ΓΕΩΜΕΤΡΙ'Α

ΝΕ'Α ΤΑ'ΞΕΙ ΤΕ ΚΑΙ' ΜΕΘΟ'ΔΩ, ΛΑΤΙΝΙΣΤΙ'
ΣΥΝΤΕΘΕΙ͂ΣΑ ΠΑΡΑ' ΚΥΡΙ'ΟΥ

Ο'ΚΤΑΒΙΑΝΟΥ͂ ΚΑΜΕΤΙ'ΟΥ,

Εἰς δὲ τὴν Ἑλλάδα μετενεχθεῖσα φωνὴν,
καὶ προσφωνηθεῖσα, τῷ Ἐξοχωτάτῳ ἐν
Ἰατροφιλοσόφοις Κυρίῳ Κυρίῳ

ΦΙΛΙ'ΠΠΩ ΓΟΒΙ'Ω

ΤΗ͂Σ Ο'ΘΩΜΑΝΙΚΗ͂Σ ΑΥ'ΛΗ͂Σ Α'ΡΧΙΑΤΡΩ͂
ΠΕΡΙΒΛΕ'ΠΤΩ

26

Π Α Ρ Α'

ΔΗΜΗΤΡΙ'ΟΥ Ρ'ΑΖΗ͂

ΤΟΥ͂ Ε'Ν Ι'ΑΤΡΟΙ͂Σ Ε'ΛΑΧΙ'ΣΤΟΥ.

Ex Libris A hic Demetrii [illegible] ex [illegible]

͵αψπζʹ. Ε'ΝΕΤΙ'ΗΣΙΝ. 1787.

ΠΑΡΑ' ΝΙΚΟΛΑ'Ω ΓΛΥΚΕΙ͂ ΤΩ͂ Ε'Ξ Ι'ΩΑΝΝΙ'ΝΩΝ.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

ILLUSTRISS. ATQUE EXCELLENTISS. DOMINO

PHILIPPO DE GOBBIS

Medicinæ Professori, ac Excelsæ Aulæ Magnique Sultani Abdulhamidæ Archiatro Benemeritissimo.

DEMETRIUS RHASIS.

AB omni ævo, Excellentissime Doctor, Scientiarum Studiosis solenne fuit labores suos Mæcenatibus, aut Viris doctrina, virtute, dignitate, aut nobilitate Claris consecrare; Paucis tamen ea felicitas, quæ mea nunc est, obtigit; omnibus his instructum Virum invenire: mihi vero hujusmodi Tutelam sollicita mente pro hoc libello perquirenti; hanc sub tuis auspiciis obtineri posse facile apparuit; quia non solum tua in me collata beneficia, quæ nec sum solvendo, nec ut simi optare quidem fas est, infinita sunt, atque memori stant in pectore, sed etiam tua Doctrina, tua Virtus ubique relucet: Te enim dulces occuparunt Musæ, Te facundia, morum suavitate, & docendi dotibus egregie decorarunt, & ni vanum auguror, non inter maximas tuas laudes recensebitur, quod tuis non minus consiliis & observationibus, quam maxima ad medendum diligentia Medicinæ nimium in Byzantio languescens decus resuscitari tandem inceperat: Te denique, nobili de gente satum esse, maximaque dignitate in hac inclyta Urbe gaudere, omnibus innotescit. Quamobrem tibi, Germaniæ decus & Ornamentum, consecrare decre-

verim

verim hoc opusculum, quod nihil aliud est, ut vides, quam Euclidea Elementa secundum novum ordinem a Reverendissimo Archimandrita Dametio Publico Professore in Pisano Lycæo demonstrata, in patriam linguam sine verborum fulminibus translata, dum Curriculum Medicinæ in ipsamet celeberrima Universitate diligenter absolverem, quæ nunc consilio Amicorum, qui hujusmodi materiei inexpertes non sunt, Publici juris ausus sum facere, ut quemdam studij ardorem Achivæ juventuti excitarem, eodemque tempore faciliorem illis sternerem viam, qui ad Archigymnasia Europea avolare cupiunt. Perhumaniter idcirco, Excellentissime Doctor, excipias velim hoc opusculum, nec non auctoritate Sapientiæ tuæ lividos ejusdem censores deterrere minime dedigneris; quod si non ad tenuitatem, nec ad minus elegantem dicendi formam respiciens, meum tantummodo laborem, & erga te obsequium æqui bonique consules, nihil a me peroptandum superesse videtur, & hujus beneficii indelebilis erit in me, & jucundissima recordatio. Vale.

DABAM.

ΕΠΙ-

ΕΠΙΤΟΜΟΣ

Ἱστορία τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης ἐκ τῆς τοῦ Σοφωτάτου Μπαλαΐου ἐρανισθεῖσα.

Πάντων τῶν ἀνθρωπίνων ἐφευρημάτων τὸ κατὰ τὴν μάθησιν ἐφεύρημα ἀρχαιότατον εἶναι φαίνεται, καθὰ καὶ Ἰώσηπος ὁ Φλάβιος μαρτυρεῖ Βιβλίῳ πρώτῳ Κεφαλαίῳ τρίτῳ. „ Σοφίαν τε γάρ, φησιν, οἱ ἀπὸ Σήθου τὴν περὶ
„ τὰ οὐράνια καὶ τὴν τούτων διακόσμησιν ἐπενόησαν· ὑπὲρ
„ δὲ τοῦ μὴ διαφυγεῖν τοὺς μεταγενεστέρους τὰ εὑρημένα, μηδὲ

οι πρὶν εἰς γνῶσιν ἐλθεῖν φθαρῆναι, προειρηκότος ἀφανισ-
„ μὸν Ἀδάμου τῶν ὅλων ἔσεσθαι, τὸν μὲν κατ᾽ ἰσχὺν πυρὸς
„ τὸν δ᾽ ἕτερον κατὰ πλῆθος καὶ βίαν ὑδάτων, στήλας δύο
„ ἀναστήσαντες, τὴν μὲν ἐκ πλίνθου, τὴν δ᾽ ἑτέραν ἐκ
„ λίθων, ἀμφοτέραις ἐνεχάραξαν τὰ εὑρημένα, ἵνα καὶ τῆς
„ πλινθίνης ἀφανισθείσης ὑπὸ τῆς ἐπομβρίας ἡ Λιθίνη
„ μείνασα παράσχῃ μαθεῖν τοῖς ἀνθρώποις τὰ ἐγγεγραμ-
„ μένα δηλοῦσα. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ Πλίνθειος ἐμαρτύρει μὲν
„ τῆς ἑτέρας ἀπολεσθείσης". Μένει δ᾽ ἄχρι τοῦ δεῦρο, ἤ
φασιν, ἡ Λιθίνη κατὰ τὴν Συριάδα.

Μετὰ δὲ τὸν κατακλυσμὸν πρώτους τοὺς Ἀσσυρίους καὶ Χαλ-
δαίους φασὶ σέβεσθαι τὰς μαθήσεις, καὶ πρῶτα εὑρήμενα τὰ Ἀ-
στρονομικὰ γεγονέναι, ὥσπερ Πλινίῳ ἱστόρηται. ἀφ᾽ ὧν οἱ
Αἰγύπτιοι παιδευθέντες εἰς τοσοῦτον προῆεσαν τῆς περὶ τὴν
μάθησιν ἐπιδόσεως, ὥστε πιστεύεσθαι αὐτοὺς πατέρας μαθή-
σεως. Τῆς δὲ κατὰ τὴν Γεωμετρίαν Ἐπιστήμης τὴν εὕρεσιν
οὐδεὶς αὐτοὺς ἀφαιρήσεται χρόνος. οὐ μόνον γὰρ τοῖς παρ᾽ αὐτοῖς
Ἱερεῦσι τὸ κατὰ σχολὴν τὸν βίον διάγειν εἰς εὕρεσιν μαθη-
ματικῶν τεχνῶν συνεβάλλετο, ἀλλὰ καὶ ἀνάγκη αὐτοὺς ἐπῆ-
γεν εἰς τὸ Γεωμετρεῖν κατεπείγουσα, ἵν᾽ ἀκριβῶς διακρίνειν
ἔχοιεν τοὺς τῶν ἀγρῶν αὐτοῖς συγχεομένους ὅρους ὑπὸ τῆς ἐτη-
σίας τοῦ Νείλου ἐπικλύσεως, ὡς τῷ Ἡροδότῳ, βιβλίῳ δευ-
τέρῳ, ἱστόρηται.

Ἐξ

Ἐξ Αἰγύπτου δ' ἡ Μάθησις πονοπορήσασα ἀφίκετο εἰς Ἑλλάδα, καὶ τοῖς ἐκεῖ φιλοσόφοις ἐπεισάτο. Ἥγε μὴν Ἑλλὰς τοσούτους ἤνεγκε τοὺς ἐπὶ φρενῶν ὀξύτητι καὶ φύσεως ἀξιαγάστῳ πάχει τῶν πολλῶν διοίσαντας, ὡς ἐπὶ τῇ Εὐκλεείᾳ τῶν ἀνὰ πᾶσαν τὴν γῆν ἐθνῶν φέρειν τὰ πρῶτα, καὶ μήτηρ καὶ τροφὸς ἀκούειν τῆς ἐν τοῖς λόγοις δυνάμεως, παντοίας τε ἐπιστήμης καὶ τέχνης.

Θαλῆς μὲν γὰρ ὁ Μιλήσιος πρῶτος τῶν Ἑλλήνων κατὰ πόθον μαθήσεως ἀπελθὼν εἰς Αἴγυπτον, καὶ ἐκδιδαχθεὶς κεῖθι τὴν μάθησιν ἀκριβῶς παρὰ τῶν Ἱερέων μετήγαγεν εἰς Ἑλλάδα ἀρχόμενος δημοσιεύειν πρῶτον τὴν Γεωμετρίαν. Τούτου παρατηρήματά ἐστιν αἱ Ἰσημερίαι, τὰ Ἡλιοστάσια, αἱ τροπαὶ, καὶ ἡ τοῦ Ἡλίου καὶ Σελήνης ἔκλειψις (μάρτυς ὁ Λαέρτιος). Οὗ χάριν ὁ Θαλῆς πατὴρ καὶ εὑρετὴς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης παρὰ τοῖς Ἕλλησιν ἤκουσε.

Μετὰ δὲ τοῦτον Πυθαγόρας ὁ Σάμιος Ἀρχαιότατος Φιλόσοφος καὶ τῷ Θαλεῖ σύγχρονος παρά τε Αἰγυπτίους καὶ Χαλδαίους ἐπιδημήσας, κἀκ τούτων πολλὰ μυηθεὶς, ηὔξησε καὶ κατεκόσμησεν ἱκανῶς τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας, ὑπερβαλλόντως δὲ τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ τὴν Μουσικήν. Οὗτος πρὸς τοῖς ἄλλοις εὑρήμασι τῇ ἀγχινοίᾳ τοῦ νοὸς τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἐν τριγώνοις Ὀρθογωνίου ἴσα δύνασθαι ταῖς περιεχούσαις τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευραῖς ἔδειξεν, ἐφ' ᾧ εὑ-

ρήμα--

ρήματι μεγάλῃ διαχυθεὶς τῇ ἡδονῇ Ἑκατόμβην θῦσαι παρὰ Λαερτίῳ φαίνεται, ὡς δηλοῖ καὶ τὸ ἐπίγραμμα.

„ Ἡνίκα Πυθαγόρης τὸ περικλεὲς εὕρατο γράμμα,
„ Κεῖν' ἐφ' ὅτῳ κλεινὴν ἤγαγε βουθυσίην.

Μετὰ τὸν Πυθαγόραν ἤκμασε Πλάτων ὁ Ἀθηναῖος, Ἀριστοκλῆς τὸ πρῶτον καλούμενος, Πλάτων δ' ἔπειτα διὰ τὴν Εὐεξίαν, ἢ διὰ τὸ Πλατὺ καὶ εὐρὺ τῆς ἐν τῷ λέγειν Ἑρμηνείας, ἢ ὅτι πλατὺς ἦν τὸ μέτωπον προσηγορεύθη. Οὗτος διεδέξατο τὴν τοῦ Σωκράτους διδασκαλίαν, καὶ ἦν τὰς φιλοσοφικὰς ποιῶν διατριβὰς ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ, (τοῦτο δὲ ἐστὶ γυμνάσιον προάστειον ἀπό τινος Ἥρωος Ἀκαδήμου παρωνύμως οὕτω καλούμενον) ἐν ᾗ τὴν Ἀναλυτικὴν μέθοδον ἐμηχανήσατο, ἀληθεστάτην ὄντως ἐπιστήμην τοῦ ἐφευρίσκειν, καὶ λογίζεσθαι, καὶ διαλύειν τὰ περιπεπλεγμένα τῶν προβλημάτων. Τρισκαίδεκα οἰκείους τοῦ Πλάτωνος μαθητὰς παραδίδωσιν ὁ Πρόκλος, ὧν ἦν Ἀρχίτας ὁ Ταραντῖνος, ὃς τοῖς Χειροτέχναις τὴν μαθηματικὴν χρήσιμον παραδέδωκεν. ὅθεν καὶ παρὰ Γελλίῳ φαίνεται περιστερὰν ξυλίνην κατασκευασθῆναι παρ' αὐτοῦ καὶ ἀφίπτασθαι. Εὔδοξος ὁ Κνίδιος, ὃς ἅπαν τὸ κατ' Εὐκλείδην πέμπτον βιβλίον συνέγραψε, καὶ ὁ τοῦ Ἀριστοτέλους Διδάσκαλος ὁ σοφὸς Ξενοκράτης.

Του-

Τούτοις καθηκολούθησεν ὁ πολὺς τὸ κλέος Ἀριστοτέλης ὁ ἐκ Σταγείρων τῆς Μακεδονίας καταγόμενος, ὃς Πλάτωνι τὸ πρῶτον φιλοσοφίας ἕνεκα ἑαυτὸν ἀναθέμενος, ἀπελάκτισεν ὕστερον τοῦ καθηγησαμένου οὐκ ἐπ' ὀλίγων ἀντιδοξάσας. Ἀριστοτέλης, φησὶν ὁ Πλάτων, ἡμᾶς ἀπελάκτισεν ὥσπερεὶ τὰ πωλάρια τὴν ἑαυτῶν μητέρα. Οὗτος οὖν τὸ Λύκειον τῇ Ἀκαδημίᾳ ἀντιπαρατάξας, (ἦν δὲ τὸ Λύκειον χωρίον Ἀθήνησι κάλλιστον, ἀπὸ Λυκίου τοῦ Πανδίονος τοὔνομα ἔχον) ἐν αὐτῷ τὰς φιλοσοφικὰς ἐποιεῖτο ἐξασκήσεις, ὡς δὲ δὴ περιπατῶν χρῆσθαι εἰώθει τοῖς συνοῦσι διαλεγόμενος, ἐντεῦθεν καὶ τοῖς ὀπαδοῖς παρέσχε περιπατητικοὺς ὀνομάζεσθαι. Ἐγένοντο δὲ τῶν Ἀριστοτέλους ὁμιλητῶν καὶ γνωρίμων οἱ γνησιώτατοι Ἀλέξανδρος ὁ Μακεδὼν, καὶ Θεόφραστος ὁ Ἐφέσιος, ὃς δισχιλίους ἠρίθμει ἀκροωμένους αὐτοῦ μαθητὰς, ἐν οἷς ἦν καὶ Δημήτριος ὁ Φαληρεὺς, καὶ Ἐρασίστρατος ὁ Ἰατρὸς, οὗ Ἰσίδωρος διεδέχθη καὶ Ὑψικλῆς, ἄμφω ἐν Γεωμέτραις ἄριστοι, ὧν εἰσι συγγράμματα τὰ κατ' Εὐκλείδην πέντε περὶ στερεῶν βιβλία.

Ὁ δ' Εὐκλείδης, ὃς ἤκμασε μετ' αὐτοὺς, ἐντυχὼν αὐτοῖς τοῖς βιβλίοις, καὶ ἄλλοις παρ' ἄλλων φιλοπονηθεῖσι στοιχείοις, καὶ ἀκριβῶς αὐτὰ θεωρήσας, τὸ μὲν ἐλλειπὲς ἀνεπλήρωσε, τὸ δὲ συνεπτυγμένον καὶ ἀσαφὲς εἰς κρείττονα μετήγαγε τὴν σαφήνειαν, καὶ ἐδωρήσατο τοῖς φιλομαθέσι ταῦαι τὰ Γεωμετρικὰ σοιχεῖα, τὰ πανταχοῦ τῆς οἰκυμένης γνωσὰ καὶ ἀξιάγασα.

Εἷς δέ τις τῶν νεωτέρων φιλοσόφων ἐκ τῆς Μεγάλης Βρετανίας καταγόμενος, Σίμψων τοὔνομα, καὶ μετ' αὐτὸν Ἀρχιμανδρίτης τις Καμέτιος ὀνομαζόμενος ἐν τῷ τῶν Πισῶν κλεινῷ Μυσοβρεφείῳ τῆς μαθήσεως Διδάσκαλος, εἰς νέαν τάξιν καὶ εὐληπτοτέραν μέθοδον ταῦτα τὰ Εὐκλείδεια σοιχεῖα μεθαρμόσαντες, ἕκασος ἐν τῇ ἰδίᾳ πατρίδι παῤῥησίᾳ ἐδίδασκον. Ἣν μέθοδον ὡς ἀρίσην καὶ τοῖς νέοις ἁρμοδιωτέραν οἱ πλεῖσοι τῶν ἐν τῇ Εὐρώπῃ μαθηματικῶν ἡδέως περιεπτύξαντο.

Ταῦτα τοίνυν τὰ νεωστὶ κατασρωθέντα Γεωμετρικὰ σοιχεῖα (ἅπερ Πίσησι, τὸ τῆς Γατρικῆς σάδιον τρέχων, ἐξεπαιδεύθην) ἀπὸ τῆς Λατινίδος εἰς τὴν Ἑλληνίδα μετήγαγον διάλεκτον τὴν γνησίαν, ἵν' ἅπαξ εἴπω, μητέρα αὐτῶν τε τύπων καὶ παντὸς ἄλλυ ἐπιςήμης εἴδυς, μεταφρασάμενος, ὡς εἶχον δυνάμεως, καὶ τύποις προήχθην ἐκδῦναι. Μηδεὶς δὲ τὸ ταπεινὸν ἐγκαλείτω μοι τῆς φράσεως. ὐ γὰρ ἔπαινον τὸν ἐκ τῆς εὐφραδίας καὶ δεινότητος θηρώμενος, ἀλλὰ τὴν τῶν ὁμογενῶν σκοπύμενος ὠφέλειαν ταυτὶ ἐμαυτὸν τῷ ἔργῳ ἐπέδωκα. Διὸ δὴ καὶ τὸ ταπεινὸν καὶ σαφὲς τῆς φράσεως ὡς ὠφελιμώτερον προειλόμην. Καὶ γὰρ, ὡς ἔμοιγε δοκεῖ, τὰς ἐπιςημονικόν τε φιλοπονῦντας σύνταγμα φεύγειν δεῖ, καθ' ὅσον οἷόν τε, τὴν

τὴν τοῦ λέγειν δυσχέρειαν, ἵνα μὴ πρὸς τῷ φύσει δυσεφίκτῳ τοῦ νοήματος, καὶ αὕτη προστιθεμένη, δυσληπτότερα καὶ ἀσαφέστερα τὰ ἐν αὐτῷ ἀπεργάζηται, κεχηνότας καταλείπουσα τοὺς προσέχοντας μηδὲν ἐξ αὐτοῦ ἐπικαρπώσασθαι δυναμένους.

Τῷ Εὐκλείδει κατηκολούθησεν Ἀρχιμήδης, ὃς τὸν Κολοφῶνα τῆς ἀνθρωπίνης ἔφθασεν ἀγχινοίας. Τούτου ἐφεύρημά ἐστιν ἡ θαυμάσιος ἐκείνη μηχανὴ ἡ καλουμένη Παγκράτιον, ἣ τῇ ὑδρογείῳ σφαίρᾳ κίνησιν δοῦναι ὑπέσχετο. Δός, εἰπών, ποῦ στῶ καὶ τὴν γῆν κινήσω. Οὗτος αὐτὸς τὸν τῶν Ῥωμαίων στόλον, πόῤῥωθεν τῆς Συρακούσης τὰς ἀγκύρας χαλάσαντα, κατόπτροις καυστικοῖς ἐνέπρησεν, ὅπερ ἐμπρακτῶς καὶ ὁ φυσικώτατος Βυφὼν ἐν τοῖς αὐτοῦ ὀπτικοῖς πειράμασιν ἀληθέστατον ἔδειξεν, ὃς οὐ μόνον ξύλα ἐν τῷ ἰδίῳ διαστήματι τεθέντα ἐνέπρησεν, ἀλλὰ καὶ αὐτὸν τὸν μόλυβδον διέλυσε. Τῆς τούτου ἀγχινοίας μηχάνημά ἐστι καὶ τὸ Πλανητεῖον, (τοῦτο δὲ μηχανή τίς ἐστι σφαιρική, ἐξ ὑέλου κατεσκευασμένη, ἐν ᾗ αἱ τῶν Πλανητῶν, Δορυφόρων τε, καὶ Κομητῶν περὶ τὸν ἥλιον κινήσεις ἐπιτηδείως φαίνονται) ὅπερ παρὰ πάντων τῶν Νεωτέρων μηχανικῶν θαυμάζεται καὶ ἐπαινεῖται.

Μετὰ δὲ τὸν Ἀρχιμήδην, μικροῦ παραδραμόντος χρόνου, ἐξῆλθεν εἰς φῶς Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος, μέγας Γεωμέτρης ἐπονομαζόμενος. Τούτου σώζονται ἑπτὰ βιβλία περὶ Κωνικῶν τομῶν.

Τὰ

Τούτῳ κατηκολούθησαν Ἵππαρχός τε καὶ Μενέλαος, ὧν ὁ μὲν ἕξ, ὁ δὲ τέσσαρα συνέγραψε βιβλία περὶ τῶν ὑποτεινουσῶν ἐν τῷ κύκλῳ, δι' ἃ μεγίστην ἀμφοτέρω ἴσμεν τὴν χάριν. Τούτοις συνακμάζων ἦν καὶ Θεοδόσιος ὁ Τριπολίτης, ὃς τρία περὶ σφαιρικῶν ἐπωφελέστατα βιβλία ἡμῖν κατέλιπεν, ἅπερ ὁσημέραι μετὰ χεῖρας φέρουσι Γεωμετρῶν παῖδες.

Μετ' αὐτοὺς ἤκμασε Πτολομαῖος ὁ Κλαύδιος ὁ Κορυφαῖος τῶν Ἀστρονόμων καὶ ἐν Γεωμέτραις Ἄριστος, ὃς τὸ Ἀστρονομικὸν ἐκεῖνο συνέγραψε βιβλίον, οὗ ἡ ἐπιγραφὴ Μεγάλη Σύνταξις, βαρβαρικῶς δὲ Ἀλμαγέστον· ὅπερ ὅσον πάλαι μέγιστον ἦν, τοσοῦτον νῦν ἐλάχιστον κρίνεται. Τὸ γὰρ Κοπερνίκειον σύστημα, ὅπερ κατὰ διάμετρον τῷ πτολομαϊκῷ ἀντίκειται πολὺ ἐκείνου ὑπερέχει, διόπερ τῶν Νεωτέρων οἱ Ἀστρόνομοι Κοπερνίκειοι καὶ οὐ Πτολομαϊκοὶ καλεῖσθαι ἐθέλουσι.

Τῷ Πτολομαίῳ συνήκμασε Πρόκλος τις Μαθηματικώτατος, (ὃς τὸν τοῦ Βιταλιανοῦ στόλον τὴν Κωνσταντινούπολιν πολιορκοῦντα τῇ ὀπτικῇ μηχανῇ τῶν κατόπτρων ἐνέπρησεν, ἐπὶ βασιλείας Ἀναστασίου, καθὰ ἱστορεῖ ὁ Ζωναρᾶς) καὶ Πάππος, ὃς συνέγραψε συλλογὴν τῶν Μαθηματικῶν εἰς ὀκτὼ βιβλία συμποσουμένην, ὧν τὰ μὲν δύω ἀπώλετο, τὰ δὲ λοιπὰ ἓξ ὑπὸ πάντων τοῖς πάλαι ἀπομνημονεύμασι συνα-

ριθμοῦ.

ἐνθυμούμενά ἐστι. Καὶ ταῦτα μὲν ἅλις περὶ τῶν τῆς Ἑλλάδος Φιλοσόφων.

Τῶν δέ γε Ἑλληνικῶν πραγμάτων ἐν καταπτώσει ἐλθόντων, συνέβη τὴν μάθησιν ἐν Εὐρώπῃ ἐπιδημήσασαν ἐπιξενωθῆναι, ἔνθα λαμπροτάτῃ ἀσύλῳ ἐντυχοῦσα, τοὺς ταύτην οἰκοῦντας θαυμασίοις καὶ περιφανέσι κατελάμπρυνε κάλλεσι, πανσόφους τε αὐτοὺς ἐν παντὶ εἴδει μαθήσεως ποιουμένη.

Οὕτω τοίνυν ἡ τὸ πάλαι ἀκμάζουσα καὶ ἐπανθοῦσα τοῖς Ἕλλησι Μαθηματικὴ ἐπιστήμη ἤδη σχεδὸν ἐξέλιπε, καὶ οἱονεὶ ἐκ τῶν Ἑῴων ἀνατείλασα εἰς τὰ δυτικὰ μέρη κατέδυ· ἥτις καὶ ἐπανατελεῖ, εὔελπίς εἰμι, πρὸς τὰ Ἀνατολικὰ μέρη, τὴν παλαιὰν μητέρα, τὸν Ἥλιον μιμουμένη, ὅστις ἀπ' Ἀνατολῶν πρὸς δυσμάς, ἀπὸ δὲ δυσμῶν πρὸς Ἀνατολὰς καθ' ἑκάστην περιφερόμενος φαίνεται.

NOI RIFORMATORI

Dello Studio di Padova.

AVendo veduto per la Fede di Revisione, ed Approvazione del Pubblico Revisor Dottor Natal dalle Laste nel Libro intitolato Geometria. Manoscritta in Greco. non v' esser cosa alcuna contra la Santa Fede Cattolica, e parimente per Attestato del Segretario Nostro, niente contro Principi, e buoni costumi concediamo Licenza a Nicolò Glichì Stampator di Venezia che possi essere stampato, osservando gli ordini in materia di Stampe, e presentando le solite Copie alle Pubbliche Librarie di Venezia, e di Padova.

Data li 6. Agosto 1787.

(Andrea Querini Riformator.

(Zacaria Vallaresso Rif.

(Francesco Pesaro Kav. Proc. Riform.

Registrato in Libro a Carte 231. al Num. 2144.

Giuseppe Gradenigo Segr.

Addi 7. Agosto. 1787.
Registrato a Carte 1440. nel Libro del Mag. Eccellentissimo contro la Bestemmia.

Gio: Antonio Maria Cosfali Nod.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΆΣ

ΜΈΡΟΣ ΠΡΩ͂ΤΟΝ,

ΠΕΡΙ` ἘΠΙΠΈΔΩΝ ΣΧΗΜΆΤΩΝ.

ΚΕΦΆΛΑΙΟΝ Α'.

ΠΕΡΙ` ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩ͂Ν ἈΡΧΩ͂Ν.

Ὅρος Α'.

§. 1. Γεωμετρία ἐστὶν Ἐπιστήμη περὶ τὸ συνεχὲς ποσὸν καταγινομένη μήκους, πλάτους, καὶ βάθους μέτρον διερευνῶσα.

Ὅρος Β'.

§. 2. Στερεόν ἐστι ποσότης, κατὰ μῆκος ΑΦ, κατὰ Σχῆμα 1.
πλάτος ΑΔ, καὶ κατὰ βάθος ΑΡ ἐκτεινομένη.

Ὅρος Γ'.

Σχ. 2. §. 3. Ἐπιφάνεια δέ ἐστι ποσότης κατὰ μῆκος ΑΦ, καὶ κατὰ πλάτος ΑΛ μόνον ἐκτεταμένη. Ἔστι δὲ καὶ στερεοῦ πέρας.

Ὅρος Δ'.

Σχ. 3. §. 4. Γραμμὴ δέ ἐστι ποσότης κατὰ μῆκος ΑΦ μόνον ἐκτεταμένη. Ἔστι δὲ καὶ πέρας Ἐπιφανείας.

Ὅρος Ε'.

§. 5. Σημεῖον δέ ἐστιν οὗ μέρος οὐθέν. Ἔστι δὲ καὶ Γραμμῆς πέρας.

Ὅρος ϛ'.

Σχ. 4. §. 6. Εὐθεῖα Γραμμή ἐστιν ἡ ἐλαχίστη τῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων ἀχθῆναι δυναμένων γραμμῶν, οἷον ἡ ΑΒ. Αἱ δὲ ΑΕΒ, ΑΔΒ Καμπύλαι προσαγορεύονται.

Ὅρος Ζ'.

§. 7. Ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστι ἡ ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν ἐπιφανειῶν.

Ὅρος Η'.

Σχ. 5. §. 8. Ἐπίπεδος Γωνία ἐστὶ κλίσις δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, οἷον ἡ ΕΑΚ. Κἂν μὲν αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ

Γωνία, ὧν δὲ Καμπύλαι καμπυλόγραμμος, οἷον ἡ Κεφ. α. ΒΑΓ. Καὶ τὸ μεσὸ Α σημεῖον Κορυφὴ ἤκουσε, αἱ δὲ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ σκέλη προσαγορεύονται.

Ὅρος Θ'.

§. 9. Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ ἡ ΡΑ ἐπ' εὐθεῖαν γραμμὴν τὴν ΚΜ σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ΡΑΚ, ΡΑΜ ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Ἡ δ' ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα ΡΑ κάθετος καλεῖται. Σχ. 6.

Ὅρος Ι'.

§. 10. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς, οἷον ἡ ΕΑΜ. Ὀξεῖα δὲ ἡ ὀρθῆς ἐλάσσων, οἷον ἡ ΕΑΚ. Σχ. 6.

Ὅρος ΙΑ'.

§. 11. Παράλληλοι εὐθεῖαί εἰσιν αἱ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη τὴν αὐτὴν πρὸς ἀλλήλας φυλάττουσαι διάστασιν, οἷον αἱ ΑΒ, ΕΖ. Σχ. 7.

Ὅρος ΙΒ'.

§. 12. Σχῆμα δ' ἐστὶ τὸ ὑπό τινων γραμμῶν περιεχόμενον χωρίον· Ὅπερ εὐθύγραμμον καλεῖται, ὅταν αἱ τὸ χωρίον περικλείουσαι γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσι· καμπυλόγραμμον δὲ, ὅταν καμπύλαι.

Ὅρος ΙΓ'.

§. 13. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς Σχ. 8.

Κεφ. α. Γραμμῆς περιεχόμενον, ἣν περιφέρειαν καλοῦσι, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου ἐντὸς τοῦ κύκλου κειμένου πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Κέντρον μὲν τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Κ καλεῖται. αἱ δὲ ἴσαι γραμμαὶ ἀκτῖνες, καὶ ἡμιδιάμετροι τοῦ κύκλου προσαγορεύονται, οἷον αἱ ΚΑ, ΚΣ εὐθεῖαι.

Ὅρος ΙΔ'.

Σχ. 8. §. 14. Διάμετρος λέγεται τοῦ κύκλου εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις τὸν κύκλον, καὶ τὴν περιφέρειαν δίχα τέμνει. οἷον ἡ ΑΡ εὐθεῖα.

Ὅρος ΙΕ'.

Σχ. 8. §. 15. Χορδὴ κύκλου λέγεται εὐθεῖά τις ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη περατουμένη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, ἥτις ἀνίσως τέμνει τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν, οἷον ἡ ΣΡ εὐθεῖα.

Ὅρος Ιϛ'.

§. 16. Κύκλου τόξον ἐστὶ μέρος περιφερείας ὁπηλικονοῦν. Μοῖρα δὲ περιφερείας μέρος τριακοσιοστὸν ἑξηκοστόν. Ἑκάστη δὲ μοῖρα εἰς ἑξήκοντα λεπτὰ πρῶτα ὑποδιαιρεῖται. τούτων δ' ἕκαστον εἰς ἑξήκοντα λεπτὰ δεύτερα αὖθις διαιρεῖται. καὶ οὕτως ἑξῆς.

Ὅρος ΙΖ'.

Σχ. 9. §. 17. Ἡμικύκλιόν ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς Διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης πε-

ρι-

ριφερείας, οἷον τὸ ΑΚΕΜ, ὅπερ μοίρας ἑκατὸν καὶ Κεφ. α.
ὀγδοήκοντα περιέχει.

Ὅρος ΙΗ΄.

§. 18. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα Σχ. 10.
ὑπό τε χορδῆς καὶ τόξου τινὸς, οἷον τὸ ΑΒΓ, ὅπερ εἰ μὲν ἔλαττον ἡμικυκλίου, τμῆμα ἔλαττον λέγεται, οἷον τὸ ΑΒΓ. εἰ δὲ μεῖζον ἡμικυκλίου, τμῆμα μεῖζον, οἷον τὸ ΑΔΓ.

Ὅρος ΙΘ΄.

§. 19. Τεταρτημόριον ἐστὶ κύκλου τόξον ἐμπεριλαμ- Σχ. 11.
βανόμενον μεταξὺ δύο ἀκτίνων πρὸς ὀρθὰς συνισταμένων, οἷον τὸ ΑΚΜ, ὅπερ μοίρας ἐνενήκοντα περιέχει.

Ὅρος Κ΄.

§. 20. Ἐν τῇ περιφερείᾳ Γωνία λέγεται, ἧς ἡ Σχ. 8.
κορυφὴ καὶ τὰ σκέλη ἐν τῇ περιφερείᾳ εἰσὶν, οἷον ἡ ΑΡΣ. Γωνία δ' ἐν Κέντρῳ καλεῖται, ἧς ἡ μὲν κορυφὴ ἐν τῷ κέντρῳ, τὰ δὲ σκέλη ἐν τῇ περιφερείᾳ ἐστὶν, οἷον ἡ ΑΚΣ.

Ὅρος ΚΑ΄.

§. 21. Εὐθεῖα κύκλου ἐφαπτομένη ἐστὶν, ἥτις ἐκ- Σχ. 8.
βαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον, οἷον ἡ ΛΟ εὐθεῖα, ἥτις τοῦ κύκλου ἐφάπτεται κατὰ τὸ Α σημεῖον, ὅπερ ἐπαφῆς σημεῖον ἤκουσεν.

Κεφ. α.

Ὅρος ΚΒ'.

§. 22. Τρίγωνον Εὐθύγραμμόν ἐστι σχῆμα ὑπὸ
τριῶν εὐθειῶν, ἃς πλευρὰς ἐκάλεσαν, περιεχό-
Σχ. 12. μενον, οἷον τὸ ΑΒΓ. Κἂν μὲν αἱ περικλείουσαι
τὸ σχῆμα πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι τρίγωνον ἰσό-
Σχ. 13. πλευρον λέγεται, οἷον τὸ ΑΒΓ. Ἢν δὲ τὰς δύω
μόνον ἴσας ἀλλήλαις ἔχῃ, τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἤκου-
Σχ. 14. σεν, οἷον τὸ ΚΒΓ. Τὸ δὲ καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς
ἀνίσους ἔχον, τρίγωνον σκαληνὸν προσηγορεύθη, οἷον
τὸ ΖΚΟ.

Ὅρος ΚΓ'.

Σχ. 12. §. 23. Ὑποτείνουσα τριγώνου λέγεται μία τῶν αὐτοῦ
πλευρῶν, ὑφ' ἧς αἱ λοιπαὶ πλευραὶ περιέχονται, οἷον
ἡ ΑΓ πλευρά, ἥτις ἐλάσσων ἐστὶ τῶν δύω πλευρῶν
συνάμα λαμβανομένων.

Ὅρος ΚΔ'.

Σχ. 15. §. 24. Τρίγωνον Ὀρθογώνιόν ἐστι τὸ μίαν γωνίαν
Σχ. 14 ὀρθὴν ἔχον, οἷον τὸ ΜΝΠ. Ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ
Σχ. 13. μίαν ἀμβλεῖαν, οἷον τὸ ΚΖΘ. τὸ δὲ καὶ τὰς τρεῖς
ὀξείας ἔχον ὀξυγώνιον ἤκουσεν, οἷον τὸ ΒΓΚ.

Ὅρος ΚΕ'.

Σχ. 16. §. 25. Τετράγωνόν δὲ ἐστι σχῆμα τετράπλευρον, ἰ-
σόπλευρόν τε καὶ ὀρθογώνιον, οἷον τὸ ΠΚΛΣ.

Ὅρος Κϛ'.

Σχ. 17. §. 26. Παραλληλόγραμμόν ἐστι σχῆμα τετράπλευ-

ρον,

ρον, ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δὲ, οἷον τὸ Κεφ. [illegible] ΑΕΚΛ, ὅπερ τὰς ἀπ᾿ ἐναντίου πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλας ἔχει.

Ὅρος ΚΖ'.

§. 27. Τραπέζιόν ἐστι σχῆμα τετράπλευρον, ὃ μήτε ἰσόπλευρόν ἐστι μήτε ἰσογώνιον, οἷον τὸ ΑΒΔΕ. Σχ. 18.

Ὅρος ΚΗ'.

§. 28. Ῥόμβος ἐστὶ σχῆμα τετράπλευρον, ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ Ορθογώνιον δὲ, οἷον τὸ ΠΚΛΣ σχῆμα. Σχ. 19.

Ὅρος ΚΘ'.

§. 29. Ῥομβοειδές ἐστι σχῆμα τετράπλευρον τὸ τὰς ἀπ᾿ ἐναντίου πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον, οἷον τὸ ΑΒΥΤ. Σχ. 20.

Ὅρος Λ'.

§. 30. Σχῆμα εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν περιγραφομένου πλευρὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐφάπτηται, οἷον τὸ ΚΡΖΛ. Σχῆμα δ' εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἅπτηται, οἷον τὸ ΑΕΟΧ. Σχ. 21.

Ὅρος ΛΑ'.

§. 31. Κύκλος περὶ σχῆμα περιγράφεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται, ἐφάπτηται. Κύκλος δ' ἐν σχήματι ἐγγρά-

Κεφ. α. φεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ ἐν ᾧ ἐγγράφεται, ἐφάπτηται.

Ὅρος ΛΒ΄.

Σχ. 22 §. 32. Σχῆμα πολύγωνόν ἐστι τὸ πλείοσιν ἢ τέσσαρσι πλευραῖς περιεχόμενον σχῆμα, ὅπερ εἰ μὲν ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιόν ἐστι πολύγωνον κανονικὸν ἤκουσεν, οἷον τὸ ΚΑ.

Ὅρος ΛΓ΄.

§. 33. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, Ἀσύμμετρα δὲ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

Ὅρος ΛΔ΄.

§. 34. Μέτρον γραμμῶν ἐστιν εὐθεῖα γραμμὴ τὸ μῆκος ἀδιόριστος, ἥτις διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη, ἅπερ πόδας ἐκάλεσαν. Ἕκαστος δὲ ποῦς διαιρεῖται εἰς δακτύλους δέκα· ὁ δὲ δάκτυλος εἰς δέκα γραμμάς· ἡ δὲ γραμμὴ εἰς δέκα μόρια. Ἕκαστος οὖν ποῦς περιέχει μόρια 1000, ὁ δὲ τοῦ Παρισίου ποῦς περιέχει μόρια 1440.

Ὅρος ΛΕ΄.

§. 35. Μέτρον ἐπιφανειῶν ἐστι τετραγωνικὴ ἐπιφάνεια ἐκ δέκα τετραγωνικῶν ποδῶν συνισταμένη, ἥτις καὶ ὑποδιαιρεῖται εἰς πόδας, εἰς δακτύλους καὶ εἰς μόρια, ὡς καὶ ἡ γραμμή.

Ὅρος

Ο῎ρος Λϛ'.

§. 36. Θεώρημά ἐστι πρότασις δειχθησόμενόν τι προτείνουσα. Πρόβλημά ἐστι πρότασις πραχθησόμενόν τι προβάλλουσα. Λῆμμά δέ ἐστι πρότασις εἰς ἀπόδειξιν ἄλλης προτάσεως λαμβανομένη. Τὸ δὲ πόρισμα θεώρημά ἐστιν ἐκ προβλήματός τινος ἢ θεωρήματος ἀναφαινόμενον.

Ο῎ρος ΛΖ'.

§. 37. Αἴτημά ἐστι γνῶσις ἀναπόδεικτος, λαμβανομένη εἰς κατασκευήν τινος καὶ ἀρχήν.

Αἴτημα Α'.

§. 38. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Αἴτημα Β'.

§. 39. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

Αἴτημα Γ'.

§. 40. Καὶ παντὶ κέντρῳ, καὶ διαστήματι κύκλον γεγράφθαι.

Ο῎ρος ΛΗ'.

§. 41. Α᾿ξίωμά ἐστι γνῶσις γνώριμος, τὸ ἐναργές

τε καὶ

Κεφ. α. τε καὶ αὐτόπιστον καθ' ἑαυτὴν ἔχουσα, εἰς ἀρχὴν λαμβανομένη.

Ἀξίωμα Α'.

§. 42. Ἐὰν τοῖς ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Ἀξίωμα Β'.

§. 43. Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

Ἀξίωμα Γ'.

§. 44. Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἄνισα ἀφαιρεθῇ τὰ καταλειπόμενα ἔσται ἄνισα.

Ἀξίωμα Δ'.

§. 45. Ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ τὰ ὅλα ἔσται ἄνισα.

Ἀξίωμα Ε'.

§. 46. Ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ τὰ καταλειπόμεναι ἔσται ἄνισα.

Ἀξίωμα ϛ'.

§. 47. Τὸ ὅλον τοῦ ἰδίου μέρους μεῖζόν ἐστι, ἴσον δὲ τοῖς ἰδίοις μέρεσι συνάμα ληφθεῖσι.

Ἀξίω-

Α'ξίωμα Ζ'.

§. 48. Τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Α'ξίωμα Η'.

§. 49. Καὶ ἃ ἀλλήλοις ἴσα ἐπ' ἄλληλα ἐφαρμόζει.

Α'ξίωμα Θ'.

§. 50. Τὰ ἑνὶ τρίτῳ ταὐτὰ, καὶ ἀλλήλοις ταὐτά.

Α'ξίωμα Ι'.

§. 51. Τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἢ τριπλάσια ἢ ἡμίσεα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Α'ξίωμα ΙΑ'.

§. 52. Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΠΕΡΙ ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΩΝ

ΓΡΑΜΜΩΝ ΤΕ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

Πρότασις Α΄. Θεώρημα.

Σχ. 23. §. 53. Ἐὰν ἐκτὸς κέντρου κύκλου ΒΓΖ ληφθῇ τὸ Α σημεῖον, ἀπὸ δὲ τούτου πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΑΒ, ΑΡ, ΑΖ, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχεν, ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη ΑΡ πασῶν μεγίστη ἐστί.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ κέντρου ἡ ΚΖ ἡμιδιάμετρος. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΚΡ, ΚΖ εὐθεῖαι ἴσαι (13) ἀλλή-

λαις

λαις εἰσὶ, κοινῆ προστεθείσης τῆς ΑΚ, ἡ ΑΚ ἀπὸ Κεφ. β'.
τῆς ΚΡ, ἤτοι ὅλη ἡ ΑΡ ταῖς ΑΚ, ΚΖ ἴση (42) ἔςαι. Α'λλ' ἐν τῷ ΑΚΖ τριγώνῳ αἱ δύω πλευραὶ ΑΚ, ΚΖ συνάμα ληφθεῖσαι τῆς ΑΖ πλευρᾶς μείζονές (23) εἰσι· καὶ ἡ ΑΡ ἄρα τῆς ΑΖ μείζων ἔςαι. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον ἡ ΑΡ εὐθεῖα πάσης ἄλλης εὐθείας μείζων δειχθήσεται. Ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἄρα ἠγμένη πασῶν μεγίςη ἐςίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

§. 54. Ἐν παντὶ ἄρα κύκλῳ ἡ Διάμετρος πασῶν τῶν χορδῶν μεγίςη ἐςί.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

§. 55. Τῶν αὐτῶν δοθέντων, ἐὰν τὸ ΡΖ τόξον τοῦ Σχ. 23.
ΡΕ τόξου ἔλαττον ᾖ· ἡ ΑΖ εὐθεῖα τῆς ΑΕ εὐθείας μείζων ἔςαι.

Δεῖξις.

Ἔςω τὸ ΡΒ τόξον τῷ ΡΖ τόξῳ ἴσον, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΒ, ταύτῃ ἴση κατασκευάσθω ἡ ΑΖ, καὶ διήχθω ἡ ΚΕ τὴν ΑΒ κατὰ τὸ Ι σημεῖον τέμνουσα. Ἐν τῷ τριγώνῳ ΚΙΒ, ἡ ΚΙ εὐθεῖα συνάμα τῇ ΙΒ τῆς ΚΒ μείζων (23) ἐςίν. Α'λλαμὴν αἱ ΚΒ, ΚΕ εὐθεῖαι ἴσαι (13) ἀλλήλαις εἰσίν· ἡ ΚΙΒ ἄρα τῆς ΚΕ μείζων ἔςαι· κοινῆ δ' ἀφαιρεθείσης τῆς ΚΙ, ἔςαι ἡ ΙΒ τῆς ΙΕ (46) μείζων. Ἐὰν ἄρα ταῖς ΙΒ, ΙΕ εὐθείαις ἡ ΙΑ κοινῆ προστεθῇ, ἡ ΑΙΒ τῆς ΑΙΕ μείζων (45) ἐςίν. Α'λλ' ἐν τῷ τριγώνῳ ΕΙΑ,

ἡ ΑΙΕ

Κεφ. β'. ἡ ΑΙΕ τῆς ΑΕ μείζων (23) ἐστίν· ἡ ΑΒ ἄρα, ἤ ἡ ταύτῃ ἴση ΑΖ πολλῷ μείζων ἔσαι τῆς ΑΕ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Σχ. 23. §. 56. Τῶν αὐτῶν δοθέντων, ἐὰν ἡ ΑΖ εὐθεῖα τῇ ΑΒ εὐθείᾳ ἴση ᾖ, καὶ τὸ ΡΖ τόξον ἴσον ἔσαι τῷ ΡΒ τόξῳ.

Δεῖξις.

Τὸ ΡΖ τόξον τῷ ΡΒ τόξῳ ἔλαττον ἔσω, ἢ μεῖζον. Καὶ εἰ μὲν ἔλαττον, ἡ ΑΖ εὐθεῖα τῆς ΑΒ εὐθείας μείζων (55) ἂν εἴη· κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Εἰδὲ μεῖζον, ἡ ΑΖ εὐθεῖα τῆς ΑΒ εὐθείας ἐλάσσων (55) ἂν εἴη· αὖθις κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Ἐπεὶ οὐκ οὐδέτερόν συμβῆναι δυνατόν, ἴσα ἄρα ἀλλήλοις ἐσὶ τὰ ΡΒ, ΡΖ τόξα. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 24. §. 57. Ἐντεῦθεν συνάγεται τὰς ἴσας χορδὰς ΑΖ, ΑΒ ἴσα τόξα ὑποτείνειν. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΑΚΡ Διαμέτρου, ἡ ΑΖΡ ἡμιπεριφέρεια τῇ ΑΒΡ ἡμιπεριφερείᾳ ἴση (14). ἐστίν. Ἀλλαμὴν τὸ ΡΖ τόξον ἴσον (56) ἐσὶ τῷ ΡΒ τόξῳ, ἄρα καὶ τὸ ΑΖ τόξον τῷ ΑΒ τόξῳ ἴσον ἔσαι.

Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Σχ. 24. §. 58. Ἐὰν τῷ ΑΚΖ τριγώνου αἱ πλευραὶ ΑΚ, ΚΖ, ΖΑ ἴσαι ὦσι ταῖς πλευραῖς ΑΚ, ΚΒ,

ΒΑ

ΒΑ τῷ ΑΚΒ τριγώνῳ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· αἱ ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν ὑποτεινόμεναι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ὅλα τὰ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσαι. Κεφ. β'.

Δεῖξις.

Κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΖ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΖΕΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΚ κατὰ τὸ Ρ σημεῖον. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΖ τῇ ΑΒ ἴση ὑποτίθεται, τὰ τόξα ΡΖ, ΡΒ ἴσα (56) ἀλλήλοις ἐστί. Ἔτι δὲ καὶ τὰ τόξα ΑΖ, ΑΒ ἴσα (57) ἐστί. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΖΚ ἐπιτιθέμενον τῷ τριγώνῳ ΑΒΚ ἐφαρμόσει αὐτῷ. Ἀλλὰ μὴν τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπάλληλα ἴσα ἐστι, τὰ τρίγωνα ἄρα ἴσα ἀλλήλοις ἔσαι. Καὶ διὰ ταῦτα ἡ ΑΚΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒΚ γωνίᾳ, ἡ δὲ ΑΖΚ γωνία τῇ ΑΒΚ γωνίᾳ ἴση, ἔτι δὲ καὶ ἡ ΚΑΖ γωνία τῇ ΚΑΒ γωνίᾳ ἴση ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 59. Ἐκ ταύτης τῆς προτάσεως δίχα τέμνειν Σχ. 25.
μεμαθήκαμεν οἵαν δή ποτε Εὐθύγραμμον γωνίαν φέρε τὴν ΕΑΛ. Εἰλήφθω γὰρ ἡ ΑΚ εὐθεῖα τῇ ΑΣ εὐθείᾳ ἴση, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΚΣ, κέντροις μὲν τοῖς Κ, Σ, κοινῇ δὲ ἀκτῖνι τῇ ΚΣ, γεγράφθωσαν δύο κύκλοι οἱ ΣΟΤ, ΚΟΤ ἀλλήλους κατὰ τὸ Ο σημεῖον τέμνοντες, καὶ ἤχθω ἡ ΑΟ, ἥτις διχοτομήσει τὴν ΕΑΛ γωνίαν. Αἱ ΚΟ, ΚΣ ἀκτῖνες ἴσαι (13) ἀλλήλαις εἰσί. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον καὶ αἱ ΣΟ, ΣΚ εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἡ ΚΟ ἄρα τῇ ΣΟ ἴση (50) ἐστίν.

Κεφ. β'. ἐστὶ. Εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ πλευραὶ ΚΑ, ΑΟ τριγώνου τοῦ ΟΑΚ, ταῖς πλευραῖς ΣΑ ΑΟ τοῦ ΟΣΑ τριγώνου (ἐκ κατασκευῆς). Τὸ τρίγωνον ἄρα ΟΚΑ τῷ ΟΣΑ τριγώνῳ ἴσον (58) ἐστιν, ἡ δὲ ΚΑΟ γωνία τῇ ΣΑΟ γωνίᾳ ἴση ἐστί· Καὶ διὰ ταῦτα ἡ ΑΟ εὐθεῖα δίχα τέτμηκε τὴν ΚΑΣ γωνίαν, τουτέστι τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ΕΑΛ.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 25. §. 60. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης ΚΣ τρίγωνον ἰσόπλευρον εὐμαρῶς ἐκ τοῦ πρώτου πορίσματος συστήσασθαι δυνάμεθα.

Πόρισμα Γ'.

Σχ. 26. §. 61. Καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΟΡ ἀπὸ τοῦ ἐν αὐτῇ δοθέντος σημείου Β κάθετον Γραμμὴν ἀναγαγεῖν. Εἰλήφθωσαν ἑκατέρωθεν τοῦ δοθέντος σημείου ἴσαι Εὐθεῖαι αἱ ΒΞ, ΒΝ, ἐπὶ δὲ τῆς ΞΝ εὐθείας συνεστάθω (60) Τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΝΑΞ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΒ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Β, ἥτις ἔσται ἡ ποθουμένη. Ἐπεὶ γὰρ τοῦ ΞΑΒ τριγώνου αἱ πλευραὶ ΒΞ, ΞΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα ταῖς πλευραῖς ΒΝ, ΝΑ, ΑΒ τριγώνου τοῦ ΝΑΒ· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΒΝ ἴση (58) ἐστὶ τῇ ΑΒΞ γωνίᾳ. Καὶ διὰ ταῦτα ἡ ΑΒ εὐθεῖα κάθετος (9) ἐστιν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΟΡ.

Πρό-

Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

§. 62. Πάσης πρὸς τὸ κέντρον εὐθυγράμμου γωνίας ΑΚΥ μεῖζον ἐστὶ τόξον κύκλου ὑπὸ τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν ἐμπεριλαμβανόμενον, οἷον τὸ ΑΥ τόξον. Σχ. 28.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἡ ΥΑ χορδὴ, καὶ ταύτῃ ἴση εἰλήφθω ἡ ΥΡ, καὶ ἔσαι τὰ τόξα ΥΑ, ΥΡ ἴσα (57) ἀλλήλοις. τὸ ΑΡ ἄρα τόξον τοῦ ΑΥ τόξου διπλάσιόν ἐστι, καὶ τοῦ ΑΚΥ τριγώνου αἱ πλευραὶ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ταῖς πλευραῖς τοῦ ΡΥΚ τριγώνου. Γωνία ἄρα ἡ ΑΚΥ τῇ ΡΚΥ γωνίᾳ ἴση (58) ἐστίν. Ἀλλαμὴν τὸ ΑΡ τόξον τοῦ ΑΥ τόξου διπλάσιον κατεσκεύασαι, ἄρα ἡ ΑΚΡ γωνία τῆς γωνίας ΑΚΥ διπλασία ἐστί. τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον καὶ ἡ ΑΚΓ γωνία τριπλασία δειχθήσεται τῆς ΑΚΥ γωνίας, ἐὰν τὸ ΑΓ τόξον τοῦ ΑΥ τόξου τριπλάσιον ληφθῇ. Τὸ ΑΥ ἄρα τόξον τὴν ποσότητα τῆς γωνίας παρίστησι, ὥστε μεῖζον ἐστὶ τῆς γωνίας ΑΚΥ· εἰ γὰρ μὴ οὕτως εἶχε, διπλασιασθέντος, ἢ τριπλασιασθέντος τοῦ ΑΥ τόξου, οὐκ ἐδιπλασιάζετο, οὐδὲ μὴν ἐτριπλασιάζετο ἡ ΑΚΥ γωνία. Πάσης ἄρα πρὸς τὸ κέντρον γωνίας μεῖζον καὶ τ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 63. Ἡ ὀρθὴ ἄρα γωνία ΚΜΕ ἐνενήκοντα μοίρας περιέχει. Κατασκευασθείσης γὰρ τῆς ΚΜΑ γωνίας τῇ ΚΜΕ γωνίᾳ ἴσης, ἐπὶ τῆς ΑΕ ἡμι- Σχ. 27.

Κεφ. β. κύκλιον γεγράφθω τὸ ΑΚΕ. Ἐπεὶ δὲ αἱ γωνίαι ΚΜΕ, ΚΜΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ τὰ τούτων μέτρα, τουτέστι τὰ τόξα ΑΚ, ΚΕ, ἴσα (62) ἀλλήλοις ἔσαι. Τὸ ΕΚ ἄρα τόξον τοῦ ΑΚΕ ἡμικυκλίου ἥμισυ ἐστιν· ἀλλὰ μὴν τὸ ἡμικύκλιον ἑκατὸν καὶ ὀγδοήκοντα μοίρας (17) περιέχει· ἄρα τὸ ΚΕ τόξον ἐννενήκοντα μοιρῶν περιεκτικόν ἐστι, καὶ διὰ ταῦτα ἡ ὀρθὴ γωνία ΚΜΕ ἐννενήκοντα μοιρῶν ἔσαι.

Πόρισμα Β'.

§. 64. Ἡ ὀξεῖα ἄρα γωνία ὀρθῆς ἐλάττων (10) οὖσα, μοίρας ἧττον τῶν ἐννενήκοντα περιέχει. Ἡ δ' ἀμβλεῖα ὀρθῆς μείζων (10) οὖσα, μοίρας πλεῖον τῶν ἐννενήκοντα περιέχει.

Πόρισμα Γ'.

Σχ. 29. §. 65. Καὶ ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΡΟ, ΚΦ ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον τέμνωσι, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ΦΕΡ, ΚΕΡ ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσιν. Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἡμικύκλια ΚΡΦ, ΡΚΟ ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ, κοινῆ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΚΡ τόξου, τὰ τόξα ΡΦ, ΚΟ ἴσα (43) ἀλλήλοις καταληφθήσεται. Γωνία ἄρα ἡ ΡΕΦ τῇ ΚΕΟ γωνίᾳ ἴση (62) ἔσαι. Τοῦτον δὴ τὸν τρόπον καὶ αἱ γωνίαι ΡΕΚ, ΦΕΟ ἴσαι ἀλλήλαις δειχθήσονται.

Σχόλιον.

Σχ. 30. §. 66. Ἐκ ταύτης τῆς προτάσεως οἵας δήποτε γωνίας τὰς μοίρας εὐμαρῶς θηρεύειν μεμαθήκαμεν. Ἔσω δὴ ἐπὶ τοῦ παρόντος θηρεῦσαι τὰς μοίρας

τῆς

τῆς ΧΑΖ γωνίας, ἥτις παραςατική ἐςι τȣ͂ διαςή- Κεφ. β'.
ματος ΧΖ τῶν ὑψωμάτων ΧΔ, ΖΓ. Εἰλήφθω
τὸ ΚΒΛ ἡμικύκλιον εἰς μοίρας καὶ λεπτὰ διῃρη-
μένον, ὅπερ ἕτως ἐπὶ τῆς ΧΑΖ γωνίας ἐπιθέσθω,
ὥςε τὸ μὲν κέντρον ἐπὶ τὴν Α κορυφὴν, τὴν δὲ
ἀκτῖνα ἐπὶ τὴν ΑΧ πλευρὰν ἐφαρμόζειν, καὶ ἔςαι
τὸ ποθέμενον· τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν τὴν γωνίαν περιεχȣ-
σῶν εὐθειῶν ὑποτμηθὲν τόξον ΚΒ τῆς δοθείσης
γωνίας τὰς μοίρας (62) παρίςησι.

Πρότασις ϛ'. Θεώρημα.

§. 67. Ἐὰν ἡ ΡΕ εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ΚΦ εὐθείας Σχ. 29.
ὁπωσȣ͂ν ςαθῇ· τὰς ἐφεξῆς γωνίας ΡΕΚ, ΡΕΦ
συνάμα ληφθείσας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Δεῖξις.

Κέντρῳ μὲν τῷ Ε, διαςήματι δὲ τῷ ΕΚ, κύ-
κλος γεγράφθω ὁ ΚΡΦΟ. Ἐπεὶ δὲ τῆς ΡΕΚ
γωνίας μέτρον (62) ἐςὶ τὸ ΡΚ τόξον, τῆς δὲ
ΡΕΦ γωνίας μέτρον (62) ἐςὶ τὸ ΡΦ τόξον· Δῆ-
λον, τῶν δύο γωνιῶν ΡΕΚ, ΡΕΦ συνάμα λη-
φθεισῶν μέτρον εἶναι τὸ ἡμικύκλιον ΚΡΦ. Ἀλ-
λὰ μὴν τὸ ἡμικύκλιον δύο ὀρθὰς καταμετρεῖ (63),
ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται αἱ γωνίαι ΡΕΚ,
ΡΕΦ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 68. Δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΡΟ, ΚΦ ἀλλήλας Σχ. 29.
τέμνȣσαι πρὸς τὴν κοινὴν τομὴν Ε γωνίας τέσ-
σαρσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσȣσι. Ὧν γὰρ λόγον αἱ
γωνίαι ΡΕΚ, ΡΕΦ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (67) εἰσι,

Κεφ. β'. τὸν αὐτὸν δὴ καὶ αἱ λοιπαὶ δύω ΟΕΚ, ΟΕΦ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται. Πᾶσαι ἄρα αἱ πρὸς τῷ Ε γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Σχ. 24. §. 69. Ἐὰν αἱ πλευραὶ ΑΚ, ΚΖ τριγώνου τοῦ ΑΚΖ ἴσαι ὦσι ταῖς πλευραῖς ΑΚ, ΚΕ τριγώνου τοῦ ΑΚΕ, ἡ δὲ ΑΚΖ γωνία μείζων ἢ τῆς ΑΚΕ γωνίας· καὶ ἡ ΑΖ πλευρὰ τῆς ΑΕ πλευρᾶς μείζων ἔσαι.

Δεῖξις.

Κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΖ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΖΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΚ πρὸς τὸ Ρ σημεῖον. Ἐπεὶ ἂν αἱ γωνίαι ΑΚΖ, ΖΚΡ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (67) εἰσιν, ἔτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΑΚΕ, ΕΚΡ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (67) εἰσιν. ἄρα αἱ γωνίαι ΑΚΖ, ΖΚΡ ἴσαι ἔσονται ταῖς γωνίαις ΑΚΕ, ΕΚΡ· ἀλλαμὴν ἡ ΑΚΖ γωνία μείζων (ἐξ ὑπ.) ἐσὶ τῆς ΑΚΕ γωνίας, ἄρα ἡ ΖΚΡ γωνία τῆς γωνίας ΕΚΡ ἐλάττων (44) ἐσαι, καὶ διὰ ταῦτα τὸ ΡΖ τόξον ἔλαττον (62) ἔσαι τοῦ ΡΕ τόξου, καὶ ἑπομένως ἡ ΑΖ εὐθεῖα τῆς ΑΕ μείζων (55) ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 31. §. 70. Ἐκ τούτων δῆλον ὅτι ἐὰν τὸ ΑΕ τόξον τοῦ ΟΡ τόξου μεῖζον ᾖ, καὶ ἡ ΑΕ χορδὴ τῆς ΡΟ χορδῆς μείζων ἔσαι. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν ΚΑ, ΚΕ, ΚΡ, ΚΟ ἡμιδιαμέτρων, αἱ ΑΚ, ΚΕ πλευραὶ τοῦ ΕΑΚ τριγώνου ἴσαι εἰσὶ ταῖς πλευραῖς

ΡΚ,

ΡΚ, ΚΟ τριγώνυ τῦ ΟΡΚ. Α'λλαμὴν καὶ ἡ ΑΚΕ γωνία τῆς ΡΚΟ γωνίας μείζων ἐςὶ, (διὰ τὸ μεῖζον εἶναι τὸ τόξον ΑΕ τῦ ΡΟ τόξυ) ἄρα ἡ ΑΕ χορδὴ τῆς ΡΟ χορδῆς μείζων (69) ἐςί. Κεφ. β'.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

§. 71. Ε'ὰν τῦ ΑΚΖ τριγώνυ αἱ πλευραὶ ΑΚ, ΚΖ ἴσαι ὦσι ταῖς πλευραῖς ΑΚ, ΚΒ τῦ ΑΚΒ τριγώνυ, ἡ δὲ ΑΚΖ γωνία τῇ ΑΚΒ γωνίᾳ ἴση ᾖ· καὶ ἡ ΑΖ πλευρὰ τῇ ΑΒ πλευρᾷ ἴση ἔςαι, καὶ ὅλα τὰ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔςαι. Σχ. 24.

Δεῖξις.

Κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαςήματι δὲ τῷ ΚΖ κύκλος γεγράφθω ὁ ΖΕΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΚ πρὸς τὸ Ρ σημεῖον. Αἱ δύω γωνίαι ΑΚΖ, ΖΚΡ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (67) εἰσιν, ἔτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΑΚΒ, ΒΚΡ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (67) εἰσιν. Αἱ ἄρα γωνίαι ΑΚΖ, ΖΚΡ ἴσαι εἰσὶ ταῖς γωνίαις ΑΚΒ, ΒΚΡ. ἀλλαμὴν ἡ ΑΚΖ γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ΑΚΒ, ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ΖΚΡ ἴση ἐςὶ τῇ ΒΚΡ. καὶ διὰ ταῦτα τὰ τόξα ΖΡ, ΒΡ ἴσα (62) ἀλλήλοις ἐςὶ, καὶ ἡ ΑΖ εὐθεῖα τῇ ΑΒ εὐθείᾳ ἴση (53) ἐςίν. Εἰσὶ δὲ ἴσαι (ἐξ ὑποθ.) καὶ αἱ πλευραὶ ΑΚ, ΚΖ τῦ ΑΚΖ τριγώνυ ταῖς πλευραῖς ΑΚ, ΚΒ τῦ ΑΚΒ τριγώνυ. ἄρα καὶ ὅλα τὰ τρίγωνα (58) ἴσα ἀλλήλοις ἔςαι. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 72. Ε'ὰν ἄρα δύω τῦ αὐτῦ κύκλυ τόξα ΑΕ, Σχ. 32.

Ἡ ΑΚΖ γωνία τῆς ΑΚΕ γωνίας ἐλάττων εἶναι ἀδύνατον· ἡ γὰρ ΑΖ πλευρὰ τῆς ΑΕ πλευρᾶς ἐλάττων (69) ἂν εἴη· κατὰ τῆς ὑποθέσεως· Οὐδεμίαν ἴση· αἱ γὰρ ΑΖ, ΑΕ πλευραὶ ἴσαι ἂν (71) ἀλλήλαις εἶεν· αὖθις κατὰ τῆς ὑποθέσεως· ταὐτ᾽ ἄρα γωνία ἡ ΑΚΖ τῆς ΑΚΕ γωνίας μείζων ἐστι. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ι΄. Πρόβλημα.

Σχ. 33. §. 74. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ΚΕ δίχα τεμεῖν.

Δεῖξις.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΚΕ συνεστάθω (60) τρι-

Κεφ. β'. ΡΟ ἴσα ἀλλήλοις ᾖ, καὶ αἱ ἐπὶ τούτοις χορδαὶ ΑΕ, ΡΟ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Αἱ γὰρ πλευραὶ ΑΚ, ΚΕ τοῦ τριγώνου ΕΑΚ ἴσαι (13) εἰσὶ ταῖς πλευραῖς ΚΡ, ΚΟ τοῦ τριγώνου ΟΡΚ. ἀλλαμὴν καὶ ἡ ΑΚΕ γωνία τῇ ΡΚΟ γωνίᾳ ἴση (62) ἐστὶν, (διὰ τὸ ἴσα εἶναι τὰ ΑΕ, ΡΟ τόξα) ἄρα καὶ ἡ ΑΕ χορδὴ τῇ ΡΟ χορδῇ ἴση (71) ἐστί.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Σχ. 24. §. 73. Ἐὰν αἱ πλευραὶ ΑΚ, ΚΖ τοῦ ΑΚΖ τριγώνου ἴσαι ὦσι ταῖς πλευραῖς ΑΚ, ΚΕ τοῦ ΑΚΕ τριγώνου, ἡ δὲ ΑΖ πλευρὰ μείζων ἢ τῆς ΑΕ πλευρᾶς· καὶ ἡ ΑΚΖ γωνία τῆς ΑΚΕ γωνίας μείζων ἔσται.

Δεῖξις.

τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΚΦΕ, καὶ διήχθω ἡ ΦΑ, Κεφ. β'.
ἥτις δίχα τέμνουσα (59) τὴν ΚΦΕ γωνίαν, δίχα τεμεῖ καὶ τὴν ΚΕ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Α σημεῖον· Αἱ γὰρ πλευραὶ ΚΦ, ΦΑ τοῦ ΚΑΦ τριγώνου ἴσαι (ἐκ κατ.) εἰσὶ ταῖς ΕΦ, ΦΑ πλευραῖς τοῦ ΕΑΦ τριγώνου· Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΚΦΑ γωνία τῇ ΕΦΑ γωνίᾳ ἴση κατεσκεύασται, ἄρα καὶ ἡ ΑΚ εὐθεῖα τῇ ΑΕ εὐθείᾳ ἴση (71) ἔσται· τουτέστιν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΚΕ δίχα κατὰ τὸ Α σημεῖον ἐτμήθη. Ο. Ε. Π.

Πρότασις ΙΑ'. Πρόβλημα.

§. 75. Ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας ΛΗ ἀπὸ τοῦ Σχ. 34.
δοθέντος Κ σημείου, ὃ μὴ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Δεῖξις.

Κέντρῳ μὲν τοῦ Κ, διαστήματι δὲ τοῦ ΚΦ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΦΕ, τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΛΗ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Ε τέμνων. Εἶτα τῆς χορδῆς ΑΕ δίχα (74) τμηθείσης, διήχθω ἡ ΚΓ, ἥτις ἔσται ἡ ζητουμένη. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν ΚΑ, ΚΕ εὐθειῶν, αἱ ΑΚ, ΚΓ, ΓΑ πλευραὶ τοῦ Μ τριγώνου ἴσαι εἰσὶν (ἐκ κατ.) ταῖς πλευραῖς ΕΚ, ΚΓ, ΓΕ τοῦ Ν τριγώνου ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· διὰ δὲ ταῦτα καὶ ἡ ΚΓΑ γωνία τῇ ΚΓΕ γωνίᾳ ἴση (58) ἔσται. Ἡ ΚΓ ἄρα εὐθεῖα κάθετος (9) ἐστὶν ἐπὶ τῆς ΑΕ χορδῆς, ἤτοι ἐπὶ τῆς ΛΗ δοθείσης εὐθείας. Ο. Ε. Π.

Πόρισμα Α'.

§. 76. Πᾶσα ἄρα ἀπὸ τοῦ Κέντρου κύκλου τινὸς ἀχθεῖσα εὐθεῖα, ἐὰν δίχα τὴν χορδὴν τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· Κ' ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα τεμεῖ αὐτήν.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 34. §. 77. Ἔτι δὲ ἡ ΚΟ εὐθεῖα, ἥτις δίχα τὴν χορδὴν ΑΕ τέμνει, καὶ τὸ ΑΟΕ τόξον δίχα τεμεῖ. Ἐπεὶ γὰρ ἐν τοῖς ἰσοπλεύροις τριγώνοις Μ, Ν ἴσαι (58) εἰσὶν ἀλλήλαις αἱ γωνίαι ΑΚΓ, ΕΚΓ, καὶ τὰ τόπων μέρη ΑΟ, ΕΟ ἴσα (62) ἀλλήλοις ἔσται.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Σχ. 35. §. 78. Ἡ ΑΡ εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ Α σημείου κάθετος ἐπὶ τῆς ΣΗ εὐθείας ἀχθεῖσα, πασῶν ἐστὶ βραχυτάτη τῶν ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπὶ τῆς εὐθείας ὑποτεινομένων εὐθειῶν.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἡ ΑΚ εὐθεῖα, καὶ διπλασιασθείσης τῆς ΡΑ κατὰ τὸ Φ, ἐπεζεύχθω ἡ ΦΚ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΡ, ΡΚ πλευραὶ τοῦ Μ τριγώνου ἴσαι εἰσὶ ταῖς πλευραῖς ΦΡ, ΡΚ τοῦ Ν τριγώνου, αἱ δὲ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ αἱ ΑΚ, ΚΦ πλευραὶ ἴσαι (71) ἀλλήλαις ἔσονται. ἡ ΑΚΦ ἄρα γραμμὴ τῆς ΑΚ διπλασία ἐστίν, ἔτι δὲ καὶ ἡ ΑΦ τῆς ΑΡ. ἐν δὲ τῷ τριγώνῳ ΚΑΦ, ἡ ΑΚΦ

γραμ-

γραμμὴ τῆς ΑΦ μείζων (23) ἐστίν. ἄρα καὶ ἡ ΑΚ Κεφ. β'.
τῆς ΑΡ μείζων ἔσται. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τῆς ΣΗ εὐθείας ἀχθεῖσα μείζων εἶναι τῆς καθέτου ΑΡ. Πασῶν ἄρα βραχυτάτη ἐστὶν ἡ κάθετος ΑΡ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 79. Ἐπεὶ οὖν ἡ διάστασις παντὸς σημείου ἀπὸ τῆς εὐθείας γραμμῆς, ἡ βραχυτάτη ἐστὶ γραμμή, ἑπόμενόν ἐστι τὴν κάθετον, ἥτις βραχυτάτη ἐστί, διάστασιν εἶναι τοῦ σημείου ἀπὸ τῆς εὐθείας.

Πόρισμα Β'.

§. 80. Ἐπεὶ δὲ παντὸς σχήματος τὸ ὕψος ἡ διά- Σχ. 33.
στασίς ἐστι τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς ἰδίας βάσεως, ἐπάναγκές ἐστι τὴν κάθετον ΦΑ τοῦ σχήματος τὸ ὕψος παριστάναι.

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

§. 81. Ἐὰν ἐπὶ τὴν ἡμιδιάμετρον ΚΟ ἀχθῇ Σχ. 36.
κάθετος ἡ ΡΚ εὐθεῖα, αὕτη ἐκβληθεῖσα κατὰ τὸ Φ καθ' ἓν μόνον σημεῖον τοῦ κύκλου ἐφάπτεται.

Δεῖξις.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΡΚ εὐθείας τὸ Η σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΗ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΡΚ κάθετός (ἐξ ὑπ.) ἐστι τῇ ΟΚ, καὶ ἡ ΟΚ κάθετος ἔσται τῇ ΡΚ· καὶ διὰ τοῦτο βραχυτάτη ἐστὶ τῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τῆς ΡΚ εὐθείας ὑποτεινομένων (78) εὐθειῶν, Κεφ. β΄. εὐθειῶν, ἡ δ' εὐθεῖα ΟΣ (τῇ ΟΚ ἴση) τῆς ΟΗ ἐλάττων ἐστίν. Ἀλλὰ μὴν τῆς ΟΣ εὐθείας τὸ πέρας Ο ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐστίν. Ἄρα τὸ πέρας Η τῆς ΟΗ μείζονος εὐθείας ἐκτὸς ἔσται τῆς περιφερείας. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω καὶ τὰ λοιπὰ σημεῖα τῆς ΡΚ εὐθείας, πλὴν τοῦ Κ, ἐκτὸς τῆς περιφερείας ἐκπίπτειν. Εὐθείας ἄρα τῆς ΡΚ τὰ σημεῖα ἐκτὸς τῆς περιφερείας πάντα ἐκπίπτει, πλὴν τοῦ Κ, καὶ διὰ τοῦτο τοῦ κύκλου ἐφάπτεται κατὰ τὸ Κ σημεῖον. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α΄.

§. 82. Ἡ ἀκτὶν ἄρα ΟΚ ἐπὶ τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον ἀχθεῖσα κάθετος ἔσται τῇ ἐφαπτομένῃ ΦΡ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΟΚ βραχυτάτη ἐστὶ τῶν ἀπὸ τοῦ Κ σημείου ἐπὶ τῆς εὐθείας ΦΡ ὑποτεινομένων εὐθειῶν, πάντως κάθετος ταύτῃ (78) ἔσται. Ἡ δὲ ΟΚΡ γωνία ὀρθή ἐστι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ′.

ΠΕΡΙ ΙΔΙΩΜΑΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΑΠΤΟΜΕΝΩΝ ΤΕ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

Πρότασις ΙΔ′. Θεώρημα.

§. 83. Ἐὰν δύω Εὐθεῖαι ΛΦ, ΑΕ παράλληλοι ὦσιν, ἡ δὲ ΗΚ κάθετος ᾖ τῇ μιᾷ ΑΕ, κάθετος ἔσαι καὶ τῇ ἑτέρᾳ ΛΦ. Σχ. 37.

Δεῖξις.

Ἐλήφθωσαν δύω εὐθεῖαι ἴσαι αἱ ΚΣ, ΚΤ, ἐπὶ δὲ τῆς ΑΕ ἐγερθήτωσαν (61) κάθετοι αἱ ΣΙ, ΤΓ, αἵτινες ἴσαι εἰσὶ, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΛΦ, ΑΕ εὐθείας, καὶ ἐπιζευχθήτωσαν αἱ ΚΙ, ΚΓ. Ἐπεὶ οὖν αἱ πλευραὶ ΙΣ, ΣΚ τοῦ Μ τριγώνου ἴσαι εἰσὶ ταῖς πλευραῖς ΓΤ, ΤΚ τοῦ Ν τριγώνου, ἡ δ᾽ ὀρθὴ γωνία ΙΣΚ ἴση ἐστὶ τῇ ΓΤΚ ὀρθῇ γωνίᾳ, καὶ αἱ ΚΙ, ΚΓ εὐθεῖαι ἴσαι

Κεφ. γ'. ἴσαι (71) ἀλλήλαις ἔσονται, ἔτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΙΚΣ ΓΚΥ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν ΗΚΣ, ΗΚΥ ἀφαιρεθῶσιν αἱ γωνίαι ΙΚΣ, ΓΚΥ, ἴσαι (43) καταληφθήσονται αἱ γωνίαι ΗΚΙ, ΗΚΓ. Εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ πλευραὶ ΙΚ, ΚΗ ταῖς ΓΚ, ΚΗ πλευραῖς· ἄρα καὶ ἡ ΚΗΙ γωνία τῇ ΚΗΓ γωνίᾳ ἴση (71) ἔσται. ταῦτ' ἄρα ἡ ΚΗ εὐθεῖα κάθετός ἐστι καὶ τῇ ΛΦ εὐθείᾳ Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Σχ. 38. §. 84. Ἐὰν ἡ ΗΕ εὐθεῖα τέμνῃ τὰς παραλλήλους ΑΥ, ΚΣ, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων Η, Ε ἐγερθῶσι κάθετοι αἱ ΗΦ, ΕΟ· ἡ ΟΕΗ γωνία τῇ ΕΗΦ γωνίᾳ ἴση ἔσται.

Δεῖξις.

Γενέσθωσαν αἱ ΗΛ, ΕΓ εὐθεῖαι τῶν ΗΦ, ΕΟ εὐθειῶν διπλάσιαι· καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ ΕΛ, ΓΗ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΟΕ εὐθεῖα κάθετος (ἐξ ὑπ.) ἐστιν ἐπὶ τῆς ΑΥ, κάθετος ἔσται (83) καὶ ἐπὶ τῆς ΚΣ, καὶ διὰ ταῦτα ἴσαι ἔσονται αἱ ΗΦ, ΟΕ οἷα παραλλήλων διαστήματα. Ἀλλὰ μὴν αἱ πλευραὶ ΕΦ, ΦΛ τοῦ τριγώνου ΦΕΛ ἴσαι εἰσὶ ταῖς πλευραῖς ΕΦ, ΦΗ τοῦ ΦΕΗ τριγώνου, ἡ δὲ ὀρθὴ γωνία ΕΦΛ ἴση ἐστὶ τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ΕΦΗ· ἄρα καὶ ἡ ΕΛ ἴση (71) ἐστὶ τῇ ΕΗ. τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον καὶ ἡ ΓΗ εὐθεῖα ἴση δειχθήσεται τῇ ΕΗ εὐθείᾳ. Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΕΛ, ΓΗ ἴσαι (50) ἀλλήλαις ἔσονται. Εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΗΕ, ΕΓ ταῖς εὐθείαις ΗΕ, ΗΛ, τὸ τρίγωνον ἄρα ΕΗΓ ἴσον (58) ἐστὶ τῷ ΛΕΗ

τρι-

τριγώνῳ, διόπερ καὶ ἡ γωνία ΓΕΗ ἴση ἐςὶ τῇ Κεφ. γ'. ΕΗΛ γωνίᾳ· τῦτέςιν ἡ ΟΕΗ γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ΕΗΦ γωνίᾳ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ιϛ'. Θεώρημα.

§. 85. Ε'ὰν ἡ ΡΕ εὐθεῖα τέμνῃ δύω παραλλήλας τὰς ΑΤ, ΚΣ κατὰ τὰ σημεῖα Η, καὶ Ε. Α'. ποιήσει τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ΑΗΕ, ΗΕΣ ἀλλήλαις ἴσας. Β'. τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΡΗΤ τῇ ἐντὸς γωνίᾳ ΗΕΣ ἴσην. Καὶ Γ'. τὰς δύω ἐντὸς γωνίας ΤΗΕ, ΗΕΣ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. Σχ. 39.

Δεῖξις.

Α'. Α'πὸ τῶν σημείων Η καὶ Ε ἤχθωσαν ἐπ' ἀμφοτέραις ταῖς παραλλήλοις κάθετοι (75) αἱ ΗΦ, ΕΟ εὐθεῖαι, αἵτινες ἴσαι εἰσὶν, οἷα παραλλήλων διαςήματα· καὶ διὰ ταῦτα αἱ πλευραὶ ΕΟ, ΕΗ τῦ ΕΟΗ τριγώνυ ἴσαι εἰσὶ ταῖς πλευραῖς ΦΗ, ΗΕ τῦ ΕΦΗ τριγώνυ ἑκατέρα ἑκατέρα. Α'λλαμὴν καὶ ἡ γωνία ΟΕΗ τῇ ΕΗΦ γωνίᾳ ἴση (84) ἐςὶν, ἄρα καὶ ἡ ΟΗΕ γωνία τῇ ΗΕΦ γωνίᾳ ἴση (71) ἔςαι· τῦτέςιν, ἡ ἐναλλὰξ γωνία ΑΗΕ τῇ ἐναλλὰξ γωνίᾳ ΗΕΣ ἴση ἐςὶν. Ο'περ ἦν τὸ πρῶτον.

Β'. Η' ἐκτὸς γωνία ΡΗΓ ἴση (65) ἐςὶ τῇ κατὰ κορυφὴν γωνίᾳ ΑΗΕ. Α'λλαμὴν τῇ ΑΗΕ γωνίᾳ ἴση (Α'.) ἐςὶν ἡ ἐναλλὰξ γωνία ΗΕΣ, ἄρα καὶ ἡ ἐκτὸς γωνία ΡΗΤ τῇ ἐκτὸς γωνίᾳ ΗΕΣ ἴση ἐςὶν. Ο'περ ἦν τὸ δεύτερον.

Γ'. Η' ΤΗ εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ΡΕ εὐθείας ςαθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ΡΗΤ, ΤΗΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας (67) ποιεῖ. Α'λλαμὴν καὶ ἡ ΡΗΤ γωνία τῇ ΗΕΣ γωνίᾳ ἴση (Β'.) ἐςὶν· ἄρα αἱ

Κεφ. γ'. ἐντὸς γωνίαι ΤΗΕ, ΗΕΣ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 40. §. 86. Ἐκ τούτων δῆλον ὅτι παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπ' ἐναντίον γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ διαγώνιος ΑΦ τέμνει τὰς παραλλήλους ΕΦ, ΑΚ, ἡ ΕΦΑ γωνία ἴση (85) ἐστὶ τῇ ΦΑΚ· ἔτι δὲ καὶ ἡ ΑΦΚ τῇ ΕΑΦ ἴση ἐστίν· ὅλη ἄρα ἡ γωνία ΕΦΚ ὅλῃ τῇ γωνίᾳ ΕΑΚ ἴση ἔσται.

Πρότασις ΙΖ'. Θεώρημα.

Σχ. 41. §. 87. Τῆς περιεχομένης γωνίας ΡΟΗ ὑπό τε τῆς ἐφαπτομένης ΟΡ καὶ τῆς ΟΗ χορδῆς μέτρον ἐστὶ τὸ ἥμισυ τοῦ τὴν χορδὴν ὑποτείνοντος τόξου ΟΖΗ.

Δεῖξις.

Τῆς ΟΗ χορδῆς δίχα κατὰ τὸ Λ σημεῖον (74) τμηθείσης διὰ τῆς ΚΖ ἡμιδιαμέτρου, ἥτις καὶ τὸ τόξον ΗΟ (77) διχοτομήσει κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, ἤχθω ἡ ΚΓ παράλληλος τῇ ΗΟ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΚΛ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς ΟΗ, κάθετος (83) ἔσται καὶ ἐπὶ τῆς ΚΓ, καὶ διὰ ταῦτα ὀρθή ἐστιν ἡ ΛΚΓ γωνία. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΡΟΚ γωνία ὀρθή (82) ἐστιν, ἄρα ἡ ΡΟΚ γωνία τῇ ΖΚΓ γωνίᾳ ἴση ἔσται. Ἐπεὶ δὲ ἡ ΚΟ εὐθεῖα τέμνει τὰς παραλλήλους ΚΓ, ΟΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΗΟΚ ΟΚΓ ἴσαι (85) εἰσιν. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν ΡΟΚ, ΖΚΓ ἀφαιρεθῶσιν αἱ

ἴσαι

ἴσαι γωνίαι ΗΟΚ, ΟΚΓ, ἴσαι καταληφθήσονται αἱ γωνίαι ΡΟΗ, ΟΚΖ. Α'λλαμὴν τὸ ΟΖ τόξον, ὅπερ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΟΗ τόξου, μεῖζον ἐστὶ τῆς ΟΚΖ (62) γωνίας, ἄρα καὶ τῆς ΡΟΗ γωνίας μεῖζον ἔσαι. Ο. Ε. Δ. Κεφ. γ'.

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

§. 88. Τῆς πρὸς τὴν περιφέρειαν γωνίας ΗΚΦ μεῖζον ἐστὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπὸ τῶν σκελῶν ἐμπεριλαμβανομένου τόξου ΗΦ. Σχ. 42.

Δεῖξις.

Διὰ τῆς Κ κορυφῆς ἤχθω (81) ἡ ἐφαπτομένη ΡΑ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΕΚ ἡμιδιάμετρος. καὶ κεντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΕ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΣΠΟ τῷ ΗΚΦ ἴσος. Ε'πεὶ δὲ ἑκάστης τῶν γωνιῶν ΡΚΗ, ΗΚΦ, ΦΚΑ μεῖζον ἐστὶν (62) ἕκαστον τῶν τόξων ΣΛ, ΛΥ, ΥΟ, πάντως τὸ ἡμικύκλιον ΣΛΥΟ πασῶν τῶν γωνιῶν ἔσαι μεῖζον. Α'λλαμὴν τὸ ΣΕΟ ἡμικύκλιον ἴσον (ἐκ κατ.) ἐστι τῷ τοῦ κύκλου ΗΚΦ ἡμικυκλίῳ, ἄρα καὶ τὸ ἡμικύκλιον τοῦ ΗΚΦ κύκλου μεῖζον ἐστὶ τῶν ΡΚΗ, ΗΚΦ, ΦΚΑ γωνιῶν. Ε'τι δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ΚΗ τόξου (87) μεῖζον τῆς ΡΚΗ γωνίας· καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΚΦ τόξου μεῖζον ἐστὶ τῆς ΦΚΑ γωνίας, ἄρα καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΗΦ τόξου μεῖζον ἐστὶ τῆς ΗΚΦ γωνίας. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα. Α'.

§. 89. Αἱ ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα τμήματι γωνίαι ΗΣΕ, ΗΦΕ, ΗΡΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Σχ. 43.

Ε'κά-

Κεφ. γ'. Ε'κάστης γὰρ μεῖζον ἐστὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΗΕ τόξυ (88).

Πόρισμα. Β'.

Σχ. 44. §. 90. Δύω ἄρα παράλληλοι καὶ ἴσαι χορδαὶ ΑΣ, ΛΗ ἴσα ἐμπεριλαμβάνουσι τόξα τὰ ΑΛ, ΣΗ. Α'χθείσης γὰρ τῆς ΣΛ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΣΛ, ΣΛΗ (85) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, ταῦτ' ἄρα καὶ τὰ τόξα ΑΛ, ΣΗ ἴσα (88) ἀλλήλοις ἐστί.

Πόρισμα. Γ'.

Σχ. 45. §. 91. Η' περιεχομένη ἄρα γωνία, ὑπό τε τῆς ἐφαπτομένης ΚΑ καὶ τῆς τεμνούσης ΚΦ, ἴση ἐστὶ τῇ ΚΗΦ γωνίᾳ· ἑκατέρας γὰρ κοινὸν μεῖζον τὸ ἥμισυ τοῦ ΚΦ τόξυ (87, 88) ἐστί.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Σχ. 46. §. 92. Ε'αν δύω χορδαὶ ΒΕ, ΔΚ ἀλλήλαις ἐντὸς κύκλου συμπίπτωσι κατὰ τὸ σημεῖον Α. τῆς ΒΑΔ γωνίας μεῖζον ἐστὶ τὸ ἥμισυ τῆς συνάψεως τῶν τόξων ΒΔ, ΚΕ.

Δεῖξις.

Η'χθω ἡ ΕΦ τῇ ΚΔ παράλληλος· καὶ ἔσαι (90) ἴσα τὰ τόξα ΔΦ, ΚΕ. Ε'πεὶ ἂν παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι ΕΦ, ΚΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΒΑΔ τῇ ἐντὸς γωνίᾳ ΒΕΦ ἴση (85) ἐστίν. Α'λλὰ μὴν τῆς ΒΕΦ γωνίας μεῖζον (88) ἐστὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΔΦ τόξου. Α'ρα καὶ τῆς ΒΑΔ γωνίας μεῖζον ἔσαι τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΔΦ τόξυ.

τόξυ. Ε'πεὶ δὲ τὰ τόξα ΔΦ, ΚΕ ἴσα ἀλλή- Κεφ. γ'.
λοις (90) ἐςὶ, τὸ ΒΔΦ τόξον ἴσον ἐςὶ τῇ συνά-
ψει τῶν ΒΔ, ΚΕ τόξων. Τῆς ἄρα γωνίας ΒΑΔ
τὸ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς συνάψεως τῶν τόξων ΒΔ,
ΚΕ ἐςίν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Κ'. Θεώρημα.

§. 93. Ε'ὰν δύω χορδαὶ ΒΕ, ΔΚ ἀλλήλας ἐκ- Σχ. 47.
τὸς κύκλυ τέμνωσι κατὰ τὸ Α σημεῖον· τῆς ΒΑΔ
γωνίας τὸ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν ΒΔ,
ΕΚ τόξων ἐςί.

Δεῖξις.

Η'χθω ἡ ΕΦ τῇ ΑΔ παράλληλος· καὶ ἔςαι
ἴσα τὰ τόξα (90) ΦΔ, ΕΚ. Ε'πεὶ ἂν αἱ ΕΦ,
ΑΔ παράλληλοί εἰσιν, ἡ ΒΑΔ ἐντὸς γωνία ἴση
(85) ἐςὶ τῇ ἐκτὸς γωνίᾳ ΒΕΦ· Α'λλαμὴν τῆς
ΒΕΦ γωνίας μέτρον (88) ἐςὶ τὸ ἥμισυ τῦ ΒΦ
τόξυ, ἄρα καὶ τῆς γωνίας ΒΑΔ μέτρον ἔςαι τὸ
ἥμισυ τῦ ΒΦ τόξυ. Καὶ διὰ ταῦτα τῆς ΒΑΔ
γωνίας μέτρον ἐςὶ τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων
ΒΔ, ΕΚ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

§. 94. Ε'ὰν εἰς δύω εὐθείας ΑΥ, ΖΦ ἡ εὐ- Σχ. 48.
θεῖα ΟΕ ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ΑΡΕ,
ΡΕΦ ἴσας ποιῇ· ἢ τὴν ἐκτὸς ΟΡΥ τῇ ἐντὸς
ΡΕΦ ἴσην ποιῇ· ἢ τὰς δύω ἐντὸς ΥΡΕ, ΡΕΦ
δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐ-
θεῖαι ΑΥ, ΖΦ.

Δεῖξις.

Α'. Ἐπὶ τῆς ΡΕ εὐθείας κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΛΡΚ, καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ ΛΕ, ΡΚ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν (ἐξ ὑπ.) αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΡΕ, ΡΕΦ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ τὰ τόξα ΛΕ, ΡΚ ἴσα (88) ἀλλήλοις ἐστίν, οἷς προστιθεμένου τοῦ ΛΡ τόξου, τὸ ΕΛΡ τόξον, ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΡΚ τόξῳ. Ἀλλὰ μὴν τὸ ΕΛΡ τόξον μοιρῶν ἑκατὸν καὶ ὀγδοήκοντα (ἐκ κατ.) ἐστίν· ἄρα καὶ τὸ ΛΡΚ τόξον μοιρῶν ἑκατὸν καὶ ὀγδοήκοντα ἐστί· καὶ διὰ ταῦτα ἡ ἐν τούτῳ γωνία ΛΕΚ ὀρθὴ (88) ἐστίν· ἀλλ' ὀρθή ἐστι καὶ ἡ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ΡΚΕ, ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΡΚ, ΛΕ κάθετοί εἰσι τῇ ΖΦ εὐθείᾳ. Εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι, διὰ τὸ ἴσα εἶναι τὰ τόξα ΡΚ, ΛΕ, ἄρα ἔσονται καὶ παράλληλοι. Ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Β'. Γωνία ἡ ΑΡΕ τῇ ΟΡΥ γωνίᾳ ἴση (65) ἐστίν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΡΕΦ γωνία ἐντὸς ἴση (ἐξ ὑπ.) ἐστὶ τῇ ἐκτὸς γωνίᾳ ΟΡΥ, ἄρα καὶ ἡ ΑΡΕ γωνία τῇ ΡΕΦ γωνίᾳ ἴση ἐστι· διὰ δὲ ταῦτα παράλληλοι (α.) εἰσὶν αἱ ΑΥ, ΖΦ εὐθεῖαι. Ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

Γ'. Γωνίαι αἱ ΟΡΥ, ΥΡΕ δυσὶν ὀρθαῖς (67) ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ γωνίαι ΤΡΕ, ΡΕΦ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (ἐξ ὑπ.) εἰσὶν, ἄρα αἱ γωνίαι ΟΡΥ, ΥΡΕ ἴσαι εἰσὶ ταῖς γωνίαις ΥΡΕ, ΡΕΦ. κοινῆς δὲ ἀφαιρεθείσης τῆς ΥΡΕ γωνίας, ἡ ΟΡΥ γωνία τῇ ΡΕΦ γωνίᾳ ἴση ἐστί· καὶ διὰ ταῦτα παράλληλοι (β.) ἔσονται αἱ ΑΥ, ΖΦ εὐθεῖαι. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 95. Πᾶν ἄρα ὀρθογώνιον ἐστὶ καὶ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ἐντὸς γωνίαι Ε, Α ἴσαι ἀλλήλαις (ἐξ ὑπ.) εἰσὶ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται· καὶ διὰ ταῦτα αἱ ΕΦ, ΑΚ εὐθεῖαι παράλληλοι (94) ἔσονται. Ὁμοίως δὴ δείξω καὶ τὰς ΕΑ, ΦΚ παραλλήλους εἶναι. Πᾶν ἄρα ὀρθογώνιον, καὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι. Σχ. 40.

Πρότασις ΚΒ'. Θεώρημα.

§. 96. Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΗΦ, ΛΑ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΟΚ ὦσι παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι ἔσονται. Σχ. 49.

Δεῖξις.

Τὰς ΗΦ, ΛΑ εὐθείας τεμνέτω ἡ πλάγιος ΣΡ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΣΡ εὐθεῖα τέμνει τὰς παραλλήλους ΗΦ, ΟΚ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΣΤΦ τῇ ἐντὸς γωνίᾳ ΣΡΚ ἴση (85) ἐστί. Διὰ δὲ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς εὐθείας ΛΑ, ΟΚ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΣΕΑ τῇ ἐντὸς γωνίᾳ ΣΡΚ ἴση ἐστί. Γωνία ἄρα ἡ ΣΤΦ τῇ ΣΕΑ γωνίᾳ ἴση (30) ἔσται, καὶ διὰ ταῦτα παράλληλοι (94) ἔσονται αἱ ΗΦ, ΛΑ εὐθεῖαι. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

§. 97. Ἐὰν ἡ ΗΑ εὐθεῖα, τὰς ΚΡ, ΑΕ εὐθείας κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Α τέμνουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ΡΚΑ, ΚΑΕ Σχ. 50.

Κεφ. γ΄. δύω ὀρθῶν ἐλάττως ποιῇ· αἱ Εὐθεῖαι ΚΡ, ΑΕ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύω ὀρθῶν ἐλάττονες γωνίαι.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν αἱ γωνίαι ΡΚΑ, ΚΑΕ δύω ὀρθῶν ἐλάττονες ὑποτίθενται, κατασκευαθήτω ἐπὶ τὸ Α σημεῖον ἡ ΚΑΖ γωνία τοιαύτη, ὥστε μετὰ τῆς ΡΚΑ γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα δύνασθαι, καὶ ἔσονται παράλληλοι (94) αἱ ΚΡ, ΑΖ εὐθεῖαι. Μετὰ δὲ ταῦτα εἰλήφθω ὥσπερ ἀξίωμα καθ᾽ ἑαυτὸ γνώριμον, τὸ, μεταξὺ δύω εὐθειῶν ΑΕ, ΑΖ ἐπ᾽ ἄπειρον ἐκβαλλομένων ἀγαγεῖν δυνατὸν εὐθεῖαν τινα τῇ ΑΗ παράλληλον, φέρε τὴν ΛΤ, ἥτις τῆς ΑΚ μείζων ἔσω. ληφθείσης δ᾽ εἶτα τῆς ΑΦ τῇ ΛΤ ἴσης, ἐπεζεύχθω ἡ ΦΤ εὐθεῖα, ἥτις συμπληροῖ τὸ ΦΤΛΑ παραλληλόγραμμον, τὰς ἀπ᾽ ἐναντίον πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους (ἐκ κατ.) ἔχον· Η᾽ ΦΤ ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ ΑΛ· Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΚΡ παράλληλος ἐστι τῇ ΑΛ, ἄρα καὶ ἡ ΦΤ παράλληλος (96) τῇ ΚΡ ἔσται. Διόπερ ἡ ΚΡ, καὶ παράλληλος τῇ ΦΤ ἐστὶ, καὶ ἔσω τοῦ τριγώνου ΑΦΤ κεῖται, καὶ ἐπ᾽ ἄπειρον ἐκβαλλομένη, ἐπάναγκές ἐστι τῇ ΑΕ συμπεσεῖν κατὰ τὸ Ο σημεῖον. Εἰ γὰρ μὴ οὕτως εἶχεν, ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ΚΡ ἐκβαλλομένη, ἢ τῇ ἑαυτῇ παραλλήλῳ ΦΤ συνέπιπτεν ἂν, ὅπερ (11.) ἄτοπον, ἢ τὴν ΚΑ εὐθεῖαν διέτεμνεν, ὅπερ ἀδύνατον. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 51. §. 98. Ἐὰν ἄρα δύω εὐθεῖαι ΑΕ, ΗΕ, κατὰ τὸ Ε σημεῖον συμπίπτωσαι, τμηθῶσιν ὁπωσοῦν κατὰ

τὰ

τὰ σημεῖα Φ, καὶ Λ, ἀπὸ δὲ τούτων τῶν σημείων Κεφ. γ'.
ἐγερθῶσι κάθετοι (61) αἱ ΦΚ, ΛΣ, αὗται ἐκβληθεῖσαι κατὰ τὸ Ο σημεῖον συμπεσοῦνται. Ἐπεζεύχθω ἡ ΦΛ γραμμή. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΚΦ γωνία ὀρθὴ ὑπετέθη, ἡ ΛΦΚ γωνία ὀρθῆς ἐλάττων ἐστίν. Ἡ ΦΛ ἄρα εὐθεῖα, ἡ τὰς εὐθείας ΦΚ, ΛΣ τέμνουσα, τὰς δύο ἐντὸς γωνίας ΛΦΚ, ΦΛΣ δύο ὀρθῶν ἐλάττους ποιεῖ. Αἱ ΦΚ, ΛΣ ἄρα εὐθεῖαι, ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ Ο σημεῖον (97) συμπεσοῦνται.

Πρότασις ΚΔ'. Πρόβλημα.

§. 99. Τοῦ Δοθέντος κύκλου ΑΕΗ τὸ κέντρον εὑρεῖν. Σχ. 52.

Δεῖξις.

Εἰλήφθωσαν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ δοθέντος κύκλου τρία ὁποιαοῦν σημεῖα, φέρε τὰ, Α, Ε, Η, καὶ ἤχθωσαν αἱ χορδαὶ ΕΑ, ΕΗ, ἐφ' ὧν δίχα, κατὰ τὰ σημεῖα Φ, Λ, (74), τμηθησῶν, ἐγερθεῖσαι κάθετοι (61) αἱ ΦΟ, ΛΟ εὐθεῖαι, ἀλλήλαις συμπίπτουσαι (98) κατὰ τὸ Ο σημεῖον, ὅπερ ἔσται τὸ ζητούμενον κέντρον. Ἤχθωσαν γὰρ αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΕ, ΟΗ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΦ, ΦΟ πλευραὶ τοῦ ΑΟΦ τριγώνου ἴσαι (ἐκ κατ.) εἰσὶ ταῖς ΕΦ, ΦΟ πλευραῖς τοῦ ΕΟΦ τριγώνου, ἡ δὲ ὀρθὴ γωνία ΑΦΟ τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ΕΦΟ ἴση ἐστὶ, καὶ ἡ ΟΑ πλευρὰ τῇ ΟΕ πλευρᾷ ἴση (71) ἔσται. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω καὶ τὴν ΟΗ εὐθεῖαν τῇ ΟΕ εὐθείᾳ ἴσην εἶναι. Αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΕ, ΟΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ διὰ ταῦτα τὸ Ο σημεῖον κέντρον (13) ἔσται τοῦ δοθέντος κύκλου ΑΕΗ. Ὅ. Ἔ. Π.

Πόρισμα.

§. 100. Καὶ τοῦ δοθέντος ἄρα τόξου καὶ τριγώνου τὸ κέντρον ἀμαρῶς ἐκ τούτων θηρεύεται.

Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

Σχ. 53. §. 101. Παντὸς τριγώνου ἡ σύναψις τῶν τριῶν γωνιῶν δυσὶν ὀρθαῖς ἴση ἐστί.

Δεῖξις.

Περὶ τὸ ΡΑΚ τρίγωνον κύκλος περιγεγράφθω ὁ ΡΑΚ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ἥμισυ τοῦ ΡΚ τόξου μέτρον (88) ἐστὶ τῆς Α γωνίας, καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΡΑ τόξου μέτρον ἐστὶ τῆς Κ γωνίας, καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΚ τόξου μέτρον ἐστὶ τῆς Ρ γωνίας· πάντως τὸ ἥμισυ πάσης τῆς ΡΑΚ περιφερείας μέτρον ἔσται τῆς συνάψεως τῶν τριῶν γωνιῶν Ρ, Α, Κ. Ἀλλὰ μὴν τὸ τοιοῦτον τόξον δύω ὀρθὰς γωνίας (63) καταμετρεῖ· ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται αἱ Α, Κ, Ρ γωνίαι σύναμα ληφθεῖσαι. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 102. Ἡ σύναψις ἄρα τριῶν γωνιῶν τριγώνου οἱουδήποτε ἴση ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν τριῶν γωνιῶν τριγώνου οἱουδήποτε.

Πόρισμα Β'.

§. 103. Ἐὰν ἄρα δύω γωνίαι τριγώνου τινὸς ἴσαι ὦσι δυσὶ γωνίαις τριγώνου τινὸς, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴση ἔσται.

Πό-

§. 107. Ἐκ τῷ τρίτῳ πορίσματος ταύτης τῆς προτάσεως τὴν τῆς γῆς περίμετρον ὁ ἐν Γεωμέτραις ἄριστος Κεπλέρος εὐμεθόδως τε καὶ ἐπιτηδείως συνῆγε. Σχ. 54.

Παριστάτω τοίνυν ὁ μὲν ΛΗΖ κύκλος, οὗ κέντρον τὸ Α, τὴν ὑδρόγειον σφαῖραν, τὰ δὲ Κ, Β σημεῖα δύω ὑψωμάτων τὰς κορυφὰς ἱκανῶς ἀλλήλων διεςαμένας, τὸ δὲ ΛΗ τόξον τὸ ἐμπεριλαμβανόμενον διάςημα ὑπὸ τῶν ὑψωμάτων ΚΛ, ΒΗ, ὅπερ μέτρῳ τινὶ γεωμετρικῷ γνωςὸν ἠρέθω. Εἶτα παρατηρηθήτωσαν αἱ ΚΒΑ, ΒΚΑ γωνίαι, αἱ περιεχόμεναι ὑπότε τῆς ὀπτικῆς ἀκτῖνος ΚΒ, καὶ τῶν ἀναρτίων, ΒΗ, ΚΛ, ἅπερ πρὸς τὸ τῆς γῆς κέντρον Α ςαθερῶς κατατείνει, καὶ ἀφαιρεθείσης τῶν δύω ἐγνωσμένων γωνιῶν τῆς συνάψεως ἀπὸ τῶν ἑκα-

Πόρισμα Γ΄.

§. 104. Δύω ἄρα γωνιῶν τριγώνου τινὸς ἐγνωσμένων, καὶ ἡ λοιπὴ ἀμαρεῖς γνωσθήσεται.

Πόρισμα Δ΄.

§. 105. Καὶ ἐὰν τριγώνου τινὸς ἡ μία γωνία ὀρθὴ, ἢ ἀμβλεῖα ᾖ, αἱ λοιπαὶ δύω γωνίαι ὀξεῖαι ἔσονται.

Πόρισμα Ε΄.

§. 106. Τελευταῖον δὲ, ἐὰν τριγώνου τινὸς ἡ μία γωνία ὀρθὴ ᾖ, τὸ ἄθροισμα τῶν δύω λοιπῶν γωνιῶν ὀρθῇ γωνίᾳ ἴσον ἐστι.

Κεφ. γ'. τὸν ὀγδοήκοντα μοιρῶν, γνωστὴ καταλειφθήσεται (104) ἡ ΒΑΚ γωνία, ἥτις ὅσων ἂν μοιρῶν καὶ λεπτῶν εὑρεθῇ τοσούτων ἔσται (62) καὶ τὸ ΛΗ τόξον, οὗ γ' ἐγνωσμένου καὶ ὅλη ἡ τῆς γῆς περίμετρος ῥᾷστα γνωσθήσεται. Εἰς σαφεστέραν δὲ τῶν εἰρημένων κατάληψιν, φέρε δὴ τοῦτο αὐτὸ τοῦ Κεπλέρου παράδειγμα εἰς μέσον ἀγάγωμεν. Ἔστω οὖν τὸ ΒΗ τὸ τοῦ Κεπλέρου Ὄρος, ἐν ᾧ ἡ παρατήρησις ἐγένετο, ἡ δὲ ΚΛ Ἀκρόπολίς τις, τὸ δὲ ΛΗ τόξον τὸ τούτων διάστημα, ὅπερ πέντε μιλίων Γερμανικῶν περιεκτικὸν εὑρέθη. Ἔτι δ' εὑρέθη ἡ μὲν γωνία ΒΚΑ εἶναι μοιρῶν 89, λεπτῶν 46, ἡ δὲ ΚΒΑ γωνία μοιρῶν 89, λεπτῶν 55, ἡ ΚΑΒ ἄρα γωνία λεπτῶν 19 (104) ἔσται, καὶ διὰ ταῦτα τὸ ΛΗ τόξον 19 λεπτῶν περιεκτικὸν ἐστιν. Ἐὰν οὖν τὸ ΛΗ τόξον λεπτῶν 19, 5 μιλίων Γερμανικῶν ἐστι, πάντως ἡ τῆς γῆς περίμετρος, ἥτις περιεκτικὴ ἐστι λεπτῶν 21600, ἔσται μιλίων Γερμανικῶν 5684, ἤτοι Ἰταλικῶν 22736. Ἀκριβέστερον ὅμως καὶ ἀστρονομικώτερον ἡ τῆς Γῆς περίμετρος περιεκτικὴ εὑρέθη μιλίων Ἰταλικῶν 24649 καὶ βημάτων 940.

Πρότασις Κϛ'. Θεώρημα.

Σχ. 55. §. 108. Παντὸς τριγώνου ΑΚΦ μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, φέρε τῆς ΑΦ, κατὰ τὸ Η σημεῖον, ἡ ἐκτὸς γωνία ΚΦΗ ταῖς δυσὶν ἐντὸς γωνίαις Α, Κ συνάμα ληφθείσαις ἴση ἐστί.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ ἡ ΚΦ εὐθεῖα ἐφίσταται τῇ ΑΗ εὐθείᾳ, αἱ γωνίαι ΚΦΗ, ΚΦΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (67) εἰσίν· Ἀλλὰ μὴν ἡ σύναψις τῶν τριῶν γωνιῶν

Α, Κ, Φ

Α, Κ, Φ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση (101) ἐςὶν, ἄρα καὶ Κεφ. γ'.
ἡ σιωάψις τῶν δύω γωνιῶν ΚΦΗ, ΚΦΑ ἴση
(50) ἐςὶ τῇ σιωάψει τῶν τριῶν γωνιῶν Α, Κ, Φ.
κοινῆ δ' ἀφαιρεθείσης τῆς ΚΦΑ γωνίας, ἡ ΚΦΗ
γωνία ἴση (43) καταλειφθήσεται τῇ σιωάψει τῶν
δύω γωνιῶν Α, Κ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 109. Ἡ ἐκτὸς ἄρα γωνία ΚΦΗ μείζων ἔςαι Σχ. 55.
πάσης ἄλλης ἐντὸς γωνίας Α, ἡ Κ.

Πρότασις ΚΖ'. Θεώρημα.

§. 110. Ἐὰν δύω τρίγωνα ΑΦΚ, ΣΟΗ τὰς Σχ. 56.
δύω γωνίας Α, Κ ταῖς δυσὶ γωνίαις Σ, Η ἴσας
ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὰς πρὸς τὰς
ἴσας γωνίας πλευρὰς ΑΚ, ΣΗ ἀλλήλαις ἴσας·
καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας ἀλλήλαις ἕξει, καὶ
ὅλα τὰ τρίγωνα ἴσα ἔςαι.

Δεῖξις.

Ἔςωσαν, εἰ δυνατὸν, ἄνισοι αἱ ΑΦ, ΣΟ πλευραὶ, ἀπὸ δὲ τῆς μείζονος ΑΦ, ἀφαιρεθείσης τῆς ΑΡ τῇ ΣΟ ἴσης, ἐπιζεύχθω ἡ ΚΡ. Ἐπεὶ οὖν αἱ πλευραὶ ΡΑ, ΑΚ τριγώνου τοῦ ΑΡΚ ἴσαι εἰσιν (ἐκ κατ. καὶ ὑπ.) ταῖς πλευραῖς ΟΣ, ΣΗ τοῦ ΣΟΗ τριγώνου, ἡ δὲ Α γωνία τῇ Σ γωνίᾳ ἴση (ἐξ ὑπ.) ἐςί· πάντως τὰ τρίγωνα ΑΡΚ, ΣΟΗ ἴσα (71) ἀλλήλοις ἔςαι, ἡ δὲ ΡΚΑ γωνία τῇ ΟΗΣ γωνίᾳ ἴση ἔςαι· Ἀλλαμὴν καὶ ἡ γωνία ΦΚΑ ἴση (ἐξ ὑπ.) ἐςὶ τῇ ΟΗΣ γωνίᾳ· ἄρα καὶ ἡ ΡΚΑ γωνία τῇ γωνίᾳ ΦΚΑ

ἴση

Κεφ. γ'. ἴση ἔσαι μέρει τὸ ὅλον· ὅπερ ἄτοπον. Οὐκ ἄρα ἄνισοι ἀλλ' ἴσαι ἔσονται αἱ πλευραὶ ΑΦ, ΣΟ. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον ἴσαι δειχθήσονται καὶ αἱ πλευραὶ ΦΚ, ΟΗ. ἴσαι δέ εἰσιν (ἐξ ὑπ.) καὶ αἱ ΑΚ, ΣΗ πλευραί. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΦΚ, ΣΟΗ ἴσα (58) ἀλλήλοις ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 57. §. 111. Ἐὰν ἄρα διά τινος σημείου Φ τῆς διαμέτρου τοῦ παραλληλογράμμου ΣΟΑΚ ἀχθῶσιν εὐθεῖαί τινες αἱ ΕΥ, ΡΓ παράλληλοι ταῖς ΟΑ, ΑΚ εὐθείαις, τὸ ΟΡΦΕ παραλληλόγραμμον ἴσον ἔσται τῷ ΦΥΚΓ παραλληλογράμμῳ. Τὸ γὰρ τρίγωνον ΣΟΑ ἴσον (110) ἐστὶ τῷ ΣΚΑ τριγώνῳ· Τὸ δὲ ΣΕΦ τρίγωνον ἴσον (110) ἐστὶ τῷ ΣΓΦ τριγώνῳ, ἔτι δὲ καὶ τὸ ΦΡΑ τρίγωνον ἴσον (110) ἐστὶ τῷ ΦΥΑ τριγώνῳ· Τὸ ἐναπολειφθὲν ἄρα ΟΡΦΕ παραλληλόγραμμον ἴσον (43) ἔσαι τῷ ἐναπολειφθέντι παραλληλογράμμῳ ΦΥΚΓ.

Σχόλιον.

Σχ. 58. §. 112. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων οἱ περὶ τὰ τοιαῦτα ἐνασχολούμενοι τὴν ἄβατον διάστασιν μετρεῖν μεμαθήκασιν. Ἔστω τοίνυν ἐπὶ τοῦ παρόντος μετρῆσαι τὴν ἄβατον διάστασιν ΑΕ, ποταμοῦ φέρε, ἢ ἄλλου τινὸς Αὔλακος τὸ πλάτος παριστῶσαν. Σταθήτω ὁ παρατηρητὴς ΑΒ κατὰ τὸ Α σημεῖον, πῖλον, ἢ ἄλλο τοιοῦτον κάλυμμα ἐπὶ κεφαλῆς ἔχων, ὅς τοιαύτην κατὰ θέσιν φυλάττειν, ὥστε, τοῦ ὀφθαλμοῦ κατὰ τὸ Β σημεῖον ἀκινήτου μένοντος, ὀρθὴν εἶναι τὴν ΒΑΕ γωνίαν. Εἶτα τὸν πῖλον πρὸς τὰ ἄνω, ἢ κάτω φερέτω, ἄχρις οὗ ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶν τοῦ πίλου

ἐφα-

ἐφαπτομένη ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον ἐπιπέσῃ. Τούτων δ' Κεφ. γ'.
οὖν ἐκτελεσθέντων, ἀστόχως στραφήτω ὁ Γεωμέτρης κατὰ τὸ Σ σημεῖον, καὶ παρατηρηθέντος τοῦ Φ σημείου, ἔνθα ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶν ΒΦ ἐπιπίπτει, μετρηθήτω ἡ ΑΦ εὐθεῖα, ἥτις δώσει σοι τὴν ζητουμένην ἄβατον διάστασιν ΑΕ. Ἐν γὰρ τοῖς τριγώνοις ΒΑΕ, ΒΑΦ, ἴσαι (ἐκ κατ.) εἰσὶν αἱ γωνίαι ΕΒΑ, ΦΒΑ, ἔτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΒΑΕ, ΒΑΦ ἴσαι εἰσὶν, ἡ δὲ ΒΑ πλευρὰ κοινὴ, ἄρα ἡ ΑΕ πλευρὰ τῇ ΑΦ πλευρᾷ ἴση (110) ἔσται. μετρηθείσης δ' οὖν τῆς ΑΦ διαστάσεως, γνωστὴ γενήσεται ἡ ἄβατος διάστασις ΑΕ. Ὅσων γὰρ ποδῶν περιεκτικὴ ἐστὶν ἡ ΦΑ, τοσούτων ἔσται καὶ ἡ ΑΕ διάστασις.

Πρότασις ΚΗ', Θεώρημα.

§. 113. Ἐν παντὶ τριγώνῳ ΡΑΚ, ἐὰν ἡ ΑΚ Σχ. 59.
πλευρὰ τῆς ΑΡ πλευρᾶς μείζων ᾖ, καὶ ἡ Ρ γωνία τῆς Κ γωνίας μείζων ἔσται· Καὶ ἀνάπαλιν· Ἐὰν ἡ Ρ γωνία τῆς Κ γωνίας μείζων ᾖ, καὶ ἡ ΑΚ πλευρὰ τῆς ΑΡ πλευρᾶς μείζων ἔσται.

Δεῖξις.

Α'. Περὶ τὸ ΡΑΚ τρίγωνον κύκλος (100) περιγεγράφθω ὁ ΡΑΚ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ πλευρὰ τῆς ΑΡ πλευρᾶς μείζων ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΚ τόξον τοῦ ΑΡ τόξου μεῖζον (73) ἔσται. Ἡ Ρ ἄρα γωνία μείζων (70) ἐστὶ τῆς Κ γωνίας. Ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Β'. Ἐπεὶ οὖν ἡ Ρ γωνία τῆς Κ γωνίας μείζων (ἐξ ὑπ.) ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΚ τόξον τοῦ ΑΡ τόξου μεῖζον (88) ἔσται· ἄρα καὶ ἡ ΑΚ χορδὴ τῆς ΑΡ

χορ-

Κεφ. γ'. χορδῆς μείζων (70) ἔςαι. Διὰ δὲ ταῦτα καὶ ἡ ΑΚ πλευρὰ τῆς ΑΡ πλευρᾶς μείζων ἐςίν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΘ'. Θεώρημα.

Σχ. 53. §. 114. Ἐὰν ἐν τῷ τριγώνῳ ΡΑΚ, ἡ ΑΚ πλευρὰ τῇ ΑΡ πλευρᾷ ἴση ᾖ, καὶ ἡ Ρ γωνία τῇ Κ γωνίᾳ ἴση ἔςαι· Καὶ ἀνάπαλιν. Ἐὰν ἡ Ρ γωνία τῇ Κ γωνίᾳ ἴση ᾖ, καὶ ἡ ΑΚ πλευρὰ τῇ ΑΡ πλευρᾷ ἴση ἔςαι.

Δεῖξις.

Α'. Περὶ τὸ τρίγωνον ΡΑΚ κύκλος (100) περιγεγράφθω ὁ ΡΚΑ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ πλευρὰ τῇ ΑΡ πλευρᾷ ἴση ὑποτίθεται, καὶ τὸ ΑΚ τόξον τῷ ΑΡ τόξῳ ἴσον (57) ἐςι. διὰ δὴ ταῦτα ἡ Ρ γωνία τῇ Κ γωνίᾳ ἴση (88) ἔςαι. Ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Β'. Ἐπεὶ οὖν ἡ Ρ γωνία τῇ Κ γωνίᾳ ἴση ὑπετέθη, καὶ τὸ ΑΚ τόξον τῷ ΑΡ τόξῳ ἴσον (88) ἐςίν. ἡ ΑΚ ἄρα πλευρὰ τῇ ΑΡ πλευρᾷ ἴση (72) ἐςίν. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 60. §. 115. Ἐκ τούτων συνάγεται τὴν ΑΦ πλευρὰν τῷ κανονικῷ ἑξαγώνῳ ΑΦΥΣΚΤ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου ἴσην εἶναι τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ΑΟ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΦ τόξον ἑκτημόριόν ἐςιν (ἐξ ὑπ.) περιφερείας, τουτέςι μοιρῶν ἑξήκοντα, καὶ ἡ γωνία ΦΟΑ μοιρῶν ἑξήκοντα (62) ἔςαι. Ἀλλ' ἡ σύναψις τῶν τριῶν γωνιῶν Ο, Φ, Α μοιρῶν ἑκατὸν καὶ ὀγ-

δοή-

δήκοντα (101) ἐστιν. ἄρα ἡ σύναψις τῶν δύω γω- Κεφ. γ'.
νιῶν Φ, Α μοιρῶν ἑκατὸν καὶ εἴκοσι ἔσαι. Ἐπεὶ
δὲ ἡ ΟΦ πλευρὰ τῇ ΟΑ πλευρᾷ ἴση ἐστὶν, ἡ
Φ γωνία τῇ Α γωνίᾳ ἴση (114) ἔσαι. ἑκατέρα ἄρα
μοιρῶν ἑξήκοντά ἐστι. διὸ καὶ ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον
(114) ἐστι τὸ τρίγωνον ΦΟΑ. τοῦ ἑξαγώνου ἄρα ἡ
ΑΦ πλευρὰ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ΟΑ ἴση ἔσαι.

Σχόλιον.

§. 116. Ἐκ ταύτης τῆς προτάσεως Γεωμετρῶν παῖδες παντὸς πύργου, ἢ Ὄρους, ἢ ἄλλου οἱουδήποτε ὑψώματος τὸ ὕψος θηρεύειν μεμαθήκασιν. Ἔσω τοίνυν ἐπὶ τοῦ παρόντος τοῦ ΒΑ Κωδωνοστασίου τὸ ὕψος θηρεῦσαι. Εἰλήφθω ῥάβδος τις ἡ ΔΕ τοσαύτη τὸ μῆκος, ὥστε, πρὸς ὀρθὰς τῇ γῇ ἐμπηχθεῖσα, ἴση εἶναι τῷ ὕψει τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ, τουτέστι τὸ ἄκρον τῆς ῥάβδου καὶ ὁ τοῦ παρατηρητοῦ ὀφθαλμὸς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μένειν. Εἶτα ὁ παρατηρῶν καταβαλλέτω ἑαυτὸν ὕπτιον ἐπὶ τοῦ ΑΔ ἐπιπέδου, ὥστε, τοὺς μὲν πόδας πρὸς τὴν βάσιν Δ τῆς ῥάβδου, τὴν δὲ κεφαλὴν κατὰ τὸ Κ σημεῖον ἔχων, τὰ σημεῖα Κ, Ε, Β ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἶναι εὐθείας. Μετὰ δὲ ταῦτα μετρηθήτω ἡ ΑΚ γραμμὴ, τουτέστιν ἡ διάστασις τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ Κωδωνοστασίου βάσεως, ἥτις παραστατική ἐστι τοῦ ὕψους τοῦ Κωδωνοστασίου ΒΑ. Ἐν γὰρ τῷ τριγώνῳ ΕΔΚ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι (ἐκ κατ.) τὰς πλευρὰς ΕΔ, ΔΚ, καὶ ὀρθὴν τὴν ΕΔΚ γωνίαν, ἡ ΔΚΕ γωνία ἡμιορθὴ (106) ἐστι, τουτέστι μοιρῶν τεσσαράκοντα καὶ πέντε. Ἀλλὰ μὴν ἡ ΔΚΕ γωνία ἡ αὐτή ἐστι τῇ ΑΚΒ γωνίᾳ, ἄρα καὶ ἡ ΑΚΒ γωνία ἡμιορθή ἐστιν. Ὀρθὴ δέ ἐστι καὶ ἡ ΒΑΚ γωνία, ἄρα ἡ ΑΒΚ γωνία ἡμιορθὴ (106) Σχ. 61.

ἔσαι

Κεφ. γ'. ἔσαι. Διὰ δὲ ταῦτα ἡ ΑΚΒ γωνία τῇ ΑΒΚ γωνίᾳ ἴση ἐστὶ, καὶ ἡ ΑΚ πλευρὰ τῇ ΑΒ πλευρᾷ ἴση (114) ἐστί. Γνωστῆς δὲ, μέτρῳ τινὶ, διαμετρηθείσης τῆς ΑΚ διαστάσεως γνωσθήσεται καὶ ἡ ΑΒ πλευρὰ, ἤτοι τὸ ὕψος τοῦ ΑΒ Κωδωνοστασίου.

Πρότασις Λ'. Θεώρημα.

Σχ. 62. §. 117. Ἐν παντὶ Ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ΡΑΚ, ἐὰν ἀπὸ τῆς κατὰ κορυφὴν γωνίας Α ἡ ΑΗ εὐθεῖα κάθετος ἐπιζευχθῇ τῇ βάσει ΡΚ, αὕτη δίχα τὴν βάσιν κατὰ τὸ Η σημεῖον τέμνει.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΡ πλευρὰ ἴση (ἐξ ὑπ.) ἐστὶ τῇ ΑΚ πλευρᾷ, καὶ ἡ ΑΡΗ γωνία τῇ ΑΚΗ γωνίᾳ ἴση (114) ἔσαι. Ἄρα ἐν τοῖς τριγώνοις ΡΑΗ, ΚΑΗ, αἱ γωνίαι Ρ, Η ἴσαι εἰσὶ ταῖς γωνίαις Κ, Η ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. Ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ πλευραὶ ΑΡ, ΑΚ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ ΡΗ πλευρὰ ἴση (110) ἔσαι τῇ ΚΗ πλευρᾷ, τουτέστι δίχα ἡ βάσις ἐτμήθη. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 34. §. 118. Ἐὰν ἄρα ἐν τῷ κύκλῳ ΦΑΕ ἀπὸ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΕ ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΓ εὐθεῖα, αὕτη δίχα κατὰ τὸ Γ τέμνει τὴν ΑΕ χορδήν. Κατασκευασθέντος γὰρ τοῦ Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΚΕ, οὗ, κορυφὴ μὲν τὸ Κ σημεῖον, βάσις δὲ ἡ ΑΕ εὐθεῖα, ἡ ΚΓ κάθετος δίχα (117) τὴν χορδὴν κατὰ τὸ Γ σημεῖον τέμνει.

Δεῖξις.

Ἀπὸ τοῦ Υ σημείου, ἤχθω ἡ ΤΡ τῇ ΑΚ παράλληλος, ἀπὸ δὲ τῶν Φ, Σ σημείων ἤχθωσαν αἱ ΦΛ, ΣΟ εὐθεῖαι τῇ ΚΗ παράλληλοι, καὶ διαιρεθήσεται ὅλον τὸ ὀρθογώνιον εἰς τετραγωνικοὺς πόδας. Τούτων οὖν τῶν τετραγωνικῶν ποδῶν αἱ σειραί εἰσι τρεῖς ΑΛ, ΦΟ, ΣΗ, ὅσων δηλ. ποδῶν περιεκτικόν ἐστι τὸ ΚΑ ὕψος, ἐν ἑκάστῃ δὲ σειρᾷ εἰσι πόδες δύω, ὅσους δηλ. περιέχει ἡ ΚΗ βάσις. Ἐν τῷ Ὀρθογωνίῳ ἄρα ΚΑΙΗ ἓξ πόδες τετράγωνοι περιέχονται, ὅπερ ἐστὶ τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ δύω ἐπὶ τὸν τρία ἀριθμόν, τουτέστιν ἐκ τῆς βάσεως

ἐπὶ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ.

ΠΕΡΙ ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑΣ.

Πρότασις ΛΑ'. Θεώρημα.

§. 119 Αντὸς ὀρθογωνίου ΚΑΙΗ τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ΚΗ βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος ΚΑ. Σχ. 63.

Κεφ. δ'. ἐπὶ τὸ ὕψος. Τὸ ἐμβαδὸν ἄρα παντὸς ὀρθογωνίου ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 64. §. 120. Ἐπεὶ δὲ πᾶν τετράγωνόν ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, καὶ τὸ τετραγώνου ἄρα ΚΑΙΗ τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (119) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΚΗ ἐπὶ τὸ ΚΑ ὕψος, ἢ τῷ γινομένῳ ἐκ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἐφ' ἑαυτὴν ἀχθείσης.

Πρότασις ΛΒ'. Θεώρημα.

Σχ. 65. §. 121. Παντὸς τριγώνου ΦΑΗ τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΦΗ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΟ ὕψους.

Δεῖξις.

Προσγεγράφθωσαν τὰ ΑΟΗΕ, ΑΟΦΣ ὀρθογώνια. Ἐπεὶ δὲ τὸ ΑΟΗ τρίγωνον ἥμισύ (110) ἐστι τοῦ ὀρθογωνίου ΑΟΗΕ, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΟΦ ἥμισύ (110) ἐστι τοῦ ΑΟΦΣ ὀρθογωνίου. τὸ ΦΑΗ ἄρα τρίγωνον ἥμισυ ἐστι τοῦ ὀρθογωνίου ΣΕΗΦ. Ἀλλὰ μὴν τοῦ ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (119) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΦΗ ἐπὶ τὸ ΣΦ ὕψος, ἄρα τοῦ τριγώνου ΦΑΗ τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΦΗ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ΑΟ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 122. Τὰ ἰσοϋψῆ ἄρα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΕΔ, Σχ. 66.
τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΔ ὄντα ἴσα ἀλλήλοις
ἐστίν. ἑκατέρου γὰρ τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (121) ἐστὶ τῷ
γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΑΔ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕ-
ψους ΓΒ.

Πόρισμα Β'.

§. 123. Ἔτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΕΔ, τὰ με- Σχ. 66.
ταξὺ δύω παραλλήλων ΒΕ, ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς αὐ-
τῆς βάσεως ΑΔ ὄντα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Διὰ γὰρ
τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΒΕ, ΑΔ εὐθείας, τὰ τῶν
τριγώνων ὕψη ΒΓ, ΕΦ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί, ταῦτ'
ἄρα τὰ τρίγωνα ἴσα (122) ἀλλήλοις ἔσται.

Πρότασις ΛΓ'. Θεώρημα.

§. 124. Παντὸς παραλληλογράμμου ΦΑΡΗ τὸ Σχ. 67.
ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΦΗ
ἐπὶ τὸ ΑΟ ὕψος.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἡ ΑΗ διαγώνιος, ἥτις τὸ παραλληλό-
γραμμον εἰς δύω ἴσα τρίγωνα (110) τεμεῖ. Ἀλ-
λαμὴν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΦΑΗ τριγώνου ἴσον (121)
ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ΦΗ βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ
τοῦ ΑΟ ὕψους, ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΦΑΡΗ πα-
ραλληλογράμμου (ὅπερ διπλάσιόν ἐστι τοῦ τριγώνου)
ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ΦΗ βάσεως ἐφ' ὅλον
τὸ ΑΟ ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 68. §. 125. Τὰ παραλληλόγραμμα ἄρα ΑΒΚΔ, ΔΚΦΓ, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ΑΔ, ΔΓ ὄντα, καὶ ἴσα ὕψη ἔχοντα τὰ ΒΕ, ΚΗ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Τὸ γὰρ γινόμενον ἐκ τῆς ΑΔ ἐπὶ τὴν ΒΕ ἴσον (124) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ΔΓ ἐπὶ τὴν ΚΗ. Ταῦτ' ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΚΔ, ΔΚΦΓ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 69. §. 126. Ἔτι δὲ ἐὰν τὸ ΦΑΗ τρίγωνον διπλῆν ἔχῃ βάσιν τῆς βάσεως τοῦ ἰσοϋψοῦς παραλληλογράμμου ΦΑΛΣ, τὸ τρίγωνον τῷ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί. Τοῦ μὲν γὰρ παραλληλογράμμου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (124) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ΣΦ βάσεως ἐπὶ τὸ ΑΟ ὕψος, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (121) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΑΟ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως ΦΗ, ἤτοι ἐπὶ τὴν ΣΦ βάσιν.

Πρότασις ΛΔ'. Θεώρημα.

Σχ. 70. §. 127. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΕΣΚ, οὗ αἱ ἀπ' ἐναντίον πλευραὶ ΕΣ, ΑΚ παράλληλοι εἰσιν, ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμισείας τῆς συνάψεως τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΕΣ, ΑΚ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΕΒ, κάθετον τῇ ΑΚ ἀχθεῖσαν.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῇ ΕΣ εὐθεῖα κάθετος ἡ ΚΟ, ἥτις κάθετος (83) ἴσαι καὶ τῇ ΑΚ· διόπερ καὶ τῇ ΕΒ ἴση ἐστί· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΕΚ τριγώνου ἴσον (121) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ ΕΒ ὕψους ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς ΑΚ βάσεως. Ἔτι δὲ καὶ τοῦ τριγώνου ΕΚΣ τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (121) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ ΚΟ ὕψους ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς ΕΣ βάσεως. Ἀλλὰ μὴν τὰ δύω τρίγωνα ΑΕΚ, ΕΚΣ τὸ τραπέζιον συνιστῶσι. Καὶ τοῦ τραπεζίου ἄρα τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμισείας τῆς συνάψεως τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΑΚ, ΕΣ ἐπὶ τὸ ΕΒ ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον.

§. 128. Ἐκ ταύτης τῆς προτάσεως οἱουδήποτε ἀγροῦ, ἤτοι βατοῦ, ἢ ἀβάτου τὸ ἐμβαδὸν θηρεύειν μεμαθήκαμεν. Ἔστω οὖν πρῶτον θηρεῦσαι τὸ ἐμβαδὸν βατοῦ ἀγροῦ τοῦ ΛΜΒΚΕΤ. Διαιρεθέντος τοῦ ἀγροῦ εἰς ὁσαοῦν τρίγωνα τὰ Ξ, Ψ, Ζ, Χ, καὶ εὑρεθέντος ἑκάστου τῶν τριγώνων (121) τὸ ἐμβαδὸν, ἔσται σοι τὸ ποθούμενον· τῶν γὰρ εὑρεθέντων τριγωνικῶν ἐμβαδῶν ἡ σύναψις τοῦ ἀγροῦ τὸ ἐμβαδὸν παρέσχησιν. Σχ. 71.

Ἔστω δ' εἶτα ἀβάτου ἀγροῦ τὸ ἐμβαδὸν ΑΒΚΔΕ ἐξιχνεῦσαι. Περιγεγράφθω περὶ τὸν ἀγρὸν ὀρθογώνιον τὸ ΜΙΝΛ, οὗ ἡ ὑπεροχή, ᾗ ὑπερέχει τὸν ἄβατον ἀγρὸν διαιρεθήτω εἰς ὁσαοῦν τρίγωνα. Εὑρεθήτω δέ σοι τοῦ ὀρθογωνίου (119), καὶ τῶν τριγώνων (121) τὸ ἐμβαδὸν, τῆς δέγε συνάψεως Σχ. 72.

Κεφ. δ'. τῶν τριγωνικῶν ἐμβαδῶν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὅλου Ὀρθογωνίου, τὸ ἐναπολειφθὲν τοῦ διβάτου ἀγροῦ τοῦ ἐμβαδοῦ παραστατικόν ἐστι.

Πρότασις ΛΕ'. Θεώρημα.

Σχ. 73. §. 129. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς πολυγώνου περὶ κύκλον περιγεγραμμένου ΑΦΥΣΚ ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς συνάψεως πασῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν.

Δεῖξις.

Ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Ο κέντρου πρὸς πάσας τοῦ πολυγώνου γωνίας εὐθεῖαι αἱ ΟΦ, ΟΥ, ΟΣ, ΟΚ, ΟΑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν πρὸς τὰ τῶν ἐπαφῶν σημεῖα ἡμιδιάμετροι αἱ ΟΛ, ΟΜ, ΟΤ, ΟΖ, ΟΡ, αἵτινες, κάθετοι (82) οὖσαι ταῖς πλευραῖς, τὰ ὕψη παριστῶσι τῶν τριγώνων, ὧν ἑκάστου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (121) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ΟΑ ἡμιδιαμέτρου ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς τοῦ πολυγώνου πλευρᾶς. Ἀλλ' ἡ σύναψις πάντων τῶν τριγωνικῶν ἐμβαδῶν τοῦ πολυγώνου τὸ ἐμβαδὸν συνίστησιν, ἄρα καὶ τοῦ πολυγώνου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμιδιαμέτρου ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς συνάψεως τῶν ἰδίων πλευρῶν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Λς'. Λῆμμα.

Σχ. 74. §. 130. Κύκλον ἐγγράψαι εἰς τὸ δοθὲν κανονικὸν πολύγωνον ΑΦΥΣΧ.

Δεῖ-

Δεῖξις.

Τῶν γωνιῶν Α, Χ δίχα τμηθησῶν ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΟ, ΧΟ καὶ τὸ Ο σημεῖον συμπιπτουσῶν, ἤχθω τῇ ΑΧ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΟΡ. Καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ο, διαστήματι δὲ τῷ ΟΡ κύκλος γεγράφθω ὁ ΡΑΚΤΖ, ὅστις ἐγγραφήσεται περὶ τὸ δοθὲν πολύγωνον. Ἀπὸ δὲ τῶν γωνιῶν Φ, Υ, Σ ἤχθωσαν πρὸς τὸ Ο σημεῖον εὐθεῖαι αἱ ΦΟ, ΥΟ, ΣΟ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΧΑ, ΑΟ πλευραὶ τοῦ ΑΟΧ τριγώνου ἴσαι εἰσὶ ταῖς πλευραῖς ΦΑ, ΑΟ τοῦ ΦΟΑ τριγώνου, ἡ δὲ ΧΑΟ γωνία τῇ ΦΑΟ γωνίᾳ ἴση (ἐκ κατ.) ἐστί, καὶ ἡ ΑΧΟ γωνία τῇ ΑΦΟ γωνίᾳ ἴση (71) ἐστι· ἴσαι δέ εἰσιν (ἐξ ὑπ.) καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι ΑΧΣ, ΑΦΥ, ἄρα, ἐπεὶ ἡ ΑΧΟ γωνία ἡμίσειά ἐστι τῆς ΑΧΣ γωνίας, καὶ ἡ γωνία ΑΦΟ ἡμίσεια ἐστὶ τῆς ΑΦΥ λοιπῆς γωνίας, ἣν δίχα τέμνει ἡ ΟΦ εὐθεῖα. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω καὶ τὰς εὐθείας ΟΥ, ΟΣ δίχα τέμνειν τὰς λοιπὰς τοῦ πολυγώνου γωνίας Υ, Σ. Μετὰ δὲ ταῦτα διήχθωσαν ἀπὸ τοῦ Ο κέντρου πρὸς τὰς πλευρὰς κάθετοι αἱ ΟΛ, ΟΚ, ΟΤ, ΟΖ. Ἐπεὶ οὖν τὰ τρίγωνα ΟΡΑ, ΟΛΑ οὐ μόνον τὰς Ρ, Α γωνίας ἴσας (ἐκ κατ.) ἔχει ταῖς γωνίαις Λ, Α, ἀλλὰ καὶ κοινὴν πλευρὰν τὴν ΑΟ, ἄρα καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ΟΡ, ΟΛ ἴσας (110) ἀλλήλαις ἔχει. Ὁμοίως δὲ δειχθήσονται ἴσαι καὶ αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ΟΛ, ΟΚ, ΟΤ, ΟΖ. Κύκλος ἄρα ὁ τῇ ΟΡ ἡμιδιαμέτρῳ γραφεὶς διελεύσεται καὶ διὰ τῶν σημείων Λ, Κ, Τ, Ζ. Ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ὀρθαὶ κατεσκευάσθησαν καὶ τὰ σημεῖα Α, Κ, Τ, Ζ, πάντως ὁ κύκλος

 πε-

Κεφ. δ'. πασῶν τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν (81) ἐφάπτεται, καὶ διὰ ταῦτα ἐγγράφη (31) εἰς τὸ πολύγωνον. Ο. Ε. Π.

Πόρισμα.

Σχ. 74. §. 131. Κύκλος ἄρα ὁ τῇ ΟΑ ἡμιδιαμέτρῳ γραφεὶς περὶ τὸ πολύγωνον ΦΥΣΧΑ περιγραφήσεται. Ἐπεὶ γὰρ αἱ Α, Φ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ αἱ τούτων ἡμίσειαι ΟΑΦ, ΟΦΑ ἴσαι ἔσονται. Ταῦτ' ἄρα καὶ ἡ ΟΦ εὐθεῖα τῇ ΟΑ εὐθείᾳ ἴση (110) ἐστι. ὁμοίως δὲ καὶ τῇ ΟΑ ἴσαι δειχθήσονται αἱ ΟΥ, ΟΣ, ΟΧ εὐθεῖαι. διὰ δὲ ταῦτα κύκλος ὁ τῇ ΟΑ ἡμιδιαμέτρῳ γραφεὶς πασῶν τοῦ πολυγώνου γωνιῶν ἐφάπτεται, τουτέστι περὶ τὸ πολύγωνον (31) περιγράφεται.

Πρότασις ΛΖ'. Θεώρημα.

Σχ. 75. §. 132. Παντὸς κύκλου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμιδιαμέτρου ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς ἰδίας περιφερείας.

Δεῖξις.

Ἔστω περὶ κύκλον περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΑΦΛΨΤ, ὅπερ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μεῖζόν ἐστιν. Ἐὰν δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγραφῇ ἄλλο πολύγωνον τὸ ΚΕΝΙΟΠΡΣΥΧ ὑπὸ πλειόνων πλευρῶν συγκροτούμενον, τοῦτο ἧττον τοῦ πρώτου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ὑπερέχει. Τελευταῖον δὲ ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν τοῦ περιγράφοντος πολυγώνου πλευρῶν ἀπειράριθμος γίνηται, τὸ πολύγωνον οἷα κύκλος, ἡ δ' αὐτοῦ περίμετρος οἷα κύ-

κλου

κλου περιφέρεια λαμβάνεται. Ἀλλὰ μὴν τοῦ πολυ- Κεφ. δ'.
γώνου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (129) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς συνάψεως τῶν αὐτοῦ πλευρῶν. Ἄρα καὶ τοῦ κύκλου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας ἡμιδιαμέτρου ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς αὐτοῦ περιφερείας. Ο. Ε. Δ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΠΕΡΙ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΑΡΧΩΝ.

Ὅρος Α΄.

§. 133. Ὁμογενῆ μεγέθη ἐστὶ τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ διάστατον θεωρούμενα. Ἑτερογενῆ δὲ τὰ μὴ ὑπὸ τὸ αὐτὸ διάστατον θεωρούμενα.

Ὅρος Β΄.

§. 134. Λόγος δέ ἐστι σύγκεισις κατὰ πηλικότητα δύω ὁμογενῶν μεγεθῶν ἀλλήλοις παραβαλλομένων.

Ὅρος

Κεφ. α.

Όρος Γ'.

§. 135. Τῶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγεθῶν, τὰ μὲν προλαμβανόμενα, ἡγούμενα καλεῖται, τὰ δὲ προσλαμβανόμενα, ἑπόμενα λέγεται. Τὰ δ' ἡγούμενα, καὶ τὰ ἑπόμενα, λόγου πέρατα καλεῖν εἰώθασιν.

Όρος Δ'.

§. 136. Λόγος Ἰσότητος λέγεται, οὗ τὰ πέρατα ἴσα ἐστί. Λόγος δ' ἀνισότητος, οὗ τὰ πέρατα ἄνισά ἐστιν.

Όρος Ε'.

§. 137. Λόγος μείζονος ἀνισότητός ἐστιν, οὗ τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου μεῖζόν ἐστι. Λόγος δ' ἐλάττονος ἀνισότητος, οὗ τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου ἔλαττόν ἐστιν.

Όρος ς'.

§. 138. Δύω λόγοι ἴσοι λέγονται, ὅταν ἑκατέρων τὰ ἡγούμενα τὸν αὐτὸν τρόπον περιέχῃ τὰ ἴδια ἑπόμενα, ἢ ὑπ' αὐτῶν περιέχηται.

Πόρισμα Α'.

§. 139. Ἴσα ἄρα μεγέθη Α, Η τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ Κ μέγεθος. Τὰ γὰρ ἡγούμενα Α, Η τὸν αὐτὸν τρόπον περιέχει τὸ κοινὸν ἑπόμενον Κ. Σχ. 76.

Πό-

Πόρισμα Β'.

Σχ. 76. §. 140. Καὶ Ἀνάπαλιν· Τὸ Κ μέγεθος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὰ ἴσα μεγέθη Α, Η. Τὸ γὰρ κοινὸν ἡγούμενον Κ τὸν αὐτὸν τρόπον περιέχεται ὑπὸ τῶν ἴσων ἑπομένων Α, Η.

Ὅρος Ζ'.

§. 141. Ἐὰν δύω λόγοι μείζονος ἀνισότητος ἀλλήλοις παραβληθῶσι, μείζων λέγεται λόγος, οὗ τὸ ἡγούμενον πλεονάκις περιέχει τὸ ἴδιον ἑπόμενον, ἢ τὸ ἕτερον ἡγούμενον τὸ ἴδιον ἑπόμενον.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 77. §. 142. Δύω ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν Α, Η· Τὸ μεῖζον Α μείζονα ἔχει λόγον πρὸς τὸ Κ, ἢ τὸ ἔλαττον Η πρὸς τὸ αὐτὸ Κ. Τὸ γὰρ μεῖζον Α πλεονάκις περιέχει τὸ Κ, ἢ τὸ ἔλαττον Η τὸ αὐτὸ Κ περιέχει.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 77. §. 143. Καὶ ἀνάπαλιν· Ἐὰν ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Κ μείζων ᾖ τοῦ λόγου τοῦ Η πρὸς τὸ Κ, τὸ Α μεῖζον ἔσται τοῦ Η, πλεονάκις γὰρ τὸ Α περιέχει τὸ αὐτὸ Κ, ἢ τὸ Η περιέχει τὸ Κ.

Ὅρος Η'.

§. 144. Ἐὰν δύω λόγοι ἐλάττονος ἀνισότητος ἀλλήλοις παραβληθῶσι μείζων λέγεται λόγος, οὗ τὸ ἡγού-

ἡγού-

ἡγέμενον ἧττον περιέχεται ὑπὸ τοῦ ἰδίου ἑπομένου, Κεφ. α΄.
ἢ τὸ ἕτερον ἡγέμενον ὑπὸ τοῦ ἰδίου ἑπομένου.

Ὅρος Θ΄.

§. 145. Ὅταν δύω λόγοι ἴσοι ὦσι πρὸς ἀλλήλους τὰ τέσαρα αὐτῶν πέρατα ἀνάλογα καλεῖται.

Ὅρος Ι΄.

§. 146. Ὅταν δύω λόγοι ἴσοι τοιαύτην πρὸς ἀλλήλους θέσιν ἔχωσιν, ὥστε τὸ ἑπόμενον τοῦ πρώτου λόγου ἡγέμενον τοῦ δευτέρου γίνεσθαι, τὰ τρία αὐτῶν πέρατα συνεχῶς ἀνάλογα λέγεται. τὸ δὲ δὶς ἐπαναλαμβανόμενον μέσον ἀνάλογον καλεῖται.

Ὅρος ΙΑ΄.

§. 147. Λόγος σύνθετος ἐκ πολλῶν λόγων λέγεται, ὃν ἔχει τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἰδίων ἡγουμένων πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἰδίων ἑπομένων. Κ᾽ ἂν μὲν οἱ συντιθέντες δύω, ἢ τρεῖς λόγοι ἴσοι ὦσιν, ὁ ἐξ αὐτῶν σύνθετος λόγος διπλάσιος, ἢ τριπλάσιος εἶδος τύπων λέγεται.

Ὅρος ΙΒ΄.

§. 148. Ὅμοια σχήματά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχει, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς, τούτεστι τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους.

Ὅρος

Κεφ. α'.

Ὅρος ΙΓ'.

Σχ. 83. §. 149. Ἀντιπεπονθότα σχήματα λέγεται, ὅταν ἐν ἀμφοτέροις ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν, οἷον τὰ Λ, Υ ὀρθογώνια, ἐν οἷς δειχθήσεται, ὅτι ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΚ, οὕτως ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ.

Ὅρος ΙΔ'.

Σχ. 78. §. 150. Ὀρθογώνιον ΑΣΚ ἐστὶν, οὗ βάσις μὲν ἡ ΑΣ, ὕψος δὲ ἡ ΣΚ. Ὀρθογώνιον δὲ ΑΚΣ ἐστὶν, οὗ βάσις μὲν ἡ ΑΚ, ὕψος δὲ ἡ ΚΣ.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΕΡΙ' ΣΥΜΠΤΩΜΑ'ΤΩΝ ΟʼΡΘΟΓΩΝΙ'ΩΝ ΤΕ ΚΑΙ' ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑ'ΜΜΩΝ.

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

§. 151. ΤΑ' Ἰσοϋψῆ παραλληλόγραμμα ΚΒΙΑ, ΑΙΕΦ τὸν αὐτὸν πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν αἱ τούτων βάσεις ΚΑ, ΑΦ. Σχ. 79.

Δεῖξις.

Ἔστωσαν σύμμετροι αἱ βάσεις ΚΑ, ΑΦ, τὸ δὲ ΑΣ ἔστω κοινὸν μέτρον, ὅπερ δὶς μὲν τῇ ΑΦ, τρὶς δὲ τῇ ΚΑ περιεχέσθω, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Σ σημείου ἡ ΣΟ εὐθεῖα τῇ ΦΕ παράλληλος. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΚΑ τῆς ΑΣ τριπλασία ἐστὶ, τὸ ΚΙ παραλληλόγραμμον τρία παραλληλόγραμμα περιέξει, ὧν ἕκαστον ἴσον (124) ἐστὶ τῷ ΑΟ παραλληλογράμμῳ. Ταὔτ' ἄρα τὸ ΚΙ παραλληλόγραμμον τοῦ ΑΟ παραλληλογράμμου τρι-

πλά-

Κεφ. β'. πλάσιόν ἐστι. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον καὶ τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον τοῦ ΑΟ παραλληλογράμμου διπλάσιον δειχθήσεται. Τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΚΙ λόγον ἔχει πρὸς τὸ ΑΕ, ὃν τὰ τρία πρὸς τὰ δύω. Ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ τούτων βάσεις τὸν αὐτὸν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσιν, ὃν τὰ τρία πρὸς τὰ δύω, ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα ΚΙ, ΑΕ τὸν αὐτὸν πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν αἱ τούτων βάσεις ΚΑ, ΑΦ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 80. §. 152. Ἐπεὶ δὲ καὶ τὰ τρίγωνα ΚΙΗ, ΗΙΦ ἡμίσειά ἐστι τῶν ἰσοϋψῶν παραλληλογράμμων ΚΑΙΗ, ΗΙΕΦ· καὶ τὰ τρίγωνα ἄρα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ὃν αἱ τούτων βάσεις ΚΗ, ΗΦ.

Πόρισμα Β'.

§. 153. Ἐπεὶ οὖν πᾶν ὀρθογώνιόν ἐστι καὶ παραλληλόγραμμον· καὶ τὰ Ὀρθογώνια ἄρα λόγον πρὸς ἄλληλα ἔχει, ὃν αἱ τούτων βάσεις.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Σχ. 81. §. 154. Τῶν ἴσων τε παραλληλογράμμων καὶ τρι-
Σχ. 82. γώνων Α', Υ ἀντιπεπόνθασιν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραί· καὶ ὧν παραλληλογράμμων καὶ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Δεῖξις.

Α'. Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΑΦ, ΦΚ εὐ-

θεῖαι,

θεῖαι, ἔτι δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΟΦ, ΦΗ. Καὶ Κεφ. β΄. ἐν μὲν τοῖς παραλληλογράμμοις ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΣΗ, ΠΚ εὐθεῖαι κατὰ τὸ Ε σημεῖον συμπίπτουσαι. ἐν δὲ τοῖς τριγώνοις ἐπεζεύχθω ἡ ΗΚ. Ἐπεὶ δὲ τὸ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ τρίγωνον Λ ἴσον (ἐξ ὑπ.) ἐστι τῷ Τ, πάντως ὡς τὸ Λ πρὸς τὸ Ρ (139) τὸ Τ πρὸς τὸ Ρ. ἀλλ' ὡς τὸ Λ πρὸς τὸ Ρ ἡ ΑΦ (151, 152) πρὸς τὴν ΦΚ, καὶ ὡς τὸ Τ πρὸς τὸ Ρ ἡ ΟΦ πρὸς τὴν ΦΗ. ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΚ, οὕτως ἡ ΟΦ πρὸς τὴν ΦΗ. Ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Β΄. Τὸ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ τρίγωνον Λ λόγον ἔχει πρὸς τὸ ἰσοϋψὲς Ρ (151, 152) ὃν ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΚ, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ τρίγωνον Τ λόγον ἔχει πρὸς τὸ ἰσοϋψὲς Ρ, ὃν ἡ ΟΦ πρὸς τὴν ΦΗ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΚ, οὕτως ἡ ΟΦ (ἐξ ὑπ.) πρὸς τὴν ΦΗ, ἄρα καὶ ὡς τὸ Λ πρὸς τὸ Ρ, τὸ Τ πρὸς τὸ Ρ. ταῦτ' ἄρα ἴσα ἀλλήλοις (139) ἐστὶ τὰ παραλληλόγραμμα καὶ τὰ τρίγωνα Λ, Τ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Γ΄. Θεώρημα.

§. 155. Ἐὰν τέσσαρες Εὐθεῖαι ΑΣ, ΣΚ, ΟΣ, Σχ. 85.
ΣΗ ἀνάλογοι ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον Σχ. 86.
ὀρθογώνιον Λ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ὀρθογωνίῳ Τ: καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον Λ ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ὀρθογωνίῳ Τ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι ἔσονται.

Δεῖξις.

Α΄. Ὧν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ

περὶ

Κεφ. β'. περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ἴσα (154) ἀλλήλοις ἐστίν· Α'λλαμὴν τὰ ὀρθογώνια Λ, Υ παραλληλόγραμμά ἐστιν (95) ἀνάλογος τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἔχοντα, ἄρα τὰ ὀρθογώνια Λ, Υ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. Ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Β'. Ἐπεὶ ἴσα ἐστιν (ἐξ ὑπ.) τὰ ὀρθογώνια Λ, Υ, τὰς γωνίας ΑΣΗ, ΟΣΚ ἴσας ἀλλήλαις ἔχοντα, πάντως ἀντιπεπόνθασιν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ (154), καὶ διὰ ταῦτα ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΚ, οὕτως ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 156. Ἐκ τούτων δῆλον ὅτι ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογοι ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον (155) ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. Ἐπεὶ οὖν ὡς τὰ 2 πρὸς τὰ 4, οὕτω τὰ 4 πρὸς τὰ 8, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον, τουτέστι 16, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ μέσων, ἤτοι 16.

Πόρισμα Β'.

§. 157. Δοθέντων ἄρα τριῶν ἀριθμῶν 2, 4, 8, ῥᾳστα ὁ τέταρτος ἀνάλογος θηρεύεται. Ἐπεὶ γὰρ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν μέσων ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν ἄκρων· πάντως ἐὰν τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν μέσων διὰ τοῦ πρώτου διαιρεθῇ ὁ τέταρτος ἀνάλογος ἐξαχθήσεται.

Πόρισμα Γ'.

Σχ. 84. §. 158. Ἔτι δὲ ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι Α, Σ, Η συνεχῶς ἀνάλογοι ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ΑΗ

ὀρθο-

γώνιον ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης Σ τετραγώνῳ. Κεφ. β'.
ἔςω γὰρ ἡ Ο τῇ μέσῃ Σ ἴση. Ἐπεὶ ἂν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Σ, ὅτως (ἐξ ὑπ.) ἡ Σ πρὸς τὴν Η, καὶ ἡ Α ἔςαι πρὸς τὴν Σ ὡς ἡ Ο πρὸς τὴν Η. Ταῦτ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῶν ἄκρων Α, Η ὀρθογώνιον ἴσον (155) ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῶν μέσων Ο, Σ ὀρθογωνίῳ, τυτέςι τῷ ἀπὸ τῆς μέσης Σ τετραγώνῳ.

Πόρισμα Δ'.

§. 159. Καὶ ἀνάπαλιν· ἐὰν τὸ ἀπὸ τῶν ἄκρων Σχ. 84.
Α, Η ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης Σ τετραγώνῳ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι Α, Σ, Η συνεχῶς ἀνάλογοι ἔσονται. Ἔςω γὰρ ἡ Ο τῇ Σ ἴση. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ὀρθογώνιον ἴσον (ἐξ ὑπ.) ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, ἴσον ἔςαι καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Σ, Ο ὀρθογωνίῳ. Ταῦτ᾽ ἄρα, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Σ (155) ὅτως ἡ Σ πρὸς τὴν Η.

Πόρισμα Ε'.

§. 160. Ἐὰν ὖν τρεῖς ἀριθμοὶ συνεχῶς ἀνάλογοι ὦσι τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῷ μέσῳ τετραγώνῳ. Ἐπεὶ γὰρ ὡς τὰ 3 πρὸς τὰ 6, ὅτω τὰ 6 πρὸς τὰ 12, πάντως τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων 3, καὶ 12, ἀμέλει 36, ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ἀπὸ τῷ μέσῳ 6, τυτέςι 36.

Σχόλιον Α'.

§. 161. Ἐκ ταύτης τῆς προτάσεως τὴν τῆς γῆς Σχ. 54.
διάμετρον εὐςόχως οἱ Γεωμέτραι συνῆγον. Δέδεικται ἐν τοῖς ἀνωτέρω (107) τὴν περίμετρον τῷ μεγίςου τῆς γῆς κύκλου περιεκτικὴν εἶναι βημάτων

Κεφ. β΄. Παρισιακῶν 24649940. Ἐξεῦρε δὲ καὶ ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τοῖς αὐτοῦ πονήμασι τὴν περιφέρειαν παντὸς κύκλου λόγον ἔχειν πρὸς τὴν Διάμετρον, ὡς τὰ 22 πρὸς τὰ 7 ὡς ἔγγιστα. Ἐὰν τοίνυν ποιήσωμεν ὡς τὰ 22 πρὸς τὰ 7, οὕτω τὰ 24649940 πρὸς ἄλλο τι, εὑρήσομεν τὴν τῆς Γῆς Διάμετρον περιεκτικὴν εἶναι βημάτων Παρισιακῶν 7843156, ἤτοι μιλλίων Παρισιακῶν 7843, καὶ προσέτι βημάτων 156.

Σχόλιον Β΄.

§. 162. Ἐκ τούτου τοῦ θεωρήματος ἑπτὰ Κανόνες παράγονται τῇ Γεωμετρείᾳ τὰ μάλιστα χρήσιμοι.

Κανὼν Α΄.

Σχ. 85. §. 163. Ἐὰν ὡς ἡ πρώτη ΑΣ πρὸς τὴν δευτέραν ΣΚ, οὕτως ἡ τρίτη ΟΣ πρὸς τὴν τετάρτην ΣΗ· καὶ ἀνάπαλιν· ἡ δευτέρα ΣΚ ἔσται πρὸς τὴν πρώτην ΑΣ, ὡς ἡ τετάρτη ΣΗ πρὸς τὴν τρίτην ΟΣ.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΚ, οὕτως ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ΑΣ, ΣΗ ὀρθογώνιον Λ ἴσον (155) ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ΣΚ, ΟΣ ὀρθογωνίῳ Τ. καὶ διὰ ταῦτα ὡς τὸ Ρ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ Λ ὀρθογώνιον (140), οὕτω τὸ Ρ πρὸς τὸ Τ. Ἀλλ᾽ ὡς τὸ Ρ πρὸς τὸ Λ, οὕτως ἡ ΣΚ (153) πρὸς τὴν ΑΣ, καὶ ὡς τὸ Ρ πρὸς τὸ Τ, οὕτως ἡ ΣΗ (153) πρὸς τὴν ΟΣ. ἄρα καὶ ἡ ΣΚ ἔσται πρὸς τὴν ΑΣ, ὡς ἡ ΣΗ πρὸς τὴν ΟΣ. Ο. Ε. Δ.

Κανὼν Β'.

§. 164. Ἐὰν ὡς ἡ πρώτη ΑΣ πρὸς τὴν δευτέραν ΣΟ, οὕτως ἡ τρίτη ΣΚ πρὸς τὴν τετάρτην ΣΗ· καὶ ἐναλλάξ· ὡς ἡ πρώτη ΑΣ πρὸς τὴν τρίτην ΣΚ, οὕτως ἡ δευτέρα ΣΟ πρὸς τὴν τετάρτην ΣΗ. Σχ. 85.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΟ, οὕτως ἡ ΣΚ πρὸς τὴν ΣΗ, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ὀρθογώνιον Λ ἴσον (155) ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ὀρθογωνίῳ Τ. Ταῦτ' ἄρα ὡς τὸ Λ πρὸς τὸ Ρ, (139) οὕτω τὸ Τ πρὸς τὸ αὐτὸ Ρ. ἀλλ' ὡς τὸ Λ πρὸς τὸ Ρ (153) οὕτως ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΚ· καὶ ὡς τὸ Τ πρὸς τὸ αὐτὸ Ρ, οὕτως ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ. ἄρα καὶ ἡ ΑΣ ἔσται πρὸς τὴν ΣΚ, ὡς ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ. Ο. Ε. Δ.

Κανὼν Γ'.

§. 165. Ἐὰν ὡς ἡ πρώτη Α πρὸς τὴν δευτέραν Κ, οὕτως ἡ πρώτη Φ πρὸς τὴν δευτέραν Η· καὶ ὡς ἡ δευτέρα Κ πρὸς τὴν τρίτην Ε, οὕτως ἡ δευτέρα Η πρὸς τὴν τρίτην Ρ, καὶ καθεξῆς ὁμοίως· καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ πρώτη Α πρὸς τὴν ἐσχάτην Ε, οὕτως ἡ πρώτη Φ πρὸς τὴν ἐσχάτην Ρ. Σχ. 87.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Κ (ἐξ ὑπ.) οὕτως ἡ Φ πρὸς τὴν Η, καὶ ἐναλλάξ (164) ἡ Α

Κεφ. β'. ἔσαι πρὸς τὴν Φ ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Η. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον, καὶ ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Η, ὅτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ρ. Ὡς ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Φ, ὅτως ἡ Κ πρὸς τὴν Η, καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Ρ, ὅτως ἡ Κ πρὸς τὴν Η. καὶ διὰ ταῦτα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Φ (50), ὅτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ρ. καὶ ἐναλλάξ· ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, ὅτως ἡ Φ πρὸς τὴν Ρ. Ο. Ε. Δ.

Κανὼν Δ'.

Σχ. 85. §. 166. Ἐὰν ὡς ἡ πρώτη ΑΣ, πρὸς τὴν δευτέραν ΣΚ, ὅτως ἡ τρίτη ΟΣ πρὸς τὴν τετάρτην ΣΗ· καὶ ἂν συνθέσει· ἔσαι ἡ πρώτη συνάμα τῆς δευτέρας πρὸς τὴν δευτέραν, ὡς ἡ τρίτη συνάμα τῆς τετάρτης πρὸς τὴν τετάρτην· τυτέςιν ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΣΚ, ὅτως ἡ ΟΗ πρὸς τὴν ΣΗ.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ ἦν ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΚ (ἐξ ὑπ.), ὅτως ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ, τὸ Λ ὀρθογώνιον ἴσον (155) ἐςὶ τῷ Τ ὀρθογωνίῳ. κοινῇ δὲ προςεθέντος τοῦ Ρ ὀρθογωνίου· τὸ ΛΡ ὀρθογώνιον ἴσον (42) ἔσαι τῷ ΤΡ ὀρθογωνίῳ. Ταῦτ' ἄρα ὡς τὸ ΛΡ πρὸς τὸ Ρ (139), ὅτω τὸ ΤΡ πρὸς τὸ Ρ. Ἀλλ' ὡς τὸ ΛΡ πρὸς τὸ Ρ, (153) ὅτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΣ, καὶ ὡς τὸ ΤΡ πρὸς τὸ Ρ, ὅτως ἡ ΟΗ πρὸς τὴν ΗΣ. ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΣ, ὅτως ἡ ΟΗ πρὸς τὴν ΗΣ. Ο. Ε. Δ.

Κανὼν Ε'.

Σχ. 88. §. 167. Ἐὰν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Κ, ὅτως ἡ Ε

πρὸς

πρὸς τὴν Η, καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Η, οὕτως ἡ Κεφ. β'.
Ρ πρὸς τὴν Φ, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως· καὶ ἐν συνάψει· ἔσαι τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἡγουμένων Α Ε, Ρ πρὸς τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἑπομένων Κ, Η, Φ, ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων Α πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων Κ.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Κ (ἐξ ὑπ.), οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Η, καὶ ἡ Α ἔσαι πρὸς τὴν Ε (164) ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Η. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον, καὶ ἡ Ε ἔσαι πρὸς τὴν Ρ, ὡς ἡ Η πρὸς τὴν Φ. Αὖθις, ἐπεὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Η. καὶ ἐν συνθέσει, (166) ἔσαι ἡ Α σύναμα τῆς Ε πρὸς τὴν Ε, ὡς ἡ Κ σύναμα τῆς Η πρὸς τὴν Η. Εἴδομεν δὲ καὶ τὴν Ε ἔχειν πρὸς τὴν Ρ, ὡς τὴν Η πρὸς τὴν Φ. ἄρα, δι' ἴσου, ἔσαι ἡ Α μετὰ τῆς Ε πρὸς τὴν Ρ, (165) ὡς ἡ Κ μετὰ τῆς Η πρὸς τὴν Φ, καὶ ἐν συνάψει· ἔσαι τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων Α, Ε, Ρ πρὸς τὴν Ρ, ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων Κ, Η, Φ πρὸς τὴν Φ. καὶ ἐναλλάξ· ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Ε, Ρ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Κ, Η, Φ, οὕτως ἡ Ρ πρὸς τὴν Φ, ἢ ἡ Α πρὸς τὴν Κ. Ο. Ε. Δ.

Κανὼν ς'.

§. 168. Ἐὰν ὡς ἡ πρώτη ΑΚ πρὸς τὴν δευτέραν ΚΣ, οὕτως ἡ τρίτη ΟΗ πρὸς τὴν τετάρτην ΗΣ. καὶ ἐν διαιρέσει· ὡς ἡ ὑπεροχὴ τῆς πρώτης ἐπὶ τῆς δευτέρας πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως ἡ ὑπεροχὴ τῆς τρίτης ἐπὶ τῆς τετάρτης πρὸς τὴν τετάρτην· Σχ. 85.

 τοτε-

Κεφ. β'. τάπτην, ἡ ΑΣ ἔςαι πρὸς τὴν ΣΚ, ὡς ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ.

Δεῖξις.

Κατασκευαθήτωσαν τὰ ὀρθογώνια ΑΡ, ΥΡ. τὸ μὲν ἐπὶ τῆς πρώτης καὶ τετάρτης, τὸ δὲ ἐπὶ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης, ἅπερ ἴσα (155) ἀλλήλοις ἔσαι. κοινῇ δὲ ἀφαιρεθέντος τῦ Ρ ὀρθογωνίου· τὰ ἐναπολειφθέντα ὀρθογώνια Λ, Υ ἴσα (43) ἀλλήλοις ἔςαι. ἄρα ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΚ (155), ὕτως ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ. Ο. Ε. Δ.

Κανὼν Ζ'.

Σχ. 89. §. 169. Ἐὰν ὡς ὅλη ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ἀφαιρεθεῖσαν ΚΣ, ὕτως ὅλη ἡ ΟΗ πρὸς τὴν ἀφαιρεθεῖσαν ΗΡ. Καὶ ἀντιςρόφως, ἔςαι ὅλη ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ἐναπολειφθεῖσαν ΣΑ, ὡς ὅλη ἡ ΟΗ πρὸς τὴν ἐναπολειφθεῖσαν ΡΟ.

Δεῖξις.

Ἐπείπερ ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΣ, ὕτως (ἐξ ὑπ.) ἡ ΟΗ πρὸς τὴν ΗΡ. καὶ ἐν διαιρέσει (168) ἔςαι ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΚ, ὡς ἡ ΟΡ πρὸς τὴν ΡΗ. καὶ ἀνάπαλιν (163) ὡς ἡ ΚΣ πρὸς τὴν ΣΑ, ὕτως ἡ ΗΡ πρὸς τὴν ΡΟ. καὶ ἐν συνθέσει (166) ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΣΑ, ὕτως ἡ ΟΗ πρὸς τὴν ΡΟ. Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΕΡΙ' ΣΧΗΜΑ'ΤΩΝ

Ο'ΜΟΙΟ'ΤΗΤΟΣ.

Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

§. 170. ΕΑ'ν ἐν τριγώνῳ ΗΑΕ ἀχθῇ τις εὐθεῖα ἡ ΦΚ παράλληλος τῇ ΗΕ. ἡ ΑΦ ἔσαι πρὸς τὴν ΦΗ, ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ. Κ'ἂν μὲν ᾖ ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΗ, ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα ΦΚ τῇ ΗΕ παράλληλος ἔσαι. Σχ. 90.

Δεῖξις.

Α'. Ε'πιζεύχθωσαν αἱ ΕΦ, ΗΚ εὐθεῖαι. Ε'πεὶ οὖν τὰ τρίγωνα ΦΗΚ, ΦΕΚ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΦΚ, καὶ μεταξὺ δύω παραλλήλων ΦΚ, ΗΕ κεῖνται, ἴσα ἀλλήλοις (123) ἐστί. τὸ ἄρα Τ τρίγωνον ἔσαι πρὸς τὸ ΦΗΚ (140) ὡς τὸ

 αὐτὸ

Κεφ. γ'. αὐτὸ Υ πρὸς τὸ ΦΕΚ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ Υ τρίγωνον πρὸς τὸ ἰσοϋψὲς τρίγωνον ΦΗΚ (152), οὕτως ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΗ, καὶ ὡς τὸ Υ τρίγωνον πρὸς τὸ ἰσοϋψὲς ΦΕΚ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ. Ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΗ, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ. Ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Β'. Ὡς τὸ Υ τρίγωνον πρὸς τὸ ἰσοϋψὲς τρίγωνον ΦΗΚ, οὕτως (152) ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΗ, καὶ ὡς τὸ αὐτὸ τρίγωνον Υ πρὸς τὸ ΦΕΚ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΗ, οὕτως (ἐξ ὑπ.) ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἄρα καὶ ὡς τὸ τρίγωνον Υ πρὸς τὸ ΦΗΚ τρίγωνον, οὕτω τὸ αὐτὸ Υ πρὸς τὸ ΦΕΚ. καὶ διὰ ταῦτα τὰ τρίγωνα ΦΗΚ, ΦΕΚ ἴσα (140) ἀλλήλοις ἐστίν. ἔχει δὲ καὶ κοινὴν βάσιν τὴν ΦΚ, ἄρα παράλληλοι ἔσονται (123) αἱ ΦΚ, ΗΕ εὐθεῖαι. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 90. §. 171. Ἐὰν ἄρα ἐν παντὶ τριγώνῳ ΗΑΕ ἀχθῇ τις εὐθεῖα ἡ ΦΚ τῇ ΗΕ παράλληλος, ἡ ΗΦ ἔσαι πρὸς τὴν ΦΑ, ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΑ. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΗ (170), οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ. καὶ ἡ ΗΦ ἔσαι πρὸς τὴν ΦΑ (163), ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΑ.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 90. §. 172. Ἔτι δὲ καὶ ἡ ΗΑ ἔσαι πρὸς τὴν ΑΦ, ὡς ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΚ. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ ΗΦ πρὸς τὴν ΦΑ, οὕτως (171) ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΑ. καὶ ἐν συνθέσει (166) ἡ ΗΑ ἔσαι πρὸς τὴν ΑΦ, ὡς ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΚ.

Πό-

Κεφ. γ'.

Πόρισμα Γ'.

§. 173. Καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἔσαι πρὸς τὴν ΗΦ, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΗ, οὕτως (170) ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ, καὶ ἐν συνθέσει (166) ἡ ΑΗ ἔσαι πρὸς τὴν ΗΦ, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ. Σχ. 90.

Πόρισμα Δ'.

§. 174. Ἔτι δὲ καὶ ἡ ΑΗ ἔσαι πρὸς τὴν ΑΦ, ὡς ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΦΚ. Ἤχθω γὰρ ἡ ΦΡ τῇ ΑΕ παράλληλος· καὶ ἔσαι ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΦ (173), ὡς ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΡ. ἀλλ' ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ ΡΦΚΕ, ἡ ΡΕ ἴση (26) ἐςὶ τῇ ΦΚ. ἄρα ἡ ΗΑ ἔσαι πρὸς τὴν ΑΦ, ὡς ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΦΚ. Σχ. 91.

Πόρισμα Ε'.

§. 175. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΑ ἔσαι πρὸς τὴν ΑΦ (172), ὡς ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΚ. καὶ ἡ ΕΑ ἔσαι πρὸς τὴν ΑΚ (174), ὡς ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΦΚ. Σχ. 91.

Σχόλιον.

§. 176. Ἐκ τοῦ τετάρτου πορίσματος ταύτης τῆς προτάσεως τὴν τῆς Γεωμετρικῆς κλίμακος (ἧς ἡ χρῆσις παμμεγίστη ἐςὶ) κατασκευὴν οἱ περὶ τὰ τοιαῦτα δεινοὶ σοφῶς συνῆγον. Ἐπί τινος οὖν ὕλης στερεᾶς ἀκριβῶς κατειργασμένης, χαραχθήτωσαν γραμμαὶ αἱ ΑΦ, ΑΚ εἰς ὁποιανοῦν γωνίαν ἐπιζευ- Σχ. 92.

χθεῖ-

Κεφ. γ΄. χθεῖσαι, ἐπὶ δὲ τῆς ΑΒ εἰλήφθωσαν δέκα μέρη ἴσα τὰ ΑΛ, Λ 2, 2 3, 3 4, 4 5, καὶ τ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΚ εἰλήφθωσαν δέκα μέρη ἴσα τὰ Α 1, 1 2, 2 3, 3 4, 4 5, καὶ τ. καὶ συμπληρούσθω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΚΙΦ. Μετὰ δὲ ταῦτα ἤχθωσαν διὰ τῶν σημείων τῶν τομῶν τῆς ΑΚ εὐθείας παράλληλοι τῇ ΑΦ πλευρᾷ, τὰ δὲ κατάλληλα σημεῖα Κ καὶ Λ, 1 καὶ 2, 2 καὶ 3, 3 καὶ 4, 4 καὶ 5 καὶ τ. εὐθείαις γραμμαῖς συζευχθήτωσαν, καὶ κατασκευασθήσεται Κλίμαξ Γεωμετρική, ἐν ᾗ δειχθήσεται, ὅτι, ἐὰν ἡ ΑΒ Δικάπους ᾖ, ἡ ΑΛ ποῦς ἔσται, ἡ 99 Δάκτυλος, ἡ 88 Δάκτυλοι δύω, ἡ 77 Δάκτυλοι τρεῖς, καὶ τ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ Δικάπους ἐστὶ, ποδὸς Δεκαπλασία ἔσται. ἀλλ᾽ ἐστὶ Δεκαπλασία καὶ τῆς ΑΛ (ἐκ κατ.), ἄρα ἡ ΑΛ ποῦς ἔσται. Ἐπεὶ δὲ ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΚΛ, ἡ 99 εὐθεῖα τῇ ΑΛ παράλληλός ἐστιν· ἡ ΑΛ ἔσται πρὸς τὴν 99 (174), ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν Κ9· ἀλλὰ μὴν ἡ ΑΚ τῆς Κ9 δεκαπλασία (ἐκ κατ.) ἐστὶν, ἄρα καὶ ἡ ΑΛ δεκαπλασία ἔσται τῆς 99. Ἡ δὲ ΑΛ ποῦς ἐδείχθη, ἡ 99 ἄρα Δάκτυλος (34) ἔσται. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω καὶ τὴν 88 δακτύλους δύω περιέχειν, τὴν 77 δακτύλους τρεῖς καὶ τ.

Πρότασις Ε΄. Θεώρημα.

Σχ. 93. §. 177. Ἐὰν ἡ Α γωνία τοῦ ΗΑΚ τριγώνου δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα ἡ ΑΕ τέμνῃ καὶ τὴν ΗΚ βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα ΕΗ, ΕΚ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ λοιπαὶ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ΗΑ, ΑΚ· Κ᾽ἂν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ λοι-

παὶ

καὶ τῶ τριγώνε πλδραὶ, ἡ ΑΕ εὐθεῖα δίχα Κεφ. γ'.
τέμνει τὴν Α γωνίαν.

Δεῖξις.

Α'. Ἤχθω ἡ ΚΦ τῇ ΕΑ παράλληλος, ἥτις τὴν ΗΑ ἐκβληθεῖσαν, κατὰ τὸ Φ σημεῖον τέμνει. Ἐπεὶ ἂν ἡ ΗΦ τέμνει τὰς παραλλήλες ΑΕ, ΦΚ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΗΑΕ, ἴση (85) ἐστὶ τῇ ἐντὸς ΑΦΚ. Ἔτι δὲ ἐπεὶ ἡ ΑΚ τέμνει τὰς παραλλήλες ΑΕ, ΦΚ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΕΑΚ, ΑΚΦ ἴσαι (85) ἀλλήλαις εἰσίν· ἀλλ' ἡ ΗΑΕ γωνία τῇ ΕΑΚ ἴση (ἐξ ὑπ.) ἐστὶν, ἄρα καὶ ἡ ΑΦΚ τῇ ΑΚΦ ἴση ἔσαι. Ταῦτ' ἄρα αἱ ΑΚ, ΑΦ εὐθεῖαι ἴσαι (114) ἀλλήλαις ἔσονται· καὶ ὡς ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΦ (140), ὅτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΚ (170), ὅτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΦ, ἄρα καὶ ἡ ΗΕ ἔσαι πρὸς τὴν ΕΚ, ὡς ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ.

Β'. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΕ, ΦΚ παράλληλοί εἰσιν· ἡ ΗΕ ἔσαι πρὸς τὴν ΕΚ, (170), ὡς ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΦ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΚ, ὅτως (ἐξ ὑπ.) ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ἄρα καὶ ἡ ΗΑ ἔσαι πρὸς τὴν ΑΦ, ὡς ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. Καὶ διὰ ταῦτα αἱ ΑΦ, ΑΚ ἴσαι (140) ἔσονται, ἡ δὲ ΑΦΚ γωνία τῇ ΑΚΦ γωνίᾳ ἴση (114) ἔσαι. Ἀλλ' ἡ ΗΑΕ γωνία ἴση (85) ἐστὶ τῇ ΑΦΚ γωνίᾳ, ἡ δὲ ΕΑΚ γωνία τῇ ΑΚΦ ἐναλλὰξ γωνία ἴση ἐστίν. ἄρα καὶ ἡ ΗΑΕ γωνία τῇ ΕΑΚ γωνίᾳ ἴση ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Πρό-

Πρότασις ς'. Θεώρημα.

Σχ. 94. Σχ. 95. §. 178. Εἂν δύω τρίγωνα ΦΑΟ, ΚΕΡ πάσας τὰς ἑαυτῶν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰ τρίγωνα ἔσαι ὅμοια, τουτέσιν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ἀνάλογοι ἔσονται.

Δεῖξις.

Περὶ τὴν Α γωνίαν εἰλήφθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΣ εὐθεῖαι ταῖς ΕΚ, ΕΡ ἴσαι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΣ, ἥτις ἴση (71) ἐσὶ τῇ ΚΡ, ἡ δὲ Η γωνία ἴση ἐσὶ τῇ Κ γωνίᾳ. Ἀλλαμὴν καὶ ἡ Φ γωνία ἴση (ἐξ ὑπ.) ἐσὶ τῇ Κ γωνίᾳ, ἄρα ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΗΣ τῇ ἐντὸς γωνίᾳ Φ ἴση (50) ἐσί· καὶ διὰ ταῦτα ἡ ΗΣ παράλληλος (94) ἔσαι τῇ ΦΟ· καὶ ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως (174) ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΗΣ· καὶ ὡς ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΗΣ, οὕτως (175) ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΑΣ. Ἡ ΑΦ ἄρα ἔσαι πρὸς τὴν ΕΚ, ὡς ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΚΡ, καὶ ἡ ΦΟ ἔσαι πρὸς τὴν ΚΡ, ὡς ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΕΡ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 94. Σχ. 95. §. 179. Εἂν ἄρα δύω τρίγωνα τὰ ΦΑΟ, ΚΕΡ τὰς δύω γωνίας Φ, Ο ἴσας ἔχῃ ταῖς δυσὶ γωνίαις Κ, Ρ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ὅμοια ἔσαι. Ἐπεὶ γὰρ καὶ ἡ λοιπὴ γωνία Α τῇ λοιπῇ γωνίᾳ Ε ἴση (103) ἐσὶ, τὰ τρίγωνα ἔσαι ἰσογώνια, καὶ διὰ ταῦτα (178) ὅμοια.

Κεφ. γ'.

Πόρισμα Β'.

§. 180. Ἐν παντὶ ἄρα τριγώνῳ ΦΑΟ, ἐὰν μιᾷ τῶν αὐτοῦ πλευρῶν, φέρε τῇ ΦΟ, ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΗΣ, τὸ ΗΑΣ τρίγωνον ὅμοιον ἔσαι τῷ ὅλῳ τριγώνῳ ΦΑΟ. διὰ γὰρ τὸ παραλλήλυς εἶναι τὰς ΗΣ, ΦΟ εὐθείας, ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΗΣ τῇ ἐντὸς γωνίᾳ Φ ἴση (85) ἐςί. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον, καὶ ἡ ἐκτὸς γωνία Σ τῇ ἐντὸς γωνίᾳ Ο ἴση ἔσαι. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΗΑΣ τῷ ΦΑΟ τριγώνῳ ὅμοιόν (171) ἐςί. Σχ. 94.

Πόρισμα Γ'.

§. 181. Ἔτι δὲ ἐὰν ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν Β, Φ τῶν ὁμοίων τριγώνων ἐπὶ τὰς ὁμολόγυς πλευρὰς ΑΔ, ΕΗ ἀχθῶσι κάθετοι αἱ εὐθεῖαι ΒΚ, ΦΓ, αὗται τὸν αὐτὸν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχυσιν, ὃν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ΑΔ, ΕΗ. Ἐπεὶ γὰρ τὰ τρίγωνα ὅμοιά (ἐξ ὑπ.) ἐςι, πάντως καὶ αἱ Α, Ε γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ἀλλαμὴν καὶ αἱ γωνίαι ΒΚΑ, ΦΓΕ ὀρθαὶ, καὶ διὰ ταῦτα ἴσαί εἰσι, τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΒΚ, ΕΦΓ ὅμοια (179) ἔσαι. Ταῦτ' ἄρα ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΦΓ, ὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΦΕ, καὶ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΕΗ (διὰ τὴν τῶν τριγώνων ὁμοιότητα) ὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΦΕ· ἄρα καὶ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΦΓ (50), ὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΕΗ. Σχ. 96.

Σχόλιον Α'.

§. 182. Ῥᾴδιον ἐκ τόπων, δύω τόπων τὸ διάςημα ΑΒ προσιτὸν μὲν κατὰ τὸ Α, ἀπρόσιτον δὲ Σχ. 97.

Κεφ. γ'. κθ' τὸ Β θηρεύεται. Ἔστω δὴ πρῶτον θηρεῦσαι νηός τινος ΒΝ, ἐν ἀζυγήτῳ θαλάσσῃ ἠρεμούσης, τὸ διάστημα ΑΒ ἀπὸ τῆς Ἀκροπόλεως ΑΜ. Εἰλήφθω οὖν τόπος τις ὁ Δ, οὗ τὸ διάστημα ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἔστω (ἐξ ὑπ.) ποδῶν 40, καὶ παρατηρηθήτω διὰ τοῦ ἡμικυκλίου ἑκάστη τῶν γωνιῶν Α, Δ πόσων ἂν εἴη μοιρῶν. Μετὰ δὲ ταῦτα γραφήτω ἐπί τινος χάρτου ἡ ΕΗ εὐθεῖα τοσούτων μερῶν περιεκτικὴ ἐκ τῆς Κλίμακος, ὅσων εὑρέθη ποδῶν ἡ ΑΔ, δηλ. 40, καὶ κατασκευασθεισῶν (66) τῶν Ε, Η γωνιῶν ταῖς Α, Δ γωνίαις ἴσων, συμπληρούσθω τὸ τρίγωνον ΕΦΗ. Παρατηρηθήτω δ' ἔπειτα ἡ ΕΦ πλευρά, ἥτις 60 περιεχέτω μόρια ἐκ τῆς Κλίμακος, καὶ οὕτω γνωστὸν γενήσεται τὸ διάστημα ΑΒ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ Α, Δ γωνίαι τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ἴσαι (ἐκ κατ.) εἰσὶ ταῖς Ε, Η γωνίαις τοῦ ΕΦΗ τριγώνου ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ὅμοιον (179) ἐστὶ τῷ ΕΦΗ τριγώνῳ. Ἄρα ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΕΦ, καὶ ἐναλλὰξ (164) ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΦ. ἀλλ' ἡ ΕΗ ἐστὶ πρὸς τὴν ΕΦ, ὡς τὰ 40 πρὸς τὰ 60, ἄρα καὶ ἡ ΑΔ ἐστὶ πρὸς τὴν ΑΒ, ὡς τὰ 40 πρὸς τὰ 60. Εὑρήκαμεν δὲ τὴν ΑΔ ποδῶν 40 περιεκτικὴν εἶναι, ἡ ΑΒ ἄρα πόδας 60 περιέχειν ἐπαναγκές ἐστι.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Σχ. 98. §. 183. Ἐὰν ἐν κύκλῳ τινὶ δύο χορδαὶ αἱ ΚΛ, ΗΦ ἀλλήλας τέμνωσι κατὰ τὸ Ο σημεῖον, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΚΟΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΗΟΦ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ.

Δει-

Δεῖξις.

Ε'πεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΛΦ εὐθεῖαι. Ε'πεὶ οὖν αἱ γωνίαι Η, Λ ἴσαι (89) ἀλλήλαις εἰσὶν, ἔτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΚΟΗ, ΛΟΦ ἴσαι (65) ἀλλήλαις εἰσὶν, ὅμοια ἐςαι (179) τὰ τρίγωνα ΚΟΗ, ΛΟΦ, ἅπερ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους ἔχει· τουτέςιν, ὡς ἡ ΚΟ πρὸς τὴν ΟΦ, οὕτως ἡ ΟΗ πρὸς τὴν ΟΛ. καὶ διὰ ταῦτα τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ὀρθογώνιον ΚΟΛ ἴσον (155) ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ὀρθογωνίῳ ΗΟΦ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 184. Ε'ὰν ἄρα ἀπὸ παντὸς περιφερείας σημείου τοῦ Κ πρὸς τὴν Διάμετρον ΗΦ ἀχθῇ κάθετος ἡ ΚΟ εὐθεῖα, τὸ ἀπὸ τῆς ΚΟ τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΗΟΦ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς Διαμέτρου τμημάτων περιεχομένῳ. Ε'κβεβλήσθω γὰρ ἡ ΚΟ πρὸς τὸ Λ, καὶ ἐςαι ἡ ΛΟ (118) τῇ ΚΟ ἴση, καὶ διὰ ταῦτα τὸ ΚΟΛ ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΟ τετραγώνῳ. Α'λλαμὴν τὸ ΚΟΛ ὀρθογώνιον ἴσον (183) ἐςὶ τῷ ΗΟΦ ὀρθογωνίῳ, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΟ τετράγωνον ἴσον ἐςαι τῷ ΗΟΦ ὀρθογωνίῳ, ἡ δὲ ΚΟ μέση ἀνάλογος ἔςαι (159) μεταξὺ τῶν δύω τμημάτων ΗΟ, ΟΦ τῆς ΗΦ διαμέτρου. Σχ. 99.

Πόρισμα Β'.

§. 185. Δύω ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΗΟ, ΟΦ, μέσην ἀνάλογον εὐμαρῶς καταγράφειν δυνάμε- Σχ. 99.

μι-

Κεφ. γ'. μεθα, ἐὰν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας τεθῶσιν, ἐπὶ δὲ τούτων, ἡμικυκλίου γραφέντος τοῦ ΗΚΦ, ἐγερθῇ ἀπὸ τοῦ Ο σημείου κάθετος ἡ ΟΚ εὐθεῖα, ἥτις μέση ἀνάλογος δειχθήσεται, (184) μεταξὺ τῶν ΗΟ, ΟΦ εὐθειῶν.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Σχ. 94. §. 186. Ἐὰν δύω τρίγωνα τὰ ΦΑΟ, ΚΕΡ
Σχ. 95. ἀναλόγους ἔχῃ τὰς ἑαυτῶν πλευράς, τὰ τρίγωνα Ἰσογώνια, καὶ ὅμοια ἔσαι.

Δεῖξις.

Εἰλήφθω ἡ ΑΗ τῇ ΕΚ ἴση, καὶ ἤχθω τῇ ΦΟ παράλληλος ἡ ΗΣ. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως (ἐξ ὑπ.) ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΚΡ, ἡ δὲ ΑΗ ἴση ἐςὶ τῇ ΕΚ· ἄρα καὶ ἡ ΑΦ ἔσαι πρὸς τὴν ΑΗ ὡς ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΚΡ. ἀλλ' ἔσαι καὶ ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΑΗ (174) ὡς ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΗΣ, ἄρα καὶ ἡ ΦΟ ἔσαι πρὸς τὴν ΗΣ (50) ὡς ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΚΡ, καὶ διὰ ταῦτα ἴσαι ἀλλήλαις (140) ἔσονται αἱ ΗΣ, ΡΚ εὐθεῖαι. Αὖθις ἡ ΦΟ ἔσαι πρὸς τὴν ΗΣ (175) ὡς ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΑΣ, καὶ ἡ ΦΟ ἔσαι πρὸς τὴν ΚΡ (ἐξ ὑπ.), ὡς ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΕΡ. Ἀλλαμὴν καὶ ἡ ΦΟ ἔσαι πρὸς τὴν ΗΣ, ὡς ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΚΡ, ἄρα καὶ ἡ ΑΟ ἔσαι πρὸς τὴν ΑΣ (50), ὡς ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΕΡ, καὶ διὰ ταῦτα ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΣ, ΕΡ· Ἰσόπλευρα ἄρα ἔσαι τὰ τρίγωνα ΗΑΣ, ΚΕΡ, οὗ χάριν καὶ (58) ἰσογώνια, καὶ ὅμοια (178) ἔσαι. Τὸ δὲ τρίγωνον ΦΑΟ ὅμοιόν (180) ἐςι τῷ ΗΑΣ τριγώνῳ, ἄρα ὅμοιον ἔσαι καὶ τῷ ΚΕΡ τριγώνῳ. Ο. Ε. Δ.

Πρό-

Κεφ. γ'.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

§. 187. Εάν δύο τρίγωνα ΦΑΟ, ΚΕΡ μίαν μιᾶ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, ἔχῃ δὲ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους· ὅμοια ἔσαι. Σχ. 94. Σχ. 95.

Δεῖξις.

Περὶ τὴν Α γωνίαν, τῇ Ε γωνίᾳ ἴσην, εἰλήφθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΣ, ταῖς ΕΚ, ΕΡ ἴσαι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΣ, ἥτις ἴση (71) ἐςὶ τῇ ΚΡ. Ἰσόπλευρα ἄρα ἔσαι τὰ τρίγωνα ΗΑΣ, ΚΕΡ, διόπερ καὶ ἰσογώνια (58) καὶ ὅμοια (178) ἔσαι. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΦ ἐςὶ πρὸς τὴν ΕΚ, ὡς ἡ ΑΟ (ἐξ ὑπ.) πρὸς τὴν ΕΡ, καὶ ἡ ΑΦ ἔσαι πρὸς τὴν ΑΗ, ὡς ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΑΣ, καὶ ἐν διαιρέσει, (168) ἡ ΦΗ ἔσαι πρὸς τὴν ΗΑ, ὡς ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΑ, καὶ ἀνάπαλιν, (165) ἡ ΑΗ ἔσαι πρὸς τὴν ΗΦ, ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΟ. Ἡ ΗΣ ἄρα τῇ ΦΟ παράλληλος (170) ἔσαι. Ἀλλαμὴν τὸ τρίγωνον ΦΑΟ ὅμοιόν (180) ἐςι τῷ ΗΑΣ τριγώνῳ, ἄρα καὶ τῷ ΚΕΡ τριγώνῳ ὅμοιον ἔσαι Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 188. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας ΑΚ τὸ ΑΦΚ τρίγωνον εὐμαρῶς κατασκευασθήσεται ὅμοιον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ΛΡΟ, ἐὰν ἡ ΚΑΗ γωνία ἴση γένηται τῇ Λ γωνίᾳ, ἡ δὲ ΛΟ πρὸς τὴν ΑΚ (187), ὡς ἡ ΛΡ πρὸς τὴν ΑΦ. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον καὶ παντὸς ἄλλου εἴδους σχῆμα ὅμοιον τῷ δοθέντι κατασκευασθήσεται. Σχ. 100.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 101. §. 189. Ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ παραλληλόγραμμα ΡΣΑΚ, ΦΕΑΟ τὰ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον περιγεγραμμένα. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΣΡ, ΕΦ παράλληλοί εἰσι, τὸ ΑΣΡ τρίγωνον τῷ ΑΕΦ τριγώνῳ ὅμοιον (180) ἐστί. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον καὶ τὸ ΑΚΡ τρίγωνον τῷ ΑΟΦ τριγώνῳ ὅμοιον ἐστί. Ἀλλὰ μὴν τὰ τέτταρα τρίγωνα τὰ παραλληλόγραμμα συνιστῶσιν, ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα ΡΣΑΚ, ΦΕΑΟ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Σχ. 102. §. 190. Ἐὰν ἐκτὸς κύκλου τινὸς ληφθῇ τι σημεῖον τὸ Κ, ἀπὸ δὲ τούτου πρὸς τὸν κύκλον ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι αἱ ΚΗ, ΚΑ, ὧν ἡ μὲν τέμνει τὸν κύκλον, ἡ δὲ τούτου ἐφάπτεται, ἡ ἐφαπτομένη μέση ἀνάλογός ἐστι μεταξὺ ὅλης τῆς τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἀπολαμβανομένης, τουτέστι μεταξὺ τῆς ΗΚ, καὶ τῆς ΚΣ.

Δεῖξις.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΣ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΚΑΣ γωνία ἴση (91) ἐστὶ τῇ ΑΗΚ γωνίᾳ, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ γωνία ΑΚΣ ἴση ἐστὶ τῇ ΑΚΗ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΗΑΚ, ΑΣΚ ὅμοια (179) ἐστί· καὶ διὰ ταῦτα ὡς ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΚΑ, οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΚΣ· ἡ ἐφαπτομένη ἄρα ΚΑ μέση ἀνάλογος (146) ἐστὶ μεταξὺ τῆς ΗΚ καὶ τῆς ΚΣ εὐθείας. Ο. Ε. Δ.

Πό-

Πόρισμα Α'.

§. 191. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΑ, ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΚΣ, τὸ ὑπὸ τῆς ΚΑ τετράγωνον ἴσον (158) ἐστὶ τῷ ΗΚΣ ὀρθογωνίῳ. Σχ. 102.

Πόρισμα Β'.

§. 192. Ἔτι δὲ ἐὰν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ ἀχθῇ ἑτέρα τέμνουσα ἡ ΚΟ, τὸ ὑπὸ τῆς ΚΑ τετράγωνον ἴσον (191) ἐστὶ τῷ ΟΚΛ ὀρθογωνίῳ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΟΚΛ ἴσον (50) ἐστὶ τῷ ΗΚΣ ὀρθογωνίῳ. Σχ. 102.

Πόρισμα Γ'.

§. 193. Δύω ἄρα ἐπτόμεναι ΚΑ, ΚΡ, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ ἠγμέναι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα ἴσα (191) ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΗΚΣ, καὶ ἀλλήλοις ἴσα (50) ἔσται. διὰ δὲ ταῦτα καὶ αἱ γραμμαὶ ΚΑ, ΚΡ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Σχ. 103.

Πόρισμα Δ'.

§. 194. Καὶ ἐὰν ἀπὸ τῆς τῶν ἐφαπτομένων συνδρομῆς Κ ἀχθῇ πρὸς τὸ Ο κέντρον εὐθεῖα ἡ ΚΟ, αὕτη δίχα τεμεῖ τὴν ΑΚΡ γωνίαν. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν ΟΑ, ΟΡ εὐθειῶν, αἱ ΚΑ, ΑΟ πλευραὶ τοῦ ΟΑΚ τριγώνου ἴσαι (193) εἰσὶ ταῖς πλευραῖς ΚΡ, ΡΟ τοῦ ΟΡΚ τριγώνου. Γωνία ἄρα ἡ ΑΚΟ ἴση (58) ἐστὶ τῇ ΡΚΟ γωνίᾳ, τουτέστιν ἡ ΚΟ εὐθεῖα τέτμηκε τὴν ΑΚΡ γωνίαν. Σχ. 103.

Κεφ. γ'.

Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Σχ. 103. §. 195. Εἀν ἡ ΚΡ εὐθεῖα ὑπὸ τȣ͂ κύκλȣ ἅπτηται κατὰ τὸ Ρ σημεῖον, ὥςε τὸ ταύτης τετράγωνον, ἴσον εἶναι τῷ ΗΚΣ ὀρθογωνίῳ, αὕτη τȣ͂ κύκλȣ ἐφαπτομένη ἐςί.

Δεῖξις.

Ἐπιζευχθείσης τῆς ΚΑ ἐφαπτομένης, ἤχθωσαν αἱ ΟΑ, ΟΡ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΑ τετράγωνον ἴσον (191) ἐςὶ τῷ ΗΚΣ ὀρθογωνίῳ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΡ τετράγωνον ἴσον (ἐξ ὑπ.) ἐςὶ τῷ αὐτῷ ὀρθογωνίῳ ΗΚΣ, τὰ τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔςαι, διόπερ καὶ αἱ τȣ́των βάσεις ΚΡ, ΚΑ εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἀλλαμὴν καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ΟΡ, ΟΚ τȣ͂ ΚΡΟ τριγώνȣ ἴσαι εἰσὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ΟΑ, ΟΚ τȣ͂ ΚΑΟ τριγώνȣ, ἄρα καὶ ἡ ΚΡΟ γωνία ἴση (58) ἐςὶ τῇ ΚΑΟ γωνίᾳ· Ἐςι δὲ (82) ἡ ὀρθὴ ἡ ΚΑΟ γωνία, ἄρα καὶ ἡ ΚΡΟ γωνία ὀρθὴ ἔςαι· καὶ διὰ ταῦτα ἡ ΚΡ εὐθεῖα ἐφαπτομένη (81) ἐςὶ τȣ͂ κύκλȣ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Σχ. 104. §. 196. Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν ΑΚΛ κατὰ τὸ Κ σημεῖον τεμεῖν, ὥςε τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ΑΚ μέσον ἀνάλογον εἶναι μεταξὺ τῆς ὅλης ΛΑ, καὶ τȣ͂ ἐλάττονος τμήματος ΚΑ.

Δεῖ-

Δεῖξις.

Ἤχθω ἐπὶ τῆς ΛΑ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΛΦ, ἴση τῷ ἡμίσυ τῆς ΛΑ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Φ, διαστήματι δὲ τῷ ΦΛ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΛΗΡ, οὗτινος ἡ ΑΛ ἐφάπτεται (81) κατὰ τὸ Λ σημεῖον. Εἶτα ἐπιζευχθείσης, διὰ τῶν σημείων Α, Φ, τῆς ΑΗ εὐθείας, ἤχθωσαν αἱ ΗΛ, ΡΚ παράλληλοι, ὧν ἡ ΡΚ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΛ τέμνει κατὰ τὸν ζητούμενον λόγον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΛΦ ἡμιδιάμετρος ἡμίσεια (ἐκ κατ.) ἐστὶ τῆς ΛΑ εὐθείας, ὅλη ἡ διάμετρος ΗΡ τῇ ΛΑ ἴση ἔσται. Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΑΛ (190), οὕτως ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ΑΡ, ἄρα καὶ ἡ ΑΗ ἔσται πρὸς τὴν ΗΡ, ὡς ἡ ΗΡ πρὸς τὴν ΡΑ. Διὰ δὲ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΡΚ, ΗΛ εὐθείας, ἡ ΑΛ ἔσται πρὸς τὴν ΛΚ (173), ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΡ, καὶ ἡ ΛΚ πρὸς τὴν ΚΑ, ὡς (171) ἡ ΗΡ πρὸς τὴν ΡΑ. Διὰ δὲ ταῦτα καὶ ἡ ΑΛ ἔσται πρὸς τὴν ΛΚ (50) ὡς ἡ ΛΚ πρὸς τὴν ΚΑ. Ὃ. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ.

ΠΕΡῚ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩ͂Ν

Ι᾿ΔΙΩΜΑ΄ΤΩΝ.

Πρότασις ΙΓ΄. Θεώρημα.

Σχ. 105. §. 197. ΕΑ᾽ν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας Φ τοῦ ΑΦΚ τριγώνου ὀρθογωνίου τῇ ὑποτεινούσῃ ΑΚ κάθετος ἀχθῇ ἡ ΦΟ. Ἔσαι, Α΄. τὸ ὑπὸ τῆς ΦΚ τετράγωνον ἴσον τῷ ΑΚΟ ὀρθογωνίῳ. Β΄. τὸ ὑπὸ τῆς ΦΑ τετράγωνον ἴσον τῷ ΚΑΟ ὀρθογωνίῳ. Καὶ Γ΄. τὸ ὑπὸ τῆς ΦΟ τετράγωνον ἴσον τῷ ΑΟΚ ὀρθογωνίῳ.

Δεῖξις.

Α΄. Ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ΦΟΑ γωνία, κύκλος ὁ ἐπὶ τῆς ΦΑ γραφεὶς διελεύσεται διὰ τοῦ Ο σημείου. Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ ΑΦΚ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ ΦΚ εὐθεῖα κάθετος ἔσαι τῇ ΦΑ διαμέτρῳ, διὸ καὶ τοῦ κύκλου κατὰ τὸ σημεῖον Φ (81) ἐφάπτεται, ὃν τέμνει ἡ ΚΟΑ εὐθεῖα. Τὸ ὑπὸ τῆς ΦΚ ἄρα τετράγωνον

ἴσον

ἴσον (191) ἐστὶ τῷ ΑΚΟ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἦν Κεφ. δ΄.
τὸ πρῶτον.

Β. Ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ΦΟΚ γωνία, ὁ ἐπὶ τῆς ΦΚ κύκλος γραφεὶς διελεύσεται διὰ τοῦ Ο σημείου, ταὐτ' ἄρα, ὡς ἀνωτέρω ἐδείχθη, τὸ ἀπὸ τῆς ΦΑ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΑΟ ὀρθογωνίῳ (191). ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

Γ. Τελευταῖον δὲ ὀρθῆς οὔσης (ἐξ ὑπ.) τῆς ΑΦΚ γωνίας, κύκλος ὁ ἐπὶ τῆς ΑΚ γραφεὶς διὰ τοῦ Φ σημείου διελεύσεται. ταὐτ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΟΦ τετράγωνον ἴσον (184) ἐστὶ τῷ ΑΟΚ ὀρθογωνίῳ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α΄.

§. 198. Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΦΚ τετράγωνον ἴσον Σχ. 105.
(197) ἐστὶ τῷ ΑΚΟ ὀρθογωνίῳ, ἡ ΑΚ ἔσται πρὸς τὴν ΦΚ (159), ὡς ἡ ΦΚ πρὸς τὴν ΚΟ· καὶ διὰ ταῦτα ἡ ΦΚ μέση ἀνάλογός ἐστι μεταξὺ τῆς ΑΚ, ΚΟ, ἡ δὲ ΦΑ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ΚΑ, καὶ ΑΟ. καὶ ἡ ΟΦ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ΑΟ, καὶ ΟΚ.

Πόρισμα Β΄.

§. 199. Δύω ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΟ, Σχ. 105.
ΟΦ τρίτη ἀνάλογος ῥᾶστα θηρεύεται. Συζευχθήτωσαν γὰρ πρὸς ὀρθὴν γωνίαν αἱ ΑΟ, ΟΦ εὐθεῖαι· εἶτα ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΦ., ἤχθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ ΦΚ εὐθεῖα, τὴν ΑΟ ἐκβληθεῖσαν κατὰ τὸ Κ σημεῖον τέμνουσα, καὶ ἔσται τὸ ποθούμενον. ὡς γὰρ ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΟΦ, οὕτως (198) ἡ ΟΦ πρὸς τὴν ΟΚ.

Κεφ. δ'.

Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Σχ. 106. §. 200. Ἐν παντὶ Ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΦΚ, τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν τετραγώνοις συνάμα ληφθεῖσι ΦΑ, ΦΚ.

Δεῖξις.

Ἔστω τὸ ΡΑΚΗ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΑΚ, ὅπερ διὰ τῆς ΦΣ εὐθείας, πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΚ ἠγμένης, διῃρημένον ἐστὶν εἰς δύω ὀρθογώνια τὰ ΗΚΟΣ, ΣΟΑΡ. Ἐπεὶ οὖν τοῦ ΡΑΚΗ τετραγώνου ἴσαι εἰσιν αἱ πλευραὶ ΗΚ, ΑΚ, τὸ ΗΚΟΣ ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΚΟ ὀρθογωνίῳ. Ἀλλα μὴν τὸ ΑΚΟ ὀρθογώνιον ἴσον (197) ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΦΚ πλευρᾶς τετραγώνῳ, ἄρα καὶ τὸ ΗΚΟΣ ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΦΚ πλευρᾶς τετραγώνῳ. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω καὶ τὸ ΣΟΑΡ ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΦΑ πλευρᾶς τετραγώνῳ. Ἄρα τὸ τετράγωνον ΡΑΚΗ τῆς ὑποτεινούσης ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν τετραγώνων. Ο. Ε. Δ. Αὕτη ἐστὶν ἡ πολυθρύλλητος Ἑκατόμβη.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 107. §. 201. Τὸ τετράγωνον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς διαγωνίου ΦΗ τετραγώνου οἱουδήποτε διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ πλευρᾶς τετραγώνου.

Πόρισμα Β'.

§. 202. Ἐὰν ἡ ΑΚ εὐθεῖα τμηθῇ κατὰ τὸ Σ σημεῖον ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΚ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ὀρθογωνίοις ΑΚΣ, ΚΑΣ συνάμα ληφθεῖσι. Γεγράφθω γὰρ ἐπ' αὐτῆς τὸ ΑΗΚ ἡμικύκλιον, καὶ ἐγερθείσης πρὸς ὀρθὰς τῆς ΣΗ εὐθείας, ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΚΗ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ἡ ΑΗΚ γωνία. Τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ τετράγωνον ἴσον (200) ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΗΚ, ΗΑ πλευρῶν τετραγώνοις συνάμα ληφθεῖσιν. ἀλλὰ μὴν τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τετράγωνον ἴσον (197) ἐστὶ τῷ ΑΚΣ ὀρθογωνίῳ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΑΣ (197) ὀρθογωνίῳ. ἄρα τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ὀρθογωνίοις ΑΚΣ, ΚΑΣ συνάμα ληφθεῖσι. Σχ. 108.

Πόρισμα Γ'.

§. 203. Ἔτι τε τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΚ καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων ΚΣ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΑΣΚ μετὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ΚΣ τμήματος. τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΚ, καὶ ΚΣ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον (197) ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΚ πλευρᾶς τετραγώνῳ, τουτέστι τοῖς τετραγώνοις (200) ΗΣ, ΚΣ συνάμα ληφθεῖσιν, ἤτοι (197) τῷ ΑΣΚ ὀρθογωνίῳ συνάμα τῷ ΚΣ τετραγώνῳ. Σχ. 108.

Πόρισμα Δ'.

§. 204. Ἔτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμημάτων ΑΣ, ΣΚ τετραγώνοις, Σχ. 108.

καὶ

Κεφ. δ'. καὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ΑΣΚ. τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΚ τετράγωνον ἴσον (200) ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΗΚ, ΗΑ τετραγώνοις. Ἀλλὰ μὴν τῷ ἀπὸ τῆς ΗΚ τετράγωνον ἴσον (200) ἐστὶ τοῖς ΣΚ, ΣΗ τετραγώνοις, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΑ τετράγωνον ἴσον (200) ἐστὶ τοῖς ΑΣ, ΣΗ τετραγώνοις, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τετραγώνοις ΑΣ, ΣΚ καὶ τῷ δὶς τετραγώνῳ ΣΗ, ἤτοι τῷ δὶς (197) ὀρθογωνίῳ ΑΣΚ.

Πόρισμα Ε'.

Σχ. 108. §. 205. Τελευταῖον δὲ ἐὰν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΚ τμηθῇ εἰς ἴσα κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἄνισα κατὰ τὸ Σ σημεῖον, τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ΡΚ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΡΣ τετραγώνῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ΑΣΚ. Τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ΡΗ τετράγωνον ἴσον (200) ἐστὶ τοῖς τετραγώνιος ΡΣ, ΣΗ, ἤτοι τῷ τετραγώνῳ ΡΣ (197) συνάμα τῷ ὀρθογωνίῳ ΑΣΚ. Ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΡΚ τετράγωνον ἴσον ἔσαι τῷ ΡΣ τετραγώνῳ συνάμα τῷ ΑΣΚ ὀρθογωνίῳ.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Σχ. 109. §. 206. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ΑΣ ὑποτεινούσης τριγώνου ὀξυγωνίου ἢ ἀμβλυγωνίου ΑΤΣ ἡμικύκλιον γραφῇ τὸ ΑΡΣ, τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν δύω ὀρθογωνίων ΤΣΛ, ΤΑΡ.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Τ τῇ ΑΣ κάθετος ἡ ΤΕ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΛ εὐθεῖα κάθετος τῇ ΣΛ. Ἐπεὶ

ἐν ἡ ΑΛΣ γωνία ὀρθὴ (ἐκ κατ.) ἐστι, καὶ ἡ Κεφ. δ'.
ΑΛΥ γωνία ὀρθὴ ἔσαι. ὀρθὴ δὲ κατεσκευάσθη καὶ ἡ ΑΕΥ γωνία, ἄρα κύκλος ὁ ἐπὶ τῆς ΑΥ γραφεὶς διελεύσεται διὰ τῶν σημείων Ε, Λ. Α'λλαμὴν αἱ εὐθεῖαι ΣΑ, ΣΥ τέμνουσι τὸν κύκλον κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Α, Λ, Υ. Α'ρα τὸ ΑΣΕ ὀρθογώνιον ἴσον (192) ἐστι τῷ ΥΣΛ ὀρθογωνίῳ. Προσήχθω δ' ἔτι ἡ ΣΡ εὐθεῖα, καὶ ἔσαι ὀρθὴ ἡ ΣΡΑ γωνία, ὀρθὴ δὲ κατεσκευάσθη καὶ ἡ ΣΕΥ γωνία, ἄρα κύκλος ὁ ἐπὶ τῆς ΣΥ γραφεὶς διελεύσεται διὰ τῶν σημείων Ρ, Ε. καὶ διὰ ταῦτα τὸ ΣΑΕ ὀρθογώνιον ἴσον (192) ἐστι τῷ ΥΑΡ ὀρθογωνίῳ. Η' σύναψις ἄρα τῶν δύω ὀρθογωνίων ΑΣΕ, ΣΑΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΣ (202) τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν δύω ὀρθογωνίων ΥΣΛ, ΥΑΡ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ις'.

§. 207. Ε'ὰν ἐπὶ τῆς ΥΣ πλευρᾶς τριγώνου ὀξυγωνίου ΑΥΣ κάθετος ἀχθῇ ἡ ΑΛ, τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΑΣ σύναμα τοῦ δὶς ὀρθογωνίῳ ΣΥΛ ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν ΥΑ, ΥΣ τετραγώνων. Σχ. 109.

Δεῖξις.

Τὸ ἀπὸ τῆς ΥΑ τετράγωνον ἴσον (202) ἐστι τοῖς ὀρθογωνίοις ΥΑΡ, ΑΥΡ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΥΣ τετράγωνον ἴσον (202) ἐστι τοῖς ὀρθογωνίοις ΥΣΛ, ΣΥΛ. ἡ σύναψις ἄρα τῶν δύω τετραγώνων ΥΑ, ΥΣ ἴσα δύναται τῇ συνάψει τῶν τεττάρων ὀρθογωνίων ΥΑΡ, ΥΣΛ, ΑΥΡ, ΣΥΛ. Α'λλαμὴν ἡ σύναψις τῶν δύω ὀρθογωνίων ΥΑΡ, ΥΣΛ

ἴση

Κεφ. δ'. ἴση (206) ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΣ τετραγώνῳ, καὶ ἡ σύναψις τῶν ὀρθογωνίων ΑΥΡ, ΣΥΛ, ἴση ἐστὶ (192) τῷ δὶς ὀρθογωνίῳ ΣΥΛ. Ἄρα ἡ σύναψις τῶν δύω τετραγώνων ΥΑ, ΥΣ ἴσα δύναται τῷ ΑΣ τετραγώνῳ σὺν τῷ δὶς ὀρθογωνίῳ ΣΥΛ. Θ. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 109. §. 208. Ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς ΑΣ τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν τετραγώνων σύναμα λαμβανομένων.

Πρότασις ΙΖ'. Θεώρημα.

§. 209. Ἐὰν τῇ ΥΣ πλευρᾷ ἀμβλυγωνίου τριγώνου ΑΥΣ κάθετος ἀχθῇ ἡ ΑΛ, τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΑΣ ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν τετραγώνων ΥΣ, ΥΑ, καὶ τῷ δὶς ὀρθογωνίῳ ΛΥΣ.

Δεῖξις.

Τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ τετράγωνον ἴσον (207) ἐστὶ τοῖς ὀρθογωνίοις ΥΑΡ, ΥΣΛ, ἤτοι τοῖς ὀρθογωνίοις ΛΣΥ, ΡΑΥ. Ἀλλ᾽ ἄμην τὸ ΛΣΥ ὀρθογώνιον ἴσον (203) ἐστὶ τῷ ΥΣ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ ὀρθογωνίου ΛΥΣ, τὸ δὲ ΡΑΥ ὀρθογώνιον ἴσον (203) ἐστὶ τῷ ΑΥ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ ὀρθογωνίου ΡΥΑ, ἄρα τὸ ΑΣ τετράγωνον ἴσα δύναται τῇ συνάψει τῶν τετραγώνων ΥΣ, ΥΑ, καὶ τῶν ὀρθογωνίων ΛΥΣ, ΡΥΑ. Τὰ δὲ ὀρθογώνια ΛΥΣ, ΡΥΑ ἴσα (183) ἀλλήλοις ἐστί. Τὸ ΑΣ ἄρα τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν ΥΣ, ΥΑ τετραγώνων μετὰ τοῦ δὶς ὀρθογωνίου ΛΥΣ. Θ. Ε. Δ.

Πό-

Πόρισμα.

§. 210. Ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης ΑΣ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῆς συνάψεως τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν ΑΥ, ΥΣ περιεχομένων. Σχ. 109.

Πρότασις ΙΗ'.

§. 211. Ἐὰν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΚ πλευρᾶς τριγώνου οἱουδήποτε ἴσον ᾖ τῇ συνάψει τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν ΑΦ, ΦΚ περιεχομένων, ὀρθή ἐστιν ἡ Φ γωνία, ἣν ἡ ΑΚ πλευρὰ ὑποτείνει. Σχ. 106.

Δεῖξις.

Ἡ Φ γωνία οὐδ' ἀμβλεῖα, οὐδεμίαν ὀξεῖα εἶναι δύναται. Εἰ μὲν γὰρ ἀμβλεῖα, τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ τετράγωνον μεῖζον ἂν εἴη (210) τῆς συνάψεως τῶν λοιπῶν τετραγώνων ΑΦ, ΦΚ. Εἰ δ' ὀξεῖα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ τετράγωνον ἔλαττον ἂν εἴη (208) τῆς συνάψεως τῶν τετραγώνων ΑΦ, ΦΚ. Ἑκάτερον κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Ἐπεὶ οὖν ἡ Φ γωνία οὐδ' ἀμβλεῖα, οὐδεμίαν ὀξεῖα εἶναι δύναται, ὀρθὴ ἐπαναγκές ἐστιν. Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Ε

ΠΕΡΙ' Ο'ΜΟΙΓ'ΩΝ

ΣΧΗΜΑ'ΤΩΝ Α'ΝΑΛΟΓΙ'ΑΣ.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Σχ. 110. §. 212. Σχ. 111. Παραλληλόγραμμα ὁποιαοῦν τὰ ΑΚΦΗ, ΤΕΓΣ λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν βάσεων ΑΗ, ΤΣ, καὶ τῶν ὑψῶν ΚΛ, ΕΟ.

Δεῖξις.

Ὁ συγκείμενος λόγος τῆς βάσεως ΑΗ πρὸς τὴν βάσιν ΤΣ, καὶ τοῦ ὕψους ΚΛ πρὸς τὸ ὕψος ΕΟ ἐστὶν, ὃν ἔχει τὸ γινόμενον (147) ἐκ τῶν ἡγουμένων ΑΗ, ΚΛ, τουτέστιν ἐκ τῆς βάσεως ΑΗ ἐπὶ τὸ ὕψος ΚΛ, πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἑπομένων, ἤτοι ἐκ τῆς βάσεως ΤΣ ἐπὶ τὸ ὕψος ΕΟ. Ἀλλὰ μὴν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΚΦΗ ἰσόν ἐστι

τῷ

τῷ γενομένῳ (124) ἐκ τῆς βάσεως ΑΗ ἐπὶ τὸ ύψος ΚΛ, καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΤΕΓΣ ἴσον ἐστι τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΤΣ ἐπὶ τὸ ὕψος ΕΟ, ἄρα ὁ συγκείμενος λόγος τῆς βάσεως ΑΗ πρὸς τὴν βάσιν ΤΣ, καὶ τοῦ ὕψους ΚΛ πρὸς τὸ ὕψος ΕΟ ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΚΦΗ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΤΕΓΣ. ταῦτ' ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν. Κεφ. ει

Πόρισμα Α'.

§. 213. Ἐπεὶ δὲ καὶ τὰ τρίγωνα ἡμίσεά ἐστι (110) τῶν παραλληλογράμμων· πάντως καὶ τὰ τρίγωνα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τουτέστι τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν. Σχ. 110. Σχ. 111.

Πόρισμα Β'.

§. 214. Ἔτι δὲ καὶ τὰ ὀρθογώνια Φ, Λ, οἷα παραλληλόγραμμα (95) λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα τὸν συγκείμενον ἐκ τῆς βάσεως Α πρὸς τὴν βάσιν Κ, καὶ τοῦ Σ ὕψους πρὸς τὸ Η ὕψος. Σχ. 112. Σχ. 113.

Πόρισμα Γ'.

§. 215. Ὁμοίως δὲ καὶ τὰ τετράγωνα Φ, Λ λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα τὸν συγκείμενον ἐκ τῆς βάσεως πρὸς τὴν βάσιν, καὶ τοῦ ὕψους πρὸς τὸ ὕψος. Σχ. 114. Σχ. 115.

Πόρισμα Δ'.

Σχ. 114. §. 216. Ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς τετραγώνοις Φ, Λ, ὁ
Σχ. 115. λόγος τῆς βάσεως πρὸς τὴν βάσιν ἴσος ἐστὶ τῷ λόγῳ τοῦ ὕψους πρὸς τὸ ὕψος, πάντως τὰ τετράγωνα Φ, Λ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς βάσεως ΑΚ πρὸς τὴν βάσιν ΕΗ, ἢ τοῦ ὕψους ΚΒ πρὸς τὸ ΗΓ ὕψος.

Πόρισμα Ε'.

Σχ. 114. §. 217. Ὁ Διπλασίων ἄρα λόγος δύω εὐθειῶν
Σχ. 115. ΑΚ, ΕΗ ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ τῶν Φ, Λ τετραγώνων ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν κατασκευαθέντων.

Πρότασις Κ'.

Σχ. 116. §. 218. Τριῶν εὐθειῶν δοθεισῶν τῶν Α, Κ, Ε,
Σχ. 117. ἡ πρώτη Α ἔσται πρὸς τὴν τρίτην Ε ἐν συγκειμέ-
Σχ. 118. νῳ λόγῳ ἐκ τῶν δύω μεταξὺ λόγων, τουτέστιν ἐκ τοῦ λόγου τῆς πρώτης Α πρὸς τὴν δευτέραν Κ, καὶ ἐκ τοῦ λόγου τῆς δευτέρας Κ πρὸς τὴν τρίτην Ε.

Δεῖξις.

Κατασκευαθήτωσαν, ἐπὶ μὲν τῶν ἄκρων εὐθειῶν Α, Ε, τὰ ὀρθογώνια Φ, Υ, (ὧν τὸ ὕψος τῇ Κ ἴσον ἔστω) ἐπὶ δὲ τῆς μέσης Κ, κατασκευαθήτω τὸ Λ ὀρθογώνιον (οὗ τὸ ὕψος τῇ Ε ἴσον ἔστω). Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Ο πρὸς τὴν Η (ἐκ κατ.), τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ὀρθογώνιον Λ ἴσον (155) ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ὀρθογωνίῳ Υ. Τὸ Φ ἄρα ὀρθογώνιον ἔσται πρὸς τὸ Υ ὀρθογώνιον (140)

(140) ὡς τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον Φ πρὸς τὸ Λ ὀρθογώνιον. Ἀλλ' ὡς τὸ Φ πρὸς τὸ Υ, οὕτως (153) ἡ Α πρὸς τὴν Ε, καὶ τὸ αὐτὸ Φ ἔχει πρὸς τὸ Λ (214) τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκτε τοῦ λόγου τῆς Α πρὸς τὴν Κ, καὶ τῆς Σ πρὸς τὴν Η. ἄρα καὶ ἡ Α πρὸς τὴν Ε λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκτε τοῦ λόγου τῆς Α πρὸς τὴν Κ, καὶ τῆς Σ πρὸς τὴν Η. αἱ δ' εὐθεῖαι Σ,Η ἴσαι (ἐκ κατ.) εἰσὶ ταῖς Κ,Ε εὐθείαις. Ἄρα καὶ ἡ Α ἔχει πρὸς τὴν Ε τὸν συγκείμενον λόγον ἔκτε τοῦ λόγου τῆς Α πρὸς τὴν Κ, καὶ τῆς Κ πρὸς τὴν Ε. Ο. Ε. Δ. Κεφ. ς.

Πρότασις ΚΑ΄. Θεώρημα.

§. 219. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΔ, ΕΦΗ λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΔ, ΕΗ. Σχ. 96.

Δεῖξις.

Ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν Β, Φ ἤχθωσαν πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ΑΔ, ΕΗ κάθετοι αἱ ΒΚ, ΦΓ εὐθεῖαι, τὰ ὕψη τῶν τριγώνων παριστᾶσαι. Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΕΦΗ λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα (213) τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ λόγου τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΕΗ, καὶ τῆς ΒΚ πρὸς τὴν ΦΓ. Ἀλλ' ὁ λόγος τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΕΗ ἴσος (181) ἐστὶ τῷ λόγῳ τῆς ΒΚ πρὸς τὴν ΦΓ, ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΕΦΗ ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ (216) τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΕΗ, τουτέστι λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΔ, ΕΗ (217).

Πρότασις ΚΒ'. Θεώρημα.

Σχ. 110. §. 220. Τὰ ὅμοια παραλληλόγραμμα ΑΦ, ΥΓ
Σχ. 111. λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΗ, ΥΣ.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ τὰ ΑΦ, ΥΓ παραλληλόγραμμα ὅμοια (ἐξ ὑπ.) ἐστὶν, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ἀνάλογοι (148) ἔσονται. Ἀχθεισῶν δὲ τῶν διαγωνίων ΚΗ, ΕΣ, καὶ τὰ τρίγωνα ΑΚΗ, ΥΕΣ ὅμοια (187) ἔσται. Ταῦτ᾽ ἄρα ὡς τὸ ΑΚΗ τρίγωνον πρὸς τὸ ΥΕΣ τρίγωνον (219), οὕτω τὸ ΑΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ΥΣ τετράγωνον. Ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΑΦ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΥΓ παραλληλόγραμμον, οὕτω τὸ ΑΚΗ τρίγωνον πρὸς τὸ ΥΕΣ τρίγωνον, ἄρα καὶ ὡς τὸ ΑΦ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΥΓ παραλληλόγραμμον, οὕτω τὸ ΑΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ΥΣ τετράγωνον. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

Σχ. 119. §. 221. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι Α, Ε, Φ ὦσι συνεχεῖς ἀνάλογοι, ἡ πρώτη Α ἔσται πρὸς τὴν τρίτην Φ, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης Α πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας Ε, ἢ ὡς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας Ε πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης Φ.

Δεῖξις.

Ἡ πρώτη Α ἔσται πρὸς τὴν τρίτην Φ ἐν συγ-

κειμένῳ λόγῳ (218) ἐκ τοῦ λόγων τῆς Α πρὸς Κεφ. ε.
τὴν Ε, καὶ τῆς Ε πρὸς τὴν Φ. Ἀλλ' ἐπεὶ αἱ Α, Ε, Φ εὐθεῖαι συνεχεῖς ἀνάλογοί εἰσιν, ὁ λόγος τῆς Α πρὸς τὴν Ε ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ τῆς Ε πρὸς τὴν Φ. Ἄρα ἡ πρώτη Α ἔχει πρὸς τὴν τρίτην Φ ἐν διπλασίονι λόγῳ (217) τῆς πρώτης Α πρὸς τὴν δευτέραν Ε, ἢ τῆς δευτέρας Ε πρὸς τὴν τρίτην Φ, ἤτοι ὡς τὸ τῆς Α τετράγωνον (217) πρὸς τὸ τῆς Ε τετράγωνον, ἢ ὡς τὸ τῆς Ε τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Φ τετράγωνον. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

§. 222. Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ Α, Ε, Κ, Η Σχ. 88.
ἀνάλογοί ὦσι, καὶ τὰ τούτων τετράγωνα ἀνάλογα ἔσται. Καὶ ἀνάπαλιν. Ἐὰν τεσσάρων εὐθειῶν τὰ τετράγωνα ἀνάλογα ᾖ, ἀνάλογοι ἔσονται καὶ αἱ εὐθεῖαι.

Δεῖξις.

Α'. Γενέσθω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε (199), οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ρ, καὶ ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Η, οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν Φ, καὶ ἔσται ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Ρ, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Ε, ἢ ἡ Κ πρὸς τὴν Η (ἐξ ὑπ.), ἢ ἡ Η πρὸς τὴν Φ (ἐκ κατ.). Ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Η, καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Ρ, οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν Φ. Καὶ δίισου (165), ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ρ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Φ. Ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ρ, οὕτω (221) τὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Ε τετράγωνον, καὶ ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Φ, οὕτω τὸ τῆς Κ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Η τετράγωνον· ἄρα καὶ τὸ τῆς Α τετράγωνον ἔσω πρὸς τὸ τῆς Ε τετράγωνον, Κεφ. ϛ. ὡς τὸ τῆς Κ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Η τετράγωνον. Ὅπερ ἦν τὸ Α΄.

Β΄. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α, Ε, Κ, Η μὴ ὦσιν ἀνάλογοι, γινέσθω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Φ. καὶ ἔσαι τὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Ε τετράγωνον (α.), ὡς τὸ τῆς Κ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Φ τετράγωνον. Ἀλλ᾽ ὡς τὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Ε τετράγωνον, οὕτως (ἐξ ὑπ.) τὸ τῆς Κ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Η τετράγωνον, ἄρα καὶ ὡς τὸ τῆς Κ τετράγωνον (50) πρὸς τὸ τῆς Φ τετράγωνον, οὕτω τὸ τῆς Κ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Η τετράγωνον, καὶ διὰ ταῦτα τὰ τετράγωνα τῶν Φ, Η εὐθειῶν ἴσα (140) ἀλλήλοις ἔσαι, ἑπομένως δὲ καὶ αἱ τούτων βάσεις Φ, Η ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως (ἐκ κατ.) ἡ Κ πρὸς τὴν Φ, ἄρα καὶ ἡ Α ἔσαι πρὸς τὴν Ε, ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Η. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΕ΄. Θεώρημα.

Σχ. 120. §. 223. Τὰ ὅμοια πολύγωνα ΑΡΚΥΕ, ΦΙΛΣΗ λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΕΥ, ΗΣ.

Δεῖξις.

Ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν Α, Φ ἐπιζευχθῶσαν αἱ διαγώνιοι ΑΥ, ΑΚ, ΦΣ, ΦΛ, αἵ τινες τέμνουσι τὰ πολύγωνα (186) εἰς ὅμοια τρίγωνα. Ἐπεὶ οὖν τὰ πολύγωνα ὅμοιά (ἐξ ὑπ.) ἐστιν, ἡ ΕΥ ἔσαι πρὸς τὴν ΗΣ (148), ὡς ἡ ΥΚ πρὸς τὴν ΣΛ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΥ πρὸς τὸ τῆς ΗΣ τετράγωνον (222), ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ΥΚ πρὸς τὸ τῆς ΣΛ τετράγωνον. Ἀλλ᾽ ἄμφω τὰ ὅμοια τρίγωνα τα Κ, Π λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα (219), ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΕΥ, ΗΣ, ἔτι δὲ καὶ τὰ ὅμοια τρίγωνα Ο, Ρ λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα (219) ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΥΚ, ΣΛ, ἄρα τὸ Κ τρίγωνον ἔσαι πρὸς τὸ Π, ὡς τὸ Ο τρίγωνον πρὸς τὸ Ρ τρίγωνον. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον, καὶ ὡς τὸ Ο τρίγωνον πρὸς τὸ Ρ τρίγωνον, ὅτω τὸ Γ τρίγωνον πρὸς τὸ Τ τρίγωνον. Ἅπαντα οὖν τὰ ἡγέμενα Κ, Ο, Γ, ἤτοι τὸ πολύγωνον ΕΡ, ἔσαι πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα Π, Ρ, Τ (167), ἤτοι πρὸς τὸ πολύγωνον ΗΙ, ὡς ἓν τῶν ἡγεμένων Κ, πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων Π. τουτέστιν ὡς τὸ τῆς ΕΥ τετράγωνον (219) πρὸς τὸ τῆς ΗΣ τετράγωνον. Ο. Ε. Δ. Κεφ. ϛ'.

Πρότασις Κϛ'. Θεώρημα.

§. 224. Τὰ κανονικὰ πολύγωνα ΑΕΦΗΛ, ΡΖΓΚΙ περὶ κύκλον περιγεγραμμένα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ἡμιδιαμέτρων ΚΟ, ΥΣ. Σχ. 121.

Δεῖξις.

Ἤχθωσαν πρὸς τὰ τῶν ἐπαφῶν σημεῖα ἀκτῖνες αἱ ΚΟ, ΥΣ, αἵτινες κάθετοι (82) ἔσονται ταῖς ΑΕ, ΡΖ εὐθείαις. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΕ, ΥΡ, ΥΖ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΚ, ΡΥ εὐθεῖαι δίχα τέμνουσι (194) τὰς ἴσας γωνίας ΕΑΛ, ΖΡΙ, ἡ ΕΑΚ γωνία ἴση ἔσαι τῇ ΖΡΥ γωνίᾳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΕΚ γωνία ἴση ἔσαι τῇ ΡΖΥ γωνίᾳ, ἄρα ὅμοια (179) ἔσαι τὰ τρίγωνα ΑΚΕ, ΡΥΖ, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΡΖ εὐθεῖαι, ὕψη δὲ αἱ ΚΟ, ΥΣ ἀκ-

Κεφ. έ. τῦτες. Ταῦτ' ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΡΖ, ἕτως (181) ἡ ΚΟ πρὸς τὴν ΤΣ, καὶ ὡς τὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς ΡΖ τετράγωνον (222), ἕτω τὸ τῆς ΚΟ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς ΤΣ τετράγωνον. Ἀλλαμὴν τὸ πολύγωνον ΑΗ ἐςαὶ πρὸς τὸ πολύγωνον ΡΚ (223) ὡς τὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς ΡΖ τετράγωνον. Τὰ πολύγωνα ἄρα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ τῶν ἡμιδιαμέτρων ΚΟ, ΤΣ τετράγωνα. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 225. Ἐπείπερ καὶ οἱ κύκλοι πολύγωνά εἰσιν ὑπ' ἀπειραρίθμων πλευρῶν συγκροτέμενα· Δῆλον, ὅτι καὶ οἱ κύκλοι λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων ἡμιδιαμέτρων, ἢ καὶ διαμέτρων.

Πρότασις ΚΖ'. Θεώρημα.

Σχ. 121. §. 226. Τὰ κανονικὰ πολύγωνα ΑΕΦΗΛ, ΡΖΓΚΙ περὶ κύκλον περιγεγραμμένα τὴν περίμετρον ἀνάλογον ἔχει ταῖς ἰδίαις ἡμιδιαμέτροις.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν τὰ κανονικὰ πολύγωνα ὅμοιά (148) ἐςι, πάντως ἡ ΑΕ ἔςαι πρὸς τὴν ΡΖ, ὡς ἡ ΕΦ πρὸς τὴν ΖΓ, ἡ δὲ ΦΗ ἔςαι πρὸς τὴν ΓΚ, ὡς ἡ ΗΛ πρὸς τὴν ΚΙ, καὶτ. Ἅπαντα ἄρα τὰ ἡγέμενα, ἤτοι ἡ περίμετρος τῦ πολυγώνυ ΑΗ, ἔςαι πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα (167), ἤτοι πρὸς τὴν περίμετρον τῦ πολυγώνυ ΡΚ, ὡς ἓν τῶν ἡγε-

μένων

μένων ΑΕ πρὸς τὸ τῶν ἑπομένων ΡΖ. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΡΖ (181), οὕτως ἡ ΚΟ ἡμιδιάμετρος, πρὸς τὴν ΤΣ ἡμιδιάμετρον, ἄρα καὶ ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου ΑΗ ἔσαι πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ ΡΚ πολυγώνου, ὡς ἡ ΚΟ ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν ΤΣ ἡμιδιάμετρον. Ο. Ε. Δ. Κεφ. έ.

Πόρισμα.

§. 227. Ἐπεὶ οὖν καὶ οἱ κύκλοι ὡς πολύγωνα λογίζονται ὑπ᾽ ἀπειραρίθμων πλευρῶν συγκροτούμενα· δῆλον, ὅτι καὶ αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν αἱ ἴδιαι ἡμιδιάμετροι, ἢ καὶ αἱ διάμετροι.

Τέλος τοῦ Δευτέρου Μέρους.

ΓΕΩΜΕΤΡΙ΄ΑΣ

ΜΕ΄ΡΟΣ ΤΡΙ΄ΤΟΝ.

ΠΕΡΙ΄ ΣΤΕΡΕΩ΄Ν.

ΚΕΦΑ΄ΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙ΄ ΟΡΩΝ.

Ὅρος Α΄.

Σχ. 122. §. 228. Ἡ ἐν μετεώρῳ εὐθεῖα γραμμὴ ΦΕ κάθετος ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ΑΒΚΔ, ἐὰν ἐπὶ πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας ΕΒ, ΕΚ, ΕΔ, ΕΑ, καὶ ὅσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

Ὅρος Β'.

§. 229. Κ'ἂν μὲν ἡ ΦΓ εὐθεῖα μὴ ᾖ ὀρθὴ Σχ. 123.
πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ΚΕΟΠ, ἀπὸ δὲ τοῦ Φ σημείου κάθετος ἀχθῇ ἡ ΦΙ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΙ, ἡ ΦΓΙ γωνία κλίσις λέγεται τῆς ΦΓ εὐθείας πρὸς τὸ ΚΟ ἐπίπεδον.

Ὅρος Γ'.

§. 230. Ἐὰν δύω ἐπίπεδα ΚΥ, ΓΟ τέμνῃ ἀλ- Σχ. 124.
ληλα, ἡ ΛΓ γραμμὴ κοινὴ τομὴ λέγεται.

Ὅρος Δ'.

§. 231. Τὸ ΓΡΟΛ ἐπίπεδον ὀρθὸν λέγεται Σχ. 124.
πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΚΣΥΕ, ἐὰν αἱ πρὸς τὴν κοινὴν τομὴν κάθετοι ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι ΦΑ, ΙΗ κάθετοι ὦσι τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΚΣΥΕ.

Ὅρος Ε'.

§. 232. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἐκβαλλόμενα ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ μηδέποτε συμπίπτοντα, ἀλλὰ τὴν αὐτὴν ἀεὶ πρὸς ἄλληλα διάστασιν τηροῦντα.

Ὅρος ς'.

§. 233. Πρίσμα δέ ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ τοσούτων Σχ. 125.
ἐπιπέδων συγκροτούμενον, ὅσας περιέχει πλευρὰς ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος, οἷον τὸ σχῆμα ΑΟ.

Ὅρος

Ὅρος Ζ'.

Σχ. 126. §. 234. Παραλληλεπίπεδόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ παραλληλογράμμων περατούμενον, οἷον τὸ ΕΚ σχῆμα, ὅπερ ὀρθὸν λέγεται, ἐὰν τὰ περιέχοντα ἐπίπεδα ὀρθὰ ᾖ τῇ βάσει, πλάγιον δὲ ἐὰν πλάγια. Τὰ δὲ ἀπεναντίον παραλληλόγραμμα ἴσα, ὅμοια, καὶ παράλληλά ἐστιν.

Ὅρος Η'.

Σχ. 127. §. 235. Κύβος δέ ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων τῷ μεγέθει περιεχόμενον, οἷον τὸ ΓΛ σχῆμα. Τὸ δὲ ἐν ἐκείνῳ σημεῖον Ι, ὅπερ ἀπὸ τῶν ἓξ τετραγώνων τῶν τὸν κύβον περιεχόντων ἴσως ἀφιστάμενόν ἐστι, κέντρον καλεῖται τοῦ κύβου. τὰ δὲ ἀπεναντίον τετράγωνα παράλληλά ἐστιν.

Ὅρος Θ'.

Σχ. 128. §. 236. Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεόν, ὑπὸ ποσωνοῦν τὸ πλῆθος ἐπιπέδων περιεχόμενον, κατὰ τὸ Κ σημεῖον συμπιπτόντων, ὅσας περιέχει πλευρὰς ἡ ΦΕΑ βάσις, οἷον τὸ ΚΦΕΑ σχῆμα. ἡ δὲ ΚΣ εὐθεῖα ἄξων τῆς Πυραμίδος λέγεται.

Ὅρος Ι'.

Σχ. 128. §. 237. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχομένη, οἷον ἡ Κ γωνία.

Ὅρος

Κεφ. ά.

Ὅρος ΙΑ'.

§. 238. Δύω στερεαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐὰν ὑπὸ ἐπιπέδων ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει περιέχωνται.

Ὅρος ΙΒ'.

§. 239. Κῶνος δέ ἐστι σχῆμα στερεὸν, οὗ βάσις μὲν κύκλος τὶς, Κορυφὴ δὲ εἰς σημεῖον λήγουσα, ἡ δὲ Κορυφὴ Ρ καὶ ἡ τῆς βάσεως περιφέρεια ΑΣΕ ὑπ' ἀπειραρίθμων εὐθειῶν γραμμῶν συζεύγνυνται, οἷον τὸ ΑΡΕΣ σχῆμα. Σχ. 129.

Ὅρος ΙΓ'.

§. 240. Ἄξων τοῦ Κώνου ἐστὶν ἡ ΡΚ εὐθεῖα ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ρ πρὸς τὸ κέντρον Κ τῆς βάσεως ἀχθεῖσα, ἥτις ἐὰν κάθετος ᾖ τῇ βάσει, ὀρθογώνιός ἐστιν ὁ Κῶνος, ἐὰν δὲ μὴ, ὀξυγώνιος λέγεται. Σχ. 129.

Ὅρος ΙΔ'.

§. 241. Σφαῖρα δέ ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπ' ἀπειραρίθμων ὁμοκέντρων κύκλων, περὶ ἴσων τῷ μεγέθει περιεχόμενον, οἷον τὸ σχῆμα ΚΡ. Σχ. 130

Ὅρος ΙΕ'.

§. 242. Ἄξων τῆς Σφαίρας ἐστὶν ἡ Διάμετρος τῶν περιεχόντων κύκλων, οἷον ἡ ΑΣ εὐθεῖα. Κέντρον δὲ τῆς Σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τῶν περιεχόντων κύκλων, ὥσπερ τὸ Β σημεῖον. Σχ. 130.

Ὅρος

Ὅρος Ιϛ'.

§. 243. Κῶνοι καὶ Κύλινδροι ὀρθοὶ, ὅμοιοι λέγονται, ὅταν οἵ τε ἄξονες, καὶ αἱ τῶν βάσεων διάμετροι ἀνάλογοι ὦσιν· οἱ δὲ πλάγιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροι ὅμοιοί εἰσιν, ἐὰν οἵτε ἄξονες καὶ αἱ τῶν βάσεων διάμετροι ἀνάλογοι ὦσι, καὶ πρὸς τὰς ἰδίας βάσεις ἴσως κλίνωσιν.

Ὅρος ΙΖ'.

§. 244. Ὅμοια στερεά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων, καὶ ἴσων τῷ πλήθει περιεχόμενα.

Ὅρος ΙΗ'.

§. 245. Ὅμοια δὲ καὶ ἴσα στερεά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τῷ πλήθει, καὶ τῷ μεγέθει περιεχόμενα.

Ὅρος ΙΘ'.

Σχ. 131. §. 246. Κύλινδρός ἐστι σχῆμα στερεὸν, οὗ ἡ βάσις, καὶ τὸ ὕψος ὑπὸ δύω παραλλήλων καὶ ἴσων τῷ μεγέθει περατοῦνται κύκλων, ὧν αἱ περιφέρειαι ὑπ' ἀπειραρίθμων εὐθειῶν γραμμῶν συζευγνύμεναί εἰσιν. Ἡ δὲ ΡΚ εὐθεῖα, ἡ διὰ τῶν κυκλικῶν κέντρων διαχθεῖσα, ἄξων λέγεται τοῦ κυλίνδρου, ἥτις ἐὰν κάθετος ᾖ τῇ βάσει, ὀρθὸν τὸν κύλινδρον καλεῖν εἰώθασιν, ἐὰν δὲ μὴ, πλάγιον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β.

ΠΕΡΙ ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΩΝ

ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

§. 247. Εὐθείας Γραμμῆς μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ κεῖσθαι ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ ἀδύνατον. Σχ. 132.

Δεῖξις.

Ἔστω, εἰ δυνατὸν ἐστί, τῆς ΕΦΓ εὐθείας τὸ μὲν ΕΦ μέρος ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΑΚΙΗ, τὸ δὲ ΦΓ ἐν τῷ μετεώρῳ ΛΣΟΡ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΦ εὐθεῖα κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΚΙΗ, αὕτη ἐκβληθεῖσα ἐπ' εὐθείας (39) καὶ τὸ Π σημεῖον, εὐθεῖα ἐξαχθήσεται ἡ ΕΦΠ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΕΦΓ γραμμὴ εὐθεῖα (ἐξ ὑπ.) ἐστι, δύω ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΦΠ, ΕΦΓ διὰ δύω σημείων Ε, Φ διέρχονται, ἃς δεῖ ἐπ' ἀλλήλας ἐφαρμόσαι, ὅπερ ἄτοπον. Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἐστὶν ἐν

τῷ

Κεφ. β'. τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ:
Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 133. §. 248. Ὅλον ἄρα τὸ τρίγωνον ΡΑΚ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἐστίν. Εἰ γὰρ μέρος μέν τι αὐτοῦ τὸ ΡΣΗΚ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ εἴη ἂν ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ ΣΑΗ ἐν τῷ μετεώρῳ, πάντως τῆς ΑΡ εὐθείας μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ ἂν ἔκειτο ἐπιπέδῳ; ὅπερ (247) ἄτοπον.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 134. §. 249. Καὶ ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΚΑ, ΣΦ ἀλλήλας κατὰ τὸ Ρ σημεῖον τέμνωσιν, ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἔσονται. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΚΣ εὐθείας, αἱ ΚΡ, ΡΣ εὐθεῖαι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ ΚΡΣ τριγώνου (248) κεῖνται. Ταῦτ' ἄρα καὶ ὅλαι αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΣΦ ἐν τῷ αὐτῷ τοῦ τριγώνου ἔσονται (247) ἐπιπέδῳ, τουτέστιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Σχ. 135. §. 250. Ἡ ΗΙ εὐθεῖα τὰς ΑΓ, ΦΣ εὐθείας, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσας, τέμνουσα, ἐν τῷ αὐτῷ σὺν ἐκείναις ἐστὶ ἐπιπέδῳ.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ γὰρ ἀλλήλας τέμνουσιν αἱ ΗΙ, ΑΓ εὐθεῖαι, αὗται ἐν τῷ αὐτῷ ἔσονται (249) ἐπιπέδῳ. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον καὶ αἱ ΗΙ, ΦΣ εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσονται. Ἡ ΗΙ ἄρα ἐν ἑκατέρᾳ

τέρᾳ;

προις κεῖται τοῖς ἐπιπέδοις τῆς ΑΓ, ΦΣ εὐθειῶν Κιϛ. β':
Ἀλλ' αὗται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (ἐξ ὑπ.) εἰσίν,
ἄρα καὶ ἡ ΗΙ ἐν τῷ αὐτῷ τούτῳ ἐπιπέδῳ ἐςαι.
Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

§. 251. Ἐὰν ὁποιονοῦν ἐπίπεδον ΕΦΗΓ τέμνῃ Σχ. 136.
δύο παράλληλα ἐπίπεδα ΑΣ, ΚΡ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ ΕΦ, ΓΗ παράλληλοι ἔσονται.

Δεῖξις.

Εἰ γὰρ δυνατὸν μὴ ἔςωσαν παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι ΕΦ, ΓΗ, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ὄσαι ἐπιπέδῳ ΕΦΗΓ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ Ι σημεῖον (97). Ἐπεὶ οὖν αἱ ΕΦ, ΓΗ εὐθεῖαι ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ΑΣ, ΚΡ εἰσίν, ἄρα, τῶν ἐπιπέδων ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένων, καὶ ὅλαι αἱ εὐθεῖαι ΕΦΙ, ΓΗΙ ἐν τοῖς αὐτοῖς ἔσονται (247) ἐπιπέδοις. διὸ δὴ ταῦτα καὶ τὰ ἐπίπεδα κατὰ τὸ Ι σημεῖον συμπεσοῦνται, ὅπερ (232) ἀδύνατον. Παράλληλοι ἄρα ἔσονται αἱ Εὐθεῖαι ΕΦ, ΓΗ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις. Δ'. Λῆμμα.

§. 252. Ἐὰν ἐκ τῆς Ρ κορυφῆς τριγώνου Ἰσοσ- Σχ. 137.
κελοῦς ΑΡΚ ἀχθῇ ἡ ΡΣ εὐθεῖα τὴν ΑΚ βά- Σχ. 138.
σιν, ὡς ἔτυχε, τέμνουσα κατὰ τὸ Σ σημεῖον, τὸ ἀπὸ τῆς ΡΑ τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τῇ συνάψει τὸ ἀπὸ τῆς ΡΣ τετραγώνου, καὶ τοῦ ΑΣΚ ὀρθογωνίου.

Δεῖ-

Κεφ. β'. ι.

Δεῖξις.

Σχ. 137. Α'. Ἔστω ἡ ΡΣ κάθετος πρὸς τὴν ΑΚ βάσιν, ἥτις δίχα (117) κατὰ τὸ σημεῖον Σ τμηθήσεται. Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΑΣ, ΣΚ εὐθεῖαι, τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΑΣΚ. Κοινοῦ δὲ προστεθέντος τοῦ ΡΣ τετραγώνου· Ἡ σύναψις τῶν τετραγώνων ΡΣ, ΑΣ ἴσα δύναται τῇ συνάψει τοῦ ΡΣ τετραγώνου, καὶ τοῦ ΑΣΚ ὀρθογωνίου. Ἀλλὰ μὴν τὰ ΡΣ, ΑΣ τετράγωνα ἴσα (215) δύναται τῷ ΡΑ τετραγώνῳ, ἄρα τὸ ΡΑ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τοῦ ΡΣ τετραγώνου, καὶ τοῦ ΑΣΚ ὀρθογωνίου.

Σχ. 138. Β'. Ἔστω ἡ ΡΣ πλάγιος πρὸς τὴν ΑΚ βάσιν, πρὸς ἣν ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ρ σημείου κάθετος ἡ ΡΕ, ἥτις δίχα ταύτην κατὰ τὸ Ε σημεῖον (117) τεμεῖ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ εὐθεῖα εἰς ἴσα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἄνισα κατὰ τὸ Σ ἐτμήθη, τὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον ἴσα (205) δύναται τῇ συνάψει τοῦ ΣΕ τετραγώνου, καὶ τοῦ ΑΣΚ ὀρθογωνίου· Κοινοῦ δὲ προστεθέντος τοῦ ΡΕ τετραγώνου· Τὰ ΑΕ, ΡΕ τετράγωνα, ἤτοι (200) τὸ ΡΑ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ΣΕ, ΡΕ τετραγώνοις σὺν τῷ ΑΣΚ ὀρθογωνίῳ, τουτέστι τῷ ΡΣ τετραγώνῳ (200) μετὰ τοῦ ΑΣΚ ὀρθογωνίου. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

Σχ. 139. §. 253. Ἐὰν Εὐθεῖα γραμμὴ ΑΚ κάθετος ᾖ πρὸς δύω εὐθείας ΟΕ, ΣΧ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἀχθείσας, κάθετος ἔσται καὶ πρὸς πάσας διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἀχθείσας εὐθείας.

Δεῖ-

Δεῖξις.

Ἐλήφθωσαν αἱ ΚΕ, ΚΡ εὐθεῖαι ἴσαι, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΡΕ, ἥτις τὴν ΤΦ τέμνει κατὰ τὸ Η σημεῖον, ἤχθωσαν αἱ ΑΡ, ΑΗ, ΑΕ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΚ, ΚΡ πλευραὶ τοῦ ΑΚΡ τριγώνου ἴσαι (ἐκ κατ.) εἰσὶ ταῖς ΑΚ, ΚΕ πλευραῖς τοῦ ΑΚΕ τριγώνου, ἡ δ' ὀρθὴ γωνία ΑΚΡ ἴση (ἐξ ὑπ.) ἐστὶ τῇ ΑΚΕ ὀρθῇ γωνίᾳ, καὶ ἡ ΑΡ πλευρὰ ἴση (71) ἔσται· καὶ διὰ ταῦτα τὸ ΡΑΕ τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστιν. Ἡ σύναψις ἄρα τοῦ ΑΗ τετραγώνου, καὶ τοῦ ΡΗΕ ὀρθογωνίου ἴση (252) ἐστὶ τῷ ΑΡ τετραγώνῳ, ἤτοι (200) τῇ συνάψει τῶν ΑΚ, ΚΡ τετραγώνων. Ἀλλ' ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ΡΚΕ, τὸ ΚΡ τετράγωνον ἴσον (252) ἐστὶ τῇ συνάψει τοῦ ΚΗ τετραγώνου καὶ τοῦ ΡΗΕ ὀρθογωνίου, ἄρα ἡ σύναψις τοῦ ΑΗ τετραγώνου καὶ τοῦ ΡΗΕ ὀρθογωνίου ἴσα δύναται τῇ συνάψει τῶν ΑΚ, ΚΗ τετραγώνων καὶ τοῦ ΡΗΕ ὀρθογωνίου. Κοινοῦ δ' ἀφαιρεθέντος τοῦ ΡΗΕ ὀρθογωνίου, τὸ ΑΗ τετράγωνον ἴσα δύναται τοῖς ΑΚ, ΚΗ τετραγώνοις· Διὰ δὲ ταῦτα ὀρθή (211) ἐστιν ἡ ΑΚΗ γωνία, ἡ δὲ ΑΚ κάθετός ἐστι τῇ ΤΚΦ εὐθείᾳ, καὶ πάσῃ ἄλλῃ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἀχθείσῃ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ϛ'. Πρόβλημα.

§. 254. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐν μετεώρῳ σημείου Ο πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ΑΓ κάθετον γραμμὴν ἀγαγεῖν τὴν ΟΡ. Σχ. 140.

Κεφ. Κ'.

Δεῖξις.

Ἐπεζεύχθω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΦΛ εὐθεῖα, ἐφ' ἧς καθέσθω ἀπὸ μὲν τοῦ Ο σημείου κάθετος ἡ ΟΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ Σ σημείου κάθετος ἡ ΣΗ, πρὸς ἣν ἤχθω ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο κάθετος εὐθεῖα ἡ ΟΡ, ἥτις κάθετος δειχθήσεται καὶ πρὸς τὸ ΑΓ ἐπίπεδον. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΟΛ, ΛΡ. Ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν (ἐκ κατ.) ἡ ΟΗΛ γωνία, τὸ ΟΛ τετράγωνον ἴσα (200) δύναται τοῖς τετραγώνοις ΟΗ, ΗΛ συνάμα ληφθεῖσι. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον, καὶ τὸ ΟΗ τετράγωνον ἴσα (200) δύναται τῇ συνάψει τῶν τετραγώνων ΟΡ, ΡΗ. Τὸ τετράγωνον ἄρα ΟΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς τετραγώνοις ΟΡ, ΡΗ, ΗΛ. Ἔτι δὲ, ὀρθῆς οὔσης (ἐκ κατ.) τῆς γωνίας ΡΗΛ, τὰ δύω τετράγωνα ΡΗ, ΗΛ ἴσα (200) δύναται τῷ ΡΛ τετραγώνῳ. Τὸ τετράγωνον ἄρα ΟΛ ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν τετραγώνων ΟΡ, ΡΛ, καὶ διὰ ταῦτα ὀρθὴ (211) ἐστὶ καὶ ἡ γωνία ΟΡΛ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ γωνία ΟΡΗ ὀρθὴ κατεσκεύασαι, ἄρα ἡ ΟΡ εὐθεῖα κάθετός ἐστι πρὸς δύω εὐθείας ΡΛ, ΡΗ, διόπερ καὶ πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (253) ΑΓ κάθετος ἔσαι. Ο. Ε. Π.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Σχ. 123. §. 255. Ἡ ΦΙ εὐθεῖα κάθετος ἀχθεῖσα ἀπὸ τοῦ Φ σημείου πρὸς τὸ ΚΟ ἐπίπεδον πασῶν βραχυτάτη ἐστὶ τῶν μεταξὺ τοῦ Φ σημείου καὶ τοῦ ΚΟ ἐπιπέδου ὑποτεινομένων εὐθειῶν.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Φ σημείου πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἡ ΦΓ εὐθεῖα, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΙ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΦΙ εὐθεῖα κάθετός ἐστι τῷ ΚΟ ἐπιπέδῳ, ἡ ΦΙΓ γωνία ὀρθή (228) ἐστι· καὶ διὰ ταῦτα ἡ ΦΓΙ γωνία ὀξεῖα (105) ἐστιν, ἡ δὲ ΦΙ πλευρὰ ἐλάσσων (113) ἐστὶ τῆς ΦΓ πλευρᾶς. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΦΙ καὶ πάσης ἄλλης εὐθείας ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἠγμένης ἐλάσσονα εἶναι· Πασῶν ἄρα βραχυτάτη ἐστὶν ἡ ΦΙ κάθετος εὐθεῖα. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 256. Ἐν παντὶ ἄρα στερεῷ σχήματι ΚΦΕΑ, ἡ ΚΣ κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς Κ πρὸς τὴν βάσιν ΦΑΕ ἀχθεῖσα τοῦ στερεοῦ τὸ ὕψος παρίστησι. Σχ. 128.

Πρότασις Η. Θεώρημα.

§. 257. Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΙΓ, ΟΕ ἐν μετεώρῳ κάθετοι ὦσι τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΚΗ, αὗται παράλληλοι ἔσονται. Σχ. 141.

Δεῖξις.

Ἐπιζευχθείσης τῆς ΓΕ εὐθείας, καθέσθω ἐπὶ ταύτης ἡ ΕΦ εὐθεῖα τῇ ΙΓ ἴση, καὶ διήχθωσαν αἱ ΕΙ, ΦΙ, ΦΓ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν τὰ τρίγωνα ΙΓΕ, ΓΕΦ τὰς δύω πλευρὰς ΙΓ, ΓΕ ἴσας ἔχει (ἐκ κατ.) ταῖς δυσὶ πλευραῖς ΦΕ, ΕΓ, τὴν δὲ ΙΓΕ γωνίαν ἴσην (228) τῇ ΦΕΓ

Κεφ. ε'. γωνία, πάντως καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ΙΕ, ΓΦ ἴσας (71) ἀλλήλαις ἔχει. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΙΓΦ, ΙΕΦ, Ἰσόπλευρά ἐστι, καὶ διὰ ταῦτα αἱ γωνίαι ΙΓΦ, ΙΕΦ ἴσαι (58) εἰσιν, ἀλλ' ἡ γωνία ΙΓΦ ὀρθὴ (228) ἐστιν, ἄρα καὶ ἡ γωνία ΙΕΦ ὀρθὴ ἔσαι. Ὀρθαὶ δὲ κατεσκευάσθησαν καὶ αἱ Γωνίαι ΓΕΦ, ΟΕΦ, ἡ ΦΕ ἄρα εὐθεῖα κάθετος ἔσαι πρὸς τρεῖς εὐθείας ΕΓ, ΕΙ, ΕΟ, αἵ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (253) κεῖνται. Ἔτι δὲ καὶ ἡ ΙΓ εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (247) τῶν ΕΙ, ΕΓ εὐθειῶν, ἄρα αἱ ΙΓ, ΟΕ εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κεῖνται· διὰ δὲ ταῦτα, τῶν ἐντὸς γωνιῶν ΙΓΕ, ΟΕΓ ὀρθῶν (228) οὐσῶν αἱ εὐθεῖαι ΙΓ, ΟΕ παράλληλοι (94) ἔσονται, Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα,

Σχ. 141. §. 258. Ἐὰν δύω παράλληλοι ΙΓ, ΟΕ μία ἡ ΙΓ κάθετος ᾖ τῷ ΚΗ ἐπιπέδῳ, καὶ ἡ ἑτέρα ΟΕ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κάθετος ἔσαι.

Δεῖξις,

Διὰ τῶν ΙΓ, ΟΕ εὐθειῶν διήχθω ἐπίπεδον τὸ ΓΙΟΕ, ὅπερ τεμεῖ τὸ ΚΗ ἐπίπεδον ἐν εὐθείᾳ γραμμῇ ΓΕ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΙΕ, ἥτις κεῖται (249) ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΓΙΟΕ, Εἶτα καθέσθω ἐν τῷ ΚΗ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΕ κάθετος ἡ ΕΦ, ἴση τῇ ΙΓ, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΦΙ, ΦΓ εὐθειῶν, ὀρθὴ ἔσαι (257) ἡ ΦΕΙ γωνία· Ἀλλὰ μὴν ὀρθὴ κατεσκευάσθη καὶ ἡ ΦΕΓ γωνία, ἄρα ἡ ΦΕ εὐθεῖα κάθετός ἐστι πρὸς δύω εὐθείας ΕΙ, ΕΓ, καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΓΙΟΕ (253),

Ταῦτ'

Ταῦτ' ἄρα ὀρθή ἐστιν ἡ ΦΕΟ γωνία (228); ἡ Σχ. 140.
ἡ γωνία ΟΕΦ. Διὰ δὲ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς
ΙΓ, ΟΕ εὐθείας, καὶ ὀρθὴν τὴν γωνίαν (228)
ΙΓΕ, ὀρθὴ ἔσται (84) καὶ ἡ γωνία ΟΕΓ.
Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΟΕ κάθετός ἐστι πρὸς δύο εὐ-
θείας ΕΦ, ΕΓ, δι' ὅπερ καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον
(253) ΚΗ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 259. Τῷ δοθέντι ἄρα ἐπιπέδῳ ΚΗ ἀπὸ τοῦ Σ. 141.
ἐν αὐτῷ δοθέντος σημείου Γ κάθετος γραμμὴ ΓΙ
εὐμαρῶς ἐγερθήσεται; ἐὰν ἀπὸ τοῦ Ο σημείου ἐκ-
τὸς τοῦ ἐπιπέδου ληφθέντος ἀχθῇ (254) κάθετος ἡ
ΟΕ, καὶ ταύτῃ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου παράλληλος ἐγερ-
θῇ ἡ ΓΙ εὐθεῖα.

Πόρισμα Β'.

§. 260. Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ΚΟ, ΗΦ ὦσι Σχ. 142.
παράλληλοι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΓΡ, μὴ οὔσῃ ἐν τῷ
αὐτῷ τούτῳ ἐπιπέδῳ; καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλλη-
λοι. Ἐὰν γὰρ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ΚΟ, ΓΡ πα-
ραλλήλων ἀχθῇ ἡ ΑΛ εὐθεῖα κάθετος, (75) τῇ
ΓΡ, καὶ ταύτῃ ἐγερθῇ ἀπὸ τοῦ Λ σημείου (61)
κάθετος ἡ ΛΕ; καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΕ; ἡ ΓΡ
εὐθεῖα κάθετος ἔσται πρὸς δύο εὐθείας ΛΑ, ΛΕ,
δι' ὃ καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον (253) τοῦ ΑΛΕ τριγώ-
νου. Αἱ ΚΟ, ΗΦ ἄρα εὐθεῖαι, τῇ ΓΡ πα-
ράλληλοι, κάθετοι ἔσονται τῷ αὐτῷ (258) ἐπιπέ-
δῳ, καὶ διὰ τοῦτο ἀλλήλαις παράλληλοι (257)
ἔσονται.

Κεφ. βʹ.

Πρότασις Ιʹ. Θεώρημα.

Σχ. 143. §. 261. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΟΕ κάθετος ᾖ πρὸς δύω ἐπίπεδα ΜΝ, ΡΣ, τὰ ἐπίπεδα παράλληλα ἔσαι.

Δεῖξις.

Εἰλήφθω ἐν τῷ ΜΝ ἐπιπέδῳ τὸ Φ. σημεῖον· ἀπὸ δὲ τούτου ἤχθω πρὸς τὸ ἕτερον ἐπίπεδον ΡΣ κάθετος ἡ ΦΗ, ἥτις ἔσαι (257) τῇ ΟΕ παράλληλος, καὶ τῷ ΜΝ ἐπιπέδῳ (258) κάθετος. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν εὐθειῶν ΟΦ, ΕΗ, ὀρθαὶ ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι Ε, Η, Φ, Ο. Τὸ τετράπλευρον ἄρα ΕΟΦΗ ὀρθογώνιον (26) ἐστὶν, ἡ δὲ ΦΗ εὐθεῖα, τῷ ΡΣ ἐπιπέδῳ κάθετος, ἴση ἔσαι τῇ ΟΕ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἀχθείσῃ τῷ ΡΣ ἐπιπέδῳ. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω, καὶ πάσῃ ἄλλῃ εὐθεῖα μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων ἀχθείσῃ ἴσην εἶναι τὴν ΟΕ εὐθεῖαν. καὶ διὰ ταῦτα τὰ δύω ἐπίπεδα ΜΝ, ΡΣ παράλληλα (232) ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΑʹ. Θεώρημα.

Σχ. 143. §. 262. Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΤ ἀλλήλων ἀπτόμεναι παράλληλοι ὦσι πρὸς δύω ἀλλήλων ἀπτομένας εὐθείας ΡΓ, ΡΠ, τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα παράλληλα ἔσαι.

Δεῖξις.

Ἀπὸ τοῦ Ο σημείου ἤχθω πρὸς τὸ ΡΣ ἐπίπεδον

(254)

(254) κάθετος ἡ ΟΕ εὐθεῖα, ἔτι δὲ καὶ ἡ εὐ- Κεφ. β'.
θεῖα ΕΛ παράλληλος τῇ ΡΙ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΟΑ,
ΕΛ τῇ ΡΙ παράλληλοί εἰσι, καὶ ἀλλήλαις παράλ-
ληλοι (260) ἔσονται, διόπερ αἱ ἐντὸς γωνίαι
ΑΟΕ, ΟΕΛ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (85) εἰσιν.
Ἀλλὰ μὴν ἡ ΟΕΛ γωνία ὀρθὴ (228) ἐστιν, ἄρα
καὶ ἡ ΑΟΕ ὀρθὴ ἔσαι. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον
καὶ ἡ ΥΟΕ γωνία ὀρθὴ δειχθήσεται. Ἡ ΕΟ ἄ-
ρα εὐθεῖα, κάθετος οὖσα πρὸς δύω εὐθείας ΟΑ,
ΟΥ, κάθετος (253) ἔσαι καὶ πρὸς τὸ ΜΝ ἐπί-
πεδον, ἔσι δὲ καὶ πρὸς τὸ ΡΣ ἐπίπεδον (ἐκ κατ.)
κάθετος, ἄρα πρὸς ἑκάτερα τὰ ἐπίπεδα κάθετος ἔ-
σαι. καὶ διὰ ταῦτα τὰ ΜΝ, ΡΣ ἐπίπεδα παράλ-
ληλα (261) ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΒ'. Λῆμμα.

§. 263. Ἐὰν δύω Εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΥ ἀλλήλων Σχ. 144.
ἀπτόμεναι παράλληλοι ὦσι πρὸς δύω ἀλλήλων ἀπ-
τομένας εὐθείας ΡΙ, ΡΠ, ὦσι δὲ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ
ἐπιπέδῳ, αὗται ἴσας περικλείουσι γωνίας ΑΟΥ,
ΙΡΠ.

Δεῖξις.

Διήχθω διὰ τῶν σημείων Ο, Ρ εὐθεῖα ἡ ΟΗ.
Ἡ ἐντὸς γωνία ΑΟΗ ἴση (85) ἐστὶ τῇ ἐκτὸς
γωνίᾳ ΙΡΗ. Ὁμοίως δὴ δείξω καὶ τὴν ἐντὸς γω-
νίαν ΥΟΗ ἴσην εἶναι τῇ ἐκτὸς γωνίᾳ ΠΡΗ.
Ὅλη ἄρα ἡ γωνία ΑΟΥ ὅλῃ τῇ γωνίᾳ ΙΡΠ
ἴση ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Κεφ. β'.

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Σχ. 143. §. 264. Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΤ, ἀλλήλων ἐφαπτόμεναι, παράλληλοι ὦσι πρὸς δύω ἀλλήλων ἐφαπτομένας εὐθείας ΡΙ, ΡΠ, καὶ μὴ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, αὗται ἴσας περιλαμβάνουσι γωνίας ΑΟΤ, ΙΡΠ.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν αἱ δύω εὐθεῖαι ΑΟ, ΟΤ παράλληλοί εἰσι πρὸς δύω εὐθείας ΡΙ, ΡΠ, τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα παράλληλα (232) ἔσαι. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν σημείων Ο, Φ, Γ πρὸς τὸ ΡΣ ἐπίπεδον ἀχθῶσι κάθετοι αἱ ΟΕ, ΦΗ, ΓΛ, αὗται ἴσαι (232), καὶ παράλληλοι (237) ἔσονται. διόπερ καὶ αἱ ταύτας ἐπιζευγνῦσαι εὐθεῖαι ΟΦ καὶ ΕΗ, ΦΓ καὶ ΗΛ, ΟΓ καὶ ΕΛ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι ἔσονται. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΓΟΦ, ΛΕΗ ἰσόπλευρά ἐστιν, ἡ δὲ ΓΟΦ γωνία, ἢ ἡ ταύτῃ ἴση γωνία ΑΟΤ ἴση (58) ἔσαι τῇ γωνίᾳ ΛΕΗ. Ἀλλὰ μὴν (ἐξ ὑπ.) αἱ ΡΠ, ΕΗ εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι τῇ ΟΦ εὐθείᾳ, ἄρα καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι (260) ἔσονται. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω καὶ τὰς ΡΙ, ΕΛ εὐθείας παραλλήλους εἶναι. Ταῦτ' ἄρα ἡ ΛΕΗ γωνία ἴση (263) ἐστὶ τῇ ΙΡΠ γωνίᾳ. Ἀλλὰ μὴν ἡ ΑΟΤ γωνία ἴση ἐδείχθη τῇ ΛΕΗ γωνίᾳ, ἄρα καὶ τῇ ΙΡΠ γωνίᾳ ἴση (50) ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ.

ΠΕΡΙ ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΩΝ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΩΝ ΤΕ

ΚΑΙ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ.

Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

§. 265. Ἂν διὰ τῶν διαγωνίων ΑΚ, ΕΓ ἐπίπεδόν τι διέλθῃ τὸ ΕΑΚΓ, τὸ παραλληλεπίπεδον ΦΛ διαιρεθήσεται εἰς δύω ἴσα καὶ ὅμοια πρίσματα. Σχ. 145.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ τέμνει τὰς παραλλήλους ΑΡ, ΛΚ, ἡ ΡΑΚ γωνία τῇ ΑΚΛ γωνίᾳ ἴση (85) ἐστί. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον καὶ ἡ ΑΚΡ γωνία τῇ ΚΑΛ γωνίᾳ ἴση ἐστί. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΡΚ ἴσον (110), καὶ ὅμοιον (178) ἐστὶ τῷ ΑΛΚ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΕΦΓ, ΕΗΓ ἴσα καὶ ὅμοια εἰσί. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοιά ἐστι (234)

Κεφ. γ'. (234) τὰ ἀπ' ἐναντίον παραλληλόγραμμα ΡΑΕΦ, ΚΛΗΓ, ἔτι δὲ καὶ τὰ ΡΚΓΦ, ΑΛΗΕ. Τὸ δὲ ΑΚΓΕ παραλληλόγραμμον ἑκατέρῳ τῷ πρίσματι κοινόν ἐστιν. Ἄρα τὰ πρίσματα ΑΡΚΓΦΕ, ΑΛΚΓΗΕ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περατοῦται ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει, καὶ διὰ ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις (245) καὶ ὅμοια ἐστι. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 266. Πᾶν ἄρα πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἰσοϋψοῦς καὶ διπλασίαν βάσιν ἔχοντος παραλληλεπιπέδου.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Σχ. 146. §. 267. Τὰ ἰσοϋψῆ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα παραλληλεπίπεδα ΦΠΚΗΛΟΓΑ, ΦΡΞΗΛΤΕΑ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Δεῖξις.

Τοῦ παραλληλεπιπέδου ΦΠΚΗΛΟΓΑ διχοτμηθέντος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣΧΡΕ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΡΗ, ΕΛ εὐθεῖαι. Τὸ πρίσμα ΦΡΧΣΕΑ ἥμισύ (266) ἐστι τοῦ παραλληλεπιπέδου ΦΠΡΧΣΕΓΑ, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ πρίσμα ΧΡΗΛΕΣ ἥμισύ (266) ἐστι τοῦ παραλληλεπιπέδου ΧΡΚΗΛΟΕΣ. Ὅλον ἄρα τὸ πρίσμα ΦΡΗΛΕΑ ἥμισύ ἐστι τοῦ παραλληλεπιπέδου ΦΠΚΗΛΟΓΑ, ἔστι δ' ἥμισυ καὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΦΡΞΗΛΤΕΑ, ἄρα τὰ παραλληλεπίπεδα ΦΠΚΗΛΟΓΑ, ΦΡΞΗΛΤΕΑ ἴσα ἀλλήλοις (51) ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ις'. Θεώρημα.

§. 268. Παντὸς Ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου ΡΓ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΑΡΟΕ ἐπὶ τὸ ΡΛ ὕψος. Σχ. 147.

Δεῖξις.

Αἱ τῆς βάσεως πλευραὶ καὶ τὸ ὕψος εἰς ἴσα μέρη διαιρεθήτωσαν, ὧν τρία μὲν περιεχέτω ἡ ΡΛ, δύο δ' ἡ ΡΘ, καὶ τέτταρα, ἡ ΡΑ, πάρεσιν ἡ βάσις ΑΡΟΕ δὶς τέτταρα, ἤτοι 8 περιεχέτω μέρη. Εἶτα ἐννοείσθω τὴν αὐτὴν βάσιν παραλλήλῳ κινήσει ἄνω πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὸ ΛΣΓ ἐπίπεδον φέρεσθαι, ὥστε τὸ ὅλον παραλληλεπίπεδον καταγράψαι. Ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον τὸ παραλληλεπίπεδον ΡΓ τρὶς 8, ἤτοι 24 κυβικὰ μέρη περιέχειν, ὅπερ ἐστὶ τὸ γινόμενον ἐκ τῆς βάσεως ΑΡΟΕ ἐπὶ τὸ ΡΛ ὕψος. Τὸ στερεὸν ἄρα τοῦ ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 269. Καὶ τοῦ κύβου ἄρα ΡΟ, παραλληλεπιπέδου (235) ὄντος, τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΞΡΛΟ, ἐπὶ τὸ ὕψος ΞΓ, ἢ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΞΟ. Σχ. 127.

Πόρισμα Β'.

§. 270. Παντὸς οὖν ἀκανονίστου σώματος Σ τὸ στερεὸν θηρεύειν μεμαθήκαμεν. Εἰλήφθω τοίνυν Σχ. 148.

σκεῦός τι

Κείσθω σκεῦός τι τὸ ΧΔΙΕΛΑ ἐξ οἱασδήποτε ὕλης κατεσκευασμένον, καὶ ἀριθμήσθω ἡ αὐτοῦ κοιλότης πόσων ἂν εἴη ποδῶν ἀριθμητικῇ. Εἶτα ἐμπλησθέντος τοῦ σκεύους ὕδατος ἢ ἄλλου τοῦ ὑγροῦ, καὶ ἐμβληθέντος τοῦ Σ σώματος ἐν αὐτῷ, γνωστὸν γενήσεται τὸ τοῦ σώματος στερεόν. Τοῦ γὰρ Σ σώματος τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῇ ποσότητι τοῦ ἐκχυθέντος ὕδατος μετὰ τὴν τοῦ σώματος εἰσβολήν, ἀλλὰ μὴν ἡ ποσότης τοῦ ἐκχυθέντος ὕδατος ἴση ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς τοῦ σκεύους βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος ΦΔ τῆς κενῆς κοιλότητος μετὰ τὴν ἐκβολὴν τοῦ αὐτοῦ σώματος Σ, ἄρα καὶ τοῦ Σ σώματος τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς τοῦ σκεύους βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς κενῆς κοιλότητος. Τοῦτον τὸν τρόπον ὁ πολὺς τὸ κλέος Ἀρχιμήδης τοῦ χρυσοχόου τὴν πανουργίαν ἐν τῷ βαλανείῳ ἀνεκάλυψε.

Πρότασις ΙΖ'. Θεώρημα.

Σχ. 149. §. 271. Παντὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου ΚΕ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΓΗΕΦ ἐπὶ τὸ ὕψος ΡΝ.

Δεῖξις.

Ἐπὶ τῆς ΓΗΕΦ βάσεως συστάθητω παραλληλεπίπεδον ὀρθόν, καὶ ἴσον (267) τῷ ΚΕ πλαγίῳ παραλληλεπιπέδῳ. Ἐπεὶ οὖν τοῦ ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου τὸ στερεὸν ἴσον (268) ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΓΗΕΦ ἐπὶ τὸ ὕψος ΡΝ, καὶ τοῦ πλαγίου ἄρα ΚΕ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Πρό-

Κεφ. γ'.

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

§. 272. Παντὸς τριγωνικοῦ πρίσματος ΚΑΡΦΕΓ Σχ. 149.
τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΓΕΦ ἐπὶ τὸ ΡΝ ὕψος,

Δεῖξις.

Συμπληρώσθω τὸ ΓΗΕΦ παραλληλόγραμμον, ἐπὶ δὲ τούτου κατασκευάσθω τὸ ΚΕ παραλληλεπίπεδον ἰσοϋψὲς τῷ πρίσματι. Τὸ πρίσμα ΚΑΡΦΕΓ ἥμισύ (266) ἐστι τοῦ ΚΕ παραλληλεπιπέδου. Ἀλλαμὴν τοῦ τοιούτου παραλληλεπιπέδου τὸ στερεὸν ἴσον (271) ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ὅλης βάσεως ΓΗΕΦ ἐπὶ τὸ ΡΝ ὕψος, ἄρα καὶ τοῦ πρίσματος τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως ΓΗΕΦ, τουτέστιν ἐκ τῆς ΓΦΕ βάσεως ἐπὶ τὸ ΡΝ ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 273. Παντὸς ἄρα πολυγώνου πρίσματος ΑΗ Σχ. 150.
τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Διαιρεθέντος γὰρ τοῦ πολυγώνου πρίσματος εἰς τριγωνικὰ καὶ ἰσοϋψῆ πρίσματα βάσεις ἔχοντα τὰς ΣΤΟ, ΟΤΗ, ΗΤΓ, εὑρεθήτω ἑκάστου τῶν τριγωνικῶν πρισμάτων (272) τὸ στερεὸν, καὶ ἔσται τὸ ποθούμενον. Ἡ γὰρ σύναψις τῶν εὑρεθέντων στερεῶν, τοῦ πολυγώνου πρίσματος τὸ στερεὸν παρίστησι.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 150. §. 274. Ἐὰν δὲ τοῦ πρίσματος ἡ βάσις ΣΥΓΗΘ κανονικὸν ἢ πολύγωνον περὶ κύκλον περιγεγραμμένον, ὑπ᾽ ἀπειραρίθμων πλευρῶν συγκροτούμενον, δῆλον, ὅτι τὸ πολύγωνον οἷα (132) κύκλος, τὸ δὲ πρίσμα οἷα κύλινδρος λαμβάνεται. Ταῦτ᾽ ἄρα καὶ παντὸς κυλίνδρου τὸ στερεὸν ἰσόν ἐστι τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ ἴδιον ὕψος.

Πρότασις ΙΘ'.

Σχ. 151. §. 275. Κύλινδροι, Πρίσματα, καὶ Παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν.

Δεῖξις.

Ἔστωσαν οὖν δύω παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΦ, ΕΥ, ὧν βάσεις μὲν αἱ Λ, Σ, ὕψη δὲ τὰ ΑΗ, ΕΓ. Ὁ συγκείμενος λόγος ἐκ τε τοῦ λόγου τῆς Λ βάσεως πρὸς τὴν Σ βάσιν, καὶ τοῦ ΑΗ ὕψους πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος ἐστὶν, ὃν ἔχει τὸ γενόμενον ἐκ τῶν ἡγουμένων (147), ἤτοι ἐκ τῆς Λ βάσεως ἐπὶ τὸ ΑΗ ὕψος, πρὸς τὸ γενόμενον ἐκ τῶν ἑπομένων, ἤτοι ἐκ τῆς Σ βάσεως πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος. Ἀλλὰ μὴν τοῦ ΑΦ σχήματος τὸ στερεὸν ἰσόν (268) ἐστι τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς Λ βάσεως ἐπὶ τὸ ΑΗ ὕψος; τοῦ δὲ ΕΥ σχήματος τὸ στερεὸν ἰσόν ἐστι τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς Σ βάσεως ἐπὶ τὸ ΕΓ ὕψος, ἄρα ὁ συγκείμενος λόγος τῆς Λ βάσεως πρὸς τὴν Σ βάσιν, καὶ τοῦ ΑΗ ὕψους πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ τοῦ ΑΦ σχήματος πρὸς τὸ ΕΥ σχῆμα. Διὰ δὴ ταῦτα τὰ παραλληλεπίπεδα ἐν συγκειμένῳ λόγῳ ἐσὶ τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν. Ταυτὰ δὴ ἐννοητέον περί τε κυλίνδρων καὶ πρισμάτων Ο. Ε. Δ. Κεφ. γ'.

Πόρισμα.

§. 276. Ἐπεὶ οὖν ὁ συγκείμενος λόγος τῶν τετραγωνικῶν βάσεων, Λ, Σ σύγκειται (215) ἐκ τῶν λόγων τῆς ΗΡ πρὸς τὴν ΓΠ, καὶ τῆς ΗΟ πρὸς τὴν ΓΙ, δῆλον, ὅτι ὁ λόγος ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους οἱ Κύβοι ΑΦ, ΕΥ σύγκειται ἐκ τριῶν ἴσων λόγων, ἐκ τοῦ λόγου τῆς ΗΡ πρὸς τὴν ΓΠ, τῆς ΗΟ πρὸς τὴν ΓΙ, καὶ τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΕΓ, ὅπερ ἐστι τριπλασιάζεται (147) ὁ λόγος τῆς ΗΟ πλευρᾶς πρὸς τὴν ΓΙ πλευράν. Ταῦτ' ἄρα οἱ κύβοι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων πλευρῶν. Σχ. 151.

Πρότασις Κ'.

§. 277. Οἱ Κύβοι ΑΦ, ΕΥ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΟ πλευρᾶς πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΙ πλευρᾶς, καὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς ΗΟ πρὸς τὴν ΓΙ πλευράν. Σχ. 151.

Δεῖξις.

Οἱ κύβοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἐν συγκειμένῳ λόγῳ (275) τῶν βάσεων Λ, Σ, καὶ τῶν ὑψῶν ΑΗ, ΕΓ. Ἀλλ' ἡ Λ βάσις ἔσαι πρὸς τὴν Σ βάσιν (220), ὡς τὸ τῆς ΗΟ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς ΓΙ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΗ ὕψος ἔσαι πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος, ὡς ἡ ΗΟ πλευρὰ πρὸς τὴν ΓΙ πλευράν, ἄρα καὶ ὁ ΑΦ κύβος ἔσαι πρὸς τὸν ΕΥ κύ-

βον

Κεφ. γ'. βον ἐν συγκειμένῳ λόγῳ τῶ ΗΟ τετραγώνου πρὸς τὸ ΓΙ τετράγωνον, καὶ τῆς ΗΟ πλευρᾶς πρὸς τὴν ΓΙ πλευράν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

Σχ. 152. §. 278. Ἐὰν τέσσαρες Εὐθεῖαι Α, Ε, Κ, Φ ἀνάλογοι ὦσι, καὶ οἱ τούτων Κύβοι ἀνάλογοι ἔσονται.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ ἦν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε (ἐξ ὑπ.), οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Φ, ὁ λόγος τῆς Α πρὸς τὴν Ε ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ τῆς Κ πρὸς τὴν Φ· ὁ δὲ λόγος τῶ Α τετραγώνου πρὸς τὸ Ε τετράγωνον ὁ αὐτός ἐστι (222) τῷ λόγῳ τῶ Κ τετραγώνου πρὸς τὸ Φ τετράγωνον. Ἄρα ὁ συγκείμενος λόγος τῶ Α τετραγώνου πρὸς τὸ Ε τετράγωνον, καὶ τῆς Α εὐθείας πρὸς τὴν Ε εὐθεῖαν ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ λόγῳ τῶ Κ τετραγώνου πρὸς τὸ Φ τετράγωνον καὶ τῆς Κ εὐθείας πρὸς τὴν Φ εὐθεῖαν· Ἀλλὰ μὴν καὶ οἱ Κύβοι τῶν εὐθειῶν Α, Ε, Κ, Φ ἐν συγκειμένῳ λόγῳ (277) εἰσὶ τῶν ἰδίων πλευρῶν καὶ τῶν τούτων τετραγώνων, ἄρα καὶ οἱ κύβοι ἀνάλογοι ἔσονται· τουτέστιν ὡς ὁ κύβος Α πρὸς τὸν κύβον Ε, οὕτως ὁ κύβος Κ πρὸς τὸν κύβον Φ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΒ'.

Σχ. 153. §. 279. Παραλληλεπιπέδων, Κυλίνδρων τε, καὶ πρισμάτων ἀναλογίαν εὐθείαις γραμμαῖς παραστῆσαι.

Δεῖξις.

Ἔςω ἐν παραςῆσαι ὀ᾽Θείαις γραμμαῖς τὴν ἀναλογίαν τῶν παραλληλεπιπέδων ΑΦ, ΕΥ. Γενέσθω ὡς ἡ Λ βάσις πρὸς τὴν Σ βάσιν, ὅτως ἡ ΗΟ ὀ᾽Θεῖα πρὸς τὴν Ζ ὀ᾽Θεῖαν, καὶ ὡς τὸ ΑΗ ὕψος πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος, ὅτως ἡ ὀρεθεῖσα Ζ πρὸς τὴν Μ. Ἄρα τὸ ςερεὸν ΑΦ ἔχει πρὸς τὸ ςερεὸν ΕΥ τὸν συγκείμενον λόγον (275) ἐκ τῆς Λ βάσεως πρὸς τὴν Σ βάσιν, καὶ τῦ ΑΗ ὕψους πρὸς τὸ ΕΓ. ὕψος. Ἀλλ᾽ ὁ λόγος τῆς Λ βάσεως πρὸς τὴν Σ βάσιν ὁ αὐτός (ἐκ κατ.) ἐςὶ τῷ λόγῳ τῆς ΗΟ πρὸς τὴν Ζ, καὶ ὁ λόγος τῦ ΑΗ ὕψους πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος ὁ αὐτός (ἐκ κατ.) ἐςὶ τῷ λόγῳ τῆς Ζ πρὸς τὴν Μ, ἄρα τὰ ςερεὰ ΑΦ, ΕΥ πρὸς ἄλληλα ἐςὶν ἐν συγκειμένῳ λόγῳ τῆς ΗΘ ὀ᾽Θείας πρὸς τὴν Ζ ὀ᾽Θεῖαν, καὶ τῆς Ζ πρὸς τὴν Μ, ἤτοι ὡς ἡ ΗΟ πρὸς τὴν Μ (218). Ἡ αὐτὴ δὲ δεῖξις ἐπὶ κυλίνδροις καὶ πρίσμασιν ἐςίν. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 280. Τὰ Ἰσοϋψῆ ἄρα παραλληλεπίπεδα ΑΦ, ΕΥ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν αἱ ἴδιαι βάσεις. Ἐὰν γὰρ γένηται ὡς ἡ Λ βάσις πρὸς τὴν Σ βάσιν, ὅτως ἡ ΗΟ πρὸς τὴν Ζ, καὶ ὡς τὸ ΑΗ ὕψος πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος, ὅτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Μ, τὸ ΑΦ παραλληλεπίπεδον ἔςαι πρὸς τὸ ΕΥ παραλληλεπίπεδον (278), ὡς ἡ ΗΟ ὀ᾽Θεῖα πρὸς τὴν Μ ὀ᾽Θεῖαν. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΕΓ, ὅτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Μ, αἱ δὲ ΑΗ, ΕΓ ἴσαι (ἐξ ὑπ.) εἰσι, καὶ αἱ Ζ, Μ ἴσαι ἔσονται. Διόπερ, ὡς ἡ ΗΟ πρὸς τὴν Ζ (140), ὅτως ἡ Σχ. 151.

 αὐτὴ ΗΟ πρὸς τὴν Μ. Εἴδομεν δὲ καὶ τὸ στερεὸν ΑΦ ἔχειν πρὸς τὸ στερεὸν ΕΥ (279), ὡς τὴν ΗΟ πρὸς τὴν Μ. Ἄρα τὸ ΑΦ στερεὸν ἔσται πρὸς τὸ ΕΥ στερεὸν, ὡς ἡ ΗΟ εὐθεῖα πρὸς τὴν Ζ εὐθεῖαν, ἤτοι ὡς ἡ Λ βάσις (ἐκ κατ.) πρὸς τὴν Σ βάσιν. Ἡ αὐτὴ δὲ δεῖξις ἐν τοῖς κυλίνδροις καὶ πρισμάτοις ἐστί.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Δ'.

ΠΕΡΙ' ΣΥΜΠΤΩΜΑ'ΤΩΝ

ΠΥΡΑΜΙ'ΔΩΝ ΤΕ ΚΑΙ' ΚΩ'ΝΩΝ.

Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

§. 281. Ἐὰν αἱ τῶν Πυραμίδων πλευραὶ ΦΚ, ΛΞ οὕτω τμηθῶσι κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, ὥστε τὴν ΦΕ ἔχειν πρὸς τὴν ΦΚ, ὡς τὴν ΛΖ πρὸς τὴν ΛΞ ; διὰ δὲ τούτων τῶν σημείων διέλθῃ δύω ἐπίπεδα ταῖς ἰδίαις βάσεσι παράλληλα, αἱ τομαὶ ΣΟΕ, ΧΡΖ ἀνάλογοι ἔσονται ταῖς ἰδίαις βάσεσι ΓΑΚ, ΤΙΞ. Σχ. 153.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΦΕ πρὸς τὴν ΦΚ, οὕτως (ἐξ ὑπ.) ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΛΞ, καὶ τὸ ΦΕ τετράγωνον ἔσται πρὸς τὸ ΦΚ τετράγωνον. (222) ὡς τὸ ΛΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ΛΞ τετράγωνον. Ἀλλα-

Κεφ. δ'. μίω τὸ ΦΕ τετράγωνον ἔσαι πρὸς τὸ ΦΚ, ὡς τὸ ΣΕ (222) πρὸς τὸ ΓΚ. Τὸ δὲ ΛΖ ἔσαι πρὸς τὸ ΛΞ ὡς τὸ ΧΖ πρὸς τὸ ΥΞ. Ἄρα καὶ τὸ ΣΕ ἔσαι πρὸς τὸ ΓΚ, ὡς τὸ ΧΖ πρὸς τὸ ΥΞ καὶ τὰ ἀπὸ τούτων τετράγωνα ἀνάλογα (222) ἔσαι. Ἀλλ' ὡς ἡ ΣΟΕ τομὴ πρὸς τὴν ΓΑΚ βάσιν, οὕτω τὸ ΣΕ τετράγωνον (219) πρὸς τὸ ΓΚ τετράγωνον, καὶ ὡς ἡ ΧΡΖ τομὴ πρὸς τὴν ΥΙΞ βάσιν, οὕτω τὸ ΧΖ τετράγωνον (219) πρὸς τὸ ΥΞ τετράγωνον, ἄρα καὶ ὡς ἡ ΣΟΕ τομὴ πρὸς τὴν ΓΑΚ βάσιν, οὕτως ἡ ΧΡΖ τομὴ πρὸς τὴν ΥΙΞ βάσιν. Καὶ ἐναλλὰξ (164) ὡς ἡ ΣΟΕ τομὴ πρὸς τὴν ΧΡΖ τομὴν, οὕτως ἡ ΓΑΚ βάσις πρὸς τὴν ΥΙΞ βάσιν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

Σχ. 154. §. 282. Ἐὰν εἰς τριγωνικὴν Πυραμίδα ΖΧΑΦ ἀπειράριθμα πρίσματα ἐγγραφῇ, ἡ σύναψις πάντων τῶν ἐγγεγραμμένων πρισμάτων τῇ πυραμίδι ὡς ἔγγιστα ἴση ἐστί.

Δεῖξις.

Διαιρεθήτω ἡ ΑΦ πλευρὰ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη τὰ ΑΣ, ΣΓ, ΓΦ, καὶ γενομένων διὰ τῶν σημείων, Σ, Γ, τῶν τομῶν ΣΕΡ, ΓΛΞ τῇ βάσει παραλλήλων, ἐγγραφήσεται εἰς τὴν Πυραμίδα τὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΥΕΣΑ, ΚΛΓΣ, ὧνπερ ἐκβληθέντων ἐκτὸς τῆς Πυραμίδος, περὶ τὴν Πυραμίδα περιγραφήσεται πρίσματα τὰ ΧΙΣΑ, ΡΟΓΣ, ΞΗΦΓ. Ἡ ὑπεροχὴ τῶν περιγεγραμμένων πρισμάτων ἐπὶ τοῖς ἐγγεγραμμένοις πρίσμασι τρία ἐστὶ στερεὰ τὰ ΗΓ, ΟΚ, ΙΥ, ἅπερ σύναμα ληφθέν-

θέντα ἴσα δύναται τῷ πρίσματι ΧΙΣΑ. Τὸ δὲ Κεφ. δ'.
ΗΓ πρίσμα ἰσόνεςι τῷ πρίσματι ΛΣ, καὶ διὰ
ταῦτα τὰ πρίσματα ΗΓ, ΟΚ ἴσα δύναται
τῷ ΡΟΓΣ πρίσματι, τουτέςι τῷ πρίσματι
ΥΕΣΑ. Ἡ συναψις ἄρα τῶν τριῶν ςερεῶν ΗΓ,
ΟΚ, ΙΥ ἴση ἐςὶ τῷ πρίσματι ΧΙΣΑ. Ἐὰν
ἄρα ὁ ἀριθμὸς τῶν πρισμάτων ἀπειράριθμος γένηται
τὸ πρίσμα ΧΙΣΑ ἀπείρως ἐλαττωθήσεται,
διόπερ ἡ ὑπεροχὴ τῶν περιγεγραμμένων πρισμάτων
(πολλῷ δὲ μᾶλλον τῆς Πυραμίδος, ἥτις μέρος ἐςὶ
τῶν περιγεγραμμένων πρισμάτων) ἐπὶ τοῖς ἐγγεγραμμένοις
πρίσμασιν ἴση ἔςαι τῷ πρίσματι ΧΙΣΑ,
ταῦτ' ἄρα καὶ καταφρονητέα. Ἡ συναψις οὖν τῶν ἀπείρων
πρισμάτων εἰς τὴν πυραμίδα ἐγγεγραμμένων
ὡς ἔγγυςα τῇ πυραμίδι ἴση ἐςίν.
Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

§. 283. Αἱ ἰσοϋψεῖς τριγωνικαὶ πυραμίδες Σχ. 155.
ΞΡΑΚ, ΣΦΕΖ λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας,
ὃν αἱ ἴδιαι βάσεις ΞΡΑ, ΣΦΕ.

Δεῖξις.

Διαιρεθήτωσαν τὰ τῶν πυραμίδων ὕψη ΚΑ,
ΖΕ εἰς ὅσα ἂν μέρη ἴσα τῷ μεγέθει καὶ τῷ πλήθει,
καὶ γενομένων, διὰ τῶν σημείων τῶν διαιρέσεων,
τῶν τομῶν τῇ βάσει παραλλήλων, ἐννοείσθω ἐν ἑκατέρᾳ
πυραμίδι ἐγγεγραμμένα ἰσοϋψῆ πρίσματα ἴσα
τῷ πλήθει. Ἐπεὶ οὖν αἱ πλευραὶ ΚΑ, ΖΕ ὑπὸ
διῃρέθησαν κατὰ τὰ σημεῖα Υ, Η, ὥςε τὴν ΚΥ
ἔχειν πρὸς τὴν ΚΑ (ἐκ κατ.) ὡς τὴν ΖΗ πρὸς
τὴν ΖΕ, αἱ τομαὶ ΛΟΥ, ΙΚΗ πρὸς ἀλλήλας

Κεφ. δ'. εἰσὶν (281), ὡς αἱ βάσεις ΞΡΑ, ΣΦΕ. Ἀλλαμὴν τὰ ἰσοϋψῆ πρίσματα ΛΟΥΑ, ΙΚΗΕ πρὸς ἄλληλά ἐστιν (280) ὡς αἱ τομαὶ ΛΟΥ, ΙΚΗ, ἄρα ἔσαι καὶ ὡς αἱ βάσεις ΞΡΑ, ΣΦΕ. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον καὶ τὸ πρίσμα ΓΠΝΥ ἔσαι πρὸς τὸ πρίσμα ΧΔΤΗ, ὡς ἡ βάσις ΞΡΑ πρὸς τὴν βάσιν ΣΦΕ. Ὡς τὸ πρίσμα ἄρα ΛΟΥΑ πρὸς τὸ πρίσμα ΙΚΗΕ (50), οὕτω τὸ πρίσμα ΓΠΝΥ πρὸς τὸ πρίσμα ΧΔΤΗ, καὶ ἐν τοῖς λοιποῖς ὁμοίως. Ἡ σύναψις τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν πυραμίδα ΞΡΑΚ πρισμάτων ἔσαι πρὸς τὴν σύναψιν τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν πυραμίδα ΣΦΕΖ πρισμάτων (167) ὡς τὸ πρίσμα ΛΟΥΑ πρὸς τὸ πρίσμα ΙΚΗΕ, ἤτοι ὡς ἡ βάσις ΞΡΑ πρὸς τὴν βάσιν ΣΦΕ. Ἀλλ' ἡ σύναψις τῶν ἐγγεγραμμένων πρισμάτων ἴση (282) ἐστὶ τῇ πυραμίδι, ἄρα καὶ αἱ πυραμίδες ΞΡΑΚ, ΣΦΕΖ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσιν, ὃν αἱ ἴδιαι βάσεις ΞΡΑ, ΣΦΕ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Κϛ'. Θεώρημα.

Σχ. 156. §. 284. Ἡ τετράπλευρος πυραμὶς ΗΓΡΣΚ ἔσαι πρὸς τὴν ἰσοϋψῆ τριγωνικὴν πυραμίδα ΕΚΦΑ, ὡς ἡ βάσις τῆς τετραπλεύρου πυραμίδος πρὸς τὴν βάσιν τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος.

Δεῖξις.

Ἡ τετράπλευρος πυραμὶς διαιρεθήτω εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας τὰς ΗΣΡΚ, ΗΓΡΚ. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ πυραμὶς ΗΣΡΚ πρὸς τὴν ἰσοϋψῆ πυραμίδα ΗΓΡΚ, οὕτως (283) ἡ Λ βάσις πρὸς τὴν Υ βάσιν· ἐν συνθέσει (166), ἡ σύναψις

τῶν

τῶν δύω πυραμίδων ΗΣΡΚ, ΗΓΡΚ, ἤτοι Κεφ. δ'.
ὅλη ἡ πυραμὶς ΗΓΡΣΚ ἔσαι πρὸς τὴν πυραμίδα ΗΓΡΚ ὡς αἱ ἴδιαι βάσεις ΑΥ, Υ, τουτέστιν ὡς ὅλη ἡ βάσις ΗΓΡΣ πρὸς τὴν Υ βάσιν. Ἀλλ' ὡς ἡ πυραμὶς ΗΓΡΚ (283) πρὸς τὴν ἰσοϋψῆ πυραμίδα ΕΚΦΑ, οὕτως ἡ Υ βάσις πρὸς τὴν βάσιν ΕΚΦ, ἄρα δίΐσου (165) ὡς ἡ πυραμὶς ΗΓΡΣΚ πρὸς τὴν πυραμίδα ΕΚΦΑ, οὕτως ἡ βάσις ΗΓΡΣ πρὸς τὴν βάσιν ΕΚΦ.
Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 285. Ἐκ τούτων δῆλον, ὅτι αἱ πολύπλευροι Σχ. 156.
ἰσοϋψεῖς πυραμίδες ΗΓΡΣΚ, ΞΒΛΟΙ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσιν ὃν αἱ ἴδιαι βάσεις. Ὡς γὰρ ἡ πυραμὶς ΗΓΡΣΚ πρὸς τὴν ἰσοϋψῆ τριγωνικὴν πυραμίδα ΕΚΦΑ οὕτως (284) ἡ ΗΓΡΣ βάσις πρὸς τὴν βάσιν ΕΚΦ. Καὶ ὡς ἡ πυραμὶς ΕΚΦΑ, πρὸς τὴν ἰσοϋψῆ πυραμίδα ΞΒΛΟΙ, οὕτως (284) ἡ βάσις ΕΚΦ πρὸς τὴν βάσιν ΞΒΛΟ, ἄρα δίΐσου (165) ὡς ἡ πυραμὶς ΗΓΡΣΚ πρὸς τὴν πυραμίδα ΞΒΛΟΙ, οὕτως ἡ βάσις ΗΓΡΣ πρὸς τὴν βάσιν ΞΡΛΟ.

Πόρισμα Β'.

§. 286. Ἐπεὶ οὖν αἱ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ ἴδιαι βάσεις, δῆλον, ὅτι αἱ ἰσοϋψεῖς καὶ ἴσας βάσεις ἔχουσαι πυραμίδες ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Πρότασις ΚΖ'. Θεώρημα.

Σχ. 127. §. 287. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου Ι τοῦ Κύβου ΓΛ ἀχθῶσι πρὸς τὰς τέσσαρας γωνίας Ξ, Ρ, Λ, Ο εὐθεῖαι αἱ ΙΞ, ΙΡ, ΙΛ, ΙΟ, ἡ ἐντεῦθεν τετράπλευρος πυραμὶς ΙΞΡΛΟ ἑκτημόριον ἔσται τοῦ κύβου ΓΛ.

Δεῖξις.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου Ι πρὸς πάσας τοῦ κύβου γωνίας ἠγμέναι ἐννοηθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὁ κύβος διαιρεθήσεται εἰς ἓξ ἰσοϋψεῖς καὶ ἴσας βάσεις ἐχούσας, καὶ διὰ ταῦτα (286) ἴσας, πυραμίδας, ὧν βάσεις μὲν τὰ τοῦ κύβου τετράγωνα, ὕψη δὲ τὰ τῶν βάσεων διαστήματα ἀπὸ τοῦ κυβικοῦ κέντρου. Ἀλλὰ μὴν τὰ τοῦ κύβου τετράγωνα, ἅπερ τὰς ἐντεῦθεν πυραμίδας συσταίνουσιν, ἓξ τὸν ἀριθμόν ἐστιν, ἄρα ἡ πυραμὶς ΞΡΛΟΙ ἑκτημόριόν ἐστι τοῦ κύβου ΓΛ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 127. §. 288. Ἐπεὶ οὖν τὸ κυβικὸν στερεὸν ἴσον (269) ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, δῆλον, ὅτι τὸ στερεὸν τῆς τετραπλεύρου πυραμίδος ΞΡΛΟΙ, ἥτις ἑκτημόριόν ἐστι (287) τοῦ κύβου, ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ ἕκτον μέρος τοῦ κυβικοῦ ὕψους ΗΠ, τουτέστιν ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἰδίου ὕψους ΙΠ.

Προ-

Πρότασις ΚΗ'.

§. 289. Πάσης τριγωνικῆς πυραμίδος ΑΕΦΚ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως ΑΕΦ ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τῦ ἰδίυ ὕψυς ΚΣ. Σχ. 128. Σχ. 127.

Δεῖξις.

Κατασκευασθήτω ὁ ΓΛ κύβος, ὃ τὸ ὕψος διπλάσιον ἔστω τῦ ὕψυς τῆς τριγωνικῆς ΑΕΦΚ πυραμίδος, εἶτα ἀπὸ τῦ κέντρυ Ι συσταθήτω ἡ τετράπλευρος πυραμὶς ΞΡΛΟΙ. Ἐπεὶ ὖν ἑκατέρας τῆς πυραμίδος τὸ ὕψος ἥμισυ (ἐκ κατ.) ἐστὶ τῦ κυβικῦ ὕψυς, δῆλον, ὅτι αἱ πυραμίδες ἰσοϋψεῖς ἔσονται, καὶ διὰ ταῦτα ὡς ἡ τετράπλευρος πυραμὶς ΞΡΛΟΙ πρὸς τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΑΕΦΚ, ὕτως (284) ἡ βάσις ΞΡΛΟ πρὸς τὴν βάσιν ΑΕΦ, ἤτοι ὕτω τὸ γενόμενον ἐκ τῆς βάσεως ΞΡΛΟ ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τῆς ΙΠ εὐθείας πρὸς τὸ γενόμενον ἐκ τῆς βάσεως ΑΕΦ ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τῆς ΚΣ εὐθείας. Ἀλλὰ μὴν τὸ στερεὸν τῆς πυραμίδος ΞΡΛΟΙ ἴσον (288) ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τῆς ΙΠ εὐθείας, ἄρα καὶ τῆς πυραμίδος ΑΕΦΚ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τῆς ΚΣ εὐθείας, ἤτοι τῦ ἰδίυ ὕψυς. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 290. Ἁπάσης ἄρα πολυγώνυ πυραμίδος τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως

ἐπὶ

Κεφ. δ'. ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τῦ ἰδίυ ὕψυς. Διαιρεθείσης γὰρ τῆς πολυγώνυ πυραμίδος εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, καὶ ἑκάστης τῦ στερεῦ ἀφαιρεθέντος (289) ἔσαι τὸ ποθύμενον. Τὸ γὰρ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀφαιρεθέντων στερεῶν τὸ τῆς πολυγώνυ πυραμίδος τὸ στερεὸν παρίστησι.

Πόρισμα Β'.

§. 291. Ἐὰν δὲ ἡ βάσις τῆς πολυγώνυ πυραμίδος κανονικὸν ἢ πολύγωνον περὶ κύκλον περιγεγραμμένον ὑπ' ἀπειραρίθμων πλευρῶν συγκροτύμενον, δῆλον, ὅτι τὸ πολύγωνον ὡς κύκλος (132), τὸ δὲ πρίσμα ὡς κύλινδρος, καὶ ἡ πυραμὶς ὡς κῶνος ληφθήσεται. Ταὐτ' ἄρα καὶ ὁ κῶνος τριτημόριόν ἐστι τῦ ἰσοΰψυς καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντος κυλίνδρυ.

Πόρισμα Γ'.

§. 292. Ἐπεὶ ὖν τοῦ κυλίνδρυ τὸ στερεὸν ἴσον (274) ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, δῆλον, ὅτι καὶ τῦ κώνυ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τῦ ἰδίυ ὕψυς.

Πόρισμα Δ'.

§. 293. Ἐπεὶ ὖν οἱ κύλινδροι καὶ τὰ πρίσματα ἐν συγκειμένῳ λόγῳ (275) εἰσὶ τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν, δῆλον, ὅτι καὶ αἱ πυραμίδες καὶ οἱ κῶνοι ἐν τῷ αὐτῷ συγκειμένῳ λόγῳ εἰσὶ τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν.

Πό-

Πόρισμα Ε'.

§. 294. Τελευταῖον δὲ, ἐπεὶ τὰ ἰσοϋψῆ πρίσματα, καὶ κύλινδροι (280) τὸν αὐτὸν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν αἱ ἴδιαι βάσεις, καὶ αἱ ἰσοϋψεῖς, ἄρα πυραμίδες καὶ κῶνοι τὸν αὐτὸν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν αἱ ἴδιαι βάσεις.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Ε.

ΠΕΡΙ' Ο'ΜΟΙ'ΩΝ ΣΤΕΡΕΩ'Ν Α'ΝΑΛΟΓΙ'ΑΣ.

Πρότασις ΚΘ. Θεώρημα.

Σχ. 151. §. 295. Ὅμοια παραλληλεπίπεδα, πρίσματα, καὶ πυραμίδες τὸν αὐτὸν πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Δεῖξις.

Ἔστω παραλληλεπίπεδα ὅμοια τὰ ΑΦ, ΕΥ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΦ ἐστὶ πρὸς τὸ ΕΥ (275) ἐν συγκειμένῳ λόγῳ τῶν βάσεων Λ, Σ, καὶ τῶν ὑψῶν ΑΗ, ΕΓ. Διὰ δὲ τὸ ὁμοίας εἶναι τὰς βάσεις Λ, Σ. Ὁ λόγος τῆς βάσεως Λ πρὸς τὴν βάσιν Σ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ τοῦ ΗΟ τετραγώνου (220) πρὸς τὸ ΓΙ τετράγωνον· καὶ διὰ τὴν τῶν ἐπιπέδων

ὁμοιό-

ὁμοιότητα, ὁ λόγος τοῦ ΑΗ ὕψους πρὸς τὸ ΕΓ Κεφ. ί.
ὕψος ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ τῆς ΗΟ πλευρᾶς πρὸς τὴν ΓΙ πλευράν, ἄρα καὶ τὸ στερεὸν ΑΦ ἔσται πρὸς τὸ στερεὸν ΕΥ ἐν συγκειμένῳ λόγῳ τοῦ ΗΟ τετραγώνου πρὸς τὸ ΓΙ τετράγωνον, καὶ τῆς ΗΟ πλευρᾶς πρὸς τὴν ΓΙ πλευράν, ἤτοι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων (277) πλευρῶν. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 296. Ὅμοια ἄρα παραλληλεπίπεδα, πρίσματα, καὶ πυραμίδες ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Πρότασις Λ'. Θεώρημα.

§. 297. Ὅμοιοι κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους λόγον Σχ. 157.
ἔχουσιν, ὃν οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν ἰδίων βάσεων.

Δεῖξις.

Ἔστωσαν κύλινδροι ὅμοιοι οἱ ΥΣ, ΓΙ, ὧν ὕψη μὲν τὰ ΑΚ, ΕΚ, βάσεις δὲ αἱ ΦΛΣ, ΞΠΙ. Ὁ ΥΣ κύλινδρος ἔσται πρὸς τὸν ΓΙ κύλινδρον (275) ἐν συγκειμένῳ λόγῳ τῆς βάσεως ΦΛΣ πρὸς τὴν βάσιν ΞΠΙ, καὶ τοῦ ΑΚ ὕψους πρὸς τὸ ΕΚ ὕψος. Ἀλλ' ὁ λόγος τῆς βάσεως ΦΛΣ πρὸς τὴν βάσιν ΞΠΙ, ὁ αὐτός (225) ἐστι τῷ λόγῳ τοῦ ΦΣ τετραγώνου πρὸς τὸ ΞΙ τετράγωνον· Καὶ διὰ τὴν τῶν κυλίνδρων ὁμοιότητα. Ὁ λόγος τοῦ ΑΚ ὕψους πρὸς τὸ ΕΚ ὕψος, ὁ αὐτὸς (243) ἐστι τῷ λόγῳ τῆς ΦΣ πλευρᾶς πρὸς τὴν ΞΙ πλευράν,

ἄρα

Καὶ οὗ ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος ΥΣ ἔςαι πρὸς τὸν κύλινδρον ΓΙ ἐν συγκειμένῳ λόγῳ τοῦ ΦΣ τετραγώνου πρὸς τὸ ΞΙ τετράγωνον, καὶ τῆς ΦΣ εὐθείας πρὸς τὴν ΞΙ εὐθεῖαν, τουτέςιν ὡς ὁ ΦΣ κύβος (277) πρὸς τὸν ΞΙ κύβον. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 157. §. 298. Ἐπεὶ οὖν καὶ οἱ κῶνοι ΦΑΣ, ΞΕΙ τριτημόρια (291) εἰσὶ τῶν περιγεγραμμένων κυλίνδρων, δῆλον, ὅτι καὶ οἱ ὅμοιοι κῶνοι πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν ἰδίων βάσεων.

Πόρισμα Β'.

§. 299. Ὅμοιοι ἄρα κύλινδροι καὶ κῶνοι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν διαμέτρων (276) τῶν ἰδίων βάσεων.

Πρότασις ΛΑ'. Λῆμμα.

Σχ. 158. §. 300. Ἐὰν εἰς κύκλου τεταρτημόριον ΝΑΓ ἀπειράριθμα ὀρθογώνια ἐγγραφῇ, ἀπαύτων τὸ ἄθροισμα ἔγγυστα ἴσον ἔςι τῷ τεταρτημορίῳ.

Δεῖξις.

Τμηθείσης τῆς ΑΝ ἡμιδιαμέτρου κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Μ, ἐγγεγράφθω εἰς τὸ τεταρτημόριον ὀρθογώνια τὰ ΜΚΔΗ, ΑΜΒΡ, ὧν ἐκβληθέντων, περὶ τὸ τεταρτημόριον περιγραφήσονται ὀρθογώνια τὰ ΚΝΕΔ, ΜΚΤΒ, ΑΜΤΓ. Ἡ ὑπεροχὴ τῶν περιγεγραμμένων ὀρθογωνίων ἐπὶ τοῖς ἐγγεγραμμένοις

σωμσυνίσταται ἐκ τῶν ὀρθογωνίων ΚΝΕΔ, ΗΔΥΒ, ΡΒΤΓ, ἅπερ συνάμα ληφθέντα ἴσα δύναται τῷ περιγεγραμμένῳ ὀρθογωνίῳ ΑΜΤΓ. Τὸ γὰρ ὀρθογώνιον ΚΝΕΔ ἴσον (125) ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΜΚΔΗ, κοινῆ δὲ προστεθέντος τοῦ ὀρθογωνίου ΗΔΥΒ, ἡ σύναψις τῶν δύω ὀρθογωνίων ΚΝΕΔ, ΗΔΥΒ ἴση ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΜΚΥΒ, ἢ τῷ ὀρθογωνίῳ (125) ΑΜΒΡ. Διὰ δὲ ταῦτα ἡ σύναψις τῶν τριῶν ὀρθογωνίων ΚΝΕΔ, ΗΔΥΒ, ΡΒΤΓ, ἴση ἐστὶ τῷ περιγεγραμμένῳ ὀρθογωνίῳ ΑΜΤΓ. Ἐὰν οὖν ἡ ΑΝ ἡμιδιάμετρος εἰς ἄπειρα μέρη διαιρεθῇ, τὸ ὕψος ΜΑ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΜΤΓ ἀπείρως ἐλαττωθήσεται, διόπερ τὸ ὀρθογώνιον ΑΜΤΓ ὡς οὐδὲν λογίζεται. Ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τῶν περιγεγραμμένων ὀρθογωνίων (πολλῷ δὲ μᾶλλον τοῦ τεταρτημορίου) ἐπὶ τοῖς ἐγγεγραμμένοις ὡς οὐδὲν λογίζεται, ὅθεν καὶ καταφρονητέα. Ταῦτ' ἄρα ἡ σύναψις τῶν ἐγγεγραμμένων ἀπειραρίθμων ὀρθογωνίων ἴση ἔγγιστά ἐστι τῷ τεταρτημορίῳ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 301. Ὡς οὖν ἡ σύναψις τῶν ἀπειραρίθμων ὀρθογωνίων εἰς τὸ τεταρτημόριον ἐγγεγραμμένων ἴση ἔγγιστα (300) ἐστι τῷ τεταρτημορίῳ, οὕτω καὶ ἡ σύναψις τῶν ἀπειραρίθμων κυλίνδρων εἰς τὸ ἡμισφαίριον ἐγγεγραμμένων τῷ ἡμισφαιρίῳ ἔγγιστά ἐστιν ἴση.

Πρότασις ΛΒ'. Θεώρημα.

§. 302. Ἐὰν αἱ Εὐθεῖαι ΑΜ, ΡΥ εἰς ἴσα Σχ. 159.
μέρη διαιρεθῇ, ἐν δὲ τοῖς τεταρτημορίοις ΑΜΝ, Σχ. 160.

ΡΤγ

Κεφ. ί. ΡΥ ἐγγραφῇ ὀρθογώνια ἴσα τῷ πλήθει, ἅπερ περὶ τὰς ἀκτῖνας ΑΜ, ΡΥ περιελθόντα ἐγγράψει εἰς ἑκάτερα τὰ ἡμισφαίρια κυλίνδρους ἴσους τῷ πλήθει· Ο' κύλινδρος τοῦ ὀρθογωνίου ΔΚΕΦ ἔσαι πρὸς τὸν κύλινδρον τοῦ ὀρθογωνίου ΤΣΙΖ; ὡς ὁ κύβος τῆς ΑΖ διαμέτρου πρὸς τὸν κύβον τῆς διαμέτρου ΡΒ.

Δεῖξις.

Ε'πεὶ οὖν αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΡΣ τὸν αὐτὸν τρόπον περιέχονται ὑπὸ τῶν διαμέτρων ΑΖ, ΡΒ, πάντως ἡ ΖΑ ἔσαι πρὸς τὴν ΑΚ, ὡς ἡ ΒΡ πρὸς τὴν ΡΣ, καὶ ἐν διαιρέσει (168) ἡ ΖΚ ἔσαι πρὸς τὴν ΚΑ, ὡς ἡ ΒΣ πρὸς τὴν ΣΡ. Καὶ διὰ τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν (184) τῶν εὐθειῶν ΖΚ, ΚΗ, ΚΑ, ἡ ΖΚ ἔσαι πρὸς τὴν ΚΑ (221), ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΗ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΑ. Διὰ δὲ τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν (184) τῶν εὐθειῶν ΒΣ, ΣΛ, ΣΡ, ἡ ΒΣ ἔσαι πρὸς τὴν ΣΡ, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ΣΛ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΣΡ. Ε'πεὶ δὲ, ὡς ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΑ, οὕτως ἡ ΒΣ πρὸς τὴν ΣΡ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΚΗ ἔσαι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΑ, (50) ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ΣΛ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΣΡ. καὶ ἡ ΚΗ ἔσαι πρὸς τὴν ΚΑ (222), ὡς ἡ ΣΛ πρὸς τὴν ΣΡ. Καὶ ἐναλλὰξ (164), ἡ ΚΗ ἔσαι πρὸς τὴν ΣΛ, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΣΡ, ἢ ὡς ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΣΤ (ἐξ ὑπ.). Α'ρα καὶ ἡ ΗΕ (τῆς ΚΗ διπλασία) ἔσαι πρὸς τὴν ΛΙ (τῆς ΣΛ διπλασίαν), ὡς ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΣΤ. Καὶ διὰ ταῦτα οἱ ὀρθοὶ κύλινδροι τῶν ὀρθογωνίων ΔΚΕΦ, ΤΣΙΖ ὅμοιοί (243) εἰσι, καὶ τὸν αὐτὸν πρὸς ἀλλήλους (297)

λό-

λόγον ἔχουσιν, ὃν οἱ κῦβοι τῶν διαμέτρων ΗΕ, Κεφ. ἰ.
ΑΙ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΕ ἔχει πρὸς τὴν ΛΙ, ὡς ἡ
ΚΔ πρὸς τὴν ΣΤ, ἢ ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΡΣ,
ἢ ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΡΒ· Πάντως καὶ ὁ κῦβος
ΗΕ ἔσαι πρὸς τὸν κῦβον ΛΙ (278), ὡς ὁ ΑΖ
κῦβος πρὸς τὸν ΡΒ κῦβον. Ταῦτ' ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος
τοῦ ὀρθογωνίου ΔΚΕΦ ἔσαι πρὸς τὸν κύλινδρον
τοῦ ὀρθογωνίου ΤΣΙΖ, ὡς ὁ κῦβος τῆς διαμέτρου
ΑΖ πρὸς τὸν κῦβον τῆς διαμέτρου ΡΒ.
Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΛΓ'. Θεώρημα.

§. 303. Αἱ σφαῖραι ΠΑΝΖ, ΓΡυΒ τὸν αὐ- Σχ. 159.
τὸν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσιν, ὃν οἱ κῦβοι τῶν Σχ. 160.
ἰδίων διαμέτρων,

Δεῖξις.

Ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ κύλινδρος ΔΚΕΦ πρὸς τὸν κύλινδρον
ΤΣΙΖ (302), οὕτως ὁ ΑΖ κῦβος πρὸς τὸν ΡΒ
κῦβον, καὶ ὡς ὁ κύλινδρος ΤΔ εφ πρὸς τὸν κύλινδρον
ΧΤ ιζ, οὕτως ὁ ΑΖ κῦβος πρὸς τὸν ΡΒ
κῦβον· πάντως ὁ κύλινδρος ΔΚΕΦ ἔσαι πρὸς τὸν
κύλινδρον ΤΣΙΖ (50?), ὡς ὁ κύλινδρος ΤΔ εφ
πρὸς τὸν κύλινδρον ΧΤ ιζ. Ταῦτα δὴ δειχθήσεται
καὶ ἐν τοῖς λοιποῖς ἐγγεγραμμένοις κυλίνδροις.
Ταῦτ' ἄρα ὡς ἡ σύναψις τῶν ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων
εἰς τὸ ΠΑΝ ἡμισφαίριον πρὸς τὴν σύναψιν
τῶν ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων εἰς τὸ ΓΡυ
ἡμισφαίριον, οὕτως ὁ κύλινδρος ΔΚΕΦ πρὸς τὸν
κύλινδρον ΤΣΙΖ, ἤτοι οὕτως ὁ κῦβος ΑΖ (302)
πρὸς τὸν ΡΒ κῦβον. Ἀλλὰ μὴν ἡ σύναψις τῶν
ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων εἰς τὰ ἡμισφαίρια τοῖς

Κεφ. ι. ἡμισφαιρίοις ὡς ἔγγυστα ἴσυ (301) ἐςὶν, ἄρα ὡς τὸ ἡμισφαίριον ΠΑΝ πρὸς τὸ ἡμισφαίριον ΓΡΘ ἤτοι ὡς ἡ σφαῖρα πρὸς τὴν σφαῖραν, ἔτως ὁ κύβος τῆς ΑΖ διαμέτρυ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΡΒ διαμέτρυ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 364. Αἱ σφαῖραι ἄρα πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

ΤΕΛΟΣ

ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΠΙ΄ΝΑΞ

ΤΩ΄Ν ΠΕΡΙΕΧΟΜΕ΄ΝΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙ΄ΩΝ.

Γεωμετρίας Μέρος Α΄. Περὶ ἐπιπέδων σχημάτων.

ΚΕΦΑ΄ΛΑΙΟΝ Α΄.

ΚΕΦΑ΄ΛΑΙΟΝ Β΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Γεωμετρείας Μέρος Β'. Περὶ Ἀναλογίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΚΕ-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

Γεωμετρίας Μέρος Γ'. Περὶ στερεῶν σχημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

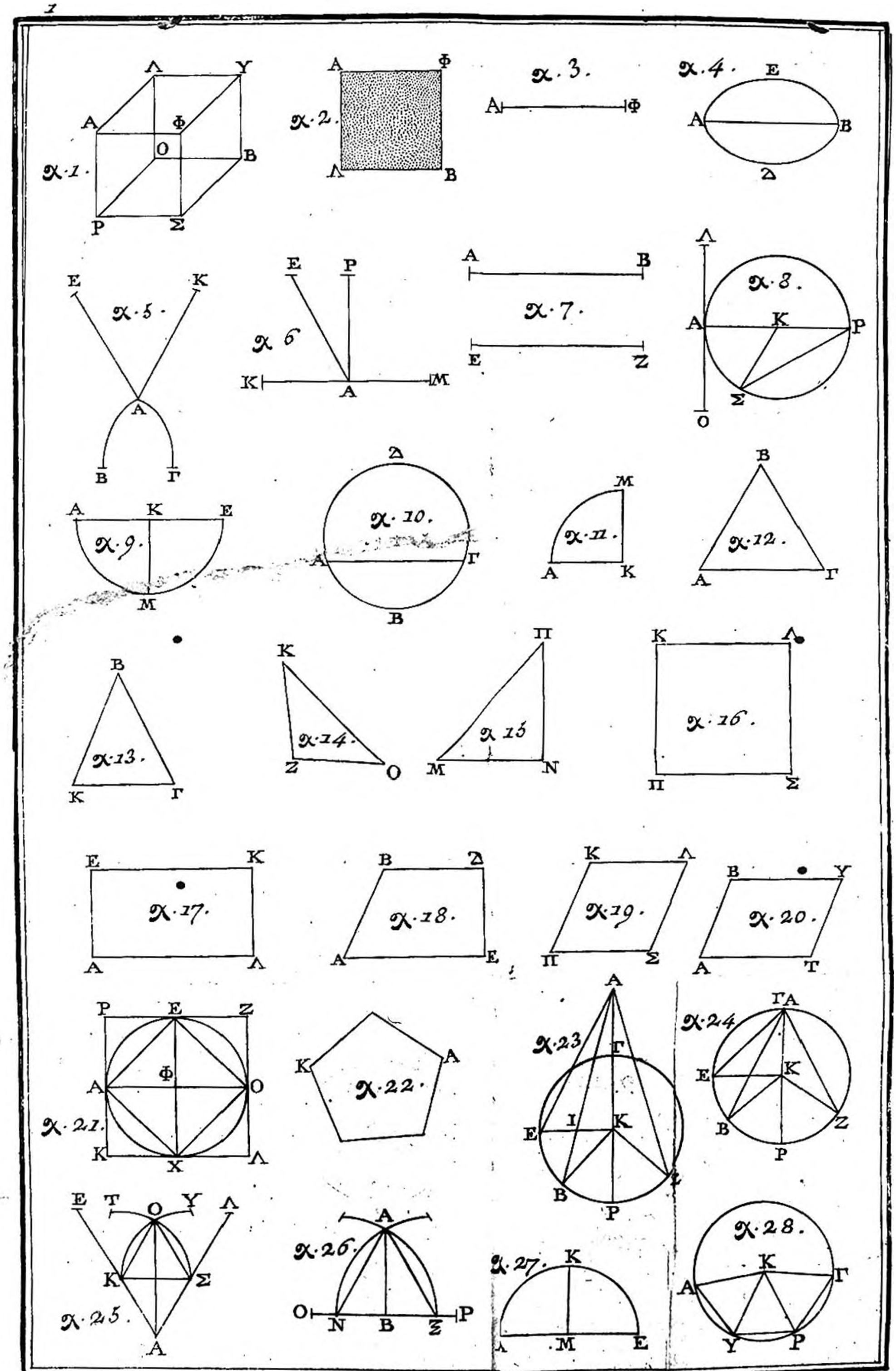
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

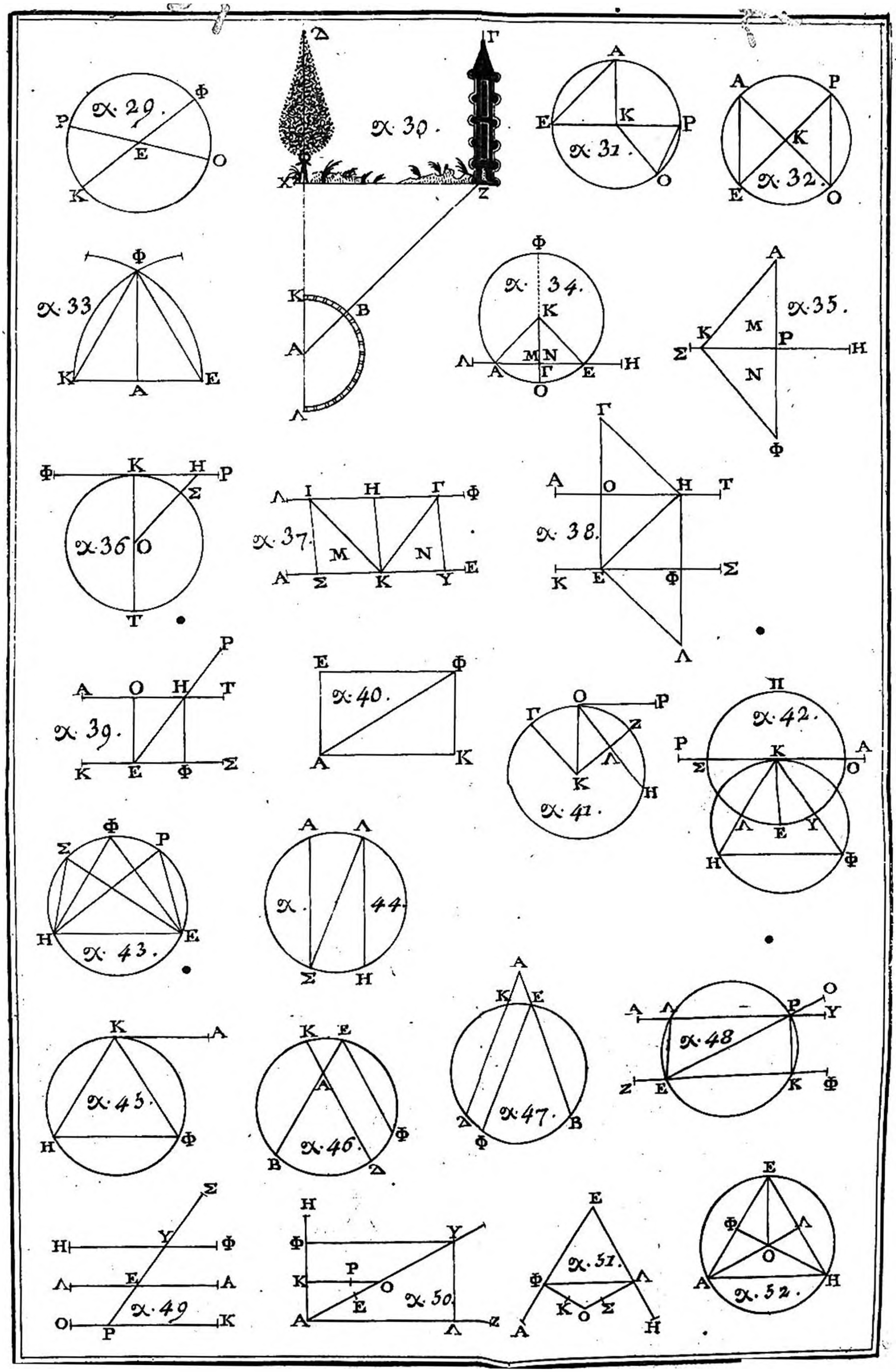
ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Δ'.

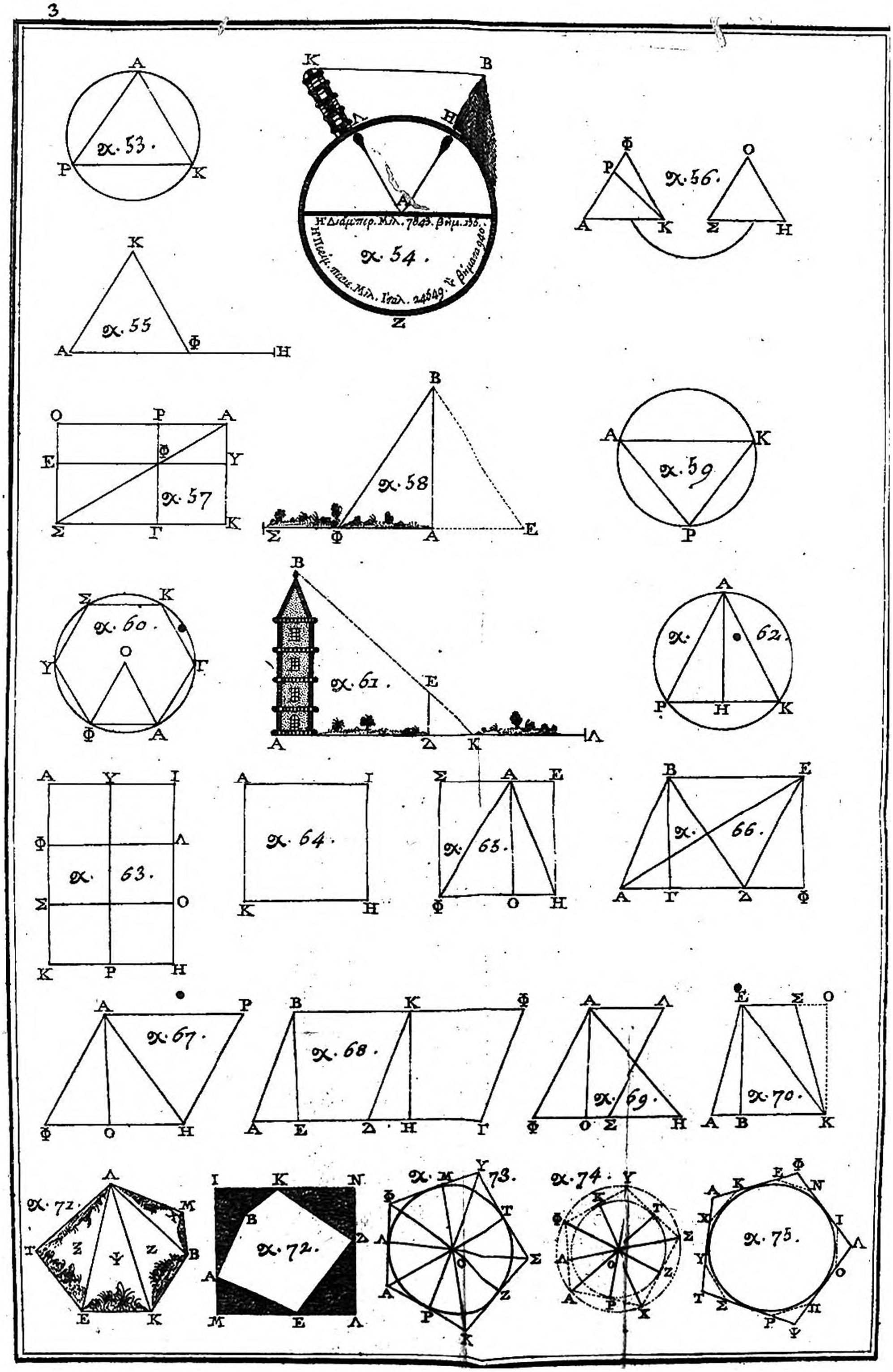
ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Ε'.

ΤΕ'ΛΟΣ.

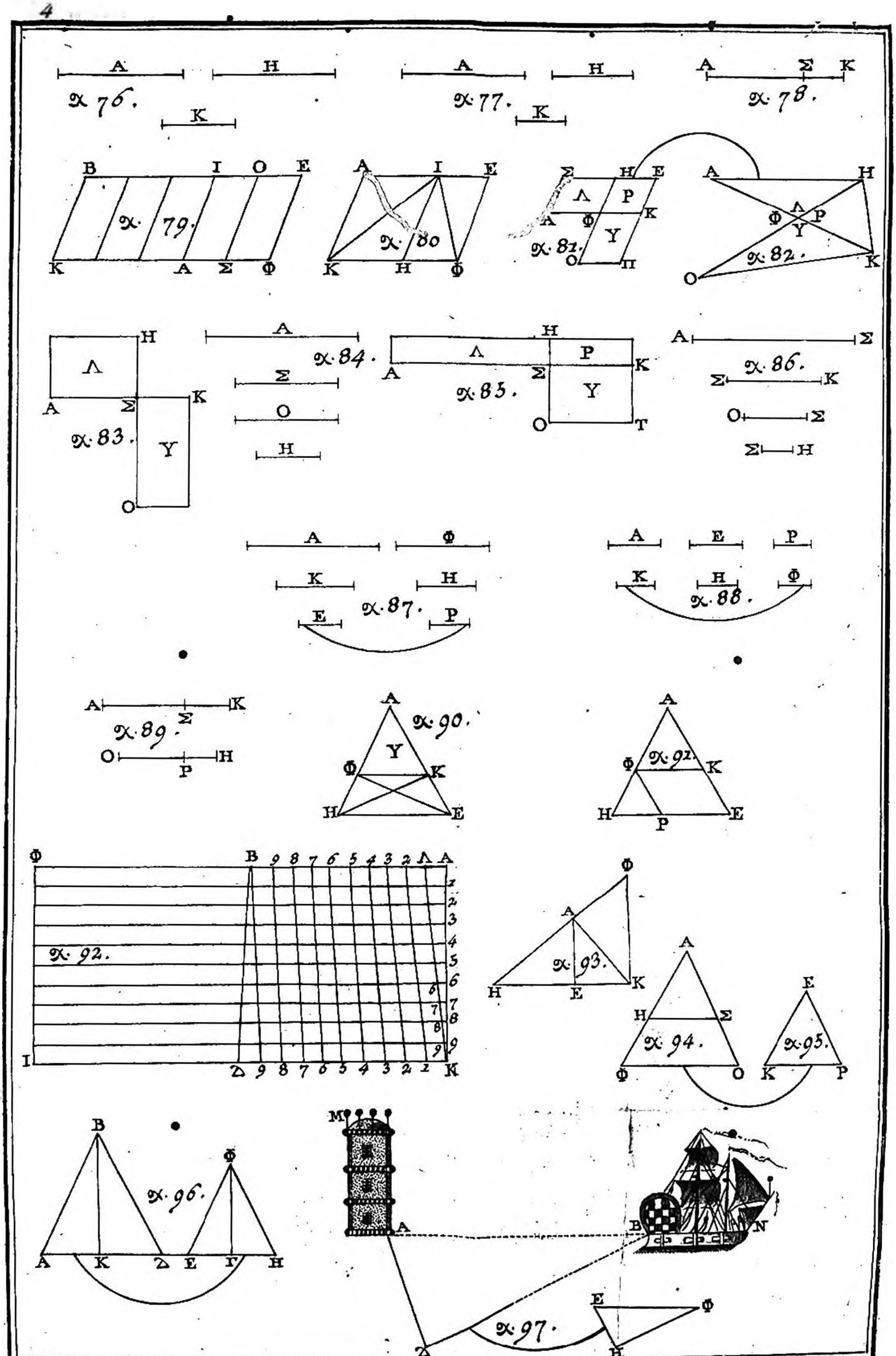
1

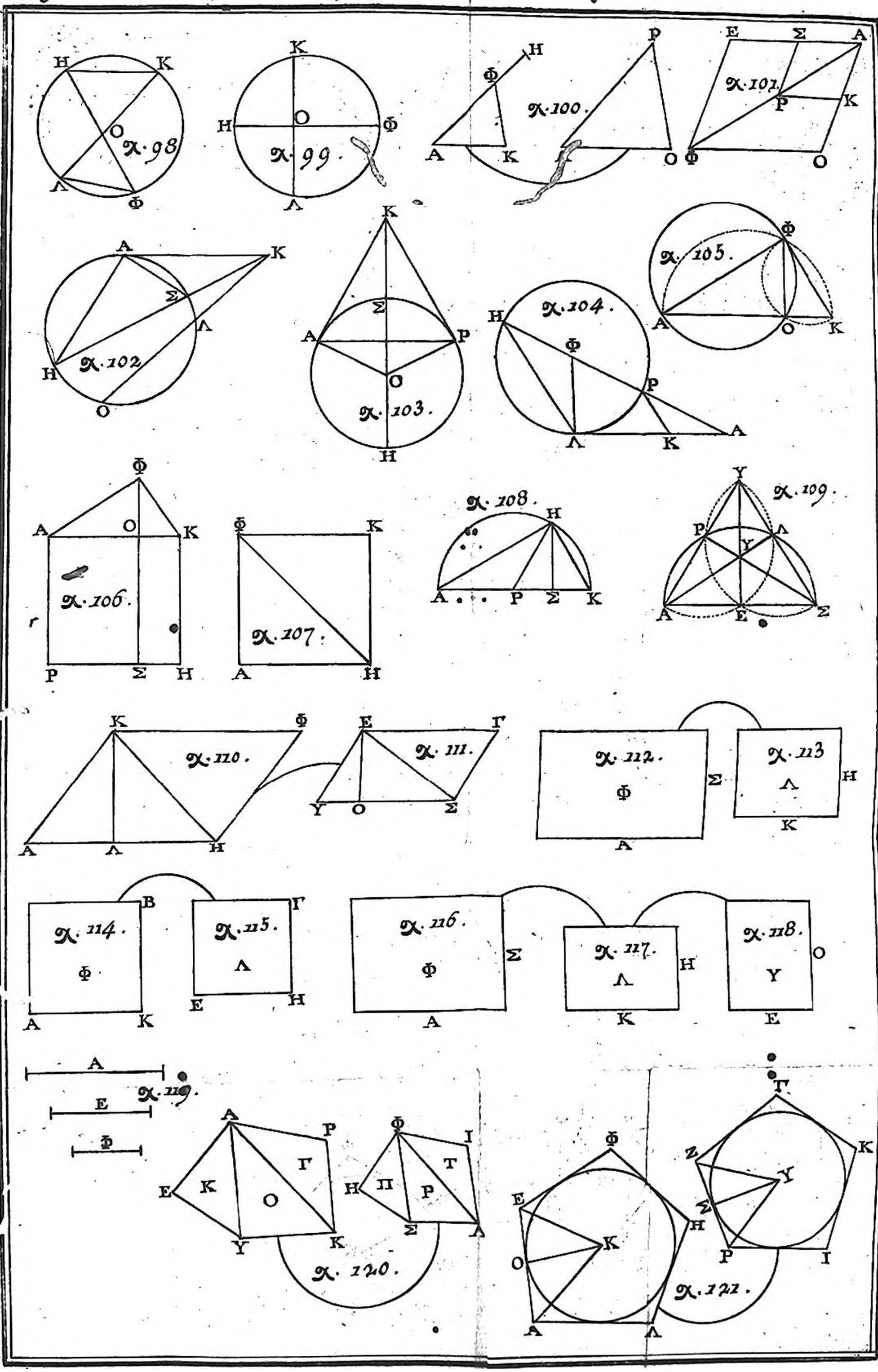

Σχ. 1.
Σχ. 2.
Σχ. 3.
Σχ. 4.
Σχ. 5.
Σχ. 6
Σχ. 7.
Σχ. 8.
Σχ. 9.
Σχ. 10.
Σχ. 11.
Σχ. 12.
Σχ. 13.
Σχ. 14.
Σχ. 15
Σχ. 16.
Σχ. 17.
Σχ. 18.
Σχ. 19.
Σχ. 20.
Σχ. 21.
Σχ. 22.
Σχ. 23
Σχ. 24
Σχ. 25.
Σχ. 26.
Σχ. 27.
Σχ. 28.

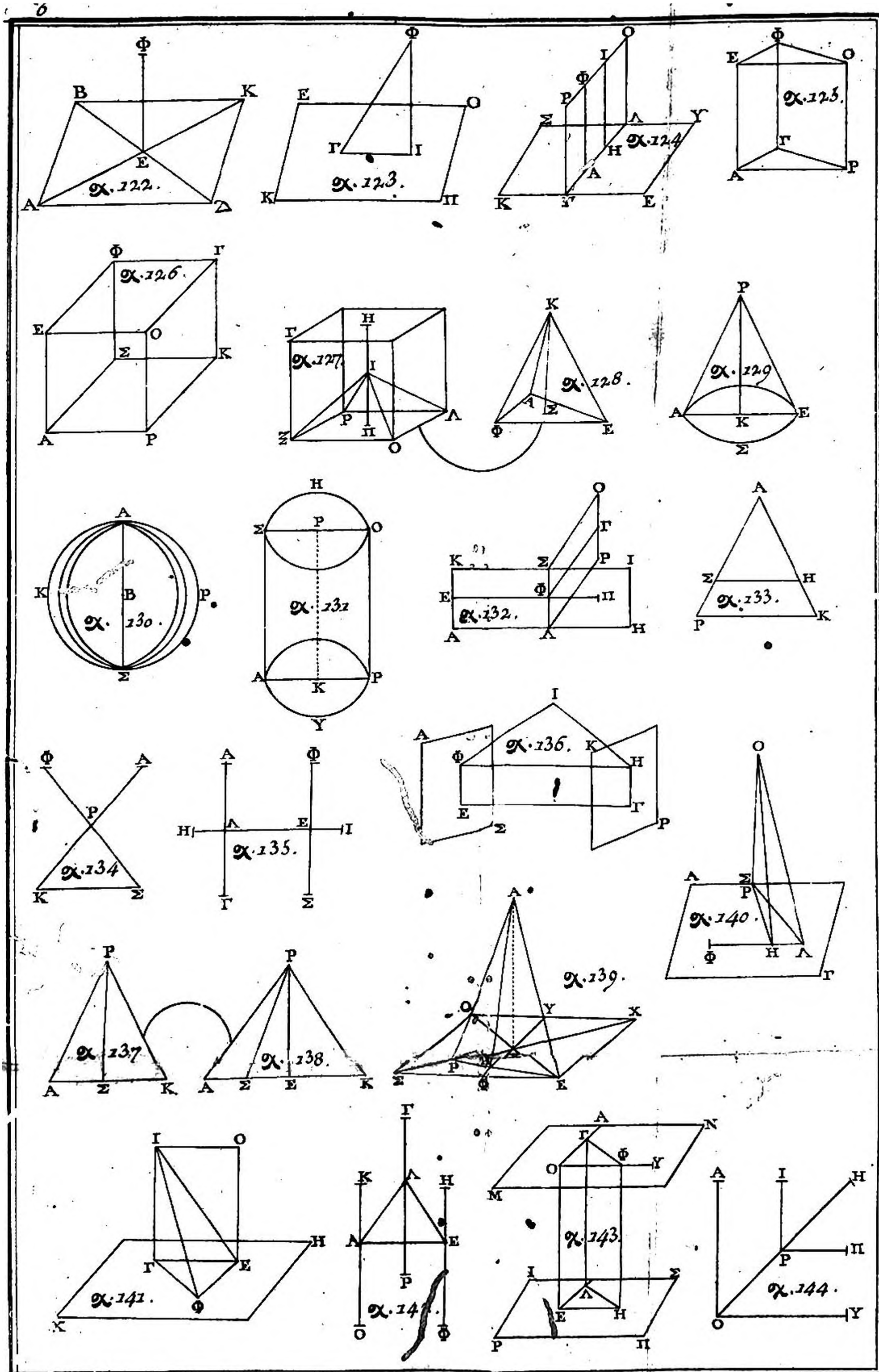

Σχ. 29.
Σχ. 30.
Σχ. 31.
Σχ. 32.
Σχ. 33
Σχ. 34.
Σχ. 35.
Σχ. 36
Σχ. 37.
Σχ. 38.
Σχ. 39.
Σχ. 40.
Σχ. 41.
Σχ. 42.
Σχ. 43.
Σχ. 44.
Σχ. 45.
Σχ. 46.
Σχ. 47.
Σχ. 48
Σχ. 49
Σχ. 50.
Σχ. 51.
Σχ. 52.

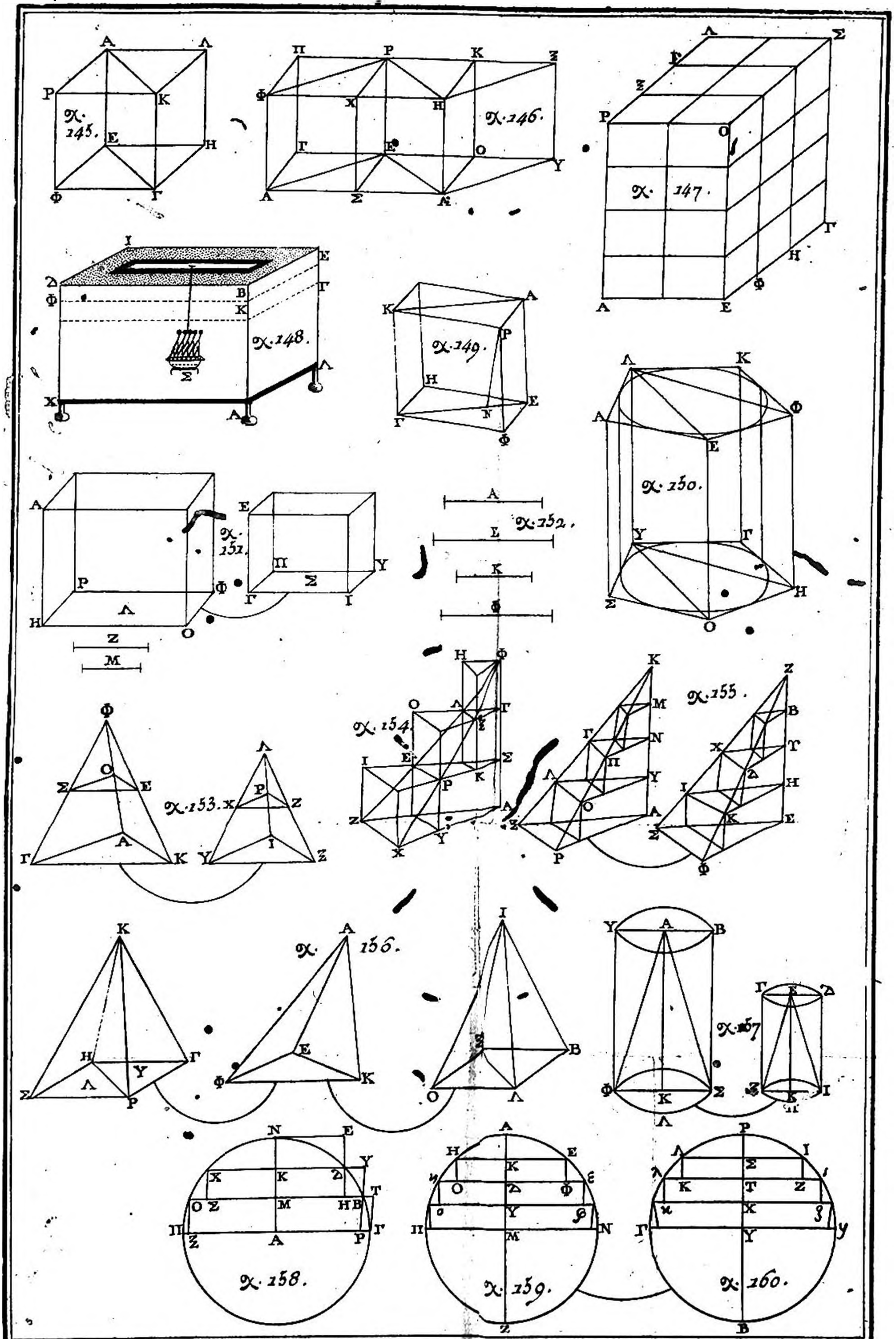

σχ. 53.
Ἡ Διάμετρ. Μιλ. 7843. βημ. 335.
Ἡ Περίμ. περι. Μιλ. Ἰταλ. 24649. ἢ βήματα 940.
σχ. 54.
σχ. 55.
σχ. 56.
σχ. 57
σχ. 58
σχ. 59
σχ. 60.
σχ. 61.
σχ. 62.
σχ. 63.
σχ. 64.
σχ. 65.
σχ. 66.
σχ. 67.
σχ. 68.
σχ. 69.
σχ. 70.
σχ. 71.
σχ. 72.
σχ. 73.
σχ. 74.
σχ. 75.

4


Σχ. 76.
Σχ. 77.
Σχ. 78.
Σχ. 79.
Σχ. 80
Σχ. 81.
Σχ. 82.
Σχ. 83.
Σχ. 84.
Σχ. 85.
Σχ. 86.
Σχ. 87.
Σχ. 88.
Σχ. 89.
Σχ. 90.
Σχ. 91.
Σχ. 92.
Σχ. 93.
Σχ. 94.
Σχ. 95.
Σχ. 96.
Σχ. 97.


Σχ. 98
Σχ. 99
Σχ. 100
Σχ. 101
Σχ. 102
Σχ. 103
Σχ. 104
Σχ. 105
Σχ. 106
Σχ. 107
Σχ. 108
Σχ. 109
Σχ. 110
Σχ. 111
Σχ. 112
Σχ. 113
Σχ. 114
Σχ. 115
Σχ. 116
Σχ. 117
Σχ. 118
Σχ. 119
Σχ. 120
Σχ. 121


σχ. 122.
σχ. 123.
σχ. 124
σχ. 125.
σχ. 126.
σχ. 127.
σχ. 128.
σχ. 129
σχ. 130.
σχ. 131
σχ. 132.
σχ. 133.
σχ. 134
σχ. 135.
σχ. 136.
σχ. 137
σχ. 138.
σχ. 139.
σχ. 140.
σχ. 141.
σχ. 143.
σχ. 144.


Σχ. 145.
Σχ. 146.
Σχ. 147.
Σχ. 148.
Σχ. 149.
Σχ. 150.
Σχ. 151.
Σχ. 152.
Σχ. 153.
Σχ. 154.
Σχ. 155.
Σχ. 156.
Σχ. 157
Σχ. 158.
Σχ. 159.
Σχ. 160.