροειδῆ εἰσι τὰ $αβγ^2$, καὶ $αβδ^2$. ἐπειδὴ μήτε ἐκ τῶν αὐτῶν Γραμμάτων ὅλως συνίστανται, μήτε ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ Γράμματος ἔχουσι τὸν Δυναμοδείκτην.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 5. Δὲν θέλει μᾶς φανῇ παράξενος ἡ ἀόριστος Δύναμις (Σημασία) τῶν Γραμμάτων, ὅταν λάβωμεν κατὰ νοῦν τοὺς ἀφηρημένους ἀριθμούς, π. χ. ὅτι ὁ 20 ἀριθμὸς δύναται νὰ σημαίνῃ ἢ 20 ἀνθρώπους, ἢ 20 Ἵππους, ἢ 20 Γρόσια, ἢ ὁποιασδήποτε εἴκοσι Ὁμοειδεῖς Μονάδας, τὸ ὁποῖον κρέμαται ἐκ τῆς θελήσεως ἑκάστου. Τὰ δὲ Γράμματα πρὸς τῇ ἀοριστίᾳ δύνανται νὰ σημαίνωσι καὶ γενικώτερον. ἐπειδὴ τὸ α, ἢ β π. χ. δύναται νὰ ληφθῇ σημαντικὸν 10 ἀνθρώπων, ἢ 100 Ἵππων, ἢ 300 Δένδρων, καὶ ὅλως δύναται νὰ ληφθῇ ἓν Γράμμα ὡς παραστατικὸν πάσης δυνατῆς πλήθους, ἐξ ὁποιασδήποτε Ποσότητος· ἀφ' οὗ ὅμως διορίσωμεν τὴν σημασίαν ἑνὸς Γράμματος, ἀνάγκη τότε νὰ ἐμμένωμεν εἰς τὸν διορισμὸν μέχρι τέλους τοῦ ἀνὰ χεῖρας ὑπολογισμοῦ.

ΥΠΟ-

ΥΠΟΘΕΣΙΣ β.

§. 6. Διὰ νὰ φανερώνωμεν τὰς Μεταβολὰς, ἢ τὰ Πάθη, εἰς τὰ ὁποῖα ὑπόκεινται αὐτὰ τὰ διὰ τῶν Γραμμάτων ἐκτεθέμενα Ποσὰ, συνεθίζομεν νὰ μεταχειριζώμεθα τὰ ἑξῆς Σύμβολα (Σημεῖα), οἷον τὸ $+$ Σύμβολον λαμβάνομεν δηλωτικὸν προσθέσεως, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται εἰς τὴν φωνὴν, Πλέον. π. χ. ὅταν θέλωμεν νὰ προσθέσωμεν τὸ α εἰς τὸ β, γράφομεν τότε $α + β$ τουτέστι α πλέον, β, ἤγουν β. Τὸ δὲ Σύμβολον $-$ λαμβάνεται σημαντικὸν ἀφαιρέσεως ἢ Ἐλλείψεως, ἢ Στερήσεως, τὸ ὁποῖον ἐκφωνεῖται Ἧττον π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ α τὸ β. γράφομεν οὕτω $α - β$, τουτέστι α Ἧττον β, Τοῦ δὲ Πολλαπλασιασμοῦ Σημεῖον μεταχειριζόμεθα τὸ $\times$, ἢ μίαν στιγμὴν (.), π. χ. ὅταν θέλωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ α μετὰ τοῦ β, ποιοῦμεν οὕτως $α \times β$, ἢ $α \,.\, β$, ἢ $αβ$, καὶ ἐκφωνοῦμεν οὕτω, τὸ α πολλαπλασιαζόμενόν ἐστι μετὰ τοῦ β, ἢ ἐπὶ τὸ β. ἐὰν δὲ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓν Συμπεπλεγμένον Ποσὸν, ποιοῦμεν διὰ τῆς Παρενθέσεως οὕτω $(α - β)\, γ$, καὶ τότε παραλιμπάνεται τὸ Σημεῖον τοῦ Πολλασιασμοῦ, τὸ τοιοῦτον δυνάμεθα καὶ οὕτω νὰ φανερώσωμεν $\overline{α - β} \times γ$. Ἡ Διαίρεσις τέλος ἐμφαίνεται διὰ διττῶν Σημείων, δηλαδὴ ἢ διὰ δύω στιγμῶν, ἢ διὰ Γραμμῆς μεταξὺ τοῦ Διαιρέτου καὶ Διαιρουμένου κειμένης, ὡς εἰς τὰ Κλάσματα, οἷον, $α : β$ ἢ $\frac{α}{β}$. τουτέστι τὸ α διαιρούμενόν ἐστι διὰ τοῦ β. προσέτι $(α - β) : (γ - δ)$ τουτέστι α ἧττον β διαιρεῖται διὰ τοῦ γ ἧττον δ. ἢ ϗ οὕτως $\overline{\alpha - \beta} : \overline{\gamma - \delta}$,

ἢ $\dfrac{\alpha - \beta}{\gamma - \delta}$.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

§. 7. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἕπεται, ὅτι, ταῦτα τὰ Σύμβολα δεικνῦσι μόνον τὰ Πάθη τῶν Ποσῶν χωρὶς νὰ μεταβάλλωσι παντάπασι τὴν δύναμιν αὐτῶν. π. χ. + α σημαίνει, ὅτι τὸ α πρέπει νὰ προστεθῇ. ϗ — α δηλοῖ, ὅτι τὸ α πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ. ἐπομένως διὰ τῶν Σημείων δὲν μεταβάλλονται τὰ Ποσὰ, ἀλλὰ δι' αὐτῶν ἐμφαίνεται μόνον, πῶς νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸ Ποσὸν, ἢ πῶς νὰ τὸ θεωρήσωμεν.

Υ'ΠΟ'ΘΕΣΙΣ γ'.

§. 8. Τέλος ἡ Σχέσις, τὴν ὁποίαν ἔχουσι τὰ Ποσὰ πρὸς ἄλληλα, ἐμφαίνεται διὰ δύω στιγμῶν (:) ὡς α : β. θέλοντες δὲ νὰ δείξωμεν, ποία Ποσότης εἶναι μείζων, ϗ ποία ἐλάσσων, μεταχειριζόμεθα τὰ Σύμβολα > ϗ ἀνάπαλιν <, οὕτως ὅμως, ὥστε ἡ μὲν Συνοχὴ τῶν δύω Γραμμῶν νὰ τείνηται πάντοτε πρὸς τὴν ἐλάσσονα Ποσότητα, τὰ δὲ δύω ἄκρα αὐτῶν νὰ νεύωσι πρὸς τὴν μείζονα. οἷον α > β σημαίνει, ὅτι τὸ α μεῖζον ἐστὶ τοῦ β, ϗ α < β δηλοῖ, ὅτι τὸ α ἔλαττόν ἐστι τοῦ β. τούτων τὸ μὲν > δύναται νὰ ὀνομασθῇ ἔσω Νενδικῆσαι, τὸ δὲ < ἔξω Νενδικῆσαι. αἱ δὲ δύω αὗται Γραμμαὶ = σημαίνουσιν Ἰσότητα, οἷον ἐπὶ τοῦ α = β φανερώνει, ὅτι τὸ α εἶναι ἴσον τῷ β. Τὸ δὲ Σύμβολον ∽ Ὁμοιότητα δηλοῖ· οἷον ἐπὶ τοῦ χ ∽ ψ φανερώνει, ὅτι τὸ χ εἶναι ὅμοιον τῷ ψ. Τὸ δὲ Σημεῖον ∞ εἶναι ἀπειρίας σημαν-

τικόν.

τικόν. ἐπειδὴ ὅτι ἂν τεθῇ, ἐμφαίνει Ποσὸν ἀπειρίας.

ΣΧΟΛΙΟΝ α.

§. 9. Ἐπεκράτησε ϗ χρῆσις εἰς τοὺς Μαθηματικοὺς νὰ θεωρῶσιν ἐνίοτε τὰς Ποσότητας κατὰ τὸ παρ' αὐταῖς εὑρισκόμενον Σύμβολον. ὅθεν ἡ Ποσότης ἡ ἔχουσα τὸ Σύμβολον +, ὀνομάζεται Καταφατική, ἢ Θετική, τοῦτ' ἔστι μία Ποσότης τῷόντι ὑπάρχουσα. ἐκείνη δὲ ὅπου ἔχει τὸ Σημεῖον −, λέγεται Ἀποφατική, ἢ Στερητική τουτέστι Ποσότης ἀποῦσα, ἢ ἀφαιρετική, π. χ. ἂν ὁ Πέτρος ἔχῃ 10 Γρόσια, γράφομεν τὸ Σημεῖον +, τὸ ὁποῖον σημαίνει, ὅτι ὁ Πέτρος κέκτηται ἀληθῶς αὐτὰ τὰ Γρόσια· ἐὰν ὅμως χρεωστῇ εἰς τὸν Παῦλον 10 Γρόσ. τότε δὲν ἔχει τίποτε. ἐπειδὴ χρεωστεῖ τόσα, ὅσα ἔχει, ϗ ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῶσι τὰ 10 ἀπὸ τῶν 10, τουτέστι 10 − 10, μένει = 0. ἂν δὲ χρεωστῇ 20 Γρόσ. τότε ὄχι μόνον δὲν ἔχει οὐδέν, ἀλλ' ἀκόμι ἐλλείπει (τουτέστι ἔχει ὀλιγώτερον) τοῦ μηδενός, τὸ ὁποῖον δηλοῦται διὰ τοῦ Σημείου −. ἡ Κατάστασις ἄρα τοῦ Πέτρου εἶναι − 10, τὸ ὁποῖον δεικνύει, ὅτι χρεωστεῖ 10, ἂν δὲ ἀφαιρεθῶσι τὰ 20 ἀπὸ τῶν 10, μένουσι ἔτι 10 ἀφαιρετικά, ἤτοι 10 − 20, ὅπερ ποιεῖ − 10. τουτέστι τὸ χρέος εἶναι 10 Γρόσ. ἀφ' οὗ κατανοήσωμεν αὐτὴν τὴν ἰδέαν ἐντελῶς, δὲν θέλομεν δυσκολυνθῇ εἰς τὰς μεταβολὰς τῶν Ποσῶν, ὅπου θέλομεν ἐντύχῃ.

ΣΧΟΛΙΟΝ β.

§. 10. Κάθε Ποσότης πρέπει νὰ ἔχῃ ἓν Σημεῖον πρὸ ἑαυτῆς κείμενον, διὰ νὰ διακρίνηται, ἂν αὐτὴ εἶναι προσθετική, ἢ ἀφαιρετική. ὅταν ὅμως μία Ποσότης Καταφατικὴ εἶναι Μονομερής, ἢ εὑρίσκηται εἰς τὴν ἀρχὴν ἑτέρων Ποσοτήτων συμπεπλεγμένως, τότε τὸ Σημεῖον + δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ πρόσκηται εἰς αὐτὴν ἐνεργείᾳ. ἐπειδὴ γέγονεν εἰς χρῆσιν νὰ ἐννοῆται ἔξωθεν. οἷον ἐκ τοῦ + α ὡς Μονομεροῦς ὄντος, δύναται νὰ ἐλλείπῃ τὸ Σημεῖον +, ϗ νὰ μένῃ μόνον α. ὡσαύτως ϗ τὸ + α + β + γ δύναται νὰ γραφῇ ἄνευ τοῦ πρώτου Καταφατικοῦ Σημείου, οἷον α + β + γ.

ΣΧΟ-

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 11. Ἐπειδὴ συμβαίνει ἐνίοτε νὰ λαμβάνωμεν τὰς αὐτὰς Ποσότητας πολλάκις, διὰ τοῦτο ἐκθέτομεν τὸ τοιοῦτον διὰ τῶν ἀριθμητικῶν χαρακτήρων, ἀμέσως πρὸ τοῦ Γράμματος τιθεμένων. π. χ. ὅταν πρέπῃ νὰ λάβωμεν τὸ α τρεῖς, τουτέστιν $\alpha+\alpha+\alpha$, τότε γράφομεν οὕτω 3α. διότι 3α εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ $\alpha+\alpha+\alpha$. οὗτοι δὲ οἱ ἀριθμοὶ, οἵτινες τίθενται πρὸ τῶν Γραμμάτων κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἄνευ τινὸς Σημείου μεταξὺ αὐτῶν καὶ τῶν Γραμμάτων, ὀνομάζονται Συνεργοὶ, ἢ Συμπράκτορες.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ γ'.

§. 12. Συνεργὸς καλεῖται ὁ πρὸ τοῦ Γράμματος ἀμέσως τιθέμενος ἀριθμὸς, ὅστις σημαίνει, ποσάκις πρέπει νὰ λάβωμεν τὴν διὰ τοῦ Γράμματος ἐκείνου παρισταμένην Ποσότητα, ἢ διὰ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει αὐτὴ νὰ πολλαπλασιασθῇ. Ὅταν δὲ δὲν ὑπάρχῃ κανένας Συνεργὸς πρὸ τοῦ Γράμματος, τότε ἐννοεῖται ἔξωθεν ἡ Μονὰς, ἥτις ἐνεργείᾳ δὲν γράφεται πώποτε. π. χ. $\alpha\beta$ εἶναι $1\alpha\beta$. $2\beta\beta$ εἶναι $=\beta\beta+\beta\beta$, ἢ τὸ $\beta\beta$ εἶναι πεπολλαπλασιασμένον μετὰ τοῦ 2.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 13. Ἡ Ἑτερότης (διαφορότης) τῶν Συνεργῶν δύω Ποσοτήτων δὲν μεταβάλλει τὸ Ὁμοειδὲς ἢ ἑτεροειδὲς τῶν Ποσοτήτων. διότι π. χ. $6\alpha\alpha$ καὶ $3\alpha\alpha$ Ποσὰ καὶ μ' ὅλον ὁποῦ ἔχουσι διαφόρους Συνεργοὺς, γοὶ εἰσὶν ὅμως πάλιν ἀλλήλοις Ὁμοειδῆ. ὅμως 6α καὶ 6γ εἰσὶν ἀλλήλοις Ἑτεροειδῆ, καθὼς πάλιν καὶ $5\alpha\alpha\alpha$ & $5\alpha\alpha$ εἶναι μεταξὺ των ἀνόμοια Ποσά, ὡς εἴρηται (§. 4.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ β'.

Περὶ Ἀλγεβραϊκῶν λογισμῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α.

§. 14. Νὰ ἐκθέτωμεν τὰ δοθέντα Μέλη κατὰ τὸν δέοντα καὶ ἁπλούστατον τρόπον.

ΛΥΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

1.) Τὰ Μέλη, καὶ κάθε Γράμμα ἐν τῷ αὐτῷ Μέλει (κἄν τε Συμπεπλεγμένα, κἄν τε ἀσύμπλεκτα τύχωσι τὰ Ποσὰ) πρέπει νὰ γράφωνται κατὰ τὴν τάξιν τοῦ ἀλφαβήτου, καὶ νὰ προσπαθῶμεν, εἰ δυνατόν, νὰ εἶναι τὸ πρῶτον Μέλος πάντοτε Καταφατικόν; π. χ. τὸ δοθὲν Ποσὸν $\beta-\gamma+\alpha+\zeta\delta$ πρέπει νὰ γραφθῇ εἰς τοιαύτην τάξιν, $\alpha+\beta-\gamma+\delta\zeta$. ὁμοίως καὶ τὸ $8\zeta\beta-10\beta\alpha\gamma+6\alpha$ νὰ μετατεθῇ εἰς τοιαύτην $6\alpha-10\alpha\beta\gamma+8\beta\zeta$.

2.) Τὰ ὅμοια, ἢ ὁμοειδῆ Μέλη πρέπει νὰ ἀνάγωνται κατὰ τὰ Σημεῖά των καὶ Συνεργοὺς των εἰς ἓν Μέλος, ὅπερ καὶ Ἐπιτομὴ ὀνομάζεται, καὶ τοῦτο γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς τρεῖς Κανόνας.

Καν. ά.) Ἤ Συνάπτομεν τοὺς Συνεργοὺς τῶν Μελῶν (ἐὰν αὐτὰ τύχωσι ταυτοσύμβολα), κ̓ θέτομεν πρὸ τοῦ Κεφαλαίου πάλιν τὸ αὐτὸ Σύμβολον τῶν συναπτομένων Μελῶν, καθὼς ἐπὶ τῶν Α΄ Ὑποδειγμάτων.

Καν. β΄.) Ἤ ἀφαιροῦμεν (ἂν τύχωσι τὰ Μέλη ἑτεροσύμβολα) τοὺς Συνεργοὺς αὐτῶν, τουτέστι τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τοῦ μείζονος, κ̓ τότε θέτομεν πρὸ τῆς Διαφορᾶς τὸ Σύμβολον τοῦ μείζονος. ὡς ἐπὶ τῶν Β΄. Ὑποδειγμάτων γίνεται.

Καν. γ΄.) Ἤ ἐξαλείφομεν ἀμοιβαίως τὰ ὁμοειδῆ Μέλη, ἂν τύχῃ νὰ ἔχωσι Συνεργοὺς μὲν τοὺς αὐτοὺς, Σύμβολα ὅμως διάφορα, ὡς ἐπὶ τῶν Γ. Ὑποδειγμάτων δηλοῦται σαφέστερον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΤΑ' ΤΟ'Ν ά. ΚΑΝ.

$\alpha\beta + \alpha\beta + \gamma\delta$ γίνεται διὰ τῆς προσθ. $2\alpha\beta + \gamma\delta$.
$2\alpha - 2\delta + 5\alpha - 6\delta$ γίνεται διὰ τῆς προσθ. $7\alpha - 8\delta$.
$\alpha\alpha + 2\alpha\gamma + 3\alpha\gamma$ γίνεται $\alpha\alpha + 5\alpha\gamma$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΤΑ' ΤΟ'Ν β΄. ΚΑΝ.

$3\alpha\beta + 2\alpha\beta\beta - \alpha\beta$ γίνεται διὰ τῆς ἀφαιρ. $2\alpha\beta + 2\alpha\beta\beta$.
ὁμοίως $2\alpha + \delta - 7\alpha$ γίνεται $\delta - 5\alpha$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜ. ΚΑΤΑ' ΤΟ'Ν γ΄. ΚΑΝ.

$\alpha\alpha + 2\alpha\beta\beta + 3\alpha\alpha - 2\alpha\beta\beta$ ἐγκαταλείπεται διὰ τῆς ἀμοιβαίας ἐξαλείψεως $4\alpha\alpha$.
ὁμοίως κ̓ $\beta\delta - \beta\delta\zeta + 2\beta\delta + 2\beta\delta\zeta - 3\beta\delta$ μένει $\beta\delta\zeta$.

ΔΕΓΞΙΣ.

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Τὰ Γράμματα δεικνύουσιν ὁποίαν Ποσότητα πρέπει νὰ λάβωμεν, οἱ δὲ Συνεργοὶ σημαίνουσι, ποσάκις νὰ λάβωμεν τὴν Ποσότητα, τὰ δὲ Σύμβολα δηλοῦσι, κατὰ ποῖον τρόπον νὰ τὴν ἐκλάβωμεν. ὅθεν ὅταν μία Ποσότης εἶναι Προσθετέα, ἢ ἀφαιρετέα πλεονάκις, φθάνει νὰ γράψωμεν αὐτὴν ἅπαξ, τιθέντες πρὸ αὐτῆς ἐκεῖνον τὸν Συνεργὸν ὅστις δύναται νὰ ἐκπληρῇ τὸ τοιοῦτον, καθὼς ἀνωτέρω εἰς τὰ κατὰ τὸν α΄. ὑποδείγματα γέγονεν. ἐὰν δὲ ἡ αὐτὴ Ποσότης μερικαῖς φοραῖς εὑρίσκηται Προσθετέα, καὶ ἐξ ἐναντίας μερικαῖς φοραῖς ἀφαιρετέα, μετά τινος ὅμως Διαφορᾶς τῶν Συνεργούντων, τότε ἐκθέτομεν τὴν Διαφορὰν τῆς Προσθετέας, ἢ τῆς ἀφαιρετέας, καθὼς ἀνωτέρω εἰς τὸ β΄. δείκνυται. ἂν τέλος ἡ αὐτὴ Ποσότης εἶναι προσθετέα καὶ ἐν ταυτῷ ἀφαιρετέα, ἄνευ τινος Διαφορᾶς τῶν Συνεργῶν, εἶναι φανερὸν, ὅτι δὲν ἐγκαταλείπεται ποτε, ὡς εἰς τὰ κατὰ τὸν γ΄. Ὑποδείγματα γέγονε. δι' αὐτῆς ἄρα τῆς Ἐργασίας ἀπεκαπεστάθησαν τὰ δοθέντα Μέλη κατὰ τὸν ἁπλούστατον τρόπον.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ΄.

§. 15. Νὰ προσθέτωμεν Ἀλγεβραϊκὰς Ποσότητας.

ΛΥΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕ'Α.

Πρῶτον τὰ διδόμενα Μέλη πρέπει κατὰ τάξιν νὰ τεθῶσι μετὰ τῶν ἑαυτῶν Συμβόλων, ἔπειτα νὰ πλεσθῇ ἡ πρᾶξις διὰ τῆς Ἐπιτομῆς κατὰ τοὺς ἀνήκοντας Κανόνας τοῦ α. προτεθέντος Προβλήματος.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ α.

Ἔστω εἰς σύναψιν τὸ $\alpha\beta$ καὶ $\gamma\delta$. ὅθεν ποιοῦμεν $\alpha\beta + \gamma\delta$.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β.

Ἔστωσαν Προσθετέα τὰ 4α καὶ 8α. ὅθεν ποιοῦμεν οὕτως $4\alpha + 8\alpha$, καὶ διὰ τῆς Ἐπιτομῆς 12α. τὸ Κεφάλαιον τῶν 3α καὶ -5α καὶ 2β γίνεται $3\alpha - 5\alpha + 2\beta$. καὶ διὰ τῆς Ἐπιτομῆς $2\beta - 2\alpha$.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ.

Ἔστωσαν προσθετέα τὰ $\alpha\beta + \gamma$ καὶ $\beta - \gamma$, ὅθεν ποιοῦμεν $\alpha\beta + \beta + \gamma - \gamma$, καὶ διὰ τῆς Ἐπιτομῆς $\alpha\beta + \beta$.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ δ.

Τὸ Κεφάλ. τῶν $3\beta\gamma - 4\beta\gamma\delta + 6\beta\zeta$, καὶ $6\beta\gamma\delta - 5\beta\gamma + 3\beta\zeta$. γίνεται διὰ τῆς Ἐπιτομῆς $2\beta\gamma\delta - 2\beta\gamma + 9\beta\zeta$.

ΛΕ'Ξ Ι Σ.

Πρόσθεσις (ἥτις κατ' ἄλλους Σύναψις ὀνομάζεται) ἐστὶν ἄθροισις δύο, ἢ πλειόνων Ποσοτήτων εἰς ἓν γενικὸν

Κεφά

Κεφάλαιον, ἀλλὰ μὴν διὰ τούτου τοῦ Κανόνος τὰ δοθέντα Ποσὰ συνήχθησαν εἰς μίαν συμπεπλεγμένην Ποσότητα, ἥτις παρίστησι τὸ γενικὸν Κεφάλαιον, ἔγινεν ἄρα κατὰ τὸ δέον ἡ ἀλγεβραϊκὴ Σύναψις.

ΣΧΟΛΙΟΝ α΄.

§. 16. Ἕκαστος δύναται νὰ καταλάβῃ σαφῶς, ὅτι ἐπὶ τῶν Ὁμοειδῶν Ποσοτήτων πρέπει νὰ ἀθροίζωμεν μόνον τοὺς Συνεργούς· ἐπειδὴ ἂν διορίσωμεν τὴν Σημασίαν τῶν Γραμμάτων. π. χ. ὅτι τὸ α σημαίνει μίαν Γραμμήν, ἢ ἓν Γρόσιον, εἶναι φανερόν, ὅτι 3α καὶ 5α τουτέστι τρία Γρόσ. καὶ πέντε Γρόσ. ἢ τρεῖς Γραμμαὶ καὶ πέντε Γραμμ. ποιοῦσιν 8α, τουτέστι 8 Γρόσ., ἢ 8 Γραμμάς. παραπλησίως δύναται ἕκαστος νὰ ἐννοήσῃ εὐκόλως, καὶ ὅτι τὰ Ἑτεροειδῆ Ποσὰ πρέπει νὰ γράφωμεν καθ' ἓν ξεχωριστά, π. χ. τὸ Κεφάλαιον τῶν 3β καὶ 2γ Ἑτεροειδῶν εἶναι 3β + 2γ. ἐπειδὴ ἂν τὸ β ἐνταῦθα σημαίνῃ ἓν Γρόσιον, καὶ τὸ γ ἕνα ὀβολόν, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκθέσωμεν ἄλλως τὸ ἄθροισμα, εἰμὴ 3 Γρόσ. σὺν 2 ὀβολούς, ἢ 6β καὶ − 4γ εἶναι 6β − 4γ, τουτέστι 6 Γρόσια παρὰ 4 ὀβολούς.

ΣΧΟΛΙΟΝ β΄.

§. 17. Διὰ νὰ ἠμποροῦμεν νὰ κάμνωμεν εὐκολώτερον τὰς Συνάψεις τῶν συναφθησομένων Ποσῶν, ὅταν δοθῶσι πλείονα Μέλη Ὁμοειδῆ, καὶ Ἑτεροειδῆ, πρῶτον τάττομεν τὰ Ὁμοειδῆ κατὰ κάθετον, τὸ ἓν ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, καὶ ἔπειτα τῶν μὲν Ὁμοειδῶν καὶ ἅμα Ταυτοσυμβόλων ἀθροίζομεν τοὺς Συνεργοὺς εἰς ἓν γενικώτερον ἄθροισμα κατὰ τὴν κοινὴν Σύναψιν, τῶν δὲ Ὁμοειδῶν καὶ ἐν ταὐτῷ Ἑτεροσυμβόλων ἀφαιροῦμεν τοὺς Συνεργούς, τουτέστι τὸν ἐλάττονα Συνεργὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὰ δὲ Ἑτεροειδῆ ἁπλῶς καταγράφομεν, καθὼς εἰς τὸ ἀνωτέρω Σχόλιον εἴρηται. καὶ τότε κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ἀθροίζονται τὰ δοθέντα Ποσὰ εὐκολώτερον καὶ συντομώτερον, ὅσον ἐνδέχεται, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς Ὑποδείγμασι.

ΥΠΟ-

ΥΠΟ'ΔΕΙΓΜΑ α'.

$$
\begin{array}{l}
15\alpha\beta - 6\gamma\delta + 4\zeta\varepsilon \\
\qquad\; - 7\gamma\delta + 3\zeta\varepsilon - \varepsilon\vartheta\vartheta \\
-6\alpha\beta \;\text{———}\; \zeta\varepsilon + 3\varepsilon\vartheta\vartheta \\
\hline
9\alpha\beta - 13\gamma\delta + 6\zeta\varepsilon + 2\varepsilon\vartheta\vartheta
\end{array}
$$

ΥΠΟ'ΔΕΙΓΜΑ β'

$$
\begin{array}{l}
2\chi - 3\alpha + 4\beta - 5\gamma + 6\delta - 7\varepsilon \\
10\chi + 9\alpha - 8\beta - 7\gamma - 6\delta \quad - 5\zeta \\
\hline
12\chi + 6\alpha - 4\beta - 12\gamma - 7\varepsilon - 5\zeta.
\end{array}
$$

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 18. Εἰς τὰς Ἀλγεβραϊκὰς Ἐργασίας ἀρχόμεθα ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν, καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ Δεξιά, μὲ ὅλον ὅπου ἀκωλύτως δυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν καὶ ἀπὸ τῶν Δεξιῶν. ἐπειδὴ αἱ διὰ τῶν Γραμμάτων ἐμφαινόμεναι Ποσότητες δὲν ἔχουσι τινὰ δύναμιν ὅπου νὰ κρέμαται ἀπὸ τῆς κατὰ τὸν τόπον θέσεως, καθὼς εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς χαρακτῆρας ἀκολουθεῖ.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ'.

§. 19. Νὰ ἀφαιρῶμεν Ἀλγέβραϊκὰς Ποσότητας.

ΛΥΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕ'Α.

Μεταβάλλομεν τὸ Σύμβολον τοῦ ἀφαιρετέου Ποσοῦ εἰς τὸ ἐναντίον, δηλαδὴ ἐὰν μὲν τὸ ἀφαιρεθησόμενον Ποσὸν

τυγχατυγχάνῃ Καταφατικὸν, ἔχον πρὸ ἑαυτοῦ κείμενον ἢ ὑπεννοούμενον τὸ Σύμβολον +, μεταβάλλομεν αὐτὸ εἰς ἀποφατικὸν διὰ τοῦ ἐναντίου Συμβόλου, τουτέστι διὰ τοῦ −· ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ ἀποφατικὸν, τότε κάμνομεν αὐτὸ νὰ λάβῃ Σημασίαν θετικὴν διὰ τοῦ Συμβόλου +, καὶ μετὰ τοῦτο γίνεται Πρόσθεσις καὶ Ἐπιτομὴ, ὡς

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ α'.

Ἐὰν εἶναι τὸ + α ἀπὸ τοῦ + α ἀφαιρετέον, γράφομεν οὕτως α − α, τουτέστι 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ β'.

Ἐὰν ἡ γδ ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ αβ, γράφομεν αβ − γδ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ γ'.

Ἐὰν ἡ 3γδε ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ 4γδε, γράφομεν οὕτως 4γδε − 3γδε, τουτέστι γδε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ δ'.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ αβγ εἶναι ἀφαιρετέον τὸ − αβγ, γράφομεν ἄρα αβγ + αβγ, τουτέστι 2αβγ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ε'.

Ἐὰν ἀπὸ τῶν αα + 2βγ + ββδ ὦσιν ἀφαιρετέα τὰ αα + 4βγ − ββδ, μεταβάλλομεν πρῶτον τὰ Σύμβολα τῶν ἀφαιρετέων· οἷον − αα − 4βγ + ββδ, ἔπειτα προστιθέντες ἀλλήλοις τὰ Ποσὰ, ἔχομεν αα − αα + 2βγ − 4βγ + ββδ + ββδ, τουτέστι 2ββδ − 2βγ.

ΔΕΙΞΙΣ.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἡ ἀφαίρεσις ἑνὸς Ποσοῦ ἐκδηλοῦται διὰ τοῦ Συμβόλου — (§. 6.)· λοιπὸν ὅταν πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ Ποσὸν β ἀπὸ τοῦ Ποσοῦ α, πρέπει νὰ γράφωμεν πρὸ τοῦ β τὸ Σύμβολον —, τουτέστι νὰ μεταβάλλωμεν τὸ + εἰς τὸ —. ὅταν δὲ τὸ ἀφαιρετέον Ποσὸν ἔχῃ Σύμβολον τὸ —, ὑπάρχει ἄρα τι ἀφαιρετέον, καὶ ὡς τοιοῦτον πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ· ὅθεν πρέπει νὰ μεταβάλωμεν τότε τὸ ἀποφατικὸν Σημεῖον — εἰς Καταφατικὸν + κατὰ τὸν γενικὸν ἐκεῖνον Κανόνα „· ὅτι δύο ἀποφάσεις ἀποτελοῦσι μίαν Κατάφασιν.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ α΄.

§. 10. Τοῦτο ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τῆς Ἰδέας τοῦ ἀποφατικοῦ Ποσοῦ (§. 9). διότι, ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι μία Ἔλλειψις, ἢ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἓν χρέος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἄλλης ὁποιασδήποτε Ποσότητος, διὰ τοῦτο τὸ νὰ ἀφαιρῆται μία Ἔλλειψις, ἢ ἓν χρέος, δὲν σημαίνει ἄλλο, παρὰ νὰ κάμωμεν, ὥστε νὰ μὴν ἔχῃ ὁ ἄλλος αὐτὴν τὴν Ἔλλειψιν, αὐτὸ τὸ χρέος· τοῦτο ὅμως κατ' ἄλλον τρόπον δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποτελέσωμεν, εἰ μὴ μεταποιοῦντες διὰ τῶν Συμβόλων τὴν ἀποφατικὴν Ποσότητα εἰς Καταφατικήν. καθὼς ἐξ ἐναντίας τὸ νὰ προστίθηται μία Ἔλλειψις σημαίνει τὸ νὰ κάμωμεν νὰ ἔχῃ ὁ ἄλλος αὐτὴν τὴν Ἔλλειψιν. ὅταν λοιπὸν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ α τὸ ἧττον β, γράφομεν α — β. ὅταν δὲ ἔχωμεν νὰ ἀφέλωμεν τὸ ἧττον β ἀπὸ τοῦ α, γράφομεν α + β. καὶ πάλιν ἂν προσθέσωμεν εἰς τὰ 12 τὴν Ἔλλειψιν, ἢ τὸ χρέος 4, ἔχομεν 12 — 4, τουτέστι 8. ἐὰν δὲ ἀφέλωμεν ἀπὸ τῶν 8 τὴν Ἔλλειψιν 4, τότε ἔχομεν 8 + 4 τουτέστι 12.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ γ΄.

§. 11. Ἐπειδὴ εἶναι ἀντίφασις τὸ νὰ ὑπάρχῃ τῷ ὄντι μία ἀποφατικὴ Ποσότης ὡς τοιαύτη, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ τὴν θεωρῶμεν π ἀν-

ποτ

νοτε ὡς μίαν ἀληθῶς ὑπάρχουσαν, ἥτις πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ, διὰ τοῦτο προϋποθέτει αὕτη πάντοτε μίαν ἄλλην Καταφατικὴν, ἀπὸ τῆς ὁποίας πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ. ἐκ τούτου πηγάζει ἔτι μία ἄλλη ἀπόδειξις διὰ ἓν τοιοῦτον Συμπεπλεγμένον Ποσόν. π. χ. τὸ $\beta - \gamma$ ἔστω ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ α. ἐὰν ἂν ἀφέλωμεν τὸ β ἀπὸ τοῦ α, τουτέστι $\alpha - \beta$, ἕκαστος ~~εὐκόλως δύναται νὰ καταλάβῃ ὅτι ἀφῃρέθη πλέον~~ τοῦ δέοντος. ἐπειδὴ δὲν ἔπρεπε νὰ ἀφέλωμεν ὅλον τὸ Ποσὸν β, ἀλλὰ τὸ β ἐλαττούμενον κατὰ τὸ γ, μόνην δηλονότι τὴν διαφορὰν καθ' ἣν τὸ β ὑπερέχει τὸ γ. διὰ νὰ ἀποπληρώσωμεν λοιπὸν τὸ ἐλλεῖπον κατὰ τὸ δέον, πρέπει νὰ προσθέσωμεν πάλιν τόσον, ὅσον ἀφῃρέθη πλέον τοῦ δέοντος. ἀλλὰ μὴν τοῦτο τὸ πλέον τοῦ δέοντος ἀφαιρεθὲν εἶναι τὸ γ, ἄρα τὸ γ αὖθις πρέπει νὰ προστεθῇ, καὶ τότε ἔχομεν $\alpha - \beta + \gamma$, τουτέστι τὰ Σύμβολα μεταβάλλονται εἰς τὸ ἐναντίον. Πρὸς σαφεστέραν κατάληψιν τῶν λεγομένων, ἔστω ἀπὸ τῶν 12 ἀφαιρετέος ἀριθμὸς ὁ $8 - 3$. ὅθεν ἐὰν ἀπὸ τῶν 12 ἀφέλωμεν ὅλα τὰ 8, ἀφέλομεν τότε τρεῖς μονάδας πλέον τοῦ δέοντος. ἐπειδὴ δὲν πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ὅλος ὁ 8 ἀριθμὸς, ἀλλὰ μόνον ὁ $8 - 3$, δηλαδὴ μόνον ὁ 5. ἂν λοιπὸν γράψωμεν $12 - 8$, δὲν ἔχομεν τὴν ἀληθῆ διαφορὰν τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ἀλλ' ἐλάσσονα τοῦ ἀληθοῦς. ὥστε διὰ νὰ ἀποπληρώσωμεν τὸ ἐλλεῖπον, πρέπει νὰ προσθέσωμεν 3 μονάδας, καὶ οὕτω γίνεται $12 - 8 + 3$, τουτέστιν 7, ὥσταν νὰ ἀφαιρέσαμεν ἀπὸ τῶν 12 τὸν ἀριθμὸν $8 - 3$, τουτέστιν 5.

ΣΧΟΛΙΟΝ γ΄.

§. 22. Ὅσον ὀλιγώτερον ἀφαιρεῖται ἀπό τινος ἀριθμοῦ π. χ. ἀπὸ τοῦ 7, τόσον περισσότερον μένει. ἂν τοίνυν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ Μηδὲν, ἢ 0, τότε μένει ὅλος ὁ ἀριθμός. Ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ ἔτι ὀλιγώτερον τοῦ Μηδενὸς, ἤτοι μία ἀποφατικὴ Ποσότης, τότε πρέπει νὰ μείνῃ πλέον τῶν 7. π. χ. ἐὰν ἀπὸ τῶν 7 ἀφέλωμεν 4, μένουσι 3, ἐὰν δὲ ἀφέλωμεν 2, μένουσιν 5, ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν 7 ἀφέλωμεν τὸ 0, μένουσιν ὁμοίως 7, ἄρα ἂν ἀπὸ τῶν 7 ἀφαιρεθῇ -2, τότε μένουσι 9.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

§. 23. Τῶν διδομένων Μελῶν δύνανται νὰ γραφθῶσι τὰ Ὁμοειδῆ ὑποκάτω τῶν Ὁμοειδῶν, καθὼς καὶ ἐπὶ τῆς Συνάψεως (§. 17) εἴρηται, οὕτως ὅμως ἐνταῦθα, ὥστε τὰ ἀφαιρετέα Μέλη νὰ γράφωνται ὑποκάτω ἐκείνων, ἀπὸ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ ἀφαιρεθῶσι, καὶ ἀφ' οὗ μεταβληθῶσιν εἰς τὸ ἐναντίον τὰ Σύμβολα, τὸ λοιπὸν τῆς Πράξεως δὲν διαφέρει τῆς Συνάψεως, τοῦτ' ἔστι τῶν μὲν Ταυτοσυμβόλων συνάπτομεν τοὺς Συνεργοὺς, τῶν δὲ Ἑτεροσυμβόλων τοὺς Συνεργοὺς ἀφαιροῦμεν, καὶ τὸ ἐξαχθὲν ἔσται ἡ τούτων Διαφορὰ, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς Ὑποδείγμασι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ α'.

$9\alpha\beta - 13\gamma\delta + 6\varepsilon\zeta + 2\zeta\eta\eta$ τὸ μεῖζον Ποσόν.

$-6\alpha\beta - 7\gamma\delta + 3\varepsilon\zeta + 3\zeta\eta\eta$ τὸ ἀφαιρετέον.

$+ \quad + \quad - \quad -$ μεταβολὴ τῶν Συμβόλων.

$15\alpha\beta - 6\gamma\delta + 3\varepsilon\zeta - \zeta\eta\eta$ ἡ Διαφορά.

ΥΠΟΔΕΙΓ. β'.

$12\chi + 6\alpha - 4\beta - 12\gamma - 7\delta - 5\zeta$. τὸ μεῖζον Π.

$10\chi + 9\alpha - 8\beta - 7\gamma - 6\delta - 5\zeta$. τὸ ἀφαιρ.

$- \quad - \quad + \quad + \quad + \quad +$ μεταβολὴ τῶν Συμβ.

$2\chi - 3\alpha + 4\beta - 5\gamma + 6\delta - 7\varepsilon$. ἡ Διαφορά

ΥΠΟΔΕΙΓ. γ'.

$20\alpha\alpha\beta + 6\alpha\beta\beta\gamma - 18\gamma\gamma\delta + 5\delta\varepsilon\varepsilon$. τὸ μεῖζον Π.

$2\alpha\alpha\beta - 3\alpha\beta\gamma + 7\gamma\gamma\delta + 5\delta\varepsilon\varepsilon$. τὸ ἀφαιρ.

$18\alpha\alpha\beta + 6\alpha\beta\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma - 25\gamma\gamma\delta$. ἡ Διαφορά.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ

§. 24. Ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίτον Ὑπόδειγμα εἶναι τὸ $\alpha\beta\beta\gamma$ ϗ $\alpha\beta\gamma$ ἀνόμοια Ποσὰ (ἐπειδὴ εἰς μὲν τὸ πρῶτον εἶναι δὶς τὸ β, εἰς δὲ τὸ δεύτερον μόνον ἅπαξ γεγραμμένον) διὰ τοῦτο δὲν δύνανται αὐτὰ τὰ δύω Μέλη νὰ συλληφθῶσιν εἰς ἓν Μέλος. ὅθεν πρέπει ἕκαστον νὰ γραφθῇ χωρίς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ δ'.

§. 25. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν Ποσότητας Ἀλγεβραϊκάς.

ΛΥΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

Καν. α΄.) Δύω Καταφατικοὶ Παράγοντες, διδόασιν εἰς τὸ Γινόμενον πάντοτε τὸ Σύμβολον +, τουτέστιν ἀποτελοῦσι Γινόμενον πάντοτε Καταφατικὸν, ὁμοίως ϗ δύω ἀποφατικοὶ Παράγοντες διδόασιν εἰς τὸ Γινόμενον τὸ Συμβ. + τουτέστι ἀποτελοῦσι πάντοτε Γινόμενον Καταφατικόν. ὅταν ὅμως ὁ ἕνας τῶν Παραγόντων εἶναι Καταφατικὸς, ὁ δὲ ἄλλος εἶναι ἀποφατικὸς, τότε εἰς τὸ Γινόμενον ἔσται τὸ Σύμβολον — τουτέστι τὸ Γινόμενον ἔσται πάντοτε ἀποφατικόν.

Καν. β΄.) Οἱ Συνεργοὶ τῶν Παραγόντων πολλαπλασιάζονται μετ᾽ ἀλλήλων, ϗ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον εἶναι ὁ Συνεργὸς τοῦ Ἀλγεβραϊκοῦ Γινομένου.

Καν. γ΄.) Τὰ Γράμματα Συνάπτονται, ϗ συνενοῦνται ἀλλήλοις χωρὶς παρεμπτώσεως τινὸς Συμβόλου.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ.

ἐκ τῦ $\alpha \times \beta$ ἀποτελεῖται τὸ Γινόμενον $\alpha\beta$, τυτέςι Καταφ.
ἐκ τῦ $\alpha \times - \beta$ ἀποτελεῖται Γινόμ. $-\alpha\beta$, τυτές. Ἀποφ.
ἐκ τῦ $-\alpha \times \beta$ ἀποτελ. Γινόμ. $-\alpha\beta$, τυτές. Ἀποφ.
ἐκ τῦ $-\alpha \times -\beta$ ἀποτελ. Γινόμ. $\alpha\beta$, τυτές. Καταφ.
ἐκ δὲ τῦ $2\alpha \times 6\beta$ ἀποτελ. Γινόμ. $12\alpha\beta$. Καταφ.

Ἐπὶ δὲ τῶν Συμπεπλεγμένων Ποσῶν πρέπει κάθε Μέλ⊙ τῦ Πολλαπλασιασῦ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ ὅλα τὰ Μέλη τῦ Πολλαπλασιασέυ καθὼς εἰς τὺς ἀριθμὺς π. χ. $(3\alpha\gamma - 4\beta\delta) \times 2\alpha\beta$ ἀποτελεῖ Γινόμενον $6\alpha\alpha\beta\gamma - 8\alpha\beta\beta\delta$. ἢ $(2\alpha + \beta - 5\gamma) \times (3\alpha - \delta + 6\varepsilon)$ δίδει Γινόμ. τὸ $6\alpha\alpha + 3\alpha\beta - 15\alpha\gamma - 2\alpha\delta - \beta\delta + 5\gamma\delta + 12\alpha\varepsilon + 6\beta\varepsilon - 30\gamma\varepsilon$. τυτέςι ὁ Πολλαπλασιασέ⊙ πολλαπλασιάζεται πρῶτον μετὰ τῦ 3α, ὕςερον μετὰ τῦ $-\delta$, ἢ τέλ⊙ μετὰ τῦ 6ε. ἂν δὲ εὑρεθῶσί τινα Ὁμοειδῆ Μέλη, ἀνάγομεν αὐτὰ κατὰ τὸ Α΄. Πρόβλημα εἰς ἓν Μέλ⊙, τῦτο γίνεται πολλὰ εὐκόλως, ἂν μεταξὺ τῆς ἐργασίας γράφωμεν τὰ Ὁμοειδῆ ὑποκάτω τῶν Ὁμοειδῶν, καθὼς θέλομεν ἰδῆ κατωτέρω ἐν τῷ πρώτῳ Ὑποδείγματι.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Περὶ τῶν Συμβ. Πολλαπλασιασμός ἐςὶ τὸ νὰ λάβωμεν τοσάκις τὸν Πολλαπλασιασέον, ὁσάκις ὁ Πολλαπλασιασὴς περιέχει τὴν Μονάδα. ὅταν λοιπὸν πολλαπλασιάζωμεν μίαν Καταφατικὴν Ποσότητα μετ' ἄλλης Καταφατικῆς, ἢ τὸ Σύμβολον $+$ μετ' ἄλλυ τοιύτυ $+$. ἢ ὅταν

προσ-

προσθέτωμεν πλεονάκις μίαν δεδομένην Ποσότητα, τότε τίθεται ἡ ἀνωτέρω Ποσότης τοσάκις, ὁσάκις περιέχεται ἡ Μονὰς εἰς τὴν κατωτέρω Ποσότητα. π. χ. ἐκ τοῦ + 3 × + 2 προάγεται 6, ἐπειδὴ τὸ 3 πρέπει νὰ τεθῇ δύο φοραῖς, ὅθεν πρέπει εἰς τὸ Γινόμενον νὰ μείνῃ τὸ Καταφατικὸν Σύμβολον +.

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάζωμεν μίαν ἀποφατικὴν μετ' ἄλλης Καταφατικῆς Ποσότητος, τότε δεικνύει ὁ Πολλαπλασιασμὸς, ποσάκις πρέπει ἡ ἀποφατικὴ Ποσότης νὰ τεθῇ, ἢ νὰ γραφθῇ, ὅθεν μένει Γινόμενον ἀποφατικὸν, καὶ ἐμφαίνεται διὰ τοῦ Συμβόλου —. ἐπειδὴ ἡ ἀποφατικὴ Ποσότης ἐλήφθη τοσάκις, ὁσάκις ὁ Καταφατικὸς Πολλαπλασιαστὴς περιέχει τὴν Μονάδα. π. χ. — 3 × + 2 σημαίνει, ὅτι ἡ Ἔλλειψις τῆς Ποσότητος 3 πρέπει νὰ τεθῇ δὶς, ὅπερ ἐστὶν — 6.

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάζωμεν μίαν Καταφατικὴν Ποσότητα μετ' ἄλλης ἀποφατικῆς, τότε πρέπει ἡ Καταφατικὴ Ποσότης νὰ ἀφαιρεθῇ τοσάκις, ὁσάκις ἐν τῷ ἀποφατικῷ Πολλαπλασιαστῇ περιέχεται ἡ Μονὰς π. χ. 3 × — 2 σημαίνει, ὅτι ἡ Ποσότης 3 πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ δὶς, ὅπερ ἀποτελεῖ — 6.

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ μία ἀποφατικὴ Ποσότης μετ' ἄλλης ἀποφατικῆς, τότε δεικνύει ὁ Πολλαπλασιασμὸς, ὅτι ἡ ἀποφατικὴ Ποσότης πρέπει τοσάκις νὰ ἀφαιρεθῇ, ὁσάκις περιέχεται ἡ Μονὰς ἐν τῷ Πολλαπλασιαστῇ. ἀλλὰ μὴν τὸ νὰ ἀφαιρῆται μία ἀποφατικὴ Ποσότης, δηλοῖ, τὸ νὰ προστίθηται. ἄρα καὶ τὸ Γινόμενον πρέπει νὰ ἔχῃ Σύμβολον Καταφατικὸν +. ἐπειδὴ ἡ Ἔλλειψις τῆς ἀποφατικῆς Ποσότητος τοσάκις λαμβάνεται, ὁσάκις ἐν τῷ Πολλαπλασιαστῇ περιέχεται ἡ Μονάς.

Ὅσον δὲ διὰ τοὺς Συνεργοὺς εἶναι φανερὰ ἡ Δεῖξις ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ Πολλαπλασιασμοῦ. ἐπειδὴ οἱ Συνεργοὶ εἶσιν οἱ Παράγοντες, οἱ ὁποῖοι μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθέντες, ἀποτελοῦσι τὸ ζητούμενον Παραγόμενον.

Περὶ τῶν Γραμμάτων. Πολλαπλασιάζειν ἐστὶ τὸ νὰ κάμωμεν ἐκ μιᾶς ἁπλῆς Ποσότητος μίαν ἄλλην Σύνθετον. ἀλλὰ μὴν Σύνθετος Ποσότης λέγεται ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάρχουσι πολλὰ Γράμματα συνεζευγμένα χωρὶς παρεμπτώσεως τινὸς Συμβόλου (§.4.). ἄρα διὰ τῆς τοιαύτης καταγραφῆς τῶν Γραμμάτων πολλαπλασιάζονται αἱ Ποσότητες. α ϗ β εἰσὶν ἁπλαῖ Ποσότητες, ἢ Παράγοντες, τὸ δὲ $\alpha\beta$ εἶναι Ποσότης Σύνθετος, ἢ Γινόμενον, ὅπερ κατ' ἄλλους ϗ Παραγόμενον ὀνομάζεται. ὡσαύτως $\alpha\beta$ ϗ $\gamma\delta$ εἰσὶν οἱ Παράγοντες, τὸ δὲ $\alpha\beta\gamma\delta$ εἶναι τὸ ἐκ τούτων Παραγόμενον.

ΣΧΟΛΙΟΝ α΄.

§. 26. Ἡ αὐτὴ Δεῖξις, ἥτις ϗ ἐν τῷ (§. 21.) περὶ τῆς ἀφαιρέσεως εἴρηται, δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ϗ ἐπὶ τοῦ παρόντος, ἐπειδὴ μία ἀποφατικὴ Ποσότης δὲν ὑπάρχει ἀληθῶς, διὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον νὰ Πολλαπλασιασθῇ μετ' αὐτῆς ἄλλη τις ἀποφατική. ὅθεν πρέπει νὰ θεωρῆται αὕτη ὡς ἠνωμένη μετὰ τινὸς ἄλλης Ποσότητος, ἀφ' ἧς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ. π. χ. $\alpha - \gamma$ ἔστω πολλαπλασιαζόμενον μετὰ τοῦ $\beta - \delta$. ϗ τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τοῦ β γενομένης, α μετὰ τοῦ β πολλαπλασιασθὲν παρέχει $\alpha\beta$. ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὅλη ἡ Ποσότης α, ἀλλὰ μόνον $\alpha - \gamma$, τουτέστιν α παρὰ γ, διὰ τοῦτο τὸ Γενόμενον $\alpha\beta$ εἶναι μεῖζον τοῦ δικαίου τόσον, ὅσον δίδωσι τὸ β μετὰ τοῦ γ πολλαπλασιασθέν. πρέπει λοιπὸν τὸ $\beta\gamma$ νὰ ἀφαιρεθῇ, ὅθεν $-\gamma \times +\beta$ δίδωσι $-\beta\gamma$, ἢ ἀνόμοια Σύμβολα διδόασι Σύμβολον $-$. ἔπειτα τὸ α μετὰ τοῦ $-\delta$ πολλαπλασιασθὲν (κατὰ τὰ ἄνω εἰρημένα, ἢ ἐπειδὴ πρέ-

πει

πει νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ α τοσάκις, ὁσάκις τὸ δ περιέχει τὴν Μονάδα) δίδωσιν — αδ. ἀλλ' ἐπειδὴ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ νὰ ἀφαιρεθῇ ὄχι ὅλη ἡ Ποσότης α. ἀλλὰ μόνον τὸ α παρὰ τὸ γ, διὰ τοῦτο ἀφῃρέθη πλέον τοῦ δέοντος τόσον, ὅσον δίδωσι τὸ γ μετὰ τοῦ δ πολλαπλασιασθέν, ὅθεν πρέπει αὕτη ἡ Ποσότης γδ πάλιν νὰ προστεθῇ, ἢ νὰ γραφῇ μετὰ τοῦ Συμβόλου +. τουτέστι τὸ — μετὰ τοῦ — πολλαπλασιασθὲν, δίδωσι τὸ +. Ἡ ἀλήθεια τούτης τῆς πράξεως φαίνεται σαφέστατα, ἂν ἡ σημασία τῶν Γραμμάτων προσδιορισθῇ δι' ἀριθμητικῶν χαρακτήρων. π. χ. ἔστωσαν 8 — 3 Πολλαπλασιαστέα μετὰ τῶν 6 — 4, ὅθεν 8 διὰ τοῦ 6 πολλαπλασιασθεὶς, δίδωσι 48, ἀλλ' αὐτὸ τὸ Γενόμενον εἶναι μεῖζον τοῦ δέοντος. ἐπειδὴ δὲν πρέπει ὅλος ὁ 8 ἀριθμὸς νὰ πολλαπλασιασθῇ μετὰ τοῦ 6, ἀλλὰ μόνον 8 παρὰ 3. ὅθεν τὸ ἐκ τοῦ 3 καὶ 6 Γενόμενον, τουτέστι ὁ 18 ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ. λοιπὸν τὸ πρῶτον ἀληθὲς Παραγόμενον εἶναι 48 — 18. πάλιν 8 ἐπὶ τὸν — 4 πολλαπλασιασθεὶς, δίδωσι — 32 κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα. ἀλλὰ καὶ τοῦτο τὸ ἀποφατικὸν, ἢ ἀφαιρετέον Ποσὸν εἶναι τόσον μεῖζον τοῦ δέοντος, ὅσον εἶναι τὸ ἐκ τοῦ 3 καὶ 4 Γενόμενον. διὰ νὰ γένῃ λοιπὸν ἡ προσήκουσα ἀναπλήρωσις, πρέπει νὰ προστεθῇ τὸ ἐκ τοῦ 3 καὶ 4 Γενόμενον, τουτέστι ὁ 12, καὶ οὕτως ἀποκτῶμεν τὸ δεύτερον ἀληθὲς Γενόμενον — 32 + 12. ἀμφότερα τὰ Γενόμενα ποιοῦσι 48 — 18 — 32 + 12, τουτέστι 60 — 50 = 10, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ἴδιον Γενόμενον ἐκ τῶν 5 (ἤτοι 8 — 3) καὶ 2 (ἤτοι 6 — 4).

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 27. Ἐὰν ὦσιν οἱ Παράγοντες Συμπεπλεγμένα Ποσὰ, γράφομεν πρῶτον τὸν Πολλαπλασιαστὴν ὑποκάτω τοῦ Πολλαπλασιαστέου, ἔπειτα τραβῶμεν μίαν Γραμμὴν (ὡς εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀριθμῶν), ὑποκάτω τῆς ὁποίας γράφομεν τὰ γινόμενα εἰς διαφόρους Σειρὰς, (ἀράδας) ἔνθα πρέπει νὰ παρατηρῶμεν ἐπιμελῶς ὥστε πάντοτε ἡ Ὁμοειδὴς Ποσότης νὰ ἔρχηται ὑποκάτω τῆς Ὁμοειδοῦς. μετὰ τοῦτο ἐπιτέμνομεν, ἂν εἶναι δυνατὸν, πάντα ταῦτα τὰ μερικὰ Γενόμενα κατὰ τὸ (§. 14.). καὶ γράφομεν τὸ γενικὸν Γενόμενον εἰς μίαν Σειρὰν, καθὼς εἰς τὰ ἑπόμενα Παραδείγματα.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ β.

$$\begin{array}{l} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \\ \hline \alpha\alpha+\alpha\beta \\ \quad -\alpha\beta-\beta\beta \\ \hline \alpha\alpha-\beta\beta \end{array}$$

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. β.

$$\begin{array}{l} 3\alpha\beta-6\gamma\delta+5\varepsilon\varepsilon\zeta \\ 4\alpha\beta-3\varepsilon\zeta \\ \hline 12\alpha\alpha\beta\beta-24\alpha\beta\gamma\delta+20\alpha\beta\varepsilon\varepsilon\zeta \\ -9\alpha\beta\varepsilon\zeta+18\gamma\delta\varepsilon\zeta-15\varepsilon\varepsilon\varepsilon\zeta\zeta \\ \hline 12\alpha\alpha\beta\beta-24\alpha\beta\gamma\delta+20\alpha\beta\varepsilon\varepsilon\zeta-9\alpha\beta\varepsilon\zeta+18\gamma\delta\varepsilon\zeta-15\varepsilon\varepsilon\varepsilon\zeta\zeta. \end{array}$$

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. γ.

$$\begin{array}{l} 6\chi\chi-7\alpha\chi+8\alpha\alpha \\ 2\chi\chi-3\alpha\chi+8\alpha\alpha \\ \hline 12\chi\chi\chi\chi-14\alpha\chi\chi\chi+16\alpha\alpha\chi\chi \\ \quad -18\alpha\chi\chi\chi+12\alpha\alpha\chi\chi-24\alpha\alpha\alpha\chi \\ \quad\quad +24\alpha\alpha\chi\chi-28\alpha\alpha\alpha\chi+32\alpha\alpha\alpha\alpha. \\ \hline 12\chi\chi\chi\chi-32\alpha\chi\chi\chi+61\alpha\alpha\chi\chi-52\alpha\alpha\alpha\chi+32\alpha\alpha\alpha\alpha. \end{array}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ γ.

§. 28. Εἶναι ἀναγκαῖον νὰ προσέχωμεν καλῶς ἐπάνω εἰς τὰς πράξεις τῆς Συνάψεως ϗ Πολλαπλασιάσεως, διὰ νὰ μὴ συγχυθῶσιν αὐταὶ αἱ δύω Ἐκθέσεις, ἐν ᾧ πολὺ ἀλλήλων διαφέρουσιν. ἡ μὲν ἀλγεβραϊκὴ Σύναψις γίνεται μόνον διὰ τῶν Συνεργῶν, ἐπὶ δὲ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ ἐνεργοῦσι ϗ οἱ Συνεργοὶ ϗ τὰ Γράμματα. π. χ.

α μὲ α συναφθὲν, ποιεῖ 2α.	ἐκ δὲ τοῦ α X α γίνεται αα
α μὲ ο συναφ. ποιεῖ . . α.	α X ο γίν. . . . . ο
α μὲ − α συναφ. ποιεῖ . ο.	α X − α γίν. − αα
− α μὲ − α συναφ. ποιεῖ − 2α.	− α X − α γίν. + αα
α μὲ 1 . . . . ποιεῖ α + 1.	α X 1 γίνεται . . . α
2α μὲ − 3β . ποιεῖ 2α − 3β.	2α X − 3β γίνεται − 6αβ

Τουτέστιν ἐπὶ μὲν τῆς Συνάψεως συνδέονται ϗ συνάπτονται τὰ Ποσὰ μετὰ τῶν ἑαυτῶν Συμβόλων, ϗ ἐκ τούτου γίνεται μία Συμπεπλεγμένη Ποσότης. ἐπὶ δὲ τῆς Πολλαπλασιάσεως ἐκ μιᾶς ἁπλῆς Ποσότητος ἀποκαθίσταται ἄλλη τις Σύνθετος, καταγραφομένων τῶν Γραμμάτων ἄνευ παρεμπτώσεως τινὸς Συμβόλου. ἡ ἀλήθεια τούτου γίνεται σαφεστέρα, ἐὰν εἰς τὸν τόπον τῶν Γραμμάτων τεθῶσιν ἀριθμοί. ὅθεν ἂν τὸ α ὑποτεθῇ ἴσον τῷ 4, ἔσαι τότε τὸ μὲν 2α τουτέστι 4 + 4 = 8, τὸ δὲ α X α τουτέστι 4 X 4 = 16, ϗ πάλιν τὸ μὲν α + ο = 4, τὸ δὲ α X ο, τουτέστι 4 X ο = ο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ί.

§. 29. Νὰ διαιρῶμεν Ποσότητας ἀλγεβραϊκάς.

ΛΥΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

Καν. ά.) Τὰ μὲν ὅμοια Σύμβολα ἀποπλοῦσι Σύμβολον +, τουτέστι Πηλίκον Καταφατικόν. Τὰ δὲ ἀνόμοια

Συμβ. διδόασι Συμβολ. —, τυτέστι Πηλίκον ἀποφατικόν.

Καν. β'.) Οἱ Συνεργοὶ διαιροῦνται κατὰ τοὺς κανόνας τῆς ἀριθμητικῆς.

Καν. γ'.) Ὑποκάτω τοῦ Διαιρετέου γράφομεν μίαν Γραμμήν, καὶ ὑποκάτω αὐτῆς γράφεται ὁ Διαιρέτης. ἂν ὅμως εὑρίσκηνται καὶ εἰς τὸν Διαιρετέον καὶ εἰς τὸν Διαιρέτην τὰ αὐτὰ Γράμματα, τότε ἀφαιροῦμεν, ἢ σβύομεν διὰ γραμμικοῦ τινος σημείου ἀμφοτέρωθεν ἴσον ἀριθμὸν τῶν Ὁμοίων Γραμμάτων.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ.

α:α ποιεῖ $\frac{\alpha}{\alpha}$. ὁ Συνεργὸς 1 (ὅστις ἐννοεῖται ἐνταῦθα κατὰ τὸ §. 12) διαιρούμενος ἐπὶ τὸ 1, δίδει Πηλίκον 1. λοιπὸν τοῦ α καὶ α ἀφαιρεθέντος, ἢ σβυσθέντος $\frac{\cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha}}$, ἐστὶ τὸ Πηλίκον μονὰς 1.

Ἐκ τοῦ αα: α προκύπτει Πηλίκον $\frac{\alpha\alpha}{\alpha}$ ἢ $\frac{\cancel{\alpha}\alpha}{\cancel{\alpha}} = \alpha$, τοῦ αβ διαιρεθέντος ἐπὶ τὸ α, προκύπτει $\frac{\alpha\beta}{\alpha}$ τουτ' ἐστι $\frac{\cancel{\alpha}\beta}{\cancel{\alpha}} = \beta$.

Ἐκ δὲ τοῦ 16 αααβγ: 8 αββγγ προκύπτει Πηλίκον $\frac{16\alpha\alpha\alpha\beta\gamma}{8\alpha\beta\beta\gamma\gamma}$ ἤτοι $\frac{16\cancel{\alpha}\alpha\alpha\cancel{\beta}\cancel{\gamma}}{8\cancel{\alpha}\cancel{\beta}\beta\cancel{\gamma}\gamma} = 2\,\frac{\alpha\alpha}{\beta\gamma}$.

Ἐκ

Ἐκ δὲ τοῦ 72αβ : — 9αβ προκύπτει $- \frac{72αβ}{9αβ} = - 8$.

Ἐπὶ δὲ τῶν Συμπεπλεγμένων Ποσῶν ἀκολουθοῦμεν τὴν Διαίρεσιν καθὼς ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, γράφομεν δηλονότι τὸν Διαιρέτην ὑπὸ τὸν Διαιρετέον, ϗ ζητοῦμεν τὸ Πηλίκον κατὰ τοὺς προτεθέντας κανόνας, τὸ ὁποῖον θέτομεν εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν μετ' αὐτοῦ τὸν Διαιρέτην, ϗ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Διαιρέτου τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον, μεταβάλλοντες τὰ Σύμβολα, ϗ ἐπιτέμνοντες τὸν Διαιρετέον, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς παραδείγματι.

αα + 2αβ + ββ (α + β
α + β
αα + αβ
— —
αβ + ββ
α + β
αβ + ββ
— —
o o

Τὸ πρῶτον Πηλίκον τοῦ αα : α εἶναι α. ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν τὸ Πηλίκον α μετὰ τοῦ Διαιρέτου α + β ἀποκτῶμεν Γινόμενον τὸ αα + αβ, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑποκάτω τοῦ Διαιρετέου, ϗ μεταβάλλοντες ἔπειτα τὰ Σημεῖα τούτου τοῦ Γινομένου, τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου, ϗ οὕτω τὸ μὲν — αα ἀναιρεῖ τὸ + αα, ϗ μένει διαφορὰ τὸ μηδενικὸν o, ἀπὸ δὲ τοῦ 2αβ ἀφαιρεθέντος τοῦ — αβ, μένει + αβ ἡ διαφορά, τὴν ὁποίαν γράφομεν ὑποκάτω τῆς Γραμμῆς, προσθέτοντες τὸ ἑπόμενον Μέλος τοῦ Διαιρετέου, τουτέστι τὸ ββ, πάλιν γράφομεν τὸν Διαιρέτην α + β ὑποκάτω τοῦ λοιποῦ Διαιρετέου + αβ + ββ, ϗ διαιρεθέντος τοῦ αβ ἐπὶ τὸ α, προκύ-

Ἐπειδὴ ἡ Διαίρεσις ἀναλύει ἐκεῖνο, ὅπȣ ἐσύνθεσεν ὁ Πολλαπλασιασμὸς, διὰ τȣ̃το πρέπει καὶ διὰ τῆς Διαιρέσεως νὰ προκύψωσιν ἐκεῖνοι οἱ Παράγοντες, οἵτινες ἐσύνθεσαν τὸ Γινόμενον διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως. ὅθεν ἐπειδὴ τὸ — μετὰ τȣ̃ — πολλαπλασιασθὲν, ἀποτελεῖ Σύμβολον +, εἶναι φανερὸν, ὅτι ἓν Γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ τό Συμβ. —, ἐὰν δὲν ἔχωσιν ἐναντία Σημεῖα οἱ Παράγοντες. λοιπὸν τὸ — αβ (τὸ Γινόμενον δηλ. ἐκ τȣ̃ + α καὶ — β, ἢ τȣ̃ — α καὶ + β) διαιρεθὲν ἐπὶ τὸ + α, δίδωσι Πηλίκον τὸ — β. διαιρȣ́μενον δὲ ἐπὶ τὸ — α, δίδωσι τὸν ἕτερον Παράγοντα + β. ἐξ ἐναντίας τὸ + αβ (τȣ̃τ᾽ ἔςι τὸ Γινόμενον ἐκ τȣ̃ + α καὶ + β, ἢ τȣ̃ — α καὶ — β διαιρεθὲν ἐπὶ τὸ + α, δίδωσι Πηλίκον (τὸν ἕνα δηλονότι Παράγοντα) + β, Διαιρεθὲν δὲ ἐπὶ τὸ — β, δίδει Πηλίκον τὸ — β. τὸ αὐτὸ τȣ̃το δύναται νὰ λεχθῇ καὶ περὶ τῶν Συνεργῶν καὶ Γραμμάτων. ἐπειδὴ προσπαθȣ̃μεν νὰ ἀποκτήσωμεν διὰ τῆς Διαιρέσεως τȣ̀ς Ἰδίȣς Παρά-

γονπτει δεύτερον Πηλίκον τὸ $+\beta$, τὸ ὁποῖον ὡσαύτως γράφομεν εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων μετὰ τοῦ ἑαυτοῦ Συμβόλου, ὕστερον πολλαπλασιάζομεν τὸ Πηλίκον β μεθ' ὅλου τοῦ Διαιρέτου, καὶ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον $\alpha\beta+\beta\beta$ γράφομεν ὑποκάτω τοῦ Διαιρέτου, καὶ μεταβαλόντες τὰ Σημεῖα τούτου τοῦ Γινομένου, τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου. ὅθεν τὸ $+\alpha\beta$ ἀναιρεῖ τὸ $-\alpha\beta$, ὁμοίως καὶ τὸ $+\beta\beta$ τὸ $-\beta\beta$, καὶ ἐγκαταλείπεται Διαφορὰ τὸ 0, καὶ οὕτω γέγονεν ἡ Διαίρεσις ἐντελῶς. κατ' αὐτὴν τὴν μέθοδον ἀναλύομεν καὶ τὰ ἑξῆς Παραδείγματα.

ΔΕΙΞΙΣ.

γοντας, οἵτινες διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως συνθέτουσι τὸ Πολλαπλοῦν, ἢ Διαιρετέον.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ά.

$48\alpha\alpha\alpha - 76\alpha\alpha\beta - 64\alpha\beta\beta + 105\beta\beta\beta \mid \underline{12\alpha\alpha} - 4\alpha\beta - 21\beta\beta$

$4\alpha - 5\beta.$ ὁ Διαιρέτης

$48\alpha\alpha\alpha - 60\alpha\alpha\beta.$ τὸ Γινόμενον

$- \quad +$ μεταβολὴ τῶν Συμβ.

$-16\alpha\alpha\beta - 64\alpha\beta\beta$

$4\alpha - 5\beta$

$-16\alpha\alpha\beta + 20\alpha\beta\beta$

$+ \quad -$

$-84\alpha\beta\beta + 105\beta\beta\beta$

$4\alpha - 5\beta$

$-84\alpha\beta\beta + 105\beta\beta\beta$

$+ \quad -$

$0 \quad 0$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

$18\chi\chi\chi\chi - 45\chi\chi\chi + 82\chi\chi - 67\chi + 40 \mid \underline{6\chi\chi} - 7\chi + 8$

$3\chi\chi - 4\chi + 5$

$18\chi\chi\chi\chi - 24\chi\chi\chi + 30\chi\chi$

$- \quad + \quad -$

$-21\chi\chi\chi + 52\chi\chi - 67\chi$

$3\chi\chi - 4\chi + 5$

$-21\chi\chi\chi + 28\chi\chi - 35\chi$

$+ \quad - \quad +$

$+24\chi\chi - 32\chi + 40$

$3\chi\chi - 4\chi + 5$

$24\chi\chi - 32\chi + 40$

$- \quad + \quad -$

$0 \quad 0 \quad 0$

ΠΑΡΑ'-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ.. γ'.

$16\alpha\alpha\alpha\alpha - 72\alpha\alpha\beta\beta + 81\beta\beta\beta\beta \;|\; \underline{8\alpha\alpha\alpha} + 12\alpha\alpha\beta - 18\alpha\beta\beta - 27\beta\beta\beta$

$2\alpha \quad - 3\beta$

$16\alpha\alpha\alpha\alpha - 24\alpha\alpha\alpha\beta$

$- \quad +$

$24\alpha\alpha\alpha\beta - 72\alpha\alpha\beta\beta$

$2\alpha \quad - 3\beta$

$24\alpha\alpha\alpha\beta - 36\alpha\alpha\beta\beta$

$- \quad +$

$-36\alpha\alpha\beta\beta + 81\beta\beta\beta\beta$

$2\alpha \quad - 3\beta$

$-36\alpha\alpha\beta\beta + 54\alpha\beta\beta\beta$

$+ \quad -$

$-54\alpha\beta\beta\beta + 81\beta\beta\beta\beta$

$2\alpha \quad - 3\beta$

$-54\alpha\beta\beta\beta + 81\beta\beta\beta\beta$

$+ \quad -$

$0 \quad 0$

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 30. Ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀνόμοια Συμπεπλεγμένα Ποσὰ μὲ ἄλλα ἀνόμοια Συμπεπλεγ. Ποσὰ, καὶ εὑρίσκηται εἰς κάθε Ποσότητα τὸ αὐτὸ Γράμμα ἅπαξ, ἢ πολλάκις, δυνάμεθα τότε νὰ σβύσωμεν ἀμφοτέρωθεν ἓν Ἴσον ἀριθμὸν Γραμμάτων. πρὸς τούτοις δὲ ἐὰν ὅλοι οἱ Συνεργοὶ ἐπιδέχωνται ἕνα κοινὸν Διαιρέτην, δυνάμεθα νὰ τοὺς ἀνάξωμεν διὰ τῆς Διαιρέσεως ἐπὶ τὸ συντομώτερον, τουτέστιν εἰς ἐλάσσονας Ὅρους. π. χ. $\dfrac{8\alpha\beta\gamma - 4\beta\gamma\delta}{40\alpha\beta\gamma + 8\alpha\beta\gamma\delta}$

ἀρ' ȣ̃

ἀφ' οὗ σβύσωμεν ἀπὸ ὅλα τὰ Μέλη τὸ $\beta\gamma$, καὶ διαιρέσωμεν καθὲ Συνεργὸν μετὰ τοῦ 4, γίνεται $\frac{2\alpha - \delta}{10\alpha + 2\alpha\delta}$ πρὸς τούτοις τὸ $\frac{4\alpha\alpha\gamma - 6\alpha + 8\alpha\alpha\alpha\delta}{10\alpha - 6\alpha\beta}$ δίδωσιν $\frac{2\alpha\gamma - 3 + 4\alpha\alpha\delta}{5 - 3\beta}$,

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 31. Ἡ Διαίρεσις, ἢ ἡ ἀνάλυσις μιᾶς Ποσότητος εἰς τοὺς ἑαυτοῦ Παράγοντας ἀκολουθεῖ εἰς τὴν Ἄλγεβραν συχνότατα, καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ γυμνασθῶμεν εἰς αὐτὴν ἀκριβῶς. οὕτω συντίθεται τὸ $\alpha\beta$ ἐκ τοῦ α καὶ β. καὶ τὸ $\beta\gamma\gamma$ ἐκ τοῦ β καὶ $\gamma\gamma$, ἢ ἐκ τοῦ $\beta\gamma$ καὶ γ. $4\chi\chi + 2\chi$ ἐκ τοῦ $2\chi\chi + \chi$ καὶ 2, ἢ ἐκ τοῦ $2\chi + 1$ πολλαπλασιασθέντος μετὰ τοῦ 2χ. προσέτι τὸ $\alpha\delta - \delta$ συνίσταται ἐκ τοῦ $\alpha - 1$ καὶ τοῦ δ. ἐπειδὴ ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν τὸ $\alpha - 1$ μετὰ τοῦ δ, ἀναφύεται Γινόμενον τὸ $\alpha\delta - \delta$. ὡσαύτως καὶ τοῦ $\delta\nu\nu + \delta\nu - \delta$ Παράγοντες εἰσὶν οἱ $\nu\nu + \nu - 1$ καὶ δ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ γ'.

Περὶ ἀλγεβραϊκῶν Κλασμάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α'.

§. 32. Νὰ φέρωμεν Κλάσματα Ἀλγεβραϊκὰ εἰς ἐλαχίστους Ὅρους.

ΛΥΣΙΣ,

ΛΥΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τῦτο γίνεται κατὰ τὰς Κανόνας, τὰς ὁποίους ἐπραγματεύθημεν ἀνωτέρω εἰς τὴν Διαίρεσιν (§. 29.). ἐὰν εὑρίσκωνται τόσον εἰς τὸν ἀριθμητὴν, ὅσον καὶ εἰς τὸν Παρονομαστὴν τὰ αὐτὰ Γράμματα, ἐξαλείφομεν ἀμφοτέρωθεν ἕνα Ἴσον ἀριθμὸν τῶν ὁμοίων Γραμμάτων, τὰς δὲ Συνεργὰς ἀνάγομεν εἰς ἐλαχίστας Ὅρυς κατὰ τὰς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ δοθέντας Κανόνας. κατὰ τῦτον τὸν τρόπον λοιπὸν ἐκθέτομεν ἓν Κλασμα εἰς ἐλαχίστας Ὅρυς, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις αὐτῦ: π. χ. $\frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{4\alpha\delta\varepsilon}$

ἀνάγεται εἰς $\frac{\beta\gamma}{2\varepsilon}$.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν, καὶ διαιρέσωμεν μίαν Ποσότητα διὰ τῦ Ἰδίυ Μεγέθυς, τότε δὲν μεταβάλλεται ἡ Δύναμις αὐτῆς. ἐπειδὴ τόσον ἠλαττώθη, ὅσον ηὐξήθη. ἀλλὰ μὴν τὰ Γράμματα ἑνὸς ἀλγεβραϊκῦ Κλάσματος εἰσὶν ἐν μὲν τῷ ἀριθμητῇ Πολλαπλασιασαί, ἐν δὲ τῷ Παρονομαστῇ Διαιρέται. ἄρα ἐὰν σβύσωμεν Ἴσυς Πολλαπλασιασὰς καὶ Διαιρέτας, ἐκθέτεται τὸ Κλάσμα εἰς ἐλαχίστας Ὅρυς, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις αὐτῦ.

ΠΡΟ΄ΒΛΗΜΑ β.

§. 33. Νὰ Προσθέτωμεν, ϗ νὰ ἀφαιρῶμεν Αλγεβραϊκὰ Κλάσματα.

ΛΥΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕ΄Α.

Τὰ δοθέντα Κλάσματα πρέπει πρῶτον νὰ ἀναγάγωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν κατὰ τοὺς Κανόνας τῆς ἀριθμητικῆς, ϗ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν ϗ νὰ ἀφαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς, π. χ., $\frac{\alpha}{\gamma}$ ϗ $\frac{\beta}{\delta}$ ἀνάγονται εἰς $\frac{\alpha\delta}{\gamma\delta}$ ϗ $\frac{\beta\gamma}{\gamma\delta}$. ἔπειτα προσθέτονται $\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\gamma\delta}$ ἢ ἀφαιροῦνται $\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma\delta}$. ἡ Δεῖξις εἶναι ἡ Ἰδία, καθὼς εἰς τὴν ἀριθμητικὴν περὶ Προσθέσεως ϗ ἀφαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 34. Ἐπειδὴ πρὸς Πρόσθεσιν ἢ ἀφαίρεσιν ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ μεταχειριζόμεθα μόνον Σημεῖα (§. 7.). διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν, ἢ νὰ ἀφαιρέσωμεν Ἀλγεβραϊκὰ Κλάσματα, χωρὶς νὰ ἀνάγωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, προσγράφοντες μεταξὺ τῶν Κλασμάτων τὸ Σημεῖον $+$ ἢ τὸ $-$ π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ προσθέσωμεν τὸ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ϗ $\frac{\beta}{\delta}$, γράφομεν $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}$. ἐὰν δὲ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $\frac{\beta}{\delta}$ ἀπὸ τῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$ γράφομεν $\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\delta}$.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ'.

§. 35. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν, ϗ νὰ διαιρῶμεν Α'λγεβραϊκὰ Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν πολλαπλασιάζομεν τὰς δύω ἀριθμητὰς μετ' ἀλλήλων, ὡσαύτως ϗ τὰς Παρονομασὰς, τὸν αὐτὸν τρόπον μεταχειριζόμεθα ϗ ἐπὶ τῆς Διαιρέσεως, ἀφ' ὗ ἀναποδίσωμεν τὸν Διαιρέτην. λοιπὸν ἀμφότεραι αὗται αἱ Ἐργασίαι ἀκολυθῦσι τὰς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ δοθέντας Κανόνας, π. χ. ἐκ μὲν τῦ $\frac{\alpha}{\gamma} \times \frac{\beta}{\delta}$ γίνεται $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$, ἐκ δὲ τῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$ διαιρυμένυ ἐπὶ τῦ $\frac{\beta}{\delta}$, (ἀφ' ὗ ἀναποδισθῇ ὁ Διαιρέτης $\frac{\beta}{\delta}$ ὕτω $\frac{\delta}{\beta}$) ἀποτελεῖται $\frac{\alpha}{\gamma} \times \frac{\delta}{\beta} = \frac{\alpha\delta}{\gamma\beta}$.

Η' Δεῖξις εἶναι ἡ αὐτὴ, ὅπῦ γέγονε ϗ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ περὶ Πολλαπλασιασμῦ ϗ Διαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 36. Πάντα τὰ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ περὶ τῶν Κλασμάτων εἰρημένα, δύνανται νὰ προσαρμοσθῶσι καὶ εἰς τὴν Ἄλγεβραν. οἷον ἓν ἀκέραιον Ποσὸν δύναται νὰ μεταποιηθῇ, καὶ νὰ ἀναχθῇ εἰς Κλάσμα, ὑπογραφομένης τῆς Μονάδος ἀντὶ τοῦ Παρονομαστοῦ. ἓν ἀκέραιον δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς ἓν Κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἀκέραιον μετὰ τοῦ Παρονομαστοῦ Κλάσματος, καὶ ὑποκάτω τοῦ ἐκ τούτων Γινομένου γράψωμεν τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν τοῦ Κλάσματος. π. χ. ἐκ τοῦ $\alpha + \frac{\beta}{\delta}$ γίνεται $\frac{\alpha\delta + \beta}{\delta}$, οὕτω καὶ περὶ τῶν λοιπῶν πραγματευόμεθα, καθὼς ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ἔγιναν ἤδη εἰς ἡμᾶς γνωστά.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ δ'.

Περὶ Δυνάμεων.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ α'.

§. 37. Ὅταν ἀριθμός τις, ἢ Ποσὸν ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῇ, τὸ Γινόμενον ὀνομάζεται Δευτέρα Δύναμις τοῦ πολλαπλασιασθέντος ἀριθμοῦ, ἢ Ποσοῦ. καὶ τὸ Ποσὸν αὐτὸ ἀναφερόμενον πρὸς τὴν Δευτέραν Δύναμιν, λέγεται Ῥίζα, ἢ Πρώτη Δύναμις. π. χ. αα εἶναι ἡ

Δευτ.

Δευτ. Δύναμις τῆς Ρίζης α. καὶ 16 ἐστὶν ἡ Δευτ. Δύναμις τοῦ 4. ἐπειδὴ $4 \times 4 = 16$. Πρώτη Δύναμις λοιπὸν εἶναι ἕκαστον Ποσὸν καθ' ἑαυτὸν θεωρούμενον.

ΣΧΟΛΙΟΝ α΄.

§. 38. Ἐκείνη ἡ Δύναμις, ἥτις γίνεται εὐθὺς κατὰ πρῶτον Πολλαπλασιασμὸν, ὀνομάζεται γενικῶς Τετράγωνος. π. χ. ὁ 16 εἶναι τὸ Τετράγωνον τοῦ 4, ὁ δὲ 36 εἶναι τὸ Τετράγωνον τοῦ 6.

ΣΧΟΛΙΟΝ β΄.

§. 39. Ἡ Δευτέρα Δύναμις, ἢ ὁ Τετράγωνος διὰ τῆς ῥίζης πάλιν πολλαπλασιασθεὶς, προάγει τὴν Τρίτην Δύναμιν, ἥτις ὀνομάζεται Κύβος. π. χ. αα × α ποιεῖ ααα, τὴν Τρίτην δηλονότι Δύναμιν, ἢ τὸν Κύβον τοῦ α. 16×4 δίδωσιν 64, τὸν Κύβον τοῦ 4.

ΣΧΟΛΙΟΝ γ΄.

§. 40. Ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ ἡ Τρίτη Δύναμις μετὰ τῆς Ρίζης, προάγεται ἡ Τετάρτη Δύναμις. Ἐὰν δὲ πάλιν πολλαπλασιασθῇ καὶ αὕτη μετὰ τῆς Ρίζης, γεννᾶται ἡ Πέμπτη Δύναμις, καὶ οὕτω δυνάμεθα νὰ ἄρωμεν καθε Ποσὸν εἰς ὁποιανδήποτε [illegible] Δύναμιν διὰ μόνου τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῆς προηγουμένης Δυνάμεως μετὰ τῆς Ρίζης.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 41. Ἐκ τῶν εἰρημένων γίνεται δῆλον, ὅτι δὲν δύναται κανένα Τετράγωνον νὰ εἶναι ἀποφατικόν. ἐπειδὴ εἴτε Καταφατικὴ, εἴτε ἀποφατικὴ εἶναι ἡ Ρίζα, τὸ Γινόμενον ἔσεται πάντοτε Κα-

ταφα

καταφατικόν. ὡς $-a \times -a = +aa$, ἢ $+a \times +a = +aa$. ὁ δὲ Κύβος δύναται νὰ εἶναι καὶ ἀποφατικός, ἐὰν ἡ Ρ'ίζα ἔχῃ τὸ ἀποφατικὸν Σημεῖον $-$. ἐπειδὴ $+aa \times -a = -aaa$. ἡ δὲ Τετάρτη Δύναμις ἔσται πάλιν Καταφατική, ἐπειδὴ $-aaa \times -a = +aaaa$, καὶ οὕτω ...

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ β'.

§. 42. Αἱ ῥίζαι ἔχουσι καὶ αὐταὶ τὰς Ἰδίας των Προσηγορίας, καθὼς αἱ Δυνάμεις. ἡ Ρ'ίζα ἑνὸς Τετραγώνου ὀνομάζεται Τετραγωνικὴ Ρ'ίζα. ἑνὸς δὲ Κύβου καλεῖται Κυβική. ἑνὸς δὲ Τετραγωνοτετραγώνου (δηλ. τῆς Τετάρτης Δυνάμ.) λέγεται Τετάρτη, ἢ Τετραγωνοτετραγωνικὴ Ρ'ίζα. κ. τ. Πρὸς δήλωσιν ἑκάστης Δυνάμεως μεταχειριζόμεθα τὸ Σύμβολον τοῦτο $\sqrt{}$, ἐπάνω τοῦ ὁποίου γράφομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἐκδηλοῖ ἐκείνην τὴν Δύναμιν, τῆς ὁποίας ἡ Ρ'ίζα σημειοῦται, π. χ. $\sqrt[2]{}$ εἶναι τὸ Σημεῖον τῆς δευτέρας Δυνάμ. ἢ τοῦ Τετραγώνου. $\sqrt[3]{}$ εἶναι τὸ Σύμβ. τῆς Ρ'ίζης τῆς Τρίτης Δυνάμεως, ἢ τοῦ Κύβου. $\sqrt[4]{}$ εἶναι τὸ Σύμβολον τῆς ῥίζης τῆς Τετάρτης Δυνάμεως. $\sqrt[2]{a}$ εἶναι ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα τῆς Ποσότητος α. αὐτὴ ὅμως ἡ

k Τετρα-

Τετραγωνικὴ ῥίζα ἐκδηλοῦται διὰ μόνου τοῦ Σημείου $\sqrt{\ }$, ἄνευ τῆς ἐπιγραφῆς τοῦ 2. οἷον $\sqrt{\alpha}$. ὁσάκις λοιπὸν βλέπομεν αὐτὸ τὸ Σημεῖον ἄνευ τινὸς ἐπιγραφομένου ἀριθμοῦ, πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι τοῦτο σημαίνει τὴν Τετραγωνικὴν ῥίζαν. ὅταν δὲ ἔχωμεν νὰ φανερώσωμεν τὴν ῥίζαν ἑνὸς Συμπεπλεγμένου Ποσοῦ, πρέπει νὰ περικλείωμεν αὐτὸ τὸ Ποσὸν ἐν παρενθέσει, διὰ νὰ γνωρίζηται, ὅτι τούτου τοῦ Ποσοῦ ζητεῖται ἡ ῥίζα, π. χ. $\sqrt[3]{\ }(\alpha\alpha+\beta)$. ἢ γράφομεν ἐπ' αὐτοῦ μίαν Γραμμὴν οὕτω $\sqrt[3]{\alpha\alpha+\beta}$.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 43. Ἐπειδὴ αἱ Δυνάμεις γεννῶνται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ μιᾶς Ποσότητος ἐφ' ἑαυτήν. διὰ τοῦτο πρέπει νὰ θέτωμεν τὸ Ποσὸν τοσάκις, ὁσάκις ζητεῖται ἡ Δύναμις. π. χ. ἡ δευτέρα Δύναμις τοῦ α ἐστὶ τὸ αα, ἢ τὸ α δὶς τεθέν. ἡ ἑβδόμη Δύναμις τοῦ α εἶναι ααααααα, τουτέστι τὸ α ἑπτάκις τεθέν. ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἀποφύγωμεν ταύτην τὴν πολυγραφίαν, γράφοντες μόνον ἐπὶ τοῦ Γράμματος πρὸς τὰ δεξιὰ ἀριθμοὺς δηλοῦντας, ποσάκις ἐπολλαπλασιάσθη τὸ Ποσὸν διὰ τῆς ῥίζης, ἢ εἰς ποίαν Δύναμιν ἤρθη αὐτὸ τὸ Ποσόν. λοιπὸν ἀντὶ τοῦ ἑπτάκις ἀνωτέρω τεθέντος α, γράφομεν α^{7}. ὁ ἀριθμὸς οὗτος, ὁ ἐπὶ τοῦ Γράμματος τεθέμενος, ὀνομάζεται παρ' ἡμῶν Δυναμοδείκτης, τὸν ὁποῖον ἄλλοι μὲν καλοῦσι Βαθμοδείκτην, ἄλλοι δὲ Ἐκθέτην καὶ ἄλλοι Ἐπίσημον, ἢ Ἔκφρασιν τῆς Δυνάμεως, ὅθεν ἕπεται.

ΟΡΙΣΜΟ'Σ.

ΟʹΡΙΣΜΟʹΣ γʹ.

§. 44. Δυναμοδείκτης ἐςὶν ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων, εἰς ποίαν Δύναμιν, ἢ βαθμὸν ὑψώθη μία Ποσότης. ὅθεν ὁ Δυναμοδείκτης τῆς πρώτης Δυνάμεως ἐςὶν ἡ Μονὰς, πραγματικῶς ὅμως δὲν γράφεται, ἀλλὰ πάντοτε ἐννοεῖται ἔξωθεν. ἐπειδὴ κάθε Ποσὸν ἀλγεβραϊκὸν, καθὼς ἔχει ἕνα Συνεργὸν, ἔτω πρέπει νὰ ἔχῃ καὶ ἕνα Δυναμοδείκτην. π. χ. α ἐςὶν πρώτη Δύναμις. α^2 εἶναι δευτέρα Δύν. ἢ τὸ Τετράγωνον. τὸ δὲ α^3 εἶναι τρίτη Δύναμις, ἢ Κύβος κ. τ. λ.

ΣΧΟʹΛΙΟΝ.

§. 45. Ἐπειδὴ καὶ αἱ Δυνάμεις αὐταὶ δύνανται νὰ εἶναι ἀόριςοι, καθὼς καὶ αὐτὰ τὰ Ποσὰ, διὰ τοῦτο δύναται ὁ Δυναμοδείκτης νὰ ἐκφράζηται ἐνίοτε καὶ διὰ τινος Γράμματος. π. χ. τὸ β^μ σημαίνει, ὅτι τὸ Ποσὸν β ἤρθη εἰς τὴν Δύναμιν μ. τὸ δὲ $\alpha^\nu\beta$ δηλοῖ ὁμοίως, ὅτι τὸ Ποσὸν α ἤρθη εἰς τὴν Δύναμιν ν, καὶ ἐπολλαπλασιάσθη μετὰ τοῦ β.

ΠΟʹΡΙΣΜΑ αʹ.

§. 46. Αἱ Ποσότητες αἱ ἔχουσαι Διαφόρους Δυναμοδείκτας, εἶσιν ἀνόμοιοι πρὸς ἀλλήλας. διότι ἐπειδὴ ὁ Δυναμοδείκτης δεικνύει, ποσάκις ἐτέθη τὸ Γράμμα, διὰ τοῦτο τίπε, ὅταν ὑπάρχωσιν οἱ Δυναμοδεῖκται διάφοροι, πρέπει νὰ εἶναι καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν Γραμμάτων διάφορος, καὶ διὰ αὐτὸ τοῦτο εἶσιν ἀνόμοια τὰ Ποσά. ὅθεν δύω Ποσὰ ἔχοντα διαφόρους Δυναμοδείκτας, δὲν δυνάμεθα νὰ ἀγάγωμεν εἰς ἓν ἀσύμπλεκτον Ποσὸν, ἢ εἰς ἓν Μέλος. π. χ. ἐκ τοῦ $2\alpha^3 + 4\alpha^2$ δὲν δύναται νὰ γένῃ μία Ποσότης ἀσύμπλεκτος. ἐξ ἐναντίας δὲ ἐκ τοῦ $2\alpha^3 + 4\alpha^3$ γίνεται $6\alpha^3$. ἐπειδὴ ἀμφότερα ἔχουσι τὸν αὐτὸν Δυναμοδείκτην τὸν 3. ὅταν λοιπὸν θέλομεν νὰ προσθέσωμεν, ἢ νὰ ἀφαιρῶμεν Ποσὰ ἔχοντα διαφόρους Δυναμοδείκτας, πρέπει νὰ τὰ γράφωμεν κατὰ τάξιν ἀπὸ Ἐπιτομῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 47. Εἰς δὲ τὸν Πολλαπλασιασμὸν πρέπει μόνον νὰ συνάπτωμεν ὁμοῦ τοὺς Δυναμοδείκτας. π. χ. $\alpha^3 \times \alpha^2$ γίνεται α^{3+2} ἤτοι α^5. $\alpha^2 \beta^3 \gamma^2 \times \alpha^4 \beta^2 \gamma^3$ ποιεῖ $\alpha^6 \beta^5 \gamma^5$. ἐπειδὴ κάθε Δυναμοδείκτης δεικνύει, ποσάκις ἐτέθη τὸ αὐτὸ Γράμμα ἐν ἑκάστῳ τῶν Παραγόντων. ἐν δὲ τῷ Γινομένῳ πρέπει νὰ ἑνωθῶσιν αὐτὰ τὰ Γράμματα, ἢ νὰ τεθῶσι τοσάκις, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν ἑκατέρῳ τῶν Παραγόντων. τὸ Κεφάλαιον λοιπὸν τῶν μονάδων δεικνύει τὸ Κεφάλαιον τῶν Γραμμάτων, καὶ οὕτω διὰ τῆς Συνάψεως τῶν Δυναμοδεικτῶν ἀποκτῶμεν τὸν Δυναμοδείκτην τοῦ Γινομένου. π. χ. $\alpha^6 \times \alpha^3$ εἶναι $= \alpha^{6+3}$ τουτέστι α^9. ἐπειδὴ $\alpha^6 = \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$, καὶ $\alpha^3 = \alpha\alpha\alpha$, αὐτὰ πολλαπλασιασθέντα μετ' ἀλλήλων, ποιοῦσι Γινόμενον $\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$ τουτέστι α^9. $\alpha \times \alpha$ εἶναι $= \alpha^{1+1}$ ἤτοι α^2. $\alpha^\mu \times \alpha^\nu$ εἶναι $= \alpha^{\mu+\nu}$. $\alpha^\mu \times \alpha$ ἐστὶν $= \alpha^{\mu+1}$. $\alpha^\mu \times \alpha^\mu$ εἶναι $= \alpha^{\mu+\mu}$ ἤτοι $\alpha^{2\mu}$. τὸ $\alpha^\mu \times \beta\varphi$ εἶναι $= \alpha^\mu \beta\varphi$, τὸ δὲ $3\alpha^2 \times 4\beta^3$ εἶναι $= 12\alpha^2\beta^3$.

ΣΧΟ-

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 48. Εἰς τὴν Διαίρεσιν, ὅπου ἀντίκειται τῷ Πολλαπλασιασμῷ ;. πρέπει νὰ ἀφαιρῶνται οἱ Δυναμοδεῖκται. διότι ὡσὰν ὅπου δυνάμεθα τόσον ἐκ τοῦ Διαιρετέου, ὅσον καὶ ἐκ τοῦ Διαιρέτου νὰ ἐξαλείφωμεν ἴσον ἀριθμὸν τῶν ἰδίων Γραμμάτων, διὰ τοῦτο εἶναι τὸ ἴδιον νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ Δυναμοδείκτου τοῦ Διαιρετέου τόσαι Μονάδες, ὅσας ἔχει ὁ Δυναμοδείκτης τοῦ Διαιρέτου π. χ. $\alpha^9 : \alpha^3$ γίνεται α^{9-3} ἤτοι α^6. ἐπειδὴ ἐὰν ἀπὸ $\frac{\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha}{\alpha\alpha\alpha}$ ἐξαλείψωμεν ἴσον ἀριθμόν, τουτέστιν ἑκατέρωθεν ἀπὸ τρία α, μένουσιν ἓξ αααααα τουτέστι $\alpha^6 . \alpha : \alpha$ γίνεται α^{1-1} τουτέστι $\alpha^0 = 1$. ἐπειδὴ ὁ Συνεργὸς 1 περιέχεται ἐν τῷ 1 ἅπαξ, $\frac{\alpha}{\alpha}$ σβύονται. λοιπὸν $\alpha : \alpha$ ἢ $\alpha^0 = 1 . \alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu} ; \alpha^3 : \alpha^9$ γίνεται $\alpha^{3-9} = \alpha^{-6} . \beta^{\mu}$ $\beta = \beta^{\mu-1}$. μία Ποσότης λοιπὸν ἥτις ἔχει Δυναμοδείκτην τὸ μηδενικὸν 0, εἶναι ἴση Μονάδι. ἐκεῖνο δὲ τὸ Ποσὸν ὅπου ἔχει Δυναμοδείκτην ἀποφατικὸν εἶναι ἴσον Κλάσματι

ΠΡΟ΄ΒΛΗΜΑ ί.

§. 49. Νὰ ἄρωμεν (ὑψώσωμεν) μίαν δοθεῖσαν Ποσότητα εἰς τὴν Δευτέραν, ἢ εἰς ἄλλην τινὰ ὡρισμένην, ἢ ἀόριστον Δύναμιν.

ΛΥ΄ΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕ΄Α.

Ἐὰν ζητῶμεν νὰ ὑψώσωμεν τὸ δοθὲν Ποσὸν εἰς τὴν Δευτέραν Δύναμιν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐφ' ἑαυτὸ ἅπαξ. ἐὰν δὲ ζητῶμεν τὴν Τρίτην Δύναμιν τουτέστι τὸν Κύβον αὐτοῦ τοῦ Ποσοῦ, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ δὶς, καὶ οὕτως ἀκολουθοῦμεν γενικῶς, τουτέστιν ὁσάκις περιέχεται ἡ Μονὰς εἰς τὸν Ἔκθετην τῆς ζητουμένης Δυνάμεως, τοσάκις, πλὴν ἅπαξ, πολλαπλασιάζομεν τὸ διδόμενον Ποσὸν ἐφ' ἑαυτὸ, δηλαδὴ ἐπὶ τὴν ῥίζαν, ὅταν, δός εἰπεῖν, ζητῆται ἡ Τετάρτη Δύναμις, πολλαπλασιάζομεν τότε τὸ Ποσὸν τρεῖς φοραῖς ἐφ' ἑαυτό. τὸ Τετράγωνον τοῦ α ἐστὶν $\alpha\times\alpha$, ἢ $\alpha\alpha$, τουτέστι $\alpha^{1\times2} = \alpha^{2}$. ὁ Κύβος τοῦ α εἶναι $\alpha\times\alpha\times\alpha$, ἢ $\alpha\alpha\times\alpha$, τουτ' ἐστιν $\alpha^{1\times3} = \alpha\alpha\alpha$, ἢ α^{3}. ἐὰν δὲ ζητῆται νὰ ὑψώσωμεν τὸ Ποσὸν α^{μ} εἰς Δύναμιν ν, πολλαπλασιάζομεν τὸ μ μετὰ τοῦ ν, καὶ τότε τὸ ζητούμενον ἔσται $\alpha^{\mu\times\nu}$, ἢ $\alpha^{\mu\nu}$. τὸ α ἀρθὲν εἰς τὴν ἐννάτην Δύναμιν, εἶναι $\alpha^{1\times9} = \alpha^{9}$. ὅταν δὲ χρειαζώμεθα νὰ ἄρωμεν τὸ Ποσὸν α^{2} τουτέστι τὸ $\alpha\alpha$ εἰς τὴν ἕκτην Δύναμιν, γίνεται οὕτως $\alpha^{2\times6} = \alpha^{12}$. ἐπειδὴ τὸ $\alpha\alpha$ πεντάκις μεθ' ἑαυτοῦ, τουτέστι μετὰ τοῦ $\alpha\alpha$ πολλαπλασιασθὲν, παράγει α^{12}. κ. τ. λ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ Δευτέρα Δύναμις κατὰ τὸν ἀνωτέρω Ὁρισμὸν (§. 37.) εἶναι τὸ Γινόμενον ἑνὸς Ποσοῦ ἅπαξ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθέντος, ἡ δὲ Τρίτη Δύναμις ἐστὶ τὸ

Γινό-

Γινόμενον ἑνὸς Ποσοῦ. τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσθη δὶς μεθ' ἑαυτοῦ. ἡ δὲ Τετάρτη Δύναμις εἶναι τὸ Γινόμενον ἑνὸς Ποσοῦ τρὶς ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθέντος. κ. τ. ἐὰν λοιπὸν πολλαπλασιασθῇ μία Ποσότης ἐφ' ἑαυτὴν τοσάκις, ὅσαι Μονάδες, πλὴν μιᾶς, περιέχονται εἰς τὸν Ἐκθέτην τῆς ζητουμένης Δυνάμεως, ἀποκτῶμεν τότε τὴν ζητουμένην Δύναμιν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 50. Ἐὰν ἔχωμεν νὰ ὑψώσωμεν μίαν Σύνθετον Ποσότητα εἰς τινα Δύναμιν, πρέπει νὰ γράφωμεν ἐπάνω εἰς κάθε Γράμμα τὸν Δυναμοδείκτην. εἰς δὲ τὰ Κλάσματα πρέπει νὰ γράφωμεν τὸν Δυναμοδείκτην, καὶ ἐπὶ τοῦ Ἀριθμητοῦ καὶ ἐπὶ τοῦ Παρονομαστοῦ, π. χ. ἡ Πέμπτη Δύναμις τοῦ $\alpha\beta\gamma$ εἶναι $\alpha^5\beta^5\gamma^5$. ἡ Δύναμις μ τοῦ Ποσοῦ $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$ ὑπάρχει $\frac{\alpha^\mu\beta^\mu}{\gamma^\mu\delta^\mu}$. Ὁ δὲ Κύβος ἐκ τοῦ $\frac{2\alpha\gamma}{5\delta\epsilon}$ εἶναι $\frac{8\alpha^3\gamma^3}{125\delta^3\epsilon^3}$. δυνάμεθα δὲ τοῦτο νὰ ἐκφράσωμεν ἐνίοτε καὶ ἄλλως, περικλείοντες δηλονότι τὸ Ποσὸν ἐν Παρενθέσει, ἢ γράφοντες ἐπὶ τοῦ Ποσοῦ μίαν Γραμμήν, τιθέντες τὸν Δυναμοδείκτην τῆς Δυνάμεως πλησίον πρὸς τὰ δεξιά. οἷον. $(\alpha\beta\gamma.)^5$, ἢ $\overline{\alpha\beta\gamma}^5$. ὡσαύτως καὶ ἡ Δύναμις μ τοῦ Ποσοῦ $\alpha\alpha-\beta\gamma$ γράφεται οὕτως $(\alpha\alpha-\beta\gamma)^\mu$, ἢ οὕτως $\overline{\alpha\alpha-\beta\gamma}^\mu$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 51. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ὑψώσωμεν ἓν Διμερὲς Ποσὸν εἰς τὴν Δευτέραν Δύναμιν, τότε πρέπει νὰ ἀκολουθήσωμεν τοὺς συνήθεις Κανόνας τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ. π. χ. τὸ Τετράγωνον τοῦ $\alpha + \beta$, ἢ $-\alpha - \beta$, ἐστὶν $\alpha\alpha + 2\alpha\beta + \beta\beta$, ἢ $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. τὸ δὲ Τετράγωνον τοῦ $-\alpha + \beta$ εἶναι $\alpha\alpha - 2\alpha\beta + \beta\beta$. ἢ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$. ἐκ τούτου ἕπεται τὸ ἑξῆς Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ά.

§. 52. Τὸ Τετράγωνον ἑνὸς Διμεροῦς Ποσοῦ συνίσταται ἐκ τοῦ Τετραγώνου τοῦ Πρώτου Ὅρου, καὶ ἐκ τοῦ Τετραγώνου τοῦ Δευτέρου Ὅρου, καὶ ἐκ τοῦ δὶς ληφθέντος Γινομένου τούτων τῶν Δύο Ὅρων ἀλλήλοις πολλαπλασιασθέντων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ, ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ τὸ Διμελὲς Ποσὸν, ἀποκτῶμεν $\alpha\alpha$ καὶ $\beta\beta$, τουτέστι τὰ Τετράγωνα ἑκατέρων τῶν Ὅρων, πρὸς τούτοις ἀποκτῶμεν καὶ $2\alpha\beta$, δηλαδὴ τὸ ἐκ τῶν Ὅρων διπλοῦν Γινόμενον. ἐὰν τοῦτο τὸ Διπλοῦν Γινόμενον εἶναι Καταφατικὸν, τότε οἱ Ὅροι εἰσὶν Ταυτοσύμβολοι, οἷον $+\alpha + \beta$, ἢ $-\alpha - \beta$, ἐὰν δὲ εἶναι ἀποφατικὸν, τότε οἱ Ὅροι εἶναι Ἑτεροσύμβολοι, οἷον $+\alpha - \beta$, ἢ $-\alpha + \beta$.

ΟΡΙΣ-

ὉΡΙΣΜΟ'Σ δ'.

§. 53. Ἐυτελὲς Τετράγωνον λέγεται ἐκεῖνο, ὅπερ συνίςαται ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω ἐιρημένων τριῶν Μελῶν, οἷον τὸ $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. ἀτελὲς δὲ Τετράγωνον λέγομεν ἐκεῖνο, τȣ̃ ὁποίȣ λέιπει τι Μέλος, οἷον τὸ $\alpha^2 + 2\alpha\beta$, τȣ̃ ὁποίȣ λέιπει β^2, διὰ νὰ γένῃ Ἐυτελές. ὁμοίως κ̓ τὸ $\alpha^2 + \beta^2$ ὀνομάζεται Τετράγωνον ἀτελές. ἐπειδὴ λέιπει ἀπ᾿ αὐτȣ̃ $2\alpha\beta$, καθὼς κ̓ ἀπὸ τȣ̃ $2\alpha\beta + \beta^2$ λέιπει, τὸ α^2.

ΣΧΟΛΙ'ΟΝ.

§. 54. Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἄρωμεν ἓν Διμερὲς Ποσὸν εἰς τὴν Τρίτην Δυναμιν, τότε πρέπει νὰ πολλαπλάσιασωμεν τὸ Τετράγωνον αὐτȣ̃ ἔτι ἅπαξ μετὰ τῆς Ῥίζης. οἷον $\alpha\alpha + 2\alpha\beta + \beta\beta \times \alpha + \beta$, κ̓ τότε ἀποκτῶμεν τὴν Τρίτην Δύναμιν, ἤτοι τὸν Κύβον $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$. ἐκ τȣ́τȣ ἕπεται τὸ ἑξῆς.

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ β'.

§. 55. Ὁ Κύβος ἑνὸς Διμερȣ̃ς Ποσȣ̃ συνίςαται ἀπὸ τὸν Κύβον τȣ̃ Πρώτȣ Ὅρȣ, κ̓ ἀπὸ τὸν Κύβον τȣ̃ Δευτέρȣ, κ̓ ἀπὸ τὸ τρὶς ληφθὲν Γινόμενον ἔκ τε τȣ̃ Δευτέρȣ Ὅρȣ κ̓ τȣ̃ Τετραγώνȣ τȣ̃ Πρώτȣ, κ̓ ἀπὸ τὸ τρὶς

λη-

ληφθὲν Γινόμενον ἔκ τε τοῦ Πρώτου Ὅρου ϗ τοῦ Τετραγώνου τοῦ Δευτέρου.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ ἀποκτῶμεν α^3 ϗ β^3 (τουτέστι τοὺς Κύβους τοῦ α ϗ β Ὅρου) ϗ τὰ $\alpha^2 \times \beta$ ϗ $\beta^2 \times \alpha$, ἀμφότερα τρὶς ληφθέντα, ἤτοι $3\alpha^2\beta$ ϗ $3\alpha\beta^2$. ἄρα ποριζόμεθα τὸ τριπλοῦν Τετράγωνον τοῦ πρώτου Ὅρου πολλαπλασιασθέντος μετὰ τοῦ Δευτέρου, ϗ αὖθις τὸ τριπλοῦν Τετράγωνον τοῦ Δευτέρου Ὅρου πολλαπλασιασθέντος μετὰ τοῦ πρώτου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ α.

§. 56. Κατ' αὐτὴν τὴν Μέθοδον δυνάμεθα νὰ συστήσωμεν Κανόνας ϗ Τύπους ϗ διὰ κάθε ἄλλην Δύναμιν, ϗ ἐκ τούτων νὰ ἀποφέρωμεν Θεωρήματα.

ΣΧΟΛΙΟΝ β.

§. 57. Τὰ ἕως ὧδε εἰρημένα δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ϗ διὰ ἀριθμῶν. π. χ. ἐὰν διέλωμεν τὸν 12 ἀριθμὸν εἰς 10 ϗ 2, ϗ ἀποκαταστήσωμεν τὸ ἐκ τούτων Τετράγωνον κατὰ τοὺς Καν. τῆς Ἀλγέβρας, γενήσεται σαφεστέρα ἡ ἀλήθεια τοῦ πράγματος. ϗ γὰρ

$$\begin{array}{r} 10 + 2 \\ 10 + 2 \\ \hline 100 + 20 \\ + 20 + 4 \\ \hline 100 + 40 + 4 \end{array}$$

τουτέστι τὸ Τετράγωνον τοῦ $10 = 100$, τὸ διπλοῦν Γινόμ. ἐκ τῶν 10×2 ἐστὶν $= 40$ ϗ τὸ Τετράγ. τοῦ $2 = 4$, ἢ

$$\begin{array}{r} 100 \\ 40 \\ 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

Τὸ ὅλον Τετράγωνον

γωνον ὑπάρχει 144, ὅπερ ἀποκτῶμεν ὡσαύτως, καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ 12 μετὰ τῶν 12.

ΣΧΟΛΙΟΝ γ΄.

§. 58. Ἐὰν ἁπλοῖ ἀριθμοὶ (ἀπὸ τῆς Μονάδος δηλονότι μέχρι τῶν 9) ἀρθῶσιν εἰς τὴν Δευτέραν Δύναμιν, τὸ Τετράγωνον αὐτῶν θέλει ἔχῃ μόνον δύω χαρακτῆρας ἀριθμητικούς, ὅπερ γίνεται φανερόν, ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς ἐφ' ἑαυτούς. ἐπειδὴ 8 X 8 = 64, καὶ 9 X 9 = 81. τὰ δὲ Τετράγωνα τῶν ἀπὸ 10 ἕως τῶν 100 ἀριθμῶν ἔχουσι τρεῖς ἢ τέσσαρας χαρακτῆρας. καὶ γὰρ 10 X 10 = 100, καὶ 50 X 50 = 2500. Τὰ δὲ Τετράγωνα τῶν 100 μέχρι τῶν 1000 ἔχουσι πέντε, ἢ ἓξ χαρακτ. κ. τ. λ. ὁ Κύβος τοῦ 9 συνίσταται μόνον ἐκ τριῶν χαρακτ. οἷον 729. ὁ δὲ Κύβος τοῦ 10 συνίσταται ἐκ τεσσάρων. ὁ δὲ Κύβος τοῦ 100 ἔχει ἑπτὰ χαρακτ. καὶ οὕτως ἐφεξῆς. πάντα ταῦτα δεικνύονται ἐκ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ καὶ ἐκ τῆς ὑψώσεως αὐτῶν εἰς Δυνάμεις. τὰ δὲ Τετράγωνα καὶ οἱ Κύβοι τῶν πρώτων ἐννέα ἀριθμῶν ἐκτίθενται ἐν τῷ ἑξῆς Πίνακι.

αἱ ῥίζαι	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τὰ Τετράγωνα	1	4	9	16	25	36	49	64	81
οἱ Κύβοι.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

δοθέντος λοιπὸν ἀριθμοῦ τινος, δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν παρευθύς, πόσους χαρακτῆρας πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ ῥίζα αὐτοῦ. Ἐὰν δηλαδὴ τὸ Τετράγωνον συνίσταται ἐξ ἑνός, ἢ δύω χαρακτήρων, τότε ἡ ῥίζα πρέπει νὰ ἔχῃ μόνον ἕνα. τρεῖς δὲ ἢ τέσσαρες χαρακτῆρες ἐν τῷ Τετραγώνῳ παρόντες, δεικνύουσιν, ὅτι ἡ ῥίζα αὐτοῦ συνίσταται ἐκ δύω χαρακτήρων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. ἐὰν ὁ Κύβος ἔχῃ ἕνα, ἢ δύω, ἢ τρεῖς χαρακτῆρας, ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἔχει ἕνα μόνον· ἐὰν δὲ ὁ Κύβος ἔχῃ τέσσαρας, πέντε, ἢ ἓξ χαρακτῆρας, τότε συνίσταται ἡ Ῥίζα ἐκ δύω· καὶ ἐὰν ὁ Κύβος ἔχῃ ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, ἡ ῥίζα τότε ἔχει τρεῖς, κ. τ.

ὉΡΙΣΜΟ'Σ ί.

§. 59. Ἀληθὲς Τετράγωνον εἶναι ἐκεῖνο, ἐκ τοῦ ὁποίου δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα ἁπλῶς. Μὴ ἀληθὲς δὲ Τετράγ. εἶναι ἐκεῖνο, ὅπου ἔχει, ἄλογον ῥίζαν π. χ. 16 εἶναι ἀληθὲς Τετράγωνον. ἐπειδὴ ἡ ῥίζα αὐτοῦ ὑπάρχει ὁ ἀριθ. 4. ὁ δὲ ἀριθ. 12 ἐξ ἐναντίας εἶναι Τετράγωνον μὴ ἀληθές. ἐπειδὴ ἡ ῥίζα αὐτοῦ εἶναι ἄλογος. τοιαῦτα ἀπλῆ Τετράγ. λέγονται καὶ ἄλογα Ποσὰ, περὶ τῶν ὁποίων ἐν τοῖς κατωτέρω πραγματευσόμεθα.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 60. Κάθε ἀληθὲς Τετράγωνον ἔχει εἰς τὸ τέλος ἕνα τούτων τῶν χαρακτήρων 1, 4, 5, 6, 9, ἢ δύο, ἢ καὶ πλείω μηδενικὰ, τῶν ὁποίων προηγεῖται τις τούτων τῶν χαρακ. ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ ἔχων ἐν τῷ τέλει ἕνα μόνον Μηδενικὸν 0, ἢ τοὺς χαρακτῆρας 2, 3, 7, 8, δὲν εἶναι ἀληθὲς Τετράγωνον. πλὴν δὲν πρέπει πάλιν νὰ ἐκλάβωμεν, ὅτι κάθε ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει ἐν τῷ τέλει τοὺς ἀνωτέρω χαρακτῆρας, ὑπάρχει ἤδη Τετράγωνος. διὰ τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν θέλομεν δυνηθῆ νὰ καταλάβωμεν τὸ τοιοῦτον σαφέστατα.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ β'.

§. 61. Νὰ ἐξάγωμεν ἔκ τινος Μονομελοῦς Ποσοῦ τὴν ζητουμένην ῥίζαν, οἷον τὴν Τετραγωνικὴν, ἢ Κυβικὴν, ἢ ἄλλην τινά.

ΠΡΑΚΤΕ'Α.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἢ ΛΥΣΙΣ.

Διαιρῦμεν τὸν Δυναμοδείκτην τῦ δοθέντος Ποσῦ διὰ τῦ ἀριθμῦ, ὅστις δεικνύει ὁποίας Δυνάμεως ῥίζα ζητεῖται π. χ. ἐὰν ζητῆται ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα τῦ α^2, διαιρῦμεν τὸν Δυναμοδ. τῦ α διὰ τῦ 2 καὶ ὕτω γίνεται $\alpha^{\frac{2}{2}} = \alpha^1 = \alpha$. ἐὰν δὲ ζητῆται ἡ Τετραγ. ῥίζα τῦ α, γράφομεν $\alpha^{\frac{1}{2}}$. ἐὰν δὲ ζητῆται τῦ α^4 ἡ Τετάρτη ῥίζα, γράφομεν $\alpha^{\frac{4}{4}} = \alpha$, ἐὰν δὲ ζητῆται τῦ α^4 ἡ Δευτέρα ῥίζα, γίνεται $\alpha^{\frac{4}{2}} = \alpha^2$. καὶ ἐν γένει ἐὰν ζητῆται ἡ ν Δύναμις τῦ Ποσῦ α^{μ}, γράφομεν $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$. ὅταν θέλωμεν ἁπλῶς μόνον νὰ ἐκθέσωμεν τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ῥιζῶν, τότε θέτομεν πρὸ τῦ Ποσῦ τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον (§. 42) μετὰ τῦ Ἐκθέτυ αὐτῦ π. χ. $\sqrt[4]{\alpha^2}$ ἢ $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

ΔΕΙΞΙΣ.

Μία Ποσότης ὑψώνεται εἰς τινὰ Δύναμιν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ Δυναμοδείκτης τῦ Ποσῦ μετὰ τῦ ἀριθμῦ τῦ ἐμφαίνοντος τὴν ζητυμένην Δύναμιν κατὰ τὸ (§. 49). λοιπὸν ἐκ μιᾶς Δυνάμεως ἐξάγεται ἡ ῥίζα ἐὰν διαιρεθῇ ὁ Δυναμοδείκτης τῦ διδομένυ Ποσῦ διὰ τῦ ἀριθμῦ τῦ ἐμφαίνοντος τὴν ζητυμένην ῥίζαν. καὶ γὰρ ἡ Διαίρεσις λύει, ὅπερ ὁ Πολλαπλασιασμὸς συνθέτει. ἀλλὰ μὴν

αἱ

αἱ Δυνάμεις γεννῶνται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ. αὗται αὗται ἄρα λύονται διὰ τῆς Διαιρέσεως εἰς τὰς ἑαυτῶν ῥίζας.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 61. Τὴν ῥίζαν ἑνὸς Τετραγωνικοῦ ἀριθμοῦ ἐξ ἑνὸς ἢ δύω χαρακτήρων συγκειμένου εὑρίσκομεν ἀνωτέρω ἐν τῷ Πινακι (§. 58.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ΄.

§. 63. Νὰ ἐξάγωμεν τὴν Τετραγωνικὴν ῥίζαν ἔκ τινος Διμελοῦς Ποσοῦ.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Ἐπειδὴ κάθε Τετράγωνον Διμελοῦς Ποσοῦ συνίσταται ἐκ τῶν Τετραγώνων τοῦ Πρώτου καὶ Δευτέρου Ὅρου. καὶ ἐκ τοῦ δὶς ληφθέντος Γινομένου τῶν Ὅρων, διὰ τοῦτο ἀποκτῶμεν τὴν Διμελῆ ῥίζαν, ἐὰν ἐξαγάγωμεν ἐκ τοῦ Πρώτου Τετραγώνου a^2 τὴν ῥίζαν, ἥτις ὑπάρχει τὸ Πρῶτον Μέλος ὅλης τῆς ῥίζης, καὶ εν ταυτῷ ἕνας Παράγων τοῦ Διπλοῦ Γινομένου, ἤτοι τοῦ $2\,a\beta$, ὅπερ διαιροῦμεν ἔπειτα διὰ τοῦ Διπλασίου Πρωτου Παράγοντος, ἤτοι $2\,a$, καὶ τὸ Πηλίκον β ὑπάρχει τὸ Δεύτερον Μέλος τῆς ὅλης ῥίζης, τὸ ὁποῖον γράφομεν μετὰ τοῦ ἑαυτοῦ Σημείου εἰς τὸν τόπον του. ὕστερον ἀφαιροῦμεν τὰ Τετράγωνα ἑκατέρων τῶν Μελῶν σὺν τῷ δὶς ἐξ αὐτῶν Γινομένῳ ἀπὸ τοῦ δοθέντος Τετραγώνου. π. χ. ζητεῖται νὰ ἐξαχθῇ ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα

$$
\begin{array}{l|l}
\alpha\alpha+2\alpha\beta+\beta\beta & \underline{\alpha+\beta} \\
-\alpha\alpha & \\
\overline{\quad\quad} & \\
\quad +2\alpha\beta & \\
\quad\ \ 2\alpha & \\
\quad +2\alpha\beta & \\
\quad - & \\
\quad \overline{\quad\quad\quad} & \\
\qquad\quad +\beta\beta & \\
\qquad\quad +\beta\beta & \\
\qquad\quad - & \\
\qquad\quad \overline{\quad\quad\quad} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

τοῦ $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$. ὅθεν ἀφ' οὗ ἐξαγάγωμεν ἀπὸ τοῦ Τετραγώνου α^2 τὴν ῥίζαν α, τὴν θέτομεν εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων, ϗ ποιοῦμεν τὸ Τετράγωνον αὐτοῦ ϗ τὸ ἀφαιροῦμεν, μεταβαλόντες τὸ Σημεῖον αὐτοῦ, ἤτοι $\alpha\alpha-\alpha\alpha=0$. καταλείπεται ἔτι $2\alpha\beta+\beta\beta$. τὸ εὑρεθὲν Πηλίκον α λαμβάνομεν διδιπλασιασμένον, ἤτοι 2α, ϗ διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ τὸ Δεύτερον Μέρος ἤτοι τὸ $2\alpha\beta$, ϗ διὰ τοῦ τοιούτου ἀποκτῶμεν τὸ Πηλίκον β, ὅπερ ἐστὶ τὸ Δεύτερον Μέλος τῆς ῥίζης, ϗ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν αὖθις μετὰ τῆς ῥίζης, ϗ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Δευτέρου Μέλους, $2\alpha\beta-2\alpha\beta=0$. Τετραγωνίζομεν δὲ ϗ τὸ Δεύτερον Μέλος β, ϗ τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Τρίτου Μέλους ἤτοι $\beta^2-\beta^2=0$, ϗ ἐπειδὴ δὲν μένει τίποτε, ἐγένετο ἄρα τὸ ζητούμενον.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ α'.

§. 64. Ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ Διπλοῦν Γινόμενον ἀποφατικὸν, τοῦτο εἶναι Σημεῖον, ὅτι ἓν Μέλος τῆς ῥίζης εἶναι ἀποφατικόν. τοῦτο δείκνυται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τοῦ $\alpha-\beta$ ἐπὶ $\alpha-\beta$, ἢ τοῦ $-\alpha+\beta$ ἐπὶ $-\alpha+\beta$. πάντοτε θέλει εἶναι τὸ Παραγόμενον $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 65. Οἱ αὐτοὶ Κανόνες ἰσχύουσι ϗ ἐπὶ τῆς Ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης ἐξ ἀριθμῶν.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛʹ.

§. 66. Νὰ ἐξάγωμεν ἐκ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

Καν. αʹ.) Μερίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἀπὸ τῶν Δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ εἰς Κλάσεις οὕτως, ὥστε εἰς κάθε Κλάσιν νὰ εἶναι (ἐκτὸς τῆς πλάτυτέας πρὸς τὰ ἀριστερὰ Κλάσεως, ἥτις δύναται νὰ περιέχῃ καὶ ἕνα μόνον χαρακτῆρα) δύω χαρακτῆρες. εἰς ὅσας λοιπὸν Κλάσεις μερισθῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἐκ τοσούτων χαρατήρων συνίσαται ἡ ῥίζα αὐτοῦ (§. 58.).

Κὰν βʹ.) Ζητοῦμεν εἰς τὸν προεκτεθέντα Πίνακα (§. 58.), ἂν ὑπάρχῃ ἡ ἐκτῶν ἀρισερῶν Πρώτη Κλάσις ἀληθὲς Τετράγωνον, καὶ ἂν μὲν ὑπάρχῃ τοιοῦτον, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς Πρώτης Κλάσεως. ἐὰν δὲ ἡ Πρώτη Κλάσις δὲν εἶναι ἀληθὲς Τετράγωνον, τότε λαμβάνομεν τὸ ὡς ἔγγισα ἔλαττον Τετράγωνον, καὶ γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν πρώτην Κλάσιν, τὴν δὲ ῥίζαν αὐτοῦ τοῦ Τετραγώνου γράφομεν εἰς τὸν τόπον τοῦ Πηλίκου.

Καν, γʹ) Ἀφαιροῦμεν τοῦτο τὸ Τετράγωνον ἀπὸ τῆς πρώτης Κλάσεως, τὸ δὲ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως καταλειπόμενον (ἐὰν ὑπάρχῃ) προσγράφομεν εἰς τὴν Ἐπομένην Κλάσιν.

Καν. δʹ.) Διπλασιάζομεν τὸ εὑρεθὲν Πηλίκον καὶ γράφομεν αὐτὸ ὡς Διαιρέτην ὑποκάτω τῆς δευτέρας Κλάσεως

οὕτως,

ὕτως, ὥστε ὁ τόπ⊗ ὁ ὑπὸ τὸν πλάγιον χαρακτῆρα πρὸς τὰ Δεξιὰ νὰ μένῃ κενὸς κ̣ ἐλεύθερ⊗.

Καν. έ.) Ἤδη ζητῦμεν ποσάκις περιέχεται ὁ Διαιρέτης ἐν τοῖς ἀνωτέρω ἐπ' αὐτῦ κειμένοις ἀριθμοῖς. τὸ δὲ εὑρεθὲν Πηλίκον θέτομεν τόσον εἰς τὸν τόπον τῦ Πηλίκυ πλησίον τῆς πρότερον εὑρεθείσης ῥίζης, ὅσον κ̣ εἰς τὸν κενὸν τόπον πλησίον τῦ Διαιρέτυ.

Καν. ς.) Ὅλον αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν μετὰ τύτυ τῦ ὑςέρως εὑρεθέντ⊗ Πηλίκυ κ̣ τὸ Γινόμενον ἀφαιρῦμεν ἀπὸ τῦ ἀνωτέρυ ἀριθμῦ, καθὼς ἐν τῷ ἑξῆς παραδείγματι γίνονται σαφέςερα τὰ λεγόμενα.

Ἔςω ὁ δοθεὶς ἀριθμ. 529., διὰ νὰ ἐξαχθῆ ἡ Τετραγωνικὴ τύτυ ῥίζα.

ά.)	5,29	ἐμερίσθη εἰς δύω Κλάσεις. | 23 ἡ ῥίζα.
β'.)	4	τὸ ὡς ἔγγιςα ἔλαττον Τετράγωνον, τῦ ὁποίυ ἡ ῥίζα εἶναι ὁ 2.
γ'.)	129	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τῆς ἑπομένης Κλάσεως.
δ' κ̣ έ.)	43	τὸ διπλάσιον τῦ Πηλίκυ 2 = 4 ὡς Διαιρέτης, κ̣ τὸ δεύτερον Πηλίκον τὸ 3 πλησίον τῦ Διαιρέτυ τεθειμένον εἰς τὸν ἐλεύθερον τόπον ὑποκάτω τῦ 9, ὅπερ Πηλίκον 3 ἐτέθη κ̣ εἰς τὸν τόπον τῆς ῥίζης πλησίον τῦ 2.
ς'.)	129	τὸ Γινόμενον ἐκ τῦ 43 κ̣ 3, τὸ ὁποῖον ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τῦ 129, ...
	0	

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ἀλήθεια ταύτης τῆς Πράξεως δείκνυται ἐκ τοῦ ἀλγεβραϊκοῦ Σχήματος (§. 63.) τὸ δεύτερον Μέλος τῆς ῥίζης διὰ τοῦτο τίθεται εἰς τὸν κενὸν τόπον πλησίον τοῦ Διαιρέτου, διὰ νὰ ἔχωμεν ἐν τῷ Γενομένῳ χωρὶς πολλῶν κόπων καὶ τὸ Τετράγωνον αὐτοῦ τούτου τοῦ Μέλους. ἐπειδὴ καὶ αὐτὸ τὸ Τετράγωνον καὶ τὸ Διπλάσιον Γινόμενον ἐκ τῶν δύω Μελῶν πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ λειποῦ ἀριθμοῦ, τὰ ὁποῖα ἀμφότερα (καὶ τὸ Τετράγωνον, δηλαδὴ τοῦ δευτέρου Μέλους τῆς ῥίζης, καὶ τὸ διπλάσιον Γινόμενον ἐκ τῶν Μελῶν τῆς ῥίζης) ἠμποροῦμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον νὰ ἀποκτήσωμεν ἐν ταυτῷ.

ΣΧΟΛΙΟΝ α.

§. 67. Ὅταν εἰς τὴν δευτέραν Κλάσιν ἀκολουθῇ καὶ Τρίτη, καὶ ἑπομένως συνίσταται ἡ ῥίζα ἐκ τριῶν χαρακτήρων, ἐξακολουθεῖται πάλιν ἡ ῥηθεῖσα Μέθοδος, ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ Τετάρτου Κανόνος. ὅθεν εἰς τὸ δεύτερον καταλειπόμενον τῆς προτέρας ἀφαιρέσεως γράφομεν τὴν τρίτην Κλάσιν, ἥτις μετὰ τούτου τοῦ καταλειπομένου εἶναι τὸ τρίτον διαλυθησόμενον Ποσόν, καὶ διπλασιάσαντες τοὺς δύω προτέρους χαρακτῆρας τῆς ῥίζης, γράφομεν ὑποκάτω τοῦ διαλυθησομένου ἀριθμοῦ οὕτως, ὥστε ὁ τόπος ὁ ὑποκάτω τοῦ τελευταίου χαρακτῆρος τοῦ διαλυθησομένου Ποσοῦ νὰ μείνῃ κενός, τὸ δὲ ἐκ τῆς Νέας Διαιρέσεως Πηλίκον, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τρίτον Μέλος τῆς ῥίζης, γράφομεν ὡσαύτως καὶ εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων καὶ εἰς τὸ κενὸν Διάστημα. ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν Διαιρέτην καὶ τὴν ῥίζαν μετὰ τοῦ νέου Πηλίκου, καὶ οὕτως ἀποκτῶμεν τὸ ἀφαιρετέον Γενόμενον. εἰ δ' ἔτι καὶ ἑτέρα Κλάσις ἐστί, καταβιβάζομεν αὐτὴν πάλιν πλησίον εἰς τὸ καταλειφθέν, καὶ λαμβάνομεν τὸ διπλάσιον ὅλων τῶν Μελῶν τῆς ῥίζης ὡς Διαιρέτην, καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν τοὺς αὐτοὺς Κανόνας, ἕως

οὗ λοιὃ λάβωσι τέλος ὅλαι αἱ Κλάσεις. ὅταν δὲ τύχῃ νὰ εἶναι τὸ ἀφαι-ρετέον Γινόμενον μεῖζον ἢ ὅσε νὰ δύναται νὰ γένῃ ἡ ἀφαίρεσις, τότε λαμβάνομεν μικρότερον Πηλίκον, καθὼς καὶ ἐπὶ τῆς Διαιρέσεως θέλομεν τύχῃ αὐτὴν τὴν περίστασιν δὶς ἐν τῷ ἑξῆς Παραδείγματι.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ.

6,15,04	| 248 ἡ ῥίζα
4	τὸ ὡς ἔγγιστα ἔλαττον Τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα ὑπάρχει ὁ 2.
215	τὸ καταλειπόμενον μετὰ τῆς ἀκολούθου Κλάσεως.
44	ἡ διπλασία ῥίζα μετὰ τοῦ νέου Πηλίκου.
176	τὸ ἀφαιρετέον Γινόμενον ἐκ τοῦ 44 καὶ 4,
3904	τὸ καταλειπόμενον μετὰ τῆς ἑπομένης Κλάσεως.
488	τὸ διπλ. τῆς ῥίζης 24×2=48 μετὰ τοῦ νέου Πηλίκου.
3904	τὸ ἀφαιρετέον Γινόμενον.
0	

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ β΄.

§. 68. Ὁμοίως τὸ Μηδενικὸν 0 δύναται εἰς τὴν τάξιν τῆς ῥίζης, καθὼς εἰς τὴν κοινὴν διαίρεσιν, ἐὰν δηλονότι τὸ διπλάσιον Γινόμενον τῆς προτέρας ῥίζης δὲν περιέχηται μήτε ἅπαξ εἰς τὸν διαλυθησόμενον ἀριθμὸν, καὶ τότε ἀντὶ παντὸς ἄλλου Πολλαπλασιασμοῦ, ἢ ἀφαιρέσεως κ. τ. γράφομεν εἰς τὴν προτέραν Κλάσιν τὴν ἑπομένην, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν ἐργασίαν, διπλασιάζοντες τὴν νέαν ῥίζαν ὡς ἐν τῷ ἑξῆς Παραδείγματι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

16,45,92,49	4057
16	τὸ ἀφαιρετέον Τετράγ. τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα εἶναι ὁ 4.
45	ἡ ἑπομένη Κλάσις.
8	τὸ διπλάσιον τῆς ῥίζης, τὸ Πηλίκον ἐστὶν 0.
4592	ἡ ἑπομένη Κλάσις πρὸς τῇ ἀνωτέρῳ τεθειμένῃ.
805	τὸ διπλ. τῆς ῥίζης 40×2 μετὰ τῆς νέας ῥίζης 5.
4025	τὸ ἐκ τοῦ Διαιρέτου καὶ τοῦ νέου Πηλίκου Γινόμενον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ.
56749	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τῆς ἑξῆς Κλάσεως.
8107	τὸ διπλ. τῆς ῥίζης 0×2 μετὰ τῆς νέας ῥίζης.
56749	τὸ ἀφαιρετέον Γινόμενον.
0.	

ΣΧΟΛΙΟΝ γʹ.

§. 69. Ἡ Βάσανος (Δοκιμὴ) τῆς Ὀρθῶς ἐξαχθείσης ῥίζης γίνεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν ἐφ' ἑαυτὴν, ἢ ὑψώσωμεν αὐτὴν εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θέλομεν ἰδῇ, ἂν εἶναι τὸ Τετράγωνον τῆς ῥίζης ἴσον τῷ δοθέντι ἀριθμῷ ὡς ἐν τῷ ἑξῆς Παραδείγματι.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ α'.

9,57,90,25 | 3095

9

57
6

5790
609
5481

30925
6185
30925

0

βάσανος

3095
3095

15475
27855
92850

9579025

ΠΑΡΑΔ. β'.

34,69,21 | 589

25

969
108
864

10521
1169
10521

0

ΠΑΡΑΔ. γ'.

16,00,00 | 400

16

000
00

0000
000

0

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ δ'.

```
36,09,60,64  | 6008
36
-----
 009
 12
-----
  0960
  120
-----
   96064
   12008
   96064
-----
     0
```

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 70. Ὅταν εἰς τὸ τέλος ἐγκαταλείπηταί τι λείψανον, τοῦτο εἶναι Σημεῖον, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἦτον Ἐντελὴς Τετράγωνον. ὅθεν δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποκτήσωμεν ρίζαν ἀληθῆ (§. 59). τὸ τοιοῦτον ἐκφράζομεν διὰ τοῦ Σημείου $\sqrt{\ }$, οἷον $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt{118}$ κ. τ. ὡστόσον δυνάμεθα διὰ τῆς Ἐξαγωγῆς νὰ εὕρωμεν τὴν ἀληθῆ ρίζαν, ἐξακολουθοῦντες περαιτέρω διὰ τῶν Δεκαδικῶν. καὶ τοῦτο γίνεται ἐὰν προσθέσωμεν τῷ λειψάνῳ μίαν Κλάσιν ἐκ δύω Μηδενικῶν 00, καὶ οὕτω θεωρεῖται αὕτη ἡ Κλάσις ὅλη ὡς Δεκαδικὰ Κλάσματα, καὶ ἡ ἐκ ταύτης ρίζα ὡς Δεκατημόρια. ἂν δὲ καὶ ἀπὸ αὐτῆς μένῃ κἀνένα λείψανον, προσθέτομεν ἄλλα δύω μηδενικὰ, καὶ τὸ ἐκ τούτων Πηλίκον εἶναι Ἑκατοστημόρια, οὕτω δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν ἐπὶ πλέον, προστιθέντες ἐπὶ τῆς Διαιρέσεως πάντοτε ἀντὶ ἓν 0 εἰς τὸν Διαιρετέον, κατ' αὐτὴν τὴν Μέθοδον ἐξάγομεν τὴν ρίζαν ἀπὸ 1129 καὶ 5240. ὡς θέλομεν ἰδῇ ἐν τοῖς ἑξῆς Παραδείγμασι.

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ α΄, καὶ β΄.

1,29 | 11,35 κ. τ.	5,40 | 22,23 κ. τ.
1	4
——	——
29	140
21	43
21	129
———	———
8,00	11,00
223	462
669	924
———	———
13100	17600
2265	4543
11325	13929
———	———
1775	3671

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ ι.

§. 71. Εἰς Τετραγωνικὰ Κλάσματα πρέπει καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ ἐκ τοῦ Παρονομαστοῦ νὰ ἐξάγωμεν τὴν ῥίζαν π. χ. $\frac{4}{25}$ δίδωσι ῥίζαν $\frac{2}{5}$. καὶ $\frac{36}{81}$ τὴν $\frac{6}{9}$. εἰς δὲ τὰ Δεκαδικὰ Κλάσματα γίνεται ἡ Πρᾶξις καθὼς εἰς τὰ Ὁλοσχερῆ. πρέπει ὅμως εἰς τὰ Δεκαδικὰ νὰ προσέχωμεν νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν χαρακτήρων πάντοτε ἄρτιος, εἰ δὲ καὶ εἶναι Περιττὸς, προστίθεμεν ἓν Μηδενικὸν 0. εἰς τὸ τέλος, καὶ οὕτω γίνεται ἄρτιος, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις τοῦ Κλάσματος (§. 90. ἐν ἀριθμητικῇ). ἡ δὲ αἰτία τούτου εἶναι, ὅτι τὸ Δεκαδικὸν Κλάσμα προϋποτίθεται πάντοτε νὰ ἔχῃ Παρονομαστὴν συνιστάμενον ἐκ τῆς Μονάδος ϗ τῶν Μηδενικῶν, ϗ εἰς αὐτὴν τὴν αὔξησιν Τετράγωνον Παρονομαστὴν, ὅπου εἶναι πάντοτε ὁ ἀριθμὸς τῶν Μηδενικῶν Σημείων ἄρτιος. καθὼς ἐκ τῶν Τετραγώνων τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν γίνεται δῆλον, π. χ. τῶν 10, 100, 1000, 10000 κ. τ. Τετράγωνα εἶσι 100, 10000, 1000000, 100000000 κ. τ. ἀλλὰ μὴν ἐν τῷ ἀριθμητῇ ὑπάρχουσι τόσοι χαρακτῆρες, ὅσα Μηδενικὰ Σημεῖα ἐν τῷ Παρονομαστῇ, πρέπει ἄρα ϗ ὁ ἀριθμὸς τῶν χαρακτήρων τοῦ ἀριθμητοῦ νὰ εἶναι ἄρτιος. ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι Μικτὸς, τουτέστιν ἐὰν συνίσταται ἐξ ἀκεραίων ϗ Δεκαδικῶν, τότε διαιροῦμεν αὐτὸν εἰς Κλάσεις ξεχωριστὰ τόσον τὸν ἀκέραιον, ὅσον ϗ τὸν Δεκαδικὸν, ϗ ὕστερον γίνεται ἡ Ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης κατὰ τοὺς Κανόνας τοὺς προτεθέντας ἐν τοῖς ἀνωτέρω Παραγράφοις· πρὸς ἐξήγησιν τῶν εἰρημένων, κείσθωσαν τὰ ἑξῆς Παραδείγματα διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν ἀπὸ τῶν 7.24576, ϗ 0.56644, ϗ 7487.441 τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν.

ΠΑΡΑΔ. α΄.

```
7.,24,57,60   | 2.691
4
——
324
 46
276
————
 4857
  529
 4761
—————
  9660
  5381
  5381
  ————
  4279  κ. τ.
```

ΠΑΡΑΔ. β΄.

```
56,64,40   | 0.752
49
——
 764
 145
 725
————
 3940
 1502
 3004
 ————
  936  κ. τ.
```

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ΄.

```
74,87,44,10  | 86.53
64
——
1087
 166
 996
——
 9144
 1725
 8625
 ——
  51910
  17303
  51909
 ————
   01
```

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ί.

§. 72. Ἐκ τοῦ δοθέντος Κύβου νὰ ἐξάγωμεν τὴν Διμερῆ ῥίζαν.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Ἐπειδὴ κάθε Κύβος ἑνὸς Διμελοῦς Ποσοῦ συνίσταται ἐκ τοῦ Κύβου τοῦ πρώτου Μέλους, ϗ ἐκ τοῦ Τριπλοῦ Τετραγώνου ἑκάστου Μέλους πολλαπλασιασθέντος μετὰ τοῦ ἑτέρου, ϗ ἐκ τοῦ Κύβου τοῦ δευτέρου Μέλους, καθὼς φαίνεται ἐκ τοῦ Σχήματος $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$, ἀποκτῶμεν τὴν ῥίζαν, ἐὰν ἐξαγάγωμεν ἐκ τοῦ δοθέντος τὸ α ϗ β, ὕστερον σχηματίζομεν ἐκ τῆς ῥίζης α ϗ β τὰ τέσσαρα τοῦ

Κύβου

Κύβȣ γνωςὰ Ποσὰ, ϗ τὰ ἀφαιρȣ̃μεν ἀπὸ τȣ̃ δεδομένȣ Κύβȣ. ἐπειδὴ εἰς τοιαῦτα ἀναλύονται, ἐξ ὧν ϗ συνετέθησαν.

Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ἀπὸ τȣ̃ $α^3$ τὴν Κυβικὴν, ῥίζαν α, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ β, ἀφ᾽ ȣ̃ διέλωμεν τὸ $3α^2β$ μὲ $3α^2$ τȣτέςι μὲ τὸ Τριπλάσιον Τετράγωνον τȣ̃ πρώτȣ Μέλȣς. ἀφ᾽ ȣ̃ εὕρωμεν τὸ β, συντίθεμεν ἔπειτα τὰ τρία ἑξῆς Ποσὰ $3α^2β$, $3αβ^2$, $β^3$ ϗ τὰ ἀφαιρȣ̃μεν ἀπὸ τȣ̃ δεδομένȣ Ποσȣ̃, ϗ ȣ̃τω δὲν ἐγκαταλείπεται μηδέν.

$α^3+3α^2β+3αβ^2+β^3$	$\underline{1\ α+β}$
$-α^3$	ὁ ἀφαιρετέος Κύβος τȣ̃ πρώτȣ Μέλȣς α, τὸ ὁποῖον θέτομεν εἰς τὸν τόπον τȣ̃ Πηλίκȣ.
$3α^2β$	τὸ δεύτερον Ποσόν.
$3α^2$	τὸ Τριπλȣ̃ν Τετράγωνον τȣ̃ πρώτȣ Μέλȣς ὡς Διαιρ.
$-3α^2β$	Πολλαπλασιασθὲν μετὰ τῆς νέας ῥίζης, ϗ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ Ποσȣ̃.
$0\quad 3αβ^2$	τὸ τρίτον Ποσόν.
$-3αβ^2$	τὸ τριπλάσιον Τετράγ. τȣ̃ δευτέρȣ Μέλȣς τῆς ῥίζης πολλαπλασιασθὲν μετὰ τȣ̃ πρώτȣ Μέλȣς ϗ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τȣ̃ τρίτȣ Ποσȣ̃.
$0\quad β^3$	τὸ Τέταρτον Ποσὸν
$-β^3$	ὁ ἀφαιρετέος Κύβος τȣ̃ δευτέρȣ Μέλȣς τῆς ῥίζης.
0	

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ΄.

§. 73. Νὰ ἐξάγωμεν τὴν Κυβικὴν ῥίζαν.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

α.) Μερίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς Κλάσεις οὕτως, ὥστε ἑκάστη Κλάσις νὰ περιέχῃ τρεῖς χαρακτῆρας ἐκτὸς τῆς πλευταίας πρὸς τὰ ἀριστερὰ Κλάσεως, ἥτις δύναται κατὰ περίστασιν νὰ περιέχῃ καὶ δύω, ἢ καὶ ἕνα μόνον χαρακτῆρα. ἐντεῦθεν δηλοῦται, ἐκ πόσων χαρακτήρων συνίσαται ἡ ῥίζα, ἐκ τοσούτων δηλονότι, εἰς ὅσας Κλάσεις ἐμερίσθη ὁ δοθεὶς Κύβος (§. 58).

β.) Ἔπειτα ζητοῦμεν εἰς τὸν Πίνακα (§. 58), ἂν ἡ πρώτη Κλάσις ὑπάρχῃ Κύβος, ἢ οὔ. καὶ εἰ μὲν ὑπάρχει Κύβος, γράφομεν αὐτὸν ὑποκάτω τῆς πρώτης Κλάσεως, ἐὰν δὲ δὲν εἶναι Κύβος. λαμβάνομεν τὸν ὡς ἔγγιστα ἐλάττονα Κύβον, καὶ γράφομεν αὐτὸν ὑπὸ τὴν πρώτην Κλάσιν, τὴν δὲ ῥίζαν αὐτοῦ εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων.

γ.) Ἀφαιροῦμεν τοῦτον τὸν Κύβον ἀπὸ τῆς πρώτης Κλάσεως, καὶ τίθεμεν πλησίον τοῦ καταλειπομένου τὴν ἑπομένην Κλάσιν.

δ.) Ἐκ τοῦ εὑρεθέντος Πηλίκου (α) ποιοῦμεν Τετράγωνον, ὅπερ πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ 3 ($= 3a^2$) γράφομεν ὑπὸ τὴν δευτέραν Κλάσιν ὡς Διαιρέτην οὕτως, ὥστε οἱ ὑπὸ τοὺς δύω ἐσχάτους χαρακτῆρας πρὸς τὰ δεξιὰ τόποι νὰ μένωσι κενοί.

ε.) Ζητοῦμεν ὕστερον, ποσάκις ὁ Διαιρέτης περιέχεται ἐν τῷ ἐπ' αὐτὸν Διαιρετέῳ, τὸ δὲ Πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον Μέλος τῆς ῥίζης, ὅπερ θέτομεν εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων·

ϛ'.) Πολλαπλασιάζομεν μετὰ τούτου τοῦ νεωστὶ εὑρεθέντος Μέλους τῆς ῥίζης (β) τὸν Διαιρέτην, τὸ δὲ Γινόμενον ($3a^2\beta$) ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου ἀριθμοῦ, καὶ εἰς τὸ καταλειφθὲν γράφομεν τὸν προτελευταῖον χαρακτῆρα.

ζ'.) Ἐκ τῆς δευτέρας ταύτης ῥίζης (β) ἀποτελοῦμεν Τετράγωνον (β^2), καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ μετὰ τοῦ πρώτου Μέλους τῆς ῥίζης καὶ μετὰ τοῦ 3, καὶ οὕτω γεννᾶται τὸ Γενόμενον ($3a\beta^2$), τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦμεν πάλιν ἀπὸ τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ, καὶ πλησίον τοῦ ἐγκαταλειπομένου προσγράφομεν τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα τῆς Κλάσεως.

η'.) Ἐκ τῆς αὐτῆς ῥίζης (β) ἀποτελοῦμεν Κύβον, καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὸν ἀπὸ τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ, καὶ ἂν δὲν μείνῃ τι ἐγκαταλειπόμενον, τότε ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει ἀληθὴς Κύβος, καὶ ἡ ῥίζα τούτου ἐξήχθη. π. χ. νὰ ἐξαγάγωμεν ἀπὸ τοῦ 13824 τὴν Κυβικὴν ῥίζαν.

α'.)		13,824	24 ἡ ῥίζα
β'.)	a^3	8	ὁ ὡς ἔγγιστα ἀφαιρετέος Κύβος.
γ'.		5824	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τῆς ἑπομένης Κλάσεως.
δ'.)	$3a^2$	12	τὸ τριπλοῦν Τετραγ. τοῦ πρώτου Μέλους $2\times2\times3 = 12$.
ε'.)	$3a^2\beta$.	48	$\times$ μετὰ τοῦ ἄλλου Μέλους $\beta = 12\times3 = 48$, καὶ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τῶν 58.

	102	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ προπλάταίου χαρακτῆρος 2.
ζ'.) $3\alpha\beta^2$	96	τὸ δεύτερον Μέλος τῆς ῥίζης $4\times4=16\times3=48\times2$ (τὸ πρῶτον Μέλος τῆς ῥίζης) $=96$,
	64	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ ἐσχάτου χαρακτῆρος.
η'.) β^3	64	ὁ Κύβος τοῦ δευτέρου Μέλους τῆς ῥίζης $4=64$,
	0	

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ἀλήθεια αὐτῆς τῆς Μεθόδου τοῦ τὰς Κυβικὰς ἐξαγάγειν ῥίζας δηλοῦται ἐκ τοῦ Ἀλγεβραϊκοῦ Σχήματος (§. 72.), ἀφ' οὗ εὕρωμεν μίαν φορὰν τὸ β, τότε συνθέτομεν τὰ Μέρη, ἐξ ὧν συνίσταται ὁ Κύβος, καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὰ καθὲν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

ΣΧΟΛΙΟΝ α.

§. 74. Ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἔχῃ πλέον, ἢ δύω Κλάσεις, καὶ ἑπομένως συνίσταται ἡ ῥίζα ἐκ πλειόνων χαρακτήρων, ἐξακολουθοῦμεν τὴν Μέθοδον ταύτην, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Τετάρτου Κανόνος, καὶ θεωροῦμεν τοὺς δύω εὑρεθέντας χαρακτῆρας τῆς ῥίζης ὡς πρῶτον Μέλος, ἐξ ὧν γίνεται διὰ τὴν Διαίρεσιν τὸ Τριπλοῦν Τετράγωνον αὐτῶν, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ β, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τοῦτο τὸ Τριπλοῦν Τετράγωνον μεθ' ὅλου τοῦ α, τουτέστι μετὰ πάντων τῶν προτέρων ῥιζῶν, καὶ τὸ ἀφαιροῦμεν, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκονται ὅλαι αἱ ῥίζαι ὁποιουδηποτοῦν ἀριθμοῦ.

ΠΑΡΑ'-

	823744	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τῆς ἑπομένης Κλάσεως.
$3\alpha^2$	2028	$26 \times 26 = 676 \times 3 = 2028$ ὁ Διαιρέτης. τὸ Πηλίκον $4 = \beta$.
$3\alpha^2\beta$	8112	$2028 \times 4 = 3\alpha^2 \times \beta$.
	1254	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ προπλατείου χαρακτ.
$3\alpha\beta^2$	1248	$4 \times 4 = 16 \times 3 = 48 \times 26 = 1248 = \beta^2 \times 3 \times \alpha$.
	64	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ πλατείου χαρακτῆρος.
β^3	64	ὁ Κύβος τοῦ 4.
	0	

Ἐὰν

ΠΑΡΆΔΕΙΓΜΑ.

$18,399,744 \,\Big|\, \begin{array}{l} \alpha\beta \\ 264 \end{array}$ ἡ ῥίζα

α^3	8	ὁ ὡς ἔγγιστα ἐλάσσων Κύβος.
	10399	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τῆς ἐπομένης Κλάσ,
$3\alpha^2$	12	$2\times2=4\times3=12$ ὁ Διαιρέτης. τὸ Πηλίκ. $6=\beta$.
$3\alpha^2\beta$	72	12×6, ἢ $3\alpha^2\times\beta=72$.
	319	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ ἐπομένου χαρακτῆρος.
$3\alpha\beta^2$	216	$6\times6=36\times3=108\times2=216$ $=\beta^2\times3\times\alpha$.
	1039	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ ἀκολούθου χαρακτῆρος.
β^3	216	ὁ Κύβος τῆς ῥίζης 6.

Ἐὰν μεταξὺ τῆς ἐργασίας δὲν δύνηται νὰ ἀφαιρεθῇ κανένας ἀριθμὸς, τοῦτο εἶναι Σημεῖον, ὅτι ἐλήφθη ῥίζα μείζων τοῦ δέοντος, καὶ διὰ τοῦτο ἀνάγκη νὰ τεθῇ μικροτέρα εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων· ἀφ' οὗ δὲ τελειώσωμεν τὴν ἐργασίαν, ποιοῦμεν τὴν Βάσανον, πολλαπλασιάζοντες πρῶτον τὴν ῥίζαν μεθ' ἑαυτῆς, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸ Γινόμενον, (τὸ Τετράγωνον δηλονότι τῆς ῥίζης ταύτης) αὖθις ἐπὶ τὴν ῥίζαν. καὶ ἂν τὸ δεύτερον Γινόμενον ὑπάρχῃ ἴσον μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, εἶναι δῆλον, ὅτι ἐξήχθη· ἐντελῶς ἡ Κυβικὴ ῥίζα τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

```
28,934,443 | 1307
27
1934
27
1934443
2700
18900
4444
4410
343
343
0
```

```
438,976 | 176
343
95976
147
882
777
756
216
216
0
```

Βάσανος.

```
76
76
456
532
5776
76
34656
40432
438976
```

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

§. 75. Ἐὰν μετὰ τὴν Ἐργασίαν μείνῃ κανένα λείψανον, εἶναι Σημεῖον, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν εἶναι ἀληθὴς Κύβος, καὶ τὴν ἀληθῆ ῥίζαν δὲν δυνάμεθα ἀκριβῶς νὰ εὕρωμεν, ὅθεν δυνάμεθα

διὰ

ιὰ τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ὡς ἔγγιστα ἀληθῆ ῥίζαν τούτου, προστιθέντες εἰς τὸ λεῖψανον τρία Μηδενικὰ αθὼς εἴπομεν ἀνωτέρω, (§. 70). οὕτως ἐξάγεται ἐκ τοῦ 54 ἡ ὡς γγιστα Κυβικὴ ῥίζα.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ.		Βάσανος.	
54	3.77	377	
27		377	
27000		2639	
27		2639	
189		1131	
810		142129	Τετράγωνον
441		377	
3690		994903	
343		994903	
3347000		426387	
4107		53582633	Κύβος
28749		417367	τὸ καταλειφθέν.
47210		54,000000	
5439			
417710			
343			
417367 Καταλειφθέν.			

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ γ'.

§. 76. Ἐπὶ τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων γίνεται ἡ Ἐργασία τῆς Ἐξαγωγῆς, καθὼς ϗ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, πρέπει δὲ νὰ σημειώσωμεν ϗ ἐνταῦθα, ὅτι τὰ Μηδενικὰ πρέπει νὰ εἶναι κατὰ τὸν ἀριθμὸν ἢ τρία, ἢ ἕξ, ἢ ἐννέα, κ. τ. καθὼς αὖθις γίνεται τοῦτο δῆλον διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Δεκαδικῶν ῥιζῶν ἐφ' ἑαυτάς. π. χ. τὸ Τετράγωνον 100 μετὰ τῆς ῥίζης 10 πολλαπλασιασθὲν, παρέχει τὸν Κύβον 1000, τρία Μηδενικά. τὸ δὲ Τετράγωνον 10000 X μετὰ τῆς ῥίζης 100, παρέχει τὸν Κύβον 1000000, ἕξ Μηδενικά. τὸ δὲ Τετράγ. 1000000 X μετὰ τῆς ῥίζης 1000, παρέχει Κύβον 1000000000 ἐννέα Μηδενικά. πρέπει λοιπὸν νὰ προσθέτωμεν ἐν τοῖς Δεκαδικοῖς Κλάσμασιν εἰς τὸ τέλος τόσα Μηδενικὰ Σημεῖα. ἂν δὲ τὸ δοθὲν Ποσὸν εἶναι Μικτὸν, τότε Μερίζομεν τὸ ὁλοσχερὲς ξεχωριστὰ, ϗ τὰ Δεκαδικὰ ξεχωριστὰ εἰς Κλάσεις, καθὼς εἴπομεν ἀνωτέρω (§. 71.). νὰ ἐξαγάγωμεν ἐκ τοῦ 0,3758, ϗ 146. 37. τὴν Κυβικὴν ῥίζαν.

375,800	10.72	146.370	15.2
343		125	
32800		21370	
147		75	
294		150	
340		637	
84		60	
2560		5770	
8		8	
2552	κ. τ. λ.	5762	κ. τ. λ.

ΣΧΟΛΙΟΝ δ'.

§. 77. Ἐὰν παρατηρήσωμεν ἀκριβέστερον τὰ Ἀλγεβραϊκὰ Σχήματα τῶν Δυνάμεων, ϗ ἐξετάσωμεν τοὺς Κανόνας, καθ' οὓς τόσον οἱ Συνεργοὶ, ὅσον ϗ οἱ Δυναμοδεῖκται αὐξάνουσι, ϗ ἐλαττοῦνται, θέλομεν εὕρῃ, ὅτι δύναται νὰ σχηματισθῇ ἕνας Γενικὸς Κανὼν, καθ' ὃν δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τὰ Μέλη σὺν τοῖς αὐτῶν Συνεργοῖς ϗ Δυναμοδείκταις, χωρὶς νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸ διδόμενον Ποσὸν μετὰ τῆς ῥίζης πρὸς ὕψωσιν Δυνάμεων. αἱ Δυνάμεις τοῦ $\alpha+\beta$ εἰσὶν αἱ ἑξῆς.

α'.) $\alpha+\beta$
β'.) $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
γ'.) $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
δ'.) $\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$. κ. τ.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν Μελῶν, ἢ ὅρων πάντοτε εἶναι μείζων τοῦ Δυναμοδείκτου τῆς ζητουμένης Δυνάμεως Μονάδι. οἱ Δυναμοδεῖκται τοῦ α ἐλαττοῦνται κατὰ τάξιν Μονάδι, οἱ δὲ τοῦ β αὐξάνουσιν. Ὁ Συνεργὸς τοῦ Δευτέρου Μέλους εἶναι πάντοτε Ἴσος μὲ τὸν Δυναμοδείκτην τοῦ πρώτου. οἱ δὲ Συνεργοὶ τῶν ἐπιλοίπων Μελῶν εἶναι τὸ Γινόμενον ἐκ τοῦ Δυναμοδείκτου τοῦ προηγουμένου Μέλους ϗ τοῦ ἰδίου Συνεργοῦ, διαιρεθὲν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν. π. χ. ἐν τῷ $(\alpha+\beta)^4$ πρῶτον Μέλος εἶναι α^4. ὁ Συνεργὸς ἄρα τοῦ δευτέρου Μέλους ὑπάρχει ὁ 4, ϗ ὁ Δυναμοδείκτης τοῦ α εἶναι ὁ 3, τοῦ δὲ β εἶναι ἡ Μονὰς ($4\alpha^3\beta$). Ὁ Συνεργὸς τοῦ τρίτου Μέλους εἶναι τὸ Γινόμενον ἐκ τοῦ Δυναμοδείκτου τοῦ δευτέρου Μέλους, ϗ ἐκ τοῦ Συνεργοῦ αὐτοῦ, ἤτοι $3\times4=12$ διαιρεθὲν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν, ἤτοι διὰ τοῦ 2, ὅπερ ἐστὶ $=6$. ὁ Δυναμοδείκτης τοῦ α εἰς τὸ τρίτον Μέλος εἶναι ὁ 2, ϗ τοῦ β ὡσαύτως ὁ 2, ($6\alpha^2\beta^2$). ϗ πάλιν ὁ Συνεργὸς τοῦ τετάρτου Μέλους εἶναι ὁ τοῦ προτέρου Μέλους Συνεργὸς Πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τοῦ Δυναμοδείκτου τοῦ αὐτοῦ Μέλους, τουτέστι $6\times2=12$, ϗ Διαιρεθεὶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν, ἤτοι διὰ τοῦ 3, ϗ οὕτω προκύπτει ὁ Συνεργὸς τοῦ τε-

τάρτου

τετάρτου Μέλους ὁ 4. ὁ δὲ Δυναμοδείκτης τοῦ α εἶναι ἡ Μονάς. τοῦ δὲ β ὁ 3 ($4\alpha\beta^3$). ϗ ἐν ἑνὶ λόγῳ ὁ Συνεργὸς τοῦ πέμπτου Μέλους εἶναι $4 \times 1 = \frac{4}{4} = 1$. Τὸ α ἔχει Ἐκθέτην τὸ 0. ἄρα $\alpha^0 = 1$, ἐπειδὴ δὲ ἡ Μονὰς δὲν γράφεται, διὰ τοῦτο μένει τὸ Τέταρτον Μέλος β^4 μόνον. ἔστω ἡ ῥίζα $\alpha+\beta$. διὰ νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν ὀγδόην Δύναμιν ἤτοι $(\alpha+\beta)^8$, ὅθεν γράφομεν πρῶτον τὸ Ποσὸν α μετὰ τῶν Δυναμοδεικτῶν ἐλαττουμένων, οἷον $\alpha^8, \alpha^7, \alpha^6, \alpha^5, \alpha^4, \alpha^3, \alpha^2, \alpha$. ἔπειτα πλησίον τούτου τίθεμεν ϗ τὸ β, μετὰ τῶν Δυναμοδ. αὐξανομένων, ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ δευτέρου Μέλους ἕως εἰς τὸ ἔννατον. ἐπειδὴ ζητεῖται ἡ ὀγδόη Δύναμις. οἷον. $\alpha^8, \alpha^7\beta, \alpha^6\beta^2, \alpha^5\beta^3, \alpha^4\beta^4, \alpha^3\beta^5, \alpha^2\beta^6, \alpha\beta^7, \beta^8$. Ὁ μὲν Συνεργὸς τοῦ δευτέρου Μέλους εἶναι 8 = τῷ Δυναμοδείκτῃ τοῦ πρώτου. Ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ τρίτου Μέλους εἶναι ὁ προηγούμενος Συνεργὸς 8, πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τοῦ Δυναμοδείκτου 7, οἷον $8 \times 7 = 56$, ϗ διαιρεθεὶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν, ἤτοι διὰ τοῦ 2, $56 : 2 = 28$. ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ τετάρτου Μέλους εἶναι $= 28 \times 6 = 168$, ϗ διαιρεθεὶς διὰ τοῦ 3 τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν, $168 : 3 = 56$. ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ πέμπτου $= 56 \times 5 = 280 : 4 = 70$. ὁ Συνεργὸς τοῦ ἕκτου εἶναι $70 \times 4 = 280 : 5 = 56$. ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ ἑβδόμου εἶναι $56 \times 3 = 168 : 6 = 28$. ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ ὀγδόου Μέλους εἶναι $28 \times 2 = 56 : 7 = 8$, ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ ἐννάτου εἶναι $8 \times 1 = 8 : 8 = 1$. κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ποριζόμεθα τὸ Ἀλγεβραϊκὸν Σχῆμα τῆς ὀγδόης Δυνάμεως ἄνευ Πολλαπλασιάσεως

$$\alpha^8 + 8\alpha^7\beta + 28\alpha^6\beta^2 + 56\alpha^5\beta^3 + 70\alpha^4\beta^4 + 56\alpha^3\beta^5 + 28\alpha^2\beta^6 + 8\alpha\beta^7 + \beta^8.$$

Εἰς ἐκεῖνο τὸ Μέλος εἰς τὸ ὁποῖον οἱ Δυναμοδεῖκται τοῦ α ϗ τοῦ β εἶναι ἴσοι ἀλλήλοις (τὸ ὁποῖον εἶναι πάντοτε εἰς τὸ μεσαίτατον Μέλος, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν Μελῶν τυγχάνῃ περιττὸς) ἔχει τὸν μέγιστον Συνεργόν, ἀπὸ δὲ τοῦ μεσαιτάτου τούτου Μέλους μέχρι τέλους ἐλαττοῦνται οἱ Συνεργοί, καθ' ὃν τρόπον πρότερον ηὔξησαν ἤτοι ἀπὸ τοῦ πρώτου Μέλους μέχρι τοῦ μεσαιτάτου. π. χ. εἰς τὸ προτεθὲν Παράδειγμα οἱ μὲν τέσσαρες προηγούμενοι Συνεργοί εἰσιν 1, 8, 28, 56, ὁ δὲ μεσαίτατος 70, ϗ ὕστερον οἱ τελευταῖοι τέσσαρες πάλιν 56, 28, 8, 1. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν Μελῶν ἄρτιος ὑπάρχῃ, ὡς εἰς τὴν ἐννάτην Δύναμιν τοῦ $\alpha+\beta$. οἷον $\alpha^9 + 9\alpha^8\beta$

$+36\alpha^7\beta^2+84\alpha^6\beta^3+126\alpha^5\beta^4+126\alpha^4\beta^5+84\alpha^3\beta^6+36\alpha^2\beta^7+9\alpha\beta^8$ $+\beta^9$. τότε τὰ δύω μεσαίτατα Μέλη ἔχουσι τὸν αὐτὸν καὶ μέγιστον Συνεργὸν, ὅθεν ἐλαττοῦνται πάλιν ἕως τέλους κατὰ τὸν λόγον καθ' ὃν ηὔξησαν ἀπ' ἀρχῆς. ἀναγκαῖον λοιπὸν νὰ διατάττωμεν τοὺς ὑπολογισμοὺς ἕως εἰς τὸν μέγιστον Συνεργὸν καὶ εἰς τὰ μετὰ τὸ μεσαίτατον Μέλη νὰ προσγράφωμεν τοὺς αὐτοὺς Συνεργοὺς, ὅμως κατ' ἀντεστραμμένην τάξιν, καθὼς ἐν τῷ προτέρῳ Παραδείγματι, οἱ τρεῖς πρῶτοι Συνεργοὶ εἶναι 8, 28, 56. ὁ δὲ μέγιστος 70, ἔπειτα οἱ τελευταῖοι τρεῖς 56, 28, 8.

ΣΧΟΛΙΟΝ ε'.

§. 78. Ἐὰν ἐκλάβωμεν τὴν Δύναμιν, ἢ ἀξίαν γενικῶς καὶ ἀδιορίστως, τότε τὸν Ἐκθέτην τῆς Δυνάμεως ὀνομάζομεν μ, καὶ τὸ μὲν πρῶτον Μέλος ἔσται α^{μ}. τὸ δὲ δεύτερον $\mu\alpha^{\mu-1}\cdot\beta$. τὸ δὲ τρίτον $\frac{\mu\,.\,\mu-1}{1\,.\,2}\alpha^{\mu-2}\cdot\beta^2$. τὸ δὲ τέταρτον $\frac{\mu\,.\,\mu-1\,.\,\mu-2}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^{\mu-3}\cdot\beta^3$ κ.τ.λ. τὸ α ὅμως δύναται νὰ λείψῃ, καὶ ἡ Σειρὰ αὕτη νὰ πληρώσῃ, ἐὰν ὁ ἀπὸ τοῦ μ τοῦ Δυναμοδείκτου τοῦ α ἀφαιρετέος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ μ. ἐπειδὴ τότε ἔσται $\alpha^{\mu-\mu}=\alpha^0=1$, καὶ αὕτη ἡ Μονὰς εἶναι ὁ Συνεργὸς τοῦ ἐσχάτου Μέλους τοῦ β.

ΣΧΟΛΙΟΝ ς'.

§ 79. Αὗται αἱ γενικαὶ Ἐκθέσεις χρησιμεύουσι μάλιστα εἰς τὸ νὰ ἐρευνήσωμεν διάφορα Θεωρήματα, καὶ Ἰδιότητας, καθὼς θέλομεν ἰδεῖ ἐν τῷ ἑξῆς Κεφαλαίῳ σαφέστερον. κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δυνάμεθα ἐκ τῆς γενικῆς Ἐκθέσεως τοῦ Διμελοῦς Τετραγώνου $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ νὰ συμπεραίνωμεν (ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ $\beta=1$), ὅτι τὸ Τετράγωνον τῆς Μονάδι αὐξηθείσης ῥίζης εἶναι ἴσον τῷ Τετραγώνῳ τῆς προτέρας ῥίζης, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ Διπλάσιον

τῆς

τῆς ῥίζης καὶ μίαν Μονάδα. ἐπειδὴ οὕτω τὸ πρότερον Σχῆμα μετασχηματίζεται εἰς τὸ ἑξῆς $\alpha\alpha + 2\alpha + 1$ ὅθεν τὸ Τετράγωνον τοῦ 13 (τουτέστι τὸ 169) εἶναι ἴσον τῷ Τετραγώνῳ τοῦ 12 (τουτέστι τῷ 144), ἐὰν προσθέσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ Διπλοῦν τοῦ 12 καὶ μίαν Μονάδα. ἐκ δὲ τῆς γενικῆς Ἐκθέσεως τοῦ Κύβου $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$, (ἐὰν εἶναι τὸ $\beta = 1$) γίνεται δῆλον, ὅτι ὁ Κύβος τῆς Μονάδι αὐξηθείσης ῥίζης ἴσος ἐστὶ μὲ τὸν Κύβον τῆς προτέρας ῥίζης, ἐὰν εἰς τοῦτον προστεθῇ τὸ Τριπλάσιον Τετράγωνον τῆς προτέρας ῥίζης καὶ τὸ Τριπλάσιον τῆς ῥίζης, καὶ μία Μονάς οἷον $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$. οὕτω καὶ περὶ τῶν λοιπῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ε'.

Περὶ λογισμοῦ τῶν ῥιζικῶν Ποσῶν.

ΟΡΙΣΜΟΣ α'.

§. 80. Ῥιζικὸν Ποσὸν λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τοῦτο τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον $\sqrt{}$ πρὸ ἑαυτοῦ κείμενον ὡς $\sqrt{\alpha}$, $5\sqrt[4]{\alpha^3}$, $\delta\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$, $\sqrt{16}$, $4\sqrt[3]{20}$. κ. τ. ὁ δὲ ἀριθμός, ἢ τὸ Γράμμα τὸ πρὸ τούτου τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου εὑρισκόμενον λέγεται τῆς ῥίζης, ἢ ῥιζικὸς Συνεργός. ὅταν ὅμως δὲν εὑρίσκηται γεγραμμένος κανένας τοιοῦτος Συνεργός, ἐννοεῖται τότε ἡ Μονάς. ὁ δὲ ἐπὶ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου κείμενος ἀριθμὸς, ἢ τὸ Γράμμα ὀνομάζεται Ἐκθέτης, ἢ Δυναμοδείκτης τῆς ῥίζης. ὅταν ὅμως δὲν εἶναι μήτ' αὐτὸς ἐπιγεγραμμένος, ἐννοεῖται πάντοτε τὸ 2, ἢ ἡ Δευτέρα Δύναμις· π. χ. $\sqrt{\alpha}$ εἶναι Τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ Ποσοῦ α. $\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$ εἶναι ἡ ῥίζα μ τοῦ Ποσοῦ α ὑψωμένου εἰς τὴν ν Δύναμιν.

ΟΡΙΣΜΟΣ β'.

§. 81. Ὅμοια ῥιζικὰ Ποσὰ ὀνομάζονται ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς Ἐκθέτας ἐπὶ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου, καὶ τὰ αὐτὰ μετὰ τὸ Σημεῖον κείμενα Γράμματα, οἱ δὲ τούτων Συνεργοὶ ἔστωσαν καὶ Διάφοροι. π. χ. τὸ $\mu\sqrt{\alpha}$ μὲ τὸ $\nu\sqrt{\alpha}$, καὶ $3\sqrt[\mu]{\alpha}$ μὲ τὸ $\sqrt[\mu]{\alpha}$ εἶναι ἀλλήλοις ὁμοιοειδῆ ῥιζικὰ Ποσά. Ἀνόμοια δὲ λέγονται, ὅτε ἔχουσιν ἢ διαφόρους Ἐκθέτας, ἢ διάφορα Γράμματα μετὰ τὸ Σημεῖον ὡς $\sqrt{\alpha}$ καὶ $\sqrt[3]{\beta}$. $\sqrt[\mu]{\alpha}$ καὶ $\sqrt[\mu]{\beta}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 82. Διὰ αὐτοῦ τῆς Ἐκθέσεως δεικνύομεν, ὅτι πρέπει νὰ ἐξαχθῇ ἡ διὰ τοῦ ῥιζικοῦ Ἐκθέτου ἐμφαινομένη ῥίζα ἐκείνου τοῦ Ποσοῦ,

τὸ

τὸ ὁποῖον κεῖται ὑποκάτω τῦ Σημείυ. ἐὰν τὸ Ποσὸν ὑπάρχῃ ἀληθὴς Δύναμις ϗ ἑπομένως ἡ ῥίζα τύτυ εἶναι ἀληθὴς, δυνάμεθα τότε νὰ γράφωμεν τὴν ῥίζαν αὐτὴν ἀντὶ τῦ δεδομένυ Ποσῦ. ὡς

$\sqrt{16} = 4. \sqrt[3]{64} = 4. \sqrt{\alpha^2} = \alpha$, κ. τ. εἰ δὲ ϗ δὲν δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα ἀκριβῶς, ϗ ἑπομένως εἶναι ἄῤῥητος ἢ ψαῦδὴς (§. 59), τότε ὀνομάζομεν τὸ τοιῦτον Ποσὸν ἄλογον Ποσὸν ὡς

$\sqrt[3]{30}$, $\sqrt{\alpha}$, κ. τ. Περὶ τύτων τῶν ἀλόγων Ποσῶν θέλομεν πραγματευθῇ κυρίως εἰς αὐτὸ τὸ Κεφάλαιον.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 83. Ο῎στις φυλάττει εἰς τὴν μνήμην τυ, ὅσα ἀνωτέρω (§. 61.) ἐπραγματεύθημεν περὶ τῆς Ε'ξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν, εὐκόλως θέλει καταλάβη ϗ ὅσα ἔχομεν νὰ πραγματευθῶμεν ἤδη περὶ τῆς Ε'ργασίας τῶν ῥιζικῶν Ποσῶν. Ε'πειδὴ ἐὰν διαιρῶμεν τὸν Εκθέτην τῦ Ποσῦ, ἢ τῆς μετὰ τὸ Σημεῖον κειμένης Δυνάμεως διὰ τῦ Ε'κθέτυ τῆς ῥίζης, ἐξάγεται ὕτως ἡ ῥίζα τῦ δεδομένυ Ποσῦ, ἑπομένως γράφομεν τὸν τοιῦτον Κλασματικὸν Ε'κθέτην ἐπὶ τῦ Ποσῦ χωρὶς νὰ πρόσκηται τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον. π. χ. ἐὰν ζητῆται ἡ Κυβικὴ ῥίζα τῦ α^2, πρέπει νὰ γράψωμεν $\sqrt[3]{\alpha^2}$, τὸ ὁποῖον γενομένης τῆς Ε'ξαγωγῆς, μεταβάλλεται εἰς $\alpha^{\frac{2}{3}}$ (§. 61.).

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ α'.

§. 84. Νὰ ἀποβάλλωμεν τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον.

ΠΡΑΚΤΕ'Α.

Διαιρῦμεν τὸν Δυναμοδείκτην τῦ Ποσῦ διὰ τῦ Ε'κθέτυ τῆς ῥίζης, ἢ γράφομεν τὸν Ε'κθέτην τῆς ῥίζης εἰς

Παρονομαστὴν ὑπὸ τὸν Δυναμοδείκτην (ὅστις θεωρεῖται τότε ὡς ἀριθμητὴς) τοῦ μετὰ τὸ Σημεῖον προσγεγραμμένου Ποσοῦ, καὶ τὸ ἐκ τούτου προκύπτον Πηλίκον, ἢ τὸ Κλάσμα ποιοῦμεν Ἐκθέτην τοῦ δεδομένου Ποσοῦ, ἀποβάλλοντες τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον, π. χ. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$. $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{a^4}=a^{\frac{4}{2}}=a^2$. $\sqrt[\mu]{a^\nu}=a^{\frac{\nu}{\mu}}$.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἡ ῥίζα ἐξάγεται, ὅταν διαιρεθῇ ὁ Ἐκθέτης τῆς Δυνάμεως, ἢ τοῦ διδομένου Ποσοῦ διὰ τοῦ Ἐκθέτου τῆς ζητουμένης ῥίζης (§. 61). ἀλλὰ μὴν ταύτην τὴν Διαίρεσιν ἐμφαίνει ὁ Κλασματικὸς Ἐκθέτης. ἄρα ἀφ' οὗ τεθῇ ὁ τοιοῦτος Κλασματικὸς Ἐκθέτης ἐπὶ τοῦ Ποσοῦ, ἐξήχθη ἡ ῥίζα αὐτοῦ. καὶ τὸ ῥιζικὸν σημεῖον ἐξωθεῖται ὡς περιττόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 85. Ἐὰν τὸ δοθὲν Ποσὸν ὑπάρχῃ ἀληθὴς Δύναμις, τότε γράφομεν ἀμέσως τὴν ῥίζαν αὐτοῦ, ἄνευ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου καθὼς εἴπομεν ἀνωτέρω (§. 82.). ἐὰν δὲ τὸ Ποσὸν δὲν εἶναι ἀληθὴς Δύναμις, τότε γράφομεν αὐτὸ μετὰ τοῦ Κλασματικοῦ Ἐκθέτου. ἀλλ' ἐὰν τὸ δοθὲν Ποσὸν εἶναι ἐν τῶν ἀδυνάτων, ἢ τῶν κατ' ἐπίνοιαν λεγομένων Ποσῶν, ὡς ἡ ῥίζα τοῦ ἀποφατικοῦ Τετραγώνου $\sqrt{-a^2}$, τότε εἶναι καὶ ἡ Ἐξαγωγὴ αὐτοῦ ἀδύνατος καὶ κατ' ἐπίνοιαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β'.

§. 86. Νὰ ἐκθέτωμεν τὴν Δύναμιν τοῦ Κεκλασμένου Ἐκθέτου διὰ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

ΠΡΑΚΤΕ'Α.

Ο' Παρονομαστὴς γίνεται Ε'κθέτης τȣ̃ ῥιζικȣ̃ Σημείȣ, ᾗ ὁ ἀριθμητὴς μένει Ε'κθέτης τῆς Δυνάμεως, π. χ.

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}} : \text{ὡσαύτως ᾗ } a^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{a^{4}}$$

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Ο' μὲν Παρονομαστὴς εἶναι Παραστατικὸς τῆς ῥίζης. ὁ δὲ ἀριθμητὴς τῆς Δυνάμεως κατὰ τὴν προλαβȣ̃σαν Δεῖξιν (§. 84). δύναται ἄρα ἡ αὐτὴ ῥίζα τὴν ὁποίαν ἐμφαίνει ὁ Παρονομαστὴς, νὰ προτεθῇ τῆς Δυνάμεως, ἣν ἐμφαίνει ὁ ἀριθμητὴς. ἐπειδὴ ᾗ αἱ δύω αὗται Ε'κθέσεις δεικνύȣσιν, ὅτι εἶναι Ε'ξακτὴ ἡ ῥίζα τȣ̃ Ποσȣ̃.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ'.

§. 87. Νὰ μεταβάλλωμεν τȣ̀ς Ε'κθέτȣς τινὸς ῥιζικȣ̃ Ποσȣ̃, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις αὐτȣ̃ τȣ̃ Ποσȣ̃.

ΠΡΑΚΤΕ'Α.

Πολλαπλασιάζομεν τόσον τὸν Ε'κθέτην τῆς ῥίζης, ὅσον ᾗ τὸν Ε'κθέτην τȣ̃ μετὰ τὸ Σημεῖον κειμένȣ Ποσȣ̃ μετὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃, ἢ Ποσȣ̃, ᾗ ȣ̃τω μεταβάλλονται οἱ Ε'κθέται, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις ᾗ ἡ Σημασία τȣ̃ Ποσȣ̃.

ΠΑΡΑ'-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

$$\sqrt[3]{\alpha^2} = \sqrt[3\times 2]{\alpha^{2\times 2}} = \sqrt[6]{\alpha^4}$$

$$\sqrt[\mu]{\alpha^\nu} = \sqrt[\mu\times\gamma]{\alpha^{\nu\times\gamma}} = \sqrt[\mu\gamma]{\alpha^{\nu\gamma}}.$$

Δ ΕΙ῀ Ξ Ι Σ.

Ἡ Δύναμις ἑνὸς Κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ κ᾽ ὁ ἀριθμητὴς, κ᾽ ὁ Παρονομαστὴς μετὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃ (ἀριθμητ. §. 70.). ἀλλὰ μὴν δύναται ὁ μὲν Ἐκθέτης τῆς ῥίζης νὰ θεωρηθῇ ὡς Παρονομαστὴς, ὁ δὲ Ἐκθέτης τȣ̃ Ποσȣ̃ ὡς ἀριθμητὴς (§.84), ἄρα δύναται νὰ μεταβληθῶσιν οἱ Ἐκθέται τȣ̃ ῥιζικȣ̃ Ποσȣ̃ ἄνευ τινὸς Μεταβολῆς τῆς Σημασίας αὐτȣ̃, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι κ᾽ οἱ δύω διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ γ'.

§. 88. Τὸ Ἴδιον γίνεται κ᾽ περὶ τῆς Διαιρέσεως διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃, καθὼς εἴπομεν εἰς τὰ Κλάσματα. π. χ.

$\sqrt[6]{\alpha^4} = \sqrt[3]{\alpha^2}$, ἐπειδὴ $\sqrt[\frac{6}{2}]{\alpha^{\frac{4}{2}}} = \sqrt[3]{\alpha^2}$. κ᾽ $\sqrt[8]{\alpha^8} = \sqrt[\frac{8}{4}]{\alpha^{\frac{8}{4}}} = \sqrt{\alpha^2} = \alpha$.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ς'.

§. 89. Νὰ φέρωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Ἐκθέτην ῥιζικὰ Ποσὰ ἔχοντα διαφόρȣς Ἐκθέτας.

ΛΥ'ΣΙΣ,

ΛΥ'ΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕ'Α.

Α'ποβάλλομεν πρῶτον τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον καὶ ἐμφαίνομεν τοὺς Ε'κθέτας εἰς Κλάσματα (§. 84.). ἔπειτα αὐτὰ τὰ Κλάσματα ἀνάγωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν (ἀριθμητ. §. 77.), μετέπειτα πάλιν ποιοῦμεν τὸν Παρονομαστὴν κάθε Κλάσματος Ε'κθέτην τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου (§. 86.), καὶ οὕτω θέλουσιν ἔχῃ ὅλα τὰ δεδομένα Ποσὰ τὸν αὐτὸν ῥιζικὸν Ε'κθέτην.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

$\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$ καὶ $\sqrt[\pi]{\beta^{\sigma}}$ εἶναι $\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}$ καὶ $\beta^{\frac{\sigma}{\pi}}$. ἐξ οὗ γίνεται $\alpha^{\frac{\nu\pi}{\mu\pi}}$ καὶ $\beta^{\frac{\mu\sigma}{\mu\pi}}$. ἄρα $\sqrt[\mu\pi]{\alpha^{\nu\pi}}$ καὶ $\sqrt[\mu\pi]{\beta^{\mu\sigma}}$. καὶ δι᾽ ἀριθμῶν $\sqrt[6]{\alpha^{3}}$ καὶ $\sqrt[5]{\beta^{2}}$ ἐστὶ $\alpha^{\frac{3}{6}}$ καὶ $\beta^{\frac{2}{5}}$ ἐξ οὗ γίνεται $\alpha^{\frac{15}{30}}$ καὶ $\beta^{\frac{12}{30}}$. λοιπὸν $\sqrt[30]{\alpha^{15}}$ $\sqrt[30]{\beta^{12}}$.

Δ ΕΙ' Ξ Ι Σ.

Η' Δεῖξις αὕτη κρέμαται ἀπὸ τῶν Παραγράφων, τοὺς ὁποίους ἀνωτέρω εἰς τὴν λύσιν ἀνεκαλέσαμεν, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Δείξεων τούτων τῶν Παραγράφων εἶναι ἡ Δεῖξις τούτου τοῦ Προβλήματος.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 90. Ο'ταν ὁ Ε'κθέτης δὲν εἶναι γεγραμμένος μήτε ἐπὶ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου, μήτε ἐπὶ τῆς μετὰ τὸ Σημεῖον Ποσότητος, τότε

ἐννοεῖ-

§. 91. Νὰ θέτωμεν μετὰ τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον τὸν Συνεργὸν ἑνὸς ῥιζικοῦ Ποσοῦ, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Υψώνομεν πρῶτον τὸν Συνεργὸν εἰς ἐκείνην τὴν Δύναμιν, τὴν ὁποίαν ἐμφαίνει ὁ Ἐκθέτης τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου, καὶ ὕστερον τὸν πολλαπλασιάζομεν διὰ τοῦ μετὰ τὸ Σημεῖον Ποσοῦ καὶ τότε θέτομεν τὸ Γινόμενον μετὰ τὸ Σημεῖον.

π. χ. $\alpha\sqrt[3]{\beta^2} = \sqrt[3]{\alpha^3\beta^2}$, ὡσαύτως $3\sqrt{8} = \sqrt{9\times8} = \sqrt{72}$: ἐὰν δὲ $3\alpha\sqrt{\beta}$ γίνεται $\sqrt{9\alpha^2\beta}$. ὡσαύτως καὶ $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[3]{\gamma}$

$$= \sqrt[3]{\frac{\alpha^3}{\beta^3}\gamma}\ .\ \text{καὶ}\ \frac{3\alpha}{2\beta}\sqrt[3]{\delta} = \sqrt[3]{\frac{27\alpha^3}{8\beta}\delta}.$$

ΔΕΙΞΙΣ.

ἐννοεῖται, καθὼς εἴπομεν ἀνωτέρω, ἐπὶ μὲν τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου τὸ 2. ἐπὶ δὲ τῆς Ποσότητος ἡ Μονάς, τὰ ὁποῖα καὶ τὰ δύω εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἐκθέσωμεν εἰς αὐτὰ τὰ Προβλήματα.

Π. χ. $\sqrt{a^3}$ καὶ $\sqrt[5]{\beta}$ εἶναι $\alpha^{\frac{3}{2}}$ καὶ $\beta^{\frac{1}{5}}$ ἐξ οὗ γίνεται $\alpha^{\frac{15}{10}}$ καὶ $\beta^{\frac{2}{10}}$. λοιπὸν $\sqrt[10]{\alpha^{15}}$ καὶ $\sqrt[10]{\beta^2}$.

Ἐὰν ἀποβάλωμεν πάλιν τὰ ῥιζικὰ Σημεῖα, καὶ ἀνάγωμεν εἰς ἐλαχίστους Ὅρους τοὺς κεκλασμένους Ἐκθέτας, τότε θέλουσι προκύψει πάλιν τὰ δεδομένα Ποσά. τοῦτο δύναται νὰ μᾶς χρησιμεύσῃ ὡς Βάσανος, εἰς κάθε τοιαύτην Ἀλγεβραϊκὴν Ἐργασίαν.

Π. χ. $\sqrt[10]{\alpha^{15}}$ καὶ $\sqrt[10]{\beta^2}$. εἶναι $\alpha^{\frac{15}{10}}$ καὶ $\beta^{\frac{2}{10}} = \alpha^{\frac{3}{2}} = \beta^{\frac{1}{5}}$

$= \sqrt{\alpha^3}$ καὶ $\sqrt[5]{\beta}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ έ.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον ἐμφαίνει, ὅτι ἐκ τῦ μετὰ τῦτο τὸ Σημεῖον Κειμένυ Ποσῦ πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν ἐκείνην τὴν ῥίζαν, τὴν ὁποίαν ἐμφαίνει ὁ Ἐκθέτης τῦ Σημείυ. ἐὰν λοιπὸν ἐξαγάγωμεν πάλιν ἐκ τῆς Δυνάμεως τῦ Συνεργῦ ῥίζαν τῆς αὐτῆς Δυνάμεως δὲν μεταβάλλεται ἡ Δύναμις τῦ Συνεργῦ, καὶ ἑπομένως ἡ λύσις ἐγένετο κατὰ τὸ πρέπον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'.

§. 92. Νὰ φέρωμεν ῥιζικὰ Ποσὰ εἰς Ἐκθέτες, ἢ Ὅρυς ἐλάσσονας.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἀναλύομεν τὴν μετὰ τὸ Σημεῖον Ποσότητα εἰς Παράγοντας, καὶ ἐὰν ἐξ ἑνὸς τύτων τῶν Παραγόντων δυνώμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ῥίζαν, ἥτις ἐμφαίνεται διὰ τῦ ῥιζικῦ Ἐκθέτυ, θέτομεν αὐτὸν ὡς Συνεργὸν πρὸ τῦ ῥιζικῦ Σημείυ,

$$\sqrt[\mu]{\alpha^\nu \beta^\mu} = \sqrt[\mu]{\alpha^\nu} \times \beta^\mu = \beta \sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$$

ὡσαύτως $\sqrt[3]{\alpha^2 \beta^3} = \sqrt[3]{\alpha^2} \times \beta^3 = \beta \sqrt[3]{\alpha^2}$

ὡσαύτως $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$

ὡσαύτως $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \times 4} = 2\sqrt[3]{4}$.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ,

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἡ Δεῖξις αὕτη κρέμαται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω Προβλήματος (§. 91.) ἐπειδὴ καθ' ὃν τρόπον συντίθεται μία Ποσότης, κατὰ τὸν αὐτὸν καὶ ἀναλύεται πάλιν.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ζ'.

§. 93. Ποσὰ ἔχοντα πλεῖω ῥιζικὰ Σημεῖα, εἰς ἕνα μόνον Ὅρον ἀγαγεῖν.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Τὸ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου Ποσὸν θέτομεν μετὰ τὸ Σημεῖον (§. 91.) καὶ τοὺς Ἐκθέτας τῶν ῥιζικῶν Σημείων πολλαπλασιάζομεν ἐπ' ἀλλήλους· π. χ.

$$\sqrt[\mu]{\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\nu]{\frac{\gamma}{\delta}\sqrt[\rho]{\frac{\varepsilon}{\vartheta}}}}$$ γίνεται πρῶτον $$\sqrt[\mu]{\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\nu\rho]{\frac{\gamma^{\rho}\,\varepsilon}{\delta^{\rho}\,\vartheta}}}$$

ἔπειτα $\sqrt[\mu\nu\rho]{\dfrac{\alpha^{\nu\rho}\,\gamma^{\rho}\,\varepsilon}{\beta^{\nu\rho}\,\delta^{\rho}\,\vartheta}}$. καὶ ἐν ἀριθμ. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ τουτέστι $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{4\times2}}$, τουτέστι $\sqrt[8]{16\times4\times2}$ ὅπερ ἐστὶ $\sqrt[8]{128}$.

διὰ τῆς ἐναντίας Ἐργασίας ἀνάγομεν τὸ ῥιζικὸν Ποσὸν εἰς ἐλαχίστους Ὅρους.

$$\sqrt[18]{73728}=\sqrt[18]{4096\times9\times2}=\sqrt[9]{64\times3}\sqrt{2}=\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3}\sqrt{2}.$$

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ η.

§. 94. Νὰ ἀθροίζωμεν, κὴ νὰ ἀφαιρῶμεν ῥιζικὰ Ποσά.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Ἐὰν ὦσιν ἀνόμοια τὰ Ποσὰ, ἐμφαίνεται ἡ Πρόσθεσις, ἢ ἡ ἀφαίρεσις μόνον διὰ Σημείων + κὴ —. ὅταν δὲ ὦσιν ὅμοια, τότε ἀθροίζομεν, ἢ ἀφαιρῦμεν, ἢ ἀνάγομεν τὺς Συνεργὺς κατὰ τὺς προτεθέντας Κανόνας ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ. (§. 14. κ. τ.).

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Τὰ μὲν ἀνόμοια Ποσὰ δὲν δύνανται νὰ ἑνωθῶσιν ὕτως, ὥςε ἐξ αὐτῶν νὰ γένῃ μόνον ἕνας ὅρος. τὰ δὲ Ὅμοια Ποσὰ ἐὰν μηδέν τι κωλύῃ, δύνανται νὰ ἑνωθῶσιν εἰς ἕνα Ὅρον, ἀλλὰ μὴν εἰς τὰ Ὁμοειδῆ Ἀλγεβραϊκὰ Ποσὰ γίνεται ἡ Πρόσθεσις, κὴ ἀφαίρεσις, ἢ ἡ Ἐπιτομὴ διὰ τῶν Συμβόλων κὴ Συνεργῶν. ἄρα κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἀθροίζονται κὴ ἀφαιρῦνται τὰ ῥιζικὰ Ποσά.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

$\alpha\sqrt{\gamma}$ κὴ $\beta\sqrt{\delta}$ ἀθροίζονται ὕτως $\alpha\sqrt{\gamma}+\beta\sqrt{\delta}$. $\alpha\sqrt{\gamma}+\beta\sqrt{\gamma}$ ἐν μὲν τῇ Προσθέσει γίνεται $(\alpha+\beta)\sqrt{\gamma}$. ἐν δὲ τῇ ἀφαιρέσει γίνεται $(\alpha-\beta)\sqrt{\gamma}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 95. Ὅταν ὦσι τὰ ῥιζικὰ Ποσὰ δι' ἀριθμῶν παρεστάμενα, τότε πρέπει νὰ προσπαθήσωμεν νὰ τὰ ἀνάξωμεν εἰς ἐλάσσονα καὶ Ἴσην Ἔκθεσιν δύω Ὅρων. ἄλλως δὲν ἠμποροῦμεν νὰ τὰ μεταβάλωμεν, εἰμὴ διὰ τῶν Σημείων. π. χ. $\sqrt{8}$ καὶ $\sqrt{18}$ γίνεται $\sqrt{4 \times 2}$ καὶ $\sqrt{9 \times 2}$, ἤτοι $2\sqrt{2}$ καὶ $3\sqrt{2}$. ἀθροιζομένων δὲ τῶν Συνεργῶν, γίνεται $5\sqrt{2}$. καὶ κατὰ τὸ πέμπτον Πρόβλημα ποιοῦμεν $\sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ.

§. 96. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν ῥιζικὰ Ποσά.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Ἀνάγωμεν αὐτὰ πρῶτον εἰς ἕνα κοινὸν Παρονομαστὴν, ἢ Ἐκθέτην τῆς ῥίζης (§. 89), ἐὰν δὲν ἔχωσιν αὐτὸν κοινόν. ὕστερον πολλαπλασιάζομεν τοὺς Συνεργοὺς μετ' ἀλλήλων, καὶ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον εἶναι ὁ νέος Συνεργός: πλὴν πολλαπλασιάζομεν μετ' ἀλλήλων καὶ τὰ μετὰ τὸ Σημεῖον κείμενα Ποσὰ, καὶ τὸ Γινόμενον τοῦτο εἶναι τὸ νέον Ποσὸν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τεθῇ μετὰ τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον.

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

$$\sqrt{\alpha}\times\delta=\delta\sqrt{\alpha}.\ \text{κ}\grave{\alpha}\iota\ \alpha\sqrt[3]{\beta}\times\gamma\sqrt[3]{\delta}=\alpha\gamma\sqrt[3]{\beta\delta}$$

ὡς. καὶ $3\sqrt{\alpha}\times 4\sqrt{\beta^2}=12\sqrt{\alpha\beta^3}$

τὸ δὲ $\frac{4}{5}\sqrt[3]{\alpha^2\gamma}\times\frac{3}{8}\sqrt[3]{\alpha\gamma^4}=\frac{12}{40}\sqrt[3]{\alpha^3\gamma^5}$.

τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\nu]{\frac{\gamma}{\delta}}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}\sqrt[\mu]{\frac{\eta}{\vartheta}}=\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\mu\nu]{\frac{\gamma^\mu}{\delta^\mu}}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}\sqrt[\mu\nu]{\frac{\eta^\nu}{\vartheta^\nu}}$

$$=\frac{\alpha\varepsilon}{\beta\zeta}\sqrt[\mu\nu]{\frac{\gamma^\mu\eta^\nu}{\delta^\mu\vartheta^\nu}}$$

τὸ δὲ $\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ πολλαπλασιασθὲν μετὰ

τοῦ $\sqrt{3}-5\sqrt{2}$

$$\begin{array}{l}\sqrt{9}-4\sqrt{6}\\ \quad-5\sqrt{6}+20\sqrt{4}\\ \hline \sqrt{9}-9\sqrt{6}+20\sqrt{4}=3-9\sqrt{6}+40.\end{array}$$

ἔτι $2\sqrt[2]{5}\times 3\sqrt[3]{2}=2\sqrt[6]{125}\times 3\sqrt[6]{4}=6\sqrt[6]{500}$.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ί.

§. 97. Νὰ διαιρῶμεν ῥιζικὰ Ποσά.

ΛΥ'ΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕ'Α.

Πρῶτον ἀνάγομεν αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν Ἐκθέτην τῆς ῥίζης, ἐὰν δὲν ἔχωσιν τὸν ἴδιον, ὕστερον διαιροῦμεν τὸν Συνεργὸν τῦ Διαιρετέυ διὰ τῦ Συνεργῦ τῦ Διαιρέτυ, ϗ τὸ Πηλίκον εἶναι ὁ νέος Συνεργὸς. πέλος διαιρῦμεν ϗ τὰ μετὰ τὸ ῥιζικὸν Ποσὰ, ϗ τὸ Πηλίκον εἶναι τὸ νέον Ποσὸν, τὸ ὁποῖον θέτομεν μετὰ τὸ Ἴδιον ῥιζικὸν Ποσὸν. π. χ.

$$\alpha\sqrt[3]{\beta} : \gamma\sqrt[3]{\delta} = \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{\beta}{\delta}}\,.$$

$$4\sqrt{\alpha} : 2\sqrt{\alpha} = 2$$

$$8\sqrt{32} : 4\sqrt{8} = 2\sqrt{4} = 2 \times 2 = 4$$

ἐπ ϗ $\frac{\kappa}{\vartheta}\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} : \frac{\eta}{\varepsilon}\sqrt[\mu]{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\varepsilon\kappa}{\eta\vartheta}\sqrt[\mu\nu]{\frac{\alpha^{\mu}\delta^{\nu}}{\beta^{\mu}\gamma^{\nu}}}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ιά.

§. 98. Νὰ ὑψώνωμεν ῥιζικὰ Ποσὰ εἰς ὁποιανδήποτε Δύναμιν, ἢ νὰ ἐξάγωμεν ἐξ αὐτῶν ὁποιανδήποτε ῥίζαν.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν Δυναμοδείκτην τῦ μετὰ τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον Ποσῦ μετὰ τῆς ζητυμένης Δυνάμεως, καὶ ἕτως ὑψώθη τὸ ῥιζικὸν Ποσὸν εἰς τὴν ζητυμένην Δύναμιν. ἢ διαιρῦμεν τὸν Δυναμοδείκτην τῦ μετὰ τὸ Σημεῖον Ποσῦ μὲ τὴν ζητυμένην ῥίζαν, καὶ ὕτως ἐγένετο ἡ ζητυμένη Ἐξαγωγὴ. π. χ. ἔστω τὸ $\sqrt[5]{a}$ ἀρπὸν εἰς τὴν

πτέρτετάρτην Δύναμιν. ὅθεν γίνεται $\sqrt[5]{\alpha^4}$. ὡσαύτως ϗ τὸ $\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ ἐὰν πρέπῃ νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν τρίτην Δύναμ., γίνεται $\sqrt{\alpha^3\beta^3\gamma^3}$, ἤτοι $(\sqrt{\alpha\beta\gamma})^3$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 99. Αἱ Δείξεις τούτων τῶν λύσεων δὲν διαφέρουσιν ἀπὸ τῶν ἐν τῷ §. 15. ϗ ἑπομ. προτεθεισῶν δείξ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 100. Ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἀποβάλωμεν κατὰ τὸ πρῶτον Πρόβλημα πάντοθεν τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον, τότε ὁ μετὰ τῶν ῥιζικῶν λογισμὸς γίνεται ἁπλοῦς Ἐκθετικὸς λογαριασμὸς, περὶ οὗ ἐπραγματεύθημεν ἐν τῷ §. 44. ϗ ἐν τοῖς ἑξῆς §§. διὰ τοῦτο ἐν γένει ὁ λογαριασμὸς τῶν ῥιζικῶν Ποσοτήτων δύναται νὰ καταληφθῇ σχεδὸν, ὡς περιττός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ϛ'.

Περὶ Ἐξισώσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ α'.

§. 101. Ἐξίσωσις ἐστὶ Παράθεσις δύω Ἴσων, ἢ ταυτοδυνάμων Ποσοτήτων, τὰς ὁποίας ἐκθέτομεν εἴτε διὰ τῶν Ἰδίων, εἴτε διὰ Διαφόρων Γραμμάτων. ταύτην δὲ τὴν Ἐξίσωσιν παραςαίνομεν, γράφοντες μεταξὺ τῶν δύω παραθετομένων Ποσοτήτων τοῦτο τὸ Σημεῖον τῆς Ἰσότητος =. π. χ. ὅταν θέλωμεν νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Ποσὸν α εἶναι Ἶσον, ἢ ἔχει τὴν αὐτὴν Δύναμιν μὲ τὸ β, γράφομεν οὕτως,

$$\alpha = \beta. \text{ καὶ } \chi = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \text{ σημαίνει, ὅτι τὸ}$$

Ποσὸν χ εἶναι Ἶσον τοῦ α, πολλαπλασιασθέντι πρῶτον μετὰ τοῦ β, καὶ διαιρεθέντι ἔπειτα διὰ τοῦ γ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

§. 102. Ἐκ τούτου γίνεται δῆλον, ὅτι κάθε Ἐξίσωσις πρέπει νὰ ἔχῃ δύω Ὅρους ἢ Μέλη, τὸ ἓν πρὸ τοῦ Σημείου τῆς Ἰσότητος, καὶ τὸ ἄλλο μετὰ τὸ Σημεῖον. καὶ τὸ μὲν πρὸ τοῦ Σημείου λέγεται πρῶτον Μέλος, τὸ δὲ μετὰ τὸ Σημεῖον γραφόμενον καλεῖται Δεύτερον Μέλος.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ α.

§. 103. Αἱ λέξεις Τὸ Αὐτὸ, Ἴσον, καὶ Ὅμοιον διαφέρουσι[illegible]ων, καὶ πρέπει ἐνταῦθα νὰ προσέξωμεν καλῶς, νὰ μὴ [illegible]τωμεν ταύτας τὰς λέξεις. ἐπειδὴ Τὸ Αὐτὸ ἐκλαμβάνεται [illegible] ἓν μόνον πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον ἀποκλείει κάθε διαφορὰν [illegible] Πλήθους. δὲν δύναται νὰ εἶναι ὁ Παῦλος καὶ ὁ Πέτρος τὸ αὐτὸ, καὶ οὕτως ἐκλαμβάνομεν τὴν λέξιν Τὸ Αὐτὸ διὰ ἓν καὶ τὸ Ἴδιον πρᾶγμα. Ἴσον δὲ λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ κατὰ πάντα λόγον μὲ ἓν ἕτερον, π. χ. τὸ Τετράγωνον Α εἶναι Ἴσον τῷ Τετραγώνῳ Β, ἐὰν ὅλαι αἱ Πλευραὶ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι ὦσιν Ἴσαι ἑκατέ-

ρα

μα ἑκατέρα. καὶ διὰ τοῦτο δύναται νὰ τεθῇ ἀδιαφόρως τὸ ἓν ἀντὶ τοῦ ἄλλου. Ταῦτα ἀμφότερα κατὰ μὲν τὸ πρᾶγμα εἶσιν Τὸ Αὐτὸ, κατὰ δὲ τὸν ἀριθμὸν εἰσὶ δύω. Ὅμοιον δὲ λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ μὲ ἓν δεύτερον κατὰ πάντα λόγον ἐκτὸς τοῦ Μεγέθους. οὕτως εἶναι τὸ Τρίγωνον Α Ὅμοιον τῷ Τριγώνῳ Β, ἐὰν ὦσιν αἱ Γωνίαι Ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, αἱ δὲ Πλευραὶ διάφοροι.

Εἰς τὰς Ἐξισώσεις λέγομεν ἐκεῖνα τὰ Ποσὰ Ἴσα, ὁποῦ ἔχουσι τὴν αὐτὴν Δύναμιν, ἢ Σημασίαν π. χ. Τουρκικὰ Γρόσια 5 = 600 Τουρκικοῖς Παρᾶσιν.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

§. 104. Τὸ ἀντικείμενον τῶν Ἐξισώσεων εἶναι τὸ νὰ εὑρίσκωμεν τὴν Δύναμιν, ἢ Σημασίαν ἑνὸς, ἢ καὶ πλειόνων ἀγνώστων Ποσῶν· τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον νὰ γενῇ, ἐὰν δοθῶσι μόνον ἄγνωστα Ποσὰ χωρὶς τινων Ἐγνωσμένων, ὡς $\chi = \varphi$. διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη μετὰ τῶν ἀγνώστων νὰ δίδωνται πάντοτε καὶ Γνωστά τινα Ποσὰ, πρὸς τὰ ὁποῖα νὰ ἔχωσι τὰ ἄγνωστα Σχέσιν, ἢ λόγον τινὰ, ὡς $3\chi = 18$ τουτέστιν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ ἄγνωστον Ποσὸν μετὰ τοῦ 3, ἔχει λόγον Ἰσότητος πρὸς τὰ 18. $\frac{30}{5} = 6$ σημαίνει, ὅτι τὸ ἄγνωστον ζητούμενον Ποσὸν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ μετὰ τοῦ 3, καὶ τὸ ἐκ τούτου Γενόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ 5, Ἰσοδυναμεῖ τῷ 6. ἐκ τούτων ἕπονται οἱ ἑξῆς Ὁρισμοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ β'.

§. 105. Τὸ Πρόβλημα μιᾶς Ἐξισώσεως εἶναι ἡ Ἐρώτησις πρὸς εὑρεσίαν Δυνάμεώς τινος Ποσοῦ, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ λόγον Ἰσότητος μὲ τὴν Γνωστὴν Σημασίαν ἑνὸς ἄλλου Ποσοῦ. Ἡ λύσις τοῦ Προβλήματος συνίσταται εἰς τὴν Ἔκθεσιν αὐτὴν τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ μετά τινος Ἐγνωσμένης Δυνάμεως, ἢ Σημασίας, π. χ. Πρόβλημα εἶναι: τὸ νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, ὅστις ἐὰν προστεθῇ εἰς τὰ 56, παρέχει ἄθροισμα Ἴσον μὲ τὸ Τριπλάσιον αὐτοῦ.

Ἡ δὲ λύσις εἶναι αὕτη $\chi = 28$ τουτέστιν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 28, ὅστις προστεθεὶς εἰς τὸν 56, δίδει Κεφάλαιον Τριπλάσιον τοῦ 28. ἢ $28 + 56 = 28 \times 3$ ἀμφότερα εἶσιν Ἴσα μὲ τὰ 84.

ὉΡΙΣΜΟ͂Σ γ΄.

§. 106. Ὑποθέσεις, ἢ Συνθῆκαι τοῦ Προβλήματος λέγονται αἱ Σχέσεις τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ πρὸς τὰ Ἐγνωσμένα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀπολύτως ἀναγκαῖα πρὸς λύσιν τοῦ Προβλήματος. Τὰς δὲ Συνθήκας ἐκδηλοῦμεν ἢ δια ἀριθμητικῶν χαρακτήρων, ἢ διὰ τῶν ἀρκτικῶν Γραμμάτων α, β, γ. οἷον. ὁ Πέτρος ἀποδημήσας, ἐλαύνει καθ᾽ ἑκάστην ἡμέραν 10 Μίλλια, καὶ ὁδεύει ἤδη πέντε ἡμέρας. ὁ δὲ Παῦλος ὁδεύει καθ᾽ ἑκάστην 15. Μίλ., εἰς πόσας ἄρα ἡμέρας θέλει φθάσει τὸν Πέτρον. ἐνταῦθα ζητεῖται ὁ χρόνος, καθ᾽ ὃν μέλλει νὰ συνέλθωσιν ἀμφότεροι· αἱ Συνθῆκαι εἶναι αἱ ἡμέραι καὶ τὰ Μίλλια τοῦ Πέτρου μετὰ τῶν Μιλ. τοῦ Παύλου. Ὁ δρόμος τὸν ὁποῖον ὤδευσεν ὁ Πέτρος, εἶναι $10 \times 5 = 50$ Μίλ. καὶ πρέπει νὰ κάμῃ δρόμον ἔτι $10 \times \chi$, τὰ ὁποῖα ὁμοῦ ληφθέντα πρέπει νὰ εἶναι Ἴσα μὲ τὸν δρόμον τοῦ Παύλου $15 \times \chi$, τουτέστιν $50 + 10\chi = 15\chi$· δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν τὰ Μίλλια τοῦ Πέτρου α καὶ τὰς ἡμέρας τοῦ δρόμου γ. τὰ δὲ Μίλλια τοῦ Παύλου β, καὶ τότε γίγνεται ἡ Ἐξίσωσις οὕτως, $\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta\chi$. ἐὰν δὲ λυθῇ αὐτὸ τὸ Πρόβλημα εἰς ἀριθμητικοὺς χαρακτῆρας ἔσαι τὸ $\chi = 10$. ὥσπερ δὴ καὶ ἐν Γράμμασιν $\frac{\alpha\gamma}{\beta - \alpha} = \chi$, ἢ $\frac{50}{15 - 10} = 10$, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, καθ' ἃς ὁ Παῦλος πρέπει νὰ φθάσῃ τὸν Πέτρον.

ΟΡΙΣΜΟΣ δ'.

§. 107. Ὡρισμένον Πρόβλημα λέγεται ἐκεῖνο, ὅπου ἐπιδέχεται μίαν μόνην καὶ ταύτην Ὡρισμένην λύσιν τῆς προκειμένης Ἐρωτήσεως. οὕτως εἶναι ἐν τῷ προτέρῳ Προβλήματι (§. 106.) ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς μόνος, καὶ ὡρισμένος

10. τοιαῦτα Προβλήματα εἶναι ἐκεῖνα, ἐν οἷς γίνονται τόσαι Ἐξισώσεις, ὅσα εἶναι καὶ τὰ ἄγνωστα Ποσά. ἂν δὲ τὸ ἄγνωστον Ποσὸν ἓν μόνον ὑπάρχῃ, πρέπει καὶ Ἐξίσωσις νὰ εἶναι μία. ἐὰν δὲ ὦσι δύω τὰ ἄγνωστα, ὡσαύτως καὶ αἱ Ἐξισώσεις πρέπει νὰ εἶναι δύω. ἐὰν δὲ ὦσι τρία τὰ ἄγνωστα, πρέπει καὶ αἱ Ἐξισώσεις νὰ εἶναι τρεῖς. ἀδιόριστον Πρόβλημα λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐπιλυθῇ πολλαχῶς, καὶ νὰ ἀποδοθῇ διὰ πλειόνων ἀριθμῶν, π. χ. ζητοῦμεν δύω ἀριθμοὺς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι Ὀκτώ. οἱ δύω οὗτοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶναι 7 καὶ 1, ἢ 6 καὶ 2, ἢ 5 καὶ 3, ἢ 4 καὶ 4. τοῦτο συμβαίνει κάθε φορὰν, ὅπου εἶναι ὀλιγώτεραι αἱ Ἐξισώσεις ἀπὸ τὰ ἄγνωστα Ποσὰ, καθὼς εἰς τὸ προλαβὸν Παράδειγμα, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν Ἐξίσωσιν καὶ δύω ἄγνωστα Ποσὰ, $\chi + \psi = 8$. ἂν δὲ προστεθῇ καὶ δευτέρα Ἐξίσωσις εἰς αὐτὸ, ὅτι δηλαδὴ τὸ ἐκ τῶν δύω τούτων ἀριθμῶν Γινόμενον νὰ εἶναι 12, τότε ἤθελεν εἶναι τὸ Πρόβλημα διωρισμένον, καὶ ἤθελε λυθῇ μόνον μὲ τοὺς δύω τούτους ἀριθμοὺς 6 καὶ 2. πλέον ἢ διωρισμένον λέγεται τὸ Πρό-

βλημα τὸ ὁποῖον ἔχει πλέονας Συνθήκας (ὑποθέσεις), παρὰ ἄγνωστα Ποσά, αἱ ὁποῖαι Συνθῆκαι, ἢ εἶναι περιτταὶ, ἢ περικλείουσιν ἀντίφασιν, ὅθεν καὶ τὴν λύσιν τοῦ Προβλήματος ἀδύνατον ἀποκαθιστῶσιν. Ἐὰν προστεθῇ ἐν τῷ προλαβόντι Παραδείγματι καὶ τρίτη Συνθήκη, ὅτι δηλαδὴ ἡ Διαφορὰ τῶν δύω ἀριθμῶν νὰ εἶναι $= 4$. ὡς $\chi - \psi = 4$. φθάνουσιν οἱ δύω πρότεροι ἀριθμοί. ἐὰν δὲ ἡ τρίτη Συνθήκη ἤθελεν εἶναι, ὅτι ἡ Διαφορὰ αὐτῶν νὰ εἶναι $= 2$, τότε ἤθελεν εἶναι ἀδύνατος ἡ λύσις τοῦ Προβλήματος. ἐπειδὴ δὲν εὑρίσκονται δύω πιστοὶ ἀριθμοί, ὥστε νὰ περιέχωσι καὶ τὰς τρεῖς ταύτας Συνθήκας.

ΟΡΙΣΜΟΣ ι.

§. 108. Ἐξίσωσις τοῦ πρώτου Βαθμοῦ εἶναι, ὅταν τὸ ἄγνωστον Ποσὸν ὑπάρχῃ μόνον εἰς τὴν πρώτην Δύναμιν. $\chi + \frac{1}{2}\chi = \alpha$. Ἐξίσωσις δὲ τοῦ δευτέρου Βαθμοῦ λέγεται, ὅταν τὸ ἄγνωστον Ποσὸν ὑπάρχῃ Τετράγωνον, ἢ εἶναι ὑψωμένον εἰς τὴν δευτέραν Δύναμιν. οἷον $\chi^2 - \chi = \alpha$. Ἐξίσωσις δὲ τοῦ Τρίτου Βαθμοῦ λέγεται, ὅταν τὸ ἄγνωστον Ποσὸν εἶναι Κύβος. κ. τ. Ὅταν δὲ πλείονα ὦσι τὰ ἄγνωστα Ποσὰ, τότε λαμβάνεται ἡ ὀνομασία ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν ἑνὶ μέλει ὄντων Δυναμοδεκτῶν τῶν ἀγνώστων Ποσοτήτων. ὡς $\chi\varphi - \varphi = \beta$ εἶναι Ἐξίσωσις τῦ δευτέρε Βαθμῦ. ἐπειδὴ καὶ τὸ Κεφάλαιον τῶν Δυναμοδεκτῶν τῦ $\overset{1}{\chi}\overset{1}{\varphi}$ εἶναι $= 2$.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 109. Ὅταν λοιπὸν μᾶς προβληθῇ καμμία Ἐξίσωσις, πρέπει νὰ τὴν ἐκφράζωμεν τρόπον τινὰ εἰς ἀλγεβραϊκὴν διάλεκτον. πρέπει δὲ νὰ διακρίνωμεν καλῶς τὰ ἄγνωστα Ποσὰ ἀπὸ τὰ Ἐγνωσμένα, καὶ τὰ μὲν Ἐγνωσμένα ἐκθέτομεν ἢ δι᾽ ἀριθμῶν, ἢ διὰ τῶν ἀρχικῶν Γραμμάτων α, β, γ, κ. τ. τὰ δὲ ἄγνωστα διὰ τῶν τελευταίων $\varphi, \chi, \psi, \omega$. πρέπει δὲ πρὸς τούτοις νὰ προσέχωμεν ἀκριβῶς, νὰ μὴν αὐξάνωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγνώστων Ποσῶν ἄνευ ἀνάγκης π. χ. ἐὰν ζητῆται ἀριθμός τις, φέρ᾽ εἰπεῖν, χ, καὶ τότε πρέπει νὰ ληφθῇ τὸ ἥμισυ, τὸ Διπλάσιον, τὸ Τριπλάσιον, κ. τ. γράφομεν τὸ μὲν Διπλάσιον 2χ, τὸ δὲ Τριπλάσιον 3χ, τὸ δὲ ἥμισυ $\frac{1}{2}\chi$, ἢ $\frac{\chi}{2}$. ἐὰν δὲ ζητῶνται δύω ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων νὰ εἶναι ἢ ἡ Διαφορὰ $= 10$, ἢ τὸ Κεφάλαιον $= 30$, εἶναι περιττὸν νὰ ἐκθέτωμεν τοὺς δύω τούτους ἀριθμοὺς διὰ δύω Γραμμάτων χ καὶ ψ, ἀλλὰ λαμβάνομεν τὸν ἐλάσσονα $= \chi$ καὶ τότε ὁ μείζων ἔσαι $= 30 - \chi$, $(10 + \chi)$, ἢ θέττομεν τὸν μείζονα $= \chi$, καὶ τότε ὁ ἐλάσσων εἶναι Ἴσος τῷ $30 - \chi$. τοῦτο χρησιμεύει πολλάκις, ὅτι τὸ Πρόβλημα παρίσαται ἐκ τριῶν ἀγνώστων Ποσῶν, ὡς κατωτέρω εἰς τὸ α. Παράδειγμα. πρὸς τούτοις πρέπει νὰ πρόσκηνται μετὰ τῶν προσηκόντων Σημείων των. ἐὰν εἶναι ὁ λόγος περὶ κέρδους, αὐξήσεως, ἢ προσθήκης, θέτομεν τὸ Σημεῖον $+$. ὅτι δὲ ὁ λόγος γίνεται περὶ ζημίας, ἐλαττώσεως, ἢ Διαφορᾶς, μεταχειριζόμεθα

τὸ

τὸ Σημεῖον —. Ἐὰν ζητῶνται πολλαπλάσια Ποσὰ, προστίθεμεν εἰς τὸ ἄγνωστον Ποσὸν Συνεργοὺς. Ἐὰν δὲ ζητῶνται Μέρη, γράφομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν Μερῶν ὑπὸ τὸ χ ἢ φ εἰς εἶδος Κλάσματος καθὼς $\frac{\chi}{3}$, $\frac{\phi}{4}$. Καὶ τέλος πάντων ἐκεῖνο τὸ Ποσὸν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ λόγον Ἰσότητος μετὰ τινὸς ἄλλου, διαιρεῖνομεν ἐκ τούτου τοῦ Σημείου τῆς Ἰσότητος $=$ δι᾽ οὗ χωρίζομεν τὴν Ἐξίσωσιν εἰς τὰ δύω Μέρη της.

ὉΡΙΣΜΌΣ ς΄.

§. 110. Αἱ Συνθῆκαι, τὰς ὁποίας φέρουσι τὰ ἄγνωστα Ποσὰ μεθ᾽ ἑαυτῶν, εἰσὶ μετὰ τούτων τῶν Ποσῶν συνδεδεμέναι, ἢ διὰ τοῦ Σημείου τῆς Προσθέσεως $+$, ὡς $\chi + 20 = 30$, ἢ διὰ τοῦ τῆς ἀφαιρέσεως Σημείου —, ὡς $\chi - 10 = 20$, ἢ διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, ὅταν αὐται συνέχωνται μετὰ τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ ὡς Συνεργοὶ, ὡς $3\chi = 30$, ἢ διὰ τῆς Διαιρέσεως, ὅταν θέτωνται ὑπὸ τὸ ἄγνωστον Ποσὸν ὡς Παρονομασταὶ εἰς εἶδος Κλάσματος, ὡς $\frac{\chi}{3} = 30$ ἢ $\frac{1}{3}\chi = 30$.

ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΕΣ ἈΞΊΩΜΑ.

§. 111. Δύω Ἴσα Ποσὰ μένουσιν ἀλλήλοις Ἴσα, ἐὰν προστεθῶσιν αὐτοῖς Ἴσα, ἢ ἀφαιρεθῶσιν ἀπ᾽ αὐτῶν Ἴσα, ἢ πολλαπλασιαθῶσιν

αὐτὰ,

αὐτὰ, ἢ διαιρεθῶσι μετ' Ἴσων, ἢ ἀρθῶσιν εἰς τὰς αὐτὰς Δυνάμεις, ἢ ἐξαχθῶσιν ἐξ αὐτῶν αἱ αὐταὶ ῥίζαι, ἢ μεταβληθῶσιν ἐπίσης τὰ Σημεῖα ἀμφοτέρων.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων φανεροῦται ἡ ἀλήθεια τοῦ ἀξιώματος Ἐναργῶς, καὶ τὸ πλεῖστον εἶναι καθ' ἑαυτὸ φανερόν. ἐπειδὴ ἐὰν $+\alpha = +\beta$, ἔσεται καὶ $-\alpha = -\beta$. ἐὰν δὲ $8-3=12-7$, ἔσεται καὶ $-8+3=-12+7$. ἐπειδὴ τὰ Σημεῖα δὲν μεταβάλλουσιν αὐτὰ τὰ Ποσὰ, ἀλλὰ σημαίνουσι μόνον τὰ πάθητων, ὅθεν δὲν μεταβάλλεται μήτε ἡ Ἰσότης τῶν Ποσῶν διὰ τῶν Σημείων, ἀλλὰ μόνον τὸ προσθετέον Ποσὸν γίνεται ἀφαιρετέον, καὶ ἀνάπαλιν, ἐκ τούτου ἕπεται τὸ ἑξῆς Θεώρημα.

ΘΕΩ῎ΡΗΜΑ.

§. 112. Ἐγνωσμένα Ποσὰ, καθ' ὁποιονδήποτε λόγον καὶ τρόπον μετὰ ἀγνώστων συνδεδεμένα, δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν ἀπὸ τῶν ἀγνώστων διὰ τῆς ἐναντίας Ἐργασίας, καὶ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου νὰ τὰ μεταθέσωμεν εἰς τὸ ἕτερον Μέρος τῆς Ἐξισώσεως π. χ. ἐκ τῆς $\frac{2\chi}{3}+20-30=100$. δυνάμεθα νὰ κάμωμεν αὐτὴν τὴν Ἐξίσωσιν $\chi = \left(\frac{100+30-20}{2}\right)$.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

ΔΕΙ̃ΞΙΣ.

Ἐκ τοῦ Προλαβόντος ἀξιώματος (§. 111) εἶναι δῆλον, ὅτι ἡ Ἰσότης τῶν Ποσῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πάθωσιν ἀμφότερα τὰς αὐτὰς μεταβολάς. λοιπὸν ἐὰν ἀφέλωμεν ἀμφοτέρωθεν τὸ δεδομένον Καταφατικὸν Ποσὸν διὰ τοῦ Σημείου —, ἢ προσθέσωμεν τὸ ἀποφατικὸν Ποσὸν διὰ τοῦ Σημείου +, τότε ἐξαλείφεται τὸ Ποσὸν τοῦτο ἀπὸ τὸ Μέρος τῆς Ἐξισώσεως, ἐν ᾧ εὑρίσκεται, καὶ γράφομεν αὐτὸ εἰς τὸ ἕτερον Μέρος. ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ Ποσὰ μετὰ τοῦ Συνεργοῦ τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ, ἢ πολλαπλασιάσωμεν μετὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ, τότε σβύομεν εἰς τὸ ἓν Μέρος τὸν αὐτὸν Πολλαπλασιαστὴν ἢ Διαιρέτην, εἰς δὲ τὸ ἄλλο Μέρος πρέπει νὰ τοὺς γράφωμεν. δὲν μεταβάλλεται λοιπὸν ἡ Δύναμις τοῦ Ποσοῦ, ἐὰν τὸ μεταφέρωμεν εἰς τὸ ἄλλο Μέρος διὰ τοῦ ἐναντίου Σημείου, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν ἄλλοτι π. χ. ἐκ τοῦ $\frac{2\chi}{3} + 20 - 30 = 100$, ἐὰν ἀφαιρεθῶσι τὰ 20 ἀμφοτέρωθεν, καὶ προστεθῶσι τὰ 30 γίνεται $\frac{2\chi}{3} + 20 - 20 - 30 + 30 = 100 - 20 + 30$, τουτέστιν ἐὰν σβύσωμεν ἀπὸ τὸ πρῶτον Μέλος + 20 καὶ — 20, ὡσαύτως, καὶ τὸ — 30 καὶ + 30, τὰ ὁποῖα ἀναιροῦνται ὑπ' ἀλλήλων, τότε μένει $\frac{2\chi}{3} = 100 - 20 + 30$. ἔτι ἐκ τοῦ $\frac{2\chi}{3} = 100 - 20 + 30$ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύω Μέρη μετὰ τοῦ 3, θέλομεν ἔχει $\frac{2\chi \times 3}{3} = (100 - 20 + 30)^3$.

ἀλλὰ

ἀλλὰ μὴν εἶναι Ἴσον τὸ $\frac{2\chi \times 3}{3}$ μὲ τὸ 2χ. ἄρα τὸ 2χ εἶναι Ἴσον καὶ μὲ τὸ $(100-20+30)^3$. ἐὰν πλέον διέλωμεν ἀμφότερα τὰ Μέρη τῆς Ἐξισώσεως διὰ τοῦ 2, γενήσεται $\frac{2\chi}{2} = \left(\frac{100-20+30}{2}\right)^3$; τουτέστι χ

$$= \left(\frac{100+30-20}{2}\right)^3.$$

Τὸ Ἴδιον γίνεται λοιπὸν, καὶ ἐὰν εὐθὺς χωρὶς τινὸς ἄλλης πράξεως, μεταφέρωμεν τὸ $+20$ μετὰ τοῦ Σημείου $-$, καὶ τὸ -30 μετὰ τοῦ Σημείου $+$, καὶ τὸν Συνεργὸν 2 ὡς Διαιρέτην, καὶ τὸν Παρονομαστὴν, ἢ Διαιρέτην 3 ὡς Πολλαπλασιαστὴν εἰς τὸ ἄλλο Μέρος τῆς Ἐξισώσεως.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 113. Ἐντεῦθεν μανθάνομεν τὴν Μέθοδον, διὰ τῆς ὁποίας δυνάμεθα κάθε ἀποφατικὸν Ποσὸν νὰ μεταβάλλωμεν εἰς καταφατικὸν; καὶ ἀνάπαλιν. ἐπειδὴ πρὸς τὸ τοιοῦτον τοῦτο μόνον ἀπαιτεῖται, τὸ νὰ μεταθέτωμεν εἰς αὐτὰ τὸ ἀντίθετον Σημεῖον π. χ. ἐκ τοῦ $20\chi - 100 = 10 - 3\chi$ δύναται νὰ γένῃ $20\chi + 3\chi = 100 + 10$. ἐκ δὲ τοῦ $\alpha - \gamma = \beta\chi - \varphi^2$ γίνεται $\varphi^2 = \beta\chi - \alpha + \gamma$.

ΠΟΡΙΣΜΑ δ'.

§. 114. Νὰ λύωμεν τὴν Ἐξίσωσιν ἑνὸς μόνου ἀγνώστου Ποσοῦ.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Κανών. Ἐλευθερῶμεν τὸ ἄγνωστον Ποσὸν ἀπὸ ὅλων τῶν Ἐγνωσμένων διὰ τῆς Μεταθέσεως (§. 111), καὶ

τότε

τότε θέλομεν ἔχη τὴν Δύναμιν τοῦ ἀγνώστου. οὕτως ἐν τῷ προτέρῳ Προβλήματι $\frac{2\chi}{3}+20-30=100$ εὑρίσκεται ἡ Δύναμις τοῦ χ, ἀφ' οὗ διὰ τῆς ἐναντίας Ἐργασίας μετατεθῶσιν εἰς τὸ ἄλλο Μέρος τῆς Ἐξισώσεως ὅλα τὰ προσκείμενα αὐτῷ Ποσά, οἷον $\chi=\left(\frac{100-20+30}{2}\right)^3$. τουτέστι $\chi=165$.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἡ λύσις τοῦ Προβλήματος εἶναι ἡ Ἔκθεσις τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ εἰς Ἐγνωσμένην Δύναμιν. ἀλλὰ μὴν κατὰ τὸν ῥηθέντα Κανόνα ἐκθέτεται τὸ ἄγνωστον Ποσὸν εἰς Δύναμιν Ἐγνωσμένην, λέλυται ἄρα τὸ Πρόβλημα κατὰ τὸ δέον.

ΣΧΌΛΙΟΝ.

§. 115. Διὰ νὰ μὴ συμβαίνῃ εἰς τὴν Μετάθεσιν καμμία Σύγχυσις, ἢ ἁμάρτημα, μεταχειριζόμεθα τὴν ἑξῆς τάξιν, ἥτις συναπαρτίζεται εἰς τούτους τοὺς πέντε τρόπους.

α΄) Μεταφέρομεν πρῶτον εἰς ἓν Μέρος τὰ Ἐγνωσμένα Ποσὰ μετὰ τοῦ Συμβόλου +, ἢ − οὕτως, ὥστε ἡ ἄγνωστος Ποσότης ἅπαξ, ἢ πολλάκις κειμένη, νὰ ἐγκαταλειφθῇ μόνη εἰς ἓν Μέρος μετὰ τῶν ἑαυτῆς (ἂν ἔχῃ) Συνεργῶν, ἢ Διαιρετῶν.

β΄.) Ἔπειτα τὰ ἄγνωστα Ποσά, ἐὰν ὑπάρχωσιν ἀκέραια, ἀθροίζομεν ὁμοῦ εἰς μίαν Ποσότητα ἢ διὰ τῆς Συνάψεως, ἢ ἀφαιρέσεως τῶν Συνεργῶν, ἂν ὅμως εἶναι ἐν Κλάσμασι, φέρομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς τὸν κοινὸν Παρονομαστήν, ἔπειτα τὰ συνάπτομεν εἰς ἕν, ὡς ἀπαιτοῦσι τὰ Σύμβολα.

γ΄.) Ἂν εὑρίσκωνται καὶ εἰς τὰ δύο Μέρη τῆς Ἐξισώσεως ἄγνω-

στα

στα Ποσὰ, μεταφέρομεν αὐτὰ εἰς ἓν Μέρος, οὕτω ὅμως, ὥστε ἡ Ποσότης ἡ ἔχουσα μείζονα Συνεργὸν νὰ ἔχῃ τὸ Σύμβολον + διὰ νὰ μὴ γένῃ ἡ Δύναμις (Σημασία) στερητική.

δ΄.) Ὁ Παρονομαστὴς, ἢ ὁ Διαιρέτης τῶν ἀγνώστων Κλασμάτων μεταφέρεται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, καὶ πλῆθος ὁ Συνεργὸς διὰ τῆς Διαιρέσεως, ὥστε μένει ἡ ἄγνωστος Ποσότης μόνη.

έ.) Ἐὰν ἡ ἄγνωστος Ποσότης εἶναι Παρονομαστὴς τινὸς Κλάσματος, εὐθὺς πρῶτον ἀναγκαῖον ἐστὶν νὰ μεταφέρωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸ ἕτερον Μέρος οἷον $\frac{2}{\chi} = 6$ γίνεται $2 = 6\chi$ καὶ $\frac{2}{6}$ ἢ $\frac{1}{3} = \chi$.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ ά.

Τρεῖς ἄνθρωποι ἐκέρδυσαν ὁμοῦ 180 Γρόσια, ὁ δεύτερος ἐκέρδησε πλείονα τοῦ πρώτου 8, ὁ δὲ τρίτος ἐκέρδησε τόσα, ὅσα ἐκέρδησεν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος. ὅθεν τὸ κέρδος τοῦ πρώτου εἶναι $= \chi$, τοῦ δὲ δευτέρου $\chi + 8$, τοῦ δὲ τρίτου $\chi + \chi + 8$, καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ ἐκέρδησαν 180. λοιπὸν γίνεται αὕτη ἡ Ἐξίσωσις

$$\chi + \chi + 8 + \chi + \chi + 8 = 180$$

καὶ κατὰ τὸν πρῶτον

τρόπον $\chi + \chi + \chi + \chi = 180 - 8 - 8 = 180 - 16 = 164$

κατὰ τὸν δεύτερον $4\chi = 164$

κατὰ τὸν τέταρτον $\chi = \frac{164}{4} = 41.$

λοιπὸν ὁ πρῶτος ἐκέρδησε . 41

ὁ δεύτερος 8 πλείονα . . 49

ὁ δὲ τρίτος ἐκέρδησεν ὅσα

οἱ δύω, ἤτοι. 90

180 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΑΡΑ΄-

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ β΄.

Ὁ Πέτρος, φέρ' εἰπεῖν, ἐδαπάνησεν, ἢ ἐμοίρασε τὴν πρώτην ἡμέραν ἐκ τῶν χρημάτων του ἓν τριτημόριον, τὴν δὲ δευτέραν ἡμέραν ἐμοίρασεν αὖθις τὸ ἓν τεταρτημόριον, τὴν δὲ τρίτην ἡμέραν ὡσαύτως ἐδαπάνησεν ἓν πεμπτημόριον, καὶ ἔμειναν εἰς αὐτὸν ἔτι 26 Γρόσια. ζητεῖται λοιπὸν, πόσα εἶχε κατ' ἀρχὰς

ἔστω ὅλη ἡ Ποσότης, ἥτις καὶ ζητεῖται $= \chi$

ὅσα ἐδαπάνησε $= \frac{\chi}{3}, \frac{\chi}{4}, \frac{\chi}{5}$

ὅσα ἔμειναν αὐτῷ $= 26$

γίνεται αὕτη ἡ Ἐξίσωσις $\chi - \frac{\chi}{3} - \frac{\chi}{4} - \frac{\chi}{5} = 26$

κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον.
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{60\chi - 20\chi - 15\chi - 12\chi}{60} = 26 \\ \frac{60\chi - 47\chi}{60} = 26 \\ \frac{13\chi}{60} = 26 \end{array}\right.$$

κατὰ τὸν τέταρτον τρόπον.
$$\left\{\begin{array}{l} 13\chi = 26 \times 60 = 1560 \\ \chi = \frac{1560}{13} = 120 \text{ ἡ πρώτη Ποσότης.} \end{array}\right.$$

δηλαδὴ $120 - 40 - 30 - 24 = 26$.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. γ'.

Πατήρ τις ἔχων ἕξ ὑιὲς, καὶ ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς ἡλικίας αὐτῶν, ἀπεκρίθη, ὅτι ἕκαςος προγενέστερος ὑπερέχει τὸν αὐτῦ μεταγενέστερον 4 ἔτη, ὁ πρεσβύτατος ὅμως (τουτέστιν ὁ πρῶτος) εἶναι μείζων τῦ νεωτάτυ (δηλαδή τῦ ἕκτυ) κατὰ τὴν ἡλικίαν τριπλασίως. ὅθεν κατὰ τὴν τῦ Προβλήματος Υπόθεσιν γίνεται ὕτως

ἡ ἡλικία τῦ νεωτέρυ, ἢ ἕκτυ $= \chi$

τῦ δὲ πέμπτυ $= \chi + 4$

τῦ δὲ τετάρτυ $= \chi + 8$

τῦ δὲ τρίτυ $= \chi + 12$

τῦ δὲ δευτέρυ $= \chi + 16$

τῦ δὲ πρώτυ $= \chi + 20$

καὶ ἐπειδὴ ἡ ἡλικία τῦ πρωτοτόκυ $\chi + 20$ πρέπει νὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας τῦ ἕκτυ, γίνεται ἄρα αὕτη ἡ Ἐξίσωσις $\chi + 20 = 3\chi$

κατὰ τὸν τρίτον τρόπον $20 = 3\chi - \chi$, ἤτοι $20 = 2\chi$

κατὰ τὸν τέταρτον τρόπον $\frac{20}{2} = \chi$ ἤτοι $10 = \chi$

ἑυρηται ἄρα, ὅτι ἡ ἡλικία τῦ ἕκτυ εἶναι $= 10$;

τῦ δὲ πέμπτυ $= 10 + 4 = 14$

τῦ δὲ τετάρτυ $= 10 + 8 = 18$

τῦ δὲ τρίτυ $= 10 + 12 = 22$

τῦ δὲ δευτέρυ $= 10 + 16 = 26$

τῦ δὲ πρώτυ $= 10 + 20 = 30$ ὅπερ ἐστὶ τὸ τριπλάσιον τῦ 10.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐντεῦθεν μανθάνομεν τὴν Μέθοδον, καθ' ἣν δυνάμεθα νὰ ἑύρωμεν Ἐργασίας τινὸς τὴν ἀλήθειαν, θέτομεν δηλονότι μετὰ τὴν

Πᾶξιν

Πᾶξιν εἰς τὴν πρώτην Ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ Ποσοῦ χ τὴν ἐκ τῆς Ἐργασίας εὑρεθεῖσαν τελευταίαν Ποσότητα, καὶ ἐὰν τοῦτο τὸ κατ' αὐτὴν τὴν Μέθοδον λελυμένον Μέρος τῆς Ἐξισώσεως ὑπάρχῃ ἴσον μὲ τὸ δεύτερον Μέρος, λέλυται τότε τὸ Πρόβλημα ἀκριβῶς. ἐπειδὴ εἶναι ἀδύνατον μετὰ τὴν λύσιν νὰ εὑρεθῶσι τὰ δύω τῆς Ἐξισώσεως Μέρη ἴσα ἀλλήλοις, ἂν ἡ Δύναμις τοῦ Ποσοῦ χ, ἥτις ἐλήφθη ἐν τῇ Ἐξισώσει, ὑπάρχῃ ἄνισος μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν Ποσότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. ϛ'.

Ὑός τις λέγει πρὸς τὸν ἑαυτοῦ Πατέρα, ὅστις ἤδη κατὰ τὴν ἡλικίαν ἦτον μείζων τοῦ υἱοῦ τριπλασίως, ὅτι μετὰ εἴκοσι ἔτη φίλτατε Πάτερ! θέλεις εἶσαι μόνον διπλασίως μείζων ἐμοῦ. εἰς ποίαν λοιπὸν ἡλικίαν ἦσαν τότε ὁ Πατὴρ καὶ ὁ υἱός;

ἔστω ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ $= \varphi$

τοῦ δὲ Πατρὸς $= 3\varphi$

καὶ κατὰ τὴν τοῦ Προβλήματος Ὑπόθεσιν μετὰ 20 ἔτη ἔσται ἡ μὲν ἡλικία τοῦ υἱοῦ $= \varphi + 20$, τοῦ δὲ Πατρὸς $= 3\varphi + 20$. καὶ τότε ἡ τοῦ Πατρὸς ἡλικία πρέπει νὰ εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ. ὅθεν

$$3\varphi + 20 = (\varphi + 20)^2$$

ἤτοι $3\varphi + 20 = 2\varphi + 40$

ἤτοι $3\varphi - 2\varphi = 40 - 20$

ἤτοι $\varphi = 20.$

εὕρηται ἄρα, ὅτι ἡ μὲν Ἡλικία τοῦ υἱοῦ ἦν $= 20$, ἡ δὲ τοῦ Πατρὸς $= 60$ Τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ, μετὰ δὲ 20 ἔτη ἔσται ἡ μὲν Ἡλικία τοῦ υἱοῦ $= 40$, ἡ δὲ τοῦ Πατρὸς $= 80$, Διπλασία δηλονότι τῆς Ἡλικίας τοῦ υἱοῦ.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. ε.

Ὁ Πέτρος, φέρ' εἰπεῖν, καὶ Ἰωάννης ἔσχον ἕκαστος ἴσην Ποσότητα χρημάτων, ὅτι ἤρξαντο μετ' ἄλλων νὰ παίζωσι, καὶ ὁ μὲν Πέτρος ἀπώλεσεν εἰς τὸ Παιγνίδιον 12 Γρόσια, ὁ δὲ Ἰωάννης ἔχασε Γρόσια 57. ἀλλ' εἶχεν ὁ Πέτρος ἔτι λοιπὰ τετράκις τόσα, ὅσα ἔμειναν εἰς τὸν Ἰωάννην.

Ἔστω ἡ τοῦ Πέτρου Ποσότης $= \chi$ ὅθεν ἔμεινε μετὰ τὸ Παιγνίδιον $\chi - 12$.

Ἡ τοῦ Ἰωάννου ὡσαύτως $= \chi$ καὶ μετὰ τὸ Παιγνίδιον ἔμεινε $\chi - 57$

καὶ κατὰ τὰς Συνθήκας ἔσται

$$\chi - 12 = (\chi - 57)^4$$

ἤτοι $\chi - 12 = 4\chi - 228$

$$228 - 12 = 4\chi - \chi$$

$$216 = 3\chi$$

$$72 = \chi$$

ἡ Ποσότης τοῦ Πέτρου $= 72$, τὰ δὲ ἐγκαταλειφθέντα μετὰ τὸ Παιγνίδιον $= 60$

ὡσαύτως ἡ τοῦ Ἰωάννου Ποσότης $= 72$, τὰ δὲ ἐγκαταλειφθέντα $= 15$. καὶ ἐπειδὴ ὁ 60 ἀριθμὸς εἶναι τετραπλάσιος τοῦ 15, λέλυται ἄρα τὸ Πρόβλημα.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. ς΄.

Δεσπότης τις μισθούμενος τινα Δοῦλον, ὑπισχνεῖται εἰς αὐτὸν νὰ δώσῃ διὰ 12 Μῆνας Γρόσια 80, προσέτι καὶ ἓν Ἔνδυμα, τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν αὐτοὶ ὡσαύτως προσ-

διορί-

διορίζουσι. μετὰ δὲ ἑπτὰ Μῆνας ἀπολύσας ὁ Δεσπότης τὸν Δοῦλον, δίδει αὐτῷ μισθὸν 30 Γρόσια, καὶ ἀφίνει εἰς αὐτὸν καὶ τὸ ἔνδυμα. ζητεῖται λοιπὸν, πόση εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἐνδύματος.

Ἡ τιμὴ τοῦ ἐνδύματος χ. ὅλος ὁ μισθὸς τοῦ Δούλου $\chi+80$. ὁ δὲ μισθὸς τῶν ἑπτὰ Μηνῶν εὑρίσκεται οὕτω. διαιρῶν τις τὸν $\chi+80$ διὰ τοῦ 12, εὑρίσκει πρῶτον τὸν μισθὸν τὸν ἀνήκοντα διὰ ἕνα Μῆνα, ἤτοι τὸν $\frac{\chi+80}{12}$, εἶτα πολλαπλασιάσας τοῦτον διὰ τοῦ 7, εὑρίσκει τὸν ἑπταμηνιαῖον μισθὸν, δηλαδὴ τὸν $\frac{7\chi+560}{12}$, ὅστις πρέπει νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν πληρωθέντα μισθὸν $30+\chi$ ὅθεν γίνεται

$$\frac{7\chi+560}{12} = 30+\chi$$

$$7\chi+560 = 360+12\chi$$

$$560-360 = 12\chi-7\chi$$

$$200 = 5\chi$$

$$40 = \chi$$

ὁ διὰ ἓν ἔτος μισθὸς ἐστὶν 120 Γρόσια, ὁ δὲ μισθὸς διὰ ἕνα Μῆνα 10, καὶ ἑπομένως διὰ 7 Μῆνας εἶναι 70 Γρόσια. συνάψαντες λοιπὸν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν 30 μετὰ τοῦ 40, τουτέστι μετὰ τῆς τιμῆς τοῦ ἐνδύματος, βλέπομεν, ὅτι λέλυται ὀρθῶς τὸ Πρόβλημα.

ΠΑΡΑ´ΔΕΙΓΜΑ ζ'.

Πεζοδρόμος ἀποδημήσας, τρέχει καθ' ἑκάστην 10 Μίλλια. ἄλλος δέ τις μετὰ πέντε ἡμέρας ἀποδημήσας, ϗ τὴν αὐτὴν ἐκείνῳ ὁδοιπορίαν ποιήμενος, διανύει καθ' εκάστην 15 Μίλλια, ζητεῖ δὲ νὰ μάθῃ μετὰ πόσας ἡμέρας αὐτὸν καταλήψεται.

Ἔςω ἡ ζητȣμένη ἡμέρα τῆς ἐντάξεως $= \chi$. τὰ Μίλλια, τὰ ὁποῖα ὁ πρῶτος διέδραμεν εἰς πέντε ἡμέρας, εἰσὶν 50, ὅσα δὲ μένουσιν αὐτῷ λοιπὰ νὰ διατρέξῃ εἰσὶν $10 \times \chi$. τὰ δὲ Μίλλια, τὰ ὁποῖα μέλλει ὁ δεύτερος νὰ κάμῃ, ϗ τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ εἶναι Ἴσα με τὰ τȣ̃ πρώτȣ Μίλλια, εἰσὶν $15 \times \chi$ ὅθεν

$$50 + 10 \times = 15 \chi$$
$$50 = 15 \chi - 10 \chi$$
$$50 = 5 \chi$$
$$10 = \chi$$

μετὰ δέκα ἡμέρας ἄρα πρέπει ὁ δεύτερος νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον, ἐπειδὴ ὁ μὲν πρῶτος μετὰ 10 ἡμέρας διατρέξει 100 Μίλλια ϗ 50, τὰ ὁποῖα πρότερον διέτρεξε, γίνονται 150. ἀλλὰ ϗ ὁ δεύτερος ὡσαύτως εἰς δέκα ἡμέρας ὁμοίως διανύσει 150 Μίλλια. ἄρα....

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ή.

Ταχυδρόμος τὶς ἀποδημήσας, πλειώνει καθ' ἑκάςην 8 Μίλλια, μετὰ δὲ πέντε ἡμέρας ἀποδημεῖ ἕτερος, ὅςις πρέπει νὰ φθάσῃ εἰς ἓξ ἡμέρας τὸν πρῶτον. ζητεῖται λοιπὸν, πόσα Μίλλια ἔχει καθ' ἑκάςην νὰ διατρέχῃ, διὰ νὰ φθάσῃ ἐκεῖνον. ὅθεν ὁ ζητȣ́μενος ἀριθμὸς τῶν Μιλλίων χ.

Τὰ δὲ Μίλλια, τὰ ὁποῖα ὁ πρῶτος εἰς πέντε ἡμέρας διήνυσεν, εἰσὶν 40. ὅσα μέλλει νὰ κάμῃ εἰς ἓξ ἡμέρας, εἰσὶν 48. ὅσα δὲ μέλλει νὰ διατρέξῃ ὁ δεύτερος εἰς ἓξ ἡμέρας εἰσὶν $= 6 \chi$ λοιπὸν

40

$$40 + 4^2 = 6\chi$$
$$88 = 6\chi$$
$$\text{ὁ} \quad 14\tfrac{2}{3} = \chi$$ τότε Μίλλια τρέχει

τὰ πλειώνη ὁ δεύτερος καθ' ἑκάστην, καὶ ὅτω θέλει φθάσει τὸν πρῶτον εἰς ἓξ ἡμέρας.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ θ'.

Δύω τόποι, φέρ' εἰπεῖν, Α ——— Β ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων 120 Μίλλια. Ὁ'δοιπόρος τις ἀπὸ τοῦ Α ἀποδημήσας, πορεύεται πρὸς τὸ Β, διανύων καθ' ἑκάστην 6 Μίλλια. ἄλλος δέ τις πάλιν τὸν αὐτὸν χρόνον ἀπὸ τοῦ Β ἀποδημήσας, ποιεῖ καθ' ἑκάστην 4 Μίλλια, πότε ἄραγε οὗτοι ἀπαντήσουσιν ἀλλήλοις; ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν χ

τὰ Μίλλια τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου εἰσὶν 120

τὰ Μίλλια τοῦ πρώτου εἰσὶν 6χ, τοῦ δὲ δευτέρου 4χ. ἄρα

$$6\chi + 4\chi = 120$$
$$10\chi = 120$$
$$\chi = 12$$

μετὰ 12 ἡμέρας οὗτοι συναντήσουσιν ἀλλήλοις.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 117. Ἂν ἀναλύσωμεν Ἀλγεβραϊκῶς, καὶ ἐκθέσωμεν διὰ στοιχείων τὰ πλέονται τρία Παραδείγματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἀναφορὰν πρὸς πράγματα κινητὰ, προκύπτουσιν ἐκ τούτων ἄλλοι τόποι Γενικοὶ Τύποι, τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ μεταχειριζώμεθα εἰς καθε Ἰδιαιτέραν Περίστασιν. ἂν ἐν τῷ πρώτῳ τούτων Παραδείγματι ληφθῶσι τὰ Μίλλια (τὰ ὁποῖα καθ' ἑκάστην ὁ πρῶτος διέτρεχε) = α, τὰ δὲ Μίλλια (τὰ ὁποῖα ὁ δεύτερος καθ' ἑκάστην ἐποίει) = β. ὁ δὲ δοθεὶς χρόνος γ, καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς = χ, προκύπτουσι τὰ ἑξῆς

$$\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta\chi$$
$$\alpha\gamma = \beta\chi - \alpha\chi$$
$$\alpha\gamma = (\beta - \alpha)$$
$$\frac{\alpha\gamma}{\beta-\alpha} = \chi \;\cdots \quad \text{Τύπος πρῶτος}$$

ὅθεν ὁ Κανὼν εἰς τὴν πρώτην ταύτην Περίστασιν προσδιορίζει οὕτω „ ἀφ' οὗ πολλαπλασιασθῶσι τὰ Μίλλια τοῦ πρώτου μετὰ τοῦ δοθέντος χρόνου, καὶ διαιρεθῶσι διὰ τῆς Διαφορᾶς τῶν Μιλλίων, τὰ ὁποῖα ἕκαστος τούτων ποιεῖ καθ' ἑκάστην, προκύπτει ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν.

Ἂν ἐν τῷ δευτέρῳ Παραδείγματι ὑποτεθῶσιν = α τὰ Μίλλια, τὰ ὁποῖα καθ' ἑκάστην ὁ πρῶτος διανύει, ὁ δὲ παρελθὼν χρόνος (καθὼς ἐνταῦθα τῶν πέντε ἡμερῶν) ὑποτεθῇ β, ὁ δὲ δοθεὶς τῆς κινήσεως ἀριθμὸς = γ, καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν Μιλλίων = χ, ἔσονται τὰ ἑξῆς

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \gamma\chi, \text{ ἤτοι } \frac{\alpha\beta + \alpha\gamma}{\gamma} = \chi \text{ τουτέστι}$$
$$\frac{\alpha\beta}{\gamma} + \alpha = \chi \;\cdots\cdots \quad \text{Τύπος δεύτερος}$$

Ἐν ταύτῃ τῇ δευτέρᾳ Περιστάσει εἶναι οὗτος ὁ Κανών. „ ὅτι ἀφ' οὗ τὸ Γινόμενον, (καθὼς τὸ $\alpha\beta$) τὸ ὁποῖον παράγεται ἐκ τῶν καθημερινῶν Μιλλίων τοῦ πρώτου Ταχυδρόμου καὶ ἐκ τῶν ἡμερῶν, καθ' ἃς οὗτος πρότερον πορεύεται, συναφθῇ μὲ τὸ ἐκ τοῦ δεδομένου χρόνου καὶ Μιλλίων τοῦ πρώτου Γινόμενον (ὡς ἀνωτέρω $\alpha\beta + \alpha\gamma$), καὶ διαιρεθῇ ἔπειτα διὰ τοῦ Ἰδίου δεδομένου χρόνου (ὡς $\frac{\alpha\beta}{\gamma} + \alpha = \chi$), εὑρίσκεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν Μιλλίων.

Ἂν δὲ εἰς τὸ τρίτον καὶ τελευταῖον Παράδειγμα τὸ δοθὲν Διάστημα, καθ' ὃ οἱ δύω τόποι ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων, ληφθῇ = α,

τὰ

τὰ δὲ Μίλλια τοῦ Πρώτου $= \beta$, τὰ δὲ τοῦ δευτέρου $= \gamma$ καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς $= \chi$, ἔσται

$$\beta\chi + \gamma\chi = \alpha$$
$$(\beta + \gamma)\chi = \alpha$$
$$\chi = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \quad . \; . \; . \quad \text{Τύπος τρίτος}$$

Ὅθεν ἐνταῦθα πηγάζει τοιοῦτος Κανὼν „ ὅτι ἂν διαιρεθῇ τὸ διδόμενον διάστημα διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν Μιλλίων τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου, τὸ ἐκ τῆς Διαιρέσεως Πηλίκον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β΄.

§. 118. Νὰ λύωμεν Ἐξίσωσιν δύω ἀγνώστων Ποσοτήτων.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

α΄.) Ζητοῦμεν καὶ ἐν ταῖς δυσὶν Ἐξισώσεσι τὴν Δύναμιν μόνον ἑνὸς καὶ τοῦ ἰδίου ἀγνώστου Ποσοῦ διὰ τῆς μεταθέσεως.

β΄.) Παραβάλλομεν τὰς δύω ταύτας Δυνάμεις πρὸς ἀλλήλας, καὶ κατὰ τοὺς ἀνωτέρω Κανόνας ζητοῦμεν τὴν Δύναμιν τοῦ ἑτέρου λοιποῦ ἀγνώστου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. α΄.

Νὰ εὕρωμεν δύω ἀριθμοὺς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἐστὶν $= 100$, ἡ δὲ τούτων Διαφορὰ $= 30$.
ἔστω τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν ὁ μὲν χ, ὁ δὲ φ.
κατὰ τὴν πρώτην Συνθήκην $\chi + \varphi = 100$

κατὰ

κατὰ τὴν δευτέραν Συνθήκην $\chi - \varphi = 30$

λοιπὸν ἐκ τοῦ πρώτου γίνεται $\chi = 100 - \varphi$

$$\chi = 30 + \varphi$$

ἐκ τοῦ δευτέρου $100 - \varphi = 30 + \varphi$

$$100 - 30 = \varphi + \varphi$$

$$100 - 30 = 2\varphi$$

$$\frac{70}{2} = \varphi$$

ἄρα $\varphi = 35$. καὶ ἐπειδὴ $\chi = 100 - \varphi$ ἐστὶν, ἄρα $\chi = 65$, καὶ $65 + 35 = 100$, καὶ $65 - 35 = 30$.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ὑποτίθεται, ὅτι τὸ Πρόβλημα προσδιωρισμένον ἐστὶ, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι καὶ δύω Ἐξισώσεις, ἢ Συνθῆκαι (§. 106.) διαφορετικαί. ὅθεν ζητοῦντες καὶ εἰς τὰς δύω Ἐξισώσεις τὴν Δύναμιν τοῦ Ποσοῦ χ, ἀποκτῶμεν δύω Δυνάμεις, αἵτινες εἰσὶ μὲν διαφόρως ἐκτεθέμεναι, εἰσὶν ὅμως Ἴσαι τῷ ἰδίῳ Ποσῷ χ. καὶ ἐπειδὴ δύω πράγματα, τὰ ὁποῖα εἰσὶν Ἴσα ἑτέρῳ τινὶ, εἰσὶ καὶ ἀλλήλοις Ἴσα, ἄρα καὶ αἱ δύω Δυνάμεις αὗται αἱ διαφόρως ἐκτεθέμεναι, εἰσὶν Ἴσαι ἀλλήλαις. ὅθεν δυνάμεθα διὰ τούτων τῶν δύω Δυνάμεων νὰ σχηματίσωμεν μίαν ἄλλην Ἐξίσωσιν, ἀφ᾽ οὗ τοιούτῳ τρόπῳ ἀποβληθῇ ἡ ἄλλη ἄγνωστος Ποσότης. ἔπειτα τὴν εὑρεθεῖσαν Δύναμιν τοῦ φ, θέτομεν εἰς τὴν πρώτην Ἐξίσωσιν εἰς τὸν τόπον τοῦ φ, καὶ οὕτως ἀποκτῶμεν τὴν Δύναμιν τοῦ Μεγέθους χ.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ.

§. 119. Ἂν ἀναλύσωμεν διὰ τῶν Γραμμάτων τὸ ἀνωτέρω Πρόβλημα, ἀποκτῶμεν πάλιν ἕνα Κοινὸν Τύπον, ἢ Ἔκθεσιν, διὰ τὰ

εὑρισ-

Εὑρίσκωμεν δύω ἀριθμοὺς, τῶν ὁποίων τὸ Κεφάλαιον καὶ ἡ Διαφορὰ εἶναι διδόμενα. ἂν οὖν ληφθῇ τὸ Κεφάλαιον $= \varkappa$ ἡ δὲ Διαφορὰ $= \delta$, ἀποκτῶμεν τὰ ἑξῆς.

$$\chi + \varphi = \varkappa$$
$$\chi - \varphi = \delta$$

$$\chi = \varkappa - \varphi$$
$$\chi = \delta + \varphi$$

$$\varkappa - \varphi = \delta + \varphi$$
$$\varkappa - \delta = 2\varphi$$
$$\frac{\varkappa - \delta}{2} = \varphi, \text{ ἢ } \frac{1}{2}\varkappa - \frac{1}{2}\delta = \varphi$$

ἂν ζητῆται τὸ Ποσὸν χ γίνεται οὕτως

$$\varphi = \varkappa - \chi$$
$$\chi - \delta = \varphi$$

$$\varkappa - \chi = \chi - \delta$$
$$\varkappa + \delta = 2\chi$$
$$\frac{\varkappa + \delta}{2} = \chi, \text{ ἢ } \frac{1}{2}\varkappa + \frac{1}{2}\delta = \chi$$

λοιπὸν ἂν προσθέτωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ Κεφαλαίου εἰς τὸ ἥμισυ τῆς Διαφορᾶς, ἀποκτῶμεν τὸν μείζονα ἀριθμὸν, ἂν δὲ ἀφέλωμεν τὸ ἥμισυ τῆς Διαφορᾶς ἐκ τοῦ ἡμίσεως Κεφαλαίου, ἀποκτῶμεν τὸν ἐλάσσονα ἀριθμόν. εἰς τὸ προτεθὲν Παράδειγμα τὸ ἥμισυ τοῦ Κεφαλαίου ἐστὶ $= 50$. καὶ ἡ ἡμιδιαφορὰ $= 15$. ὅθεν $50 + 15 = 65$. καὶ $50 - 15 = 35$, ἡ ἀλήθεια αὕτη ἐκτίθεται ἐν τῷ ἀκολούθῳ Θεωρήματι.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ ἡμιδιαφορὰ συναπτομένη μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ Κεφαλαίου, παρέχει τὸν μείζονα ἀριθμόν. ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ αὕτη ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ Κεφαλαίου, προκύπτει ὁ ἐλάσσων ἀριθμός, ἡ Ποσόν.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ α΄.

§. 120. Ταῦτα τὰ Προβλήματα δύνανται νὰ λυθῶσι ϗ οὕτω, δηλαδὴ τὴν ἐν τῇ πρώτῃ Ἐξισώσει εὑρεθεῖσαν Δύναμιν τοῦ Ποσοῦ χ, θέτομεν παρευθὺς εἰς τὴν δευτέραν Ἐξίσωσιν εἰς τὸν τόπον τοῦ χ. ϗ εὑρίζομεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸ Ποσὸν χ. οἷον ἐν τῷ προαπαντηθέντι Προβλήματι ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως ἐστὶν $\chi = 100 - \varphi$. ὅθεν ἐν τῇ δευτέρᾳ Ἐξισώσει $\chi - \varphi = 30$ εἰς τὸν τόπον τοῦ χ γράφομεν τὴν ἐν τῇ πρώτῃ Ἐξισώσει εὑρεθεῖσαν Δύναμιν $100 - \varphi$, ϗ ἡ Ἐξίσωσις ἔσται $100 - \varphi - \varphi = 30$, ἤτοι $100 - 30 = 2\varphi$. ὡς ἀνωτέρω δέδεικται.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ β΄.

§. 121. Ἀφ' οὗ σχηματίσωμεν ὀρθῶς δύω Ἐξισώσεις διὰ τῆς προτεθείσης Συνθήκης, δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν ἐκ τοῦ μέσου ἓν ὁποιονδήποτε τῶν δύω ἀγνώστων Ποσῶν, ἀφαιροῦντες τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἑτέρου, ὥστε διὰ τῶν ἐναντίως τιθεμένων Σημείων νὰ γένῃ ἄφαντος ἡ ἄγνωστος Ποσότης. οὕτως εἰσὶν ἐν τῷ πρώτῳ Παραδείγματι (§.118) αὗται αἱ δύω Ἐξισώσεις.

$$\chi + \varphi = 100$$
$$\chi - \varphi = 30$$ ἀφαιρεθείσης οὖν ταύτης ἐκ τῆς ἀνωτέρω μένει $2\varphi = 70$.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. β΄.

Πέτρος τε ϗ Παῦλος ἐκέρδησαν παίζοντες, τόσα φέρ' εἰπεῖν, Γρόσια, ὥστε ἂν ὁ Πέτρος δώσῃ εἰς τὸν Παῦλον ἓν τοῦ ἑαυτοῦ Κέρδους, ἔχουσι τότε ϗ οἱ δύω ἴσον Κέρδος. ἂν ὅμως δώσῃ ὁ Παῦλος πρὸς τὸν Πέτρον ἓν

ἀπὸ

ἀπὸ τὸ ἐδικὸν τȣ Κέρδος, τότε ὁ Πέτρος θέλει ἔχῃ Κέρδος διπλάσιον τȣ Παύλȣ. ζητεῖται λοιπὸν πόσα ἐκέρδησεν ἕκαστος τέτων.

ἔςω τὸ τȣ Πέτρȣ Κέρδος $=\chi$

τὸ δὲ τȣ Παύλȣ . $=\varphi$

ὅθεν κατὰ μὲν τὴν πρώτην Συνθήκην $\chi-1=\varphi+1$

κατὰ δὲ τὴν δευτέραν . . . . $\chi+1=(\varphi-1)^2$

ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσ. ἔσται $\chi=\varphi+1+1$ } ἐντεῦθεν γί-

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας . $\chi=2\varphi-2-1$ }

νεται $\varphi+2=2\varphi-3$

ἤτοι $2+3=2\varphi-\varphi$

ἤτοι $5=\varphi$

καὶ ἐπειδὴ τὸ $\chi=\varphi+2$ ὑπάρχει, ἔσται ἄρα $\chi=5+2=7$. διότι ἂν ὁ πρῶτος δώσῃ εἰς τὸν δεύτερον ἕν, θέλουσιν ἔχῃ καὶ οἱ δύω ἀπὸ 6. εἰδὲ δώσει ὁ δεύτερος εἰς τὸν πρῶτον ἕν, τότε εἰς μὲν τὸν δεύτερον ἐγκαταλείπονται 4. ὁ δὲ πρῶτος ἔχει 8, ὅπερ ἐστὶ τὸ διπλάσιον.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. γ΄.

Ὅλη ἡ Ποσότης τῶν χρημάτων τȣ Πέτρȣ μετὰ τȣ ἡμίσεως τῆς τȣ Παύλȣ Ποσότητος εἶναι $=20$ Γροσίοις. ἡ δὲ τȣ Παύλȣ Ποσότης μὲ τὸ τρίτον μέρος τῆς τȣ Πέτρȣ Ποσότητος ὑπάρχει ὡσαύτως $=20$.

ἔστω ἡ τȣ Πέτρȣ Ποσ. χ, τὸ δὲ τρίτον Μέρος ταύτης $=\frac{1}{3}\chi$, ἤτοι $\frac{\chi}{3}$.

ἡ τȣ Παύλȣ Ποσ. φ, τὸ δὲ ἥμισυ $=\frac{1}{2}\varphi$, ἢ $\frac{\varphi}{2}$.

ὅθεν πρώτη Συνθήκη $\chi+\frac{\varphi}{2}=20$. $\frac{2\chi+\varphi}{2}=20$.

$2\chi+\varphi=40$.

δευτέρα

δεύτέρα Συνθήκη $\varphi + \frac{\chi}{3} = 20.\ \frac{30+\chi}{3} = 20.\ 30+\chi = 60$

ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως $\chi = \frac{40-\varphi}{2}$

ἐκ τῆς δευτέρας $\chi = 60 - 3\varphi$ λοιπὸν

$$\frac{40-\varphi}{2} = 60 - 3\varphi$$

$$40 - \varphi = 120 - 6\varphi$$

$$6\varphi - \varphi = 120 - 40$$

$$5\varphi = 80$$

$$\varphi = 16.\ \chi = 60 - 48.\ \chi = 12$$

ἡ τοῦ Πέτρου Ποσότης $12 + \frac{16}{2} = 20$

ἢ τοῦ Παύλου . . $16 + \frac{12}{3} = 20$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. δ'.

Ὁδοιπόροι τινὲς δειπνήσαντες παρά τινι ξενοδόχῳ, ἠρώτησαν αὐτὸν, πόσα πρέπει νὰ καταβάλῃ ἕκαστος αὐτῶν. ὁ δὲ ξενοδόχος ἀπεκρίθη, ἂν ἦσαν εἰς τὸν δεῖπνον ἐπ τρεῖς περισσότεροι, ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ ἕκαστος ἓν Γρόσιον ὀλιγώτερον, ἂν ὅμως ἦσαν δύω ὀλιγώτεροι, ἔπρεπε νὰ καταβάλῃ ἕκαστος ἓν Γρόσ. περισσότερον. ζητεῖται τοίνυν, πόσοι ἄνθρωποι ἦσαν, καὶ πόσα Γρόσ. πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος.

ὁ τῶν δειπνησάντων ἀριθμὸς ἔσω $= \chi$. τὰ Γρόσ. ἑκάστου $= \varphi$

ὅλη

ὅλη ἄρα ἡ Ποσότης τῶν Γροσίων $= \chi\varphi$.

ὅσα ἕκαστος χρεωστεῖ νὰ πληρώσῃ $= \frac{\chi\varphi}{\chi}$

κατὰ τὴν πρώτην Συνθ.

$$\frac{\chi\varphi}{\chi+3} = \varphi - 1$$

$$\chi\varphi = \chi\varphi - \chi + 3\varphi - 3$$

$$\chi\varphi - \chi\varphi + \chi = 3\varphi - 3$$

$$\chi = 3\varphi - 3$$

$$3\varphi - 3 = 2\varphi + 2$$

$$\varphi = 5$$

κατὰ τὴν δευτέραν Συνθήκην

$$\frac{\chi\varphi}{\chi-2} = \varphi + 1$$

$$\chi\varphi = \chi\varphi + \chi - 2\varphi - 2$$

$$2\varphi + 2 = \chi\varphi - \chi\varphi + \chi$$

$$2\varphi + 2 = \chi$$

$$\chi = 15 - 3 = 12$$

ἦσαν ἄρα οἱ δειπνήσαντες $= 12$, ὅσα δὲ ἕκαστος χρεωστεῖ νὰ καταβάλῃ $= 5$, ὅλη δὲ ἡ Ποσότης $= 60$, ὅθεν ἂν ἦσαν οἱ δειπνήσαντες δέκα, ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ ἕκαστος τούτων Γρόσ. 6. εἰδὲ ἦσαν δέκα πέντε, τότε ἐχρεώστει ἕκαστος νὰ καταβάλῃ 4 Γρόσ.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. έ.

Ἕνας θέλει νὰ μίξῃ (ἀνακατώσῃ) ἐκ δύω εἰδῶν οἴνου 100 Ξέστας *, καὶ τοῦ μὲν πρώτου εἴδους ὁ Ξέστης τιμᾶται 42 Παράδ. τοῦ δὲ δευτέρου εἴδους ὁ Ξέστης τιμᾶται 27 Παράδ., πρέπει δὲ πρὸς τούτοις ὁ Ξέστης τοῦ μεμιγμένου οἴνου νὰ πωλῆται 30 Παράδ.. ζητεῖται λοιπὸν, πόσους Ξέστας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου τούτων τῶν εἰδῶν.

Ἔστω

* Ξέστης εἶναι εἶδος Μέτρου.

Ἔςω ὁ ἀριθμὸς τῶν Ξεστῶν, ὅπ͂ πρέπει νὰ λάβη ἐκ τοῦ κρείττονος οἴνου $= \chi$ τοῦ δὲ κατωτέρου οἴνου $= \varphi$, τὸ δὲ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Ξεστῶν τοῦ μιχθέντος οἴνου $= 100$. ἡ δὲ τιμὴ τοῦ πρώτου εἴδους $= 42$. τοῦ δὲ δευτέρου $= 27$. ἅπασα δὲ ἡ τιμὴ τοῦ μιχθέντος οἴνου $= 30 \times 100 = 3000$. οἱ Ξέσται καὶ τῶν δύω εἰδῶν τοῦ μιχθέντος οἴνου $\chi + \varphi = 100$, ἡ τιμὴ $42\chi + 27\varphi = 3000$.

κατὰ τὴν πρώτην Συνθήκην $\chi = 100 - \varphi$

κατὰ τὴν δευτέραν . . . $\chi = \dfrac{3000 - 27\varphi}{42}$

$$100 - \varphi = \frac{3000 - 27\varphi}{42}$$

$$4200 - 42\varphi = 3000 - 27\varphi$$

$$4200 - 3000 = 42\varphi - 27\varphi$$

$$1200 = 15\varphi$$

$$\frac{1200}{15} = \varphi \,.\; 80 = \varphi.$$

Εὕρηται ἄρα, ὅτι ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους πρέπει νὰ λάβη Ξέστας 80. καὶ ἑπομένως ἐκ τοῦ πρώτου 20. ἡ τιμὴ τοῦ δευτέρου εἶναι $80 \times 27 = 2160$, τοῦ δὲ πρώτου $20 \times 42 = 840$, καὶ οὕτως γίνεται $2160 + 840 = 3000$.

ΠΑΡΑ´ΔΕΙΓ. ς´.

Κάπηλός τις ὁ ὁποῖος ἐπώλει προτήτερα ἓν εἶδος οἴνου πρὸς 16 Παράδας τὸ μέτρον, θέλει νὰ χύση ὕδωρ εἰς κάθε μέτρον, καὶ νὰ πωλῆ εἰς τὸ ἑξῆς πρὸς 10 Παράδ. τὸ μέτρον. ζητεῖται λοιπὸν, πόσον οἶνον καὶ ὕδωρ πρέπει νὰ λάβη οὕτος εἰς κάθε μέτρον. ἡ ζητουμένη

Πο-

Ποσότης τοῦ οἴνου $= \chi$, τοῦ δὲ ὕδατος $= \varphi$ τὰ ὁποῖα συναφθέντα ἀλλήλοις, εἰσὶν ἴσα μὲ ἓν μέτρον δηλαδὴ $\chi + \varphi = 1$.

ἡ νέα τιμὴ τοῦ οἴνου ἔσται $= 10$ Παρᾶπ. καὶ ἐπειδὴ τὸ μέτρον τοῦ οἴνου τιμᾶται 16 Παραδ., τοῦ δὲ ὕδατος τιμᾶται μηδενός. ἔσαι ἄρα $16\chi + \varphi \times 0 = 10$

ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως $\chi = 1 - \varphi$

ἐκ τῆς δευτέρας $\chi = \dfrac{10 - \varphi \times 0}{16}$ δηλαδὴ $= \dfrac{10}{16}$

$$1 - \varphi = \frac{10}{16}$$

$$16 - 16\varphi = 10$$

$$16 - 10 = 16\varphi$$

$$\frac{6}{16} = \varphi$$

εὕρηται ἄρα ἡ Ποσότης τοῦ ὕδατος $= \dfrac{6}{16}$, ἤτοι $\dfrac{3}{8}$, καὶ ἐπομένως πρέπει νὰ λάβῃ $\dfrac{5}{8}$ οἴνου διὰ νὰ γένῃ $\dfrac{8}{8}$ ἤγουν ἓν μέτρον.

ΣΧΟΛΙΟΝ α΄.

§. 122. Ἡ ἀλήθεια ταύτης τῆς λύσεως δείκνυται καὶ ἐν τοῖς ἑξῆς ἐκ τοῦ Κανόνος τῆς ἀναλογίας.

ΣΧΟΛΙΟΝ β΄.

§. 123. Αὐτὰ τὰ Προβλήματα ὀνομάζονται μίξεως Κανόνες, καὶ λύονται ὡσαύτως ὑπὸ τῶν ἀριθμητικῶν κατά τινα Κανόνα ἰδιαίτερον, καὶ ἐν τούτοις ἁρμόδιον. οἱ Κανόνες οὗτοι εἶναι πολλὰ ἐπωφελεῖς εἰς τὰς οἰκονομίας τῶν Καπήλων, καὶ ἄλλων, εἰς τὴν Φυσικὴν, καὶ Ἰατρικὴν κ. τ. λ. ὅπου θεωρεῖται ἀνάλογος Μίξις μερῶν. ἐντεῦθεν δύναταί τις νὰ σχηματίσῃ πάλιν ἕνα γενικὸν Τύπον πρὸς λύσιν τούτων τῶν Προβλημάτων, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ μιγνύμενον, καθάπερ δὴ καὶ τὰ μικτὰ μέρη ἂς εἶναι ὁποιασοῦν ἀξίας. ἂς ὑποτεθῶσι τὰ Μικτὰ Ποσὰ χ, καὶ φ, τὸ δὲ συντιθέμενον ὅλον ἔστω α, ἡ δὲ τιμὴ τοῦ χ Ποσοῦ ἔστω β, ἡ δὲ τοῦ φ ἔστω γ, ἡ δὲ τιμὴ τῶν μιχθέντων μερῶν ἔστω δ. λοιπὸν ὅλη ἡ τιμὴ τοῦ μεμιγμένου ἔσται αδ.

$$\chi + \phi = \alpha$$
$$\beta\chi + \gamma\phi = \alpha\delta$$
$$\chi = \alpha - \phi$$
$$\chi = \frac{\alpha\delta - \gamma\phi}{\beta}$$
$$\alpha - \phi = \frac{\alpha\delta - \gamma\phi}{\beta}$$
$$\alpha\beta - \beta\phi = \alpha\delta - \gamma\phi$$
$$\alpha\beta - \alpha\delta = \beta\phi - \gamma\phi$$
$$\frac{\alpha\beta - \alpha\delta}{\beta - \gamma}\ \phi$$

δηλαδὴ πολλαπλασιάζομεν τὸ προσδιωρισμένον Ποσὸν μετὰ τῆς μείζονος τιμῆς, καὶ ἐκ τούτου ἀφαιροῦμεν τὸ Γενόμενον, τὸ ὁποῖον γίνεται ἐκ τοῦ Ἰδίου Ποσοῦ πολλαπλασιαζομένου μετὰ τῆς τιμῆς τῶν Μικτῶν μερῶν, εἶτα διαιροῦμεν τὸ λοιπὸν διὰ τῆς Διαφορᾶς τῶν τιμῶν, καὶ τὸ Πηλίκον ἔσται Ἴσον τῷ μικροτέρῳ Μικτῷ Ποσῷ.

ΣΧΟΛΙΟΝ γ΄.

§. 124. Οἱ δὲ ἄλλοι Κανόνες τῆς Μίξεως εἰς τοὺς ὁποίους παρεισάγονται πλείονα Μικτὰ Μέρη, ἀνήκουσιν εἰς τὰ ἀπροσδιόριστα Προβλήματα, περὶ τῶν ὁποίων κατωτέρω θέλομεν πραγματευθῇ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ΄.

§. 125. Νὰ λύωμεν τινὰ Ἐξίσωσιν τριῶν ἀγνώστων Ποσῶν.

ΠΡΑΚΤΕΑ

ΠΡΑΚΤΕ΄Α.

α΄.) Πρῶτον ἐξαλείφομεν εὐθὺς τὸ Ποσὸν χ ἐκ τῶν δύω διδομένων Ἐξισώσεων κατὰ τοὺς προτεθέντας Κανόνας, καὶ ζητοῦντες τὴν Δύναμιν τοῦ Ποσοῦ φ, ποριζόμεθα αὐτὴν μετὰ μόνου τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ ψ.

β΄.) Ἔπειτα ἀποβάλλομεν ὡσαύτως τὸ Ποσὸν φ, καὶ ζητοῦντες τὴν Δύναμιν τοῦ Ποσοῦ χ, ἀποκτῶμεν αὖθις ταύτην τὴν Δύναμιν ἔχουσαν μεθ᾽ ἑαυτῆς τὸ ἄγνωστον Ποσὸν ψ.

Ἐντεῦθεν θέτομεν καὶ τὰς δύω εὑρεθείσας Δυνάμεις εἰς μίαν τῶν δεδομένων Ἐξισώσεων, καὶ κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον ποριζόμεθα τὴν μόνην ἄγνωστον Ποσότητα ψ.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ.

Ἀγοράσας τις τρεῖς Ἵππους, καὶ ἐρωτηθεὶς, πόσου ἕκαστον τούτων ἠγόρασεν, εἶπεν, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου Ἵππου συνάμα τῷ ἡμίσει τῆς τιμῆς τῶν ἐπιλοίπων εἶναι 25 χρυσὰ (τουτέστι φλωρία). ἡ δὲ τιμὴ τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τῶν λοιπῶν εἶναι 26 φλ. . ἡ δὲ τιμὴ τοῦ τρίτου Ἵππου μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου γίνεται 29 φλ. ζητεῖται λοιπὸν, πρὸς πόσα οὗτος ἠγόρασεν ἕκαστον τούτων τῶν Ἵππων.

πρώτη Συνθήκη $\chi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2} = 25$

δευτέρα Συνθήκη $\varphi + \frac{\chi}{3} + \frac{\psi}{3} = 26$

τρίτη Συνθήκη $\psi + \frac{\chi}{2} + \frac{\varphi}{2} = 29$

γράφομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαςὴν, ἔπειτα ἀκεραιοῦμεν τὰ τούτων Κλάσματα, οἷον

$$\frac{2\chi+\varphi+\psi}{2}=25,\ \text{ἤτοι}\ 2\chi+\varphi+\psi=50$$

$$\frac{3\varphi+\chi+\psi}{3}=26,\ \text{ἢ}\ 3\varphi+\chi+\psi=78$$

$$\frac{2\psi+\chi+\varphi}{2}=29,\ \text{ἤτοι}\ 2\psi+\chi+\varphi=58$$

κατὰ τὸν πρῶτον Καν. ἐκ τῆς δευτέρας Ἐξισώσ.

$$\chi=78-3\varphi-\psi$$

ἐκ τῆς τρίτης $\chi=58-2\psi-\varphi$

$$78-3\varphi-\psi=58-2\psi-\varphi$$
$$78-58=3\varphi-\varphi-2\psi+\psi$$
$$20=3\varphi-\psi$$

$\frac{20+\psi}{2}=\varphi$. ἄρα ἡ Δύναμις τοῦ φ ὑπάρχει $=\frac{20+\psi}{2}$

κατὰ τὸν δεύτερον Καν. ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσ.

$$\varphi=50-2\chi-\psi$$

ἐκ τῆς τρίτης $\varphi=58-2\psi-\chi$

$$50-2\chi-\psi=58-2\psi-\chi$$
$$2\psi+\chi-2\chi-\psi-58-50$$
$$\psi-\chi=8$$
$$\psi-8=\chi$$

λοιπὸν ἡ Δύναμις τοῦ χ ἐςὶν $=\psi-8$

κατὰ τὸν τρίτον Κανόνα εἰς τὴν πρώτην Ἐξίσωσιν γράφομεν ἤδη ἀντὶ τοῦ 2χ τὴν Δύναμιν $(\psi-8)^2$, δηλαδὴ $2\psi-16$. καὶ ἀντὶ τοῦ φ γράφομεν $\frac{20+\psi}{2}$. ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως $2\chi+\varphi+\psi=50$ γίγνεται $2\psi-16$

+

κατὰ τὴν δευτέραν $18 + 2\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} = 26.$

κατὰ τὴν τρίτην $16 + 4 + 9 = 29.$

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἡ Δεῖξις ἐκδηλοῦται ἐκ τῶν ἑξῆς ἀξιωμάτων. „Δύο πράγματα ἑτέρῳ τινὶ τρίτῳ Ἴσα ὄντα, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν Ἴσα. καὶ Ἴσα πράγματα μένουσιν Ἴσα, ἂν εἰς τὸν τόπον τούτων τεθῶσιν Ἴσα. ἐὰν λοιπὸν τοιούτῳ τρόπῳ ἀπομακρύνωμεν τὰ ἄγνωστα Ποσὰ, θέτοντες εἰς τὸν τόπον τούτων τὴν Δύναμιν αὐτῶν, ἀποκαθίσταται ἡ Ἐξίσωσις μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον Ποσότητα, τῆς ὁποίας ἡ ἐπίλυσις λαμβάνει τόπον πλῆθος κατὰ τοὺς προαποδειχθέντας Κανόνας.

$+\frac{20+\psi}{2}+\psi=50$, ἤτοι $\frac{4\psi-32+20+\psi+2\psi}{2}=50$

$$4\psi-32+20+\psi+2\psi=100$$

$$7\psi-12=100$$

$$7\psi=112$$

$$\psi=\frac{112}{7}=16.$$

καὶ ἐπειδὴ τυγχάνει $\chi=\psi-8$. ἄρα $\chi=8$, καὶ $\varphi=\frac{20+\psi}{2}=\frac{36}{2}=18$, λοιπὸν ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου Ἵππου ἀριθμεῖται $=8$, τοῦ δὲ δευτέρου $=18$, τοῦ δὲ τρίτου $=16$.

κατὰ τὴν πρώτην Συνθήκην $8+9+8=25$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 126. Ἐὰν δὲν παρίστανται εἰς κάθε Ἐξίσωσιν ὅλα τὰ Μέλη, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀποβάλλωμεν δύω φοραῖς τὰ ἄγνωστα Ποσά, ἀλλ' ἀφ' οὗ εἰς τὸν τόπον τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου Ποσοῦ θέσωμεν τὴν Δύναμιν τούτου, μανθάνομεν τότε τὴν Δύναμιν τοῦ ἄλλου, ὡς ἐν τῷ ἀκολούθῳ Παραδείγματι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Ὁ Γεώργιος, φέρ' εἰπεῖν, χρεώστης ὤν, καὶ ἐρωτώμενος, πόσα ὀφείλει, λέγει τοῦτον μόνον, ὅτι χρεωστεῖ τῷ Πέτρῳ καὶ Παύλῳ ὁμοῦ 10000, καὶ πάλιν τῷ Πέτρῳ καὶ Ἰωάννῃ ὁμοῦ 11000, καὶ πάλιν τῷ Παύλῳ καὶ Ἰωάννῃ ὁμοῦ 9000. Ζητεῖται λοιπὸν εἰς εὕρεσιν, πόσα οὗτος ἑκάστῳ χρεωστεῖ.

$\chi + \varphi = 10000$. $\chi + \psi = 11000$. $\varphi + \psi = 9000$

ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως $\chi = 10000 - \varphi$

ἐκ τῆς δευτέρας . . . $\chi = 11000 - \psi$

$$10000 - \varphi = 11000 - \psi$$

$$\psi - \varphi = 11000 - 10000$$

$$\psi = 1000 + \varphi$$

ἂν εἰς τὴν τρίτην Ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ μεγέθους ψ θέσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν αὐτοῦ Δύναμιν, ἀποκτῶμεν ἀντὶ τοῦ ψ τὰ ἑξῆς

$$\varphi + 1000 + \varphi = 9000$$

$$2\varphi = 9000 - 1000$$

$$\varphi = \frac{8000}{2} = 4000$$

ἐντεῦθεν ποριζόμεθα $\chi = 10000 - \varphi$, δηλαδὴ $10000 - 4000 = 6000$, καὶ $\psi = 1000 + \varphi$, δηλαδὴ $1000 + 4000$, ἄρα $\psi = 5000$, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκεται, ὅτι χρεωστεῖ εἰς μὲν τὸν Πέτρον $= 6000$, εἰς δὲ τὸν Παῦλον $= 4000$, εἰς δὲ τὸν Ἰωάννην $= 5000$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ.

§. 127. Νὰ λύωμεν μίαν Ἐξίσωσιν τινὸς ἀπροσδιορίστου Προβλήματος.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

α.) Ἀποκαθιστῶμεν τὴν Ἐξίσωσιν οὕτως, ὥστε μόνον μία ἄγνωστος Ποσότης νὰ εὑρίσκηται εἰς τὸ ἓν μέρος κειμένη, καὶ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ δεύτερον μέρος τῆς Ἐξισώσεως, τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν ἄγνωστον Ποσότητα μετὰ τῶν Ἐγνωσμένων. ἔπειτα λαμβάνομεν ἐν τῷ δευτέρῳ μέρει μίαν Δύναμιν τῆς ἀγνώστου Ποσότητος κατὰ τὸ δοκοῦν, καὶ ζητοῦμεν τὴν Δύναμιν τῆς πρώτης. πρέπει ὅμως ἐνταῦθα νὰ προσέχωμεν, ἂν αὐτὴ ἡ Δύναμις εἶναι ἁρμόζουσα εἰς λύσιν τοῦ δεδομένου Προβλήματος, καὶ οὕτως ἀποκτῶμεν τὴν πρώτην λύσιν.

β.) Ἔπειτα λαμβάνομεν ἕνα ἄλλον ἀριθμὸν, καὶ ζητοῦμεν, ἂν καὶ οὗτος ὁ ἀριθμὸς εἶναι προσαρμόδιος εἰς λύσιν τῆς προκειμένης ὑποθέσεως. καὶ οὕτως ποιοῦντες, ποριζόμεθα τὴν δευτέραν λύσιν.

γ.) Οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, ἕως οὗ νὰ φθάσῃ ἡ λύσις εἰς τὸ ἀδύνατον. τουτέστι νὰ ληφθῇ ἀριθμὸς ἢ πολλὰ μείζων, ἢ πολλὰ ἐλάσσων, ὡς ἐν τῷ Παραδ. ὁρᾶται.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. α.

Ἔστωσαν δύω ἀριθμοὶ εἰς εὕρεσιν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι $= 12$. ἡ Ἐξίσωσις ἔσαι $\chi + \varphi = 12$, λοιπὸν $\chi = 12 - \varphi$. ὅθεν ἂν ληφθῇ τὸ $\varphi = 1$, ἔσαι τὸ $\chi = 11$. ἂν δὲ ληφθῇ τὸ $\varphi = 2$. ἔσται τότε τὸ $\chi = 10$. εἰ δ᾽ αὖ τὸ $\varphi = 3$, ἔσαι $\chi = 9$, ϗ οὕτω ἀκολούθως, ὥστε ἐνταῦθα εἰσὶν ἕνδεκα δυναταὶ λύσεις. ἐπειδὴ τόσας Δυνάμεις εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντὶ τοῦ φ, αἵτινες συμβάλλουσι πρὸς λύσιν τοῦ Προβλήματος. πρὸς τούτοις δυνάμεθα ϗ διὰ κεκλασμένων ἀριθμῶν νὰ λύσωμεν τὸ Πρόβλημα, τουτέστι ἂν ληφθῇ τὸ $\varphi = \frac{1}{2}$, ἔσται $\chi = 11 + \frac{1}{2}$. εἰ δ᾽ αὖθις τὸ $\varphi = \frac{1}{4}$, ἔσται $\chi = 11 + \frac{3}{4}$. εἰ δὲ τὸ $\varphi = 6 + \frac{2}{3}$, ἔσται $\chi = 5 + \frac{1}{3}$. ϗ οὕτω δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν λύσιν ἀδιορίσως, ὥστε ἂν ληφθῇ τὸ $\varphi = 12$, τότε ἔσται τὸ $\chi = 0$, ϗ ἑπομένως ἡ λύσις εἶναι ἀδύνατος. ἐπειδὴ ὁ δεύτερος ἀριθμὸς κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον χάνεται. ἂν δὲ ληφθῇ τὸ $\varphi = 13$, ἔσται τὸ $\chi = -1$, ἂν δὲ $\varphi = 20$, ἔσαι $\chi = -8$, ϗ οὕτω περαιτέρω, ὥστε διὰ τῶν ἀποφατικῶν Ποσοτήτων ἠμποροῦμεν νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν λύσιν ἐπ᾽ ἄπειρον.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. β΄.

Εἰς 30 Πτωχοὺς (ἄνδρας, γυναῖκας, ϗ παιδία) μοιράζονται 100 γρόσ. οὕτως, ὥσε ἑκάσῳ ἀνδρὶ δίδονται

8. Γρόσ.

8 Γρόσ. ἑκάστῃ δὲ γυναικὶ 5, ϗ ἑκάστῳ παιδὶ 1 Γρόσ. ζητεῖται λοιπόν. πόσοι ἄνδρες εἰσὶν, πόσαι δὲ γυναῖκες, ϗ πόσα παιδία·

$\chi+\varphi+\psi=30$, ὁ τῶν Πτωχῶν ἀριθμὸς

$8\chi+5\varphi+1\psi=100$, τὰ μοιραστέα Γρόσια.

ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως $\chi=30-\varphi-\psi$

ἐκ τῆς δευτέρας . . . . $\chi=\frac{100-5\varphi-\psi}{8}$

$$30-\varphi-\psi=\frac{100-5\varphi-\psi}{8}$$

$$240-8\varphi-8\psi=100-5\varphi-\psi$$

$$240-100=8\varphi-5\varphi+8\psi-\psi$$

$$140=3\varphi+7\psi$$

$$140-3\varphi=7\psi$$

$$\frac{140-3\varphi}{7}=\psi.$$

ἐπειδὴ τὸ ψ ϗ φ εἶναι σημαντικὰ ἀνθρώπων, διὰ τοῦτο δὲν ἔχει τόπον εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος ἡ ἐν Κλάσματι παρισταμένη Δύναμις. ϗ ἑπομένως ἀντὶ τοῦ φ δὲν δύναται νὰ τεθῇ καμμία Δύναμις, ἥτις ἀπὸ τῶν 140 ἀφαιρεθεῖσα ϗ διαιρεθεῖσα διὰ τοῦ 7, παρέχει κεκλασμένον Πηλίκον. ὅθεν ἀντὶ τοῦ φ, δὲν δύνανται νὰ τεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι 1, 2, 3, 4, 5, 6. ἐπειδὴ διὰ τὸ ψ παρέχουσι ἀριθμὸν Κλασματώδη.

ἐὰν δὲ τεθῇ τὸ $\varphi=7$, ἔσται $\psi=\frac{119}{7}=17$. ἄρα $\chi=30-7-17=6$. ϗ $8\chi+5\varphi+\psi$. τουτέστιν $48+35+17=100$ ἡ πρώτη λύσις. οἱ λοιποὶ ἀριθμοὶ μέχρι τοῦ 14, διδόασιν αὖθις κλασματικὸν Πηλίκον. εἰ

δὲ

δὲ τεθῇ $\varphi = 14$, ἔσται $\psi = \frac{98}{7} = 14$. ὅθεν $\chi = 2$, ϰ̀ $8\chi + 5\varphi + \psi$, ἤγουν $16 + 70 + 14 = 100$ ἡ δϵυτέρα λύσις. ἐὰν δ᾽ ὅμως τεθῇ τὸ $\varphi = 21$, γίνεται τότε τὸ χ ἀποφατικόν. ἐπειδὴ ἤθελεν εἶναι τὸ $\psi = 11$, ὅθεν δὲν ὑπάρχει ἔτι πλέον ἄλλη δυνατὴ λύσις.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ γ΄.

Ἕνας θέλει νὰ ἑνώσῃ τρία εἴδη οἴνϵ, τῶν ὁποίων τϵ̃ μὲν πρώτϵ οἴνϵ τὸ μέτρον τιμᾶται 4 Παράδ., τϵ̃ δὲ δϵυτέρϵ 8, τϵ̃ δὲ τρίτϵ 20 Παράδ. ϰ̀ πρὸς τϵ́τοις ἐθέλει, ὅλος ὁ μιχθεὶς οἶνος νὰ εἶναι 20 μέτρα, ϰ̀ νὰ πωλῇ πρὸς 10 Παράδ. τὸ μέτρον. ζητεῖται λοιπὸν, πόσα μέτρα οἴνϵ πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστϵ εἴδϵς εἰς μίξιν.

$$\chi + \varphi + \psi = 20$$
$$4\chi + 8\varphi + 20\psi = 200$$
$$\chi = 20 - \varphi - \psi$$
$$\chi = \frac{200 - 8\varphi - 20\psi}{4}$$
$$20 - \varphi - \psi = \frac{200 - 8\varphi - 20\psi}{4}$$
$$80 - 4\varphi - 4\psi = 200 - 8\varphi - 20\psi$$
$$8\varphi + 20\psi - 4\varphi - 4\psi = 200 - 80$$
$$4\varphi + 16\psi = 120$$
$$4\varphi = 120 - 16\psi$$
$$\varphi = 30 - 4\psi$$

ἐὰν ληφθῇ τὸ $\psi = 1$, ἔσται $\varphi = 26$. ἀλλὰ τϵ̃το ἀνθί

σταται

σταται εἰς τὸ Πρόβλημα. ἐπειδὴ ὅλος ὁ συμμιχθεὶς οἶνος πρέπει νὰ εἶναι 20 μέτρα. τὸ ἴδιον συμβαίνει, καὶ ἂν ληφθῇ τὸ $\psi = 2$, ἢ $= 3$. εἰ δὲ ληφθῇ τὸ $\psi = 4$, ἔσαι $\varphi = 14$, καὶ $= 2$, ἡ τιμὴ ἄρα ἔσται $4\chi + 8\varphi + 20\psi$. ἤτοι $8 + 112 + 80 = 200$. εἰ δὲ λάβωμεν τὸ $\psi = 5$, ἔσαι $\varphi = 10$, καὶ $\chi = 5$. καὶ ἡ τιμὴ ἄρα $20 + 80 + 100 = 200$. καὶ αὖθις ἂν ληφθῇ $\psi = 6$, ἔσται $\varphi = 6$, καὶ $\chi = 8$, καὶ ἡ τιμὴ ἄρα $32 + 48 + 120 = 200$. καὶ πάλιν ἂν τεθῇ $\psi = 7$, ἔσαι $\varphi = 2$, καὶ $\chi = 11$, καὶ ἡ τιμὴ $44 + 16 + 140 = 200$. ἂν ὅμως ληφθῇ τὸ $\psi = 8$, γίνονται τότε τὸ φ, καὶ χ ἀποφατικά, καὶ ἑπομένως ἡ λύσις ἔσται ἀδύνατος. μόνον λοιπὸν αὗται αἱ τέσσαρες λύσεις εἰσὶν ἁρμόδιαι εἰς τὸ Πρόβλημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ δ'.

Ἠγόρασέ τις χοίρους, αἶγας, καὶ ἀρνία ὅλα ὁμοῦ τὸν ἀριθμὸν 30 διὰ Γρόσ. 75, ἕκαστος δὲ τῶν χοίρων τιμᾶται 5 Γρόσ. τῶν δὲ αἰγῶν ἑκάστη Γρόσ. 3. τῶν δὲ ἀρνίων Γρόσ. 2. ὅθεν ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς ἑκάστου εἴδους.

$$\chi + \varphi + \psi = 30. \qquad \chi = 30 - \varphi - \psi.$$

$$5\chi + 3\varphi + 2\psi = 75 \qquad \chi = \frac{75 - 3\varphi - 2\psi}{5}.$$

$$150 - 5\varphi - 5\psi = 75 - 3\varphi - 2\psi$$

$$150 - 75 = 5\varphi - 3\varphi + 5\psi - 2\psi$$

$$75 = 2\varphi + 3\psi$$

$$75 - 3\psi = 2\varphi$$

$$\varphi = \frac{75 - 3\psi}{2}$$

ἐὰν

'ἂν μὲν ἀπὸ τῆς Μονάδος μέχρι τῶν 16 λάβωμεν τινα τέτων τῶν ἀριθμῶν ἴσον μὲ τὸ ψ, τότε ἡ Δύναμις τῦ φ, ἔσται ἤτοι Κλασματώδης, ἢ πολλὰ μείζων διὰ νὰ λύσῃ τὸ Πρόβλημα· εἰ δὲ ληφθῇ τὸ $\psi = 17$, ἔσται $\varphi = \frac{24}{2} = 12$. ϗ $\chi = 1$. ϗ αὖθις ληφθέντος τῦ $\psi = 18$, προκύπτει Κλάσμα. ἂν ὅμως ὑποτεθῇ $\psi = 19$, ϗ $\psi = 21$, ϗ $\psi = 23$, ἀναφύονται αἱ ἑξῆς Δυνάμεις, ϗ τέσσαρες τρόποι ἀναλύσεως τῦ Προβλήματος.

$\psi = 17$	$\varphi = 12$	$\chi = 1$
19	9	2
21	6	3
23	3	4

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 128. Ἐνταῦθα δὲν ἀπαιτεῖται ἄλλη νεωτέρα ἀπόδειξις. ἐπειδὴ κατὰ τὲς προαποδειχθέντας Κανόνας ζητῦμεν τὴν Δύναμιν τῦ ἑνὸς ἀγνώςυ Ποσῦ, τὴν δὲ Δύναμιν τῦ ἑτέρυ λαμβάνομεν κατὰ τὸ δοκῦν, ϗ ὅτω ζητῦμεν νὰ ἀποκτήσωμεν τὴν λύσιν τῦ Προβλήματος.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ ζ'.

§. 129. Πλήρης, ἢ Ἐντελὴς Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις εἶναι, ἔνθα ἡ ἄγνωςος Ποσότης ὑψώνεται μόνον εἰς δευτέραν Δύναμιν, ϗ ἐπομένως πρόκειται ἓν Ἐντελὲς Τετράγωνον. ὡς $\chi^2 = \alpha\alpha$. ἀπελὲς δὲ ἐςιν, ὅταν τῶν τελῶν Ὅρων (οἱ ὁποῖοι ἀπαιτῦνται εἰς ἓν Διμελὲς

Τετρα-

Τετράγωνον, καθὼς ἐν τῷ περὶ Δυνάμεων εἴρηται) ἐλλείπῃ ὁ ἔσχατος, ἢ λείπῃ τὸ Τετράγωνον τοῦ δευτέρου Μέλους, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνάγκη νὰ προστίθηται πρὸ τῆς λύσεως, διὰ νὰ γένῃ οὕτω τὸ Τετράγωνον Ἐντελές. ὡς $\chi\chi+\alpha\chi=\beta\beta$, ἢ $\chi\chi+17\chi=60$, ἢ $\chi\chi+\chi=100$.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ι.

§. 130. Νὰ λύωμεν τινα Τετραγωνικὴν Ἐξίσωσιν Ἐντελῆ.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

α.) Θέτομεν τὰς μὲν ἀγνώστους Ποσότητας εἰς τὸ ἓν μέρος, τὰς δὲ Ἐγνωσμένας εἰς τὸ ἕτερον.

β. Ἐὰν εἰς τὸ Τετράγωνον τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ πρόσκηται Συνεργός τις, ἢ Διαιρέτης, ἐξαλείφομεν αὐτὸν διὰ τῆς ἐναντίας πράξεως.

γ.) Ἐὰν τὸ Τετράγωνον ὑπάρχῃ ἀποφατικὸν, ποιοῦμεν αὐτὸ Καταφατικὸν, μετατιθέντες εἰς τὸ ἄλλο μέρος τῆς Ἐξισώσεως. ἐπειδὴ εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρχῃ ἀποφατικὸν Τετράγωνον, καθὼς δεδήλωται (§. 41).

δ.) Τέλος ἐξάγομεν καὶ ἐκ τῶν δύω μερῶν τὴν Τετραγωνικὴν ῥίζαν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. α.

$\frac{100-\chi\chi}{2}=20-2$, διὰ τῆς Ἐξαλείψεως τῦ Διαιρέτυ γίνεται $100-\chi\chi=40-4$. διὰ δὲ τῆς Μεταθέσεως τῶν ἀγνώστων γίν. $100-40+4=\chi\chi$, ἤτοι $60+4=64=\chi\chi$. ϗ διὰ τῆς Ἐξαγωγῆς τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης $\chi=8$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ β'.

$$82+2\chi\chi=180$$
$$2\chi\chi=180-82$$
$$\chi\chi=\frac{98}{2}=49$$
$$\chi=\sqrt{49},\ \text{ἄρα}\ \chi=7.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'.

§. 131. Νὰ λύωμεν Ἐξίσωσίν τινα Τετραγωνικὴν ἁπλῆ.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

α.) Μεταφέρομεν τὰ μὲν ἄγνωστα Ποσὰ εἰς τὸ ἓν μέρος ὕτως, ὥστε τὸ μὲν ἀποφατικὸν Τετράγωνον τῦ ἀγνώστυ Ποσῦ χ νὰ ἀποτελῇ τὸ πρῶτον Μέλος, τὸ δὲ ἕτερον ἄγνωστον Ποσὸν χ, μετὰ τῦ ἑαυτῦ Συνεργῦ νὰ ἐπέχῃ τὸν τόπον τῦ δευτέρυ Μέλυς. τὰ δὲ Ἐγνωσμένα

Ποσὰ

Ποσὰ θέτομεν ὅλα εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς Ἐξισώσεως.

β.) Ὁ Συνεργὸς τοῦ δευτέρου Ποσοῦ χ, διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, καὶ τὸ ἐκ τῆς Διαιρέσεως Κλάσμα Τετραγωνισθὲν, προστίθεται καὶ εἰς τὰ δύω μέρη τῆς Ἐξισώσεως.

γ.) Ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν ἐκ τοῦ πρώτου Μέλους, καὶ προσθέτομεν τὸ Ποσὸν χ, καὶ τὸν προτεθέντα Συνεργὸν μετὰ τοῦ ἑαυτοῦ παρονομαστοῦ, παραιτούμενοι τὸ διπλάσιον Γενόμενον, τὸ ἴδιον ποιοῦμεν καὶ εἰς τὸ δεύτερον Μέρος τῆς Ἐξισώσεως.

δ.) Τὴν δ' ἄλλην ῥίζαν, ἥτις προσήκειται εἰς τὸ ἄγνωστον Ποσὸν χ, μεταφέρομεν εἰς τὸ ἄλλο μέρος τῆς Ἐξισώσεως, καὶ οὕτω λυθήσεται τὸ Πρόβλημα.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ α.

$$10\chi = 600 - \chi^2$$

$\chi^2 + 10\chi = 600$ ἡ ἄλλη ῥίζα $\frac{10}{2}$, καὶ τὸ ἐξ αὐτῆς Τετράγωνον $\frac{100}{4}$.

$$\chi^2 + 10\chi + \frac{100}{4} = 600 + \frac{100}{4}$$

$$\chi + \frac{10}{2} = \sqrt{625}$$

$$\chi = 25 - 5 = 20$$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β'.

$\chi^2 + \frac{2}{3}\chi = \frac{1}{3}$ ἡ δὲ ἄλλη ῥίζα $\frac{2}{3} : 2 = \frac{2}{6}$

$= \frac{1}{3}$ καὶ τὸ ἐξ αὐτῆς Τετράγωνον $\frac{1}{9}$. λοιπὸν

$$\chi^2 + \frac{2}{3}\chi + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

$$\chi + \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$\chi = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$, ἤτοι $\chi = \frac{1}{3}$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ'.

$\chi^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{\gamma}\right)\chi = \delta^2$. ἡ δὲ ἄλλη ῥίζα $\frac{\alpha - \beta}{2\gamma}$

$$\chi^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{1\gamma}\right)\chi + \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{4\gamma^2} = \delta^2$$

$$+ \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{4\gamma^2}$$

$\chi - \frac{\alpha - \beta}{2\gamma} = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{4\gamma^2} + \delta^2}$ τυπῶσε

$$\chi = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{4\gamma^2} + \delta^2} + \frac{\alpha - \beta}{2\gamma}$$

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ε'ν ἁπλε͂ς Τετράγωνον συνίσταται ἐκ τ͂ Τετραγώνε τῆς πρώτης ῥίζης, ϗ ἐκ τ͂ διπλασίε Γινομένε τῶν ῥιζῶν, ἅιτινες πολλαπλασιάζονται μετ' ἀλλήλων. διὰ νὰ γένη λοιπὸν ὦ Ε'ντελὲς Τετράγωνον πρέπει νάπροστιθῆ ϗ ἡ δεύτερα ῥίζα. ἐπειδὴ ἐν τῷ διπλασίῳ Γινομένῳ, τοὐτέστιν ἐν τῷ χ μετὰ τ͂ ἑαυτ͂ Συνεργ͂ ὄντι ἐμπεριέχονται δύω ῥίζαι, ϗ ἐπειδὴ τῆς μιᾶς ῥίζης Παράγων εἶναι τὸ χ, διὰ τ͂το ϗ τῆς ἑτέρας πρέπει νὰ εἶναι Παράγων ὁ Ἴδιος Συνεργός. ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ Γινόμενον εἶναι τὸ διπλάσιον, διὰ τ͂το λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τ͂ Συνεργ͂ (ἢ ἄλλως, διαιρ͂μεν αὐτὸν διὰ τ͂ 2), ϗ τ͂το Τετραγωνίσαντες, ἀποκτῶμεν τὸ ἔλλειπον, ϗ τ͂τε προστεθέντος, ἔσται ἡ Τετραγωνικὴ Ε'ξίσωσις Ε'ντελής. ἀλλὰ διὰ νὰ φυλαχθῇ ἡ Ε'ξίσωσις ἀκριβῶς, ϗ νὰ μὴ λυμανθῇ, ϗ κολοβωθῇ, πρέπει τ͂το τὸ εὑρεθὲν Ε'λλειπον νὰ προστιθῇ ϗ εἰς τὰ δύω μέρη τῆς Ε'ξισώσεως. Ο'ταν δὲ δύω Τετράγωνα εἶναι Ἴσα ἀλλήλοις, πρέπει ϗ ἐξαχθεῖσαι ῥίζαι νὰ εἶναι Ἴσαι ἀλλήλαις. διότι ἐπειδὴ τὰ Τετράγωνα συνίστανται διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως τ͂ αὐτ͂ ἀριθμ͂ ἐφ' ἑαυτὸν, διὰ τ͂το εἶναι ἀδύνατον νὰ εἶναι αἱ ῥίζαι μεταξύτων Διάφοροι, ὅταν τὰ Τετράγωνα Ἴσα ἀλλήλοις ὑπάρχωσι.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ϛ'.

Τὸ μὲν Συμποσ͂μενον δύω ἀριθμῶν εἶναι 17, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον εἶναι $=$ 60, ποῖον ἄρα εἰσὶν ἤτοι οἱ δύω ἀριθμοί;

τὸ Συμπεσούμενον $\chi + \varphi = 17 \,.\, \chi = 17 - \varphi$

τὸ Γενόμενον $\chi\varphi = 60 \,.\, \chi = \frac{60}{\varphi}$

$$17 - \varphi = \frac{60}{\varphi}$$

$17\varphi - \varphi^2 = 60$

$-60 = \varphi^2 - 17\varphi$ ἡ δὲ ἄπρα ῥίζα $\frac{17}{2}$ τὸ δὲ Τετράγωνον $\frac{289}{4}$

$\frac{289}{4} - 60 = \varphi^2 - 17\varphi + \frac{289}{4}$ ἤγουν

$$\frac{289}{4} - \frac{240}{4} = \varphi^2 - 17\varphi + \frac{289}{4}$$

$$\frac{49}{4} = \varphi^2 - 17\varphi + \frac{289}{4}$$

$$\frac{7}{2} = \varphi - \frac{17}{2}$$

$\frac{17}{2} + \frac{7}{2}$ ἤτοι $\varphi = 12$. καὶ τὸ χ ἄρα $= 5$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 131. Ἐπειδὴ τὸ διπλάσιον Γενόμενον 17φ εἶναι ἀποφατικὸν, διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη καὶ θάτερος τῶν Παραγόντων, ἢ τὸ $\frac{17}{2}$, ἢ τὸ φ νὰ εἶναι ἀποφατικός. καθὼς εἰς τὴν λύσιν ἡ μὲν Δύναμις τοῦ φ εἶναι Καταφατικὴ, ἡ δὲ τοῦ $\frac{17}{2}$ ἀποφατική. ἂν ὅμως ὑποτεθῇ τὸ φ ἀποφατικὸν, καὶ τὸ $\frac{17}{2}$. Καταφατικὸν, ἔσται ἡ Ἐξίσωσις $\frac{7}{2} = \frac{17}{2} - \varphi$.

$-\phi$, ϗ διὰ τῆς μεταθέσεως $\phi = \frac{17}{2} - \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5$. τὸ ϕ ἄρα $= 5$, τὸ $\chi = 12$. ἐντεῦθεν γίνεται φανερὸν, ὅτι τοῦτο τὸ Πρόβλημα, ἢ ϗ ἐν γένει κάθε Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις δύναται νὰ λυθῇ διττῶς. ἐπειδὴ ἑνὸς μονομεροῦς Τετραγώνου ἔσαι ἡ ῥίζα ἤτοι Καταφατικὴ, ἢ ἀποφατική. ἔπειτα τῆς ῥίζης ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθείσης, συνίσαται Τετράγωνον πάντοτε Καταφατικόν. ὅθεν ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^2 = \alpha$ τὸ ἴδιον ὑπάρχει νὰ εἶναι ἡ ῥίζα $+\chi$, ἢ $-\chi$. εἰς ἓν δὲ διμελὲς Ποσὸν, ἐὰν τὸ διπλάσιον Γινόμενον εἶναι Καταφατικὸν, αἱ ῥίζαι ἔσονται ἤτοι Καταφατικαὶ, ἢ ἀποφατικαί. ἐὰν δὲ τοῦτο τὸ Γενόμενον εἶναι ἀποφατικὸν, ἐξ ἀνάγκης ἕπεται τότε ἢ ἡ μία, ἢ ἡ ἄλλη ῥίζα νὰ εἶναι ἀποφατική. ἀλλ' εἴτε κατ' ἐκείνην τὴν ὑπόθεσιν, εἴτε κατὰ ταύτην εἶναι τὰ προτιθέμενα, τὸ Πρόβλημα πάντοτε λύεται ϗ κατὰ τοὺς δύω τρόπους ὀρθῶς. μ' ὅλον ὁποῦ ἐνίοτε ἕνα μόνον τρόπον δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν.

ΠΑΡΆΔΕΙΓΜΑ έ.

Νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου τὸ Τετραπλάσιον ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ Τετραγώνου τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ἐγκαταλείπεται ὁ 21 ἀριθμός.

$\chi^2 - 4\chi = 21$ ἡ δευτέρα ῥίζα $\frac{4}{2} = 4$, ὅθεν

$\chi^2 - 4\chi + 4 = 21 + 4$, $\chi^2 - 4\chi + 4 = 25$

$\chi - 2 = 5$ ἢ $2 - \chi = 5$

$\chi = 7$ $2 - 5 = \chi$, ϗ $-3 = \chi$

λοιπὸν $\chi = 7$, ϗ $\chi = -3$ εἶναι δύω Δυνάμεις ἀρκοῦσαι πρὸς τὴν Ὑπόθεσιν, ὅθεν ἂν λάβωμεν τὴν πρώτην Δύναμιν ἀντὶ τοῦ χ, ἔσαι τὸ Τετράγωνον 49, τὸ δὲ Τετραπλάσιον 28. ϗ τούτου ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ 49 Τετραγώνου, ἐναπολείπεται 21, οἷον $49 - 28 = 21$. ἂν ὅμως λάβωμεν τὴν δευτέραν Δύναμιν ἀντὶ τοῦ χ, ἔσται τὸ Τετράγωνον τῦ $-3=9$. τὸ δὲ Τετραπλάσιον $-3\times4=-12$, τὸ ὁποῖον ἀφαιρόμενον ἀπὸ τῦ Τετραγώνυ, πρέπει νὰ γένῃ Καταφατικὸν $+12$, ὅθεν $9+12=21$.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ς'.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα δύω ἀριθμῶν $=10$. ἡ δὲ Διαφορὰ τῶν Τετραγώνων $=40$, ποῖοι ἄρα εἰσὶν ὗτοι οἱ δύω ἀριθμοί;

$$\chi+\varphi=10,\ \chi=10-\varphi,\ \text{ϗ}\ \chi^2=100-20\varphi+\varphi^2$$
$$\chi^2-\varphi^2=40,\ \chi^2=40+\varphi^2$$
$$100-20\varphi+\varphi^2=40+\varphi^2$$
$$100-40=20\varphi+\varphi^2-\varphi^2$$
$$60=20\varphi$$
$$3=\varphi \qquad \chi=7$$
$$7+3=10 \qquad 49-9=40$$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ζ.

Νὰ εὕρωμεν δύω ἀριθμὺς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα δίδοται $=10$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν Τετραγώνων $=58$,

$$\chi+\varphi=10,\ \chi=10-\varphi,\ \ \chi^2=100-20\varphi+\varphi^2$$
$$\chi^2+\varphi^2=58 \qquad \chi^2=58-\varphi^2$$
$$100-20\varphi+\varphi^2=58-\varphi^2$$
$$2\varphi^2-20\varphi=58-100$$
$$\varphi^2-\frac{20\varphi}{2}=\frac{58-100}{2},\ \text{ἡ δευτέρα ῥίζα}\ \frac{20}{4}=5$$
$$\varphi^2-10\varphi+25=25-21$$
$$\varphi-5=\sqrt{4},\ \text{ἢ}\ \ 5-\varphi=\sqrt{4}$$
$$\varphi-5=2 \qquad 5=2+\varphi$$
$$\varphi=7 \qquad 3=\varphi$$
$$\chi=3 \qquad 7=\chi$$
$$7+3=10 \qquad 49+9=58.$$

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 133. Ὅσον ἔτι προσήκει νὰ ὁμιλήσωμεν περὶ τῆς Ἐξισώσεως τῶν ἄλλων Δυνάμεων, ζητηθήσεται εἰς τὴν ὑψηλοτέραν Μαθηματικήν.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ ζ'.

Περὶ λόγων.

Ὁ'ΡΙΣΜΟ'Σ α'.

§. 134. Λόγος ὀνομάζεται ἡ Παράθεσις, ἢ ἡ Σχέσις, τὴν ὁποίαν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα δύω Ὁμοειδῆ Ποσά. οὗτος δὲ ὁ λόγος θεωρεῖται διττῶς, τουτέστιν ἢ εἶναι ὁ λόγος ἀριθμητικὸς, ἢ Γεωμετρικός· καὶ ἀριθμητικὸς λόγος καλεῖται, ὅταν παρεξετάζωμεν τὴν Διαφορὰν μεταξὺ δύω Ποσῶν, ἥτις διὰ τῆς ἀφαιρέσεως εὑρίσκεται· π. χ. παραβάλλοντες μίαν Στήλην τριῶν Ποδῶν πρὸς ἄλλην τινὰ Ποδῶν δώδεκα, θεωροῦμεν, ὅτι ἡ μία Στήλη εἶναι μείζων τῆς ἄλλης 9 Πόδας, καὶ ἐπομένως ἡ μεταξὺ τῶν δύω Στηλῶν Διαφορὰ εἶναι 9 Πόδες, καὶ αἱ Στῆλαι τότε εἶναι ἐν ἀριθμητικῷ λόγῳ, τὸν ὁποῖον καὶ διὰ τὰ τῆς ἀφαιρέσεως Σημεῖα ἐμφαίνομεν, παρενθέντες τὸ σημεῖον μεταξὺ τῶν παραβαλλομένων Ποσοτήτων. οἷον 3—12, ἢ οὕτως α . β. Γεωμετρικὸς δὲ λόγος ὀνομάζεται, ὅταν παρεξετάζωμεν, ποσάκις μία Ποσότης ἐμπεριέχεται εἰς τινα ἄλλην, τὸ ὁποῖον καὶ διὰ τῆς Διαιρέσεως ἀνακαλύπτεται. π. χ. παραβάλλοντες πρὸς ἀλλήλας τὰς ἀνωτέρω δύω Στήλας, θεωροῦμεν, ὅτι ἡ μία ἐμπεριέχεται εἰς τὴν ἄλλην τετράκις, καὶ αἱ Στῆλαι τότε εἰσὶν ἐν Γεωμετρικῷ λόγῳ, τὸν ὁποῖον καὶ διὰ τῶν τῆς Διαιρέσεως Συμβόλων παρασταίνομεν, ὡς 3 : 12, ἢ $\frac{3}{12}$, καὶ ἐν γένει α : β, ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅλα δὲ ταῦτα τὰ Σύμβολα ἐκφωνοῦνται οὕτω „ 3 πρὸς 12.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 135. Ἐφ' ἑκάστου τῶν λόγων θεωροῦνται τρία τινά. πρῶτον, τὸ Παραβαλλόμενον Ποσὸν, δεύτερον, τὸ ἄλλο Ποσὸν, πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ πρῶτον παραβάλλεται, τρίτον, ἡ ἐν ἀριθμητικῷ λόγῳ θεωρουμένη Διαφορὰ, ἢ τὸ ἐν Γεωμετρικῷ λόγῳ Πηλίκον. ταῦτα οὕτως ἀλλήλοις συνακολουθοῦσιν, ὥστε ὅταν ἐδοθῶσι τὰ δύω, τὸ τρίτον εὐκόλως εὑρίσκεται. ἔστω τὸ μὲν μεῖζον α, τὸ δὲ ἔλαττον β, ἡ δὲ τούτων Διαφορὰ δ. ὅθεν τὸ μὲν μεῖζον ἔσται $\alpha = \beta + \delta$, τὸ

δὲ

δὲ ἔλαττον $\beta = \alpha - \delta$, καὶ ἡ Διαφορὰ $\delta = \alpha - \beta$. ἂς διορισθῆ δὲ $\alpha = 10$. $\beta = 6$. $\delta = 4$. ὅθεν ἔσται $10 = 6 + 4$, καὶ $6 = 10 - 4$, καὶ $4 = 10 - 6$. πρὸς τούτοις ἐν τῇ τῶν λόγων Παραθέσει, εἴτε τὸ προτιθέμενον Ποσὸν, εἴτε τὸ ἐπιτιθέμενον μεῖζόν ἐστιν, οὐδὲν κωλύει. ἐπειδὴ ἡ 2 — 6, ἢ 6 — 3, ἡ Διαφορὰ εἶναι ὁ 4. καθὼς καὶ ἐν Γεωμετρικῷ τινι λόγῳ, ἤτοι 3 : 12, ἢ 12 : 3, τὸ Πηλίκον εἶναι 4. Ὅταν μὲν τὸ πρῶτον Μέλος εἶναι ἔλαττον τοῦ δευτέρου, τότε ὁ λόγος καλεῖται αὔξων. ὅταν δὲ μεῖζον τοῦ δευτέρου τυγχάνῃ, τότε ὀνομάζεται ὁ λόγος Μειούμενος, ἢ Ἐλαττούμενος, ἢ φθίνων.

ὉΡΙΣΜΌΣ β.

§. 136. Τὰ παραβαλλόμενα Ποσὰ ὀνομάζονται Ὅροι τοῦ λόγου, τῶν ὁποίων ὁ μὲν προτιθέμενος καλεῖται Ἡγούμενος, ἢ Πρῶτος Ὅρος, ὁ δὲ ἐπιτιθέμενος λέγεται Ἑπόμενος, ἢ Δεύτερος Ὅρος. ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις ἐν τῷ ἀριθμητικῷ λόγῳ παραστάινει τὴν μεταξὺ τῶν δύω Ποσοτήτων Διαφορὰν, ὀνομάζεται Διαφορὰ, τὸ δὲ ἐπὶ τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου διὰ τῆς Διαιρέσεως τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου προκύπτον καλεῖται Πηλίκον, ἢ Ἐκθέτης τοῦ λόγου.

ΠΌΡΙΣΜΑ α.

§. 137. Ἐπειδὴ ἕκαστον Γεωμετρικὸν λόγον ἀποκτῶμεν διὰ τῆς Διαιρέσεως. ἕκαστον δὲ Κλάσμα εἶναι μία Διαίρεσις. ἄρα καὶ ἕκαστον Κλάσμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς Γεωμετρικός τις λόγος.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 138. Ἐκ τῶν εἰρημένων ὡσαύτως ἀκολουθεῖ, ὅτι ἐπὶ μὲν ἀριθμητικοῦ λόγου οἱ Ὅροι μόνον διὰ τῆς Διαφορᾶς διακρίνονται, ἐπὶ δὲ τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου μόνον διὰ τοῦ Πηλίκου. διὰ τοῦτο καὶ τὸν μείζονα Ὅρον ἀποκτῶμεν, ὅταν ἐν μὲν τῷ ἀριθμητικῷ λόγῳ τὴν Διαφορὰν μετὰ τοῦ Ἐλάττονος Ὅρου συνάπτωμεν, ἐν δὲ τῷ Γεωμετρικῷ τὸν ἐλάττονα Ὅρον μετὰ τοῦ Πηλίκου πολλαπλασιάζωμεν· ἐὰν ὑποτεθῇ ὁ Ἡγούμενος Ὅρος 2, ἡ δὲ Διαφορὰ 3, ἔσται τότε ὁ Ἑπόμενος $2 + 3 = 5$. καὶ πάλιν ἐὰν ὑποτεθῇ ὁ Ἡγούμενος 2, τὸ δὲ Πηλίκον 3, ἔσται τότε ὁ Ἑπόμενος Ὅρος $2 \times 3 = 6$. ὅθεν γενικῶς ὁ Ἑπόμενος Ὅρος ἐπὶ μὲν ἀριθμητικοῦ λόγου, οὐδὲν ἄλλο ἐστὶν, εἰ μὴ αὐτὸς ὁ Ἡγούμενος μετὰ τῆς Διαφορᾶς. ἐπὶ δὲ Γεωμετρικοῦ λόγου εἶναι αὐτὸς ὁ Ἡγούμενος Ὅρος πεπολλαπλασιασμένος μετὰ τοῦ Πηλίκου.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ'.

§. 139. Ὅθεν ὅταν θελήσωμεν νὰ ἀποκτήσωμεν γενικῶς μίαν Ἀλγεβραϊκὴν Ἔκθεσιν ἀριθμητικοῦ λόγου, καὶ νὰ ὀνομάσωμεν τὸν μὲν Πρῶτον Ὅρον α, τὴν δὲ Διαφορὰν δ, ἔσται τότε ὁ δεύτερος Ὅρος $\alpha + \delta$. ἂν δὲ ὁ Πρῶτος Ὅρος ὑποτεθῇ β, ἔσται τότε καὶ ὁ Δεύτερος $\beta + \delta$, καὶ οὕτω καθεξῆς. καθὼς καὶ ἐπὶ Γεωμετρικοῦ λόγου ἂν ὀνομασθῇ ὁ Πρῶτος Ὅρος α, τὸ δὲ Πηλίκον Π, ἔσται ὁ Δεύτερος Ὅρος $\alpha\pi$. εἰ δὲ ὀνομασθῇ ὁ Πρῶτος β, ἔσται ὁ Δεύτερος $\beta\pi$. καὶ οὕτω καθεξῆς. ὁ γενικὸς λοιπὸν Τύπος (Ἔκθεσις) τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου εἶναι $\alpha . \alpha + \delta$, ἢ $\beta . \beta + \delta$, ἢ $\gamma . \gamma + \delta$. τοῦ δὲ Γεωμετρικοῦ λόγου οὗτος $\alpha : \alpha\pi$, ἢ $\beta : \beta\pi$, ἢ $\gamma : \gamma\pi$. καὶ ἐν γένει δυνάμεθα ἀντὶ τοῦ Δευτέρου Ὅρου νὰ μεταχειριζώμεθα τὸν Πρῶτον Ὅρον μετὰ τῆς Διαφορᾶς $+ \delta$, ἢ μετὰ τοῦ Πηλίκου $\times \pi$. τὸ ὁποῖον καὶ ἐκφράζεται διὰ τῶν ἑξῆς δύο Θεωρημάτων.

ΘΕΩ-

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ ά.

§. 140. Ἐπὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου τὸ ἐκ τοῦ ἐλάσσονος Ὅρου ϗ τῆς Διαφορᾶς Συμποσούμενον, τουτέστι τὸ τούτων Κεφάλαιον εἶναι Ἴσον μὲ τὸν μείζονα Ὅρον.

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ β́.

§. 141. Ἐπὶ τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου τὸ Γινόμενον ἐκ τοῦ Ἐλάττονος Ὅρου ϗ τοῦ Πηλίκου Ἴσον ἐστὶ μὲ τὸν μείζονα Ὅρον.

Ἡ Δεῖξις τούτων τῶν Θεωρημάτων ἀναφύεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω Πορισμάτων.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 142. Ἂν τύχῃ νὰ εἶναι ὁ Πρῶτος Ὅρος μείζων, τότε ἐπὶ μὲν τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου ὁ Δεύτερος Ὅρος εἶναι αὐτὸς ὁ Πρῶτος $-\delta$, ϗ ὁ λόγος ἔσαι $\alpha \,.\, \alpha - \delta$. ἐπὶ δὲ Γεωμετρικοῦ λόγου ὁ Δεύτερος Ὅρος εἶναι αὐτὸς ὁ Πρῶτος διῃρημένος διὰ τοῦ Πηλίκου, ϗ ὁ Τύπος ἔσαι $\alpha : \frac{\alpha}{\pi}$.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ γ́.

§. 143. Ἴσοι λόγοι εἰσὶν ἐκεῖνοι, οἵτινες ἔχουσι τὴν αὐτὴν Διαφορὰν, ἢ τὸ αὐτὸ Πηλίχον π. χ. $7 - 3$, ϗ $9 - 5$ εἰσὶν Ἴσοι λόγοι. ἐπειδὴ ϗ εἰς τοὺς δύω τούτους λόγους ἡ Διαφορὰ εἶναι ὁ 4. ϗ ἐπομένως ὁ 7 ἔχει πρὸς τὸν 3 τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ 9 πρὸς τὸν, 5. $\alpha \,.\, \alpha+\delta$, ϗ $\beta \,.\, \beta+\delta$ εἰσὶν Ἴσοι λόγοι. ὡσαύτως ϗ $3 : 15$, ϗ $2 : 10$ εἰσὶν Ἴσοι λόγοι. ἐπειδὴ ἔχουσι τὸ αὐτὸ Πηλίκον 5. ϗ ὁ 3 ἔχει πρὸς τὸν 15 τὸν Ἴδιον λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ 2 πρὸς τὸν 10. $\alpha : \alpha\pi$, ϗ $\beta : \beta\pi$, εἰσὶν Ἴσοι λόγοι. ἄνισοι δὲ λόγοι εἰσὶν, ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουσι τὴν αὐτὴν Διαφορὰν, μήτε τὸ αὐτὸ Πηλίκον.

ΟΡΙΣΜΟΣ δ΄.

144. Ὅταν εἰς δύω Ἴσους λόγους οἱ Ἡγούμενοι Ὅροι εἶναι μείζονες, ἢ ἐλάττονες τῶν Ἑπομένων, τουτέστιν, ὅταν ὁ ἐν τῷ πρώτῳ λόγῳ Ἡγούμενος Ὅρος ἔχῃ πρὸς τὸν Ἴδιον Ἑπόμενον τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ ἐν τῷ δευτέρῳ λόγῳ Ἡγούμενος πρὸς τὸν Ἑπόμενον, ἢ ὅταν εἶναι ϗ οἱ δύω λόγοι αὔξοντες, ἢ Μειούμενοι, οἱ λόγοι τότε καλοῦνται Ὀρθοὶ, ἢ Εὐθεῖς. οἷον $7 - 3$, ϗ $9 - 5$ εἰσὶν ἐν Ὀρθῷ

λόγῳ. καθὼς καὶ 3 : 15, καὶ 2 : 10. ὅταν δὲ ὁ ἐπὶ τοῦ πρώτου λόγου Ἡγούμενος τυγχάνῃ μείζων τοῦ Ἰδίου Ἑπομένου, ὁ δὲ τοῦ δευτέρου λόγου Ἡγούμενος Ὅρος εἶναι ἐλάττων τοῦ Ἰδίου Ἑπομένου, ἢ ἀνάπαλιν ὁ πρῶτος ἐλάττων, καὶ ὁ Δεύτερος μείζων. τουτέστιν ὅταν ὁ τοῦ πρώτου λόγου Ἡγούμενος Ὅρος πρὸς τὸν Ἴδιον Ἑπόμενον ἔχῃ λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ τοῦ δευτέρου λόγου Ἑπόμενος Ὅρος πρὸς τὸν Ἡγούμενον, ἢ ὁ μὲν ἕνας λόγος τυγχάνῃ αὔξων, ὁ δὲ ἕτερος Ἐλαττούμενος, οἱ λόγοι τότε ὀνομάζονται ἀντίστροφοι, οἷον 7—3, καὶ 5—9. α . $\alpha+\delta$, καὶ $\beta+\delta$. β εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀντιστρόφῳ καθὼς καὶ 3 : 15, καὶ 10 : 2. $\alpha : \alpha\pi$, καὶ $\beta\pi : \beta$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 145. Δυνάμεθα ὥστόσον νὰ μεταβάλωμεν κάθε ἀντίστροφον λόγον εἰς Ὀρθὸν, μετατεθέντες τοὺς Ὅρους τοῦ ἑνὸς, ἢ τοῦ ἄλλου λόγου, διὰ νὰ ἔλθωσιν ὥστε οἱ μεταφερθέντες Ὅροι εἰς τὴν αὐτὴν Τάξιν, ὁποῦ ἔχουσιν οἱ ἄλλοι Ὅροι. καὶ τότε ἔσονται καὶ οἱ δύω λόγοι ἤτοι αὔξοντες, ἢ Ἐλαττούμενοι.

ΟΡΙΣΜΟΣ ι.

§. 146. Λόγος Ἰσότητος ὀνομάζεται, ὅταν ὁ Πρῶτος καὶ Δεύτερος Ὅρος συνίσταται ἐξ Ἴσων

καὶ

καὶ τῶν αὐτῶν Ποσοτήτων, ὡς 6 = 6. α : α. Διπλάσιος δὲ Γεωμετρικὸς λόγος λέγεται, ὅταν ὁ δεύτερος Ὅρος ἐμπεριέχηται δὶς ἐν τῷ πρώτῳ Ὅρῳ, ἢ Ὅταν τὸ Πηλίκον τυγχάνῃ ὁ 2, ὡς 6 : 3, καὶ 10 : 5. 8 : 4, καὶ 20 : 10. Τριπλάσιος δὲ λόγος ἐστὶν, ὅταν ὁ δεύτερος Ὅρος ἐμπεριέχηται τρὶς εἰς τὸν πρῶτον Ὅρον ὡς 6 : 2, καὶ 12 : 4. Τετραπλάσιος δὲ λόγος καλεῖται, ὅτε αὖθις ὁ δεύτερος τετράκις ἐμπεριέχεται ἐν τῷ πρώτῳ, ὡς 20 : 5, καὶ 8 : 2. καὶ οὕτω καθεξῆς.

ὉΡΙΣΜΌΣ ϛ.

§. 147. Ἐὰν οἱ Ὅροι δύω, ἢ πλειόνων Γεωμετρικῶν λόγων μετ᾽ ἀλλήλων πολλαπλασιασθῶσιν, τουτέστιν οἱ Ἡγούμενοι μετὰ τῶν Ἡγουμένων, καὶ οἱ Ἑπόμενοι μετὰ τῶν Ἑπομένων, τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον ὀνομάζεται λόγος Σύνθετος. οἱ δὲ ἁπλοῖ λόγοι λέγονται Συντεθέντες, ἢ Συνθετικοὶ λόγοι. οὕτως ἐκ τῶν λόγων 2 : 9, καὶ 4 : 7 γίνεται Σύνθετος λόγος 8 : 63, καὶ ἐκ τῶν 3 : 6 : καὶ 4 : 16. προκύπτει Σύνθετος λόγος 12 : 96. τὸ δὲ Πηλίκον (ὁ Ἐκθέτης) ἑνὸς Συνθέτου λόγου

εἶναι

εἶναι πάντοτε τὸ Γινόμενον ἐκ τῶν Πηλίκων τῶν Συντεθέντων λόγων. οἷον τὰ μὲν Πηλίκα τῶν 3 : 6, καὶ 4 : 16 Συντεθέντων λόγων εἰσὶν ὁ 2 καὶ 4. τὸ δὲ Πηλίκον τοῦ Συνθέτου λόγου ἐστὶν ὁ 8, τὸ ἐκ τοῦ 2 καὶ 4 δηλονότι Γινόμενον. Ἔστωσαν ἔτι καὶ διὰ Γραμμάτων δύω λόγοι α : β, καὶ γ : ε, ὁ δὲ Ἐκθέτης, ἢ τὸ Πηλίκον τοῦ Πρώτου λόγου ἔστω μ, τοῦ δὲ δευτέρου ἔστω ν. ὅθεν κατὰ τὸ γ΄. Πόρισμα ὁ μὲν πρῶτος λόγος μεταποιεῖται εἰς τὸν α : αμ. ὁ δὲ δεύτερος λόγος εἰς τὸν γ. γν. καὶ τούτων πολλαπλασιασθέντων ὡς εἴρηται, προκύπτει ὁ ἑξῆς Σύνθετος λόγος. αγ : αγμν, ὁ δὲ τούτου Ἐκθέτης ἔσται μν. ὁ δὲ λόγος ὁ Συντεθειμένος ἐκ δύω Ἴσων λόγων, καλεῖται Διπλασίων, ἢ Τετραγωνικὸς λόγος, καὶ ὁ Ἐκθέτης τούτου εἶναι τὸ Τετράγωνον τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ὄντος Ἐκθέτου τῶν οὕτως Ἴσων λόγων. ἐπειδὴ ὁ Ἐκθέτης ἑνὸς Συνθέτου λόγου εἶναι αὐτὸ τὸ Γινόμενον, τὸ ὁποῖον παράγεται ἐκ τῶν Ἐκθετῶν τῶν Συντεθέντων λόγων. ἀλλὰ μὴν ἐπὶ τῶν Ἴσων λόγων εἶναι καὶ εἰς τὰ δύω Μέρη ὁ αὐτὸς Ἐκθέτης, ἄρα ἀφ᾽ οὗ πολλαπλασιασθῇ οὗτος ὁ Ἐκθέτης ἐφ᾽ ἑαυτὸν, γίνεται ἓν Τετράγωνον, ϗ εἶναι ἄρα ὁ Ἐκθέτης ἑνὸς Διπλασίονος λόγȣ. καθὼς ἐκ τῶν 2.4, ϗ 3:6 γίνεται Σύνθετος λόγος 6:24, τȣ̃ ὁποίȣ λόγȣ ὁ Ἐκθέτης εἶναι 4, τȣτέςι τὸ Τετράγωνον τȣ̃ ἁπλȣ̃ Ἐκθέτȣ 2. ὡσαύτως ϗ διὰ Γραμμάτων ἐκ δύω Ἴσων λόγων α:απ, ϗ β:βπ ἀναφύεται ὁ Σύνθετος λόγος αβ:αβππ, τȣ̃ ὁποίȣ Ἐκθέτης εἶναι ππ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ Τετράγωνον τȣ̃ ἑνὸς μόνȣ τῶν Ἐκθετῶν. ἄρα κ. τ. Ἐὰν δὲ τρεῖς Ἴσοι λόγοι μετ᾽ ἀλλήλων πολλαπλασιασθῶσιν, ἀναφύεται ὁ καλȣ́μενος Τριπλασίων, ἢ Κυβικὸς λόγος, ὁ δὲ τȣ́τȣ Ἐκθέτης ἐςὶν ὁ Κύβος τȣ̃ ἑνὸς μόνȣ τῶν Ἐκθετῶν. καθὼς ἐκ τῶν 2:4, ϗ 3:6, ϗ 4:8 λόγων προκύπτει Σύνθετος λόγος 24:192, τȣ̃ ὁποίȣ Ἐκθέτης εἶναι ὁ 8, ὁ Κύβος δηλαδὴ τȣ̃ ἑνὸς ϗ μόνȣ τῶν Ἐκθετῶν. ὡσαύτως ϗ διὰ Γραμμάτων ἐκ τῶν α:απ, ϗ β:βπ, ϗ γ:γπ λόγων γίνεται Σύνθετος λόγος αβγ:αβγπππ, τȣ̃ ὁποίȣ Ἐκθέτης ὑπάρχει π^3 ὁ Κύβος τȣ̃ ἑνὸς μόνȣ Ἐκθέτȣ π. ϗ ȣ̃τως ἀκολȣ́θως δύναταί τις νὰ συνθέτῃ ϗ Τετραπλασίονας, ϗ Πενταπλασίονας κ. τ. λόγȣς.

ΘΕΩ-

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ.

§. 148. Οἱ Ὅροι ἑνὸς Γεωμετρικῦ λόγυ κἂντε πολλαπλασιασθῶσι, κἂντε διαιρεθῶσιν ὑπὸ τῦ Ἰδίυ ἀριθμῦ, ἢ Μεγέθυς, ὁ λόγος τύτων δὲν μεταβάλλεται.

ΔΕΙ῀ΞΙΣ.

Ἕκαστος Γεωμετρικὸς λόγος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς Κλάσμα (137). ἀλλ' ἐπειδὴ εἴτε ὁ ἀριθμητὴς, εἴτε ὁ Παρονομαστὴς πολλαπλασιασθῇ, ἢ διαιρεθῇ ὑπὸ τῦ Ἰδίυ ἀριθμῦ, ἡ Δύναμις τῦ Κλάσματος δὲν μεταβάλλεται (§. 70. ἀριθμ.). ἄρα ἡ Δύναμις ἑνὸς Γεωμετρικῦ λόγυ δὲν μεταβάλλεται.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ ή.

Περὶ ἀναλογίας.

ΟΡΙΣΜΟ'Σ ά.

§. 149. Ἀναλογία καλεῖται ἐν γένει ἡ Παράθεσις δύω Ἴσων λόγων. αὕτη δὲ ἡ ἀναλογία εἶναι διττὴ, ἀριθμητικὴ δηλονότι καὶ Γεωμετρικὴ, καὶ ἀριθμητικὴ μὲν ἀναλογία εἶναι, ὅταν ἀριθμητικοὶ λόγοι παραβάλλωνται πρὸς ἀλλήλες. Γεωμετρικὴ δὲ εἶναι, ὅτε Γεωμετρικοὶ λόγοι παραθέτονται πρὸς ἀλλήλες. ὅθεν ἅπαντας τὸς λόγες, οἱ ὁποῖοι ἔχεσι τὴν αὐτὴν Διαφορὰν, ἢ τὸ αὐτὸ Πηλίκον, δυνάμεθα νὰ κατατάξωμεν εἰς τάξιν ἀναλογίας, καὶ νὰ τὸς συνθέτωμεν, παρενθέτοντες μεταξὺ τέτων τὸ Σημεῖον τῆς Ἰσότητος· οἷον ἐκ μὲν τῶν δύω τέτων Ἴσων λόγων 3 — 7, καὶ 5 — 9 γίνεται αὕτη ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία 3 — 7 = 5 — 9. ἐκ δὲ τῶν δύω τέτων. 3 : 9, καὶ 4 : 12 ἀποκαθίσταται Γεωμ. ἀναλογία 3 : = 4 : 12. ὁ τρόπος ταύτης τῆς Παραθέσεως ἐπὶ μὲν τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας ἐκφωνεῖται ὅτως „ Ὁ 3 πρὸς τὸν 7 ἔχει ἀριθμητικῶς τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ 5 πρὸς τὸν 9. ἐπὶ δὲ τῆς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας ἐκφράζεται ὅτως „ Ὁ 3 πρὸς τὸν 9 ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ 4 πρὸς τὸν 12, ἢ συντομώτερον ὅτως „ ὡς 3 πρὸς 9, ὅτως 4 πρὸς 12. Εἰς τὴν Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν ἡ λέξις ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΣ δὲν λέγεται. ἐπειδὴ εἰς κάθε ἀναλογίαν, εἰς τὴν ὁποίαν δὲν ἀπαντᾶται αὕτη ἡ λέξις, ἐννοεῖται, ὅτι ἡ ἀναλογία εἶναι Γεωμετρική.

ΠΟ-

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ α'.

§. 150. Ἑκάστη λοιπὸν ἀναλογία συνίσταται ἐκ τεσσάρων Ὅρων, δηλαδὴ ἐκ δύω Ἡγουμένων, καὶ ἐκ δύω Ἑπομένων. Ὁ Πρῶτος, καὶ ὁ ἔσχατος Ὅρος λέγονται ἄκροι, ἢ ἄκροι, ὁ δὲ δεύτερος, καὶ τρίτος Ὅρος ὀνομάζονται Μέσοι.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ β'.

§. 151. Ὅ, τι περὶ τῶν λόγων (§. 144,) προείρηται, τὸ ἴδιον δύναται νὰ λεχθῇ καὶ περὶ τῶν ἀναλογιῶν, τουτέστιν ὅταν οἱ Ἡγούμενοι Ὅροι ἔχωσι πρὸς τοὺς Ἑπομένους τὸν αὐτὸν λόγον, καθὼς εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀναλογίας, τότε ἡ ἀναλογία ὀνομάζεται Ὀρθή. ὅταν ὅμως οἱ λόγοι ἄλλως πως ἔχωσι, τουτέστιν ὁ πρῶτος Ὅρος ἔχῃ πρὸς τὸν δεύτερον, ὡς ὁ Τέταρτος πρὸς τὸν Τρίτον. οἷον $3 - 7 \risingdotseq 9 - 5$, ἢ $3 : 9 \risingdotseq 12 : 4$, τότε ἡ ἀναλογία καλεῖται ἀντίστροφος, καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ ἡ ἀναλογία, τῆς ὁποίας ὁ ἕνας λόγος εἶναι αὔξων, ὁ δὲ ἄλλος εἶναι Ἐλαττούμενος, ὀνομάζεται ἀντίστροφος, δυνάμεθα ὅμως ταύτην νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς Ὀρθήν, τοὺς Ὅρους τοῦ Δευτέρου λόγου μεταθέτοντες, ὡς $3 - 7 \risingdotseq 5 - 9$, καὶ $3 : 9 \risingdotseq 4 : 12$.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ γ',

§. 152. Ἐντεῦθεν ἀναφύεται μία γενικὴ Ἔκθεσις ἀναλογίας. διότι, ἐπειδὴ κάθε μὲν ἀριθμητικὸς λόγος ἐκφράζεται διὰ τοῦ $\alpha . \alpha + \delta$, ἢ $\beta . \beta + \delta$, κάθε δὲ Γεωμετρικὸς παρίσταται διὰ τοῦ $\alpha : \alpha\pi$, ἢ $\beta : \beta\pi$, διὰ τοῦτο ἂν δύω τοιοῦτοι λόγοι συνδεθῶσι διὰ τοῦ Σημείου τῆς Ἰσότητος, προκύπτει ἕνας Γενικὸς Τύπος τῆς μὲν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας $\alpha . \alpha + \delta \risingdotseq \beta . \beta + \delta$, τῆς δὲ Γεωμετρικῆς $\alpha : \alpha\pi \risingdotseq \beta : \beta\pi$.

ΟΡΙΣΜΟΣ β΄.

§. 153. Ὅταν ὁ Ἑπόμενος Ὅρος τοῦ πρώτου λόγου εἶναι ἅμα Ἡγούμενος τοῦ δευτέρου λόγου, τουτέστιν ὅταν οἱ δύω Μέσοι Ὅροι εἶναι Ἴσοι, ὡς ἐν τῷ Παραδείγματι $3 - 5 = 5 - 7$, ἢ $3 : 6 = 6 : 12$, ἢ $\alpha : \beta = \beta : \gamma$, τότε ἡ ἀναλογία ὀνομάζεται Συνεχής, εἰς τὴν ὁποίαν τινὲς συνεθίζουσι νὰ γράφωσιν ὁμοῦ τὸν δεύτερον, καὶ τρίτον Ὅρον ἅπαξ, οἷον εἰς μὲν τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλ. οὕτως $\div 3 - 5 - 7$; εἰς δὲ τὴν Γεωμετρικὴν $\because 3 : 6 : 12$: ἢ $\because \alpha : \beta : \gamma$, καὶ νὰ ὀνομάζωσι τότε τοῦτον τὸν δεύτερον Ὅρον Μέσον ἀνάλογον. Ὅταν δὲ οἱ δύω Μέσοι Ὅροι εἶναι διάφοροι, τότε ἡ ἀναλογία ὀνομάζεται Διακεκριμένη.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 154. Ἂν ἐπὶ τῆς Συνεχοῦς ἀναλογίας μεταχειρισθῶμεν τὸν ἐν τῷ γ΄. Πορίσματι προκύψαντα τύπον $\alpha \,.\, \alpha + \delta$, ἴσαι τότε ὁ δεύτερος λόγος $\alpha + \delta \,.\, \alpha + 2\delta$. διότι, ἐπειδὴ ὁ Ἡγούμενος Ὅρος τοῦ δευτέρου λόγου εἶναι Ἴσος μὲ τὸν Ἑπόμενον Ὅρον τοῦ πρώτου λόγου, διὰ τοῦτο ἐνταῦθα ὁ Ἡγούμενος εἶναι $\alpha + \delta$, καὶ πάλιν, ἐπειδὴ ὁ Ἑπόμενος Ὅρος πρέπει νὰ αὐξάνηται διὰ τῆς Διαφορᾶς (§. 138), ἴσαι ἄρα ἐνταῦθα ὁ Ἑπόμενος Ὅρος $\alpha + \delta + \delta$, ἤτοι $\alpha + 2\delta$. καὶ ἡ Ἔκθεσις τῆς ἀναλογίας $\div \alpha \,.\, \alpha + \delta \,.\, \alpha + 2\delta$. ἐὰν δὲ εἰς

τὴν

τὴν Γεωμετρικῆς ἀναλογίαν εἶναι ὁ πρῶτος λόγος α : απ, ὁ δεύτερος πρέπει νὰ εἶναι απ : α π π. διότι, ἐπειδὴ ὁ Ἑπόμενος Ὅρος τοῦ Δευτέρου λόγου εἶναι αὐτὸς ὁ Ἡγούμενος πεπολλαπλασιασμένος μετὰ τοῦ Πηλίκου, διὰ τοῦτο ὁ Ἑπόμενος οὗτος Ὅρος εἶναι $\alpha\pi \times \pi = \alpha\pi^2$, καὶ ἡ Ἔκθεσις τῆς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας εἶναι $\div\!\!\div \alpha . \alpha\pi : \alpha\pi^3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 155. Ἐφ' ἑκάστης ἀριθμητικῆς ἀναλογίας εἴτε Συνεχοῦς, εἴτε Διακεκριμένης; τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων Ὅρων εἶναι Ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν Μέσων· ἐπὶ δὲ Γεωμετρικῆς ἀναλογίας τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον εἶναι Ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῶν Μέσων Παραγόμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἂς ὑποτεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία $\alpha . \gamma = \beta . \varepsilon$. ὅθεν οἱ ἄκροι Ὅροι ὁμοῦ συναφθέντες, ἔσονται Ἴσοι μὲ τοὺς Μέσους, οἷον $\alpha + \varepsilon = \gamma + \beta$. ἐπειδὴ δὲ ἀντὶ τῶν Ἑπομένων Ὅρων δύο λόγων δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τοὺς Ἡγουμένους Ὅρους μετὰ τῆς Διαφορᾶς (§. 138, καὶ §. 154), Καὶ ἐπειδὴ εἰς Ἴσους λόγους εἶναι ἡ Ἰδία Διαφορά, διὰ τοῦτο δύναται νὰ ἐκτεθῇ αὕτη ἡ δοθεῖσα ἀναλογία κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον $\alpha . \alpha + \delta = \beta . \beta + \delta$, ὡς καὶ ἐν τῷ γ΄. Πορίσματι (§. 139, καὶ §. 152) δεδήλωται. ἀλλὰ μὴν ταύτης τῆς ἀναλογίας οἱ δύο ἄκροι Ὅροι συναφθέντες, εἰσὶν $\alpha + \beta + \delta$, οἱ δὲ Μέσοι ὡσαύτως $\alpha + \beta + \delta$. Ἴσοι δηλονότι ἀλλήλοις. ἄρα εἰς κάθε ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν δύω ἄκρων Ἴσον ἐστὶ τῷ τῶν Μέσων ἀθροίσματι. ἔστω δὲ καὶ διʼ ἀριθμῶν αὕτη ἡ ἀναλογία πρὸς σαφεστέραν κατάληψιν. $3-5=7-9$. εἰς τὴν ὁποίαν ἕκαστος βλέπει, ὅτι τὸ Κεφάλαιον τῶν ἄκρων Ἴσον ἐστὶ μὲ τὸ Κεφάλαιον τῶν Μέσων Ὅρων. Ἐὰν δʼ οὐδεὶς ὑποτεθῇ Γεωμετρικήτις ἀναλογία, οἷον $\alpha:\gamma=\beta:\delta$, ἔσται διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως $\alpha\delta=\beta\gamma$, ἡ ὁποία εἶναι ὁμοία μὲ τὴν ἐν τῷ τελτῳ Πορισμ. (§. 139) γενικῶς ἐκτεθεῖσαν Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν $\alpha:\alpha\pi=\beta:\beta\pi$. ἀλλʼ ἐπειδὴ εἰς αὐτὴν τὴν ἀναλογίαν τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Παραγόμενον $\alpha\beta\pi$ Ἴσόν ἐστι καὶ ὅμοιον μὲ τὸ ἐκ τῶν Μέσων Παραγόμενον $\alpha\beta\pi$. ἄρα ἐφʼ ἑκάστης Γεωμετρικῆς ἀναλογίας τῷ ἐκ τῶν ἄκρων Παραγόμενον Ἴσον .... κ. τ.

ΠΟΡΙΣΜΑ α´.

§. 156. Ἂν ἐπὶ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως $\alpha+\epsilon=\beta+\gamma$ τεθῇ $\beta+\delta$ ἀντὶ τῆς Δυνάμεως ϵ εἰς τὸ πρῶτον μέρος, εἰς δὲ τὸ δεύτερον μέρος τεθῇ $\alpha+\delta$ ἀντὶ τῆς Δυνάμεως τοῦ γ, προκύπτουσιν ἔτω ἀθροίσματα Ἴσα, τουτέστι $\alpha+\beta+\delta=\beta+\alpha+\delta$. ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἀναλογίας $\alpha\delta=\beta\gamma$ ἡ Δύναμις τοῦ δ εἶναι $\beta\pi$, καὶ ἡ Δύναμις τοῦ γ εἶναι $\alpha\pi$, τὰ ὁποῖα τεθέντα ἀντʼ ἐκείνων, περιέχουσιν Ἴσα Γενόμενα, τουτέστι $\alpha\beta\pi=\beta\alpha\pi$.

ΠΟΡΙΣΜΑ β´.

§. 157. Ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς Συνεχοῦς ἀναλογίας ὁ δεύτερος Ὅρος μʼ ὅλον ὅπου τίθεται ἅπαξ, ἐννοεῖται ὡς δὶς τιθέμενος, διὰ τοῦτο εἰς μὲν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων τουτέστι τοῦ πρώτου καὶ τρίτου Ὅρου εἶναι Ἴσον μὲ τὸ Διπλάσιον τοῦ Μέσου Ὅρου, οἷον ἐν τῇ $\div\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$ εἶναι $\alpha+\gamma=2\beta$. Εἰς δὲ Γεωμετρικὴν τὴν ἀναλογίαν τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον τυγχάνει Ἴσον μὲ τὸ Τετράγωνον τοῦ Μέσου Ὅρου· οἷον ∺ $\alpha : \beta : \gamma$ γίνεται $\alpha\gamma = \beta\beta$. ἐπειδὴ ἂν λυθῶσιν αὗται αἱ ἀναλογίαι εἰς Διακεκριμένας, ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἀναλογ. γίνεται $\alpha . \beta = \beta . \gamma$, ἄρα $\alpha + \gamma = 2\beta$. ἐκ δὲ τῆς δευτέρας ἀναλογ. γίνεται $\alpha : \beta = \beta : \gamma$, ἄρα $\alpha\gamma = \beta\beta$. καθάπερ δὴ καὶ δι' ἀριθμῶν τὸ ἴδιον γίνεται, καὶ ἔστω ἀναλογία ÷ 3 . 7 . 11, ὅθεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων εἶναι 14, τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ Μέσου ὁμοίως 14. ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῆς ∺ 3 : 6 : 12 τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον εἶναι 36 τὸ δὲ Τετράγωνον τοῦ Μέσου αὖθις 36, οἷον $6 \times 6 = 36$.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ'.

§. 158. Ἐντεῦθεν ἀνακύπτει ἡ Μέθοδος, δι' ἧς δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν ἑκάστην ἀναλογίαν εἰς Ἐξίσωσιν, καὶ ἑκάστην Ἐξίσωσιν εἰς ἀναλογίαν. ἐπειδὴ ἔκ τινος ἀναλογίας δύναται νὰ προκύπτει πάντοτε ἤτοι ἄθροισμα, ἢ Παραγόμενον τῶν ἄκρων καὶ Μέσων Ὅρων, καὶ οὕτω νὰ γίγνηται Ἐξίσωσις. καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν δοθῶσι δύω μέρη μιᾶς Ἐξισώσεως, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν αὐτὰ εἰς δύω ἕτερα μέρη, τὰ ὁποῖα νὰ δίδωσι τὸ ἴδιον ἄθροισμα, ἢ εἰς δύω Παράγοντας, ἐξ ὧν νὰ προκύπτει τὸ ἴδιον Παραγόμενον, π. χ. ἐκ τῆς Ἐξισώσεως $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ δύναται νὰ γένῃ $\alpha . \gamma = \delta . \beta$, ἐκ δὲ τῆς $\alpha\beta = \gamma\delta$ δύναται νὰ γένῃ ἡ $\alpha : \gamma = \delta : \beta$ ἀναλογία, οὕτω καὶ ἐκ τοῦ $12 = 12$ γίνεται $3 + 9 = 5 + 7$, καὶ ἐντεῦθεν $3 . 5 = 7 . 9$ ἀριθμητικῶς, καθάπερ πάλιν καὶ Γεωμετρικῶς ὁ 12 ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς Παράγοντας $2 \times 6 = 3 \times 4$, καὶ ἐντεῦθεν $2 : 4 = 3 : 6$.

ΘΕΩΡΗΜΑ δ.

§. 159. Ἐκ τῶν Παραγόντων δύω Ἴσων Παραγομένων δύνανται νὰ προκύψωσιν Ὀκτὼ Ὀρθαὶ Γεωμετρικαὶ ἀναλογίαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δύω Ἴσα Παραγόμενα ἀποτελοῦσι μίαν Ἐξίσωσιν, τῆς ὁποίας τοὺς Ὅρους κατὰ τὸ προτεθὲν Θεώρημα δυνάμεθα νὰ διαθέτωμεν ἐν εἴδει ἀναλογίας, ἐν ᾧ μεταχειριζόμεθα τοὺς Παράγοντας ἑνὸς τούτων τῶν δύω Παραγομένων ὡς ἄκρους, ἢ Μέσους Ὅρους. ἀλλ' ἐπειδὴ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἕκαστος τῶν Παραγόντων ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ Παραγομένου (ἂν οὗτοι οἱ Παράγοντες ὡς ἄκροι Ὅροι τῆς ἀναλογίας ληφθῶσιν) ἔσται ἢ πρῶτος, ἢ ἔσχατος Ὅρος, καὶ αὖθις (ἂν οὗτοι ὡς Μέσοι Ὅροι τῆς ἀναλογίας ληφθῶσιν) ἔσεται ἢ δεύτερος ἢ τρίτος Ὅρος, καὶ ἐπειδὴ αὕτη ἡ διάφορος μετάθεσις τῶν Ὅρων δύναται ὀκτάκις νὰ γένῃ, ὡς κατωτέρω δηλωθήσεται. ἄρα ἐκ δύω Ἴσων Παραγομένων δυνανται νὰ προκύψωσιν ὀκτὼ Ὀρθαὶ Γεωμετρικαὶ ἀναλογίαι. Ἔστωσαν δύω Παραγόμενα Ἴσα, οἷον $\alpha\delta = \beta\gamma$. καὶ ληφθήτωσαν οἱ Παράγοντες ἑνὸς τῶν Παραγομένων ὡς ἄκροι Ὅροι, ἐν ᾧ ἕκαστος τῶν Παραγόντων ἔσται εἰς τέσσαρας ἀναλογίας ἢ πρῶτος, ἢ ἔσχατος.

$\alpha\delta + \beta\gamma$	ἤτοι	$3 \times 8 = 4 \times 6$
$\alpha : \beta = \gamma : \delta$	. . . . .	$3 : 4 = 6 : 8$
$\alpha : \gamma = \beta : \delta$	. . . . .	$3 : 6 = 4 : 8$
$\delta : \beta = \gamma : \alpha$	. . . . .	$8 : 4 = 6 : 3$
$\delta : \gamma = \beta : \alpha$	. . . . .	$8 : 6 = 4 : 3$
$\beta : \alpha = \delta : \gamma$	καὶ πάλιν ληφθήτωσαν	$4 : 3 = 8 : 6$
$\beta : \delta = \alpha : \gamma$	οἱ αὐτοὶ Παράγοντες ὡς	$4 : 8 = 3 : 6$
$\gamma : \alpha = \delta : \beta$	Μέσοι. κ. τ. . .	$6 : 3 = 8 : 4$
$\gamma : \delta = \alpha : \beta$	. . . . . .	$6 : 8 = 3 : 4$

Ὅλαι αὗται αἱ ἀναλογίαι συνίστανται ἐκ τῶν $\alpha\delta = \beta\gamma$, ἤτοι $3 \times 8 = 4 \times 6$, κἀντεῦθεν τὸ Παραγόμενον τῶν ἄκρων εἶναι Ἴσον μὲ τὸ Παραγόμενον τῶν Μέσων, ϗ ἐπομένως ἑκάστη ἀναλογία εἶναι Ὀρθή.

ΠΟΡΙΣΜΑ ά.

§. 160, Ἐὰν οἱ Παράγοντες τεθῶσιν εἰς μίαν ἀναλογίαν οὕτως, ὥστε ὁ πρῶτος Ὅρος νὰ ἔχῃ πρὸς τὸν δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ὁ τέταρτος πρὸς τὸν τρίτον, τότε εἶναι ἀναλογία ἀντίστροφος, ϗ κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον δύνανται νὰ γένωσιν αὖθις ὡς ἀνωτέρω, ὀκτὼ διάφοροι μεταθέσεις τῶν Ὅρων, ὥστε πάντοτε νὰ προκύπτῃ ἀναλογία ἀντίστροφος, ϗ τὸ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου Ὅρου Παραγόμενον νὰ εἶναι Ἴσον τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου ϗ τετάρτου Παραγομένῳ, καθὼς ἐκ τῶν ἀκολούθων σαφέστερον δειχθήσεται.

$\alpha\delta = \beta\gamma$	$3 \times 8 = 4 \times 6$
$\alpha : \beta = \delta : \gamma$	$3 : 4 = 8 : 6$
$\alpha : \gamma = \delta : \beta$	$3 : 6 = 8 : 4$
$\beta : \alpha = \gamma : \delta$	$4 : 3 = 6 : 8$
$\beta : \delta = \gamma : \alpha$	$4 : 8 = 6 : 3$
$\gamma : \alpha = \beta : \delta$	$6 : 3 = 4 : 8$
$\gamma : \delta = \beta : \alpha$	$6 : 8 = 4 : 3$
$\delta : \beta = \alpha : \gamma$	$8 : 4 = 3 : 6$
$\delta : \gamma = \alpha : \beta$	$8 : 6 = 3 : 4$

Ἐνταῦθα ἐφ᾽ ἑκάστης τῶν ἀναλογιῶν ὁ πρῶτος Ὅρος ἔχει πρὸς τὸν δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ τέταρτος πρὸς τὸν τρίτον. μ᾽ ὅλον τοῦτο ἐὰν μεταθέσωμεν τοὺς Ὅρους μόνον τοῦ ἑνὸς λόγου, ἀποκτῶμεν ἀναλογίαν Ὀρθήν, ϗ τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Παραγόμενον εἶναι Ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων Παραγομένῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ β.

§. 161. Δύνανται πάλιν νὰ τεθῶσιν οἱ Παράγοντες καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, ὥστε οἱ οὕτω τεθέντες Ὅροι νὰ μὴ ἀποκαθιστῶσι μήτε Ὀρθὴν μήτε ἀντίστροφον ἀναλογίαν, τουτέστι ἂν μεταξὺ τῶν Ἰδίων Παραγόντων, ἑκατέρου τῶν Παραγομένων θεωρῆται ἕνας λόγος, ἐπειδὴ τότε οἱ δύω λόγοι φερθῶσιν εἰς Ἐξίσωσιν, αὕτη δὲ ἡ ἀνάπαλιν τῆς ἀναλογίας μετάθεσις τῶν Παραγόντων δύναται νὰ γένῃ αὖθις κατὰ ὀκτὼ διαφόρους τρόπους, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς δηλοῦται.

$\alpha\delta = \beta\gamma$	$3\times 8 = 4\times 6$
$\alpha:\delta = \beta:\gamma$	$3:8 = 4:6$
$\alpha:\delta = \gamma:\beta$	$3:8 = 6:4$
$\beta:\gamma = \alpha:\delta$	$4:6 = 3:8$
$\beta:\gamma = \delta:\alpha$	$4:6 = 8:3$
$\gamma:\beta = \alpha:\delta$	$6:4 = 3:8$
$\gamma:\beta = \delta:\alpha$	$6:4 = 8:3$
$\delta:\alpha = \beta\gamma$	$8:3 = 4:6$
$\delta:\alpha = \gamma:\beta$	$8:3 = 6:4$

ΠΟΡΙΣΜΑ γ.

§. 162. Ἐπειδὴ οἱ Ἴσοι λόγοι εἴτε ἐλαττωθῶσιν, εἴτε αὐξηθῶσι διὰ Ἴσων Ποσοτήτων, μένουσιν αὖθις Ἴσοι (§. 147.) λόγοι, διὰ τοῦτο δύνανται νὰ ἀναφανῶσιν ἔτι πλείονες μεταλλαγαί, χωρὶς νὰ λάβῃ τινα μεταβολὴν ἡ ἀναλογία. καὶ τοῦτο γίνεται, ἐὰν οἱ Ἡγούμενοι Ὅροι διὰ τῶν Ἑπομένων, ἢ ἀνάπαλιν οἱ Ἑπόμενοι διὰ τῶν Ἡγουμένων αὐξηθῶσιν, ἢ ἐλαττωθῶσι, καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ δύνανται νὰ γένωσι πᾶσαι μεταλλαγαί, ὅσα Ἴσα Παραγόμενα προκύψωσι διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως τῶν Ἄκρων καὶ Μέσων Ὅρων

$\alpha+\beta:\beta=\gamma+\delta:\delta$	οἱ λόγοι αὐξάνουσι διὰ τῆς Προσθέσεως.	$3+4:4=6+8:8$
$\alpha+\alpha:\beta=\gamma+\gamma:\delta$		$3+3:4=6+6:8$
$\alpha:\alpha+\beta=\gamma:\gamma+\delta$		$3:3+4=6:6+8$
$\alpha:\beta-\alpha=\gamma:\delta-\gamma$	ἐλαττοῦνται διὰ τῆς ἀφαιρέσεως	$3:4-3=6:8-6$
$\delta-\beta:\beta=\gamma-\alpha:\alpha$		$8-4:4=6-3:3$
$\delta+\beta:\delta-\beta=\gamma+\alpha:\gamma-\alpha$,		$8+4:8-4=3:6-3$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 163. Τὸ περὶ τῆς μεταβολῆς μιᾶς Ἐξισώσεως εἰς ἀναλογίαν καὶ ἀνάπαλιν ἀπαιτεῖ πολλὴν προσοχὴν καὶ παρατήρησιν, ὡσὰν ὁποῦ εἰς ὅλην τὴν Μαθηματικὴν γίνεται πρόξενον μεγάλης ὠφελείας καὶ χρήσεως. ὅθεν πρέπει νὰ διακρίνωμεν πάντοτε καλῶς, ποῖοι εἶναι οἱ Παράγοντες ἑκάστου Παραγομένου, διὰ νὰ ἐννοῶμεν ἔπειτα καλῶς, καὶ νὰ σχεδιάζωμεν θεωρητικῶς ἢ πρακτικῶς τοὺς Ὅρους τῆς ἀναλογίας. ὅταν ὑπάρχῃ ἁπλοῦν τι Ποσὸν, οἱ τούτου Παράγοντες εἶσιν αὐτὸ τὸ Ἴδιον Ποσὸν καὶ ἡ Μονάς· ἥτις, ἐπειδὴ δὲν πολλαπλασιάζει μηδὲν, ἠμπορεῖ νὰ λαμβάνηται πάντοτε ἀντὶ τοῦ ἑτέρου Παράγοντος. π. χ. τοῦ χ οἱ Παράγοντες εἶσι τὸ χ καὶ 1, ὅθεν ἡ Ἐξίσωσις $\chi=\gamma\delta$ ἔχει Παράγοντας $\chi\times 1=\gamma\times\delta$ καὶ ἐντεῦθεν γίνεται ἡ ἀναλογία $\chi:\gamma=\delta:1$, ἢ $1:\gamma=\delta:\chi$. Ὅταν δὲ τὸ Παραγόμενον ὑπάρχῃ Συμπεπλεγμένον Ποσὸν, καὶ εἰς καθε Ὅρον συμπίπτῃ τὸ αὐτὸ Γράμμα, τότε Παράγοντες εἶναι αὐτὸ τὸ Γράμμα καὶ τὸ Συμπεπλεγμένον Ποσόν. π. χ. $\nu\delta-\delta=\alpha\gamma-\beta\gamma$ παράγοντες εἶσιν $(\nu-1)\delta=(\alpha-\beta)\gamma$. ὅθεν ἡ ἀναλογία $\nu-1:\alpha-\beta=\gamma:\delta$, προσέτι τοῦ $1-\chi\chi=\alpha$ Παράγοντες εἶσιν $1-\chi\times 1+\chi=\alpha\times 1$, ἡ δὲ ἀναλογία $1-\chi:\alpha=1:1+\chi$. οὕτω καὶ τὰ $\chi\chi-\phi\phi=1$ δίδουσιν ἀναλογίαν $\chi-\phi:1=1:\chi+\phi$, καὶ συνεχῆ $∺\ \chi-\phi:1:\chi+\phi$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 164. Ἐπειδὴ καὶ τὰ Κλάσματα εἶναι λόγοι (137). διὰ τοῦτο Ἴσα Κλάσματα διαλυθέντα δύνανται νὰ ταχθῶσιν ἐν εἴδει ἀναλογίας, ὅθεν ὅταν μὲν ὁ Παρονομαστὴς ἔχῃ πρὸς τὸν ἑαυτοῦ ἀριθμητὴν μητὸν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει καὶ ὁ ἕτερος Παρονομαστὴς πρὸς τὸν ἑαυτοῦ ἀριθμητὴν, ἢ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ ἀριθμ. πρὸς τὸν ἑαυτοῦ Παρονομ. οὕτω καὶ ὁ ἕτερος ἀριθμ. πρὸς τὸν ἑαυτοῦ Παρονομ. τότε τὰ Κλάσματα εἶναι πεπαγμένα εἰς Ὀρθὴν ἀναλογίαν. ὅταν ὅμως ὁ Παρονομ. πρὸς τὸν ἑαυτοῦ ἀριθ. ἔχῃ λόγον τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ ἄλλος ἀριθμ. πρὸς τὸν ἑαυτοῦ Παρονομαστὴν, καὶ ἀνάπαλιν, τότε τὰ Κλάσματα εἶναι πεπαγμένα εἰς ἀντίστροφον ἀναλογίαν. οἷον ἐκ τοῦ $\frac{3}{9}$ καὶ $\frac{6}{18}$ ἀποκαθίσταται Ὀρθὴ ἀναλογία $9 : 3 = 18 : 6$ ἢ $3 : 9 = 6 : 18$. ἀντίστροφος δὲ $9 : 3 = 6 : 18$ ἢ $3 : 9 = 18 : 6$. ὅταν δ' αὖθις τὰ Κλάσματα ἔχωσιν ἀριθμητὴν μὲν τὸν αὐτὸν, Παρονομαστὴν ὅμως διάφορον, τότε τὰ Κλάσματα εἶναι εἰς ἀντίστροφον λόγον τῶν Παρονομαστῶν. δηλαδὴ τὸ πρῶτον Κλάσμα ἔχει πρὸς τὸ δεύτερον λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ Παρονομ. τοῦ δευτέρου Κλάσματος πρὸς τὸν Παρονομαστὴν τοῦ πρώτου. οἷον $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\alpha}{\delta} = \delta : \beta$, καὶ $\frac{3}{3} : \frac{3}{5} = 5 : 4$. καὶ τοῦτο εἶναι φανερὸν, ἐπειδὴ τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον $\frac{\alpha\beta}{\beta}$ ἤτοι $\frac{3\times4}{4}$ = τῷ ἐκ τῶν Μέσων Γινομένῳ $\frac{\alpha\delta}{\delta}$ ἢ $\frac{3\times5}{5}$ δηλαδὴ $\alpha = \alpha$ καὶ $3 = 3$. ἂν ὅμως οἱ Παρονομασταὶ ὦσιν ἴσοι, οἱ δὲ ἀριθμηταὶ ἄνισοι, τὰ Κλάσματα ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, τοιοῦτον, ὅ, τι λόγον ἔχουσι καὶ οἱ ἀριθμηταὶ πρὸς ἀλλήλους. π. χ. $\frac{\alpha}{\delta} : \frac{\gamma}{\delta} = \alpha : \gamma$ καὶ $\frac{3}{5} : \frac{2}{5} = 3 : 2$. ἐπειδὴ τὸ ἐκ τῶν Μέσων Γινόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν ἄκρων $\frac{\alpha\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\delta}$ καὶ $\frac{6}{5} = \frac{6}{5}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ β΄.

§. 165. Ἐὰν οἱ Ὅροι μιᾶς ἀναλογίας πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι διὰ τῶν Ὅρων

ἄλλης

ἀλλής τινος ἀναλογίας, δηλαδὴ ὁ πρῶτος Ὅρος διὰ τοῦ πρώτου, καὶ ὁ δεύτερος διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτως καθεξῆς, τὰ ἐκ τούτων Γινόμενα, ἢ Πηλίκα ἔσονται, αὖθις ἀνάλογα, ἢ ἐν λόγῳ τινί.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Πολλαπλασιασθήτω ἡ $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ ἀναλογία μετὰ τῆς . $\varepsilon:\zeta=\eta:\vartheta$

$$\alpha\varepsilon:\beta\zeta=\gamma\eta:\delta\vartheta.$$

ὑποτεθήτω ἔτι εἰς μὲν τὴν πρώτην ἀναλογίαν τὸ Πηλίκον $=\pi$. εἰς δὲ τὴν δευτέραν $=\rho$. λοιπὸν (κατὰ τὸ γ΄, Πόρισμα) ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἀναλογίας γίγνεται

	$\alpha:\alpha\pi=\gamma:\gamma\pi$	$2:4=3:6$
ἐκ δὲ τῆς δευτέρας .	$\varepsilon:\varepsilon\rho=\eta:\eta\rho$	$3:9=5:15$
	$\alpha\varepsilon:\alpha\varepsilon\pi\rho=\gamma\eta:\gamma\eta\pi\rho$	$6:36=15:90$

ἐπειδὴ ἐν τοῖς δυσὶ τούτοις λόγοις τὸ Πηλίκον ἐστὶ $\pi\rho$, ἄρα οἱ λόγοι οὗτοι εἶναι ἴσοι ἀλλήλοις. ὅθεν ἀναλογίαι εἴτε δύω, εἴτε πλείονες ἀλλήλων πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιοῦσιν αὖθις ἀναλογίαν.

ΠΟΡΙΣΜΑ ά.

§. 166. Ὅταν τοίνυν πάντες οἱ Ὅροι μιᾶς ἀναλογίας πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος, ἢ ἄλλως, ὅταν μόνον οἱ δύω Ἡγούμενοι Ὅροι πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος, οἱ δὲ δύω Ἑπόμενοι δι' ἑτέρας Ποσό-

Προστεθῇ, τότε οἱ οὕτως αὐξηθέντες, ἢ ἐλαττωθέντες Ὅροι μένουσι πάντοτε ἀνάλογοι. ἐπειδὴ ἀφ' οὗ λυθῶσιν οἱ Ὅροι ὡς ἀνωτέρω, τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον εἶναι πάντοτε Ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῶν Μέσων Γινόμενον, καὶ ἐντεῦθεν εἶναι μία ἀληθὴς ἀναλογία.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ β'.

§. 167. Ἐπειδὴ εἰς τὰς ἀριθμητικὰς ἀναλογίας ἀκολουθεῖ διὰ τῆς συνάψεως ἐκεῖνο, ὅπου γίνεται εἰς τὰς Γεωμετρικὰς διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως, διὰ τοῦτο ἂν δύω ἀριθμητικαὶ ἀναλογίαι συναφθῶσιν ἀναλογικῶς, τὰ ἀθροίσματα πάλιν μένουσιν ἐν λόγῳ. Ἐὰν ὅμως ἀφαιρεθῶσιν, αἱ διαφοραὶ αὐτῶν ἔσονται ἐν λόγῳ. π. χ. ἡ Διαφορὰ εἰς τὴν πρώτην ὑπάρχει $= \delta$, εἰς δὲ τὴν δευτέραν $= \chi$

$$
\begin{array}{lr}
\alpha.\alpha+\delta = \beta.\beta+\delta & 3.5 = 7.9 \\
\gamma.\gamma+\chi = \varepsilon.\varepsilon+\chi & 2.3 = 4.5 \\
\hline
\alpha+\gamma.\alpha+\gamma+\delta+\chi = \beta+\varepsilon.\beta+\varepsilon+\delta+\chi, & 5.8 = 11.14
\end{array}
$$

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ γ'.

§. 168. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀποδειχθέντων γίνεται δῆλον. ὅτι ἐὰν Ἴσαι ἀναλογίαι μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθῶσι, τὰ ἐκ τούτων Γινόμενα μένουσιν ἀνάλογα. ὅθεν ἐὰν προστεθῶσιν εἰς πολλαπλασίασιν τρεῖς, ἢ πλείονες τοιαῦται ἀναλογίαι. τὰ Γινόμενα (ἔσονται ταῦτα ἢ Κύβοι, ἢ ἄλλαι ἀνώτεραι Δυνάμεις) θέλουσιν εἶναι κάθε φορὰν ἀνάλογα. ὅθεν πολλαπλασιασθεῖσα ἐφ' ἑαυτὴν ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, παρέχει πάλιν ἀναλογίαν Σύνθετον. οἷον

$$
\begin{array}{c}
\alpha : \beta = \gamma : \delta \\
\alpha : \beta = \gamma : \delta \\
\hline
\alpha^2 : \beta^2 = \gamma^2 : \delta^2
\end{array}
$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀναλογία, ἥτις πολλαπλασιάζεται, εἶναι αἱ ῥίζαι, καὶ τὸ Γενόμενον εἶναι τὰ Τετράγωνα τούτων τῶν ῥιζῶν· ἄρα ἐὰν αἱ ῥίζαι εἶναι ἀνάλογοι, πρέπει ϗ τὰ Τετράγωνα νὰ εἶναι ἀνάλογα, τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται διὰ τοῦ ἑπομένου Θεωρήματος ΑἹ ΔΥΝΑ'ΜΕΙΣ ῬΙΖΩ͂Ν ἈΝΑΛΟ'ΓΩΝ ΕἸ'ΣΙ'Ν ἈΝΑ'ΛΟΓΟΙ.

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ γ'.

§. 169. Ὅταν ἐπὶ δύω ἀναλογιῶν (τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ὑπὸ τὴν ἄλλην γεγραμμένη, ϗ δύω Ὅροι τῆς μιᾶς εἶναι Ἴσοι μὲ δύω Ὅρους τῆς ἄλλης) ἀχθῶσι Παράλληλοι Γραμμαὶ εἰς ἀνίσους Ὅρους, τότε οὗτοι οἱ ἄνισοι Ὅροι εἶναι εἰς Ὀρθὴν ἀναλογίαν

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$

$$\beta : \mu = \delta : \nu \quad \text{ἐστὶ } \alpha : \mu = \gamma : \nu,$$

ἐπειδὴ ἐκ τῆς πρώτης ἀναλογίας γίνεται διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν Ὅρων $\alpha : \gamma = \beta : \delta$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας γίνεται $\beta : \delta = \mu : \nu$, ἀλλ' ἐπειδὴ ϗ $\alpha : \gamma$ ϗ $\mu : \nu$ εἰσὶν Ἴσα τῷ τρίτῳ λόγῳ $\beta : \delta$, ἄρα ϗ ἀλλήλοις οὗτοί εἰσιν Ἴσοι, δηλαδὴ $\alpha : \gamma = \mu : \nu$, ἢ $\alpha : \mu = \gamma : \nu$, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ δ'.

§. 170. Ἐὰν εἰς δύω ἀναλογίας (εἰς τὰς ὁποίας δύω Ὅροι τῆς μιᾶς εἰσιν Ἴσοι μὲ δύω Ὅρους τῆς ἄλλης) ἀχθῶσι δύω Γραμμαὶ Συμπίπτουσαι (τουτέστι μὴ παράλληλοι) ἐπὶ ἀνί-

σων

στων Ὅρων, οἱ Ὅροι ἐτοὶ εἰσὶν εἰς τὴν ἀναλογίαν ἀντιςρόφως:

$$\beta:\beta = \gamma:\delta$$

$$\beta:\mu = \nu:\gamma$$

ὅθεν γίνεται $\alpha : \mu = \nu : \delta$, ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν πρώτην ἀναλογίαν ἐςὶ $\alpha\,\delta = \beta\,\gamma$, εἰς δὲ τὴν δευτέραν $\mu\,\nu = \beta\,\gamma$. ἄρα ϗ $\alpha\,\delta = \mu\,\nu$: ἅπερ διαλυθεῖ τὰ ποιοῦσιν ἀναλογίαν $\alpha : \mu = \nu : \delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ε΄.

§. 171. Ὅταν εἰς δύω ἀναλογίας οἱ πρῶτοι Ἡγούμενοι Ὅροι εἶναι Ἴσοι ἀλλήλοις, ὡσαύτως ϗ οἱ ἐσχάτως Ἑπόμενοι, ϗ ἀνάπαλιν, τότε οἱ λοιποὶ Ὅροι εἰσὶν ἐν ἀντιςρόφῳ λόγῳ.

ἐὰν ὦσιν $\begin{cases} \alpha : \beta = \gamma : \delta \\ \alpha : \mu = \nu : \delta \end{cases}$

γίνεται $\beta : \mu = \nu : \gamma$

ϗ γὰρ $\alpha\delta = \beta\gamma$, ϗ $\mu\nu = \alpha\delta$, ἄρα ϗ $\beta\gamma = \mu\nu$, ἐξ ὧν γίνεται $\beta:\mu = \nu:\gamma$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ς΄.

§. 172. Ὅταν εἰς δύω ἀναλογίας οἱ πρώτως Ἡγούμενοι Ὅροι, ϗ οἱ δευτέρως αὖθις

Ἡγύμενοι Ἴσοι ὦσιν ἀλλήλοις, τότε οἱ λοιποὶ Ὅροι εἰσὶν εἰς ἀναλογίαν Ὀρθήν.

ἐὰν ὦσιν $\left\{\begin{array}{l} \alpha : \beta = \gamma : \delta \\ \alpha : \mu = \gamma : \nu \end{array}\right.$

γένεται $\beta : \mu = \delta : \nu$. ἐπειδὴ διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν Ὅρων ἐσὶ $\alpha : \gamma = \beta : \delta$ ἢ $\alpha : \gamma = \mu : \nu$. ἄρα ἔσαι ὡσαύτως Ὀρθὴ $\beta : \mu = \delta : \nu$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ζ'.

§. 173. Ὅταν ὦσι πλείονες Ἴσοι λόγοι (τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἀκολυθεῖ τῷ ἑτέρῳ) ἢ πλείονες ἀνάλογοι Ὅροι, τότε τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν Ἡγυμένων Ὅρων πρὸς τὸ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Ἑπομένων ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει καθε Ἡγύμενος πρὸς τὸν ἑαυτῦ Ἑπόμενον.

Ἔστωσαν οἱ λόγοι $\alpha:\beta = \gamma:\delta = \epsilon:\zeta = \eta:\vartheta$. κ. τ. οἱ ὁποῖοι δύνανται νὰ μεταποιηθῶσιν ὕτως $\alpha:\alpha\pi = \gamma:\gamma\pi = \epsilon:\epsilon\pi = \eta:\eta\pi$. τὸ Κεφάλαιον λοιπὸν τῶν Ἡγυμένων εἶναι $\alpha+\gamma+\epsilon+\eta$, τῶν δὲ Ἑπομένων $\alpha\pi+\gamma\pi+\epsilon\pi+\eta\pi$. ὥστε $\alpha+\gamma+\epsilon+\eta:\alpha\pi+\gamma\pi+\epsilon\pi+\eta\pi = \alpha:\alpha\pi$ δηλαδὴ $\alpha+\gamma+\epsilon+\eta:(\alpha+\gamma+\epsilon+\eta)\pi = \alpha:\alpha\pi$, ὅθεν τὸ ἐκ τῶν Μέσων Ὅρων Γινόμενόν ἐσι $(\alpha+\gamma+\epsilon+\eta)\,\alpha\pi$, τὸ δὲ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμε-

νον

των ὡσαύτως $(α+γ+ε+η)\,απ$, τὰ ὁποῖα ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις. καὶ ἐπειδὴ ὅπου τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῶν Μέσων Γινόμενον, ἐκεῖ τυγχάνει ἀληθὴς ἀναλογία. ἄρα τὸ Κεφάλαιον τῶν Ἡγυμένων ἔχει λόγον κ, τ. ὡς εἴρηται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ά.

§. 174. Δοθέντων τριῶν Ὅρων τινὸς ἀναλογίας, νὰ εὕρωμεν τὸν τέταρτον, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ εἶναι ὁποιοσδήποτε Ὅρος τῆς ἀναλογίας.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἄς εἶναι ὁ ζητούμενος Ὅρος $χ$, καὶ ἄς τεθῇ οὗτος εἰς τὸν τόπον τοῦ ζητητέου. ἐκ τῆς ἀναλογίας γίνεται ἤτοι ἀριθμητικὴ Ἐξίσωσις διὰ τῆς Συνάψεως τῶν Ὅρων, ἢ Γεωμετρικὴ διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως αὐτῶν, ἔπειτα ζητεῖται τὸ $χ$ κατὰ τοὺς Κανόνας τῆς Ἐξισώσεως.

$α.β=γ.χ$ γίνεται $α+χ=β+γ$ ἤτοι $χ=β+γ-α$.
$α.β=χ.γ$. $α+γ=β+χ$. $χ=α+γ-β$.
$α.χ=β.γ$. $α+γ=χ+β$. $χ=α+γ-β$.
$χ.α=β.γ$. $χ+γ=α+β$. $χ=α+β-γ$.

$α.β=γ:χ$. $αχ=αγ$. $χ=\frac{βγ}{α}$.

$α:β=χ:γ$. $αγ=βχ$. $χ=\frac{αγ}{β}$.

$α:χ=β:γ$. $αγ=χβ$. $χ=\frac{αγ}{β}$.

$χ:α=β:γ$. $χγ=αβ$. $χ=\frac{αβ}{γ}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

ΔΕΙ῍ΞΙΣ

Ἑκάστη ἀναλογία δύναται νὰ μεταποιηθῆ εἰς Ἐξίσωσιν (§. 157) εἰς τὴν ὁποίαν διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν Ὅρων εὑρίσκεται ἡ Δύναμις τῦ ζητεμένυ χ (§. 111).

ΠΡΟ´ΒΛΗΜΑ β΄.

§. 175. Ὅταν δοθῶσι δύω Ὅροι συνεχῦς τινος ἀναλογίας, νὰ εὕρωμεν τὸν Μέσον, ἢ τρίτον Ὅρον.

ΠΡΑΚΤΕ´Α.

Πρῶτον ὀνομάζεται ὁ ἄγνωσΘ Ὅρθ χ, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται, ἔπειτα ἀφ' ὗ ἀποκατασταθῶσιν οἱ Ὅροι εἰς Ἐξίσωσιν, ζητεῖται ἡ Δύναμις τῦ χ. οἷον

$\div\alpha.\beta.\chi$ γίνεται $\alpha+\chi=2\beta$, ἤτοι $\chi=2\beta-\alpha$

$\div\alpha.\chi.\beta$. $\alpha+\beta=2\chi$. $\chi=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\div\alpha:\beta:\chi$. $\alpha\chi=\beta\beta$. $\chi=\frac{\beta\beta}{\alpha}$

$\div\alpha:\chi:\beta$. $\alpha\beta=\chi\chi$. $\chi=\sqrt{\alpha\beta}$

Ἡ Δεῖξις εἶναι ἡ Ἴδία μὲ τὴν ἀνωτέρω εἰρημένην.

ΣΧΟ´ΛΙΟΝ.

§. 176. Ὁ Τρόπ, μὲ τὸν ὁποῖον δοθέντων τριῶν Ὅρων, εὑρίσκομεν τὸν τέταρτον, καλεῖται Μέθοδ τῶν τριῶν, ἡ ὁποία

κοινῶς

κειτοῦς εἰς τὸν ἀνθρώπινον βίον εἶναι πολλῆς ὠφελείας πρόξενος, διὰ τοῦτο καὶ χρυσοῦς Κανὼν ὀνομάζεται. περὶ δὲ τοῦς χρήσεως αὐτοῦ ἐν τῷ ἀκολούθῳ Κεφαλαίῳ πραγματευσόμεθα.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ θ'.

Περὶ τοῦ χρυσοῦ Κανόνος, ἢ Μεθόδου τῶν Τριῶν.

Ὁ'ΡΙΣΜΟ'Σ α'.

§. 177. Χρυσοῦς Κανὼν, ἢ ἀναλογίας Κανών ἐστιν ἡ Μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας ὅταν δοθῶσιν τρεῖς Ὅροι, εὑρίσκεται ὁ τέταρτος Γεωμετρικῶς ἀνάλογος. ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀναλογία, ἐπὶ τοῦ παρόντος πάντοτε ἐννοεῖται Γεωμετρικὴ τις ἀναλογία, καὶ λόγος πρὸς αὐτὴν ἀνήκων.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

§. 178. Ὅθεν καὶ αὕτη ἡ Μέθοδος γενικῶς λαμβανομένη, διαιρεῖται εἰς ἁπλῆν, καὶ Σύνθετον, καὶ ἁπλῆ μὲν ἐστιν, ὅταν δίδωνται τρεῖς Ὅροι, καὶ ζητῆται ὁ τέταρτος, καὶ θεωρῶνται δύω λόγοι, ἥτις καὶ Μέθοδος τότε τῶν τριῶν ὀνομάζεται. Σύνθετος δὲ, ὅταν δοθῶσιν πέντε, ἢ ἑπτὰ Ὅροι, καὶ ζητῆται ὁ ἕκτος, ἢ ὁ ὄγδοος, καὶ θεωρῶνται τρεῖς, ἢ τέσσαρες λόγοι, ἥτις τῶν πέντε, ἢ τῶν ἑπτὰ Μέθοδος καλεῖται ὑπὸ τῶν ἀριθμητικῶν. ἐπιδιαιρεῖται δὲ πάλιν εἰς Ὀρθὴν, καὶ εἰς ἀντίστροφον, καὶ Ὀρθὴ μὲν ἐστιν, ἐὰν ὁ πρῶτος

Ὅρος

Ὅρος ἔχῃ πρὸς τὸν δεύτερον, καθὼς ὁ τρίτος πρὸς τὸν ζητούμενον. ἀντίστροφος δὲ τυγχάνει, ὅταν ὁ πρῶτος Ὅρος ἔχῃ πρὸς τὸν δεύτερον, καθὼς ὁ ζητούμενος τέταρτος πρὸς τὸν δοθέντα τρίτον.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 179. Ἐφ' ἑκάστου Προβλήματος ταύτης τῆς Μεθόδου προϋποτίθενται δύω τινὰ, τὸ μὲν ἓν, ὡς πρᾶγμα γεγονὸς, ἢ δοθὲν, τὸ δ' ἕτερον ὡς ποιητέον ἢ ζητητέον, ἀνάλογον ὅμως μὲ τὸ πρῶτον. π. χ. πρῶτον δίδεται, ὅτι τέσσαρες Μαθηταὶ δαπανῶσιν εἰς ἕνα Μῆνα 19 Γρόσια, ἔπειτα ζητεῖται, πόσα ἄραγε Γρόσια θέλουσι δαπανήσει εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν δώδεκα Μαθηταί; ἢ δίδοται πρῶτον, ὅτι ἕνας ἠγόρασε τρεῖς Πήχεις τινὸς πράγματος διὰ 7 Γρόσια, ἔπειτα ζητεῖται, πόσους ἄραγε Πήχεις τοῦ αὐτοῦ πράγματος δύναται τις νὰ ἀγοράσῃ μὲ Γρόσια 21; ἢ πάλιν προϋποτίθεται, ὅτι 12 Σκαπανεῖς σκάπτουσιν ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ 24 Ὀργυιὰς, ἔπειτα ζητεῖται· Πόσας ἄραγε Ὀργυιὰς θέλουσι σκάψει πεντήκοντα Ἐργάται.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

§. 180. Ἐντεῦθεν εἶναι φανερὸν, ὅτι τὰ τῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν ἐκ τεσσάρων Ὅρων συνίστανται, οἱ ὁποῖοι ἢ πάντες εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους, ἢ ἀνὰ δύω. καὶ ἀνὰ δύω μὲν εἰσὶν, καθὼς εἰς τὰ τρία προτεθέντα Παραδείγματα. οἷον οἱ ἀριθμοὶ τῶν Μαθητῶν ὁ 4, καὶ ὁ 12 εἶσιν ὁμοειδεῖς, οἱ δὲ ἀριθμοὶ τῶν Γροσίων ὁ 19, καὶ ὁ ζητούμενος εἶσιν ὁμοίως ὁμοειδεῖς μὲν ἀλλήλοις, ἑτεροειδεῖς δὲ μὲ τοὺς ἀνωτέρω δύω ἀριθμοὺς τῶν Μαθητῶν, κ. τ. ὁμοειδεῖς δὲ πάντες εἰσὶν, ὅταν εἶναι τὰ τῆς ἀναλογίας, καθὼς ἐπὶ τούτου τοῦ Παραδείγματος. Τοκιστὴς διὰ 500 Γρόσια ἔλαβε Τόκον Γρόσια 50, διὰ δὲ 200 Γρόσια, πόσα Γρόσια θέλει λάβῃ;

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 181. Ἐὰν δὲ ἡ Μέθοδος Σύνθετος ὑπάρχῃ, προσεπακολουθοῦσι τουλάχιστον ἄλλοι δύω Ὅροι Ὁμοειδεῖς. π. χ. ἐὰν εἰς τὸ ἀνωτέρω

τέρω τρίτον Παράδειγμα προστεθῇ εἰς ζήτησιν οὕτως· 12 πόσας ἄραγε Ὀργυιὰς σκάψουσι 30 Ἐργάται εἰς 8 ἡμέρας;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α.

§. 182. Εἰς τὴν ἁπλῆν Μέθοδον πρὸς τοῖς δοθεῖσι τρισὶ Ὅροις νὰ εὕρωμεν τὸν τέταρτον ἀνάλογον.

ΛΥΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

α.) Ὁ Ὅρος, ὁ ὁποῖος εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὸν ζητούμενον τέταρτον, τίθεται εἰς τὸν τρίτον τόπον, οἱ δὲ λοιποὶ δύω, οἵτινες ἀλλήλοις εἰσὶν ὁμοειδεῖς, γράφονται εἰς τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον Τόπον,

β.) Ζητεῖται, ἂν κατὰ τὴν τοῦ Προβλήματος ὑπόθεσιν ὁ τέταρτος Ὅρος πρέπῃ νὰ εἶναι μείζων, ἢ ἐλάττων τοῦ τρίτου. ἔπειτα κατατάττεται ὁ πρῶτος καὶ δεύτερος Ὅρος οὕτως, ὥστε ὁ πρῶτος νὰ ἔχῃ πρὸς τὸν δεύτερον, ὡς ὁ τρίτος πρὸς τὸν ζητούμενον τέταρτον.

γ.) Πολλαπλασιάζομεν τὸν δεύτερον καὶ τρίτον Ὅρον ὁμοῦ, καὶ διαιροῦμεν τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον διὰ τοῦ πρώτου Ὅρου, καὶ τότε τὸ ἐκ τῆς Διαιρέσεως Πηλίκον ἐστὶν ὁ ζητούμενος τέταρτος Ὅρος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ α.

Τέσσαρες Μαθηταὶ δαπανῶσιν εἰς ἕνα Μῆνα Γρόσ. 19. πόσα ἄραγε Γρόσ. θέλουσι δαπανήσει μαθηταὶ δώδεκα;

Ὁ δο-

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς τῶν Γροσίων τίθεται εἰς τὸν τρίτον Τόπον, ὡσὰν ὁποῦ οὐδεὶς ἀριθμὸς Γροσίων προβάλλεται εἰς ζήτησιν. ϗ ἐπειδὴ 12 Μαθηταὶ δαπανῶσι περισσότερα, παρὰ οἱ 4 Μαθηταὶ, διὰ τοῦτο ϗ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν Γροσ. πρέπει νὰ εἶναι μείζων τοῦ δοθέντος 19 ἀριθμοῦ, ϗ ἐπομένως ὁ δεύτερος Ὅρος ἀνάγκη νὰ εἶναι μείζων τοῦ πρώτου, ἐπειδὴ ὃν λόγον ἔχουσιν οἱ 4 Μαθηταὶ πρὸς τοὺς πλείονας 12, τὸν αὐτὸν λόγον θέλουσιν ἔχῃ ϗ τὰ 19 Γρόσια τὰ ὑπὸ τῶν τεσσάρων Μαθητῶν δαπανώμενα πρὸς τὰ ζητούμενα τὰ ὑπὸ τῶν 12 Μαθητῶν δαπανηθησόμενα, οἷον

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Μαθ.} & & \text{Μαθ.} & & \text{Γρόσ.} & & \text{Γρόσ.} \\ 4 & : & 12 & = & 19 & : & x \end{array}$$

ἂν λοιπὸν οἱ Μέσοι Ὅροι ὑπ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθῶσι 12×19, ϗ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον 128 διαιρεθῇ διὰ τοῦ πρώτου Ὅρου 4, προκύπτει Πηλίκον Γρόσια 57. ϗ τόσα θέλουσι δαπανήσει 12 Μαθηταὶ εἰς ἕνα Μῆνα.

ΣΧΟΛΙΟΝ α.

§. 183. Ἐπειδὴ ἐφ' ἑκάστης Ὀρθῆς ἀναλογίας τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον πρέπει νὰ εἶναι Ἴσον τῷ ἐκ τῶν Μέσων Γινομένῳ, διὰ τοῦτο ϗ ἐν τῷ εἰρημένῳ Παραδείγματι ἂν ὁ εὑρεθεὶς τέταρτος Ὅρος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τοὺς ἄλλους Ὅρους, τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον εἶναι Ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῶν Μέσων Γινόμενον. ὅταν δὲ θελήσῃ τινὰς νὰ πληροφορηθῇ ἐντελέστερον, ἂν εὑρέθη ἡ ζήτησις τοῦ Προβλήματος ἀληθῶς, τότε πολλαπλασιάζει τὸν πρῶτον Ὅρον μετὰ τοῦ εὑρεθέντος τετάρτου, ϗ ἂν τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον Ἴσον τυγχάνῃ μὲ τὸ ἐκ τοῦ δευτέρου ϗ τρίτου Γινόμενον, ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου ἐστὶν ἀληθής. δυνάμεθα ἔτι νὰ μεταχειρισθῶμεν ϗ κατὰ ἄλλον τρόπον τὴν δοκιμήν. λαμβάνομεν δηλαδὴ τὸν ἤδη εὑρεθέντα τέταρτον Ὅρον 57 ὡς δεδόμενον, τὸν δὲ τούτῳ ὁμοειδῆ Ὅρον 19, ὡς ζητούμενον, καὶ μεταθέτομεν εἰς ἀναλογίαν τοὺς Ὅρους κατὰ τὴν ἰξῆς ἰδιότητα. ἐὰν 12 Μαθηταὶ εἰς ἕνα Μῆνα ἐξοδιάζουσι 57 Γρόσια, πόσα ἄραγε Γροσ. θέλουσιν ἐξοδιάσει 4 Μαθηταί; οἷον

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Μαθ.} & & \text{Μαθ.} & & \text{Γρόσ.} & & \text{Γρόσ.} \\ 12 & : & 4 & = & 57 & : & \chi \end{array}$$

τουτέστι $12\chi = 4 \times 57 = 228$

ἄρα $\chi = \frac{228}{12} = 19$ ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β'.

Τρεῖς Πήχεις ὑφάσματός τινος πωλοῦνται ὁμοῦ 7 Γρόσια· λοιπὸν πόσους Πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος δύναταί τις νὰ ἀγοράσῃ μὲ Γρόσια 21;

Α'ΠΑ'ΝΤΗΣΙΣ.

Ἐπειδὴ μὲ 21 Γρόσ. ἀγοράζει τινὰς πλείονας Πήχεις, παρὰ μὲ 7 Γρόσ., διὰ τοῦτο καὶ ὁ τέταρτος Ὅρος, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν Πήχεων πρέπει νὰ εἶναι μείζων. ὅθεν γίνεται ἡ ἑξῆς ἀναλογία ὡς ἔλαττον πρὸς μεῖζον, οὕτως ἔλαττον πρὸς μεῖζον, οἷον

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Γροσ.} & & \text{Γροσ.} & & \text{Πηχ.} & & \text{Πηχ.} \\ 7 & : & 21 & = & 3 & : & \chi \end{array}$$

καὶ διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως γίνεται $21 \times 3 = 63$ τῶν ὁποίων διαιρεθέντων διὰ τοῦ 7, τὸ Πηλίκον ἔσται $= 9$ Πηχ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. γ'.

Ἐργάται 30 σκάπτουσι 24 Ὀργυιάς. πόσας ἄραγε Ὀργυιὰς θέλουσι σκάψει 50 Ἐργάται;

ΑΠΑ'Ν.

Ἀ'ΠΑΝΤΗΣΙΣ.

Ἐπειδὴ οἱ 50 Ἐργάται δύνανται νὰ σκάψωσι πλείονας Ὀργυιὰς, παρὰ οἱ 30 Ἐργάται. διὰ τοῦτο καὶ ὁ τέταρτος Ὄρος πρέπει νὰ εἶναι μείζων τοῦ 14, καὶ ἑπομένως ὁ δεύτερος Ὄρος πρέπει νὰ εἶναι μείζων τοῦ πρώτου, οἷον

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ἐργ.} & & \text{Ἐργ.} & & \text{Ὀργ.} & & \text{Ὀργ.} \\ 30 & : & 50 & = & 24 & : & \chi \end{array}$$

$\dfrac{24 \times 50}{30} = 40$ ὅπερ ἐστὶν ὁ ζητούμενος ἀριθμός,

ΠΑΡΆΔΕΙΓΜΑ δʹ.

Θερισταὶ 8 πλειώνουσι τινα, φέρ' εἰπεῖν, Ἐργασίαν ἐν τῷ ἀγρῷ εἰς 12 ἡμέρας. θερισταὶ λοιπὸν 24 εἰς πόσας ἡμέρας θέλουσι πλειώσει τὴν αὐτὴν Ἐργασίαν;

Ἀ'ΠΆΝΤΗΣΙΣ.

Ἐπειδὴ οἱ πλείονες θερισταὶ πλειώνουσι τινα Ἐργασίαν εἰς ὀλίγας ἡμέρας, παρὰ οἱ Ἐλάττονες, διὰ τοῦτο καὶ ὁ ζητούμενος Ὄρος πρέπει νὰ εἶναι Ἐλάσσων τοῦ 12. ὅθεν καὶ ὁ δεύτερος Ὄρος ἔσται Ἐλάσσων τοῦ πρώτου.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{θερ.} & & \text{θερ.} & & \text{ἡμερ.} & & \text{ἡμερ.} \\ 24 & : & 8 & = & 12 & : & \chi \end{array}$$

ὁ ζητούμενος ἔσται $\dfrac{8 \times 12}{24} = 4$

ΠΑΡΆΔΕΙΓ. εʹ.

Μία Ποσότης τῶν πρὸς τὸ ζῆν ἀναγκαίων ἐξαρκεῖ 30 ἡμέρας διὰ 24 στρατιώτας. πόσας ἄραγε ἡμέρας θέλει ἐξαρκέσει ἡ αὐτὴ ποσότης διὰ 40 στρατιώτας.

ἈΠΆΝΤΗΣΙΣ.

Ἐπειδὴ τὰ πρὸς τροφὴν ἀναγκαῖα ἐξαρκοῦσιν ὀλιγωτέρας ἡμέρας ὅταν ὦσι πλείονες στρατιῶται, διὰ τοῦτο καὶ ἐνταῦθα κατὰ τὴν τοῦ Προβλήματος ὑπόθεσιν, πρέπει ὁ ζητούμενος Ὅρος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ τρίτου. ὅθεν καὶ ὁ δεύτερος θέλει εἶναι μικρότερος τοῦ πρώτου Ὅρου. οἷον

$$40 : 24 = 30 : \chi$$

$$\chi = \frac{720}{40} = 18$$ πόσας ἡμέρας θέλουσιν ἐξαρκέσει τὰ ἐπιτήδεια διὰ 40 στρατιώτας.

ΣΧΌΛΙΟΝ β΄.

§. 184. Ὅταν δὲ ὦσιν Μικταὶ, ἢ Ἑτερογενεῖς Ποσότητες, τότε πρέπει πρῶτον νὰ μετὰποιήσωμεν τὰς ἀκεραίας, ἢ μείζονας εἰς τὸ μικρότερον εἶδος διὰ τῆς ἀναλύσεως, ἔπειτα νὰ ἀποκαταστήσωμεν τὰ ἀναλυθέντα Μέρη εἰς ἁπλᾶ κλάσματα. π. χ. $3\frac{3}{4}$ Πήχεις ὑφάσματός τινος ἀγοράζονται διὰ 19 Γρόσια καὶ 30 Παράδες. πόσον ἄραγε ἀγορασθήσεται ἕνας Πῆχυς;

$$\underset{\text{Πηχ.}}{\frac{15}{4}} : \underset{\text{Παραδ.}}{\frac{790}{1}} = \frac{1}{1} : \chi$$ ὅθεν ὁ τέταρτος Ὅρος ἔσται 210 Παραδ. ἤτοι 5 Γρόσ. καὶ 10 Παράδες.

ΣΧΌΛΙΟΝ γ΄.

§. 185. Ἐπειδὴ θέλει ἀναφύεται ἡ Μέθοδος, κατὰ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα ἀνὰ τὰς παραφθορᾶς τῆς δυνάμεως νὰ μεταβάλλωμεν

ἕκαστον

ἕκαστον Κλάσμα εἰς ἕτερον, τοῦ ὁποίου ὁ Παρονομαστὴς εἶναι διδόμενος, ἢ νὰ εὑρίσκωμεν τὴν δύναμιν ἑκάστου Κλάσματος εἰς τὰ ἁπλούστερα μέρη τοῦ ὅλου, εἴτε νομίσματος, εἴτε μέτρου, εἴτε ἄλλης τινὸς ὀνομασίας τούτου ὄντος. διότι ἐπειδὴ κάθε Κλάσμα λόγος ἐστὶν ὡς ἐν τῷ (§. 136) δεδήλωται, διὰ τοῦτο καὶ δύω ἴσα Κλάσματα δύνανται νὰ καταταχθῶσιν εἰς ἀναλογίαν οὕτως, ὥστε ὁ Παρονομαστὴς τοῦ ἑνὸς Κλάσματος νὰ ἔχῃ πρὸς τὸν ἀριθμητὴν τοιοῦτον λόγον, ὅ, τι λογῆς ἔχει ὁ Παρονομαστὴς τοῦ ἑτέρου Κλάσματος πρὸς τὸν ἑαυτοῦ ἀριθμητήν. ὅθεν ὁ δοθεὶς Παρονομαστὴς ἔσται ὁ τρίτος Ὅρος τῆς ἀναλογίας, πρὸς τὸν ὁποῖον ζητεῖται ἕνας ἀριθμητής. ἐὰν λοιπὸν θέλωμεν νὰ μάθωμεν τὸ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς φέρ' εἰπεῖν, Γροσίου μὲ πόσους Παράδας ἐξισοῦται, πρέπει νὰ ζητήσωμεν πρὸς τὸν 40 Παρονομαστὴν τὸν ἀριθμητὴν, λέγοντες οὕτως $4 : 3 = 40 : 30$, καὶ $\frac{30}{40}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{3}{4}$, οὕτως αὖθις γίνεται καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ ποδὸς εἰς δακτύλους, ἢ δωδεκατημόρια, οἷον $3 : 12 = 2 : 8$. καὶ 8 δάκτυλοι εἰσὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ ποδὸς (*).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β'.

§. 186. Ἐὰν δοθῶσι πέντε, ἢ ἑπτὰ Ὅροι μιᾶς Συνθέτου Μεθόδου, νὰ εὕρωμεν τὸν ἕκτον, ἢ ὄγδοον ἀνάλογον Ὅρον.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

(*) Οἱ δάκτυλοι, καὶ ὁ ποῦς ἐνταῦθα λαμβάνονται οὐχὶ κατὰ τὴν Γεωγραφικὴν (§. 53 ἀριθμητικῆς) χρῆσιν, ἀλλὰ κατὰ τὴν τοῦ μάκρους, ὅτι δηλαδὴ δώδεκα δάκτυλοι συμπληροῦσιν ἕνα πόδα.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

α΄.) Ὁ Ὅρος, ὅστις εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὸν ζητούμενον, τίθεται εἰς τὸν τρίτον τόπον.

β΄. Οἱ μὲν δύω Ὁμοειδεῖς Ὅροι τίθενται εἰς τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον τόπον, καθὼς προείρηται. οἱ δὲ λοιποὶ Ὅροι ἐγκαταλείπονται ἐν τούτῳ, καὶ παρορῶνται, ὡς μὴ προκείμενοι εἰς τὴν ὑπόθεσιν, καὶ οὕτω διὰ τῶν τριῶν ζητεῖται ὁ τέταρτος Ὅρος κατὰ τὸν πρότερον ῥηθέντα Κανόνα.

γ΄.) Ὁ μὲν εὑρεθεὶς τέταρτος Ὅρος φέρεται πάλιν εἰς ἄλλην νέαν ἀναλογίαν, καὶ τίθεται εἰς τὸν τρίτον τόπον, οἱ δὲ λοιποὶ προεγκαταλειφθέντες δύω Ὁμοειδεῖς Ὅροι, ἐπέχουσι κατὰ τὴν προτεθεῖσαν διδασκαλίαν τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον τόπον, ἔπειτα πολλαπλασιάζονται οἱ Μέσοι Ὅροι μετ' ἀλλήλων, καὶ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ πρώτου Ὅρου, καὶ οὕτω τὸ Πηλίκον ἔσται ὁ ζητούμενος τέταρτος Ὅρος.

δ΄.) Ὁ μὲν ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀναλογίᾳ εὑρεθεὶς Ὅρος τίθεται πάλιν (τοῦτο ἀκολουθεῖ ὅταν δίδωνται ἑπτὰ Ὅροι, καὶ ζητῆται ὁ ὄγδοος) εἰς τὸν τρίτον τόπον ἄλλης τρίτης ἀναλογίας, οἱ δὲ λοιποὶ ἔτι δύω προεγκαταλειφθέντες Ὅροι (οἱ ὁποῖοι ἀλλήλοις μὲν εἰσὶν Ὁμοειδεῖς, μὲ τοὺς ἄλλους ὅμως ἑτεροειδεῖς) τίθενται εἰς τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον τόπον, ἔπειτα ζητεῖται ὁμοίως ὁ τέταρτος Ὅρος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ α΄.

Ἵπποι 8 τρέφονται μὲ 9 σακκία Κριθῆς, ἢ βρώμης ἡμέρας 12, ζητεῖται λοιπὸν, 16 Ἵπποι μὲ 24 σακκία πόσας ἡμέρας θέλουσι τραφῇ.

ΑΠΑΝ-

Ἀ'ΠΑ'ΝΤΗΣΙΣ.

Αἱ μὲν 12 ἡμέραι κατέχουσι τὸν τρίτον τόπον, εἰς δὲ τὸν πρῶτον ϗ δεύτερον τίθενται κατ' ἀρχὰς οἱ ἀριθμοὶ (ὁ 16 δηλαδὴ ϗ 8) τῶν Ἵππων, τὰ δὲ σακκία ἐν τούτῳ ἐγκαταλείπονται. Ϗ ἐπειδὴ μία Ποσότης Κριθῆς, ἥτις πρὸς τροφὴν 8 Ἵππων εἶναι Ἱκανὴ εἰς δώδεκα ἡμέρας, διὰ 16 Ἵππους διαρκεῖ ὀλιγώτερον χρόνον, διὰ τοῦτο ϗ ὁ ζητούμενος τέταρτος Ὅρος ἔσται ἐλάσσων τοῦ τρίτου, καθὼς ϗ ὁ δεύτερος μικρότερος ἀπὸ τοῦ πρώτου.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ἵπ.} & & \text{Ἵπ.} & & \text{ἡμ.} & & \text{ἡμ.} \\ 16 & : & 8 & = & 12 & : & 6 \end{array}$$

Ὁ εὑρεθεὶς Ὅρος 6 φέρεται αὖθις εἰς τὸν τρίτον τόπον δευτέρας ἀναλογίας, ἐπίσης ὁποίας τίθενται οἱ ἀριθμοὶ (ὁ 9, ϗ 24) τῶν σακκίων εἰς τὸν πρῶτον ϗ δεύτερον τόπον, ἔπειτα ἐπειδὴ εἰς ἕνα ἀριθμὸν Ἵππων (πρὸς τροφὴν τῶν ὁποίων 9 σακκία εἰσὶν Ἱκανὰ εἰς ἡμέρας 6) διαρκοῦσιν 24 σακκία πλείονας ἡμέρας, διὰ τοῦτο ὁ τέταρτος Ὅρος ἔσται μείζων τοῦ τρίτου, Ϗ ἑπομένως ὁ δεύτερος μείζων τοῦ πρώτου, ἐξ ὧν γίνεται

$$\begin{array}{ccccccc} \text{σακ.} & & \text{σακ.} & & \text{ἡμ.} & & \text{ἡμ.} \\ 9 & : & 24 & = & 6 & : & 16 \end{array}$$

ἄρα 24 σακκία Κριθῆς εἰς τροφὴν 16 Ἵππων ἐξαρκοῦσιν 16 ἡμέρας.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β'.

Οἰκοδόμοι 4 κτίζουσιν εἰς 3 ἡμέρας Ὀργυὰς 5. ζητεῖται οὖν, πόσας Ὀργυὰς θέλουσι κτίσει 5 οἰκοδόμοι εἰς ἑπτὰ ἡμέρας;

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Οἰκ.} & & \text{Οἰκ.} & & \text{Ὀργ.} & & \text{Ὀργ.} \\ 4 & : & 5 & = & 5 & : & \chi \end{array}$$

$$\text{ἄρα } \chi = \frac{25}{4}. \text{ ἢ } = 6\,\frac{1}{4}$$

ὥστε ὁ εὑρεθεὶς τέταρτος Ὅρος ὁ $\frac{25}{4}$, ἢ ὁ $6 + \frac{1}{4}$

ἐπτπίθεται αὖθις εἰς τὸν τρίτον τόπον ἄλλης διπλῆς ἀναλογίας, οἷον

$$\overset{\text{ἡμ.}}{3} : \overset{\text{ἡμ.}}{7} = \overset{\text{ὀργ.}}{\frac{25}{4}} : \overset{\text{ὀργ.}}{\chi}$$

$$3\chi = \frac{7}{1} \times \frac{25}{4} \text{ ἤγουν } \frac{175}{4}$$

$$\text{ὅθεν } \chi = \frac{175}{12} \text{ ὅπερ ἐστὶν } = 14 + \frac{7}{12}.$$

Οἰκοδόμοι ἄρα πέντε εἰς 7 ἡμέρας κτίζουσιν $14 + \frac{7}{12}$ Ὀργυιάς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ γ',

Γρόσια 3550 φέρουσιν 1420 Γρόσ. κέρδος εἰς 10 ἔτη. ζητεῖται λοιπὸν, πόσον κέρδος θέλουσι φέρη 50000 Γρόσια εἰς χρόνους 20;

$$\overset{\text{Γρόσ.}}{3550} : \overset{\text{Γρόσ.}}{50000} = \overset{\text{Κέρδ.}}{1420} : \chi$$

$$\overset{\text{χρ.}}{10} : \overset{\text{χρ.}}{20} = \chi$$

Τὸ πρῶτον εὑρεθὲν χ εἶναι = 20000 ἀριθ. τὸν ὁποῖον θέτοντες εἰς τὸν τρίτον τόπον τῆς διπλῆς ἀναλογίας, ποιοῦμεθα τὰ ἑξῆς 10 : 20 = 20000 : 40000. ὅθεν εἶναι φανερὸν, ὅτι τὰ 50000 Γρόσια εἰς 20 ἔτη φέρουσι κέρδος 40000 Γρόσια.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 187. Ἐντεῦθεν προκύπτει μία ἀλγεβραϊκῶς γενικὴ Ἔκθεσις περὶ ἑκάστου κέρδους, ἢ τόκου ὁποιασδήποτε Ποσότητος, καὶ μάλιστα διὰ τινας ἡμέρας τοῦ χρόνου θεωρημένης. ἐπειδὴ τὸ κέρδος ἑκάστης ποσότητος ἔχει λόγον τινὰ, καὶ σχέσιν πρὸς τὸ κέρδος, ὅπου φέρουσι, φέρ' εἰπεῖν, 100 Γρόσια, διὰ τοῦτο ἡ μὲν πρώτη ἀναλογία πρέπει νὰ γένῃ οὕτως, ὡς τὰ 100 Γρόσια πρὸς τὸ κέρδος των, οὕτως ἡ δοθεῖσα Ποσότης πρὸς τὸ κέρδος της, ἡ δὲ δευτέρα ἀναλογία οὕτως, ὡς ἓν ἔτος (ἢ 360 ἡμέραι) πρὸς τὰς ἡμέρας, διὰ τὰς ὁποίας ζητεῖται τὸ κέρδος, οὕτω τὸ ἐν τῇ πρώτῃ ἀναλογίᾳ εὑρεθὲν κέρδος πρὸς τὸ εἰς ζήτησιν προτιθέμενον κέρδος, ὅπερ ἀνήκει εἰς τὰς δεδομένας ἡμέρας. ἔστω τὸ κέρδος τῶν 100 Γροσίων $= 1$. ἡ δὲ δοθεῖσα ποσότης $= \pi$, καὶ αἱ δοθεῖσαι ἡμέραι $= \eta$. ὅθεν γίνεται ἡ ἑξῆς ἀναλογία.

$$100 : 1 = \pi : \frac{1\pi}{100}. \text{ ἔπειτα}$$

$$360 : \eta = \frac{1\pi}{100} : \frac{1\pi\eta}{36000}$$

Ὅταν ὅμως ὑποτεθῇ, ὅτι τὰ 100 Γρόσ. φέρουσι κέρδος 4, τότε ἀντὶ τοῦ 1, τίθεται ὁ 4 ἀριθμός. καὶ ἡ γενικὴ Ἔκθεσις εἶναι $\frac{4\pi\eta}{36000}$. δυνάμεθα ὅμως νὰ φέρωμεν τοῦτο τὸ Κλάσμα εἰς μικροτέραν Ἔκθεσιν διὰ τῆς διαιρέσεως, οἷον $\frac{\pi\eta}{9000}$, καὶ ἀφ' οὗ πάλιν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ, τὸ προκύπτον Πηλίκον εἶναι τὸ ζητούμενον κέρδος. ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ μεταβληθῇ ἡ δύναμις εἰς Παράδ., πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ Κλάσματος διὰ τοῦ 40 (§. 185), καὶ τότε ἡ Ἔκθεσις αὕτη $\frac{\pi\eta}{9000}$ μεταβάλλεται εἰς $\frac{40\pi\eta}{9000}$, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα εὐθὺς νὰ τὸ φέρωμεν διὰ τῆς διαιρέσεως εἰς μικροτέραν Ἔκθεσιν, οἷον εἰς τὴν $\frac{2\pi\eta}{450}$. καὶ τοῦτο τὸ Κλάσ-

μα

μα δηλοῖ, ὅτι ἡ ποσότης τῶν χρημάτων πεπολλαπλασιασμένη τυγχάνει διὰ τοῦ διπλασίου ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, καὶ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ 450, τὸ δὲ ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον ἔσται τὸ ζητούμενον κέρδος εἰς Παράδ., οἷον αἱ μὲν ἡμέραι ἑνὸς ὁλοκλήρου ἔτους λογίζονται = 360, ἑνὸς δὲ μηνὸς = 30. λοιπὸν ἂν προβληθῇ εἰς ζήτησιν, πόσον κέρδος φέρει μία Ποσότης ἀπὸ 6000 Γρόσ. εἰς 6 ἡμέρας; ποιοῦμεν κατὰ μὲν τὴν πρώτην $\left(\frac{\pi\eta}{9000}\right)$ Ἔκθεσιν οὕτως $\frac{6000 \times 6}{9000} = 4$ Γρόσ. τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ ζητούμενον κέρδος, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν $\left(\frac{2\pi\eta}{450}\right)$ ποιοῦμεν οὕτως $\frac{6000 \times 12}{450} = 160$ Παράδ. τὰ ὁποῖα εἶσιν ἴσα μὲ 4 Γρόσια. Ὅταν δὲ προϋποτεθῇ, ὅτι ὁ ἐτήσιος (χρονικὸς) τόκος τῶν 100 Γροσίων εἶναι = 2, 3, 5, κ. τ. ἢ $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$ Γρόσ. κ. τ. τότε ἀντὶ τοῦ 1 τίθεται ὁ προϋποτεθεὶς ἀριθμὸς τοῦ Τόκου, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον πραγματευόμεθα εἰς κάθε περίστασιν.

ΠΑΡΑ´ΔΕΙΓ. δ´.

Οἰκοδόμοι 3 τὴν ἡμέραν 7 ὥρας ἐργαζόμενοι, κτίζουσιν εἰς 2 ἡμέρας, 84 Ὀργυιάς. πόσας ἄραγε Ὀργυιὰς κτίσουσιν οἰκοδόμοι 5 εἰς 3 ἡμέρας, ὥρας 4 τὴν ἡμέραν ἐργαζόμενοι;

Α´ΠΑ´ΝΤΗΣΙΣ.

Εἰς μὲν τὴν πρώτην ἀναλογίαν λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν οἰκοδομούντων μετὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τῶν Ὀργυιῶν, οἷον.

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Οἰκ.} & & \text{Οἰκ.} & & \text{Ὀργ.} & & & & \text{Ὀργ.} \\ 3 & : & 5 & = & 84 & : & \chi & = & 140 \end{array}$$

Ἐν

Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἀναλογίᾳ λαμβάνονται αἱ ἡμέραι μετὰ τοῦ ἤδη εὑρεθέντος ἀριθμοῦ, οἷον

$$\overset{\text{ἡμ.}}{2} : \overset{\text{ἡμ.}}{3} = \overset{\text{Ὀργ.}}{140} : \chi = \overset{\text{Ὀργ.}}{210}$$

Εἰς δὲ τὴν τρίτην ἀναλογίαν τίθενται οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὡρῶν μετὰ τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ, οἷον

$$\overset{\text{ὡρ.}}{7} : \overset{\text{ὡρ.}}{4} = \overset{\text{Ὀργ.}}{210} : \chi = \overset{\text{Ὀργ.}}{120}$$

€ πόσας Ὀργυιὰς κτίσουσιν Οἰκοδ. ς. κ. τ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 188, Δυνάμεθα ἔτι νὰ ἀποκτῶμεν τὴν ἐπίλυσιν ἑκάστου προβλήματος, εἰς σύνθετον Μέθοδον κειμένου, καὶ κατὰ ἄλλον τρόπον εὐκολώτερον, τουτέστι πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς πρώτους λόγους (ὡσάσον πρέπει πρότερον οὗτοι οἱ λόγοι νὰ κατατάττωνται εἰκότως κατὰ τὴν Συνθήκην τοῦ Προβλήματος, καθὼς ἀνωτέρω κατετάχθησαν) μετ' ἀλλήλων, καὶ ἐκ τῶν γινομένων συγκροτοῦμεν ἕνα μόνον λόγον, ἔπειτα τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, ὅστις Ὁμοειδὴς τυγχάνει μὲ τὸν ζητούμενον, θέτομεν εἰς τὸν τρίτον τόπον τῆς ἀναλογίας, καὶ οὕτω ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τέταρτον τινὰ ἀριθμὸν, ὅστις εἶναι τὸ ζητούμενον. ὅθεν εἰς τὸ προτεθὲν Πρόβλημα ποιοῦμεν οὕτω, πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν Οἰκοδ. μετὰ τῶν ἡμερῶν καὶ ὡρῶν, καθ' ἃς οὗτοι ἐργάζονται, ἔπειτα τὰ ἐκ τούτων Γινόμενα θέτομεν εἰς ἀναλογίαν, ὥστε τὸ μὲν ἓν Γινόμενον νὰ ἔχῃ τὸν πρῶτον τόπον, τὸ δὲ ἕτερον νὰ ἔχῃ τὸν δεύτερον, ὁ δὲ δοθεὶς ἀριθμὸς τῶν Ὀργ., ὅστις εἶναι Ὁμοειδὴς μὲ τὸν ζητούμενον, τίθεται εἰς τὸν τρίτον τόπον οἷον

$$\begin{array}{ll} \text{Οἰκ.} & 3 : 5 \\ \text{Ἡμ.} & 2 : 3 \\ \text{Ὡρ.} & \underline{7} : \underline{4} = \overset{\text{Ὀργ.}}{84} : = \chi \ \overset{\text{Ὀργ.}}{120} \\ & 42 : 60 \end{array}$$

εὕρηται ἄρα τὸ $\chi = 120$ Ὀργ. καὶ εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ὅστις καὶ κατὰ τὴν ἄλλως προτεθεῖσαν διδασκαλίαν εὕρηται.

ΟΡΙΣ-

ΟʹΡΙΣΜΟʹΣ β.

§. 189. Μέθοδος Εʹταιρείας (Συντροφίας) καλεῖται ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου, βγάζομεν διαφόρους Ποσότητας, αἱ ὁποῖαι ἀναλογικῶς ἀνήκουσιν εἴς τινας, οἵτινες συντροφικῶς κατέθεντο ἕκαστός τινα Ποσότητα, ἔπειτα ἐμπορευτάμενοι ἐπί τινα χρόνον, μοιράζουσιν ἀναλόγως τὸ ἐκ τῆς ὅλης Ποσότητος κέρδος, ἢ ζημίαν, ὥστε κερδαίνει, ἢ ζημιοῦται ἕκαστος κατὰ τὴν κατατεθεῖσαν αὐτοῦ Ποσότητα.

ΠΡΟʹΒΛΗΜΑ γʹ.

§. 190. Νὰ εὕρωμεν εἰς τὴν Μέθοδον ἑταιρείας ἀναλόγους Οʹρους, ἢ Ποσότητας.

ΠΡΑΚΤΕʹΑ, ἢ ΛΥʹΣΙΣ.

α.) Συνάπτομεν ἀλλήλαις τὰς κατατεθείσας Ποσότητας, καὶ ἀποτελοῦμεν ἐκ τούτου ἓν κεφαλαιῶδες ἄθροισμα, ἔπειτα κάμνομεν μίαν τοιαύτην ἀναλογίαν, οἷον ὡς τὸ ἐξ ἁπασῶν τῶν Ποσοτήτων συγκείμενον (ἄθροισμα) πρὸς τὴν ἰδίαν Ποσότητα ἑκάστου, οὕτω καὶ ὅλον τὸ κέρδος (ἢ ἡ ζημία) πρὸς τὸ ζητούμενον κέρδος, τὸ ἀνῆκον ἑκάστῃ Ποσότητι,

ΠΑΡΑʹ-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. α.

Συνέμποροι τρεῖς συντροφίαν ποιησάμενοι, καπίβαλιν καθ' ὑπόθεσιν ὁ μὲν πρῶτος Γρόσ. 5000, ὁ δὲ δεύτερος 3000, ὁ δὲ τρίτος αὖθις 2000. καὶ ἐκέρδησαν 15000 Γρόσ. ὅθεν ζητεῖται, πόσον κέρδος ἀνήκει νὰ λάβῃ ἕκαστος τούτων. ὅλη ἡ Ποσότης τῶν Γροσίων, ὁποῦ καπίβαλον ἤτοι εἶναι 10000, ὅθεν

$10000:5000 = 15000:\chi = 7500.$ $\Big\{$ τὸ κέρδος τὸ ἀνῆκον εἰς τὸν πρῶτον

$10000:3000 = 15000:\chi = 4500.$ $\Big\{$ τὸ τοῦ δευτέρου

$10000:2000 = 15000:3000.$ $\Big\{$ τὸ τοῦ τρίτου

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β.

Τρεῖς ἠγόρασαν ὁμοῦ 4000 μέτρα σίτου διὰ 500, φέρ' εἰπεῖν, Γρόσια, καὶ ὁ πρῶτος ζητεῖ νὰ λάβῃ ἐξ αὐτῶν διὰ λογαριασμόν του 1300 μέτρα, ὁ δὲ δεύτερος 1460, καὶ ὁ τρίτος 1240. πόσα λοιπὸν Γρόσια πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος διὰ ὅσα μέτρα σίτου ἔλαβεν;

μέτρα. μέτρα. Γρόσ. Γρόσ.
$4000 : 1300 = 500 : 162\frac{1}{2}.$ $\Big\{$ τόσα Γρόσια πρέπει νὰ πληρώσῃ ὁ πρῶτος.

μέτρ. μέτρ. Γρόσ. Γρόσ.
$4000 : 1460 = 500 : 182\frac{1}{2}.$ $\Big\{$ τόσα ὁ δεύτερος

μέτρ. μέτρ. Γρόσ. Γρόσ.
$4000 : 1240 = 500 : 155.$ $\Big\{$ ὁ δὲ τρίτος τόσα

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ α'.

§. 191. Ἂν ὦ πλείονες τῶν τριῶν τύχωσιν οἱ τὴν συντροφίαν ποιήσαντες, τὸν αὐτὸν οὖθις τρόπον μεταχειριζόμεθα, τοσαύτας δηλαδὴ συγκροτοῦμεν ἀναλογίας, ὅσοι εἰσὶν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί·

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 192. Εἰς ἐντελεστέραν πληροφορίαν μεταχειριζόμεθα ἐνίοτε καὶ βάσανον (τουτέστι δοκιμὴν) μετὰ τὴν λύσιν τοῦ Προβλήματος. Συνάπτομεν ἀλλήλους τοὺς εὑρεθέντας ἀριθμοὺς, οἷον τὸν (τοῦ πρώτου Παραδείγματος) 7500, καὶ τὸν 4500, καὶ τὸν 3000 ἀριθμὸν, καὶ ἐὰν ἐκ τῆς Συνάψεως προκύψῃ ἀριθμὸς ἴσος μὲ τὸ ὅλον κέρδος 15000, ἡ πρᾶξις καὶ ἡ Ἐπίλυσις τότε εἶναι ὑγιής.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 193. Εἰσὶν ἔτι καὶ ἄλλαι διάφοροι Συνθῆκαι καὶ περιστάσεις, ὡς εἴρηται προλαβόντως περὶ τῆς Συνθέτου Μεθόδου, οἷον κοντὰ εἰς τὴν Διαφορὰν καὶ ἀνισότητα τῶν παρ' ἑκάστου καταβαλλομένων Ποσοτήτων, θεωρεῖται καὶ τις διαφορὰ τοῦ χρόνου, κατὰ τὸν ὁποῖον ἕκαστος τῶν συνεμπόρων κατέθετο τὴν Ποσότητά του. ὅθεν ὅταν προβληθῶσιν εἰς λύσιν τοιαῦται περιστάσεις, πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὴν Ποσότητα ἑκάστου μετὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τοῦ χρόνου, ὁ ὁποῖος θεωρεῖται καὶ ἀναφέρεται εἰς τὴν αὐτὴν Ποσότητα, ἔπειτα συνάπτομεν τὰ ἐκ τούτων Γενόμενα εἰς ἓν ὁλικὸν ἄθροισμα, καὶ τέλος ἀποτελοῦμεν μίαν ἀναλογίαν, καθὼς ἐν τοῖς ἑξῆς δηλοῦται σαφέστερον.

ΔΕΓΞΙΣ.

Ἐπειδὴ τὰ ζητούμενα κέρδη ἔχουσι λόγον καὶ πρὸς τὰς καταβληθείσας Ποσότητας, καὶ πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦ χρόνου, νυ, εἶναι πρόδηλον, ὅτι ἔχυσι λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν αὐτῶν, καὶ ἑπομένως ἔχυσιν ὡς οἱ ὑπ' αὐτῶν Γινόμενοι ἀριθμοί.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. γ'.

Συνέμποροι τρεῖς ἐκέρδησαν Γρόσια 200, ἀπὸ τὺς ὁποίυς ὁ μὲν εἶχε βάλη Γρόσ. 20 πρὸ 3 Μηνῶν, ὁ δὲ δεύτερος Γρόσια 40 πρὸ 2 Μηνῶν, καὶ ὁ τρίτος 24 πρὸ 6 Μηνῶν. ὅθεν ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ, πόσον κέρδος ἀνήκει ἑκάστῳ,

Γρόσ.	20	40	24	60
Μῆν.	3	2	6	80
	60	80	144	144
				284

ὡς 284 : πρὸς 60 = ὕτω 200 : πρὸς $42 + \frac{72}{284}$

284 : 80 = 200 : $56 + \frac{96}{284}$

284 : 144 = 200 : $101 + \frac{116}{284}$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. δ'.

Γεώργιός τις, δὸς εἰπεῖν, καὶ Δημήτριος, καὶ Ἰωάννης οἱ τρεῖς ὁμῦ ἔκαμον συντροφίαν, καὶ ὁ μὲν Γεώργιος κατέθετο εἰς τὴν συντροφίαν Γρόσ. 100. διὰ 19 Μῆνας.
ὁ δὲ Δημήτριος κατέβαλεν 130. διὰ 10 Μῆνας.
ὁ δὲ Ἰωάννης . . . . 300. διὰ 6 Μῆνας.

τὸ δὲ κέρδος ἐγένετο 10000. ζητεῖται λοιπὸν, πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος τούτων;

ἡ Ποσότης τοῦ πρώτου 100 πολλαπλασιασθεῖσα μετὰ τοῦ

16 ἀριθμοῦ γίνεται	1900
ἡ δὲ τοῦ δευτέρου	1300
ἡ δὲ τοῦ τρίτου	1800
	5000

ὅθεν 5000 : 1900 = 10000 : 3800. τόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ὁ πρῶτος.

5000 : 1300 = 10000 : 2600. τόσον ὁ δεύτερος.

5000 : 1800 = 10000 : 3600. τόσα ὁ τρίτος.

ΣΧΟΛΙΟΝ γ'.

§. 194. Περὶ ἐκείνων, ὅπου συνηθίζουσιν οἱ ἀριθμητικοὶ νὰ πραγματεύωνται ἔτι ἐνταῦθα, ἡμεῖς ὡμιλήσαμεν, ὅτι ἐν τῷ (§. 160) ἐπραγματευόμεθα.

ΟΡΙΣΜΟΣ γ'.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῆς ψευδοῦς ὑποθέσεως.

§. 195. Μέθοδος ψευδοῦς ὑποθέσεως καλεῖται, ὅταν λαμβάνωμεν, ἀντὶ τῶν ἀγνώστων καὶ ζητουμένων ἀριθμῶν, ἄλλους τινας ἀριθμοὺς ὑποθετικοὺς καὶ ἀναλόγους μὲ τοὺς ζητουμένους, διὰ νὰ ἀποκτήσωμεν τὴν ἀληθῆ ἐπίλυσιν τοῦ προβαλλομένου.

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

Προβάλλεται πρῶτον, ὅτι τρεῖς ἄνθρωποι ἔχουσι νὰ μοιράσωσιν 1300 Γρόσια, τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος πρέπει νὰ λάβῃ πενταπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ δεύτερος διπλάσιον τῶν τοῦ τρίτου. ἔπειτα ζητεῖται πόσα Γρόσια πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Ο'θεν ἂν ὑποτεθῇ νὰ λάβῃ ὁ τρίτος 1, πρέπει καὶ ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ 2, κατὰ τὴν τοῦ Προβλήματος συνθήκην, καὶ ἑπομένως ὁ πρῶτος 10. τούτους δὲ τοὺς ἀριθμοὺς Συνάψαντες ὁμοῦ, ποιοῦμεν τὸν 13 ἀριθμὸν, ἔπειτα συγκροτοῦμεν τὰς ἑξῆς ἀναλογίας.

13:10=1300:χ=1000 ὅπερ ἐστὶ τὸ μέρος τοῦ πρώτου.
13: 2=1300:ψ= 200 τὸ μέρος τοῦ δευτέρου
13: 1=1300:φ= 100 . . . τοῦ τρίτου.

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Εἶναι φανερὸν ἐκ τῆς ὑποθέσεως, ὅτι ὃν λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξ ὑποθέσεως ληφθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι ὁ 13 πρὸς τὸ μερίδιον (ὅπου ὑποθετικῶς λαμβάνει ὁ πρῶτος) εἴτ' οὖν πρὸς τὸν 10, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει καὶ ὁ δοθεὶς τῶν Γροσίων ἀριθμὸς, εἴτ' οὖν 1300, πρὸς τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν Γροσίων (τὰ ὁποῖα ἀληθῶς πρέπει νὰ λάβῃ ὁ πρῶτος) τουτέστι πρὸς τὸν 1000. καὶ οὕτω διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη ἀναλογία εἶναι ἀληθής.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ

Περὶ Προόδων.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ α'.

§. 195. Πρόοδος καλεῖται σειρά τις Ποσοτήτων ἢ πληθὺς ἀριθμῶν τινων κατά τινας ἴσους λόγους χωρούντων, ἢ γραφομένων. αὕτη δὲ εἶναι διττὴ, ἀριθμητικὴ δηλαδὴ, καὶ Γεωμετρικὴ. καὶ ἀριθμητικὴ μὲν Πρόοδος εἶναι, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ χωρῶσι κατά τινα ἀριθμητικὸν λόγον, τοὺς ὁποίους καὶ διὰ τοῦτο Μεγέθη, ἢ ἀριθμοὺς Ἰσοδιαφέροντας ὀνομάζουσί τινες. Γεωμετρικὴ δὲ εἶναι, ὅταν αἱ Ποσότητες κατατάττωνται ἐν Γεωμετρικῷ τινι λόγῳ, καὶ διὰ τοῦτο ὀνομάζονται σειρὰ μεγεθῶν τὸ αὐτὸ Πηλίκον ἐχόντων. καὶ τὰς δύω ταύτας Προόδους ἐκθέτομεν δι' ἀριθμῶν οὕτω

Α'ριθμ.

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22. κτ.

Γεωμ.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. κτ.

ὉΡΙΣΜΌΣ β.

§. 196. Αὔξουσα Πρόοδος λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας οἱ ἑπόμενοι Ὅροι διηνεκῶς χωροῦσιν αὐξάνοντες, ϗ ἑπομένως εἶναι μείζονες τῶν Ἡγουμένων, καθὼς αἱ ἀνωτέρω δύω προτεθεῖσαι. Μειουμένη δέ, ἢ Ἐλαττουμένη Πρόοδος εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας οἱ Ὅροι χωροῦσιν ἐλαττούμενοι, ϗ ἑπομένως ὁ Ἡγούμενος Ὅρος εἶναι πάντοτε μείζων τοῦ ἑπομένου. διὰ τοῦτο ϗ μιᾶς μὲν αὐξούσης Προόδου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ Ἐλάττων, ὁ δὲ ἔσχατος εἶναι ὁ μείζων τῶν ἄλλων. εἰς δὲ τὴν Ἐλαττουμένην Πρόοδον ἀκολουθεῖ τὸ ἀνάπαλιν.

ΠΌΡΙΣΜΑ.

§. 197. Ἐκ τῶν εἰρημένων εἶναι καταφανές, ὅτι ἡ ἀρχὴ ϗ ἡ Πηγὴ τινὸς Προόδου εἶναι μία συνεχὴς ἀναλογία, ἥτις διὰ τῆς ζητήσεως τοῦ ἑπομένου Ὅρου χωροῦσα κατὰ τοὺς ἤδη γνωστοὺς κανόνας, Πρόοδός τις ἀποκαθίσταται. ἂν π. χ. λάβωμεν πρῶτον μίαν συνεχῆ ἀναλογίαν, οἷον τὴν ÷ 1, 4, 7, ϗ ἔπειτα εἴπωμεν, ὡς 4 πρὸς 7, οὕτω 7 πρὸς 10, κτώμεθα τὸν τέταρτον Ὅρον. ϗ πάλιν ἂν ἀκολουθήσωμεν τὸ αὐτὸ ἐπὶ πλέον, λέγοντες, ὡς 7 πρὸς 10, οὕτως 10 πρὸς 13, πορίζόμεθα τὸν πέμπτον Ὅρον, ϗ οὕτω χωροῦμεν ἐπ' ἄπειρον. τὸ ἴδιον ἀκολουθεῖ ϗ εἰς μίαν Γεωμετρικήν. π. χ. 1 : 2 = 2 : 4 ϗ 2 : 4 = 4 : 8 ϗ 4 : 8 = 8 : 16. κ. τ. ἐξ ὧν γίνεται 1 : 2 : 4 : 8 : 16. κ. τ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 198. Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τινὰ σύγχυσιν, θέλομεν πραγματευθῇ ἐν τοῖς ἑξῆς μόνον περὶ τῆς αὐξούσης Προόδου. ἐπειδὴ ὅταν θελήσωμεν νὰ μεταβάλωμεν μίαν αὔξουσαν εἰς Ἐλαττωμένην Πρόοδον. ἠμποροῦμεν εὐκόλως νὰ τὴν μεταβάλωμεν διὰ τῆς ἐναντίας μεταθέσεως τῶν Ὅρων.

ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 199. Κάθε αὔξουσα ἀριθμητικὴ Πρόοδος δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τοῦτον τὸν τύπον. $\div\ \alpha\ .\ \alpha+\delta\ .\ \alpha+2\delta\ .\ \alpha+3\delta\ .\ \alpha+4\delta\ .\ \alpha+5\delta$. κ. τ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀριθμητικὴ Πρόοδος εἶναι μία συνεχὴς σειρὰ Ποσοτήτων, ἢ ἀριθμῶν (§. 195), οἱ ὁποῖοι χωροῦσι κατά τινα ἴσην διαφοράν. ἄρα ἕκαστος Ἑπόμενος Ὅρος εἶναι μείζων τοῦ Ἡγουμένου κατά τινα προσδιωρισμένην καὶ ἴσην διαφοράν. ὅθεν ὅταν ὑποτεθῇ ὁ πρῶτος Ὅρος μιᾶς ἀριθμ. Προόδου α, ὁ δεύτερος Ὅρος ἔσται τότε αὐτὸς ὁ πρῶτος μετὰ τῆς δοθείσης διαφορᾶς, τουτέστιν $\alpha+\delta$, ὁ δὲ τρίτος ἔσται ὁ ἴδιος Ἡγούμενος δεύτερος μετὰ τῆς ἰδίας διαφορᾶς. τουτέστιν $\alpha+\delta+\delta$, ἢ $\alpha+2\delta$. ὁ δὲ τέταρτος ἔσται πάλιν αὐτὸς ὁ Ἡγούμενος τρίτος μετὰ τῆς διαφορᾶς, οἷον $\alpha+2\delta+\delta$, ἢ $\alpha+3\delta$. καὶ οὕτω καθεξῆς. ἑκάστη ἄρα αὔξουσα ἀριθμητικὴ Πρόοδος κ.τ. ἥτις διὰ τῶν ἀριθμῶν παρισταμένη, προάγεται οὕτως.

2.2+3

$2 . 2 + 3 . 2 + 6 . 2 + 9 . 2 + 12 . 2 + 15 . 2 + 18 .$

$2 . \quad 5 \quad . \quad 8 \quad . \quad 11 \quad . \quad 14 \quad . \quad 17 \quad . \quad 20$

ἐπὶ δὲ τῆς ἐλαττουμένης Προόδου οἱ Ὅροι ἀκολουθοῦσιν οὕτως·

$\alpha . \alpha - \delta . \alpha - 2\delta : \alpha - 3\delta .$ κ. τ.

ΠΟΡΙΣΜΑ α΄.

§. 200. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἕκαστος δύναται νὰ καταλάβῃ σαφέστατα, ὅτι κάθε ἑπόμενος Ὅρος μιᾶς αὐξούσης Προόδου συνίσταται ἐκ τοῦ πρώτου Ὅρου καὶ τῆς δοθείσης διαφορᾶς, πολλαπλασιασθείσης μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος εἶναι Ἴσος μὲ τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων Ὅρων, ἢ μὲ ἀριθμὸν μονάδι Ἐλάττονα τοῦ κατ' αὐτὸν τὸν ζητούμενον Ὅρον πλήθους, τουτέστιν ὁ τέταρτος, φέρ' εἰπεῖν, Ὅρος τῆς ἀνωτέρω Προόδου (§. 199) σύγκειται ἐκ τοῦ α καὶ τῆς διαφορᾶς δ, πολλαπλασιασθείσης μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3. Ὅστις εἶναι Ἴσος μὲ τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων Ὅρων· οἷον $\alpha + 3\delta$. ὁ δὲ ἕκτος Ὅρος εἶναι $\alpha + 5\delta$. καὶ ἑπομένως ὁ εἰκοστὸς Ὅρος συνίσταται ἐκ τοῦ $\alpha + 19\delta$. Ὅθεν ἂν ὁ πρῶτος Ὅρος ὑποτεθῇ Ἴσος μὲ τὸν 2, καὶ ἡ διαφορὰ 3, τότε ὁ εἰκοστὸς Ὅρος $2 + 3 \times 19 = 2 + 57 = 59$.

ΠΟΡΙΣΜΑ β΄.

§. 201. Ὅταν θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν Διαφορὰν μεταξὺ τοῦ Πρώτου, καὶ ἐσχάτου Ὅρου τῆς Προόδου· ἀφαιροῦμεν τότε τὸν πρῶτον Ὅρον ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου. π. χ. ἔσχατος Ὅρος μιᾶς Προόδου ἔστω ὁ ἕβδομος Ὅρος, ἤτ' οὖν ὁ $\alpha + 6\delta$. ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ ὁ πρῶτος Ὅρος α, ἐγκαταλείπεται μόνον 6δ, ὅπερ ἐστὶν ἡ διαφορὰ ἡ μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τούτου τοῦ ἐσχάτου Ὅρου θεωρουμένη. Ὅθεν ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου εἶναι Ἴση μὲ τὴν κοινὴν διαφορὰν δ, πολλαπλασιασθεῖσαν μετὰ τοῦ πλήθους τῶν Ὅρων Μονάδι Ἐλαττωθείσης.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ′.

§. 202. Τὸ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου ἄθροισμα εἶναι ἴσον, μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ προεσχάτου, τουτέστι τοῦ παραλήγοντος Ὅρου, ὡσαύτως καὶ τὸ ἄθροισμα ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ προεσχάτου Ὅρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ τοῦ Ὅρου τοῦ κειμένου πλησίον τοῦ Προεσχάτου, τουτέστι τοῦ προπαραλήγοντος. π. χ. ἔστω τις Πρόοδος ἀριθμητικὴ ἀπὸ ἓξ Ὅρων συνισταμένη, οἷον ἡ $\alpha . \alpha+\delta . \alpha+2\delta . \alpha+3\delta . \alpha+4\delta . \alpha+5\delta$. τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἐσχάτου Ὅρου, τουτέστι τὸ $\alpha+\alpha+5\delta$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\alpha+\delta+\alpha+4\delta$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ πέμπτου Ὅρου, ὡσαύτως καὶ τὸ ἄθροισμα ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ πέμπτου, τουτέστι τὸ $2\alpha+5\delta$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $2\alpha+5\delta$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου Ὅρου, εἰ δὲ καὶ τύχῃ ἡ Πρόοδος ἐκ πλειόνων Ὅρων συνισταμένη, πάλιν τὸν αὐτὸν τρόπον μεταχειριζόμεθα, ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου ἀρχόμενοι, ὥστε γενικῶς πρέπει νὰ θεωρῶνται τὰ ἑξῆς. ὅτι, ἐφ᾽ ἑκάστης ἀριθμητικῆς Προόδου τὸ Κεφάλαιον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ Κεφάλαιον ἐκείνων τῶν Ὅρων, οἵτινες ἐπίσης ἀφίστανται ἀπὸ τῶν ἄκρων. Ὅτι ὅμως ἡ Πρόοδος ἐκ περιττῶν (*) Ὅρων συνίσταται, τότε ὁ μεσαίτατος Ὅρος τῆς Προόδου μένει μόνος του καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλησιεστάτων περὶ αὐτὸν δύω κειμένων Ὅρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τούτου τοῦ μεσαιτάτου Ὅρου.

ΠΟΡΙΣΜΑ δ′.

§. 203. Ἐπειδὴ πάντα ταῦτα τὰ ἀθροίσματα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν, ἐντεῦθεν μανθάνομεν, πῶς νὰ εὑρίσκωμεν εὐκόλως τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν Ὅρων τῆς τυχούσης Προόδου. πολλαπλασιάζο-

μεν

(*) Περιττὰ ἐνταῦθα λέγονται τὰ ἄζυγα, οἷον τὸ ἕν, τὰ τρία, τὰ πέντε, τὰ ἑπτά. κ. τ.

μεν δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ πάντων τῶν Ὅρων, καὶ τότε τὸ ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως Γινόμενον εἶναι τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν Ὅρων. ἢ ἄλλως πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου μεθ' ὅλου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν Ὅρων, ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ Γινόμενον διὰ τοῦ 2. καὶ τότε τὸ ἐκ τῆς Διαιρέσεως Πηλίκον ἔσαι Ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν Ὅρων. π. χ. Ἔστω δοθεῖσα αὕτη ἡ Πρόοδος. 2-5.8.11.14.17.20,23. λοιπὸν θέλοντες νὰ εὕρωμεν πόσον εἶναι ὅλον τὸ ἄθροισμα πάντων τούτων τῶν Ὅρων, λαμβάνομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου, τουτέστι τὸ $2+23$, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ πάντων τῶν Ὅρων, τουτέστι μὲ τὸν 4, καὶ τὸ ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως Γινόμενον εἶναι ὅλον τὸ ἄθροισμα τῶν Ὅρων, οἷον $(2+23)^4 = 100$. ἢ κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον $(2+23)\frac{8}{2} = 100$.

ΠΟΡΙΣΜΑ ι.

§. 104. Ὅθεν δὴ ἐφ' ἑκάστης Προόδου θεωροῦνται πέντε τινά.

1) Ὁ πρῶτος Ὅρος τῆς Προόδου, ὅστις ἐστὶν ὁ πλέον μικρότερος (ἐνταῦθα ὑποτίθεται Πρόοδος αὔξουσα) τῶν ἑπομένων Ὅρων.

2) Ὁ ἔσχατος Ὅρος, ὅστις ὑπάρχει καὶ μείζων τῶν ἄλλων.

3) Ἡ διαφορὰ, καθ' ἣν οἱ Ὅροι διαφέρουσι μεταξύ των ἐπίσης.

4) Ἡ πλῆθυς, ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν Ὅρων.

5) Τὸ Κεφάλαιον, ἢ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν Ὅρων. τὰ ὁποῖα οὕτως εἰσὶν συνδεδεμένα, ὥστε ἂν δοθῶσιν ἐξ αὐτῶν μόνον τὰ τρία, εὐθὺς καὶ τὰ λοιπὰ δύω προσδιορίζονται ἐξ αὐτῆς τῆς Συνθήκης, καὶ εὑρίσκονται εὐκολώτατα. π. χ. ἂν εἰς μίαν Πρόοδον προσδιορισθῇ ὁ πρῶτος Ὅρος 2, ὁ ἔσχατος 23, καὶ ἡ διαφορὰ 3, εὐθὺς ἐξ αὐτῆς τῆς Συνθήκης προσδιορίζεται, καὶ ὅτι (μ' ὅλον ὁποῦ φαίνεται εἰς ἡμᾶς ἔτι ὡς ἀπροσδιόριστον καὶ ἄδηλον) ἡ μὲν πλῆθυς τῶν Ὅρων εἶναι ὀκτὼ, τὸ δὲ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Ὅρων ἑκατόν.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 205. Δι' αὐτῶν τῶν πέντε εἰρημένων Ἰδιοτήτων, ἂν τὰς ὀνοματίσωμεν ἀλγεβραϊκῶς διὰ Γραμμάτων, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ἀλγεβραϊκοὺς τινὰς, καὶ γενικοὺς Τύπους, τοὺς ὁποίους δύναται ἕκαστος νὰ μεταχειρίζηται εἰς κάθε Ἰδιαιτέραν περίστασιν, ὥστε ἀφ' οὗ δοθῶσι καὶ προσδιορισθῶσιν ἐξ αὐτῶν τρία, νὰ εὑρίσκῃ τὰ λοιπὰ δύω. καὶ δὴ

ὁ πρῶτος Ὅρος τῆς Προόδου ὀνομασθήτω α
ὁ δὲ ἔσχατος . . . . . ω
ἡ δὲ διαφορὰ . . . . . δ
τὸ δὲ πλῆθος . . . . . π
τὸ δὲ κεφάλαιον . . . . . κ

κατὰ τὸ πρῶτον Πόρισμα (§. 200) ἕκαστος ἑπόμενος Ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον Ὅρον σὺν τῇ διαφορᾷ πολλαπλασιασθείσῃ μετὰ τοῦ πλήθους τῶν Ὅρων κατὰ Μονάδα ἐλαττωμένης, τουτέστι μετὰ τοῦ $\pi - 1$. λοιπὸν ἕκαστος Ὅρος εἶναι $= \alpha + \pi\delta - \delta$. Κατὰ δὲ τὸ δεύτερον Πόρισμα ἡ μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου διαφορὰ $\omega - \alpha$ εἶναι ἴση μὲ τὴν κοινὴν τῶν Ὅρων διαφορὰν πολλαπλασιασθεῖσαν μετὰ τοῦ πλήθους τῶν Ὅρων Μονάδι ἐλαττωμένης τουτέστι μετὰ τοῦ $\pi - 1$, ὅπερ γίνεται $\pi\delta - \delta$. λοιπὸν $\omega - \alpha = \pi\delta - \delta$. Κατὰ τὸ τέταρτον Πόρισμα πορίζομεθα τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν Ὅρων, πολλαπλασιάζοντες τὸ Κεφάλαιον τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου, ἤτοι $\alpha + \omega$ μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ πλήθους τῶν Ὅρων τουτέστι μὲ τὸ $\frac{\pi}{2}$. λοιπὸν τὸ Κεφάλαιον τῶν Ὅρων εἶναι ἴσον μὲ τουτέστι τὴν Ἀλγεβραϊκὴν Ἔκθεσιν $\frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2}$, οἷον $\kappa = \frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2}$. αὗται αἱ εἰρημέναι Ἐκθέσεις χρησιμεύουσι πρὸς λύσιν τοῦ ἀκολούθου Προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α.

§. 206. Νὰ ἀποκαταστήσωμεν Ἐκθέσεις τινας, ἢ Τύπους γενικούς, διὰ τῶν ὁποίων, ὅταν δοθῶσι τρεῖς Ἰδιότητες μιᾶς Προόδου, νὰ ἠμπορῶμεν νὰ εὑρίσκωμεν εὐκόλως καὶ τὰς λοιπὰς δύω.

Διὰ νὰ σαφηνίσωμεν ἐπὶ πλέον τὰ πρακτέα καὶ τὰς λύσεις διά τινος Παραδείγματος, μεταχειριζόμεθα ταύτην τὴν ἀκόλουθον Πρόοδον. 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Εἰς τὸ προτεθὲν Σχόλιον προέκυψεν ἐκ τοῦ δευτέρου Πορίσματος ἡ Ἀλγεβραϊκὴ Ἔκθεσις $\omega - \alpha = \pi\delta - \delta$. ἂν λοιπὸν λάβωμεν τὰ τῆς Ἐξισώσεως ταύτης, καὶ κατὰ τοὺς περὶ Ἐξισώσεως Κανόνας μεταθέσωμεν τὰ μὲν τρία διδόμενα εἰς τὸ ἓν μέρος, τὸ δὲ ἕτερον ζητούμενον εἰς τὸ ἄλλο μέρος, ἀποκτῶμεν οὕτω τέσσαρας διαφόρους Τύπους, τῶν ὁποίων τὸν μὲν πρῶτον μεταχειριζόμεθα εἰς εὕρεσιν τοῦ πρώτου Ὅρου α, τὸν δὲ δεύτερον εἰς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου Ὅρου ω, τὸν δὲ τρίτον εἰς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς δ, καὶ τὸν τέταρτον εἰς εὕρεσιν τῆς πλήθυος τῶν Ὅρων π, οἷον.

ΤΥΠΟΣ α.

Ἐὰν δοθῇ ὁ ἔσχατος Ὅρος ω, καὶ ἡ διαφορὰ δ, καὶ ἡ πλῆθυς π, καὶ ζητῆται ὁ πρῶτος Ὅρος α, ποιοῦμεν οὕτω

$$\omega - \pi\delta + \delta = \alpha, \text{ τουτέστι } 34 - 36 + 3 = 1.$$

ΤΥ.

ΤΥΠΟΣ β΄.

Ἐὰν δὲ δοθῇ τὸ π, τὸ δ, τὸ α, καὶ ζητῆται τὸ ω, μεταχειριζόμεθα ταύτην τὴν Ἐξίσωσιν

$\pi\delta - \delta + \alpha = \omega$, τυτέστι $36 - 3 + 1 = 34$.

ΤΥΠΟΣ γ΄.

Ὅταν δὲ ὦσι διδόμενα τὸ ω, α, π, καὶ ζητῆται ἡ διαφορὰ δ, ποιῦμεν ὕτω

$$\frac{\omega - \alpha}{\pi - 1} = \delta \text{ τυτέστι } \frac{34 - 1}{12 - 1} = 3.$$

ΤΥΠΟΣ δ΄.

Ὅταν δὲ ὦσι διδόμενα τὸ ω, α, δ, καὶ ζητῆται τὸ π· τότε ποιῦμεν ὕτω

$$\frac{\omega - \alpha + \delta}{\delta} = \pi, \text{ τυτέστι } \frac{34 - 1 + 3}{3} = 12$$

Ὡσαύτως εἰς τὸ προτεθὲν Σχόλιον προέκυψε κατὰ τὸ πέμπτον Πόρισμα αὕτη ἡ Ἔκθεσις $\kappa = \frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2}$. ἂν λοιπὸν εἰς αὐτὴν τὴν Ἐξίσωσιν ζητηθῇ, ὡς πρότερον, ἡ Ἔκθεσις τῦ κ, α, ω, καὶ τῦ π, δύνανται νὰ προκύψωσιν ἄλλοι τρεῖς γενικοὶ Τύποι. οἷον,

ΤΥΠΟΣ έ.

Ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος Ὅρος, ὁ ἔσχατος, καὶ ἡ πληθὺς τῶν Ὅρων, καὶ ζητῆται τὸ Κεφάλαιον, τότε μεταχειριζόμεθα εἰς εὕρεσιν τὴν ἑξῆς Ἔκθεσιν

$$\frac{\alpha\pi+\omega\pi}{2} = \kappa, \text{ τουτέστι } \frac{1\times12+34\times12}{2} = 210$$

ΤΥΠΟΣ ϛ'.

Ὅταν δὲ δοθῇ τὸ Κεφάλαιον, ἡ πληθὺς, καὶ ὁ ἔσχατος, καὶ ζητῆται ὁ πρῶτος, μεταχειριζόμεθα τὴν Ἔκθεσιν κατὰ τοῦτον τὸν Τύπον.

$$\frac{2\kappa}{\pi} - \omega = \alpha \text{ τουτέστι } \frac{420}{12} - 34 = 1.$$

ΤΥΠΟΣ ζ'.

Ὅταν δὲ δοθῇ τὸ Κεφάλαιον, ἡ πληθὺς, καὶ ὁ πρῶτος Ὅρος, καὶ ζητῆται ὁ ἔσχατος, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον κατὰ τὸν ἑξῆς γενικὸν Τύπον.

$$\frac{2\kappa}{\pi} - \alpha = \omega \text{ τουτέστι } \frac{420}{12} - 1 = 34.$$

ΤΥΠΟΣ ή.

Ὅταν δὲ δοθῇ τὸ Κεφάλαιον, ὁ πρῶτος Ὅρος, καὶ ὁ ἔσχατος, καὶ ζητῆται ἡ πληθὺς τῶν Ὅρων, τότε ποιοῦμεν κατὰ τὸν ἑξῆς Τύπον

$$\frac{2\kappa}{\alpha+\omega} = \pi \text{ τουτέστι } \frac{420}{1+34} = 12$$

Διὰ

Διὰ τῶν ἀνωτέρω εὑρεθεισῶν δυνάμεων προκύπτουσιν ἄλλοι δώδεκα γενικοὶ Τύποι. οἷον,

ΤΥΠΟΣ θ'.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου μεταχειριζόμεθα.

$$\frac{2\kappa+\delta\pi^2-\delta\pi}{2\pi}=\omega, \text{ τουτέστι } \frac{420+432-36}{24}=34$$

ΤΥΠΟΣ ι'.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς Διαφορᾶς μεταχειριζόμεθα.

$$\frac{2\omega\pi-2\kappa}{\pi^2-\pi}=\delta \text{ τουτέστι } \frac{816-420}{114-12}=3$$

ΤΥΠΟΣ ια'.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ Κεφαλαίου μεταχειριζόμεθα

$$\frac{2\omega\pi-\delta\pi^2+\delta\pi}{2}=\kappa \quad \frac{816-432+36}{2}=210.$$

ΤΥΠΟΣ ιβ'.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλήθους τῶν Ὅρων μεταχειριζόμεθα.

$$\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\delta^2}+\frac{\omega}{\delta}+\frac{1}{4}-\frac{2\kappa}{\delta}\right)}+\frac{\omega}{\delta}+\frac{1}{2}=\pi.$$

ὅπερ δι' ἀριθμῶν ἐμφαίνομεν $\sqrt{\left(\frac{1156}{9}+\frac{34}{3}+\frac{1}{4}+\frac{420}{3}\right)}+\frac{34}{3}+\frac{1}{2}=12.$

ΤΥ-

ΤΥΠΟΣ ιγ'.

Πρὸς εὕρεσιν αὖθις τῆς πλήθους τῶν Ὅρων μεταχειριζόμεθα.

$$\sqrt{\left(\frac{2\kappa}{\delta}+\frac{\alpha^2}{\delta^2}-\frac{\alpha}{\delta}+\frac{1}{4}\right)}-\frac{\alpha}{\delta}+\frac{1}{2}=\pi.$$

ὅπερ δὲ ἀριθμῶν $\sqrt{\left(\frac{420}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}$

$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=12.$$

ΤΥΠΟΣ ιδ'.

Εἰς εὕρεσιν τοῦ πρώτου Ὅρου μεταχειριζόμεθα

$\frac{2\kappa}{2\pi}-\frac{\pi\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\alpha$. καὶ δὲ ἀριθ. $\frac{420}{24}-\frac{36}{2}$

$+\frac{3}{2}=1.$

ΤΥΠΟΣ ιε'.

Εἰς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς μεταχειριζόμεθα

$\frac{2\kappa-2\alpha\pi}{\pi^2-\pi}=\delta$, τουτέστι $\frac{420-24}{144-12}=3.$

ΤΥΠΟΣ ιϛ'.

Εἰς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου μεταχειριζόμεθα

$\frac{\pi^2\delta-\pi\delta+2\pi\alpha}{2}=\kappa.\ \frac{432-36+24}{2}=210.$

ΤΥΠΟΣ ιζ΄.

Εἰς εὕρεσιν αὖθις τοῦ κεφαλαίου μεταχειριζόμεθα

$$\frac{\omega^2-\alpha^2+\alpha\delta+\omega\delta}{2\delta}=\varkappa\text{, τουτέστι } \frac{1156-1+3+102}{6}$$

$$=210.$$

ΤΥΠΟΣ ιη΄.

Εἰς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς μεταχειριζόμεθα

$$\frac{\omega^2-\alpha^2}{2\varkappa-\alpha-\omega}=\delta \text{ τουτέστι } \frac{1156-1}{420-1-34}=3$$

ΤΥΠΟΣ ιθ΄.

Εἰς εὕρεσιν τοῦ πρώτου Ὅρου μεταχειριζόμεθα

$$\sqrt{\left(\omega^2+\omega\delta-2\varkappa\delta+\frac{1}{4}\delta^2\right)}+\frac{1}{2}\delta=\alpha\text{. καὶ}$$

δι' ἀριθμῶν γίνεται $\sqrt{\left(1156+102-1260+\frac{9}{4}\right)}$

$$+\frac{3}{2}=1.$$

ΤΥΠΟΣ κ΄.

Εἰς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου Ὅρου μεταχειριζόμεθα

$$\sqrt{\left(\alpha^2-\alpha\delta+\frac{1}{4}\delta^2+2\varkappa\delta\right)}-\frac{1}{2}\delta=\omega\text{. καὶ}$$

δι' ἀριθμῶν $\sqrt{\left(1260+1-3+\frac{9}{4}\right)}-\frac{3}{2}=34.$

ΣΧΟ΄-

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 207. Ὅταν τοίνυν ἐξ αὐτῶν τῶν πέντε (δηλαδὴ τῶν α, ω, δ, π, κ) δίδωνται τὰ τρία, ϗ ζητῆται τὸ τέταρτον, μεταχειριζόμεθα ἕνα τούτων τῶν ἀνωτέρω εἴκοσι τύπων· ἀλλ' ἐπειδὴ ἕκαστον τούτων τῶν πέντε, ὅταν τυγχάνῃ ζητούμενον, δύναται νὰ ἔχῃ τὰ διδόμενα ποικίλως ϗ πολλαχῶς, ϗ ἐπειδὴ ἐξ αὐτῆς τῆς ποικιλότητος τῶν διδομένων προκύπτουσι δι' ἓν ϗ τὸ αὐτὸ ζητούμενον τέσσαρες διαφορετικοὶ τύποι, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ προσέχωμεν νὰ γνωρίζωμεν τὰ διδόμενα, ϗ κατ' αὐτὰ τὰ διδόμενα νὰ μεταχειριζώμεθα διὰ κάθε ζητούμενον τὸν ἀνήκοντα τύπον. π. χ. Ὅταν δοθῇ τὸ ω, δ, π, ϗ ζητῆται τὸ α, πρέπει νὰ ζητήσωμεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον κατὰ τοῦτον τὸν Τύπον $\omega - \pi\delta + \delta = \alpha$. Ὅταν ὅμως δοθῶσι τὸ κ, π, ω, ϗ ζητῆται ὡσαύτως τὸ α, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον, τάττοντες εἰς Ἐξίσωσιν τὰ διδόμενα κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἕκτον Τύπον $\frac{2\kappa}{\pi} - \omega = \alpha$. ἐπειδὴ μ' ὅλον ὁποῦ ϗ εἰς τὰς δύω ταύτας περιστάσεις τὸ ζητούμενον εἶναι ἓν ϗ τὸ αὐτὸ, εἶναι ὅμως διάφορα τὰ διδόμενα, ϗ ἑπομένως τὸ ζητούμενον εὑρίσκεται κατὰ διάφορον Τύπον. ὅθεν πρὸς πλειόνα διάγνωσιν ϗ εὐκολίαν ἐκθέτομεν κατωτέρω πάντας τούτους τοὺς εἴκοσι Τύπους τακτικώτερον, ὁ δὲ ταύτην τὴν Μέθοδον μετερχόμενος, ἔχων αὐτοὺς ὡς ἕνα Πίνακα, δύναται νὰ τοὺς μεταχειρίζηται κατὰ τὰς προσηκούσας περιστάσεις.

ΤΥΠΟΣ	Διδόμενα	Ζητούμενον	
			Εἰς εὕρεσιν τοῦ πρώτου Ὅρου.
ΤΥΠΟΣ α.	ω,δ,π.		$\omega - \pi\delta + \delta = \alpha.$
. . . . ς'.	κ,π,ω.		$\frac{2\kappa}{\pi} - \omega = \alpha.$
. . . . ιδ'.	κ,δ,π.	α	$\frac{2\kappa}{2\pi} - \frac{\pi\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \alpha.$
. . . . ιθ'.	ω,δ,κ.		$\sqrt{\left(\omega^2 + \omega\delta - 2\kappa\delta + \frac{1}{4}\delta^2\right)} + \frac{1}{2}\delta = \alpha.$
			Εἰς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου Ὅρου.
. . . . β'.	α,δ,π.		$\alpha + \delta\pi - \delta = \omega.$
. . . . ζ'.	α,κ,π.		$\frac{2\kappa}{\pi} - \alpha = \omega.$
. . . . θ'.	δ,κ,π.	ω	$\frac{2\kappa + \delta\pi^2 - \delta\pi}{2\pi} = \omega.$
. . . . κ'.	α,δ,κ.		$\sqrt{\left(\alpha^2 - \alpha\delta + 2\delta\kappa + \frac{1}{4}\delta^2\right)} - \frac{1}{2}\delta = \omega.$
			Εἰς εὕρεσιν τῆς Διαφορᾶς.
. . . . γ'.	α,ω,π.		$\frac{\omega - \alpha}{\pi - 1} = \delta.$
. . . . ι'.	ω,π,κ.	δ	$\frac{2\omega\pi - 2\kappa}{\pi^2 - \pi} = \delta.$
. . . . ιε'.	κ,α,π.		$\frac{2\kappa - 2\alpha\pi}{\pi^2 - \pi} = \delta.$
. . . . ιη'.	ω,α,κ.		$\frac{\omega^2 - \alpha^2}{2\kappa - \alpha - \omega} = \delta.$

	Δεδόμενα.	Ζητούμενον.	
			Εἰς εὕρεσιν τῆς πληθύος τῶν Ὅρων.
ΤΥΠΟΣ δ'.	ω,α,δ.	π	$\frac{\omega-\alpha+\delta}{\delta}=\pi$
. . . η'.	κ,α,ω.	π	$\frac{2\kappa}{\alpha+\omega}=\pi$
. . . ιγ'.	κ,α,δ.	π	$\sqrt{\left(\frac{2\kappa}{\delta}+\frac{\alpha^2}{\delta^2}-\frac{\alpha}{\delta}+\frac{1}{4}\right)}-\frac{\alpha}{\delta}+\frac{1}{2}=\pi$
. . . ιβ'.	ω,κ,δ.	π	$\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\delta^2}+\frac{\omega}{\delta}-\frac{2\kappa}{\delta}+\frac{1}{4}\right)}+\frac{\omega}{\delta}+\frac{1}{2}=\pi$.
			Εἰς εὕρεσιν τοῦ Κεφαλαίου.
. . . ι'.	α,π,ω.	κ	$\frac{\alpha\pi+\omega\pi}{2}=\kappa$
. . . ια'.	ω,π,δ.	κ	$\frac{2\omega\pi-\delta\pi^2+\delta\pi}{2}=\kappa$
. . . ις'.	π,δ,κ.	κ	$\frac{\pi^2\delta-\delta\pi+2\pi\alpha}{2}=\kappa$
. . . ιζ'.	ω,α,δ.	κ	$\frac{\omega^2-\alpha^2+\alpha\delta+\omega\delta}{2\delta}=\kappa$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 208. Ὁποίαν ὠφέλειαν προξενοῦσιν οὗτοι οἱ τεθέντες Τύποι, εἰς χρῆσιν γενόμενοι, δηλωθήσεται ἐν τοῖς ἑξῆς Προβλήμασι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α΄.

§. 209. Ὁ Πέτρος, δὸς εἰπεῖν, πωλεῖ τὴν Βιβλιοθήκην του, ἥτις συνίσταται ἐκ 1400 Βιβλίων, καὶ διὰ μὲν τὸ πρῶτον Βιβλίον ζητεῖ δύο Ὀβολοὺς, διὰ δὲ τὸ δεύτερον ζητεῖ περισσότερον τρεῖς Ὀβολοὺς, καὶ διὰ τὸ τρίτον αὖθις ζητεῖ τρεῖς Ὀβολοὺς πλέον τῆς τιμῆς τοῦ δευτέρου Βιβλίου, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ζητεῖται λοιπὸν πρῶτον, ὁποία ἔσται ἡ τιμὴ τοῦ ἐσχάτου Βιβλίου, δεύτερον, πόση ἔσται ἡ τιμὴ ὁμοῦ ὅλων τῶν Βιβλίων.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

$\pi = 1400$ — ἡ πλῆθυς τῶν Βιβλίων.
$\delta = 3$ — ἡ διαφορά.
$\alpha = 2$ — ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου Βιβλίου.
ω ζητεῖται, ἡ τιμὴ τοῦ ἐσχάτου Βιβλίου.
$\varkappa$ ζητεῖται, ἅπασα ἡ τιμὴ τῶν Βιβλίων.
ὅθεν ἐπειδὴ ἐδόθη ἡ πλῆθυς, ἡ διαφορὰ, ὁ πρῶτος Ὄρος, καὶ ζητεῖται πρῶτον ἡ τιμὴ τοῦ ἐσχάτου βιβλίου,

διόεὑρίσκεται κατὰ τὸν δεύτερον Τύπον, οἷον $\omega = \alpha + \delta\pi - \delta$ τυτέστι $\omega = 2 + 1400 \times 3 - 3$, ἤτοι $2 + 4200 - 3 = 4199$ Ὀβολ., οἱ ὁποῖοι εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἐσχάτου Βιβλίου. Ἐπειδὴ δὲ ζητεῖται τὸ Κεφάλαιον τῆς τιμῆς ὅλων τῶν Βιβλίων, ἐν ᾧ εἶναι δεδομένος ὁ πρῶτος Ὅρος, ἡ πληθύς, καὶ ἡ διαφορά, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον μεταχειριζόμενοι τὸν πέμπτον Τύπον $\kappa = \frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2}$

τουτέστι $\kappa = \frac{2 \times 1400 + 4199 \times 1400}{2}$, δηλαδὴ $\frac{2800 + 5878600}{2} = \frac{5881400}{2} = 2940700$ ὀβολοῖς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β'.

§. 210. Στρατηγός τις ὑπισχνεῖται εἰς δώδεκα Στρατιώτας, ἀφ' οὗ ἀναβῶσιν ἓν ὕψωμα γῆς, νὰ δώσῃ αὐτοῖς δῶρον μίαν Ποσότητα χρημάτων κατὰ τὴν ἑξῆς συμφωνίαν. Εἰς μὲν τὸν ἀναβάντα πρότερον τῶν ἄλλων ὑπόσχεται νὰ δώσῃ 49 ἀργύρια, εἰς δὲ τὸν δεύτερον νὰ δώσῃ ὀλιγώτερον τῶν τοῦ πρώτου ἀργύρια 4, καὶ οὕτως εἰς καθένα τῶν ἑπομένων νὰ δώσῃ 4 ἀργ. ὀλιγώτερον τοῦ προηγουμένου. Ζητεῖται λοιπὸν πρῶτον πόσα ἀργύρια λήψεται ὁ ἔσχατος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει καὶ ὁ ἐλάττων ἀριθμὸς τῶν ἀργυρ. δεύτερον δὲ πόσα ἀργύρια λήψονται ὅλοι ὁμοῦ οἱ Στρατιῶται.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

$\pi = 12$
$\omega = 49$
$\delta = 4$

a ϗ x ζητȣ̃νται, ὅθεν κατὰ μὲν τὸν πρῶτον Τύπον $a = \omega - \delta\pi + \delta$

$a = 49 - 48 + 4 = 5$

κατὰ δὲ τὸν ἑνδέκατον τύπον $x = \dfrac{2\omega\pi - \delta\pi^2 + \delta\pi}{2}$

τȣτέστι $x = \dfrac{1176 - 576 + 48}{2} = \dfrac{648}{2} = 324.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γʹ.

§. 211. Ἄνθρωπός τις θέλει νὰ μοιράσῃ εἰς 12 πτωχȣ̀ς 222 ὀβολȣ̀ς κατ' αὔξȣσαν Πρόοδον. ὅθεν ἄρχεται, μοιράζων εἰς μὲν τὸν πρῶτον ὀβολȣ̀ς 2, εἰς δὲ τὸν δεύτερον πλέονας ; παρὰ εἰς τὸν πρῶτον, ϗ ὅτω καθεξῆς. Ζητεῖται λοιπὸν, πόσȣς ὀβολȣ̀ς ἔδωκεν εἰς τὸν ἔσχατον, ϗ ποία εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ποσοτήτων, ὁπȣ̃ ἕκαστος τῶν πτωχῶν ἔλαβεν.

$x = 222$, $\pi = 12$, $a = 2$ ϗ ζητεῖται εἰς εὕρεσιν ω ϗ δ. ὅθεν κατὰ τὸν ἕβδομον τύπον

$\omega = \dfrac{2x}{\pi} - a$, τȣτέστι $\omega = \dfrac{444}{12} - 2 = 35.$

κατὰ

κατὰ τὸν δέκατον πέμπτον Τύπον

$$\delta = \frac{2\kappa - 2\alpha\pi}{\pi^2 - \pi} \text{ τυτέστι } \delta = \frac{444 - 48}{144 - 12} = \frac{396}{132} = 3.$$

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ δ'.

§. 212. Μισθωσάμενός τις ἐργάτην τινα, συνεφώνησε νὰ δίδῃ αὐτῷ καθ' ἑκάστην μισθὸν μετὰ τιν☉ διαφορᾶς. ὅθεν ἔδωκεν αὐτῷ, φέρ' εἰπεῖν, τὴν πρώτην ἡμέραν μισθὸν τρεῖς ὀβολὺς, τὴν δὲ δευτέραν πλείονας 5, καὶ ὕτω τὴν τελευταίαν ἡμέραν ἔδωκεν αὐτῷ μισθὸν 38 ὀβολὺς. ζητεῖται τοίνυν νὰ εὑρεθῇ πρῶτον, πόσας ἡμέρας ὗτ☉ ἐδύλευσε, δεύτερον πόσυς ὀβολὺς ἔλαβεν εἰς ὅλον τὸν καιρὸν, καθ' ὃν ὗτος εἰργάσατο.

$\alpha = 3$

$\delta = 5$

$\omega = 38$

π καὶ κ ζητεῖται, ὅθεν κατὰ τὸν τέταρτον τύπον

$$\pi = \frac{\omega - \alpha + \delta}{\delta} \text{ τυτέστι } \pi = \frac{38 - 3 + 5}{5} = 8$$

κατὰ τὸν δέκατον ἕβδομον Τύπ.

$$\kappa = \frac{\omega^2 - \alpha^2 + \alpha\delta + \omega\delta}{2\delta} \text{ τυτέστι } \kappa = \frac{1444 - 9 + 15 + 190}{10}$$

$= 164.$

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 213. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ λύωμεν ἄπειρα τοιαῦτα Προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς αὐτὰς τὰς Προόδȣς, π. χ.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ί.

§: 214. Δοθέντος τȣ̃ πρώτȣ καὶ ἐσχάτȣ Ὅρȣ, νὰ εὕρωμεν τȣ̀ς ὁποιȣσδήποτε μέσȣς ἀναλόγȣς Ὅρȣς, καὶ μεταξὺ τȣ́των τῶν δύω δοθέντων νὰ κατατάξωμεν αὐτȣ̀ς, ὁπόσοι ἂν ὦσι τὸν ἀριθμόν.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Ἡ' Διαφορὰ τȣ̃ πρώτȣ καὶ ἐσχάτȣ Ὅρȣ διαιρεῖται διὰ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ πάντων τῶν Ὅρων μονάδι (— 1) ἐλαττωθέντος, καὶ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον ἐστὶν ἡ κοινὴ τῶν Ὅρων διαφορὰ, ἥτις προστεθεῖσα εἰς τὸν ἡγȣ́μενον Ὅρον, παρέχει τὸν ἑπόμενον Ὅρον, π. χ. Μεταξὺ τȣ̃ 7 καὶ 13 πρέπει νὰ εὑρεθῶσιν 4 Ὅροι. οἱ Ὅροι ἄρα τῆς Προόδȣ ἔσονται ἅπαντες 6, καὶ κατὰ τὸν τρίτον τύπον προχωροῦμεν τὰ ἑξῆς.

$$\delta = \frac{\omega - \alpha}{\pi - 1} = \frac{13 - 7}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$$ ἡ Πρόοδος λοιπὸν ἐστιν αὕτη

$$7 : 8\frac{1}{5} : 9\frac{2}{5} : 10\frac{3}{5} : 11\frac{4}{5} : 13.$$

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Εὑρεθείσης τῆς διαφορᾶς τῆς Προόδου, προσδιορίζεται. πάλιν καὶ ἡ Πρόοδος, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι διδόμενα ὁ πρῶτος καὶ ὁ ἔσχατος Ὅρος. ἀλλὰ μὴν ἡ διαφορὰ ἀποκτᾶται κατὰ τοῦτον τὸν Τύπον $\delta = \frac{\omega - \alpha}{\pi - 1}$, τουτέστιν ἡ Διαφορὰ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου διαιρεθεῖσα διὰ τῆς πληθύος τῶν Ὅρων — 1, παρέχει τὴν κοινὴν Διαφοράν, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λύσιν προσδιορίζονται οἱ ζητούμενοι Ὅροι.

ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 215. Πᾶσα Γεωμετρικὴ αὔξουσα Πρόοδος δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸν ἑξῆς Τύπον.

$$\alpha : \alpha\Pi : \alpha\Pi^2 : \alpha\Pi^3 : \alpha\Pi^4 : \alpha\Pi^5 : \alpha\Pi^6 : \alpha\Pi^7 . \text{κ.τ.}$$

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Πρόοδος Γεωμετρικὴ εἶναι μία πληθὺς ἀριθμῶν, (ἢ Ποσοτήτων) ἐν τάξει λαμβανομένων, καὶ χωρούντων κατέπινα ἴσον Γεωμετρικὸν λόγον, καὶ διαφερόντων ἀλλήλων κατὰ τὸ αὐτὸ Πηλίκον. ἔνθα κάθε ἑπόμενος Ὅρος εἶναι ἴσος τῷ ἡγουμένῳ πολλαπλασιασθέντι διὰ τοῦ Πηλίκου Π (κἀνταῦθα τὸ Π ὡς Πηλίκον τῆς Προόδου λαμβάνομεν). ὅθεν κάθε ἑπόμενος Ὅρος ἀναφύεται ἐκ τῆς πολλαπλασιάσεως τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ Πηλίκου. καὶ διὰ νὰ γένη σαφέστερον τὸ λεγόμενον, ἔστω ὁ μὲν πρῶτος Ὅρος τῆς

Προόδου

Προόδου α, τὸ δὲ Πηλίκον Π. ὁ ἑπόμενος Ὅρος ἤδη ἔσται $\alpha\Pi$, ϗ πάλιν τούτῳ ἑπόμενος Ὅρος ἔσται $\alpha\Pi^2$; ϗ τούτῳ αὖθις λαμβανομένῳ ὡς ἡγουμένῳ, ἑπόμενος Ὅρος ἔσται $\alpha\Pi^3$, ϗ οὕτω χωρεῖ ἐπ' ἄπειρον τὸ λεγόμενον. ἑκάστη ἄρα αὔξουσα Γεωμετρικὴ Πρόοδος εἰκότως δύναται νὰ ἐκτεθῇ κατὰ τὸν προτεθέντα Τύπον.

ΠΟΡΙΣΜΑ α'.

§. 216. Ταύτην τὴν εἰρημένην Σειρὰν θεωροῦντες πάλιν δευτέρως, εὑρίσκομεν, ὅτι ἕκαστος τῶν ἑπομένων Ὅρων συνίσταται ἐκ τοῦ πρώτου Ὅρου α πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ Πηλίκον Π ὑψωμένον ὂν εἰς ἐκείνην τὴν δύναμιν, ἥτις ἐμφαίνει τὴν πληθὺν τῶν προηγουμένων Ὅρων. ὁ δὲ τούτου λόγος εἶναι, ὅτι εἰς μίαν Πρόοδον ἅπαντες οἱ Ὅροι ἐκτὸς τοῦ πρώτου εἶναι πεπολλαπλασιασμένοι μετὰ τοῦ κοινοῦ Πηλίκου, ϗ ἡ πολλαπλασίασις διὰ τοῦ Πηλίκου γίνεται τοσάκις ὅσοι εἶναι οἱ Ὅροι πλὴν τοῦ πρώτου. οἷον τῆς προτεθείσης Προόδου ὁ ἕκτος Ὅρος εἶναι $\alpha\Pi^5$, ὅστις συνίσταται ἐκ τοῦ πρώτου Ὅρου πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ κοινὸν Πηλίκον ἀρθὲν εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν, ἥτις ἐστὶν ἴση μὲ τὴν πληθὺν τῶν πρὸ αὐτοῦ ἡγουμένων Ὅρων, ὥσπερ ϗ ὁ δωδέκατος Ὅρος εἶναι $\alpha\Pi^{11}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 217. Ἐὰν λάβωμεν τὰ μέχρι τοῦδε εἰρημένα εἰς μίαν Ἔκθεσιν, ὡσαύτως ϗ ἕνα ἀπροσδιόριστον ἀριθμὸν τῶν Ὅρων $= \nu$, ὁ ἔσχατος Ὅρος τῆς Προόδου ἔσαι τότε $= \alpha\Pi^{\nu-1}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 218. Τὸ ἐκ τῶν δύο ἄκρων (τουτέστιν ἐκ τοῦ πρώτου ϗ ἐσχάτου Ὅρου) Γινόμενον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐκ τοῦ δευτέρου ϗ τοῦ παραλή-

γοντος

γεῖτος Ὅρου παραγόμενον, καὶ γενικῶς τὸ ἐκ τῶν δύω ἄκρων παραγόμενον πάντοτε εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ἐκ δύω ἑτέρων Ὅρων, οἵτινες ἀφίστανται ἐπίσης ἀπὸ τῶν δύω ἄκρων. καὶ τοῦτο δείκνυται σαφῶς ἐν τῇ προτεθείσῃ σειρᾷ. ἐπειδὴ τὸ μὲν ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ὀγδόου Ὅρου παραγόμενον εἶναι $\alpha^2\Pi^7$. τὸ δὲ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ ἑβδόμου παραγόμενον ὁμοίως $\alpha^2\Pi^7$. τὸ δὲ ἐκ τρίτου καὶ ἕκτου Ὅρου πάλιν $\alpha^2\Pi^7$. τὸ δὲ ἐκ τοῦ τετάρτου καὶ πέμπτου ὡσαύτως $\alpha^2\Pi^7$. ὁ δὲ λόγος τούτου εἶναι, ὅτι κάθε Πρόοδος εἶναι μία πληθὺς Ὅρων ἀναλόγων, καὶ εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ ἐκ τῶν ἄκρων παραγόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῶν μέσων παραγόμενον, ὅθεν ἕπεται κατ' ἀνάγκην τὸ παραγόμενον τὸ ἐκ τῶν δύω ἄκρων νὰ εἶναι πάντοτε ἴσον τῷ παραγομένῳ. κ. τ. οἷον ἐν τῇ Προόδῳ $\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$. τὰ παραγόμενα τὰ ἐκ τῶν ἐπίσης ἀφισταμένων Ὅρων εἰσὶν $64 \times 2 = 128$, $32 \times 4 = 128$. καὶ $8 \times 16 = 128$. εἰ δὲ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν Ὅρων τύχῃ νὰ εἶναι περιττὸς, τότε ὁ μεσαίτατος, καὶ μόνος ἐγκαταλειπόμενος Ὅρος πολλαπλασιάζεται ἐφ' ἑαυτὸν, καὶ ἑπομένως τὸ τετράγωνον τούτου εἶναι ἴσον μὲ τὸ παραγόμενον τῶν Ὅρων τῶν ἐπίσης ἀπεχόντων.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ'.

§. 218. Ἐκ ταύτης τῆς γενικῆς Ἐκθέσεως ἕπεται, ὅτι ὁ πρῶτος Ὅρος ἔχει πρὸς τὸν τρίτον τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου. οἷον ὁ πρῶτος Ὅρος α ἔχει πρὸς τὸν τρίτον $\alpha\Pi^2$, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου α^2 πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου $\alpha^2\Pi^2$. ἐπειδὴ καὶ εἰς τοὺς δύω τούτους λόγους εἶναι τὸ Πηλίκον Π^2. καὶ εἶναι ἄρα ἐντεῦθεν μία ἀληθὴς ἀναλογία, ὅτι ὁ πρῶτος Ὅρος ἔχει πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς ὁ κύβος τοῦ πρώτου Ὅρου πρὸς τὸν κύβον τοῦ δευτέρου. ἐπειδὴ $\alpha : \alpha\Pi^3 = \alpha^3 : \alpha^3\Pi^3$. κ. τ.

ΠΟΡΙΣΜΑ δ'.

§. 219. Ἂν εἰς αὐτὴν τὴν γενικὴν Ἔκθεσιν ὁ πρῶτος Ὅρος α εἶναι $= 1$, τότε ἡ Πρόοδος $\alpha : \alpha\Pi^1 : \alpha\Pi^2 : \alpha\Pi^3$ μετατρέπεται

εἰς

μὲ τὸν $1 : 1\Pi^1 : 1\Pi^2 : 1\Pi^3$. δηλαδὴ $1 : \Pi^1 : \Pi^2 : \Pi^3$. κ. τ. ϗ ἐπειδὴ καθὲ Ποσότης, ἢ Ὅρος, τοῦ ὁποίου ὁ δυναμοδείκτης εἶναι $= 0$, εἶναι καθ' ἑαυτὸν $= 1$ (§. 48), δυνάμεθα διὰ τοῦτο ἀντὶ τῆς μονάδος νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸ Π^0, ϗ νὰ βάλωμεν αὐτὸ εἰς τὸν τόπον αὐτῆς, κἀντεῦθεν ἅπασα ἡ Πρόοδος δύναται νὰ ἐκτεθῇ οὕτω $\Pi^0 : \Pi^1 : \Pi^2 : \Pi^3$. κ. τ. ὅθεν γίνεται φανερὸν ὅτι αἱ μὲν δυνάμεις τῶν ποσῶν ἵστανται ἐν Γεωμετρικῇ Προόδῳ, οἱ δὲ δυναμοδεῖκται κατὰ Πρόοδον ἀριθμητικήν.

ΣΧΟ´ΛΙΟΝ ά.

§. 220. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων περὶ τῶν Προόδων ϗ Γεωμετρικῶν ἀναλογιῶν προκύπτουσι ϗ ἕτεροι Τύποι, οἵτινες συμβάλλουσιν εἰς λύσιν Γεωμετρικῶν Προβλημάτων, ἀναφορὰν ἐχόντων πρὸς τὰς Προόδους. διότι ἐπειδὴ κάθε Πρόοδος εἶναι πλῆθύς τις λόγων ἐπίσης ϗ κατὰ τάξιν προαγομένων, διὰ τοῦτο ϗ εἰς μίαν τοιαύτην Πρόοδον τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν ἡγουμένων Ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν ἑπομένων, τὸν ὁποῖον ἔχει κάθε ἡγούμενος, ἢ πρῶτος Ὅρος πρὸς τὸν ἑπόμενον, ἢ δεύτερον Ὅρον (§. 172). ἀλλὰ μὴν εἰς μίαν Πρόοδον ἕκαστος Ὅρος πλὴν τοῦ ἐσχάτου εἶναι ἡγούμενος λόγου, ϗ ὁμοίως ἕκαστος Ὅρος πλὴν τοῦ πρώτου, εἶναι ἑπόμενος τοῦ αὐτοῦ λόγου, ἐστὶ δὲ ϗ τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν Ὅρων τῆς Προόδου $= x$. ἄρα τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν Ἡγουμένων εἶναι αὐτὸ τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν Ὅρων πλὴν τοῦ ἐσχάτου, οἷον $= x - \omega$. ὥσπερ δὴ ϗ τὸ κεφάλαιον τῶν ἑπομένων εἶναι αὐτὸ τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν τῆς Προόδου Ὅρων πλὴν τοῦ πρώτου, οἷον $= x - \alpha$. αὕτη τοίνυν ἡ ἀναλογία ἐκτίθεται οὕτω. $x - \omega : x - \alpha = \alpha : \alpha\Pi$. ϗ διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως τῶν ἄκρων ϗ μέσων Ὅρων γίνεται Ἐξίσωσις $x\alpha\Pi - \omega\alpha\Pi = x\alpha - \alpha\alpha$. τούτων δὲ διαιρεθέντων διὰ τοῦ α, παράγεται $x\Pi - \omega\Pi = x - \alpha$. ἐκ ταύτης τῆς Ἐξισώσεως δύναταί τις νὰ εὕρῃ κατὰ τοὺς τῆς Ἐξισώσεως κανόνας τόσον α, ὅσον ϗ ω, ϗ π, ϗ x. ϗ διὰ νὰ γένῃ σαφὲς τὸ λεγόμενον δι' ἑνὸς παραδείγματος, ἔστω ἡ ἑξῆς Πρόοδος.

$$3 . 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187.$$

ά.)

ά.) $\alpha = \omega\Pi - \kappa\Pi + \kappa$ τουτέστι $\alpha = 6561 - 9837 + 3279$

$= 3$ ὁ πρῶτος Ὅρος.

β΄.) $\omega = \dfrac{\kappa\Pi - \kappa + \alpha}{\Pi}$ τουτέστι $\omega = \dfrac{9837 - 3279 + 3}{3}$

$= 2187$ ὁ ἔσχατος.

γ΄.) $\Pi = \dfrac{\kappa - \alpha}{\kappa - \omega}$ τουτέστι $\Pi = \dfrac{3279 - 3}{3279 - 2187} = 3$

τὸ Πηλίκον.

δ΄.) $\kappa = \dfrac{\omega\Pi - \alpha}{\Pi - 1}$ τουτέστι $\kappa = \dfrac{6561 - 3}{2} = 3279$

τὸ κεφάλαιον. Ὁ πρῶτος καὶ δεύτερος τύπος εὑρίσκεται διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν Ὅρων. ἐπὶ δὲ τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου τύπου λύεται $\kappa\Pi - \omega\Pi$ εἰς τοὺς συνεργοὺς $(\kappa - \omega)\Pi$, καὶ $\kappa\Pi - \kappa$ εἰς συνεργοὺς $(\Pi - 1)\kappa$.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 221. Κατὰ τὸ Σχόλιον (§. 217) εἶναι ἡ Ἔκθεσις τῦ ἐσχάτο Ὅρυ $= \alpha\Pi^{\nu-1}$ τυτέστιν $\omega = \alpha\Pi^{\nu-1}$. λοιπὸν δυνάμεθα εἰς τὸν τέταρτον τύπον ἀντὶ τῦ ω νὰ βάλωμεν $\alpha\Pi^{\nu-1}$. ἀλλὰ μὴν τὸ ω εἶναι πεπολλαπλασιασμένον μετὰ τῦ Π, πρέπει ἄρα καὶ τὸ $\alpha\Pi^{\nu-1}$ νὰ πολλαπλασιασθῇ μετὰ τῦ Π. ἐν δὲ τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν μεγεθῶν προστίθενται καὶ οἱ Ἐκθέται, ὅθεν γίνεται $\alpha\Pi^{\nu-1} \times \Pi$ $= \alpha\Pi^{\nu-1+1} = \alpha\Pi^{\nu}$, καὶ ἐκ τῦ τετάρτυ τύπυ ἕπεται $\kappa = \dfrac{\alpha\Pi^{\nu}-\alpha}{\Pi-1}$, ἐξ ὧ πορίζόμεθα διὰ τῆς μεταθέσεως τὺς ἑξῆς δύο τύπυς.

ι.)

ε'.) $\kappa = \frac{\alpha\Pi^{\nu} - \alpha}{\Pi - 1}$ τουτέστι $\kappa = \frac{6561-3}{\Pi-1} = 3279$

τὸ κεφάλαιον.

ς'.) $\alpha = \frac{\kappa\Pi - \kappa}{\Pi^{\nu} - 1}$ τουτέστι $\alpha = \frac{9887-3279}{2187-1} = 3$

ὁ πρῶτος Ὅρος. καὶ ἐκ τοῦ $\omega = \alpha\Pi^{\nu-1}$ ποριζόμεθα διὰ τῆς μεταθέσεως καὶ ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης τὸ ἑξῆς.

ζ'.) $\omega = \alpha\Pi^{\nu-1} = 3 \times 729 = 2187$ ὁ ἔσχατος Ὅρος.

η'.) $\Pi = \sqrt[\nu-1]{\frac{\omega}{\alpha}} = \sqrt[6]{\frac{2187}{3}} = 3$ τὸ Πηλίκον.

καὶ ἐπειδὴ $\Pi^{\nu-1} = \frac{\Pi^{\nu}}{\Pi}$ ἐστὶν (§. 198), γίνεται διὰ τῆς μεταθέσεως ὁ ἑξῆς τύπος, διὰ τῆς χρήσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται ἡ πληθὺς τῶν Ὅρων μιᾶς Προόδου Γεωμετρικῆς,

θ'.) $\Pi^{\nu} = \frac{\omega\Pi}{\alpha}$.

Τουτέστι πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸν ἔσχατον Ὅρον τῆς Προόδου μετὰ τοῦ ἐν αὐτῇ κοινοῦ Πηλίκου, καὶ τὸ ἐκ τούτου Γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου Ὅρου τῆς ἰδίας Προόδου, καὶ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτει τι Πηλίκον. ἔπειτα λαμβάνομεν τὸ κοινὸν τῆς Προόδου Πηλίκον, καὶ προάγοντες ὑψόνομεν αὐτὸ συνεχῶς εἰς Δυνάμεις ἀλληλοδιαδόχους, ἕως οὗ νὰ φθάσῃ τοῦτο τὸ Πηλίκον νὰ ἐξισωθῇ κατὰ τὸ σημαινόμενον μὲ τὸ ἐκ τῆς ἀνωτέρω Διαιρέσεως προκύψαν Πηλίκον, καὶ τότε αὗται αἱ εὑρεθεῖσαι δυνάμεις δεικνύουσι τὴν πληθὺν τῶν Ὅρων. ἐπειδὴ τοσοῦτοι ἔσονται οἱ Ὅροι τῆς Προόδου, ὅσαι δυνάμεις ἀπαιτηθήσονται διὰ νὰ ἐξισωθῇ τὸ κοινὸν τῆς Προόδου Πηλίκον μὲ τὸ ἐκ τῆς ῥηθείσης διαιρέσεως προκύψαν Πηλίκον. καὶ διὰ

τα

νὰ γένωσι σαφέστερα τὰ λεγόμενα, ἔσω ἐν ἀριθμοῖς μιᾶς Βραχείας Προόδου διδόμενος ὁ πρῶτος Ὅρος 3, ὁ ἔσχατος 48, καὶ τὸ κοινὸν Πηλίκον 2, καὶ ζητηθήτω ἡ πλῆθυς τῶν Ὅρων. ὅθεν ἀφ' οὗ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἔσχατος Ὅρος 48 μετὰ τοῦ κοινοῦ Πηλίκου 2, καὶ τὸ ἐκ τούτων Γενόμενον 96 διαιρεθῇ διὰ τοῦ πρώτου Ὅρου 3, προκύπτει ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον ὁ ἀριθμὸς 32, ἔπειτα ὑψώνομεν συνεχῶς τὸ κοινὸν Πηλίκον 2 εἰς δευτέραν, τρίτην, τετάρτην, καὶ πέμπτην Δύναμιν, οἷον 2^5 (ὅπερ ἐστὶ = 32), ἕως οὗ βλέπομεν, ὅτι τοῦτο τὸ Πηλίκον ὑψωθὲν εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν, σημαίνει ἕνα ἀριθμὸν, ὅστις εἶναι Ἴσος μὲ τὸ ἀνωτέρω ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύψαν Πηλίκον 32, ὅθεν καὶ ἡ ζητουμένη πλῆθυς τῶν Ὅρων πρέπει νὰ εἶναι = 5, καθὼς καὶ ἐκ τοῦ Ἰδίου προτεθέντος Παραδείγματος γίνεται κατάδηλον. οἷον 3 : 6 : 12 : 24 : 48.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'.

§. 222. Ὁ Πέτρος βάζει εἰς τὸ δημόσιον Λαχεῖον (*) τὴν πρώτην φορὰν 1 Γρόσ., τὴν δευτέραν 2 Γρόσ., τὴν τρίτην φορὰν 4 Γρόσ., καὶ οὕτω ....., ζητεῖται λοιπὸν, πόσα Γρόσια ἔβαλεν οὗτος τὴν δωδεκάτην φορὰν, ἔπειτα πόση ἔσται ὅλη ἡ Ποσότης τῶν Γροσίων, ὁποῦ ἔβαλε.

οἱ τρεῖς ἐγνωσμένοι Ὅροι εἰσὶν $\alpha = 1$, $\Pi = 2$, $\nu = 12$. ω καὶ κ ζητεῖται. κατὰ τὸν ἕβδομον τύπον εἶναι $\omega = \alpha \pi^{\nu - 1}$. ὁ ἔσχατος Ὅρος $= 1 \times 2^{11} = 2048$.

κατὰ

(*) Οὕτως εὗρον οἰκειότερον κατὰ τὴν κρίσιν καὶ ἄλλων πεπαιδευμένων νὰ ὀνομάσω ἐκεῖνο, ὅπερ κοινότερον λέγομεν λότον ἢ λοτερίαν.

κατὰ δὲ τὸν τέταρτον τύπον $x = \frac{\omega\pi - \alpha}{\pi - 1}$ τουτέστι

$x = \frac{4096 - 1}{1} = 4096$ ὅλη ἡ Ποσότης,

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ ιά.

Περὶ Συζυγίας, ἢ Συνδυασμοῦ.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ.

§. 223. Συνδυασμοῦ μέθοδος καλεῖται ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν, ποσαχῶς δύνανται νὰ συνδεθῶσι, καὶ διαφόρως νὰ μεταπεθῶσι δεδομένα τινα (ἔστωσαν ταῦτα ἢ γράμματα, ἢ ἀριθμοί, ἢ ὁποιαδήποτοῦν πράγματα), ἀνὰ δύω, ἀνὰ τρία, ἀνὰ τέσσαρα, ἢ ἀνὰ πλείονα λαμβανόμενα.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 224. Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τοῦ σκοποῦ εὐχερέστερον, εἶναι ἀναγκαῖον, εὐθὺς ἀρχόμενοι τοῦ ἔργου, νὰ μεταχειρισθῶμεν μικροὺς τινας ἀριθμοὺς πραγμάτων, ἢ μεγεθῶν, ἐξ οὗ ἀποκαλύπτονται καὶ γίνονται φανεροὶ οἱ νόμοι, τοὺς ὁποίους ἀκολουθοῦσιν αἱ συζυγίαι εἰς τὰ κατὰ τὸν διδόμενον ἀριθμὸν μεγέθη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α΄.

§. 225. Εὑρεῖν τὸν ἀριθμὸν τῶν συζυγιῶν, αἵτινές εἰσιν δυναταὶ διὰ τῶν 24 γραμμάτων ἀνὰ δύω, ἀνὰ τρία .... ἀνὰ 24 λαμβανομένων.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ϗ ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ α συζευχθὲν μὲν μεθ᾽ ἑαυτοῦ παρέχει αα, συζευχθὲν δὲ μετὰ τοῦ β, ποιεῖ αβ. μετὰ δὲ τοῦ γ, ποιεῖ αγ. κ. τ. τοῦ α ἄρα συζευχθέντος οὕτω μετὰ τῶν 24 Γραμ., ἀναφύονται ὁμοίως 24 διάφοροι συζυγίαι. οὕτω ϗ τὸ β συζευχθὲν μετὰ τοῦ α, ποιεῖ βα, συζευχθὲν δὲ μεθ᾽ ἑαυτοῦ, ποιεῖ ββ, κ. τ. ἄρα ϗ διὰ τῆς συζεύξεως τοῦ β μεθ᾽ ἑκάστου τῶν 24 γραμμάτων προκύπτουσιν ἄλλαι 24 συζυγίαι, ἐξ οὗ γίνεται δῆλον, ὅτι ἕκαστον τῶν 24 γραμμάτων ἐν ἀρχῇ τιθέμενον, ϗ 24 κις ἑνὶ ἑκάστῳ τῶν ἄλλων γραμμάτων συζευγνύμενον, παρέχει 24 συνδυασμοὺς. πάντα ἄρα τὰ εἰκοσιτέσσαρα γράμματα ἀνὰ δύω λαμβανόμενα, ἀποτελοῦσι διαφόρους συζυγίας 24×24 ἤτοι 576.

Ἐὰν δὲ συζευχθῶσι γράμματα ἀνὰ τρία λαμβανόμενα, τουτέστιν ἐὰν προστεθῇ τὸ α ἐν ἑκάστῃ τῶν ἀνωτέρω 576 συζυγιῶν, ἔσται ἡ πρώτη συζυγία ααα, ἡ δευτέρα ααβ, ἡ τρίτη ααγ. κ. τ. ἄρα προστιθέμενον ἐν ἀρχῇ τὸ α μόνον, ποιεῖ 576 νέας συζυγίας γραμμάτων ἀνὰ τρία λαμβανομένων. ἐξ οὗ γίνεται φανερὸν, ὅτι ϗ ἕκαστον τῶν λοιπῶν γραμμάτων προστιθέμενον καθὼς ἀνωτέρω τὸ α, καὶ τὴν ἐκείνου τάξιν φυλάττον, δύναται νὰ δώσῃ 576 νέους συνδυασμοὺς γραμμάτων ἀνὰ τρία λαμβανομένων. καταφανὲς ἄρα, ὅτι ἅπασαι αἱ ἐκ τριῶν γραμμάτων συζυγίαι, ἢ μεταθέσεις εἰσὶν

$576 \times 24 = 13824$.

ἐὰν δὲ αὖθις συζευχθῶσι τέσσαρα γράμματα, τουτέστιν ἐὰν προστεθῇ αὖθις τὸ α ὡς ἀνωτέρω, ἐν ἑκάστῃ τῶν ἐκ τριῶν γραμμάτων συζυγιῶν, ἀνακύπτουσιν πάλιν 13824 καιναὶ συζυγίαι ἐκ τεσσάρων γραμμάτων. τὸ ἴδιον γίνεται καὶ διὰ ἑκάστου τῶν 24 γραμμάτων. ἅπασαι ἄρα αἱ συζυγίαι αἱ ἐκ τεσσάρων γραμμάτων εἰσὶν 13824×24. τούτου δὲ οὕτω καὶ περαιτέρω ὑποτεθέντος, ἕκαστος δύναται νὰ νοήσῃ καλῶς, ὅτι αἱ συζυγίαι πάντοτε χωροῦσιν αὐξάνουσαι, ἐὰν τὸ κεφάλαιον τῶν προτεθειμένων συζυγιῶν πολλαπλασιάζηται διὰ τοῦ 24. αἱ συζυγίαι ἄρα συνιστῶσι Γεωμετρικήν τινα Πρόοδον, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι ὁ πρῶτος Ὅρος 576 ἡ ἐκ δύω γραμμάτων συζυγία, ὁ δὲ δεύτερος Ὅρος εἶναι ἡ ἐκ τριῶν γραμμάτων συζυγία, ὁ δὲ τρίτος εἶναι ἡ ἐκ τεσσάρων, καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ ὁ τελευταῖος Ὅρος εἶναι ὁ συνδυασμὸς ἀπὸ εἴκοσι καὶ τριῶν γραμμάτων, τὸ Πηλίκον ὅμως τούτων εἶναι ὁ 24, καὶ ἡ πληθὺς τῶν Ὅρων πρέπει νὰ εἶναι μονάδι ἐλάττων τοῦ ἀριθμοῦ τῶν 24 γραμμάτων, τουτέστι $\pi = 23$. ἐκ τῶν εἰρημένων τύπων (§. 183) δύναται εὐκόλως νὰ εὑρεθῇ ὁ ἔσχατος Ὅρος, καὶ τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν Ὅρων. δηλονότι ὁ ἔσχατος Ὅρος,

εἶναι $= \alpha\Pi^{\nu-1} = \alpha\Pi^{22}$. τὸ δὲ κεφάλαιον $= \dfrac{\omega\Pi-\alpha}{\Pi-1}$;

ἐὰν δὲ ἀντὶ τοῦ ω τεθῇ $\alpha\Pi^{\nu-1}$, ἔσται τότε

$\kappa =$

$$\kappa = \frac{\alpha\Pi^{\nu} - \alpha}{\Pi - 1}$$ (§. 198), ἤτοι $\kappa = \frac{576 \times 24^{23} - 576}{23}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 226. Ἐὰν δὲ λάβωμεν γράμματα μόνα ϗ χωρὶς ἄλλων τινων, οἷον α, β, γ. κ. τ. ἔσαι ὁ πρῶτος Ὅρ☉ α = 24, ὁ δεύτερ☉ αΠ τυτέςι 24×24, ϗ ἅπαν τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν δυνατῶν συζυγιῶν ϗ γραμμάτων 24, εἶναι = $\frac{24 \times 24^{24} - 24}{23}$.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ β'.

§. 227. Ἐὰν δοθῇ τις ἀριθμὸς Ποσοτήτων, ἢ μεγεθῶν, ϗ ἕκασον τύτων ἐν τῇ συζεύξει τεθῇ εἰς τὸν πρῶτον τόπον τοσάκις, μὲ ὅσας μονάδας εἶναι Ἴσος ὁ ἐν τῷ Προβλήματι δοθεὶς ἀριθμὸς τῶν μεγεθῶν, νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν συζυγιῶν, τυτέςι πόσυς δυνατὺς συνδυασμὺς παρέχυσι ταῦτα τὰ δοθέντα μεγέθη.

Λη φθήτω πρῶτον ἀριθμὸς τις μεγεθῶν ὁ 2, τυτέστιν δύω μεγέθη τὸ α, ϗ β, ϗ ἕκασον τύτων ἐν τῇ συζεύξει τεθήτω εἰς τὸν πρῶτον τόπον δὶς. ἐπειδὴ ϗ τὰ μεγέθη ἐνταῦθα δύω εἰσίν.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ϗ ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Συζευχθὲν τὸ α μετὰ τῦ β, ϗ ἑκάτερον τύτων μεθ' ἑαυτῦ, παρέχυσιν αα, ββ, αβ, βα συζυγίας 4, ἢ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συζευκτέων μεγεθῶν. καὶ πάλιν α, β, γ ἀνὰ δύω λαμβανόμενα, παρέχουσιν αα, ββ, γγ, αβ, βα γα, αγ, βγ, γβ, συζυγίας ἐννέα, ἢ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συζευκτέων μεγεθῶν. α, β, γ, δ διδόασιν 16 συζυγίας. κ. τ. ἄρα ἡ ἀνὰ δύω, ἀνὰ τρία ... σύζευξις τῶν μεγεθῶν, ἥτις κρέμαται ἐκ τῆς χρείας, καὶ θελήσεως ἑκάστου, δεικνύει τὴν δύναμιν ἐκείνην, εἰς τὴν ὁποίαν ὑψοῦται ὁ ἀριθμὸς τῶν συζευκτέων μεγεθῶν.

α, β, γ, ἀνὰ τρία συζευγνύμενα, διδοῦσιν 27 συζυγίας, τουτέστι τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συζευκτέων μεγεθῶν α, β, γ, δ ἀνὰ τρία λαμβανόμενα, διδόασι τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συζευχθέντων μεγεθῶν, καὶ οὕτω καθεξῆς. ἐὰν οὖν ὁ ἀριθμὸς τῶν μεγεθῶν εἶναι $= \mu$, καὶ ἡ κατὰ θέλησιν σύζευξις τῶν μεγεθῶν $= \nu$, ἔσται τότε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν συζυγιῶν μ^{ν}. τουτέστιν ἂν συζεύξωμεν 6 μεγέθη ἀνὰ τέσσαρα, προκύπτουσι συζυγίαι $= 6^4 = 1296$. ἐὰν δὲ λάβωμεν μεγέθη ἀνὰ τέσσαρα, ἔσονται συζυγίαι $9^4 = 6561$. 1[illegible]0 μεγέθη ἀνὰ τρία λαμβανόμενα, παρέχουσιν ἀριθμὸν συζυγιῶν $10[illegible]^3 = 1000000$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

S. 228. Ἐὰν εἰς τὴν λογικὴν τὴν μὲν καθόλου καταφατικὴν πρότασιν ὀνομάσωμεν Α, τὴν δὲ καθόλου ἀποφατικὴν Ε, τὴν δὲ ἐπὶ μέρους καταφατικὴν Ι, τὴν δὲ μερικῶς ἀποφατικὴν Ο, καὶ συζεύξωμεν αὐτὰς ἀλλήλαις, προκύψουσιν ἐκ τούτων τῶν 4 Προτάσεων ἀνὰ-

τρεῖς

τρεῖς (ἐπειδὴ ϗ παντὸς συλλογισμοῦ τρεῖς εἰσιν αἱ προτάσεις) λαμβανομένων συζυγίαι 4^3 τουτέστι 64, τὰς ὁποίας ὀνομάζουσι τρόπους, ἢ τύπους τῶν συλλογισμῶν. ἐξ ἁπάντων ὅμως τούτων τῶν Τύπων μόνοι δέκα (εἰμὴ τις ἐξέλοι ϗ ἐκ τούτων τινάς) εἰσὶν ἀληθεῖς ϗ δόκιμοι, ϗ ὀρθῶς συνάγειν δυνάμενοι, οἱ ἑξῆς, ααα. ααι. αεε. αιι. αοο. εαε. εαο. ειο. ιαι. οαο. οἱ δὲ λοιποὶ ἅτε δὴ ἀσύστατοι, ϗ ἀδόκιμοι ὄντες, ἀποδοκιμάζονται, περὶ τῶν ὁποίων ϗ ὁ κὺρ Εὐγένιος εἰς τὴν λογικήν του (σελ. 425) πραγματεύεται πλατύτερον, ἔνθα εὑρίσκεται ϗ ὁ τῶν 64 Συζυγιῶν Πίναξ.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ'.

§. 229. Νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταθέσεων (ἢ κατὰ θέσιν μεταλλαγῶν) Μεγεθῶν διωρισμένων.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ϗ ΔΕΙ'ΞΙΣ.

α ϗ β ἀλλήλοις συζευγνύμενα, ϗ μετακινούμενα, ποιοῦσι μεταθέσεις δύω, οἷον αβ, βα. τὰ δὲ α, β, γ ἀποπληροῦσι δυνατὰς μεταθέσεις αβγ, αγβ, βαγ, βγα, γαβ, γβα. τουτέστιν αἱ ἀνωτέρω δύω μεταθέσεις πολλαπλασιάζονται μετὰ τοῦ νέου ἀριθμοῦ τῶν μεγεθῶν, μετὰ τοῦ 3 δηλονότι. α, β, γ, δ παρέχουσι δυνατὰς μεταθέσεις 24, τουτέστιν αἱ ἀνωτέρω 6 μεταθ. πολλαπλασιάζονται μετὰ τοῦ 4 νέου ἀριθμοῦ. α, β, γ, δ, ε διδόασι μεταθέσεις 120, τουτέστιν αἱ ἀνωτέρω 24 πολλαπλασιάζονται μετὰ τοῦ 5. ϗ οὕτω χωρεῖ τις, ἕως οὗ βούληται. λοιπὸν ἐν γένει, διὰ νὰ ἀποκτήσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐκείνων τῶν μεταθέσεων, ὅπου δύναται νὰ ἔχῃ καθε διδόμενος ἀριθμὸς, καταγράφομεν πρῶτον μίαν ἀριθμητικὴν Πρόοδον, ἔπειτα ὑπ' αὐτὴν γράφομεν τὰ παραγόμενα κατὰ τὴν ἤδη γενομένην μέθοδον, οἷον

∴ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 .
1 . 2 . 6 . 24 . 120 . 720 . 5040 . 40320 . 362880 .
10
3628800 .

Πρέπει δὲ ἑνὸς παραδείγματος νὰ σαφηνισθῶσι τὰ λεγόμενα ἐπὶ πλέον . γίνεται ἐρώτησις .

Ἑξ ἄνθρωποι καθήμενοι εἰς τὴν τράπεζαν , ποσάκις δύνανται νὰ μετατεθῶσι καὶ νὰ καθίσωσι διαφόρως;

Λοιπὸν τῆς ἐρωτήσεως ταύτης ἡ λύσις εἶναι τὸ παραγόμενον 720, τὸ ὑπὸ τὸν 6 ἀριθμὸν εὑρισκόμενον. ἐὰν δὲ γένηται ἡ ἐρώτησις διὰ 10 ἀνθρώπους, ἔσονται μεταθέσεις 3628800. κ. τ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'.

§. 230. Νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν Συζυγιῶν, αἵτινες καθ' ἑαυτὰς διαφέρουσι, καὶ οὐδεμία τούτων παραβάλλεται ἑαυτῇ. δοθήτωσαν 6 ἀριθμοί, ὡς 6 τινὰ Μεγέθη νοούμενοι. 1, 2, 3, 4, 5, 6.

ΠΡΑΚΤΕΑ, καὶ ΔΕΙΞΙΣ.

1 Παρατιθέμενον τοῖς λοιποῖς, παρέχει 5 Συζυγίας ἐκ δύο ἀριθμῶν, οἷον 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4, 1 : 5, 1 : 6. ὁ 2 παραβαλλόμενος τοῖς λοιποῖς τοῖς μεθ' ἑαυτόν, ποιεῖ Συζυγίας 4. (ἐπειδὴ τὸ 1 παραβέβληται ἤδη),

οἷον

οἷον 2:3, 2:4, 2:5, 2:6. ὁ 3 παραπτθέμενος τοῖς λοιποῖς, δίδει 3 Συζυγίας. (ἐπειδὴ τὸ 1 καὶ 2 ἤδη παραπέθεινται), οἷον 3:4, 3:5, 3:6. ὁ δὲ 4 παρέχει Συζυγίας 2, οἷον 4:5, 4:6. τὸ δὲ 5 δίδει μόνον μίαν Συζυγίαν, 5:6. λοιπὸν αἱ Συζυγίαι ἐξ Ὅρων ἀνὰ δύω λαμβανομένων, συνιστῶσιν ἀριθμητικήν τινα Σειρὰν: 5.4.3.2.1, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ μείζων Ὅρος εἶναι ὁ 5, καὶ ὁ ἐλάττων 1, ἡ δὲ πληθὺς τῶν Ὅρων οὖθις 5. τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα πορίζόμεθα κατὰ τὸν Τύπον $\varkappa = \frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2}$, τουτέστιν $\frac{1\times5 + 5\times5}{2}$, ἢ $\frac{5 + 5\times5}{2}$. ἀλλὰ μὴν $\frac{5\times5 + 5}{2}$ εἶναι $= \frac{5\times6}{2}$, δηλονότι οἱ δύω δοθέντες ἔσχατοι Ὅροι πολλαπλασιάζονται μετ' ἀλλήλων, καὶ διαιροῦνται διὰ τῶν πρώτων δύω Ὅρων πεπολλαπλασιασμένων. ἄρα ἀποκτῶμεν τὸ κεφάλαιον τῶν Ὅρων ἐκ δύω ἀριθμῶν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύω ἐσχάτους Ὅρους ὁποιωνδήποτοῦν δεδομένων, καὶ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον διέλωμεν διὰ τοῦ παραγομένου τῶν δύω πρώτων. ἐὰν ἔτι θέλωμεν νὰ ἀποκτήσωμεν Συζυγίαν τινὰ δοθέντων πραγμάτων ἀνὰ τρία λαμβανομένων, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς τρεῖς ἐσχάτους Ὅρους ἐπ' ἀλλήλους, ἔπειτα τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν τριῶν πρώτων Ὅρων, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ ά.

§. 231. Ἐν 90 ἄρα ἀριθμοῖς, ἐὰν ἀνὰ δύω τούτους συνάψωμεν, εἰσὶν Συζυγίαι $\frac{90\times89}{1\times2} = 4005$, αἵτινες κοινῶς ὀνομάζονται

ἄλται

ἄμαι (ambi), λαμβανομένων δὲ ἀνὰ τρεῖς, ἔσονται Συζυγίαι $\frac{90\times89\times88}{1\times2\times3} = 117480$, ἅπερ τέρνι (terni) καλοῦνται. ἀνὰ τέσσαρας δὲ λαμβανομένων, προκύψουσι Συζυγίαι (quaterni) $\frac{90\times89\times88\times87}{1\times2\times3\times4} = 2555190$. λαμβανομένων δὲ ἀνὰ πέντε, ἔσονται Συζυγίαι (quinterni). $\frac{90\times89\times88\times87\times86}{1\times2\times3\times4\times5} = 43949268$.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 232. Ἐὰν λάβωμεν γενικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν συζευκτέων μεγεθῶν, καὶ ὀνομάσωμεν αὐτὸν μ, ἔσονται τότε κατὰ τὸ προτεθὲν Πόρισμα αἱ Συζυγίαι τῶν ἀνὰ δύο $\frac{\mu\times\mu-1}{1\times2}$. τῶν ἀνὰ τρία $\frac{\mu\times\mu-1\times\mu-2}{1\times2\times3}$. τῶν ἀνὰ τέσσαρα $\frac{\mu\times\mu-1\times\mu-2\times\mu-3}{1\times2\times3\times4}$. κ. τ.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

§. 233. Ἔστω τις ἐρώτησις, ποσάκις δύνανται νὰ συζευχθῶσιν ἑπτὰ πλανῆται; κατὰ τοῦτο ἔσται $\mu = 7$, ὅθεν ἀνὰ δύο λαμβανομένων, $\frac{7\times6}{1\times2} = 21$. ἀνὰ τρεῖς, $\frac{7\times6\times5}{1\times2\times3} = 35$. ἀνὰ τέσσαρας λαμβανομένων, ἔσονται Συζυγίαι $= 35$, ἀνὰ πέντε, $= 21$, ἐξ ὁμοῦ $= 7$, καὶ πλῆθος ἑπτὰ ὁμοῦ $= 1$. ἑπομένως εἰσὶν ὅλαι αἱ Συζυγίαι $= 120$. κ. τ.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

§. 234. Αὕτη ἡ περὶ τοῦ Συνδιασμοῦ πραγματεία δὲν συμβάλλει μόνον πρὸς ἀναγραμματισμούς, καὶ πρὸς ἄλλα τοιαῦτα παιδείας εἴδη, ἀλλὰ καὶ πρὸς τὴν τῆς πιθανότητος ἐπιστήμην, διὰ σχήματα, καὶ διὰ τὴν ἀξιοθεώρητον πολιτικὴν ἀριθμητικήν.

ΚΕΦΑΛ-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ιβ΄.

Περὶ λογαρίθμων.

ΟΡΙΣΜΟΣ α΄.

§. 235. Ἐὰν ὑποκάτω μιᾶς ἀριθμητικῆς Προόδου ἀρχομένης ἐκ τοῦ 0, ταχθῇ τις Γεωμετρικὴ Πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος Ὅρος ἄρχεται ἀπὸ τοῦ 1, οἱ Ὅροι τότε τῆς ἀριθμητικῆς ταύτης Σειρᾶς ἔσονται λογάριθμοι τῶν Ὅρων τῆς Γεωμετρικῆς Σειρᾶς, τοῦτ' ἔστιν ἕκαστος Ὅρος τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ ὑπ' αὐτὸν κειμένου Ὅρου τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς

Ἀριθμ.	0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7
Γεωμ.	1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128.

Ἔνθα ἕκαστος Ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς Προόδου παρίστησι τὸν λογάριθμον τοῦ ὑπ' αὐτὸν κειμένου Ὅρου τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, οἷον 5 εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 32, ἢ ὁ 5 ἐμφαίνει, ὅτι 32 ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ εἶναι ὁ πενταπλασίων λόγος τοῦ 1 : 2, ἐπειδὴ ἂν οὕτω συνάγωμεν 1 : 2 ∺ 2 : 4. 2 : 4 ∺ 4 : 8. 4 : 8 ∺ 8 : 16. 8 : 16 ∺ 16 : 32, γίνεται καταφανές, ὅτι εἶναι πέντε οἱ λόγοι ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 32. οἷον 1 : 2 (εἷς λόγος), 2 : 4 (δύω). 4 : 8 (τρεῖς), 8 : 16 (τέσσαρες). 16 : 32 (πέντε).

ΠΟΡΙΣΜΑ α΄.

§. 236. Ἐπειδὴ ἑκάστη Γεωμετρικὴ Πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος Ὅρος ἐστὶν $=1$, δύναται νὰ ἐκτεθῇ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον Π^0; Π^1, Π^2, Π^3, Π^4, Π^5, Π^6, Π^7 (§. 219) ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι οἱ Ἐκθέται μιᾶς Γεωμετρικῆς Προόδου δύνανται νὰ θεωρῶνται ὡς λογάριθμοι τῶν Ὅρων τῆς ῥηθείσης Προόδου, οἱ Ἐκθέται δηλονότι εἰσὶν λογάριθμοι τῶν δυνάμεων αὐτῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ β΄.

§. 237. Ἐπειδὴ κάθε πολλαπλασιασμὸς τῶν δυνάμεων γίγνεται διὰ τῆς προσθέσεως τῶν Ἐκθετῶν, καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν Ἐκθετῶν εἶναι Ἴσον μὲ τὸν Ἐκθέτην τοῦ Παραγομένου, οἱ δὲ Ἐκθέται ταυτὸν δύνανται τοῖς λογαρίθμοις, ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἐὰν συναφθῶσιν οἱ λογάριθμοι δύω Παραγομένων, τὸ κεφάλαιον ἐκ τῆς Συνάψεως τῶν λογαρίθμων ἔσται ὁ λογάριθμος τοῦ Παραγομένου. π. χ. εἰς τὴν ἀνωτέρω σειρὰν οἱ λογάριθμοι τοῦ 4 καὶ 32 εἶναι ὁ 2, καὶ ὁ 5, τὸ δὲ τούτων κεφάλαιον 7 εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ Παραγομένου 128. καὶ πάλιν, ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις τῶν Δυνάμεων γίνεται διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν Ἐκθετῶν, ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ διαιροῦντος ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρουμένου, τὸ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως ἐναπολειπόμενον ἔσται ὁ λογάριθμος τοῦ Πηλίκου, π. χ. Ἐν τῇ Ἰδίᾳ Σειρᾷ ἐκ τοῦ 128 διαιρεθέντος ἐπὶ τὸν 4, προκύπτει Πηλ. 32, καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν τούτων λογαρίθμων 7—2 προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 5, ὅστις εἶναι λογάριθμος τοῦ Πηλίκου 32.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ΄.

§. 238. Ἐπειδὴ ὁ Ἐκθέτης τοῦ δεδομένου ποσοῦ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ μετὰ τοῦ Ἐκθέτου τῆς ζητουμένης δυνάμεως, δίδει τὸν Ἐκθέτην τῆς δυνάμεως (§. 49). ἄρα καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τοῦ Ἐκθέτου τῆς δυνάμεως, δίδει

τὸν

τὸν λογάριθμον τῆς δυνάμεως. ποριζόμεθα τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ 4, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ, οἷον τὸν 2 μετὰ τοῦ 3, ϗ τὸ ἐκ τούτων Παραγόμενον 6 εἶναι ὁ λογάριθμος τῆς τρίτης δυνάμεως 64. ϗ ἂν διέλωμεν τὸν Ἐκθέτην ἑκάστης δυνάμεως μὲ τὸν δοθέντα Ἐκθέτην τῆς ῥίζης, ἀποκτῶμεν τὴν ζητουμένην ῥίζαν (§. 60). Ϗ ὁ λογάριθμος ἄρα τῆς δυνάμεως διαιρεθεὶς διὰ τοῦ ἐκθέτου τῆς ῥίζης, δίδει τὸν λογάριθμον τῆς ζητουμένης ῥίζης. ἐκ τοῦ 64 ἐξάγεται ἡ ῥίζα τῆς τρίτης δυνάμεως, ἂν διαιρεθῇ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ ὁ 6 διὰ τοῦ 3. ϗ τότε τὸ Πηλίκον 2 ἐστὶν ὁ λογάριθμος τῆς ῥίζης 4. λοιπὸν ἐπὶ τῶν λογαρίθμων κάθε πολλαπλασιασμὸς μεταβάλλεται εἰς πρόσθεσιν, κάθε διαίρεσις εἰς ἀφαίρεσιν, κάθε δὲ εἰς δυνάμεις ὕψωσις μεταβάλλεται εἰς πολλαπλασίασιν, ϗ κάθε ἐξαγωγὴ ῥίζης εἰς διαίρεσιν. ὅθεν διὰ τῆς χρήσεως τῶν λογαρίθμων μεγάλην καρπούμεθα τὴν ὠφέλειαν ϗ τὴν ἐν παντὶ εἴδει λογισμῶν εὐχέρειαν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 239. Ὁ τοὺς λογαρίθμους ἐπινοήσας λέγεται, ὅτι εἶναι πρῶτος Ἰωάννης τις Νεπέρος ἐν τῇ Σκοτίᾳ, ὅστις ἐρευνῶν τὰς ἰδιότητας τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν μετὰ πολλῆς ἀκριβείας, ἔφθασε διὰ τούτου εἰς τὴν γνῶσιν τῆς φύσεως ϗ Ἰδιότητος τῶν λογαρίθμων, ϗ ἐξέδωκε πόνημα ἐπιγραφόμενον „ ΠΕΡΙΓΡΑΦῊ ΘΑΥΜΑΣΙΌΥ ΚΑΝΌΝΟΣ ΤΩ͂Ν ΛΟΓΑΡΊΘΜΩΝ κατὰ τὸ 1614 ἔτος ἘΝ ἘΔΙΝΒΟΎΡΓ. Τῆς πρὸς τοῦτο φροντίδος ἔλαβε πολὺ μέρος ϗ ὁ ἙΝΡΊΚΟΣ ΒΡΙΓΓΙΟΣ, ϗ ἐκοπίασε σὺν ἐκείνῳ διὰ νὰ φέρωσι τὴν ὑπόθεσιν εἰς τὸ ἐντελέστερον. ὁ δὲ σκοπὸς ϗ τῶν δύω ἰδίως ἦν εἰς τὸ νὰ εὕρωσιν ἑκάστῳ ἀριθμῷ ἕνα μεταξὺ ϗ ἀνήκοντα λογάριθμον, ἢ Ἐκθέτην. ὅθεν ἐν ἀρχῇ τὸν λόγον 1 : 10 ὡς ἁπλοῦν ἐκλαβόντες, εὕρισαν ἐκ τούτου τὴν ἑξῆς Γεωμετρικὴν Πρόοδον, ϗ ἔδωκαν εἰς τοὺς Ὅρους αὐτῆς ὡς Ἐκθέτας τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἐν ἀριθμητικῇ μετὰ τοῦτο τὸ ἔργον ἤτον ἀναγκαῖον νὰ εὑρεθῶσι καὶ οἱ ἀνήκοντες λογάριθμοι (*) τῶν φυσικῇ τάξει ἀλλήλους διαδεχομένων ἀριθμῶν, ἤτοι τῶν ὄντων μεταξὺ τῆς 1, 10, 100, 1000 κ. τ. Γεωμετρικῆς Προόδου· ἐπειδὴ μεταξὺ τῆς 1 ϗ 10 ἐλλείπουσιν ἔτι ὀκτὼ χαρακτῆρες, οἷον ὁ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, μεταξὺ δὲ τῶν 10 ϗ 100 ἐλλείπουσιν ἔτι πλείους, ϗ ἔτι πλείονες μεταξὺ τῶν λοιπῶν τῆς Προόδου Ὅρων. ἀλλ' ἅπαντες οἱ ἐλλείποντες ἀριθμοὶ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς δυνάμεις τοῦ 10 κ. τ. ἐπειδὴ μεταξὺ 1 καὶ 10 δύναταί τις νὰ ποιήσῃ καὶ ἑτέρας μυρίας δυνάμεις, τῶν ὁποίων οἱ Ἐκθέται εἰσὶν ἐλάττονες μὲν τῆς 1, μείζονες δὲ τοῦ 0. οὕτω δὴ ϗ μεταξὺ τοῦ 10 ϗ 100, ἤτοι μεταξὺ τοῦ 10 ϗ 100 δύνανται νὰ νοηθῶσι ϗ ἄλλοι μυρίοι ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων ἡ δύναμις ὑπερέχει μὲν τὴν 1, ὑπερέχεται ὅμως ὑπὸ τοῦ 2. ἐκ τούτου γίνεται φανερὸν, ὅτι ἅπαντες οἱ Ἐκθέται τῶν δυνάμεων, τουτέστιν ἅπαντες οἱ λογάριθμοι τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ 1 ϗ 10 εἰσὶν γνήσια Κλάσματα, ὡς ὄντες ἐλάττονες τῆς 1, ἅπαντες δὲ οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ 10 ϗ 100, κ. τ. εἰσὶν ἀριθμοὶ ὁλοσχερεῖς, ἔχοντες ϗ Κλάσματα ἑαυτοῖς συγκείμενα, οἵτινες μετὰ τῶν Κλασμάτων εἰς Κλάσματα γεγονότες, εἰσὶν νόθα Κλάσματα. οὕτω. π. χ. ἅπαντες οἱ ἀριθμοὶ μεταξὺ 10 ϗ 100 ἔχουσι λογάριθμον τὴν 1, ϗ Κλάσμα. ἐπειδὴ μόνον τοῦ 100 λογάριθμος εἶναι ὁ 2. κ. τ.

Μὲ ἐργωδέστατον τῷ ὄντι τρόπον εὗρον τὸ πρῶτον τούτους τοὺς ἀνήκοντας λογαρίθμους, διὰ τῆς ζητήσεως δηλονότι τῶν Μέσων ἀναλόγων ἀριθμῶν μεταξὺ τῆς ἀριθμητικῆς καὶ Γεωμετρικῆς Προόδου, ἕως ἂν ἐνέτυχον ἀριθμῷ ὡς ἔγγιστα ὄντι τοῦ ζητουμένου, τὸν ὁποῖον ϗ ὡς ἀληθῆ παρέλαβον, ϗ πρὸς τὸν ὁποῖον προέκυπτε ϗ ὁ τοῦ ζητουμένου λογάριθμος, διὰ τῆς ζητήσεως τοῦ Μέσου ἀριθμητικῶς ἀναλόγου ἀριθ-

---

(*) Οὗτοι εὑρίσκονται ἐν ἀριθμητικῷ οὐθεὶς λόγῳ μεταξὺ τοῦ 0, 1, 2, 3, 4, κ. τ. ἤτοι μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω ἐπ' ἀκριβὲς λογαρίθμων, ϗ ἔσονται ἐκδηλούμενοι εἰς δεκαδικὰ Κλάσματα, ἐπειδὴ μεταξὺ τοῦ 0 ϗ 1 καὶ μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 2 δὲν ὑπάρχει κανένας ὁλόκληρος ἀριθμός.

ἀριθμοῦ δοθέντος. καὶ διὰ νὰ δηλωθῇ σαφέστερον αὕτη ἡ Μέθοδος περὶ τῆς εὑρέσεως τούτων τῶν λογαρίθμων, φέρε δὴ τὰ εἰρημένα παραδειγματίσωμεν, καὶ δείξωμεν λεπτομερέστερον τὸν τρόπον, κατὰ τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται τις ἀνήκων λογάριθμος. πολλαπλασιάζονται πρῶτον μετ' ἀλλήλων οἱ δύω δοθέντες ἄκροι Ὅροι, μεταξὺ τῶν ὁποίων ζητεῖται ὁ Μέσος Γεωμετρικὸς ἀνάλογος, ἂν εἶναι ἄγνωστος· ἔπειτα ἐξάγεται ἐκ τοῦ Παραγομένου ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα, καὶ αὕτη ἐστὶν ὁ Μέσος Γεωμετρικὸς ἀνάλογος. ζητουμένου, δὸς εἰπεῖν, τοῦ Μέσου γεωμετρικῶς ἀναλόγου τοῦ μεταξὺ 2 καὶ 32· ποιοῦμεν οὕτως $2 : \chi = \chi : 32$, ὥστε $64 = \chi^2$, καὶ ἐκ τῶν δύω τῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἔσται $\sqrt{64} = \chi$, τουτέστιν $8 = \chi$; καὶ ὁ 8 ἀριθμὸς ἔσται ὁ ζητούμενος Μέσος Γεωμετρικὸς ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 32. Ὁ δὲ Μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος εὑρίσκεται οὕτω· συνάπτονται πρῶτον οἱ ἐν ἀριθμητικῷ λόγῳ δύω Ὅροι, τουτέστιν οἱ λογάριθμοι τῶν ἐν Γεωμετρικῷ λόγῳ κειμένων δύω Ὅρων, μεταξὺ τῶν ὁποίων ζητεῖται ὁ Μέσος Γεωμετρικὸς ἀνάλογος, ἔπειτα τὸ ἐκ τῆς συνάψεως ἄθροισμα διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, τὸ δὲ ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον ἔσται ὁ ζητούμενος μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος. π. χ. ἐὰν ζητῆται ὁ Μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 5 δύω Ὅρων, ὧν τὸ μὲν 1 εἶναι λογάριθμος τοῦ ἐν Γεωμετρικῷ λόγῳ κειμένου Ὅρου 2, ὁ δὲ 5 αὖθις λογάριθμος τοῦ 32, ποιοῦμεν οὕτως $1 + 5 = 6$ καὶ τοῦ κεφαλαίου διαιρεθέντος, γίνεται $\frac{6}{2} = 3$; καὶ οὗτος ὁ προκύψας 3 ὑπάρχει ὁ ζητούμενος μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος, ὅστις εἶναι λογάριθμος τοῦ 8 τοῦ εὑρεθέντος μέσου γεωμετρικῶς ἀναλόγου μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 32. τοῦτον δὲ τὸν τρόπον μετεχειρίσθησαν καὶ οἱ πρῶτοι τῶν λογαρίθμων εὑρεταί, καὶ εἰς εὕρεσιν τοῦ λογαρίθμου τοῦ 9 ἀριθμοῦ ἐποίησαν οὕτως. Ἔλαβον πρῶτον δοθέντας τοὺς δύω ἄκρους ἀριθμούς, μεταξὺ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται ὁ 9, δηλονότι τὸ 1 καὶ τὰ 10, καὶ τούτοις προσέθηκαν ἑπτὰ Σημεῖα μηδενικὰ (ἐπειδὴ καὶ εἶναι ἀνάγκη νὰ παρισῶνται οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἰς δεκαδικὰ διὰ νὰ γένωνται αἱ πράξεις ἀκριβέστερον) ἔπειτα συνήγαγον $1,0000000 : \chi = \chi : 10,0000000$, ὥστε $10,00000000000000 = \chi^2$, τούτων δὲ τῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, προέκυψεν 3.1622777 ἐν ἑπτὰ δηλονότι δεκαδικοῖς, ὅστις ἐστὶν ὁ

μέσος

μέσος Γεωμετρικὸς ἀνάλογος μεταξὺ 1 ϗ 10. τὸν δὲ τούτου λογάριθμον εὗρον οὕτως. ἐπειδὴ ὁ τῆς 1 λογάριθμος ἐστὶν = 0, ὁ δὲ τοῦ 10 λογάριθμος ἐστὶν = 1. ἐν ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ συνήγαγον ὧδε 0. χ = χ. 1. ἄρα 1 = 2χ. ὥστε $\frac{1}{2}$ = χ.

προστεθέντων δὲ ταύτῃ τῇ 1 τῶν ἑπτὰ μηδενικῶν, γέγονε $\frac{1.0000000}{2}$ τουτέστιν = 0.5000000, ϗ οὗτος ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 3.1622777. ἀλλ' ἐπειδὴ οὗτος ὁ εὑρεθεὶς Μέσος ἀνάλογος, δὲν εἶναι ὁ ζητούμενος 9 μετὰ τοῦ ἰδίου λογαρίθμου, διὰ τοῦτο ἀνάγκη ἦν νὰ προχωρήσωσι περαιτέρω, ζητοῦντες τὸν λογάριθμον τοῦ 9. ὅθεν δὴ λαβόντες αὖθις τοῦτον τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν 3.162277. ϗ τὸν 10 σὺν ἑπτὰ μηδενικοῖς δεκαδικοῖς, ἐπολλαπλασίασαν αὐτοὺς ἐπ' ἀλλήλους, οἷον 3.162277 X 10.0000000 = 31.6227770000000. ἔπειτα ἐξήγαγον τούτου τὴν ῥίζαν μέχρις ἑπταδεκαδικῶν, ϗ ἀνεφάνη Μέσος γεωμετρικῶς ἀνάλογος οὗτος ὁ ἀριθμὸς = 5.6234132. τοῦ ὁποίου εὗρον ϗ τὸν ἀνήκοντα λογάριθμον, συνάψαντες πρῶτον τὸν λογάριθμον τοῦ 3.1622777 τουτέστι τὸν 0.5000000 ϗ τὸν λογάριθμον τοῦ 10, ϗ διελόντες ἔπειτα διὰ τοῦ 2 τὸ ἐκ τούτων ἄθροισμα, ἐξ οὗ προέκυψεν οὗτος ὁ ἀριθμὸς 0.7500000 Μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος, ϗ λογάριθμος τοῦ εὑρεθέντος 5.6234132. ἀλλ' ἐπειδὴ μήτε οὗτος ὁ εὑρεθεὶς Μέσος ἀνάλογος εἶναι ὁ ζητούμενος 9, μήτε ὁ εὑρεθεὶς Μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος εἶναι ὁ ζητούμενος λογάριθμος τοῦ 9. ἐζήτησαν πάλιν εἰς τρίτον νὰ εὕρωσι τὸν Μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τοῦ 10, ϗ 5.6234132, ὁμοίως ϗ τὸν τούτου λογάριθμον, ϗ οὕτω χωροῦντες εἰς ζήτησιν τοῦ μέσου ἀναλόγου μεταξὺ δύω ἀριθμῶν ϗ εἰς ζήτησιν τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ, ἔφθασαν πλέον πάντων μετὰ 26 τοιαύτας πράξεις εἰς τὸ ζητούμενον, εὗρον δηλαδὴ τὸν ἐν Γεωμετρικῷ λόγῳ ἀριθμὸν 9.0000000, ϗ τὸν τούτου λογάριθμον 95424251. κατ' αὐτὸν ἄρα τὸν τρόπον προσδιωρίσθη ὁ λογάριθμος τοῦ 9. ὥσπερ δὴ ϗ οἱ λογάριθμοι τοῦ 2, τοῦ 5, τοῦ 7, ζητηθέντες, εὑρέθησαν οἱ ἑξῆς.

2	0.3010300
5	0.6989700
7	0.8450980
9	0.9542425.

ὁ δὲ

ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ 4, τοῦ 6, καὶ τοῦ 8 εὑρίσκεται κατὰ τὸ προτεθὲν Πόρισμα. π. χ. ἡ ῥίζα τοῦ 9 εἶναι ὁ 3. ἐὰν οὖν ὁ λογάριθμος τοῦ 9 διαιρεθῇ διὰ τοῦ δύω, τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον, οἷον 0.4771212 ἔσται ὁ λογάριθμος τῆς ῥίζης 3 (§. 60). τοῦ 2 τὸ Τετράγωνον ἐστὶν 4. λοιπὸν ἂν ληφθῇ δὶς (§. 49) ὁ τούτου λογάριθμος, προκύπτει ἐκ τῆς συνάψεως ὁ τοῦ 4 λογάριθμος 0.6020600. καὶ ἐκ τοῦ 2×3 παράγεται ὁ ἀριθμὸς 6, ἄρα κτώμεθα τὸν λογάριθμον αὐτοῦ, ἀφ' οὗ συνάψωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 2 μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ 3 (§. 47), ὅστις ἐστὶν 0.7781512. τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τοῦ 2 καὶ 4 ἀριθμοῦ δίδει τοῦ 8 ἀριθμοῦ τὸν λογάριθμον = 9030900. Οἱ λογάριθμοι τοῦ ἀριθμοῦ 11, 13, κ. τ. εἰσὶν αὖθις εἰς ζήτησιν. οἱ δὲ λογάριθμοι τοῦ 12, 14 κ. τ. εὑρίσκονται διὰ τῆς προσθέσεως. ἅπαντας τούτους τοὺς λογαρίθμους ΒΡΙΓΓΙΟΣ πρῶτος συνέλεξεν ἐν Πίνακι, καὶ τοῖς τύποις ἐξέδωκε. ἔπειτα ὑπὸ τοῦ ΦΛΑΚΚΟΥ, ἢ ΟΥ̓ΛΑ'Κ κατ' ἄλλους, προσηυξήθησαν, καὶ γνωρίζονται ὑπὸ τὸ ὄνομα ὁ ΚΑΝΩ'Ν ΛΟΓΑΡΙ'ΘΜΩΝ. εἰσὶν ὅμως καὶ ἄλλαι τούτων ἐκδόσεις διάφοροι.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ ά.

§. 240. Ἐκ τῶν ἕως ὧδε λεχθέντων ἕπεται, ὅτι ἕκαστος λογάριθμος ἐκ δεκαδικοῦ τινὸς συνίσταται Κλάσματος, καὶ οἱ μὲν λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ 1 καὶ 10 εἰσὶν Κλάσματα μόνα, καὶ ἕκαστος τούτων ἐλάττων ἐστὶ Μονάδος. ὅτι μόνον ὁ λογάριθμος τοῦ 10 ἐστὶν = 1. ἕκαστος δὲ λογάριθμος τῶν μεταξὺ 10 καὶ 100 ἀριθμῶν εἶναι Μονὰς ὁλοσχερὴς ἔχουσα ἑαυτῇ προσκείμενον καὶ Κλάσμα. ὅτι μόνον τοῦ 100 ὁ λογάριθμός ἐστιν = 2. τῶν δὲ λογαρίθμων τῶν ἀπὸ τοῦ 100 μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ 999 ἕκαστος σύγκειται ἐκ δύω Μονάδων καὶ Κλάσματος, ὅτι μόνον τοῦ 1000 ὁ λογάριθμος εἶναι = 3. ὅθεν ἐν γένει ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου εἶναι πάντοτε μίαν μονάδα μικρότερος ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν χαρακτήρων, ἐκ τῶν ὁποίων σύγκειται τὸ Διδόμενον. π. χ. ἔστω τὸ Διδόμενον ἐκ τριῶν χαρακτήρων 528 συγκείμενον, ὁ τούτου λογάριθμος (ἢ τὸ χαρακτηριστικὸν) ὑπάρχει μονάδι ἐλάττων τουτέστι = 1. ἐὰν δὲ τὸ Διδόμενον εἶναι ἐκ 5 χαρακτήρων 34459, εἰς τὸν λογάριθμον πρέπει νὰ εἶναι 4 ὁλοσχερεῖς ἀριθμοί. ὅθεν ϗ τὸν πρὸ τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων κείμενον ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν ὀνομάζουσιν Χαρακτηριστικόν. ἐπειδὴ ἐκ τούτου μανθάνει τις, ἐκ πόσων χαρακτήρων συνίσταται τὸ Διδόμενον, ὅπου προσήκει εἰς τοῦτο τὸ χαρακτηριστικὸν, ἢ λογάριθμον.

ΠΟΡΙΣΜΑ β΄.

§. 341. Ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος τοῦ 10 εἶναι 1.0000000, ϗ ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιασμὸς δύω ἀριθμῶν γίνεται διὰ τῆς συνάψεως τῶν λογαρίθμων, ἐκ τούτου εἶναι φανερὸν, ὅτι ἂν ὁ ἕνας συνεργὸς εἶναι 10, ὁ λογάριθμος τοῦ Παραγομένου πρέπει νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἄλλου Συνεργοῦ, μὲ ταύτην ὅμως διαφορὰν, ὅτι ἐκεῖνος ἐν τῷ χαρακτηριστικῷ αὐξάνει μίαν Μονάδα. π.χ. ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ 10 μετὰ τοῦ 2 ἀριθμοῦ διὰ τῆς Συνάψεως τῶν λογαρίθμων, ὁ λογάριθμος τοῦ Παραγομένου ἔσται ἴσος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἑτέρου Συνεργοῦ, τουτέστι τοῦ 2, πλὴν ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ Παραγομένου ἐν τῷ χαρακτηριστικῷ ὑπερέξει τὸν λογάριθμον τοῦ 2 μίαν Μονάδα. ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 2, ϗ 20, ϗ 200, ϗ 2000 ἐν μὲν τοῖς Δεκαδικοῖς εἶναι ὁ ἴδιος, τουτέστι 3010300, κατὰ δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν ἐπὶ μὲν τοῦ 2 = 0, ὅτι ὁ τοῦ 2 λογάριθμος τυγχάνει 0.3010300. ἐπὶ δὲ τοῦ 20 εἶναι = 1, ὅτι ὁ τοῦ 20 λογάριθμος τυγχάνει 1.3010300. ἐπὶ δὲ τοῦ 200 = 2, ὅτι ὁ τοῦ 200 λογάριθμος ἐστιν 2.3010300, ἐπὶ δὲ τοῦ 2000 = 3, ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ 2000 ἐστὶν ὁ 3.3010300, δι' αὐτὸν δὲ τοῦτον τὸν λόγον πάλιν ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 34 ϗ 340 κατὰ τὰ Δεκαδικὰ εἶναι ὁ αὐτός. ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ 346 ϗ 3460 ὡσαύτως. ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ 347 ϗ 3470 ὁμοίως εἶναι ὁ ἴδιος, καθὼς ἐπὶ πλέον ὁ λογάριθμος τοῦ 346 ϗ 34600, ἢ 346000 ἔσται ὁ αὐτὸς, κατὰ δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν πάντοτε μίαν Μονάδα ἐλάττων τῆς πλήθους τῶν χαρακτήρων, τῶν ὁποίων ζητεῖται ὁ λογάριθμος, ὡς ἐν τῷ ἀνωτέρῳ (§. 340) Πορίσματι εἴρηται.

ΠΟΡΙΣΜΑ γʹ.

§. 242. Ἐντοῦθεν μανθάνομεν τὸν Μέθοδον, κατὰ τὴν ὁποίαν δύναταί τις νὰ εὑρίσκῃ τὸν λογάριθμον ἑνὸς Ποσοῦ μείζονος τῶν ἐν τῷ Πίνακι ἐμφαινομένων, ἢ νὰ εὑρίσκῃ ἀριθμὸν ἀνήκοντα εἰς τὸν Διδόμενον λογάριθμον ἑνὸς χαρακτηριστικοῦ μείζονος τῶν ἐν τῷ Πίνακι εὑρισκομένων. ὅθεν ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος ἐκτὸς τοῦ χαρακτηριστικοῦ, δὲν λαμβάνει τινὰ μεταβολὴν, ἂν τὸ Ποσὸν προσαυξηθῇ, ἢ ἐλαττωθῇ ἓν Μηδενικὸν 0, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν διὰ τοῦ ἁπλοῦ κανόνος τῶν ἀναλογιῶν τοὺς μεταξὺ λογαρίθμους, ἢ τοὺς ἀνήκοντας ἀριθμούς. ἂς ἀποδεχθῶμεν, ὅτι ἐν τῷ Πίνακι περιέχονται οἱ λογάριθμοι τοῦ 1 μέχρι τῶν 1000, καὶ ὅτι πρόκειται εἰς ζήτησιν ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 6771, ἢ τοῦ 6775. καὶ ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 6770 εἶναι ἴδιος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ 677, ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ 6780 πάλιν εἶναι ἴδιος μὲ τὸν λογάριθ. τοῦ 678. ἐντοῦθεν συνάγεται, ὅτι καθὼς μεταξὺ τοῦ 6770 καὶ 6780 εἰσὶν ἀριθμοὶ 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, οὕτω καὶ μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν 6770 καὶ 6780 ἀριθμῶν περιέχονται ἄλλοι μεταξὺ λογάριθμοι. ὅθεν πρέπει νὰ λάβωμεν τὴν Διαφορὰν τῶν λογαρίθμων τοῦ 677 καὶ τοῦ 678 ἀριθμοῦ, καὶ νὰ διέλωμεν αὐτὴν εἰς 10 Μέρη, καὶ τότε κάθε ἑπόμενος λογάριθμος εἶναι μείζων τοῦ ἡγουμένου λογαρίθμου ἓν τοιοῦτον δεκατημόριον· κατ' αὐτὸν λοιπὸν τὸν τρόπον πορίζόμεθα τοὺς λογαρίθμους τῶν μεταξὺ ἀριθμῶν. ἐπειδὴ ὡς 10 πρὸς ἅπασαν τὴν Διαφορὰν. οὕτως 1 πρὸς τὴν Διαφορὰν ἑνὸς δεκατημορίου, καὶ 2 πρὸς τὴν Διαφορὰν δύω δεκατημορίων, κ. τ. ὁ μὲν λογάριθμος τοῦ 677, ἢ 6770 (ἐκτὸς τοῦ χαρακτηριστικοῦ) εἶναι 830588, ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ 678, ἢ 6780 εἶναι 831229, ἡ δὲ τῶν λογαρίθμων Διαφορὰ = 641, ὅθεν διαιρεθεῖσα αὐτὴ ἡ Διαφορὰ ἐπὶ τὸν 10, ποιεῖ $\frac{641}{10} = 64$ ἀριθμὸν, ὅστις πρέπει νὰ προστεθῇ ἑκάστῳ τῶν ἡγουμένων λογαρίθμων. ὁ λογάριθμος ἄρα τοῦ ζητουμένου 6771 εἶναι 3.830652, κ. τ. ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ ἄλλου ζητουμένου 6775 ἀριθμοῦ εἶναι 3.830909. ἐπὶ τούτου θεμελιοῦται ἡ λύσις καὶ ἡ ἀπόδειξις τῶν ἀκολούθων Προβλημάτων· ἐννοεῖται νειῶται ὅμως, ὅτι τὰς Πίνακας τῶν λογαρίθμων ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τῶν 1000 πρέπει νὰ ἔχωμεν ἀνὰ χεῖρας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ά.

§. 243. Νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, τοῦ ὁποίου τὸ χαρακτηριστικὸν ὑπάρχει 0, ἢ 1, ἢ 2, ἢ 3.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 0, ἢ 1, ζητοῦμεν τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τὸν Πίνακα ἀπὸ τῆς Μονάδος μέχρι τῶν 99, ὁ δὲ τῷ λογαρίθμῳ προσήκων ἀριθμὸς εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἐὰν δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν τυγχάνῃ 2, ἢ 3, ζητοῦμεν τοῦτο ἐν τῷ Πίνακι ἀπὸ τῶν 100 μέχρι 9999, καὶ ὁ τῷ λογαρίθμῳ ἀνήκων ἀριθμὸς εἶναι ὁ ζητούμενος. π. χ.

εἰς τὸν λογαριθ.	1.716003	ἀνήκει	ὁ 52	ἀριθμὸς
εἰς τὸν λογαριθ	2.424883	προσήκει	ὁ 266	ἀριθμὸς
εἰς τὸν λογαριθ.	3.725555	ἀνήκει	ὁ 5316	ἀριθμὸς
εἰς τὸν λογαριθ.	3.858958	ἀνήκει	ὁ 7227	ἀριθμὸς

ὅταν ὅμως ὁ ζητούμενος λογάριθμος δὲν εὑρίσκηται ἐν τῷ Πίνακι, λαμβάνομεν τότε τὸν ἔγγιστα μικρότερον. π. χ.

εἰς τὸν λογαριθ.	0.759668	ἀνήκει ὡς ἔγγιστα	5
. . .	0.991669	. . .	9
. . .	1.060698	. . .	11
. . .	1.294466	. . .	19
. . .	2.730540	. . .	537
. . .	2.255996	. . .	180.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β.

§. 244. Νὰ εὕρωμεν τινὰ ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος προσανήκει εἰς δεδομένον τινὰ λογάριθμον χαρακτηριστικοῦ μείζονος τῶν ἐν τοῖς Πίναξιν ὑπαρχόντων.

ΛΥΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

Καν. ά.) Ὑπὸ τὸ πλέον μεγαλήτερον τῶν ἐν τοῖς Πίναξι χαρακτηριστικὸν, τουτέστι ὑπὸ τὸ χαρακ. 3 ζητοῦμεν δύω λογαρίθμους, δηλαδὴ τὸν λογάριθμον τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα, καὶ τὸν λογάριθμον τὸν ἐγγὺς μείζονα τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, μεταξὺ τῶν ὁποίων παρεμπίπτουσι πάντως τὰ Δεκαδικὰ τούτου τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, καὶ ἀφ' οὗ εὕρωμεν τούτους τοὺς δύω λογαρίθμους, σημειοῦμεν τότε τὴν μεταξὺ τούτων Διαφορὰν, ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸν ἐλάσσονα ἀφαιροῦντες. ἐνταῦθα ὅμως οὐδόλως φροντίζομεν διὰ τὸ χαρακτηριστικὸν τούτων.

Καν. β΄) Μεταξὺ τοῦ δοθέντος καὶ ἐγγὺς ἐλάσσονος λογαρίθμου ζητοῦμεν πάλιν τὴν τούτων Διαφορὰν, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν, ἀφ' οὗ ἀφέλωμεν τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα ἀπὸ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, ὡστόσον καὶ ἐνταῦθα τὰ χαρακτηριστικὰ αὐτῶν παρορῶνται.

Καν. γ΄.) Συγκροτοῦμεν μετὰ ταῦτα μίαν ἀναλογίαν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. „ ὡς ἡ Διαφορὰ τῶν ἐν Πίνακι δύω λογαρίθμων (τοῦ ἐγγὺς μείζ. καὶ ἐγγὺς ἐλάσ.), πρὸς τὴν Διαφορὰν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, καὶ ἐγγὺς ἐλάσσον⊗, ὅτω ϗ 10, 100, ἢ 1000 πρὸς τὸν ἑυρεθέν πότερον ἀριθμὸν, τυτέστι τὸν τρίτον Ὅρον τῆς ἀναλογίας (ὁ ὁποῖ⊗ εἶναι Μονὰς) πολλαπλασιάζομεν, προσθέτοντες αὐτῷ τοσαῦτα Μηδενικὰ, καθ' ὅσας Μονάδας τὸ χαρακτηριστικὸν τῦ δοθέντ⊗ λογαρίθμυ ὑπερέχει τὸν 3, ὅστις εἶναι τὸ χαρακτηριστικὸν τῦ ἐγγὺς ἐλάσσον⊗ λογαρίθμυ. ὅθεν ἂν μὲν τὸ χαρακτηριστικὸν τῦ δοθέντος λογαρίθμυ εἶναι 4, λαμβάνομεν τὸν 10 ὡς τρίτον Ὅρον τῆς ἀναλογίας. ἂν δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 5, λαμβάνομεν τὸν 1 . ὅταν δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν ὑπάρχη 6, πολλαπλασιάζομεν τότε τὸν τρίτον τῆς ἀναλογίας Ὅρον διὰ τῦ 1 00 ἀριθμῦ. κ. τ.

Καν. δ΄,) Τέλ⊗ δὲ τὸν ἑυρεθέντα πότερον ἀριθμὸν προσθέτομεν εἰς τὸ πλῆθ⊗ ἐκείνυ τῦ ἀριθμῦ, τῦ ὁποίυ λογάριθμ⊗ εἶναι ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων, ϗ τότε ὅτ⊗ ἐστὶν ὁ ζητόμεν⊗ ἀριθμὸς τῦ δοθέντ⊗ λογαρίθμυ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ἐπὶ τῦ ΠΡΟΒΛΗ'ΜΑΤΟΣ.

Ἔστω δοθεὶς ὁ λογάριθμος 4.530632. τῦ ὁποίυ ζητεῖται νὰ ἑυρεθῇ ὁ προσήκων ἀριθμός. ὅθεν

κατὰ τὸν ά. καν.	ὁ ἐγγὺς μείζων λογάριθ.	3.530712
	ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων λογάριθ.	3.530584
	ἡ τύτων Διαφορὰ =	128

κατὰ τὸν β΄.καν.	ὁ δοθεὶς λογάριθ.	4.530632
	ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων.	3.530584
	ἡ τύτων Διαφορὰ =	48

κατὰ

κατὰ δὲ τὸν γ΄. κανόνα ποιῦμεν ταύτην τὴν ἀναλογίαν.

ἡ διαφ. τῦ ἐγγὺς μείζ. ϗ ἐλάσ.	ἡ διαφ. τῦ δοθ. ϗ ἐλάσ.
128	48 $=$ 10 : $\chi = 3$

κατὰ τὸν δ΄. κανόνα προσθέτομεν τῦτον τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν 3 εἰς τὸ πλῆθος τῦ ἀριθμῦ 3393, ὅστις προσήκει εἰς τὴν ἐγγὺς ἐλάσσονα λογάριθμον, ϗ τότε ἔχομεν τὸν ζητύμενον ἀριθμὸν τῦ δοθέντος λογαρίθμυ, δηλαδὴ τὴν 33933.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. ΕΤΕΡΟΝ.

Ἔστω ζητύμενος ἀριθμὸς ὁ προσήκων εἰς τὸν δοθέντα λογάριθμον 6.753473. ὅθεν ζητῦντες κατὰ τὸν πρῶτον κανόνα ὑπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν 3,

εὑρίσκομεν { τὸν ἐγγὺς μείζ. λογάριθ. 3.753496
τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα. 3.753429

ἡ Διαφορὰ $=$ 77.

κατὰ δὲ τὸν β΄. καν. { ὁ δοθεὶς λογάριθ. 6.753473
ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων. 3.753429

ἡ Διαφορὰ $=$ 44.

κατὰ τὸν γ΄, καν. $77 : 44 = 1000 : \chi = 571$.

κατὰ δὲ τὸν δ΄. κανόνα εὑρίσκεται, ὅτι ὁ ζητύμενος ἀριθμὸς τῦ δοθέντος λογαρίθμυ εἶναι 5668571, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῦ ἐγγὺς ἐλάσσονος λογαρίθμυ ὑπάρχει ἐν τῷ Πίνακι $=$ 5668.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ΄.

§. 245. Δοθέντος ἀριθμȣ̃ τινος, νὰ ἐύρωμεν τὴν προσήκοντα αὐτῷ λογάριθμον.

ΠΡΑΚΤΕ΄Α, ἢ ΛΥ΄ΣΙΣ.

Ο῎ταν τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτȣ̃ ὑπάρχη 0, ἢ 1, ἢ 2, ἢ 3. τότε ἐυρίσκομεν τὸν ζητȣ́μενον λογάριθμον ἐκτεθειμένον ἐν τοῖς Πίναξι, καθὼς εἰς τὸ πρῶτον Πρόβλημα (§. 243) ἀνάπαλιν εἴρηται. π. χ.

ὁ 5 ἔχει τὸν λογάριθμον 0.698970.

ὁ 19 . . . . 1.278754.

ὁ 537 . . . . 2.629974.

Ε᾽ὰν ὅμως τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 4, ἢ 5, ἢ 6, ἢ ϗ μεῖζον, γίνεται ἡ λύσις κατὰ τὸ τρίτον Πόρισμα (§. 242) ϗ κατὰ τὸ δεύτερον Πρόβλημα (§. 244) ȣ̓́τως.

Καν. ά.) Διαχωρίζομεν τȣ̀ς χαρακτῆρας τȣ̃ δοθέντος ἀριθμȣ̃ εἰς δύω μέρη ȣ̓́τως, ὥστε ἐν μὲν τῷ ἀριστερῷ μέρει νὰ μένωσιν ὁμȣ̃ τόσοι χαρακτῆρες, ὅσοι ὑπάρχȣσιν ἐν τοῖς Πίναξι, τȣτέστι χαρακτῆρες τέσσαρες. ἐπεὶ ϗ οἱ ἐν τοῖς ῥηθεῖσι Πίναξι περιλαμβανόμενοι Α᾽ριθμοὶ μόνον διὰ τεσσάρων χαρακτήρων ἐμφαίνονται. ὁ δὲ ἐν τοῖς δεξιοῖς ἐγκαταλειπόμενος μένει ἐν τȣ́τῳ φυλαττόμενος.

Καν. β.) Ζητȣ̃μεν ἔπειτα τὸν λογάριθμον τȣ̃ διὰ τῶν ἀνωτέρω διαχωρισθέντων τεσσάρων χαρατήρων ἐμφαινομένȣ ἀριθμȣ̃, ϗ τὸν λογάριθμον τȣ̃ ἐγγὺς μείζονος ἀριθμοῦ, εἴπερ εὑρίσκονται γεγραμμένοι ἐν τοῖς εἰρημένοις Πίναξι, καὶ μετὰ τοῦτο σημειοῦμεν τὴν μεταξὺ τούτων τῶν λογαρίθμων Διαφοράν, τὸν ἐλάσσονα ἐκ τοῦ μείζονος ἀφαιροῦντες.

Καν. γʹ.) Καθιστῶμεν μετὰ ταῦτα μίαν ἀναλογίαν, εἰς τὴν ὁποίαν πρῶτον Ὅρον θέτομεν μίαν Μονάδα ἔχουσαν μεθ' ἑαυτῆς κείμενα τόσα Μηδενικά, ὅσοι πλεῦται χαρακτῆρες ἔμειναν ἀνωτέρω ἐν τῇ διαχωρίσει πρὸς τὰ δεξιά. τουτέστιν ἂν ὁ πρὸς τὰ δεξιὰ ἐγκαταλειφθεὶς ἀριθμὸς εἶναι ἕνας μόνος χαρακτὴρ, μεταχειριζόμεθα τότε πρῶτον Ὅρον τῆς ἀναλογίας τὸν 10. ὅτε δὲ ὁ ἐγκαταλειφθεὶς οὗτος συνίσταται ἐκ δύω χαρακτήρων, λαμβάνομεν πρῶτον Ὅρον τῆς ἀναλογίας τὸν 100. εἰ δὲ συνίσταται ἐκ τριῶν, θέτομεν τὸν 1000 ἀριθμὸν εἰς τὸν πρῶτον τόπον τῆς ἀναλογίας, καὶ οὕτω περαιτέρω. δεύτερον δὲ Ὅρον τῆς ἀναλογίας γράφομεν αὐτὸν τὸν ἐν τῇ διαχωρίσει πρὸς τὰ δεξιὰ ἐγκαταλειφθέντα ἀριθμόν, εἰς δὲ τὸν τρίτον τόπον θέτομεν τὴν μεταξὺ τῶν δύω λογαρίθμων εὑρεθεῖσαν διαφοράν, καὶ οὕτω ζητοῦμεν τὸν τέταρτον Ὅρον.

Καν. δʹ.) Ἀφ' οὗ εὕρωμεν τοῦτον τὸν ζητούμενον τέταρτον Ὅρον, συνάπτομεν αὐτὸν μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἐκ τῶν διασταλέντων τεσσάρων χαρακτήρων συνισταμένου ἀριθμοῦ, καὶ τότε τὸ ἐκ τῆς συνάψεως ἄθροισμα (κειμένου καὶ τοῦ ἀνήκοντος χαρακτηριστικοῦ) εἶναι ὁ ἐν τῷ Προβλήματι ζητούμενος λογάριθμος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ἐπὶ τοῦ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.

Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς 45647, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ λογάριθμος. ὅθεν

κατὰ

κατὰ τὸν ά. Κανόνα διαχωρίζομεν τὺς χαρακτῆρας τῦ δοθέντος ἀριθμῦ ὕτως 4564, 7.
κατὰ δὲ τὸν β΄. Κανόνα ζητῦμεν ἐν τοῖς Πίναξι τὸν λογάριθμον τῦ 4564 διασταλέντος ἀριθμῦ, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, ὅτι εἶναι 659346, εὑρίσκομεν ἔτι καὶ τῦ ἐγγὺς μείζονος ἀριθμῦ τὸν λογάριθμον, ὁ ὁποῖος εἶναι 659441, καὶ ἀφαιρῦντες τὸν ἐλάσσονα ἀπὸ τῦ μείζονος, οἷον 659441, εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ τύτων Διαφορὰ εἶ-
659346

ναι = 95.
κατὰ τὸν γ΄. Κανόνα. ἐπειδὴ ὁ ἐν τῇ διαχωρίσει πρὸς τὰ δεξιὰ ἐγκαταλειφθεὶς ἀριθμὸς τυτέστιν ὁ 7 ὑπάρχει μόνον ἕνας χαρακτὴρ, διὰ τῦτο μεταχειριζόμεθα ἐνταῦθα εἰς τὴν ἀναλογίαν πρῶτον Ὅρον τὸν 10, καὶ καθιστῶμεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν, $10:7=95:\chi=66$.
κατὰ τὸν δ΄. Κανόνα συνάπτομεν τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν 66 μὲ τὸν λογάριθμον τῦ ἀνωτέρω ἐν τοῖς ἀριστεροῖς διασταλέντος Ἀριθμῦ, τυτέστι μὲ τὸν 659346 λογάριθμον. οἷον 659346
66

καὶ εἰς τῦτο τὸ ἐκ τῆς συνάψεως κε- 659412
φάλαιον προσθέσαντες τὸ προσῆκον χαρακτηριστικὸν 4, ἀποκτῶμεν τῦ δοθέντος ἀριθμῦ 45647 τὸν ζητύμενον λογάριθμον 4.659412.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΤΕΡΟΝ.

Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς 7853646, τῦ ὁποίυ πρόκειται εἰς εὕρεσιν ὁ ἀνήκων λογάριθμος.

ὅθεν κατὰ τὸν α΄. Κανόνα διαχωρίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν οὕτως 7853, 646.
κατὰ δὲ τὸν β΄. Κανόνα εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ μὲν λογάριθμος τοῦ 7853 διασταλέντος ἀριθμοῦ εἶναι 895036.
ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ ἐγγὺς μείζονος ἀριθμοῦ εἶναι 895091.
ἡ δὲ τούτων Διαφορὰ = 55,
κατὰ τὸν γ΄. Κανόνα. ἐπειδὴ ὁ ἐν τῇ διαχωρήσει πρὸς τὰ δεξιὰ ἐγκαταλειφθεὶς ἀριθμὸς, τουτέστιν ὁ 646 συνίσταται ἐκ τριῶν χαρακτήρων, διὰ τοῦτο ἐν τῷ πρώτῳ τόπῳ τῆς ἀναλογίας θέτομεν τὸν ἀριθμὸν 1000, ὅθεν γίνεται ἀναλογία 1000 : 646 = 55 : χ = 35.
καὶ πλέον κατὰ τὸν δ΄. Κανόνα συνάψαντες τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν 35 μετὰ τοῦ λογαρίθμου 895036, πορίζόμεθα τὸν ζητούμενον λογάριθμον· οἷον 6.895071.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ δ΄.

§. 246. Νὰ εὕρωμεν δεκαδικὰ Κλάσματα, ὄντα προστηρτημένα εἰς ἕνα ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος δεδομένος ὢν, δὲν ὑπάρχει ἐν τοῖς Πίναξι.

ΠΡΑΚΤΕ΄Α.

Ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 0, ἢ 1, ἢ 2, ζητοῦμεν τὸν διδόμενον, ἢ τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα λογάριθμον ὑπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν 3, τουτέστιν, ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν ἐκ τεσσάρων χαρακτήρων, καὶ ἐκ τούτων τῶν τεσσάρων προσηκόντων χαρακτήρων, ἂν τὸ δεδομένον χαρακτηριστικὸν

εἶναι

εἶναι $=0$, ὁ πρῶτος χαρακτὴρ σημαίνει ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν, οἱ δὲ ἀκόλουθοι τρεῖς χαρακτῆρές εἰσιν Δεκαδικὰ Κλάσματα. ἐὰν δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι $=1$, ἔσονται τότε οἱ μὲν δύω πρῶτοι χαρακτῆρες σημαντικοὶ ὁλοσχερῆς ἀριθμῦ, οἱ δὲ ἀκόλυθοι δύω ἔσονται Δεκαδικὰ Κλάσματα. ὅταν δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι $=2$, τότε οἱ μὲν τρεῖς πρῶτοι χαρακτῆρές εἰσιν ἀκέραιοι, ὁ δὲ ἑπόμενος τέταρτος ὑπάρχει Κλάσμα Δεκαδικόν. π. χ.

εἰς τὸν λογάριθ.	0.871281	προσήκει ὁ	7.435
εἰς	1.538448	. . . .	34. 55
εἰς	2.790567	. . . .	617. 4

ἂν ὅμως τὸ δεδομένον χαρακτηριστικὸν τυγχάνη $=3$, ἢ 4, ἢ καὶ μεῖζον. ζητῦμεν τὰ Δεκαδικὰ Κλάσματα κατὰ τὴν ἐν τῷ Προβλήματι (§. 244) ἐκτεθεῖσαν ἀναλογίαν, ἐν ᾧ διὰ πρῶτον καὶ δεύτερον Ὅρον τῆς ἀναλογίας λαμβάνομεν τὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων, τρίτον δὲ Ὅρον θέτομεν μίαν Μονάδα μὲ τόσα Μηδενικὰ, ὅσα Δεκαδικὰ ζητῦνται. π. χ.

Δίδεται ὁ λογάριθμος 3.525783, εἰς τὸν ὁποῖον προσήκει ὁ 3355 ἀριθμός. καὶ ζητῦνται δύω Δεκαδικὰ Κλάσματα.

Καν. ά.) Ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων λογάριθμος ὑπάρχει 525693, ἡ δὲ Διαφορὰ μεταξὺ τύτυ καὶ τῦ δοθέντος λογαρίθμυ εἶναι $=90$.

Καν. β΄,) Ἡ ἐν Πίνακι Διαφορὰ εἶναι $=129$. ὅθεν γίνεται ἀναλογία $129:90=100:\chi=69$. ὁ προσήκων ἄρα ἀριθμὸς εἶναι 3355.69.

ΠΡΟ´-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ε.

§. 247. Νὰ εὕρωμεν τὸν ἀνήκοντα λογάριθμον ἑνὸς δοθέντος μικτȣ̃ ἀριθμȣ̃, τȣτέστιν ἀριθμȣ̃ ὁλοσχερȣ̃ς μετὰ Δεκαδικῶν.

ΛΥ΄ΣΙΣ.

Θεωρȣ̃μεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ὡς ἓν ὅλον, καὶ κατὰ τὰ ἐν τῷ τρίτῳ (§. 245.) Προβλήματι πραγματευθέντα ζητȣ̃μεν τὸν προσήκοντα αὐτῷ λογάριθμον, καὶ ἀφ' ȣ̃ εὕρωμεν αὐτὸν, θέτομεν καὶ τὸ ἁρμόζων χαρακτηριστικὸν, καὶ ȣ̃τως ἔχομεν τὸ ζητȣ́μενον.

ΠΡΟ΄ΒΛΗΜΑ ς΄.

§. 248. Νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμὸν τινος Κλάσματος.

ΛΥ΄ΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕ΄Α.

Ἐπειδὴ κάθε Κλάσμα εἶναι μία διαίρεσις, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ μὲν ἀριθμητὴς εἶναι διαιρȣ́μενος, ὁ δὲ Παρονομαστὴς διαιρέτης, εἰς δὲ τὴν διαίρεσιν οἱ λογάριθμοι ἀφαιρȣ̃νται (§. 214)· ἄρα ἀφαιρȣ̃ντες τὸν λογάριθμον τȣ̃ Παρονομαστȣ̃ ἀπὸ τὸν λογάριθμον τȣ̃ ἀριθμητȣ̃, κτώμεθα τὴν τȣ́των Διαφορὰν, ἥτις εἶναι ὁ λογάριθμος τȣ̃ Κλάσματος. πρέπει ὅμως νὰ ἔχῃ προκείμενον τὸ ἀποφατικὸν Σημεῖον. π. χ. πορίζομεθα τὸν λογάριθμον τȣ̃ Κλάσματος $\frac{3}{8}$, ἂν ἀφέλωμεν τὸν λογάριθμον τȣ̃ ἀριθμȣ̃ $8 = 0.903090$ ἀπὸ τὸν λογάριθ. τȣ̃ ἀριθμȣ̃ $3 = 0.477121$. ὁ ὁποῖος ἔσται $= -0.574031$.

ΠΟ΄-

ΠΟΡΙΣΜΑ α΄.

§. 249. Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μόνον Μονὰς, τοῦ ὁποίου λογάριθμος εἶναι ἁπλῶς Μηδενικὰ, τότε εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ Παρονομαστοῦ προστίθεται μόνον τὸ Σύμβολον −, π. χ. ὁ λογάριθμος τοῦ $\frac{1}{12}$ εἶναι −1.079181. ὅθεν καὶ ὁ ἀριθμὸς, εἰς τὸν ὁποῖον προτείνει λογάριθμος ἀποφατικὸς, ἐκθέτεται ὡς Παρονομαστὴς, ἐν ᾧ ὁ ἀριθμητὴς ἔσται Μονὰς π. χ. εἰς τὸν λογάριθμον −1.875061 προτείνει $\frac{1}{75}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ β΄.

§. 250. Ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι Μικτὸς, ἀνάγομεν αὐτὸν εἰς Κλάσμα, καὶ ἀφαιροῦμεν τότε τὸν λογάριθμον τοῦ Παρονομαστοῦ ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ ἡ Διαφορὰ ἔσται ὁ λογάριθμος τοῦ δοθέντος Κλάσματος. π. χ. $8\frac{5}{6} = \frac{53}{6}$ ἔχει λογάριθμον (1.724276 − 0.778151) = 0.946125.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ζ΄.

§. 251. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν Ποσὰ, νὰ διαιρῶμεν, νὰ ὑψώνωμεν εἰς δυνάμεις, νὰ ἐξάγωμεν ῥίζας διὰ τῶν λογαρίθμων.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἐπειδὴ οἱ λογάριθμοι εἶσιν Ἐκθέται, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ παρατηρῶμεν καὶ νὰ διατηρῶμεν τοὺς Κανόνας τῶν Ἐκθετῶν (§. 44). ἐπὶ μὲν πολλαπλασιάσεως οὗτοι συνάπτονται, ἐπὶ δὲ διαιρέσεως ἀφαιροῦνται, ἐπὶ δὲ ὑψώσεως εἰς δυνάμεις πολλαπλασιάζονται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῆς ζητουμένης Δυνάμεως, ἐπὶ δὲ ἐξαγωγῆς ῥιζῶν διαιροῦνται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῆς ζητουμένης ῥίζης.

α΄.)

3

3.237543

ὁ δὲ ἀνήκων Κύβος ὑπάρχει 1728.

δ'.) Ἐξάγομεν τὴν Κυβικὴν ῥίζαν ἐκ τοῦ 2744

λογαρ. τοῦ 2744 = 3.438384.

διαιρεῖται μὲ 3

1.146128

ἡ δὲ τούτῳ προσήκουσα ῥίζα εἶναι 14

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 252. Τὰ δὲ λοιπὰ περὶ τῶν λογαρίθμων θέλουσι παρατεθῆ εἰς τὸ περὶ Τριγωνομετρίας.

ΤΕ'ΛΟΣ.

α.) Πολλαπλασιάζομεν 324 μὲ 26

λογάριθ. τῦ 324 = 2.510545

+ λογάριθμον 26 = 1.414973

3.925518

τὸ δὲ ἀνῆκον Γινόμενον εἶναι 8424

β΄.) Διαιρῦμεν 8424 μὲ 26

λογάριθ. τῦ 8424 = 3.925518

— λογάριθ. τῦ 26 = 1.414973

2.510545

τὸ δὲ προσῆκον Πηλίκον εἶναι 324

γ΄) Ζητεῖται ἡ τρίτη δύναμις τῦ 12

λογάριθ. τῦ 12 = 1.079181

Τῶν ἀναγκαιοτέρων παροραμάτων διόρθωσις

σελίδ.	στιχ.	ἀντὶ	ἀνάγνωθι
4	23	ἀναγκαῖαν	ἀναγκαίαν
6	13	εὐθεῖαν	εὐθεῖαν
7	10	μαμβανομένοις	λαμβανομένοις
49	1	τ᾽ λει	τέλει
57	1	ἐναναπολείπεται	ἐναπολείπεται
61	14	ὕστρματος	ὑψώματος
62	1	τ	τοῦ
65	6	μικρότερον	μικρότερον
—	11	$\frac{1\,4}{}$	$\frac{1\,4}{113\,.\,12}$
66	7	Διαίρεσιν	Διαίρεσιν
70	12	Παρόματος	Παρωνομαστοῦ
72	2	ὅπλως	ἁπλῶς
75	10	πολλαπλασιασθῇ	πολλαπλασιασθῇ
76	19	Κλάσματος	Κλάσματος
80	16	ἕξει	ἕξεις
84	18	δείξεις — πολλαπλασιάζομεν	δείξεις — πολλαπλασιάζομεν
85	11	$\frac{45 \text{ καὶ } 70 \text{ καὶ } 84}{205}$	$\frac{45 \text{ καὶ } 70 \text{ καὶ } 84}{105}$
—	25	εἰ	εἰς
88	1	εἰς κοινὸν Παρονομαστήν	εἰς ἕνα κοινὸν Παρονομαστήν
89	9	μεταποιοῦμεν	μεταποιοῦμεν
92	3	πάντα	πάντα
—	15	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
94	22	πολλαπλασιασθὲν	πολλαπλασιασθὲν
98	13	Μηδενικά — φανερὸν	Μηδενικὰ — φανερόν
—	19	μᾶλον	μᾶλλον
101	15	μέδοδον	μέθοδον
103	20	Δινομένη	Γινομένη
105	13	ὅλλον	ὅλον
—	20	Δεδαδικῶν	Δεκαδικῶν
107	14	συνεκλίζεται	συνεχίζεται
110	7	πρώτων	πρώτων
111	4	Διμελῆς	Διμελὴς
112	24	ἐξ ὁποιασδήποτουν	καὶ ὁποιασδήποτουν
113	21	ἐμφαίνεται	ἐμφαίνεται.
120	9	γίνεκαι	γίνεται
121	15	ὀβολοὺς	ὀβολοὺς
132	20	12 ααχχ	21 ααχχ
138	26	ἕν	ἕνα
144	4	καθ᾽ ἑαυτὴν	καθ᾽ ἑαυτὸ
190	17	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[2]{2}$
194	4	Πηδὸν	Σημεῖον