ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ

ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑ

ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ

ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑ

συγγραφεῖσα μὲν Γαλλιςὶ παρὰ τοῦ

ΑΒΒΑ ΚΑΪΛΛΕ,

Ἐκ δὲ τῆς Γαλλικῆς εἰς τὴν τῶν Λατίνων φωνὴν πρότερον μετενεχθεῖσα, μεθηρμηνεύθη ἤδη παρὰ τοῦ Ἰατροφιλοσόφου

ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ

Ἀσάνους Κεφαλῆνος εἰς τὴν Ἁπλοελληνικήν.

Ἐκ δὲ ταύτης εἰς τὴν Ἑλληνίδα ἐπιδιορθωθεῖσα παρὰ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ

Μιχαὴλ τοῦ ἐκ Λαρίσσης

τύποις ἐκδίδοται εἰς χρῆσιν τῶν Ἑλληνικῶν Φροντιςηρίων.

Ἐπιςασίᾳ τοῦ Ἀρχιμανδρίτου

ΑΝΘΙΜΟΥ ΓΑΖΗ

Μηλιώτου

Ἐν Βιέννῃ τῆς Ἀουςρίας. ͵αωγʹ.

Τύποις Φ. Α. Σχραίμβλ.

Τοὺς Γεωμετρικοὺς ὅρους ἀληθεστάτους ἡγοῦ, ὅτε γε καὶ ταῖς ἄλλαις Ἐπιστήμαις ὑπάρχει σεμνύνεσθαι κἂν κατὰ μικρὸν εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν ἐκ Γεωμετρίας τι συμπορίσωνται.

ΣΥΝΕΣΙΟΣ, Ἐπιστολῇ 13:
πρὸς Πυλαιμένην.

ΤΩ ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΩ ΕΛΛΟΓΙΜΩΤΑΤΩ ΤΕ ΚΑΙ ΘΕΟΦΡΟΥΡΗΤΩ 'ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΩ 'Α-ΓΙΩ 'ΕΛΑΣΣΩΝΟΣ, ΚΑΙ ΔΟΜΕΝΙΚΟΥ.

κυρίῳ κυρίῳ

'Ι Ω Α Ν Ν Ι Κ Ι Ω,

ΤΩ ΣΕΒΑΣΜΙΩΤΑΤΩ ΜΟΙ ΔΕΣΠΟΤΗ!

Τὴν παρȢσαν τῶν Κωνικῶν Τομῶν ἀναλυτικὴν Πραγματείαν, ἣν φέρων πᾶσι τοῖς φιλεπιςήμοσι τῶν Ἑλλήνων πρȢθηκε διὰ τῆς ἐκ τȢ ΛατινικȢ μεταφράσεως ὁ δαιμόνιος ἐκεῖνος 'Ανὴρ Σπυρίδων 'Ασάνης ὁ ἐκ Κεφαλληνίας· εἰς φῶς τὸ ἐκ τȢ τύπȢ ἀγαγεῖν ἔγωγε βȢληθεὶς, ὡς ἂν αὐτὸ τȢτ' εἴη, ὅπερ ἡ ἐκείνȢ προτεθύμηται θεσπεσία ψυχὴ, κοινωφελὴς ἀμέλειτοι ϗ δημόσιος, καθιερώσασθαι ταύτην ἔγνων τῇ Ὑμετέρᾳ Πανιέρῳ Κορυφῇ, ϗ δὴ ἀραρότως Σοὶ πρέψειν ὑπείληφα, ϗ δι' ἅπαν μὲν τὸ περιςειχε͂ν Σε σμῆνος τῶν ἀγαθῶν, ȣ̓χ ἥκιςα δὲ, δι' ἣν ἔχεις πρὸς τὰς Μȣ́σας οἰκείωσιν, ὑπογραμμὸς ἀληθε͂ς ποιμαντορίας καθιςάμενος τοῖς κατὰ Σὲ ποιμαίνειν λαχε͂σιν, εἰ Σοὶ ϗ τοῖς σοῖς τὸν νȣ͂ν προσέχειν κἂν κατὰ μικρὸν ἐθελήσειαν.

Σὺ γὰρ, Πανιερώτατε Δέσποτα, ἅμα τῇ βακτηρίᾳ ϗ τὸ Φρόνημα τὸ τȣ͂ Ποιμένος παραλαβὼν, εἰσάγεις χρισομιμήτως ϗ ἐξάγεις τὰ πιςευθέντα Σοι πρόβατα ἀπό τε ἀπιςίας εἰς πίςιν, ϗ ἐκ τῆς, ἣ πάντα δεινῶς ἐπεῖχεν, ἀχλύος τȣ͂ βραχύ τι, ἵνα μὴ εἴπω μηδόλως, ταῖς Μȣ́σαις ἐνασμενίζεσθαι ἀμβλυωποῦντας τὰ περὶ ταύτας δειλαίως, ἐπὶ τηλαυγῆ τὴν διάγνωσιν τοῦ πάντας ἐκείνας φιλοφρόνως περιθάλπειν, καὶ τῇ αὐτῶν θεραπείᾳ ἐναπογράφεσθαι, λόγοις τε καὶ ἔργοις, καὶ δὴ καὶ τῷ οἰκείῳ ὑποδείγματι πάντας διεγείρων τοὺς ὑπὸ Σὲ, πάντας, εἴπερ ἦν, αὐθημερὸν κατηγλαϊσμένους ταῖς ἐκ τῶν λόγων ἀγλαΐαις θεάσασθαι σπεύδων μεγαλοφρονέστατα. Τρανῶς δὲ διακηρύττει τὸν περὶ ταῦτα ἐξαίσιον ζῆλον Σου φωνὴν μονονοὺκ ἀφιέντα, ἃ καθιδρύεις ἑκασταχοῦ Μουσεῖα, ἐν τοῖς πλείστοις ἐκ Σεαυτοῦ μισθοὺς ἐνιαυσίους τοῖς μουσηγέταις ἐλευθερίως ἀποδιδόμενος, καὶ πάντας ἀφθόνως (τἀναντία δρῶν, οἷς νῦν ἴσμεν ποιοῦντας πολλοὺς τῶν τὰ Σὰ μὲν ἐνεργεῖν ὀφειλόντων, ἐχόντων ἀλλ' οὐ περὶ ταῦτ', οὐκ οἶδ' ὅπως, ὥς γε ϗ ἔχουσι!) πάντας ἀπολαύειν Σὲ τῶν ἀγαθῶν ἀδιαλείπτως παρακαλῶν, αὐτὸς τοῦ ἔργου καθιςάμενος ἡγεμών τε ϗ πρύτανις, ϗ, κατὰ τὸ ἱερὸν λόγιον: Ὁ διψῶν ἐρχέσθω ϗ πινέτω πᾶσι διακελευομενος.

Καὶ οὕτω μὲν δὴ ἐνθουσιωδῶς Σὺ ἔχων διατελεῖς περί τε τὰς Μούσας, ϗ διὰ ταύτας, τοὺς αὐτῶν ἱερομνήμονας· ἐν οἷς δὲ τὸ ἥμερον ϗ γαληνιαῖον τοῦ Σεαυτοῦ ἤθους πρὸς τοὺς πνευματικῶς Σοι ἀρχομένους ἀείποτε ἐπιδείκνυσαι, τὸ πρὸς ἐντυχίαν εὐπρόσιτον, τὸ ἐν λόγοις ἡδὺ, τὸ συμπαθὲς τοῦ τρόπου, τὸ ἐν προςασίᾳ τῶν δεομένων, τὸ μετ᾽ ἐπιεικείας ἄοκνον ἐπὶ παραινέσει τῶν εἰς τοῦτο προσερχομένων Σοι. Ἐν τούτοις δὲ ϗ τοῖς τοιούτοις πάνυ ζωηρῶς ἐν Σεαυτῷ ὑποτυποῖς, ἣν Παῦλος ὁ ἐρανοβάμων πάλαι πρὐσχεδιάσατο πρὸς Τιμόθεον, τὴν τε ἀληθῶς ἐπισκοπῆς προςησομένε ὑποτύπωσιν.

Διὰ ταῦτ' ἒν ϗ τὰ τέτων μακρῷ ἔτι πλείονα, ἃ ἐμοὶ μὲν σεσίγηται εἰκότως, εἴγε ϗ μὴ σιγηθῆναι βελομένῳ τῶν ἀμηχάνων ἂν ἦν τὸ ταῦτ' ἐν ἐπιςολίῳ βραχεῖ ἐπ' ἀκριβὲς διεξιέναι. Εἰσὶ γάρ τοι εἰσὶ δήπε

ἀρεταὶ μεγάλαι πολύμυθοι
βαιὰ δ' ἐν μακροῖσι ποικίλλειν, ἀκοὰ σοφοῖς. Ὁ δὲ καιρὸς ὁμοίως
παντὸς ἔχει κορυφάν.

Οὐδεὶς μέντοι ἐςιν, ὧν ἄρχεις πνευματικῶς, ὃς μὴ τὰ Σὰ διαῤῥήδην πρὸς τὸν πέλας διαθρυλλεῖ, ἄλλος δ' ἄλλο τῶν Σῶν σφίσιν αὐτοῖς διανειμάμενοι δι' εὐφήμε γλώττης ἄγειν ἅπαντα πάντες σπουδάζουσιν, ἀνθ' ὧν αὐτοῖς κεχαρισμένα ϗ ἐν εὐχῇ μυρία ποιῶν διατελεῖς: διὰ ταῦτα, φημὶ, τὴν ἐπισημονικὴν τήνδε Δέλτον ἀναθέσθαι Σοι ἔγνωκα, Δέσποτα Πανιερώτατε. Τίνι γὰρ ἄλλῳ τὰ τῶν Μουσῶν ἀνατεθείη, εἰμὴ τῷ μουσοτρόφῳ, ϗ φιλομούσῳ; Τίνι δὲ τὰ χάριν τῶν ὁμογενῶν φιλοπονηθέντα, ἢ ᾧπερ φροντὶς, ὡς εἰπεῖν, αὕτη, τὰ τοῦ κοινοῦ τῶν ὁμογενῶν βελτιοῦν, ὡς ἂν ἔχοι δυνάμεως;

Οὐμὴν ἀλλὰ ϗ εἰς ἀσφάλειαν τῆς Βίβλου καλῶς, ὡς ἐμαυτὸν πείθω, τὰ τῆς ἀναθέσεως προμεμήθευται, ὡς ἂν ὑπὸ τῇ Σῇ εὐλογίᾳ περιφρουροῖτο, ϗ τῶν τοῦ Φθόνου ἰοβόλων βελῶν ἄτρωτος διασώζοιτο. Εἰσὶ γὰρ ἐπιεικῶς ψυχροὶ πάνυ τόγε νῦν ἔχον τῶν ἡμετέρων οἱ πλεῖστοι, οἵ γε τὴν ῥομφαίαν αὐτῶν ςιλβώσαντες, ϗ τόξον ἑαυτοῖς κατὰ τὸ τȣ̃ Πανδάρȣ ἀναλαβόντες κατὰ πασῶν ὁμοίως φέρονται τῶν ἐκδιδομένων Βίβλων, μικρὰ ἐν αὐταῖς ἀγενῶς ἀνακρίνοντες, ϗ ἀκόλȣς, τὸ τȣ̃ ἔπȣς, αἰτȣ̃ντες, ἐκ ἄορας, ȣ̉ δὲ λέβητας. Σκοπȣ̃σιν ȣ̃ν τὰ πλείω, ὅτι μὴ κανόνι τῷ γραμματικῷ ἐπ' εὐθείας βαίνει τὰ τῆς συντάξεως, ἢ ὅτι ἄρα φράσει ἡ μὲν ὑψηλῇ ϗ ἀήθει, ἡ δὲ χαμερπεῖ ϗ πεπατημένῃ, ἡ δ' ἄλλως ἢ ὡς αὐτοῖς δοκεῖ, ἐκπεφράδαται, ἢ δι' ὅ,τιȣ̃ν τοιȣτῶδες τύχοιεν τὰ βέλη ἀποτοξεύοντες, δι' ὧν τὰ τῶν ἄλλων κακῶς λέγȣσι, κλέος ȣ̉ τὸ τυχὸν σφίσιν οἰόμενοι περιέσεσθαι, ȣ̉ δι' ὧν βελτίȣς ἐν βελτίοσιν αὐτοὶ φανῆναι πειράσονται. Συχνοὶ δ' ἕτεροι, τȣ́των δὴ τῶν περισσῶν τῇ σοφίᾳ, ϗ αὐτῇ τῇ ὕλῃ τῶν περιεχομένων ἐπεμβαίνοντες, βαθυτέρων τραυμάτων διὰ βελῶν ὀξυτέρων ἐργάται ἀποκαθίςανται, ὧν ἐμοὶ μέλει μικρὸν ἔν γε τῇ παρέσῃ Πραγματείᾳ. Αἰτιάσθων γὰρ, εἰ ἄρα δοκοφροσύνης ἕτως ἡττῶνται, τὸν περίπυςον Συγγραφέα. Ἀλλὰ ταῦτα μὲν παρεκβατικώτερον πρὸς τέτες.

Σὺ δὲ Πανιερώτατε Δέσποτα, εὐμενῶς ἀποδεξάμενος τ' ἀνάθημα εὖξαι μὲν τοῖς τετὶ μετελευσομένοις εἰς ὄνησιν ἀπολαῦσαι τῶν ἐν αὐτῷ, ἱκανῶς τά τε τῆς Γεωμετρίας, ϗ δὴ ϗ τὰ τῆς Ἀλγέβρας προσοιχειωθεῖσιν· ἐπεὶ ἄλλως ἀνόνητα διαμοχθήσεσι, τὰ σύγκλωςα συγκλωθειν, τὸ τε λόγε, ἀνηνύτως διαπειρώμενοι. Εὖξαι δὲ ϗ τῷ περικλεεῖ, καὶ κοινωφελεῖ Μμεταφρασῇ ἐνδελεχεῖς διὰ τῶν εὐκλεῶν αὐτȣ͂ πόνων τὰς πρὸς τὸ δύςηνον ἡμῶν γένος ἐπικȣρίας αὐτȣ͂, ὃς μόνος ἁπάντων καὶ γράφων καὶ διδάσκων προθύμως (καί τοι πολλοῖς περιςατέμενος τοῖς ἐκ τȣ͂ ἀχθηρȣ͂ αὐτȣ͂ ἐπαγγέλματος) τὴν ἐπὶ τὰ μαθηματικὰ ὄργια τοῖς καθ' ἡμᾶς Μȣσείοις ἐπωφελῶς ὡδοποίησεν. Εὖξαι δὲ τέως κἀμοὶ τῷ ἐυτελεῖ, εἴ τινα κἀγὼ τὴν ὄνησιν συνεισήνεγκα διὰ τῆς τȣ͂ Βιβλίȣ μετασυντάξεως, ὅπως κρείττων φανείην τῶν ἐκ τῶν πικρῶν ἑταστῶν ἐλέγχων καὶ κατακρίσεων, ἢ, τόγε μετριώτερον εἰπεῖν, συγγνώμης ἀξιωθείην, ἐν οἷς μοι ὅλως περὶ τὴν βίβλον πεπλημμέληται. Σοὶ δὲ, Πανιερώτατε, καὶ χαριτοκόσμητε Ἱεράρχα, ἐπιβραβεύοι τὸ Θεῖον, ἀντὶ τῶν πολλῶν, καὶ παντοδαπῶν,

ῶν ἀδιαλείπτως ποιεῖς ἀγαθῶν, ζωὴν μακραίωνα, ὑγιείαν εὐδαίμονα, στερέωσιν ἀστεμφῆ ἐπὶ τοῦ Πανιέρου Σου σκίμποδος εἰς εὖχος μὲν ϗ σέμνωμα τοῦ ὀρθοδόξου Ποιμνίου Σου, εἰς χαρὰν δὲ ϗ ἀγλαΐσμα ἐμὸν τοῦ ταπεινοῦ δούλου Σου.

Τῆς Ὑμετέρας Θεοφρουρήτου Πανιερότητος

Ὑποκλινέστατος δοῦλος

Ἐν Τζαριτζάνῃ. αωϟ
Ἰουλίου. α.

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
Μιχαήλου Λαρισσαῖος.

Εἰς τὸν Πανιερώτατον καὶ ἐλλογιμώτατον ἅγιον Ἐλασσῶνος Κύριον Ἰωαννίκιον Ἐπίγραμμα Ἡρωελεγεῖον.

Λύχνον λαμπετόωντα, φαάντατον ὄμμα Σε, σῶμα
  Εὐσεβέων, θεόφρων ἔλλαχεν Ἀρχιθύτα,
Καὶ φαενὸν βιότοιο τεῦ Σέλα αἶψα φαάνθη,
  Ὥς πυ Χρυσὸς ἔφα, τῦ λάτρις ἐσσὶ μέγας.
Τύνη γὰρ σοφίῃ φαίνεις μάλα, τὴν ῥα πιφαύσκων.
  Χειρὶ ζαπλύτῳ δείμαο γυμνάσια.
Οἴκτῳ, θεσμοσύνῃ φαίνεις Μάκαρ, ἐν δέ τε Ναῶν
  Κόσμῳ, τοῖσι λεὼς λάμπεται εὐσεβέων.
Ὥστε καὶ ἐκ κραδίης μέγα λίσσεται, ὄφρα σαώζοι
  Ὄμματος ὡς γλήνην, ὄμμα Σε παντέφορον.

Τῆς Ὑμετέρας Πανιερότητος

εὐλαβὴς δῦλος
Κωνσταντῖνος Ἱερεὺς
καὶ Οἰκονόμος τῆς Τζαριτζάνης.

Εἰς τὸν Ἰατροφιλόσοφον Μεταφραστήν.

Ἡρωελεγεῖον.

Καὶ Διὸς ἀθανάτοιο Σὺ φέρτερος, ἠδέ τε Φοίβου

Ἀτρεκέως τελέθεις, Διογενὲς Σπυρίδων.

Τῶν γὰρ, ὁ μὲν προέηκεν ἑοῖο ἀπὸ κρατὸς αὔτως

Παλλάδ' Ἀθηναίην! τὴν τεῷ αὐτὸς ἔθου.

Αὐτὰρ ὅ, Μουσῶν, τὰς ῥ' ἀγέμεν λάχε, νόσφι λιασθεὶς

Μείρακι θητεύει κάκτανεν, ὅν γε Πέτρῳ.

Αἱ δ' αὖ, αἳ ψάγ' ἵκοντο σέθεν κάρα, τὸν προλιποῦσαι.

Τοὔνεκα Φοῖβος ἔῃς. Δεῖγμα δ' ἄρ' ἥδε Βίβλος.

Ἀλλ' Ἄνα ὑψιμέδων, τόδε μοι κρήηνον ἐέλδωρ.

Ὑγρὰ κέλευθα βίου σῷς Ἀσάνης περάσαι!

ὁ Σπαρμιώτης

Πλ. Γερμανός.

Τῶν

ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

ἈΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ. Α.

Προϋπάρχουσαι γνώσεις τῶν Καμπύλων ἐν γένει, καὶ ὅπως ἀναλυτικῶς ἐκτίθενται τὰ ἀρχοειδέστερα αὐτῶν ἰδιώματα, ἡ μέθοδος.

§. 1.

Ὁ,τιοῦν στοιχεῖον τὸ α, φέρε, παρίστησι ποσότητα ἁπάσης ἄλλης, τῆς β, διακεκριμένην, ἥτις ἁπλῆν ἡμῖν ἔννοιαν διεγείρει· ἀλλ' ἡ $\frac{1}{3}$α, σύνθετον ἐκ δυεῖν ἁπλῶν, ὧν ἡ μὲν, ὅτι τὸ ποσόν ἐστιν α, οὐχὶ δὲ μεῖζον, ἢ ἔλασσον αὐτοῦ, ἡ δὲ, ὅτι τὸ $\frac{1}{3}^{\nu}$ αὐτοῦ, ἀλλ' οὐ τὸ $\frac{1}{2}$, ἢ τὸ $\frac{1}{4}^{\nu}$, παριστάνουσιν· Ἀλλὰ καὶ αἱ ποσότητες α^2, α^3, κτ. σύνθετον σημαίνουσιν ἔννοιαν. Δηλοῦσι γὰρ τὸ α ἐφ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιάζεσθαι, ἢ ἐπὶ τρίτην αἴρεσθαι δύναμιν διὰ διπλοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Σύνθετοι δὲ ὡσάντως ἔννοιαι παρίστανται ϗ διὰ τῶν, $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$, ϗ $\alpha+\alpha$, $\alpha+\alpha+\alpha$, ϗ $\alpha-\frac{1}{2}\alpha$, ϗ 5α, $\beta\alpha$, ϗ $\frac{\alpha}{5}$, $\frac{\alpha}{\beta}$. Ἐπεὶ τοίνυν ἑκάστη μὲν αὐτῶν ἔκθεσις διάφορος, ἅπασαι δὲ περὶ τὸ αὐτὸ ποσὸν α, στρέφονται, τούτου χάριν ἡ διάφορος ἔκθεσις, α^2, $\sqrt{\alpha}$, $\alpha+\alpha$, $\alpha-\frac{1}{2}\alpha$, 5α, $\frac{\alpha}{5}$, κτ. κληθήσεται γενικῷ ὀνόματι ΣΥΝΕΚΘΕΣΙΣ τοῦ α ποσοῦ. Οἱ γὰρ ἐκθέται, τὰ ῥιζικά, οἱ συμποιηταί, κτ. Οὐκ ἐῶσιν ἁπλῶς θεωρεῖσθαι τὸ ποσὸν α.

§. 2.

Σημεῖον ἅπαν ἐν ἐπιπέδῳ κείμενον διωρισμένον τόπον κατέχει. Ἀπέχει γὰρ μᾶλλον, ἢ ἧττον τῶν τεσσάρων γραμμῶν, ὑφ' ὧν περατοῦται τὸ ἐπίπεδον, ἤ, ὃ δὴ ταὐτόν, τῶν δυεῖν γραμμῶν, αἳ ὑπ' ἀλλήλων διατεμνόμεναι παράλληλοί εἰσι τοῖς τοῦ ἐπιπέδου πέρασιν. Ἔθος δὴ ἐν τοῖς γεωμετροῦσιν ἐπὶ διορισμῷ σημείου τινὸς τοιᾳδίτινι
Σχ. 1. χρῆσθαι μεθόδῳ. Ἔστω τεθῆναι τὸ σημεῖον Μ ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΣ θέσει δοθεῖσαν, ἀπέχον αὐτῆς

διαςήματι ἴσῳ τῇ ΔΕ, πρὸς δὲ τὰ λαιὰ ἀπέχον τῆς ΣΖ διαςήματι ἴσῳ τῇ ΒΓ· δῆλον ȣ̃ν, ὅτι δεησόμεθα κατασκευῆς τοιαύτης. Ἤχθω παράλληλος τῇ ΑΣ ἡ ΘΗ, διὰ καθέτȣ ἴσης τῇ ΔΕ· ἅπαν ἄρα σημεῖον τῆς ΘΗ ἀπέχει τῆς δοθείσης ΑΣ κατὰ διάςημα τὸ ΔΕ· ταῦτ' ἄρα τὸ Μ ἐπίτινος αὐτῆς σημείȣ κεῖσθαι ἀνάγκη. Ἤχθω δὲ προσέτι κατὰ τὰ λαιὰ τῆς ΣΖ παράλληλος αὐτῇ διὰ καθέτȣ ἴσης τῇ ΒΓ, ἡ ΚΙ· ἅπαν ἄρα σημεῖον τῆς ΚΙ ἀπέχει τῆς ΣΖ διαςήματι ἴσῳ τῇ ΒΓ· ταῦτ' ἄρα τὸ Μ ἐπί τινος αὐτῆς σημείȣ ὑπάρχει· ἐπάναγκες τοίνυν τὸ Μ πίπτειν ἐπὶ κοινȣ̃ σημείȣ τῶν δύω εὐθειῶν ΘΗ, ΚΙ, εἴτ' ȣ̃ν ἐπὶ τȣ̃ τῆς αὐτῶν ὑπ' ἀλλήλων διατομῆς.

§. 3.

Ἐὰν, τῶν διαςάσεων τȣ̃ Μ σημείȣ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΣ, ΣΖ, δοθεισῶν, μὴ ἅμα προσδιορισθῇ πρὸς ὅ,τι μέρος αὐτῶν δέοι τεθῆναι, ἡ αὐτȣ̃ θέσις ἔςαι ἀόριςος· εἴγε δυνήσεται τηνικαῦτα τεθῆναι παραπλησίως ἐφ' ἑνὸς τῶν τεσσάρων τόπων Μ, m, μ, m. Ὅπως ȣ̃ν ἀμφιγνοίας εἴημεν ἐκτὸς, εἴθιςαι τοῖς Γεωμέτραις τȣ̀ς ἐναντίȣς τόπȣς τοῖς ἐναντίοις τῶν σημείων + — διαγνώσκειν. Καλȣ̃νται δὲ ἐναντίοι τόποι τὸ ὕπερθεν, ϗ ἔνερθεν γραμμῆς ἡςτινοσȣ̃ν ὡς ἀρχῆς θεωρεμένης, ἢ τό,τε πρὸς τὰ δεξιὰ, ϗ τὸ πρὸς τὰ λαιὰ αὐτῆς· οἷον, τεθείσης τῆς ΑΣ εἰς πέρας (καλεῖται δὲ πέρας. ἡ ϗ ἀρχὴ τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ὕπερθεν, ἢ ἔνερθεν ἔχϐσιν ἐπ' αὐτῆς ἀχθῆναι ἤτοι πρὸς ὀρθὰς, ἢ πλαγίως) ἐὰν πρὸς αὐτὴν παρϐληθῶσιν αἵτε ὑπὲρ αὐτὴν, ϗ ὑπ' αὐτὴν ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι, αἱ μὲν αὐτῶν Θετικαὶ, αἱ δ' Ἀποφατικαὶ κληθήσονται· ϗ ἢν αἱ ὕπερθεν κληθῶσι Καταφατικαὶ, τὸ ἀποφατικὸν ταῖς ἔνερθεν ἀπονεμηθήσεται ὄνομα, ϗ ἀνάπαλιν. Οὐδὲν δὲ διαφέρει τὸ κατ' ἀρχὰς, ὁποτέραν ἂν τϐτων τῶν ἀντικειμένων τάξεων θῶμεν εἰς καταφατικὴν, ἢ ἀποφατικήν· ἀλλ' ἅπαξ προσδιορισαμένοις πρὸς τὸ δοκϐν, ἐν τοῖς ἐφεξῆς μεταλλάττειν αὐτῶν τὴν κλῆσιν ϗ φύσιν ἐπὶ τῶν ὑπολογισμῶν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι, ᾧ παρίσαται τὸ Πρόβλημα, ϐκ ἐπιτρέπεται. Ὡσάυτως δή. ἐὰν ἡ ΣΖ τεθῇ εἰς πέρας, ἢ ἀρχὴν τῶν δύω τάξεων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀχθῆναι δυναμένων, τῆς μὲν, ἀπὸ δεξιῶν, τῆς δ', ἀπ' ἀρισερῶν, πρὸς ἀντιδιασολὴν, αἱ μὲν, κληθήσονται Καταφατικαὶ, αἱ δ' ἕτεραι Ἀποφατικαί.

§. 4.

Ἐκ τῆς περαιτέρω παρατηρήσεως τϐ ἐν (§. 2.) προβλήματος, ϗ τῆς κατασκευῆς συνάγεται, ὡς, ἵνα διορισθῇ ὁ τȣ̃ σημείȣ Μ τόπος, ἐπάναγκες πρότερον ἀγαγεῖν τὰς ΘΗ, ΚΙ, παραλλήλȣς ταῖς δυσὶ πρωτευȣ́σαις, θέσει δοθείσαις ΑΣ, ΣΖ· ϗ, ἐὰν μεταξὺ μὲν τῶν παραλλήλων ΑΣ, ΘΠ, ἀχθῇ κάθετος ἡ ΜΓ, μεταξὺ δὲ τῶν ΣΖ, ΚΙ, ἡ ΜΡ, ἑκατέρα ἐκ τȣ̃ Μ σημείȣ, αὗται δὴ ἴσαι ἔσονται ταῖς δοθείσαις διαςάσεσι ΔΕ, ΒΓ. Ἐπεὶ δὲ ὀρθαί εἰσιν αἱ γωνίαι ΤΜΠ, ΥΜΡ, κοινῇ ἀφαιρεθείσης τῆς ΤΜΡ, καταλείπονται ἴσαι αἱ ΥΜΤ, ΡΜΠ· τὰ ἄρα ὀρθογώνια τρίγωνα ΥΓΜ, ΠΡΜ ὅμοιά εἰσι, ϗ δὴ ΜΥ: ΜΠ: :ΜΓ: ΜΡ, εἴτ' ȣ̃ν ὡς ΔΕ: ΒΓ· τὰ μέρη δηλονότι ΜΥ, ΜΠ τῶν παραλλήλων συντελȣ̃σι τῷ τȣ̃ Μ σημείȣ διορισμῷ, ὅσα δὴ ϗ αἱ κάθετοι· ἀλλ' ἐπεὶ ΣΠ=ΥΜ, ὁ λόγος ἄρα ΜΠ: ΣΠ συντείνει εἰς διορισμὸν τȣ̃ σημείȣ Μ, εἴτ' ȣ̃ν ὁ λόγος, ὃν ἔχει τὸ ΣΠ μέρος τῆς ἑτέρας τῶν πρωτευȣσῶν, τὸ μεταξὺ τῆς ἀρχῆς Σ, ϗ τῆς ΜΠ παραλλήλȣ θατέρα τῶν πρωτευȣσῶν περιλαμβανόμενον, πρὸς αὐτὴν τὴν παράλληλον ΜΠ, συντελεῖ τῷ τȣ̃ σημείȣ Μ διορισμῷ· ϗ τȣτὶ δὲ δῆλον, ὅτι ἡ ἑτέρα τῶν πρωτευȣσῶν ΑΣ, ᾗ παραλλήλως ἄγεται ἡ ΘΠ ἐπὶ τῆς πρωτευȣ́σης ΣΖ, εἰς διορισμὸν τȣ̃ Μ ὅλως ἐςὶν ἀσυντελής.

§. 5.

Καμπύλη ὁποιαδήποτε ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφομένη, ὡς σειρὰ θεωρεῖται τῶν ἐκ τῶν ἀκαριαίων προβάσεων ἰχνῶν, ἄγε σημεῖον συνεχῶς κινȣμενον ἐν ἐπιπέδῳ σημειοῖ διά τινος ἀπαρατρέπτȣ κανόνος. Ἐφ' ᾧ ȣ̃ν συςῆναι τὴν φύσιν τῆς Καμπύλης, ϗ τὰ αὐτῆς ἰδιώματα, ἀνάγκη ταύτην τὴν σειρὰν, πρόοδον
Σχ.2. εἶναι σημείων Μ, Μ προσδιοριζομένων τῷ αὐτῷ τρόπῳ κατάγε τὴν σχέσιν, ἣν ἔχȣσι πρὸς εὐθείας δύω τινὰς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὑπ' ἀλλήλων διατεμνομένας, (§. 2.) οἷαι αἱ ΑΣ, ΣΠ. Ὁ δὲ κανὼν ȣ̃τος, ὃς ἀείποτε ἐν τῇ κινήσει τȣ̃ σημείȣ τηρεῖται, ἐκτίθεται διὰ ςαθερȣ̃ λόγȣ, ὃν ἔχει ὡρισμένη τις συνέκθεσις τῆς εὐθείας ΜΠ πρὸς ὡρισμένην τινα συνέκθεσιν τῆς συςοιχȣ́σης εὐθείας ΣΠ. Ἐπεὶ δὲ ἀπαράβατός ἐςιν ἀείποτε ὁ ἐν τῇ καταγραφῇ τῆς Καμπύλης τὸ κινȣμενον σημεῖον Μ διευθύνων κανὼν, ἐπάναγκες ταύτην παρεκτρέπεσθαι ἐν γωνίαις ἐλαχίςαις (§. 6 καὶ 82 Γεωμετρίας) (α)· ὁ δὲ ςαθερὸς λόγος ἐκδηλȣ̃ται δἰ ἐξισώσεως.

(α) Ἡ' τȣ̃ Συγγραφέως γεωμετρικὴ πραγματεία ἐκ τῆς τῶν Λατίνων εἰς τὴν Ἑλληνίδα δἰ ἀνδρὸς ἐλλογίμȣ μεταφρασθεῖσα, ὑπὸ τȣ̃ καὶ τὰ παρόντα μεταφράσαντος Γατροφιλοσόφȣ, ἐκδοθήσεται ὅσον ȣ̃πω, ἢν δῷ Θεός.

Ἡ Ἀλγεβραϊκὴ ἐξίσωσις ἡ ἐκτιθεῖσα τὸν ςαθερὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ αὐτὴ συνέκθεσις μιᾶς τινος εὐθείας ΜΠ, πρὸς τὴν αὐτὴν συνέκθεσιν τῆς συςοιχέτης εὐθείας ΣΠ, *Ἐπὶ τῆς Καμπύλης Ἐξίσωσις*, καλεῖται. Ἡ δ' εὐθεῖα, ἐφ' ἣν ἀποπερατῶνται ἅπασαι αἱ παράλληλοι, *Γραμμὴ τῶν Ἀποτετμημένων* καλεῖται. *Ἀποτετμημέναι* δὲ τὰ αὐτῆς μέρη ΣΠ, ΣΠ τὰ ἐμπεριλαμβανόμενα μεταξὺ τοῦ σημείου Σ (ὃ ἈΡΧΗ τῶν *Ἀποτετμημένων* καλεῖται, προσδιοριζόμενον ὑπὸ τῆς συμβολῆς τῆς εὐθείας ΑΣ, καὶ τῆς Ἀποτετμημένης ΣΠ) καὶ τῶν τῇ αὐτῇ ΑΣ παραλλήλων ΜΠ, ΜΠ, αἳ δὴ ΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ καλοῦνται.

§. 6.

Ληφθήτω δὴ ἡ κυκλικὴ περιφέρεια εἰς παράδειγμα, διὰ τὸ εἶναι ταύτην ἁπλουςέραν πασῶν τῶν Καμπύλων, καὶ ἔςω σΜΣ ἡμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἡ σΣ· Δῆλον οὖν, ὡς, εἰ ἐξ ὁτινοσοῦν σημείου Μ καταχθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου κάθετος ἡ ΜΠ, ἀεὶ ἔςαι $\text{ΜΠ}^2 = \text{ΣΠ}\cdot\text{Πσ}$. Τιθεμένης ἄρα τῆς μὲν Σσ εἰς εὐθεῖαν τῶν Ἀποτετμημένων, τοῦ δὲ Σ σημείου, εἰς Ἀρ- Σχ. 3.

Εἰς ταύτης οὖν, τῆς Ἑλληνικῆς φημὶ, τοὺς Παραγράφους παραπέμπεται ὁ φιλεπιςήμων Ἀναγνώςης, ἐν ταῦθα τε, καὶ ἐν τοῖς ἐφεξῆς.

χὴν αὐτῶν, ἡ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἐξίσωσις ἐκφρασθήσεται οὕτω. „Τὸ ἀφ' οἱασδήποτε Τεταγμένης ΜΠ „τετράγωνον ἐξισοῦται τῷ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης „ΣΠ, ϗ τοῦ τῆς διαμέτρου καταλοίπου μέρους Πσ, πα„ραγομένῳ". Ἐὰν δὲ τεθῇ $\Sigma\sigma = \alpha$, $\mathrm{M\Pi} = \gamma$, $\Sigma\Pi = \chi$, ἔϛαι $\Pi\sigma = \alpha - \chi$, ϗ δὴ ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις διαταχθήσεται οὕτως $\gamma\gamma = \alpha\chi - \chi\chi$, ἥτις ἐϛὶν ἡ ἐπὶ τοῦ κύκλου, εἴγε τὸ ἐπὶ τοῦ πρώτου μέλους τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης, εἶτ' οὖν (§. 5.) ἡ αὐτὴ συνέκθεσις τῆς Τεταγμένης ἐξισοῦται ἀεὶ τῷ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης, ϗ τοῦ καταλοίπου τῆς διαμέτρου μέρους παραγομένῳ, εἶτ' οὖν ἀεὶ ἐξισοῦται τῇ αὐτῇ συνεκθέσει τῆς Ἀποτετμημένης. Ἐπιτομῆς δὲ χάριν εἴθιϛαι τὰς μὲν Ἀποτετμημένας διὰ τοῦ χ, τὰς δὲ Τεταγμένας διὰ τοῦ γ, παριϛάνειν.

§. 7.

Ἐκ τῶν ῥηθέντων δῆλον, ὅτι τῇ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἐξισώσει τρεῖς ἐνυπάρχουσιν αἱ διάφοροι ποσότητες α, γ, χ, ὧν ἡ μὲν α ὡρισμένη τε, ϗ διδομένη ἐϛὶ, ϗ ἀεὶ ϛαθερὰ, ἐξ οὗ ϗ τουτὶ τὸ ϛοιχεῖον κεκλήρωται· αἱ δὲ γ, χ ἐν διαφόροις τόποις τοῦ κύκλου διαφέρουσιν ἑαυτῶν, δι' ὃ ϗ ἀόριϛοί εἰσι, ϗ ζητούμεναι· διὰ ταῦτ' οὖν, κατὰ τὴν φύσιν τῶν ἀορίϛων προβλημάτων, τὴν ἑτέραν αὐτῶν πρὸς τὸ δοκȢν προσδιορίσαϑαι ἀνάγκη, ἵνα γνωϑῇ ἡ ἑτέρα. Ἐκ δὲ τȣτȣ ἔξεσι τὴν κυκλικὴν περιφέρειαν καταγράψαϑαι, ὡσαύτως δὲ ϗ τὰς λοιπὰς τῶν Καμπύλων. Ἐν Ȣν τῷ κύκλῳ, Ȣσης τῆς a ποσότητος ἀτρέπτȣ, ϗ ὑποτεϑείσης $=10$ (ὡς εἴτις προβάλοιτο κύκλον καταγράψαϑαι, Ȣ ἡ διάμετρος $=10$ ποσὶ, φέρε) ϗ τῆς Σσ γραμμῆς τῶν Ἀποτετμημένων, ἐν ὁποιωδήποτε ἀριϑμῷ Ἀποτετμημένων ΣΠ (εὐχερείας δὲ χάριν εἰς ἰσάλληλα μέρη διατέμνεται, ὥςτε συνεχῶς τὰς Ἀποτετμημένας πρόοδον ἀριϑμητικὴν συνιςᾶν) ϗ τȣ χ ἀντικαταςαϑέντος συνεχῶς ἀντὶ τῶν διαφόρων ΣΠ, εἴτ' Ȣν $=0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ἐξευρίσκεται διὰ τῆς ἐξισώσεως $yy=a\chi-\chi\chi$ τὰ τῶν συςοιχȣσῶν Τεταγμένων μέρη. Πρῶτον δὴ, ἐὰν ὑποτεϑῇ $\chi=0$, εἴτ' Ȣν, ἐὰν χ ἐπὶ τȣ αὐτȣ τῆς Ἀρχῆς τῶν Ἀποτετμημένων σημείȣ ᾖ, τὸ δεύτερον τῆς ἐξισώσεως μέλος εἰς ο φέρεται· ἄρα ϗ τὸ πρῶτον $yy=0$, εἴτ' Ȣν τὸ πρῶτον τῆς Καμπύλης σημεῖον ἐπάναγκες τῇ τῆς διαμέτρȣ ἀρχῇ συμπίπτειν. Ἐὰν δὲ $\chi=1$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $yy=10-1=9$, ϗ δὴ $y=\sqrt{9}=3$. ἐὰν δὲ $\chi=2$, ἔσαι $yy=20-4=16$, καὶ $y=\sqrt{16}=4$· ἐὰν δὲ $\chi=3$, ἔσαι $yy=30-9=21$, ϗ $y=\sqrt{21}$ (ἄῤῥητος). Ὡσαύτως δὲ ἐὰν $\chi=9$, ἔσαι

$yy = 90 - 81 = 9$, ϗ $y = \sqrt{9} = 3$, ϗ τελευταῖον ἐὰν $\chi = 10$ ὑποτεθῇ, ἔςαι $yy = 100 - 100 = 0$, ϗ $y = 0$, εἴτ' ȣ̃ν θατέρῳ τῆς τῶν Ἀποτετμημένων γραμμῆς πέρατι δεῖ συνέρχεσθαι τὴν κυκλικὴν Καμπύλην, ϗ ἐν αὐτῷ περατȣ̃σθαι. Ἐὰν ἄρα ἐκ τῶν σημείων Π πρὸς ὀρθὰς ἐγερθῶσιν εὐθεῖαι, ὅσα τὰ Π, ϗ γένωνται ἴσαι τοῖς 3, 4, $\sqrt{21}$, κτ, ἀποληφθήσονται τοσαῦτα σημεῖα Μ, δἰ ὧν καταγραφεῖσα ἡ Καμπύλη κύκλος ἔσεται τοσȣ́τῳ ἀκριβέςερος, ὅσῳ ἂν ἀλλήλαις ἐγγύτεραι ὦσιν αἱ τεταγμέναι, εἴτ' ȣ̃ν ὅσῳ πλείω τὰ μέρη, εἰς ἃ ἡ διάμετρος διατέτμηται.

Φαίνεται δὴ, ὅτι ȣ̓́σης $\chi = 5$, ἔςαι ϗ $y = 5$, εἴτ' ȣ̃ν αἱ δύω εὐθεῖαι ἀλλήλαις ἐξισωθήσονται, ὃ δὴ ϗ ἐκ τῆς Γεωμετρίας κατάδηλον.

Φαίνεται ἔτι τὰς Τεταγμένας ἐν ἀρχῇ μὲν αὔξεσθαι, ὥςε τὴν μεγίςην, ϗ μεσαιτάτην εἶναι $y = 5$, εἶτα δὲ, μειȣ̃σθαι ȣ̔́τως, ὥςε ἑκάςην τῶν ὕπερθεν τῆς μεγίςης Τεταγμένων ἐξισȣ̃σθαι ἑτέρᾳ τῶν ἔνερθεν ἐπίσης τῆς μεγίςης ἀφιςαμένῃ. Ἀλλαμὴν τὸ ἄθροισμα ἁπασῶν τῶν Τεταγμένων τὴν τȣ̃ ἡμικυκλίȣ ἐπιφάνειαν, ἧς αὗται εἰσι τὰ Στοιχεῖα· ἐὰν ἄρα τὸ ἡμικύκλιον διὰ τῆς μεγίςης $y = 5$ διατμηθῇ, ϗ τὰ μέρη ἐπιτεθῇ τοῖς ἑτέροις, ἐφαρμόσει αὐτοῖς, ϗ ἐξισωθήσεται, ὃ ϗ ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωςὸν, ὅτι τὸ ἡμικύκλιον εἰς ἰσάλληλα δύω τεταρτημόρια διαιρεῖται. Ἔτι τοίνυν, ἐπεὶ ὡς δῆλον, τῇ ἐξισώσει $\gamma\gamma = \alpha\chi - \chi\chi$ Ἀξίαι (α) ἔνεισιν Ἀποφατικαὶ, ὅσαι δὴ ϗ Καταφατικαὶ οἷον -3, -4, $-\sqrt{21}$, κτ. Ταῦτ' ἄρα προαχθεισῶν (§. 3.) τῶν εὐθειῶν ΜΠ ἐπὶ θάτερα τῆς Σσ, ϗ ληφθεισῶν τοσέτων καὶ ἴσων ἑκάςης ἑκάςῃ πμ, ἀπογεννᾶται ὁ ὁλικὸς κύκλος ΣΜμ.

Πρὸς δὲ τέτοις ϗ τετὶ φαίνεται, ὡς ἁπάσας τὰς Τεταγμένας ἐλαττῦσθαι ἀνάγκη τῆς εὐθείας Σσ, ἐπεὶ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς χ, καὶ $\alpha - \chi$ ἐκ ἂν ςαθείη ἄλλως γε. Ἔςω γὰρ $\chi > \alpha$, ἔςαι ἄρα ϗ $\alpha\chi < \chi\chi$, εἶτ' ἐν τὸ δεύτερον τῆς ἐξισώσεως μέλος ἀποφήσει, ϗ αἱ ῥίζαι ἀνύπαρκτοι, ϗ ἀδύνατοι ἔσονται. Ἐκ πάντων δὴ τέτων σαφὲς, ὅτι τὸ ἡμικύκλιον πρὸς τῷ σ περατῦσθαι ἐπάναγκες, ὃ ϗ ἀνωτέρω πε εἴρηται.

§. 8.

Ἐκ τῶν ῥηθέντων ἐν (§. 6 ϗ 7.) δῆλον ἐγέ-

(α) ΑΞΙΑΝ ἐνταῦθα ἔδοξέ μοι καλέσαι, ὃ ἐν τῇ προεκδοθείσῃ Ἀλγεβραϊκῇ πραγματείᾳ κατὰ τὸ αψγζ ἐν Βενετίᾳ ΕΠΙΒΑΛΛΟΝ ὠνόμασαν· εἰσὶν οἳ ϗ Σημασίαν αὐτὸ τῦτο καλέσαι ἠξίωσαν.

νετο, ὡς ἄρα Καμπύλης συνθετικῶς δοθείσης, εἴτ' ἓν ἐγνωσμένων γεωμετρικῶς τῶν κυριωτέρων ἰδιωμάτων αὐτῆς διὰ σχήματος ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφείσης,) ἐξείη Ἀλγεβραϊκὴν ἐξίσωσιν εὑρεῖν περιέχουσαν τὴν γέννησιν καὶ φύσιν αὐτῆς. Νυνὶ δὲ τἀνάπαλιν ἐκδηλοῦται, ὅτι δοθείσης ἀλγεβραϊκῆς τινος ἐξισώσεως, μιᾷ μὲν σαθερᾷ τε καὶ ἐγνωσμένη, δυσὶ δὲ τρεπταῖς ποσότησι συνισαμένης, δυνατὸν Καμπύλην κατάλληλον τῇ ἐξισώσει ἐν ἐπιπέδῳ καταγράψασθαι, καὶ τὰ κατ' αὐτὴν ἰδιώματα πάντα δι' ἐκείνης ἐξευρεῖν. Ἐπείτοιγε ἀόριςόν τι πρόβλημα ἡ τοιάδε ἐξίσωσις παρίςησι, καὶ δεκτικὸν πολλῶν, ἢ καὶ ἀπείρων ἐπιλύσεων· ἐὰν ἓν τῆς μὲν τῶν δυεῖν ἀγνώςων ἅπασαι αἱ δυναταὶ Ἀξίαι ἐν γραμμαῖς ἐκτεθῶσιν, ὡς σειρὰ τῶν Ἀποτετμημένων καμπύλης τινος, τῆς δὲ αἱ προκύψουσαι Ἀξίαι, ὡς σειρὰ Τεταγμένων, ἀπολαμβάνονται τοσαῦτα σημεῖα Μ, δι' ὧν διελθοῦσα καταγραφήσεται ἡ Καμπύλη· ἕκαςον δὲ σημεῖον αὐτῆς παρίςησιν ἀκριβῶς τὴν ἐπίλυσιν τοῦ δι' ἐκεινης τῆς ἐξισώσεως παριςαμένου ἀορίςου προβλήματος.

§. 9.

Ἡ εἰς παράδειγμα ληφθεῖσα ἐπὶ τοῦ κύκλου ἐξίσωσις $yy = ax - xx$ καλεῖται ἐν γένει

Δευτέρου Βαθμοῦ, ὡς δῆλον· ἡδ' ἐξ αὐτῆς δυναμένη καταγραφῆναι γραμμὴ, Δευτέρου Γένους, ἢ Δευτέρας τάξεως· ὥστε ὁ τῶν τρεπτῶν, καὶ ἀγνώστων τῆς ἐξισώσεως ποσοτήτων Ἐκθέτης παρονομάζει τὸν βαθμὸν αὐτῆς ταύτης τῆς ἐξισώσεως, καὶ τὰ γένη, ἢ τὰς τάξεις τῶν Καμπύλων.

Ἔτι τοίνυν, ὅταν ἐν ταῖς ἐξισώσεσι διαφέρουσαι μὲν ὦσιν αἱ τῶν κατὰ τὰς ἀγνώστους συνεκθέσεων καταστάσεις, ἀλλὰ βαθμὸς ὁ αὐτὸς, αὗται μὲν αἱ διαφωνίαι διαστέλλουσι τὰ ποικίλα εἴδη τῶν γραμμῶν, αἳ τῷ διὰ τοῦ βαθμοῦ τῆς ἐξισώσεως σημαινομένῳ γένει ὑπάγονται, ὁ δ' ἀριθμὸς τῶν δυνατῶν παραλλαγῶν ἀριθμεῖ καὶ τὰ ἀλλήλοις διαφέροντα εἴδη. Γραμμαὶ τοίνυν πρώτου μὲν γένους, ἢ πρώτης τάξεως καλοῦνται, ὧν ἡ ἐξίσωσις βαθμοῦ ἐστι πρώτου· δευτέρου δὲ, ὧν ἡ ἐξίσωσις βαθμοῦ δευτέρου· τρίτου δὲ γένους, αἷς περ τρίτου βαθμοῦ ἡ ἐξίσωσις, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Καὶ δὴ γραμμὴ μὲν πρώτου γένους ἐστι μόνη ἡ εὐθεῖα· δευτέρου δὲ, μόναι αἱ τέτταρες τοῦ Κώνου τομαὶ, Κύκλος ἀμέλειτοι, Παραβολὴ, Ὑπερβολὴ, καὶ Ἔλλειψις· καὶ αἱ μὲν τοῦ τρίτου γένους γραμμαὶ δύω πρὸς τοῖς ἑβδομήκοντα ἀριθμοῦνται· αἱ δὲ τοῦ τετάρτου ἔτι πλείονες κτ. Καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῶν καλουμένων Γεωμετρικῶν Καμπύλων, αἵτινές εἰσιν, ὧν αἱ ἀποτετμημέναι, καὶ τεταγμέναι εὐθεῖαι, γραμμαὶ ἔσαι, λόγον ἔχεσι πρὸς ἀλλήλας γεωμετρικῶς προσδιοριςὸν, εἴτ' ἔν, ὧν αἱ ἀποτετμημέναι, καὶ τεταγμέναι παρίςανται διὰ ποσοτήτων δυναμένων προσδιορίζεσθαι γεωμετρικῶς. Ἐὰν δὲ αἱ Ἀποτετμημέναι, καὶ τεταγμέναι ἀδυνάτως ἔχεσι προσδιορισθῆναι γεωμετρικῶς, ἤτοι εὐθεῖαι μὴ ἔσαι, ἢ εὐθεῖαι μὲν ὑπάρχεσαι, λαμβανόμεναι δὲ ἀντὶ τῶν ἴσων τόξων κύκλε, μηχανικῶς ἐξευρεθεῖται· εἴγε μηδέποτ' ἔχει γεωμετρικῷ ὑπολογισμῷ εὑρεθῆναι εὐθεῖα γραμμὴ ἐξισεμένη κύκλε τόξῳ (§. 235. Γεωμ.) μηχανικῶς δὲ ῥᾷον ἂν ἐξευρεθείη· ἡ Καμπύλη τηνικαῦτα κληθήσεται *Ὑπερβατική* (transiens)· ἐὰν ἔτι ἡ Καμπύλη μὴ ᾖ ἐπίπεδος, εἴτ' ἔν ἐὰν τὸ καταγράφον αὐτὴν σημεῖον μὴ κινῆται ἀεὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἡ Καμπύλη καλεῖται *Διπλῆς Καμπυλότητος*.

§. 20.

Σχ. 4. Ἐὰν ἐπίπεδος καμπύλη ἡ ΜΣμ, εἴτε γεωμετρικὴ, εἴτε μηχανικὴ, ἔτω φύσεως ἔχῃ, ὥςε προαχθεισῶν τῶν Τεταγμένων περαιτέρω τῆς τῶν ἀποτετμημένων γραμμῆς ΣΖ πρὸς τὸ συμβαλεῖν Αὐτὰς τῇ Καμπύλῃ κατὰ τὸ μ, ἀεὶ ὑπάρχειν Πμ = ΠΜ, ἡ εὐθεῖα ΣΖ *Διάμετρος* τῆς Καμπύλης καλεῖται· τὸ δὲ Ζ σημεῖον, δἰ ȣ διέρχεται αὕτη, ’ΑΡΧΗ τῆς διαμέτρȣ. Τȣτ’ αὐτὸ τὸ σημεῖον ὡς τὰ πολλά, ἔςιν ἅμα ϗ τῶν Α’ποτετμημένων ἀρχή. Ε’ὰν δ’ ἐπὶ τῆς διαμέτρȣ κάθετοι ἐςήκωσιν αἱ Τεταγμέναι, αὕτη δὴ ΑΞΩΝ κυρίως τῆς Καμπύλης ἀκȣει.

§. 11.

Α῞πασαι αἱ Καμπύλαι, αἷς διάμετρός τε ἐςὶ, ϗ ἑπομένως ἑκατέρωθι ταύτης κλόνες δύω οἱ ΣΜΜ, Σμμ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐκτεινόμενοι, κοινὸν ἔχȣσιν ἰδίωμα, τὸ τὴν Εὐθεῖαν ΣΛ ἠγμένην παραλλήλως ταῖς Τεταγμέναις διὰ τȣ Σ σημείȣ Α’ρχῆς τῆς διαμέτρȣ, ἐπιψαύειν τῆς Καμπύλης κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον Σ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ε’ὰν ἡ διπλῆ Τεταγμένη Μμ ἐπινοηθῇ Φερομένη ἐπὶ τὸ Σ παραλλήλως ἑαυτῇ, ἀεὶ τὰ ἡμίση αὐτῆς ἔνθεν ϗ ἔνθεν τῆς διαμέτρȣ ἴσως ἀπομειωθήσεται· ἀλλὰ ϗ ἡ Α’ποτετμημένη ΣΠ μᾶλλον, ϗ μᾶλλον ϗ αὕτη ἀπομειωθήσεται. Ε’ὰν ἄρα ἀπειράκις ἐλαχίςη τεθῇ ἡ Α’ποτετμημένη ΣΠ, ἔςαι ὡσαύτως ἀπειράκις ἐλαχίςη ϗ ἡ διπλῆ Τεταγμένη, εἴτ’ ȣν τὰ πέρατα αὐτῆς Μ, μ συμπεσȣνται τῷ τῆς καμπύλης σημείῳ Σ, ὡσαύτως δὴ ϗ τὸ μεσαίτατον αὐτῆς σημεῖον Π. Ε’ὰν ἄρα ἡ ἀπειράκις ἐλαχίστη Μμ, εἴτ' οὖν τὸ σημεῖον Σ, ἐπ' εὐθείας προαχθῇ, παράλληλος μὲν ἔσαι ταῖς λοιπαῖς Τεταγμέναις Μμ, Μμ, μόνον δὲ τὸ Σ σημεῖον ἕξει κοινὸν τῇ Καμπύλῃ, εἴτ' οὖν ἐφάψεται αὐτῆς κατὰ τὸ Σ (α)

§. 12.

Σχ. 5. ϗ 6. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς Μ, καθ' ὃ ἡ ΤΜ ἅπτεται τῆς Καμπύλης, ἀχθῇ τεταγμένως ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡ ΜΠ, ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος προαχθέντος, τὸ μέρος ΤΠ τὸ μεταξὺ τοῦ σημείου

(α) Δείκνυται δὲ τοῦτο ϗ τῇ εἰς ἀδύνατον ἐπαγωγῇ. Ἐὰν γὰρ κινηθῇ ἐπὶ τὸ Σ μὴ παραλλήλως ἑαυτῇ ἡ Μμ, οὐ διχοτομηθήσεται ὑπὸ τῆς διαμέτρου κατὰ τὸ Π, ϗ δὴ ἔσαι, φέρε, μΠ < ΠΜ ὅταν οὖν τὸ Π ἀπειράκις ἐλαχίστῳ διαστήματι ἀπέχῃ τοῦ Σ, εἴτ' οὖν συμπίπτῃ τῷ Σ, ϗ ἡ μΠ ὡσαύτως ἀπειράκις ἐστὶν ἐλαχίστη, εἴτ' οὖν τὸ μ πέρας αὐτῆς, ϗ ἅμα σημεῖον τῆς Καμπύλης συμπίπτει τῷ Σ· ἀλλ' ἐπεὶ ἡ μΠ ἐλάσσων τῆς ΜΠ, ἄρα ΜΠ οὐκ ἔστιν ἀπειράκις ἐλαχίστη, ἀλλὰ πεπερασμένη γραμμή, εἴτ' οὖν τὸ Μ πέρας αὐτῆς, ϗ ἅμα σημεῖον τῆς Καμπύλης, διέστηκε τοῦ Σ· ἐὰν ἄρα διὰ τῶν σημείων μ, Μ, εἴτ' οὖν Σ, Μ προαχθῇ εὐθεῖα, εἰς δύο αὐτὴ σημεῖα τὴν Καμπύλην τεμεῖ, εἴτ' οὖν οὐκ ἐφάψεται αὐτῆς (§. 15.) ἡ ἄρα μὴ παράλληλος ταῖς Τεταγμέναις οὐκ ἐφάπτεται τῆς Καμπύλης. Ἐὰν ἄρα ἡ ΑΣ μὴ ἐπιψαύῃ τῆς καμπύλης, οὐκ ἔστι παράλληλος ταῖς τεταγμέναις· ἐπειδὴ δὲ εἶναι· ἄρα ἡ αὐτὴ ΑΣ ἔσαι ϗ παράλληλος ταῖς τεταγμέναις, ϗ μή· ὅπερ ἀδύνατον.

Τ, καθ' ὃ ἡ Ἐφαπτομένη ΜΤ συμβάλλει τῷ Ἄξονι προαχθέντι, ϗ τῆς τεταγμένως ἀχθείσης ΜΠ, καλεῖται ΥΦΑΠΤΟΜΕΝΗ· Ἐὰν δ' ἀπὸ τȣ̃ σημείȣ τῆς ἐπαφῆς Μ ἐγερθῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΜΝ ἐπὶ τῆς Ἐφαπτομένης ΜΤ, τὸ τῆς διαμέτρȣ μέρος ΠΝ τὸ ἐμπεριλαμβανόμενον μεταξὺ τȣ̃ σημείȣ Ν, καθ' ὃ ἡ Κάθετος συμβάλλει τῇ διαμέτρῳ, ϗ τȣ̃ σημείȣ Π, καθ' ὃ ἡ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ Τεταγμένη συμβάλλει τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ, ὙΠΟΚΑΘΕΤΟΣ ἀκȣ́ει.

§. 13.

Ἐν Καμπύλῃ μὴ πεφυκείᾳ ἐπανακάμπτειν ἐπὶ τὴν ἑαυτῆς διάμετρον, τȣτ' ἔςιν, ἧς ἑκάτεροι οἱ κλῶνες ἔνθεν καὶ ἔνθεν προαγόμενοι, ἀεὶ μᾶλλον ἀφίςανται τῆς διαμέτρȣ, ἔνεςιν ἀγαγεῖν ἐξ ἁπάντων τῶν σημείων αὐτῆς Μ, Μ, παραλλήλȣς Σχ. 4. τῇ διαμέτρῳ ΣΠ, τὰς ΜΞ, ΜΞ ἐπὶ τῆς Εὐθείας ΣΞ τῆς διερχομένης διὰ τȣ̃ σημείȣ Σ ἀρχῆς τῶν Ἀποτετμημένων, ϗ παραλλήλȣ ταῖς Τεταγμέναις ȣ̓́σης· Ἅπασαι ȣ̃ν αἱ ΜΞ ἐκτὸς ἔσονται τῆς Καμπύλης κείμεναι· ϗ δὴ συςήσονται Παραλληλόγραμμα ὅμοια τὰ ΠΞ, ΠΞ, ϗ ἀντὶ μὲν τῶν Ἀποτετμημένων ΣΠ, ΣΠ, τὰς Εὐθείας ΜΞ, ΜΞ ἐξέςαι λαβεῖν, ἀντὶ δὲ τῶν Τεταγμένων, τὰς ΣΞ, ΣΞ· Αὗται ȣ̃ν αἱ ΣΞ, ΣΞ, ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ἀκȣ́ȣσι· τὰ δὲ ΠΞ, ΠΞ, *Παραλληλόγραμμα* τῶν Συντεταγμένων· ἡ δὲ ὑπὸ ΞΣΠ, *Γωνία* τῶν Συντεταγμένων.

§. 14.

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως (§. 5.), ἡ Καμπύλη συνέχειά ἐςι τῶν ἴσων ἰχνῶν τȣ͂ δι' ἀκαρiαίων προβάσεων κινȣμένȣ σημείȣ, ϗ ἅμα μεθ' ἑκάςην πρόβασιν παρεκτρεπομένȣ, ὥςε διὰ ςαθερȣ͂ τινος κανόνος ἐν ἑκάςῃ παρεκτροπῇ ποιεῖν τρεπτὰς γωνίας ἀπειράκις ἐλαχίςας, ἕπεται δή.

Α΄. Τὰς πῇ μὲν ἐκ Καμπύλης, πῇ δὲ ἐξ Εὐθείας συγκειμένας γραμμὰς, ἐξ ȣ͂ δὴ ϗ *Μικτὰς* καλȣμένας, μὴ καταγράφεσθαι τῷ αὐτῷ ςαθερῷ κανόνι ἐν πάσῃ τῇ γενέσει αὐτῶν τῇ διὰ τȣ͂ κινȣμένȣ σημείȣ, ϗ δὴ γεωμετρικῶς μὴ ἔχειν ὑπολογίζεσθαι, μήτε μὴν γεωμετρικαῖς ὑπάγεσθαι σκέψεσι.

§. 15.

Β΄. Τὴν ἐπαφὴν, Καμπύλης ϗ Εὐθείας καθ' ἓν μόνον γίνεσθαι σημεῖον, ὅπερ ἐςι, τὴν Εὐθεῖαν μὴ δύνασθαι ἐπιψαύειν τῆς Καμπύλης ἐν δυσὶν, ἢ τρισὶ διαφέρȣσι σημείοις τȣ͂ αὐτȣ͂ συνεχȣ͂ς τόξȣ. Εἰ γὰρ ἔψαυεν ἐν πλείοσιν, ἢ ἑνὶ, τὸ τὴν Καμπύλην καταγράφον σημεῖον ἀπαρεγκλίτως ἂν κατέγραφε τὰ σημεῖα ἐκεῖνα, ὃ δὴ ἐὰν γένηται, ἐπάναγκες τὸν ϛαθερὸν κανόνα τȣ̃ παρεκτρέπεσθαι μεθ᾽ ἑκάϛην ἀκαριαίαν πρόβασιν, ἀθετεῖσθαί τε ϗ διακόπτεσθαι.

§. 16.

Γ΄. Τὴν καμπυλότητα τῶν διαφόρων Καμπύλων τοσȣ́τῳ μεγεθύνεσθαι πλεῖον, ὅσῳ μείζȣς αἱ τῆς παρεκτροπῆς γωνίαι κατάγȣ τὰ μεγέθη τῶν ἀκαριαιων προβάσεων τȣ̃ τὴν Καμπύλην καταγράφοντος σημείου, εἴτ᾽ ȣ̃ν κατὰ τὰς ἀπειράκις ἐλαχίϛας αὐτῆς πλευράς. Κείσθω πρὸς παράδειγμα ὁ Κύκλος, ἥς Καμπύλη ἐϛὶν ȣ̃τω καταγραφομένη ὑπὸ τȣ̃ κινȣμένȣ σημείȣ, ὥϛε μεθ᾽ ἑκάϛην ἴσην πρόβασιν αὐτȣ̃ ἐν ἑκάϛῳ ἀκαρεῖ διανυομένην ἴσως παρεκτρέπεσθαι, ὅ ἐϛιν, ἐν ἴσῃ γωνίᾳ. Κύκλοι δὲ δύω, ὁ μὲν μείζων, ἅτερος δὲ ἐλάσσων, Πολύγωνά εἰσι δύω κανονικὰ ἐξ ἰσαρίθμων πλευρῶν τε ϗ γωνιῶν συγκροτȣ́μενα (§. 82. Γεωμ.). Καὶ αἱ μὲν μείζȣς τȣ̃ μείζονος κύκλου πλευραὶ πρὸς τὰς τȣ̃ ἐλάσσονος λόγον ἔχȣσιν, ὃν αἱ ἀκτῖνες· αἱ δὲ τῆς παρεκτροπῆς γωνίαι (εἴτ᾽ ȣ̃ν τὰ πρὸς δύω Ὀρθὰς Παραπληρώματα ἑκάϛης τῶν ἐντὸς γωνιῶν τῶν περιεχομένων ὑπὸ δύω προσεγγιζȣσῶν πλευρῶν) ἐν τῷ μείζονι κύκλῳ ἐξισȣ̃νται ταῖς τῆς παρεκτροπῆς γωνίαις ταῖς ἐν τῷ ἐλάσσονι. Ἐπεὶ ȣ̓κ ἂν ἦσαν πολύγωνα ὅμοια. Τέτων τεθέντων, μάλα σαφὲς καθίςαται, ὡς ἐν ᾧ ἀκαρεῖ τὸ σημεῖον καταγράφει τὴν ἀπειράκις ἐλαχίςην τȢ ἐλάσσονος κύκλȢ πλευρὰν ἄνευ παρεκτροπῆς, ἐν τȢ́τῳ ϗ θάτερον σημεῖον τὴν τȢ μείζονος κύκλȢ ἀπειράκις ἐλαχίςην πλευρὰν καταγράφει ἄνευ παρεκτροπῆς· Α'λλὰ τὸ δεύτερον διάςημα μεῖζον τȢ πρώτȢ· ἄρα ἐν πλείονι διαςήματι κινεῖται ἐπ' εὐθείας τὸ τὸν μείζω κύκλον καταγράφον σημεῖον, ἢ τὸ τὸν ἐλάσσω, εἴτ' Ȣ̓ν αἱ τȢ μείζονος κύκλȢ πλευραὶ αἱ μεταξὺ τῶν παρεκτροπῶν τῶν ποιȢσῶν τὰς γωνίας, μείζονές εἰσι τῶν τȢ ἐλάσσονος, καίτοι ἰσαρίθμων Ȣ̓σῶν τῶν τε ἴσων γωνιῶν, ϗ τῶν πλευρῶν ἐν ἑκατέροις (§. 82. Γεωμ.). Ο῞σῳ τοίνυν μείζονες οἱ κύκλοι, εἴτ' Ȣ̓ν ὅσῳ μείζονες αἱ αὐτῶν ἀκτῖνες, τοσȢ́τῳ τῆς εὐθείας παρεκτρέπονται ἧττον. Καὶ τοίνυν ἡ τȢ ΚύκλȢ καμπυλότης τοσȢ́τῳ ἐςὶν ἐλάσσων, ὅσῳ μείζων ἡ ἀκτίς· ὅ ἐςιν, ἡ καμπυλότης ἐν λόγῳ ἀντιπεπονθότι ἐςὶ τῆς διαμέτρȢ. Ε'πισυνάγεται ἄρα τὸ μέγεθος τῆς κατὰ τὸν κύκλον ἀκτῖνος, ποσότητα εἶναι κατάλληλον εἰς παράςασιν τῆς αὐτȢ καμπυλότητος.

§. 17.

Τῶν προβλημάτων τὰ ἀρχοειδέςερα, ὧν ἡ

λύσις ἐν τῇ σκέψει τῆς Καμπύλης ζητεῖται, εἰσί.

Α΄. Δοθείσης τῆς ἐπὶ τῆς Καμπύλης ἐξισώσεως, εὑρεῖν τὴν μέθοδον τȣ ταύτην καταγράφειν· ϗ ἀνάπαλιν, τῆς Καμπύλης δοθείσης, τὴν ἐπ᾽ αὐτῆς ἐξίσωσιν προσευρεῖν.

Β΄. Ἐφ᾽ ὁποιȣνȣν σημεῖον αὐτῆς δοθὲν Ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, εἴτ᾽ ȣν εὑρεῖν τὴν θέσιν, ἣν ἔχει ἡ ἀπειράκις ἐλαχίςη πλευρὰ ἔνθα δέοι τὴν Ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, ἢ προσδιορίσασθαι δηλονότι τὴν διεύθυνσιν, ἣν τὸ ῥέον σημεῖον διευθύνεται ἐν τῷ καταγράφειν ἀκαριαίως τὴν ἀπειράκις ἐλαχίςην ἐκείνην πλευράν. Αὗται ȣν αἱ τρισσαὶ ἐκφράσεις καίτοι ταῖς λέξεσι διαφέρȣσαι, ταῖς ἐννοίαις μέντοι ἀλλήλαις συμπνέȣσιν, ὅτιγε ἡ μὲν διεύθυνσις τῆς πλευρᾶς παρίςησι τὴν αὐτῆς θέσιν, ἡ δ᾽ αὐτῆς θέσις προσδιορίζει τὴν τῆς Ἐφαπτομένης ςάσιν. Ἐπεὶ γὰρ δέδεικται (§. 82. Γεωμ.) τὴν Ἐφαπτομένην Καμπύλης οἱασȣν μηδὲν, ἀλλ᾽ ἢ προαγωγὴν εἶναι πεπερασμένην πλευρᾶς ἀπειράκις ἐλαχίςης, ὅ ἐςι, τὴν ἀπειράκις ἐλαχίςην πλευρὰν, καίτοι ἀπειροςικὴν, μίαν τινα θέσιν φυλάττειν, (ὥσπερ δὴ ϗ πεπερασμένη πᾶσα εὐθεῖα τὴν αὐτῆς θέσιν προσδιωρισμένην κατέχει) προηγμένης ἄρα αὐτῆς ἔνθεν κ̕ ἔνθεν τέρματος ἄνευ, πε-περασμένη ἀποφέρεται εὐθεῖα, ἧς ἅπαντα τὰ σημεῖα πλὴν ἑνὸς κεῖνται ἐκτὸς τῆς Καμπύλης, δι' ὃ κ̕ ἐφάπτεται αὐτῆς καθ' ἓν μόνον ἐκεῖνο τὸ σημεῖον. Ἐκ δὲ τούτου ζητοῦνται αἵ τε Ὑφαπτόμεναι, κ̕ αἱ Κάθετοι, κ̕ αἱ Ὑποκάθετοι.

Γ΄. Ζητεῖται ἡ καμπυλότης ἐν ἐλαχίςῳ δοθέντι τόξῳ. Εἰς παρασκευὴν δὲ ταύτης τῆς ἐπιλύσεως, ὑποτίθεται διὰ τριῶν πλησίον ἀλλήλων κειμένων σημείων ἐλαχίςου τόξου τῆς Καμπύλης διέρχεσθαι κύκλου περιφέρειαν. Ἐπεὶ οὖν ἐλάχιςον ὑποτίθεται τὸ τῆς Καμπύλης τόξον, ὡσαύτως δὲ κ̕ τὸ τοῦ κύκλου, ἀλλήλοις δήπουθεν συμπεσοῦνται, κ̕ δὴ ἡ τοῦ κύκλου καμπυλότης καταμετρήσει τὴν τῆς Καμπύλης. Ἀλλαμὴν ἡ τοῦ κύκλου λόγον ἔχει ἀντίςροφον πρὸς τὴν αὐτοῦ ἀκτῖνα· ἐπιλυθήσεται ἄρα τὸ πρόβλημα, εἴπερ ἡ ἀκτὶς προσδιορισθῇ· ὅπερ ἔκ τε τῆς δοθείσης ἐπὶ τῆς Καμπύλης ἐξισώσεως, κ̕ ἐκ τῶν αὐτῆς ἰδιωμάτων ἀπολαμβάνεται. Ἡ δὲ τοῦ τοιοῦδε τόξου ἀκτὶς πολλῶν εὐπορεῖ ὀνομάτων: *Ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος*, *Ἀκτὶς τοῦ συμπίπτοντος τόξου*, *Ἀκτὶς τῆς συμπτώσεως*, *Ἀκτὶς τῆς ἐκτετειλιγμένης*, κ. τ.

Δ΄. Ἐξετάζεται ὅς τίς ἐςιν ὁ τῆς Καμπύλης τετραγωνισμὸς, εἶτ' ȣ̃ν ὅσον ἐςὶ τὸ ἐμβαδὸν, ἢ ἡ τῇ ὅλῃ Καμπύλῃ ἐμπεριεχομένη Ἐπιφάνεια, ἢ δεδομένον τι αὐτῆς μέρος, οἷον ἐςὶ τὸ ἔγκλειςον χωρίον ΛΠ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τȣ̃ κατὰ τὴν Καμπύλην μέρȣς ΛΜ, ϗ τȣ̃ κατὰ τὴν διάμετρον μέρȣς ΓΠ, ϗ δυεῖν Τεταγμένων ΜΠ, ΓΛ, ὧν ἡ ἑτέρα ΓΛ διὰ τῆς τῶν Ἀποτετμημένων ἀρχῆς Γ διέρχεται. Εἰς προκατασκευὴν δὲ ταύτης τῆς ἐπιλύσεως ὑποτίθεται τοσαῦτα Παραλληλόγραμμα πξμν ἔνθεν μὲν περατȣ́μενα πρὸς τῇ Καμπύλῃ, ἔνθεν δὲ πρὸς τῇ τῶν Ἀποτετμημένων γραμμῇ, τὰς δὲ λοιπὰς τῶν πλευρῶν ἔχοντα παραλλήλȣς ταῖς τεταγμέναις ΓΛ, ΜΠ, ὅσα μεταξὺ τȣ̃ Γ, ϗ Π ὑπάρχȣσι τὰ σημεῖα. Ταῦτα ȣ̃ν τὰ Παραλληλόγραμμα ἀπειράριθμά τε, καὶ ȣ̃τως ἐλάχιςά εἰσιν, ὥςε τὰς αὐτῶν πλευρὰς πμ, ξν τὰς ἀπειράκις ἀλλήλων ἔγγιςα λαμβάνεσθαι ἔχειν ἀντὶ τῶν ἐπὶ τῆς διαμέτρȣ ΓΠ Τεταγμένων. Ἐπεὶ ȣ̃ν ἡ ΓΠ ἐςὶν ἡ ἐσχάτη χ, ἅπασαι αἱ ἐκ τȣ̃ Γ ἀρχόμεναι, ϗ συςοιχȣ̃σαι ἑκάςῃ ἑκάςῃ τῶν Τεταγμένων μεταξὺ τῆς ΓΛ, ϗ τῆς ΜΠ, αὔξȣσιν ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ τοιᾷδε· $1\frac{\chi}{\infty}$, $2\frac{\chi}{\infty}$, $3\frac{\chi}{\infty}$, $4\frac{\chi}{\infty}$, $5\frac{\chi}{\infty}$ . . . . . . $\infty\frac{\chi}{\infty} = \chi$. Ἡ γὰρ Τεταγμένη ἡ ἀπειράκις ἐγγίςη τῇ πρώτῃ ΓΛ ἔχει συςοιχȣ̃σαν Ἀποτετμημένην μέρος τῆς εὐθείας ΓΠ ἀπειράκις ἐλάχιςον, εἴτ' ȣ̃ν $1 \frac{\chi}{\infty}$. Τῆς δ' ἐφεξῆς Τεταγμένης ἡ Ἀποτετμημένη, ἐπεὶ ἀφικνεῖται εἰς τὸ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς Γ δεύτερον σημεῖον (§. 7.) διπλασία ἐςι τῆς πρώτης, εἴτ' ȣ̃ν $2 \frac{\chi}{\infty}$. Ὡσαύτως ἡ τῆς τρίτης Τεταγμένης Ἀποτετμημένη ἐςὶ τριπλασία τῆς πρώτης, εἴτ' ȣ̃ν $3 \frac{\chi}{\infty}$, καὶ ȣ̃τως ἐφεξῆς. Τὴν δ' ἐςχάτην Ἀποτετμημένην (ΓΠ) ἐξ ἁπάντων δεῖ συγκροτεῖσθαι τῶν μερῶν, εἰς ἃ ἀποτέτμηται. Ἀλλ' ἐπείπερ ἕκαςον τῶν μερῶν αὐτῆς ἐςιν ἀπειροςὸν, ὁ δ' ἀριθμὸς τῶν τοιῶνδε μερῶν ἄπειρος, συςήσεται ἄρα ἐξ ἀπείρων ἀπειράκις ἐλαχίςων μερῶν, ὅ ἐςι, $\infty \frac{\chi}{\infty}$. Τȣ̃το δὲ τὸ σχῆμα ἐξισȣ̃ται τῇ χ, ὡς δέδεικται ἐν τοῖς κλάσμασι (§. 545. Ἀλγβ. (α)). Αὕτη ἀλλ' ȣ̃ν ἡ τῶν Ἀποτετμημένων ἀριθμητικὴ πρόοδος ἔχει ἂν ἐκτεθῆναι ϗ ȣ̃τως 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . . . . χ· ἐπείτοιγε ὁμοίως κἂν ταύτῃ

(α) Ὅρα τȣ̀ς ἀλγεβραϊκȣ̀ς Παραγράφȣς ἐν τῇ ἑλληνιςὶ ἐκδοθείσῃ *Ἀλγεβραϊκῇ* πραγματείᾳ κατὰ τὸ 1797, ἐν *Βενετίᾳ*· ὁμοίως δὲ ϗ ἐν τοῖς ἐφεξῆς.

ἡ κοινὴ διαφορά ἐςι μονὰς, εἴτ᾽ ἒν· ἡ δευτέρα Ἀποτετμημένη διπλασία ἐςι τῆς πρώτης, ἡ δὲ τρίτη τριπλασία, ϗ ἐφεξῆς ὅτως· ὁ δὲ ἔχατος ὅρος, ὃ ἐςι τὸ διαιρεθὲν ὅλον, ἐςι χ. Τῆς ὖν ἐπὶ τῆς Καμπύλης ἐξισώσεως μὴ ἐχέσης ἀγνώςες ἄλλας ϗ ἀορίςες, ἢ τὰς y, χ, ἐξέςαι λαβεῖν τοσαύτας ἀξίας τῆς y, ὅσαι εἴτιν αἱ χ, εἴτ᾽ ὖν ὅσοι εἴσιν οἱ κατὰ ταύτην τὴν πρόοδον ὅροι· ἄπειρος ἄρα ἀποληφθήσεται σειρὰ τῶν Τεταγμένων τῶν μεταξὺ τῆς ΓΛ, ϗ ΠΜ. Τ8τ8 χάριν, εἰ δυνατὸν τὴν σειρὰν ταύτην συνάψασθαι, εὑρεθήσεται τὸ ἐμβαδὸν ΓΛΠΜ, εἴτ᾽ ὖν ὁ τετραγωνισμὸς τ8 ἐμβαδ8, ὡς εἰώθασιν αὐτὸν ὀνομάζειν. Εἰ δὲ ἡ ταύτης σύναψις ἀδύνατος εἴη, δεῖ τάχιον συγκλίνϐσαν αὐτὴν ἀπεργάσασθαι (§. 569. Ἀλγϐ.) ϗ ὅτω συναφθείσης, εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν μετὰ προσεγγίσεως, ϗ τοσϐτῳ ἀκριβέςερον, ὅσῳ πλείϐς ἂν ὦσιν οἱ κατὰ τὴν τῶν Τεταγμένων σειρὰν ὅροι.

Πρὸς ἀπάντησιν καὶ λύσιν ἁπάντων τϐτωνὶ τῶν προβλημάτων συντελεῖ ἐξ ἴσ8 δύω εἴδη ὑπολογισμϐ, ἡ κοινὴ ἀνάλυσις, ϗ ὁ τῶν Ἀπειροςῶν ὑπολογισμός.

ΚΕΦ. Β΄.

Περὶ Φύσεως τῶν Κωνικῶν τομῶν ἤδη ἐν ἐπιπέδω καταγραφεισῶν, καὶ περὶ τῶν κατὰ τὰς Διαμέτρους αὐτῶν ἀρχοειδεστέρων ἰδιωμάτων.

§. 18.

Σχ. 8. Ἐὰν ληφθῇ εὐθεῖα ἡ ΑΘ, ϗ ἐκτὸς αὐτῆς
ϗ 9. σημεῖον τὸ Ζ, δυνατὸν ἐπινοήσασθαι Καμπύλην οὕτω
ϗ 10. καταγραφεῖσαν, ὥστε τὰς ἀπό τινος αὐτῆς σημείου Μ δισσὰς διαστάσεις, τὴν μὲν ἀπὸ τοῦ Μ ἕως τῆς εὐθείας ΑΘ, τὴν δὲ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Μ ἕως τοῦ ληφθέντος ἐν αὐτῇ σημείου Ζ, λόγον τινὰ πρὸς ἀλλήλας τηρεῖν, ϗ ἀεὶ τὸν αὐτόν· οἷον, ἐν ἑκάστῳ σχήματι, τὸν λόγον ΜΘ : ΜΖ ἀεὶ ὑπάρχειν, ὡς ὁστισοῦν ἄλλος ΜΘ : ΜΖ. Δῆλον δὲ, ὅτι τριχῶς ἂν τουτὶ γένοιτο· ἤτοι γὰρ ΜΘ > ΜΖ, ἢ ΜΘ = ΜΖ, ἢ ΜΘ < ΜΖ· τρεῖς ἄρα Καμπύλαι καταγραφήσονται ἀλλήλων εἰδικῶς διαφέρουσαι. Ἡ μὲν οὖν ΑΘ ὀνομάζεται ΔΙΕΥΘΕΤΟΥ͂ΣΑ, τὸ δὲ Ζ σημεῖον ἙΣΤΙ͂Α· Καὶ ὅταν μὲν ᾖ ΜΘ > ΜΖ, ἡ Καμπύλη καλεῖται ἜΛΛΕΙΨΙΣ, ὅταν δὲ ΜΘ > ΜΖ, ὙΠΕΡΒΟΛῊ, ὅταν δὲ ΜΘ = ΜΖ, ΠΑΡΑΒΟΛΉ. Ἀλλ' ἐκείπερ ταῖς τοῦ Κώνου τομαῖς

γεωμετρικῶς θεωρȣμέναις πρόσεσιν αὐτὰ ταῦτα τὰ ῥηθέντα ἰδιώματα, τȣτȣ χάριν τὰς Καμπύλας τὰς τῷ ἀνωτέρω λόγῳ καταγραφομένας προσήκει Κωνικὰς τομὰς ὀνομάζειν.

§. 19.

Ἐὰν διὰ τȣ Ζ σημείȣ Κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τὴν Διευθετȣ̃σαν ΑΘ ἡ ΖΛ, εἰρήσεται αὕτη *Διεύθυνσις* τȣ̃ πρώτȣ Ἄξονος. Δῆλον δὲ, ὡς ἄρα τῷ τῆς κωνικῆς τομῆς σαθερῷ λόγῳ ΜΘ : ΜΖ ἑτέρȣ προσαρμοσθέντος ἐν φθινȣ́σῃ προόδῳ, ϗ αὖθις ἑτέρȣ, εἴτ᾽ ȣ̃ν τȣ̃ Μ μᾶλλον, ϗ μᾶλλον ἔγγιον γινομένȣ τῇ ΑΖ, ἐπάναγκες τέως τὴν ΜΘ, ϗ ΜΖ εἰς μίαν εὐθεῖαν συνελθεῖν, εἴτ᾽ ȣ̃ν τὸ Μ συμπεσεῖν ἐπὶ τȣ̃ Σ. Αὐτὸ δὴ τὸ σημεῖον Σ ȣ̃τως εὑρεθὲν, ὥςε εἶναι ΣΑ : ΣΖ : : ΜΘ : ΜΖ, ΚΟΡΥΦΗ ἐςὶ τῆς τομῆς, εἴτ᾽ ȣ̃ν ἀρχὴ, ἢ πέρας τȣ̃ πρώτȣ Ἄξονος.

§. 20.

Ἐκ τῶν (§. 18, 19.) συνάγεται τὴν Κωνικὴν τομὴν εἶναι Ἔλλειψιν, ἢ Ὑπερβολὴν, ἢ Παραβολὴν, ἐὰν ἡ αὐτῆς Κορυφὴ τῇ Ἑςίᾳ ᾖ ἐγγυτέρα ἢ τῇ Διευθετȣ́σῃ, ἢ ἀφεςηκεῖα ἐκείνης μᾶλλον ἢ ταύτης, ἢ ἀμφοῖν ἰσοδιεςῶσα.

ΠΡΟ´ΒΛΗΜΑ.

§. 21.

Δοθεισῶν θέσει τῆς τε Διευθετȣ́σης ΑΘ, καὶ τῆς Ἑςίας Ζ, καὶ τῆς Κορυφῆς Σ, ὅσα δήποτ᾽ ἂν δέῃ, τῆς τομῆς σημεῖα εὑρεῖν, καὶ τὴν Καμπύλην δἰ αὐτῶν καταγράψαι.

ΛΥ´ΣΙΣ.

Ἀπὸ τῆς κορυφῆς Σ ἐςάϑω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τȣ̃ Ἄξονος ἡ ΣΒ = ΣΖ, καὶ ἤχθω τέρματος ἄνευ ἡ ΑΒΔ, ϗ ἐπὶ τȣ̃ Ἄξονος ἀνεςάϑωσαν πρὸς ὀρθὰς ὁσαιδήποτε αἱ ΠΔ, ΠΔ, ΠΔ (τȣ̃τ᾽ αὐτὸ δὴ γενέσθω, εἰ δοκεῖ, ϗ ἐκ θατέρȣ τῆς κορυφῆς μέρȣς) ϗ εἰλήφθωσαν ἐπ᾽ αὐτῶν σημεῖα Μ, Μ ȣ̔́τως, ὡς ἀεὶ ὑπάρχειν ΖΜ = ΠΔ, ϗ μετηνέχθωσαν αἱ ΠΜ ὡσαύτως ϗ ἐπὶ τῶν πρὸς θάτερον μέρος τȣ̃ Ἄξονος προηγμένων εὐθειῶν, ὥςε εἶναι ἑκάςην ΠΜ = Πμ. Λέγω δὴ τὴν διὰ τῶν σημείων Μ, Μ, μ, μ διιȣ̃σαν Καμπύλην εἶναι τὴν ζητουμένην Κωνικὴν Τομήν.

ΔΕΙ´ΞΙΣ.

Ἤχθω ἐξ ȣ̔τινοσȣ̃ν αὐτῆς σημείȣ Κάθετος ἐπὶ τὴν Διευθετȣ̃σαν ἡ ΜΘ, ϗ τῶν τριγώνων ΑΣΒ, ΑΠΔ ὁμοίων ὄντων, ἐςὶ ΔΠ : ΠΑ : : ΣΒ : ΣΑ, εἴτ' ὖν ΖΜ : ΜΘ : : ΣΖ : ΣΑ, τῦτ' ἔςιν, αἱ ἀπό τε τῆς Ἑςίας, ϗ τῆς Διευθετῦσης τῶν σημείων Μ, Μ εἴσιν ἐν τῷ τῆς Καμπύλης ςαθερῷ λόγῳ ΣΖ : ΣΑ. Τὰ ἄρα ὖτως εὑρεθέντα σημεῖα Μ ὑπάρχυσι τῆς Καμπύλης (§. 19.).

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 22.

Τὰ αὐτὰ δήπυ κρατήσει δεικνύμενα ϗ ἐπὶ θατέρυ κλωνὸς Σμμ τῦ ἴσυ ϗ ὁμοίυ τῷ ΣΜΜ, εἴγε τὰ σημεῖα μ, μ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἴσιν εὐθειῶν, ϗ ἀφιςάμενα τῦ Ἄξονος, ὅσον ϗ τὰ ἐπὶ θάτερα σημεῖα Μ, Μ· ὥςε ἐν γένει ἅπαντα τὰ τῦ ΣΜΜ κλωνὸς, ϗ θατέρυ Σμμ ἔςαι οἰκεῖα. Ἐκ δὲ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς προΐασιν ἰδιώματα τῶν Κωνικῶν Τομῶν τὰ ἐχόμενα.

§. 23.

Α΄. Ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ ἡ ὑπὸ ΣΑΒ γωνία ἐςὶ 45°, ἐν δὲ τῇ Ἐλλείψει ἐλάσσων, ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ μείζων. Ἐπείτοι γε τῦ τριγώνυ ΑΣΒ ὀρθογωνίυ ὄντος πρὸς τῷ Σ, αἱ λοιπαὶ δύω γωνίαι Ὀρθῇ μιᾷ ἐξισῦνται. Ἀλλαμὴν ἐν παντὶ τριγώνῳ ἡ μείζων πλευρὰ ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. ἄρα ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ, ὖσης (§. 20.) ΑΣ $=$ ΣΖ $=$ ΣΒ ἐκ κατασκευῆς, ἐν δὲ τῇ Ἐλλείψει ΑΣ $>$

ΣΖ $=$ ΣΒ, ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ΑΣ $<$ ΣΖ $=$ ΣΒ, ἔςαι ἡ ὑπὸ ΣΑΒ ἐν τῇ Παραβολῇ μὲν 45°, ἐν δὲ τῇ Ἐλλείψει ἐλάσσων, ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ μείζων.

§. 24.

Β΄. Ἐπείπερ ἐκ τῆς κατασκευῆς ἀεὶ δεῖ γίνεσθαι (§. 21.) ΖΜ $=$ ΠΔ εἰς εὕρεσιν τȣ̃ σημείȣ Μ, ὅταν ἄρα ἡ ΖΠ $<$ ΠΔ, προσδιορισθήσεταί τι σημεῖον Μ· ὅταν δὲ ΖΠ $>$ ΠΔ, διορισθῆναι ȣ̓ δύναται· ἐπείτοιγε ὄντος ΔΠ $>$ ΖΠ, Τρίγωνον συνίςαται ὀρθογώνιον τὸ ΖΜΠ, ȣ̃τινος ἡ τὴν ὀρθὴν Ὑποτείνȣσα ΖΜ, εἶτ᾽ ȣ̓̃ν ΠΔ μείζων τῆς ΖΠ. Ὅταν δὲ ἡ ΖΠ μείζων ἢ τῆς συςοιχȣ́σης αὐτῇ ΠΔ, τηνικαῦτα ἡ ΖΜ ȣ̓ μὴ ἐφίξεται αὐτῆς (τῆς ΠΔ), ȣ̓δ᾽ ἀποτμηθήσονται ὑπ᾽ ἀλλήλων εἰς εὕρεσιν σημείȣ τινος Μ· ἀλλὰ γὰρ ἐὰν ΖΠ $=$ ΠΔ, ἡ ΖΜ ὅλη πίπτει ἐπὶ τὴν ΖΠ, τȣτ᾽ ἔςι τὸ Μ σημεῖον τῆς Καμπύλης τῷ τȣ̃ Ἄξονος σημείῳ Π συμπίπτει, κἀν τȣ́τῳ ἡ Καμπύλη περατȣ̃ται. Τȣ́τȣ τεθέντος. . . .

Σχ. 8. Ἐν τῇ Ἐλλείψει αἱ Εὐθεῖαι ΑΠ αὔξȣσι μᾶλλον, ἢ αἱ αὐταῖς συςοιχȣ̃σαι ΠΔ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ ΣΑΒ $<$ 45°, ἔςιν ΑΣ $>$ ΣΒ, καὶ (§. 21.) ΑΖ $>$ ΖΔ. Ἐὰν δ᾽ ἐκ τȣ̃ Δ Κάθετος ἀχθῇ ἡ Δο ἐπὶ τὴν ἐφεξῆς ΠΔ, Τρίγωνον συνίςαται τὸ ΔοΔ ὀρθογώνιον, ϗ ὅμοιον τῷ ΑΣΒ· ὅθεν ἡ Κάθετος

Δο μείζων ἐςὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς οΔ. Ἀλλ' ἡ μὲν Δο = ΠΖ (= ΖΠ) Κάθετος τὴν τῆς ΑΖ παριςᾷ αὔξησιν· ἡ δ' ἐλάσσων πλευρὰ οΔ, τὴν τῆς ΖΔ· ἄρα αἱ αὐξήσεις τῆς ΑΖ (= ΖΠ) μείζϐς εἰσι τῶν τῆς ΖΔ αὐξήσεων. Ἐπάναγκες τοίνυν συνεχῶς αὐξϐσης τῆς ΑΖ, γενέσθαι μίαν τινα ΖΠ ἐξισϐμένην τῇ ΖΔ σὺν ἁπάσαις ταῖς αὐτῆς αὐξήσεσι. Κείσθω δὴ ΖΠ‴ = Π‴Δ‴ (= ΖΔ σὺν ἁπάσαις αὐτῆς ταῖς αὐξήσεσιν)· ἡ ἄρα Π‴Δ‴ τῇ ΖΠ‴ ἐπιπεσϐσα ἐφαρμόσει, ὅ ἐςι τὸ Μ‴ ἐπὶ τϐ Π‴ σημείϐ πεσεῖται, ἔνθα δὴ ϗ ἐπανακάμπϐσα ἡ Καμπύλη πέρας λήψεται. Εἰ δὲ ληφθείη, ἤτοι περαιτέρω τῆς Π‴Δ‴, ἢ μεταξὺ τϐ Α ϗ τῆς ΣΒ, ἄλλη τις ΠΔ, αὕτη δὴ ἐλάσσων ἂν εἴη, ἢ ὥςε δύνασθαι γενέσθαι = ΖΠ, καὶ δὴ ἐκ ἂν δἰ ἐκείνης προσδιορισθείη σημεῖον ἄλλο Μ. Ἔςιν ἄρα ἡ Ἔλλειψις Καμπύλη, ἧς περ οἱ κλῶνες ΣΜΜ, Σμμ πρῶτον μὲν τϐ Ἄξονος ἑκατέρωσε ἀφίςανται, εἶτα πρὸς αὐτὸν ἐπανακάμπτοντες συνέρχονται ἐν σημείῳ τῷ σ, ὅπερ ἡ ἑτέρα ὑπάρχει τῶν Κορυφῶν τῆς Ἐλλείψεως, ἔνθα ϗ ὁ πρῶτος Ἄξων ἀποτερματίζεται· περαιτέρω δὲ τῶν Σ, σ ἀδύνατον ὑπάρχειν Κορυφὴν ἄλλην. Τϐτϐ χάριν ἡ Ἔλλειψις *Ἐπανακάμπϐσα* Καμπύλη καλεῖται, καὶ ἔςι μοναδική.

§. 25.

Σχ. 9. Ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ, ὅσης τῆς ὑπὸ ΣΑΒ $>$ 45°, ἔςαι ΑΣ $<$ ΣΒ· ἔνθεντοι αἱ ΑΠ ἧττον αὔξουσιν, ἤπερ αἱ συςοιχῶσαι αὐταῖς ΠΔ· δἰ ὃ ϗ ΑΖ $<$ ΖΔ. Ἀλλ᾽ ἐφόδῳ δείξεως τῇ ἀνωτέρωθι παραπλησίας ἐπίδηλον, ἑκάςην ΖΠ τῶν ἔνερθεν τῦ Ζ, ἐλάσσω εἶναι τῦ οΔ μέρυς τῆς ἐφεξῆς ΠΔ τῦ ἐμπεριλαμβανομένυ μεταξὺ τῆς Καθέτυ Δο τῆς ἀπὸ τῦ πρὸ αὐτῆς Δ ἀχθείσης, ϗ τῦ οἰκείυ Δ· ἐξ ὗ δὴ μηδεμίαν ΖΠ δύνασθαι ἐξισωθῆναι τῇ ἑαυτῆς συςοίχῳ ΠΔ, πρόδηλον. Διὰ ταῦτα οἱ τῆς Ὑπερβολῆς κλῶνες ΣΜΜ, Σμμ ἑκατέρωσε ἐπ᾽ ἄπειρον προϊόντες ἀφίξανται τῦ κατ᾽ αὐτὴν Ἄξονος ΣΠ. Ἐὰν δὲ προαχθείσης τῆς ΒΑ πέραν τῆς Διευθετούσης ἐπὶ τὸ Η, ϗ τῆς ΣΑ πέραν τῦ Α, ληφθῶσιν αἱ εἰς τὰ ὑπὲρ τὴν Διευθετῦσαν ἥκυσαι ΖΠ, πρῶτον μὲν ὑπερέξυσι τῶν συςοιχυσῶν αὐταῖς ΠΔ. Ἐπεὶ δὲ αἱ ΠΔ συνεχῶς αὔξυσι μᾶλλον, ἢ αἱ αὐταῖς συςοιχῦσαι ΖΠ (ὃ δὴ ϗ περὶ τῶν ἔνερθεν τῆς Διευθετύσης δέδεικται), ἀνάγκη δήπυ μίαν τινα ΠΔ ἐξισωθῆναι μιᾷ τινι ΖΠ. Κείσθω ὖν Π‴Δ‴ $=$ ΖΠ‴· δεῖ δὴ τὸ Π‴ σημεῖον εἶναι τῆς Ὑπερβολῆς· τῶν γὰρ τριγώνων Δ‴Π‴Α, ΑΣΒ ὁμοίων ὄντων, ἔςι Π‴Α : Π‴Δ‴ : : ΑΣ : ΣΒ, ὅθεν ἔςι Π‴Α : Π‴Ζ : :

ΑΣ : ΣΒ· τὸ ἄρα Π‴ σημεῖον ἐςι τῆς Ὑπερβολῆς, εἴγε εἴρηται (§. 18, 21.) τὴν διάςασιν (Π‴Α) τȣ̃ σημείȣ ἀπὸ τῆς Διευθετȣ́σης πρὸς τὴν διάςασιν (Π‴Ζ) τȣ̃ αὐτȣ̃ σημείȣ ἀπὸ τῆς Ἑςίας δεῖν εἶναι ἐν τῷ ςαθερῷ λόγῳ τῆς τομῆς ΑΣ : ΣΒ. Ἐπείπερ ἔτι αἱ Εὐθεῖαι ΠΔ αἱ ὑπὲρ τὴν Π‴Δ‴ ἀεὶ αὔξȣσι, ϗ ἀεὶ μᾶλλον, ϗ μᾶλλον ὑπερακοντίζȣσι τῶν αὐταῖς συςοιχȣσῶν ΖΠ, δυνατὸν ϗ ὕπερθεν τῆς Διευθετȣ́σης προσδιορισθῆναι σημεῖα m τοιάδε, ὥςε τὰς εὐθείας Zm ἰσȣ̃σθαι ταῖς συςοιχȣ́σαις αὐταῖς ΠΔ· καὶ ȣ̔́τως ἐκφυήσονται πρὸς ἑκάτερα τȣ̃ Ἄξονος καινοὶ κλῶνες Ὑπερβολῆς δύω ἐπ' ἄπειρον ἀνατρέχοντες, καὶ πρὸς τὴν Ἑςίαν Ζ, ϗ Διευθετȣ̃σαν τὴν ΑΘ ἀναφερόμενοι. Ταῦτ' ἄρα ἡ ΣΠ‴, ἢ Σσ κοινός ἐςιν Ἄξων, ϗ διωρισμένου μεγέθους μεταξὺ τῶν κατὰ τὰς *Ἀντικειμένας* Ὑπερβολὰς κορυφῶν Σ, σ.

§. 26.

Ἐν δὲ τῇ Παραβολῇ, τῆς ὑπὸ ΣΑΒ γωνίας ȣ̓́σης = 45°, ἐςὶν ΑΣ = ΣΒ, ϗ ΑΠ = ΠΔ. Ἅπασαι ἄρα αἱ ΠΖ αἱ μεταξὺ τȣ̃ Σ ϗ τῆς Διευθετȣ́σης ἔχȣσαι τὸ σημεῖον Π, μείζȣς εἰσι τῶν αὐταῖς συςοιχȣσῶν ΠΔ· ὥςε ἀδύνατον ἐκεῖσε σημεῖα Μ προσδιορισθῆναι. Πᾶσαι δὲ αἱ ὑπὸ τὸ Σ σημεῖον ΠΖ ἤτ- Σχ. 10.

C

τȣς εἰσὶ τῶν οἰκείων συςοιχȣσῶν ΠΔ· ἀνθ' ὅτȣ δὴ ὑπὸ τὴν Σ κορυφὴν δύνανται ἄπειρα σημεῖα Μ προσδιορίζεσθαι ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΠΔ· ἔςιν ἄρα ἡ Παραβολὴ Καμπύλη δύω μόνȣς ἔχȣσα κλῶνας, οἵ τινες προϊόντες ἐπ' ἄπειρον τȣ̃ Ἄξονος ἀφεςήκασι.

§. 27.

Σχ.8. 9. 10. Γ΄. Ἐὰν, δοθεισῶν τῆς Διευθετȣ́σης ΑΘ, ϗ τῆς Ἑςίας Ζ, ϗ τῆς Κορυφῆς Σ, ζητηθῇ, πότερον ἆρα, ἄπειρος Ἄξων ἔνεςι τῇ Τομῇ, ἢ ϗ ἑτέρα Κορυφὴ, σ, ἤχθω ἀπὸ τῆς Ἑςιας Ζ ὑπὸ γωνίαν 45° ἐπὶ τȣ̃ Ἄξονος Εὐθεῖα τέρματος ἄτερ ἡ ΖΗ, ϗ ἐκ τȣ̃ σημείȣ Η, καθ' ὃ συμβάλλει τῇ ΑΒ προαχθείσῃ, εἰ δέοι, κατήχθω ἐπὶ τȣ̃ Ἄξονος Κάθετος ἡ Ζσ τέμνȣσα τὸν Ἄξονα κατὰ τὸ σ, ϗ τὴν ἑτέραν, ἐὰν ᾖ, κορυφὴν προσδιορίζουσα. Τȣ̃ γάρ τοι ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΖσΗ ἰσοσκελȣ̃ς ὄντος, ἔςι Ζσ = σΗ· ἔςι δὲ παρὰ τȣ̃το σΑ : σΗ : : ΣΑ : ΣΒ, εἴτ' ȣ̃ν ἡ διάςασις (σΑ) τȣ̃ σημείȣ σ ἀπὸ τῆς Διευθετȣ́σης, πρὸς τὴν διάςασιν (Ζσ = σΗ) τȣ̃ αὐτȣ̃ σημείȣ ἀπὸ τῆς Ἑςίας, ἔςιν ἐν τῷ ςαθερῷ λόγῳ τῆς Καμπύλης ΑΣ : ΣΖ = ΣΒ, (§. 18. 19)· Ἀναγκαίως ἄρα τὸ σ, σημεῖον τῆς Καμπύλης ἐςι, ϗ ἐπείπερ ἐπὶ τȣ̃ Ἄξονος ὑπάρχει, ἔςι ϗ Κορυφὴ τῆς Τομῆς.

§. 28.

Ἐκ δὴ τέτων συνάγεται τὸν τῆς Ἐλλείψεως, ϗ Ὑπερβολῆς Ἄξονα Σσ ἀεὶ εἶναι διωρισμένε μεγέθες· ἀλλ' ἐπὶ μὲν τῆς Ἐλλείψεως ἐκτερματίζεσθαι ἀεὶ ἔνερθεν τῆς Ἑςίας Ζ· τῆς γάρ τοι γωνίας ὑπὸ ΣΑΒ $<$ 45° ἔσης, τὴν πλευρὰν ΑΒ προαχθεῖσαν ἐπάναγκες συμπεσεῖν τῇ ΖΗ ἐπὶ τὰ πρὸς ἅπερ ἂν ὦσιν αἱ (ΣΑΗ + ΑΖΗ) $<$ 180°. Ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ· ἐπὶ τὰ ὑπερ τὴν Ἑςίαν Ζ ὁ Ἄξων ἀποτερματίζεται, εἴγε αἱ (ΣΑΗ + ΑΖΗ) $<$ 180°· τῆς δὲ Παραβολῆς τὸν Ἄξονα ἐπ' ἄπειρον ἐκτείνεσθαι λίαν καταφανές. Ἐπείτοιγε ἡ ΖΗ παράλληλος ἔσα τῇ ΑΒ, ἐδέποτ' ἂν ἐν πεπερασμένῳ διαςήματι ταύτῃ συμπέσοι· ἀλλὰ γὰρ ἐν ἀπείρῳ διαςήματι συμπίπτειν ἐπινοεῖται καθ' ἑκάτερα κατάτε τὰ πρὸς τὸ Δ δηλονότι ϗ κατὰ τὰ πρὸς τὸ Α.

§. 29.

Δ'. Ἐὰν ἐπὶ μὲν τε Ἄξονος προαχθέντος ληφθῇ σα = ΣΑ, ἐπὶ δὲ τῆς Π'''Δ''' προαχθείσης ἐπὶ θάτερα τε Ἄξονος, γένηται σβ = ΣΒ, ἔςαι ἡ ἀπέραντος Εὐθεῖα αβδ παράλληλος τῇ ΑΒΔ· ἴσαι γὰρ ἀλλήλαις αἱ ἐναλλὰξ Γωνίαι ὑπὸ ΣΑΒ, σαβ. Τῶν δέτοι Παραλλήλων Δδ, Δδ, ἑκάςη Σχ. 8. 9.

ἰσῦται τῷ πρώτῳ Ἄξονι Σσ, εἴγε κατὰ μὲν τὴν Ἔλλειψιν ἐστὶν ὁ Ἄξων Σσ = (ΣΖ + Ζσ) = (ΣΒ + σΗ) = (βσ + σΗ) = βΗ, κατὰ δὲ τὴν Ὑπερβολὴν Σσ = (σΖ — ΖΣ) = (σΗ — ΣΒ) = (σΗ — σβ) = βΗ. Ἀλλαμὴν ἅπασαι αἱ Δδ παράλληλοι, καὶ δὴ καὶ ἴσαι ἑκάστη τῇ βΗ, ἑκάστη ἄρα δΔ = βΗ = Σσ.

§. 30.

Κἀκεῖνο δὲ πρόδηλον, ὡς ἐὰν ληφθῶσι δύω ΠΔ ἰσοδιεςῶσαι ἀπὸ τῶν κορυφῶν Σ, σ, ἐστὶ Σσ = ΠΔ + ΠΔ· ἀμέλειτοι, κατὰ μὲν τὴν Ἔλλειψιν τὸ ἄθροισμα δυεῖν ΠΔ ἰσοδιεςωσῶν ἀπὸ τῶν κορυφῶν ἰσῦται τῷ πρώτῳ Ἄξονι Σσ. Ἐὰν γὰρ (§. 24.) ΣΒ θεωρηθῇ ὡς πρῶτος ὅρος ἀριθμητικῆς ἀναλογίας, ὁ ἔσχατος ἔςαι Π‴Δ‴· δείκνυται γὰρ (§. αὐτόθ.) τὰς διαφορὰς ἁπασῶν τῶν ΠΔ τῶν μεταξὺ τῆς ΣΒ, καὶ Π‴Δ‴, ἀλλήλαις ἰσῦσθαι. Διὰ ταῦτα ἐν ÷ ΣΒ, ΠΔ, ΠΔ . . . . . . Π‴Δ‴ πρόοδον καθιςᾶσιν ἀριθμητικήν, ἧς πρῶτος μὲν ὅρος ἡ ΒΣ, ἔσχατος δὲ ἡ Π‴Δ‴. Ἀλλ' ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ τὸ δυοῖν ὅρων ἰσοδιεςώτων ἀπὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα ἐξισῦται τῷ τῦ πρώτυ καὶ ἐσχάτυ ἀθροίσματι (§. 46. Ἀλγβ.)· ἡ ἄρα ΠΔ σὺν τῇ ἰσοδιεςώσῃ ΠΔ = ΣΒ + Π‴Δ‴ = ΣΖ + Ζσ = Σσ.

Κατὰ δὲ τὴν Ὑπερβολὴν, ἐξισοῦται τῷ πρώτῳ Ἄξονι ἡ δυεῖν ἰσοδιεστωσῶν ἀπὸ τῶν κορυφῶν διαφορά· ἔχει γάρ τοι ἐν ταύτῃ τὰ κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον οὕτως. Ἐὰν οἱ ὑπὲρ τὴν Διευθετοῦσαν ὅροι ΠΔ καταφατικοὶ, φέρε, τεθῶσιν, τῶν εὐχρηστούντων ἵν' ἐκ τῆς Ἑστίας Ζ προσδιορισθῶσι τὰ m σημεῖα, ἔσχατός ἐστιν ἡ Εὐθεῖα Π'''Δ'''· ἀχρηστήσουσι δὲ οἱ λοιποὶ καταφατικοὶ ὅροι ἐς γ' ἐπὶ τὸ σημεῖον Α, ἀφ' οὗ ἄρξονται οἱ ἀχρηστοῦντες μὲν, ἀποφάσκοντες δὲ μέχρι τοῦ σημείου Σ, ἔνθεν δὴ οἱ ἐν χρήσει ἀποφατικοὶ, ὧν πρῶτος μὲν ἐστιν ἡ Εὐθεῖα ΣΒ, ἐφεξῆς δὲ αἱ ΠΔ, ΠΔ ἐπ' ἄπειρον. Ἔσται οὖν ἡ ἔκθεσις ταύτης τῆς προόδου τοιάδε τις ÷ ΔΠ ..... Δ'''Π''' ..... ο ..... —ΣΒ, —ΠΔ, κτ. ἀλλ' ἐπείπερ (§. 29.) Σσ = βΗ = δΔ, καὶ ΣΒ = σϐ, ἄρα (Δ'''Π'''—ΣΒ) = (Δ'''Π'''—σϐ) = βΗ = δΔ. Τοιγαροῦν ὁ πρὸ τοῦ ὅρου Δ'''Π''', καὶ ὁ μετὰ τὸν ὅρον —ΣΒ, ὅ ἐστιν ἡ διαφορὰ τῶν ὅρων τῶν ἰσοδιεστώτων ἀπό τε τῆς Δ'''Π''', καὶ ἀπὸ τῆς --ΣΒ (ἥτις ἐστιν ἴση τῷ ἀθροίσματι Δ'''Π'''—ΣΒ) ἐξισοῦται τῷ Ἄξονι Σσ = δΔ. Ἀεὶ ἄρα ἐν τῇ Ὑπερβολῇ αἱ ἀπὸ τῶν κορυφῶν Σ, σ ἰσοδιεστῶσαι, εἴτ' οὖν ΔΠ—ΔΠ ἐξισοῦνται τῷ πρώτῳ Ἄξονι. Σχ. 9.

§. 31.

Ε'. Ἐὰν ἡ αθ παράλληλος ἀχθῇ τῇ ΑΘ, ϗ ἐπὶ τȣ Ἄξονος Σσ προςαχθέντος, εἰ δέοι, ληφθῇ σημεῖον τι ὅτως, ὥςε εἶναι σζ = ΣΖ, ὥσπερ διὰ τῆς Ἑςίας Ζ, ϗ τῆς Διευθετȣ́σης ΑΘ, ὅτω ϗ δι' Ἑςίας μὲν τῆς ζ, Διευθετȣ́σης δὲ τῆς αθ, καταγραφήσονται ἥτε Ἔλλειψις ϗ ἡ Ὑπερβολή. Κατὰ μὲν γὰρ τὴν Ἔλλειψιν ὅπως ἂν τὰ σημεῖα Μ, Μ διὰ τῆς Ἑςίας Ζ εὑρεθείη, τῶν διαςημάτων ΠΔ, ΠΔ ληφθέντων, ϗ ἐκ τȣ Ζ ἐπ' αὐταῖς ταύταις ταῖς ΠΔ, ΠΔ τεθέντων, προσδιωρίσθησαν (§. 21.) τὰ σημεῖα Μ, Μ, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τῶν τῇ Σ πλησιεςέρων ΠΔ, μέχρι τῶν θατέρα κορυφῇ σ προσπελαζόντων. Τῶν δ' αὐτῶν διαςημάτων ΠΔ μετενεχθέντων ἐπὶ θάτερα τῶν τȣ Ἄξονος μερῶν, τὰ σημεῖα μ, μ ἐξευρέθησαν.

Εὑρεθήσεται δὲ ὡσαύτως τὰ αὐτὰ σημεῖα Μ, Μ καὶ διὰ Διευθετȣ́σης μὲν τῆς αθ, Κορυφῆς δὲ τῆς σ, Ἑςίας δὲ τῆς ζ· ἀμέλει τοι τὰ διαςήματα Πδ ἐκ τῆς Ἑςίας ζ ἐπὶ τῶν αὐτῶν Πδ μεταφερόμενα προσδιορίσȣσι τὰ σημεῖα μ, μ· τῇ δὲ τȣ́των αὐτῶν ἐπὶ θάτερα τȣ Ἄξονος μεταθέσει προσδιορισθήσεται τὰ Μ, Μ.

Ἀλλὰ δὴ ϗ ἄλλως προσδιορισθήσεται τὰ αὐτὰ σημεῖα Μ ἐκ τῆς Ἑςίας ζ ὕτω. Σεσημειώσθωσαν δύω τινες ΠΔ ἐπίσης ἑκάτεραι ἀφεςηκεῖαι τῶν Κορυφῶν, ἡ μὲν τῆς Σ, ἡ δὲ τῆς σ. Ἡ μὲν ὖν ἀπὸ τῆς Σ τὸν τρίτον, φέρε, κατέχουσα χῶρον, προσδιορίζεται ἐκ τῆς Ζ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον Μ, ἡ δ' αὐτῆς προαγωγὴ Πδ προσδιορίσαιτ' ἂν ἐκ τῆς ζ τὸ οἰκεῖον ἑαυτῆς μ· ἀλλὰ ταύτῃ τῇ Πδ ἴσῃ ἐςὶν ἡ ΠΔ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς σ τὸν τρίτον κατέχουσα χῶρον· ὕτω γὰρ ΠΔ + ΠΔ = δΔ = Σσ (§. 23.) ἡ ἄρα ἀπὸ τῆς Κορυφῆς σ τὸν τρίτον χῶρον κατέχυσα ΠΔ = τῇ ἀπὸ τῆς Κορυφῆς Σ τὸν τρίτον χῶρον κατεχύσῃ Πδ = ζμ = ζΜ. Διὰ ταῦτά τοι ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ταὐτόν ἐςι ΔΠ + Πδ, ϗ ΔΠ σὺν τῇ ἀπὸ τῆς ἑτέρας Κορυφῆς ἰσοδιεςώσῃ ΔΠ τῇ κατὰ ταὐτὰ τῦ Ἄξονος κειμένῃ.

Κατὰ δὲ τὴν Ὑπερβολὴν (σχ. 9.) τοῖς μὲν ἔνερθεν τῆς Κορυφῆς Σ διαςήμασι ΠΔ προσδιορίζεται τὰ ἐπ' αὐτῶν τῶν διαςημάτων σημεῖα Μ, ποιῦσιν ἑκάςῃ ΠΔ ἴσην ἑκάςην ΖΜ (§. 21.)· τοῖς δ' ὕπερθεν τῆς Κορυφῆς σ διαςήμασι ΠΔ, ἐκ τῆς αὐτῆς Ζ, εὑρίσκεται τὰ ἐπ' αὐτοῖς σημεῖα m, τιθεῖσιν ἑκάςῃ ΠΔ ἴσην ἑκάςην Zm· ἐπ' ἄπειρον ἄρα ἐκ τῆς Ἑςίας Ζ προσδιορισθήσεται τά τε σημεῖα Μ, ϗ δὴ ϗ τὰ m τὰ ἐπὶ θάτερα κείμενα.

Κἀνταῦθα μέντοιγε τὰ αὐτὰ Μ εὑρεθήσεται καὶ Διευθετούσῃ μὲν τῇ αθ χρωμένοις, Κορυφῇ δὲ τῇ σ, Ἑςίᾳ δὲ τῇ ζ. Τὰ γὰρ τῶν Πδ διαςήματα ἐπ' αὐτῶν τούτων τῶν Πδ ἐκ τῆς ζ τιθέμενα προσδιορίσονται τὰ σημεῖα m ἐν τῇ ὕπερθεν Ὑπερβολῇ. Αὐτῶν δὲ τῶν Πδ προαχθεισῶν ἐς γ' ἐπὶ τὰ Δ, ἀπολαμβάνονται αἱ ΠΔ, αἵτινες ἐκ τῆς Ἑςίας ζ ἐπὶ τὰς ἀλλήλαις ἀπὸ τῶν κορυφῶν Σ, σ ἰσοδιεςώσας ἐν τῇ ἔνερθεν Ὑπερβολῇ μετατιθέμεναι, τὸν χῶρον τῶν σημείων Μ, Μ προσδιορίσουσι.

Ἀλλ' οὐ γὰρ ἐπάναγκες ἐν τῷ ὑπολογισμῷ χρήσασθαι ταῖς Πδ, εἴγε ἑκάςη τῶν Πδ ἴση ἐςὶ τῇ τὸν αὐτὸν ἐν τῇ τάξει κατεχούσῃ χῶρον κατὰ τὴν ἔνερθεν Ὑπερβολὴν, ΠΔ· ταὐτὸν ἄρα ἐςὶ ΔΠ — Πδ (ὅλον κ̀ μέρος) κ̀ ΔΠ πλὴν τῆς αὐτῇ ἰσοδιεςώσης ΔΠ.

§. 32.

ϛ'. Συνάγεται ὡσαύτως τὰς τῶν κορυφῶν Σ, σ ἑκατέρωθεν ἰσοδιεςώσας Τεταγμένας ἐξισοῦσθαι ἀλλήλαις, παρατιθεμένων δήπουθεν ἑκάςης μὲν τῶν ἐν τῷ ΣΒΔ‴Π‴ τραπεζίῳ πρὸς ἑκάςην τῶν ἐν τῷ Σδβπ‴ (σχ. 8.)· ἑκάςης δὲ τῶν ἐν τῷ ΣΒΔΠ πρὸς ἑκάςην τῶν ἐν τῷ σβδΠ (σχ. 9.). Τῶν γάρ τοι ΠΔ, Πδ, ἰσοδιεςωσῶν ἀπὸ τῶν σημείων Α, α, ἢ Σ, σ, τὰ ἀλλήλοις ὅμοια τρίγωνα ΑΠΔ,

απδ εἰσὶ ϗ ἴσα. Ἀλλὰ τῇ μὲν τούτων ΠΔ προσδιορίζεται τὸ Μ σημεῖον ἐπὶ τῆς αὐτῆς ΠΔ ἐκ τῆς Ἑςίας Ζ ἀκριβέςατα, τῇ δὲ Πδ προσδιορίζεται τὸ σημεῖον μ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Πδ ἐκ τῆς Ἑςίας ζ· ἄρα τῶν ΠΔ, Πδ ἴσων ἀλλήλαις οὐσῶν, ϗ αἱ ἰσοδιεςῶσαι ΠΜ, Πμ ἀλλήλαις ἐξισωθήσονται.

§. 33.

Ζ΄. Ὡσαύτως συνάγεται εἶναι $\Sigma\sigma = ZM \pm \zeta M$ (τοῦ μὲν $+$ πρὸς τὴν Ἔλλειψιν, τοῦ δὲ $-$ πρὸς τὴν Ὑπερβολὴν ἀποδιδομένων). Καὶ γὰρ ὁποιαδήποτε Σχ. 8. ΖΜ ἴση ἐςὶ τῇ ἑαυτῆς ΠΔ (ἐκ κατασκευῆς), ἀλλὰ ϗ ὁποιαδήποτε $\zeta\mu = \zeta M$ ἴση ἐςὶ τῇ ἑαυτῆς Πδ τῇ διεςώσῃ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Σ, ὅσον ϗ ἡ ληφθεῖσα ΠΔ ἐφ᾽ ἧς ὑπάρχει τὸ Μ. Ἀλλὰ τῇ Πδ ἐξισοῦται μία τις ΠΔ τῶν ἐν τῇ κατὰ τὰ δεξιὰ τοῦ Ἄξονος ἀριθμητικῇ σειρᾷ, τουτέςιν ἡ τοσοῦτον διεςῶσα ἀπὸ τῆς σ Κορυφῆς, ὅσον ἡ ληφθεῖσα Πδ ἀπέχει τῆς Σ· τὸ ἄρα ἄθροισμα τῶν ἰσοδιεςωσῶν $\Pi\Delta + \Pi\Delta = ZM + \zeta M$. Ὡσαύτως δὲ ϗ ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς δείκνυται, ὅτι $\Pi\Delta - \Pi\Delta = \zeta M - ZM$· ἀλλαμὴν (§. 30.) $\Pi\Delta \pm \Pi\Delta = \Sigma\sigma$, ἄρα $MZ \pm M\zeta = \Sigma\sigma$.

§. 34.

Η΄. Ἐντεῦθεν ἄρα κατὰ μὲν τὴν Ἔλλειψιν, τὸ ἄθροισμα, κατὰ δὲ τὴν Ὑπερβολὴν ἡ διαφορὰ τῶν διαςάσεων ἑκάςȣ τῶν κατὰ τὴν Περίμετρον σημείȣ ἀπὸ δυοῖν μονίμοιν σημείοιν ἐςὶ ποσὸν εὐςαθὲς τῷ πρώτῳ Ἄξονι ἐξισȣ́μενον.

§. 35.

Σχ. 8. Ἐντεῦθεν ἄρα μέθοδον ἀρίςην τȣ̃ καταγράφειν Ἔλλειψιν κατ' εὐρυχώρȣ γῆς πεδίȣ μεμαθήκαμεν. Ἐμπαγήτωσαν γάρ τοι ἐν τοῖς σημείοις Ζ, ζ ῥαβδία δύω, ϗ περὶ ταῦτα σπαρτίον τὸ ΖζΜΖ τεθὲν, τῶν ἄκρων αὐτȣ̃ ἀλλήλοις προσδεδεμένων, ἐκτετάσθω δι' ἄλλȣ ῥαβδίȣ ἕως τȣ̃ Μ, ϗ περιήχθω περὶ τὰ μένοντα ῥαβδία. Ἐκ δὴ τῶν ἐπὶ τȣ̃ ἐδάφȣς ἀποσημειȣμένων τȣ̃ περιαχθέντος ῥαβδίȣ ἰχνῶν ἀποτελεσθήσεται Ἔλλειψις. Κείσθω γὰρ τὸ κινητὸν ῥαβδίον κατὰ τὸ Σ· δῆλον ἓν τὸ σπαρτίον εἶναι = 2 Ζζ + 2 ΖΣ. Τȣ̃ δὲ ῥαβδίȣ περιαγομένȣ, τὸ κατὰ τὸ σπαρτίον, Ζζ μέρος, ȣ̓δὲν ἄλλο ἢ τὴν διάςασιν τῶν Ἑςιῶν καταμετρεῖ. Τοιγαρȣ̃ν τὸ κατάλοιπον αὐτȣ̃ μέρος ἰσȣ̃ται τῷ Σσ, ϗ τὰς ἀπὸ τῶν Ἑςιῶν διαςάσεις ἑκάςȣ τῶν ἐπὶ τῆς Καμπύλης σημείων καταμετρεῖ. Ἅπαν ἄρα σημεῖον τῆς ȣ̔́τω καταγραφομένης Καμπύλης ὑπάρχει σημεῖον Ἐλλείψεως (§. ἀνωτ.).

§. 36.

Θʹ. Ἐκ δὴ τῶν εἰρημένων συνάγεται ἔτι εἶναι $\Sigma\sigma : Z\zeta :: \Sigma A : \Sigma B$· ἔςι γὰρ $\sigma A : \sigma Z$ ($= \Pi'''\Delta'''$) $:: \Sigma A : \Sigma B$· ἄρα $\sigma A \mp \Sigma A$ (ἤτοι $\Sigma\sigma$) $: \sigma Z \mp \Sigma B$ (ἤτοι $Z\zeta$) $:: \Sigma A : \Sigma B$, τοῦ μὲν — ἐν τῇ Ἐλλείψει, τοῦ δὲ + ἐν τῇ Ὑπερβολῇ λαμβανομένων.

§. 37.

Ιʹ. Ἡ διπλῆ Τεταγμένη μΜ ἐξ ἑκατέρας τῶν κορυφῶν Σ, σ προϊοῦσα ἀεὶ μεγεθύνεται ἕως ἐπὶ τὴν μεταξὺ τῶν Κορυφῶν μεσαιτάτην, καὶ ἁπασῶν μεγίςην, ἥτις ἐκ τούτου τὸ τῆς Ἐλλείψεως πλάτος καταμετρεῖ, ὥσπερ ἡ Σσ τὸ κατ' αὐτὴν μῆκος· καλεῖται δὲ αὕτη ΔΕΥΤΕΡΟΣ ἌΞΩΝ τῶν κατὰ τὴν Ἔλλειψιν· καὶ ἔςιν ἡ μ″ΓΜ″ Εὐθεῖα· τὸ δὲ Γ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνει τὸν πρῶτον Ἄξονα Σσ, τὸ Κέντρον ἐςὶ τὸ τῆς Ἐλλείψεως. Ἐξ ὧν ῥᾷς' ἄν τις εἰδοίη. Σχ 8.

αʹ. Διὰ θατέρου μὲν τῶν Ἀξόνων διχοτομεῖσθαι τὸ τῆς Ἐλλείψεως ἐμβαδὸν· δι' ἑκατέρων δὲ, εἰς τέσσαρα μέρη ἰσάλληλα διαιρεῖσθαι.

βʹ. Δοθέντων τούτε μείζονος Ἄξονος Σσ, καὶ τῶν Ἑςιῶν Z, ζ, εὑρίσκεσθαι τὸν ἐλάσσω Ἄξονα, ἐὰν τμηθῇ δίχα ὁ μείζων Ἄξων Σσ, καὶ ἐκ τοῦ σημείȣ τῆς διχοτομίας ἐγερθῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ δ″Δ″, ϗ ἐπ' αὐτῆς τὰ σημεῖα μ″Μ″ προσδιορισθῶσι διὰ τȣ̃ μείζονος Ἡμιάξονος ἀφ' ἑκατέρας τῶν Ἑςιῶν ἐπ' αὐτὴν τὴν δ″Δ″ μεταφερομένȣ. Ἔςαι γὰρ Μ″Ζ = Μ″ζ, ὄντων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΖΓΜ″, ζΓΜ″ ἴσων ἀλλήλοις, ϗ Μ″Ζ + Μ″ζ = Σσ.

γ΄. Καὶ ἀνάπαλιν δὲ, δοθέντων ἀμέλει ἑκατέρων τῶν Ἀξόνων, τὰς Ἑςίας προσευρίσκεσθαι, ἐὰν ὁ μείζων Ἡμιάξων ἐκ τȣ̃ κατὰ τὸν ἐλάσσω Ἄξονα ἀκροτάτȣ σημείȣ μετενεχθῇ ἑκατέρωσε ἐπὶ τὸν αὐτὸν μείζω Ἄξονα.

§. 38.

Σχ 9. Ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ἡ διπλῆ Τεταγμένη ἐπ' ἄπειρον ἀεὶ ἄυξει προϊȣ̃σα ἀφ' ἑκατέρας τῶν κορυφῶν Σ, σ· ἀλλ' ὡς ἂν ὁμοιότης τις πρὸς τὴν Ἔλλειψιν κἀν ταύτῃ τηρηθείη, Κέντρον μὲν αὐτῆς ἀκȣ́ει τὸ μεσαίτατον μεταξὺ τῶν κορυφῶν σημεῖον Γ· ἡ μέντοι Σσ γραμμὴ ΠΡΩ͂ΤΟΣ, καὶ δὴ καὶ πρῶτος ϗ πλάγιος Ἄξων ὀνομάζεται. Δεύτερος δὲ, ϗ ὌΡΘΙΟΣ ἌΞΩΝ καλεῖται ἡ Εὐθεῖα λΓΛ ἡ ἐπὶ τὸν πρῶτον Ἄξονα Κάθετος ἱςαμένη, ϗ τοῖς σημείοις λ, Λ τῇ ἀφ' ἑκατέρας τῶν κορυφῶν Σ, σ μεταθέσει τῆς ἀπὸ τῶν Ἑςιῶν ἡμιδιαςάσεως ΓΖ, ἢ Γζ περιοριζομένη. Δῆλον ἄρα, τῶν

Ἀξόνων δοθέντων, ὅ,τι ποιητέον εἰς εὕρεσιν τῶν κατὰ τὴν Ὑπερβολὴν Ἑςιῶν.

§. 39.

Ἡ διὰ τῆς Ἑςίας τῆς Κωνικῆς τομῆς διήκουσα διπλῆ Τεταγμένη ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ ἀκȣ́ει τȣ̃ πρώτȣ Ἄξονος.

§. 40.

ΙΑ΄. Ἐκ τῆς γενικῆς τῶν Κωνικῶν Τομῶν κατασκευῆς δῆλον ἔτι ϗ τȣτὶ γίνεται, ἁπάσας τὰς ὁμοειδεῖς τομὰς, οἷον ἁπάσας τὰς Ἐλλείψεις κ. τ. εἶναι ἀλλήλαις ὁμοίας, ἐὰν αἱ τῶν Κορυφῶν ἀπὸ τῆς Διευθετȣ́σης διαςάσεις (ΑΣ) πρὸς τὰς ἀπὸ τῆς ἐγγυτέρας Ἑςίας (ΣΖ) ἐν τῷ αὐτῷ ὦσι λόγῳ· ὁ γάρ τοι ςαθερὸς λόγος τῆς τομῆς ὑφίςαται ἐν τῷ λόγῳ ΑΣ : ΣΒ, ἢ ΑΣ : ΣΖ (§. 19.)· Ἐὰν ȣ̃ν δυσὶν ὁμοειδέσι τομαῖς ᾖ ΑΣ : ΣΖ : : ασ : σζ, πᾶσαι αἱ κατ' αὐτὰς ὁμόλογοι εὐθεῖαι ἀνάλογοι ἔσονται, οἷον ἅπασαι αἱ ΑΠ, ΠΔ, εἴτ' ȣ̃ν αἱ ΖΜ τῆς ἑτέρας τομῆς ἀνάλογοι ἔσονται πρὸς τὰς απ, πδ, εἴτ' ȣ̃ν πρὸς τὰς ζμ ὁμολόγȣς τὰς κατὰ τὴν ἑτέραν τομήν. Ἁπασῶν ἄρα τῶν ὁμολόγων διαςάσεων ἀναλόγων πρὸς ἀλλήλας ȣ̓σῶν, αἱ Κωνικαὶ Τομαὶ ὅμοια ἀλλήλοις σχήματα ἔσονται.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 41.

Δύω Ἐλλείψεις, ἢ δύω Ὑπερβολαὶ ὅμοιαί εἰσιν ἀλλήλαις, ἐὰν οἱ τῆς ἑτέρας Ἄξονες ὦσιν ἀνάλογοι πρὸς τὰς τῆς ἑτέρας. Ὡσαύτως δὲ, καὶ ἐὰν αἱ ἀπὸ τῶν Διευθετουσῶν διαστάσεις τῶν κορυφῶν ὦσιν ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀπ᾽ αὐτῶν διαστάσεις τῶν Ἑστιῶν.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 42.

Σχ. 10. Πᾶσαι αἱ Παραβολαὶ ὅμοιαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἔστι γὰρ ἐν ἑκάστῃ ΑΣ = ΣΖ.

ΠΡΟ΄ΒΛΗΜΑ Α΄.

§. 43.

Σχ. 11. 12. Διὰ τοῦ Δοθέντος ἐπὶ τῆς Κωνικῆς Τομῆς σημείου Μ γραμμὴν Εὐθεῖαν Ἁπτομένην αὐτῆς ἀγαγεῖν.

ΛΥ΄ΣΙΣ.

Ἤχθωσαν τέρματος ἄνευ ἀπὸ τῶν κατὰ τὴν Τομὴν Ἑστιῶν Ζ, ζ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Μ αἱ ζμ, ΖΜ, καὶ τῇ εὐθείᾳ ΣΜ τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ ΖΜμ γωνία, δι᾽ ἧς ἡ Καμπύλη διέρχεται· Φημὶ δὴ την ΤΜ εἶναι τὴν κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ τῆς Τομῆς ἐπιψαύȣσαν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Κέντρῳ μὲν τῷ Μ, διαςήματι δὲ τῷ ΜΖ καταγεγράφθω Τόξον Κύκλου τὸ Ζμ καταμετρȣ͂ν τὴν ὑπὸ ΖΜμ. Δῆλον ȣ͂ν ὅτι $\zeta\mu = \Sigma\sigma$, εἴγε $\zeta\mu = \mathrm{M}\zeta \pm \mathrm{MZ}$. Ἐὰν δὲ δι' ἄλλȣ σημείου τῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΤΜ ἀχθῶσιν αἱ Αζ, ΑΖ, Αμ, ἔςαι $\mathrm{AZ} = \mathrm{A}\mu$· ἄρα ϗ $\mathrm{A}\zeta \pm \mathrm{AZ} = \mathrm{A}\zeta \pm \mathrm{A}\mu$. Ἀλλ' ἐν μὲν τῷ 21 σχ., ἐπεὶ $\mathrm{A}\zeta + \mathrm{A}\mu > \zeta\mu$, τὸ σημεῖον Α ἐκτὸς τῆς Καμπύλης ἔςαι (§. 33.), ἐν δὲ τῷ 12 σχ. εἴπερ ἦν $\mathrm{A}\zeta - \mathrm{A}\mu = \zeta\mu$, ὥσπερ τὸ ἰδίωμα τῆς Ὑπερβολῆς ἐπιζητεῖ, ὄντος αὐτῆς τȣ͂ Α σημείȣ, ἦν ἂν $\mathrm{A}\zeta = \mathrm{A}\mu + \zeta\mu$· ἄτοπον δέ· ȣ̓δὲν ἄρα ἀλλ' ἢ τὸ Μ ἐςιν ἐπὶ τῆς ΤΜ εὐθείας, ὃ κοινόν ἐςι ϗ τῇ Καμπύλῃ ΟΕΠ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 44.

Ἡ ἡγȣμένη λύσις ἐφαρμόζεται ὁμοίως ϗ ἐν τῇ Παραβολῇ, ἐὰν ἐκ τȣ͂ δοθέντος σημείȣ Μ ἐπιζευχθῇ ἡ Εὐθεῖα ΜΖ, ϗ ἀχθῇ ἑτέρα ἡ Μμ παράλληλος τῷ Ἄξονι, εἴτ' ȣ͂ν ἐπινοηθῇ, ὡς εἰ καὶ ἤγετο ἐπὶ τὸ Μ ἐκ τῶν Ἑςιῶν τῆς ἑτέρας (ἥτις ἂν ἀπείρως ἀπέχȣσα τῆς Ζ ἐπινοηθείη) ϗ τμηθῇ Σχ. 13.

διχα ἡ ὑπὸ ΖΜμ. Ἡ τοίνυν ὕτως ὁρισθεῖσα ΜΤ ἐπιψαύσει τῆς Παραβολῆς κατὰ τὸ Μ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α'.

§. 45.

Σχ. 11. 12. Ἡ πρὸς τῷ σημείῳ τῆς ἐπαφῆς Γωνία ὑπὸ βΜζ ἡ ὑπὸ τῆς Ἐφαπτομένης Μβ, ϗ τῆς πρὸς μίαν τῶν Ἑςιῶν διευθυνομένης Μζ Εὐθείας περιεχομένη, ἀεὶ ἰσῦται τῇ ὑπὸ ΖΜΤ τῇ ὑπὸ τῆς αὐτῆς Ἐφαπτομένης ϗ τῆς πρὸς τὴν ἑτέραν Ἑςίαν διευθυνομένης ΜΖ περιεχομένῃ. Ἡ γάρτοι (σχ. 11.) ὑπὸ ΖΜΤ = ΤΜμ, ἐκ κατασκευῆς· ἀλλὰ ΤΜμ = ζΜβ· κατὰ κορυφὴν γάρ, ἄρα ΖΜΤ = ζΜβ. Ἐν δὲ τῷ 12. σχ. προαχθεισῶν τῶν ζΜ, ΖΜ, ἔσεται ὑπὸ ζΜω = ΖΜm, ὅτι κατὰ κορυφήν· ἀλλὰ ΖΜΤ = ΤΜμ, ἐκ κατασκευῆς, ἄρα ΖΜΤ = ΤΜμ = mΜβ = βΜω· ταῖς ἴσαις ἄρα ὑπὸ ΖΜm, ζΜω, προςεθεῖσαι αἱ ἴσαι ὑπὸ mΜβ, ωΜβ, αἱ ὅλαι, εἶτ' ὖν αἱ ὑπὸ ΖΜβ, ζΜβ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

ΣΗΜΕΙ'ΩΣΙΣ.

§. 46.

Κατά τε τὴν Ἔλλειψιν ϗ Ὑπερβολὴν τὸ ἀνωτέρω πόρισμα ὡσαύτως δ;πυ ἐκφράζεται. Θατέρα μέντοιγε τῶν ἐν τῇ ὑπερβολῇ γωνιῶν αἱ δύω τῶν πλευρῶν ἐκτὸς πίπτουσι τῆς Καμπύλης, ἀμέλειται ὑπὸ ζMϐ=βMZ.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 47.

Ἡ Zμ χορδὴ ἀεὶ δίχα εἰς τὰ μέρη KZ, Kμ, ϰ πρὸς ὀρθὰς ὑπὸ τῆς Ἐφαπτομένης τέμνεται.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 48.

Ἐν τοῖς ἐφεξῆς Ἀποτετμημένην ὑπὸ τῆς ἐπὶ τοῦ Ἄξονος, ϰ ἐν γένει τῆς ἐφ᾽ οἱασδήποτε διαμέτρου τεταγμένως ἀχθείσης ἀποκαλέσομεν τὴν τοῦ κατὰ τὴν Διάμετρον, ἐφ᾽ ἧς ἡ Τεταγμένη πίπτει, σημείου ἐκ τοῦ τῆς αὐτῆς Διαμέτρου, εἰ δέοι, προαχθείσης, ἄκρου σημείου διάστασιν. Ἐπεὶ δὲ ἔν τε τῇ Ἐλλείψει, ϰ τῇ Ὑπερβολῇ, ϰ τῷ Κύκλῳ, ἑκάστῃ Διαμέτρῳ δύω εἰσὶ τὰ ἄκρα, προσδιοριστέον πρῶτον πρὸς τὸ δοκοῦν, ὁπότερον τούτων, τὸ εἰς ἀρχὴν τῶν Ἀποτετμημένων τεθησόμενον. Τὸ δὲ τῆς Διαμέτρου μέρος τὸ μεταξὺ ἐκείνου τοῦ σημείου ϰ τῆς ἀρχῆς τῶν Ἀποτετμημένων, ἀεὶ διὰ τοῦ χ δηλωθήσεται.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ Β'.

§. 49.

Τὴν ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως, Ὑπερβολῆς, καὶ Παραβολῆς ἐξίσωσιν ἐξευρεῖν, εἴτ' οὖν τὴν ἐκτιθεῖσαν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συνέκθεσις τῶν Τεταγμένων πρὸς τὴν τῶν ὑπ' αὐτῶν Ἀποτετμημένων, ληφθείσης τῆς αὐτῶν Ἀρχῆς ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν Διάμετρον κορυφῆς.

ΛΥ'ΣΙΣ.

Σχ. 11. Τεθείσθω ἐν τῇ Ἐλλείψει $\Sigma\sigma = 2\alpha$, καὶ ΣΖ, ἢ $\sigma\zeta = \gamma$, καὶ $\Sigma\Pi = \chi$, $\Pi M = y$· ἔστι δὲ ἐν τῷ τριγώνῳ ΖΜζ (α) $\zeta M + MZ : Z\zeta :: \zeta\Pi - \Pi Z : \zeta M - MZ$. Ἀλλὰ μὴν $\zeta M + MZ = \Sigma\sigma$ (§. 33.)

(α) §. 750. τῶν Μαθηματικῶν Στοιχείων τοῦ Καΐλλου ἐν τῇ Λατινικῇ μεταφράσει κατὰ τὴν Τριγωνομετρίαν· Ἔστι δ' ἐκεῖ ἡ τοῦ θεωρήματος ἔκφρασις (ἐπεὶ ἐν ταῖς Ἑλληνιστὶ ἐκδεδομέναις Τριγωνομετρίαις τῇ αὐτῇ οὐκ ἐνέτυχον) τοιάδε: „Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὸ κεφά„λαιον τῶν λοιπῶν πλευρῶν λόγον ἔχει, ὃν ἡ αὐτῶν „διαφορὰ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τμημάτων τῆς μείζονος „πλευρᾶς τμηθείσης ὑπὸ τῆς Καθέτου τῆς καταχθείσης „ἀπὸ τῆς μείζονος γωνίας πρὸς τὴν μείζω πλευράν.“

$= 2\alpha$, ϗ $Z\zeta = \Sigma\sigma - 2\Sigma Z$, ἢ $- 2\sigma\zeta = 2\alpha - 2\gamma$, ϗ $\zeta\Pi = \Sigma\sigma - \Sigma\Pi - \zeta\sigma = 2\alpha - \chi - \gamma$, καὶ $\Pi Z = \Pi\Sigma - \Sigma Z = \chi - \gamma$, ἐξ οὗ ϗ $\zeta\Pi - \Pi Z = 2\alpha - \chi - \gamma - \chi + \gamma = 2\alpha - 2\chi$· ἔσται ἄρα ὁ τέταρτος τῆς ἀναλογίας ὅρος $\zeta M -$

$$MZ = \frac{4\alpha^2 - 4\alpha\gamma - 4\alpha\chi + 4\gamma\chi}{2\alpha} = 2\alpha - 2\gamma - 2\chi + \frac{2\gamma\chi}{\alpha}.$$

Γνωσθέντων οὖν τοῦ ἀθροίσματος $\zeta M + MZ$, ϗ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς, γνωσθήσεται πάντως ϗ ἕκαστον αὐτῶν μέρος· ἀμέλειτοι ἔσαι (Ἀλγβ. §. 232.) $MZ = \alpha - \alpha + \gamma + \chi - \frac{\gamma\chi}{\alpha} = \chi + \gamma - \frac{\gamma\chi}{\alpha}$· ἐπεὶ δὲ ἐν τῷ ΠMZ τριγώνῳ ἐστὶ $\Pi M^2 = ZM^2 - \Pi Z^2$, ἔσαι $yy = \left(\chi + \gamma - \frac{\gamma\chi}{\alpha}\right)^2 - (\chi - \gamma)^2 = 4\gamma\chi - \frac{2\gamma\chi\chi - 2\gamma\gamma\chi}{\alpha} + \frac{\gamma\gamma\chi\chi}{\alpha}$. Ἔξεστι μέντοιγε ταύτην τὴν ἔκθεσιν ἁπλουστέραν ἀπεργάσασθαι ἐκβολῇ μὲν τῆς $\gamma\gamma$ ποσότητος, ἀντικαταστάσει δὲ τῆς ἐλάσσονος Ἡμιδιαμέτρου β· Ἔστι γὰρ $\gamma = \Sigma Z = \alpha - \Gamma Z$, ὅθεν $\Gamma Z = \alpha - \gamma$· ἐν δὲ τῷ $Z\Lambda\Gamma$ τριγώνῳ ἐστὶ $Z\Gamma^2 = Z\Lambda^2 - \Lambda\Gamma^2$, εἴτ' οὖν, ἐν ὅροις ἀναλυτικοῖς, $(\alpha - \gamma)^2$

$= \alpha^2$ (εἴγε $Z\lambda = \frac{1}{2}\Sigma\sigma = \alpha$) — β^2 ($\lambda\Gamma = \frac{1}{2}\lambda\Lambda = \beta$) ὅ ἐςιν $\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma\gamma = \alpha^2 - \beta^2$, ὅθεν $\gamma\gamma = 2\alpha\gamma - \beta\beta$. Ἀντικατασάσης ὖν ἀντὶ $\gamma\gamma$ τῆς ἰσοδυνάμυ αὐτῇ ποσότητος, τραπήσεται ἡ ἀνωτέρα ἐξίσωσις εἰς ταύτην $yy = 4\gamma\chi - \frac{2\gamma\chi\chi}{\alpha} - \frac{2\chi(2\alpha\gamma - \beta\beta)}{\alpha} + \frac{\chi\chi(2\alpha\gamma - \beta\beta)}{\alpha\alpha}$. Μετὰ δὲ, τῶν πολλαπλασιασμῶν περανθέντων, ϗ τῆς ἀναγωγῆς γενομένης πρόεισιν $yy = \frac{2\beta\beta\chi}{\alpha} - \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἡ ζητȣμένη ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως ἐξίσωσις, τῶν Ἀποτετμημένων ἀπὸ τῆς κορυφῆς λογιζομένων.

Σχ. 12. Κατὰ δὲ τὴν Ὑπερβολὴν τεθείσθω ὡσαύτως $\Sigma\sigma = 2\alpha$, ϗ $\lambda\Lambda = 2\beta$, ϗ ΣZ, ἢ $\sigma\zeta = \gamma$, καὶ $\Sigma\Pi = \chi$, ϗ $\Pi M = y$· μετὰ δὲ, γενέσθω $M\phi = MZ$, ἐξ ȣ̂ ϗ $\Pi\phi = \Pi Z$· ἔςιν ȣ̂ν ἐν τῷ τριγώνῳ $\phi M\zeta$ (Τριγωνομετρ. §. αυτ.) $\zeta\phi : \zeta M + M\phi :: \zeta M - M\phi : \zeta\Pi - \Pi\phi$. Ἵνα δὲ ἀναλυτικῶς ἐκτεθείη αὕτη ἡ ἀναλογία, σκεπτέον, ὅτι $\zeta\phi = \zeta\Pi + \Pi\phi$, ϗ ἡ μὲν $\zeta\Pi = \chi + 2\alpha + \gamma$, ἡ δὲ $\Pi\phi = \Pi Z = \chi - \gamma$· ὅθεν $\zeta\phi = 2\alpha + 2\chi$, καὶ $\zeta M - M\phi = \zeta M - MZ = \Sigma\sigma$ (§. 33.) $= 2\alpha$· ἄρα $2\alpha + 2\chi : \zeta M + M\phi :: 2\alpha : 2\alpha + 2\gamma$, καὶ $2\alpha : 2\alpha + 2\chi :: 2\alpha + 2\gamma : \zeta M + M\phi = 2\alpha$

$+2\gamma+2\chi+\frac{2\gamma\chi}{\alpha}$· τὸ ἄρα ἔλασσον μέρος

$ZM=\gamma+\chi+\frac{\gamma\chi}{\alpha}$. Ἀλλ' ἐν τῷ ΠΜΖ τριγώνῳ ἐςὶ $\Pi M^2 = ZM^2 - \Pi Z^2$. Γενομένης ἄρα τῆς ἀντικαταςάσεως ἐν ὅροις ἀναλυτικοῖς, ϗ τῶν λοιπῶν πράξεων, ὡς ἀνωτέρῳ, τελεσθεισῶν, καὶ ἀντὶ $\gamma\gamma$ εἰσαχθέντος τȣ̃ $\beta\beta-2\alpha\gamma$· ἐςι γὰρ ἐν τῷ ΣΛΓ τριγώνῳ, $\Sigma\lambda^2$ $(=\Gamma Z^2=(\alpha+\gamma)^2)$ $=\lambda\Gamma^2\,(=\beta\beta)+\Gamma\Sigma^2\,(=\alpha x)$, ἀποφέρεται $yy=\frac{2\beta\beta\chi}{\alpha}+\frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἡ ζητȣμένη ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς ἐξίσωσις περιέχȣσα τȣ̀ς ἑαυτῆς Ἄξονας.

§. 50.

Κατά τε τὴν Ἔλλειψιν, ϗ τὴν Ὑπερβολὴν τὸν αὐτὸν τρόπον περαίνεται ἡ τȣ̃ Ὑπολογισμȣ̃ πρᾶξις, ὥσπερ δὴ ϗ αἱ δύω εὑρεθεῖσαι ἐξισώσεις ἐπιμαρτυρȣ̃σι μηδενὶ ἀλλ' ἢ τοῖς σημείοις μόνον ἀλλήλων διενηνοχεῖαι. Κἀν τοῖς ἑπομένοις δὲ τύποις ȣ̓δεμία παρὰ τὴν τῶν σημείων διαφωνία ἐν αὐτοῖς εὑρεθήσεται. Διὰ ταῦτ' ἄρα ἐν τοῖς ἐφεξῆς κοινοῖς τῶν δύω τȣτωνὶ Καμπύλων ἰδιώμασιν ἀπόχρη ἑνὶ ὑπολογισμῷ, ϗ τύπῳ ἑνὶ ταῦτα ἐκτιθέναι, ἔνθαπερ αν ᾐ τὸ διττὸν σημεῖον $\pm$, ἢ $\mp$, τὸ μὲν ὕπερθεν πρὸς τὴν Ἔλλειψιν, τὸ δ' ἔνερθεν πρὸς τὴν Ὑπερβολὴν ἀπονέμοντας. Συνημμένως ὖν αἱ δύω προκύψασαι ἐπὶ τύτων ἐξισώσεις παρίσανται ὕτως $\gamma\gamma = \frac{2\beta\beta\chi}{\alpha} \mp \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$.

§. 51.

Σχ. 13. Ἐν τῇ Παραβολῇ δὲ, ἐπείπερ ὁ κατ' αὐτὴν Ἄξων ἐσὶν ἄπειρος, τυτέσιν $\alpha = \infty$, ϗ δευτέρυ μὲν Ἄξονος ἀμοιρεῖ, εὐμοιρεῖ δὲ Ἑςίας, διὰ ταῦτα ἐν τῇ ἀνωτέρω ἀποδειχθείσῃ ἐξισώσει $\gamma\gamma = 4\gamma\chi \mp \frac{2\gamma\chi\chi \mp 2\gamma\gamma\chi}{\alpha} + \frac{\gamma\gamma\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἐφ' ἧς ἀμέλει ἐμφιλοχωρεῖ ἡ τῆς Ἑςίας ἀπὸ τῆς κορυφῆς διάςασις $= \gamma$, ἐὰν ἀντικαταςῇ ∞ ἀντὶ α, γενήσεται $\gamma\gamma = 4\gamma\chi$. Ἄμφω γάρ τοι τὰ κλάσματα, οἷς ὁ Παρονομαςὴς ἄπειρος, τῷ μὲν, πρώτης τάξεως, τῷ δὲ, δευτέρας, ἀπειράκις ἐλάχιςαι ποσότητές ἐσι (Ἀλγϐ. §. 544) δι' ὃ ϗ $= 0$, ὅσον πρὸς τὴν πεπερασμένην ποσότητα $4\gamma\chi$.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 52.

Βυλομένοις δὲ τὴν ἐπὶ τῆς Παραβολῆς ἐξίσωσιν γεωμετρικῇ σκέψει ἐξευρεῖν, ἐξιχνευέσθω τὸ Τρίγωνον ΠΜΖ. Ἀλλὰ τὸ πρῶτον σκεπτέον, ὡς ἐὰν $ΑΣ = ΣΖ$, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ Αμ Διευθετοῦσα ἔσεται (§. 20.) καὶ δὴ $ΜΖ = Μμ$ (§. 18.) $= ΑΠ$, παράλληλος γὰρ (§. 44.). Ἐὰν οὖν τεθῶσι $ΣΖ = \gamma$, καὶ $ΣΠ = \chi$, καὶ $ΜΠ = y$, ἔςαι $ΜΖ = ΑΠ = \gamma + \chi$, καὶ $ΖΠ = \chi - \gamma$. Ἔςι δὲ $ΜΠ^2 = ΜΖ^2 - ΖΠ^2$. ἀντικαταςάσει ἄρα ἔςαι $yy = \gamma^2 + 2\gamma\chi + \chi\chi - \chi\chi + 2\gamma\chi - \gamma\gamma = 4\gamma\chi$, ἐξίσωσις ἐπὶ τῆς Παραβολῆς, ὡς ἀνωτέρω.

ΠΟ´ΡΙΣΜΑ.

§. 53.

Ἐπείπερ (§. 49.) $\gamma\gamma = \pm 2\alpha\gamma \mp \beta\beta$, ἔςαι $\beta\beta = 2\alpha\gamma - \gamma\gamma$ (ἐν τῇ Ἐλλείψει), ἢ $\beta\beta = 2\alpha\gamma + \gamma\gamma$ (ἐν τῇ Ὑπερβολῇ), ὅ ἐςιν ἐπ᾽ ἀμφοῖν $\beta\beta = 2\alpha\gamma \mp \gamma\gamma = \gamma\,(2\alpha \mp \gamma) = ΣΖ \times Ζσ$. Τουτέςιν „ὁ ἐλάσσων Ἡμιάξων ἐςιν Εὐθεῖα μέση ἀνάλογος, „μεταξὺ τῶν τῆς ἑτέρας τῶν ἑςιῶν ἀφ᾽ ἑκατέρας „τῶν κορυφῶν διαςάσεων."

ΠΡΟ´ΒΛΗΜΑ Γ´.

§. 54.

Τὴν Ἀλγεβραϊκὴν ἔκθεσιν τῆς κατὰ τὸν πρῶτον Ἄξονα παραμέτρου ἑκάςης Κωνικῆς τομῆς ἐξευρεῖν.

Λ Υ΄ Σ Ι Σ.

Δυνατὸν ὑποτιθέναι τὴν Τεταγμένην πίπτειν ἐπὶ τῆς Εʹςίας. Τηνικαῦτα δὴ ἡ Α᾽ποτετμημένη ἐξισῦται τῇ τῆς Εʹςίας διαςάσει ἀπὸ τῆς ἐγγυτέρας κορυφῆς· τεθειόθω ὖν $\chi = \gamma$, ἐ ἀντὶ χ τεθέντος τῦ γ ἐν τῇ ἐξισώσει $yy = 4\chi\gamma \mp \frac{2\gamma\chi\chi \mp 2\gamma\gamma\chi}{\alpha} + \frac{\gamma\gamma\chi\chi}{\alpha\alpha}$, γενήσεται $yy = 4\gamma\gamma \mp \frac{4\gamma^3}{\alpha} + \frac{\gamma^4}{\alpha\alpha}$, ἄρα $y = \surd\left(4\gamma\gamma \mp \frac{4\gamma^3}{\alpha} + \frac{\gamma^4}{\alpha\alpha}\right) = 2\gamma \mp \frac{\gamma^2}{\alpha}$. Α᾽λλ᾽ ἐξ ὑποθέσεως y τὴν διὰ τῆς Εʹςίας διῦσαν Τεταγμένην ὑποδηλοῖ νῦν, ἡ εὑρεθεῖσα ἄρα ἰσοδύναμος αὐτῇ ἔκθεσις αὐτὴν ταύτην τὴν Τεταγμένην παριςᾷ, ἧς τὸ διπλῦν ἐςὶν ἡ Παράμετρος (§. 39.) ἥτις ἐν γένει ῥηθήσεται π· ἄρα $\pi = 4\gamma \mp \frac{2\gamma^2}{\alpha}$.

Π Ο΄ Ρ Ι Σ Μ Α Α΄.

§. 55.

Κατὰ δὲ τὴν Παραβολὴν ἐςὶ $\pi = 4\gamma$· τὸ γάρ τοι κλάσμα ἐξυδενῦται, ὄντος $\alpha = \infty$. Α᾽λλ᾽ ἐν τῷ 10 σχήματι ῥᾴδιον τυτὶ συνιδεῖν. Διὰ γὰρ τῆς

ΠΔ τῆς διὰ τῆς Ἑϛίας Ζ διηκȣ́σης τρίγωνον συνίϛαται τὸ ΑΠΔ ὅμοιον τῷ ΑΣΒ. Διόπερ ΑΣ : ΑΠ : : ΣΒ : ΠΔ. Ἀλλὰ $2ΑΣ = ΑΠ$, ἄρα καὶ $2ΣΒ = 2ΣΖ = ΠΔ$, καὶ $4ΣΖ = 2ΠΔ$, ὅ ἐϛι $4\gamma = \pi$ (§. 39.).

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β'.

§. 56.

Ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ ἡ τȣ̃ κατ' αὐτὴν πρώτȣ Ἄξονος Παράμετρος ἐξισȣ̃ται τῇ τῆς κορυφῆς τετραπλῇ διαϛάσει ἀπὸ τῆς Ἑϛίας· ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ὑπεράλλεται τῆς αὐτῆς τετραπλῆς διαϛάσεως, ἐν δὲ τῇ Ἐλλείψει, ὑφίεται.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 57.

Ἐὰν ἐν τῇ τῆς Παραμέτρȣ ἐξισώσει $\pi = 4\gamma \mp \frac{2\gamma\gamma}{\alpha}$ ἀντικαταϛαθῇ τὸ ἀντάξιον τῇ $\gamma\gamma = \pm 2\alpha\gamma \mp \beta\beta$ (§. 49.) ἀποκαθίϛησιν ἐξίσωσιν τὴν $\pi = 4\gamma \mp \frac{2}{\alpha}(\mp 2\alpha\gamma \pm \beta\beta) = \frac{2\beta\beta}{\alpha}$ κατά τε τὴν Ἔλλειψιν ϗ τὴν Ὑπερβολὴν, ἐχȣ́σας ἀμέλειτοι πεπερασμένȣς τȣ̀ς Ἄξονας α, β, ὧν ἀμοιρεῖ ἡ Παραβολή. Ἔϛι τοίνυν $\pi = \frac{4\beta\beta}{2\alpha}$, ἐξῆς προκύπτει ἡ ἀναλογία $2\alpha : 2\beta :: 2\beta : \pi$, τȢτέςιν „ἡ Παράμετρος „τȢ πρώτȣ Ἄξονος ἐςὶν Εὐθεῖα τρίτη συνεχῶς ἀνά- „λογος τῶν Ἀξόνων μείζονος ϗ ἐλάσσονος."

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 58.

Ἡ μὲν ἐν (§. 54.) ἔκθεσις ἐμφαίνει τὸ τῆς Παραμέτρȣ ἀντάξιον ποσὸν περιέχον τὴν γ διάςασιν τῆς Ἐςίας ἀπὸ τῆς κορυφῆς· ἡ δ' ἐν τῷ (§. ἀνωτ.) τὸ αὐτὸ περιλαμβάνον τȢς Ἄξονας. Τὸ ἐφεξῆς μέντοι Πρόβλημα παρέξεται τὴν ἔκθεσιν αὐτῆς ταύτης διὰ τῶν Ἀποτετμημένων, ϗ Τεταγμένων.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 59.

Ἐξίσωσιν εὑρεῖν παρισῶσαν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ πρώτη Παράμετρος ἑκάςης Κωνικῆς τομῆς πρὸς τὰς συνεκθέσεις τῶν τε Ἀποτετμημένων ϗ Τεταγμένων.

ΛΥ'ΣΙΣ.

Ἐπειδὴ $\pi = \frac{2\beta\beta}{\alpha}$, ἔςαι $\alpha\pi = 2\beta\beta$, καὶ $\frac{1}{2}$ $\alpha\pi = \beta\beta$. Ἀντὶ δὲ $\beta\beta$ τεθέντος τȢ ταύτης ἀνταξίȣ ἐν τῇ γενικῇ ἐξισώσει $yy \frac{2\beta\beta x}{\alpha} \mp \frac{\beta\beta xx}{\alpha\alpha}$, ἔσται $yy = \frac{2\chi\,(\frac{1}{2}\alpha\pi)}{\alpha} \mp \frac{\chi\chi\,(\frac{1}{2}\alpha\pi)}{\alpha\alpha}$, ὅ ἐστιν $yy = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις ἐπίτε τῆς Ἐλλείψεως, καὶ τῆς Ὑπερβολῆς, ὧν δηλονότι ὁ Ἄξων α πεπερασμένος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 60.

Ἐν δὲ τῇ Παραβολῇ, ἐπειδὴ $\alpha = \infty$, τὸ τοῦ τύπου κλάσμα ἐστὶν ἀπειροστόν, καὶ τῷ μηδενὶ ἐξισούμενον· ἄρα $yy = \pi\chi$. Ἀλλ' ἐπεὶ $4\gamma = \pi$ (§. 55.), ἡ ἄρα εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις $yy = \pi\chi$ ἡ αὐτή ἐστι τῇ πρότερον εὑρεθείσῃ $yy = 4\gamma\chi$ (§. 51.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 61.

Ἐκ τῆς γενικῆς ἐξισώσεως $yy = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha}$ τῆς τὴν Παράμετρον περιεχούσης, πρόεισι $2\alpha yy = 2\alpha\pi\chi \mp \pi\chi\chi = \pi\,(2\alpha\chi \mp \chi\chi)$, ἐξ ἧς ἡ ἀναλογία $yy : 2\alpha\chi \mp \chi\chi :: \pi : 2\alpha$. Ἀλλὰ μὴν $2\alpha\chi \mp \chi\chi = (2\alpha \mp \chi)\,\chi = \sigma\Pi \times \Pi\Sigma$, ἐν γένει ἄρα,
„τὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐπὶ τοῦ
„πρώτου τῆς Ἐλλείψεως, καὶ Ὑπερβολῆς ἄξονος πρὸς
„τὰ ὑπὸ τῶν συστοίχων Ἀποτετμημένων γινόμε-

„να λόγον ἔχει, ὃν ἡ Παράμετρος πρὸς τὸν πρῶ-„τον Α῎ξονα." Α᾿εὶ δὲ ςαθερȣ̃ τυγχάνοντος τȣ̃ κατὰ τὴν ἀναλογίαν δευτέρȣ λόγȣ, κἂν ἄλλαι, ϗ ἄλλαι ληφθῶσιν αἱ Τεταγμέναι, ϗ αἱ συςοιχȣ̃σαι αὐταῖς Α᾿ποτετμημέναι, οἷον $yy : (2\alpha \mp \chi)\,\chi :: \pi : 2\alpha$, ϗ $YY : (2\alpha \mp X)\,X :: \pi : 2\alpha$, ὅθεν ϗ $yy : (2\alpha \mp \chi)\,\chi :: YY : (2\alpha \mp X)\,X$, καὶ $yy : YY :: (2\alpha \mp \chi)\,\chi : (2\alpha \mp X)\,X$, ἔςιν ἄρα ἐν γένει „τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων τετράγωνα „πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ὑπὸ τῶν αὐτῶν Α᾿ποτετμη-„μένων γινόμενα."

Ε᾿ὰν προσέτι ἡ τῶν Α᾿ξόνων περιεκτικὴ ἐξίσωσις (49.) ἀναλυθῇ εἰς ἀναλογίαν, οἷον ἡ $yy = \frac{2\beta\beta\chi}{\alpha} \mp \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἐξ ἧς πολλαπλασιασμῷ προκύπτει ἡ $\alpha\alpha yy = 2\alpha\beta\beta\chi \mp \beta\beta\chi\chi = \beta\beta\,((2\alpha \mp \chi))\,\chi$, ἔςαι $yy : (2\alpha \mp \chi)\,\chi :: \beta\beta : \alpha\alpha$, τȣτέςι „κατάτε τὴν Ε῎λλειψιν, ϗ τὴν Υ῾περβολὴν „τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων τετράγωνα πρὸς τὰ „ὑπὸ τῶν συςοιχουσῶν ἀποτετμημένων γινόμενα „λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τȣ̃ ἐλάσσονος ἡμιάξο-„νος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τȣ̃ μείζονος".

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

§. 62.

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν Παραβολὴν ἀεί ἐστιν $\gamma\gamma = \pi\chi$ (§. 60.) ὅ ἐστι τὸ ἀφ' ἑκάστης Τεταγμένης τετράγωνον ἰσοῦται τῷ ὑπὸ τῆς Παραμέτρου (μονίμου ποσότητος) καὶ τῆς συστοιχούσης Ἀποτετμημένης γινομένῳ, οἷον $\gamma\gamma = \pi\chi$, καὶ $\Upsilon\Upsilon = \pi X$, διὰ τοῦτο $\pi\chi : \pi X :: \chi : X$, ὅθεν καὶ $\gamma\gamma : \Upsilon\Upsilon :: \chi : X$, τουτέστι „τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν τεταγ-„μένων πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ἐν τῷ λόγῳ τῶν αὐταῖς „συστοιχουσῶν Ἀποτετμημένων”.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 63.

Τὴν ἀναλυτικὴν ἔκθεσιν τῆς Ὑποκαθέτου (ΠΝ) εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἡ Ζμ χορδὴ κάθετος ἐφέστηκε τῇ Ἐφαπτο- Σχ.
μένῃ ΜΤ (§. 47.)· διὸ καὶ τῇ ΝΜ, Καθέτῳ (ἐξ 11.
ὑποθέσεως) ἐφισταμένῃ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Ἐφαπτομέ- 12.
νης, ἔσται παράλληλος. Τὰ ἄρα τρίγωνα ζΜΝ, ζμΖ ὅμοιά εἰσι, καὶ δὴ ζμ ($= \zeta M \pm MZ$) ($= 2\alpha$) : ζΖ ($= 2\alpha \mp 2\gamma$) :: μΜ ($= MZ$) ($= \chi + \gamma \mp$

$\frac{\gamma\chi}{\alpha}$ (§. 49.)) : $ZN = \chi + \gamma \mp \frac{\gamma\gamma}{\alpha} \mp \frac{2\gamma\chi}{\alpha} + \frac{\gamma\gamma\chi}{\alpha\alpha}$. Ἀλλὰ $ZN - \Pi Z\ (= \chi - \gamma) = \Pi N$, ἄρα $\Pi N = 2\gamma \mp \frac{\gamma\gamma}{\alpha} \mp \frac{2\gamma\chi}{\alpha} + \frac{\gamma\gamma\chi}{\alpha\alpha}$, ἡ ζητȣμένη τῆς Υ'ποκαθέτȣ ἔκθεσις, ἥτις, ἐκβληθέντος μὲν τȣ͂ $\gamma\gamma$, ἀντεισαχθείσης δὲ τῆς Παραμέτρȣ, ἢ τῆς δευτέρας διαμέτρȣ, ἐφ' ἁπλȣςέρας ϗ γενικωτέρας ἐκθέσεις ἀνάγεται. Ἐπεὶ γὰρ (§. 54.) $\pi = 4\gamma \mp \frac{2\gamma\gamma}{\alpha}$, ἄρα $\gamma\gamma = \pm 2\alpha\gamma \mp \frac{1}{2}\alpha\pi$, ϗ ἡ ἄρα $\Pi N = 2\gamma \mp 1 \frac{(\pm 2\alpha\gamma \mp \frac{1}{2}\alpha\pi)}{\alpha} \mp \frac{2\gamma\chi}{\alpha} + 1\,\frac{(\pm 2\alpha\gamma \mp \frac{1}{2}\alpha\pi)\chi}{\alpha\alpha} = 2\gamma - 2\gamma + \frac{1}{2}\pi \mp \frac{2\gamma\chi}{\alpha} \pm \frac{2\gamma\chi \mp \frac{1}{2}\pi\chi}{\alpha} = \frac{1}{2}\pi \mp \frac{\pi\chi}{2\alpha}$.

Ἐν ταύτῃ ȣ͂ν τῇ ἐξισώσει ἀντεισαχθέντος ἀντὶ π τȣ͂ ταύτης ἀνταξίȣ ποσȣ͂ $\frac{2\beta\beta}{\alpha}$ (§. 56.) προκύπτει ἐξίσωσις ἑτέρα ἡ $\Pi N = \frac{1}{2}\left(\frac{2\beta\beta}{\alpha}\right) \mp \frac{\chi}{2\alpha}\left(\frac{2\beta\beta}{\alpha}\right) = \frac{\beta\beta}{\alpha} \mp \frac{\beta\beta\chi}{\alpha\alpha}$.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α'.

§. 64.

Ἡ κατὰ τὴν Παραβολὴν Ὑποκάθετος ἰσȣ̃ται τῇ Ἡμιπαραμέτρῳ· ἐν γὰρ τῇ ἐξισώσει $\Pi N = \frac{1}{2} \pi \mp \frac{\pi\chi}{2\alpha}$, ἐπεὶ $\alpha = \infty$, ἐξȣδενωθήσεται μὲν τὸ κλάσμα, ἔσεται δὲ ἡ $\Pi N = \frac{1}{2}\pi = ZA$. Ἐπεὶ δὲ $ZA = 2\gamma$ (§. 56.) ἐςὶν ἄρα ἡ ΠΝ ἐπὶ τῆς Παραβολῆς ποσότης μηδέποτε αὔξȣσα, ἢ φθίνȣσα, ὅ ἐςιν εὐςαθὴς, ὁποῖον ἂν ᾖ τὸ τῆς ψαύσεως σημεῖον Μ. Σχ. 13.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 65.

Ἐὰν δέ τις ὑπενδοιάζων, ὡς ἄρα ὄσης $\alpha = \infty$ τὸ κλάσμα ἐςὶ μηδὲν (ὅπερ ἀθέμιτον τοῖςγε προβεβηκόσι) γεωμετρικὴν ἀπαιτῇ περὶ τȣ́τȣ τὴν δεῖξιν, ἐποίσομεν ἐκ περιȣσίας, $MZ = M\mu$ (§. 52.). Καὶ ἐπεὶ ἡ $Z\mu$ κάθετος ἐφέςηκε τῇ Ἐφαπτομένῃ (§. 47.), διὰ τȣ̃το παράλληλός ἐςι τῇ ΜΝ· ἄρα $MZ = M\mu = A\Pi = ZN$, κοινῆς δὲ ἀφαιρεθείσης τῆς ΖΠ, ἐγκαταλείπεται $AZ = 2\gamma = \Pi N$.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β'.

§. 66.

Τῶν Κωνικῶν Τομῶν τῆς μὲν ὑπερβολῆς ἡ

Ὑποκάθετός ἐςιν ἴση τῇ Ἡμιπαραμέτρῳ, τῆς δὲ Ἐλλείψεως, ἐλάσσων τῆς Ἡμιπαραμέτρȣ, τῆς δὲ Ὑπερβολῆς, μείζων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛʹ.

§. 67.

Τὴν Ἀναλυτικὴν ἔκθεσιν τῆς Ὑφαπτομένης ΠΤ εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΝΜΤ Ὀρθογώνιον ἐςὶ κατὰ τὸ Μ, ἔςαι ∺ ΝΠ : ΠΜ : ΠΤ, καὶ ἐκ τȣ͂ ἀκολȣ́θȣ $ΠΤ = \frac{ΠΜ^2}{ΠΝ}$, ὅ ἐςι

$$ΠΤ = \frac{\pi\chi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha}}{\frac{1}{2}\pi \mp \frac{\pi\chi}{2\alpha}} (\S.\ 59,\ 63.) = \frac{\chi \mp \frac{\chi\chi}{2\alpha}}{\frac{1}{2} \mp \frac{\chi}{2\alpha}}$$

$$= \frac{2\alpha\chi \mp \chi\chi}{2\alpha} : \frac{\alpha \mp \chi}{2\alpha} = \frac{2\alpha\chi \mp \chi\chi}{2\alpha} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha \mp \chi}$$

$$= \frac{4\alpha^2\chi \mp 2\alpha\chi\chi}{2\alpha\alpha \mp 2\alpha\chi} = \frac{2\alpha\chi \mp \chi\chi}{\alpha \mp \chi}.$$

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α'.

§. 68.

Ἡ δὲ κατὰ τὴν Παραβολὴν ὑφαπτομένη ΠΤ δείκνυται $= 2\chi$, εἴγε τεθέντος ∞ ἀντὶ α ἐν τῇ εὑρεθείσῃ ἐξισώσει, ἔσαι ΠΤ $= \frac{2\infty\chi \mp \chi\chi}{\infty \mp \chi} = \frac{2\infty\chi}{\infty}$ (Ἀλγβ. §. 545.) $= 2\chi$.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 69.

Ἀρίςη μὲν ὄντως ἡ δεῖξις ἥδε, ἐκ περιουσίας μέντοι αὐτὸ δὴ τοῦτο ϗ οὕτως ὑποσυνάξομεν· Σχ. 18.
ἐπειδὴ ΠΤ $= \frac{\text{ΜΠ}^2}{\text{ΠΝ}}$, ἔσαι ΠΤ $= \frac{\pi\chi}{\frac{1}{2}\pi} =$ (§. 60, 64.) $= \frac{2\pi\chi}{\pi} = 2\chi$.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β'.

§. 70.

Ἐπεὶ ἐν τῇ Ἐλλείψει ἐςὶ ΠΤ $= \frac{2\alpha\chi - \chi^2}{\alpha - \chi}$, ἔσαι ἄρα $(\alpha - \chi)$ ΠΤ $= (2\alpha - \chi)\,\chi$, ϗ ΠΤ : 2α

Ε

$- \chi : : \chi : \alpha - \chi : : 2\chi : 2\alpha - 2\chi \cdot$ ἀλλαμὴν $2\alpha - \chi > 2\alpha - 2\chi$, ἄρα καὶ $\Pi\Upsilon > 2\chi$ (Γεωμετρ. §. αὐτ). Κατὰ δὲ τὴν ὑπερβολὴν ἐπειδὴ $\Pi\Upsilon = \dfrac{2\alpha\chi + 2\chi\chi}{\alpha + \chi}$, ἔσται $(\alpha + \chi)$ $\Pi\Upsilon = (2\alpha + \chi)\,\chi$, ὅθεν ἡ ἀναλογία $\Pi\Upsilon : 2\alpha + \chi : : \chi : \alpha + \chi : : 2\chi : 2\alpha + 2\chi \cdot$ ἀλλαμὴν $2\alpha + \chi < 2\alpha + 2\chi$, ἄρα $\Pi\Upsilon < 2\chi$, τουτέστι (Πορ. Α΄.) „ἡ Ὑφαπτομένη κατὰ μὲν τὴν Παραβολὴν ἰσοῦ„ται τῷ διπλῷ τῆς Ἀποτετμημένης, αὐτῆς δὲ ταύ„της ὑπερέχει ἐν τῇ Ἐλλείψει, ἐλλείπει δὲ κατὰ „τὴν Ὑπερβολήν".

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

§. 71.

Σχ. Ῥᾷστα ἔτι ὑποσυνάγεται, ὅτι ἐν μὲν τῇ Πα-
11. 12. ραβολῇ ἐστιν ἡ $\Sigma\Upsilon = \chi$, ἐν δὲ τῇ Ἐλλείψει $\Sigma\Upsilon > \chi$,
13. ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ $\Sigma\Upsilon < \chi$, εἴτ' οὖν „τὸ τῆς διαμέτρου, εἰ δέοι, προαχθείσης μέρος ΣΤ τὸ μεταξὺ τῆς κορυφῆς, καὶ τοῦ σημείου, καθ' ὃ προσαντᾷ τῇ Ἐφαπτομένῃ προαχθείσῃ, ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ ἰσοῦται τῇ Ἀποτετμημένῃ, αὐτῆς δὲ ταύτης ὑπερβάλλει μὲν κατὰ τὴν Ἔλλειψιν, ἐλλείπεται δὲ κατὰ τὴν Ὑπερβολήν".

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 72.

Ε'πειδὴ οἱ τῆς Παραβολῆς, ϗ Υ'περβολῆς κλῶνες ἐπ' ἄπειρον προεκβαλλόμενοι ἐδέποτε συμβάλλεσι τῷ Α'ξονι ἐπὶ θάτερα, δυνατὸν πάντως γενέσθαι $\chi = \infty$. Ε'πεὶ ἐν ἐν τῇ Υ'περβολῇ ἐςι $\Pi T = \frac{2\alpha\chi + \chi\chi}{\alpha + \chi}$ (§. 70.) ἔςαι $\Sigma T = \frac{2\alpha\chi + \chi\chi}{\alpha + \chi} - \chi = \frac{2\alpha\chi + \chi\chi - \alpha\chi - \chi\chi}{\alpha + \chi} = \frac{\alpha\chi}{\alpha + \chi}$ (ὁμοίῳ δὲ ὑπολογισμῷ ἐν τῇ Ε'λλείψει παρίςαται $\Sigma T = \frac{\alpha\chi}{\alpha - \chi}$). Α'ντικαταςάντος ἄρα τῦ ∞ ἀντὶ χ, γίνεται $\Sigma T = \frac{\alpha\infty}{\alpha + \infty} = \frac{\alpha\infty}{\infty} = \alpha$. Ε'ν δὲ τῇ Παραβολῇ ἐςι $\Sigma T = \chi = \infty$. Ε'ντεῦθεν δὴ ἀνάγεται.

Α'. Τὰ σημεῖα, καθ' ἃ αἱ τῆς Υ'περβολῆς ἐπιψαύεσαι συμβάλλεσι τῷ πρώτῳ Α'ξονι, ἀείποτε μεταξὺ τῆς Κυρυφῆς ϗ τῦ Κέντρυ κεῖσθαι.

Β'. Διὰ τῦ κατὰ τὴν Υ'περβολὴν Κέντρυ ἀχθῆναι ἔχει ἑκατέρωσε τῦ Α'ξονος Εὐθεῖαν ἑκατέρυ τῶν κατὰ τὴν Υ'περβολὴν κλωνῶν ἐπιψαύεσαν ἐν διαςήματι ἀπείρῳ. Ὅτε γὰρ $\chi = \infty$, τηνικαῦτα δὴ ΣΤ $= \alpha$, ὅ ἐςι, τηνικαῦτα τὸ Τ τῷ κέντρῳ Γ συμπίπτει. Αἱ δέτοι εὐθεῖαι αἱ ἥκιςα μὴν ἐν πεπερασμένῳ, ἀλλ' ἐν ἀπείρῳ διαςήματι τῆς Καμπύλης ἐπιψαύουσαι ἈΣΥΜΠΤΩΤΟΙ τῆς αὐτῆς Καμπύλης ἀκούουσιν.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 73.

Μέχρι μὲν τοῦδε ἡ τῶν Ἀσυμπτώτων ἐγνώσθη ἀρχὴ, ὅτι πάντως ἐκ τοῦ Γ ἐξελεύσονται, ὅπως μέν τοιγε διευθυνθήσονται, φανήσεται ἐν §. 77.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Δ'.

§. 74.

Ἐπειδὴ ΓΠ $\pm$ ΠΤ $=$ ΓΤ, ἔςαι πάντως ΓΤ $=$ $\alpha \mp \chi \pm \dfrac{2\alpha\chi \mp \chi\chi}{\alpha \mp \chi}$, καὶ μετὰ τὴν τῶν πράξεων ἐκτέλεσιν, ΓΤ $= \dfrac{\alpha\alpha}{\alpha \mp \chi}$. Ἐκ δὲ τῆσδε τῆς ἐξισώσεως πηγάζει ἡ ἀναλογία $\alpha \mp \chi : \alpha :: \alpha :$ ΓΤ, εἴτ' οὖν αἱ ΓΠ, ΓΣ, ΓΤ εἰσὶν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· καὶ δι' αὐτῆς ἄρα πάνυ εὐχερῶς εὑρίσκεται τὸ ἐπὶ τȢ πρώτȢ Ἄξονος σημεῖον Τ, δὶ ȣ̃ διήξει ἡ τῆς Καμπύλης κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπιψαύȣσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ΄.

§. 75.

Τῆς ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς Καμπύλης τῇ Διαμέτρῳ πρὸς Ὀρθὰς ἐφιςαμένης ΣΒ, ϗ ἐς τὴν Ἐφαπτομένην περατȣμένης τὴν ἐξίσωσιν εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Τῶν Τριγώνων ΤΠΜ, ΤΣΒ ὁμοίων πρὸς ἄλληλα ὄντων, ἐςι ΤΠ : ΤΣ : : ΠΜ : ΣΒ, τȣτέςι $\frac{2\alpha\chi \mp \chi\chi}{\alpha \mp \chi} : \frac{\alpha\chi}{\alpha \mp \chi} : :$ ΠΜ : ΣΒ, ϗ ἐκ τȢ ἀκολȣ́θȣ $2\alpha\chi \mp \chi\chi : \alpha\chi : :$ ΠΜ : ΣΒ, ϗ δὴ ϗ $2\alpha \mp \chi : \alpha : :$ ΠΜ : ΣΒ. Ὑψώσθω δ᾽ εἶτα ἕκαςος τῶν ὅρων τȣ́των ἐπὶ τετράγωνον, ϗ ἔςαι $4\alpha\alpha \mp 4\alpha\chi + \chi\chi : \alpha\alpha : :$ ΠΜ^2 : ΣΒ^2 : : yy : ΣΒ^2 : : (§. 49.) $\frac{2\alpha\beta\beta\chi \mp \beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$: ΣΒ^2 ἄρα ΣΒ^2 =

$\frac{\alpha\alpha(2\alpha\beta\beta\chi \mp \beta\beta\chi\chi)}{\alpha\alpha} : 4\alpha\alpha \mp 4\alpha\chi + \chi\chi =$

$\frac{2\alpha\beta\beta\chi \mp \beta\beta\chi\chi}{4\alpha\alpha \mp 4\alpha\chi + \chi\chi}$, ἡ ζητȣμένη ἐξίσωσις, τὰς Ἄξονας περιέχȣσα. Ἀλλὰ γὰρ περιεκτικὴν τῆς Παραμέτρȣ δόξαν παρασῆσαι τὴν ἐξίσωσιν τήνδε, ἀντὶ ββ ἀντεισαχθήτω $\frac{1}{2}$ απ (§. 59.) ϗ ἔσαι $\Sigma B^2 =$

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha\pi\ (2\alpha\chi \mp \chi\chi)}{4\alpha\alpha \mp 4\alpha\chi + \chi\chi} = \frac{\alpha\alpha\ \pi\chi \mp \frac{1}{2}\alpha\pi\ \chi\chi}{4\alpha\alpha \mp 4\alpha\chi + \chi\chi}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 76.

Ἐπεὶ δὲ ἡ κατὰ τὴν Παραβολὴν ΣΤ = ΣΠ = $\frac{1}{2}$ ΤΠ, ἔσαι ΣΒ = $\frac{1}{2}$ ΠΜ = $\frac{1}{2}$ y. Τȣ͂το δ' αὐτὸ ϗ ἐκ τῆς ἐν γένει εὑρεθείσης ἐξισώσεως συνάγεται. Τȣ͂ γάρ τοι ∞ ἀντὶ α εἰσαχθέντος, παρίσαται

$$\Sigma B^2 = \frac{\infty^2\ \pi\chi \mp \frac{1}{2}\infty\ \pi\chi\chi}{4\infty^2 \mp 4\infty\chi + \chi\chi} = \frac{\infty^2\ \pi\chi}{4\infty^2} = \frac{\pi\chi}{4} = \frac{yy}{4}$$

(§. 60.)· ϗ τῆς ῥίζης ἑκατέρωθεν ἐξαχθείσης, ἔσαι ΣΒ = $\frac{1}{2}$ y.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 77.

Δυνατὸν κατὰ τὴν Ὑπερβολὴν ὑπάρχειν χ = ∞. Τεθείσθω ȣ͂ν χ = ∞, ϗ ἀντικατασάντος τȣ́τȣ ἐν τῇ γενικῇ ἐξισώσει τῇ τῶν Α'ξόνων περιεκτικῇ, τȣ͂ σημείȣ + παραληφθέντος, ὅ δὴ τῇ Υ'περβολῇ προσιδιάζειν ἐπίδηλον, ἔςαι ἐν ἐκείνῃ τῇ πτώσει $\Sigma B^2 = \frac{\beta\beta \infty^2}{\infty^2} = \beta\beta$, καὶ ἐξαγωγῇ ῥίζης $\Sigma B = \beta$. Διὰ ταῦτ' ἄρα ἐὰν ΣΒ, Σb ἑκάςη ἴσαι γένωνται τῷ δευτέρῳ Η'μιάξονι, ϗ διὰ τȣ͂ Κέντρȣ Γ (§. 73.) ἀχθῶσιν Εὐθεῖαι αἱ Ββ, bβ ἔσονται δὴ αὗται Α'σύμπτωτοι τῶν Υ'περβολῶν ΜΣμ, Οσο. Σχ. 14.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ Η'.

§. 78.

Τὴν τῆς Καθέτȣ ΝΜ ἐξίσωσιν ἐξευρεῖν.

ΛΥ'ΣΙΣ.

Ε'πειδὴ ἐν τῷ Τριγώνῳ ΝΠΜ ἐςι $NM^2 = \Pi M^2 + \Pi N^2$, ἄρα ΝΜ = (§. 50, 63) = $\frac{2\beta\beta\chi}{\alpha} \mp \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha} + \left(\frac{\beta\beta}{\alpha} \mp \frac{\beta\beta\chi}{\alpha\alpha}\right)^2 = \frac{2\alpha^3\beta\beta\chi \mp \alpha^2\beta^2\chi^2 + \alpha^2\beta^4 \mp 2\alpha\beta^4\chi + \beta^4\chi^2}{\alpha^4}$, ἡ ζητȣμένη ἐξίσωσις. Ε'ὰν δ' ἀντὶ ββ εἰσαχθῇ τὸ τῆς

Παραμέτρυ ἀντάξιον (ἔστι γὰρ $\frac{1}{2}$ $\alpha\pi = \beta\beta$. §. 59.) ἔσεται

$$\frac{2\alpha^3\chi(\frac{1}{2}\alpha\pi) \mp \alpha^2\chi^2(\frac{1}{2}\alpha\pi) + \alpha^2(\frac{1}{4}\alpha^2\pi^2)}{\alpha^4}$$

$$\frac{\mp 2\alpha\chi(\frac{1}{4}\alpha^2\pi^2) + \chi\chi(\frac{1}{4}\alpha\alpha\pi\pi}{4^4} =$$

$$\frac{\alpha^4\pi\chi \mp \frac{1}{2}\alpha^3\pi\chi^2 + \frac{1}{4}\alpha^4\pi^2 \mp \frac{1}{2}\alpha^3\pi^2\chi}{\alpha^4}$$

$$\frac{+\frac{1}{4}\alpha\alpha\pi\pi\chi\chi}{} = \frac{4\alpha^4\pi\chi \mp 2\alpha^3\pi\chi^2 + \alpha^4\pi^2}{4\alpha^4}$$

$$\frac{+2\alpha^3\pi 2\chi + \alpha^2\pi^2\chi\chi}{} = \frac{4\alpha^2\pi\chi \mp 2\alpha\pi\chi^2}{}$$

$$\frac{+\alpha^2\pi^2 \mp 2\alpha\pi^2\chi + \pi^2\chi^2}{4\alpha^2} = NM^2$$ ϗ αὕτη μὲν ἡ κατὰ τὴν Ἔλλειψιν ϗ Ὑπερβολὴν Κάθετος.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α'.

§. 97.

Ἐν δὲ τῇ Παραβολῇ, ἔσης $\alpha = \infty$, γίνεται Ἐξίσωσις ἡ $\frac{4\infty^2\pi\chi + \infty^2\pi^2}{4\infty^2} = NM^2$, οἱ δὲ λοιποὶ ὅροι ὡς ἀπειράκις ἐλάχιστοι ἐξυδενῦνται. Διόπερ $NM^2 = \pi\chi + \frac{1}{4}\pi\pi$.

ΠΟ´ΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 80.

Κοινὸν τουτὶ ταῖς τρισὶ Κωνικαῖς Τομαῖς, ὑπάρχειν Πτῶσιν, ἐν ᾗ $\chi = o$. Κείσθω ȣ̃ν $\chi = o$, ϗ ζητείσθω, ἥτις ἂν ἡ Κάθετος εἴη τηνικαῦτα, ἐκ τῆς ἐν τῇ δευτέρᾳ τῶν εὑρεθεισῶν Ἐξισώσεων, τῇ περιεχȣ́σῃ δήκȣ τὴν Παράμετρον, ᾗς εὐμοιρȣ̃σι πᾶσαι κοινῶς αἱ Κωνικαὶ Τομαὶ, ἀντὶ χ τȣ̃ o ἀντεισαγωγῆς. Εὑρεθείσεται τοίνυν $NM^2 = \frac{1}{4}\pi^2$, ϗ $NM = \frac{1}{2}\pi$. Ὡσαύτως δὲ ϗ ἐν τῇ Ἐξισώσει τῇ κατὰ τὸ Α΄. Πόρισμα, προέρχεται $NM^2 = \frac{1}{4}\pi\pi$, ἐξ ȣ̃ ϗ $NM = \frac{1}{2}\pi$. Ἐν πάσῃ ἄρα Κωνικῇ Τομῇ ἡ πασῶν τῶν Καθέτων ἐλάσσων ἐξισȣ̃ται τῇ Ἡμιπαραμέτρῳ, εἴτ' ȣ̃ν τῇ ἐπὶ τῆς Ἑςίας τεταγμένως ἠγμένῃ. Ἐὰν δὲ τῆς χ συνεχῶς αὐξȣμένης τεθῇ ἡ μεγίςη αὐτῆς δυνατὴ Ἀξία, ἔςαι ἐν μὲν τῇ Ὑπερβολῇ ϗ Παραβολῇ, $\chi = \infty$, ἐν δὲ τῇ Ἐλλείψει, $\chi = \alpha$, ὡς ἐκ τῆς αὐτῶν κατασκευῆς πρόδηλον. Ἀντικαταςάσει ἄρα τȣ̃ ∞ ἀντὶ χ ἔντε τῇ δευτέρᾳ τȣ̃ Προβλήματος Ἐξισώσει, ϗ ἐν τῇ κατὰ τὸ Α΄. Πόρισμα, προκύψει ἡ τῆς συςοιχȣ́σης Καθέτȣ Ἀξία $= \infty$. Κατὰ δὲ τὴν ἔλλειψιν τεθέντος α ἀντὶ χ, ἔσεται $NM^2 = 2\beta\beta - \beta\beta +$

$\frac{\beta^4}{\alpha\alpha} - \frac{2\beta^4}{\alpha\alpha} + \frac{\beta^4}{\alpha\alpha} = \beta\beta$, ἢ ΝΜ$=\beta$. Ἐν ἄρα τῇ Ἐλλείψει ὐδέποτε μείζων ἔσαι τῦ ἐλάσσονος Ἡμιάξονος ἡ Κάθετος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ΄.

§. 81.

Τὴν ἐξίσωσιν εὑρεῖν τῆς εὐθείας ΣΝ, εἴτ' ὖν τῆς Διαςάσεως τῆς κορυφῆς Σ ἀπὸ τῦ σημείυ Ν, καθ' ὃ ἡ Κάθετος συμμβάλλει τῷ Ἄξονι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπειδὴ ΣΝ $=$ ΣΠ $\pm$ ΠΝ, ἔσαι ΣΝ$=\chi$ (§. 63.) $+ \frac{\beta\beta}{\alpha} \mp \frac{\beta\beta\chi}{\alpha\alpha} = \frac{\alpha\alpha\chi + \alpha\beta\beta \mp \beta\beta\chi}{\alpha\alpha}$, ἢ ΣΝ$=\chi + \frac{1}{2}\pi \mp \frac{\pi\chi}{2\alpha} = \frac{2\alpha\chi + \alpha\pi \mp \pi\chi}{2\alpha}$. Ἐν δὲ τῇ Παραβολῇ ΣΝ$=\chi + \frac{1}{2}\pi$ (§. 64.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 82.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἁπασῶν τῶν ΣΝ ἐλαχίσης ἐν ἑκάςῃ Κωνικῇ Τομῇ θετέον $\chi = 0$, ἢ ἀντικαςάσει τȣ̃ ο ἀντὶ χ ἐν τῇ ἄρτι εὑρεθείσῃ κοινῇ Ἐξισώσει. Ἐπίτε τῆς Ὑπερβολῆς ϗ τῆς Ἐλλείψεως τῇ τῆς Παραμέτρȣ περιεκτικῇ, ἔςαι ΣΝ$=\frac{1}{2}\pi$. Τῇ δ' αὐτῇ ἀντικαταςάσει κἀν τῇ ἐπὶ τῆς Παραβολῆς ἐξισώσει εὑρεθήσεται ὡσαύτως ΣΝ$=\frac{1}{2}\pi$. Δῆλον δ' ἐπὶ τȣ́τοις, ὡς ἐὰν ἐν αὐτῇ ταύτῃ τῇ ἐξισώσει ἀντεισαχθῶσιν αἱ διάφοροι Ἀξίαι τῆς χ συνεχῶς αὔξȣσαι, εὐςαθῶν ȣ̓σῶν, ȣ̓ μὴν ἀλλὰ ϗ καταφασκȣσῶν τῶν α, π κατάτε τὴν Ὑπερβολὴν ϗ τὴν Παραβολὴν, συνεχῶς αὔξειν ἐπ' ἄπειρον ϗ τὴν ΣΝ, ὁμοίως ἐπάναγκες. Ἐν δὲ τῇ Ἐλλείψει, ȣ̓́σης ΣΝ

$$=\frac{2\alpha\chi+\alpha\pi-\pi\chi}{2\alpha},$$ ἔνθα καὶ ἀποφάσκων ὑπάρχει τῶν ὅρων εἷς, ἡ ΣΝ ȣ̓δόλως αὔξει κατὰ συνέχειαν, ϗ ἔτι τεθείσης $\chi=\alpha$, ἔςαι ΣΝ$=$

$$\frac{2\alpha\alpha+\alpha\pi-\pi\alpha}{2\alpha}=\alpha=\chi.$$ Ἡ ἄρα μεγίςη τῶν κατὰ τὴν Ἔλλειψιν ΣΝ ἐξισȣ̃ται τῇ μείζονι Ἡμιδιαμέτρῳ. Ἐπεὶ δὲ κοινῶς δέδεικται ἐν ταῖς τρισὶ Καμπύλαις, ὅτι ἡ ἐλάσσων ΣΝ$=\frac{1}{2}\pi$, σαφὲς δήπȣ τὸ τῆς ΣΝ πέρας Ν τὸ διὰ τῆς Καθέτȣ προσδιοριζόμενον ἀείποτε κεῖσθαι ὑπὸ τὴν ἑτέραν τῶν Ἑςιῶν ȣ̔́τως, ὡς μηδέποθ' ὑπάρχειν μεταξὺ τῆς Κορυφῆς, ϗ τῆς ἐγγυτέρας Ἑςίας.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ Ι'.

§. 83.

Τὴν Α'ναλυτικὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης ΤΜ ἐξευρεῖν.

ΛΥ'ΣΙΣ.

$$\Pi M^2 + \Pi T^2 = TM^2 = yy + \left(\frac{2\alpha\chi \mp \chi\chi}{\alpha \mp \chi}\right)^2$$

$(\S.\ 67.) = (\S.\ 49.)\ \frac{2\alpha\beta\beta\chi \mp \beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha} + \frac{4\alpha^2\chi^2 \mp 4\alpha\chi^3 + \chi^4}{\alpha^2 \mp 2\alpha\chi + \chi\chi}$. Η' ἀντιτεθέντος τȣ͂ τῆς Παραμέτρȣ ἀνταξίȣ ποσȣ͂ (§. 59.) $TM^2 = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha} + \frac{4\alpha^2\chi^2 \mp 4\alpha\chi^3 + \chi^4}{\alpha^2 \mp 2\alpha\chi + \chi\chi}$. Ε'πεὶ δὲ κἀν τῇ Παραβολῇ $\Pi M^2 + \Pi T^2 = MT^2$, ἔςαι $MT^2 = yy + (2\chi)^2$ (§. 68.) $=$ (§. 60.) $\pi\chi + 4\chi\chi \doteq 4A\Sigma \times \Sigma\Pi + 4\Sigma\Pi^2$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 84.

Μέχρι τȣ͂δε ἐκ τῆς κατὰ τὸν Α'ξονα Κορυφῆς ἡ τῶν Α'ποτετμημένων ἐθεωρεῖτο ἀρχὴ, ὠσπεροῦν κἀν τοῖς Φθάσασι τῶν προβλημάτων καταφαίνεται. Ἔνεςι μέντοιγε τὰς ἐπὶ πᾶν Καμπύλων ταύτας ἐξισώσεις εὑρεῖν, κἀκ τοῦ Κέντρου λαμβανομένης τῆς τῶν Ἀποτετμημένων ἀρχῆς, ϗ δὴ ϗ τῶν Τεταγμένων ταῖς ἐκεῖθεν ἀντιςοιχεῖν θεωρουμένων. Ἡ οὖν Παραβολὴ τοῦ τοιοῦδε Ὑπολογισμοῦ, ἅτε Κέντρου ἀμοιροῦσα, ἐκκλείεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ΄.

§. 85.

Τὴν ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως, καὶ ὑπερβο- Σχ.
λῆς ἐξίσωσιν περιεκτικὴν τῶν κατ' αὐ- 11.
τὰς Ἀξόνων εὑρεῖν, τῆς ἀρχῆς τῶν Ἀ- 12.
ποτετμημένων ἀπὸ τοῦ κέντρου λαμβανομένης.

ΛΥΣΙΣ.

Τηρουμένων τῶν αὐτῶν ὀνομάτων, ὡς ϗ ἀνωτέρω, ἐκτὸς τῆς ΓΠ, ἥτις ῥηθήσεται χ, ϗ τῶν ἀπ' αὐτῆς ἀναγκαίων μεταβολῶν, εἴγε ἡ μὲν πρότερον Ἀποτετμημένη ΣΠ, νυνὶ ἔσεται $=\pm\alpha\mp\chi$, ἡ δ' αὖ $\sigma\Pi=\alpha+\chi$, ἐπείπερ ὑπάρχει (§. 62.) $yy : \sigma\Pi \times \Pi\Sigma :: \pi : 2\alpha$, ἢ $yy : \sigma\Pi \times \Pi\Sigma :: \beta\beta : \alpha\alpha :: \pi : 2\alpha$, ὅ ἐςιν $yy : \pm\alpha\alpha\mp\chi\chi :: \beta\beta : \alpha\alpha ::$

$\pi : 2\alpha \cdot$ ἄρα $yy = \frac{\beta\beta\,(\pm\alpha\alpha \mp \chi\chi)}{\alpha\alpha} = \pm\beta\beta \mp \frac{\beta\beta\chi^2}{\alpha\alpha}$, ἡ ζητȣμένη Ἐξίσωσις περιέχȣσα τȣ̀ς Ἄξονας, εἰ δὲ ζητηθῇ ἡ τῆς Παραμέτρȣ περιεκτική, ἔϛαι $yy = \frac{\pi\,(\pm\alpha\alpha \mp \chi\chi)}{2\alpha} = \pm\frac{1}{2}\alpha\pi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 86.

Ἐπιϛάσεως ἄξιον, ὡς ἄρα αἱ μὲν Ἀποτετμημέναι ἐκ τȣ̃ Κέντρȣ ὑπολογίζονται, ἐξ ȣ̃ δὴ ϗ τέθειται ΓΠ $=\chi$· γινόμενον δ' ὑπ' αὐτῶν τὸ ΠΣ$\times$Πσ λαμβάνεται, ἀλλ' ȣ̓ τὸ ΓΠ$\times$Πσ. Ὡσαύτως δὲ κἀν τοῖς ἐχομένοις Πορίσμασιν, εἰ ϗ ἡ ΓΗ Ἀποτετμημένη τȣ̃ δευτέρȣ Ἄξονος ῥηθήσεται, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ (§. 94.) γινόμενον ἀλλ' ȣ̃ν ὑπὸ τῶν Ἀποτετμημένων ȣ̓χὶ τὸ ΓΗ$\times$ΗΛ, τὸ δὲ ΗΛ$\times$ΗΛ ἐκληφθήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 87.

Ἐπειδὴ ȣ̓δὲν τὸ κωλῦον μὴ καὶ τȣ̃ δευτέρȣ τῶν κατὰ τὴν ἔλλειψιν Ἄξονος Ἀποτετμημένας τε ϗ συςοιχέσας αὐταῖς Τεταγμένας θεωρήσασθαι τὰς τέτων ἀνιχνεύοντας Συνεκθέσεις, ἐφ' ᾧ τὰς ἐπανηκέσας αὐταῖς ἐξισώσεις εὑρέσθαι. Τέτε δὴ χάριν ΗΜ μὲν κείσθω ἡ ἐπὶ τε δευτέρε Α'ξονος Τεταγμένη, ΓΗ δὲ ἡ συςοιχεσα αὐτῇ Α'ποτετμημένη ἀπὸ Κέντρε τε Γ, ὡς ἀρχῆς τῶν Α'ποτετμημένων, θεωρεμένε· (τὸ δ' αὐτῆς πέρας Η τὰς ἐξ ἀμφοῖν τῶν κατὰ τὸν δεύτερον Α'ξονα κορυφῶν Λ, λ δισσὰς διαςάσεις τε Η προσδιορίζεται· αἱ δὲ ΗΛ, Ηλ Α'ποτετμημέναι κυρίως εἰρήσονται κατὰ τὰς ἐν τῷ πρώτῳ Α'ξονι ΠΣ, Πσ (§. 47.)). Α'λλὰ $\Gamma\Pi = \mathrm{HM} = \chi$, καὶ $\Pi\mathrm{M} = \Gamma\mathrm{H} = y$· ἄρα $\mathrm{H}\Lambda = \beta - y$, ϗ $\mathrm{H}\lambda = \beta + y$· ἐκεν $\mathrm{H}\Lambda \times \mathrm{H}\lambda = (\beta - y)(\beta + y) = \beta\beta - yy$, παραγόμενον δηλονότι ὑπὸ τῶν κατὰ τὸν δεύτερον Α'ξονα Α'ποτετμημένων· ἵν' ἐν ἡ ἐξίσωσις $yy = \beta\beta - \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, εἰς ἀναλογίαν ἀναλυθῇ, γενέσθω πρῶτον μὲν $\alpha^{2}yy = \alpha\alpha\beta\beta - \beta\beta\chi\chi$, ὅθεν $\beta\beta\chi\chi = \alpha\alpha\beta\beta - \alpha\alpha yy = (\beta\beta - yy)\alpha\alpha$, ἐξ ἧς περ εἶτα $\chi\chi : \beta\beta - yy :: \alpha\alpha : \beta\beta$, Α'μέλειτοι: „Τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων „ἐπὶ τε ἐλάσσονος Α'ξονος Τετράγωνα πρὸς τὰ „ὑπὸ τῶν συςοιχεσῶν αὐταῖς Α'ποτετμημένων πα„ραγόμενα λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τε μείζονος

„Ἡ μιάξονος Τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῦ ἐλάσ-
„σονος."

ΣΧΟ´ΛΙΟΝ.

§. 88.

Ἡ ἔκφρασις ταυτησὶ τῆς ἀναλογίας καθομοιῦται τῇ ἐν τῷ τέλει τῦ §. 61.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β´.

§. 89.

Καὶ Παράμετρον δὲ τῦ ἐλάσσονος Ἄξονος ἐπινοήσασθαι δυνατὸν, θεωρυμένην παραπλησίως τῇ κατὰ τὸν μείζω, ϗ τῇ αὐτῇ μεθόδῳ προσδιοριζομένην. Γενέσθω ὖν (§. 57.) $2\beta : 2\alpha :: 2\alpha : \lambda$ (ῥηθείσης λ τῆς κατὰ τὸν ἐλάσσω Ἄξονα Παραμέτρυ) ϗ δὴ $\lambda = \frac{2\alpha\alpha}{\beta}$. νῦν ὖν ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως $\div\; 2\beta : 2\alpha : \lambda$, ἆρα $2\beta : \lambda :: 4\beta\beta : 4\alpha\alpha$ (Ἀλγβ. §. 502) ἐν ὖν τῇ προτέρᾳ ἀναλογίᾳ τῇ ἐν (§. 87.) εἰσαγομένυ τῦ τῆς Παραμέτρυ λόγυ ἐκ τῆς ἤδη εὑρεθείσης, ἔςαι $\chi\chi : \beta\beta - yy :: \lambda : 2\beta$, ὅ ἐςι „Τὰ Τετράγωνα τὰ „ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐπὶ τῦ ἐλάσσονος Ἄξονος „πρὸς τὰ συςοιχῦντα ὑπὸ τῶν αὐτῦ Ἀποτετμημέ-„νων παραγόμενα λόγον ἔχει, ὃν ἡ τῦ ἐλάσσο-

„νος Ἄξονος Παράμετρος πρὸς αὐτὸν τὸν ἐλάσσω „Ἄξονα."

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 90.

Αἱ ταύτης τε καὶ τῆς ἐφεξῆς ἀναλογίας ἐκφράσεις καθομοιοῦνται ταῖν δυεῖν προτέραιν τοῦ §. 61.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

§. 91.

Ἐὰν δὲ ληφθῇ ἑτέρα Ἀποτετμημένη ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐλάσσονος Ἄξονος, καὶ ῥηθῇ Χ, ἔσαι ΧΧ : ββ — ΥΥ : : λ 2β, ὅθεν (§. 89.) χχ : ββ — yy : : $X^2 : \beta^2 - Y^2$, εἶτ' οὖν „Τὰ ἀπὸ τῶν ἐπὶ τοῦ ἐλάσ„σονος Ἄξονος Τεταγμένων Τετράγωνά εἰσι πρὸς „ἄλληλα, ὡς τὰ ὑπὸ τῶν ἐξ αὐτῶν Ἀποτετμημέ„νων Παραγόμενα."

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.

§. 92.

Αἱ ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος τῆς Ἐλλείψεως Ἄξονος Τεταγμέναι ἔχουσι πάντως ἰδιώματα τὰ αὐτὰ τοῖς, ἅπερ ἔχουσιν αἱ ἐπὶ τοῦ μείζονος· Ἡ μὲν γὰρ Ἐξίσωσις

$yy = \frac{2\beta\beta\chi}{\alpha} - \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$, εἴτ' ἒν $yy = \frac{(2\alpha - \chi)\chi)\beta\beta}{\alpha\alpha}$ παρίςησιν ὅτιγε τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐπὶ τῦ πρώτυ Α'ξονος Τετράγωνα ἐξισῦται τῷ, διαιρέσει τῦ ὑπὸ τῶν ἰδίων Α'ποτετμημένων, ϗ θατέρυ τῶν Α'ξόνων παραγομένυ, διὰ τῦ πρώτυ Α'ξονος διαιρεθέντος, πρoιόντι Πηλίκῳ. Η' δ' ἐνταῦθα (πορ. Α) Ε'ξίσωσις $\chi\chi = \frac{\alpha\alpha(\beta\beta - yy)}{\beta\beta}$ σημαίνει, ὡς ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐπὶ τῦ δευτέρυ Α'ξονος Τετράγωνα ἐξισῦται τῷ Πηλίκῳ τῷ προιόντι ἐκ τῆς διαιρέσεως τῦ παραγομένυ ὑπὸ τῶν ἰδίων Α'ποτετμημένων ϗ θατέρυ τῶν Α'ξόνων διαιρεθέντος διὰ τῦ αὐτῦ δευτέρυ Α'ξονος· ταὐτὸν ἄρα τὸ ἰδίωμα.

Ω'σαύτως ἡ Ε'ξίσωσις (§. 59.) $yy = \pi\chi - \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha}$, εἴτ' ἒν $yy = \frac{((2\alpha - \chi)\chi)\pi}{2\alpha}$, ἐκδηλοῖ, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐπὶ τῦ πρώτυ Α'ξονος Τετράγωνα συνισῦνται τῷ ἐκ τῦ γινομένυ ὑπὸ τῶν ἰδίων Α'ποτετμημένων, ϗ τῆς ἰδίας Παραμέτρυ διαιρεθέντος διὰ τῦ πρώτυ Α'ξονος, προερχομένῳ Πηλίκῳ. Η' δὲ (Πορ. Β'.) Ε'ξίσωσις $\chi\chi = \frac{(\beta\beta - yy)\lambda}{2\beta}$ παριςάνει, ὅτι τὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐπὶ τȣ̃ δευτέρȣ Ἄξονος ἐξισȣ̃ται τῷ Πηλίκῳ τῷ ἐκ τȣ̃ παραγομένȣ ὑπὸ τῶν ἰδίων Ἀποτετμημένων, ϗ τῆς ἰδίας Παραμέτρȣ διαιρεθέντος διὰ τȣ̃ δευτέρȣ Ἄξονος. Οὐκȣ̃ν κἀνταῦθα ταυτίζεται τὰ ἰδιώματα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 93.

Ἐὰν ἐπὶ τȣ̃ κατὰ τὴν Ἔλλειψιν μείζονος Ἄξονος (τȣ̃το δ' αὐτὸ, κἂν ἐπὶ τȣ̃ ἐλάσσονος) ληφθέντος ἀντὶ Διαμέτρȣ καταγραφῇ Κύκλος ὁ ΣΝσΞ, ϗ ΝΠ, νπ ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τῆς αὐτῆς Διαμέτρȣ, τὰ ἀπ' αὐτῶν Τετράγωνα ἴσα ὄντα τοῖς συσοιχȣ̃σι παραγομένοις ὑπὸ τῶν μερῶν τῆς Διαμέτρȣ, εἴτ' ȣ̃ν τοῖς σΠ×ΠΣ, σπ×πΣ, τὸν αὐτὸν λόγον ἕξει πρὸς ἄλληλα, ὃν ϗ τὰ γινόμενα ταῦτα. Ἀλλαμὴν ϗ τὰ ἀπὸ τῶν ΜΠ, μπ Τετράγωνα ἀνάλογον ἔχȣσι πρὸς τὰ αὐτὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν αὐτῶν συσοιχȣσῶν Ἀποτετμημένων (§. 61. 62.) Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐν τῷ Κύκλῳ Τετράγωνα εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ἐν τῷ λόγῳ τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐν τῇ Ἐλλείψει ταῖς ἐν τῷ Κύκλῳ συσοιχȣσῶν. Οὐκȣ̃ν ϗ αἱ ἐξ αὐτῶν ῥίζαι ἀνάλογον ἔσονται. Ἔςιν ȣ̃ν ΝΠ : νπ :: ΜΠ : μπ, ϗ ΟΓ : ΝΠ :: Σχ. 15.

ΛΓ : ΜΠ. Ἀεὶ ἄρα ἑκάστη Τεταγμένη τοῦ Κύκλου πρὸς τὴν συστοιχοῦσαν Τεταγμένην τῆς Ἐλλείψεως, ὡς ΟΓ : ΛΓ, ἢ ὡς ΣΓ : ΛΓ, ἢ ὡς Σσ : Λλ, ὅ ἐστιν, ὡς ὁ Ἄξων ἐφ' ὃν ὁ Κύκλος γέγραπται πρὸς τὸν ἕτερον Ἄξονα.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

§. 94.

Ὁ δὲ τῶν ἐπὶ τοῦ δευτέρου τῆς Ὑπερβολῆς Ἄξονος Τεταγμένων λόγος ἄλλως ἔχων εὑρίσκεται. Ἡ γάρ τοι ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς ἐξίσωσις $yy = - \beta\beta + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, $\alpha\alpha\ yy = - \alpha\alpha\ \beta\beta + \beta\beta\ \chi\chi$, $\beta\beta\ \chi\chi = \alpha\alpha\ yy + \alpha\alpha\ \beta\beta = (yy + \beta\beta)\ \alpha\alpha$, δίσωσιν ἀναλογίαν τὴν $\chi\chi : yy + \beta\beta :: \alpha\alpha : \beta\beta$, ἧς ἄπεστι τὸ ὑπὸ τῶν Ἀποτετμημένων τοῦ δευτέρου Ἄξονος γινόμενον, ὅπερ τῇ κατὰ τὸ πρῶτον πόρισμα ἀναλογίᾳ ἔγκειται. Ἔστι γὰρ ΗΛ = ΠΜ — ΓΛ = $y - \beta$, καὶ Ηλ = $y + \beta$, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν γινόμενον ΗΛ × Ηλ = $yy - \beta\beta$· ἀλλ' ὁ ἐν ταύτῃ τῇ ἀναλογίᾳ δεύτερος ὅρος ὁ $yy + \beta\beta$ τὸ ἄθροισμά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΓΗ, ΓΛ τετραγώνων. Οὐκοῦν κατὰ τὴν Ὑπερβολὴν „ Τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης

„ἐπὶ τȣ̃ ἐλάσσονος (δευτέρȣ) Ἄξονος Τετράγωνον, „πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Τετραγώνων τȣ̃ τε ἀπὸ τῆς „αὐτῇ συςοιχȣ́σης Ἀποτετμημένης (ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ), „ϗ̀ τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ Ἡμιελάσσονος (ἡμιδευτέρȣ) Ἄξονος „λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τȣ̃ μείζονος (πρώτȣ) Ἡ-„μιάξονος Τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τȣ̃ ἡμιελάσ-„σονος (ἡμιδευτέρȣ) Ἄξονος". Ἀπὸ δὲ τῆς γενι-κῆς Ἐξισώσεως $yy = \pm\beta\beta \mp \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$ ῥᾳ̃ςα ἐξέρχε-ται, ϗ̀ ἡ ἐπίτε τῆς Ὑπερβολῆς, ϗ̀ τῆς Ἐλλείψεως κοινὴ $\chi\chi = \pm\alpha\alpha \mp \frac{\alpha\alpha yy}{\beta\beta}$ ἡ τῷ δευτέρῳ Ἄξονι ἐ-πανήκȣσα, ϗ̀ περιέχȣσα τάς τε Τεταγμένας ἐπ᾽ αὐτȣ̃, ϗ̀ τὰς Ἀποτετμημένας, λαμβανομένης τῆς αὐτῶν ἀρχῆς ἐκ τȣ̃ Κέντρȣ, τεθείσης ἀμέλειτοι τῆς μὲν Τεταγμένης $= \chi$, τῆς δ᾽ Ἀποτετμημένης $= y$. Ἐξ αὐτῆς δὲ ταύτης τῆς ἐξισώσεως ἐκπηγάζȣσι ϗ̀ ἑκα-τέρα τῶν ἀναλογιῶν, ἡ μὲν ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως, ἡ ἐν τῷ Α΄. Πορίσματι καταφαινομένη, ἡ δ᾽ ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς, ἡ ἀνωτέρα.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄.

§. 95.

Ὥσπερ ἐκ τȣ̃ Κέντρȣ θεωρηθείσης τῆς τῶν

Ἀποτετμημένων ἀρχῆς ἐπιλέλυται τὸ Πρόβλημα (§. 85.) ὅτως εἶχεν ἂν ἔτι εὑρεθῆναι ἐπὶ τῆς Καμπύλης ἐξίσωσις ἐξιχνεύουσα τὴν φύσιν αὐτῆς, κἂν ἐκ τῆς Ἑςίας ἄρχεσθαι θεωρηθῶσιν αἱ Ἀποτετμημέναι· ἀλλὰ δὴ κ, ἐξ ὁτινοσοῦν ἄλλε σημεὶς δεδομένε ἐπὶ τε Ἄξονος. Καὶ δῆλον ἄρα, ὡς ὀχ ἁπλῆ τις ὅτε μοναχὴ τε ἐπὶ τῆς δοθείσης Καμπύλης ἐξίσωσιν ἐξευρεῖν, ἡ μέθοδος.

ΠΟΡΙΣΜΑ ϛʹ.

§. 96.

Ἐὰν ἐκ τῶν δυεῖν ἐξισώσεων τῶν κατὰ τὸ ΙΑʹ. Πρόβλημα, ἐν ᾧ αἱ Ἀποτετμημέναι ἀπὸ τε Κέντρε ὑπολογίζωνται, εὑρεθεισῶν μετακομισθῇ ὁ τῶν εἰς κατασκευὴν συντελόντων τριγώνων Ὑπολογισμὸς, τῶν κἀν τοῖς Προβλήμασι Εʹ, ϛʹ, Ζʹ, Ηʹ, Θʹ, Ιʹ, παραληφθέντων οἱ τῶν λοιπῶν εὐθειῶν τύποι ἀνακύψεσιν ὧδε.

Αʹ.

§. 97.

Ζητηθήτω ἡ τῆς Ὑποκαθέτε ΠΝ ἀναλυτικὴ ἔκθεσις τῶν Ἀποτετμημένων ἀπὸ τε Κέντρε ὑπολογιζομένων.

ΛΥ'ΣΙΣ.

Ε'ν τῷ Ε'. προβλήματι (§. 63.) εἴδομεν, ὅτι $\zeta\mu : Z\zeta :: M\mu\ (= MZ) : ZN$. Α'λλ' ἡ μὲν $\zeta\mu = 2\alpha$ (ὐδὲν γὰρ πρὸς αὐτὴν, ἤντ' ἐκ τῆς Κορυφῆς, ἤντ' ἐκ τῦ Κέντρυ αἱ Α'ποτετμημέναι ὑπολογίζωνται) ἡ δὲ $Z\zeta = 2\alpha \mp 2\gamma$· ἡ δὲ MZ ἐςὶν ἐκεῖθι $= \chi + \gamma \mp \frac{\gamma\chi}{\alpha}$, ὅ ἐςι $MZ = \Pi\Sigma + Z\Sigma \mp \frac{Z\Sigma . \Pi\Sigma}{\alpha}$· ἀλλὰ $\Pi\Sigma = \pm\,\alpha \mp \chi$ (§. 85.) ἔςεται ἄρα ἐνταῦθα $MZ = \pm\,\alpha \mp \chi \pm \gamma \mp \frac{\gamma \pm \alpha \mp \chi}{\alpha}$, καὶ τῶν ἀναγκαίων ἐκπερανθεισῶν πράξεων ἔσεται $MZ = \pm\,\alpha \mp \chi + \frac{\gamma\chi}{\alpha}$· ἔςιν ἄρα $2\alpha : 2\alpha \mp 2\gamma :: \pm\,\alpha \mp \chi + \frac{\gamma\chi}{\alpha} : ZN = \pm\,\alpha \mp \chi - \gamma + \frac{2\gamma\chi}{\alpha} \mp \frac{\gamma\gamma\chi}{\alpha\alpha}$· ἀλλὰ $\Pi N = ZN - Z\Pi$, καὶ $Z\Pi = \pm\,\Sigma\Gamma \mp \Gamma\Pi - \Sigma Z = \pm\,\alpha \mp \chi - \gamma$: ἄρα $\Pi N = \pm\,\alpha \mp \chi - \gamma + \frac{2\gamma\chi}{\alpha} \mp \frac{\gamma\gamma\chi}{\alpha\alpha} \mp \alpha \pm \chi + \gamma = \frac{2\gamma\chi}{\alpha} \mp \frac{\gamma\gamma\chi}{\alpha\alpha}$. Ε'πεὶ δὲ $\gamma\gamma = \mp\,2\alpha\gamma \mp \frac{1}{2}\alpha\pi$ (προβλ. Ε'.) ἔςαι $\Pi N =$

$$\frac{2\gamma\chi}{\alpha} \mp \frac{\chi(\mp 2\alpha\gamma \pm \frac{1}{2}\alpha\pi)}{\alpha\alpha} = \frac{2\gamma\chi}{\alpha} - \frac{2\alpha\gamma\chi}{\alpha\alpha} +$$

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha\pi\chi}{\alpha\alpha} = \frac{2\gamma\chi}{\alpha} - \frac{2\gamma\chi}{\alpha} + \frac{\pi\chi}{2\alpha} = \frac{\pi\chi}{2\alpha},$$ ἡ ζητȣμένη τῆς Ὑποκαθέτȣ ἐξίσωσις, ἐν Ὑπολογισμῷ τῶν ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ Ἀποτετμημένων, τῆς κατὰ τὴν Παράμετρον ἐκθέσεως περιεκτική. Εἰ δὲ τὴν Ѳατέρȣ τῶν Ἀξόνων ἔκθεσιν περιέχειν ζητηθείη αὕτη, ἐπὶ $\pi = \frac{2\beta\beta}{\alpha}$ (§. 57), ἔσεται $\Pi N = \frac{\chi}{2\alpha} \cdot \frac{2\beta\beta}{\alpha} =$ $\frac{\beta\beta\chi}{\alpha\alpha}$.

Β΄.

§. 98.

Ζητηθήτω ἡ ἀναλυτικὴ ἔκθεσις τῆς Ὑφαπτομένης ΠΤ.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐν τῷ ϛ΄. Προβλήματι (§. 67.) ἐστιν ἡ Ὑφαπτομένη $\Pi T = \frac{M\Pi^2}{N\Pi} = \frac{yy}{N\Pi}$. ἀλλαμὴν (§. 85.) $yy =$ $\pm\beta\beta \mp \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἢ $yy = \pm\frac{1}{2}\alpha\pi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha}$, ϗ $N\Pi =$

$\frac{\beta\beta\chi}{\alpha\alpha} = \frac{\pi\chi}{2\alpha}$ (§. ἀνωτ.), ἄρα ΠΤ $= \frac{\pm \frac{1}{2}\alpha\pi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha}}{\frac{\pi\chi}{2\alpha}} =$

$\pm \frac{\alpha\alpha\pi \mp \pi\chi\chi}{2\alpha} \cdot \frac{2\alpha}{\pi\chi} = \pm \frac{2\alpha^3\pi \mp 2\alpha\pi\chi\chi}{2\alpha\pi\chi} = \pm$

$\frac{\alpha\alpha \mp \chi\chi}{\chi}$. αὐτὸ δὴ τοῦτο τὸ τῆς ΠΤ Ὑφαπτομένης ἀντάξιον προκύπτει, κἂν ἀντὶ $\frac{\gamma\gamma}{\text{ΝΠ}}$ αἱ τὸν Ἄξονα β περιέχουσαι Ἀξίαι τεθῶσιν.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 99.

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα τε κἂν τῷ ϛ΄. Προβλήματι (§. 67.) τοῦ τῆς Ὑφαπτομένης ἀνταξίου ποσοῦ ἄπεστιν ἡ β, τούτου δὴ χάριν ἡ αὐτὴ Ὑφαπτομένη ἔμενεν ἄν, εἰ καὶ ἄλλαι Ἐλλείψεις τε, καὶ Ὑπερβολαὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Διαμέτρου $=\alpha$ κατεγράφοντο, καὶ αὐτῶν Εὐθεῖαι εἰς σημεῖον τῷ Μ ἀντίστοιχον ἔψαυον.

Γ΄.

§. 100.

Ζητηθήτω ἡ τῆς ΓΤ ἔκθεσις.

ΛΥ'ΣΙΣ.

Ε'πεὶ $\Gamma T = \Gamma \Pi \pm \Pi T$· οὐκοῦν $\Gamma T = \chi \pm \frac{(\pm \alpha\alpha \mp \chi\chi)}{\chi} = \frac{\chi\chi + \alpha\alpha - \chi\chi}{\chi} = \frac{\alpha\alpha}{\chi}$.

Δ'.

§. 101.

Ζητηθήτω, ἡ τῆς ΣΤ ἔκθεσις.

ΛΥ'ΣΙΣ.

Ε'κ τῶν σχημάτων ἐπίδηλον, ὅτι $\Sigma T = \pm \Gamma T \mp \alpha$· ἄρα $\Sigma T = \pm \frac{\alpha\alpha}{\chi} \mp \alpha = \pm \frac{\alpha^2 \mp \alpha\chi}{\chi}$

Ε'.

§. 102.

Ζητηθήτω ἡ τοῦ ΣB^2 ἔκθεσις.

ΛΥ'ΣΙΣ.

Ε'κ τοῦ Ζ'. Προβλήματος (§. 75.) ἐστι $\Pi T : \Sigma T :: \Pi M : \Sigma B$. Τῶν ἄρα ἄρτι εὑρεθέντων ἀνταξίων αὐτοῖς ποσῶν ἀντικαταστάντων, ἔσται $\pm \frac{\alpha\alpha \mp \chi\chi}{\chi} : \pm \frac{\alpha\alpha \pm \alpha\chi}{\chi} :: \Pi M : \Sigma B :: \pm \alpha\alpha \mp \chi\chi :$

$\pm \alpha\alpha \mp \alpha\chi$· ὅθεν καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν Τετράγωνα ἀνάλογον ἕξουσιν, εἴτ' οὖν $\alpha^4 - 2\alpha\alpha\chi\chi + \chi^4 : \alpha^4 - 2\alpha^3\chi + \alpha\alpha\chi\chi :: \Pi M^2 : \Sigma B^2$, καὶ τοῦ ἀνταξίου ποσοῦ τεθέντος ἀντὶ τοῦ ΠM^2 (§. 49.) ἔσται: $\alpha^4 - 2\alpha\alpha\chi\chi + \chi^4 : \alpha^4 - 2\alpha^3\chi + \alpha\alpha\chi\chi :: \pm \frac{\alpha\alpha\beta\beta \mp \beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$ $: \Sigma B^2$· οὗκεν $\Sigma B^2 =$ τῷ $(\alpha^4 - 2\alpha^3\chi + \alpha\alpha\chi\chi)$. $\left(\frac{\pm \alpha\alpha\beta\beta \mp \beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}\right)$ διαιρεθέντι διὰ τοῦ πρώτου ὅρου.

Αὐτὸ δὲ τὸ γινόμενόν ἐστιν $= \left(\frac{\alpha^4 - 2\alpha^3\chi + \alpha\alpha\chi\chi}{\alpha\alpha}\right)$. $(\pm \alpha\alpha\beta\beta \mp \beta\beta\chi\chi) = (\alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi\chi)$. $(\pm \alpha\alpha\beta\beta \mp \beta\beta\chi^2) = \pm \alpha^4\beta\beta \mp 2\alpha^3\beta\beta\chi \pm \alpha^2\beta^2\chi^2 \mp \alpha^2\beta^2\chi^2 \pm 2\alpha\beta\beta\chi^3 \mp \beta\beta\chi^4 = \pm \alpha^4\beta\beta \mp 2\alpha^3\beta\beta\chi \pm 2\alpha\beta\beta\chi^3 \mp \beta^2\chi^4$· ἄρα $\Sigma B^2 = \frac{\pm \alpha^4\beta\beta \mp 2\alpha^3\beta\beta\chi \pm 2\alpha\beta\beta\chi^3 \mp \beta^2\chi^4}{\alpha^4 - 2\alpha\alpha\chi\chi + \chi^4}$, ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις. Εἰ δὲ τὴν Παράμετρον περιέχειν ζητηθῇ, ἀντικαταστάσει $\beta\beta = \frac{1}{2}\alpha\pi$, ἕπεται $\Sigma B^2 =$

$$\pm \frac{(\alpha^4 \mp 2\alpha^3\chi \pm 2\alpha\chi^3 \mp \chi^4)\,\frac{1}{2}\alpha\pi}{\alpha^4 - 2\alpha^2\chi\chi + \chi^4} = \pm \frac{\alpha^5\pi \mp 2\alpha^4\pi\chi \pm 2\alpha^2\pi\chi^3 \mp \alpha\pi\chi^4}{2\alpha^4 - 4\alpha^2\chi\chi + 2\chi^4}.$$

ϛʹ.

§. 103.

Ζητηθήτω ἡ ἀναλυτικὴ ἔκθεσῒς τȣ̃ ἀπὸ τῆς Καθέτȣ Τετραγώνȣ NM^2.

ΛΥ΄ΣΙΣ.

Ἐκ τȣ̃ Ηʹ. Προβλήματος (§. 78.) ἐπίδηλον ὅτι $NM^2 = \Pi M^2 + \Pi N^2 = \pm \beta\beta \mp \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha} +$ (§. 85. ϗ 97.) $+ \left(\frac{\beta\beta\chi}{\alpha\alpha}\right)^2$. ἢ $NM^2 = \Pi M^2 + \Pi M^2 = \pm \frac{1}{2}\alpha\pi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha} + \left(\frac{\pi\chi}{2\alpha}\right)^2$ ȣ̓κȣ̃ν $NM^2 =$ $\frac{\pm \alpha^4\beta\beta \mp \alpha^2\beta^2\chi^2 + \beta^4\chi^2}{\alpha^4}$, ἢ $= \pm$ $\frac{2\alpha^3\chi \mp 2\alpha\pi\chi\chi + \pi\pi\chi\chi}{4\alpha\alpha}$, ἡ ζητȣμένη Ἐξίσωσις διτταχῶς ἀποδοθεῖσα, τῇ μὲν δηλονότι τὴν δευτέραν Διάμετρον περιέχȣσα, τῇ δὲ, τὴν Παράμετρον.

Ζʹ.

§. 104.

Ζητηθήτω ἡ τῆς ΣΝ ἀναλυτικὴ ἔκθεσις.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔςι $\Sigma N = \Sigma \Pi + \Pi N = \pm \alpha \mp \chi + \frac{\beta\beta\chi}{\alpha\alpha}$,

ἢ $\Sigma N = \Sigma \Pi + \Pi N = \pm \alpha \mp \chi + \frac{\pi\chi}{2\alpha}$· ἄρα $\Sigma N =$

$\pm \frac{\alpha^3 \mp \alpha\alpha\chi - \beta\beta\chi}{\alpha\alpha}$, ἢ $= \pm \frac{2\alpha\alpha \mp 2\alpha\chi + \pi\chi}{2\alpha}$.

Η΄.

§. 105.

Ζητηθήτω ἡ ἀναλυτικὴ ἔκθεσις τῦ ἀπὸ τῆς Ἐφαπτομένης Τετραγώνυ MT^2.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔςιν, ὡς κἀν τῷ Ι΄. Προβλήματι (§. 83.)

$\Pi M^2 + \Pi T^2 = TM^2 = + \beta\beta \mp \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha} \pm$

$\left(\frac{\alpha\alpha \mp \chi\chi}{\chi}\right)^2 = \frac{\alpha^6 - 2\alpha^4\chi\chi + \alpha\alpha\chi^4 \pm \alpha^2\beta^2\chi^2}{\alpha\alpha\chi\chi}$

$\frac{\mp \beta\beta\chi^4}{}$· ἢ $\Pi M^2 + \Pi T^2 = TM^2 = \pm \frac{1}{2}\alpha\pi \mp$

$\frac{\pi\chi\chi}{2\alpha} \pm \left(\frac{\alpha\alpha \mp \chi\chi}{\chi}\right)^2 = \pm \frac{\alpha\alpha\pi \mp \pi\chi\chi}{2\alpha} +$

$$\frac{\alpha^4 - 2\alpha\alpha\chi\chi + \chi^4}{\chi\chi} = \frac{2\alpha^5 - 4\alpha^3\chi\chi + 2\alpha\chi^4 \pm \alpha^2\pi\chi\chi \mp \pi\chi^4}{2\alpha\chi\chi}.$$

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Ζ'.

§. 106.

Ε'πειδὴ τὸ γ ὐδενὶ τύπῳ τῶν ἡγεμένων Προβλημάτων ἔνεςιν. Ε'κ τὺτε ἄρα σαφὲς, ὡς οἱ αὐτοὶ τύποι ἐπίσης ϗ τῷ δευτέρῳ τῶν κατὰ τὴν Ε'λλειψιν καὶ Υ'περβολὴν Α'ξόνων ἐπανήκεσι, καὶ τὰ προϊόντα τῶν ἰδιωμάτων αὐτῶν ἐκτιθέασι. Χρὴ μόνον τὰ ςοιχεῖα προσφυῶς μεταλλάττειν.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Η'.

§. 107.

Σχ. 14. Ε'πειδήπερ τὸ μὲν τῦ κατὰ τὰς ἀντικειμένας Υ'περβολὰς ΜΣμ, Οσο, δευτέρυ Α'ξονος Λλ μέγεθος τῇ ἐκ τῦ σημείυ Σ ἐπὶ τὰ Λ, λ μεταθέσει τῆς ΓΖ, ἢ Γζ, προσδιορίζεται. Τῶν δ' Α'συμπτώτων ἡ θέσις (§. 77.) ἐὰν αἱ ΣΒ, Σb ταῖς ΓΛ, ΓΛ ἴσαι γένωνται, ἐντεῦθεν ἄρα ληφθεισῶν τῶν ΓΦ, Γφ ἴσων ταῖς ΛΣ, λΣ, αἱ μὲν ἐπιζευγνύμεναι Bb, βB διὰ τῶν σημείων Λ, λ διελεύσονται, αἱ δὲ Λβ, Ab ταῖς ΓΣ, Γσ ἐξισωθήσονται, ὡσαύτως δὲ ϗ αἱ λβ, ΛΒ. Ἐὰν ἄρα ἀντὶ μὲν Ἑςιῶν τὰ σημεῖα Φ, φ ληφθῶσιν, ἀντὶ δὲ πρώτȣ Ἄξονος ἡ Λλ εὐθεῖα, καταγραφῆναι δύνανται δἰ αὐτῶν αἱ ἀντικείμεναι Ὑπερβολαὶ δΛΔ, Νλν, ὧν Ἄξων μὲν δεύτερος ὁ Σσ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ αὐταὶ ἔσονται Ββ, βb. Αὗται δὴ αἱ δύω Ὑπερβολαὶ κατὰ ΣΥΖΥΓΙΆΝ ἈΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑΙ ταῖς ΜΣμ, Οσο, αἱ δ' αὖ ΜΣμ, Οσο, ὡσάυτως ταύταις κατὰ Συζυγίαν Ἀντικείμεναι ἀκούουσιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Θ΄.

§. 108.

Ἐπίδηλον ἄρα πάσας τὰς Ἐξισώσεις, τȣ́ς τε δἰ αὐτῶν τύπȣς, ϗ τὰ ἰδιώματα τῶν Ὑπερβολῶν ΜΣμ, Οσο ἐπανήκειν ἔτι ϗ ταῖς κατὰ Συζυγίαν αὐταῖς Ἀντικειμέναις. Ἀνάγκη μόνον κατὰ τὸ δέον τὰς παρονομασίας μεταλλάττειν, οἷον τὴν Λλ πρῶτον Ἄξονα καλεῖν, τὴν Σσ δεύτερον, κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι΄.

§. 109.

Ὡσάντως δῆλον τȣ̀ς ὀκτὼ τῶν τεσσάρων συζυγῶν Ὑπερβολῶν κλῶνας ἐκεῖσε συνέρχεσθαι ἀλλήλοις ἀδιατμήτως ἀνὰ δύω, ἔνθ᾽ ἂν αἱ Ἀσύμπτωτοι αὐτῶν ἐπιψαύωσιν (ὅ ἐςιν ἐν διαςήματι ἀπείρῳ) καὶ ὅτως ἀπογεννᾶσθαι σχῆμα περατόμενον ἐπὶ τοῖς τέσσαρσι τῆς Συνδρομῆς σημείοις, τοῖς ἀπὸ τῦ Κέντρυ ἀπείρως διαςηκόσιν. Αὐτὸ δὴ τῦτο τὸ σχῆμα θεωρηθῆναι ἔχει ὡς Πολύγωνον κανονικὸν συγκροτύμενον ὑπὸ Γωνιῶν εἰσεχυσῶν μὲν, εἴτ᾽ ὖν κυρτῶν ἀπείρων, καὶ ἀπειράκις ἐλάχιςα ὑπερεχυσῶν (§. 135. Γεωμετρ.) Ὀρθῶν δυεῖν, ἐξεχυσῶν δὲ, ἀπειράκις Ὀξειῶν τεσσάρων. Ὥςε τὸ ὑπὸ τῶν τεσσάρων Ὑπερβολῶν περιεχόμενον χωρίον θεωρεῖσθαι δύναται, καθάπερ τὸ τῆς Ἐλλείψεως ἐμβαδόν. Οὐκῦν ἐν τοῖς ἐφεξῆς θεωρηθήσεται, ὡς εἴπερ ὑπὸ μιᾶς ἐπερατῦτο Καμπύλης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ. Β'.

Περὶ τῶν κατὰ τὰς Κωνικὰς Τομὰς, ὅσα ἐκ τῶν κατ' αὐτὰς Διαμέτρων πηγάζει, Ἰδιωμάτων.

§. 110.

ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ τῆς Κωνικῆς Τομῆς καλεῖται Εὐθεῖα ἡτισοῦν διὰ τοῦ Κέντρου διήκουσα, καὶ πρὸς τῇ Καμπύλῃ περατουμένη (§. 20.)· οὐκοῦν εὐμαρῶς δείκνυται (§. 11, 37, 38, καὶ κατωτέρω §. 115.) ἁπάσης Διαμέτρου κοινὸν εἶναι τὸ διχοτομεῖν ἑκάστην ἑαυτῆς διπλῆν Τεταγμένην.

§. 111.

Τὸ τῆς Διαμέτρου μέγεθος περιορίζεται ὑπὸ σημείων δυοῖν, καθ' ἃ ἑκατέρωσε τῇ Τομῇ προσαντᾷ, ἅτινα ΑΡΧΑΙ καλοῦνται τῆς διαμέτρου. Οὕτως ΟΜ, ΝΔ Διάμετροί εἰσι δύω, περιοριζόμεναι ὑπὸ τῶν σημείων Ο, Μ, καὶ Ν, Δ, ἅπερ εἰσὶν αἱ αὐτῶν Ἀρχαί. Σχ. 14. 16.

§. 112.

Ἐπεὶ δὲ τὸ τῆς Παραβολῆς Κέντρον ἀπείρως ἐπινοεῖται τῆς ἐν αὐτῇ Κορυφῆς ἀφεστηκὸς, ἐκ τούτου ἄρα ϰ̀ ἡ ἐκεῖθεν ἔςγε τὴν Καμπύλην ἤκȣσα Εὐθεῖα παράλληλός ἐςι τῷ Ἄξονι. Οὐκȣ̃ν ἡ τῆς Παραβολῆς Διάμετρος ἀπέραντός ἐςιν εὐθεῖα, ἀφ᾽ ἑτινοσȣ̃ν τῶν ἐπ᾽ αὐτῆς σημείων, ὃ ἂν ὡς Ἀρχὴ αὐτῆς ἐκλαμβάνοιτο, παραλλήλως ἀγομένη τῷ Ἄξονι. Τοιάδε ἐςιν ἡ Διάμετρος Μζ.

§. 113.

Σχ. 13. Διάμετρος ΣΥΖΥΓΗΣ ἑτέρᾳ Διαμέτρῳ καλεῖται ἡ παράλληλος ταῖς ἐπ᾽ αὐτῆς τῆς ἑτέρας Τεταγμέναις, ἢ τῇ Ἐφαπτομένῃ τῇ ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτῆς τῆς ἑτέρας ἀγομένῃ· οἷον ΝΔ Διάμετρός ἐςι
Σχ. 14. 16. Συζυγὴς τῇ Διαμέτρῳ ΜΟ, εἴγε ΝΔ παράλληλός ἐςι τῇ διὰ τȣ̃ Μ διϊȣ́σῃ Ἐφαπτομένῃ, ϰ̀ τἀνάπαλιν, ἡ ΜΟ ἔςι Διάμετρος Συζυγὴς τῇ Διαμέτρῳ ΝΔ.

§. 114.

Ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν Παραβολὴν ȣ̓δεμία τις Εὐθεῖα πεπερασμένη ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ ἀχθῆναι δύναται, ἐκ τȣ́τȣ δὴ ἕπεται μὴ ἐνυπάρχειν αὐτῇ Συζυγεῖς Διαμέτρȣς.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Α΄.

§. 115.

Διάμετρος ἡτισοῦν ἡ ΝΔ ἐν τῷ Κέντρῳ Γ δίχα τέμνεται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἤχθω διὰ τοῦ Ν ἐπὶ θατέρου Ἄξονος ἡ Τεταγμένη ΝΞ, καὶ γεγονέτω ΓΕ = ΓΞ, καὶ ἐστάθω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ Ἄξονος ἡ ΕΔ, ἥτις δὴ συμβαλεῖ τῇ Διαμέτρῳ ΝΔ κατὰ τὸ σημεῖον Δ, ὃ ἐστι κοινὸν καὶ πρὸς τὴν τομήν. Τὰ γάρ τοι τρίγωνα ΓΞΝ, ΓΕΔ ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, ἐκ κατασκευῆς. Οὐκοῦν ΓΔ = ΓΝ, καὶ ΔΕ = ΝΞ. Ἀλλ' αἱ ἰσοδιεστῶσαι τοῦ κέντρου Τεταγμέναι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, (§. 31.) Ἐπεὶ ἄρα ΝΞ ἐστι Τεταγμένη, ἔσεται καὶ ἡ αὐτῇ ἴση ΔΕ Τεταγμένη· τὸ ἄρα Δ σημεῖον ἐστιν ἐπὶ τῆς τομῆς· ἡ δὲ ΝΔ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Γ. Σχ. 14. 16.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄.

§. 116.

Ἐὰν ἀπὸ τῶν ἄκρων Ν, Μ δυεῖν συζυγῶν Διαμέτρων ἀχθῶσιν αἱ ΜΠ, ΝΞ τεταγμένως ἐπὶ τοῦ πρώτου Ἄξονος Σσ, ἔσται τὸ τετράγωνον $(\text{ΓΞ})^2$ τὸ ἀπὸ τῆς Ἀποτετμημένης τῆς μεταξὺ τοῦ Κέντρου Γ, καὶ τῆς ἑτέρας Τεταγμένης, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν Ἀποτετμημένων τῆς ἑτέρας Τεταγμένης, εἴτ᾽ οὖν $=$ ΣΠ . Σσ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 16. *Τηρουμένων τῶν αὐτῶν ὀνομάτων τοῖς ἐν τῷ* ΙΑ *προβλήματι, εἴτ᾽ οὖν* $\text{ΓΠ} = \chi$, *καὶ* $\text{ΣΠ} = \alpha - \chi$, *καὶ* $\sigma\text{Π} = \alpha + \chi$, *καὶ ἔτι τῆς* ΓΞ *ῥηθείσης ἰδίῳ ὀνόματι* $= \kappa$, *ἐξ οὗ καὶ* $\text{ΕΞ} = \alpha - \kappa$, *καὶ* $\sigma\text{Ξ} = \alpha + \kappa$, *ἔσται ἐν τῇ ἐλλείψει* (§. 61.) $\sigma\text{Π}.\text{ΠΣ} : \sigma\text{Ξ}.\text{ΞΣ} :: \text{ΠΜ}^2 : \text{ΝΞ}^2$, *καὶ ἀναλυτικοῖς ὅροις*, $\alpha\alpha - \chi\chi : \alpha\alpha - \kappa\kappa :: \text{ΠΜ}^2 : \text{ΝΞ}^2$. *Ἔστι δὲ παρὰ ταῦτα (διὰ τὴν τῶν τριγώνων* ΤΠΜ, ΓΝΞ *ὁμοιότητα)* $\text{ΤΠ}^2 : \text{ΓΞ}^2 :: \text{ΠΜ}^2$

ΝΞ^2, *εἴτ᾽ οὖν* (§. 98) $\left(\frac{\alpha\alpha - \chi\chi}{\chi}\right)^2 : \kappa\kappa :: \text{ΠΜ}^2 :$

$N\Xi^2$ · ἄρα $aa - \chi\chi : aa - \kappa\kappa :: \dfrac{a^4 - 2a^2\chi^2 + \chi^4}{\chi\chi}$: $\kappa\kappa$, ὅθεν ἡ Ἐξίσωσις $aa\ \kappa\kappa - \kappa\kappa\ \chi\chi = \dfrac{(aa - \kappa\kappa).(a^4 - 2a^2\chi^2 + \chi^4)}{\chi\chi}$, ϗ: $a^2\kappa^2\chi^2 - \kappa^2\chi^4 = a^6 - 2a^4\chi^2 + a^2\chi^4 + \kappa^2\chi^4 - 2a^2\kappa^2\chi^2 + \kappa^2\chi^4 = a^6 - 2a^4\chi\chi + a^2\chi^4$, ὅθεν (ἀναγωγῇ) $a^4\kappa\kappa - a^2\kappa^2\chi^2 = a^6 - 2a^4\chi\chi + a^2\chi^4$, ϗ (διὰ aa διαιρέσει) $aa\ \kappa\kappa - \kappa\kappa\ \chi\chi = a^4 - 2aa\ \chi\chi + \chi^4$, ὅ ἐςιν $(aa - \chi\chi)\ \kappa\kappa = (aa - \chi\chi).(aa - \chi\chi)$. ἐκἕν τέως: $\kappa\kappa = aa - \chi\chi$· σαφὲς ἄρα ὅτι $\Gamma\Xi^2 = \sigma\Pi . \Pi\Sigma$.

Ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ἔςαι $\sigma\Pi . \Pi\Sigma : \Gamma\Xi^2 + \Gamma\Sigma^2 :: \Pi M^2 : N\Xi^2$. Ἡ γάρτοι Ὑπερβολὴ Νλν (ὅ ἐςι τὸ τέταρτον τῆς τῦ ὁλικῦ σχήματος περιμέτρυ. §. 109.) ἡ τῇ ΜΣμ Συνεζευγμένη, ἡ ἐπανήκυσι πάντα τὰ κἀκείνῃ προσόντα ἰδιώματα (§. 108.) ἔχει μείζονα μὲν (πρῶτον) Ἄξονα τὴν Λλ; ἐλάσσω δὲ (δεύτερον) τὴν Σσ. Ταῦτ' ἄρα ἡ ἐν τῷ §. 94. ἔκφρασις τῆς ἀναλογίας ἐφαρμοσθεῖσα τῇ Νλν Ὑπερβολῇ γενήσεται ὕτω „Τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης ἐ„πὶ τῦ δευτέρυ Ἄξονος τετράγωνον ($N\Xi^2$) πρὸς τὸ „ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῦτε ἀπὸ τῆς αὐτῆ „συςοιχύσης Ἀποτετμημένης ἀπὸ τῦ κέντρυ ($\Gamma\Xi^2 +$) Σχ. 14.

„ϗ τῦ ἀπὸ τῦ Ἡμιδευτέρυ Ἄξονος ($\Gamma\Sigma^2$) λόγον ἔ-„χει, ὃν τὸ ἀπὸ τῦ πρώτυ Ἡμιάξονος Τετράγωνον „($\Gamma\Lambda^2$) πρὸς τὸ ἀπὸ τῦ ἡμιδευτέρυ ($\Gamma\Sigma^2$)" ὅ ἐςι $\Xi N^2 : \Gamma\Xi^2 + \Gamma\Sigma^2 :: \Gamma\Lambda^2 : \Gamma\Sigma^2$.

Ἀλλ' ἐν τῇ ΜΣμ Ὑπερβολῇ, ἧς πρῶτος μὲν Ἄξων ἡ Σσ, δεύτερος δὲ ἡ ΛΛ, ἐςι (§. 61.) τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης ἐπὶ τῦ πρώτυ Ἄξονος Τετράγωνον (ΠM^2) πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν συςοιχυσῶν Ἀποτετμημένων γινόμενον ($\sigma\Pi . \Pi\Sigma$) ὡς τὸ ἀπὸ τῦ δευτέρυ Ἡμιάξονος Τετράγωνον ($\Gamma\Lambda^2$) πρὸς τὸ ἀπὸ τῦ πρώτυ Ἡμιάξονος ($\Gamma\Sigma^2$), εἶτ' ὖν $\Pi M^2 : \sigma\Pi . \Pi\Sigma :: \Gamma\Lambda^2 : \Gamma\Sigma^2$. ἐκῦν $\Xi N^2 : \Gamma\Xi^2 + \Gamma\Sigma^2 :: \Pi M^2 : \sigma\Pi . \Pi\Sigma$. ἄρα ϗ $\sigma\Pi . \Pi\Sigma : \Gamma\Xi^2 + \Gamma\Sigma^2 :: \Pi M^2\ \Xi N^2$· ϗ ἐν ὅροις ἀναλυτικοῖς·—$\alpha\alpha + \chi\chi : \kappa\kappa + \alpha\alpha :: \Pi M^2 : \Xi N^2$. Εἰσὶ δὲ παρὰ ταῦτα τὰ τρίγωνα ΜΤΠ, ΞΓΝ ἀλλήλοις ὅμοια, εἴγε ὔσης (ἐξ ὑποθέσεως) τῆς ΜΘ παραλλήλυ τῇ ΔΓΝ ἡ ἐντὸς ὑπὸ ΓΤΘ ἰσῦται τῇ ἐκτὸς ὑπὸ ΞΓΝ· ἐκῦν ϗ ὑπὸ ΞΓΝ $=$ ΠΤΜ. Διὰ ταῦτα τοίνυν ἐςι $T\Pi : \Gamma\Xi :: \Pi M : N\Xi$, ϗ $T\Pi^2 : \Gamma\Xi^2 :: \Pi M^2 : N\Xi^2$· ϗ ἐν ἀναλυτικοῖς ὅροις (§. 98.)

$$\left(-\frac{\alpha\alpha+\chi\chi}{\chi}\right)^2 : \kappa\kappa :: \Pi M^2 : N\Xi^2 \cdot \text{ἄρα ϗ} -\alpha\alpha +$$

$$\chi\chi : \kappa\kappa + \alpha\alpha :: \frac{\alpha^4 - 2\alpha^2\chi^2 + \chi^4}{\chi\chi} : \kappa\kappa, \text{ ὅθεν ἡ Ε'-}$$

ξίσωσις $-\alpha^2\kappa^2+\kappa^2\chi^2=\frac{\alpha^6-2\alpha^4\chi^2+\alpha^2\chi^4}{}$ $+\frac{\alpha^4\kappa^2-2\alpha^2\kappa^2\chi^2+\kappa^2\chi^4}{\chi\chi}$, ϗ $-\alpha^2\kappa^2\chi^2+\kappa^2\chi^4=\alpha^6-2\alpha^4\chi^2+\alpha^2\chi^4+\alpha^4\kappa^2-2\alpha^2\kappa^2\chi^2+\kappa^2\chi^4$, καὶ $-\alpha^2\kappa^2\chi^2+\kappa^2\chi^4-\alpha^4\kappa^2+2\alpha\ \kappa^2\chi^2-\kappa^2\chi^4=\alpha^6-2\alpha^4\chi^2+\alpha^2\chi^4$, ϗ (ἀναγωγῇ) $\alpha^2\kappa^2\chi^2-\alpha^4\kappa^2=\alpha^6-2\alpha^4\chi^2+\alpha^2\chi^4$, ϗ (διαιρέσει διὰ $\alpha\alpha$) $\kappa\kappa\ \chi\chi-\alpha\alpha\ \kappa\kappa=\alpha^4-2\alpha\alpha\chi\chi+\chi^4$· οὐκοῦν $(-\alpha\alpha+\chi^2)\ \kappa^2=(-\alpha\alpha+\chi\chi)\cdot(-\alpha\alpha+\chi\chi)$, ϗ τέως $\kappa\kappa=-\alpha\alpha+\chi\chi$. (ἄρα (μεταθέσει) $\kappa\kappa+\alpha\alpha=\chi\chi=\Gamma\Pi^2$), εἴτ' οὖν $\Gamma\Xi^2=\sigma\Pi.\Pi\Sigma$. Τοῦτο δὴ τὸ κατὰ τὴν Ἔλλειψιν, ϗ Ὑπερβολὴν ἰδίωμα ἐν ἑνὸς σχήματος τύπῳ γραφήσεται οὕτω· $\kappa\kappa=\pm\alpha\alpha\mp\chi\chi$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 117.

Ἐπειδὴ ἐν τῇ Ἐλλείψει ἐστι $\kappa\kappa=\alpha\alpha-\chi\chi$, ἔσται ἀεὶ $\Gamma\Xi^2$ (ἢ ΓE^2) $=(\alpha+\chi).(\alpha-\chi)=\sigma\Pi.\Pi\Sigma$, ϗ $\Gamma\Pi^2=\chi\chi=\alpha\alpha-\kappa\kappa=(\alpha+\kappa).(\alpha-\kappa)=\sigma\Xi.\Xi\Sigma$. Κατὰ δὲ τὴν Ὑπερβολὴν, ἐπεὶ $\kappa\kappa=-\alpha\alpha+\chi\chi$, ἔσται $\Gamma\Xi^2=\kappa\kappa=(\alpha+\chi)\cdot(-\alpha+\chi)=\sigma\Pi.\Pi\Sigma$. ἀλλὰ δὴ $\Gamma\Pi^2=\alpha\alpha+\kappa\kappa=\Gamma\Sigma^2+$

ΓΞ², ἀλλ' ἐκ $=$ σΞ.ΞΣ. Τὸ ἄρα θεώρημα (§. 116.) γενικὸν μέν ἐστιν ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως, ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς ἐν μέρει, καὶ μόνον ἐπανῆκον τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΞ Ἀποτεμνομένης ὑπὸ τῆς Τεταγμένης ΝΞ τῆς μεταξὺ τοῦ Κέντρου Γ, καὶ τῆς ἑτέρας Κορυφῆς σ πιπτούσης, ἢ ἄλλως, μεταξὺ τῶν κορυφῶν σ, Σ, οὐ μὴν δὲ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΠ ἀποτεμνομένης ὑπὸ τῆς ΜΠ Τεταγμένης τῆς μεταξὺ τῆς Κορυφῆς Σ, καὶ τῆς Ἑστίας Ζ, ἤ, τῆς ἐκτὸς τῶν δύω κορυφῶν σ, Σ, κειμένης. Ἀλλὰ γὰρ κατὰ τὴν Ἔλλειψιν πᾶσαι αἱ Τεταγμέναι μεταξὺ τοῦ Κέντρου καὶ τῆς ἑτέρας τῶν Κορυφῶν κεῖνται. Διὰ ταῦτ' ἄρα καὶ ἐν γένει τὸ θεώρημα ἐπ' αὐτῆς ἀληθές.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 118.

Ἔστιν ἐν τῇ Ἐλλείψει (§. 61.) $\alpha\alpha : \beta\beta :: \sigma\Xi . \Xi\Sigma : \mathrm{N}\Xi^2$· ἀλλὰ $\sigma\Xi . \Xi\Sigma = \Gamma\Pi^2 = \chi\chi$ (ἐκ τοῦ θεωρήματος,) ἄρα $\alpha\alpha : \beta\beta :: \chi\chi : \mathrm{N}\Xi^2 = \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἔστι δὲ καὶ (§. 85.) $yy = \Pi\mathrm{M}^2 = \beta\beta - \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$. Οὐκοῦν ἐν τῷ ὀρθογονίῳ τριγώνῳ ΓΠΜ, ἔσται

$\Gamma M^2 = \chi\chi + \beta\beta - \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$. ἐν δὲ τῷ ΓΞΝ, ἐστι $\Gamma N^2 = \alpha\alpha - \chi\chi\ (= \kappa\kappa) + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$. Ἄρα $\Gamma M^2 + \Gamma N^2 = \chi\chi + \beta\beta - \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha} + \alpha\alpha - \chi\chi + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha} = \beta\beta + \alpha\alpha$, ϗ, τετραπλασιαζομένων τῶν ὅρων, $4\Gamma M^2 + 4\Gamma N^2 = 4\beta\beta + 4\alpha\alpha = OM^2 + N\Delta^2 = \lambda\Lambda^2 + \sigma\Sigma^2$, ὅ ἐστι „Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ δυεῖν „ὡντινωνῦν Συζυγῶν Διαμέτρων τετραγώνων ἴσεται „τῷ τῶν ἀφ' ἑκατέρε τῶν Ἀξόνων ἀθροίσματι, ϗ „ἐκ τῦ ἀκολύθε, τῷ τῶν ἀπὸ δυεῖν ἑτέρων ὡντινω„νῦν Συζυγῶν Διαμέτρων, εἴτ' ἦν ἐν τῇ Ἐλλείψει „τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ δυεῖν Συζυγῶν Διαμέτρων „τετραγώνων ποσόν ἐστιν εὐσαθές."

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 119.

Ἐκ τῦ αὐτῦ §. 61. δῆλον, ὅτι κατὰ τὴν Ὑπερβολὴν ἐστι $\Pi M^2 : \sigma\Pi \,.\, \Pi\Sigma :: \beta\beta : \alpha\alpha$, ϗ δὴ ϗ $\sigma\Pi \,.\, \Pi\Sigma : \Pi M^2 :: \alpha\alpha : \beta\beta$· ἀλλ' (ἐκ τῆς τῦ θεωρήματος δείξεως) ἐστι $\sigma\Pi \,.\, \Pi\Sigma : \Pi M^2 :: \Gamma\Sigma^2 + \Gamma\Xi^2 : N\Xi^2$. Οὐκῦν $\alpha\alpha : \beta\beta :: \Gamma\Sigma^2 + \Gamma\Xi^2 : N\Xi^2$· ἀλλὰ (Πορίσμ. Α'.) $\Gamma\Sigma^2 + \Gamma\Xi^2 = \Gamma\Pi^2 = \chi\chi$· ὅκῦν $\alpha\alpha$:

$\beta\beta : : \chi\chi : \mathrm{N\Xi}^2 = \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$. ἔςι δὲ $\Gamma\mathrm{M}^2 = \Gamma\Pi^2 + \Pi\mathrm{M}^2 = \chi\chi - \beta\beta + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$ (§. 85.) ϗ $\Gamma\mathrm{N}^2 = \Gamma\Xi^2 + \mathrm{N}\Xi^2 = -\alpha\alpha + \chi\chi + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$. ἄρα $\Gamma\mathrm{N}^2 - \Gamma\mathrm{M}^2 = -\alpha\alpha + \chi\chi + \frac{\beta\beta\gamma\chi}{\alpha\alpha} - \chi\chi + \beta\beta - \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha} = \beta\beta - \alpha\alpha$, εἴτ' ὖν ,,ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ,,δυεῖν ὡντινωνῦν συζυγῶν Διαμέτρων τετραγώνων ,,ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς ἐςι ποσὸν εὐςαθὲς τῇ τῶν ἀπὸ ,,τῶν ἀξόνων τετραγώνων διαφορᾷ ἰσόμενον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.

§. 120.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐντὸς τῆς Τομῆς τεταγμένως ἐφ' ἧςτινοσῦν Διαμέτρυ ΜΟ, ἀγομένης ΙΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν συςοιχύσῶν Ἀποτετμημένων ΜΗ, ΗΟ γινομενον λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς Συζυγῦς Ἡμιδιαμέτρυ τετράγωνον

ΓN^2 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἑτέρας Ἡμιδιαμέτρȣ, ἐφ' ἧς ἡ ΙΗ τέτακται, τετράγωνον ΓM^2, ὅ ἐςι $HI^2 : MH . HO :: \Gamma N^2 : \Gamma M^2$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἤχθω τεταγμένως ἐπὶ τȣ̃ Ἄξονος $\Sigma\sigma$ ἡ $I\Theta$, ϗ ἀπὸ τȣ̃ Η ἐςάθωσαν Κάθετοι αἱ ΗΡ, ΗΚ, ϗ εἰρήθωσαν ἡ μὲν $K\Theta = HP = \rho$, ἡ δὲ $\Gamma K = \tau$, ἡ δὲ $\Gamma M = \delta$. Ἐν ȣ̃ν τῇ Ἐλλείψει ἔςαι $\Gamma\Theta = \rho - \tau$: ȣ̓κȣ̃ν $\sigma\Theta = \alpha - \rho + \tau$, ϗ $\Sigma\Theta = \alpha + \rho - \tau$, ϗ $\sigma\Theta . \Theta\Sigma = \alpha\alpha - \rho\rho + 2\rho\tau - \tau\tau$. Παρὰ δὲ ταῦτα, ἐκ τῆς τῶν τριγώνων ΓΠΜ, ΓΗΚ ὁμοιότητος, δυὰς πηγάζει ἀναλογιῶν, ὧν ἡ μὲν ἐςι $\Gamma\Pi : \Gamma M :: \Gamma K : \Gamma H$, εἴτ' ȣ̃ν $\chi : \delta :: \tau : \Gamma H = \frac{\delta\tau}{\chi}$. ἀλλὰ $MH = \Gamma M - \Gamma H$. Ἄρα $MH = \delta - \frac{\delta\tau}{\chi}$, ϗ $HO = \delta + \frac{\delta\tau}{\chi}$, ϗ $MH . HO = \delta\delta - \frac{\delta\delta\tau\tau}{\chi\chi}$. Ἡ δ' ἑτέρα ἀναλογία ἐςι $\Gamma\Pi : \Pi M :: \Gamma K : KH$ (ἢ ΘΡ) τȣτέςι $\chi : y :: \tau : \Theta P = \frac{y\tau}{\chi}$. Ἐπὶ δὲ τȣ́τοις ϗ τῶν τριγώνων ΤΠΜ, ΗΙΡ ὁμοίων ἀλλήλοις ὄντων, ἐςι $T\Pi : \Pi M$:

: ΗΡ : ΡΙ, εἴτ' οὖν (§. 98.) $\frac{\alpha\alpha - \chi\chi}{\chi} : y :: \rho : \text{PI} = \frac{y\rho\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi}$. Οὐκοῦν $\text{I}\Theta^2 = \text{IP} + \text{P}\Theta^2 = \frac{\rho^2 \chi^2 y^2}{(\alpha\alpha - \chi\chi)^2} + \frac{2\rho\tau yy}{\alpha\alpha - \chi\chi} + \frac{\tau\tau yy}{\chi\chi}$. Ἔστι δὲ παρὰ ταῦτα (§. 61.) $\sigma\Pi . \Pi\Sigma : \sigma\Theta . \Theta\Sigma :: \Pi\text{M}^2 : \Theta\text{I}^2$, τουτέστιν $\alpha\alpha - \chi\chi : \alpha\alpha - \rho\rho + 2\rho\tau - \tau\tau :: yy : \Theta\text{I}^2 = \frac{\alpha\alpha yy - \rho^2 y^2 + 2\rho\tau yy - \tau^2 y^2}{\alpha\alpha - \chi\chi}$. Τοιγαροῦν παραβληθεισῶν τῶν δυεῖν τοῦ ΘI^2 Ἀξιῶν, προκύψει Ἐξίσωσις ἡ $\frac{\alpha^2 y^2 - \rho^2 y^2 + 2\rho\tau y^2 - \tau^2 y^2}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \frac{\rho\rho\chi\chi yy}{(\alpha\alpha - \chi\chi)^2} + \frac{2\rho\tau yy}{\alpha\alpha - \chi\chi} + \frac{\tau\tau yy}{\chi\chi}$· καὶ μεταθέσει $\frac{\alpha\alpha yy - \rho\rho yy - \tau\tau yy}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \frac{\rho\rho\chi\chi yy}{(\alpha\alpha - \chi\chi)^2} + \frac{\tau\tau yy}{\chi\chi}$, καὶ $\frac{\alpha\alpha - \rho\rho - \tau\tau}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \frac{\rho\rho\chi\chi}{(\alpha\alpha - \chi\chi)^2} + \frac{\tau\tau}{\chi\chi}$; καὶ ἔτι $\frac{(\alpha\alpha - \chi\chi)\,\alpha\alpha - \rho\rho - \tau\tau}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \frac{(\alpha\alpha - \chi\chi)\,\rho\rho\chi\chi}{(\alpha\alpha - \chi\chi) . (\alpha\alpha - \chi\chi)} + \frac{(\alpha\alpha - \chi\chi)\,\tau\tau}{\chi\chi}$. Ἐξ οὗ δὴ καὶ $\alpha\alpha - \rho\rho - \tau\tau =$

$\frac{\varrho\varrho\chi\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi} + \frac{\alpha\alpha\tau\tau - \tau\tau\chi\chi}{\chi\chi}$, ϗ $\alpha\alpha - \varrho\varrho = \frac{\varrho\varrho\chi\chi}{\alpha\alpha - \chi^2} + \frac{\alpha\alpha\tau\tau}{\chi\chi}$, ϗ $(\alpha\alpha - \chi\chi)(\alpha\alpha - \varrho\varrho) = \varrho\varrho\chi\chi + \frac{(\alpha\alpha - \chi\chi)\alpha\alpha\tau\tau}{\chi\chi}$, ὅ ἐςιν $\alpha^4 - \alpha^2\varrho^2 - \alpha\alpha\chi\chi + \varrho\varrho\chi\chi = \varrho\varrho\chi\chi + \frac{\alpha^4\tau\tau}{\chi\chi} - \alpha\alpha\tau\tau$, ϗ $\alpha^4 - \alpha\alpha\varrho\varrho - \alpha\alpha\chi\chi = \frac{\alpha^4\tau\tau}{\chi\chi} - \alpha\alpha\tau\tau$, ϗ $\alpha\alpha - \varrho\varrho - \chi\chi = \frac{\alpha\alpha\tau\tau}{\chi\chi} - \tau\tau$, ϗ τέως $\varrho\varrho = \alpha\alpha - \chi\chi - \frac{\alpha\alpha\tau\tau}{\chi\chi} + \tau\tau = \mathrm{HP}^2$. Τȣ́τȣ τεθέντος, ἐπειδὴ $\delta\delta\left(\alpha\alpha - \chi\chi + \tau\tau - \frac{\alpha\alpha\tau\tau}{\chi\chi}\right) = (\alpha\alpha - \chi\chi)\left(\delta\delta - \frac{\delta\delta\tau^2}{\chi\chi}\right)$, ὡς ἐκ τῆς τȣ͂ πολλαπλασιασμȣ͂ ἐκτελέσεως ἐπίδηλον, ἐκ τȣ́τȣ ἄρα ἔςαι $\delta\delta - \frac{\delta\delta\tau\tau}{\chi\chi} : \delta\delta :: \alpha\alpha - \chi\chi + \tau\tau - \frac{\alpha\alpha\tau\tau}{\chi\chi} : \alpha\alpha - \chi\chi$, ὅπερ ἐςιν (ἐν γραμμαῖς) $\mathrm{MH.HO : \Gamma M^2 :: HP^2 : \Gamma\Xi^2}$ §. 116.), ϗ ἔτι τῶν τριγώνων ΗΙΡ, ΓΝΞ ὁμοίων ἀλλήλοις ὄντων ἐςὶ $\mathrm{HP^2 : \Gamma\Xi^2 :: IH^2 : \Gamma N^2}$. Οὐκȣ͂ν $\mathrm{MH.HO : \Gamma M^2 :: IH^2 : \Gamma N^2}$, ϗ $\mathrm{IH^2 : MH.HO :: \Gamma N^2 : \Gamma M^2}$

Κατὰ δὲ τὴν Ὑπερβολὴν τῶν αὐτῶν τηρȣμένιων ὀνομάτων, ἔςαι $\Gamma\Theta = \rho + \tau$. Οὐκȣ̃ν $\sigma\Theta = \alpha + \rho + \tau$, ϗ $\Sigma\Theta = -\alpha + \rho + \tau$, ϗ $\sigma\Theta . \Theta\Sigma = -\alpha\alpha + \rho\rho + 2\rho\tau + \tau\tau$. Τῶν δὲ τριγώνων ΓΠΜ, ΓΗΚ ὁμοίων ἀλλήλοις ὄντων, ἔςι πρῶτον $\Gamma\Pi : \Gamma M :: \Gamma K : \Gamma H$, εἴτ' ȣ̃ν $\chi : \delta :: \tau : \Gamma H = \frac{\delta\tau}{\chi}$.

Ἀλλὰ $MH = \Gamma H - \Gamma M = \frac{\delta\tau}{\chi} - \delta$, καὶ $HO = \frac{\delta\tau}{\chi} + \delta$. Οὐκȣ̃ν $MH . HO = \frac{\delta\delta\ \tau\tau}{\chi\chi} - \delta\delta$. Ἔςι δὲ δεύτερον $\Gamma\Pi : \Pi M :: \Gamma K : KH$ (ἢ ΘΡ) εἴτ' ȣ̃ν $\chi : y :: \tau : KH = \frac{y\tau}{\chi}$. Ἔςι δ' ἐπὶ τȣ́τοις (ἐκ τῆς τῶν τριγώνων ΤΠΜ, ΗΙΡ ὁμοιότητος) $T\Pi : \Pi M :: HP : PI$, εἴτ' ȣ̃ν (§. 98.) $\frac{\chi\chi - \alpha\alpha}{\chi} : y :: \rho : PI = \frac{\rho y \chi}{\chi\chi - \alpha\alpha}$. Ἐν τεῦθεν ἄρα $I\Theta^2 = (IP + P\Theta)^2 = \frac{\rho^2\chi^2 y^2}{(\chi\chi - \alpha\alpha)^2} + \frac{2\rho\tau yy}{\chi\chi - \alpha\alpha} + \frac{\tau\tau yy}{\chi\chi}$. Ἔςι δὲ παρὰ ταῦτα (§. 62.) $\sigma\Pi . \Pi\Sigma : \sigma\Theta . \Theta\Sigma :: M\Pi^2 : \Theta I^2$, τȣτέςιν (ἐν ἀναλυτικοῖς ὅροις) $\chi\chi - \alpha\alpha : 2\rho\tau - \alpha\alpha +$

$$\varrho\varrho + \tau\tau :: \gamma\gamma : \Theta\mathrm{I}^2 = \frac{2\varrho\tau\gamma\gamma - \alpha\alpha\gamma\gamma + \varrho\varrho\gamma\gamma + \tau\tau\gamma\gamma}{\chi\chi - \alpha\alpha}.$$

Παραβληθεισῶν ἒν ἀλλήλαις τῶν δυεῖν τῆ $\Theta\mathrm{I}^2$ Α᾿ξιῶν, πρόεισιν Ε᾿ξίσωσις ἡ $\frac{2\varrho\tau\gamma\gamma - \alpha\alpha\gamma\gamma + \varrho\varrho\gamma\gamma + \tau\tau\gamma\gamma}{\chi\chi - \alpha\alpha}$

$= \frac{\varrho\varrho\chi\chi\gamma\gamma}{(\chi\chi - \alpha\alpha)^2} + \frac{2\varrho\tau\gamma\gamma}{\chi\chi - \alpha\alpha} + \frac{\tau\tau\gamma\gamma}{\chi\chi}$. Τῶν ἒν λοιπῶν, ὡς ἀνωτέρω, ἐκπερανθεισῶν πράξεων, εὑρίσκεται $\varrho\varrho = \mathrm{HP}^2 = \alpha\alpha - \chi\chi + \tau\tau - \frac{\alpha\alpha\tau\tau}{\chi\chi}$. Ε᾿φόδῳ δὲ δείξεως παραπλησίᾳ τῇ ἐπὶ τῆς Ε᾿λλείψεως χρησαμένοις συνάγεται εἶναι $\mathrm{IH}^2 : \mathrm{MH} . \mathrm{HO} :: \Gamma\mathrm{N}^2 : \Gamma\mathrm{M}^2$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 121.

Η῾ τῆς ἀναλογίας τῆδε τῆ θεωρήματος ἔκφρασις καθομοιῆται τῇ περὶ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐπὶ τῆ πρώτε Α῎ξονος (§. 61.), ἢ ἀπὸ τῶν ἐπὶ τῆ δευτέρε Α῎ξονος (§. 87.)

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

§. 122.

Ε'πειδὴ κατὰ τὴν Ε'λλειψιν πᾶσαι αἱ ἐφ' ἡςτινοσῦν Διαμέτρυ Τεταγμέναι ἐντὸς τῦ σχήματος κεῖνται, ἀεὶ ἀληθεύσει τὸ θεώρημα, ὁποιαιδήποτ' ἂν ὦσιν αἱ Συζυγεῖς Διάμετροι. Ε'πίδηλον δ' ἐπὶ τύτοις ἐν γένει τὰ περὶ τὺς Α'ξονας ἁπασῶν τῶν Κωνικῶν Τομῶν ἰδιώματα, οἷς μέντοιγε μηδὲν ἂν δέοι τῆς τῶν Ε'ςιῶν θεωρίας, ἔχειν ἂν προσεφαρμόζεσθαι ϗ πάσαις ταῖς Συζυγέσι τῶν Διαμετρῶν; τυτωί μόνῳ διαλλάττοντα, καθότι αἱ μὲν ἐπὶ τῶν Α'ξόνων Τεταγμέναι πρὸς ὀρθὰς αὐτοῖς ἐφεςήκασιν, αἱ δ' ἐπὶ τῶν Διαμέτρων, πλαγίως. Διὰ ταῦτ' ἄρα τῆς Ιη ἐκ τῦ Ι ἀχθείσης τεταγμένως ἐπὶ τῆς διαμέτρυ ΔΝ, δειχθείσεται ἐπὶ τῆς Ε'λλείψεως ἐφόδῳ ὁμοίᾳ τῇ ἐν (§. 87), ὅτι $Iη^2 : Δη \,.\, ηN :: ΓM^2 : ΓΔ^2$, ἀμέλειτοι „Τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων „ἐπὶ τῆς δευτέρας Διαμέτρυ Τετράγωνα πρὸς τὰ „ὑπὸ τῶν ὁμοιοίχυσῶν Α'ποτετμημένων γινόμενα λό„γον ἔχυσιν, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης Η'μιδιαμέτρυ „Τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας."

Κατὰ δὲ τὴν Υ'περβολὴν (δὶ ὅ,τι ἡ Ιη ἐκτὸς τῆς Καμπύλης κεῖται) δειχθήσεται, καθὰ ϗ ἐν (§. 94.) ὑπάρχειν $Ιη^2 : ΓΔ^2 + Γη^2 :: ΓΜ^2 : ΓΔ^2$. Τῆς γάρ τοι πρώτης Διαμέτρȣ ΜΟ καλȣμένης $2α$, τῆς δέτοι δευτέρας $ΔΝ = 2β$, τῆς δὲ ΗΙ (ἥτις ϗ ἐντὸς τῆς Καμπύλης πίπτει) τῆς ἐπὶ τῆς πρώτης διαμέτρȣ Τεταγμένης $= γ$, τῆς δὲ ἀπὸ τȣ͂ Κέντρȣ Ἀποτετμημένης $ΓΗ = χ$, ἔσεται $ΗΜ = χ - α$, ϗ $ΗΟ = χ + α$. Οὐκȣ͂ν $ΜΗ . ΗΟ = χχ - αα$. Ἡ δ᾽ ἐν §. 120. δειχθεῖσα ἀναλογία $ΗΙ^2 : ΜΗ . ΗΟ :: ΓΝ^2 : ΓΜ^2$ ἔσεται ἐν ςοιχείοις $γγ : χχ - αα :: ββ\, αα$ (πάντως ὡς ϗ ἐν τῇ §. 61. ἀναλογίᾳ ἐδείχθη) ἥτις ἐπίσης τῇ τε Ἐλλείψει ϗ τῇ Ὑπερβολῇ ἐπανήκει, διὰ τὸ τὴν Τεταγμένην ΙΗ ἐντὸς τῆς Καμπύλης πίπτειν. Ἐξ αὐτῆς δὲ προβαλεῖ ἡ Ἐξίσωσις $ααγγ = ββχχ - ββαα$, ϗ $ββχχ = (γγ + ββ)αα$, ἐξ ἧς ἡ ἀναλογία $χχ : γγ + ββ :: αα : ββ$, ἥτις ἐν γραμμαῖς ἐςὶ $Ιη^2 (= ΓΗ^2) : Γη^2 + ΓΔ^2 (= ΗΙ^2 + ΓΔ^2) :: ΓΜ^2 : ΓΔ^2$. Ἔςιν ἄρα (καθὰ ϗ ἐν §. 94, διὰ τὸ πίπτειν τὴν Ιη ἐκτὸς τῆς καμπύλης) „Τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης ἐπὶ „τῆς δευτέρας Διαμέτρȣ Τετράγωνον ($Ιη^2$) πρὸς „τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦτε ἀπὸ τῆς αὐ„τῆ συςοιχȣ͂της Ἀποτετμημένης, ϗ τȣ͂ ἀπὸ τῆς ἡμι„δευτέρας Διαμέτρȣ ($Γη^2 + ΓΔ^2$), ὡς τὸ ἀπὸ τῆς

„πρώτης Ἡμιδιαμέτρȣ Τετράγωνον· ($ΓΜ^2$) πρὸς „τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας Ἡμιδιαμέτρȣ ($ΓΔ^2$).

Πᾶσαι μὲν ȣ̃ν αἱ τοῖς Συζυγέσιν Ἄξοσιν ἐπανήκειν ἀποδειχθεῖσαι ἀναλογίαι τε ϗ ἐξισώσεις, ϗ ταῖς συζυγέσι τῶν Διαμέτρων ἀποδειχθήσονται. Ἐπινοηθήσονται δ' ἐν ἑκάςῃ Συζυγεῖ Διαμέτρῳ ϗ οἰκεῖαι Παράμετροι, ἐὰν προσδιορισθῇ ἡ τρίτη συνεχὴς ἀνάλογος (ὡς ἐν §. 57, 87.) προόδȣ γεωμετρικῆς, ἧς πρῶτος μὲν ὅρος αὐτὴ ἡ Διάμετρος, δεύτερος δὲ ἡ Συζυγὴς αὐτῇ, ἤ, ὃ δὴ ταὐτὸν, ἡ τρίτη ἀνάλογος προόδȣ, ἧς περ πρῶτος μὲν ὅρος ἡ πρώτη Διάμετρος, δεύτερος δὲ, ἡ δευτέρα, οἷον $\div$ ΟΜ : ΝΔ : π (π, ῥηθήσεται ἡ τῆς ΟΜ Διαμέτρȣ Παράμετρος) ἢ $\div$ ΝΔ : ΟΜ : π (π, νῦν ἐςὶν ἡ τῆς ΝΔ Διαμέτρȣ Παράμετρος).

Σχ. 13. Ἀλλὰ γὰρ ἐν τῇ Παραβολῇ ἡ ἑκάςης Διαμέτρȣ, οἷον τῆς Μζ Παράμετρος ἀεὶ ἐςὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς Μμ διαςάσεως, ἣν διΐςαται ἡ τῆς διαμέτρȣ ἀρχὴ Μ ἀπὸ τῆς Διευθετȣ́σης Αμ, ἢ ἀπὸ τῆς Ἑςίας. Ἐὰν γὰρ, ὥσπερ ἡ τȣ̃ Ἄξονος Παράμετρος προσδιωρίσθη, ὥςε εἶναι $ΜΠ^2 = ΣΠ \,.\, π$, εἴτ' ȣ̃ν $yy = χπ$ (§. 60.) ὡσαύτως ϗ ἡ τῆς διαμέτρȣ Μζ Παράμετρος τεθῇ εἶναι $ΟΣ^2 = ΜΟ \,.\, π$, τὸ Τετράγωνον δήπȣ τὸ ἀπὸ τῆς $ΟΣ^2$ ἐπὶ τῆς Διαμέτρȣ Μζ

Τεταγμένης ἐξισοῦσθαι τῷ ὑπὸ τῆς ἰδίας Ἀποτετμημένης, ϗ τῆς ἰδίας Παραμέτρου γινομένῳ, εὑρεθήσεται ἡ οὕτω προσδιορισθεῖσα $\pi = 4\,M\mu = 4\,MZ$· Ἐπειδὴ γὰρ $MT^2 = 4\,A\Sigma.\Sigma\Pi + 4\,\Sigma\Pi^2$ (§. 83.) ϗ $\Sigma O = MT$, ϗ ἡ Ἀποτετμημένη $MO = \Sigma T = \Sigma\Pi$ (§. 71.) Ταύτητοι ἔσεται $MT^2 = O\Sigma^2 = 4\,A\Sigma.\Sigma\Pi + 4\,\Sigma\Pi^2 = MO.\pi = \Sigma\Pi.\pi$, ϗ διαιρέσει διὰ ΣΠ, ἐστι $4\,A\Sigma + 4\,\Sigma\Pi = \pi$· ϗ $4\,A\Sigma + 4\,\Sigma\Pi = 4\,A\Pi = 4\,M\mu = 4\,MZ$. Ἄρα $\pi = 4\,M\mu = 4\,MZ$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'.

§. 123.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ πέρατος Μ Διαμέτρου Σχ.
ἡστινοσοῦν ΓΜ καταχθῇ ἡ ΜΡ Κάθετος 17.
τῇ Συζυγεῖ Διαμέτρῳ ΔΝ ἔσεται ΜΡ : 18.
ΓΛ : : ΓΣ : ΓΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐστι (§. 118, 119.) $\Gamma\Delta^2 \pm \Gamma M^2 = \beta\beta \pm \alpha\alpha$· ἀλλ' (ἐκ τῆς δείξεως τῶν αὐτῶν §, §.) ἐστι $\Gamma M^2 = \chi\chi \pm \beta\beta \mp \frac{\beta\beta\,\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἐν ἄρα τῇ Ἐλλείψει ἐστι $\Gamma\Delta^2$

$= \alpha\alpha - \chi\chi + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἐν δὲ τῇ Ὑπέρβολῇ ΓΔ² $= -\alpha\alpha + \chi\chi + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ὅ ἐςι ΓΔ² $= \frac{\beta\beta\chi\chi \pm \alpha^4 \mp \alpha\alpha\chi\chi}{\alpha\alpha}$. Ἤδη ἦν κατήχθω ἐκ τῦ Κέντρυ Γ ἡ ΓΙ Κάθετος τῇ Ἐφαπτομένῃ, ϗ προήχθω ἡ ΓΛ ἄχρι τῦ συμβαλεῖν τῇ Ἐφαπτομένῃ κατὰ τὸ Χ. Ἐπεὶ ἦν τὰ τρίγωνα ΓΙΧ, ΜΝΠ ὅμοια ἀλλήλοις εἰσιν, εἴγε ἐςιν ἡ ὑπὸ ΜΓΧ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ΓΜΠ, ὕσης ΡΧ παραλλήλυ τῇ ΠΜ, ἐξ ὧν ἀφαιρεθεισῶν ἔνθεν μὲν τῆς ὑπὸ ΓΜΝ, ἔνθεν δὲ τῆς ὑπὸ ΙΓΜ, αἵτινές εἰσιν εἴσαι ἀλλήλαις διὰ τὸ εἶναι παραλλήλυς τὰς ΓΙ, ΝΜ, καταλείπονται ἴσαι αἱ ὑπὸ ΙΓΧ, ΠΜΝ. Ὑπάρχει ἄρα ΓΙ : ΓΧ :: ΜΠ : ΜΝ, τυτέςι ΡΜ : ΓΧ : : ΓV : ΝΜ. Οὐκῦν ΡΜ . ΝΜ = ΓΧ . ΓV. Ἀλλὰ (§. 74, 106.) ΓΧ. ΓV = ΓΛ² · ἄρα ϗ ΜΡ . ΝΜ = ΓΛ² · ἄρα ΝΜ: ΓΛ : : ΓΛ : ΜΡ, ϗ ΝΜ² : ΓΛ² :: ΓΛ² : ΜΡ², ϗ ἐν ὅροις ἀναλυτικοῖς (§. 103.) $\frac{\beta^4\chi\chi \pm \alpha^4\beta\beta \mp \alpha\alpha\beta\beta\chi\chi}{\alpha^4} : \beta\beta :: \beta\beta : \text{ΜΡ}^2 = \frac{\alpha^4\beta\beta}{\beta\beta\chi\chi \pm \alpha^4 \mp \alpha\alpha\chi\chi}$.

Ἀλλὰ $\frac{\beta\beta\chi\chi \mp \alpha^2\chi^2 \pm \alpha^2}{\alpha\alpha} \cdot \frac{\alpha^4\beta\beta}{\beta\beta\chi\chi \pm \alpha^4 \mp \alpha\alpha\chi\chi}$

$=\alpha\alpha\beta\beta$· ἄρα $\Gamma\Delta^2 . \mathrm{MP}^2 = \alpha\alpha\beta\beta = \Gamma\Sigma^2 . \Gamma\Lambda^2$. ἄρα $\mathrm{MP}^2 : \Gamma\Lambda^2 :: \Gamma\Sigma^2 : \Gamma\Delta^2$, ϗ τέως $\mathrm{MP} : \Gamma\Lambda :: \Gamma\Sigma : \Gamma\Delta$.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

§. 124.

Τὸ τȣ̃ Παραλληλογράμμȣ ἐμβαδὸν τὸ ὑπὸ τῶν Συζυγῶν Ἡμιδιαμέτρων ΓΜ, ΓΔ ἐξισȣ̃ται τῷ ὑπὸ τῶν Συζυγῶν Ἡμιαξόνων ΓΣ, ΓΛ Ὀρθογωνίῳ. Τὸ γάρτοι ὑπὸ τῶν ΓΜ, ΓΔ Παραλληλόγραμμον καταμετρεῖται τῷ Ὀρθογωνίῳ ΓΔ. ΜΡ, ὅπερ ἴσον ἐςὶ τῷ ΓΣ. ΓΛ. Τȣ̃τ' αὐτὸ δὴ κρατεῖ ϗ περὶ τῶν ὅλων Συζυγῶν Διαμέτρων, ϗ Ἀξόνων. Ἐν γένει ἄρα. „Τὸ ὑφ' οἱωνδήποτε Συζυγῶν „Διαμέτρων ἐμβαδὸν ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῶν Ἀξόνων „Ὀρθογωνίῳ, ϗ δὴ ϗ ἴσον τῷ Ἐμβαδῷ ἑτέρȣ ὁτινοσȣ̃ν Παραλληλογράμμȣ, ȣ̃τινος πλευραὶ ὁποιαιδήποτ' ἂν ὦσιν ἄλλαι Συζυγεῖς Διάμετροι."

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ. Δ'.

Περὶ ἰδιωμάτων τῆς Ὑπερβολῆς, ὅσα ἐκ τῆς τῶν κατ' αὐτὴν Ἀσυμπτώτων ἀπονάει θεωρίας.

§. 125.

Σχ. 14. Ἐπὶ προσδιορισμῷ τῶν Ἀσυμπτώτων βB, βb, αἱ ΣB, Σb ἴσαι ἑκάςῃ τῷ δευτέρῳ Ἡμιάξονι ΓΛ ἐλήφθησαν. Ἐπεὶ δὲ τὰ διάφορα τῶν Ἀξόνων μήκη, τὰς διαφόρους καταγράφει Ὑπερβολὰς, ταύτῃ τοι τὴν τῶν Ἀσυμπτώτων γωνίαν ὑπὸ bΓB ὀξεῖαν εἶναι χρεὼν, ἢ ὀρθὴν, ἢ ἀμβλεῖαν, ἡνίκ' ἂν ὁ πρῶτος Ἡμιάξων ΓΣ μείζων, ἢ ἴσος, ἢ ἐλάσσων ᾖ τοῦ Συζυγοῦς Ἡμιάξονος ΓΛ. Ἐπείτοιγε τὸ ἐκείνης ἥμισυ, ὅ ἐςιν, ἡ ὑπὸ ΣΓB γωνία ἐςὶν ἐλάσσων, ἢ ἴση, ἢ μείζων 45°, ὅταν ἡ Εὐθεῖα ΣB ἐλάσσων ᾖ, ἢ ἴση, ἢ μείζων τῆς ΓΣ.

§. 126.

Ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ τῶν Ἀξόνων ἐμβαδὸν ΓΛbΣ Ὀρθογώνιόν ἐςι, καὶ αἱ Διαγώνιοι ΣΛ, Γb ἀλλήλαις ἴσαι, κατὰ τὸ Υ διχοτομούμεναι, ἔςαι ἄρα $ΣΥ^2 = \frac{1}{4} ΓΛ^2 + \frac{1}{4} ΓΣ^2 = \frac{1}{4} ββ + \frac{1}{4} αα$.

§. 127.

Ε'ὰν ἡ ὑπὸ τῶν Α'συμπτώτων περιεχομένη γωνία ὀρθὴ ᾖ, ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ ἡ Υ'περβολὴ καλεῖται. Πρόδηλον ὖν

Α΄. Τὴν τῆς Ι'σοσκελῦς Υ'περβολῆς Παράμετρον ἰσῦσθαι ἑκάςῳ τῶν ἀλλήλοις συνισυμένων Α'ξόνων.

Β΄. Κατὰ τὴν ἰσοσκελῆ Υ'περβολὴν ἀπὸ μὲν τῆς κυρυφῆς λογιζομένων τῶν Α'ποτετμημένων, τὴν ἐπ' αὐτῆς ἐξίσωσιν τὴν τὺς Α'ξονας περιέχυσαν εἶναι $yy = 2\alpha\chi + \chi\chi$, ἀπὸ δὲ τῦ Κέντρυ, $yy = -\alpha\alpha + \chi\chi$. Καὶ γὰρ, ὔσης τῆς ὑπὸ bΓΒ Ο'ρθῆς, ἐπεὶ $b\Sigma = \Sigma B$, ἡ ὑπὸ bΓΣ ἔσεται 45°. Τὸ ἄρα τρίγωνον bΓΣ Ι'σοσκελὲς. Α'ρα $\Gamma\Lambda = \Sigma b = \Sigma\Gamma$, τυτέςι $\beta = \alpha$ διόπερ (§. 57.) $2\alpha = 2\beta = \pi$. Ε'πεὶ δὲ ἡ ἐπὶ τῆς Υ'περβολῆς Ε'ξίσωσίς ἐςι (§. 49.) $yy = \frac{2\beta\beta\chi}{\alpha} + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ὅταν ᾖ $\alpha = \beta$, ἔςαι $yy = 2\alpha\chi + \chi\chi$. Ε'πεὶ δὲ πάλιν ἡ, ἀπὸ τῦ Κέντρυ τῶν Α'ποτετμημένων λογιζομένων, ἐπὶ τῆς Υ'περβολῆς Ε'ξίσωσίς ἐςι (§. 85.) $yy = -\beta\beta + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἔςαι, ἀντικαταςάσει τῦ α ἀντὶ β, $yy = -\alpha\alpha + \chi\chi$.

Γ΄. Ἐπειδὴ αἱ ἐπὶ τοῦ Κύκλου Ἐξισώσεις ὑπάρχουσιν $yy = 2\alpha\chi - \chi\chi$, ϗ: $yy = \alpha\alpha - \chi^2$, ἡ μὲν, τῶν Ἀποτετμημένων ἀπὸ τῆς Κορυφῆς λογιζομένων, ἡ δ᾽, ἀπὸ τοῦ κέντρου, αἵτινες μηδενὶ διαφέρουσι τῶν ἐπὶ τῆς Ἰσοσκελοῦς Ὑπερβολῆς ἀλλ᾽ ἢ τοῖς σημείοις, καθάπερ ϗ οἱ ἐπὶ τῶν ἀνίσους Ἄξονας ἐχουσῶν Ὑπερβολῶν τύποι οὐδενὶ διενηνόχασι τῶν ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως, ὅτι μὴ μόνοις τοῖς σημείοις (§ 50.) ταύτῃ τοι ὅ,τε Κύκλος, ϗ ἡ Ἰσοσκελὴς Ὑπερβολὴ τὰ αὐτὰ πρὸς ἀλλήλους διατηροῦσιν, ἅπερ ἥτε Ὑπερβολὴ ἡ ἀνίσους Ἄξονας ἔχουσα, ϗ ἡ Ἔλλειψις.

§. 128.

Αἱ δὲ ῥηθεῖσαι δισσαὶ ἐπὶ τοῦ κύκλου Ἐξισώ-
Σχ. 3. σεις ἐξευρίσκονται οὑτωσί. Ῥηθείσης γὰρ (§. 6.) τῆς κατὰ τὸν κύκλον Διαμέτρου $\Sigma\sigma = 2\alpha$, ϗ $\mathrm{M\Pi} = y$, ϗ $\Sigma\Pi = \chi$, ἔσαι $\sigma\Pi = 2\alpha - \chi$· ἀλλὰ $\mathrm{M\Pi}^2 = \Sigma\Pi \,.\, \Pi\sigma$· ἄρα $yy = \chi\,(2\alpha - \chi) = 2\alpha\chi - \chi\chi$. Ἐὰν δ᾽ ἀπὸ τοῦ Κέντρου Γ λογισθῶσιν αἱ Ἀποτετμημέναι, ἔσαι $\Gamma\Pi = \chi$, ϗ $\Sigma\Pi = \alpha - \chi$, ϗ $\sigma\Pi = \alpha + \chi$, ϗ $yy = \alpha\alpha - \chi\chi$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄.

§. 129.

Ἐὰν πᾶσα ἐπὶ τȣ̃ Ἄξονος Τεταγμένη ΠΜ προαχθῇ ἑκατέρωσε ἄχρι τȣ̃ προσαντῆσαι ταῖς ἀσυμπτώτοις ἐν τοῖς Α, α, ἔςαι ΑΜ . Μα $=$ ΓΛ^2, τȣτέςιν ΑΜ : ΓΛ : : ΓΛ : Μα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκ τῆς ἐν (§. 25.) ἐξισώσεως τῆς τὴν τȣ̃ ἀφ' ἑκάςης Τεταγμένης τετραγώνȣ Ἀξίαν προσδιοριζȣ́σης $yy = \frac{\beta\beta\,\chi\chi}{\alpha\alpha} - \beta\beta$, ἀπολαμβάνεται $\beta\beta =$

$$\Gamma\Lambda^2 = \frac{\beta\beta\,\chi\chi}{\alpha\alpha} - yy = \left(\frac{\beta\chi}{\alpha} - y\right) . \left(\frac{\beta\chi}{\alpha} + y\right).$$

ἀλλὰ $\frac{\beta\chi}{\alpha}$ τέταρτός ἐςιν ὅρος ἀναλογίας τῶν τριῶν α, β, χ, εἴτ' ȣ̃ν τῶν ΓΣ, ΓΛ, ΓΠ· ἡ ἄρα τετάρτη τȣ́των ἀνάλογος ἐκτεθεῖσεται $\frac{\beta\chi}{\alpha}$. Ἐπισκεψαμένοις δὲ τὴν τȣ̃ σχήματος Φύσιν ἐπίδηλον, ὅτι τὸ ΛΓΣ Τρίγωνον τὸ τὰς δύω τῶν εὐθειῶν πλευρὰς ἑαυτȣ̃ ἔχον ὅμοιον ὑπάρχει τῷ ΓbΣ· τὸ δὲ, τῷ

ΓΑΠ· τὰ ἄρα ΛΓΣ, ΓΑΠ ἀλλήλοις ὅμοια· ἄρα ΓΣ : ΓΛ :: ΓΠ : ΑΠ· ἄρα $ΑΠ = \frac{βχ}{α}$. Οὐκοῦν ΑΜ $= ΑΠ - ΠΜ = \frac{βχ}{α} - y$, ϗ $Mα = αΠ + ΠΜ = \frac{βχ}{α} + y$· ἄρα $ΑΜ . Mα = ΓΛ^2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

§. 130.

Ὡσαύτως ἐστὶν $ΙΩ . Ιω = ΓΛ^2 = ΑΜ . Mα = αμ . μΑ = ιω . ιΩ$.

ΘΕΩΡΗΜΑ. ϛ΄.

§. 131.

Ἐὰν ἀπό τινος τῶν ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς σημείου Μ ἀχθῇ ἄχρι τῆς ἐγγὺς ἀσυμπτώτου ΓΑ ἡ εὐθεῖα ΜΡ παραλλήλως θατέρᾳ ἀσυμπτώτῳ ΓΒ, ἔσται $ΜΡ . ΡΓ = ΓΥ^2 = ΣΥ^2$, τουτέστι ΜΡ : ΣΥ :: ΣΥ : ΡΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἤχθω ἡ ΜΧ παράλληλος τῇ ΑΓ. Οὐκοῦν

ΜΧ $=$ ΡΓ. Ἐπεὶ δὲ τὰ τρίγωνα ΜΑΡ, ΣbΥ, ΜαΧ ὅμοια ἀλλήλοις εἰσίν· εἴγε ἕκαςον αὐτῶν ἔχει τὰς δύω τῶν πλευρῶν παραλλήλους ταῖς δυσὶν ὁμολόγοις θατέρου. Ἄρα ἐκ μὲν τῆς τῶν δύω πρώτων ὁμοιότητος ἔςι ΜΡ : ΣΥ : : ΜΑ : Σb ($=$ΓΛ)· ἀλλὰ ΜΑ : ΓΛ : : ΓΛ : Μα (§. 129.) ἄρα ΜΡ : ΣΥ : : Σb : Μα. Ἐκ δὲ τῆς τῶν δύω ὑςέρων Σb : Μα : : bΥ : ΜΧ. Διὸ δὴ ΜΡ : ΣΥ : : bΥ : ΜΧ· ἀλλὰ bΥ $=$ ΥΓ $=$ ΥΣ, καὶ ΜΧ $=$ ΡΓ· ἄρα ΜΡ : ΣΥ : : ΣΥ : ΡΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 132.

Πᾶσα Εὐθεῖα (ἡ ΜΡ, φέρε) ἀφ' οἱουδήποτε σημείου τῆς Ὑπερβολῆς ἐπὶ τῆς ΓΑ Ἀσυμπτώτου παραλλήλως θατέρᾳ Ἀσυμπτώτῳ ἀγομένη, θεωρηθῆναι ἂν ἔχοι οἷα δὴ καὶ Τεταγμένη, ἧςπερ Ἀποτετμημένη μέρος ἂν εἴνι τι τῶν τῆς Ἀσυμπτώτου ΓΑ. Ἐπείτοι γὰρ ἡ Ἀσύμπτωτος ΓΒ ἐπιψαύουσά ἐςιν (ἐν ἀπείρῳ διαςήματι) τῆς Ὑπερβολῆς, ταύτῃ δὴ ἡ αὐτῆς θέσις δύναιτ' ἂν προσδιορίσασθαι τὴν τῶν Τεταγμένων κλίσιν (§. 11.) Ἐπινοηθήτω οὖν ὡς Ἀρχὴ τῶν Ἀποτετμημένων τὸ Γ. Οὐκοῦν ἡ ΓΡ Ἀποτετμημένη ἐςὶν ὑπὸ τῆς Τεταγμένης ΜΡ. Ἐὰν

ἐὰν τεθῇ ΓΡ $= \chi$, καὶ ΜΡ $= y$, καὶ ΓΥ, ἢ ΣΥ $=$ δ, ἔσεται (§. 131.) $\chi y = \delta\delta$, ἢ $\chi y = \frac{1}{4}\alpha\alpha + \frac{1}{4}$ $\beta\beta$ (§. 126.) Αὕτη δὴ ἡ Ἐξίσωσις ἐμφαίνει τὸν τῆς ἀπομειώσεως τῶν ἐπὶ τῆς Ἀσυμπτώτου νόμον, ἐφ' ᾧ τὰ κατὰ τὴν Καμπύλην σημεῖα προσδιορισθῆναι. Εἰκότως ἄρα κληθήσεται: *Ἐξίσωσις ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς, ὡς ἐκ τῶν Ἀσυμπτώτων.*

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 133.

Ἐὰν προαχθῇ ἡ ΜΡ ἄχρι τῆς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένης Ὑπερβολῆς ΔΛδ, ἔσαι ΔΡ $=$ ΜΡ. Ἔσι γὰρ (§. 131.) ΔΡ.ΓΡ $=$ ΓΥ^2 $=$ ΜΡ. ΓΡ. Ἀλλαμὴν ὀρθογώνια ἴσα τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντα, ἔχουσι πάντως ἴσας καὶ τὰς βάσεις· ἄρα ΔΡ $=$ ΡΜ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'.

§. 134.

Σχ. 19. Ἐὰν Εὐθεῖα ἡ ΖΕ ἀχθῇ διὰ τῆς Ὑπερβολῆς, τὰ ΕΘ, ΖΙ μέρη τὰ μεταξὺ τῶν Ἀσυμπτώτων καὶ τῆς Καμπύλης, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Διὰ τῶν σημείων Θ, Ι ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς τῷ Ἄξονι αἱ ΔΤ, ΒΞ. Ἔςαι οὖν (§. 130.) ΔΡ.ΡΤ, ἢ ΘΤ.ΘΔ = ΒΙ.ΙΞ. Οὐκοῦν ΙΞ : ΘΤ :: ΘΔ : ΒΙ. Ἐπεὶ δὲ αἱ ΔΤ, ΒΞ παράλληλοί εἰσι, ταύτητοι τὰ τρίγωνα ΘΤΕ, ΕΙΞ εἰσιν ἀλλήλοις ὅμοια, καθάπερ ϗ τὰ ΖΒΙ, ΖΘΔ. Τοιγαροῦν ἐκ μὲν τῶν ὑςέρων ἐςὶ ΘΔ : ΒΙ :: ΘΖ : ΙΖ· ἐκ δὲ τῶν προτέρων ΙΞ : ΤΘ :: ΙΕ : ΘΕ. Ἀντικαταςάντων ἄρα τῶν ἴσων λόγων ἐν τῇ προτέρᾳ ἀναλογίᾳ ἔςαι ΙΕ : ΘΕ :: ΘΖ : ΙΖ. Οὐκοῦν ΙΕ — ΘΕ : ΘΕ :: ΘΖ — ΙΖ : ΙΖ, ὅ ἐςιν, ΙΘ : ΘΕ :: ΙΘ : ΙΖ. Ἀλλὰ ΙΘ = ΙΘ, ἄρα ΘΕ = ΙΖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 135.

Ἐντεῦθεν ἄρα συνάγεται μέθοδος τοῦ καταγράφειν Ὑπερβολὴν ἐντὸς δυεῖν δοθεισῶν Ἀσυμπτώτων, διὰ σημείου τινος δοθέντος τοῦ Ι διήξουσαν. Ἐὰν γὰρ δι' αὐτοῦ τοῦ σημείου Ι ἀχθῶσιν οἱαιδήποτε Εὐθεῖαι ἔςγε τὰς Ἀσυμπτώτους ἐφήκουσαι αἱ ΑΠ, ΒΞ, ΖΕ, κτ. ϗ ληφθῶσι ΠΗ = ΑΙ, ΞΚ = ΒΙ, ΘΕ = ΖΙ, κτ. τὰ Η, Κ, Θ σημεῖα τῆς Ὑπερβολῆς ἔσονται. Ἐὰν δ᾽ αὖ ἀντὶ τοῦ δοθέντος Ι ληφθῇ ἕν τι ἄλλο τῶν εὑρεθέντων, δι᾽ αὐτοῦ ἕτερα σημεῖα τῇ αὐτῇ μεθόδῳ εὑρεθῆναι δύνανται, καὶ οὕτως ἅπαντα τὰ κατὰ τὴν Ὑπερβολὴν σημεῖα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 136.

Ἐὰν ληφθῇ σημεῖόν τι Ι ἤτοι ἐκτὸς, ἢ ἐντὸς Ὑπερβολῆς τινος ἤδη καταγραφείσης τῆς ΡΣΗ, ἧς Ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΔ, ΓΠ, καταγραφῆναι δύναται διὰ τῆς τοῦ ἀνωτέρω πορίσματος μεθόδου Ὑπερβολὴ ἑτέρα ἔχουσα μὲν Ἀσυμπτώτους τὰς αὐτὰς τῇ πρώτῃ, διήκουσα δὲ διὰ τοῦ ἤτοι ἐκτὸς, ἢ ἐντὸς ἐκείνης ληφθέντος σημείου Ι. Αὗται γοῦν αἱ δύω Ὑπερβολαὶ οὐκ ἂν ἀλλήλαις συνέλθοιεν, εἰμὴ ἐν διαστήματι ἀπείρῳ. Ἑκατέρα γάρτοι, ἐξ ὑποθέσεως, ἀσυμπτώτους ἔχει τὰς αὐτάς. Ἀλλὰ (§. 77, 132.) πᾶσα Ὑπερβολὴ οὐδαμῇ ἐπιψαύει τῶν αὐτῆς Ἀσυμπτώτων, εἰμὴ ἐν διαστήματι ἀπείρῳ. Ἑκατέρα ἄρα τούτων κοινὴν ἔχει τὴν σύμπτωσιν ταῖς Ἀσυμπτώτοις, εἴτ᾽ οὖν ἐν τῷ ἀπείρῳ διαστήματι ἀλλήλαις συνέρχονται.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 137.

Πᾶσα Ε'φαπτομένη τῆς Υ'περβολῆς πρὸς ταῖς Α'συμπτώτοις ἑκατέρωσε περατȣμένη, οἷον ἡ ζε, ἐν τῷ τῆς ἐπαφῆς σημείῳ τ δίχα τέμνεται. Ε'πείπερ, ἣν ἡ ΖΕ κινȣμένη παραλλήλως ἑαυτῇ συνεχῶς τέμνῃ τὴν Υ'περβολὴν ἐν ἀπειράκις ἔγγιςα σημείοις, τὰ σημεῖα Θ, Ι συμπεσȣ̃νται τῷ τῆς Ε'παφῆς σημείῳ τ. Α'ρα, ὡς πρότερον, ἔσεται ΖΙ = ΘΕ, εἴτ' ȣ̓̃ν ζτ = τε.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Δ'.

§. 138.

Η' τῆς Υ'περβολῆς Εφαπτομένη, ϗ ταῖς Α'συμπτώτοις συμβάλλȣσα εϑ ἰσȣ̃ται τῇ ΔΝ διαμέτρῳ τῇ συζυγεῖ τῆς πρὸς τῷ σημείῳ τῆς Ε'παφῆς Μ περατȣμένης ΟΜ, τȣτέςι τὸ χωρίον ΔΜϑΓ ὑπάρχει Παραλληλόγραμμον· ϗ δὴ Μϑ = ΔΓ = Με. Η῎χϑω γάρ τοι ἀπὸ τȣ̃ Μ εὐθεῖα τις παράλληλος τῇ ἀσυμπτώτῳ ΓΒ ἄχρις ἂν προσαντήσῃ τῇ ΓΔ διαμέτρῳ· ϗ δὴ τὸ χωρίον ΜΔΓϑ Παραλληλόγραμμον ἔσεται, τȣτέςι τὸ πέρας τῆς ἀπὸ τȣ̃ Μ ἀχθείσης παραλλήλȣ (ὅπερ εἰρήσϑω δ) συμπεσεῖται τῷ Δ· εἰμὴ γὰρ, εἴη ἂν ἤτοι ἐκτὸς, ἢ ἐντὸς τῆς Ὑπερβολῆς· ἀλλ' ἐκεὶ ἡ ΓΔ Συζυγὴς Διάμετρος παράλληλός ἐςι τῇ Μϑ, ϗ προαχϑεῖσα ἢ ἐλαττωϑεῖσα ἕως ἂν τῷ δ σημείῳ συμβάλῃ, παράλληλος αὐτῇ διαμένει, ϗ (ἐκ κατασκευῆς) ἡ Μδ παράλληλος τῇ Γϑ, πάντως ἄρα τὸ ΜδΓϑ χωρίον ὑπάρχει Παραλληλόγραμμον. Ἀλλὰ γὰρ ϗ τὸ χωρίον ΜΔΓϑ Παραλληλόγραμμον εἶναι ἐπάναγκες, καϑότι ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ σημείȣ Μ μία μόνη παράλληλος τῇ Γϑ ἀχϑῆναι δύναται, ἡ δὲ ΔΓ παράλληλος δῆ Μϑ, ὡς εἴρηται. Ἐπεὶ ȣ̃ν Παραλληλόγραμμα δύω κοινὰς ἔχει τὰς τρεῖς Γωνίας, κοινὴν ἕξει ϗ τὴν πρὸς τῷ Δ, εἶτ' ȣ̃ν τὸ σημεῖον δ ταυτίζεται τῷ τῆς διαμέτρȣ ΓΔ πέρατι Δ. Οὐκȣ̃ν ΓΔ = Μϑ = Με, ϗ εϑ = ΔΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Η΄.

§. 139.

Σχ. 19. Ἐὰν ἀπὸ δυοῖν οἱωνδηποτȣ̃ν τῆς Ὑπερβολῆς σημείων Ι, Ρ ἀχϑῶσι παράλληλοι αἱ ΙΑ, ΡΧ, ϗ ΙΕ, ΡΥ, ἀνὰ δυω, ὧν αἱ μὲν πρῶται τῇ ἐγγυτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ συμβάλλοιεν, αἱ δὲ, ϑατέρᾳ ἔςαι ΙΑ.ΙΕ = ΡΧ.ΡΥ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἤχθωσαν διὰ τῶν Ι, Ρ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι αἱ ΒΞ, ΔΤ ἑκατέρωσε ταῖς Ἀσυμπτώτοις συμβάλλουσαι. Ἀποκαθίσανται οὖν ὅμοια ἀλλήλοις τὰ τρίγωνα ΒΙΛ, ΔΡΧ, καθάπερ καὶ τὰ ΙΞΕ, ΤΡΥ. Ἔστιν ἄρα ΙΒ : ΙΛ : : ΔΡ : ΡΧ, καὶ ΙΞ : ΙΕ : : ΡΤ : ΡΥ. οὐκοῦν συνθέσει τῶν λόγων γίνεται ΙΒ . ΙΞ : ΙΛ . ΙΕ : : ΔΡ . ΡΤ : ΡΧ . ΡΥ. ἀλλ' ἐστι ΒΙ . ΙΞ = ΔΡ . ΡΤ (§. 130.) ἄρα καὶ ΙΛ . ΙΕ = ΡΧ . ΡΥ.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 140.

Ἀχθεισῶν διὰ τῆς Ὑπερβολῆς δυεῖν οἱωνδήποτε Παραλλήλων τῶν ΖΕ, ΨΥ ἔς γε τὰς ἀσυμπτώτους ἑκατέρωσε ἡκουσῶν, πάντως ἔσεται ΖΙ . ΙΕ = ΨΡ . ΡΥ.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Β΄

§. 141.

Ἐὰν δὲ ἡ ἑτέρα τῶν Παραλλήλων ἐφάπτηται τῆς Ὑπερβολῆς κατὰ τὸ τ, ἔσεται $\zeta\tau^2$ = ΖΙ . ΙΕ. = ΨΡ . ΡΥ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ. Ε΄.

Προβλήματα τινὰ ἐπὶ τῶν Κωνικῶν Τομῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

§. 142.

Μέρες τῆς Κωνικῆς Τομῆς δοθέντος, ἐν ᾧ ὑπάρχει καὶ ἡ Κορυφὴ, τὸ εἶδος, ϗ τὴν θέσιν αὐτῆ προσδιορίσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἤχθωσαν δισσαὶ ὁποιαιδήποτε Παράλληλοι, ἐφικνέμεναι ἑκατέρωσε τῆ δοθέντος τῆς τομῆς μέρες, ϗ δίχα τετμήσθω ἑκατέρα αὐτῶν, ϗ ἤχθω διὰ τῆ τῆς διχοτομίας σημείε εὐθεῖα, ἥτις ἔςαι μία τῶν Διαμέτρων. Ὡσαύτως δ' εἶτα ἤχθωσαν ἕτεραι Παράλληλοι δύω ταῖς πρώταις πλάγιαι, ϗ διὰ τῶν τῆς διχοτομίας σημείων ἀχθήσεται ἡ ἑτέρα Διάμετρος. Ἐὰν ἧν αὕτη παράλληλος ᾖ τῇ πρώτῃ Διαμέτρῳ, ἡ τομὴ ἔςαι Παραβολή. Ἐὰν δὲ τέμνῃ αὐτὴν ἐκτὸς τῆς Καμπύλης, εἴτ' ἧν πρὸς τὸ τῆς κυρτότητος μέρος, ἡ τομὴ ἔςαι Ὑπερβολή. Ἐὰν δὲ τέως αἱ Διάμετροι προσαυτῶνται ἀλλήλαις ἐντὸς τῆς Καμπύλης, τȣτέςι πρὸς τὸ τῆς κοιλότητος μέρος, ἡ τομὴ ἔςαι Ἔλλειψις, ϗ τὸ τῆς διατομῆς τῶν διαμέτρων σημεῖον ἀείποτε τὸ Κέντρον ὑπάρχει. Τοιγαρȣ̃ν, εἴπερ διὰ τȣ̃ Κέντρȣ ȣ̆τως εὑρεθέντος καταγραφῇ Κύκλος τῷ δοθέντι τῆς τομῆς μέρει ἐν δυσὶ σημείοις συμπίπτων, Εὐθεῖα, ἥτις ἂν ἐκ τȣ̃ Κέντρȣ ἀχθείη διὰ σημείȣ τȣ̃ μεσαιτάτȣ τῶν, καθ᾽ ἃ συμβάλλει τῇ Κωνικῇ τομῇ ὁ Κύκλος, ἔσεται Ἄξων. Ἀλλ᾽ ἐὰν ἡ τομὴ Παραβολὴ ᾖ, ἤχθω Κάθετος μιᾷ τινι αὐτῆς διαμέτρῳ ἑκατέρωσε συμβάλλȣσα τῇ Καμπύλῃ. Ταύτης ȣ̃ν διχοτομηθείσης ἡ τῷ τῆς διχοτομίας σημείῳ πρὸς ὀρθὰς ςαθεῖσα ἔσεται τῆς Παραβολῆς ὁ Ἄξων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 136.

Διὰ τριῶν δοθέντων σημείων Μ, μ, m, καὶ περὶ τὴν δοθεῖσαν Ἑςίαν ὄντων, εἶτ᾽ ȣ̃ν μὴ ἐπ᾽ εὐθείας τῇ Ἑςίᾳ Ζ κειμένων, τὴν Κωνικὴν Τομὴν καταγράψαι, καὶ τό, τε εἶδος αὐτῆς, καὶ τȣ̀ς Ἄξονας προσδιορίσαι. Σχ. 20.

ΛΥ´ΣΙΣ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ $M\mu$, μm, ϗ γενέσθω $ZM : Z\mu :: ME : \mu E$, ϗ $Z\mu : Zm :: \mu H : mH$, εἴτ' οὖν, ὃ δὴ ταὐτὸν, εἰλήφθω ἡ $\mu E = \frac{Z\mu . M\mu}{Z\mu - ZM}$, καθότι ἐκ τῆς ἀναλογίας $ZM : Z\mu :: ME : \mu E$, ἐστι ϗ $Z\mu : ZM :: \mu E : ME$, ϗ $Z\mu - ZM : Z\mu :: \mu E - ME \; (= M\mu) : \mu E$. ἄρα $\mu E = \frac{Z\mu . M\mu}{Z\mu - ZM}$. Οὕτως οὖν εὑρίσκεται ἡ μE, τέταρτος τῆς ἀναλογίας ὅρος, ἐξ ἧς ἀφαιρεθείσης τῆς γνωστῆς $M\mu$, καταλειφθήσεται ἡ ME, τρίτος τῶν κατὰ τὴν ἀναλογίαν ὅρος. Εἰλήφθω δὲ (διὰ πράξεως τῇ ἀνωτέρω παραπλησίας) ϗ $\mu H = \frac{Z\mu . \mu m}{Zm - Z\mu}$, ϗ διὰ τῶν σημείων E, H οὕτω προσδιορισθέντων ἤχθω τέρματος ἄνευ εὐθεῖα ἡ EH, ἥτις ἔσεται τῆς τομῆς ἡ Διευθετοῦσα. Ἐὰν γὰρ καταχθῶσι πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ αἱ $M\Theta$, $\mu\vartheta$, $m\upsilon$, ὄντων τῶν τριγώνων $\vartheta\mu E$, ΘME ὁμοίων ἀλλήλοις, ἔσεται $M\Theta : \mu\vartheta :: ME : \mu E : ZM : Z\mu$. Ὡσαύτως δὲ (διὰ τὴν τῶν τριγώνων $\mu H\vartheta$, $mH\upsilon$ ὁμοιότητα) ἐστιν $\mu\vartheta : m\upsilon :: \mu H : mH : Z\mu : Zm$. Αἱ Κάθετοι ἄρα πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσιν, ὃν αἱ Εὐθεῖαι ΜΖ, μΖ, mΖ. Ἡ ἄρα Εὐθεῖα ΕΗ (§. 18.) ἐστιν ἡ Διευθετοῦσα τῆς διὰ τῶν σημείων Μ, μ, m διιούσης Κωνικῆς Τομῆς, ἧς τὸ εἶδος ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΘΜ, λόγου χαρακτηρίζεται. Ἐὰν οὖν διὰ τοῦ Ζ ἀχθῇ Κάθετος ἐπὶ τῆς Διευθετούσης ἡ ΖΑ ἔσται κατ' αὐτὴν ἡ Κορυφὴ τῆς Καμπύλης. Ἐὰν δὲ γίνηται ὡς ΜΘ : ΖΜ : : ΑΣ : ΣΖ : Ασ : σΖ, τουτέστιν ἐὰν ληφθῇ $\Sigma Z = \frac{ZA \cdot ZM}{ZM + \Theta M}$ (ἐκ γὰρ τῆς ἀναλογίας ΜΘ : ΖΜ : : ΑΣ : ΣΖ, συνθέσει τῶν λόγων γίνεται ΜΘ + ΖΜ : ΖΜ : : ΑΣ + ΣΖ (= ΑΣ) : ΣΖ. Οὐκοῦν $\Sigma Z = \frac{ZA \cdot ZM}{ZM + \Theta M}$) καὶ (πράξει παραπλησίᾳ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων) $Z\sigma = \frac{ZA \cdot ZM}{\Theta M - ZM}$, εὑρεθήσονται καὶ αἱ τοῦ Ἄξονος Κορυφαὶ Σ, σ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γʹ.

§. 144.

Δοθεισῶν δυεῖν τῆς Ὑπερβολῆς συζυγῶν Διαμέτρων τῶν ΜΟ, ΔΝ, εὑρεῖν τὰς κατ' αὐτὴν Ἀσυμπτώτους. Σχ. 14.

Λ Υ΄ Σ Ι Σ. Α΄.

Διὰ τȣ̃ πέρατος Μ τῆς πρώτης διαμέτρȣ ΜΟ ἤχθω ἡ εθ παράλληλος τῇ συζυγεῖ ΔΝ, ϗ γενέσθω Μθ = Με = ΓΔ, εἴτ' ȣ̃ν ΓΝ. Κείσεται ȣ̃ν τὰ σημεῖα θ, ε ἐπὶ τῶν Ἀσυμπτώτων.

Λ Υ΄ Σ Ι Σ. Β΄.

§. 146.

Ἡ τὰ τῶν Διαμέτρων ἄκρα ἐπὶ ζευγνῦσα ΔΜ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ρ, ϗ διὰ τȣ̃ Κέντρȣ ϗ τȣ̃ Ρ διήχθω Εὐθεῖα ἡ ΓΡ, ἥτις ἔσεται ἡ ἑτέρα τῶν Ἀσυμπτώτων. Ἀτέρα δὲ ἔςαι, εἴτις ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΔΜ.

Σ Χ Ο΄ Λ Ι Ο Ν.

§. 146.

Τȣ̓ναντίον δὲ, δοθεισῶν δήπȣ τῶν Ἀσυμπτώτων, ϗ τȣ̃ κατὰ τὴν Ὑπερβολὴν σημείȣ Μ, εὑρεθήσονται αἱ δύω συζυγεῖς Διάμετροι, ἐὰν τέρματος ἄτερ ἡ Εὐθεῖα ΔΜ ἀχθῇ παράλληλος τῇ Ἀσυμπτώτῳ ΓΒ, ϗ γίνεται ΔΡ = ΜΡ. Αἱ γάρτοι ΜΓ, ΔΓ ἔσονται συζυγεῖς διάμετροι. Καὶ ἄλλως δὲ, τȣ̃τέςιν ἐὰν διὰ τȣ̃ Μ ἀχθῇ ἐπιψαύȣσα ἡ εθ τῇ

Ἀσυμπτώτῳ συμβάλλουσα, ϗ διὰ τοῦ Γ *ἀχθῇ ἡ* ΓΔ *παράλληλος ϗ ἴση τῇ* Με, *ἡ* Μθ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 147.

Τῆς Κωνικῆς Τομῆς τὴν Ἀκτῖνα τῆς Σχ.
Καμπυλότητος εὑρεῖν ἐπί τινος δοθέντος 17.
σημείου Μ 18.

ΛΥΣΙΣ.

Ἤ*χθωσαν διὰ τοῦ δοθέντος σημείου* Μ *ἡ Διάμετρος* ΜΟ, *ϗ ἡ αὐτῇ Συζυγὴς* ΔΝ, *ϗ οἱ Ἄξονες* Σσ, Λλ, *ϗ τὸ κατὰ τὴν* ΜΟ *σημεῖον* Κ *ὑποτεθείσθω ὑπάρχειν ἐπὶ κύκλου περιφερείας διὰ τριῶν τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς σημείων ἀπειράκις ἔγγιστα κειμένων τῶν* Μ, μ, m, *διιόντος. Ἔσεται οὖν (γεωμετρ.* §. 187.) $mH . H\mu = MH . HK$, *ἢ* $\mu H^2 = MH . HK$. *ἴσαι γάρ τοι ἀλλήλαις αἱ* μH, mH, *ὡς ἀπειράκις ἐλάχισται οὖσαι.* Ἀλλ' *ἔστι* (§. 61.) $\mu H^2 : MH . HO :: \Gamma\Delta^2 : \Gamma M^2$ *ἄρα* $MH . HK : MH . HO :: \Gamma\Delta^2 : \Gamma M^2$. Οὐκοῦν $HK : HO :: \Gamma\Delta^2 : \Gamma M^2$, *ϗ ἐπεὶ* MH *ἀπειράκις ἐλαχίστη ἐστὶ πρός γε τὴν* μH, *ἐκ τούτου ἄρα* $MK :$

$$MO\ (= 2\Gamma M) :: \Gamma\Delta^2 : \Gamma M^2 \cdot \text{ἄρα } MK = \frac{2\Gamma\Delta^2}{\Gamma M}.$$

Κείσθω νῦν τὴν διάμετρον τȣ̃ κατὰ τὰ μ, M, m συμπίπτοντος τῇ Καμπύλῃ κύκλȣ ὑπάρχειν MA, ϗ ἤχθω ἡ χορδὴ AK. ἔσεται δὴ τὸ τρίγωνον AKM Ο᾽ρθογώνιον πρὸς τὸ K, ϗ ὅμοιον τῷ πρὸς τὸ P Ο᾽ρθογωνίῳ τριγώνῳ MΓP. Ε᾽πεὶ γάρ τοι ἡ MA Κάθετος τῷ τόξῳ mμ, ὅ ἐςι, τῇ αὐτȣ̃ Ε᾽φαπτομένῃ Mx, ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ ἐςὶ κάθετος ϗ τῇ συζυγεῖ διαμέτρῳ NΔ. Ε᾽ςὶν ἄρα MP : MΓ :: MK (εἴτ᾽ ἐν $\frac{2\Gamma\Delta^2}{\Gamma M}$) : $MA = \frac{2\Delta\Gamma^2}{MP}$. Διόπερ $\frac{1}{2}\ MA = \frac{\Gamma\Delta^2}{MP}$. Α᾽μέλειτοι.

Α΄. „Η᾽ Α᾽κτὶς τῆς κατὰ τὴν Κωνικὴν Τομὴν „ἔντινι τῶν ἐπ᾽ αὐτῆς δοθέντι σημείῳ M καμπυλό- „τητος ἰσȣ̃ται τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Η᾽μιδιαμέτρȣ „τῆς συζυγȣ̃ς τῇ διὰ τȣ̃ δοθέντος σημείȣ διεσῃ, „διαιρεθέντι διὰ τῆς ἀπὸ τȣ̃ δοθέντος σημείȣ ἐπὶ „τὴν συζυγῆ διάμετρον καταχθείσης Καθέτȣ.

Α᾽ν.᾽ ἐπεὶ (§. 123.) $MP = \frac{\Gamma\Lambda \cdot \Gamma\Sigma}{\Gamma\Delta}$, ταύτῃ

δὴ $\frac{1}{2}\ AM = \frac{\Gamma\Delta^2}{\Gamma\Lambda \cdot \Gamma\Sigma}$. Α᾽μέλειτοι.

Β΄. „Η᾽ Α᾽κτὶς τῆς κατὰ τὴν Κωνικὴν Τομὴν „ἔντινι τῶν ἐπ᾽ αὐτῆς δοθέντι σημείῳ M καμπυλό- „τητος ἰσȣ̃ται Κύβῳ τῷ ἀπὸ τῆς Η᾽μιδιαμέτρȣ τῆς

„συζυγῦς τῇ διὰ τῦ δοθέντος σημείῦ διϊῦσῃ, διαιρε-
„θέντι διὰ τῦ ὑπὸ τῶν Ἡμιαξόνων παραγομένῦ."

§. 148.

Ἐὰν ἔκ τε τῆς Ἑςίας Ζ, ἢ τῦ Κέντρῦ Γ καταχθῶσιν αἱ ΓΙ, ΖΘ Κάθετοι τῇ κατὰ τὸ Μ τῆς τομῆς ἐπιφανέσῃ, ἀπολαμβάνεται (§. 123.) $\text{ΜΡ}^2 : \text{ΓΣ}^2 :: \text{ΓΛ}^2$ (ἢ $\text{ΜΡ} . \text{ΜΝ}$)$: \text{ΓΔ}^2 = \frac{\text{ΓΣ}^2 . \text{ΜΝ}}{\text{ΜΡ}^2}$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{1}{2}\ \text{ΜΑ} = \frac{\text{ΓΔ}^2}{\text{ΜΡ}}$, ἔσεται ὡσαύτως καὶ $\frac{1}{2}\ \text{ΜΑ} = \frac{\text{ΓΣ}^2 . \text{ΜΝ}}{\text{ΜΡ}^2}$. Ἔςι δὲ παρὰ ταῦτα ἡ κατὰ τὸν Ἄξονα Σσ Παράμετρος $\pi = \frac{2\text{ΓΛ}^2}{\text{ΓΣ}}$, ἄρα $\frac{1}{2}\pi = \frac{\text{ΓΛ}^2}{\text{ΓΣ}}$· ἄρα $\frac{1}{2}\pi . \text{ΓΣ} = \text{ΓΛ}^2 = \text{ΜΡ} . \text{ΜΝ}$, ἢ ἐκ τῦ ἀκολύθῦ $\text{ΜΡ} = \frac{\pi . \text{ΓΣ}}{2\ \text{ΜΝ}}$. Οὐκῦν $\text{ΜΡ}^2 = \frac{\pi\pi . \text{ΓΣ}^2}{4\text{ΜΝ}^2}$.

Τοιγαρῦν τελυμένης τῆς ἀντικαταςάσεως προκύπτει $\frac{1}{2}\ \text{ΜΑ} = \frac{4\text{ΜΝ}^3}{\pi\pi} = \frac{\text{ΜΝ}^3}{\frac{1}{4}\pi\pi}$, ὅ ἐςι

Γ΄. „Ἡ Ἀκτὶς τῆς κατὰ τὴν Κωνικὴν Τομὴν
„ἔν τινι τῶν ἐπ' αὐτῆς δοθέντι σημείῳ Μ καμπυλό-

„τητος ἰσȣ̃ται Κύβῳ τῷ ἀπὸ τῆς Καθέτȣ διαιρεθέν-
„τι διὰ τȣ̃ τεταρτημορίȣ τȣ̃ τετραγώνȣ τȣ̃ ἀπὸ τῆς
„κατὰ τὸν πρῶτον Ἄξονα Παραμέτρȣ."

§. 149.

Ἐπὶ δὲ τῆς Παραβολῆς ὁ τύπος τῆς κατὰ τὴν καμπυλότητα Ἀκτίνος δείκνυται εἶναι $\frac{(4\pi\chi+\pi\pi)\cdot\sqrt{4\pi\chi+\pi\pi}}{2\pi\pi}$· ἔςι γὰρ (§. 79.) $NM^2 = \pi\chi + \frac{1}{4}\pi\pi$. Οὐκȣ̃ν $4\,NM^2 = 4\pi\chi + \pi\pi$, ϗ $4\,NM^3 = (4\pi\chi+\pi\pi)\cdot\sqrt{\pi\chi+\frac{1}{4}\pi\pi}$· ἔςι δὲ $\sqrt{\pi\chi+\frac{1}{4}\pi\pi} = \sqrt{\frac{4\pi\chi}{4}+\frac{\pi\pi}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot 4\pi\chi + \frac{1}{4}\pi\pi} = \sqrt{\frac{1}{4}(4\pi\chi+\pi\pi)} = \frac{1}{2}\sqrt{4\pi\chi+\pi\pi}$· ἄρα $4NM^3 = (4\pi\chi+\pi^2)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4\pi\chi+\pi\pi}$, ϗ $\frac{4NM^3}{\pi\pi} = \frac{(4\pi\chi+\pi\pi)\cdot\sqrt{4\pi\chi+\pi\pi}}{2\pi\pi}$. Ἐν δὲ ταῖς λοιπαῖς τῶν τομῶν ἔτι μᾶλλον σύνθετοι γενήσονται οἱ τύποι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 150.

Σχ. 13. Τὰς Κωνικὰς Τομὰς τετραγωνίζειν.

ΛΥΣΙΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ.

Κείσθω πρὸς τετραγωνισμὸν τὸ χωρίον ΣνΜΠ, τῆς τῶν Ἀποτετμημένων ἀρχῆς τιθεμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς Σ. Ἔςιν ἂν (§. 60.) $\Pi M = y = \sqrt{\pi\chi}$. Τεθέντος δὲ $\pi = 1$, ἔσεται $y = \sqrt{\chi}$, τετέςιν $y = \chi^{\frac{1}{2}}$. Τοιγαρῶν ὅπως ἂν ἀποληφθείη τὸ ἄθροισμα τῶν μεταξὺ Σ, ϗ ΠΜ Τεταγμένων, συναπτέον τὴν σειρὰν $1^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}}, 4^{\frac{1}{2}}, 5^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots \chi^{\frac{1}{2}}$. Ἀλλὰ ταύτης τὸ ἄθροισμα (Ἀλγβ. §. 575.) ὑπάρχει

$$\frac{\chi^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\chi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}\chi^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{\chi^3} = \tfrac{2}{3}\chi\sqrt{\chi},$$ εἴτ'

ἂν (ἐπεὶ $y = \sqrt{\chi}$) $= \frac{2}{3}\chi y$. Τὸ ἄρα παραβολικὸν χωρίον ΣΜΠ δυσὶν ἰσᾶται τριτημορίοις τᾶ ἔκτε τῆς Ἀποτετμημένης ϗ τῆς Τεταγμένης γενομένε, εἴτ' ἂν τᾶ ἐμβαδᾶ τᾶ κατὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΣΠΜΛ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α΄.

§. 151.

Ἐὰν ἐπιζευχθῇ Εὐθεῖα ἡ ΣΜ, τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΣΜν ἔςαι $= \frac{1}{6}\chi y$. Ἐξισᾶται γὰρ τὸ αὐτᾶ ἐμβαδὸν τῷ ΣΠΜν ἀφαιρεθέντι τὸ τᾶ ὀρθογωνίᾳ τριγώνȣ ΣΠΜ ἐμβαδὸν, ὅ ἐςι ΣΜν $= \frac{2}{3}\chi y - \frac{1}{2}\chi y$ $= \frac{1}{6}\chi y$.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β'.

§. 152.

Τὸ τȣ̃ τμήματος ΣΜν ἐμβαδὸν ἴσον ἐςὶ τῷ τȣ̃ τριγράμμȣ Μν ΣΛ ἡμιεμβαδῷ· τȣτὶ γάρτοι (τὸ Μν ΣΛ) ἰσȣ̃ται τῷ $\frac{1}{2}\chi y$.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 153.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Π τῇ Ἑςίᾳ ἐπιπίπτῃ, ἔςι $\chi = \frac{1}{4}\pi$, ϗ $y = \frac{1}{2}\pi$. Διόπερ τοτηνικαῦτα ἐςὶ $\frac{2}{3}\chi y = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{12}\pi\pi$, τȣτέςι τὸ παραβολικὸν ἐμβαδὸν ἔσεται $\frac{1}{12}$ τȣ̃ ἀπὸ τῆς Παραμέτρȣ τετραγώνȣ.

ΛΥΣΙΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ.

§. 154.

Ἡ ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως ἐξίσωσις, τῶν Ἀποτετμημένων ἐκ τȣ̃ Κέντρȣ ἀρχὴν ποιȣμένων, ἐςὶν $yy = \frac{\alpha\alpha\beta\beta - \beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, εἴτ' ȣ̃ν $yy = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}$. $(\alpha\alpha -$

$\chi\chi$). Διὸ $y = \frac{\beta}{\alpha} . \sqrt{\alpha\alpha - \chi\chi}$. Οὐκοῦν Εὐθεῖα πᾶσα τεταγμένως ἀχθῆναι δυναμένη μεταξὺ τῆς ΓΛ, καὶ ΠΜ (σχ. 15.) ἔσεται (§. 17, καὶ Α'λγβ. §. 560.) $\frac{\beta}{\alpha} . \alpha - \frac{\beta}{\alpha} . \frac{\chi\chi}{2\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} . \frac{\chi^4}{8\alpha^3} - \frac{\beta}{\alpha} . \frac{\chi^6}{16\alpha^4} - \frac{\beta}{\alpha} . \frac{5\chi^8}{128\alpha^7}$ — κτλ., εἴτ' οὖν $\beta - \frac{\beta\chi\chi}{2\alpha\alpha} - \frac{\beta\chi^4}{8\alpha^4} - \frac{\beta\chi^6}{16\alpha^6} - \frac{5\beta\chi^8}{128\alpha^8}$ — κτλ. Τοιγαροῦν ἐὰν ἡ σειρὰ ἥδε τοσάκις συναφθῇ, ὅσαι μεταξὺ Γ, καὶ Π Α'ποτετμημέναι ὑπάρχειν δύνανται ἐπίδηλον δήπε, ὅτι τὸ ἁπασῶν τῶν Τεταγμένων ἄθροισμα ληφθήσεται, ὅ ἐςι τὸ ἐμβαδὸν ΓΛΜΠ. Ε'ὰν οὖν ἀντὶ πασῶν τῶν Α'ποτετμημένων τεθῇ ἡ ἄπειρος σειρὰ 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... χ, ἐπίδηλον.

Α'. Τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς $\beta - \frac{\beta\chi\chi}{2\alpha\alpha} - \frac{\beta\chi^4}{8\alpha^4}$ — κτ. ληφθείσης τοσάκις, ὅσαι αἱ Α'ποτετμημέναι, εὑρίσκεσθαι, εἴγε τεθείη $\beta\chi\chi$, εἴτ' οὖν $\beta\chi$.

Β'. Τὸ ἄθροισμα ἁπάντων τῶν δευτέρων ὅρων $-\frac{\beta\chi\chi}{2\alpha\alpha} = -\frac{\beta}{2\alpha\alpha}$ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ὅρων τῆς ἀπείρȣ σειρᾶς 1. 2. 3. 4. 5. 6. . . . . . χ, ὅπερ ἐςὶν (Ἀλγεβ. §. 574.) ἴσον $\frac{\chi^3}{3}$. Δῆλον ȣ̓̃ν, τὸ τῶν δευτέρων ὅρων ἄθροισμα εἶναι $-\frac{\beta\chi^3}{6\alpha\alpha}$.

Γ΄. Τὸ πάντων τῶν τρίτων ὅρων $-\frac{\beta\chi^4}{8\alpha^4}$ ἄθροισμα ἐξισȣ̃σθαι τῷ γινομένῳ ὑπὸ τȣ̃ $-\frac{\beta}{8\alpha^4}$, ϰ̀ τȣ̃ ἀθροίσματος ἁπασῶν τῶν τετάρτων δυνάμεων τῶν ἀπὸ τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς 1. 2. 3. 4. 5. 6. . . . . . . χ, ὅπερ ἐςὶν (Ἀλγέβ. §. 575.) $=\frac{\chi^5}{5}$. Τὸ ἄρα τῶν τρίτων ὅρων ἄθροισμά ἐςιν $=\frac{\beta\chi^5}{40\alpha^4}$. Κατὰ ταὐτὰ δὴ εὑρίσκεται ϰ̀ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν τετάρτων ὅρων $-\frac{\beta\chi^6}{16\alpha^6}$, ἴσον $-\frac{\beta}{16\alpha^6}\cdot\frac{\chi^7}{7}=$ $-\frac{\beta\chi^7}{112\alpha^6}$. Ἔτι δὲ ϰ̀ τὸ ἄθροισμα τῶν πέμπτων ὅρων $=-\frac{5\beta\chi^9}{1152\alpha^8}$, ϰτλ. Ὥςε τὸ ΓΛΜΠ χωρίον δηλωθήσεται διὰ τῆς ἀπείρȣ σειρᾶς $\beta\chi$ —

$$\frac{\beta\chi^3}{6\alpha\alpha} - \frac{\beta\chi^5}{40\alpha^4} - \frac{\beta\chi^7}{112\alpha^6} - \frac{5\beta\chi^9}{1152\alpha^8} - \frac{7\beta\chi^{11}}{2816\alpha^{10}}$$

$- \dfrac{21\beta\chi^{13}}{13312\alpha^{12}} -$ κτλ, ἥςπερ ἡ σύναψις· ἐπεὶ μέχρι ϰ͂ νῦν ἐν πεπερασμένοις ὅροις ὀχ εὕρηται, ταύτῃ δὴ ὁ κατὰ τὴν Ἔλλειψιν τετραγωνισμὸς εἰςέτι ἐκ ἔγνωςαι.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 155.

Ἐὰν τεθῇ $\chi = \alpha$, γενομένης τῆς ἀμοιβῆς, ἡ σειρὰ τρέπεται εἰς τὴν $\alpha\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta - \frac{1}{40}\alpha\beta - \frac{1}{112}\alpha\beta -$ κτλ, ἴσην τῷ χωρίῳ ΓΛΜΣ τεταρτημορίῳ τῆς Ἐλλείψεως, ϰ͂ ἣν α, ϰ͂ β ὑποτεθῶσιν ὁλοσχερεῖς Ἄξονες, ἡ αὐτὴ σειρὰ ὅλον τὸ κατὰ τὴν Ἔλλειψιν ἐμβαδὸν ἐπεμφαίνει.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 156.

Ἐὰν τεθῇ $\alpha = \beta$, ἡ μὲν Ἔλλειψις εἰς κύκλον τραπήσεται, ἡ δ' ἀνωτέρω σειρὰ εἰς τὴν $\alpha\alpha - \frac{1}{6}\alpha\alpha - \frac{1}{40}\alpha\alpha - \frac{1}{112}\alpha\alpha -$ κτλ. Διόπερ αὕτη τὸ τῦ κύκλυ τεταρτημόριον παρίςησιν, ἣ καὶ ὅλον τὸν κύκλον ὑποτεθείσης τῆς ὅλης διαμέτρου $=\alpha$.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 157.

Δῆλον ἄρα ἐντεῦθεν, ὅτι τὸ ἐλλειπτικὸν ἐμβαδόν ἐστι πρὸς τὸ ἐμβαδὸν κύκλου καταγραφέντος ἐπὶ τοῦ μείζονος Ἄξονος, ὡς $\alpha\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta - \frac{1}{40}\alpha\beta$ — κτλ. πρὸς $\alpha\alpha - \frac{1}{6}\alpha\alpha - \frac{1}{40}\alpha\alpha$ — κτλ, εἴτ' οὖν ὡς $\alpha\beta$ πρὸς $\alpha\alpha$, τουτέστιν ὡς β πρὸς α, ὅ ἐστιν ὡς ὁ ἐλάσσων Ἄξων πρὸς τὸν μείζονα. Ἢν δ' ὁ Κύκλος καταγραφῇ ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος Ἄξονος, ἔσεται τὸ κυκλικὸν ἐμβαδὸν πρὸς τὸ τῆς Ἐλλείψεως, ὡς ὁ ἐλάσσων Ἄξων πρὸς τὸν μείζονα.

§. 158.

Παραπλησίως ἡ τοῦ Κύκλου μερὶς ΓΠΝΟ ἐστὶ πρὸς τὴν τῆς Ἐλλείψεως μερίδα ΓΠΜΛ, ὡς ὁ μείζων Ἄξων πρὸς τὸν ἐλάσσω, τουτέστιν ὡς α πρὸς β. Τῆς μὲν γάρ τοι τὸ ἐμβαδὸν ἐμφαίνεται διὰ τῆς σειρᾶς $\alpha\chi - \frac{\alpha\chi^3}{6\alpha\alpha} - \frac{\alpha\chi^5}{40\alpha^4}$ — κτ. τῆς δὲ, ὑπὸ τῆς $\beta\chi - \frac{\beta\chi^3}{6\alpha\alpha} - \frac{\beta\chi^5}{40\alpha^4}$ — κτλ. Ταὐτὸ δὴ τοῦτο κρατεῖ καὶ περὶ τῶν Ἐμβαδῶν ΠΝΣ, ΠΜΣ.

ΣΧΟ´ΛΙΟΝ.

§. 159.

Ταυτὶ πάντα λίαν εἰσὶ σαφῆ. εἴγε τὰ τοιάδε κυκλικὰ ἐμβαδὰ τὸ ἄθροισμα εἰσὶ τῶν ἐν αὐτοῖς Τεταγμένων, ὧν ἑκάστη (§. 93.) πρὸς ἑκάστην συστοιχῦσαν τῶν ἐν τῇ Ἐλλείψει (ὧν τὸ ἄθροισμα ἐμφαίνει ὡσαύτως τὰ ἐλλειπτικὰ ἐμβαδὰ) λόγον ἔχει, ὃν ὁ μείζων Ἄξων πρὸς τὸν ἐλάσσονα.

ΠΟ´ΡΙΣΜΑ Δ´.

§. 160.

Ἐὰν ἀπό τινος σημείȣ Α ληφθέντος ἐπὶ τȣ͂ Ἄξονος τῆς ἤτοι ἐγγεγραμμένης, ἢ περιγεγραμμένης τῷ κύκλῳ Ἐλλείψεως ἐπιζευχθῶσιν ἐπὶ τὰ τῆς κοινῆς Τεταγμένης ΠΝ πέρατα αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, ΑΝ, τὸ ἐμβαδὸν τȣ͂ κυκλικȣ͂ Τομέως ΣΑΝ πρὸς τὸ τȣ͂ ἐλλειπτικȣ͂ ΣΑΜ λόγον ἔχει, ὃν ὁ Ἄξων, ἐφ' ȣ͂ καταγέγραπται ὁ κύκλος πρὸς τὸν ἕτερον Ἄξονα. Ἔςι μὲν γὰρ τὸ κυκλικὸν ἐμβαδὸν ΣΠΝ πρὸς τὸ ἐλλειπτικὸν ΣΜΠ ἐν τῷ εἰρημένῳ λόγῳ, ὡς δέδεικται (§. 158.), ἔςι δὲ καὶ τὸ τȣ͂ τριγώνȣ ΠΑΝ ἐμβαδὸν πρὸς τὸ τȣ͂ τριγώνȣ ΠΑΜ τȣ͂ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΠ, ὡς ἡ ΠΝ πρὸς τὴν ΠΜ, ἢ (§. 93.) ὡς ἡ ΓΟ πρὸς τὴν ΓΛ, ὅ ἐςιν, ὡς ὁ Ἄξων ὁ ὢν διάμετρος τȣ̃ κύκλȣ πρὸς τὸν ἕτερον Ἄξονα. Καὶ τὰ ὁλόκληρα ἄρα ἐμβαδὰ ΣΑΝ, ΣΑΜ ἐν τῷ αὐτῷ ὑπάρχȣσι λόγῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε´.

§. 161.

Τὸ τῆς Ἐλλείψεως ἐμβαδὸν ἴσον ἐςι τῷ ἐμβαδῷ κύκλȣ ἔχοντος Διάμετρον μέσην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν τῆς Ἐλλείψεως ἀξόνων. Κληθείσης γάρ τοι τῆς τȣ̃ κύκλȣ διαμέτρȣ δ, ἔςαι $\delta\delta = \alpha\beta$ (Ἀλγβ. §. 500.) ἀλλὰ τὸ μὲν τȣ̃ κύκλȣ ἐμβαδὸν ἐμφαίνει ἡ (§. 155.) $\delta\delta - \frac{1}{6}\delta\delta - \frac{1}{40}\delta\delta -$ κτλ, τὸ δὲ τῆς Ἐλλείψεως ἡ $\alpha\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta - \frac{1}{40}\alpha\beta -$ κτλ. ἴσα ἄρα ἀλλήλοις.

ΠΟΡΙΣΜΑ ς´.

§. 162.

Τὰ δυεῖν Ἐλλείψεων ἐμβαδά εἰσι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ὑπὸ τῶν κατ' αὐτὰς Ἀξόνων Ὀρθογώνια. Ἔςωσαν γὰρ τῆς μὲν Ἄξονες οἱ α, β, τῆς δὲ, οἱ γ, δ. Τῆς μὲν ȣ̃ν τὸ ἐμβαδὸν ἔςαι $\alpha\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta -$

$\frac{1}{40}$ αβ — κτ, τῆς ἑτέρας δὲ, γδ — $\frac{1}{6}$ γδ — $\frac{1}{40}$ γδ — κτ. ὧν ὁ λόγος ἐπιδήλως ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῶν γινομένων αβ πρὸς γδ.

ΛΥΣΙΣ ἐπὶ τῆς ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ.

§. 163.

Κληθήτω ὁ πλάγιος Ἡμιάξων ΣΓ = β, ϗ ΓΛ = α, ϗ ἡ Ἀποτετμημένη ΓΗ = χ, ϗ ἡ Τεταγμένη ΜΗ = y. Ἔςαι ὖν (§. 94.) $yy = \frac{\alpha\alpha\beta\beta + \beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, εἴτ' ὖν $yy = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}.(\alpha\alpha + \chi\chi)$ Σχ. 12.

ἄρα $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha\alpha + \chi\chi}$. Τοιγαρῦν ἑκάςη τῶν μεταξὺ ΓΣ, καὶ ΗΜ. Τεταγμένων ἐςὶν $= \beta + \frac{\beta\chi\chi}{2\alpha\alpha} - \frac{\beta\chi^4}{8\alpha^4} + \frac{\beta\chi^6}{16\alpha^6} - \frac{5\beta\chi^8}{128\alpha^8} +$ τλ. Ἐπεὶ δὲ αὕτη ἡ σειρὰ ὐδενὶ τῆς τῶν ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως Τεταγμένων εὑρεθείσης διενήνοχεν, ὅτι μὴ μόνῳ τῷ τῶν ἀρτίων ὅρων σημείῳ, ταύτῃτοι συλλογισμῦ ἐφόδῳ παραπλησίᾳ εὑρεθήσεται.

Α΄. Τὸ τῦ ὑπερβολικῦ ἐμβαδῦ χωρίον ἐκδηλῦϑαι διὰ τῆς σειρᾶς $\beta\chi + \frac{\beta\chi^3}{6\alpha\alpha} - \frac{\beta\chi^5}{40\alpha^4} + \frac{\beta\chi^7}{112\alpha^6} - \frac{5\beta\chi^9}{1152\alpha^8} +$ κτλ.

Β΄. Ἐξαιρȣμένȣ τȣ̃ κατὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΣΗΙ $= \beta\chi$ χωρίȣ, καταλείπεσθαι τὸ ἐμβαδὸν τȣ̃ ὑπερβολικȣ̃ τριγράμμȣ ΣΙΜ $= \frac{\beta\chi^3}{6\alpha\alpha} - \frac{\beta\chi^5}{40\alpha^4} + \frac{\beta\chi^7}{112\alpha^6} -$ κτλ.

Γ΄. Ἐὰν ἐν τῇ Ἰσοσκελεῖ Ὑπερβολῇ, ἐν ᾗ $\beta = \alpha$, τεθῇ $\alpha = \chi$, ἔσεται $\alpha\alpha + \frac{1}{6}\alpha\alpha - \frac{1}{40}\alpha\alpha + \frac{1}{112}\alpha\alpha -$ κτλ. Οὐκȣ̃ν ἡ μεταξὺ Ἰσοσκελȣ̃ς Ὑπερβολῆς, ϰ̀ ἑτέρας ἀνίσȣς Ἄξονας ἐχȣ́σης ἀναλογία ὡσαύτως ἂν περαιτέρω προαχθείη, ὡς ϰ̀ ἀνωτέρω μεταξὺ Κύκλȣ, ϰ̀ Ἐλλείψεως γέγονεν.

Ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς μεταξὺ τῶν Ἀσυμπτώτων.

§. 164.

Σχ. 14. Κείσθω πρὸς τετραγωνισμὸν τὸ χωρίον ΑΡΜΨ ταῖς δυσὶ Τεταγμέναις ΑΨ, ΡΜ ἐμπεριλαμβανόμενον. Καὶ δὴ γενέσθω ἡ τῶν Ἀποτετμημένων Ἀρχὴ ἀπὸ τȣ̃ Ρ, ϰ̀ ἔσω ΓΤ $= \alpha$, ϰ̀ ΓΡ $= \beta$, ϰ̀ ΡΑ

$=\chi$, ϗ ΑΨ $=y$. Ἔςιν ȣ̃ν (§. 132.) ΓΑ.ΑΨ $=$ ΓΥ², τȣτέςι $\beta y + \chi y = \alpha\alpha$· ἄρα $y = \frac{\alpha\alpha}{\beta+\chi} =$

$$\frac{\alpha\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\alpha\chi}{\beta\beta} + \frac{\alpha\alpha\chi\chi}{\beta^3} - \frac{\alpha\alpha\chi^3}{\beta^4} + \frac{\alpha\alpha\chi^4}{\beta^5} - \text{κτλ.}$$

(Ἀλγβ. §. 559.). Τὸ ȣ̃ν ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ὅρων τῆς σειρᾶς ταύτης τοσάκις λιφθείσης, ὅσοι ὅροι εἰσὶν ἐν τῇ ἀπείρῳ σειρᾷ 1. 2. 3 4. 5. 6. . . . . χ παρέξει τὴν ἄπειρον σειρὰν $\frac{\alpha\alpha\chi}{\beta} - \frac{\alpha\alpha\chi^2}{2\beta\beta} + \frac{\alpha\alpha\chi^3}{3\beta^3} - \frac{\alpha\alpha\chi^4}{4\beta^4} +$ κτλ ἴσην τῷ ἐμβαδῷ ΑΜΡΨ. Συγκλίνει δὲ τοσȣ́τῳ τάχιον αὕτη ἡ σειρὰ, ὅσῳ ἂν ἡ χ ᾖ ἐλάσσων τῆς β (Ἀλγβ. §. 569.)

ΠΟ´ΡΙΣΜΑ.

§. 165.

Ἐὰν τεθῇ $\beta=\alpha$, τȣτέςιν ἐὰν ἡ τῶν Ἀποτετμημένων Ἀρχὴ διορισθῇ κατὰ τὸ Υ, ἔσεται τὸ χωρίον ΣΥΑΨ $= \alpha\chi - \frac{1}{2}\chi\chi + \frac{1}{3}\frac{\chi^3}{\alpha} - \frac{1}{4}\frac{\chi^4}{\alpha\alpha} + \frac{1}{5}\frac{\chi^5}{\alpha^3} -$ κτλ, ϗ τεθέντος $\alpha = 1$ τραπήσεται ἡ σειρὰ εἰς τὴν $\chi - \frac{1}{2}\chi\chi + \frac{1}{3}\chi^3 - \frac{1}{4}\chi^4 +$ κτλ.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

§. 166.

Ἔςω ΓΥ $=1$ ᾗ αἱ Ἀποτετμημέναι ΓΡ, ΓΑ, Γτ ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ. ᾗ ΓΑ $=\zeta$, ᾗ Ατ $=\xi$. ἔσεται ὖν $\zeta=\beta+\chi$, ᾗ Γτ $=\zeta+\xi$: Οὐκῦν $\beta:\beta+\chi::\zeta:\zeta+\xi$, ᾗ ἐκ τῦ ἀκολύθυ (§. 446. Ἀλγβ.) $\frac{\chi}{\beta}=\frac{\xi}{\zeta}$. Ἐπίδηλον τοίνυν τὸ ἐμβαδὸν ΡΜΨΑ τὸ ἰσύμενον τῇ σειρᾷ $\frac{\chi}{\beta}-\frac{\chi^2}{2\beta^2}+\frac{\chi^3}{3\beta^3}-\frac{\chi^4}{4\beta^4}+$ κτ. ἐξισῦσθαι ᾗ τῷ ἐμβαδῷ ΑΨ κτ, ὅπερ ἐμφαίνει ἡ σειρὰ $\frac{\xi}{\zeta}-\frac{\xi^2}{2\zeta^2}+\frac{\xi^3}{3\zeta^3}-\frac{\xi^4}{4\zeta^4}+$ κτ, εὑρεθεῖσα μεθόδῳ τῇ αὐτῇ, ἧπερ εὕρηται ᾗ ἡ ἐν §. 164. Ἴσα ἄρα ἀλλήλοις τὰ ὑπερβολικὰ ἐμβαδὰ, ὧν αἱ βάσεις εἰσι διαφοραὶ τῶν ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ ληφθεισῶν Ἀποτετμημένων. Ἐξ ὖ ἄρα ᾗ τυτὶ καταφαίνεται, ὡς ἐὰν αἱ ΓΥ, ΓΡ, ΓΑ, Γτ τοιαίδε Ἀποτετμημέναι ὑπάρχωσιν, οἷαι παριςῶν σειρὰν γεωμετρικῆς προόδυ τῆς $\div\!\!\cdot\; \kappa^0.\ \kappa^1.\ \kappa^2.\ \kappa^3.$, ἐπεὶ τὰ ἐπὶ τῶν βάσεων ΥΡ, ΡΑ, Ατ εἴσιν ἀλλήλοις ἴσα, τὰ ἐπὶ τῶν βάσεων ΥΡ, ΥΑ, Υτ ἐμβαδὰ λόγον ἔχυσα πρὸς ἄλληλα, ὃν οἱ ἀριθμοὶ 1. 2. 3. Εἰσὶν ἄρα πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ τῶν ποσοτήτων ΓΡ, ΓΑ, Γτ Ἐκθέται, ϗ ἑπομένως (Ἀλγβ. §. 521.) ὡς οἱ Λογάριθμοι τῶν αὐτῶν. Τοιγαροῦν οἱ Λογάριθμοι διὰ τῶν ὑπερβολικῶν τῶνδε ἐμβαδῶν εὑρεθῆναι ἔχουσι, ϗ τ'ἀνάπαλιν.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄.

§. 167.

Ἐὰν ζητηθῇ τὸ μεταξὺ τῆς Ἀσυμπτώτου ΓΒ, ϗ μέρους τῆς ἑτέρας Ἀσυμπτώτου ΓΡ, ϗ τῆς Τεταγμένης ΜΡ, ϗ τοῦ ἀπείρου κλωνὸς ΜΣ ἐμπεριλαμβανόμενον Ἔμβαδον, ἐπείπερ $\alpha\alpha = \chi y$ (§. 132.) εἰ τεθῇ α (τουτέστι ΓΥ) $= 1$, ἔσεται $y = \frac{1}{\chi} = \chi^{-1}$. ἔστι δὲ (Ἀλγβ. §. 575.) τὸ πάντων τῶν χ^{-1} ἄθροισμα $= \frac{\chi^{-1+1}}{-1+1} = \frac{\chi^{0}}{0} = \frac{1}{0}$. Ἀλλ' ἐπείπερ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τῆς 1 διὰ τοῦ 0 πηλίκον ἐστὶν ἄπειρον· ϗ τὸ χωρίον ἐκεῖνο ἄρα ὡσαύτως ἄπειρον ἔσεται.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 186.

Λοιπὸν δὲ ἤδη ἐξετάσαι ὅπως αἱ μέχρι τᾶδε θεωρηθεῖσαι Καμπύλαι ἐκ τῆς τᾶ Κώνα τομῆς ἐξίασιν, ὅ ἐςιν, εἴπερ τῳόντι εἰσι Κωνικαὶ Τομαί. Ἐπεὶ δ' ἓν ὁ ὀρθὸς Κῶνος τετραχῶς ἂν ἔχοι διχῆ τμηθῆναι, ταύτητοι ϗ ἡμεῖς ἐν τέσσαρσι θεωρήμασι τοῖς ἑπομένοις τὰς τέσσαρας αὐτᾶ Τομὰς, ϗ τὰς ἀπ' αὐτῶν προκυπτάσας Καμπύλας ἐκθησόμεθά τε ϗ ἀποδείξομεν.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄.

§. 169.

Ἐὰν ὁ Κῶνος δι' ἐπιπέδα Παραλλήλα τῇ βάσει αὐτᾶ τμηθῇ, καμπύλη ἡ τὸ ἑκατέρας τᾶ Τετμημένα μέρας ἐπίπεδον περιέχασα ἔσεται Κύκλος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔςι γάρ τοι τὸ τὸν Κῶνον τέμνον ἐπίπεδον ἓν τῶν ἐκείνα ςοιχείων, ἃ πάντα κύκλας ὑπάρχειν ἐπίδηλον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄.

§. 170.

Ἐὰν ὁ Κῶνος ἐπιπέδῳ οἱῳδήποτε τῷ ΑΒΓ ἀπὸ τῆς Κορυφῆς διὰ τᾶ Ἄξονος αὐτᾶ διήκοντι, ϗ ἐπὶ τῆς Βάσεως αὐτᾶ Καθέτῳ ἐπινοουμένῳ τμηθῇ, τμηθῇ δὲ ϗ ἑτέρῳ Ἐπιπέδῳ τῷ Σπ Παραλλήλῳ μιᾷ τινι τῶν τᾶ Κώνα πλευρῶν ΑΒ, εἴτ᾽ ἂν συνιςῶντι μετὰ τᾶ τῆς Βάσεως ἐπιπέδα τὴν ὑπὸ ΣπΓ γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τᾶ Κώνα, ϗ τᾶ τῆς Βάσεως Ἄξονος περιεχομένῃ, τηνικαῦτα ἡ ἀπέραντος Καμπύλη μΜΣΜμ (εἰ γὰρ ἐπ᾽ ἄπειρον προήγετο ὁ Κῶνος, ὡσαύτως ἂν ἔτεμνεν αὐτὸν τὸ ἐπίπεδον) ἡ τὴν τομὴν περιέχουσα ἔσεται Παραβολή. Σχ. 21.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔςω ἐπίπεδον τῇ βάσει τᾶ Κώνα παράλληλον, ᾶ ἡ Τομὴ ἔσεται Κύκλος ὁ ΕΔΜ. Ἐπεὶ ἂν οἱ κύκλοι ΕΜΔ, ΒμΓ τέμνονται ὑπὸ τῆς Καμπύλης κατὰ τὰς ΜΜ, μμ, προσέτι δὲ ϗ ὑπὸ τȣ̃ ἐπιπέδȣ ΑΒΓ, κατὰ τὰς ΕΔ, ΒΓ: Δῆλον ἄρα τὰς ΜΜ, μμ ἀλλήλαις εἶναι παραλλήλȣς, ϗ δὴ ϗ τὴν διάμετρον ΕΔ τῇ διαμέτρῳ ΒΓ. Καὶ ἐπείπερ ἐξ ὑποθέσεως τὸ Ἐπίπεδον ΑΒΓ πρὸς ὀρθάς ἐςι τῷ τέμνοντι Ἐπιπέδῳ, ἔσεται ἄρα ϗ μμ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΓ, ὡσαύτως ϗ ἡ ΜΜ τῇ ΕΔ. Ἐπεὶ δὲ προσέτι αἱ Διάμετροι ΕΔ, ΒΓ ὑπὸ τȣ̃ τῆς Τομῆς Ἄξονος Σπ διατέμνονται κατὰ τὰ Π, π, ταύτῃ τοι ὁ Ἄξων ἐν τῷ αὐτῷ ὑπάρχει Ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ ϗ αἱ Διάμετροι (γεωμετρ. §. 242.), τȣτέςιν ἐν τῷ Ἐπιπέδῳ ΑΒΓ. Ἐφεςήκασιν ἄρα αἱ ΜΜ, μμ ὡσαύτως Κάθετοι ϗ τῇ Σπ. Οὐκȣ̃ν αἱ πμ, ΠΜ εἰσι κοιναὶ Τεταγμέναι τῶν τε Κύκλων βμΓ, ΕΜΔ, ϗ τῆς Τομῆς μ Σμ. Ἀλλ' ἐςι $\pi\mu^2 = \beta\pi . \pi\Gamma$, ϗ $\Pi M^2 = E\Pi . \Pi\Delta$. ἄρα $\pi\mu^2 : \Pi M^2 :: \beta\pi . \pi\Gamma : E\Pi . \Pi\Delta$. Ἀλλ' ἐπείπερ αἱ ΑΒ, Σπ εἰσὶ παράλληλοι, ταύτῃ τοι $E\Pi = \beta\pi$. ἄρα $\pi\mu^2 : \Pi M^2 :: \pi\Gamma : \Pi\Gamma$. Οὕτων δὲ τῶν τριγώνων ΣΠΔ, ΣΠΓ ὁμοίων ἀλλήλοις, ἐςι $\pi\Gamma : \Pi\Delta :: \Sigma\pi : \Sigma\Pi$. Οὐκȣ̃ν ϗ $\pi\mu^2 : \Pi M^2 :: \Sigma\pi : \Sigma\Pi$. Ἐντεῦθεν ἄρα ἐπίδηλον, ὅτι ἡ Καμπύλη μ Σμ τοιάνδε Φύσιν ἔχει, ὥςε τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων αὐτῆς τετράγωνα λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ αὐτῶν Ἀποτετμημέναι. Οὐκȣ̃ν (§. 62.) ὑπάρχει Παραβολή.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Γ΄.

§. 171.

Ἐὰν ὁ Κῶνος οἱωδήποτε Ἐπιπέδῳ τῷ ΑΒΓ διὰ τῆς Κορυφῆς, καὶ τȣ Ἄξονος αὐτȣ διήκοντι, καὶ πρὸς τὴν βάσιν αὐτȣ Καθέτῳ ἐφεςηκότι τμηθῇ, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ Ἐπιπέδῳ τῷ Σπ, ὃ μήτε τῇ βάσει, μήτε τινὶ τῶν τȣ Κώνȣ πλευρῶν παράλληλον εἴη, εἴη δὲ μᾶλλον προσκεκλιμένον τῷ τῆς βάσεως Ἐπιπέδῳ ΒΓ, ἢ ταῖς τȣ Κώνȣ πλευραῖς, τηνικαῦτα ἑκατέρα μὲν τῶν τȣ Κώνȣ πλευρῶν τμηθήσεται τῷδε τῷ Ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ τὴν Τομὴν περατȣσα ἄπειρος Καμπύλη, ἡ καὶ πρὸς ἑαυτὴν ἐπαναχαμπτȣσα, ἔσεται Ἔλλειψις. Σχ. 22.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἤχθωσαν Ἐπίπεδα δύω τῇ τȣ Κώνȣ βάσει παράλληλα, ἐξ ὧν προκύψȣσι Κύκλοι δύω οἱ ΕμΖ, ΘΜΗ τέμνοντες τὸ τῆς Καμπύλης ἐπίπεδον. Δείξει ȣ̓ν παραπλησίᾳ τῇ ἀνωτέρῳ δείκνυται τὰς μπ, ΜΠ, κοινὰς εἶναι Τεταγμένας ἔντε τῷ κύκλῳ, κἀν τῇ ἐκ τῆς τομῆς Καμπύλῃ, καὶ ἐκ τῆς τῶν κύκλων φυσεως ὑπάρχειν μπ²: ΜΠ² :: Επ . πΖ : ΘΠ . ΠΗ. Ἐπεὶ δὲ τὰ τρίγωνα ΣΠΗ, ΣπΖ, σΕπ, σΘΠ εἰσι ὅμοια, ἔσεται προσέτι ϗ πΖ : ΠΗ :: Σπ : ΣΠ, ϗ Επ : ΘΠ :: σπ : σΠ. Οὐκȣ̃ν (Ἀλγβ. §. 491.) Επ . πΖ : ΘΠ . ΠΗ :: σπ . Σπ : σΠ . ΣΠ, ϗ ἑπομένως πμ² : ΠΜ² :: σπ . Σπ : σΠ . ΣΠ. Ἔςιν ἄρα ἡ τομὴ σΜΣ φύσεως τοιᾶς δε, ὥςε τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐν αὐτῇ τετράγωνα λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ ὑπὸ τῶν συςοιχȣσῶν αὐταῖς Ἀποτετμημένων παραγόμενα, τȣτέςιν (§. 61,) ὑπάρχει Ἔλλειψις.

ΣΧΌΛΙΟΝ.

§. 172.

Ταυτὰ δειχθήσεται, κἂν τὸ ςερεὸν ΑΒΓ Κύλινδρος ὑπάρχῃ ὀρθός.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δʹ.

§. 173.

Σχ. 23. Ἐὰν ὁ Κῶνος ȣ̔́τω τμηθῇ, ὥςε τὸ τέμνον ἐπίπεδον μᾶλλον προσκεκλίσθαι ταῖς τȣ̃ Κώνȣ πλευραῖς, ἢ τῇ βάσει αὐτȣ̃, τηνικαῦτα ἅπασαι μὲν ἑκατέρωσε αἱ τȣ͂ Κώνȣ πλευραὶ ἐτμηθήσονται, ἡ δὲ τὴν τομὴν περιέχȣσα ἀπέραντος Καμπύλη μΜΣ ἔσεται Υ῾περβολή.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ε᾿πειδήπερ ἐκ τῆς φύσεως τῶν Κύκλων ΕΜΔ, ΒμΓ ἐςὶ $\pi\mu^2 : \Pi M^2 :: B\pi . \pi\Gamma : E\Pi . \Pi\Delta$, ϗ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΔΠΣ, ΓπΣ, πσΒ, ΠσΕ ἐςὶ $\pi\Gamma : \Pi\Delta :: \pi\Sigma : \Pi\Sigma$, ϗ $\pi B : \Pi E :: \pi\sigma : \sigma\Pi$, ϗ συνθέσει τῶν λόγων, $\pi\Gamma . \pi B : \Pi\Delta . \Pi E :: \pi\Sigma . \pi\sigma : \Pi\Sigma . \sigma\pi$. Ε῎ςαι ἄρα ϗ $\pi\mu^2 : \Pi M^2 :: \pi\Sigma . \pi\sigma : \Pi\Sigma . \sigma\Pi$. ἰδίωμα δὲ τȣ͂το τῆς Υ῾περβολῆς (§. 61.)

ΣΧΟ´ΛΙΟΝ.

§. 174.

Ε᾿ὰν ἐπὶ τῆς τȣ͂ Κώνȣ κορυφῆς Α ἕτερος Κῶνος ὅμοιος καταςαθῇ, καὶ προαχθῇ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ϗ τόνδε κατὰ τὸ σ τεμεῖ. Εἰδ᾿ ἀμφότεραι αἱ Τομαὶ θεωρηθῶσιν, αἱ ἀντικείμεναι ληφθήσονται Υ῾περβολαί. Σχ. 23.

§. 175.

Ε᾿πίδηλον δὲ δήπȣ, ὡς ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ἐφεστήκῃ τῇ κωνικῇ βάσει, τὰς ἐξιούσας Τομὰς Ὑπερβολὰς ὑπάρχειν ἀνάγκη. Ἀλλ'. εἴπερ διὰ τῆς Κορυφῆς, ϗ ἅμα τȣ Ἄξονος διέλθῃ, τὰς Ὑπερβολικὰς Τομὰς εἰς Τρίγωνα εὐθύγραμμα, ἰσοσκελῆ, ϗ ὅμοια μετασχηματίζεσθαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

§. 176.

Φαίνεται δὴ τέως, ὡς ἐὰν διὰ τῆς τȣ Κώνȣ κορυφῆς Ἐπίπεδον παράλληλον τῷ τῆς τομῆς Ἐπιπέδῳ ἀχθῇ, ἐπιψαύσει μὲν τόδε τȣ Κώνȣ, ἡνίκ' ἂν ἡ Τομὴ ὑπάρχῃ Παραβολή· ἐκτὸς δὲ πεσεῖται τȣ Κώνȣ, ȣ̓́σης Ἐλλείψεως τῆς Τομῆς· ὅλον δὲ τέως ἐντὸς τȣ Κώνȣ πεσεῖται, Ὑπερβολῆς τῆς Τομῆς ὑπαρχȣ́σης. Ἐὰν προσέτι ὦσιν Ἐπίπεδα δύω ἑκατέρωθι τȣ Κώνȣ ἐπιψαύοντα κατ' εὐθείας, δι' ὧν ἂν ἐπίπεδόν τι διήκοι ἀγόμενον ἀπὸ τῆς τȣ Κώνȣ κορυφῆς παράλληλον τῷ τῆς Ὑπερβολῆς ἐπιπέδῳ, αἱ τῶν τοιῶνδε δυοῖν Ἐπιπέδων Διατομαὶ, καθ' ἃς κοινῇ διατέμνονται ὑπὸ τȣ τῆς Ὑπερβολῆς ἐπιπέδȣ προαχθέντος, ἔσονται τῆς Ὑπερβολῆς αἱ Ἀσύμπτωτοι. Ἐπειδὴ γὰρ τὰ Ἐπίπεδα ταῦτα πάντων τῶν τȣ Κώνȣ στοιχείων (ἅπερ δήπȣθεν κύκλοι τυγχάνȣσιν) ἐπιψαύȣσι κατὰ ση-

μεῖα κείμενα ἐπὶ τȣ͂ Ἐπιπέδȣ τȣ͂ παραλλήλȣ τῷ τῆς Ὑπερβολῆς Ἐπιπέδῳ, ταύτῃ τοι ἐν ȣ̓δενὶ ἑτέρῳ σημείῳ ἑκάςȣ αὐτῶν τῶν ςοιχείων ἐπιψαύσȣσιν. Οὐδεμία γάρ τοι Εὐθεῖα δύναται Κύκλȣ ἑνὸς ἐπιψαύειν ἐν σημείοις δυσὶν ἀλλήλων διεςηκόσιν. Οὐδέποτε ἄρα τὰ Ἐπίπεδα ταῦτα συμβαλȣ͂σι τῇ Ὑπερβολῇ, ἧς περ ἅπαντα τὰ σημεῖα ὑπάρχȣσιν ἐν Ἐπιπέδῳ, ὅ ἐςι παράλληλον τῷ, ἐφ' ȣ͂ ὑπάρχει τὰ σημεῖα, ἐν οἷς τὰ δύω Ἐπίπεδα ἐπιψαύει τȣ͂ Κώνȣ.

ΤΕΛΟΣ, ΚΑΙ ΤΩ ΘΕΩ ΧΑΡΙΣ.

Παροράματα.

Σελ.	ςίχ.	ἀντί	ἀνάγ.
6	3	ἄγε	ἤγε
32	14	ἰπὶ	ἐπί
84	11	δίσωσιν	δίδωσιν
93	4	ἀτό	ἀπό
112	16	δερτέρας	δευτέρας.
112	17	σιςοιχκσῶν,	συςοιχεσῶν
113	21	τετραγόνων	τετραγώνων
116	10	εἴσαι	ἴσαι
123	15	εἴνι τι	εἴη τι
127	9	Ὑπερβολῆς,	Ὑπερβολῆς

Ὀνόματα τῶν φιλογενῶν Συνδρομετῶν εἰς ἔκδοσιν τῆς παρούσης Βίβλου.

	Σώματα.
Ὁ θεοφιλέστατος καὶ ἐλλογιμώτατος Ἐπίσκοπος ἅγιος Ζητουνίου Ἱερόθεος ὁ ἐκ Κλινόβου	20
Ὁ θεοφιλέστατος καὶ μουσικώτατος Ἐπίσκοπος ἅγιος Γαρδικίου Ἀνανίας ὁ ἐκ Βυζαντίου	15
Ὁ πανιοσιώτατος Ἀρχιμανδρίτης τοῦ παναγίου Τάφου Γαβριὴλ ὁ ἐξ Ἄνδρου	10

Οἱ ἐν Τζαριτζάνῃ

Ὁ πανοσιώτατος ἐν πνευματικοῖς πατρᾶσι Γαβριὴλ ὁ ἐκ τῆς μονῆς τῶν Κανάλων	5
Ὁ αἰδεσιμολογιώτατος ἅγιος οἰκονόμος καὶ οἰκονομίδης Κωνσταντῖνος	6
Ὁ Αἰδεσιμώτατος ἅγιος Σκελλάριος Γεώργιος	6
Ὁ τοῦ ἁγίου Ἐλασσῶνος Ἱεροδιάκονος Διονύσιος	3
Ὁ χρησιμολογιώτατος Εὐστράτιος Ξεφτέρη	6
Ὁ χρησιμολογιώτατος χατζῆ Στέικος χ΄. Κυρίτζη	6
Ὁ χρησιμώτατος Δημήτριος χ΄. Ἀθανασίου	6
Ὁ αὐτάδελφος αὐτοῦ Γεώργιος χ΄. Ἀθανασίου	6
Ὁ χρησιμώτατος Θεόδωρος Γεωργίου Σκούρτου	3
Ὁ Κωνστάκης Πέλιου	2
Ὁ τιμιώτατος Κυριάκης χ΄. Νίκου	3
Ὁ τιμιώτατος Δημήτριος χ΄. Κοτοκόγλου	3
Ὁ χρησιμολογιώτατος Θεόδωρος χ΄. Φάραγκα	3

Σώματα.

Ὁ Ζώης Ἰατρὸς ὁ ἐκ Ζαγορίȣ	3
Ὁ ἡγȣ́μενος τῆς Μονῆς Ἀναλήψεως Παΐσιος	5
Ὁ ἐκ τῆς αὐτῆς μονῆς Ἰωσὴφ Ἱερομόναχος	3
Ὁ ἐκ τῆς αὐτῆς μονῆς Ἰωαννίκιος Ἱερομόναχος	3
Ὁ ἐκ τῆς Ἐλασσωνίτιδος Μονῆς Ἰατρο Ἱερομόναχος Κύριλλος.	4

Οἱ μαθηταὶ τῆς σχολῆς τῆς Τζαριτζάνης.

Αὐτὴ ἡ Σχολὴ διὰ τῶν ἀγρύπνων αὐτῆς ἐπιτρόπων	15
Ὁ λογιώτατος Ἱερομόναχος Γερμανὸς ὁ Σπαρμιώτης	5
Ὁ λογιώτατος Ἀλέξιος Θεοδώρȣ Ζαλοβίτȣ	2
Ὁ λογιώτατος Ἰωάννης Παπᾶ Ἀναςασίȣ Γρεβενίτης	5
Ὁ λογιώτατος Γεώργιος Παπᾶ Μηχαήλȣ Θετταλὸς	3
Ὁ λογιώτατος Ἰωάννης, ἀνεψιὸς τȣ̃ ἐν Λαρίσσῃ Παπᾶ Δέμȣ	2

Οἱ ἐν Λιβαδίῳ τῆς Ἐλασσῶνος.

Ὁ θεοφιλέςατος καὶ ἐλλογιμώτατος Ἐπίσκοπος ἅγιος Πέτρας Νεόφυτος	10
Ὁ λογιώτατος Ἱεροδιάκονος Ἱερώνυμος ὁ τῆς Ζάρκȣ διδάσκαλος	4
Ὁ τιμιώτατος Ἀναςάσιος χ. Ἰωαννάκη	3
Οἱ λογιώτατοι αὐτάδελφοι Ἀλέξιος καὶ Φωκᾶς οἱ τȣ̃ Καρακίτζȣ.	4
Ὁ τιμιώτατος Ἀναςάσιος Πυρίτζας	2
Ὁ λογιώτατος ἡγȣ́μενος τȣ̃ ἁγίȣ Ἀντωνίȣ τῶν Δεμηράδων Θεοφάνης	3

Οἱ Ἱερομόναχοι τῆς Μονῆς τοῦ Σπαρμοῦ.

Ὁ πανοσιώτατος ἡγούμενος Ζαχαρίας Ἱερομόναχος	5
Ὁ πανοσιώτατος πνευματικὸς Γεράσιμος	2
Ὁ πανοσιώτατος πνευματικὸς Νεόφυτος	2
Ὁ πανοσιώτατος Ἱερομόναχος Νικηφόρος	2

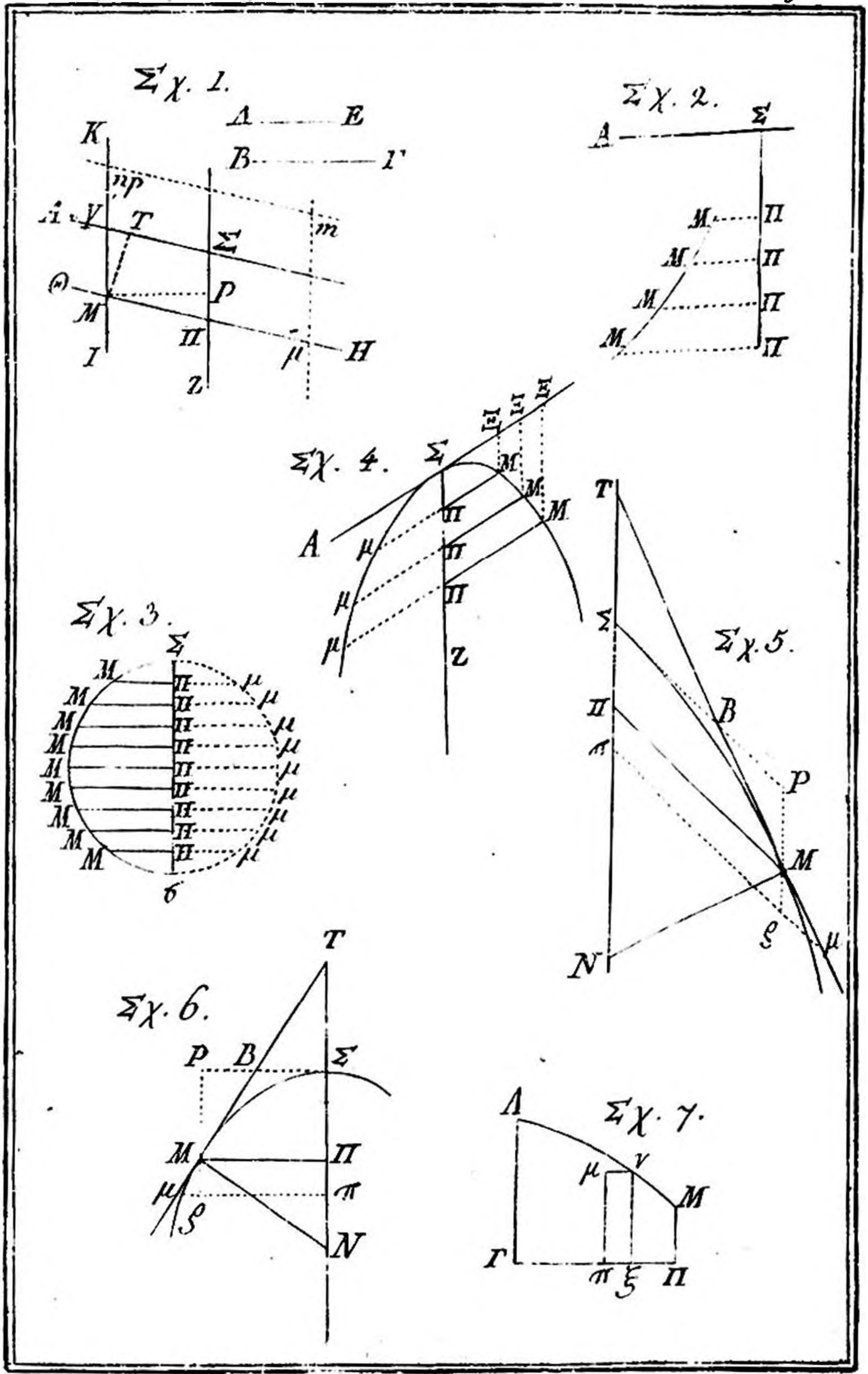
Οἱ ἐν Λαρίσσῃ.

Ὁ θεοφιλέστατος καὶ λογιώτατος Ἐπίσκοπος ὁ τοῦ Μητροπολίτου ἁγίου Λαρίσσης ἐπίτροπος ἅγιος Περιστερᾶς Παΐσιος	10
Ὁ πανοσιώτατος ἡγούμενος τῆς ἐν Σουλιτζάνῃ ὑπεραγίας Ἰωακεὶμ Ἱερομόναχος	2
Ὁ ἐκ τῆς αὐτῆς Μονῆς μουσικολογιώτατος Ἱερομόναχος Κωνσάντιος	2
Ὁ ἐκ τῆς αὐτῆς Μονῆς πανοσιώτατος Ἱερομόναχος Συμεὼν	3
Ὁ πανοσιώτατος χ". Παπᾶ Γαβριὴλ ὁ ἐκ Σελιτζάνης	2
Ὁ αἰδεσιμώτατος οἰκονόμος τῆς Λαρίσσης ὁ Λάσκαρις	2
Ὁ ῥεφερενδάριος Παπᾶ Κωνσαντῖνος	2
Ὁ Παπᾶ Θεόδωρος ὁ ἐκ τῆς ἐπαρχίας τοῦ ἁγίου Σταγὼν	2
Ὁ ἐνορεύων ἐν τῷ μεγάλῳ μαχαλᾷ Παπᾶ Δῆμος	2
Ὁ λογιώτατος Βητχρίων χ". Γεωργίου	2
Ὁ Κωνσαντῖνος Δημητρίου Γέναρη	2
Ὁ χατζῆ Ἰωαννακὸς Παναγιώτου διδασκάλου Σερτζῆς	2

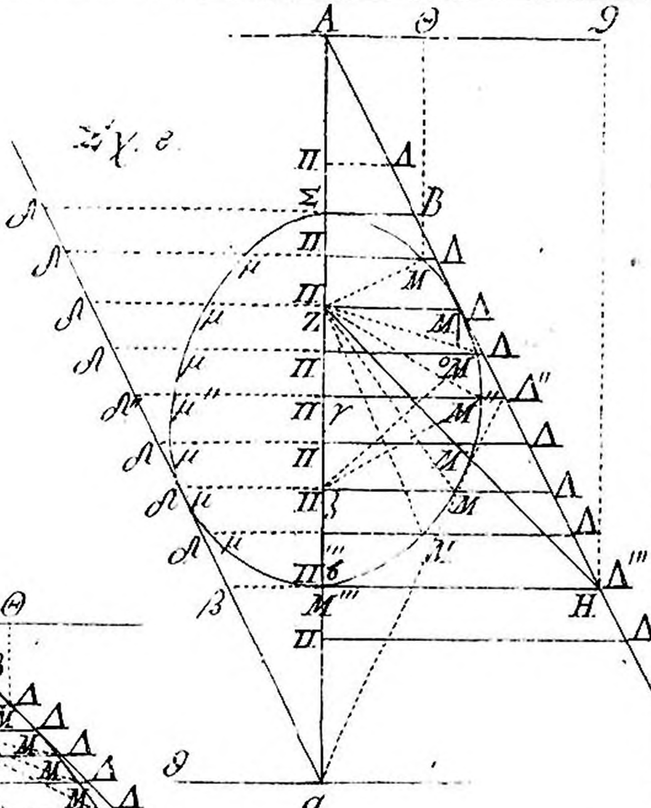
	Σώματα.
Ὁ Ζαφείρης Γεωργίου Λακερδᾶς	2
Ὁ Δημητράκης ῥάπτης ὁ Γραμματικὸς	2
Ὁ Γεώργιος Κῶνςα Σισκλιώτου	2

Οἱ ἐν Τρίκκῃ.

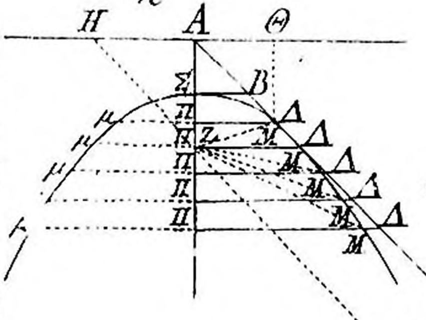
Ὁ θεοφιλέςατος καὶ λογιώτατος Ἐπίσκοπος ἅγιος Τρίκκης Γαβριὴλ	5
Ὁ ἐλλογιμώτατος πρωτοπαπᾶς Πολύζωος	1
Ὁ αἰδεσιμολογιώτατος οἰκονόμος Γεώργιος ὁ ἀπὸ Κλινοβοῦ	1
Ὁ χρησιμολογιώτατος Θεόδωρος Παπᾶ Χρήςου ὁ ἀπὸ Κλινοβοῦ	1
Ὁ ἐλλογιμώτατος Γιαννέσιος Παπᾶ Χρήςου ἀπὸ Κλινοβοῦ	1
Ὁ τιμιώτατος Γεώργιος Ἀνασασίου Δημάκη ἀπὸ Χαλῆκι	1
Ὁ εὐγενέςατος Ἀνασάσιος Γεωργίου Δημάκη ἀπὸ Χαλῆκι	2
Ὁ ἐλλογιμώτατος Ἀθανάσιος Παπᾶ Δήμου ὁ ἀπὸ Καςανᾶς	1
Ὁ λογιώτατος Γεώργιος Στερίου ἀπὸ Δραμίσδι	3
Ὁ ἐλλογιμώτατος διδάσκαλος τῆς Τρίκκης Στέφανος Κοζανίτης	1


Σχ. 1.
Σχ. 2.
Σχ. 3.
Σχ. 4.
Σχ. 5.
Σχ. 6.
Σχ. 7.

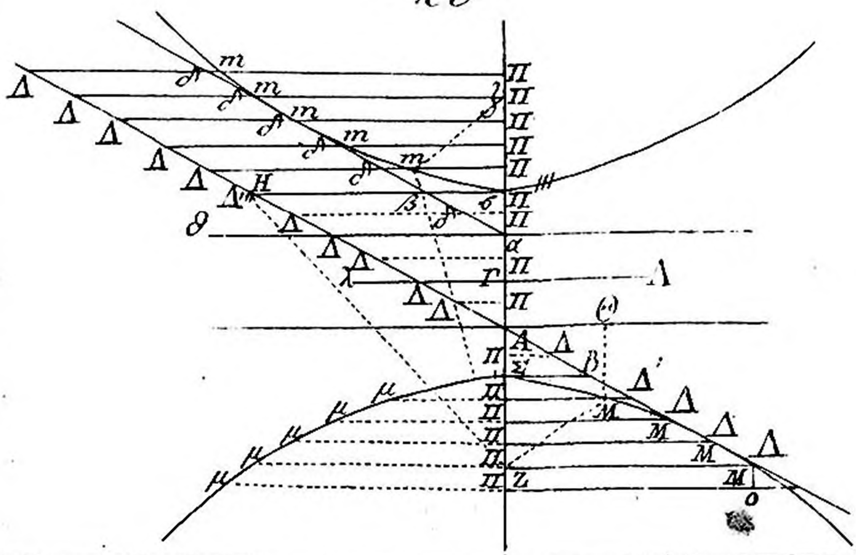
Σχ. 8.



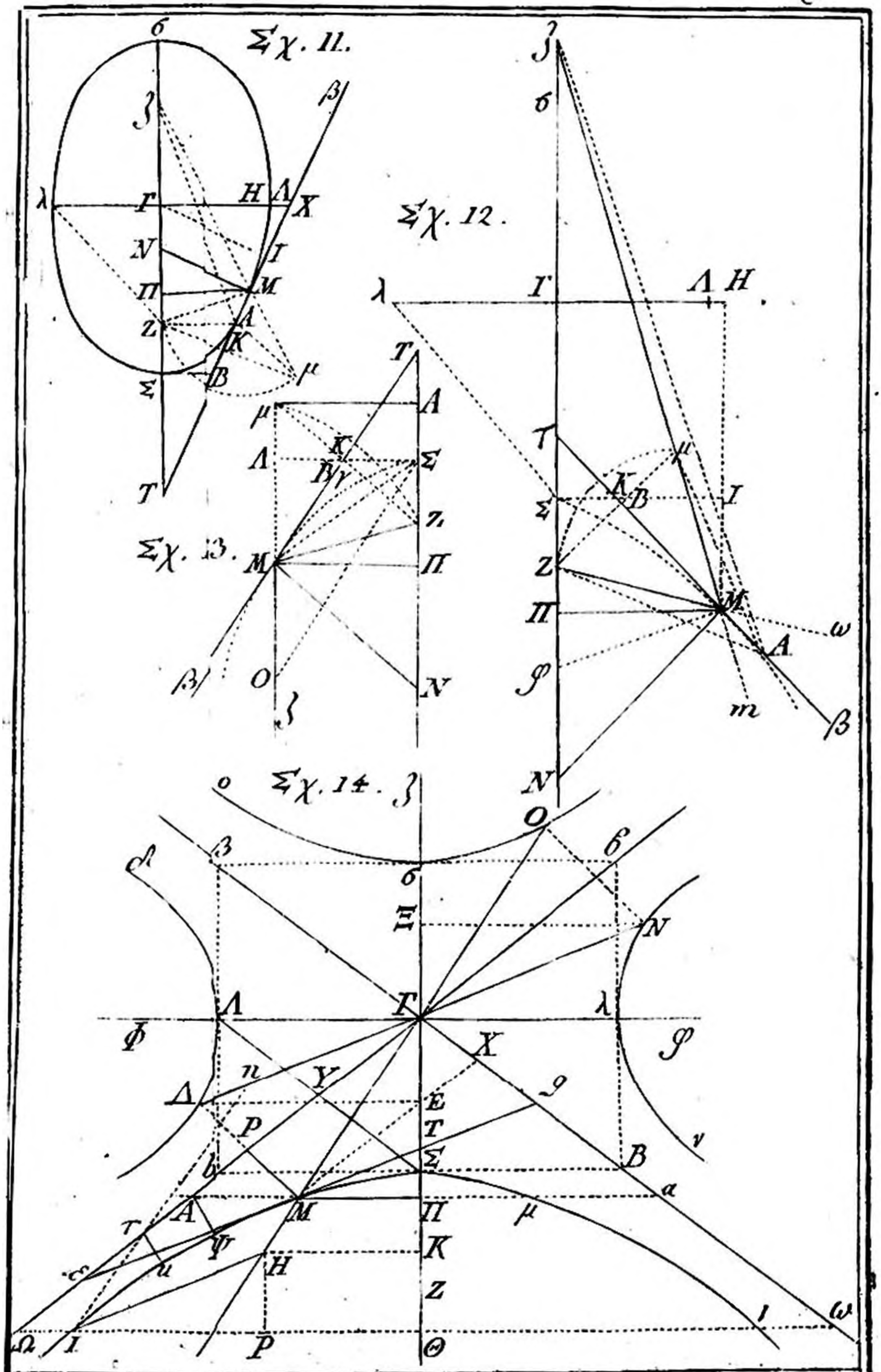
Σχ. 10.



Σχ. 9.

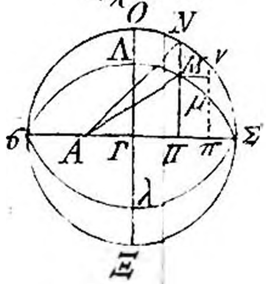


Πίναξ Γ'

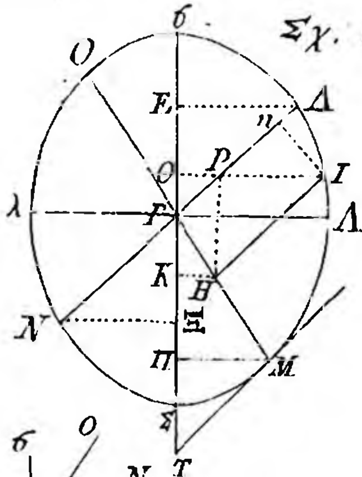


N. 3.

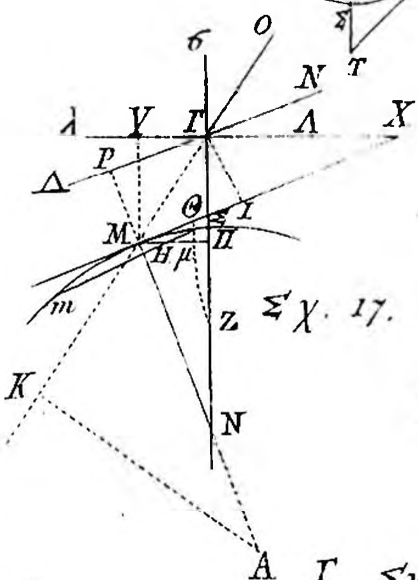
Σχ. 15.



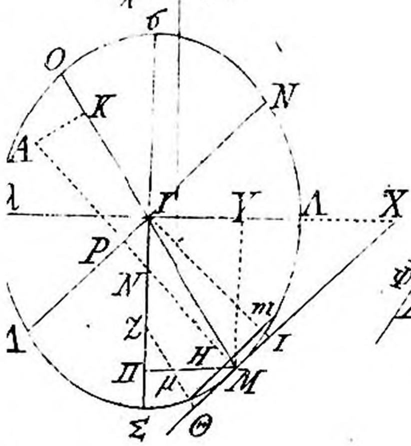
Σχ. 16.



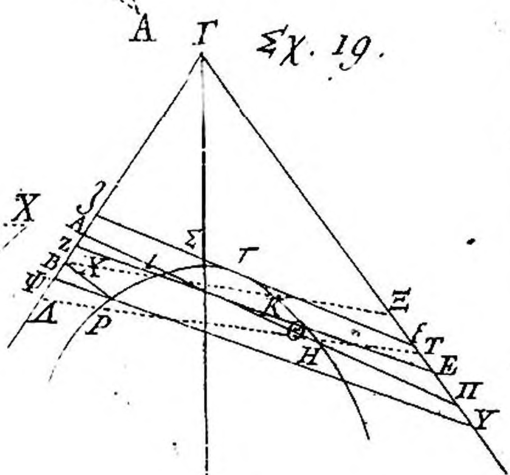
Σχ. 17.



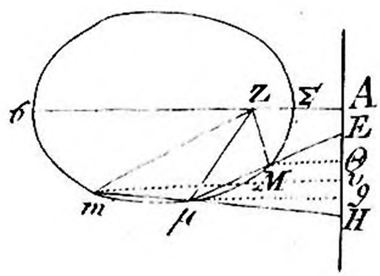
Σχ. 18.



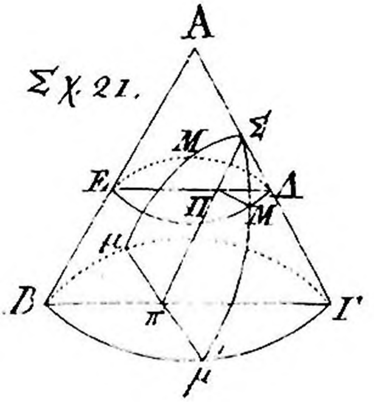
Σχ. 19.



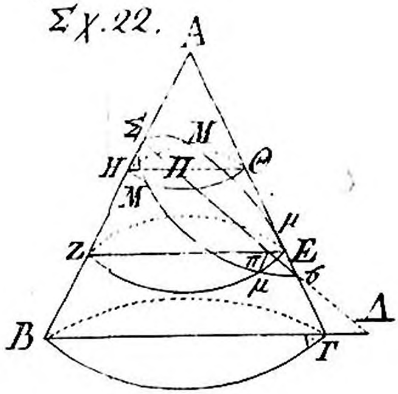
Σχ. 20.



Σχ. 21.



Σχ. 22.



Σχ. 23.