

ΣΤΝΟΨΙΣ

ΤΩΝ

ΚΩΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΩΝ.

Σ Τ Ν Ο Ψ Ι Σ

ΤΩΝ

Κ Ω Ν Ι Κ Ω Ν

Τ Ο Μ Ω Ν

ΓΟΤΙΑΩΝΟΣ ΤΟΥ ΓΡΑΝΔΗ.

Μετὰ

πλευσιωτάτων Ὑποσημειώσεων

καὶ Προσθηκῶν

ὈΚΤΑΤΙΑΝΟΥ ΤΟΥ ΚΑΜΕΤΙΟΥ

Μεταφρασθεὶς ἐκ τῆς Λατινίδος εἰς τὴν καθ'
ἡμῶν ἀπαιτέσαν διάλεκτον

ΤΗΣ Σ. Α. Σ. ΚΕΦΑΛ. ΤΟΥ Ι. Φ. Σ.

ὃς ἤε μετῆνικται εἰς τὴν Ἑλληνικὴν

ταρά

ἸΩΝΑ ἸΕΡΟΜ: ΣΠΑΡΜΙΩΤΟΥ.

Δὺς Πρῶτον τόποις ἐκδοθήσεται. Ἐπεὶ οὐκ οὐδὲν ἢ διορθώσεται

ΑΝΘΙΜΟΥ ΓΑΖΗ

Ἀρχιμδ. τῷ Μηλιώτῃ.

Ἐπειδὴ δὲ οὐλομένην ἢ οὐλομένην ἔλαβον, ἃς τὰ
ἐνδεῆματα ἐν τῇ ἐμπειρίᾳ καταγράφεται.

Ἐν Βιέννῃ τῆς Αὐστρίας.

Τόποις Θεολογικῆς Σχολῆς Ἐκταίμεθα

α ω β.

ΠΑΙΣΙΝ Ἑλληνων

τοῖς φιλοτίμοις Συνδρομηταῖς τῷ Παρόντος Βιβλίου,
ὕγιαίνουσιν καὶ εὖ πράττειν.

Οὐδέποτε ὁ ἥλιος ἐξίσταται ἑαυτοῦ,
Ἑλληνογενεῖς Φιλότιμοι Συνδρομηταὶ τῷ
παρόντος ἀναγχαῖρας κοινωφελὲς Βιβλίου:
Οὐδέποτε, λέγω, ἐξίσταται τῆς Φυσικῆς
αὐτῷ πυρώδους τε καὶ Φωσφόρου ἑσίας, σκό-
της, ἢ νυκτὸς πρόξενος γενόμενος, διὰ
τῆς αὐτῷ παρυσίας, εἰ καὶ πυκνότητου
νέφος ὑπέρχεται, κατακαλύπτου καὶ πε-
ριβάλλον αὐτὸν, ἀλλ' ἐυθέως,

Λίμνην λιπὼν περικαλῆα, καὶ ὠκεανοῖο λαλόμενος.
εἰς τὸν ὀρίζοντα ἀνερχόμενος, κρυνη-
δὸν τὰς ἀκτῖνας ἐκπέμπει, καταλάμ-
πων ἅπαντα τὰ ἐν Οὐρανῷ καὶ ἐν Γῇ, τῷ

καὶ ἡμᾶς ἡμισφαίριον, καὶ τοι οἶον σκυ-
 θρωπὸς καὶ λύπη κατεχόμενος φαίνεται,
 διὰ τὸ ἐπιπροσθεῖν αὐτῷ νέφος: Οὐδὲ ὁ
 Μαργαρίτης, ἐν βορβόρῳ κατακείμενος,
 ἀποβάλλει τὴν οἰκείαν αὐτοῦ ἀσραπι-
 φόρον λαμπρότητα, καὶ μαργαροειδῆ
 σιλπνότητα: ἀλλ' ἐν ᾧ, ἐκᾶνος μὲν Ἥ-
 λιος μένει, ἕτος δὲ Μαργαρίτης, ἐπι-
 δείκνυνται τὴν ἑαυτῶν φυσικὴν δύναμιν,
 ὃ μὲν τὴν φύσει πυρῶδη Φωταυγίαν, ὃ
 δὲ τὴν ἀσραπόμορφον σιλπνότητα· καὶ ὁ
 μὲν, ἡλιοειδὴς, ὃ δὲ, μαργαροειδὴς τὰς
 ὀφει: ἀπεργάζονται.

Δι' ὃ γὰρ ἕκαστον τοιῦτον, ἐκεῖνο μᾶλλον τοιῦτον.

Καὶ ὑμεῖς δῆτα Φιλότιμοι Παῖδες
 Ἐλλήνων, ἐκ ἀπώκιοδε τῆς τοιαύτης Ἥ-
 λιώδους καὶ Μαργαροειδὸς εἰκόνης: Καὶ γὰρ
 εἰ καὶ ὑπὸ τῆς τυρανικῆς Ζεύγλης, ἐν
 χρόνοις τοσούτοις, κατατρώχεσθε, φό-

ροις ἀφορήτοις καὶ πυκνοῖς, καὶ ποικίλαις
 ἄλλαις νιφάσι χιονώδεσι, καὶ σμήνεσιν ἀ-
 δικίας, οἷον εἰ νεφέλη πυκνοτάτη καὶ συνε-
 χεῖ, μηδ' ὅλως συγχωρῶμενοι ἀνακύψαι,
 ἢ ἀναπνεῦσαι, εἰς ἑαυτὸς τε ἐλθεῖν καὶ
 ἀντωπῆσαι εἰς τὴν λαμπρότητα τῶν
 Προγόνων (ἐπεὶ τοι τὸ νέφος μᾶλλον καὶ
 μᾶλλον πυκνῆται, μηδὲν ἀραιούμενον, μη-
 δὲ ἐκ διαλειμμάτων ἐπερχόμενον)· καί
 τοι λέγω, ὁ βόρβορος τῶν τριβαρβάρων
 ἡθῶν καὶ ἐθῶν τῶν καταδυναστευόντων,
 ἰλύος δίκην ὑπεγχαῖται τοῖς ἐκατέρω-
 θεν ἐυγενέσιν Ὑμῶν καὶ Φωσφόροις ἡθε-
 σιν, ὃ δύνатаι μὲν τοι καταζοφῶσαι ταῦ-
 τα, καὶ καταχῶσαι τελείως· Οὐ γάρ,

Οὐ μὴ κατιχύσῃ ποτὲ κακία Σοφίας.

δύνатаι Φωτὸς σκότος, κατακρατῆ-
 σαι, ἔδὲ ὁμαθίῃ παιδείας, ἔδ' ἐυγενεί-
 ας δυσγένεια, ἔδὲ κακὸν, καλῶ, ἔδ' αὖ

VIII

εἶτι κ' γεννηται: ἀλλ' αἴ το καλὸν ὑπο-
 δείκνυσι τὴν ἰδίαν καλῶνῃν, κ' τὸ εὐγε-
 νές, τὴν εὐγένειαν. Καὶ γὰρ,

Δεινὸς χαρακτὴρ καπσίσημος ἐν βροτοῖς
 . . . εὐθλῶν γενέσθαι

ὅπως ποτ' αὖ ἔχη καταστάσεως τῆς
 περὶ τὰ ἔξω, ταλαιπωρίας λέγω, καὶ
 κακῆχίας τῶν θλίψεων τῆς ἐπαράτου
 αἰχμαλωσίας, ἥκιστα πέφυκεν ἀμαυρῆ-
 σθαι ὅλως, ἔδὲ τὸ ἐμφυτον μεταβαλεῖν,
 κ' τοῖς ἀγενέσι κ' τριβαρβάροις συγχώ-
 νυθαι ἤθεσιν: ἐπεὶ,

Ὁ μὲν πονηρῶς, ἔδὲν ἄλλο πλὴν κακὸς,
 Ὁ δ' εὐθλός, αἴ το εὐθλός, ἔδὲ συμφορᾶς ὑπο-
 φύσιν διέφραξ' ἀλλὰ χρηστὸς ἔς' αἴ.

Δι' ὃ δὴ, φημὶ, κ' ποικίλοις πάντο-
 θεν συνεχόμενοι δεινοῖς, παρεπιδείκνυ-
 σθε τὰς Φιλομούσας ἀκτῖνας τῆς Ἡλιο-
 εἰδῆς τῶν Προγόνων λαμπρότητος, καὶ
 τὴν Μαργαροειδῇ μαρμαρυγῇν κατὰ τὴν

ἡμετέραν δύναμιν , ὑπαινιττόμενοι τὴν φυσικὴν καὶ ἀρχῆσαν πρὸς τὰς Μούσας συγγένειαν , καὶ διὰ τῶν τῶν μικρῶν καὶ ἀμυδρῶν γραμμῶν καὶ ἀκτίνων , ὑπεμφαίνοντες , ὅτι ἀναφανήσεται ὁ νοερός ἥλιος ἐν τῷ σερεώματι τῆς Παιδείας , καὶ ὁ λαμπρός Μαργαρίτης , ἐν τῇ τραπέζῃ τῶν πολιτίμων ἰδεῶν τῶν Πιερίδων , τῇ βορβόρῃ ἐκκαθαρθέντος , καὶ τῇ νέφει , διαλυθέντος εἰς αἰθήραν , θείῃ Βορέῃ ἐπιπνεύσαντος , καὶ ἀνακτήσεσθε τὴν τῶν Προγόνων λαμπρότητα , καὶ τιμήσετε τέ , τις , καὶ τιμηθήσεσθε πανταχῇ , ὡς Φιλομαθεῖς Ἀπόγονοι ἐκείνων : οἵτινες διακηρύττονται φωστῆρες παγκόσμιοι τῆς Παιδείας , ἐκθειάζόμενοι παρὰ πᾶσι τοῖς ἔθνεσι , καὶ ἐπιγραφόμενοι κοινότατοι Πατέρες τῇ γνωστῇ Φωτός : Ἐπειδὴ ἐξ ἐκείνων , καὶ τὰ λοιπὰ ἔθνη ἐφωτίσθησαν , καὶ

φωτίζονται, καὶ σεμνύνονται εἰς πᾶν εἶδος μαθήσεως.

Πᾶσαι γὰρ τέχναι βροτοῖσιν ἐκ Προμηθεώς.

Λοιπὸν, δικαιοτάτα, προσφωνῶ καὶ προσφέρω τὸ ἀνὰ χεῖρας πόνημα τῶν περιφήμων ἐκείνων Προγόνων, εἰς κοινὸν ὄφελος ἡμῶν τῶν Ἀπογόνων ἐκείνων, πρὸς Ὑμᾶς τῆς τέτων Ἀπογόνους, καὶ φιλοτίμως Συνδρομητὰς τῇ αὐτῇ: Ὅπερ, ὥς σῶμα λαμπρὸν, καὶ ἐξ εὐγενῶν εὐγενές, πρὸ χρόνων μὲν ἐξεδύθη τὴν Πατρικὴν περιβολὴν, καὶ ἐνεδύθη ἀλλοδαποῖς Ἰματίοις, ὑπὸ τῶν τὰ ἡμέτερα προγονικὰ ἐκθραζόντων Εὐρωπαϊῶν ἐθνῶν, (εἰς ὄφελος καὶ καλωπισμὸν ἑαυτῶν) νῦν δὲ ἀπεκδύθη τὴν ἄχρι καίρῃ ἀλλοδαπὴν περιβολὴν ὑπὸ τῇ Πάντ' ἁρίστῃ ἐν' Ἰατροφιλοσόφοις κυρίῃ Σπυρίδονος Ἀσάνη, καὶ ἐνεδύθη αὐτῇ τὴν Πατρικὴν, δι' ἧς ἐξε-

φάνη τὴν πρώτην γεννηθεῖν, ἐκ τῶν τὰ
 πρῶτα παρὰ ταῖς Μύσαις ἐχόντων, καὶ
 γνησίων γόνων τῆς Ἀθηνᾶς: ἐφ' ᾧ, καὶ
 πως καὶ γέγηθεν, εἰς τὸ οἰκεῖον, καὶ Φυ-
 σικὸν κέντρον αὐτῇ μετακομιθεῖν, καὶ τῇ
 λοιπῇ τοῖς οἰκείοις συναυλιζόμενον.

Ἀποδέξαθε λοιπὸν ἄσμενοι τῷτο,
 ἕπερ Ὑμεῖς Συνδρομηταὶ Φιλότιμοι τῆς
 ἐκ τῶν τύπων κοινωφελείας, καὶ Φιλοφρο-
 νήσαθε, ὅση δύναμις, ὥσπερ ἡ Πηνε-
 λώπη τὸν Ὀδυσσεά

... ἀμφὶ δὲ χειρας.

Δειρῇ βάλλ' Ὀδυσῆϊ, κάρη δ' ἔκυσ', ἠδὲ προσήδα.

ὥς κληῖρον πατρῶον, ξενάγοντες,
 ἐπ' ὠφελείᾳ καὶ αὐξήσει πρὸς ἅπαν-
 τας τὰς Ὀμογενεῖς, καὶ αὐτὰς τὰς
 Ὑμετέρας Φιλτάτας, καὶ παραινῦντες πᾶ-
 σι τὴν Φιλοπονίαν τῆς Παιδείας, καὶ πολ-
 λαπλῆν καρποφορίαν ἁπάντων τῶν κα-
 λῶν, καὶ τέττε, καὶ τῶν πρὸ τέττε, καὶ

μετὰ τῆτο : Ἀ' πεκδέχεσθε δὲ καὶ ἄλλα, συνδραμόντες ἡρώϊκῃ φιλοτιμίᾳ, ὡς Ἑρώων Ἀ' πόγονοι, τῆς αὐτῆς μὲν ἰδέας ἐχόμενα (ἄτε Φιλόσοφα, καὶ θεωρίας ἀνδρώδους καὶ γυναικείας), διαφόρου ὅμως ὕλης καὶ ὑποθέσεως, Λογιστικὴν Φημι Γραμμὴν, καὶ Κυκλοειδῆ, ἔτι δὲ καὶ Τριγωνομετρίαν διπλὴν, Θεωρητικὴν, καὶ Πρακτικὴν, μετὰ Πινάκων Λογαριθμικῶν δαψιλεσάτων, περὶ ὧν τὸ παρὸν ἀμοιρῶμεν : Προΐστασθαι Ἀ' δελφοί, καὶ Ὀμογενεῖς, τῆς ὁμογενεῖς καὶ προγονικῆς ἐπιδόσεως τῶν ἐπαινετῶν καὶ ἀρίστων, ὅλη δύναμει, περιποιέμενοι ταύτην λειποθυμῶσαν, ὑπὸ τῆς Τρωικῆς βαρβαρότητος, πρὸς καιρὸν ὅμως, κατὰ τὸν Σαλαμίνιον ἐκῆνον Πρόγονον : ὃς ὅτε ὁ Ἀ' δελφὸς αὐτῆ τρωθεὶς πέπτωκεν ὑπὸ τῆ τριβαρβάρει

Ἴκτορος, προέσθ, καὶ περιεποιήσθ τῷ-
τον εἰς ζῶν,·

Αἴας δ' ἔκ ἀμέλῃσσι κασιγνήταισιν πεσόντας,
Ἀλλὰ θείων περίβη, καὶ οἱ σάκος ἀμφεκάλυψε.

Γόνυ γὰρ κνύμης ἔγγιον, λέγει ἡ
Παροιμία: Διὸ δὴ, ὡς ἀδελφοί, ἐν ἀνάγ-
καις χρήσιμοι γίνεσθε, δι' ἑμᾶς αὐτοὺς,
καὶ τὴν ἑμετέρην λαμπρότητα: ἴν' ἔτω
καὶ νῦν μὲν εὐφημῆσθε, καὶ ἐν ἔτῳ πυ-
κνοτάτῳ νέφει, καὶ βορβορόδει ἡθεὶ τῆς
ἐπαράτης δουλείας, τὸ φυσικὸν φωσφό-
ρον τῆς Ἀθηνᾶς, καὶ τὸ σιλπνὸν τῷ
Μαργαρίτῃ παραδηλῶντες, ἐκπλήττῃτε
τὰ τῶν Εὐρωπαίων ἔθνη, ἅτινα διὰ τὴν
παρ' αὐτοῖς εὐνομίαν, ἐμιμήθησαν τὰς
ἡμετέρας Προγόνους εἰς τὴν αὐξήσιν, τῆς
Ἀθηνᾶς: ἴν' ἀληθέυῃ καὶ εἰς ἡμᾶς, κα-
τάγε τῷτο, τὸ: „Ἡ γὰρ δύναμις μὲν
ἐν ἀθηνείᾳ τελεῖται.“ ὅπερ ὁ Κύ-
ριος εἶπε τῷ Ἀποστόλῳ: εἰς τὸ μετέπειτα

δὲ, μακαρίζηθε, ὑπο' τῶν Ο'ψιγόνων, ὡς
 μὴ ἀμελήσαντες τῇ Φυσικῇ καὶ προγονικῇ
 χαρίσματος, τὴν ξυνομίλιαν λέγω, καὶ
 τῶν Μουσῶν ξυναυλίαν: καὶ ὁ Θεὸς αὐ-
 τὸς (παρ' ᾧ ἔδεδ' ποτήριον ψυχρῇ ἄμι-
 θον), νῦν μὲν ἀμείψεται Ἑμᾶς τῇ τε-
 λείᾳ, καὶ ταχείᾳ ἀπαλλαγῇ τῶν Τυ-
 ραννικῶν κκκῶν, μετὰ δὲ, καὶ τῇ τελείᾳ
 ἀντιδόσει τῶν πρὸ αὐτῷ καλῶν, καὶ λο-
 γικῇ πάσῃ Φύσει ἐφετῶν. γένοιτο!

Τῷ κ. β'. Μηνὶ Διομεβρίῳ ἐν Βυζαντίῳ.

Τῆς Ἑμετέρας φιλοτίμου καὶ φιλογενῆς προθυ-
 μίας ἀδελφὸς ταπεινός, ὁ ἐλάχιστος Ἱερομόναχος καὶ
 Σπαρμιώτης.

ἸΩΝΑΣ.

Οἱ Φιλότιμοι καὶ Φιλοπάτριδες Συνδρομηταὶ τῆς
παράσης Βίβλου.

Σώματα.

Ο' πανιερώτατος Ἀρχιεπίσκοπος Ἐλασσώνος κύριος Ἰωαννίκιος ὁ Βυζάντιος	6
Ο' διοφιλίστατος Ἐπίσκοπος Τρίκκης κύριος Γαβριήλ	6
Ο' διοφιλίστατος Ἐπίσκοπος Σταγῶν κύριος Παΐσιος	4
Ο' διοφιλίστατος Ἐπίσκοπος Ζητειῶν κύριος Ἱερό- διος ὁ ἐκ Κλαιοβῆ	6
Ο' διοφιλίστατος Ἐπίσκοπος Λητζᾶς καὶ Ἀγυράων κύριος Δοσίθεος ὁ ἐκ Σοφάδων	4
Ο' διοφιλίστατος Ἐπίσκοπος Πίττης κύριος Νεόφυ- τος ὁ ἐκ Λιβανίου τῆς Ἐλασσῶνος	8
Ο' διοφιλίστατος καὶ ἱερολογιμώτατος Ἐπίσκοπος Ἀρ- δαμηνῶν κύριος Ἰγνατίος ὁ ἐκ Ἀμπελιανῶν	4
Ο' διοφιλίστατος Ἐπίσκοπος Περιστερᾶς καὶ ἐπίτρο- πος τῆ ἀγίας Λαρίσσης κύριος Παΐσιος	5
Ο' παναιδισιμοσφοδιώτατος Οἰκονομοδιδάσκαλος τῆς Τυρνάβης κύριος Ἰωάννης	10
Ο' πανοσιώτατος Καθηγούμενος τῆς εὐ Σταγῶν ἱε- ράς Μονῆς κύριος Ζαχαρίας	5
Ο' πανοσιώτατος πνευματικὸς κὺρ Γεράσιμος ὁ Σταγμιώτης	5
Ο' πανοσιώτατος πνευματικὸς κὺρ Παρθέσιος Σταγ- μιώτης	5
Ο' πανοσιώτατος πνευματικὸς κὺρ Νεόφυτος Σταγ- μιώτης	5
Ο' πανοσιώτατος ἐν Ἱερομονάχοις κὺρ Διονύσιος Σταγμιώτης	2
Ο' ἱερολογιμώτατος ἐν Ἱερομονάχοις κὺρ Γερμανὸς Σταγμιώτης.	1
Ο' πανοσιολογιμώτατος Πρωτοσύγγελος τῆ ἀγίας Λαρίσσης κὺρ Σεμεὺλ	10

Ο' πανοσιώτατος ἐπίτροπος τῆ Λαρίσσης κύρ Μελέ- τιος ὁ ἐκ Τυρνάβου	5
Ο' πανοσιολογιώτατος Ἀρχιμανδρίτης τῆ παναγίᾳ Τάφει κύρ Γαβριήλ ὁ ἐξ Ἀνδρου, ὁ ἐν τῇ τα- ξειδίῳ τῆς Λαρίσσης	5
Ο' πανοσιώτατος Πρωτοσύγγελος τῆ Σινᾶ κύρ Με- λέτιος, ὁ ἐν τῇ ταξειδίῳ τῆς Λαρίσσης	3
Ο' κίδισιμολογιώτατος Οἰκονόμος τῆς Τζαριτζαί- νης κύρ Κυριακὸς	3
Ο' πανοσιώτατος πνευματικὸς κύρ Γαβριήλ ὁ ἐκ τῆς μονῆς τῶν Καναθῶν, ὁ ἐν Τζαριτζαίνῃ	5
Ο' πανοσιώτατος πνευματικὸς κύρ Μακάριος ἐκ τῆς μονῆς τῶν Καναθῶν, ὁ ἐν Τυρνάβῳ	3
Ο' πανοσιώτατος Καθηγούμενος τῆς ἐν Τζαριτζαίνῃ μονῆς τῆ ἁγίᾳ Ἀθανασίᾳ κύρ Ἰωαννίκιος	5
Ο' πανοσιώτατος πνευματικὸς ὁ ἐκ τῆς μονῆς τῆ ἐν Ὁλύμπῳ ἁγίᾳ Διονυσίᾳ κύρ Ἰωακείμ	5
Ο' πανοσιολογιώτατος ἅγιος Ἀρχιμανδρίτης κύρ Ζα- χαρίας ὁ Πετριώτης	2
Ο' πανοσιολογιώτατος ἐν Ἱερομονάχοις κύρ Ἰωσήφ ὁ ἐξ Ἀναλήψεως	3
Ο' ἱερολογιώτατος Ἱεροδιάκονος τῆ ἁγίᾳ Ἐλκασῶ- νος κύρ Διονύσιος ὁ ἐκ Τζαριτζαίνης	2
Ο' ἱερολογιώτατος ἐν Ἱεροδιακόνοις κύρ Ἰερώνυμος ἐξάδελφος τῆ ἁγίᾳ Πίττει	4
Ο' πανοσιολογιώτατος ἐν Ἱερομονάχοις κύρ Ἱερό- θεὸς Καναθιώτης	1
Ο' ἐν Ἱερομονάχοις Μακάριος Τυρναβίτης ὁ ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ τῆς Τυρνάβου	1
Ο' ἐντιμώτατος κύρ Ἰωάννης Στακτήρη ὁ ἐκ Τζαρι- τζαίνης	1
Ο' χρησιμώτατος κύρ Πανταζῆς Στακτήρη ὁ ἐκ Τζα- ριτζαίνης	2
Ο' εὐγενέστατος καὶ λογιώτατος κύρ Εὐσεβῆτιος Πιπ- τήρη ὁ ἐκ Τζαριτζαίνης	6

Ο' υἱογένεατος κύρ χ. Σταίκος χ. Κυρίτζη ὁ ἐκ Τζα- ριτζαίνης.	6
Ο' χρησιμώτατος κύρ Δημήτριος χ. Αθανασίε ὁ ἐκ Τζαριτζαίνης	6
Ο' χρησιμώτατος κύρ Γεώργιος χ. Αθανασίε ὁ ἐκ Τζαριτζαίνης	6
Ο' ἱεχωώτατος ἱατρός κύρ Ζώης ὁ ἐκ Ζαγορίε	4
Ο' ἱεχωώτατος κύρ Ἰωάννης ἱατρός ἀνεψιός τῷ κύρ Ζωῇ ἱατρῷ	2
Ο' χρησιμολογιώτατος κύρ χ. Θεόδωρος. χ. Φά- ραγγα, ὁ ἐκ Τζαριτζαίνης	2
Ο' χρησιμολογιώτατος κύρ Θεόδωρος Γεωργίε Σκέρ- τη ὁ ἐκ Τζαριτζαίνης	2
Ο' χρησιμολογιώτατος κύρ Δημήτριος Κοτοπόγλη ὁ ἐκ Τυρνάβε	2
Ο' λογιώτατος κύρ Κωνσάνης Πέλιε ἐκ Τζαριτζαίνης	1
Ο' λογιώτατος κύρ Γεώργιος Κόντα Σισκελιώτε	1
Ο' χρησιμώτατος κύρ Κωνσταντίνος χ. Ἰωάννη ὁ ἐκ Λιβραδία τῆς Ἑλασσῶνος	
Ο' τιμιώτατος κύρ Φραγγέλης χ. πατῆρ Ἀδάμ ὁ ἐκ Λιβραδία τῆς Ἑλασσῶνος	3
Ο' αἰδεσιμώτατος πατῆρ κύρ Δημόσ ὁ ἐκ Λαρίσση Ἰοργεύων	1
Ο' λογιώτατος κύρ Γεώργιος πατῆρ Μιχαήλ ὁ ἐκ Θετταλίας	2
Ο' λογιώτατος κύρ Ἀλέξιος Θεόδωρε ὁ ἐκ Ζαχόβε τῶν Γριβενῶν	2
Ο' τιμιώτατος κύρ Μιχαήλ Ἀναστασε Γέναρης ὁ Λαρίσσατος	2
Ο' λογιώτατος κύρ Ἰωάννης πατῆρ Ἀναστασε ἐκ Γριβενῶν	2
Η' ἐκ Τζαριτζαίνης Σχολή δια τῷ πανιδισιμοῦ λογί-	

με & φιλομαδεύατε αὐτῆς ἐπιτρόπῃ ἁγίῃ Οἰ- κονόμῃ κυρίῃ Κυριακῇ	10
Ο' ἑλλογιμώτατος κύρ Κωνσταντῖνος Μιχαήλ ὁ Λαρισσαῖος	5
Η' ἐν Ἀμπελακίοις Σχολῇ	10
Ο' εὐγενέστατος ἀρχ. λογοθέτης κύριος Γεώργιος χ. 'Ιωάννη ὁ ἐξ Ἀγιάς	6
Ο' ἐντιμώτατος κύριος χ. Ἀποστόλης πατὴρ Θεο- κλήτῃ ὁ ἐξ Ἀγιάς	8
Ο' τιμωτάτος κύριος Δημήτριος Ρίζο ὁ ἐκ Θανάτῃ	5
Ο' πανοσιολογιώτατος πνευματικὸς κύρ Ἀμειλί- χιος ὁ ἐκ τῆς ἐν Οὐλύμῳ Μονῆς τῇ ἁγίῃ Διονυσίῃ	2
Ο' ἐντιμώτατος κύρ Ἀλέξιος χ. 'Ιωάννη ὁ ἐξ Ἀγιάς	5
Ο' τιμωτάτος κύρ χ. Κωνσταντῆς πατὴρ Ἀλέξιο ὁ ἐξ Ἀγιάς	5
Ο' τιμωτάτος κύρ Ἀντώνιος Αναγνωστῆς ὁ ἐξ Ἀγιάς	3
Ο' τιμωτάτος κύρ 'Ιωάννης Ζάμπῃ ὁ ἐξ Ἀγιάς	6
Ο' τιμωτάτος κύρ Βελισσαρίου χ. Νικολάου ὁ ἐξ Ἀγιάς	3
Ο' τιμωτάτος κύρ Κωνσταντῆς χ. Παράγῃ ὁ ἐξ Ἀγιάς	1
Ο' τιμωτάτος κύρ Νάσιος χ. Δημητρίῃ ὁ ἐξ Ἀγιάς	1
Ο' τιμωτάτος κύρ Νικόλαος Γηρακῇ	1
Ο' αἰδισιμώτατος κύρ Παναγιώτης ἱερεὺς χ. Δημη- τρίῃ ὁ ἐξ Ἀγιάς	1
Ο' τιμωτάτος κύρ Νάσιος Τζερέτῃ ὁ ἐξ Ἀγιάς	2
Ο' τιμωτάτος κύρ Γεώργιος Οἰκονόμῃ ὁ ἐξ Ἀγιάς	
Ο' αἰδισιμώτατος κύρ Δημήτριος ἱερεὺς Δήμῃ ὁ ἐξ Ἀγιάς	1
Ο' τιμωτάτος κύρ 'Ιωάννης Κωσταβέλα ὁ ἐξ Ἀγιάς	1
Ο' πανοσιώτατος Σχινοφύλαξ κύριος Στέφανος δι- σκιώτης	5

Ο' πανοσιμνησιμώτατος Καθηγούμενος τῷ Μοναστηρίῳ κύριος Παρθένιος	1
Ο' αιδεσιμώτατος πατὴρ κύρ Γεώργιος Κώνης ὁ ἐκ Σοφάδων	4
Ο' αιδεσιμώτατος πατὴρ κύρ Γεωργίου ὁ ἐκ Σοφάδων	1
Ο' αιδεσιμώτατος πατὴρ κύρ Τριαντάφυλλος πατὴρ Ἀθανασίου ὁ ἐκ Σοφάδων	1
Ο' αιδεσιμώτατος πατὴρ κύρ Γεωργίου Σαπυῶν ὁ ἐκ Σοφάδων	1
Ο' ἐντιμώτατος κύρ Γεωρ-Σταμέλης ὁ ἐκ Σοφάδων	3
Ο' ἐν ἰατροῖς ἐξοχώτατος κύριος Παναγιωτάκης Ζωγράφης ὁ ἐκ Κεφαλληνίας	12
Ο' ἐξοχώτατος κύρ Κωνσταντῖνος ἰατρός ἐκ Σοφάδων	4
Ο' τιμώτατος κύρ Γιαννάκης τῷ Γεωργίου ὁ ἐκ Σοφάδων	4
Ο' ἐξοχώτατος ἐν ἰατροῖς κύρ Κωνσταντῖνος Φίτζιος ὁ ἐξ Ἰωαννίνων	1
Ο' τιμώτατος κύρ Γιαννέσιος πατὴρ Χρήστου ὁ ἐκ Κλεινοβῆ	1
Ο' τιμώτατος κύρ Χρήστος Εὐσταθίου ὁ ἐκ Κλεινοβῆ	1
Ο' τιμώτατος κύρ Δημητριάκης Σιμόπουλος ὁ ἐκ Τρίκκης	1
Ο' τιμώτατος κύρ Θεόδωρος πατὴρ Χρήστου ὁ ἐκ Κλεινοβῆ	1
Ο' αιδεσιμολογιώτατος οἰκονόμος τῷ Κλεινοβῆ κύρ Γεώργιος Ἰερώνης	
Ο' σοφολογιώτατος διδάσκαλος Σμύρνης κύρ Χρύ- σανθος Ἱερομόναχος	3
Ο' ἐντιμώτατος κύρ Ἀντώνιος Νικολάου Μπαχου- ρη ὁ ἐκ Σμύρνης	1
Ο' τῷ σεβαστῷ δισπότῃ ἀγίῳ Σμύρνης Γραμματικὸς λογιώτατος κύρ Θεόδωρος	4
Ο' τιμώτατος κύρ Παναγιώτης Παναγιωτόπουλος ὁ ἐκ Σμύρνης	2

Ἐπιγράμματα

εἰς τὰς τρεῖς τῷ Κῶνι τομᾶς. Παραβολήν, Ὑπερ-
βολήν, ἢ Ἐλλειψιν.

Ἰαμβικόν

Ἐλλειψιν ἔχουσι οἱ Πλάνητες τὴν δίνην.
Παραβολὴν δὲ σῶμα ῥιπθὲν ἐκδέει·
Ὑπερβολὴ συνάψιν ἀκτίνων φέρει.
ὦ κλεινὲ Κῶνε, ποῖα τμηθεῖς γνωρίσεις!

ἕτερον εἰς τὸν Κῶνον

Βάσιν κυκλίζων Κῶνος, ὕψος ὀξύνει.
Τομῇ δὲ τριπλῇ νῦν τομῶς νῦν ἐυρύνει.

Ἄλλο εἰς τὴν Βίβλον

Εἰ Σακχαρείος ἡδύνει Κῶνος εἶμα
Ὅου πνεῦμα μάλλον ἢδε Κωνικὴ Βίβλος,
Κωνσταντῖνος Μιχαήλ δ' ἐκ Λαρίτσης.

Εἰς τὰς ἀναγινώσκοντας

Ἑρμελεῖοι

Τλησιπόνου γαίης πολυπαθεῖα λείψανα

Μισῶν

Πρῶτον ἀσφρευντα κλέος, μήσωνα χι-
ζετ' ἔτι.

Μέλπετε δ' ἸΩΝΑΝ πολυῖδμονα, ὃς τοδ'
ὀπάζει

Νόσιμον ἥσι Βίβλοις, ἄσπετον οἷς κα-
μάτοις.

Ἀργύριος παπᾶ Ρίζο.

Ἔτερον πρὸς τὰς αὐτὰς.

Ἰαμβικόν

Θέλων νοῆσαι πενταπλᾶς τομαῖς Κώνε,

Οὐκ ἂν δυνήσῃ τᾶυτα πέντε μὴ φέρων·

Φύσιν, πόνον, κλίσιν τε, καὶ ὁδηγίαν

Πάντως κατατρίψεις δὲ καιρὸν εἰς μάτην.

Ἀνδρόνικος Γεωργίου Θεσσαλονικεύς.

„Παιδεία δὲ τῶν ἐν ἡμῖν μόνον
ἐστὶν ἀθάνατον καὶ θεῖον.

Πλάτ. περὶ Παίδ. ἀγωγ.

Σ Τ Ν Ο Ψ Ι Σ

Τ Ω Ν

Κ Ω Ν Ι Κ Ω Ν

Τ Ο Μ Ω Ν.

Ο Ρ Ο Ι Π Ρ Ω Τ Ο Ι.

Α'. **Ε**ὰν διὰ σημεῖα μένοντος τῷ Α, εὐθεῖα διήκῃ Σχημ. 1.
σα ἢ ΒΑΖ ἐφ' ἑκάτερα προσεκβληθῇ, καὶ περὶ τὴν
περιφέρειαν τῷ κύκλῳ ΒΕΔ, ὅς ἐκ ἔσιν ἐν τῷ αὐτῷ
ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ τὸ σημεῖον Α, φερομένη, εἰς τὸ αὐ-
τὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι,
ἑκατέρα ἢ ἐπιφάνεια ἢ ὑπὸ τῆς εὐθείας ταύτης παρ'
ἑκάτερον τῷ μεμενηκότος σημεῖο Α γραφεῖσα, Κω-
νική καλεῖται ἐπιφάνεια.

Β'. Τὸ δὲ περιεχόμενον τρεῖς ὑπότε τῷ κύκλῳ
ΒΕΔ ἢ τῷ βεδ, καὶ τῆς μεταξὺ τῷ μεμενηκότος ση-
μεῖο Α, καὶ τῆς περιφέρειας τῷ κύκλῳ ΒΕΔ ἢ βεδ,
Κωνικῆς ἐπιφανείας, καλεῖται Κῶνος.

Γ'. Τὸ μεμενηκὸς δὲ σημεῖον Α, Κορυφὴ τῆς τε
Κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ τῷ Κέντρῳ.

Α

δ'. Κύκλος δὲ ὁ ΒΕΔ ἢ βεδ, εἰς ὃν ὁ Κῶνος ἀπο-
 τερματίζεται, βάσις τῷ Κῶνι καλεῖται.

ε'. Η' δ' ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῷ Κῶνι ἐπὶ τὸ κέν-
 τρον τῷ κύκλῳ, ὅεσιν αὐτῷ βάσις, ἀγομένη εὐθεῖα,
 ἄξων καλεῖται τῷ Κῶνι.

ς'. Καὶ οἱ μὲν πρὸς ὀρθὰς ἔχοντες ταῖς βάσεσι
 τὰς ἄξοντας, ὀρθοὶ Κῶνοι καλεῖνται.

ζ'. Οἱ δὲ μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντες ταῖς βάσεσι τὰς
 ἄξοντας, Σκαληνοί.

Ε Π Ο Μ Ε Ν Α.

α'. Δῆλον ἔν ὡς τῶν κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις
 κειμένων Κωνικῶν ἐπιφανειῶν ΒΑΔ, βΑδ ἑκατέρα
 εἰς ἄπειρον αἰξεται, τῆς γραφῆσης εὐθείας εἰς ἄπει-
 ρον ἐφ' ἑκάτερα προσεκβαλλομένης.

β'. Ληφθέντος ἐπὶ τῆς Κωνικῆς ἐπιφανείας σημεῖον
 ὑπινρσέν τῷ Η, ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὸ σημεῖον
 τῆτο ἀγομένη εὐθεῖα, ἐν τῇ Κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ.
 Συμπίπτει γὰρ τῇ ΑΕ εὐθείᾳ, ἣτις τὴν Κωνικὴν
 ἐπιφάνειαν γράφουσα, δι' ἑκαστὸν αὐτῆς ἡκεῖ σημεῖον
 ἐπομένως δὲ καὶ διὰ τῷ Η.

γ'. Ὅθεν καὶ οἰαδὴ τις εὐθεῖα ΑΗ ἀπὸ τῆς τῷ Κῶ-
 νι κορυφῆς Α ἐφ' οἰονδήποτε σημεῖον Η τῆς αὐτοῦ
 ἐπιφανείας ἐπιζευγνυμένη, προσεκβληθεῖσα ἐπὶ τὴν
 τῆς βάσεως περιφέρειαν, ἐπίτι αὐτῆς σημεῖον τὸ
 Ε πεσεῖται.

Σχημ. 2. δ'. Ἐὰν ἐπὶ τῆς Κωνικῆς ἐπιφανείας δύο σημεῖα
 ληφθῇ τὰ Η, Ι, καὶ ἐπὶ ταῦτα τὰ σημεῖα ἐπιζευχ-

Δείσα εὐθεία ἢ Η Ι, μὴ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Α, ἢ εὐθεία αὕτη ἐντὸς πεσεῖται τῷ Κώνῃ. Ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ ἀπὸ τῆς κορυφῆς αἱ εὐθεῖαι ΑΗ, ΑΙ, προσεκβαλλόμεναι, πεσῶνται ἐπὶ τὴν τῷ κύκλῳ περιφέρειαν κατὰγε τὰ Ε, Β (ἐπὶ μ. γ'). καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἢ ΕΒ ἔσαι ἐντὸς τῷ κύκλῳ (2. τῷ Γ' τῶν στοιχείων). τὸ ἄρα ἐπίπεδον τῷ ΕΑΒ τριγώνῳ ἐντὸς ἐστὶ τῷ Κώνῃ· τέμνει γὰρ αὐτὸ τὴν βάσιν. καὶ ἢ Η Ι ἄρα εὐθεία ἐν αὐτῷ ἔσαι τῷ ἐπιπέδῳ (12. τῷ ΙΑ') καὶ δύο σημεῖα τῶν τῷ τριγώνῳ πλευρῶν ἐπιζευγνύσας, ἐντὸς πίπτει τῷ Κώνῃ, πλὴν δύοιν αὐτῆς σημείων τῶν Η, Ι, ἅπερ ἐστὶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ. Προσεκβληθεῖσα δὲ ἐφ' ἐκότερα τὰ πρὸς τὰ Η, Ι, ἐκτὸς πεσεῖται τῆς Κωνικῆς ἐπιφανείας.

ε'. Ἐὰν Κώνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς Α, ἢ τομὴ τριγώνων ἔσαι. Ἐκάστη γὰρ τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΑΒ, ΑΔ, αἵ γε κοινὰι τομαίεσι τῆς τε τοῦ Κώνου ἐπιφανείας καὶ τῶν τεμνόντων ἐπιπέδων ΑΒΕ, ΑΒΔ, συμπίπτει αἰεὶ τῇ κατὰ τῷ κύκλῳ φερομένη εὐθείᾳ ΑΒ, ἣτις τὴν Κωνικὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα διὰ τῶν σημείων Β, Ε, Δ διήκει. ἀλλὰ καὶ ἢ ΕΒ ἢ ΔΒ κοινὴ τομὴ ἐστὶ τῷ τε τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ τῆς βάσεως (3. τῷ ΙΑ'). Τὰ ἄρα ΑΒΕ, ΑΒΔ. τρίγωνα ἔστιν εὐθύγραμμα (ὅρ. 24. τῷ Α'. τῶν στοιχείων).

Σ Χ Ο Λ Ι Α.

α'. Βελομένοις ὥδε πρὸς ταῖς καμπύλαις τομαῖς τῷ Κώνῃ, καὶ περὶ τῶν Τριγωνικῶν πραγματεύεσθαι,

σκεπτέον ὡς τὰ ἀπὸ τῶν τομῶν τρίγωνα διττῶς ἂν ἔχοι ἀπογενναῖσθαι· ἦτοι γὰρ ἐπιπέδοις διὰ τῆ ἄξονος, οἷα τὰ $AB\Delta$, AZE , ἢ ἐπιπέδοις μὴ διὰ τῆ ἄξονος διῆσιν, ἀλλ' ἀπὸ τῆς κορυφῆς A ἐπὶ χορδὰς οἰασθῆποτε τὰς BE , BA ἄνισα τόξα ὑποτείνεσας διηγμένοις. Καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ πτώσει τὰ τρίγωνα πάντα πάντως ἀλλήλοις ἴσα. ἔχει γὰρ βάσεις ἴσας τὰς διαμέτρους $B\Delta$, ZE , καὶ ὕψος τούτων τὸν ἄξονα AG , ὅς τῳ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως, καὶ δὴ καὶ ἀπάσαις ταῖς διὰ τῆ Γ σημείω διήύσαις εὐθεταῖς ἐστὶ κἀκετος (ὁρ. 3 τῆ IA').

Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ πτώσει ἔ πάντα πάντως ἀλλήλοις ἴσα τὰ τρίγωνα. Ἐνταῦθα γὰρ τὰ τρίγωνα $AB\Delta$, ABE ἔχει μὲν ταῖς AB , AE , AA πλευρὰς ἀλλήλαις ἴσας, εἶγε τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἐξισῶται τοῖς ἀπὸ τῆ ἄξονος καὶ τῶν ἀκτίνων τῆ κύκλου. Κἀκετος γὰρ ὢν ὁ ἄξων τῇ κωνικῇ βάσει, κἀκετὸς ἐστὶ καὶ ταῖς ἐν αὐτῇ εὐθεταῖς. GB , GE , GA (ὁρ. 3 τῆ IA'). Ἐστὶν ὁμως ἄνισα διὰ τὰ ἀνίσους ἔχειν τὰς βάσεις BE , BA , αἶγε μετὰ τῶν ἴσων πλευρῶν ἀνίσους πρὸς τῇ κορυφῇ A γωνίας τὰς $B\Delta E$, $BA\Delta$, ἃς ὑποτείνεσσι, συνισῶσι (25 τῆ A'), ὢν καὶ τὰ ὀρθὰ ἢ μίτονα EN , AO ἄνισα ἔσεται (1). Καὶ παραβαλλό-

Σχημ. 1. 1) Τὰ ὀρθὰ ἡμίτονα EN , AO ἄνισα ἔσεται· εἶγε τῶν ὑποση- τὰ τρίγωνα $BA\Delta$, BAE ἐστὶν ἰσοσκελῆ, καὶ αἱ γωνίαι $BA\Delta$ μισῶτων. BAE ἄντοι. Εἰ γὰρ τὰ τρίγωνα ἐν τῳ ἐπιπέδῳ κεί- Πίν: IB . μίνα ἐπινοηθεῖν, καὶ ἀκτῖνι, τῇ AA κύκλος γραφῆν, ὅτος

μενα ἄρα τὰ τρίγωνα $ΑΕΒ$, $ΑΒΔ$ πρὸς τὴν κοινὴν βάσιν $ΑΒ$, ἔσεται ὡς τὰ ἄνισα αὐτῶν ὕψη $ΕΝ$, $ΔΟ$.

β'. Ἐὰν ἄρα ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία $ΒΑΔ$ τῇ διὰ τῆ ἄξονος τριγώνου ἢ ὀρθὴ ἢ ὀξεῖα, αἱ γωνίαι τῶν μὴ διὰ τῆ ἄξονος τριγώνων τοσέτω ἐλάσσουσιν εἶναι, ὅσῳ ἐλάσσουσιν χορδὰς τὰς $ΒΕ$, $ΒΔ$ τύχουσιν ἐπιβεβηκυῖαι (25 τῆ $Α'$). Μέγιστον ἄρα ἅπάντων τὸ διὰ τῆ ἄξονος (2). Τῶν δὲ λοιπῶν ἐκεῖνο μᾶλλον ἐλάσσον, ὃ πλεον τῆ ἄξονος ἀφῆσκηκε, καὶ μᾶλλον ἐλάσσον χορδὴν βάσιν ἔχει.

Ἐὰν δὲ ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία τῇ διὰ τῆ ἄξονος τριγώνου ἀμβλεία ἢ, ἔκ ἔσται τὸ διὰ τῆ ἄξονος τρίγωνον ἅπάντων τὸ μέγιστον, ἀλλ' εὐρεθήσεται ἕτερον, ὅπερ ἐκτὸς τῆ ἄξονος πίπτει, ἐκεῖνον μείζον. Τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς διαμέτρου $ΒΔ$, ἣτις τὴν ἀμβλείαν γωνίαν $ΒΑΔ$ ὑποτείνει, τετράγωνον, μείζον ἔσται

δὴ διὰ τῶν σημείων $Ε$, $Β$ διαλεύσεται· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΔ$ εἰς μείζον τῆς ὑπὸ $ΑΒΕ$, καὶ τὸ $ΒΔ$ ἄρα τόξον μείζον ἔσται τῆ $ΒΕ$ (χόλ. τῆς 23. τῆ $Α'$). Τοιγαρὴν καὶ τὸ $ΔΕΒΔ$, ὅπερ εἰς διπλάσιον τῆ $ΒΔ$, μείζον ἔσται τῆ $ΒΒΕ$, οἷς διπλάσιον τῆ $ΒΕ$. καὶ ἡ χορδὴ ἄρα $ΔΕ$, μείζον ἔσται τῆς χορδῆς $ΕΒ$. Ἀλλὰ τὰ ἡμίτονα ἡγοῦ αἱ κάθετοι $ΕΝ$, $ΔΟ$ εἰσὶν ἡμίσεις τῶν χορδῶν τέτων (2 τῆ $Γ'$). ἄρα ἡ κάθετος $ΔΟ$, μείζον εἰς τῆς $ΕΝ$.

2) Τὰ γὰρ ἡμίτονα, ἀκαταμετρεῖ τὰς πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίας, ὡς εἴρηται ἐν τῇ δεῖξει τῆ ἀνωτέρω σχολῆς, τοσέτω μείζω τυγχάνει, ὅσῳ μείζους εἰσιν αἱ γωνίαι αἱ δὲ γε γωνίαι τοσέτω μείζους, ὅσῳ μείζους αἱ χορδαί, αἷς ὑποτείνονται.

τῶν ἀπὸ τῶν πλευρῶν AB , AD τετραγώνων ὁμοῦ
ληφθέντων (12 τῆ Β').· χορδή τις ἄρα ἑτέρα ἐλάτ-
των τῆς διαμέτρου εὐρεθήσεται ἡ BA (3), ἀφ' ἧς
τὸ τετράγωνον, τοῖς ἀπὸ τῶν πλευρῶν AB , AD ,
ὁμοῦ ληφθεῖσιν ἐξισωθήσεται. Γενήσεται δὲ τέτο
ἐνθα ἂν ἡ ὑπ' αὐτῆς ὑποτεταγμένη γωνία ὀρθὴ ἀπο-
βῇ (48. τῆ Α'). Τὸ τρίγωνον ἄρα BAL , ὃ μὴ διὰ
τῆ ἄξονος, μείζον ἔσαι τῆ διὰ τῆ ἄξονος. Λειψθεῖ-
σης γὰρ ὡς βάσεως τῆς AB εὐθείας, ἡ AL ἔσε-
ται ὕψος τῆς BAL τριγώνου, ἥτις ὡς μὲν ἀπὸ τῆς κο-
ρυφῆς τῆ ὀρθῆς K ὡς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς αὐτοῦ
βάσεως ἡγμένη, ἴση ἐστὶ τῇ AD · ὡς δὲ τὴν ὀρθὴν
γωνίαν DAM ὑποτείνουσα, μείζων τῆς καθέτου DM
(19. τῆ Α'), ἥτις ἐστὶν ὕψος τῆς διὰ τῆ ἄξονος τρι-
γώνου BAD , ἥτοι ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ MAD ὀ-
ξείας, ἐπομένως δὲ καὶ τῆς ὑπὸ DAB ἀμβλείας. Διὰ
δὲ ταῦτα τὸ τρίγωνον BAL , ἔπερ ἡ πρὸς τῇ τοῦ
 K κορυφῇ γωνία ἐστὶν ὀρθή, ὡς ἔχον ὕψος ἀπάν-
των μέγιστον, μείζον ἔσαι οἷαδήποτε ἑτέρου τριγώνου
εἴτε διὰ τῆ ἄξονος, εἴτε καὶ ἐκτὸς τῆ ἄξονος.

Εἰ δὲ γένοιτο ἐκτὸς τῆ ἄξονος τρίγωνον ἕτερον
τὸ BAE , ἔπερ ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς K κειμένη

3) Ἐπεὶ ἡ ὑπὸ BAD γωνία ἐστὶν ἀμβλεία καὶ ἀπα-
σῶν μεγίστη, αἵ τε πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς K γαίαι ἀ-
πομαίνονται κατὰ λόγον, οὐ αἱ χορδαὶ BD , BA , BE ,
ἀλλ' αἱ ἀπὸ τῆς K ἐπὶ ὀρθήν ποτε ἀνελθούσας τὴν ὑπὸ BAD ,
ἥς τινος βάσις ἔσαι ἡ χορδὴ BA διάμετρος ἐλάσσων.

γωνία εἴη ὀξεῖα καὶ ἴση τῇ ὑπὸ ΔAM ἐφεξῆς τῆς $\tau\tilde{\epsilon}$ διὰ τῆ $\tilde{\alpha}\xi\omicron\nu\omicron\varsigma$ τριγώνου $BA\Delta$ ἀμβλείας, τὸ τρίγωνον $\tau\tilde{\epsilon}\tau\omicron$ BAE , ἔσεται ἴσον τῷ διὰ τῆ $\tilde{\alpha}\xi\omicron\nu\omicron\varsigma$ τριγώνῳ $BA\Delta$ (4.). Τηνικαῦτα γὰρ αἱ κάθετοι EN , ΔM , ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, ὅσαι γωνιῶν ἴσων ὀρθὰ ἡμίτονα.

γ'. Εἰδὼν δὲ ὁ Κῶνος σκαληνὸς ἦ, καταχθείσῃς Σχημ. 4.
ἀπὸ τῆς κορυφῆς A ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον τῆς * 5.
καθέτου $A\Xi$, καὶ διαχθέντος ἐπίπεδου τινὸς διά τε τῆ
 $\tilde{\alpha}\xi\omicron\nu\omicron\varsigma$ AF καὶ τῆς καθέτου $A\Xi$, ὅπερ τρίγωνον διὰ
τῆ $\tilde{\alpha}\xi\omicron\nu\omicron\varsigma$ ὀρθὸν τῷ τῆς βάσεως ἐπίπεδῳ τὸ $AB\Delta$
ποιήσει (18. τῆ IA'), δῆλον ὡς πασῶν τῶν ἀπὸ
τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθείσων εὐθειῶν, αἵτι-
νες καὶ πλευραὶ καλῶνται τῆ Κῶνου, μία μὲν ἐστὶ με-
γίστη ἢ πορρωτάτω τῆς καθέτου (ὡς ἡ AB)· μία δὲ
ἐλαχίστη ἢ ἐγγυτάτω τῆς καθέτου (ὡς ἡ AD)· δύο
δὲ μόναι ἴσαι παρ' ἐκάτερον τῆς ἐλαχίστης καὶ τῆς με-
γίστης. αἰεὶ δὲ ἡ ἐγγύιον τῆς μεγίστης, τῆς ἀπώτερου
ἐστὶν μείζων.

Τῶν γὰρ ἀπὸ τῆ σημείου Ξ ἐπὶ τὴν τῆ κύκλου
περιφέρειαν διαχθείσων εὐθειῶν, μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ

4.) Ληροθείσῃς τῆς AD ἢ τῆς αὐτῆς ἴσης AE ὡς ὀλι-
κῆ ἡμίτονου, ἔσεται ἡ μὲν ΔM ἡμίτονου τῆς ὑπὸ ΔAM
γωνίας, ἡ δὲ EN , ἡμίτονου τῆς ἴσης ὑπὸ EN . Ἀλ-
λὰ τὰ ἡμίτονα τῶν ἴσων γωνιῶν, εἰν τὸ ὀλικὸν ἡμίτο-
νου ἢ τὸ αὐτὸ, ἐστὶν ἴσα· ἄρα ἡ κάθετος EN ἐστὶν ἴση
τῇ καθέτῳ ΔM .

διὰ τῷ κέντρῳ ΣB , ἐλαχίστη δὲ ἡ μεταξὺ τῷ σημείῳ Σ καὶ τῆς περιφερείας τῆς κυκλικῆς βάσεως ἡ $\Delta\Sigma$. αἱ δὲ λοιπαὶ ΣZ , ΣE , μείζους ἢ ἐλάσσους ὡς τῆς μεγίστης ἢ τῆς ἐλαχίστης ἔγγιον (7 καὶ 8 τῷ Γ'). Οὕτως καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέγιστα καὶ ἐλάχιστα, μείζω ἢ ἐλάσσω ἀμοιβαδὸν ἔσεται. Δύω δὲ οἰαδήποτε τὰ ἀπὸ δυεῖν εὐθειῶν ΣO , ΣE ἐπίσης τῆς μεγίστης ΣB παρ' ἐκάτερον ἀφισαμένων καὶ διὰ τούτο ἀλλήλαις ἴσων, ἔσεται ἴσα (7 καὶ 8 τῷ Γ'). Ἐνθεν τοι προκείμενῃ ἐκάστῳ τούτων τῷ ἀπὸ τῆς καθέτου ΣA προκύψει μέγιστον μὲν πάντων τὸ ἀπὸ τῆς AB , ἐλάχιστον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AD . Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν AE , AZ , μείζω ἢ ἐλάσσω ὡς τῆς μεγίστης ἔγγιον ἢ ἀπώτερον (47 τῷ Α'). Δύω δὲ τὰ ἀπὸ τῶν AO , AE , αἶγε τῶν περάτων τῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον DB τεταγμένης EHO καθάπτωνται, ἔσεται ἴσα (5.). Δῆλον ἄρα ὡς μεγίστη μὲν ἀπασῶν τῶν τῷ Κῶνου πλευρῶν ἡ AB , ἥτις ἐστὶ πορροτάτω τῆς καθέτου AZ · ἐλαχίστη δὲ ἡ ταύτης ἔγγιτάτω AE . Αἱ δὲ λοιπαὶ μείζους ἢ ἐλάσσους, ὡς τῆς μεγίστης ἔγγιον ἢ ἀπώτερον. ἢ ἴσαι ἀλλήλαις, εἴπερ ἴσον ἐκείνης ἀφίσαν-

5.) Ἐπεὶ γὰρ ἡ τεταγμένη EHO ἐκ ὑποθέσεως δίχα τέμνεται κατὰ τὸ H ὑπὸ τῆς διαμέτρου AB , καὶ πρὸς ὁρθὰς ἄρα τέμνεται (3. τῷ Γ'). αἱ γωνίαι ἄρα OHE , EHE ὁρθαὶ καὶ ἐπομένως ἴσαι· κοινὴ δὲ ἐκατέρῃ τῶν τριγώνων EOH , EBH ἢ HEE . ἄρα καὶ ἡ EO ἴση ἐστὶ τῇ EE (4. τῷ Α'). καὶ $\text{EO}^2 = \text{EE}^2$ · καὶ $\text{EO}^2 + \text{EA}^2 = \text{EE}^2 + \text{EA}^2$. ἥτοι $\text{AO}^2 = \text{AE}^2$ · καὶ ἡ πλευρὰ $\text{AO} = \text{AE}$.

ται παρ' ἐκάτερον, ὡς αἱ ΑΟ, ΑΕ καὶ ὅσαῖν ἄλλαι ἐφ' οἷα σδήποτε τεταγμένης τὰ πέρατα ἀχθήσονται, ἐξ ὧν δὴ καὶ μόνων τριγώνων ἰσοσκελὲς οἶον τὸ ΕΑΟ συνίσταται, τὰ δ' ἐκ τῶν λοιπῶν αἰ σκαληνὰ, εἰμή-τω ξυμβῇ τὴν βάσιν μιᾷ τινι τῶν πλευρῶν ἴσην εἶχειν.

δ'. Εἰν ἐν σκαληνῷ Κώνῳ τριγώνῳ τινος διὰ τῆ ἄ-ξονος ἢ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία ὀρθή ἢ, καὶ τῶν λοι-πῶν ἀπάντων τριγώνων τῶν διὰ τῆ ἄξονος καὶ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίαι, ὀρθαὶ ἔσονται καὶ ἐπομένως ἀλλήλαις ἴσαι. Εἰν γὰρ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΒΔ ἡμικύκλιον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆ διὰ τῆ ἄξονος τριγώνου γραφῇ, τῆ-το δὴ διὰ τῆς κορυφῆς Α διελύσεται, διὰ τὸ εἶναι ὀρθὴν τὴν ὑπὸ τῶν πλευρῶν ἐκεῖ συνισαμένην γω-νίαν (31 τῆ Γ'). Οὐσης δὲ τῆς ΑΓ ἴσης ταῖς ἀκτι-σιν ΓΕ, ΓΖ, καὶ αἱ ΑΕ, ΑΖ ἄρα πλευραὶ ὀρθὴν γωνίαν (31 τῆ Α') ἐκεῖ περιέξουσιν (6).

6.) Εἰν δύο τρίγωνα τὰ ΑΕΒ, ΑΓΒ ἔχη τὰς Σχημ. 2. γωνίας ἐν τῷ Γ καὶ Ε ἴσας· ἔχη δὲ καὶ βάσιν τὴν αὐτὴν τῶν ὑποσ. ἢ ἴσην τὴν ΑΒ, λέγω ὅτι δυνατόν διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Ε κύκλον διελθεῖν. Διὰ τριῶν γὰρ σημείων δο-θέντων τῶν Α, Β, Γ, κύκλος διελύσεται (1. τῆ Γ') εἰγὼ δὲ λέγω ὅτι αὐτὸς ὅτος διελύσεται καὶ διὰ τῆ Ε. Εἰ δὲ μὴ, διελθέτω, εἰ δυνατόν, κατωτέρω τῆ Ε, διὰ τῆ Δ φέρε· καὶ ἀχθείσης τῆς ΑΔ ἔσται δὴ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ ἴση τῇ ΑΓΒ, (41. τῆ Γ'). Ἐστὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ἢ ἐκτὸς ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ ἔσται ἴση τῇ ἐντὸς ὑπὸ ΑΕΒ, ὅπερ ἀντίκειται τῷ α' πορίσμα-τι τῆς 32. τῆ Γ'. τῶν στοιχείων. Οὐκ ἄρα κατωτέρω τῆ Ε

Εἰς δὲ ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία $ΒΑΔ$ ἡ ὀξεῖα
ἢ ἀμβλεία, τὰ λοιπὰ διὰ τῆ ἄξονος τρίγωνα ἀνι-

διελεύσεται ὁ κύκλος, ἢ μὴν ἄλλ' ἔδῃ ἀνωτέρω διὰ τῆ
 Z φέρε. Διελέτω γὰρ διὰ τῆ Z εἰ δυνατόν, καὶ ἀχθείσῃς
τῆς AZ , ἴσαι δὲ ἡ ὑπὸ AZH ἴση τῇ ὑπὸ AGB ἴση τῇ
ὑπὸ AEB , ἥτοι ἡ ἐκτὸς AZB ἴση τῇ ἐντὸς AEB ἐναν-
τίου τῆ αὐτῆς πορίσματος. Ὁ κύκλος ἄρα ὁ διὰ τῶν ση-
μείων $A, B, Γ$ διελεύσεται δὴ περὶ καὶ διὰ τῆ B καὶ ἐν
τρίγωνον δύο, κτ.

Σχημ. 3. 7. Εἰς δὲ ἐν δυσὶ τρίγωνοις $ΣΑΖ$, $ΣΕΖ$ μὴ ἴσι
πᾶν ὅπως. μὲν ὀρθογωνίους ἐν τοῖς A, E ἔχουσι δὲ βάσει μὲν τὴν
αὐτὴν $ΣΖ$, τὰς δὲ λοιπὰς πλευρὰς ἀνίσους, τὸ κεφάλαιον
τῶν ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆ ἐτέρου τετραγώνων, ἴσαν ἢ τῷ
κεφαλαίῳ τῶν ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆ ἐτέρου, ἥτοι εἰάν ἡ
 $ΣΑ^2 + ΑΖ^2 = ΣΕ^2 + ΕΖ^2$, λέγω ὅτι διὰ τῶν σημείων $Σ$,
 Z, E, A κύκλος ἐκ αὐτῶν διελεύσεται. Διελέτω γὰρ,
εἰ δυνατόν, καὶ ὑπὸ τῆ κέντρου N ἡχθῶ πρὸς ὀρθὰς τῆ $ΣΖ$
βάσει ἡ NO , ἣτις διχοτομήσει τὴν $ΣΖ$ κατὰ τὸ O (3.
τῆ $Γ'$). ἐπιζεύχῃ δὲ καὶ ἡ $ΑΕ$, ἣτις τμηθήσεται ὑπὸ
τῆς διαμέτρου $HONM$ κατὰ τὸ K . καὶ ἀχθείσῃ τῶν $ΑΟ$,
 $ΟΕ$ ἴσαι κατὰ τὸ ἐπόμενον εἰς ὁλόγιον $ΑΣ^2 + ΑΖ^2 =$
 $2ΑΟ^2 + 2ΖΟ^2$. καὶ $ΣΕ^2 + ΕΖ^2 = 2ΕΟ^2 + 2ΖΟ^2$. καὶ ἐπεὶ
ἐξ ὑποθέσεως $ΑΣ^2 + ΑΖ^2 = ΣΕ^2 + ΕΖ^2$, ἴσεται δὲ καὶ
 $2ΑΟ^2 + 2ΖΟ^2 = 2ΕΟ^2 + 2ΖΟ^2$. καὶ τῆ κοινῇ ἐκτέρωθεν
ἀρδύντος, $2ΑΟ^2 = 2ΕΟ^2$, καὶ $ΑΟ = ΕΟ$. αἱ ἄρα $ΑΟ$,
 $ΕΟ$ ἐπίσης πρὸς τὴν διάμετρον $HONM$ μεύουσι (7. τῆ $Γ'$)
καὶ ἐπομένως ἡ ὑπὸ $ΑΚΟ =$ τῇ ὑπὸ $ΕΚΟ$. κοινὴ δὲ ἡ $ΚΟ$
ἐκατέρω τῶν τριγώνων $ΑΟΚ$, $ΕΟΚ$. ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ
 $ΑΚΟ =$ τῇ ὑπὸ $ΕΚΟ$ (4. τῆ $Α'$). ὀρθὴ ἄρα ἐκατέρω παρὰ λ-
ληλοι ἄρα αἱ $ΑΕ$, $ΣΖ$ (19. τῆ $Α'$). καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΕΣ =$
τῇ ὑπὸ $ΕΣΖ$. ἄρα ἡ $ΕΖ =$ τῇ $ΑΣ$ (21. τῆ $Γ'$), καὶ $ΕΖ^2 =$
 $ΑΣ^2$. Ἐπεὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως $ΑΣ^2 + ΑΖ^2 = ΕΖ^2 + ΕΣ^2$, ἴ-

τες ἔξει πρὸς τῇ κορυφῇ A τὰς γωνίας (9), πλὴν εἰμύγ' αἱ αὐτῶν βάσεις ἐπίσης ἐκατέρωθεν πρὸς τὴν διάμετρον BD νεύουσιν (11.).

σεται ἄρα καὶ $AZ = EZ$ καὶ ἡ $AZ = τῇ EZ$. ἄρα ἡ $AZ = τῇ EZ$, καὶ ἡ $AZ = τῇ EZ$ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει. Κύκλος ἄρα διὰ τῶν σημείων Σ, A, E, Z ἡ διελύσεται.

8. Δῆλον δ'ὅτι αἱ γωνίαι $\Sigma AZ, \Sigma EZ$ ἄνιστοι. Εἰ γὰρ ἴσαι εἶεν, κύκλος διὰ τῶν σημείων Σ, A, E, Z διήρχετο κατὰ τὴν δ ὑποσημείωσιν.

9) Φανερόν δὲ ἐκ τούτων ὅτι εἴαν ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία ἢ ὀξεία ἢ ἀμβλεία, τὰ λοιπὰ διὰ τῆ ἀξονος τρίγωνα ἀνίσως ἔξει πρὸς τῇ κορυφῇ τὰς γωνίας. Εἵκοι τὰ τρίγωνα, φέρε, ZAE . ΣAP ἔχοντα τὰς βάσεις $ZE, \Sigma P$ ἴσας, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ τῶν πλευρῶν ZA, AE τετραγώνων, ἴσον τῷ ἄθροισματι τῶν ἀπὸ τῶν $\Sigma A, AP$ (χολ. ε'). ἀνίσως ἔξει τὰς πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίας $ZAE, \Sigma AP$ (σημ. ἀνωτέρω.)

10. Εἴαν αἱ διαμέτροι ZGE, OG ἐπίσης νεύωσι πρὸς τὴν διάμετρον AGB , ὡς εἶναι δηλαδὴ τὰς ὑπὸ ZGA, AG ἡμῶν ἴσας, αἱ OE, ZE εὐθεῖαι, τεταγμέναι ἔσονται ἐπὶ τὴν διάμετρον AB . Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ $ZGA = τῇ$ ὑπὸ $\epsilon Γη$, ἥτε $\epsilon Γ = τῇ ΓZ$, καὶ ἡ $Γη$ κοινὴ ἐκατέρωθεν τῶν τριγώνων $ZΓη, \epsilon Γη$. ἄρα αἱ ὑπὸ $Γη\epsilon, ΓηZ$, ἀλλήλαις ἴσαι (4. τῇ δ'). ὁρῶν ἄρα ἐκάτερα· καὶ ἡ $Z\eta = τῇ \eta\epsilon$. ἡ Ze ἄρα τεταγμένη ἐστὶν ἐπὶ τὴν διάμετρον BA . Διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ OE τεταγμένη ἐπὶ τὴν αὐτὴν BA .

11) $E\epsilon$ ὧν συναγεται ὡς ἐν τοῖς τριγώνοις $ZAE, \epsilon AO$ ἡ ὑπὸ EAZ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ $OA\epsilon$. Ἡ γὰρ AO πλευρὰ τῶν τριγώνων ϵAO ἔστιν ἴση τῇ AE πλευρᾷ τῶν ZAE (χολ. γ') καὶ ἡ AZ πλευρὰ τῶν ZAE , ἴση τῇ ϵA πλευρᾷ

Ε'. Τὰ δὲ κεφάλαια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν πλευρῶν οἰωνδήποτε τριγώνων διὰ τῆ ἄξονος ἔσεται αἰεὶ ἴσα. Ἐν παντὶ γὰρ τριγώνῳ τὰ ἀπὸ δυσὲν πλευρῶν τετράγωνα ὁμῶς ληφθέντα ἐξισῶνται τῷ δις ἀπὸ εὐθείας, τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ μεσαίτατον σημεῖον τῆς βάσεως καταχθείσης τετραγώνῳ, σὺν τῷ δις ἀπὸ τῆς ἡμιβάσεως (12), ὡς δέδεικται ἐν τῇ τῆς ἡμετέρας Γεωμετρίας εἰσαγωγῇ. Ὅθεν τὰ ἀπὸ τῶν AB, AD τετράγωνα ὁμῶς ληφθέντα, ἐξισῶνται τῷ δις ἀπὸ τῆ ἄξονος AG τετραγώνῳ, σὺν τῷ δις ἀπὸ τῆς ἀκτίνος GB. Ω'.

τῆ εὐθ. AO· ἴσι δὲ καὶ ἡ EZ βάσει ἴση τῇ εὐθ. O· ἄρα ἡ ὑπὸ EAZ ἴση τῇ OAE.

Σχημ. 4. 12.) Ἐάν ἀπὸ τῆς κορυφῆς A οἰωνδήποτε τριγώνου τῶν ὑποσ. BAP καταχθεῖσα εὐθεῖα ἡ AG δίχα τέμνῃ τὴν βάσιν BP κατὰ τὸ Γ· ἔσεται $AB^2 + AP^2 = 2ΓΠ^2 + 2AG^2$. Καταχθεῖσα γὰρ ἡ AZ κάθετος, πίπτει μετὰ τῶν σημείων Γ, Π· καὶ ἔσεται δὴ ἡ μὲν ὑπὸ AGB, ἀμβλεία· ἡ δὲ ὑπὸ AGΠ, ὀξεύς. Ὅθεν $AB^2 = AG^2 + BG^2 + 2ΠΓ \times ΓZ$ (12. τῆ B). καὶ $AP^2 = AG^2 + ΓΠ^2 - 2ΠΓ \times ΓZ$ (13. τῆ αὐτῆς). Τοιγαρὺν $AB^2 + AP^2 = AG^2 + BG^2 + 2ΠΓ \times ΓZ + AG^2 + ΓΠ^2 - 2ΠΓ \times ΓZ = 2AG^2 + BG^2 + ΓΠ^2$. Ἐπεὶ δὲ ἐξ ὑποδείσεως $BΓ = ΓΠ$, καὶ ἐπομένως $BΓ^2 = ΓΠ^2$. Καὶ διὰ καὶ $BΓ \times Γ = ΠΓ \times ΓZ$, ἄρα $AB^2 + AP^2 = 2AG^2 + 2BΓ^2$. $BΓ \times ΓZ = 2BΓ \times ΓZ = 2AG^2 + 2BΓ^2 = 2AG^2 + 2ΓΠ^2$, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τὸ αὐτὸ δὴ τῷτο συμβαίνει καὶ εἰάν ἡ κάθετος, AZ μὴ πίπτῃ μετὰ τῶν σημείων Γ, Π· ἢ, ὁπότες ταυτὸν, εἰάν ἡ γωνία BAP τύχῃ ὅσα ἀμβλεία, ὡς τῷ

σαύτως τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΑΖ ὁμῶς ληφθέντα, ἐξισῶται τῷ δις ἀπὸ τῆς αὐτῆς ἄξονος σὺν τῷ δις ἀπὸ τῆς ἀκτίνος ΓΕ ἴσης τῇ ΓΒ. ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΔ ὁμῶς ληφθέντα ἐξισῶται τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΑΖ, ἢ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΠ, ΑΣ ὁμῶς ληφθεῖσι· καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΑΔ ὁμῶς ληφθέντα, ἐξισῶται τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΠ, ΑΣ ὁμῶς ληφθεῖσιν, ἢ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΑΖ. καὶ τὰ ἀπὸ δυεῖν πλευρῶν οἰσδήποτε τριγώνου ὁμῶς ληφθέντα ποσότης ἄρα ἐστὶ σαφερά.

ς'. Τῶν δὲ διὰ τῆς ἄξονος τυττωνί τριγώνων ἐλά- Σχημ. 6.
χισον μέν ἐστιν, ἢ τὸ ἐπίπεδον διὰ τῆς καθέτου ΑΞ καὶ 7.
διήκει καὶ δι' αὐτὸ τῆτο τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ κά-
θετον, ὅσον τὸ ΒΑΔ· μέγιστον δὲ, ἢ περὶ ἡ θάσις ΕΖ
τῇ διαμέτρῳ ΒΔ κάθετος, ὅσον τὸ ΕΑΖ. τῶν δὲ
λοιπῶν μείζω μὲν τὰ τῆς μεγίστης ἑγγιον· ἐλάσσω
δὲ τὰ τῆς ἀπώτερον.

Εἰάν γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΓ εὐθείας τῆς μεταξὺ τῆς
καθέτου καὶ τῆς ἄξονος ὡς ἐπὶ διαμέτρου, κύκλος ὁ
ΓΣΞ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς τῆς Κῶνς βάσεως γραφῇ, ἔ-
σται τόπος ἀπασῶν τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς
Κῶνς Α ἐφ' οἰσδήποτε τριγώνων διὰ τῆς ἄξονος τὰς
βάσεις καταχθισομένων εὐθειῶν. Ἡ γὰρ ΕΓΖ κά-
θετος ἔστα ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΔ, ἄπτεται ἄρα τῆς
κύκλου ΕΓΣ κατὰ τὸ Γ (16 τῆς Γ'). Εἴπει δὲ καὶ τὸ

προσεχοντι δῆλον. Εἰάν ἄρα ἀπὸ τῆς κορυφῆς οἰσδήποτε
ποτε τριγώνου κτ.

ΕΑΖ τρίγωνον ἴσας ἔχει τὰς πλευράς ΑΖ, ΑΕ (οχολ. γ').), ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΓ δίχα τέμνυσσα τὴν ΕΖ βάσιν τῷ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ ταύτην. Ἐπειδὴν δὲ ἑτέρα διάμετρος ἡ ΠΛ φέρε, τέμνη τὸν αὐτὸν κύκλον κατὰ τὸ Σ, καταχθεῖσα ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ Σ ἡ ΑΣ, ἔσεται δὲ καὶ αὕτη κάθετος ἐπὶ τὴν ΠΛ διάμετρον. Ἐπιζευχθεῖσης γὰρ τῆς ΕΣ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετράγωνον ἔσεται ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΣ, ΓΣ ὁμῶς ληφθεῖσιν (47 τῷ Α'). Δι' οὗ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ὅπερ διὰ τὴν αὐτὴν ἐξισθῆται τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΞ, ΕΓ, ἔσεται ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΞ, ΕΣ, ΣΓ ὁμῶς ληφθεῖσιν. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΞ, ΕΣ ἐξισθῆται τῷ ἀπὸ τῆς ΑΣ (ὁρ. 3 τῷ ΙΑ'). τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΣ, ΣΓ ὁμῶς ληφθεῖσιν, διὰ δὲ τῷτο ὁρῶν ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΣΓ (48 τῷ Α'). Ἐπεὶ δὲ τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν τῷ κύκλου ΣΓΞ περιφέρειαν καταγομένων εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΑΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΞ, τῶν δὲ λοιπῶν ΑΣ κτ. αἰεὶ ἡ ἐγγίον τῆς μεγίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστι μείζων (ὡς εἶρηται ἐν τῷ ε'. οχολίῳ περὶ τῶν τῷ Κώνου πλευρῶν)· καὶ τῶν διὰ τῷ ἄξονος ἄρα τριγώνων, ὡς ἴσας ἐχόντων τὰς βάσεις ΕΖ, ΒΔ, ΠΛ, μέγιστον μὲν ἐστὶν, ὃ ὕψος ἡ μεγίστη ΑΓ οἷον τὸ ΕΑΖ, ἐλάχιστον δὲ, ὃ ὕψος ἡ ἐλαχίστη ΑΞ, οἷον τὸ ΒΑΔ, ὅπερ διὰ τῆς καθέτης διήκει. Τῷ δὲ ΠΑΛ (ὃ ὕψος ἡ ΑΣ) τὸ μέγεθος· ἔσται μείζον ἢ ἐλαττω κατὰ τὴν αὐτὴν ἀπὸ τῷ μεγίστη μείζω ἢ ἐλάττω ἀπόστασιν.

ζ'. Ἐν μὲν τῷ ὁρῶν Κώνῳ, ὅπερ ὁ ἄξων ἴσος

τῇ ἀκτίνι τῆς βάσεως, ἢ καὶ μείζων ταύτης, ἦτοι ἐν
 ῥῆ ἢ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία τῷ διὰ τῷ ἄξονος τρι-
 γώνῳ εἴη ἂν ὀρθὴ ἢ ὀξεῖα, τὰ μὴ διὰ τῷ ἄξονος τρι-
 γωνα δέδεικται (χολ. β.) ἐλάσσω αἰεὶ οὐδέποτε
 τῶν διὰ τῷ ἄξονος. Ἐν δὲ τῷ σκαληνῷ, εἴαντε ἀμ-
 βλεια ἢ τῷ διὰ τῷ ἄξονος τριγώνῳ ΒΑΔ, ἢ ΕΑΖ, Σχημ. 8.
 ἢ ΠΑΛ ἢ γωνία, εἴαντε ὀρθὴ, εἴαντε ὀξεῖα, τῶν
 μὴ διὰ τῷ ἄξονος τριγώνων, ἃ μὲν ἔσεται ἐλάσσω
 οὐδέποτε τῶν διὰ τῷ ἄξονος, ἃ δὲ καὶ τῷ μεγίστῳ ἐ-
 κείνων ΕΑΖ μείζω, ἃ δὲ ἐκείνῳ ἴσα.

Ἀχθεῖσα γὰρ τῇ ΕΖ παράλληλος ἡ ΘΟ, τεταγμένη ἔσεται ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κατὰ τὸ Η. ἐπὶ δὲ ταύτην ἀχθέντος ἐπιπέδου τινος διὰ τῆς κορυφῆς Α, τρίγωνον ἀποχηματιωθήσεται τὸ ΘΑΟ, ὅπερ ἔσεται ἰσοσκελές κατὰ τὰ ἐν τῷ γ. χολίῳ ῥηθέντα· καὶ ἡ ΑΗ ἔσεται ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτῆς κάθετος. Ὅθεν λόγος, ὃν ἔχει αὐτὴ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΑΓ ἔσεται ἦτοι ἴσος ἢ μείζων τῷ, ὃν ἔχει ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΘΟ, ἢ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΘΗ (13). τὸ τρίγωνον

13.) Ποιεῖται ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΕΓ. ὅπως ἡ ΑΓ Σχημ. 5. πρὸς τετάρτην ἀνάλογον ζητημένην τὴν ΑΗ. εἴτα αἱ τῶν ὑποσ-
 μιν ΑΓ, ΑΗ κατὰ τὰ Γ, Η περατωμαί, ὅπως ἀλλή-
 λαις προσκεκλίθωσαν, ὥστε συμπεσεῖν κατὰ τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ δὲ τῷ σημείῳ τῆς συμπτώσεως Α ὡς ἀπὸ κορυ-
 φῆς γειγράψω κῶνος ὁ ΑΔΕΒΖ· λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΑΖ ἴσον ἔσται τῷ τριγώνῳ ΘΑΟ. Ἐπεὶ γὰρ εἰς ΑΓ : ΑΗ :: ΘΗ : ΕΓ (ἐκ κατασκευῆς)· ἴσεται δὲ ΑΓΧ : ΓΕ :: ΑΗΧ : ΗΘ (10. τῷ 5.). Ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν τρίγωνον

ἄρα $\Theta\Lambda\omicron$ ἔσεται ἤτοι ἴσον ἢ μείζον τῷ $\epsilon\alpha\zeta$, ὅπερ ἐστὶ μέγιστον ἀπάντων τῶν διὰ τῆ ἀξονος $\Lambda\Gamma$.

Ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν Τριγωνικῶν Τομῶν ἱκανῶς ἂν ἔχοι τὰ εἰρημένα· ἐν τοῖς ἐξῆς δὲ πραγματευτέον περὶ τῶν Κωνικῶν.

$\epsilon\alpha\zeta =$ τῷ $\Lambda\Gamma \times \Gamma\epsilon$ · τὸ δὲ $\Theta\Lambda\omicron =$ τῷ $\Lambda\eta \times \eta\Theta$ εἴγε αἱ βάσεις τῶν τριγώνων $\epsilon\zeta$, $\Theta\omicron$ διπλαστές εἰσι τῶν $\epsilon\Gamma$, $\eta\Theta$ βάσεων τῶν παραλλήλογραμμῶν. Το τρίγωνον ἄρα $\epsilon\alpha\zeta$ ἴσον ἐστὶ τῷ τριγώνῳ $\Theta\Lambda\omicron$.

Εἴτα δὲ εἰάν κέντρον μὲν τῷ Γ , διασημάτι δὲ τῷ $\Lambda\Gamma$ γραφῇ τόξον τὸ $\alpha\Lambda\mu$, καὶ ἐπιζευχθεῖσιν τῶν $\alpha\eta$, $\alpha\Gamma$, συζαθῇ κῶνος ὁ $\alpha\Delta\epsilon\beta\zeta$, ἢ τῇ βάσει κάθετος ἢ $\alpha\epsilon$, λέγω ὅτι θηνικαῦτα τὸ τρίγωνον $\Theta\alpha\omicron$ μείζον ἔσεται τῷ τριγώνῳ $\epsilon\alpha\zeta$. Ἔσεται γὰρ $\alpha\eta^2 = \alpha\Gamma^2 + \Gamma\eta^2 + 2\eta\Gamma \times \Gamma\epsilon$ (11. τῆ B') καὶ $\Lambda\eta^2 = \Lambda\Gamma^2 + \Gamma\eta^2 + 2\eta\Gamma \times \Gamma\epsilon$. Ἐπεὶ δὲ $\alpha\Gamma^2 + \Gamma\eta^2 = \Lambda\Gamma^2 + \Gamma\eta^2$, καὶ $2\eta\Gamma \times \Gamma\epsilon > 2\eta\Gamma \times \Gamma\epsilon$ · ἔσται δὲ καὶ $\alpha\eta^2 > \Lambda\eta^2$, καὶ ἢ $\alpha\eta$ μείζον τῆς $\Lambda\eta$. Τοιγαρὲν ἢ $\alpha\eta$ πρὸς τὴν $\alpha\Gamma$ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $\Lambda\eta$ πρὸς τὴν $\Lambda\Gamma$. Καὶ ἐπεὶ εἰς $\Lambda\eta : \Lambda\Gamma = \epsilon\Gamma : \Theta\eta$ (ἐκ κατασκευῆς), ἢ $\alpha\eta$ ἄρα μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν $\alpha\Gamma$, ἢ περ ἢ $\epsilon\Gamma$ πρὸς τὴν $\Theta\eta$. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν $\alpha\eta$, $\eta\Theta$ μείζον ἐστὶ τῷ $\alpha\Gamma \times \Gamma\epsilon$ · καὶ τὸ τρίγωνον ἄρα $\Theta\alpha\omicron$ μείζον ἐστὶ τῷ τριγώνῳ $\epsilon\alpha\zeta$.

Ἐάν δὲ ἢ τῆ Κῶνικ κορυφή ἢ πρὸς τῷ μ , ἢ $\mu\eta$ ἐλάσσων ἐσται τῆς $\Lambda\eta$. Δι' ὃ δὴ ἢ $\mu\eta$ ἐλάσσονα λόγου ἔχει πρὸς $\mu\Gamma$, ἢ περ ἢ $\Lambda\eta$ πρὸς τὴν $\Lambda\Gamma$, καὶ ἢ $\epsilon\Gamma$, πρὸς τὴν $\Theta\eta$ · ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ὑπὸ $\mu\eta\Theta$ ἐλάσσον ἐσται τῷ ὑπὸ $\mu\Gamma\epsilon$ · καὶ τὸ τρίγωνον ἄρα $\Theta\mu\omicron$ ἐλάσσον ἐστὶ τῷ $\epsilon\mu\zeta$. Ἀλλ' ὅν ἄρα τὸ προτεθέν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Εἴαν ὁ ποτεροσῶν τῶν κατὰ κορυφὴν Κώ- σχημ. 9.
νων ΑΒΔ, ΑΖΘ, ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ πα-
ραλλήλῳ τῇ βάσει, ἢ τομὴ ΖΗΘ ἢ ΖηΘ
κύκλος ἔσαι, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τῇ ἁ-
ξονος.

Ἦχθω ὁ ἄξων ΑΓ συμβάλλων τῷ τέμνοντι
ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Λ. διὰ δὲ τῇ ἁξονος ΑΓ τετμή-
σθω ὁ Κῶνος ἐπιπέδῳ τριγωνικῷ τῷ ΒΑΔ, ὑπερ
καὶ τῇ προτέρῳ τέμνοντος ἐπιπέδῳ ἢ κοινῇ τομῇ ΖΘ
παράλληλος ἔσεται τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ΒΔ
(16 τῇ ΙΑ΄.): καὶ ληφθέντος ἐπὶ τῆς περιμέτρου τῆς
τομῆς οἰκδῆτινος σημείω τῇ Η, ἐπεξεύχθω ἀπ’ αὐ-
τῇ ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἢ ΑΗ, ἣτις προεκβληθεῖσα συμ-
βαλλέτω τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως κατὰ τὸ Ε. καὶ
ἐπιξευχθεῖσαι αἱ ΕΓ, ΗΛ, ἔσονται κοιναὶ τομολ
τῷ τε τριγώνῳ ΑΓΕ, καὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων
ΒΕΔ, ΖΗΘ. ἔνθεντοι τὰ τρίγωνα ΑΓΕ, ΑΛΗ
ἀλλήλοις ὅμοια (16 τῇ ΙΑ΄. καὶ 2 τῇ 5΄.): ὡσαύτως δὲ
καὶ τὰ ΓΒΑ, ΛΖΑ. Ὅθεν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΛΗ,
ὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΛΑ (1 πόρισμ. τῆς 4 τῇ 5΄.).
καὶ ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΛΑ, ὕτιος ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΛ.
ὡς ἄρα ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΛΗ, ὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν
ΖΛ (11 τῇ Ε΄.). ἴση δὲ ἡ ΓΕ τῇ ΒΓ (ἀκτῖνες γὰρ
τῇ αὐτῇ κύκλῳ). ἴση ἄρα καὶ ἡ ΛΗ τῇ ΛΖ. Ὀμοίως

δὴ δεῖξομεν ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Λ πρὸς τὴν $Z\Theta H$ γραμμὴν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· Κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ $Z\Theta H$ τομὴ, κέντρον ἔχων τὸ Λ ἐπὶ τοῦ ἄξονος $ΑΓ$. Πᾶσαι γὰρ αἱ ἀπ' αὐτῆς ἐπὶ τὴν περίμετρον τῆς τομῆς προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις δειχθήσονται. Διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται κύκλος εἶναι καὶ ἡ τομὴ $\zeta\eta\theta$ (14).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Σχημ. 10. Ἐὰν Κῶνος σκαληνός ὁ $\Lambda B E \Delta$, ἐπιπέδῳ τῷ $A B \Delta$ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει· τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ $K H M$, πρὸς ὀρθὰς μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ $A B \Delta$, ἀφαιρῶντι δὲ πρὸς τῇ κορυφῇ τρίγωνον τὸ $K A M$ ὁ-

14.) Αἱ γάρ τοι $E \Gamma$, καὶ λ κοινὰ τομαὶ ἔσαι τῆς διὰ τοῦ ἄξονος τριγωνικῆς ἐπιπέδου καὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων $B E \Delta$, $\zeta\eta\theta$, ἔσονται ἀλλήλαις παράλληλοι. Διὰ δὲ τῆς τομῆς τὰ τρίγωνα $\Gamma A E$, $\lambda A \eta$, ἀλλήλοις ὅμοια· καὶ ἐπομένως $\Gamma E : \lambda \eta = \Gamma A : A \lambda$. ὅμοια δὲ καὶ τὰ τρίγωνα $\Gamma A B$, $\lambda A \zeta$. Ἄρα καὶ $\Gamma A : A \lambda = \Gamma B : \lambda \zeta$ · καὶ δὴ $\Gamma E : \lambda \eta = \Gamma B : \lambda \zeta$. ἔστι δὲ ἡ $\Gamma E = τῇ \Gamma B$ · ἄρα καὶ ἡ $\lambda \eta$, ἴση τῇ $\lambda \zeta$. Τῇ αὐτῇ ἐφόδῳ δειχθήσεται καὶ οἷα δὲ τις ἄλλη εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ λ πρὸς τὴν περίμετρον τῆς τομῆς προσπίπτουσα, ἴση εἶναι τῇ $\lambda \eta$. Κύκλος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ τομὴ $\zeta\eta\theta$ κέντρον ἔχων τὸ λ ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Ἐὰν ἄρα ὅπο-
τεροσὺν κτ.

μοιον μὲν τῷ διὰ τῆ ἀξονος τριγώνῳ
 $AB\Delta$, ὑπεναντίως δὲ κείμενον· ὥς εἶναι
 δηλαδὴ τὴν ὑπὸ AMK ἴσην τῇ ὑπὸ ADB ,
 ὅτε δὴ ἐκ τὴν ὑπὸ AMK συμβαίνει εἶναι
 ἴσην τῇ ὑπὸ $AB\Delta$, διὰ τὸ εἶναι τὴν πρὸς
 τῷ A ἑκατέρῳ κοινὴν· καὶ αὕτη ἡ τομὴ
 κύκλος ἐστὶ. καλεῖσθαι δὲ τομὴν *Τ' ΠΕΝΑΝ-*
ΤΙΑ.

Α' ϕ' οἰοδύποτε σημείω τῷ H ληφθέντος ὡς ἐτυ-
 χεν ἐπὶ τῆς περιμέτρου τῆς ὕψω γεγεννημένης τομῆς
 KM , ἡχθῶ κἀκεῖτος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῆ ἀ-
 ξονος τριγώνῳ $AB\Delta$ ἢ HI , ἣτις δὴ πεσεῖται ἐπὶ τὴν
 κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων KM , καὶ ἔσαι αὐτῇ κάθε-
 τος (3 καὶ 8 τῆ IA'). Διὰ δὲ τῶν σημείων I ἡχθῶ τῇ
 τῆς βάσεως διαμέτρῳ $B\Delta$ παράλληλος ἢ $Z\Theta I$, καὶ
 διὰ τῶν $Z\Theta$, HI διήχθῶ ἐπίπεδον τὸ $ZH\Theta$, ὅπερ
 ἔσεται παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως, ἣτις
 διήκει διὰ τῆς $B\Delta$ καὶ τῆς αὐτῇ καθεῖτε EP , αἵτινες
 εἰσὶ ταῖς $Z\Theta$, HI παράλληλοι (15). Κύκλος ἄρα

15.) Ἦ' εὐθεῖα BA κοινὴ τομὴ ἐστὶ τῶν ἐπιπέδων
 BAD , καὶ τῶν ἐπιπέδων τῆς βάσεως· ὁρθὸν δὲ τὸ ἐπίπεδον
 BAD τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως, ὁρθὴ ἄρα καὶ ἡ EP τῷ ἐ-
 πιπέδῳ BAD , ὅσα ὁρθὴ καὶ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς BA .
 ὁρθὴ δὲ αὐτῶν καὶ HI (ἐκ κατασκευῆς)· αἱ ἄρα HI , EP ,
 ἀλλήλαις παράλληλοι (6. τῆ IA')· τέμνεται δὲ καὶ τὰς πα-

εἰν ἡ ὑπ' αὐτῆ τομῇ $ZH\Theta$, κέντρον ἔχων τὸ Λ ,
 καθ' ὃ ὁ ἄξων τέμνει τὴν αὐτῆ διάμετρον $Z\Theta$. Τετ-
 μήσθω ἡδὴ καὶ ἡ KM δίχα κατὰ τὸ O , καὶ ἐπιζευχ-
 θείσων τῶν HA , HO , ἔσεται δὴ τὸ ἀπὸ τῆς HA
 ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐτέρας ἀκτίνος $\Lambda\Theta$. ἔσι δὲ τὸ μὲν
 ἀπὸ τῆς $\Lambda\Theta$, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ZIO σὺν τῷ ἀπὸ
 τῆς LI (5 τῆ B'). τὸ δὲ ἀπὸ τῆς HA , ἴσον τοῖς
 ἀπὸ τῶν LI , HI (47 τῆ A') ὁμῶς ληφθεῖσιν· (ὁρῶν
 γὰρ ἔσα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $AB\Delta$ ἡ HI (ἐκ κατα-
 κευῆς), ὁρῶν ἔσεται καὶ ταῖς MIK , ZIO εὐθείαις,
 ὧν προσψάυει κατὰ τὸ I (ὁρ. 3 τῆ IA'), ὁρῶν ἄρα
 ἡ ὑπὸ HIA . Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν LI , HI ὁμῶς ληφ-
 θεῖντα, ἴσα ἔσεται τῷ ὑπὸ τῶν ZOI σὺν τῷ ἀπὸ
 τῆς LI . κοινῶς δὲ τῆ ἀπὸ τῆς LI ἀφαιρεθέντος, τὸ
 ἀπὸ τῆς HI ἔσαι ἴσον τῷ ὑπὸ ZIO . Τὸ ὡς κεῖται δὲ καὶ
 ἡ ὑπὸ AKM (ἐκ κατασκευῆς) ἴση τῇ ὑπὸ $\Lambda\Delta B$ καὶ
 δὴ καὶ τῇ ὑπὸ MOI τῇ ἐκτὸς τῶν παραλλήλων (27
 τῆ A'), ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ OMI ἴση τῇ ὑπὸ ZIK (πορ.
 3 τῆς 32 τῆ A'). καὶ τὰ τρίγωνα OMI , KIZ , ὁ-
 μοια. Ἔσιν ἄρα ὡς ἡ KI πρὸς τὴν ZI , ὕτως ἡ IO
 πρὸς τὴν IM (4 τῆ ϵ'). καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ZIO , ἴσον
 τῷ ὑπὸ τῶν KIM (17 τῆ αὐτῆ). καὶ προσκειμένε κοι-
 νῇ τῆ ἀπὸ τῆς OI , τὸ ὑπὸ τῶν ZIO σὺν τῷ ἀπὸ τῆς
 OI ἔσαι ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν KIM σὺν τῷ ἀπὸ τῆς OI .

ραλλήλους $Z\Theta$, $B\Delta$. τὸ ἄρα διὰ τῶν HI , ZI ἐπίπεδον,
 παραλλήλόν ἐστι τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως (15. τῆ IA')
 ἥτοι τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν εὐθειῶν $B\Delta$, EP .

ἀλλὰ ὑπὸ ΖΙΘ ἐδείχθη ἀνατέρω ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΗΙ· ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΙ, ΟΙ ὁμῶς ληφθέντα, ἔσονται ἴσα τῷ ὑπὸ ΚΙΜ σὺν τῷ ἀπὸ ΟΙ. Ἐς δὲ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΗΙ, ΟΙ ὁμῶς ληφθέντα ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΟΗ (47 τῆ Α΄). τὸ δὲ ὑπὸ ΚΙΜ σὺν τῷ ἀπὸ ΟΙ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΜ (5 τῆ Β΄). τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΟΗ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΜ, καὶ ἡ ΟΜ ἴση τῇ ΟΗ. Καὶ διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται ὅτι καὶ οἰαδήποτε ἑτέρα εὐθεῖα ἀπὸ τῆς Ο ἐπὶ τὴν περίμετρον ΚΗΜ καὶ ὁ,τιῦν αὐτῆς σημεῖον προσπίπτουσα, ἴση ἔσται ταῖς ΟΜ, ΟΗ. κύκλος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ τοιαύτη τομὴ. Καὶ εἰ Κῶνος σκαληνὸς κτ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α΄.

Ὅθεν ἔπεται ὅτι ἐν κύκλῳ τὸ ἀπὸ τῆς ἀφ' οἰοδήποτε σημείου τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν διάμετρον πρὸς ὁρθὰς καταχθείσης τετράγωνον αἰετὶς ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ (οἷον ἐν τῷ κύκλῳ ΘΗΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΙ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΙΘ)· καὶ ἀνέπαλιν, ἐν ὁποιοδήποτε σχήματι, εἰ τὸ ἀπὸ τῆς ἀφ' οἰοδήποτε σημείου τῆς περιμέτρου Η ἐπὶ τὴν βάσιν ΚΜ πρὸς ὁρθὰς καταχθείσης ΗΙ τετράγωνον ἴσον ἢ τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς βάσεως περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ΚΙΜ, τὸ σχῆμα τοῦτο κύκλος ἐστὶν, καὶ διάμετρος ἐστὶν ἡ βάσις ΚΜ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Εἴαν δὲ τὸ τέμνον ἐπίπεδον μήτε παράλληλον ἢ τῇ βάσει τῆς Κῶν, μήτε μὲν τρίγωνον, ὅμοιον μὲν, ἵπεναντίως δὲ κείμενον τῷ διὰ τῆς ἄξονος πρὸς ὀρθῆς τῇ βάσει τριγώνῳ πρὸς τῇ κορυφῇ ἀφαιρῇ, ἢ τομὴ ἔκ ἑσσι κύκλος. Ἀνίστων γὰρ ὑστὼν τηνικαῦτα τῶν γωνιῶν, τὰ τρίγωνα ZIK , ΘIM ἔκ ἑσεται ὅμοια· ὅθεν ἔδὲ ἡ KI ἑσται πρὸς τὴν ZI , ὡς ἡ ΘI πρὸς τὴν IM · ἐπομένως δὲ ἔδὲ τὸ ὑπὸ ZIO , ἢ τὸ ἀπὸ HI ἴσον τῷ ὑπὸ KIM , ἔδὲ προτκειμένα κοινῇ τῆς ἀπὸ τῆς OI , τῷ ἀπὸ τῆς CH ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς OM . Οὐδὲ ἄρα ἡ OM ἑσται ἴση τῇ OH · ἀνισοὶ ἄρα αἱ ἀκτῖνες, καὶ ἡ τομὴ ἄρα ἔκ ἑσσι κύκλος.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Εἴν τῇ ἵπεναντία τομῇ ἐπεὶ τὰ διὰ τῆς ἄξονος τρίγωνα AKM , ADB ἑσιν ὅμοια, καὶ ἡ ΔA ἑσται πρὸς τὴν AB , ὡς ἡ AK πρὸς τὴν AM · τὰ ὀρθογώνια ΔAM , BAK ἑσιν ἴσα· καὶ κύκλος διὰ τῶν σημείων B , K , M , Δ διελεύσεται (16). Εἴαν δὲ

Σχημ. 6.
τῶν ἑσσο.

16.) Οὐ γὰρ διὰ τῶν σημείων B , Δ , M διὸν κύκλος, διελεύσεται δὴπε καὶ διὰ τῆς K εἶδε μὴ, διελεύσεται εἰ δυνατόν ἦται κατατέρεω τῆς K διὰ τῆς Γ φέρε, ἢ ἀνωτέρεω διὰ τῆς O · καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ ὑποθέσει ἑσται τὸ ὀρθογώνιον $BA\Gamma$ ἴσον τῷ ὀρθογώνιῳ ΔAM (Πορ. 1. τῆς 36. τῇ Γ'). "Εσὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως τὸ ὑπὸ τῶν ΔAM ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν BAK · τὸ ἄ, α ὑπὸ $BA\Gamma$ ἑσται ἴσον

ἀχθῇ τῇ ΚΜ παράλληλος ἡ ΒΝ, ὁ κύκλος ὁ πε-
ρι τὸ ΒΝΔ τρίγωνον περιγεγραμμένος τῆς πλευ-
ρᾶς ΑΒ πρὸς τῷ Β ἐφάπτεται. Ὁμοίων γὰρ ὄντων
τῶν τριγώνων ΑΔΒ, ΑΒΝ (ἔχει γὰρ τὴν πρὸς τῷ
Α γωνίαν κοινὴν καὶ τὴν ὑπὸ ΑΒΝ = τῇ ἐκτὸς ὑπὸ
ΑΚΜ = τῇ ὑπὸ ΑΔΒ). ἔσαι ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ,
ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΝ. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ
ὑπὸ τῶν ΔΑΝ (16 τῷ 5.). Ἡ ἄρα ΑΒ ἐφάπτε-
ται τοῦ διὰ τῶν σημείων Β, Ν, Δ διερχομένου
κύκλου (17).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Ἀ"πασαι αἱ τομαὶ αἱ ἐπιπέδοις τῷ αὐτῷ κύ-
κλῳ ΚΗΜ παραλλήλοις ἀπογεννώμεναι κύκλοι ἔ-
σονται· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἀπὸ τῆς κέντρου Ο ἐπὶ τὴν
κορυφὴν Α ἡ εὐθεῖα ΟΑ διὰ τῶν κέντρων ἀπάντων
τῶν αὐτῷ παραλλήλων κύκλων διελεύσεται. Ἀ' πᾶ-

ειτῷ ὑπὸ ΒΑΚ, ὅπερ ἄτοπον. Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ· τὸ ὑπὸ
ΒΑΟ ἔσται ἴσον τῷ ὑπὸ ΔΑΜ· ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΔΑΜ
ὑπερέχει ἴσον τὸ ὑπὸ ΒΑΚ, ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΑΟ ἔσται τῷ
ὑπὸ Ε'ΑΚ ἴσον, ὅπερ ἐπίσης ἄτοπον· δι' ἐδετέρου ἄρα τῶν
Γ, Ο διελεύσεται· διελεύσεται ἄρα διὰ τῆς Κ.

17.) Εἰ γὰρ ἡ ΑΒ τῷ ΒΔΜ κύκλῳ μὴ ἐφάπτεται, Σχημ. 7.
ἐφαπτέσθαι αὐτῇ ἑτέραις ἡ ΑΜ· τεμνέτω δὲ αὐτὸν ἡ τῶν ὑποσ.
ΑΒ κατὰ τὸ Ο· καὶ ἔσται δὴ ΑΜ² = ΔΑΝ (37. τῷ
Γ'). ἄρα ΑΜ² = ΑΒ² ἀλλὰ ΑΜ² = ΒΑΟ (διὰ τὴν
αὐτὴν) ἄρα ΑΒ² = ΒΑΟ. ὅπερ ἄτοπον· ἡ ἄρα ΑΒ
ἐφάπτεται τῷ κύκλῳ, ὅπερ ἐξ ἀρχῆς ὑπετίθετο.

σας γὰρ τὰς τῇ ΚΜ παραλλήλους εὐθείας δίχα τε-
μεῖ, ὡς αὐτὴν τε ταύτην κατὰ τὸ Ο, καὶ τὴν ΒΝ
κατὰ τὸ Σ. Ἔσεται γὰρ (Πορ. 2 τῆς 4 τῆς 5.) ἡ ΚΟ
πρὸς τὴν ΟΜ, ὡς ἡ ΒΣ πρὸς τὴν ΣΝ. ἴση δὲ ἡ
ΚΟ τῇ ΟΜ, ἄρα καὶ ἡ ΒΣ ἴση τῇ ΣΝ. Ἔσεται
ἄρα τῇ Κώνυ τέττε καὶ ἑτέρος ἄξων ὁ ΑΟ, ὅστις εἰς
ἀνίστα τεμεῖ τὴν διάμετρον τῆς βάσεως κατὰ τὸ Ρ.
Τοιγαρὲν τῶν μὲν σκαληνῶν Κώνων, ὧν εἰς καὶ ὁ
ΑΒΔΞ, ἔσονται δύο ἄξονες οἱ ΑΓ, ΑΡ διὰ τῶν
κέντρων τῶν κατ' αὐτὰς κύκλων διήκοντες· τῶν δὲ
ὀρθῶν, εἰς ἄξων καὶ μόνος.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε'.

Τεμνοσὶ δὲ οἱ δύο ἄξονες ὅτοι, ὁ μὲν δεύτερος
ΑΡ τὴν τῆς βάσεως διάμετρον ΒΔ κατὰ τὸ Ρ, ὅ-
τως ὡς εἶναι τὴν ΒΡ πρὸς τὴν ΡΔ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς
ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· 18). Ο' δὲ πρῶτος ΑΓ τὴν τε
ὑπερᾶντίως κειμένην κύκλου διάμετρον ΒΝ κατὰ τὸ Ε
ὡς εἶναι τὴν ΒΞ πρὸς τὴν ΞΝ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΞ. Ὅθεν καὶ ἔσεται ἡ ΒΡ πρὸς τὴν
ΡΔ, ὡς ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΒ.

18) Ἐπεὶ γάρ εἰσιν $ΑΔ : ΑΒ = ΑΒ : ΑΝ$, ἔσται
δὴ καὶ ἀνάπλυν $ΑΔ : ΑΔ = ΑΝ : ΑΒ$ · καὶ (22. τῆς 5.)
 $ΑΒ^2 : ΑΔ^2 = ΑΝ^2 : ΑΒ^2$ · ἵαν ἄρα ἡ ΒΡ πρὸς τὴν ΡΔ,
ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, ἴσονται δὴ καὶ ὡς
τὸ ἀπὸ ΑΝ πρὸς τὸ ΑΒ.

Εἰάν γὰρ ἀχθῇ τῇ ΒΔ παράλληλος ἡ ΝΠΤ, ἔσεται τὸ τρίγωνον ΒΣΡ ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΝΣΤ. καὶ ὥς ἡ ΒΣ πρὸς τὴν ΣΝ, ἔτως ἡ ΒΡ πρὸς τὴν ΝΤ. ἴση δὲ ἡ ΒΣ τῇ ΣΝ (Πόρισμ. δ'. τῆς παρέσης)· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΡ τῇ ΝΤ. Οὕτως (εἰάν ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $BP:PD=BP:PD$ τεθῇ ἐν τῷ δευτέρῳ λόγῳ ἀντὶ τῆς ΒΡ ἡ αὐτῇ ἴση ΝΤ, ἔσεται) ἡ ΒΡ πρὸς τὴν ΡΔ, ὥς ἡ ΝΤ πρὸς τὴν ΡΔ. ἀλλ' ἡ ΝΤ πρὸς τὴν ΡΔ ἔστιν ὥς ἡ ΑΝ πρὸς τὴν ΑΔ. καὶ ἡ ΑΝ πρὸς τὴν ΑΔ, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ (ἐδείχθησαν γὰρ ἀνωτέρω (Πόρισμ. γ'.) αἱ ΑΝ, ΑΒ, ΑΔ συνεχῶς ἀνάλογον). ἡ ἄρα ΒΡ πρὸς τὴν ΡΔ, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ομοίως ἡ ΒΞ πρὸς τὴν ΞΝ ἔστιν ὥς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΝΠ (ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα ΒΞΓ, ΠΝΞ.), ἢ ὥς ἡ ΔΓ (ἥτινι ἴση ἡ ΒΓ) πρὸς τὴν ΝΠ, ἥτοι ὥς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΔΝ (Πορ. 1 τῆς 4 τῆς 5.), ἢ ὥς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ (διὰ τὸ εἶναι τὰς ΑΔ, ΑΒ, ΑΝ συνεχῶς ἀνάλογον ὡς ἀνωτέρω Πορ. γ'. δέδεικται). Εἰδείχθη δὲ ἀνωτέρω ὅτι ὥς τὸ ἀπὸ ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, ἔτως ἡ ΒΡ πρὸς τὴν ΡΔ (σημ. 18). ὥς ἄρα ἡ ΒΡ πρὸς τὴν ΡΔ, ἔτως ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΒ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ. Γ'.

Εἰάν Κῶνος ὁ ΑΒΔ ἐπιπέδῳ τριγωνικῷ Σχημ. 11
τμηθῇ διὰ τῆς ἄξονος, ληφθῇ δέ τι ση-

μείον ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τὸ Η, ὃ μὴ ἔστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τῆ δια τῆ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἀχθῇ ἡ ΗΙΑ παράλληλος εὐθεΐα τινὶ τῇ ΕΖ, ἣτις ἔστι κἀκετος ἀπὸ τῆς περιφερείας τῆ κύκλου ἐπὶ τὴν βάσιν τῆ τριγώνου τὴν καὶ διάμετρον τῆς τῆ Κώνου βάσεως· ἡ ἔτις ἡ γυμένη εὐθεΐα συμβαλεῖ τῷ διὰ τῆ ἄξονος τριγώνῳ, καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τῆ ἑτέρου μέρους τῆς Κωνικῆς ἐπιφανείας, δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Ι ὑπὸ τῆ τριγώνου.

Ἐπεδείχθω ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆ Κώνου ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον Η ἡ ΑΗ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπίπτει τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως κατὰ τὸ Μ· καὶ ἀπὸ τῆ Μ τῇ ΕΖ παράλληλος ἔχθω ἡ ΜΚΘ, ἣτις τεμεῖ τὴν διάμετρον πρὸς ὀρθὰς καὶ τμηθήσεται ὑπ' αὐτῆς δίχα κατὰ τὸ Κ (ὃ τῆ Γ'). ἐπεδείχθω καὶ ἡ ΑΘ, ἣτις ἐν τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ἔσα (ἐπομ. β'), συμπεσεῖται τῇ ΗΙΑ κατὰ τὸ Λ (19). Τῇ γὰρ τρίτῃ ΕΖ παράλληλοι ἔσαι αἱ

19.) Ἐπεὶ γὰρ αἱ παράλληλοι ΜΘ, ΗΛ ἐν τῷ αὐτῷ εἰσὶν ἐπιπέδῳ, ὥσπερ ἡ ΑΘ συνέπεσε τῇ ΜΘ κατὰ τὸ Θ σημεῖον τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ἔτι δὲ

ΗΛ, ΘΜ, ἢ ἀλλήλαις εἰς παράλληλοι, ἢ ἐπο-
μένως ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ τριγώνῳ ΜΑΘ (9
τῷ Γ.). ἢ ἐπιζευχθεῖσα ἢ ΑΚ, ἔσαι κοινὴ τομὴ
τῶν ἐπιπέδων τῶν τριγώνων ΒΑΔ, ΜΑΘ. διὰ
δὴ τῆτο διελεύσεται διὰ τῷ Ι κοινὸν σημεῖον ἐκατέ-
ρω τῶν ἐπιπέδων (20). Τέτων δὲ ἔτω κατασκευασ-
θέντων, ἔσται (3 τῷ 5.) ἢ ΜΚ πρὸς ΗΙ, ὡς ἢ
ΚΑ πρὸς ΑΙ, ἥτοι ὡς ἢ ΚΘ πρὸς ΙΑ. ἴση δὲ ἢ ΜΚ
τῇ ΚΘ, ἴση ἄρα ἢ ἢ ΗΙ τῇ ΙΑ. δίχα ἄρα τέ-
μνεται ἢ ΗΛ ὑπὸ τῷ διὰ τῷ ἄξονος τριγώνου. Ἐὰν
ἄρα Κῶνος κτ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ε'ξ ὧν ἔπεται ὅτι εἰν Κῶνος τριγώνῳ τμη- Σχημ. 12.
θῇ διὰ τῷ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ
διὰ τῆς εὐθείας ΜΘ, καθέτε τῇ τῆς βάσεως δια-
μέτρῳ, ἢ κοινὴ τομὴ τέτε ἢ τῷ προτέρῳ ἐπιπέ-
δῳ ἢ ΚΝ, ἀπάσας τὰς τῇ ΘΜ παραλλήλως ἐν
τῇ τομῇ ταύτῃ ἀγομένας εὐθείας ΗΛ ἢ λοιπὰς
δίχα τεμεῖ (21).

συμπεσεῖται ἢ τῇ ΗΛ κατὰ τὸ Α σημεῖον τῆς αὐτῆς
κωνικῆς ἐπιφανείας.

20.) Ε'πεὶ τὸ Ι σημεῖον, σημεῖον ἐστὶ τῆς συμπτώσεως τῷ
τριγώνῳ ΒΑΔ, ἢ τῆς εὐθείας ΗΙΑ, κοινὸν ἄρα ἐστὶ τῷ τε
ΑΒΔ ἐπιπέδῳ ἢ τῷ ΜΑΘ, ἐν ᾧ κεῖται ἢ ΗΙΑ. ἔσε-
ται ἄρα ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΚ, ἥτις ἐστὶ κοινὴ τομὴ τῶν
ἐπιπέδων τήτων. διὰ τῷ Ι ἄρα διελεύσεται ἢ ΑΚ.

21.) Ε'πεὶ ὁρθή ἐστιν ἐπὶ τὴν ΒΔ διάμετρον ἢ εὐ-

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Καὶ εἰάν ἡ εὐθεία $ΜΘ$, δι' ἧς τὸ ἐπίπεδον $ΜΝΘ$, ἢ μόνον τῇ διαμέτρῳ $ΒΔ$, ἀλλὰ δὲ καὶ τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῆ ἄξονος τριγώνου ἢ κέντρου (ὅπερ συμβαίνει ἐνθα τὸ διὰ τῆ ἄξονος ἐπίπεδον ἐστὶ

δεῖα $ΜΚΘ$, καὶ τῇ $ΗΛ$ (ἐξ ὑποθέσεως) παράλληλος. Ἐὰν ἐπιρριχθῇ ἡ $ΑΗ$, ἐκβληθῇ ὥς ἢ τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως κατὰ τὸ μ ἀπαντήσῃ, ἀπὸ δὲ τῆ μ ἀχθῇ ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ ἡ $μκδ$ τῇ $ΜΚΘ$ παράλληλος, καὶ ἀπὸ τῆς ἐπιρριχθῇ ἡ $Αδ$, ἥτις ἐν τῇ κοινῇ ὕψα ἐπιφανείᾳ, διελύσεται δὴτε (κατὰ τὰ προδεδειγμένα) διὰ τῆς $Δ$, ἡ $ΗΛ$ (διὰ τὴν παρῆσαν πρότασιν) δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ $Γ$, σημείου τῆς συμπτώσεως αὐτῆς τε καὶ τῆς τριγώνου $ΒΑΔ$, ὅπερ ἔσται ἐπὶ τῆς εὐθείας $ΚΝ$ κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων $ΒΑΔ$, $ΜΗΝΛΘ$ (σημ. 20.) δίχα ἄρα τέτμηται ἡ $ΗΛ$ ὑπὸ τῆς $ΝΚ$, ὅπερ συμβαίνει αἰ: πάσαις ταῖς τῇ $ΜΘ$ παραλλήλως ἀγομέναις εὐθεύαις· δῆλον ἄρα τὸ κροτεῖν.

22.) Λήμματα. Ἐὰν τῶν ὁμοίων ἢ ἴσων λόγων $Α:Β$ καὶ $Γ:Δ$ οἱ μὲν ἡγόμενοι ὅροι τῷ αὐτῷ $Ε$, οἱ δὲ ἐπόμενοι τῷ αὐτῷ $Ζ$ ἐπιπολλαπλασιασῶσι, τὰ ἐκ τῶν πολλαπλασιασμάτων τέταν γινόμενα, ἐν τῷ αὐτῷ ἔσται λόφ αἰ. ἢτοι ἔσται $ΑΧΕ:ΒΧΖ=ΓΧΕ:ΔΧΖ$.

Ἐπεὶ γὰρ εἰς $Α:Β=Γ:Δ$ ἔσαι καὶ $Α:Γ=Β:Δ$. ἀλλὰ $Α:Γ$ εἰς $ὡς ΑΧΕ:ΓΧΕ$ (1. τῆς ζ.) ἄρα $ΑΧΕ:ΓΧΕ=Β:Δ$. ἔσι δὲ καὶ $Β:Δ=ΒΧΖ:ΔΧΖ$ (διὰ τὴν αὐτὴν). ἄρα $ΑΧΕ:ΓΧΕ=ΒΧΖ:ΔΧΖ$. καὶ ἐναλλάσσοντι $ΑΧΕ:ΒΧΖ=ΓΧΕ:ΔΧΖ$.

23.) Λήμματα. Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη $Α, Β, Γ, Δ$ ἀνάλογον ἢ. ὡς δὲ καὶ ἄλλα τοσαῦτα $Ε, Ζ, Η, Θ$. ἀνάλογον (ὡς εἶναι $Α:Β=Γ:Δ$ καὶ $Ε:Ζ=Η:Θ$)

κάθετον τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ), τότε δὴ αἱ εὐθεῖαι ΜΘ, ΗΛ ἢ μόνον δίχα, ἀλλὰ καὶ πρὸς ὁρθὰς ὑπὸ τῆς κοινῆς τῶν ἐπιπέδων τομῆς ΝΚ τμηθῆσονται. Ὁρῶν γὰρ ἔσαι τῆνικαῦτα ἢ μόνον ἢ ὑπὸ ΜΚΔ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΜΚΝ (ὁρ. 3 τῆ ΙΑ.), καὶ ἡ αὐτὴ ἴση ΗΙΝ (27 τῆ Α'). Ἐὰν δὲ ἡ εὐ-

καὶ τῷ δυοῖν τέτων ἀναλογιῶν ἐπιπολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἡγούμενοι τῆς ἐτέρας τοῖς ἡγούμενοις τῆς ἐτέρας καὶ οἱ ἐπόμενοι τοῖς ἐπομένους ἑκαστος ἐκάσῳ, τὰ γινόμενα πρὸς ἄλληλα ἀνάλογον ἔσται· ἥτοι ἔσται $A \times E : B \times Z = \Gamma \times H : \Delta \times \Theta$.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ἐξ ὑποθέσεως $A : B = \Gamma : \Delta$, καὶ $E : Z = H : \Theta$, ἔσται δὴ καὶ $E : Z = E : Z$, καὶ $\Gamma : \Delta = \Gamma : \Delta$ · ἔσται ἄρα κατὰ τὴν 22 σημείωσιν $A \times E : B \times Z = \Gamma \times E : \Delta \times Z$ · καὶ διὰ καὶ $\Gamma \times E : \Delta \times Z = H \times \Gamma : \Theta \times \Delta$ ἄρα $A \times E : B \times Z = \Gamma \times H : \Delta \times \Theta$.

24.) Σχόλιον. Ὁ δὲ τοιοῦτος λόγος, λόγος καλεῖται συγχείμενος παρὰ Γεωμέτραις. Ὁ γὰρ λόγος τῆ $A \times E$ πρὸς τὸ $B \times Z$ σύγκειται ἐκ δυοῖν λόγων τῶν $A : B$, καὶ $E : Z$ · ὡσαύτως καὶ ὁ λόγος τῆ $\Gamma \times H$ πρὸς τὸ $\Delta \times \Theta$, σύγκειται ἐκ τῶν $\Gamma : \Delta$, καὶ $H : \Theta$. Ἐπεὶ γὰρ λόγος συγχείμενος ἐκ δυοῖν ἢ πλείονων καλεῖται· ὁ λόγος, οὗ ἔχει τὸ γινόμενον ἐκ δυοῖν ἢ πλείονων ἡγούμενων πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν αὐτῶν ἐπομένων, καὶ τὸ $A \times E$ γινόμενόν εἰσι ἐκ τῶν ἡγούμενων τῶν λόγων $A : B$ καὶ $E : Z$, τότε $B \times Z$, γινόμενον ἐκ τῶν ἐπομένων τῶν αὐτῶν λόγων, ἔσται ἄρα τὸ $A \times E$ πρὸς τὸ $B \times Z$ ἐν λόγῳ συγχειμένῳ ἐκ τῶν λόγων $A : B$, καὶ $E : Z$ · τὸ αὐτὸ ζητεῖται καὶ περὶ τῆς λόγου τῆ $\Gamma \times H : \Delta \times \Theta$, ὃς τις σύγκειται ἐκ τῶν λόγων $\Gamma : \Delta$, καὶ $H : \Theta$.

Θεῖα ΜΚΘ μὴ ἢ κάθετος τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέ-
δῳ, ἢτοι εἰάν τὸ διὰ τῆ ἄξονος τρίγωνον μὴ ἢ ἐπὶ
τὴν βάσιν τῆ Κώνε ὀρθόν, διὰ τῆς ἀπὸ τῆς κορυ-
φῆς πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει καταχθείσης εὐθείας
ΑΞ διερχόμενον, τὴνικαῦτα ἡ ΚΝ δίχα μὲν ἀπά-
σας τὰς ἐν τῇ τομῇ ἀγομένας παραλλήλους ΗΛ,
ΜΘ, ἐμὴν δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς, ἀλλὰ λοξὰς γωνίας
τεμεῖ, ὡς ἔχει λοξότητος ἡ εὐθεῖα ΜΚ πρὸς τὴν
ΚΝ.

ΟΨΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΙ.

Σχημ. 13. α'. Ἡ δὲ εὐθεῖα ΚΝ, ἣτις πάσας τὰς ἐν τομῇ
14. 15. 16. ἀγομένας εὐθείας ΗΛ εὐθεῖα τινὶ τῇ ΜΘ παραλ-
λήλους δίχα διαιρεῖ, καλεῖται διάμετρος τῆς
τομῆς.

β'. Τὸ δὲ ταύτης πέρας Ν, ἢ τὸ ἀντικείμενον
Ξ (εἵπερ εἴη) τὸ πρὸς τῇ τομῇ, κορυφὴ τῆς τομῆς
καλεῖται.

γ'. Αἱ δὲ παράλληλοι εὐθεῖαι ΗΛ, ΜΘ, καὶ δὴ
καὶ τὰ αὐτῶν ἡμίση ΛΙ, ΜΚ, τεταγμέναι ἐπὶ
τὴν διάμετρον ΚΝ καλεῖνται.

δ'. Καὶ εἰάν ἡ ΚΝ ὁ μόνον δίχα, ἀλλὰ καὶ πρὸς
ὀρθὰς γωνίας τέμνῃ τὰς τεταγμένας, πρὸς τῷ διά-
μετρος ὀνομάζεται εἰδικωτέρῳ ὀνόματι καὶ ἄξων τῆς
τομῆς.

Εἰν δέγε τοῖς ἐξῆς ἀποδώσομεν κατὰ γὰρ τὴν
χρεῖαν καὶ ἑτέρας ὀρους ἔντε ταῖς Προτάσεσι καὶ τοῖς
αὐτῶν Πορίσμασι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'

Εἴαν Κῶνος ὁ ΑΔΜΒ ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ Σχημ. 17.
 τῆ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ
 τέμνοντι μὲν τὴν βάσιν τῆ Κῶνος κατ'
 εὐθείαν τὴν ΜΘ πρὸς ὀρθὰς ἔσαν τῇ
 τῆς βάσεως διαμέτρῳ ΒΔ, καὶ δίχα ὑπ' αὐ-
 τῆς τεμνομένην κατὰ τὸ Κ, διηγμένῳ δὲ δι'
 εὐθείας ἑτέρας τῆς ΚΝ μιᾷ πλευρᾷ τῇ
 ΑΒ τῆ διὰ τῆ ἄξονος τριγώνου παραλλήλῃ,
 ἐν τῇ τοιαύτῃ τομῇ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγ-
 μένων ΚΜ, ΙΗ τετράγωνα, ἀνάλογον
 ἔσεται ταῖς ἀπὸ τῆς κορυφῆς τετμημέ-
 ναις ΝΚ, ΝΙ. Ἡ δὲ τοιαύτη τομὴ κα-
 λείσθω ΠΑΡΑΒΟΛΗ.

Δι' ὅτινοσῶν σημεία Ι ληφθέντος ὡς ἔτυχεν ἐ-
 πὶ τῆς τῶν ἐπιπέδων κοινῆς τομῆς ΚΝ, ἐφ' ἣν τε-
 ταγμένως κατηγμένη ἡ ΗΙΔ, ἤχθῳ τῇ τῆς βά-
 σεως διαμέτρῳ παράλληλος εὐθεῖα ἡ ΠΥ· διὰ δὲ
 τῶν εὐθειῶν ΠΥ, ΛΙ διήχθῳ ἐπίπεδον τὸ ΠΗΥ, ὅ-
 περ ἔσται παράλληλον τῇ τῆς Κῶνος βάσει, ἥτις διὰ
 τῶν εὐθειῶν ΒΔ, ΜΘ ταῖς ΠΥ, ΛΗ παραλλή-
 λων διήκει (15 τῆ ΙΑ'). Τὸ ἄρα διὰ τῶν ΠΥ, ΛΗ
 ἐπίπεδον κύκλος ἔσαι (Προτασ. Α'), ὃ διάμετρος
 ἡ ΠΥ, καὶ ἔσιν ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΗΙ· ἐπεὶ καὶ ἡ

ΜΚ ἐπὶ τὴν ΒΔ. καὶ ἐπομένως τὸ ὑπὸ τῆς ΗΙ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΠΙΤ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ σὺν τῷ ὑπὸ τῶν ΒΚΔ (Πορ. Α'. τῆς Β'). ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΙ, ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΙΤ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΙΤ ἔστιν ὡς ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΙΤ (1 τῆς 5). ἴση γὰρ ἡ ΚΒ τῇ ΠΙ· εἴγε τὸ ΒΠΚ, παραλληλόγραμμον, ὡς ὑπὸ εὐθειῶν ὧν αἱ ἀντικείμεναι ἀλλήλαις παράλληλοι, περιεχόμενον. Ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ, ὡς ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΙΤ. ἔστι δὲ διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΝΚΔ, ΝΙΤ ὁμοιότητα, ὡς ἡ ΚΔ πρὸς ΙΤ, ὕτως ἡ ΚΝ πρὸς ΝΙ (Πορ. 1 τῆς 4 τῆς 5). καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΝ πρὸς τὴν ΝΙ. ἦτοι τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα, ὡς τὰ μέρη τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ν τετμημένης διαμέτρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ὅθεν εἰάν γένηται ὡς ἡ ΚΝ πρὸς ΚΜ, ὕτως ἡ ΚΜ πρὸς τετάρτην ζητούμενην τὴν ΝΖ, κάθεται ἐπὶ τὴν διάμετρον ΚΝ πρὸς τῇ κορυφῇ Ν. Ὡς περ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ τετράγωνον ἔστιν ἴσον τῷ ΚΝΖ ὀρθογωνίῳ (16 τῆς 5), ὕτω καὶ τὸ ἀφ' οἷσδ' ἕποτε ἐτέρας τεταγμένης ΗΙ τετράγωνον ἴσον ἔσεται τῷ ὑπὸ ΙΝΖ ὀρθογωνίῳ. Τὰ γὰρ ὀρθογώνια ταῦτα ἔχοντα ὕψος ταυτὸν τὴν ΝΖ, ἔσεται ὡς αἱ τετμημέναι ΚΝ, ΙΝ (1 τῆς 5), καὶ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ΜΚ, ΙΗ τετράγωνα τὰ ταύταις ἀνάλογα

(ὅθεν $ΜΚ^2 : ΗΙ^2 = ΚΝΖ : ΙΝΖ$. καὶ ἐπεὶ $ΜΚ^2 = ΚΝΖ$, ἄρα καὶ $ΗΙ^2 = ΙΝΖ$). Σταθερὰ ἄρα ἡ εὐθεία ΝΖ, ἣτις τοῖς μὲν ἀρχαίοις ἐκαλεῖτο πλευρὰ ὀρθία, καὶ παρ' ἡν δύνανται αἱ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον κατηγμέναι· ἡμῖν δὲ καλεῖσθω Παράμετρος καὶ ὀρθία πλευρά.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Α'χθείσης :ιασδήποτε εὐθείας ΕΝ παραλλήλου μὲν τῇ τῆς βάσεως διαμετρῷ ΒΔ, περατωμένης δὲ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῆ διατῆ ἄξονος τριγώνου, εἰάν γένηται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΔ, ἢ ἡ ΑΕ' πρὸς ΕΝ, ἔτις ἡ ΕΝ πρὸς ζητούμενην τὴν ΝΖ· ἡ ΝΖ ἔσεται τῆς παραβολῆς πλευρὰ ὀρθία ἢ Παράμετρος. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΚ ἴση ἐστὶ τῇ ΕΝ (ὅντος παραλληλογράμμου τῆ ΒΕΝΚ σχήματος), ἔσεται ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΝΖ, ἔτις ἡ ΕΑ πρὸς ΕΝ· ἢ (διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΕΑΝ, ΝΚΔ ὄντων ἀμφοτέρων ὁμοίων τῷ ΑΒΔ) ἡ ΝΚ πρὸς ΚΔ. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΚΝΖ· (16 τῆς ε'). Α'λλὰ τὸ ὑπὸ ΒΚΔ ἔστιν ἴσον τῷ ἀπὸ ΜΚ (Πορ. Α'. τῆς Β'). ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΚ, ἴσον τῷ ὑπὸ ΚΝΖ. ἢ ἄρα ΝΖ Παράμετρος ἐστὶ τῆς Παραβολῆς (Πορ. Α'. τῆς παρέσης).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ἡ παράμετρος (ΝΖ) εὐρεθήσεται καὶ εἰάν γέ-

νῆται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῆ διὰ τῆ ἄξονος τρι-
γώνου περιεχόμενον ὀρθογώνιον $ΒΑΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ
τῆς βάσεως $ΒΔ$ τετράγωνον, ἔτις ἢ ἀπὸ τῆς κο-
ρυφῆς τῆ Κῶνα ἕως τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς ἀπολαμ-
βανομένη εὐθεῖα $ΑΝ$ πρὸς $ΝΖ$. Τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν
 $ΒΑΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$, ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν
 $ΕΑΝ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΝΕ$, διὰ τὸ εἶναι τὰς εὐθείας
ταύτας πρὸς ἐκεῖνας ἀνάλογον (25). Ἀλλὰ (Πορ.
προηγ.) τὸ ἀπὸ τῆς $ΕΝ$ τετράγωνον ἐστὶν ἴσον τῷ
ὀρθογώνιῳ τῷ ὑπὸ τῆς $ΕΑ$ καὶ τῆς παραμέτρου $ΝΖ$
(διὰ τὸ εἶναι τὰς $ΕΑ$, $ΕΝ$, $ΕΖ$ συνεχῶς ἀνάλο-
γον). Ἀρα τὸ ὑπὸ $ΒΑΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΒΔ$, ἐστὶν ὡς
τὸ ὑπὸ $ΕΑΝ$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $ΕΑ$, $ΝΖ$. διὸ καὶ ὡς
ἢ $ΑΝ$ πρὸς $ΝΖ$ (1 τῆ 5'). Κοινὸν γὰρ ἐκατέρῳ τῶν
ὀρθογωνίων τούτων τὸ ὕψος $ΕΑ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ε΄.

Σχημ. 18. Εἰάν Κῶνος οἰοσθῇ ὁ $ΑΒΔ$ ἐπιπέδῳ τμη-
θῇ διὰ τῆ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ
ἐπιπέδῳ, τέμνοντι μὲν τὴν βάσιν τῆ Κῶ-
να κατ' εὐθεΐαν τὴν $ΜΘ$ πρὸς ἐξῆς ἕσταν

20) Τὸ ὑπὸ $ΒΑΔ$: $ΒΔ^2 = ΕΑΝ$: $ΕΝ^2$ · εἴγε

$ΒΑ$: $ΒΔ = ΕΑ$: $ΕΝ$ καὶ

$ΑΔ$: $ΒΔ = ΑΝ$: $ΕΝ$ · συνδέσει ἄρα (σημ. 23.)

$ΒΑ \times ΑΔ$: $ΒΔ \times ΒΔ = ΕΑ \times ΑΝ$: $ΕΝ \times ΕΝ$ ἢ τοῖ

$ΒΑΔ$: $ΒΔ^2 = ΕΑΝ$: $ΕΝ^2$.

τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ΒΔ, ἡ γμένω δὲ δι' εὐθείας τῆς ΝΚ μὴ ἔσῃς ἤδη παραλλήλε μιά τῶν πλευρῶν τῆ διατῆ ἄξονος τριγώνου ΒΑΔ, ἀλλὰ συμπίπτει τῇ μὲν, τέτων κατωτέρω τῆς τῆ Κώνη κορυφῆς κατάγετὸ Ν, τῇ δὲ ἀνωτέρω κατὰ τὸ Ξ· τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ἐπὶ τὴν διάμετρον τῆς τοιαύτης τομῆς καταγομένων εὐθειῶν ΜΚ, ΗΙ τετράγωνα, ἔσεται ὡς τὰ ὀρθογώνια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς κατὰ τὴν τομὴν διαμέτρου προσεκβαλλομένης ἐπὶ τὸ Ξ, τῶν ἀπολαμβανομένων ἀπ' αὐτῶν τῶν τεταγμένων ἕως ἑκατέρου τῶν Ν, Ξ περάτων τῆς κατὰ τὴν τομὴν διαμέτρου, ἥτοι ὡς τὰ ὑπὸ τῶν ΞΚΝ, ΞΙΝ. Καὶ ἐὰν τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν κατὰ κορυφὴν κειμένην κωνικὴν ἐπιφάνειαν προσεκβληθῇ, ἀναφυήσεται καὶ ἐν ἐκείνῃ τομῇ ὁμοία τῇ ΜΝΘ ἢ ΛΞη, ἐν ᾗ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ἐπὶ τὴν διάμετρον τετράγωνα εἴτε ἀλλήλοις, εἴτε τοῖς ἀπὸ τῶν ἐν τῇ ΜΝΘ τεταγμένων τετραγώνοις παραβαλλόμενα, ἔσεται ὡς τὰ ὀρθογώνια

τὰ ὑπὸ τῶν τῆς διαμέτρου τμημάτων τῶν μεταξὺ αὐτῶν τῶν τεταγμένων ἢ ἑκατέρας τῆς κορυφῆς Ε, Ν περιεχόμενα.

Καλείδω δὲ ἑκατέρα μὲν τῶν τοιούτων τομῶν Τ ΠΕΡΒΟΛΗ· πρὸς ἀλλήλας δὲ τομαὶ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑΙ· ἡ δὲ ΝΕ μέρος ἕσα τῆς διαμέτρου μεταξὺ τῶν δυεῖν κορυφῶν ἀπολαμβάνομενον· καλείδω πλευρὰ ΠΛΑΓΙΑ.

Ἦχθω γὰρ διὰ τῆ Ι σημεῖα (καθ' ὃ οἰαδή- τις τεταγμένη ΗΙ συμβάλλει τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς.) ἡ εὐθεῖα ΠΙΤ τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ΒΔ παράλληλος· ἔσι δὴ καὶ ἡ ΗΙ παράλληλος τῇ ΜΚ. Τὸ ἄρα διὰ τῶν ΗΙ, ΠΙΤ, ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΜΚ, ΒΔ, τῷ ἐστὶ τῇ βάσει τῆ κώνη (15 τῆ ΙΑ'). Κύκλος ἄρα ἔστιν ἡ τομὴ ΠΗΤ (Προτασ. Α'), ἡ διάμετρος ἡ ΠΙΤ. ἢ ἔστιν ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΗΙ. Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΙ, ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΙΤ. τῷ ἐστὶν ὡς τὸ ΒΚΧΚΔ πρὸς τὸ ΠΙΧΙΤ. Α'λ' ὁ λόγος τῆ ΒΚΧΚΔ πρὸς τὸ ΠΙΧΙΤ συγκείται ἐκτε τῆ, ὃν ἔχει ἡ ΒΚ πρὸς ΠΙ, τῷ ἐστὶν ἡ ΕΚ πρὸς ΕΙ (ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα ΒΕΚ, ΠΕΙ) ἢ ἡ ΚΔ πρὸς ΙΤ, τῷ ἐστὶν ἡ ΚΝ πρὸς ΝΙ (ὅμοια γὰρ ἢ τὰ τρίγωνα ΚΝΔ, ΙΝΤ.). Ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν λίγων, τῷ ἐστὶ τῆ τῆς

ΕΚ πρὸς ΕΙ, καὶ τῆς ΚΝ πρὸς ΝΙ σύγκειται καὶ ὁ τῆ ΕΚΝ πρὸς τὸ ΕΙΝ (23 τῆ 5. ἢ σημ. 24). ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΙΤ, ἔτω τὸ ὑπὸ τῶν ΕΚΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΙΝ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΙΤ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ, ἔτω τὸ ὑπὸ τῶν ΕΚΝ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΙΝ (26). Τὸ αὐτὸ δὴ δειχθήσεται καὶ περὶ τῶν ἐν τῇ τομῇ ΛΞη τεταγμένων (27)· ὁμολον ἄρα τὸ προτεθέν.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Εἰ ἂν γένηται ὡς ἡ ΚΝ πρὸς ΚΜ, ἔτως ἡ ΚΜ πρὸς ζητεμένην τὴν ΚΧ, ἢ εὐρεθεῖσα ἡ ΚΧ, συναφθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ΚΝ πρὸς τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ Κ, ἐπιζευχθεΐσης τε τῆς ΕΧ, ἀχθῶσιν ἐπ'

26) Δειχθεῖν ἂν ἢ ἔτως ἡ Πρότασις.

Ἐπεὶ ἔστιν $BK:PI=KE:EI$

καὶ $KΔ:IT=KN:NI$, ἔσται δὲ (σημ.

23.) ἢ $BK \times KΔ:PI \times IT=EK \times KN:EI \times IN$. ἀλλὰ $BK \times KΔ:PI \times IT=MK^2:HI^2$, ἄρα $MK^2:HI^2=EK \times KN:EI \times IN$.

27) Εἰν ταῖς ἀντικειμέναις τομαῖς ΜΝΘ, ΛΞη ἔσται $HI^2:ηΓ^2=ΕΙΝ:ΕΙΝ$. Ἀχθείσης γὰρ διὰ τῆ σημείου, τῆς εὐθείας πιυ παραλλήλου τῇ διαμέτρῳ τῆς τῆ Κώνυς ΑΒΔΘ βάσεως, ἢ διὰ τῶν πιυ, ἢ λ παραλλήλων τοῖς ΒΔ, ΜΚ διαχθὲν ἐπίπεδον τὸ πιυ, ἔσται, παράλληλον τῇ βάσει τῆ Κώνυς ΑΒΔΘ (15. τῆ ΙΔ.) ὁμοῦς ὡς ἡ γωνία πιυ (14. σημ.) ὅθεν $HI^2:ΠΙΓ^2=ηΓ^2:πιυ$ (Προτ. Α. τῆς Δ'). Ἐπεὶ ἐπὶ παραλλήλοις αἰεὺθεΐαις πιυ, ΤΠ, τὰ τρίγωνα ἄρα εἰΝυ, ΙΝΤ ὅμοια· ὅμοια δὲ καὶ τὰ ΙΠΞ, εἰΞ· ἄρα

αὐτὴν αἱ ΝΖ, ΙΣ τῇ ΝΚ παράλληλοι, ἡ διὰ τῆς κορυφῆς Ν ἀχθεῖσα ΝΖ ἔσεται πλευρὰ ὀρθία ἡτοι παράμετρος Τ' περβολῆς, ἥς ἴδιον τὸ ὥσπερ τὸ ὑπὸ τῆς ΚΜ μέσης ἀναλόγου τῶν ΝΚ, ΚΧ, τετράγωνον ἐξισοῦται τῷ ὀρθογωνίῳ ΝΚΧ, παρακειμένῳ μὲν παρὰ τὴν παράμετρον ΝΖ ὑπερβάλλοντι δὲ τῷ ὑπὸ ΖΦΧ εἶδει ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ ΞΝΖ, περιεχομένῳ ὑπότε τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΞΝ, καὶ τῆς ὀρθίας ΝΖ. ἔτω δὲ καὶ τὸ ἀφ' οἷα σὺν ἄλλῃς τεταγμένης ΗΙ τετράγωνον ἐξισοῦται τῷ ὀρθογωνίῳ ΝΙΣ παρακειμένῳ μὲν παρὰ τὴν αὐτὴν παράμετρον ΝΖ, ἀλλὰ (ἀχθείσης τῆς ΖΡΦ, παραλλήλῃ τῇ ΝΚ, καὶ τεμνύσης τὰς ΙΣ, ΚΧ κατὰ τὰ Ρ, Φ.) ὑπερβάλλοντι εἶδει τῷ ΖΡΣ ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ αὐτῷ ὑπὸ ΞΝΖ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΚΧ πρὸς ΙΞ ἔστιν ὡς ἡ ΚΞ πρὸς ΞΙ, προσκειμένῳ κοινῇ τῇ λόγῳ ΚΝ πρὸς ΝΙ, ἔσεται τὸ ὑπὸ ΝΚΧ πρὸς τὸ ΝΙΣ, ὡς τὸ ὑπὸ ΞΚΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΙΝ (28), ἢ ὡς τὸ

$$ΤΙ : υι = ΙΝ : ι Ν$$

$$\text{καὶ } ΙΠ : ι τ = ΙΞ : ι Ξ \cdot \text{συνδέσει ἄρα (σημ. 23.)}$$

$$ΠΙΤ : τ ι υ = ΞΙΝ : Ξ ι Ν.$$

$$Εὔρι δὲ ΠΙΤ : τ ι υ = ΗΙ² : η ι²$$

ἄρα $ΗΙ² : η ι² = ΞΙΝ : Ξ ι Ν$ ὅπερ ἦν τὸ δευτέρου μέρος τῆς Προτάσεως. Ἐὰν ἄρα Κῶνος οἰσῶν κ τ.

$$28) \text{ Ἐπεὶ γὰρ ἔστι } ΧΚ : ΣΙ = ΞΚ : ΞΙ$$

$$\text{καὶ } ΚΝ : ΙΝ = ΚΝ : ΙΝ$$

$$\text{ἔστι δὲ καὶ (σημ. 23.) } ΧΚ \times ΚΝ : ΣΙ \times ΙΝ = ΞΚ \times ΚΝ : ΞΙ \times ΙΝ$$

$$\text{ἡτοι } ΝΚΧ : ΝΙΣ = ΞΚΝ : ΞΙΝ.$$

ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ (διὰ τὴν παρῶσαν Πρότα-
σιν). Ἐστὶ δὲ (ἐκ κατασκευῆς) τὸ ἀπὸ ΜΚ ἴσον τὸ
ὑπὸ ΝΚΧ, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΗΙ ἴσον τῷ ὑπὸ ΝΙΣ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Ὡσαύτως εἰάν γένηται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΒ, ὅ-
τως ἡ ΚΔ πρὸς ζητεμένην τὴν ΚΧ, συναφθείσης
τῆς ΚΧ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΝΚ ὡς ἀνωτέρω καὶ ἐπι-
ζευχθείσης τῆς ΕΧ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ν ἐπὶ τὴν
ΕΧ ἀχθείσα ΝΖ παράλληλος τῇ ΚΧ, ἔσται τῆς
ὑπερβολῆς πλευρὰ ὀρθία ἥτοι παράμετρος. Τὸ γὰρ
ὑπὸ τῶν ΝΚ, ΚΧ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔ-
σαι τῷ ὑπὸ τῶν ΒΚΔ. ἴσον ἄρα καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΚ
τετραγώνῳ (Πορ. ποιγ.). ὅθεν καὶ τὸ ὑπὸ ΝΙΣ, ἴ-
σον τῷ ἀπὸ ΗΙ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Καὶ ἔτι ἀχθείσης διὰ τῆς κορυφῆς Ν τῆς εὐ-
θείας ΝΕ παρὰ τὴν ΒΔ, εἰάν γένηται ὡς ἡ ΝΚ
πρὸς ΚΔ, ὅτως ἡ ΕΝ πρὸς τειάρτην ἀνάλογον
τὴν ΝΖ, ἡ τετάρτη δὲ αὕτη ἔσται τῆς ὑπερβολῆς
Παράμετρος. Ἀχθείσης γὰρ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ

$$\alpha\lambda\lambda\alpha \text{ ΕΚΝ} : \text{ΕΙΝ} = \text{ΜΚ}^2 : \text{ΗΙ}^2. \text{ ἄρα}$$

$$\text{ΜΚ}^2 : \text{ΗΙ}^2 = \text{ΝΚΧ} : \text{ΝΙΣ} \text{ (Προτ. παρεσ.)}.$$

ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΜΚ τῷ ὑπὸ ΝΚΧ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ
ΗΙ τῷ ὑπὸ ΝΙΣ.

προσεκβληθείσης ἕως ὅτε συμπίσῃ ταῖς τῇ ΝΖ παραλλήλοις ΙΣ, ΚΧ κατὰ τὰ Σ, Χ, ἔσται (διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΒΕΚ, ΚΕΧ, ΝΞΕ) ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΕΝ, ἢ ἡ ΚΧ πρὸς ΝΖ, ἔτως ἡ ΚΞ πρὸς ΕΝ. ὁθεν ἡ ΒΚ πρὸς ΚΧ ἔσαι ὡς ἡ ΕΝ πρὸς ΝΖ (11 τῷ Ε'), ἢ ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΔ (ἐξ ὑποθέσεως). ἢ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΔ, ὅπερ ἐσὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΚ, ἐξισωθήσεται τῷ ὑπὸ τῶν ΝΚ, ΚΧ ὡς ἀνωτέρω. Ἡ ἄρα τῇ ΚΧ παράλληλος ΝΖ ἔσται Παράμετρος (Πορ. Α').

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Ἀχθείτης ἀπὸ τῆς τῷ Κώνε κορυφῆς Α ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῷ ἄξονος τριγώνε τῆς ἐνδείας ΔΟ παραλλήλῃ τῇ ΝΚ, ἐπεὶ ἐστὶ διὰ τὰ δείχθεντα ἐν τῷ προηγμένῳ Πορίσματι ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΕ, ἔτως ἡ ΚΔ πρὸς ΝΚ, ἢ τῷ ἡ ΔΟ πρὸς ΟΑ (διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΔΚΝ, ΔΟΑ ὁμοιότητα). ἢ δὲ ΝΕ πρὸς ΝΞ, ὡς ἡ ΒΟ πρὸς ΟΑ (διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΝΞΕ, ΟΑΒ τριγώνων). Ἡ ἄρα ΝΖ πρὸς ΝΞ λόγον ἔξει τὸν συγκαίμενον ἐκ τῷ τῆς ΔΟ πρὸς ΟΑ, ἢ τῷ τῆς ΒΟ πρὸς ΟΑ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ΔΟΒ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΟΑ τετράγωνον (29). ὁθεν ἐλὼν ποιηθῇ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς

$$\begin{aligned} 29) \text{ Ἐπειὶ ἐστὶ } & \text{ZN} : \text{NF} = \text{AO} : \text{OA} \\ & \text{καὶ NE} : \text{NX} = \text{OB} : \text{OA}. \end{aligned}$$

ΟΑ τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΟΒ ὀρθογώνιον, ἔτις ἡ πλάγια πλευρὰ ΝΞ πρὸς ζητεμένην τὴν ΝΖ. ἡ ΝΖ ἔτις εὐρεθεῖσα, ἔσεται πλευρὰ ὀρθία ἡτοι Παράμετρος.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε΄.

Α' χθείσης ὡσαύτως ἀπὸ τῆς τε Κώνη κορυφῆς Α, τῆς εὐθείας ΑΤ παραλλήλη μὲν τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ΒΔ, συμβαλέσης δὲ τῇ πλάγια πλευρᾷ κατὰ τὸ Τ, ἔσεται τὸ ὑπὸ ΞΤΝ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ τετράγωνον, ὡς ἡ

ἔσεται δὴ χ $ZN \times NE : \Xi N \times NE = \Delta O \times OB : O A \times$
 $O A$ (σημ. 23.) χ τῆς ΝΕ κοινῆ ὕψος λαμβανομένης, τὸ ὑπὸ ΖΝΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΝΕ εἰσι ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΞ (1. τῆς ζ.) χ ἡ ΖΝ πρὸς ΝΞ ὡς τὸ ὑπὸ ΔΟΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΑ. ἡ ΖΝ ἄρα πρὸς τὸν ΝΞ λόγον ἔχει τὸν συγ-
 κείμενον ἐκ τῶν $\begin{cases} \Delta O : O A \\ O B : O A \end{cases}$

30 Α' λ λ ω ς. Ο' ἐκ τῶν ΖΝ: ΝΕ χ ΝΕ: ΝΞ συγ-
 κείμενος λόγος, εἰς ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον ΖΑ $\times$ ΝΕ πρὸς τὸ ΞΑ $\times$ ΝΞ· ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΝΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΝΕ εἰσι ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΞΝ (1. τῆς ζ.) ἄρα ἡ ΖΝ πρὸς ΞΝ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῆς τῆς ΖΝ: ΝΕ, χ τῆς τῆς ΝΕ: ΝΞ. Ἐπεὶ δὲ εἰσι ΖΝ: ΝΕ = ΔΟ: ΟΑ, χ ΝΕ: ΝΞ = ΟΒ: ΟΑ, ἄρα ἡ ΖΝ: ΝΞ, λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῆς τῆς ΔΟ: ΟΑ, χ τῆς τῆς ΟΒ: ΟΑ· ἀλλὰ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν αὐτῶν λόγων ἔχει χ τὸ ὑπὸ ΔΟΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΑ (σημ. 24.)· ἄρα ΖΝ: ΝΞ = ΔΟΒ: ΟΑ².

ὁ λόγος τῆς ΚΧ πρὸς ΚΞ, ὅτε τῆς ΣΙ πρὸς ΙΞ, ἔσιν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ὀρθίας ὡλευράς ΝΖ πρὸς τὴν πλαγίαν ΝΞ (ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα ΕΚΧ, ΕΙΣ, ΕΙΝ.). Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν τεταγμένων ΜΚ, ΗΙ τετράγωνα πρὸς τὰ ὑπὸ τῶν αὐταῖς ἀντιστοιχούντων τμημάτων τῆς διαμέτρου περιεχόμενα ὀρθογώνια ΕΚΝ, ΕΙΝ, ἔσιν ὡς ἡ παράμετρος ἦται ὀρθία πλευρὰ ΝΖ πρὸς τὴν πλαγίαν ΝΞ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ 5.

Εἰάν Κῶνος οἰοσθῇ ΑΒΜΔ ἐπιπέδῳ τε- σχημ. 19.
τμημένος διὰ τῆ ἄξονος, τμηθῇ αὖτις
ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ, διηγμένῳ μὲν δι' εὐθείας
τῆς ΜΚΘ πρὸς ὀρθὰς ἕσσης τῇ διαμέ-
τρῳ τῆς βάσεως τῆ Κῶνος ἢ καὶ ἐτέρας ΗΙ
πρὸς ὀρθὰς ἕσσης τῇ διαμέτρῳ τῆ τῇ βά-
σει παραλλήλῃς κύκλῃς, συμπίπτουσι
δὲ ἑκατέρᾳ τῶν πλευρῶν τῆ διὰ τῆ ἄ-
ξονος τριγώνῃ κατωτέρῳ τῆς τῆ Κῶνος
κορυφῆς Α κατὰ τὰ σημεῖα Ν, Ξ. Τὰ
ἀπὸ τῶν ἐν τῇ τοιαύτῃ τομῇ τεταγμέ-
νων ΜΚ, ΗΙ τετράγωνα ἔσεται ὡς τὰ
ὀρθογώνια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τῆς
διαμέτρου τμημάτων τῶν μεταξὺ αὐτῶν
τε τῶν τεταγμένων καὶ ἑκατέρῃ τῶν ση-

μείων Ξ , N . ἦτοι ὡς τὰ ὑπὸ τῶν $\Xi K N$, $\Xi I N$. Ἡ δὲ τοιαύτη τομὴ εἴαν μήτε παράλληλος ἢ τῇ βάσει τῆς $K \omega \nu \eta$, μήτε ὑπεναντίως ταύτῃ κειμένη, ἢ ἐπομένως μήτε κύκλος, καλείσθω εἰδικῶ ὀνόματι *ΕΛΛΕΙΨΙΣ*, ἣς πλαγία πλευρά ἐστὶν ἡ $N \Xi$.

Ἀχθείσῃς διὰ τῆς I , καθ' ὃν τετραγμένη τις ἡ HI συμβάλλει τῇ διαμέτρῳ $N \Xi$, τῆς εὐθείας $PI T$ παραλλήλως τῇ $B \Delta$ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τῆς $K \omega \nu \eta$, τὸ διὰ τῶν εὐθειῶν $PI T$, $HI \Lambda$, ἐπίπεδον ὡς τῇ βάσει τῆς $K \omega \nu \eta$ παράλληλον (15 τῆς IA'), ποιήσει τομὴν τὸν $PI T$ κύκλον (Προτ. A'). Ὅθεν τὸ ἀπὸ τῆς $M K$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HI , ἔσεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν $B K \Delta$ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $PI T$. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ $B K \Delta$ πρὸς τὸ ὑπὸ $PI T$ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῆς $B K$ πρὸς PI . καὶ τῆς $K \Delta$ πρὸς IT , ἢ ὁ μὲν τῆς $B K$ πρὸς PI ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς $K \Xi$ πρὸς ΞI (εἶγε τὰ τρίγωνα $B \Xi K$, $PI \Xi I$, ὅμοια)· ὁ δὲ τῆς $K \Delta$ πρὸς IT ταὐτὸς τῷ τῆς $K N$ πρὸς NI (ὅμοια γὰρ καὶ τὰ τρίγωνα $K N \Delta$, $IN T$), τὸν δὲ ἐκ τῶν τῆς $K \Xi$ πρὸς ΞI ἢ τῆς $K N$ πρὸς NI συγκείμενον ἔχει ἢ τὸ ὑπὸ $\Xi K N$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\Xi I N$. ἄρα τὸ ὑπὸ $B K \Delta$ πρὸς τὸ ὑπὸ $PI T$ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ $\Xi K N$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\Xi I N$. Ἀλλ' (εἰρηγεται ἀνωτέρω) ὡς τὸ ὑπὸ $B K \Delta$ πρὸς τὸ ὑπὸ $PI T$,

ἔτω τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ, ἔτω τὸ ὑπὸ ΞΚΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΙΝ. Ἡ δειξις τῆς παρέσης Προτάσεως εἰν ἡ αὐτὴ τῇ τῆς προηγμένης.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Εἴαν γένηται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΜ ἔτως ἡ ΚΜ πρὸς ζητημένην τὴν ΚΧ, ἡ περιφρασσαμένη ἡ ΚΧ συντεθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ΝΞ πρὸς τῷ σημείῳ Ι, ἐπιχειρῶσα δὲ ἡ ΞΧ τέμνῃ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς παραλλήλως τῇ ΚΧ ἀχθεῖσαν ΝΖ κατὰ τὸ Ζ, ἀχθεῖ δὲ προσέτι ἡ ΙΣ τῇ μὲν ΚΧ παραλλήλως, οἰαδήτινι δὲ ἑτέρα τε ταγμένη ΗΙ συσχηῶσα, ἡ ΝΖ ἔσεται πλευρὰ ὀρθία ἤτοι Παράμετρος τῆς τοιαύτης τομῆς. Ἐν ἣ τὰ ἀφ' οἰωνδῆποτε τεταγμένων ΜΚ, ΗΙ τετράγωνον ἐξισωθήσεται τοῖς συσχηῶσιν ὀρθογωνίοις ΧΚΝ, ΣΙΝ παρὰκειμένοις μὲν παρὰ τὴν ὀρθίαν πλευρὰν ΝΖ, ἀλλ' (ἀχθεῖσας παρὰ τὴν ΝΞ τῆς εὐθείας ΖΡΦ, ἡ τεμνέσας τὰς ΙΣ, ΚΧ προαχθεῖσας κατὰ τὰ Ρ, Φ) ἐλλείψῃ τοῖς ὑπὸ ΧΦΖ, ΣΡΖ, ὁμοίοις ἡ ὁμοίως κειμένοις τῷ ὑπὸ τῆς πλάγιας πλευρᾶς ἡ τῆς ὀρθίας περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ΞΝΖ (32). Δείκνυ-

32) Τὸ ὑπὸ ΧΚΝ+ΦΧΧΚΝ ἴσον εἰσι τῷ ὑπὸ ΦΚΝ· (1. τῆ Β.). Ἐπειδὴ $\Phi\chi < \chi\chi = \chi\phi\chi$ εἴγε ἡ $\chi\phi = \tau\epsilon\chi$ ΚΝ) ἄρα $\chi\chi\chi + \chi\phi\chi = \phi\chi\chi$, ὅθεν $\chi\chi\chi = \phi\chi\chi$ ἢ $\chi\phi\chi$ · ἤτοι τὸ ὀρθογώνιον ΧΚΝ ἐλλείπει τῷ $\phi\chi\chi$ ἢ

ται ταῦτα ὁμοίως τοῖς ἐν τῷ Α'. Πρίσματι τῆς προηγμένης Προτάσεως. Διαφέρει δὲ ταῦτα ἐκείνων, ὅτι ἐκεῖ μὲν τὰ παρὰ τὴν ὀρθίαν πλευρὰν παρακείμενα ὀρθογώνια, οἷς ἐξισῆται τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα, ὑπερβάλλει, ἐνταῦθα δὲ ἐλλείπει εἶδεσιν ὁμοίοις καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ὑπὸ τῆς ὀρθίας καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. παρ' ὃ δὴ καὶ ἠκύσεν ἐκείνη μὲν ἡ τομὴ, Γ' - περβολή· αὕτη δὲ Ε' ἀλλοιότης.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Ὡσαύτως εἰάν γένηται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΒ, ἔτι καὶ ἡ ΚΔ πρὸς τετάρτην ζητούμενην τὴν ΚΧ, ἐπιζευχθεῖσα, κατὰ τὰ ἐν τῷ Β'. Πρίσματι τῆς προηγμένης, ἡ ΕΧ, διορίσει τὴν Παράμετρον ΝΖ, ἡγμένην παρὰ τὴν ΚΧ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ὅμοίως εἰάν γένηται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΔ, ἔτι καὶ ἡ ΝΕ τῇ ΒΔ παράλληλος πρὸς ζητούμενην τὴν ΝΖ,

τῇ ΚΝΖ τῷ ὑπὸ ΧΦΖ, ἧς ἡ διάμετρος ΧΖ ἐστὶ μέρος τῆς ΕΖ, διαμέτρου τῆς ὀρθογωνίης ΕΝΖ· ὅθεν τὸ ὀρθογώνιον ΧΦΖ ὁμοιόνηται τῷ ΕΝΖ ὀρθογώνιῳ (26. τῇ ε'.) Ὁμοίαν εὐλόγῳ δευχθήσεται ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ ΣΙΝ ἰσούται τῷ ΡΙΝ, ἢ τῷ ΙΝΖ τῷ ΣΡΖ ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΕΝΖ.

ποριζήσεται ἢ ἔτις ἡ Παράμετρος κατὰ τὰ ἐν τῷ Γ'. Πορίσματι τῆς προηγμένης.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Ἀχθείσης δὲ ἀπὸ τῆς τῆ Κώνε κορυφῆς Α παρὰ τὴν ΝΚ τῆς ΑΟ, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΟΒ, ὡς ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΝΖ, τῆς ἔσιν ἡ πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς ἐν τῷ Δ'. Πορίσματι τῆς προηγμένης.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε'.

Ὡσαύτως ἀχθείσης ἀπὸ τῆς κορυφῆς παρὰ τὴν ΒΔ τῆς εὐθείας ΑΤ ἢ συμπεσέσης τῇ ΞΝ κατὰ τὸ Τ, ἔσεται τὸ ὑπὸ ΞΤΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ, ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΝΞ πρὸς τὴν ὀρθίαν ΝΖ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α ς'.

Τέλος δὲ τὸ ἀφ' οἵασδήποτε τεταγμένης τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἔσεται ὡς ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν (ἦτοι $KM^2 : \Xi KN$ ἢ $HI^2 : \Sigma IN$, ὡς $NZ : N\Xi$), ὥσπερ ἐν τῷ ς'. Πορίσματι τῆς προηγμένης.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ'.

Εἴαν ἀπὸ τῆ αὐτῆς Κώνε ΑΒΔ δύο ἢ καὶ Σχημ. 20.
πλείεις Παραβολαὶ, ἢ Ὑπερβολαὶ ἢ 21. 22.

Εἰ μὲν οὖν ὑπὸ ἀλλήλοις παραλλήλων ἐπιπέδων ἀποτμηθῶσιν, αἱ καὶ αὐταὶ Παράμετροι ἦτοι ὀρθαὶ πλευραὶ ΝΖ, ΥΤ ἀνάλογον ἔσεται ταῖς αὐτῶν ἀπὸ τῆς τε Κώνη ἄχρι τῶν κατὰ τὰς τομὰς κορυφῶν Ν, Υ διασάσεσιν, ἦτοι ὡς ἡ ΝΑ πρὸς τὴν ΥΑ.

Εἰπεὶ γὰρ κατὰ τὸ Β'. Πόρισμα τῆς Δ'. καὶ τὰ Πορίσματα τῆς Ε'. καὶ τῆς Ζ., ἔσιν ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΔ, ἕτως ἡ ΝΕ πρὸς τὴν Παράμετρον ΝΖ (33), ἔσεται δὴ ὡσαύτως καὶ ὡς ἡ ΤΟ πρὸς ΟΔ, ἕτως ἡ ΠΥ πρὸς ΥΤ Παράμετρον τῆς ἐτέρας τομῆς παραλλήλης τῇ προτέρᾳ. Καὶ ἐπεὶ δὴ ὁ λόγος τῆς ΝΚ πρὸς ΚΔ ἔσιν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΤΟ πρὸς ΟΔ (παραλλήλος ἡ ΝΚ τῇ ΤΟ). ἔσαι ἄρα ὁ λόγος

33) Ὅτι μὲν ἐν τῇ Παραβολῇ καὶ Ὑπερβολῇ ἡ ΝΚ:ΚΔ ἔσιν ὡς ΝΕ:ΝΖ δῆλον ἐκ τῶν ἀνακλεσθέντων Πορισμάτων. ὅτι δὲ τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐν τῇ 22 σχήματι τῇτ' ἐστὶν ἐν τῇ Εἰσέξει, δείκνυται ἕτω: Ληφθέντος ἐπὶ τῆς ΝΞ διαμέτρου τῆς Εἰσέξεως ΜΝΘ τῇ σημείῳ κ, ἡχθῶ δὲ αὐτῇ τῇ ΒΔ διαμέτρῳ τῆς βάσεως παραλλήλος εὐθεῖα ἡ βκδ· διὰ δ' αὐτῆς καὶ τῆς ΜΚ τεταγμένης ἵπται τὴν ΝΞ διάμετρον διήχθῳ ἐπίπεδον τὸ βμδθ, καὶ ἡ τομὴ ἔσεται κύκλος· ὅθεν Νκ:κδ=ΕΝ:ΝΖ (Πορις. Γ'. τῆς Ζ.). Ἐστὶ δὲ καὶ ΝΚ:ΚΔ=Νκ:κδ· ἔσων τῶν ΒΔ, βδ παραλλήλων· ἄρα ΝΚ:ΚΔ=ΝΕ:ΝΖ.

τῆς ΕΝ πρὸς ΝΖ ταύτῃ τῇ ΠΤ πρὸς ΤΤ (11 τῆ Ε'). ἢ ἐναλλάσσοντι ἔσαι ὡς ἡ ΝΖ πρὸς ΤΤ ἔτιωσ ἡ ΕΝ πρὸς ΠΤ. ἀλλ' ὡς ἡ ΕΝ πρὸς ΠΤ, ἔτιωσ ἡ ΝΑ πρὸς ΤΑ (Πορ. 1 τῆς 4 τοῦ 5'). ὡς ἄρα ἡ ΝΖ πρὸς ΤΤ, ἔτιωσ ἡ ΝΑ πρὸς ΤΑ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ε'πει ἐπίτε τῆς ὑπερβολῆς καὶ Ε'λείψεως ἢ αἱ πλάγιαί πλευραὶ ΕΝ, ΤΑ εἰσὶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῷ τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆ Κώνῃ ἕως τῶν Ν, Τ διαστάσεων ΑΝ, ΑΤ, ἔσῳν τῶν ΝΞ, ΛΤ παραλλήλων, ἔσονται ἄρα αἱ ὀρθαὶ πλευραὶ ΝΖ, ΤΤ, ταῖς πλαγίαις ΝΞ, ΛΤ ἀνάλογον. Δι' ὃ δὴ αἱ παραλλήλοις ἐπιπέδοις ἀπὸ τῆ αὐτῆς Κώνῃ ἀποτεμνόμεναι ὑπερβολικαὶ ἢ ἐλλειπτικαὶ τομαί, ἐκάστη πρὸς τὸ ἑαυτῆς εἶδος παραβαλλόμεναι, λέγονται ὅμοιαι. Παραβολαὶ δὲ ὁποιαυδήποτε αἰ εἰσιν ὅμοιαι. Οὗσης γὰρ τῆς διαμέτρου μιᾶ τῶν πλευρῶν τῆ διὰ τῆ ἄξονος τριγώνου παραλλήλου, ἐπιπέδοις αἰ παραλλήλοις ἀπογεννῶνται.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Η'.

Ἐὰν οἷασδήποτε κωνικῆς τομῆς ἡ ὀρθία σχημ. 23. πλευρὰ ΝΖ πρὸς ὀρθὰς ἔσα τῇ διαμέ- 24. 25. τρῳ, δίχα τμηθῇ κατὰ τὸ Ρ, ἀπὸ δὲ τῆ

Ρ, ἀχθῆ ἢ ΡΤ, ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ
(χημ. 23.) τῇ διαμέτρῳ παράλληλος,
ἐν δὲ ταῖς λοιπαῖς τομαῖς (χημ. 24. 25.)
ἔτως ὥς τὴν διάμετρον δίχα κατὰ τὸ
Γ τεμεῖν, τὸ ἀφ' οἷα σδὴ ποτε τεταγμέ-
νης ΜΚ τετράγωνον, διπλάσιον ἔσαι
τῇ ἀντιστοιχῆντος αὐτῷ τετραπλεύρῳ
ΚΤΡΝ, ὅπερ ὑπὸ τῆς ΚΤ καὶ τῶν μικρῶ
ὑπερον ὀνομασθεσμένων πλευρῶν περι-
έχεται.

Ἀχθεῖσα γὰρ ἡ ΖΒ ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ
τῇ διαμέτρῳ παράλληλος, ἐν δὲ ταῖς λοιπαῖς το-
μαῖς ἔτως, ὥς τὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς πέρας
Ξ, καὶ τὸ τῆς ὀρθίας Ζ ἐπιζευγνύειν, ἔσαι ἐν πά-
σαις ταῖς τομαῖς παράλληλος τῇ ΡΤ, ἥτις ἐν μὲν
τῇ Παραβολῇ ἐστὶν ἐκ κατασκευῆς τῇ διαμέτρῳ πα-
ράλληλος, ἐν δὲ τῇ Τ'περβολῇ καὶ Ε'μείψει δίχα
τέμνει, τὴν μὲν ΝΞ κατὰ τὸ Γ, τὴν δὲ ΝΖ κα-
τὰ τὸ Ρ (34). Ἐπιζευχθεῖσα δὲ καὶ ἡ ΝΒ, δίχα
τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΡΤ κατὰ τὸ Σ, ὥσπερ ἡ

34) Ἐστὶ γὰρ ἡ ΝΕ = τῇ ΓΞ, ἥτε ΝΡ = τῇ ΡΖ·
ὁθεν ΝΓ : ΓΞ = ΝΡ : ΡΖ· ἡ ἄρα ΕΖ παράλληλός ἐστι τῇ
ΓΡ (2. τοῦ ζ'). Προηκται δὲ ἡ μὲν ΒΖ ἐπ' εὐθείας τῇ
ΖΞ, ἡ δὲ ΡΤ ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΡ· ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῇ ΡΤ,
παράλληλος.

ΝΖ κατὰ τὸ Ρ (35). Τὰ τρίγωνα ἄρα ΝΡΣ, ΣΒΤ ὡς ἔχοντα τὰς κατὰ κορυφὴν πρὸς τῷ Σ γωνίας, καὶ τὰς ἐντὸς τῶν παραλλήλων ἐναλλάξ ΝΡΣ, ΒΤΣ καὶ ΡΝΣ, ΤΒΣ ἴσας ἐκάστην ἐκάστη, καὶ μίαν πλευρὰν τὴν ΝΣ μιᾷ πλευρᾷ τῇ ΣΒ ἴσην, ἔσιν ἀλλήλοις ἴσα (29 τῷ Α'). Κοινὴ δὲ ὁρκεῖ- μένη τῇ χωρίῳ ΝΣΤΚ, γίνεται τὸ ΒΝΚ τρίγω- νον τῷ ΝΡΤΚ τετραπλεύρῳ ἴσον. Ἐς δὲ ἐκ τῆς γενέσεως τῶν τομῶν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τετράγω- νον τῷ ὑπὸ τῶν ΝΚΒ ὀρθογωνίῳ ἴσον (36). Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΝΚ, ΚΒ διπλάσιόν ἐστι τῷ ΒΝΚ τρι- γώνῳ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΚ τετράγωνον διπλά- σιόν ἐστι τῷ ΚΤΡΝ τετραπλεύρῳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Καλείδω τὸ μὲν σημεῖον Γ (ὅπερ ἐν τῇ Τ'- περβολῇ καὶ Ε'λείψει ἐστὶ σημεῖον τῆς διχοτομίας τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΝΒ) *ΚΕΝΤΡΟΝ* τῶν το- μῶν τέτων· ἡ δὲ εὐθεῖα ΕΖ, ἡ ΖΒ, *ΔΙΕΤΘΕ- ΤΟΤΣΑ*· ἡ δὲ ΓΡ ἡ ΡΤ καλοῦτ' ἂν καὶ ἐπὶ τῆς Παραβολῆς *ΤΠΟΔΙΕΤΘΕΤΟΤΣΑ*.

35) Ε'πεὶ ἐστὶν ἡ ΡΣ τῇ ΒΖ παράλληλος, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΝΡ πρὸς ΡΖ, ἔσως ἡ ΝΣ πρὸς ΣΒ· ἴση δὲ ἡ ΝΡ τῇ ΡΖ (ἐκ κατασκευῆς) ἴση ἄρα καὶ ΝΣ τῇ ΣΒ· ἡ ἄρα ΝΒ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΡΤ κατὰ τὸ Σ.

36) Ε'ν τῇ Παραβολῇ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΚΝΖ (Πορ. Α'. τῆς Α') καὶ ἐπὶ ΝΖ ἐστὶν ἴση τῇ ΚΒ, ἴσου ἄρα καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΝΚΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ. Τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ τῇ Τ'περβολῇ ὡς δῆλον ἐκ τῷ Α'. Πορίσματος τῆς Ε'. καὶ ἐν τῇ Ε'λείψει ὡς δῆλον ἐκ τῷ Α'. Πορίσματος τῆς Σ'.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἡ ὑπερχή, ἥ ὑπερέχει τὸ ἀφ' οἷα σδήποτε τεταγμένης ΠΤ τετράγωνον τῷ ἀφ' ἑτέρας τεταγμένης ΜΚ τετραγώνῳ, ἐστὶ διπλασία τῆς ὑπερχῆς ἥ ὑπερέχει τὸ ἀντιστοιχῆν τῷ πρώτῳ τετραγώνῳ τετράπλευρον ΝΡΧΤ, τῷ ἀντιστοιχῆντος τῷ δευτέρῳ τετραγώνῳ τετραπλεύρῳ ΝΡΤΚ, τῷ ἐστὶ διπλασία τῷ τετραπλεύρῳ ΚΤΧΤ. Ἡ δὲ ὑπερχή αὕτη, ἥ ἕτερον ἑτέρῳ τὰ τετράγωνα ὑπερέχει, ἀχθείσης τῆς ΜΘ παρὰ τὴν διάμετρον, ἔσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΠΘΔ ὀρθογώνιον (5 τῷ Β'). ὅπερ ἔσαι τῷ ΚΤΧΤ διπλάσιον (37).

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Θ'.

Κώνη τομῆς δοθείσης ἀπὸ τῷ ἐπὶ τῆς κατ' αὐτὴν περιμέτρῳ δοθέντος σημείου, ἐφαπτομένην εὐθεΐαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

37) $ΜΚ^2 = 2ΝΡΤΚ$ · καὶ $ΠΤ^2 = 2ΝΡΚΤ$ · ἄρα $ΠΤ^2 - ΜΚ^2 = 2ΝΡΧΤ - 2ΝΡΤΚ = 2ΚΤΧΤ$ · ἀλλὰ $ΠΤ^2 - ΜΚ^2 = ΠΘΔ$ (5. τῷ Β'). ἄρα $ΠΘΔ = 2ΚΤΧΤ$.

38) Πόρισμα. Ὅθεν ἔπεται ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς διὰ τῷ κέντρῳ τεταγμένης ἐπὶ τὴν διάμετρον κατηγμένης ΗΓΟ τετράγωνου ἴσους εἰσι τῷ ὑπὸ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΖ καὶ τῆς πλαγίας ΛΞ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ΕΝΖ. Γενομένη γὰρ τῇ σημείῳ Γ κατὰ τὸ Γ, τὸ τετράπλευρον ΝΤΧΡ ἀποχωρήσει εἰς τὸ τρίγωνον ΝΓΡ. Ὅθεν $ΗΓ^2 = 2ΝΓΡ = ΓΝ \times ΝΡ$ · καὶ $4ΗΓ^2 = 4ΓΝ \times ΝΡ = 4ΕΛ \times ΑΡ =$

Εἰ μὲν τὸ δοθὲν σημεῖον πρὸς τῇ κορυφῇ εἰ- Σχημ. 26.
 ρι τῆς τομῆς τὸ εἶναι πρὸς τῷ Ν, ἀχθεῖσα ἀπ' 27. 28.
 αὐτῆς ταῖς τεταγμέναις παράλληλος ἢ ΝΕ, ἐφά-
 ψεται τῆς τομῆς. Εἰ μὴ γὰρ, πεσεῖται ἄρα ἐν-
 τὸς, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ν ἐπὶ τρίτερα τῆς διαμέ-
 τρου κατασῆσεται χορδή. Ἡ δὲ διάμετρος ἄρα οὐ τέμ-
 νει διχα πάσας τὰς ἐν τῇ τομῇ παραλλήλους, ὅ-
 περ εἰσιν ἐναντίον τῇ πρώτῃ τῶν δευτέρων ὄρων.
 Οὐ πίπτει ἄρα ἐντός· ἐφάπτεται ἄρα, καὶ δῆλον
 ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

Εἰ δὲ τὸ δοθὲν σημεῖον εἴσιν ἐκτὸς τῆς κορυ-
 φῆς κατὰ τὸ Μ φέρε, ἀχθείσης τῆς ὑποδιευθε-
 τήσης ΡΤ, τετάχθων ἐπὶ τὴν διάμετρον τῆς το-
 μῆς, ἥτε ΜΚ καὶ ἡ ΚΤ τῇ ἡμιπαραμέτρῳ πα-
 ράλληλος, ἥτις δὲ προεκβληθεῖσα, συμπίπτει
 τῇ διευθετήσει κατὰ τὸ Τ· καὶ εὐρεθεῖσα τρί-
 τη συνεχῶς ἀνάλογον τῶν ΚΤ, ΚΜ ἢ ΚΘ, κεί-
 θω ἐπὶ εὐθείας ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τῆς διαμέτρου.
 Τύτων δ' ἔτω κατακευαθέντων, ἐπιζευχθεῖσα ἡ
 ΘΜ, ἐφάψεται τῆς τομῆς κατὰ τὸ Μ.

Ἀχθείσης γὰρ τῆς ΘΤ, τετάχθω ἐπὶ τὴν
 διάμετρον ἑτέρα τις ἡ ΗΛ συμβάλλουσα τῇ ΘΜ
 προεκβληθεῖση κατὰ τὸ Π· καὶ τῇ ΚΤ παράλ-
 ληλος ἀχθεῖσα ἡ ΛΤ συμπίπτει τῇ ὑποδιευ-

ΕΝΧΝΖ. Ἡ γὰρ ΝΖ τῆς ΝΡ εἰς διπλασία, ἡ τε ΕΝ
 τῆς ΝΓ· εἰς δὲ 4ΓΗ=ΗΟ². ἡ γὰρ ΗΟ διχα τέμνη-
 ται κατὰ τὸ Γ· ἄρα ΗΟ=ΖΝΧΝΞ.

Ζετήσῃ κατὰ τὸ Υ , καὶ τῇ $\Theta\Gamma$ προσεκβληθείσῃ
 κατὰ τὸ Δ . Καὶ ἔπει ἐκ κατασκευῆς αἱ $ΚΤ$, $ΚΜ$,
 $ΚΘ$ συνεχῶς ἀνάλογον, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ
 τῶν $\ThetaΚΤ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΚΜ$ τετραγώνῳ
 (16 τῆς ε'). Διπλάσιον ἄρα τοῦ τετραπλεύρου
 $NPTK$ (Προτ. Η'). Ἐστὶ δὲ τὸ αὐτὸ διπλάσιον
 καὶ τῷ τριγώνῳ $TK\Theta$, τὸ τρίγωνον ἄρα τῆτο ἴσον
 ἐστὶ τῷ τετραπλεύρῳ $NPTK$. Καὶ ἔπει ἐστὶν ὡς
 μὲν ἡ TK πρὸς $ΚΘ$, ἔτως ἡ $\Delta\Lambda$ πρὸς $\Lambda\Theta$. ὡς
 δὲ ἡ $ΚΘ$ πρὸς $ΚΜ$, ἔτως ἡ $\Lambda\Theta$ πρὸς $\Lambda\Pi$, ἔ-
 σονται δὴ καὶ αἱ $\Delta\Lambda$, $\Lambda\Pi$, $\Lambda\Theta$ συνεχῶς ἀνάλογον,
 ὥσπερ αἱ $ΚΤ$, $ΚΜ$, $ΚΘ$ (39). Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς
 $\Lambda\Pi$ ἴσον τῷ ὑπὸ $\Delta\Lambda\Theta$ (16 τῆς ε') τῆτ' ἐστὶ δι-
 πλάσιον τῷ τριγώνῳ $\Theta\Lambda\Delta$, ὥσπερ δὲ καὶ τὸ ἀ-
 πὸ τῆς τεταγμένης $Η\Lambda$ διπλάσιον τῷ τετραπλεύ-
 ρῳ $N\Lambda TP$. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον $\Theta\Lambda\Delta$ ἐστὶν αἰ μεί-
 ζον τῷ τετραπλεύρῳ $N\Lambda TP$. Εἴγε εἰμὲν ἡ τεταγ-
 μένη ἐστὶ κατωτέρω τῆς $ΜΚ$ ὡς ἔχει ἡ $Η\Lambda$ τηνι-
 καῦτα τῷ τριγώνῳ $\ThetaΚΤ$ προσίθεται τὸ τραπέζιον
 $Κ\Lambda\Delta\Gamma$ μείζον ὢν τῷ τραπέζιῳ $Κ\Lambda\Gamma\Gamma$, ὅπερ προ-
 σίθεται τῷ τετραπλεύρῳ $NΚTP$ ἴσῳ τῷ τριγώνῳ
 $\ThetaΚΤ$ (40). Εἰδὲ ἀνωτέρω ὡς ἡ $ηλ$, τότε δὲ τῷ

39) $\Delta\Lambda : TK = \Lambda\Theta : \ThetaΚ$ καὶ $\Lambda\Pi : ΜΚ = \Lambda\Theta : \ThetaΚ$.
 ἄρα $\Delta\Lambda : TK = \Lambda\Pi : ΜΚ$ ἐναλλάσσοντι δὲ $\Delta\Lambda : \Lambda\Pi =$
 $TK : ΜΚ$. ἀλλὰ $TK : ΜΚ = ΚΜ : ΚΘ = \Lambda\Pi : \Lambda\Theta$, ἄρα
 $\Delta\Lambda : \Lambda\Pi = \Lambda\Pi : \Lambda\Theta$. ἄρα αἱ $\Delta\Lambda$, $\Lambda\Pi$, $\Lambda\Theta$ συνεχῶς
 ἀνάλογον.

40) Τὸ τρίγωνον $\ThetaΚΤ = NPTK$. τὸ δὲ $Κ\Lambda\Delta\Gamma$,

τριγώνου ΘΚΤ αφαιρείται τὸ τραπέζιον ΛΚΤδ εἰ-
 λασσον ὃν τῷ τετραπλεύρῳ ΛΚΤυ, ὅπερ αφαιρεί-
 ται τῷ αὐτῷ τετραπλεύρῳ ΝΚΤΡ. Μείζον ἄρα εἶναι
 τὸ τρίγωνον ΔΛΘ τῷ τετραπλεύρῳ ΝΛΤΡ· ἢ τὸ
 δΛΘ τῷ ΝΛυΡ (41). Διὰ δὲ ταῦτα τὸ ἀπὸ τῆς
 ΠΛ τετράγωνον ὅπερ ἐστὶ τῷ τριγώνῳ ΔΛΘ δι-
 πλάσιον, ἐστὶ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς ΗΛ, ὅπερ ἐστὶ τῷ
 τετραπλεύρῳ ΝΛΤΡ διπλάσιον. Τότε ἀπὸ τῆς
 πλ, ὅπερ ἐστὶ τῷ τριγώνῳ δΛΘ διπλάσιον μείζον
 ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ηλ, ὅπερ ἐστὶ τῷ τετραπλείρῳ
 ΝΛυΡ διπλάσιον. Οἶονδῆποτε ἄρα σημεῖον Π, π
 παρὰ τὸ Μ, ἐκτὸς ἔσται τῆς τομῆς, μόνον δὲ τὸ
 Μ ἐπὶ τῆς τομῆς, ὅθεν ἡ ΘΜ εἰσάπτεται αὐτῆς.

Τὸ τῆς διαμέτρου μέρος ΚΘ τὸ μεταξὺ τῆς τε-
 ταγμένης καὶ τῷ σημείῳ τῆς συμβολῆς τῆς ἐφαπτο-
 μένης καὶ αὐτῆς τῆς διαμέτρου, καλεῖσθω *ΤΦ ΑΠΕ-*
ΤΟΜΕΝΗ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Δῆλον ἄρα, ὅτι αἱ τῶν τομῶν τέτων ἐφαπτό-
 μεναι καθ' ἓν μόνον σημεῖον ταῖς αὐτῶν καμπύλαις
 συμπίπτουσι.

μείζον τῷ ΚΛΤΤ· ἄρα ΘΚΤ+ΚΛΔΤ μείζον, ἢ ΝΡΤΚ+
 ΚΛΤΤ· τῷ τ' ἐστὶ τὸ τρίγωνον ΘΛΔ μείζον τῷ τετρα-
 πλεύρῳ ΝΛΤΡ· τὸ τρίγωνον ἄρα ΘΛΔ μείζον εἶναι τῷ
 τετραπλεύρῳ ΝΛΤΡ.

41) Τὸ τρίγωνον ΘΚΤ=ΝΡΤΚ, τὸ δὲ λ ΚΤδ
 ἔλασσον τῷ λ ΚΤυ· ἄρα ΘΚΤ—λ ΚΤδ μείζον ἢ ΝΡΤΚ
 —λ ΚΤυ· τῷ τ' ἐστὶ τὸ τρίγωνον δΛΘ τῷ τετραπλείρῳ
 ΝΛυΡ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Προεκβληθείσης δὲ τῆς ΚΤ ἄχρις ἢ τῇ διευ-
 Σεύτῃ ΖΒ κατὰ τὸ Β συμπίεσι, ἐπεὶ ἐκ τῆς φύ-
 σεως τῶν τομῶν (Πόρισμ. Α', τῆς Δ'. Ε' ἢ Σ'.) τὸ
 ὀρθογώνιον ΝΚΒ ἔστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς τεταγμέ-
 νης ΜΚ τετραγώνῳ. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΜΚ, ἴσον τῷ
 ὑπὸ ΘΚΤ (κατὰ τὴν παρῶσαν). Ἐστὶ δὴ τὸ ὑπὸ ΝΚΒ
 ἴσον τῷ ὑπὸ ΘΚΤ. Καὶ ὥς ἡ ΘΚ πρὸς ΝΚ, ἕτως
 ἡ ΚΒ πρὸς ΚΤ (16 τῆ ΣΑ). Τὰτ' ἔστιν ὥς ἡ ὑφα-
 πτομένη πρὸς τὴν ἀποτετμημένην ἀπὸ τῆς διαμέ-
 τρου πρὸς τῇ κορυφῇ, ἕτως ἡ ΚΒ πρὸς ΚΤ· καὶ
 ἀνάπαλιν ὥς ἡ ΚΤ πρὸς ΚΒ ἕτως ἡ ΝΚ πρὸς ΘΚ.
 Τοιγαρὲν ἡ ἐφαπτομένη ἀπό τινος σημείου δοθέντος
 τῆ Μ διορίζεται, ἢ εἰάν ποιηθῇ ὥς ἡ ΚΤ πρὸς ΚΒ,
 ἕτως ἡ ΚΝ πρὸς ἑτέραν ζητημένην τὴν ΚΘ, ἥς εὐ-
 ρεθείσης ἢ τῇ διαμέτρῳ ἀπὸ τῆ Κ ἐφαρμοσθείσης ἢ
 ἀπὸ τῆ Θ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθεῖσα ΘΜ, ἔσεται τῆς
 τομῆς ἐφαπτομένη.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ἐπεὶ ἔστιν ἡ ΚΤ πρὸς ΚΒ, ὥς ἡ ΚΝ πρὸς
 ΚΘ (Πορ. προηγ.), ἔστι δὴ ἀνάπαλιν μὲν ἡ ΚΒ
 πρὸς ΚΤ, ὥς ἡ ΚΘ πρὸς ΚΝ· ἀνασρέφαντι δὲ ἡ
 ΚΒ πρὸς ΚΒ πλὴν ΚΤ, ὥς ἡ ΚΘ πρὸς ΚΘ πλὴν
 ΚΝ, τὰτ' ἔστιν ἡ ΚΒ πρὸς ΒΤ, ὥς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΝ
 (Πορ. 1 τῆς 19 τῆ Ε'). ἦτοι ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ἡ-
 μιπαράμετρον (ἴση γὰρ ἡ ΒΤ τῇ ΖΡ ἢ τῇ ΝΡ),
 ὥς ἡ ὑφαπτομένη πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἐφαπτιμέ-
 νης ἢ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς ἀπολαμβανομένην.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Διελόντι δὲ ἔσαι ὡς ἡ ΚΤ πρὸς ΤΒ (ἴσην τῇ ἡμιπαραμέτρῳ), ἔτως ἡ ΚΝ πρὸς ΝΘ (42).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε'.

Εἰάν δὲ ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΡ συμβάλλουσα τῇ διαμέτρῳ κατὰ τὸ Θ, ἡ ΚΘ ἔσαι ὑφαπτομένη (Πορ. Γ'). Εἶσαι γὰρ ἡ ΚΒ πρὸς ΝΡ, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΝΘ (Πορ. 1 τῆς 4 τῆς 5').

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α ς'.

Εἰν τῇ Παραβολῇ ἄρα ἡ ὑφαπτομένη ΚΘ εἰσιν Σχημ. 26. αἰεὶ διπλασία τῆς ἀποτεμνομένης ἀπὸ τῆς διαμέτρου ὑπὸ τῆς τεταγμένης πρὸς τῇ κορυφῇ τῶν ἐς τῆς ΚΝ. Ὡς περ δὲ καὶ τῆς ΝΘ, τῆς μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς σημείου τῆς συμβολῆς τῆς τε διαμέτρου καὶ τῆς ὑφαπτομένης. Ἡ γὰρ ΚΒ αἰεὶ εἰσιν ἴση τῇ παραμέτρῳ ΝΖ (36 τῆς Α'), ὅσης τῆς διευθετήσεως ΖΒ παραλλήλου τῇ ΝΚ. ὁθεν ἡ ΚΒ, αἰεὶ διπλασία τῆς ἡμιπαραμέτρου ΝΡ, ἢ τῆς αὐτῇ ἴσης ΚΤ. Εἵθεντοι ἐπεὶ εἰσιν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΝΡ, ἔτως ἡ ΚΘ πρὸς ΝΘ, καὶ ἡ ΚΒ διπλασία τῆς ΝΡ· καὶ ἡ ΚΘ ἄρα διπλασία τῆς ΝΘ ἢ τῆς ΝΚ.

42) Εἴπερ γὰρ εἴσι $KB:KT=KΘ:KN$ (Πορ. Γ'). Εἶσαι δὲ καὶ $KB-KT:KT=KΘ-KN:KN$ (17. τῆς Ε'), καὶ ἀνάκαλιν $KT:BK-KT=KN:KΘ-KN$: τῶν εἰσιν ἡ ΚΤ πρὸς ΤΒ, ὡς ἡ ΚΝ πρὸς ΝΘ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ζ΄.

Σχημ. 27.

28.

Εν δὲ τῇ ὑπερβολῇ καὶ ἐλείψει ἑσῆς τῆς ΓΤ παραμῆλυ τῇ ΕΒ, ἐστὶ δὴ ἡ ΕΚ πρὸς ΓΚ, ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΤ· ἀλλ' ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΤ, ἔτως ἡ ΚΘ πρὸς ΚΝ (Πορ. Β΄), ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς ΓΚ, ἔτως ἡ ΚΘ πρὸς ΚΝ. Οὐδὲν εἰδὼν γένηται ὡς ἡ ΚΓ ἀπόσασις τῆς τεταγμένης ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς πρὸς τὴν ΚΕ ἀπόσασιν τῆς αὐτῆς ἀπὸ τοῦ κορυφώτερου τέρματος τῆς πλαγίας πλευρᾶς, ἔτως ἡ ΚΝ ἀπόσασις τῆς αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἐγγυτέρω τέρματος τῆς πλαγίας πρὸς ἑτέραν ζητούμενην τὴν ΚΘ. Αὕτη δὴ πορίσασα, ἔσται ἡ ὑφαπτομένη.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Η΄.

Τὸ ἄρα ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚΘ ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΕΚΝ (16 τοῦ 5΄). Ἐστὶ γὰρ ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΓΚ, ἔτως ἡ ΚΘ πρὸς ΚΝ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Θ΄.

Ἀνασρέψαντι δὲ ἐστὶν ἡ ΕΚ πρὸς ΕΓ ἢ πρὸς ΓΝ τὴν ἡμίσειαν τῆς πλαγίας, ὡς ἡ ΚΘ ὑφαπτομένη πρὸς ΘΝ τὴν μεταξὺ τῆς ὑφαπτομένης καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς ἀπολαμβανομένην. Ἐπὶ γάρ ἐστιν ἡ ΕΚ πρὸς ΚΓ, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΚΝ (Πορ. προηγ.) ἔσαι δὴ (Πορ. 1 τῆς 19 τοῦ Ε΄) ἡ ΕΚ πρὸς ΕΚ—ΚΓ, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΚΘ—ΚΝ· τούτ' ἐστὶν ἡ ΕΚ πρὸς ΕΓ, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΝ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ι'.

Ε'πει δὲ διὰ τὸ εἶναι τὴν μὲν ΞB τῇ ΓP , τὴν δὲ KB τῇ NP παράλληλον, εἰς ὡς μὲν ἡ $\Xi\Theta$ πρὸς $\Gamma\Theta$, ἡ $B\Theta$ πρὸς ΘP . ὡς δὲ ἡ $B\Theta$ πρὸς ΘP , ὅτως ἡ ΘK πρὸς ΘN , ἔσαι δὴ ἡ $\Xi\Theta$ πρὸς $\Gamma\Theta$, ὡς ἡ ΞK πρὸς $\Xi\Gamma$ ἢ ΓN . Ἡ γὰρ ΞK πρὸς τὴν $\Xi\Gamma$ ἢ τὴν ΓN εἰς ἓν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῇ ΘK πρὸς ΘN (Πορ. Θ').

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α ΙΑ'.

Καὶ ἐπεὶ εἰς ἡ $\Xi\Theta$ πρὸς $\Gamma\Theta$, ὡς ἡ ΞK πρὸς $\Xi\Gamma$ (Πορ. προηγ.) διελόντι μὲν, ἔσεται ἡ $\Xi\Gamma$ πρὸς $\Gamma\Theta$, ὡς ἡ $K\Gamma$ πρὸς $\Gamma\Xi$. ἐναλλάξαντι δὲ, ἡ $K\Gamma$ πρὸς $\Xi\Gamma$, ὡς ἡ $\Xi\Gamma$ πρὸς $\Gamma\Theta$. Αἱ ἄρα $K\Gamma$, $\Xi\Gamma$, $\Theta\Gamma$, ἢ αἱ $K\Gamma$, $N\Gamma$, $\Theta\Gamma$ εἰς ἓν συνεχῶς ἀνάλογον, καὶ τὸ ὑπὸ $K\Gamma\Theta$ ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιπλαγίας πλευρᾶς $\Xi\Gamma$ ἢ ΓN τετραγώνῳ. Ἡ ἄρα ἐφαπτομένη ὀριωθήσεται καὶ εἰάν ληφθῇ τῶν $K\Gamma$, ΓN τρίτη ἐξῆς ἀνάλογον ἡ $\Gamma\Theta$. Ἀπὸ δὲ τῷ Θ ἐπιζευχθῇ ἡ ΘM .

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α ΙΒ'.

Ε'πει δὲ εἰς ὡς μὲν ἡ ΞK πρὸς $\Xi\Gamma$, ὅτως ἡ ΘK πρὸς ΘN (Πορ. Θ'). ὡς δὲ ἡ $\Xi\Gamma$ πρὸς $\Xi\Theta$, ὅτως ἡ $K N$ πρὸς $K\Theta$ (ἐκάτερος γὰρ τῶν λόγων τέτων εἰς ὁ αὐτὸς τῷ τῆς $B P$ πρὸς $B\Theta$). ἔσαι ἄρα διῖσε τεταραγμένη ἡ ΞK πρὸς $\Xi\Theta$, ὡς ἡ $K N$ πρὸς

ΘΝ (23 τῆ Ε'). (43). Ἡ διάμετρος ἄρα τῆς τε Ὑπερβολῆς καὶ τῆς Ε'λλείψεως τέτμηται ἁρμονικῶς ἀνάλογον κατὰ τε τὰ πέρατα τῆς πλαγίας πλευρᾶς, καὶ τὰς συμβολὰς τῆς ἐφαπτομένης καὶ τεταγμένης, καὶ αὐτῆς τῆς διαμέτρου (44). Διοριθίσεται

43) Διειχθήσεται δὲ ὅτι ἡ ΕΚ πρὸς ΕΘ ἔστιν ὡς ἡ ΚΝ : ΘΝ καὶ διὰ τῆς 23. ὑποσημειώσεως. Ἐπεὶ γὰρ ἔστι

$$ΕΚ : ΕΓ = ΘΚ : ΘΝ$$

$$\text{καὶ } ΕΓ : ΕΘ = ΚΝ : ΚΘ \text{ ἔστι δὲ}$$

$$ΚΕΧΕΓ : ΓΕΧΕΘ = ΘΚΧΚΝ : ΛΘΧΘΚ$$

$$\text{ἂλλ' ἔστι } ΛΕΧΕΓ : ΓΕΧΕΘ = ΕΚ : ΕΘ.$$

$$\text{καὶ } ΘΚΧΚΝ : ΛΘΧΘΚ = ΚΝ : ΛΘ,$$

$$\text{ἄρα } ΕΚ : ΕΘ = ΚΝ : ΘΝ.$$

41) Ἐν μὲν Ὑπερβολῇ (χημ. 27.) ἰπείῃ ἐστιν ΕΚ : ΚΝ = ΕΘ : ΘΝ καὶ ἡ μὲν ΕΘ = ΕΚ - ΚΘ, ἡ δὲ ΘΝ = ΚΘ - ΚΝ, ἔστιν ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τῆς ΕΚ πρὸς τὴν ΚΘ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῆς ΚΘ πρὸς τὴν ΚΝ, ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΝ. ἁρμονικῶς ἀνάλογον ἄρα εἰσὶν αἱ ΕΚ, ΚΘ, ΚΝ. Ἐστὶ γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην ὡς ἡ ὑπεροχὴ τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν, πρὸς τὴν διαφορὰν τῆς δευτέρας πρὸς τὴν τρίτην, ὅπερ ἀπαιτεῖ ἡ τοιαύτη ἀναλογία. Τέτμηται ἄρα ἡ διάμετρος ἁρμονικῶς ἀνάλογον κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Κ, Θ, Ν, τῶν ἔστι τὰ πέρατα τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τὰ σημεῖα, καθ' ἃ συμβάλλουσιν τῇ διαμέτρῳ ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ τεταγμένη.

Ἐν δὲ τῇ Ε'λλείψει (χημ. 28.) ἰπείῃ ἐστι ΕΚ : ΚΝ = ΕΘ : ΘΝ καὶ ἐναλλάσσοντι μὲν ΕΚ : ΕΘ = ΚΝ : ΘΝ. ἐνᾷκαλι δὲ ΕΘ : ΕΚ = ΘΝ : ΚΝ καὶ ἐστιν ἡ μὲν ΘΝ = ΕΘ - ΕΝ ἡ δὲ ΚΝ = ΕΝ - ΕΚ ἄρα ἡ ΕΘ : ΕΚ = ΘΝ : ΕΝ.

ἄρα ἡ ἐφαπτομένη τῶν τομῶν τούτων ἐ, εἰς γένηται ἡ τοιαύτη ἁρμονικὴ τομὴ τῆς διαμέτρου, τεθέντος τῷ σημείῳ Θ, ἔνθα ἂν ἔχοι γενέσθαι ἡ ΕΚ πρὸς ΚΝ, ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΝ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α ΙΓ'.

Εὐτεῦθεν δὲ ἐξαργύρεται γενικὴ τις ἑτέρα κατασκευὴ τῆς ἐφαπτομένης οἰασθήποτε τῷ Κώνη τομῆς πρὸς τῇ πρὸς αὐτῇ δοθέντι σημείῳ Μ. Ἀχθεῖσιν γὰρ ἀπὸ μὲν τῷ δοθέντος σημείῳ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον τῆς ΜΚ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς Ν παραλλήλως τῇ ΜΚ τῆς ΝΙ, ἣτις δὲ ἐ ἐφάπεται τῆς τομῆς πρὸς τῇ κορυφῇ. Εἰς ἀχθῇ μὲν ἐπὶ τῆς Παραβολῆς (σχ. 26) τῇ διαμέτρῳ παραλλάλῃ ἡ ΜΙ· ἐπιζευχθῇ δ' ἐπὶ τῆς Γ' περβολῆς ἐ Ε' μείψως (σχ. 27, 28) ἀπὸ τῷ ἑτέρου πέρατος τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἡ ΕΜ συμβάλλουσα τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένῃ ΝΙ κατὰ τὸ Ι, καὶ προσέτι τμηθῇ δίχα ἡ ΝΙ κατὰ τὸ Ε, ἡ ἀπὸ τῷ Ε ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἔσαι ἐφαπτομένη. Εἰς μὲν γὰρ τῆς Παραβολῆς εἰς προαχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον ἡ ΜΕ ἕως τῷ Θ, δῆλον ὡς ἡ ΘΚ ἔσαι τῆς ΘΝ διπλασία (45)· ὥσπερ ἡ ΜΚ (ἣτις

ΕΝ—ΕΚ. Αἱ ἄρα ΕΘ, ΕΝ, ΕΚ ἁρμονικῶς ἀναλογον. Ἐστὶ γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην ὡς ἡ ὑπεροχὴ τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῆς δευτέρας πρὸς τὴν τρίτην, ὡσπερ καὶ τῇ Γ' περβολῇ.

45) Εἰς τὸ τρίγωνον ΘΕΝ εἰς ὁμοίου τῷ ΙΕΜ.

ἔσιν ἴση τῇ ΝΙ) ἐστὶ διπλασία τῆς ΝΕ. Διὰ δὲ τῆτο
 ἡ ΜΘ ἐφάπεται τῆς τομῆς (Πορ. 5'). Ἐπὶ δὲ τῆς
 Ὑπερβολῆς καὶ Ἐκλείψεως εἰάν ἀχθῇ τῇ ΕΝ πα-
 ράλληλος ἡ ΞΟ, ἥτις δὲ καὶ συμπεσεῖται τῇ ΘΜ
 προαχθεῖσιν κατὰ τὸ Ο, ἔσαι δὲ ὡς ἡ ΞΘ πρὸς ΝΘ,
 ὥτως ἡ ΞΟ πρὸς ΝΕ, τῆτ' ἔστι πρὸς ΙΕ (ἴση γὰρ ἐκ
 κατασκευῆς τῇ ΝΕ ἢ ΙΕ)· ἀλλ' ὡς ἡ ΞΟ πρὸς ΙΕ,
 ὥτως ἡ ΞΜ πρὸς ΜΙ, τῆτ' ἔστιν ἡ ΞΚ πρὸς ΚΝ· ὡς
 ἄρα ἡ ΞΘ πρὸς ΘΝ, ὥτως ἡ ΞΚ πρὸς ΚΝ. Ἀρ-
 μονικῶς ἄρα τμηθῆσεται ἡ διάμετρος κατὰ γινε τὸ Θ
 καὶ τὸ τῆς συμβολῆς τῆς τεταγμένης σημεῖον· καὶ
 ἑπομένως (Πορ. ΙΒ'.) ἡ ΜΘ ἐφάπεται τῆς τομῆς
 καὶ ποιήσῃ τὸ πρόβλημα.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α ΙΔ'.

Οἷαδὴ τις Ὑπερβολῆς ἐφαπτομένη ΜΘ προ-
 σεκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ αἰεὶ κατω-
 τέρω μὲν τῷ κέντρῳ Γ, ἀνωτέρω δὲ τῆς κορυφῆς Ν.
 Μείζων καὶ γὰρ ἡ ΞΚ τῆς ΕΝ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΞΘ
 τῆς ΘΝ, ὥσων τῶν εὐθειῶν τέτων ἀνάλογον. Εἰ
 μὲν ἔν τὸ σημεῖον Θ ὑποτεθῇ ἀνωτέρω τῷ Γ ἢ ΞΘ
 ἔσαι ἐλάσσων τῆς ΘΝ, εἰδ' ἐπ' αὐτὸ τὸ Γ, ἴση.

ἔστιν ἄρα $ME:EO=IE:EN$ · ἴση δ' ἐκ κατασκευῆς τῇ
 ΕΝ ἢ ΙΕ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΜΕ τῇ ΕΘ, ἡ ἄρα ΜΘ δι-
 πλασία ἐστὶ τῆς ΕΘ. Ὡσαύτως ἐπεὶ ὁμοιάζει τὰ τρί-
 γωνα ΘΜΚ, ΘΕΝ καὶ διὰ ταῦτα $ΘΜ:ΘΕ=ΚΘ:ΘΝ$,
 ὡς ἄρα ἡ ΘΜ ἐστὶ διπλασία τῆς ΘΕ, ὥτα δὲ καὶ ἡ ΚΘ
 τῆς ΘΝ ἐστὶ διπλασία.

ὦν ἐκάτερον εἶναι ἐναντίον τῇ ἀναλογίᾳ. Ἐσται ἄρα
αἰ κατωτέρω μὲν τῷ Γ, ἀνωτέρω δὲ τῷ Ν.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α ΙΕ΄.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῷ Γ κέντρῳ τῆς Ὑ περβολῆς εἰς
Ε' μείψῃς ἀχθῆ εὐθεία ἢ ΓΧ παράλληλος μὲν
τῇ πρὸς τῇ κορυφῇ ἐφαπτομένη ΝΕ, συμβάλλου-
σα δὲ τῇ ΕΜ κατὰ τὸ Χ, δῆλον ὅτι αὕτη ἔσεται
ὑποδιπλασία τῆς ΝΙ, ὥσπερ δὴ ἢ ΕΓ τῆς ΕΝ,
διὰ δὴ τὸτο ἴση τῇ ΝΕ ἢ τῇ ΕΙ. Ἀχθεῖσιν ἄρα
τῶν ΓΕ, ΧΕ, ἀναφύησεται παραλληλόγραμμα τὰ
ΓΧΕΝ, ΓΧΙΕ, ΓΕΧΞ. Εἰς τὸ ἀγαγεῖν ἄρα ἐφα-
πτομένων τῶν τοιούτων τομῶν πρὸς τῷ δοθέντι ἐν
αὐταῖς σημείῳ Μ, ἀπόχρη μόνον ἐπιζευχθῆναι ἀ-
πὸ τῷ προτέρῳ πέρατος Ξ τῆς πλαγίας πλευρᾶς
ἕως τὸ δοθέν σημεῖον τὴν εὐθεῖαν ΞΜ, εἰς ἀχθείσης
ἀπὸ τῷ κέντρῳ Γ τῆς εὐθείας ΓΧ παραλλήλου ταῖς
τεταγμέναις, ἀναγεγράφθαι ἐν δὴ τι τῶν εἰρημέ-
νων παραλληλογράμμων, ἀπὸ δὲ τῆς γωνίας Ε
ἐπιζευχθῆναι ἕως τὸ Μ τὴν εὐθεῖαν ΕΜ, ἢ ἀχ-
θείσης τῆς ΧΕ παραλλήλου τε εἰς ἴσης τῇ ἡμιδιαμέ-
τρῳ ΓΝ ἐπιζευχθῆναι ἀπὸ τῷ Ε τὴν ΕΜ· δῆλον
γὰρ ὅτι ἔσεται ἐφαπτομένη.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α ΙΣ΄.

Τελευταῖον δὲ εἰδὲν ἐπὶ τῆς διαμέτρου, ἣν δεῶν Σχημ. 29.
ἔσω εἶναι εἰς ἄξονα, οἷον κωνικῆς Τομῆς ληφθῆ 30. 31.

ἐπὶ τὰντιθέτα τῆς ὕπεφαπτομένης τῇ ΚΤ ἴση ἢ ΚΣ, ἢ ἀπὸ τοῦ Σ ἐπὶ τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον Μ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ΣΜ ἔσεται τῇ καμπύλῃ κἀθετος. Ποιήσει γὰρ μετὰ τῆς ἐφαπτομένης ΘΜ ὀρθὴν γωνίαν τὴν ΣΜΘ. Ἐπεὶ γὰρ εἰν ὡς ἡ ΚΤ τῷτ' εἰν ἡ ΣΚ πρὸς ΚΜ, ὅτως ἡ αὐτὴ ΚΜ πρὸς ΚΘ. Εἰν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν ΣΚΘ ὀρθογώνῳ ἴσον· διὰ δὲ τῷτο ὕψους τῆς ΚΜ πρὸς ὀρθᾶς τῷ ἄξονι ΣΘ. Τὸ τρίγωνον ΘΜΣ ἔσεται πρὸς τῷ Μ ὀρθογώνιον (45), ἐν ᾧ ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κἀθετος ΜΚ μέση εἰν ἀνάλογος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων ΣΚ, ΚΘ (8 τῷ 5.). Ἡ δέγε τειάυτη εὐθεῖα ΚΣ κα-

46) Τὸ τρίγωνον ΘΜΣ ἔσεται ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ εἰσι $ΣΚ : ΚΜ = ΚΜ : ΚΘ$, καὶ αἱ περὶ τὸ Κ γωνίαι ὀρθαὶ εἰτ' ἔν ἴσαι, ἔστι δὲ τὸ τρίγωνον ΣΜΚ ὁμοῖον τῷ τριγώνῳ ΘΜΚ (6. τῷ 5.). Ὅθεν αἱ ταῖς ἀντιλόγοις πλευραῖς ἀντικείμεναι γωνίαι ΣΜΚ, ΚΔΜ ἐλλήλοις ἴσαι· κοινὴ δὲ προσκειμένης τῆς ΘΜΚ, ἔστι ἡ $ΣΜΚ + ΘΜΚ = ΘΜ + ΘΜΚ$. ἀλλ' αἱ δύο ἵσχαται ὁμῶς ληφθεῖσαι ἐξισῶνται μὲν γε ὀρθῇ (32. τῇ Α.), ἔρα καὶ αἱ δύο πρότεραι τῷτ' εἰν ὅλαι ἢ ΘΜΣ ἴση μὲν γε ὀρθῇ· καὶ τὸ τρίγωνον ΘΜΣ ὀρθογώνιον.

Ἄλλως. Ἐπεὶ αἱ ΣΚ, ΚΜ, ΚΘ συνεχῶς ἀνάλογον, ἔσεται ἄρα $ΚΜ^2 = ΣΚΘ$ · καὶ $2ΚΜ^2 = 2ΣΚΘ$ · καὶ $2ΚΜ^2 + ΣΚ^2 + ΚΘ^2 = 2ΣΚΘ + ΣΚ^2 + ΚΘ^2$ · ἀλλὰ $2ΚΥ^2 + ΣΚ^2 + ΚΘ^2 = ΜΣ^2 + ΜΘ^2$ (47. τῷ Α.), καὶ $2ΣΚΘ + ΣΚ^2 + ΚΘ^2 = ΣΘ^2$ (1. τῷ Β.), ἄρα $ΜΣ^2 + ΜΘ^2 = ΣΘ^2$ ἔρα (48. τῷ Α.) ἢ πρὸς τὸ Μ γωνία, ὀρθή.

λείπεται μὲν **ΤΡΙΟΚΑΘΕΤΟΣ**. ἔστι δὲ ἐν μὲν
 τῇ Παραβολῇ (σχ. 29) αἰ ἴση τῇ ἡμιπαραμέ-
 τρῳ **NP**, ἥτινι ἴση ἡ **KT**. ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ καὶ
 Ἐλλείψει (σχ. 30 31) πρὸς τὴν ἡμιπαραμέτρον
 ὡς ἡ **KT** διάστασις τῆς τεταγμένης ἀπὸ τοῦ κέντρου
 πρὸς τὸν πλάγιον ἡμιᾶξονα **GN**. Ὁμοίων γὰρ ὄν-
 των τῶν τριγώνων **ΓΚΤ**, **ΓΝΡ**, ἔσεται ὡς ἡ **KT**
 πρὸς **NP**, ὅτως ἡ **ΓΚ** πρὸς **GN**. Ἐστὶ δὲ ἐκ κατα-
 σκευῆς ἡ **KT** ἴση τῇ **ΣΚ**, ἡ Ὑποκάθετος ἀρχ **ΣΚ**
 πρὸς **NP**, ὡς ἡ **ΓΚ** πρὸς **GN**. ἢ ἡ Ὑποκάθετος
 πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τεταγμένης διάστασιν
ΓΚ, ὡς ἡ ὀρθία πλευρὰ **NZ** πρὸς τὴν πλάγιαν
NΞ. Ὅντων γὰρ τῶν τριγώνων **ΤΚΓ**, **ΞΝΖ** ὁ-
 μοίων, ἐστὶν ὡς ἡ **KT**, τὸτ' ἔστιν ἡ **ΣΚ** πρὸς τὴν **ΓΚ**,
 ὅτως ἡ **NZ** πρὸς τὴν **NΞ**.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

Εἰν τῇ Παραβολῇ οἰαδήποτε εὐθεΐα **ΔΜ** Σχ. 32.
 παρὰ τὴν ἀρχικὴν διάμετρον **NK** ἡγμέ-
 νη, ἔσεται δὲ καὶ αὕτη διάμετρος διὰ κα-
 τέμνουσα τὰς τεταγμένους μὲν ἐπ' αὐτήν,
 παραλλήλως δὲ τῇ ἐφαπτομένῃ **ΜΘ**
 κατηγμέναις εὐθείαις **ΗΖ**, **ΝΦ**. Καὶ τὰ
 ἀπὸ τῶν τεταγμένων **ΗΔ**, **ΝΧ**, τετρα-
 γωνα ἔσαι ὡς αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ' αὐ-

τῶν ἀπὸ τῆς δοθείσης διαμέτρου πρὸς τῇ
κορυφῇ, Μ, ΜΔ, ΜΧ.

Διὰ τῆς κορυφῆς Ν τῆς διαμέτρου ΝΚ, ἐξ ἧς
ἀπογεγέννηται ἡ Παραβολή, ἤχθω ἐφαπτομένη
ἡ ΝΕ, ἣτις ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ΜΔ προ-
αχθείσῃ κατὰ Ι· παρὰ δὲ τὴν ἐφαπτομένην ΜΘ
ἤχθω εὐθεῖα ἡ ΝΧΦ, ἣτις συμβαλεῖ τῇ μὲν ΜΔ
κατὰ τὸ Χ, τῇ δὲ καμπύλῃ κατὰ τὸ Φ. Καὶ ἐπὶ
τὴν διάμετρον ΝΚ τετάχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΚΜ,
ΦΤ, ὧν ἡ δευτέρα τεμεῖ τὴν διάμετρον ΜΔ κατὰ
τὸ Τ.

Τύτων δὲ κατασκευαζέντων, ἔσται ἐκ τῆς φύ-
σεως τῆς Παραβολῆς (Προτασ. Δ΄.) τὸ ἀπὸ τῆς
ΜΚ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΤΦ, ὡς ἡ ΚΝ
πρὸς ΤΝ, ἢ ὡς τὸ παραλληλόγραμμον ΝΚΜΙ
πρὸς τὸ αὐτῷ ἰσοῦς ΝΤΙΤ (1 τῆ 5΄.). Ἐσὶ δὲ καὶ
τὰ ὅμοια τρίγωνα ΘΚΜ, ΝΤΦ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν
ὁμολόγων πλευρῶν ΜΚ, ΦΤ τετράγωνα (19 τῆ
5΄.). Ἀρα τὰ τρίγωνα ταῦτα ἐσὶν ὡς τὰ εἰρημένα πα-
ραλληλόγραμμα (ἦτοι ΘΚΜ : ΝΤΦ = ΝΚΜΙ :
ΝΤΤΙ.). Ἀλλὰ τὸ τὸ ΘΚΜ τρίγωνόν ἐστιν ἴσον τῷ
παραλληλογράμμῳ ΝΚΜΙ. Ἐχει γὰρ ἐκάτερον
ὑψος μὲν ταῦτόν, ἡ δὲ ΘΚ βάσις τῆς τριγώνου ἐστὶ
διπλασία τῆς ΝΚ βάσεως τῆς παραλληλογράμμου
(Παρ. 5 τῆς Θ΄.). Ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΝΤΦ ἴσον
ἐστὶ τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΤΤΙ. Κοιτῶν δὲ ἄρ-
θέντος τῆ ΝΧΤΤ, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον ΧΦΤ

ἴσον ἢ ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΧΝΙ, ἄρα ἢ αἱ ὁμολογοί αὐτῶν πλευραὶ ΝΧ, ΧΦ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις (47). Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΔΜ δίχα ἔεμε κατατὸ Χ τὴν ΝΦ παράλληλον τῇ ἐφαπτομένῃ ΘΜ.

Ὡσαύτως ἐὰν ἀχθῇ ἀνωτέρω τῆς ΝΦ ἑτέρα τις εὐθεῖα παράλληλος ἢ ΗΖ τέμνῃσα τὴν ΝΚ προαχθεῖσαν κατὰ τὸ Π, ἢ τὴν ΝΙ κατὰ τὸ Ω. Ἐπὶ δὲ τὴν ἀρχικὴν διάμετρον ΝΚ τεταγμένως καταχθῶσιν αἱ ΗΛ, ΖΗ συμβάλλουσαι τῇ ΔΜ προσκβληθείσῃ κατὰ Ρ, Σ, συμφανέες εἰσιν ὅτι ἑπεὶ τὸ τρίγωνον ΠΛΗ εἰς πρὸς τὸ αὐτῷ ὅμοιον ΘΜΚ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΛΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ (19 τῆς ε'), ἢ ὡς ἡ ΝΛ πρὸς ΝΚ (Προταπ. Δ'), ἢ ὡς τὸ παραλληλόγραμμον ΛΝΡΙ πρὸς ΝΚΜΙ. Τὸ τρίγωνον ΠΛΗ εἶναι ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΛΝΡΙ, ὥσπερ τὸ ΘΜΚ δέδεικται ἴσον τῷ ΝΚΜΙ. Ἀλλὰ ἢ τὸ ἕτερον ὅμοιον τρίγωνον ΠΖΒ εἶναι τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΒΣΙ ἴσον. Ἐσὶ γὰρ ἢ τέτο πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΜΚ, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΚ, ἢ ἡ ΝΒ πρὸς ΝΚ, ἢ τὸ ΝΒΣΙ πρὸς ΝΚΜΙ. Ἰσον δὲ τὸ ΘΜΚ τῷ ΝΚΜΙ, ἴσον ἄρα ἢ τὸ ΠΖΒ τῷ ΝΒΣΙ. Καὶ ἢ ἄρα τῶν τριγώνων ΠΖΒ, ΠΛΗ, τῶν εἰς τὸ τετράπλευρον ΛΗΒΖ ἐξιστεται τῇ ὑπεροχῇ τῶν τοῖς τριγώνοις τέτοις.

(17) Τα τρίγωνα ΧΦΥ, ΧΝΙ, ὅμοια· ἄρα ΧΦΥ : ΧΝΙ = ΧΦ² : ΧΝ² (19. τῆς ε'). εἰς δὲ ΧΦΥ = ΧΔΙ, ἄρα ἢ ΧΦ² = ΧΝ²· ἢ ΧΦ = ΧΝ.

σων παραλληλογράμμων $NBSI$, $NAPI$, ἤτοι τῷ παραλληλογράμῳ $ABSP$ (48). Κοινῷ δὲ τοῦ $ABSDH$ ἀφαιρεθέντος, ἀπολειφθήσεται τὸ τρίγωνον DSZ ἴσον τῷ τριγώνῳ DHP . εἰσὶ δὲ καὶ ὁμοία. Ἀρα αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ HD , DZ ἀλλήλαις ἴσαι· καὶ ἡ HZ τέτμηται δίχα ὑπὸ τῆς DM κατὰ τὸ D .

Εἰάν δὲ ἀχθῇ καὶ κατωτέρω τῆς $NΦ$ τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἡ $ηζ$ τέμνουσα τὴν μὲν NK κατὰ τὸ $π$, τὴν δὲ NI κατὰ τὸ $ω$, καὶ ταχθῶσιν ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν διάμετρον NK αἱ $ηλ$, $ζβ$ τέμνουσαι τὴν DM προσεκβληθεῖσαν κατὰ τὰ P , $σ$, δειχθήσεται ὡσαύτως (49) τὸ τρίγωνον $ησλ$, ἴσον τῷ παραλληλογράμῳ $NAPI$. Κοινῇ δὲ προσκειμένη τῷ $ABSI$, γεννηθήσεται τὸ χωρίον $ηβσP$ ἴσον τῷ παραλληλογράμῳ $NBSI$, ὅπερ ἔσαι τῷ τριγώνῳ $πβζ$ ἴσον (50), διὰ τὸν ὁμοίους σοιχείοις ἀνωτέρω

48) Τὸ τρίγωνον $PAH=ANPI$, καὶ τὸ $PBZ=NBZI$. ἄρα $PBZ-PAH=NBZI-ANPI$ ἤτοι $AHBZ=ABSP$.

49) Εἴτις ἐστιν ἡ $π η$, $ΠΗ$ παράλληλος, τὰ τρίγωνα ἄρα $π λ η$, $ΠΛΗ$ ὁμοιά ἐστιν· ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ $λ η$ ἐστὶ τεταγμένη ἐπὶ τὴν διάμετρον NK , καὶ τῇ $ΗΛ$ ἐπ' εὐθείας κείμενη ἄρα ἡ $λ η$ τῇ $ΛΗ$ ἴση· καὶ τὰ τρίγωνα $π λ η$, $ΠΛΗ$ πρὸς τῷ ὁμοία ἐστὶν ἀλλήλοισι καὶ ἴσα· δέδεικται τὸ $ΠΛΗ$ ἴσον τῷ $NAPI$, ἄρα καὶ $π λ η=ANPI$.

50) Εἴτις ἡ $β ζ$ ἐστὶ τῇ KM παράλληλος, τὰ τρίγωνα ἄρα $π β ζ$, $ΘΚΜ$ ὁμοία· διὰ δὲ τοῦτο (19. ζ.) τὸ $π β ζ:ΘΗΜ=β ζ:ΚΜ$ · $ΚΜ=Νβ$: $NK=Νβ σ I$: $NKMI$ (1.

ἐκτεθέντα λόγον. Καὶ τὸ χωρίον ἡ $\pi\beta\sigma\rho$ ἔσαι ἴσον τῷ τριγώνῳ $\pi\beta\zeta$. Κοινὴ δὲ τῷ $\pi\beta\sigma\delta$ ἀρθάντος ἀπολειφθήσεται τὸ τρίγωνον $\eta\delta\rho$ ἴσον ἢ ὅμοιον τῷ τριγώνῳ $\xi\delta\sigma$. ἢ ἔσαι δὴ ἡ $\eta\delta$ τῇ $\delta\zeta$ ἴση. Ἡ $\mu\Delta$ ἄρα δίχα τέμνει οἷανδὴποτε εὐθεΐαν ἡγμένην παρὰ τὴν $\Theta\mu$ ἰφαπτομένην, ἢ πρὸς τὰς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένας ἔσι δὴ ἢ αὕτη διάμετρος.

Τέλος δὲ ἐπεὶ ἡ $\Theta\mu$ ἔστιν ἴση τῇ $\nu\kappa$, ἥτε $\nu\kappa$ τῇ $\iota\mu$, τὰ ὅμοια τρίγωνα $\Theta\epsilon\mu$, $\iota\epsilon\mu$ ἔστιν ἄρα ἢ ἴσα (σημείωσ. 47). Προσκειμένε δὲ κοινῇ τῷ $\nu\epsilon\mu\chi$, γίνεται τὸ $\Theta\mu\chi\mu$ τῷ τριγώνῳ $\chi\iota\mu$ ἴσον. Δέδεικται δὲ ἀνωτέρω τὸ $\chi\iota\mu$ ἴσον τῷ $\chi\tau\phi$, ἄρα τὸ $\Theta\mu\chi\mu$ ἴσον τῷ τριγώνῳ $\chi\tau\phi$. Προσκειμένε δὲ πάλιν τοῖς αὐτοῖς τρίγωνα $\Theta\epsilon\mu$, $\iota\epsilon\mu$ τῷ $\nu\epsilon\mu\sigma\beta$, γίνεται τὸ τετράπλευρον $\Theta\mu\sigma\beta$ τῷ παραλληλογράμμῳ $\iota\mu\beta\sigma$ ἴσον· εἰδείχθη δὲ ἀνωτέρω τὸ $\iota\mu\beta\sigma$ ἴσον, τῷ τριγώνῳ $\pi\zeta\beta$, ἄρα τὸ $\Theta\mu\sigma\beta$ ἔστι τῷ $\pi\zeta\beta$ ἴσον. Κοινὴ δὲ ἀφαιρεθέντος τῷ τραπεζίῳ $\pi\Delta\sigma\beta$, λοιπὸν τὸ $\Delta\sigma\zeta$ τρίγωνον λοιπῷ τῷ $\Theta\mu\Delta\mu$ παραλληλογράμμῳ ἔστιν ἴσον. Ἐνθεν τοι τὸ τρίγωνον $\chi\tau\phi$ (= τῷ $\chi\iota\mu$) πρὸς τὸ $\Delta\sigma\zeta$ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ $\chi\phi$ πρὸς τὸ ἀπὸ $\Delta\zeta$ (19 τῷ 5.), ἢ ὡς τὸ ἀπὸ $\chi\mu$ πρὸς τὸ ἀπὸ $\Delta\mu$. Δέδεικται δὲ τὸ μὲν $\chi\tau\phi$ ἴσον τῷ $\Theta\mu\chi\mu$, τὸ δὲ $\Delta\sigma\zeta$ ἴσον τῷ $\Theta\mu\Delta\mu$, ὡς ἄρα τὸ $\Theta\mu\chi\mu$ πρὸς τὸ $\Theta\mu\Delta\mu$,

τῷ 5.)· ἔστι δὲ τὸ $\Theta\mu\chi\mu$ ἴσον τῷ $\nu\kappa\mu\iota$, ἄρα ἢ τὸ $\pi\beta\zeta$ ἴσον τῷ $\nu\beta\sigma\iota$.

ἔτω τὸ ἀπὸ ΧΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΗ. Ὡς δὲ τὸ
ΘΝΧΜ πρὸς τὸ ΘΠΔΜ, ἔτως ἡ ΧΜ πρὸς ΔΜ
(1 τῷ 5.). Ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΧΝ πρὸς τὸ ἀπὸ
ΔΗ, ἔτως ἡ ΧΜ πρὸς ΔΜ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ὅσα ἄρα προδίδεικται περὶ τὴν Παραβολὴν
συμβαίνοντα συμπαραλαμβανομένων τῆς τε ἀρχι-
κῆς διαμέτρου ΝΚ καὶ τῶν ἐπ' αὐτὴν τεταγμένων, καὶ
δὴ καὶ τῆς εἰς ταύτην ἀνηκύσης ἐφαπτομένης ΘΜ,
τὰ αὐτὰ πάντα δεχθήσεται συμβαίνοντα, συμπα-
ραλαμβανομένων καὶ ἄλλης οἰασῶν διαμέτρου ΜΔ,
τῶν τε ἐπ' αὐτὴν τεταγμένων καὶ τῆς εἰς ταύτην
ἀνηκύσης ἐφαπτομένης ΗΙ, καὶ δὴ καὶ τῆς Παραμέ-
τρου ἡτοὶ ὀρθίας πλευρᾶς. Αὕτη τε γὰρ ἐκ τῆς
διαμέτρου ΜΔ ὀριζομένη ἔσαι αἰετρίτη ἀνάλογος
οἰασδὴποτε ἀποτεμνομένης ΔΜ, καὶ τῆς ἐπ' αὐτὴν
τεταγμένης ΖΔ. Ἡ' τε Ὑφαπτομένη ΙΧ διπλα-
σία ἔσαι κἀνταῦθα τῆς ἀποτεμνομένης ΔΜ, καὶ δὴ
καὶ τὸ ἀφ' ἐκάστης τῶν τεταγμένων ἐπ' αὐτὴν τε-
τράγωνον ἴσον ἔσαι τῷ ὑπὸ τῆς ἀποτεμνομένης
ΔΜ, καὶ τῆς εἰς ταύτην ἀνηκύσης ὀρθίας πλευρᾶς
περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ (51).

51) Ἐπεὶ προδίδεικται ταῦτα πάντα ὑποδεμένης
τῆς ἐκ τῆς γεννήσεως διαμέτρου ΝΚ ἐν τῇ Δ' Πρατάσει
καὶ τῷ Α' αὐτῆς πορίσματι ἀνάγκη ἄρα συμβαίνειν ὑ-
ποδεμένης καὶ ἄλλης οἰασῶν διαμέτρου. Ἐ'σι γὰρ καὶ ταῦτα

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Δῆλον ἄρα ὡς οἰαδήποτε τρίγωνα ἐπὶ τῶν τεταγμένων συνισάμενα καὶ ἐπὶ τῆς εἰς ταύτας ἀνηκέτης διαμέτρου ἐφεξῆς ἀλλήλων κείμενα, ὥν τε αἱ βάσεις τῇ τῆς διαμέτρου ταύτης ἐφαπτομένη παράλληλοι, οἷα τὰ ΠΛΗ, ΠΒΖ, ΝΤΦ κλ. ἐξισῶνται τοῖς ἀντιστοιχῶσιν αὐτοῖς παραλληλογράμμοις ΝΛΡΙ, ΝΒΣΙ, ΝΤΤΙ, κλ. Ὡς περ δὲ καὶ τὸ ΔΗΡ (ὅπερ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔΖΣ) τῷ ΜΔΠΘ, τότε δ σ ζ τῷ Μδπθ (52). Καὶ τῶν λοιπῶν τριγώνων ἕκαστον ἐκάσῳ ἀντιστοιχοῦντι παραλληλογράμμῳ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Δῆλον ὡσαύτως ὅτι τὸ τρίγωνον ΘΕΝ δέ-δεικται ἴσον τῷ τριγώνῳ ΙΕΜ. Καὶ ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΔΗΡ, ὅπερ ἐξισῶνται τῷ ΔΣΖ, ἐστὶν ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΘΠΔΜ, κοινῇ τῇ ΜΔΗΘ ἀρδέντος, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον ΡΜΟ ἴσον τῷ τραπεζίῳ ΟΗΠΘ, προκειμένῳ δὲ κοινῇ τῇ τριγώ-

ὥς περ ἐκείσε τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετραγωνα ὡς αἱ ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνόμεναι πρὸς τῇ κορυφῇ.

54) Τὸ ΘΝΕ=ΜΙΕ· κοινῇ ἄρα προσκειμένη τῇ ΝΕΜ σ β, γενήσεται τὸ ΘΜ σ β=ΝΙ σ β. Ἐς ἰδὲ τὸ ΝΙ σ β ἴσον τῷ τριγώνῳ π β ζ (σημ. 50.), ἄρα π β ζ ΘΜ σ β· κοινῇ δὲ τῇ β π δ σ ἀρδέντος, ἀπολείπεται τὸ Μ δ π Θ=δ π ζ.

νυ ΠΛΗ, ἔσαι τὸ τρίγωνον ΡΜΟ μετὰ τῷ αὐτῷ
 ὁμοίῳ ΠΛΗ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΘΛΟ. Καὶ ἐπεὶ τὸ
 τρίγωνον ΠΛΗ ἐστὶν ἴσον τῷ τριγώνῳ π λ η ἕσης
 τῆς ΛΗ ἴσης τῇ Λη (σημ. 49), τὸ τρίγωνον ἄ-
 ρα ΡΜΟ μετὰ καὶ τῷ τριγώνῳ π λ η ἐστὶν ἴσον τῷ
 ΘΛΟ. Ὅθεν καὶ τὸ ἀπὸ ΡΟ μετὰ τῷ ἀπὸ ΗΛ ἢ
 τῷ ἀπὸ ηΛ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ ΛΟ. Καὶ ληφθεί-
 σων ἐτέρων πλευρῶν ὁμολόγων, ἔσαι τὸ ἀπὸ ΜΡ,
 τῷτ' ἔστι τὸ ΚΛ μετὰ τῷ ἀπὸ ΠΛ ἢ τῷ ἀπὸ πΛ
 ἴσον τῷ ἀπὸ ΘΛ· τότε ἀπὸ ΜΟ μετὰ τῷ ἀπὸ
 ΠΗ, ἢ τῷ ἀπὸ π η τῷ ἀπὸ ΘΟ.

Π. Ο' Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Προαχθείσης δὲ τῆς ἐφαπτομένης ΘΜ ἄχ-
 ρις ὅτε συμπέσῃ ταῖς τεταγμέναις ΒΖ, ΤΦ προ-
 σεκβληθείσαις κατὰ τὰ Α, Ψ. Ἐπεὶ τὸ τρίγω-
 νον ΧΤΦ, (ὅπερ ἐξισῶται τῷ ΧΙΝ) ἐστὶν ἴσον τῷ
 παραλληλογράμμῳ ΘΝΧΜ, κοινῇ τῷ ΜΧΦΨ,
 γενήσεται τὸ τρίγωνον ΜΤΨ ἴσον τῷ τραπεζίῳ

53) Ἐπεὶ ἐστὶν ὁμοία τὰ τρίγωνα ΟΡΜ, ΠΗΛ, ἔ-
 σαι δὴ $ΟΡΜ : ΠΗΛ = ΡΟ^2 : ΛΗ^2$ (19. τῷ ζ') καὶ συνθέντι
 μὲν $ΟΡΜ + ΠΗΛ : ΠΗΛ = ΡΟ^2 + ΛΗ^2 : ΛΗ^2$ · ἵνα λά-
 ξαντι δὲ $ΟΡΜ + ΠΗΛ : ΡΟ^2 + ΛΗ^2 = ΠΗΛ : ΛΗ^2$ · ἀλ-
 λά $ΠΗΛ : ΛΗ^2 = ΘΛΟ : ΛΟ^2$ (διὰ τὴν αὐτὴν)· ἄρα
 $ΟΡΜ + ΠΗΛ : ΡΟ^2 + ΛΗ^2 = ΘΛΟ : ΛΟ^2$ · καὶ ἀναλλάξαν-
 τι $ΟΡΜ + ΠΗΛ : ΘΛΟ = ΡΟ^2 + ΛΗ^2 : ΛΟ^2$ · Ἐστὶ δὲ
 $ΟΡΜ + ΠΗΛ = ΘΛΟ$, ἄρα καὶ $ΡΟ^2 + ΛΗ^2 = ΛΟ^2$.

ΨΝΘΨ. Ὡσαύτως ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΔΣΖ (=ΔΗΡ)
ἐστὶν ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΜΔΠΘ, προσκει-
μένου κοινῇ τοῦ ΜΔΖΑ, γενήσεται τὸ τρίγωνον
ΜΣΑ ἴσον τῷ τραπεζίῳ ΖΠΘΑ. Ἔτι ἐπεὶ τὸ τρί-
γωνον ΔΣΖ ἴσεται τῷ παραλληλογράμμῳ ΜδπΘ,
προσκειμένου κοινῇ τῷ Μδζα, γενήσεται τὸ τρίγω-
νον Μσα ἴσον τῷ ζτΘα τραπεζίῳ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε΄.

Ὅθεν ὄντος τῷ τριγώνῳ ΜΤΨ τῷ τραπε-
ζίῳ ΦΝΘΨ ἴσου, εἰν προσεθῇ ἑκατέρῳ τὸ τῷ
ΜΤΨ ὅμοιον τρίγωνον ΝΤΦ, ἴσαι τὰ τρίγωνα
ΜΤΨ, ΝΤΦ ἅμα ληφθέντα ἴσα τῷ αὐτοῖς ὁ-
μοίῳ τριγώνῳ ΘΤΨ. Καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων
πλευρῶν ΤΨ, ΤΦ τετράγωνα ἅμα ληφθέντα,
ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΤΨ (54). Καὶ ἔτι ὄντος τῷ τρι-
γώνῳ ΜΣΑ τῷ τραπεζίῳ ΖΠΘΑ ἴσου, εἰν προ-
σεθῇ κοινῇ τὸ τῷ ΜΣΑ ὅμοιον τρίγωνον ΠΒΖ,
ἔσεται τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα ΜΣΑ, ΠΒΖ ὁμῶς
ληφθέντα τῷ αὐτοῖς ὁμοίῳ τριγώνῳ ΘΒΑ ἴσα,
καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΣΑ ὁμῶς ληφθέντα, ἴσα

54) $MT\Psi : NT\Phi = T\Psi^2 : T\Phi^2$ (19. τῷ 5.) ὅθεν ἢ
 $MT\Psi + NT\Phi : NT\Phi = T\Psi^2 + T\Phi^2 : T\Phi^2$, καὶ ἐναλλάξ
 $MT\Psi + NT\Phi : T\Psi^2 + T\Phi^2 = NT\Phi : T\Phi^2 = \Theta T\Psi^2 : T\Psi^2$ ἢ
 $MT\Psi + NT\Phi : T\Psi^2 + T\Phi^2 = \Theta T\Psi : T\Psi^2$ καὶ ἐναλλάξ
 $MT\Psi + NT\Phi : \Theta T\Psi = T\Psi^2 + T\Phi^2 : T\Psi^2$. ἴσι δὲ $MT\Psi +$
 $NT\Phi = \Theta T\Psi$. ἔρκ καὶ $T\Psi^2 + T\Phi^2 = T\Psi^2$.

τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ. Καὶ ἐτέρων οἰωνδήποτε ὁμολόγων πλευρῶν ληφθεῖσων, τῶν ΜΤ (ἢ ΚΤ), ΝΤ, ΘΤ, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς ΜΤ, ἢ τῆς ΚΤ μετὰ τῆ ἀπὸ τῆς ΝΤ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΘΤ· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α ς.

Ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΠΛΗ ἐστὶν ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΛΡΙ ἀρθέντος τῆ κοινῆ ΝΛΗΩ, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον ΠΝΩ ἴσον τῷ τραπεζίῳ ΩΗΡΙ· κοινῇ δὲ προσκειμένῃ τέτοις τῆ ὁμοίᾳ τριγώνῳ ΗΡΔ, γίνεται τὸ τρίγωνον ΠΝΩ μετὰ τῆ ΗΡΔ ἴσον τῷ αὐτοῖς ὁμοίῳ τριγώνῳ ΩΔΙ. Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΝ μετὰ τῆ ἀπὸ τῆς ΗΡ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΩΙ. Καὶ δὴ τὸ ἀπὸ τῆς ΠΩ μετὰ τῆ ἀπὸ τῆς ΗΔ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΩΔ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΔ ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΩΗ μετὰ τῆ ἀπὸ τῆς ΗΔ (ὁ τῆ Β΄)· ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΠΩ μετὰ τῆ ἀπὸ τῆς ΗΔ, ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΩΗ μετὰ τῆ ἀπὸ τῆς ΗΔ. Κοινοῦ δὲ τῆ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἀρθέντος ἔσαι τῷ ἀπὸ τῆς ΠΩ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΩΗ. Ὡσαύτως ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ηΠΛ ἐστὶν ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΛΡΙ, κοινῇ προσκειμένῃ τῆ τραπεζίᾳ ΝΛΗΩ γενήσεται τὸ τρίγωνον πΝω ἴσον τῷ τραπεζίῳ ΙΡηω, καὶ προσθέντος ἐκετέρῳ τῆ τριγώνῳ ηΡδ, ἔσαι τὰ δύο τρίγωνα πΝω, ηΡδ ἅμα ληφθέντα, ἴσα τῷ αὐτοῖς ὁμοίῳ τριγώνῳ ωΙδ. Καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν δη, τω τετράγωνα ἅμα ληφθέντα

ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς δω τετραγώνῳ ἢ τῷ ὑπὸ τῶν ζωη
ὀρθογωνίῳ μετὰ τῆ ἀπὸ τῆς δ η τετραγώνῳ (6 τῆ
Β'). Κοινὲ δὲ τῆ ἀπὸ τῆς δ η ἀφαιρεθέντος, ἔσαι τὸ
ἀπὸ τῆς π ω, ἴσον τῶν ὑπὸ τῶν ζωη. Ἡ ἄρα π ω
μέση ἀνάλογος ἐν ταῖς ζω, ωη ὥσπερ δὲ εἰ ἡ ΠΩ
ἐν ταῖς ΖΩ, ΩΗ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ζ'.

Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΟΡ,
ΗΛ ὁμῶ ληφθέντα, ἔσιν ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΛΟ (Πορ.
Γ'). τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΛΟ, ἴσον τῷ ὑπὸ ηΟΗ μετὰ
τῆ ἀπὸ ΗΛ (6 τῆ Β'). τὸ ἄρα ἀπὸ ΟΡ ἴσον τῷ ὑ-
πὸ ηΟΗ, εἰ ἡ ΟΡ μέση ἀνάλογος ἐν ταῖς ηΟ, ΟΗ.
Προεκβληθείσης δὲ τῆς τεταγμένης ΒΖ ἐπὶ θάτε-
ρα τῆς καμπύλης κατὰ τὸ Φ, ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν
ΣΑ, ΒΖ τετράγωνα ὁμῶ ληφθέντα ἐξισῶται τῷ
ἀπὸ τῆς ΒΑ τετραγώνῳ (Πορ. Ε') τῆτ' ἔσι τῷ ὑ-
πὸ ὑπὸ ΦΑΖ μετὰ τῆ ἀπὸ ΒΖ (6 τῆ Β'), ἄρα τὸ
ἀπὸ ΣΑ, ἴσον τῷ ὑπὸ ΦΑΖ, εἰ ἡ ΣΑ μέση ἀνά-
λογος ἐν ταῖς ΑΦ, ΑΖ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Η'.

Εἰ ἂν ἄρα δύο εὐθεῖαι ΝΕ, ΜΕ ἐφαπτόμε-
ναι τῆς Παραβολῆς συμπίπτωσιν ἀλλήλαις καὶ
ἐντι σημεῖον τὸ Ε, καί τις εὐθεῖα τῇ μιᾷ τούτων
παράλληλος ἢ ΦΑ τέμνῃ τὴν ἑτέραν ἐκβληθεῖ-
σαν κατὰ τὸ Α, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον

ὑπὸ τῆς τεμνύσης ἕλης καὶ τῆ ἐκτὸς μέρους αὐτῆς
 τῆ μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης ἔσαι
 πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆ τμήματος τῆς ἐ-
 φαπτομένης, ἣτις τέτμηται, τῆ γινομένου μεταξὺ
 τῆς ἀφῆς καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων,
 ὡς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆ τμήματος τῆς πα-
 ρὰ τὴν τέμνουσαν ἐφαπτομένης τῆ ἀπολαμβανομέ-
 νου μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς συμπτώσεως, πρὸς
 τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆ λοιπῆς τμήματος τῆς
 προτέρας ἐφαπτομένης τῆ μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ
 τῆς συμπτώσεως. Ἦ'τοι τὸ ὑπὸ ΦΑΖ ἔσαι πρὸς τὸ
 ἀπὸ ΑΜ, ὡς τὸ ἀπὸ ΝΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ. Ἐπεὶ
 γὰρ τρίγωνα ΘΝΕ, ΜΣΑ· εἰν ὅμοια, ἔσαι δὴ τὸ
 ΘΝΕ πρὸς τὸ ΜΣΑ, ὡς τὸ ἀπὸ ΝΕ πρὸς τὸ ἀπὸ
 ΣΑ. Καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ. Ὅθεν
 τὸ ἀπὸ ΝΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΑ ἔσαι ὡς τὸ ἀπὸ ΘΕ
 πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ. Καὶ ἐπεὶ εἰν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ
 ΘΕ τῷ ἀπὸ ΕΜ, τὸ δὲ ἀπὸ ΣΑ τῷ ὑπὸ τῶν ΦΑΖ
 (Πορ. προηγ.)· ἄρα τὸ ἀπὸ ΝΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ,
 ὡς τὸ ὑπὸ ΦΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ. Διὰ δὲ ταῦτα
 καὶ τὸ ὑπὸ ΖΩΗ (ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ τῆς
 τεμνύσης ΖΩ καὶ τῆ ἐκτὸς μέρους ΗΩ) πρὸς τὸ ἀπὸ
 ΝΩ (τμήματος τῆς ἐφαπτομένης, ἣτις τέτμηται,
 μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς τεμνύσης ἀπολαμβανομένη),
 ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΕ (τμήματος τῆς παρὰ τὴν τέμ-
 νουσαν ἐφαπτομένης μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς συμ-
 πτώσεως ἀπολαμβανομένη) πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΝ

(λοιπὸν τμήματος τῆς προτέρας ἐφαπτομένης μετα-
ξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς συμπτώσεως γινομένη) *).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Εἴαν ἐν Παραβολῇ τῇ ΑΝΔ, ἥς βάσις σχημ. 33.
μὲν ἡ ΑΔ, διάμετρος δὲ ἡ ΝΒ, καὶ πλευ-
ρὰ ὀρθία ἡ ΝΖ, ἀχθῶσι παρὰ τὴν διά-
μετρον εὐθεῖαι οἵαιδήποτε αἱ ΜΕ, ΗΘ,
αὗται δὲ ἔσονται ὡς τὰ ὀρθογώνια τὰ
περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμημάτων εἰς αὐ-
τεμῆσιν τὴν βάσιν, ἥτοι ὡς τὰ ὑπὸ τῶν
ΑΕΔ, ΑΘΔ. Καὶ προεκβληθείσης
τῆς βάσεως εἴαν ἐκτὸς τῆς Παραβολῆς
ἀχθῶσι τῇ διαμέτρῳ παράλληλοι καὶ ἑτε-
ραι εὐθεῖαι αἱ μ Ε, η Θ, ἔσονται δὲ καὶ
αὗται ὡς τὰ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ, ΑΘΔ ὀρ-
θογώνια.

Εἴπερ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τεταγμένης τε-
τράγωνον ἔσιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΝΖ ὀρθογωνίῳ
(Πορ. Α'. τῆς Δ'). τότε ἀπὸ τῆς ΠΗ, ἴσον τῷ
ὑπὸ τῶν ΠΝΖ. Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς τῇ τῷ ὑπὸ τῶν

*) ΠΝΩ : ΘΝΕ = ΠΩ² : ΘΕ² = ΝΩ² : ΕΝ². ἄρα
ΠΩ² : ΝΩ² = ΘΕ² : ΕΝ². ἀλλὰ ΠΩ² = ΖΩΗ (Πορ. ε')
καὶ ΘΕ² = ΜΕ², ἄρα ΖΩΗ : ΝΩ² = ΜΕ² : ΝΕ².

πNZ . Καὶ ἡ ὑπεροχὴ ἄρα τῶν ἀπὸ $\text{B}\Delta$, $\text{H}\Pi$, τῆς
 ἔτι τῶν ἀπὸ $\text{B}\Delta$, $\text{B}\Theta$, ἦτοι τὸ ὑπὸ τῶν $\text{A}\Theta\Delta$ ὀρ-
 θογωνίων (5 τῆς B' .) ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ πε-
 ριεχομένῳ ὑπὸ τῆς NH καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ἀπο-
 τεμνομένων BN , HN , τῆς $\text{B}\Pi$ (1 τῆς B' .)
 ἦτοι τῆς ΘH . Λέγω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν $\text{A}\Theta\Delta$, ἴσον
 τῷ ὑπὸ τῶν $\text{N}\Theta$, NZ . Ὡσαύτως ἡ ὑπεροχὴ τῶν
 ἀπὸ π ἢ εἴτ' ἐν $\text{B}\Sigma$, $\text{B}\Delta$ τῆς $\text{B}\Delta$ ἔστι τὸ ὑπὸ $\text{A}\Sigma\Delta$ ὀρ-
 θογωνίων (6 τῆς B' .) ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ πε-
 ριεχομένῳ ὑπὸ τῆς NZ καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ἀ-
 ποτεμνομένων ωN , BN εἴτ' ἐν τῆς $\text{B}\pi$, τῆς $\text{B}\pi$ ἔστι τῆς
 $\Sigma\eta$, ἦτοι τὸ ὑπὸ τῶν $\text{A}\Sigma\Delta$, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν $\eta\Delta$,
 NZ . Ὁμοίως δειχθήσεται ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $\text{A}\epsilon\Delta$
 ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν $\text{M}\epsilon$, NZ . τότε ὑπὸ τῶν $\text{A}\epsilon\Delta$,
 τῷ ὑπὸ τῶν $\text{M}\epsilon$, NZ . Αἱ παρὰ τὴν διάμετρον ἄρα
 ἡγμέναι εὐθεῖαι $\text{M}\epsilon$, $\text{H}\Theta$ εἰσὶν ὡς τὰ ὀρθογωνία
 $\text{A}\epsilon\Delta$, $\text{A}\Theta\Delta$ τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς βάσεως
 περιεχόμενα (1 τῆς ζ' .) Τὰ γὰρ ἐξ αὐτῶν ἐπὶ
 τὴν αὐτὴν Παράμετρον NZ γινόμενα ἐξίστανται τέ-
 τοις τοῖς ὀρθογωνίοις *). Ὡσαύτως ἐπεὶ εἰσὶν ὡς τὸ
 ὑπὸ $\text{A}\Sigma\Delta$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\text{A}\epsilon\Delta$, ἔτω τὸ ὑπὸ τῶν $\eta\Delta$,
 NZ πρὸς τὰ ὑπὸ τῶν $\text{M}\epsilon$, NZ . ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν
 $\eta\Delta$, NZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $\text{M}\epsilon$, NZ , ἔτως ἡ $\text{M}\epsilon$

*) Ἐπεὶ γὰρ εἰσὶν $\text{A}\epsilon\Delta = \text{M}\epsilon \times \text{NZ}$ καὶ $\text{A}\Theta\Delta = \text{H}\Theta \times \text{NZ}$, ἔστι δὲ $\text{A}\epsilon\Delta : \text{A}\Theta\Delta = \text{M}\epsilon \times \text{NZ} : \text{H}\Theta \times \text{NZ}$. ἔλ-
 λα $\text{M}\epsilon \times \text{NZ} : \text{H}\Theta \times \text{NZ} = \text{M}\epsilon : \text{H}\Theta$ (1. τῆς ζ' .) ἄρα
 $\text{A}\epsilon\Delta : \text{A}\Theta\Delta = \text{M}\epsilon : \text{H}\Theta$.

πρὸς τὴν $\eta\theta$, ἔσιν ἄρα ἡ $\mu\epsilon$ πρὸς $\eta\theta$, ὡς τὸ υ ·
πὸ $\Lambda\epsilon\Delta$ πρὸς τὸ υ πὸ $\Lambda\theta\Delta$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Προαχθείσης δὲ τῆς $\eta\pi$ ἐπὶ θάτερα ἀχρι τῆ
 Λ , ἣτις τεμεῖ τὴν $\mu\epsilon$ κατὰ τὸ ι , ἔσαι τὸ υ πὸ
 $\Lambda\epsilon\Delta$ πρὸς τὸ υ πὸ $\Lambda\iota\eta$, ὡς ἡ $\mu\epsilon$ πρὸς τὴν $\mu\iota$.
Ὅν γὰρ τρόπον τὸ υ πὸ τῶν $\mu\epsilon$, $\nu\zeta$, ἴσῃται τῷ
 υ πὸ τῶν $\Lambda\epsilon\Delta$, ἔτω κ τὸ υ πὸ τῶν $\mu\iota$, $\nu\zeta$ ἴσω
θῆσεται τῷ ι πὸ τῶν $\Lambda\iota\eta$ · καὶ ἔσιν ἄρα τὸ υ πὸ
 $\Lambda\epsilon\Delta$ πρὸς τὸ υ πὸ $\Lambda\iota\eta$, ὡς τὸ υ πὸ τῶν $\mu\epsilon$, $\nu\zeta$
πρὸς τὸ υ πὸ τῶν $\mu\iota$, $\nu\zeta$ · ὅθεν κ ὡς ἡ $\mu\epsilon$ πρὸς
 $\mu\iota$ (1 τῆ 5'). Προαχθείσης δὲ κ τῆς $\eta\pi$ ἐπὶ τὸ
 λ ἣτις τεμεῖ τὴν $\mu\epsilon$ κατὰ τὸ ι , ἔσαι τὸ υ πὸ $\Lambda\epsilon\Delta$,
ὅπερ ἴσῃται τῷ ι πὸ τῶν $\mu\epsilon$, $\nu\zeta$, πρὸς τὸ υ πὸ
 $\lambda\iota\eta$, ὅπερ ἴσον ἐστὶ τῷ ι πὸ τῶν $\mu\iota$, $\nu\zeta$, ὡς ἡ $\mu\epsilon$
πρὸς $\mu\iota$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Β'.

Εὰν ἐν Ἐλλείψει ἢ ἀντικειμέναις τομαῖς Σχημ. 34.
εὐθεῖα οἰαδήτις διὰ τῆ κέντρου ἢ $\mu\Gamma$ 35.
ἀχθεῖ, προαχθεῖσα συμπεσεῖται ἐπὶ
θάτερα τῇ Ἐλλείψει ἢ τῇ ἑτέρᾳ
τῶν ἀντικειμένων κατὰ τὸ Σ , κ δίχα
τμηθήσεται κατὰ τὸ κέντρον· κ αἱ ἀπὸ
τῶν μ , Σ ἀχθεῖσαι ἐφαπτόμεναι τῆς

Ἐλλείψεως ἢ τῶν ἀντικειμένων, ἔσονται ἀλλήλαις παραλλήλοί τε ἴσαι.

Ἀπὸ τοῦ Μ τετάχθω ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν διάμετρον ΝΖ ἡ εὐθεῖα ΜΚ, καὶ τῇ ΓΚ ἴση ληφθῇ τῷ ἢ ΓΖ· πρὸς δὲ τῷ Ζ τετάχθω ἐπὶ θάτερα τῆς διαμέτρου ἡ ΖΣ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΣΓ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπὸ ΓΝ, ΓΚ, τούτ' ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΝΚΖ ὀρθογώνιον (5 τοῦ Β'. ἐν τῇ Ἐλλείψει καὶ 6 τοῦ αὐτοῦ ἐν ταῖς ἀντικειμέναις) ἐξισῶται τῇ ὑπεροχῇ τῶν ἀπὸ ΓΖ, ΓΞ τῶν αὐτοῖς ὁμολόγως ἴσων, τούτ' ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΝΖΞ ὀρθογωνίῳ (5 καὶ 6 τοῦ αὐτοῦ). καὶ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ΜΚ, ΖΣ τετράγωνα εἰσὶν ὡς τὰ εἰρημένα ὀρθογώνια (Προτασ. Ε', ὡς πρὸς τὴν Ὑπερβολὴν καὶ 5. ὡς πρὸς τὴν Ἐλλείψιν), τὰ τετράγωνα ἄρα ταῦτα εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις· καὶ ἐπομένως ἡ ΜΚ ἴση τῇ ΖΣ. Ἐστὶ δὲ ἐκ κατασκευῆς καὶ ἡ ΓΚ ἴση τῇ ΓΖ, ἥτε ὑπὸ ΜΚΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΣΖΓ. Εἰσὶ γὰρ ἐναλλάξ ἐντὸς τῶν παραλλήλων· καὶ ἡ ΓΜ ἄρα βάσις τοῦ τριγώνου ΓΚΜ ἴση ἐστὶ τῇ ΓΣ βάσει τοῦ τριγώνου ΓΖΣ (4 τοῦ Α'), καὶ ἡ ὑπὸ ΜΓΚ ἴση τῇ ὑπὸ ΣΓΖ· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΚΓΜ μετὰ τῆς ὑπὸ ΜΓΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἐξισῶται (13 τοῦ Α'), δυσὶν ὀρθαῖς δὲ ἐξισῶται καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΣ μετὰ τῆς ὑπὸ ΣΓΚ, δυσὶν ὀρθαῖς ἄρα ἐξισωθήσεται καὶ ἡ ΣΓΖ μετὰ τῆς ὑπὸ ΖΓΜ. ἡ ΣΓ ἄρα ἐπ' εὐθείας κεῖται τῇ ΓΜ (14 τοῦ Α'). ἡ ΜΓ ἄρα προαχθεῖσα συμπίπτει ἐπὶ θάτερα τῇ τομῇ κατὰ τὸ

Σ. καὶ ἡ ΜΓΣ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ κέντρον Γ.

Ἀχθείσων δὲ τῶν ἐφαπτομένων ΜΘ, ΣΠ, ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΘΚΓ ὀρθογώνιον ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΝ τετραγώνῳ (Πρρ. ΙΑ'. τῆς Θ'). τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΖΓΠ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΞ (διὰ τὸν αὐτὸν λόγον), καὶ ἡ ΓΝ ἴση τῇ ΓΞ καὶ δὴ καὶ τὸ ἀπὸ ΓΝ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΞ, ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΘΓΚ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΓΠ (ἦτοι $\Theta\Gamma\chi\Gamma\kappa = \chi\Gamma\pi$). ἴση δὲ ἡ ΓΚ τῇ ΓΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΓ τῇ ΓΠ. ἴση δὲ καὶ ἡ ΜΓ τῇ ΓΣ. καὶ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΣΓΠ τῇ ὑπὸ ΜΓΘ, ἄρα καὶ ἡ ΘΜ ἴση τῇ ΠΣ (4 τῆς Α'), ἀλλὰ δὴ καὶ παράλληλοι· εἴγε αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΜΘΓ, ΣΠΓ ἀλλήλαις ἴσαι ἅτε πλευραῖς ἴσαις ταῖς ΜΓ, ΓΣ ἀντικείμεναι. Ταῦτα δὲ πρῶκειτο δεῖξαι· ἄρα κτ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Προαχθείσης δὲ τῆς ΣΖ ἐπὶ δεύτερα τῆς τομῆς ἄχρι τῆς Ε, δῆλον ὅτι ἡ ΣΖ ἔσεται ἴση τῇ ΖΕ, ἄρα καὶ τῇ ΚΜ, ἥτις ἐστὶ τῇ ΖΕ παράλληλος. Ἐπιζευχθεῖσα ἄρα ἡ ΜΕ, ἔσται τῇ ΚΖ παράλληλος καὶ ἴση (33 τῆς Α').

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Ἀχθεῖσα δὲ διὰ τῆς κέντρου καὶ παρὰ τὰς τεταγμένας ΜΚ, ΕΖ ἡ ΓΗ, δίχα τεμεῖ τὴν ΜΕ

κατὰ τὸ Β, καὶ δὴ καὶ ἀπάσας τὰς αὐτῇ παραλλήλους καὶ τὰ πέρατα τῶν ἴσων ἐπὶ τὴν διάμετρον ΝΖ τεταγμένων ἐπιζευγνύσας. Γενήσεται γὰρ ἡ μὲν ΒΜ ἴση τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΒΕ ἴση τῇ ΓΖ. Εἰσὶ γὰρ ἀντικείμεναι πλευραὶ τῶν παραλλήλων γραμμῶν ΓΒΜΚ, ΓΒΕΖ, καὶ ὑπόκειται ἡ ΓΖ ἴση τῇ ΓΚ. Ἄρα καὶ ἡ ΓΗ εἶναι καὶ αὐτὴ διάμετρος, ἐφ' ἣν τετάσσονται καὶ δίχα ὑπὸ αὐτῆς τμηθήσονται αἱ τῇ ἀρχικῇ διαμέτρῳ παράλληλοι εὐθεῖαι ΜΕ, ΤΛ.

Καλείθω δὲ ἡ τοιαύτη ΓΗ, διάμετρος ΔΕΤ-ΤΕΡΑ, καὶ ΣΤΖΤΓΗΣ τῇ πρώτῃ. Ἡ τὶς ἐν μὲν τῇ Ε' μείψει ὀρίζεται ὑπὸ τῆς περιμέτρου τῆς τομῆς καὶ εἶναι ἡ ΙΓ ἴση τῇ ΓΗ. Τέτακται γὰρ καὶ αὕτη ἐπὶ τὴν πρώτην διάμετρον ΝΞ, καὶ ἐπομένως τέτμηται ὑπὸ αὐτῆς δίχα κατὰ τὸ Γ. Καὶ ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΓΗ τετράγωνον εἰς πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΝΓΞ, τετ' εἶναι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΝ τετράγωνον, ὡς ἡ ὀρθία πλευρὰ ΝΤ πρὸς τὴν πλάγιαν ΝΞ (Πορ. 5. τῆς 5.), καὶ τῶν ὄρων (ΓΗ, ΓΝ) τετραπλασιασθέντων, τὸ ἀπὸ τῆς ΗΙ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΝΞ, ὡς ἡ ΝΤ πρὸς ΝΞ, ἤτοι ἡ ΝΤ πρὸς τὴν ΝΞ ἔχει λόγον τὸν διπλασίονα τῷ τῆς ΗΙ πρὸς ΝΞ· διὰ ταῦτ' ἄρα ἡ ΗΙ διάμετρος δευτέρα καὶ συζυγὴς, εἰς μέση ἀνάλογος τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΤ καὶ τῆς ἀρχικῆς διαμέτρου τε ἅμα καὶ πλαγίας πλευρᾶς ΝΞ. Ἐν δὲ τῇ ὕπερβολῇ διορί-

ζέται εἴτ' ἔν πορίζεται μὲν ὡς μέση ἀνάλογος τῆς
τε ὀρθίας πλευρᾶς ΝΤ καὶ τῆς πλαγίας ΝΞ, ὁ-
ριθεῖσα δὲ τῆτον τὸν τρόπον, διατίθεται διὰ τῆ
κέντρου Γ, ὡς εἶναιτε ταῖς ἐπὶ τὴν διάμετρον ΝΞ
τεταγμέναις παράλληλος, καὶ διχα τέμνεσθαι κα-
τὰ τὸ Γ. Οὕτω δὲ πορίζεσθαι καὶ διατεθεῖσα ἔσαι
(ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς) διάμετρος δευτέρα καὶ τῇ πρῶ-
τῃ ΝΞ συζυγής.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΓ'.

Ἐν μὲν τῇ Ἐλλείψει τὰ ἀπὸ τῶν ἐπὶ Σχημα 34
τὴν ΗΙ δευτέραν διάμετρον τεταγμένων * 35.
ΒΜ, ΡΤ τετράγωνα ἔσαι ὡς τὰ ὑπὸ
τῶν τμημάτων τῆς αὐτῆς διαμέτρου πε-
ριεχόμενα ὀρθογώνια ΗΒΙ, ΗΡΙ, τῶν
ἔσιν ὡς ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπὸ ΓΗ, ΓΒ
πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπὸ ΓΗ, ΓΡ.
Ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ἔσαι τὰ αὐτὰ
τετράγωνα ὡς συναμφοτέρου τὸ ἀπὸ ΓΗ,
ΓΒ πρὸς συναμφοτέρου τὸ ἀπὸ ΓΗ, ΓΡ.

Τὸ πρῶτον δὲλον· τεταγμένων γὰρ ἐπὶ τὴν
ἀρχικὴν διάμετρον ΝΞ τῶν εἰρημένων ΜΚ, ΤΦ, ἔ-
σαι ὡς τὸ ὑπὸ ΝΓΞ, τῶν ἔστι τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ
ὑπὸ ΕΚΝ, ἔτω τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΜ, ἢ
τὸ ΓΒ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς ὅλον

τὸ ἀπὸ ΓΗ, ἔτως ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τῆ πρώτης τὸ
ὑπὸ ΞΚΝ πρὸς ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τῆ δευτέρας τὸ ἀπὸ
ΓΒ (55). Καὶ ὡς ἄρα λοιπὸν τὸ ἀπὸ ΓΚ ἢ ΒΜ
πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΗΒΙ, ἔτως ὅλον τὸ ἀπὸ ΓΝ
πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΓΗ (19 τῆ Ε'). Κατὰ δὲ τὸν
αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ ΤΡ ἔχει
πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΡΙ, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ
(56). Ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμε-
τρον ΗΙ τεταγμένων ΒΜ, ΡΤ τετράγωνα εἰσὶν
ὡς τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου περιεχόμενα
ὀρθογώνια ΗΒΙ, ΗΡΙ, ἅτινά εἰσιν ὑπεροχαὶ τῶν
ἀπὸ ΓΒ, ΓΡ πρὸς τὸ αὐτὸ ἀπὸ ΓΗ (5 τῆ Β').

Τὸ δὲ δεύτερον δείκνυται· ἐπεὶ γὰρ ἐπὶ τῆς
Τ' περβολῆς, τὸ ὑπὸ ΞΚΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΜ ἢ
ΓΒ εἰσιν ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΞΝ πρὸς τὴν ὀρ-
θίαν ΝΤ (Πορ. 5. τῆς Ε'), ἢ ὡς τὸ ἀπὸ ΞΝ
πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ (μέση γὰρ ἀνάλογος ἡ ΗΙ ἐν
ταῖς ΝΞ, ΝΤ ὡς εἴρηται μετὰ τὸ Β'. Πόρισμα
τῆς ΙΒ'), ἢ, ληφθέντος τῆ τετάρτης ἐκατέρου τῶν

55) $\Gamma\text{K}^2 + \Xi\text{KN} = \Gamma\text{N} \cdot \chi \cdot \Gamma\text{B}^2 + \text{HBI} = \Delta\text{H}^2$ (5.
τῆ Β'). ἄρα ἐπιείξῃ $\Gamma\text{N}^2 : \Gamma\text{H}^2 = \text{ἀφαιρεθὲν } \Xi\text{KN} : \text{ἀφαιρεθὲν } \Gamma\text{B}^2$, ἔσται δὲ $\Gamma\text{N}^2 : \Gamma\text{H}^2 \chi$, ὡς λοιπὸν ΓK^2 πρὸς
λοιπὸν HBI , τῆς ἑξῆς ὡς $\text{BM}^2 : \text{HBI}$ · ἢ γὰρ $\Gamma\text{K} = \text{τη } \text{BM}$.

56) $\Gamma\text{P}^2 + \Xi\text{PN} = \Gamma\text{N} \cdot \chi \cdot \Gamma\text{P}^2 + \text{HPI} = \Gamma\text{H}^2$ · ἵ-
παι δὲ ἐς $\Gamma\text{N}^2 : \Gamma\text{H}^2 = \Xi\text{PN} : \Gamma\text{P}^2$ ἢ TP^2 · ἔσται δὲ χ
 $\Gamma\text{N}^2 : \Gamma\text{H}^2 = \Gamma\text{P}^2 : \text{HPI} = \text{TP}^2 : \text{HPI}$ (19. τῆ Ε'). ἴση
γὰρ ἡ ΓP τῇ PT .

ἀπὸ ΞN , $\text{H}\Gamma$, ὡς τὸ ἀπὸ ΓN πρὸς τὸ ἀπὸ ΓH · καὶ συναμφοτέρος ἄρα ὁ ἡγούμενος πρὸς συναμφοτέρον τὸν ἐπόμενον, ὡς εἰς τῶν ἡγυμένων πρὸς τὸν αὐτοῦ ἐπόμενον, ἦτοι τὸ ὑπὸ ΞKN μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓN , τῷτ' ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΓK ἢ BM (6 τῷ B' .) πρὸς τὸ ἀπὸ ΓB μετὰ τῷ ἀπὸ ΓH , ὡς τὸ ἀπὸ ΓN πρὸς τὸ ἀπὸ ΓH (12 τῷ E' .) (57). Οὕτως τρόπῳ δειχθήσεται ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ TP ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓP μετὰ τῷ ἀπὸ ΓH , ὡς τὸ ἀπὸ ΓN πρὸς τὸ ἀπὸ ΓH (58). Τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ἄρα BM , TP τετράγωνα ἐστὶν ὡς συναμφοτέρον τὸ ἀπὸ ΓB , ΓH πρὸς συναμφοτέρον τὸ ἀπὸ ΓP , ΓH , ὃ ἔδει δείξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Δῦλον ἄρα ὡς ἐν τῇ E' μείψει τὸ ἀφ' οἷα σῶν τεταγμένης MB τετράγωνον ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου, ἐφ' ἣν τέτακται, περιεχόμενον ὀρθογώνιον HBI , ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ NE πρὸς τὴν ὀρθίαν NT . Ἐστὶ καὶ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ

57) Ἐστὶ δειχθῆναι τὸ καὶ ἔτι· $\Xi\text{KN} : \Gamma\text{B}^2 = \Gamma\text{N} : \Gamma\text{H}$ καὶ ἰναλλαξὶ $\Xi\text{KN} : \Gamma\text{N}^2 = \Gamma\text{B}^2 : \Gamma\text{H}$, καὶ συνδύνει $\Xi\text{KN} + \Gamma\text{N}^2 : \Gamma\text{N}^2 = \Gamma\text{B}^2 + \Gamma\text{H}^2 : \Gamma\text{H}^2$ · καὶ πάλιν ἰναλλαξὶ $\Xi\text{KN} + \Gamma\text{N}^2 : \Gamma\text{B}^2 + \Gamma\text{H}^2 = \Gamma\text{N}^2 : \Gamma\text{H}^2$ · καὶ ἔτι $\Xi\text{KN} + \Gamma\text{N}^2 = \Gamma\text{K}^2 = \text{BM}^2$ · ἄρα $\text{BM}^2 : \Gamma\text{B}^2 + \Gamma\text{H}^2 = \Gamma\text{N}^2 : \Gamma\text{H}^2$.

58) $\Xi\text{PN} : \text{TP}^2 = \Xi\text{N} : \text{NT} = \Xi\text{N}^2 : \text{NT}^2 = \Gamma\text{N}^2 : \Gamma\text{H}^2$ ἄρα $\Xi\text{PN} : \Gamma\text{N}^2 = \text{TP}^2 : \Gamma\text{H}^2$ · καὶ $\Xi\text{PN} + \Gamma\text{N}^2 : \Gamma\text{N}^2 = \text{TP}^2 + \Gamma\text{H}^2 : \Gamma\text{H}^2$ · ἢ $\Xi\text{PN} + \Gamma\text{N}^2 : \text{TP}^2 + \Gamma\text{H}^2 = \Gamma\text{N}^2 : \Gamma\text{H}^2$ · ἀλλὰ $\Xi\text{PN} + \Gamma\text{N}^2 = \text{TP}^2 = \text{TP}^2$ · ἄρα $\text{TP}^2 : \text{TP}^2 + \Gamma\text{H}^2 = \Gamma\text{N}^2 : \Gamma\text{H}^2$.

ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ (κατὰ τὴν παρῶσαν) ἢ τετραπλάσιαυθέντων τῶν ὀρίων (ΓΝ , ΓΗ) ὡς τὸ ἀπὸ ΝΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ, ἅτιν' ἔστιν ὡς ΝΞ πρὸς ΝΤ (μετὰ τὸ Β'. Πορ. τῆς ΙΒ').

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Ὅθεν εἰάν τῶν ΝΤ, ΗΙ, ΝΞ ποριοῦν τετάρτη ἀνάλογος ἡ ΗΧ, αὕτη δὲ ἔστι πλευρὰ ὀρθία τῆς συζυγῆς διαμέτρου ΗΙ. Ἐναλλάσσονται γὰρ ἀπὸ τῆς ἀναλογίας (ΝΤ:ΗΙ=ΝΞ:ΗΧ) ἔσαι ἡ ΗΧ πρὸς ΗΙ, ὡς ἡ ΝΞ πρὸς ΝΤ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΝΞ πρὸς ΝΤ, ἔτω τὸ ἀπὸ ΒΜ πρὸς τὸ ὅπῃ ΗΒΙ, καὶ τὸ ἀπὸ ΤΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΡΙ. Τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ἄρα τετράγωνα πρὸς τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου, ἐφ' ἣν τετάχεται περιεχόμενα ὀρθογώνια ἔστιν ὡς ἡ ΗΧ πρὸς ΗΙ, τετ' ἔστιν ὡς ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν (59).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ἐπὶ δὲ τῆς Τ'περβολῆς ἐπέεστιν ἐκ τῆς παρέυτης Προτάσεως τὸ ἀπὸ ΜΒ πρὸς συναμφότερα τὰ

59) Ὅτι ἡ ΗΧ ἔστιν ὀρθία πλευρὰ ἡ Παράμετρος τῆς συζυγῆς διαμέτρου ΗΙ δῆλον, καὶ ἐκ τῆς εἶναι ταύτην τρίτην ἀνάλογον τῶν ΗΙ, ΝΞ κατὰ τὰ ῥηθέντα μετὰ τὸ Β Πορ. τῆς ΙΒ'. Ἐπὶ γάρ ἐστι ΝΤ:ΗΙ=ΝΞ:ΗΧ (ἐκ κατασκευῆς), ἔσαι ἐναλλάσσονται καὶ ΝΞ:ΝΤ=ΗΧ:ΗΙ ἀλλὰ ΝΞ:ΝΤ=ΝΞ':ΗΙ', ἄρα ΝΞ':ΗΙ'=ΗΧ:ΗΙ καὶ ἀνάπαλιν ΗΙ':ΝΞ'=ΗΙ:ΗΧ. ὁθεν ΗΙ:ΝΞ=ΝΞ:ΗΧ.

ἐπο ΓΒ, ΓΗ, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ,
ἢ ὡς ἡ ΝΞ πρὸς ΝΤ (μετὰ τὸ Β'. Πόρ. τῆς ΙΒ').
ἢ, ληφθεῖσης τῆς ΗΧ τετάρτης ἀναλόγου τῶν ΝΤ,
ΗΙ, ΝΞ, ὡς αὐτὴ ἡ ΗΧ πρὸς ΗΙ· δῆλον ὅτι ἡ
ΗΧ ἔσαι πλευρὰ ὀρθία ἢ παράμετρος τῆς δευτέρας
διαμέτρου ΗΙ (60).

Εἰ δὲ διὰ τῆς ΗΙ γραφῶσι καὶ ἕτεραι ἀντι-
κειμέναι αἱ ΗΑ, ΙΤ, ἡ μὲν ΗΙ ἔσαι τέτων διά-
μετρος καὶ πλαγία πλευρά· αἱ δὲ ἀντικείμεναι κα-
λεῖσθαι ΣΤΖΤΓΕΙΣ ταῖς προτέραις ΝΜΤ, ΣΞΛ.
Οὐσης τῆς πλαγίας τέτων συζυγῆς τῇ ἐκείνων
πλαγίᾳ· αἱ τέτταρες δὲ ὁμῶς, κατὰ συζυγίαν
ἀντικείμεναι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Καὶ ἐπεὶ ταχθεῖσης τῆς ΑΡ ἐντὸς τῆς μιᾶς
τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ἐπὶ τὴν διάμετρον
ΗΙ, τὸ ἀπὸ τῆς ΑΡ τετράγωνον ἔσι πρὸς τὸ ὑπὸ
ΙΗΡ ὀρθογώνιον, ὡς ἡ ὀρθία πλευρὰ ΗΧ πρὸς τὴν
πλαγίαν ΗΙ (Πόρ. 5. τῆς Ε'). καὶ ἡ ΗΧ πρὸς ΗΙ,
ὡς τὸ ἀπὸ ΤΡ πρὸς συναμφοτέρα τὰ ἀπὸ ΓΡ, ΓΗ
(Πόρ. Β'. τῆς παρέσης), ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΤΡ ἢ

60) Δῆλον δὲ τῷτο καὶ χρησαμένοις τῇ αὐτῇ δειξίᾳ
ἢ ἐχρησάμεθα ἐν τῇ 59 Σημειώσει. Δειχθήσεται γάρ
ἡ ΗΧ τρίτῃ συνεχῶς ἀνάλογον μετὰ τὴν ΗΙ πλαγίαν
πλευρὰν τῶν συζυγῶν Ὑπερβολῶν ΗΑ, ΙΤ, καὶ τὴν
ΝΞ ἥτις ἔστιν ὡς πρὸς ταύτας συζυγῆς διαμέτρος.

τῆς ΑΡ πρὸς συναμφοτέρα τὰ ἀπὸ ΓΡ, ΓΗ, ὡς
τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΡΗ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε΄.

Εἵπερ δὲ ἐκ τῆς ἡγουμένης Πορίσματος ἐστὶ τὸ ἀ-
πὸ ΑΡ πρὸς συναμφοτέρα τὰ ἀπὸ ΓΡ, ΓΗ, ὡς
τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΡΗ. Ἐναλλάξ μὲν ἔσται
ὡς τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΡ, ἔτω συναμφο-
τερα τὰ ἀπὸ ΓΡ, ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΡΗ ὀρθογώ-
νιον (ὅπερ ὀρθογώνιον ἐστὶν ὑπεροχὴ τῶν ἀπὸ ΓΡ,
ΓΗ). Διελόντι δὲ ὡς τὸ ὑπὸ ΛΑΤ πρὸς τὸ ἀπὸ
ΑΡ, ἔτω τὸ δις ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΡΗ (*) καὶ
ἐναλλάξ ὡς τὸ ὑπὸ ΛΑΤ πρὸς τὸ δις ἀπὸ ΓΗ,
ἔτω τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΡΗ· ἀλλ' ὡς μὲν
τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΡΗ, ἔτως ἡ ΗΧ πρὸς
ΗΙ (Πορ. Β'), ὡς δὲ ἡ ΗΧ πρὸς ΗΙ, ἔτω τὸ ἀπὸ
ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ (Πορ. Γ') καὶ τὸ δις ἀπὸ ΓΝ
πρὸς τὸ δις ἀπὸ ΓΗ· Ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΛΑΤ πρὸς
τὸ δις ἀπὸ ΓΗ ἔτω τὸ δις ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ δις ἀ-
πὸ ΓΗ· καὶ ἐπεὶ τὸ δις ἀπὸ ΓΗ ἐστὶν ἑκατέρω τῷ
λόγῳ κοινόν, τὸ ἄρα ὑπὸ ΛΑΤ ἴσον τῷ δις ἀπὸ
ΓΝ. Ἦτοι τὸ ὑπὸ ΛΑΤ ὀρθογώνιον διπλασίον τῷ

*) Διελόντι δὲ ἔσται $AP^2 - AI^2 : AP^2 = GH^2 + GP^2 - IPH : IPH$ · ἀλλὰ $AP^2 - AI^2 = LAT$ · ὥστε $AP^2 = LAT + AP$ (δ. τῆς Β') καὶ $GP^2 - IPH = GH^2$ · ὥστε $GP^2 = IPH + GH^2$ (διὰ τὴν αὐτὴν). ἀντικαταστάτων ἄρα τῶν ἴσων ἔσται $LAT : AP^2 = GH^2 + GH^2 : IPH = 2GH^2 : IPH$.

ἀπὸ τῆς ΓΝ τετραγώνου, καὶ πανταχὺ μέγεθος
σαθερόν.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α 5.

Εἰάν ἄρα ἐπὶ τῶν ἀντικειμένων ὑπερβολῶν
τεταγμένως ἐπὶ τὸ πέρας Η τῆς διαμέτρου ΙΗ ἀχ-
θῇ εὐθεῖα ἢ ΗΨ συμπίπτουσα τῇ μιᾷ τῶν ἐτέρων
συζυγῶν κατὰ τὸ Ψ, τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἔσαι
διπλάσιον τῷ ἀπὸ ΓΝ καὶ μέγεθος σαθερόν καὶ αὐτὸ
(61). Εἴπει γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης
ΗΨ τετράγωνον πρὸς συναμφοτέρα τὰ ἀπὸ ΗΓ,
ΓΗ, τῶν ἔστι πρὸς τὸ δις ἀπὸ ΓΗ, ἔτω τὸ ἀπὸ
τῆς ἐτέρας τεταγμένης ΜΒ πρὸς συναμφοτέρα τὰ
ἀπὸ ΒΓ, ΓΗ (ἐκ τῆς παρούσης Προτάσεως). Ὡς
δὲ τὸ ἀπὸ ΜΒ πρὸς συναμφοτέρα τὰ ἀπὸ ΒΓ, ΓΗ,
ἔτω τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ (Πορ. Γ'), τό-
τε δις ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ δις ἀπὸ ΓΗ, ὡς ἄρα τὸ
ἀπὸ ΗΨ πρὸς τὸ δις ἀπὸ ΓΗ, ἔτω τὸ δις ἀπὸ ΓΝ
πρὸς τὸ δις ἀπὸ ΓΗ. Τὸ ἄρα ἀπὸ ΗΨ, διπλάσιον
τῷ ἀπὸ ΓΝ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΔ'.

Εἰν τῇ Ἐλλείψει καὶ ταῖς ἀντικειμέναις Σχημ. 36.
τομαῖς οἷαδὲ τις ἄλλη εὐθεῖα ΜΓ διὰ 37.

61) Τῷ σημείῳ Ρ ὄντος ἐπὶ τὸ Η, ἡ εὐθεῖα ΑΛ
μερίζεται εἰς τὴν ΗΨ, καὶ ἡ ΤΑ εἰς τὴν ΟΗ. Ὅθεν τὸ
ὑπὸ ΤΑΛ ἀποβαίνει ἴσον τῷ $ΟΗ \times ΗΨ = ΗΨ^2$. Ἔστι δὲ
 $ΤΑΛ = 2ΓΝ^2$ · ἄρα καὶ $ΗΨ = 2ΓΝ$.

περβολῆς τῶν δύο τούτων ἴσων τριγώνων ἐκ τοῦ ΓΚΜ, ἐπὶ δὲ τῆς Ε'λείψεως τῆ ΓΚΜ ἐκ τῶν ΓΝΙ, ΓΘΜ, ἀπολείπεται ἐν ἑκατέρᾳ τῇ πτώσει τὸ τραπέζιον ΝΚΜΙ, ἴσον τῷ τριγώνῳ ΘΚΜ. Ἐστὶ δὲ τὸ τρίγωνον ΘΚΜ πρὸς τὰ αὐτῷ ὅμοια ΝΤΦ, ΠΛΗ, ΠΒΖ, $\omega\Lambda\eta$, $\pi\beta\zeta$, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΤΦ, ΛΗ, ΒΖ, $\Lambda\eta$, $\beta\zeta$ τετράγωνα (19 τῆ 5.) ἢ ἐκ τῆς φύσεως τῆς Ε'λείψεως καὶ τ'περβολῆς ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΕΚΝ πρὸς τὰ ἐκείνοις ἀντιστοιχῆντα ΕΤΝ, ΕΛΝ, ΕΒΝ, ΕΛΝ, ΕΒΝ, (Πρωτ. Ε'. καὶ 5.)· τῆτ' ἔσιν ὡς ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπὸ ΓΝ, ΓΚ (62) πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῆ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΤ, ΓΛ, ΓΒ, ΓΛ, ΓΒ· ἢ (διὰ τὸ ἀνάλογον εἶναι τὰ ὅμοια τρίγωνα τοῖς ἀπὸ τῶν κατ' αὐτὰ ὁμολόγων πλευρῶν τετραγώνοις) ὡς ἡ ὑπεροχὴ τῶν τριγώνων ΓΝΙ, ΓΚΜ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῆ τριγώνου ΓΝΙ πρὸς τὰ ΓΤΤ, ΓΛΡ, ΓΒΣ, ΓΛΡ, ΓΒΣ (63)· τῆτ' ἔσιν ὡς τὸ

62) Τὰ ὀρθογώνια ΕΤΝ, ΕΛΝ, ΕΒΝ, ΕΛΝ, ΕΒΝ ἔσιν ὑπεροχὴ τῆ τετραγώνου ΚΝ ἢ ὑπερίχει τῶν ἀπὸ ΓΤ, ΓΛ, ΓΒ, ΓΛ, ΓΒ (5. Β'. ἐπὶ τῆς Ε'λείψεως, καὶ 6. τῆ αὐτῆς ἐπὶ τῆς τ'περβολῆς.)

63) Ἐπεὶ ἔστι $\Gamma\text{ΝΙ}:\Gamma\text{ΚΜ}=\Gamma\text{Ν}^2:\Gamma\text{Κ}^2$ · διελόντι ἔσται $\Gamma\text{ΝΙ}-\Gamma\text{ΚΜ}:\Gamma\text{ΚΜ}=\Gamma\text{Ν}^2-\Gamma\text{Κ}^2:\Gamma\text{Κ}^2$, καὶ ἐναλλαξὶ $\Gamma\text{ΝΙ}-\Gamma\text{ΚΜ}:\Gamma\text{Ν}^2-\Gamma\text{Κ}^2=\Gamma\text{ΚΜ}:\Gamma\text{Κ}^2$. Καὶ αὖθις ἐπεὶ ἔστι, $\Gamma\text{ΝΙ}:\Gamma\text{ΛΡ}=\Gamma\text{Ν}^2:\Gamma\text{Λ}^2$, ἔσται $\Gamma\text{ΝΙ}-\Gamma\text{ΛΡ}:\Gamma\text{ΛΡ}=\Gamma\text{Ν}^2-\Gamma\text{Λ}^2:\Gamma\text{Λ}^2$ καὶ $\Gamma\text{ΝΙ}-\Gamma\text{ΛΡ}:\Gamma\text{Ν}^2-\Gamma\text{Λ}^2$

τραπέζιον ΝΚΜΙ πρὸς τὰ ΝΤΤΙ, ΝΑΡΙ, ΝΒΞΙ, ΝΑΡΙ, ΝΒΣΙ. Ὡς περ ἄρα τὸ τρίγωνον ΘΚΜ ἔστιν ἴσον τῷ τραπέζίῳ ΝΚΜΙ, ἔτω καὶ τὸ ΝΤΦ, ἴσον ἔσαι τῷ ΝΤΤΙ, τότε ΠΛΗ, τῷ ΝΑΡΙ, καὶ τὸ ΠΒΖ τῷ ΝΒΞΙ, καὶ τὰ λοιπὰ τρίγωνα τοῖς λοιποῖς τραπέζιοις. Οὐδὲν εἰν ἀπὸ τῶν τριγώνων ΝΤΦ καὶ τῶν αὐτῶν ἴσων τραπέζιων ΝΤΤΙ ἀφαιρεθῇ τὸ χωρίον ΝΤΤΧ, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον ΧΤΦ ἴσον τῷ ὁμοίῳ τριγώνῳ ΧΙΝ· ὧν αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ ΦΧ, ΧΝ εἰσὶν ἀλλήλαις ἴσαι (19 τῆς.). Ὡς αὐτῶς ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν τριγώνων ΠΒΖ, ΠΛΗ, τῶν ἐστὶ τὸ τραπέζιον ΑΒΖΗ, ἔστιν ἴσον τῷ τραπέζίῳ ΝΒΞΡ, ὅπερ ἔστιν ὑπεροχὴ τῶν τραπέζιων ΝΒΞΙ, ΝΑΡΙ, εἰν ἄρα ἀπὸ τῶν ἴσων τραπέζιων ΑΒΖΗ, ΑΒΞΡ ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν χωρίον ΑΒΔΞΗ, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον ΣΔΖ ἴσον καὶ ὁμοίον τῷ ΔΗΡ. ἡ ἄρα ΔΖ ἴση τῇ ΔΗ (19 τῆς.). Ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΠΗΛ, ἔστιν ὁμοίον τῷ ΠΗΛ, καὶ ἡ ΗΛ ἴση τῇ ΛΗ, ἔστιν ἄρα τὰ τρίγωνα καὶ ἴσα·

$\equiv \Gamma\Lambda\rho : \Gamma\Lambda^2 \cdot$ ἀλλὰ $\Gamma\Lambda\rho : \Gamma\Lambda^2 \equiv \Gamma\kappa\mu : \Gamma\kappa^2 \cdot$ ἄρα $\Gamma\mu\iota - \Gamma\kappa\mu : \Gamma\mu^2 - \Gamma\kappa^2 \equiv \Gamma\mu\iota - \Gamma\Lambda\rho : \Gamma\mu^2 - \Gamma\Lambda^2 \cdot$ ἥτοι $\Gamma\mu\iota - \Gamma\kappa\mu : \Gamma\mu\iota - \Gamma\Lambda\rho \equiv \Gamma\mu^2 - \Gamma\kappa^2 : \Gamma\mu^2 - \Gamma\Lambda^2 \cdot$ Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δεῖχθήσεται ὅτι καὶ $\Gamma\mu\iota - \Gamma\Lambda\rho : \Gamma\mu\iota - \Gamma\beta\varsigma \equiv \Gamma\mu^2 - \Gamma\Lambda^2 : \Gamma\mu^2 - \Gamma\beta^2 \cdot$ καὶ $\Gamma\mu\iota - \Gamma\beta\varsigma : \Gamma\mu\iota - \Gamma\tau\eta \equiv \Gamma\mu^2 - \Gamma\beta^2 : \Gamma\mu^2 - \Gamma\tau^2$ καὶ ἔτι καὶ ἰφειξῆς. Ἡ ὑπεροχὴ ἄρα τῶν ἀπὸ $\Gamma\mu$, $\Gamma\kappa$ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῆ ἀπὸ $\Gamma\mu$ πρὸς τὰ ἀπὸ $\Gamma\tau$, $\Gamma\Lambda$, $\Gamma\beta$, $\Gamma\Lambda$, $\Gamma\beta$, ὡς ἡ ὑπεροχὴ τῶν τριγώνων $\Gamma\mu\iota$, $\Gamma\kappa\mu$ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν τριγώνων $\Gamma\mu\iota$ πρὸς τὰ $\Gamma\tau\tau$, $\Gamma\Lambda\rho$, $\Gamma\beta\varsigma$, $\Gamma\Lambda\rho$, $\Gamma\beta\varsigma$.

ἴσον δὲ τὸ ΠΗΛ τῷ τραπεζίῳ ΝΑΡΙ, ἴσον ἄρα ἔ-
 τὸ π η Λ τῷ αὐτῷ ΝΑΡΙ· κοινῇ δὲ προσκειμένου
 τῷ Λ β σ ρ, γίνεται τὸ χωρίον η π β σ ρ ἴσον τῷ
 τραπεζίῳ Ν β σ ι. Ἀλλὰ τὸ τραπέζιον Ν β σ ι ἐστὶν
 ἴσον τῷ τριγώνῳ π β ζ (σημ. 50). τὸ τρίγωνον
 ἄρα π β ζ ἴσον τῷ χωρίῳ η π β σ ρ· κοινῇ δὲ τοῦ
 χωρίου π β σ δ ἀρθέντος, ἀπολείπεται τὸ τρίγω-
 νον η ρ δ ἴσον τῷ τριγώνῳ ζ σ δ· ἐστὶ δὲ τὰ τρί-
 γωνα ταῦτα ἑ ὁμοία, ἄρα αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευ-
 ραὶ η δ, δ ζ ἀλλήλαις ἴσαι. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΓΜ ἔ-
 στι ἡ αὕτη διάμετρος δίχα τέμνουσα πάσας τὰς πα-
 ρὰ τὴν ἐφαπτομένην ΘΜ τεταγμένως ἐπ' αὐτὴν
 καταχθείσας εὐθείας ΝΦ, ΗΖ, η ζ· ὃ εἶδει δεῖξαι.

Ἐπὶ δὲ τῆς Εὐδείψεως συμπίπτει τὸ αὐ-
 τὸ ἡ πιπτύσης τῆς ἐπὶ τὴν πρώτην διάμετρον ΝΞ
 τεταγμένης περαιτέρω τῷ Γ κέντρῳ ἐπὶ τὰ πρὸς
 τὸ Ξ, ὡς ἔχει φέρε ἡ β ζ (σχ. 38). Ἐν γὰρ
 τῇ πτώσει ταύτῃ εἰς τὴν κορυφῇς Ξ ἀχθῇ ἐ-
 τέρα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ Ξ ι, ἔσεται τὸ τρί-
 γωνον π β ζ ἴσον τῷ τραπεζίῳ Ξ β σ ι (64). Ἐστὶ
 γὰρ τὸ Ξ β σ ι, πρὸς τὸ ΝΚΜΙ, ὡς τὸ ὀρθογώ-
 νιον Ξ β Ν πρὸς τὸ ἐπὶ ΞΚΝ, ἢ ὡς τὸ ἀπὸ β ζ πρὸς
 τὸ ἀπὸ ΜΚ, ἢ τέως ὡς τὸ τρίγωνον π β ζ πρὸς

64) Ἐστὶ γὰρ ὡς δείκνυσιν ὁ συγγραφεὺς $\Xi\beta\sigma\iota$
 $NKMI = \Gamma\alpha^2 - \Gamma\beta^2 : \Gamma\eta^2 - \Gamma\kappa^2 = \Xi\beta N : \Xi\kappa N$ (5. τῷ
 Β.) $= \beta\zeta^2 : MK^2$ (Προτ. 5.) $= \pi\beta\zeta : \Theta MK$ (19. τῷ
 5.)· ἄρα $\Xi\beta\sigma\iota : NKMI = \pi\beta\zeta : \Theta MK$ · καὶ ἐπεὶ $\Theta MK =$
 $NKMI$, ἄρα καὶ $\pi\beta\zeta = \Xi\beta\sigma\iota$.

τὸ αὐτῷ ὅμοιον ΘKM , ὅπερ δέδεικται ἴσον τῷ NKMI τραπεζίῳ. Ὅθεν εἰν προσεῖδη κοινῇ $\pi\beta\zeta$, $\Xi\beta\varsigma$ τὸ $\Sigma\beta\Gamma$, γίνεται τὸ χωρίον $\pi\Gamma\Sigma\zeta$ ἴσον τῷ τριγώνῳ $\Xi\Gamma$. Τέτω δὲ ἴσον ἔστω τὸ ΓNI (65). ἄρα τὸ χωρίον $\pi\Gamma\Sigma\zeta$ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΓNI . κοινῇ δὲ τῷ $\Gamma\delta\pi$ ἀρθέντος, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον $\delta\Sigma\zeta$ ἴσον τῷ $\text{N}\pi\delta\text{I}$ χωρίῳ. ἀλλὰ τὸ $\text{N}\pi\delta\text{I}$ ἔστιν ἴσον τῷ τριγώνῳ $\delta\text{P}\eta$. Ἐστὶ γὰρ τὸ τρίγωνον $\pi\Lambda\eta$ ἴσον τῷ $\text{N}\Lambda\text{PI}$ τραπεζίῳ, ἔν προσκειμένῃ κοινῇ τῷ χωρίῳ $\Lambda\omega\delta\text{P}$, γίνεται τὸ τρίγωνον $\delta\text{P}\eta$ ἴσον τῷ χωρίῳ $\text{N}\pi\delta\text{I}$. Ἄρα τὸ τρίγωνον $\delta\Sigma\zeta$ ἴσον ἔστω ὅμοιον τῷ τριγώνῳ $\delta\text{P}\eta$. καὶ ἡ πλευρὰ $\eta\delta$ ἴση τῇ $\delta\zeta$. Ἐπὶ τῆς ἑλπίσεως ἄρα κτ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ἐπεὶ τὸ τρίγωνον $\Gamma\Theta\text{M}$ δέδεικται ἐν τῇ παρῇ ἴσον τῷ ΓNI , ἀρθέντος κοινῇ ἐπὶ μὲν τῆς Γ -περβολῆς τῷ τετραπλεύρῳ $\Gamma\Theta\text{EI}$, ἐπὶ δὲ τῆς E -λείψεως τῷ ΓMEN , ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον IEM ἴσον τῷ τριγώνῳ ΘEN . Προσκειμένῃ δὲ τέτοις κοινῇ τῷ τετραπλεύρῳ NEMX , γίνεται τὸ τρίγωνον

65) Ἐπεὶ αἱ Ξ , NI ἐφάπτονται κατὰ κορυφὴν τῆς τομῆς, εἰσὶν ἄρα οἰαδήτινι τεταγμένη παράλληλοι (Προτ. Θ') ἄρα ἔστω ἀλλήλαις παράλληλοι (30. τῷ Α'). τὰ τρίγωνα ἄρα ΓNI , $\Gamma\Xi$ ὅμοια· ἔστω $\Gamma\text{NI}:\Gamma\Xi = \Gamma\text{N}^2:\Gamma\Xi^2$ (19. τῷ ζ'). ἔστω, ὅσης τῆς ΓN τῇ $\Gamma\Xi$ ἴσης, $\Gamma\text{N}^2 = \Gamma\Xi^2$, ἄρα ἔστω $\Gamma\text{NI} = \Gamma\Xi$.

XIN (ἢ τὸ αὐτῷ ὅμοιον καὶ ἴσον διὰ τὸ εἶναι τὴν **ΦΧ** ἴσην τῇ **ΧΝ**, **ΧΤΦ**), ἴσον τῷ τραπεζίῳ **ΜΧΝΘ**.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Εἰάν δὲ τοῖς ἴσοις τριγώνοις **ΙΕΜ**, **ΘΕΝ** προσεθῇ κοινῇ τὸ χωρίον **ΝΕΜΣ** γίνεταί τὸ χωρίον **ΘΜΣΒ** ἴσον τῷ **ΝΒΣΙ**. Δέδεικται δὲ τὸ **ΝΒΣΙ** τῷ τριγώνῳ **ΠΒΖ** ἴσον· ἄρα τὸ τρίγωνον **ΠΒΖ** ἴσον τῷ τραπεζίῳ **ΘΜΣΒ**. Κοινῇ δὲ τῷ **ΠΔΣΒ** ἀρθέντος, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον **ΔΣΖ**, ἢ τὸ αὐτῷ ὅμοιον καὶ ἴσον **ΔΗΡ** (ἴση γὰρ ἡ **ΗΔ** τῇ **ΔΖ**) ἴσον τῷ **ΜΔΠΘ** τραπεζίῳ. Εἰάν δὲ τοῖς αὐτοῖς τριγώνοις **ΙΕΜ**, **ΘΕΝ** προσεθῇ τὸ χωρίον **Νβσμε**, γενήσεται τὸ **Νβσι** ἴσον τῷ **Οβσμ**. Καὶ ἐπεὶ τὸ **Νβσι** δέδεικται τῷ τριγώνῳ **πβζ** ἴσον, εἴην ἄρα τὸ τρίγωνον **πβζ** τῷ χωρίῳ **Θβσμ** ἴσον· καὶ ἀρθέντος ἐκατέρωθεν τῷ **πβσδ**, ἀπολείπεται τὸ **δσζ** τρίγωνον ἴσον τῷ **Μδπθ** τραπεζίῳ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Συμφανὲς δὴ ἐκ τούτων, ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἐφ' οἷανδήποτε ἑτέραν διάμετρον **ΜΓ** τεταγμένως καταγομένων εὐθειῶν **ΧΦ**, **ΔΖ**, **δζ**, εἰσιν ὡς τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου περιεχόμενα ὀρθογώνια **ΜΧμ**, **ΜΔμ**, **Μδμ**. Τὰ γάρτοι τετράγωνα ταῦτά εἰσιν ὡς τὰ ὅμοια τρίγωνα **ΧΦΤ** ἢ **ΧΝΙ**, **ΔΖΣ**, **δζσ** (19 τῆς.), τὰ δὲ τρί-

γωνία ταῦτα δέδεικται ἴσα τοῖς τραπεζαῖς ΜΧΝΘ, ΜΔΠΘ, Μδ π Θ ἕκαστον ἑκάστῳ ἀντιστοιχῶντι (Πορ. Α'. καὶ Β'). τὰ τετράγωνα ἄρα ἴσα καὶ ὡς ἡ ὑπεροχή τῆς τριγώνου ΓΘΜ, ἣ ὑπερέχει τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΧΝ, ΓΔΠ, Γδ π. τῶν ἴσιν ὡς ὑπεροχή τῆς ἀπὸ τῆς ΓΜ, ἣ ὑπερέχει τῶν ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τετραγώνων ΓΧ, ΓΔ, Γδ· καὶ ἐπομένως ὡς τὰ εἰρημένα ὀρθογώνια (66). Τοιγαρὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΧΦ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΖΔ, ςδ, ἢ τὸ ἀπὸ τῆς ΧΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΗΔ, ηδ, ἴσιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν μΧΜ ὀρθογώνιον πρὸς τὰ ὑπὸ τῶν μΔΜ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Ὅσα ἄρα προδεδείκται συμβαίνοντα περίτε τὰς ἐφαπτομένας καὶ τὴν Παράμετρον τῆς ἀρχικῆς διαμέτρου ΝΞ, τὰ αὐτὰ συμβαίνει καὶ περὶ τὰς ἐφαπτομένας καὶ τὴν Παράμετρον οἰασθῆτινος ἄλλης διαμέτρου διὰ τῆς κέντρου Γ ἀγομένης. Δέδεικται γὰρ ἤδη, ὅτι καὶ τῶν ἐπὶ ταύτην τεταγμένως ἀγομένων

66) $ΧΦ^2 : ΔΖ^2 = ΧΦΓ : ΔΖΣ$ (19. τῆς ε'). ἀλλὰ $ΧΦΓ = ΜΧΝΓ$, καὶ $ΔΖΣ = ΜΔΠΘ$ (Πορ. Α'. καὶ Β'). καὶ διὸ καὶ $ΜΧΝΘ = ΓΘΜ - ΓΧΝ$ καὶ $ΜΔΠΘ = ΓΘΜ - ΓΔΠ$ (ἐκ τῆς γήματος) ἄρα $ΧΦ^2 : ΔΖ^2 = ΓΘΜ - ΓΧΝ : ΓΘΜ - ΓΔΠ = ΓΜ^2 - ΓΧ^2 : ΓΜ^2 - ΓΔ^2$ (σημ. 63.) $= μΧΜ : μΔΜ$ (5. καὶ 6. τῆς Β'). Ὡσαύτως δεῖχθήσεται ὅτι καὶ $ΧΦ^2 : δζ^2 = μΧΜ : μδΜ$. ἄρα τὰ ἀπὸ ΧΦ, ΔΖ, δζ, ὡς τὰ μΧΜ, μΔΜ, δμΜ.

εὐθειῶν ἰδίων ἐσιῶδες τὸ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων ὑπ' αὐτῶν ἀπὸ τῆς διαμέτρου περιεχόμενα ὀρθογώνια. Οἰόν τι λέγω ὃν τρόπον ἡ ἐφαπτομένη $MΘ$ τέμνει τὴν διάμετρον $NΞ$, ὡς εἶναι τὰς $ΓΚ$, $ΓΝ$, $ΓΘ$ συνεχῶς ἀνάλογον, τότε ὑπὸ $ΘΓΚ$ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιαδιαμέτρου $ΓΝ$ τετραγώνῳ ἴσον (Πορ. ΙΑ'. τῆς Θ'.) καὶ δὴ καὶ τὴν $ΞΚ$ πρὸς $ΚΝ$ ὡς $ΘΞ$ πρὸς $ΘΝ$ ἦτοι τὰς $ΘΞ$, $ΘΚ$, $ΘΝ$ ἀρμονικῶς ἀνάλογον (Πορ. ΙΒ'. τῆς αὐτῆς). οὕτω δὴ καὶ ἡ ἐφαπτομένη $ΝΙ$ τέμνει τὴν διάμετρον $μΓΜ$, ὡς εἶναι τὰς $ΓΧ$, $ΓΜ$, $ΓΙ$ συνεχῶς ἀνάλογον, τότε ὑπὸ $ΧΓΙ$ ἴσον τῷ ἀπὸ $ΓΜ$ καὶ τὴν $μΧ$ πρὸς $ΜΧ$ ὡς $Ιμ$ πρὸς $ΙΜ$, τῶν $ἑσὶ$ τὰς $Ιμ$, $ΙΧ$, $ΙΜ$ ἀρμονικῶς ἀνάλογον.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε'.

Α'λλὰ δὴ καὶ ἡ Παράμετρος τῆς διαμέτρου ταύτης διορισθήσεται εἰὰν γένηται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου περιεχόμενον ὀρθογώνιον $μΔΜ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης $ΔΖ$ τετράγωνον, οὕτως ἡ πλαγία διάμετρος $μΜ$ πρὸς ἑτέραν τινὰ ζητημένην. Αὕτη γὰρ τῶτον τὸν τρόπον ποριθεῖται, ἔσεται κατὰ τὸ ἕκτον πόρισμα τῆς Ε'. καὶ ς'. Παράμετρος ἦτοι πλευρὰ ὀρθία, ἣτις ἐστὶ πρὸς τὴν πλαγίαν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετράγωνον πρὸς τὸ ἀντιστοιχῆν αὐτῷ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου περιεχόμενον.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α 5.

Ὅσα δέδεικται ἐν τῷ Γ', Δ', Ε', καὶ Ζ'. Πορίσματι τῆς Ι'. ἐπὶ τῆς Παραβολῆς, ὅτι δηλαδὴ τὰ ἐπὶ τῶν τεταγμένων συνιστάμενα τρίγωνα ἐξισῶνται τοῖς ἀντιστοιχῶσιν αὐτοῖς τετραπλεύροις, ταῦτα δειχθήσεται τῷ αὐτῷ λόγῳ ἀληθεύοντα καὶ ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς καὶ Εὐκλείδους. Ἐστὶ γὰρ καὶ ἐπὶ τούτων τὸ τρίγωνον ΟΡΜ ἴσον τῷ τετραπλεύρῳ ΟΗΠΘ (κατὰ γὰρ τὸ Β'. Πόρισμα τῆς παρέσης τὸ τρίγωνον ΔΗΡ ἐστὶν ἴσον τῷ τετραπλεύρῳ ΜΔΠΘ, κοινὴ δὲ τῇ ΔΜΟΗ ἀρθεύτος, ἀπολείπεται τὸ ΟΡΜ ἴσον τῷ ΟΗΠΘ). Ὅθεν τὰ δύο τρίγωνα ΠΛΗ, ΟΡΜ ὁμῶς ληφθέντα εἶναι μὲν ἴσα τῷ ὅλῳ ΘΔΟ· τάγε μὲν ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΗΛ, ΟΡ τετράγωνα ὁμῶς ληφθέντα ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς καὶ Εὐκλείδους ἐκ εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΛΟ ἴσα, ὡς (Πορ. Γ'. τῆς Ι'). ἐπὶ τῆς Παραβολῆς. Ἐπὶ γὰρ τούτων ἡ διάμετρος ΝΚ ἐκ εἶναι τῇ διαμέτρῳ ΜΔ παράλληλος, ὥσπερ ἐπὶ τῆς Παραβολῆς. Ὅθεν ἔδὲ τὰ τρίγωνα ΔΗΡ, ΟΡΜ ὅμοια. Αὐτὸ τῆτο ρητέον καὶ περὶ τῶν τριγώνων ΜΣΑ, ὅπερ ἴσεται τῷ τετραπλεύρῳ ΖΠΘΑ (67), καὶ τῶν ΠΒΖ, ΜΣΑ, ἅτινα ὁμῶς ληφθέντα ἐξισῶνται τῷ ΘΑΒ, καὶ τῶν λοιπῶν.

67) $\Sigma\Delta Z = \text{ΜΔΠΘ}$ (Πορ. Β'). Ὅθεν $\Sigma\Delta Z + \text{ΜΔΖΑ} = \text{ΖΠΘΑ}$. Ἐνθεν τοι $\text{ΜΣΑ} + \text{ΠΒΖ} = \text{ΖΠΘΑ} + \text{ΠΒΖ} = \text{ΘΒΑ}$ τὰ δύο ἄρα τρίγωνα ΜΣΑ, ΠΒΖ ὁμῶς ληφθέντα ἐξισῶνται τῷ ΘΒΑ. Τάγε μὲν ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΣΑ τετράγωνα

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ζ'.

Ὅτι δὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τεμνύσης ὅλης, καὶ τῆ ἐκτὸς μέρους αὐτῆς, τῷ μεταξὺ τῆς καμψύλης καὶ τῆς ἐφαπτομένης ἀπολαμβάνομένῃσι πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς τμήματος τῆς ἐφαπτομένης τῷ μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων, ὡς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς τμήματος τῆς παρὰ τὴν τέμνουσαν ἐφαπτομένης, τῷ ἀπολαμβάνομένῃ μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς συμπτώσεως πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τμήματος τῆς προτέρας ἐφαπτομένης τῷ μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς συμπτώσεως· τούτ' ἐστὶν ὅτι τὸ ὑπὸ ΦΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ ἐστὶν ὡς τὸ ΝΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΜ, καὶ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ ΖΩΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΩΝ, ἢ τὸ ὑπὸ Ζωη πρὸς τὸ ἀπὸ ωΝ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΜΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΕ, ὅπερ δέδεικται (Πορ. Η'. τῆς Γ'.) συμβαῖνον ἐπὶ τῆς Παραβολῆς, τούτο δὴ συμβαίνει καὶ πρὸς τῆς ὕπερβολῆς καὶ ἑλλείψεως. Συμβήσεται δ' ἔτι καὶ εἰ ἀπὸ δυεῖν ἀντικειμένων ὕπερβोलῶν ἐφαπτόμεναι κατὰ τι σημεῖον ἀλλήλαις συνερχόμεναι ἀχθεῖεν ὡς γενικώτερον ἐν τῇ Ις'. δειχθήσεται (68).

να ὁμῶς ληθόντα ἢ καὶ ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ· ταῦτο τούτο ῥητίον καὶ περὶ τῶν λοιπῶν.

68) Διὸν δ' ὅτι καὶ τοῖς 45, 46 γράμμαι τὸ τρίγωνον ΠΗΚ ἔσαι τῷ τετραπλευρῷ ΝΚΡΙ ἴσον. Ἀχθείσης γὰρ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην ΜΘ τῆς ευθείας ηΨ, ἥτις

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Ε'.

Σχ. 39. 40. 41. $\text{Ε'ὰν ἐπὶ τῆς περιμέτρου Υ' περβολῆς ἢ Ἐξείψεως ληφθῇ τι σημεῖον τὸ Η με-}$
 $\text{ταξὺ δὲ εἶν διαμέτρων τῶν ΓΝ, ΓΜ ἢ κ}$
 $\text{ἐκτὸς αὐτῶν ἐπὶ τῆς Ε' ξείψεως (σχ. 41). δι' αὐτῆς δὲ παράλληλοι ἀχθῶσι}$
 $\text{ταῖς ΝΙ, ΜΘ ἐφαπτομέναις ἕως τῶν}$
 $\text{διαμέτρων αἱ ΗΡ, ΗΠ· τὸ τετράπλευ-}$
 $\text{ρον ΠΗΡΓ τὸ γινόμενον πρὸς ἑκατέρᾳ}$
 $\text{τῶν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας ἀγομένων}$
 $\text{κ' ἑκατέρᾳ τῇ διαμέτρῳ ἴσον ἔσται τῷ}$
 $\text{γινομένῳ πρὸς τῇ μιᾷ τῶν ἐφαπτομέ-}$
 $\text{νων, κ' ἑκατέρᾳ τῶν διαμέτρων τριγώνῳ}$
 ΓΘΜ ἢ ΓΙΝ.

$\text{Ε'πεὶ γὰρ προδεδείκται ἴσον τὸ τρίγωνον}$
 $\text{ΔΗΡ τῷ ΔΜΘΠ τραπεζῷ (Πορ. Β'. τῆς ΙΔ'.)}$

$\text{δι' κ' τὴν διάμετρον ΝΞ κατὰ τὸ π σημεῖον τιμῇ, ἴσε-}$
 $\text{ται κατὰ τὴν παρῆσαν Πρότασιν τὸ τρίγωνον π η Κ ἴσον}$
 $\text{τῷ τετραπλεύρῳ ΝΚΡΙ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΠΗ, π η εἰσὶ}$
 $\text{τῇ αὐτῇ τρίτῃ ΜΘ ἵσοι δὴ κ' ἀλλήλαις παράλλη-}$
 $\text{λοι. Ἔσιν ἄρα τὰ τρίγωνα π η Κ, ΠΗΚ ἀλλήλοις ὁ-}$
 $\text{μοια. Ε'πεὶ δὴ κ' ἡ πλευρὰ ΗΚ εἰς ἴση τῇ ὁμολόγῳ}$
 $\text{πλευρᾷ ΗΚ, ἔσιν ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα κ' ἴσα (19. τῆ}$
 $\text{ς.). Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον π η Κ εἰς ἴσον τῷ τετραπλεύ-}$
 $\text{ρῳ ΝΚΡΙ, ἄρα κ' τὸ ΠΗΚ.}$

ἀφ' ἡρῶν μὲν ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς ἑκάτερον ἐκ
τῶν τριγώνων ΓΠΔ, προεκείτω δ' ἐπὶ τῆς Εὐλει-
ψείας τῷ αὐτῷ τριγώνῳ ἑκάτερον· καὶ γίνεται
αἰ τὸ ΠΗΡΓ τετράπλευρον ἴσον τῷ ΓΘΜ τριγώ-
νῳ, ὅπερ δέδεικται (Προτ. 1Δ'). τῷ ΓΙΝ ἴσον, ὃ
ἔδει δεῖξαι (69).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ὅθεν εἰάν ἀφ' ἑτέρων τινὲς σημείων τῶν Α' ἐπὶ
τῆς Ὑπερβολικῆς ἢ Εὐλειπτικῆς περιμέτρου ληφθέν-
τος ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι αἱ ΑΓ,
ΑΔ ἄχρι τῶν διαμέτρων προεκβαλλόμεναι, ἔσαι
τὸ τετράπλευρον ΛΑΤΓ ἴσον τῷ τετραπλεύρῳ
ΠΗΡΓ. Ἐστὶ γὰρ τὸ ΛΑΤΓ ἴσον τῷ τριγώνῳ
ΓΘΜ, ὅπερ δέδεικται ἐν τῇ Προτάσει ἴσον τῷ
ΠΗΡΓ.

69) Ὅτι δὲ καὶ τῷ 41 κήματι τὸ ΔΗΡ τρίγω-
νον ἴσον εἴς τῷ τραπεζίῳ ΔΜΠΘ, δῆλον αὐτόθεν· ὥσ-
περ γὰρ ἐν τῷ 36 κήματι εἰδείχθη τὸ δι' Ρ ἴσον τῷ
δ ΜΘτ, ἔτω καὶ ταῦτα ἀχθείσῃ τῆς ΖΣ παρὰ τὴν
ἐφαπτομένην ΝΙ, ἔσαι τὸ τρίγωνον ΔΖΣ τῷ ΔΜΠΘ
τραπεζίῳ ἴσον· εἴς δὲ τὸ ΔΖΣ ὁμοίου καὶ ἴσου τῷ ΔΗΡ
δι' ὅ,τι παράλληλοι αἱ ΗΡ, ΖΣ, καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευ-
ραι ΗΔ, ΔΖ ἴσαι· ἄρα τὸ ΔΗΡ ἴσον τῷ τραπεζίῳ
ΔΜΠΘ.

70. Καὶ ἐν τῷ 46 κήματι τὸ τρίγωνον ΓΙΝ ἴσον
εἴς τῷ τραπεζίῳ ΠΗΡΓ. Ἀχθείσῃ γὰρ τῆς ἐφαπτο-
μένης ΝΙ, ἥτις ἔσαι τῇ ἑτέρᾳ ΝΙ παράλληλος, ἀναφύη-

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Προεβληθεῖσιν δὲ τῶν ΑΤ, ΠΗ ἄχρῃς ὅ-
τε κατὰ τι σημεῖον ἀλλήλαις τὸ Κ συμπέσωσιν, ἢ
ὑπεροχὴ οἰωνδῆποτε τῶν εἰρημένων ἀλλήλοις ἴσων
τετραπλεύρων, τῶν ΠΗΡΓ, ΛΑΤΓ φέρε, ἢ ὑ-
περέχει ἐκάτερον τῷ ΠΚΤΓ, τῷτ' ἐστὶ τὰ τραπέζια
ΚΗΡΤ, ΠΚΑΛ ἴσαι ἀλλήλοις ἴσα.

σεται τὸ τρίγωνον ΓΙΝ τῷ τριγώνῳ Γιυ ἴσου (19. τῇ
ς'), διὰ τὸ εἶναι τὴν Γιυ, τῇ ΓΝ ἴσην. Ἐστὶ δὲ τὸ
Γιυ τῷ ΓΘΜ ἴσον (Προτ. 14.). Ὡςπερ ἄρα τὸ τρί-
γωνον ΓΘΜ ἐστὶν ἴσον τῷ τραπέζίῳ ΠΗΡΓ (Προτ. 15.)
ἔτι καὶ τὸ ΓΙΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΠΗΡΓ. Τὸ αὐτὸ συμ-
βαίνει καὶ τῷ 49 σχήματι. Ἐπεὶ γάρ τὸ ΔΗΡ τρί-
γωνον δίδεικται (Πορ. Α'. τῆς 14.) ἴσον τῷ τετρα-
πλεύρῳ ΜΔΠΘ, προσκειμένη κοινῇ τῷ ΠΔΓ, γίνεται
τὸ ΠΗΡΓ ἴσον τῷ ΓΜΠ, ὅπερ ἐστὶν ἴσον τῷ Γιυ
(Προτ. 14.). Ἀλλὰ τὸ Γιυ ἐστὶν ἴσον τῷ ΓΝΙ δι' ὅ,τι
ἐστὶν ἀλλήλοις ὅμοια τὰ Γιυ, ΓΝΙ καὶ ἡ Γιυ τῇ ΓΝ
ἴση· ἄρα τὸ τρίγωνον ΓΝΙ ἴσον τῷ τετραπλεύρῳ
ΠΗΡΓ.

71) Ἐκ τῆς 15. δεικνύται ὅτι καὶ τοῖς 55, 56,
57 σχήμασι τὸ τετράπλευρον ΚΟΠΡ ἐστὶν ἴσον τῷ ΗΣΞΡ.
Ἐν μὲν γάρ τῷ 55 σχήματι, τὸ τρίγωνον ΓΝΔ ἐστὶν ἴσον
τῷ τραπέζίῳ ΟΚΞΓ (Προτ. 15.)· καὶ τὸ ΓΝΔ ἴσον τῷ
Γνι τῷτο δὲ ἴσον τῷ ΓΜΘ ὁπερ ἐστὶν ἴσον τῷ ΠΗΣΓ
(σημ. 70.) ἄρα τὸ ΟΚΞΓ ἴσον τῷ ΠΗΣΓ κοινῇ δὲ προσ-
κειμένη τῷ ΠΓΕΡ, γίνεται ΗΣΞΡ τῷ ΚΟΠΡ ἴσον. Ἐν
δὲ τῷ 56 ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΞΚε ἐστὶν ἴσον τῷ τετρα-
πλεύρῳ ΜεΘΘ (Προτ. 14.), προσκειμένη κοινῇ τῷ
ΟεΓ, γίνεται ΟΓΞΚ=ΜΓΘ· τῷ δὲ αὐτῷ τρόπῳ

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Εὰν δὲ προεκβληθεῖσαι αἱ ΑΛ, ΗΡ συμπέσωσιν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Φ. προσεθέντος μὲν ἐπὶ τῆς Γ' περβολῆς, ἀφαιρεθέντος δ' ἐπὶ τῆς Ε' λείψεως ἐκ τῶν εἰρημένων ἴσων ἀλλήλοις τραπεζίων τῷ ΑΚΗΦ, ἔσαι αἰ τὸ ΑΦΡΤ, ἴσον τῷ ΝΦΛΠ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΣ'.

Εὰν Κώνη τομῆς οἴασθῃ ἢ τῆς αὐτῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων δύω εὐθεῖαι ἐπιφανύ- ΣΧΗΜ. 42.
43. 44. 45
46. 47. 48

δειχθήσεται ὅτι τὸ ΠΓΕΗ=ΜΓΘ· ἄρα ΟΓΕΚ=ΠΓΕΗ. κοινῇ δὲ τῷ ΠΓΕΡ ἀρθέντος, λοιπὸν τὸ ΗΞΕΡ λοιπῷ τῷ ΚΟΠΡ ἴσον. Ἐφαρμοδείσεως δὲ τῆς αὐτῆς δειξέως ὅτι τῷ 57 γήματι, δειχθήσεται ΟΓΕΚ=ΠΗΣΓ· ἔνθεν τοι ΠΓΕΡ-ΟΓΕΚ=ΠΓΕΡ-ΠΗΣΓ· ἥτοι ΚΟΠΡ=ΗΞΕΡ.

72) Κάν τοῖς 51, 52 γήμασι δειχθήσεται τὸ ΗΞΕΡ ἴσον τῷ ΚΟΠΡ, ἵνα γάρ ἐστι ΠΝη=η ΗΣΔ (Προτ. ζ' τῆς Γ.), ὅτι ΟΝι=ι ΚΞΔ (διὰ τὸ αὐτὸ) ὅτι η ΗΣΔ=η Ηβι+ιβ ΣΔ (ἐκ τῆς γήματος)· ἄρα ΠΝη=η Ηβι+ιβ ΣΔ. Ἐνθεν τοι ἐν μὲν τῷ 51 γήματι ἔσται ΟΝε-ΠΝη=ι ΚΞΔ-η Ηβι-ιβ ΣΔ=β ΚΞΣ-η Ηβι ἥτοι Πηι Ο=β ΚΞΣ-η Ηβι· κοινῇ δὲ προσκειμένη τῇ η Ηβι ἔσται Πηι Ο+η Ηβι=β ΚΞΣ, τῇ τ' ἔστι ΠΗΒ Ο=β ΚΞΣ· ὅτι Κβ ΗΡ κοινῇ προσθέντος γίνεται ΚΟΠΡ=ΗΞΕΡ. Ἐν δὲ τῷ 52, ΠΝη-ΟΝι=η ΗΣΔ-ι ΚΞΔ, ὅθεν Πηι Ο=η ΗΣΔ-η ΓΞΔ-ι η ΡΚ=ΗΞΕΡ-ι η ΡΚ, καὶ προσκειμένη κοινῇ τῇ ι η ΡΚ, Πηι Ο+ι η ΡΚ=ΗΞΕΡ· τῇ τ' ἔστι ΚΟΠΡ=ΗΞΕΡ.

σαι αὶ ΜΕ, ΝΕ συμπίπτωσι κατὰ τι σημεῖον τὸ Ε· ἀπὸ δέ τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς ἀχθῆ παρὰ τινὰ τῶν ἐφαπτομένων τὴν ΜΕ φέρε, εὐθεῖα ἢ ΗΖ τέμνῃσα τὴν τομὴν κατὰ τὸ Η καὶ τὴν ἑτέραν ἐφαπτομένην κατὰ τὸ Ω, ἔσαι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων ΜΕ, ΕΝ τετράγωνα πρὸς ἀλλήλα, ἔτω τὸ ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΖΩΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης ΝΩ πρὸς τῇ ἀΦῇ τετράγωνον.

Ἦχθωσαν διὰ τῶν ἀφῶν Μ, Ν διάμετροι αὶ ΜΔ, ΝΚ συμπίπτωσαι τῇ μὲν ΗΖ προσεκβληθείσῃ κατὰ τὰ Δ, Π· ταῖς δ' ἐφαπτομέναις ΜΕ, ΝΕ προαχθείσαις κατὰ τὰ Ι, Θ· καὶ τῇ διὰ τῆς Η παρὰ τὴν ἑτέραν ἐφαπτομένην ἀχθείσῃ εὐθείᾳ κατὰ τὰ Ρ, Κ. Καὶ ἐπεὶ ἔσιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΩΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ΩΔΙ τρίγωνον, ἔτω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ΗΔΡ τρίγωνον τὸ τῷ ἑτέρῳ ὅμοιον (19 τῆς 5.). Ἦ ὑπεροχὴ ἄρα τῶν ἡγουμένων τῶν ἐπὶ τὸ ὀρθογώνιον ΖΩΗ (διὰ τὸ διχοτομίαν εἶναι τὸ Δ τῆς ΗΖ, ἣτις τεταγμένως κατῆκται ἐπὶ τὴν διάμετρον ΜΔ, ὡς τῇ ΜΕ ἐφαπτομένη παρὰλληλος) πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἐπομένων, τῶν ἐπὶ τὸ τρα-

πέζιον $HΩIP$, ὡς εἰς τις τῶν ἡγυμένων, τῷτ' ἐς τὸ ἀπὸ $ΩΔ$ πρὸς ἕνα τῶν ἐπομένων, τῷτ' ἐς τὸ τρίγωνον $ΩΔΙ$. Ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ $ΩΔ$ πρὸς τὸ τρίγωνον $ΩΔΙ$, ἔτω τὸ ἀπὸ $ΜΕ$ πρὸς τὸ τρίγωνον $ΕΜ$ (19 τῆς.). Ὡς ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΖΩΗ$ πρὸς τὸ τραπεζίον $HΩIP$, ἔτω τὸ ἀπὸ τῆς $ΜΕ$ τετράγωνον πρὸς τὸ $ΜΕΙ$ τρίγωνον. Ἀλλ' ἐς τὸ μὲν τραπεζίον $HΩIP$ ἴσον τῷ τριγώνῳ $ΩΝΠ$ (*). τὸ δὲ $ΕΜΙ$ τρίγωνον ἴσον τῷ $ΕΝΘ$ τριγώνῳ (Πορ. Α'. τῆς 1Δ'). Ὡς ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΖΩΗ$ πρὸς τὸ $ΩΝΠ$ τρίγωνον, ἔτω τὸ ἀπὸ τῆς $ΜΕ$ τετράγωνον πρὸς τὸ $ΕΝΘ$ τρίγωνον, καὶ ἀναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ τῶν $ΖΩΗ$ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΜΕ$ τετράγωνον, ἔτω τὸ τρίγωνον $ΩΝΠ$ πρὸς τὸ τρίγωνον $ΕΝΘ$, τῷτ' ἐς τὸ ἀπὸ $ΩΝ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΕΝ$. Καὶ

*) Ἐπεὶ μὲν γὰρ τῆς Παραβολῆς ἐπὶ τὸ τρίγωνον $ΠΗΚ$ εἰς ἴσον τῷ τετραπλεύρῳ $ΝΚΡΙ$ (ἐν μὲν τοῖς 42, 43 χήμασι κατὰ τὸ Β'. πόρ. τῆς 1'. ἐν δὲ τῷ 47 κατὰ τὴν 1Δ'. καὶ ἐν τοῖς 45, 46 κατὰ τὴν 68 Σημείωσιν). Ἐὰν ἄρα ἀφαιρεθῇ μὲν ἐκατέρωθεν (ἐν τοῖς 42, 47 χήμα.) προσεθῇ δὲ ἐκατέρω (ἐν τοῖς 13, 45, 48 χήμα.) τὸ τετράπλευρον $ΩΝΗΚ$, γίνεται αἰὶ τὸ τρίγωνον $ΩΝΠ$ τῷ τραπεζίῳ $HΩIP$ ἴσον· ἐπεὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς καὶ Ἐλλείψεως, ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον $ΓΡΗΠ$ εἰς ἴσον τῷ $ΓΙΝ$ τριγώνῳ (Πορ. 1Ε'. καὶ σημ. 70.). Ἐὰν ἀφαιρεθῇ μὲν ἐκατέρωθεν ἐν τῷ 41 χήματι, προσεθῇ δὲ ἐκατέρω ἐν τῷ 46 χήματι, τὸ τετράπλευρον $ΓΙΩΠ$ ἢ τὸ χαρὸν $ΓΡΗΩΝ$ ἐν τῷ 49 γίνεται αἰὶ ὡσαύτως τὸ τρίγωνον $ΩΝΠ$, ἴσον τῷ τραπεζίῳ $HΩIP$.

αὐτὸς ἐναλλάξ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ME τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EN, ἔτω τὸ ὑπὸ τῶν ZΩH ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΩN τετράγωνον, ὃ εἶδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Εἴαν ἄρα ἐπὶ τὰς ἀφ' ἑς ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα ἡ NM τέμνουσα τὴν HZ κατὰ τὸ T, αἱ ΩZ, ΩT, ΩH ἔσονται συνεχῶς ἀνάλογον τέτ' ἐσι τὸ ὑπὸ τῶν ZΩH ὀρθογώνιον ἔσαι ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΩT τετραγώνῳ. Διὰ γὰρ τὴν τριγώνων ΝΩΤ, ΝΕΜ, ὁμοιότητα τὸ ἀπὸ τῆς ΩT τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΩN ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς EM πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EN (19 τῆς 5'). Α'λλ' ὡς τὸ ἀπὸ EM πρὸς τὸ ἀπὸ EN, ἔτω τὸ ὑπὸ ZΩH πρὸς τὸ ἀπὸ ΩN (ὡς δεδεικται ἐν τῇ Προτάσει). Ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΩT πρὸς τὸ ἀπὸ ΩN, ἔτω τὸ ὑπὸ ZΩH πρὸς τὸ ΩN· τὸ ἄρα ἀπὸ ΩT ἴσον τῷ ὑπὸ ZΩH.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Εἴν δὲ τῇ Παραβολῇ (ῥημ. 42, 43) εἰ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΠ τετράγωνον ἔσαι ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ZΩH ὀρθογώνῳ. Ὡς γὰρ ἡ ME ἔστιν ἴση τῇ ΕΘ ἔτω εἰ ἡ ΤΩ ἴση τῇ ΩΠ διὰ τὴν τῶν ἐφαπτομένων ιδιότητα (73). Ἀρα τὸ ἀπὸ ΤΩ, ἴσον τῷ ἀπὸ ΩΠ, εἰ ἐκάτερον τῷ ὑπὸ ZΩH.

73) Εἴαν γὰρ διὰ τῆς M ἀχθῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην NE, τέτ' ἐσι τεταγμένως ἐπὶ τὴν NK διάμετρον

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Εἰάν δὲ καὶ πλείους τέμνεσαι ἀλλήλαις πα- Σχημ. 50.
 ράλληλοι αἱ ΖΗ, ζῇ τῶν ἐφαπτομένων τινὶ τῇ
 ΝΕ φέρεσθε κατὰ τὰ Ω, ω συμπέσωσι, τὰ ὑπὸ
 τῶν ΖΩΗ, ζωὴ ὀρθογώνια ἔσαι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν
 ἀπολαμβανομένων πρὸς τῇ ἀφ᾽ ἧς ΩΝ, ωΝ τετρά-
 γωνα. Τὰ γὰρ ὀρθογώνια ταῦτα ἐξισῆται τοῖς ἀ-
 πὸ τῶν ΩΥ, ωυ τετραγώνοις ἐκάτερον ἐκατέρω
 (Πορ. Β΄.) ἄπερ ἔσιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ΝΩ, Νω
 τετράγωνα (19 τῆς).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Εἴπει ἡ εὐθεῖα ΖΗ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς
 διαμέτρου ΜΔ κατὰ τὸ Δ (σχ.μ. προηγ.). τέταν-
 ται γὰρ ἐπὶ ταύτην. Τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΩΗ ὀρ-
 θογώνιον μετὰ τῆς ἀπὸ τῆς ΗΔ τετραγώνου ἴ-
 σον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΩ τετραγώνῳ (6 τῆς Β΄.). Εἰάν
 ἄρα ἀντὶ τῆς ὑπὸ τῶν ΖΩΗ ὀρθογωνίας τεθῇ τὸ
 αὐτῷ ἴσον τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΩΥ, ἔσαι τὰ
 ἀπὸ τῶν ΩΥ, ΗΔ τετράγωνα ἅμα ληφθέντα
 ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΔΩ τετραγώνῳ.

εὐθεῖα ἡ ΜΟ τέμνεσα τὴν ΝΚ προεκβληθείσαν κατὰ
 Ο ἔσαι τὸ τρίγωνον ΘΕΝ, ὁμοίου τῷ τρίγῳ ΘΜΟ καὶ
 ΘΕ: ΕΜ=ΘΝ: ΝΟ· ἴση δὲ ἡ ΘΝ τῇ ΝΟ (Πορ. ε΄.
 τῆς Θ.) ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΕΜ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε΄.

Ε'πὶ τῆς Παραβολῆς (σχ.μ. 42, 43) ἐπεὶ ἡ ΤΩ ἐστὶν ἴση τῇ ΩΠ (Πορ. Β΄.), ἀρα τὸ ὑπὸ ΤΗΠ μετὰ τῆ ἀπὸ ΩΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΩΤ (5 τῆ Β΄.) τῷτ' ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΩΗ (Πορ. Α΄.) ἢ τῷ ὑπὸ ΖΗΩ μετὰ τῷ ἀπὸ ΗΩ (3 τῆ Β΄.) κοινῆ δὲ τῷ ἀπὸ ΗΩ ἀφαιρεθέντος, λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΤΗΠ λοιπῷ τῷ ὑπὸ ΖΗΩ ἴσον. καὶ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΠ, ὡς ἡ ΗΤ πρὸς ΗΩ· ἢ (ἐπειδὴ ἡ μὲν ΗΤ ἀφαιρεθὲν ἐκ τῆς ὅλης ΖΗ· ἡ δὲ ΗΩ ἀφαιρεθὲν ἐκ τῆς ὅλης ΗΠ) ὡς λοιπὴ ἡ ΤΖ πρὸς λοιπὴν τὴν ΠΩ (19 τῆ Ε΄.). Ε'ναλλάξ δὲ (ἐκ τῆς ἀναλογίας ΖΗ:ΗΠ=ΤΗ:ΗΩ) ἔσαι ὡς ΖΗ πρὸς ΤΗ, ὅτως ἡ ΗΠ πρὸς ΗΩ· ἢ ἡ ΠΚ πρὸς ΚΝ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΖ΄.

Σχ.μ. 51. Ε'ὰν Κώνη τομῆς οἰασδὴποτε ἦτοί τῆς
 52. 53. 54. αὐτῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι
 55. 56. 57. ἐπιψαύσσαι αἱ ΜΑ, ΝΑ συμπίπτωσιν
 ἀλλήλαις κατὰ τι σημεῖον τὸ Α παρ' αὐ-
 τὰς δὲ ἀχθῶσιν ἐν τῇ τομῇ ὅσαιδὴ-
 ποτε αἱ ΗΖ, ΚΤ τέμνεσαι ἀλλήλας τε
 κατὰ τὸ Ρ εἴτε ἐντὸς τῆς τομῆς εἴτε
 ἢ ἐκτὸς, ἢ τὴν τομὴν ἢ τὰς ἀντικειμέ-
 νας κατὰ Η, Ζ, Κ, Τ ἔσαι τὰ ὑπὸ τῶν

τμημάτων, εἰς ἃ τέμνυσιν ἀλλήλας αἱ
εὐθεῖαι αὗται, περιεχόμενα ὀρθογώ-
νια, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων ΜΑ,
ΝΑ τετραγωνα.

Ἦχθωσαν γὰρ διὰ τῶν ἀφῶν Μ, Ν διάμε-
τροι αἱ ΜΕ, ΝΑ· καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἵ τε ἐ-
φαπτόμεναι καὶ αἱ ταύτης παράλληλοι ΗΖ, ΚΤ
μέχρι τῶν διαμέτρων ἐπὶ τὰ Θ, Δ, Π, Ξ· καὶ
ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Κ, Η παρὰ τὰς ἐφαπτομένας
αἱ ΚΟ, ΗΣ τέμνυσαι τὰς διαμέτρους κατὰ τὰ Ο,
Σ. Φανερόν δὲ ὅτι αἱ ΗΖ, ΚΤ τεταγμένως κα-
τήχθισαν ἐπὶ τὰς διαμέτρους, καὶ δίχα τέτμηνται
ὑπ' αὐτῶν κατὰ τὰ Ε, Α· καὶ ὄντων ἀλλήλοισι
ὁμοίων τῶν τριγώνων ΗΕΣ, ΡΕΞ, τὸ ἀπὸ τῆς
ΗΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΡΕ εἰν ὡς τὸ τρίγωνον ΗΕΣ
πρὸς τὸ ΡΕΞ (19 τῆς 5.). καὶ δὴ καὶ ἡ ὑπεροχὴ
τῶν ἀπὸ ΗΕ, ΡΕ, τῶν εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΗΡΖ
(5, 6 τῆς Β.) πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν τριγώνων
ΗΕΣ, ΡΕΞ, τῶν εἰς τὸ τετράπλευρον ΖΡΞΣ, ὡς
τὸ ἀπὸ ΗΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΕΣ· ἢ ὡς τὸ ἀπὸ
ΜΑ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΜΔ, ἢ τὸ αὐτῷ ἴσον ΑΝΘ
(Προτ. Γ. καὶ Πορ. Α' τῆς ΙΔ.). Ὀμοίως δειχθή-
σεται ὅτι καὶ ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΚΡΤ πρὸς τὸ τετρά-
πλευρον ΚΟΠΡ, ἔτω τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ τρίγω-
νον ΚΛΟ, τῶν εἰς τὸ ἀπὸ ΑΝ πρὸς τὸ τρίγωνον
ΑΝΘ (19 τῆς 5.). δέδεικται δὲ τὸ τετράπλευρον
ΚΟΠΡ τῷ τετραπλεύρῳ ΗΣΞΡ ἴσον (ἐπὶ μὲν τῶν

53, 54 σχημάτων ἐν τοῖς πορίσμασι τῆς ΙΔ'. ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν ἐν ταῖς 71, 72 Σημειώσονται). Α'-μοιβῇ ἄρα τῶν ἴσων ἢ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ τετράπλευρον ΗΞΕΡ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΚΡΤ, ἔτω τὸ τρίγωνον ΑΝΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ. Ἐπεὶ ἔν ἐσιν ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΗΡΖ πρὸς τὸ τετράπλευρον ΗΞΕΡ, ἔτω τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΝΘ· ὡς δὲ τὸ τετράπλευρον ΗΞΕΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΡΤ, ἔτω τὸ τρίγωνον ΑΝΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ· διὸν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΗΡΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΡΤ, ἔτω τὰ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ἐὰν ἄρα δύο χορδαὶ ἀλλήλαις παράλληλοι αἱ ΖΗ, ΧΦ τμηθῶσιν ὑφετέρας τῆς ΚΤ κατὰ τὰ Ρ, Τ, τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων αὐτῶν τε ἢ τῆς τεμέσεως περιεχόμενα ὀρθογώνια ἀνάλογον ἔσεται· ἦτοι ὡς τὸ ὑπὸ ΗΡΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΡΤ, ἔτω τὸ ὑπὸ ΦΤΧ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΤΤ. Ἐπεὶ γὰρ ἔσιν ἐκ τῆς παρέσεως ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΗΡΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΡΤ, ἔτω τὸ ἀπὸ ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΑ· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΦΤΧ πρὸς ὑπὸ ΚΤΤ ἔτω τὸ ἀπὸ ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΑ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΡΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΡΤ, ἔτω τὸ ὑπὸ ΦΤΧ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΤΤ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι αἱ ΗΖ, ΚΤ συμπίπτουσιν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ρ, δυσὶν ἑτέραις ταῖς ΦΧ,

ΨΗ συμπίπτουσιν κατὰ τι σημεῖον τὸ Ι ὡς πα-
ράλληλοι, τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων ἀπασῶν περιε-
χόμενα ὀρθογώνια ἀνάλογον ἔσται· ἦτοι ὡς τὸ
ὑπὸ ΗΡΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΙΦ, ἔτω τὸ ὑπὸ ΚΡΤ
πρὸς τὸ ὑπὸ ΨΙΗ. Ἐπεὶ γὰρ τότε ὑπὸ ΗΡΖ
πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΡΤ καὶ τὸ ὑπὸ ΧΙΦ πρὸς τὸ ὑπὸ
ΨΙΗ εἰσιν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῷ ἀπὸ ΜΑ πρὸς
τὸ ἀπὸ ΝΑ. Ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΡΖ πρὸς τὸ ὑπὸ
ΚΡΤ, ἔτω τὸ ὑπὸ ΧΙΦ πρὸς τὸ ὑπὸ ΨΙΗ· καὶ
ἐναλλάξ τὸ ὑπὸ ΗΡΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΙΦ, ὡς τὸ
ὑπὸ ΚΡΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΨΙΗ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ἐπεὶ δὲ τῆς Παραβολῆς τὰ αὐτὰ ὀρθογώ-
νια ΗΡΖ, ΚΡΤ εἶναι ὡς αἱ Παράμετροι τῶν δια-
μέτρων ΜΕ, ΝΑ, ἐφ' ἃς τεταγμένως αἱ εὐθεῖαι
αὗται κατήχθησαν. Ἀχθείσης γὰρ ἀπὸ τῆς
συμβολῆς σημεῖον Ρ παρὰ τὴν διάμετρον ΜΕ τῆς
εὐθείας ΡΒ, δῆλον ἐκ τῆς ΙΑ'. ὅτι εἶναι ἴσα τὸ
μὲν ὑπὸ ΗΡΖ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς τῆ δια-
μέτρῳ ΜΕ ἀνηκῆσης Παραμέτρου, ἢ τῆς ΡΒ. τὸ
δὲ ὑπὸ ΚΡΤ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς τῆ ΝΑ
ἀνηκῆσης Παραμέτρου ἢ τῆς αὐτῆς ΡΒ. Τὰ δὲ τοι-
αῦτα ὀρθογώνια ὡς ἔχοντα κοινὴν τὴν ΒΡ πλευ-
ρὰν, εἰσιν ὡς αἱ εἰρημένοι Παράμετροι (1 τῆ 5').

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Φανερόν ἄρα ἐκ τούτου ὅτι ἐπὶ τῆς Παραβο-
λῆς αἱ Παράμετροι οἰωνδῆποτε διαμέτρων εἰσὶ

πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐπιφανουσῶν μὲν τῆς αὐτῶν κορυφῆς, συμπιπτουσῶν δὲ ἀλλήλαις τετράγωνα. Ἦτοί ὡς τὸ ἀπὸ AM πρὸς τὸ ἀπὸ AN , ἔτις ἡ ὀρθία πλευρὰ τῆς ME διαμέτρου πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευρὰν τῆς NA . Ἐστὶ γὰρ τὸ ὑπὸ HZ πρὸς τὸ ὑπὸ KPT , ὡς τὸ ἀπὸ MA πρὸς τὸ ἀπὸ NA , ἢ ὡς Παράμετρος τῆς ME διαμέτρου πρὸς τὴν Παράμετρον τῆς NA διαμέτρου, αἵτινες ἐδείχθησαν ἐν τῷ Γ' . Πορίσματος ὅτι εἰσὶν ὡς τὰ εἰρημένα ὀρθόγωνα.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε'.

Ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλείψεως καὶ Ὑπερβολῆς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα εἰσὶν ἐν λόγῳ τῷ συγκειμένῳ, ἕκ τε τῆ τῶν διὰ τῆς ἀφῆς ἡγμένων διαμέτρων καὶ τῆ τῶν αὐταῖς συστοιχουσῶν Παραμέτρων. Ὅθεν (μετὰ τὸ B' . Πορ. τῆς IB' .) καὶ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων τῶν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τετράγωνα. Διὰ δὲ ταῦτα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἶναι καὶ τὰ ὑπὸ τῶν μερῶν τῶν τὰς τομᾶς ταύτας τεμνοσῶν εὐθειῶν περιεχόμενα ὀρθόγωνα. Τὸ δὲ τοιοῦτον ἐπὶ μὲν τῆς Ἐλείψεως, αὐτόθεν δῆλον (74). Τὰ γὰρ ὑπὸ τῶν διὰ τῆ κέν-

Σχημ. 8. 74) Ἀΐχθουσῶν διὰ τῆ κέντρου Γ τῶν εὐθειῶν $IG\Phi$, τῶν ὑποσ. $ΠΓ\Phi$ παραλλήλων ταῖς ἐφαπτομέναις AM , AN ἴσεται (κατὰ τὴν παρῶσαν Πρότασιν) $IG\chi IG\Phi : ΠΓ\chi Γ\Phi \equiv AM^2 : AN^2$. ὁ εἶναι $AM^2 : AN^2 \equiv ΠΓ^2 : IG^2$ καὶ τῶν

τρε παρὰ τὰς ἐφαπτομένας ἡγμένων εὐθειῶν περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἔσι δὴ τὰ αὐτὰ καὶ τετράγωνα ἀπὸ τῶν εἰρημένιων ἡμιδιαμέτρων ἀναγραφόμενα, τοῖς ἀπὸ τῶν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας ἡγμένων τετραγώνοις ἀνάλογα. Αἱ γὰρ τοιαῦται εὐθεῖαι ὡς μὲν τεταγμέναι ἐφ' οἰαινὲν τῶν διαμέτρων, εἰσὶ ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι· ὡς δὲ καὶ διὰ τῆς κέντρου ἡγμέναι, εἰσὶ καὶ συζυγεῖς ταῖς πλαγίαις. Ἐπὶ δὲ τῆς ὕπερβολῆς, δείκνυται τῷ αὐτῷ τρόπῳ, ὅτι ἐπὶ τῆς ἑλπίσεως ἐν τῷ Β'. καὶ Γ'. Πορίσματος τῆς ἐπομένης δειχθήσεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Ἐὰν ἀπὸ τῶν περάτων Ν, Ε οἷασδὴποτε σχημ. 58.
διαμέτρῳ ΕΝ, ἐλλειπτικῆς ἢ ὑπερβολι- 59.

ὄραν (τῇ δευτέρῃ λόγῳ) τετραπλασιασθέντων ὡς AM^2 , $AN^2 = PF^2 : I\P^2$. ἔσι δὲ ἡ μὲν PF συζυγὴς τῇ ME διαμέτρῳ, ἡ δὲ $I\P$ τῇ NT , (Πόρισμ. Β' τῆς IB' .) Ἄρα (κατὰ τὸ αὐτὸ πόρισμα) $PF^2 : I\P^2$ ἔσαι ὡς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τε τῆς διαμέτρου ME καὶ τῆς αὐτῇ ἀντιστοιχέσης παραμέτρου περιεχόμενον, πρὸς τὸ ὑπὸ τε τῆς NT , καὶ τῆς αὐτῇ ἀντιστοιχέσης παραμέτρου περιεχόμενον ὀρθογώνιον. Ὅθεν ἐκεῖνο πρὸς τὸτο ἔσται ὡς $AM^2 : AN^2$. ἔσι δὲ $AM^2 : AN^2 = HPZ : KPT$. ἄρα τὸ $HPZ : KPT$ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ τε τῆς διαμέτρου ME καὶ τῆς αὐτῇ παραμέτρου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου NT καὶ τῆς αὐτῇ παραμέτρου περιεχόμενον. Ταῦτα ἄρα HPZ , KPT ἐν λόγῳ ἐστὶ συγχεμένῳ ἔκ τε τῶν διαμέτρων ME , NT καὶ τῶν ἐκατέρῃ ἀνηκασῶν παραμέτρων.

κῆς τομῆς, ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι αἱ
 NE, EP, αἵτινες ὡς παράλληλοι ταῖς
 τεταγμέναις, ἔσονται δὴ καὶ ἀλλήλαις
 παράλληλοι, καὶ προσεκβαλλόμεναι, ὑφ'
 ἐτέρας ἐφαπτομένης τῆς MO τμηθῶσι
 κατὰ τὰ σημεῖα P, E, τὸ ὑπὸ τῶν ἐ-
 φαπτομένων EP, NE περιεχόμενον ἑρ-
 δογώνιον ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς δευτέ-
 ρας ἡμιδιαμέτρου ΓΒ, τῆς τῇ πρώτῃ EN
 συζυγῆς τετραγώνῳ.

Ταχδεῖσης γὰρ ἐπὶ τὴν διάμετρον EN τῆς
 MK, ἔσεται ἐκ τῆς ιδιότητος τῆς ἐφαπτομένης
 MO, ὡς ἡ EO πρὸς ON, ἔτως ἡ EK πρὸς KN
 (Πόρισμ. IB. τῆς Θ.) Ἐνθεντοὶ ὡς ἡ EO σὺν ON
 ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, ἡ ἡ EO πλὴν ON ἐπὶ τῆς ὑ-
 περβολῆς πρὸς ON, ἔτως ἡ EK σὺν KN ἐπὶ τῆς
 ἐλλείψεως, ἡ ἡ EK πλὴν KN ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς
 πρὸς KN, καὶ λεγθέντων τῶν ἡμίσεων τῶν ἡγεμέ-
 νων ἔσεται ὡς ἡ ΓO πρὸς ON, ἔτως ἡ ΓE πρὸς
 KN. Ὁθεν ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγεμένων, τῷτ' ἔ-
 σιν ἡ EO, πρὸς τὸ τῶν ἐπομένων, τῷτ' ἔσιν ἡ KO,
 ἔτως ὁ πρῶτος ἡγεμένος ΓO πρὸς τὸν πρῶτον ἐπό-
 μενον ON. Ἐστὶ δὲ (διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώ-
 νων EOP, KOM) ὡς μὲν ἡ EO πρὸς KO, ἔτως
 ἡ EP, πρὸς KM· ὡς δὲ ἡ ΓO, πρὸς ON, ἔτως
 ἡ ΓA πρὸς NE· ὡς, ἄρα ἡ EP πρὸς KM, ἔτως ἡ

ΓΛ πρὸς ΝΕ. Καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΡ, ΝΕ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΚΜ, ΓΛ (16 τῆ ε΄.) ἢ ἀχθείσης παρὰ τὴν ΓΝ· τῆς ΜΗ, ἣτις ἐκ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΒ ἀποτεμεῖ τῇ ΚΜ, ἴσην τὴν ΓΗ (34 τῆ Α΄.) ἔσεται τῷ ὑπὸ τῶν ΕΡ, ΝΕ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΛΓΗ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῷ ΛΓΗ ἔστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΒ τετραγώνῳ. Ἐστὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης ἡμιδιαμέτρου ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ΓΒ, ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΕΝ πρὸς τὴν αὐτῆς παράμετρον (Πρότ. ΙΒ΄. περὶ τὸ τέλος)· τῷτ' ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΓΚΘ, ὅπερ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΚΝ (Πόρ. Η΄. τῆς Θ΄.) πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΜ (Πόρ. ε΄. τῆς Ε΄, καὶ ε΄.) ὅσπερ λόγος, λόγος ἐστὶ συγκείμενος ἕκτε τῇ ΓΚ πρὸς ΚΜ, ἢ πρὸς ΓΗ, καὶ τῇ ΘΚ πρὸς ΚΜ, τῷτ' ἔστι τῇ ΓΘ πρὸς ΓΛ. Ὅθεν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, ἔτω τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΛ, ΓΗ (75). Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΚΓΘ ἔστιν ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΝ, ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΓΛΗ σὺν τῷ ἀπὸ ΓΒ. Διὰ ταῦτα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΡ, ΝΕ, ὅπερ δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ ΓΛΗ, ἐξισῶται τῷ ἀπὸ τῆς συγυζῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΒ τετραγώνῳ, ὃ εἶδει δεῖξαι,

75) Διευθετὴν αὖ καὶ ἕτως ὅτι ἐστὶ $ΚΘΓ : ΝΚΜ :: ΚΓΘ : ΓΛ \times ΓΗ$. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶ $ΓΘ : ΓΛ :: ΘΚ : ΚΜ$ · καὶ $ΓΚ : ΚΗ :: ΓΚ : ΚΜ$, ἐστὶ δὲ καὶ $ΚΓ \times ΓΘ : ΗΓ \times ΓΛ :: ΓΚ \times ΚΘ : ΚΜ \times ΚΜ$, ἥτοι $ΚΓΘ : ΛΓΗ :: ΓΚΘ : ΚΜ^2$.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Εἰάν ἀχθῶσι διὰ μὲν τοῦ τῆς ἀφῆς σημείου Μ ἑτέρα διάμετρος ἡ ΜΓΣ, ἀπὸ δὲ τῆ αὐτῆς πέ-
ρατος Σ, ἐφαπτομένη ἡ ΣΑ, ἣτις παράλληλος
μὲν ἔσαι τῇ ΜΘ, συμβαλεῖ δὲ κατὰ τὸ Α τῇ ἑτέ-
ρα ἐφαπτομένη ΝΕ, ἣτις συμπίπτει τῇ ΜΣ δια-
μέτρῳ προεκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ι, ἀχθῇ δὲ προ-
σέτι καὶ διὰ τῆ κέντρου Γ, ἡ ΓΔ τῇ ΜΕ παράλ-
ληλος, ἣτις ἔσω ἡμιδιάμετρος δευτέρα συζυγῆς τῇ
πρώτῃ ἡμιδιαμέτρῳ ΓΜ, ἔσαι ὁμοίως διὰ τὸν αὐ-
τὸν λόγον τὸ ὑπὸ τῶν ΣΑ, ΜΕ περιεχόμενον ὀρ-
δογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΔ τε-
τραγώνῳ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Ἀχθεισῶν δὲ τῶν εὐθειῶν ΕΣ, ΝΜ, ΘΙ,
αἵτινες ἔσονται ἀλλήλαις παράλληλοι (ἐπεὶ γὰρ
τὰ τρίγωνα ΝΕΘ, ΜΕΙ), ἐδείχθη ἐν τῷ Α'. Πο-
ρίσματι τῆς ΙΔ'. ἀλλήλοις ἴσα, ἴσα ἄρα καὶ τὰ
ΝΘΜ, ΝΙΜ, καὶ ἐπομένως αἱ ΝΜ, ΘΙ παράλλη-
λοι (39 τῆ Α'). Καὶ ἐπεὶ προσέτι ἡ εὐθεῖα ΝΓ
ἔστιν ἴση τῇ ΓΞ ἢτε ΜΓ τῇ ΓΣ, καὶ ἡ ὑπὸ ΝΓΜ
ση τῇ ὑπ^α ΕΓΣ· ἔσεται δὲ (4 τῆ Α') καὶ ὑπὸ
ΓΝΜ ἴση τῇ ἐναλλάξ ὑπὸ ΓΞΣ, ἄρα (28 τῆ Α') καὶ
αἱ ΜΝ, ΕΣ, παράλληλοι)· ἔσεται ὥς ἡ ΕΘ πρὸς

ΘΝ, ὥτως ἡ ΣΙ πρὸς ΙΜ (76). ὅθεν καὶ ὡς ἡ ΞΡ πρὸς ΝΕ, ὥτως ἡ ΣΑ πρὸς ΜΕ (Πόρ. 1 τῆς 4 τῆς 5.). Διὰ δὴ ταῦτα τὸ ὑπὸ τῶν ΞΡ, ΝΕ περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣΑ, ΜΕ ἔσται ἐν λόγῳ διπλασίονι, ἢ περ ἡ ΝΕ πρὸς τὴν ΜΕ (77). Εὐθεντοὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΞΡ, ΝΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣΑ, ΜΕ, τῆς ἑσὶ τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ὅτω τὸ ἀπὸ ΝΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ κατὰ τὴν παρῶσαν Πρότασιν, καὶ τὸ Α'. Πόρισμα.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Διὰ δὴ ταῦτα, εἰν δύο χορδαὶ ταῖς ἐφαπτομέναις ΝΕ, ΜΕ παράλληλοι συμβάλωσιν ἀλλήλαις κατὰ τι σημεῖον, τὰ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενα

76) Εἴπει αἱ ΞΣ, ΝΜ, ΘΙ εἰδείχθησαν ἀλλήλαις παράλληλοι, ἔσται $ΞΓ : ΣΓ = ΓΝ : ΓΜ = ΝΘ : ΜΙ$. ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγούμενων $ΞΓ + ΓΝ + ΝΘ$ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπομένων $ΣΓ + ΓΜ + ΜΙ$, ἔσται ὡς εἰς τις ἡγόμενος ΝΘ πρὸς τὸν αὐτῇ ἐπόμενον ΜΙ (12. τῆς Ε.) Τοιγαρὲν εἴτε $ΞΓ + ΓΝ + ΝΘ = ΞΘ$, καὶ $ΣΓ + ΓΜ + ΜΙ = ΣΙ$, καὶ $ΞΘ : ΣΙ = ΝΘ : ΜΙ$ καὶ ἐναλλάξ $ΞΘ : ΘΝ = ΣΙ : ΙΜ$.

77) $ΞΡ : ΣΑ = ΝΕ : ΜΕ$,

καὶ $ΝΕ : ΜΕ = ΝΕ : ΜΕ$

ἄρα (σημ. 23.) $ΞΡ \times ΝΕ : ΣΑ \times ΜΕ = ΝΕ^2 : ΜΕ^2$. Εἴςι δὲ $ΝΕ^2 : ΜΕ^2$ ἐν λόγῳ διπλασίονι, ἢ περ ἡ ΝΕ πρὸς τὴν ΜΕ, ἄρα καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΞΡ \times ΝΕ$ πρὸς τὸ $ΣΑ \times ΜΕ$ εἴςιν ἐν λόγῳ διπλασίονι ἢ περ ἡ ΝΕ πρὸς τὴν ΜΕ.

ὀρθογώνια, ἔσται ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αὐταῖς παραλλήλων ἡμιδιαμέτρων ΒΓ, ΓΔ. Εἰσι γὰρ ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων ΝΕ, ΜΕ (Προτασ. ΙΖ΄.) ἅπερ ἐδείχθη ὄντα (Πορ. προηγ.), ὡς τὰ εἰρημένα τετράγωνα (78).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ΄.

Σχημ. 60. Εἰπὶ τῆς παραβολῆς κείῳ ἐπὶ τῷ ἄξονος ΝΚ ἐντὸς μὲν τῆς κορυφῆς ἢ ΕΝ ἴση τεταρτημορίῳ τῆς κατ' αὐτὴν διαμέτρου, ἐκτὸς δὲ τῆς κορυφῆς ἢ ΝΠ, ἴση τῇ ΕΝ, καὶ διὰ τῶ σημείῳ Π ἤχθω παρὰ τὰς τεταγμένας ἢ ΠΥ. Ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ σημείῳ Ε ἐφ' οἷονδ' ἵπποτε τῆς καμπύλης σημείον

78) Εἰς τοῦτον καταφαίνεται ἡ δεικνύουσα τῇ Ε'. Πόρισμα τῆς προηγουμένης Προτάσεως. Ἐστὶ γὰρ ἐκ τῆς Προτάσεως ἐκείνης $HPZ:KPT=MA^2:NA^2$ κατὰ τὸ Β'. Πόρισμα τῆς αὐτῆς $MA^2:NA^2$ ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς τῇ ΜΓ συζυγῆς ἡμιδιαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τῇ ἑτέρᾳ ἡμιδιαμέτρου ΝΓ', συζυγῆς ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον ἢ τετραπλασιασθέντων τῶν ὁρίων τῇ δευτέρᾳ λόγῳ, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀφ' ὅλης τῆς τῇ ΜΓ συζυγῆς διαμέτρου, πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀφ' ὅλης τῆς τῇ ΜΓ συζυγῆς διαμέτρου. Ἐστὶ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν τοιούτων συζυγῶν διμέτρου τετράγωνα, ὡς τὰ ὑπὸ τε τῶν διαμέτρων καὶ τῶν αὐταῖς ἀντιστοιχουσῶν παραμέτρων περιχόμενα ὀρθογώνια. Τὰ εἰρημένα ἄρα ὀρθογώνια ἐν λόγῳ εἰς συγκείμενα ἔκ τε τῶν διμέτρων καὶ τῶν αὐταῖς ἀντιστοιχουσῶν παραμέτρων.

Μ, τῆς εὐθείας ΕΜ, τῆς τε ἐφαπτομένης ΟΜΘ, ἢ τῆς διαμέτρου ΜΧ παραλλήλως τῷ ἄξονι ΝΚ, ἔσεται ἡ μὲν ὑπὸ ΧΜΟ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ΕΜΘ· ἡ δὲ εὐθεῖα ΕΜ ἴση τεταρτημορίῳ τῆς τῇ διαμέτρῳ ΜΧ ἀντιστοιχούσης παραμέτρου.

Καλεῖσθω δὲ τὸ μὲν σημεῖον Ε Ἐξία τῆς Παραβολῆς· τὸ δὲ Π, Μελεωρισμὸς ταύτης, ἢ ἡ εὐθεῖα ΠΤ, γραμμὴ 7^ῃ Μελεωρισμῷ.

Ταχδεΐσης ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς ΜΚ, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τετράγωνον ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς ΝΚ ἢ τῷ τετραπλῷ τῆς ΝΕ, ἣτις ἐστὶν ἐξ ὑποθέσεως ὑποτετραπλῇ τῆς παραμέτρου· ἄρα τὸ τετραπλὸν τῷ ὀρθογωνίῳ ΚΝΕ (ἣται τὸ ὀρθογωνίον τὸ ὑπὸ τῆς ΚΝ ἢ τῷ τετραπλῷ τῆς ΝΕ) σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΚ τετραγώνῳ ἐξισωθήσεται τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΚ, ΕΚ ἅμα ληφθεῖσι τετραγώνοις, τῶν ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΜ (47 τῷ Α΄). Ἀλλ' ἐπεὶ ἡ ΝΠ ἐστὶν ἴση τῇ ΝΕ, τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΠΚ ἔσεται ὡσαύτως ἴσον τῷ τετράκις ὀρθογωνίῳ ΚΝΕ σὺν τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ ΕΚ (3 τῷ Β΄) ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΜ ἴσον τῷ ἀπὸ ΠΚ, ἢ ἡ εὐθεῖα ΕΜ ἴση τῇ ΠΚ, ἣτις ἐξισῆται τῇ ΕΘ· εἴγε ἐπεὶ ἡ ΝΚ ἐστὶν ἴση τῇ ΝΘ (Πόρ. 5 τῆς Θ΄) καὶ ἡ ΝΕ τῇ ΝΠ, ἔσεται δὴ ἢ ἡ ΕΚ ἴση τῇ ΠΘ· ὅθεν προσκειμένης κοινῇ τῆς ΠΕ ἔσεται ἢ ΠΚ ἴση τῇ ΕΘ.

τὸ τρίγωνον ἄρα $\Theta Ε Μ$ εἰν ἰσοσκελές. Ὅθεν ἡ ὑπὲρ $Ε Μ Θ$ ἴση τῇ ὑπὸ $Μ Θ Κ$ (5 τῆ Α΄.) καὶ δὴ καὶ τῇ ὑπὸ $Χ Μ Θ$ τῇ ἐκτὸς τῶν παραλλήλων (27 τῆ Α΄.), ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Προαχθεῖσης δὲ τῆς διαμέτρου $Μ Χ$ ἄχρις ὅτε τῇ τῆ Μετεωρισμῦ εὐθείᾳ $Π Τ$ κατὰ τὸ $Τ$ συμπίσῃ, ἔσεται ἡ $Μ Τ$ ἴση τῇ $Π Κ$ (36 τῆ Α΄.), ἐπομένως δὲ καὶ τῇ $Ε Μ$ · καὶ τεταγμένης τῆς $Ν Χ$ παραλλήλως τῇ ἀφαπτομένῃ $Μ Θ$, ἀχθεῖσης τε ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆ Α΄ξονος τῆς ἀφαπτομένης $Μ Δ$, ἥτις τεμεῖ δίχα τὴν $Μ Θ$ κατὰ τὸ $Δ$ (79)· καὶ ἐπιζευχθεῖσης προσέτι τῆς $Δ Ε$, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς $Δ Θ$ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν $Ε Θ Ν$ ὀρθογωνίῳ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ $Μ Δ$ εἰν ἴση τῇ $Δ Θ$, καὶ ἡ $Κ Ν$ ἴση τῇ $Κ Θ$ (Πορ. 5 τῆς Θ΄.) ἥτε $Μ Ε$ ἴση τῇ $Θ Ε$, καὶ ἡ γωνία $Ε Μ Δ$ ἴση τῇ $Ε Θ Δ$ · καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα γωνίαι τῶν τῶν τριγώνων αἱ ταῖς ἴσαις πλευραῖς ἀντικείμεναι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται (4 τῆ Α΄.)· ἡ ὑπὸ $Θ Ε Δ$ δηλονότι τῇ ὑπὸ $Μ Ε Δ$, καὶ ἡ ὑπὸ $Θ Δ Ε$ τῇ ὑπὸ $Ε Δ Μ$. Ὅρθῃ ἄρα ἡ γωνία $Θ Δ Ε$, ὥς ἴση τῇ ἐφεξῆς $Μ Δ Ε$ · ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $Δ Θ$ τετράγωνον, εἰν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν $Ε Θ Ν$ ὀρθογωνίῳ (8 τῆς Α΄.) ἢ τῷ ὑπὸ τῶν $Μ Ε$, $Μ Χ$, ὅσης τῆς $Θ Ε$ ἴσης τῇ $Μ Ε$, καὶ τῆς $Θ Ν$ τῇ $Μ Χ$ (14 τῆ Α΄.). Ἀλλὰ τὸ

79) Ἐπεὶ αἱ εὐθεῖαι $Μ Κ$, $Δ Ν$ εἰν ἀλλήλαις παραλλήλοι, ἄρα (1. τῆς Α΄.) $Θ Ν : Δ Κ = Θ Δ : Δ Μ$ · ἀλλὰ ἡ $Θ Δ = τῇ Κ Ν$, ἄρα καὶ ἡ $Θ Δ = τῇ Δ Μ$.

ἀπὸ τῆς ΘΔ τετράγωνον, ἐσὶν ὑποτετραπλάσιον τῆ ἀπὸ τῆς ΜΘ ἢ τῆς ΝΧ, αἵτινες εἰπὶ διπλασίους τῆς ΘΔ· ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΝΧ τετράγωνον ἐστὶ τετραπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῆς ΜΕ καὶ τῆς ΜΧ περιεχομένου ὀρθογωνίου. Ἐστὶ δὲ τὸ ἀπὸ ΝΧ ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς τετμημένης ΜΧ καὶ αὐτῇ ἀντιστοιχίας παραμέτρῳ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ (Πόρ. Α'. τῆς Ι'). ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΜΕ, ΜΧ ἐστὶν ὑποτετραπλάσιον τῆ ὑπὸ τῆς ΜΧ καὶ τῆς αὐτῇ ἀντιστοιχίας παραμέτρῳ· καὶ ἕσθης τῆς ΜΧ κοινῆς ἑκατέρῳ, ἢ λοιπῇ ἄρα ΜΕ ἐστὶν ὑποτετραπλάσια τῆς λοιπῆς, ἣτις ἐστὶν ἡ Παράμετρος· ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ε'πεὶ αἱ ἀκτῖνες, ὡς ἐκ τῆς Κατοπτρικῆς δῆ- Σχημ. 60.
λον, ἔτιωσ ἀνακλῶνται, ὡς τὴν τῆς προσπτώσεως 61.
γωνίαν ΧΜΟ ἐξισθῆναι τῇ τῆς ἀνακλάσεως ΕΜΘ,
δῆλον ἄρα ὡς αἱ ἀπότινος ἀκτινοβολε σώματος ἀ-
πωτάτε, τῆς Ἡλίου φέρε, παραλλήλως τῷ ἄξονι
κατιῶσαι ἀκτῖνες (εἰ γὰρ αἱ Φοραὶ τῶν ἐπὶ τὸ κέν-
τρον τῆς Γῆς ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ καταφορομένων βα-
ρέων ὡς παράλληλοι τοῖς φυσιολογῶσι λογίζον-
ται, πολλῶ μᾶλλον αἱ τῆς Ἡλίου ἀκτῖνες τοσούτω
διαστήματι ἀπέχοντος) καὶ πρὸς Κάτοπτρον παραβο-
λικὸν τὸ ΜΝμ προσπίπτειν, οἶναι αἱ ΧΜ, χμ,
χμ, ἐπὶ τὸ σημεῖον Ε παῦσαι ἀνακλαθήσονται· καὶ

πῦρ ἐκείσε ἐκ τῆς αὐτῶν ἀφδήσεται συμβολῆς. Διὰ
τῆτο ἄρα τὸ σημεῖον ἐκεῖνο κέκληται Ἑσία.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Εἰάν φῶς τι ἐπὶ τῆς Ἑσίας Ε τῆ παραβολικῆ
Κατόπτρου τεθῇ, αἱ ἀπ' αὐτῆ ἀκτῖνες ΕΜ, Μμ, Εμ,
κτλ. εἰς εὐθείας τὰς ΜΧ, μχ, μχ, κτλ. παραλ-
λήλως τῷ ἄξονι ὑπὸ τῆ Κατόπτρου ἀνακλαυθήσου-
νται, ὅθεν καὶ ἐπὶ μέγα ἀπόστημα τὴν αὐτὴν, ἣν καὶ
παρ' αὐτῷ τῷ φωτὶ ἔξουσιν δύναμιν. Ταῦτ' ἄρα καὶ τῆ
φωτὸς ἀπωτάτω χαρακτῆρες εὐμαρῶς ἀναγνωσθή-
σονται, καὶ τῶν πολὺ ἀπεχόντων σωμάτων αἱ ἐπι-
φάνειαι ἱκανῶς φωτιυθήσονται.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ἡ εὐθεῖα ΕΔ ἡ τὴν Ἑσίαν καὶ τὴν τῆς κατὰ
κορυφὴν ἐφαπτομένης τῆ ἄξονος καὶ τῆς ἐτέρας κατὰ
πλευρὰν ἐφαπτομένης συμβολὴν συζευγνῦσα, ἐστὶν
αὐτῇ τῇ ἐφαπτομένῃ κάθετος· δέδεικται γὰρ ἡ
γωνία ΕΔΘ ὀρθή.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Καὶ ἡ ΜΤ μέρος τῆς διαμέτρου ΜΧ ἀπὸ τῆς
αὐτῆς κορυφῆς Μ ἄχρι τῆς τῆ Μετεωρισμῆ εὐθείας
ΠΤ, ἐστὶ τεταρτημόριον τῆς αὐτῇ ἀντιστοιχέσης πα-
ραμέτρου. Ἐστὶ γὰρ ἡ ΜΤ ἴση τῇ ΠΚ, ἡ δὲ ΠΚ ἴση
τῇ ΕΘ, αὕτη δὲ ἴση τῇ ΕΜ· ἄρα ἡ ΠΤ ἴση τῇ

ΕΜ, ἥτις δέδεικται ἴση τεταρτημορίῳ τῆς εἰρημέ-
νης παραμέτρου· καὶ ὁποῦν ποτε ἀχθεῖσα ἡ Εμ
ἐξισωθήσεται τῇ τῷ ἄξονι παραλλήλῳ μὲν τῇ ἐπὶ
τὴν ῥηθεῖσαν τῷ Μετεωρισμῷ εὐθεῖαν τὴν ΠΤ ἰσα-
κτεινομένη. Εὐθεντοὶ οἰαδῆτις ΕΜ ἔσεται πρὸς τὴν
ΜΤ, ὥς ἡ ΕΝ πρὸς τὴν ΝΠ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε΄.

Οἰαδῆποτε ΧΜ σὺν τῇ ΜΕ ἐξισωθήσεται τῇ Σχημ. 62.
ἑτέρα χμ σὺν τῇ με. Εἴσθεται γὰρ τῇ ΧΥ (Πό-
ρισμ. Δ΄.) ἡ τῇ ΤΠ, ὅσης τῆς ΜΤ ἴσης τῆς ΜΕ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ϛ.

Εἰ τῆς περιμέτρου τῆς παραβολῆς ληφθέν-
των ἑκατέρωθεν τῷ ἄξονος δυοῖν σημείων τῶν Μ,
Β (ἡ εἰς ἐπὶ θάτερα τῷ ἄξονος τῶν Μ, Β) καὶ ἐπι-
ζειχθεῖσων ἐπὶ τὴν Ε΄σαν τῶν εὐθειῶν ΜΕ, ΒΕ
(ἡ ΕΒ), ἀχθεῖσων ἐτι εἰς τῶν ἐφαπτομένων ΜΘ,
ΗΒ συμβαλλουσῶν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Α, (ἡ τῶν
ΜΘ, ηβ συμβαλλουσῶν κατὰ τὸ Λ) ἔσεται ἡ γω-
νία ΜΕΒ διπλασία τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἐ-
φαπτομένων ΜΑΒ (ἡ ἡ ΜΕΒ διπλασία τῆς ΘΛΒ.)
Εἴπερ γὰρ δέδεικται ὅτι τὸ τρίγωνον ΜΕΘ, ὥσπερ
δὴ εἰς τὸ ΒΕΗ, (ἡ τὸ ΒΕΗ) εἰσιν ἰσοσκελες (ἐν τῇ
παρόσῃ Πρατάσει)· ἄρα ἡ ἐκτὸς γωνία, ΚΕΒ ἔσε-
ται διπλασία τῆς ΕΗΒ, ἥτε ΚΕΒ διπλασία τῆς
Εηβ, (μερ. 1 τῆς 32 τῷ Α΄.) ἐτι δὲ εἰς ἡ ΜΕΚ

διπλασία τῆς ΜΘΕ. Ἐνθεντοι ἡ γωνία ΚΕΒ ἅμα τῇ ΜΕΚ, ἥτοι ὅλη ἡ ΜΕΒ ἐξισωθήσεται τῷ διπλῷ τῆς ΕΗΒ· ἅμα τῷ διπλῷ τῆς ΜΕΘ ἢ τῆς ΗΘΛ, ἥτις (διὰ τὴν αὐτὴν τῷ Εὐκλείδῃ) ἐξισῆται τῷ διπλῷ τῆς ΘΛΒ. (ἢ ἡ ΚΕΒ πλὴν τῆς ΜΕΚ ἥτοι ἡ ΜΕΒ ἐξισωθήσεται τῷ διπλῷ τῆς ΕΗΒ πλὴν τῷ διπλῷ τῆς ΜΕΘ, ἢ τῆς ΗΘΛ, αἷς τισιν ἐξισῆται τὸ διπλὸν τῆς ΘΛΒ.) ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν κλώ-
νων πρὸς τῇ Εΐς περιεχόμεναι γωνίαι ΜΕΒ, ΜΕΒ διπλασίως εἰσι τῶν ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχομένων γωνιῶν ΘΛΒ, ΘΛΒ ἐκάς ἑκά-
της.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ζ΄.

Σχημ. 63.

Εἰάν δὲ τὰ σημεῖα Μ, Β ἢ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἐφ' ἧς ἡ Εΐς Ε, αἱ ἐφαπτόμεναι ΜΛ, ΒΛ πρὸς ὁρθὴν γωνίαν τὴν ΜΛΒ ἀλλήλαις συνελεύσονται· οὕτως τῶν γωνιῶν ΒΕΚ, ΚΕΜ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσων, τῷ τε αὐτῶν ἡμίσεος (κατὰ τὸ προηγούμενον Πόρισμα) τῇ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ΜΛΒ ἐξισυμένῃ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Η΄.

Διὰ δὲ ταῦτα ἡ εὐθεῖα αὕτη ΜΒ ἔσεται Παράμετρος τῆς διαμέτρου ΛΣΡ, ἥτις δίχα τέμνει κατὰ τὸ Ρ τὴν ἐπ' αὐτὴν τεταγμένην ΜΒ. Εἰ γὰρ κύκλος περὶ τὸ ΜΛΒ τρίγωνον περιγραφῆς, ἔξει

τὸ κέντρον ἐν τῷ Ρ· ἡ γὰρ ὀρθὴ γωνία ΜΑΒ ἔσεται ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ, ὅθεν ἡ ΜΒ ἔσεται διπλασία τῆς ἀκτίνος ΑΡ, καὶ ἡ ΑΡ ἔστι διπλασία τῆς ΡΣ (Πόρισμ. 5 τῆς Θ΄.) ἢ (ἀχθείσης τῆς ἐφαπτομένης ΣΗ παραλλήλως τῇ ΜΒ) ἔσεται διπλασία καὶ τῆς ΕΗ (34 τῷ Α΄.), ἥτινι ἐξίσταται ἡ ΕΣ, ὥσπερ δὴ καὶ ἡ ΕΜ τῇ ΕΘ, ὡς ἐν τῇ Παράρτησιν δέδεικται· ἄρα ἡ ΜΒ ἔστι τετραπλασία τῆς ΕΣ. Ἐστὶ δὲ ἡ ΕΣ ὑποτετραπλασία τῆς τῇ διαμέτρω ΣΡ ἀνηκούσης Παραμέτρου (μέρ. Β΄. τῆς παρύσης)· ἡ ἄρα ΜΒ ἔσεται ταύτης Παράμετρος.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Θ΄.

Ἀχθεῖσα δὲ ἡ ΛΕ, ἔσαι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΡ. Ἐπεὶ γὰρ ἐδείχθησαν αἱ ΛΣ, ΣΡ, ΕΣ ἀλλήλαις ἴσαι (Πόρισμ. Η΄.) ἡ γωνία ἄρα ΛΕΡ ἔστιν ὀρθή· ἐστὶ γὰρ ἐν ἡμικυκλίῳ, ὅπερ περὶ τὴν διάμετρον ΑΡ διὰ τοῦ Σ κέντρου καταγραφέν, διὰ τῶν σημείων Λ, Ε, Ρ διελεύσεται, ἡ ἄρα γωνία ΛΕΡ ἔσαι ὀρθή, (31 τῷ Α΄.) καὶ ἡ ΛΕ, κάθετος τῇ ΜΒ· τοιγαρὺν τὸ ἀπὸ τῆς ΛΕ ἐξισωθήσεται τῷ ὀρθογωνίῳ ΜΕΒ (8 καὶ 17 τῷ Ε΄.).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ι΄.

Ἡ δὲ ὀρθὴ αὕτη γωνία ΜΑΒ, ἡ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχομένη, ἔσεται αἰετὸς πρὸς τῇ τῷ Μετεωρισμῷ τῆς παραβολῆς εὐθείᾳ ΠΤ. Εἴ γε ἡ

ΕΣ ἐξισϋται τῇ ΣΛ, ὥσπερ δὴ καὶ ἡ ΕΝ τῇ ΝΠ, ὅθεν τὸ σημεῖον Λ ἔσται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΠΤ, ἥς περ ἴδιον τὸ τοιοῦτο, κατὰ τὸ τέταρτον Πόρισμα τῆς Παρέσης (80).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ΄.

Σχημ. 64. Οὐριθεντων ἐπὶ τῇ πλαγίῃ ἄξονος τῆς
65. Εὐθείᾳ καὶ τῶν ὀντικειμένων Υ' περ-

Σχημ. 9. 80) Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δευχθήσεται ὅτι οἰαδὴ τις σὺν ὑπασ. ὀρθῇ γωνία μλβ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων μλ, βλ, περιεχομένη, ἔσται πρὸς τῇ τῇ Μεταωρισμῷ εὐθείᾳ ΠΥ. Πᾶσα ἄρα ὀρθῇ γωνία, ἣν αἱ ἐπὶ τὰ πέρατα τῶν διὰ τῆς Ε'ςίας Ε διερχομένων εὐθειῶν ἀχθεῖσαι ἐφαπτόμεναι συνισῶσιν, ἐπὶ τῆς τῇ Μεταωρισμῷ εὐθείας συστήσεται.

81. Εἴαν ἐφ' οἰασθὴ τότε εὐθείας διὰ τῆς Ε'ςίας Β διήκους μβ, κάδοτος ςαδῇ ἡ Ελ τῇ τῇ Μεταωρισμῷ εὐθείᾳ ΠΥ κατὰ τὸ Λ συμβάλλουσα, τὸ σημεῖον τῆτο λ ἔσται σημεῖον συνδρομῆς τῶν ἐφαπτομένων μλ, βλ, εἰδὲ μὴ, αἱ ἐφαπτόμεναι ἄρα, αἱ ἀπὸ τῶν σημείων μ, β ἀχθεῖσαι συμπτῶνται ἢτοι κατὰ τὸ Κ, ἢ κατὰ τὸ Π, συμπίπτεωσαν ἄρα κατὰ τὸ Κ, καὶ ἔσται δὴ ἡ ὑπὸ μ ΕΚ, ὀρθή· (Πόρ. Θ'. τῆς Παρέσης)· ὀρθὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ ὑπὸ μ Ελ, ἄρα ἡ ὑπὸ μ ΕΚ ἔσται ἴση τῇ ὑπὸ μ Ελ, ὅπερ ἄτοπον. Εἰδὲ τὸ τῆς συνδρομῆς σημεῖον ὑποτεθῇ ἐν τῷ Π ἔσται τμηκαῦτα ἡ ὑπὸ μ ΕΠ ἴση τῇ ὑπὸ μ Ελ· ὅ δὴ καὶ αὐτὸ ἄτοπον. Τὸ λ ἄρα ἔσται σημεῖον τῆς τῶν ἐφαπτομένων συμπτώσεως.

82. Εὐθείας τῆς ΜΕΒ διὰ τῆς Ε'ςίας διήκους προελθὼν ἑτέραν εὐθείαν τὴν μ Εβ ἔτι διέρχεσθαι ὡς εἶναι ΒΕΜ:βΕμ=μ:ν. Γενίωσα μ:ν ὡς Ελ πρὸς τετάρ-

βολῶν τῶν ὀρθογωνίων ΞEN , ΝΥΞ ἴσων τῷ ἀπὸ τῆ δευτέρου συζυγῆς ἡμιᾶξονος ΓB τετραγώνῳ, ἢ τῷ τεταρτημορίῳ τῆ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΞN καὶ τῆς ὀρθίας $\text{N}\Sigma$ περιεχομένου ὀρθογωνίου, εἰάν ἀφ' ἑκατέρου τῶν σημείων E , Υ , ἐπιζευχθῶσιν ἐφ' οἷον-δήποτε σημείου M τῆς καμπύλης. Αἱ εὐθεῖαι EM , TM , αὗται δὲ περιέξωσι μετὰ τῆς ἐφαπτομένης ΘMZ γωνίας ἴσας τῆς TMZ , $\text{EM}\Theta$. Τὰ δὲ σημεία E , Υ καλεῖσθων *ΕΣΤΙΑΙ* τῶν ἡρημένων τομῶν.

Αἱ κατὰ κορυφὴν τῆ ἀξονος ἐφαπτόμεναι ΞZ , NO συμπιπτεύωσαν ἐτέρω ἐφαπτομένῃ τῇ διὰ τῆ M ἀχθείσῃ $\text{M}\Theta$ κατὰ τὰ σημεία Z , O . Ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τε τῆς ΞZ καὶ τῆς NO περιεχόμενον, ὅπερ ἐξιστεται τῷ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνῳ

την ζητούμενην τὴν EK , καὶ ἐν ταῖς $\text{E}\Lambda$, EK εὐθεῖαι μέση ἀνάλογος ἡ $\text{E}\lambda$, πρὸς ἣν ἤχθω διὰ τῆς E' εἰας κἀκετος ἡ $\mu\text{E}\beta$. αὕτη δὲ ἴσεται ἡ ζητούμενη εὐθεῖα. Ἐπεὶ γάρ ἐστι $\mu : \nu = \text{E}\Lambda : \text{EK}$, καὶ αἱ $\text{E}\Lambda$, $\text{E}\lambda$, EK συνεχῶς ἀνάλογον· ἄρα $\text{E}\Lambda : \text{EK}$ ὡς $\text{E}\lambda^2 : \text{E}\lambda^2$. ἀλλὰ $\text{E}\lambda^2 = \text{MEB}$, καὶ $\text{E}\lambda^2 = \mu\text{E}\beta$, (Πορ. Θ.) ἄρα $\mu : \nu = \text{MEB} : \mu\text{E}\beta$, ὅπερ ἴδιαι δεῖξαι.

(Πρότασ. ΙΘ'), ἐξισωθήσεται τῷ ὀρθογωνίῳ $\Xi\epsilon\text{N}$ ἢ τῷ $\text{N}\tau\Xi$ · καὶ ὡς ἡ ΞZ πρὸς ΞE , ὕτως ἡ EN πρὸς NO · καὶ ὡς ἡ ΞZ πρὸς $\tau\Xi$, ὕτως ἡ τN πρὸς NO , ὅθεν ἐπιζευχθεῖσιν τῶν $\text{Z}\tau$, $\text{O}\tau$, καὶ ZE , EO ἔσεται τὸ τρίγωνον $\text{Z}\Xi\tau$ ὁμοιον τῷ $\text{O}\tau\text{N}$, τότε $\text{Z}\Xi\text{E}$, ὁμοιον τῷ ONE (83)· ἄρα ἡ γωνία $\Xi\tau\text{Z}$ ἴση τῇ ὑπὸ $\text{N}\text{O}\tau$ (5 τῆς.) Καὶ ἐπεὶ αἱ γωνίαι $\text{N}\text{O}\tau$, $\text{N}\tau\text{O}$ ἅμα ληφθεῖσαι ἐξισϋνται ὀρθῇ, (ἕσης ἐν τῷ τριγώνῳ $\text{O}\text{N}\tau$ ὀρθῆς), ὀρθῇ ἄρα ἐξισωθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ $\Xi\tau\text{Z}$ (ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ $\text{N}\text{O}\tau$) σὺν τῇ $\text{N}\tau\text{O}$, διὰ δὲ τῆτο ὀρθῇ ἔσαι καὶ ἡ ὑπὸ $\text{O}\tau\text{Z}$.

Ὡσαύτως ἐπεὶ ἡ γωνία $\Xi\text{E}\text{Z}$ ἐστὶν ἴση τῇ NOE καὶ ἡ NEO ἅμα τῇ $\Xi\text{E}\text{Z}$ ($=\text{N}\text{O}\text{E}$) ἐξισϋται ὀρθῇ (Πορ. 6 τῆς 32 τῆς Α'). ὀρθῇ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ZEO . Ὅθεν ἡμικύκλιον ἐπὶ διαμέτρου τῆς ZO καταγραφέν, διὰ τῶν σημείων τ , E διελεύσεται, τὰς ὀρθὰς γωνίας $\text{Z}\tau\text{O}$, ZEO περιέχον (31 τῆς Γ'). καὶ ἀχθείσης διὰ τῶν σημείων O τῆς εὐθείας AO παραλλήλου τῇ τZ , ἢν τεμεῖ κατὰ τὸ I ἡ εὐθεῖα

83) Ἐπεὶ ἡ ΞN ἐστὶν ἄξων τῶν ἀντικειμένων τ · περβολῶν καὶ τῆς ἐλλείψεως, καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτόμεναι ταῖς τεταγμέναις παράλληλοι, αἱ γωνίαι $\text{Z}\Xi\tau$, ONE ὀρθαὶ εἰσι καὶ ἐπομένως ἴσαι· Ὅθεν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $\text{Z}\Xi$: $\Xi\tau$ $= \tau\text{N}$: NO , ἄρα τὰ τρίγωνα $\text{Z}\Xi\tau$, $\text{O}\tau\text{N}$, ὁμοία (6. τῆςς.). Ὡσαύτως ἐπεὶ αἱ γωνίαι $\text{Z}\Xi\text{E}$, ONE ὀρθαὶ, καὶ ὡς ἡ EN : NO $= \Xi\text{E}$: ΞE , ἄρα καὶ τὰ τρίγωνα $\text{Z}\Xi\text{E}$, ONE ὁμοία (6. τῆςς.).

TM, ἔσται ἡ γωνία AOT ὁρθή, ὡς ἴσον τῇ ZTO
 ἑναλλάξ καὶ ἐντὸς τῶν παραλλήλων TZ, AI (ἐν δὲ
 τῇ T περβολῇ ὡς δύο ὁρθὰς ἀναπληρῶσα σὺν τῇ
 ὁρθῇ ZTO). ἔστι δὲ καὶ ἡ AO ἴση τῇ OI. Εἵγῃ τε-
 ταγμένης τῆς MK, ἐπαίρειν ὡς ἡ EZ πρὸς ON,
 ἕτως ἡ EK πρὸς KN (Πορ. ΙΓ' τῆς Θ'). ἔστι καὶ
 ὡς ἡ ZO πρὸς ZO, ἕτως ἡ ZM πρὸς MO (84).
 ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ZO πρὸς ZO, ἕτως ἡ ZT πρὸς AO,
 ὡς δὲ ἡ ZM πρὸς MO, ἕτως ἡ ZT πρὸς OI. ὡς
 ἀρα ἡ ZT πρὸς AO, ἕτως ἡ ZT πρὸς OI, ὅθεν
 ἡ AO ἴση τῇ OI. (9. τῇ Ε'.) ἡ γωνία ἀρα OTI,
 ἴση τῇ OTA (85) ἐν τοῖς ἴσοις καὶ ὁμοίοις τριγώ-

84) ὅτι δὲ ἔσται ὡς ἡ ZO:ZO=ZM:MO καὶ
 ἐπὶ τῆς T περβολῆς δεικνύται ἕτως. Ε'πεὶ τὰ τρίγωνα
 EZ, ONOῖσιν ὁμοία, ἔσται ὡς ἡ EZ:ZE=ZO:ZO
 καὶ συντεθέντα EZ+ON:ON=OZ+OO:OO, ἤτοι EN
 :ON=ZO:OO. καὶ ἑναλλάξ EN:ZO=NO:OO καὶ ἀ-
 νάπαλιν ZO:EN=OO:NO, καὶ (διὰ τὴν τῶν τριγώνων
 NOO, KOM ὁμοιότητα) =OM:NK, ὅθεν ἑναλλάξ
 μὲν ZO:OM=EN:NK, συνδέσει δὲ αὐταῖς ZM:OM
 =EK:NK. ἀλλὰ EK:NK=EZ:NO:OO, ἀρα
 ZM:OM=ZO:OO.

Ἄλλως. MO:NK=OO:NO=OZ:EZ, ἀρα
 εἴς τις ἡγόμενος MO πρὸς τὸν αὐτὴν ἐπόμενον NK ὡς
 τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγμένων MO, OO, OZ πρὸς τὸ
 ἄθροισμα τῶν ἐπομένων NK, ON, EZ, ἤτοι ὡς MZ
 πρὸς EK, ἀρα MZ:MO=EK:NK=EZ:NO (Πορ. ΙΘ.)

85) Ἡ γωνία OTI=τῇ OTA. ἐπὶ γὰρ ἰδίῳ
 δι' ὁρθὴν ἡ AOT, ὁρθὴ ἔσται καὶ ἡ ἐφεξῆς αὐτῆς TOI.

νοις ΟΤΙ, ΟΤΑ. Α'Μ' ἡ ὑπὸ ΟΤΑ γωνία ἴση ἐ-
 σι τῇ ΟΖΕ· τῷ αὐτῷ γὰρ τόξῳ ΟΕ ἄμφω ἐπι-
 βεβήκασι (21. τῆ Γ'.) ἄρα καὶ ἡ γωνία ΟΤΙ ἴση τῇ
 ΟΖΕ· καὶ ἀπὸ τῆ σημείω Η, κατ' ὃ αἱ ΤΟ, ΖΕ
 συνέρχονται, ἐπιζευχθεῖσα ἐπὶ τὸ Μ ὡς εὐθεῖα
 ΗΜ, φέσεται τῇ ἐφαπτομένῃ ΖΜ κάθετος. Εἴγῃ
 ἐπεὶ αἱ γωνίαι ΖΤΜ, ΗΖΜ εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις,
 κύκλος ἄρα διὰ τῶν σημείων, Η, Τ, Ζ, Μ δύ-
 ναται γραφῆναι (ὑποσημ. 6), ὥστε ὁρθῆς τῆς γω-
 νίας ΗΜΖ, ἴτε δὴ ἐπὶ μὲν τῆς Ε'μείψεως, ἀπε-
 ναντίον ὥστε τῇ ὁρθῇ ΗΤΖ, ἐπὶ δὲ τῆς Γ'περβο-
 λῆς ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῇ ΗΤΖ· ὅθεν ὁρθῇ ἐ-
 σεται καὶ ἡ ὑπὸ ΗΜΟ· ἥς τινος καὶ αὐτῆς ἀπεναν-
 τίων ὥστε τῇ ἐτέρᾳ ὁρθῇ ΗΕΟ (ὥση ἐπὶ μὲν τῆς
 Ε'μείψεως ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ, ἐπὶ δὲ τῆς Γ'περ-
 βολῆς ἀπεναντίον τῇ ΟΕΗ, ἥτις ἐστὶν ἐφεξῆς τῆς
 ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ συνεσχμένης ΟΕΖ), καὶ διὰ τῶν
 σημείων ἄρα Μ, Η, Ε, Ο κύκλος δύναται διελ-
 θεῖν (86). Ἀρα ἡ γωνία ΤΜΖ ἴση τῇ ΤΗΖ (ἀμ-

ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΟΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΓΟΙ. Ἐπεὶ δὲ προσέτι
 καὶ ἡ ΑΟ = τῇ ΟΙ. ἥ τε ΟΓ κοινὴ, τὸ τρίγωνον ἄρα
 ΑΓΟ = τῷ ΟΓΙ (4. τῆ Α'.) καὶ διὰ καὶ ἡ γωνία ΟΓΑ =
 τῇ ΟΓΙ.

86) Τεδέντος τῆ τριγώνου ΗΕΟ (σχῆμ. 10. ὑποσημ.)
 ὁρθογωνίου ἐν τῷ Ε, εἰς διαμέτρῳ τῇ ΗΟ κύκλος κα-
 ταγεραῶν, ἔτος δὴ διὰ τῆ σημείω Ε διελύσεται· εἰ μὴ
 γὰρ, διελθεῖτω, εἰ δυνατόν, διὰ τῆ R, καὶ δὴ τότε καὶ
 ἡ ὑπὸ ΗΡΟ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ὦσα, ἔσαι ὁρθῇ (31. τῆ

Φω γὰρ ἐπιβεβήκασι τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ διὰ τῶν σημείων Η, Τ, Ζ, Μ διερχομένῳ κύκλῳ), ἢ τε ὑπὸ ΕΜΟ ἴση τῇ ΕΗΟ. Εἵγε ἑκατέρᾳ ἐστὶν ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ διὰ τῶν σημείων Μ, Η, Ε, Ο διερχομένῳ κύκλῳ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΤΗΖ ἐστὶν ἴση τῇ ὑπὸ ΕΗΟ, (ἐν μὲν γὰρ τῇ ἐλλείψει ἐστὶ κατὰ κορυφὴν ἀντικειμένη ἡ πρώτη τῇ δευτέρᾳ, ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ ταυτίζεται ἡ δευτέρα τῇ πρώτῃ), ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΤΜΖ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΜΟ. Ἀρα αἱ γωνίαι, αἱ οἱ ἀπὸ τῶν ἑσίων κλῶναι πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ τῆς τομῆς Μ μετὰ τῆς ἐφαπτομένης περιέχουσιν, εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις. Ο, ε, δ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Διὸ δὴ αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου Τ πρὸς τὴν περιμετρον τῆς ἐλλειπτικῆς ἢ ὑπερβολικῆς τομῆς προσπίπτουσαι ἀκτῖνες ἀνακλῶνται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐπὶ τὸ ἕτερον σημεῖον Ε, ἐπὶ δὲ τῆς Τ περβολῆς ἐπὶ τὸ Ρ ἔτως, ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ε ἀπενδύεσθαι. Ἡ γάρτοι γωνία τῆς ἀνακλάσεως ΡΜΨ

Γ'). Εἴςτι δὲ ἐκ ὑποθέσεως ὀρθὴ καὶ ἡ ΗΕΟ, ἡ ἐκτὸς ἄρα γωνία ΗΡΟ ἴση ἔσται τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίου ΗΕΟ, ὅπερ ἀντιπίπτει τῷ πρώτῳ Πορίσματι τῆς 3^{ης} τοῦ Α'. Εἰδὲ ὑποτεθεῖ διερχεσθαι διὰ τῆς ρ τότε πάλιν ἡ Ηρ Ο ὀρθὴ ἔσται, ἴσεται ἴση τῇ ἐκτὸς ΗΕΟ, ὃ δὲ καὶ αὐτὸ ἀντιπίπτει τῷ αὐτῷ Πορίσματι. Διελύσεται ἄρα διὰ τοῦ Ε'.

ἔσιν ἴση τῇ τῆς προσπτώσεως TMZ , ἢ διὰ τῆ-
το ἴση τῇ κατὰ κορυφὴν αὐτῇ ἀντικειμένη OME
(87)· καὶ ἀνάπαλιν αἱ ἀπὸ τῆ σημείω E ἐπὶ τὴν
τομὴν MN προσπίπτουσιν ἀνακλασθήσονται ἐπὶ τὴν
ἐτέραν E' εἰς τὴν T ἐπὶ τῆς E' λείψεως, ἐπὶ δὲ τῆς
 T' περιβολῆς ἕσης τῆς γωνίας $ΦΜΨ$ ἴσης τῇ κα-
τὰ κορυφὴν ἀντικειμένη TMZ (15 τῆ A'). Ἐπο-
μένως δὲ ἢ τῇ τῆς προσπτώσεως γωνίᾳ EMZ ,
ἀνακλασθήσεται ἢ EM ἐπὶ τὴν $MΦ$, ἥτις πρὸς τὸ
σημεῖον T ἀπευθύνεται (ἔτω γὰρ δέον τὴν ἀκτῖνα
 EM πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς $OMΨ$ προ-
σπίπτουσαν ἀνακλασθῆναι, ὥστε τὴν τῆς προσπτώσεως
γωνίαν EMZ ἴσην εἶναι τῇ τῆς ἀνακλάσεως γωνίᾳ).
Ἄρα ἔπειδ' ἡ γωνία $ΦΜΨ$ ἔστιν ἴση τῇ EMZ , ἢ ἀκ-
τὶς EM ἀνακλασθῆναι ἐπὶ τὴν $MΦ$, ἥτις μετὰ τῆς
 MT μίαν εὐθεῖαν συνίστησιν (88). Διὰ δὲ τῆτο τὰ

87) Ὅθεν δῆλον ὅτι κύκλος δύναται διελθεῖν διὰ
τῶν τεσσάρων σημείων M, H, E, O τῆ τετραπλεύρου
 $MHEO$, ἢ αἱ ἀπ' ἐναντίων γωνίαι E, M εἰσιν ὀρθαί.
Ἐπεὶ γὰρ ἡ πρὸς τῷ E γωνία ἔστιν ὀρθή, κύκλος διαμέ-
τρω τῇ HO καταγραφείς, διὰ τῶν σημείων E διελύσεται·
ὡσαύτως ἔπειδ' ἡ γωνία HMO ἔστιν ὀρθή, ὁ αὐτὸς κύκλος
διαμέτρω τῇ αὐτῇ HC συμπληρωθείς, ἢ διὰ τῶν σημείων M
διελύσεται (σημ. 86). Κύκλος ἄρα διὰ τῶν σημείων $M,$
 H, E, O διελύσεται.

88) Ἐπεὶ ἡ γωνία $PMΨ =$ τῇ OME , ἔσται
ἢ γωνία $PMΨ +$ τῇ $PMO = OME + PMO$. Εἰσὶ δὲ αἱ
 $PMΨ, PMO$ ἅμα ληφθεῖσαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (13. τῆ
 A'), ἄρα ἢ αἱ OME, PMO ἅμα ληφθεῖσαι δυσὶν ὀρ-
θαῖς εἰσὶν ἴσαι· ἄρα ἢ PME ἔστιν εὐθεῖα γραμμὴ. (14.

σημεία ταῦτα καλεῖνται Ἑσίοι, Φωτὸς γὰρ ἐν τῷ ἐτέρῳ τύτῳ τεθέντος αἱ ἀκτῖνες ὑπὸ τῆς ἐλλειπτικῆς καμπύλης ἀνακλῶμεναι, ἐπὶ θάτερον συνέρχονται. Ἐπὶ δὲ τῆς ὕπερβολῆς αἱ τῷ ἐν τῇ ἐτέρᾳ Ἑσίᾳ τεθέντος ἀκτινοβόλου Φωτὸς ἀκτῖνες ἀνακλῶμεναι τὴν ἑαυτῶν εἰκόνα ἐπὶ τὴν ἐτέραν Ἑσίαν ἐπαναπέμψουσιν. Τὸ αὐτὸ δὲ τύτῳ νοητέον καὶ περὶ τῶν ἐν τοῖς ἐλλειπτικοῖς καὶ ὑπερβολικοῖς Ἐνόπτροις ὁρωμένων ἀντικειμένων.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Αἱ τῆς Ε'λείψεως καὶ ὕπερβολῆς Ἑσίοι ὁρίζονται, εἰάν ἐφ' οἷα σδήποτε ἐφαπτομένης ΟΜ μεταξὺ τῶν κατὰ κορυφὴν ἀπτομένων ΝΟ, ΕΖ ἐμπεριλαμβανομένης ὡς διαμέτρου κύκλος καταγραφῇ τέμνων τὸν ἄξονα κατὰ τὰ σημεία Ε, Τ, ἅπερ ἔσονται αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι. Αἱ γάρτοι ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνίαι ΟΤΖ, ΟΕΖ ὀρθαὶ ἔσονται.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Εἰάν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β τῷ δευτέρῳ ἄξονος προσκλιθῶσιν ἑκατέρωθεν ἐπὶ τὸν πλάγιον ἄξονα ἐπὶ τῆς Ε'λείψεως εὐθεῖαι ἢ ΒΤ, ΒΕ ἑκατέρα ἴση τῷ πλάγιῳ ἡμιάξονι ΓΝ, ἢ ΓΞ, τὰ ση-

τῷ Α.) Ὅθεν αἱ ἀκτῖνες ΜΡ ἀνακλασθεῖσαι ἐπὶ τὸ Ρ ἀπειθύνονται πρὸς τὸ σημεῖον Ε, ὅτοι ἐπὶ τὸ Ε ἐπ' εὐθείας προσκατευθῶσιν.

μεία Γ , ϵ ἔσονται αἱ ζητούμεναι Ἑςίαι. Τηνικαῦτα γὰρ ἐπεὶ τὸ ὀρθογώνιον $NE\Xi$, ἢ τὸ ΞTN σὺν τῷ τετραγώνῳ ἀπὸ τῆς GE , ἢ ΓT ἐξισῶνται τῷ ἀπὸ τῆς GN τετραγώνῳ (5 τῆ B' .) ἢ τῷ ἀπὸ τῆς BE ἢ τέως τῷ ἀπὸ τῆς BT . Τὸ δὲ ἀπὸ BE ἢ ἀπὸ BT ἐξισῶνται τοῖς ἀπὸ τῶν GB , GE , ἢ ΓT τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν (47 τῆ A' .), ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΞEN σὺν τῷ ἀπὸ τῆς GE τετραγώνῳ ἐξισωθήσεται τῷ ἀπὸ τῆς BT σὺν τῷ ἀπὸ τῆς GE . τότε ὀρθογώνιον $NT\Xi$ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΓT ἐξισωθήσεται τῷ ἀπὸ τῆς BT σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΓT . Τοιγαρὲν τὸ ὀρθογώνιον ΞEN , ὥσπερ καὶ τὸ $NT\Xi$ ἔσεται ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δευτέρου ἡμιᾶξονος BT τετραγώνῳ, ὅπερ ἀπαιτεῖται εἰς τὸ τὰς Ἑςίας ὁρισθῆναι (Πρότ. K').

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς ἐὰν τῇ εὐθείᾳ NB , ἣτις τὰ πέρατα ἐκατέρω τῆ ἄξονος ἐπιζεύγνυσιν, ἴση τεθῇ ἐπὶ τῆς προτέρου ἄξονος ἀπὸ τῆς κέντρου Γ ἢ εὐθείας GE , ἢ ΓT , τὰ σημεῖα E , T ἔσονται αἱ ζητούμεναι Ἑςίαι. Τὸ γάρτοι ὀρθογώνιον ΞEN σὺν τῷ ἀπὸ τῆς GN τετραγώνῳ ἐξισωθήσεται τῷ ἀπὸ τῆς GE (6 τῆ A' .) ἢ τῷ αὐτῷ ἴσῳ ἀπὸ BN . τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BN ἐξισῶνται τῷ ἀπὸ τῆς BT σὺν τῷ ἀπὸ τῆς GN (47 τῆ A' .) ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΞEN σὺν τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ GN ἐξισωθήσεται τῷ ἀπὸ τῆς BT σὺν τῷ ἀπὸ τῆς GN , καὶ

δὴ τὸ ὑπὸ ΞEN ἔσαι ἴσον τῷ ἀπὸ $B\Gamma$, καὶ τῇ αὐτῇ δείξει δειχθήσεται, καὶ τὸ ὑπὸ $NT\Xi$ ἴσον τῷ ἀπὸ $B\Gamma$, καὶ τὰ σημεῖα ἄρα E, T , ἔσονται αἱ ζητούμεναι Ἐς αἱ κατὰ τὴν παρῶσαν Πρότασιν.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ Α'.

Ἐὰν οἰωδῇποτε κλῶνῳ EM ἀπὸ τῆς E - Σχημ. 66.
 ςίας E πρὸς οἰονδῇποτε σημείου M τῆς 67.
 E λείψως ἢ τῆς Ὑπερβολῆς ἀχθέντι
 παράλληλος ἀπὸ τῆς κέντρος Γ ἀχθῇ εὐ-
 θεία ἢ GI συμπίπτουσα τῇ ἐφαπτομέ-
 νῃ ME κατὰ τὸ I , αὕτη δὲ ἢ GI ἔσε-
 ται ἴση τῷ πλαγίῳ ἡμιάξονι $ΓΞ$, ἢ $ΓΝ$.

Ἦχθῳ ἀπὸ τῆς ἐτέρας Ἐςίας T ἡ εὐθεῖα $ΤΔ$
 ταῖς μὲν EM, GI παράλληλος, τῇ δὲ ἐφαπτο-
 μένῃ συμπίπτουσα κατὰ τὸ Δ . ἐπεξεύχθῳ καὶ ἡ
 TM , ἣτις τμηθήσεται ὑπὸ τῆς GI κατὰ τὸ T . Ἦχ-
 θωσαν δὲ καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτόμεναι $\Xi Z,$
 NO . Τῶν ἔτω γενομένων, ὥστε ἡ ὑπὸ TMZ
 ἔσιν ἴση τῇ ὑπὸ EMO (29 τῆς A') ἄρα αἱ πλευ-
 ραὶ $TM, T\Delta$ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις, (6 τῆς A') ὥς
 ἴσας γωνίας ὑποτείνουσιν. Καὶ ἐπεὶ προσέτι ἔσιν
 ὡς ἡ MI πρὸς ID , ἔτως ἡ MT πρὸς TT (2 τῆς
 ϵ') (διὰ τὸ εἶναι τὰς $GI, T\Delta$ παραλλήλους) ἢ ἡ
 EG πρὸς $ΓT$ (διὰ τὸν αὐτὸν λόγον), αἰτνέσει-

διπλῶ τῆς ΓΙ ἢ τῆς ΓΞ, καὶ ἐπομένως ἴση τῷ πλα-
γίῳ ἄξονι ΕΝ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Εἰάν αὖθις διὰ τοῦ κέντρου Γ ἀχθῇ τῇ ἐφα-
πτομένῃ παράλληλος ἡ ΓΠ τέμνουσα ἑκάτερον τῶν
κλώνων κατὰ τὰ σημεῖα Π, Ρ ἑκατέρα τῶν εὐ-
θειῶν ΜΠ, ΜΡ ἔσεται ἴση τῷ αὐτῷ ἡμιάξονι. Ε-
πεὶ γὰρ ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ ΓΙΜΠ, ἡ ΜΠ
ἐστὶν ἴση τῇ ΙΓ, καὶ ἀχθεῖσα ἡ ΓΣ παραλλήλως
τῷ κλώνῳ ΡΤΜ, ἔσεται ἴση τῷ ἡμιάξονι (κατὰ
τὴν παρῶσαν Πρότασιν), ταύτῃ δὲ ἴση ἡ ΜΡ ὡς
ἀπεναντίον πλευρὰ ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ
ΡΓΣΜ, ἄρα ἡ ἑκατέρα τῶν ΠΜ, ΜΡ ἴση ἐστὶ
τῷ αὐτῷ ἡμιάξονι ΓΞ, ἢ ΓΝ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Επεὶ δέδεικται ὅτι ΓΙ ἢ ΓΣ ἐστὶν ἴση τῷ
ΓΝ καὶ ὅτι ἀχθεῖσα ἡ ΤΙ ἔσαι κάθετος τῇ ἐφα-
πτομένῃ, ὥσπερ δὴ καὶ ἡ ΕΣ· δηλὸν ὅτι εἰάν πε-
ρὶ τὴν διάμετρον ΕΝ καταγραφῇ κύκλος, εἰς ὃν
αἱ ἴσαι τῇ ΓΝ εὐθεῖαι ΓΙ, ΓΣ περατωθῇτονται,
ἡ αὐτὴ περιφέρεια τμηθήσεται ἰφ' οἷα σδήποτε ἐφα-
πτομένης ΜΘ, κατὰ τὰ σημεῖα Ι, Σ· αἵτε ἀπὸ
τῶν σημείων τέτων ἐπὶ τὸ κέντρον Γ ἀχθεῖσαι εὐ-
θεῖαι ΓΙ, ΣΓ παράλληλοί τε εἶναι τοῖς ἀπὸ τῶν
Εῖσιων Ε, Τ ἐπὶ τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον Μ ἀχθεῖσαι

κλῶνις ΕΜ, ΤΜ ἢ δὴ ἢ τῷ ἡμιᾶξονι ΓΝ ἴσαι, (ἐκτὸς γὰρ τῆς περιφερείας τῷ κύκλῳ αἱ τοιαῦτα παράλληλοι ἔκ ἂν ἔχοιεν τῇ ἐφαπτομένῃ συμβαλεῖν. Οὐ γὰρ ἂν εἶησαν τότε ἴσαι τῷ ἡμιᾶξονι), γενομένων τε τῶν γωνιῶν ΘΙΤ, ΘΣΕ ὀρθῶν, αἱ κἀθετοὶ ΙΤ, ΣΕ κατ' αὐτὰς δὴ τὰς ἑξίας τῷ ἡμιᾶξονι συμβαλῶσιν. Ὅθεν ἕτερος τρόπος ἕως ἀναφαίνεται τῷ τὰς ἑξίας τῶν τομῶν τέτων ἐξευρίσκειν.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Ἀχθεῖσα ἀπὸ τῶν ἑξίων Ε, Τ ἐφ' οἷανδὴποτε ἐφαπτομένην ΜΘ, αἱ κἀθετοὶ ΕΣ, ΤΙ, περιέξουσιν ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῷ δευτέρῃ ἡμιᾶξονος ΓΒ τετραγώνῳ, ἢ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΝΕΞ ἢ τῶν ΝΟ, ΕΖ. Προαχθείσης γὰρ ἐπὶ τὸν κύκλον τῆς ΣΕ εἰ γ' ἐπὶ τὸ Χ, ἀχθεῖσα ἢ ΓΧ, ἔσεται ἐπ' εὐθείας τῇ ἐτέρᾳ ἀκτίνι ΓΙ· ἐπεὶ γὰρ ἡ γωνία ΙΣΧ ἐστὶν ὀρθή, τὸ τόξον ἄρα ΧΙΣ ἐστὶν ἡμιπεριφέρεια ἴση τῇ ἡμιπεριφερείᾳ ΕΙΝ, ἢ ἀφαιρεθέντος ἐκατέρωθεν τῷ τόξῳ ΝΙ τὸ τόξον ΧΝ ἔσται ἴσον τῷ τόξῳ ΕΙ ἢ ἡ γωνία ΧΓΝ ἴση τῇ ΕΓΙ, (ὅθεν ἢ ΧΓΝ + ΝΓΙ = ΕΓΙ + ΙΓΝ = δυσὶν ὀρθαῖς, ἢ ἱπομένως ἢ ΧΓ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΙ) περὶ ἃς γωνίας αἱ πλευραὶ ΧΓ, ΓΕ, εἰσιν ἴσαι ταῖς πλευραῖς ΓΙ, ΓΤ ἢ ἡ βάσις ΕΧ ἴση τῇ βάσει ΤΙ. Διὰ ταῦτα ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΕΣ, ΤΙ ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν

ΣΕΧ, ἐπομένως δὲ ἢ τῷ ὑπὸ τῶν ΝΕΞ· (35 τῆ Γ'. ἐν τῇ Ε' λείψει, ἢ Πορ. 1 τῆς 36 τῆ αὐτῆ ἐν τῇ Τ' περβολῇ.)

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε'.

Α'χθείσης τῆς ΜΗ πρὸς ὁρθὰς τῇ ἐφαπτομένη, τμηθήσεται ὁ ἀξων ἀρμονικῶς, ἀνάλογον ὑπὸ τε τῶν Ε'σιῶν Τ, Ε, ἢ τῆς καθέτω ταύτης ἢ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης (91), ἥτοι ἔσεται ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΤ, ὅπως ἡ ΕΘ πρὸς ΤΘ. Συνελθουσὼν γὰρ τῶν ΕΣ, ΤΜ κατὰ τὸ Ψ, ἔσται ἡ ὁρθὴ γωνία ΕΣΜ ἴση τῇ ΜΣΨ, ἥτε ΕΜΣ ἴση τῇ ΣΜΨ ἑκατέρω δὲ τῶν τελευταίων τέτων ἴση ἡ ΤΜΖ (Πορ. Κ'. ἢ 15 τῆ Α'.) ἢ ἡ ΜΣ κοινὴ ἑκατέρω τῶν ἐφεξῆς τριγώνων ΜΕΣ, ΜΣΨ, ἔσονται δὲ ἢ αἱ ΕΣ, ΣΨ ἀλλήλαις ἴσαι (36 τῆ Α'.) ὅθεν ὡς ἡ ΕΣ πρὸς ΤΙ, ὅπως ἡ ΣΨ πρὸς ΤΙ· ἐσι

91) Ὅτι δὲ ἐκ τῆς ἀναλογίας ΕΗ:ΗΤ=ΕΘ:ΘΤ συμπεραυνθήσεται ἡ ἀρμονικὴ τομὴ τῆ ἀξωνος, δῆλον ἐκ τέτων· Ἐπὶ μὲν γὰρ τῆς Ε' λείψεως ἔσται ΕΘ:ΘΤ=ΕΗ:ΗΤ. Ἐπεὶ δὲ ἡ ΕΗ διαφορὰ τῶν ΕΘ, ΗΘ, ἢ ἡ ΗΤ διαφορὰ τῶν ΗΘ, ΘΤ, ἄρα ἡ ΕΘ:ΘΤ ἐστίν, ὡς διαφορὰ τῶν ΕΘ, ΗΘ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ΗΘ, ΘΤ, ἢ ἐπομένως αἱ ΕΘ, ΗΘ, ΘΤ εἰσιν ἐν συνεχεῖ ἀρμονικῇ ἀναλογίᾳ. Ἐπὶ δὲ τῆς Τ' περβολῆς· ἐπεὶ εἰσι ΗΤ:ΗΕ=ΘΤ:ΘΕ, ἢ ἡ ΘΤ=ΗΤ-ΗΘ, ἥτε ΕΘ=ΗΘ-ΗΕ, ἔσται ἄρα ΗΤ:ΗΕ=ΗΤ-ΗΘ:ΗΘ-ΗΕ· ἄρα αἱ ΗΤ, ΗΘ, ΗΕ εἰσι ἀρμονικῶς ἀνάλογον.

δὲ ὁ μὲν πρῶτος λόγος ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΕΘ πρὸς
ΘΤ· ὁ δὲ δεύτερος τῷ τῆς ΣΜ πρὸς ΜΙ ἢ τῆς ΕΗ
πρὸς ΗΤ, ἄρα ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΤ, ὕτως ἡ ΕΜ
πρὸς ΗΤ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α ς .

Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΕΣ, ΤΙ, ΙΣ τετράγωνα,
ὁμῶς ληφθέντα ἔσται αἰ τῇ αὐτῇ ποσότητι ἴσα
ἤτοι τοῖς ἀπὸ τῶν ΝΤ, ΤΞ τετραγώνοις ἅμα λη-
φθεῖσιν. Ἀχθεῖσθαι γὰρ τῆς ΕΙ, ἔσται τὰ ἀπὸ
τῶν ΕΣ, ΣΙ ἅμα ληφθέντα ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΕΙ
(47 τῆ Α΄.) προσκειμένῳ ἄρα κοινῇ τῷ ἀπὸ τῆς ΤΙ,
ἔσται τὰ ἀπὸ τῶν ΕΣ, ΣΙ, ΙΤ, ὁμῶς ληφθέντα
ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΙ, ΤΙ ἅμα ληφθεῖσιν. Ἀλλὰ τὰ
ἀπὸ τῶν ΕΙ, ΤΙ ὁμῶς ληφθέντα ἐξισῶται, ὡς ἐν
τοῖς φάσασι δέδεικται (Σχολ. ε΄.), τῷ δις ἀπὸ
τῆς τὴν βάσιν ΤΕ τῷ τριγώνῳ ΤΙΕ διχοτομήσεως εὐ-
θείας ΓΙ τετραγώνῳ, ἢ τῷ αὐτῷ ἴσῳ ΓΞ σὺν τῷ
δις ἀπὸ τῆς ἡμιβάσεως ΓΤ τετραγώνῳ, ἄρα τὰ ἀ-
πὸ τῶν ΕΣ, ΣΙ, ΤΙ, ὁμῶς ληφθέντα ἔσιν ἴσα τῷ
δις ἀπὸ τῆς ΓΞ σὺν τῷ δις ἀπὸ τῆς ΓΤ. Ἀλλὰ τὸ
δις ἀπὸ τῆς ΓΞ σὺν τῷ δις ἀπὸ ΓΤ ἔσιν ἴσον τοῖς
ἀπὸ τῶν ΕΞ, ΤΞ (10 τῆ Β΄. ἐν τῇ Ε΄ μείψει· καὶ
9 τῆ αὐτῆ ἐν τῇ Τ΄ περβελη.) ἢ τοῖς ἀπὸ τῶν ΤΝ,
ΤΞ, ἢ τῶς ΕΞ, ΝΕ, ἢ τῶν ΝΤ, ΝΕ (92). Τὰ

92) Εἰπέειν $EN=TX$ (σημ. 89.) ἴσται δὲ EN
 $+ET=EX+ET$, ἤτοι $YN=EN$. ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν

ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΣ, ΣΙ, ΤΙ, ἅμα ληφθέντα, εἰν ἴσα ταυτοισὶ τοῖς τετραγώνοις ἀνὰ δύο ὁμῶς ληφθεῖσιν, καὶ ἐπομένως εἰσιν αἰεὶ τῷ αὐτῷ μεγέθει.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΒ'.

Σχημ. 68. ^{69.} Ἐπὶ μὲν τῆς Υ' περβολῆς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΜΕΒ, ΜΤΒ, ὡς αἱ ἀφ' ἑκατέρων τῶν Ε'σιῶν ἐπὶ δύο σημεῖα Β, Μ, τῆς καμπύλης προσκεκλιμέναι εὐθεῖαι περιέχουσιν· ἐπὶ δὲ τῆς Ε' λείψεως ἢ αὐτῶν διαφορὰ εἰς διπλασία τῆς γωνίας ΜΑΒ, ἣν αἱ ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων Β, Μ ἀχθεῖσθαι ἐφαπτόμεναι περιέχουσιν.

Ἡ γὰρ ὑπὸ ΜΕΚ γωνία εἰν ἴση ταῖς δυσὶν ἐντὸς ΜΤΕ, ΕΜΤ ἅμα ληφθείσαις, καὶ προκειμένης κοινῇ τῆς ΜΤΕ, εἰσιν αἱ ΜΕΚ, ΜΤΕ ἅμα ληφθείσαι ἴσαι τῇ δις ὑπὸ ΜΤΕ σὺν τῇ ἀπλῶς ὑπὸ ΕΜΤ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΤΜΘ εἰν ἴση τῇ ὑπὸ ΘΜΕ (Προτ. Κ'), ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΜΤ εἰν ἴση τῇ δις ὑπὸ ΤΜΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΕΚ, ΜΤΕ ἅμα λη-

μεῖν ΥΞ, ΕΞ: τετράγωνα ἐξισῶνται τοῖς ἀπὸ τῶν ΥΞ ΥΝ, ἢ τῶν ΝΕ, ΝΥ ἢ τῶν ΝΕ, ΕΞ τετραγώνοις. Ἐπὶ δὲ τῆς Υ' περβολῆς ἰπείεσιν $ΕΝ = ΥΞ$, προσκειμένης κοινῇ τῆς ΞΝ, ἔσται $ΕΞ = ΥΝ$, καὶ $ΕΞ^2 = ΥΝ^2$.

Φθίσαι ἐξισϋνται τῇ δις ὑπὸ ΜΤΕ σὺν τῇ δις ὑπὸ ΤΜΘ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΜΤΕ, ΤΜΘ, ἐξισϋνται τῇ ὑπὸ ΜΘΕ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΜΕΚ σὺν τῇ ὑπὸ ΜΤΕ ἐξισωθῆσεται τῇ δις ὑπὸ ΜΘΕ. Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δειχθῆσεται ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΚΕ σὺν τῇ ὑπὸ ΒΤΕ ἴση τῇ δις ὑπὸ ΒΗΕ· ἄρα ἡ ὅλη γωνία ΜΕΒ σὺν ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΜΤΒ, ἐξισϋται τῇ δις ὑπὸ ΜΘΕ ἢ ΗΘΛ σὺν τῇ δις ὑπὸ ΒΗΕ ἢ ΛΗΘ, αἵτισιν ἐξισϋται τὸ διπλὸν τῆς ἐκτὸς γωνίας ΜΛΒ τῆς ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχομένης· (μέρ. 1 τῆς 32 τοῦ Α').

Ε'πὶ δὲ τῆς Ε'λέξεως ἐπεὶ ἡ γωνία ΘΜΕ ἢ ΤΜΙ (Προτ. Κ') ἐξισϋται τῆς ὑπὸ ΜΘΤ σὺν τῇ ὑπὸ ΜΤΕ, προσκειμένης ἄρα κοινῇ τῆς ΜΘΤ, ἔσεται ἡ ὑπὸ ΘΜΕ σὺν τῇ ὑπὸ ΜΘΤ, ὅεσιν ἡ ἐκτὸς ΜΕΤ (μέρ. 1 32 τῆς Α') ἴση τῇ ΜΝΕ σὺν τῇ δις ὑπὸ ΜΘΤ. Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δειχθῆσεται ὅτι ἡ ἐκτὸς ὑπὸ ΒΕΤ ἴση τῇ ὑπὸ ΒΤΕ σὺν τῇ δις ὑπὸ ΒΗΕ ἢ ΘΗΛ. Ὅλη ἄρα ἡ γωνία ΜΕΒ ἐξισϋται ὅλῃ τῇ ΜΤΒ σὺν τῇ δις ὑπὸ ΜΛΒ ἢ τινὶ ὥς ἐκτὸς ἕσῃ ἐξισϋνται αἱ ὑπὸ ΜΘΤ ἢ ΘΗΛ. Ἡ ἱπεροχή ἄρα, ἡ ὑπερέχει ἡ ὑπὸ ΜΕΒ τῆς ὑπὸ ΜΤΒ, ἐξισϋται τῇ δις ὑπὸ ΜΛΒ τῇ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχομένη.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ε'ὰν ἀπὸ μὲν τῆς Ε'σίας ἀχθῇ εὐθεῖα ἡ ΜΕΤ, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων Μ, Τ, αἱ ἐφαπτόμεναι ΜΖ,

TZ συμβάλλουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Z, ἢ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία MZT ἐπὶ μὲν τῆς T'περβολῆς ἔσεται αἰὲ ἀμβλεία, ἐπὶ δὲ τῆς E'λείψεως αἰὲ ὀξεῖα. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ τῶν κλόνων ἐπ' εὐθείας πρὸς τῇ E'σίᾳ ἀλλήλοις συνελθόντων καὶ τῆς EK περιεχόμεναι γωνίαι MEK, KET ἐξίσυνται δυσὶν ὀρθαῖς, τὸ ἡμισυ ἄρα τῆς ὑπὸ MET μιᾶ ὀρθῇ ἐξισωθήσεται. Ἐνθεντοὶ τὸ μὲν ἡμιαῖσμα τῶν γωνιῶν MET, MTT μείζον ἔσαι ὀρθῆς· ἡ δὲ ἡμιδιαφορὰ τῶν αὐτῶν ὀρθῆς ἐλάττων· ἡ γωνία ἄρα MZT, ἣτις ἐπὶ μὲν τῆς T'περβολῆς ἐξισύται τῇ ἡμιαθροίσματι τῶν γωνιῶν MET, MTT, ἐπὶ δὲ τῆς E'λείψεως τῇ ἡμιδιαφορᾷ τῶν αὐτῶν, ἔσεται ἐπὶ μὲν τῆς T'περβολῆς αἰὲ ἀμβλεία, ἐπὶ δὲ τῆς E'λείψεως αἰὲ ὀξεῖα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

Σχημ. 70. Τὸ τῶν E'σιῶν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα EY
 71. ἔστι μέση ἀνάλογον τῆς τε πλαγίας πλευρᾶς EN καὶ τῆς EΘ, ἣτις ἐπὶ μὲν τῆς T'περβολῆς ἐστὶν ἄθροισμα τῆς πλαγίας καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς NH· ἐπὶ δὲ τῆς E'λλείψεως διαφορὰ τῶν αὐτῶν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν EEN περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆ συζυγῆς ἡμιάξρονος ΓΒ τετραγώνῳ. (Προτ. Κ'.) τῷτ' ἐστὶ τεταρτη-

μορίῳ τῷ ὑπὸ τὴν τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς ὀρθίας περιεχομένῃ ὀρθογωνίῳ ΞNH (τὸ γὰρ ἄνω AB ὅπερ ἐστὶ τετραπλάσιον τῷ ἀπὸ ΓB , ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ ΞNH), ἢ τῷ ὑπὸ $\Xi\text{N}\Theta$ τεθείσης τῆς $\text{N}\Theta$ ἴσης τῇ NH . Ἐὰν ἄρα ἐπὶ μὲν τῆς Γ -περβολῆς προσεθῇ ἑκατέρῳ τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίᾳ ἡμιάξονος ΓN τετράγωνον, ἐπὶ δὲ τῆς E -μείψεως ἀφαιρεθῇ ἑκάτερον ἀπὸ τῆς αὐτῆς τετραγώνου ΓN , ἀποφέρεται τὸ ἀπὸ τῆς ΓE τετράγωνον ἴσον ἐπὶ μὲν τῆς Γ -περβολῆς τῷ ἀθροίσματι τῷ ἀπὸ τῆς ΓN τετραγώνου καὶ τῷ τεταρτημορίῳ τῷ ὑπὸ τῶν $\Xi\text{N}\Theta$ ὀρθογωνίῳ. ἔστι δὲ τῆς E -μείψεως τῇ διαφορᾷ τῶν αὐτῶν (93), καὶ τῶν ὅρων ἀπάντων τετραπλασιαζόντων ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς τῶν E -σιῶν ἀποσήμετος ET τετράγωνον ἴσον, ἐπὶ μὲν τῆς Γ -περβολῆς τῷ ἀθροίσματι τῷ ἀπὸ τῆς ΞN τετραγώνου καὶ τῷ ὑπὸ τῶν $\Xi\text{N}\Theta$ ὀρθογωνίῳ, τῷτ' ἔστι τῷ ὑπὸ τῶν $\text{NE}\Theta$ ὀρθογωνίῳ (3 τῆς B' .) ἐπὶ δὲ τῆς E -μείψεως τῇ διαφορᾷ τῶν αὐτῶν (ἢ τοι τῷ $\Xi\text{N}^2 - \Xi\text{N}\Theta$) τῷτ' ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν $\text{NE}\Theta$ ὀρθογωνίον (2 τῆς B' .) ἄρα τὸ τῶν E -σιῶν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόσημα, τῷτ' ἔστιν ἢ ET ἔστι μέση ἀνάλογον

93) Ἐπὶ τῆς Γ -περβολῆς ἐπεί ἐστι $\Xi\text{EN} + \Gamma\text{N}^2 = \Gamma\text{E}^2$ (6. τῆς B' .), ἔσεται δὲ $\Gamma\text{N}^2 + \frac{1}{2}\Xi\text{N}\Theta = \Gamma\text{E}^2$. ἔστι γὰρ τὸ ὀρθογώνιον $\Xi\text{EN} = \frac{1}{2}\Xi\text{N}\Theta$. ἐπὶ δὲ τῆς E -μείψεως, ἐπεί ἐστι $\Xi\text{EN} + \Gamma\text{E}^2 = \Gamma\text{N}^2$ (5. τῆς B' .) ἔσεται $\Gamma\text{E}^2 = \Gamma\text{N}^2 - \Xi\text{EN} = \Gamma\text{N}^2 - \frac{1}{2}\Xi\text{N}\Theta$.

· ἀντιζ
· εἶ

(2 μέρ. 17 τῷ 5'.) τῆς τε πλαγίας πλευρᾶς ΞN ,
 ἢ τῆς $\Xi\Theta$, ἣτις ἐπὶ μὲν τῆς Ὑπερβολῆς εἰσιν ἄ-
 θροισμα τῆς πλαγίας ΞN , ἢ τῆς ὀρθίας NH ,
 ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως διαφορὰ τῶν αὐτῶν.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐπει τὸ ἀπὸ τοῦ συζυγῆς ἄξονος AB τετρά-
 γωνον, εἰσιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΞNH , ἢ τῶν $\Xi\text{N}\Theta$
 ὀρθογωνίῳ (μετὰ τὸ B . Πόρισμα τῆς IB .) καὶ τὸ
 ἀπὸ τοῦ τῶν Ἐσίων ἀποσήματος ET τετράγωνον δέ-
 δεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν $\text{N}\Xi\Theta$ ὀρθογωνίῳ, ἔσε-
 ται δὴ ὡς τὸ ἀπὸ AB πρὸς τὸ ἀπὸ ET , ἔτω τὸ
 ὑπὸ $\Xi\text{N}\Theta$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\text{N}\Xi\Theta$, τῷτ' εἰσιν ἡ ὀρθία
 πλευρὰ $\text{N}\Theta$ ($=\text{NH}$) πρὸς τὴν $\Xi\Theta$, ἣτις ἐπὶ μὲν
 τῆς Ὑπερβολῆς εἰσιν ἄθροισμα τῆς πλαγίας, ἢ τῆς
 ὀρθίας πλευρᾶς, ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως διαφορὰ
 τῶν αὐτῶν. Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ (ἦτοι ὡς ἡ $\text{N}\Theta$
 πρὸς τὴν $\Xi\Theta$) ἔσεται ὡσαύτως ἢ τὸ ἀπὸ τοῦ συ-
 ζυγῆς ἡμιᾶξονος GB τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ
 τῆς Ἐσίας ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ ἀποσήματος GE ἢ GT
 τετράγωνον, εἰλημένου δηλονότι τοῦ τεταρτημορίου
 τῶν ἀπὸ τῶν AB , ET τετραγώνων.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ Δ'.

Σχημ. 72. Ἐν τῇ Ὑπερβολῇ ἢ Ἐλλείψει εἰάν ἀφ'
 73. οἰκδῆποτε τῆς καμπύλης σημείῳ P ἀχ-
 θῇ ἐφαπτομένη ἡ $\text{P}\Theta$, συμβάλλουσα

ταῖς δυοῖ συζυγέσιν ἡμιδιαμέτροις, ΓΝ, ΓΑ κατὰ τὰ σημεῖα Θ, Μ, τὸ ὑπὸ τῶν μερῶν τῆς ἐφαπτομένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΘΡΜ, ἔσεται ἴσον τεταρτημορίῳ τῆς ὑπὸ τῆς διὰ τῆς τῆς ἀφῆς σημείῳ διαμέτρου ΡΣ, καὶ τῆς κατ' αὐτὴν Παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου, ἢ τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς παρὰ τὴν ἐφαπτομένην ἡγμένης ἡμιδιαμέτρου ΓΗ, ἣτις ἐστὶ συζυγὴς τῇ διαμέτρῳ ΡΣ.

Ἦχθω γὰρ ἐν τῇ αὐτῇ Ε'λλείψει, ἢ ἐν τῇ συζυγεὶ Ὑπερβολῇ καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΗΚ, καὶ τετάχθωσαν ἐπὶ μὲν τὴν ΑΒ διάμετρον, αἱ ΗΕ, ΡΖ. ἐπὶ δὲ τὴν ΕΝ, αἱ ΗΙ, ΡΟ, καὶ δὴ καὶ ἡ ΑΛ ἐπὶ τὴν ΓΗ, ἢ τε ΑΔ, ἐπὶ τὴν ΓΡ (καὶ ἔσεται τὰ σχήματα ΙΗΕΓ, ΓΑΛΔ, ΓΖΡΟ παραλληλόγραμμα. Καὶ δὴ καὶ (34 τῆς Α'.) τὸ τρίγωνον ΗΙΓ = τῷ ΗΕΓ, τότε ΑΛΓ = τῷ ΑΔΓ, καὶ τὸ ΓΡΖ = τῷ ΓΡΟ.). Ἐπεὶ ἔν ἐσὶν ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΓΑ, ἔ- τως ἡ ΓΚ πρὸς ΓΑ, ἢ ἡ ΓΑ πρὸς ΓΕ (94), ἔ-

94) Ὅτι μὲν ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς ἐστὶν ὡς ΚΓ: ΓΑ = ΓΑ: ΓΗ καταφαίνεται ἐκ τῆς ΙΑ'. Πορίσματος τῆς Θ'. Ὅτι δὲ τὸ αὐτὸ τῆς συμβαίνει καὶ τῇ Ε'λλείψει, εἴη.

σεται τὸ τρίγωνον HGE , ἴσον τῷ AGA (15 τοῦ 5.)· ὅθεν καὶ τὸ HGI ἐξισωθήσεται τῷ ADG . Ὁσαύτως ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ PG πρὸς GD , ἔτις ἡ MG πρὸς GA , ἢ ἡ GA πρὸς GE (95)· καὶ δὴ καὶ τὸ τρίγωνον ADG ἴσον τῷ PGZ (διὰ τὴν αὐτὴν) ἢ τῷ PZO . ἄρα τὸ τρίγωνον HGI , ἴσον τῷ PZO . Ἀλλ' ὡς τὸ τρίγωνον OPR πρὸς τὸ PZO , ἔτις ἡ OP πρὸς OR (1 τοῦ 5.), τὐτ' ἔστιν ἡ OP πρὸς PM , ἦτοι ἡ GZ πρὸς ZM , ἢ καὶ τὸ τρίγωνον PZG πρὸς τὸ PMZ (διὰ τὴν αὐτὴν). Ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον PRO πρὸς HGI (ἴσον τῷ PZO) ἔτις τὸ αὐτὸ HGI (ὅπερ ἐξισῶνται τῷ PGZ , ἢ τῷ ADG) πρὸς τὸ PMZ · καὶ ἔστι δὴ τὰ τρίγωνα PRO , HGI , PMZ ὅμοια, ὧν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ OP , GH , PM ἀνάλογον ἔσονται (95). Διὰ δὴ τῆς τοῦ ὀρθογώνιου OPM ἐξισῶνται τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου GH τετραγώνῳ, ἦτοι τεταρτημορίῳ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς PZ καὶ τῆς κατ' αὐτὴν Παραμέτρου περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

λον ἐκ τούτου· ἔστι γὰρ ἐκ τῆςδείξεως τῆς IH' . τὸ ὑπὸ $KGE=GA^2$. Ὅθεν $KG:GA=GA:GE$ (17. τοῦ 5.) εἰσὶν ἄρα ἔντε τῇ Ὑπερβολῇ καὶ τῇ E' Δείξει αἱ KG , GA , GE , συνεχῶς ἀνάλογον.

95) E' πρὶ γὰρ ἐκ τῆςδείξεως τῆς IH' . ἐστὶ τὸ $MGZ=GA^2$, ἔσεται δὴ $MG:GA=GA:GZ$.

96) E' πρὶ αἱ OP , GH εἰσὶ παράλληλοι, τὰ τρίγωνα ἄρα PRO , HIG , ὅμοια· ὅθεν ἔσεται $OP:HI=OP^2:GH^2$. Ὁσαύτως ἐπεὶ τὰ τρίγωνα HIG , PMZ

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α΄.

Κύκλος περὶ τὸ τρίγωνον ΓΜΘ περιγραφέν-
τος, ἢ ἡ περιφέρεια τεμεῖ τὴν ΓΡ κατὰ τὸ Π, ἔ-
σεται ἡ ΠΡ ἡμίσεια τῆς τῇ διαμέτρῳ ΣΡ ἀνηκούσης
ὀρθίας πλευρᾶς. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὀρθογώνιον ΘΡΜ
ἐξισᾶται τῷ ΓΡΠ (36 τῇ Γ΄. ἢ Πορ. 1 τῆς αὐτῆς).
Τὸ ἄρα ΓΡΠ ὀρθογώνιον ἔσεται τεταρτημόριον τῆ
ὑπὸ τῆς ΡΣ, ἢ τῆς κατ’ αὐτὴν Παραμέτρου περιε-
χομένου ὀρθογωνίου, ἦτοι τῆ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου
ΓΡ ἢ τῆς ἡμιπαραμέτρου, ἣτις ἔσεται ἡ ΠΡ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β΄.

Ἐὰν δὲ ὁ κύκλος ὕτος ἐν τῷ Τ̄ περβολικῷ
χήματι μὴ τέμνῃ τὴν ἡμιδιάμετρον ΓΡ, ἀλλ’ ἐ-

είσιν ὅμοια · ἔσται $ΗΙΓ : ΡΜΖ = ΓΗ^2 : ΡΜ^2$. Τοιγα-
ρὺν ἐπεὶ εἰς $ΘΡΟ : ΗΖΓ = ΗΙΓ : ΡΜΖ$, ἔσται δὲ $ΘΡ^2 :$
 $ΓΗ^2 = ΓΗ^2 : ΡΜ^2$ · καὶ ἡ $ΘΡ : ΓΗ = ΓΗ : ΡΜ$.

97) Λήμμα. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΕΥ, ΡΜ ἔτω Σχημ. 11.
τέμνωσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Θ, ὡς εἶναι $ΕΘΧΘΥ =$ τῶν ὑποσ.
 $ΜΘΧΘΡ$, κύκλος διὰ τῶν σημείων Υ, Ρ, Μ, Ε δύ-
ναται διελθεῖν. Κύκλος γὰρ διὰ τριῶν σημείων δοθέν-
των τῶν Μ, Ε, Ρ κατὰ τὴν 5 τῇ Δ. καταγραφείς ὅ-
τος καὶ διὰ τῆ Υ διελύσεται. Μὴ γάρ · ἀλλὰ διελθεῖτω
εἰ δυνατόν, διὰ τῆ Κ ἐκτὸς τῆ Υ, ἢ διὰ τῆ κ ἐντὸς τῆ
Υ ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ Θ · καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ πτώσει ἔσε-
ται τὸ ὑπὸ $ΕΘΚ =$ τῷ ὑπὸ $ΜΘΡ$ (35 τῇ Γ΄.) Ἐ΄ςι δὲ
ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὸ ὑπὸ $ΕΘΓ =$ τῷ ὑπὸ $ΜΘΡ$ · ἄρα $ΕΘΨ$
 $= ΕΘΚ$, καὶ επομένως $ΘΓ = ΘΚ$, ὅπερ ἄτοπον. Ἐν δὲ τῇ

φάπτηται αὐτῆς συμπίπτοντος τῷ σημείου Π τῷ Γ, ὅτε δὴ καὶ ἡ ΠΡ ἔσται ἴση τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ΓΡ. Τότε δὴ καὶ ἡ Ὑπερβολὴ ἔσται ἰσοσκελὴς, ὅντος τῷ ἡμίσεος τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ἴση τῷ ἡμίσει τῆς πλαγίας διαμέτρου.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ Ε'.

Σχ. 74. Αἱ ἀπὸ τῶν Ἑξισῶν ἐφ' οἷονδῆποτε σημείου Ρ τῆς ἐλλειπτικῆς ἢ ὑπερβολικῆς καμπύλης κεκλιμέναι εὐθεῖαι, περιέξουσιν ὀρθογώνιον τὸ ΤΡΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς τῇ διὰ τοῦ Ρ ἀχθείσῃ διαμέτρῳ ΡΣ συζυγῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΗ τετραγώνῳ, ἢ τεταρτημορίῳ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΡΣ, καὶ τῆς αὐτῇ ἀνηκῆσας ὀρθίας περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἀχθείσης γὰρ τῆς ἐφαπτομένης ΡΘ, ἥτις συμβαλεῖ τῇ μὲν ἄξονι ΕΝ κατὰ τὸ Θ, τῇ δ' ἐτέρῳ συζυγεὶ κατὰ τὸ Α, καὶ τῇ ἀπὸ τῷ κέντρου παρὰ τὴν ΤΡ ἡγμένην ΓΙ κατὰ τὸ Ι, ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΙ, ἔσται αὐτῇ τῇ ἐφαπτομένῃ κάθετος (Πορ. Γ'. τῆς ΚΑ'). Ἐνθεντοὶ ἐπεὶ αἱ γωνίαι ΕΙΜ,

δευτέρᾳ ἔσται τὸ ὑπὸ $ΕΘκ = ΜΘΡ = ΕΘΤ$, καὶ ἡ $Θκ = ΘΤ$ τὸ μέρος τῆς ὅλης διελύσεται ἄρα διὰ τῷ Τ.

ΜΓΕ εἰσὶν ὀρθαί, κύκλος ἄρα ἐπὶ διαμέτρῳ τῆς
 ΜΕ καταγραφείς, διὰ τῶν σημείων Μ, Ι, Ε,
 Γ, διαλεύσεται (Σημ. 86). Ὅθεν τὸ ὀρθογώνιον
 τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘΓ ἔσται ἴσον τῷ ΙΘΜ (Πορ. 1
 36 τῇ Γ')., καὶ ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΜ, ἔτως ἡ ΙΘ
 πρὸς ΘΓ (2 μέρ. 16 τῇ ε').) ἢ ἡ ΡΘ πρὸς ΘΤ
 διὰ τὸ εἶναι παραλλήλους τὰς ΓΙ, ΤΡ. ἄρα τὸ ὀρ-
 θογώνιον ΕΘΤ ἔσται ἴσον τῷ ΜΘΡ (1 μέρ. τῆς
 αὐτῆς 36), ὅθεν καὶ διὰ τῶν σημείων Τ, Ρ, Μ,
 Ε κύκλος δύναται διαλθεῖν (Σημ. 16 ἐν τῇ Ε' λ-
 λείψ. καὶ 97 ἐν τῇ Τ' περβολ.) καὶ ἐπομένως ἡ γω-
 νία ΕΜΡ ἴση τῇ ΘΤΡ. Ἔσται γὰρ ἐν μὲν τῷ 75
 σχήματι, ἑκατέρω ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι· ἐν δὲ τῷ
 74, ἑκατέρω ἅμα τῇ ΕΤΡ (ἥτις τῇ μὲν, εἰς ἀπε-
 ναυτίον, τῇ δὲ, ἐφεξῆς (98) δυσὶν ὀρθαῖς ἴση. Ἐς
 δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΡΜ ἴση τῇ ΤΡΘ (Προτ. Κ'.) ἄρα τὰ
 τρίγωνα ΕΜΡ, ΘΤΡ εἰς ἰσογώνια καὶ ὅμοια (Πορ.
 Θ, μέρ. 1. 32 τῇ Α').) Ὅθεν ὡς ἡ ΕΡ πρὸς τὴν
 ΡΜ, οὕτως ἡ ΘΡ πρὸς τὴν ΡΤ, καὶ τὸ ὀρθογώνι-
 ον ΕΡΤ ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ ΘΡΜ· ἀλλὰ τὸ ΘΡΜ
 εἰς ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς συζυγῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΗ τε-
 τραγώνῳ, ἥτις εἰς τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλος

98) Ε'ν τῷ 74 σχήματι, ἐπεὶ τὸ τετράπλευ-
 ρον ΜΕΡ κύκλῳ δύναται ἐγγραφῆναι, ἴσται δὲ ἡ γω-
 νία ΕΜΡ ἅμα τῇ αὐτῆς ἀπεναντίου ΕΤΡ δυσὶν ὀρθαῖς
 ἴση (22. τῇ Γ').) Ἐς δὲ καὶ ἡ ΘΤΡ ἅμα τῇ ΕΤΡ ἴση δυ-
 σὶν ὀρθαῖς· ἄρα $ΕΜΡ + ΕΤΡ = ΘΤΡ + ΕΤΡ$, ἥτοι $ΕΜΡ$
 $= ΘΤΡ$.

(Προτ. ΚΔ'.) ἡ τεταρτημορίω τῆ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΡΣ καὶ τῆς κατ' αὐτὴν Παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου· ἀρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΡΤ τοῖς αὐτοῖς ἐξισῆται, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ἐνθεντοι ἡ ΤΡ ἐστὶ πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον ΓΡ, ὡς ἡ αὐτῇ τῇ διαμέτρῳ ἀνήκουσα ἡμιπαραμέτρος πρὸς τὴν ΡΕ. Εἴγε τὸ ὀρθογώνιον ΤΡΕ (ὅπερ ἐξισῆται τεταρτημορίῳ τῆ ὑπὸ τῆς ὅλης διαμέτρου ΡΣ καὶ τῆς κατ' αὐτὴν Παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου), ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς ΡΓ, καὶ τῆς ἡμιπαραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου, ὅπερ ἐξισῆται τεταρτημορίῳ τῆ ὑπὸ τῆς ὅλης διαμέτρου ΡΣ καὶ ὅλης τῆς Παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Ἐὰν ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου ΡΣ ἐπιζευχθῶσιν ἐπὶ τὰς ἑσίας εὐθεῖαι αἱ ΡΕ, ΣΕ αὗται δὲ περιέξωσιν ὀρθογώνιον τὸ ΡΕΣ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς συζυγῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΗ τετραγώνῳ ἡ τεταρτημορίῳ τῆ ὑπὸ τῆς αὐτῆς διαμέτρου ΡΣ καὶ τῆς κατ' αὐτὴν Παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου. Ἡ γὰρ ΕΣ ἐξισῆται τῇ ΤΡ, ὅσων ἐκατέρων βάσεων τῶν τριγώνων ΓΡΤ, ΓΣΕ, ἐν οἷς αἱ περὶ τὰς κατὰ κορυφὴν ἴσας γωνίας πλευραὶ ΕΓ,

ΤΓ, ἢ ΣΓ, ΡΓ εἰσιν ἴσαι. Ὅθεν τὸ ὑπὸ τῶν ΡΕΣ ὀρθογώνιον ἐξισϋται τῷ ὑπὸ τῶν ΤΡΕ (ὅπερ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετραγώνῳ, ἢ τεταρτημορίῳ τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς διαμέτρου ΡΣ ἢ τῆς κατ' αὐτὴν Παράμετρου περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ἐπὶ μὲν τῆς Ἐλείψεως τὰ ἀπὸ τῶν ΡΕ, ΡΤ τετράγωνα σὺν τῷ δις ἀπὸ τῆς συζυγῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΗ τετραγώνῳ· ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς τὰ ἀπὸ τῶν ΡΕ, ΡΤ πλὴν τῆς δις ἀπὸ τῆς ΓΗ ἐξισϋται τῷ ἀπὸ τῆς ἄξονος ἘΝ τετραγώνῳ. Εἶγε ἐπὶ μὲν τῆς Ἐλείψεως ἢ ἘΝ ἐξισϋται τῷ ἀθροίσματι τῶν εὐθειῶν ΡΕ, ΡΤ· ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς τῇ αὐτῶν διαφορᾷ (Πορ. Α', τῆς ΚΑ'.) ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἘΝ τετράγωνον ἐξισϋται τοῖς ἀπὸ τῶν αὐτῶν τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσι, σὺν τῷ δις ὑπ' αὐτῶν περιεχομένῳ ὀρθογώνῳ ἐν τῇ Ἐλλείψει, ἢ πλὴν τῆς δις ὑπ' αὐτῶν περιεχομένου ὀρθογωνίου ἐν τῇ Ὑπερβολῇ (99)· ὅπερ ἐστὶ ταῦτον (Προτ. ΚΕ'.) τῷ δις ἀπὸ τῆς ΓΗ τετραγώνῳ.

99) Ἐν τῇ Ἐλλείψει $EN = EP + PT$ · ἄρα $EN^2 = (EP + PT)^2 = EP^2 + PT^2 + 2EP \cdot PT$ (4. τῆς Β'). Ἐστὶ δὲ $TP \cdot PE = GH^2$ · ἢ $2EP \cdot PT = 2GH^2$, ἄρα $EN^2 = EP^2 + PT^2 + 2GH^2$ · ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ἐπεὶ ἐστὶ $EN = EP - PT$, ληφθεῖσης τῆς $PO = PT$, ἔσται ἢ $EO = τῇ EN$. Ἐστὶ $EP^2 = EO^2 - PO^2$ (2. τῆς Β') ἢ $EO^2 - PO^2 = EO^2 + EPO$ (3. τῆς Β') ἄρα $EP^2 = EO^2 + EPO$. Ἐν δὲ ταῖς ἑξή-

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Εἴ τι ἐπὶ μὲν τῆς Ε'λλείψεως τὸ ἄθροισμα οἰσ-
 δήποτε ὀρθογωνίου τῷ ΤΡΕ, ἢ τῷ ἀπὸ τῆς διὰ τῷ
 Ρ πλαγίας ἡμιδιαμέτρου ΓΡ τετραγώνου, ἐπὶ δὲ
 τῆς Γ'περβολῆς ἢ αὐτῶν διαφοράς εἰςιν αἰ τῷ αὐ-
 τῷ μεγέθους, ἥτοι ἐξισῶται τῷ δις ἀπὸ τῷ πλα-
 γίῳ ἡμιᾶξονος ΓΝ τατραγώνῳ πλὴν τῷ ἀπὸ τῆς
 τῷ κέντρῳ ἀποστάσεως τῆς Ε'σίας ΓΕ, ἢ ΓΤ τετρα-
 γώνου. Ἰδομεν γὰρ ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΝ τετραγώ-
 νου ἐξισῶται ὁμῶς ληφθεῖσι τοῖς ἀπὸ τῶν ΤΡ, ΕΡ
 τετραγώνοις, σὺν μὲν τῷ δις ἐν τῇ Ε'λλείψει, πλὴν
 δὲ τῷ δις ἐν τῇ Γ'περβολῇ ὀρθογωνίῳ ΤΡΕ. Τὰ δὲ
 ἀπὸ ΤΡ, ΕΡ εἰσι κατὰ τὰ ἐν τῷ Ε'. Σχολίῳ εἰ-
 ρημένα διπλάσια τῶν ἀπὸ ΓΡ, ΓΤ· ἄρα τὸ δις
 ἀπὸ ΓΡ, μετὰ τῷ δις ἀπὸ ΓΤ σὺν ἢ πλὴν τῷ
 δις ὑπὸ ΤΡΕ ἐξισῶται τῷ ἀπὸ ΕΝ, ἢ ἀπάν-
 των δίχα διαιρεθέντων, τὸ ἀπὸ ΓΡ σὺν τῷ ἀπὸ
 ΓΤ προσεδέντος ἢ ἀφαιρεθέντος τῷ ὑπὸ ΤΡΕ, ἴ-
 σαι ἴσον τῷ ἡμίσει τῷ ἀπὸ ΕΝ, ὅπερ εἰσι διπλά-
 σιον τῷ ἀπὸ ΓΝ. Ἐνθεντοι ἀφαιρεθέντος ἐκατέ-
 ρωθεν τῷ ἀπὸ ΓΝ ἴσεται τὸ ἀπὸ ΓΡ σὺν ἢ πλὴν

$$\begin{aligned}
 &+PO^2 = EO^2 + EOP + PO^2 + EPO, \text{ ἀλλὰ } EOP + PO^2 \\
 &= EPO \text{ (3. τῷ Β'.)} \text{ ἄρα } EP^2 + PO^2 = EO^2 + EPO + EPO \\
 &= EO^2 + 2EPO. \text{ Ἐστὶ δὲ } PO = PY, \text{ ἄρα } EP^2 + PO^2 = \\
 &EP^2 + PY^2, \text{ ἢ } EO^2 + 2EPO = EO^2 + 2EPY. \text{ ἄρα } EP^2 \\
 &+ PY^2 = EO^2 + 2EPT, \text{ ἢ } EP^2 + PY^2 - EPY = EO^2 = \\
 &EN^2.
 \end{aligned}$$

τῷ ὑπὸ ΤΡΕ, ἴσον τῷ δις ἀπὸ τῷ ἡμιάξονος ΓΝ τετραγώνῳ πλὴν τῷ ἀπὸ ΓΕ, ἢ ΓΤ. Ἐς δὲ τὸ δις ἀπὸ ΓΝ πλὴν τῷ ἀπὸ ΓΕ ἢ τῷ ΓΤ ποσὸν σα-
θερόν· ἄρα τὸ ἄθροισμα τῷ ὀρθογώνιῳ ΤΡΕ, ἢ
τῷ ἀπὸ τῆς ΓΡ τετραγώνῳ ἐν τῇ Ε'λείψει, ἢ ἡ
διαφορὰ τῶν αὐτῶν ἐν τῇ Ὑπερβολῇ, εἰν αἰ τῷ
αὐτῷ μεγέθει, ἦτοι ποσὸν σαθρόν.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε'.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὀρθογώνιον ΤΡΕ ἐξισῶται τῷ
ἀπὸ τῆς συζυγῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΗ τετραγώνῳ, ὁ-
ρεῖται ἄρα ἐν μὲν τῇ Ε'λείψει τὸ ἄθροισμα τῶν
τετραγώνων ΓΡ, ΓΗ· ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ἡ αὐ-
τῶν διαφορὰ ἴση τῷ ἄθροισματι ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν
ἀφ' ἑκατέρου τῷ ἡμιάξονος ΓΝ, ΓΒ τετραγώνων.
Καὶ γὰρ ἢ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΓΡ,
ΓΗ τετραγώνων ἐξισωθήσεται τῷ δις ἀπὸ τῆς ΓΝ
τετραγώνῳ, πλὴν τῷ ἀπὸ ΓΤ (ἢ ΓΕ), ἀλλὰ τὸ
ἀπὸ ΓΝ πλὴν τῷ ἀπὸ ΓΤ, ἢ ΓΕ ἐξισῶται τῷ ὀρθο-
γώνιῳ ΞΕΝ ἢ τῷ ΝΤΞ (5 τῷ Β'). ἢ τῷ ἀπὸ τῷ ἡ-
μιάξονος ΓΒ τετραγώνῳ (Πρὸτ. Κ'), καὶ τῇ Ὑπερ-
βολῇ δὲ τὸ ἀπὸ ΓΤ πλὴν τῷ ὑπὸ ΞΤΝ, ἢ τῷ ἀπὸ
ΓΒ ἐξισῶται τῷ ἀπὸ ΓΝ (100). Ἀρα ἐν μὲν τῇ

100) Ε'πίδειξις ἐν τῇ Ὑπερβολῇ $ΓΠ^2 - ΓΗ^2 = 2ΓΕ^2 - ΓΥ^2$, καὶ $ΓΥ^2 = ΓΕ^2 + ΞΥΝ$ (6. τῷ Β.) ἴσι-
ται δὴ $ΓΠ^2 - ΓΗ^2 = 2ΓΕ^2 - ΓΕ^2 - ΞΥΝ = ΓΕ^2 - ΞΥΝ$.
Ἐς δὲ $ΞΥΝ = ΓΒ^2$ (Πρὸτ. Κ.) ἄρα $ΓΠ^2 - ΓΗ^2 = ΓΕ^2 - ΓΒ^2 = ΓΝ^2 - ΓΒ^2$.

Εἰλείψει τὸ ἀπὸ ΓΡ σὺν τῷ ἀπὸ ΓΗ ἐξισῆται τῷ ἀπὸ ΓΝ σὺν τῷ ἀπὸ ΓΒ. ἐν δὲ τῇ Τ'περβολῇ ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΓΡ, ΓΗ ἐξισῆται τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΓΝ, ΓΒ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ϛ.

Εὐδεντοί τετραπλουθέντων τῶν ὄρων, ἔσεται ἐν μὲν τῇ Εἰλείψει τὰ ἀπὸ τῶν ἀξόνων ΕΝ, ΑΒ τετράγωνα ὁμοῦ ληφθέντα ἴσα τοῖς ἀφ' οἷωνδήποτε συζυγῶν διαμέτρων ΡΣ, ΗΤ τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν. Εὐν δὲ τῇ Τ'περβολῇ ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ τῶν ἀξόνων τετραγώνων ἔσεται ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν ἀφ' οἷωνδήποτε συζυγῶν διαμέτρων τετραγώνων, ἥτοι $ΕΝ^2 - ΑΒ^2 = ΡΣ^2 - ΗΤ^2$.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α ζ'.

Οὐδεν ἡ ἰσοσκελὴς Τ'περβολή, ἥς ὁ πλάγιος ἄξων ἐξισῆται τῷ συζυγεῖ ἄξονι, καὶ ἣτις ἔχει ἐπομένως τὴν Παράμετρον ἴσην αὐτῷ τῷ ἄξονι (διὰ τὴν ἀναλογίαν τῶν τριῶν τέτων εὐθειῶν, ὡς εἴρηται μετὰ τὸ Β'. Πόρισμα τῆς ΙΒ'.) ἔξει καὶ ἄλλας τινὰς πλαγίους διαμέτρους ταῖς ἐαυτῶν συζυγέσι, καὶ ταῖς αὐτῶν Παραμέτροις ἴσας. Οὕσης γὰρ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀφ' ἑκατέρου τοῦ ἄξονος τετραγώνων ἴσης τῇ διαφορᾷ, τῶν ἀφ' ἑκατέρου τῆς συζυγῆς,

ἐὰν ἐπ' ἐκείνων ἢ μηδέν, καὶ ἐπὶ τέτων ἔσαι μηδέν (101).

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΣ'.

Εν τῇ Ἐλλείψει καὶ Ὑπερβολῇ οἰαδή- Σχημ. 76.
ποτε διάμετρος ΗΤ, μέση ἐστὶν ἀνάλο- 77.
Πιν. Η'.
γουν τῷ πλαγίῳ ἄξονος ΕΝ, καὶ ἑτέρας
εὐθείας παρὰ τὴν αὐτὴν ΗΤ δι' ἧς τι-
νοσὺν Ἐσίας Ε ἄχθεισης τῆς ΡΣ.

Ἀχθείσης γὰρ τῆς ἐφαπτομένης ΡΘ καὶ ἀ-
πὸ τῆς ἑτέρας Ἐσίας Τ τῆς ΤΔ παραλλήλου ταῖς
ΗΤ, ΡΣ, ἐπεξεύχθω ἡ ΡΔ, ἣτις δίχα τμηθή-
σεται κατὰ τὸ Ζ (102) ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΗΤ,
ἐφ' ἣν τεταγμένως κατήχθῃ, ὥσπερ δὴ καὶ ἡ ΕΤ
δίχα τέτμηται κατὰ τὸ κέντρον Γ ὑπὸ τῆς αὐτῆς

101) Ὑποθεσάτω ἡ Ὑπερβολὴ ΣΝ ἰσόπλευρος,
ἧς ὁ πλάγιος ἄξων ΕΝ ἔστω ἴσος τῷ συζυγεῖ ἄξονι ΑΒ.
Ἐῶσι δὲ καὶ ἑτέρας διὰ μέτρος ἡ ΣΡ, συζυγῆς δὲ καὶ
αὐτῇ ἔστω ἡ ΗΤ· καὶ ἴσεται δὴ τῆς καὶ τα (Πορ. ζ'.) $ΕΝ^2$
 $= ΑΒ^2 = ΣΡ^2 - ΗΤ^2$. Ἐῶσι δὲ $ΕΝ - ΑΒ = 0$ (εἴγε $ΕΝ$
 $= ΑΒ$), ἄρα καὶ $ΣΡ^2 - ΗΤ^2 = 0$, ἥτοι $ΣΡ^2 = ΗΤ^2$, καὶ
 $ΣΡ = ΗΤ$.

102) Ἀχθείσης γὰρ τῆς ΕΔ. ἣτις τομεῖ τὴν διά-
μετρον ΗΤ κατὰ τὸ Α· ἐπεὶ αἱ ΓΗ, ΥΔ, ΕΡ εἰσὶν
ἀλλήλαις παραλλήλοι· ἴσεται $ΡΖ : ΖΔ = ΕΛ : ΛΥ = ΕΓ$
 $: ΓΥ$. Ἐῶσι δὲ $ΒΓ = ΓΥ$, ἄρα καὶ $ΡΖ = ΖΔ$. ὁμοίως ἡ ΡΔ
τεταγμένη ἐστὶν ἐπὶ τὴν διάμετρον ΗΤ.

διαμέτρου παραλλήλῃ ταῖς EP , TD , ἣ ἔσται δὴ ἡ GE μέση ἀριθμητικῶς ἀνάλογον τῶν EP , TD (103), ἡ τῶν EP , ES , ἣτις εἰσιν ἴση τῇ TD , (104). Ἐν ἴσῳ γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀποσήματι ἑκατέρωθεν ὁμοίως (ἐκίσης) πρὸς τὴν καμπύλην κέκλινται, ὑπὸ γωνίας ἴσας τὰς $NEΣ$, ἡ $PEΞ$, καὶ $ETΔ$. Ἀρα τὸ διπλάσιον τῆς GZ , ἣτις εἰς μέση, ἐξιστᾶται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀκρῶν ἦτοι τῇ PS . Καὶ ἡ GH εἰς μέση γεωμετρικῶς ἀνάλογον τῶν GZ , GO (ὡς εἴρηται ἐν τῇ δεῖξει τῆς II') ἢ τε GO ἢ παράλληλος τῇ EP ἐξιστᾶται τῷ ἡμιάξονι GN (Πρότασ. KA'). Ἀρα ὡς ἡ GZ πρὸς τὴν GH , ἔτως ἡ αὐτὴ GH πρὸς τὴν GN (ἣ δὴ

103) Ἐπεὶ ἡ AP τεταγμένη εἰςιν ἰσὶ τὴν διάμετρον HT . ἥτις συζυγὴς διάμετρος ἡ KM , ἴσονται δὴ αἱ KM , AP ἀλλήλαις παράλληλοι. Ὅθεν ἐπεὶ καὶ αἱ AP , PO ἀλλήλαις παράλληλοι, τὸ σχῆμα $PAPO$ ἴσεται παραλληλόγραμμον· τοιγαρὲν $PO=AP$. Ἐς δὲ ἡ HT παράλληλος ταῖς AP , PO , ἄρα ὥσπερ ἡ $AZ=ZP$, ἔτι δὴ ἡ $PG=GO$. Ἐπεὶ προσέτι ἡ $YG=GE$, ἦτε ὑπὸ $PGT=τῇ$ ὑπὸ OGE , ἴσεται δὴ ἡ $EO=YΠ$ (4. τοῦ A). Ἐνθεντοὶ $PE=OP=PE-GZ=EO$ · ἡ $GZ=AY=PA-AY=YΠ$. Ἀρα ἐπεὶ εἰςιν $EO=ΠΥ$, ἴσεται ἡ ὑπεροχὴ, ἣ ὑπερέχει ἡ PE , τῆς OP , ἡ τῆς GE ἴση τῇ ὑπεροχῇ ἣ ὑπερέχει ἡ PA τῆς AY , ἡ ἡ GZ , τῆς AY : εἰσὶν ἄρα αἱ EP , GZ , AY , ἀριθμητικῶς ἀνάλογον.

104) Ἐπεὶ ἡ KM εἰς συζυγὴς τῇ διαμέτρῳ HT , δίχα ἄρα τεμνὶ τὴν EP παράλληλον τῇ HT , ὅθεν $ΣO=OP=PA$. Ἐς δὲ $EO=ΠΥ$, ἄρα καὶ $ΥΔ=ΕΣ$.

$2ΓΖ : 2ΓΗ = 2ΓΗ : 2ΓΝ$), ἢ ὡς ἡ ΡΣ διπλασία τῆς ΓΖ πρὸς τὴν ΗΤ, διπλασίαν τῆς ΓΗ, ἔτι ἡ αὐτὴ ΗΤ πρὸς τὴν ΖΝ διπλασίαν τῆς ΓΝ, ἢ ΓΘ. Ὅθεν δῆλον τὸ προτεθέν.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου ἀρα ΗΤ τετράγωνον ἐξισῆται τῷ ὑπὸ τῆς διὰ τῆς Ἑσίας παραλλήλως αὐτῇ ἀχθείσης ΣΡ ἢ τῆ πλαγίᾳ ἀξονος ΖΝ περιχομένῳ ὀρθογωνίῳ (17 τῆ 5'.)

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Εὐνθεντοί ἢ εἰ πλείους εὐθεῖαι διὰ τῆς Ἑσίας ἀχθεῖεν, ἔσοιντο ἐκάστη ὡς τὰ ἀπὸ τῶν αὐταῖς παραλλήλων διαμέτρων τετράγωνα (105).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ἐσται ἔτι ὡς ἡ ΣΡ πρὸς τὴν ΜΑ ὀρθίαν πλευρὰν τῆς διαμέτρου ΜΚ, ἐφ' ἣν τέτακται, ἔτι ἡ διάμετρος ΜΚ πρὸς τὸν πλάγιον ἀξονα ΝΞ. Εἴγε τὸ ἀπὸ τῆς ΗΤ, τετράγωνον ἐξισῆται ὀρθογω-

105) Ἀχθεῖσα οἰαδήποτε διάμετρος ητ, ἢ περ παραλλήλος ἢ σ Ερ. ἔσται κατὰ τὴν παρῶσαν μίση ἀνάλογος τῇ πλαγίᾳ ἀξονος ΝΞ, ἢ τῆς αὐτῇ παραλλήλου σρ. Εὐνθεντοί $ητ^2 = ΝΞ \times σρ$. Ὅθεν $ΗΤ^2 : ΛΞ \times ΣΡ = ητ^2 : ΝΞ \times σρ$, ἢ $ΗΤ^2 : ητ^2 : ΛΞ \times ΣΡ : ΝΞ \times σρ = ΣΡ : σρ$.

νῆς ΔMK (ἕως τῆς HT συζυγῆς διαμέτρου τῇ KM διαμέτρῳ). ἀλλὰ τὸ ἀπὸ HT ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΣP , $\text{N}\Xi$, ἄρα τὸ ὑπὸ ΔMK ἐξισῆται τῷ ὑπὸ τῶν ΣP , $\text{N}\Xi$. Ἐνθεντοί (Πορ. Α΄.) ὡς ἡ ΣP πρὸς ΔM , ἔτως ἡ MK πρὸς $\text{N}\Xi$.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ΄.

Ἐπεὶ ἡ ΣP δίχα τέμνεται κατὰ τὸ O ὑπὸ τῆς διαμέτρου MK (ἥτοι ἐστὶ τεταγμένη ἐπὶ τὴν MK) ἔσεται δὴ τὸ ἀπὸ τῆς OP τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΓH , ὡς τὸ ὀρθογώνιον KOM πρὸς τὸ KGM , ἢ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓM . Καὶ ἐπεὶ αἱ ΣP , HT , $\text{N}\Xi$ ἀνάλογόν εἰσιν, ἄρα καὶ τὰ αὐτῶν ἡμισεα OP , ΓH , ΓN ἀνάλογον ἔσεται. Καὶ δὴ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ OP πρὸς τὸ ἀπὸ ΓH , ἔτω τὸ αὐτὸ ἀπὸ ΓH πρὸς τὸ ἀπὸ ΓN (22 τῆς 5.) ὅθεν ὡς τὸ ὀρθογώνιον KOM πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς MG τετράγωνον, ἔτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓH τετράγωνον, ἢ τὸ αὐτῷ ἴσον ὀρθογώνιον TME (Προτ. προηγ.) πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓN τετράγωνον.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε΄.

Καὶ ἐναλάσσοντι ἔσεται ὡς τὸ ὀρθογώνιον KOM πρὸς τὸ TME , ἔτω τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΓM τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιάξονος ΓN . H'' (τῶν ὅρων τῆς δευτέρης λόγου τετραπλασιασθέντων) τὸ ἀπὸ τῆς MK τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\text{N}\Xi$.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Σ.

Ε'πει τὰ ὀρθογώνια ΝΕΞ, ΣΕΡ εἰσι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ΞΝ, ΗΤ τετράγωνα (106), ἔσονται δὴ καὶ ὡς αἱ ΞΝ, ΣΡ (Πόρ. Β'. τῆς παρέσης) καὶ τὰ ὀρθογώνια τὰ ὑπὸ τῶν μερῶν τῶν διὰ τῆς Ἑσίας διηγμένων εὐθειῶν, ἔσεται αὖτε ὡς ἐλόκληροι αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι (107).

106) Ε'πει ἐν τῇ Ἐκείνῃ αἱ ΚΜ, ΑΒ εἰσι διάμετροι τῶν τεταγμένων ΣΡ, ΞΝ, ἔσονται ἄρα αἱ ΣΡ, ΞΝ παράλληλοι ταῖς ἰσοπτομέναις ΜΠ, ΒΠ, ὅθεν (Πόρ. Γ'. τῆς ΙΗ'.) ΞΕΝ:ΣΕΡ=ΞΓ':ΓΗ'=ΞΝ':ΗΤ'.

Περὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς ἵπτοι ἡ π Ε α τεταγμένη ΣΧΗΜ. 12. ἐπὶ τὸν ἄξονα ΞΝ εἰσι ἴση τῇ παραμέτρῳ τῷ αὐτῷ ἄξονος, ὡς δειχθήσεται ἐν τῇ ΚΗ. ἣτις εἰσι ἀνεξέχρητος τῆς παρέσης, καὶ τὸ ΞΕΝ= τῷ ὑπὸ τῆς ΞΝ τῇ τεταρτημορίῃ τῆς Παραμέτρου περιεχομένης ὀρθογωνίου, ἡ τῷ ὑπὸ τῆς ΓΞ καὶ τῇ ἡμίσειας τῆς αὐτῆς· ἄρα ΞΕΧ ΕΞ=ΞΓ Χ π Ε· διὸ δὴ καὶ ΞΕΝ: π Ε α=ΞΓ Χ π Ε: π Ε Χ Ε α=ΞΓ: π Ε (1. τῇ ζ'.)=ΞΝ: π α=ΞΝ':ΧΗ'=ΓΝ':ΓΒ'. Ε'στὶ γὰρ ὁ συζυγὴς ἄξων τῶν εἰσι ΧΒ ἡ μεταξὺ τῶν πλαγίων ἄξονος ΞΝ καὶ τῆς Παραμέτρου ἡ τῆς Π Α μέση ἀνάλογον. Ἔτι δὲ Π Ε Α: ΣΕΡ=ΓΒ':ΓΗ' (Πόρ. Γ'. τῆς ΙΗ'.) Ὅθεν ἐπειδὴ εἰσι ΞΕΝ: Π Ε Α=ΓΑ':ΓΒ' ἔσεται καὶ δι' ἴσου ΞΕΝ: ΣΕΡ=ΓΝ':ΓΒ'=ΞΝ':ΗΤ'.

107) Ε'πεὶ εἰσι ΗΤ': η τ'²=ΣΡ: σ ρ (Πόρ. Δ'.) καὶ ΗΤ': η τ'²=ΣΕΧ ΕΡ: σ Ε Χ Ε ρ (Πόρ. Γ'. τῆς ΙΗ'.) ἔσεται ΣΡ: σ ρ=ΣΕΧ ΕΡ: σ Ε Χ Ε ρ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ζ'.

· Ἀχθεῖσα δὲ ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν Ἑστίαν Ε ἡ εὐθεία ΕΜ ἔσεται πρὸς τὸ τεταρτημόριον τοῦ ὑπὸ τῆς παραμέτρου ΜΑ καὶ τῆς διαμέτρου ΜΚ περιεχομένου ὀρθογωνίου, ὡς αὕτη ἡ διάμετρος ΜΚ πρὸς ἑτέραν ἀπὸ τῆς ἑτέρας Ἑστίας ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ ἐπιζευχθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΤΜ. Τὸ γάρ τοι ὀρθογωνίον ΤΜΕ, ὅπερ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετραγώνῳ (Προτ. ΚΕ') ἐξισῦται τεταρτημορίῳ τοῦ ὑπὸ τῆς ΜΚ, καὶ τῆς αὐτῆς Παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου· ὅθεν (ἐπεὶ ἐστὶν $ΤΜ \times ΜΕ = ΜΚ \times \frac{1}{2}ΜΑ$) ἔσεται δὴ $ΜΕ : ΜΚ = \frac{1}{2}ΜΑ : ΜΤ$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΖ'.

Σχημ. 78. Τὸ αἰθροῖσμα τῶν ἀφ' ἑκατέρας τῆς Ἑ-
 79- στίας ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς καμπύλης κεκλιμένων ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς, καὶ ἡ αὐτῶν διαφορὰ ἐπὶ τῆς Ε' λείψους, ἢ τοι ἡ ΕΡ, σὺν ἡ πλὴν τῆς ΥΡ πρὸς τὴν ΓΟ, ἀπόστημα ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τεταγμένης ΡΟ, ἔσεται ὡς τὸ τῶν Ἑστίων ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα ΕΤ πρὸς τὸν πλάγιον ἡμιάξονα ΓΝ.

Ἀναχθεῖσιν γὰρ ἀπὸ τε τῆς Ἑστίας Ε καὶ τοῦ κέντρου Γ τῶν εὐθειῶν ΕΗ, ΓΜ παραλλήλως τῇ

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Ὅθεν εἰ δέοι ἀπὸ τῶν Ἑστῶν ἐπὶ διάφορα σημεία τῆς Ὑπερβολικῆς ἢ Εὐλειπτικῆς κεκλιμένης ἀγαγεῖν, ὧν τὰ κεφάλαια ἐν τῇ Ὑπερβολῇ, ἢ αἱ διαφοραὶ ἐν τῇ Εὐλείψει, εἶεν ἂν ἐν λόγῳ δοθέντι· ληφθέντων ἐν τῷ τοιῷδε λόγῳ τῶν ἀπὸ τῆς κέντρος ἀποσημάτων τῶν τεταγμένων ἢ ταχθεισῶν τέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα, κεκλίωσαν ἀπὸ τῶν Ἑστῶν ἐπὶ τὰ τῶν τεταγμένων πέρατα αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι, ἢ εἶναι τὸ προβληθέν (108).

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΗ'.

Σχημ. 80. 81. 82. Ἐν πάσῃ Κωνικῇ Τομῇ τεταγμένης ἀπὸ τῆς Ἑστίας ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς ΕΜ καὶ ἄχθεις τῶν ἐφαπτομένων ΜΘ, ΝΟ, ἔσονται ἢ μὲν ΕΜ ἡμίσεια τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, ἢ δὲ ΝΟ, ἴση τῇ ΝΕ.

108) Ἐστὶ κεκλῖναι ἀπὸ τῶν Ἑστῶν Υ, Ε τὰς εὐθείας ΥΠΕ, ΥΜΕ, ὧν τὸ ἄθροισμα ἐν τῇ Ὑπερβολῇ ἢ ἡ διαφορὰ ἐν τῇ Εὐλείψει εἴη ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ μ:ν· γινώσκ. μ:ν = ΓΟ:ΓΣ· ἢ ἀχθεις τῶν τεταγμένων ΣΠ, ΟΡ· τῶν τε ΠΕ, ΡΕ, ἴσεται ΥΡ+ΡΕ:ΥΠ+ΠΕ. Ἐν τῇ Ὑπερβολῇ ἢ ΥΡ-ΡΕ:ΥΠ-ΠΕ ἐν τῇ Εὐλείψει = ΓΟ:ΓΣ (Πόρ. Α') = μ:ν· ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Εἶσω ἡ ΝΧ πλευρὰ ὀρθία, ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς ἔσαι ἡ ΝΕ, τεταρτημόριον τῆς ΝΧ (Πρότασ. ΙΗ΄.) ὅθεν καὶ ἡ ΝΧ πρὸς τὴν ΝΕ, ὡς 4 πρὸς 1, ἔσι δὲ ἡ ΕΜ μέση ἀνάλογον τῆς τετμημένης ΝΕ καὶ τῆς ΝΧ (Πορ. 1 τῆς Δ΄.) εἶγε τὸ ἀπὸ τῆς ΕΜ τετράγωνον ἐξισῆται τῷ ὀρθογώνιῳ ΕΝΧ, ἄρα καὶ ἡ ΕΜ ἡμισεία ἐστὶ τῆς Παραμέτρου ΝΧ. Καὶ γὰρ καὶ ὁ 2 ὁ ἐν τοῖς 4, 1 μέσος, ἡμισύ ἐστι τῷ 4 (109). ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ ΘΕ ἐστὶ διπλασία τῆς ΕΝ (Πορ. 5 τῆς Θ΄.). Εἶσι γὰρ ἡ ΘΕ ἴση τῇ ΕΜ, ἥτις ἐστὶ διπλασία τῆς ΕΝ, καὶ δὴ καὶ ἡ ΝΘ, ἴση τῇ ΝΟ (ἐπεὶ ΕΘ:ΕΜ=ΝΘ:ΝΟ), ἄρα ἡ ΕΝ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ ΝΘ ἐξισῆται τῇ ΝΟ.

Εἴτι δὲ τῶν λοιπῶν Τομῶν ἔσαι ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΕΕΝ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΜ τετράγωνον, ἔτως ἡ πλαγία πλευρὰ ΕΝ πρὸς τὴν ὀρθίαν ΝΧ (Πορ. 5. τῆς Ε΄. καὶ 5΄.) ἡ τὸ ὀρθογώνιον ΕΝΧ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΝΧ τετράγωνον (1 τῷ 5). καὶ ἐναλλάττονται τὸ ΕΕΝ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ΕΝΧ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΝΧ. Ἀλλ' ὁ πρῶτος ὅρος ἐστὶ τεταρτημόριον τοῦ

110) Ἐπεὶ ἐστὶ $4NE=NX$, ἔσαι δὴ $2NE=\frac{1}{2}NX$. Ἐἴτι δὲ $NE:2N=NE:4NE$. ἄρα ἡ ΝΕ μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῆς ΝΕ καὶ 4ΝΕ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΜ ἐστὶ μέση ἀνάλογον τῆς ΝΕ καὶ 4ΝΕ, εἶγε $4NE=NX$. ἄρα $2NE=EM$. ἐπεὶ δὲ $2NE=\frac{1}{2}NX$. ἄρα καὶ $EM=\frac{1}{2}NX$.

δευτέρῳ (Πρῶτ. Κ'.) ἄρα καὶ ὁ τρίτος τεταρτημόριόν ἐστι τῷ τετάρτῳ. Ἐνθεντοὶ ἡ ΕΜ ἡμισυ ἔσται τῆς ΝΧ, ἵνα τὸ ἀπ' ἐκείνης τετράγωνον ἢ τῷ ἀπὸ ταύτης τεταρτημόριον.

Ἐπεὶ δ' ἔν τῷ ὀρθογώνιῳ ΞΕΝ ἔστι τεταρτημόριον τῷ ΞΝΧ, ἐξισωθήσονται ἄρα τῷ ὑπὸ τῆς ἡμιπλαγίας καὶ τῆς ἡμιπαραμέτρου, ἢ τῷ ὑπὸ τῆς ΓΝ καὶ τῆς ΕΜ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Ὅθεν ἐπεὶ τὸ ὀρθογώνιον ΞΕΝ ἐξισῶται καὶ τῷ ΓΕΘ (Πορ. Η'. τῆς Θ'.) ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ΓΝ καὶ τῆς ΕΜ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἐξισῶται τῷ ὑπὸ τῆς ΓΕ καὶ τῆς ΕΘ. Ἐνθεντοὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΓΝ (ἢ ἡ ΓΝ πρὸς τὴν ΓΘ), ὕτως ἡ ΜΕ πρὸς τὴν ΕΘ, ἢ ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΝΘ. Ἀλλ' ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῇ ΓΕ πρὸς τὴν ΓΝ, ἢ τῇ ΓΝ πρὸς τὴν ΓΘ ἔσιν, ὡσαύτως καὶ ἡ ΕΝ πρὸς τὴν ΝΘ (διαίρεσει γὰρ καὶ αἱ διαφοραὶ τῶν ὀρων (110) ἔσονται ἀνάλογον ὡς αὐτοὶ ὕτοι οἱ ὅροι). ἄρα ἡ ΕΝ ἔσιν ἴση τῇ ΝΟ,

110) Ἐν μὲν τῇ Ε' αἰψὲς ἐπιείξει $ΓΕ : ΓΝ = ΓΝ : ΓΘ$, καὶ ἀνάπαλιν $ΓΝ : ΓΕ = ΓΘ : ΝΓ$, ἔσεται ἄρα διαίρεσει $ΓΝ - ΓΕ : ΓΕ = ΓΘ - ΓΝ : ΓΝ$, ἥτοι $ΕΝ : ΓΕ = ΝΘ : ΓΝ$, ἢ $ΕΝ : ΝΟ = ΓΕ : ΓΝ = ΓΝ : ΓΘ = ΜΕ : ΕΘ = ΝΟ : ΝΘ$. ἄρα $ΕΝ : ΝΘ = ΝΟ : ΝΘ$, ἥτοι $ΕΝ = ΝΟ$. Ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ἐπιείξει ὡσαύτως $ΓΕ : ΓΝ = ΓΝ : ΓΘ$, ἔσεται δὲ καὶ $ΓΕ - ΓΝ : ΓΝ - ΓΘ = ΓΝ : ΓΘ$, ἥτοι $ΕΝ : ΝΘ = ΓΝ : ΓΘ = ΜΕ : ΕΘ = ΝΟ : ΝΘ$. ἄρα καὶ ταῦτα $ΕΝ = ΝΘ$.

ἕσσης ἐκατέρας πρὸς τὴν ΝΘ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ
(111).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ ἡ ΘΕ ἐξισῶται τῇ ΕΜ (εἴγε $\Theta Ε = 2 Ν Ε$, $2 Ν Ε = Ε Μ$), ἐν δὲ ταῖς ἄλλαις Τομαῖς ἴση μὲν ἔκ εἰσιν, ἔστι δὲ ἐν λόγῳ τῆς ΘΝ πρὸς τὴν ΝΟ (ἕσσης $Γ Ε : Ε Μ = Θ Ν : Ν Ο$) ἢ πρὸς τὴν αὐτῇ ἴσην ΝΕ. Ἐστὶ δὲ ἡ ΘΝ πρὸς τὴν ΝΕ, ὡς ἡ ΘΞ πρὸς τὴν ΞΕ (Πορ. ΙΒ'. τῆς Θ'). Ἡ γάρτοι διάμετρος ἀρμονικῶς τέμνεται ὑπὸ τε τῆς τεταγμένης κατὰ τὸ Ε, καὶ τῆς ἐφαπτομένης κατὰ τὸ Θ, καὶ δὴ καὶ τῆς καμπύλης κατὰ τὰ πέρατα Ν, Ξ. Ἄρα ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ ἔστι καὶ ὡς ἡ ΞΘ πρὸς τὴν ΞΕ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΞ ἐν μὲν τῇ Ὑπερβολῇ ἔστιν ἐλάσσων τῆς ΕΞ, ἐν δὲ τῇ Ελλείψει ἐκείνη μείζων ταύτης· διὰ τῆτο δὴ ἡ ΘΕ ἔσεται ἐν μὲν τῇ

111) Ἐκ τῆς παρέσης Προτάσεως συνάγεται ὅτι ἐν τῇ Ὑπερβολῇ τὸ τῆς Ἐσίας ἀπὸ τῆς ἀντιειμένης Ὑπερβολῆς ἀπόστημα, τὸτ' ἔστιν ἡ ΕΞ ἔστιν ἴση τῇ ἐφαπτομένη ΞΖ Ἐστὶ γὰρ (ἐκ τῆς ΙΗ') $Ξ Ζ \times Ν Ο = Γ Η^2$. Ἄλλὰ $Γ Η^2 = Ξ Ε \times Ε Ν$ (Πρότ. Κ'). Ἄρα $Ξ Ζ \times Ν Ο = Ξ Ε \times Ε Ν$. Ἐνθεντοί $Ξ Ζ : Ξ Ε = Ε Ν : Ν Ο$. Ἐστὶ δὲ ἡ τῆς παρέσης $Ε Ν = Ν Ο$. Ἄρα $Ξ Ζ = Ξ Ε$.

Ἵπερβολὴ αἰεὶ ἐλάσσων τῆς τεταγμένης ΕΜ· ἐν δὲ τῇ Ε' μείψαι αἰεὶ μείζων.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς ΕΟ, ἡ γωνία ΝΕΟ ἡμισυ ἔσαι ὀρθῆς. Ἐστὶ γὰρ ἡ πλευρὰ ΝΕ ἴση τῇ ΝΟ, καὶ ἡ γωνία πρὸς τῷ Ν ὀρθή.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΘ'.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, ταχθείσης ἐπὶ τὸν ἄξονα ἐτέρας οἰασδήποτε ΤΒΗ, τεμνέσης τὴν ἐφαπτομένην ΘΜ κατὰ τὸ Α, ἐπιζευχθεῖσα ἀπὸ τῆς Ἑξίας ἐπὶ τὴν καμπύλην ἡ ΕΗ ἔσεται ἴση τῇ ΒΑ.

Τὸ γὰρ ὀρθογώνιον ΤΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΜΑ τετράγωνον, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΝΟ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΟΜ (Προτ. Ις'). ἀλλ' ἡ ΝΟ ἔστιν ἴση τῇ ΝΕ, ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΝΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΟΜ· ἢ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΜ (ἔστι γὰρ ΝΕ : ΟΜ = ΕΒ : ΑΜ (Πορ. 1 τῆς 1 τῆς ζ'). Οὐδὲν τὸ ὀρθογώνιον ΤΑΗ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ τετραγώνῳ· καὶ πρα-
σκευμένῃ κοινῇ τῇ ἀπὸ τῆς ΒΗ, τὸ ὀρθογώνιον ΤΑΗ συνάμα τῷ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετραγώνῳ, ἔσαι

ἴσον τοῖς ἀπὸ ΕΒ, ΒΗ ἅμα ληφθεῖσιν. Ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετραγώνων ἔσσι ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ (ἔστι γὰρ $ΤΑΗ + ΒΗ^2 = ΒΑ^2$. (ὁ τῷ Β'.) καὶ $ΕΒ^2 + ΒΗ^2 = ΕΗ^2$. 47 τῷ Α'.) ἄρα ὁ ἀπὸ τῆς Ἐσίας ἀπὸ τὴν καμπύλην κλῶνος ΕΗ, ἴσος τῇ ΒΑ τεταγμένη ἐπὶ τὰ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΘΜ προεκβληθείση.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ὅθεν δῆλον, ὅτι τὰ ὑπὸ τῶν ἐπὶ τὸν ἄξονα τεταγμένων ἄχρι τῆς ἐφαπτομένης ΘΜ προεκβληθείσων, καὶ τῶν ἐκτὸς τῆς καμπύλης ἀπολαμβανομένων αὐτῶν μερῶν περιεχόμενα ὀρθογώνια ΤΑΗ, τα η, ἐξίσταται τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τῆς Ἐσίας τῶν τεταγμένων ἀποσημάτων ΕΒ, ΕΒ τετραγώνοις, ἕκαστον ἑκάστῳ ἀντιστοιχῶντι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Οἰαδήποτε ἄρα Κωνικὴ Τομὴ ῥᾶσα καταγραφείη, εἰάν ἐν ὀρθογωνίᾳ τριγώνῳ τῷ ΘΕΜ προεκβληθείσων αὐτῷ τῶν πλευρῶν ΟΕ, ΟΜ, ἄχθῳσιν οἰαδήποτε τεταγμένοι ΒΑ, Βα, παράλληλοι τῇ ΕΜ, ἀπὸ δέ τινος σημείου μένοντος τῷ Ε προσκλιθῶσιν ἐπ' αὐτὰς οἰαδήποτε εὐθεῖαι αἱ Εη, ΕΗ ταῖς ῥηθείσαις τεταγμέναις ἴσαι. Τῶτων γὰρ ἔτω κατασκευασθέντων, εἰμὲν ἡ ΘΕ ἴση εἴη τῇ ΕΜ (Πορ. Α'. τῆς προηγμένης), τὰ ση-

μεία η, Η, ἔσται ἀπὸ τῆς Παραβολῆς · εἰ δὲ μείζων ἐπὶ τῆς Ἐμείψεως, εἰδ' ἐλάσσων, ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς (Πορ. Β'. τῆς προηγουμένης), καὶ δὴ καὶ τῆς αὐτῇ ἀντικειμένης (112).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Εἰάν ἀπὸ τῶ σημείου Θ (καθ' ὅτι ἀπὸ τῶ πέ-
ρατος τῆς διὰ τῆς Ἑσίας τεταγμένης ΕΜ, ἀχ-
θεῖσα ἐφαπτομένη ΜΘ συμβάλλει τῷ ἄξονι) ἀχ-
θῇ ἡ ΘΠΚ τῇ τεταγμένη παράλληλος, κληθή-
σεται αὕτη ἐν τῇ Ἐμείψει καὶ τῇ Ὑπερβολῇ (ὡ-
σπερ δὴ καὶ τῇ παραβολῇ κέκληται) εὐθεῖα τῇ
Μετewρισμῷ· πρὸς ἣν εἰάν ἀφ' οὐδὲποτε τῆς καμ-
πύλης σημείω Η, ἀχθῇ ἡ ΗΚ παράλληλος τῷ
ἄξονι, ὡσαύτως δὴ καὶ ἡ ΜΠ, ἔσται αἰεὶ ὁ ἀπὸ

112) Εἴπερ τὰ τρίγωνα ΜΘΕ, ΘΖΞ ἀλλήλοις
ὅμοια· ἔσται δὴ $ΜΘ : ΘΕ = ΘΖ : ΘΞ$ ἄρα (12. τῆ
ς.) $ΜΘ + ΘΖ : ΘΕ + ΘΞ = ΜΘ : ΘΕ$ ἥτοι $ΜΖ : ΞΕ = ΜΘ : ΘΕ$ · ἀλλὰ $ΜΘ : ΘΕ = Θ\alpha : Θ\beta$ ἄρα (διὰ
τὴν αὐτὴν) $ΜΘ + Θ\alpha : ΘΕ + Θ\beta = ΜΘ : ΘΕ$, ἥτοι
 $Μ\alpha : Ε\beta = ΜΘ : ΘΕ$. Ὅθεν $ΜΖ : ΞΕ = Μ\alpha : Ε\beta$ ·
καὶ $Μ\alpha : ΜΖ = Ε\beta : ΞΕ$ · καὶ $Μ\alpha^2 : ΜΖ^2 = Ε\beta^2 : ΞΕ^2$. Εἴςι δὲ καὶ $\tau\alpha\eta : \Xi Z^2 = Μ\alpha^2 : ΜΖ^2$
(Πορ. Ις.), ἄρα $\tau\alpha\eta : \Xi Z^2 = Ε\beta^2 : ΞΕ^2$. Καὶ ἐπεὶ $\Xi Z^2 = ΞΕ^2$ (σημ. προηγ.) ἄρα καὶ $\tau\alpha\eta = Ε\beta^2$ · καὶ προσκειμέ-
νη κοινῇ τῇ $\beta\eta^2$, $\tau\alpha\eta + \beta\eta^2 = Ε\beta^2 + \beta\eta^2$ · καὶ $\beta\alpha^2 = Ε\eta^2$. Εἴςι γὰρ τὰ μὲν $\tau\alpha\eta + \eta\beta^2 = \beta\alpha^2$ (6. τῆ Β.)
τὰ δὲ $Ε\beta^2 + \beta\eta^2 = Ε\eta^2$ (17. τῆ Α.). Τοιγαρὺν ἡ $Ε\eta =$
τῇ $\beta\alpha$.

κέντρε ἑτέρα κάθετος τῇ αὐτῇ ἑφαπτομένη ἢ ΓΣ, τὸ ὑπὸ τῶν δυεῖν τέτων καθεύτων ΜΠ, ΓΣ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἐξισωθήσεται τῷ ἀπὸ τῆ συζυγῆς ἡμιάξονος ΓΑ τετραγώνῳ, ἢ τεταρτημορίῳ τῆ ὑπὸ τῆς πλαγίας κτῆς κατ' αὐτὴν ὀρθίας πλευρᾶς περιεχομένῃ ὀρθογωνίᾳ.

Τεταγμένων γὰρ ἐφ' ἑκάτερον τὸν ἄξονα τῶν ΜΚ, ΜΠ, τὰ τρίγωνα ΗΓΣ, ΗΜΚ ἔσεται ὁμοια. Οὐσῶν γὰρ τῶν ΓΣ, ΜΠ παραλλήλων, ἡ γωνία ΜΠΚ ἐστὶν ἴση τῇ ΣΓΠ, ἐναλλάξ μὲν ἐν τῇ ὑπερβολῇ, ἐκτὸς δὲ ἐν τῇ ἐλλείψει· ἀλλ' ἡ ΣΓΠ ἐστὶν ἴση τῇ ΣΗΓ. Ἐκατέρα γὰρ μετὰ τῆς ΣΓΗ ἐξισῆται ὀρθῇ (32 τῆ Α'. Πορ. 6)· ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΠΚ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΣΗΓ· ἴση δὲ καὶ ΜΚΠ τῇ ΗΣΓ· ὀρθῇ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα τὰ τρίγωνα ὁμοια. Ἐνθεντοὶ ὡς ἡ ΜΠ πρὸς ΜΚ, ἔτως ἡ ΓΗ πρὸς ΓΣ· καὶ τὸ ὑπὸ τῆς ΜΠ καὶ τῆς ΓΣ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς ΓΗ κτῆς τῆς ΜΧ, ἢ τῆς αὐτῇ ἴσης ΓΡ (16 τῆ 5.). Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΗΡ ἐξισῆται τῷ ἀπὸ ΑΓ, ὡς εἴρηται ἐν τῇ δεῖξει τῆς ΙΗ'. ἄρα κτῆς τὸ ὑπὸ τῆς ΜΠ κτῆς τῆς ΓΣ τῶν δυεῖν καθεύτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆ ἐλάσσονος ἡμιάξονος ΓΑ τετραγώνῳ, ὅπερ

ἔσιν ἴσον τεταρτημορίῳ τῷ ὑπὸ τῆ πλαγίῃ ἄξονος,
ἢ τῆς αὐτῆ Παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Εἴπει δὲ τῷ ἀπὸ τῆ ελάσσονος ἡμιάξονος τε-
τραγώνῳ ἐξισῶται ἢ τὸ ὑπὸ τῶν κατὰ κορυφὴν
ἐφαπτομένων ΕΝ, ΝΟ περιεχόμενον ὀρθογωνίον,
ἄρα τῷ ὑπὸ τῆς ΕΖ, ἢ τῆς ΝΟ περιεχομένῳ ὀρ-
θογωνίῳ ἐξισωθήσεται ἢ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΠ, ΓΣ.
Καὶ δὴ (2 μέρ. τῆς 16 τῆς 5.) ὥς ἡ ΕΖ πρὸς ΓΣ,
ὕτως ἡ ΜΠ πρὸς ΝΟ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Καὶ εἴπει, ὄντων τῶν τριγώνων ΖΘΞ, ΓΘΣ,
ΠΘΜ, ΟΘΝ ὁμοίων (ἔχει γὰρ τὰς γωνίας ΘΞΖ,
ΘΣΓ, ΘΜΠ, ΟΝΘ ὀρθὰς ἡτοιῖστας, ἢ τὴν πρὸς
τῷ Θ κοινὴν). ἔσιν ὥς ἡ ΕΘ πρὸς ΕΖ, ὕτως ἡ
ΘΣ πρὸς ΓΣ, ἢ ἡ ΘΜ πρὸς ΜΠ, ἢ ἡ ΘΝ πρὸς
ΝΟ, ἢ οἱ ἐπόμενοι τῶν ἴσων τέττων λόγων εἰσιν
ἀνάλογον (ἡτοι ΕΖ:ΓΣ=ΜΠ:ΝΟ Παρ. ωροηγ.)
Ἄρα ἢ οἱ ἡγούμενοι ἀνάλογον ἔσονται (113), ἡτοι
ἔσαι ὥς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΣ, ὕτως ἡ ΘΜ πρὸς ΘΝ,
ὅθεν ἢ τὸ ὀρθογωνίον ΕΘΝ ἴσον τῷ ΜΘΣ.

113) Εἴπει ἔστι ΕΘ:ΕΖ=ΘΣ:ΓΣ, ἴσεται ΕΘ:
ΘΣ=ΕΖ:ΓΣ. Ὡσαύτως ἔστι ΜΘ:ΜΠ=ΘΝ:ΝΟ,
ἔσαι ΘΜ:ΘΝ=ΜΠ:ΝΟ. Εἴτι δι' ΕΖ:ΓΣ=ΜΠ:
ΝΟ, (Πόρ. Α') ἄρα ΕΘ:ΘΣ=ΘΜ:ΘΝ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ανάλογον ἔσονται δὴ (114) καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ $\Xi\Theta$, $\Gamma\Theta$, $\Theta\Pi$, $\Theta\Omega$, καὶ ἐπομένως τὸ ὁμογώνιον $\Gamma\Theta\Pi$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΔΑ'.

ΣΧΗΜ. 86. 87. 88. Ἐν πάσῃ Κωνικῇ Τομῇ εἰάν ἀφ' οἰσδὴποτε τῆς καμπύλης σημεῖα M ἀχθῇ τῇ ἐφαπτομένῃ MZ κάθετος εὐθεῖα MP συμβάλλουσα τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Π , ἀπὸ δὲ τῆς Π ἀχθῇ τῷ ἀπότινος Ἐξίας ἡγμένῳ κλώνῳ ME κάθετος ἡ PD · τὸ μέρος MD τῆς κλώνου, ἴσον ἔσαι τῇ ἡμιπαραμέτρῳ τῆς ἄξονος.

Τοῦτο ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ ἐστὶ πρόδηλον· ἀχθείσης γὰρ παρὰ τὸν ἄξονα τῆς διαμέτρου MP , καὶ τεταγμένης ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς MK , τὰ τρίγωνα MPD , PMK , ἔσεται ἀλλήλοις ἴσα καὶ ὁμοία (115). Αἱ γάρτοι ἀλλήλοις ἴσαι γωνίαι ΔMP ,

114) Ὅνταν τῶν τριγώνων $Z\Theta\Xi$, $\Gamma\Theta\Xi$ ὁμοίων, ἴσεται $Z\Theta : \Gamma\Theta = \Xi Z : \Xi\Gamma$ Ὡσαύτως ἐπὶ τὰ τρίγωνα $\Pi\Theta N$: $\Omega\Theta N$ ὁμοία, ἄρα $\Theta\Pi : \Theta\Omega = MP : NO$. Ἐστὶ δὲ $\Xi Z : \Gamma\Xi = MP : NO$, ἄρα καὶ $\Xi\Theta : \Gamma\Theta = \Theta\Pi : \Theta\Omega$.

115) Ἡ γωνία $PMK +$ τῇ $\Delta MPZ =$ τῇ ὀρθῇ

ΠΜΡ, ὡν ἐκάστη μεθ' ἐκάστης τῶν ἴσων ἀλλήλαις ΔΜΖ, ΡΜΣ (Πρότ. ΙΘ.) ἐξισῶται ὁρθῇ, ἐξισωθήσονται τῇ ΜΠΚ (27 τῆ Α'). Οὗθεν· ἐπεὶ ἐν ἑκατέρῳ ὑποτείνουσά εἰσιν ἡ αὐτὴ ΠΜ, αἱ ὁμόλογοι ἄρα πλευραὶ ΔΜ, ΠΚ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται (19 τῆ ε'). ἀλλ' ἡ ΠΚ ὑποκάθετος, ἐξισῶναι τῷ ἡμίσει τῆς ὁρθῆς πλευρᾶς (Πορ. ΙΣ. τῆς Θ.) τῷ αὐτῷ ἄρα ἴση ἔσεται καὶ ἡ ΔΜ.

Εἰ δὲ τῇ Ἐμείψει καὶ Ὑπερβολῇ ἀχθείσῃς ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, τῆς εὐθείας ΓΙ παραλλήλως τῷ ΕΜ κλώνῳ, τῆς τε ΓΣ πρὸς ὁρθᾶς ἡ παραλλήλως τῇ ΜΠ, ἔσεται ἡ γωνία ΙΓΣ ἴση τῇ ΠΜΔ. ἑκατέρα γὰρ μετὰ τῆς ΓΙΣ, ἡ τῆς αὐτῇ ἴσης ΕΜΖ (27 τῆ Α') ἐξισῶται ὁρθῇ. Οὗθεν ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΙΓΣ, ΠΜΔ, ἔσεται ὡς ἡ ΙΓ πρὸς ΓΣ, ὕτως ἡ ΜΠ πρὸς ΜΔ· καὶ τὸ ὑπὸ τῆς ΓΙ καὶ τῆς ΜΔ περιεχόμενον ὁρθογώνιον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΜΠ περιεχομένῳ ὁρθογωνίῳ (16 τῆ ε'). Ἀλλὰ τῷτο ἐξισῶται τεταρτημορίῳ τοῦ ὑπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς αὐτῆς Παραμέτρου, τὸτ' εἰς τὸ ὑπὸ τῆς ΓΝ καὶ τῆς

ΠΜΖ· καὶ ἡ ΠΜΡ+ΡΜΣ= τῇ ὁρθῇ ΠΜΣ. Οὗθεν ἡ ΠΜΔ+ τῇ ΔΜΖ= τῇ ΠΜΡ+ τῇ ΡΜΣ. Ἀλλ' ἡ ΡΜΣ= τῇ ΔΜΖ (ΙΘ.), ἄρα ἡ ΠΜΔ= τῇ ΠΜΡ= τῇ ΜΠΚ (27. τῆ Α') εἰσι δὲ καὶ αἱ ΠΚΜ: ΜΔΠ ὁρθαί, ἄρα καὶ αἱ γωνίαι ΠΜΚ, ΜΠΔ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὁθεν τὰ τρίγωνα ΜΠΔ, ΜΚΠ ὁμοία· τοιγαρὶν ἔσται τὸ ΠΚΜ= τῷ ΠΔΜ (19. τῆ ε') καὶ ἡ ΔΜ= τῇ ΠΚ.

ἡμιπαραμέτρου περιεχομένην ὀρθογωνίῃ (Προ. Α').
 ἄρα καὶ κείνη. Ὅθεν ἐπεὶ ἡ ΓΙ ἴση τῷ ἡμιάξονι
 ΓΝ, (Προ. ΚΑ.) ἄρα καὶ ἡ ΔΜ εἰς ἴση τῇ ἡ-
 μιπαραμέτρῳ ο, ε, δ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ σημείου Π ἀχθῇ καὶ τῷ ΤΜ
 κλώνῳ κάθετος ἡ ΠΡ εἴσεται ὡσαύτως ἡ ΜΡ, ἴση
 τῇ ἡμιπαραμέτρῳ. Πᾶσαι γὰρ αἱ πλευραὶ τῶν τρι-
 γώνων ΜΠΔ, ΜΠΡ εἰσὶν ἴσαι, ἦτοι ἡ ΔΜ,
 ἴση τῇ ΜΡ, καὶ ἡ ΠΔ ἴση τῇ ΠΡ (26 τοῦ Α').
 Οὕτως τῶν γωνιῶν ΔΜΠ, ΡΜΠ ἀλλήλαις ἴσων
 (116) καὶ διὰ τῆς ὑπὸ ΔΜΠ ἴσης τῇ ὑπὸ
 ΡΠΜ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΑΒ'.

Σχημ. 87. 88. Ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως καὶ Ὑπερβολῆς τὸ
 ὑπὸ τῶν ἀποσημάτων τοῦ κέντρου ἀπὸ
 τῆς συμβολῆς τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ἐφα-
 πτομένης, καὶ τῆς ἐπὶ τὴν ἐφαπτομέ-

116) Ἐπεὶ αἱ γωνίαι ΠΜΘ, ΠΜΙ εἰσὶν ὀρθαὶ καὶ
 ἰσομέγεθες ἴσαι ἀλλήλαις· εἰάν ἀφαιρεθῶσιν αὐτῶν αἱ
 ἀλλήλαις ἴσαι (Πρότ. Κ') γωνίαι ΕΜΘ, ΘΜΥ, ἀπο-
 λειψθήσεται ἡ γωνία ΔΜΠ = τῇ ΡΜΠ. Ὅθεν ἐπεὶ
 αἱ πρὸς τῷ Δ γωνίαι εἰσὶν ὀρθαὶ, καὶ διὰ τοῦτο ἴσαι,
 εἴσεται ἡ γωνία ΔΠΜ ἴση τῇ γωνίᾳ ΡΠΜ (Πρότ. 9. τῆς
 32. τοῦ Α').

νην καθεύτε περιεχόμενον ὀρθογώνιον
ΘΓΠ, ἐξισῆται τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀ-
πὸ τῆ ἀποσήμετος οἰασδήποτε Ἐξίας
ἀπὸ τῆ κέντρου ΓΕ, ἢ ΓΥ.

Ἐστὶ γὰρ ἐκ τῆ Ε'. Πορίσματος τῆς ΚΑ'. ὡς
ἡ ΤΘ, πρὸς ΘΕ, ἥτως ἡ ΤΠ πρὸς ΠΕ. Ἀρα συν-
δέσει μὲν ἐν τῇ Ε' μείψει, διαιρέσει δὲ ἐν τῇ Ὑ-
περβολῇ ἔσεται ὡς ἡ ΤΘ σὺν ἡ πλὴν ΘΕ πρὸς
ΘΕ, ἥτως ἡ ΤΠ σὺν ἡ πλὴν ΠΕ πρὸς ΠΕ, ἦ-
τοι τὸ διπλάσιον τῆς ΓΘ πρὸς τὴν ΘΕ· ὡς τὸ
διπλάσιον τῆς ΓΕ πρὸς τὴν ΠΕ (117). Καὶ λη-
φθέντων μὲν τῶν ἡμίσεων τῶν ἡγεμένων, ὡς ἡ
ΓΘ πρὸς ΘΕ, ἥτως ἡ ΓΕ πρὸς ΠΕ. Τῶν αὐτῶν
δὲ ἡγεμένων παραβαλλομένων πρὸς τὴν διαφορὰν
μὲν ἐπὶ τῆς Ε' μείψεως, τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν ὀρων
ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς, ἔσεται (118) ὡς ἡ ΓΘ πρὸς

117) Ἐπεὶ ἐστὶν $\Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma$ ἔσεται ἐν μὲν τῇ Ε' λο-
λίσψῃ $\Gamma\Theta = \Gamma\Gamma + \Gamma\Theta$. Ὅθεν $\Gamma\Theta + \Gamma\Theta = 2\Gamma\Gamma + 2\Gamma\Theta$
 $= 2\Gamma\Theta$. Ἐπεὶ δὲ ἐστὶ $\Gamma\Theta + \Theta\Gamma : \Theta\Gamma = \Upsilon\Gamma : \Pi\Gamma : \Pi\Gamma$.
ἔσεται $2\Gamma\Theta : \Theta\Gamma = \Upsilon\Gamma : \Pi\Gamma = \Gamma\Gamma : \Pi\Gamma$. Ἐν δὲ τῇ Ὑ-
περβολῇ ἔπει ὡσαύτως ἐστὶν $\Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma$ ἔσεται $\Gamma\Theta = \Gamma\Gamma$
 $+ \Gamma\Theta = \Gamma\Gamma + \Gamma\Theta = \Gamma\Gamma + 2\Gamma\Theta$. Ὅθεν $\Gamma\Theta - \Theta\Gamma =$
 $2\Gamma\Theta$. δι' ὃ ἐπὶ ἐστὶν $\Gamma\Theta - \Theta\Gamma : \Theta\Gamma = \Upsilon\Gamma - \Pi\Gamma : \Pi\Gamma$,
ἔσεται δὲ $2\Gamma\Theta : \Theta\Gamma = \Upsilon\Gamma : \Pi\Gamma = 2\Gamma\Gamma : \Pi\Gamma$.

118) $\Gamma\Theta : \Theta\Gamma = \Gamma\Gamma : \Pi\Gamma$ ἄρα ἀντιστρόφῃ λόγῳ
ἐν τῇ Ε' λίσψῃ ἔσεται $\Gamma\Theta : \Gamma\Theta - \Theta\Gamma = \Gamma\Gamma : \Gamma\Gamma -$
 $\Pi\Gamma$, ἢ ἐπὶ $\Gamma\Theta - \Theta\Gamma = \Gamma\Gamma$, καὶ $\Gamma\Gamma : \Pi\Gamma = \Gamma\Gamma : \Gamma\Gamma -$
 $\Pi\Gamma$. Ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ἔπει ἐστὶ

αὐτῷ σαφερῶ λόγῳ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΝ τετραγώνῳ,
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ, ὅπῃ ἂν ἄρα ἢ ληφθῇ τὸ
σημεῖον ἐκεῖνο Μ.

Π Ρ Ο Τ Α Ξ Ι Σ Λ Γ'.

Εν πάσῃ Κωνικῇ Τομῇ εἰάν αἱ ἐφαπτό- Σχημ. 89.
μεναι ΒΕ, ΔΕ συνέλθωσι κατὰ τι ση- 90. 91.
μεῖον τὸ Ε, ἀπὸ δὲ τῷ τῆς συμβο- Πίν. 6.
λῆς αὐτῶν σημείῳ Ε ἀχθῇ εὐθεῖα οἰ-
αδῆτις τέμνεσα τὴν μὲν τομὴν κατὰ
τὰ σημεία Α, Η, τὴν δὲ τὰ τῆς ἀ-
φῆς σημεία ἐπιζευγνύσαν εὐθεῖαν κα-
τὰ τὸ Ι, αὕτη δὲ ἡ εὐθεῖα ἀρμονικῶς
ἀνάλογον κατ' ἐκεῖνα τὰ μέρη τριγυ-
σεται, ἥτοι ἔσαι ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΙ,
ἔτως ἡ ΕΑ, πρὸς ΑΙ.

Ἦχθω διὰ τῷ σημείῳ Ε ἡ διάμετρος διχοτο-
μῶσα τὴν χορδὴν ΒΔ κατὰ τὸ Κ, ἥτις δὲ διχο-
τομήσει ἢ τὰς λοιπὰς τὰς παρὰ τὴν ΒΔ ἀπὸ τῶν
σημείων Α, Η, ἀχθεύσας ΑΜ, ΗΣ κατὰ τὸ Λ,
Ρ· αἵτινες συμβαλλέτωσαν τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἐφα-
πτομένων ΒΕ κατὰ τὰ σημεία, Ο, Π, ἢ ἔσεται
ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΡΕ τετραγώνον πρὸς τὸ ἀπὸ
τῆς ΕΛ, ἔτω τὸ ἀπὸ τῆς ΠΡ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
ΟΛ, ἢ τὸ ἀπὸ ΗΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ, ἢ τὸ λοι-

πὸν ὑπὸ ΗΠΣ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΑΟΜ , (119)
 ἀλλὰ τὰ ὀρθογώνια ταῦτά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν με-
 ρῶν τῆς ἐφαπτομένης ΠΒ , ΟΒ τετράγωνα (Πορ.
 Γ. τῆς 15.). Ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΠΒ πρὸς τὸ ἀπὸ
 ΟΒ , ὕτω τὸ ἀπὸ ΡΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΛ . ἢ τὸ
 ἀπὸ ΠΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΟ . ὅθεν ἔς ὡς ἡ ΠΒ πρὸς
 πρὸς τὴν ΟΒ , ὕτως ἡ ΡΕ πρὸς τὴν ΕΛ , ἢ ἡ ΠΕ
 πρὸς τὴν ΕΟ . Τέτμηται ἄρα ἡ ἐφαπτομένη ΕΠ
 ἀρμονικῶς ἀνάλογον (120). Ἐπεὶ ἐστιν ἡ ΠΒ πρὸς
 τὴν ΕΟ , ὡς ἡ ΠΒ πρὸς τὴν ΒΟ . ἀρμονικῶς ἄρα
 τμηθῆσεται ὑπὸ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΠΡ , ΒΔ ,
 ΟΜ ἢ ἡ εὐθεῖα ΕΗ , ἢ ἔσται ἡ ΕΗ πρὸς ΕΛ ,
 ὡς ἡ ΗΙ πρὸς ΙΑ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

119) Ἐπεὶ ἐστὶ $\text{ΠΡ}^2 : \text{ΟΛ}^2 = \text{ΗΡ}^2 : \text{ΑΛ}^2$, ἢ $\text{ΗΡ}^2 + \text{ΗΠΣ}$
 $= \text{ΠΡ}^2$. ἄσπερ δὲ ἢ $\text{ΑΛ}^2 + \text{ΜΟΛ} = \text{ΟΛ}^2$ (6. τῆς Η) ἔσται
 δὲ $\text{ΠΡ}^2 : \text{ΟΛ}^2 = \text{ΗΠΣ} : \text{λοιπὸν}$, πρὸς ΜΟΛ λοιπὸν. Ἐπεὶ
 ἐστὶ καὶ ὅς ΗΡ^2 ἀφαιρεθῇ, πρὸς ΑΛ^2 ἀφαιρεθῇ (19.
 τῆς Ε').

120) $\text{ΕΟ} = \text{ΕΠ} - \text{ΠΟ}$, ἢ $\text{ΟΒ} = \text{ΟΠ} - \text{ΠΒ}$. ἔστι
 δὲ $\text{ΠΕ} : \text{ΠΒ} = \text{ΕΟ} : \text{ΟΒ}$, ἄρα $\text{ΠΕ} : \text{ΠΒ} = \text{ΠΕ} -$
 $\text{ΠΟ} : \text{ΟΠ} - \text{ΠΒ}$, ὅθεν ΠΕ , ΟΠ , ΠΒ εἰσιν ἀρμονι-
 κῶς ἀνάλογον. Ἐστὶ $\text{ΠΕ} : \text{ΕΟ} = \text{ΗΕ} : \text{ΕΛ}$. ἢ $\text{ΠΒ} : \text{ΒΟ}$
 $= \text{ΗΙ} : \text{ΙΑ}$. Ὅθεν ἐπεὶ ἐστὶ $\text{ΠΕ} : \text{ΕΟ} = \text{ΠΒ} : \text{ΒΟ}$, ἔσται
 ἢ $\text{ΕΗ} : \text{ΕΛ} = \text{ΗΙ} : \text{ΙΑ}$. ἄρα ΗΕ , ΗΛ , ΗΙ εἰσιν ἀρμονι-
 κῶς ἀνάλογον. Αἱ δὲ ἢ διάμετρος ΕΡ ἀρμονικῶς ἀνά-
 λογόν ἐστι τετμημένη· αἱ γάρ τοι ΡΕ , ΡΛ , ΡΚ , ἐν ἀρ-
 μονικῇ εἰσιν ἀναλογία.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ανάπαλιν. Ἐάν ἀπό τινος σημείου Ε οἰασθῇποτε ἐφαπτομένης ΕΒ, ἀχθῇ εὐθεία οἰαδήτις ἡ ΗΕ τέμνῃσα τὴν Κωνικὴν Τομὴν κατὰ τὰ Α, Η ἔτως, ὥς εἶναι ὥς ἡ ΕΗ πρὸς ΕΑ, ἔτως ἡ ΗΙ πρὸς ΙΑ. Καὶ διὰ τῷ σημείῳ Ι ἀχθεῖσα ἡ ΒΙ συνέλθῃ τῇ τομῇ κατὰ τὸ Δ, ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ, ἔσεται ἡ αὕτη ἐφαπτομένη. Εἰ γὰρ ἀπὸ τοῦ σημείου Ε, ἐπ' ἐκείνη τὰ μέρη ἐφαπτομένη ἀχθεῖσα, ἔσυνέλθοι τῇ τομῇ κατὰ τὸ Δ, ἀλλὰ κατ' ἕτερον σημεῖον αὐτῆς ἐφάψαιτο, ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκείνου τῆς ἀφῆς ἀχθεῖσά τις εὐθεία ἐπὶ τὴν ἑτέραν ἀφῆν Β, τεμεί τὴν ΑΗ κατ' ἕτερον σημεῖον τοῦ Ι διάφορον ὥς εἶναι τὰ αὐτῆς μέρη ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῇ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΑ. Ἀρμονικὴν γὰρ εἶναι δεῖ ἡ τὴν τομὴν ταύτην· ἔστι δὲ ἀδύνατον (121) τμηθῆναι τὴν ΑΗ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῇ ΗΙ πρὸς τὴν

121) Εἰ γὰρ ἡ ΕΔ ἐφαπτομένη ἐκ ἑστίν, ἔστι ἐπί-
μα ἡ ΕΔ· ἡ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Βδ, τοιμύτω τὴν ΕΗ
κατὰ τὸ σημεῖον ι· ἡ ἔσεται δὲ: $HE : EA = HI : IA$.
ἐπεὶ δὲ ἡ ΗΙ, $IA = HE : EA$, ἔσεται ἄρα $HI : IA = HI : IA$ · ἡ ἰσαλάσσοντι $HI : HI = IA : IA$. Ἐστὶ
δὲ ἡ Ηι μείζων τῆς ΗΙ, ἄρα ἡ ΙΑ μείζων τῆς ΙΑ, ὁ-
περ ἄτοπον. Καὶ τῷ αὐτῷ λόγῳ δύκεται, ὅτι ἡ ΑΕ,
ἐκ ἂν ἔχοι τμηθῆναι ἀρμονικῶς ἀνάλογον, ἔδει κατ' ἕτε-
ρον σημεῖον ἐντὸς τοῦ Ι, ὅπερ συμβαίνει ἐν εἴτερ τὸ δ ἐν-
τὸς εἴη τῷ Δ. Μένει, ἄρα ἡ ΕΔ εἶναι ἐφαπτομένη.

ΙΑ καὶ ἕτερον σημεῖον παρὰ τὸ Ι, ἄρα ἐφαπτομένη ἀπὸ τῷ Ε ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ Δ ἀχθεῖται κατ' ἐδὲν ἄλλο σημεῖον εἰμὴ τὸ Δ τῆς καμπύλης ἐφάπεται.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Ὡσαύτως ἐὰν ἀπότινος σημεῖς Ε ἐκτὸς τῆς τομῆς ληφθέντος, ἀχθεῖσα οἰαδήποτε τάμνυσα ἢ ΕΑΗ ἀρμονικῶς ἀνάλογον κατ' ἐκεῖνα τὰ σημεῖα ἢ τὸ Ι τμηθῇ, ἀχθείσης ἀπὸ τῷ σημεῖς Ε τῆς διαμέτρου ΕΝΞ, ἢ ἀπὸ τῷ Ι τεταγμένης ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς ΒΙΔ, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΒ, ΕΔ, ἔσονται ἐφαπτόμεναι. Εἰ γὰρ καὶ ἕτερα σημεῖα παρὰ τὰ Β, Δ τῆς τομῆς ἐφάψονται, ἢ τὰ τῆς ἀφῆς σημεῖα ἐπιζευγνῦσα εὐθεῖα, καὶ ἕτερον σημεῖον παρὰ τὸ Ι ἀρμονικῶς ἀνάλογον τὴν ΕΗ τεμεῖ, ὥστε ἀδύνατον.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ὡσαύτως ἐὰν ἀπὸ τῷ σημεῖς Ε ἀχθεῖσαι δύο τέμνυσαι αἱ ΕΑΗ, ΕΜΣ τμηθῶσιν ἀρμονικῶς ἀνάλογον κατὰ τε τὰ Ι, Χ ἢ τὰ προειρημένα σημεῖα, διὰ δὲ τῶν σημείων Ι, Χ ἀχθῇ εὐθεῖα ἢ ΙΧ τέμνυσα τὴν καμπύλην κατὰ τὰ Β, Δ, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΒΕ, ΔΕ, ἔσονται διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐφαπτόμεναι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΔ'.

Εἰάν ἀπὸ τῆ σημείῃ τῆς τῶν ἐφαπτο- Σχημ. 93.
 μένων συμβολῆς Ε ἀρχθῶσι δύο εὐθεΐ- 93· 94
 αι αἱ ΕΑΗ, ΕΜΣ τέμνυσαι τὴν Κω-
 νικὴν Τομήν κατὰ σημεία τὰ Α, Η καὶ
 Μ, Σ· ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΜΑ, ΣΗ,
 ἧτοι ἔσονται παράλληλοι τῇ τὰ ση-
 μεῖα τῆς ἀφῆς ἐπιζευγνύσῃ ΒΔ (ὡς ἐν
 τοῖς σχήμασι τῆς προηγουμένης προ-
 τάσεως), ἢ καὶ ἐν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον
 Τ τῆς ΒΔ, εἴτε ἐντὸς, εἴτε ἐκτὸς τῆς
 τομῆς συμβαλῶσιν ἀλλήλαις.

Εἰ μὲν ἡ ΜΑ ἐστὶ παράλληλος τῇ ΒΔ, ἔστα-
 ται ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΙ, ὅπως ἡ ΕΜ πρὸς ΜΧ.
 Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΕΑ πρὸς ΑΙ, ὅπως ἡ ΕΗ πρὸς
 ΗΙ (ἀρμονικῶς γὰρ τέτμηται ἡ ΕΗ, καὶ ἔστιν ὡς
 ἡ ΕΗ πρὸς ΕΑ, ὅπως ἡ ΗΙ πρὸς ΑΙ), ὡς δὲ ἡ
 ΕΜ πρὸς ΜΧ, ὅπως ἡ ΕΣ πρὸς ΣΧ (διὰ τὸν
 αὐτὸν λόγον). Ὡς ἄρα ἡ ΕΣ πρὸς ΣΧ, ὅπως ἡ
 ΕΗ πρὸς ΗΙ· καὶ ἐναλλάσσονται ὡς ἡ ΕΣ πρὸς
 ΕΗ, ὅπως ἡ ΣΧ πρὸς ΗΙ· καὶ ἡ ΕΧ πρὸς ΕΙ
 (19 τῆ Ε'). Καὶ δὴ καὶ ἡ ΕΜ πρὸς ΕΑ (ὅμοια γὰρ
 τὰ τρίγωνα ΕΧΙ, ΕΜΑ), καὶ ἐναλλάσσονται ὡς ἡ
 ΕΗ πρὸς ΕΑ, ὅπως ἡ ΕΣ πρὸς ΕΜ, ὅθεν καὶ ἡ

ΗΣ παράλληλός ἐστι τῇ ΑΜ ἢ τῇ ΒΔ (2 τῆ 5.), ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Εἰ δὲ ἐκ εἰσὶ παράλληλοι, ἄλλ' ἢ ΗΣ συμπίπτει τῇ ΒΔ κατὰ τὸ Τ, λέγω, ὅτι ἢ ἡ ΑΜ κατ' αὐτὸ τῆτο τὸ σημεῖον Τ συμπεσείται τῇ ΗΣ. Ἀχθεῖσων γὰρ διὰ τῶν σημείων Α, ἢ Μ τῶν εὐθειῶν ΨΑΦ, ΖΜΘ παραλλήλως μὲν τῇ ΗΤ, συμβαλλουσὼν δὲ τῇ μὲν ΤΙ, κατὰ τὰ σημεῖα Ψ, Ζ, τῇ δὲ ΤΕ ἐπιζευχθεῖσα κατὰ τὰ Φ, Θ, ἔσεται ὡς ἡ ΗΤ πρὸς ΑΦ, ὅτως ΗΕ πρὸς ΕΑ· ἢ ἡ ΗΙ πρὸς ΙΑ (Πρότ. προηγ.) τῆτ' εἰσιν ἢ αὐτὴ ΗΤ πρὸς τὴν ΑΨ (ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα ΤΙΗ, ΙΑΨ)· ὅθεν ἡ ΑΦ ἴση τῇ ΑΨ. Ὅσαύτως ἢ ἡ ΜΘ δεχθήσεται ἴση τῇ ΜΖ (122). Ἐπιζευχθεῖσα ἄρα ἡ ΤΜ κείσεται ἐκ' εὐθείας τῇ ΑΜ. Εἰν γὰρ τῷ τριγώνῳ ΨΙΦ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΨΦ, ΖΘ τέτμννται ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῆς ἰσότητος ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΜ· δεῖ ἄρα τὴν ΤΜΑ, μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εἶναι εὐθεῖαν. Ἄλλως γὰρ ἐπιζευχθεῖσα ἢ ΑΤ, εἰ μὴ διὰ τῆς σημείου Μ διέλθοι, διχοτομήσει τὴν ΖΘ κατ' ἕτερον σημεῖον τῆς Μ διάφορον, ὅπερ ἄτοπον· αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΗΣ, ΑΜ

122) Ἡ ΜΘ ἴσεται ἴση τῇ ΜΖ. Ἐς γὰρ ἐκ τῆς προηγουμένης Προτάσεως $ΣΕ:ΕΜ=ΕΧ:ΧΜ$. Ἐς δὲ $ΣΕ:ΕΜ=ΣΤ:ΜΘ$ (ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα ΕΜΘ, ΕΣΤ) ἢ $ΣΧ:ΧΜ=ΣΤ:ΜΖ$ (ὅμοια γὰρ ἢ τὰ τρίγωνα ΤΧΣ, ΜΧΖ) ἄρα $ΣΤ:ΜΘ=ΣΤ:ΜΖ$, ἢ ἵπομιναις $ΜΘ=ΜΖ$.

προαχθεῖσαι, καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου T τῆς $ΒΔ$ ἀλλήλαις συμβάλλουσιν, ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Εἴαν αἱ τέμνεσαι εὐθεῖαι $ΕΑΗ$, $ΕΜΣ$ ὥσιν Σχημ. 95.
96.
ἀλλήλων ἀπειράκις ἐγγύτατα, αἱ εὐθεῖαι $ΑΜ$,
 $ΗΣ$ ὄσαι ἀπειράκις ἐλάχιστα συμπίπτουσι τοῖς ἀ-
πειροοῖς τῆς καμπύλης μορίοις. Ὅθεν προεκβλη-
θεῖσαι ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ T , συμπεσῶσαι ἀλλήλαις,
ἔσονται τῆς καμπύλης ἐφαπτόμεναι. Ἐνθεντοι εἴαν
ἀπὸ τοῦ τῆς συνδρομῆς διεῖν ἐφαπτομένων σημείων
 $Ε$ ἀχθῇ οἰαδήποτε εὐθεῖα ἢ $ΕΑΗ$, τέμνεσα τὴν το-
μὴν κατὰ τὰ σημεία A , H , ἀχθεῖσαι ἀπὸ τῶν
σημείων αὐτῶν ἕτεραι ἐφαπτόμεναι, συμβάλλουσιν
ἀλλήλαις κατὰ τὸ σημεῖον T τῆς $ΒΔ$, ἥτις τὰ
τῆς προτέρας ἀφῆς σημεία ἐπιζεύγνυσιν. Ἡ' εἴαν
ἀχθῇ μία ἐφαπτομένη ἢ $ΑΤ$ συμβάλλουσα τῇ $ΒΔ$
κατὰ τὸ T , ἐπιζευχθεῖσα ἢ $ΗΤ$, ἔσεται ἐφα-
πτομένη.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Ἡ' δὲ $ΒΤ$ ἔσεται ἁρμονικῶς ἀνάλογον τετμη-
μένη κατὰ τε τὰ σημεία T , $Δ$, $Β$ καὶ τὸ I ση-
μεῖον τῆς συνδρομῆς αὐτῆς τε ἐκ τῆς τεμνέσης, ἥ-
τοι ἔσεται ὥς ἢ $ΒΙ$ πρὸς τὴν $ΙΔ$, ὅτως ἢ $ΒΙ$ πρὸς
τὴν $ΙΔ$ (Πρότ. ΑΓ.).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ΄.

Σχημ. 97. 98. Ε'ὰν ἀπὸ τῆς τῆς συνδρομῆς τῶν ἐφαπτομένων ΕΒ, ΕΔ σημεία Ε ἀχθῇ οἰαδήποτε τέμνεσα ἢ ΕΑΙΗ συμβάλλεσα τῇ τὰ σημεία τῆς ἀφῆς ἐπιζευγύσῃ εὐθείᾳ ΒΔ κατὰ τὸ Ι· ἀχθῇ δὲ ἢ ἢ ΑΜ τῇ ΒΔ παράλληλος· ἐπιζευχθεῖσα ἢ ΗΜ δίχα τεμεῖ τὴν ΒΔ κατὰ τὸ Κ. Καὶ ε'ὰν ἀπὸ τῆς αὐτῆς σημεία Ε ἀχθῇ τῇ αὐτῇ ΒΔ παράλληλος ἢ ΕΥ συμβάλλεσα τῇ ΗΜ προαχθεῖσα κατὰ τὸ Υ· ἢ ΗΥ ἔσεται ἀρμονικῶς ἀνάλογον τετμημένη κατὰ τὰ σημεία Η, Κ, Μ, Υ, ἥτοι ἔσεται ὡς ΗΥ πρὸς ΥΜ, οὕτως ἢ ΗΚ πρὸς ΚΜ.

Ε'πεὶ αἱ ΒΔ, ΑΜ, ΕΥ εἰσὶν ἐξ ὑποθέσεως παράλληλοι, ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα λόγῳ τέμνουσι τὰς ΕΗ, ΤΗ (ἐστὶ γὰρ $HE:EA=HT:TM=HI:IA=HK:KM$). Οὗθεν ἐπεὶ ἡ ΗΕ τέτμηται ἀρμονικῶς ἀνάλογον ὑπ' ἐκείνων (Προτ. ΛΓ΄) ἄρα ἢ ἡ ΗΕ ἀρμονικῶς ἀνάλογον τμηθήσεται ὑπὸ τῶν αὐτῶν. Καὶ ἔσαι δὴ ὡς ἡ ΗΥ πρὸς ΥΜ, οὕτως ἢ ΗΚ πρὸς ΚΜ. Ἀλλὰ ἀχθεῖσθαι τῆς ΕΚ,

ἥτις τεμεῖ τὴν μὲν AM κατὰ τὸ Λ , τὴν δὲ τῇ MA παράλληλον $H\Theta$, κατὰ τὸ Θ , ἔσεται ὡς ἡ HT πρὸς TM , ἢ ἡ HE πρὸς EA , ὥτως ἡ $H\Theta$ πρὸς AL , ἢ ἡ HK πρὸς KM . ἐπομένως δὲ ἢ ἡ $H\Theta$ πρὸς AM (ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα ΘKH , ΛKM). Ὡς ἄρα ἡ ΘH πρὸς τὴν AL , ὥτως ἡ αὐτὴ ΘH πρὸς τὴν AM . Τοιγαρὲν ἡ AL ἔστιν ἴση τῇ AM . Ἡ ἄρα AM ταταγμένη ἐστὶν ἐπὶ τὴν διὰ τῆς συμβολῆς τῶν ἐφαπτομένων E διερχομένην διάμετρον EAK , ἐφ' ἣν ἄρα τεταγμένη ἢ ἡ τῇ AM παράλληλος BD . Δίχα ἄρα τέτμηται ἢ αὐτὴ κατὰ τὸ K , ὑπὸ τῆς HMT . σ , ϵ , δ .

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ὅθεν εἰάν διὰ τῆ μεσαιτάτε σημείου K τῆς τὰ σημεία τῆς ἀφῆς ἐπιζευγνίσῃς εὐθείας BD , διέλθῃ οἰαδήποτε εὐθεῖα ἢ HK τέμνουσα τὴν μὲν καμπύλην κατὰ τὰ H , M , τὴν δὲ τῇ BD παράλληλον ET κατὰ τὸ T . Αὕτη δὲ ἢ διὰ τοῦ K διήκνουμένη εὐθεῖα ἀρμονικῶς ἀνάλογον τμηθήσεται κατὰ τὰ σημεία T , M , K , H (123).

123) Εἰάν ἀπὸ τῆ σημείου M τῆς εὐθείας HKM , τῆς διὰ τῆ μεσαιτάτε σημείου K τῆς BD διερχομένης, ἀχθῇ εὐθεῖα ἢ MA , αὕτη δὲ ἔσται ταῖς BD , TE παράλληλος. Εἰ γὰρ ἢ AM ἐκ ἑστὶ παράλληλος ταῖς ἐκείναις εὐθείαις, ἔσται ἰτέρα τις ἢ AM , ἢ ἀπὸ τῆ σημείου H ἀχθέῖσα ἢ HO μὲν, τμηθήσεται ἀρμονικῶς ἀνάλογος

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Εἰάν ἀφ' οὐδὴποτε σημείῳ Γ τῆς τῇ ΒΔ παραλλήλου εὐθείας ΕΤ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἢ ΤΑ , ἀπὸ δὲ τῷ σημείῳ Α ἀχθῇ διὰ τοῦ Κ σημείῳ μεσαιτάτῃ τῆς εὐθείας ΒΔ ἢ ΑΚ εὐθεῖα συμπίπτουσα τῇ τομῇ κατὰ τὸ Σ . Ἐπιζευγθεῖσα ἢ ΤΣ ἔσται ἡ αὕτη ἐφαπτομένη. Ἐπεὶ γὰρ ἢ ΤΗ τέμνεται ἀρμονικῶς ἀνάλογον κατὰ τὰ σημεία $\Gamma, \text{Μ}, \text{Κ}, \text{Η}$, ὡς δέδεικται ἐν τῇ παρῳσῃ, ἡ ἢ ΤΑ ἐστὶν ἐφαπτομένη· δεῖ ἄρα ἐφαπτομένην εἶναι ἡ τὴν ΤΣ . Εἰ γὰρ καθ' ἕτερον σημείον ἐκτὸς ἢ ἐντὸς τῷ σημείῳ Σ ἐφάπτοιο τῆς τομῆς, ἢ τὰ τῆς ἀφῆς ἐπιζευγνῦσα εὐθεῖα ἔτεμεν αὐτὴν τὴν ΜΗ καθ' ἕτερον σημείον παρὰ τὸ Κ , καθ' ὃ τέμνει αὐτὴν ἢ ΑΣ . Ἀλλ' ἢ τὰ τῆς ἀφῆς ἐπιζευγνῦσα εὐθεῖα τέμνει ἀρμονικῶς ἀνάλογον τὴν ἀπὸ τῆς συμβολῆς τῶν ἐφαπτομένων τέμνουσαν (Πρὸτ. ΛΓ'), καθ' ἕτερον ἄρα σημείον παρὰ τὸ Κ τμηθῆσεται ἢ ΜΗ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῇ ΗΤ πρὸς ΤΜ , ὅς περ λόγος ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ τῆς ΗΚ πρὸς ΚΜ , ὅπερ ἀδύνατον (124).

κατὰ τὰ σημεία $\nu, \mu, \text{Ο}, \text{Η}$. ἡ δὲ ἢ $\text{ΒΟ} =$ τῇ ΟΔ κατὰ τὴν παρῳσαν, ὅπερ ἄτοπον. Τὸ αὐτὸ συμβήσεται ἡ εἰ τὸ σημείον μ ἐντὸς τῷ Μ ὑποταθείη, ἄρα ἢ Αμ ἢ ἐστὶ ταῖς $\text{ΒΔ}, \text{ΥΕ}$, παραλλήλος, ἐστὶν ἄρα ἢ ΑΜ . Τοιγαρὲν κατὰ τὴν παρῳσαν ἢ ΗΥ ἐστὶν ἀρμονικῶς ἀνάλογον τεταγμένη κατὰ τὰ σημεία $\Upsilon, \text{Μ}, \text{Κ}, \text{Η}$.

124) Εἰ δὲ ἀφ' οὐδὴποτε σημείῳ Υ ἀχθῶσι δύο

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Οὐδεν ἔπεται, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τῆ αὐτῆς σι-
μείῳ Κ ἀπειράριθμοι εὐθεῖαι ἀχθῶσιν αἱ ΣΑ, ΗΜ.
ἀπὸ δὲ τῶν κατ' αὐτὰς περάτων ἀχθῶσιν ἐφα-
πτόμεναι, αὐταὶ δὴ ἐν τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΤΠ (ἣτις
παράλληλός ἐστι τῇ ΒΔ τῇ δίχα τετμημένη κατὰ
τὸ Κ ὑπὸ τῆς ΕΚ ἀχθείσης ἀπὸ τῆς συμβολῆς τῶν
ἐφαπτομένων ΕΒ, ΕΔ) ἀλλήλαις συνελεύσονται.
Τῶν ἔστιν ἡ ΣΤ τῇ ΑΧ, καὶ ἡ ΜΠ τῇ ΗΠ συνελεύσε-
ται ἑκατέρωθεν ἐκαστέρω ἐν τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΤΠ (126)

ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΑ, ΤΣ· ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΣ διελεύ-
σεται διὰ τῆ Κ σημείῳ μεσαίτατον τῆς παρά τὴν ΕΥ
ἡγμένης ΒΔ. Εἰ γὰρ τὸ Κ δι' ἧ ἡ ΑΣ διέρχεται ἕκ ἑξ
μεσαίτατον τῆς ΒΔ, ἔτι ἕτερον τὸ κ' ἀχθείσης ἄρα
κατὰ τὸ Γ'. Πόρισμα τῆτο, ἀπὸ τῆ σημείῳ Α τῆς εὐ-
θείας Ακσ, ἐπιζευχθεῖσα ἡ Τσ, ἔσται ἐφαπτομένη,
ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΥΣ ἐφα-
πτομένη.

125) Ἐξ αὐτοῦ δὴλον ὅτι ἐὰν ἀπὸ τῶν σημείων Γ,
Π ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι αἱ ΥΣ, ΥΑ, καὶ ΠΜ, ΠΗ, καὶ
ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΜΗ, ΣΑ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ
Κ τὸ σημεῖον τῆτο Κ ἔσται σημεῖον τῆς διαμέτρου, ἐφ' ἣν
ἅπασαι αἱ παρά τὴν ΓΠ τεταγμένως κατὰγονται. Κατὰ
γὰρ τὴν 124 Σημείωσιν, αἱ τὰ σημεία τῆς ἀφῆς ἐπιζευγνύ-
σαι εὐθεῖαι ΑΣ, ΜΗ δίχα τέμνουσι τὴν ΒΔ. Οὐδεν τὸ
Κ ἐστὶ σημεῖον μεσαίτατον τῆς ΒΔ παράλληλος τῇ ΓΠ·
ἔστιν ἄρα καὶ σημεῖον τῆς διαμέτρου ὑφ' ἧς ἡ ΒΔ καὶ πᾶσαι
αἱ αὐτῆς καὶ τῇ ΠΥ παράλληλοι διχοτομῶνται.

126) Ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΤ, ΣΤ· ΠΜ, ΠΗ ἀπὸ

κατὰ τὴν παρῶσαν Πρότασιν. Χρὴ μέντοι τὸ σημείον K μὴ εἶναι κέντρον τῆς τομῆς. Τηνικαῦτα γὰρ οἶονδήποτε ζεύγος ἐφαπτομένων ἀπὸ τῶν περάτων τῶν διὰ τῆς κέντρου ἀγομένων, παρ' ἀλλήλας προάγονται ἢ ὑδαμῇ ἀλλήλαις συμπίπτουσιν.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Εἰάν ἄρα ἀπὸ τῶν περάτων οἶασθαι εὐθείας $ΣΡ$ διὰ τῆς Ἑσείας E διερχομένης, ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς αἱ $ΣΤ$, $ΡΤ$, αὗται δὲ συμπεσῶνται ἀλλήλαις κατὰ τὸ σημεῖον T , ὅπερ ἔσται ἐπὶ τῆς τῆς Μετεωρισμῶς εὐθείας $ΕΤ$ ἥτις ἤχθῃ διὰ τῆς συμβολῆς τῶν ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διὰ τῆς Ἑσείας τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον κατηγμένης ἐφαπτομένων, αὐτῇ ταύτῃ τῇ τεταγμένῃ παράλληλος, ὡς εἴρηται ἐπὶ μὲν τῆς Παραβολῆς ἐν τῇ $ΙΘ'$. ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς ἢ Ἐλλείψεως ἐν τῷ $Γ$. Πόρισματι τῆς $ΚΘ'$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΛΣ'.

Εἰάν ἀπὸ τῆς Ἑσείας E πάσης Κωνικῆς Το-

τῶν σημείων A , $Σ$, M , H ἀχθεῖσαι, ἐν τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ $ΥΠ$ ἀλλήλαις συνελεύσονται. Εἰ γὰρ ἀχθεῖν ἐφαπτομένη ἡ $ΑΤ$, αὕτη δὲ μὴ ἦσα ταῖς $ΤΠ$, $ΒΔ$ παράλληλος συμπεπίπτει τῇ $ΤΠ$ κατὰ τὸ $Π$. Ὅθεν εἰάν διὰ τῆς μεσαιτάτης σημείας K τῆς εὐθείας $ΒΔ$ ἀχθῇ ἡ $ΜΗΚ$ εὐθεῖα, ἐπιζυχθεῖσα ἡ $ΗΠ$, ἴσεται ἐφαπτομένη· αἱ ἄρα $ΑΥ$, $ΣΤ$, $ΜΠ$, $ΗΠ$ ἐφαπτόμεναι ἐν τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ $ΤΠ$ ἀλλήλαις συμπεσῶνται.

μῆς ἀχθῶσιν ἀπὸ τὴν καμπύλην οἱ Σχημ. 99.
κλῶνοι ΕΑ, ΕΒ, ἀπὸ δὲ τῶν σημεί- 100.
ων Α καὶ Β ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι αἱ
ΒΔ, ΑΔ συμβάλλουσαι ἀλλήλαις κατὰ
τὸ Δ, ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ, δίχα τε-
μεῖ τὴν ὑπὸ τῶν αὐτῶν κλῶνων πε-
ριεχομένην γωνίαν ΑΕΒ.

Συμπιπτέτω ἡ ΕΔ τῇ μὲν τομῇ κατὰ τὸ Ρ,
καὶ Σ· τῇ δὲ εὐθείᾳ ΑΒ κατὰ τὸ Ι· καὶ ἀχθεῖσαι
ἐφαπτόμεναι αἱ ΡΤ, ΣΤ, συμπεσῶνται τῇ ΒΑ
καθ' ἐν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Τ (Πορ. Α'. τῆς ΛΔ').
καὶ τὸ σημεῖον Τ ἔσεται πρὸς τῇ τῷ Μετεωρισμῷ
εὐθείᾳ ΕΤ (Πορ. Δ'. τῆς ΛΕ'). Οὗθεν ἀναχθε-
σῶν ἐπὶ τῇ τῷ Μετεωρισμῷ εὐθείᾳ τῶν καθεύτων
ΑΗ, ΒΠ, ἔσεται (διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώ-
νων ΗΤΑ, ΒΤΠ) ὡς ἡ ΒΠ πρὸς ΑΗ, ὅτως ἡ ΒΤ
πρὸς ΑΤ. Α'λλ' ἐπεὶ ἡ ΒΤ ἀρμονικῶς ἀνάλογον τέ-
τμηται κατὰ τὰ σημεῖα Β, Ι, Α, Τ (Πορ. Β'.
τῆς ΛΔ') ἡ ΒΤ πρὸς τὴν ΑΤ ἔστιν ὡς ἡ ΒΙ, ΙΑ,
ὡς ἄρα ἡ ΒΙ πρὸς τὴν ΙΑ, ὅτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν
ΑΕ, αἵ γε εἰσιν ὡς ἡ ΒΠ πρὸς τὴν ΑΗ, εἴγε ἡ
ΒΕ πρὸς τὴν ΒΠ καὶ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ ἔστιν ἐν
τῷ αὐτῷ λόγῳ τῇ ΕΝ πρὸς τὴν ΝΖ (Πορ. Γ'.
τῆς ΚΘ'). Ἡ γωνία ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ δίχα τέτμηται
ὑπὸ τῆς εὐθείας ΔΕ· εἴγε ἡ βάσις τέτμηται ἐν
λόγῳ τῶν πλευρῶν τῷ τριγώνῳ ΑΕΒ (Πορ. 2.
τῆς 3. τῷ 5.) ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ο'θεν εἰάν οἱ ἀπὸ τῆς Ἑξίας κλῶνοι ὥσιν ἐπ' εὐθείας ἀλλήλοις, ὥς προκύπτει ἐξ οἰασδήποτε εὐθείας ΡΣ διὰ τῆς Ἑξίας διπύτης, ἀχθείσων ἀπὸ τῶν κατ' αὐτὰς περάτων τῶν ἐφαπτομένων ΣΤ, ΤΡ συμβαλλουσῶν τῇ τῷ Μετεωρισμῷ εὐθείᾳ κατὰ τὸ Υ, ἐπιζευχθεῖσα ἢ ΤΕ, ἴσεται τῇ ΡΣ κἀ-
 θετος. Αἱ γάρτοι γωνίαι ΣΕΤ, ΡΕΤ ἅμα λη-
 φθεῖσαι δυσὶν ὀρθαῖς ἐξισϋνται, ὧν τὸ ἥμισυ εἰν
 οἰαδήποτε γωνία ΤΕΣ, ἢ ΤΕΡ ὀρθή (Προτ. πα-
 ρέσ.) ὥσπερ ἐπὶ τῆς Παραβολῆς ἀνωτέρω (Πορ.
 Θ'. τῆς ΙΘ'.) δέδεικται.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

- Εχμ. 101. Ε'άν ἀφ' οἰαδήποτε σημείου Α τῆς καμπύλης
 102. τῆς μεταξὺ τῶν τερμάτων Σ, Ρ, τῆς διὰ τῆς Ἑ-
 ξίας ἀχθείσης εὐθείας, ἐμπεριλαμβανομένης, ἀχ-
 θῇ ἑτέρα ἐφαπτομένη ἢ ΑΤ συμπίπτεσα ταῖς ἐ-
 φαπτομέναις, ΡΤ, ΣΤ κατὰ τὰ σημεία Τ, Θ,
 ἐπιζευχθεῖσαι ἐπὶ τὴν Ἑξίαν αἱ εὐθεῖαι ΘΕ, ΤΕ
 ὀρθὴν γωνίαν τὴν ΘΕΤ περιέξουσιν. Ἡ γάρτοι γω-
 νία ΘΕΑ ἡμισύ ἐστι τῆς ΡΕΑ, ὥτε ΑΕΤ τῆς ΑΕΣ.
 Εἰσὶ δὲ αἱ γωνίαι ΡΕΑ, ΑΕΣ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι,
 καὶ αἱ γωνίαι ΘΕΑ, ΑΕΤ ἡμισυ αὐτῶν· ἄρα ἡ
 ΘΕΤ ἡμισυ ἐστὶν ὀρθῶν, αἷς τισιν ἴσϋνται αἱ
 ΡΕΑ, ΑΕΣ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΖ'.

Ἐπερβολῆς εἰάν κατὰ κορυφὴν εὐθεῖα σχημ. 103.
 ἐφάπτεται ἡ ANP , καὶ ἀπ' αὐτῆς ἐφ'
 ἑκάτερα τῆς διαμέτρου NE ἀποληφθῶ-
 σιν αἱ NA , NP τῇ συζυγεῖ ἡμιδιαμέ-
 τρῳ GB ἴσαι, ἥτοι ἀφ' ὧν τὰ τετρά-
 γωνα ἔσαι ἴσα ἑκάτερον τεταρτημο-
 ρίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς NE
 καὶ τῆς ὀρθίας NS περιεχομένῃ ὀρ-
 θογωνίῳ. Αἱ ἀπὸ τῷ κέντρῳ τῆς το-
 μῆς ἐπὶ τὰ ληφθέντα πέρατα τῆς ἐ-
 φαπτομένης ἀγόμεναι εὐθεῖαι GA , GP ,
 ἐφ' ὅσον ἂν καὶ προαχθῶσιν, α'εἰ μὲν
 ἐγγιόντε προσάγῃσι τῇ τομῇ, καὶ παν-
 τὸς τῷ δοθέντος (ἐλαχίστου) διαστήμα-
 τος Π , εἰς ἑλαττον ἀφικνῶνται διάστημα,
 εὐδαμῇ δ' εὐδέποτε συμπίπτῃσι. Καλεί-
 θωσαν δὲ αἱ τοιαῦται εὐθεῖαι, $ΑΣΤΜ-$
 $ΠΤΩΤΟΙ$ τῆς Ἐπερβολῆς.

Τετάρχω γὰρ ἐπὶ τὴν διάμετρον τῇ ἐφα-
 πτομένῃ παράλληλος ἡ MKT , καὶ τεμνέτω τὰς εἰ-
 ρημένας ἀσυμπτάτους κατὰ τὰ Δ , Φ · καί ἔσαι δὴ ὡς
 τὸ ἀπὸ ΔK πρὸς τὸ ἀπὸ ΓK , ἔτω τὸ ἀπὸ AN

πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΝ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶ, τὸ μὲν ἀπὸ ΑΝ
 ἴσον τῷ τετάρτῳ τῷ ὑπὸ ΕΝΣ, τὸ δὲ ἀπὸ ΓΝ
 τῷ τετάρτῳ τῷ ἀπὸ ΕΝ· ὥς ἀρα τὸ ἀπὸ ΔΚ
 πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΚ, ἔτω τὸ τέταρτον τῷ ὑπὸ ΕΝΣ
 πρὸς τὸ τέταρτον τῷ ἀπὸ ΕΝ, ἢ (τῶν ὁρῶν τῷ
 δευτέρῳ λόγῳ τετραπλασιασθέντων) τὸ ὑπὸ ΕΝΣ
 πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΝ, τέτ' ἐστὶν (1 τῷ ε'.) ἡ ὀρθία πλευ-
 ρὰ ΝΣ πρὸς τὴν πλαγίαν ΝΞ, ἢ (Πορ. ε'. τῆς
 Ε'.) τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΜΚ τετραγώνου πρὸς
 τὸ ὑπὸ τῶν ΕΚΝ ὀρθογώνιου. Ἐπεὶ ἔν ἐστιν ὅλον
 τὸ ἀπὸ ΔΚ, πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΓΚ, ὥς τὸ ἀπὸ ΜΚ,
 ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τῷ πρώτῳ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΚΝ ἀ-
 φαιρεθὲν ἀπὸ τῷ δευτέρῳ, ἐστὶν ἀρα ἢ ὡς λοιπὸν
 τὸ ὑπὸ ΔΜΦ πρὸς λοιπὸν τὸ ἀπὸ ΓΝ (6 τῷ β'.
 ἢ 19 τῷ ε'.) τὸ ἀρα ὑπὸ ΔΜΦ πρὸς τὸ ἀπὸ σΝ
 ἐστὶν αἰεὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῷ ἀπὸ ΑΝ πρὸς τὸ
 ἀπὸ ΓΝ. Καὶ τὸ ὑπὸ ΔΜΦ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΝ
 τέτ' ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΝΡ. Ἴση γὰρ τῇ ΝΡ ἡ ΑΝ.
 Καὶ ἐστὶν ἀρα (16 τῷ ε'.) ὥς ἡ ΜΦ πρὸς ΝΡ, ἔ-
 τως ἡ ΑΝ πρὸς ΔΜ. Ἐστὶ δὲ ἡ ΜΦ μακρῶ μεί-
 ζων τῆς δευτέρας ΝΡ, ἀρα ἢ ἡ τρίτη μείζων ἐστὶ
 τῆς τετάρτης. Ὅθεν ἐπεὶ προαγομένης εἰς ἀπει-
 ρον τῆς ὕπερβολῆς, αἰεὶ μείζων ἢ μᾶλλον μείζων
 ἡ ΜΦ τῆς ΝΡ καθίσταται, ἔρα ἢ ἡ ΑΝ αἰεὶ μεί-
 ζων ἢ μᾶλλον μείζων ἀποβαίνει τῷ διαστήματι ΔΜ,
 ὅπερ συνεχῶς εἰς ἀπειρον ἀπομειῖται ὡς μᾶλλον ἢ
 μᾶλλον εἰς ἀπειρον αὖξει ἡ ΜΦ, ὥς τὸν λόγον
 ἐκεῖνον ΑΝ πρὸς ΔΜ δύνασθαι γενέσθαι μείζονα

οἰδῆποτε δοθέντος λόγου AN πρὸς Π , ὥσπερ ὁ λό-
γος $M\Phi$ πρὸς NP δύναται γενέσθαι μείζων τῆ αὐτῆς
 AN πρὸς ΔM . Δύναται γὰρ ἐπ' ἀπειρον αὐξεῖν ἢ τε
τῆς Ὑπερβολῆς τεταγμένη MK , ἢ ἡ τῆς τριγώνου
 ΦK , ἢ οἰαδήτις αὐτῶν ἑτέρα· καὶ πολλῶν μᾶλλον
τὸ αὐτῶν ἄθροισμα ἢ $M\Phi$ οἰασθῆν δοθείσης μείζων
ἔχει ἀποκαθίστασθαι, ἐν μείζονι τῇ ἀπὸ τῆς κορυ-
φῆς N τῆς Ὑπερβολῆς ἀποσήματος. Ἡ ἄρα AG
ἔχει ἑγγιον ἢ μᾶλλον ἑγγιον τῆς Ὑπερβολῆς NM
γίνεται. Ὅσῳ ἔλαττον ἢ μᾶλλον ἔλαττον ἔσται ἀ-
ποβαίνει τὸ $M\Delta$ ἀπόσημα, (ὅπερ ἔχει ἔλαττον
οἰδῆποτε δοθέντος Π ἀποκαθίστασθαι), ὥδαμῦ δ' ὁ-
δέποτε ταύτῃ συμπίπτει. Τὸ γάρ τοι σημεῖον M
ἀνάγκη πᾶσα τῇ Δ ἐπωσθῆν ἀφίστασθαι, ἵνα δὴ τὸ
ὀρθογώνιον $\Delta M\Phi$ ἔχη τῷ ἀπὸ τῆς AN τετραγώ-
νῳ ἑξισῆσθαι, ἢ ἡ $M\Phi$ ἢ πρὸς τὴν AN , ὥς ἡ AN
πρὸς τὴν ΔM , ὥς ἡδὴ δέδεικται.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ἐὰν δὲ αἱ αὐταὶ ἀσύμπτωτοι εὐθεῖαι ἀπέκει-
να τῆς πρὸς τῷ Γ γωνίας ἐπὶ τὸ συνεχές προσεκ-
βληθῶσιν, εὐθείας τὰς ΞZ , ΞX ἴσας ταῖς προ-
τέραις AN , NP ἀπὸ ταῖς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτο-
μέναις τῆς ἀντικειμένης τομῆς ἀποτεμεῦσιν. Ὅμοια
γὰρ ἔσεται τὰ τρίγωνα $\Xi N\Gamma$, ΓAN . εἴγε αἱ
κατὰ κορυφὴν ἐφαπτόμεναι εἰσὶν ἀλλήλαις παρὰ-
λληλοι, ἢ ἡ πλευρὰ $\Xi\Gamma$ ἴση τῇ ΓN . ὅθεν ἢ ἡ
 AN ἴση τῇ ΞZ (26 τῆς Α'). Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ

δεικνύσεται ὅτι ἡ NP ἴση τῇ $ΕΧ$. Δῆλον ἄρα ὅτι
 ὅτι αἱ $ΓΖ$, $ΓΧ$ ἀσύμπτωτοι τῆς ἀντικειμένης Ὑ-
 περβολῆς ZI ἀποβαίνουσιν, ἥς περ ἦτε. πλάγια ὅ-
 τι ὁρθία πλευρά ἐστι ἡ αὐτή.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Ὅποιαδήποτε εὐθεῖα BH μίᾳ τινι τῶν ἀσυμ-
 πτώτων παράλληλος ἐντὸς τῆς γωνίας $ΑΓΡ$ ἀχ-
 θείσῃ, τῇ ὑπερβολῇ συμπεσεῖται. Τὸ γάρτοι ἀπὸ
 ἀλλήλων τῶν παραλλήλων ἀπόστημα αἰεὶ τὸ αὐτὸ
 διαμένει, ἐν ᾧ τὸ τῆς Ὑπερβολῆς ἀπὸ τῆς ἀσυμ-
 πτώτου ἀΐσιωτε ἐλαττον οὐδέποτε δοθέντος ἀ-
 ποκαθίσταται.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Πολλῷ μᾶλλον οἷαδήποτε $BΓ$ τὴν γωνίαν
 $ΑΓΒ$ διαιρῶσα τεμεῖ τὴν Ὑπερβολήν. Τὸ γάρτοι
 αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτου διάστημα αἰεὶ ἐπ' αὐξάνει,
 ἐν ᾧ τὸ τῆς Ὑπερβολῆς αἰεὶ ἀπομεινύται.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Δῆλον ἄρα, ὅτι τὰ ὁρθογώνια $ΔΜΦ$, $δμφ$
 ὅτι $ΔΤΦ$, $δυφ$, τὰ ὑπὸ τῶν μερῶν, εἰς ἃ τέμνον-
 ται ὑπὸ τῆς καμπύλης ὅτι τῶν ἀσυμπτώτων αἱ ἐ-
 πὶ τὴν διάμετρον τεταγμένα περιεχόμενα, ἴσα ἀλ-
 λήλοις εἰσὶν. Ἐκασον γὰρ τέτων ἐξίσταται τῷ ἀ-
 πὸ τῆς $ΑΝ$ τετραγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΗ'.

Εάν Ὑπερβολῆς εὐθεῖα οἰαδήτις ἢ ΤΔ σχημ. 104
κατὰ σημῆον τὸ Υ ἐφάπτεται ταῖς ἀ-
συμπτώτοις κατὰ σημῆα τὰ Τ, Δ συμ-
πίπτουσιν, δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν
ἀφῆν· ἔσαι δηλονότι ἢ ΤΥ ἴση τῇ
ΥΔ. Καὶ τὸ ἀφ' ἐκατέρας τῶν τμημά-
των αὐτῆς τετράγωνον ἴσον ἔσαι τὸ τε-
τάρτῳ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίως πλευρᾶς
ΙΓΥ, καὶ τῆς ὀρθίως ΥΕ περιεχομένου
ὀρθογωνίου.

Μὴ γάρ, εἰ δυνατόν, ἀλλ' ἡλήφθωσαν ἐφ'
ἐκάτερα τῆς ἀφῆς αἱ ΤΘ, ΤΔ, ἀφ' ὧν ἂν τὰ
τρίγωνα ἐξίτωτο τεταρταμορίῳ τῷ ῥηθέντος ὀρθο-
γωνίου· καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΓΘ, ΓΒ, εἰσονται
κατὰ τὴν προηγουμένην Πρότασιν ἀσύμπτωτοι τῆς
τομῆς, ὅπερ ἀδύνατον. Εἰ μὲν γὰρ ἢ ΓΘ ἐκτὸς
πίπτει τῆς ΓΥ, προαχθεῖσα ἐπ' ἀπείρον μᾶλλον
καὶ μᾶλλον αἰ αὐτῆς ἀποσῆσεται, καὶ ὁδέποτε ἄρα
τῇ ὑπερβολικῇ καμπύλῃ ἐγγίον γενήσεται· ὅ-
περ τῆς ἀσυμπτώτου ἴδιον. Εἰ δέ γε τεθῇ ἐντὸς
πίπτειν τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης
γωνίας ΤΓΔ, ὡς ἢ σΒ· αὕτη δὲ προαχθεῖσα τε-
μεγτὴν Ὑπερβολὴν, κατὰ τὸ Γ'. Πόρισμα τῆς προηγου-
μένης. Οὐκ εἰσονται ἄρα αἱ ΓΘ, ΓΒ ἀσύμπτωτοι

Αἱ ἄρα $ΤΤ$, $ΤΔ$ μέρη τῆς ἐφαπτομένης ἀλλ' ἔχει
ἕτεραι μᾶζες ἢ ἐλάσσους αὐτῶν, τετράγωνοι ἴσον
τεταρτημορίῳ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς $ΓΤ$, ἢ
τῆς ὀρθίας $ΤΕ$ περιεχομένῃ ὀρθογώνιῳ περιέξουσιν.
Ἰσαὶ ἄρα ἀλλήλαις αἱ $ΤΤ$, $ΤΔ$, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Τεταγμένης δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον $ΓΤ$ τῆς
εὐθείας $ΛΚΟ$ παραμῆλυ τῇ ἐφαπτομένῃ $ΔΤ$,
ἢ συμπεσούσης ταῖς ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ $Π$, $Σ$,
τὸ ὀρθογώνιον $ΠΛΣ$, ἢ τὸ $ΠΟΣ$ ἔσεται ἴσον τῷ
ἀπὸ τῆς $ΤΤ$ τετραγώνῳ, οἷόν τι δέδεικται καὶ τῇ
προηγμένη Προτάσει.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Εὐθεντοὶ ἢ αἱ μεταξὺ τῆς καμπύλης ἢ τῶν
ἀσυμπτῶτων ἀπολαμβάνονται $ΠΛ$, $ΟΣ$ ἴσαι ἀλ-
λήλαις εἰσιν, ἢ ὅποιασδήποτε ἄρα εὐθείας $ΠΣ$ τε-
μνέσης τὴν καμπύλην ἢ τὰς ἀσυμπτῶτες, τὰ
μέρη, ἃ μεταξὺ τῆς καμπύλης ἢ τῶν ἀσυμπτῶτων
ἀπολαμβάνεται, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. Τμηθείσης
γὰρ δίχα τῆς $ΟΛ$ κατὰ τὸ $Κ$, ἢ ἐπιζευχθείσης
ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς διαμέτρου $ΓΚ$, συμβαλούσης
τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ $Τ$, ἀχθεῖται διὰ τοῦ $Τ$ ἢ
 $ΔΤΤ$ τῇ $ΟΛ$ παράλληλος, ἔσεται ἐφαπτομένη,
ἢ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν παρῶσαν Πρότασιν,
ἢ τὰ ὀρθογώνια $ΠΛΣ$, $ΠΟΣ$ ἴσα ἔσαι τῷ ἀπὸ

τῆς ΤΤ, ἢ τῆς ΤΔ τετραγώνῳ· ἐνθεντοὶ τὸ μέ-
ρος ΠΛ ἴσον εἶναι· διὰ τῷ μέρει ΟΣ· εἶγε ΣΚ=
ΧΗ, ἢ ΟΚ=ΚΛ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Δήλον ἄρα ἐκ τῶν ρηθέντων ἐν τῇ παρέσῃ
Προτάσει, ὅτι μοναδικᾶς εἶναι δεῖ τὰς ἀσυμπτώτους
ΓΤ, ΓΔ, ἢ ἐκ εἰν' ἑτέρας παρὰ ταύτας ἀσυμ-
πτώτους τῇ αὐτῇ ἀποδύναι Ὑπερβολῇ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΛΘ.

Εἰ ἐν εὐθειᾷ οἰαδήτις ἡ ΞΘ τέμνῃ τὰς σχημ. 105.
ἀντικείμενας Ὑπερβολὰς, ταῖς ἀσυμ-
πτώταις κατὰ τὰ σημεῖα, Ζ, Φ, συμ-
πίπτουσα· ἀχθείσης διὰ τῆς κέντρου τῆς
διωμέτρου ΓΤ παραλλήλῃ τῇ αὐτῇ ΞΟ,
τὸ ὀρθογώνιον ΖΟΦ ἴσον εἶναι τῷ ἀ-
πὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΤ τετραγώνῳ.

Ἦχθω ἡ ἐφαπτομένη ΤΤΔ, ἢ διὰ τῆς Ο
τεταχθῶ ἐπὶ τὴν διάμετρον ἡ ΟΛ τῇ ἐφαπτο-
μένῃ ΤΤΔ παράλληλος, ἥτις τεμεῖ τὰς ἀσυμ-
πτώτους κατὰ τὰ σημεῖα Π, Σ. Τύπων δὲ κατα-
σκευαζόντων, ὁ λόγος τῆς ὀρθογωνίας ΖΟΦ πρὸς τὸ
ὀρθογώνιον ΣΟΠ, συγκρίσεται ἐκ τῶν λόγων τῶν
πλευρῶν ΖΥ πρὸς ΟΠ (ὅτι τῆς ΓΤ πρὸς ΤΤ),

ἐξ ΦΟ πρὸς ΟΣ (ἦτοι ΓΤ πρὸς ΤΔ). Ἀλλὰ ἐὶς ὁ λόγος τῷ ἀπὸ τῆς ΓΤ τετραγώνῳ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΤΤΔ, ὅεσι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΤΤ τετραγώνον, ἐκ τῶν αὐτῶν σύγκειται λόγων. Ἀρα ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΖΟΦ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΣΟΠ, ἔτω τὸ ἀπὸ τῆς ΓΤ τετραγώνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΤΤ (127). Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΣΟΠ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΤΤ (Προτ. προηγ.). Ἀρα ἐὶς τὸ ὑπὸ ΖΟΦ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΤ τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α΄.

Ὡσαύτως ἀχθείσης ἀπὸ τῆς Ι τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης, ἀπὸ τε τῆς Ε τῆς τεταγμένης ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον δειχθήσεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΦΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΙ τετραγώνῳ, ὅπερ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΤ. Τοίγαρ ἐν τῷ ὀρθογώνῳ ΖΟΦ, ΦΞΖ ἔσται ἀλλήλοις ἴσα, καὶ ἡ εὐθεῖα ΟΦ ἴση τῇ ΞΖ. Ἡ γάρτοι ἰσότης τῶν ὀρθογωνίων τέτων ἀποδίδωσι τὸν λόγον τῶν πλευρῶν ΖΟ πρὸς ΞΖ ἴσον τῷ λόγῳ τῶν ΞΦ πρὸς ΦΟ (16 τῆς 5.). Ὅθεν συνδέσει ἔσται ὡς ἡ ΟΞ πρὸς ΞΖ, ἔτι καὶ ἡ ΟΞ πρὸς ΦΟ. Τοίγαρ ἐν αἰμα-

127) Τὸ αὐτὸ δὴ τῆτο συνάγεται, καὶ ἐκ τῆς 23 Ἐποσημειώσεως, εἴγε

$$ZO : OP = GT : TT$$

$$FO : OS = GT : TD \text{ συνδέσει ἄρα εἶσται.}$$

$$ZO \cdot FO : OP \cdot OS = GT^2 : TT \cdot TD (= TT^2).$$

ταξὺ τῶν ἀσυμπτῶτων, ἢ ἑκατέρας τῶν Ὑπερβολῶν ἀπολαμβάνονται εὐθεῖαι ΕΖ, ΦΘ ἴσαι εἰσιν ἀλλήλαις. Ὡς περ δὴ ἢ ἢ ΟΖ ἴση τῇ ΕΦ, ἢ τὸ ὀρθογώνιον ΕΖΟ, ἴσον τῷ ὀρθογώνιῳ ΕΦΟ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Καὶ ἐπεὶ, ἀχθείσης οἰασθήποτε ἑτέρας οΦΞξ τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ ΤΙΓ παραλλήλῃ, ἔσται τὸ ὀρθογώνιον ζοφ, ἢ φξξ, ἢ τὸ ξξο, ἢ ξφο ἴσον τῷ αὐτῷ τετραγώνῳ ἀπὸ ΓΙ. Ἄρα τὰ ὑπὸ τῶν μερῶν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν, ἃ μεταξὺ ἑκατέρας τῶν Ὑπερβολῶν ἢ τῶν ἀσυμπτῶτων ἀπολαμβάνεται, περιεχόμενα ὀρθογώνια ΖΟΦ, ζοφ κτ. ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. Καὶ δὴ ἢ τὸ μέρος εξ, ἴσον τῷ μέρει οξ· τότε εο, ἴσον τῷ φξ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Μ'.

Ε'ὰν ἐπὶ τῆς αὐτῆς Ὑπερβολῆς, ἢ ἐπὶ σχημ. 106.
τῶν ἀντικειμένων ληφθῇ δύο σημεῖα τυ- 107.
χόντα τὰ Ο, Υ· ἀπ' αὐτῶν δὲ ἀχ-
θῶσιν ἐπὶ μὲν τὴν μίαν τῶν ἀσυμπτῶ-
των εὐθεῖαι δύο ἀλλήλαις παράλληλοι
ἢ ΟΣ, ΥΔ· ἐπὶ δὲ τὴν ἑτέραν ἕτεραι
δύο αἱ ΟΠ, ΥΤ παράλληλοι ἀλλήλοις
ἢ αὗται ἕως τῶν ἀσυμπτῶτων αἱ πᾶ-
σαι. Τὸ ὑπὸ τῶν ἀπὸ τε ἑνὸς τῶν ση-

μείων ἀγομένων εὐλείων περιεχόμενον
ὀρθογώνιον ΣΟΠ, ἴσον ἔσαι τῷ ὑπὸ
τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῆς ἑτέρας.

Εἰπεὶ γὰρ ἡ ΟΥ, ἢ ἐκβαλλομένη ἀφ'
ἐκάτερα συμπίπτει ταῖς ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ
σημεῖα Ι, Α· ἐπεὶ ἔναι αἱ μεταξὺ τῆς καμπύλης
καὶ τῶν ἀσυμπτῶτων ἀπολαμβανόμεναι ΟΙ, ΤΑ
ἀλλήλαις ἴσαι (Πορ. Β'. τῆς ΑΗ'. ἢ ΛΘ'), καὶ
δὴ ἢ ἡ ΟΑ ἴση τῇ ΤΙ. Ὡς ἄρα ἡ ΟΑ πρὸς ΤΑ
ὅτως ἡ ΤΙ πρὸς ΟΙ. Ἀλλὰ διὰ τὴν τῶν τριγώνων
ΟΠΛ, ΤΤΛ, ἢ ΤΔΙ, ΟΣΙ. ὁμοιότητα, ὡς μὲν ἡ
ΟΑ πρὸς ΤΑ, ὅτως ἡ ΟΠ πρὸς ΤΤ· ὡς δὲ ἡ
ΤΤ πρὸς ΟΙ, ὅτως ἡ ΤΔ πρὸς ΟΣ· ὡς ἄρα ἡ
ΟΠ πρὸς ΤΤ, ὅτως ἡ ΤΔ πρὸς ΟΣ. Καὶ τὸ ὀρ-
θογώνιον ΣΟΠ ἴσον τῷ ὀρθογώνιῳ ΔΤΤ (16 τῆ
ς.) ὃ εἶδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Σχημ. 108.

Εἰάν ἀπὸ τῶν τυχόντων σημείων τῆς ὑπερ-
βολῆς Τ, Ν ἀχθῶσι ταῖς ἀσυμπτώτοις παραλλ-
ληλαί αἱ ΤΤ, ΤΔ· ἢ ΝΡ, ΝΑ, τὰ ὑπ' αὐτῶν ἢ
τῶν ἀσυμπτῶτων γεγόμενα παραλλήλογράμμη
ΡΝΑΓ, ΔΤΤΓ, ἴσα ἀλλήλοις ἔσαι. Εἰπεὶ γὰρ
κατὰ τὴν παρεῖσαν Πρότασιν τὸ ὀρθογώνιον ΡΝΑ
ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογώνιῳ ΓΤΔ· ἄρα ἢ τὰ παραλλ-
λόγραμμη ΡΝΑΓ, ΔΤΤΓ, ὧν αἱ περὶ τὴν πρὸς

τὸ Γ. κοινὴν γωνίαν πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν, ἴσα
ἔσιν ἀλλήλοις (128).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Ἄρα ἐ τὰ τρίγωνα ΓΡΝ, ΡΤΤ, ἅπερ ἔσιν
ἡμίσεα αὐτῶν τῶν παραλληλογράμμων, ἴσα ἔσιν
ἀλλήλοις.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ὅθεν ὁ λόγος τῶν τεταγμένων μὲν ἐπὶ τὴν
μίαν τῶν ἀσυμπτῶτων, παραλλήλων δὲ τῇ ἐτέρᾳ,
τέτ' ἐστὶ τῶν ΝΡ, ΤΤ ἔσιν ὁ αὐτὸς τῷ λόγῳ τῶν
αὐτῶν ἀπὸ τῆς κέντρου ἀποστάσεως ἀντιπεπονθειῶν
ΓΤ, ΓΡ. Ἰσα γὰρ ἔσιν ἀλλήλοις ἐκεῖνα τὰ ὀρ-
θογώνια ἢ παραλλόγραμμα, ἢ ἐ τὰ ἀνωτέρω ῥη-
θέντα τρίγωνα, ὧν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευ-
ραὶ ἀντιπεπόνθασιν (14 τῆς').

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Ἀχθεῖσθων τῶν ἐφαπτομένων ΠΝΜ, ΗΤΘ

128) Ἐπεί ἐστιν ἐκ τῆς παρέσης Προτάσεως τὸ
ὀρθογώνιον $ΡΝΛ =$ τῷ $ΔΥΤ$, ἔσεται (2. μερ. τῆς 16.
τῆς'). $ΡΝ : ΔΥ = ΥΤ : ΑΝ$ · ἢ $ΛΓ : ΓΙ = ΓΔ : ΓΡ$. Καὶ
ἐπεὶ ἡ πρὸς τῇ τὸ Γ γωνία ἐστὶ κοινὴ ἐκατέρῳ τῶν πα-
ραλληλογράμμων $ΑΡ$, $ΤΔ$ · ἄρα (2. μερ. 14. τῆς')
τὸ παραλλόγραμμον $ΑΡ =$ τῷ παραλλόγραμμῳ
 $ΤΔ$.

ἕως τῶν ἀσυμπτῶτων, αἶγε δίχα κατὰ τὰ σημεῖα
τῆς ἀφῆς N , T τμηθῇσονται (Προτ. ΛΗ΄.), οἷα-
δήποτε τρίγωνα ἐν τῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ὑπὸ
τῶν ἀσυμπτῶτων καὶ τῆς τομῆς ἐγγεγραμμένα τὰ
 $\Gamma\text{Π}\text{Μ}$, $\Gamma\text{Η}\Theta$ ἔσεται ἀλλήλοις ἴσα. Διπλάσια γὰρ
ἐστὶ τῶν ἴσων ἀλλήλοις παραλληλογράμμων $\text{Ρ}\text{Ν}\text{Α}$,
 $\text{Τ}\text{Τ}\Delta$ (129) ἢ τετραπλάσια τῶν τριγώνων $\Gamma\text{Ν}\Pi$,
 $\Phi\text{Τ}\text{Τ}$ (34 τῆς Α΄.).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε΄.

Τὰ μικτόγραμμα τετράπλευρα $\text{Ρ}\text{Ν}\text{Τ}\text{Τ}$,
 $\text{Α}\text{Ν}\text{Τ}\Delta$, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. Ἰσῶν γὰρ ὄντων ἀλ-
λήλοις τῶν παραλληλογράμμων $\text{Τ}\text{Τ}\Delta$, $\text{Ρ}\text{Ν}\text{Α}$ ἀρ-

129) Τὸ τρίγωνον $\Gamma\text{Π}\text{Ν} = 2\Gamma\text{Ρ}\text{Ν}\text{Α} = 4\Gamma\text{Ν}\text{Ρ}$. Ἐπεὶ
γὰρ ἡ $\text{Α}\text{Ν}$ παράλληλος τῇ $\text{Π}\Gamma$, ἄρα ἡ ὑπὸ $\text{Μ}\text{Ν}\text{Α} =$
τῇ ὑπὸ ΝΠΡ . διὰ δὲ τὸν αὐτοῦ λόγον καὶ ἡ ὑπὸ $\text{ΠΡ}\text{Ν}$
 $=$ τῇ ὑπὸ $\text{Ρ}\Gamma\text{Α} =$ τῇ ὑπὸ $\text{Μ}\text{Α}\text{Ν}$. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ πλει-
οῦρά $\text{Π}\text{Ν} =$ τῇ πλευρᾷ $\text{Ν}\text{Μ}$, ἄρα τὸ τρίγωνον $\text{Π}\text{Ν}\text{Ρ} =$
τῷ $\text{Μ}\text{Ν}\text{Α}$ (26. τῆς Α΄.) Ἀλλὰ τὸ $\text{Μ}\text{Ν}\text{Α} =$ τῷ $\Gamma\text{Ν}\text{Α}$.
ἔσῶν γὰρ τῶν $\text{Ν}\text{Α}$, $\text{Π}\Gamma$ παράλληλων, ἐστὶ $\text{Π}\text{Ν} : \text{Ν}\text{Μ} =$
 $\Gamma\text{Α} : \text{Α}\text{Μ}$, καὶ $\Gamma\text{Α} = \text{Α}\text{Μ}$ ὅτι καὶ $\text{Π}\text{Ν} = \text{Ν}\text{Μ}$. Ὅθεν τὰ
τρίγωνα $\Gamma\text{Ν}\text{Α}$, $\text{Μ}\text{Ν}\text{Α}$, ὄντα ἐπὶ ἴσων βάσεων καὶ ἐν ταῖς
αὐταῖς παράλληλοις $\Gamma\text{Μ}$, $\text{Ρ}\text{Ν}$ ἐστὶν ἴσα (38. τῆς Α΄.) Τὰ
τρίγωνα ἄρα $\text{Π}\text{Ν}\text{Ρ}$, $\text{Ρ}\text{Ν}\Gamma$, $\Gamma\text{Ν}\text{Α}$, $\text{Μ}\text{Ν}\text{Α}$ ἴσα ἐστὶν ἀλ-
λήλοις. Τὸ ἄρα $\Gamma\text{Π}\text{Μ}$, ὅπερ ἐξισᾶται τοῖς ἴσοις τετοιῖσι
τριγώνοις ἅμα λεηθεῖσιν, ἔσται τετραπλάσιον ἑνὸς τινος
τῶν τῶν $\Gamma\text{Ν}\text{Ρ}$, ἢ διπλάσιον τῆς παραλληλογράμμου
 $\Gamma\text{Ρ}\text{Ν}\text{Α}$. τῇ δ' αὐτῇ ἐφόδῳ δειχθήσεται καὶ τὸ τρίγωνον
 $\Gamma\text{Η}\Theta = \Gamma\Upsilon\text{Τ} = \angle\text{Γ}\Upsilon\Delta$.

Θέντος κοινῇ τῷ ΓΡΧΔ, ἔσαι τὸ ΤΤΧΡ ἴσον τῷ
ΑΝΧΔ, ἢ προσκειμένῃ ἐκατέρῳ τούτων τῷ ΤΧΝ,
τὸ ΡΝΤΤ ἴσον εἶσι τῷ ΑΝΤΔ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Σ'.

Καὶ Ὑπερβολικὸς τομεὺς ΓΤΝ ἐξισύται οἰωδῇ-
τινι τῶν εἰρημένων τετραπλεύρων ΝΡΤΤ, ἢ ΑΝΤΔ.
Οὐτῶν γὰρ τῶν τριγώνων ΓΡΝ, ΓΤΤ ἴσων ἀλ-
λήλοις (Πορ. Β'.) ὁρθέντος ἐκατέρωθεν τῷ τριγώ-
νῳ ΓΡΦ, ἔσεται τὸ τραπέζιον ΤΤΡΦ· ἴσον τῷ τρι-
γώνῳ ΦΓΝ, ἢ προσκειμένῃ τῷ τριπλείρῳ ΤΦΝ,
γίνεται ὁ τομεὺς ΤΓΝ ἴσος τῷ ΡΝΤΤ, ἢ τῷ αὐ-
τῷ ἴσῳ ΑΝΤΔ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Μ Α'.

Εἰὰν μεταξὺ δυεῖν Ὑπερβολῶν ΝΥ, ΘΗ Σχημ. 109.
μὴ κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κειμένων,
ὥσιν ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΖ, ΓΤ, τὰς ἐφε-
ξῆς γωνίας ΑΓΤ, ΤΓΖ δυσὶν ὀρθαῖς
ἴσας ποιῆσαι. Παράλληλοι δὲ τῇ μιᾷ
τῶν ἀσυμπτῶτων αἱ ΝΗ, ΥΘ τέμνω-
σι τὰς καμπύλας ταύτας. Αὗται δὲ
αἱ τέμνεσαι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὑπὸ
τῆς ἑτέρας τῶν ἀσυμπτῶτων κατὰ τὰ
σημεῖα Ρ, Τ τμηθήσονται.

Ταχθεῖσθαι γὰρ ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον ΓΤ αἱ εὐθεῖαι ΝΡ, ΤΤ, ἔσονται ἐν λόγῳ ἀντιπεπώνυδοι τῶν αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ ἀποστάσεων ΓΤ, ΓΡ (Πορ. Γ'. τῆς Μ'). Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ εἰσι καὶ αἱ τεταγμέναι ΗΡ, ΘΤ. Ὡς ἀρα ἡ ΝΡ πρὸς ΤΤ, οὕτως ἡ ΗΡ πρὸς ΘΤ. Ἐναλλάττοντι δὲ ὡς ἡ ΝΡ πρὸς ΗΡ, ἔτις ἡ ΤΤ πρὸς ΘΤ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ὅθεν τὸ τετράπλευρον ΡΝΤΤ πρὸς τὸ τετράπλευρον ΗΡΤΘ, ἔσεται αἰεὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῷ τῆς ΝΡ πρὸς τὴν ΡΗ. Πᾶσαι γὰρ αἱ ἐκατέρωθεν παρὰ τὰς ΝΡ, ΡΗ τεταγμέναι εἰσὶν αἰεὶ ἐν λόγῳ δοθέντι (12 τῆς Ε').

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Καὶ ἐπιζευχθεῖσθαι ἐπὶ τὸ κέντρον Γ τῶν εὐθειῶν ΝΓ, ΤΓ καὶ ΘΓ, ΗΓ, ἔσονται ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ καὶ οἱ τομεῖς ΟΓΛ, ΗΓΘ, ὡς ἴσοι τοῖς ῥηθεῖσι τετραπλεύροις (Πορισ. ζ'. τῆς προηγουμένης).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ἐὰν ἀπὸ τῶν σημείων Ν, Η ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῶν ὑπερβολῶν ἕως τῶν ἀσύμπτωτων προεκβαλλόμεναι, ὥστε τῆς ΝΗ παραλλήλη τῇ ἀσύμπτωτῳ ΑΓΖ. Αἱ ἐφαπτόμεναι κατὰ τὸ αὐτὸ

σημείον T τῆς ἐτέρας ἀσυμπτώτου ἀλλήλαις συνε-
λεύσανται. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ZH ἐστὶν ἴση τῇ HT , καὶ
ἡ GP ἴση ἔσται τῇ PT (ὅσων γὰρ τῶν εὐθειῶν
 ZF , HP παραλλήλων, ἐστὶν $ZH:HT=GP:PT$).
Καὶ προσέτι ἐπεὶ ἡ AN ἐστὶν ἴση τῇ NT , ἴση ἄ-
ρα ἔσται καὶ ἡ GP τῇ αὐτῇ PT . Ἐκατέρωθεν ἄρα
ἡ PT ἀποφέρεται ἴση τῇ EP . Τὸ σημεῖον ἄρα T ,
καθ' ὃ αἱ δύο ἐφαπτόμεναι συνέρχονται ἀλλήλαις,
ἐν ἐστὶ καὶ ταῦτόν.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Καὶ εἰν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου T τῆς μιᾶς τῶν
ἀσυμπτῶτων, ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῶν ὑπερβολῶν
αἱ THZ , TNA , ἡ ἐπιζευγνύσα τὰ τῆς ἀφῆς ση-
μεῖα N , H , ἔσεται τῇ ἐτέρᾳ ἀσυμπτῶτῳ AGZ
παράλληλος. Ἐκατέρα γὰρ τῶν ἐφαπτομένων τέ-
των δίχα τέτμηται κατὰ τὰ σημεία τῆς ἀφῆς N ,
 H . Ὅθεν αἱ πλευраὶ TZ , TA ἀνάλογον τέμνον-
ται ὑπὸ τῆς εὐθείας ἐκείνης HN . Ἐστὶν ἄρα ἡ HN
παράλληλος τῇ βάσει AZ (2 τοῦ 5.).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε'.

Τὰ δ' αὐτῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ἀπὸ τῶν ἀ-
συμπτῶτων καὶ τῆς τομῆς ἐγγεγραμμένα τρίγω-
να $ΓΑΤ$, $ΓΤΖ$ ἔσεται αἰ ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ
 NP πρὸς PH . Ὅντα γὰρ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλ-
λήλοις, ἔσεται πρὸς ἀλλήλα, ὡς αἱ αὐτῶν βά-

σεις ΓΑ, ΓΖ (1 τῷ 5'), αἰτίνες εἰσιν ὡς αἱ ΝΡ, ΡΗ (Πορ. 2 τῆς 4 τῷ 5'). Τὸ αὐτὸ δὴ τῦτο συμβαίνει καὶ τοῖς μὴ ἐν τῷ αὐτῷ σημείῳ συνερχόμενοις τριγώνοις. Τὰ γὰρ ἐν οἰωδῇ ποτε ἀσύμπτωτικῷ χωρίῳ τῆς αὐτῆς Ὑπερβολῆς, ὑπὸ τῶν αὐτῆς ἐφαπτομένων ἐγγεγραμμένα τρίγωνα, ἴσα εἰσιν ἀλλήλοις (Πέρισμ. Δ' τῆς Μ').

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΒ'.

Σχημ. 110. ^{111.} Ε'ὰν περὶ τὴν δευτέραν διάμετρον ΗΙ, ἣτις ἐστὶ συζυγὴς τῇ πρώτῃ πλαγίᾳ ΝΞ, γραφῶσι δύο ἀντικείμεναι Ὑπερβολαὶ αἱ ΗΚ, ΙΕ, ὧν ἀμοιβαδὸν δευτέρα διάμετρος ἔσω ἢ ΝΞ, αἱ τῶν τεσσάρων τῦτων τομῶν ἀσύμπτωτοι ἔσονται κοιναί.

Ἀχθεῖσῶν τῶν ἐφαπτομένων ΝΤ, ΙΤ, αἰτίνες συμβαλῶσιν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Τ, καὶ ἔσονται ταῖς ἐπὶ τὰς διαμέτρους ΝΞ, ΗΙ τεταγμέναις παράλληλοι, ἐπομένως δὲ καὶ ταῖς συζυγέσιν ἡμιδιαμέτροις ΓΙ, ΓΝ. Ε'πιζευχθεῖσα ἡ ΓΤ, ἔσται κοινὴ ἀσύμπτωτος ἑκατέρᾳ τῶν Ὑπερβολῶν ΝΤ, ΙΕ. Ε'πεὶ γὰρ τὸ σχῆμα ΓΝΤΙ ἐστὶ παραλληλόγραμμον, τὸ ἀπὸ τῆς ΝΤ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΙ, τὸ δ' ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΕΝ καὶ τῆς κατ' αὐτὴν

ὀρθίας περιεχομένε ὀρθογωνίῳ. Ὡς αὐτως ἡ ἐφαπτομένη IT , ἣτις ἐστὶν ἴση τῇ συζυγεὶ ἡμιδιαμέτρῳ GN τῆς ἐτέρας Ὑπερβολῆς, περιέχει τετράγωνον ἴσον τεταρτημορίῳ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς HI καὶ τῆς αὐτῇ συσφιχθείσης ὀρθίας περιεχομένε ὀρθογωνίῳ. Ὡς αὐτως ἀχθείσης τῆς HA , ἣτις ἀφάπτοιτο τῆς ἐτέρας ἀντικειμένης Ὑπερβολῆς HK , καὶ προαχθείσης τῆς ἐφαπτομένης TN , ἕως ὅς συμπίσῃ τῇ HA κατὰ τὸ A , τὸ σχῆμα $HANT$ ἔσται παραλληλόγραμμον, καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι MA , HA ἔσονται ἴσαι ταῖς συζυγέσιν ἡμιδιαμέτροις GH , GN ὡς ἀντικειμέναις πλευραῖς ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ. Ὅθεν ἀχθεῖσα καὶ ἡ GA , ἔσεται κοινὴ ἀσύμπτωτος ἐκατέρᾳ τῶν Ὑπερβολῶν TN , KH (Προτ. $\Lambda Z'$). Ἐνθεντοὶ αἱ TGX , AGZ εἰσὶ κοιναὶ ἀσύμπτωτοι τῶν τεσσάρων Ὑπερβολῶν. Αἶγε πρὸς ἀλλήλαις καλειώδων συζυγεῖς, ἢ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι (130).

130) Ἐπεὶ δίδεικται ὅτι $AN=HI=GI=NT$, ἄρα ὥσπερ τὸ ἀπὸ τῆς NT τετράγωνον ἐστὶν ἴσον τεταρτημορίῳ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας NZ καὶ τῆς κατ' αὐτὴν παραμέτρου περιεχομένε ὀρθογωνίῳ, ἔτι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AN ἔσται ἴσον τεταρτημορίῳ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας EN , καὶ τῆς κατ' αὐτὴν παραμέτρου περιεχομένε ὀρθογωνίῳ. Ἀρα καὶ GP , GA ἔσονται ἀσύμπτωτοι τῆς Ὑπερβολῆς NY ($\Lambda Z'$ Προτασ.). Ὡς αὐτὰς ἐπεὶ $HA=GN=GE=HX$. ἄρα ὡς $HA=GN$ τὸ τεταρτημορίῳ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας HI καὶ τῆς κατ' αὐτὴν ἀρκμέτρου περιεχομένε ὀρθο-

ΠΟΨΙΣΜΑ Α΄.

Ἡ ἐπιζευγῦσα τὰ σημεῖα τῆς ἀφῆς ΝΙ,
ὡς ἔσα διάμετρος τῷ παραλληλογράμῳ ΓΝΤΙ,
δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ἀσυμπτώσε ΓΤ κατὰ τὸ
Ρ. Ἐπειὶ ἡ ΓΤ ἐστὶν ἑτέρα διάμετρος τῷ αὐτῷ πα-
ραλληλογράμῳ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Καὶ ἐπεὶ δὴ ἡ ΝΙ ἐστὶ παράλληλος τῇ ἐτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ ΑΖ (Πορ. Δ'. τῆς προηγουμένης), ἄρα καὶ οἰαδῆτις ἄλλη εὐθεῖα ΤΕ ἐπιζευγνύσῃ τὰ σημεῖα τῆς ἀφῆς, ἐτέρων ἐφαπτομένων ΠΕ, ΠΤ ἀπὸ τῆ αὐτῆς σημείου Π τῆς κοινῆς ἀσυμπτώτου ἀχθεισῶν, παράλληλος ἔσται τῇ ΑΖ (131), καὶ διχατμηθήσεται καὶ αὕτη κατὰ τὸ Φ. Οὕσῶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῶν ΝΡ πρὸς ΡΙ, καὶ ΤΦ πρὸς ΦΕ (Προτ. ΜΑ').

γαυία, ἔτι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ HX ἱξισῆται τῷ αὐτῷ ὀρθο-
γαυίῳ. Διὰ δὲ ταῦτα (κατὰ τὴν αὐτὴν $\Lambda Z'$.) αἱ εὐθεῖαι
 $\Pi\Gamma X$, $\Lambda\Gamma Z$ ἴσονται ἀσύμπτωτοι τῶν ὑπερβολικῶν το-
μῶν HK , NY . ἄρα (Πορ. A . τῆς $\Lambda Z'$.) αἱ αὐταὶ εὐ-
θεῖαι ἴσονται ἀσύμπτωτοι καὶ τῶν Ὑπερβολῶν EI , $\Xi\Theta$.

131) Η' εὐδεια *ΥΕ* ὅτι ἐστὶ παράλληλος τῇ ἀσυμ-
πτῳτῳ *ΑΖ* δὴλον ἐντεῦθεν. Ἐ'πεὶ γὰρ (Προτ. ΑΗ'.)
ΠΥ=ΥΛ, καὶ *ΠΕ=ΕΜ*, ἄρα *ΠΥ:ΥΛ=ΠΕ:ΕΜ*, καὶ
ἐπομένως (ι. τῇ ζ'.) ἡ *ΑΖ* παράλληλος τῇ *ΥΕ*.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ.

Εἴπει δὲ ἡ $\Gamma\Pi$ δίχα ἐστὶ τετμημένη κατὰ τὸ Φ , ὥσπερ δὴ ἡ ἐφαπτομένη $\Pi\epsilon\mu$ κατὰ τὸ ϵ , (Προτ. ΑΗ΄.) αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰς ἀφ᾽ ἑαυτῶν ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι $\Gamma\epsilon$, $\Gamma\tau$ παράλληλοι ἔσονται ταῖς ἐφαπτομέναις $\Pi\tau$, $\Pi\epsilon$ (132). Ὅθεν ἔσονται συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι τῶν ὑπερβολῶν τῶν. Ἐπειδὴ ἡ $\Pi\epsilon$ ἐξισῆται τῇ αὐτῆς παραλλήλῳ $\Gamma\tau$, ἡ $\Pi\tau$ τῇ παραλλήλῳ $\Gamma\epsilon$. Ὅθεν ἡ $\Gamma\tau$ παράλληλός ἐστι ταῖς ἐπὶ τὴν διάμετρον $\Gamma\epsilon$ τεταγμέναις, ἡ $\Gamma\epsilon$ τῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον $\Gamma\tau$.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ΄.

Τὰ δὴ παραλληλόγραμμα ταῦτα $\Gamma\Nu\tau$, $\Gamma\tau\Pi\epsilon$, αἶ ἐστὶν ἀλλήλοισι ἴσα. Ἰσὼν ὄντων ἀλλήλοισι ἡ τῶν τριγώνων $\Gamma\Nu\rho$, $\Gamma\tau\Phi$ (Πορ. Β΄. τῆς Μ΄.), ἅτινά ἐστι τεταρτημόρια τῶν αὐτῶν.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε΄.

Καὶ ὁποιοῦνδήποτε παραλληλόγραμμον $\Pi\Lambda\sigma\mu$ (ἢ $\rho\Lambda\sigma\mu$ ἐν τῷ 111 σχήματι) ἐν ταῖς ταύταις

132) Ἐπει $\Gamma\Phi = \Phi\Pi$, ἡ $\Upsilon\Phi = \Phi\epsilon$ (Πορ. Β΄), ἄρα $\Gamma\Phi : \Phi\Gamma = \Phi\epsilon : \epsilon\Pi$. ἄρα (6. τοῦ 5.) τὰ τρίγωνα $\Gamma\Upsilon\Phi$, $\epsilon\Phi\Pi$ ὅμοια, ἡ αἱ γωνίαι $\Upsilon\Gamma\Phi$, $\Phi\Pi\epsilon$, ἡ αἱ $\Gamma\Upsilon\Phi$, $\Pi\epsilon\Phi$, ἴσαι. Τοιγαρὲν (28. τοῦ Α΄.) αἱ εὐθεῖαι $\Gamma\epsilon$, $\Gamma\Lambda$ εἰσὶ παράλληλοι ταῖς $\Pi\Lambda$, $\Pi\epsilon$.

Ἐπερβολαῖς ἐγγεγραμμένον ἐ ταῖς πρὸς τοῖς πέ-
 ρασιν τῶν συζυγῶν διαμέτρων ἀχθεύσαις ἐφαπτο-
 μέναις περατύμενον, ἀξιωθήσεται οἰωδῆποτε πα-
 ραλληλογράμμῳ ΑΤΖΧ, ἐτέραις ἐφαπτομέναις
 πρὸς τοῖς πέρασιν ἐτέρων συζυγῶν διαμέτρων ἀχ-
 θεύσαις περατύμενῳ. Τὰ γὰρ παραλληλόγραμμα
 ταῦτα ἔσται τετραπλάσια τῶν ἴσων τριγώνων
 ΓΛΠ (ἢ ΓΛΡ ἐν τῷ 111 σχήματι), ΓΑΤ (Πορ.
 Δ'. τῆς Μ'), ἢ τῶν ἴσων παραλληλογράμμων
 ΓΤΠΕ (ἢ ΓΤΡΕ τῷ 111 σχήματι) ΓΝΤΙ (Πορ.
 Δ'. τῆς ΜΒ').

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Σ'.

Ἐπιζευχθεῖσιν δὲ τῶν πρὸς τοῖς πέρασιν τῶν
 συζυγῶν διαμέτρων ἐπαφῶν, ἀναφύεται τὸ πα-
 ραλληλόγραμμον ΚΤΕΘ, ἴσον τῷ ἐτέρῳ ΗΝΙΞ.
 Ἐστὶ γὰρ τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα ἡμίσεα
 τῶν ἐτέρων ΡΛΣΜ, ΑΤΖΧ ἀλλήλοις ἴσων. Εἴ-
 γε ἐ ταῖς τρίγωνοις ΓΝΙ, ΓΤΕ ἅπερ ἐστὶ τεταρτη-
 μόρια τῶν εἰρημένων παραλληλογράμμων ΚΤΕΘ,
 ΗΝΙΞ, ἡμίσεά ἐστι τῶν παραλληλογράμμων ΓΝΤΙ,
 ΓΤΡΕ, ἅπερ ἐστὶ τεταρτημόρια τῶν ΡΛΣΜ, ΑΤΖΧ
 (133).

133) Ὅτι δὲ τὰ σχήματα ΚΥΕΘ, ΗΝΙΞ εἰσι πα-
 ραλληλόγραμμοι δῆλον ἐκ τούτου. Αἱ γὰρ εὐθεῖαι ΥΕ,
 ΝΙ εἰσι παράλληλοι τῇ ἀσυμπτῳτῳ ΑΖ (Πορ. Δ'. τῆς
 ΜΑ'), ἥτις κατὰ τὸ αὐτὸ Πόρισμα εἰσι παράλληλοι ταῖς

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΓ΄.

Εν δὲ τῇ Ε'λείπει τὰ ὑπὸ τῶν πρὸς σχημ. 1
τοῖς πέρασι δυὲν συζυγῶν διαμέτρων Πιν. 1
ΘΥ, ΚΕ. ἢ ΝΞ, ΗΙ ἀχθείσων ἐ-
φαπτομένων περιεχόμενα παραλληλό-
γραμμα ΡΛΣΜ, ΑΤΖΧ α'εἰ ἔσαι ἀλ-
λήλοις ἴσα. Καὶ δὴ καὶ τὰ εἰς τὴν αὐ-
τὴν Ε'λείπιν ἐγγεγραμμένα παραλλη-
λόγραμμα ΚΥΕΘ, ΗΝΙΞ, α' ταῖς τὰ
πέρατα δεῦν συζυγῶν διαμέτρων ἐπι-
ζευγνύσαις εὐθείαις περατῶται, ἴσα ἔ-
σαι ἀλλήλοις.

Ε'πεξεύχθω γὰρ δύο σημεῖα τυχόντα τὰ Υ,
Ι, καὶ διὰ μὲν τῷ Υ τετάχθω ἐπὶ τὴν διάμετρον
ΝΞ ἢ εὐθεῖα ΥΠ τέμνουσα τὴν ἐφαπτομένην ΙΥ
κατὰ τὸ Φ· διὰ δὲ τῷ Ι τετάχθω ἐπὶ τὴν διά-
μετρον ΕΚ ἢ εὐθεῖα ΙΒ συμβάλλουσα τῇ ἐφαπτο-
μένην ΥΡ κατὰ τὸ Ο, καὶ ἔσεται δὴ τὸ παραλλη-
λόγραμμον ΓΥΟΒ, ἴσον τῷ ἑτέρῳ ΓΠΦΙ. Ε'κά-

τὰ σημεῖα τῆς ἀφῆς ἐπιζευγνύσαις ΗΞ, ΚΘ. Ὅθεν
αἱ ΥΕ, ΚΘ, καὶ ΗΞ, ΝΙ εἰσι παράλληλοι. Τὸν αὐτὸν
δὲ τρόπον δευχθήσονται καὶ αἱ ΚΥ, ΘΕ, καὶ ΗΝ, ΞΙ,
ἵναὶ ἀλλήλαις παράλληλοι. Τὰ ἄρα ΚΥΕΘ, ΗΝΙΞ
εἰσι παραλληλόγραμμα.

τερον γὰρ (41 τῆ Α΄.) διπλάσιόν ἐστι τῆ εἰς αὐτὰ
 ἐγγεγραμμένον τριγώνου ΓΤΙ (Ἐστὶ γὰρ τὸ πα-
 ραλληλόγραμμον ΓΤΟΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΓΤΙ ἐπὶ
 τῆς αὐτῆς βάσεως ΓΤ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλ-
 λήλοις ΓΤ, ΒΟ. Ὡσαύτως τὸ αὐτὸ τρίγωνον ΓΤΙ
 καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΓΠΦΙ εἰν ἐπὶ τῆς αὐ-
 τῆς βάσεως ΓΙ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΓΙ,
 ΠΦ. Ἐκότερον ἄρα τῶν παραλληλογράμμων δι-
 πλάσιόν ἐστι τῆ τριγώνου ΓΤΙ, ὅθεν $\Gamma\text{ΤΟΒ} = \Gamma\text{ΠΦΙ}$)
 Ἀλλὰ συνελθούσης τῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΕ τῇ ἐφα-
 πτομένῃ ΙΖ κατὰ τὸ σημεῖον Δ, τῆς τε ΓΝ τῇ
 ΤΛ κατὰ τὸ Ψ, καὶ δὴ καὶ τῶν ἐφαπτομένων ΤΛ,
 ΙΔ ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ω, εἰν ὡς τὸ παραλλη-
 λόγραμμον ΔΓΨΩ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον
 ΓΕΡΤ, ὅτω τὸ αὐτὸ ΓΕΡΤ πρὸς τὸ ΓΤΟΒ. Ἐ-
 χει γὰρ τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα τὸ αὐτὸ ὕ-
 ψος καὶ τὰς βάσεις ΓΔ, ΓΕ, ΓΒ συνεχῶς ἀνά-
 λογον (Πορ. Β΄. τῆς Θ΄.) καὶ ὡς τὸ αὐτὸ ΔΓΨΩ
 πρὸς τὸ ΓΝΤΙ, ὅτω τὸ αὐτὸ ΓΝΤΙ πρὸς τὸ ΓΠΦΙ.
 Ἐχει γὰρ καὶ ταῦτα τότε ὕψος ταῦτὸ καὶ τὰς βά-
 σεως ΓΨ, ΓΝ, ΓΠ συνεχῶς ἀνάλογον (κατὰ τὸ
 αὐτὸ Πόρισμα). Ἐστὶν ἄρα μεταξὺ τῆ ΔΓΨΩ καὶ
 τῆ ΓΤΟΒ, ἢ τῆ αὐτῇ ἴσιν ΓΠΙ μέσον ἀνάλογον
 τότε ΓΕΡΤ, καὶ τὸ ΓΝΤΙ. Τοιγαρὺν τὸ ΓΕΡΤ
 ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝΤΙ. Ἐστὶ δὲ ταῦτα τεταρτημέρια
 τῶν παραλληλογράμμων ΡΑΣΜ, ΑΤΖΧ, ἄρα
 καὶ ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις, ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον. Τὰ
 δὲ λοιπὰ ΚΤΕΘ, ΗΝΙΞ, ἅπερ ἐγγέγραπται εἰς

τὴν Ε'Μειψιν, εἰσὶν ἡμίσεα τῶν εἰρημένων ΡΑΣΜ, ΑΤΖΧ (εἶγε τὸ τρίγωνον ΓΕΤ ἡμισύ ἐστι τῆ παραλληλογράμμου ΓΕΡΤ, τότε ΓΝΙ τῆ ΓΝΤΙ, ἅπερ τρίγωνα ἐστὶ τεταρτημόρια τῶν εἰρημένων παραλληλογράμμων τῶν εἰς τὴν Ε'Μειψιν ἐγγεγραμμένων). ἄρα καὶ ταῦτα τὰ εἰς τὴν Ε'Μειψιν ἐγγεγραμμένα παραλληλόγραμμά ἐστιν ἀλλήλοις ἴσα, ὥσπερ δὴ καὶ ἕτερά ἅττα περιγεγραμμένα. ὁπερ εἶδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Δῆλον δ' ὅτι ἡ ΓΕ τέτμηται κατὰ τὸ Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἐν ᾧ ἡ ΓΝ κατὰ τὸ Π. Ἐστὶ γὰρ ὡς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΓΦΩ πρὸς τὸ ΓΤΟΒ, ἔτω τὸ αὐτὸ ΔΓΦΩ πρὸς τὸ ΓΠΦΙ (= τῷ ΓΤΟΒ). Α'λλ' ὡς μὲν τὸ ΔΓΦΩ πρὸς τὸ ΓΤΟΒ, ἔτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΒ, (1 τῆς.) ὡς δὲ τὸ ΔΓΦΩ πρὸς τὸ ΓΠΦΙ, ἔτως ἡ ΓΦ πρὸς τὴν ΓΠ (διὰ τὸν αὐτὸν λόγον), ἄρα ὁ λόγος τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΓΒ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ λόγῳ τῆς ΓΦ πρὸς τὴν ΓΠ. Α'λλὰ τῶν λόγων τούτων ὁ μὲν πρῶτος ἐστὶ διπλασίων τῆς λόγου τῆς ΓΕ πρὸς ΓΒ, ὁ δὲ δεύτερος διπλασίων τῆς ΓΝ πρὸς ΓΠ (ἔσῳ τῶν ΓΔ, ΓΕ, ΓΒ, καὶ τῶν ΓΦ, ΓΝ, ΓΠ συνεχῶς ἀνάλογον), ἄρα ὁ λόγος τῆς ΓΕ πρὸς τὴν ΓΒ ἐστὶν ἴσος τῷ λόγῳ τῆς ΓΝ πρὸς τὴν ΓΠ. Ὅσακις ἄρα ἂν ᾧσι δύο ζεύγη συζυγῶν διαμέτρων ΚΕ, ΤΘ

ἢ ΝΖ, ΗΙ· ἀπὸ δὲ τοῦ πέρατος Τ τῆς μιᾶς τοῦ
ἐνὸς ζεύγους ΤΘ ἀχθῆ τεταγμένη ἐπὶ τὴν μίαν
τοῦ ἑτέρου ζεύγους ΝΞ ἢ ΤΠ, ἢ ἀπὸ τοῦ πέρατος Ι
τῆς ἑτέρας τοῦ ζεύγους τούτου ταχθῆ τῇ ἑτέρα τοῦ
ζεύγους ἐκείνου ΚΕ, ἢ ΙΒ, αὗται δὲ αἱ τεταγμέ-
ναι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τεμῶσι τὰς διαμέτρους ΝΞ,
ΚΕ, ἐφ' ἃς τεταγμένως κατήχθησαν. Εἶγε (ἐ-
πεὶ ἐστὶ $ΓΕ:ΓΒ=ΓΝ:ΓΠ$) εἰσιν ὡς ἡ ΓΞ διπλα-
σία τῆς ΓΝ, πρὸς τὴν ΓΠ, ἔτως ἡ ΚΕ διπλα-
σία τῆς ΓΕ πρὸς τὴν ΓΒ, ἢ λαπὴ ἢ ΠΝ πρὸς
λοιπὴν τὴν ΒΕ (134).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Εἰάν ἐτι ἀπὸ τῶν τερμάτων Ν, Ι ἑκατέρας
τῶν συζυγῶν διαμέτρων ταχθῶσιν ἐπὶ τὰς λοι-
πὰς συζυγεῖς διαμέτρους αἱ Νη, ΙΒ, αἱ διαμέτροι
αὗται ΤΘ, ΕΚ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τμηθήσονται
κατὰ τὰ σημεῖα η, Β. Ἔσται γὰρ ἡ ΤΓ πρὸς Γη,
ὡς ἡ ΓΦ πρὸς ΓΝ (τεταγμένη γὰρ ἔσται ἡ Νη,
ἐστὶ τῇ ἐφαπτομένῃ ΤΦ παράλληλος)· ὁθεν ἢ ὡς
ἡ ΓΝ πρὸς ΓΠ (Πορ. Β' τῆς Θ'.) ἢ ἡ ΓΕ πρὸς
ΓΒ (Πορ. προηγ.). Ἐνθεντοὶ ἡ ΓΤ πρὸς Γη, ὡς
ἡ ΕΓ πρὸς ΓΒ, ἢ ἡ ΤΓ πρὸς λοιπὴν τὴν Τη,
ὡς αὐτὴ ἡ ΓΤ πρὸς λοιπὴν τὴν ΕΒ (19 τοῦ Ε').

134) Ἐπειδὴ $ΝΞ:ΚΕ=ΓΝ:ΓΕ$ ἢ $ΓΞ:ΓΝ=$
 $ΚΕ:ΓΕ$, ἢ $ΝΞ:ΓΠ=ΚΕ:ΓΒ$, ἴσεται (19. τοῦ Ε'.)
 $ΝΞ:ΠΝ=ΚΕ:ΒΕ$.

καὶ διπλασιαζέντων μὲν τῶν ἡγυμένων ὡς ἡ $\Theta\Gamma$
πρὸς $\Gamma\eta$, οὕτως ἡ ΚΕ πρὸς ΕΒ . διελόντι δὲ, ὡς
ἡ $\Theta\eta$ πρὸς $\eta\Gamma$, ἔτως ἡ ΚΒ πρὸς ΒΕ .

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ἔσεται ἄρα τὰ ὀρθογώνια $\Theta\eta\Gamma$, ΚΒΕ , ὡς
τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν $\Gamma\Gamma$, $\Gamma\text{Ε}$. ἢ ὡς τὰ
ἀπὸ τῶν $\Theta\Gamma$, ΚΕ (135). Καὶ ὡς ἡ πλαγία
πλευρὰ $\Theta\Gamma$ πρὸς τὴν αὐτῆς Παράμετρον (μετὰ τὸ
 Β' . Πόρισμα τῆς ΙΒ'), ἢ ὡς τὸ ὀρθογώνιον $\Theta\eta\Gamma$
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Νη τετράγωνον (Πορ. Β' . τῆς
 Ις'), ἢ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΙΒ τετράγωνον πρὸς τὸ
ὀρθογώνιον ΚΒΕ (135). Ἔστιν ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ τῆς
 Νη τετράγωνον ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ ΚΒΕ . τὸ δὲ
ἀπὸ τῆς ΙΒ ἴσον τῷ $\Theta\eta\Gamma$ ὀρθογωνίῳ.

135) Ἐκ τῆ προηγουμένης Πορίσματος ἐστὶ $\Theta\eta : \eta\Gamma$
 $= \text{ΚΒ} : \text{ΒΕ}$, ἢ $\eta\Gamma : \text{ΒΕ} = \Theta\eta : \text{ΚΒ}$. ἴσι δὲ ἐκ τῆ αὐτῆς
Πορίσματος καὶ $\Upsilon\Gamma : \Upsilon\eta = \Gamma\text{Ε} : \text{ΕΒ}$, ἢ $\Upsilon\Gamma : \Gamma\eta$
 $= \text{ΕΒ} : \text{ΕΒ}$. ἄρα

$$\Gamma\Gamma : \Gamma\text{Ε} = \Upsilon\eta : \text{ΒΕ}, \text{ καὶ}$$

$$\Gamma\Gamma : \Gamma\text{Ε} = \Theta\eta : \text{ΚΒ} \cdot \text{τοιγαρὺν}$$

$$\Gamma\Gamma^2 : \Gamma\text{Ε}^2 = \Theta\eta\Gamma : \text{ΚΒΕ}.$$

136) $\Theta\eta\Gamma : \text{Νη}^2 = \Theta\Gamma : \text{τὴν αὐτῆς Παράμετρον}$,
ἢ (Πορ. Β' . τῆς ΙΓ') ἡ Παράμετρος τῆς ΚΕ διαμέτρου
πρὸς τὴν διάμετρον ΚΕ , ἢ (Πορ. ζ' . τῆς ζ') ὡς τὸ ἀπὸ
 ΙΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΒΕ . ὡς ἄρα $\Theta\eta\Gamma$ πρὸς Νη^2 , ἔστι
 ΙΒ^2 πρὸς ΚΒΕ .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΑ'.

Σχημ. 112. Τὰ ἀπὸ δυεῖν συζυγῶν διαμέτρων ΝΞ, ΗΙ τετράγωνα ἅμα ληφθέντα, ἴσα ἔσται τοῖς ἀπὸ τῶν ἄξόνων ΚΕ, ΘΥ τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν.

Α'χθείσης γὰρ ἀπὸ τῆς σημείου Ι τῆς εὐθείας ΙΒ τεταγμένης ἐπὶ τὸν ἄξονα ΚΕ, ἀπότε τῆς Ν τῆς Νη ἐπὶ τὸν ἄξονα ΘΥ, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ΓΝ τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν Νη, Γη τετραγώνοις, τότε ἀπὸ τῆς ΓΙ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΙΒ (47 τῆς Α'.) Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Νη τετράγωνον, ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΚΒΕ ὀρθογωνίῳ, τότε ἀπὸ τῆς ΙΒ, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΘΗΥ (Πορ. Γ'. τῆς προηγουμένης)· ἄρα τὰ ὑπὸ τῶν ΓΝ, ΓΙ ὁμῶς ληφθέντα, ἴσα ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ, ΚΒΕ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ ἢ τῷ ὀρθογωνίῳ ΘΗΥ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς Γη τετραγώνῳ ἅπασιν ὁμῶς ληφθεῖσιν. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΚΒΕ σὺν τῷ ἀπὸ ΓΒ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ τετραγώνῳ, τότε ὑπὸ ΘΗΥ σὺν τῷ ἀπὸ Γη, ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΥ (5 τῆς Β'.)· ἄρα δύο τὰ ἀπὸ τῶν ΓΝ, ΓΙ τετράγωνα ὁμῶς ληφθέντα, ἴσα ἐστὶν δυσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΕ, ΓΥ ἅμα ληφθεῖσιν. Καὶ τῶν τετραπλῶν αὐτῶν ληφθέντων τὰ ἀπὸ τῶν ΝΞ, ΗΙ τετράγωνα ἅμα ληφθέντα, ἴσα ἐστὶν δυσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΕ, ΘΥ ὁμῶς ληφθεῖσιν, ο. ε. δ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Τὰ ἀπὸ δυεῖν ἄρα συζυγῶν διαμέτρων τετραγῶνα ἴσα εἰσι τοῖς ἀπὸ δυεῖν ἑτέρων συζυγῶν διαμέτρων τετραγῶνοις. Οἷονδήποτε γὰρ ζεύγος τῶν ἀπὸ τέτων τετραγῶνων ἐξισῆσαι τοῖς ἀφ' ἑκατέρου τῆ ἄξονος τετραγῶνοις.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΤ τετραγῶνα ἐξισῆται τοῖς ἀπὸ τῶν ΞΙ, ΙΝ τετραγῶνοις. Τὰ μὲν γὰρ πρῶτα ἐξισῆται τῷ δις ἀπὸ τῶν ΓΕ, ΓΤ. Τὰ δὲ δεύτερα τῷ δις ἀπὸ τῶν ΓΙ, ΓΝ (Σχολ. γενικ. Ε'). Α'λλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΕ, ΓΤ ἐξισῆται τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΙ, ΓΝ (κατὰ τὴν παρῆσαν), τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΤ, ἐξισῆται τοῖς ἀπὸ τῶν ΞΙ, ΙΝ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Μ Ε'.

Ε'ν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ τὰ ἀπὸ δυεῖν συ- σχημ. 113.
ζυγῶν διαμέτρων ΗΙ, ΝΞ τετραγῶνα (εἵπερ ἄνισα εἴη) διαφέρει ἀλλήλων τῷ αὐτῷ ποσῷ, ὥπερ διαφέρει τὰ ἀπὸ δυεῖν ἑτέρων οἷωνδήποτε συζυγῶν ΚΕ, ΘΥ τετραγῶνα.

Α'χθεισῶν γὰρ ἀπὸ τῶν σημείων Ν, Τ ἐν
 ταῖς ἀσύμπτωτοις τῶν ἐφαπτομένων ΑΝΤ, ΑΤΡ.
 εἴπερ ἔσονται ἴσαι ταῖς δευτέραις διαμέτροις ΗΙ,
 ΚΕ, εἴγε ἡ ΑΝ ἐξισῆται τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ΓΗ,
 ἢτε ΤΑ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ΓΚ (Πορ. Γ'. τῆς ΜΒ').
 Α'χθεισῶν δ' ἐτι ἐ τῶν ΝΜ, ΤΒ, ἐ ΤΖ, ΡΔ ἐ-
 πὶ τὴν ἀσύμπτωτον ΓΑ καθεύτων, δῆλον ὅτι ἡ
 ΑΜ ἐστὶν ἴση τῇ ΜΒ, ὥσπερ ἐ ΑΝ τῇ ΝΤ (ἡ
 γάρτοι ΝΜ παράλληλοις τῇ ΤΒ, καὶ δὴ ΑΝ:
 ΝΤ=ΑΜ:ΜΒ, ἐ ΑΜ=ΜΒ (ὡς ἐ ΑΝ=ΝΤ
 κατὰ τὴν ΔΗ). Εὐδεντοι ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΓΝ,
 ΑΝ, ἣτις ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΓΜ,
 ΜΑ (τὸ γὰρ ἀπὸ ΓΝ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΜ,
 ΜΝ, τότε ἀπὸ ΜΑ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΜ, ΜΝ κα-
 τὰ τὴν 47 τῆ Α'. ἐ κοινῇ τῇ ἀπὸ ΜΝ ἀρθέντος,
 ἀπολείπεται ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΓΝ, ΑΝ ἡ αὐ-
 τὴ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΓΜ, ΜΑ) ἐστὶν ἡ αὐτὴ
 τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΓΜ, ΜΒ, ἥπερ ἐστὶν ἴση τῇ
 ὀρθογωνίῳ ΑΓΒ (6 τῆ Β'). Ὡσαύτως ἡ διαφορὰ
 τῶν ἀπὸ ΓΤ, ΤΑ, ἔσται ἡ αὐτὴ τῇ διαφορᾷ
 τῶν ἀπὸ ΖΓ, ΖΑ, ἡ ΖΔ (= τῇ ἀπὸ ΖΑ) ἣτις
 ἐστὶν ἴση τῇ ὀρθογωνίῳ ΔΓΑ (137). Ἀλλὰ τὰ

137) Ε'πει ἡ ΖΤ ἐστὶ παράλληλος τῇ ΡΔ, ἔσται
 δὴ ΡΤ:ΤΑ=ΔΖ:ΖΑ· ἐστὶ δὲ ΡΤ=ΤΑ ἄρα, ἐ ΔΖ=ΖΑ.
 Ε'πει ἐπὶ ΓΥ²=ΤΖ²+ΓΖ², ἐ ΤΑ²=ΤΖ²+ΖΑ², ἄρα
 ΓΥ²-ΤΑ²=ΥΖ²+ΓΖ²-ΥΖ²-ΖΑ²=ΓΖ²-ΖΑ²=
 ΔΓΑ κατὰ τὴν 6. τῆ Β'. τῶν Στοιχείων.

ἑρρογώνια ΑΓΒ, ΔΓΛ εἰν ἀλλήλοισ ἴσα (εἰ
γὰρ ἡ ΓΒ πρὸς ΓΔ ὡς ΓΤ πρὸς ΓΡ, τὸτ' εἰν ἡ
ΛΓ πρὸς ΓΑ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΓΛΡ,
ΓΑΤ, ἐν οἷς δέον εἶναι ἀντιπεπονθείας τὰς παρὶ
τὴν κοινὴν γωνίαν Γ πλευρὰς κατὰ τὸ Δ'. Πορ.
τῆς Μ'). ἀρα ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΓΝ ἢ ΑΝ ἢ
ΓΗ, εἰν ἡ αὐτὴ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΓΤ ἢ ΤΛ
ἢ ΓΚ. Καὶ ληφθέντων τῶν τετραπλῶν αὐτῶν, γί-
νεται ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΝΞ, ΗΙ, ἴση τῇ διαφο-
ρᾷ τῶν ἀπὸ ΤΘ, ΚΕ, ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΜΣ'.

Εἰν τῇ Ὑπερβολῇ εἰν ἐπὶ τῆς ἀσυμπτώ- Σχημ. 114.
τε ληφθῇ ἀπὸ τῆς κέντρου τὰ διασέμχ-
τα ΓΛ, ΓΟ, ΓΑ συνεχῶς ἀνάλο-
γον· ἀπὸ δὲ τῶν Λ, Ο, Α ἀχθῶσι
τῇ ἐτέρᾳ ἀσυμπτῶτι παράλληλοι αἱ
ΛΠ, ΟΚ, ΑΙ, τέμνεσαι τὴν Ὑπερ-
βολὴν κατὰ τὰ Π, Κ, Ι. Τὰ μεταξὺ
αὐτῶν τῶν παραλλήλων ἐναπολαμβά-
νόμενα ὑπερβολικὰ χωρία ΛΠΚΟ,
ΟΚΙΑ ἴσα εἶναι ἀλλήλοισ.

Συμπληρωθέντων γὰρ τῶν παραλληλογράμ-
μων ΓΛΠΡ, ΓΟΚΣ, ΓΑΙΜ ἢ προεκβληθεῖσιν
τῶν ΡΠ, ΑΙ ἕως ὅτε συμπίπτωσιν ἀλλήλαις κα-

τὸ T , τὰ ἀναφύόμενα παραλληλόγραμμα $\Gamma\Lambda\epsilon\mu$, $\Gamma\omicron\kappa\varsigma$, $\Gamma\alpha\tau\rho$, ἔσται ἀλλήλοις ὅμοια. Ἐστὶ γὰρ ἐκ τῆς Γ . Πορίσματος τῆς M . ὡς ἡ $\Gamma\alpha$ πρὸς τὴν $\Gamma\omicron$, ἔτις ἡ $\omicron\kappa$ πρὸς τὴν $\alpha\iota$. ἀλλ' ὑπετέθη ὡς ἡ $\Gamma\alpha$ πρὸς τὴν $\Gamma\omicron$, ἔτις ἡ $\Gamma\omicron$ πρὸς $\Gamma\alpha$. Ὡς ἄρα ἡ $\Gamma\omicron$ πρὸς τὴν $\Gamma\alpha$, ἔτις ἡ $\kappa\omicron$ πρὸς τὴν $\alpha\iota$. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα $\Gamma\Lambda\epsilon\mu$, $\Gamma\omicron\kappa\varsigma$ ἀλλήλοις ὅμοια (ὁρ. 1 τῆς ϵ). Ὡσαύτως ὡς ἡ $\alpha\pi$ πρὸς τὴν $\kappa\omicron$, ἡ ἡ $\Gamma\rho$ πρὸς τὴν $\Gamma\varsigma$, ἔτις ἡ $\Gamma\omicron$ πρὸς τὴν $\Gamma\alpha$, τῆς ϵ εἰν ἡ $\Gamma\alpha$ πρὸς τὴν $\Gamma\omicron$, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὸ παραλληλόγραμμον $\Gamma\alpha\tau\rho$ ὁμοιόν ἐστι τῷ αὐτῷ $\Gamma\omicron\kappa\varsigma$, ἐπομένως δὲ καὶ τῷ ἑτέρῳ $\Gamma\Lambda\epsilon\mu$. Τοιγαρὲν ἡ διάμετρος $\Gamma\tau$ διὰ τῶν λοιπῶν γωνιῶν ϵ , κ διέρχεται (26 τῆς ϵ) καὶ ἐπιζευχθεΐσης τῆς Π , ἡ διάμετρος τῆς παραλληλογραμμοῦ $\Pi\epsilon\iota\tau$ δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς $\Gamma\epsilon\tau$ κατὰ τὸ σημεῖον χ , καὶ ἔσται ἄρα ἡ $\Pi\chi$ τεταγμένη τῆς Ὑπερβολῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον $\epsilon\kappa\chi$ τὴν διὰ τῆς κορυφῆς κ τῆς Ὑπερβολικῆς τμήματος $\Pi\kappa\iota$ διακινεμένην. Τοιγαρὲν εἰάν ἀπὸ τῶν ἴσων τριγώνων $\Gamma\Pi\chi$, $\Gamma\iota\chi$ (1 τῆς ϵ) ἀρξώσιν αἱ ἴσαι ἡμιὑπερβολαὶ $\Pi\kappa\chi$, $\iota\kappa\chi$, ἀκυλείπεται ὁ τομεὺς $\Gamma\Pi\kappa$ ἴσος τῷ τομεῖ $\Gamma\iota\kappa$. Ἀλλὰ τοῖς τομεῦσι τέτοις ἴσα ἐστὶ τὰ Ὑπερβολικὰ χωρία $\alpha\pi\kappa\omicron$, $\omicron\kappa\iota\alpha$ (Πορ. ϵ . τῆς M), ἄρα καὶ ταῦτα ἀλλήλοις ἴσα, ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Εἰάν ἄρα ἐπίτινος τῶν ἀσυμπτῶτων ληφθῇ σχήμ. 115.
 ἢ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΟ, ὡς οἰαδήτις ἑτέρα ΓΔ πρὸς
 τὴν ΓΛ, ἀχθεισῶν τῶν ΑΙ, ΟΚ, ΔΞ, ΛΠ πα-
 ραλλήλως τῇ ἑτέρα ἀσυμπτῶτι, ἀναφύησεται τὰ
 ὑπερβολικὰ χωρία ΑΙΚΟ, ΞΔΝΠ, ἀλλήλοις ἴσα.
 Ληφθείσης γὰρ τῆς ΓΝ μέσης ἀνάλογε τῶν δυοῖν
 ἄκρων ΓΑ, ΓΛ, ἥτις δὴ ἔσεται μέση ἀνάλογος,
 ἢ τῶν μέσων ΓΟ, ΓΔ, ἔσεται τὸ χωρίον ΙΑΝΛ.
 ἴσον τῷ ΤΝΛΠ (κατὰ τὴν παρῶσαν)· ἢ δὴ ἢ τὸ
 ΚΟΝΤ ἴσον τῷ ΤΝΔΞ. Ἀρα ἢ τὸ λοιπὸν ΑΙΚΟ
 ἴσον τῷ λοιπῷ ΞΔΛΠ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Καὶ εἰάν ληφθῶσιν οἰαδήποτε διαστήματα, ΓΑ,
 ΓΟ, ΓΝ, ΡΔ, ΓΛ συνεχῶς ἀνάλογον· τεταγ-
 μένων τῶν συσσιχυσῶν ΑΙ, ΟΚ, ΝΤ, ΔΞ, ΛΠ,
 ἀνακύψει τὰ ἐκ αὐτῶν ἐναπολαμβανόμενα ὑπερ-
 βολικὰ χωρία ΙΑΚΟ, ΚΟΤΝ, ΤΝΔΞ, ΞΔΛΠ
 κτλ. ἀλλήλοις ἴσα.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Εἵπειδὴ εἰάν μὲν ὁ λόγος τῆς ΑΓ πρὸς ΓΝ
 ἢ διπλασίων, ἢ περ ὁ τῆς ΔΓ πρὸς ΓΝ, τὸ χω-
 ρίον ΤΝΛΠ ἐστὶ διπλάσιον τῷ ΤΝΔΞ, εἰ δὲ ὁ πρῶ-
 τος λόγος τριπλασίων τῷ δευτέρῳ, τὸ πρῶτον

χωρίον ἔσαι τριπλάσιον τῷ δευτέρῳ. Τοσαῦτα γὰρ ἴσα χωρία τὸ πρῶτον ἐμπεριέξει, ὥς ὅσων ἴσων λόγων ὁ κατ' αὐτὸ λόγος συγκαίσεται (138). Διὰ ταῦτα ἄρα οἰονδήποτε χωρίον ΚΟΛΠ, ἔσαι πρὸς οἰονδήποτε ἕτερον ΞΔΛΠ, ὡς ὁ λόγος τῆς ΓΔ πρὸς ΓΟ πρὸς τὸν λόγον τῆς ΛΓ πρὸς ΓΔ κατάγει τὴν λογαριθμικὴν ποσότητα τῶν ἀναλογίων (139).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Ὅσα εἴρηται περὶ τῶν χωρίων τέττων, ῥηθήσεται καὶ περὶ τῶν ὑπερβολικῶν τομέων ΙΓΚ,

138) Εἴαν ὁ λόγος $\Lambda\Gamma : \Gamma\Lambda$ ἴσιν διπλασίῳ τῷ $\Delta\Gamma : \Gamma\Lambda$, αἱ $\Lambda\Gamma$, $\Delta\Gamma$, $\Delta\Lambda$ ἔσονται συνεχῶς ἀνάλογον· Ἐνδευτοὶ $\Gamma\Lambda\Delta\Xi = \Xi\Delta\Lambda\Pi$ · καὶ προσκειμένη κοινῇ τῷ $\Lambda\Lambda\Delta\Xi$ ἔσεται $2\Gamma\Lambda\Delta\Xi = \Gamma\Lambda\Lambda\Pi$. Εἴαν δὲ ὁ λόγος $\Lambda\Gamma$ πρὸς $\Gamma\Lambda$ ᾗ τριπλασίῳ τῷ $\Delta\Gamma : \Gamma\Lambda$, ἔσω ἑτέρῳ ἢ $\Gamma\Xi$ δύο μέσους ἀναλόγως μετὰ τῆς $\Gamma\Delta$ ἐν ταῖς δοθείσαι $\Lambda\Gamma$, $\Gamma\Lambda$ ποιῆσα· καὶ δὴ τότε, ἰστίίσι $\Lambda\Gamma : \Gamma\Xi = \Gamma\Xi : \Gamma\Delta$, ἔσαι $\Xi\Delta\Xi\Theta = \Theta\Xi\Lambda\Pi$ · καὶ ἰπαι $\Gamma\Xi : \Gamma\Delta = \Gamma\Delta : \Gamma\Lambda$, ἔσαι δὴ $\Gamma\Lambda\Delta\Xi = \Xi\Delta\Xi\Theta$. Ἐνδευτοὶ $\Gamma\Lambda\Delta\Xi = \Xi\Delta\Xi\Theta = \Theta\Xi\Lambda\Pi$, καὶ $\Gamma\Lambda\Lambda\Pi = 3\Gamma\Lambda\Delta\Xi$. Εἰ δὲ ὁ λόγος $\Lambda\Gamma : \Gamma\Lambda$ εἴη τετραπλασίῳ τῷ $\Delta\Gamma : \Gamma\Lambda$, ἔσαι δὴ τότε τὸ $\Gamma\Lambda\Lambda\Pi = 4\Gamma\Lambda\Delta\Xi$.

139) Εἰ μὲν ὁ λόγος $\Lambda\Gamma : \Gamma\Lambda$ ἴσιν διπλασίῳ τῷ $\Delta\Gamma : \Gamma\Delta$, ἔσονται αἱ $\Lambda\Gamma$, $\Delta\Gamma$, $\Gamma\Lambda$ συνεχῶς ἀνάλογον· καὶ δὴ $\Gamma\Lambda\Delta\Xi = \Xi\Delta\Lambda\Pi$, καὶ $\Gamma\Lambda\Lambda\Pi = 2\Xi\Delta\Lambda\Pi$. Εἰ δὲ ὁ $\Lambda\Gamma : \Gamma\Lambda$ ἴσιν τριπλασίῳ τῷ $\Delta\Gamma : \Gamma\Delta$, ἔσεται (Σημ. ἀνωτ.) $\Gamma\Lambda\Lambda\Pi = 3\Xi\Delta\Lambda\Pi$ · εἰδὲ τετραπλασίῳ, ἔσαι $\Gamma\Lambda\Lambda\Pi = 4\Xi\Delta\Lambda\Pi$ · ἄρα ὁ λόγος $\Lambda\Gamma : \Gamma\Lambda$ ἴσιν πρὸς τὸν $\Delta\Gamma : \Gamma\Delta$ ὡς 2 : 1. ὡς 3 : 1. ὡς 4 : 1. κτξ.

ΕΓΗ, ΤΓΕ κτλ. οἷς τισιν ἐξισϋται αἰ· τὰ ἐπὶ τῆς ἀσυμπτώτου συσσιχϋντα ὑπερβολικὰ χωρία, ὡς δεδεικται ἐν τῷ 5'. Πορίσματος τῆς Μ'. Προτάσεως.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε'.

Δῆλον. δ' ὅτι τὸ ὅλον χωρίον τὸ μεταξὺ τῆς ὑπερβολικῆς καμπύλης καὶ τῆς κατ' αὐτὴν ἀσυμπτώτου ἐναπολαμβανόμενον εἰς ἄπειρον παραγόμενον, καὶ μεγέθους ἂν εἴη ἀπείρου. Ἐνὸν γὰρ λόγους ΓΑ, ΓΟ, ΓΝ κτλ. εἰς ἄπειρον συνεῖρεσθαι· καὶ χωρία ἄρα ἄπειρα τῷ τε πρώτῳ ΑΙΚΟ ἴσα, καὶ τοῖς ἀπείροις ἐκείνοις λόγοις συσσιχϋντα, ἐν τῷ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς καμπύλης ἀφοριζομένῳ τῷ δε χωρίῳ περιληφθήσεται.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΜΖ'.

Εἰάν Παραμέτρῳ μὲν τῇ ΝΡ, ἣτις εἴη σχημ. 116. ἴση τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ ΝΕ τῆς ἰσο- 116. 12. σκελεῖς ὑπερβολῆς ΝΜ, ἄξονι δὲ τῷ αὐτῷ τῆς ὑπερβολῆς καταγραφῇ Παραβολῇ ἢ ΝΒ. Ἀ'χθείσης παρὰ τὸν ἄξονα τῆς ΒΔ, ἣτις ἀπαντήσῃ τῷ μὲν δευτέρῳ τῆς ὑπερβολῆς ἡμιάξονι ΓΕ, κατὰ τὸ Δ, τῇ δὲ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ Μ, ἔσεται τὸ ὑπερβολικὸν χω-

ρίον ΓΝΜΔ, ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίᾳ
ἡμιάξονος ΓΝ καὶ τῆς μέρης τῆς Παραβο-
λῆς ΝΒ, ὁ μεταξὺ τῆς κορυφῆς Ν, καὶ
τῆς ἀχθείσης εὐθείας ΒΔ ἐναπολαμ-
βάνεται, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Τεταγμένων γὰρ ἐν μὲν τῇ Ὑπερβολῇ τῆς ΜΚ,
ἐν δὲ τῇ Παραβολῇ τῆς ΒΑ, ἐφαπτεύσῃ τῆς πα-
ραβολῆς ἡ ΒΘ, καὶ ἐπὶ τὴν ΒΘ κάθετος ἡχθῇ ἡ
ΒΠ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΝ εἴσεται ἴση τῇ ΒΠ.
Ἡ γὰρ ὑποκάθετος ΑΠ ἐξισῆται τῇ ΓΝ, ὡς ἡ-
μίσεια ὅσα τῆς ὀρθῆς πλευρᾶς ΝΡ (Πορ. Ις'. τῆς
Θ'). ἥτινι ἐξισῆται ἡ πλαγία ΞΝ κατὰ τὴν ὑπό-
θεσιν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΓΔ, καὶ ἡ γωνία
ΠΑΒ ἴση τῇ ΝΓΔ. Ὁρθὴ γὰρ ἑκατέρω. Ἀρα
(4 τῆς Α'.) καὶ ἡ βάσις ΒΠ τῆς ὀρθογωνίου τριγώνου
ΠΑΒ, ἴση εἶναι τῇ βάσει ΔΝ τῆς ὀρθογωνίου τρι-
γώνου ΝΓΔ. Ἀλλ' ἡ ΔΝ ἐξισῆται τῇ ΔΜ. Τὸ
γὰρ ὀρθογώνιον ΞΚΝ ἐξισῆται τῷ ἀπὸ τῆς ΚΝ
τετραγώνῳ (ὡς περὶ δὴ καὶ ἡ πλαγία ΞΝ ἐξισῆται
τῇ παραμέτρῳ ΝΡ) ἢ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Καὶ προ-
σκειμένῳ κοινῇ τῇ ἀπὸ τῆς ΓΝ τετραγώνῳ, γίνε-
ται τὸ ὀρθογώνιον ΞΚΝ, σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΝ τε-
τραγώνῳ, τὰτ' εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τετράγωνον (ὁ
τῆς ε'.) ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ, σὺν τῷ
ἀπὸ τῆς ΓΝ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τετράγωνον
εἶναι ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ, τότε ἀπὸ ΓΔ σὺν

τῷ ἀπὸ ΓΝ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΝ (47 τῆ Α΄.), ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΜ τετραγώνου ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΝ τετραγώνῳ, ὅθεν καὶ ἡ ΒΠ (= τῇ ΔΝ) ἴση ἐστὶ τῇ ΔΜ. Καὶ ληφθέντος ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ΒΘ τῆ σημείω Ι ἀπειράκις ἐγγύτατα τῆ σημείου Β, ἀχθείσης τε τῆς ΗΙΖ παραλλήλως τῇ ΒΔ· ἐπεὶ διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΙΒΗ, ΒΑΠ ὁμοιότητα (140), ἴσιν ὡς ἡ ΙΒ πρὸς τὴν ΒΗ, ὕτως ἡ ΒΠ πρὸς τὴν ΠΑ, ἡ δὲ ΔΜ πρὸς τὴν ΓΝ, ἔσται τὸ ὀρθογώνιον ΔΜΖ ἴσον τῷ ὀρθογώνιῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς ΓΝ καὶ τῆς ΙΒ, ἥτις, ἐπεὶ τὰ σημεία Ι, Β ὑπετέθη ἀπειράκις ἐγγύτητα, ἴσιν ἡ αὐτὴ τῷ ἀπειράκις ἐλάχισῳ μορίῳ τῆς παραβολικῆς καμπύλης. Ὡς περ δὴ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΔΜΖ διὰ τὸ εἶναι τὴν εὐθεΐαν ΟΖ ἀπειράκις ἐγγύτατα τῆς ΔΜ, ἐστὶ ταύτῃν σχεδὸν τῷ ὑπερβολικῷ χωρίῳ ΖΜΔΕ. Ἀπειράκις γὰρ ἐλάχισῳ χωρίῳ τῷ ΖΟΜ διαφέρει ἀλλήλων. Ἐπεὶ δὲ τὸτο αἶε ὡσαύτως συμβαίνει, δῆλον ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΓΝ καὶ ὅλης τῆς παραβολικῆς καμπύλης ΒΝ, ἴσον ἐστὶ τῷ συστοιχῶντι ὑπερβολικῷ χωρίῳ ΓΔΜΝ, ο. ε. δ.

140) Ἐπεὶ ὀρθοὶ εἰσιν ἡ ὑπὸ ΙΒΗ, ἴσι δὲ καὶ ἡ ΗΙΒ ἅμα τῇ ΙΒΗ ἴση ὀρθή· ὀρθὴ δὲ καὶ ἡ ΠΒΟ, ἄρα $ΗΙΒ + ΙΒΗ = ΠΒΟ = ΠΒΑ + ΙΒΗ$ · ἡ ἄρα $ΗΙΒ =$ τῇ $ΠΒΑ$ · ὀρθαὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Η, Α. τὰ ἄρα ΗΙΒ, ΠΒΑ τρίγωνα ὅμοια.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ε'πει δέδεικται ἡ ΔN ἴση τῇ ΔM , ῥᾶσος ἄρα ἐντεῦθεν ἀναφαίνεται τρόπος τῷ Ὑπερβολῇ ἰσοσκελῇ καταγράψαι. Συστάσης γὰρ πρὸς τῷ Γ ὡς ἔτυχε ληφθέντι ὀρθῆς γωνίας τῆς $\text{N}\Gamma\Delta$, ἀπειράριθμοι εὐθεῖαι $\text{N}\Delta$, NZ κτλ. ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$ κλιθῆσονται, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων Δ , Z κτλ. ἐάν ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΓN καὶ ἴσαι ταῖς εἰρημέναις κεκλιμέναις $\text{N}\Delta$, NZ κτλ. αἱ ΔM , ZE κτλ. τὰ σημεῖα M , E , N ἐπὶ τῆς Ὑπερβολικῆς ἰσοσκελῆς καμπύλης ἔσεται.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Μ Η'.

Σχημ. 117. Ε'ὰν ἀξονι μὲν πλαγίῳ τῷ αὐτῷ τῇ
 118. ἰσοσκελεῖ ὑπερβολῇ NEM , τῷτ' ἐς τῷ
 $\text{N}\Xi$, ὀρθία δὲ πλευρᾷ ἑτέρα τῇ $\text{N}\Theta$ καταγραφῇ Ὑπερβολῇ ἑτέρα ἢ NABK , καὶ ληφθῇ ἡ NT μέση ἀνάλογον τῆς ὀρθίας πλευρᾶς $\text{N}\Theta$ καὶ τῆς πλαγίας $\text{N}\Xi$, ἢ τῆς ὀρθίας NP τῆς ἰσοσκελεῆς ὑπερβολῆς NEM , ἔσαι τὸ χωρίου NBK πρὸς τὸ NMK , ὡς ἡ $\text{N}\Theta$ πρὸς τὴν NT .

Τετάρτῳ εὐθεῖαις ἑτέρα ἢ AH τέμνουσα τὴν ἰσοσκελεῖ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ E , καὶ ἔσεται δὴ

ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τετράγωνον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΕΚΝ, τῷτ' ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἐν τῇ ἰσοσκελεῖ ὑπερβολῇ τεταγμένης ΚΜ τετράγωνον, ὅπερ ἀξιῖται τῷ ὀρθογώνιῳ ἐκείνῳ, ὥτως ἡ ΝΘ πρὸς τὴν ΝΞ ἢ τὴν ΝΡ (Πορ. τῆς Ε'). Α'λλ' ὡς ἡ ΝΘ πρὸς τὴν ΝΡ, ὥτω τὸ ἀπὸ τῆς ΝΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΝΤ, ἥτις ὑπετέθη μέση ἀνάλογος τῶν ΝΘ, ΝΡ. Ἀρα (ἐπεὶ $BK^2:KM^2=NO^2:NT^2$.) ἔστω ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΜ, ὥτως ἡ ΝΘ πρὸς ΝΤ. Καὶ τῷ αὐτῷ τρόπῳ δειχθήσεται ὅτι ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΕ, ὥτως ἡ ΝΘ πρὸς ΝΤ. Ὡς ἄρα (12 τῆς Ε') πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι τῆς ὕπερβολικῆς χωρίου ΝΒΚ, πρὸς ἀπάσας τὰς εὐθείας τῆς ἐτέρου ΝΜΚ, τῷτ' ἐστὶ τὸ χωρίον τῆς καταγραφείσης ὕπερβολῆς ΝΒ πρὸς τὸ τῆς ἰσοσκελεῖς ΝΜ, ὥτως ἡ ὀρθία πλευρὰ ΝΘ τῆς πρώτης πρὸς τὴν ΝΤ μέσην ἀνάλογον αὐτῆς τῆς ΝΘ, ἔς τῆς πλ. γίας, ΝΞ ἢ τῆς ΝΡ ὀρθίας πλευρᾶς τῆς ἐτέρας ὕπερβολῆς, ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΘ'.

Τὸ παραβολικὸν χωρίον ΓΒΑΚ, ἴσου Σχημ. 219. ἐστὶ δυσὶ τριτημορίοις τοῦ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένου παραλληλογράμμου — ΙΗΓΚ.

Τετάρχω ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΕ ἢ ΒΔ, καὶ

διὰ τῆς Β ἀχθείσης παρὰ τὴν διάμετρον τῆς εὐ-
 θείας ΖΒΛ, ἐπιζείχθω ἡ ΑΓ τέμνουσα τὴν μὲν
 ΒΔ κατὰ τὸ Θ, τὴν δὲ ΛΖ κατὰ τὸ Μ. Καὶ ἐκ
 τῆς περὶ τὴν ΑΗ περιαγωγῆς τῆ παραλληλο-
 γράμμου ΑΗΓΕ καὶ τῆ τριγώνου ΑΓΗ ἐπιγενοήσθω
 ἀπογεναῖσθαι Κύλινδρος τριπλάσιος Κώνη (10 τῆ
 ΙΒ'). Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ κύκλος, ὃ ἀκτὶς ἡ ΛΖ
 ἢ ἡ ΜΓ, πρὸς τὸν κύκλον ὃ ἀκτὶς ἡ ΜΛ, ὅτως
 τὸ ἀπ' ἐκείνης τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ταύτης (12
 τῆ ΙΒ'), ἢ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ,
 ἢ δὴ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τῶν
 ἐστὶν ἡ αὐθεΐα ΕΑ πρὸς τὴν ΑΔ (Προτ. Δ') ἢ ἡ
 ΖΑ πρὸς τὴν ΛΒ. Ὡς ἄρα πάντες οἱ ἴσοι κύκλοι
 τῆς Κιλύδρου ἐκείνης πρὸς ἅπαντας τὰς κύκλους τῆς
 εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένους, ὅτω πᾶσαι αἱ ἴσαι εὐ-
 θεΐαι τῆ παραλληλογράμμου πρὸς ἅσας τὰς εὐ-
 θεΐας τῆ παραβελικῆς τριγράμμου ΑΒΓ (τῶν ἐστὶν
 ὡς ὁ Κύλινδρος ὁ ἐκ τῆ παραλληλογράμμου ΑΓ
 πρὸς τὸν ἐκ τῆ τριγώνου ΑΓΗ Κώνη, ὅτω τὸ πα-
 ραλληλόγραμμον ΑΓ πρὸς τὸ τρίγραμμον ΑΒΓΗ)
 ὥσπερ ἄρα ὁ Κύλινδρος ἐστὶ τριπλάσιος τῆς Κώνης,
 ὅτω καὶ τὸ παραλληλόγραμμον τριπλάσιόν ἐστι τῆς
 τριπλεύρου ΑΒΓΗ. Τὸ λοιπὸν ἄρα παραβολικὸν χω-
 ρίον ΑΒΓΕ ἴσον ἐστὶ δυσὶ τρίτημορίοις τῆς εἰρημένου
 παραλληλογράμμου ΑΕΓΗ, καὶ ἑκατέρων τῶν χωρίων
 διπλασιασθέντων, ὅλον τὸ παραβολικὸν χωρίον
 ΓΑΚ ἴσον ἐστὶ δυσὶ τρίτημορίοις ὅλης τῆς περὶ αὐτὸ

περιγεγραμμένον παραλληλογράμμου INΓK, ὃ εἶδει δειξάι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Δῆλον ἄρα ὅτι ἡ Παραβολή ἐστὶν ἐπίτριτος τῷ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένῳ τριγώνῳ, ἦτοι ὡς 4 πρὸς 3. Εἵπει γὰρ ἡ παραβολὴ εἰς πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ὡς 2 πρὸς 3. καὶ τὸ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ τρίγωνον ὡς 2 πρὸς 1. ἔσται ἄρα ἡ παραβολὴ πρὸς τὸ τρίγωνον ἐν λόγῳ συγχειμένῳ ἔκτε τῷ 2 πρὸς 3, ἢ τῷ 2 πρὸς 1. ὅθεν ὡς 4 πρὸς 3 (141).

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Ἡ δὲ παραβολὴ ABΓE πρὸς τὸ μέρος ABΔ τὸ τετμημένον ὑπὸ τῆς τεταγμένης ΒΔ ἐστὶν ὡς ὁ Κύβος τῆς ΕΓ πρὸς Κύβον τῆς ΒΕ. Εἵπει γὰρ ἡ τὸ ABΔ ἐξιστῆται δυσὶ τριτημορίοις τῷ παραλληλογράμμῳ AΔΒΛ, ἔστι δὲ ABΓE πρὸς ABΔ, ὡς AΕΓΗ πρὸς AΔΒΛ, ἦτοι ἐν λόγῳ συγχειμένῳ ἔκτε τῷ λόγῳ τῶν βάσεων ΕΓ, ΔΒ ἢ τῷ τῶν ὑψῶν

141) $ABΓE : AΕΓΗ = 2 : 3$ (ἐκ τῆς παρέσης Προτάσεως). $AΔΒΛ \propto AΕΓΗ : AΕΓ = 2 : 1$ (34 τῷ Α'. τῷ Εὐκλείδῃ). ἄρα $AΔΒΛ \propto AΕΓΗ : AΕΓΗ \propto AΕΓ = 1 \times 2 : 3 \times 1$ (σημ. 22). ἡ διαιρέσει τῶν ὁρῶν ἑκατέρων τῷ πρώτῳ λόγῳ διὰ τῷ αὐτῷ AΕΓΗ, ἔσται $ABΓΗ : AΕΓ = 2 : 3 \times 1 = 1 : 3$.

ΕΑ, ΔΑ. Α'Μ' ὁ λόγος τῆς ΕΑ πρὸς ΔΑ ἐστὶ διπλασίων τῷ λόγῳ τῆς ΕΓ πρὸς ΔΒ (ἐστὶ γὰρ ΕΑ: ΔΑ=ΕΓ:ΔΒ αἱ τεταγμέναι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν τετμημένων τετράγωνα). ἄρα τὰ χωρία ταῦτα ἐστὶν ἐν λόγῳ τριπλασίονι, ἥπερ αἱ τεταγμέναι ΕΓ, ΔΒ, ὅθεν ὡς οἱ αὐτῶν Κῦβοι (*).

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ν'.

Σχημ. 120. Κύκλος, ἔσθ' ἡ διάμετρος ἢ ΑΠ ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ τῷ ΓΑΒ, ἔσθ' ὁ ὕψος μὲν ἢ ἀκτὶς ΑΓ, βάσις δὲ ἢ ΑΒ ἴση τῇ περιφερείᾳ ΠΑ.

Καταγραφείσης γὰρ δι' ὑπινότην σημείῳ ἐπὶ τῆς ἀκτίνος ληφθέντος Δ, τῆς ὁμονέστρου περιφερείας ΔΖ· καὶ ἀχθείσης ἐν τῷ τριγώνῳ τῆς εὐθείας ΔΕ παραμύλευ τῇ βάσει, ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΔΕ, ὅπως ἡ περιφέρεια ΠΑ πρὸς τὴν περιφέρειαν ΔΖ (Θεωρημ. Α' σχιμ.) Ἐπειδὴ ἔτι αὗται ἔτι ἐκείναι εἰσὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΔ. Ὅθεν ὥσπερ ἡ

*) Ἐπὶ ΑΒΓΕ=ΑΕΓΗ, καὶ ΑΒΔ=ΑΔΒΛ, ἄρα ΑΒΓΕ:ΑΒΔ=ΑΕΓΗ:ΑΔΒΛ· ἀλλὰ ΑΕΓΗ:ΑΔΒΛ= $\frac{ΕΓ}{ΕΑ} : \frac{ΔΒ}{ΔΑ}$, καὶ ΕΑ:ΔΑ=ΕΓ:ΔΒ. Ἀντικαταστάτες ἄρα αὐτὴ τῷ λόγῳ ΕΑ:ΔΑ τῷ αὐτῷ ἴση ΕΓ:ΔΒ, ἴσται ΑΕΓΗ:ΑΔΒΛ= $\frac{ΕΓ}{ΕΑ} : \frac{ΔΒ}{ΔΑ}$ = $\frac{ΕΓ^2}{ΕΑ^2} : \frac{ΔΒ^2}{ΔΑ^2}$

ΑΒ ἐξισῆται τῇ περιφερείᾳ ΑΠ, ὅτω καὶ ἡ ΔΕ ἐξισῆται τῇ περιφερείᾳ ΔΖ. Τῆτο δὲ συμβαίνει αἰ. Πᾶσαι ἄρα αἱ εὐθεταὶ τῷ τριγώνῳ ΓΑΒ, ἐξισωθήσονται ἀπᾶσαι τοῖς ὁμοκέντροις περιφερείαις τῷ κύκλῳ. Ὁ κύκλος ἄρα ἴσος τῷ τριγώνῳ, ὃ εἰδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ὁ κύκλος ἄρα ἐστὶν ἴσος ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ἀκτίνος καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἢ τῆς περιφερείας ὅλης καὶ τῷ ἡμίσεως τῆς ἀκτίνος, τῆτ' ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τῆς διαμέτρου περιεχομένῳ. Ἐπεὶ ὅν κατὰ τὸν τῷ Ἀρχιμήδου λογισμὸν ἡ περιφέρειά ἐστι πρὸς τὴν διάμετρον σχεδὸν ὡς 22 πρὸς 7. ἔσεται ἄρα ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, ὡς $38\frac{1}{2}$ πρὸς 49, ἢ ὡς 77 πρὸς 98, τῆτ' ἐστὶν ὡς 11 πρὸς 14. (142).

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ν Α'.

Ἡ Ἐξειψις ΝΕΞ πρὸς κύκλον τὸν ΝΒΞ σχημ. 12.
ἐπὶ τῷ μείζονος ἀξονος ΝΞ τῆς Ε'λ.

142) Οὕσης τῆς διαμέτρου = 7 ἔσεται ἡ περιφέρεια ὡς ἔγγιστα = 12. Ὅθεν ἐπεὶ ὁ κύκλος ἐστὶν ἴσος ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς περιφερείας καὶ τῷ τετάρτῳ τῆς διαμέτρου περιεχομένῳ, ἔσεται ἄρα ἴσος $22 \times \frac{1}{2} = \frac{22}{1} = 22$ πρὸς $49 = 38\frac{1}{2}$. Ἐπεὶ ἐπὶ τὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον ἐστὶν ἴσον 49 =

λείψεως γραφέντα, ἐσὶν ὡς ὁ ἐλάσσων ἄξων πρὸς τὸν μείζονα.

Τεταγμένης διὰ τῆς κέντρου ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς εὐθείας ΕΓ, ἥτις ἔσται ἡ ἐλάσσων ἄξων τῆς Ε' λείψεως, ἡ προεκβληθείσης ἕως τῆς κύκλου ἐπὶ τὸ Β, ἡ δὲ ἡ ἐτέρας οἰασθῇ τῆς ΚΜ ἕως τῆς κύκλου ἡ αὐτῆς προεκβληθείσης ἐπὶ τὸ Δ, ἐσὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΞΚΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΓΝ, ἔτω τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, τὼτ' ἐσὶ τὸ ἀπὸ ΔΚ (ἴσον τῷ ὑπὸ ΞΚΝ) πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ (ἴσον τῷ ὑπὸ ΞΓΝ) ὅ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, ἔτω τὸ ἀπὸ ΔΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ. Καὶ ἐπομένως ὡς ἡ ΜΚ πρὸς ΓΕ, ἔτως ἡ ΔΚ πρὸς ΒΓ. Πᾶσαι ἄρα αἱ τῆς Ε' λείψεως εὐθεῖαι πρὸς πᾶσας τὰς τῆς κύκλου εἰσὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΓΒ, ἡ ὅλον τὸ χωρίον τῆς Ε' λείψεως πρὸς ὅλον τὸ τῆς κύκλου ἐσὶν ὡς ὁ ἐλάσσων ἡμιάξων ΓΕ πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΓΒ τὼτ' ἐσὶ τὸν μείζον ἡμιάξονα ΓΞ· τοιγαρὺν ἡ ὡς ὁ ἐλάσσων ἄξων πρὸς τὸν μείζονα, ο. ε. δ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἀχθειςὼν δὲ ἀπὸ τῆς κέντρου τῶν εὐθειῶν ΓΜ, ΓΔ ἔσται ὁ Ε' λειπτικὸς τομεὺς ΓΜΞ πρὸς

²²/₂· ὁ κύκλος ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διχμήτρου τετραγώνου ἐσὶν ὡς $\frac{22}{2} : \frac{2}{2} = 77 : 98 = 11 : 14$ (διαιρήσαι ἑκατέρη τῶν ὅρου διὰ 7.)

τὸν κυκλικὸν $\Gamma\Delta\Xi$ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῷ ἐλάσσονος ἄξονος πρὸς τὸν μείζονα. Τὸ γάρ τοι τμήμα $\text{MK}\Xi$ πρὸς τὸ τμήμα $\Delta\text{K}\Xi$, τότε τρίγωνον ΓMK πρὸς τὸ αὐτῷ ἰσοῦς $\Gamma\Delta\text{K}$ ἐστὶν ὡς ἡ MK πρὸς τὴν ΔK . Τοιγαρὲν καὶ ὡς ἡ ΓE πρὸς τὴν ΓB ἢ τὴν $\Gamma\Xi$ ($=\Gamma\text{B}$). Ἐστὶ γὰρ ἐκ τῆς Προτάσεως $\text{MK}:\Delta\text{K}=\Gamma\text{E}:\Gamma\text{B}$. Οἱ τομεὺς ἄρα $\Gamma\text{M}\Xi$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta\Xi$ ἐστὶν ὡς ἡ ΓE πρὸς $\Gamma\Xi$ (12 τῆς Ε').

ΠΡΟΤΑΣΙΣ NB'.

Εἰάν οἰαδῆτις Κωνικὴ Τομὴ AEB , ἥς αἰσχ. 122. μὲν ἀπὸ τῶν περάτων τῆς βάσεως ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι AE , BH συμπίπτουσιν τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένη EH κατὰ τὰ Z , H . ἐπὶ δὲ τὸ μεσαίτατον σημεῖον τῆς βάσεως Δ εἶεν ἐπεζευγμέναι εὐθεῖαι αἱ $\text{Z}\Delta$, $\text{H}\Delta$, περὶ τὸν ἴδιον αὐτῆς ἄξονα ED περιαχθῇ. ἔσεται ἡ Κωνοῖς, τῆς ἐστὶ τὸ σερεὸν τὸ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τῆς ΔENB ἀπογεννώμενον, ἴση τῷ σερεῶ τῷ ἐκ τῆς περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα περιαγωγῆς τῆς τριγώνου ΔHB ἀπογεννωμένου. Τότε σερεὸν τὸ ἐκ τῆς περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα περιαγωγῆς τῆς τριπλεύρου

ΕΝΒΗ ἀπογεννώμενον, ἴσον τῷ ἔκ τῆς
Περιαγωγῆς τῆς τριγώνου ΕΔΗ ἀπογεν-
νωμένῳ ζερεῶ.

Ἀχθείσης γὰρ οἰασθὲν εὐθείας τῆς ΑΚ πα-
ραλλήλου τῇ τε κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένη ΕΗ ἢ
τῇ βάσει ΑΔ, ἣτις δὴ τεμεῖ τὸν μὲν ἄξονα κα-
τὰ τὸ Ι, τὰς δὲ ἐφαπτομένας κατὰ τὰ Λ, Κ· τὴν
τε καμπύλην κατὰ τὰ Μ, Ν ἢ τὰς εὐθείας ΖΔ,
ΗΔ κατὰ τὰ Ο, Π. Ἐςαι ὡς τὸ ὑπὸ ΜΚΝ πρὸς
τὸ ἀπὸ ΚΒ, ἔτω τὸ ἀπὸ ΕΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ
(Προτ. Ις.) ἢ ἐναλλάσσονται ὡς τὸ ὑπὸ ΜΚΝ
πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ, ἔτω τὸ ἀπὸ ΚΒ πρὸς τὸ ἀπὸ
ΗΒ, τὐτ' ἔσι τὸ ἀπὸ ΔΙ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ ἢ τὸ
ἀπὸ ΙΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ (ἔσιν ἄρα $ΜΚΝ:ΕΗ^2 =$
 $ΙΠ^2:ΕΗ^2$). Τὸ ἄρα ἀπὸ ΙΠ ἴσον ἐσι τῷ ὑπὸ ΜΚΝ,
τὐτ' ἔσι τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΙΚ, ΙΝ (6 τῆ Β.).
Τοιγαρὺν ἢ ὁ κύκλος, ἢ ἀκτὶς ἡ ΙΠ, ἴσος ἐσι τῇ
διαφορᾷ τῶν κύκλων, ὧν ἀκτῖνες αἱ ΙΚ, ΙΝ (143)
τὐτ' ἔσι τῷ κυκλικῷ δακτυλίῳ τῷ ἐν τῇ περὶ τὸν

143) Κύκλος ἢ ἀκτὶς ἡ ΙΚ πρὸς Κύκλον, ἢ ἀκτὶς
ἡ ΝΙ ἐσιν ὡς $ΙΚ^2:ΙΚ^2$ (2. τῆ ΙΒ.). Ἐνδυντοί κύκλος
ὁ πρῶτος πλὴν τῆ δευτέρας πρὸς τὸν δευτέραν ἐσιν ὡς
 $ΙΚ^2-ΙΝ^2:ΙΝ^2$. ἦτοι ὁ δακτύλιος ὁ ὑπὸ τῆς ΚΝ πρὸς
κύκλον, ἢ ἀκτὶς ἡ ΙΝ, ὡς $ΙΠ^2:ΙΝ^2$, ὡς κύκλος, ἢ ἀκ-
τὶς ἡ ΙΠ πρὸς κύκλον, ἢ ἀκτὶς ἡ ΙΝ. Ο' κύκλος ἔρα,
ἢ ἀκτὶς ἡ ΙΠ ἐσιν ἴσος δακτυλίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ΚΝ γε-
γομένῳ.

ἄξονα ΕΔ περιαγωγῇ τῷ τριπλεύρῳ ΕΝΒΗ ὑπὸ
τῆς εὐθείας ΝΚ γραφομένῳ. Καὶ ἐπεὶ τῷτο αἰ
ξυμβαίνει, ὁ Κῶνος ἄρα ὁ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τῷ
τριγώνῳ ΕΔΗ περὶ τὸν ἄξονα ΕΔ περιαχθέντος ἀ-
πογεννώμενος, ὑπερ αἱ τομαὶ εἰσὶν αἰ κύκλοι,
ὧν ἀκτῖνες αἱ ΙΙΙ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῆς περὶ τὸν
αὐτὸν ἄξονα περιαγωγῆς τοῦ τριπλεύρου ΕΝΒΗ
ἀπογεννώμενῳ σερεῶ, ὑπερ αἱ τομαὶ εἰσὶν αἰ δα-
κτύλιοι οἱ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΝΚ καταγραφόμενοι,
ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

Ἀλλὰ τὸ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τῷ τριπλεύρῳ
ΕΝΒΗ ἀπογεννώμενον σερεῶν, μετὰ τῆς ἐκ τῆς πε-
ρὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα ΕΔ περιαγωγῆς τῆς κωνικῆς
τομῆς ΕΝΒΔ Κωνοίδος, εἰσὶν ἴσον τοῖς ἐκ τῆς περὶ
τὸν αὐτὸν ἄξονα ΕΔ περιαγωγῆς τῶν τριγώνων
ΕΔΗ, ΔΗΒ ἀπογεννομένοις σερεοῖς ἅμα ληφθεῖ-
σιν. Ὡς περ ἄρα τὸ ἐκ τῷ τριπλεύρῳ ΕΝΒΗ ἀ-
πογεννώμενον σερεῶν, εἰσὶν ἴσον τῷ ἐκ τῷ τριγώνῳ
ΕΔΗ ἀπογεννώμενῳ Κῶνῳ, ὅτω καὶ τὸ λοιπὸν σε-
ρεῶν τὸ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τῷ ΕΝΒΔ ἀπογεννό-
μενον ἴσον ἐστὶ λοιπῇ τῷ ἐκ τῆς περὶ τὸν αὐτὸν ἄξο-
να περιαγωγῆς τῷ ΔΗΒ τριγώνῳ ἀπογεννώμενῳ σε-
ρεῶ· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον (144).

144) Τὸ αὐτὸ δῆτε συμβαίνει καὶ τῷ σφαιρικῷ
τμήματι ΑΜΕΒ (χημ. 13. τῶν Σημειώσεων) ἵσα γὰρ εἰσι
τὸ $BK^2 = τῷ M \cdot N$ (36. τῷ Γ.) καὶ $HE^2 = HB^2$ (Πορ.
2. τῆς αὐτῆς) εἰσι ἄρα $MKN : EH^2 = BK^2 : HB^2 = \Delta\Gamma^2$

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Προαχθεῖσων τῶν κατὰ πλευρὰν ἐφαπτομένων AZ , BH ἕως ὅτε τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Θ συμπίσωσι· τῆς τε βάσεως τμηθείσης κατὰ τὸ Σ , ὡς εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς $\Delta\Sigma$ τετραγώνου ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ AD , ZE τετραγώνων, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς $\Theta\Sigma$, ἔσεται ἡ ἐκ τῆς περὶ τὸν ED ἄξονα περιαγωγῆς τῆς $ENBD$ ἀπογεννωμένη Κῶνις, ἴση τῇ ἐκ τῆς περὶ τὸν $\Delta\Theta$ ἄξονα περιαγωγῆς τοῦ τριγώνου $\Sigma\Theta\Delta$ ἀπογεννωμένῳ Κῶνι. Ὅ γὰρ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τῆς $AD\Theta$ τριγώνου ἀπογεννώμενος Κῶνις τριτημόριόν ἐστι τῆς Κυλίνδρου, ἡ βᾶσις μὲν κύκλος, ἡ ἀκτὺς ἡ AD · ὕψος δὲ ἡ $\Delta\Theta$ (145). Ὅ δὲ ἐκ τῆς $ZE\Theta$ τριγώνου ἀπογεννώμενος Κῶνις ἅμα τῷ ἐκ τῆς τριγώνου $ZE\Delta$ ἀπογεννωμένῳ, τριτημόριόν ἐστι Κυλίνδρου, βᾶσιν μὲν ἔχοντος κύκλον,

: $\Delta H^2 = I\Gamma^2 : EH^2$ · ὡς ἄρα $MKN : EH^2 = I\Gamma^2 : HE^2$ καὶ $MKN = I\Gamma^2$ · Κατὰ δὲ τὰ ἀνωτέρω ρηθέντα δειχθήσεται καὶ τῷ σφαιρικῷ τμήματι ὅπερ δίδεσθαι ἐν τῇ Κωνοῖδι παραληφθείσης, καὶ ὡς τῆς αὐτῆς διέξεως.

345) Τὸ γινόμενον ἐκ τῆς κύκλου, ἡ ἀκτὺς ἡ AA , καὶ τῆς $\Delta\Theta$, κυλίνδρου ἐξισῶται, ἡ βᾶσις μὲν ὁ ἀκτὺς τῆς AA γραφείας κύκλος, ὕψος δὲ ἡ $\Delta\Theta$ (σχολ. τῆς 15. τῆς IB'). τῆς δὲ κυλίνδρου τέττα τριτημόριόν ἐστιν ὁ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τῆς τριγώνου $AD\Theta$ ἀπογεννώμενος Κῶνις (10. τῆς IB'). Ὅ ἄρα Κῶνις ἕτης τριτημόριόν ἐστι τῆς γινόμενης ἐκ τῆς ἀκτὺς τῆς AA γραφέντος κύκλου καὶ τῆς $\Delta\Theta$ εὐθείας· τῆς δὲ ἐκ τῆς εἰρημένης κυλίνδρου.

ἡ ἀκτὶς ἢ ΕΖ, ὕψος δὲ συναμφοτέρας τὰς ΘΕ, ΕΔ, τῶν ἐστὶ τῇ ΔΘ (ἢ ἀχθείσης παρὰ τὴν ΔΕ τῆς εὐθείας ΖΞ, τριτημόριόν ἐστι, κυλίνδρου, ἢ βάσις μὲν ὁ ἀκτὶς τῇ ΔΞ γραφὴς κύκλος, ὕψος δὲ ΔΘ). Ἡ ὑπεροχὴ ἄρα τῆ ἐκ τῷ τριγώνῳ ΑΔΘ ἀπογεννωμένῳ Κώνῳ, ἢ ὑπερέχει τῶν ἐκ τε τοῦ ΖΕΘ καὶ τῷ ΖΕΔ ἀπογεννωμένων Κώνων, ὅ ἐστι τὸ ἐκ τῆς περὶ τὸν ἄξονα ΔΕ περιαγωγῆς τῷ τριγώνῳ ΑΖΔ, ἢ ΔΗΒ ἀπογεννώμενον σφαιρὸν, τῶν ἐστὶν ἢ Κωνοῖς ἢ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τῷ ΕΝΒΔ ἀπογεννωμένῳ, ἴση ἐστὶ τριτημορίῳ Κυλίνδρου, βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν ὑπεροχὴν τῷ κύκλῳ, ἢ ἀκτὶς ἢ ΔΑ, ἢ ὑπερέχει τῷ κύκλῳ, ἢ ἀκτὶς ἢ ΕΖ, ὕψος δὲ τὴν ΔΘ (146). Τοιγαρὲν ὥσπερ τὸ ἀ-

146) Ὁ ἐκ τῶν τῷ ΑΔΘ Κώνος ἴσος ἐστὶ τριτημορίῳ κυλίνδρου, ἢ ὕψος μὲν ἢ ΔΘ, βάσις δὲ ὁ ἀκτὶς τῇ ΑΔ γραφὴς κύκλος. Οἱ δὲ ἐκ τῶν τριγώνων ΘΖΕ, ΔΖΕ Κώνοι ἅμα ληφθέντες ἴσοι εἰσὶ τριτημορίῳ κυλίνδρου, βάσιν μὲν ἔχοντος κύκλον, ἢ ἀκτὶς ἢ ΕΖ ἢ ΔΞ, ὕψος δὲ τὴν ΔΘ. Τοιγαρὲν ὁ ἐκ τῷ ΑΔΘ Κώνος, πλὴν τῶν ἐκ τῶν ΘΖΕ, ΔΖΕ Κώνων, τῶν ἐστὶν ἢ ἐκ τῷ ΝΕΔΒ Κωνοῖς ἴση ἐστὶ τριτημορίῳ κυλίνδρου, ἢ βάσις μὲν ὁ ἀκτὶς τῇ ΔΑ γραφόμενος κύκλος, ὕψος δὲ ἢ ΔΘ, πλὴν τῷ τριτημορίῳ κυλίνδρου τῷ βάσιν μὲν τοῦ ἀκτὶς τῇ ΔΞ γραφόμενου κύκλου, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ ΔΘ ἔχοντος, ἢ τριτημορίῳ τῆς ὑπεροχῆς ἢ ὑπερέχει ὁ ἐκ τῷ ΘΔΑ κυλίνδρος τῷ ἐκ τῷ ΘΔΞ κυλίνδρου. Ἡ δὲ ὁ ἐκ τῷ ΑΔΘ κύλινδρος πλὴν τῷ ἐκ τῷ ΘΔΞ κυλίνδρου ἴσος ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν κύκλων, ἢ ἀκτῖνες αἱ ΔΑ, ΔΞ καὶ

πὸ τῆς ΔΣ τετράγωνον εἰς ὑπεροχὴ τῶν ἀπὸ
ΔΑ, ΕΖ· οὕτω ἢ ὁ κύκλος, ὃς ἀκτὶς ἡ ΔΣ, εἰ-
ς ὑπεροχὴ τῷ κύκλῳ, ὃς ἀκτὶς ἡ ΔΑ, ἢ ὑπερίχει
τῷ ἀκτίνι τῇ ΕΖ γραφομένῳ κύκλῳ. Οὗ ἄρα ἐκ τῷ
ΣΘΔ τριγώνῳ ἀπογεννώμενος Κῶνος ἴσος ἐστὶ ταύ-
τῃ τῇ τῷ Κωνοῖδι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'

Εἰάν δὲ ἡ καμπύλη ΑΕΝΒ Παραβολὴ ἡ, ἢ
ἐξ αὐτῆς ἀναφυομένη Κωνοῖς τριπλασία εἶσαι τοῦ
ἐκ τῆς περὶ τὸν ἄξονα ΕΔ περιαγωγῆς τῷ τρι-
γώνῳ ΘΕΔ ἀπογεννωμένῳ σφαιρῷ. Εἵπει γὰρ ἡ Τ-
Φαπτομένη ΔΘ εἰς διπλασίαν τῆς ΘΕ (Πορ. 5. τῆς
Θ'). ἡ ΑΔ εἶσαι διπλασίαν τῆς ΕΖ. Τὸ ἀπ' ἐκεί-
νης ἄρα τετράγωνον, τετραπλάσιον τῷ ἀπὸ ταύ-
της τετραγώνῳ. Οὗ κύκλος ἄρα, ὃς ἀκτὶς ἡ ΔΣ,
τριπλάσιος τῷ κύκλῳ, ὃς ἀκτὶς ἡ ΕΖ (147). Τοι-

τῷ ὕψος ΘΔ, τῷτ' εἰς τῷ γενομένῳ ἐκ τῷ κύκλῳ, ὃς
ἀκτὶς ἡ ΔΕ, ἢ τῇ αὐτῷ ὕψος ΔΘ· ἡ ἄρα ἐκ τῷ ΕΝΔΒ
Κωνοῖς ἴση εἰς τριτημορίαν τῷ αὐτῷ γινόμενῳ, τῷτ' εἰς τῷ
ἐκ τῆς περιαγωγῆς τῷ τριγώνῳ ΣΘΔ ἀπογενομένῳ Κῶ-
νῳ (3. τῷ ΙΒ').

147) $ΔΑ^2 = ΕΖ^2$. ἄρα ὁ κύκλος, ὃς ἀκτὶς ἡ ΔΑ
τετραπλάσιος τῷ ἀκτίνι τῇ ΕΖ. Οἷον ὁ ἀκτίνι τῇ ΔΑ
κύκλος, πλὴν τῷ ἀκτίνι ΕΖ, τριπλάσιος τῷ κύκλῳ, ὃς
ἀκτὶς ἡ ΕΖ. Α'Δ' ὁ ἀκτίνι τῇ ΔΣ κύκλος, εἰς δια-
φορὰ τῶν ἀκτίσι ταῖς ΔΑ, ΕΖ κύκλων, ὁ ἀκτίνι ἄρα
τῇ ΔΣ τριπλάσιός ἐστι τῷ ἀκτίνι τῇ ΕΖ.

γαρὺν ὁ ἐκ τῆ ΣΘΔ Κῶνος, τοιπλάσιος τῆ ἐκ τῆς
 περιαγωγῆς τῆ ΘΕΔ τερσεῦ, ὅπερ ἔστιν ἴσον Κῶνι
 βάσει μὲν ἔχοντι κύκλον, ἢ ἀκτὶς ἡ ΕΖ, ὕψος δὲ
 τὴν ΔΘ (2 τῆ ΙΒ').

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Οἰαδήποτε Κῶνοίς ἔσαι πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐκ Σχημ. 128.
 τῆ τριγώνου ΔΕΒ περὶ τὸν ἄξονα ΕΔ περιγραφέν-
 τος ἐγγεγραμμένον Κῶνον, ὡς τὸ ἄθροισμα τῆς
 βάσεως ΒΔ καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης ΕΗ
 πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΔ. Ἀκτὶνι γὰρ τῇ ΒΔ
 καταγραφέντος τῆ κύκλου ΒΤΑ, καὶ ἀχθείσης τῆς
 ΗΤ παραλλήλου τῷ ἄξονι ΕΔ, ἥτις τεμεῖ τὴν μὲν
 βάσιν κατὰ τὸ Τ, τὸν δὲ κύκλον κατὰ τὸ Τ, τῆς
 τε ΤΙ πρὸς ὀρθᾶς ἐπὶ τὴν ΔΤ ἐπιζευχθεῖσαν κα-
 ταχθείσης, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς ΤΤ τετραγώνου
 ἴσον τῇ ὑπεροχῇ τῆ ἀπὸ τῆς ΔΒ, ἢ ὑπερέχεται
 ὑπὸ τῆ ἀπὸ τῆς ΤΔ τετραγώνου (47 τῆ Α'). ἢ-

148. Ληφθεῖσιν οἰμυδῆποτε ἀναλογίῳν $A : E = \Gamma :$
 Δ , $A : E = \Gamma : Z$, $A : H = \Gamma : I$, ὡς οἱ ἡγούμενοι καὶ
 ἴσοι, τὰ τεράδια τῶν ἡγούμενων καὶ τὰ τῶν ἐπομένων
 ἀνάλογον ἔσεται· ἐναλλάσσονται γὰρ ἔσεται

$$A : \Gamma = B : \Delta$$

$$A : \Gamma = B : Z$$

$$A : \Gamma = H : I$$

ἄρα (12. τῆ Ε'.) $A : \Gamma = B + E + H : \Delta + Z + I$. Ὅρις
 $3A : 3\Gamma = B + E + H : \Delta + Z + I$. ἢ $3A : B + E + H$
 $= 3\Gamma : \Delta + Z + I$.

τοι τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΔΒ, ΕΗ, ὅθεν εἴτε ἡ
 ἐκ τῷ ΔΕΝΒ Κωνοῖς ἐξισῆται τῷ Κώνῳ, ἢ βάσις
 μὲν ὁ ἀκτίνι τῇ ΤΤ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΔΘ (Πορ.
 Α'. τῆς παρέσης). Ἔσεται ἄρα ἡ Κωνοῖς αὕτη πρὸς
 τὸν εἰς αὐτὴν ἀκτίνι μὲν τῇ ΒΔ ὕψει δὲ τῇ ΔΕ
 ἐγγεγραμμένον Κώνον, ἐν λόγῳ συγκειμένῳ (χολ.
 τῆς 15 τῷ 5.), ἔκτε τῷ λόγῳ τῷ ἀπὸ ΤΤ πρὸς
 τὸ ἀπὸ ΒΔ. ἢ τὸ αὐτῷ ἴσον ΔΤ, ἢ τῷ τῆς εὐ-
 θείας ΘΔ πρὸς ΔΕ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΤΤ εἰν ἴσον
 τῷ ὑπὸ τῶν ΔΤ, ΤΙ περιχομένῳ (Πορ. 2 τῆς 8,
 τῷ 5.), καὶ ἐπομένως $ΤΤ^2 : ΔΤ_1 = ΔΤ \chi ΤΙ : ΔΤ$
 $\chi ΔΤ = ΤΙ : ΔΤ$. Ἀντικαταστάσει ἄρα τῷ λόγῳ
 $ΤΙ : ΔΤ$ ἀντὶ τῷ $ΤΤ^2 : ΔΤ_1$, ἔσεται ἡ ἐκ τοῦ
 ΔΕΝΒ Κωνοῖς πρὸς τὸν ἐκ τῷ ΔΕΒ Κώνον ἐν λό-
 γῳ συγκειμένῳ, ἐκ τῶν λόγων τῆς τε ΤΙ πρὸς
 ΔΤ, ἢ τῆς ΔΘ πρὸς ΔΕ· αἵ γε εἰσὶν ὡς ἡ ΘΒ
 πρὸς τὴν ΘΗ, ἢ ὡς ἡ ΔΒ ἢ ΔΤ πρὸς τὴν ΒΤ
 (εἰσι γὰρ $ΔΒ = ΔΤ$, ἢ $ΘΒ : ΒΗ = ΔΒ : ΒΤ$). Ἀλλ'
 ὁ λόγος ὁ συγκειμένος ἐκ τῶν λόγων τῆς τε ΤΙ
 πρὸς ΔΤ, ἢ τῆς ΔΤ πρὸς ΒΤ, εἰν ὡς ἡ ΤΙ πρὸς
 ΒΤ (Σημ. 141). ἄρα ἡ Κωνοῖς πρὸς τὸν ἐγγε-
 γραμμένον Κώνον εἰν ὡς ἡ ΤΙ πρὸς ΒΤ. Ἀλλ' ὁ
 λόγος τῆς ΤΙ πρὸς ΒΤ εἰν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΑΤ
 πρὸς ΔΤ, εἴ γε τῶν ὀρθογωνίων ΙΤΔ, ΑΤΒ ἐκά-
 τερον ἐξισῆται τῷ ἀπὸ τῆς ΤΤ τετραγώνῳ (Πορ.
 2 τῆς 4 τῷ 5. ἢ Πορ. τῆς 17 τῷ αὐτῷ). Ὁ λό-
 γος ἄρα τῆς Κωνοῖδος πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον
 κώνον εἰν ὁ αὐτὸς τῷ λόγῳ τῆς ΑΤ πρὸς ΔΤ,

ὅ ἐστι τῷ τῆς ΔΒ σὺν τῇ ΕΗ πρὸς ΔΒ. Ταῦτα δὲ ἔχει ἐφαρμόσασθαι ἐν τῷ σφαιρικῇ τμήματι, ὡς ὁφείλον ἐκ τῶν προρρηθέντων.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Ὅθεν ἡ Κωνοῖς πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον Κῶνον ἔσεται ὡσαύτως ὡς ΔΘ σὺν ΘΕ πρὸς τὴν αὐτὴν ΔΘ (εἶγε ΔΘ:ΘΕ=ΔΒ:ΕΗ· καὶ ΔΘ+ΘΕ:ΘΔ=ΔΒ+ΕΗ:ΔΒ)· ἡ παραχθέντος τῷ ἄξονος ἐπὶ τὸ πρὸς τὸ Ρ ὡς εἶναι ΘΡ ἴσην ΘΕ, ἔσεται ἡ Κωνοῖς πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον Κῶνον ὡς ἡ ΔΡ πρὸς ΔΘ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Ε'.

Ἡ παραβολικὴ ἄρα Κωνοῖς ἔσεται ἡμιόλιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κῶνι. Εἶγε ἡ ΔΡ ἐστὶ τριπλασία τῆς ΔΕ, ἥς διπλασία ἡ ΔΘ (Πορ. 5. τῆς Θ'). Ὅθεν ἡ ΔΡ πρὸς τὴν ΔΘ εἰσὶν ὡς 3 πρὸς 2. Καὶ ἐπειδὴ ὁ περὶ τὴν Κωνοῖδα περιγεγραμμένος Κύλινδρος ἐστὶ τριπλάσιος τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κῶνι (10 τῷ ΙΒ'), εἰσὶν ἄρα διπλάσιος τῆς εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης παραβολικῆς Κωνοῖδος. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Κύλινδρος ἐστὶ πρὸς τὸν Κῶνον ὡς 6 πρὸς 2, καὶ ὁ Κῶνος πρὸς τὴν Κωνοῖδα ὡς 2 πρὸς 3, ἔσεται ἄρα δι' ἴσιν ὁ Κύλινδρος πρὸς πρὸς τὴν Κωνοῖδα, ὡς 6 πρὸς 3, τῷτ' ἐστὶ διπλάσιος τῆς Κωνοῖδος.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α 5.

Σχημ. 124.

Εἰάν δὲ ἡ καμπύλη $ΑΒΒ$ ἡμικύκλιον $\frac{1}{2}$, ἢ ἡμιέλλειψις, ἐπεὶ αἱ κατὰ πλευρὰν ἐφαπτόμεναι αἱ ἀπὸ τῶν περάτων τῷ ἑτέρῳ ἄξονος $ΑΒ$ ἀχθεῖσαι $ΑΖ$, $ΒΗ$ εἰσὶ παράλληλοι τῷ ἄξονι $ΕΔ$, ἔσται ἡ ἐφαπτομένη $ΕΗ$ ἴση τῷ ἡμιάξονι $ΔΒ$. ἄρα ἡ $ΔΒ$ σὺν τῇ $ΕΗ$ ἔσται διπλάσια τῆς $ΔΒ$, ὅθεν τὸ ἡμισφαίριον ἢ τὸ ἐλλειπτικὸν ἡμισφαιροειδὲς ἔσται διπλάσιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κῶνῳ (Πορ. Δ'. τῆς παρέσης). Ο' δὲ περὶ τὸ ἡμισφαίριον ἢ περὶ τὸ ἡμισφαιροειδὲς περιγεγραμμένος Κύλινδρος ἔσται αὐτῷ ἡμίολιον. Εἴγε ὁ Κύλινδρος πρὸς τὸν Κῶνον ἐστὶν ὡς 3 πρὸς 1 (10 τῷ ΙΒ'). ὁ δὲ Κῶνος πρὸς τὸ ἡμισφαίριον ὡς 1 πρὸς 2. ἄρα ὁ Κύλινδρος πρὸς τὸ σφαιρὸν ἡμισφαίριον ἢ ἡμισφαιροειδὲς δι' ἴσου ἐστὶ ὡς 3 πρὸς 2. Ταῦτὸν δὲ ἐστὶ καὶ περὶ τῷ περὶ τὴν ὀλοχερῇ σφαῖραν ἢ σφαιροειδὲς περιγεγραμμένῳ Κυλίνδρῳ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΝΓ'.

Σχημ. 125.

Εἰάν τὸ μεταξὺ τῆς Ὑπερβολῆς $ΒΗ$, καὶ τῆς ἀσυμπτώτης $ΓΙ$ μεσοσυλαβῶν χωρίου $ΒΗΙΓ$ περὶ τὸν ἄξονα $ΒΕ$ περιαχθεῖ, τὸ ἐντεῦθεν ἀπογεννώμενον σφαιρὸν ἐξιστάται κυλίνδρῳ ἰσοῦψεϊ, βάσιν ἔχοντι κύκλον, καὶ ἀκτὶς ἡ $ΒΓ$.

Εἵπε γὰρ τὸ ὀρθογώνιον $\text{IH}\Theta$, ὃ ἐστὶν ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ EI , EH (5 τῷ B' .) ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης BG τετραγώνῳ (Πορ. Δ'. τῆς AZ' .) ἢ τῷ ἀπὸ τῆς εὐθείας EK . ἄρα καὶ ἡ διαφορὰ τῶν κύκλων, ὧν ἀκτῖνες αἱ EI , EH , εἴτ' ἂν ὁ κυκλικὸς δακτύλιος ὁ ἐκ τῆς εὐθείας HI ἐν τῷ περιάγεσθαι τὸ χωρίον BHIG περὶ τὸν ἄξονα BE ἀπογεννώμενος ἴσος ἐστὶ κύκλῳ, τῷ ἀκτῖνι τῇ EK (2 τῷ IB' .) ἐκ τῆς περιαγωγῆς τῷ ὀρθογώνῳ BGKE ἐν τῷ Κυλίνδρῳ καταγραφίντι, τὸ δὲ ξυμβαίνει ἀεί. Ἄπαντες ἄρα οἱ κυκλικοὶ δακτύλιοι τῷ σερεῦ ἐκείνῳ ἴσοι εἰσιν ἅπασιν τοῖς κύκλοις τῷ Κυλίνδρῳ τέτυκτο, καὶ δὴ τὸ σερεῦ ἐκεῖνο, ἴσον τέτρω τῷ Κυλίνδρῳ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Ἡ ὑπερβολικὴ ἄρα $\text{K}\omega\nu\omicron\iota\varsigma$ ἡ ἐκ τῆς περὶ τὸν ἄξονα BE περιαγωγῆς τῆς τομῆς BHE ἀπογεννωμένη ἴση ἐστὶ τῷ δακτυλίῳ, τῷ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τῷ τριγώνῳ GEI περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα ἀπογεννωμένῳ. Ὁ γὰρ δακτύλιος ὕψος μετὰ τῷ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τῷ ὀρθογώνῳ BGKE ἀναφυσόμενος Κυλίνδρῳ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐκ τῷ BHE ἀπογεννωμένῳ $\text{K}\omega\nu\omicron\iota\delta\iota$ σὺν τῷ ἐκ τῷ ἀσυμπτωτικῷ χωρίῳ BHIG ἀπογεννωμένῳ σερεῦ. Καὶ ἐπειδὴ τῷτό ἐστιν ἴσον τῷ εἰρημένῳ Κυλίνδρῳ, καὶ ἡ ὑπερβολικὴ ἄρα $\text{K}\omega\nu\omicron\iota\varsigma$ ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ δακτυλίῳ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Σχημ. 126. Ομοίως εἰάν τὸ ἀσυμπτωτικὸν χωρίον $AB\Gamma\Delta$ περὶ τὸν δευτερεῖον ἄξονα AZ περιχθῇ, τὸ ἐν-
 τεῦθεν ἀπογεννώμενον σερεὸν ἴσον εἶναι τῷ ἐκ τῆς
 περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα περιαγωγῆς τῆ ὀρθογωνίᾳ
 $ABEZ$ ἀπογεννώμενῳ Κυλίνδρῳ. Καὶ γὰρ ἡ τῆ
 ὀρθογωνίου $\Gamma\Delta H$ ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς AB , ἢ τῆς
 ZE τετραγώνῳ (Προτ. ΛΘ'). ὅθεν ἡ διαφορὰ τῶν
 κύκλων, ὧν ἀκτῖνες αἱ $Z\Gamma$, $Z\Delta$, τῆς εἰς ὁ κυ-
 κλικὸς δακτύλιος ὁ ἐν τῷ εἰρημένῳ σερεῶ ἐκ τῆς
 εὐθείας $\Delta\Gamma$ ἀπογεννώμενος, ἴσος εἶναι κύκλῳ τῷ
 ἀκτίνι τῇ ZE ἐν τῷ σερεῶ ἐκείνῳ καταγραφομένῳ.
 Τῆτο δὲ συμβαίνει αἰεὶ· ἄρα τὸ σερεὸν ὅλῳ τῷ ἰ-
 σομήκει Κυλίνδρῳ ἴσον εἶναι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ο' δακτύλιος δὲ ὁ ἐκ τῆ ὑπερβολικῆς τρι-
 γράμμης $BE\Gamma$ περὶ τὸν ἄξονα AZ περιεραφέντος
 ἀναφύόμενος, ἴσος εἶναι τῷ ἐκ τῆς περὶ τὸν αὐτὸν
 ἄξονα περιαγωγῆς τῆς τριγώνῃ $A\Delta Z$ ἀπογεννω-
 μένῳ Κώνῳ. Ο' γάρτοι δακτύλιος ἐκεῖνος σὺν τῷ
 Κυλίνδρῳ, καὶ ὁ Κώνος ἕως σὺν τῷ ἐκ τῆς περὶ
 τὸν ἄξονα AZ περιαγωγῆς τῆ ἀσυμπτωτικῆς χω-
 ρίᾳ σερεῶ συμπληρῶσι τὸ ὑπερβολικὸν κυλινδρῶσι-
 δὲς, ὅπερ ἐκ τῆς περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα περιερα-
 φῆς τῆς χωρίᾳ $AB\Gamma Z$ ἀπογεννᾶται. Ὅθεν ἐπεὶ τὸ
 ἐκ τῆς περιαγωγῆς τῆ ἀσυμπτωτικῆς χωρίου σερ-

ρεὸν ἐξίσῃται τῷ ἐκ τῷ ΑΒΕΖ κυλίνδρῳ (Παρ. προηγ.). Ἀρα καὶ ὁ ἐκ τῷ ΔΑΖ Κῶνος ἔσεται ἴσος τῷ ἐκ τῷ τριγράμμῳ ΒΕΓ δακτυλίῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΝΔ΄.

Εὔγεγεγραμμένου τῷ ὀρθογωνίῳ ΔΕΑΘ σχημ. 127. μεταξὺ τῆς ἰσοσκελεῖς Ὑπερβολῆς ΔΓ καὶ τῶν αὐτῆς ἀσυμπτῶτων ΑΕ, ΑΒ, εἰάν εἴλον τὸ ἐς ἄπειρον μηκυνόμενον ἀσυμπτωτικὸν χωρίον ΕΔΓΚΒΑ, περὶ τὴν ΑΒ περιελθὼν, ἀναφυήσεται σερεὸν διπλάσιον τῷ ἐκ τῆς περὶ τὴν ΑΘ περιελθούσης τῷ ῥηθέντος ὀρθογωνίου ἀπογεννησομένη Κυλίνδρῳ.

Ἦχθω εὐθεῖα οἰαδήτις, ἣ ἢ ΓΙ τῇ ἀσυμπτῶτι παράλληλος, τέμνεται τὰς τῷ ὀρθογωνίῳ πλευράς κατὰ τὰ Ζ, Ι καὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ΕΘ κατὰ τὸ Η. Καὶ εἰν ὡς ἢ ΓΙ πρὸς τὴν ΔΕ, ὅτως ἢ ἢ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΙ (Παρ. Γ΄ τῆς Μ΄.) τετ’ εἰν ἢ περιφέρεια ἢ ἀκτὶνι τῇ ΑΕ καταγραφείσα πρὸς τὴν ἀκτὶνι τῇ ΑΙ καταγραφείσαν (Θεωρημ. 7 Ἀρχιμ.). Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ἐκ τῷ ὕψος ΓΙ καὶ τῆς περιφερείας, ἣς ἀκτὶς ἢ ΑΙ, ὅπερ εἰν ἴσον τῇ ὑπὸ τῆς ΓΙ εὐθείας περὶ τὴν ΑΒ περιελ-

χθείσης κυλινδρική ἐπιφάνεια (Θεωρ. 11 Ἀρχιμ.)
 ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἐκ τοῦ ὕψους ΔΕ καὶ τῆς
 κατὰ τὴν βάσιν περιφέρειας, ἧς ἀκτὶς ἡ ΕΑ, τῶν
 ἐστὶ τῇ κυλινδρικῇ ἐπιφάνειᾳ τῇ ἐκ τῆς ΔΕ περὶ
 τὴν ΑΒ περιχθείσης γραφομένη. Ὅθεν ὡς ἡ κυ-
 λινδρική ἐπιφάνεια ἡ ἐκ τῆς εὐθείας ΓΙ ἀπογεν-
 νωμένη πρὸς τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν τὴν ἐκ τῆς
 ΖΙ, ὅτως ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια ἡ ἐκ τῆς ΔΕ
 πρὸς αὐτὴν τὴν ἐκ τῆς ΖΙ, ἢ (ὄντων ἴσων τῶν ὕ-
 ψων ΔΕ, ΗΙ) ἡ περιφέρεια, ἧς ἀκτὶς ἡ ΑΕ πρὸς
 τὴν περιφέρειαν, ἧς ἀκτὶς ἡ ΑΙ, τῶν ἐστὶν ἡ ΑΕ
 πρὸς τὴν ΑΙ· ἢ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ, ἢ ἡ ΔΕ ἢ
 ΖΙ πρὸς τὴν ΖΗ. Ἐπεὶ δὲ ἅπασαι αἱ κυλινδρι-
 καὶ ἐκτείναι ἐπιφάνειαι τοῦ ὑπερβολικῆς σφαιρῆς εἶναι
 ἴσαι, ἴσαι δὲ καὶ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ παραλληλο-
 γράμμῳ τεταγμέναι εὐθεῖαι· Ἐστὶ δὴ ὡς τὸ ὑπερ-
 βολικὸν σφαιρὸν πρὸς τὸν εἰρημένον Κύλινδρον, ὅτω
 τὸ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον
 τρίγωνον. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ἐστὶ διπλάσιον τοῦ
 τριγώνου, ἄρα καὶ τὸ σφαιρὸν διπλάσιον τοῦ Κυλίν-
 δρου (149).

149) Ὡς ἡ ἐπιφάνεια ἡ ἐκ τῆς ΓΙ πρὸς τὴν ἐκ
 τῆς ΖΙ, ὅτως ἡ ΖΙ πρὸς ΖΗ· καὶ ὡς ἡ ἐπιφάνεια ἡ ἐκ
 τῆς ΓΑ (ἣτις ἐστὶν ἴση τῇ ἐκ τῆς ΓΙ) πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν
 τὴν ἐκ τῆς ΖΑ, ὅτως ἡ ΖΑ ἢ ἡ ΖΙ πρὸς τὸ Ζη. Ἐπεὶ
 οὖν ἐν ἑκατέρᾳ τῇ ἀναλογίᾳ οἱ ἡγέμενοί εἰσιν ἴσοι, ἔστιν
 ἄρα ὡς ἡ ἐπιφάνεια ἡ ἐκ τῆς ΓΙ μετὰ τῆς ἐπιφάνειας τῆς
 ἐκ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ἐκ τῆς ΖΙ μετὰ τῆς ἐκ τῆς ΖΑ, ὅτως

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

Διαίρεσει ἄρα τὸ ὑπερβολικὸν σφαιρὸν, ὅπερ ἐπίκειται τῷ ἐκ τῆ ὀρθογωνίᾳ ΘΔΕΑ κυλίνδρῳ, ἦτοι τὸ ἐκ τῆ χωρίᾳ ΔΓΚΒΑ ἀπογεννώμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑποκειμένῳ Κυλίνδρῳ, ἦτοι τὸ ἐκ τοῦ ΑΒΚΓΔΕ σφαιρὸν, πλὴν τῆ ἐκ τῆ ΔΘΑΕ Κυλίνδρου ἐστὶν ἴσον τῷ ἐκ τῆ ΔΘΑΕ Κυλίνδρῳ. Ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ ἕτερον μέρος τῆ εἰρημένης σφαιροῦ, τὸ ἀπογεννώμενον δηλονότι ἐκ τοῦ χωρίου γΓΚΒβ ἔσσεται ἴσον τῷ ὑποκειμένῳ Κυλίνδρῳ τῷ ὑπὸ τῆ ὀρθογωνίᾳ γΛΑΒ γραφομένῳ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

Καὶ τὰ τοιῶδε τρόπῳ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τῶν ΔΓΚΒΘ, γΓΚΒβ ἀπογεννώμενα σφαιρὰ, ἔσσεται πρὸς ἀλλήλα, ὡς αἱ ΔΘ, γβ ἀκτίνες τῶν ἐαυτῶν κυκλικῶν βάσεων. Εἰσὶ γὰρ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ ὑποκείμενοι αὐτοῖς Κύλινδροι, οἷς τὰ εἰρημένα σφαιρὰ ἐξισϋται, τῶν ἐστὶν ἐν λόγῳ συγ-

ἢ ΖΙ+ΞΑ πρὸς ΖΗ+ΞΗ. Καὶ ὡς ἄρα ἅπασαι αἱ κυλινδρικά ἐπιδράναι τῇ ὑπερβολικῇ σφαιρᾷ πρὸς ἅπασας τὰς ἐπιφανείας τῆ ἐκ τῆ ὀρθογωνίᾳ ΔΕΑΘ κυλίνδρου, ὥτως ἅπασαι αἱ εὐθείαι τῆ αὐτῆς ὀρθογωνίᾳ πρὸς ἅπασας τὰς ἐν τῷ τριγώνῳ ΔΕΘ συστοιχέσας· τῶν ἐστὶ τὸ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ἐστὶ διπλάσιον τῷ τριγώνῳ κτ.

κλειμένω, ἔκτε τῷ λόγῳ τῶν ὑψῶν ΔΕ πρὸς γΛ (ὅς περ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ἀντιπεπονθότι ΛΑ πρὸς ΑΕ, ἢ τῷ ΛΑΕ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου (1 τῷ 5')) καὶ τῷ λόγῳ τῷ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ. Ὅθεν εἰσὶν ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΛΑΕ πρὸς τὸ τετράγωνον ΑΛ (κατὰ τὴν αὐτὴν) ἢ ὡς ἡ ΔΘ πρὸς γΒ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

Ὅθεν εἰάν ἡ ΑΕ εἰς μέρη τινὰ ἴσα ἀλλήλοις τὰ ΑΙ, ΙΛ, ΛΗ, ΗΕ κτ. διαιρεθῇ, ἀχθείσων τῶν ΙΓ, Λγ, ΗΜ, ΕΔ κτλ. παραλλήλως τῇ ἀσυμπτῶτι, ἢ τεταγμένως ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἀσύμπτωτον, καταχθείσων τῶν ΓΒ, γβ, ΜΝ, ΔΘ, ΠΡ, τὰ ἐν τῷ περισρέφειναι τὸ ἀσυμπτωτικὸν χωρίον περὶ τὴν ΑΒ ἐκ τῶν μερῶν ΔΜΝΘ, ΜγβΝ, γΓΒβ, ἢ τῷ ἀπειρομήκεις ΓΚΒ ἀπογεννώμενα μόρια τῷ ὀλικῷ σερεῦ, ἔσται ἀλλήλοις ἴσα. Ἐπεὶ γὰρ τὰ ὀλικά ἐκεῖνα σερεά εἰσιν ὡς ἀκτῖνες τῶν βάσεων, αἱ διαφοραὶ ἄρα τούτων ἔσονται ὡς αἱ διαφοραὶ τῶν ἀκτίνων. Ἀλλ' αὐταί εἰσιν ἴσαι ἀλλήλοις, καὶ ἐκεῖνα ἄρα.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

Ἐάν ἄρα ὅλον τὸ χωρίον τὸ ὑφ' ὅλης τῆς Γ-περβολῆς, ἢ ἑκατέρας τῶν εἰς ἀπειρον προάγεσθαι

νομένων ἀσυμπτώτων περιλαμβανόμενον, περὶ μί-
αν τῶν ἀσυμπτώτων, ἥτοι εἰάν τὸ ΑΟΞΠΔΓΚ
περὶ τὴν ΑΒ περιαχθῇ, τὸ ἐντεῦθεν ἀναφύομε-
νον σπειρὸν ἔσται μεγέθους ἀπείρου. Ἐπεὶ γὰρ τῆς
εἰς ἄπειρον προαγομένης ἀσυμπτώτου ΑΟΞ ἄπειρα
μέρη ἴσα τοῖς ΑΛ, ΛΙ κτλ. κείσεται, οἷς ἰσά-
ριθμα μέρη τῷ σπειρῷ τέτε ἀλλήλοις ἴσα ἀντιστοιχή-
σαι· ἀπείρου μεγέθους ἄρα τὸ ἐκ τέτων συγχείμε-
νον σπειρόν.

Τ Ε Λ Ο Σ

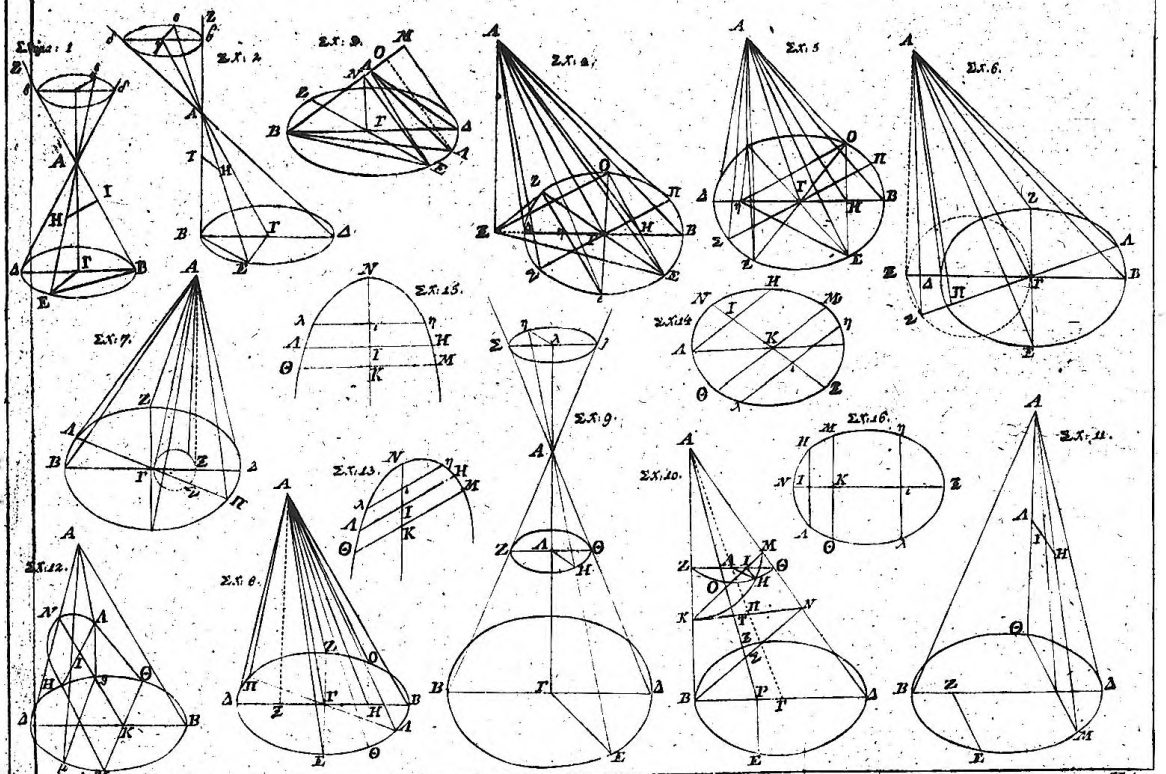
τῆς τῶν Κωνικῶν πραγματείας.

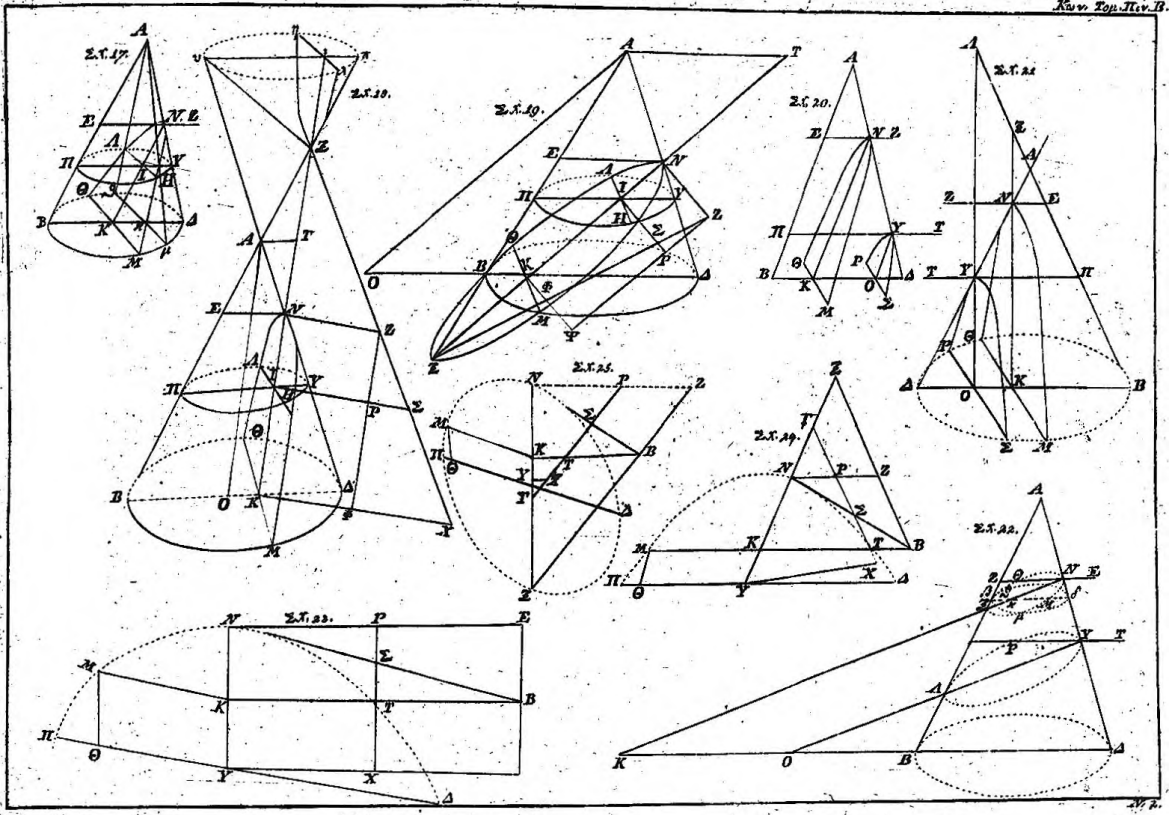
Παρορματα.

Σελ.Θ.	εἰχ.	ἀντὶ	ἀνάγ.
3	9	δύω	δύω
8	18	πορρωτάτω	πορρωτάτω
32	2	σὸν τῷ	ἴσον τῷ
—	21	οἰσδήποτε	οἰασδήποτε
35	13	τεγαμένων	τεταγμένων
59	25	τεταραγμένη	τεταγμένη
64	3	καμπάλη	καμπύλη
76	1	τεμνύσις	τεμνύσης
78	2	τῷτ' ἔτι	τῷτ' ἔτι
79	22	ἀντικειμένων	ἀντικειμένων
118	1	κεῖθω	κεῖθω
121	21	καταφορομένων	καταφερομένων
133	7	ἀντικειμένη	ἀντικειμένη
169	4	ἀπὶ	ἐπὶ

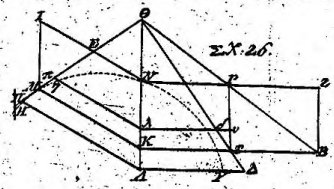
Τῶν ἑποσημεσιώσεων.

Σελ.	εἰχ.	ἀντὶ	ἀνάγ.
19	4	κοινῇ	κοινῇ
23	1	στῷ	τῷ
—	7	φαπτίδω	ἐφαπτίδω
28	5	ἢ ἀπὸ τοῦ διπιζουχῶ	ἢ ἀπὸ τοῦ 2 ἐπιζουχῶ
—	18	λόγῳ	λόγῳ
29	1	ἢ τῶν δυῖν	ἢ τῶν δυῖν
38	1	διολόντε	διολόντε
98	3	ληθύντα	ληθύντα
118	11	διαμέ.	διαμέτρων

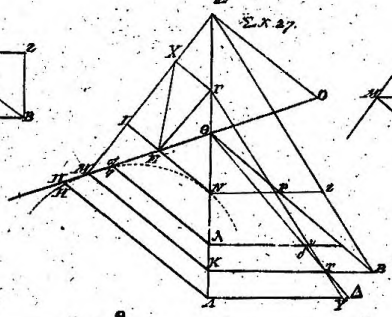




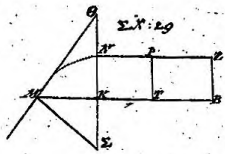
ΣΧ. 26.



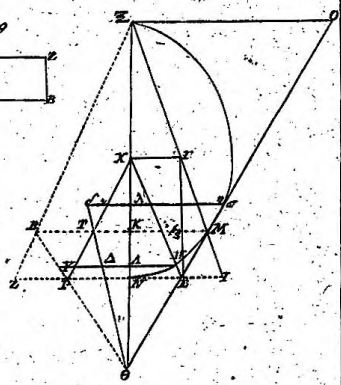
ΣΧ. 27.



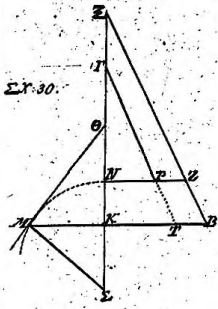
ΣΧ. 29.



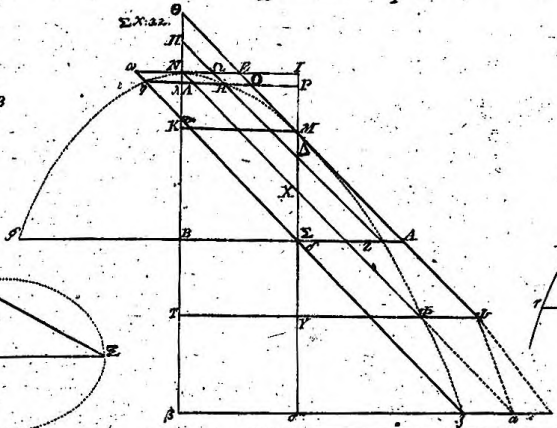
ΣΧ. 28.



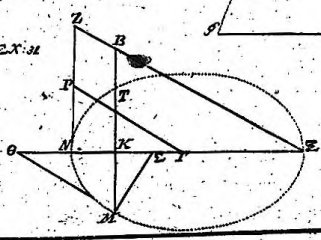
ΣΧ. 30.



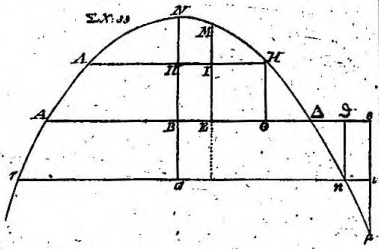
ΣΧ. 32.

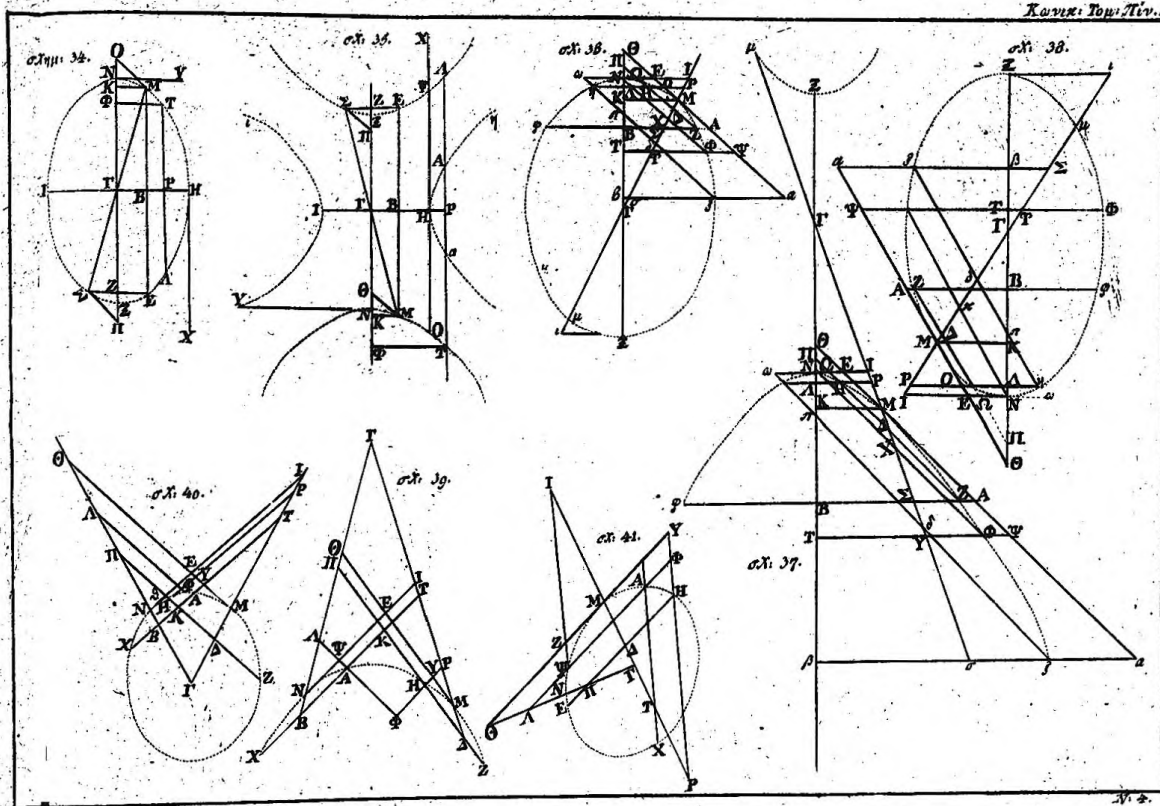


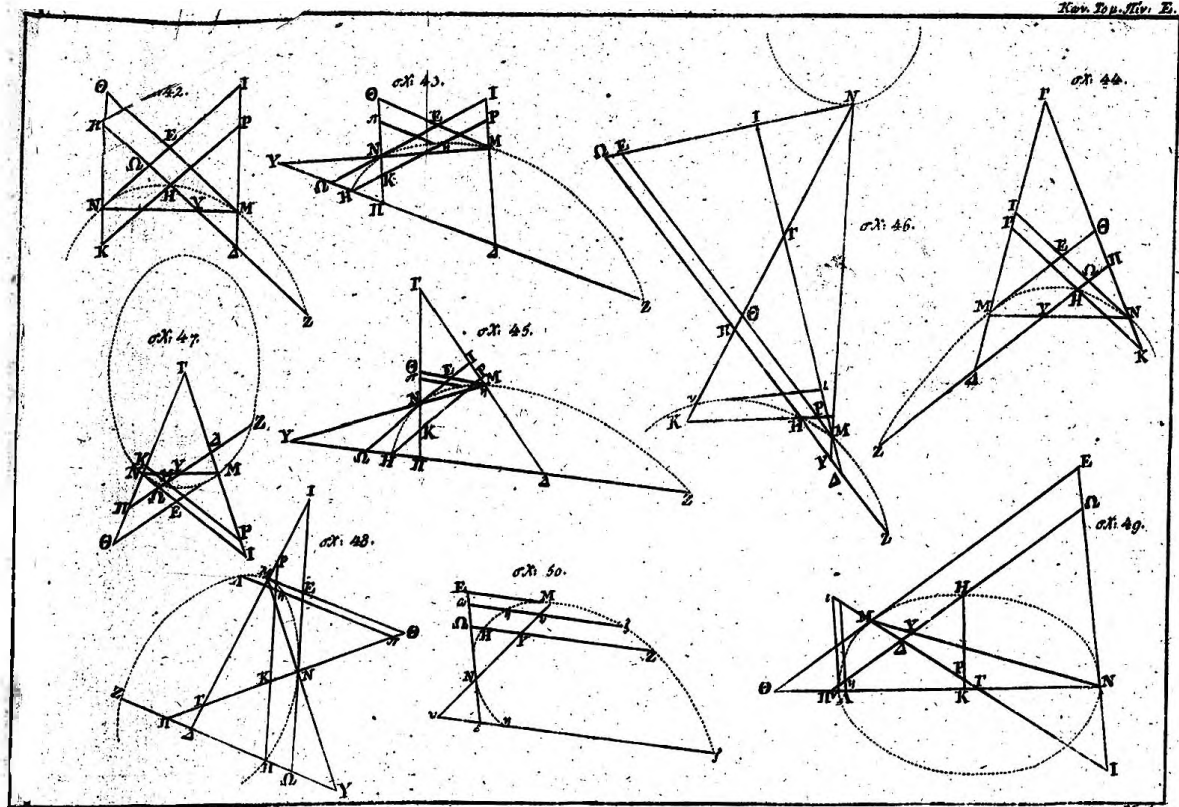
ΣΧ. 31.

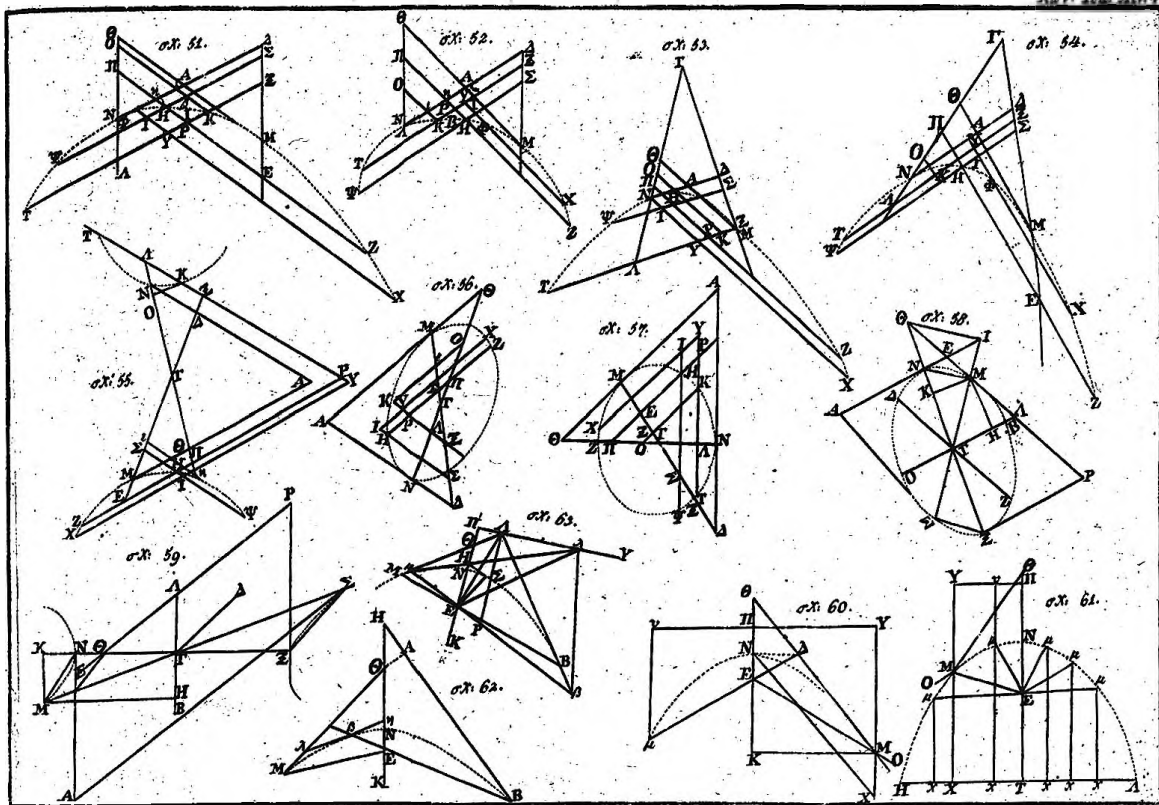


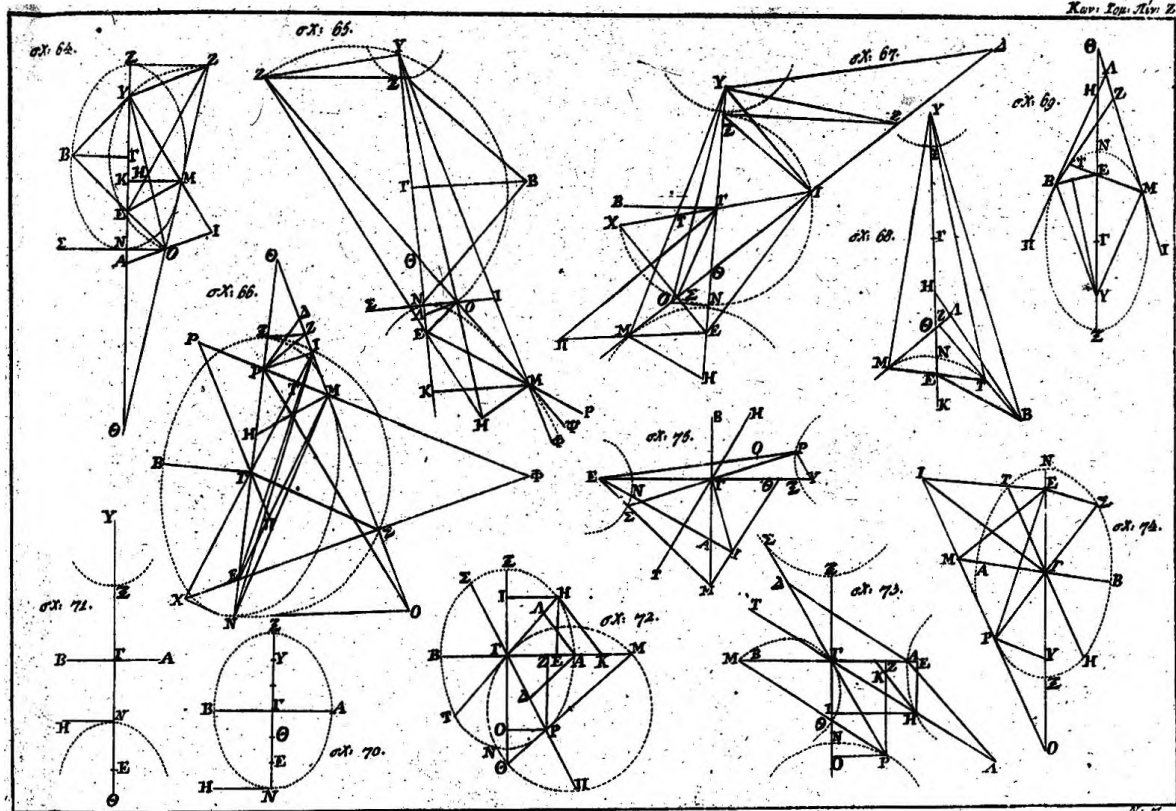
ΣΧ. 33.

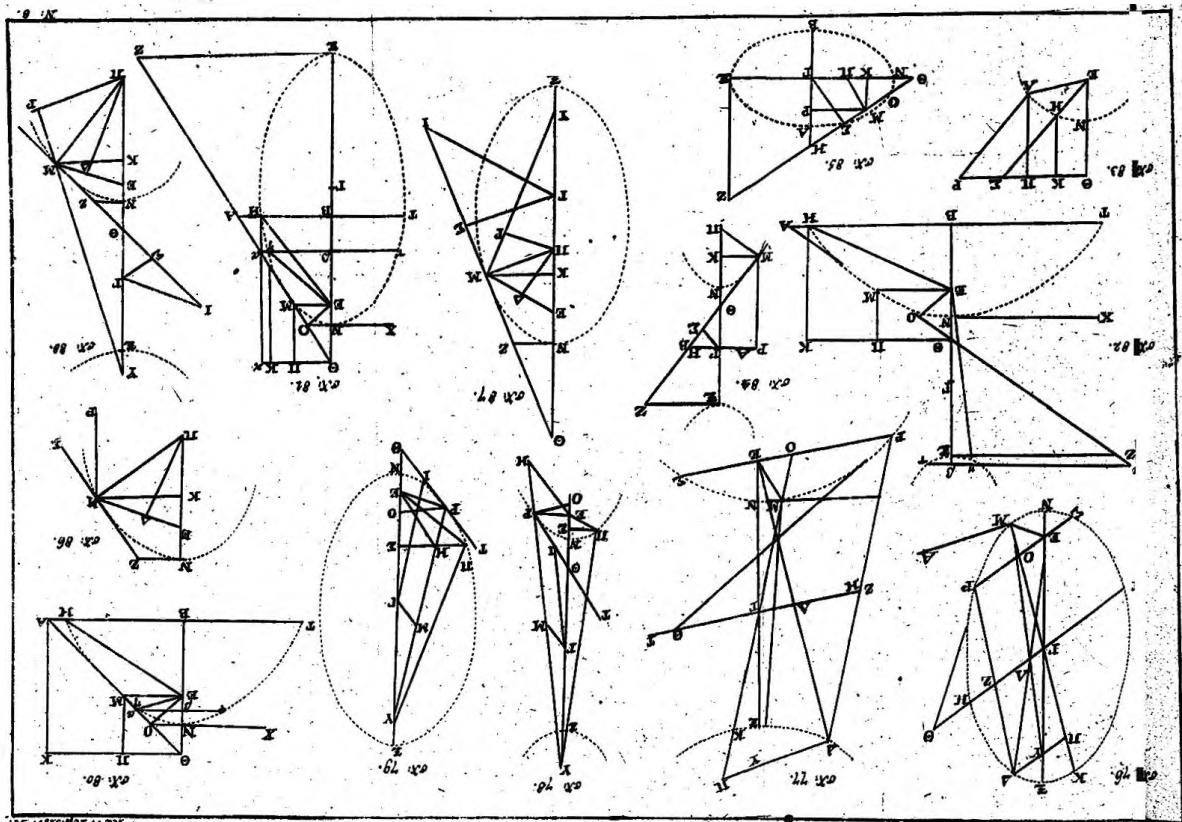


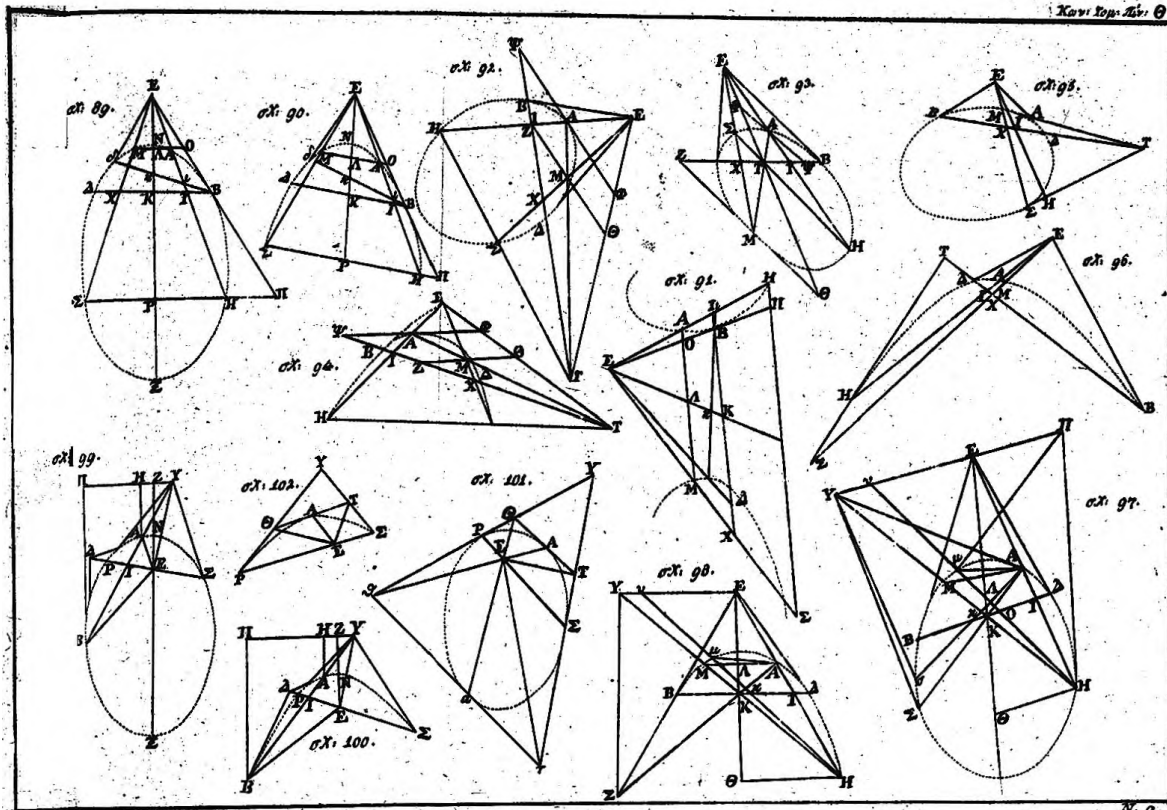


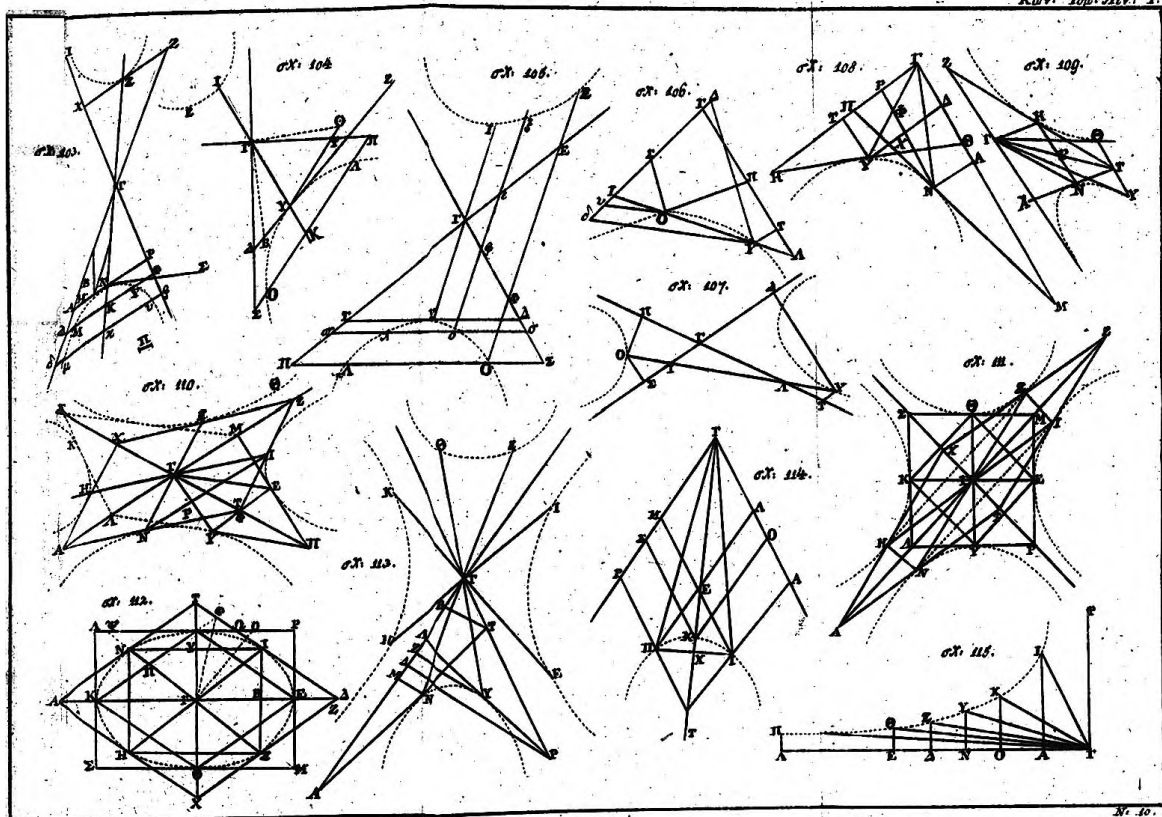


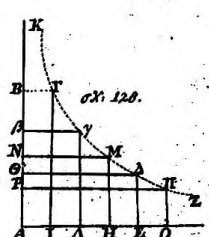
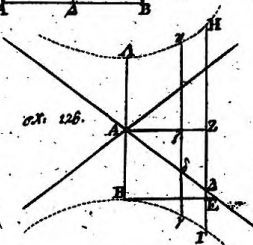
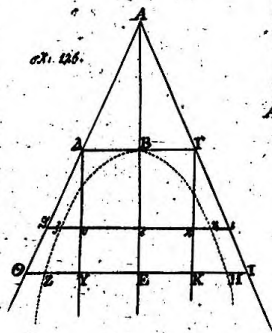
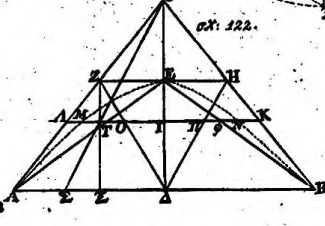
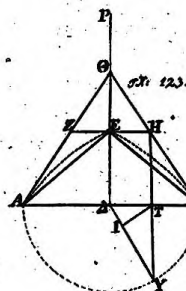
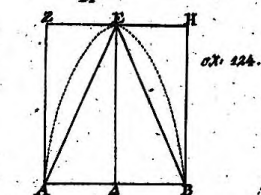
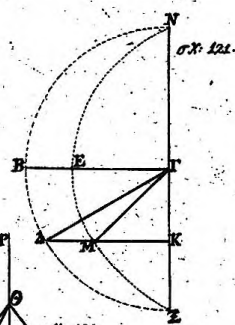
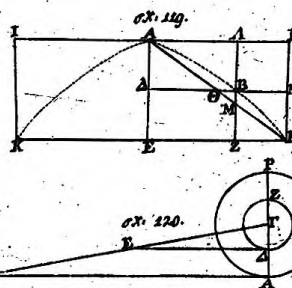
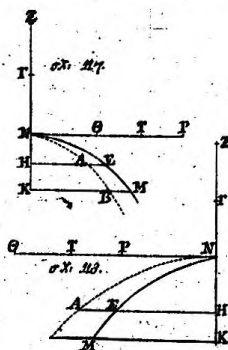
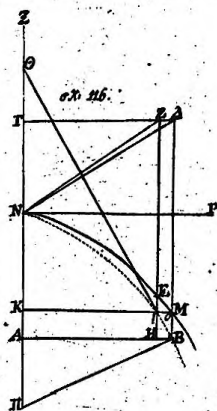












Σελ. 1.

Σχήματα τῶν ἱσοσημίων ἐν τῷ Κωνίᾳ.

