ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ

ΕΚ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΣΥΛΛΕΧΘΕΙΣΩΝ

ΥΠΟ Κ. Μ. ΚΟΥΜΑ

ΛΑΡΙΣΣΑΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΣ

Περιέχων τοῦ Λογισμοῦ τῶν Ἀπειροστῶν τὰ ἐχόμενα, τὸν Ὁλοκληρωτικὸν Λογισμὸν, καὶ τὴν Γενικὴν Φυσικήν.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ͵ ΤΗΣ ΑΥΣΤΡΙΑΣ

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΕΝΔΩΤΟΥ.

Α Ω Ζ.

Σ Ε Ι Ρ Α
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ.

Τῦ Λογισμῦ τῶν Ἀπειροςῶν

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ τῶν Μεγίςων ϗ Ἐλαχίςων.

82. Ὅταν ἦ $\delta\upsilon = 0$, ἡ ἀπτομένη, ἣν ἐμφαίνει τὸ $\frac{\partial \upsilon}{\partial \chi}$ παράλληλος γίνεται ταῖς ἀποτετμημέναις (76)· ἐὰν ἐν καμπύλης τῆς ΑΝα (σχ. 1) αἱ τεταγμέναι προϊῦσαι αὔξωσι μέχρι μονίμυ τινὸς σημείυ, μεθ᾽ ὃ μειῦσθαι ἄρχωνται, ἡ μὲν κατὰ τὰ Μ, τὰ μεταξὺ Α ϗ Ν κείμενα σημεῖα, τῆς καμπύλης ἁπτομένη συναντήσῃ τῷ ἄξονι, ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ Α προαχθέντι· ἡ δὲ κατὰ τὰ μ, τὰ μεταξὺ α ϗ Ν, πρὸς τ᾽ ἀντίθετα μέρη τῦ ἄξονος· ἡ ἄρα κατ᾽ αὐτὸ τὸ Ν ἁπτομένη ὐδαμῦ συναντήσει τῷ ἄξονι, ἀλλ᾽ ἔςαι αὐτῷ παράλληλος· πρόδηλον ἄρα, ὅτι τινὶ

γίνεται κατὰ τὸ σημεῖον Ν, καθ' ὃ αἱ τεταγμέναι, τοῦ αὔξειν παυόμεναι, μειοῦσθαι αὐτίκα ἄρχονται, τοῦτ' ἔστι κατὰ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ τεταγμένη ΚΝ μείζων ἐστὶ τῶν προσεχεστάτων αὐτῇ τεταγμένων ΠΜ, πμ, κειμένων, τῆς μὲν ἐν δεξιοῖς, τῆς δ' ἑτέρας κατὰ τὰ λαιά· ἡ δὲ ΚΝ μεγίστη τηνικαῦτα ἀκούει· ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη ΜΝμ (σχ. 2) τὰ κυρτὰ ἑαυτῆς ἔχῃ ἐστραμμένα πρὸς τὸν ἄξονα ΠΚ, ἐνδέχεται συμβῆναι τὰς τεταγμένας προϊούσας, μειοῦσθαι μὲν ἕως τοῦ Ν, ἐντεῦθεν δὲ αὔξειν ἄρχεσθαι, ὡς τὴν ΚΝ ἐλάττω ὑπάρχειν τῶν ἑκατέρωθεν προσεχεστάτων αὐτῇ τεταγμένων· τηνικαῦτα οὖν ἡ ΚΝ ἐλαχίστη καλεῖται, ἡ δὲ ἁπτομένη Νν παράλληλος ταῖς ἀποτετμημέναις καθίσταται· κἀντεῦθεν ἄρα προῆλθεν ἐξαίσιόν τι χρῆμα ἡ περὶ τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων μέθοδος χρησιμωτάτη τῶν ἐν τῇ ἀναλύσει, οὐχ ὅπως τὰ ἐν ταῖς καμπύλαις ἀνερευνῶσα ἐλάχιστα καὶ μέγιστα, ἀλλὰ καὶ ἐν οὐκ εὐαρίθμοις ἄλλοις γεωμετρικοῖς ζητήμασιν, ὡς ἐκ τῶν ἐφεξῆς ἡμῖν ἔσται καταδηλον.

83. Ἐὰν οὖν ἡ ἁπτομένη ταῖς ἀποτετμημέναις παράλληλος ᾖ, δυνατὸν εὑρεῖν ἓν μέγιστον, ἢ ἓν ἐλάχιστον· δυνατὸν δὲ καὶ ἡνίκα ταῖς τεταγμέναις ἡ ἁπτομένη ἐστὶ παράλληλος· ἡ γὰρ ΚΝ (σχ. 3) συμπίπτει τῇ κατὰ τὸ Ν ἁπτομένῃ, μᾶλλον δέ, ἁπτομένη ἐστὶν ἑκατέρου τῶν κλωνίων ΜΝ, μΝ· τὸ δ' ἀπειροστὸν τόξον Νι ἐκλαμβάνεται γραμμὴ εὐθεῖα, ἥτις δύναται ἐπινοηθῆναι ὡς συνιστῶσα γωνίαν ἀπειροστὴν μετὰ τῆς τεταγμένης Λι· ἐν δὲ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ιΝσ, τιθεμένης τῆς ἀκτῖνος = 1,

$$\text{ἐστι } σι = δυ : σΝ = ΛΚ = δχ :: 1 : \text{ἁπ. } σιΝ = \frac{δχ}{δυ}.$$

ταύτης δὲ τῆς γωνίας οὔσης ἀπειροστῆς, ὁ λόγος δχ : δυ ἔσαι ἀπειροστός, τοῦτ' ἔσι δυ ἔσι τηνικαῦτα ἀπείρως μεῖζον τοῦ δχ· κρατεῖ δὲ τοῦτο οὐδὲν ἧττον κἀπὶ τοῦ 4 σχήματος, πλὴν ὅτι ΚΝ, ἐν μὲν τῷ 3 ἐλάχισον, ἐν δὲ τῷ 4 σχήματι ὑπάρχει μέγισον· δυνατὸν ἄρα εὑρεῖν τὸ μέγισον, ἢ τὸ ἐλάχισον, ὅταν ὁ λόγος $\delta\upsilon : \delta\chi$ τοιοῦτος ᾖ, ὥσε τὸ δυ παρατιθέμενον τῷ δχ ὑπάρχειν ποσὸν ἀπείρως μέγισον. Ἀλλὰ γὰρ οὐκ ἀεὶ, ὄντος $\delta\upsilon = 0$, συνάγειν χρὴ, ὅτι πάντως εὑρεθήσεται τὸ μέγισον, ἢ τὸ ἐλάχισον· τοῦτο γὰρ μόνον ἐμφαίνει τὴν ἁπτομένην παράλληλον οὖσαν τῇ τῶν ἀποτετμημένων γραμμῇ· δυνατὸν μέντοι τὴν μὲν ἁπτομένην Νν (σχ. 5) παράλληλον εἶναι τῇ τῶν χ γραμμῇ, τὰς δὲ τῷ Ν προσεχεῖς τεταγμένας μὴ ὑπερβάλλειν, ἢ ἐλαττοῦσθαι τῆς ΚΝ· τοῦτο δὲ γίνεται, ἡνίκα ἡ καμπύλη ΑΝ τὰ κυρτὰ εἰς κοῖλα, ἢ τἀναντίον, μεταβάλλει· ἀλλὰ τηνικαῦτα ἡ εὐθεῖα Νν δύναται εἶναι παράλληλος τῇ ΑΠ, καὶ μὴν καὶ ἁπτομένη τοῦ τε κυρτοῦ ΑΝ, καὶ τοῦ κοίλου Νμ· ἐν δὲ τῷ 6 σχήμ. ἡ εὐθεῖα Νν ἐφάπτεται ἑκατέρου τῶν κλωνῶν μΝ, ΜΝ· τῇ δὲ ΚΝ οὐδεμία τεταγμένη παράκειται δεξιόθεν· οὐκοῦν, οὔτε μεγίση αὕτη ἔσαι, οὔτ' ἐλαχίση, καθ' ὃν ἡμῖν ἐνταῦθα νοῦν ἐκλαμβάνονται τὰ μέγισα καὶ ἐλάχισα· ὡσαύτως ἡ τεταγμένη ΝΚ (σχ. 5) $= \upsilon$ (τιθεμένης τῆς μὲν $\mathrm{AK} = \chi$, τῆς δὲ $\kappa\mathrm{N} = \upsilon$) παράλληλος δύναται εἶναι ταῖς τεταγμέναις, μήτε μεγίση, μήτε μὴν ἐλαχίση, ὑπάρχουσα· τοῦτο δὲ συμβαίνει ἐπὶ μόνου τοῦ τῆς καμπῆς σημείου (*).

84. Ἵνα δὲ γνωσθῇ τὸ μέγισον, ἢ τὸ ἐλάχισον,

(*) Σημεῖον Καμπῆς καλεῖται τὸ Ν (σχ. 5, 7), καθ' ὃ καμπύλη τις τὰ πρὸς τὸν ἄξονα κοῖλα μεταβάλλει εἰς κυρτὰ, ἢ τ' ἀνάπαλιν.

ὑποκείσθω πρῶτον $\delta\upsilon = o$, καὶ ἐντεῦθεν ἀπενεχθήσεται ἡ δύναμις τῆς τῷ μεγίστῳ, ἢ ἐλαχίστῳ, συστοιχούσης ἀποτετμημένης· μηδενὸς δὲ συναγομένου ἐκ τῆς ὑποθέσεως τοῦ $\delta\upsilon = o$, γενέσθω $\delta\chi = o$, ἢ $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = \infty$, ἢ, ὃ δὴ ταὐτὸν, $\delta\upsilon = \infty$· εἴγε ἐκ τῶν ὑποθέσεων $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{A}{B} = \infty$, καὶ $B = o$, καὶ $A = \infty$, τὸ αὐτὸ ἀείποτε συνάγεται ἀποτέλεσμα· ἑξῆς δέ, ἵν' εἰδῶμεν, εἴπερ εἴη τι μέγιστον, ἢ ἐλάχιστον, ηὐξήσθω πρῶτον, εἶτα ἠλαττώσθω ἡ χ ποσότητι ἀπειροστῇ τῇ $\delta\chi$· καὶ ἐν ταύταις ταῖς δυσὶ περιπτώσεσι τοῦ υ ἐλάττονος ὄντος τοῦ εὑρεθέντος, εὕρηται πάντως τὸ μέγιστον· μείζονος δέ, τὸ ἐλάχιστον· ἐὰν δέ, ἐκείνως μὲν ᾖ μείζων ἡ δύναμις τοῦ υ, οὕτω δ' ἐλάττων, τῆς ἐν ἀρχῇ εὑρημένης, ἡ εὑρημένη οὔτε μεγίστη, οὔτε μὴν ἐλαχίστη, ὑπάρχει. Πρὶν ἢ δὲ ἐφαρμόσαι τὰ εἰρημένα σημειωτέον, ὅτι καμπύλη, δύναται μὲν ἔχειν μεγίστην, ἐλαχίστην δ' οὔ, οἵα η AN (σχ. 1), ἢ ἐλαχίστην καὶ μεγίστην οὐδεμίαν, οἵα ἡ MN (σχ. 2), ἢ τέλος μεγίστας τε καὶ ἐλαχίστας πολλάς, οἷαί εἰσιν αἱ KN ἐν τῷ 8 σχήματι.

85. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.** Εὑρεῖν τὴν μεγίστην τῶν τεταγμένων ἐν τῇ ἐλλείψει ANα (σχ. 1).

ΛΥΣΙΣ. Ἡ τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσις ἐστὶν $\upsilon^2 = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(2\alpha\chi - \chi\chi)$ (Ὑψ. Γ. 92), $2\upsilon\delta\chi = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(2\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi)$· ὑποτεθέντος $\delta\upsilon = o$, ἔσται $2\upsilon\delta\upsilon = 2\upsilon \times o = o = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} \times (2\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi)$, ἢ $2\alpha\delta\chi = 2\chi\delta\chi$, $2\alpha = 2\chi$,

$\alpha = \chi$, τοῦτ' ἔστιν ἡ μεγίστη τεταγμένη συμπίπτει τῇ ΑΚ ἀποτετμημένῃ $=$ τῷ πρώτῳ ἡμιάξονι, ἤ, ὃ ταὐτὸν, ἡ μεγίστη τῆς ἐλλείψεως τεταγμένη συμπίπτει τῷ κατ' αὐτὴν κέντρῳ.

Ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει $\upsilon^2 = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(2\alpha\chi - \chi\chi)$ ὑποτεθῇ $\beta = \alpha$, ἔσται $\upsilon\upsilon = 2\alpha\chi - \chi\chi$ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου, ὅστις ἐστὶν ἔλλειψις, τοὺς ἄξονας ἰσαλλήλους ἔχουσα· ἐν ἄρα τῷ κύκλῳ ἡ μεγίστη τεταγμένη διήκει διὰ τοῦ κέντρου.

86. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Εὑρεῖν τὴν μεγίστην τῶν τεταγμένων ἐν καμπύλῃ τῇ ΑΝα (σχ. 9), ἧς αἱ τεταγμέναι ΚΝ $= \psi$ μέσον ἀνάλογον ἔχουσι πρὸς τὰς τεταγμένας Κμ $= \upsilon$, καὶ τὰς τεταγμένας ΑΚ $= \chi$ τοῦ ἡμικυκλίου Αμα.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω διάμετρος τοῦ κύκλου 2α, καὶ ἡ αὐτοῦ ἐξίσωσις $\upsilon\upsilon = 2\alpha\chi - \chi\chi$· ἔσται ἄρα ἡ τῆς καμπύλης ἐξίσωσις $\psi\psi = \chi\upsilon$· καὶ τὰ μὲν τῆς κυκλικῆς ἐξισώσεως ἀπειροστὰ εἰσὶ $2\upsilon\delta\upsilon = 2\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi$, $\delta\upsilon = \frac{\alpha\delta\chi - \chi\delta\chi}{\upsilon}$. τὰ δὲ τῆς προτεθείσης καμπύλης, $2\psi\delta\psi = \upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon$ $= \upsilon\delta\chi + \frac{\alpha\chi\delta\chi - \chi\chi\delta\chi}{\upsilon}$ (ἀντικαθισταμένης τῆς τοῦ $\delta\upsilon$ δυνάμεως) $= \frac{\upsilon^2\delta\chi + \alpha\chi\delta\chi - \chi\chi\delta\chi}{\upsilon}$. ἀλλὰ πρὸς τῷ τῆς μεγίστης σημείῳ ἐστὶ $\delta\psi = 0$, καὶ $2\psi\delta\psi = 0$· ἄρα $\frac{\upsilon^2\delta\chi + \alpha\chi\delta\chi - \chi\chi\delta\chi}{\upsilon} = 0$, $\upsilon^2\delta\chi + \alpha\chi\delta\chi - \chi\chi\delta\chi = 0$, $\upsilon^2 + \alpha\chi - \chi\chi = 0$· ἀντικαθισταμένης δὲ τῆς τοῦ υ^2 δυνάμεως, τῆς ἐκ τῆς κυκλικῆς ἐξισώσεως ποριζομένης, προκύπτει $2ax - x^2 + ax - x^2 = 0$, $3ax - 2xx = 0$, $3a - 2x = 0$, $3a = 2x$, $x = \frac{3a}{2}$· ἐὰν ἔν τεθῇ $AK = \frac{3a}{2}$, ἔςαι τὸ σημεῖον K, ᾧ συςοιχεῖ ἡ τῶν τεταγμένων μεγίςη.

87. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Εὑρεῖν τὴν μεγίςην τῶν τεταγμένων ἐν ταῖς παντὸς γένους ἐλλείψεσι.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ αὐτῶν ἐξίσωσις ἐςὶν $\frac{a}{\pi} v^{\mu+\nu} = x^{\mu} (a-x)^{\nu}$, $(\mu+\nu) \frac{a}{\pi} v^{\mu+\nu-1} \delta v = \mu x^{\mu-1} (a - x)^{\nu} \delta x - \nu x^{\mu} \delta x (a - x)^{\nu-1} = 0$ (ὑποτιθεμένυ $\delta v = 0$, ὅπερ τὸ πρῶτον τῆς ἐξισώσεως μέλος, ᾗδη ϗ τὸ δεύτερον, ἀπεργάζεται $= 0$)· διαιρέσει ἄρα διὰ δx, ϗ μεταθέσει, $\mu x^{\mu-1} \times (a-x)^{\nu} = \nu x^{\mu} (a-x)^{\nu-1}$· διαιρέσει δὲ διὰ $x^{\mu-1} \times (a-x)^{\nu-1}$, πρόεισι $\mu (a-x) = \nu x$, $\mu a - \mu x = \nu x$, $\mu a = \mu x + \nu x$, $x = \frac{\mu a}{\mu+\nu}$.

Ἡ δ' ἐξίσωσις τῶν παντὸς γένυς κύκλων, μηδενὶ διαφέρυσα τῆς τῶν ἐλλείψεων, πλὴν ὅτι ἐν τοῖς κύκλοις ἐςὶν $a = \pi$, ὅπερ ὐδέποτε συμβαίνει ταῖς ἐλλείψεσι, κατὰ τὴν αὐτὴν ἔφοδον τῆς πράξεως διαπερανθείσης, προβαλεῖ μεγίςην τῶν τεταγμένων τὴν συςοιχῦσαν κἀνταῦθα τῇ ἀποτετμημένη $x = \frac{\mu a}{\mu+\nu}$· ἐὰν ᾖ $\mu = 5$ ϗ $\nu = 3$, εὑρεσεται $\chi = \frac{5\alpha}{6}$· εἰδ' εἴη $\mu = 6$, ϗ $\nu = 1$, πορισθήσεται $\chi = \frac{6\alpha}{7}$, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως, εἴτε περὶ ἐλλείψεως, εἴτε περὶ κύκλυ τῶν καθυπερτέρων ὁ λόγος γίνοιτο.

88. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τȣ̃ δὲ τῆς καμπύλης σχήματος ἀγνοεμένȣ ὅλως οἷόν ἐςι, βȣλομένοις εἰδέναι, εἰ δυνατὸν εὑρεῖν ἐν αὐτῇ τὰ μέγιςα ϗ ἐλάχιςα, ἐπιχειρητέον τῷ ζητήματι, ὡς ἐν τῆς ἐφεξῆς προβλήμασι.

89. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Εὑρεῖν τὰ μέγιςα ϗ ἐλάχιςα καμπύλης, ἧς ἐξίσωσίς ἐςιν ἡ $\frac{\chi}{\alpha} + \frac{\alpha}{\chi} = \frac{\upsilon}{\alpha}$.

ΛΥΣΙΣ. Εκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐςὶ $\frac{\delta\chi}{\alpha} - \frac{\alpha\delta\chi}{\chi^2} = \frac{\delta\upsilon}{\alpha} = 0$· ὑποτεθέντος δὲ $\delta\upsilon = 0$, ϗ ἑπομένως $\frac{\delta\chi}{\alpha} = \frac{\alpha\delta\chi}{\chi^2}$, $\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\chi^2}$, $\frac{\chi^2}{\alpha} = \alpha$, $\chi^2 = \alpha^2$, $\chi = \pm\sqrt{\alpha^2} = \pm\,\alpha$· ἄρα ἀπτόμεναι αἱ συςοιχȣ̃σαι τῇ τε ὑπαρκτικῇ ἀποτετμημένῃ $+\,\alpha$, ϗ τῇ λειπτικῇ $-\,\alpha$, ἔσονται παράλληλοι ταῖς ἀποτετμημέναις· ἵνα δὲ γνωςὸν γένοιτο, εἴπερ ἡ τῇ ἀποτετμημένῃ $+\,\alpha$ συςοιχȣ̃σα τεταγμένη μεγίςη εἴη, ἢ γȣ̃ν ἐλαχίςη, ἀντικαταςαθήτω α ἀντὶ χ ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει· ϗ δὴ ἔςαι $\frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\upsilon}{\alpha}$, ἢ $2 = \frac{\upsilon}{\alpha}$, ϗ $\upsilon = 2\alpha$· αὐξηθείσης τῆς ἀποτετμημένης α ποσότητι ἀπειροςῇ τῇ $\delta\chi$, ϗ ἀντικαταςαθέντος ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει τȣ̃ $\alpha + \delta\chi$

ἀντὶ χ, προέρχεται $\frac{\alpha+\delta\chi}{\alpha}+\frac{\alpha}{\alpha+\delta\chi}=\frac{\upsilon}{\alpha}$, ἢ (ἀναχθέντων τῶν κλασμάτων ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, ϗ συναφθέντων, τοῦ δὲ παρονομαστοῦ α ἀφανισθέντος) $\frac{2\alpha\alpha+2\alpha\delta\chi+\delta\chi^2}{\alpha+\delta\chi}=\upsilon$, εἴτ' ἐν $2\alpha+\frac{\delta\chi^2}{\alpha+\delta\chi}\upsilon$, ποσότης μείζων τῦ 2α· ἐὰν δὲ ἡ ἀποτετμημένη α ἀπομειωθῇ τῷ ποσῷ δχ, ϗ εἰσαχθῇ α — δχ ἀντὶ χ, εὑρεθήσεται $\upsilon=2\alpha+\frac{\delta\chi^2}{\alpha-\delta\chi}$, ἥτις ἔτι μείζων ἐςὶ τῦ 2α· ἐπεὶ ἄρα αἱ τεταγμέναι ἑκατέρωθεν αὔξυσι, πρόδηλον ὅτι ἡ τεταγμένη 2α, ἡ τῇ ἀποτετμημένῃ α συςοιχῦσα, ἐςὶν ἐλαχίςη.

Τῇ δ' αὐτῇ ἐφόδῳ τῆς πράξεως, λαμβανομένης τῆς ἀποτετμημένης χ λειπτικῆς ϗ $=-\alpha$, πορισθήσεται $\upsilon=-2\alpha$· ἀντικαταςαθέντος δὲ ἀντὶ χ τῦ $-\alpha+\delta\chi$, εὑρεθήσεται $\upsilon=-2\alpha+\frac{\delta\chi^2}{-\alpha+\delta\chi}=-2\alpha-\frac{\delta\chi^2}{\alpha-\delta\chi}$ (μεταβαλλομένων πάντων τῶν συμβόλων τῦτε ἀριθμητοῦ ϗ τῦ παρονομαςῦ, ἤ, εἰ βύλει, πολλαπλασιαζομένων τῦτε ἀριθμητῦ καὶ τῦ παρονομαςῦ ἐπὶ — 1)· ἀντικαθιςαμένυ δὲ τῦ $-\alpha-\delta\chi$ ἀντὶ τῦ χ, εὑρίσκεται $\upsilon=-2\alpha-\frac{\delta\chi^2}{\alpha+\delta\chi}$. ἐπεὶ ἄρα αἱ τῇ — 2α τεταγμένῃ προσεχεῖς ἑκατέρωθεν λειπτικαὶ τεταγμέναι μείζυς εἰσὶ τῆς — 2α, ἡ τεταγμένη — 2α ἐςὶν ἐλαχίςη τῶν λειπτικῶν.

90. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Εὑρεῖν τὰ μέγιςα, ϗ ἐλα-

χίςα ἐν καμπύλῃ, ἧς ἐξίσωσίς ἐςιν ἡ $aav = \chi^3 - 3a\chi^2 + 3a^2\chi$.

ΛΥΣΙΣ. Τῶν ἀπειροςῶν τῆς ἐξισώσεως ληφθέντων, ἐ̓ τεθέντος $\delta v = 0$, εὑρίσκεται $3\chi\chi\delta\chi - 6a\chi\delta\chi + 3aa\delta\chi = 0$, ἢ (διαιρέσει διὰ $3\delta\chi$) $\chi^2 - 2a\chi + aa = 0$, ἢ (ἐξαγωγῇ ῥίζης) $\chi - a = 0$, $\chi = a$· ἄρα ἡ τῆς καμπύλης ἁπτομένη κατὰ σημεῖον συςοιχῶν τῇ ἀποτετμημένῃ $\chi = a$, ἐςὶ ταῖς ἀποτετμημέναις παράλληλος· ἀλλ᾽ ὐ παρὰ τῦτο ἡ συςοιχῦσα τεταγμένη ἔςαι μεγίςη, ἢ ἐλαχίςη· ἐ. γὰρ ἀντικαταςαθέντος a ἀντὶ χ ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει, πρόεισιν $v = a$· ἑξῆς δὲ ἀντικαταςαθέντος μὲν τῦ $a + \delta\chi$ ἀντὶ χ, εὑρίσκεται $v = a + \dfrac{\delta\chi^3}{aa}$, ἀντικαταςαθέντος δὲ $a - \delta\chi$, προκύπτει $v = a - \dfrac{\delta\chi^3}{aa}$· ἐπεὶ ἄρα αἱ τεταγμέναι, ἔνθεν μὲν αὔξυσιν, ἔνθεν δ᾽ ἀπομειῦνται, ἡ τεταγμένη $v = a$ ὐκ ἔςιν ὔτε μεγίςη, ὔτε ἐλαχίςη.

91. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ΄. Εὑρεῖν τὴν μεγίςην ἐ̓ ἐλαχίςην τεταγμένην ἐν τῇ παραβολῇ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς ἐςιν $v^2 = \pi\chi$, $2v\delta v = \pi\delta\chi$· ὑποτεθέντος δὲ $\delta v = 0$, εὑρίσκεται $\pi\delta\chi = 0$, ὅθεν ὐδεμία τῦ χ ἀποφέρεται δύναμις· ὑποτεθείσθω τοίνυν $\delta v = \infty$· ἐ̓ δὴ ἔςαι $\pi\delta\chi = \infty$· ὅθεν ὐδὲν ἧττον ὐδεμία ἐξαρύεται τῦ χ δύναμις· ὐκ ἔςιν ἄρα τῇ παραβολῇ ὔτε μεγίςη τις ὔτ᾽ ἐλαχίςη τεταγμένη.

92. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ΄. Ἀπὸ σημείυ Λ δοθέντος ἐπὶ ἄξονος καμπύλης τινός, ἀγαγεῖν πρὸς τὴν καμπύλην τὴν ἐλαχίςην εὐθεῖαν ΛΜ (σχ. 10.).

ΛΥΣΙΣ. Ἔϛω $ΑΛ = β$, ϗ $ΑΠ = χ$, ϗ $ΠΜ = υ$· ἄρα $ΠΛ = β - χ$· ἔϛι δὲ ὀρθογώνιον τὸ τρίγωνον ΜΑΠ, ἄρα $ΜΛ^2 = ΠΛ^2 + ΠΜ^2 = ββ - 2βχ + χχ + υυ = ψψ$, ὑποτιθεμένης τῆς $ΜΛ = ψ$· Ἐὰν οὖν ἐκληφθῇ $ψ$ ὡς ἐνηρμοσμένη τῇ καμπύλῃ, ϗ τεθῇ $δψ = ο$ ἐν τῇ περιπτώσει τοῦ ἐλαχίϛου, πορισθήσεται $- 2βδχ + 2χδχ + 2υδυ = 2ψ\, δψ = ο$, $υδυ = βδχ - χδχ$ (μεταθέσει δήπου ϗ διαιρέσει διὰ 2)· ἄρα $\frac{υδυ}{δχ} = β - χ = ΠΛ$· ἀλλὰ (κατὰ τὰ προειρημένα) $\frac{υδυ}{δχ}$ ἔϛι τύπος τῆς ὑποκαθέτου· ἄρα ΠΛ ἔϛιν ὑποκάθετος· ἐὰν οὖν ἐκ τοῦ σημείου Γ, κειμένου ἐντὸς τῆς κατὰ τὴν καμπύλην κοιλότητος, ἀγαγεῖν προτεθῇ τὴν ἐλαχίϛην ΓΜ, ἀχθεισῶν τῆς μὲν ΓΜ παραλλήλου, τῆς δὲ Γπ καθέτου τῷ ἄξονι, γενέσθω $Απ = φ$, ϗ $Κπ = μ Π = γ$· οὐκοῦν ἔϛαι $Μμ = υ - γ$, ϗ $Γμ = ϖΠ = φ - χ$, ϗ τιθεμένης $ΓΜ = χ$, προκύπτει $ψψ = Μμ^2 + Γμ^2 = υ^2 - 2γυ + γ^2 + φφ - 2φχ + χχ$· τῶν δὲ ἀπειροϛῶν ληφθέντων, ϗ ὑποτεθέντος $δψ = ο$, ἔϛαι $ο = 2υδυ - 2γδυ - 2φδχ + 2χδχ$· μεταθέσει δὲ ϗ διὰ 2 διαιρέσει, προέρχεται $δυ \times (υ - γ) = δχ \times (φ - χ)$, $\frac{δυ}{δχ} = \frac{φ - χ}{υ - γ}$, πολλαπλασιασμῷ δὲ ἐπὶ υ, $\frac{υδυ}{δχ} = \frac{υ \times (φ - χ)}{υ - γ}$· ὅθεν $Μμ = υ - γ : Γμ = φ - χ :: υ = ΠΜ : ΠΛ = \frac{υδυ}{δχ}$· ἄρα ΓΜ ἔϛι κάθετος.

Ἐκτὸς δὲ τῆς καμπύλης κειμένου τοῦ σημείου Ν, ἀφ' οὗ πρόκειται ἀγαγεῖν τὴν ἐλαχίστην εὐθεῖαν, ἐστάθω τῷ ἄξονι κάθετος ἡ NB, ἥτις ὡς γνωστὴ (τοῦ γὰρ σημείου N δοθέντος, τὸ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἄξονος ἀπόστημα δεδομένον ἐκλαμβάνεται) ἔστω $= \gamma$, καὶ $AB = \varphi$, καὶ ἤχθω Mν παραλλήλως τῷ ἄξονι AΠ· οὐκοῦν ἔσται $M\nu = B\Pi = \chi - \varphi$, καὶ $N\nu = \gamma - \upsilon$, καὶ τιθεμένης τῆς $NM = \psi$, προέρχεται $\psi^2 = N\nu^2 + M\nu^2 = (\gamma - \upsilon)^2 + (\chi - \varphi)^2$· ληφθέντων δὲ τῶν ἀπειροστῶν, ἔσται $2\psi\delta\psi = - 2\delta\upsilon(\gamma - \upsilon) + 2\delta\chi \times (\chi - \varphi)$. ὑποτιθεμένου δὲ $\delta\psi = 0$, διαιρέσει διὰ 2 καὶ μεταθέσει, προκύπτει $\delta\chi \times (\chi - \varphi) = \delta\upsilon \times (\gamma - \upsilon)$, $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{\chi - \varphi}{\gamma - \upsilon}$, $\frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{(\chi - \varphi)\upsilon}{\gamma - \upsilon}$, ὅθεν $\gamma - \upsilon = N\nu : \chi - \varphi = \nu M :: \upsilon = M\Pi : \Pi\Lambda = \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἡ ἄρα NM ἐστι κάθετος.

Τῆς δὲ καμπύλης καὶ ἕτερον κλῶνα ἐχούσης τὸν Aσ, οὗ τὰ συστοιχοῦντα τοῖς τοῦ AM σημεῖα ἴσον ἀπέχουσι τοῦ ἄξονος AΠ, δῆλον ὅτι ἡ Pσ κάθετος τῷ κλωνὶ Aσ ἔσται ἡ ἐλαχίστη τῶν ἀχθῆναι δυναμένων ἀπὸ τοῦ σημείου P τοῦ κειμένου ὑπὸ τὸν ἄξονα ἐν τῷ κλωνὶ Aσ.

93. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ῥᾷστα δὲ κατανοεῖται, ὡς τῆς AM εὐθείας ἀντὶ καμπύλης οὔσης, ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου, Λ, Γ, N ἀγομένων, ἔσται ἡ κάθετος.

94. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἵνα δὲ ἀπειράριθμα μηνυθὲ προβλήματα, ἐξεχόμενα τῆς τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων μεθόδου, ἐπιλυθεῖεν, ἐμφαινέτω σύνεκθεσίς τις τοῦ χ τὴν ποσότητα, ἣν δέοι μεγίστην εἶναι ἢ ἐλαχίστην, καὶ ἰσωθήτω βαθμῷ τινι τοῦ υ, καὶ εἰλήφθω ἐκ τῆς ἐξισώσεως τὰ ἀπει-

ροςά· τὰ δ' ἄλλα γενέσθω, ὡς εἰ ζητοῖτο ἡ μεγίςη ἢ ἐλαχίςη τῶν καμπύλῃ ἐνηρμοσμένων.

95. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'. Εὑρεῖν ὀρθογώνιον μέγιςον ἁπάντων, ὧν τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τὸ ἄθροισμα ἐςὶν $= 2a$.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω χ ἡ βάσις τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου· τοιγαροῦν τὸ αὐτοῦ ὕψος ἐςὶ $2a - \chi$, ὅπερ, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ χ, ποιεῖ $2a\chi - \chi\chi$ ἐπιφάνειαν τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου· γενέσθω οὖν $2a\chi - \chi\chi = \upsilon\upsilon$· ληφθέντων δὲ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως τῶν ἀπειροςῶν, καὶ τεθέντος $\delta\upsilon = 0$, πορισθήσεται $2a\delta\chi - 2\chi\delta\chi = 0$, $2a = 2\chi$, $a = \chi$· ἐςὶν ἄρα ἡ βάσις ἴση τῷ ὕψει· τὸ δὲ ὀρθογώνιον μεταβάλλει εἰς τετράγωνον, οὗ πλευρὰ $= a$ ἡμίσειά ἐςι τοῦ ἀθροίσματος $2a$.

96. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρόδηλον δὲ, ὅτι τ' αὐτὸν ἂν ἀποτελεσθείη, λαμβανομένων τῶν ἀπειροςῶν τοῦ $2a\chi - \chi\chi$, καὶ τιθεμένων $= 0$· δυνατὸν ἄρα παραλείπειν τὴν υ.

97. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τοῦ $2a$ ἐμφαίνοντος εὐθεῖαν, ἣν δεῖ οὕτω δίχα τεμεῖν, ὅπως τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων χ, $2a - \chi$ ὑπάρχῃ τὸ μέγιςον ὀρθογώνιον, εὑρεθήσεται $\chi = a$, τοῦτ' ἐςὶ δεήσει τὴν εὐθεῖαν εἰς δύο ἰσάλληλα μέρη τεμεῖν· τοῦ δ' αὐτοῦ $2a$ παριςῶντος ἀριθμὸν, ὃν πρόκειται διελεῖν εἰς δύο μέρη χ, $2a - \chi$, ὅπως ὁ γινόμενος ὑπ' αὐτῶν ᾖ ὁ μέγιςος, ἔςαι $\chi = a$, τοῦτ' ἐςὶν ἔσονται τὰ δύο μέρη ἰσάλληλα καὶ ἑκάτερον τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ τὸ ἥμισυ· ὡς εἴπερ ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς εἴη 12, ἑκάτερον τῶν δύο μερῶν ἔςαι $= 6$, ὁ δ' ὑπ' αὐτῶν παραγόμενος 36 ἔςαι ὁ μέγιςος τῶν δυναμένων γενέσθαι ὑπ' ἄλλων ὡντινωνοῦν δυοῖν τμημάτων τοῦ 12 εἰς δύο τμηθέντος.

98. ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἰ δέ τις ἀμφιβάλλοι, ὡς ἄρα τὸ εὑρεθὲν μὴ εἴη μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἀντικαταστησάτω $\alpha + \delta\chi$ ἐν τῇ ἐξισώσει $2\alpha\chi - \chi^2 = \upsilon^2$ · καὶ δὴ ἕξει $2\alpha^2 + 2\alpha\delta\chi - \alpha\alpha - 2\alpha\delta\chi - \delta\chi^2 = \alpha\alpha - \delta\chi^2$ · ἀντικαταστησάτω εἶτα $\alpha - \delta\chi$ ἀντὶ χ · καὶ δὴ ἕξει $2\alpha\alpha - 2\alpha\delta\chi - \alpha\alpha + 2\alpha\delta\chi - \delta\chi^2 = \alpha\alpha - \delta\chi^2$ · ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν δύω ἀποτελεσμάτων ἐστὶν ἔλαττον ἢ $\alpha\alpha$, ὃ ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ὑποθέσεως τοῦ $\delta\upsilon = 0$ · ἄρα τὸ εὑρεθὲν ἐστὶ μέγιστον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ΄. Κύκλῳ ἐγγράψαι τὸ μέγιστον ἁπάντων τῶν ἐγγραφῆναι δυναμένων ὀρθογωνίων (σχ. 11).

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω τὸ ΑΒγμ τὸ ζητούμενον· ἐὰν οὖν αἱ ΖΘ, γι διάμετροι ἐπιζευχθῶσι παραλλήλως ταῖς τοῦ ὀρθογωνίου πλευραῖς, τὸ ὀρθογώνιον διαιρεθήσεται εἰς τέσσαρα ὀρθογώνια ἰσάλληλα (*), ὧν ἓν ἐστὶ τὸ ΑΚϑΒ, οὗ τὸ τετραπλάσιον προδήλως ἐξισωθήσεται τῷ ζητουμένῳ ὀρθογωνίῳ· ἔστω οὖν ἡ τοῦ κύκλου ἀκτὶς $= \alpha$, καὶ ληφθεισῶν τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένων, ἡ τεταγμένη Βϑ ἔσται $= \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$ · καὶ δὴ τὸ ὀρθογώνιον ΑΚϑΒ $= \chi \times \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, οὗ τὸ τετραπλοῦν $4\chi\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = \beta\chi\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, ὑποτεθέντος $4 = \beta$, ἔσται τὸ ζητούμενον μέγιστον ὀρθογώνιον· ταύτης οὖν τῆς ποσότητος τοῦ ἀπειροστοῦ ληφθέντος, καὶ τεθέντος $= 0$, ἔσται $\beta\delta\chi\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} - \beta\chi\chi\delta\chi(\alpha\alpha - \chi^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$, διαιρέσει δὲ διὰ $\beta\delta\chi$, καὶ μεταθέσει, $\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = \chi\chi . (\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$,

(*) Διάμετρος γὰρ χορδῇ κάθετος ἐφισταμένη, δίχα ταύτην τέμνει (Γεωμ. 157).

πολλαπλασιασμῷ δὲ ἐπὶ $(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, γίνεται $\alpha\alpha - \chi\chi = \chi\chi \cdot (\alpha\alpha - \chi\chi)^{0} = \chi\chi$· ἄρα $\alpha\alpha = 2\chi\chi$, $\chi\chi = \frac{\alpha\alpha}{2}$, $\chi = \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$· ἀντικατασταθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν $4\chi\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, πρόεισι $4\sqrt{(\alpha\alpha - \frac{\alpha\alpha}{2})} \times \frac{\alpha\alpha}{2} =$ ABμν, ᾗ $B\vartheta = \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = \sqrt{(\alpha\alpha - \frac{1}{2}\alpha\alpha)} = \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}} = \chi$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον BϑKΛ ἔχει δύω πλευρὰς τὰς Bϑ, Kϑ ἴσας· ἄρα αὐτό τε ᾗ ἑπομένως τὸ τετραπλάσιον αὐτοῦ ἐστι τετράγωνον· ἄρα τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον τῶν κύκλῳ ἐγγραφῆναι δυναμένων ἐστι τετράγωνον.

100. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Η' ἄρτι εὑρημένη δύναμις τοῦ χ ἡ αὐτὴ ἔσται ᾗ εἰ, πρὶν λαβεῖν τὰ ἀπειροστά, ἀποβληθῇ ὁ ἄτρεπτος πολλαπλασιαστὴς 6. οὕτως ὡσαύτως ἂν ποιήσειέ τις, ὁσάκις ἂν προκέηται εὑρεῖν τι μέγιστον, ἢ ἐλάχιστον· ἐμφαινέτω γὰρ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ υ ποσότητα τὴν μεγίστην, ἢ ἐλαχίστην, τῶν ἐν τῷ προβλήματι· οὖν τὸ αὐτῆς ἀπειροστὸν, ὑποτεθέντος $\delta\upsilon = 0$, ἔσται $\frac{\alpha}{\beta}\delta\upsilon = \frac{\alpha}{\beta} \times 0 = 0$, ὅπερ ἂν εὑρεθείη πάντως, ἀποβληθέντων πρῶτον τῶν ποιητῶν $\alpha, \frac{1}{\beta}$· ἐὰν δὲ τὸ ἀπειροστὸν ὑποτεθῇ $\frac{\alpha}{\beta}\delta\upsilon = \frac{\mu(\gamma-\chi)^{\mu}\delta\chi}{(\alpha-\chi)^{\nu}}$, ᾗ ὑποτεθῇ $\delta\upsilon = \infty$, πορισθήσεται $(\alpha - \chi)^{\nu} = 0$, $\alpha - \chi = 0$, $\chi = \alpha$· τὸ αὐτὸ ὡς εἴπερ μόνη ἡ υ εἴη ἡ μεγί-

ςη, ἢ ἐλαχίςη· ἄχρηςοι ἄρα οἵ τε πολλαπλασιαςαὶ, ϗ οἱ διαιρέται αἱ ἄτρεπτα τῆς ζητυμένης μεγίςης, ἢ ἐλαχίςης, ποσότητος· διὸ πρὶν ἢ λαβεῖν αὐτῆς τὰ ἀπειροςὰ ἀπεῤῥίφθων· ὅπερ καὶ τὸν λογισμὸν ἁπλέςερον ἀπεργάζεται.

101. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι΄. Γωνίας ὀρθῆς τῆς ὑπὸ ΖΒΜ ἐντὸς τῶν ἀδιορίςων σκελῶν ΖΒ, ΒΜ σημείυ δοθέντος τῦ Δ, εὑρεῖν τὴν δι᾽ αὐτῦ μὲν ἀγομένην ἐλαχίςην εὐθεῖαν, ὑπὸ δὲ τῶν σκελῶν ἀπολαμβανομένην (σχ. 12).

ΛΥΣΙΣ. Συςαθέντος τῦ ὀρθογωνίυ ΔΓΒΑ ἔςω ΑΒ $= \alpha$, ϗ $\mathrm{Β\Gamma} = \beta$, ϗ $\mathrm{AZ} = \chi$, ὑκῦν ἔςαι $\mathrm{Z\Delta}^2 = \mathrm{AZ}^2 + \mathrm{A\Delta}^2 = \mathrm{AZ}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 = \chi^2 + \beta^2$, ϗ $\mathrm{Z\Delta} = \sqrt{(\beta^2 + \chi\chi)}$· ἀλλὰ διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΖΑΔ, ΖΒΜ, ἐςὶ $\mathrm{ZA} : \mathrm{Z\Delta} :: \mathrm{ZB} : \mathrm{ZM}$, ἢ $\chi : \sqrt{(\beta\beta + \chi\chi)} :: \alpha + \chi :$

$\mathrm{ZM} = \dfrac{\alpha + \chi}{\chi} \times \sqrt{(\beta\beta + \chi\chi)}$· ὑποτεθείσης ταύτης τῆς ποσότητος $= \upsilon$, ϗ τῶν ἀπειροςῶν ληφθέντων, προέρχεται

$$\delta\upsilon = \frac{(\chi\delta\chi - \alpha\delta\chi - \chi\delta\chi)}{\chi^2} \times \sqrt{(\beta\beta + \chi\chi)} +$$

$$\frac{(\alpha + \chi)}{\alpha} \times \tfrac{1}{2} \times 2\chi\delta\chi \cdot (\beta\beta + \chi\chi)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\alpha\delta\chi}{\chi\chi}$$

$$\times \sqrt{(\beta\beta + \chi\chi)} + \frac{\alpha\chi\delta\chi + \chi\chi\delta\chi}{\chi\sqrt{(\beta\beta + \chi\chi)}}$$ · ἀναγωγῇ δὲ ἐπὶ κοινὸν ὄνομα κομισθήσεται $\delta\upsilon =$

$$\frac{-\alpha\beta\beta\delta\chi - \alpha\chi\chi\delta\chi + \alpha\chi\chi\delta\chi + \chi\chi\chi\delta\chi}{\chi^2\sqrt{(\beta\beta + \chi\chi)}}$$, ἀναγωγῇ δὲ, ϗ ὑποθέσει τῦ $\delta\upsilon = 0$, ϗ διαιρέσει διὰ $\delta\chi$, προέρχεται, $-\alpha\beta\beta + \chi^3 = 0$, $\chi^3 = \alpha\beta\beta$, $\chi = \sqrt[3]{\alpha\beta\beta}$· ἐὰν ζητηθῶσι δύω μέσαι ἀνάλογοι μεταξὺ β ϗ α, ἡ πρώτη

ἔςαι $= \chi$ (*)· ληφθείσης ἄρα τῆς ΑΖ ἴσης τῇ πρώτῃ ταύτῃ μέσῃ ἀναλόγῳ, διὰ τῶν σημείων Ζ, Δ ἀχθεῖσα ἡ εὐθεῖα ΖΔΜ ἔσεται ἡ ζητυμένη ἐλαχίςη· ἐὰν δὲ ἐν τῷ τύπῳ $\frac{-\alpha\beta\beta\delta\chi - \alpha\chi\chi\delta\chi + \alpha\chi\chi\delta\chi + \chi\chi\chi\delta\chi}{\chi^2 \sqrt{(\beta\beta+\chi\chi)}} =$

$\delta\upsilon = \frac{-\alpha\beta\beta\delta\chi + \chi^3\delta\chi}{\chi^2\sqrt{(\beta\beta+\chi\chi)}}$ ὑποτεθῇ $\delta\upsilon = \infty$, πορισθήσεται $\chi^2\sqrt{(\beta\beta+\chi\chi)} = 0$, $\beta\beta+\chi\chi=0$, $\chi\chi = -\beta\beta$, $\chi = \pm\sqrt{-\beta\beta}$, ποσότης ἀνύπαρκτος, συνιδεῖν παρεχομένη, μηδὲν ἄλλο ὑπάρχειν ἐλάχισον, ὅτι μὴ τὸ ἐμφαινόμενον διὰ $\chi = \sqrt[3]{\alpha\beta\beta}$.

102. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Εἰς εὕρεσιν τῆς χ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὸν ΑΜ παραμέτρῳ $= \beta$ ἡ ΑΔΠ παραβολὴ (σχ. 13), ᾧ εἰλήφθω $AB = \frac{\beta}{2}$, ᾧ ΒΚ ἐςάσθω κάθετος τῷ ἄξονι $AM = \frac{\alpha}{2}$· ᾧ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαςήματι δὲ τῷ ΚΑ, γεγράφθω κύκλυ τόξον τὸ ΑΝΔ, τέμνον τὴν ΑΠ παραβολὴν καθ' ἓν σημεῖον τὸ Δ· φημὶ δὴ τὴν τεταγμένην ΔΜ ὑπάρχειν $= \chi$· ᾧ γὰρ $\Delta Z = \Delta M - KB = \chi - \frac{\alpha}{2}$· ἀλλὰ, διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς παραβολῆς, ἔςιν $AM \times \beta = \Delta M^2$, ἡ $AM = \frac{\chi\chi}{\beta}$· ἄ.

(*) Ἔςω χ μὲν ἡ πρώτη, ψ δὲ ἡ δευτέρα μέση ἀνάλογος· ἐκῦν ἔςαι $\because \beta : \chi : \psi : \alpha$, ᾧ (Συμβ. λογ. 270) $\beta^3 : \chi^3 :: \beta : \alpha$, $\beta^3\alpha = \chi^3\beta$, $\chi^3 = \beta^2\alpha$, ᾧ $\chi = \sqrt[3]{\beta^2\alpha}$.

ρα $BM = \frac{\beta}{2} - \frac{\chi\chi}{\beta}$· ἐ͂ ἐπείπερ $KE = BM$, ἔςαι

$K\Delta^2 = (\chi - \frac{\alpha}{2})^2 + (\frac{\beta}{2} - \frac{\chi\chi}{\beta})^2$, ποσότης ἀ-

ναγομένη εἰς $- \alpha\chi + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\chi^4}{\beta\beta} + \frac{\beta^2}{4}$· ἔςι δὲ ἐ͂

$K\Delta = KA$, ἐ͂ $KA^2 = AB^2 + KB^2 = \frac{\beta\beta}{4} + \frac{\alpha\alpha}{4}$· ἄρα

$\frac{\beta\beta}{4} + \frac{\alpha\alpha}{4} = - \alpha\chi + \frac{\chi^4}{\beta\beta} + \frac{\alpha\alpha}{4} + \frac{\beta^2}{4}$· μεταθέ-

σει ἄρα ἐ͂ ἀναγωγῆ, $\frac{\chi^4}{\beta\beta} = \alpha\chi$, $\chi^4 = \beta\beta\alpha\chi$, $\chi^3 = \beta$

$\beta\alpha$, $\chi = \sqrt[3]{\beta\beta\alpha}$· ἄρα $\Delta M = \chi$.

103. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐκ τῆς προόδυ $\div\!\div\, \beta : \chi : \psi : \alpha$ (ὡς ἀνωτέρω ὑποσεσημείωται) προέρχεται $\beta : \alpha :: \beta^3 : \chi^3$, εἴτ᾽ ἔν $\chi^3 : \beta^3 :: \alpha : \beta$· ἐὰν ἄρα α ᾖ διπλῦν, τριπλῦν, τετραπλῦν κτ· τῦ β, ὁ ἐκ τῦ χ κύβος ἔςαι διπλάσιος, ἢ τριπλάσιος κτ· τῦ ἐκ τῦ β· εὐπετῶς ἄρα ἐπιλύεται τὸ περὶ τῦ διπλασιασμῦ τῦ κύβυ πρόβλημα διὰ κύκλυ ἐ͂ παραβολῆς, ὃ φθάσαντες δι᾽ ὑπερβολῆς ἐ͂ παραβολῆς ἐπελύσαμεν (Ὑψ. Γεωμ. 309).

104. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ΄. Ἡμικυκλίῳ τῷ $AB\mu$ ἐγγράψαι τὸ μέγιςον τῶν ἐγγραφῆναι δυναμένων τριγώνων (χ. 14).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ διάμετρος $A\mu = \alpha$, ἐ͂ ἡ πλευρὰ $AB = \chi$· ἐπεὶ δὲ ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία Β ἔςιν ὀρθὴ (Γεωμ. 180), τὸ τρίγωνον $AB\mu$ ἔςαι ὀρθογώνιον· ἐ͂ δὴ ἔςαι $B\mu^2 = A\mu^2 - BA^2$, $B\mu = \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$· τὸ δὲ τριγώνου ABμ ἔςαι $= \frac{1}{2} AB . B\mu = \frac{1}{2}\chi \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, ὅπερ τὰ ἀπειροςὰ, ἰσέμενα τῷ ο, παρέχουσι $\frac{\delta\chi}{2} \times \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\chi \times - 2\chi\delta\chi \times (\alpha\alpha - \chi\chi)^{\frac{1}{2}}$ $= o = \frac{\delta\chi}{2} . \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} - \frac{\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}} = o$, εἴτ' οὖν (ἀναγωγῇ ἐπὶ κοινὸν ὄνομα) $\frac{\alpha\alpha\delta\chi - 2\chi\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}} = \delta\upsilon = o$· ἄρα $\alpha\alpha - 2\chi\chi = o$, $\alpha\alpha = 2\chi\chi$, $\chi\chi = \frac{\alpha\alpha}{2}$, $\chi = \alpha\sqrt{\frac{1}{2}}$· ἀντικαταςαθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν $B\mu = \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, εὑρεθήσεται $B\mu = \sqrt{(\frac{2\alpha\alpha}{2} - \frac{\alpha\alpha}{2})} = \alpha\sqrt{\frac{1}{2}}$· ἄρα $BA = B\mu$, τοῦτ' ἔςι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔςι τὸ μέγιςον ἁπάντων τῶν ἡμικυκλίῳ ἐγγραφῆναι δυναμένων.

Ἐὰν ὑποτεθῇ $\delta\upsilon = \frac{\alpha\alpha\delta\chi - 2\chi\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}} = \infty$, εὑρεθήσεται $2\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = o$, $\alpha\alpha - \chi\chi = o$, $\alpha\alpha = \chi\chi$, $\alpha = \chi$· ἄρα ἡ AB πλευρὰ ἔςαι ἴση τῇ Aμ διαμέτρῳ, ἢ καὶ συμπίπτει, καὶ ἑπομένως οὐδὲν συνίςαται τρίγωνον, ἢ, εἰ βούλει, τὸ τρίγωνον ἔςαι = ο· οὐδεμία ἄρα λύσις τοῦ προβλήματος ἔςαι ἀποδεκτέα, εἰμὴ ἡ ἄρτι ἀποδεδομένη.

105. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒʹ. Σφαίρᾳ δοθείσῃ ἐγγράψαι κῶνον, οὗ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια μεγίςη εἴη πάντων τῶν ἐγγραφῆναι δυναμένων (σχ. 15).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω τῆς σφαίρας ἡ διάμετρος $= \alpha$, καὶ τȣ̃ ζητȣμένȣ κώνȣ ΓΛμ τὸ ὕψος ΑΔ $= \chi$· ἐπεὶ δὲ ἡ κυρτὴ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς περιφερείας, ἧς ἀκτὶς ἡ ΔΓ, ϗ τȣ̃ ἡμίσεος τῆς ΑΓ, αἱ δὲ κυκλικαὶ περιφέρειαι εἰσὶν ἐν τῷ λόγῳ τῶν ἀκτίνων, ἡ ζητȣμένη ἐπιφάνεια ἔςαι ἀνάλογος τῷ ΓΔ $\times$ ΑΓ· ἀλλὰ $\text{ΑΓ} = \sqrt{(\alpha \cdot \chi)}$ ϗ $\text{ΓΔ} = \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, ὡς δῆλον, ἄρα $\text{ΑΓ} . \text{ΓΔ} = \sqrt{\alpha\chi} \times \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)} = \sqrt{(\alpha^2\chi\chi - \alpha\chi^3)}$· ἐπεὶ δὲ αὕτη ἡ ποσότης ζητεῖται εἶναι μεγίςη· ϗ τὸ ἀπ' αὐτῆς ἄρα τετράγωνον $\alpha^2\chi\chi - \alpha\chi^3$ ἔςαι ὡσαύτως μέγιςον· ἄρα $2\alpha^2\chi\delta\chi - 3\alpha\chi^2\delta\chi = 0$, $2\alpha - 3\chi = 0$, $2\alpha = 3\chi$, $\chi = \frac{2\alpha}{3}$· δεῖ ἄρα εἶναι τὸν τȣ̃ ζητȣμένȣ κώνȣ ἄξονα δύω τριτημόρια τῆς σφαιρικῆς διαμέτρȣ.

106. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῷδε τῷ προβλήματι ἐλήφθησαν τὰ ἀπειροςὰ, τῆς μὲν κωνικῆς ἐπιφανείας ȣ̓χὶ, ποσότητος δὲ ἀναλόγȣ ταύτῃ, εἴτ' ȣ̓̃ν τῆς πρὸς ἐκείνην λόγον δεδομένον ἐχȣ́σης· ἐφεῖται δὲ τȣ̃το ἀείποτε ἐν τῇ ζητήσει τȣ̃ μεγίςȣ καὶ ἐλαχίςȣ· ἔςω γὰρ ποσότης ἡτισȣ̃ν ἡ $\gamma\chi - \chi^2 = \upsilon$, ἧς πρόκειται εὑρεῖν τὸ μέγιςον, ἢ τὸ ἐλάχιςον· ἐὰν ȣ̓̃ν ἀντὶ τῶν ταύτης τῆς ποσότητος ἀπειροςῶν ληφθῶσι τὰ ἀπειροςὰ τῆς ποσότητος $\frac{\beta}{\alpha}(\gamma\chi - \chi^2)$, ἥτις ἐςὶν ἐκείνῃ ἀνάλογος, εἴτ' ȣ̓̃ν ἔχει πρὸς τὴν προτεθεῖσαν ποσότητα λόγον ὃν $\alpha : \beta$· ἐπεὶ ἐςιν $\alpha : \beta :: \gamma\chi - \chi^2 : \frac{\beta}{\alpha} \times (\gamma\chi - \chi^2)$, εὑρεθήσεται (100) ἡ αὐτὴ δύναμις τȣ̃ χ· λυσιτελεῖ δὲ αὕτη ἡ σημείωσις ἐν πολλαῖς περιπτώσεσι.

107. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ'. Ἐπὶ τῆς εὐθείας Αμ, ὡς ὑποτεινέσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τεθείσης, συςήσασθαι τὸ μέγιςον τῶν δυνατῶν ὀρθογωνίων τριγώνων (σχ. 14).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ εὐθεία Αμ $= \alpha$, ϗ ἡ πλευρὰ ΑΒ $= \chi$· ἡ τρίτη ἄρα πλευρὰ ἔςαι $= \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$· ἔςαι δὲ $AB \times B\mu = \frac{\chi}{2} \times \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, τύπος τῆς τῦ τριγώνυ ἐπιφανείας· γενομένων ἓν τῶν αὐτῶν, ἃ ϗ ἀνωτέρω (104), εὑρεθήσεται $AB = B\mu = \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$, τῦτ' ἔςι τὸ ζητέμενον μέγιςον τρίγωνον ἔςαι ἰσοσκελές· ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς Αμ διαμέτρυ γραφῇ ἡμικύκλιον, ϗ ἐκ τῦ ἐν αὐτῷ μέσυ σημείυ β ἐπιζευχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΒΑ, Βμ, πορισθήσεται τὸ ζητέμενον τρίγωνον.

108. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ'. Ἁπάντων τῶν ἀπειραρίθμων κυλίνδρων, τῶν σφαίρᾳ ἐγγραφῆναι δυναμένων, εὑρεῖν τὸν τὴν μεγίςην ἐπιφάνειαν ἔχοντα ΒΝΜΖ (σχ. 16).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ τῆς σφαίρας ἀκτὶς $K\alpha = \alpha$, καὶ ἐμφαινέτω ἡ Ππ τὸν τῦ κυλίνδρυ ἄξονα, ϗ ΚΠ ἔςω $= \chi$· ἐκεῖν διὰ τὴν κυκλικὴν ἰδιότητα ἔςαι $\Pi\mu^2 = \alpha\alpha - \chi\chi$· ἀλλ' ἡ κυκλικὴ περιφέρεια, ἧς ἀκτὶς ἡ Πμ, ἔςιν ὥσπερ αὐτὴ ἡ ἀκτὶς, ϗ $\Pi\pi = 2\chi$ (ἐὰν γὰρ ἐκ τῦ Κ κέντρυ ἀχθῇ ἡ Κσ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΜΝ, ἡ $MN = \pi\Pi$ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ σ)· ἄρα ἡ ποσότης $2\chi . \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$ ἔςιν ἀνάλογος τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ τῦ ζητυμένυ κυλίνδρυ· ἐκεῖν ὑποτιθεμένυ $\upsilon = 2\chi . \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, ἢ $\upsilon\upsilon = 4\chi\chi\alpha\alpha - 4\chi^4$, εὑρεθήσεται $2\upsilon\delta\upsilon = 0 = 8\chi . \alpha\alpha\delta\chi - 16\chi^3\delta\chi$, $\alpha\alpha - 2\chi\chi = 0$, $\alpha\alpha = 2\chi\chi$, $\chi^2 = \frac{\alpha\alpha}{2}$, $\chi = \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$· λαμβανομένης ἄρα ΚΠ

$=\sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$, εἴτ' ἐν μέσης ἀναλόγε μεταξὺ α ἐ $\frac{\alpha}{2}$, ποριϑήσεται τὸ σημεῖον Π, δι' ἐ ἀχθεῖσα ἡ τεταγμένη Πμ ἔςαι ἀκτὶς τῦ κύκλε, ὃς ὑποβληθήσεται βάσις· ἡ δὲ Ππ ἔςαι ἄξων τῦ ζητεμένε κυλίνδρε.

109. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἡ καμπύλη ΑΜΖΒ ὑπάρχῃ ἔλλειψις, ἧς μείζων μὲν ἡμιάξων εἴη $=\alpha$, ἐλάττων δὲ $=\beta$, εὑρεθήσεται Πμ $=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha\alpha-\chi\chi)}$· αὕτη δὲ ἡ ποσότης, πολλαπλασιαϑεῖσα ἐπὶ 2χ, ἀνάλογος ἔςαι τῇ ἐπιφανείᾳ τῦ τῇ ἐλλειπτικῇ κωνοειδεῖ ἐγγεγραμμένε κυλίνδρε· ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῦτο ἐςὶ πρὸς τὸ ὑπὲρ τῆς σφαίρας εὑρεθὲν ἐν λόγῳ δεδομένῳ (106)· ἄρα ἡ αὐτὴ τῦ χ εὑρεθήσεται δύναμις· ἡ αὐτὴ δ' ἂν εὑρεθείη δύναμις, κἂν ζητηθείη τὸ μέγιςον ὀρθογώνιον ἐλλείψει ἐγγράψαι· ἔςαι γὰρ τόδε τὸ ὀρθογώνιον $=2$Πμ $\times 2\chi=4\chi\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha\alpha-\chi\chi)}$· ἄρα τό,τε μέγιςον τῶν, ἅπερ ἂν ἐλλείψει ἐγγραφείη, ὀρθογωνίων, ἐ ὁ τὴν μεγίςην ἔχων ἐπιφάνειαν τῶν ἐλλειπτικῇ κωνοειδεῖ ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων, εὑρεθήσονται, λαμβανομένης ΚΠ $=\chi=\sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$· ἀντικαθιςαμένης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῇ τῦ Πμ·, εὑρίσκεται Πμ$^2=\frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}\times\frac{\alpha\alpha}{2}=\frac{\beta\beta}{2}$, ἐ Πμ $=\sqrt{\frac{\beta\beta}{2}}$, ἥτις ἐςὶ μέση ἀνάλογος τῶν β, $\frac{\beta}{2}$.

Ἀλλὰ τῆς ςερεότητος τῦ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένε κυλίνδρε ὅσης ἀναλόγε τῷ 2χ. Πμ^2, εἴτ' ἐν τῷ $2\alpha\chi\chi$

$-2\chi^3$, εἰς εὕρεσιν τῦ μεγίςυ ἰσωθήτω τῷ ο τὰ ταύτης τῆς ποσότητος ἀπειροςά· ὅθεν ἔςαι $2\alpha\alpha\delta\chi - 6\chi^2\delta\chi = o$, $\chi = \sqrt{(\frac{\alpha}{3}.\alpha)}$, ϗ $2\chi = 2\sqrt{(\frac{\alpha}{3}.\alpha)}$· τοσόνδε ὖν ἔςαι τὸ ὕψος τῦ μεγίςυ κυλίνδρυ τῶν δυναμένων ἐγγραφῆναι σφαίρᾳ, ἧς ἡ ἀκτὶς $= \alpha$· ὡς ὖν πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἀκτῖνα ευπετὲς συνιδεῖν, ὅτι τηνικαῦτα ἔςαι $\Pi\mu = \sqrt{(\frac{2\alpha}{3}.\alpha)}$.

110. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΕ'. Εὐθεῖαν δοθεῖσαν τὴν $A\beta$ ὕτως εἰς δύω κατὰ τὸ γ τεμεῖν, ὅπως τὸ γινόμενον ὑπὸ $A\gamma^{\mu}$ ϗ $\gamma\beta^{\nu}$ τὸ μέγιςον ᾖ ἁπάντων (σχ. 17).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω εὐθεῖα ἡ $A\beta = \alpha$, καὶ $A\gamma = \chi$· ἄρα $\gamma\beta = \alpha - \chi$· τοιγαρῦν ὑποτιθεμένυ $\upsilon = \chi^{\mu} \times (\alpha - \chi)^{\nu}$, ἔςαι $\delta\upsilon = o = \mu\chi^{\mu-1}\delta\chi \times (\alpha - \chi)^{\nu} - \nu\chi^{\mu}\delta\chi\,(\alpha - \chi)^{\nu-1} = o$· ἄρα μεταθέσει ϗ διαιρέσει διὰ $\chi^{\mu-1} \times (\alpha - \chi)^{\nu-1}\delta\chi$, πρόεισι $\mu\alpha - \mu\chi = \nu\chi$, $\mu\alpha = \mu\chi + \nu\chi$, $\chi = \frac{\mu\alpha}{\mu+\nu}$· ἐὰν ἄρα ᾖ $\mu = 2$, ϗ $\nu = 1$, εὑρεθήσεται $\chi = \frac{2\alpha}{3}$, τῦτ' ἔςι τὸ μέγιςον τῶν δυνατῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν βάσις μὲν τὸ ἀπὸ τῦ τμήματος $A\gamma$ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὸ λοιπὸν τῆς $A\beta$ εὐθείας, συςαθήσεται, ὅταν $A\gamma$ ᾖ $\frac{2}{3}$ τῆς εὐθείας $A\beta$· ἐὰν δὲ ᾖ $\mu = \nu = 1$, ἔςαι $\chi = \frac{\alpha}{2}$· ὐκῦν τὸ μέγιςον τῶν ὀρθογωνίων, τῶν περιεχομένων ὑπὸ δύω τμημάτων εὐθείας τῆς α, συςαθήσεται, ὅταν τὰ τμήματα ὦσιν ἰσάλληλα· τῦ δὲ α ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος, ὑποτεθέντων $\mu = 3$, καὶ

$\nu = 2$, ἔςαι $\chi = \frac{3\alpha}{5}$, ϗ ἑπομένως $\gamma\beta = \alpha - \chi = \frac{2\alpha}{5}$· τὸ ἄρα μέγιςον γινόμενον, ὧν ἄντις ποιήσειε, διελὼν ἀριθμὸν εἰς δύω μέρη, ϗ πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ θατέρε κύβον ἐπὶ τὸν ἐκ θατέρε τετράγωνον, συςαθήσεται, ὅταν τὸ μὲν ᾖ $\frac{3}{5}$ τε προτεθέντος ἀριθμε, θάτερον δὲ μέρος $\frac{2}{5}$· ἔτω, προτεθέντος τε ἀριθμε 10, τὸ μὲν πρῶτον μέρος ἔςαι $= 6$, τὸ δὲ $= 4$, ὁ δὲ ὑπὸ 216 ϗ 16 γινόμενος ὁ μέγιςος ἔςαι ἀριθμὸς τῶν ἔτω γενέσθαι δυναμένων. Τε δὲ ν ἀριθμὸν λειπτικὸν ἐμφαίνοντες, ἡ ποσότης $\chi^{\mu}\,(\alpha - \chi)^{\nu}$ ἔςαι τηνικαῦτα ἐλαχίςη· ἔτω, φέρε, ὑποτιθεμένων τε μὲν $\mu = 3$, τε δὲ $\nu = -2$, εὑρεθήσεται $\chi = 3\alpha$, ϗ $\chi^{\mu}(\alpha - \chi)^{\nu} = (3\alpha)^{3} \,.\, (-2\alpha)^{-2} = \frac{27\alpha\alpha\alpha}{4\alpha\alpha} = \frac{27\alpha}{4}$, ὅπερ ἔςαι ἐλάχιςον· ὄντων δὲ, τε μὲν $\nu = -1$, τε δὲ $\mu = 2$, εὑρεθήσεται $\frac{\chi^{2}}{\alpha - \chi}$, ὅπερ, ὑποτεθέντος $\chi = \frac{2\alpha}{2 - 1} = 2\alpha$, γίνεται $= \frac{4\alpha\alpha}{\alpha - 2\alpha} = \frac{4\alpha\alpha}{-\alpha} = -4\alpha$· τηνικαῦτα ἄρα τὸ σημεῖον Γ εὑρεθήσεται ἐπὶ τῆς Αβ, ἐπὶ θάτερα προσαχθείσης, ὡς εἶναι $\mathrm{A\Gamma} = 2\alpha = \frac{\mu\alpha}{\mu - \nu} = 2\alpha$· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὁ παρονομαςὴς $\alpha - \chi = o$, ἔςαι $\frac{4\alpha\alpha}{\alpha - \alpha} = \frac{4\alpha\alpha}{o} = \infty$· ἔςιν ἕν μέγιςόν τι ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει· ϗ γὰρ εἰ τὸ χ ὑποτεθείη ἔλαττον ἢ μεῖζον τε α, εὑρίσκεται ποσότης ἐλάττων ἢ ὅταν ὑποτεθῇ $\chi = \alpha$.

111. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙϚ΄. Τριχοτομῆσαι τὴν δοθεῖ-

σαν εὐθεῖαν α εἰς τμήματα τὰ $A = \chi$, $B = \psi$, $\Gamma = \alpha - \chi - \psi$, ὅπως τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον $\vartheta = \chi^\mu \psi^\nu (\alpha - \chi - \psi)^\rho$ μέγιστον ᾖ πάντων τῶν οὕτω γενέσθαι δυναμένων.

ΛΥΣΙΣ. Εἰλήφθω τὰ ἀπειροστὰ τοῦ γινομένου ϑ, ἐκλαμβανομένου τοῦ ψ ὡς ἀτρέπτου· καὶ δὴ ἔσται $\mu d\chi . \chi^{\mu-1} \psi^\nu \times (\alpha - \chi - \psi)^\rho - \rho d\chi . \chi^\mu \psi^\nu (\alpha - \chi - \psi)^{\rho-1} = 0$· διαιρέσει δὲ διὰ $d\chi \chi^{\mu-1} \psi^\nu \times (\alpha - \chi - \psi)^{\rho-1}$, προέρχεται $\mu . (\alpha - \psi - \chi) - \rho\chi = 0$· ὅθεν $\chi = \dfrac{\mu\alpha - \mu\psi}{\mu + \rho}$· ταύτης δὲ τῆς τοῦ χ δυνάμεως ἀντικατασταθείσης ἐν τῷ γινομένῳ ϑ, ἀποβαλλομένου τοῦ ἀτρέπτου ποιητοῦ προκύψει $\psi^\nu (\alpha - \psi)^{\mu + \rho}$· τῶν δὲ ταύτης τῆς ποσότητος ἀπειροστῶν διαιρεθέντων διὰ $d\psi . \psi^{\nu-1}$, καὶ ἰσωθέντων τῷ 0, προέρχεται $\nu\alpha - \nu\psi - \mu\psi - \rho\psi = 0$, εἴτ' οὖν $\psi = \dfrac{\nu\alpha}{\mu + \nu + \rho}$· ταύτης δὲ τῆς δυνάμεως ἐν τῇ τῆς χ ἀντικατασταθείσης, εὑρίσκεται $A = \dfrac{\mu\alpha}{\mu + \nu + \rho}$· ἀντικατασταθεισῶν δὲ τῶν δυνάμεων τῆς ψ καὶ τῆς χ, τῶν ἄρτι εὑρημένων ἐν τῇ τοῦ Γ, πορισθήσεται $\Gamma = \dfrac{\rho\alpha}{\mu + \nu + \rho}$· ἐὰν οὖν ᾖ $\mu = \nu = \rho = 1$, τὰ τρία τμήματα ἰσάλληλα ἔσονται, καὶ ἕκαστον τριτημόριον τῆς εὐθείας α· τ' αὐτὸν ἔσται καὶ εἰ ἀριθμὸς προκέοιτο εἰς τοιάνδε διάτμησιν. Βουλομένοις δὲ διατεμεῖν εὐθεῖαν, ἢ ἀριθμὸν δοθέντα τὸν α, εἰς τέσσαρα μέρη $A = \chi$, $B = \psi$, $\Gamma = \omega$, $\Delta = \alpha - \chi - \psi - \omega$, ὅπως τὸ γινόμενον $A^\mu B^\nu \Gamma^\rho \Delta^\sigma$ ὑπάρχῃ μέγιστον, θεμένοις $\mu + \nu + \rho + \sigma = \tau$, ἔσται $A =$

$\frac{\mu\alpha}{\tau}$, ϗ $B = \frac{\nu\alpha}{\tau}$, ϗ $\Gamma = \frac{\rho\alpha}{\tau}$, ϗ $\Delta = \frac{\sigma\alpha}{\tau}$, ὡς τὰ μέρη τῆς εὐθείας, ἤ τȣ͂ δοθέντος ἀριθμȣ͂ α, ὑπάρχειν πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ αὐτῶν δεῖκται· ἐὰν ȣ͂ν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ᾖ 6, ϗ $\mu = 3$, ϗ $\nu = 2$, ϗ $\rho = 1$, τὰ τρία μέρη ἔσονται 3, 2, 1· ὁ δὲ γινόμενος ἐκ τȣ͂ κύβȣ τȣ͂ πρώτȣ, ϗ τȣ͂ ἀπὸ τȣ͂ δευτέρȣ τετραγώνȣ, ϗ τȣ͂ πρώτȣ βαθμȣ͂ τȣ͂ τρίτȣ, εἴτ' ȣ͂ν ὁ 108 ἐςὶν ὁ μέγιςος τῶν, ὧν ἄντις ποιήσειεν ἐκ τριῶν τȣ͂ 6 τμημάτων, πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ τȣ͂ πρώτȣ κύβον ἐπὶ τὸν ἀπὸ τȣ͂ δευτέρȣ τετράγωνον, ϗ τὸν ἐκ τȣ́των γενόμενον ἐπὶ τὸν πρῶτον βαθμὸν τȣ͂ τρίτȣ.

112. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἰςέον δὲ ὡς, ὅτε ἡ ζητȣμένη ποσότης ἀντιςοιχεῖ πολλοῖς ἀγνώςοις ἐχομένοις ἀλλήλων, δυνατὸν ὑποθέσθαι, τινὰ μὲν αὐτῶν τρεπτὰ, τάδ' ἄλλα ἄτρεπτα, εἰσάγοντας τὰς εὑρημένας δυνάμεις ἐν τῇ πρώτῃ ἐκθέσει, μέχρις ἂν ἀφικώμεθα εἰς ἓν μόνον ἄγνωςον· ϗ τηνικαῦτα εὑρεθήσεται ἡ ζητȣμένη ποσότης διὰ τῆς ληφθείσης εἰς χρῆσιν ἀνωτέρω (111) μεθόδȣ.

113. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΖ'. Τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως Αμ συςαθῆναι δυναμένων ἰσοπεριμέτρων τριγώνων τὸ μέγιςον εὑρεῖν (σχ. 18).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ περίμετρος $= 2\pi$, ἡ δὲ βάσις $A\mu = \alpha$, ϗ ἡ πλευρὰ $A\beta = \chi$· ȣ̓κȣ͂ν ἡ πλευρὰ $\beta\mu$ ἔςαι $= 2\pi - \alpha - \chi$· ἀλλ' ἡ ζητȣμένη ἐπιφάνεια ἐςὶν (Γεωμ. 562) $= \sqrt{\pi . (\pi - \alpha) . (\pi - \chi) . (\alpha + \chi - \pi)}$· ταύτης τῆς ποσότητος ὑποτεθείσης $= \upsilon$ ϗ τετραγωνισθείσης, προέρχεται $\upsilon\upsilon = \pi \times (\pi - \alpha) \times (\pi - \chi) \times (\alpha + \chi - \pi)$· ἐκδηλȣ͂ντες ȣ͂ν τὸν λογάριθμον διὰ Λ, καὶ ἀναμιμνήσκομενοι, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν ποιητῶν ἐςὶν ἴσον τῷ λογαρίθμῳ τȣ͂ γινομένȣ, ἕξομεν $\Lambda\pi + \Lambda(\pi-\alpha) + \Lambda(\pi-\chi) + \Lambda(\alpha+\chi-\pi) = 2\Lambda\upsilon$· ἐπεὶ π ϗ α εἰσὶ ποσότητες ἄτρεπτοι· ἄρα $\frac{-\delta\chi}{\pi-\chi} + \frac{\delta\chi}{\alpha+\chi-\pi} = \frac{2\delta\upsilon}{\upsilon} = 0$, ὑποτιθεμένȣ τȣ͂ $\delta\upsilon = 0$· ἄρα $\frac{1}{\alpha+\chi-\pi} - \frac{1}{\pi-\chi} = 0$, εἴτ' ȣ͂ν $\frac{1}{\alpha+\chi-\pi} = \frac{1}{\pi-\chi}$, ἢ $\pi-\chi = \alpha+\chi-\pi$· ἄρα $2\pi-\alpha = 2\chi$· ἄρα αἱ πλευραὶ Αβ ϗ βμ εἰσὶν ἴσαι ϗ τὸ ζητȣ́μενον τρίγωνον ἰσοσκελές.

114. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πάντων ἄρα τῶν ἰσοπεριμέτρων τριγώνων μέγιςόν ἐςι τὸ ἰσόπλευρον· ἐὰν γὰρ ᾖ τὸ ζητȣ́μενον τρίγωνον τὸ Αβμ, ϗ ζητῆται ἡ βάσις αὐτȣ͂ Αμ, ἐπεὶ ἐκ τῶν εἰρημένων αἱ δύω λοιπαὶ πλευραὶ εἰσὶν ἰσάλληλαι, κληθείσης 2χ τῆς βάσεως, τὸ ἄθροισμα τῶν δύω λοιπῶν πλευρῶν ἔςαι $2\pi - 2\chi$, ϗ $\pi-\chi$ ἑκατέρα τῶν δυεῖν· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἔςαι $\upsilon = \sqrt{\pi(\pi-2\chi)\cdot(\chi)\cdot(\chi)}$, $2\lambda\upsilon = \lambda\pi + \lambda(\pi-2\chi) + 2\lambda\chi$, $\frac{2\delta\upsilon}{\upsilon} = 0 = \frac{-2\delta\chi}{\pi-2\chi} + \frac{2\delta\chi}{\chi}$, $\frac{-2}{\pi-2\chi} + \frac{2}{\chi} = 0$, $\frac{2}{\chi} = \frac{2}{\pi-2\chi}$, $\pi - 2\chi = \chi$, $\pi = 3\chi$, $\chi = \frac{\pi}{3}$, $2\chi = \frac{2\pi}{3}$· ἡ βάσις ἄρα τριτημόριόν ἐςι τῆς περιμέτρȣ· ϗ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν τριῶν ἐςὶν $= \pi - \chi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi-\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, τὸ τρίγωνον ἐςὶν ἰσόπλευρον.

115. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΗ'. Πάντων τῶν παραλληλεπιπέδων, τῶν ἴσων δοθέντι κύβῳ τῷ β^3, ἐξ ὧν μία τῶν πλευρῶν δεδομένη ἐσὶν ἡ α, εὑρεῖν τὸ ἔχον ἐλαχίσην ἐπιφάνειαν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔσω μία τῶν ζητυμένων πλευρῶν ἡ χ· τὸ ἓν γινόμενον $\alpha.\chi$ ἔσαι ἴσον ἑνὶ τῶν περιεχόντων ἐπιπέδων, ὃ δυνάμεθα ἐκλαβεῖν ὡς βάσιν· διαιρῦντες τοίνυν τὴν σερεότητα β^3 διὰ τῆς βάσεως $\alpha\chi$ εὑρίσκομεν τὸ ὕψος $\frac{\beta^3}{\alpha\chi}$, ὃ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ α ἐ χ χωρὶς ἕξομεν δύω γινόμενα, ὧν τὸ ἄθροισμα ἔσαι τὸ ἥμισυ τῆς παραπλεύρυ ἐπιφανείας· ἄρα $\alpha\chi + \frac{\beta^3}{\chi} + \frac{\beta^3}{\chi}$ ἐσὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἐπιφανείας· ἐξισῦντες ἐν τῷ ο τὰ ταύτης τῆς ποσότητος ἀπειροσά, εὑρίσκομεν $\alpha\delta\chi - \frac{\beta\beta\beta\delta\chi}{\chi\chi} = 0$, $\alpha = \frac{\chi^3}{\chi^2}$, $\chi^2 = \frac{\beta^3}{\alpha}$, $\chi = \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha}}$· ἄρα ἡ πλευρὰ $\frac{\beta^3}{\alpha\chi} = \sqrt{\frac{\beta^6}{\alpha\alpha\chi\chi}} = \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha}}$· ἄρα ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἐσὶν $= \alpha$, τῶν δὲ λοιπῶν δυεῖν ἑκατέρα $= \sqrt{(\frac{\beta^3}{\alpha})}$.

116. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΘ'. Πάντων τῶν παραλληλεπιπέδων τῶν ἴσων τῷ δοθέντι κύβῳ β^3 εὑρεῖν τὸ ἔχον ἐλαχίσην ἐπιφάνειαν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐὰν μία τῶν πλευρῶν κληθῇ χ, ἑκατέρα τῶν λοιπῶν δύω ἔσαι $= \sqrt{\frac{\beta^3}{\chi}}$, ὡς ἕπεται ἐκ τῦ ἀνωτέρω προβλήματος· λαμβάνοντες ὖν τὸ ἄθρασμα τῶν γινομένων ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν, εὑρίσκομεν τὴν ἡμίσειαν ἐπιφάνειαν $= 2\chi\sqrt{\frac{\beta^3}{\chi}} + \sqrt{\frac{\beta^3}{\chi}} \times \sqrt{\frac{\beta^3}{\chi}} = 2\sqrt{(\beta^3\chi)} + \frac{\beta^3}{\chi} = \upsilon$, $\delta\upsilon = o = \frac{\beta^3\delta\chi}{\sqrt{(\beta^3\chi)}} - \frac{\beta^3\delta\chi}{\chi^2}$ · ἄρα $\chi^2 = \sqrt{(\beta^3\chi)}$, $\chi^4 = \beta^3\chi$, $\chi^3 = \beta^3$, $\chi = \beta$ · ἄρα ἡ πλευρὰ $\chi = \beta$ · καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν λοιπῶν ἐστιν $= \sqrt{\frac{\beta^3}{\chi}} = \sqrt{\frac{\beta^3}{\beta}} = \sqrt{\beta^2} = \beta$ · δῆλον ἄρα, ὅτι ὁ προτεθεὶς κύβος ἐξικανοῖ πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος.

117. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Κʹ. Πάντων τῶν τὴν αὐτὴν ἐχόντων δεδομένην στερεότητα κώνων εὑρεῖν τὸν ἔχοντα ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω υ ἡ τῆς βάσεως ἀκτὶς, καὶ χ τὸ ὕψος · $\sqrt{(\upsilon\upsilon + \chi\chi)}$ ἔσται ἡ τοῦ κώνου πλευρά · τιθεῖσι δὲ $1 : \pi :: \upsilon : \pi\upsilon$, εὑρεθήσεται ἡ κυκλικὴ περιφέρεια, ἧς ἀκτὶς $= 1$ · ἄρα $\pi\upsilon\sqrt{(\upsilon\upsilon + \chi\chi)}$ ἔσται, ὥσπερ ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια, ἥτις ὑποτεθειέσθω $= \psi$ · ἀποβολῇ ἄρα τοῦ ἀτρέπτου ποιητοῦ, $\psi^2 = \upsilon^4 + \chi\chi\upsilon^2$ · λαμβανομένων δὲ τῶν ἀπειροστῶν, καὶ ὑποτιθεμένου $\delta\psi = o$, εὑρίσκεται $2\psi\delta\psi = o = 4\upsilon^3\delta\upsilon + 2\chi\upsilon\upsilon\delta\chi + 2\chi^2\upsilon\delta\upsilon$ · ἡ δὲ στερεότης, οὖσα ὡς τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς βάσεως (ἥτις ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος υ τετράγωνον) καὶ τοῦ ὕψους, ἔσται ἀνάλογος τῷ $\chi\upsilon\upsilon$ · ἀλλ' ἐστιν ἄτρεπτος ἐξ ὑποθέσεως ἡ στερεότης · ἄρα τὸ ἀπειροστὸν τοῦ $\upsilon^2\chi$ ἔσται $= o$ · οὐκοῦν $2\upsilon\chi\delta\upsilon + \upsilon^2\delta\chi = o$, $\upsilon\delta\chi = - 2\chi\delta\upsilon$ · ἀντικαθισταμένης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως τοῦ $\upsilon\delta\chi$ ἐν τῷ τῆς ἐπιφανείας ἀπειροστῷ, εὑρίσκεται $4\upsilon^3\delta\upsilon - 4\chi^2\upsilon\delta\upsilon + 2\chi^2\upsilon\delta\upsilon = o$, $4\upsilon^2 - 2\chi^2 = o$, $4\upsilon^2 = 2\chi^2$, $2\upsilon^2 = \chi\chi$ ·

ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως τετράγωνον δεῖ εἶναι ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τοῦ ὕψους τετραγώνου.

Ἐὰν δοθείσης στερεότητος ἄγγους κυλινδρικοῦ, πλήρους ὕδατος, ζητηθῶσιν αἵτινες εἶεν αὐτοῦ αἱ διαστάσεις, ἵνα χωρήσῃ ποσότητα δεδομένην ὑγροῦ, τῆς αὐτοῦ ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας ἐλαχίστης ἁπασῶν τῶν δυνατῶν οὔσης, γενέσθω $= \alpha^3$ ἡ δοθεῖσα ποσότης τοῦ ὑγροῦ, ἢ ἡ στερεότης, ἢ τὸ ἐσωτερικὸν διάστημα τοῦ ἄγγους, καὶ χ ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος, καὶ ψ τὸ ἐσωτερικὸν ὕψος, καὶ ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος $= 1 : \pi$· ἡ ἄρα βάσις τοῦ ἄγγους ἔσται $= \frac{\gamma\chi^2}{4}$, ἡ αὐτοῦ χωρητικότης $= \alpha^3 = \frac{\gamma\chi^2\psi}{4}$, ἡ δὲ κοίλη ἐπιφάνεια $= \gamma\chi\psi$· ἐπεὶ δὲ $\alpha^3 = \frac{\gamma\chi^2\psi}{4}$, ἡ $\psi = \frac{4\alpha^3}{\gamma\chi^2}$, ἔσται $\gamma\chi\psi = \frac{4\alpha^2}{\chi}$· ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως ἐστιν $= \frac{\gamma\chi^2}{4}$· ἄρα ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια ἐστιν $= \frac{4\alpha^2}{\chi} + \frac{\gamma\chi^3}{4}$, ὅπερ δεῖ εἶναι ἐλάχιστον· εὑρεθήσεται ἄρα $-\frac{4\alpha^3 d\chi}{\chi^2} + \frac{\gamma\chi d\chi}{2} = 0$, εἶτ' οὖν $-4\alpha^3 + \frac{\gamma\chi^3}{2} = 0$,

$\gamma\chi^3 = 8\alpha^3$, $\chi^3 = \frac{8\alpha^3}{\gamma}$, $\chi = \frac{2\alpha}{\sqrt[3]{\gamma}}$, καὶ $\psi = \frac{4\alpha^3}{\gamma\chi^2} = \frac{\alpha\sqrt[3]{\gamma^2}}{\gamma} = \frac{\alpha\sqrt[3]{\gamma^3}}{\sqrt[3]{\gamma}\sqrt[3]{\gamma}} = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\gamma}}$· ἄρα τὸ ἐσωτερικὸν ὕψος τοῦ ἄγγους δεῖ εἶναι ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς ἐσωτερικῆς βάσεως· δεῖ δὲ εἶναι τὴν κοίλην ἐπιφάνειαν $= \frac{4\alpha^3}{\varkappa} + \frac{\gamma\chi^2}{4} = 2\alpha\alpha \times \sqrt[3]{\gamma} + \alpha^2\sqrt[3]{\gamma} = 3\alpha^2\sqrt[3]{\gamma}$.

118. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑ΄.** Ἐν τριγώνῳ εὑρεῖν σημεῖον τὸ ο, ἀφ' ὃ τῶν πρὸς τὰς τρεῖς γωνίας ἀχθεισῶν εὐθειῶν τὸ ἄθροισμα εἴη ἐλάχιςον (σχ. 19).

ΛΥΣΙΣ. Κέντρῳ τῷ β γεγράφθω κύκλε τόξον διῆκον διὰ τῦ ζητυμένυ σημείυ ο· ὑποτεθείσθω δὲ ἡ τῦδε τῦ τόξυ ἀκτὶς ἄτρεπτος ϗ $= \vartheta$, ϗ αο $= \upsilon$, ϗ ογ $= \chi$· ἐκῦν ἔςαι $\vartheta + \upsilon + \chi$ τὸ ζητέμενον ἐλάχιςον· ἄρα $\delta\upsilon + \delta\chi = 0$, $\delta\upsilon = -\delta\chi$· ἄρα τὸ ἀπειροςὸν τόξον οι, ὅπερ ἐκληπτέον ὡς εὐθεῖαν, ἐμφαίνει τὸ ἀπειροςὸν τῦ τόξυ ζο, τὰ μέρη ομ, ον τῶν γραμμῶν αο, γο τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπὸ τῦ ο, ϗ αἱ ταῖς γο, αο πρὸς ὀρθὰς ἐφιςάμεναι εὐθεῖαι ιμ, ιν σημανῦσι τὰ ἀπειροςὰ τέτων τῶν γραμμῶν, αἵτινες ἑπομένως εἰσὶν ἴσαι, ϗ ἡ γωνία ὑπὸ νοι $=$ μοι (*)· προςεθεῖσαι δὲ αὗται αἱ γωνίαι ταῖς ὀρθαῖς ιοβ, βορ (ἰςέον δὲ, ὅτι αἱ γωνίαι ιον, τορ, ὡς κατὰ κορυφὴν ἀντικείμεναι, εἰσὶν ἴσαι, ϗ ἀντὶ ιον λαβεῖν ἔξεςι τὴν ὑπὸ τορ) ποιήσυσιν ἴσας τὰς γωνίας βογ, βοα· ἐπινοήσασι δὲ κύκλυ τόξον γεγραμμένον ἐκ τῦ σημείυ α, δειχθείσεται, ὅτι ϗ αἱ ὑπὸ αοβ, αογ γωνίαι εἰσὶν ἴσαι· ἄρα αἱ πρὸς τῷ ο ὑπὸ τῶν πρὸς τὰς τρεῖς γωνίας τῦ τριγώνυ ἀχθεισῶν εὐθειῶν συςαθησόμεναι γωνίαι εἰσὶν ἴσαι· καὶ ἐπεὶ συνάμα δύνανται 360°, ἑκάςη αὐτῶν δύναται 120°.

(*) Ἐὰν ἀπὸ τῦ τῆς ὑποτεινέσης οι τετραγώνυ ἀφαιρεθῶσι τὰ ἀπὸ ον, ομ τετράγωνα, αἱ ῥίζαι τῶν καταλοίπων ἴσων παρέξυσιν ἴσας πλευρὰς τὰς ιν, ιμ· ἄρα τὰ τρίγωνα ομι, ονι ἔχυσι πάσας τὰς ἑαυτῶν πλευρὰς ἴσας, ϗ δὴ ϗ τὰς γωνίας.

119. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οὐκ ἀεὶ μέντοι δυνατόν ἐστι τὸ πρόβλημα· εἰ γὰρ εἴη τὸ αβγ τρίγωνον ἰσοσκελὲς, ὡς τὴν ὑπὸ αγβ γωνίαν ὑπάρχειν $= 140°$, τὸ σημεῖον ο ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ τριγώνου αγβ· ἐν ἄρα τῷ προτεθέντι τριγώνῳ οὐδὲν ἔσται σημεῖον ο, ἀφ᾽ οὗ ἂν ἀχθεῖεν εὐθεῖαι αἱ ογ, οβ, οα, ὡς ἑκάστην τῶν ὑπ᾽ αὐτῶν συνισταμένων γωνιῶν δύνασθαι $120°$.

120. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΒ΄. Τῶν κύκλῳ ἐγγεγραμμένων ἀπειραρίθμων τριγώνων εὑρεῖν τὸ μέγιστον. (σχ. 20).

ΛΥΣΙΣ. Ἐὰν ἐπινοηθῶσι πολλὰ τρίγωνα γεγραμμένα ἐπὶ τῆς αὐτῆς χορδῆς ΑΔ, εὐπετῶς προσδιορίζεται τὸ μέγιστον· τμηθείσης γὰρ δίχα τῆς ΑΔ κατὰ τὸ μ, καὶ διὰ τοῦ κέντρου Κ ἀχθείσης τῆς εὐθείας Κμ, ἥτις συμβάλλει τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Β, τὸ ΒΑΔ τρίγωνον ἔσται τὸ μέγιστον τῶν συσταθῆναι δυναμένων ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΔ· καὶ γὰρ βάσεως τῆς αὐτῆς οὔσης, τὰ τρίγωνα ἔσονται ὡς τὰ ὕψη, ἢ ὡς αἱ τῇ βάσει κάθετοι· ἀλλὰ Βμ προδήλως ἐστὶν ἡ μεγίστη κάθετος τῶν, ὧν ἄν τις ἀγάγοι ἀπὸ παντὸς σημείου τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΔ· ἄρα τὸ ζητηθὲν τρίγωνον δεῖ εἶναι ἰσοσκελές· ἔστω ἡ τοῦ κύκλου ἀκτὶς $= \alpha$, καὶ ἡ ἀποτετμημένη Κμ $= \chi$· ἄρα, διὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ κύκλου, μΔ $= \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$· τὸ δὲ τρίγωνον ΒΑΔ ἔσται $= (\alpha + \chi) \cdot \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, ὅπερ ὑποτεθείσθω $= \upsilon$· ἄρα $\upsilon^2 = (\alpha + \chi)^2 \times (\alpha\alpha - \chi\chi)$, καὶ $2\upsilon\delta\upsilon = 0 = 2\delta\chi \times (\alpha + \chi) \times (\alpha\alpha - \chi\chi) - 2\chi\delta\chi \cdot (\alpha + \chi)^2 = 0$· ἄρα $2 \cdot (\alpha + \chi) \cdot (\alpha\alpha - \chi\chi) = 2\chi(\alpha + \chi)^2$, $(\alpha\alpha - \chi\chi) = \chi \times (\alpha + \chi)$, καὶ διαιρέσει διὰ $\alpha + \chi$, $\alpha - \chi = \chi$, $\alpha = 2\chi$, $\chi = \frac{\alpha}{2}$· τμηθείσης ἄρα διχα τῆς ΚΖ κατὰ τὸ μ, ϗ ἀχθείσης τῆς χορδῆς ΑμΔ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΚΖ, τὸ τρίγωνον ΑΔΒ ἔςαι τὸ μέγιςον· ἔςι δὲ τῦτο ἰσόπλευρον, ϗ ἑκάςη αὐτῦ πλευρὰ $= a\sqrt{3}$, ὅπερ εὐκετῶς εὑρίσκεται, ἀντικαθιςαμένης τῆς τῦ χ δυνάμεως ἐν τῇ τῆς μΔ, ϗ διπλασιαζομένης· ϗ γὰρ μΔ $= \sqrt{(ax - xx)} = \sqrt{\frac{3aa}{4}} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, ὗ τὸ διπλῦν $= a\sqrt{3}$· ὡσαύτως ἐὰν ἀντικαταςαθῶσιν αἱ δυνάμεις τῆς Βμ, ϗ μΔ ἐν τῇ $\Delta B = \sqrt{(\mu\Delta)^2 + (B\mu)^2}$, εὑρεθήσεται ΔΒ $= AB = a\sqrt{3}$· δυνατὸν δὲ ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΔ συςήσασθαι ἕτερον τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΖΔ, ὅπερ ἐκτὸς κεῖται τὸ τῦ κύκλυ κέντρον· ἀλλ' ἐπεὶ τῆς Κμ αὐξύσης, ἢ μειυμένης, αὔξει ἢ μειῦται ϗ τὸ τρίγωνον, ὐκ ἔςιν ὔτε μέγιςον, ὔτ' ἐλάχιςον.

121. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΓ'.** Κύκλῳ περιγράψαι τὸ ἐλάχιςον τῶν περιγραφῆναι δυναμένων τριγώνων (σχ. 21).

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω τὸ ζητηθὲν τρίγωνον εἶναι τὸ Αϑζ· φημὶ δὴ ὡς εἰ διὰ τῆς κατὰ τὴν Α γωνίαν κορυφῆς ϗ τῦ κυκλικῦ κέντρυ Κ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΚν, ἡ πλευρὰ ϑζ κάθετος ἐπιςήσεται ταύτῃ τῇ εὐθείᾳ, ϗ συμβαλεῖ αὐτῇ κατὰ τὸ ν, ὡς εἶναι ἰσοσκελὲς τὸ τρίγωνον Αϑζ· ἐὰν γὰρ ἀχθῇ ἑτέρα ἁπτομένη ἡ σΛη, τὸ τρίγωνον Αησ μεῖζον ἔςαι τῦ Αϑζ· εἰς δέ γε τὴν τύτυ δεῖξιν, ἤχθω ἡ ζμ εὐθεῖα παράλληλος τῇ σϑ· ϗ τῶν τριγώνων σιϑ, ζμι ὁμοίων ὄντων, ἔςι $\zeta\iota : \vartheta\iota :: \zeta\mu : \vartheta\sigma$· ἀλλὰ $\zeta\iota > \vartheta\iota$· ἄρα $\zeta\mu > \vartheta\sigma$· ἔςι δὲ ϗ $\zeta\iota : \iota\vartheta :: \iota\mu : \sigma\iota$· ἄρα $\mu\iota > \iota\sigma$· ἄρα πολλῷ μᾶλλον $\iota\eta > \iota\sigma$· ἄρα ϗ $\zeta\mu \times \eta\iota > \vartheta\sigma \times \sigma\iota$· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ιζη ἔςιν ὡς τὸ γινόμενον $\iota\eta \times \zeta\mu$· τὸ δὲ γινόμενον $\vartheta\sigma \times \sigma\iota$ ὡς τὸ τρίγωνίων θσι (*)· ἄρα τὸ τρίγωνον ιζη > ισθ· κοινῆ δὲ προσθέντος τοῦ τετραπλεύρου Ασιζ, ἔςαι Αση > Αθζ· ἄρα τὸ Αθζ ἐςὶ τὸ ἐλάχιςον τρίγωνον· ἵνα δὲ διορισθῇ τὸ σημεῖον Α, ἀφ' οὗ ἀχθεῖσαι αἱ ἁπτόμεναι Αθ, Αζ μετὰ τῆς ἁπτομένης θζ περιέχοιεν ἂν τὸ ζητούμενον ἐλάχιςον τρίγωνον, διὰ τοῦ σημείου ν καὶ τοῦ κέντρου Κ ἤχθω ἡ εὐθεῖα νΚΑ, καὶ ὑποτεθείσθω $KA = \chi$, καὶ ἡ ἀκτὶς $K\beta = \alpha$· οὐκοῦν ἔςαι $A\nu = \chi + \alpha$, $\pi A = \chi - \alpha$, $A\beta = \sqrt{(\chi\chi - \alpha\alpha)}$· ἀλλὰ $A\beta : \kappa\beta :: A\nu : \theta\nu$ (διὰ τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΑβΚ, Αθν), ἢ $\sqrt{(\chi\chi - \alpha\alpha)} : \alpha ::$ $\chi + \alpha : \theta\nu = \dfrac{\alpha(\chi+\alpha)}{\sqrt{(\chi\chi-\alpha\alpha)}}$· πολλαπλασιασθείσης δὲ ταύτης τῆς ποσότητος ἐπὶ $\chi + \alpha$, εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον $= \alpha \,.\, \dfrac{(\chi+\alpha)^2}{\sqrt{(\chi\chi + \alpha\alpha)}} = \upsilon$, $\upsilon^2 = \dfrac{\alpha\alpha.(\chi+\alpha)^4}{\chi\chi - \alpha\alpha}$

$$= \frac{\alpha\alpha(\chi + \alpha)^3}{\chi - \alpha},\ 2\upsilon\delta\upsilon = 0 =$$

$$\frac{3\,\alpha\alpha\delta\chi.(\chi+\alpha)^2.(\chi-\alpha) - \alpha\alpha\delta\chi.(\chi+\alpha)^3}{(\chi-\alpha)^2}$$, εἶτ' οὖν 3.

$(\chi+\alpha)^2.(\chi-\alpha) = (\chi+\alpha)^3$, $3.(\chi-\alpha) = \chi+\alpha$, $3\chi - \chi = \alpha + 3\alpha$, $2\chi = 4\alpha$, $\chi = 2\alpha$· διὸ δὴ ληφθείσης τῆς ΚΑ ἴσης τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀχθεισῶν τῶν ἁπτομένων, μέχρις ἂν συμβάλλωσι τῇ ἁπτομένῃ θνζ, πορισθήσεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον· ὅπερ ἰσόπλευρόν ἐςι, καὶ ἑκάςη τῶν αὐτοῦ πλευρῶν $= 2\alpha\sqrt{3}$·

(*) Ἐὰν γὰρ ἐκ τῶν γωνιῶν θ, ζ ἀχθῶσι κάθετοι ταῖς αὐτὰς ὑποτεινούσαις πλευραῖς, αὗται, ὕψη οὖσαι τῶν τριγώνων, ἔσονται ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραί (Γεωμ. 324).

ϗ γὰρ ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΑβΚ, Αν϶ προϊοῦσιν Αβ : ΑΚ :: Αν : Α϶, ἤ, τετραγωνιζομένων ϗ εἰσαγομένων τῶν ἀναλυτικῶν δυνάμεων, $3aa$ (εἴγε ἐκ τῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑβΚ ἐστιν $A\beta^2 = AK^2 - \beta K^2 = 4aa - aa = 3aa$) : $4aa$ :: $9aa$: $A\vartheta^2 = 12aa = 4aa \times 3$· ἄρα $A\vartheta = A\zeta = 2a\sqrt{3}$· ἀλλὰ $\nu\vartheta^2 = A\vartheta^2 - A\nu^2 = 12aa - 9aa = 3aa$· ἄρα $\nu\vartheta = a\sqrt{3}$, ϗ $\vartheta\zeta = 2a\sqrt{3}$.

122. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῷ ΚΒ΄ προβλήματι εὕρηται ἡ τῦ μεγίστου τῶν κύκλῳ ἐγγραφῆναι δυναμένων τριγώνων πλευρὰ ἴσα $= a\sqrt{3}$, τῦ a ἀκτῖνος τῦ κύκλου ὄντος· ἐστιν ἄρα αὕτη ἡ πλευρὰ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τῦ ἐλαχίστου τῶν κύκλῳ περιγραφῆναι δυναμένων τριγώνων· εἰσὶν ἄρα ταῦτα τὰ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ὡς 1 : 4· εὐπετῶς δ' ἐνίοτε τὰ μέγιστα ϗ ἐλάχιστα ἀνιχνεύονται δίχα τῆς τῦ τῶν ἀπειροστῶν λογισμῦ βοηθείας.

123. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΔ΄. Δύω εὐθειῶν δοθεισῶν τῶν ΑΜ, ΑΒ, εὑρεῖν τὸ μέγιστον ἐμβαδὸν, ὧν ἂν αὗται περικλείσειαν μετὰ τῆς ἀδιορίστου εὐθείας ΜΒ (σχ. 22).

ΛΥΣΙΣ. Δῆλον, ὅτι τὸ τρίγωνον ΜΑΒ ἔσται μέγιστον, ὅταν ἡ Α γωνία ᾖ ὀρθή· τηνικαῦτα γὰρ μεῖζον ἕξει ὕψος παντὸς ἄλλου τριγώνου αβμ, ὅπερ ἂν ἔχοι τὰς πλευρὰς αμ, αβ ἴσας ταῖς ΑΜ ϗ ΑΒ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἀμβλεῖαν δὲ τὴν ὑπὸ μαβ γωνίαν.

124. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΕ΄. Τεσσάρων εὐθειῶν δοθεισῶν, ϗ μιᾶς ἀδιορίστου, εὑρεῖν τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀπολαμβανομένων (σχ. 23).

ΛΥΣΙΣ. Φημὶ δὴ ταύτας τὰς δεδομένας εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΠ, ΠΔ ἐνηρμοσμένας εἶναι ἡμικυκλίῳ, οὗ διάμετρον εἶναι τὴν ἀδιόριστον ΑΔ· δέδεικται γὰρ ἀνωτέρω τὴν μεγίστην τῶν περιεχομένων ὑπὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ϗ μιᾶς ἀδιορίστου ἐπιφανειῶν ὑπάρχειν, ὅταν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ποιῶσι γωνίαν ὀρθήν· ἐκεῖ, εἴπερ αἱ γωνίαι ΑΒΔ, ΑΓΔ μὴ εἶεν ὀρθαὶ, δυνατὸν αὐξηθῆναι, ἢ μειωθῆναι, ταῦτα τὰ τρίγωνα, μηδὲν ὅλως, μήτ᾽ αὐξηθέντος, μήτε μειωθέντος, τοῦ καταλοίπου σχήματος· εἰ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία μὴ εἴη ὀρθὴ, δυνατὸν αὐξηθῆναι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, γινομένης ὀρθῆς τῆς ὑπὸ ΑΓΔ γωνίας· ὃ δὴ εὐπετῶς τελεῖται, περιστρεφομένου τοῦ ΒΓΑ τριγώνου περὶ τὸ Γ σημεῖον, ἐπεὶ μήτε τὸ τρίγωνον τοῦτο, μήτε ἡ ἐπιφάνεια ΓΠΔ, ἐκ τούτου ἀπομειωθήσονται.

125. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.** Τὸ αὐτὸ δὲ ὡσαύτως δειχθήσεται, ὅσαι ποτ᾽ ἂν ὦσιν αἱ δεδομέναι εὐθεῖαι Αβ, βγ, γζ, ζϑ, ϑΒ (σχ. 24)· ὥστε ἡ περιεχομένη ὑπὸ πέντε δοθεισῶν εὐθειῶν ϗ μιᾶς ἕκτης ἀδιορίστου ἐπιφάνεια μεγίστη ἔσται, ὅταν αἱ δοθεῖσαι ἐνηρμοσμέναι ὦσιν ἡμικυκλίῳ, οὗ διάμετρος ἡ ἀδιόριστος· ἐντεῦθεν ἄρα τὸ χωρίον αβζϑ μέρος τῆς εἰρημένης ἐπιφανείας τὸ μέγιστον ἔσται, ὅταν αἱ περιέχουσαι αὐτὴν εὐθεῖαι ὦσι χορδαὶ κυκλικαί· ἄλλως γὰρ ἡ ἐπιφάνεια ΑβγζϑΒ αὐξηθῆναι δύναται, εἴπερ ἓν τῶν αὐτῆς μερῶν αὐξηθείη, τοῦ λοιποῦ σχήματος τοῦ αὐτοῦ μένοντος.

126. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.** Ἐντεῦθεν ἄρα τὸ μέγιστον χωρίον, ὧν ἂν περικλείσωσιν εὐθεῖαι δεδομέναι, ἐστὶ σχῆμα κύκλῳ ἐγγεγραμμένον· ὡς, εἴπερ αἱ εὐθεῖαι εἶεν ἄπειροι τὸν ἀριθμὸν, ϗ ἐλάχισται τὸ μέγεθος, ἑκάστη δύναται ἐκληφθῆναι ὥσπερ τόξον ἀπειροστόν· τὸ δὲ πάντων ἄθροισμα ὡς κυκλικὴ περιφέρεια· διὸ δὴ ὁ κύκλος μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων, καθὰ ϗ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ εἴρηται.

Ἀλλ' εἴπωμεν ἤδη περὶ τῶν ἐν ταῖς εἰδικαῖς συνεκθέσεσι μεγίςων ᾗ ἐλαχίςων· ὅταν εἰδικὴ συνέκθεσις μίαν μόνην τρεπτὴν χ περιέχῃ, δυνατὸν ὑποθέσθαι ταύτην ἴσην τῷ υ, ᾗ λαβεῖν αὐτῆς τὰ ἀπειροςὰ, ὡς εἴπερ ζητοῖτο ἡ μεγίςη ἢ ἐλαχίςη ἐν καμπύλῃ τεταγμένη.

127. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Κϛ'. Εὑρεῖν, καθ' ἃς περιπτώσεις ἡ συνέκθεσις $\chi^4 - 8\chi^3 + 22\chi^2 - 24\chi + 12$ γίνεται μέγιςον ἢ ἐλάχιςον.

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω ἡ ποσότης αὕτη $= \upsilon$· ληφθέντων ἐν αὐτῆς τῶν ἀπειροςῶν, ᾗ ὑποτεθέντος $\delta\upsilon = 0$, ἔςαι $4\chi^3 - 24\chi^2 + 44\chi - 24 = \delta\upsilon = 0$, $\chi^3 - 6\chi^2 + 11\chi - 6 = 0$, ἣς διαιρέται $\chi - 1$, $\chi - 2$, $\chi - 3$· ἄρα δυνάμεις τῆς χ εἰσὶ $\chi = 1$, $\chi = 2$, $\chi = 3$· ἐὰν ἐν ἀντὶ $\chi = 1$ ἀντικατας αθῇ $1 + \delta\chi$, ᾗ εἶτα $1 - \delta\chi$, εὑρεθήσεται ἐν ἑκατέρᾳ περιπτώσει δύναμις τῦ υ μείζων, ἡ ἀντικαθιςαμένης τῆς 1· ἄρα ἡ πρώτη δύναμις τῦ χ ἐμφαίνει ἐλάχιςον· δυνατὸν δὲ ὡσαύτως εὑρεῖν, τὴν μὲν δευτέραν ἐμφαίνυσαν μέγιςον, τὴν δὲ τρίτην ἐλάχιςον.

128. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δυνατὸν ἰδεῖν ἐν τῷδε τῷ ὑποδείγματι τὰ μέγιςα ᾗ ἐλάχιςα διαλλήλως διαδεχόμενα· ἐν γένει δὲ, εἴπερ καμπύλη ἡ βμ (σχ. 25) πολλὰ ἔχει μέγιςα ᾗ ἐλάχιςα αβ, αν κτ, ὡς τὴν ἀποτετμημένην Αα συςοιχεῖν ἐλαχίςῳ τῷ αβ, δῆλον ὡς ἡ τεταγμένη απ ὐκ ἂν γένοιτο ἐλάχιςον, εἰ μὴ τὸ μέρος βνπ τῦ ἄξονος ἀποχωρήσειε ποσότητι μείζονι τῆς τεταγμένης αβ, ἥτις ἐςὶ τὸ πρῶτον ἐλάχιςον· δεῖ δὴ ὑπάρχειν μέγιςον μεταξὺ τῶν δύω ἐλαχίςων· ἄρα ἅπαν ἐλάχιςον απ ὐκ ἐπακολυθήσει ἐλαχίςῳ, ἀλλὰ μεγίςῳ· ἐὰν ἐν τῇ ἀποτετμημένῃ $Αα = \chi$ (σχ. 26) συςοιχῇ μέγιςον τὸ αβ, τῦ.

τῷ μὲν ἐπακολουθήσει ἐλάχιστον· τῷ δὲ, μέγιστον· ὥστε τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα (ὁπηνίκα πολλὰ ἐφεξῆς εὑρίσκονται) ἀλληλοδιαδόχως θάτερον κείσονται μετὰ θάτερον· δυνατὸν δὲ ἐφαρμόσαι τὴν τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων μέθοδον, καὶ τῆς ἐκθέσεως, ἢ ὑποτίθεται $= \upsilon$, ποσότητας ὑπερβατικὰς περιεχούσης.

129. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΖ'.** *Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς, διαιρεθεὶς διὰ τοῦ αὐτοῦ λογαρίθμου, προβάλλει πηλίκον ἐλάχιστον.*

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· οὐκοῦν $\frac{\chi}{\lambda\chi}$ ἔσται ἐλάχιστον, καὶ $\frac{\lambda\chi}{\chi}$ μέγιστον· ἐὰν οὖν ὑποτεθῇ $\frac{\lambda\chi}{\chi} = \upsilon$, εὑρεθήσεται $\frac{\delta\chi}{\chi\chi} - \frac{\delta\chi . \lambda\chi}{\chi\chi} = \delta\upsilon$, καὶ ὑποτιθεμένου τοῦ $\delta\upsilon = 0$, εὑρίσκεται $\frac{1}{\chi\chi} - \frac{\lambda\chi}{\chi\chi} = 0$, $1 = \lambda\chi$· ἐπεὶ δὲ ἐνταῦθα ὁ λόγος περὶ τῶν ὑπερβολικῶν λογαρίθμων, ἐὰν γένηται $= \varepsilon$ ὁ ἀριθμὸς, οὗ ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος $= 1$, εὑρεθήσεται $\chi = \varepsilon$· ἄρα $\frac{\lambda\varepsilon}{\varepsilon}$ ἔσται μέγιστον, καὶ $\frac{\varepsilon}{\lambda\varepsilon}$ ἐλάχιστον.

130. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΗ'.** *Εὑρεῖν ἀριθμὸν τὸν χ, ὅπως $(\chi)^{\frac{1}{\chi}}$ ᾖ μέγιστον.*

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω $(\chi)^{\frac{1}{\chi}} = \upsilon = \lambda^{\psi}$, ὑποτιθεμένου τοῦ $\frac{1}{\chi} = \psi$· ἄρα $\lambda\upsilon = \psi\lambda\chi$, $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \delta\psi . \lambda . \chi + \psi . \frac{\delta\chi}{\chi} =$.

$\frac{-\delta\chi\lambda\chi}{\chi^2} + \frac{\delta\chi}{\chi\chi}$ (ἀντικαθισαμένου $\frac{-\delta\chi}{\chi\chi}$ ἀντὶ $\delta\psi$, εἴγε τὸ ἀπειροστὸν τοῦ $\frac{1}{\chi} = \frac{-\delta\chi}{\chi\chi}$)· οὐκοῦν ὑποτιθεμένου $\delta\upsilon = 0$, διαιρέσει διὰ $\delta\chi$, καὶ μεταθέσει, εὑρίσκεται $\frac{1}{\chi\chi} = \frac{\lambda\chi}{\chi\chi}$, $\lambda\chi = 1$, $\lambda\varepsilon = 1$, $\chi = \varepsilon$· ἄρα $(\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ ἐστὶ μέγιστον· ἐὰν οὖν ὑποτεθῇ $\chi = 1$, εὑρίσκεται $\chi^{\frac{1}{\chi}} = (1)^{\frac{1}{1}} = 1{,}000000$· ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi = 2$, εὑρίσκεται $\chi^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1{,}414213$ (*) ἐὰν $\chi = 3$, $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} = 1{,}442250$· ἐὰν $\chi = 4$, $4^{\frac{1}{4}} = 1{,}414213$· ὅθεν σαφὲς ὅτι $(\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ ἐστὶ μέγιστον, ἀλλ' οὐκ ἐλάχιστον· τοιγαροῦν ἐν καμπύλῃ, ἧς ἐξίσωσις $\upsilon = \chi^{\frac{1}{\chi}}$, τεταγμένη συστοιχοῦσα ἀποτετμημένῃ $\chi = \varepsilon$ ἔσται μέγιστον.

131. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΘ′.** Τόξον τὸ χ εὑρεῖν, οὗ τὸ ἡμίτονον ἐστὶ μέγιστον.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω $\upsilon =$ ἡμ. χ· οὐκοῦν ἔσται $\delta\upsilon = \delta\chi$ συνημ. χ. ὑποτιθεμένου δὲ τοῦ $\delta\upsilon = 0$, γίνεται συνημ. $\chi = 0$· ἀλλὰ τὸ συνημίτονον τῶν 90 μοιρῶν ἐστὶ μηδέν· ἄρα τὸ ζητούμενον τόξον ἐστὶ μοιρῶν 90· τὸ δ' αὐτοῦ ἡμίτονον ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι, ἣν ὑποτιθέμεθα $= 1$.

(*) Αἱ τρεῖς ἔσχαται τοῦ χ δυνάμεις οὐκ εἰσὶν ἀκριβεῖς, ἀλλὰ τῶν ἀκριβῶν ἔγγιστα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ ἐξειλιγμένων καὶ τῶν φιλουσῶν ἡμιδιαμέτρων.

132. Ἐὰν νῆμα ἐφηρμοσμένον καμπύλῃ τῇ ΑΒΓ (σχ. 27) κατὰ μικρὸν αὐτῆς ἀποχωρίζηται, ἡ ἐκ τοῦ κατὰ τὸ νῆμα πέρατος Α γραφησομένη καμπύλη ΑΖΝ ἐξειλιγμένη ἀκούει, ἡ δὲ ΑΒΓ ἐνειλιγμένη, τὰ δὲ μέρη ΒΕ, ΓΖ τοῦ ἐξειλισσομένου νήματος, ἀκτῖνες τῆς ἐξειλιγμένης, ἢ φιλοῦσαι ἡμιδιάμετροι.

133. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν τὸ νῆμα περατῶται πρὸς τῇ Α κορυφῇ τῆς ἐνειλιγμένης, ἕκαστον μὲν μέρος ΒΕ τοῦ νήματος ἴσον ἔσται τῷ ΑΒ τόξῳ τῆς ἐνειλιγμένης· ἀλλ' ἑκάστη ἀκτὶς ΖΓ μείζων ἔσται τοῦ συστοιχοῦντος τόξου, ἐὰν ἡ τῆς ἐνειλιγμένης κορυφὴ ὑποτεθῇ κατὰ τὸ Β, ὡς εἶναι τὴν ΑΒ γραμμὴν εὐθεῖαν· ἐν γένει δὲ ἡ φιλοῦσα ἡμιδιάμετρος ἴση ἐστὶ τῷ τῆς ἐνειλιγμένης τόξῳ, προστιθεμένου, εἰ δέοι, ποσοῦ ἀτρέπτου.

134. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἑκάστης φιλούσης ἡμιδιαμέτρου ἐκληφθῆναι δυναμένης ὡς προαγωγῆς τόξου ἀπειροστοῦ τοῦ ΒΓ, ὅπερ ἐκληφθῆναι δύναται ὡς γραμμὴ εὐθεῖα, δῆλον α΄. ὅτι ἑκάστη ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης ἁπτομένη ἐστὶ τῆς ἐνειλιγμένης· β΄. τὸ νῆμα ΒΕ, μεταβαῖνον ἐκ τοῦ ΕΒ ἐπὶ ΖΓ, γράφει τόξον μικρὸν τὸ ΕΖ, ὅπερ δυνατὸν ἐκληφθῆναι ὡς τόξον κύκλου, οὗ τὸ κέντρον ἐστὶν ἐν τῷ Γ, ὡς τὴν ἀκτῖνα ΓΖ κάθετον ἐφίστασθαι τῇ κατὰ τὸ Ζ τῆς ἐξειλιγμένης ἁπτομένῃ ΖΤ· ἡ γὰρ ἀκτὶς τοῦ κύκλου κάθ-

ετος ἐφίςαται τῇ τȣ κύκλȣ κατὰ τὸ πέρας τῆς ἀκτῖνος ἁπτομένη (Γεωμ. 151)· ἐὰν ἄρα ἐκ τῶν περάτων τόξȣ ἀπείρο ȣ καμπύλης ἀχθῶσι δύω κάθετοι ΕΓ, ΖΓ, συμπεσȣνται ἀλλήλαις κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ὅπερ ἔςαι σημεῖον τῆς ἐνειλιγμένης τῆς δοθείσης καμπύλης· τὸ δὲ τόξον ΕΖ ἐκληφθῆναι δύναται ὡς κυκλικὸν, γεγραμμένον διὰ κέντρȣ τȣ Γ· ἀλλ' ἐπείπερ οἱ κύκλοι τοσȣτῳ ἔλαττον εἰσὶ καμπύλοι, ὅσῳ μείζȣς εἰσὶν αὐτῶν αἱ ἀκτῖνες, δῆλον ὅτι ἡ ἐξειλιγμένη τοσȣτῳ ἐλάττων ἔςαι καμπύλη, ὅσῳ μᾶλλον ἀποςήσεται τȣ σημείȣ Α, ὅπȣ τελευτᾷ ἡ ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης, ἥτις ἐςὶν=ο, ἡ ἐλαχίςη· ἄρα ἡ μεγίςη καμπυλότης εὑρεθήσεται, ζητȣμένης τῆς ἐλαχίςης ἀκτῖνος, ἡ δ' ἐλαχίςη, τῆς μεγίςης· τȣτὶ δὲ γίνεται διὰ τῆς μεθόδȣ τῶν μεγίςων καὶ ἐλαχίςων.

135. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν κέντρῳ μὲν τῷ Π, διαςήματι δὲ τῷ ΖΠ, μείζονι τȣ ΒΓ, γραφῇ κύκλȣ τόξον, διαβήσεται ὕπερθεν τȣ ΕΖ τόξȣ· τȣναντίον δὲ, ἔνερθεν διήξει, εἰ γραφείη διαςήματι τῷ ΠΖ, ἐλάττονι τȣ ΖΓ· ἄρα ὁ, κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαςήματι δὲ τῷ ΖΓ, γραφεὶς κύκλος ἀκριβέςερον συμπεσεῖται τῷ ἀπειροςῷ τόξῳ ΕΖ· καλεῖται δὲ, ὁ μὲν κύκλος ȣτος κύκλος φιλῶν, ἡ δ' αὐτȣ ἀκτὶς φιλȣσα ἡμιδιάμετρος, ἢ ἀκτὶς φιλȣσα, ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης, ἀκτὶς τȣ συμπίπτοντος τόξȣ, ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος· ἡ γὰρ καμπυλότης τȣ ἀπειροςȣ τόξȣ ΕΖ τῆς ἐξειλιγμένης καμπύλης ἐςὶν ἡ αὐτὴ τῇ τȣ συςοιχȣντος τόξȣ τȣ φιλȣντος κύκλȣ.

136. Τόξȣ (σχ. 28) καμπύλης τȣ ΕΖ γωνία τῆς καμπυλότητος ἀκȣει ἡ ΕΓΖ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ δύω εὐθειῶν καθέτων τῷδε τῷ τόξῳ· αὕτη δὲ ἡ γωνία ἰσȣ-

ται τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ δύο ἀπτομένων, αἳ ἄγονται ἀπὸ τῶν περάτων αὐτοῦ τοῦ τόξου· αἱ γὰρ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΜΕΓΖ δύνανται τέσσαρας γωνίας ὀρθάς· ἀλλ' αἱ γωνίαι ΓΕΜ, ΓΖΜ εἰσὶν ὀρθαὶ, ἄρα ΖΜΕ + ΖΓΕ δύνανται δύο γωνίας ὀρθάς· ἀλλὰ καὶ ΖΕΜ + ΖΜΝ δύνανται δύο γωνίας ὀρθάς· ἄρα ΕΓΖ = ΖΜΝ· ἐκλαμβανομένου δὲ τοῦ ἀπειροστοῦ τόξου ΕΖ ὡς κυκλικοῦ, καὶ ἐπιζευγνυμένης τῆς χορδῆς ΕΖ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΝΜΖ τοῦ τριγώνου ΕΜΖ δύναται τὰς δύο ἐντὸς γωνίας Ε, Ζ· ἀλλ' αὗται εἰσὶν ἴσαι, εἴγε, περιεχόμεναι ὑπὸ χορδῆς καὶ ἀπτομένης, μετροῦνται ἑκατέρα τῷ ἡμίσει τοῦ τόξου ΕΖ· ἄρα ἑκατέρα τῶνδε τῶν γωνιῶν ἡμίσειά ἐστι τῆς κατὰ τὴν καμπυλότητα γωνίας· ἐὰν μέντοι ὑποτεθῇ τὸ τόξον εζ = ΕΖ, ἡ δὲ ἀκτὶς εγ ἡμίσεια τῆς ἀκτῖνος ΕΓ, δῆλον ὡς ἡ γωνία εγζ διπλασία ἔσται τῆς γωνίας ΕΓΖ, ἡ δὲ γωνία νμζ διπλασία τῆς ΝΜΖ· ὥστε ἐν γένει αἱ γωνίαι τῆς καμπυλότητος ἐν λόγῳ εἰσὶν ἀντιστρόφῳ τῶν φιλουσῶν ἀκτίνων· ἄρα καὶ αἱ τῶν κύκλων καμπυλότητες εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀντιπεπονθότι τῶν κατ' αὐτοὺς ἀκτίνων.

137. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ ἄρα ΕΜΖ τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστιν· ἡ δὲ τῆς καμπυλότητος γωνία ΝΜΖ, μετρουμένη ὑπὸ τοῦ ἐξ ὑποθέσεως ἀπειροστοῦ τόξου ΕΖ, ἐστὶ καὶ αὐτὴ ἀπειροστή.

138. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι τόξον καμπύλης τὸ ΕΖ ὡς κυκλικὸν ἐκληφθῆναι οὐ δύναται· ἤ, ὃ ταυτὸν, οὐ δύναται ἔχειν καμπυλότητα κυκλικὴν, ἢ κύκλον φιλοῦντα, εἰμὴ αἱ γωνίαι Ε, Ζ ἑκατέρα εἶεν ἡμίσεια τῆς ὑπὸ ΝΜΖ γωνίας, τῆς ἐκτὸς ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχομένης, ἤ, ὃ ταυτὸν, εἰμὴ αἱ

γωνίαι Ε, Ζ, αἱ ὑπὸ χορδῆς ϗ ἐφαπτομένης περιεχόμεναι, εἶεν ἰσάλληλοι.

139. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐκ τούτων καταφανές, ὡς ἐστι τόξα καμπύλων, μηδεμίαν ἔχοντα κυκλικὴν καμπυλότητα· ἔστω γὰρ ζε (σχ. 29) τόξον ἀπειροστὸν παραβολῆς ἄλλης παρὰ τὴν κωνικήν· ταύτης δὲ κορυφὴ ἔστω τὸ ζ σημεῖον, ϗ τετάχθω ἡ επ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι πν· ϗ ἤχθων ἥτε ἁπτομένη εν ϗ ἡ ζμ (ἣ ἐκληφθῆναι ἔχει ὡς τεταγμένη, προσεκβεβλημένη ἐκ τοῦ τῆς καμπύλης σημείου ζ)· τῆς οὖν κατὰ τὴν καμπυλότητα γωνίας ζμν ἀπειροστῆς οὔσης (136), ὑπαρχούσης ὀρθῆς τῆς ὑπὸ μζν = επν, ἡ ὑπὸ μνζ διαφέρει γωνίας ὀρθῆς ποσότητι ἀπειροστῇ· ἐκληφθῆναι ἄρα ἔχει ὡς ἴση τῇ ὑπὸ νζμ· τὸ δὲ τρίγωνον μζν ἐκληπτέον ἐστὶν ὡς ἰσοσκελές, ϗ δὴ ἐκληπτέον μν = ζμ· ἄρα ζμ : με :: μν : με· ἀλλ' ἐπείπερ ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα νμζ, νεπ· ἄρα μν = ζμ : εμ :: νζ : ζπ· ἀλλ' ἐν οὐδεμιᾷ παραβολῇ (παρὲξ τῆς κωνικῆς) ἐστι νζ = ζπ· ἄρα οὐδὲν ἧττον οὐκ ἔστιν οὔτε εμ = ζμ· ἄρα τὸ τρίγωνον εμζ οὐκ ἔστιν ἰσοσκελές· ἄρα αἱ γωνίαι μεζ, μζε οὐκ εἰσὶν ἴσαι· ἄρα ἡ καμπυλότης τοῦ εζ τόξου οὐκ ἔστι κυκλική· οὐδ' ἔστι κύκλος ὁ πεπερασμένος, οὐκ ἄπειρος, οὐκ ἀπείρως ἐλάχιστος, ὃς ἂν ἔχοι καμπυλότητα ἴσην τῇ καμπυλότητι τοιοῦδε τόξου· φημὶ δέ, ὡς ἐν οὐδεμιᾷ παραβολῇ, πλὴν τῆς κωνικῆς, ἐστι ζν = ζπ· δεήσει γὰρ εἶναι τὴν ὑφαπτομένην πν = 2ζπ· ἀλλ' ἡ ὑφαπτομένη τῶν παραβολῶν ἐστι (57) $= \frac{(\mu+\nu)\chi}{\nu}$ · ἄρα ἡ ὑφαπτομένη ἐστι πρὸς τὴν ἀποτετμημένην ζπ = χ, ὡς $\frac{(\mu+\nu)\chi}{\nu} : \chi :: (\mu+\nu)$

$\chi : \nu\chi :: \mu + \nu : \nu$· ἀλλ' ἐν μόνῃ τῇ συνήθει παραβολῇ ἐςὶ $\mu = \nu = 1$· ἄρα ἐν μόνῃ τῇ κοινῇ παραβολῇ ἐςὶ $\nu\pi : \zeta\pi :: 2 : 1$· ἄρα κτλ.

140. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Α'λλ' ἐμτης κοινῇ πάντες οἱ Γεωμετροῦντες ἀποφαίνονται, ὡς ἅπαντι καμπύλης τόξῳ ἐςὶ καμπύλη κυκλική· ἀπόχρη μέντοι ἐκ τῶν εἰρημένων συναγαγεῖν, ὅ,τι βούλονται σημαίνειν, τοῦτο λέγοντες· Ζητητέον ἐν ἤδη τὰς ἐκθέσεις γραμμῶν τινων, ἐξυπηρετουσῶν πρὸς εὕρεσιν τῶν τύπων τῆς φιλούσης ἀκτῖνος· Ιςέον μέντοι μὴ ζητεῖσθαι ἐνταῦθα καμπυλότητας ἐν ἰδιαιτέροις τισὶ τῶν καμπύλων σημείοις.

141. Ε'ςω καμπύλη ἡ ΑΒΔ (σχ. 30), ἐν ᾗ ΑΠ ἐςιν ἡ γραμμὴ τῶν ἀποτετμημένων· καὶ εἰλήφθων δύω τόξα ἐλάχιςα τὰ ΒΓ, ΓΔ ποσότητι ἐλαχίςῃ πρὸς αὐτὰ ἀλλήλων διαφέροντα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ χορδὴ ΒΓ προσεκβληθεῖσα μέχρι τοῦ Μ· καὶ ἤχθωσαν αἵ τε τεταγμέναι, καὶ αἱ ἄλλαι, ἃς τὸ σχῆμα παρίςησι γραμμάς· καὶ ἔςω Πν $= BZ = \delta\chi$, $\Gamma\Sigma = \delta\chi + \delta\delta\chi$, καὶ $B\Gamma = \delta\sigma$, καὶ $A\Gamma = \sigma$, καὶ $Z\Gamma = \delta\upsilon$· τῶν οὖν τριγώνων ΒΖΓ, ΓΣΜ ὁμοίων ὄντων, διὰ τὰς παραλλήλους ΒΖ, ΓΣ, ἐςὶ $\delta\chi : \delta\upsilon ::$ $\delta\chi + \delta\delta\chi : \Sigma M = \dfrac{\delta\chi\delta\upsilon + \delta\upsilon\delta\delta\chi}{\delta\chi}$: ἀλλὰ $\Sigma\Delta = \delta\upsilon + \delta\delta\upsilon$ (*)· ἄρα $\Delta M = \Sigma M - \Sigma\Delta = \dfrac{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\chi}$.

(*) Ὅταν γὰρ $\delta\chi$ γίνηται $\delta\chi + \delta\delta\chi$, $\delta\upsilon$ γίνεται $\delta\upsilon + \delta\delta\upsilon$· ἀλλ' ἐνταῦθα τῆς χ αὐξήσεως ἀπομειοῦται τὸ $\delta\upsilon$, καὶ ἐςὶ λειπτικὸν τὸ $\delta\delta\upsilon$, τοῦτ' ἐςὶ $\Sigma\Delta = \upsilon - \delta\delta\upsilon$, ἢ $\Sigma\Delta = \delta\upsilon + \delta\delta\upsilon$· σημειωτέον μέντοι, ὅτι $\delta\delta\upsilon$ ἐςὶ λειπτικόν· ἐὰν δὲ

142. Ἐμφαινέτω ἡ ΔΛ τόξον κύκλου, γεγραμμένου διὰ κέντρου τοῦ Γ· τὸ οὖν τόξον τοῦτο ἐκληφθῆναι δύναται ὡς γραμμὴ εὐθεῖα, καθετοεφισαμένη τῇ ΓΜ· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ βιΔ διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ιΓΔ, ἔστι βιΔ = ΜΓΔ· μετρεῖ ἄρα τοῦτο τὸ τόξον τὴν τῆς καμπυλότητος γωνίαν ΓΞΔ = βιΔ· τὰ δὲ τρίγωνα ΜΛΔ, ΓΣΜ, ἔχοντα κοινὴν τὴν πρὸς τῷ Μ γωνίαν, καὶ τὰς Λ, Σ ὀρθάς, εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ΓΜ : ΓΣ = ΒΓ :: ΔΜ : ΔΛ, ἢ $\delta\sigma : \delta\chi ::$

$$\frac{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\chi} : \Delta\Lambda = \frac{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma}\cdot$$

ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ΔΛ = ξ, καὶ ἡ ἀκτὶς = 1, καὶ γένηται $\delta\sigma : 1 :: \xi :$

$$\frac{\xi}{\delta\sigma} = \frac{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma^2},$$

εὑρεθήσεται τὸ μέτρον γωνίας, ἣν καὶ αὐτὴν ποιοῦμεν = ξ.

143. Ῥητέον δέ, ὡς ἡ τῆς ζ γωνίας δύναμις λειπτικὴ ἔσται, ἐὰν ἡ καμπύλη κοίλη ᾖ πρὸς τὸν ἄξονα· τηνικαῦτα γὰρ ἡ ΔΛ ἐπὶ τὰ πρὸς τὸν ἄξονα κείσεται· τούτων οὖν τεθέντων, ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΓΞ, ΔΞ ὑποτεθῶσι φιλοῦσαι ἀκτῖνες, ἡ Ξ γωνία ἔσται = βιΔ = 2.ιΓΔ = ΛΓΔ· οὖν τὰ τρίγωνα ΛΓΔ, ΓΞΔ εἰσὶν ὅμοια καὶ ἰσοσκελῆ· ἄρα ΛΔ : ΓΔ :: ΓΔ : ΔΞ, ἢ

$$\frac{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma} : \delta\sigma :: \delta\sigma : \Delta\Xi = \frac{\delta\sigma^3}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon},$$

δύναμις τῆς φιλούσης ἀκτῖνος, ἥτις κληθήτω Α.

144. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου Ξ ἀχθῇ ἡ ΞΜ κάθετος τῇ ΓΝ, συσταθήσεται τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ τὴν ὀρθὴν

ἡ καμπύλη τὰ κοῖλα ἔχῃ ἐστραμμένα πρὸς τὸν ἄξονα ΑΡ, δδυ ἔσται ὑπαρκτικόν.

γωνίαν ὑποτείνει ἡ φιλοῦσα ἡμιδιάμετρος ΓΞ· ζητουμένων δὲ τῶν τοῦδε τοῦ τριγώνου πλευρῶν (ἃς καλοῦμεν πλευρὰς τῆς φιλούσης ἡμιδιαμέτρου), ἐπεὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ γωνίαι ΝΓΣ, ΞΓβ, ἐὰν κοινὴ ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπὸ ΞΓΣ γωνία, εὑρεθήσεται ΝΓΞ = ΣΓβ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΓΣβ, ΣΝΞ ἔσονται ὅμοια· ὅθεν Γβ : ΓΣ :: ΓΞ : ΓΝ, ϗ Γβ : βΣ = ΣΔ (*) :: ΓΞ : ΝΞ· ἄρα $\delta\sigma : \delta\chi + \delta\delta\chi = \delta\chi :: \frac{\delta\sigma^3}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon} : \Gamma\mathrm{N} = \frac{\delta\chi\delta\sigma^2}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}$, καὶ $\delta\sigma : \delta\upsilon :: \frac{\delta\sigma^3}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon} : \mathrm{N}\Xi = \frac{\delta\upsilon\delta\sigma^2}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}$.

145. Ἁπλούστεροι δὲ καθίστανται οἱ τύποι, ὑποτιθεμένων ὡς ἀτρέπτων ἐνίων ἀπειροστῶν· ἐὰν μὲν γὰρ ὑποτεθῇ ἄτρεπτον τὸ δ, ἔσται $\delta\delta\chi = 0$, ϗ $\mathrm{A} = \frac{-\delta\sigma^3}{\delta\chi\delta\delta\upsilon}$, καὶ $\Gamma\mathrm{N} = \frac{-\delta\sigma^2}{\delta\delta\upsilon}$, ϗ $\mathrm{N}\Xi = \frac{-\delta\upsilon\delta\sigma^2}{\delta\chi\delta\delta\upsilon}$, ἐὰν δ' ὑποτεθῇ ἄτρεπτον τὸ δυ, ἔσται $\delta\delta\upsilon = 0$, ϗ $\mathrm{A} = \frac{\delta\sigma^3}{\delta\upsilon\delta\delta\chi}$, ϗ $\Gamma\mathrm{N} = \frac{\delta\chi\delta\sigma^2}{\delta\upsilon\delta\delta\chi}$, ϗ $\mathrm{N}\Xi = \frac{\delta\sigma^2}{\delta\delta\chi}$· ἐὰν διὰ τῆς κατὰ τὴν

(*) Τῆς γὰρ γωνίας βΓΔ ἐλαχίστης οὔσης, ἡ ταύτην ὑποτείνουσα πλευρὰ βΔ ἀπειροστή ἐστιν ὡς πρὸς τὴν ΓΔ, ἥτις ἐστὶν ἀπειροστὴ πρωτοταγής, ὡς ϗ ἡ ΣΔ. ἄρα Δβ ἐστιν ἀπειροστὴ τῆς ΣΔ· ἄρα ΣΔ = Σβ· συμπίπτουσι δὲ ϗ τὸ ἐλάχιστον τόξον ΓΔ τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένῃ· δυνατὸν ἄρα ὑποτιθέναι Γβ = Γχ, εἴγε Γχ τῆς Γβ διαφέρει μόνῃ τῇ χβ ποσότητι ἀπειροστῇ τῆς Γβ, ἥτις ἐστὶν ἀπειροστὴ μείζων τῆς βδ· ἄρα βΔ, Δχ, χβ εἰσὶν ὁμοειδῆ.

καμπύλην ἐξισώσεως, ἀποβληθέντων τῶν ἀπειροςῶν, εὑρεθῇ ἡ φιλῦσα ἀκτὶς Α, ἢ ἡ πλευρὰ ΓΝ, ὑπαρκτική, ἡ καμπύλη ἔςαι κοίλη πρός τὸν ἄξονα· τὴν δὲ καμπυλότητα πρὸς τὸν ἄξονα ςρέψει τῆς φιλύσης ἀκτῖνος, ἢ τῆς πλευρᾶς ΓΝ λειπτικῆς ἔσης· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ἄτρεπτον τὸ $\delta\sigma$, ἔςαι $\delta\delta\sigma = o$· ἀλλὰ $\delta\sigma^2 = \delta\chi^2 + \delta\upsilon^2$· ἄρα $2\delta\sigma \,.\, \delta\delta\sigma =$ $2\delta\chi \cdot \delta\delta\chi + 2\delta\upsilon \cdot \delta\delta\upsilon = o$, ἐ $\delta\delta\upsilon = -\dfrac{\delta\chi \cdot \delta\delta\chi}{\delta\upsilon}$. ταύτης δὲ τῆς τῦ $\delta\delta\upsilon$ δυνάμεως ἀντικαταςαθείσης ἐν τῷ τύπῳ τῆς φιλύσης ἀκτῖνος, πορισθήσεται Α =

$$\frac{\delta\sigma^3 \,.\, \delta\upsilon}{\delta\upsilon^2 \,.\, \delta\delta\chi + \delta\chi^2 \,.\, \delta\delta\chi} = \frac{\delta\sigma^3 \,.\, \delta\upsilon}{\delta\sigma^2 \,.\, \delta\delta\chi} = \frac{\delta\sigma\delta\upsilon}{\delta\delta\chi}$$

. οἱ μὲν ἦν προεκτεθέντες ἅπαντες τύποι εὔχρηςοί εἰσιν, ἐπὰν αἱ τεταγμέναι πρὸς ὀρθὰς ἐςήκωσι ταῖς ἀποτετμημέναις.

146. Τῆς δὲ τῶν συντεταγμένων γωνίας ΒΤΑ μὴ ὀρθῆς ὔσης, ἔςω ταύτης τὸ μὲν ἡμίτονον $= \beta$, τὸ δὲ συνημίτονον $= \gamma$, ἐ ΑΤ $= \chi$, ἐ ΤΒ $= \upsilon$· ἐκ δὲ τῦ ὀρθογωνίυ τριγώνυ ΒΠΤ (ὑποτιθεμένης τῆς ἀκτῖνος $= \alpha$) ἐςὶν $\alpha : \beta :: \upsilon :$ ΒΠ $= \dfrac{\beta\upsilon}{\alpha}$, ἐ $\alpha : \gamma :: \upsilon :$ ΠΤ $= \dfrac{\gamma\upsilon}{\alpha}$. ἄρα ΑΠ $= -\dfrac{\gamma\upsilon}{\alpha}$· διὸ δὴ τιθεμένων ἐν τοῖς εὑρεθεῖσι τύποις, ἀντὶ μὲν χ τῦ $\chi - \dfrac{\gamma\upsilon}{\alpha}$, ἀντὶ δὲ υ τῦ $\dfrac{\beta\upsilon}{\alpha}$ (*), πορισθήσονται αἱ ἀποδοθεῖσαι δυνάμεις περιεκτικαὶ τῶν ΑΤ, ἐ ΒΤ· τῶν ἦν ἀντικαταςάσεων γενομένων, πρόεισιν Α =

(*) Ἀντὶ $\delta\chi$ εἰσαχθήσεται τὸ ἀπειροςὸν τῦ χ —

$$\frac{\alpha\delta\sigma^3}{\alpha(\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon)}, \text{ ϗ } \Gamma N = \frac{(\alpha\delta\chi - \gamma\delta\upsilon)\delta\sigma^2}{\alpha(\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon)}, \text{ ϗ}$$

$$N\Xi = \frac{\delta\upsilon\delta\sigma^2}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}$$ · παραλιπόντες ἒν τὰς ἄλλας μεθόδες, δι' ὧν εὑρεῖν ἔξεσι τὲς τῆς φιλύσης ἀκτῖνος τύπες, τὴν τῶν δευτέρων ἀπειροςῶν καθαρευύσαν ἐκθησόμεθα μόνην.

147. Ἔςω καμπύλη ΠΓ, γεγραμμένη διὰ τῆ ἄξονος αὐτῆς ΑΡ, τῶν τεταγμένων πρὸς ὀρθὰς ἐφιςαμένων ταῖς ἀποτετμημέναις· ἤχθωσαν (ϰ 31) ἐν πρὸς ὀρθὰς τῷ ἀπειροςῷ τόξῳ ΓΔ αἱ εὐθεῖαι ΓΞ, ΔΞ, καὶ τετάχθωσαν ἐπὶ τὸν ἄξονα αἱ ΓΛ, ΔΡ· τῆς δὲ Γζ ληφθείσης ἴσης ἀτρέπτῳ τῇ β, διὰ τῆ ζ ἐςάσθω κάθετος τῇ ΓΞ ἡ ζμ, ϗ ἑπομένως παράλληλος τῷ τόξῳ ΓΔ, ὅπερ ἐκδέξασθαι δυνάμεθα ὡς γραμμὴν εὐθεῖαν· ἐντεῦθεν ἄρα ΔΟ = Γζ· διὰ δὲ τῆ σημείε ο ἤχθω ἡ οτ κάθετος τῇ ΔΞ, ἀπαντῶσα τῇ ΓΞ κατὰ τὸ ν· τέτων τεθέντων ἔςω ΑΛ = χ, ϗ ΛΓ = υ· ἄρα ΓΣ = δχ, ϗ ΔΣ = δυ, ϗ ὑποτεθέντος Γμ = π, ἔςαι νμ = δπ· τὰ δὲ τρίγωνα ΔΣΓ, ζμΓ, ἔχοντα, ὀρθὰς μὲν τὰς γωνίας Σ, μ, ἴσας δὲ τὰς ὑπὸ ΔΓΣ, ζΓμ (ἐὰν γὰρ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΣΓΔ, ΞΓΔ, κοινῇ ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπὸ ΣΓμ γωνία, καταλειφθήσονται ἴσαι αἱ εἰρημέναι γωνίαι) εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ΔΣ : ΔΓ :: ζμ : ζΓ, ἡ ΔΣ × ζΓ = ΔΓ × ζμ·

$\frac{\gamma\upsilon}{\alpha}$· ἀντὶ δὲ δδχ, τὸ δεύτερον ἀπειροςὸν τῆς αὐτῆς ποσότητος· ἀντὶ δὲ δυ, δδυ. εἰσαχθήσονται $\frac{\beta\delta\upsilon}{\alpha}$, $\frac{\beta\delta\delta\upsilon}{\alpha}$.

ϗ ἐπεὶ ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα ομν, Ξτν, ϗ Ξτν ὅμοιον τῷ ΞΓΔ, ἄρα $\Delta\Gamma : \mu\nu :: \Xi\Gamma : o\mu = \zeta\mu$ (εἴγε τῶν τεταγμένων ΛΓ, ΔΡ, ἐξ ὑποθέσεως ἀπείρως προσεχῶν ὄντων, τὸ σημεῖον ο συμπίπτει τῷ ζ)· ἄρα $\Delta\Gamma \times \zeta\mu = \Xi\Gamma \times \mu\nu$· ἄρα $\Delta\Sigma \times \zeta\Gamma = \Xi\Gamma \times \mu\nu$, εἴτ' οὖν $\Delta\Sigma : \mu\nu :: \Xi\Gamma : \zeta\Gamma$, ἢ $\delta\nu : \delta\pi :: A : \beta$· ἄρα $A = \frac{\beta\delta\nu}{\delta\pi}$.

ἀλλὰ, τῶν τριγώνων ΓΣΔ, Γζμ ὁμοίων ὄντων, προκύπτει $\pi : \beta :: \delta\chi : \delta\sigma$, ἄρα $\pi = \frac{\beta\delta\chi}{\delta\sigma}$· διὰ τούτου τοῦ τύπου εὐμαρῶς προσδιορίζεται τὸ π ϗ δὴ ϗ τὸ δπ.

148. Ἐὰν αἱ τεταγμέναι ἐξέρχωνται ἀπὸ σημείου μονίμου τοῦ Ζ (σχ. 32), ἀχθεισῶν τῶν ἐν τῷ σχήματι καθορωμένων τεταγμένων, ἡ ΒΓΛ χορδὴ προήχθω ἕστ' ἂν συναντήσειε τῷ ΔΛ τόξῳ, τῷ, κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ, γεγραμμένῳ, ϗ ἤχθωσαν, ἥτε ἁπτομένη Γβ (ἥτις ὡς ἴση ἐκλαμβάνεται τῷ ΓΔ τόξῳ), ϗ αἱ φιλοῦσαι ἀκτῖνες ΓΞ, ΔΞ· δῆλον οὖν, ὡς, ὑποτιθεμένου κυκλικοῦ τοῦ τόξου ΒΓΔ, ἡ ὑπὸ ΛΓΔ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ χορδῆς ϗ προαγωγῆς ἑτέρας χορδῆς, μετρηθήσεται τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν ταύταις ταῖς χορδαῖς ὑποτεινομένων τόξων (*)· ϗ ἐπεὶ δυνατὸν ὑποθέσθαι τὰ τόξα ταῦτα ὡς πο-

---

(*) Αἱ γὰρ γωνίαι (σχ. 33) παβ, βαϑ δύνανται ὀρθὰς δύο (Γεωμ. 89), εἴτ' οὖν μετροῦνται ὑπὸ ἡμικυκλίου· ἀλλ' ἡ ὑπὸ βαϑ μετρεῖται τῷ ἡμίσει τοῦ τόξου βϑ (Γεωμ. 176). ἄρα ἡ βαϑ μετρεῖται τῷ ἡμίσει τοῦ καταλοίπου, εἴτ' οὖν τῷ $\frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\alpha\vartheta}{2}$.

σότητι ἀπειροςῇ ἑαυτῶν, διαφέροντα ἀλλήλων, ἡ γωνία μετρηθήσεται τῷ τόξῳ ΓΔ = ΒΓ, ϗ δὴ ἔςαι = ΓΞΔ, τῆς ΒΓΔ γωνίας, τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἁπτομένης ϗ τῆς χορδῆς ΓΔ, ἴσης = $\frac{ΓΞΔ}{2}$.

149. Ἐὰν δὲ αἱ τεταγμέναι ἐξίωσιν ἀπὸ τῦ τῆς καμπύλης σημείυ Γ, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΛΓΔ γωνία ἴση ἐςὶ τῇ τῆς καμπυλότητος, ὑποτιθεμένυ τῦ τῆς γωνίας ΔΓΛ μέτρυ (λαμβανομένυ ἐν κύκλῳ, ὗ ἡ ἀκτὶς = 1) = δχ, ἔςαι 1 : δχ :: ΓΔ = δυ (ὑποτιθεμένυ ἀδιορίςυ τῦ ΓΔ) : ΔΛ = δυ . δχ. ἀλλ' οἱ τομεῖς ΓΞΔ, ΛΓΔ εἰσὶν ὅμοιοι· ἄρα ΞΔ = Α : ΓΔ = δυ :: ΓΔ = δυ : ΔΛ = δυ · δχ. ἄρα τηνικαῦτα πρὸς τῷ σημείῳ Γ ἔςιν Α = $\frac{δυ}{δχ}$, ἥτις ἐςὶν ἰδιαιτέρα περίπτωσις.

150. Ἐξίτωσαν ἤδη αἱ τεταγμέναι ἀπὸ τῦ σημείυ Ζ, κειμένυ ὡς ἄντις βέλατο ὡς πρὸς τὴν καμπύλην· κέντρῳ ὂν τῷ Ζ γεγράφθω τόξον τὸ Γμ = δχ. ϗ ἤχθω ἡ ΖΜ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΞΓ· τὰ τοίνυν τρίγωνα ΖΓΜ, ΔΓμ, ἔχοντα, ὀρθὰς μὲν τὰς γωνίας Μ, μ, ἴσας δὲ τὰς ὑπὸ ΖΓΜ, ΓΔμ (*), εἰσὶν ὅμοια· ἄρα, ὑποτιθεμένης τῆς ΖΓ = υ, ἔςαι Δμ = δυ : ΔΓ :: ΖΜ : ΖΓ = υ· ἀχθείσης δὲ πρὸς ὀρθὰς τῆς Ζτ τῇ ΞΔ, τὰ τρίγωνα ΖΜω, Ξωτ εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ϗ τὸ ΞΔΓ, ὅμοιον ὂν τῷ ωτΞ (δυνατὸν γὰρ ἐκλαβεῖν τὴν τῇ ΞΔ κάθετον ω τ ὡς παράλληλον τῇ ΓΔ), ὅμοιον ἔςαι ϗ τῷ ΖΜω· ϗ ἐκ τέτυ ΔΓ : Μω

(*) Ἐὰν γὰρ ἑκατέρᾳ τῶν δύο τῶν γωνιῶν κοινὴ προστεθῇ ἡ ὑπὸ ΞΓμ, ἔσονται ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΖΓμ, ΞΓΔ γωνίαι.

$= \delta\pi$ (ὑποτιθεμένε τῦ ΓΜ $= \pi$) :: ΓΞ $=$ Α : ΞΜ· ἐπεὶ ἄρα οἱ μέσοι τῆς πρώτης ἀναλογίας ὅροι ταὐτίζονται τοῖς τῆς δευτέρας ἄκροις, ἔςαι $\delta\upsilon \times \upsilon = \delta\pi \times$ Α, ἢ Α $= \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\pi}$· ἀλλ' ἐκ τῶν τριγώνων ΓΔμ, ΖΜΓ πρόεισι ΖΓ : ΓΜ :: ΓΔ : Γμ, ἢ $\upsilon : \pi :: \delta\sigma : \delta\chi$· ἄρα $\pi = \frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\sigma}$.

ἐὰν δὲ ἐν τῷ τύπῳ Α $= \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\pi}$ ἀντικαταςαθῇ ἡ τῦ $\delta\pi$ δύναμις, λαμβανομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\pi = \frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\sigma}$, εἴτ' ὖν $\delta\pi = \frac{\delta\upsilon\delta\chi\delta\sigma + \upsilon\delta\delta\chi\delta\sigma - \upsilon\delta\chi\delta\delta\sigma}{\delta\sigma^2}$, εὑρεθήσεται Α

$$= \frac{\upsilon\delta\upsilon\delta\sigma^2}{\delta\sigma(\delta\upsilon\delta\chi + \upsilon\delta\delta\chi) - \upsilon\delta\chi\delta\delta\sigma}$$

, ϗ ἐπεὶ $\delta\sigma^2 = \delta\chi^2 + \delta\upsilon^2$ (ϗ γὰρ τὸ τρίγωνον ΓμΔ ἐςὶν ὀρθογώνιον, ἡ δ' ἔκθεσις τῦ $\delta\sigma^2$ ἐςὶν ἡ αὐτή, ὅταν αἱ τεταγμέναι ὦσι κάθετοι ταῖς ἀποτετμημέναις) ϗ ἑπομένως $\delta\sigma = (\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)^{\frac{1}{2}}$, ὁ παρονομαςὴς τῆς δυνάμεως τῦ Α γενήσεται, ἀντικαθιςαμένης τῆς τῦ $\delta\delta\sigma$ δυνάμεως, ἥτις ἐςὶ $\frac{\delta\chi\delta\delta\chi + \delta\upsilon\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma}$, γενήσεται φημὶ $=$

$$\frac{\delta\sigma^2(\delta\upsilon\delta\chi + \upsilon\delta\delta\chi) - \upsilon\delta\chi\,.\,(\delta\chi\delta\delta\chi + \delta\upsilon\delta\delta\upsilon)}{\delta\sigma}$$

, ἢ, διαπερανθέντων τῶν σεσημειωμένων πολλαπλασιασμῶν, ϗ ἀναγωγῆς γενομένης,

$$\frac{\delta\upsilon(\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon)}{\delta\sigma}$$

· διὰ ταύτης

ἄρα τῆς ποσότητος διαιρεμένης τῆς $\upsilon\delta\upsilon\delta\sigma^2$, ἐ ἀποβαλλομένης τῆς δυ, ἥτις κοινῇ ἐνυπάρχει τῷτε ἀριθμητῇ καὶ τῷ παρανομαςῇ τῦ πηλίκυ, πορίζεται Α $=$

$$\frac{\upsilon\delta\sigma^3}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon} = \frac{\upsilon\delta\sigma^3}{\delta\chi\delta\sigma^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}.$$

151. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ἄτρεπτον τὸ δχ, ἔςαι δδχ $= 0$, ἐ $A = \frac{\upsilon\delta\sigma^3}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}$· ἐὰν δὲ ἄτρεπτον ὑποτεθῇ τὸ δυ, γίνεται Α $=$ $\frac{\upsilon\delta\sigma^3}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi}$· ἐὰν δ' ἐκ τῦ σημείυ Ξ (σχ. 34) ἀχθῇ ἡ ΞΝ κάθετος τῇ ἀκτῖνι ΖΓ, πλευραὶ τῆς φιλύσης ἀκτῖνος ὀνομάζονται αἱ ΞΝ, ΓΝ, ἐ ἡ μὲν ΞΝ καλεῖται πρώτη, ἡ δὲ ΓΝ δευτέρα πλευρὰ τῆς φιλύσης ἡμιδιαμέτρυ· ἵνα δὲ αὗται διοριθῶσιν, ἐπιςατέον, ὡς εἰ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΖΓμ, ΞΓΔ ἀφαιρεθῇ κοινῇ ἡ γωνία ΞΓμ, αἱ κατάλοιποι ΝΓΞ, μΓΔ ἔσονται ἴσαι· ἄρα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΞΝΓ, μΓΔ ὅμοιά εἰσι, ἐ ἐντεῦθεν ΓΔ : Γμ :: ΓΞ : ΓΝ, ἐ ΓΔ : Δμ :: ΓΞ : ΝΞ· ἄρα ά. $\Gamma N = \frac{\Gamma\mu . \Gamma\Xi}{\Gamma\Delta} =$ $\frac{\upsilon\delta\chi\delta\sigma^2}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}$· ἄρα β'. $N\Xi = \frac{\Gamma\Xi . \Delta\mu}{\Gamma\Delta} = \frac{\upsilon\delta\upsilon\delta\sigma^2}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}$· ὑποτιθεμένων δὲ ἐκ διαδοχῆς ἀτρέπτων τῶν δχ, δυ, οἱ τύποι ά.

πλέστεροι καθίσανται· ἐὰν ἡ δύναμις τῆ Α καὶ τῆς ΓΝ ἦ ὑπαρκτική, ἡ καμπύλη στρέψει τὴν ἑαυτῆς κοιλότητα πρὸς τὸ μόνιμον σημεῖον, τὐναντίον δὲ συμβὰν, τὴν κυρτότητα· ἵνα δὲ χρησώμεθα τοῖς ἐκτεθεῖσι τύποις, ἐὰν αἱ καμπύλαι γεγραμμέναι ὦσι διὰ τῆ ἄξονος, ἐκβλητέον τὴν ἑτέραν τῶν μεταβλητῶν τὴν χ, ἢ τὴν υ διὰ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως· ἓ δὴ πορισθήσεται δύναμις τῆς ἀκτῖνος ἓ πλευρῶν αὐτῆς ἐν ὅροις πεπερασμένοις· τῆς δὲ καμπύλης γεγραμμένης διὰ τῆς ἑςίας, ἐκβλητέον τὸ δχ, ἓ θηρευτέον τήν τε ἀκτῖνα Α, ἓ τὰς αὐτῆς πλευρὰς περιεχέσας τὴν υ.

152. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν οἷς ἐδὲν ἄτρεπτον ἀπειροςὸν ὑποτέθειται τύποις, ἐκβαλλομένε ἑνὸς τῶν δευτέρων ἀπειροςῶν διὰ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως, ἀεὶ ἐκβληθήσεται θάτερον δευτεροταγὲς ἀπειροςόν· ὥςε ἐξωθουμένου τοῦ δδχ, ἐξωθήσονται οἱ δύω ὅροι δυδδχ — δχδδυ· ἔςω γὰρ καμπύλης ἐξίσωσις ἡ δχ = κδυ, τοῦ κ ἐμφαίνοντος συνέκθεσίν τινα τοῦ χ καὶ τοῦ υ· ἔςαι τοίνυν δδχ = δκ· δυ + κδδυ· ἄρα δυδδχ = δυ × (δκ.δυ + κδδυ), δυδδχ — δχδδυ = δυ × (δκ.δυ + κδδυ) — δχδδυ = δκδυ² + κδυδδυ — κδυδδυ (ἀντικαθιςαμένης τῆς δυνάμεως τῆ δχ) = δκδυ², ποσότης μηδὲν περιέχεσα ἀπειροςὸν δεύτερον.

153. Εὑρημένης δὲ τῆς τε φιλέσης ἀκτῖνος ἓ τῶν αὐτῆς πλευρῶν, ἵνα διορισθῇ ἡ ἐξειλιγμένη καμπύλης τῆς ΒΔ (σχ. 35), ἀνήχθω εἰς τὸν αὐτῆς ἄξονα ΑΠ, ἓ γενέσθω ΑΛ = χ, ἓ ΛΓ = υ· ὅθεν εὑρεθήσεται ἐξίσωσις μεταξὺ χ ἓ υ· ἓ δὴ ἤτε ἀκτὶς ΞΓ ἓ αἱ αὐτῆς πλευραὶ δοθήσονται περιέχεσαι χ ἓ υ· τῆ δὲ σημείε Ξ ὄντος ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ, ἀπ᾽ αὐτῆ ἤχθω τεταγμε-

γως ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΠ ἡ ΞΠ = κ· κ ἄρα ἔςαι ἡ ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ τεταγμένη, ἧς ἀποτετμημένη ἔςαι ΑΠ = π· ϗ ἐπείπερ ΝΞ = ΛΠ, ϗ ΑΝ = ΓΛ — ΓΝ = υ — ΓΝ, εὑρεθήσονται δύω ἕτεραι ἐξισώσεις π = χ + ΞΝ, ϗ κ = υ — ΚΝ, ἐν αἷς ΞΝ, ϗ ΓΝ δεδομέναι εἰσὶ διὰ χ ϗ υ· ἔσονται ἄρα ἐξισώσεις τρεῖς· ϗ ἐὰν διὰ τῶν δύω ἐξωθῶσιν αἱ χ, υ, πορισθήσεται ἐξίσωσις τῶν π ϗ κ, ἐνδηλοῦσα τὴν τῆς ἐξειλιγμένης φύσιν.

154. Ἐὰν δὲ ἡ ΒΔ καμπύλη γεγραμμένη ᾖ διὰ τῆς ἑςίας Ζ (σχ. 34), ϗ δοθῇ ἐξίσωσις μεταξὺ ΖΓ = υ, ϗ Γμ = δχ, εὑρεθήσεται ἥ τε φιλοῦσα ἀκτὶς ϗ αὐτῆς αἱ πλευραὶ διὰ υ· προαχθείσης δὲ τῆς ΔΞ ἀκτῖνος ἐς τὸ Π, ὥςτε τὸ Π κέντρον εἶναι τοῦ ἐφεξῆς τόξου Δϐ, ἡ ἐξειλιγμένη διελεύσεται διὰ τῶν σημείων Ξ, Π· ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΕΞ (ἀκτὶς τοῦ τόξου ΞΜ) ϗ ΕΠ, ϗ γενέσθω ΕΞ = π, ϗ ΞΜ = δκ· δεῖ δὴ εὑρεῖν ἐξίσωσιν τῶν π, δκ· ἡ εὐθεῖα ΠΞ ἐςι διαφορὰ τῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου ΓΔ, ϗ τῆς τοῦ τόξου Δϐ· αὕτη ἄρα ἐςὶ τὸ ἀπειροςὸν τῆς φιλούσης ἡμιδιαμέτρου· ἔςι δὲ αὖθις ΜΠ = δπ ϗ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΞΜΠ εὑρίσκεται ΠΞ, εἴτ' οὖν τὸ ἀπειροςὸν τῆς φιλούσης ἀκτῖνος, ἢ τὸ ἀπειροςὸν τῆς ἐξειλιγμένης $= \sqrt{\overline{\delta\pi^2 + \delta\kappa^2}}$· ἔςι δὲ ϗ ΕΞ = π = $\sqrt{}$(ΕΝ^2 + ΞΝ^2), ἢ, ἐπεὶ ΕΝ = υ — ΓΝ, π = $\sqrt{(\overline{\upsilon - \Gamma N)^2 + \Xi N^2}}$· ἀλλὰ ΓΝ, ϗ ΞΝ ἐκλαμβάνονται ὡς δεδομέναι δι' υ· ἄρα πορισθήσονται δύω ἐξισώσεις διὰ τριῶν ἀγνώςων υ, π, δκ, ϗ τοῦ υ ἀποβαλλομένου, εὑρεθήσεται ἐξίσωσις τῶν π, δκ, ἐπανήκουσα τῇ ἐξειλιγμένῃ.

155. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὑρεῖν τὴν φιλοῦσαν ἀκτῖνα τῆς παραβολῆς ΑΓ (σχ. 36).

ΛΥΣΙΣ. Εἰλήφθω ὁ τύπος $A = \frac{\beta\delta\upsilon}{\delta\pi}$, ἐν ᾧ $\pi = \frac{\beta\delta\chi}{\delta\sigma}$ (147)· καὶ ζητηθήτω πρῶτον ἡ δύναμις τοῦ π· ἔστω ἡ τῆς παραβολῆς παράμετρος $= 2\alpha$· ἡ δὲ ταύτης ἐξίσωσις ἔσται $2\alpha\chi = \upsilon\upsilon$, $2\alpha\delta\chi = 2\upsilon\delta\upsilon$, $\delta\chi = \frac{2\upsilon\delta\upsilon}{2\alpha} = \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\alpha}$· οὐκοῦν $\delta\sigma = \sqrt{\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2}$ ἔσται $= \sqrt{(\frac{\upsilon^2\delta\upsilon^2}{\alpha\alpha} + \delta\upsilon^2)} = \sqrt{(\frac{\upsilon\upsilon\delta\upsilon^2 + \alpha\alpha\delta\upsilon^2}{\alpha\alpha})} = \frac{\delta\upsilon}{\alpha}\sqrt{(\upsilon^2 + \alpha\alpha)}$· τοιγαροῦν $\pi = \frac{\beta\delta\chi}{\delta\sigma} = \frac{\beta\upsilon}{\sqrt{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)}}$· ἄρα $\delta\pi = \frac{\beta\delta\upsilon}{\sqrt{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)}} - \frac{\beta\upsilon^2\delta\upsilon}{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}$ (*) $= \frac{\alpha\alpha\beta\delta\upsilon}{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}$· ἄρα $A = \frac{\beta\delta\upsilon}{\delta\pi} = \frac{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha}$· ἀλλ' α ἐστὶν ἡμιπαράμετρος· ἄρα ἡ ὑποκάθετος ΛΠ $= \alpha$· ἀλλ' ἐστι $\sqrt{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)}$ κάθετος· ἄρα ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς τῆς παραβολῆς ἐστὶν ἴση τῷ κύβῳ τῆς καθέτου, διαιρεθέντι διὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμιπαραμέτρου τετραγώνου.

156. Ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ τῆς παραβολῆς ἐξειλιγμένη, ζητηθήτωσαν αἱ πλευραὶ ΓΝ καὶ ΝΞ· ἀχθείσης οὖν τῆς ΓΞ πρὸς ὀρθὰς τῇ κατὰ τὸ Γ σημεῖον ἁπτομένῃ,

---

(*) Λαμβάνεται τὸ ἀπειροστὸν, γινομένου κρυπτοῦ πρῶτον τοῦ ἀριθμητοῦ, εἶτα τοῦ παρονομαστοῦ, ὅντινα δυνατὸν μεταθεῖναι ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν, ἀποδόντας αὐτῷ δείκτην τὸν $-\frac{1}{2}$.

τῇ συστοιχούσῃ τῇ ΛΓ τεταγμένῃ, καὶ ἴσης τῇ ἤδη εὑρημένῃ ποσότητι, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΓΛΠ, ΓΝΞ, πρόεισι ΚΠ : ΓΛ :: ΓΞ : ΓΝ $= \frac{ΓΞ \times ΓΛ}{ΓΠ} = \frac{υ(υυ+αα)}{αα}$· ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν τριγώνων προέρχεται ΓΛ : ΓΝ :: ΛΠ : ΝΞ $= \frac{ΓΝ . ΛΠ}{ΓΛ} = \frac{υυ+αα}{α}$, ὅθεν ἀποφέρονται αἱ ἐφεξῆς ἐξισώσεις $π = χ + ΝΞ$ (*) $= χ + \frac{υυ+αα}{α} = \frac{υυ}{2α} + \frac{υυ+αα}{α}$ (**), ἢ $2απ = 3υυ + 2αα$ (A), $κ = ΓΝ - υ = \frac{υ(υυ+αα)}{αα} - υ = \frac{υ^3}{αα}$, εἴτ' οὖν $ααк = υ^3$· πεπολλαπλασιάσθω ἡ Α ἐξίσωσις ἐπὶ $υ$, καὶ διατεθείσθω οὕτω· $2αυ.(π-α) = 3υ^3$· ἄρα $2αυ.(π-α) = 3ααк$, ἢ $2υ.(π-α) = 3ακ$, καὶ $υ^3 = \frac{27}{8} \times \frac{α^3 κ^3}{(π-α)^3}$· ἀντικατασταθείσης δὲ ταύτης τῆς τοῦ $υ^3$ δυνάμεως ἐν τῇ ἐξισώσει $ααк = υ^3$, προέρχεται $α^2 κ = \frac{27 α^3 κ^3}{8(π-α)^3}$, ἢ $\overline{π-α}^3 = \frac{27α}{8} \times κ^2$, ἐξίσωσις τῆς δευτέρας κυβικῆς παραβολῆς, ἣν ἔξεστι κατασκευάσαι οὕτως· εἰλήφθω ΑΜ $= α$ (ἔστι δὲ αὕτη ἡμιπαράμετρος τῆς

(*) Εἴρηται περὶ ταύτης τῆς ἐξισώσεως (153)·

(**) Ἐκ γὰρ τῆς ἐξισώσεως $2αχ = υυ$ προέρχεται $χ = \frac{υυ}{2α}$.

προτεθείσης παραβολῆς), ἢ ληφθείσης τῆς ΜΡ ὡς ἄξονος τῶν ἀποτετμημένων, γενέσθω τὸ ἀφ' ἑκάστης τεταγμένης ΡΞ τετράγωνον ἴσον τῷ κύβῳ τῆ $\pi - \alpha$, ἢ ἴσον τῷ κύβῳ τῆς ΜΡ, διαιρεθέντι διὰ τῆς παραμέτρου $\frac{27\alpha}{8}$· ἐντεῦθεν δυνατὸν συναγαγεῖν α. ὅτι ΓΞ ἐστιν $= \alpha$, ὅταν ἡ $\upsilon = 0$, τοῦτ' ἔστι πρὸς τῇ κορυφῇ Α τῆς παραβολῆς· ἄρα πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς παραβολῆς ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς ἐστιν $=$ τῇ ἡμιπαραμέτρῳ· β'. ῥαδίως ἐξευρίσκεται ἡ εὔθυνσις τῆς δευτέρας κυβικῆς παραβολῆς, εἴγε τὸ τόξον ΜΞ ἐστιν ἴσον τῇ διαφορᾷ τῆς φιλούσης ἀκτῖνος ΓΞ, ἢ τῆς ΑΜ εὐθείας· ἄρα τὸ τόξον $\text{ΜΞ} = \frac{(\upsilon\upsilon + \alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha} - \alpha$, ἀλλὰ $\upsilon\upsilon = \frac{2\alpha\pi - 2\alpha\alpha}{8}$· ἄρα $\text{ΜΞ} = \frac{(2\alpha\pi + \alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha\sqrt{22}} - \alpha$.

157. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ κλὼν ΑΖ ἔξει ἐξειλιγμένην τὸν κλῶνα ΜΣ, ἡ δὲ δευτέρα κυβικὴ παραβολὴ ἔχει ἐν σημείῳ ἀντιστροφῆς τὸ Μ ἀντίστοιχον τῇ ἐλαχίστῃ φιλούσῃ ἀκτῖνι ΜΑ· ἐὰν δὲ ληφθῶσιν αἱ συντεταγμέναι πρὸς τῷ σημείῳ Μ, ἢ γένηται $\text{ΜΡ} = \pi - \alpha = \upsilon$, ἢ αἱ ἀποτετμημέναι (λαμβανόμεναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ϬΜ) $\text{ΡΞ} = \text{Μ}\beta = \chi$, ἢ ἡ παράμετρος $= \vartheta$, εὑρεθήσεται $\upsilon^3 = \vartheta\chi^2$, ἐξίσωσις τῆς ἐξειλιγμένης· ἐντεῦθεν δὲ κατανοεῖται ῥᾶστα, ὡς πᾶσα καμπύλη ἔχουσα σημεῖον, καθ' ὃ ἐστι μεγίστη ἡ καμπυλότης, ἢ ἐλαχίστη, ἔχει ἐξειλιγμένην δυοῖν συμμηροῦσαν κλωνῶν· τὸ δὲ σημεῖον ταύτης, τὸ ἀντιστοιχοῦν τῇ μεγίστῃ, ἢ τῇ ἐλαχίστῃ, φιλούσῃ ἀκτῖνι, ἐστι σημεῖον ἀντιστροφῆς, ἢ καμπῆς· τὰ δὲ εἰρημένα ἐξικανοῖ τὴν τῆς προτάσεως ἐκδηλῶσαι

ἀλήθειαν, ὅταν ἡ φιλῦσα ἀκτὶς ᾖ μεγίστη· τὰ δὲ ῥηθησόμενα ἐπὶ τῆς ἐξειλιγμένης τῆς ἐλλείψεως σαφὲς τὸ πρᾶγμα ἀπεργάζονται, ὅταν ἡ φιλῦσα ἀκτὶς ᾖ μεγίστη.

158. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὴν φιλῦσαν ἀκτῖνα τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ὁ ἄξων $= α$, καὶ ἡ παράμετρος $= π$, καὶ ἡ ἀποτετμημένη ΑΛ $= χ$· ἄρα ἔσται $υ^2 = πχ \mp \frac{πχχ}{α}$, καὶ $υ = \sqrt{(πχ \mp \frac{πχχ}{α})}$ (Ὑψ. Γ. 249)· λαμβανομένων ἓν τῶν ἀπειροστῶν, εὑρίσκεται ἡ δύναμις τῦ $δχ$· λαμβανομένων δὲ καὶ τῶν δευτέρων (ὑποτιθεμένυ μέντοι ἀτρέπτυ τῦ $δχ$), εὑρίσκεται ἡ δύναμις τῦ $δδυ$· ἀντικαθισαμένων δὲ τῶνδε τῶν δυνάμεων ἐν τῷ εὑρεθέντι τύπῳ (145) $\frac{δσ^2}{-δχδδυ}$, ἐπεὶ $δσ = \sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}$, εὑρεθήσεται Α $=$

$$\frac{(ααππ \mp 4αππχ + 4ππχχ + 4α^2πχ \mp 4απχ^2)}{2α^3π^2} \times \sqrt{(α^2π^2 \mp 4αππχ + 4ππχχ + 4ααπχ \mp 4απχ^2)}$$·

ζητηθεῖσα μέντοι ἡ δύναμις τῆς καθέτυ, ἥτις (72) ἐστὶν $= \frac{υ\sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}}{δχ}$, εὑρεθήσεται $=$

$$\frac{\sqrt{(α^2π^2 \mp 4αππχ + 4ππχχ + 4ααπχ \mp 7απχ^2)}}{2α}.$$

αὕτη δὲ ἡ ποσότης ὑποτεθείσθω $= μ$· ἐὰν ὖν αὕτη κυβισθῇ, καὶ διαιρεθῇ διὰ $π^2$, καὶ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4, ᾖ, ὃ δὴ ταυτὸν, ἐὰν ὁ κύβος ταύτης τῆς ποσότητος διαιρεθῇ διὰ $\frac{1}{4}π^2$, εὑρεθήσεται Α Α $= \frac{μ^3}{\frac{1}{4}π^2}$· ἐν ἄρα τῇ ἐλλείψει ϗ τῇ ὑπερβολῇ ἡ φιλοῦσα ἡμιδιάμετρος ἴση ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς καθέτου κύβῳ, διαιρεθέντι διὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμιπαραμέτρου τετραγώνου.

Ἐν δὲ τῷ κύκλῳ ἥτε κάθετος ϗ ἡ ἡμιπαράμετρος εἰσὶν ἴσαι τῇ ἀκτῖνι· ἐν ἄρα τῷ κύκλῳ ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς ἔςιν ἴση τῇ κυκλικῇ ἀκτῖνι· ἡ δὲ αὐτοῦ ἐξειλιγμένη σημεῖόν ἐςι μοναδικὸν, ὅπερ ἐςὶν αὐτὸ τοῦ κύκλου τὸ κέντρον.

159. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐντεῦθεν ἄρα ϗ ἐκ τοῦ (155) δῆλον, ὅτι ἁπάσης κωνικῆς τομῆς ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς ἴση ἐςὶ τῷ τῆς καθέτου κύβῳ, διαιρεθέντι διὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμιπαραμέτρου τετραγώνου

160. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi = 0$, ἔςαι $A = \frac{(\alpha\alpha\pi\pi)\sqrt{(\alpha^2\pi^2)}}{2\alpha^3\pi^2} = \frac{\alpha^3\pi^3}{2\alpha^3\pi^2} = \frac{1}{2}\pi$· ἄρα πρὸς τῇ κορυφῇ Α ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς τῆς ἐλλείψεως ϗ τῆς ὑπερβολῆς ἴση ἔςαι τῇ ἡμιπαραμέτρῳ· ϗ ἐπεὶ ἐν τῇ παραβολῇ (155) ἔςιν $A = \frac{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha}$, ϗ πρὸς τῇ κορυφῇ Α (σχ. 36) $\upsilon = 0$, εὑρεθήσεται $A = \frac{(\alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha} = \alpha$· ἀλλ' α ἐςὶν ἡμιπαράμετρος, τ' αὐτὸν ἄρα ἐπικρατεῖ κἂν τῇ παραβολῇ.

161. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi = \frac{1}{2}\alpha$, εὑρεθήσεται ἐν τῇ ἐλλείψει (σχ. 37) $A = \Delta M = \frac{\alpha\sqrt{\alpha\pi}}{2\pi}$. κληθέντος δὲ τοῦ ἐλάττονος ἄξονος $= \beta$, ἔςαι (Τ.ψ. Γ. 97) $\alpha : \beta :: \beta : \pi$, $\beta\beta = \alpha\pi$, ϗ $\beta = \sqrt{\alpha\pi}$· ἐὰν ἄρα γένηται $2\pi : \alpha :: \beta : \Delta M$, τὸ σημεῖον Μ ἔςαι ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ, ϗ ἅμα ἔσεται σημεῖον καμπῆς· ἐὰν

δὲ ὅλη ἡ ἔλλειψις ἐξελιχθῇ, ἡ ἐξειλιγμένη (σχ. 38) ἔξει τέσσαρας ἰσαλλήλους κλῶνας.

162. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὴν φιλῦσαν ἀκτῖνα τῆς κυκλοειδῦς ΑΔα (σχ. 39).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω τὸ κυκλικὸν τόξον $\Delta N = \psi$· ὁκῶν ἔςαι $\Pi\Gamma = \upsilon = \Pi N + \psi = \eta\mu.\ \psi + \psi$, ϗ $\delta\upsilon = \delta.\ \eta\mu\ \psi + \delta\psi$· ὑποτεθείσθω ἡ ἀκτὶς $= 1$, ϗ $\Delta\Pi = \chi$· ϗ δὴ ἔςαι, διὰ τὴν κυκλικὴν ἰδιότητα, $\Pi N = \sqrt{(2\chi - \chi\chi)}$· ἄρα $\delta.\Pi N = \delta.\ \eta\mu.\ \psi = \delta.\ \sqrt{(2\chi - \chi\chi)} = \dfrac{\delta\chi - \chi\delta\chi}{\sqrt{(2\chi - \chi\chi)}}$· ἀλλὰ (35) τὸ ἀπειροςὸν ἡμιτόνυ τόξυ, ϗ ἀκτὶς $= 1$, ἐςὶν ἴσον τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ κατὰ τὸ τόξον ἀπειροςῦ, ϗ τῦ συνημιτόνυ· ἐνταῦθα δὲ ἐςὶ συνημίτονον $P\Pi = 1 - \chi$· ἄρα τὸ ἀπειροςὸν τῦ ἡμ. ψ ἐςὶν $= \delta\psi.$ $(1 - \chi)$, ϗ $\delta\psi = \dfrac{\delta.\eta\mu.\ \psi}{1 - \chi} = \dfrac{(1 - \chi).\delta\chi}{(1 - \chi).\sqrt{(2\chi - \chi\chi)}}$ $= \dfrac{\delta\chi}{\sqrt{(2\chi - \chi\chi)}}$· ἄρα $\delta\upsilon = \dfrac{(2 - \chi)\ \delta\chi}{\sqrt{\chi}.\sqrt{(2 - \chi)}} = \dfrac{\delta\chi\sqrt{(2 - \chi)}}{\sqrt{\chi}} = \dfrac{\delta\chi}{\chi} \times \sqrt{(2\chi - \chi\chi)}$, καὶ $\delta\delta\upsilon = \dfrac{-\delta\chi^2}{\chi.\sqrt{(2\chi - \chi\chi)}}$ (ὑποτιθεμένυ ἀτρέπτυ τῦ δχ)· ἄρα $\delta\sigma^2 = \delta\chi^2 + \delta\upsilon^2 = \dfrac{2\delta\chi^2}{\chi}$, ϗ $A = \Gamma\Xi = \dfrac{\delta\sigma^3}{-\delta\chi\delta\delta\upsilon}$, ὑποτιθεμένυ δὲ ἀτρέπτυ τῦ δχ, εὑρίσκεται $= 2.\sqrt{(2.(2 - \chi)}$· ἀλλ ἡ χορδὴ ΖΝ (Γεωμετ. 552) ἐςὶ μέση ἀνάλογον τῆς διαμέτρυ ϗ τῦ μέρυς ΖΠ· ἄρα $\Gamma\Xi = 2$ ΖΝ· ἀλλὰ ΔΝ παράλληλος ἐςὶ τῇ ἁπτομένῃ Γμ (Τ.ψ. Γ. 335) ϗ ἔτι ΝΖ κάθετος ἐφέςηκε τῇ ΔΝ, τῆς ΓΞ καθ.

ἔτυ ἐφισαμένης τῇ Γμ· ἄρα ΖΝ = Γν = νΞ, τυτέςιν, εὐθείας τῆς ΓΞ παραλλήλυ ἀγομένης τῇ χορδῇ ΡΝ, ϗ τῆς χορδῆς ταύτης διπλασιαζομένης, τὸ σημεῖον Ξ ἔςαι ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ· αὕτη δὲ ἡ καμπύλη διήκει διὰ τῦ σημείυ Λ, ἔνθα ἡ φιλῦσα ἡμιδιάμετρος ἔςιν = ο.

163. Ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ ἐξειλιγμένη, σημειωτέον ὡς ἡ ΔΜ ἀκτὶς, ἡ συςοιχῦσα τῷ μέσῳ σημείῳ τῆς κυκλοειδῦς, ὀφείλει εἶναι διπλασία τῆς διαμέτρυ τῦ γεννήτορος κύκλυ· συςαθέντος ἄρα τῦ ὀρθογωνίυ ΑΒαβ, ἡ τῦ ΑΣΒ ἡμικυκλίυ διάμετρος ἔςαι = ΖΔ· ϗ, ἐπειδὴ Γν = νΞ, αἱ παράλληλοι πζ, ΠΓ ἴσον ἀπέχυσι τῆς Αα· τά τε τόξα ΑΣ, ΝΖ, ἐναπολαμβανόμενα ὑπὸ τῶν ἴσον ἀπεχυσῶν τύτων παραλλήλων, εἰσὶν ἴσα, ϗ αἱ αὐτῶν χορδαὶ ἑπομένως ἴσαι· ἄρα αἱ ΑΖΝ, νΑΣ γωνίαι, αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῆς ἁπτομένης ΑΖ, ϗ τύτων τῶν χορδῶν, εἰσὶν ἴσαι, ϗ δὴ ΑΣ ἔςαι παράλληλος τῇ νΞ ϗ τῇ ΖΝ· ἔςαι δὲ ϗ Αν = ΣΞ· ἀλλὰ τὸ τόξον ΔΝ = ΓΝ = νΖ· ἄρα Αν ἴση τῷ τόξῳ ΖΝ· ἄρα τὸ τόξον ΖΝ = ΣΞ· ἄρα τὸ τόξον ΑΣ ἐςὶν ἴσον τῇ συςοιχέσῃ τεταγμένῃ ΣΞ, ἰδιότης αὕτη ἐξαίρετος τῆς κυκλοειδῦς, ϗ ἑπομένως ἡ καμπύλη ΑΞΜ ἐςὶν ἡμικυκλοειδής.

163. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄρα α'. τὸ μῆκος τῆς ἡμικυκλοειδῦς διπλάσιόν ἐςι τῆς τῦ γεννήτορος κύκλυ διαμέτρυ, ϗ ἡ ὅλη κυκλοειδὴς τετραπλασία· ἄρα β'. ἡ τῆς κυκλοειδῦς ἐξειλιγμένη καὶ αὕτη ἐςὶ κυκλοειδὴς, ὡς δέδεικται ϗ ἐν (Τ'ψ. Γ. 339), ἀλλὰ κατὰ θέσιν κειμένη ἐναντίαν· ἔχει γὰρ ἡ ἐξειλιγμένη σημεῖον καμπῆς κατὰ τὸ Μ, συνιςαμένη ὑπὸ δύω ἡμικυκλοειδῶν, ὧν ἑκατέρα ἴση τῷ ἡμίσει τῆς κυκλοειδῦς ΑΔα.

164. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὴν φιλῦσαν ἀκτῖνα τῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώταις κυκλικῆς ὑπερβολῆς.

ΛΤΣΙΣ. Ἔςω $AB = B\Delta = \alpha$ (σχ. 40), ἢ $A\Lambda = \chi$, ἢ $A\Gamma = \upsilon$· ἐκῦν ἔςαι $\chi\upsilon = \alpha\alpha$· λαμβανομένων δὲ τῶν ἀπειροςῶν, ἔςαι $\chi\delta\upsilon + \upsilon\delta\chi = o$· ἢ ἐκ τέτων αὖθις τῶν δευτέρων, τῦ $\delta\chi$ τηρυμένυ ἀτρέπτυ, εὑρίσκεται $\delta\delta\upsilon = \frac{-2\delta\chi\delta\upsilon}{\chi}$· ἀντικαταςαθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῷ τύπῳ τῆς πλευρᾶς $\Gamma N = \frac{-\delta\sigma^2}{\delta\delta\upsilon}$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὑπερβολῆς, εὑρεθήσεται $\Gamma N = \frac{\chi\delta\sigma^2}{2\delta\chi\delta\upsilon} = \frac{\chi(\delta\chi^2 + \delta\sigma^2)}{2\delta\chi\delta\upsilon}$· ἀλλ' ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi\delta\upsilon + \upsilon\delta\chi = o$ προέρχεται $\delta\upsilon = \frac{-\upsilon\delta\chi}{\chi}$· ἄρα $\Gamma N = \frac{\chi^2 + \upsilon^2}{-2\upsilon}$· λειπτικῆς δὲ ὔσης ταύτης τῆς ποσότητος, ληπτέον τὴν ΓΝ ἐκ τῶν ἀντιθέτων τῆς τῶν ἀποτετμημένων γραμμῆς· ἤχθω ἡ ΑΓ, ἢ τῆς αὐτῆς προαγωγῆς γενομένης $\Gamma E = \frac{A\Gamma}{2}$, ἐςάθω αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΝ, ἀπαντῶσα τῇ ΑΓ (προαχθείσῃ) κατὰ τὸ Ν· ἡ τοίνυν πλευρὰ ΓΝ ἐντεῦθεν διορισθήσεται· ἐκ γὰρ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΓΛ, ΝΓΕ πρόεισι $\Gamma\Lambda : \Gamma A :: \Gamma E : \Gamma N$, εἴτ' ὖν $\upsilon : \sqrt{(\chi\chi + \upsilon)} :: \frac{\sqrt{(\chi\chi + \upsilon\upsilon)}}{2} : \Gamma N = \frac{\chi\chi + \upsilon\upsilon}{2\upsilon}$, ἥτις ἐςὶν ἡ εὑρεθεῖσα ἤδη δύναμις, παρορωμένυ τῦ σημεία, ὃ μόνην τὴν θέσιν τῆς ΓΝ δεικνυσι.

165. Ἤχθω ἤδη ἡ ΓΞ κάθετος τῇ καμπύλῃ, ἢ

ΝΞ παράλληλος ταῖς ἀποτετμημέναις· ἐκεῖν τὸ σημεῖον Ξ, καθ' ὃ συναντῶνται αὗται αἱ εὐθεῖαι, ἔςαι ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ· ἵνα δὲ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Π τῆς ἐξειλιγμένης, τὸ συςοιχῦν τῷ σημείῳ Δ, κορυφῇ τῆς καμπύλης, σημειωτέον ὡς ἡ ΑΔ ἐςὶ κανονικὴ τῆς καμπύλης· λαμβανομένης ἄρα $\Delta K = \frac{A\Delta}{2}$, ἐ͂ ἀγομένης, τῆς μὲν ΚΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΚ, τῆς δὲ ΗΠ παραλλήλυ ταῖς ἀποτετμημέναις, τὸ σημεῖον Π, καθ' ὃ αὕτη ἡ εὐθεῖα συμβάλλει τῇ ΑΔ προαχθείσῃ, ἔςαι τὸ ζητέμενον· δῆλον γὰρ ὅτι $\Pi\Delta = A\Delta$, ἐ͂ $H\Delta = B\Delta$.

Α'λλὰ περὶ μὲν τῆς φιλύσης ἀκτῖνος ἐ͂ τῆς ἐξειλιγμενης, καίτοι βραχέα ὡς πρὸς ἃ τὸ πρᾶγμα ἀπαιτεῖ, ὑπέρπολλα μέντοι ὡς πρὸς τὴν ἡμῶν πρόθεσιν· τὸ γὰρ ταῦτα ἐπ' ἀκριβὲς ἐνερευνᾷν ἔργον πραγματείας ἰδίας πολυπόνου τε καὶ πολυτόμου, ἣν ὁ χρόνος καὶ ἡμῖν τοῖς τέτων πενομένοις χαρίσεται· ἰτέον ὖν ἤδη ἐπὶ τὰ ἐχόμενα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῶν Καυςικῶν δι' ἀντανακλάσεως ἐ͂ τῶν διὰ θραύσεως.

166. ΛΗΜΜΑ. Ποσῶν τινων κειμένων τῶν α, β, γ, ε, ἐὰν τὸ δεύτερον τῦ πρώτυ, ἐ͂ τῦ δευτέρυ τὸ τρίτον κτ. ἀφαιρεθῶσι, τὸ τῶν αὐτῶν διαφορῶν ἄθροισμα $\alpha - \beta + \beta - \gamma + \gamma - \varepsilon$ ἔςαι ἴσον τῷ $\alpha - \varepsilon$, εἴτ' ἐ͂ ἴσον τῇ τῦ μείζονος ἐ͂ ἐλάττονος διαφορᾷ, ἐ͂ ἑπομένως ἴσον τῷ μείζονι, εἴπερ τὸ ἔχατον εἴη $= 0$.

Σαφὲς καθ' ἑαυτὸ τὸ λεγόμενον· πᾶσαι γὰρ αἱ μεταξὺ ποσότητες ἐκ τῶν ἐναντίων συμβόλων ἐξαφανίζονται.

167. Ἐὰν ἀκτὶς φωτὸς ἡ AB (σχ. 41), ἐκ τȣ̃ σημείȣ A προϊȣ̃σα, ἐπιπέσῃ ἐπιπέδῳ ἐπιφανείᾳ τῇ πβ, ἢ καμπύλῃ ἐπιφανείᾳ τῇ ΞΒΔ, ϗ ἀνακλασθῇ κατὰ τὸ Γ, ὡς, τὴν μὲν ἐπιπίπτȣσαν ἀκτῖνα εἶναι τὴν AB, τὴν δὲ ἀνακλωμένην τὴν ΒΓ, ἡ γωνία ΑΒΜ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ἐπιπιπτȣ́σης ἀκτῖνος, ϗ τῆς τῇ ἐπιφανείᾳ καθέτȣ BM, καλεῖται γωνία τῆς ἐπιπτώσεως, ἡ δὲ ΜΒΓ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς καθέτȣ MB, ϗ τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος ΒΓ, γωνία ἀνακλάσεως· ἔστι δὲ ἀεὶ, ὡς πεῖρα δείκνυται ἐν τοῖς φυσικοῖς, ἡ τῆς ἀνακλάσεως γωνία ἴση τῇ τῆς ἐπιπτώσεως· ἀλλ' ἡ γωνία ΑΒΜ ἐστι παραπλήρωμα τῆς ΑΒπ = ΑΒΞ· ἡ γὰρ ὑπὸ πΒΞ γωνία ἐστιν ἀπειροστή, ἡ δὲ ΜΒΓ παραπλήρωμά ἐστι τῆς ὑπὸ ΓΒβ = ΓΒΔ· ἄρα αἱ γωνίαι, αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῶν ἀκτίνων τῆς τε ἀνακλάσεως ϗ τῆς ἐπιπτώσεως ϗ τȣ̃ ὑποκειμένȣ ἐπιπέδȣ, εἰσὶν ἰσάλληλαι.

168. Ἐὰν ἐπινοηθῶσιν ἀπειράριθμοι φωτοφυεῖς ἀκτῖνες ΖΑ, ΖΜ κτ. (σχ. 42), ἐκ τȣ̃ Ζ μὲν ἀναπηγάζȣσαι, τῇ δὲ AB καμπύλῃ προσπίπτȣσαι, κἀντεῦθεν ἀνακλώμεναι, ϗ τὴν γωνίαν τῆς ἐπιπτώσεως ἴσην τῇ τῆς ἀνακλάσεως ποιȣ̃σαι, ἡ καμπύλη βΞ, ἧς ἐπιψαύȣσιν αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες, ἢ ἡ καμπύλη βΡ (σχ. 43), ἧς ἐπιψαύȣσιν αἱ προαγωγαὶ τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων, ἀκȣ́ει καμπύλη καυστικὴ δι' ἀνακλάσεως· ἐὰν δὲ γένηται ἡ ἀπτομένη ΑΛ = ΑΖ (σχ. 46) ϗ ἐξελιχθῇ ἡ γραμμὴ ΑΞβ, ἐπινοȣμένȣ νήματος ἴσȣ τῇ καμπύλῃ βΞ σὺν τῇ εὐθείᾳ ΑΡ = Λ (ἀκτῖνι ἀνακλωμένῃ συστοιχȣ̃

σῃ τῷ σημείῳ) τὸ σημεῖον Α καταγράψει τὴν καμπύλην ΑΠ, ὥστε τὴν ἁπτομένην τῆς καυστικῆς ΠΞ ἀεὶ ἐξισοῦσθαι τῇ μερίδι ΑΞ τῆς καυστικῆς σὺν τῇ εὐθείᾳ ΑΛ (εἴπερ ΑΡ γραμμὴ εὐθεῖα εἴη, δυνατὸν μέντοι ἐκδέξασθαι αὐτὴν ὡς εὐμοιροῦσαν ἀπειροστῆς καμπυλότητος, καὶ μέρος ὑπάρχουσαν τῆς καμπύλης ΒΞ)· ἐὰν ἐπινοηθῶσιν αἱ ἐπιπίπτουσαι ἀκτῖνες προσεχέσταται ΖΜ, Ζμ, καὶ αἱ συστοίχως ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες ΜΞ, μΞ προεκβεβλημέναι, ἔστ' ἂν συμβάλωσι τῇ γραμμῇ ΑΠ, καὶ κέντροις τοῖς Ζ, Ξ γραφῶσι τὰ τόξα ΜΝ, Μν, συσταθήσονται ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα καὶ ὅμοια τὰ ΜΝμ, Μνμ· ἐπεὶ γὰρ ἡ γωνία τῆς ἀνακλάσεως ἴση ἐστὶ τῇ τῆς ἐπιπτώσεως, ἔσται ΝμΜ $=$ ΞμΒ· ἀλλὰ ΞμΒ $=$ Μμν (ὡς κατὰ κορυφήν)· ἄρα τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἰσὶν ὅμοια· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν αὐτοῖς ἡ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα, εἰσὶ καὶ ἴσα· ἄρα Νμ $=$ μν· ἀλλὰ νμ ἐστιν ἡ διαφορὰ τῆς ΠΜ, καὶ μΝ τῆς ΖΜ· καὶ ἐπεὶ τοῦτο ἐπικρατεῖ ἔντινι τῆς καμπύλης τόπῳ, ἔνθα κεῖται τὸ σημεῖον Μ· ἄρα ΜΠ $-$ ΛΑ, ἡ ΑΡ $+$ ΡΞ $-$ ΜΞ, ἄθροισμα πασῶν τῶν διαφορῶν Νμ τῶν ἐν τῷ μέρει τῆς καμπύλης ΑΜ, (166) ἐστιν $=$ ΖΜ $-$ ΖΑ, ἀθροίσματι πασῶν τῶν διαφορῶν Νμ τῶν ἐν τῷ ΑΜ τῆς καμπύλης μέρει· συσταθήσεται ἄρα ἡ ἐξίσωσις ΑΡ $+$ ΡΞ $-$ ΜΞ $=$ ΞΜ $-$ ΖΑ· ἄρα τὸ τόξον ΡΞ (τῆς καυστικῆς) ἐστιν $=$ ΞΜ $-$ ΖΑ $+$ ΜΞ $-$ ΑΡ, τοῦτ' ἐστι τὸ τόξον ΡΞ τῆς καυστικῆς ἐστιν ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν ἐπιπιπτουσῶν ἀκτίνων τοῦ συστοιχοῦντος τόξου ΑΜ σὺν τῇ διαφορᾷ πασῶν τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων· ἐκληπτέον γὰρ τὴν ΑΡ ὡς ἀνακλωμένην ἀκτῖνα συστοιχοῦσαν τῷ σημείῳ Α· ὅταν δὲ ἡ καυστικὴ ἄρχηται ἀπὸ τοῦ Α, ἡ ἀκτὶς ἐστιν $=$ ο· τῆς δὲ ἀνακλωμένης ἀκτῖνος ΑΡ (σχ. 17) ἐξελισσούσης τὸ ΡΞ μέρος τῆς καυςικῆς, ἵν' ἀφίκηται ἐπὶ ΜΞ, τηνικαῦτα εὑρεθήσεται ΡΞ = ΖΜ — ΖΑ + ΑΡ — ΜΞ, εἴγε τηνικαῦτα ἡ τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων διαφορὰ ἐςὶ = ΡΞ + ΞΜ — ΑΡ· καθόλε δὲ, ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιπιπτεσῶν ἴση ἐςὶ τῇ τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων, συναπτομένε μιᾷ τῶν ἀνακλωμένων τε μέρες τῆς καυςικῆς, τε ἐξελισσομένε πρὶν ἢ θατέρα ἐπιπεσεῖν· ἐὰν δὲ κέντρῳ τῷ Ζ (σχ. 16, 17) γραφῇ τὸ τόξον Αα, δῆλον, ὅτι αΜ ἔςαι ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιπιπτεσῶν ἀκτίνων· ἐὰν δὲ τὸ ἀκτινοβόλον σημεῖον Ζ (σχ. 44) ἀπείρως ἀπέχῃ, αἱ ἐπιπίπτεσαι ἀκτῖνες ἐκληφθήσονται ὡς παράλληλοι, ϗ τὸ τόξον Αα δυνήσεται ἐκληφθῆναι ὡς εὐθεῖα κάθετος ταύταις ταῖς ἀκτῖσι· δῆλον δὲ, ὅτι, εὑρισκομένης τῆς συνδρομῆς τῶν προσεχεςάτων ἀκτίνων ΜΞ, μΞ (σχ. 16), πορισθήσεται τὸ Ξ σημεῖον τῆς καυςικῆς.

169. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Δοθέντος σημείε τε Μ καμπύλης τῆς ΑΜ (σχ. 45) ϗ σημείε ἀκτινοβόλε τε Ζ, εὑρεῖν τὸ μῆκος ΜΞ τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος.

ΛΥΣΙΣ. Ζητηθήτω (διά τινος τῶν προαποδεδομένων τύπων) ἡ ἀκτὶς ΜΓ τῆς κατὰ τὸ Μ ἐξειλιγμένης, ϗ ληφθέντος τε ἀπειροςε τόξε Μμ, ἐπινοηθήτωσαν αἱ ἐπιπίπτεσαι ϗ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες, ἃς τὸ σχῆμα παρίςησι· ϗ κέντροις τοῖς Ζ, Ξ γεγράφθωσαν τὰ τόξα Μν, μΝ, ϗ ἤχθωσαν αἱ κάθετοι ΓΠ, Γπ, ΓΒ, Γβ ταῖς τε ἐπιπιπτέσαις, ϗ ταῖς ἀνακλωμέναις ἀκτῖσι· ϗ γενέσθω ΖΜ = υ, ϗ ΜΠ = ΜΒ (εἴγε τῶν γωνιῶν ΠΜΓ, ΒΜΓ ἴσων ἐσῶν, πάντα τὰ τῆς ΓΜ εὐθείας σημεῖα ἴσον ἀπέχεσι τῶν εὐθειῶν ΒΜ, ΜΖ) = α· τέτων τεθέντων, δῆλον ἐκ τῶν ἄρτι εἰρημένων, ὅτι τὰ τρίγωνα Μνμ, ΜΝμ εἰσὶν ἴσα, ϗ ΜΝ = Μν· ἐπεὶ δὲ ϗ αἱ γωνίαι τῆς ἐπιπτώσεως εἰσὶν ἴσαι ταῖς τῆς ἀνακλάσεως, ἔςιν ἄρα $\Gamma\Pi = \mathrm{B}\Gamma$, ϗ $\Gamma\pi = \beta\Gamma$, ϗ ἑπομένως $\Gamma\Pi - \Gamma\pi = \Gamma\Pi - \Gamma\Sigma = \Pi\Sigma = \Gamma\mathrm{B} - \Gamma\beta = \mathrm{B}\vartheta$· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα $\mathrm{Z}\Pi\Sigma$, $\mathrm{ZM}\nu$ εἰσὶν ὅμοια, καθὰ δὴ ϗ τὰ $\Xi\mathrm{M}\nu$, $\Xi\mathrm{B}\vartheta$· ἄρα $\mathrm{ZM} = \upsilon : \mathrm{Z}\Pi = \upsilon - \alpha :: \mathrm{MN} : \Pi\Sigma$, ἢ (συνθέσει τε ϗ ἀντιςροφῇ) $2\upsilon - \alpha : \upsilon :: \mathrm{MN} + \Pi\Sigma = \mathrm{MN} + \mathrm{B}\vartheta : \mathrm{M}\nu = \mathrm{MN} :: \mathrm{M}\Xi + \Xi\mathrm{B} = \mathrm{MB} = \mathrm{M}\Pi = \alpha : \mathrm{M}\Xi = \dfrac{\alpha\upsilon}{2\upsilon - \alpha}$.

Τῆς δὲ καμπύλης κυρτῆς ὕσης πρὸς τὸ Ζ, τὸ υ γενήσεται λειπτικὸν, ϗ εὑρεθήσεται $\mathrm{M}\Xi = \dfrac{-\alpha\upsilon}{-2\upsilon - \alpha} = \dfrac{\alpha\upsilon}{2\upsilon + \alpha}$· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ τὸ υ ἄπειρον, τηνικαῦτα αἱ ἐπιπίπτουσαι ἀκτῖνες (σχ. 44) ὡς παράλληλοι ἐκληφθήσονται, ϗ ἔςαι $\mathrm{M}\Xi = \dfrac{\alpha\upsilon}{2\upsilon} = \dfrac{\alpha}{2}$.

Ἐὰν ἡ καμπύλη ΑΜ (σχ. 45) ᾖ γεωμετρικὴ, δυνατὸν εὑρεῖν γεωμετρικῶς πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐξειλιγμένης· δυνατὸν δὲ εὑρεῖν διὰ τῆς ΑΜΒ (σχ. 42) καμπύλης ϗ γραμμὴν εὐθεῖαν ἴσην μέρει τινὶ τῷ ΡΞ τῆς καυςικῆς, ἥτις ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἔςαι εὐθύνσιμος.

Ἐὰν ἡ καμπύλη ΑΜ (σχ. 43) κυρτὴ ᾖ πρὸς τὸ ἀκτινοβόλον σημεῖον Ζ, ἔςαι $\mathrm{M}\Xi = \dfrac{\alpha\upsilon}{2\upsilon + \alpha}$, ποσότης ἀεὶ ὑπαρκτική· οὐκοῦν δεήσει ταύτην λαβεῖν, ἔνθα προσδιορίζεται ἡ ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης ΜΞ· αἱ δὲ προσεχέςαται ἀκτῖνες ἔσονται τηνικαῦτα ἀποκλίνουσαι (*).

(*) Ἀποκλίνουσαι μὲν ἀκτῖνές εἰσιν αἱ ἀπ' ἀλλήλων ἀφ-

Ἐὰν (σχ. 45) ἡ καμπύλη ᾖ κοίλη πρὸς τὸ Ζ, ἡ δύναμις τῆς ΜΞ $= \frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon - \alpha}$, ὑπαρκτικὴ μὲν ἔσαι, ὅταν ἡ $\upsilon > \frac{\alpha}{2}$, λειπτικὴ δὲ, ὅταν $\upsilon < \frac{\alpha}{2}$, ἄπειρος δὲ, ὅταν $\upsilon = \frac{\alpha}{2}$· καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει συγκλινοῦσιν, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἀποκλινοῦσιν, ἐν δὲ τῇ τρίτῃ παράλληλαι ἔσονται, αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες.

Ἐὰν γραφῇ κύκλος, καὶ ἡ διάμετρος ΜΗ (σχ. 46) εἴη τὸ ἥμισυ τῆς φιλέσης ἀκτῖνος ΜΓ, διὰ τὰ ὀρθογώνια ὅμοια σχήματα ΜΚΗ, ΜΠΓ, ἔσαι ΜΚ $= \frac{\text{ΜΠ}}{2} = \frac{\alpha}{2}$ καὶ ΜΗ $= \frac{\text{ΜΓ}}{2}$· ὥςε, εἰ μὲν τὸ σημεῖον Ζ πίπτοι ἐπὶ τοῦ Κ, εἴτ' οὖν ἐπὶ τῆς κυκλικῆς περιφερείας, αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες ἔσονται παράλληλοι· εἰδ' ἐκτὸς τοῦ κύκλου, συγκλινοῦσαι· ἀποκλινοῦσαι δὲ, εἴπερ ἐντός.

Ἐὰν ἡ καμπύλη ΑΜ (σχ. 47) ὑποτεθῇ παραβολὴ συνήθης· τὸ δ', ἀφ' οὗ προχέονται αἱ ἀκτῖνες, σημεῖον ᾖ ὑπάρχῃ αὐτῆς ἡ ἑςία, διὰ τὴν ἰδιότητα ταύτης τῆς καμπύλης, αἱ γωνίαι, αἱ συνιςάμεναι ὑπὸ τῆς ἁπτομένης καὶ τῆς ὀρθίας ἀκτῖνος καὶ τῆς συςοιχούσης διαμέτρου, εἰσὶν ἴσαι (ὡς φαίνεται ἐν ταῖς κωνικαῖς τομαῖς)· ἄρα ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ΜΞ ἔσαι παράλληλος τῷ ἄξονι Αε.

ιςάμεναι, συγκλίνουσαι δὲ, αἱ κατὰ βραχὺ προσπελάζουσαι ἀλλήλαις.

Ἐὰν ἡ καμπύλη ΑΜ ᾖ ἔλλειψις (σχ. 48)· τὸ δὲ ἀκτινοβόλον σημεῖον ᾖ μία τῶν ἑστιῶν, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς διήξει διὰ τῆς ἑτέρας ἑστίας ε· κατὰ γὰρ τὴν τῆς καμπύλης ταύτης ἰδιότητα (Ὑψ. Γ. 104) αἱ γωνίαι, αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῆς ἁπτομένης ᾗ τῶν ὀρθίων πλευρῶν, εἰσὶν ἴσαι· ἄρα κτ.

Ἐὰν ἡ καμπύλη ΑΜ (σχ. 49) ᾖ ὑπερβολή· τὸ δὲ ἀκτινοβόλον σημεῖον Ε ᾖ μία τῶν ἑστιῶν, αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες, προαχθεῖσαι, διήξουσι διὰ τῆς ἑτέρας ἑστίας ε· ἐξερχόμεναι δὲ ἐκ τοῦ ε, προαχθεῖσαι, διήξουσι διὰ τοῦ Ε· συμβαίνει δὲ τοῦτο, ὅτι αἱ γωνίαι, αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῆς ἁπτομένης καὶ τῶν εὐθειῶν ΕΜ, Εμ, εἰσὶν ἴσαι (Ὑψ. Γ. 174).

170. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὴν δι᾽ ἀνακλάσεως καυστικὴν τῆς παραβολῆς ΑΜ (σχ. 50), ὑποτιθεμένων παραλλήλων τῶν ἐπιπιπτουσῶν ἀκτίνων ΕΜ, ᾗ καθέτων τῷ τῆς παραβολῆς ἄξονι ΑΡ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπειδὴ αἱ ἀκτῖνες εἰσὶ παράλληλοι, δυνατὸν ὑποθέσθαι $\upsilon = \infty$· καὶ δὴ ὁρισθήσεται ΜΞ $= \frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon - \alpha} = \frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon} = \frac{\alpha}{2}$· ἐκ δὲ τοῦ μέσου Η τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐξειλιγμένης ἤχθω ἡ ΗΚ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΜΠ $= \alpha$, ᾗ ἀχθεισῶν τῶν ἄλλων εὐθειῶν, τῶν ἐπὶ τοῦ σχήματος παριστανομένων, ἔσται (διὰ τὰ ὅμοια σχήματα) ΜΓ : ΜΗ :: ΜΠ : ΜΚ :: 2 : 1 :: $\alpha : \frac{\alpha}{2}$· ἄρα ΜΚ $= \frac{\alpha}{2} =$ ΜΞ· μεταφερομένης ἄρα τῆς ΜΚ ἐπὶ τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος ΜΒ, ᾗ γινομένης ΜΞ $= \frac{\alpha}{2}$, τὸ σημεῖον Ξ ἔσται ἐν τῇ καυςικῇ· ὡσαύτως δὲ εὑρεῖν δυνατὸν ὅσα ἄντις βούλοιτο τῆς καυςικῆς σημεῖα· πρὸς δὲ τῷ σημείῳ Α ἡ ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης ἴση ἐςὶ τῇ ἡμιπαραμέτρῳ τῦ ἄξονος· ὅθεν ΜΠ $=$ α γίνεται τηνικαῦτα $= 0$· ἡ δὲ καυςικὴ διήκει τηνικαῦτα διὰ τῆς κατὰ τὴν παραβολὴν κορυφῆς Α.

Ἵνα δὲ εὑρεθῇ ἡ τῆς καυςικῆς ἐξίσωσις, ὑποτεθείσθω ἡ ἀποτετμημένη ΑΡ $= \pi$, καὶ ἡ τεταγμένη ΞΡ $= \kappa$, καὶ προήχθωσαν αἱ ΜΞ μέχρι τῦ κατὰ τὸν ἄξονα Τ, καὶ γενέσθω ΜΤ $= \psi$, καὶ Με $= \upsilon$, καὶ ἡ ἀδιόριςος ἀποτετμημένη Αε $= \chi$, καὶ ἡ ὑποκάθετος εΔ $= \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$· τῆς δὲ γωνίας εΜΤ δίχα διαιρεθείσης διὰ τῆς ΜΔ, ἔςαι (Γεωμ. 320) Με : ΜΤ :: εΔ : ΔΤ, εἶτ' ἦν $\upsilon : \psi :: \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi} :$ ΔΤ $= \frac{\psi\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἄρα εΤ $=$ εΔ $+$ ΔΤ $= \frac{\upsilon\delta\upsilon + \psi\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἀλλ' ἐκ τῦ ὀρθογωνίυ τριγώνυ εΜΤ ἐςὶν εΤ^2 $=$ ΜΤ^2 $-$ εΜ^2 $=$ $\psi\psi - \upsilon\upsilon$· ἄρα εΤ $= \sqrt{(\psi\psi - \upsilon\upsilon)} = \frac{\upsilon\delta\upsilon + \psi\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἄρα (πολλαπλασιασμῷ ἐπὶ χ, τετραγωνισμῷ, μεταθέσει, καὶ διαιρέσει διὰ $\psi + \upsilon$) $\psi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\upsilon^2 = \delta\chi^2\,(\psi - \upsilon)$· ὅθεν ἀποφέρεται $\psi = \frac{\upsilon(\delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)}{\delta\chi^2 - \delta\upsilon^2}$· ἀντικαταςαθείσης δὲ ταύτης τῆς τῦ ψ δυνάμεως ἐν τῇ τῆς εΤ$=\frac{\upsilon\delta\upsilon + \psi\delta\upsilon}{\delta\chi}$, προέρχεται εΤ $= \frac{2\upsilon\delta\upsilon\delta\chi}{\delta\chi^2 - \delta\upsilon^2}$· ἀχθείσης δὲ τῆς μΞ παραλλήλυ τῷ ἄξονι, τὰ τρίγωνα ΜΞμ, ΜεΤ ἔσονται ἄμοια· οὐκοῦν ΜΤ : ΜΞ :: Με : Μμ· ἔστι δὲ ΜΞ $= \frac{\alpha}{2}$· ἡ δὲ πλευρὰ ΓΠ τῆς φιλούσης ἀκτῖνος, ὑποτιθεμένου ἀτρέπτου τοῦ $\delta\chi$, ἐστὶν $= \frac{\delta\sigma^2}{-\delta\delta\upsilon}$ (ταύτην δὲ τὴν πλευρὰν ἐδηλώσαμεν διὰ ΓΝ, 150)· ἄρα τὸ ἥμισυ ταύτης τῆς πλευρᾶς ὃν ἐνταῦθα $= \frac{M\Pi}{2}$, ἔσται $\frac{\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon}$· ἄρα $\frac{\upsilon(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}{\delta\chi^2 - \delta\upsilon^2} : \frac{\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon} :: \upsilon : \frac{\delta\chi^2 - \delta\upsilon^2}{2\delta\delta\upsilon} = M\mu$ $= M\varepsilon - \Xi P = \upsilon - \kappa$· ἄρα $\kappa = \upsilon + \frac{\delta\chi^2 - \delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon}$. ἔστι δὲ καὶ $M\varepsilon : M\varepsilon :: \varepsilon T : \mu\Xi = \varepsilon P$· ἄρα $\upsilon : \frac{\delta\chi^2 - \delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon}$ $:: \frac{2\upsilon\delta\upsilon\delta\chi}{\delta\chi^2 - \delta\upsilon^2} : \varepsilon P = \frac{\delta\upsilon\delta\chi}{-\delta\delta\upsilon}$, καὶ ἐπομένως $\varepsilon P = AP$ $- \varepsilon\Lambda = \pi - \chi = \frac{\delta\upsilon\delta\chi}{-\delta\delta\upsilon}$, καὶ $\pi = \chi + \frac{\delta\upsilon\delta\chi}{-\delta\delta\upsilon}$· οἱ τοίνυν τύποι τοῦ κ καὶ π λυσιτελοῦσιν ἐν παντὶ εἴδει καμπύλων, διδομένης τῆς αὐτῶν ἐξισώσεως.

Ἔστω ἡ τῆς παραβολῆς παράμετρος $= 1$· οὐκοῦν ἔσται $\upsilon^2 = \chi$, $\upsilon = \chi^{\frac{1}{2}}$, $\delta\upsilon = \frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi$, $\delta\upsilon^2 = \frac{1}{4}\chi^{-1}\delta\chi^2$, $\delta\delta\upsilon = -\frac{1}{4}\chi^{-\frac{3}{2}}\delta\chi^2$, ὑποτιθεμένου ἀτρέπτου τοῦ $\delta\chi$· ἀντικαθισταμένων δὲ τῶν δυνάμεων τούτων τοῦ υ, $\delta\upsilon$, $\delta\delta\upsilon$, ἐν τοῖς τύποις τοῦ κ καὶ π, προέρχεται $\kappa = \chi^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}\cdot\chi^{-1}\delta\chi^2}{\frac{1}{2}\chi^{-\frac{3}{2}}\delta\chi^2}$

$-\frac{\delta\chi^2}{\frac{1}{2}\chi^{-\frac{3}{2}}\delta\chi^2} = \chi^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\chi^{\frac{1}{2}} - 2\chi^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\chi^{\frac{1}{2}} - 2\chi^{\frac{3}{2}}$, ϗ $\kappa^2 = \frac{9}{4}\chi - 6\chi^2 + 4\chi^3$. Καὶ $\pi = \chi + \frac{\delta\upsilon\delta\chi}{-\delta\delta\upsilon} = \chi + \frac{\frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi^2}{\frac{1}{4}\chi^{-\frac{3}{2}}.\delta\chi^2} = \chi + 2\chi = 3\chi$· ἄρα $\chi = \frac{\pi}{3}$· ἀντικαθιϛαμένης δὲ ταύτης τῆς τȣ̃ χ δυνάμεως ἐν τῇ τȣ̃ κ^2, εὑρίσκεται $\kappa^2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3}\pi^2 + \frac{4}{27}\pi^3$· τῶν δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὅρων πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ τὴν παράμετρον $\iota = \beta$, ὁσάκις ἀπόχρη γενέσθαι ὁμογενεῖς, ποριωθήσεται $\beta\kappa^2 = \frac{3\beta^2\pi}{4} - \frac{2\beta\pi^2}{3} + \frac{4}{27}\pi^3$, ἐξίσωσις τῆς καυϛικῆς.

Ἵνα δὲ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Σ, καθ' ὃ ἡ καυϛικὴ συμβάλλει τῷ ἄξονι τῆς καμπύλης ΑΜ, σημειωτέον, ὅτι τηνικαῦτα ἐϛὶ $\psi = \text{ΜΞ} = \frac{\alpha}{2} = \frac{\delta\sigma^2}{-2\delta\delta\upsilon}$· ἄρα $\psi = \frac{\upsilon.(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}{\delta\chi^2 - \delta\upsilon^2} = \frac{\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon}$, ἢ $-2\upsilon\delta\delta\upsilon = \delta\chi^2 - \delta\upsilon^2$, $\delta\upsilon^2 - 2\upsilon\delta\delta\upsilon = \delta\chi^2$, τύπος, ᾧ χρήσασθαι δυνάμεθα ἐν παντὶ εἴδει καμπύλων, ἀντικαθιϛάντες τὰς δυνάμεις τῶν υ, $\delta\upsilon$, $\delta\delta\upsilon$.

Ἐν ȣ̃ν τῇ παραβολῇ ἀντικαθιϛάντες τὰς δυνάμεις τῶν υ, $\delta\upsilon$, $\delta\delta\upsilon$, ποριζομένας ἐκ τῆς κατ' αὐτὴν ἐξισώσεως, ϗ ὑποτιθέντες τὴν παράμετρον $= 1$, ἔξομεν $\chi = \frac{1}{4}$, τȣ̃τ' ἔϛιν, ἐὰν ληφθῇ ἡ Αε ἴση τρισὶ τεταρτημορίοις τῆς παραμέτρȣ, ἡ σύςοιχος ἀνακλωμένη ἀκτὶς ἐφάψεται τῆς καυςικῆς κατὰ σημεῖον, ἐν ᾧ αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς.

Ἵνα δὲ εὑρεθῇ τὸ ἀπώτατον τȣ͂ ἄξονος σημεῖον Ξ τῆς καυςικῆς (σχ. 47), σημειωτέον, ὅτι τηνικαῦτα ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ὀφείλει εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι· ἄρα ἡ ὑπὸ εΜΞ γωνία ἔςαι ὀρθή· ἄρα ἡ γωνία εΜΑ $=$ ΞΜν $= 45^\circ =$ Μνι· ἄρα $\delta\chi = \delta\upsilon$, τȣτ᾽ ἔςιν ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς παράλληλός ἐςι τῷ ἄξονι, ὅταν ᾖ $\delta\chi = \delta\upsilon$.

Ἡ τῆς παραβολῆς ἐξίσωσις, ὑποτιθεμένης τῆς παραμέτρȣ $= 1$, ἔςιν $\upsilon^2 = \chi$, $2\upsilon\delta\upsilon = \delta\chi$, ἢ (ἀντικαθιςαμένης τῆς τȣ͂ υ δυνάμεως $\chi^{\frac{1}{2}}$), $2\chi^{\frac{1}{2}}\delta\upsilon = \delta\chi$, ϗ διαιρέσει, τȣ͂ μὲν πρώτȣ μέλȣς διὰ $\delta\upsilon$, τȣ͂ δὲ δευτέρȣ διὰ $\delta\chi$, ὅπερ ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἐςὶν $= \delta\upsilon$, πρόεισι $2\chi^{\frac{1}{2}} = 1$, $\chi^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, ϗ $\chi = \frac{1}{4}$, τȣτ᾽ ἔςιν „ἐὰν ἡ ἐπιπίπτȣσα ἀκτὶς τέμνῃ τὸν ἄξονα πρὸς μέρει τετάρτῳ „τῆς παραμέτρȣ, ἤ, ὃ δήπȣ ταυτὸν, διήκῃ διὰ τῆς „κατὰ τὴν παραβολὴν ἑςίας, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς παράλληλος ἔςαι τῷ ἄξονι, ϗ ἐπιψαύσει τȣ͂ ἀπωτάτȣ σημείȣ τῆς καυςικῆς.“

171. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Εὑρεῖν τὴν δι᾽ ἀνακλάσεως καυςικὴν, ὅταν αἱ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι Αα (σχ. 51) ἐπιπίπτȣσαι ἀκτῖνες ΕΜ συμβάλλωσιν ἡμιπεριφερείᾳ κυκλικῇ τῇ ΑΔα.

ΛΥΣΙΣ. Ἀχθεισῶν τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων ΜΞ, ϗ τῶν ἄλλων, ἃς τὸ σχῆμα παρίςησιν, ἐπεὶ ἡ τῆς ἐξειλιγμένης κύκλȣ ἀκτὶς ἀεὶ ἐςιν ἴση τῇ τȣ͂ κύκλȣ ἀκτῖνι, ἔςαι $\text{ΜΗ} = \frac{\text{ΜΚ}}{2}$, ϗ τῆς ΗΞ καθέτȣ ὑποτιθεμένης τῇ ΜΞ, ΗΞ, ἔςαι $= \mathrm{HP} = \frac{\mathrm{\Pi M}}{2} = \frac{a}{2}$· τῷ δὲ σημείῳ Μ ἐπιπί-πτοντος τῷ Δ, ἔςαι $\mathrm{M\Xi} = \mathrm{\Delta B} = \frac{\mathrm{\Delta K}}{2}$. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῆς ἐπιπιπτούσης ἀκτῖνος τῆς τῷ Μ συςοιχούσης, ᾗ διαφέρει τῆς τῷ Α συςοιχούσης, ἔςιν $= \mathrm{\Pi M}$· ἡ δ' ἀνακλωμένη κατὰ τὸ Α ἀκτὶς ἔςιν $= 0$· ἄρα κατὰ τὰ εἰρημένα (168) τὸ τόξον ΑΞ ἔςιν $= \mathrm{\Pi M} + \mathrm{M\Xi} = 3\mathrm{M\Xi}$, τὸ δὲ τόξον $\mathrm{AB} = 3\mathrm{\Delta B}$, τοῦτ' ἔςι τὸ τόξον ΑΒ τριπλάσιόν ἐςι τῆς ἡμισείας ἀκτῖνος ΔΒ· Κέντρῳ δὲ τῷ Κ γραφέντος τοῦ τόξου ΒΣ, ἐπὶ τῆς διαμέτρου $\mathrm{MH} = \mathrm{KH}$ γεγράφθω κύκλος ὁ ΜΞΗ· ἐπεὶ δὲ ὀρθή ἐςιν ἡ ὑπὸ ΜΞΗ γωνία, τὸ σημεῖον Ξ ἔςαι πρὸς τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου· ἔςι δὲ καὶ ἡ γωνία $\mathrm{\Xi MH} = \mathrm{KM\Pi} = \mathrm{HKB}$ (ὡς ἐναλλάξ)· ἄρα τὰ τόξα $\frac{\mathrm{H\Xi}}{2}$, ΗΒ, τὰ μετροῦντα ταύτας τὰς γωνίας, πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ὡς αἱ ἀκτῖνες $\frac{\mathrm{HM}}{2}$, ΒΚ τῶν κύκλων ΗΞΜ, ΒΣ· ἀλλὰ ΒΚ διπλοῦν ἐςι τῆς $\frac{\mathrm{HM}}{2}$· ἄρα τὸ τόξον ΒΗ ἴσον ἐςὶ τῷ τόξῳ ΗΞ· οὐκοῦν ἡ καμπύλη ΑΒ ἀπογεννᾶται ἐκ τῆς περιφορᾶς κύκλου, οὗ ἡ ἀκτὶς ἔςιν $= \mathrm{BK} = \frac{\mathrm{AK}}{2}$, ὡς τὸ τοῦ ἀκινήτου κύκλου τόξον ΒΗ ἀεὶ ἰσοῦσθαι τῷ τοῦ κινητοῦ συςοιχοῦντι τόξῳ ΞΗ, καὶ ἑπομένως τὴν καμπύλην ΒΑ τόξον εἶναι ἐπικυκλοειδοῦς (*).

(*) Περὶ τῆς οὕτω καλουμένης καμπύλης οὐδὲν ἡμῖν εἴρηται ἐν τῇ ὑψηλοτέρᾳ Γεωμετρίᾳ· ἔςι δὲ ἡ ἀπογεννωμένη

Δυνατὸν δὲ ἰδεῖν ταύτην τὴν καμπύλην φωτίζοντας τὴν ἐσωτερικὴν ἐπιφάνειαν ἄγγυς ἡμικυλινδρικῦ διὰ τῦ ἡλιακῦ φωτός.

172. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Τῶν ἐπιπιπτουσῶν ἀκτίνων προσβαλλομένων ἀπὸ τῦ πέρατος Ζ διαμέτρυ τῆς Ζα ἡμικυκλίυ, εὑρεῖν τὴν φύσιν τῆς δι᾽ ἀνακλάσεως καυστικῆς (χ. 52).

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω, ΖΜ μὲν ἡ ἐπιπίπτουσα ἀκτὶς, ΜΞ δὲ ἡ ἀνακλωμένη· καὶ ἀχθείσης τῆς ΚΠ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΖΜ, ἔςαι $ZM = \upsilon$, καὶ $M\Pi = \alpha = \frac{\upsilon}{2}$ (ἡ γὰρ ἀκτὶς δίχα τέμνεται ὑπὸ καθέτυ ἐκ τῦ κέντρυ ἀγομένης, Γεωμ. 157)· ἄρα $2\upsilon = 4\alpha$· ἐκῶν $M\Xi = \frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon - \alpha} = \frac{\alpha\upsilon}{4\alpha - \alpha} = \frac{\alpha\upsilon}{3\alpha} = \frac{\upsilon}{3}$· λαμβανομένης ἄρα τῆς ΜΞ ἴσης τῷ τριτημορίῳ τῆς ΖΜ, τὸ σημεῖον Ξ ἔςαι ἐν τῇ καυςικῇ· λαμβανομένης δὲ καὶ τῆς αΒ ἴσης τῷ τριτημορίῳ τῆς διαμέτρυ Ζα, ἔςαι καὶ τὸ Β ἐν τῇ καυςικῇ, ἐὰν δὲ ληφθῇ Κθ ἴση τῷ τριτημορίῳ τῆς ἀκτῖνος ΚΜ, καὶ ἀχθῇ ἡ θι παράλληλος τῇ ΚΠ, τὰ τρίγωνα ΜΚΠ, Μθι ἔσονται ὅμοια, καὶ δὴ ἔςαι ΜΚ : Μθ :: ΜΠ : Μι· ἄρα Μι ἔςαι δύω τριτημόρια τῆς ΜΠ, ἢ ἓν τριτημόριον τῆς ΖΜ· ἄρα ΜΞ = Μι· διὸ δὴ, ἐὰν ἐπὶ διαμέτρυ τῆς Μθ γραφῇ κύκλος, αἱ ὀρθαὶ γω-

---

ὑπὸ κύκλυ, ἐπὶ κύκλον ἀκίνητον μένοντα περιαγομένυ· διαφέρει δὲ τῆς λεγομένης κυκλοειδῦς, ὅτι ἐκείνη ὑπὸ κύκλυ ἐπ᾽ εὐθεῖαν γραμμὴν κυλιομένυ γράφεται (Ὑψ. Γ. 332)· διὸ καὶ ὄνομα αὐτῇ παρὰ τῶν νεωτέρων ἀφωσίωται ἐπικυκλοειδής· κύκλυ γὰρ ἐπὶ κύκλον περιεκκυλιομένυ, ἀναφύεται ἡ γραμμὴ αὕτη.

·νίαι Ξ, ι ἔσονται πρὸς τῇ αὐτῇ περιφερείᾳ, ϗ ὁ κύκλος ἔτος ἴσος ἔςαι κύκλῳ, ἔ ἀκτὶς ἡ Κβ.

Τὸ τόξον βΒ τῦ ἡμικυκλίε ΒβΔ ἴσον ἐςὶ τῷ τόξῳ βΞ τῦ κύκλε βΜ· ἡ γὰρ γωνία ΜΚα (ἡ ἐκτὸς τῦ ἰσοσκελῦς τριγώνε ΖΜΚ) ἴσον δύναται ταῖς δυσὶ γωνίαις ΜΖΚ. ΖΜΚ· διπλασία ἄρα ἐςὶ τῆς γωνίας ΖΜΚ = ΚΜΞ· ἴση ἄρα ἐςὶ τῇ γωνίᾳ ιΜΞ, ἥτις ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῦ τόξε ιβΞ, ἡ τὸ τόξον ΒΞ· ἀλλ' ἡ γωνία ΜΚα ἔχει μέτρον τὸ τόξον Ββ· ἄρα τὸ τόξον Ββ ἴσον ἐςὶ τῷ τόξῳ βΞ, ϗ ἑπομένως ἡ καυςικὴ ΒΞΖ ἐςὶν ἐπικυκλοειδὴς, ἀπογεννωμένη ἐκ τῆς περιφορᾶς σημείε τῦ Ξ κύκλε τῦ Μιβ, ὃς περιάγεται ἐπὶ κύκλον ἴσον τὸν ΒβΔ.

173. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐὰν ἀκτὶς φωτὸς ἡ ΑΒ (σχ. 41), διἰκεσα ἐκ μέσε τῦ Η (*) ἐφ' ἕτερον τὸ πΝβ, ἀντὶ τῦ χωρεῖν τὴν πρώτην φορὰν ΒΚ, ἀποχωρῇ, ἢ προσχωρῇ τῇ εὐθείᾳ ΒΝ, τῇ πρὸς ὀρθὰς ἐφιςαμένῃ τῇ ἐπιφανείᾳ, ἥτις διακρίνει τὰ δύω μέσα, ἡ ἀκτὶς αὕτη *θραυςὴ* ἀκέει· ἡνίκα μὲν ἔν προσχωρεῖ τῇ καθέτῳ ΒΝ, *θραῦσιν πρὸς τῇ καθέτῳ*, ἡνίκα δ' ἀφίςαται αὐτῆς, *θραῦσιν ἀπὸ τῆς καθέτε*, ὑφίςασθαι λέγεται· ἡ δὲ ὑπὸ νΒΚ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ ταύτης τῆς ἀκτῖνος ϗ τῆς ΒΝ καθέτε, *γωνία θραύσεως*· ἔςι δὲ νόμος ἀπαράβατος τῦ ἔτω διϊόντος φωτὸς, ἵνα τὸ ἡμίτονον τῆς κατ' ἐπίπτωσιν γωνίας ΑΒΜ, ἢ τῆς αὐτῇ ἴσης νΒα (ἣν ϗ αὐτὴν καλέσομεν *ἐπιπτώσεως γωνίαν*) πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς κατὰ θραῦσιν γωνίας ὑπάρχῃ ἐν λόγῳ ἀ-

---

(*) Ἅπαν τὸ διάςημα, ὃ δίεισι τὸ φῶς, ὀνομάζομεν *Μέσον*.

τρέπτῳ· ὡς εἶναι $\mu\alpha : \nu K :: \mu : \nu$· ὁποία γὰρ ἂν εἴη ἡ τῆς ἐπιπτώσεως γωνία, ἐὰν ἡ φωτὸς ἀκτὶς μεταχωρῇ ἐξ ἀέρος ἐπὶ ὕελον, ὁ λόγος ἔτος ἐςὶ μικρῦ δεῖν ἴσος τῷ 3 : 2, ἢ ἴσος τῷ 2 : 3, ὅταν ἐξ ὑέλε μεταβαίνῃ εἰς ἀέρα· ὑποτεθήσεται δ' ἡμῖν ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὁ λόγος ἔτος ὡς ἀκριβῶς ἔχων.

Ἐὰν ἡ θραςὴ ἀκτὶς ΒΚ ἀναςρέψῃ τὴν ἑαυτῆς πορείαν, φημὶ, ὡς αὕτη ὁδεύσει τὴν ΒΑ ὁδὸν, δι' ἧς τὸ πρῶτον ἀφίκετο· ἔςαι γὰρ $\nu : \mu :: \nu K : AM = \frac{\mu}{\nu} K\nu = \mu\alpha$, ὑποτιθεμένης $BA = B\alpha$· ἀλλ' ἐςιν $AM = \mu\alpha : \nu K :: \mu : \nu$· ἄρα $MA = \frac{\mu}{\nu} K\nu$· ἄρα κτ.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐὰν ἀπειράριθμοι ἀκτῖνες ΒΑ, ΒΜ, ἀπὸ σημείε προβαλλόμεναι ἀκτινοβόλε τῦ Β (σχ. 53), ἢ ἐπιπίπτεσαι ἀκτῖνι τῇ ΑΔ, θραύωνται πρὸς τῇ καθέτῳ, ἢ ἄπο τῆς καθέτε ΜΓ, ὡς τὸ ΓΕ ἡμίτονον τῆς κατ' ἐπίπτωσιν γωνίας ΕΜΓ πρὸς τὸ ΓΘ ἡμίτονον τῆς κατὰ θραῦσιν γωνίας ἀεὶ εἶναι ἐν δεδομένῳ λόγῳ $\mu : \nu$, ἡ καμπύλη ΝΖΗ, ἧς ἐπιψαύεσιν αἱ θραυςαὶ ἀκτῖνες, ἢ αἱ αὐτῶν προαγωγαὶ ΑΗ, ΜΖ (σχ. 28) ἀκέει καυςικὴ διὰ θραύσεως.

Ἐὰν ἐπινοηθῇ νῆμα τὸ ΑΗ (σχ. 53) ἐξελισσόμενον ἐκ τῆς καυςικῆς ΗΝ, τὸ πέρας Α καταγράψει καμπύλην τὴν ΑΚ, ἧς ἔςαι ἐξειλιγμένη ἡ καυςική· ἢ ἔςαι τὸ τῆς καυςικῆς τόξον ΖΗ σὺν τῇ ἀπτομένῃ ΖΛ ἴσον τῇ εὐθείᾳ ΗΑ· ὑποτεθείσθω ἀπτομένη ἑτέρα τῇ πρώτῃ προσεχεςάτη ἡ Ζμλ, ἢ ἀκτὶς ἑτέρα ἐπιπίπτεσα ἡ Βμ· ἢ κέντροις τοῖς Ζ, Β γεγράφθωσαν τόξα τὰ Μν, Μπ·

ἐκεῖν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα Μτμ, Μνμ ἔσονται ὅμοια τοῖς τριγώνοις ΜΕΓ, ΜΓΘ ἑκατέρω ἑκάτερον· ἐὰν γὰρ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΕΜτ, μΜΓ, ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπὸ μΜΕ γωνία, αἱ κατάλοιπαι γωνίαι τΜμ, ΕΜΓ ἴσαι ἔσονται· ὡσαύτως, εἰ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΘΜν, ΓΜμ ἀφαιρεθείη ἡ ὑπὸ ΘΜμ γωνία, αἱ κατάλοιποι γωνίαι μΜν, ΘΜΓ ἴσαι ἔσονται· καὶ δὴ ἔςαι τμ : Μν :: ΓΕ : ΓΘ :: μ : ν· ἀλλὰ τμ ἐςὶν ἡ διαφορὰ τῆς ΑΜ, καὶ ἡ Μν τῆς ΑΜ· ἄρα (166) ΒΜ — ΒΑ, ἄθροισμα πασῶν τῶν τμ διαφορῶν τῶν ἐν τῷ ΑΜ μέρει τῆς καμπύλης, πρὸς ΜΛ = ΑΗ — ΜΖ — ΖΗ, ἄθροισμα πασῶν τῶν συςοιχουσῶν διαφορῶν νμ, ὡς μ : ν· ἄρα μ : ν :: ΒΜ — ΒΑ : (ΑΗ — ΜΖ — ΖΗ) $= \frac{\nu}{\mu}$. (ΒΜ — ΒΑ), ὅθεν ἀποφέρεται ΖΗ = ΑΗ — ΜΖ $+ \frac{\nu}{\mu}$. ΒΑ — $\frac{\nu}{\mu}$. ΒΜ.

Παντοῖαί εἰσι περιπτώσεις, ὡς ἂν εἴη ἡ ἐπιπίπτουσα ἀκτὶς ΒΑ μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς ΒΜ, καὶ ἡ θραυςὴ ἀκτὶς ΑΗ ἐνελίσσηται, ἢ ἐξελίσσηται τοῦ τόξου ΗΖ· εὑρεθήσεται μέντοι ἀεὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιπιπτουσῶν ἀκτίνων ἴσα πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν θραυςῶν ἀκτίνων, συνπτομένου μιᾷ αὐτῶν τοῦ τῆς καυςικῆς τόξου, τοῦ ἐξελιχθέντος πρὶν ἢ θατέρα ἐπιπεσεῖν, ὥσπερ μ : ν· οὕτω φέρε (σχ. 28) ΒΑ — ΒΜ : ΑΗ — ΜΖ — ΖΗ :: μ : ν (*)· ὅθεν εὐπετῶς ἀποφέρεται ἡ ἐξίσωσις ΖΗ = ΑΗ — ΜΖ $+ \frac{\nu}{\mu}$. ΒΜ — $\frac{\nu}{\mu}$ ΒΑ· ἐὰν δὲ, κέντρῳ μὲν τῷ Β, δια-

(*) Ἐνταῦθα ἡ ΜΖ ἐξελίσσει τὸ τόξον ΖΗ, πρὶν ἢ ἐπιπέσῃ τῇ ΑΗ.

σήματι δὲ τῷ ΒΑ (σχ. 27), γραφῇ τόξον τὸ ΑΠ, ΠΜ ἔσαι ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιπιπτουσῶν ἀκτίνων ΒΜ, ΒΑ· τοῦ δὲ σημείου Β ἀπείρως ἀφεστῶτος τοῦ τόξου ΑΜ, αἱ μὲν εὐθεῖαι ΒΑ, ΒΜ ὡς παράλληλοι ἐκληφθήσονται, τὸ δὲ ΠΑ τόξον ὡς γραμμὴ εὐθεῖα, κάθετος ταῖς ἐπιπιπτούσαις ἀκτῖσι· καὶ δὴ ἔσαι ΖΗ = ΑΗ — ΜΖ — $\frac{\nu}{\mu}$ ΠΜ.

174. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Δοθέντων τῆς καμπύλης ΑΔ, καὶ τοῦ ἀκτινοβόλου σημείου Β, καὶ τῆς ἐπιπιπτούσης ἀκτῖνος ΒΜ, εὑρεῖν ἐπὶ τῆς θραυσῆς ἀκτῖνος ΜΖ τὸ σημεῖον Ζ, καθ' ὃ ἐπιψαύει τῆς καυσικῆς (σχ. 53).

ΛΥΣΙΣ. Εὑρεθήτω διά τινος τῶν προαποδεδομένων τύπων ἡ ΜΓ ἀκτὶς τῆς κατὰ τὸ Μ ἐξειλιγμένης, καὶ εἰλήφθω ἀπειροσὸν τὸ τόξον Μμ, καὶ ἤχθω ἡ εὐθεῖα Γμ, καὶ ἐσάθωσαν κάθετοι ταῖς τε ἐπιπιπτούσαις καὶ ταῖς θραυσαῖς ἀκτῖσιν αἱ ΓΕ, Γε, ΓΘ, Γϑ· ἤχθωσαν δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ δοθεῖσαι ΒΜ = υ, καὶ ΜΕ = α, καὶ ΜΘ = β, καὶ γεγράφθω τὸ τόξον Μτ = δχ· τούτου τεθέντος, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜΕΓ, ΜΡμ, καὶ ΜΘΓ, μνμ, καὶ ΒΜτ, ΒΞε, πρόεισι ΜΕ = α : ΜΘ = β :: Μτ = δχ : Μν = $\frac{\beta\delta\chi}{\alpha}$, καὶ ΒΜ = υ : ΒΞ = ΒΕ (*) = υ + α :: Μτ = δχ : Ξε = $\frac{\delta\chi.(\alpha+\upsilon)}{\upsilon}$. ἀλλὰ, διὰ τὸν τῆς θραύσεως νόμον, ἔσι Γε : Γϑ :: ΓΕ : ΓΘ :: μ : ν. ἄρα (διαιρέσει) Γε — ΓΕ = Ξε : Γϑ — ΓΘ = Σϑ :: μ : ν, ἢ μ : ν ::

(*) Αὗται γὰρ αἱ εὐθεῖαι οὐδενὶ ἀλλ' ἢ ποσότητι ἀπειροστῇ τῇ ΞΕ διαφέρουσιν ἀλλήλων.

$\Xi\varepsilon = \frac{\delta\chi.(\alpha+\upsilon)}{\upsilon} : \Sigma\vartheta = \frac{\alpha\nu\delta\chi + \nu\upsilon\delta\chi}{\mu\upsilon}$· ἔςι δὲ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΖΜν, ΖΣϑ, Μν : Σϑ : : ΜΖ : ΖΣ, ἢ (διαιρέσει) $M\nu - \Sigma\vartheta = \frac{(\beta\mu\upsilon\delta\chi - \alpha\nu\delta\chi - \alpha\alpha\nu\delta\chi)}{\alpha\mu\upsilon}$ $: M\nu = \frac{\beta\delta\chi}{\alpha} :: M\Sigma = M\Theta = \beta : MZ = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon - \alpha\alpha\nu}$, ὅθεν προκύπτει ἡ ἐφεξῆς κατασκευή.

Γενέσθω ἐπὶ τὰ πρὸς τὴν ΓΜ (σχ. 55) ἡ γωνία ΒΓΗ = ΜΓΘ, ἐ εἰλήφθω ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ σημεῖον Β ἡ γραμμὴ $MT = \frac{\alpha\alpha}{\upsilon}$· ἐὰν οὖν γένηται ΗΤ : ΗΕ : : ΜΘ : ΜΖ (Τ), τὸ σημεῖον Ζ ἔςαι ἐν τῇ διὰ θραύσεως καυςικῇ· ἐκ γὰρ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΘΜ, ΓΕΗ πρόεισι ΓΘ : ΓΕ : : ΜΘ = β : ΕΗ· ἀλλὰ ΓΘ : ΓΕ : : ν : μ : : $EH = \frac{\beta\mu}{\nu}$· ἄρα $HE - ME = HM = \frac{\beta\mu - \alpha\nu}{\alpha}$, ἐ $HM - MT = HT = \frac{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon - \alpha\alpha\nu}{\nu\upsilon}$· ἄρα ἀντικαθιςαμένων ἐν τῇ ἀναλογίᾳ Τ τῶν ἀναλυτικῶν δυνάμεων τῶν τριῶν ὅρων, πορισθήσεται $\frac{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon - \alpha\alpha\nu}{\nu\upsilon}$: $\frac{\beta\mu}{\nu} :: \beta : MZ = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon - \alpha\alpha\nu}$. τῆς δὲ κατὰ τὴν ΗΤ δυνάμεως λειπτικῆς οὔσης, δῆλον, ὅτι ἔςαι ἐ ἡ τῆς ΜΖ· ἄρα τὸ Μ σημεῖον πεσεῖται μεταξὺ τῶν σημείων Θ, Ζ, ὅταν εὑρεθῇ τὸ Η μεταξὺ Τ ἐ Ε.

Ἐὰν ἡ καμπύλη κοίλη ᾖ πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ ἀκτινοβόλον σημεῖον Β (σχ. 54), υ γενήσεται λειπτικὸν, ἐ ἔςαι

$$MZ = \frac{-\beta\beta\mu\upsilon}{-\beta\mu\upsilon+\alpha\nu\upsilon-\alpha\alpha\nu} = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon-\alpha\nu\upsilon+\alpha\alpha\nu}\cdot$$ ἡ δὲ κατασκευὴ ἡ αὐτὴ ἔσεται· ἐὰν δὲ υ ὑποτεθῇ ἄπειρον, εἴτ' ἂν παράλληλαι αἱ ἐπιπίπτουσαι ἀκτῖνες, πορισθήσεται $MZ = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon-\alpha\nu\upsilon} = \frac{\beta\beta\mu}{\beta\mu-\alpha\nu}$· ἔςαι δὲ καὶ (σχ. 55) $MT = \frac{\alpha\alpha}{\upsilon} = 0$· ἐν ἄρα ταύτῃ τῇ περιπτώσει γενήσεται ΗΜ : ΗΕ :: ΜΘ : ΜΖ, ἐὰν ΑΜ ὑποτεθῇ τόξον κύκλου, οὗ ἄπειρος ἡ ἀκτὶς, ἢ ἐὰν ΑΜ ὑποτεθῇ γραμμὴ εὐθεῖα, τηνικαῦτα ΜΓ ἔςαι ἄπειρος, καὶ $ME = \alpha$, καὶ $M\Theta = \beta$· ἄρα ἡ ποσότης $\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon$, παραβαλλομένη τῇ $\alpha\alpha\nu$, ἐξουδενωθήσεται, καὶ ἔςαι $MZ = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\mp\alpha\alpha\nu}$ (τοῦ μὲν — ἀπονεμομένου τῷ 55 σχήμ. τοῦ δὲ + τῷ 54), καὶ γενομένου $HT = \frac{\alpha\alpha}{\upsilon}$, ἡ κατασκευὴ ἔσεται ἡ αὐτή.

175. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ τῆς ἐπιπτώσεως ἡμίτονον πρὸς τὸ τῆς θραύσεως, μὴ ὄντος τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ πάντων τῶν διαφανῶν σωμάτων, πρὶν ἢ ζητῆσαι τὴν καυςικὴν, ἀνάγκη γνῶναι τὸν λόγον $\mu : \nu$, ἐπὶ τῆς ὕλης, ἐξ ἧς σύγκειται ἡ καμπύλη, ἧς ζητεῖται ἡ καυςική.

176. Ἐὰν μ ἄπειρον ᾖ ὡς πρὸς τὸ ν, ἡ θραυςὴ ἀκτὶς ΜΖ πεσεῖται ἐπὶ τῆς ΓΜ καθέτου, ἡ δὲ διὰ θραύσεως καυςικὴ γενήσεται ἐξειλιγμένη· τηνικαῦτα γὰρ ευρεθήσεται $MZ = \beta$, ἥτις ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει γίνεται $= M\Gamma$.

Ἐὰν ἡ ἐπιπίπτουσα ἀκτὶς (σχ. 54) ΒΑ κάθετος ᾖ τῇ καμπύλῃ, τηνικαῦτα αἱ γραμμαὶ ΜΕ, ΜΘ γενήσονται ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ τῇ ἀκτῖνι ΜΓ· τηνικαῦτα ἄρα $\alpha = \beta$· καὶ ὑποτιθεμένων τῶν τεταγμένων υ παραλλήλων, προσδιορισθήσεται $\text{ΜΖ} = \dfrac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon} = \dfrac{\beta\mu}{\mu - \alpha}$.

177. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω ἡ καμπύλη ΑΔ (σχ. 56) τεταρτημόριον κύκλου, οὗ κέντρον ἔστω τὸ Κ, καὶ αἱ ἐπιπίπτουσαι ἀκτῖνες παράλληλοι καὶ κάθετοι τῇ ΔΚ, ὑποτεθείσθω δὲ καὶ $\mu : \nu :: 3 : 2$· τούτων τεθέντων, εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα ΜΖ τῆς καυστικῆς.

Ἐπεὶ πᾶσαι αἱ κυκλικαὶ ἀκτῖνες κατὰ τὸ κέντρον συνίασι, τὸ σημεῖον Κ ἔσται τοῦ κύκλου ἡ ἐνειλιγμένη· ἐὰν ἄρα γραφῇ ἡμικύκλιον τὸ ΚΕΜ, οὗ ἡ διάμετρος ΚΜ εἴη ἴση τῇ ἀκτῖνι ΚΔ, καὶ γένηται $3 : 2 ::$ ΚΕ : ΚΘ, ἢ $\text{ΚΘ} = \frac{2}{3}$ ΚΕ, ἡ ἀδιόριστος ΜΘ ἔσται ἡ θραυστὴ ἀκτὶς, ἡ δὲ ΜΖ διορισθήσεται, ὥσπερ ἀνωτέρω δέδεικται.

Ἵνα εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Η, καθ' ὃ ἡ ἐπιπίπτουσα ἀκτὶς ΒΑ (προαχθεῖσα) πρὸς ὀρθὰς τῷ κυκλικῷ τεταρτημορίῳ ἐπιψαύει τῆς καυστικῆς, εἰλήφθω ὁ τύπος $\dfrac{\beta\mu}{\mu - \nu}$, ὅστις γίνεται $\dfrac{3\beta}{3 - 2} = 3\beta = 3\text{ΑΚ}$.

Ἐὰν γραφῇ ἡμικύκλιον τὸ ΔΝΚ, οὗ διάμετρος εἴη ἡ ΚΔ, καὶ γένηται $\text{ΚΝ} = \frac{2}{3}$ ΚΔ, τὸ Ν σημεῖον ἔσται ἐν τῇ καυστικῇ· ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀκτὶς ΒΔ ἐπιψαύει τῆς καμπύλης κατὰ τὸ Δ, ἔσται ΜΕ (σχ. 29) $= \alpha = 0$· ἄρα $\text{ΜΖ} = \dfrac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon - \alpha\alpha\nu}$ γίνεται $= \dfrac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon} = \beta = \text{ΜΘ}$· ἄρα κτ.

Τὸ τόξον ΖΗ (σχ. 30) ἐστιν $= \mathrm{AH} - \mathrm{MZ} - \frac{2}{3}$ ΠΜ, ἡ δὲ ὅλη κανονικὴ $\mathrm{HN} = 3\beta - \Delta\mathrm{N} - \frac{2}{3}\,\mathrm{AK} = 3\beta - \frac{2}{3}\beta - \Delta\mathrm{N} = \frac{7}{3}\beta - \Delta\mathrm{N}$· ἀλλὰ $\mathrm{KN} = \frac{2}{3}\,\mathrm{K}\Delta = \frac{2}{3}\beta$· καὶ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΝΔ δίδωσι $\Delta\mathrm{N}^2 = \beta^2 - \frac{4}{9}\beta^2 = \frac{5}{9}\beta^2$, ἢ $\Delta\mathrm{N} = \dfrac{\beta\sqrt{5}}{3}$· ἄρα $\mathrm{HN} = \dfrac{\beta.(7 - \sqrt{5})}{3}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῶν σημείων τῆς καμπῆς καὶ τῆς ἀνακάμψεως.

178. Τὸ σημεῖον Δ, καθ' ὃ ἡ καμπύλη ἐκ κοίλης γίνεται κυρτὴ, ἢ τὐναντίον (σχ. 57, 58), σημεῖον καμπῆς ὀνομάζεται· ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη μΔΜ (σχ. 33, 34), ἐκ τοῦ μ ἐπὶ τὸ Δ φθάσασα, τρέψῃ τὴν ὁδὸν αὐτῆς πρὸς τὸ Μ, τὸ Δ ἀκούει σημεῖον ἀνακάμψεως· ἐὰν οὖν ἀναμνησθῶμεν τῶν εἰρημένων (83, 84) περὶ τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων, ῥαδίως κατανοήσομεν, ὅτι ὁ τοῦ δυ πρὸς δχ λόγος, εἴτ' οὖν $\dfrac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$ ἐστὶ πάντως ἐλάχιστον (σχ. 51) πρὸς τῷ τῆς καμπῆς σημείῳ (ἐστὶ δὲ αὐτὸ τοῦτο καὶ τὸ $\dfrac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi^2}$)· κατὰ γὰρ τὰ ἐκεῖθι εἰρημένα αἱ δυ, μειοῦνται μὲν ἐν τοῖς κοίλοις ἀπὸ τοῦ Α μέχρι τοῦ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ αὔξουσιν ἐν τοῖς κυρτοῖς· τὐναντίον δὲ ἐπὶ τοῦ 32 σχήμ.

ἄρα ἐν τῇ περιπτώσει σημείου καμπῆς ὁ λόγος $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$, αὔξει μὲν μέχρι τοῦ Δ, ἀπομειοῦται δ' ἀπὸ τοῦ Δ, ἢ ϗ τἀναντίον· ἄρα πρὸς τῷ Δ ἀναφυήσεται μέγιστον, ἢ ἐλάχιστον· τὸ δ' ἀπειροστὸν ἔσται $\frac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi}$ (ἀτρέπτου ὑποτιθεμένου τοῦ $\delta\chi$) $= 0$, ἢ $= \infty$· ἄρα ϗ $\frac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi^2} = 0$, ἢ $= \infty$· αὐτὸ δὲ τοῦτο ἔσεται ϗ ἐπὶ τοῦ Δ σημείου τῆς ἀνακάμψεως (σχ. 59, 60)· εἰς ἄρα εὕρεσιν τῶν σημείων τῆς καμπῆς ϗ τῆς ἀνακάμψεως ἐν καμπύλαις, ὧν εἰσιν αἱ τεταγμέναι παράλληλοι, ἀπόχρη ὑποθέσθαι $\frac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi^2} = 0$, ἢ $= \infty$, ἢ ὃ ταὐτὸν, $\delta\delta\upsilon = 0$, ἢ $= \infty$ (*).

179. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εὐπετῶς κατανοεῖται, ὡς ἀχθείσης τῆς ἁπτομένης μΔι, ϗ ὑποτεθείσης $\mu\upsilon = \Delta\Sigma$, ϗ ἐπιζευχθείσης τῆς Σρ (σχ. 57), ἢ τῆς Σι (σχ. 58), ἐκ τῶν ὁμοίων ϗ ἴσων τριγώνων μΔυ, ΔΣι ἔσται $\Sigma\iota = \Delta\upsilon$· ἄρα $\Sigma\rho > \Sigma\iota = \Delta\upsilon$ (σχ. 31)· ἀλλὰ $\Sigma\rho < \Delta\upsilon$ (σχ. 58)· ἄρα αἱ δυ, προϊοῦσαι ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ, ἀπομειοῦνται, αὔξουσι δὲ ἀπὸ τοῦ Δ μέχρι τοῦ Μ (σχ. 57)· τοὐναντίον δὲ γίνεται ἐν τῷ 32 σχήματι· ἄρα ὁ λόγος

(*) Οὐχ' ὅτι $\delta\delta\upsilon$ πραγματικῶς ἀποκαθίσταται $= \infty$, ἀλλ' ὅτι ἐκ ταύτης τῆς ὑποθέσεως τὸ αὐτὸ ἀποτελεῖται, ὃ ϗ ἐκ $\frac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi^2} = \infty$, ὡς μικρὸν ἐπιστήσασι ταῖς δυνάμεσι τοῦ $\delta\delta\upsilon$, ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὑποδείγμασι, κατάδηλον γίνεται.

$\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$ ἐςὶ μέγιςον ἢ ἐλάχιςον πρὸς τῷ Δ, ὥσπερ προεί-ρηται.

180. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Εὑρεῖν τὸ σημεῖον τῆς καμπῆς Δ ἐν τῇ καμπύλῃ ΑΝ (σχ. 61), ἧς ἐξίσωσίς ἐςιν $\alpha\chi^2 = \upsilon\,(\alpha\alpha + \chi\chi)$.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ΑΓ $= \chi$, ϗ ΑΒ $= \alpha$, ϗ ΓΔ $= \upsilon = \frac{\alpha\chi^2}{\alpha\alpha + \chi\chi}$· ἄρα $\delta\upsilon = \frac{2\alpha^3\chi\delta\chi + 2\alpha\chi^3\delta\chi - 2\alpha\chi^3\delta\chi}{(\alpha\alpha+\chi\chi)^2}$ $= \frac{2\alpha^3\chi\delta\chi}{(\alpha\alpha+\chi\chi)^2}$, ϗ $\delta\delta\upsilon =$

$$\frac{2\alpha^3\delta\chi^2(\alpha\alpha + \chi\chi)^2 - 4\,.\,\alpha^3\chi\delta\chi\,.\,2\chi\delta\chi\,.\,(\alpha^2 + \chi^2)}{(\alpha\alpha+\chi\chi)^4}$$

(ὑποτιθεμένε ἀτρέπτε τῦ $\delta\chi$) $=$

$$\frac{(2\alpha^7 - 4\alpha^5\chi^2 - 6\alpha^3\chi^4)\,.\,\delta\chi^2}{(\alpha\alpha+\chi\chi)^4} = 0$$

· πολλαπλασιασμῷ δὲ διὰ τῦ παρονομαςῦ, ϗ διαιρέσει διὰ $\alpha^3\delta\chi^2$, προέρχεται $2\alpha^4 - 4\alpha^2\chi^2 - 6\chi^4 = 0$· διαιρέσει δὲ διὰ $\alpha^2 + \chi^2$, εὑρίσκεται $2\alpha^2 - 6\chi^2 = 0$, ἢ $\chi^2 = \frac{2}{6}\alpha^2 = \frac{1}{3}\alpha^2$, ϗ $\chi = \sqrt{(\frac{1}{3}\alpha^2)}$· λαμβανομένης ἄρα τῆς ΑΓ μέσης ἀναλόγε τῶν α, $\frac{1}{3}\alpha$, ἡ τεταγμένη ΓΔ συναντήσει τῇ καμπύλῃ κατὰ τὸ ζητέμενον σημεῖον.

181. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Εὑρεῖν τὸ τῆς καμπῆς σημεῖον Δ ἐν καμπύλῃ τῇ ΑΔ, ἧς αἱ τεταγμέναι τρίται εἰσὶν ἀνάλογοι τῶν ἐπὶ τῦ ἡμικυκλίε ΑΜΒ, ϗ τῶν ἐπὶ τῆς παραβολῆς Αμ τεταγμένων (σχ. 62).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω τῦ κύκλε ἡ διάμετρος $= \alpha$, ϗ ἡ ἀποτετμημένη ΑΓ $= \chi$, ϗ ἡ τῦ κύκλε τεταγμένη ΓΜ $= \tau$, ϗ ἡ τῆς παραβολῆς τεταγμένη Γμ $= \upsilon$, ϗ ἡ τε ταγμένη τῆς προτεθείσης καμπύλης ΓΔ $= \omega$· ἐπεὶ ἔστι $\tau : \upsilon :: \upsilon : \omega = \frac{\upsilon\upsilon}{\tau}$· τιθεμένης δὲ τῆς παραβολικῆς παραμέτρου $= \pi$, ἔσται $\upsilon^2 = \pi\chi$, καὶ διὰ τὴν κυκλικὴν ἰδιότητα, $\tau = \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$· ἀντικαθισταμένων ἄρα τούτων τῶν δυνάμεων, γίνεται $\omega = \frac{\pi\chi}{\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}$· ὅθεν $\delta\omega = \frac{\alpha\pi\chi\delta\chi}{2.(\alpha\chi - \chi\chi).\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}$· λαμβανομένων δὲ καὶ τῶν δευτέρων ἀπειροστῶν, ὑποτιθεμένου ἀτρέπτου τοῦ $\delta\chi$, πορισθήσεται (διαιρέσει διὰ $\delta\chi$, καὶ πολλαπλασιασμῷ ἐπὶ $\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, καὶ τοῦ κλάσματος ἀφανισμῷ) $\delta\delta\omega = o = 2\alpha\pi\,(\alpha\chi - \chi\chi)^2 - 3\alpha\pi\chi\,(\alpha - 2\chi).(\alpha\chi - \chi\chi)$· διαιρέσει δὲ διὰ $(\alpha\chi - \chi\chi)$ καὶ μεταθέσει, πορισθήσεται $2\alpha^2\pi\chi - 2\alpha\pi\chi^2 = 3\alpha\alpha\pi\chi - 6\alpha\pi\chi^2$, ἢ $2\alpha - 2\chi = 3\alpha - 6\chi$· ὅθεν $4\chi = \alpha$, καὶ $\chi = \frac{1}{4}\alpha$· ἐὰν ἄρα γένηται $\text{ΑΓ} = \frac{\text{ΑΒ}}{4}$, ἡ τεταγμένη ΓΔ συναντήσει τῇ καμπύλῃ κατὰ τὸ τῆς καμπῆς σημεῖον.

182. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Εὑρεῖν τὸ τῆς ἀνακάμψεως σημεῖον ἐν καμπύλῃ τῇ μΔΜ, ἧς ἐξίσωσίς ἐστιν $\upsilon^5 = \alpha\chi^4 = \chi^4$, ὑποτιθεμένου τοῦ $\alpha = 1$ (σχ. 62. Α).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω $\text{ΑΠ} = \chi$, καὶ $\text{ΠΜ} = \upsilon$· ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ἔσται $5\upsilon^4\delta\upsilon = 4\chi^3\delta\chi$, καὶ $\delta\upsilon = \frac{4}{5} \times \frac{\chi^3\delta\chi}{\upsilon^4} = \frac{4}{5}\,\delta\chi\left(\frac{\chi^3}{\chi^{\frac{16}{5}}}\right)$ (*)· ἀφαιρουμένου ἄρα τοῦ κατὰ τὸν

(*) Καὶ γὰρ $\upsilon = \chi^{\frac{4}{5}}$, $\upsilon^4 = \chi^{\frac{16}{5}}$.

διαιρέτην δείκτȣ $\frac{16}{5}$ ἀπὸ τȣ̃ κατὰ τὸν διαιρετέον $3 = \frac{15}{5}$, γίνεται $\delta\upsilon = \frac{4}{5} \times \delta\chi \cdot \chi^{-\frac{1}{5}}$, $\delta\delta\upsilon = -\frac{4}{25}\,\delta\chi^2\,(\chi)^{-\frac{1}{5}-1}$ (ὑποτιθεμένȣ ἀτρέπτȣ τȣ̃ $\delta\chi$)· ἀλλὰ $-\frac{1}{5} - 1 = -\frac{6}{5}$· ἄρα $\delta\delta\upsilon = \left(-\frac{4}{25} \times \frac{1}{\chi^{\frac{6}{5}}}\right) \times \delta\chi^2$· ὑποτιθεμένȣ ȣ̃ν τȣ̃ $\delta\delta\upsilon = 0$, ȣ̓δὲν ὥςε καὶ γνωσθῆναι πρόεισιν· ἀλλ' εἴπερ γένοιτο $\delta\delta\upsilon = \infty$, πορίζεται $\chi = 0$· ὅθεν καθίςαται δῆλον, ὅτι τὸ ζητȣ́μενον σημεῖον συςοιχεῖ τῇ τῶν χ ἀρχῇ Α, ἔνθα $\mathrm{A\Pi} = 0$· ἀντικαθιςαμένης δὲ ταύτης τῆς τȣ̃ χ δυνάμεως ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει, εὑρεθήσεται $\upsilon^5 = 0$, καὶ $\upsilon = 0$.

183. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος τȣτὶ ἔχει δυσχερὲς, ὅτι ȣ̓ διακρίνεται τὸ τῆς καμπῆς τȣ̃ τῆς ἀνακάμψεως σημείȣ, καὶ ὅτι ἐξαπατᾷν ἡμᾶς δύναται, ἡγȣμένȣς ἅπαν καμπύλης σημεῖον, εὑρισκόμενον ἐκ τῆς ὑποθέσεως $\delta\delta\upsilon = 0$, ἢ $\delta\delta\upsilon = \infty$, εἶναι σημεῖον ἀνακάμψεως, ἢ καμπῆς, ὅπερ ἥκιςα ἀληθές· ὑποτιθεμένȣ γὰρ ἀτρέπτȣ τȣ̃ $\delta\chi$, ἀποφέρεται ἐκ τῆς τȣ̃ κύκλȣ ἐξισώσεως $\upsilon\upsilon = 2\alpha\chi - \chi\chi$, $\delta\delta\upsilon = \frac{-\alpha\alpha\delta\chi^2}{(2\alpha\chi - \chi\chi)\cdot\sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}}$· ἐὰν δὲ γένηται $\delta\delta\upsilon = \infty$, εὑρεθήσεται ὁ παρονομαςὴς $= 0$, ἢ $2\alpha\chi - \chi\chi = 0$, $2\alpha\chi = \chi\chi$, $2\alpha = \chi$, ὅπερ μόνον ἐνδείκνυσι πρὸς τῷ τῆς διαμέτρȣ πέρατι τὴν ἁπτομένην ταῖς τεταγμέναις ȣ̃σαν παράλληλον· ἔκȣν ἄχρηςον ἔςαι μέθοδον ἀποδȣ̃ναι ἑτέραν.

184. Ὑπεδείξαμεν (142) μέτρον τῆς κατὰ καμπυ-

λείπητα γωνίας ΔΓΛ (σχ. 30) $= \xi$ τὸ $\dfrac{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\gamma\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma^2}$.

ὑποτιθεμένε δὲ ἀτρέπτε τῶ δχ, πορισθήσεται $\xi =$
$\dfrac{-\delta\gamma\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma^2} = \dfrac{-\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2}$. ὑποτίθησι δὲ ὁ τύπος ὅτος τὰς τεταγμένας ταῖς ἀποτετμημέναις καθέτας· ἐὰν δὲ αἱ τεταγμέναι ἀφ' ἑνὸς σημείε ἐξίωσι, κληθείσης Α τῆς κατὰ τὴν ἐνειλιγμένην ἀκτῖνος, πορισθήσεται (150) Α
$$= \frac{\upsilon\delta\sigma^{3}}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}$$
· ἐὰν μέντοι ἡ ΓΞ ὑποτεθῇ εἶναι ἀκτὶς τῆς κατὰ τὸ Γ τῆς καμπύλης ΑΔ διὰ τῆς Ε ἑσίας γεγραμμένης ἐνειλιγμένης (σχ. 63), οἱ ὅμοιοι τομεῖς ΓΞΔ, ΔΓΛ παρέξεσι ΓΞ:
$$= \mathrm{A} : \Gamma\Delta :: \Gamma\Delta : \Delta\Lambda = \frac{\Gamma\Delta^2}{\mathrm{A}} =$$
$\dfrac{\delta\chi\delta\sigma^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\upsilon\delta\sigma}$, ἀντικαθιςαμένων ἀμέλει τῶν δυνάμεων τῆς $\Gamma\Delta = \delta\sigma$, ϗ τῆς κατὰ τὴν Α, καὶ γνωσθείσης τῆς $\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2$ ἔσης $= \delta\chi\,(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2) = \delta\chi\delta\sigma^2$· νῦν ὖν βελομένοις εὑρεῖν τὴν ξ δύναμιν τῆς ὑπὸ ΔΓΛ γωνίας, ὑποτεθείσης τῆς ἀκτῖνος $= 1$, γενέσθω $\Gamma\Delta = \delta\sigma$ (*) $: 1 :: \Delta\Lambda : \xi = \dfrac{\Delta\Lambda}{\delta\sigma} =$
$$\frac{\delta\chi\,.\,\delta\sigma^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\upsilon\delta\sigma^2} = \frac{\delta\chi\delta\sigma^2 - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\upsilon\delta\sigma^2},$$
ἀτρέπτε ὑποτιθεμένε τῶ δχ· τῶ δὲ ξ λειπτικῶ ὄντος, ἡ

(*) Ὑποτίθεται ἡ χορδὴ ΓΔ ἴση τῷ ἑαυτῆς τόξῳ, εἴγε τόξον ἀπειροςὸν ἴσον τῇ αὐτῇ χορδῇ ἐκληφθῆναι δύναται.

καμπύλη κυρτὴ ἔσαι πρὸς τὴν ἑςίαν Ε, ἢ πρὸς τὸν ἄξονα, εἰ διὰ τῦ ἄξονος γεγραμμένη εἴη ἡ καμπύλη· προσεκτέον μέντοι τὸν νῦν ταῖς δε ταῖς τῦ ξ δυνάμεσι· ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη διατεθειμένη ἦ ὥς περ ἐν τῷ 64 σχήματι, δῆλον, ὅτι ἡ δύναμις τῆς ξ τὰ αὐτὰ ἕξει σύμβολα πρὸς τοῖς σημείοις μ, Μ ὡσαύτως ϗ ἐπὶ τῦ 60 σχήματος· ἀλλ᾿ ἐπὶ τῦ 65 τὰ τῆς ξ σύμβολα ἔσονται διάφορα.

185. Εἴρηται (139), ὅτι μόνη ἡ κωνικὴ παραβολὴ ἔχει πρὸς τῇ κορυφῇ κυκλικὴν καμπυλότητα· ἀλλὰ γὰρ ζητεμένης τῆς κατὰ τὴν καμπυλότητα ἀκτῖνος παραβολῆς ἡςτινοσῦν, ἣν ἐμφαίνει ἡ ἐξίσωσις $\upsilon^{\mu} = \chi$, τῆς μὲν παραμέτρε ὑποτιθεμένης $= 1$, τῦ δὲ μ δηλῦντος ἀριθμὸν ὁντιναῦν ὁλοχερῆ, ἢ κλασματίαν, διὰ τῦ τύπε $\dfrac{\delta\sigma^{3}}{-\delta\chi\delta\delta\upsilon}$, ἀντικαθιςαμένων τῶν δυνάμεων τῦ $\delta\chi$, ϗ τῦ $\delta\delta\upsilon$, εὑρεθήσεται ἡ φιλῦσα ἀκτὶς $\mathrm{A} =$

$$\frac{(\mu^{2}\upsilon^{2\mu-2}+1)\cdot\sqrt{(\mu^{2}\upsilon^{2\mu-2}+1)}}{(\mu\mu-\mu)\cdot\upsilon^{\mu-2}} = \frac{(\mu^{2}\upsilon^{2\mu-2}+1)^{\frac{3}{2}}}{(\mu\mu-\mu)\,\upsilon^{\mu-2}},$$

ἐὰν δ᾿ ὑποτεθῇ $\mu > 2$ ϗ $\upsilon = 0$, εὑρίσκεται $\mathrm{A} = \dfrac{1}{(\mu\mu-\mu)0}$ $= \infty$· ἐὰν δὲ $\mu < 2$, ὁ ἀριθμητὴς γίνεται $\left(\dfrac{\mu^{2}}{\upsilon^{2-2\mu}}\right)^{\frac{3}{2}}$ (παρορωμένης τῆς 1, ἥτις τηνικαῦτα ἀφανίζεται, εἴγε $\upsilon^{2-2\mu}$ γίνεται $= 0$, ϗ $\dfrac{\mu^{2}}{\upsilon^{2-2\mu}} = \infty$) $= \dfrac{\mu^{3}}{\upsilon^{3-3\mu}}$. ὑποτιθεμένε δὲ τῦ $\mu\mu - \mu = \alpha$, ϗ τῦ ἄρτι εὑρημένε κλάσματος διαιρεθέντος διὰ $\dfrac{\alpha}{\upsilon^{2-\mu}}$, ϗ γενομένε $\dfrac{\mu^{3}}{\alpha} = \mathrm{B}$, πρόεισι $B.\frac{\upsilon^{2-\mu}}{\upsilon^{3-3\mu}} = B.\upsilon^{2\mu-1}$, ἀφαιρουμένου τοῦ κατὰ τὸν διαιρέτην δείκτου ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν διαιρετέον· ἐὰν δὲ ᾖ $2\mu > 1$, εὑρίσκεται $B \times o = o$· ἐὰν δὲ $2\mu = 1$, εὑρίσκεται $\mu = \frac{1}{2}$, καὶ $\upsilon^{\mu} = \chi$ γίνεται $\upsilon^{\frac{1}{2}} = \chi$, ἢ $\upsilon = \chi^2$· ὅθεν, μεταβαλλομένου, τοῦ μὲν χ εἰς υ, τοῦ δὲ υ εἰς χ, γίνεται $\upsilon^2 = \chi$, ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς παραβολῆς, ὑποτιθεμένης τῆς παραμέτρου $= 1$· καὶ δὴ τηνικαῦτα $A = B = -\frac{1}{o}$· τὸ δὲ σύμβολον — δείκνυσιν, ὅτι ληπτέον ἐςὶ τὴν φιλοῦσαν ἀκτῖνα ἐκ τῶν ἀντιθέτων μερῶν τῆς τῶν χ γραμμῆς, ἥτις ἐςὶν ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει γραμμὴ εὐθεῖα, ἁπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὴν κορυφὴν, ὀρθῆς ὑποτιθεμένης τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας· ἐὰν ᾖ $2\mu < 1$, ἢ $\mu > \frac{1}{2}$, γενομένου $2\mu - 1 = \nu$, εὑρίσκεται $A = B\upsilon^{-\nu} = \frac{B}{\upsilon^{\nu}} = \frac{B}{o}$ (ὑποτιθεμένου $\upsilon = o$) $= \infty$· ἐὰν δὲ ᾖ $\mu = 2$, τηνικαῦτα ὁ ἀριθμητὴς $(\mu^2 \upsilon^{2\mu-2} + 1)^{\frac{3}{2}}$ γίνεται $= 1$, ὁ δὲ παρονομαστὴς $= (\mu\mu - \mu).\upsilon^{o} = \mu\mu - \mu$, ὅτι $\upsilon^{o} = 1$, καὶ $A = \frac{1}{2}$· ἀδύνατον δὲ ὑποθεῖναι $\mu = 1$· καὶ γὰρ γενήσεται $\upsilon = \chi$, ἐξίσωσις γραμμῆς εὐθείας.

Ἐκ τῶν εἰρημένων οὖν πρόδηλον, ὅτι ἐξαιρουμένης τῆς κωνικῆς, ἡ τῆς καμπυλότητος ἀκτὶς ἐςὶν $= o$, ἢ ἄπειρος (*) πρὸς τῇ κορυφῇ τῶν ἄλλων παραβολῶν· ἔςι δὲ οὐδὲν σημεῖον ἐν κλωνὶ καμπύλης, ἧς ἡ καμπυλότης

(*) Ὑποτιθέμεθα γὰρ ἐνταῦθα πεπερασμένην τῆς κωνικῆς παραβολῆς τὴν παράμετρον.

ὐκ ἂν εἴη ἡ αὐτὴ τῇ πρὸς τῇ κορυφῇ παραβολῆς τινος· πᾶσαι δὲ αἱ παραβολαὶ ἔχουσι πρὸς τῇ ἑαυτῶν κορυφῇ σημεῖον καμπῆς, ἢ σημεῖον ἀνακάμψεως, ἐξαιρουμένης τῆς κωνικῆς· ἄρα πρὸς τῷ σημείῳ τῆς καμπῆς καὶ τῆς ἀνακάμψεως κλωνὸς καμπύλης ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς ἐστιν, ἤτοι $= 0$, ἢ $= \infty$.

186. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἵνα δὲ κρεῖττον κατανοήσωσι τὰ εἰρημένα οἱ πρωτόπειροι, ἔσω καμπύλη ἡ ΜΔμ (σχ. 65), ἥτις ἔχει σημεῖον καμπῆς τὸ Δ, καθ' ὃ ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς εὕρηται ἄπειρος· δῆλον οὖν, ὅτι ὅσον αἱ φιλοῦσαι ἀκτῖνες ΜΖ, νΖ, ιζ ἐγγὺς γίνονται τοῦ κατὰ τὴν καμπὴν σημείου Δ, τοσούτῳ προσεγγίζουσι τῷ γενέσθαι παράλληλοι· καὶ ἐπείπερ ἀεὶ πρὸς ὀρθὰς ἐφεστήκασι τῇ καμπύλῃ, ἐὰν τὸ τοξίδιον Δι ἐκληφθῇ ὡς γραμμὴ εὐθεῖα, ἡ ἀκτὶς ιζ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἐπιστήσεται, καὶ παράλληλος ἔσεται τῇ εὐθείᾳ ΔΠ, ἥτις ὑποτίθεται κάθετος τῇ Δι· συμπεσεῖν ἄρα οὐδέποτε ἔχουσι, τοῦτ' ἔστιν αἱ φιλοῦσαι ἀκτῖνες οὐδέποτε δύνανται ἐξ ὑπαρκτικῶν λειπτικαὶ γενέσθαι, εἴτ' οὖν μεταστῆναι ἐκ τῶν κοίλων ΜΔ ἐπὶ τὰ κυρτὰ Δμ, εἰ μὴ παράλληλοι γένοιντο· ὡσαύτως οὐδ' ἐκ τῶν κοίλων μΔ μεταβῆναι δύνανται, εἰ μὴ αἱ φιλοῦσαι ἀκτῖνες παράλληλοι γένοιντο τῇ Δπ· ἀλλὰ γὰρ γραμμὴ εὐθεῖα ἡ βΔ ἐν τῇ μαθηματικῇ ἀκριβείᾳ οὐδέποτε ἐκληφθῆναι ἔχει ἀντὶ κυκλικοῦ τόξου (*), καὶ τῆς βζ ἀκτῖνος ὑποτεθεί-

(*) Ἔστιν ὅτε δυνατὸν ὑποθεῖναι τόξον κύκλου ἄπειρον, ἀκτῖνα ἔχοντος γραμμὴν εὐθεῖαν ἴσην τῇ αὐτοῦ ἀπτομένῃ· δῆλον γάρ, ὡς ἐὰν ὑποτεθῇ τὸ Δν τόξον πεπερασμένον, ἡ δ' αὐτοῦ ἀκτὶς ἄπειρος, ἡ διαφορὰ τοῦ τόξου καὶ τῆς αὐτοῦ ἀπτομένης Δβ ἀνεπαίσθητος ἔσται· δυνατὸν ἄρα, ἄνευ ἀπάτης, τὰς γραμμὰς ταύτας ἰσαλλήλους ὑποτιθέναι.

σης $= \infty$· ἐν ταύτῃ γὰρ τῇ περιπτώσει αἱ τοῖς πέρασι Δ, β ταύτης τῆς γραμμῆς κάθετοι συναντήσονται κατὰ τὸ κέντρον τῦ κύκλυ, ἢ συςήσυσι γωνίαν (ὅσον ἄντις βύλοιτο μικρὰν), ἢ αἱ γωνίαι τῦ ὑπὸ τῶν δύο ἀκτίνων ἢ τῇ Δβ γραμμῆς συνισαμένυ τριγώνυ δυνήσονται πλεῖν ἢ δύο ὀρθὰς γωνίας· ὅπερ ἀδύνατον· ὐ μὴν ἀλλ' ὐδὲ ςρογγύλος ἔσεται ὁ τοιόςδε κύκλος· ὑποτιθεμένων ἄρα, Δν τῦ τόξυ, ἢ Δβ τῆς ἁπτομένης, ἀεὶ ἔςαι βραχύτι διάςημα μεταξὺ β ἢ ν, ὅσον ἂν εἴη μεγάλη ἡ τῦ κύκλυ ἀκτίς· ἄρα πρὸς τῷ σημείῳ Δ ὐκ ἔςι κύκλος φιλῶν, ὐδ' ἢν ὑποτεθῇ ἡ τῦ κύκλυ ἀκτὶς $= \infty$. ἐὰν δὲ αἱ ἀκτῖνες Μζ, νζ προϊῦσαι ἀπομειῶνται (σχ. 66), προσπελάζυσαι τῷ Δ, ὥςε τὸ σημεῖον Π, καθ' ὃ ἡ ΔΠ συναντᾷ τῇ ιζ, ἐπιπεσεῖν τῷ σημείῳ Δ, τὸ τόξον οΔν ὐκ ἔσεται κυκλικόν· πῦ γὰρ κείσεται αὐτῦ τὸ κέντρον; ἆρ' ἐν τῷ π, ἢ ἐν τῷ Π; ἀλλ' ὐδὲν μᾶλλον τεθῆναι δύναται ἐν τῷ π, ἢ ἐν τῷ Π· ἐπεὶ δὲ ὐ δυνατὸν κεῖσθαι ἑκατέρωθεν τῆς ἁπτομένης βΔ, δῆλον, ὅτι τὸ τόξον τῦτο ὐκ ἔςι κυκλικὸν (*)· συνᾴδει δὲ ταῦτα τοῖς εἰρημένοις (139), ὅτι ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ τῶν παραβολῶν καμπυλότης, ἐξαιρυμένης τῆς κωνικῆς, ὐκ ἔςι κυκλική· ὅταν ὖν ἡ φιλῦσα ἀκτὶς, ἡ σημείῳ τινὶ τῆς καμπύλης συςοιχῦσα, ᾖ $= 0$, ἢ $= \infty$, συνάγειν δεῖ ὡς κατ' ἐκεῖνο τὸ σημεῖον ὑπάρχει καμπὴ, ἢ ἀνάκαμψις· ὐδὲν δὲ ἔςαι σημεῖον καμπῆς, ἢ ἀνακάμψεως, εἴπερ αἱ τοῖς τῦ Β, καθ' ὃ Α

(*) Εἰ δ' εἴποι τις, ὅτι ἔςιν ἐπὶ τῆς ἁπτομένης, ἀκατανόητον ἐρεῖ· δεῖ γὰρ εἶναι μεταξὺ τῦ κέντρυ ἢ τῆς ἁπτομένης διάςημά τι· ἄλλως γὰρ σημεῖον ἔςαι, ἀλλ' ὐ κύκλος, τὸ σχῆμα.

$= 0$, ἢ $= \infty$, προσεχέσι σημείοις συςοιχῦσαι Α μὴ εἶεν διαφόρων συμβόλων.

187. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως κλωνὸς καμπύλης, ἧς αἱ τεταγμέναι εἶεν κάθετοι τῇ τῶν ἀποτετμημένων γραμμῇ, ἤ, ἧς αἱ τεταγμέναι ἐκπηγάζϐσιν ἀφ' ἑςίας, εὑρεῖν αὐτῆς τὰ σημεῖα τῆς ἀνακάμψεως, ϗ τὰ σημεῖα τῆς καμπῆς.

ΛΥΣΙΣ. Ζητηθήτω ἡ Α διάτινος τῶν προαποδεδομένων τύπων, ὡς ἂν ᾖ ἡ καμπύλη γεγραμμένη διὰ τῦ ἄξονος, ἢ διὰ τῆς ἑςίας· ϗ ὑποτεθείσθω Α $= 0$, εἶτα Α $= \infty$, καὶ ζητηθήτω ὁ χ· ζητηθήτωσαν εἶτα αἱ Α ὡς πρὸς τὰ σημεῖα μ, Μ τὰ προσεχῆ τῦ εὑρεθέντος σημείϐ Δ· ϗ εἰ μὲν τὰ κατ' αὐτὰς σύμβολα ταυτίζοιντο, ὐκ ἔςαι πρὸς τῷ σημείῳ Δ, ὔτε καμπὴ, ὔτε ἀνάκαμψις· εἰ δὲ διαφέροιεν, ἔςαι ἤτοι καμπὴ, ἢ ἀνάκαμψις· ἵνα δὲ διακριθείη, ὁπότερόν ἐςι, ζητηθήτω ἡ δύναμις τῆς τῷ ξ δηλωθείσης γωνίας πρὸς τοῖς σημείοις μ, Μ· ϗ εἰ μὲν τὰ σύμβολα τῆς ξ ταυτίζοιντο, πορισθήσεται σημεῖον ἀνακάμψεως· διαφερόντων δὲ, καμπῆς· ὄντος δὲ τῦ τῆς ξ σημείϐ, τῦ συςοιχῦντος τῷ Μ, ὑπαρκτικῦ, ἡ καμπύλη (σχ. 64) ἔςαι, κοίλη μὲν πρὸς τὰ κάτω, κυρτὴ δὲ πρὸς τὰ ἄνω· ἐὰν δὲ τὸ σύμβολον τῆς ξ, τῆς συςοιχέσης τῷ σημείῳ μ (σχ. 67), ᾖ λειπτικὸν, τὸ τόξον Δμ ἔςαι, κυρτὸν μὲν πρὸς τὰ κάτω, κοῖλον δὲ πρὸς τὰ ἄνω· τὸ πᾶν ευξύνετον γίνεται τὸν νῦν τοῖς προειρημένοις ἐπιςήσασι.

188. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Εὑρεῖν τὰ σημεῖα τῆς καμπῆς ϗ τῆς ἀνακάμψεως τῦ κλωνὸς καμπύλης, ἧς ἐξίσωσις $υ = \sqrt[3]{(α^3 + χ^3)}$, ἢ $υ^3 = α^3 + χ^3$· ἑκατέρα

γὰρ ἐξίσωσις τὸν αὐτὸν κλῶνα ἐμφαίνει· εἴγε μιᾷ ἀποτετμημένῃ μία μόνη υ συςοιχεῖ. (*)

ΛΥΣΙΣ. Ληφθέντων τῶν ἀπειροςῶν, γίνεται $3\upsilon^2\delta\upsilon = \chi\chi\delta\chi$, $\upsilon^4\delta\upsilon^2 = \chi^4\delta\chi^2$, $\delta\upsilon^2 = \frac{\chi^4\delta\chi^2}{\upsilon^4}$ (II)· ληφθέντων δὲ τῶν ἀπειροςῶν τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^2\delta\upsilon = \chi\chi\delta\chi$, ὑποτιθεμένε ἀτρέπτε τε $\delta\chi$, προέρχεται $2\upsilon\delta\upsilon^2 + \upsilon^2\delta\delta\upsilon = 2\chi\delta\chi^2$, ϗ $\upsilon^2\delta\delta\upsilon = 2\chi\delta\chi^2 - 2\upsilon\delta\upsilon^2$, ἢ $\upsilon^2\delta\delta\upsilon = 2\chi\delta\chi^2 - \frac{2\chi^4\delta\chi^2}{\upsilon^3}$, ἀντικαταςαθείσης τῆς τε $\delta\upsilon^2$ δυνάμεως, τῆς ἐκ τῆς ἐξισώσεως II πορίζομένης· ἀφανιζομένε δὲ τε κλάσματος, εὑρίσκεται $\upsilon^5\delta\delta\upsilon = 2\chi\upsilon^3\delta\chi^2 - 2\chi^4\delta\chi^2$· ἐὰν δὲ ἀντικαταςαθῇ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει ἡ τε υ^3 δύναμις, πορίζομένη ἐκ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως. πορισθήσεται $\upsilon^5\delta\delta\upsilon = 2\alpha^3\chi\delta\chi^2 + 2\chi^4\delta\chi^2 - 2\chi^4\delta\chi^2 = 2\alpha^3\chi\delta\chi^2$, ϗ ἑπομένως $\delta\delta\upsilon = \frac{2\alpha^5\chi\delta\chi^2}{\upsilon^3}$· εἰλήφθωσαν δὲ, ὅ,τε τύπος τῆς φιλέσης ἀκτῖνος $\frac{\delta\sigma^3}{-\delta\chi\delta\delta\upsilon}$, ϗ ἡ τῆς $\xi = \frac{-\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma^2}$, οἱ εὑρεθέντες ἐν τῇ αὐτῇ ὑποθέσει·

(*) Εἰ γὰρ εἴη ἐξίσωσις προκειμένη ἡ $\upsilon^2 = \alpha^4 + \chi^4$, ἦν ἂν $\upsilon = \pm\sqrt{(\alpha^4 + \chi^4)}$· ϗ τηνικαῦτα ἑκάςῃ μὲν ἀποτετμημένῃ δύω συνεςοίχουν τεταγμέναι· ἡ δὲ καμπύλη δύω κλῶνας ἂν εἶχε, τὸν μὲν παριςάμενον διὰ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon = +\sqrt{(\alpha^4 + \chi^4)}$, τὸν δ' ἕτερον διὰ τῆς $\upsilon = -\sqrt{(\alpha^4 + \chi^4)}$· ϗ ἰδίᾳ τὰς πράξεις ἐφ' ἑκατέρε κλωνὸς ἐκτελεσθῆναι ἂν ἔδει.

ϗ δὴ πορισθήσεται διὰ τῶν εὑρεθεισῶν δυνάμεων, $\delta\sigma^2 = \delta\chi^2 + \delta\upsilon^2 = \delta\chi^2 + \frac{\chi^4\delta\chi^2}{\upsilon^4} = \frac{(\upsilon^4 + \chi^4).\delta\chi^2}{\upsilon^4}$, ϗ $\delta\chi\delta\delta\upsilon = \frac{2\alpha^3\chi\delta\chi^3}{\upsilon^5}$· ἄρα $\Lambda = \frac{-\sqrt{(\upsilon^4+\chi^4)}}{2\alpha^3\chi\upsilon}$, καὶ $\xi = \frac{-2\alpha^3\chi\delta\chi}{\upsilon^5 + \chi^4\upsilon}$.

Ἐὰν ὑποτεθῇ $\Lambda = 0$, ἔσαι $\sqrt{(\upsilon^4 + \chi^4)} = 0$, ἢ $\upsilon^4 = -\chi^4$, $\upsilon = \pm\sqrt{(-\chi^4)}$, ποσότης ἀνύπαρκτος· ἀδύνατον ἄρα ὑποτεθῆναι $\Lambda = 0$· ἐκεῖν ὑποτεθείσθω $\Lambda = \infty$· ϗ δὴ ἔσαι $2\alpha^3\chi\upsilon = 0$, ἢ $\chi\upsilon = 0$, ἧς ποιηταὶ $\chi = 0$, ϗ $\upsilon = 0$· ἀντικατασαθείσης δὲ τῆς δυνάμεως τῦ $\chi = 0$ ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει, εὑρίσκεται $\upsilon^3 = \alpha^3$, $\upsilon = \alpha$· ἐὰν δὲ ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει ἀντικατασαθῇ ἡ δύναμις τῦ $\upsilon = 0$, εὑρίσκεται $\chi^3 + \alpha^3 = 0$, $\chi^3 = -\alpha^3$, $\chi = -\alpha$· ἐξετασέον ἄρα τὰ σημεῖα, τὰ συσοιχῦντα, τῇ τε $\chi = 0$, ϗ τῇ $\chi = -\alpha$· ϗ ὑπὲρ μὲν τῦ πρώτυ, ὑποτεθείσθω τὸ χ αὐξηθὲν, ἢ μειωθὲν, ποσότητι ἐλαχίςῃ τῇ ζ, τῦτ' ἔσιν, ὑποτεθείσθω $\chi = 0 \pm \zeta$, εἴτ' ἦν $\chi = \pm\zeta$· ϗ δὴ ἔσαι $\upsilon^3 = \pm\zeta^3 + \alpha^3$, $\upsilon^3 = \alpha^3$, παρορωμένυ τῦ ζ^3· τῦτ' ἔσι τὸ σύμβολον τῦ υ ἀμετάβλητον διαμένει ἐν ταύτῃ τῇ ὑποθέσει· δῆλον δὲ, ὡς εἴπερ ἐν τῇ δυνάμει τῆς $\Lambda = \frac{-\sqrt{(\upsilon^4+\chi^4)^3}}{2\alpha^3\chi\upsilon}$ τεθείη α ἀντὶ τῦ υ, λειπτικὸν μὲν ἔσαι τὸ Λ, ὑπαρκτικῦ ὑποτεθέντος τῦ χ ($\grave{\eta} = \zeta$), ὑπαρκτικὸν δὲ, ὑποτεθέντος λειπτικῦ τῦ χ· ἄρα, καθ' ὃ σημεῖον ἔσι $\chi = 0$, ἔσαι καμπὴ, ἢ ἀνάκαμψις· ἵνα δὲ, ὁπότερόν ἐσι, γνῶμεν, ἐξετασέον τὴν ζ ποσότητα· ἀλλαμὴν $\xi = \dfrac{-2\alpha^3\chi^3\chi}{\upsilon^5+\upsilon\chi^4}$, λειπτικὸν μὲν γίνεται, ὑποτιθεμένου ὑπαρκτικοῦ τοῦ χ, ὑπαρκτικὸν δὲ, ὑποτιθεμένου τοῦ χ λειπτικοῦ (*)· ἄρα πρὸς τῷ σημείῳ τῷ συςοιχοῦντι τῇ $\chi = 0$ ἔςαι, ἤτοι καμπὴ, ἢ ἀνάκαμψις.

Ἐξετάζουσι δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ $\chi = -\alpha$, εἴπερ ἀντικαταςαθείη $-\alpha + \zeta$ ἀντὶ χ, ἡ τῆς καμπύλης ἐξίσωσις δίδωσιν $\upsilon^3 = \alpha^3 - \alpha^3 + 3\alpha^2\zeta$ (παρορωμένων τῶν ἐσχάτων τοῦ ζ βαθμῶν, ὅτι ζ ἐςὶν ἀπειροςὸν) $= 3\alpha^2\zeta$, ἢ $\upsilon = \sqrt[3]{(3\alpha^2\zeta)}$· ἐν ταύτῃ ἄρα τῇ περιπτώσει ἔςιν $A = \dfrac{-\sqrt{(\upsilon^4+\chi^4)}}{-2\alpha^4\sqrt[3]{\alpha^2\zeta}}$, παρορωμένου ἐν τῷ παρονομαςῇ τοῦ περιέχοντος ζ^2 ὅρου· καὶ ὁ μὲν ἀριθμητὴς τηρήσει ἀεὶ τὸ αὐτὸ σύμβολον, ὁποία ἂν ᾖ ἡ τοῦ υ δύναμις, ὁ δὲ παρονομαςὴς γενήσεται ὑπαρκτικὸς, ὑποτιθεμένου λειπτικοῦ τοῦ ζ· ἄρα, καθ' ὃ σημεῖον ἐςὶ $\chi = -\alpha$, ἔςαι, ἤτοι καμπὴ, ἢ ἀνάκαμψις· ἀλλ' ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἐςὶ

$$\xi = \frac{2\alpha^4\delta\chi}{(\upsilon^4+\chi^4)\cdot\sqrt[3]{3\alpha^2\zeta}},\ \text{ἢ}\ \frac{\xi}{\delta\chi} = \frac{2\alpha^4}{(\upsilon^4+\chi^4)\sqrt[3]{3\alpha^2\zeta}}\cdot$$

δῆλον δὲ, ὅτι, ὑπαρκτικοῦ μὲν ὑποτεθέντος τοῦ ζ, ἔςαι καὶ ξ ὑπαρκτικόν· λειπτικοῦ δὲ, λειπτικόν, τοῦτ' ἔςιν, αὐξηθείσης μὲν τῆς χ ποσότητι ἐλαχίςῃ, εὑρεθήσεται τοῦ ξ ἡ δύναμις ποσότης ὑπαρκτική· αὐξηθείσης δὲ τῆς χ

(*) Οὐ παρατηρεῖται τὸ $\delta\chi$, ὅπερ ἐκλαμβάνεται ὡς μὴ τρέπον τὸ σύμβολον, εἴτ' οὖν ὡς ἔχον τὸ σύμβολον $+$.

ποσότητι ἐλαχίςη λειπτικῇ, εὑρεθήσεται πρὸς τῷ σημείῳ (ὃ κληθήτω μ), τῷ συςοιχῦντι τῇ ὕτως αὐξηθείσῃ χ, δύναμις τῦ ξ λειπτική· ἔςαι ἄρα ἐπὶ τῦ σημείυ, τῦ συςοιχῦντος τῇ $\chi = - \alpha$, καμπὴ, ἀλλ' ὐκ ἀνάκαμψις.

189. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀλλ' ἅλις ἔςω ᾗ τύτων, κἂν ᾖ λίαν βραχέα· τὰ γὰρ περί τε τῶν εἰρημένων σημείων τῆς καμπῆς, ᾗ τῆς ἀνακάμψεως, ᾗ τῶν ἐν τῷ πρὸ τύτυ κεφαλαίῳ περὶ τῶν καυςικῶν καμπύλων, πέλαγος ἀτεχνῶς ἐςιν ἀνεξάντλητον, οἷς ἐφεῖται ἐπ' ἀδείας ἐνασχολεῖσθαι μόνοις τοῖς μόνα τὰ Μαθηματικὰ διὰ βίυ μελετᾷν ᾑρημένοις· ἡμῖν δὲ ᾗ ταῦτα ἱκανὰ παρασχεῖν ἔννοιάν τινα τῶν ὑψηλοτέρων τῦ τῶν ἀπειροςῶν λογισμῦ ζητημάτων· ἴωμεν δὲ ἤδη ἐπὶ τὴν ἐναντίως τύτῳ βαίνυσαν ἐπιςήμην τῦ τῶν Ὁλοκλήρων καλυμένυ λογισμῦ.

ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΩΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΘΕΩΡΟΥΜΕΝΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΟΣ.

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τȣ̃ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τῶν μίαν ἐχόντων τρεπτὴν ποσότητα ἀπειροςῶν, ὧν τὸ ὁλόκληρον ἐςὶ Γεωμετρικὸν, ϗ πρῶτον περὶ τῶν μονωνύμων ἀπειροςῶν.

190. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὁ Ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς, ἐναντίως ἔχων τῷ τῶν ἀπειροςῶν, μέθοδός ἐςι, καθ᾽ ἣν, ἀπειροςȣ̃ δοθέντος, πεπερασμένη ποσότης εὑρίσκεται, ἧς ἐςὶν ἀπειροςὸν τὸ δοθέν.

191. Διὰ αὐτȣ̃ δὲ ποσότης ἀπειροςὴ ὁλοκληρȣ̃σθαι λέγεται τὸ εὑρεῖν πάντων τῶν ἀπειροςῶν τὸ ἄθροισμα (1), ὅπερ ἀποτελεῖ τὴν πεπερασμένην ποσότητα, ἧς ἐςὶν ἀπειροςὸν τὸ προτιθέμενον ποσόν.

192. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οὐδεμία ἐςὶ ποσότης τρεπτὴ γεωμετρικῶς ἐκκειμένη, ἧς ȣ̓κ ἔςιν εὑρεῖν τὸ ἀπει-

ροςόν· εἰσὶ μέντοι πολυάριθμοι ποσότητες ἀπειροςαὶ(*), ἃς ὁλοκληρῶσαι ἀμήχανον, τὰς μέν, ὡς μὴ παραχθείσας ἐκ λήψεως ἀπειροςῶν· οἷαι αἱ χδυ, χδυ — υδχ κτ· τὰς δὲ, ἅτε μήπω μεθόδε τῆς αὐτῶν ὁλοκληρώσεως εὑρεθείσης· εἰσὶ δέ τινες αὐτῶν, ὧν ἐδ' εὑρεθήσεται τυχὸν τῆς ὁλοκληρώσεως μέθοδος.

193. Ποσότης, Γεωμετρικὴ μὲν ἡμῖν ἀκέει, ἧς ἡ δύναμις ἀκριβῶς παραχθῆναι δύναται, προϊέσα ἐκ πράξεων τέτε Συμβολικὲ λογισμὲ καὶ τῆς Ἀριθμητικῆς· μὴ Γεωμετρικὴ δὲ, ἧς ἡ δύναμις ἀτελῶς διὰ προσεγγίσεως ἐκτίθεται· οἷαί εἰσιν οἵτε λογάριθμοι, καὶ πολλαὶ ἄλλαι ποσότητες.

194. Εἰς δήλωσιν τῆς ἁπάσης ἀπειροςῆς ποσότητος ὁλοκλήρε χρησόμεθα τῷ γράμματι Ο, προτιθέντες αὐτὸ τῆς ὁλοκληρωτέας ἀπειροςῆς ποσότητος· ἰσοδυναμήσει δὲ τὸ γράμμα τόδε τῇ λέξει ὁλόκληρον.

195. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἀπειροςὸν, συνεργῦ τε καὶ δείκτε ἄμοιρον, ὁλοκληρῶσαι.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω δχ, ἢ δυ, τὰ προβαλλόμενα· ἀπηλείφθω τοίνυν τὸ δ· καὶ δὴ ἔςαι χ, υ· ἐπεὶ γὰρ δχ, δυ ἐμφαίνει τὰ ἀπειροςὰ μέρη τῶν χ, υ· αὐτὰ ἄρα τὰ πεπερασμένα ποσὰ ἔςαι προδήλως τὰ υ, χ· Ο. Ε. Π.

196. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Ποσότητα, δείκτε εὐμοιρῦσαν, ὁλοκληρῶσαι.

ΛΥΣΙΣ. α. Ηὐξήσθω μονάδι ὁ τῆς μεταβλητῆς ποσό-

(*) Ποσότητα ἀπειροςὴν ἐκδεχόμεθα ἐνταῦθα, ἐ μόνον τὴν ἐκ λήψεως ἀπειροςῶν ἀποτελεμένην· ἀλλ' ἐν γένει πᾶσαν ποσότητα, ἣ ἐνυπάρχεσι τὰ ἀπειροςὰ δχ, δυ κτ μιᾶς τρεπτῆς, ἢ καὶ πλειόνων.

τητος δείκτης· β΄. διῃρήσθω τὸ προτεθὲν ἀπειροςὸν διά τε τῦ ὕτω γεγονότος δείκτε, ϗ διὰ τῦ τῆς τρεπτῆς ἀπειροςῦ, εἶτ᾽ ὖν διὰ τῦ γενομένυ ἔκ τε τῦ νέυ δείκτε, ϗ τῦ τῆς τρεπτῆς ποσότητος ἀπειροςῦ· ὁ δὲ τύτων λόγος ἔςαι συμφανὴς, ἀνατολησαμένοις, ὅτι ἡ τῦ ὁλοκληρῦν μέθοδος ἐςὶν ἀντίςροφος τῆς τῦ λαμβάνειν τὰ ἀπειροςὰ (190), ϗ ὅπως δείκτυ εὐμοιρύσης τρεπτῆς εὑρίσκονται τὰ ἀπειροςὰ (12).

Ὑποδείγματα.

$$O\,2\chi\delta\chi, \text{ ἢ } O\,2\chi^1\delta\chi = \frac{2\chi^{1+1}\delta\chi}{(1+1)\delta\chi} = \frac{2\chi^2\delta\chi}{2\delta\chi} =$$

χ^2· $O\chi\delta\chi = \dfrac{\chi^2\delta\chi}{2\delta\chi} = \dfrac{\chi^2}{2}$· ϗ γὰρ $\delta(\chi^2) = 2\chi$ $\delta\chi$ (12), ϗ $\delta\left(\dfrac{\chi^2}{2}\right) = \dfrac{2\chi\delta\chi}{2} = \chi\delta\chi$· ὡσαύτως $O\,\alpha\chi^{\frac{2}{3}}$ $\delta\chi = \dfrac{\alpha\chi^{\frac{2}{3}+1}\delta\chi}{(\frac{2}{3}+1)\delta\chi} = \dfrac{\alpha\chi^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}\alpha\chi^{\frac{5}{3}}$· ὁμοίως $O\,\dfrac{\alpha\delta\chi}{\chi^3}$, εἶτ᾽ ὖν $O\alpha\chi^{-3}\delta\chi = \dfrac{\alpha\chi^{-3+1}\delta\chi}{(-3+1)\delta\chi} = \dfrac{\alpha\chi^{-2}}{-2} = \dfrac{-\alpha}{2\chi^2}$.

ἐν γένει δὲ, τῦ μ ὑπάρχοντος δείκτε ὑπαρκτικῦ ἢ λειπτικῦ, ὁλοχερῦς, ἢ κεκλασμένυ, πορισθήσεται $O\alpha\chi^{\mu}\delta\chi$ $= \dfrac{\alpha\chi^{\mu+1}\delta\chi}{(\mu+1)\delta\chi} = \dfrac{\alpha\chi^{\mu+1}}{\mu+1}$.

197. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Μία μόνη ἐςὶ περίπτωσις, καθ᾽ ἣν ἡ γενικὴ αὕτη μέθοδος ταράττει τὺς πρωτοπείρυς, ἀμέλει τῦ δείκτυ μ ὑπάρχοντος $= -1$. τηνικαῦτα γὰρ τὸ ὁλάκληρον γίνεται $= \dfrac{\alpha\chi^{-1+1}}{-1+1} = \dfrac{\alpha\chi^0}{0}$

$\frac{\alpha}{o}$, ποσότης ἀδιόριςος, ἅτε ἄπειρος ἔσα (Συμβολ. Λογ. 539)· ἐν τοῖς ἐφεξῆς μέντοι τὸν τέτε ἀποδώσομεν λόγον, προσημειῦντες μόνον ἐνταῦθα, ὅτι τὸ προτιθέμενον ἀπειροςὸν $\alpha\chi^{\mu}\delta\chi$, ὃ τηνικαῦτα καθίςαται $\alpha\chi^{-1}\delta\chi$, ἢ $\frac{\alpha\delta\chi}{\chi}$, ἐςιν ἀπειροςὸν λογαρίθμε τε $\alpha\lambda\chi$, ἢ τε $\lambda\chi^{\alpha}$, ὡς ἄντις εὐχερῶς γνοίη, τὰ ἀπειροςὰ αὐτε λαβὼν (48).

198. Ἐὰν τῷ μονωνύμῳ ἀπειροςῷ ῥίζικὸν ἐνυπάρχῃ, θετέον δείκτην κεκλασμένον ἀντὶ τε ῥίζικε· ὅτως εἰς ὁλοκλήρωσιν τε $\alpha\delta\chi\sqrt[3]{\chi^2}$, ὁλοκληρωθήσεται τὸ $\alpha\delta\chi\chi^{\frac{2}{3}}$, ἢ $\alpha\chi^{\frac{2}{3}}\delta\chi$· ὅπερ διὰ τῆς γενικῆς μεθόδε (196) τελεωθήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἴδομεν ἐν τῷ τῶν ἀπειροςῶν λογισμῷ (3), ὅτι οἱ ςαθερὰς ποσότητας περιέχοντες ὅροι τῶν ἀπειροςῶν ἀπαλείφονται· ὁλοκληρῦντες ἄρα προσθήσομεν ποσότητα ἀμετάβλητον τῇ τε ὁλοκλήρε ἐκθέσει· αὐτη δὲ ἡ ἄτρεπτος, οἵαν ἄντις βέλοιτο, ἕξει δύναμιν. ὅταν τις μόνον ὁλοκληρῶσαι ἐπιβάληται, τετ' ἔςιν εὑρεῖν ποσότητα, ἧς λαβὼν τὸ ἀπειροςὸν, ἀπολήψεται τὸ προτεθὲν ἀπειροςόν· καὶ γὰρ $\frac{\alpha\chi^{\mu+1}}{\mu+1}$ καὶ $\frac{\alpha\chi^{\mu+1}}{\mu+1}+\Gamma$ (τε Γ ποσότητα ἄτρεπτον ἡντιναῦν δηλῦντος) ἕξεσιν ἐπίσης ἀπειροςὸν τὸ ποσὸν $\alpha\chi^{\mu}\delta\chi$, ὁποίαν ἄντις ἀπονείμαι τῇ Γ δύναμιν· ἀλλ' ὅταν ἐπὶ ζητήματός τινος ἡ ὁλοκλήρωσις τελῆται, τηνικαῦτα ἡ ἀμετάτρεπτος ἐκ τῆς φύσεως τȣ̃ ζητήματος διορισθήσεται, ὡς ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὀψόμεθα·

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ ἀπειροςῶν συνεζευγμένων, ὧν ἡ ὁλοκλήρωσις ἐκ τȣ̃ γενικȣ̃ κανόνος (196) ἀποτελεῖται.

199. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ὁλοκληρῶσαι ποσότητα, ἧ ἐκ ἐνυπάρχȣσι βαθμοὶ πολυωνύμων ποσῶν, ἔτε διαιρέται πολυώνυμοι, πλὴν εἰμὴ εἶεν ποσότητες ἄτρεπτοι.

ΛΥΣΙΣ. Κείσθω ὁλοκληρωτέα ἡ ποσότης $\alpha\chi^3\delta\chi + \frac{\beta\chi^2\delta\chi}{\gamma} + \varepsilon\delta\chi$· ὁλοκληρώσθω ἐν ἰδίᾳ ἕκαςος ὅρος ὡς δέδεικται (196)· ᾗ δὴ πορισθήσεται $\frac{\alpha\chi^4}{4} + \frac{\beta\chi^3}{3\gamma} + \varepsilon\chi + \Gamma$· ὡσαύτως τὸ ὁλόκληρον τȣ̃ $\alpha\chi^3\delta\chi + \frac{\beta\delta\chi}{\chi^4}$, εἴτ' οὖν $\alpha\chi^3\delta\chi + \beta\chi^{-4}\delta\chi$ ἐςὶν $\frac{\alpha\chi^4}{4} + \frac{\beta\chi^{-3}}{-3} + \Gamma$, ἢ $\frac{\alpha\chi^4}{4} - \frac{\beta}{3\chi^3} + \Gamma$.

200. Ἀλλὰ ᾗ βαθμῶν ἐκ πολυωνύμων τοῖς ἀπειροςοῖς ἐνυπαρχόντων, εἰ μόνον οἱ αὐτῶν δεικται ὑπάρχοιεν ἀριθμοὶ ὁλοκερεῖς ὑπαρκτικοὶ, ᾗ εἰμὴ εὑρίσκοιντο ἐν τῷ παρονομαςῇ, διὰ τῆς γενικῆς αὖ (196) μεθόδȣ ἡ ὁλοκλήρωσις ἔσεται· τὸ γὰρ $(\alpha+\beta\chi^2)^3\,\chi\delta\chi$ ὁλοκληρω-

ὑνσεται διὰ τῆς εἰρημένης μεθόδε, ἐνεργείᾳ ὑψωθέντος τε̃ $(\alpha+\beta\chi^2)^3$ εἰς τρίτον βαθμὸν, ϗ γενομένε $\alpha^3+3\alpha^2\beta\chi^2+3\alpha\beta^2\chi^4+\beta^3\chi^6$· ἐκε̃ν $(\alpha+\beta\chi^2)^3\times\delta\chi=\alpha^3\delta\chi+3\alpha^2\beta\chi^2\delta\chi+3\alpha\beta^2\chi^4\delta\chi+\beta^3\chi^6\delta\chi$, ἑ ἡ ὁλοκληρία, καθ' ὅρον γινομένη, ἐςὶν $\alpha^3+\dfrac{3\alpha^2\beta\chi^3}{3}+\dfrac{3\alpha\beta^2\chi^5}{5}+\dfrac{\beta^3\chi^7}{7}+\Gamma$.

201. Ἐπεὶ δὲ πᾶσα ποσότης πολυώνυμος εὐχερῶς ὑψε̃ται εἰς βαθμὸν δείκτε ὁλοχερε̃ς ὑπαρκτικε̃ διὰ τῆς ἀποδοθείσης μεθόδε (Συμβ. Λογ. 106, κτ.) εὐπετῶς ἄρα ὁλοκληρωθήσεται ποσότης ἅπασα πολυώνυμος, μηδὲν περιέχεσα ἄλλο, ὅτι μὴ βαθμὸς, ὧν οἱ δεῖκται εἶεν ἀριθμοὶ ὁλοχερεῖς ὑπαρκτικοί· ὅτω προκειμένε εἰς ὁλοκλήρωσιν τε̃ $\vartheta\chi^3\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^2)^2+\alpha^2\chi^7\delta\chi\,(\gamma+\varepsilon\chi^2+\zeta\chi^3)^4$, διὰ τῆς ἀνακληθείσης μεθόδε ἀναπτυχθήσεται ἡ δύναμις τε̃ $(\alpha+\beta\chi^2)^2$, ϗ πολλαπλασιασθήσεται ἕκαςος ὅρος αὐτε̃ ἐπὶ $\vartheta\chi^3\delta\chi$, εἶτα ἀναπτυχθήσεται ἡ δύναμις τε̃ $(\gamma+\varepsilon\chi^2+\zeta\chi^3)^4$, ϗ ἕκαςος αὐτε̃ ὅρος πολλαπλασιασθήσεται ἐπὶ $\alpha^2\chi^7\delta\chi$· τηνικαῦτα ἐν σειρᾷ μονωνύμων ὁλοκληρωθήσεται, ὅπερ ἐςὶν ἔργον τῆς εἰρημένης γενικῆς μεθόδε (196).

202. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Ἐξαιρετέον μέντοι τὰς ποσότητας, ἐν αἷς δεικτῶν τινων λειπτικῶν ὄντων, συμβαίνει μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν ϗ τὸν πολλαπλασιασμὸν, τὸν τῆς τρεπτῆς δείκτην ἔντισιν ὅροις ὑπάρχειν — 1· ἀλλὰ γὰρ ὡς εἴρηται (197) τηνικαῦτα λογάριθμοι ὁλοκληρωθήσονται· ἔςω γὰρ $\dfrac{\alpha\beta\chi}{\chi^3}(+\beta\chi^2)^2$, εἶτ' ἐν $\alpha\chi^{-3}\delta\chi$

$(\alpha+\beta\chi^2)^2$ μεταβεβλήσθω εἰς $\alpha\chi^{-3}\delta\chi\,(\alpha^2+2\alpha\beta\chi^2+\beta^2\chi^4)$, ὅπερ γίνεται $\alpha^3\chi^{-3}\delta\chi+2\alpha^2\beta\chi^{-1}\delta\chi+\alpha\beta^2\chi\delta\chi$, ἐ οἱ μὲν δύω ὅροι $\alpha^3\chi^{-3}\delta\chi+\alpha\beta^2\chi\delta\chi$ ἔχεσιν ὁλόκληρον τὸ $\frac{-\alpha^3\chi^{-2}}{2}+\frac{\alpha\beta^2\chi^2}{2}$, ὁ δὲ ὅρος $2\alpha^2\beta\chi^{-1}\delta\chi$, ὁ αὐτὸς ὢν τῷ $2\alpha^2\beta\frac{\delta\chi}{\chi}$, ἐςὶ λογαριθμικὸν ἀπειροςὸν, (48) τᾶ $2\alpha^2\beta\lambda\chi$ ὡς τὸ ὁλικὸν ὁλόκληρον εἶναι $-\frac{\alpha^3\chi^{-2}}{2}+\frac{\alpha\beta^2\chi^2}{2}+\alpha^2\beta\lambda\chi+\Gamma$.

203. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐὰν ἡ προκειμένη ἀπειροςὴ ποσότης περιέχῃ ποσότητα πολυώνυμον, ὑψωμένην εἰς βαθμὸν ὁντιναῦν (ἔ δείκτης εἴη, εἴτε ὁλοχερής, εἴτε κλασματίας, εἴτε ὑπαρκτικὸς, εἴτε λειπτικὸς) ἒ ἔτως ὁλοκληρωθήσεται, εἴπερ αἱ τὴν πολυώνυμον πολλαπλασιάζεσαι ποσότητες εἶεν τὸ ἀπειροςὸν τῆς πολλαπλασιαζομένης ποσότητος, θεωρεμένης ἄνευ τᾶ κατ᾽ αὐτὴν ὁλικᾶ δείκτε· ἢ εἰ τὸ ἀπειροςὸν εἴη πεπολλαπλασιασμένον, ἢ διῃρημένον δι᾽ ἀριθμᾶ ἀτρέπτε· ἐκληπτέον ἦν τηνικαῦτα τὴν πολυώνυμον ποσότητα ὥσπερ μίαν μόνην τρεπτὴν, ἒ ἐφαρμοςέον αὐτῇ κατὰ λέξιν τὰ εἰρημένα (196)· ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἐςὶ τὸ $\vartheta\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi)^\pi$, εἴγε τὸ $\vartheta\delta\chi$ ἀπειροςόν ἐςι τᾶ $\alpha+\beta\chi$, πεπολλαπλασιασμένον ἐπὶ $\frac{\vartheta}{\beta}$, ὅπερ ἐςὶ ποσὸν ἄτρεπτον· εἰς ἦν τὴν τέτε ὁλοκλήρωσιν γραπτέον $O\vartheta\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi)^\pi=\frac{\vartheta\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi)^{\pi+1}}{(\pi+1).\delta(\alpha+\beta\chi)}+\Gamma=\frac{\vartheta\delta\chi(\alpha+\beta\chi)^{\pi+1}}{(\pi+1).\beta\delta\chi}+\Gamma=\frac{\vartheta\,(\alpha+\beta\chi)^{\pi+1}}{(\pi+1).\beta}+$

Γ· καὶ γὰρ ἐὰν ταύτης τῆς ποσότητος ληφθῶσι τὰ ἀπειροστὰ, ἀναδίδοται $\vartheta\delta\chi(\alpha+\beta\chi)^{\pi}$.

Ὡσαύτως ἐξεταζόμενον τὸ ἀπειροστὸν $\frac{\alpha^2\delta\chi+2\alpha\chi\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi+\chi\chi)}}$, εἴτ' οὖν $(\alpha^2\delta\chi+2\alpha\chi\delta\chi)(\alpha\chi+\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$ ὁλοκληρώσεως εὑρεθήσεται ἐπιδεκτικὸν, εἴγε τὸ $\alpha^2\delta\chi+2\alpha\chi\delta\chi$ τὸ ἀπειροστόν ἐστι τῆς $\alpha\chi+\chi\chi$, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἄτρεπτον α· ἐφαρμοζομένου ἄρα τοῦ κανόνος, πορισθήσεται $O(\alpha^2\delta\chi+2\alpha\chi\delta\chi)(\alpha\chi+\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} =$

$$\frac{(\alpha^2\delta\chi+2\alpha\chi\delta\chi)(\alpha\chi+\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\alpha\delta\chi+2\chi\delta\chi)}+\Gamma = 2\alpha(\alpha\chi+\chi\chi)^{\frac{1}{2}}+\Gamma$$

· ἐξαίρεσιν δὲ ὑφίσταται ὁ κανὼν (196), ὅταν ὁ δείκτης τῆς πολυωνύμου ποσότητος ᾖ -1· τηνικαῦτα γὰρ διὰ τῶν λογαρίθμων γενήσεται ἡ ὁλοκλήρωσις, ὡς δὴ καὶ εἴρηται, καὶ ὀψόμεθα ἐφεξῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ ἀπειροστῶν διωνύμων, γεωμετρικῶς ὁλοκληροῦσθαι δυναμένων.

204. Ἀπειροστὸν διώνυμον ὀνομάζομεν, ᾧ ἐνυπάρχει ποσότης πολυώνυμος, βαθμός τις ὑπάρχουσα διωνύμου τινός· οὕτω $\vartheta\chi^5\delta\chi(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{2}{3}}$ ἐστιν ἀπειροστὸν διώνυμον· ὡσαύτως τὸ $\vartheta\chi^{\mu}\delta\chi(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$, ὅπερ παριστᾶν ἔχει ἅπαν διώνυμον ἀπειροστὸν, ἐπεὶ διὰ ϑ, α, β, μ, ν, π ἐννοῆσαι δυνάμεθα πάντας τοὺς ἀριθμοὺς, ὑπαρκτικούς τε καὶ λειπτικοὺς, πραγματικοὺς καὶ ἐπιπλάστους.

Καὶ ἐν γένει μὲν τοῦ ἅπαν διώνυμον ἀπειροστὸν ὁλοκληρῶσαι ὁ τρόπος εἰσέτι ἄγνωστος· ἐκ δὲ τῶν προῤῥηθέντων δῆλον, ὅτι ὁλοκληρῦν δυνάμεθα δυώνυμον ἀπειροστὸν τὸ $\vartheta\chi^{\mu}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$.

α΄. Ὅταν π ᾖ ἀριθμὸς ὁλοχερὴς ὑπαρκτικὸς ὁστισοῦν, ὁποῖοι ἂν ὦσιν οἱ δεῖκται μ, ν (200), ἐξαιρεμένης μόνης τῆς σημειωθείσης (202) περιπτώσεως.

β΄. Ὅταν ὁ δείκτης μ τῆς ἐκτὸς τῦ δυωνύμυ χ ᾖ μονάδι ἐλάττων τῦ τῆς ἐν τῷ δυωνύμῳ χ δείκτυ ν, τῦτ' ἔστιν ἐν γένει ὁλοκληρῶσαι δυνατὸν τὸ $\vartheta\chi^{\nu-1}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$, ὁποῖοι ἂν ὦσιν οἱ ν, π, πλὴν εἰ μὴ εἴη $\pi=-1$· ἢ γὰρ $\vartheta\chi^{\nu-1}\delta\chi$ ἀπειροστόν ἐστι τῆς $\alpha+\beta\chi^{\nu}$, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ $\frac{\vartheta}{\nu\beta}$, τῦτ' ἔστιν ἐπὶ ποσὸν ἄτρεπτον· ἀνάγεται ἄρα εἰς τὴν δειχθεῖσαν (203) περίπτωσιν, καὶ δὴ ὁλοκληρῦται διὰ τῦ γενικῦ θεωρήματος, ἐκλαμβανομένης τῆς $\alpha+\beta\chi$ ὡς μιᾶς μόνης ποσότητος.

γ΄. Ὁλοκληρῶσαι δυνάμεθα ἅπαν ἀπειροστὸν δυώνυμον, ἐν ᾧ ὁ τῆς χ τῆς ἐκτὸς τῦ δυωνύμυ δείκτης, μονάδι αὐξηθείς, διαιρέσιμος εἴη ἐπ' ἀκριβὲς διὰ τῦ δείκτυ τῆς ἐντὸς τῦ δυωνύμυ χ, τηλίκον διδὺς ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικόν· τηνικαῦτα ὖν ἥτε ὁλοκλήρωσις ἢ ἡ δεῖξις αὐτῆς διαπραχθήσονται, τῆς δυωνύμυ ποσότητος (δίχα τῦ κατ' αὐτὴν ὁλικῦ δείκτυ) μιᾷ μόνῃ τρεπτῇ ποσότητι ἰσωθείσης, ἢ τῦ προκειμένυ ἀπειροστῦ ἐκτεθέντος διὰ μόνης ταύτης τῆς τρεπτῆς, ἢ ἀτρέπτων ἅμα ποσοτήτων· φανήσεται δὲ τὸ λεγόμενον ἐκ τῶν ἐφεξῆς.

205. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ὁλοκληρῶσαι ἀπειροστὸν τὸ $\vartheta\chi^{3}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{2})^{\frac{4}{3}}$, ὖ ὁ ἐκτὸς τῦ δυωνύμυ τῆς χ

δείκτης, μονάδι αὐξηθεὶς, διαιρέσιμος εἴη διὰ τῦ δείκτυ τῆς ἐντὸς χ, διδὲς πηλίκον ὁλοσχερὲς ὑπαρκτικόν.

ΛΥΣΙΣ. Γενέσθω $\alpha+\beta\chi^2=\psi$· ὅθεν $\chi^2=\frac{\psi-\alpha}{\beta}$. καὶ ἐπεὶ τὸ $\chi^3\delta\chi$, τὸ τῆς διωνύμε ποσότητος ἡγέμενον, πρόεισιν ἐκ τῆς λήψεως τῦ ἀπειροςῦ τῆς χ^4, τετραγώνε ἀπὸ χ^2 (ἐκτὸς τῦ ἀτρέπτε πολλαπλασιαςῦ)· τετραγωνισθήτω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2=\frac{\psi-\alpha}{\beta}$· ὅθεν ἔςαι $\chi^4=\left(\frac{\psi-\alpha}{\beta}\right)^2$, $4\chi^3\delta\chi=2\left(\frac{\psi-\alpha}{\beta}\right).\frac{\delta\psi}{\beta}$, $\chi^3\delta\chi=\left(\frac{\psi-\alpha}{\beta}\right).\frac{\delta\psi}{2\beta}=\frac{(\psi-\alpha)\delta\psi}{2\beta^2}$· ἀντικαθιςαμένων ἄρα ἀντὶ $\chi^3\delta\chi$, καὶ $(\alpha+\beta\chi^2)$ τῶν κατ' αὐτὰς διὰ ψ δυνάμεων ἐν $\vartheta\chi^3\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{4}{5}}$, εὑρεθήσεται $\frac{\vartheta.(\psi-\alpha)\delta\psi}{2\beta^2}\times\psi^{\frac{4}{5}}$, εἴτ' οὖν $\frac{\vartheta\psi^{\frac{4}{5}+1}\delta\psi}{2\beta^2}-\frac{\vartheta\alpha\psi^{\frac{4}{5}}\delta\psi}{2\beta^2}$· ἄρα $\mathrm{O}\vartheta\chi^3\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{4}{5}}$ $=\mathrm{O}\,\frac{\vartheta\psi^{\frac{4}{5}+1}\delta\psi}{2\beta^2}-\mathrm{O}\,\frac{\vartheta\alpha\psi^{\frac{4}{5}}\delta\psi}{2\beta^2}=\frac{\vartheta\psi^{\frac{4}{5}+2}}{(\frac{4}{5}+2)2\beta^2}-\frac{\vartheta\alpha\psi^{\frac{4}{5}+1}}{(\frac{4}{5}+1)2\beta^2}+\Gamma$, εἴτ' οὖν (ἐπεὶ $\frac{\vartheta\psi^{\frac{4}{5}+1}}{2\beta^2}$ κοινός ἐςι πολλαπλασιαςὴς) $=\frac{\vartheta\psi^{\frac{4}{5}+1}}{2\beta^2}\left(\frac{\psi}{(\frac{4}{5}+2)}-\frac{\alpha}{\frac{4}{5}+1}\right)+\Gamma=\frac{\vartheta\psi^{\frac{4}{5}+1}}{2\beta^2}\left(\tfrac{5}{14}\psi-\tfrac{5}{9}\alpha\right)+\Gamma$· ἀντὶ ψ ἄρα εἰσαγαγόντες τὸ $\alpha + \beta\chi$, ἕξομεν $\frac{\vartheta}{2\beta^2}(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{3}{2}+1}$ $[\frac{1}{5}(\alpha+\beta\chi^2) - \frac{1}{3}\alpha] + \Gamma$.

206. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὡσαύτως δὲ διαπραξόμεθα καὶ ἐπὶ πάσης ἄλλης ὁμοίας περιπτώσεως· κείσθω γὰρ $\vartheta\chi^8\delta\chi$ $(\alpha+\beta\chi^3)^{-\frac{2}{3}}$, ὅπερ ἐστὶν ὁλοκληρώσιμον, εἴγε ὁ δείκτης 8, μονάδι αὐξηθεὶς, διαιρεθείη ἂν διὰ τοῦ 3, τηλίκον προβάλλων ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικόν· γενέσθω τοίνυν $\alpha+\beta\chi^3 = \psi$, ὅθεν $\chi^3 = \frac{\psi-\alpha}{\beta}$, καὶ ἐπεὶ τὸ $\chi^2\delta\chi$, τὸ τοῦ συνωνύμου ποσοῦ ἡγούμενον, πρόεισι (πλὴν τοῦ ἀτρέπτου πολλαπλασιασμοῦ) ἐκ τῆς λήψεως τῶν ἀπειροστῶν τοῦ χ^9. κυβισθήτω ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 = \frac{\vartheta-\alpha}{\beta}$· οὐκοῦν ἔσται $\chi^9 = (\frac{\psi-\alpha}{\beta})^3$, $9\chi^8\delta\chi = 3.(\frac{\psi-\alpha}{\beta})^2\frac{\delta\psi}{\beta}$, καὶ $\chi^8\delta\chi = (\frac{\psi-\alpha}{\beta})^2\frac{\delta\psi}{3\beta}$· τὸ ἄρα ἀπειροστὸν $\vartheta\chi^8\delta\chi(\alpha+\beta\chi^3)^{-\frac{2}{3}}$ τρέψεται εἰς $\vartheta(\frac{\psi-\alpha}{\beta})^2.\frac{\delta\psi}{3\beta}.\psi^{-\frac{2}{3}}$, εἴτ' οὖν (περανθεισῶν τῶν σεσημειωμένων πράξεων, τοῦτ' ἔστι τετραγωνισθέντος τοῦ $\frac{\psi-\alpha}{\beta}$, καὶ πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ $\psi^{-\frac{2}{3}}$) $\frac{\vartheta\psi^{2-\frac{2}{3}}}{3\beta^3}\delta\psi - \frac{2\vartheta\alpha\psi^{1-\frac{2}{3}}\delta\psi}{3\beta^3} + \frac{\vartheta\alpha^2\psi^{-\frac{2}{3}}\delta\psi}{3\beta^3}$, οὗ τὸ ὁλόκληρον ἐστι $\frac{\vartheta\psi^{3-\frac{2}{3}}}{3\beta^3(3-\frac{2}{3})} - \frac{2\vartheta\alpha\psi^{2-\frac{2}{3}}}{3\beta^3(2+\frac{1}{3})} +$

$\frac{\vartheta\alpha^2\psi^{1-\frac{2}{3}}}{3\beta^3(1-\frac{2}{3})}+\Gamma$, ὅπερ, διὰ τὸν κοινὸν πολλαπλασιαστὴν $\frac{\vartheta}{3\beta^3}\psi^{1-\frac{2}{3}}$, ἀνάγεται εἰς $\frac{\vartheta}{3\beta^3}\psi^{1-\frac{2}{3}}(\frac{\psi^2}{3-\frac{2}{3}}-\frac{2\alpha\psi}{2-\frac{2}{3}}+\frac{\alpha^2}{1-\frac{2}{3}})+\Gamma$, ἢ $\frac{\vartheta}{3\beta^3}\psi^{1-\frac{2}{3}}(\frac{3\psi^2}{7}-\frac{6\alpha\psi}{4}+3\alpha^2)+\Gamma$, ἢ τελευταῖον, ἀντεισαγομένου ἀντὶ ψ τοῦ $\alpha+\beta\chi^3$, τὸ ὁλόκληρον ἔσαι $\frac{\vartheta}{3\beta^3}(\alpha+\beta\chi^3)^{1-\frac{2}{3}}(\frac{3}{7}(\alpha+\beta\chi^3)^2-\frac{6\alpha}{4}(\alpha+\beta\chi^3)+2\alpha^2)+\Gamma$.

207. δ'. Καὶ δυωνύμου δὲ ἀπειροστῆς ποσότητος μὴ οὔσης ἐν τῇ εἰρημένῃ περιπτώσει, συμβαίνει μέντοι πολλάκις ἀνάγεσθαι εἰς ἐκείνην δι' ἁπλῆς τινος προπαρασκευῆς, δι' ἧς ὁ τῆς ἐν τῷ δυωνύμῳ χ δείκτης, λειπτικὸς μὲν, εἰ εἴη ὑπαρκτικὸς, ὑπαρκτικὸς δὲ, εἰ λειπτικὸς, γίνεται· πρὸς δὲ τοῦτο, διαιρετέον μὲν τοὺς δύω τοῦ δυωνύμου ὅρους διὰ τοῦ τῆς χ βαθμοῦ, τοῦ τῷ δυωνύμῳ ἐνυπάρχοντος, καὶ πολλαπλασιαστέον τὰ ἐκτὸς τοῦ δυωνύμου ἐπὶ τὸν αὐτὸν βαθμὸν, ἀρθέντα εἰς βαθμὸν ἐμφαινόμενον ὑπὸ τοῦ κατὰ τὸ δυώνυμον ὁλικοῦ δείκτου· ἔσω γὰρ δυώνυμον τὸ $\vartheta\chi^4\delta\chi(\alpha+\beta\chi^2)^5$· ἵν' οὖν λειπτικὸς γένηται ὁ ἐν τῷ δυωνύμῳ δείκτης 2 τοῦ χ, διῃρήσθω $\alpha+\beta\chi^2$ διὰ χ^2· ὅθεν προκύπτει $\vartheta\chi^4\delta\chi(\frac{\alpha}{\chi^2}+\beta)^5$, εἴτ' οὖν $\vartheta\chi^4\delta\chi(\alpha\chi^{-2}+\beta)^5$· ἀλλ' ἐπεὶ ἡ, δι' ἧς διῄρηται, ποσότης χ^2 ἐκλαμβάνεται ὡς ἐπηρμένη εἰς βαθμὸν πέμπτον, ὡς ἐμπερικλειομένη τῷ τοῦ δυωνύμου ὁλικῷ δείκτῃ 5, εἰς ἀναπλήρωσιν,

πολλαπλασιαςέον τὰ ἐκτὸς τῦ διωνύμυ ἐπὶ $(\chi^2)^5 = \chi^{10}$· ὅθεν γίνεται $\vartheta\chi^{14}\delta\chi\,(\alpha\chi^{-2}+\beta)^5$.

208. Ἐφαρμοζομένης ἦν ταύτης τῆς προπαρασκευῆς, εὑρεθήσονται πλεῖςα διώνυμα ἀπειροςὰ, τῇ εἰρημένῃ μὲν περιπτώσει ἥκιςα ἐμπεριλαμβανόμενα, ταύτῃ μέντοι καθυπαγόμενα· κείσθω γὰρ φέρε εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\frac{\alpha\alpha\delta\chi}{(\alpha\alpha+\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}$, εἴτ' ἦν τὸ $\alpha\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha+\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$· καταφανὲς ἦν, ὅτι ὁ ἐκτὸς τῦ διωνύμυ δείκτης τῆς χ, τυτέςι 0, αὐξηθεὶς μονάδι, ᾗ γενόμενος 1, οὐκ ἂν διαιρεθείη ἀκριβῶς διὰ τῦ ἐντὸς δείκτυ 2 τῆς χ· ἀλλ' ἐπισφαλῶς ἂν ἐντεῦθεν συναχθείη τὴν προτεθεῖσαν ποσότητα ἀνεπίδεκτον ὑπάρχειν ὁλοκληρώσεως· ἐὰν γὰρ λειπτικὸς ὁ ἐντὸς τῦ διωνύμυ δείκτης τῦ χ γένηται, ᾗ ἡ ἔκθεσις μεταβάλῃ εἰς $\alpha\alpha\,(\chi^2)^{-\frac{1}{2}}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}$, ὅπερ ἀνάγεται εἰς $\alpha\alpha\chi^{-3}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}+1)^{\frac{1}{2}}$, δῆλον, ὅτι -3, αὐξηθεὶς μονάδι τυτέςι $-3+1$, εἴτ' ἦν -2, διαιρεθεὶς διὰ τῦ δείκτυ -2 τῆς ἐν τῷ διωνύμῳ χ, δίδωσι πηλίκον ἀριθμὸν ὁλοχερῆ· τοιγαρῦν γενομένυ $\alpha\alpha\chi^{-2}+1=\psi$, ἐκ τύτυ πορισθήσεται $\chi^{-2}=\frac{\psi-1}{\alpha\alpha}$, ᾗ ἐπεὶ $\chi^{-3}\delta\chi$ ἐςι (πλὴν τῦ πολλαπλασιαςῦ) ἀπειροςὸν τῦ χ^{-2}, ληφθέντων τῶν ἀπειροςῶν $-2\chi^{-3}\delta\chi=\frac{\delta\psi}{\alpha\alpha}$· ἐντεῦθεν ἀποφέρεται $\chi^{-3}\delta\chi=\frac{-\delta\psi}{2\alpha\alpha}$· τὸ ἄρα ἀπειροςὸν $\alpha\alpha\chi^{-3}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}$ τρέπεται εἰς $\frac{-\alpha\alpha.\delta\psi}{2\alpha\alpha}.\psi^{\frac{1}{2}}$, εἴτ' ἦν $\frac{-\psi^{-\frac{1}{2}}\delta\psi}{2}$, ὗ τὸ ὁλόκληρόν ἐςι $\frac{-\psi^{1-\frac{1}{2}}}{2.(1-\frac{1}{2})}$

$+ \Gamma$, ἢ $\psi^{-\frac{1}{2}} + \Gamma$, ἢ (ἀντικαθισαμένε ἀντὶ ψ τε αὐτῷ ἴσε) $(\alpha\alpha\chi^{-2} + 1)^{-\frac{1}{2}} + \Gamma$, εἴτ᾽ ἓν $\frac{1}{\sqrt{(\alpha\alpha\chi^{-2}+1)}}$ $+ \Gamma$, ὅπερ ἀνάγεται εἰς $\frac{\chi}{\sqrt{(\alpha\alpha + \chi\chi)}} + \Gamma$· τὸ ἄρα εἰς ὁλοκλήρωσιν προτεθὲν ἐν τῇ αὐτῇ ϗ αὐτό ἐςι περιπτώσει, ἐν ᾗ ϗ τὰ προειρημένα.

209. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ὁλοκληρῶσαι ἀπειροςὸν δυώνυμον, ἑκατέρῳ ὅρῳ ἔχον ἐγκείμενον τὸ χ.

ΛΥΣΙΣ. Διῃρήσθω τὸ δυώνυμον διὰ θατέρε τῶν τῆς χ βαθμῶν· ϗ δὴ λειφθήσεται ἐκ τέτε ἓν μόνον χ· πολλαπλασιασθήτω δὲ ἐκτὸς ἐπὶ τὸν αὐτὸν βαθμὸν, ἐπαρθέντα εἰς βαθμὸν τὸν ἐμφαινόμενον τῷ τε δυωνύμε δείκτῃ, ἵνα γένηται λειπτικὸς ὁ δείκτης (207)· κείσθω εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\frac{\alpha\alpha\delta\chi}{\chi\sqrt{(\alpha\chi + \chi\chi)}}$, εἴτ᾽ ἓν $\alpha\alpha\chi^{-1}\delta\chi\,(\alpha\chi + \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, ὅπερ μεταβληθήτω εἰς $\alpha\alpha\chi^{-1}\,(\chi)^{-\frac{1}{2}}\delta\chi\,(\alpha + \chi)^{-\frac{1}{2}}$, διαιρεμένε τε δυωνύμε διὰ χ, ϗ πολλαπλασιαζομένε ἐκτὸς ἐπὶ χ ἀρθεῖσαν εἰς βαθμὸν $-\frac{1}{2}$, ὅς ἐςιν ὁ τε δυωνύμε· αὕτη δὲ ἡ ποσότης ἀνάγεται εἰς $\alpha\alpha\chi^{-\frac{3}{2}}\delta\chi\,(\alpha + \chi)^{-\frac{1}{2}}$· ἐὰν ἐν αὐτῇ ἐφαρμοσθῇ ὁ κανὼν (205), εὑρεθήσεται ποσότης, ὁλοκληρώσεως ἀνεπίδεκτος· γενομένε δὲ λειπτικε τε ἐν τῷ δυωνύμῳ δείκτε τῆς χ, πορισθήσεται $\alpha\alpha\chi^{-\frac{3}{2}}.(\chi)^{-\frac{1}{2}}\delta\chi(\alpha\chi^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}$, εἴτ᾽ ἓν $\alpha\alpha\chi^{-2}\delta\chi\,(\alpha\chi^{-1} + 1)^{-\frac{1}{2}}$, ἥτις (205) ὁλοκλήρωσιν ἐπιδέχεται· γενέσθω τοίνυν $\alpha\chi^{-1} + 1 = \psi$, ὅθεν προκύψει $\chi^{-1} = \frac{\psi - 1}{\alpha}$, $-\chi^{-2}\delta\chi = \frac{\delta\psi}{\alpha}$, $\chi^{-2}\delta\chi = \frac{-\delta\psi}{\alpha}$· ἄρα τὸ $\alpha\alpha\chi^{-2}\delta\chi\,(\alpha\chi^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$ μεταβάλλει εἰς $-\alpha\delta\psi\,.\,\psi^{-\frac{1}{2}}$, εἴτ' οὖν $-\alpha\psi^{-\frac{1}{2}}\delta\psi$, ἧς ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $\frac{-\alpha\psi^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \Gamma$, εἴτ' οὖν $-2\alpha\psi^{\frac{1}{2}} + \Gamma$, ἢ (ἀντικαθισαμένου τοῦ τῷ ψ ἴσου) $-2\alpha\,(\alpha\chi^{-1}+1)^{\frac{1}{2}} + \Gamma$, ἢ τελευταῖον $-2\alpha\sqrt{(\frac{\alpha}{\chi}+1)} + \Gamma$.

210. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὁλοκληρώσεως οὖν γινομένης ἐπὶ δυωνύμου ἀπειροστοῦ, εἰ οὐδεμιᾷ τῶν εἰρημένων περιπτώσεων ἐφαρμόζοιτο, γεωμετρικὴ ὁλοκλήρωσις οὐ γενήσεται· τὰ δὲ τριώνυμα, τετραώνυμα κτ. ἀπειροστά, ὧν δηλονότι ἡ συνεζευγμένη ποσότης τρεῖς, τέσσαρας, κτ. ὅρους περιέχει, ὁλοκληροῦται ἐν ταῖς εἰρημέναις περιπτώσεσι (109 κτ). ἐπιδέχονται δὲ καὶ ἄλλοτέ ποτε ὁλοκλήρωσιν γεωμετρικὴν, σπανίως ἀλλ' οὖν· δι' ὃ οὐδεμία αὐτῶν ἐν τῷ παρόντι ἡμῖν ἐκτεθήσεται· παρακατιοῦσι μέντοι ἥτε μέθοδος τοῦ τὰς ὁλοκληρωσίμους ἀνακαλύπτειν, καὶ ὧν τὸ ὁλόκληρον εἰς δεδομένον ὁλόκληρον ἀνάγεται, ἀποδοθήσεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Τῶν ἀποδοθέντων κανόνων ἐφαρμογὴ εἰς τετραγωνισμὸν τῶν καμπύλων.

211. Εἰς εὕρεσιν τῆς ἐπιφανείας, ἢ (ὃ ταὐτὸν) τοῦ τετραγωνισμοῦ τῶν καμπύλων γραμμῶν, πορίζειν εἰώθασιν ὡς ἀπειρόπλευρα πολύγωνα τὰς καμπύλας· ἐκ δὲ τῶν περάτων αὐτῶν Μ, μ (σχ 68) ἐπινοεῖν καθέτους ΜΠ, μπ τῷ τῶν ἀποτετμημένων ἄξονι· ὅθεν ἡ ὅλη ἐπιφάνεια ἀναλύεται εἰς ἄπειρα τὸν ἀριθμὸν, καὶ ἐλάχιστα τὸ ποσὸν, τραπέζια· θεωροῦσιν οὖν τηνικαῦτα ἕκαστον τραπέζιον, οἷον τὸ ΠπμΜ ὡς ἀπειροστὸν τοῦ πεπερασμένου χωρίου ΑΠΜ· ἐπιεικῶς γὰρ ΠπμΜ $=$ Απμ — ΑΠΜ $=$ δ(ΑΠΜ)· οὐδὲν ἄρα λοιπὸν ἢ συμβολικῶς παραστῆσαι τὸ τραπεζίδιον ΠπμΜ, καὶ ταύτην τὴν ἔκθεσιν διὰ τῶν προαποδοθέντων κανόνων ὁλοκληρῶσαι.

Ἀλλ᾽ ἰστέον, ὅτι τὸ ΠπμΜ, ἐκλαμβανόμενον ὡς ἀπειροστὸν τῆς ἐπιφανείας, οὐ μᾶλλόν ἐστιν ἀπειροστὸν τῆς ὑπὸ τῆς τῶν ἀποτετμημένων ἀρχῆς Α ἀπολαμβανομένης ἐπιφανείας, ἢ παντὸς ἄλλου χωρίου ἀπολαμβανομένου ὑπό τινος μονίμου καὶ διωρισμένου σημείου τοῦ Κ· ἐπίσης γὰρ ἐστι ΠπμΜ $=$ ΚπμΛ — ΚΠΜΛ $=$ δ(ΚΠΜΛ)· τῆς ὁλοκληρώσεως ἄρα γενομένης, τὸ ἐκ τοῦ λογισμοῦ προκύψαν ὁλόκληρον οὐκ ἀμέσως ἀποδοτέον τῷ χωρίῳ ΑΠΜ μᾶλλον, ἢ παντὶ ἄλλῳ χωρίῳ τῷ ΚΠΛΜ, ὃ διαφέρει ἐκείνου χωρίῳ διωρισμένῳ καὶ ἀτρέπτῳ τῷ ΚΑΛ· προσθετέον ἄρα τῷ ἐκ τοῦ λογισμοῦ εὑρεθέντι ὁλοκλήρῳ ποσότητα ἄτρεπτον, ἐμφαίνουσαν χωρίον, ᾧ τὸ διορισθησόμενον διαφέρει τοῦ εὑρεθέντος ἀμέσως ἐκ τῦ λογισμῦ· ὅπως δὲ τῦτο διορθωθήσεται ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὀψόμεθα.

212. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὑρεῖν τὴν ἔκθεσιν τῦ χωρίυ ΠπμΜ.

ΛΥΣΙΣ. Κληθήτω ΑΠ $=\chi$, ϗ ΠΜ $=\upsilon$· ἐκεῖν ἔςαι Ππ $=\delta\chi$, πμ $=\upsilon+\delta\upsilon$· ἡ δὲ τῦ τραπεζίυ ἐπιφάνεια (Γεωμ. 295) ἔςι $\frac{\Pi\text{Μ}+\pi\mu}{2}\times\Pi\pi=\frac{2\upsilon+\delta\upsilon}{2}\times\delta\chi=\upsilon\delta\chi+\frac{\delta\upsilon\delta\chi}{2}$· ἀλλ' ἐπεὶ τὸ $\frac{\delta\upsilon\delta\chi}{2}$, παρατιθέμενον πρὸς τὸ $\upsilon\delta\chi$, ἀπειροςὸν ἐςιν· ἄρα $\upsilon\delta\chi$ ἔςιν ἡ γενικὴ ἔκθεσις τῦ ἀπειροςῦ, ἢ τῦ ςοιχείυ τῆς ὅλης καμπύλης.

213. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἵνα δὲ ὁ τύπος ὗτος ἐφαρμοσθῇ τῇ προκειμένῃ ἐπιφανείᾳ, ἧς δέδοται ἡ ἐξίσωσις, ληπτέον ἐκ τῆς ἐξισώσεως τὴν τῦ υ δύναμιν, ἣν εἰσακτέον τῷ τύπῳ $\upsilon\delta\chi$· τηνικαῦτα γὰρ παραςαθήσεται διὰ χ ϗ $\delta\chi$ ἡ ποσότης, ἥτις, ἣν ὁλοκληρωθῇ, παρέξει μετὰ ποσότητος ἀτρέπτυ προςιθεμένης τὴν ἔκθεσιν τῆς ἐπιφανείας ταύτης τῆς καμπύλης, προσλογιζομένης, ἀφ' ὗ τινος ἄντις βυληθείη σημείυ· λείπεται δὲ μόνον τὴν ἄτρεπτον προσδιορίσαι, ὅπερ περιέςαι ἐκθεμένοις, ἀφ' ὗ τινος σημείυ ἐπιλογίζεται ἡ ἐπιφάνεια· ὅπως δὲ τυτὶ τελεσθήσεται, ὀψόμεθα ἐχομένως.

214. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Τετραγωνίσαι τὴν κωνικὴν παραβολήν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςιν ἐν αὐτῇ ἐξίσωσις $\upsilon\upsilon=\pi\chi$, $\upsilon=\sqrt{\pi\chi}=\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}}$· ἄρα $\upsilon\delta\chi=\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}}\delta\chi$· ἀλλ' ὁλόκληρον ταύτης τῆς ποσότητος ἔςι τὸ $\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}\delta\chi}{\frac{3}{2}\delta\chi}+\Gamma$, ἢ $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}$

$+ \Gamma$· αὕτη ἄρα ἐμφαίνει τὴν τῆς παραβολῆς ἐπιφάνειαν· ὥστε, γνωσθείσης τῆς ἀποτετμημένης χ, καὶ τῆς παραμέτρου π, εὑρεθήσεται ἡ δύναμις τοῦ χωρίου ΑΠΜ, ἢ τοῦ χωρίου ΚΠΜΛ, τοῦ ἐπιλογιζομένου ἐκ τοῦ μονίμου σημείου Κ, εἰ διορισθείη τὸ ποσὸν Γ, τοῦτ᾽ ἔστιν εἰ ἀληθῶς τὸ ὁλόκληρον ἐμφαίνει, ἐκ τίνος σημείου ἡ ἀρχὴ γίνεται· ζητηθήτω οὖν τὰ ἐκ τοῦ Α ἀρχόμενα χωρία· ἔσται τοίνυν ΑΠΜ $= \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} + \Gamma$· ἵνα δὲ μάθωμεν, ὅ,τι δύναται τὸ Γ, ἐπιστατέον, ὅτι, ἡνίκα ἐστὶ $\chi = 0$, καὶ τὸ χωρίον ΑΠΜ γίνεται ὡσαύτως 0· τηνικαῦτα ἡ ἐξίσωσις τρέπεται εἰς $0 = 0 + \Gamma$· ἄρα $\Gamma = 0$· ἵν᾽ ἄρα τὸ ὁλόκληρον ἐμφήνῃ τὰ ἐκ τοῦ Α ἀρχόμενα χωρία, τὴν ἄτρεπτον Γ δεῖ εἶναι μηδέν· τοῦτ᾽ ἐστὶ τηνικαῦτα οὐδεμίαν προσθετέον ἄτρεπτον· καὶ ἐν γένει τοίνυν ἔσται τὸ ἀδιόριστον χωρίον ΑΠΜ $= \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}$· ἐὰν μέντοι τὰ χωρία ἄρχωνται ἐκ τοῦ σημείου Κ, καθ᾽ ὃ ΑΚ $= \beta$ (τοῦ β γνωστοῦ ποσοῦ ὑπάρχοντος), ἔσται τηνικαῦτα ΚΠΜΛ $= \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} + \Gamma$· ἀλλὰ τὰ χωρία ταῦτα γίνεται μηδέν, ὅταν ΑΠ, ἢ χ, γένηται $= \beta$· ἔσται ἄρα τότε $0 + \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}} + \Gamma$· ἄρα $\Gamma = -\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}$, καὶ ἑπομένως ΚΠΜΛ $= \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}$. Ο. Ε. Π.

215. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Δῆλον ἄρα, εἰς ὅ,τι συμβάλλεται ἡ προσθετέα ἄτρεπτος, καὶ ὅπως μόνη ἡ τοῦ προβλήματος κατάστασις ταύτην διορίζει· ἔστιν οὖν $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}} \times \chi$, ἀλλὰ $\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}} = \upsilon$· ἄρα $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}$, ἢ $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}} \times \chi = \frac{2}{3}\chi\upsilon$· ἐπεὶ ἄρα $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}$ παρίστησι τὸ χωρίον ΑΠΜ, δηλώσει ἄρα τοῦτο καὶ ἡ ἔκθεσις $\frac{2}{3}\chi\upsilon$, τοῦτ᾽ ἐστὶ

$\frac{2}{3}$ ΑΠ × ΠΜ, ἢ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΠΜΟ, ὁποία ἂν εἴη ἡ ΑΠ· εὕρηται δὲ οὕτω καὶ (Τψ. Γ. 70).

Ὡσαύτως $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}\chi\beta$, ἀλλ' ὅταν ᾖ $\chi = \text{ΑΚ} = \beta$, ἡ ἐξίσωσις $\upsilon\upsilon = \pi\chi$ δίδωσιν $\upsilon\upsilon = \pi\beta$, καὶ ἑπομένως $\upsilon = \pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}$, τοῦτ' ἔστι $\text{ΚΛ} = \pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}$· ἄρα $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}$, ἢ $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}} \times \beta = \frac{2}{3}\,\text{ΚΛ} \times \text{ΑΚ}$· ἐπεὶ οὖν τοῦ χωρίου ΚΠΜΛ ἔκθεσίς ἐστιν ἡ $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}$, ἔσται ἄρα τοῦ αὐτοῦ ἔκθεσις καὶ ἡ $\frac{2}{3}$ ΑΠ × ΠΜ — $\frac{2}{3}$ ΑΚ × ΚΛ, τοῦτ' ἔστι $\frac{2}{3}$ ΑΠΜΟ — $\frac{2}{3}$ ΑΚΛΙ· μόνη δὲ τῶν τεσσάρων κωνικῶν τομῶν ἡ παραβολὴ τετραγωνισμοῦ ὑπάρχει ἐπιδεκτική.

216. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Τετραγωνίσαι τὰς παντὸς γένους παραβολάς.

ΛΥΣΙΣ. Ἐξίσωσις αὐτῶν ἐστιν (Τψ. Γ. 268) $\upsilon^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu}$· ἄρα $\upsilon = \sqrt[\mu+\nu]{(\alpha^{\mu}\chi^{\nu})} = \alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}$· ἄρα $\upsilon\delta\chi = \alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}\delta\chi$, οὗ ὁλόκληρον $\dfrac{\alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}+1}}{\frac{\nu}{\mu+\nu}+1}$ $+\,\Gamma$, ὅπερ ἀνάγεται εἰς $\dfrac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}\alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}+1}$ $+\,\Gamma$, ὅπερ ταὐτόν ἐστι τῷ $\dfrac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}\alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}\times\chi$ $+\,\Gamma$, ἢ (ἐπεὶ $\upsilon = \alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}$) $\dfrac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}\chi\upsilon + \Gamma$· ὡς εἴπερ ἄρχοιντο τὰ χωρία ΑΠΜ (σχ. 69) ἐκ τῆς τῶν χ ἀρχῆς Α, ὅπερ ἀπαιτεῖ μηδὲν εἶναι τὸ ὁλόκληρον, ὅταν ΑΠΜ ᾖ μηδὲν, καὶ ἑπομένως ὅταν χ ᾖ μηδὲν, τηνικαῦτα τὸ ἄτρεπτον Γ μηδὲν γίνεται, λειπομένου ἁπλῶς τοῦ $\frac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}\chi\upsilon$, τοῦτ' ἔστι τὸ χωρίον ΑΠΜ ἀεί ἐστι μέρος διωρισμένον τοῦ γινομένου $\chi\upsilon$, ἢ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΠΜΟ, ἐμφαινόμενον τῷ κλάσματι $\frac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}$, οὗ ἡ δύναμις ἐξέχεται τῆς τῶν μ, ν, τοῦτ' ἔστιν ἐκ τοῦ βαθμοῦ τῆς παραβολῆς· τοιγαροῦν τετραγωνισμοῦ εἰσὶν ἐπιδεκτικαὶ πᾶσαι αἱ παραβολαί.

217. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Τετραγωνίσαι τὰς παντὸς γένους ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ὑπερβολὰς, ἐξαιρουμένης τῆς ἐκ τοῦ κώνου.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπ' αὐτῶν ὑπάρχει $\upsilon^{\mu} = \alpha^{\mu+\nu}\chi^{-\nu}$ (Υψ. Γ. 273), $\upsilon = \alpha^{\frac{\mu+\nu}{\mu}}\chi^{\frac{-\nu}{\mu}}$· ἄρα $\upsilon\delta\chi = \alpha^{\frac{\mu+\nu}{\mu}}\chi^{\frac{-\nu}{\mu}}\delta\chi$, οὗ ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $\frac{\alpha^{\frac{\mu+\nu}{\mu}}\chi^{1-\frac{\nu}{\mu}}}{1-\frac{\nu}{\mu}}+\Gamma$, ἢ

$\frac{\mu}{\mu-\nu}\alpha^{\frac{\mu+\nu}{\mu}}\chi^{1-\frac{\nu}{\mu}}+\Gamma$, ἔνθα ἡ ἄτρεπτος εὐκόλως διορίζεται, ὅταν μ ὑπερέχῃ τὴν ν· ἀλλ' ὅταν μ ἐλάττων ᾖ τοῦ ν, εὑρίσκεται ὡς ἄτρεπτος ποσότης, ἄπειρος μὲν, τῶν χωρίων ἀρχομένων ἐκ τῆς τῶν χ ἀρχῆς, πεπερασμένη δὲ, ὅταν ἄρχωνται ἀπὸ παντὸς ἄλλου χωρίου· ἔστω γὰρ $\mu = 1$, καὶ $\nu = 2$, ἔνθα ἡ ἐξίσωσίς ἐστιν $\upsilon =$

$\alpha^3\chi^{-2}$, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τηνικαῦτα ἀνάγεται εἰς $-\alpha^3\chi^{-1}+\Gamma$, ἢ $\Gamma-\frac{\alpha^3}{\chi}$· εἰ μὲν οὖν ἐκ τῆς τῶν χ ἀρχῆς Α (σχ. 70) ἄρχωνται τὰ χωρία, δεήσει μηδὲν εἶναι τὸ $\Gamma-\frac{\alpha^3}{o}$, ὄντος $\chi=o$, τοῦτ᾽ ἔστι $\Gamma-\frac{\alpha^3}{o}=o$, καὶ ἑπομένως $\Gamma=\frac{\alpha^3}{o}$, τοῦτ᾽ ἔστιν, ἄπειρον· τοὐναντίον δὲ, εἰ ἄρχοιντο ἐκ τοῦ Κ, ὡς εἶναι $AK=\beta$, ἔσται $\Gamma-\frac{\alpha^3}{\beta}=o$, ὅθεν $\Gamma=\frac{\alpha^3}{\beta}$· ὃ δὲ ταῦτα σημαίνει, δῆλον ποιήσομεν. ἡ γὰρ καμπύλη, ἧς ἐξίσωσις ἡ $\upsilon=\alpha^3\chi^{-2}$, ἢ $\upsilon=\frac{\alpha^3}{\chi^2}$, ἐπεκτείνεται ἐπ᾽ ἄπειρον πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους ΑΖ, ΑΥ (σχ. 70)· ἐγγίζει μέντοι μᾶλλον τῇ ἀσυμπτώτῳ ΑΖ, ἢ τῇ ΑΥ, ὥσπερ ἐκ τῆς κατ᾽ αὐτὴν ἐξισώσεως συναγαγεῖν δυνατόν· ὡς, εἴπερ ἐπιλογισθεῖεν τὰ χωρία ἐπὶ τῆς ἀσυμπτώτου ΑΥ, ἔσονται ἄπειρα, εἴγε τὸ χωρίον, τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ἀσυμπτώτου, καὶ τοῦ ἀπείρου κλωνὸς ΒΣ, ἔστιν ἄπειρον· ἀμήχανον ἄρα δηλωθῆναι τὰ χωρία ΑΠΜΣ, τὰ ἐπιλογιζόμενα ἐπὶ τῆς ΑΥ ἀσυμπτώτου· τοὐναντίον δὲ, τὰ χωρία, τὰ ἀπολαμβανόμενα ὑπὸ τοῦ κλωνὸς ΒΜ καὶ τῆς ἀσυμπτώτου ΑΖ, καὶ ἐπ᾽ ἄπειρον προήκοντα, πεπερασμένην ἔχουσι δύναμιν, εἴγε μετὰ βραχύ τι διάστημα τάχιστα προσεγγίζει ὁ κλὼν τῇ ἑαυτοῦ ἀσυμπτώτῳ· ὥστε τὸ ἀπειρόμηκες χωρίον ΚΑΜΟΖ ἐκτίθεσθαι διὰ $\frac{\alpha^3}{\beta}$, καὶ $\Pi MOZ=\frac{\alpha^3}{\chi}$, καὶ ἑπομένως $K A M \Pi=\frac{\alpha^3}{\beta}-\frac{\alpha^3}{\chi}$.

ἐντεῦθεν ἄρα, κἂν εἴη ἀμήχανον εὑρεῖν τὰ χωρία, τὰ ἐπὶ τῆς ΑΤ ἀσυμπτώτε λαμβανόμενα, δυνατὸν μέντοι θηρεύσασθαι τὰ ΚΑΜΠ, τὰ ἀρχόμενα ἐκ τῦ σημείε Κ, κειμένε, ὅσον ἄντις βέλοιτο, ἐγγὺς τῆς ΑΤ.

218. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Τετραγωνίσαι τὴν καμπύλην, ἣν ἐμφαίνεσιν ἡ $\upsilon = \dfrac{\alpha\alpha\chi - \chi^3}{\alpha\alpha}$ ἐξίσωσις ϗ τὸ 71 σχῆμα.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς λήψεως τῶν τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως ἀπειροςῶν πορισθήσεται $\upsilon\delta\chi = \dfrac{\alpha\alpha\chi\delta\chi - \chi^3\delta\chi}{\alpha\alpha}$, ῦ ὁλοκληρόν ἐςι (196) Ουδχ, ἢ $\text{ΑΠΜ} = \dfrac{2\alpha\alpha\chi^2 - \chi^4}{4\alpha\alpha} + \Gamma$· ἐὰν ῦ ἄρχωνται ἐκ τῆς ἀρχῆς Α τῶν ἀποτετμημένων τὰ χωρία ΑΠΜ, δεήσει μηδὲν εἶναι τὸ ὁλόκληρον, ὄντος = ο τῦ χ· ὅθεν μηδὲν ἔςαι ϗ ἡ ἀμετάτρεπτος Γ· ὥςε τὸ ἀδιόριςον χωρίον ΑΠΜ ἔςαι ἁπλῶς = $\dfrac{2\alpha\alpha\chi^2 - \chi^4}{\alpha\alpha} + \Gamma$.

Ἐν γένει ὖν, ἐὰν ἡ υ ἐκ μονωνύμων ποσῶν, ὡς ἐν ταῖς ἀνωτέρω περιπτώσεσι, συγκέηται, ἀεὶ εὐπετῶς πορισθήσεται ἡ ἐπιφάνεια (196).

219. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς΄. Τετραγωνίσαι καμπύλην, ἧς ἐξίσωσίς ἐςιν ἡ $\alpha^5\upsilon\upsilon = \chi^4(\alpha^3 - \chi^3)$.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως πρόεισιν $\upsilon = \pm\sqrt{\left(\dfrac{\chi^4(\alpha^3 - \chi^3)}{\alpha^3}\right)} = \pm\dfrac{\chi^2}{\alpha^2\sqrt{\alpha}}\sqrt{(\alpha^3 - \chi^3)}$· ἄρα (μιᾶς μόνης λαμβανομένης δυνάμεως τῦ υ), $\upsilon\delta\chi =$

$\frac{\chi^2\delta\chi}{\alpha^2\sqrt{\alpha}}\sqrt{(\alpha^3-\chi^3)}=\frac{\chi^2\delta\chi}{\alpha^2\sqrt{\alpha}}(\alpha^3-\chi^3)^{\frac{1}{2}}$· ἔςι δὲ αὕτη ποσότης ἐπιδεχομένη ὁλοκλήρωσιν (203), εἴγε $\chi^2\delta\chi$ ἔςιν ἀπειροςὸν τῆ χ^3, διαιρόμενον διὰ ποσῆ ἀτρέπτε· ἄρα (196) $O\iota\delta\chi=\frac{\chi^2\delta\chi\cdot(\alpha^3-\chi^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\alpha^2\sqrt{\alpha}-3\chi^2\delta\chi}+\Gamma=$ $-\frac{2(\alpha^3-\chi^3)^{\frac{3}{2}}}{9\alpha^2\sqrt{\alpha}}+\Gamma$· τὸ δὲ ἄτρεπτον Γ διορισθήσεται, γνωσθέντος τῆ σημείε, ἀφ' ἕ ἄρχεται ἡ ἐπιφάνεια.

220. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δυνατὸν δὲ εὑρίσκειν τὰς τῶν καμπύλων ἐπιφανείας ἢ εἰς τρίγωνα ἀντὶ τρεπεζίων, ἀναλυομένων· δυνατὸν γὰρ εὑρεῖν τὴν τῆ τμήματος ΑΝΞ ἐπιφάνειαν (σχ. 68), θεωρεμένην, ὡς εἰ συγκέοιτο ἐξ ἀπειραρίθμων τριγώνων ἐλαχίςων, οἷόν ἐςι τὸ ΑΞξ, ἕ ἔκθεσις ἡ $\frac{\mathrm{A}\xi\chi\Xi\tau}{2}$, καταγομένης τῆς καθέτε Ξτ, ἢ (ὃ ταὐτὸν), κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαςήματι δὲ τῷ ΑΞ, τόξε ἐλαχίςε γραφέντος τῆ Ξτ· τηνικαῦτα γὰρ, κληθείσης τῆς $\mathrm{A}\Xi=\tau$, ἢ τῆ τόξε $\Xi\tau=\delta\chi$, πορισθήσεται $\mathrm{A}\xi=\tau+\delta\tau$, ἢ ἑπομένως τὸ τρίγωνον $\mathrm{A}\Xi\xi=\frac{\tau+\delta\tau}{2}\delta\chi=\frac{\tau\delta\chi}{2}+\frac{\delta\tau\delta\chi}{2}$, τῆτ' ἔςιν $=\frac{\tau\delta\chi}{2}$, ἀποῤῥιπτομένε τῆ ὅρε $\frac{\delta\tau\delta\chi}{2}$, ὅτι δχ ἢ δτ εἰσὶν ἀπειροςὰ, ἢ τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, ἀπειροςὸν δευτεροταγές· ἐδὲν ἦν ἄλλο λοιπὸν, ἢ εὑρεῖν τὴν μεταξὺ χ ἢ τ ἐξίσωσιν, ἢ ἐντεισαγαγόντας ἀντὶ τ τὴν τῆ χ δύναμιν, τὴν ὁλοκλήρωσιν ἀπεργάσασθαι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ εὐθύνσεως τῶν καμπύλων γραμμῶν.

221. Καμπύλην εὐθύνειν διορίζειν ἐςὶν αὐτῆς τὸ μῆκος, ἢ δηλȣ̃ν, τίνι εὐθείᾳ γραμμῇ ἴσȣται, ἤτοι ὅλη ἡ καμπύλη, ἢ τόξον αὐτῆς δεδομένον· ἰδȣ̀ δὴ τȣτὶ, ὅταν ἐξῇ, ὅπως περαίνεται· ἐκλαμβανομένης ἀεὶ ἁπάσης καμπύλης ΑΜ (σχ. 68) ὡς ἀπειροπλεύρȣ πολυγώνȣ, ἡ ἐλαχίςη πλευρὰ Μμ ἐκληφθῆναι δύναται ὡς ἀπειροςὸν τȣ̃ τόξȣ ΑΜ, εἴγε $\text{Μμ} = \text{Αμ} - \text{ΑΜ} = \delta(\text{ΑΜ})$· ἀγομένης τοίνυν τῆς Μρ παραλλήλως τῇ ΑΠ, ἔςαι $\text{Μμ} = \sqrt{(\text{Μ}\rho^2 + \rho\mu^2)} = \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$· λείπεται ἄρα ὁλοκληρῶσαι μόνον τὸ $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$· ἐπὶ δὲ τȣ́τῳ εἰλήφθω τὰ ἀπειροςὰ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως, ϗ ἐντεῦθεν πορισθεῖσα ἡ τȣ̃ δυ δύναμις, παριςαμένη διὰ χ ϗ δχ, ἢ ἡ τȣ̃ δχ, παριςαμένη διὰ υ ϗ δυ, ἀντικαταςαθήτω ἐν $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$, ἥτις μόνον χ ϗ $\delta\chi^2$, ἢ μόνον υ ϗ δυ, περιέξει· ἐξήχθω δὲ τȣ̃ ῥιζικȣ̃ ἐκτὸς τὸ $\delta\chi^2$, ἢ $\delta\upsilon^2$ (Συμϐ. Λογισ. 167), ϗ γενέσθω ἡ ὁλοκλήρωσις.

222. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Τόξον κυκλικὸν εὐθῦναι.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςιν (Ὑψηλ. Γ. 10) $\upsilon = \sqrt{2\alpha\chi - \chi\chi}$,

ϗ $\delta\upsilon = \dfrac{\alpha\delta\chi - \chi\delta\chi}{\sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}}$, ϗ $\delta\upsilon^2 = \delta\chi^2 \cdot \dfrac{(\alpha - \chi)^2}{2\alpha\chi - \chi\chi}$· ἀντικαταςάσει δὲ ταύτης τῆς τȣ̃ $\delta\upsilon^2$ δυνάμεως ἐν τῷ $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$, πορίζεται $\sqrt{\left(\delta\chi^2 + \dfrac{\delta\chi^2 \cdot (\alpha - \chi)^2}{2\alpha\chi - \chi\chi}\right)} =$

$$\frac{2\alpha\chi\delta\chi^2 - \chi\chi\delta\chi^2 + \alpha^2\delta\chi^2 - \alpha\alpha\chi\delta\chi^2 + \chi\chi\delta\chi^2}{2\alpha\chi - \chi\chi} =$$

$$\frac{\sqrt{\alpha^2\delta\chi^2}}{\sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}} = \frac{\alpha\delta\chi}{\sqrt{2\alpha\chi - \chi\chi}},$$ ὅπερ ἐςὶν ἀπειροςὸν παντὸς τόξυ, ὁλοκληρέμενον διὰ προσεγγίσεως, ὡς ὀψόμεθα ὕςερον.

223. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐκ τῶν ἐν γένει διὰ $\upsilon^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu}$ ἐμφαινομένων παραβολῶν εὐθύναι τὴν δηλυμένην ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^3 = \alpha\chi^2$.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως πρόεισι $\chi^2 = \frac{\upsilon^3}{\alpha}$, ϗ $\chi = \frac{\upsilon^{\frac{3}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$· ἄρα $\delta\chi = \frac{\frac{3}{2}\upsilon^{\frac{1}{2}}\delta\upsilon}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$, ϗ $\delta\chi^2 = \frac{9\upsilon\delta\upsilon^2}{4\alpha}$· ἄρα $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)} = \sqrt{(\delta\upsilon^2 + \frac{9\upsilon\delta\upsilon^2}{4\alpha})} = \delta\upsilon\sqrt{(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})}$ (Συμβολ. Λογ. 167)· ὁλοκληρῦται δ' εὐπετῶς (193) ἡ ποσότης αὕτη, εἴγε ὁ ἐκτὸς τῦ δυωνύμυ δείκτης τῆς υ ἐλάττων ἐςὶ μονάδι τῦ ἐν τῷ δυωνύμῳ· ποριωθήσεται ἄρα

$$O\,\delta\upsilon\sqrt{(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})} \text{ ἢ } O\delta\upsilon\,(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})^{\frac{1}{2}} = \frac{\delta\upsilon\,(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9\delta\upsilon}{4\alpha}}$$

$$+ \Gamma = \frac{8\alpha}{27}\cdot(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})^{\frac{3}{2}} + \Gamma\cdot$$ ἡ δὲ ἀμετάτρεπτος Γ ὕτω διοριωθήσεται· ἐὰν ἐκ τῆς τῶν υ ἀρχῆς Α ἄρχηται τὸ τόξον ΑΜ, δεήσει τὸ ὁλόκληρον, ἢ τὴν τῦ ΑΜ τόξυ δύναμιν, εἶναι μηδὲν, ὅταν ἡ $\upsilon = 0$· τηνικαῦτα ἄρα

τὸ ὁλόκληρον ἀνάγεται εἰς $\frac{8\alpha}{27}(1)^{\frac{3}{2}} + \Gamma$, ἢ $\frac{8\alpha}{27} + \Gamma$· ἔσται ἄρα $\frac{8\alpha}{27} + \Gamma = 0$· ἄρα $\Gamma = -\frac{8\alpha}{27}$· ἄρα τὸ μῆκος παντὸς τόξου ΑΜ, ἐκ τῆς κορυφῆς ἀρχομένου, ἐστὶ $\frac{8\alpha}{27}(1 = \frac{9\upsilon}{4\alpha})^{\frac{3}{2}} - \frac{8\alpha}{27}$.

224. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Βουλομένοις δὲ εἰδέναι, αἳ ἂν εἶεν ἄλλαι τῶν παραβολῶν εὐθύνσιμοι, ἐπιχειρητέον οὕτως· ἡ παντὸς γένους παραβολῶν ἐξίσωσις $\upsilon^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu}$ δίδωσιν $\upsilon = \alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}$· γενέσθω δὲ εὐμαρείας χάριν $\frac{\mu}{\mu+\nu} = \kappa$, καὶ $\frac{\nu}{\mu+\nu} = \zeta$· ἕξομεν ἄρα $\upsilon = \alpha^{\kappa}\chi^{\zeta}$· ἄρα $\delta\upsilon = \zeta\alpha^{\kappa}\chi^{\zeta-1}\delta\chi$, καὶ $\delta\upsilon^2 = \zeta^2\alpha^{2\kappa}\chi^{2\zeta-2}\delta\chi^2$· ἄρα $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)} = \sqrt{(\delta\chi^2 + \zeta^2\alpha^{2\kappa}\chi^{2\zeta-2}\delta\chi)} = \delta\chi = \delta\chi\sqrt{(1 + \zeta^2\alpha^{2\kappa}\chi^{2\zeta-2})}$ ποσότης, ἥτις, ὡς ἔχουσά ἐστιν, οὐχ ὁλοκληροῦται, εἰμὴ εἴη $2\zeta - 2 = 1$· ἐὰν μέντοι μεταβληθῇ τὸ σύμβολον τοῦ δείκτου τῆς ὑπορρίζου χ, προκύψει $\chi^{-\zeta+1}\delta\chi\sqrt{(\chi^{-2\zeta+2} + \zeta^2\alpha^{2\kappa})}$, ἥτις (195) ὁλοκληροῦται, εἴπερ $-\zeta + 1$, αὐξηθεὶς μονάδι, καὶ διαιρεθεὶς διὰ $-2\zeta + 2$, προβάλλει ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικόν, τοῦτ᾽ ἐστιν, εἰ $\frac{\zeta}{-2\zeta+2} = \tau$, τοῦ τ ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος ὁλοχερῆ ὑπαρκτικόν· ἐντεῦθεν ἄρα ἀποφέρεται $\zeta = \frac{2\tau}{2\tau+1}$· ἀλλὰ $\zeta = \frac{\nu}{\mu+\nu}$· ἄρα

$\frac{\nu}{\mu+\nu} = \frac{2\tau}{2\tau+1}$· ὅθεν $\mu = \frac{\nu}{2\tau}$· ἄρα εὐθύνονται αἱ παραβολαὶ, ὧν ἐςὶν ἐξίσωσις ἡ $\upsilon^{\frac{\nu.(2\tau+1)}{2\tau-2}} = \alpha^{\frac{\nu}{2\tau}}\chi^{\nu}$, ἢ (ἐξαγομένης τῆς ῥίζης ν) $\upsilon^{\frac{2\tau+1}{2\tau}} = \alpha^{\frac{1}{2\tau}}\chi$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ τετραγωνισμȣ̃ τῶν καμπύλων ἐπιφανειῶν.

225. Τῶν ἐκ περιαγωγῆς καμπύλης τινὸς ἀπογεννωμένων ἐπιφανειῶν τὸν τετραγωνισμὸν ἐνταῦθα ζητήσομεν· τῆς τοίνυν ΑΜ (σχ. 72) καμπύλης περὶ εὐθεῖαν τὴν ΑΠ περιαγομένης, αἱ, περὶ ὧν ὁ λόγος, παράγονται ἐπιφάνειαι.

Ἀλλὰ τῆς ΑΜ περὶ τὴν ΑΠ περιςρεφομένης, ἡ μικρὰ πλευρὰ Μμ, ζώνην περιγράφει, ἢ κώνȣ κολέρȣ μέρος, ὅπερ ςοιχεῖόν τε ὑπάρχει τῆς ἐπιφανείας, καὶ ἴσεται τῷ γινομένῳ ὑπὸ Μμ καὶ τῆς περιφερείας, ἧς ἀκτὶς ἡ ἐκ τȣ̃ μέσȣ τῆς Μμ τῇ ΑΠ ἀγομένη κάθετος, ἢ (ὃ ταὐτὸν, εἴγε ἀπειροςημόριός ἐςιν ἡ Μμ) ἧς ἀκτὶς ἡ ΠΜ· ἀλλὰ τὸ τόξον Μμ $= \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$· ἐὰν ȣ̓̃ν διὰ $\eta:\pi$ ὁ λόγος τῆς ἀκτῖνος πρὸς τὴν περιφέρειαν δηλωθῇ, πορισθήσεται $\eta:\pi::\upsilon$ πρὸς τὴν περιφέρειαν, ἧς ἀκτὶς ἡ ΠΜ, ἥτις ἔςαι $= \frac{\pi\upsilon}{\eta}$· ἔςιν ἄρα $\frac{\pi\upsilon}{\eta}\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$ ςοιχεῖον τῶν εἰρημένων καμπύλων ἐπιφανειῶν.

226. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τετραγωνίσαι τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν (σχ. 73).

ΛΥΣΙΣ. Τοῦ γεννήτορος κύκλου ΑΜΒ ἐστὶν ἐξίσωσις $\upsilon\upsilon = \alpha\chi - \chi\chi$· ἄρα $\upsilon = \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, καὶ $\delta\upsilon = \frac{\frac{1}{2}\alpha\delta\chi - \chi\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}$· ἄρα $\delta\upsilon^2 = \frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha\delta\chi^2 - \alpha\chi\delta\chi^2 + \chi^2\delta\chi^2}{\alpha\chi - \chi\chi}$, ἄρα $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)} = \sqrt{(\delta\chi^2 + \frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha\delta\chi^2 - \alpha\chi\delta\chi^2 + \chi^2\delta\chi^2}{\alpha\chi - \chi\chi})} = \frac{\frac{1}{2}\alpha\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}$· ἀντικαθισαμένων ἄρα ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\pi\upsilon}{\alpha}\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$ ἀντὶ υ καὶ $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$ τῶν κατ' αὐτὰς δυνάμεων, προκύψεται $\frac{\pi\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}{\eta}\cdot\frac{\frac{1}{2}\alpha\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}$, ὅπερ ἀνάγεται ἐπὶ $\frac{\frac{1}{2}\alpha\pi\delta\chi}{\eta}$, οὗ ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $\frac{\frac{1}{2}\alpha\pi\chi}{\eta} + \Gamma$, ἢ ἁπλῶς $\frac{\frac{1}{2}\alpha\pi\chi}{\eta}$, ἀρχομένης δηλαδὴ τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τοῦ σημείου Α.

227. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Τετραγωνίσαι τὴν τῆς παραβολικῆς κωνοΐδος ἐπιφάνειαν (σχ. 72).

ΛΥΣΙΣ. Τῆς παραβολῆς ἐξίσωσις ἐστὶν $\upsilon\upsilon = \Pi\chi$· ἄρα $\chi = \frac{\upsilon\upsilon}{\Pi}$, $\delta\chi = \frac{2\upsilon\delta\upsilon}{\Pi}$, $\delta\chi^2 = \frac{4\upsilon^2\delta\upsilon^2}{\Pi}$· ἄρα $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)} = \sqrt{(\delta\upsilon^2 + \frac{4\upsilon^2\delta\upsilon^2}{\Pi\Pi})} = \delta\upsilon\sqrt{(1 + \frac{4\upsilon^2}{\Pi\Pi})}$· ἄρα $\frac{\pi\upsilon}{\eta}\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$ γίνεται $\frac{\pi\upsilon\delta\upsilon}{\eta}\sqrt{(1 + \frac{4\upsilon}{\pi\pi})}$, ποσότης ὁλοκληρώσεως ἐπιδεκτική (193), ἧς τὸ ὁλόκληρόν ἐστι

$$\frac{\frac{\pi\upsilon\delta\upsilon}{\eta}\left(1+\frac{4\upsilon^2}{\Pi\Pi}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\frac{1}{2}\cdot 8\upsilon\delta\upsilon}{\pi\pi}} + \Gamma,$$ ἥτις ἀνάγεται ἐπὶ $\frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta}\left(1+\frac{4\upsilon^2}{\Pi\Pi}\right)^{\frac{3}{2}} + \Gamma$· ἀλλὰ γὰρ ἡ ποσότης αὕτη τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀρχομένην δηλοῦσα ἐπιφάνειαν, ὅταν ἡ $\upsilon = 0$, καὶ αὐτὴ μηδὲν ἐςαι· ἀλλὰ τηνικαῦτα γίνεται $\frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta}(1)^{\frac{3}{2}} + \Gamma$, εἴτ' οὖν $\frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta} + \Gamma = 0$, καὶ $\Gamma = -\frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta}$· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἀδιορίςου παραβολικῆς κωνοῖδος ΑΜΛΑ ἐςὶν $= \frac{\pi\Pi\Pi}{12\eta}\left(1+\frac{4\upsilon^2}{\Pi\Pi}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ τῆς τῶν ςερεῶν καταμετρήσεως.

228. Πρὸς καταμέτρησιν τῆς τῶν σωμάτων ςερεότητος, ἐννοητέον ταῦτα συγκείμενα ἐκ ςιβάδων λεπτοτάτων τε καὶ παραλλήλων, ἢ γοῦν ἐξ ἀπειραρίθμων πυραμίδων, ὧν αἱ κορυφαὶ εἰς ἓν σημεῖον συντρέχουσιν· ὅταν δ' ἐκείνως ἐξεικονίζωνται, τὴν τῶν δύω ἀντιθέτων ἐπιφανειῶν διαφορὰν, τὴν ἑκατέραν ςιβάδα περατοῦσαν, ἀπειροςήν τε ἐκληπτέον, καὶ παροπτέον ἐν τῷ ὑπολογισμῷ· λαβεῖν οὖν χρὴ εἰς ἔκθεσιν τῆς ςερεότητος ταύτης τῆς ςιβάδος τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἑτέρας τῶν δύω ἀντιθέτων βά-

σεων, ἢ τῦ ἀπειροςῦ ὕψες· ἐὰν φέρε ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ (σχ. 74) ἐκληφθῇ ὡς συγκειμένη ἐκ ςιβάδων λεπτοτάτων, οἵα ἡ αβγδεζ, ληπτέον ὡς μέτρν ταύτης τῆς ςιβάδος τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας αβγ, ἢ τῆς δεζ ἢ τῦ πάχυς αὐτῆς.

Ὡ'σαύτως, ἐὰν τὸ περιαγωγῇ τῆς ΑΜ (σχ. 72) καμπύλης περὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΠ ἀπογεννώμενον ςερεὸν ἐκληφθῇ ὡς συγκείμενον ἐκ ςιβάδων παραλλήλων ἢ λεπτοτάτων, ἐκληπτέον ὡς μέτρον ἑκάςης ςιβάδος τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς κυκλικῆς ἐπιφανείας, ἧς ἀκτὶς ἡ ΠΜ, ἢ τῦ πάχυς Ππ. Τύτυ τεθέντος, ἰδὲ ὅπως ἐκτιμηθήσεται ἡ παντὸς σώματος ςερεότης.

Ε'ννοηθήτω ἑκάςη ςιβὰς ὡς ἔσα τῦ ςερεῦ τὸ ἀπειροςόν, εἴγε ἡ ςιβὰς ΜμλΛ ἐςὶν = ΑμλΑ — ΑΜΛΑ = δ(ΑΜΛΑ)· ἢ διορισθεῖσα ἡ συμβολικὴ αὐτῆς ἔκθεσις ὡλοκληρώσθω· ἡ δὲ παντὸς ςερεῦ καταμέτρησις ἢ **κυβισμὸς** αὐτῦ ὀνομάζεται, ὥσπερ τετραγωνισμὸς ἡ τῶν ἐπιφανειῶν.

229. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Κυβίσαι τὴν πυραμίδα ΚΑΒΓ (σχ. 74).

ΛΥΣΙΣ. Ε'μφαινέτω τὴν τῆς κατ' αὐτὴν βάσεως ΑΒΓ ἐπιφάνειαν ἡ γνωςὴ ποσότης ββ· τὸ δ' ὕψος αὐτῆς ΚΤ, τὸ υ· τὸ δὲ χ ἐμφαινέτω τὸ μιᾶς τινος ςιβάδος ἀπόςημα· ὅθεν πάχος ταύτης τῆς ςιβάδος ἔςαι τὸ δχ· ἡ δ' ἐπιφάνεια αβγ εὑρεθήσεται (*) διὰ τῆς ἀναλογίας $ΣΤ^2 : Στ^2$

(*) Τῆς ἀναλογίας ταύτης τὴν δεῖξιν περιττόν, οἶμαι, ἐκθέσθαι ὧδε· οἱ γὰρ ἐνταῦθα γενόμενοι οἷοι πάντας ἔσονται αὐτόθεν τῆς ταύτης ἀλήθειαν συνιδεῖν, ἢ, εἰ δέοι, δεῖξαι.

:: $ΑΒΓ : αβγ$, τῦτ᾽ ἔστιν $υυ : χχ :: ββ : αβγ = \frac{ββχχ}{υυ}$.

ὅθεν ἡ τῆς στιβάδος στερεότης ἔσται $\frac{ββχχδχ}{υυ}$, ὃ ὁλοκληρόν

ἐστι τὸ $\frac{ββχ^3}{3υυ} + Γ$, ἢ ἁπλῶς $\frac{ββχ^3}{3υυ}$, ἐὰν ἄρχηται ἐκ τῆς κορυφῆς Κ τὸ στερεόν· αὕτη ὖν ἡ ποσότης, ἡ ἐμφαίνουσα ὁποιονῦν μέρος $Καβγ$ τῆς πυραμίδος, ταὐτίζεται τῇ $\frac{ββχχ}{υυ}$

$\times \frac{χ}{3}$, ἥτις ὐδέν ἐστιν ἀλλ᾽ ἢ $αβγ \times \frac{Κτ}{3}$, ὅπερ συνᾴδει τοῖς δεδειγμένοις ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ (457).

230. Περὶ δὲ τῶν ἐκ περιαγομένης καμπύλης οἱασοῦν ἀπογεννωμένων στερεῶν, ἔξεστι γενικώτερον εὑρεῖν τὴν ἔκθεσιν τῆς στοιχειώδους στιβάδος, ἢ τὸ ἀπειροστόν· ἐμφαινέτω γὰρ $η : π$ τὸν τῆς ἀκτῖνος πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον· εὑρεθήσεται ὖν περιφέρεια, ἧς ἀκτὶς ἡ $ΠΜ = υ$ (σχ. 72), ἐκ τῆς ἀναλογίας $η : π :: υ : \frac{πυ}{η}$· ἐὰν δὲ ἡ τῆς περιφερείας ταύτης $\frac{πυ}{η}$ δύναμις πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ΠΜ, εἴτ᾽ ὖν ἐπὶ $\frac{1}{2}υ$, εὑρεθήσεται ἡ κυκλικὴ ἐπιφάνεια $\frac{πυ^2}{2η}$, ἥτις, πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ πάχος $Ππ = δχ$, δίδωσι $\frac{πυ^2δχ}{2η}$, ἔκθεσιν τῦ στοιχείυ τῆς στερεότητος παντὸς ἐκ περιαγωγῆς στερεῦ. ἵνα δὲ χρηστώμεθα τῷ τύπῳ τύτῳ ἐπὶ μερικωτέραις περιπτώσεσι,

εἰσακτέον αὐτῷ ἀντὶ υ τὴν αὐτῆ δύναμιν, διὰ χ πορίζομένην ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης AM τῆς τῆ ςερεῦ γεννητρίας, ϗ ὁλοκληρωτέον αὐτόν.

231. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Σφαῖραν κυβίσαι (σχ. 73).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ διάμετρος AB $= 2\eta$, ϗ ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ $= \chi$, ϗ ἡ τεταγμένη ΠΜ $= \upsilon$· ἔςαι τοίνυν, διὰ τὴν φυσικὴν ἰδιότητα τῆ γεννήτορος κύκλυ AMB, $\upsilon^2 = 2\eta\chi + \chi^2$· ἀντικαταςάσει ἄρα τῆς τῆ υ^2 δυνάμεως γίνεται ὁ τύπος $\frac{\pi\upsilon^2\delta\chi}{2\eta} = \pi\chi\delta\chi - \frac{\pi\chi\chi\delta\chi}{2\eta}$, καὶ O $\frac{\pi\upsilon^2\delta\chi}{2\eta} = \frac{\pi}{2\eta}\cdot O\cdot \upsilon\upsilon\delta\chi = \frac{\pi\chi^2}{2} - \frac{\pi\chi^3}{3\,.\,2\eta}$· ἄρα τὸ μέρος τῆς σφαίρας τῆς ἀπογεννωμένης τῷ ἡμίσει τμήματι ΑΠΜ, περιςρεφομένῳ περὶ τὸν ἄξονα AB, ἐςὶν $= \frac{\pi\chi^2}{2} - \frac{\pi\chi^3}{6\eta} = \frac{3\pi\eta\chi^2 - \pi\chi^3}{6\eta}$· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\chi = 2\eta$, ἡ ὅλη σφαῖρα ἔςαι $= \frac{12\,.\,\pi\eta^3 - 8\,.\,\pi\,.\,\eta^3}{6\,.\,\eta} = \frac{4\pi\,.\,\eta^3}{6\eta} = \frac{2}{3}\,.\,\pi\eta^2 = 2\pi\eta\,.\,\frac{1}{3}\,\eta\,.$ ἀλλὰ $\frac{\pi\eta}{2}$ δηλοῖ μέγιςον κύκλον τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας, ϗ $2\pi\eta$ τὸ τετραπλῦν αὐτῦ· ἄρα ἡ ςερεότης τῆς σφαίρας ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ τετραπλῦ μεγίςυ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλυ, ϗ τριτημορίυ τῆς ἀκτῖνος· ὅπερ συνᾴδει τοῖς δεδειγμένοις (Γεωμ. 452, 463).

232. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Κυβίσαι τὴν τῆς ἐλλείψεως κωνοΐδα (σχ. 75).

ΛΥΣΙΣ. Τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσίς ἐστιν $\upsilon\upsilon = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(\alpha\chi - \chi\chi)$ (Τ. Γ. 91)· ὁκοῦν ὁ τύπος $\frac{\pi\upsilon^2\delta\chi}{2\eta}$ γίνεται $\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}$ $\delta\chi\,(\alpha\chi - \chi\chi)$, εἴτ' οὖν, $\frac{\pi.\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\cdot(\alpha\chi\delta\chi - \chi^2\delta\chi)$, οὗ τὸ ὁλόκληρόν ἐστι $\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\times(\frac{\alpha\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3}) + \Gamma$, ἢ ἁπλῶς $\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}(\frac{\alpha\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3})$, εἴπερ ἡ στερεότης ἐκ τοῦ σημείου Α ἄρχοιτο· ἵνα δὲ εὑρεθείη ὅλη ἡ ἐλλειπτικὴ κωνοῖς, ὑποτεθείσθω $\chi = AB = \alpha$· καὶ δὴ πορισθήσεται $\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\times(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{3})$, ὅπερ ἀνάγεται εἰς $\frac{\pi\alpha\beta\beta}{12\eta} = \frac{\pi\beta\beta}{4\eta}$ $\times\frac{1}{3}\alpha = \frac{\pi\beta\beta}{8\eta}\times\frac{2}{3}\alpha$· ἀλλὰ $\frac{\pi\beta\beta}{8\eta}$ ἐμφαίνει τὴν ἐπιφάνειαν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ $\beta = \Delta\delta$, καὶ $\frac{\pi\beta\beta}{8\eta}\times\alpha$ ἐμφαίνει ἑπομένως τὴν στερεότητα κύκλου τῇ ἐλλειπτικῇ κωνοῖδι περιγεγραμμένου· ἐπεὶ ἄρα ἡ τῆς ἐλλειπτικῆς κωνοῖδος στερεότης ἐστὶ $\frac{\pi\beta\beta}{8\eta}\times\frac{2}{3}\alpha$, ὑπάρχει $\frac{2}{3}$ τῆς τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου· ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἐλλειπτικὴ κωνοῖς ἐστιν, ἧς ἴσοι οἱ ἄξονες, καὶ αὕτη ἄρα $\frac{2}{3}$ ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου, ὡς καὶ ἀλλαχοῦ δέδεικται (Γεωμ. 464).

233. ΣΧΟΛΙΟΝ. Βουλομένοις δ' εὑρεῖν τὴν ἀπὸ σημείου διωρισμένου τοῦ Κ ἀρχομένην στερεότητα, θετέον

ΑΚ $= \varepsilon$, ϗ χρηστέον τῷ γενικῷ ὁλοκλήρῳ $\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}(\frac{\alpha\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3}) + \Gamma$· ἐν τῷ εἰρημένῳ ὂν σημείῳ, τὸ ὁλόκληρον γίνεται ο, τῦτ' ἔστιν ὅταν ᾖ $\chi = \varepsilon$· ἄρα $\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}(\frac{\alpha\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3}) + \Gamma = 0$, ϗ ἑπομένως $\Gamma = -\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}(\frac{\alpha\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3})$· ἡ ἄρα ἐκ τῦ Κ ἀρχομένη στερεότης ἔστιν $= \frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}(\frac{\alpha\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3}) - \frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}(\frac{\alpha\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3})$· οὗτος τύπος ὑπάρχει τμήματος ἐλλειπτικῆς κωνοΐδος, ἀπολαμβανομένυ ὑπὸ δύω παραλλήλων ἐπιπέδων, οἷς ὁ ἄξων πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκε, ϗ ὧν τὸ ἀπόστημα ἔστιν $= \chi - \varepsilon$.

234. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Κυβίσαι τὴν παραβολικὴν κωνοΐδα (σχ. 72).

ΛΥΣΙΣ. Ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς ἐστιν $\upsilon\upsilon = \Pi\chi$· ἐκεῦ ὁ τύπος $\frac{\pi\upsilon^2 \delta\chi}{2\eta}$ γίνεται $\frac{\pi\Pi\chi\delta\chi}{2\eta}$, ὗ ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $\frac{\pi\Pi\chi^2}{4\eta} + \Gamma$, ἢ $\frac{\pi\Pi\chi}{2\eta} \times \frac{\chi}{2} + \Gamma$, ἢ (τιθεμένυ ἀντὶ $\Pi\chi$ τῦ $\upsilon\upsilon$) $\frac{\pi\upsilon\upsilon}{2\eta} \times \frac{\chi}{2} + \Gamma$· ἢ (ἐκ τῦ Α τῦ στερεῦ ἀρχομένυ) $\frac{\pi\upsilon\upsilon}{2\eta} \times \frac{\chi}{2}$· ἀλλὰ $\frac{\pi\upsilon\upsilon}{2\eta}$ ἐμφαίνει τὴν ἐπιφάνειαν τῦ κύκλυ, ὗ ἀκτὶς ἡ ΠΜ, εἴτ' ὂν τῆς κατὰ τὴν παραβολικὴν κωνοΐδα βάσεως· ἄρα ἡ παραβολοὶς ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς κατ' αὐτὴν βάσεως, ἐ τῆ κατ' αὐτὴν ἡμίσεως ὕψους χ· ἡμίσεια ἄρα ἐσὶ κυλίνδρου, τὴν αὐτὴν βάσιν ἐ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος.

235. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν δὲ ἡ σερεότης ἄρχηται ἀπὸ σημείου γνωστοῦ τοῦ Κ, ὡς εἶναι ΑΚ $= \varepsilon$, τηνικαῦτα μηδὲν εἶναι δέον τὴν σερεότητα πρὸς τῷ σημείῳ Κ, τοῦτ' ἐσιν ὅταν ἡ $\chi = \varepsilon$, ἐ τὸ γενικὸν ὁλόκληρον ἔσαι ἴσον μηδενὶ, εἴτ' οὖν $\frac{\pi\Pi\chi^2}{4\eta} + \Gamma = 0$, ἐ ἑπομένως $\Gamma = -\frac{\pi\Pi\varepsilon^2}{4\eta}$ ἡ σερεότης ἄρα τμήματος παραβολικῆς κωνοΐδος, ἀπολαμβανομένου ὑπὸ δύω παραλλήλων ἐπιπέδων, ὧν τοῦ μὲν τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀπόσημα $= \chi$, θατέρου δὲ $= \varepsilon$, ὑπάρχει $= \frac{\pi\Pi\chi^2}{4\eta} - \frac{\pi\Pi\varepsilon^2}{4\eta}$.

236. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν μέθοδον ἐ ἡ ὑπερβολικὴ κωνοΐς, εἴτ' οὖν τὸ σερεὸν, τὸ ἀπογεννώμενον περιαγωγῇ τῆς ὑπερβολῆς περὶ ἕνα τῶν ἑαυτῆς ἀξόνων, κυβίζεται· ἤτε ἐλλειπτικὴ κωνοΐς, ἡ περιαγωγῇ τῆς ἐλλείψεως περὶ τὸν αὐτῆς ἐλάσσω ἄξονα ἀπογεννωμένη, ἥτις καὶ ἐ κ τ ε ν ὴ ς καλεῖται, ἀντιδιασελλομένη τῆς ἑτέρας, ἥτις ἐ π ι μ ή κ η ς ὀνομάζεται· εὑρεθήσεται δὲ ὅτι ἡ ἐκτενὴς ἴση ἐσὶ $\frac{2}{3}$ κυλίνδρου αὐτῇ περιγεγραμμένου, τοῦτ' ἐσιν α ἐ β ἀξόνων ὄντων τῆς γεννητρίας ἐλλείψεως, τοῦ μὲν μείζονος, θατέρου δὲ ἐλάσσονος, ἡ μὲν ἐπιμήκης ἐσιν $= \frac{\pi\alpha\beta\beta}{12\eta}$, ἡ δ' ἐκτενὴς $= \frac{\pi\alpha\alpha\beta}{12\eta}$· ἡ ἄρα

ἐπιμήκης ἔςι πρὸς τὴν ἐκτενῆ :: $\frac{\pi\alpha\beta\beta}{12\eta} : \frac{\pi\alpha\alpha\beta}{12\eta}$ :: $\beta : \alpha$, ὥσπερ ὁ ἐλάσσων πρὸς τὸν μείζονα ἄξονα.

237. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Κυβίσαι κωνοΐδα, ἀπογεννωμένην ὑπὸ ἡμιπαραβολῆς ΑΜ, περιενεχθέντος περὶ τὴν αὐτῆ ἁπτομένην ΑΒ (σχ. 76).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ παράμετρος $= \alpha$, ϗ $\mathrm{A}\iota = \mathrm{Z}\nu = \chi$, ϗ $\iota\nu = \mathrm{AZ} = \upsilon$, ϗ $\mathrm{ZB} = \delta\upsilon$· ὁ κῶν κύκλος ὁ ἀκτῖνι τῇ ΖΝ γεγραμμένος ἔςαι $= \frac{\pi\cdot\chi\chi}{2\eta}$, ὅς τις, πολλαπλασιαθεὶς ἐπὶ $\delta\upsilon$ ἀποδώσει τὸ ςοιχεῖον, τὸ ἀπογεννώμενον ὑπὸ τῦ ἐπιπέδυ $\mathrm{BMZ}\nu = \frac{\pi\chi^2\delta\upsilon}{2\eta} = \frac{\pi\upsilon^4\delta\upsilon}{2\alpha^2\upsilon}$

(ὅτι $\chi^2 = \frac{\upsilon^4}{\alpha\alpha}$, πηγάζον ἐκ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην φύσεως·) ἓ τὸ ὁλόκληρόν ἐςι $\frac{\pi\upsilon^5}{10\alpha^2\eta} = \frac{\pi\alpha^2\chi^2\upsilon}{10\alpha^2\eta} = \frac{\pi\chi^2\upsilon}{10\cdot\eta}$, τιθεμένε τῆ $\alpha^2\chi^2$ ἀντὶ υ^4· ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi = \mathrm{A\Pi} = \beta$, ϗ $\mathrm{\Pi M} = \upsilon = \vartheta$, ἡ ἐκ τῆ ἐπιπέδε AMB ἀπογεννηθεῖσα κωνοῖς ἔςαι $= \frac{\pi\beta^2\vartheta}{10\eta}$· ἀλλὰ κύκλος, ἓ ἡ ἀκτὶς $= \beta$, ἔςιν $= \frac{\pi\beta^2}{2\eta}$· ἐὰν αὕτη ἡ ποσότης πολλαπλασιαθῇ ἐπὶ ϑ, πορισθήσεται κύλινδρος ὁ $\frac{\pi\beta^2\vartheta}{2\eta}$, ὃς ἔςαι πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν κωνοῖδα :: $\frac{\pi\beta^2\vartheta}{2\eta} : \frac{\pi\beta^2\vartheta}{10\eta}$

$:: \frac{1}{2\eta} : \frac{1}{10\eta} :: 10\eta : 2\eta :: 10 : 2 :: 5 : 1$· ῥᾳςα δ' ἐκ τέτων συνάγεται, ὅτι κωνοῖς ἡ ἀπογεννηθεῖσα ἐκ τῦ ἐπιπέδυ ΑΠΜ ἐςιν $= \frac{2\pi\beta^2\vartheta}{5\eta}$, ὃ δὴ ἀκριβῶς συνᾴδει τοῖς προαποδεδειγμένοις (234).

238. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'. Κυβίσαι κωνοῖδα ὑπερβολικὴν, ἀπογεννωμένην ὑπὸ τῦ ἐπιπέδυ ΣΡμκ ἐν τῷ τὴν κυκλικὴν ὑπερβολὴν ΖΜΣ περιάγεσθαι περὶ τὴν ἀσύμπτωτον ΑΡ (σχ. 77).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἐξίσωσις τῆς κυκλικῆς ὑπερβολῆς ἡ $\upsilon\chi = \alpha^2$, ϗ ὑποτεθείσθω ΑΡ = ΡΣ = α· ὑκῦν ἔςαι $\upsilon^2 = \frac{\alpha^4}{\chi\chi}$· ἄρα $\frac{\pi}{2\eta} \times O\upsilon^2\delta\chi = \frac{\pi}{2\eta}.O\frac{\alpha^4}{\chi^2}\delta\chi = \frac{\pi}{2\eta}. O\,\alpha^4\,\chi^{-2}\delta\chi = -\frac{\pi}{2\eta}\alpha^4\,\chi^{-1} + \Gamma$· ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ ἀμετάβλητος Γ, σημειωτέον, ὅτι τὸ ζητέμενον ςερεὸν ὀφείλει ὑπάρχειν $= o$, ὅταν ᾖ $\chi = AP = \alpha$· ἄρα $-\frac{\pi}{2\eta}\alpha^3 + \Gamma = o$, ϗ $\Gamma = +\frac{\pi\alpha^3}{2\eta}$· τὸ δὲ πλῆρες ὁλόκληρον ἔςαι $= \frac{\pi\alpha^3}{2\eta} - \frac{\pi\alpha^4}{2\eta\chi}$· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\chi = \infty$, τὸ ςερεὸν γίνεται $= \frac{\pi\alpha^3}{2\eta}$· ἀλλὰ $\frac{\pi\alpha^2}{2\eta}$ παρίςησι κύκλον, ἓ ἡ ἀκτὶς $= \alpha$, ϗ $\frac{\pi\alpha^3}{2\eta}$ κύλινδρον, ἓ ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς βάσεως ἐςιν $= \alpha$, τὸ δὲ ὕψος ϗ αὐτὸ $= \alpha$, ἢ κύλινδρον γεγραμμένον ἐκ τῆς τῦ ΑΡΣΤ ἐπιπέδυ περὶ τὴν

ΑΓ εὐθεῖαν περιαγωγῆς· ἄρα ὁ κύλινδρος ὗτος ἴσος ἐςὶ τῇ ἀπειρομήκει κωνοΐδι τῇ γεγραμμένῃ ΡΣΜκ (*).

239. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'. Εὑρεῖν τὴν ςερεότητα τμήματος κυλινδρικῦ τῦ ΑΔΒΕ, τῦ ἀπογεννωμένυ, εἰ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ ΔΑΒ, πλαγίῳ τῇ τῦ κυλίνδρυ βάσει, ἐ͵ διὰ τῦ κέντρυ αὐτῆς διήκοντι, τμηθείη (σχ. 78.)

ΛΥΣΙΣ. Ἐπινενοήσθω τὸ ςερεὸν τῦτο τετμημένον ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων, ἔγγιςα ἀλλήλοις, ἐ͵ καθέτων τῇ βάσει ΑΕΒ (σχ. 79), αἱ τοίνυν τομαὶ ἔσονται τρίγωνα ὅμοια, κάθετα τῇ τῦ τμήματος βάσει, εἴγε αἱ αὐτῶν γωνίαι, κείμεναι ἐπὶ τῆς διαμέτρυ ΑΒ, καθέτυ τῇ ΕΚ, ἔσονται ἴσαι· ἐ͵ ἑπομένως ἔσονται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα· ὑκῦν κληθείσης η τῆς ἀκτῖνος ΚΕ τῆς βάσεως, ἐ͵ ψ τῦ ὕψυς ΔΕ, ἐ͵ υ τῆς ΠΜ βάσεως τῦ τριγώνυ ΠΜΝ, πορισθήσεται ΚΕΔ : ΠΜΝ :: $\eta\eta : \upsilon\upsilon$· ἀλλὰ $\text{ΚΕΔ} = \frac{\eta\psi}{2}$· ἄρα $\text{ΠΜΝ} \ \frac{\eta\psi\upsilon\upsilon}{2\eta\eta} = \frac{\psi\upsilon\upsilon}{2\eta}$· κληθείσης ἄρα τῆς $\text{ΑΠ} = \chi$, ἔςαι τὸ πάχος Ππ τῆς ὑπὸ δύο προσεχῶν ἐπιπέδων ἀπολαμβανομένης ςιβάδος, $= \delta\chi$· αὐτὴ δὲ ἡ ςιβὰς $= \frac{\psi\upsilon\upsilon\delta\chi}{2\eta}$· ἀλλὰ υ ἐςὶν ἡ τεταγμένη τῦ εἰς βάσιν ὑποκειμένυ κύκλυ, ἐ͵ ἐν αὐτῷ ἐςὶν ἑπομένως $\upsilon\upsilon = 2\eta\chi - \chi\chi$· ἡ ἄρα ςοιχειώδης ςι-

---

(*) Περὶ τῦ ἐξαισίυ τύτυ ἰδιώματος τῆς ὑπερβολῆς, ὅρα ἐ͵ Νικηφ. Θεοτ. Στοιχ. Μαθημ. τόμ. Β. Σελ. 208. εὑρετὴς δὲ τύτυ ἐγένετο ὁ ἐκ Φαίνσης Τορικέλλιος ὁ τῦ Γαλιλαίυ ἀκροατὴς, ὁ κατὰ τὸ 1647 ἔτος τὸν βίον μεταλλάξας.

βὰς γίνεται $\frac{\upsilon\delta\chi.(2\eta\chi - \chi\chi)}{2\eta}$, ἢ $\frac{\upsilon}{2\eta}$. $(2\eta\chi\delta\chi - \chi\chi\delta\chi)$, ὗ τὸ ὁλόκληρον, τοῦ στερεοῦ ἀπὸ τοῦ Α ἀρχομένου, ἐστιν $\frac{\upsilon}{2\eta}(\eta\chi^2 - \frac{\chi^3}{3})$· εἰς ἄρα εὕρεσιν ὅλου τοῦ στερεοῦ ὑποτεθείσθω $\chi = 2\eta$· ὅθεν πρόεισιν $\frac{\upsilon}{2\eta} \times (4\eta^3 - \frac{8\eta^3}{3})$ εἴτ' οὖν $\frac{2}{3}\upsilon\eta^3 = \frac{\upsilon\eta}{2} \times \frac{4}{3}\eta =$ ΚΕΔ $\times \frac{4}{3}$ ΑΚ $=$ ΚΕΔ $\times \frac{2}{3}$ ΑΒ, τοῦτ' ἐστι δυσὶ τριτημορίοις τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μὲν τὸ τρίγωνον ΚΕΔ, ὕψος δὲ ἡ διάμετρος ΑΒ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ ὁλοκληρώσεως ποσοτήτων, αἷς ἐνυπάρχουσιν ἡμίτονα καὶ συνημίτονα.

240. Ἡ ὁλοκλήρωσις τῶν, αἷς ἔνεστιν ἡμίτονα καὶ συνημίτονα, ποσοτήτων ἐπερείδεται ὅλως τοῖς ἀποδοθεῖσι (35) περὶ τῆς λήψεως τῶν κατ' αὐτὰς ἀπειροστῶν· εἴδομεν οὖν ἐκεῖθι, ὅτι δ(ημ.ψ) = δψ. συνημ.ψ, καὶ δ (συνημ. ψ) = — δψ. ημ. ψ. ἐναλλὰξ ἄρα, τὸ ὁλόκληρον τοῦ δψ. συνημ. ψ ἔσαι ημ. ψ, ἢ γενικώτερον ημ. ψ + Γ, ὃ καὶ αὐτὸ ἔχει τὸ προτεθὲν ἀπειροστόν· ὡσαύτως τὸ ὁλόκληρον τοῦ — δ. ψ. ημ. ψ. ἔσαι συνημ ψ + Γ· εἰς ταύτας δὲ τὰς δύω περιπτώσεις ἀνάγεται ἡ ὁλοκλήρωσις πασῶν τῶν ἄλλων ποσοτήτων, αἳ σύγκεινται ἐξ ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων, διατηροῦσι καὶ τοὺς ἐς δεῦρο ἀποδοθέντας γενικοὺς κανόνας τῆς ὁλοκληρώσεως.

Τὸ τοίνυν ὁλόκληρον τȣ̃ δψ συνημ. 3 ψ, εἴτ' οὖν $\frac{3\,\delta\psi\ \text{συνημ.}\ 3\psi}{3}$, ἔςαι $\frac{\text{ἡμ.}\ 3\psi}{3}$ + Γ· ὡσαύτως τὸ ὁλόκληρον τȣ̃ δψ. ἡμ. 3ψ εὑρεθήσεται, γραφέντος $\frac{-3\,\delta\psi.\ \text{ἡμ.}\ 3\psi}{-3}$, ȣ̃ ὁλόκληρον ἔςαι τὸ $\frac{\text{συνημ.}\ 3\psi}{-3}+\Gamma$.

Ἐν γένει δὲ, Οδψ.ἡμ· μψ (τȣ̃ μ ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος ἄτρεπτον) μεταβάλλει εἰς $\frac{O - \mu\delta\psi.\ \text{ἡμ.}\ \mu\psi}{-\mu}$, ȣ̃ ἀποκαθίςαται $\frac{-\ \text{συνημ.}\ \mu\psi}{\mu} + \Gamma$.

Ἐὰν δὲ προκέηται (ἡμ. ψ)$^\nu$ δψ. συνημ. ψ, παρατηρητέον ὡς αὕτη ἡ ποσότης ταυτίζεται τῇ (ἡμ. ψ)$^\nu$ δ (ἡμ. ψ)· ἀλλ' ἐκληφθεῖσαν τὴν ἡμ. ψ ὡς ἁπλῶς τρεπτὴν ποσότητα ὁλοκληρώσαντες διὰ τȣ̃ γενικȣ̃ κανόνος, ἕξομεν $\frac{(\text{ἡμ.}\ \psi.)^{\nu+1}}{\nu+1} + \Gamma$.

Ἐὰν ᾖ τὸ προκείμενον ἀπειροςὸν (ἡμ. μψ)$^\nu$ δψ. συνημ. μψ, γραπτέον αὐτὸ $\frac{(\text{ἡμ.}\ \mu\psi)^\nu\,\mu\delta.\psi\ \text{συνημ.}\ \mu\psi}{\mu}$, ὅπερ ταυτίζεται τῷ $\frac{(\text{ἡμ}.\mu\psi)^\nu\ \delta(\text{ἡμ}.\mu\psi)}{\mu}$, ȣ̃ ὁλόκληρόν ἐςι τὸ $\frac{(\text{ἡμ}.\mu\psi)^{\nu+1}}{\mu(\nu+1)}$.

Ὡσαύτως, ἵν' ὁλοκληρωθῇ τὸ (συνημ. μψ)$^\nu$ δψ ἡμ. μψ, γραπτέον $\frac{(\text{συνημ.}\ \mu\psi)^\nu.-\mu\delta\psi.\ \text{ἡμ}.\mu\psi}{-\mu}$, ȣ̃περ ὁλόκληρόν ἐςι τὸ $\frac{(\text{συνημ}.\mu\psi)^{\nu+1}}{-\mu(\nu+1)} + \Gamma$.

Ἐὰν δὲ προκέηται εἰς ὁλοκλήρωσιν δψ ἡμ. πψ. συνημ. κψ, ἀναμνηςέον (Γεωμ. 507) ὅτι α, β δυεῖν οἱωνδήποτε γωνιῶν ὄντων, ἐςιν ἡμ $(\alpha+\beta) =$ ἡμ. α. συνημ. β $+$ ἡμ. β. συνημ. α· καὶ ἡμ $(\alpha-\beta) =$ ἡμ. α. συνημ. β $-$ ἡμ. β. συνημ. α· ὅθεν συνάγεται ἡμ. α συνημ. $\beta = \frac{1}{2}$ ἡμ. $(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}$ ἡμ. $(\alpha-\beta)$. ὡσαύτως ἐπεί (Γεωμετ. 508) ἐςι συνημ. $(\alpha+\beta)$ συνημ. α. συνημ. β $-$ ἡμ. α. ἡμ. β· καὶ συνημ. $(\alpha-\beta) =$ συνημ. α. συνημ. β $+$ ἡμ. α. ἡμ. β, πορισθήσεται συνημ. α $\times$ συνημ. $\beta = \frac{1}{2}$ συνημ. $(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}$συνημ. $(\alpha-\beta)$, καὶ ἡμ. α $\times$ ἡμ. $\beta = \frac{1}{2}$ συνημ. $(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}$ συνημ. $(\alpha+\beta)$.

Ἐκ τούτων τοίνυν τῶν ἀρχῶν τραπείη ἂν τὸ ἡμ. πψ $\times$ συνημ. κψ εἰς $\frac{1}{2}$ ἡμ. $(\pi\psi+\kappa\psi) + \frac{1}{2}$ ἡμ. $(\pi\psi - \kappa\psi) = \frac{1}{2}$ ἡμ. $(\pi+\kappa)\psi + \frac{1}{2}$ ἡμ. $(\pi-\kappa)\psi$· ὅθεν ὁλοκληρωτέον ἔςαι τὸ $\frac{1}{2}$ δψ ἡμ. $(\pi+\kappa)\psi + \frac{1}{2}$ δψ ἡμ. $(\pi-\kappa)\psi$, οὗτινος, γραφέντος οὕτω, $\frac{1}{2}$

$$\frac{(\pi+\kappa)\,\delta\psi \times \text{ἡμ.}\,(\pi+\kappa)}{\pi+\kappa} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{(\pi-\kappa)\,\delta\psi \times \text{ἡμ.}\,(\pi-\kappa)\psi}{(\pi-\kappa)},$$ ὁλόκληρον προδήλως ἐςὶ τὸ $$\frac{-\frac{1}{2}\,\text{συνημ.}\,(\pi+\kappa)\,\psi}{\pi+\kappa} - \frac{\frac{1}{2}\,\text{συνημ.}\,(\pi-\kappa)\psi}{\pi-\kappa} + \Gamma.$$

Ὁλοκληρωθήσεται ὡσαύτως τὸ δψ. ἡμ. πψ συνημ. κψ. ἡμ. ρψ κτ, μετατρεπομένων τῶν δὲ τῶν γινομένων εἰς ἡμίτονα, ἢ συνημίτονα, τοῦ ἀθροίσματος, ἢ τῆς διαφορᾶς, τῶν τόξων πψ, κψ, ρψ κτ διὰ τῶν αὐτῶν ἀρχῶν.

Ἐὰν προτεθῇ δψ (ἡμ. $\psi)^3$, μεταβαλεῖ εἰς δψ. ἡμ. ψ (ἡμ. $\psi)^2$· ἀλλὰ (ἡμ. $\psi)^2$, ἢ ἡμ. ψ $\times$ ἡμ. ψ ἐςι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀρχὴν, $= \frac{1}{2}$ συνημ. $(\psi-\psi) - \frac{1}{2}$

συνημ. $(\psi+\psi) = \frac{1}{2}$ συνημ. $0 - \frac{1}{2}$ συνημ. $2\psi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ συνημ. 2ψ, εἰ συνημ. $0 = 1$· ἄρα ἡμ. ψ (ἡμ. $\psi)^2 = \frac{1}{2}$ ἡμ. $\psi - \frac{1}{2}$ ἡμ. $\psi \times$ συνημ. 2ψ. ἄρα δψ (ἡμ. $\psi)^3 = \frac{1}{2}$ δψ. ἡμ. $\psi - \frac{1}{2}$ δψ. ἡμ. ψ. συνημ. 2ψ. γενήσεται ἄρα ἡμ. ψ. συνημ. 2ψ, ὥσπερ γέγονε καὶ ἐπὶ τοῦ ἡμ. $\pi\psi$. συνημ. $\kappa\psi$, καὶ εὐπετῶς ὁλοκληρωθήσεται· δῆλον ἄρα, ὅπως ὁλοκληρωθήσεται τὸ δψ (ἡμ. $\psi)^\nu$, τοῦ ν ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικὸν ἐμφαίνοντος· κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τὸ δψ (συνημ. $\psi)^\nu$· δυνατὸν ἄρα διὰ τῶν ἐκτεθειμένων τῶνδε ἀρχῶν ὁλοκληρῶσαι καὶ τὰς τοιουτώδεις ποσότητας δψ (ἡμ. $\pi\psi)^\mu$ (συνημ. $\kappa\psi)^\nu$ (ἡμ. $\rho\psi)^\sigma$ κτ. τῶν μ, ν, σ ἀριθμοὺς ὁλοχερεῖς ὑπαρκτικοὺς ἐμφαινόντων.

Τελευταῖον δὲ, διὰ τῶν ἀρχῶν τούτων, καὶ τῶν προαποδεδομένων εἰς ὁλοκλήρωσιν κανόνων, ὁλοκληρωθήσεται ἅπαν ἀπειροστὸν, ἡμίτονα καὶ συνημίτονα περιέχον, ὅταν ὑπάρχῃ γεωμετρικῆς ὁλοκληρώσεως ἐπιδεκτικόν· ἀλλὰ καὶ ὅταν ἁπτομένας περιέχῃ, αναχθήσεται εἰς τὰ ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων περιεκτικὰ, παρατηροῦσι μόνον, ὅτι απ. $\psi = \frac{\text{ἡμ. } \psi}{\text{συνημ. } \psi}$ (Γεωμ. 502).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τοῦ τρόπου τοῦ διὰ προσεγγίσεως ὁλοκληροῦν, καί τινων αὐτοῦ χρήσεων.

241. Τὰς μονωνύμους τῶν ἀπειροστῶν ποσοτήτων οὐδὲ λόγου ἀξιοῦμεν ἐνταῦθα, ὡς μαλ' εὐπετῶς ἀεὶ, ὡς εἴδομεν, ὁλοκληρουμένας· μόνας δέεται τὰς πολυωνύμους κατὰ τὰ ἐφεξῆς ἡμῖν ἀπαντήσοντα ὑποδείγματα.

Ἡ δὲ τέχνη τῆ διὰ προσεγγίσεως ὁλοκληρῶν ἐν τῷ μεταβάλλειν κεῖται τὴν προτιθεμένην ποσότητα εἰς σειρὰν μονωνύμων, ὧν ἡ δύναμις προϊοῦσα ἀπομειοῦται· ἑκάστου γὰρ ὅρου τηνικαῦτα εὐχερῶς ὁλοκληρουμένου, ἀπόχρη λαβεῖν αὐτῶν ἱκανούς τινας, ὅσους ἐμφαίνειν παρὰ μικρὸν ἅπασαν τὴν τοῦ ὁλοκλήρου δύναμιν.

242. Ὃν δ' ἀπεδώκαμεν κανόνα (Συμ. Λ. 152) τοῦ πᾶσαν ποσότητα εἰς βαθμὸν τὸν προκείμενον αἴρειν, τῷ αὐτῷ κἀνταῦθα χρησόμεθα εἰς τὴν διὰ προσεγγίσεως ὁλοκλήρωσιν.

243. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὐθῦναι τὸ κυκλικὸν τόξον ΑΜ διὰ τοῦ αὐτοῦ παρημιτόνου ΑΠ ($\sigma\chi$. 73).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω τόξον ἐλάχιστον τὸ Μμ· ἀχθείσης οὖν τῆς Μρ παραλλήλου τῇ ΑΠ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ἀκτῖνος ΚΜ, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΠΜ, Μρμ, ἔσται ΠΜ : ΚΜ : : Μρ : Μμ· ἀλλὰ γὰρ κληθείσης, τῆς μὲν ΑΠ $= \chi$, τῆς δὲ διαμέτρου ΑΒ $= \alpha$, ἢ $= 1$ (διὰ τὸ ἁπλούστερον), ποριοθήσεται Μρ $= \delta\chi$, καὶ ΚΜ $= \frac{1}{2}$, καὶ ΠΜ $= \sqrt{(\chi - \chi\chi)}$· ἄρα $\sqrt{(\chi - \chi\chi)} : \frac{1}{2} : : \delta\chi :$ Μμ $= \dfrac{\frac{1}{2}\delta\chi}{\sqrt{(\chi - \chi\chi)}}$, καὶ ἑπομένως ΑΜ $= \text{O}\dfrac{\frac{1}{2}\delta\chi}{\sqrt{(\chi - \chi\chi)}}$· αὕτη δὲ ἡ ποσότης ὁλοκλήρωσιν οὐκ ἐπιδέχεται διὰ τῶν προαποδεδομένων κανόνων· διὸ δὴ μεταβλητέον αὐτὴν εἰς

$$\text{O}\frac{\frac{1}{2}\delta\chi}{\chi^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1-\alpha)}},$$ ἔπειτα εἰς $\text{O}\ \frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\,\delta\chi(1-\chi)^{-\frac{1}{2}}$.

τὸ δὲ $(1-\chi)^{-\frac{1}{2}}$ ἀνακτέον (Συμβ. Λογ. 149) εἰς σειράν· ὅθεν δι' ἀναγωγῆς εὑρεθήσεται $(1-\chi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\chi + \frac{3}{8}\chi^2 + \frac{5}{16}\chi^3 + \kappa\tau.$· ἄρα $\text{O}\ \frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\ \delta\chi\ (1-\chi)^{-\frac{1}{2}} = \text{O}\,\frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\ \delta\chi\ (1 + \frac{1}{2}\chi + \frac{3}{8}\chi^2 + \frac{5}{16}$

$\chi^3 + \kappa\tau.) = \int (\frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\,\delta\chi + \frac{1}{4}\chi^{\frac{1}{2}}\,\delta\chi + \frac{3}{16}\chi^{\frac{3}{2}}\,\delta\chi + \frac{5}{32}\chi^{\frac{5}{2}}\,\delta\chi + \kappa\tau.) = \frac{\frac{1}{2}\chi^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}\chi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{3}{16}\chi^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{\frac{5}{32}\chi^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \kappa\tau. = \chi^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\chi^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}\chi^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}\chi^{\frac{7}{2}} +$ κτ., ποσότης, ἣ οὐδέν ἐςι προςθεῖναι ποσὸν ἄτρεπτον, εἴγε, ὅταν ἡ $\chi = 0$, ϗ αὕτη φέρεται εἰς 0, ὥσπερ ϗ ἔχειν ἐπάναγκες, ὅτι τὸ ἐμφαινόμενον ὑπ' αὐτῆς τόξον ΑΜ τηνικαῦτα ὑπάρχει μηδέν.

Δυνατὸν δὲ, διὰ τὸν κοινὸν πολλαπλασιαςὴν $\chi^{\frac{1}{2}}$, μετασχηματίσαι τὴν τοῦ ΑΜ τόξου ἔκθεσιν εἰς τήνδε $\chi^{\frac{1}{2}}$ $(1 + \frac{1}{6}\chi + \frac{3}{40}\chi^2 + \frac{5}{112}\chi^3 + \kappa\tau.)$· τὸ δὲ παρημίτονον χ, ἀεὶ ἔλαττον ὂν τῆς διαμέτρου 1 (πλὴν εἰ ζητοῖτο ἡ τῆς ἡμιπεριφερείας εὔθυνσις), ἀεί ἐςι κλάσμα, ϗ ἑπομένως αἱ δυνάμεις τῶν τῆς σειρᾶς ὅρων ἀπομειωθήσονται τοσούτῳ μᾶλλον, ὅσῳ τὸ παρημίτονον τοῦ ζητουμένου τόξου ὑπάρχει ἔλαττον· θηρευομένοις οὖν, φέρ' εἰπεῖν, τὸ μῆκος τόξου, οὗ τὸ παρημίτονον ἑκατοςημόριον ἂν εἴη τῆς διαμέτρου, ἔςαι $\chi = \frac{1}{100} = 0{,}01$, ϗ ἑπομένως $\chi^{\frac{1}{2}} = 0{,}1$· εὑρεθήσεται ἄρα τοῦ τόξου τοῦδε δύναμις ἡ $0{,}1$ $[1 + \frac{0{,}01}{6} + \frac{3(0{,}01)^2}{40} + \frac{5}{112}\cdot(0{,}01)^3]$· ϗ ἐπείπερ ὁ ἐφεξῆς ὅρος ταύτης τῆς σειρᾶς ἑκατοντάκις ἐλάττων ἐςὶ τοῦ ἐσχάτου τῶν ἐκτεθέντων (ἕκαςος γὰρ ἑκατοςημόριόν ἐςι τοῦ ἡγησαμένου, ἐξετάσασιν, ἥτις ἐςὶν ἡ δύναμις τοῦ ὅρου $\frac{5}{112}(0{,}01)^3$), ἐξέςαι λαβεῖν αὐτοῦ τὸ ἑκατοςημόριον, ϗ γνῶναι τὴν ἀκρίβειαν τῆς τοῦ τόξου δυνάμεως, ἐκδηλυμένης διὰ τῶν τεσσάρων ἀρκτικῶν ὅρων· ἀλλὰ $\frac{1}{112}(0,01)^3 = \frac{1}{112}(0,000001) = \frac{0,000005}{112}$ $= 0,0000446$, ὅπερ ἑκατοςημόριόν ἐςι τὸ $0,000000000446$· δυνατὸν ἄρα ἀδεῶς ἐκτιμῆσαι ἕκαςον ὅρον τῆς καθ' ἡμᾶς ταύτης σειρᾶς ἕως δεκαδικῶν 10, μηδόλως διςάσαντας, μὴ ἡ ἐντεῦθεν ποιῦσα τῦ τόξυ δύναμις ἐλλειπὴς τῦ ἀληθῦς εἴη μονάδι κατὰ τὸν ἔννατον χῶρον· ὅθεν ἕξομεν, $\frac{1}{112}(0,01)^3 = 0,0000000446$, $\frac{1}{40}$ $(0,01)^2 = 0,0000075000$, $\frac{0,01}{6} = 0,0016666666$· ἄρα τὸ κεφάλαιον τῆς σειρᾶς ἔςαι $0,1\,(1,0016742112)$, ἢ τελευταῖον (ἀρκεσθεῖσιν ἐννέα δεκαδικοῖς) $0,100167421$· ἀδεῶς δ' ἂν εὑρεθείη καὶ ὁ δέκατος ὅρος· τοιαύτη ἄρα ἐςὶν ἡ δύναμις τῦ τόξυ, ὃ τὸ παρημίτονον ἑκατοςημόριόν ἐςι τῆς ἀκτῖνος.

244. ΠΟΡΙΣΜΑ. Εἰ τοίνυν ἐγινώσκομεν, ὁσάκις ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν τῦδε τῦ τόξυ ἐμπεριέχοιτο ταῖς 360°, πολλαπλασιάσαντες τόδε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸν, ὁσάκις ἐμπεριέχονται αἱ μοῖραι τῦ τόξυ ταῖς 360°, ἐμφαίνοντα ἀριθμὸν, εὑρίσκομεν ἂν τὸ προσεχὲς τῇ κυκλικῇ περιφερείᾳ μῆκος· ἀγνοεῖται μέντοι ὁ λόγος ὗτος.

245. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπειδὴ (Γεωμ. 495) τὸ ἡμίτονον τῦ 30° ἥμισύ ἐςι τῆς ἀκτῖνος· γινωσκομένυ δὲ τῦ ἡμιτόνυ εὐχερῶς εὑρίσκεται τὸ παρημίτονον (Γεωμ. 494)· δυνατὸν ἄρα λαβεῖν ἐν τῷ λογισμῷ τὸ παρημίτονον τῦ 30°, καὶ ἀντὶ χ ἀντικαταςῆσαι ἐπὶ τῆς εἰρημένης σειρᾶς· πολλαπλασιάσαντας δὲ τὸ ἀποτελεσθὲν ἐπὶ 12, ὃς ἐμφαίνει ὁσάκις τὸ 30° ἔνεςι ταῖς 360°, εὑρεῖν τὸ τῇ κυκλι-

κῇ περιφερείᾳ προσεχὲς μῆκος· ἀλλ' ἐπείπερ ἡ σειρὰ βραχύτι συγκλίνει, ὡς δεῖσθαι πολλῶν ὅρων εἰς εὕρεσιν τῦ ἔγγιον τῇ περιφερείᾳ μήκυς, χρησόμεθα πρὸς τῦτο μεθόδῳ ἑτέρᾳ διὰ τῦ ἐφεξῆς προβλήματος.

246. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Κύκλυ τόξυ δοθὲν ἑτέρῳ λόγῳ εὐθῦναι (σχ. 80).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθωσαν, ἥτε ἁπτομένη AN, ϗ ἡ τέμνυσα KMN, ϗ αὐτῇ προσεχεστάτη τέμνυσα ἡ Kμν, ϗ κέντρῳ μὲν τῷ K, διαστήματι δὲ τῷ KN, γεγράφθω τόξον ἐλάχιστον τὸ Nρ, ὅπερ ἂν ἐκληφθείη ὡς κάθετος τῇ Kν· ὅθεν τὸ τριγωνίδιον Nρν ὅμοιον ἔσαι τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ KAν· παρὰ γὰρ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, κοινὴν ἔχυσι τὴν πρὸς τῷ ν· ἔσαι ἄρα ὅμοιον ϗ τῷ τριγώνῳ KAN, τῷ ἐλάχιστα διενηνοχότι τῦ KAν· ἄρα KN : KA :: Nν : Nρ $= \frac{KA \times N\nu}{KN}$· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τομέων KNρ, KMμ, ἔσι KN : KM, ἢ KA :: Nρ $= \frac{KA \times N\nu}{KN}$: Mμ $=$ $\frac{KA^2 \times N\nu}{KN^2}$· κληθέντος ὖν τῦ $AN = \chi$, ϗ τῆς ἀκτῖνος $KA = \alpha$, ἔσαι $N\nu = \delta\chi$, ϗ $KN = \sqrt{(\alpha\alpha + \chi\chi)}$· ἄρα ἡ τῦ Mμ δύναμις γενήσεται $\frac{\alpha\alpha\delta\chi}{\alpha\alpha + \chi\chi}$· ἄρα OMμ $=$ $AM = O.\ \frac{\alpha\alpha\delta\chi}{\alpha\alpha + \chi\chi}$· αὕτη ὖν ἡ ποσότης ἀκριβῶς ἐχ ὁλοκληρῦται· ἵνα δὲ ὡς ἔγγιςα τῦτο γένηται, μεταχηματιςέον αὐτὴν εἰς τὴν $O.\ \alpha\alpha\delta\chi\ (\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1}$· ϗ δὴ εὑρεθείσης (Συμβ. Λογ. 149, 548) τῆς $(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1} =$

$\alpha^{-2}(1 - \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\chi^4}{\alpha^4} - \frac{\chi^6}{\alpha^6} + \frac{\chi^8}{\alpha^8} - \kappa\tau.)$, ποριωθήσεται $O.\alpha\alpha\delta\chi(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1} = O.\delta\chi(1 - \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\chi^4}{\alpha^4} - \frac{\chi^6}{\alpha^6} + \frac{\chi^8}{\chi^8} - \kappa\tau.) = O.(\delta\chi - \frac{\chi^2\delta\chi}{\alpha^2} + \frac{\chi^4\delta\chi}{\alpha^4} - \frac{\chi^6\delta\chi}{\alpha^6} + \frac{\chi^8\delta\chi}{\alpha^8} - \kappa\tau.) = \chi - \frac{\chi^3}{3\alpha^2} + \frac{\chi^5}{5\alpha^4} - \frac{\chi^7}{7\alpha^6} + \frac{\chi^9}{9\alpha^8} - \kappa\tau.) = \chi(1 - \frac{\chi^2}{3\alpha^2} + \frac{\chi^4}{5\alpha^4} - \frac{\chi^6}{7\alpha^6} - \frac{\chi^8}{9\alpha^8} - \kappa\tau.)$. Λοιπὸν ἓν ἐστὶν εἰδέναι, εἰ τόξον ἐγνωσμένον, ὁσάκις ἐμπεριέχεται τῇ περιφερείᾳ, ἔχει γνωστὴν ἀπτομένην· ἀλλὰ τὸ 45° τόξον, ὀκτάκις ἐμπεριεχόμενον τῇ περιφερείᾳ, ἀπτομένην ἔχει τῇ ἀκτῖνι ἴσην (Γεωμ. 498)· ὑποτεθέντος ἄρα τοῦ $\chi = \alpha$, τὸ μῆκος τοῦ 45° τόξου ἐμφανεῖ ἡ σειρὰ $\alpha.(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \kappa\tau.)$· ἀλλ' ἐπείπερ οἱ ὅροι ταύτης τῆς σειρᾶς πάνυ βραδέως ἀπομειοῦνται, σκεπτέον, εἰ ἄρα δυναίμεθα τὸ 45° τόξον ἀναλῦσαι εἰς δύω ἕτερα, ὧν εἶεν αἱ ἀπτόμεναι γνωσταί· οὐδὲν δὲ ὅλως συμφέρει εἰδέναι τὸν τῶν μοιρῶν ἑκατέρου τούτων ἀριθμὸν, εἰ μόνον ἄμφω 45° πληρῶεν· διὰ γὰρ τῶν αὐτῶν ἀπτομένων εὑρεθέντων τῶν κατ' αὐτὰ μήκεων, συνάψαντες αὐτὰ, ἕξομεν τὸ μῆκος τοῦ 45° τόξου· ἐπεὶ δὲ ἑκάτερον ἔλαττον ἔσται τοῦ 45°, ἑκατέρα τῶν αὐτῶν ἀπτομένων ἐλάττων ἔσται τῆς ἀκτῖνος, καὶ ἡ σειρὰ συγκλινεῖ τάχιον, καὶ ὁ λογισμὸς τελεσθήσεται ῥᾷον.

Ἀλλὰ τὰ εἰρημένα (Γεωμ. 502) παρέχεται ἡμῖν τὴν μέθοδον τοῦ εὑρεῖν δύω τοιάδε τόξα· καὶ γὰρ ὁποιωνοῦν ὄντων δύω τόξων τῶν α, β, ἔσαι απ. $(\alpha+\beta) =$

$$\frac{\text{ημ.}\,(\alpha+\beta)}{\text{συνημ.}\,(\alpha+\beta)} = \frac{\text{ημ.}\,\alpha \times \text{συνημ.}\,\beta + \text{ημ.}\,\beta \times \text{συνημ.}\,\alpha}{\text{συνημ.}\,\alpha \times \text{συνημ.}\,\beta - \text{ημ.}\,\beta \times \text{ημ.}\,\alpha}$$

(Γεωμ. 507, 508)· ἄρα διαιρεθέντος τούτου τοῦ τύπου ἄνω καὶ κάτω διὰ συνημ. $\alpha \times$ συνημ. β εὑρεθήσεται απ. $(\alpha+\beta) =$

$$\frac{\dfrac{\text{ημ.}\,\alpha}{\text{συνημ.}\,\alpha} + \dfrac{\text{ημ.}\,\beta}{\text{συνημ.}\,\beta}}{1 - \dfrac{\text{ημ.}\,\alpha \times \text{ημ.}\,\beta.}{\text{συνημ.}\,\alpha \times \text{συνημ.}\,\beta}},$$

τοῦτ' ἔστιν απ. $(\alpha+\beta) =$

$$\frac{\text{απ.}\,\alpha + \text{απ.}\,\beta}{1 - \text{απ.}\,\alpha + \text{απ.}\,\beta}$$

· ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ $\alpha + \beta = 45^{\circ}$, ὅτε καὶ απ. $(\alpha+\beta) = 1$, ἔσαι $\dfrac{\text{απ.}\,\alpha + \text{απ.}\,\beta}{1 - \text{απ.}\,\alpha + \text{απ.}\,\beta} = 1$,

ὅθεν διὰ τῶν κοινῶν κανόνων ἀποφέρεται απ. $\beta = \dfrac{1 - \text{απ.}\,\alpha}{1 + \text{απ.}\,\alpha}$·

εἰλήφθω τοίνυν απ. $\alpha = \frac{1}{2}$, καὶ δὴ ἕξομεν απ. $\beta = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{3}$· λογισέον ἄρα διὰ τῆς εἰρημένης σειρᾶς τὸ μῆκος τόξου, οὗ ἡ ἁπτομένη $\chi = \dfrac{\alpha}{2}$, εἶτ' οὖν τῆς ἀκτῖνος ἡμίσεια· μεθ' ὃ, τὸ μῆκος τόξου, οὗ ἡ ἁπτομένη χ ἐστιν $\dfrac{\alpha}{3}$· ταῦτα δὲ συνάψαντες ἕξομεν τὸ μῆκος τοῦ 45° τόξου· ἀντὶ τοίνυν χ ἀντικαθισαμένων τοῦ $\dfrac{\alpha}{2}$, καὶ τοῦ $\dfrac{\alpha}{2}$, πορισθήσονται αἱ σειραὶ $\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{5.2^4} - \frac{1}{7.2^6} + \frac{1}{9.2^8} - \frac{1}{11.2^{10}} + \frac{1}{13.2^{12}}\right.$ κτ.) καὶ $\frac{\alpha}{3}\left(1 - \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^4} - \frac{1}{7.3^6} + \frac{1}{9.3^8} - \frac{1}{11.3^{10}} + \frac{1}{13.3^{12}}\right.$ κτ.)

Βουλομένοις δ' εὑρεῖν τὰς δυνάμεις ἑκατέρου τῶνδε τῶν τόξων, ἀκριβῶς παριςαμένας μέχρι τοῦ ἐννάτου δεκαδικοῦ, λογιςέον, 15 μὲν ἀρκτικοὺς ὅρους τῶν πρώτης, 10 δὲ τῆς δευτέρας σειρᾶς· εὐχερῶς δὲ ὁ λογισμὸς διαπράττεται, παρατετηρηκόσιν, ὡς ἐν τῇ πρώτῃ λογισθείησαν ἂν οἱ ἀλληλεχεῖς ὅροι, συςαθείσης σειρᾶς, ἧς ἕκαςος ὅρος ἴσος εἴη τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡγουμένου καὶ τοῦ $\frac{1}{2^2}$, τοῦτ' ἔςιν ἕκαςος ὅρος εἴη ἴσος $\frac{1}{4}$ τοῦ ἡγησαμένου, καὶ ταύτης εἶτα πολλαπλασιασθείσης ἀνὰ ἕκαςον ὅρον ἐπὶ τὴν σειρὰν $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ κτ.· τελευταῖον δὲ συναφθέντων τῶν ἀρτίων ὅρων, καὶ τῶν περιττῶν, καὶ τοῦ τούτων ἀθροίσματος ἀπὸ τοῦ ἐκείνων ἀφαιρεθέντος, τοῦ δὲ καταλοίπου πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ $\frac{\alpha}{2}$· ὁ δὲ τῆς δευτέρας σειρᾶς λογισμὸς οὕτω γενήσεται· συνεςάσθω σειρὰ, ἧς ἕκαςος ὅρος ἴσος εἴη τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡγουμένου καὶ τοῦ $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, τοῦτ' ἔςιν ἕκαςος ὅρος εἴη $\frac{1}{9}$ τοῦ ἡγησαμένου· καὶ πεπολλαπλασιάσθω ἀνὰ ἕκαςον ὅρον ἐπὶ τὴν σειρὰν $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ κτ, καὶ τὰ ἄλλα πεπράχθω ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης σειρᾶς· μόνον δὲ τὸ ἔσχατον ἀποτέλεσμα πεπολλαπλασιάσθω οὐχὶ ἐπὶ $\frac{\alpha}{2}$, ἀλλ' ἐπὶ $\frac{\alpha}{3}$· ταύτης δὲ τῆς πράξεως ἐπιμελῶς διαπραχθείσης, ϗ τῆς προσεγγίσεως μέχρι τῶν 10 δεκαδικῶν προαχθείσης, πορισθήσεται, ὑπὲρ μὲν τῆς πρώτης σειρᾶς $\frac{\alpha}{2}(0,9272952180)$, ἢ $\alpha(0,4636476090)$, ὑπὲρ δὲ τῆς δευτέρας, $\frac{\alpha}{3}(0,9652516632)$, ἢ $\alpha(0,3217505544)$· ἄρα τὸ 45° τόξον, ὅπερ ἐςὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εὑρεθέντων, ἔςαι $\alpha(0,7853981634)$· τετραπλασιασθὲν ἄρα ἀποδώσει τὴν ἡμιπεριφέρειαν $= \alpha(3,1415926536)$· ἡ ἄρα ἀκτὶς πρὸς τὴν ἡμιπεριφέρειαν (ἢ ἡ διάμετρος πρὸς ὅλην τὴν περιφέρειαν) :: $\alpha : \alpha(3,1415926536) :: 1 : 3,1415926536$· λόγος ἀκριβέςερος τῦ τεθέντος (Γεωμ. 370, 371, 377), καὶ εὐχερῶς πάνυ ἀκριβέςερον ἔτι ἀποδοθῆναι δυνάμενος.

247. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Ἀριθμῦ δοθέντος εὑρεῖν αὐτῦ τὸν ὑπερβολικὸν λογάριθμον.

ΛΥΣΙΣ. Διῃρήσθω ὁ ἀριθμὸς εἰς δύο μέρη α, χ, α ὄντος τῦ μείζονος· ἐκῦν κατὰ τὰ ἀποδεδομένα (47) ἐςὶ $\delta.\lambda o\gamma.(\alpha+\chi) = \frac{\delta\chi}{\alpha+\chi}$, ποσότης, ἥτις ὁλοκληρωθῆναι γεωμετρικῶς ὐκ ἔχει· ἀνακτέον ἄρα ταύτην εἰς σειρὰν, μετασχηματίσαντας εἰς $\delta\chi(\alpha+\chi)^{-1}$· ἀλλὰ (Συμβ. Λογ. 149, 548) $(\alpha+\chi)^{-1} = \alpha^{-1}\left(1 - \frac{\chi}{\alpha} + \frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\chi^3}{\alpha^3}\ \kappa\tau\right) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\chi}{\alpha^2} + \frac{\chi^2}{\alpha^3} - \frac{\chi^3}{\alpha^4}\ \kappa\tau$· ἄρα, δλ

$$(\alpha + \chi) = \delta\chi(\alpha+\chi)^{-1} = \left(\frac{\delta\chi}{\alpha} - \frac{\chi\delta\chi}{\alpha^2} + \frac{\chi^2\delta\chi}{\alpha^3} - \frac{\chi^3\delta\chi}{\alpha^4}\ \kappa\tau\right)$$

· ὁλοκληρουμένης ἄρα ταύτης τῆς ποσότητος, εὑρίσκεται $\lambda(\alpha+\chi) = \left(\frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4} + \kappa\tau\right)$ $+\,\Gamma$· ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ ἀμετάτρεπτος Γ, σημειωτέον, ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπικρατεῖ καὶ ὅταν ἡ $\chi = 0$· ἀνάγεται μέντοι τηνικαῦτα εἰς $\lambda\alpha = \Gamma$· ἄρα $\Gamma = \lambda\alpha$· ἄρα

$$\lambda(\alpha + \chi) = \lambda\alpha + \left(\frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4},\ \kappa\tau\right)\cdot$$

ἑνὸς ἄρα ἀριθμοῦ τοῦ λογαρίθμου γνωσθέντος, δυνατὸν διὰ ταύτης τῆς σειρᾶς τὸν παντὸς ἄλλου ἀριθμοῦ εὑρεῖν λογάριθμον· ἔστω φέρε $\alpha = 10$, καὶ $\alpha + \chi = 11$· οὐκοῦν ἔσται $\chi = 1$, καὶ $\frac{\chi}{\alpha} = \frac{1}{10}$, ὅθεν εὑρεθήσεται $\lambda.11 =$

$$\lambda.10 + (0,1) - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3},\ \kappa\tau\cdot$$

ἐκ δὲ τούτων γινώσκεται, ὅ,τι ἐστὶ προσθετέον τῷ τοῦ 10 λογαρίθμῳ εἰς εὕρεσιν τοῦ κατὰ τὸν 11.

248. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπεὶ ἡ ἄρτι ἀποδοθεῖσα γενικὴ σειρὰ, οὐχ ἅλις συγκλίνουσα εὑρίσκεται, προκείσθω μέθοδος ἑτέρα διὰ τοῦ ἐφεξῆς προβλήματος, ἐξ οὗ εὐπετῶς θηρεύεται ὁ ζητούμενος λογάριθμος.

249. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον κλάσματος, οὗ ὁ ἀριθμητὴς μείζων ἐστὶ τοῦ παρονομαστοῦ.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω, α μὲν τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ, χ δὲ ἡ αὐτῶν διαφορά· ἔσται οὖν, ὁ μὲν ἀριθμητὴς (Συμβ. Λογ. 442) $= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\chi$, ὁ δὲ παρονομαστῆς $= \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\chi$, ϗ ἑπομένως τὸ προτεθὲν κλάσμα ἔσται $\frac{\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\chi}{\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\chi} = \frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi}$ (ἐκβολῇ τοῦ κοινοῦ ποιητοῦ $\frac{1}{2}$), ϗ ἑπομένως $\lambda.\frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi}$, $\lambda(\alpha+\chi) - \lambda(\alpha-\chi)$ ἐμφανεῖ τὸν αὐτοῦ λογάριθμον· λαβόντες οὖν αὐτοῦ τὰ ἀπειροστὰ, ϗ μόνην μὲν τὴν χ ὡς μεταβλητὴν ἐκδεξάμενοι, ὡς δὲ ἀμετάβλητον τὴν α (*) τηρήσαντες, ἕξομεν (47)

$$\frac{\delta\chi}{\alpha+\chi} - \frac{\delta\chi}{\alpha-\chi} = \frac{2\alpha\delta\chi}{\alpha\alpha-\chi\chi} = 2\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-1}\cdot$$

ἐκοῦν (Συμβ. Λογ. 149, 548) $(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-1} = \alpha^{-2}\left(1 + \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\chi^4}{\alpha^4} + \frac{\chi^6}{\alpha^6} + \frac{\chi^8}{\alpha^8} + \kappa\tau\right)$· ἄρα $2\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-1} = 2\alpha^{-1}\delta\chi\left(1 + \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\chi^4}{\alpha^4} + \frac{\chi^6}{\alpha^6} + \frac{\chi^8}{\alpha^8} + \kappa\tau\right)$

(*) *Εἰ* ϗ τὸ κλάσμα τὸ δε ἐμφαίνειν ὀφείλει ἅπαν προτιθέμενον κλάσμα, οὐδὲν ἀλλ᾽ οὖν τὸ κωλύον μὴ οὐχὶ θεωρεῖν τὸ α ἄθροισμα τοῦ ἀριθμητοῦ ϗ τοῦ παρονομαστοῦ ὡς ἄτρεπτον· οὐδὲν γάρ ἐστι κλάσμα, ὃ μὴ ἄν τις οὕτω διαθείη, ὡς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμητοῦ ϗ τοῦ παρονομαστοῦ ἴσον εἶναι, ᾧ ἂν βούλοιτο ἀριθμῷ· κείσθω γὰρ κλάσμα τὸ $\frac{3}{5}$, ὃ διαθεῖναι χρὴ οὕτως, ὡς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμητοῦ ϗ τοῦ παρονομαστοῦ ἰσοῦσθαι τῷ 12 ἀριθμῷ· πεπολλαπλασιάσθω ἑκάτερος τῶν ὅρων ἐπὶ ν· ὅθεν ἔσται $\frac{3\nu}{5\nu}$, ϗ ὑποτεθείσθω $3\nu + 5\nu = 12$, ἢ $8\nu = 12$· ἄρα $\nu = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$· ἄρα $\frac{3\times\frac{3}{2}}{5\times\frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}}$, οὗ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμητοῦ ϗ τοῦ παρονομαστοῦ ἐστιν ὡς ἀληθῶς $= 12$.

$= 2\left(\frac{\delta\chi}{\alpha} + \frac{\chi^2\delta\chi}{\alpha^3} + \frac{\chi^4\delta\chi}{\alpha^5} + \frac{\chi^6\delta\chi}{\alpha^7} + \frac{\chi^8\delta\chi}{\alpha^9} + \kappa\tau\right)$·

ἄρα $O \cdot \frac{2\alpha\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi}$, εἴτ' ὖν $\lambda \frac{\alpha+\chi}{\alpha - 2} = 2\left(\frac{\chi}{\alpha} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3}\right.$ $\left. + \frac{\chi^5}{5\alpha^5} + \frac{\chi^7}{7\alpha^7} + \frac{\chi^9}{9\alpha^9} + \kappa\tau\right) + \Gamma$· τὸ δὲ ἀμετάτρεπτον Γ ὁλοκληρωθήσεται, εἰ μάθοιμεν ὅ,τι γένοιτο ἡ ἐξίσωσις, ἐπειδὰν ἡ $\chi = 0$· ἀλλὰ τηνικαῦτα ἀνάγεται εἰς $\lambda \frac{\alpha}{\alpha} = \Gamma$· ἄρα $\Gamma = \lambda \frac{\alpha}{\alpha} = \lambda 1 = 0$· ὅλη ἄρα ἡ ἐξίσωσις ἁπλῶς ἔςαι $\lambda \frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi} = 2\left(\frac{\chi}{\alpha} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} + \frac{\chi^5}{5\alpha^5}\right.$ $\left.\frac{\chi^7}{7\alpha^7} + \kappa\tau\right)$, ἔνθα καταφαίνεται, ὅτι ἕκαςος ὅρος συνίςαται ἐκ τῦ ἡγυμένυ, πολλαπλασιαθέντος ἐπὶ τὸ ἀπὸ $\frac{\chi}{\alpha}$, εἴτ' ὖν ἀπὸ τῦ πρώτυ ὅρυ, τετράγωνον, εἶτα δὲ λαμβάνεται ὁ πρῶτος, τὸ $\frac{1}{3}$ τῦ δευτέρυ, τὸ $\frac{1}{5}$ τῦ τρίτυ, κτ, ἢ ὅλον τὸ ἄθροισμα διπλασιάζεται. Ταῦτα δὲ ἐφαρμοςέον ἐφεξῆς μερικωτέροις ὑποδείγμασι.

250. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Εὑρεῖν τὸν τῦ 2 ὑπερβολικὸν λογάριθμον.

ΛΥΣΙΣ. Μετασχηματισθήτω ὁ 2 εἰς $\frac{3}{1}$· ὖκῦν ἕξομεν $\alpha = 3$, ἢ $\chi = 1$, ἢ $\frac{\chi}{\alpha} = \frac{1}{3}$, ἢ $\frac{\chi^2}{\alpha^2} = \frac{1}{9}$· ἕκαςος ἄρα ὅρος εὐπετῶς συγκροτηθήσεται· ζητεῖται γὰρ εἰς τῦτο ἀλλὸ ὐδὲν, ἢ ληφθῆναι τὸ $\frac{1}{9}$ τῦ ἡγυμένυ ὅρυ, ἵνα γεννηθῇ ἡ σειρὰ $\frac{\chi}{\alpha}$, $\frac{\chi^3}{\alpha^3}$, $\frac{\chi^5}{\alpha^5}$ κτ.· ἕξομεν ἄρα

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\chi}{\alpha} = 0,333333333 \\
\frac{\chi^3}{\alpha^3} = 0,037037037 \\
\frac{\chi^5}{\alpha^5} = 0,004115226 \\
\frac{\chi^7}{\alpha^7} = 0,000457247 \\
\frac{\chi^9}{\alpha^9} = 0,000050805 \\
\frac{\chi^{11}}{\alpha^{11}} = 0,000005645 \\
\frac{\chi^{13}}{\alpha^{13}} = 0,000000627 \\
\frac{\chi^{15}}{\alpha^{15}} = 0,000000069
\end{array}\right\} \text{ἄρα} \left\{\begin{array}{l}
\frac{\chi}{\alpha} = 0,333333333 \\
\frac{\chi^3}{3\alpha^3} = 0,012345679 \\
\frac{\chi^5}{5\alpha^5} = 0,000823045 \\
\frac{\chi^7}{7\alpha^7} = 0,000065321 \\
\frac{\chi^9}{9\alpha^9} = 0,000005645 \\
\frac{\chi^{11}}{11\alpha^{11}} = 0,000000513 \\
\frac{\chi^{13}}{13\alpha^{13}} = 0,000000048 \\
\frac{\chi^{15}}{15\alpha^{15}} = \alpha,000000004
\end{array}\right.$$

τὸ ἄρα ἄθροισμα ἐστὶ 0,346573508, οὗ τὸ διπλοῦν, ὅπερ ἐστὶν ὁ ζητούμενος τοῦ 2 λογάριθμος, ὑπάρχει 0,693147176, ὃς ἐν μόνοις 8 δεκαδικοῖς ἐστὶ 0,69314718.

251. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπεὶ δὲ 4 ὁ ἀπὸ 2 ἐστὶ τετράγωνος, καὶ 8 ὁ ἀπ' αὐτοῦ κύβος, τὸ μὲν ἄρα διπλοῦν τοῦ εὑρεθέντος ἔσται ὁ τοῦ 4, τὸ δὲ τριπλοῦν ὁ τοῦ 8, λογάριθμος· εἰς δὲ εὕρεσιν τοῦ κατὰ τὸν 3 λογαρίθμου, ζητηθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ κλάσματος $\frac{4}{3}$, ὅστις ἀφαιρεθεὶς τοῦ κατὰ τὸν 4 ἀποδώσει τὸν τοῦ 3, καὶ γὰρ 3 ἐστὶ 4 διῃρημένος διὰ $\frac{4}{3}$· ἄρα $\lambda.3 = \lambda 4 - \lambda \frac{4}{3}$· ἀλλ' εὐπετέστερον εὑρεθήσεται, εἰ ζητηθείη ὁ τοῦ $\frac{9}{8}$ κλάσματος λογάριθμος, καὶ ἀφαιρεθείη τοῦ κατὰ τὸν 8 λογαρίθμου ἐγνω-

σμένε ἤδη· τὸ ἓν κατάλοιπον ἔσαι ὁ τε 9 λογάριθμος, ἓ τὸ ἥμισυ ἔσαι ὁ τε 3· προσεθέντος δὲ τε κατὰ τὸν 3 τῷ τε 2, ποριωθήσεται ὁ τε 6 λογάριθμος· ἵνα δὲ εὑρεθείη ὁ τε 5, ζητηθήτω πρῶτον ὁ τε 10, θηρωμένοις τὸν τε $\frac{1}{8}^{0}$, ὃς συναφθεὶς τῷ τε 8, ἀποδώσει τὸν τε 10· τέτε δὲ ἀφαιρεθεὶς ὁ τε 2, ἀποδώσει τὸν τε 5· κατάδηλον ἄρα, ὅ,τι χρὴ ποιεῖν εἰς εὕρεσιν παντὸς ἄλλε λογαρίθμε.

252. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Σημειωτέον δὲ, ὡς ὁ λογισμὸς ἀεὶ μᾶλλον ἢ μᾶλλον ἐπιτέμνεται, ὅσῳ μείζων γίνεται ὁ ἀριθμός· ὥσε εὑρεθέντων ἅπαξ τῶν μέχρι 10 λογαρίθμων, οἱ μέχρις 100 ποριωθήσονται, μηδὲ τρισὶν ὅροις τῆς σειρᾶς χρησαμένοις, ἡνίκ' ἂν σέργωμεν 8 δεκαδικοῖς· παρελθεσι δὲ τὸν 100 μέχρι τῶν 1000, οἱ δύω ἀρκτικοὶ ἀρκέσεσιν· ἐντεῦθεν δὲ μόνος ὁ πρῶτος ἐξικανοῖ.

253. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ΄.** Τὲς ὑπερβολικὲς λογαρίθμες εἰς τὲς ἐν τοῖς κανονίοις τρέψαι.

ΛΥΣΙΣ. Εὑρεθήτω πρῶτον ὁ τε 10 λογάριθμος· ἐὰν τοίνυν διὰ τε λογισμε ζητηθῇ ὁ τε $\frac{1}{8}^{0}$, διὰ τε προεκτεθέντος τύπε, εὑρεθήσεται $\lambda\ \frac{1}{8}^{0} = 0{,}22314355$· τέτῳ δὲ συναφθέντος τε κατὰ τὸν 8 (210), ποριωθήσεται $\lambda\ 10 = 2{,}30258509$· τέτε τεθέντος, ἀναμνησέον, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\delta\chi = \dfrac{\delta\upsilon}{\upsilon}$ (47), ἐφ' ἓ ἐπισηρίζεται ὁ πρακτικὸς τῶν λογαρίθμων λογισμὸς, μόνῳ τῷ συσήματι τῶν λογαρίθμων, ὧν τὸ μέτρον $= 1$, ἐπανήκει· ἡ δὲ πάντων τῶν δυνατῶν λογαριθμικῶν συσημάτων ἐξίσωσις ἐσὶ $\delta\chi = \dfrac{\mu\alpha\delta\upsilon}{\upsilon}$· ἡ δέ γε πάντων τῶν λογαριθμικῶν συσημάτων, ἐν οἷς ὁ α πρῶτος ὅρος τῆς θεμελιώδες γεωμετρικῆς προόδου ὑποτίθεται $= 1$, ἐστι $\delta\chi = \frac{\mu\delta\upsilon}{\upsilon}$· καὶ τῆς μὲν, εἴτ' οὖν τῆς $\delta\chi = \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$, ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $\chi = \lambda\upsilon$, τῆς δὲ, εἴτ' οὖν τῆς $\delta\chi = \frac{\mu\delta\upsilon}{\upsilon}$, τὸ $\chi = \mu\lambda\upsilon$· ὅθεν δῆλον, ὅτι, ἐπεὶ χ παρίστησι τὸν λογάριθμον, ἵν' ἀχθῶσιν οἱ ὑπερβολικοὶ λογάριθμοι εἰς τοὺς συστήματος ἄλλου, οὗ τὸ μέτρον ἐστὶ μ, πολλαπλασιαστέον ἐστὶ τούτους ἐπὶ τὸ μέτρον μ· ἀλλὰ λογάριθμος τοῦ 10 ἐν τοῖς κοινοῖς κανονίοις ἐστὶ 1· ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ 10 ἐν τοῖς ὑπερβολικοῖς ἐστιν, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, 2,30258509· ἄρα $\mu \times 2,30258509 = 1$· ἄρα τὸ μέτρον μ τῶν κοινῶν κανονίων ἐστὶν $= \frac{1}{2,30258509} =$ (γενομένης τῆς διαιρέσεως) 0,43429448· „ἵν' ἄρα αναχθεῖεν οἱ ἤδη ἀποδεδομένοι „ὑπερβολικοὶ λογάριθμοι εἰς τοὺς ἐν τοῖς κανονίοις, πολ„λαπλασιαστέοι εἰσὶν ἐπὶ 0,43429448· τοὐναντίον δὲ, „ἵν' οἱ ἐν τοῖς κανονίοις ἀναχθῶσιν εἰς τοὺς ὑπερβολικοὺς, „διαιρετέοι εἰσὶ διὰ 0,43429448, ἢ (ὃ εὐχερέστερόν τε „ἐστὶ, καὶ εἰς τὸ αὐτὸ ἄγει τέλος) πολλαπλασιαστέοι ὑπάρ„χουσιν ἐπὶ 2,30258509“· οὕτως, εἰ πολλαπλασιασθείη ὁ ἄρτι εὑρημένος τοῦ 2 λογάριθμος 0,69314718 ἐπὶ 0,43429448, προκύψει λογάριθμος τοῦ 2 ὁ 0,3010300, οἷος τῷ ὄντι ἀπαντᾷ ἐν τοῖς κανονίοις.

254. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'. Λογαρίθμου ὑπερβολικοῦ δοθέντος, εὑρεῖν αὐτοῦ τὸν ἀριθμόν.

ΛΥΣΙΣ. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι, τοῦ $\alpha + \chi$ ἀριθμὸν ὁντιναοῦν ἐμφαίνοντος, εὑρίσκεται $\lambda(\alpha + \chi) = \lambda\alpha +$

$\left(\frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4} + \text{κτ.}\right)$· ἄρα $\lambda(\alpha+\chi) - \lambda\alpha$, εἴτ' οὖν $\lambda\frac{\alpha+\chi}{\alpha} = \frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4}$ κτ.· τοῦ α ἐμφαίνοντος ἀριθμὸν πρὸς τὸ δοκοῦν εἰλημμένον, τοιοῦτον μέντοι, ὥστε τὸν αὐτοῦ λογάριθμον βραχύτι διαφέρειν τοῦ δοθέντος, τοῦ ἐξ ὑποθέσεως ἐπανήκοντος τῷ ἀριθμῷ $\alpha + \chi$· γενέσθω διὰ τὸ ἁπλέστερον, $\lambda\frac{\alpha+\chi}{\alpha} = \psi$· οὐκοῦν ἔσται $\psi = \frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4}$ κτ.· ζητεῖται οὖν ἡ τοῦ $\frac{\chi}{\alpha}$ δύναμις, παριστανομένη διὰ ψ· παρεστάσθω τοίνυν ἐξ ὑποθέσεως ἡ δύναμις αὐτὴ διὰ $\frac{\chi}{\alpha} = A\psi + B\psi^2 + \Gamma\psi^3 + \Delta\psi^4 +$ κτ., A, B, Γ, κτ. συνεργῶν ὄντων ἀτρέπτων, ὧν ζητεῖται ὁ διορισμός· πορισθήσεται ἄρα

$$\psi = A\psi + B\psi^2 + \Gamma\psi^3 + \Delta\psi^4 + \text{κτ.}$$
$$- \frac{A^2}{2}\psi^2 - \frac{2AB}{2}\psi^3 - \frac{BB}{2}\psi^4$$
$$+ \frac{A^3}{3}\psi^3 - \frac{2A\Gamma}{2}\psi^4$$
$$+ \frac{3A^2B}{3}\psi^4$$
$$- \frac{A^4}{4}\psi^4$$

Ἀλλ' ἵν' αὕτη ἡ ἐξίσωσις ἐπικρατοίη, ὁποία ποτ' ἂν ᾖ ἡ ψ, ἐπάναγκες εἶναι α΄. $A = 1$· β΄. τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων, τῶν πολλαπλασιαζόντων ἕκαςον τῦ ψ βαθμὸν, ἐν ταῖς ἄλλαις ςήλαις ὑπάρχειν μηδέν· ἄρα $\mathrm{B} - \frac{\mathrm{A}^2}{2} = 0$, ϗ $\Gamma - \mathrm{AB} + \frac{\mathrm{A}^3}{3} = 0$, ϗ $\Delta - \frac{\mathrm{BB}}{2} - \mathrm{A}\Gamma + \mathrm{A}^2\mathrm{B} - \frac{\mathrm{A}^4}{4} = 0$· ἐντεῦθεν ἄρα $\mathrm{B} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 . 2}$, ϗ $\Gamma = \frac{1}{6} = \frac{1}{1 . 2 . 3}$, ϗ $\Delta = \frac{1}{24} = \frac{1}{1 . 2 . 3 . 4}$· ϗ ἐὰν ὑποτεθῇ μείζων ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς, ὡς ἐνυπάρχειν τῇ σειρᾷ καὶ $\mathrm{E}\psi^5$, $\mathrm{Z}\psi^6$ κτ., εὑρεθήσεται ὡσαύτως ϗ $\mathrm{E} = \frac{1}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}$, ϗ $\mathrm{Z}\ \frac{1}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}$ κτ.· ἔςιν ἄρα $\frac{\chi}{\alpha} = \psi + \frac{\psi^2}{1 . 2} + \frac{\psi^3}{1 . 2 . 3} + \frac{\psi^4}{1 . 2 . 3 . 4} + \frac{\psi^5}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} +$ κτ.· ἄρα $1 + \frac{\chi}{\alpha}$, ἢ $\frac{\alpha + \chi}{\alpha} = 1 + \frac{\psi}{1} + \frac{\psi^2}{1 . 2} + \frac{\psi^3}{1 . 2 . 3} + \frac{\psi^4}{1 . 2 . 3 . 4} + \frac{\psi^5}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} +$ κτ..

Ἵνα δὲ τύτῳ τῷ τύπῳ χρησώμεθα, ἀφῃρήσθω τῦ δοθέντος λογαρίθμυ (ὅς ἐςιν ὁ τῦ $\alpha + \chi$) ὁ προσεχέςερος γνωςὸς λογάριθμος, ὕτινος ὁ ἀριθμὸς εἰλήφθω ἀντὶ α· ποριςθήσεται ἄρα τηνικαῦτα $\lambda \frac{\alpha + \chi}{\alpha}$, ἢ ψ, ὃς ἀντικαταςαθήτω ἐν τῷ προεκτεθέντι τύπῳ· τὸ δὲ ἀποτέλεσμα ἔςαι ἡ δύναμις τῦ $\frac{\alpha + \chi}{\alpha}$· ἐντεῦθεν εὐχερῶς εὑρεθήσεται ὁ $\alpha + \chi$, ἐπεὶ γνωςθήσεται ὁ α.

Βȣλομένοις δὲ εἰδέναι, ὅςτις ἐςὶν ὁ ἀριθμὸς, ȣ̔ ὁ λογάριθμος ἐςὶ 1 ἐν τῷ προκειμένῳ λογαριθμικῷ συςήματι, ὑποθετέον $\lambda\frac{\alpha+\chi}{\alpha}$, ἢ $\psi = 1$· ϗ δὴ εὑρεθήσεται $\frac{\alpha+\chi}{\alpha}$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5}$$

$+$ κτ., ὃς εὑρεθήσεται $= 2,7182818$, ἀρκεσθεῖσι δεκαδικοῖς 7.

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα λογάριθμοι ζητȣ̃νται, ὧν τὸ μέτρον ἐςὶ 1, εἴπερ ὁ δοθεὶς ὁμοφυὴς εἴη τοῖς ἐπὶ τῶν κοινῶν κανονίων, ἀνακτέον ἤτοι αὐτȣ̀ς, ἢ μόνην τὴν αὐτῶν διαφορὰν, εἰς τȣ̀ς ἐνεργείᾳ λογαρίθμȣς, ὥσπερ προδέδεικται (253).

Δυνατὸν δὲ καὶ δι' ἄλλου τύπου ἐκτεθῆναι ἀριθμὸν διὰ τȣ̃ κατ' αὐτὸν λογαρίθμȣ· ἔςω μὲν γὰρ χ ὁ ἀριθμὸς, ἔςω δὲ $\lambda\chi = \psi$· ἐὰν ȣ̃ν τὸ δεύτερον μέλος ταύτης τῆς ἐξισώσεως πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\lambda.\varepsilon$, τȣ̃ ε ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος, ȣ̔ λογάριθμος ἐςὶ 1, πορισθήσεται $\lambda\chi = \psi\lambda\varepsilon$· ὅθεν ȣ̓δεμία τροπὴ τῇ ἐξισώσει ἐπιγίνεται, εἴγε $\lambda\varepsilon = 1$· ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις $\lambda\chi = \psi\lambda\varepsilon$ μεταβάλλει, διὰ τὴν φύσιν τῶν λογαρίθμων, εἰς $\lambda\chi = \lambda\varepsilon^{\psi}$, ὅθεν $\chi = \varepsilon^{\psi}$, ὅτι, τῶν λογαρίθμων ἴσων ὄντων, ἴσοι ὑπάρχȣσι ϗ οἱ αὐτοῖς ἐπανήκοντες ἀριθμοί· ἐπεὶ δὲ, ἐὰν ᾖ $\lambda\chi = \psi$, ἔςαι

(254) $\chi = 1 + \psi + \frac{\psi^2}{1.2} +$ κτ.· ἄρα, ὄντος ἅμα $\chi = \varepsilon^{\psi}$, πορισθήσεται $\varepsilon^{\psi} = 1 + \psi + \frac{\psi^2}{1.2} + \frac{\psi^3}{1.2.3}$

$$\frac{\psi^4}{1.2.3.4} + \text{κτ.}$$

255. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Η' μέθοδος, ᾗ περ ἤδη ἐχρησάμεθα πρὸς εὕρεσιν τῆς τοῦ χ δυνάμεως διὰ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \frac{\chi}{\alpha}$ — κτ. μέθοδος τῶν σειρῶν ἀντίθετος ὀνομάζεται· ἐν ταύτῃ δὲ, ὡς παντὶ δῆλον, ἡ, ἧς τὴν δύναμιν εὑρεῖν βουλόμεθα, μεταβλητὴ ποσότης ἐκτίθεται διὰ σειρᾶς, ἐν ᾗ μεταβλητὴ ἑτέρα δείκτας ἔχει προϊόντας κατ' ἀριθμητικὴν πρόοδον· ἑκάστῳ δὲ αὐτῆς ὅρῳ συνεργὸς προτέτακται ἄτρεπτος καὶ διωρισμένος.

Ε'ὰν δὲ ὦσι πολλοὶ ὅροι διὰ χ καὶ ψ ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει, χ δὲ καὶ ψ μὴ πολλαπλασιάζωνται ἐπ' ἀλλήλους, ἡ τῶν δεικτῶν σειρὰ διορισθήσεται, τιθεμένου τοῦ δείκτου τοῦ τῆς σειρᾶς πρώτου ὅρου ἴσου τῷ ἐλαχίστῳ δείκτῃ τῆς αὐτῆς ἐν τῇ ἐξισώσει μεταβλητῆς ποσότητος, καὶ λαμβανομένου εἰς κοινὴν διαφορὰν τῶν τῆς σειρᾶς δεικτῶν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν τῆς αὐτῆς ἐν τῇ ἐξισώσει τρεπτῆς ποσότητος δεικτῶν· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ᾖ $\psi^{\frac{2}{3}} + 3\psi = 2\chi - \frac{1}{3}\chi^2 + \frac{2}{9}\chi^3 +$ κτ, γενήσεται $\chi = A\psi^{\frac{2}{3}} + B\psi + \Gamma\psi^{\frac{4}{3}} + \Delta\psi^{\frac{5}{3}} + E\psi^2 +$ κτλ.· ὁ μὲν γὰρ ἐλάττων δείκτης τοῦ ψ ἐστὶ $\frac{2}{3}$, ὁ δὲ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεικτῶν $\frac{2}{3}$ καὶ 1 τῆς ψ ἐστὶ $\frac{1}{3}$.

Ε'ὰν δὲ χ καὶ ψ πολλαπλασιάζωνται ἐπ' ἀλλήλους, τηνικαῦτα μεθόδῳ ἑτέρᾳ χρηστέον, ἣ ἡμῖν μὲν ἀλλοτρία τῆς ἐν χερσὶ προθέσεως ὑπάρχει, ὁ δὲ ταύτην ἰδεῖν βουλόμενος, μετιέτω τά τε τοῦ Νεύτωνος συγγράμματα, καὶ [illegible] τοῦ Κραμέρου ἀνάλυσιν τῶν καμπύλων γραμμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Χρῆσις τῶν προεκτεθεισῶν προσεγγίσεων εἰς ὁλοκλήρωσιν διαφόρων ποσοτήτων.

256. Προκειμένων δὲ κανονίων, περιεχόντων τὰ παντοῖα τȣ͂ κύκλȣ μέρη, ϗ δὴ ϗ τȣ̀ς λογαρίθμȣς, εἰ προτεθείη εἰς ὁλοκλήρωσιν ἀπειροςὸν, ἀναγόμενον εἴτε εἰς τὸν κύκλον, εἴτε εἰς τȣ̀ς λογαρίθμȣς, ἄχρηςον ἔςαι τȣ͂ λοιπȣ͂ εἰς σειρὰς ἀναλύειν ταῦτα τὰ ἀπειροςά· χρήσιμον δὲ γνῶναι μόνον τὰς θαμινώτερον ἀπαντώσας σειρὰς τῶν δε τῶν ἀπειροςῶν, ϗ διορίσαι τὰ κυκλικὰ τόξα, ἢ τȣ̀ς λογαρίθμȣς, ἃ αὐτῶν εἰσι τὸ ὁλόκληρον, κατὰ τὰ ἐφεξῆς ὑποδείγματα.

257. Εἴδομεν (243)· ὅτι τὸ $\dfrac{\frac{1}{2}\alpha d\chi}{\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}$ ἐμφαίνει ςοιχεῖον τόξȣ κυκλικȣ͂ τȣ͂ ΑΜ (σχ. 73), ȣ͂ α μὲν ἐςὶν ἡ διάμετρος, χ δὲ ἡ ἀποτετμημένη· ὥςε τὸ ταύτης τῆς ποσότητος ὁλόκληρον, εἴτ' ȣ͂ν τὸ Ο $\dfrac{\frac{1}{2}\alpha d\chi}{\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}$ παριςᾷ τὸ τόξον ΑΜ· ζητηθήτω τοίνυν ἡ δύναμις τȣ́τȣ τȣ͂ ὁλοκλήρȣ ἐπὶ δυνάμει διωρισμένῃ τῆς χ· τηνικαῦτα ȣ͂ν τῆς ΚΑ $= \frac{1}{2}$ α ἀφῃρήσθω ἡ γνωςὴ τȣ͂ χ δύναμις, εἴτ' ȣ͂ν ΑΠ· ϗ δὴ πορισθήσεται ΚΠ· τριγώνȣ τοίνυν ὀρθογωνίȣ τȣ͂ ΚΠΜ γνωςά εἰσιν, ἥτε ὀρθὴ γωνία, ϗ ἡ αὐτὴν ὑποτείνȣσα ΚΜ $= \frac{1}{2}$ α, ϗ ἡ πλευρὰ ΚΠ· γνωσθήσεται ἄρα ϗ ἡ ὑπὸ ΑΚΜ· ταύτης δὲ γνωσθείσης, εἴτ' ȣ͂ν

τῦ ἀριθμῦ τῶν μοιρῶν τῦ τόξυ ΑΜ, ἢ τῆς αὐτῦ ἀκτῖνος ΚΜ, εὐμαρῶς εὑρεθήσεται τὸ τῦ τόξυ μῆκος (*).

258. Ἐὰν ᾖ $\frac{\eta\delta\chi}{\sqrt{(\vartheta\kappa\chi - \pi\chi\chi)}}$, τῶν η, ϑ, π, κ ποσὰ ἐγνωσμένα δηλέντων, τὸ ἀπειροςὸν τόδε ὅμοιον τῷ προτέρῳ γενήσεται, διαιρεθὲν τόν τε ἀριθμητὴν ἢ τὸν παρονομαςὴν διὰ $\sqrt{\pi}$· ὅθεν προελεύσεται $\frac{\frac{\eta}{\sqrt{\pi}}\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\kappa}{\pi}\chi - \chi\chi)}}$

$= \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\kappa}{\pi}\chi - \chi\chi)}}$· ἀλλ' ἐὰν ᾖ πολλαπλασιαςὴς τῦ $\delta\chi$ τὸ ἥμισυ τῆς ποσότητος $\frac{\vartheta\kappa}{\pi}$, τῆς πολλαπλασιαζύσης τὸ ὑπόῤῥιζον χ, τηνικαῦτα τὸ ἀπειροςὸν ὅμοιον ἀποκαταςαθήσεται τῷ ἐπὶ τῦ προτέρυ παραγράφυ· ἀπονεμηθήτω ἄρα αὐτῇ αὕτη ἡ κατάςασις, πολλαπλασιάσασιν ἅμα ἢ δελῦσιν αὐτὴν διὰ $\frac{1}{2}$· $\frac{\vartheta\kappa}{\pi} = \frac{\vartheta\kappa}{2\pi}$· τοιγαρῦν ποριςθήσεται

$$\frac{\frac{\eta}{\sqrt{\pi}}}{\frac{\vartheta\kappa}{2\pi}} \times \frac{\frac{\vartheta\kappa}{2\pi}\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\kappa}{\pi}\chi - \chi\chi)}} = \frac{2\pi\eta}{\vartheta\kappa\sqrt{\pi}}$$

(*) Τῆς γὰρ ἀκτῖνος εὑρεθείσης, διὰ τῶν προαποδοθέντων λόγων (Γεωμ. 370, 371, ἢ ἐνταῦθα, 256) εὑρίσκεται ἡ περιφέρεια· ταύτης δὲ γνωσθείσης, τὸ τῦ τόξυ μῆκος ποριςθήσεται ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης, 368 : μοίρας τῦ τόξυ : : τὸ μῆκος ὅλης τῆς περιφερείας : τὸ μῆκος τῦ τόξυ.

$$\times \frac{\frac{\vartheta\kappa}{2\pi}\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\kappa}{\pi}\times - \chi\chi)}}$$ · ὕτως ἦν δῆλον, ὅτι τὸ ὁλόκληρον τῦδε τῦ ἀπειροςῦ τόξον ἐςὶ κύκλυ, ὗ ἡ μὲν διάμετρος ἐςὶ $\frac{\vartheta\kappa}{\pi}$, ἡ δὲ ἀποτετμημένη χ, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $\frac{2\pi\eta}{\vartheta\kappa\sqrt{\pi}}$· εὐπετῶς ἄρα προσδιορίζεται διὰ τῶν προειρημένων.

259. Ἐὰν δὲ αἱ ἀποτετμημέναι πρὸς τῷ κέντρῳ Κ ἀποτμηθῶσι, κληθείσης τῆς ΚΑ ἀκτῖνος β, ἐ τῆς ΚΠ ἀποτετμημένης χ, πορισθήσεται τὸ $\frac{-\beta\delta\chi}{\sqrt{(\beta\beta - \chi\chi)}}$ ὡς ςοιχεῖον τῦ τόξυ ΑΜ, εὑρισκόμενον ἔκ τε τῆς παραθέσεως τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΠΜ, Μρμ, ἐ ἐκ ΠΜ $= \sqrt{(\beta\beta - \chi\chi)}$, καὶ δὴ καὶ ὅτι, ἐπεὶ τὸ ΑΜ τόξον ἀπομειῦται, ὅσον αὔξει ΚΠ $= \chi$, τὸ ἀπειροςὸν ἔςαι λειπτικόν· προκειμένυ τοίνυν ἀπειροςῦ, οἷον τὸ $\frac{\kappa\delta\chi}{\sqrt{(\vartheta\eta - \pi\chi\chi)}}$, μεταβλητέον αὐτὸ, ὥσπερ ἀνωτέρω, εἰς τὸ $\frac{\kappa}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\eta}{\pi} - \chi\chi)}}$· ἀλλὰ τῦ $\frac{\vartheta\eta}{\pi}$ παρισῶντος ἐνταῦθα τὸ $\beta\beta$, ἡ ποσότης $-\beta$, ἣν ὑπάρχειν δεῖ ἐν τῷ ἀριθμητῇ, ἔςαι $-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}$· πολλαπλασια-

ςέον ἄρα ϗ διαιρετέον ἅμα διὰ $-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}$· ϗ δὴ ἔςαι

$$\frac{\frac{\varkappa}{\sqrt{\pi}}}{-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}} \times \frac{-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}\,\vartheta\chi}{\sqrt{\left(\frac{\vartheta\eta}{\pi} - \chi\chi\right)}}$$

· ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ

$KA = \sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}$, καὶ $K\Pi = \chi$, ποριοθήσεται

$$\frac{\frac{\varkappa}{\sqrt{\pi}}}{-\sqrt{\left(\frac{\vartheta\eta}{\pi}\right)}} \times AM$$

ὡς ὁλόκληρον, ἢ γενικώτερον

$$\frac{\frac{\varkappa}{\sqrt{\pi}}}{-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}} \times AM + \Gamma = \frac{-\varkappa}{\sqrt{\vartheta\eta}} \times AM + \Gamma \cdot$$

ἡ δὲ ἀμετάτρεπτος K διορίζεται ἐκ τῶν θέσεων τῦ μερικωτέρυ ζητήματος, ὅπερ ἀνῆκται εἰς τὸ περὶ, ὃ ὁ λόγος, ἀπειροςόν· τὸ δὲ τόξον AM διορίζεται, ὥσπερ ἤδη εἴδομεν (257), τυτέςι διὰ τῦ τριγώνυ KΠM κτ.

260. Εἴδομεν (243), ὅτι τὸ $-\frac{\alpha\alpha\delta\chi}{\alpha\alpha + \chi\chi}$ ἐμφαίνοι τόξον κύκλυ, ὗ α μέν ἐςιν ἀκτὶς, χ δὲ ἀπτομένη· δυνατὸν δὲ διορίσαι τυτὶ τὸ τόξον διὰ διωρισμένης τῦ χ δυνάμεως, εὑρισκομένης τῆς ὑπὸ AKN (σχ. 80) γωνίας τῦ ὀρθογωνίυ τριγώνυ AKN, εἶτα τῦ τόξυ AM διὰ τῦ ἀριθμῦ τῶν μοιρῶν τῆς ὑπὸ AKN γωνιας, ϗ τῆς α ἀκτῖνος.

Ἐὰν οὖν προκέηται $\frac{\kappa\delta\chi}{\vartheta\beta^2+\eta\chi\chi}$, διαιρεθήσεται τόν τε ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν διὰ η· ὅθεν προκύψει $\frac{\kappa}{\eta}\times\frac{\delta\chi}{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}+\chi\chi}$· εἶτα πολλαπλασιαζομένου τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ $\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}$, πορισθήσεται

$$\frac{\frac{\kappa}{\eta}}{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}}\times\frac{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}\delta\chi}{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}+\chi\chi},$$ εἴτ' οὖν $\frac{\kappa}{\vartheta\beta^2}\times$

$$\frac{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}\delta\chi}{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}+\chi\chi}$$ · εὑρεθήσεται ἄρα τὸ ὁλόκληρον, θηρευομένου τοῦ μήκους τόξου, οὗ ἀπτομένη μέν ἐστιν ἡ χ, ἀκτὶς δὲ ἡ $\sqrt{(\frac{\vartheta\beta^2}{\eta})}$, καὶ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ $\frac{\eta^2}{\vartheta\beta}$.

261. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ταῦτα μὲν τὰ τρία ἀπειροστὰ ὁλοκληροῦνται διὰ τῶν κυκλικῶν τόξων· ἃ δὲ διὰ τῆς κυκλικῆς ἐπιφανείας, ὀψόμεθα ἐχομένως.

Στοιχεῖον τοῦ ἡμιτμήματος ΑΠΜ ἐστὶ τὸ $\delta\chi\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}$ κληθείσης χ τῆς ΑΠ (σχ. 73.)· ἔστι γὰρ $\upsilon=\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}$, καὶ ἐκ τοῦ ἀκολούθου $\upsilon\delta\chi$, εἴτ' οὖν ΠπμΜ $=\delta\chi\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}$· ἅπαν ἄρα ἀπειροστὸν, τοιόνδε φέρον σχῆμα, ἢ εἰς τοιοῦτον διὰ προπαρασκευῶν ὁμοίων ταῖς προδεδειγμέναις μετασχηματιζόμενον, ὁλοκληρωθήσεται διὰ τοῦ ἡμιτμήματος κύκλου, οὗ ἡ μὲν ἀποτετμημένη ἐστὶ χ, ἡ δὲ διάμετρος α· τὸ δὲ τμῆμα εὐχερῶς διορίζεται διὰ τῶν προλελεγμένων ἐνταῦθα.

262. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Τετραγωνίσαι τὸ ἐλλειπτικὸν ἡμίτμημα ΑΠΜ (σχ. 81).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστιν $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, $\upsilon\delta\chi = \delta$ $(\text{ΑΠΜ}) = \frac{\beta\delta\chi}{\alpha}\cdot\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$· ἀλλὰ $\delta\chi\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$ ἐμφαίνει στοιχεῖον ἡμιτμήματος τοῦ ΑΠΜ' κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ· ἄρα $\delta\,(\text{ΑΠΜ}) = \frac{\beta}{\alpha}\,\delta\,(\text{ΑΠΜ}')$, ὧν τὰ ὁλόκληρα $\text{ΑΠΜ} = \frac{\beta}{\alpha}\,\text{ΑΠΜ}'$· ὅθεν ΑΠΜ : ΑΠΜ' : : $\beta : \alpha$, τοῦτ' ἔστιν „ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐλλειπτικοῦ „ἡμιτμήματος πρὸς τὴν τοῦ συστοιχοῦντος κυκλικοῦ λόγον „ἔχει, ὃν ὁ ἐλάττων πρὸς τὸν μείζονα ἄξονα" ἐντεῦθεν ἄρα „ὅλη ἡ ἔλλειψις πρὸς κύκλον γεγραμμένον ἐπὶ τοῦ „μεγάλου ἄξονος λόγον ἔχει, ὃν ὁ ἐλάττων ἄξων πρὸς „τὸν μείζονα" ὃ δὴ καὶ ἐν (Τ'ψ. Γ. 101) δέδεικται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν δὲ πρὸς τῷ κέντρῳ Κ (σχ. 73.) τέμνωνται αἱ ἀποτετμημέναι, κληθείσης β τῆς ΚΑ, καὶ χ τῆς ΚΠ, ἔσται $-\delta\chi\cdot\sqrt{(\beta\beta - \chi\chi)}$ στοιχεῖον τοῦ ἡμιτμήματος ΑΠΜ· τηνικαῦτα γὰρ $\upsilon = \sqrt{(\beta\beta - \chi\chi)}$, τὸ δὲ τμῆμα ΑΠΜ ἀπομειοῦται αὐξούσης τῆς χ· διὸ λειπτικὸν ἀποβαίνει τὸ τοῦ ΑΠΜ ἀπειροστόν· τὸ δ' ἐφεξῆς πρόβλημα ἀπειροστὸν ἕξει, εἰς τοιόνδε ἐπαναγόμενον σχῆμα.

263. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.** Τετραγωνίσαι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἐπιμήκους ἐλλειπτικῆς κωνοΐδος.

ΛΥΣΙΣ. Γενικὸς τύπος τῶν τοιούτων ἐπιφανειῶν ἐστιν ὁ $\frac{\pi\upsilon}{\eta}\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$ (225)· ἐστι δὲ τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσις $\upsilon\upsilon = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(\frac{1}{4}\alpha\alpha - \chi\chi)$· ἄρα $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha} \times \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha - \chi\chi)}$, καὶ $\delta\upsilon = -\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha - \chi\chi)}}$· ἄρα $\frac{\pi\upsilon}{\eta}\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$ γίνεται $\frac{\pi\beta}{\eta\alpha} \times \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha - \chi\chi)} \times \sqrt{(\delta\chi^2 + \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} \times \frac{\chi^2\delta\chi^2}{\frac{1}{4}\alpha\alpha - \chi\chi})}$, ἢ (τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σημειωθέντος, καὶ ἀναγωγῆς γενομένης, καὶ τοῦ $\delta\chi^2$ ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ ἀχθέντος) $\frac{\pi\beta\delta\chi}{\eta\alpha}\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha - \chi\chi + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha})} = \frac{\pi\beta\delta\chi}{\eta\alpha} \cdot \sqrt{(\frac{\frac{1}{4}\alpha^4 - \alpha\alpha\chi\chi + \beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha})}$ ἀλλ' ἐὰν κληθῇ κ ἡ ἐκκεντρότης ΚΕ (σχ. 82.), ἔσται $\kappa\kappa = \frac{1}{4}\alpha\alpha - \frac{1}{4}\beta\beta$, καὶ $4\kappa\kappa = \alpha\alpha - \beta\beta$ (*)· στοιχείου

(*) Τοῦ μὲν γὰρ μείζονος ἡμιάξονος κληθέντος $\frac{1}{2}\alpha$, τοῦ δ' ἐλάττονος $\frac{1}{2}\beta$, ἐπείπερ ἡ τὸ τοῦ ἐλάττονος ἄξονος πέρας καὶ τὴν ἑστίαν ἐπιζευγνῦσα εὐθεῖα ἐστὶν ἴση τῷ μείζονι ἡμιάξονι (Τ'Ψ. Γ. 87.)· ἐντεῦθεν συστάθήσεται τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἡ μὲν εἰρημένη εὐθεῖα ἡ ἴση τῷ μείζονι ἄρα τῆς ἐπιφανείας γίνεται τὸ $\frac{\pi\beta\delta\chi}{\eta\alpha}$

$$\surd\left(\frac{\frac{1}{4}\alpha^4 - 4\,\kappa\kappa\chi\chi}{\alpha\alpha}\right) = \frac{\pi\beta\delta\chi}{\eta\alpha\alpha}\surd\left(\tfrac{1}{4}\,\alpha^4 - 4\,\kappa\kappa\chi\chi\right)\cdot$$

διαιρέσει μὲν ὖν τῦ ὑπορρίζυ διὰ 4 κκ, πολλαπλασιασμῷ δὲ τῦ ἐκτὸς τῦ ῥιζικῦ ἐπὶ τὴν ῥίζαν 2κ, πορίζεται $\frac{2\pi\beta\kappa\delta\chi}{\eta\alpha\alpha}\times\surd\left(\frac{\frac{1}{16}\,\alpha^4}{\kappa\kappa}-\chi\chi\right)$ ποσότης, ᾗ ἀφοσιωτέον τὸ σύμβολον —, ἵν' ἐμφήνῃ τὴν ἐπιφάνειαν ἀρχομένην ἐκ τῦ σημείυ Α· αὕτη γὰρ ἀπομειῦται τοσῦτον, ὅσαναὔξει ἡ χ· ἕξομεν ἄρα $-\frac{2\pi\delta\beta\kappa\delta\chi}{\kappa\alpha\alpha}\times\surd\left(\frac{\frac{1}{16}\,\alpha^4}{\kappa\kappa}-\chi\chi\right)$· ταύτης ἄρα τῆς ποσότητος παραβαλλομένης πρὸς τὴν $-\delta\chi\surd(\beta\beta-\chi\chi)$, ἣν εἴδομεν τύπον ὖσαν ἡμιτμήματος κυκλικῦ, ὖ ἡ ἀκτίς ἐςι β, συναχθήσεται ὅτι τὸ ὁλόκληρον τῆς $-\delta\chi\surd\left(\frac{\frac{1}{16}\,\alpha^4}{\kappa\kappa}-\chi\chi\right)$ ἐςὶν ἡμίτμημα κυκλικὸν ΟΠΜ', ὖ ἡ μὲν ἀκτὶς ἔςιν $\frac{\frac{1}{4}\,\alpha\alpha}{\kappa}$, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένη χ, προσεπιτιθεμένης αὐτῷ καὶ ἀτρέπτυ τινὸς ποσότητος· ἐὰν ἄρα ἀκτῖνι τῇ ΚΟ $= \frac{\frac{1}{4}\,\alpha\alpha}{\kappa}$, τῦτ' ἔςι τρίτῃ ἀναλόγῳ τῶν ΚΕ, ΚΑ γραφῇ κύκλος ὁ ΟΝΡ,

---

ἡμιάξονι ὑποτεινεῖ, περιέχυσι δὲ ἥτε ἐκκεντρότης, καὶ ὁ ἐλάττων ἡμιάξων· ἄρα (Γεωμ. 349..) $\frac{1}{4}\,\alpha\alpha = \kappa\kappa + \frac{1}{4}\,\beta\beta$, καὶ $\kappa\kappa = \frac{1}{4}\,\alpha\alpha - \frac{1}{4}\,\beta\beta$.

πορισθήσεται $\text{O} - \delta\chi\sqrt{(\frac{\frac{1}{15}\alpha^4}{\varkappa\varkappa} - \chi\chi)} = \text{ΟΠΜ}' +$ Γ· ἄρα $\text{O} - \frac{2\pi\beta\varkappa\delta\chi}{\eta\alpha\alpha}\sqrt{(\frac{\frac{1}{15}\alpha^4}{\varkappa\varkappa} - \chi\chi)} = \frac{2\pi\beta\varkappa}{\eta\alpha\alpha} \times$ $\text{ΟΠΜ}' + \frac{2\pi\beta\varkappa}{\eta\alpha\alpha} + \Gamma$.

Ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ ἀμετάτρεπτος Γ, σημειωτέον, ὅτι ἡ ζητυμένη ἐπιφάνεια, ἐκ τῦ σημείυ Α ἀρχομένη, μηδὲν ἐςὶ πρὸς αὐτῷ τῷ σημείῳ· ἀλλὰ πρὸς τῷ σημείῳ Α τὸ ἡμίτμημα ΟΠΜ' γίνεται ΟΑΝ· ἄρα $\text{o} = \frac{2\pi\beta\varkappa}{\eta\alpha\alpha} \times \text{O}$ $\text{AN} + \frac{2\pi\beta\varkappa}{\eta\alpha\alpha} + \Gamma$· ὅθεν $\Gamma = -\text{ΟΑΝ}$· τὸ ἄρα πλῆρες ὁλόκληρον ἐςὶ $\frac{2\pi\beta\varkappa}{\eta\alpha\alpha} \times \text{ΟΠΜ}' - \frac{2\pi\beta\varkappa}{\varkappa\alpha\alpha}$ $\times\ \text{ΟΑΝ}$, εἴτ' ὖν $\frac{2\pi\beta\varkappa}{\eta\alpha\alpha}(\text{ΟΠΜ}' - \text{ΟΑΝ})$, ἢ τελευταῖον $\frac{2\pi\beta\varkappa}{\eta\alpha\alpha}(\text{ΑΠΜ}'\text{Ν})$· ἡ ἄρα ἡμίσεια ἐπιφάνεια τῆς ἐλλειπτικῆς κωνοΐδος ἔςαι $\frac{2\pi\beta\varkappa}{\eta\alpha\alpha}(\text{ΑΚΡΝ})$, ἢ (ἐπεὶ $\text{ΚΟ} = \frac{\frac{1}{2}\alpha\alpha}{\varkappa}$, ᾗ ἑπομένως $\frac{2\varkappa}{\alpha\alpha} = \frac{1}{\text{ΚΟ}}$) ἔςαι $=$ $\frac{\pi}{\eta} \times \frac{\beta}{2\text{ΚΟ}} \times \text{ΑΚΡΝ}$, ἧς τὸ διπλῦν ἐμφαίνει ὅλην τῆς ἐλλειπτικῆς κωνοΐδος τὴν ἐπιφάνειαν.

264. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Ἁπλῦςατα δὲ διορίζεται ἡ ἀκτὶς ΚΟ· κέντρῳ μὲν γὰρ τῷ Κ, διαςήματι δὲ τῷ ΚΑ, γε-

γράφθω τόξον τὸ ΑΛ τέμνον κατὰ τὸ Λ τὴν ἐπὶ τῆς ΚΑ ἀνιςαμένην πρὸς τῷ Ε κάθετον ΕΛ, ᾗ προήχθω ἡ ΚΛ ἕς τ' ἂν συμβάλῃ κατὰ τὸ Ν τῇ πρὸς τῷ Α ἀνεγερθείσῃ καθέτῳ ΑΝ· ὅθεν προκύψει ἡ ΚΝ ἴση τῇ ΚΟ, ἢ τῇ $\frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha}{\mu}$· ἐκ γὰρ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΕΛ, ΚΑΝ πρόεισι ΚΕ : ΚΛ : : ΚΛ : ΚΝ, εἴτ' ἦν κ : $\frac{1}{2}$ α : : $\frac{1}{2}$ α : $\text{ΚΝ} = \frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha}{\kappa} = \text{ΚΟ}$.

265. Αἱ δὲ ἐπὶ τὲς λογαρίθμες ἀμέσως ἀναγόμεναι ποσότητες εἰσὶν, ἐν αἷς τὸ προκείμενον ἀπειροςὸν, ἤτοι ἐςὶν, ἢ γίνεται κλάσμα, ὗ ὁ ἀριθμητὴς ἐςι τὸ ἀπειροςὸν τῦ παρονομαςῦ· ἢ γῦν τὸ ἀπειροςὸν πολλαπλασιάζεται, ἢ διαιρεῖται δι' ἀριθμῦ ἀμεταβλήτυ.

266. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ. Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἀκριβῶς ὑπάρχῃ ἀπειροςὸν τῦ παρονομαςῦ, τὸ ὁλόκληρον ἐςὶν ὁ λογάριθμος τῦ παρονομαςῦ· ὕτως Ο $\frac{\delta\chi}{\chi} = \lambda.\chi + \Gamma$, ᾗ Ο $\frac{\delta\chi}{\alpha+\chi} = \lambda\,(\alpha+\chi) + \Gamma$, ᾗ Ο. $\frac{2\alpha\chi\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi} = \lambda\,(\alpha\alpha+\chi\chi) + \Gamma$.

267. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἀπειροςὸν ᾖ τῦ παρονομαςῦ, πολλαπλασιαζόμενος, ἢ διαιρέμενος, δι' ἀριθμῦ ἀμετατρέπτυ, τὸ μὲν προκείμενον ἀπειροςὸν ἀναλύεται εἰς δύω ποιητὰς, ὧν ὁ μὲν ἐςι κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ἀκριβὲς ἀπειροςὸν τῦ παρονομαςῦ, ἅτερος δὲ ἐςιν ἀριθμὸς ἀμετάτρεπτος· τὸ δὲ ὁλόκληρον ἔςαι ὁ λογάριθμος τῦ τρεπτῦ παρονομαςῦ, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἀμετάτρεπτον ποιητήν. οὕτως εἰς ὁλοκλήρωσιν τῦ

$\frac{\alpha\chi^2 \delta\chi}{\alpha^3 + \chi^3}$, ἐπείπερ ἀπειροςὸν τῦ $\alpha^3 + \chi^3$ ἐςι τὸ $3\chi^2 \delta\chi$, προδιαθετέον τὸ ἀπειροςὸν, ὡς εἶναι ἐν τῷ ἀριθμητῇ $3\chi^2 \delta\chi$· ἐπὶ δὲ τῦτο γραπτέον $\frac{\alpha}{3} \times \frac{3\chi^2 \delta\chi}{\alpha^3 + \chi^3}$, ὃ τὸ ὁλόκληρον $\frac{\alpha}{3} \lambda(\alpha^3 + \chi^3) + \Gamma$ ὡσαύτως $\mathrm{O}\, \frac{\delta\chi}{\alpha - \chi}\, \mathrm{O}\, \frac{1}{-1}$. $\frac{-1\delta\chi}{\alpha - \chi} = -\lambda(\alpha - \chi) + \Gamma = 0 - \lambda(\alpha - \chi) + \Gamma = \lambda 1 - \lambda(\alpha - \chi) + \Gamma = \lambda \frac{1}{\alpha - \chi} + \Gamma$.

ὁμοίως $\mathrm{O}\ \frac{\chi\delta\chi}{\alpha\alpha + \chi\chi} = \frac{1}{2} \times \frac{2\chi\delta\chi}{\alpha\alpha + \chi\chi} = \frac{1}{2} \lambda(\alpha\alpha + \chi\chi) + \Gamma = \lambda \sqrt{(\alpha\alpha + \chi\chi)} + \Gamma$. τέλος δὲ O $\frac{\alpha\chi^{\nu-1}\delta\chi}{\kappa + \beta\chi^\nu} = \mathrm{O}\ \frac{\alpha}{\beta\nu} \times \frac{\nu\beta\chi^{\nu-1}\delta\chi}{\kappa + \beta\chi^\nu} = \frac{\alpha}{\beta\nu} \lambda(\kappa + \beta\chi^\nu) + \Gamma = \lambda (\kappa + \beta\chi^\nu)^{\frac{\alpha}{\beta\nu}} + \Gamma$.

268. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ζητηθήτω ἡ δύναμις τῦ $(\alpha + \chi)$ (τῦ α ὄντος 5, τῦ δὲ $\chi = 2$), τῦτ' ἔςι ζητηθήτω ὁ τῦ 7 ἀριθμῦ λογάριθμος· εἰλήφθω τοίνυν ἐκ τῶν κοινῶν κανονίων ὁ τῦ 7 λογάριθμος, ὅς ἐςι 0,8450980, ϗ πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ (253) 2,30258509, ἢ 2,302 5851· ὅθεν προκύψει 1,9459100, ἢ 1,94591 δύναμις τῦ $\lambda(\alpha + \chi)$, ὃ τὸ ὁλόκληρον τῦ $\frac{\delta\chi}{\alpha + \chi}$, ὅταν ᾖ, α μὲν $= 5$, χ δὲ $= 2$.

269. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐνίοτε δὲ ἀπαντῶσιν ἀπει-

ροςά, εὐθέως διὰ τῶν λογαρίθμων ὁλοκληρέμενα, καίτοι μὴ προδιατιθέμενα, καθάπερ τὰ προδιαληφθέντα· τοῦ τόν ἐςι τὸ $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi-1)}}$· ἔσθ' ὅτε δὲ τοῦ σκοπῦ τυγχάνομεν, μετασχηματίζοντες αὐτὰ εἰς ἀπειροςὸν λογαριθμικὸν, ἀποπειρώμενοι, εἰ πολλαπλασιάζοντες αὐτὰ ἐπὶ συνέκθεσιν τῦ χ, ποιῦμεν τὸ γινόμενον ἀπειροςὸν ταύτης τῆς συνεκθέσεως, ἢ αὐτὸ τὸ ἀπειροςὸν, πολλαπλασιαζόμενον, ἢ διαιρέμενον, δι' ἀριθμῦ ἀμετατρέπτυ· τηνικαῦτα γὰρ διὰ τῆς αὐτῆς συνεκθέσεως διαιρῦντες εὑρίσκομεν προφανῶς ἀπειροςὸν λογαριθμικόν· ταύτην ὖν τὴν Θεωρίαν ἐφαρμόζοντες τῷ $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi-1)}}$, πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ $\chi+\sqrt{(\chi\chi-1)}$, ὅθεν πρόεισι $\frac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi-1)}}$ $+\delta\chi$, ὅπερ ἐςὶν ἀληθῶς ἀπειροςὸν τῦ $\chi+\sqrt{(\chi\chi-1)}$·

ὥςε $\text{O}\,\frac{\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi-1)}}=\text{O}\,\frac{\delta\chi+\frac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi-1)}}}{\chi+\sqrt{(\chi\chi-1)}}=\lambda\,[\chi+\sqrt{(\chi\chi-1)}]+\Gamma$, εὑρεθήσεται ὡσαύτως τὸ ὁλόκληρον τῦ $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(1-\chi\chi)}}$, πολλαπλασιάσασι τόν τε ἀριθμητὴν, καὶ τὸν παρονομαςὴν ἐπὶ $\sqrt{(-1)}$, ὅθεν πρόεισι $\frac{\delta\chi\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(\chi\chi-1)}}$, ὖ τὸ ὁλόκληρον, ὥσπερ εἴδομεν, ἐςὶ $\sqrt{(-1)}\,\lambda\,[\chi+\sqrt{(\chi\chi-1)}]+\Gamma$.

270. Τὸ ὁλόκληρον τῦ $\frac{\delta\chi}{\chi}$ δύναται εἶναι πεπερασμένον, ἢ ἄπειρον, καθ' ὃ ἂν μέρος αὐτῦ βυλομένοις ᾖ

εὑρεῖν· ἵνα δὲ τὸ πρᾶγμα ἀναπτύξωμεν, σημειωτέον, ὅτι εὑρεῖν τὸ ὁλόκληρον τῦ $\frac{\delta\chi}{\chi}$ ὑδέν ἐςιν ἄλλο, ἢ τετραγωνίσαι τὴν κωνικὴν ὑπερβολὴν, ἀναφερομένην πρὸς τὰς αὐ. τῆς ἀσυμπτώτυς· ἡ γὰρ ταύτης τῆς καμπύλης ἐξίσωσις ἐςι $\chi\upsilon = \alpha\alpha$, ἢ $\chi\upsilon = 1$, ὑποτιθεμένοις, διὰ τὸ ἁπλέςερον, $\alpha = 1$· ἀλλ᾽ ἐκ ταύτης τῆς ἐξισώσεως ἀποφέρεται $\upsilon = \frac{1}{\chi}$· ἄρα τὸ ςοιχεῖον $\upsilon\delta\chi$ τῆς ἐπιφανείας γίνεται $\frac{\delta\chi}{\chi}$· βυλομένοις ἄρα εὑρεῖν τὰ χωρία, τὰ ἀρχόμενα ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτυ ΑΖ (σχ. 83), τὸ ὁλόκληρον τῦ $\frac{\delta\chi}{\chi}$, εἴτ᾽ ὑν $\lambda\chi + \Gamma$ χρεὼν εἶναι ἴσον μηδενὶ, ὅταν τὸ σημεῖον Π πίπτῃ ἐπὶ τῦ σημείυ Α, εἴτ᾽ ὑν ὅταν ἡ $\chi = 0$· ἔςιν ἄρα τηνικαῦτα $\lambda 0 + \Gamma = 0$, ἢ ἑπομένως $\Gamma = -\lambda 0$· τὸ ἄρα ὁλόκληρον ἐςι $\lambda\chi - \lambda 0 = \frac{\chi}{\lambda 0}$, τοῦτ᾽ ἐςι τὰ χωρία ΖΑΠΜΤ, τὰ ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτυ ἀρχόμενα, εἰσὶν ἄπειρα, τῶν Ζ, Τ περάτων ὑπάρχειν ὑποτεθέντων τῆς τε ἀσυμπτώτυ ἢ τῦ συςοιχῦντος ὑπερβολικῦ κλωνός.

Ἀλλ᾽ ἐὰν, τῦ σημείυ Ο κορυφὴ ὄντος τῆς ὑπερβολῆς (ὅτε ἢ ἡ συςοιχῦσα ἀποτετμημένη ΑΝ ἐςιν $= 1$), βυλομένοις ᾖ εὑρεῖν τὰ ἀπὸ τῦ Ν ἀρχόμενα χωρία, τηνικαῦτα τὸ ὁλόκληρον $\lambda\chi + \Gamma$ χρεὼν γίνεσθαι μηδὲν, ὅταν τὸ Π πίπτῃ ἐπὶ τῦ Ν σημείυ, ἢ ὅταν ἡ $\chi = 1$· ἔςιν ἄρα $\lambda 1 + \Gamma = 0$, ἢ ἑπομένως $\Gamma = -\lambda 1 = 0$· τὰ ἄρα χωρία ΝΟΜΠ ἐκτίθεται διὰ $\lambda\chi$.

271. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐντεῦθεν δῆλον ά. ὅτι οἱ λογάριθμοι, οἱ ἐκ τȣ̃ λογισμȣ̃ ἀμέσως προκύπτοντες, ἐμφαίνȣσι τὰ ὑπερβολικὰ χωρία, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῆς ἀσυμπτώτȣ ϗ τῆς καμπύλης, ϗ ἀρχόμενα ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην κορυφῆς Θ· διὰ τȣ̃το δὲ ϗ ὑπερβολικοὶ ἤκȣσαν (47) οἱ τοιȣ̃τοι λογάριθμοι· β΄. ἐὰν τὸ ὁλόκληρον τȣ̃ $\frac{\delta\chi}{\chi} = \chi^{-1}\delta\chi$, ληφθὲν κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα, ᾗ ἄπειρον, ἐμφαίνει τὰ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀσυμπτώτων ἀρχόμενα χωρία· ὀψόμεθα δὲ ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὑποδείγματα ὁλοκληρώσεως, διὰ τῶν λογαρίθμων ἐπιτηδευομένης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τȣ̃ τρόπȣ, καθ᾽ ὃν ἡ ἀπειροςȣ̃ δυωνύμȣ προκειμένȣ ὁλοκλήρωσις ἀνάγεται, ὅταν ἐξῇ, εἰς ὁλοκλήρωσιν ἀπειροςȣ̃ δυωνύμȣ ἐγνωσμένȣ.

272. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τὴν ὁλοκλήρωσιν ἀπειροςȣ̃ δυωνύμȣ εἰς τὴν δυωνύμȣ ἀπειροςȣ̃ γνωςȣ̃ ὁλοκλήρωσιν τρέψαι.

ΛΥΣΙΣ. Ἐξετάσαντες τὸ προτεθὲν ἀπειροςὸν (207, 209) εἰ εἴη ὁλοκληρώσιμον, ϗ τοιȣ̃το μὴ εὑρόντες, τὰς τῆς προσεγγίσεως μεθόδȣς, περὶ ὧν διείληπται (241, κ.τ.λ.), ἀφέντες, ἐρευνήσωμεν, εἰ τὸ προτεθὲν ἀπειροςὸν ἀναχθῆναι ἔχοι εἰς ἀπειροςὸν δυώνυμον ἁπλȣ́ςερον, ȣ̃περ ἤδη ἔγνωςαι ἡ διὰ προσεγγίσεως ὁλοκλήρωσις· τῆς δὲ τοιαύτης ἀναγωγῆς χαρακτῆρες, οἱ ἐφεξῆς.

Ἔςω $\alpha\chi^{\mu}\delta\chi\,(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi}$ τὸ προκείμενον ἀπειροςὸν, ϗ $\varepsilon\chi^{\rho}\delta\chi\,(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi}$ τὸ, ἐφ' ὃ ἀναγαγεῖν δεῖ τὸ προκείμενον· τοῦτ' ἔςιν ἀλλήλων μηδενὶ διαφερέτωσαν, ὅτι μὴ τοῖς συνεργοῖς α, ε, ϗ τοῖς τοῦ ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως χ δείκταις, ϗ ρ ἔςω ἔλαττον μὲν τοῦ μ, ταυτοσύμβολον μέντοι· ἡ οὖν ζητουμένη ἀναγωγὴ δυνατῶς ἔχει, εἴπερ $\frac{\mu-\rho}{\nu}$ ἀριθμὸς εἴη ὁλοχερὴς ϗ ὑπαρκτικός· ἵνα δὲ τοῦτο γένοιτο, ὑποτεθείσθω $O\,\alpha\chi^{\mu}\delta\chi\,(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi}+(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi+1}\,(A\chi^{\mu-\nu+1}+B\chi^{\mu-2\nu+1}+\Gamma\chi^{\mu-3\nu+1}$ $+$ κ. τ. λ.$)+\Xi\,O\,\varepsilon\chi^{\rho}\delta\chi\,(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi}$, προσλαμβάνουσι τόσους ὅρους σὺν ἑνὶ ἐν τῇ σειρᾷ $A\chi^{\mu-\nu+1}+$ κτ. ὅσαι ἐνυπάρχουσι μονάδες τῷ $\frac{\mu-\rho}{\nu}$· ἵνα δὲ διορισθεῖεν οἱ συνεργοὶ A, B, Γ κτ. εἰλήφθω τὰ ἀπειροςὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ϗ διῃρήσθω διὰ $(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi}$, ϗ μετατεθείσθων ἐπὶ θάτερον μέλος πάντες οἱ ὅροι, ϗ ἐξισούσθων τῷ μηδενί· οὐκοῦν τὸ ἄθροισμα τῶν τὸν αὐτὸν βαθμὸν τῆς χ πολλαπλασιαζόντων ὅρων τοσαύτας ἕξει ἐξισώσεις, ὅσαι εἰσὶν αἱ ἄγνωςοι A, B, Γ κτ.· ἐντεῦθεν δὲ αἱ ἄγνωςοι γνωςαὶ γενήσονται· προκείσθω γὰρ εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\frac{\chi^{6}\delta\chi}{\alpha^{2}}\,(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$· ἐκ τοίνυν τῶν εἰρημένων (207, 209) τὸ ἀπειροςὸν τόδε ὁλοκληρώσεως ἐςὶν ἀνεπίδεκτον· ἀλλὰ τοῦ σχήματος τῆς ἐν τῇ παρενθέσει ποσότητος ταυτιζομένου τῷ τῆς ἐμπεριεχομένης τῷ τόξου κυκλικοῦ τύπῳ, ζητηθήτω, εἴπερ ἡ προτεθεῖσα ποσότης ἐξέχοιτο τῆς $\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, ἥτις ἐςὶ τύπος τόξου κύκλου, οὗ ἡ ἀκτίς ἐςιν α, ϗ χ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένη· κατὰ τοίνυν τὸν ἀποδοθέντα κανόνα ἐςὶ $\frac{\mu-\varrho}{\nu}$, εἴτ' ἐν $\frac{6-o}{\nu}$, ἀριθμὸς ὁλοχερὴς ἢ ὑπαρκτικὸς 3· συνάγεται ἄρα ἐντεῦθεν, ὅτι τὸ ὁλόκληρον τῦ προκειμένυ ἀπειροςῦ ἐξέχεται πάντως τοιύτυ τόξυ κυκλικῦ, εἰς ὃ τὴν εὕρεσιν ὑποτεθείσθω $O\ \frac{\chi^6 \delta\chi}{\alpha^5}(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} = (\alpha\alpha-\chi\chi)^{\frac{1}{2}}$ $(A\chi^5 + B\chi^3 + \Gamma\chi) + \Xi\ O\ \alpha\delta\chi\ (\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$· ἢ εἰλήφθωσαν αὐτῶν τὰ ἀπειροςὰ, ἃ ἔσονται.

$$\frac{\chi^6\delta\chi}{\alpha^5}(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} (A\chi^5+B\chi^3+\Gamma\chi)(-\chi\delta\chi(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}) \\ +(\alpha\alpha-\chi\chi)^{\frac{1}{2}}(5A\chi^4+3B\chi^2+\Gamma)\delta\chi \\ +\Xi\alpha\delta\chi(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

διαιρεθέντων δὲ διὰ $\delta\chi\ (\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, ἀποφέρεται $\frac{\chi^6}{\alpha^5} = -A\chi^6 - B\chi^4 - \Gamma\chi^2 + (\alpha\alpha-\chi\chi)(5A\chi^4 + 3B\chi^2 + \Gamma) + \Xi\alpha$· τῦ δὲ σεσημειωμένυ πολλαπλασιασμῦ πραχθέντος, ἢ μεταθέσεως γενομένης, πρόεισιν

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\alpha^5}\ \chi^6 + B\chi^4 + \Gamma\chi^2 - \Xi\alpha \\ + A\chi^6 + 3B\chi^4 + \Gamma\chi^2 \\ + 5A\chi^6 - 5A\alpha^2\chi^4 - 3B\alpha^2\chi^2 - \Gamma\alpha^2 \end{array}\right\} = o$$

ἐπεὶ τοίνυν ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπικρατεῖ, ὁποῖον ἂν εἴη τὸ χ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἕκαςον τῦ χ βαθμὸν πολλαπλασιαζόντων ὅρων χρεὼν ὑπάρχειν μηδέν· ἔςιν ἄρα $6A + \frac{1}{\alpha^5} = o$, ἢ $-5A\alpha^2 + 4B = o$, ἢ $2\Gamma - 3B\alpha^2 = o$, ἢ $-\Xi\alpha - \Gamma\alpha^2 = o$· ἐκ δὲ τύτων τῶν ἐξισώσεων πορίζεται $A = -\frac{1}{6a^2}$, ἐ $B = -\frac{5}{24a^3}$, καὶ $\Gamma = -\frac{5}{16a}$, ἐ $\Xi = \frac{5}{16}$· ἐκοῦν τὸ ὁλόκληρον τοῦ $\frac{\chi^6\delta\chi}{a^5}(aa - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$ ἐςὶν $(aa-\chi\chi)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{\chi^5}{6a^2} - \frac{5\chi^3}{24a^3} - \frac{5\chi}{16a}\right) + \frac{5}{16}\,O\,.\,a\delta\chi\,(aa-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} + \Gamma$· τὸ δὲ $O.\,a\delta\chi\,(aa - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, τόξον ὂν κύκλου, οὗ ἡ μὲν ἀκτὶς ἐςὶν a, ἡ δ' ἀποτετμημένη χ, εὐπετῶς εὑρίσκεται.

278. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν δὲ ἡ διαφορὰ $\mu - \rho$ τῶν δυοῖν ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως δεικτῶν, διαιρεθεῖσα διὰ τοῦ ἐν τῇ παρενθέσει δείκτου ν, μὴ προβάλῃ ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικὸν, οὐ παρὰ τοῦτο συμπερανθήσεται ἀδύνατος ἡ ἀπειροςοῦ ἐφ' ἕτερον ἀναγωγή· δεῖ γὰρ ἔτι ἀπεργάσασθαι τὸν ἐν τῇ παρενθέσει δείκτην λειπτικὸν ἐφ' ἑκάςου ἀπειροςοῦ· ἐ ἢν διαφορὰ τῶν δύω νέων ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως δεικτῶν, διαιρεθεῖσα διὰ τοῦ ἐν τῇ παρενθέσει δείκτου, προβάλῃ ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικὸν, δυνατῶς ἔχουσά ἐςιν ἡ ἀναγωγή· ἐὰν γὰρ, φέρε, ζητηθῇ, εἴπερ ἡ ποσότης $\chi^{-8}\,\delta\chi\,(a^4 - \chi^4)^{-\frac{1}{2}}$ ἐξέχοιτο τῆς $\delta\chi\,(a^4 - \chi^4)^{-\frac{1}{2}}$, δῆλον ὅτι $\frac{\mu - \rho}{\nu} = \frac{-8 - 0}{4}$ οὐ δίδωσιν ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικόν· πρὶν οὖν συναγαγεῖν ὅτι τὰ δύω ἀπειροςὰ ἀλλήλων εἰσὶν ἀνεξάρτητα, τρεπτέον εἰς $\chi^{-10}\delta\chi(a^4\chi^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ ἐ $\chi^{-2}\delta\chi(a^4\chi^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$· ἐνταῦθα μέντοι καταφανὲς, ὅτι $\frac{\mu - \rho}{\nu}$, εἴτ' οὖν $\frac{-10+2}{-4}$ προβάλλει ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικόν· τὰ δύω ἄρα ἀπειροςὰ ἀλλήλων ἐξέχονται· ἵν' οὖν τὸ προτεθὲν ὁλοκλη-

ρωθῇ ἐπὶ τῆς δευτέρας περιπτώσεως, μετιτέον, ὡς προείρηται, ἐκ αὐτὰ τὰ δύω ἀπειροςὰ, ἀλλὰ τὰ προκύψαντα μετὰ τὸ γενέσθαι λειπτικὸν τὸν δείκτην· ἐν ἐν τῷ προτεθέντι ὑποδείγματι γενέσθω $O.\chi^{-10}\delta\chi\,(\alpha^4\chi^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}} = (\alpha^4\chi^{-4} - 1)^{\frac{1}{2}}\,(A\chi^{-5} + B\chi^{-1}) + \Xi O.\,\chi^{-2}\delta\chi\,(\alpha^4\chi^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, ᾗ διωρίσθωσαν ὡς ἀνωτέρω οἱ συνεργοὶ A, B, Ξ.

274. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Συμβαίνει πολλάκις τὸ προκείμενον ἀπειροςὸν ὑπάρχειν ὁλοκληρώσιμον, καίπερ ἐξέχεσθαι δοκεῖν τῷ δοθέντος ἀπειροςῷ διὰ θατέρου τῶν δυοῖν κανόνων· ἀλλὰ παρὰ τοὺς ἀποδοθέντας ἐξεταςικοὺς κανόνας (207, 209), εἰ ἄρα τὸ προκείμενον ἀπειροςὸν ὑπάρχοι ὁλοκληρώσιμον, ἀείποτε συμβαίνει κατὰ ταύτην τὴν περίπτωσιν τὸν συνεργὸν Ξ, ὃς ἀφοσιοῦται τῷ ἀπειροςῷ, εἰς ὃ ζητεῖται ἀναγαγεῖν τὸ προκείμενον, ὑπάρχειν O· ἐὰν, φέρε, ζητηθῇ, εἰ τὸ $\chi^{-4}\delta\chi\,(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$ ἐξέχοιτο τοῦ $\delta\chi\,(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, ἀδύνατον μὲν εὑρεθήσεται ἐν τῇ πρώτῃ τῶν δυεῖν περιπτώσεων· ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ, τοῦτ' ἔςι μεταβαλόντων τῶν ἀπειροςῶν εἰς $\chi^{-5}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, ᾗ $\chi^{-1}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, εὑρεθήσεται $\frac{\mu - \rho}{\nu}$, εἴτ' οὖν $\frac{-5+1}{-2}$, ἀριθμὸς ὁλοχερὴς ᾗ ὑπαρκτικὸς, ὃ δείκνυσι τὸ πρῶτον ἀπειροςὸν ἐξεχόμενον τοῦ δευτέρου· ἀλλ' ἔμπης τὸ ἀπειροςὸν $\chi^{-5}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2} + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ἐςὶν ὁλοκληρώσιμον (207), ἡ δ' ἀντίφασις φαινομένη μόνον ὑπάρχει· ἐὰν γὰρ ἐπιςηριζόμενοι τῇ ποσότητι $\frac{\mu - \rho}{\nu}$, ἥτις ἐςὶν ἴση ἀριθμῷ ὁλοχερεῖ, ζητήσωμεν

ἀναγαγεῖν τὴν $\chi^{-5}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ εἰς $\chi^{-1}\delta\chi(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, ποιήσομεν $O\chi^{-5}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ $=(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{\frac{1}{2}}(A\chi^{-2}+B)+\Xi O\,.\,\chi^{-1}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, καὶ διορίζοντες τοὺς συνεργοὺς A, B, Ξ, ὥσπερ ἀνωτέρω, εὑρήσομεν $\Xi=0$· ὅθεν πρόεισιν $O\,\chi^{-5}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ ἴση ποσότητι καθαρῶς γεωμετρικῇ.

275. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. Ὑποτεθείσθων ἤδη τὰ δύο δυώνυμα, τὰ εἰσιόντα ἐν τοῖς, περὶ ὧν ἐνταῦθα ὁ λόγος, ἀπειροστοῖς, ἔχοντα δείκτας διαφόρους· ὡς τὸ προτεθὲν ἀπειροστὸν ὑπάρχειν $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\rho}$· τὸ δὲ, εἰς ὃ γενήσεται ἡ ἀναγωγὴ, $\chi^{\mu}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$, τοῦ π ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος ἐλάττω τοῦ, ὃν ἐμφαίνει τὸ ρ· ἐὰν οὖν ρ ᾖ ὑπαρκτικὸν, μεταβεβλήσθω τὸ ἀπειροστὸν $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\rho}$ εἰς $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi-\rho}\times(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$· τηνικαῦτα δὲ, εἴπερ $\rho-\pi$ εἴη ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς, ὑπαρκτικὸς, ἀναχθῆναι δύναται τὸ $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\rho-\pi}(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$ εἰς ὅρων σειρὰν τοιαύτην $(A'\chi^{\sigma}+B'\chi^{\sigma+\nu}+\Gamma'\chi^{\sigma+2\nu}+$ κ.τ.λ.$)\,\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$, ὧν ἕκαστος ἀναχθῆναι δύναται εἰς $\chi^{\mu}\delta\chi(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$ διὰ τῆς προεκτεθείσης μεθόδου, εἰ $\sigma-\mu$ διαιρεθῆναι ἔχοι διὰ ν· ἵνα δὲ ὁλοσχερῶς γένοιτο ἡ ἀναγωγὴ, ἐφηρμόσθω κατὰ λέξιν τὰ προειρημένα ἐπὶ ταύτης τῆς μεθόδου, λαμβάνουσιν ὑπὲρ τοῦ κληθέντος ἐκεῖθι σ τὸν μείζω δείκτην τῆς ἐν τῇ ἀνεπτυγμένῃ δυνάμει τοῦ $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\rho-\pi}$· ἐὰν, φέρε, προκέηται τὸ $O\chi^{2}\delta\chi\,(\beta\beta-\chi\chi)^{\frac{3}{2}}$ ἀναγαγεῖν εἰς $O\,\delta\chi\,(\beta\beta-\chi\chi)^{\frac{1}{2}}$, μεταβεβλήσθω τὸ $O\chi^{2}\chi\,(\beta\beta-\chi\chi)^{\frac{3}{2}}$ εἰς $O\chi^{2}\delta\chi\,(\beta\beta-\chi\chi)$

$(\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{1}{2}}$, ἢ $O\,(\beta\beta\chi^2\delta\chi - \chi^4\delta\chi)\,(\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{1}{2}}$ τηνικαῦτα δὲ, ὃ χρὴ λαβεῖν ὑπὲρ τοῦ σ, ἐστι 4· ὑποτεθείσθω ἄρα κατὰ τὴν μέθοδον, $O\,(\beta\beta\chi^2\delta\chi - \chi^4\delta\chi)$ $(\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{1}{2}} = (\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{3}{2}}\,(A\chi + B\chi^3) + O\,P\delta\chi\,(\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{1}{2}}$.

276. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ΄. Ἐὰν δὲ τοὐναντίον, ὑπάρχῃ τὸ ρ λειπτικὸν, τὸ ἀπειροστὸν, εἰς ὃ ἀναγαγεῖν βουλόμεθα τὸ προκείμενον, προπαρασκευάσθω οὕτω· $\chi^\mu\delta\chi$ $(\alpha + \beta\chi^\nu)^{\pi-\rho} \times (\alpha + \beta\chi^\nu)^\rho$· τηνικαῦτα δὲ, ἐὰν $\pi - \rho$ ἀριθμὸς ᾖ ὁλοσχερὴς, ἐπεὶ ἀναγκαίως ἔσται ὑπαρκτικὸς (ὑποτίθεται γὰρ λειπτικὸν τὸ ρ καὶ μεῖζον τοῦ π, ὁποιονδήποτ᾽ ἂν εἴη τὸ π) δυνατὸν ἀναγαγεῖν τὸ $\chi^\mu\delta\chi\,(\alpha + \beta\chi^\nu)^{\pi-\rho}\,(\alpha + \beta\chi^\nu)^\rho$ εἰς πεπερασμένων ὅρων σειρὰν τοιαύτην $(A'\chi^\mu + B'\chi^{\mu+\nu} + \Gamma'\chi^{\mu+2\nu} + \kappa.\tau.\lambda.)\,(\alpha + \beta\chi^\nu)^\rho$· τηνικαῦτα δὲ πραχθήσεται, ὡς εἰ ἐζητεῖτο ἀναγαγεῖν ταύτην τὴν ἐσχάτην σειρὰν εἰς τὸ σχῆμα $\chi^\sigma\delta\chi\,(\alpha + \beta\chi^\nu)^\rho$, τοῦτ᾽ ἔστιν ἐπιτηδευθήσεται τὰ αὐτὰ, ἃ προδιώρισται, ἡνίκα ἐστὶν ὑπαρκτικὸν τὸ ρ· ἐὰν, φέρ᾽ εἰπεῖν, ζητῆται ἀναγαγεῖν τὸ $\vartheta\chi^{-2}\delta\chi\,(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-2}$ εἰς $\delta\chi\,(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1}$, εἴτ᾽ οὖν $\dfrac{\delta\chi}{\alpha\alpha + \chi\chi}$, ὅπερ (243) ὁλοκληροῦται διὰ τόξου κύκλου, οὗ ἡ μὲν χ ἐστιν ἁπτομένη, ἡ δὲ α ἀκτίς· μεταβεβλήσθω τοίνυν τὸ $\delta\chi\,(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1}$ εἰς $(\alpha\alpha + \chi\chi)\,\delta\chi\,(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-2}$· καὶ ἐπείπερ ὁ ἐκτὸς τοῦ προτεθέντος διωνύμου δείκτης ἐστι -2, ὑποτεθείσθω $O.P\,(\alpha\alpha + \chi\chi)\,\delta\chi\,(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-2} = (\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1}\,(A\chi^{-1} + B\chi) + O.\vartheta\chi^{-2}\delta\chi\,(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-2}$· διηνύσθω δὲ τὰ λοιπὰ, ὡς ἀνωτέρω, πρὸς διορισμὸν τῶν συνεργῶν A, B, P· τηνικαῦτα δὲ διὰ μετα-

θέσεως πορισθήσεται ἡ δύναμις τῦ $O . \vartheta\chi^{-2}\delta\chi\ (\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1}$, ἐφ' ἧς ἀνήχθω εἶτα ἡ $P\ (\alpha\alpha + \chi\chi)\ \delta\chi\ (\alpha\alpha + \chi\chi)^{-2}\ P\ \delta\chi\ (\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1}$.

Ἐὰν δὲ $\pi - \rho$ μὴ ᾖ ἀριθμὸς ὁλοχερὴς, ἡ ἀπειροςῦ ἐφ' ἕτερον ἀναγωγὴ ἔςαι ἀδύνατος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΩΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ λογικῶν κλασμάτων.

277. Πᾶσα ποσότης ἀπειροςὴ λογικὴ ἀείποτε ὁλοκληρώσεώς ἐςιν ἐπιδεκτικὴ, ἤτοι γεωμετρικῶς, ἢ διὰ κυκλικῶν τόξων, ἢ διὰ λογαρίθμων, ἢ διὰ τῶν τριῶν ἅμα, ἢ μόνον διὰ δυοῖν.

Καὶ γεωμετρικῶς μὲν ὁλοκληρῦται ἀεὶ, ἡνίκα μὴ περιέχει παρονομαςὴν τρεπτὸν, εἰ μὴ εἴη μονώνυμος· ᾗ ὕτω μέντοι ἐξαιρεῖται, ἐὰν ᾖ ὑψωμένος εἰς βαθμὸν ὐδένα ἄλλον, ὅτι μὴ τὴν μονάδα.

Λείπεται δὲ ἰδεῖν τὴν ἀλήθειαν τῦ προκειμένυ ἐν ταῖς ἄλλαις περιπτώσεσι, τῦτ' ἔςιν, ὅταν τὸ προκείμενον ἀπειροςὸν ἔχῃ παρονομαςὴν λογικὸν συμπεπλεγμένον.

Ὑποτεθείσθω δὲ, ὅτι ἐν τῷ ἀριθμητῇ τῦ προτεθέντος ἀπειροςῦ κλάσματος ἡ τρεπτὴ ὑπάρχει βαθμῦ ἥττονος, ἢ ἐν τῷ παρονομαςῇ· ἐὰν δὲ μὴ ὕτως ἔχυσα ᾖ, ἤχθω εἰς τῦτο, διαιρῦσι τὸν ἀριθμητὴν διὰ τῦ παρονομαςῦ, μέχρις ἂν ὁ κατάλοιπος βαθμὸς γένοιτο ἐλάττων τῦ ἐν τῷ παρονομαςῇ· ἐὰν γὰρ, φέρε, προκέηται εἰς ὁλοκλήρωσιν $\dfrac{\chi^3\delta\chi}{\alpha\alpha + 3\alpha\chi + \chi\chi}$, διῃρήσθω $\chi^3\delta\chi$ διὰ $\chi\chi +$

$3\alpha\chi + \alpha\alpha$· ὀκοῦν ἔςαι $\chi\delta\chi$ πηλίκον ἢ $- 3\alpha\chi^2\delta\chi - \alpha\alpha\chi\delta$ κατάλοιπον· διῃρήσθω εἶτα τόδε τὸ κατάλοιπον διὰ τοῦ αὐτοῦ, παρονομαςοῦ· ἢ ἔςαι, πηλίκον μὲν $- 3\alpha\delta\chi$, κατάλοιπον δὲ $+ 8\alpha^2\chi\delta\chi + 3\alpha^3\delta\chi$· τοιγαροῦν ἀντὶ $\dfrac{\chi^3\delta\chi}{\alpha\alpha + 3\alpha\chi + \chi\chi}$, εἰλήφθω $\chi\delta\chi - 3\alpha\delta\chi +$ $\dfrac{8\alpha^2\chi\delta\chi + 3\alpha^3\delta\chi}{\alpha\alpha + 3\alpha\chi + \chi\chi}$.

Ἵνα δὲ γνοίημεν, ὅπως ἂν ὁλοκληρωθείη κλάσματα ἀπειροςὰ λογικά, ἀναμνησθέντες, ὅτι τὸ ἀπειροςὸν λογαριθμοῦ πάσης ποσότητος ἐςὶ τὸ ἀπειροςὸν τῆς αὐτῆς ποσότητος, διῃρημένον διὰ τῆς αὐτῆς, τοῦτ' ἔςιν ἀεί ποτε ὑπάρχει κλάσμα, οὐκ ἀπεικότως ἂν συναγάγοιμεν, ὅτι ἡ τῶν λογικῶν κλασμάτων ὁλοκλήρωσις τῶν λογαρίθμων ἐνδέχεται ἐξέχεσθαι· εἰλήφθω, φέρ' εἰπεῖν, τὸ $2\alpha\lambda(\alpha + \chi) - 2\alpha\lambda(2\alpha + \chi)$, οὗ τὰ ἀπειροςά εἰσι $\dfrac{2\alpha\delta\chi}{\alpha + \chi} - \dfrac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha + \chi}$, ἢ, ἀναγωγῇ ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, $\dfrac{2\alpha\alpha\delta\chi}{2\alpha\alpha + 3\alpha\chi + \chi\chi}$· δῆλον οὖν, ὅτι εἰς ὁλοκλήρωσιν τοῦδε τοῦ κλάσματος, διαιρετέον ἐςὶν αὐτὸ εἰς δύω κλάσματα, ὧν τὸ μὲν ἂν ἔχοι παρονομαςὴν $\alpha + \chi$, θάτερον δέ, $2\alpha + \chi$· οἱ δὲ ἑκατέρων ἀριθμηταὶ εἶεν ἀριθμοὶ ἀμετάτρεπτοι, πεπολλαπλασιασμένοι ἐπὶ $\delta\chi$· ταῦτα δὲ τὰ δύω κλάσματα ὁλοκληροῦνται τότε διὰ τῶν λογαρίθμων.

278. Εἰς ἄρα ὁλοκλήρωσιν τῶν τοιούτων κλασμάτων, ἀναλυτέον αὐτὰ εἰς τοσάδε κλάσματα ἁπλᾶ, ὅσους ποιητὰς ἔχει ὁ παρονομαςής, ὧν ἕκαςον ἔχει παρονομαςὴν ἕνα τούτων τῶν ποιητῶν· ταύτῃ οὖν τῇ μεθόδῳ χρη-

στέον, ὅταν πάντες οἱ ποιηταὶ, ἀφ' ὧν συνίσαται ὁ παρονομαστὴς, ὦσιν ἄνισοι.

279. Ἐὰν δὲ μεταξὺ τῶν τοῦ παρονομαστοῦ ποιητῶν ἀπαντῶσι καὶ ἰσάλληλοι, ἄχρηστος τηνικαῦτα ἡ μέθοδος, εἴ γε ἡ ὁλοκλήρωσις ὁλοσχερῶς τῶν λογαρίθμων ἐκ ἔχεται· ἐὰν γὰρ, φέρ' εἰπεῖν, προκέηται τὸ $\frac{\delta\chi}{(\alpha+\chi)^2}$, οὗ ὁ παρονομαστὴς ἔχει δύω ἰσαλλήλους ποιητὰς $\alpha+\chi$, $\alpha+\chi$ εὑρεθήσεται (203) ταύτης τῆς ποσότητος τὸ ὁλόκληρον, ἢ τῆς αὐτῇ ἴσης $\delta\chi\,(\alpha+\chi)^{-2}$, ὑπάρχον $-(\alpha+\chi)^{-2}+\Gamma$· ὅπερ οὐδεμίαν ὅλως ἔχει σχέσιν πρὸς τοὺς λογαρίθμους· ἀλλὰ κατάδηλον ἅμα, ὡς εἰ ληφθεῖεν τὰ ἀπειροστὰ ποσότητος, οἷα ἡ $\frac{\alpha\alpha}{\alpha+\chi}+2\alpha\lambda\,(\alpha+\chi)$ $+\,2\alpha\lambda\,(2\alpha+\chi)$, ἔσαι $-\frac{\alpha\alpha\delta\chi}{(\alpha+\chi)^2}+\frac{2\alpha\delta\chi}{\alpha+\chi}+\frac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha+\chi}=\frac{(\alpha\alpha+2\alpha\chi)\,\delta\chi}{(\alpha+\chi)^2}+\frac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha+\chi}$, εἴτ' οὖν (ἀναχθέντων ἁπάντων τῶν ὅρων εἰς κοινὸν παρονομαστὴν) $\frac{4\alpha\chi^2\delta\chi+9\alpha^2\chi\delta\chi+4\alpha^3\delta\chi}{(\alpha+\chi)^2\,(2\alpha+\chi)}$, οὗ τὸ ὁλόκληρον προδήλως περιέχει μίαν γεωμετρικὴν καὶ λογαριθμικὰς ποσότητας· ὁ τρόπος οὖν τοῦ εὑρεῖν τοῦτο τὸ ὁλόκληρον, ὑπαγαγεῖν ἐσὶ τὸ ἀπειροστὸν τῷ προτέρῳ σχήματι $\frac{\alpha\alpha+2\alpha\chi}{(\alpha+\chi)^2}$ $\delta\chi+\frac{2\alpha\delta\chi}{\alpha+\chi}$, τοῦτ' ἐσιν, ἀναλῦσαι εἰς δύω κλάσματα, ὧν τὸ μὲν ἔχοι, παρονομαστὴν μὲν πάντας τοὺς ἴσους ποιητὰς, ἐν δὲ τῷ ἀριθμητῇ πάντας τοὺς τῆς χ βαθμοὺς πλὴν

τε ἐν τῷ παρονομαστῇ καθυπερτέρου βαθμοῦ· τῶν δ' ἄλλων κλασμάτων ἔχοιεν ἕκαστον, παρονομαστὴν μὲν ἕνα τῶν ἀνίσων ποιητῶν, ἐν δὲ τῷ ἀριθμητῇ οὐδένα βαθμὸν τῆς χ· τηνικαῦτα γὰρ ὁ μὲν ὅρος $\frac{\alpha\alpha + 2\alpha\chi}{(\alpha+\chi)^2}\delta\chi$ εὐμαρῶς ὁλοκληροῦται διὰ τῶν προαποδοθέντων κανόνων, ὁ δὲ $\frac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha+\chi}$ διὰ τῶν λογαρίθμων· δυνατὸν οὖν διατέμνειν οὕτως ἅπαν λογικὸν κλάσμα· καὶ τοῦτο ἀεὶ ἐπιτηδεύσαιμεν ἄν, εἰ μὴ εἶεν ποιηταὶ ἐπίπλασοι ἐπὶ τοῦ παρονομαστοῦ.

Τοιγαροῦν $\frac{(\alpha + \beta\chi + \gamma\chi^2 + \ldots\ldots \kappa\chi^{\nu-1})\,\delta\chi}{(M + N\chi + \Pi\chi^2 + \ldots\ldots T\chi^{\nu})}$ ἐμφαινέτω ἐν γένει ἅπαν κλάσμα λογικόν· καὶ ὑποτεθείσθω ὁ παρονομαστὴς ἔχων ἀριθμὸν μ ποιητῶν ἴσων τῷ $\chi + \vartheta$, καὶ ἀριθμὸν π ποιητῶν ἴσων ἑκάστου τῷ $\chi + \eta$, κτ. καὶ ἀριθμὸν ὁντιναοῦν ποιητῶν ἀνίσων καὶ ἐμφαινομένων διὰ $\chi + \iota$, $\chi + \xi$, $\chi + \rho$, κτλ.· ἐκεῖνο τὸ προτεθὲν κλάσμα ἔσται $\frac{(\alpha + \beta\chi + \gamma\chi^2 + \ldots\ldots \kappa\chi^{\nu-1})\,\delta\chi}{(\chi+\vartheta)^{\mu}(\chi+\eta)^{\pi}\times \text{κτλ.}(\chi+\iota)(\chi+\xi)(\chi+\rho)}$ κτλ.· εἰς δὲ τὴν τούτου ὁλοκλήρωσιν ἐπάναγκες ὑποθεῖναι αὐτὸ ἴσον τῷ $\frac{A\chi^{\mu-1}\delta\chi + B\chi^{\mu-2}\delta\chi \ldots\ldots + P\delta\chi}{(\chi+\vartheta)^{\mu}} +$ $\frac{A'\chi^{\pi-1}\delta\chi + B'\chi^{\pi-2} + \ldots\ldots P'\delta\chi}{(\chi+\eta)^{\pi}}$ κτλ. $+ \frac{\Lambda\delta\chi}{\chi+\iota} +$ $\frac{M\delta\chi}{\chi+\xi} + \frac{N\delta\chi}{\chi+\rho}$ + κτλ., τῶν Α, Β, Γ, κτλ. συνεργῶν ὄντων ἀμετατρέπτων καὶ ἀδιορίστων· ἐὰν δὲ τηνικαῦτα διορισθῶσι τρόπῳ τινὶ οἱ συνεργοί, εὐχερῶς πορισθήσεται τὸ ὁλόκληρον· καὶ τοῦτο πρόδηλον μέν ἐστιν ὑπὲρ τῶν ἁπλῶν κλασμάτων $\frac{\text{Λ}\delta\chi}{\chi+\iota}$, $\frac{\text{Μ}\delta\chi}{\chi+\xi}$, $\frac{\text{Ν}\delta\chi}{\chi+\varrho}$, κτλ., ὧν ὁλόκληρά εἰσι τὰ Λλ $(\chi+\iota)$, Μλ $(\chi+\xi)$, Νλ $(\chi+\varrho)$, κτλ· ὑπὲρ δὲ τῶν κλασμάτων $\frac{\text{Α}\chi^{\mu-1}\delta\chi+\text{Β}\chi^{\mu-2}\delta\chi+\ldots\text{Ρ}\delta\chi}{(\chi+\vartheta)^{\mu}}$, γενέσθω, διὰ τὸ ἁπλέστερον, $\chi+\vartheta=\psi$· ὅθεν $\chi=\psi-\vartheta$, καὶ $\delta\chi=\delta\psi$· ἀντικαταστᾳθεισῶν δὲ τούτων τῶν δυνάμεων, ἀναχθήσεται τὸ ὅλον εἰς σειρὰν μονωνύμων ῥαδίως ὁλοκληρουμένων, ὧν ἓν μόνον ἕξει τὸ σχῆμα $\frac{\delta\psi}{\psi}$, εἶτ' οὖν ὁλοκληρωθήσεται διὰ τῶν λογαρίθμων· ὡσαύτως ὑπὲρ τῶν ὅρων $\frac{\text{Α}'\chi^{\pi-1}\delta\chi+\text{Β}'\chi^{\pi-2}\delta\chi+\ldots\text{Ρ}'\delta\chi}{(\chi+\eta)^{\pi}}$ γενέσθω $\chi+\eta=\psi'$.

Οὐδὲν οὖν ἔτι λοιπὸν, ὅτι μὴ δύω τινὰ ἐξετάσαι· ὅπως εὑρίσκονται οἱ ποιηταὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ προτεθέντος ἀπειροστοῦ κλάσματος, καὶ ὅπως οἱ ἀδιόριστοι συνεργοί.

280. Εἰς οὖν εὕρεσιν τῶν τοῦ παρονομαστοῦ ποιητῶν τὰ αὐτὰ ἐπιτηδευτέον, ἃ καὶ ἐν τῇ ἐπιλύσει τῶν ἐξισώσεων, ἐξισοῦντας τῷ μηδενὶ τὸν παρονομαστήν· ἐπιλύειν γὰρ ἐξίσωσιν (Συμβ. Λογ. 488) ζητεῖν ἐστι τοὺς δυωνύμους ποιητὰς, ὑφ' ὧν γέγονεν ἡ ἐξίσωσις.

281. Εἰς δὲ εὕρεσιν τῶν συνεργῶν Α, Β, Γ, ἀνακτέον εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν πάντα τὰ κλάσματα, οἷς οὔτοι ἐνυπάρχουσι· τηνικαῦτα δὲ τῶν δυοῖν μελῶν τῆς ἐξισώσεως, τῆς συνισταμένης ἔκ τε τοῦ προτεθέντος κλάσματος καὶ τῶν καινῶν τῶνδε κλασμάτων, ἐχόντων τὸν

αὐτὸν παρονομαστὴν, δυνατὸν αὐτὸν ἑκατέρωθεν ἐκβαλεῖν, καὶ πάντων μετατεθέντων ἐπὶ θάτερον μέλος, ἀνάγκη, μηδεμιᾶς οὔσης σχέσεως πρὸς τὴν χ, τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων, τῶν πολλαπλασιαζόντων τὸν αὐτὸν βαθμὸν τοῦ χ, ὑπάρχειν μηδέν· ἐντεῦθεν τοσαῦται ἀνακύψουσιν ἐξισώσεις, ὅσοι εἰσὶν ἀδιόριστοι συνεργοί· ὅθεν καὶ διορισθήσονται.

282. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ὁλοκληρῶσαι τὸ ἀπειροστὸν $\dfrac{\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi}$.

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω $\dfrac{\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \dfrac{\mathrm{A}\delta\chi}{\alpha + \chi} + \dfrac{\mathrm{B}\delta\chi}{\alpha - \chi}$, ἐπείπερ οἱ δύω ποιηταὶ τοῦ παρονομαστοῦ $\alpha\alpha - \chi\chi$ εἰσὶν $\alpha + \chi$, καὶ $\alpha - \chi$· ἀναγωγῇ οὖν ἐπὶ κοινὸν παρονομαστὴν, ἔσται $\dfrac{\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \dfrac{(\mathrm{A}\alpha - \mathrm{A}\chi + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{B}\chi)\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi}$. ἀποβολῇ δὲ τοῦ κοινοῦ παρονομαστοῦ, διαιρέσει διὰ $\delta\chi$, καὶ μεταθέσει, ἔσται

$$\left\{\begin{array}{ll} \quad 1 & + \mathrm{A}\chi \\ - \mathrm{A}\alpha & - \mathrm{B}\chi \\ - \mathrm{B}\alpha & \end{array}\right\} + 0$$

ἄρα $1 - \mathrm{A}\alpha - \mathrm{B}\alpha = 0$, καὶ $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 0$· ὅθεν εὐχερῶς ἀνάγεται $\mathrm{A} = \dfrac{1}{2\alpha}$, καὶ $\mathrm{B}\ \dfrac{1}{2\alpha}$· ἔσται ἄρα $\dfrac{\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \dfrac{\frac{1}{2\alpha}\delta\chi}{\alpha + \chi} + \dfrac{\frac{1}{2\alpha}\delta\chi}{\alpha - \chi}$, ὧν τὰ ὁλόκληρά εἰσιν $\mathrm{O}.\dfrac{\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \dfrac{1}{2\alpha}\lambda(\alpha + \chi) - \dfrac{1}{2\alpha}\lambda(\alpha - \chi) + \Gamma = \dfrac{1}{2\alpha}\lambda\dfrac{\alpha + \chi}{\alpha - \chi} + \Gamma$.

283. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.** Ὁλοκληρῶσαι τὸ κλάσμα
$$\frac{4\alpha\chi\chi + 9\alpha^2\chi + 4\alpha^3}{(\alpha+\chi)^2(2\alpha+\chi)}\delta\chi.$$

ΛΥΣΙΣ. Τοῦτο εὕρηται, ληφθέντων τῶν ἀπειροστῶν ἐκ τῆς ποσότητος (279) $\frac{\alpha\alpha}{\alpha+\chi} + 2\alpha\lambda(\alpha+\chi) + 2\alpha\lambda(2\alpha+\chi)$· ὑποτεθείσθω τοίνυν $\frac{4\alpha\chi^2 + 9\alpha^2\chi + 4\alpha^3}{(\alpha+\chi)^2(2\alpha+\chi)}\delta\chi$ $= \frac{A\chi + B}{(\alpha+\chi)^2}\delta\chi + \frac{\Gamma\delta\chi}{2\alpha+\chi}$· ἀναχθέντων ἓν τῶν κλασμάτων ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, τοῦ κοινοῦ παρονομαστοῦ ἀποβληθέντος, διαιρέσει καὶ μεταθέσει πορισθήσεται

$$\left.\begin{array}{rrrr} & 4\alpha\chi^2 & +\ 9\alpha^2\chi & +\ 3\alpha^3 \\ - & A\chi^2 & -\ 2A\alpha\chi & -\ 2B\alpha \\ - & \Gamma\chi^2 & -\ B\chi & -\ \Gamma\alpha\alpha \\ & & -\ 2\alpha\Gamma\chi & \end{array}\right\} = 0$$

ἄρα $4\alpha - A - \Gamma = 0$, καὶ $9\alpha^2 - 2A\alpha - B - 2\alpha\Gamma = 0$, καὶ $4\alpha^3 - 2B\alpha - \Gamma\alpha\alpha = 0$· ὅθεν $A = 2\alpha$, $B = \alpha^2$, καὶ $\Gamma = 2\alpha$· τὸ τοίνυν προτεθὲν ἀπειροστὸν μεταβάλλει εἰς $\frac{2\alpha\chi + \alpha\alpha}{(\alpha+\chi)^2}\delta\chi + \frac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha+\chi}$· ἀλλὰ τοῦ μὲν δευτέρου ὅρου ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $2\alpha\lambda(2\alpha+\chi)$· εἰς δὲ εὕρεσιν τοῦ πρώτου, γενέσθω $\alpha + \chi = \psi$· ὅθεν $\chi = \psi - \alpha$, καὶ $\delta\chi = \delta\psi$· ἀντικαταστάντος δὲ τούτου ἐν $\frac{2\alpha\chi + \alpha\alpha}{(\alpha+\chi)^2}\delta\chi$, ἔσται $\frac{2\alpha\psi - \alpha\alpha}{\psi\psi}\delta\psi = \frac{2\alpha\delta\psi}{\psi} - \frac{\alpha\alpha\delta\psi}{\psi\psi}$, οὗ ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $2\alpha\lambda.\psi + \frac{\alpha\alpha}{\psi} = 2\alpha\lambda(\alpha+\chi) + \frac{\alpha\alpha}{\alpha+\chi}$·

τὸ ἄρα ὅλον ὁλόκληρον ἔςαι $\frac{\alpha\alpha}{\alpha+\chi} + 2\alpha\lambda(\alpha+\chi) + 8\alpha\lambda\,(2\alpha+\chi)$, ὥσπερ ἔχειν ἐπάναγκες.

284. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Γενικὴ ὑπάρχει ἡ μέθοδος αὕτη· δυνατὸν δὲ ῥαδιεργῆσαι τὴν τῶν συνεργῶν εὕρεσιν διὰ πλειόνων μεθόδων· δυνατὸν, φέρ' εἰπεῖν, ἀσχέτως ἀλλήλων, εὑρεῖν τὰς συνεργὰς τῶν ἁπλῶν κλασμάτων οὕτως· ἔςω $\frac{N\delta\chi}{M}$ τὸ προκείμενον κλάσμα· $\eta\chi+\alpha$ εἷς τῶν τοῦ παρονομαςοῦ ποιητῶν· καὶ ἔςω Π πηλίκον, προϊὸν ἐκ τῆς τοῦ M διὰ $\eta\chi+\alpha$ διαιρέσεως· καὶ ἐπινοηθήτω τὸ $\frac{N\delta\chi}{M}$ ἀναλελυμένον εἰς $\frac{A\delta\chi}{\eta\chi+\alpha}$ καὶ $\frac{\Xi\delta\chi}{\Pi}$· ἔςαι τοίνυν $\frac{N\delta\chi}{M} = \frac{A\delta\chi}{\eta\chi+\alpha} + \frac{\Xi\delta\chi}{\Pi}$, εἴτ' οὖν $\frac{N}{M} = \frac{A}{\eta\chi+\alpha} + \frac{\Xi}{\Pi}$· ἀναχθέντων ἄρα ἐπὶ κοινὸν παρονομαςὴν, ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως $\Pi + \frac{M}{\eta\chi+\alpha}$, ἢ $\Pi\times(\eta\chi+\alpha) = M$, ἔςαι $M = A\Pi + \Xi\,(\eta\chi+\alpha)$· ληφθέντων δὲ τῶν ἀπειροςῶν τῆς ἐξισώσεως $(\eta\chi+\alpha)\,\Pi = M$, ἔςαι $\eta\Pi\delta\chi + (\eta\chi+\alpha)\,\delta\Pi = \delta M$· ἀλλὰ αὕτη ἡ ἐξίσωσις, ὥσπερ καὶ ἡ $N = A\Pi + \Xi\,(\eta\chi+\alpha)$, κρατοῦσα ἐπὶ πάσης τοῦ χ δυνάμεως, κρατήσει καὶ, ὁπηνίκ' ἂν ἀντικαταςαθῇ ἡτισοῦν τοῦ χ δύναμις· τεθείσθω ἄρα ἀντὶ χ ἡ δύναμις, ἡ ἐκ τοῦ ἁπλουςέρου ἀποτελέσματος προϊοῦσα, εἴτ' οὖν τὸ $-\frac{\alpha}{\eta}$, ὃ πρόεισιν ὑποτιθεμένου τοῦ παρονομαςοῦ $\eta\chi+\alpha=0$· ποριοθήσεται ἄρα τηνικαῦτα $\eta\Pi\delta\chi = \delta M$, καὶ $N = A\Pi$· τεθείσης οὖν ἐν

τῷ δευτέρῳ τῆς δυνάμεως Π $= \frac{\delta M}{\eta \delta \chi}$, τῆς ἐκ τῆ πρώτη ἐξισώσης, ἔςαι $A = \frac{\eta N \delta \chi}{\delta M}$, τῆτ᾽ ἔςιν εἰς εὕρεσιν τῆ ἀριθμητῆ Α ἑνός τινος τῶν ἁπλῶν κλασμάτων, διαιρετέον τὸν $N\delta\chi$ ἀριθμητὴν τῆ προτεθέντος διὰ τῆ ἀπειροςῆ δM τῆ ἐν αὐτῷ παρονομαςῆ, ἢ ἀντικαταςήσαντας ἀντὶ χ τὴν προϊῆσαν δύναμιν, εἰ ὁ τῆ ἁπλῆ κλάσματος παρονομαςὴς ἰσωθείη τῷ μηδενὶ, πολλαπλασιαςέον τὸν ὅλον παρονομαςὴν τῆ ἁπλῆ κλάσματος ἐπὶ τὸν τῆ χ συνεργόν· εἰς εὕρεσιν, φέρ᾽ εἰπεῖν, τῶν ἀριθμητῶν Α, Β τῶν κλασμάτων $\frac{A\delta\chi}{\alpha+\chi}$, ἢ $\frac{B\delta\chi}{\alpha-\chi}$, εἰς ἃ ἀναλέλυται τὸ κλάσμα $\frac{\delta\chi}{\alpha\alpha-\chi\chi}$, εἰλήφθω τὰ τῆ $\alpha\alpha - \chi\chi$ παρονομαςῆ ἀπειροςὰ, εἴτ᾽ ῆν $-2\chi\delta\chi$· ἢ διῃρήσθω ὁ $\delta\chi$ ἀριθμητὴς τῆ προτεθέντος διὰ τῆ $-2\chi\delta\chi$· ὅθεν πρόεισιν $-\frac{1}{2\chi}$, ἐν ᾧ ἀντικαταςαθέντων ἀλληλοδιαδόχως ἀντὶ χ τῶν $-\alpha$, α (ἃ εὑρίσκονται ἴσα τῷ χ, ἰσῆμένων ἑξῆς τῷ μηδενὶ τῶν κατὰ τὰ μερικώτερα κλάσματα παρονομαςῶν $\alpha+\chi$, ἢ $\alpha-\chi$), πολλαπλασιασθέντος τε τῆ εἰρημένῃ κλάσματος ἐπὶ τὰς τῆ η δυνάμεις 1 ἢ -1, πορίζονται $\frac{1}{2\alpha}$, ἢ $\frac{1}{2\alpha}$ δυνάμεις τῆ Α, ἢ Β, ὥσπερ ἀνωτέρω εὕρομεν.

285. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δυνατὸν δὲ ἀποδῆναι ἢ γενικὲς κανόνας πρὸς διορισμὸν τῶν κατὰ τὲς ἀριθμητὰς τῶν μερικωτέρων κλασμάτων συνεργῶν, ἐπὰν τὰ κλάσματα ἔχωσι παρονομαςὴν τὸ ὑπὸ ῥιζῶν ἰσαλλήλων γινόμενον· τέτων μέντοι ἡμεῖς ἐδενὸς ἐν τῷ παρόντι ἀψόμεθα.

286. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Οἱ περὶ ὁλοκληρώσεως τῶν λογικῶν κλασμάτων ἡμῖν ἀποδοθέντες κανόνες γενικοὶ μέν εἰσιν· ὅταν δέ τινες τῶν τοῦ παρονομαστοῦ ποιητῶν ὦσιν ἐπίπλαστοι, πρόεισιν ὁλόκληροι ποσότητες ἐπιπλάστοις ἀνάμικτοι, οὐκ εὐχερῶς εἰς σχῆμα πραγματικὸν ἐπαναγόμεναι· τηνικαῦτα τοίνυν ἐκβλητέον πρῶτον τοῦ παρονομαστοῦ πάντας τοὺς αὐτοῦ πραγματικοὺς ποιητάς· μεθ' ὃ ἀναλυτέον τὸ λειπόμενον οὐχὶ εἰς πρωτοβαθμίους, ἀλλ' εἰς δευτεροβαθμίους ποιητάς, οἵτινες ἀεί ποτε εἰσὶ πραγματικοί· καὶ σχηματιστέον ὑπὲρ ἑκάστου δευτεροβαθμίου ποιητοῦ, ὃς ἀεὶ παρασταθῆναι ἔχει διὰ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, κλάσμα τοιοῦτο $\frac{A\chi\delta\chi+B\delta\chi}{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}$, καὶ διοριστέον ἀεὶ τοὺς συνεργοὺς, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται· προκειμένου φέρε εἰς ὁλοκλήρωσιν τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha^4\delta\chi}{\alpha^3-\chi^3}$, εὑρήσθω πρῶτον ἐξισουμένου μηδενὶ τοῦ παρονομαστοῦ $\alpha^3-\chi^3$ εἷς τῶν αὐτοῦ ποιητῶν ὁ $\alpha-\chi$· καὶ διαιρεθέντος τοῦ $\alpha^3-\chi^3$ διὰ $\alpha-\chi$ πρόεισι $\alpha^2+\alpha\chi+\chi^2$, ὃ περιέχει δύω ἑτέρους ποιητάς· ἐξισουμένου δὲ τούτου τῷ μηδενὶ εἰς εὕρεσιν τῶν αὐτοῦ ποιητῶν, εὑρεθήσονται ποσὰ ἐπίπλαστα· διὸ δὴ οὐκ εἰς τρία, εἰς δὲ δύω μόνον, ἀναλυτέον τὸ προκείμενον κλάσμα, ἔχοντα παρονομαστὰς, τὸ μὲν τὸν ποιητὴν $\alpha-\chi$, θάτερον δὲ, τὸ $\alpha^2+\alpha\chi+\chi^2$· οὐκοῦν ὑποτεθείσθω $\frac{\alpha^4\delta\chi}{\alpha^3-\chi^3}=\frac{A\delta\chi}{\alpha-\chi}$ $+\frac{B\chi\delta\chi+\Gamma\delta\chi}{\alpha^2+\alpha\chi+\chi^2}$· ἀναχθέντων δὲ ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, καὶ διαιρεθέντων διὰ $\delta\chi$, μεταθέσει παριθήσεται

$$\left.\begin{array}{llll} & \alpha^4 & -\,A\alpha\chi & -\,A\chi^2 \\ - & A\alpha^2 & +\,\Gamma\chi & +\,B\chi^2 \\ - & \Gamma\alpha & -\,B\alpha\chi & \end{array}\right\} = 0$$

ἰσωθέντος δὲ τῷ μηδενὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων, τῶν πολλαπλασιαζόντων τὸν αὐτὸν βαθμὸν τοῦ χ, ἔσται $B - A = 0$, καὶ $\Gamma - A\alpha - B\alpha = 0$, καὶ $\alpha^4 - A\alpha^2 - \Gamma\alpha = 0$· ὅθεν ἀποφέρεται $A = \frac{\alpha^2}{3}$, καὶ $B = \frac{\alpha^2}{3}$, καὶ $\Gamma = \frac{2\alpha^3}{3}$.

τοιγαροῦν ἔσται $\frac{\alpha^4\delta\chi}{\alpha^3 - \chi^3} = \frac{\frac{\alpha^2}{3}\delta\chi}{\alpha - \chi} + \frac{\frac{\alpha^2}{3}\chi\delta\chi + \frac{2\alpha^3}{3}\delta\chi}{\alpha^2 + 2\alpha\chi + \chi\chi}$.

καὶ τὸ μὲν ὁλόκληρον τοῦ πρώτου κλάσματος τοῦ δευτέρου μέλους κατάδηλόν ἐστιν ἐκ τῶν προειρημένων· τοῦ δὲ δευτέρου πορίζεται διὰ τῶν νυνὶ λεγομένων.

237. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐὰν ἐν τοῖς δευτεροβαθμίοις ποιηταῖς ἀπαντῶσί τινες ἰσάλληλοι, σχηματιστέον ὑπὲρ ἑκάστης σωρείας τῶν ἴσων ποιητῶν κλάσμα τοιοῦτο $\frac{A\chi^{2\nu-1}\delta\chi + B\chi^{2\nu-2}\delta\chi \ldots\ldots \Xi\delta\chi}{(\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma)^\nu}$, τοῦ ν ἐμφαίνοντος τὸν ἀριθμὸν τῶν ἰσαλλήλων ποιητῶν $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, προκέηται εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\frac{\chi^4 + 5\alpha\chi^3 + 4\alpha^3\chi}{(\alpha\alpha + \alpha\chi + \chi\chi)(\chi^3 - \alpha^3)}\delta\chi$, εὑρεθήσεται ἀναλυόμενος ὁ παρονομαστὴς εἰς τρεῖς τούτους τοὺς ποιητάς, $\chi - \alpha$, $\chi^2 + \alpha\chi + \alpha^2$, $\chi^2 + \alpha\chi + \alpha^2$· τὸν οὖν δεύτερον καὶ τρίτον εἰς ἁπλουστέρους ποιητάς, οἳ ἔσονται ἐπίπλαστοι, μὴ ἀναλύσαντες, χρησόμεθα αὐτοῖς, ὡς εὕρηνται· ἐπεὶ δέ εἰσιν ἰσάλληλοι, εἰλήφθω τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον $(\alpha^2 + \alpha\chi + \chi)^2$, καὶ γεγονέτω παρονομαστὴς ἑνὸς μόνου κλάσ-

ματος, ὃ τῷ ἀριθμητῇ εἰσαχθήσονται πάντες οἱ τῦ χ βαθμοὶ, ἥττονες τῦ μείζονος τῶν ἐν τῷ παρονομαςῇ ἀπαντώντων, τῦτ' ἔςιν, ἐπεὶ ἐνταῦθα ὁ μείζων τῶν τῷ παρονομαςῇ βαθμῶν ἔςι χ^4, εἰσαχθήσονται τῷ ἀριθμητῇ πάντες τῦ χ βαθμοὶ οἱ τῦ χ^4 ἥττονες· ὅθεν ὑποτεθείσθω

$$\frac{\chi^4 + 5\alpha\chi^3 + 4\alpha^3\chi}{(\alpha^2 + \alpha\chi + \chi\chi)(\alpha^3 - \chi^3)} = \frac{A\delta\chi}{\chi - \alpha} + \frac{B\chi^3\delta\chi + \Gamma\chi^2\delta\chi + \Delta\chi\delta\chi + E\delta\chi}{(\alpha\alpha + \alpha\chi + \chi\chi)^2},$$

καὶ διωρίσθων οἱ συνεργοὶ, ὥσπερ ἤδη εἴρηται· εἶτα γενέσθω ἡ ὁλοκλήρωσις κατὰ τὰ ἐφεξῆς.

288. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.** Ὁλοκληρῶσαι τὸ ἀπειροςὸν $\dfrac{A\chi\delta\chi + B\delta\chi}{\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma}$.

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω, διὰ τὸ ἁπλύςερον, ἀνηγμένη εἰς τὸ σχῆμα $\dfrac{A'\chi\delta\chi + B'\delta\chi}{\chi^2 + \alpha'\chi + \beta'}$, ὅπερ ἀεὶ γενέσθαι δυνατὸν, διαιρυμένυ ἀριθμητῦ τε καὶ παρονομαςῦ διὰ α· καὶ ἐξηφανίσθω ὁ δεύτερος ὅρος τῦ παρονομαςῦ, τεθέντος $\chi + \frac{1}{2}\alpha' = \psi$· ὅθεν $\chi = \psi - \frac{1}{2}\alpha'$, καὶ $\delta\chi = \delta\psi$· ἀντικαταςάσει ὖν πορισθήσεται τοιάδέ τις ποσότης $\dfrac{\Gamma\psi\delta\psi + \Delta\delta\psi}{\psi\psi + \xi\xi}$, ἧς τὸ μὲν πρῶτον μέρος ὁλοκληρῦται διὰ τῶν λογαρίθμων (263), θάτερον δὲ διὰ τόξυ κύκλυ, ὖ ἡ μὲν ἀκτίς ἐςι ξ, ἡ δὲ ἁπτομένη ψ.

289. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Ἐπὶ δὲ τῶν τοιῶνδε ποσῶν $\dfrac{A\chi^{2\nu-1}\delta\chi + B\chi^{2\nu-2}\delta\chi \ldots \Xi\delta\chi}{(\chi^2 + \alpha\chi + \beta)^\nu}$ ἐξηφανίσθω καὶ ἐνταῦθα ὁ δεύτερος τῦ παρονομαςῦ ὅρος· ὅθεν πορισθήσεται το-

σότης τοιαύτη $\frac{M\psi^{2\nu-1}\delta\psi + N\psi^{2\nu-2}\delta\psi + \dots T\delta\psi}{(\psi\psi + \xi\xi)^{\nu}}$,

ἥτις ὁλοκληρωθήσεται, ἀναγομένη εἰς $\frac{\delta\psi}{\psi\psi + \xi\xi}$, κατὰ τὴν ἀποδοθεῖσαν μέθοδον (272) ἐν τῷ ἀθροίσματι τῶν ὅρων, ἔνθα ψ ἔχει δείκτας ἀρτίους· οἱ δὲ ἔχοντες δείκτας περιττοὺς ὁλοκληρωθήσονται κατὰ τὰ εἰρημένα (205).

Ἅπαν ἄρα λογικὸν κλάσμα, ἤτοι ἀκριβῶς ὁλοκληροῦται, ἢ μόνον ἐξέχεται τόξων κυκλικῶν καὶ λογαρίθμων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περί τινων μεταμορφώσεων ῥαδιουργουσῶν τὰς ὁλοκληρώσεις.

290. Ἀμήχανον μέν ἐστιν ἐπὶ ταύτης τῆς ὕλης κανόνας γενικοὺς ἀποδοῦναι, ἡ δ' ἀνερεύνησις τῶν ποσοτήτων, ἥ τε συχνὴ χρῆσις, καὶ τοῦ μετιόντος ἡ δεξιότης, τὰ πρακτέα ἐφ' ἑκάστης περιπτώσεως ὑπαγορεύουσι· σκοπὸς δὲ τῶν, περὶ ὧν ὁ λόγος, μεταμορφώσεων, ἵνα λογικὰ τὰ προκείμενα ἀπειροστὰ γενόμενα ὁλοκληρώσεως τύχωσιν· εἰς δὲ τοῦτο ἐκθετέον τὰς ἐφεξῆς παρατηρήσεις.

291. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ Α΄. Ἐὰν ὦσι ῥιζικὰ μονώνυμα, ἀνακτέον πρῶτον αὐτὰ εἰς δείκτας κλασματικούς, καὶ ἀνακτέον αὐτοὺς εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· εἶτα, ἐὰν $\chi^{\frac{\kappa}{\lambda}}$ ἐμφαίνῃ μίαν τῶν οὕτω προπαρασκευασθεισῶν ποσοτήτων, ὑποθετέον $\chi^{\frac{1}{\lambda}} = \psi$· ὅθεν $\chi = \psi^{\lambda}$, καὶ $\delta\chi = \lambda\psi^{\lambda-1}$ $\delta\psi$· ἀντικαταστάσει δέ, πορισθήσεται ποσότης ὅλως λο-

γική· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ἡ $\frac{\delta\chi\sqrt{\chi}+\alpha\delta\chi}{\sqrt[3]{\chi^2}+\sqrt{\chi}}$, τρεπήτω εἰς $\frac{\chi^{\frac{1}{2}}\delta\chi+\alpha\delta\chi}{\chi^{\frac{2}{3}}+\chi^{\frac{1}{2}}}$· τῦτο δὲ εἰς $\frac{\chi^{\frac{3}{6}}\delta\chi+\alpha\delta\chi}{\chi^{\frac{4}{6}}+\chi^{\frac{3}{6}}}$· ἐὰν ἄρα γένηται $\chi^{\frac{1}{6}}=\psi$, ἔσαι $\chi=\psi^6$, $\delta\chi=6\psi^5\delta\chi$, καὶ ἑπομένως $\frac{6\psi^8\delta\psi+6\alpha\psi^5\delta\psi}{\psi^4+\psi^3}=\frac{6\psi^5\delta\psi+6\alpha\psi^2\delta\psi}{\psi+1}$, ὅπερ εὐμαρῶς ὁλοκληρῦται διὰ τῶν εἰρημένων ἐπὶ τῶν λογικῶν κλασμάτων.

292. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ Β'. Πᾶσα ποσότης, ἡ ἐν μόνον ῥιζικὸν πολυώνυμον ἐμφιλοχωρεῖ, τὸν δεύτερον μὴ ὑπερβαῖνον βαθμὸν, ὃ ἡ ὑπόῤῥιζος μηδ' αὐτὴ ὑπερβαίνει τὸν δεύτερον βαθμὸν, ἀεὶ λογικὴ ἀποκαθίςαται διὰ θατέρυ τῶν ἐφεξῆς κανόνων· α'. ἀπηλλάχθω τὸ ὑπόῤῥιζον τετράγωνον τῆς τρεπτῆς, ϗ ἐξισώσθω τῇ αὐτῇ τρεπτῇ σὺν ἢ πλὴν ἑτέρας τρεπτῆς· β'. ἀναλυθήτω τὸ ῥιζικὸν εἰς δύω ποιητὰς, ϗ ἀναλυθὲν ἐξισώσθω θατέρῳ τῶν ποιητῶν, πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ καινὴν ἄλλην τρεπτήν· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, προκέηται $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi-\alpha\alpha)}}$, γενέσθω $\sqrt{(\chi\chi-\alpha\alpha)}=\chi-\psi$· ὅθεν $\chi=\frac{\psi\psi+\alpha\alpha}{2\psi}$· ἄρα $\delta\chi=\frac{(\psi\psi-\alpha\alpha)\delta\psi}{2\psi\psi}$, ϗ $\sqrt{(\chi\chi-\alpha\alpha)}=\frac{\alpha\alpha-\psi\psi}{2\psi}=-\frac{(\psi\psi-\alpha\alpha)}{2\psi}$· ὅθεν $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi-\alpha\alpha)}}=-\frac{\delta\psi}{\psi}$, ἥτις εὐχερῶς ὁλοκληρῦται.

Ἐπὶ δὲ τοῦ αὐτοῦ ὑποδείγματος δυνατὸν γενέσθαι τὸ $\surd(aa - \chi\chi)$, εἴτ' οὖν τὸ $\surd(\chi - a)(\chi + a) = (\chi - a)\psi$· οὐκοῦν τετραγωνισμῷ καὶ διαιρέσει διὰ $\chi - a$, ἔσαι $\chi + a = (\chi - a)\psi\psi$· ὅθεν $\chi = \frac{a + a\psi\psi}{\psi\psi - 1}$,

$\surd(\chi\chi - aa) = \frac{2a\psi}{\psi\psi - 1}$, $\delta\chi = \frac{-4a\psi\delta\psi}{(\psi\psi - 1)^2}$· ἄρα

$\frac{\delta\chi}{\surd(\chi\chi - aa)} = \frac{-2\delta\psi}{\psi\psi - 1}$, ὅπερ ὁλοκληροῦται διὰ τῶν προαποδοθέντων ἐπὶ τῶν λογικῶν κλασμάτων κανόνων.

293. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Δυνατὸν δὲ χρήσασθαι ταύταις ταῖς μεθόδοις πρὸς εὔθυνσιν τῆς παραβολῆς, ἧς τὸ στοιχεῖον $\surd(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)$ ἐσὶ $\surd(\delta\upsilon^2 + \frac{4\upsilon^2\delta\upsilon^2}{\pi^2})$, εἴτ' οὖν $\delta\upsilon\surd(1 + \frac{4\upsilon^2}{\pi^2})$· ἀπηλλάχθω οὖν πρῶτον τὸ υ^2, γράφουσι $\frac{2\delta\upsilon}{\pi}\surd(\frac{\pi^2}{4} + \upsilon^2)$, καὶ γενέσθω $\surd(\frac{\pi^2}{4} + \upsilon^2) = \upsilon + \psi$.

294. **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ Γ΄.** Ὅταν μὴ παρῇ δεύτερος ὑπόῤῥιζος ὅρος, δυνατὸν ἐξισῶσαι τὸ ῥιζικὸν τῷ γινομένῳ ὑπὸ καινῆς μεταβλητῆς, καὶ αὐτῆς τῆς ὑποῤῥίζου· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ἡ $\frac{\delta\chi}{\surd(aa - \chi\chi)}$ δυνατὸν ποιῆσαι $\surd(aa - \chi\chi) = \chi\psi$· παρόντος δὲ καὶ δευτέρου, καὶ οὕτω δυνατὸν ταύτῃ χρήσασθαι τῇ μεταμορφώσει, ἐξαφανιζομένου πρῶτον τοῦ δευτέρου ὅρου.

295. **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ Δ΄.** Δυνατὸν τὴν μεταβλητὴν ἐξισῶσαι συνεκθέσει ὁποιασδήποτε τῆς τρεπτῆς,

ἢ καινῇ ἑτέρᾳ τρεπτῇ, ἢ συνεκθέσει καινῆς τρεπτῆς, ἐν ᾗ παραληφθείη καίτι ἀδιόριςον, συμβαλλόμενον τῇ ἀνὰ χεῖρας ὑποθέσει· ἵνα, φέρ' εἰπεῖν, μάθωμεν, ὅτε ἂν γένοιτο λογικὴ ἡ ποσότης $\chi^\mu \delta\chi\, (\alpha + \beta\chi^\nu)^\pi$, γενέσθω $(\alpha + \beta\chi^\nu)^\pi = \psi^\varkappa$, τοῦ $\varkappa$ ἀδιορίςου ὄντος· τοιγαροῦν ἔςαι

$$\alpha + \beta\chi^\nu = \psi^{\frac{\varkappa}{\pi}},\ \chi^\nu = \frac{\psi^{\frac{\varkappa}{\pi}} - \alpha}{\beta},\ \chi = \left(\frac{\psi^{\frac{\varkappa}{\pi}} - \alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

$$\chi = \left(\frac{\psi^{\frac{\varkappa}{\pi}} - \alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}},\ \delta\chi = \frac{\varkappa}{\nu\pi\beta}\,\psi^{\frac{\varkappa}{\pi} - 1}\,\delta\psi$$

$$\left(\frac{\psi^{\frac{\varkappa}{\pi}} - \alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu} - 1}$$ · ἄρα $\chi^\mu \delta\chi\, (\alpha + \beta\chi^\nu)^\pi = \dfrac{\varkappa}{\nu\pi\beta}$

$$\psi^{\frac{\varkappa}{\pi} + \varkappa - 1}\,\delta\chi\,\left(\frac{\psi^{\frac{\varkappa}{\pi}} - \alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu} + \frac{1}{\nu} - 1}$$, ὅπερ ὁλοκληροῦται, ὁποῖον ἂν εἴη τὸ $\varkappa$, ὅταν $\dfrac{\mu+1}{\nu} - 1$ ᾖ ἀριθμὸς ὁλοχερὴς ὑπαρκτικὸς, ἢ μηδέν· καὶ λογικὸν ἀποκαθίςαται, γενομένου $\varkappa = \pi$, ὅταν $\dfrac{\mu+1}{\nu} - 1$ ᾖ ἀριθμὸς ὁλοχερὴς λειπτικός· τοῦ δὲ π ἴσου ὄντος τῷ $\pm \dfrac{\xi}{2}$, τοῦ ξ ἐμφαίνοντος ἀριθμὸν ὁλοχερῆ περιττὸν, ἀναγέσθω εἰς τὴν (292) παρατηρηθεῖσαν περίπτωσιν, γενομένου $\varkappa = \xi$, εἴπερ $\dfrac{\mu+1}{\nu}$ ἴσον εἴη τῷ $\pm \dfrac{\xi'}{2}$, τοῦ ξ' ἀριθμὸν ὁλοχερῆ περιττὸν ἐμφαίνοντος.

296. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὰς μὲν οὖν μεταμορφώσεις ταύτας περαιτέρω ἥκιστα προάξομεν· τοῦτο δὲ μόνον σημειώσομεν, ὅτι συχνάκις αἱ ὁλοκληρώσεις ἐξευμαρίζονται, τῆς τρεπτῆς κλάσματι τοιῷδε $\frac{1}{\psi}$ ἰσουμένης· ἐὰν ᾖ, φέρ' εἰπεῖν $\frac{\chi^{15}\delta\chi + \alpha\delta\chi}{\chi^{20} + \chi^{18}}$, γενέσθω $\chi = \frac{1}{\psi}$· καὶ δὴ ἔσαι $\frac{-\psi^3\delta\psi - \alpha\psi^{18}\delta\psi}{1 + \psi\psi}$, ὅπερ ἀναχυθήσεται διὰ διαιρέσεως εἰς σειρὰν μονωνύμων, ϗ εἰς ποσότητα τοιάνδε $\frac{A\delta\psi}{1+\psi\psi}$, ἧς γινώσκεται ἀκριβῶς τὸ ὁλόκληρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΤΕΤΑΡΤ.

Περὶ ὁλοκληρώσεως τῶν δεικτικῶν ποσοτήτων.

297. Ἐπὶ τούτων τῶν ποσοτήτων εἷς μόνος ὑπάρχει ὁλοκληρώσεως κανών· ἀναλυτέον αὐτὰς εἰς δύο ποιητάς, ὧν ἅτερος εἴη τὸ ἀπειροσὸν τοῦ κατὰ τὸν ἕτερον λογαρίθμου, ἢ μέρος αὐτοῦ ἀμετάβλητον (50, 52), ϗ διαιρετέον διὰ τοῦ ἀπειροσοῦ τοῦ κατὰ τὸν δεύτερον ποιητὴν λογαρίθμου. Οὕτως εὐθὺς τὸ $\chi^\upsilon\left(\delta\upsilon\lambda\chi + \frac{\upsilon\delta\chi}{\chi}\right)$ ὁλοκληρώσιμον καταφαίνεται, εἴγε ὁ ποιητής· $\delta\upsilon\lambda\chi + \frac{\upsilon\delta\chi}{\chi}$ ἐσὶν ἀπειροσὸν τοῦ $\upsilon\lambda\chi$, ὅς ἐσιν ὁ τοῦ χ^υ λογάριθμος· τὸ

τοίνυν ὁλόκληρον ἔςαι $\frac{\chi^{\upsilon}(\delta\upsilon\lambda\chi + \frac{\upsilon\delta\chi}{\chi})}{\delta(\lambda\chi^{\upsilon})} + \Gamma$, τῦτ᾽ ἔςι

$$\chi^{\upsilon} \frac{(\delta\upsilon\lambda\chi + \frac{\upsilon\delta\chi}{\chi})}{\delta\upsilon\lambda\chi + \frac{\upsilon\delta\chi}{\chi}} + \Gamma,$$ εἴτ᾽ ἂν $\chi^{\upsilon} + \Gamma$· κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα τὸ $\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$ ἔςιν ὁλοκληρώσιμον, εἴγε $\delta\chi$ ἔςι τὸ ἀπειροςὸν τῦ λογαρίθμυ τῦ $\varepsilon^{\alpha\chi}$, διαιρεθέντος δι᾽ ἀτρέπτυ ποσότητος· ἄρα $\mathrm{O}\,\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi} = \frac{\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}}{\alpha\delta\chi\lambda\varepsilon} = \frac{\varepsilon^{\alpha\chi}}{\alpha\lambda\varepsilon}$· ὅταν δὲ τὸ ε ἀριθμὸν ἐμφαίνῃ, ὗ λογάριθμός ἐςι 1, ὁ κανὼν ἀνάγεται εἰς τὸ διελεῖν τὸ προτεθὲν ἀπειροςὸν διὰ τῦ ἀπειροςῦ τῦ κατὰ τὸ ε δείκτυ.

Ἐὰν δὲ πρόκειται εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\chi^{\mu}\,\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$, τῦ ε ἀριθμῦ ὄντος, ὗ λογάριθμός ἐςι 1, καὶ τῦ μ ἀριθμῦ ὁλοχερῦς ὑπαρκτικῦ, δυνατὸν ποιῆσαι $\mathrm{O}\chi^{\mu}\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi} = \varepsilon^{\alpha\chi}(\mathrm{A}\chi^{\mu} + \mathrm{B}\chi^{\mu-1} + \mathrm{E}\chi^{\mu-2} + \kappa\tau\lambda + \kappa)$· ἐὰν, φέρ᾽ εἰπεῖν, ᾖ $\chi^{2}\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$, δυνατὸν ὑποθεῖναι $\mathrm{O}\chi^{2}\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi} = \varepsilon^{\alpha\chi}(\mathrm{A}\chi^{2} + \mathrm{B}\chi + \mathrm{E})$· τῶν δὲ ἀπειροςῶν ληφθέντων (50), διαιρέσει διὰ $\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$, πορισθήσεται

$$\chi^{2} = \left\{ \begin{array}{r} \mathrm{A}\alpha\chi^{2} + \alpha\mathrm{B}\chi + \alpha\mathrm{E} \\ + 2\mathrm{A}\chi + \mathrm{B} \end{array} \right\}$$

ἄρα $\mathrm{A}\alpha = 1$, $\alpha\mathrm{B} + 2\mathrm{A} = 0$, $\alpha\mathrm{E} + \mathrm{B} = 0$, τῦτ᾽ ἔςιν $\mathrm{A} = \frac{1}{\alpha}$ καὶ $\mathrm{B} = \frac{-2}{\alpha\alpha}$, καὶ $\mathrm{E} = \frac{2}{\alpha^{3}}$· τὸ ἄρα ὁλόκληρον τῆς $\chi^{2}\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$ ἔςιν $\varepsilon^{\alpha\chi}\left(\frac{\chi^{2}}{\alpha} - \frac{2\chi}{\alpha^{2}} + \frac{2}{\alpha^{3}}\right) + \Gamma$.

Δυνατὸν δὲ οὐκ ἐπιβόλως χρήσασθαι τῷ ἀριθμῷ ε, οὗ ὁ λογάριθμός ἐστι 1 εἰς ὁλοκλήρωσιν, πολλῶν μὲν καὶ ἄλλων ποσῶν, μάλιστα δὲ τῶν λογαρίθμους περιεχόντων· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, προκέηται εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\chi^{\nu}\delta\chi\,(\lambda\chi)^{\mu}$, γενέσθω $\lambda\chi = \psi = \psi\lambda\varepsilon$· ἄρα $\chi = \varepsilon^{\psi}$, $\delta\chi = \delta\psi\varepsilon^{\psi}$, καὶ ἑπομένως $\chi^{\nu}\delta\chi\,(\lambda\chi)^{\mu} = \psi^{\mu}\delta\psi\varepsilon^{(\nu-1)\psi}$, ὅπερ ὁλοκληροῦται ἐν τῇ αὐτῇ περιπτώσει, ὡς πρότερον, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ ὁλοκληρώσεως ποσοτήτων δύω, ἢ πλείους μεταβλητὰς περιεχουσῶν.

298. Ἐὰν ἀναμνησθῶμεν τοῦ πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀπειροστῶν ποσοτήτων, πολλὰς περιεχουσῶν μεταβλητὰς, ἀποδοθέντος κανόνος, ὀψόμεθα, ὅτι πρὸς ὁλοκλήρωσιν τῶν πολλὰς μεταβλητὰς περιεχόντων ἀπειροστῶν, συναπτέον ἐστὶ πάντας τοὺς ὅρους, οἷς τὸ ἀπειροστὸν τῆς αὐτῆς ποσότητος ἐμπεριπέπλεκται, καὶ ὁλοκληρωτέον αὐτοὺς, ὡς εἰ μηδεμία παρὰ ταύτην εἴη τρεπτὴ, τουτ' ἔστιν, ὡς εἰ πᾶσαι αἱ λοιπαὶ εἴησαν ἀμετάτρεπτοι· τηνικαῦτα δὲ, ἐὰν τοῦ ὁλοκλήρου τούτου ληφθῶσι τὰ ἀπειροστὰ, τρεπομένων ἄλλης μετ' ἄλλην πασῶν τῶν μεταβλητῶν, καὶ ἀφαιρεθῶσι τοῦ προτεθέντος ἀπειροστοῦ, εἰ μηδὲν λειφθείη, τὸ εὑρεθὲν ὁλόκληρον (προστιθεμένου καὶ ποσοῦ ἀμετατρέπτου) ἔσται τὸ ἀληθές· ἐὰν δὲ ᾖ λείψανον, τοῦτο ὑμὴ περιέξει τρεπτὴν ἔχουσάν πως πρὸς τὴν ὁλοκληρωθεῖσαν· χρηστέον ἦν καὶ ἐπὶ

τέτε τε καταλοίπε τῇ αὐτῇ μεθόδω, κ̀ ἐφεξῆς ὅτως ἐφ' ἁπάσης μεταβλητῆς.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἔςω $3\chi^2 \upsilon \delta\chi + \chi^3 \delta\upsilon + 5\chi\upsilon^4 \delta\upsilon + \upsilon^5 \delta\chi$· εἰλήφθων ἂν ὅροι δύω οἱ $3\chi^2\upsilon\delta\chi + \upsilon^5\delta\chi$, οἷς ἀμέλει ἐμπεριπέπλεκται $\delta\chi$, κ̀ ὁλοκληρώσθων ὡς εἴπερ υ εἴη ἀμετάτρεπτος· τὸ τοίνυν ὁλόκληρον ὑπάρχει $\chi^3\upsilon + \upsilon^5\chi$· ἀλλὰ ταύτης τῆς ποσότητος ληφθέντων τῶν ἀπειροςῶν, τρεπτῶν τιθεμένων τῆς τε χ κ̀ τῆς υ, κ̀ ἀφαιρεμένων ἀπὸ τε προτεθέντος ἀπειροςε, λείπεται μηδέν· ἄρα τὸ ὁλόκληρον ἐςι $\chi^3\upsilon + \upsilon^5\chi + \Gamma$.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἔςω αὖθις $\chi^3\delta\upsilon + 3\chi^2\upsilon\delta\chi + \chi^2\delta\psi + 2\chi\psi\delta\chi + \chi\delta\chi + \upsilon^2\delta\upsilon$· συναφθέντων ἂν ἁπάντων τῶν ὅρων, οἷς ἐνυπάρχει τὸ δχ, κ̀ ὁλοκληρωθέντων, τῶν υ, ψ ἀμετατρέπτων τηρηθέντων, προκύψει $\chi^3\upsilon + \chi^2\psi + \frac{\chi^2}{2}$· τῶν δ' ἀπειροςῶν ταύτης τῆς ποσότητος ἀφαιρεθέντων, τρεπτῶν ἐκληφθέντων τῶν χ, υ, ψ, καταλειφθήσεται $\upsilon^2\delta\upsilon$· εἰλήφθω τοίνυν τὸ ὁλόκληρον τε $\upsilon^2\delta\upsilon$, ὅπερ ἐςὶν $\frac{\upsilon^3}{3}$, κ̀ προςεθείσθω τῷ προευρημένῳ· τὸ δὲ ὅλον ὁλόκληρον ἔςαι $\chi^3\upsilon + \chi^2\psi + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\upsilon^3}{3} + \Gamma$.

299. Ἐπεὶ μέντοι ἀμήχανόν ἐςιν ὁλοκληρεν ἀεὶ ἅπαν ἀπειροςὸν, πλειόνων τρεπτῶν περιεκτικὸν, καλῶς ἔχον ἔςαι ἐκδηλῶσαι, ὅπως ἂν αἱ δυναταὶ τῶν ἀδυνάτων διαςέλλοιντο.

300. Εἰς δέ γε τὴν διάκρισιν ταύτην προληπτέον, ὡς εἰ ἐν ποσότητι τῇ Π συγκειμένῃ ἐκ δυεῖν ἄλλων ποσοτήτων χ, υ, ἀντικαταςαθῇ, πρῶτον μὲν ἀντὶ χ ποσότης τις

ἄλλη ἡ π, ἐν δὲ τῷ ἐσχάτῳ ἀποτελέσματι ἀντὶ υ εἰσαχθῇ ἡ κ, ταυτὸν ἔσαι, ὡς εἴπερ ἀντικατασαίη, πρῶτον μὲν ἀντὶ υ ἡ κ, ἐξῆς δὲ ἀντὶ χ ἡ π· ὃ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον.

301. Ἐντεῦθεν ἄρα, εἰ ποσότητος τῆς Π, συγκειμένης ἐκ χ, υ καὶ ἀμετατρέπτων ποσῶν, ληφθεῖεν τὰ ἀπειροσὰ, γενομένης τρεπτῆς πρῶτον τῆς χ, τοῦ δ' ἀποτελέσματος αὖθις ληφθεῖεν τὰ ἀπειροσὰ, τιθεμένης τρεπτῆς μόνης τῆς υ, ταὐτὸν ἔσαι ὡς εἰ πρῶτον ληφθεῖεν τὰ ἀπειροσὰ, θεωρουμένης μόνης τῆς υ τρεπτῆς, ἑξῆς δὲ λειφθεῖεν τὰ τοῦ ἀποτελέσματος, ἐκληφθείσης ὡς μόνης μεταβλητῆς τῆς χ· κείσθω γάρ, τεθέντος πρῶτον ἀντὶ χ τοῦ $\chi + \delta\chi$, τὸ Π γενέσθαι Π'· ἔσαι οὖν τὸ ἀπειροσὸν Π' — Π· κείσθω αὖ ἀντὶ υ, τεθέντος τοῦ $\upsilon + \delta\upsilon$, τὸ Π' γενέσθαι Π'', τὸ δὲ Π, Π''', ὥσε τὸ Π' — Π τραπέσθαι εἰς Π'' — Π'''· ἔσαι τοίνυν δεύτερον ἀπειροσὸν τὸ Π'' — Π''' — Π' + Π.

Γενέσθωσαν ἤδη ἐναντίως αἱ ἀντικατασάσεις, καὶ ἐπεὶ, ἀντικατασαθέντος τοῦ $\upsilon + \delta\upsilon$ ἀντὶ υ ἐν τῷ Π, τὸ Π γίνεται Π''', ἔσαι Π''' — Π ὡς πρῶτον ἀπειροσὸν, ὑποτεθέντος τοῦ υ μεταβλητοῦ· ἐὰν οὖν ἤδη ἀντικατασαθῇ $\chi + \delta\chi$ ἀντὶ χ ἐνταύτῃ τῇ ποσότητι, τὸ μὲν Π γίνεται Π', ὥσπερ ἀνωτέρω, τὸ δὲ Π''' (300), Π''· ὥσε τὸ Π'' — Π''' γίνεσθαι Π'' — Π'· τὸ ἄρα δεύτερον ἀπειροσὸν ἔσεται Π'' — Π' — Π''' + Π τ' αὐτὸν ἀκριβῶς, ὥσπερ καὶ πρότερον.

Τούτου τεθέντος, ἐπινοήσωμεν ὡς εἴπερ Α παρεμφαίνοι ποσότητα, συγκειμένην ἐκ χ καὶ υ, τὸ $\frac{\delta A}{\delta\upsilon}\,\delta\upsilon$ ἐμφαίνει τὸ τῆς Α ἀπειροσὸν, λαμβανόμενον, ὑποτιθεμένης μετβλητῆς τῆς υ, τὸ δὲ $\frac{\delta A}{\delta \chi}\delta\chi$, τὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ Α ἀπειροςὸν, ὑποτιθεμένης τρεπτῆς τῆς υ· ὡσαύτως τὸ $\frac{\delta\delta A}{\alpha\chi\delta\upsilon}$, $\delta\chi\delta\upsilon$ ἐμφανεῖ, ὅτι ληφθήσεται πρῶτον τὰ ἀπειροςὰ τȣ̃ Α, ὑποτιθεμένης μόνης τρεπτῆς τῆς χ, εἶτα ληφθήσεται τὰ τȣ̃ ἀποτελέσματος ἀπειροςὰ, γενομένης μόνης τρεπτῆς τῆς υ.

302. Τȣ́των τεθέντων, ἔςω $A\delta\chi + B\delta\upsilon$ ἀπειροςὸν ἀκριβὲς, ϗ Μ τὸ αὐτȣ̃ ὁλόκληρον· ἔςαι ἄρα $\frac{\delta M}{\delta\chi}\delta\chi + \frac{\delta M}{\delta\upsilon}\delta\upsilon = A\delta\chi + B\delta\upsilon$· ἄρα $\frac{\delta M}{\delta\chi} = A$, ϗ $\frac{\delta M}{\delta\upsilon} = B$· ἄρα ȣ̃τω $\frac{\delta\delta M}{\delta\chi\delta\upsilon} = \frac{\delta A}{\delta\upsilon}$, ϗ $\frac{\delta\delta M}{\delta\upsilon\delta\chi} = \frac{\delta B}{\delta\chi}$· ἀλλὰ προδέδεικται (301), ὅτι $\frac{\delta\delta M\delta\chi\delta\upsilon}{\delta\chi\delta\upsilon} = \frac{\delta\delta M\delta\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon\delta\chi}$· ἄρα $\frac{\delta\delta M}{\delta\chi\delta\upsilon} = \frac{\delta\delta M}{\delta\upsilon\delta\chi}$, ϗ $\frac{\delta A}{\delta\upsilon} = \frac{\delta B}{\delta\chi}$, τȣ̃τ' ἔςιν, ἐὰν ᾖ $A\delta\chi + B\delta\chi$ ἀπειροςὸν πλῆρες, τὸ τȣ̃ Α ἀπειροςὸν λαμβανόμενον, ὑποτιθεμένης μόνης τρεπτῆς τῆς υ, ϗ διαιρȣμένης διὰ δυ, ἴσον ἔςαι τῷ τῆς Β ἀπειροςῷ, λαμβανομένῳ, ὑποτιθεμένης μόνης τρεπτῆς τῆς χ, ϗ διαιρȣμένης διὰ δχ· ȣ̃τως $\frac{1}{3}\upsilon^3\delta\chi + \chi\upsilon^2\delta\upsilon$ ἔςιν ἀπειροςὸν ἐντελὲς, εἴγε $\frac{\delta(\frac{1}{3}\upsilon^3)}{\delta\upsilon} = \frac{\delta(\chi\upsilon^2)}{\delta\chi}$. τὸ μὲν γὰρ πρῶτον μέλος ἀνάγεται εἰς $\frac{\upsilon^2\delta\upsilon}{\delta\upsilon}$, θάτερον δὲ εἰς $\frac{\upsilon^2\delta\chi}{\delta\chi}$· τἐναντίον δὲ τὸ $\chi\upsilon\delta\chi + \alpha\chi\delta\upsilon$ ȣ̓κ ἔςιν ὁλο-

κληρώσιμον, ἐπεὶ τὸ $\frac{\delta(\chi\upsilon)}{\delta\upsilon}$ ἐκ ἔςιν ἴσον τῷ $\frac{\delta(2\chi)}{\delta\chi}$.

303. Εἰ δ' ἐνείει πλείω τῶν δυεῖν τρεπτῶν τῷ προκειμένῳ ἀπειροςῷ, τῦτ' ἔςιν εἴπερ εἴη τοιῦδε σχήματος $A\delta\chi + B\delta\upsilon + \Gamma\delta\psi$, ἵν' ὁλοκληρωθῇ, δεῖ εἶναι $\frac{\delta A}{\delta\upsilon} = \frac{\delta B}{\delta\chi}$, $\frac{\delta A}{\delta\psi} = \frac{\delta\Gamma}{\delta\chi}$, $\frac{\delta B}{\delta\psi} = \frac{\delta\Gamma}{\delta\upsilon}$· δυνατὸν γὰρ ἄλλην μετ' ἄλλην ἐκδέξαθαι τὰς ψ, υ, χ, ὥσπερ ἀμετατρέπτυς· ἢ δὴ τὸ ἀπειροςὸν, ὅπερ ἕξει μόνον δύω ὅρυς (ἐκ γὰρ ταύτης τῆς ὑποθέσεως ἔςιν ἤτοι $\delta\psi = 0$, ἢ $\delta\upsilon = 0$, ἢ $\delta\chi = 0$) ἔςαι ἢ αὐτὸ ἀπειροςὸν ἐντελὲς, εἴπερ εἴη τοιῦτο τὸ προτεθέν· ἕξει ἄρα ἐφ' ἑκάςης τέτων τῶν περιπτώσεων τὰς ἰδιότητας τῶν ἐντελῶν ἀπειροςῶν, τῶν δύω τρεπτὰς περιεχόντων· ἐντεῦθεν εὐχερῶς πάνυ εὑρεθήσονται αἱ θέσεις ὑπὲρ ἀπειροςῦ, πλείυς τρεπτὰς περιέχοντος.

304. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἔςω Π ποσότης ἄγνωςος, συγκειμένη ἐκ χ, υ, ἢ ποσῶν ἀμετατρέπτων, ἢ ἔςω γνωςὸν αὐτῆς τὸ ἀπειροςὸν $A\delta\chi$, λαμβανόμενον, ὑποτιθεμένης τρεπτῆς τῆς υ· βυλομένοις δ' εὑρεῖν τὸ ὅλον τῆς Π ἀπειροςὸν ὑποτεθήσεται τῦτο ὂν $A\delta\chi + B\delta\upsilon$· τηνικαῦτα ἂν ἔςαι τὸ B τοιῦτον, ὥςε ὑπάρχειν $\frac{\delta A}{\delta\upsilon} = \frac{\delta B}{\delta\chi}$· ἄρα $\delta B = \frac{\delta A}{\delta\upsilon}\delta\chi$· γενέσθω τοίνυν ὁλοκλήρωσις, τηρυμένης μόνης τρεπτῆς τῆς χ, εἴγε μόνη ἡ χ ὑποτέθειται τρεπτὴ ἐν τῷ B· ἔςαι ἄρα $B = \mathrm{O}\frac{\delta A}{\delta\upsilon}\delta\chi$· ἄρα $B\delta\upsilon = \delta\upsilon . \mathrm{O}. \frac{\delta A}{\delta\upsilon}\delta\chi$· ἀλλ' ἐπείπερ $A\delta\chi$ ὑποτίθεται ἀπειροςὸν τῆς Π, λαμ-

βανόμενον, ὑποτιθεμένης τῆς χ μόνης ὡς τρεπτῆς, ἔςαι Π = ΟΑδχ, τῆς ὁλοκληρώσεως γινομένης ἐκ τῦ ὑποτεθῆναι μόνην τρεπτὴν τὴν χ· τὸ ἄρα πλῆρες ἀπειροςὸν τῆς Π, εἴτ᾽ οὖν τὸ Ο. Αδχ ἐςιν $= A\delta\chi + \delta\upsilon \cdot O. \frac{\delta A}{\delta\upsilon} \cdot \delta\chi$, ἔνθα ἡ τῦ $O. \frac{\delta A}{\delta\upsilon}$ ὁλοκλήρωσις γενήσεται, τηρυμένης ὡς ἀμετατρέπτυ τῆς υ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ Ἀπειροςῶν Ἐξισώσεων.

305. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἐξίσωσιν ἀπειροςὴν, δύω τρεπτὰς (χ, υ) περιέχυσαν, ἐν ἑκατέρῳ μέλει μίαν μετὰ τῦ ἰδίυ αὐτῆς ἀπειροςῦ, ὁλοκληρῶσαι.

ΛΥΣΙΣ. Ὡλοκληρώσθω ἑκάτερον μέλος διὰ τῶν ἀποδοθέντων κανόνων εἰς ὁλοκλήρωσιν τῶν μιᾶς μόνης τρεπτῆς περιεκτικῶν ἀπειροςῶν· ἐὰν, φέρ᾽ εἰπεῖν, ἡ $\alpha\chi^{\mu}\upsilon^{\nu}\delta\chi = \beta\upsilon^{\kappa}\chi^{\rho}\delta\upsilon$, παριςῶσα πάσας τὰς ἀπειροςὰς ἐξισώσεις, τὰς δυοῖν ὅρων περιεκτικάς· ἀποκεκρίσθων αἱ ἀδιόριςοι, διαιρυμένης τῆς ἐξισώσεως διὰ υ^{ν}, καὶ χ^{ρ}· ὅθεν ἔςαι $\alpha\chi^{\mu-\rho}\delta\chi = \beta\upsilon^{\kappa-\nu}\delta\upsilon$, ἧς ὁλόκληρον προφανῶς ἐςὶ τὸ
$$\frac{\alpha\chi^{\mu-\rho+1}}{\mu-\rho+1} = \frac{\beta\upsilon^{\kappa-\nu+1}}{\kappa-\nu+1} + \Gamma.$$

306. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Θατέρυ, ἢ ἑκατέρυ, μέλυς τῶν τῆς ἐξισώσεως γεωμετρικῶς μὴ ὁλοκληρυμένυ, τῆς δὲ ἐξισώσεως γεωμετρικῆς ὑπάρχειν δυναμένης, ἢ γῦν ἀναχθῆναι εἰς σχῆμα γεωμετρικῆς, εὑρεῖν ὁπότε τῦτο δυνατῶς ἔχει.

ΛΥΣΙΣ. Ἐὰν ἐν τῇ προεκτεθείσῃ ἐξισώσει ᾖ $\mu - \rho = -1$, ϗ $\varkappa - \nu = -1$, ἡ ἀπειροςὴ ἐξίσωσις τρέψεται εἰς $\frac{\alpha\delta\chi}{\chi} = \frac{\beta\delta\upsilon}{\upsilon}$, ἧς ἑκάτερον μέλος διὰ μόνων τῶν λογαρίθμων ὁλοκληρωθῆναι δύναται· ὡς εἶναι $\alpha\lambda\chi = \beta\lambda\upsilon + \lambda\Gamma$ (*)· ἡ ὖν ἐξίσωσις αὕτη δυνατῶς ἔχει γενέσθαι γεωμετρικὴ, γραφομένη ὕτω $\lambda\chi^{\alpha} = \lambda\upsilon^{\beta} + \lambda\Gamma$, εἴτ' ὖν $\lambda\chi^{\alpha} = \lambda\Gamma\upsilon^{\beta}$· ἐὰν ὖν ὗτοι οἱ δύω λογάριθμοι ἴσοι ὦσιν· αἱ, αἷς ἐπανήκυσι ποσότητες, ϗ αὗται ἐξ ἀνάγκης ἴσαι ἔσονται· ἄρα $\chi^{\alpha} = \Gamma\upsilon^{\beta}$, ἐξίσωσις γεωμετρική.

Ἐὰν δὲ ᾖ μόνον $\varkappa - \nu = -1$, ἡ ἀπειροςὴ ἐξίσωσις ἔςαι $\alpha\chi^{\mu-\rho}\delta\chi = \frac{\beta\delta\upsilon}{\upsilon}$, ἧς τὸ ὁλόκληρον ἐςὶν $\frac{\alpha\chi^{\mu-\rho+1}}{\mu-\rho+1} = \beta\lambda\upsilon + \lambda\Gamma$· δυνατὸν μέντοι ἀπονεμηθῆναι ταύτῃ τῇ ἐξισώσει σχῆμα γεωμετρικὸν, πολλαπλασιαζομένου μὲν τοῦ πρώτου μέλους ἐπὶ $\lambda\varepsilon$, τῦ δὲ ε ἀριθμὸν δηλῦντος, ὗ ὁ λογάριθμος ἐςὶν $= 1$· τηνικαῦτα γὰρ ἥκιςα μεταβαλεῖ ἡ ἐξίσωσις· ἔςαι ἄρα $\frac{\alpha\chi^{\mu-\rho+1}}{\mu-\rho+1}\lambda\varepsilon = \beta\lambda\upsilon + \lambda\Gamma$, ἢ (γενομένυ $\mu - \rho + 1 = \pi$) $\lambda\varepsilon^{\frac{\alpha\chi^{\pi}}{\pi}} = \lambda\Gamma\upsilon^{\beta}$, καὶ ἑπομένως $\varepsilon^{\frac{\alpha\chi^{\pi}}{\pi}} = \Gamma\upsilon^{\beta}$· τῦ λοιπῦ τοίνυν διὰ ε δηλωθήσεται ἀριθμὸς, ὗ ὁ λογάριθμός ἐςι 1.

(*) Παντὶ ἐφεῖται ὑποθεῖναι τὴν ἀμετάτρεπτον ποσότητα ὡς ὖσαν λογάριθμον.

Κείσθω αὖθις ἐξίσωσις $\nu\delta\chi = \frac{\delta\psi}{\sqrt{(1-\psi\psi)}}$, ἧς τὸ δεύτερον μέλος ἐμφαίνει στοιχεῖον τόξου κύκλου, οὗ ψ μὲν ἐστι τὸ ἡμίτονον, 1 δὲ ἡ ἀκτίς· ψ ἄρα ἐστὶ τὸ ἡμίτονον τοῦ Ο $\frac{\delta\psi}{\sqrt{(1-\psi\psi)}}$, τοῦτ' ἔστι τοῦ Ο . $\nu\delta\chi$, εἶτ' οὖν τοῦ $\nu\chi + \Gamma$· ἔστιν ἄρα ὁλόκληρον τὸ $\psi = \eta\mu.(\nu\chi+\Gamma)$· ὡσαύτως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\nu\delta\chi = \frac{--\delta\psi}{\sqrt{(1-\psi\psi)}}$ συναχθήσεται $\psi = \sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,(\nu\chi+\Gamma)$.

Ὁμοίως, ἐπεὶ $\frac{\delta\psi}{1+\psi\psi}$ ἐμφαίνει στοιχεῖον τόξου κύκλου, οὗ 1 μέν ἐστιν ἡ ἀκτὶς, ψ δὲ ἡ ἀπτομένη, ἐὰν ὑπάρχῃ $\nu\delta\chi = \frac{\delta\psi}{1+\psi\psi}$, συνάγεται $\psi = \alpha\pi.(\nu\chi+\Gamma)$·

ἐὰν δὲ ἡ $\nu\delta\chi = \frac{\beta\delta\psi}{\alpha+\zeta\psi\psi}$, ἵν' ἀναχθείη εἰς τὸ πρότερον σχῆμα, γενέσθω $\psi = \mu\upsilon$, τοῦ μ συνεργοῦ ἀμετατρέπτου ὄντος· καὶ δὴ ἔσται $\nu\delta\chi = \frac{\beta\mu\delta\upsilon}{\alpha+\zeta\mu^2\upsilon^2}$· ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ $\zeta\mu^2 = \alpha$, ἔσται $\mu = \sqrt{\frac{\alpha}{\zeta}}$· ὅθεν πρόεισι $\nu\delta\chi = \beta$

$$\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\zeta}}\,\delta\upsilon}{\alpha+\alpha\upsilon\upsilon}\cdot \text{ ὅθεν } \frac{\delta\upsilon}{1+\upsilon\upsilon} = \frac{\nu}{\beta}\,\delta\chi\sqrt{\alpha\zeta}\cdot$$

ἄρα υ, ἢ $\frac{\zeta}{\mu}$, ἢ $\psi\sqrt{\frac{\zeta}{\alpha}} = \alpha\pi.(\frac{\nu}{\beta}\,\chi\sqrt{\alpha\zeta}+\Gamma)$· ἄρα $\psi = \sqrt{\frac{\alpha}{\zeta}}\cdot \alpha\pi\,(\frac{\nu}{\beta}\,\chi\sqrt{\alpha\zeta}+\Gamma)$.

307. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν τοῖς τύποις ημ. $(\nu\chi + \Gamma)$, απ. $(\nu\chi + \Gamma)$, τοῖς ἀρτίως εὑρημένοις, τὸ $\nu\chi + \Gamma$ ἐμφαίνει ἀπολύτως μῆκος τȢ τόξȣ, διὰ μερῶν τῆς ἀκτῖνος, ἀπαρισχμένον· ἀλλ' ἐπείπερ εὐπετέστερόν ἐστι χρῆσαθαι τοῖς τῶν μοιρῶν ἀριθμοῖς, ἢ αὐταῖς τοῖς μήκεσιν, ἐπινήκ' ἂν ὑπαντῶσι. τοιάδε τόξα, ἐκτιμητέον αὐτὰ εἰς μοίρας· ὅπερ εὐμαρῶς ἀποτελεῖται, διαιρȣμένων διὰ τȢ ἀριθμȢ τῶν τῆς ἀκτῖνος μερῶν, ἃ περιέχει μοῖρα μία, τȢτ' ἔστι διὰ 0,0174533, ἢ (ὃ ταὐτὸν) πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ 57,2974166. Τὸ γὰρ ἡμίτονον τόξȣ, ἔχοντος μῆκος β, ἢ τὸ ἡμίτονον τόξȣ, ἔχοντος ἀριθμὸν μοιρῶν, ἐμφαινόμενον διὰ $\beta \times 57,2974166$, ταὐτὸν δήπȣ πέφυκε.

308. Ἐὰν ἡ $\dfrac{\nu\delta\chi}{\sqrt{(1-\chi\chi)}} = \dfrac{\delta\upsilon}{(1-\upsilon\upsilon)}$, ἧς ἑκάτερον μέλος ἐμφαίνει στοιχεῖα δυοῖν τόξων, ἐχόντων πρὸς ἄλληλα :: $1 : \nu$, καὶ ὧν τὰ ἡμίτονά εἰσι χ, υ· τηνικαῦτα τοίνυν εἰς ὁλοκλήρωσιν γενέσθω ἑκάτερον μέλος λογικόν, ὑποτιθεμένȣ, ὑπὲρ μὲν τȢ πρώτȣ, $\sqrt{(1-\chi\chi)} = \chi\sqrt{(-1)} - \psi$, ὑπὲρ δὲ θατέρȣ, $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} = \upsilon\sqrt{(-1)} - \tau$· ἡ δ' ἐξίσωσις μεταβάλλει εἰς $\dfrac{\nu\delta\psi}{\psi} = \dfrac{\delta\tau}{\tau}$, ἧς ὁλόκληρόν ἐστι $\nu\lambda\psi + \lambda\tau + \lambda\Gamma$, ὅθεν ἀποφέρεται $\Gamma\tau + \psi^\nu$· ἀντικαθισαμένων δὲ ἀντὶ ψ καὶ τ τῶν κατ' αὐτὰς δυνάμεων, $\Gamma\,[\upsilon\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}] + [\chi\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-\chi\chi)}]^\nu$, ἥτις ἐν γένει ἐμφαίνει τὸν λόγον δύω ἡμιτόνων χ, υ δυοῖν τόξων πολλαπλῶν ἀλλήλων.

Ἵνα δὲ χρησώμεθα ταύτῃ τῇ ἐξισώσει, διοριστέον πρῶτον τὴν μόνιμον Γ· ὑποτεθείσθων ȣ̓ν (ὥσπερ καὶ δυνατὸν ὑπάρχει) ἑκάτερα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀρχόμενα· τηνικαῦτα τοίνυν τό,τε χ καὶ τὸ υ ἅμα ἐξουδενωθῆναι ὀφείλουσιν· ἐν ταύτῃ μέντοι τῇ περιπτώσει, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $-\Gamma\sqrt{1}=(-\sqrt{1})^{\nu}$, εἴτ' οὖν $-\Gamma=(-1)^{\nu}$· ἀλλὰ $(-1)^{\nu}$ ἐστὶ $+1$, ἢ -1, ὡς ἂν ἔχον τύχοι λείψεως ἢ ὑπάρξεως τὸ ν· ἄρα $-\Gamma=\pm 1$, καὶ $\Gamma=\mp 1$, τοῦ μὲν $-$ κρατοῦντος, ἡνίκα τὸ ν ἐστὶν ἄρτιος, τοῦ δὲ $+$, ἡνίκα περιττὸς ἀριθμός· ἄρα τελευταῖον $\mp[\upsilon\sqrt{(-1)}-\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}]=[\chi\sqrt{(-1)}-\sqrt{(1-\chi\chi)}]^{\nu}$.

Ἐν ἑκάστῃ μερικωτέρᾳ περιπτώσει δυνατὸν ἀεὶ ἐξαφανίζειν τὰς ἐπιπλάστους ποσότητας· ὁ δὲ ἁπλούστερος τρόπος ἐξισῶσαί ἐστι τῷ μηδενὶ (μετὰ τὸ μεταθεῖναι πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ θάτερον μέλος) τὸ ἄθροισμα τῶν πραγματικῶν ποσοτήτων· τηνικαῦτα οὖν ἡ κατάλοιπος ἐξίσωσις φανήσεται διαιρέσεως οὖσα ἐπιδεκτικὴ διὰ $\sqrt{(-1)}$, καὶ ἔσεται ἡ αὐτὴ τῇ συγκροτηθείσῃ, ἰσωθέντος τῷ μηδενὶ τοῦ τῶν πραγματικῶν ποσοτήτων ἀθροίσματος· ἐάν, φέρε, γένηται $\nu=2$, ἔσται $-\upsilon\sqrt{(-1)}+\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}=-\chi\chi-2\chi\sqrt{(-1)}.\sqrt{(1-\chi\chi)}+1-\chi\chi$, εἴτ' οὖν $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}+2\chi\chi-1+2\chi\sqrt{-1}.\sqrt{(1-\chi\chi)}-\upsilon\sqrt{(-1)}=0$· ἰσουμένου ἄρα τῷ μηδενὶ τοῦ τῶν πραγματικῶν ποσοτήτων ἀθροίσματος, ἔσται $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}+2\chi\chi-1=0$· ἡ δὲ ὅλη ἐξίσωσις ἀναχθήσεται εἰς $2\chi\sqrt{(-1)}.\sqrt{(1-\chi\chi)}-\upsilon\sqrt{(-1)}=0$, ἥτις διαιρεθεῖσα διὰ $\sqrt{(-1)}$, δίδωσι $2\chi\sqrt{(1-\chi\chi)}-\upsilon=0$, εἴτ' οὖν $\upsilon=2\chi\sqrt{(1-\chi\chi)}$· ἐὰν οὖν τετραγωνισθῇ αὕτη τε ἡ ἐξίσωσις, καὶ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}+2\chi\chi-1=0$, ἢ γοῦν ἡ $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}=1-2\chi\chi$, τὸ αὐτὸ ἀποτελεσθήσεται.

Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δυνατὸν εὑρεῖν τὰ συνημίτονα ϗ τὰς ἁπτομένας τῶν πολλαπλῶν τόξων· ὑπὲρ ἓν τῶν ἁπτομένων ὁλοκληρωθήσεται τὸ $\frac{\nu\delta\chi}{1+\chi\chi}=\frac{\delta\upsilon}{1+\upsilon\upsilon}$, ἀναλυομένε τῦ $1+\chi\chi$ εἰς $(1+\chi\sqrt{(-1)})(1-\chi\sqrt{(-1)})$, ϗ τῦ $1+\upsilon\upsilon$ εἰς $(1+\upsilon\sqrt{(-1)})(1-\upsilon\sqrt{(-1)})$, ϗ τῶν ἄλλων διανυσθέντων, ὡς εἴρηται ἐπὶ τῶν λογικῶν κλασμάτων.

309. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐνταῦθα δὲ ἐνδιατρίβεσιν ἐκθετέον, ἧς ποτ' ἂν εἴη χρήσεως τό,τε ἡμίτονον ϗ τὸ συνημίτονον τόξε τινός· ἔςω ἓν $\delta\chi=\frac{\delta\upsilon}{\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}}$ ἐξίσωσις παριςῶσα τὸν τῦ χ τόξου πρὸς τὸ αὐτῦ ἡμίτονον υ λόγον· ἐὰν τοίνυν γένηται $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}=\upsilon\sqrt{(-1)}-\psi$, πορισθήσεται $\delta\chi=\frac{-\delta\psi}{\psi\sqrt{(-1)}}$, ἢ $\frac{\delta\psi}{\psi}=-\delta\chi\sqrt{(-1)}$, ἧς τὸ ὁλόκληρόν ἐςι $\lambda\psi=-\chi\sqrt{(-1)}+\lambda\Gamma$, ἢ $\lambda\psi=-\chi\sqrt{(-1)}\,\lambda\varepsilon+\lambda\Gamma$, ὅθεν $\psi=\Gamma\varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$, ϗ τεθείσης ἀντὶ ψ τῆς αὐτῦ δυνάμεως, πορισθήσεται $\upsilon\sqrt{(-1)}-\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}=\Gamma\varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$· ἡ δὲ μόνιμος Γ προσδιορισθήσεται, εἰ παρατηρηθείη, ὅτι τό,τε τόξον χ, ϗ τὸ αὐτῦ ἡμίτονον ἅμα ἐξεδενωθήσονται· ἔςαι ἄρα $-\sqrt{1}=\Gamma$· ἄρα $\upsilon\sqrt{(-1)}-\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}=-\varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$, ϗ ἑπομένως $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}=\upsilon\sqrt{(-1)}+\varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$· τετραγωνισμῷ τοίνυν ϗ ἀναγωγῇ πορισθήσεται $\upsilon=\frac{1-\varepsilon^{-2\chi\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}\,.\,\varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}=$

$\frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} - \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}}$· ἐπεὶ ἄρα υ ἐςὶν ἡμίτονον τῦ χ, ἔςαι ἡμ. $\chi = \frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} - \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}}$· ἐὰν δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} = \upsilon\sqrt{(-1)} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$ τεθῇ ἀντὶ υ ἡ αὐτῦ ἤδη εὑρημένη δύναμις, πορισθήσεται $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}$ τῦτ' ἔςι συνημ. $\chi = \frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} - \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}} = \frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2}$· ἄρα συνημ. $\chi = \frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2}$· ἐπανίωμεν ὖν ἐπὶ τὴν τῶν ἐξισώσεων ὁλοκλήρωσιν.

310. Ὅταν αἱ ἀδιόριςοι μὴ ὦσι διακεκριμέναι ἐπὶ τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως, πρὶν ἢ διακρίνειν αὐτὰς ἐπιχειρῆσαι, σκεπτέον μὴ ἡ ἐξίσωσις, ὡς ἔχυσά ἐςι, τύχῃ ὁλοκληρώσεως ὖσα ἀνεπίδεκτος· τουτὶ δὲ γνωσθήσεται (302) ἐξετάσασιν, εἴπερ $\frac{\delta A}{\delta \chi} = \frac{\delta B}{\delta \upsilon}$, ταύτην τὴν ἐξίσωσιν παρισώσης καθ' ὑπόθεσιν τῆς $A\delta\chi + B\delta\upsilon = 0$· ταύτης δὲ ἐπικρατέσης τῆς θέσεως, γενήσεται ἡ ὁλοκλήρωσις, ὥσπερ εἴρηται (298).

311. Ἀλλὰ γὰρ δυνατὸν, τὴν μὲν θέσιν ταύτην μὴ ἐπικρατεῖν, τὴν δ' ἐξίσωσιν ὐδὲν ἧττον εἶναι ὁλοκληρώσιμον· δεῖ μέντοι πολλαπλασιάζειν αὐτὴν ἐπὶ ποιητήν τι-

να κατάλληλον σύνθετον ἐκ χ ϗ υ ϗ ἀμετατρέπτων ποσοτήτων· ἔςω Π ȣ̓τος ὁ ποιητής· τηνικαῦτα ȣ̓ν $A\Pi\delta\chi + B\Pi\delta\upsilon = o$ ἔςαι ἀπειροςὸν τέλειον· δεῖ δὴ ὑπάρχειν $\frac{\delta(A\Pi)}{\delta\upsilon} = \frac{\delta(B\Pi)}{\delta\chi}$· τὸ ἄρα ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν ὑπὲρ τῆς Π συνέκθεσιν ἐκ χ, ϗ υ ϗ ἀμεταποιήτων ποσῶν· ἀλλ' ἐπεὶ τὸ ζήτημα τόδε μακρᾶς ἐςὶν ἐρεύνης δεόμενον, ζητητέον τὴν Π περιέχȣσαν μόνον χ ϗ ἀμετατρέπτȣς, ἢ γȣ̃ν μόνον υ ϗ ἀμετατρέπτȣς ποσότητας· ὑποτεθείσθω ȣ̓ν ἡ Π περιέχȣσα μόνον χ· πορισθήσεται ἄρα ἁπλῶς $\Pi\frac{\delta A}{\delta\upsilon} = \Pi\frac{\delta B}{\delta\chi}$· ὅθεν $\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \frac{\left(\frac{\delta A}{\delta\upsilon} - \frac{\delta B}{\delta\chi}\right)}{B}\delta\chi$· ῥαδίως ἄρα εὑρεθήσεται τὸ Π, ἐὰν τὸ $\frac{\left(\frac{\delta A}{\delta\upsilon} - \frac{\delta B}{\delta\chi}\right)}{B}$ ἀναχθῇ εἰς μίαν μόνην τȣ̃ χ συνέκθεσιν, ὥςπερ ἐπάναγκες τὸ Π, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὑπάρχειν μίαν μόνην τȣ̃ χ συνέκθεσιν.

Δυνατὸν ἔτι εὑρεῖν τὸν ποιητὴν, εἴπερ ȣ̓τος συγκέοιτο ἐκ συνεκθέσεως τȣ̃ χ, πολλαπλασιαζομένης, ἢ διαιρȣμένης διὰ γνωςῆς τȣ̃ υ συνεκθέσεως.

312. Διὰ ταύτης ȣ̓ν τῆς μεθόδȣ δυνατὸν ὁλοκληρῶσαι ἅπασαν ἐν γένει ἐξίσωσιν τοιȣτώδη $X\upsilon^{\kappa}\delta\upsilon + X'\upsilon^{\kappa+1}\delta\chi + X''\upsilon^{\rho}\delta\chi = o$, τῶν μὲν X, X', X'' οἱασȣ̃ν συνεκθέσεις τȣ̃ χ, τῶν δὲ κ, ρ δείκτας ȣ̓τινασȣ̃ν ἐμφαινόντων: δυνατὸν ȣ̓ν ζητεῖν, εἰ μὴ γίνοιτο ὁλοκληρώσι-

μος, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ ποιητὴν τοιῦτον $\Pi\upsilon^{\nu}$, τῦ Π συνεκθέσεως ὄντος τῆς χ, ϗ τῦ ν δείκτυ ἀδιορίσυ· ϗ εὑρεθήσεται ὁλοκληρυμένη, εἴπερ ὑποτεθείη $\nu = -\rho$· ἁπλύστερον μέντοι ὑπάρχει ἀναγαγεῖν ἅπασαν ἑξῆς τὴν ἐξίσωσιν εἰς τῦτο τὸ σχῆμα $\upsilon^{\kappa-\rho}\delta\upsilon + Z\upsilon^{\kappa-\rho+1}\delta\chi + Z'\delta\chi = 0$, διαιρῦντας αὐτὴν διὰ X ϗ υ^{ρ}, ϗ παριςῶντας διὰ Z, Z' τὰ πηλίκα $\frac{X'}{X}, \frac{X''}{X}$· ἵνα δὲ αὕτη ὁλοκληρωθείη, ὑποτεθείσθω τὸ Π ποιητὴς, συνέκθεσις ὢν τῆς χ· ἔςαι ἄρα $\Pi\upsilon^{\kappa-\rho}\delta\upsilon + Z\Pi\upsilon^{\kappa-\rho+1}\delta\chi + Z\Pi\delta\chi = 0$· ἐὰν ᾖ τὸ Π συνέκθεσις ὑπάρχῃ τῦ χ, ἔςαι ϗ τὸ ZΠ· τὸ ἄρα $\text{O}.Z\Pi\delta\chi$ ἀναχθήσεται εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν τῶν ἐκ μιᾶς μόνης τρεπτῆς ποσοτήτων· ζητεῖται ἄρα μόνον, ἵνα γένηται $\Pi\upsilon^{\kappa-\rho}\delta\upsilon + Z\Pi\upsilon^{\kappa-\rho+1}\delta\chi$ ἀπειροςὸν τέλειον, τῦτ' ἔςιν ἵνα γένηται $\frac{\delta(\Pi\upsilon^{\kappa-\rho})}{\delta\chi} = \frac{\delta(Z\Pi\upsilon^{\kappa-\rho+1})}{\delta\upsilon}$, εἴτ' ᾖν $\upsilon^{\kappa-\rho}\frac{\delta\Pi}{\delta\chi} = (\kappa-\rho+1)\upsilon^{\kappa-\rho}$ ZΠ· ὅθεν ἀποφέρεται $\frac{\delta\Pi}{\Pi} + (\kappa-\rho+1)Z\delta\chi$, ἧς τὸ ὁλόκληρον ἔςι $\lambda\Pi + \text{O}.(\kappa-\rho+1)Z\delta\chi + \text{O}.(\kappa-\rho+1)Z\delta\chi.\lambda\epsilon$· ἄρα $\Pi + \epsilon^{\text{O}(\kappa-\rho+1)Z\delta\chi}$. ἀντικαταςάσει ἄρα ταύτης τῆς τῦ Π δυνάμεως ἐν τῇ ἐξισώσει $\Pi\upsilon^{\kappa-\rho}\delta\upsilon +$ κ.τ.λ., καὶ ὁλοκληρώσει πορισθήσεται

$\frac{\upsilon^{\kappa-\rho+1}}{\kappa-\rho+1}\, \varepsilon^{O.(\kappa-\rho+1)} + O.Z\delta\chi\, \varepsilon^{O(\kappa-\rho+1)Z\delta\chi} +$
$\Gamma = 0.$

Οὐδὲν δὲ προστίθεται ὑπὲρ τῆς ἀμεταβλήτου ποσότητος ἐν τῇ ὁλοκληρώσει τῆς τὸ Π προβαλλούσης ἐξισώσεως· μὴ ἔχουσι γὰρ οὐδεμίαν θέσιν εἰς διορισμὸν αὐτῆς, ἐφ' ἡμῖν κεῖται ὑποθεῖναι αὐτὴν ἴσην τῷ μηδενί.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθω εἰς ὁλοκλήρωσιν ἡ ἐξίσωσις $\delta\upsilon + \frac{\alpha\upsilon\delta\chi}{\chi} + (\beta\chi^2 + \gamma\chi + \zeta)\,\delta\chi = 0$· πολλαπλασιασθεῖσα τοίνυν ἐπὶ τὸν ποιητὴν Π γενήσεται $\Pi\delta\upsilon + \frac{\alpha\upsilon\Pi\delta\chi}{\chi} + \Pi\,(\beta\chi^2 + \gamma\chi + \zeta)\,\delta\chi = 0$· δεῖ δὴ ὑπάρχειν $\frac{\delta\Pi}{\delta\chi} = \delta\,\frac{\left(\frac{\alpha\upsilon\Pi}{\chi}\right)}{\delta\upsilon} = \frac{\alpha\Pi}{\chi}$· ἄρα $\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \frac{\alpha\delta\chi}{\chi}$· ἄρα $\lambda\Pi = \alpha\lambda\chi$, ἢ $\Pi = \chi^{\alpha}$· οὐκοῦν ἡ ἐξίσωσις ἀποτελεῖται $\chi^{\alpha}\delta\upsilon + \alpha\chi^{\alpha-1}\upsilon\delta\chi + \beta\chi^{\alpha+2}\delta\chi + \gamma\chi^{\alpha+1}\delta\chi + \zeta\chi^{\alpha}\delta\chi$, οὗ ὁλοκληρόν ἐστι τὸ $\chi^{\alpha}\upsilon + \frac{\beta\chi^{\alpha+3}}{\alpha+3} + \frac{\gamma\chi^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{\zeta\chi^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \Gamma = 0.$

313. Τῇ ἤδη ὁλοκληρωθείσῃ γενικῇ ἐξισώσει ἐντυγχάνομεν συχνότερον, ἡ δὲ μέθοδος, ᾗ ἐχρησάμεθα, πολλαῖς καὶ ἄλλαις περιπτώσεσιν ἐφαρμοσθῆναι δύναται.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθων δύω ἐξισώσεις $\delta\chi + \alpha\delta\upsilon + (\beta\chi + \gamma\upsilon)\,T\delta\tau = 0$, $\kappa\delta\chi + \alpha'.\delta\upsilon + (\beta'\chi + \gamma'\upsilon)\,T\delta\tau = 0$ τῶν μὲν χ, υ, τ τριῶν ὄντων ἀστάτων ποσῶν, μονίμων δὲ τῶν α, β, γ, α'. κτ., ᾗ τῦ Τ συνέκθεσιν ἡντιναῦν ἐμφαίνοντος τῆς τ ποσότητος· ἀναχθήσεται ἂν τὸ τέτων τῶν δυεῖν ἐξισώσεων ὁλόκληρον εἰς τὴν προεκτεθεῖσαν μέθοδον ὅτω· πεπολλαπλασιάσθω ἡ ἑτέρα τῶν δυεῖν, ἡ πρώτη φέρ' εἰπεῖν, ἐπὶ συνεργὸν ἀδιόριστον ᾗ ἀμετάτρεπτον τὸν ϑ, ᾗ προστεθείσης τῇ δευτέρᾳ, πολλαπλασιασθήτω τὸ ὅλον ἐπὶ ποιητὴν τὸν Π, ὃς ὑποτίθεται ὢν συνέκθεσις τῦ τ· ὅκῦν ἔςαι $(\vartheta\Pi + \kappa\Pi)\,\delta\chi + (\vartheta\alpha\Pi + \alpha'.\Pi)\,\delta\upsilon + [(\vartheta\beta\Pi + \beta'.\Pi)\chi + (\vartheta\gamma\Pi + \gamma'.\Pi)\upsilon]\,T\delta\tau = o$· ἔςω ἂν καθ' ὑπόθεσιν ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀπειροςὸν ἀκριβές· ἔςαι ἄρα (304) α'. $\frac{\delta(\vartheta\Pi + \kappa\Pi)}{\delta\tau} =$

$$\frac{\delta[(\vartheta\beta\Pi + \beta'.\Pi)\chi + (\vartheta\gamma\Pi + \gamma'.\Pi)\upsilon]}{\delta\tau}\,T\cdot\quad \beta'.$$

$$\frac{\delta(\vartheta\alpha\Pi + \alpha'.\Pi)}{\delta\chi} =$$

$$\frac{\delta[(\vartheta\beta\Pi + \beta'.\Pi)\chi + (\vartheta\gamma\Pi + \gamma'.\Pi)\upsilon]}{\delta\upsilon}\,T\cdot\quad \gamma'.$$

$\frac{\delta(\vartheta\Pi + \kappa\Pi)}{\delta\upsilon} = \frac{\delta(\vartheta\alpha\Pi + \alpha'.\Pi)}{\delta\chi}$· ἀλλ' ἐὰν Π ὑποτεθῇ συνέκθεσις τῦ τ, ἐπικρατεῖ ἡ τελευταία ἐξίσωσις, ἐπείπερ ἀνάγεται εἰς $o = o$· αἱ δὲ λοιπαὶ δύω διδόασι $(\vartheta\gamma + \kappa)\frac{\delta\Pi}{\delta\tau} = (\vartheta\beta + \beta'.)\,\Pi T$, ᾗ $(\vartheta\alpha + \alpha'.)\frac{\delta\Pi}{\delta\tau} = (\vartheta\gamma + \gamma'.)\,\Pi T$· ὅθεν ἀποφέρεται $\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \frac{\vartheta\beta + \beta'.}{\vartheta + \kappa}T\delta\tau$, ᾗ $\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \frac{\vartheta\gamma + \gamma'.}{\vartheta\alpha + \alpha'.}T\delta\tau$· ἑκατέρας ἄρα τῶν δυεῖν τέτων δυνάμεων ἐξισεμένης τῷ $\frac{\delta \Pi}{\Pi}$, ἔςαι $\frac{\vartheta\beta+\beta'.}{\vartheta+\kappa}=\frac{\vartheta\gamma+\gamma'}{\vartheta\alpha+\alpha'}$, ἐν ᾗ ἄνεισιν εἰς δεύτερον βαθμὸν τὸ ϑ· ταύτης ἔν τῆς ἐξισώσεως ἐπιλυθείσης, προκύψεσι δυνάμεις δύω τε ϑ.

Ὑποτεθέντος ἔν γνωςε τε ϑ, εὐχερῶς πορισθήσεται τὸ Π· εἴγε ἡ ἐξίσωσις $\frac{\delta \Pi}{\Pi} = \frac{\vartheta\beta+\beta'.}{\vartheta+\kappa}$ Τδτ δίδωσι Π $= \varepsilon^{o}\ \frac{\vartheta\beta+\beta'.}{\vartheta+\kappa}$ Τδτ. Ἀλλὰ τῆς ἐξισώσεως $(\vartheta\Pi+\kappa\Pi)$ $\delta\chi$ + κ.τ.λ. ἀπειροςε ἀκριβες πράγματι ἴσης, ἐὰν ταύτην ὁλοκληρώσωμεν, ἕξομεν $(\vartheta\Pi+\kappa\Pi)\chi+(\vartheta\alpha\Pi+\alpha'.\Pi)\upsilon+\Gamma=o$· ἐὰν ἄρα, τε ϑ ἐμφαίνοντος τὴν πρώτην τε ϑ δύναμιν, δεδομένην ὑπὸ τῆς δευτεροβαθμίε ἐξισώσεως, τὸ ϑ' ἐμφαίνῃ τὴν δευτέραν τε ϑ δύναμιν, καὶ διὰ τε Π', ὅπερ γίνεται Π, τεθέντος τε ϑ' ὑπὲρ τε ϑ', πορισθήσεται $(\vartheta'\Pi'+\kappa\Pi')\chi+(\vartheta'\alpha\Pi'+\alpha'\Pi')\upsilon+\Gamma'=o$, τε Γ' ποσότητα καινὴν ἀμετάτρεπτον ἐμφαίνοντος· ἐδεὶς γάρ ἐςι λόγος, δι' ὃν ἄντις θατέρᾳ μᾶλλον, ἢ θατέρᾳ χρήσαιτο τῶν τε ϑ δυνάμεων· ἐκ τέτων δὲ τῶν δισσῶν ἐξισώσεων πορίζονται εὐμαρῶς αἱ τε χ, καὶ υ δυνάμεις, παριςάμεναι διὰ τ καὶ ἀμετατρέπτων ποσοτήτων.

314. Ὅταν ἡ προκειμένη ἀπειροςὴ ἐξίσωσις μὴ ἐμπεριέχηται ταῖς εἰς δεῦρο ἐκτεθείσαις περιπτώσεσι, σκεπτέον εἰ δυνατὸν διακρίναι τὰς ἀδιορίςες· ἐνίοτε τοίνυν μόνων τῶν κοινῶν κανόνων τε συμβολικε λογισμε τέτῳ δεῖ· ἐνίοτε δὲ, μεταμορφώσεων· εἰσὶ μέντοι ἐξισώσεις, ἐφ' αἷς ἄγνωςον, ἥτις ἂν εἴη ἡ κατάλληλος μεταμόρφωσις· ἡ μὲν γὰρ ἐξίσωσις $\alpha\chi^{\nu}\delta\chi+\beta\upsilon^{\kappa}\chi^{\nu}\delta\chi=$

$\upsilon^{\eta}\delta\upsilon\,(\varepsilon + \zeta\chi^{\eta})^{\theta}$ ἀμέσως διακρίνεται διὰ διαιρέσεως, εἴγε ταυτίζεται τῇ $(\alpha + \beta\upsilon^{\kappa})\,\chi^{\nu}\delta\chi = \upsilon^{\eta}\delta\upsilon\,(\varepsilon + \zeta\chi^{\eta})^{\theta}$, ἥτις γίνεται $\dfrac{\chi^{\nu}\delta\chi}{(\varepsilon + \zeta\chi^{\eta})^{\theta}} = \dfrac{\upsilon^{\eta}\delta\upsilon}{\alpha + \beta\upsilon^{\kappa}}$, ἧς τὸ ὁλόκληρον ἐξέχεται τῦ τῶν δυωνύμων ποσῶν τῶν μιᾶς μόνης τρεπτῆς περιεκτικῶν· ἡ δέγε $\vartheta\chi\delta\chi = \alpha\chi^{4}\upsilon\delta\upsilon + 2\alpha\beta\chi^{2}\upsilon^{3}\delta\upsilon + \alpha\beta\beta\upsilon^{5}\delta\upsilon$ πρῶτον μὲν, ἣ παντὶ δῆλον εὐθέως καθίϛαται, γραφήσεται $\vartheta\chi\delta\chi = (\chi^{4} + 2\beta\chi^{2}\upsilon^{2} + \beta\beta\upsilon^{4})\,\alpha\upsilon\delta\upsilon$· ἑξῆς δὲ μεταμορφωθήσεται εἰς $\vartheta\chi\delta\chi = (\chi^{2} + \beta\upsilon^{2})^{2} \times \alpha\upsilon\delta\upsilon$· βραχὺ ἓν ἐπιϛησαμένοις δῆλον εὐθὺς, ὅτι εὐτυχῶς πραχθήσεται ἡ διάκρισις, εἰ γένοιτο $\chi^{2} + \beta\upsilon^{2} = \psi$· ϗ γὰρ ἔϛαι $\chi^{2} = \psi - \beta\upsilon^{2}$, ϗ $\chi\delta\chi = \frac{1}{2}\delta\psi - \beta\upsilon\delta\upsilon$· ἀντικαταϛάσει ἄρα ποριϑήσεται $\frac{1}{2}\vartheta\delta\psi - \beta\vartheta\upsilon\delta\upsilon = \alpha\psi\psi\upsilon\delta\upsilon$, ὅθεν ἀποφέρεται $\dfrac{\frac{1}{2}\vartheta\delta\psi}{\beta\vartheta + \alpha\psi\psi} = \upsilon\delta\upsilon$, ἥτις ἐϛὶ ῥάϛη πρὸς ὁλοκλήρωσιν.

315. Ἐπείπερ ἀμήχανόν ἐϛιν ἀποδῦναι κανόνας γενικὺς τῶν μεταμορφώσεων, ἐκθησόμεθα ἐν γένει, ὅτε γνωϛὸν καθίϛαται εὐτυχῶς ἐκτελεῖσθαι τὰ τῆς διακρίσεως.

Δυνατὸν ἓν ἐν γένει τὰ τῆς διακρίσεως ἐκτελεῖσθαι ἐν ἁπάσαις ταῖς ἐξισώσεσι ταῖς δυεῖν τρεπτῶν περιεκτικαῖς· ἔϛω γὰρ ἡ $A\delta\chi + B\delta\upsilon = 0$ ἐξίσωσις ὁμογενὴς, ϗ διῃρήσθω ὅλη διὰ βαθμῦ τῆς χ, ὃ ὁ δείκτης ἐμφαίνει τὸν βαθμὸν τῆς ἐξισώσεως· τοῖς ὖν A, B μόνοι οἱ βαθμοὶ τῦ $\dfrac{\upsilon}{\chi}$ ἐνέσονται ϗ ποσότητες ἀμετάτρεπτοι· ὥϛε ἡ ἐξίσωσις γενήσεται $Z\delta\chi + Z^{1}\delta\upsilon = 0$, τῶν Z, Z^{1} συνϑέσεις ἐμφαινόντων τῦ $\dfrac{\upsilon}{\chi}$, ϗ τῶν ἀμετατρέπτων· τῦ-

τῦ τεθέντος, ἐπεὶ $\delta\left(\frac{\upsilon}{\chi}\right) = \frac{\chi\delta\upsilon - \upsilon\delta\chi}{\chi\chi}$, ἔςαι $\delta\chi = \frac{-\chi\chi}{\upsilon}\delta\left(\frac{\upsilon}{\chi}\right) + \frac{\chi}{\upsilon}\delta\upsilon$· ἐὰν ἄρα γένηται $\frac{\upsilon}{\chi} = \psi$, πορισθήσεται $\delta\chi = -\frac{\upsilon\delta\psi}{\psi\psi} + \frac{\delta\upsilon}{\psi}$· ἀντὶ ἄρα $\frac{\upsilon}{\chi}$, ἢ $\delta\chi$ ἀντικαταςαθεισῶν τῶν κατ' αὐτὰς δυνάμεων, πορισθήσεται $-\frac{Z\upsilon\delta\psi}{\psi\psi} + \frac{Z\delta\psi}{\psi} + Z'\delta\upsilon = 0$, τῶν Z, Z' ἐμφαινόντων ἀληθῶς τὰς συνεκθέσεις τῦ ψ ἢ τῶν ἀμετατρέπτων, αὕτη τοίνυν ἡ ἐξίσωσις δίδωσι $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \frac{Z\delta\psi}{Z\psi + Z'\psi\psi}$ ἐξίσωσιν ὅλην διακεκριμένην, ἐπεὶ Z ἢ Z' μόνην τὴν ψ τρεπτὴν περιέχυσιν· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ἡ $\upsilon^3\delta\chi + \upsilon^2\chi\delta\upsilon + \beta\chi^3\delta\upsilon = 0$· ἥτις ἐξίσωσίς ἐςιν ὁμογενὴς, ἧς τὸν βαθμὸν ἐμφαίνει ὁ ἀριθμὸς 3, διῃρήσθω διὰ χ^3· ὑκῦν ἔςαι $\frac{\upsilon^3}{\chi^3}\delta\chi + \frac{\upsilon^2}{\chi^2}\delta\upsilon + \beta\delta\upsilon = 0$· γενέσθω ὗν $\frac{\upsilon}{\chi} = \psi$, ἢ $\chi = \frac{\upsilon}{\psi}$· ἔςαι τοίνυν $\delta\chi = \frac{\psi\delta\upsilon - \upsilon\delta\psi}{\psi\psi}$· ἀντικαταςάσει ἄρα ἐν τῇ προτεθείσει ἐξισώσει, πρόεισι $\psi^2\delta\upsilon - \upsilon\psi\delta\psi + \psi^2\delta\upsilon + \beta\delta\upsilon = 0$, ὅθεν $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \frac{\psi\delta\psi}{2\psi^2 + \beta}$, ἧς τὸ ὁλόκληρον ἔςι $\lambda\upsilon = \frac{1}{4}\lambda\ (2\psi^2 + \beta) + \lambda\Gamma$, ἥτις δίδωσιν $\upsilon = \Gamma\ (2\psi^2 + \beta)^{\frac{1}{4}}$, εἶτ' ὖν $\upsilon^4 = \Gamma^4\ (2\psi^2 + \beta)$, εἶτ' ὖν τελευταῖον $\upsilon^4 = \Gamma^4\left(\frac{2\upsilon^2}{\alpha^2} + \beta\right)$, ἀντικαθιςαμένης ἀντὶ ψ τῆς αὐτῦ δυνάμεως.

316. Συμφορώτατον ἄρα ὑπάρχει ὁμογενεῖς, εἰ ἐξείη, ἀπεργάζεσθαι τὰς ἐξισώσεις· ἀλλὰ μέθοδος γενικὴ ὑπὲρ τέτε ὑπάρχει ἐδεμία· προσφευκτέον ἂν ἐςὶ ταῖς μεταμορφώσεσιν· αἱ δέ τι ϗ ἀποτελεῖν ἔχεσαι ἐν τέτῳ κεῖνται, ἐξισῶσαι ἀμέλει μίαν τῶν τρεπτῶν, ἢ συνέκθεσιν αὐτῆς, ἢ γῦν συνέκθεσιν ἑκατέρας, συνεκθέσει καινῆς τρεπτῆς μετὰ δεικτῶν ἀδιορίςων, οἳ διορίζονται διὰ τῆς θέσεως, ὅτι ἐςὶν ὁμογενὴς ἡ μεταμορφωθεῖσα ἐξίσωσις.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐὰν, φέρε, ἐξισώσεως προτεθείσης τῆς $\alpha\chi^{\mu}\delta\chi + \beta\upsilon^{\nu}\chi^{\kappa}\delta\upsilon + \gamma\upsilon^{\pi}\delta\upsilon = 0$, εἰς ἣν ἀναχθῆναι ἔχει πᾶσα ἐξίσωσις τριῶν ὅρων περιεκτική, ζητηθῶσιν αἱ περιπτώσεις, καθ' ἃς αὕτη γίνεται ὁμογενής, γενέσθω $\chi = \psi^{\eta}$· ϗ δὴ ἔςαι $\alpha\eta\psi^{\mu\eta+\eta-1}\delta\psi + \beta\upsilon^{\nu}\psi^{\kappa\eta}\delta\upsilon + \gamma\upsilon^{\pi}\delta\upsilon = 0$· ἵν' ἄρα γένηται αὕτη ὁμογενής, δεῖ εἶναι $\pi = \kappa\eta + \nu$, ϗ $\pi = \mu\eta + \eta - 1$, ὅθεν ἀποφέρεται
$$\eta = \frac{\nu + 1}{\mu - \kappa + 1}, \text{ ϗ } \pi = \frac{\mu\nu + \kappa + \nu}{\mu - \kappa + 1}.$$
ὅθεν, ἐὰν οἱ δεῖκται π, κ, μ, ν, τοιοίδε ὦσιν, ὡς ἐπικρατεῖν ταύτην τὴν ἐξίσωσιν, δυνατὸν ἀποτελέσαι ὁμογενῆ, ϗ ἑπομένως διακρίναι τὴν προτεθεῖσαν ἐξίσωσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ ἐξισώσεων καὶ ποσοτήτων ἀπειροςῶν δευτέρας, τρίτης κτλ. τάξεως.

317. Ἡ ἄδεια τε ἐν τῇ λήψει τῶν ἀπειροςῶν (32, 33) ὑποτιθέναι ὡς ἀμετάτρεπτον μίαν τινὰ ποσότητα ἐν πολ-

λοῖς τὴν ὁλοκλήρωσιν ῥαδιυργεῖ· ἐπεὶ μέντοι συμβαίνει ἐν τῇ λήψει τῶν ἀπειροςῶν ἀμετάτρεπτον γίνεσθαι ἀπειροςὸν, μὴ ῥαδιυργῦν τὴν ὁλοκλήρωσιν· ῥητέον πρῶτον ὅπως ἐξίσωσις ἀπειροςὴ, ἐν ᾗ ὑποτέθειται μία τις ἀπειροςὴ ποσότης ἀμετάτρεπτος, τραπείη εἰς ἑτέραν, μηδὲν ἔχυσαν ποσὸν ἀμετάτρεπτον· ἐφ' ἡμῖν δὲ ἔςαι τῦ λοιπῦ ὑποθεῖναι, ἣν ἂν βυλώμεθα, ἀμετάτρεπτον· ἔςω ὖν $A\delta\chi^2 + B\delta\chi\delta\upsilon + \Gamma\delta\upsilon^2 + \Delta\delta\delta\upsilon = o$, ἐξίσωσις δυεῖν τρεπτῶν, καὶ ἀπειροςῶν δευτέρων, περιεκτικὴ, ἐν ᾗ τὸ πρῶτον ἀπειροςὸν $\delta\chi$, τῆς ἑτέρας τῶν τρεπτῶν ὑποτέθεται ἀμετάτρεπτον· διαιρεθεῖσα τοίνυν αὕτη ἡ ἐξίσωσις διὰ $\delta\chi$, γεγράφθω ὕτως, $A\delta\chi + B\delta\upsilon + \frac{\Gamma\delta\upsilon^2}{\delta\chi} + \Delta\delta\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right) = o$, ἥτις ἐπιεικῶς ἐςιν ἡ αὐτὴ, εἴγε, κἂν ὑποτεθείη μόνιμον τὸ $\delta\chi$, $\delta\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right)$ ἐςιν ἴσον τῷ $\frac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi}$· μὴ βυλομένοις δὲ εἶναι ἀμετάτρεπτον τὸ $\delta\chi$, ἔςαι $\delta\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right) = \frac{\delta\chi\delta\delta\upsilon - \delta\upsilon\delta\delta\chi}{\delta\chi^2}$· ἡ ἄρα ἐξίσωσις μεταβαλεῖ εἰς $A\delta\chi + B\delta\upsilon + \frac{\Gamma\delta\upsilon^2}{\delta\chi} + \Delta\left(\frac{\delta\chi\delta\delta\upsilon - \delta\upsilon\delta\delta\chi}{\delta\chi^2}\right) = o$, ἐν ᾗ ὐδέν ἐςιν ἀπειροςὸν ἀμετάτρεπτον.

Ἔςω $A\delta\chi^3 + B\delta\chi^2\delta\upsilon + \Gamma\delta\upsilon^2\delta\chi + \Delta\delta\upsilon^3 + E\delta\chi\delta\delta\upsilon + Z\delta\upsilon\delta\delta\upsilon + H\delta^3\upsilon = o$, ἐξίσωσις ἐξ ἀπειροςῶν τριτοταγῶν, τῦ $\delta\chi$ ἀεὶ ἀμετατρέπτυ ὄντος· διαιρεθεῖσα ὖν αὕτη ἡ ἐξίσωσις διὰ $\delta\chi^2$ γενήσεται $A\delta\chi + B\delta\upsilon + \frac{\Gamma\delta\upsilon^2}{\delta\chi} + \Delta\frac{\delta\upsilon^3}{\delta\chi^2} + E\frac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi} + Z\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\frac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi} + H\frac{\delta^3\upsilon}{\delta\chi^2} =$

ο, ἥτις ἔχει γραφῆναι ὕτως, $A\delta\chi + B\delta\upsilon + \frac{\Gamma\delta\upsilon^2}{\delta\chi} + \frac{\Delta\delta\upsilon^3}{\delta\chi^2} + E\delta\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right) + Z\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\delta\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right) + H\delta\left[\left(\frac{1}{\delta\chi}\right)\delta\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right)\right] = o$· πάντων δὲ τρεπτῶν γενομένων ἐν ταῖς σεσημειωμέναις ταῖς δε τῶν ἀπειροςῶν λήψεσι, πορισθήσεται ἐξίσωσις μηδὲν ἔχυσα ἀπειροςὸν ἀμετάτρεπτον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἔςω $\delta\chi^2\upsilon - \delta\upsilon^3 = \alpha\delta\chi\delta\delta\upsilon + \chi\delta\chi\delta\delta\upsilon$, ἔνθα τὸ $\delta\chi$ ἀμετάτρεπτον ὑποτίθεται· τὴν ἀρχὴν ὖν ὑδόλως καταφαίνεται, ὅπως ἂν εἴη αὕτη ἡ ἐξίσωσις ὁλοκληρώσιμος· ἀλλ' ἐὰν γένηται τρεπτὸν τὸ $\delta\chi$, γραφομένης τῆς ἐξισώσεως ὕτω, $\delta\chi\delta\upsilon - \frac{\delta\upsilon^3}{\delta\chi} = (\alpha\delta\chi + \chi\delta\chi)\,\delta\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right)$, ἐξέςαι ἐν ταύτῃ τῇ σεσημειωμένῃ λήψει τῶν ἀπειροςῶν λαβεῖν ὡς ἀμετάτρεπτον τὸ $\delta\upsilon$· ὑκῦν ἔςαι $\delta\chi\delta\upsilon - \frac{\delta\upsilon^3}{\delta\chi} = -(\alpha\delta\chi + \chi\delta\chi)\frac{\delta\upsilon\delta\delta\chi}{\delta\chi^2}$, ἥτις ἀναγωγῇ γίνεται $\delta\chi^2 + \chi\delta\delta\chi + \alpha\delta\delta\chi - \delta\upsilon^2 = o$, ἧς ὁλόκληρον, ὡς εὐμαρῶς κατανοεῖται, ἔςι τὸ $\chi\delta\chi + \alpha\delta\chi - \upsilon\delta\upsilon + \Gamma\delta\upsilon = o$, προςιθεμένυ ἀμετατρέπτυ τῦ $\Gamma\delta\upsilon$ τῷ ὁλοκλήρῳ ὁμοταγῦς· ἐπανολοκληρωθεῖσα δὲ αὕτη ἡ ἐξίσωσις, γίνεται $\frac{1}{2}\chi^2 + \alpha\chi - \frac{1}{2}\upsilon^2 + \Gamma\upsilon + \Gamma' = o$.

318. Ὁ ἀποδοθεὶς ἡμῖν κανὼν (298) εἰς ὁλοκλήρωσιν ποσῶν ἀπειροςῶν, πολλὰς περιεχόντων τρεπτὰς, ἐφαρμόζεται ταῖς ἁπάσης τάξεως ἀπειροςαῖς ποσότησιν, ἐκλαμβανομένων τῶν ἀπειροςῶν $\delta\delta\chi$, $\delta\delta\upsilon$, $\delta^3\chi$, $\delta^3\upsilon$,

κτλ., ὡς τρεπτῶν παντοίων· προκείσθω γὰρ εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\chi^3 \upsilon^2 \delta\delta\upsilon + 2\chi^3 \upsilon\delta\upsilon^2 + (2\chi^2 \upsilon + 3\upsilon^2\chi^2)$ $\delta\chi\delta\upsilon + 2\upsilon^2 \chi\delta\chi^2$, ἐν ᾗ τὸ $\delta\chi$ ὑποτίθεται ἀμετάτρεπτον· γενέσθω ἐν πρῶτον ὁλοκλήρωσις, ἐκλαμβανομένε τε $\delta\delta\upsilon$ ὡς μόνε τρεπτε· κ̔ δὴ ἔσαι $\chi^3 \upsilon^2 \delta\upsilon$· εἰλήφθω ἐν τέτε τὰ ἀπειροσὰ, ἅπερ ἐςὶ $3\chi^2 \upsilon^2 \delta\chi\delta\upsilon + 2\chi^3 \upsilon\delta\upsilon^2 + \chi^3 \upsilon^2 \delta\delta\upsilon$, κ̔ τε προτεθέντος ἀφαιρεθέντα, λείπεσι $2\chi^2 \upsilon\delta\chi\delta\upsilon + 2\upsilon^2 \chi\delta\chi$· εἰλήφθω ἐν κ̔ ταύτης τῆς ποσότητος τὰ ἀπειροσὰ, κ̔ ἀφῃρήσθω τε πρώτε καταλοίπε τὸ ἀπειροσὸν $2\chi^2 \upsilon\delta\upsilon\delta\chi + 2\chi^2 \upsilon^2 \delta\chi$, κ̔ ἐπεὶ μηδὲν λείπεται, συνάγεται τὸ τῆς προτεθείσης ποσότητος ὁλόκληρον εἶναι τὸ $\chi^3 \upsilon^2 \delta\upsilon + \chi^2 \upsilon^2 \delta\chi + \Gamma\delta\chi$, προστιθεμένης ἀμετατρέπτε ποσότητος τῆς $\Gamma\delta\chi$, ὁμοταγε͂ς τῷ ὁλοκλήρῳ.

319. Αἱ δὲ ἀπειροσαὶ ἐξισώσεις ὁλοκληρε͂νται ὡσαύτως, ὅταν, ὡς προτίθενται, ὦσιν ὁλοκληρώσιμοι· ὅπερ γνωσθήσεται, εἰ τῆς ὁλοκληρώσεως προχωρέσης, ὡς προείρηται, τὸ ἔχατον κατάλοιπον εἴη μηδέν.

Τε͂ δ᾽ ἐχάτε καταλοίπε μὴ ὄντος μηδὲν, ἐ παρὰ τε͂το συναγαγεῖν δεῖ μὴ εἶναι ὁλοκληρωσίμες τὰς προτεθείσας ἐξισώσεις· ἐπεὶ γὰρ ἡ ἰσότης ἥκιςα μεταρέπεται, ἑκατέρε μέλες εἴτε πολλαπλασιαζομένε, εἴτε διαιρεμένε διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, δυνατὸν εὑρεθῆναι ποσότητα, ἥτις, πολλαπλασιάσασα τὴν ἐξίσωσιν, ποιεῖ αὐτὴν ὁλοκληρώσιμον.

Ὃ δ᾽ ἐν γένει ὁ ποιητὴς ε͂τος ἀπαιτεῖ, ἡμῖν ἐπὶ τε͂ παρόντος παραιτηθήσεται, ἀποδοθήσεται δὲ μερικώτερόν τι, ὡς νύξιν τινὰ ἐμποιῆσαι τῆς τέτε μετελεύσεως, ἄλλως λυσιτελε͂ν ἐν ἐκ ὀλίγαις περιπτώσεσι τῶν μαθηματικωτέρων φυσικῶν προβλημάτων· κείσθωσαν ἐν ἐξισώσεις τοιαίδε $\delta\delta\upsilon + \alpha\delta\upsilon\delta\chi + \beta\upsilon\delta\chi^2 + X\delta\chi^2 = 0$, ἢ

$\delta^3 \upsilon + \alpha\delta\delta\upsilon\delta\chi + \beta\delta\upsilon\delta\chi^2 + \gamma\upsilon\delta\chi^3 + X\delta\chi^3 = 0$, ἢ ἐν γένει, $\delta^\nu \upsilon + \alpha\delta^{\nu-1}\upsilon\delta\chi + \beta\delta^{\nu-2}\upsilon\delta\chi + \ldots \mu\upsilon\delta\chi^\nu + X\delta\chi^\nu = 0$, ἐν αἷς τὸ μὲν $\delta\chi$ ὑποτίθεται ἀμετάτρεπτον· αἱ δὲ α, β, γ, κτλ. εἰσὶ συνεργοὶ ἀμετάτρεπτοι, τὸ δὲ X συνέκθεσις ἡτισοῦν τοῦ X· πᾶσαι αὗται αἱ ἐξισώσεις ὁλοκληρώσιμοι γίνονται πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ ποιητὴν συγκείμενον ἐκ χ, καὶ ἀμετατρέπτων ποσῶν· ὁ δὲ ποιητὴς εὑρίσκεται οὕτω.

Κείσθω ἐξίσωσις ἡ $\delta\delta\upsilon + \alpha\delta\upsilon\delta\chi + \beta\upsilon\delta\chi^2 + X\delta\chi^2 = 0$, καὶ ἀναλυθήτω ὁ ὅρος $\alpha\delta\upsilon\delta\chi$ εἰς δύω τοὺς $\kappa\delta\upsilon\delta\chi$, $(\alpha - \kappa)\delta\upsilon\delta\chi$· ἐκεῖν πορισθήσεται ἡ ἐξίσωσις $\delta\delta\upsilon + \kappa\delta\upsilon\delta\chi + (\alpha - \kappa)\delta\upsilon\delta\chi + \beta\upsilon\delta\chi^2 + X\delta\chi^2 = 0$· τὸ δὲ κ ὑποτίθεται ποσὸν ἀμετάτρεπτον ἀδιόριστον· τῇ δὲ ἐξισώσει οὐδενὸς ἐνδεῖ, ὡς εἶναι ὁλοκληρώσιμον, ἢ πολλαπλασιασθῆναι ἐπὶ ποιητὴν τὸν Π, ὃς ἂν εἴη συνέκθεσις τοῦ χ, καὶ ἀμετατρέπτων ποσῶν.

Τούτου τεθέντος, ἡ ἐξίσωσις $\Pi\delta\delta\upsilon + \Pi\kappa\delta\upsilon\delta\chi + \Pi(\alpha - \kappa)\delta\upsilon\delta\chi + \Pi\beta\upsilon\delta\chi^2 + \Pi X\delta\chi^2 = 0$, ἔσται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὁλοκληρώσιμος· γεγράφθω οὖν αὕτη οὕτω, $\Pi\delta\delta\upsilon + \Pi\kappa\delta\chi\delta\upsilon + [\Pi(\alpha - \kappa)\delta\upsilon + \Pi\beta\upsilon\delta\chi + \Pi X\delta\chi]\delta\chi = 0$.

Ἀλλ' ἵν' εἴη ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὁλοκληρώσιμος, ἀπαιτεῖται (303) ἐπικρατεῖν τὰς τρεῖς ἐφεξῆς ἐξισώσεις

$$\alpha'.\ \frac{\delta\Pi}{\delta\upsilon} = \frac{\delta(\Pi\kappa\delta\chi)}{\delta\delta\upsilon}$$

$$\beta'.\ \frac{\delta\Pi}{\delta\chi} = \frac{\delta[\Pi(\alpha - \kappa)\delta\upsilon + \Pi\beta\upsilon\delta\chi + \Pi X\delta\chi]}{\delta\delta\upsilon}$$

$$\gamma'.\ \frac{\delta(\Pi\kappa\delta\chi)}{\delta\chi} = \frac{\delta[\Pi(\alpha - \kappa)\delta\upsilon + \Pi\beta\upsilon\delta\chi + \Pi X\delta\chi)}{\delta\upsilon}$$

ἐκ τοίνυν τῆς πρώτης ἐξισώσεως πρόεισι $o = o$, ἐπεὶ καθ' ὑπόθεσιν Π ϗ $\varkappa$ ἐ περιέχουσιν ὔτε υ ὔτε $\delta\upsilon$· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας κατὰ τὴν αὐτὴν ὑπόθεσιν, $\frac{\delta\Pi}{\delta\chi} = \Pi(\alpha - \varkappa)$· ἐκ δὲ τῆς τρίτης $\frac{\Pi\delta\varkappa + \varkappa\delta\Pi}{\delta\chi} = \Pi\beta$, ἢ μόνον $\frac{\varkappa\delta\Pi}{\delta\chi} = \Pi\beta$, ἐπεὶ τὸ $\varkappa$ ὑποτίθεται ποσὸν ἀμετάτρεπτον· ἐξαρυομένης δὲ ἀφ' ἑκάστης τῶνδε τῶν ἐξισώσεων τῆς δυνάμεως τοῦ $\frac{\delta\Pi}{\Pi}$, ἔσαι $\frac{\delta\Pi}{\Pi} = (\alpha - \varkappa)\,\delta\chi$, ϗ $\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \frac{\beta\delta\chi}{\varkappa}$· ἰσουμένων δὲ τούτων τῶν δυνάμεων, ἔσαι $\alpha - \varkappa = \frac{\beta}{\varkappa}$, ἢ $\varkappa\varkappa - \alpha\varkappa + \beta = o$· δισσαὶ ἄρα δυνάμεις τοῦ $\varkappa$ προκύψουσιν ἐκ τῆς δευτεροβαθμίου ταύτης ἐξισώσεως· παρασαθεισῶν δὲ τῶνδε τῶν δυνάμεων διὰ μ, μ' πορισθήσεται $\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \frac{\beta\delta\chi}{\mu}$, ϗ ἑπομένως· λογ. $\Pi = \frac{\delta\chi}{\mu}$, ἢ $\Pi\, \varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$· ἡ ἄρα ἐξίσωσις $\Pi\delta\delta\upsilon$ + κτλ. γενήσεται $\delta\delta\upsilon\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \mu\delta\upsilon\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + (\alpha - \mu)\,\delta\iota\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \beta\upsilon\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + X\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} = o$· εἰς δὲ τὴν ταύτης ὁλοκλήρωσιν, ὡλοκληρώσθω πρῶτον (318) ὁ ὅρος $\delta\delta\upsilon\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$, ἐκλαμβανομένου ὡς τρεπτοῦ μόνου τοῦ $\delta\delta\upsilon$· οὗκοῦν ἔσαι $\delta\upsilon\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$· τούτου δὲ τῶν ἀπειροσῶν ληφθέντων, ϗ ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως ἀφαιρεθέντων, καταλείπεται $(\mu + \alpha - \frac{\beta}{\mu} - \mu)\, \delta\upsilon\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \beta\upsilon\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$ $+ X\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$ · ἡ δὲ ἐξίσωσις $\kappa\kappa - \alpha\kappa + \beta = o$, ἥτις ȣδέν ἐςιν ἀλλ' ἢ $\mu\mu - \alpha\mu + \beta = o$, δίδωσιν $\alpha - \frac{\beta}{\mu} - \mu = o$· λείπεται ἄρα πρὸς ὁλοκλήρωσιν ἡ ποσότης $\mu\delta\upsilon\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \beta\upsilon\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + X\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$· εἰλήφθω ȣ̃ν ταύτης τὸ ὁλόκληρον, ἐκλαμβανομένȣ μόνȣ τȣ̃ υ ὡς τρεπτȣ̃· καὶ δὴ ἔςαι δεύτερος τȣ̃ ὁλοκλήρȣ ποσȣ̃ ὅρος ὁ $\mu\upsilon\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$· λαμβανομένων οὖν τȣ́τȣ τῶν ἀπειροςῶν, καὶ ἀφαιρȣμένων ἀπὸ τȣ̃ πρώτȣ καταλοίπȣ, λείπεται $X\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$, οὗ τὸ ὁλόκληρον ἐμφαινέσθω ἐν γένει διὰ τȣ̃ $\delta\chi O.\, X\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$, ὅπερ, μόνον μίαν τρεπτὴν περιέχον, ἐξέχεται τῶν κανόνων τῆς τῶν μιᾶς τρεπτῆς περιεκτικῶν ἀπειροςῶν ὁλοκληρώσεως· ȣ̃κȣ̃ν τὸ ὁλόκληρον ἐςι $\delta\upsilon\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \mu\upsilon\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \delta\chi O.\, X\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} = \Gamma$, ἢ $\delta\upsilon + \mu\upsilon\delta\chi + \delta\chi\varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu}}\, O.\, X\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} = \Gamma\varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu}}$ · ἐπεὶ μέντοι ȣ̓δεὶς πάρεςι λόγος, δι' ὃν ἄντις χρήσαιτο θατέρᾳ δυνάμει τȣ̃ κ μᾶλλον, ἢ θατέρα, ἐὰν χρησώμεθα τῇ δευτέρᾳ, ἣν ἐδηλώσαμεν διὰ μ', ἕξομεν ȣ̓δὲν ἧττον δυ +

$\mu' \upsilon \delta \chi + \delta \chi \varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu}} \mathrm{O}.\mathrm{X}\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} = \Gamma' \varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu}}$, ἐμφαινομένης διὰ τῦ Γ' τῆς ἐπανηκέσης τῇ ὁλοκληρώσει, καθ' ἣν ὑποτίθεται ἡ καινὴ τῦ κ δύναμις μ', ἀμετατρέπτυ ποσότητος· ἰσυμένων δὲ τῶν δυεῖν τῦ δυ δυνάμεων τῶν ἐκ τῶν δυεῖν ἐξισώσεων προκυπτυσῶν, συναχθήσεται τελευταῖον

$$\upsilon = \frac{\Gamma\varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu}} - \Gamma\varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu'}} + \varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu}} \mathrm{O}.\mathrm{X}\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}}{\mu - \mu'}$$

$$\frac{- \varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu}} \mathrm{O}.\mathrm{X}\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}}{\mu - \mu'}.$$

320. Εἰδ' εἴη ἡ ἐξίσωσις τριτοβάθμιος, κατὰ τὸν αὐτὸν αὖθις ἐκτελεσθήσεται ἡ ὁλοκλήρωσις τρόπον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐὰν ἡ $\delta^3\upsilon + \alpha\delta\delta\upsilon\delta\chi + \beta\delta\upsilon\delta\chi^2 + \gamma\upsilon\delta\chi^3 + \mathrm{X}\delta\chi^3 = 0$, γραφήσεται $\delta^3\upsilon + \kappa\delta\delta\upsilon\delta\chi + (\alpha - \kappa)\,\delta\delta\upsilon\delta\chi + \kappa'\delta\upsilon\delta\chi^2 + (\beta - \kappa')\,\delta\upsilon\delta\chi^2 + \gamma\upsilon\delta\chi^3 + \mathrm{X}\delta\chi^3 = 0$, κ ἢ κ' ἀγνώςων μὲν ὄντων, ἀμετατρέπτων μέντοι· ὑποτεθείσθω ὖν, ἵν' ἡ ἐξίσωσις γένοιτο ὁλοκληρώσιμος, δεῖν πολλαπλασιασθῆναι ἐπὶ τὸν ποιητὴν Π, ὃς περιέχει χ ἢ ποσὰ ἀμετάτρεπτα, εἶτ' ὖν ὑποτεθείσθω ἡ ἐξίσωσις $\Pi\delta^3\upsilon + \Pi\kappa\delta\delta\upsilon\delta\chi + \Pi(\alpha - \kappa)\,\delta\delta\upsilon\delta\chi + \Pi\kappa'\delta\upsilon\alpha^2\chi^2 + \Pi(\beta - \kappa')\,\delta\upsilon\delta\chi^2 + \Pi\gamma\upsilon\delta\chi^3 + \Pi\mathrm{X}\delta\chi^3 = 0$ ὁλοκληρώσιμος· μεταμορφωθείσης ὖν τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἰς τὴν ἐφεξῆς $\Pi\delta^3\upsilon + \Pi\kappa\delta\chi\delta\delta\upsilon + [\Pi(\alpha - \kappa)\,\delta\delta\upsilon + \Pi\kappa'\delta\upsilon\delta\chi] \times \delta\chi + [\Pi(\beta - \kappa')\,\delta\upsilon\delta\chi + \Pi\gamma\upsilon\delta\chi^2 + \Pi\mathrm{X}\delta\chi^2]\,\delta\chi = 0$, ἡ θέσις, δι' ἣν γίνεται ὁλοκληρώσιμος, δίδωσι (303) ἓξ ἐξισώσεις, αἵτινες διὰ τὰ ὑποτεθέντα ἐπὶ τῶν κ, κ', Π ἀνάγονται εἰς τρεῖς· ἡ δὲ τελευταία ἐξίσωσις, τρεῖς μὲν προβάλει δυνάμεις τȣ̃ κ, τρεῖς δὲ συςοίχȣς τȣ̃ κ′, ϗ Π· ἐντεῦθεν δὲ, ὡς ϗ πρότερον, προκύψȣσιν ἐξισώσεις τρεῖς δὶ υ, χ, δχ, δυ, ϗ δδυ· ἀποβαλλομένων ἄρα τῶν δδυ, δυ, περιεθήσεται ἡ ἐσχάτη τȣ̃ υ δύναμις, περιέχȣσα χ καὶ ποσὰ μόνιμα.

321. Ἐντεῦθεν καταφανὲς, ὅ,τι χρὴ ποιεῖν ὑπὲρ τῶν ἀνωτέρων τάξεων.

Ἡ αὐτὴ δὲ μέθοδος ἐφαρμοσθείη, κἂν εἴη μείζων ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων, μὴ ὑπερβαινȣσῶν τὸν πρῶτον βαθμὸν, ϗ μὴ πολλαπλασιαζομένων μήτ' ἐπ' ἀλλήλας μήτ' ἐπὶ μηδὲν ἀπειροςὸν τῶν τρεπτῶν τῶνδε, εἰ μὴ εἴη τὸ ὑποτιθέμενον ἀμετάτρεπτον ἀπειροςόν.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐὰν ὦσι δύω ἐξισώσεις $\alpha\delta\delta\upsilon + \beta\delta\delta\psi + \gamma\delta\upsilon\delta\chi + \varepsilon\delta\psi\delta\chi + \zeta\upsilon\delta\chi^2 + \vartheta\psi\delta\chi^2 + X\delta\chi^2 = 0$, ϗ $\alpha'\delta\delta\upsilon + \beta'\delta\delta\psi + \gamma'\delta\upsilon\delta\chi + \varepsilon'\delta\psi\delta\chi + \zeta'\upsilon\delta\chi^2 + \vartheta'\psi\delta\chi^2 + X'\delta\chi^2 = 0$· ἀναγέσθων ἐν εἰς μίαν μόνην, συναπτομένης τῆς πρώτης τῇ δευτέρᾳ, πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ συνεργὸν ἀδιόριςον ϗ ἀμετάτρεπον κ· ἐν δὲ τῇ ὅλῃ ἐξισώσει διατετμήσθων ὅ,τε τȣ̃ δυ περιεκτικὸς ὅρος ϗ ὁ τȣ̃ δψ εἰς δύω μέρη, ὥσπερ ἀνωτέρω ἐγένετο· τέλος δὲ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ ποιητὴν ὑποτιθέμενον συνέκθεσιν τȣ̃ χ, ϗ ποσῶν μονίμων.

322. Ὅταν ἐξίσωσις δυεῖν τρεπτῶν περιεκτικὴ ἐλλειπὴς ᾖ τῆς ἑτέρας τῶν δυεῖν πεπερασμένων μεταβλητῶν, δυνατὸν αὐτὴν ἀναγαγεῖν εἰς ἀπειροςὰ τῆς ἀμέσως ὑπερκειμένης τάξεως, ἰσȣμένȣ τȣ̃ πρώτȣ ἀπειροςȣ̃ τῆς ἑτέρας τῶν τρεπτῶν τῷ τῆς δευτέρας ἀπειροςῷ, πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ καινὸν ποσὸν ἄςατον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθω πρὸς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\frac{\delta\delta\upsilon}{\delta\upsilon}$ $\sqrt{(1+\frac{\delta\upsilon^2}{\delta\chi^2})} = (\alpha\upsilon+\beta)\,\delta\chi$, ἔνθα τὸ $\delta\chi$ ὑποτίθεται ἀμετάτρεπτον, ἤτε μεταβλητὴ χ ἄπεσι· γενέσθω τοίνυν $\delta\upsilon = \pi\delta\chi$· ὅθεν ἔσαι $\delta\delta\upsilon = \delta\pi\delta\chi$, ϗ ἑπομένως $\frac{\delta\pi}{\pi}\sqrt{(1+\pi\pi)} = (\alpha\upsilon+\beta)\,.\,\frac{\delta\upsilon}{\pi}$, ἢ $\delta\pi\sqrt{(1+\pi\pi)}$ $= (\alpha\upsilon+\beta)\,\delta\upsilon$, ἧς τὸ μὲν πρῶτον μέλος ὁλοκληρῦται γεωμετρικῶς, τὸ δὲ δεύτερον, πῆ μὲν γεωμετρικῶς, πῆ δὲ λογαριθμικῶς, λογικῦ ἀποκαθισαμένυ τῦ $\sqrt{(1+\pi\pi)}$ κατὰ τὰ προειρημένα (291).

Καὶ ταῦτα μὲν ἱκανὰ εἰς σοιχείωσιν τῶν ἡμετέρων νεανίσκων, συνερανισθέντα ἔκ τε τῶν τῦ Σαυρίυ, ϗ Βεζυτίυ, ϗ δὴ ϗ τῦ Λακροῖυ συγγραμμάτων· ὁ δὲ θέλων ἑαυτὸν ἀπαρτίσαι ἔντε τῷ τῶν ἀπειροσῶν, ϗ τῷ τῶν ὁλοκλήρων λογισμῷ, μετιέτω τύς τε εἰρημένυς, καὶ τὸν Εὔλερον, τὸν Α᾿λέμβερτον, ϗ ἄλλυς.

ΣΕΙΡΑ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΤΩΝ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ.

ΤΗΣ ΕΝ ΓΕΝΕΙ ΦΥΣΙΚΗΣ.

Εἰσαγωγή.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ Φυσική, ὡς τὸ ἔτυμον τοῦ ὀνόματος δηλοῖ, γνῶσις ἂν εἴη τῆς Φύσεως· ἐπεὶ δὲ ἡ φωνὴ Φύσις τὸ συμπλήρωμα πάντων τῶν ἐν τῷ παντὶ ὄντων, ἃ ταῖς ἡμετέραις ὑποπίπτει αἰσθήσεσιν, ἐμφαίνει· αἱ δ' αἰσθήσεις ἡμῶν μόνων ἐξικνοῦνται ἀντιλαβέσθαι τῶν ὑλικῶν· ὁρισθείη ἂν καταλληλότερον ἡ Φυσική, Ἐπιστήμη τῶν κατὰ τὰ σώματα, εἴτ' οὖν τὴν ὕλην, ἰδιοτήτων. (*)

2. Κοινῇ δὲ διαιρεῖται εἴς τε τὴν ἐν γένει, καὶ εἰς τὴν κατ' εἶδος· κἀκείνη μέν ἐστιν ἡ γνῶσις τῶν ἐπίσης παντὶ σώματι ἐπανηκουσῶν ἰδιοτήτων· ταύτης δὲ ἔργον ἡ τῶν εἴδει διαφερόντων σωμάτων ἔρευνα· περὶ τῆς πρώτης οὖν ἡμεῖς ἐνταῦθα, ὅσα ἀποχρῶντα κρίνομεν, προανα-

(*) Ὅρα περὶ τούτων Εὐγενίου τὰ Ἀρέσκοντα τοῖς Φιλοσόφοις, Σελ. 1 — 7.

κρούσαντες, καὶ τὰς ταύτῃ συνναφοῦς ἐπιστήμας ὑποσυνάψαντες, τὰ τῇ κατ' εἶδος προσανήκοντα ἐν τῷ ἐσχάτῳ τόμῳ ἐκθέσθαι ἀποταμιεύσομεν.

Διακριτέον δὲ τὴν Φυσικὴν ἐπιστήμην τῆς καλουμένης Φυσικῆς Ἱστορίας· αὕτη μὲν γὰρ ἱστορικῶς περὶ τὰ φυσικὰ ὄντα ἀσχολεῖται, τοὺς κυριωτέρους αὐτῶν χαρακτῆρας ἀποδιδοῦσα, δι' ὧν ἀπ' ἀλλήλων διαστέλλονται· ἐκείνη δὲ τὰς αἰτίας ἐν γένει πολυπραγμονεῖ τῶν κατὰ τὰ σώματα ἰδιοτήτων καὶ ἀλλοιώσεων· ταύταις δέ τινες καὶ τρίτην προστιθέασι τὴν καλουμένην Ἱστορίαν τῆς Φύσεως, ἥτις καθόλου περὶ τῶν ἐν τῷ αἰσθητῷ κόσμῳ γενομένων ἀλλοιώσεων πραγματεύεται.

3. Αἱ μὲν οὖν κατὰ τὰ σώματα συμβαίνουσαι ἀλλοιώσεις Φαινόμενα λέγονται, αἱ δὲ ταῦτα προάγουσαι αἰτίαι, Δυνάμεις· ὅθεν ἡ Φυσικὴ ἀναπτύσσειν λέγεται τὰ φαινόμενα ταῦτα, ἐπειδὰν τὰς, ἐξ ὧν γεγόνασιν, ἀποδῷ δυνάμεις, εἴτ' οὖν αἰτίας· ἐπεὶ δὲ, τὰς αἰτίας καταλέγοντες τῶν φαινομένων, ἐπί τινα τέλος ἀφικνούμεθα, ἧς οὐχ οἷόν τε ἄλλην αἰτίαν ἀνευρεῖν, ἐκείνην τηνικαῦτα ἐσχάτην αἰτίαν ὀνομάζομεν· οὕτως ἐπὶ τῆς ἀντλίας, τῆς μὲν ἐν τῷ σωλῆνι ἀνόδου τοῦ ὕδατος αἰτία ἐστὶν ἡ τοῦ ἐπικεχυμένου τῷ ὕδατι ἀέρος θλίψις, ταύτης δ' αἰτία ἡ τοῦ ἀέρος βαρύτης, εἴτ' οὖν ἡ ἐπὶ τὸ τῆς γῆς κέντρον αὐτοῦ φορά, ἧς οὐκ ἔχομεν ἄλλην αἰτίαν ἀποδοῦναι· ἐκτὸς γὰρ τουτὶ τῶν ὁρίων τῆς ἀνθρωπείου γνώσεως· ἡ βαρύτης τοίνυν, καὶ ὅσαι τοιαῦται τῶν δυνάμεων, ἔσχαται λέγονται τῶν φαινομένων αἰτίαι.

4. Ἐπεὶ δὲ τὰ ἐν τῷ αἰσθητῷ κόσμῳ φαινόμενα κατά τινας ὡρισμένους καὶ ἀπαρατρέπτους κανόνας συμβαίνειν φιλοῦσιν, ὡς ἐξ ὁμοίων αἰτιῶν ἐν ὁμοίαις περιπτώσεσιν ἀεὶ ὅμοια γεννᾶσθαι καὶ τὰ ἀποτελέσματα, τοὺς κανόνας

τούτες Νόμους φυσικὲς ἐκάλεσαν οἱ Φιλόσοφοι, ὧν ὐκ ἔςιν εἰπεῖν ὅσον ἀναγκαία ϗ χρήσιμος τοῖς φυσιολογῦσιν ἡ γνῶσις.

5. Διττῶς δὲ ἐν τῇ Φυσικῇ (3) αἱ τῶν φαινομένων αἰτίαι ἀναπτύσσονται, ἀμέλει ἤτοι διὰ πείρας ἢ διὰ λόγυ. Πεῖρα μὲν ὖν λέγεται τὸ ταῖς αἰσθήσεσιν ἀνακαλύπτειν τὰς ἐν τοῖς φυσικοῖς σώμασιν ἐπισυμβαινύσας ἀλλοιώσεις· τῦτο δὲ ποιῦμεν, ἤτοι ἄνευ τινὸς μεταβολῆς, ἧς ἔχυσι καταςάσεως, ἐῶντες τὰ, περὶ ἃ ἡμῶν ἡ θεωρία, ἢ ἑκόντες μεταβάλλομεν αὐτὰ ἐν διαφόροις περιπτώσεσιν ἐπὶ διαφόρυς ἐνεργείας ἐνωθῦντες, ἃς ὐκ ἂν ὑπῆλθον καθ' ἑαυτὰ ἄνευ τῆς παρ' ἡμῶν συνδρομῆς· καλεῖται δ' ἐκεῖνο μὲν παρατήρησις, τῦτο δὲ πείραμα· ὧν γὰρ τὴν κατανόησιν μόνῃ παρατηρήσει οὐκ ἔςι λαβεῖν, ταῦτα πειράμασιν ἀναπτύσσομεν· οἷς δὲ χρώμεθα εἰς ἐκτέλεσίν τινος πειράματος, ταῦτα ὄργανα λέγονται. Ἀλλὰ μόνῃ τῇ πείρᾳ ὐδὲν ἄν τις διανύσειεν, εἰμὴ συλλογισμοὶ ἐντεῦθεν συνάγοιντο περὶ τῆς φύσεως ϗ τῶν ἰδιοτήτων τῦ διὰ τῆς πείρας ἐξετασθέντος σώματος· ὅθεν ὁ φυσιολογεῖν ὀρθῶς βυλόμενος, ἐξ ὧν ἐπειράθη τε ϗ παρατετήρηκε, διὰ ὀρθῦ λόγυ τὰς τῶν σωμάτων ἰδιότητας ὁρίζειν ϗ τὰς τῶν φαινομένων αἰτίας ἀνιχνεύειν ὀφείλει.

6. Ἐπειδὴ δὲ πολλάκις ἡμῖν ὐκ ἐφικτὸν πείρᾳ, ὔτε μὴν λόγῳ, φαινομένων τινῶν τὰς αἰτίας ἀποδῦναι, ἀνάγκη τηνικαῦτα αἰτίαν τινὰ προϋποθεῖναι, ἐξ ἧς ἂν ἔχοιμεν τὰ παρατηρηθέντα συναγαγεῖν ἀποτελέσματα· καλεῖται δὲ τῦτο ὑπόθεσις, ἀντὶ τῆς ἀληθῦς αἰτίας ἡμῖν συμβάλλυσα· προσήκει δὲ τὰς ὑποθέσεις ταύτας πειράμασί τισιν ἢ παρατηρήσεσιν ἐςηριγμένας εἶναι ϗ ἀκαταναγκάςυς, ϗ ὐδενὶ τῶν γενικῶν τῆς Φύσεως νόμων ἀντιβαι-

νίσας. Ἔςωσαν ἦν ὑπ᾽ ὄψιν οἱ ἐφεξῆς Νευτώνειοι καλέμενοι κανόνες.

7. Α΄. Ἐκείνας μόνον ὡς ἀληθεῖς αἰτίας παραδεκτέον, ὅσαι εἰσὶν ἱκαναὶ ϗ ἀπαραιτητοι εἰς ἀκαταναγκαςον, ἁπλεςάτην, ϗ εὐληπτοτάτην, φαινομένε τινὸς ἀνάπτυξιν.

Αἱ αἰτίαι δὲ ἀληθεῖς εἰσι, ά. ἐπειδὰν αἰσθητῶς ἐν τῇ Φύσει ἀποδεικνύωνται, ϗ κατάδηλον ᾖ, ὅτι ἐν τῷ παρατηρηθέντι φαινομένῳ αὗται παρῆσαν, τῶν ἄλλων ἁπασῶν αἰτιῶν σαφῶς ἐντεῦθεν ἀποκλειομένων· β΄. ἐπειδὰν τὸ φαινόμενον μὴ μόνον κατὰ δυνατὸν τρόπον· ἀλλ᾽ ἀριδήλως ἐντεῦθεν συνάγηται· γ΄. ἐπειδὰν ἐν διαφόροις περιπτώσεσιν αἱ αὐταὶ αἰτίαι τ᾽ αὐτὰ παράγεσι φαινόμενα, ϗ δ΄. τέλος, ἐὰν, αἰρομένης τῆς αἰτίας, αἴρηται σὺν αὐτῇ ϗ τὸ φαινόμενον.

8. Β΄. Τοῖς ὁμογενέσιν ἀποτελέσμασι τὰς αὐτὰς ἀποδοτέον αἰτίας.

Ἐνταῦθα μέντοι προσέχειν δεῖ, μὴ, ταῖς ὁμοίαις διαφόρων φαινομένων περιπτώσεσι πλανηθέντες, τὰς αὐτὰς αὐτοῖς ἀποδῶμεν αἰτίας· ἐ ῥάδιον γὰρ πολλάκις τὸ ἐσιῶδες τὸ κατὰ συμβεβηκὸς διακρίνειν, τὸ τὴν ὁμοιότητα τοῖς ἑτεροειδέσι φαινομένοις παρέχον.

9. Γ΄. Τὰς τῶν σωμάτων ἰδιότητας, τὰς μηδεμιᾶς μὲν ἐπιδεκτικὰς μεταβολῆς, ἀεὶ δὲ τὰς αὐτὰς πᾶσι τοῖς παρ᾽ ἡμῶν βασανιζομένοις σώμασι προσέσας, ὡς κοινὰς πᾶσι τοῖς σώμασιν ἰδιότητας ἐκληπτέον.

10. Δ΄. Τὰς ἐκ τῶν φαινομένων συναχθείσας θέσεις, καίτοι τινῶν ὑποθέσεων αὐταῖς ἀντιβαινεσῶν, παραδεκτέον μέντοι ὡς

ἀληθεῖς, ἢ ὡς τοῦ ἀληθοῦς ἔγγιϛα ἐσας, μέχρις ȣ ἑτέροις ἐντύχωμεν φαινομένοις, ἤτοι πρὸς ἐμπέδωσιν αὐτῶν, ἢ πρὸς ἀναίρεσιν, ἐπιτηδείοις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ διαφορᾶς διαϛήματος, σώματος, καὶ ὕλης.

11. Ἔκτασις, σῶμα, καὶ ὕλη, τρία ταῦτα ἀλλήλων εἰσὶ διαφέροντα.

12. Α΄. Διάϛημα ἄνευ σώματος, ἢ ἄνευ ὕλης, οἷον ἄντις ἐννοήσειε τὸ πρὸ τῆς δημιȣργίας μέρος τȣ̃ ἀπείρȣ διαϛήματος, ᾧ ἐντετόπιϛαι, ὃν οἰκȣ̃μεν, ὁ κόσμος· ȣ̉κ ἔϛιν, ȣ̉́τε σῶμα, ȣ̉́τε ὕλη.

13. Β΄. Παρὰ ταῦτα, τάτε σώματα, καὶ ἡ ὕλη, εἰσὶ κινητὰ, δυνάμενα μεταβῆναι ἀφ᾽ ἑνὸς μέρȣς τȣ̃ διαϛήματος ἐφ᾽ ἕτερον· τὰ μέντοι μέρη τῆς ἐκτάσεως, ἢ καλεῖται τόπος, ἢ διάϛημα, εἰσὶν ὥσπερ ἀκίνητα· κίνησις δὲ πραγματικὴ τῶν σωμάτων, ἢ τῆς ὕλης, λέγεται, ἐπειδὰν ταῦτα μέρος τȣ̃ τόπȣ, ἢ τȣ̃ διαϛήματος, διατρέχωσι, τῶν τȣ̃ τόπȣ μερῶν ἀναλλοιώτων ἐν τῇ αὐτῇ αὐτῶν σχετικῇ θέσει μενόντων.

14. Γ΄. Τὰ τȣ̃ τόπȣ μέρη εἰσὶ διαχωρητὰ, ἀκωλύτως δι᾽ αὐτῶν διϊόντων τῶν σωμάτων, ἢ τῆς ὕλης· τὰ δὲ σώματα ἀδιαχώρητά εἰσιν, ἀπεκκλείοντα ἄλληλα τȣ̃ αὐτȣ̃ χώρȣ.

15. Δ΄. Ἡ ὕλη, ἢ τὸ σῶμα, σύνθετον ὂν, διαιρέσεώς ἐϛιν ἐπιδεκτικόν· ὅτι τὰ αὐτȣ̃ μέρη εἰσὶ κινητὰ, καὶ

δὴ ἀπ' ἀλλήλων διακριθῆναι δύνανται· τὸ δὲ διάςημα ἔςιν ἀδιαίρετον· ὅτι ἕκαςον τῶν αὐτοῦ μερῶν, ἀκίνητον ὄν, οὐδύναται τῶν συνεχῶν τούτων μερῶν ἀποχωρισθῆναι.

16. Ε΄. Τὸ σῶμα, ἢ ἡ ὕλη, ἔςιν ἀδρανὲς, ὅτι, ὡς αὐτίκα ὀψόμεθα, ἀπαρύεται πλεῖον ἢ ἔλαττον ἐνεργείας ἐκ τῆς αἰτίας, τῆς ἐμποιέσης αὐτῷ τινα μεταβολήν· ἀλλ' ἔςιν ἀδύνατον εἰπεῖν, ὡς ὁ τόπος, ἢ τὸ διάςημα, ἀποφέρεταί τι ἐνεργείας παρά τινος φυσικῆς αἰτίας· αἱ γὰρ φυσικαὶ αἰτίαι ἐδὲν ἂν αὐτῷ ἐνεργάσαιντο παρὰ τὸ ἀκίνητον τῶν αὐτῦ μερῶν.

17. ς΄. Ἡ ὕλη, ἢ τὸ σῶμα, ἐςὶ βαρὺ, ὅτι τείνει κινέμενον καταλαβεῖν τι κέντρον· τὰ γήϊνα φέρε τῶν σωμάτων, τῆς γῆς τὸ κέντρον· ἀλλ' ἐπεὶ τὰ μέρη τῦ τόπυ εἰσὶν ἀκίνητα, ἐδὲν ἐπείγονται καταλαβεῖν κέντρον.

18. Ζ΄. Τὰ μέρη τῦ τόπυ, ἢ τῦ διαςήματος, ἐκ ἔχυσιν ἐν ἑαυτοῖς κενὰ διαςημάτια, ἀλλ' εἰσὶ συνεχῆ, ἀλλήλλων ἀμέσως συνεφαπτόμενα· τὰ δὲ τῶν σωμάτων, τῶν γῦν ἡμῖν ἐγνωσμένων, ἀλλήλοις ἥκιςα προσφυῶς προσεφαρμόζονται, ἀλλὰ διακρίνονται διὰ πολλῶν διαςηματίων, ἢ ὀπῶν μικρῶν, ἃ καλῦνται πόροι, ὡς αὐτίκα ἡμῖν ἐκτεθήσεται.

19. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πολλοὶ ὖν λόγοι πείθυσι διακρίνειν τῶν σωμάτων τὸ διάςημα, ἢ τὸν τόπον.

20. Διακριτέον δὲ δύω εἴδη ἐκτάσεως, ἰδεωμένοις διὰ τῆς φωνῆς ἔκτασις, συμπλήρωμά τι μερῶν, ἐκτὸς ἀλλήλων κειμένων, εἴτ' ὖν τὴν ἔκτασιν τῦ τόπυ ϗ τὴν τῆς ὕλης.

21. Ἔκτασις μὲν τῦ τόπυ ἐςὶν, ἧς τὰ μέρη ἀκί-

νητα, ἀδιαίρετα, διαχωρητὰ, ἀδρανείας ϗ βαρύτητος ἄμοιρα, ϗ ἀμέσως ἀλλήλων συνεχόμενα.

22. Ἔκτασις δὲ τῆς ὕλης, ἧς τἀναντίον τὰ μέρη κινητὰ ὑπάρχει, διαιρετὰ, ἀδιαχώρητα, ἀδρανείας τε ϗ βαρύτητος εὐμοιρῦντα, ὧν ἡ συνέχεια διακόπτεται, ἢ γῦν διακοπῆναι δύναται, διὰ κενῶν διαστηματίων.

23. Πᾶσα μὲν ὕλη ὑπάρχει σῶμα, εἴτ' ὖν ἄθροισμα μερῶν σωματικῶν, ὅ ἐστι, μερῶν κινητῶν, ἀδιαχωρήτων κτ.· ἀλλ' ἀντιστρόφως, ὅ ἐστι σῶμα, ἐστι τῦτ' αὐτὸ ϗ ὕλη; εἴτ' ὖν ἅπαν σῶμα, ὅσω ἂν εἴη μικρὸν, ἐστι μερῶν ἄθροισμα; ἀλλ' ὕτως ἅπαν σῶμα ἔσεται ὕλη· εἰ μέν τοι ἡ ὕλη ἐσχάτως ἀναλυθῆναι δύναται εἰς κυρίως λεγόμενα ἄτομα, εἴτ' ὖν εἰς μέρη ἁπλᾶ ϗ ἀδιαίρετα, ϗ ταῦτα σώματα ἔσονται, ἅτε δὴ κινητά τε ἐσόμενα, ἀδιαχώρητα, ἀδρανῆ ϗ βαρέα, ὥσπερ ἡ ὕλη, ἧς ταῦτα μέρη· ἀλλὰ ταῦτα ὔτω μὴ ὄντα ἄθροισμα μερῶν, ὐδ' ὕλη ἐπομένως ἔσονται· ἐὰν ὖν ἄτομα κυρίως λεγόμενα ὑπάρχωσι, πᾶσα μὲν ὕλη ἔσεται σῶμα, ὐ μὴν δὲ ϗ σῶμα ἅπαν ὕλη.

24. ΠΟΡΙΣΜΑ. Εἰ ὑπάρχει ἄτομα, εἴτ' ὖν μέρη ἀδιαίρετα, τὸ διαιρετὸν εἶναι ἔσται ὐσιῶδες γενικὸν ἰδίωμα τῆς ὕλης· ἔστι γὰρ ὕλη ἄθροισμα μερῶν σωματικῶν, ϗ δὴ ἀπ' ἀλλήλων διαιρετῶν· τὸ μέντοι διαιρετὸν εἶναι ὐκ ἔσται ὐσιῶδες γενικὸν τῦ σώματος ἴδιον.

25. Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὡς τὰ τρία ταῦτα, τόπος, ὕλη, ϗ σῶμα, διαφέρυσιν ἀλλήλων.

26. Ἡ μὲν ὖν Γεωμετρία περὶ τὸ διάστημα ἡ δὲ Φυσικὴ περὶ τὴν ὕλην, ἢ τὰ σώματα, ἐνασχολεῖται· ἡνίκα γὰρ ὁ Γεωμέτρης ἐπιφάνειάν τινα καταμετρεῖ, ἀμελεῖ ὅλως τῦ ἀθροίσματος τῶν σωματικῶν μο-

ρίων, ἃ συντιθέασι τὴν ἐπιφάνειαν· ἐπεὶ γὰρ τὰ μέρη ὁτινοσῦν σώματος ἀεὶ εἰσὶν ἀλλήλων κεχωρισμένα πολλοῖς διαστηματίοις κενοῖς, εἴτ᾽ οὖν πόροις, ἀφελεῖν ἔδει τοῦ τῶν μερῶν ἀθροίσματος τὰ κενὰ χωρία, ἵν᾽ εὕροι ἀκριβῶς τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας, τοῦτο μέντοι οὐδέποτ᾽ ἂν γένοιτο· ἀμήχανον γὰρ εἰδέναι τόν τε ἀριθμὸν καὶ τὸ μέγεθος τῶν πόρων.

27. Ὡσαύτως περὶ τῆς στερεότητος, ἡνίκα τυχὸν ἡ δωματίου χωρητικότης καταμετρεῖται, ὁ τόπος, ἢ τὸ διάστημα, οὐ μέντοιγε τὰ σώματα, οὐδ᾽ ὁ ἐμπεριεχόμενος τῷ δωματίῳ ἀὴρ, καταμετρεῖται· εὑρίσκει γὰρ ὁ Γεωμέτρης τὸ δοχεῖον τῆς πνευματικῆς ἀντλίας, ἀέρος κενωθὲν, ὅσον καὶ πρότερον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τόπου, ἢ διαστήματος.

28. Φθάντες ἐδείξαμεν τοὺς χαρακτῆρας, οἷς τὸ διάστημα τῆς ὕλης διαφέρει· ἔστι γὰρ, ὕλης ἀμοιροῦν, ἀκίνητον, διαχωρητὸν, ἀδιαίρετον, ἀδρανείας ἄμοιρον καὶ βαρύτητος· οἷς ἅπασιν ἐναντίως ἔχει πρός τε τὴν ὕλην καὶ τὰ σώματα.

29. Ἀλλὰ τί γὰρ ἂν εἴη καθ᾽ ἑαυτὸν ὁ καλούμενος τόπος, ἢ τὸ διάστημα; Τοῦτ᾽ ἐστιν, ὃ ἀδύνατον ἡμῖν ὅλως ὁρίσασθαι· ὁ μέντοι Νεύτων ὑπέλαβεν, ὡς ἄρα τουτὶ τὸ ἄπειρον διάστημα, ἅτε δὴ ὑπερεκπίπτον τοῦ ἡμετέρου νοὸς τὰ ὅρια, πρὸ τῆς δημιουργίας αἰωνίως προὸν, εἴη αὐτὴ ἡ ἀπειρία τοῦ Θεοῦ, ὡς ἱκανῶς ἔχουσα χωρῆσαι τὰ σώματα.

30. Καὶ ἦν μὲν ἂν αὕτη ἡ δόξα ἀναμφιβόλως ἀπα-

σῶν πιθανωτέρα, εἰ συνᾔδε τῇ φύσει τῆς θεότητος· ἀλλ' ἐνταῦθα ἡ πᾶσα δυσχέρεια· ἐπεί, καθάπερ δοκεῖ, τῷ τόπῳ μέρη ἐστὶ πραγματικά, ὧν θάτερον πραγματικῶς ἐκτὸς κείμενον θατέρου, οὐ δύναται πραγματικῶς ἐκείνῳ εἶναι ταὐτόν· οὕτω φέρε τὸ μέρος τοῦ διαστήματος, ὃ ἐπέχει τὰ Παρίσια οὐκ ἂν εἴη τὸ αὐτὸ πραγματικῶς τῷ, ὃ ἐπέχει ἡ Βιέννα· ὅθεν τὸ διάστημα, ἄπειρον ὄν, ἐκ τούτου καὶ ἄπειρα μέρη ἕξει πραγματικά· ὅπερ οὐκ ἂν ἐπὶ τῆς θείας καὶ ἀΰλου οὐσίας λέγοιτο.

31. Ὁ δὲ Καρτέσιος ὑπέθετο, ὡς καὶ τόδε εἶδος εἴη ἐκτάσεως τῆς τῶν σωμάτων, ἢ τῆς ὕλης· καὶ ἑπομένως εἰπεῖν κατηναγκάσατο, ὡς ὁ τόπος καὶ τὸ διάστημα εἶεν αὐτὰ τὰ σώματα· τῆς αὐτῆς δὲ γνώμης ὑπῆρξε καὶ Λεϊβνίτιος· ἀλλ' ἡ δόξα αὕτη ἀντιφέρεται προφανῶς, οἷς εἴπομεν περὶ τοῦ διαστήματος, ὃ ὑπάρχειν δύναται δίχα σωμάτων, ἀκίνητον, ἀδιαίρετον, διαχωρητὸν, ἀδρανείας καὶ βαρύτητος ἄμοιρον, πάντῃ πάντως συνεχές.

32. Τὸ διάστημα ἄρα ἐστὶ τρίτον τι εἶδος ὄντος, τοῦτε πνεύματος καὶ τοῦ σώματος διάφορον, ὅπερ ὁ Θεὸς, δοχεῖον τῶν σωμάτων ἐδημιούργησε· πνεῦμα μὲν γάρ ἐστιν οὐσία νοερὰ, ἐξ οὗ ἀναγκαίως ἁπλῆ καὶ ἀδιαίρετος, καὶ ἑπομένως ἀνέκτατος, ἐνεργείας εὐμοιροῦσα, καὶ δεξιῶς ἔχουσα ἑαυτὴν προσδιορίσασθαι· τόπος δὲ, ἢ διάστημα, ἐστὶν ἔκτασις πραγματικὴ, νοήσεως καὶ ἐνεργείας ἀνεπίδεκτος· οἷς ἅπασι τοῦ πνεύματος διενήνοχεν· ἐστὶ δὲ καὶ ἀκίνητος, ἀδιαίρετος, διαχωρητὴ, συνεχὴς, ἀδρανείας καὶ βαρύτητος ἄμοιρος· τέλος δὲ σῶμά ἐστι τὸ ὑποπίπτον ταῖς ἡμετέραις αἰσθήσεσι, πραγματικῶς ἐκτεταμένον, ἀμοιροῦν νοήσεως καὶ δραστηριότητος, ἐν οἷς τῷ μὲν τόπῳ ταυτίζεται, τοῦ δὲ πνεύματος διακρίνεται· ἐστὶ δὲ καὶ

κινητὸν, ϗ διαιρετὸν εἰς γȣ̃ν τὰ, ἐξ ὧν συντέθειται, ϗ ἀδιαχώρητον, ἀδρανείας ϗ βαρύτητος εὐμοιρȣ̃ν, οἷς διενήνοχε τȣ̃ τόπȣ, ἢ τȣ̃ διαςήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ φύσεως τȣ̃ σώματος ϗ τῆς ὕλης.

33. Εἴδομεν ἄρτι πολλȣ̀ς χαρακτῆρας, οἷς ἀληθῶς διακρίνεται ἡ ὕλη ϗ γενικῶς τὸ σῶμα τȣ̃ πνεύματος ϗ τȣ̃ διαςήματος· παρατηρȣ̃σι μέντοι, ὡς αὗται αἱ ἰδιότητες τῆς ὕλης ϗ τȣ̃ σώματος ἐκπηγάζȣσιν ἐκ πρώτȣ τινὸς ὑποκειμένȣ, ὅ ἐςι τὸ συςατικὸν, ἢ ἡ ȣ̓σία τῆς ὕλης ἢ τῶν σωμάτων, περιέχȣσα τὸν τελευταῖον λόγον, δι' ὃν ἄντις συναγάγοι, ὅπως ἡ ὕλη εὐμοιρεῖ τῆς δε ἢ τῆς δε τῆς ἰδιότητος· συνελόντι δὲ φᾶναι, τοῖς πυνθανομένοις τίς ἐςιν ἡ ȣ̓σία, ἢ τὸ πρῶτον συςατικὸν, τῆς ὕλης ϗ τῶν σωμάτων, ὁμολογητέον, μηδὲν εὐλαβȣμένȣς, τὴν ἡμῶν ἄγνοιαν.

34. Ἡ φύσις, ἢ ἡ ȣ̓σία, τȣ̃ σώματος, ȣ̓κ ἔςιν ἡ ἔκτασις, ὡς ὑπέλαβεν ὁ Καρτέσιος.

35. α΄. Ἐτράπετο δὲ πρὸς τȣ̃το ὁ ἀνὴρ ὑπολαβὼν μηδεμίαν εἶναι ἔκτασιν παρὰ τὴν τῶν σωμάτων· ἀλλὰ δοκεῖμοι ἱκανὰς ἡμῖν ἀποδεδόσθαι τὰς διαφορὰς, αἷς διακρίνεται καὶ ἀφορίζεται ἀλλήλων τὸ διάςημα, καὶ τὸ σῶμα (32).

36. β΄. Ἡ ἔκτασις ἄθροισμα ὁρίζεται μερῶν ἐκτὸς ἀλλήλων κειμένων· ἀλλ' ȣ̓́πω τȣτὶ ἑρμηνεύει τὴν φύσιν ἑκάςȣ μέρȣς καθ' ἑαυτὸ θεωρηθέντος, τὴν φύσιν τȣ̃ ἐκ τȣ́των τῶν μερῶν ἀποτελȣμένȣ ὅλȣ· ἤτοι γὰρ ἕκαςον

τέτων τῶν μερῶν, καθ' ἑαυτὸ λαμβανόμενα, ἐςὶ σωματώδες, ἢ ἔ· ἢ εἰ μὲν ἐκεῖνο, ἡ ἕνωσις τῶν μερῶν ὑποτίθησι τὴν φύσιν τῦ σώματος, ἢ αὕτη ἐδὲν ἀναπτύσσει· εἰ δὲ τῦτο, πῶς ἂν ἐκ μὴ σωματικῶν μερῶν σωματικὸν συγκροτηθείη ὅλον;

37. γ'. Φύσις ἀρχικὴ ὄντος τινὸς ἐςιν ὁ ἔσχατος λόγος, ὁ ἀφ' ἑκάςης ἰδιότητος αὐτῦ ἐπενεχθῆναι δυνάμενος· ἀλλ' εἴτις με ἔροιτο τυχὸν, διὰ τί τὸ σῶμα ἐςιν ἀδιαχώρητον, διὰ τί ἐςιν ἀδρανὲς, ἐ δύναμαι ἀποκριθῆναι, δὴ ὅ,τι ἐςὶν ἐκτεταμένον· κἂν γὰρ ἡ ἔκτασις πολλῶν ὑπάρχη μερῶν, ἐκτὸς ἀλλήλων κειμένων, ἄθροισμα, ἐ παρὰ τῦτο τὰ μέρη ταῦτα ἐδύνανται ἐνυπάρχειν ἀλλήλοις, εἴτ' ἦν διαχωρεῖσθαι ὑπ' ἀλλήλων· ἐκῦν ἐδ' ἕκαςον τέτων τῶν μερῶν ἔςιν ἀδρανὲς, ἢ καθαρῶς παθητικὸν, ἢ δυνάμεώς τινος περιεκτικὸν, ἢ προσδιορισμῦ ἐπιδεκτικόν.

38. Φύσις, ἢ ἐσία, τῦ σώματος ἐκ ἔςιν, ἔτε τὸ κινεῖσθαι, ἔτε τὸ ἀδιαχώρητον, ἐχ ἡ ἀδράνεια, ἐχ ἡ βαρύτης, ἐδέ τις ἄλλη τῶν ἡμῖν γνωςῶν ἰδιοτήτων τῦ σώματος· πᾶσαι γὰρ αὗται αἱ ἰδιότητες ὑποτιθέασι πρῶτόν τι ὑποκείμενον, ἀφ' ἔ ἀποσπάσι, ἢ εἰς ἔ τὴν ἰδέαν ἢ κατανόησιν ἥκιςα ἡμᾶς αὗται ὁδηγῦσι. διαφεύγει γὰρ ἡμᾶς ὁ ἔσχατος τῶν πραγμάτων λόγος, ὃς μόνῳ τῷ ὑπερτάτῳ νοῒ τυγχάνει καταληπτός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ ὑπάρξεως σωμάτων.

39. Τὸ ζήτημα, εἰ εἰσὶ σώματα, εἴτ' ἐν ὕλη, μέχρις ἀηδίας ἀνακινηθὲν, παραφροσύνη τις ἂν εἴη ἀναμφιλέκτως τῦ ἀνθρωπίνυ πνεύματος· ἀλλὰ μηδεὶς ταραττέσθω, διενθυμύμενος τὰ πολυάριθμα διαπτώματα, εἰς ἃ ὑπὸ τῶν αἰσθήσεων δειλαίως ἐκτραχηλιζόμεθα.

Εἰλήφθω γὰρ εἰς ὑπόδειγμα τὸ τῆς ὁράσεως, ἢ ἐξαπατᾷ ἐπὶ τῆς τῶν σωμάτων ὑπάρξεως. Ἐν τοῖς κατόπτροις ἐμαυτὸν ὁρῶ πραγματικῶς, ἔνθ' ὐδὲν ταῦτον ὑπάρχει· διὰ κατόπτρων, ὡς ὀψόμεθα, παλλαπλᾶ φαίνονται τὰ ἓν μόνον ὑπάρχοντα· κατὰ δὲ τὸ μέγεθος, μυριαχῶς ποικίλλει τὰ ὄντα ἡ ὅρασις, κατὰ τὰ διάφορα, ἀφ' ὧν ὁρῶνται, ἀποςήματα· τό, τε σχῆμα ὡσαύτως ποικίλλει· ἐν τῷ κέντρῳ γὰρ κύκλυ ἱςάμενος, τῦτ' αὐτὸ κύκλον τὸν κύκλον ὁρῶ· ἐκεῖθεν δ' ἀποςὰς ἢ πρὸς τὴν περιφέρειαν πλησιάζων, ἔλλειψιν δοκῶ ὁρᾶν· τὴν δὲ θέσιν, διὰ τὴν θραῦσιν, τὰ ταπεινότερα καθορῶμεν ὑψηλότερα· τὴν δὲ κίνησιν, περιπατῶν πάντα κινύμενα ὁρῶ, καίτοι καθηρεμῦντα· ἄνθρωπος παραλλήλως ἐμοὶ συμπεριπατῶν ἠρεμεῖν μοι δοκεῖ κτ. κτ.· ὡς τρανώτερον ὀψόμεθα ἐν τοῖς ἐφεξῆς, τὰ περὶ τῶν τῦ φωτὸς ἰδιοτήτων ἐκτιθέντες.

40. Ταύταις ταῖς ἀπάταις κινηθέντες τῶν φιλοσόφων τινὲς, οἷος ὁ Μαλεμβράγχιος, ἀπίςυς μάρτυρας τῆς τῶν σωμάτων ὑπάρξεως τὰς αἰσθήσεις ἡγήσαντο· ἕτεροι δὲ τὴν τῶν σωμάτων ὕπαρξιν ἀμέσως ἐκ τῆς τῦ Θεῦ ἀληθείας ἀποδειχθῆναι μὴ ἔχειν διϊσχυρίσθησαν, ὕτω

συλλογισάμενοι· θῶμεν γὰρ ἐπ' ἀδυνάτε, τὸν Θεὸν ἡμᾶς ἀπατῆσαι βέλεσθαι· ἐδύνατο ἂν ἡμῖν παριςᾷν σώματα, καίτοι μηδόλως ὑπάρχοντα, ἢ παρὰ τῶν μηδὲ τὴν ἀρχὴν ὑπαρχόντων ἡμᾶς πάσχειν, ἃ πάσχομεν· ἠδύνατο φέρε ποιῆσαι με δοκεῖν πίνειν τῦτο τὸ ὑγρὸν, ἢ τῆς δε ἀπογεύεσθαι τῆς ποιότητος αὐτε, ὃ τὴν ἀρχὴν ἐχ ὑπῆρξεν· ἄρα κτ.

41. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ τῶν αἰσθήσεων μαρτυρία ἐμπεδοῖ τὴν τῶν σωμάτων ὕπαρξιν.

ΔΕΙΞΙΣ. Καθ' ἑκάςην ἡμέραν καὶ ὥραν συναισθάνομαι ἐμαυτῷ πεινῶντι, διψῶντι, γευομένῳ, ἁπτομένῳ, ἡδομένῳ, ἀλγῦντι· ἐξ ὧν ἁπάντων ἑκὼν ἀέκων κρίνω, ὡς ἐςι τι σῶμα, ἀφ' ὃ ἡ ψυχὴ ὕτω διατίθεται· ὡσαύτως ἀείποτε βλέπω, ἀκύω, ἅπτεσθει δοκῶ κτ.· καὶ ταῦτα τὰ αἰσθήματα ἑκὼν ἀέκων ἐγγίνεσθαί μοι πιςεύω ἐκ τῦ ἐμῦ σώματος, τῦ ἡλίε, τῆς σελήνης, ἢ ἑτέρων διαφόρων σωμάτων ὑρανίων ἢ γηΐνων, ὡς πραγματικῶς ὑπαρχόντων· ἐκ τέτων ἂν συναγαγεῖν ἀναγκάζομαι, ὅτι ὑπάρχυσι σώματα. Ο. Ε. Δ.

42. Ἵνα δὲ μήτις ἡμῖν ἐκ τῶν αἰσθήσεων, ὃ πολλάκις συμβαίνει, ἀπάτη προσγένηται, τῷ λόγῳ χρηςέον· εἰδότες γὰρ ὡς τὰ αὐτὰ μεγέθη τοσύτῳ ἐλάττονα φαίνεται, ὅσῳ μᾶλλον ἡμῶν ἀπέχει, τῶν ἥλιον ὁρῶντες ἢ πύργον, τὸν μὲν ἐγγὺς ἡμῶν ἱςάμενον, τὸν δε μακρὰν ἀπέχοντα, ἀμφοτέρυς δὲ ἴσυς δοκῦντας, κρίνυμεν ἀσυγκρίως τὸν ἥλιον ὑπερκείμενον τῦ πύργυ· ὕτως ἂν πείρᾳ χειραγωγύμενοι, ἢ μικρὸν διανοέμενοι, ῥᾶςα ἐκκλίνομεν τὰς ἀπὸ τῶν αἰσθήσεων ἀπάτας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ διαιρέσεως τῆς ὕλης.

43. *Διὰ πολλῶν γεωμετρικῶν θεωρημάτων τὸ διάϛημα, ἢ ὁ τόπος, ἐπ' ἄπειρον διαιρετὸν δέδεικται· α. δέδεικται γὰρ τὸ γωνιῶδες διάϛημα, τὸ μεταξὺ τῆς ἁπτομένης ϗ τῆς κυκλικῆς περιφερείας ἐναπολαμβανόμενον, διαιρεθῆναι ἐπ' ἄπειρον δύναϑαι διὰ κυκλικῶν περιφερειῶν ἀεὶ μειζόνων, διηκϐσῶν διὰ τϐτϐ τῦ διαϛήματος* (Γεωμ. 155.) *β'. αἵ τε τῆς ὑπερβολῆς ϗ πολλῶν ἄλλων καμπύλων ἀσύμπτωτοι ἀεὶ μᾶλλον ἔγγιον γίνονται τῆς καμπύλης ἐπ' ἄπειρον, ϐδέποτε δὲ αὐτῇ συμπίπτϐσι· ϐκϐν τὸ πεπερασμένον διάϛημα, τὸ μεταξὺ τῆς ἀσυμπτώτϐ ϗ τῆς καμπύλης ἐπ' ἄπειρόν ἐϛι διαιρέσιμον.*

44. Ἴδϐ δὴ ϗ ἀπόδειξις Γεωμετρικὴ ἁπλῆ ϗ εὔληπτος εἰς ἐμπέδωσιν τῦ λεγομένϐ.

Ἔϛωσαν *εὐθεῖαι δύω παράλληλοι, ὅσον ποδὸς τυχὸν πλάτος τὸ* AK = BΔ (% 84) *ἀλλήλων ἀφιϛάμεναι, αἱ* AB, KΔ· *φημὶ δὴ, ὅτι τὸ κυκλικὸν τεταρτημόριον* AΨ, *ὃ μετρεῖ τὴν ὀρθὴν γωνίαν* K, *καί τοι πεπερασμένον, εἰς ἄπειρον μέντοι διαιρεθῆναι δύναται· ἀεὶ γὰρ μεταξὺ τῶν διαγωνίων* KE, KZ, KB *ϗ τῆς βάσεως* KΔ *τῶν ἑξῆς κειμένων παραλληλογράμμων* AE, Θν, *κτλ. καταλειφθήσεταί τι μέρος ἀεὶ ἔλαττον τῦ τόξϐ* AΨ· *ὅτως ἔϛαι* ΟΨ<ΘΨ, *ϗ* τΨ<ΟΨ *κτλ. ἀλλὰ προήχθωσαν ἐπ' ἄπειρον αἱ δύω παράλληλοι* AB, KΔ, *ϗ ἤχθω νέα διαγώνιος ἡ* KB· *λειφθήσεται ϐν ὕπερθεν ἄλλο τόξον* τΨ *ἔλαττον ἀεὶ τῦ προτέρϐ· τὸ δὲ* τΨ *ϐδέποτε = ο γενέϑαι δύναται, πρὶν* τὴν ΚΒ διαγώνιον συμπεσεῖν τῇ ΚΔ· ἀλλὰ διὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΚΔ, ἀεὶ τὸ πέρας Β τῆς ἐχάτως ἂν ἀχθείσης διαγωνίε ΚΔ ἀποκεχωρισμένον ἔςαι τῆς ΚΔ παραλλήλε τῷ ποδιαίῳ διαςήματι ΒΔ· ἄρα ἀεὶ τὸ λειπόμενον τόξον ΤΨ, τὸ διατεμνόμενον ὑπὸ τῆς ἐχάτως ἂν ἀχθείσης διαγωνίε, ἀεὶ ἔςαι διαιρετὸν ἐπ᾽ ἄπειρον· ἐντεῦθεν ἄρα τὸ πεπερασμένον τόξον ΑΨ ἐπ᾽ ἄπειρον τμηθήσεται.

45. Οὐκεν ἐ͵ τὴν ἐπ᾽ ἄπειρον τε πεπερασμένε διαςήματος διαίρεσιν, ὡς ἕντι τῶν ἀκριβῶς δεδειγμένων τῆς Μαθηματικῆς Θεωρημάτων ἐκδεξόμεθα· ἔδοξαν δὲ οἱ τὴν ὕλην τε διαςήματος διακρίνειν μὴ ἀξιεντες, οἷον οἱ περὶ Καρτέσιον ἐ͵ Λεϊβνίτιον, ἐπιλύσαι τὸ ζήτημα τὸ περὶ τῆς ἐπ᾽ ἄπειρον διαιρέσεως τῆς ὕλης.

46. ΘΕΩΡΗΜΑ. Η῾ ὕλη ἐκ ἔςιν ἐπ᾽ ἄπειρον διαιρετή.

ΔΕΙΞΙΣ. Οὐ γὰρ, ὅτι τὸ διάςημα ἐπ᾽ ἀπειρὸν ἐςι διαιρετὸν, παρὰ τετο ἐ͵ ἡ ὕλη ἔςαι τοιαύτη· ἐ γὰρ αὕτη ἀπολύτως ἐμπίμπλησι τὸ διάςημα, ἀλλ᾽ ἔχει ἐ͵ μεταξὺ κενὰ διαςημάτια, ἢ πόρες πολυαρίθμες, μεγέθες πεπερασμένε, ὡς αὐτίκα ἐκθησόμεθα.

47. Ε῎τι δοκεῖ τὸν Θεὸν δύνασθαι δημιεργῆσαι ἄτομα κυρίως λεγόμενα, εἴτ᾽ ἐν μέρη σωματικὰ, ἃ πραγματικῶς μὴ συγκείμενα ἐξ ἄλλων μερῶν εἶεν ἀπολύτως ἀδιαίρετα, ὡς αὐτίκα ὀψόμεθα· δοκεῖ δὲ πᾶσα ἡ ὕλη δύνασθαι ἐκ τῶν τοιέτων ἀτόμων πραγματικῶς συγκεῖσθαι· εἰ ἐν πολυπληθῆ μὲν, πεπερασμένα δὲ τὸν ἀριθμὸν, ἄτομα τοιάδε συνῆλθον εἰς κυβικε ποδὸς φέρε ὕλης σύςασιν, ἐξέςαι ταύτην ὡς πεπερασμένην τε θεωρεῖν, ἐ͵ μὴ ἐς ἄπειρον διαιρετήν.

Ἐντεῦθεν ἐν δῆλον ὡς πασῶν τῶν γεωμετρικῶν δείξεων μόνῳ τῷ διαςήματι ἐφαρμόζεσθαι δυναμένων, ἐχὶ δὲ ϗ τῇ ὕλῃ, ἐκ τῆς Γεωμετρίας ἐ δυνάμεθα ἀποφήνασθαι τὴν ὕλην διαιρετὴν ἐπ᾽ ἄπειρον.

48. Ἀλλὰ γὰρ, ὥσπερ ἐ δυνατὸν ἄλλως ἐναργῶς ἐννοῆσαι τὸν ἀριθμὸν, εἰ μήτις συμπλήρωμά τι αὐτὸν ἰδεῷτο μονάδων, ὧν ἑκάςη ἐκ ἔςιν ἀριθμὸς τῷ προκειμένε εἴδες· τὸν ἀριθμὸν φέρε τῷ ςρατῷ, ὅς ἐςι συμπλήρωμα ςρατιωτῶν, ὧν ἕκαςος ἐκ ἔςι ςρατός· ἔτως ἐδ᾽ ὕλην ἐναργῶς ἐννοῆσαι δύναταίτις ἄλλως, ἢ παριςῶν αὐτὴν ἑαυτῷ ὡς συμπλήρωμάτι μερῶν, ὧν ἕκαςον, μετὰ διαιρέσεις μονονὲκ ἀπείρες, ἐκ ἂν λέγοιτο ὕλη.

49. Ἡ μέντοι πεῖρα ἐδὲν ἡμῖν περὶ τέτε δείκνυσι· δύνανται μὲν γὰρ ἥτε φύσις ϗ ἡ τέχνη τὴν διαίρεσιν τῆς ὕλης ἐπ᾽ ἐξαίσιόν τινα βαθμὸν προαγαγεῖν, ὡς ὀψόμεθα· ἀλλ᾽ ἵνα ταύτην τὴν διαίρεσιν παραςήσωμεν, ἐ χρὴ τὴν ὕλην ὑποθέσθαι ἐξ ἀπείρων συγκροτεμένην μερῶν· ἀπόχρη δ᾽ αὐτῇ ἀριθμὸν ἀπονεῖμαι, μέγαν μὲν, εἰς ὅσον ἄντις ϗ βέλοιτο, πεπερασμένον μέντοι ϗ ὡρισμένον. Ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων συνάγεται τὰ ἐφεξῆς.

50. Εἰ μὲν τὰ σώματα μὴ ἐκ μονάδων σύγκειται, ὡς ὑπέλαβε Λειβνίτιος, ἀτόμων ϗ ἀδιαιρέτων, τὸ ζήτημα λύεται· ἔςι γὰρ ἐπιεικῶς ἡ ὕλη ἐπ᾽ ἄπειρον διαιρετή· ἐπεὶ γὰρ τηνικαῦτα ἕκαςον μέρος τῆς ὕλης μετὰ πολλὰς διαιρέσεις ἐμπεριέχει ἔτι μέρη ἄπειρα, ὧν ἕκαςον μέρη αὖ ἄπειρα, ϗ ἑξῆς ἔτως ἐπ᾽ ἄπειρον, σαφὲς, ὡς ἐδέποτε πάντα τὰ μέρη τῶν δυνατῶν διαιρέσεων ἀπαντληθῆναι δύναται.

51. Εἰ δὲ τἐναντίον εἰσὶν ἄτομα, ἀδιαίρετα μόρια, ϗ ὡρισμένος τέτων ἀριθμὸς συνίςησι πόδα τυνὸν

κυβικὸν ὕλης πεπερασμένης, ἀδύνατον εἰπεῖν τὴν ὕλην ἐπ' ἄπειρον διαιρεῖσθαι· ἀλλὰ ὔτε αἱ Γεωμετρικαὶ δείξεις, ὔτε ἡ Μεταφυσικὴ, ὔτε ἡ πεῖρα, δύνανταί τι ἀποδεικτικῶς εἰπεῖν περὶ τῆς τῶν ἀτόμων ὑπάρξεως· ἄρα συναγαγεῖν δύναμαι, ὡς καίτοι ἡ ἐπ' ἄπειρον τῦ διαςήματος διαίρεσις καλῶς δείκνυται ἔχυσα δυνατῶς, ὐ μέντοι ἐκ τύτυ τὸ αὐτὸ ῥηθήσεται. ϗ περὶ τῆς ἐπ' ἄπειρον διαιρέσεως τῆς ὕλης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ τῆς ἐνεργείᾳ διαιρέσεως τῆς ὕλης.

52. Η' ὕλη διαιρεθῆναι δύναται, ϗ συχνάκις διαιρεῖται, εἰς μέρη, ὧν ὅ,τε ἀριθμὸς ϗ ἡ μικρότης πᾶσαν ὑπερβαίνει ἐπίνοιαν· ἰδὰ δὴ ὑποδείγματα.

53. α΄. Ε'κ τῶν ὀδμῶν. Ε'υώδυς τινὸς ὑγρῦ ἄγγος πλῆρες ἀνοίγεται ἐν μεγάλῳ οἰκήματι, ϗ ἀντίκα ὀδμῆς πληρῦνται πάντα αὐτῦ τὰ μέρη· ἀλλ' ἡ ὀδμὴ αἰσθητὴ γίνεται, ὡς δῆλον ἐςαι, ἐκ τῶν τῆς ὕλης ἀποπεμπομένων μεριδίων, ϗ πανταχῦ τῦ ἀέρος διασκεδαζομένων· ἐπεὶ τοίνυν ἡ ὄσφρησις ἡμῶν διατίθεταί πως ὑπὸ τύτων τῶν μεριδίων, ὅπυ ἂν τῦ δωματίυ ςαθῶμεν· εἰκὸς ἅπαν τὸ δωμάτιον τῶν ὀσμωδῶν μεριδίων πληρῦσθαι, ἵν' ἑκαςαχῦ ἱκανὰ ὄντα κινήσωσι τὴν ὄσφρησιν· ὅθεν ἡ διάθεσις μεταδίδοται τῷ ἐγκεφάλῳ, ϗ ὕτως αἰσθητὴ γίνεται ἡ ὀσμή· συμβαίνει δε ἡ ἐξάτμισις αὕτη διὰ μακροτάτυ χρόνυ, ὥςε τὸ ἄγγος, εἰς πολλὰ μεταφερόμενον δωμάτια ἀλληλοδιαδόχως, κἀκείνων ἕκαςον ὀσμῆς ἀναπιμπλᾷν· ἀλλ' ὐκ ἄρα ὀδμηρὰ μερίδια ἐξιέναι ἀενάως τῦ ὑγρῦ

ἀνάγκη, ὥστε πάντα τὰ δωμάτια ἐμπλησθῆναι· καὶ ἐπεὶ αὖ τὸ ὑγρὸν αἰσθητῶς οὐ μειοῦται, τὴν αὐτῶν σμικρότητα θαυμασίαν οὖσαν ὑπερνικᾶν πᾶσαν ἐπίνοιαν;

Ἀλλ' ὁ μόσχος ἐν τούτῳ ἐξαισιώτερόν τι ὑπόδειγμα δίδωσιν· εἷς γὰρ αὐτοῦ κόκκος εἴτ' οὖν $\frac{\text{ἰ}}{\text{ςτσ}}$ τῆς οὐγγίας ἐν δωματίῳ, ὅπου καινὸς ἀεὶ εἴσεισιν ἀὴρ, τεθεὶς, ἀεί ποτε ἐπὶ πολλῶν ἐνιαυτῶν ἐνεργητικωτάτης ὀσμῆς πληροῖ τὸ περιέχον.

54. β'. Ἐκ τῶν χρωμάτων. Ἐὰν κόκκος μίλτου μεγάλῳ ἄγγει ὕδατος πλήρει ἐμβληθῇ, ἅπαν τὸ ὕδωρ ἐρυθρῷ ἄνθει χρωματισθήσεται· εἰς τοῦτο μέντοι ἀνάγκη ἅλις ὑποδιαιρεθῆναι, ἵνα πάντα τὰ μέρη τοῦ ὕδατος καταλάβῃ, ὥστε τὰς ἐκ πάντων τοῖς ὀφθαλμοῖς ἡμῶν προσπιπτούσας φωτιστικὰς ἀκτῖνας ἐρυθρὸν παριστᾶν τὸ ὕδωρ· ἐὰν οὖν τὸ ἄγγος κυβικῷ ποδὶ ᾖ ἴσον, ἑκάστου μεριδίου χρωματιστικοῦ ὑποτιθεμένου χρωννύειν ἓν κυβικὸν στίγμα ὕδατος, ὁ κόκκος τῆς μίλτου, εἴτ' οὖν $\frac{\text{ἰ}}{\text{ςτσ}}$ οὐγγίας μιᾶς, διαιρεθήσεται εἰς 5159780358 μερίδια (Ἀριθμ. 156).

55. Θαυμάσαι δ' ἄντις καὶ τοῦ φωτὸς τὴν ἐξαίσιον μικρότητα· ὡς γὰρ μαθησόμεθα ἐν τῇ ὀπτικῇ, ἰδεῖν καθαρῶς οὐδυνάμεθα, εἰμὴ πλεῖστα φωτοφυῆ μόρια κώνους οἷον διπλοῦς τοσούτους συστήσονται, ὅσα εἰσὶ τὰ τοῦ ὁρατοῦ ὑποκειμένου μέρη· οὗτοι δὲ ἀσυγχύτως τῇ τοῦ ὀφθαλμοῦ κόρῃ συμπεσόντες τὰ ὁρατὰ σημεῖα διακριδὸν τῷ ἀμφιβληστροειδεῖ χιτῶνι ἐγχαράξουσιν· οἱ δὲ κῶνοι οὗτοι καὶ εἰς τὴν κόρην τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ ἐλαχίστου τῶν ζώων εἰσέρχονται, καὶ διακριδὸν τῷ ἐν αὐτῷ ἀμφιβληστροειδεῖ χιτῶνι τὰ ὁρατὰ μέρη ἐντυποῦσι.

56. Ὀψόμεθα δὲ ἐν τοῖς ἐφεξῆς, ὡς τὸ φῶς τοσαύτην ἔχει ταχυτῆτα, ὥστε διατρέχειν τέσσαρα μιλλιόνια

λευγῶν ἐν ἑνὶ λεπτῷ· ἀλλὰ σφαῖρα κανονίȣ τῶν 24 πεπληρωμένȣ ἐννέα λιτρῶν κόνεως, διατρέχει ἐν τῷ ἀέρι ὀργυιὰς 3780, εἴτ' ȣ̉ν λεύγας περίπȣ $1\frac{1}{2}$ ἐν ἑνὶ λεπτῷ, ἡ ἄρα ταχυτὴς τȣ̃ φωτὸς ἐςὶ περίπȣ 2000000 μείζων τῆς ταχυτῆτος τῆς ἐκ κανονίȣ προϊȣ́σης σφαίρας· ὑποτιθεμένοις δὲ μόριον φωτοφυὲς = $\frac{1}{1000000}$ τῆς ὕλης τῆς σφαίρας, εὑρεθήσεται ἐν τȣ́των τὴν αὐτὴν ἰσχὺν ἔχον, ὡς δειχθήσεται, ἣν ἡ σφαῖρα τȣ̃ κανονίȣ τῶν 24· τȣτέςι τὰ φωτοφυῆ μερίδια ὑποτιθέμενα ἕκαςον = $\frac{1}{1000000}$ ἠδύναντο φονεῦσαι πάντα τὰ ζῶα, καὶ πάντα τὰ φυτὰ συνθλάσαι· ὅσης ȣ̉ν μικρότητος ὑπάρχȣσιν, ὥςε ȣ̔́τω ταχέως φερόμενα, αἰσθητῶς ὅσον πλήττȣσι τὰ λεπτὰ νημάτια τȣ̃ ὀφθαλμȣ̃, μηδ' ἥντιναȣ̃ν αὐτοῖς παρεμποιȣ̃ντα ἐνόχλησιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ ἀπολύτȣ ϗ σχετικȣ̃ τῶν σωμάτων μεγέθȣς.

57. Ἀπόλυτον μὲν μέγεθος τȣ̃ σώματος καλεῖται, ὃ ἔχει αὐτὸ ἐν ἑαυτῷ· σχετικὸν δὲ, ὅταν πρὸς μέγεθος ἄλλȣ σώματος παραβάλληται· γνωσθήσεται δὲ μᾶλλον ἐκ τῶν ἐφεξῆς τὸ λεγόμενον.

58. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἰδέαν μεγέθȣς τῶν σωμάτων ἀπολύτȣ ȣ̉κ ἔχομεν.

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Τὴν γὰρ ἰδέαν τȣ̃ τῶν σωμάτων μεγέθȣς διὰ τῆς ὁράσεως προσκτώμεθα· ἀλλ' αὕτη ȣ̉κ ἀεὶ ἡ αὐτὴ παρίςαται· ἀπέχοντι γὰρ χιλίας ὀργυιὰς οἰκοδομήματός τινος, ὅσον ἄντις αὐτῷ προσεγγίζῃ, τοσϐτῳ ἀεὶ μεῖζον ὀφθήσεται· ἔςι δὲ ἀεὶ τὸ αὐτὸ τὸ τῦ οἰκοδομήματος ἀπόλυτον μέγεθος, ὡς δῆλον· ἄρα πᾶσαι αἱ ἐκ διαδοχῆς παριςάμεναι ἰδέαι τῦ οἰκοδομήματος τὸ ἀπόλυτον αὐτῦ μέγεθος ὐκ εἰκονίζεσι.

Πρὸς αὐτῷ δὲ γενομένοις τῷ οἰκοδομήματι, ϗ τηλεσκοπίῳ χρησαμένοις, δι' ϐ μεγεθύνεται τὰ ὁρατὰ κατὰ λόγον 1 : 10, δέκατον μέρος τῦ οἰκοδομήματος ἴσον δόξει αὐτῷ τῷ ὅλῳ οἰκοδομήματι.

Ἐν γένει δὲ, τὰ διὰ τῆς ὄψεως ὁρώμενα μεγέθη, ἀεὶ ἀνάλογα φαίνεται, ὡς δειχθήσεται, τῷ ὅλῳ χωρίῳ τῦ ἀμφιβληςροειδῦς χιτῶνος, πληγέντι ὑπὸ πάντων τῶν φωτοφυῶν κώνων, τῶν ἐκ διαφόρων ὁρατῶν σημείων τῦ ὑποκειμένϐ προσβαλλόντων· ἀλλὰ τῦτο τὸ χωρίον οἱανεὶ ἀπείρως ποικίλλεται, κατὰ τὰ διάφορα ἀποςήματα, ἀφ' ὧν ὁρᾶται τὸ ὁρατὸν, ὥσπερ ψιλοῖς τε ὀφθαλμοῖς τϐτϐ ἀποπειρωμένοις, ἢ τηλεσκοπίῳ μεγεθύνοντι, ἢ σμικρύνοντι τὰ ὁρατὰ, κατάδηλον γίνεται· δυνάμεθα ἄρα ἰδεῖν τὸ αὐτὸ σῶμα ἐν ἀπείρως ποικιλλομένοις μεγέθεσι, τῦ ἀπολύτϐ μεγέθϐς ἀμεταποιήτϐ ὄντος· ἐντεῦθεν δῆλον ὡς ἰδέαν ἀπόλυτον τῶν κατὰ τὰ σώματα μεγεθῶν ὐκ ἔχομεν.

59. β'. Σκνὶψ σκνῖπα καθορῶν ἰδέαν ἔχει, οἵαν ἄνθρωπος, καθορῶν ἄλλον ἄνθρωπον· ἄνθρωπον ὖν ἰδὼν ὁ σκνὶψ ἰδέαν τῦ κατ' αὐτὸν μεγέθϐς εἰκονίσει 1000000000 μείζω, ἢ ἄνθρωπος καθορῶν ἄνθρωπον· ζωΰφιον δ' ἄλλο ὑποχιλιαπλάσιον τῦ σκνιπὸς κατόψεται τὸν ἄνθρωπον ἔτι μείζω, ἢ ἄνθρωπος ἄνθρωπον καθορᾷ, 1000000000000· τὸ αὐτὸ ἄρα μέγεθος τῦ ἀνθρώπϐ, κὰκ τῦ αὐτῦ διαςήματος, ψιλοῖς τοῖς ὀφθαλμοῖς ἐν τρισὶ διαφόροις εἰκονίζεζεται ἰδέαις· τίς ὖν αὐτῶν παριςᾷ τὸ ἀληθές; ἕκαςον

τῶν τριῶν ζώων, ἄνθρωπος, σκνίψ, καὶ τὸ ἄλλο ζωΰφιον, ὃ καθορᾷ μέγεθος, ἀληθὲς οἴεται· ὐδὲν ἄρα τύτων τὸ ἀπόλυτον μέγεθος καθορᾷ. Ο. Ε. Δ.

60. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ σχετικὸν μόνον τῶν σωμάτων μέγεθος γινώσκομεν.

α΄. Τῦ αὐτῦ σώματος τὸ μέγεθος, ἐκ διαφόρων ἀποστημάτων καθορωμένυ, ἐν ἀντιςρόφῳ λόγῳ ἐςὶ τύτων τῶν ἀποςημάτων, εἴτ' ὖν ἐκ διπλῦ ἀποςήματος, ἥμισυ· ἐκ τριπλῦ, ὑποτριπλάσιον κτ.· τὸ φαινόμενον ἄρα μέγεθος ἐν ἀντιςρόφῳ ἐςὶ λόγῳ τῶν ἀποςημάτων.

β΄. Ἐκ τῦ αὐτῦ ἀποςήματος τὰ μείζω τῶν μεγεθῶν μείζω, τάδ' ἐλάττω ἐλάττω καθορᾶται.

γ΄. Τηλεσκοπίῳ χρησάμενος ἐκ τῦ δοθέντος ἀποςήματος ὑποκείμενόν τι ὄψομαι μεῖζον, ἢ ὅσον ἂν εἶδον αὐτόθεν τὸ αὐτὸ ὀφθαλμοῖς γυμνοῖς· διπλασιαζομένυ δὲ τῦ διαςήματος, καὶ τηλεσκοπίῳ, καὶ ὀφθαλμοῖς ψιλοῖς, ὑποδιπλάσιον φανήσεται τὸ μέγεθος.

Ὡσαύτως ὁ σκνὶψ, καίτοι μῆκος ποδιαῖον καθορᾷ τυχὸν ἐν λόγῳ 1000000000 : 1 τῦ, ὃ καθορᾷ ἄνθρωπος, δύω μέντοι ποδῶν μέγεθος θεάσεται διπλῦν, εἴτ' ὖν ἐκεῖνο ὁρῶν ὡς 1000000000, τὰ δύω ἅμα ὄψεται ὡς 2000000000.

61. Ἐν γένει ἄρα τὰ ζῶα ἰδέαν μόνυ τῦ σχετικῦ μεγέθυς ἔχει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ τῆ τῶν σωμάτων πορώδους.

62 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὅσα γινώσκομεν σώματα, πάντα εἰσὶ πορώδη.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπείπερ, ὡς αὐτίκα φανήσεται, τὰ μόρια σώματός τινος μόρια ἄλλε διαχωρεῖν ἐδύνανται, εἴτ' ἂν αὐτοῖς ἐνυπάρχειν· σῶμα διὰ σώματος ἐμὴ διελεύσεται, εἰμὴ θάτερον διασημματίων κενῶν, εἴτ' ἂν πόρων ἐν ἑαυτῷ εὐμοιροίη· ἀλλὰ μὴν ἐδέν ἐςιν, ὧν γινώσκομεν σωμάτων, ὃ τὰ μόρια μὴ δίϊασι μόρια ἄλλε σώματος· πάνθ', ὅσα ἄρα γινώσκομεν σώματα, εἰσὶ πορώδη· ταῦτα δὲ ἐν διαφόροις ὑποδείγμασιν ἀναπτύξομεν.

α'. Διὰ τῆ ὕδατος δίεισι τὸ φῶς, τὸ πῦρ, πολλὰ μόρια τῆ ἀέρος, καὶ πολλὰ σωμάτων ςερεῶν· τὸν ἀέρα διήκει τὸ φῶς, ἀτμοίτε καὶ ἀναθυμιάσεις τῆς γῆς παντοῖαι· τὸ πῦρ, ἡ φλὸξ φέρ' εἰπεῖν, ἐςὶ διαφανές· δίεισιν ἄρα δι' αὐτῆ τὸ φῶς· παρὰ ταῦτα ὁ ἀὴρ καὶ τὸ πῦρ εἰσὶν ἐλαςικώτατα· τὸ δὲ ἐλαςικὰ εἶναι, ὡς ὀψόμεθα, προϋποτίθησι τὸ εἶναι πορώδη· τὴν γῆν διατρέχει τὸ ὕδωρ τὸ ὑπ' αὐτῆς ἀποῤῥοφώμενον, τὸ πῦρ, ὃ θερμαίνει τε καὶ ἀναφλέγει αὐτήν· ὅτως ἄρα τὰ τέσσαρα ςοιχεῖα εἰσὶ πορώδη.

Τὰ ζωϊκὰ σώματα εἰσὶ πορώδη· δέχονται γὰρ ἐν ἑαυτοῖς μόρια ὑδατώδη, πυρώδη, ἀερώδη· ἄλλα δ' ἐλευθέρως ἐντεῦθεν ἔξεισι διάτε τῆς διαπνοῆς καὶ τῆ ἱδρῶτος. Ταυτὸ ῥητέον καὶ περὶ τῶν φυτῶν· καὶ ταῦτα γὰρ ἐκ τῶν ἐκτὸς προσλαμβάνει ὕδωρ, ἀέρα, μόρια θρεπτικὰ, ἃ ἔνδον κυκλοφορεῖ, ἢ διὰ τῆς διαπνοῆς αὖθις ἐξατμίζεται· ἀλλὰ καὶ τὸ πῦρ αὐτὰ ῥαδίως δίεισιν, ὡς ὕλας καυςάς.

Τὰ μέταλλα δίεισι τὸ πῦρ, ᾧ θερμαίνεταί τε ἢ τήκεται ἢ ἔτι τὰ ἰσχυρὰ ἢ διαλυτικὰ ὕδατα.

Πάντα τὰ ὀρυκτὰ, ὡς λίθοι, μάρμαρα κτ. δίοδον παρέχουσι τῷ πυρὶ, ᾧ θερμαίνεται, ἢ ἀποτιτανοῦται πολλάκις, ἔτι δὲ ἢ τοῖς χρωματιςικοῖς μορίοις· ἢ γὰρ ἢ χρωματίζονται κτ.

63. Εἰ οὖν τὰ βαρύτερα πάντων τῶν ἡμῖν γνωρίμων σωμάτων πόρων εὐμοιρεῖ, πάντα ἔχειν πόρους ῥαδίως συνάγεται· ἐπεὶ γὰρ οὐ τοῖς πόροις, τῇ δὲ ὕλῃ τὸ βάρος παρέπεται, τό,τε βάρος, ὡς ὀψόμεθα, ἀνάλογόν ἐςιν, οὐ τοῖς πόροις, ἀλλὰ τῇ ὕλῃ, ἐπάναγκες ἄρα τῶν ἰσοπαχῶν σωμάτων τὸ βαρύτερον ἐλάττους ἔχειν πόρους· ἀλλὰ τὸ πάντων βαρύτατόν ἐςιν ὁ χρυσὸς, ὃς ὅτι πορώδης ἐςὶ, καταφωρᾶ τὸ τῆκον αὐτὸν πῦρ· ἄρα ἐν γένει πάντα τὰ γνωςὰ ἡμῖν σώματα εἰσὶ πορώδη. Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἐκ τοῦ πορώδους σχεδὸν πᾶσαι ἐκπηγάζουσι τῶν σωμάτων αἱ ἰδιότητες, καθ᾽ ἃς ἡμῖν χρήσιμα γίνεται· εἰ γὰρ τούτων ἠμοίρουν, οὐδ᾽ ἐλατὰ ἂν εἶεν, οὐδὲ θραυςὰ, οὐδ᾽ ἐλαςικὰ, οὐδ᾽ ἠλεκτρικά· εἰ τὰ φυτὰ πόρους οὐκ εἶχεν, οὐδ᾽ ηὔξανον, οὐδὲ προῆγε καρπὸν οὐδένα· τοῦ δ᾽ ἀέρος ἀπόρου ὄντος, οὐδὲ τὸ φῶς διϊὸν εἰς ἡμᾶς ἂν ἐξικνεῖτο, οὐδ᾽ ὑετὸς ὁ ἀναγκαιότατος ἡμῖν κατέπιπτε.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Τὸ τῶν πόρων σχῆμα διάφορόν ἐςιν ἐν σώμασιν ἑτεροειδέσι· τὸ γὰρ σῶμα συναποτελεῖται ἐκ πλειόνων μορίων ὁμογενῶν παρ᾽ ἄλληλα κειμένων· ἀλλὰ τὰ μόρια διαφέρουσιν ἐν διαφόροις εἴδεσι σωμάτων τό,τε σχῆμα ϗ τὸ μέγεθος· τὸ ἄρα κενὸν διαϛημάτιον, ὃ διακρίνει ἀλλήλων ταῦτα τὰ μόρια, ποικίλον ἔσεται τό,τε σχῆμα ϗ τὸ μέγεθος, κατὰ τὸ διάφορον σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος τέτων τῶν μορίων.

ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Τῶν ἰσοταχῶν σωμάτων τὸ κυφότερον πλείυς περιέχει πόρυς, ἢ γῦν μείζονας, τῶν κατὰ τὸ βαρύτερον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τῦ τῶν σωμάτων ἀδιαχωρήτυ.

64. Καταχρηϛικῶς σῶμα διὰ σώματος διήκειν λέγεται, ἡνίκα θατέρυ τὰ μέρη εἴσισι τὰ θατέρυ· ϗ κατὰ τῦτον τὸν λόγον, ἐπεὶ πάντα τὰ σώματα εἰσὶ πορώδη, ἔσονται ϗ διαχωρητά.

65. Κυρίως δὲ διαχωρεῖν σῶμα ἕτερον σῶμα. ἐνυπάρχειν ἐϛὶ πραγματικῶς θατέρυ τὰ μέρη τοῖς θατέρυ.

66. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὰ σώματα εἰσὶν ἀδιαχώρητα.

ΔΕΙΞΙΣ. Ε'ὰν σφαῖρα ἡ Α (σχ. 85) ἑτέρᾳ τῇ Β προσβάλῃ, ἡ Β τῇ Α ἀντιϛήσεται· ἵνα δὲ ἡ Α ἐπὶ τὰ ἐφεξῆς κινηθῇ ἀνάγκη διαφθεῖραι τὴν τῆς Β ἀντίϛασιν, ϗ ἀποκρῦσαι αὐτὴν εἰς τὰ ἔμπροσθεν· ἀλλ' ἐν τοῖς σώμασιν ὐδεμία μεταβολὴ ἀνάγκης ἄτερ γίνεται· εἰ ἄρα ἡ Α κινεῖσθαι συνεχῶς ἠδύνατο, μὴ ἐκτοπίζυσα τὴν Β, μηδ' ἀποβάλλυσά τι τῆς καθ' ἑαυτὴν κινήσεως, ὃ τῇ Β μεταδίδωσιν, εἴτ' ὖν εἰ εἶχε διαπεράσαι τὴν Β, ἀναγκαίως ἂν τῦτ' ἐποίει· δείκνυται ἄρα ἐντεῦθεν ἡ Β ἀδιαχώρητος ὑπὸ τῆς Α.

Ε'ν γένει δὲ, ὁπόσῃ ἄντις ἰσχύϊ συνθλίψειε τὸν ἀέρα, τὸ ὕδωρ, ῥευςὸν ἅπαν, ἢ καὶ ςερεὸν, ἐλαττώσει μὲν δήπȣ τὸν ὄγκον ἐνίων τῶν εἰρημένων σωμάτων, συσφιγγομένων τῶν μεταξὺ πόρων, ἀεὶ δὲ τὰ μόρια τȣ̃ συνθλιϐομένȣ σώματος, ἀλλήλων ἐκτὸς κείμενα φανήσονται. Ο. Ε. Δ.

67. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ ἄρα τῶν σωμάτων ἀδιαχώρητον γενικός ἐςι νόμος τῆς φύσεως.

68. Εἰσὶν ἄῤ ἀπολύτως, εἴτ' ȣ̓̃ν καθ' ἑαυτὰ, ἀδιαχώρητα τὰ σώματα; ἐςιν ȣ̔́τως ἀδύνατον ἡ σώματος διὰ σώματος διαχώρησις, ὡς ȣ̓ δυνατὸν τὰς ἐν παντὶ τριγώνῳ τρεῖς γωνίας μὴ ἐξισȣ̃σθαι δυσὶν ὀρθαῖς; ἀλλ' ἀγνοȣ̃ντες τὴν φύσιν, εἴτ' ȣ̓̃ν τὸ πρῶτον τȣ̃ σώματος ὑποκείμενον, ȣ̓́θ' ὡς δύναται, ȣ̓́θ' ὡς ἀδυνατεῖ, μετὰ λόγȣ εἰπεῖν δυνάμεθα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τȣ̃ κενȣ̃.

69. Κενόν ἐςι τόπος, ἢ μέρος τόπȣ, σωμάτων ἄνευ· πλῆρες δὲ τȣ̓ναντίον, τόπος, ȣ̔̃ πάντα τὰ μέρη ὕλης μορίων γέμȣσι.

70. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Οὐδὲν ἐπὶ τῆς γηΐνης σφαίρας διάςημα πεπερασμένον ἀπολύτως ἐςὶ πλῆρες· ἐπεὶ γὰρ πόροι ὑπάρχȣσι πᾶσι τοῖς γηΐνοις σώμασιν, ἔσονται ἐξ ἀνάγκης μέρη τȣ̃ διαςήματος, οἷς μηδὲν ἐνυπάρχει μέρος ὕλης, εἴτ' ȣ̓̃ν πάντες, ȣ̔̀ς τὸ σῶμα ἐμπεριέχει, οἱ πόροι.

71. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐν γένει ἐπὶ τῶν γηΐνων σωμάτων πλεῖόν ἐςι τὸ κενὸν, ἢ τὸ πλῆρες· ὁ γὰρ χρυ-

σὸς ἀναμφηρίςως ἔχει πόρους (63), ϗ οὐκ ἔςι πλῆρες ἀκριβῶς· ἔςω δὲ καθ' ὑπόθεσιν πόρων ἄνευ ὁ χρυσὸς, ϗ ἐξητάσθω δι' αὐτοῦ ἡ ἐν τοῖς ἄλλοις τῶν σωμάτων ποσότης τοῦ κενοῦ· ἐπεὶ τοίνυν τῷ διαςήματι οὐδέν ἐςι βάρος, (17), τὸ τῶν σωμάτων βάρος οὐκ ἂν γένοιτο ἐκ τῶν πόρων, ἀλλ' ἐκ μόνων τῶν ὑλικῶν μορίων· οὕτως οὖν αὐτό τε καθ' ἑαυτὸ φαίνεται εἶναι, ϗ ἡμῖν εἶτα δειχθήσεται, τὸ βάρος ἀνάλογον ἔχειν, οὐ τῇ ἐκτάσει τοῦ σώματος, ἀλλὰ τῇ ὕλῃ, εἴτ' οὖν τῷ ἀριθμῷ τῶν ἐμπεριεχομένων ςερεῶν μορίων· ἀλλὰ κυβικοῦ δακτύλου χρυσοῦ τὸ βάρος πρὸς τὸ κυβικοῦ δακτύλου ὕδατος λόγον ἔχει ὃν 19 : 1· ὁ ἀριθμὸς ἄρα τῶν πόρων τοῦ ὕδατος, εἴτ' οὖν τῶν κενῶν μερῶν πρὸς τὰ πλήρη αὐτοῦ τοῦ ὕδατος λόγον ἔχει, ὃν 19 : 1.

Δακτύλου κυβικοῦ ἀέρος ἐν τῷ ὁρίζοντι τὸ βάρος ἔςι περίπου $\frac{1}{950}$ κυβικοῦ δακτύλου ὕδατος, ϗ ἑπομένως $\frac{1}{950 \times 19} = \frac{1}{1805}$ δακτύλου κυβικοῦ χρυσοῦ· ἔςιν οὖν ἀέρος πρὸς τῇ γῇ ὄντος, ϗ ἔτι, εἰς ἰσχυροτέραν τοῦ λεγομένου ἐμπέδωσιν, τοῦ ἐν τῇ ὑπερτάτῃ ἀτμοσφαίρᾳ, τὰ κενὰ πρὸς τὰ πλήρη :: 1805 : 1.

72. Περὶ δὲ τῆς γῆς, εἰλήφθω ἡ μᾶλλον συμπαγὴς, ἡ ἄργιλλος, ἧς τὸ βάρος διπλάσιον σχεδόν ἐςι τοῦ τοῦ ὕδατος· βάρος οὖν ἀργίλλου ποδὸς κυβικοῦ πρὸς τοσοῦτο χρυσοῦ λόγον ἔχει, ὃν 1 : 9· τὰ τῆς ἀργίλλου ἄρα κενὰ πρὸς τὰ πλήρη αὐτῆς ἐςιν ὡς 9 : 1· τῆς δὲ πυρίτιδος, ἐπεὶ τὸ βάρος ἔςι πρὸς τὸ τοῦ ὕδατος $2\frac{1}{2}$: 1, λόγον ἔξει πρὸς τὸ τοῦ χρυσοῦ ὡς σχεδὸν 8 : 1· τούτου οὖν τὰ κενὰ πρὸς τὰ πλήρη εἰσὶν ὡς 8 : 1.

Δῆλον ἄρα, ὡς, τοῦ χρυσοῦ ὡς ὅρου συγκρίσεως λαμβανομένου, καὶ πόρων ἀμοίρου τιθεμένου, ἔν τε τῇ γῇ κἀν τῇ ἀτμοσφαίρᾳ ἀσυγκρίτως πλείω εἰσὶ τὰ κενὰ ἢ τὰ πλήρη· ἔχει μέντοι καὶ ὁ χρυσὸς αὐτὸς κενὰ, καὶ ταῦτα τυχὸν πλείω, ἢ τὰ πλήρη· ἀλλ᾽ αὐτοῦ τῶν πόρων τὴν δύναμιν εὑρεῖν οὐ δυνάμεθα, πρὶν περιτύχωμεν σώματι πόρων ἀμοιροῦντι, οἵῳ ἐς δεῦρο οὐ περιετύχομεν, πρὸς ὃ ἂν παραβάλλοιμεν τὸ τοῦ χρυσοῦ βάρος.

73. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Οἱ περὶ Καρτέσιον καὶ τοὺς πόρους ὑποτίθενται πλήρεις ὕλης, ἀπολύτως μέντοι ἀβαροῦς· τοῦθ᾽ ὅπερ ἐν τοῖς ἐφεξῆς ἀπελεγχθήσεται ἄτοπον.

74. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ὅτι ἀδυνάτως ἔχει ἡ τοῦ πλήρους ὑπόθεσις, τὸ δὲ κενὸν πάντως ὑπάρχει, περὶ τοῦ φυσικοῦ συστήματος τοῦ κόσμου διαλαμβάνοντες, ἐν γένει ἐπὶ τῶν γηΐνων καὶ οὐρανίων σωμάτων ἀκριβέστερον ἀποδείξομεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τῆς τῶν σωμάτων πυκνότητος.

75. Μάζα τοῦ σώματός ἐστι τὸ ἄθροισμα τῶν στερρῶν μορίων, ἀφ᾽ ὧν συντίθεται τὸ σῶμα, εἴτ᾽ οὖν ἡ ὁλικὴ αὐτοῦ ὕλη, ἀφαιρουμένων τῶν πόρων. Ὄγκος δὲ σώματος, τὸ πάχος τοῦ σώματος, ἢ τὸ, ὃ ἐπέχει, διάστημα· ἐντεῦθεν ἄρα α΄. παντὸς σώματος πόρων ἀμοιροῦντος ἡ μάζα ἰσοῦται τῷ ὄγκῳ· β΄. πάντων τῶν ἡμῖν γνωρίμων σωμάτων ἡ μάζα ἐλάττων ἐστὶ τοῦ ὄγκου.

Πυκνότης καλεῖται, ὅτε τι σῶμα πλείω ἢ ἐλάττω μάζαν ἐν δεδομένῳ ὄγκῳ περιέχει· οὕτω φέρε πους κυβικὸς χρυσῦ ἐννεακαιδεκαπλάσια περιέχει μόρια, ἤ πῦς κυβικὸς ὕδατος· φασὶν ὖν, ὡς τῦ χρυσῦ ἡ πυκνότης πρὸς τὴν τῦ ὕδατος ἐςὶν ὡς 19 : 1.

76. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ μάζα τῶν σωμάτων ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ ὄγκυ ϗ τῆς πυκνότητος.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἰλήφθωσαν τέσσαρες δάκτυλοι χρυσῦ ϗ εἷς ὕδατος· φημὶ ὖν, ὅτι, κληθείσης τῆς τῦ ὕδατος μάζης 1, δυνατὸν ἐκλαβεῖν αὐτὴν ὡς γινόμενον ὑπὸ τῦ ὄγκυ, ϗ τῆς 1 πυκνότητος· ἡ δὲ τῦ χρυσῦ μάζα ἔςαι $= 4 \times 19 = 76$· ἐπεὶ γὰρ δάκτυλος χρυσῦ περιέχει μάζαν ἐννεακαιδεκαπλάσιον, ἤ δάκτυλος ὕδατος, τέσσαρες χρυσῦ δάκτυλοι περιέξυσι 4×19· ὕτως ἡ μάζα τῦ δακτύλυ τῦ ὕδατος ἔσεται 1×1, ἡ δὲ τῶν τεσσάρων χρυσῦ, 4×19, εἶτ' ὖν ἴση τῷ γινομένῳ ἐκ τῦ ὄγκυ ϗ τῆς πυκνότητος.

Δῆλον δὲ ἐν γένει, ὅτι, ὅσῳ μείζων ὁ ὄγκος ἐν τῇ αὐτῇ πυκνότητι, ϗ ὅσῳ ἡ πυκνότης μείζων ἐν τῷ αὐτῷ ὄγκῳ, τοσύτῳ μείζων ἔςαι ἡ μάζα· ἄρα ἔςιν ἡ μάζα ἴση τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ ὄγκυ ϗ τῆς πυκνότητος. Ο. Ε. Δ.

77. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἄρα αἱ δύω, ἤ πλειόνων σωμάτων, μάζαι ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθέτῳ ὑπό τε τῶν ὄγκων, ϗ τῶν πυκνοτήτων· εἰσὶ γὰρ γινόμενα ἐκ τῶν ὄγκων ϗ τῶν πυκνοτήτων· τὰ δὲ, ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθέτῳ τῷ ἐκ τῶν παραγόντων (Συμβ. Λογ. 291.)

78. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Αἱ μάζαι δύω σωμάτων, ὧν οἵτε ὄγκοι ϗ αἱ πυκνότητες ἴσαι, ἤ ὧν οἱ ὄγκοι ἀντιςρόφως ἔχυσιν ὡς αἱ πυκνότητες, εἰσὶν ἴσαι (Συμβ. Λογ. 301, 303)· δύω γὰρ δάκτυλοι ἀπέφθυ χρυσῦ εἰσὶν ἴσοι δυσὶ δακτύλοις ἀπέφθυ χρυσῦ· ϗ 38 δάκτυλοι ὕδατος τὴν αὐτὴν μάζαν ἔχυσι δυσὶ δακτύλοις χρυσῦ.

79. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Σωμάτων, ὧν οἱ ὄγκοι ἴσοι, αἱ μᾶζαι εἰσὶν ὡς αἱ αὐτῶν πυκνότητες, ὧν δὲ ἴσαι αἱ πυκνότητες, αἱ μᾶζαι εἰσὶν ὡς οἱ ὄγκοι (Συμϐ. Λογ. 306. Τόμ. Α΄.).

80. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Σωμάτων, ὧν αἱ μᾶζαι ἴσαι, οἱ ὄγκοι ἐν λόγῳ εἰσὶν ἀντιθέτῳ τῶν αὐτῶν πυκνοτήτων· αἱ δὲ πυκνότητες, ἐν ἀντιθέτῳ λόγῳ τῶν ὄγκων (Συμϐ. Λογ. 259. Τόμ. Α΄.).

81. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἐκ τῶν τριῶν τούτων, μαζῶν, ὄγκων, καὶ πυκνοτήτων, δύω δοθέντων, ῥᾷστα τὸ τρίτον εὑρεθήσεται· ἐὰν γὰρ ὦσι γνωστὰ ὁ ὄγκος καὶ ἡ πυκνότης, τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον δηλώσει τὴν μᾶζαν (76)· ἐὰν δὲ ἡ μᾶζα καὶ ὁ ὄγκος, τὸ τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου διαιρεθέντος πηλίκον ἐμφανεῖ τὴν πυκνότητα· τέλος δὲ γνωστῶν ὄντων τῆς μάζης καὶ τῆς πυκνότητος. τὸ ἐκείνης διαιρεθείσης διὰ ταύτης πηλίκον σημανεῖ τὸν ὄγκον (Ἀρ. 108).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Περὶ ἀδρανείας τῶν σωμάτων.

82. Ἀδράνεια τῶν σωμάτων ἐστὶ καθαράτις ἀδυναμία, καθ᾽ ἣν τὰ σώματα αὐτὰ ἑαυτὰ προσδιορίσασθαι οὕτως ἢ ἐκείνως ἔχειν οὐ δύνατα, οὔτ᾽ οὖν οὐδεμίαν σφίσιν αὐτοῖς ἐμποιῆσαι μεταβολήν.

83. Μενεῖ ἄρα ὡς ἔχον ἐστὶν, ἕστ᾽ ἂν ἐξωτερική τις αἰτία ἐμποιήσῃ αὐτῷ τινα μεταβολήν· αὕτη οὖν ἡ ἰδιότης, καθ᾽ ἣν τὰ σώματα διατηρεῖ, ἧς ἔτυχε, τὴν κατάστασιν, καλεῖται ἀδράνεια.

84. Ἐκ ταύτης ἐν ἀνθίςαται τὰ σώματα τοῖς τὴν, ἣν ἔχουσι, κατάςασιν ἀποθέσθαι αὐτὰ βιαζομένοις· ἐχ' ὅτι ἐπενεργεῖ ταῖς ἐξωτερικαῖς αἰτίαις· πῶς γὰρ ἡ καθαρὰ ἀδυναμία, ἢ μᾶλλον πάθος, ἡ δύναμις; ἀλλ' ὅτι ἐκ τῆς αἰτίας τὸ ἀδρανὲς ἀποβάλλει ἢ ῥάθυμον οἱονεὶ ἀναλόγως τῇ προσβαλλούσῃ αἰτίᾳ.

85. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ ἀδράνεια ἐςὶν ἰδιότης καθολικὴ πάντων τῶν σωμάτων.

ΔΕΙΞΙΣ. Πάντα γὰρ τὰ σώματα καθαρῶς ἡμῖν παρίςαται παθητὰ, εἴτ' ἐν ἑαυτοῖς ἐμποιῆσαι μεταβολήν τινα μὴ δυνάμενα· πάντα ἄρα διατηρεῖν τὴν ἑαυτῶν κατάςασιν σπεύδουσι· πάντα τε ἀντιςήσεται τοῖς ἀπὸ τῆς πρὶν αὐτὰ κατεςάσεως μετακινῆσαι πειρωμένοις· πάντα ἄρα τῆς ἀδρανείας εἰμοιρεῖ. Ο. Ε. Δ.

86. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Οὐδέποτε τοῖς σώμασι μεταβολήτις συμβαίνει ἀναίτιος.

87. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐν τοῖς σώμασι τὸ ἀποτέλεσμα ἐςὶν ἀνάλογον τῇ αἰτίᾳ· ἢ γὰρ, ἐπεὶ οὔτε τὸ σῶμα τὸ ἐνεργοῦν, οὔτε τὸ σῶμα τὸ δεχόμενον τὴν ἐνέργειαν, οὐ δύνανται ἑαυτοῖς προσδιορίσασθαι τὸν βαθμὸν τοῦ ἀποτελέσματος, ἡ αἰτία ἀναγκαίως παράξει ἅπαν τὸ ἀποτέλεσμα· ἄρα τὸ ἀποτέλεσμα ἀνάλογον ἔςαι τῇ δυνάμει τῆς αἰτίας.

88. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἡ ἀντίςασις, ἢ ἀντενέργησις, ἐςὶν ἴση τῇ ἐνεργείᾳ· ἐὰν γὰρ ἡ δύναμις τῆς αἰτίας τοσαύτη ᾖ, ὅση παράγειν ἀποτέλεσμα βαθμοῦ Α, ἢ βαθμοῦ Β κτ., ἡ προαχθεῖσα μεταβολὴ ἰσωθήσεται τῇ δυνάμει τῆς αἰτίας, ἤ, εἰ δόξειεν, ἐκκενώσει τῆς δυνάμεως τὴν αἰτίαν.

89. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἡ ἀδράνεια ἀνάλογός ἐςι τῇ

μάζῃ τῶν σωμάτων· ἐπεὶ γὰρ ἕκαστον σωμάτιον, ἀφ' ὧν σύγκειται τὸ ὅλον, τὴν ἑαυτοῦ ἀδράνειαν ἔχον, ἀνθίσαται τῇ αἰτίᾳ, ἡ ὅλη ἀντίςασις ἔςαι διπλῆ, τριπλῆ κτ. τό,τε προαγόμενον ἐκ τῆς ἀντιςάσεως ἀποτέλεσμα ἔςαι διπλοῦν, τριπλοῦν κτ.· καὶ δὴ τῇ αἰτίᾳ δεήσει δυνάμεως διπλῆς, τριπλῆς κτ.· ἡ ἄρα ἀντίςασις, ἡ ἀδράνεια, ἀνάλογος ἔςαι τῆς μάζῃ.

90. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Η' ἀδράνεια τῶν σωμάτων ἐςιν ἀνάλογος τῷ βάρει αὐτῶν· ἡ γὰρ ἀδράνεια ἀνάλογός ἐςι τῇ μάζῃ· ἀλλ', ὡς ὀψόμεθα, καὶ τὸ βάρος ἐςιν ἀνάλογον τῇ μάζῃ· ἄρα κτ.

91. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Τὴν ἀδράνειαν μέντοι τῶν σωμάτων ἥκιςα συγχυτέον τῷ βάρει· ἡ γὰρ ἀδράνεια σπουδή τις ἐςι τῶν σωμάτων, καθ' ἣν ἐναπομένειν ἐθέλουσι τῇ ἑαυτῶν καταςάσει, εἴτε ἠρεμίᾳ, εἴτε κινήσει, σχήματι τριγωνικῷ, τετραγωνικῷ, χρώματι ἐρυθρῷ, κυανῷ κτ.· ὅπερ ὡς δῆλον, ἕτερόν ἐςιν ἢ τὸ βάρος· β΄. σῶμά τι πληγὲν, ὥςε κινηθῆναι ἐφ' ὁριζοντείου ἐπιπέδου, ἀνθίςαται, καὶ καταργεῖ πᾶσαν τὴν παρ' ἐμοῦ δύναμιν, δεχόμενον τὴν μεταβολὴν, ἢ τὴν ταχύτητα, ἣν ἡ ἐμὴ δύναμις αὐτῷ ἐνεργάζεται· ἀλλὰ δῆλον, ὡς αὕτη ἡ ἀντίςασις, ἐν γοῦν τῇ ὁριζοντείῳ κινήσει, οὐκ ἤρτηται ἀπὸ τῆς βαρύτητος, εἴγε ἡ ὁριζόντιος κίνησις οὔτε ἀντίκειται, οὔτε συντελεῖ τι τῇ βαρύτητι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ κινήσεως.

92. Ἡ ἐν γένει φυσικὴ ἐξετάζει ὡς εἴρηται (2) τὰς κοινῇ παντὶ σώματι προσέσας ἰδιότητας· τοιᾶδε εἰσὶ, προϋποτεθέντων τᾶτε δίκην βάσεως προϋποβαλλομένυ πρώτυ ὑποκειμένυ, εἴτ᾽ ἂν τῆς ἐσίας, ᾗ τῆς ὑπάρξεως τῶν σωμάτων, ἡ διαίρεσις, τὸ ἀδιαχώρητον, τὸ πορῶδες, ἡ κίνησις, ᾗ ἡ βαρύτης· ᾗ τὰ μὲν ἄλλα κοινῇ ἐνυπάρχοντα ἁπάσῃ ὕλῃ, ἐδὲν τοιᾶτο περιέχουσιν, οἷον πολλῶν ἐπιδεῖσθαι εἰς ἀνάπτυξιν· διὸ ᾗ συντόμως πάνυ διήνυςαι.

93. Ἡ δὲ κίνησις, ταυτὸν δ᾽ εἰπεῖν ἡ βαρύτης, ἥτις ἐςὶν ἐπιῤῥέπεια πρὸς κίνησιν, ἔςιν αἰτία πάντων τῶν ἀποτελυμένων, ᾗ φαινομένων ἐν τῇ φύσει, ᾗ ὅτως εἰπεῖν ψυχὴ τῶν ἁπάντων· ἀνθ᾽ ὅτυ δὴ αἱ κατ᾽ αὐτὴν ἰδιότητες ἐπιδεκτικαί εἰσι ᾗ ἀκριβεςέρων δείξεων· ἔςι δὲ τᾶτο τὸ μέρος τῆς Φυσικῆς, ὃ ἀντιποιεῖται μάλιςα ἡ Μαθηματικὴ, ᾗ ὅπερ ἂν ἀξίως ἐγκαλλωπίζοιτο τῷ τῆς ἐπιςήμης ὀνόματι.

94. Κίνησις ἔςι μετάβασις σώματος ἀπὸ τόπυ εἰς τόπον· ἠρεμία δὲ ςάσις τᾶ σώματος ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ· διακρίνεται δὲ ἐπὶ τῆς κινήσεως μάλιςα τέτταρα ταῦτα· κίνησις, φορὰ, ταχύτης, ᾗ ποσότης τῆς κινήσεως.

95. Ἐκ τῆς τῶν σωμάτων ἀδρανείας, εἴτ᾽ ἂν τῆς γενικῆς αὐτῶν ἰδιότητος, καθ᾽ ἣν ἕκαςα τῇ αὐτῶν καταςάσει εναπομένειν ἐθέλει (83), συναχθείη ἂν δίχα δείξεως ἄλλης τὰ ἐφεξῆς πορίσματα.

96. ά. Τὸ ἠρεμῦν ἀεὶ καθηρεμήσει, ἕςτ' ἂν εἰς κίνησιν αὐτὸ τρέψῃ ἐξωτερικήτις αἰτία.

97. β'. Τὸ κινέμενον ἀεὶ κινηθήσεται, ἕςτ' ἂν αἰτία ἐξωτερικὴ αὐτὸ ςήσῃ.

98. γ'. Τὸ κινέμενον διατηρήσει ἀεὶ τὴν αὐτὴν ταχυτῆτα, ἕς τ' ἂν αὐτὴν αἰτία ἐξωτερικὴ αὐξήσῃ, ἢ γῦν ἐλαττώσῃ.

99. δ'. Ἐντεῦθεν ἄρα, ἀφαιρεθέντων τῆς βαρυτῆτος, τῆς ἀντιςάσεως τῦ, δι' ὃ κινεῖται τὸ σῶμα, τῆς τριβῆς, ϗ ἄλλων κωλυμάτων, ἃ δύναται ἀναχαιτίσαι τὴν κίνησιν, τὸ περὶ τῆς αἰδίυ κινήσεως πρόβλημα ἐπιλυθήσεται, εἴγε τῶν κωλυμάτων ἀρθέντων, αἰδίως τὸ κινεῖσθαι ἀρξάμενον κινηθήσεται.

100. Ἀλλὰ γὰρ εἰσὶν ἀεὶ τοιάδε ἐμπόδια τοῖς γηΐνοις σώμασι· ϗ ἡ αἴδιος κίνησις, ὑπὲρ γηΐνης τινὸς μηχανῆς, θεωρεῖται ὡς ἀδύνατος· ἐπεὶ ά. ἅπαν γήϊνον σῶμα ἐν τῷ ἀέρι κινεῖται· ϗ γὰρ ϗ ἐν αὐτῷ τῷ κενῷ τῆς πνευματικῆς ἀντλίας δοχείῳ, ἀναγκαίως λείπεταί τι ἀέρος, ὡς ὀψόμεθα· ὁ δὲ ἀὴρ ἀντίκειται τῇ κινήσει τῶν σωμάτων, ϗ ἀδιαλείπτως αὐτὴν ἐπιβραδύνει· β'. ἀδύνατον ὅλως μηχανὴν κινεῖσθαι ἄνευ τινὸς οἱασῦν τριβῆς· ἀλλ' ἡ τριβὴ, ὅσον ἂν ᾖ ἐλαχίςη, ἐπιβραδύνει ἀεὶ τῆς μηχανῆς τὴν κίνησιν.

101. έ. Σῶμά τι κινέμενον τὴν αὐτὴν ἀεὶ φορὰν κινηθήσεται, μέχρις ἂν αἰτία ἐξωτερικὴ τῆς φορᾶς ταύτης παρεκτρέψῃ.

102. Ἐντεῦθεν ἄρα δῆλον, ὡς ἅπαν σῶμα κατ' εὐθεῖαν φέρεσθαι τείνει· εἴγε ἀεὶ τὴν αὐτὴν φορὰν τηρεῖν ἐπείγεται· πολλὰ δὲ σημεῖα ἐπὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς κείμενα συνιςῶσι τὴν εὐθεῖαν (Γεωμ. 12 Τόμ. Β'.).

103. ς'. Ἡ φύσις τῦ σώματος ἐπίσης ἐςὶν ἐπιδεκτικὴ τῆς τε κινήσεως ϗ τῆς ἠρεμίας· ὐ γὰρ ἀπαιτεῖ τὴν κίνησιν· ἢ ὐκ ἂν ἠρέμει· ὐδὲ τὴν ἠρεμίαν, εἴπερ ἀδύνατον ἦν κινηθῆναι· δέχεται ἄρα τήντε κίνησιν ϗ τὴν ἠρεμίαν· ἐπειδὴ δὲ τὰ σώματα καθαρῶς εἰσὶ παθητικὰ, δυνατὸν ἐκ τύτυ, ἤτοι καθηρεμεῖν, δύω ἐξῆς λεπτὰ μένον ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ, ἢ ἐν μὲν τῷ Α λεπτῷ κεῖσθαι καθ' ἕνα τόπον, ἐν δὲ τῷ Β κατ' ἄλλον, ὅ ἐςι κινεῖσθαί τι σῶμα.

104. Ἀλλ' ἔμπης ἡ ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ τῶν σωμάτων ςάσις ἐςὶν ἀεὶ, ἣν σπεύδει διατηρεῖν τὰ σώματα, μέχρις ἂν ἐπιγενομένη ἐξωτερική τις αἰτία τῦ τόπυ αὐτὰ μεταςήσῃ· ἄρα ἡ φυσικὴ τῶν σωμάτων κατάςασις ἐςὶν ἡ ἠρεμία· εἴτι ἄρα κινεῖται, κἂν ὐράνιον, κἂν ἐπίγειον, ἀπ' ἐξωτερικῆς ἡςτινοσῦν αἰτίας τὸ ἐνδόσιμον προσλαμβάνει τῆς κινήσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ ταχυτῆτος.

105. Χρόνος μὲν καλεῖται τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκαριαίων σημείων, ἐν οἷς τὸ σῶμα κινεῖται. Διάςημα δὲ, ὁ ἀριθμὸς τῶν μερῶν τῦ τόπυ, ὃν διανύει ἐν τύτῳ τῷ χρόνῳ τὸ κινέμενον. Ταχύτης δὲ, ὁ ἀριθμὸς τῶν τῦ τόπου μερῶν, ἃ διανύει ἐν ὡρισμένῳ μέρει τῦ χρόνου.

106. Ἰσομερῶς κινεῖσθαι τὰ σώματα λέγεται, ὅταν ἴσοις χρόνοις ἴσα διανύῃ διαςήματα· οἷον, εἰ ἐν λεπτῷ τῆς ὥρας διανύοι διάςημα ποδῶν 15, ϗ ἐν τῷ ἑξῆς

λεπτῷ ἄλλα 15, ϗ ἐν τέσσαρσι τυχὸν 60· ἡ μὲν οὖν κίνησις καλεῖται τηνικαῦτα ἰσομερὴς, τὴν δὲ ταχυτῆτα ἐμφανοῦσιν οἱ 15 πόδες.

107. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐν τῇ ἰσομερεῖ κινήσει τὸ διάστημα ἰσοῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ χρόνου ϗ τῆς ταχυτῆτος.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπείπερ χρόνος ἐστὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκαριαίων σημείων, ἐν οἷς τὸ σῶμα κινεῖται, ταχυτὴς δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν τοῦ τόπου μερῶν, ἃ τὸ κινούμενον διανύει ἐν ἑνὶ σημείῳ, ἡ δὲ ταχυτὴς ἀεὶ ἐν ἑκάστῳ σημείῳ ἐστὶν ἡ αὐτὴ, τῆς κινήσεως ἰσομεροῦς οὔσης· σαφές ἐστιν, ὅτι τὸ διάστημα ὁ ἀριθμός ἐστι τῶν σημείων, ἢ τοῦ χρόνου, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὰ μέρη, εἴτ' οὖν τὴν ταχυτῆτα· οὕτως ἀνωτέρω τὸ διάστημα ποδῶν 60, ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ταχυτῆτος 15, ϗ τοῦ χρόνου 4. Ο. Ε. Δ.

108. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν οὖν, ἡ μὲν ταχυτὴς κληθῇ Τ, τὸ δὲ διάστημα Δ, ὁ δὲ χρόνος Χ, ἐπεὶ, ὡς δέδεικται, ἐστὶ $\Delta = T \cdot X$, ἄρα $T = \frac{\Delta}{X}$, ϗ $X = \frac{\Delta}{T}$ (Ἀριθμ. 108), εἴτ' οὖν „ἡ μὲν ταχυτὴς ἐξισοῦται τῷ ἐκ τοῦ „διαστήματος διαιρεθέντος διὰ τοῦ χρόνου προϊόντι πηλίκῳ, „ὁ δὲ χρόνος τῷ τοῦ διαστήματος, διὰ τῆς ταχυτῆτος.“

109. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τὰ διανυόμενα διαστήματα ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθέτῳ τῷ ἐκ τῶν χρόνων ϗ τῶν ταχυτήτων· ἐξ αὐτῶν γὰρ παράγονται (Συμβ. Λογ. 291).

110. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐὰν ἄρα ὦσιν οἱ χρόνοι ἴσοι, τὰ διαστήματα ἔσονται, ὡς αἱ ταχυτῆτες· ἐὰν δ' ἴσαι αἱ ταχυτῆτες, ὡς οἱ χρόνοι (Συμβ. Λογ. 367)· τέλος δὲ ἐὰν οἱ χρόνοι ϗ αἱ ταχυτῆτες ἴσα ὦσιν, ἢ γοῦν ἐὰν οἱ χρόνοι ἐν ἀντιστρόφῳ λόγῳ ὦσι τῶν ταχυτήτων, τὰ διαστήματα ἴσα ἔσονται (Συμβ. Λογ. 301, 303).

111. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Τῶν διαςημάτων ἴσων ὄντων, αἱ ταχυτῆτες ἔσονται ἀντιςρόφως ὡς οἱ χρόνοι, οἱ δὲ, ἀντιςρόφως ὡς ἐκεῖναι. (Συμβ. Λογ. 259).

112. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Ἐν γένει δὲ, τὰ μὲν διαςήματα ἔσονται ἐν λόγῳ εὐθεῖ συνθέτῳ ἐκ τῶν χρόνων ϗ τῶν ταχυτήτων (Συμ. Λ. 291, 107)· αἱ δὲ ταχυτῆτες ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τȣ̃ εὐθέος μὲν τῶν διαςημάτων, ἀντιςρόφȣ δὲ τῶν χρόνων· οἱ δὲ, ἐκ τȣ̃ εὐθέος μὲν τῶν διαςημάτων, ἀντιςρόφȣ δὲ τῶν ταχυτήτων.

113. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ'. Ἐκ τῶν τριῶν, διαςήματος, χρόνȣ, ϗ ταχυτῆτος, δύο δοθέντων, δοθήσεται ϗ τὸ τρίτον· τὸ μὲν γὰρ γινόμενον ὑπὸ τȣ̃ χρόνȣ ϗ τῆς ταχυτῆτος δίδωσι τὸ διάςημα (107)· τὸ δὲ διάςημα, διαιρεθὲν μὲν διὰ τȣ̃ χρόνȣ, δίδωσι τὴν ταχυτῆτα, διαιρεθὲν δὲ διὰ τῆς ταχυτῆτος, τὸν χρόνον (Ἀριθμ. 108).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ ποσȣ̃ τῆς κινήσεως.

114. Ἰ σ χ ὺ ς καλεῖται ἡ εἰς κίνησιν ἐπιῤῥέπεια σώματος, ὥςε ἀποτέλεσμα ἐμποιῆσαι ἑτέρῳ σώματι· ἐπεὶ ἄρα τὸ σῶμα ἀποτέλεσμα ȣ̉δ' ὅ,τιȣ̃ν παράγει, εἰ μὴ διὰ κινήσεως, πᾶσα ἡ δύναμις τῶν σωμάτων ἐκ τȣ̃ ποσȣ̃ τῆς κινήσεως γίνεται, ϗ ταύτῃ ἐςὶν ἀνάλογος.

115. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ ποσότης τῆς κινήσεως σώματός τινος ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς μάζης ϗ τῆς ταχυτῆτος.

ΔΕΙΞΙΣ. Σώματι, λιτρῶν 3 φέρε, διανύει ἐν λεπτῷ δευτέρῳ ὀργυιὰς 5· ἰσοδυναμήσει ἄρα σώμασι τρισὶν, ἑκάςῳ λίτρας μιᾶς, ὧν ἕκαςον διανύει ὀργυιὰς 5· ἀλλ' ἐςὶ σαφὲς, ὡς ἡ ἰσχὺς, εἴτ' ἓν ἡ ποσότης τῆς κινήσεως, ἣν κινεῖται τὸ τριῶν λιτρῶν σῶμα, ἔσεται πρὸς τὴν ποσότητα τῆς κινήσεως σώματος μιᾶς λίτρας, ὡς 15 : 5· ἢ ὡς ἡ ταχυτὴς 5 πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὴν μάζαν 3 πρὸς τὴν ταχυτῆτα 5 πολλαπλασιαζομένην ἐπὶ τὴν μάζαν 1.

Ἐν γένει ἄρα ἡ ποσότης τῆς κινήσεως ἐςὶν = ΜΤ, τᾶ μὲν Μ τὴν μάζαν δηλᾶντος, τᾶ δὲ Τ τὴν ταχυτῆτα Ο. Ε. Δ.

116. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Αἱ ποσότητες τῆς κινήσεως τῶν σωμάτων ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθέτῳ τῷ ἔκτε τῶν μαζῶν ϗ τῶν ταχυτήτων (Συμϐ. Λογ. 291).

117. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Δύω σώματα, ἢ πλείω, τὴν αὐτὴν ἕξουσι ποσότητα τῆς κινήσεως, ἤτοι ἡνίκα ὦσιν ἴσαι αἵτε μάζαι αὐτῶν, ϗ αἱ ταχυτῆτες, ἢ ἡνίκα αἱ μάζαι ἀντιςρόφως εἰσὶν, ὡς αἱ αὐτῶν ταχυτῆτες. (Συμϐ. Λογ. 301, 303).

118. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐντεῦθεν ἄρα σῶμα, ἴσον φέρε λίτρα, τὰ αὐτὰ ἀποτελέσαι δυνήσεται, ἃ ϗ σῶμα, ἴσον τυχὸν λίτραις 1000, ἐὰν χιλιοπλασίῳ φέρηται ταχυτῆτι (117).

119. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Δεῖ ἄρα τῇ κινητικῇ αἰτίᾳ δυνάμεως ἴσης, ὥςε τῷ μιᾷ λίτρᾳ ἴσῳ σώματι ταχυτῆτα ἐμποιῆσαι, καθ' ἣν ἂν διανύσῃ χιλίας ὀργυιὰς ἐν ἑνὶ λεπτῷ, τῷ δὲ ἴσῳ λίτραις 1000, ὥςε διανύσαι ὀργυιάν.

120. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀεί ποτε γενικῶς θεωρᾶντες τὰ περὶ κινήσεως, ὑποτιθέμεθα αὐτὴν, ὡς εἰ μηδὲν παρενεποδίζετο ἔθ' ὑπὸ τῆς τᾶ ἀέρος ἀντιςάσεως, ἔθ' ὑπὸ

τῆς τριβῆς, ἢ ἄλλων κωλυμάτων· καίτοι γὰρ σῶμα ἴσον λίτραις 1000 διανύει ἐν ἑνὶ λεπτῷ ὀργυὰν μίαν, τὸ μὲν ἴσον ὀργυᾷ μιᾷ τῇ αὐτῇ ἰχύϊ κινηθὲν ὀ διανύσει ὀργυὰς 1000 ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, διά τε τὴν διάφορον τοῦ ἀέρος ἀντίςασιν, καὶ τὴν διάφοραν τριβὴν, ὡς φανήσεται ἐν τοῖς ἑξῆς.

121. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Τῶν μαζῶν ἴσων ὀσῶν, αἱ ποσότητες τῆς κινήσεως, ἔσονται ὡς αἱ ταχυτῆτες· τοῦ των δὲ ἰσουμένων, αἱ ποσότητες τῆς κινήσεως ἔσονται ὡς αἱ μάζαι (Συμβ. Λογ. 306).

122. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ΄. Τῶν τῆς κινήσεως ποσοτήτων ἰσουμένων, αἱ μάζαι ἔσονται ἀντιςρόφως ὡς αἱ ταχύτητες, αἱ δε ἀντιςρόφως ὡς αἱ μάζαι (Συμβ. Λογ. 259).

123. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Ἐκ τῶν τριῶν τούτων, ποσότητος τῆς κινήσεως, μάζης, ταχύτητος, δύο δοθέντων, ῥᾶςα καὶ τὸ τρίτον δοθήσεται· τὸ γὰρ γινόμενον ὑπὸ τῆς μάζης καὶ τῆς ταχυτῆτος ἐμφαίνει τὴν ποσότητα τῆς κινήσεως (115)· αὕτη δὲ διαιρεθεῖσα διὰ τῆς μάζης ἀποδίδωσι τὴν ταχύτητα, διὰ δὲ τῆς ταχυτῆτος τὴν μάζαν (Ἀριθμ. 108)· ἔςω γὰρ σῶμα ἴσον 10 λίτραις, δυνάμενον διανύσαι ἐν ἑνὶ λεπτῷ 20 ὀργυάς· οὐκοῦν $10 \times 20 = 200$ ἐςὶν ἡ ποσότης τῆς κινήσεως· $\frac{200}{10} = 20$ ἐςὶν ἡ ταχυτής· $\frac{200}{20} = 10$, ἡ μάζα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ κινήσεως ἁπλῆς ϗ συνθέτου.

124. Δύναμις λέγεται πᾶν ὅ,τι ἕτερον εἰς κίνησιν ἀναγκάζει· ἀντίστασις δὲ, ὅ, τὴν δύναμιν λυμαινόμενον, ἤρεμον καταστῆσαι τὸ κινητὸν ἐπείγεται.

Κίνησις ἁπλῆ ἀκούει, ἡνίκα τὸ κινητὸν Α (σχ. 86) κατὰ μίαν τινὰ φορὰν ΒΑ κινεῖσθαι καταναγκάζεται, εἴτε πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Ε, εἴτε πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Δ.

125. Ἐὰν τὸ κινούμενον δύω κινῆται φορὰς ΒΓ, ΒΔ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς μὲν εὐθείας κειμένας, κατὰ μέντοι ἔννοιαν ἐναντίαν, εἰ μὲν ἐπίσης προσωθεῖται πρόστε τὸ Ε ϗ τὸ Δ, τὸ κινητὸν Α ἠρεμήσει· εἰ δ' ἀνίσως, τὸ Α ὑπὸ τῆς μείζονος καταναγκασθήσεται κινεῖσθαι δυνάμει ἴσῃ τῇ ὑπεροχῇ, ᾗ ἡ μείζων ὑπερέχει τὴν ἐλάττονα· ϗ δὴ ἡ κίνησις ἔσται οὐδὲν ἧττον ἁπλῆ.

126. Σύνθετος κίνησις καλεῖται, ὅταν τὸ κινούμενον Α (σχ. 87) προσωθῆται κατὰ διαφόρους φορὰς, γωνίαν συνιστώσας.

127. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ὅταν κινητόν τι τὸ Α κινηθῇ κατὰ δύω φορὰς ΑΕ ϗ ΑΔ, συνιστώσας γωνίαν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΕΑΔ, κινηθήσεται κατὰ τὴν φορὰν τῆς διαγωνίου ΑΘ παραλληλογράμμου τοῦ ΑΕΘΔ, τοῦ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΑΔ, τῶν ἐμφαινουσῶν τὰς φορὰς ϗ τὰς ταχύτητας τῶν δύω ἑλκουσῶν δυνάμεων.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἑλκέσθω γὰρ τὸ κινούμενον Α πρὸς τὸ Δ δυνάμει, δι' ἧς ἂν διανύσῃ τὴν ΑΔ εὐθεῖαν ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ· ἑλκέσθω δὲ ἅμα ϗ πρὸς τὸ Ε δυνάμει, δι' ἧς ἂν ἐν τῷ αὐτῷ δευτέρῳ λεπτῷ ἀφίκοιτο πρὸς τὸ Ε· τὸ ἄρα κινητὸν Α ἐγγὺς γενήσεται τῇ ΘΔ εὐθείᾳ, ἥτις ἐςὶ παράλληλος τῇ ΑΕ, ἀπέχυσα αὐτῆς κατὰ τὴν ΕΘ = ΑΔ, ϗ ἅμα τῇ ΕΘ, ἥτις ἐςὶ παράλληλος τῇ ΑΔ, ἀπέχυσα αὐτῆς κατὰ τὴν ΔΘ = ΑΔ· ἀλλ᾽ ἐδὲν κωλύει αὐτὸ μεταβαῖνον ἐξ ἀριςερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ κατὰ τὴν ευθεῖαν ΕΘ = ΑΔ μὴ κατιέναι κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΔΘ = ΑΕ· ἐπεὶ γὰρ ἐξ ἀριςερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ κίνησις ἐδ᾽ ἀντίκειται, ἐδὲ συνεργεῖ τῇ ἐκ τῶν ἄνω ἐπὶ τὰ κάτω κινήσει, ἐκείνην χρὴ τὰ ἑαυτῆς ἀποτελεῖν, ὡς εἰ τὸ κινητὸν μηδόλως ἕλκοιτο παρὰ ταύτης, ϗ ἀντιςρόφως· ἵν᾽ ἐν τὸ ἀποτέλεσμα ἀνάλογον ᾖ τῇ αἰτίᾳ, τὸ κινητὸν Α μεθ᾽ ἓν λεπτὸν εὑρεθήσεται πρὸς δεξιὰν τῆς ΑΕ, ἀπέχον αὐτῆς τῇ εὐθείᾳ ΕΘ = ΑΔ, ϗ ἔνερθεν τῆς ΑΔ, ἀπέχον αὐτῆς τῇ εὐθείᾳ ΔΘ = ΑΕ· ἔςι δὲ ὁ τόπος ἔτος, ὡς δῆλον, τὸ Θ πέρας τῆς διαγωνίε ΑΘ· ἄρα τὸ κινητὸν Α μεθ᾽ ἓν λεπτὸν ἀνάγκη ἀφικέσθαι πρὸς τὸ Θ.

Ἐπεὶ δὲ αἱ δύω δυνάμεις τῷ αὐτῷ κινητῷ Α ἐπηνέργησαν κατὰ συνέχειαν, ἀνάγκη ἄρα δι᾽ ὅλε τε λεπτε κινηθῆναι τὴν φορὰν ΑΘ· εἴτ᾽ ἐν τὴν τῆς διαγωνίε. ΟΕΔ.

128. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δυνατὸν ἄρα ἐκλαβεῖν εὐθεῖαν μίαν τὴν ΑΘ, ἣ κίνησιν ἁπλῆν ἐμφαίνει, ὡς ἐσαν σύνθετον ἐκ δύω δυνάμεων ΑΔ, ΑΕ, αἳ, γωνίαν ὀρθὴν περιέχεσαι, πλευραὶ γίνονται τῷ ὀρθογωνίῳ, ἐ ἡ ΑΘ ἔςαι διαγώνιος· αὗται γὰρ αἱ δύω εἰσὶν ἴσαι μιᾷ τῇ κατὰ τὴν διαγώνιον ΑΘ (127).

129. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἐὰν τὸ κινητὸν ὑπὸ δύω ἕλκηται δυνάμεων, ὀξεῖαν ἢ ἀμβλεῖαν περιεχεσῶν γωνίαν, ϗ αὖθις τὴν διαγώνιον διαγράψει παραλληλογράμμε τε ἐπὶ τῶν δύω πλευρῶν τῶν δυνάμεων (σχ. 88. 89).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἤχθω ἡ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαγωνίῳ ΒΡ, καὶ ἐκ τῶν Α, Γ γωνιῶν αἱ παράλληλοι ΑΔ, ΓΕ τῇ αὐτῇ διαγωνίῳ ΒΡ, καὶ αἱ κάθετοι ΑΟ, ΓΙ· ἐκ τῶν ἰσαλλήλων (*) τριγώνων ΒΓι, ΑΟΠ ἐστὶ α΄. ΑΟ = ΓΙ, καὶ δὴ ΒΔ = ΒΕ, ἐντεῦθεν τὰ δύω ὀρθογώνια (Γεωμ. 229. Τόμ. Β) ΑΒΔΟ, ΒΓΕι· β΄. Βι = ΟΠ, καὶ δὴ Βι + ΒΟ = ΒΠ ἐπὶ τοῦ 88 σχ. καὶ Βι — ΒΟ = ΒΠ ἐπὶ τοῦ 89 σχήμ.

130. Ἐξειλήφθω ἤδη ἡ ΒΑ ὡς γινομένη ἐκ ΒΟ + ΒΔ (εἴτ' οὖν ὡς διαγώνιος τοῦ ΑΔΒΟ παραλληλογράμμου τοῦ συνισταμένου ἐπὶ τῶν δύω δυνάμεων, καὶ δύω φορῶν ΔΑ, ΒΔ) καὶ ΒΓ ὡς γινομένη ἐκ Βι + ΒΕ, καὶ αἱ δύω εὐθεῖαι ΒΑ, ΒΓ, ὡς γινόμεναι ἐκ τῶν τεσσάρων δυνάμεων ΒΟ, ΒΔ, Βι, ΒΕ· ἀλλ' αἱ δύω ἀντικείμεναι δυνάμεις ΒΔ, ΒΕ, ὡς ἴσαι, ἀλλήλας ἀφανίζουσι· λείπεται ἄρα τῇ ΒΑ μόνη ἡ πλευρὰ ΒΟ, ἣν τὸ κινούμενον οἰωθήσεται, καθ' ὃν χρόνον ἔδει διανύσαι τὴν ΒΑ· ὡσαύτως τῇ ΒΓ ἡ Βι μόνη καταλείπεται, ἣν τὸ κινούμενον διανύσει ἐν ᾧ ἔδει διανύσαι τὴν ΒΓ. οὕτω τὸ κινητὸν μετὰ τὰς δύω δυνάμεις, ΒΑ, ΒΓ διανύσει τὴν ΒΟ + Βι, ἐν ᾧ μόνον ὤφειλε διελθεῖν μόνην τὴν ΒΑ, ἢ μόνην τὴν ΒΓ, εἰμὴ

(*) *Ἡ ὀρθὴ γωνία ι ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ Ο· ἡ δὲ Π γωνία τοῦ ΑΟΠ τριγώνου ἰσοῦται τῇ Β γωνίᾳ τοῦ ΒΓι τριγώνου (Γεωμ. 133)· ἡ ἄρα Α γωνία τοῦ πρώτου τριγώνου ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ δευτέρου γωνίᾳ Γ· ἀλλ' αἱ πλευραὶ ΑΠ, ΒΓ τοῦ ΑΠΒΓ παραλληλογράμμου εἰσὶν ἰσάλληλοι, ὡσαύτως καὶ αἱ κάθετοι ΑΟ, ιΓ ὡς ὕψη τῶν ἴσων τριγώνων (Γεωμ. 236) ΑΠΒ, ΒΠΓ (Γεωμ. 237)· τὰ ἄρα τρίγωνα ΑΠΟ, ΒΓι εἰσὶν ἰσάλληλα (Γεωμ. 221).*

κεκίνητο ὑπὸ δύω δυνάμεων· ἐπὶ τούτοις δὲ ΒΟ ϗ Βι κατὰ τὴν αὐτὴν μὲν φορὰν οὔσαι ἐπὶ τοῦ 88 σχήμ. συναπτέαι εἰσὶν ἀλλήλαις, ἐναντίας δ' ἐχουσῶν φορὰς ἐπὶ τοῦ 89 σχήμ. ἀφαιρετέον τὴν ΒΟ τῆς Βι· ὅθεν ἑκατέρως ἀποτελεῖται ἡ ΒΠ διαγώνιος· ἄρα ἐν γένει εἴτε ὀξεῖαν, εἴτε ἀμβλεῖαν συνιςῶσι γωνίαν αἱ δύω φοραὶ, τὸ κινούμενον οἰθήσεται τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου κτ. Ο.Ε.Δ.

131. **ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΕΝΙΚΟΝ.** Δῆλον ἐκ τῶν προειρημένων, ὡς ὅτε σῶμά τι ὑπὸ δύω δυνάμεων ἕλκεται γωνίαν ἥντιναοῦν περιεχουσῶν, κινεῖται τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ ἐπὶ τῶν φορῶν τῶν δυνάμεων, διανύον αὐτὴν ἐν τοσούτῳ χρόνῳ, ἐν ὅσῳ ἂν διήνυε τὴν ἑτέραν τῶν πλευρῶν.

132. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.** Τὸ κινητὸν, εἰμὲν αἱ ἰσχῦς τῶν δυνάμεων ἴσαι ὦσι, ϗ αἱ φοραὶ αὐτῶν περιέχωσι γωνίαν ὀρθὴν, διαδραμεῖται τὴν διαγώνιον τετραγώνου τελείου· εἰδὲ αἱ μὲν δυνάμεις ὦσιν ἄνισοι, ἡ δὲ γωνία ὀρθὴ, τὴν ὀρθογωνίου ἐπιμήκους· εἰδὲ ὀξεῖα, τῶν δυνάμεων μὲν οὐσῶν ἴσων, τὴν ῥόμβου μεγάλην διαγώνιον, ἀνίσων δὲ, τὴν ῥομβοειδοῦς· τελευταῖον δὲ, εἰ ἀμβλεῖα ᾖ ἡ γωνία, διαδραμεῖται τὴν μικρὰν διαγώνιον τοῦ ἤτοι ῥόμβου, ἢ ῥομβοειδοῦς, ὡς ἂν τύχωσιν ἔχουσαι ἰσότητος, ἢ ἀνισότητος, αἱ δυνάμεις.

133. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.** Ἀεὶ ἔξεσαι τὰς φορὰς δύω δυνάμεων ΑΔ, ΑΕ (σχ. 87), ἢ ΒΑ, ΒΓ (σχ. 88.) εἰς μίαν μόνην ἀναγαγεῖν τὴν ΑΘ, ἢ ΒΠ, ἀγομένων μὲν εὐθειῶν δύω ὑπὸ γωνίαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν φορῶν λόγον ἐχουσῶν τὸν τῶν δυνάμεων, τοῦ δὲ παραλληλογράμμου πληρουμένου, ϗ τῆς διαγωνίου ἐπιζευγνυμένης, ἥτις πάντως ἐκληφθῆναι δύναται ὡς ἐμφαντικὴ ἁπλῆς

κινήσεως, εἴτ' οὖν ἐνεργείας καὶ φορᾶς μιᾶς μόνης δυνάμεως, τουτέστι „πᾶσα κίνησις σύνθετος ἔχει ἐκληφθῆναι „ὡς ἁπλῆ, καὶ ἁπλῆ ὡσαύτως πᾶσα σύνθετος δύ„ναμις."

134. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἡ σύνθεσις τῆς κινήσεως μικρύνει ἀεὶ τὴν ποσότητα, ἢ, ὃ ταὐτὸν ἡ σύνθετος δύναμις, καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς ἀποτέλεσμα, οὐκ ἐξισοῦται ταῖς, ἀφ' ὧν σύγκειται, δυνάμεσι· ἡ γὰρ διαγώνιος ΑΘ, ἢ ΑΠ (σχ. 87, 88) ἣν τὸ κινούμενον διατρέχει ἐν ἑνὶ φέρε λεπτῷ, οὐκ ἔστιν ἴση τῷ ἀθροίσματι ΑΔ + ΑΕ, ἢ ΑΒ + ΒΓ τῶν πλευρῶν, πρὸς ἃς εἰ ἑκατέρα τῶν δυνάμεων ἐν μέρει τὸ κινητὸν εἷλκεν, ἐν ἑνὶ λεπτῷ ἑκατέραν αὐτῶν τὸ κινητὸν διήνυεν ἄν.

135. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ὅσῳ ὀξυτέρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ (σχ. 88.) γωνία, τοσούτῳ ἧττον σμικρυνεῖ τὴν ποσότητα τῆς κινήσεως ἡ σύνθεσις, ἢ γοῦν μᾶλλον σπεύσει ἐξισωθῆναι τῷ ἀθροίσματι τῶν δύω, ἐξ ὧν σύγκειται, δυνάμεων· τηνικαῦτα γὰρ ἡ ἐν τῇ συνθέσει ἀπολλυμένη δύναμις ἐμφαίνεται τῷ ΒΔ + ΒΕ = 2ΒΔ (130)· ὅσῳ δὲ ἡ γωνία ὀξύνεται, τοσούτῳ τὸ 2ΒΔ μικρύνεται· τέλος δὲ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ οἱονεὶ ἀπειροστῆς γενομένης, αἱ δύω δυνάμεις ἐκληφθήσονται ὡς κατὰ μίαν φορὰν σύρουσαι τὸ κινητὸν, καὶ 2ΒΔ ἔσαι = 0, αἵ τε δυνάμεις ἀποβαλοῦσιν οὐδέν.

136. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Τοὐναντίον δὲ, ὅσῳ ἀμβλυτέρα ᾖ ἡ ὑπὸ τῶν φορῶν περιεχομένη γωνία (σχ. 89), τοσούτῳ μᾶλλον ἡ σύνθεσις σμικρυνεῖ τὴν κίνησιν, ἢ, ὃ ταὐτὸν, τοσούτῳ ἔλαττόν ἐστι τὸ ἀποτέλεσμα, παραβαλλόμενον πρὸς τὰς, ἀφ' ὧν σύγκειται, δυνάμεις· ὅσῳ γὰρ ἀμβλύνεται ἡ γωνία, τοσούτῳ αὔξει ἡ ἀποβαλλομένη ποσότης ΒΔ + ΒΕ· ἐὰν δὲ ἀπείρως ἀμβλεῖα

ὑποτεθῇ ἡ γωνία Β, εἴτ' οὖν $= 180° - \frac{1}{\infty}$· αἱ δύω φοραὶ ΒΔ, ΒΕ ἀντίθετοι ἔσονται, ϗ τὸ πρὸς τὸ Π ἀποτέλεσμα ἔσεται $= 0$.

137. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ'. Δυνατὸν δὲ, ὅσας ἄντις βούληται, συνθέσθαι δυνάμεις, εἰ μόνον ἀλλήλας τέμνοιεν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἔςωσαν γὰρ τέσσαρες δυνάμεις (σχ. 89 Α) ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ἀλλήλας τέμνουσαι κατὰ τὸ Α· οὐκοῦν τὸ μὲν ἐκ τῶν δύω ΑΒ, ΑΓ ἀποτέλεσμα, συμπληρωθέντος ἐπ' αὐτῶν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΘ, ἔςαι ἡ διαγώνιος αὐτοῦ ΑΘ, ἧς ὡς ἁπλῆς ἐκληφθείσης δυνάμεως, ἐπ' αὐτῆς ϗ τῆς ἐφεξῆς ΑΔ συςαθέντος τοῦ παραλληλογράμμου ΑΘΔΗ, ἡ αὐτοῦ διαγώνιος ΑΗ τὴν ἐκ τῶν ΑΘ, ΑΔ, ϗ δὴ ἐκ τῶν τριῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ ἐμφανεῖ σύνθετον δύναμιν· ἡ δὲ ΑΤ τοῦ τρίτου παραλληλογράμμου ΑΗΕΤ σημανεῖ τὴν ἐκ τῶν τεσσάρων ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ συγκροτουμένην.

138. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ'. Τοὐναντίον δὲ πᾶσαν ἁπλῆν δύναμιν, ϗ ἁπλῆν κίνησιν, θεωρεῖν δυνάμεθα ὡς σύνθετον ἐκ δύω δυνάμεων ϗ κινήσεων· ἔςω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ (σχ. 90.), ἐμφαίνουσα δύναμιν ϗ κίνησιν ἡντιναοῦν, ϗ ἐκ τοῦ κατ' αὐτὴν πέρατος ἤχθωσαν ὡς ἔτυχε δύω εὐθεῖαι, ὡς εἶναι δι' αὐτῶν παραλληλόγραμμον συμπληρῶσαι τὸ ΑΒΓΔ· οὐκοῦν ἡ ΑΒ δύναμις ἀναλέλυται εἰς δύω τὴν ΑΓ, ϗ ΑΔ, ἃς ὡς συνθετικὰς τῆς ΑΒ ἐκλαβεῖν δυνάμεθα.

Ἐπεὶ δὲ ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ΑΒ μέγεθος ἔχουσα πεπερασμένον, ποδὸς φέρε, ἀπείρων παραλληλογράμμων διαγώνιος δύναται εἶναι, διαφόρων τήντε γωνίαν Α, ϗ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, οὐκ ἔςιν ἄρα ἁπλῆ δύναμις ϗ κίνησις ὡρισμένη, ἣν ὁ δυνάμεθα ἀπειραχῶς εἰς δύο ἀναλύσαι δυνάμεις.

139. ΠΟΡΙΣΜΑ Η΄. Ἡ ἀνάλυσις τῆς κινήσεως αὔξει τὴν ποσότητα· ὃ ἀναγκαίως ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι σμικρύνει αὐτὴν, ὡς εἴδομεν, ἡ σύνθεσις· ἀναλυομένης γὰρ τῆς ΑΒ δυνάμεως, εὑρίσκονται δύω αἱ ΑΓ, ΑΔ ὧν τὸ ἄθροισμα ἐστὶ μεῖζον τῆς ΑΒ· ἐκ δὲ τῶν εἰρημένων (135) δῆλον, ὅτι τοσούτῳ μᾶλλον ἡ ἀνάλυσις αὔξει τὴν ποσότητα, ὅσῳ μείζων ἂν εἴη ἡ ὑπὸ τῶν φορῶν περιεχομένη γωνία Α.

140. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ θεωρία τῆς συνθέσεως ϗ ἀναλύσεως τῶν δυνάμεων χρησιμωτάτη ὑπάρχει τῇ Φυσικῇ, ἀδιαλείπτου οὔσης τῆς χρήσεως αὐτῆς ἐν τοῖς περί τε τῶν οὐρανίων, ϗ τῶν γηΐνων σωμάτων· φανήσεται γὰρ ἐν τοῖς ἐφεξῆς, ὅτι τὰ οὐράνια σώματα ἰδιότητι δύω δυνάμεων, τῆς μὲν ὠθούσης αὐτὰ πρὸς τὸ τῆς κινήσεως αὐτῶν κέντρον, τῆς δ' ἀπ' αὐτοῦ ἀποσπώσης, περιάγεται, ἀναγκαζόμενα οὕτω φέρεσθαι ἀεὶ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμου, συνισαμένου κατὰ τὸν λόγον τῶν δυνάμεων τούτων ϗ τῶν κατ' αὐτὰ φορῶν· ἡ γενικὴ ἀλλήλων συνεπίδρασις τῶν οὐρανίων σωμάτων, τελουμένη ἀεὶ πλαγίως τῷ ἐπιπέδῳ τῆς ὑπ' αὐτῶν καταγραφομένης καμπύλης, ἀεὶ ἀναλύεται· αἱ τῆς θαλάσσης παλίῤῥοιαι γίνονται μάλιστα διὰ τῆς ἀναλύσεως τῆς κινήσεως· πάντα τὰ γήϊνα σώματα κατὰ μίαν τινὰ φορὰν προβαλλόμενα πλαγίως ἢ παραλλήλως τῷ ὁρίζοντι φέρονται ἀεὶ ὑπὸ δύω δυνάμεων, τῆς μὲν τῷ ὁρίζοντι οὔσης καθέτου, ἥ ἐστιν ἡ βαρύτης, τῆς δὲ πλαγίας ἢ παραλλήλου τῷ ὁρίζοντι, ἣ αὐτὰ καταναγκάζει εἰς κίνησιν, κἀκ τούτου ἐν ἑκάστῳ ἀκαρεῖ γράφουσι διαγώνιον πα-

ραλληλογράμμου συνισαμένου ἐπ' αὐτῶν τῶν δύω δυνάμεων, καὶ τῶν κατ' αὐτὰς φορῶν.

141 Οὐκοῦν νηὸς πλεούσης ἐνεργείᾳ τῶν πνευμάτων κατὰ φορὰν ὁριζόντιον, ἐὰν ἐκ τῆς τοῦ ἱςοῦ κορυφῆς ναύτης ὀλισθήσας πέσῃ, οὐκ ἐν τῇ θαλάσσῃ καταβυθισθήσεται, ἀλλὰ πρὸς τῇ τοῦ ἱςοῦ βάσει κατακείσεται, διὰ τὸ διαδραμεῖν τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ συνισαμένου ἐπὶ τῶν φορῶν τῆς τε ὁριζοντίου καὶ τῆς καθέτου κινήσεως· ὑποτεθείσθω οὖν ὁ ναύτης πίπτων ἀφ' ὕψους ποδῶν 60, καὶ δὴ μόνῃ τῇ οἰκείᾳ βαρύτητι καταφερόμενος, εἰ ἡ ναῦς ἠρεμοίη, καταπεσεῖται πρὸς τῇ τοῦ ἱςοῦ βάσει μετὰ δύω λεπτὰ δεύτερα, ὡς ὕςερον φανήσεται· ὑποτεθείσθω δὲ κινουμένη ἰσοταχῶς καὶ δυσὶ δευτέροις λεπτοῖς διανύουσα πόδας 100· εἰ οὖν ὁ ναύτης μόνῃ τῇ οἰκείᾳ ἑαυτοῦ δυνάμει κατεφέρετο, πάντως ἂν κατέπιπτεν ἐν τοῖς ὕδασι πόῤῥω τοῦ ἱςοῦ πόδας 100· ἐπεὶ δὲ πρὸς τῇ βάσει τοῦ ἱςοῦ καταπίπτει, ἀναγκαίως διατρέχει τὴν διαγώνιον ἐπιμήκους ὀρθογωνίου, οὗ ἡ μὲν ὁριζόντιος πλευρὰ τὴν τῆς κινήσεως ἐμφαίνει τοῦ ναύτου δύναμιν τὴν τῇ νηῒ κοινὴν, δι' ἧς ἔσπευδε διανύσαι ἅμα τῇ νηῒ 100 πόδας ἐν δυσὶ δευτέροις λεπτοῖς, ἡ δὲ τῷ ὁρίζοντι κάθετος τὴν δύναμιν τῆς βαρύτητος, καθ' ἣν ὁ ναύτης ἔσπευδε διανύσαι διὰ καθέτου κινήσεως 60 πόδας ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαςήματι.

Οὐκοῦν θεατὴς ἱςάμενος ἐν νηῒ ἠρεμούσῃ ὄψεται τὸν ἐν τῇ κινουμένῃ νηῒ καταπίπτοντα ναύτην οὐχὶ πρὸς ὀρθὰς καταφερόμενον, ἀλλὰ κατὰ φορὰν πλαγίαν τῷ ὁρίζοντι, καὶ γράφοντα διαγώνιον παραλληλογράμμου τοῦ ἐπί τε τῆς ὁριζοντείου καὶ τῆς καθέτου τῶν κινήσεων.

142. Ἡ ἐπὶ τοῦ ἐν νηῒ κινουμένῃ καταπίπτοντος ἀνάπτυξις ἐφαρμοσθῆναι δύναται πᾶσι τοῖς γηΐνοις σώμασι

τοῖς κινεμένοις κατὰ πᾶσαν ἄλλην φορὰν, ἢ κάθετον· ἐπεὶ γὰρ πάντα τὰ γήϊνα σώματα εἰσὶ βαρέα, ὡς δειχθήσεται, ἐάν τις δύναμις ἄλλη πλὴν τῆς βαρύτητος κινήσῃ αὐτὰ κατὰ φορὰν ἄλλην πλὴν τῆς καθέτε, ἀχθήσονται ὑπὸ δύω δυνάμεων, ὧν αἱ φοραὶ γωνίαν περιέξεσι, ἢ κινηθήσονται τὴν διαγώνιον τε ἐπὶ τῶν δύω φορῶν παραλληλογράμμε.

143. Ῥᾳδίως κατανοεῖται ἐκ τῶν εἰρημένων, δι' ὅ,τι πλοιάριον, ἑλκόμενον ἐκ θατέρε χείλες ποταμῦ ἐπὶ θάτερον, ἐ φέρεται πρὸς τὸν ἕλκοντα κατ' εὐθεῖαν· εἰσιὸν γὰρ εἰς τὸ ὕδωρ ἀναγκάζεται κινεῖσθαι πρὸς τὰ ῥεῖθρα ὑπ' αὐτῦ τῦ ὕδατος, ἢ ἅμα πρὸς τὸν ἕλκοντα αὐτὸ ἐκ θατέρε χείλες· διατρέχει ἐν τὴν διαγώνιον τὴν ἐπὶ τῶν φορῶν τῶν δύω τούτων δυνάμεων· ἐπεὶ δὲ ἡ κατὰ μῆκος κίνησις ἀεὶ ποικίλλεται, τόπες ἀμείβεσα, ἡ δὲ κατὰ πλάτος τῦ ἕλκοντος ἀεὶ ἐστιν ἄτρεπτος, ἡ γωνία τῆς φορᾶς ἀεὶ ποικιλθήσεται, ἢ τὸ πλοιάριον, ἀεὶ νέαν διαγώνιον καταγράφειν ἀναγκαζόμενον, ἰχνογραφήσει καμπύλην διὰ τῆς ἑαυτῦ ὁλικῆς κινήσεως περὶ τὴν ἕλκεσαν χεῖρα.

144. Πάντα τὰ γήϊνα σώματα πλαγίως τῷ ὁρίζοντι κινέμενα, ἐπεὶ ἐν ἑκάστῳ ἀκαρεῖ ἡ βαρύτης αὐτῶν καταναγκάζει αὐτὰ πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς, ὅ ἐστι μόνιμον, ποικιλῦσιν ἀεὶ τὴν γωνίαν τῆς φορᾶς, τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς βαρύτητος ἢ τῆς τῷ ὁρίζοντι πλαγίας κινήσεως· ἀεὶ ἄρα παραβάλλειν ἔξεστι τὴν αὐτῶν κίνησιν τῇ τῦ, περὶ ἕ εἴπομεν, πλοιαρίε· ἢ τὸ μὲν τῆς γῆς κέντρον ἀνάλογον ἔσται πρὸς τὴν δύναμιν τῆς ἑλκέσης χειρὸς, ἡ δὲ δύναμις τῆς πλαγίας κινήσεως πρὸς τὸ ῥέον ὕδωρ· ῥᾷστα τοίνυν κατανοεῖται, δι' ὅ,τι τὰ ἐν τῷ ἀέρι

πλαγίως τῷ ὁρίζοντι κινέμενα σώματα γράφυσι καμπύλας, ὧν ἡ κοιλότης ἔςραπται πρὸς τὸ τῆς γῆς κέντρον.

145. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἐν τῇ συνθέτῳ κινήσει α'· αἱ δύω συνθετικαὶ δυνάμεις ΤΒ, ΤΓ (σχ. 91) εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ἀντιςρόφως ὥσπερ τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν ΒΤΣ, ΓΓΣ τῶν περιεχομένων ὑπ' αὐτῶν τῶν δυνάμεων, ϗ τῆς ἐξ αὐτῶν συντιθεμένης ΤΣ, εἴτ' ὖν ἔςι ΤΒ : ΤΓ : : ἡμ. ΓΓΣ : ἡμ. ΒΤΣ· β'. ἑκάςη τέτων τῶν δυνάμεων ἔςι πρὸς τὴν συντιθεμένην, ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας, τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἑτέρας συνθετικῆς δυνάμεως ϗ τῆς συντιθεμένης, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς περιεχομένης ἐξ ἀμφοτέρων τῶν συνθετικῶν δυνάμεων, εἴτ' ὖν ΤΒ : ΤΣ : : ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΓΤΒ.

ΔΕΙΞΙΣ. α'. ΤΒ : ΤΓ : : $\frac{ΤΒ}{2} : \frac{ΤΓ}{2}$ (Συμ. Λογ. 234)· ἀλλ' ἐν τῷ ΒΤΣ τριγώνῳ, $\frac{ΤΒ}{2}$ ἐςιν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ΤΣΒ γωνίας (Γεωμ. 496), ϗ δὴ ἡμίτονον τῆς ἐντὸς ἐναλλὰξ ΓΤΣ, ϗ $\frac{ΒΣ}{2} = \frac{ΤΓ}{2}$ ἐςιν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ Β ΤΣ γωνίας· ἄρα ΤΒ : ΤΓ : : ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΒΤΣ.

β'. ΤΒ : ΤΣ : : $\frac{ΤΒ}{2} : \frac{ΤΣ}{2}$· ἀλλὰ ΤΒ ἐςιν ἡμίτονον τῆς ΒΣΤ, ϗ δὴ τῆς ἐντὸς ἐναλλὰξ ΓΤΣ, ϗ $\frac{ΤΣ}{2}$ ἐςιν ἡμίτονον τῆς Β, ϗ δὴ τῆς ὑπὸ ΓΤΒ, ἥτις ἐςὶ παραπλήρωμα τῆς Β (Γεωμ. 235)· ἄρα ΤΒ : ΤΣ : : ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΓΤΒ, Ο.Ε.Δ.

146. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐκ τῶν τεσσάρων τέτων,

δύω συνθετικῶν δυνάμεων, ϗ δύω γωνιῶν, περιεχομένων ὑπ' αὐτῶν ϗ τῆς συντιθεμένης, τριῶν δοθέντων ἐν ἀριθμοῖς, τὸ τέταρτον διὰ μεθόδου τῶν τριῶν ῥᾷστα εὑρίσκεται· ἐὰν γὰρ τυχὸν γνωστὰ ὦσιν ἡ ΤΒ, ἡ γωνία ΓΤΣ, ϗ ἡ γωνία ΣΤΒ, εὑρεθήσεται ἐν ἀριθμοῖς ἡ ΤΓ διὰ τῆς ἀναλογίας· ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΒΤΣ : : ΤΒ : χ = ΤΓ.

147. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων, μιᾶς τῶν δύω συνθετικῶν δυνάμεων, τῆς συντιθεμένης, τῆς γωνίας, ἣ περιέχεται ὑπὸ τῆς ἑτέρας δυνάμεως ϗ τῆς συντιθεμένης, ϗ τῆς ἐξ ἀμφοτέρων τῶν δυνάμεων περιεχομένης γωνίας, τριῶν δοθέντων ἐν ἀριθμοῖς, διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν εὑρεθήσεται ἡ τετάρτη· ἐγνωσμένων μὲν γὰρ τῆς πλευρᾶς ΤΒ, τῆς γωνίας ΣΤΣ, ϗ τῆς ὅλης γωνίας ΓΤΒ, εὑρεθήσεται ἡ συντιθεμένη ΤΣ ἐκ τῆς ἀναλογίας, ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΓΤΒ : : ΤΒ : ΤΣ· τοὐναντίον δὲ γνωστῶν ὄντων τῆς ΤΣ, τῆς ὑπὸ ΓΤΒ ϗ μιᾶς μερικῆς τῆς ΣΤΣ, εὑρεθήσεται ἡ ΤΒ ἐκ τῆς ἀναλογίας, ἡμ. ΓΤΒ : ἡμ. ΓΤΣ : : ΤΣ : ΤΒ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ ἰσοταχοῦς κινήσεως.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἰσοταχὴς μὲν ἡ κίνησις λέγεται, ὅταν τὸ κινητὸν ἐν ἑκάστῳ ἀκαρεῖ προσκτᾶται βαθμὸν ταχυτῆτος ἴσον, ἰσοβραδὴς δὲ, ὅταν ἐν ἑκάστῳ ἀκαρεῖ ἀποβάλῃ βαθμὸν ταχυτῆτος ἴσον.

148. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει, αἱ ταχυτῆτες αὔξουσιν, ὡς οἱ χρόνοι.

ΔΕΙΞΙΣ. Κληθέντος 1 τῦ τῆς ταχυτῆτος βαθμῦ, ὃν ἐκτήσατο τὸ κινητὸν ἐν τῷ πρώτῳ ἀκαρεῖ, ἐν τῷ δευτέρῳ αὖθις προσκτήσεται 1· καὶ δὴ ἐν τῷ τέλει τῦ δευτέρυ ἕξει δύω ταχυτῆτος· ἐν δὲ τῷ τέλει τῦ τρίτυ προσκτήσεται ὡσαύτως ϗ ἕτερον 1· ϗ δὴ ἔσονται 3, ϗ ὕτως ἑξῆς· ἄρα αἱ ταχύτητες αὔξυσιν, ὡς οἱ χρόνοι· Ο. Ε. Δ.

149. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐν τῇ ἰσοταχεῖ ἄρα κινήσει αἱ ταχυτῆτες αὔξυσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν πρόοδον ÷ 1. 2. 3. 4. 5 κτ.

150. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει τὰ διατρεχόμενα ἐν ἑκάςῳ τελευτῶντι χρόνῳ διαςήματα αὔξυσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11. κτ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ταχυνέτω τὸ κινητὸν τὴν ἑαυτῦ κίνησιν ἐν λεπτοῖς 6, ϗ ἐμφαινέτω τῦτον τὸν χρόνον ἡ εὐθεῖα AB (σχ. 92) διῃρημένη εἰς ἓξ ἰσάλληλα μέρη A1 = 12 = 23 κτ. ἀφ᾽ ἑκάςης δὲ διαδοχῆς ἐςάθωσαν κάθετοι 2α, 2β, 3γ κτ, ὡς τὴν μὲν 2β διπλῆν εἶναι τῆς 1α, τὴν 3γ τριπλῆν τῆς 1α κτ.· ὑκῦν ἐν τοῖς ἑξῆς κειμένοις τριγώνοις A1α, A2β, A3γ κτ. προφανῶς ὁμοίοις, ἐςὶν A1 : 1α : : α2 : 2β, ἢ A2 : 2β : : A3 : 3γ καὶ ὕτως ἐφεξῆς.

Ἐὰν ὖν ἤδη ὑποτεθῇ ἡ μονὰς τῦ πεπερασμένυ χρόνυ, τῦ λεπτῦ κατὰ τὸ ἤδη προτεθὲν, διῃρημένη εἰς ἄπειρα ἀκαριαῖα λεπτὰ, ϗ δὴ ἡ ταύτην ἐμφαίνυσα εὐθεῖα A1 εἰς ἄπειρα μέρη ἀπειροςά· ϗ ἐπὶ τύτοις ἐπινοηθῶσι κάθετοι τῇ A1 ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως, παριςάνυσαι ἑκάςη τὴν ταχύτητα, ἣν ἐκτήσατο τὸ κινητὸν ἐν ἑκάςῳ χρονικῷ ἀκαριαίῳ σημείῳ, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ λεπτόν· ἡ μὲν πρώτη τούτων τῶν καθέτων, ἡ πρώτη ταχυτὴς, ἀπειροστὴ ἔσα, ἔςαι ἡ κορυφὴ τοῦ Αια τριγώνου· πᾶσαι δὲ αἱ ἄλλαι αὐξήσουσι κατὰ τὴν ἄπειρον ἀριθμητικὴν πρόοδον ÷ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . . . . ∞, ἧς ὁ ἔσχατος ὅρος ∞ σημανθήσεται διὰ τῆς ια βάσεως τοῦ Αια τριγώνου, ὃ ἐμφαίνει τὴν ταχυτῆτα, ἣν ἐκτήσατο τὸ κινητὸν τελευτῶντος τοῦ πρώτου λεπτοῦ· πᾶσαι δὲ αἱ κάθετοι καλύψουσι τὴν ἐπιφάνειαν Αια, καὶ ἐμφανοῦσι τὰς ταχυτῆτας, ἃς τὸ κινητὸν προσεκτήσατο ἐν πᾶσι τοῖς ἀκαριαίοις λεπτοῖς, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ λεπτὸν, καὶ δὴ πάντα τὰ διαςήματα, ἃ διήνυσεν ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ (110).

Ἀλλ' ἐρεῖτις τυχόν· ἑκάςης τῶν ἑφεξῆς εὐθειῶν ὑποτιθεμένης μείζονος, ἢ ἡ πρὸ αὐτῆς, εἴτ' οὖν ἡ ἐμφαίνουσα τὴν ἀκαριαίαν ταχύτητα, ἐναπολειφθήσεται διαςημάτιόν τι τριγωνικὸν ἀκάλυπτον ταῖς εἰρημέναις εὐθείαις· ὑποτιθέμεναι, φέρ' εἰπεῖν, αἱ ια, 2β ἀπείρως ἀλλήλων ἐγγίζουσαι, καταλείψουσι τὸ αχβ διαςημάτιον ὅλως ἀκάλυπτον, καὶ δὴ τὸ ἄθροισμα πασῶν τούτων τῶν εὐθειῶν οὐ καλύψει πᾶσαν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τριγώνου Αια· ἀλλὰ α. ἐν τῷ Αια τριγώνῳ οὗ τὸ ὕψος Αι διήρηται εἰς ἄπειρα μέρη, ἡ πρώτη ταχυτὴς, ἣν ἐμφαίνει τὸ βχ, ἐςιν ἀπειροςή· β'. τὸ ὕψος αχ καὶ αὐτό ἐςιν ἀπειροςὸν, τῶν ια, 2β προσεχεςάτων ὑποτεθεισῶν· οὐκοῦν τὸ αβχ τρίγωνον γινόμενον ἐκ τοῦ ἀπειροςοῦ βχ, καὶ τοῦ ἀπειροςοῦ $\frac{\alpha\chi}{2}$ (Γεωμ. 285 Τόμ. Β'.) ἔςαι ἀπειροςὸν δευτεροταγὲς (Συμβ. Λογ. 527 Τόμ. Β'.), ὃ ὡς οὐδὲν λογίζεται πρὸς τὸ πρωτοταγὲς ἀπειροςὸν ὃ καλύπτουσιν αἱ δύω εὐθεῖαι ια, 2β (Συμβ. Λογ. 529)· δυνατὸν ἄρα εἰπεῖν ὡς πᾶσαι αἱ ταχυτῆτες, καὶ δὴ πάντα τὰ διανυόμενα διαςήματα τα, ἐν ἑκάϛῳ ἀκαρεῖ, ϗ ἐν ὅλῳ τῷ λεπτῷ, παρίϛανται ἀκριβῶς διὰ τῆς ἐπιφανείας τȣ̃ Α1α τριγώνȣ.

Ἐὰν δὲ ὡσαύτως διαιρεθῇ ϗ τὸ δεύτερον λεπτὸν, ϗ δὴ τὸ μέρος 12 τῆς ΑΒ, ϗ ἐπ᾽ αὐτȣ̃ ἐγερθῶσι προσεχέσαται κάθετοι, ϗ αὔξȣσαι πᾶσαι ἐκ διαδοχῆς τῷ ἀπειροςῷ ποσῷ, ὃ παρίϛατο κατὰ τὸ Α, εἶτ᾽ ἐν τῇ πρώτῃ ἀπειροςῇ ταχυτῆτι, αὗται καλύψȣσιν ἀκριβῶς τὸ τραπέζιον 1α2β· ἡ δ᾽ ἐπιφάνεια τȣ̃δε τȣ̃ τραπεζίȣ ἐμφαίνεῖ ἀκριβῶς τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ταχυτήτων, ἃς ἐκτήσατο τὸ κινητὸν ἐν τῷ ἐφεξῆς λεπτῷ, ϗ δὴ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν διανυθέντων διαϛημάτων (148). Κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον ϗ τὸ τραπέζιον 23βγ παριςᾶ πάσας τὰς ταχυτῆτας, ϗ δὴ τὰ διανυθέντα διαϛήματα τȣ̃ τρίτȣ λεπτȣ̃, ϗ ἕτως ἑξῆς.

Ἐὰν ἐν ἤδη ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι αϑ, βη κτ. παράλληλοι τῇ Αζ, πάντα τὰ τριγωνίδια 1αχ, κτ. ἴσα ἔσονται τῷ τριγώνῳ Α1α, ἕξȣσι γὰρ ἕκαϛον τὰς ἑαυτȣ̃ πλευρὰς ἴσας ἑκάϛην ἑκάϛῃ τῶν ἐν τῷ Α1α, ϗ δὴ ἰσάλληλα ἔσονται· τȣ̃ ἐν τριγώνȣ Α1α παριςῶντος τὸ ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ διανυθὲν διάϛημα, τὸ τραπέζιον 1α2β παραςήσει τρία τȣ́των τῶν τριγώνων, ϗ δὴ διαϛήματα 3 ἴσα ἕκαϛον τῷ πρώτῳ, διανυθέντα ἐν τῷ ἐφεξῆς πρώτῳ λεπτῷ· τὸ δὲ 23βγ τραπέζιον ἐμφαίνει τὸ ἐν τῷ τρίτῳ λεπτῷ διανυθὲν διάϛημα ὂν 5, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως· ἄρα ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει τὰ διανυόμενα διαϛήματα ἐν χρόνοις πεπερασμένοις αὔξȣσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν $\div$ 1.3.5.7.9. κτ. Ο.Ε.Δ.

151. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὰ διανυόμενα διαϛήματα τελευτώντων τῶν χρόνων, εἰσὶν ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων τῶν δαπανηθέντων· ἐν γὰρ τῷ 92 σχήμ.

τὸ μὲν πρῶτον λεπτὸν ὁρίζεται παρὰ τῦ τριγώνε Αια· τὸ δ' ἐπὶ τῦ τέλυς τῦ ἐφεξῆς λεπτῦ διανυσθὲν διάϛημα ἐμφαίνεται ὑπὸ 4 ἴσων τριγώνων· τὸ δ' ἐς τέλος τῦ τρίτυ, ὑπὸ 9 τριγώνων, ϗ ἐφεξῆς ὕτως· τὰ διανυόμενα ἄρα διαϛήματα εἰσὶν ὡς τὰ τετράγωνα 1, 4, 9, 16, 25 κτ. τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων 1, 2, 3, 4, 5 κτ.

152 ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Τὰ διανυόμενα διαϛήματα εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ταχυτήτων τετράγωνα· ἐν γὰρ τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει αἱ ταχύτητες εἰσὶν ὡς οἱ χρόνοι (148)· τὰ δὲ διαϛήματα εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων τετράγωνα· εἰσὶν ἄρα ϗ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ταχυτήτων (Συμβ. Λογ. 263)· ἐὰν ὖν κληθῶσι δύω τινὰ διαϛήματα δ, Δ ἐν δυσὶ χρόνοις διανυόμενα τοῖς χ, X, ἔϛαι $\delta : \Delta :: \chi^2 : X^2 :: \tau^2 : T^2$.

153. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐντεῦθεν ἄρα $\chi : X :: \sqrt{\delta} : \sqrt{\Delta} :: \tau : T$, εἴτ' ὖν οἱ χρόνοι, ἢ αἱ ταχύτητες, ἔσονται ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν διανυομένων διαϛημάτων. κληθείσης γάρ' 1 τῆς ταχύτητος 1α, τῆς προσκτηθείσης ἐν τῷ τέλει τῦ πρώτυ λεπτῦ, ἡ προσγενομένη ταχυτὴς ἐν τῷ τέλει τῦ ἐφεξῆς λεπτῦ, ἥτις ἐϛὶ 2β διπλῆ τῆς 1α, κληθήσεται 2, ϗ 3γ κληθήσεται 3, ϗ ὕτως ἐφεξῆς· ἀλλ' ὕπερθεν μὲν τῆς εὐθείας 1α ὐδὲν ἐϛι μόνον τρίγωνον, τέσσαρα δὲ ὕπερθεν τῆς δευτέρας, 9 ὕπερθεν τῆς τρίτης κτ.· οἱ χρόνοι ἄρα, ἢ αἱ ταχύτητες 1, 2, 3 εἰσὶν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν διανυομένων διαϛημάτων 1, 4, 9 κτ.

154. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἵν' ὖν εὑρεθῇ τὸ διανυσθὲν διάϛημα δεδομένυ τινὸς χρόνυ τελευτῶντος τετάρτυ τυχὸν λεπτῦ, ληπτέον τὸν ἀπ' αὐτῦ τετράγωνον ἀριθμὸν, εἴτ' ὖν τὸν 16, ϗ ἑξῆς ὁμοίως.

155. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Τὸ ὁλικὸν διάστημα, ὃ διανύει σῶμα ἰσοταχῶς κινούμενον ἐν χρόνῳ ὡρισμένῳ, ἥμισυ μέν ἐστι τοῦ διανυομένου ὑπὸ σώματος ἰσομερῶς κινουμένου ἰσχύει ἴσῃ τῇ, ἣν τὸ ἰσοταχῶς κινούμενον προσκτᾶται ἐν τῷ τέλει τοῦδε τοῦ χρόνου· εἰ γὰρ τὸ κινητὸν ἐν 6 λεπτοῖς εἶχε τὴν ἰσομερῆ ταχύτητα τὴν ἐμφαινομένην ὑπὸ τῆς εὐθείας 6ζ, ἣν ἐκτήσατο ἐν τῷ τέλει τοῦ ἕκτου λεπτοῦ, πᾶσαι ὁμοῦ αἱ ταχύτητες, ἢ τὰ διανυόμενα διαστήματα, συνισταῖεν ἂν τὸ ἐντελὲς τετράγωνον Α6πζ, ὃ προφανῶς ἐστι διπλοῦν τοῦ τριγώνου Α6ζ.

156. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ΄. Ἐν τῇ ἰσοβραδεῖ κινήσει αἱ τοῦ κινητοῦ ταχύτητες μεθ' ἕκαστον λεπτὸν μειοῦνται, κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν μειουμένην πρόοδον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ÷ 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1· ἐμφανομένης γὰρ τῆς ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ ταχύτητος διὰ 6ζ, ἡ ἐφεξῆς ταχυτὴς τοῦ ἑπομένου λεπτοῦ ἔσται 5ε, ἢ 5, ἡ δὲ τρίτη, 4, κτ, ἡ δὲ μετὰ τὸ ἕκτον λεπτὸν, ἔσται 1α = 1.

157. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Ἐν τῇ ἰσοβραδεῖ κινήσει τὰ ἐν ἑκάστῳ λεπτῷ διανυόμενα διαστήματα μειοῦνται, κατὰ τὴν μειουμένην ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν περιττῶν ἀριθμῶν ÷ 11 . 9 . 7 . 5 . 3 . 1· ὑποτιθεμένης γὰρ ἀεὶ τῆς πρώτης ταχύτητος 6ζ, τὸ ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ διανυόμενον διάστημα ἐμφανοῦσιν 11 τρίγωνα, ἐμπεριεχόμενα τῷ τραπεζίῳ 6ζ5ε· τὸ δὲ διανυόμενον ἐν τῷ ἐφεξῆς, τὰ ἐν τῷ 5ε4β τραπεζίῳ 9 τρίγωνα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ κινήσεως τῶν βαρέων.

158. Βάρος σώματος γηΐνε ἐσὶν ἰδιότης, καθ' ἣν τὸ σῶμα ἐπείγεται πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς· φανήσεται δὲ ἐν τοῖς ἐφεξῆς, ὡς ἐσὶν ἀνάλογον τῇ μάζῃ τῦ σώματος· αἱ φωναὶ δὲ βάρος ᾗ βαρύτης σχεδόντι συνωνυμῦσι, παρ' ὅσον, ἡ μὲν βαρύτης τὴν ῥοπὴν ἁπλῶς ἐμφαίνει τῦ κατιόντος σώματος, τὸ δὲ βάρος τὸ ἄθροισμα τῶν βαρυτήτων τῶν μορίων, ἐξ ὧν συντίθεται ἡ μάζα τῦ σώματος.

159. Σταθμὸς ἡ δύναμίς ἐσιν ἡ ἀντιτιθεμένη σώματι βαρεῖ, ἐφ' ᾧ κωλύσει αὐτῦ τὴν κάθοδον· λέγεται ὕτω σώματι ςαθμὸν ἕλκειν λίτρας τυχὸν, ὅταν ἐν θατέρᾳ πλάςιγγι αὐτῦ τιθεμένε, ἐν θατέρᾳ δέῃ μάζαν λίτρας μιᾶς ἀντιθέσθαι, ἵν' εἶεν ἰσόςαθμα.

160. Βαρύτης εἰδικὴ σώματος ἐσὶν ἡ ἐν τῷ αὐτῷ ὄγκῳ σωμάτων διαφόρων ὁλκὴ ςαθμῶν διαφέρυσα (75)· ὕτω δάκτυλος κυβικὸς χρυσῦ βάρος ἕλκει, λόγον ἔχον πρὸς βάρος δακτύλυ κυβικῦ ὕδατος ὃν 19 : 1· ἡ ἄρα εἰδικὴ βαρύτης ἀνάλογός ἐσι τῇ μάζῃ τῇ ἐν τῷ αὐτῷ ὄγκῳ περιεχομένῃ.

161. Ἀλλὰ γὰρ ἡ τῶν σωμάτων πυκνότης ἐν τύτῳ, ὡς εἴδομεν (75), κεῖται, ἐν τῷ περιέχειν αὐτὰ πλείω ἢ ἐλάττω μάζαν ἐν τῷ αὐτῷ ὄγκῳ, ᾗ ἐσὶν ἀνάλογος τῇ μάζῃ, ἄρα ἡ εἰδικὴ βαρύτης ἀνάλογός ἐσι τῇ πυκνότητι (Γεωμ. 327).

162. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἀρθείσης τῆς τῶν μέσων

ἀντιςάσεως, πάντα τὰ βαρέα ἐν ἴσῃ ταχυτῆτι κατενεχθήσονται.

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἐν γὰρ τῷ κενῷ τῆς πνευματικῆς ἀντλίας τὰ κεφότατα σώματα ἀφιέμενα, οἷον πτερὰ, πάμβαξ κτ, ϗ τὰ βαρύτατα δὲ ἅμα, οἷον μόλυβδος, χρυσὸς κτ, ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ εἰς τὴν βάσιν τȣ͂ δοχείȣ ἀφικνȣ͂νται, ϗ δὴ κατίασι ταχυτῆτι ἴσῃ.

β΄. Κείσθω δὲ τὸ βάρος τȣ͂ μολύβδȣ ἔχειν πρὸς τὸ τȣ͂ πάμβακος, ὡς 10 : 1, ἕξει ȣ͂ν ϗ ἡ μάζα πρὸς τὴν μάζαν ὡς 10 : 1· δυνατὸν τοίνυν κατ᾽ ἐπίνοιαν διελεῖν τὸν μόλυβδον εἰς 10 μόρια ἰσάλληλα, ϗ δὴ ἴσα τῇ μάζῃ τȣ͂ πάμβακος· ἰδȣ͂ δὴ 11 μόρια ὕλης, 10 μὲν μολύβδȣ, 1 δὲ πάμβακος, ἅμα ἀφίενται ἀπὸ τῆς κορυφῆς τȣ͂ δοχείȣ· ἐπεὶ δὲ ἡ μάζα τȣ͂ πάμβακος τοσȣ͂τον ἕλκει ςαθμὸν, ὅσον ἓν δεκατημόριον τȣ͂ μολίβδȣ, ἡ βαρύτης τὴν αὐτὴν ταχυτῆτα ἐμποιήσει ἀμφοτέροις· ȣ͂κȣ͂ν ἡ βαρύτης ἐπίσης ἀμφοτέροις ἐπενεργήσει, ϗ ἕκαςον δεκατημόριον τȣ͂ μολύβδȣ, ȣ͂τε βράδιον, ȣ͂τε τάχιον, κατενεχθήσεται τῆς τȣ͂ πάμβακος μάζης· ἀλλ᾽ ὅλος ὁ μόλυβδος ȣ͂ δύναται κατιέναι τάχιον ἑκάςȣ τῶν αὐτȣ͂ μορίων· ἄρα, ἀφαιρεθείσης τῆς ἀντιςάσεως τῶν μέσων, ὁ μόλυβδος ȣ͂τε τάχιον ȣ͂τε βράδιον κάτεισι τȣ͂ πάμβακος. Ο.Ε.Δ.

163. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ βάρος τῶν σωμάτων ἐςὶν ἀνάλογον τῇ μάζῃ· ἐν ἴσῳ γὰρ χρόνῳ κάτισι τά τε βαρύτερα ϗ τὰ ἡττοβαρῆ, ἴσον ὄγκον ἔχοντα, ἀρθείσης τῆς ἀντιςάσεως (ἄνωτ.)· ἀλλ᾽ ὁ μόλυβδος, δεκαπλῆν ἔχων μάζαν ὕδατος ἐν τῇ αὐτῇ ταχυτῆτι ἕξει ποσότητα κινήσεως δεκαπλῆν τȣ͂ ὕδατος· τȣ͂ γὰρ ὕδατος ἡ ποσότης τῆς κινήσεως ἔςαι 1 μάζα πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ ταχυτῆτα 1, ἴση 1 (115), τȣ͂ μολύβδȣ τῆς κατὰ τὴν κίνη-

σιν ποσότητος ἴσης 10 × 1, ὕλης ἀμέλει ἐπὶ ταχυτῆτα = 10· ἐντεῦθεν ἄρα, ἡ ποσότης τῆς κινήσεως τῦ μολίβδυ καὶ τῦ ὕδατος ἀποτέλεσμά εἰσι τῦ αὐτῶν βάρυς· ἀλλ᾽ ἡ ποσότης τῆς κινήσεως τῦ μολίβδυ πρὸς τὴν τῦ ὕδατος ἐςιν ὡς 10 : 1· ἄρα τὸ βάρος τῦ μολίβδυ ἐςι δεκαπλάσιον τῦ κατὰ τὸ ὕδωρ τὸ δεκαπλῦν· ἐπεὶ ῦν ἐκεῖνο πρὸς τῦτο ἐςιν ὡς 10 : 1· ἄρα εἰσὶν ἀνάλογα ταῖς μάζαις.

164. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ σώματος βαρέος ταχυτὴς ὐκ ἐςιν ἀνάλογος τῇ μάζῃ ἢ τῷ βάρει τῦδε τῦ σώματος· κ̀ γὰρ τῶν μέσων ἀρθέντων, τὸ 100 λιτρῶν, φέρ᾽ εἰπεῖν, μάζαν ἔχον, ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ πεσεῖται, ᾧ κ̀ σῶμα, ῦ μάζα λίτρας μιᾶς (162).

Ἀλλ᾽ ἔςω τῇ μάζῃ ἀνάλογος· ὐκῦν ἡ ταχύτης τῦ 100 λίτρας ἕλκοντος πρὸς τὴν τῦ 1 ἔςαι ὡς 100 : 1· 100 δὲ μόρια μάζης πολλαπλασιαζόμενα ἐπὶ 100 ταχυτῆτος ποιῦσι 10000 ποσότητος κινήσεως σώματος 100 λιτρῶν, ὅτε 1 μάζης ἐπὶ ἓν ταχύτητος ποιεῖ 1 ποσότητος κινήσεως σώματος μιᾶς λίτρας· ἀλλὰ τὸ ἀποτέλεσμα ἀνάλογον εἶναι ὀφείλει τῇ αἰτίᾳ· ἐπεὶ ῦν τὸ βάρος αὐτῶν ἐςιν ἡ αἰτία τῆς κατὰ κίνησιν αὐτῶν ποσότητος, τῶν βάρεων ὄντων ὡς 100 : 1, κ̀ αἱ ποσότητες τῶν κατ᾽ αὐτὰ κινήσεων ἀναγκαίως ἔσονται ὡς 100 : 1, ὐχὶ δὲ ὡς 10000 : 1· ἡ ἄρα ταχυτὴς τῶν σωμάτων τῇ μάζῃ ὐκ ἐςιν ἀνάλογος.

165. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Δῆλον ἄρα ἐντεῦθεν, ὡς ἡ ταχυτὴς τῶν βαρέων ὐδόλως ἐξῆπται τῆς αὐτῶν μάζης.

166. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐπεὶ σῶμα μεῖον ἑτέρυ, κόκκος φέρε ψάμμυ παραβαλλόμενος πρὸς ὅλον λίθον, κ̀ σῶμα εἰδικῶς ἑτέρυ κυφότερον, πάμβακος φέρε μέρος

πρὸς σφαιρίδιον μολυβδοῦν παραβαλλόμενον, ὀφείλουσι πίπτειν κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα, καὶ ἐνεργείᾳ πίπτουσιν ἐν τῷ κενῷ δοχείῳ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον· ἐὰν ἄρα ὁρῶμεν σῶμα παχύτερον καταπίπτον τάχιον ἢ σῶμα λεπτότερον, ἰσοβαρῆ ἄμφω εἰδικῶς, καὶ σῶμα εἰδικῶς βαρύτερον ἄλλου, λίθον φέρε τάχιον πίπτοντα, ἢ κόκκον ψάμμου, καὶ σφαῖραν μολυβδίνην τάχιον, ἢ μέρος πάμβακος· τὴν διαφορὰν ταύτην ἀποδοτέον τῇ διαφόρῳ ἀντιστάσει τῶν μέσων, δι' ὧν κινοῦνται, φέρ' εἰπεῖν, τῷ ἀέρι.

167. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἡ βαρύτης τῶν σωμάτων ἐστὶν ἡ αὐτὴ ἀπὸ διαφόρων ὑψῶν ἰσοδιεστώτων τοῦ ἐξισωτοῦ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστωσαν δύω χῶροι, ὧν ἅτερος θατέρου εἴη ὑψηλότερος κατὰ τὸ χιλιαπλοῦν, εἴτ' οὖν ὀργυὰς 1000· λίθος οὖν ἄφετος ἀφ' ἑκατέρων τῶν ὑψωμάτων διανύει, ἐν ἑνὶ τυχὸν λεπτῷ, τὸ αὐτὸ αἰσθητῶς διάστημα, δὸς εἰπεῖν πόδας 15· τῆς δὲ ἑκάστου ἀτόμου, ἐξ ὧν ὁ λίθος σύγκειται, βαρύτητος ἐμποιούσης αὐτῷ ταχυτῆτα αἰσθητῶς τὴν αὐτὴν ἐν τοῖς δυσὶ χώροις, ἡ βαρύτης τοῦ λίθου ἐκληφθήσεται αἰσθητῶς ἡ αὐτή.

Παρὰ ταῦτα δέ· ἐπεί περ, ὡς ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὀψόμεθα, ἡ βαρύτης πάντων τῶν τε γηΐνων καὶ τῶν οὐρανίων σωμάτων τῶν ἡμῖν γνωρίμων ἐν λόγῳ ἐστὶν ἀντιστρόφῳ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἀποστημάτων, ἃ ἀπέχει τὸ σῶμα τοῦ τῆς βαρύτητος κέντρου, τουτέστι σῶμα τοῦ κέντρου ἀπέχον ὡς 2 βαρύτητα ἔχει ἐλαττουμένην ὡς 4, ἀπέχον δὲ ὡς 3, ὡς 9, καὶ οὕτως ἑξῆς· κέντρον δὲ τῶν βαρέων, ὡς ὀψόμεθα, ἐστὶν ἐπὶ τῆς γῆς, αὐτὸ τὸ τῆς γῆς κέντρον περίπου· ὁ δὲ ταπεινότερος χῶρος, ὃν εἰρήκαμεν, ἀπέχει τοῦ κέντρου τῆς γῆς ἀκτῖνα μίαν γηΐνην, εἴτ' οὖν λεύγας 1432 ½· ἐπεὶ τοίνυν εἰσ. χίλιαι ὀργυαὶ περίπου ἴσαι ἡμιλευγίῳ, ὁ ὑψηλότερος χῶρος ἀπέχων ἔσαι τȣ͂ κέντρȣ τῆς γῆς λεύγας 1433· ἄρα ἡ βαρύτης τȣ͂ λίθȣ ἐν τῷ ὑψηλοτέρῳ χώρῳ πρὸς τὴν τȣ͂ αὐτȣ͂ ἐν τῷ ταπεινοτέρῳ ἔσαι ὡς $\overline{1432\frac{1}{2}}^2 : \overline{1433}^2 :: 2052056\frac{1}{4} : 2053489$· ἐπεὶ δὲ ἡ μεταξὺ τȣ́των τῶν δύω ποσοτήτων διαφορὰ ἐσὶν τὰ $\frac{1}{1433}$, ἡ ἐν τῷ ὑψηλοτέρῳ χώρῳ βαρύτης τȣ͂ λίθȣ τῆς τȣ͂ ἐν τῷ ταπεινοτέρῳ ἐλάττων ἔσαι τῷ τὰ $\frac{1}{1433}$, ἡ δὲ διαφορὰ αὕτη ἔτι βραχυτέρα ἔσαι, διενθυμηθεῖσιν, ὡς τȣ͂ ἀέρος πυκνοτέρȣ ὄντος ἐν τῷ ταπεινοτέρῳ χώρῳ, ἐνταῦθα πλεῖον ἀπόλλυσι τῆς ἑαυτȣ͂ βαρύτητος ὁ λίθος, ἵνα ἰσόσαθμος ᾖ τῷ ἀέρι, ἐν δὲ τῷ ὑψηλοτέρῳ ἔλαττον διὰ τῶν ἐναντίον λόγον· ὁ ἄρα λίθος ἑκατέρως τῇ αὐτῇ πεσεῖται ταχυτῆτι. Ο. Ε. Δ.

168. ΘΕΩΡΗΜΑ Γʹ. Ἐν δυσὶ χώροις τῆς γῆς, ὧν ἡ διαφορὰ τῆς ἀπὸ τȣ͂ ἰσωτȣ͂ ἀποσάσεως μὴ ᾖ λίαν μεγάλη, ἡ βαρύτης τȣ͂ σώματος ἔσαι ἡ αὐτή.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐκ γὰρ πείρας εἰ λίθος ἐν Παρισίοις διατρέχει πόδας 15 ἐφ' ἑνὸς λεπτȣ͂ δευτέρȣ, ὡσαύτως τὸ αὐτὸ διάσημα διανύσει αἰσθητῶς ἐν ἑνὶ δευτέρῳ λεπτῷ λεύγας τινὰς ἄπο τῶν Παρισίων, εἴτε πρὸς τὸν ἰσωτὴν, εἴτε πρὸς τὸν πόλον· ἀνάγκη δὲ τὸ τοιȣ͂το ȣ̔́τως ἔχειν· εἰ γὰρ σφαῖρα ἀκριβὴς εἴη ἡ γῆ, μηδὲ περιάγοιτο περὶ τὸν ἑαυτῆς ἄξονα, ἡ βαρύτης τῶν σωμάτων εἴη ἂν ἡ αὐτὴ ἐν ἅπαντι σημείῳ τῆς γῆς· ἀλλὰ ταῦτα ἀμφότερα ποικίλλȣσι τὴν βαρύτητα, ὡς ὀψόμεθα, καὶ κυρίως εἰπεῖν ἡ βαρύτης τȣ͂ αὐτȣ͂ σώματος ἐν διαφόροις ἀποσήμασι τȣ͂ ἐξισωτȣ͂ ȣ̓δέ ποτε ἐσὶν ἡ αὐτή· ἐπεὶ ἐν ᾗ τε γῆ ἐλλείπει τι τȣ͂ εἶναι ἀκριβὴς σφαῖρα, καὶ δύω χῶροι προσεχεῖς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς περισρέφονται περὶ τὸν τῆς σφαι-ρας ἄξονα, ταῦτ' ἄμφω ἐπὶ σωμάτων βραχύτι ἀπεχόντων τῶ ἰσωτῶ ἐδ' αὔξυσι ἐδὲ σμικρύνυσι τὴν βαρύτητα τῶν σωμάτων ποσότητος ὡρισμένης. Ο. Ε. Δ.

169. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐν ἄρα τῇ Μηχανικῇ ὑποθετέον ἀδεῶς σώματι, ἐν διαφόροις μέρεσιν ὂν τῆς μηχανῆς, τὴν αὐτὴν ἔχειν ἀεὶ βαρύτητα, καίτοι κείμενον ὑψηλότερον, ἢ ταπεινότερον, προσεχέστερον, ἢ ἀπέχον μᾶλλον τῶ ἰσωτῶ.

170. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ἡ βαρύτης τῶν γηΐνων σωμάτων πάντων κατεπείγει αὐτὰ μονονὲ πρὸς τὸ τῆς γῆς κέντρον.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὰ γὰρ σώματα τῆς γῆς ἀεὶ διὰ τῆς ἑαυτῶν βαρύτητος φέρονται τὴν κάθετον τῷ ὁρίζοντι φοράν· εἴπερ ἐν ἀκριβὴς ἦν σφαῖρα ἡ γῆ, ἐπεὶ αἱ τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτῆς κάθετοι εὐθεῖαι ἀκτῖνές εἰσιν αὐτῆς προεκβεβλημέναι, συνιῦσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ κέντρον, πάντα τὰ βαρέα ἐφέροντ' ἂν ἀκριβῶς πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· ἀλλ' ἡ γῆ παρὰ βραχὺ ἐστι σφαῖρα, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς δῆλον ἔσαι· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

171. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ φοραὶ τῶν βραχύτι ἀλλήλων ἀπεχόντων βαρέων, αἱ φοραὶ φέρε δύω σπαρτίων, ὧν ἑκατέρυ τῷ πέρατι βάρη προσήρτηνται, ὀργυὰν ἀπεχόντων, ἢ δύω κιόνων οἰκοδομήματος, ὡς παράλληλοι εἰσὶν ἐκληπτέαι· τοιαῦτα γὰρ δύω σπαρτία ἐχέτωσαν μῆκος ὀργυᾶς μιᾶς· ἵν' ἐν ἀλλήλοις συμπέσωσιν, ἐξυδενῶσαι δεῖ τὸ μεταξὺ ὀργυᾶς ἀπόςημα, προαχθέντων ἐς τὸ κέντρον τῆς γῆς, εἴτ' ἐν λεύγας $1432\frac{1}{2}$ = ὀργυ. 3268965· τῶν ἐν σπαρτίων, ἢ τῶν κιόνων, ὀργυιᾶς μῆκος ἐχόντων, τὰ δύω αὐτῶν κατωτέρω πέρατα ἐκ ἔσονται προσεχέςερα τῶν ὑπερτέρων περάτων, ὅτι μὴ τῷ

1227½2727 ὀργυιᾶς· διὰ ταῦτ' ἄρα ἐν τῇ Μηχανικῇ ἐκληπτέον τὰς φορὰς τῶν δύω βαρέων ὡς παραλλήλους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τῆς ταχυνομένης κινήσεως τῶν βαρέων.

172. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. *Τὰ βαρέα κατίασι διὰ κινήσεως ταχυνομένης.*

ΔΕΙΞΙΣ. Ὅσῳ ἀφ' ὑψηλοτέρων λίθος πίπτει, καὶ δὴ ὅσῳ πλείω χρόνον ἀναλίσκει κατιών, τοσούτῳ ἰσχυρότερον πλήττει πεσών· ἀλλ' εἴπερ ἡ ταχύτης μὴ ηὔξανεν ἐν τῇ καθόδῳ, οὐκ ἂν ἔπληττεν ὁ λίθος ἰσχυρότερον πίπτων ἀφ' ὕψους ὀργυιῶν 100, ἢ ὕψος μιᾶς· καὶ γάρ, ἐπεὶ ἡ τοῦ λίθου βαρύτης ἡ αὐτή ἐστιν ἔντε τῷ 100 ὀργυιῶν ὕψει, καὶ ἐν τῷ μιᾶς (167), ἡ ταχυτὴς αὐτοῦ προαγομένη ὑπὸ τῆς βαρύτητος ἡ αὐτή ἐστιν ἔντε τῇ ἀρχῇ τῶν 100, καὶ ἐν τῇ τῆς μιᾶς ὀργυιᾶς· εἰ ἄρα μὴ ηὔξανε κατιόντος, ἔμενεν ἂν ἔτι ἡ αὐτὴ καὶ ἐν τῇ πτώσει τοῦ λίθου ἀφ' ἑκατέρου ὕψους· ἀλλ' εἴπερ ὁ λίθος τὴν αὐτὴν ἔχων μάζαν, τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἰσχὺν καὶ ταχύτητα, ἡ ποσότης τῆς αὐτοῦ κινήσεως ἦν ἂν ἡ αὐτὴ (115)· καὶ πλήττειν ἄρα ἔδει τῇ αὐτῇ ἰσχύϊ ἀπό τε τῶν μετεωροτάτων καταφερόμενον, καὶ τῶν ὅσον οὐκ ἀπεχόντων τῆς ἐφανείας· ἀντίκειται δὲ τοῦτο τῇ καθ' ἡμέραν πείρᾳ, ἀναγκαίως ἄρα συνάγειν δεῖ, ὅτι τὰ βαρέα κατιόντα αὔξουσιν αὐτῶν τὴν ταχύτητα. Ο.Ε.Δ.

173. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. *Ἡ κίνησις τῶν διὰ τῆς ἑαυτῶν βαρύτητος κινουμένων ἐστὶν ἰσοταχής.*

ΔΕΙΞΙΣ. Ὁ Γαλιλαῖος τὸ πρῶτον ἀπεκάλυψε διὰ πολλῶν πειραμάτων, ὅτι τὰ βαρέα διανύουσι διὰ πολλῶν ἑξῆς δευτέρων λεπτῶν διαςήματατα κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ÷ 1 . 3 . 5 . 7 κτ, καὶ δὴ τὰ διανυόμενα διαςήματα ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως μέχρι τέλους αὐτῆς εἶεν ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων· τὰ αὐτὰ πειράματα εἶτα καὶ ὑπ' ἄλλων Φυσικῶν ἐπαναληφθέντα τὰ αὐτὰ ἀεὶ ἀπετέλεσαν· ἀλλ' ἐν τῷ 92 σχήματι τὰ ἑκάςου χρόνου διαςήματα οὐ δύνανται αὔξειν κατὰ τοὺς περιττοὺς ἀριθμοὺς 1, 3, 5 κτ., καὶ τὰ ἀθροίσματα τῶν διαςημάτων οὐ δύνανται πρὸς ἄλληλα ἔχειν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων διαςήματα, εἰμὴ τὰ ςοιχεῖα τοῦ ὅλου τριγώνου ΑΒζ, ἃ παριςῶσι τὰς προσγινομένας ταχυτῆτας, αὔξωσιν ἰσοταχῶς· εἰ μὴ γὰρ αἱ ἰσοδιεςῶσαι κάθετοι 1α, 2β, 3γ, αὔξωσιν ἅπασαι ἐπίσης, οὐ δύνανται ὁρισθῆναι ὑπὸ τῆς Αζ εὐθείας ἀκριβῶς, καλύψαντα τὸ τριγωνικὸν διάςημα ΑΒζ· ἄρα αἱ ταχύτητες τῶν βαρέων αὔξουσιν ἰσοταχῶς. Ο. Ε. Δ.

174. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πάνθ', ἃ γενικῶς δέδεικται περὶ τῆς ἰσοταχοῦς καὶ ἰσοβραδοῦς τῶν κινήσεων, λοιπὸν ἂν εἴη δεῖξαι περὶ τῆς κινήσεως τῶν βαρέων σωμάτων, ἀνιόντων, ἢ κατιόντων.

175. α'. Αἱ ταχύτητες, ἀρθέντος παντὸς κωλύματος, ἃς κτᾶται τὸ κινούμενον μεθ' ἕκαςον ἑξῆς λεπτὸν, αὔξουσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ÷ 1 . 2 . 3 . 4 κτ. (149).

176. β'. Τὸ ὁλικὸν διάςημα, ὃ διανύει σῶμα κατιὸν, τελευτῶντος τινὸς χρόνου, ἥμισύ ἐςι τοῦ διανυομένου διὰ κινήσεως ἰσομεροῦς, καὶ ἴσης τῇ προσγινομένῃ τελευτῶντος τοῦδε τοῦ χρόνου (155).

Τοιάδε γάρ ἐςιν ἡ ταχύτης βαρέος τινὸς, λίθου φέρ' εἰπεῖν, διανύοντος πόδας περίπου 15 ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ· ἀλλ' ἐν τούτῳ ἐκτήσατο ταχύτητα, δι' ἧς ἂν διανύσειε 2×15 πόδας $= 30$ ἐν ἑνὶ δευτέρῳ, εἰ ἐκινεῖτο ἰσομερῶς κατὰ ταύτην τὴν ταχύτητα· ἐὰν οὖν καλέσωμεν 1 τὴν ταχύτητα, δι' ἧς διανύει πόδας 30 ἐν ἑνὶ δευτέρῳ, αὕτη γενήσεται 2 τελευτῶντος τοῦ δευτέρου, 3 τοῦ τρίτου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· οὕτως ἡ ταχύτης, ἣν ἐκτήσατο τὸ σῶμα τελευτῶντος τοῦ δευτέρου λεπτοῦ, ἔστι τοιαύτη, δι' ἧς ἂν διανύσειεν ἰσομερῶς ἐν δευτέρῳ κινούμενον $2 \times 30 = 60$ πόδας, καὶ ἐν γένει, ἵν' εὕρωμεν τὴν προσγενομένην ταχύτητα τελευτῶντος τινὸς χρόνου, τουτέστι τὸν ἀριθμὸν τῶν ποδῶν, οὓς διανύει τὸ σῶμα κινούμενον ἰσομερῶς κατὰ ταύτην τὴν ταχύτητα ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ, πολλαπλασιαστέον 30 ἐπὶ τοῦτον τὸν χρόνον· τῆς οὖν προσγενομένης ταχύτητος τελευτῶντος δεκάτου λεπτοῦ οὔσης 10, τὸ διάστημα τὸ διανυόμενον ὑπὸ τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν αὐτὴν ταχύτητα ἔσται ποδῶν $30 \times 10 = 300$.

177. γ'. Τὰ διανυόμενα διαστήματα ἐν ἑκάστῳ ἀλληλοδιαδόχῳ πεπερασμένῳ χρόνῳ αὔξουσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν περιττῶν ἀριθμῶν $\div 1 . 3 . 5 . 7 .$ κτ. (150)· σῶμα γὰρ διανύον ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ πόδας 15, διανύσει ἐν τῷ δευτέρῳ $3 \times 15 = 45$· καὶ γὰρ διὰ τῆς ταχύτητος, ἧς ἐκτήσατο τὸ σῶμα τελευτῶντος τοῦ πρώτου λεπτοῦ, διανύσει ἐν τῷ ἐφεξῆς λεπτῷ πόδας 30 (176)· ἐπεὶ δὲ συνεχῶς ἡ βαρύτης ἐπενεργεῖ τῷ σώματι ἐπὶ τοῦ δευτέρου λεπτοῦ, ἐμποιοῦσα αὐτῷ ταχύτητα, δι' ἧς διανύσει καὶ ἐν τῷ δευτέρῳ λεπτῷ, ὃ διήνυσε διάστημα ἐν τῷ πρώτῳ, εἴτ' οὖν πόδας 15, συναπτομένων τῶν 15 τοῖς 30, ἀποτελοῦνται 45· ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τοῦ τρίτου λεπτοῦ· ἐπείπερ ἰσοταχῶς κινούμενον τὸ σῶμα ἐκτήσατο ἐν δυσὶ τοῖς προτέροις λεπτοῖς ταχύτητα ὡς δύω

εἶτ' ὂν ποδῶν 60, τούτοις προστιθεμένων τῶν 15 διὰ τὴν ἐν τῷ τρίτῳ λεπτῷ ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος, ἔσονται πόδες 75· καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

178. δ'. Ἐν τῇ καθόδῳ τῶν σωμάτων τὰ διανυόμενα διαστήματα εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων τετράγωνα (151)· γνωσθέντος οὖν ἅπαξ τοῦ διανυσθέντος διαστήματος ἐν τῷ πρώτῳ χρόνῳ, δυνατὸν, ἤτοι, χρόνου ἄλλου δοθέντος, εὑρεῖν τὸ ἐν αὐτῷ διανυσθησόμενον διάστημα, ἢ, διαστήματος δοθέντος, εὑρεῖν τὸν ἀπαιτούμενον χρόνον εἰς διάνυσιν αὐτοῦ, ἢ τέλος, χρόνου ὡρισμένου δοθέντος, εὑρεῖν τὸ ἰδιαίτερον διάστημα, τὸ ἐν ἑκάστῳ μέρει τοῦ χρόνου διανυσθέν.

179. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΝ ΤΗι Α'. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ. Πόσον διάστημα διανύσει ἐν τέσσαρσι λεπτοῖς δευτέροις λίθος ἄφετος; φημὶ δή· τὸ ἀπὸ 1 δευτέρου λεπτοῦ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ 4, ὡς 15 ποδῶν διάστημα διανυόμενον ἐν ἑνὶ δευτέρῳ λεπτῷ πρὸς χ, εἶτ' οὖν $1:16::15:\chi=240$· εἰς εὕρεσιν ἄρα τῶν τοῦ διαστήματος ποδῶν πολλαπλασιαστέον 15 ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ χρόνου τετράγωνον.

180. Ἐντεῦθεν ἀρύεται ἡ λύσις τοῦ ἐφεξῆς προβλήματος· σφαῖρα μολυβδίνη ἀφ' ὕψους πύργου κατηνέχθη πρὸς τὴν γῆν ἐν τρισὶ λεπτοῖς δευτέροις· πόσον ἄρ' ἐστὶ τὸ τοῦ πύργου ὕψος; ἢ $15 = 3^2\ (=9) = 135$ ποσί.

181. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΝ ΤΗι Β'. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ. Λίθος ἀφ' ὕψους ποδῶν 375 καταφερόμενος τῷ ὁρίζοντι πρὸς ὀρθὰς, πόσον διαπανήσει χρόνον, ἕως τ' ἂν ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ὁρίζοντος γένηται; ἐπεὶ οὖν $15:375::1^2:\chi^2=5$· λίθος ἐν τῷ κατιέναι διαπανήσει 5 λεπτά.

182. ΕΤΕΡΟΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Νεύτων ἔδειξεν, ὡς ἡ τῆς σελήνης βαρύτης, ἣν φέρεται ἐπὶ τὴν γῆν, τοσαύτη ἐστὶν, ὡς ἀφεθεῖσαν ἐν λεπτῷ τῷ πρώτῳ κατελ.

θεῖν πρὸς τὴν γῆν πόδας 15· τῦ δὲ μεταξὺ γῆς ϗ σελήνης διαςήματος ὄντος λευγῶν 84000, πόσον ἂν χρόνον ἀφεθεῖσα ἡ σελήνη δαπανήσειεν, ἕς τ' ἂν τὸ ἐκείνης κέντρον τῷ ταύτης ἐξ ὑποθέσεως συμπέσῃ; ἀναχθεισῶν τῶν λευγῶν εἰς πόδας, ἔςι 15 ποδ. : 1150128000 ποδ. :: 1^2 : $\chi^2 = 76675200$· ἄρα $\chi = 8756,44$· ἡ ἄρα σελήνη πεσεῖται ἐπὶ τῆς γῆς ἐν λεπτοῖς 8756, 44 = 6 ἡμ. 56 λεπ. 26 δευτ. ὡς ἔγγιςα.

183. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΝ ΤΗ Γ'. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ. Σώματι διανύσαν ἐν 5 δευτέροις λεπτοῖς πόδας 375, πόσες ἐν ἑκάςῳ λεπτῷ διήνυσε; τῦ ὁλικῦ διαςήματος, τῦ ἐν 5 δευτέρ. λεπ. διανυθέντος, ὀφείλοντος εἶναι $= 15 \times 5^2$, ἀφαιρετέον τῦ 375 τὸ $15 \times 4^2 =$ 240· τὸ κατάλοιπον 135 ἔςαι τὸ διανυθὲν ἐν τῷ πέμπτῳ λεπτῷ· ἀπὸ δὲ 240 ἀφαιρεθέντος τῦ $15 \times 3^2 =$ 135, τὸ κατάλοιπον ἔςαι τὸ διανυθὲν ἐν τῷ τετάρτῳ λεπ. ϗ ὕτως ἐφεξῆς.

184. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν χρόνων ᾖ μέγας, πρὸς εὐμάρειαν χρηςέον τῇ ἑξῆς ἰδιότητι τῆς ἀριθμητικῆς προόδυ. ἕκαςος αὐτῆς ὅρος ἴσος ἐςὶ τῷ πρώτῳ σὺν τῷ παραγομένῳ ὑπὸ τῆς διαφορᾶς, ϗ τῦ τῶν ἡγησαμένων αὐτῦ ὅρων ἀριθμῦ (Συμβ. Λογ. 212)· ἐὰν δὲ φέρ' εἰπεῖν ᾖ βυλομένοις εἰδέναι, ἥτις ἐςὶν ἡ ταχύτης τῆς σελήνης ἐν τῷ $8756^{ω}$· λεπτῷ, εἴτ' ὖν τῷ ἐσχάτῳ τῶν τῆς ὑποτιθεμένης ἐπὶ τὴν γῆν καθόδυ αὐτῆς· ὗτος ὖν ὁ ὅρος ὀφείλει εἶναι $= \overline{1+2} \times 8755$· ἀλλ' ὁ πρῶτος ὅρος ἐπὶ ταύτης τῆς ὑποθέσεως ἔςι πόδες 15, ϗ δὴ ἡ διαφορὰ αὐτῶν 30· ἄρα ἡ ταχύτης τῆς σελήνης ἐν τῷ ἐσχάτῳ λεπτῷ ἔςαι $\overline{15+30} \times 8755 = 262665$ ποσί.

185. έ. Οἱ χρόνοι, ἢ αἱ ταχύτητες, εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν διασημάτων (153)· γινωσκομένε ἓν τε διανυθέντος ἐν τῷ πρώτῳ χρόνῳ διασήματος, ϗ ἑτέρε διασήματος δοθέντος, εὑρεῖν δυνήσομαι, ἥτις ἐςὶν ἡ ταχύτης, ἣν τὸ σῶμα ἕξει τελευτῶντος τε δευτέρε διασήματος, ἢ, δοθείσης τῆς ταχύτητος, γνωσθήσεται τὸ διάσημα, εἴτ' ἓν ἀφ' ὅσε ὕψες ἔδει κατελθεῖν τὸ σῶμα, ἵνα ταύτην ἂν ἐκτήσατο τὴν ταχύτητα.

186. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΝ ΤΗ: Β'. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ. Ἀφ' ὅσε ὕψες κατελθεῖν δεῖ σῶμα, ἵνα κτήσηται ταχύτητα, δἰ ἧς ἰσομερῶς κινέμενον διανύσειεν ἂν πόδας 20 ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ; εἰδότες ἓν ὡς τὸ σῶμα προσκτᾶται ταχύτητα ὡς διανύσαι πόδας 30, κατερχόμενον ἐξ ὕψες ποδῶν 15, λύσομεν ῥᾶςα τὸ πρόβλημα· $30 : 20 :: \sqrt{15} : \sqrt{\chi}$· ἐπεὶ δὲ $\sqrt{15} = 3,8,3$ ὡς ἔγγιςα, ἄρα ἔςαι $\sqrt{\chi} = 2,582 = 6,66$ ποσὶ περίπε, ϗ δὴ ἀπὸ τοσέτε ὕψες κατιὸν τὸ σῶμα κτήσεται ταχύτητα τὴν ζητεμένην, ἵνα δἰ αὐτῆς ἰσομερῶς κινέμενον διανύσῃ ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ πόδας 20.

187. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ. ά. Ἐπείπερ ἅπαν ἔγνωςαι ἐν ταῖς ταχύτησι τῶν βαρέων, ἔξεςαι ταύταις χρήσασθαι ὡς ὅροις παραθέσεως ἐν ἄλλαις ταχύτησιν· οἷον ἔξεςαι εἰπεῖν, ὅτι ταχύτης 30 ποδῶν ἐν λεπτῷ δευτέρῳ κινήσεως ἰσομερῆς ἴση ἐςὶ τῇ, ἣν κτᾶται λίθος καταφερόμενος ἀφ' ὕψες ποδῶν 15, ϗ ἐπὶ ἄλλων ὡσαύτως· β'. εἴτις βέλοιτο κινητῷ τινι ταχύτητα ἐμποιῆσαι, μεθ' ἧς ἂν ἐν χρόνῳ ὡρισμένῳ διάσημα δοθὲν διανύσειε, τεύξεται τέτε ῥᾶςα, εἰ σώματι βαρὺ κατιὸν ἀφ' ὕψες, ὃ τὴν ζητεμένην ταχύτητα ἐμποιῆσαι δύναται, μεταδῷ τῷ κινητῷ τέτῳ ἁπάσης τῆς ἑαυτε ταχύτητος.

188. ϛ΄. Αἱ ταχύτητες τῶν ἀνιόντων σωμάτων φθίνουσι κατὰ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ÷ 6.5.4.3.2 1 (156), ἐκ πείρας.

189. Ἀλλὰ καὶ οὕτως ἔχειν ἀνάγκη τὸ πρᾶγμα· ἐπεὶ γὰρ ἡ κίνησις τῶν κατιόντων ἐστὶν ἰσοταχὴς διὰ τὴν βαρύτητα, προσεπιτιθεμένων ἀεὶ νέων ταχυτήτων ἐν ἑκάστῳ λεπτῷ ἴσων· ἀνιόντων ἄρα, ἀφαιρεῖσθαι ἀνάγκη ἀεὶ βαθμοὺς ἰσαλλήλους ταχύτητος· οὕτως ἄρα αἱ ταχύτητες τῶν ἀνιόντων ἀπομειωθήσονται κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν φθίνουσαν πρόοδον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ÷ 6.5.4.3.2.1.

190. Ἐντεῦθεν ἄρα α΄. ἡ βαρύτης βραδύνει τὰ βαρέα ἀνιόντα, ὅσον αὐτὰ ἐπιταχύνει κατιόντα· β΄. σῶμα κατιὸν κτᾶται ταχύτητα, ὅσης ἐπιδεῖται, ἵν᾽ ἀνέλθῃ εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος, ἐξ οὗ κατῆλθεν· γ΄. πάντα τὰ εἰρημένα περὶ τοῦ λόγου τῶν ταχυτήτων, τῶν διαστημάτων, καὶ τῶν χρόνων καὶ τοῦ, καθ᾽ ὃν τρόπον ταῦτα λογίζεσθαι δεῖ περὶ σώματος βαρέος κατιόντος, τὰ αὐτὰ νοητέον καὶ περὶ σώματος ἀνιόντος, ἀρχομένοις ἐκ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης ταχύτητος, ὡς ἤδη ἐποιοῦμεν, ἀπὸ δὲ τῆς μεγίστης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ.

Περὶ καθόδου τῶν σωμάτων διὰ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

191. Βαρύτης καλεῖται ἀπόλυτος, ἣν ἔχει τὸ σῶμα ἐν ἑαυτῷ, μηδόλως παρεμποδιζόμενον ὑπὸ τῶν μέσων· βαρύτης δὲ σχετικὴ ἡ ἐναπολειπομένη ἀπὸ τῆς τῶν κωλυμάτων ἐπηρείας· σῶμα τοίνυν βαρύ, ἐν μὲν τῷ

κενῷ κάτεισι κατὰ τὴν ἀπόλυτον βαρύτητα ἑαυτȣ̃· κείμενον δὲ ἐν μέσῳ, ὃ ϗ αὐτό ἐςι βαρὺ, οἷος ὁ ἀὴρ, ἀπόλλυσιν, ὡς ὀψόμεθα, μέρος τῆς ἑαυτȣ̃ βαρύτητος ἴσον τῇ τȣ̃ μέσȣ βαρύτητι· τὸ δὲ περιὸν τῆς ἀπολύτȣ βαρύτητος, ὀνομάζεται βαρύτης σχετική· ὡσαύτως βαρὺ σῶμα τεθὲν ἐπὶ τραπέζης τυχὸν κεκλιμένης τῷ ὁρίζοντι, μὴ δυνάμενον πρὸς ὀρθὰς κατελθεῖν, ὥσπερ διὰ τῆς ἀπολύτȣ ἑαυτȣ̃ βαρύτητος, ἀλλὰ πλαγίως, ἀπόλλυσιν, ὡς δείκνυται διὰ πείρας, μέρος τῆς ἑαυτȣ̃ βαρύτητος· τὸ δὲ κατάλοιπον, βαρύτης ἤκȣσε σχετική.

192. Ἔςω ὁριζόντειος εὐθεῖα (σχ. 93) ἡ ΖΘ ϗ ἡ ΕΘ, κεκλιμένη ἐπὶ τῆς πρώτης, εἶτ' ἐν τȣ̃ ὁρίζοντος, ἔςω, ὃ καλεῖται κεκλιμένον ἐπίπεδον, ἡ ἐν ΕΘ μῆκος καλεῖται τȣ̃ κεκλιμένȣ ἐπιπέδȣ, ϗ ἡ ΕΖ κάθετος τῷ ὁρίζοντι, ὕψος τȣ̃ κεκλιμένȣ ἐπιπέδȣ.

193. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἡ ἀπόλυτος βαρύτης τȣ̃ Μ τȣ̃ ἐπὶ τȣ̃ κεκλιμένȣ ἐπιπέδȣ ΕΘ πρὸς τὴν αὐτȣ̃ σχετικὴν λόγον ἔχει, ὃν ΕΘ πρὸς ΕΖ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἤχθω ἐκ τȣ̃ κέντρȣ Κ τȣ̃ σώματος Μ ἡ τῷ ΕΘ ὁρίζοντι κάθετος ΚΤ, ϗ ἡ Κα κάθετος τῷ ἐπιπέδῳ ΕΘ, ϗ πεπληρώσθω τὸ παραλληλόγραμμον αΚνβ· ἐκεῖν ἡ εὐθεῖα Κβ, ἣ ἐμφαίνει τὴν φορὰν τȣ̃ Μ σώματος πρὸς τὸ τῆς γῆς κέντρον, ϗ συναντᾷ κατὰ τὸ β τῷ ἐπιπέδῳ ΕΘ, ἐφ' ȣ̃ ἔςι πλαγία, ἀναλυθῆναι δύναται εἰς δύω δυνάμεις, τήν τε αΚ κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ, δι' ἧς τὸ κινητὸν ἐπιδρᾷ τῷ ἐπιπέδῳ, ϗ τὴν Κν, καθ' ἣν ἡ δύναμις Κβ σπεύδει μετακινεῖν τὸ Μ πρὸς τὸ ἐπίπεδον (138)· ἀλλ' ἡ αΚ πᾶσα ἀφανίζεται, καταθλίβοντος τȣ̃ Μ τὸ ΕΘ ἐπίπεδον, ἢ, ὃ ταυτὸν, τὸ ΕΘ ἐπίπεδον αἴρει πᾶσαν ταύτην τὴν βαρύτητα· καταλείπεται ἄρα τῷ κινητῷ, ἵνα κινηθῇ ἐπὶ τῦ ἐπιπέδυ, μόνη ἡ ἰσχὺς Κν = αβ· ἄρα Κβ μὲν ἐμφαίνει τὴν ἀπόλυτον τῦ Μ βαρύτητα, αβ δὲ τὴν σχετικήν· ἀλλὰ τὰ Κνβ, βΤΘ τρίγωνα εἰσὶν ὅμοια· παρὰ γὰρ τὰς ὀρθὰς ν, Τ, αἱ δύω ὑπὸ ΤιΘ, βΓν ὡς ἀντίσοιχοι εἰσὶν ἴσαι· ἄρα Κβ : Κν :: βΚ : βΤ, ἐπεὶ δὲ ϰ̀ τὰ βΤΘ, ΕΖΘ τρίγωνα ὅμοια, ἄρα Κβ : Κν :: ΕΘ : ΕΖ. Ο. Ε. Δ.

194. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἡ ταχύτης τῦ κινητῦ κατιόντος διὰ τῦ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ πρὸς τὴν αὐτῦ τῦτυ κατιόντος πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι λόγον ἔχει, ὃν τὸ τῦ ἐπιπέδυ ὕψος ΕΖ πρὸς τὸ μῆκος ΕΘ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν τὸ μῆκος ΕΘ διπλῦν ᾖ τῦ ὕψυς ΕΖ, τὸ κινητὸν διασώσει τὸ ἥμισυ τῆς ἑαυτῦ βαρύτητος· ἐὰν δὲ τριπλῦν, ἓν τριτημόριον, ϰ̀ ὕτως ἑξῆς.

195. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἡ ἀπόλυτος βαρύτης πρὸς τὴν σχετικὴν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἡμίτονον τῆς ὀρθῆς γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς κλίσεως· καὶ γὰρ $K\beta : K\nu :: E\Theta : EZ :: \frac{E\Theta}{2} : \frac{EZ}{2}$· ἀλλὰ $\frac{E\Theta}{2}$ ἐσὶν ἡμίτονον τῆς ὀρθῆς γωνίας Ζ, ϰ̀ $\frac{EZ}{2}$ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς κλίσεως (Γεωμ. 482)· ἄρα κτ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ὅσον ἡ ὑπὸ ΕΘΖ γωνία τῆς κλίσεως ἐσὶ ποσὸν πεπερασμένον, τῦτ' ἐσὶν ὅσον ἡ ΕΘ ὐ δύναται ἐκληφθῆναι ὡς παράλληλος τῇ ΖΘ, τὸ ἡμίτονον τῆς Θ γωνίας ἕξει λόγον πεπερασμένον πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, ἤτε σχετικὴ βαρύτης ἔσαι μέρος πεπερασμένον τῆς ἀπολύτυ· ἄρα ἀεὶ βαρύτι, τιθέμενον ἐπὶ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ, κατιέναι ὀφείλει, ἥτις ποτ' ἂν ᾖ ἡ ἔγκλισις· ἐὰν ὖν συχνάκις συμβαίνῃ βάρος τι, τιθέμενον ἐπὶ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ, μὴ κατιέναι, ἀπ᾽ ἐξωτερικῆς τινος αἰτίας τυ̃τὶ γίνεται, οἷα ἡ τριβὴ, ἣν ἀφανίσαι ὀφείλει τὸ βάρος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ϗ ἡ τῦ περιέχοντος ἀέρος ἀντίςασις.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ σχετικαὶ βαρύτητες τῦ αὐτῦ σώματος, κειμένυ ἐπὶ διαφόρως κεκλιμένων ἐπιπέδων, εἰσὶν ὡς τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν τῶν ἐγκλίσεων.

196. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ κίνησις σώματος, ἐπὶ κεκλιμένον ἐπίπεδον κειμένυ, ἐςὶν ἰσοταχὴς

ΔΕΙΞΙΣ. Ὅσον ἂν τὸ ἐπίπεδον ἐπικεκλιμένον ᾖ τῷ ὁρίζοντι, ἀεὶ καταλείπεταί τι βαρύτητος ὠθέσης τὸ Μ σῶμα πρὸς τὴν ΕΘ· τυτὶ τὸ μέρος τῆς ἀπολύτυ βαρύτητος, εἴτ᾽ ἦν ἡ σχετικὴ βαρύτης, ἥτις ἐπενεργεῖ τῷ Μ κατὰ τὸ β, ϗ ἐμποιεῖ αὐτῷ ταχύτητα Κν = αβ, ἐν τῷ ἐφεξῆς λεπτῷ προσθήσει αὐτῷ ταχυτῆτα ἴσην τῷ αβ, ὥσπερ ϗ ἡ ἀπόλυτος βαρύτης ἐμποιήσειεν ἂν τῷ Μ καινὴν ταχυτῆτα ἴσην τῷ βΚ, εἴγε ἡ σχετικὴ βαρύτης παραμένει τῷ κεκλιμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΘ, ὡς ἡ ἀπόλυτος τῷ καθέτῳ ΕΖ· αὕτη δὲ ἡ δευτέρα ταχύτης συναπτομένη τῇ πρώτῃ, ϗ ἰσυμένη αὐτῇ, τελευτῶντος τῦ δευτέρυ λεπτῦ, διπλῆ γίνεται τῆς πρώτης· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ ταχύτης, τελευτῶντος τῦ τρίτυ λεπτῦ, ἔσεται τριπλῆ τῆς πρώτης, ϗ ὕτως ἑξῆς. Ο. Ε. Δ.

197. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Λοιπὸν ὖν ἐςὶν, ἃ δέδεικται περὶ τῶν κατὰ κάθετον κατιόντων σωμάτων, ἀποδεῖξαι ϗ περὶ τῶν διὰ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ καταβαινόντων.

Οὐκῦν ἐν ταύτῃ τῇ κινήσει, α΄. αἱ ταχύτητες αὔξυσιν ὡς οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1. 2. 3. 4 κτ· β΄. τὰ διανυόμενα διαςήματα ἐν ἑκάςῳ λεπτῷ πεπερασμένῳ ἔσονται ὡς οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ 1. 3. 5. 7 κτ· γ΄. τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα τῶν διανυομένων διαςημάτων τελευτώντων τῶν χρόνων ἔςαι ὡς τὸ ἀπὸ τῶν χρόνων τέτων τετράγωνον· ϗ ὅτως ἑξῆς.

198. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ ταχύτης, ἣν κτᾶται σῶμα τὸ Μ, κατιὸν ἐν δεδομένῳ χρόνῳ, ἐν 3 φέρε δευτέροις λεπτοῖς, διὰ τῦ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ ΕΘ, πρὸς τὴν ταχύτητα, ἣν κτᾶται τὸ αὐτὸ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, κατιὸν κατὰ τὴν κάθετον ΕΖ, λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὕψος ΕΖ πρὸς τὸ ΕΘ μῆκος τῦ ἐπιπέδυ· ἐπεὶ ἑκάςη ταχύτης ἀπειροςὴ, ἣν ποιεῖ ἡ ἀπόλυτος βαρύτης ἐν ἑκάςῳ ἀπειροςῷ λεπτῷ ἰὸν κατὰ τὴν ΕΘ, ἔςαι πρὸς ἑκάςην ἀπειροςὴν ταχύτητα, ἣν ποιεῖ κατὰ τὴν κάθετον ΕΖ, ὡς ΕΖ : ΕΘ· ἡ γὰρ σχετικὴ βαρύτης πρὸς τὴν ἀπόλυτον ἐςὶν ὡς ΕΖ : ΕΘ (193)· ἄρα τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἀπειροςῶν ταχυτήτων, εἴτ᾽ ὖν ἡ ὁλικὴ κατὰ τὴν ΕΘ ταχύτης, ἡ ἐκ τῆς σχετικῆς βαρύτητος ἐγγινομένη πρὸς τὴν ὁλικὴν ταχύτητα τὴν κατὰ τὴν ΕΖ ἔςαι ὡς ΕΖ : ΕΘ.

Ἡ πρώτη ἄρα ταχύτης πρὸς τὴν δευτέραν, ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς ἐγκλίσεως, εἴτ᾽ ὖν $\frac{ΕΖ}{2}$ πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὀρθῆς γωνίας, εἴτ᾽ ὖν $\frac{ΕΘ}{2}$· ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΕΖΘ, ἡμίτονον μὲν τῆς κατὰ τὴν ἔγκλισιν γωνίας ἐςὶ τὸ $\frac{ΕΖ}{2}$, ἡμίτονον δὲ τῆς ὀρθῆς γωνίας τὸ $\frac{ΕΘ}{2}$ (Γεωμ. 482).

199. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Οὕτως ἄρα (110) τὸ διανυόμενον διάςημα ἐν τῷ κεκλιμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς τὸ διάςημα τὸ κατὰ κάθετον διανυόμενον ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ,

ἔϛιν ὡς ΕΖ : ΕΘ· ἐὰν ἓν, ἐν ᾧ σώματι κάτεισι τὴν κάθετον ΑΒ (σχ. 94)· δύω ἕτερα σώματα κατίωσιν ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διὰ τῶν κεκλιμένων ἐπιπέδων ΑΘ, ΑΖ, ϗ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας Β ἀχθῶσι κάθετοι αἱ ΒΓ, Βξ, αὐτοῖς τοῖς ἐπιπέδοις, τὰ δύω ἕτερα σώματα ἐφίξονται, τὸ μὲν τοῦ Γ σημείου, θάτερον δὲ τοῦ ξ, ἐν ᾧ χρόνῳ τὸ πρῶτον ἐφίξεται τοῦ Β· διὰ γὰρ τὰς ταῖς ὑποτεινούσαις ΑΘ, ΑΖ καθέτους ΒΓ, Βξ, α΄. ἐκ τῶν δύω ὁμοίων τριγώνων ΑΒΘ, ΑΒΓ (Γεωμ. 340), ἔϛαι ΑΓ : ΑΒ : : ΑΒ : ΑΘ· β΄. ἐκ τῶν ἄλλων δύω ὁμοίων τριγώνων ΑΒΖ, ΑΒξ, ἔϛαι Αξ : ΑΒ : : ΑΒ : ΑΖ· εἶτ᾽ ἓν τὸ διανυόμενον διάϛημα ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου πρὸς τὸ κατὰ κάθετον ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διανυόμενον λόγον ἔχει, ὃν ἡ κάθετος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον.

200. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐὰν δύω σώματα ἅμα πίπτωσιν ἀπὸ τοῦ σημείου Ε (σχ. 95), τὸ μὲν πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ΕΘ, θάτερον δὲ τὴν ΕΖ κάθετον, δυνατὸν προσδιορίσασθαι, εἰς ὃ σημεῖον τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἀφίξεται τὸ πρῶτον, ὅταν τὸ δεύτερον γένηται ᾽πί τινος δεδομένου σημείου Ι τῆς καθέτου· ϗ γὰρ ἀχθείσης τῆς Ιτ καθέτου τῇ ΕΘ, τὸ σημεῖον τ, καθ᾽ ὃ αὕτη συμβάλλει τῷ ἐπιπέδῳ, ἔϛαι τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ ἀφίξεται τὸ πρῶτον, ὅταν ἀφίκηται τὸ δεύτερον ἐπὶ τοῦ Ι· διὰ γὰρ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΕτΙ, ΕΘΖ, ἔϛιν Ετ : ΕΙ : : ΕΖ : ΕΘ· ἄρα τὸ διανυθὲν διάϛημα ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου πρὸς τὸ διανυθὲν κατὰ κάθετον ἔϛιν ὡς ἡ κάθετος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον.

201. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Πᾶν σῶμα ἴσοις χρόνοις διέρχεται ἑκάϛην τῶν χορδῶν, ϗ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου· τῷ γὰρ Κ μέσῳ σημείῳ τῆς ΑΒ (σχ. 96), ὡς κέντρῳ,

ϗ διαςήματι τῷ ΑΚ, γεγράφθω κύκλος ὁ ΑΔΒΖ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΒΔ, Βτ, τοῖς κεκλιμένοις ἐπιπέδοις ΑΘ, ΑΗ· λέγω δὴ σῶμα ἅπαν διερχόμενον τὴν διάμετρον ΑΒ, ϗ τὰς χορδὰς ΑΔ, Ατ, ἴσοις χρόνοις ἑκάςην αὐτῶν διανύσει· αἱ γὰρ γωνίαι ΒΔΑ, ΒτΑ, ὡς βεβηκυῖαι ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἔσονται ὀρθαὶ ἐγγεγραμμέναι, ϗ δὴ αἱ ΑΔ, Ατ, χορδαὶ τοῦ κύκλου· ἄρα ἴσοις χρόνοις ἅπαν σῶμα διελεύσεται τήν τε διάμετρον ϗ ἑκάςην χορδήν.

202. ΘΕΩΡΗΜΑ Γʹ. Ὁ χρόνος, ὃν δαπανᾷ τὸ κινητὸν, ἵνα διέλθῃ ἅπαν τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ΑΘ (σχ. 97), πρὸς ὃν δαπανᾷ, ἵνα διέλθῃ τὴν κάθετον ΑΒ, λόγον ἔχει, ὃν τὸ μῆκος ΑΘ τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ αὐτοῦ ὕψος ΑΒ.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὸ γὰρ σῶμα, διανύον ἅπαν τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ΑΘ, κάτεισι τῷ ὄντι πᾶσαν τὴν κάθετον ΑΒ, ἐν ᾧ χρόνῳ διελεύσεται ὁριζοντίως τὴν παράλληλον ΘΒ = Αν· ἀλλὰ τὸ μέρος τῆς ΑΒ ἐπὶ τῆς ΑΘ διατρεχόμενον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ, τὸ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διαννόμενον, λόγον ἔχει, ὃν ἡ σχετικὴ βαρύτης πρὸς τὴν ἀπόλυτον (199)· ἐὰν ἄρα ΑΘ διπλῆ ᾖ τῆς ΑΒ, τὸ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διανυσθὲν μέρος τῆς ΑΘ, ἥμισυ ἔςαι τοῦ διανυσθέντος μέρους τῆς ΑΒ· δεήσει ἄρα αὐτῷ χρόνου διπλοῦ, ἵνα διέλθῃ ὅλην τὴν ΑΒ ἐπὶ τῆς ΑΘ, ἐὰν ᾖ ΑΘ = 2ΒΑ· ὡσαύτως δεήσει χρόνου τριπλοῦ, ἐὰν ᾖ ΑΘ = 3ΑΒ· ϗ ἐν γένει ὁ χρόνος, ὃν δαπανᾷ τὸ κινητὸν, ἵνα διανύσῃ τῆς ΑΘ μέρος ἴσον τῷ ὕψει ΑΒ, πρὸς τὸν χρόνον, ὃν δαπανᾷ κατιὸν αὐτὸ τὸ ΑΒ κατὰ κάθετον, ἐςὶν ὡς τὸ μῆκος τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ αὐτοῦ ὕψος. Ο.Ε.Δ.

203. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οἱ δαπανώμενοι χρόνοι μέχρις ἂν τὸ σῶμα ἀφίκηται ἐπὶ τῆς ὁριζοντίου διὰ διαφόρων

ἐπιπέδων ΑΘ, ΑΗ, κτ. (σχ. 96) τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΒ ἐχόντων, ἔσονται ὡς τὰ ἐπίπεδα.

204. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἡ ταχύτης τῦ κινητῦ ἔσεται ἡ αὐτὴ, τό,τε κεκλιμένον ἐπίπεδον ΑΘ διελθόντος, καὶ τὴν ΑΒ κατελθόντος κάθετον.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ προσκτηθεῖσα ταχύτης ἐπὶ τῦ ΑΘ ἐν ἑκάστῳ λεπτῷ ἐστι τυχὸν ὑποτριπλάσιος τῆς ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἣν ἡ ΑΘ = 3ΑΒ (198)· ἄρα ἐν ὡρισμένῳ τινὶ χρόνῳ τὸ ἄθροισμα τῶν προσκτηθεισῶν ταχυτήτων ἐπὶ τῆς ΑΘ ὑποτριπλάσιον ἔσαι τῦ ἀθροίσματος τῶν ἐν τῇ ΑΒ ταχυτήτων· ἀλλ᾽ ὡσαύτως ὁ ἐπὶ τῆς ΑΘ χρόνος ἐστι τριπλάσιος τῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ (202)· ἐπεὶ δὲ ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει αἱ ταχύτητες εἰσὶν ὡς οἱ χρόνοι (148)· τὸ ἄρα πρῶτον ἄθροισμα τῶν ταχυτήτων, ὃ ἦν ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ $\frac{1}{3}$ τῦ δευτέρυ, ἰσωθήσεται αὐτῷ ἐν χρόνῳ τριπλασίῳ· ἄρα κτ. Ο.Ε.Δ.

205. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν σώματα κατίωσιν ἐξ ἐπιπέδων κεκλιμένων (σχ. 98), τῶν ΑΓ, ΑΔ, ΑΖ, τὸ αὐτὸ ὕψος ἐχόντων· α΄. ἴσην ἕξυσι ταχύτητα καταβάντα κατὰ τὰ Δ, Γ, Ζ· β΄. ἴσην ἕξυσι ταχύτητα ἐν τοῖς σημείοις π, ξ, ρ, τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων τοῖς ἀντισοιχῦσι τῷ αὐτῷ ὕψει Ατ.

206. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἅπαν σῶμα κατιὸν διὰ πολλῶν κεκλιμένων ἐπιπέδων ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ (σχ. 99), κατὰ τὸ Ε γενόμενον, τὴν αὐτὴν ἕξει ταχύτητα, ἣν ἂν σχοίη κατελθὸν εἰς τὸ Β διὰ τῆς καθέτυ ΑΒ· ἐν γὰρ τῷ Γ τὴν αὐτὴν ἕξει ταχύτητα, ἣν καὶ ἐν τῷ Ζ, ἐν δὲ τῷ Δ, ἣν καὶ ἐν τῷ Θ, τέλος δὲ ἐν τῷ Ε, ἣν καὶ ἐν τῷ Β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τῆς διὰ καμπύλων κινήσεως.

207. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. *Πᾶν σῶμα, τὰ κοῖλα φερόμενον παντὸς πολυγώνȣ, ἐν τῷ συναντᾷν ἑκάϛῃ πλευρᾷ ἀπολέσει ποσότητα κινήσεως, ἐμφαινομένην ὑπὸ τȣ̃ πλαγίȣ ἡμιτόνȣ τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τῶν δύω πλευρῶν.*

ΔΕΙΞΙΣ. *Κεκτήσθω γὰρ τὸ σῶμα, μετὰ τὸ τὴν* AB (σχ. 100) *πλευρὰν διελθεῖν, δύναμιν ἡντιναȣ̃ν, ἣν ἐμφαινέτω ἡ* ΒΓ, *μέρος ȣ̓̃σα τῆς* AB *προεκβεβλημένης· ἐν ᾧ ȣ̃ν τὸ κινητὸν συμβάλῃ τῇ* BZ *πλευρᾷ κατὰ τὸ* B, *ἡ δύναμις* ΒΓ, *ἅτε πλαγία τῇ* BZ, *ἐκληφθῆναι δύναται ὡς συγκειμένη ἐκ τῆς δυνάμεως* BE, *παραλλήλȣ τῇ* BZ, *καὶ τῆς* ΓΕ, *καθέτȣ τῇ* BZ (138)· *ἀπολέσει ȣ̃ν ἀναγκαίως πᾶσαν τὴν δύναμιν* ΓΕ, *διὰ τὴν ἀντίϛασιν τȣ̃ ἐπιπέδȣ* BZ, *καὶ μόνη περιέϛαι αὐτῷ ἡ* BE· *ἐὰν ȣ̃ν, κέντρῳ μὲν τῷ* B, *διαϛήματι δὲ τῷ* ΒΓ, *γραφῇ τόξον τὸ* ΓΤ, *ἡ* ET *ὑπεροχὴ ἔϛαι τῆς* ΒΓ *ὑπὲρ τὴν* BE· *ἐμφανεῖ ἄρα αὕτη, ὃ ἀπώλεσε τὸ κινητὸν, προσβαλὸν τῇ* BZ *πλευρᾷ· ἀλλὰ τὸ* ET *ἐϛὶ πλάγιον ἡμίτονον τῆς ὑπὸ* ΓΒΖ *γωνίας* (Γεωμ. 492)· *ἄρα.* Ο. Ε. Δ.

208. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. *Ἐς ὃ ἂν ἡ ὑπὸ* ΓΒΖ *γωνία εἴη πεπερασμένη, ἡ διαφορὰ* ET, *ᾗ διαφέρει ἡ* ΒΓ *τῆς* BE, *ἢ τὸ πλάγιον ἡμίτονον ταύτης τῆς γωνίας, ἔϛαι ποσότης πεπερασμένη· ȣ̓̃ν τὸ σῶμα, ἀπαντῶν ἑκάϛῃ πλευρᾷ, ἀπόλλυσιν ἀεὶ ποσὸν πεπερασμένον τῆς ἑαυτȣ̃ κινήσεως.*

209. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία ἀπειροϛή, τὸ πλάγιον ἡμίτονον ἔϛαι ἀπειροϛὸν δευτεροταγὲς (*). τὸ ἄρα σῶμα ἀπολέσει μέρος τῆς ἑαυτοῦ κινήσεως, ὃ ἔϛαι $\frac{1}{\infty}$ δευτεροταγές· ἄρα ἡ κίνησις μενεῖ ἡ αὐτή (Συμϐ. Λογ. 528).

210. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐν καμπύλῃ πᾶν σῶμα, ἀφαιρουμένης αὐτοῦ τῆς βαρύτητος, τὴν αὐτὴν ταχύτητα ἕξει ἐν ἑκάϛῳ σημείῳ τῆς καμπύλης, ϗ μετὰ πᾶσαν τὴν περιαγωγήν· ἡ γὰρ καμπύλη νοεῖται ὡς πολύγωνον κανονικόν, ἐξ ἀπειραρίθμων πλευρῶν ϗ γωνιῶν ἀπειροϛῶν συγκροτούμενον (Γεωμ. 172)· τὸ σῶμα ἄρα ἐν ἑκάϛῃ γωνίᾳ ἀπολέσει τῆς ἑαυτοῦ κινήσεως ἀπειροϛὸν δευτεροταγές· τὸ δὲ ἄθροισμα πασῶν ἔϛαι $\infty \cdot \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$, ἀπειροϛὸν πρωτοταγές· ἡ ἄρα κίνησις ἔϛαι ἡ αὐτή, ϗ δὴ ϗ ἡ ταχύτης ἐν ἑκάϛῳ σημείῳ τῆς καμπύλης, ϗ μετὰ πᾶσαν τὴν περιαγωγήν.

211. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Πᾶν σῶμα, κατὰ τὴν ἑαυτοῦ βαρύτητα διελθὸν καμπύλην πᾶσαν τὴν ΑΒΓ (Σχ. 101), ἕξει τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἣν ἂν ἐκτήσατο, κατελθὸν ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕψους τὴν κάθετον ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ. Κατερχέσθω γὰρ πρῶτον τὴν κοίλην καμπύλην ΑΒ· νοείσθω δὲ συγκειμένη ἐξ ἐλαχίϛων ἐπιπέ-

(*) Ἔϛι μὲν γὰρ αὐτοῦ τύπος ὁ $\frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha}$ (Γ'ψ. Γ. 238)· ἐπεὶ δέ, τοῦ τόξου ἀπειροϛοῦ ὄντος, οὐδὲν ἧττόν ἐϛιν, ἢ δῆλον, ἀπειροϛὴ ϗ ἡ υ· ἄρα $\upsilon = \frac{1}{\infty}$, ϗ $\upsilon^2 = \frac{1}{\infty^2}$, ϗ $\frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha} = \frac{\frac{1}{\infty^2}}{2\alpha} = \frac{1}{\infty^2} : \frac{2\alpha}{1} = \frac{1}{\infty^2} \times \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha\infty^2}$· ἄρα κτλ.

δων κεκλιμένων ἀπειραρίθμων τῶν Αμ, μν, κτ.· διελθὸν γὰρ τὴν Αμ, κτήσεται τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἣν κτήσαιτ᾽ ἂν, διελθὸν τὴν Αχ (204)· διελθὸν δὲ τὴν μν ἕξει καινὴν ταχύτητα ἴσην τῇ χτ = μο, ἢ ἑξῆς ὅτως· κατελθὸν ἄρα εἰς τὸ Β ἕξει τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἣν ἂν κτήσαιτο κατελθὸν τὴν κάθετον ΑΔ· ἐντεῦθεν ἂν κατερχέσθω αὖθις τὰ κοῖλα τῆς ΒΓ· διελθὸν τοίνυν τὴν Βς, κτήσεται ταχύτητα, ἣν ἢ τὴν Δξ = ΒΠ· ἀλλὰ τῶν γωνιῶν τῆς καμπύλης ἐσῶν ἀπειροςῶν, ἡ ταχύτης τῦ κινητῦ ἥκιςα ἐλαττωθήσεται (210)· ἕξει ἄρα τὴν αὐτὴν ταχύτητα διελθὸν τὴν ΒΓ, ἣν ἐκτήσατ᾽ ἂν, διελθὸν τὴν ΔΓ· ἄρα τὸ κινητὸν κτ. Ο. Ε. Δ.

212. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Πᾶν σῶμα, κατερχόμενον διὰ καμπύλης τῆς ΑΒΓ, ἕξει κατὰ τὴν ἑαυτῦ βαρύτητα τοσαύτην ταχύτητα, ὅσην ἀπολέσει, ἀνερχόμενον μέχρι τῦ Α διὰ τῆς καμπύλης ΓΘΑ, εἴγε ἡ βαρύτης ἐπιβραδυνεῖ τοσῦτον τὴν ταχύτητα ἐκ τῦ Γ ἐπὶ τὸ Α, ὅσον αὐτὴν ἐπαύξει ἐκ τῦ Α ἐπὶ τὸ Γ (190)· ἄρα, ἀφαιρεθείσης ἁπάσης ἄλλης αἰτίας, πᾶν σῶμα, κατελθὸν ἐκ τῦ Α ἐπὶ τὸ Γ διὰ τῆς ἑαυτῦ βαρύτητος, ἀνελεύσεται αὖθις ἐκ τῦ Γ ἐπὶ τὸ Α, ἢ ἐπαναλήψεται ὅτω τὰς ἑαυτῦ περιόδους ἐπ᾽ ἄπειρον.

213. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν ληφθῶσι πρὸς τὸ δοκῦν ἀντικείμενα σημεῖα μ, μ', ν, ν', κτ· τὸ κινητὸν ἐν τοῖς ἀντιθέτοις σημείοις τὴν αὐτὴν ἕξει ταχύτητα· ὅσῳ γὰρ αὐξήσει ἡ βαρύτης τὴν ταχύτητα ἐκ τῦ μ μέχρι τῦ Γ, τοσῦτῳ αὐτὴν ἐλαττώσει ἐκ τῦ Γ μέχρι τῦ μ.

214. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἀφ᾽ ὅτινοςῦν σημείῳ τὸ σῶμα πέσῃ, τῦ Β φέρε, α΄. ἕξει τὴν αὐτὴν ταχύτητα μέ-

χρι τῦ Γ, ἣν ἂν χοίη πεσὸν ἐκ τῦ Δ ἐπὶ τῦ Γ· β΄. ἀνελεύσεται εἰς τὸ αὐτὸ ἀντίςοιχον ὕψος υ.

215. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐὰν σῶμα κινέμενον καταγράψῃ τόξον ὅ,τι δήποτε τὸ νΒ, ἕξει τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἣν ἐκτήσατ' ἂν, διελθὸν τὸ ἀντίςοιχον τῆς καθέτε μέρος τΔ.

216. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἐὰν σῶμα ἐκ τῦ Α κατέρχηται διὰ τῆς καμπύλης ΑΒΓ, αἱ αὐτῦ ἀλληλοδιάδοχοι ταχυτῆτες ἐν δυσὶ σημείοις Β, Γ, ἔσονται ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ὕψεων ΑΔ, ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἰ γὰρ τὸ σῶμα κατήρχετο διὰ τῆς ΑΓ, ἡ αὐτῦ ταχύτης ἐν τῷ Δ πρὸς τὴν αὐτῦ ἐν τῷ Γ, εἴη ἂν ὡς $\sqrt{}$ΑΔ : $\sqrt{}$ΑΓ (153)· ἀλλὰ κατερχομένε διὰ τῆς καμπύλης ΑΒΓ, αἱ ταχύτητες αὐτῦ ἐν δυσὶ σημείοις Β, Γ, ἔσονται αἱ αὐταὶ ταῖς ἐν τοῖς Δ, Γ, εἰ κατήρχετο διὰ τῆς ΑΓ καθέτε (214)· ἄρα αἱ ταχύτητες ἐν τοῖς Β, Γ, ἔσονται ὡς $\sqrt{}$ΑΔ : $\sqrt{}$ΑΓ. Ο.Ε.Δ.

217. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἡ ταχύτης, ἣν κτᾶται πᾶν σῶμα, κατιὸν διὰ διαφόρων τόξων, εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν κατ' αὐτὰ ὕψεων.

218. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἵν' ἐν σώματι ἐνεγείρωμεν ταχυτῆτα τὴν ζητεμένην ἐν ἀριθμοῖς, ἵνα φέρε διέλθῃ πόδας 2 ἐπὶ λεπ. δευτ. ἑνός· α΄. ζητείσθω, καθ' ὃν εἴρηται τρόπον, τὸ ὕψος, ἀφ' ὃ κατελθεῖν ἀνάγκη εἰς πρόσκτησιν ταχυτῆτος 2 ποδῶν (186)· β΄. ἐπὶ καθέτε τινὸς μετηνέχθω τῦτο τὸ ὕψος, ὃ ἔςω τὸ ΔΓ· γ΄. ἐξαρτηθὲν τὸ σῶμα χοίνε προσδεδεμένε τῷ Α, ὑψέσθω ἕως τῦ Β πέρατος τῦ τόξε ΒΓ· πίπτον ὃν ἐκ τῦ Β ἐπὶ τὸ Γ, κτήσεται τὴν ζητεμένην ταχύτητα.

219. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἐπὶ δύω ὁμοίων χημάτων

ΑΒΓ, αβγ, αἱ ἀθροιζόμεναι ταχύτητες ἐκ τόξων ὁμοίων εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν διαμέτρων.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τῷ ΑΒΓ, ἡ ἐπὶ τοῦ Β ταχύτης πρὸς τὴν ἐν τῷ Γ ἐστὶν ὡς $\sqrt{ΑΔ} : \sqrt{ΑΓ}$· ἀλλ' ἐν τῷ αβγ, ἡ ἐν τῷ β ταχύτης πρὸς τὴν ἐν τῷ γ ἐστὶν ὡς $\sqrt{αβ} : \sqrt{αγ}$· ἄρα ἡ ἐν τῷ Β ταχύτης πρὸς τὴν ἐν τῷ β ὡς $\sqrt{ΑΔ} : \sqrt{αδ}$ (Γεωμ. 327)· ἀλλαμὴν ΑΔ : αδ : : ΑΓ : αγ (Γεωμ. 382)· ἄρα ἡ ἐν τῷ Β ταχύτης πρὸς τὴν ἐν τῷ β, ὡς $\sqrt{ΑΓ} : \sqrt{αγ}$. Ο.Ε.Δ.

220. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐν δυσὶν ὁμοίοις κυκλικοῖς τόξοις, αἱ ταχύτητες εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκτίνων, ἢ τῶν διαμέτρων.

221. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει οἱ χρόνοι εἰσὶν ὡς αἱ ταχύτητες (185)· ἄρα ἐν τοῖς κυκλικοῖς ὁμοίοις τόξοις οἱ χρόνοι εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκτίνων.

222. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐπεὶ τὰ ὅμοια τόξα ὁμοίων σχημάτων πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ὡς τὰ ὅλα σχήματα· ἄρα αἱ ταχύτητες, καὶ δὴ καὶ οἱ χρόνοι, γενικῶς μὲν ἐπὶ πάντων τῶν ὁμοίων σχημάτων, εἰδικώτερον δὲ ἐπὶ τῶν κύκλων, εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκτίνων, ἢ τῶν διαμέτρων· καὶ ἐν ὁμοίοις τόξοις, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν τόξων. (Γεωμ. 398)

223. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὸν χρόνον τῆς καθόδου σώματος τῇ βαρύτητι κατιόντος δι' ὁτινοσοῦν κυκλοειδοῦς τόξου τοῦ κΑ (σχ. 102).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθω ἡ ηΔ κάθετος τῇ ΒΑ διαμέτρῳ τοῦ γεννήτορος κύκλου, καὶ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ΑΔ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΔΝΑ, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν ἐν τῷ σχήματι καταφαινομένων ἄλλων εὐθειῶν, γενέσθω ἡ διάμετρος ΑΒ $= 2α$, καὶ ΔΑ $= 2ς$, καὶ ΔΠ $= χ$, καὶ ἑπομένως ΑΠ $= 2\rho - \chi$, ϰ̀ Ππ $= \delta\chi = \zeta\mu$, ϰ̀ ὁ χρόνος, ὃν δαπανήσει τὸ σῶμα, ἵνα διέλθῃ τὸ ἀδιόριςον τόξον ΜΑ, $= \kappa$, ὁ δὲ, ὃν δαπανήσει, ἵνα διέλθῃ τὸ Μμ, $= \delta\kappa$· ἡ δὲ ταχυτὴς, ἣν κτᾶται τὸ σῶμα, κατιὸν τὸ τόξον ηΜ, ἔσα ὡς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῦ ΔΠ (217), ἐςὶν $= \sqrt{\chi}$· ἐπεὶ δὲ ἡ τῆς κυκλοειδῦς ἀπτομένη παράλληλός ἐςι τῇ χορδῇ ΑΖ (Τ'ψ. Γ. 335. Τόμ. Γ'.)· τὰ τρίγωνα Μζμ, ΠΖΑ εἰσὶν ὅμοια (Γεωμ. 220. Πόρισμ. Γ'. Τόμ. Β'.)· ὅθεν ἡ ἀναλογία Μμ : μζ :: ΖΑ : ΠΑ· ἀλλ' ἔςι διὰ τὴν τῦ κύκλυ ἰδιότητα ΑΒ : ΑΖ :: ΑΖ : ΑΠ (Γεωμ. 552. Τόμ. Γ'.) ἄρα ΑΒ : ΖΑ, ἢ ΖΑ : ΑΠ :: $\sqrt{}$ΑΒ : $\sqrt{}$ΑΠ (Συμϐ. Λογ. 270. Τόμ. Α'.)· ἄρα Μμ : μζ :: $\sqrt{2\alpha} : \sqrt{(2\rho - \chi)}$· ἄρα Μμ $= \dfrac{\delta\chi\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{(2\rho - \chi)}}$, ἀντικαθιςαμένης τῆς κατὰ τὴν μζ δυνάμεως, ἀλλὰ τῦ μὲν χρόνυ, καθ' ὃν διελεύσεται τὸ σῶμα τὸ Μμ, ἐμφαινομένυ διὰ δκ, τῆς δὲ ταχύτητος διὰ $\sqrt{\chi}$, ἔςαι Μμ $= \delta\kappa\sqrt{\chi}$ (107), ἢ $\delta\kappa = \dfrac{\mathrm{M}\mu}{\sqrt{\chi}}$· ἀντικαθιςαμένης ἄρα τῆς τῦ Μμ δυνάμεως, $\delta\chi = \dfrac{\delta\chi\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{(2\rho\chi - \chi\chi)}} = \dfrac{2\rho . \delta\chi\sqrt{2\alpha}}{2\rho . \sqrt{(2\rho\chi - \chi\chi)}}$· ἀλλὰ τὸ τῦ τόξυ ΔΝ ἀπειροςὸν Νν ἐςὶν $= \dfrac{\rho\delta\chi}{\sqrt{(2\rho\chi - \chi\chi)}}$ (Α'πειρ. 256)· ἄρα $\delta\kappa = \dfrac{\delta . \Delta\mathrm{N} . 2\sqrt{2\alpha}}{2\rho}$, ὗ τὸ ὁλόκληρον ἔςι $\kappa = \dfrac{\Delta\mathrm{N} . 2\sqrt{2\alpha}}{2\rho}$, τύπος τῦ ζητυμένυ χρόνυ, ὃν τὸ σῶμα δαπανήσει ἐν τῷ διατρέχειν τὸ τόξον κΜ.

224. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν κ σημαίνῃ τὸν χρόνον τὸν δαπανηθησόμενον ἐν τῷ τόξῳ ηΑ, τὸ τόξον ΔΝ ἀποκαθίςαται ἡμιπεριφέρεια ΔΝΑ, ἢ τηνικαῦτα ἔςαι $\kappa = \frac{\Delta N A . 2\sqrt{2\alpha}}{2\rho}$· ἐπεὶ τοίνυν $2\sqrt{2\alpha}$ ἔςι ποσότης ἀμετάτρεπτος, ὁ χρόνος κ ἔςαι ἐν τῷ λόγῳ $\frac{\Delta N A}{2\rho} = \frac{\Delta N A}{\Delta A}$· ὡσαύτως ὁ χρόνος ὁ δαπανηθησόμενος ἐν τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΓΑ ἔςαι ὡς $\frac{BZA}{BA}$· τοιγαροῦν οἱ χρόνοι οἱ δαπανώμενοι ἐν τῇ κινήσει σωμάτων φερομένων διὰ παντοίων κυκλοειδοῦς τόξων εἰσὶν ἐν λόγῳ, ὃν ἔχει κυκλικὴ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ἑαυτῆς διάμετρον· εἰσὶν ἄρα ἰσάλληλοι, τοῦτ᾽ ἔςι, πᾶν σῶμα, φερόμενον διὰ κυκλοειδοῦς δυνάμει τῆς ἑαυτοῦ βαρύτητος ἐν μέσῳ ἀμοιροῦντι ἐνςάσεως, ἀφικνεῖται εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον Α, κἂν ἐκ τοῦ Γ, κἂν ἐκ τοῦ Μ, κινεῖσθαι ἄρξηται.

225. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐπειδὴ ὁ τῆς διὰ τοῦ τόξου κΑ καθόδου χρόνος ἔςι $\kappa = \frac{\Delta N A . 2\sqrt{2\alpha}}{2\rho}$, ἔςαι 2ρ : ΔΝΑ :: $2 . \sqrt{2\alpha} : \kappa$· ἀλλὰ $2\sqrt{2\alpha} = \frac{2\alpha}{\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}}$ (*)· ἀ-

---

(*) Ἔςι γὰρ $\frac{2\alpha}{\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{2\alpha} \times \sqrt{2\alpha}}{\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}} =$

$\frac{\sqrt{2\alpha} \times \sqrt{2\alpha}}{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}} = \frac{\sqrt{2\alpha} \times \sqrt{2\alpha}}{1} : \frac{\sqrt{\alpha}}{2} = \frac{\sqrt{2\alpha} \times \sqrt{2\alpha}}{1} \times$

$\frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2 . \sqrt{2\alpha} \times \sqrt{2\alpha}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2 . \sqrt{2\alpha}}{1} = 2 . \sqrt{\alpha}.$

ρα $2\rho : \Delta NA :: \frac{2\alpha}{\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}} : \kappa$· ἐπεὶ δὲ τὸ $\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}$ ἐμφαίνει τὸ ἥμισυ τῆς ταχυτῆτος, ἣν σῶμα κτήσαιτ' ἂν καταβαῖνον τὴν διάμετρον ΒΑ (153)· ἐὰν ἄρα πᾶσα ἡ ταχυτὴς, ἢ ὁ χρόνος (153) κληθῇ Κ, πορισθήσεται $2\alpha =$ $K . \frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}$, ϗ $K = \frac{2\alpha}{\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}}$· ἄρα ἡ ἤδη ἐκτεθειμένη ἀναλογία ἀντικαταςάσει ἔςαι $2\rho : \Delta NA :: K : \kappa$, εἴτ' οὖν „ὁ χρόνος ὁ δαπανώμενος διὰ παντὸς τόξου κυκλοει„δοῦς πρὸς τὸν διὰ τῆς διαμέτρου τοῦ γεννήτορος κύκλου, „ἐςιν ὡς κυκλικὴ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ἑαυτῆς διάμε„τρον·“ τοιγαροῦν οἱ χρόνοι οὗτοι εἰσὶν ἐν ἀμετατρέπτῳ λόγῳ· τοῦθ' ὅπερ, εἰ μὴ προῄδειμεν, ὑπεδήλωσεν ἄν, ὡς ἅπαντα τὰ τόξα τῆς κυκλοειδοῦς τὰ ἀπὸ τοῦ Α ἀρχόμενα διανύονται ἐν ἴσοις χρόνοις.

226. ΟΡΙΣΜΟΣ. Καμπύλαι ταυτόχρονοι καλοῦνται, ὧν τὰ τόξα τάτε μεγάλα ϗ τὰ μικρὰ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ ὑπὸ τῶν τῇ ἰδίᾳ βαρύτητι ἐν μέσῳ ἐνςάσεως ἀμοίρῳ φερομένων σωμάτων διανύονται· ἡ ἄρα κυκλοειδὴς ἐςὶ καμπύλη ταυτόχρονος.

227. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὴν καμπύλην τῆς ταχίςης καθόδου, εἴτ' οὖν τὴν ὀλιγιςόχρονον ΑΜ (σχ. 103), δι' ἧς σῶμα τὸ Α ἐκ τοῦ Α κάτεισιν εἰς τὸ Μ, ἐν ὅσῳ οἷόντε βραχυτάτῳ χρόνῳ, τοῦ μέσου ἀμοιροῦντος ἐνςάσεως.

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθωσαν ἀλλήλαις προσεχέςαται αἱ τεταγμέναι ΠΜ, πμ, Νν, ϗ αἱ ἄλλαι γραμμαὶ, ἃς τὸ σχῆμα παρίςησι· ϗ ἔςω $A\Pi = \chi$, ϗ $\Pi M = \upsilon$· οὖν

$\Pi\pi = M\varrho = \mu\zeta = \nu Z = \delta\chi$, καὶ $\mu\varrho = \delta\upsilon$, ϗ $M\mu = \sqrt{(\delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)}$· ἔςω ϗ $\varrho Z = \beta$· ἐκεῖν ἔςαι $\mu Z = \beta - \delta\upsilon$, ϗ $\mu\nu = \sqrt{(\beta - \delta\upsilon)^2 + \delta\chi^2}$· ἡ δὲ ταχύτης, δ' ἧς ἂν τὸ σῶμα διέλθοι τὸ ἀπειροςὸν τόξον $M\mu$, ὡς ἰσομερὴς ἐκληφθῆναι δυναμένη, ϗ ὡς ἰσυμένη τῇ, ἣν ἂν κτήσαιτο κατελθὸν ἀπὸ τῦ Α εἰς τὸ Π (211), ὑποτεθείσθω $= \gamma$, ϗ ἔςω $= \Gamma$ ἡ ταχύτης, δι' ἧς ἂν διανυσθείη τὸ τόξον $\mu\nu$· ἔςω δὲ $\varkappa$ ὁ χρόνος, ὃν ἐδαπάνησεν, ἵνα διέλθοι τὸ τόξον ΑΜ· ἐκεῖν ὁ χρόνος, ὃν ἐδαπάνησεν, ἵνα διέλθοι τὸ $M\mu$, ἔςαι $\delta\varkappa$· ϗ ἐπειδὴ ἐν τῇ ἰσομερεῖ κινήσει τὰ διαςήματα εἰσὶν ἐν χρόνῳ συνθέτῳ ἔκ τε τῶν χρόνων ϗ τῶν ταχυτήτων (216), ἔςαι $M\mu = \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)} = \gamma\delta\varkappa$, ϗ $\mu\nu = \sqrt{[(\beta - \delta\upsilon)^2 + \delta\chi^2]} = \Gamma\delta\varkappa$· ὁ ἄρα ἐν τῷ τόξῳ $M\nu$ δαπανηθεὶς χρόνος ἐςὶν $=$

$$\alpha\delta\varkappa = \frac{\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}}{\gamma} + \frac{\sqrt{(\beta\beta - 2\beta\delta\upsilon + \delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)}}{\Gamma}.$$

ἀλλ' ἡ Αν καμπύλη τοιαύτη ζητεῖται τὴν φύσιν εἶναι, δι' ἧς σῶμα κατιὸν ἐκ τῦ Μ εἰς τὸ ν δαπανήσειεν ἂν ὡς οἷόν τε ἐλάχιςον χρόνον· ἄρα ὁ χρόνος $2\delta\varkappa$ ἐςὶν ἐλάχιςον·

$$\text{ἄρα } 2\delta\delta\varkappa = \frac{\delta\upsilon\delta\delta\upsilon}{\gamma\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}} + \frac{\delta\upsilon\delta\delta\upsilon - \beta\delta\delta\upsilon}{\Gamma\sqrt{(\beta\beta - 2\beta\delta\upsilon + \delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)}}$$

$= 0$, ἀτρέπτυ ὑποτιθεμένυ τῦ $\delta\chi$ (Α'πειρ. 32)· διαιρέσει δὲ διὰ $\delta\delta\upsilon$, ϗ μεταθέσει, $\dfrac{\delta\upsilon}{\gamma\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}} =$

$$\frac{\beta - \delta\upsilon}{\Gamma\sqrt{(\beta\beta - 2\beta\delta\upsilon + \delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)}},$$ τῦτ' ἔςι $\dfrac{\varrho\mu}{\gamma \,.\, M\mu} =$

$\dfrac{\mu Z}{\Gamma \,.\, \mu\nu}$, ἢ $\dfrac{\gamma \,.\, M\mu}{\varrho\mu} = \dfrac{\Gamma \,.\, \mu\nu}{\mu Z} = \dfrac{\Gamma \,.\, \mu\nu}{\zeta\nu}$· ἐπεὶ τοίνυν ἡ μὲν ταχυτὴς γ ἐστιν ὡς $\sqrt{A\Pi}$, ἡ δὲ ταχυτὴς Γ ὡς $\sqrt{A\pi}$, τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς κατὰ τὴν ἀποτετμημένην ῥίζης καὶ τοῦ κατὰ τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον στοιχείου, διαιρεθὲν διὰ τοῦ κατὰ τὴν τεταγμένην ἀπειροστοῦ, δίδωσιν ἀεὶ ποσὸν ἀμετάβλητον, ὅπερ ὑποτεθείσθω $= \sqrt{\alpha}$, ἵν' εἴη $\dfrac{\sqrt{A\Pi}\,.\,M\nu}{\rho\mu} =$ $\dfrac{\sqrt{\chi}\,.\,M\nu}{\delta\upsilon} = \sqrt{\alpha}$, ἢ $\dfrac{\sqrt{\chi}\,.\,\sqrt{(\delta\chi^2+\delta\upsilon^2)}}{\delta\upsilon} = \sqrt{\alpha}$, ἢ χ $(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2) = \alpha\delta\upsilon^2$, ὅθεν πρόεισι $\delta\upsilon^2 = \dfrac{\chi\delta\chi^2}{\alpha-\chi}$ (*) καὶ $\delta\upsilon = \dfrac{\sqrt{\chi\delta\chi^2}}{\sqrt{\alpha-\chi}} = \dfrac{\sqrt{\chi}\,.\,\delta\chi}{\sqrt{\alpha-\chi}} = \dfrac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}$ (**) $= \dfrac{\alpha\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}} - \left[\dfrac{\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}\right]$· ὁλοκληρώσει ἄρα καὶ προσθέσει ποσοῦ ἀμεταβλήτου, $\upsilon + \Gamma =$ $O\,\dfrac{\alpha\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}} - \sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}$ (***)· ἐὰν οὖν ὑποτεθῇ $AB = \alpha$ διάμετρος τοῦ ἡμικυκλίου $A\Xi B$, ἡ τεταγ-

---

(*) $\chi\,.\,(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2) = \alpha\delta\upsilon^2$, εἴτ' οὖν $\chi\delta\chi^2 + \chi\delta\upsilon^2 = \alpha\delta\upsilon^2$, καὶ μεταθέσει, $\chi\delta\chi^2 = \alpha\delta\upsilon^2 - \chi\delta\upsilon^2$, καὶ διαιρέσει διὰ $\alpha - \chi$, $\upsilon^2 = \dfrac{\chi\delta\chi^2}{\alpha-\chi}$.

(**) $\dfrac{\sqrt{\chi}\,.\,\delta\chi}{\sqrt{\alpha-\chi}} = \dfrac{\sqrt{\chi}\,.\,\sqrt{\chi}\,.\,\delta\chi}{\sqrt{\chi}\,.\,\sqrt{\alpha-\chi}} = \dfrac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}$.

(***) Ἔστι γάρ· $O\left(\dfrac{\alpha\delta\chi - 2\,\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}\right) =$ $\dfrac{O\,(\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi)}{\sqrt{(4\alpha\chi - 4\chi\chi)}}$ (Συμβ. Λογ. 167. Τόμ. Α΄.) $= O\,(\alpha\delta\chi$

γμένη ΞΠ ἔςαι $= \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, ϗ ὁ $\frac{\alpha\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}$ $= \text{o} . \frac{\frac{1}{2}\alpha\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}$, τύπος τῦ τόξυ ΑΞ (Α'πειρ. 256)· ἄρα $\upsilon + \Gamma =$ ΑΞ — ΞΠ· ἀλλ' ὅταν ᾖ $\upsilon = \text{o}$, τό,τε τόξον ΑΞ ϗ ἡ τεταγμένη ΞΠ γίνονται $= \text{o}$· ἄρα $\Gamma = \text{o}$, ϗ $\upsilon =$ ΑΞ — ΞΠ, τῦτ' ἔςιν „ἡ τεταγμένη τῆς ζητυ„μένης καμπύλης ἰσῦται τῷ τόξῳ τῦ ἀντιςοιχυ κύκλυ, „ὗ διάμετρος $= \alpha$, πλὴν τῦ κατ' αὐτὸ ἡμιτόνυ."

Ἐν ῦν τῇ ἡμικλοειδεῖ ΓΑ (σχ. 102) ἡ τεταγμένη ΖΜ ἰσῦται τῷ τόξῳ ΖΑ· ἐὰν δὲ ταχθῇ ἐπὶ τὴν ΒΑ διάμετρον, ἡ τεταγμένη ΜΠ ἰσῦται τῷ τόξῳ ΖΑ σὺν τῷ αὐτῦ ἡμιτόνῳ ΖΠ· ὅθεν ἔςαι ΚΜ + ΜΖ + ΖΠ = ΓΒ = ΒΖ + ΖΑ· ἀφαιρυμένων ῦν ἔνθεν μὲν τῦ ΜΖ, ἔνθεν δὲ τῦ ΖΑ, ἔςαι ΚΜ + ΖΠ = ΖΒ· ἄρα ΚΜ = ΒΖ — ΖΠ, εἴτ' ῦν ΚΜ ἰσῦται τῷ τόξῳ ΒΖ πλὴν τῦ κατ' αὐτὸ ἡμιτόνυ ΖΠ· διόπερ, ἐὰν ὑποτεθῇ ΒΑ $= \alpha$, ϗ ΓΚ ὑποτεθῇ ἡ ἐπὶ τῦ 103 σχήματος εὐθεῖα ΑΠ, τὸ Μ σημεῖον τῦ 103 σχήματος παραςαθήσεται διὰ τῦ Μ σημείυ

$$- 2\chi\delta\chi)(4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} \cdot = (\text{Α'πειρ. } 206, 216) =$$

$$\frac{(\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi) \cdot (4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(4\alpha\delta\chi - 8\chi\delta\chi)} =$$

$$\frac{(\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi) \cdot (4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}{2\alpha\delta\chi - 4\chi\delta\chi} =$$

$$\frac{(\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi) \cdot (4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}{2(\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi)} = \frac{(4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{(4\alpha\chi - 4\chi\chi)}}{2} = \frac{2\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}{2} = \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}.$$

τȣ̃ ἐν τῷ 102 σχήματι· ἡ ζητȣμένη ἄρα καμπύλη ἐς· κυκλοειδὴς, ἧς τȣ̃ γεννήτορος κύκλȣ ἡ διάμετρος ἐςὶν = α.

Ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ τȣ̃ γεννήτορος κύκλȣ διάμετρος α, ἰςέον, ὡς αἱ κυκλοειδεῖς, γεννώμεναι ἐκ περιεκκυλίσεως κύκλων (οἵτινες ὅμοιαι καμπύλαι ὑπάρχȣσι (Τ. ψ. Γ. 256)) διὰ νόμȣ ἀμεταθέτȣ, εἰσὶν ἀναγκαίως ὅμοιαι καμπύλαι· τȣ́τȣ τεθέντος, ἔςω Α σημεῖον, ἀφ᾽ ȣ̃ τὸ σῶμα κινεῖσθαι ἄρχεται (σχ 104), Μ δὲ, εἰς ὃ ἀφικνεῖται κατὰ τὸν ὅσον οἷόν τε ἐλάχιςον χρόνον· ἵν᾽ ȣ̃ν διορισθῇ ἡ ΒΓ διάμετρος = α τȣ̃ γενήτορος κύκλȣ τῆς ἡμικυκλοειδȣ̃ς ΑΜΒ, ἐπεζεύχθω ἡ ΑΜ, ϗ τέρματος ἄνευ ἤχθω ἡ ὁριζόντιος ΑμΓ, ἥπερ διὰ τȣ̃ Μ κατήχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ Μμ· ϗ ἐπὶ τῆς Αμ ληφθείσης ὡς ἡμιβάσεως γεγράφθω ἡμικυκλοειδὴς ἡ Ανβ, ἐν ᾗ γινώσκεται ἡ ἡμιπεριφέρεια Αμ τȣ̃ γεννήτορος κύκλȣ· ὅθεν δυνατὸν εὑρεῖν ὡς ἔγγιςα τὴν αὐτȣ̃ διάμετρον μβ (Γεωμ. 375. Τόμ. Β΄.) ϗ ἐπεζεύχθω ἡ νμ, ϗ ταύτῃ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΓ· τοιγαρȣ̃ν ἡ ΑΓ ἔςαι ἡμίσεια βάσις τῆς ζητȣμένης κυκλοειδȣ̃ς ΑΜΒ· αἱ γὰρ νΑ, ΜΑ ἴσον κεκλιμέναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑμΓ εἰσὶν εὐθεῖαι ὁμόλογοι τῶν ἡμικυκλοειδῶν Αβ, ΑΒ· ἀλλαμὴν τῶν τριγώνων Ανμ, ΑΜΓ ὁμοίων ὄντων (Γεωμ. 318. Τόμ. Β΄.) ἐςὶν Αν : ΑΜ :: Αμ : ΑΓ· ἄρα ϗ Αμ, ΑΓ εἰσὶν εὐθεῖαι ὁμόλογοι τῶν δύω ἡμικυκλοειδῶν· ἀλλαμὴν Αμ ἐςὶ βάσις τῆς Αβ· ἄρα ΑΓ ἐςὶ βάσις τῆς ζητȣμένης ἡμικυκλοειδȣ̃ς ΑΜΒ, ϗ ΓΒ ἐςὶν ἡ διάμετρος α τȣ̃ κύκλȣ, ȣ̃ ἡμιπεριφέρεια ἐςὶν = ΑΓ.

223. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Διορίσαι τὴν φύσιν τῆς ἰσοχρόνȣ καμπύλης, εἴτ᾽ ȣ̃ν δι᾽ ἧς τὰ βαρέα κάτισιν ἰσομερῶς, τȣ̃τ᾽ ἐςὶν ἀφ᾽ ὑψῶν ἴσων ἐν ἴσοις χρόνοις πρὸς τῷ ὁρίζοντι γίνονται.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΒΠ $= \chi$ (Σχ. 105), ϗ Ππ $= \delta\chi$, ϗ ΠΜ $= \upsilon$· τοῦ τοίνυν χρόνου, καθ' ὃν διανύει τὸ σῶμα τὴν ἀπειροστὴν καμπύλην Μμ, ὄντος δκ, ϗ τῆς πρὸς τῷ Μ ταχύτητος $= \sqrt{\chi}$ (216), πορισθήσεται $\frac{\sqrt{(\delta\chi^2+\delta\upsilon^2)}}{\sqrt{\chi}} = \delta\kappa = \delta\chi$· κατὰ γὰρ τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος, ἐπεὶ τὸ σῶμα ἰσομερῶς κινεῖσθαι ὑποτίθεται, τὰ κατὰ κάθετον ὕψη Ππ εἰσὶν ὡς οἱ χρόνοι οἱ δαπανώμενοι εἰς διάνυσιν τῆς καμπύλης Μμ· ἄρσει ἄρα τοῦ κλάσματος, τετραγωνισμῷ τε ϗ μεταθέσει, ἔσται $\delta\upsilon^2 = \chi\delta\chi^2 - \delta\chi^2 = (\chi - 1)\,\delta\chi^2$, ἐξαγωγῇ δὲ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, $\delta\upsilon = \delta\chi\sqrt{(\chi - 1)}$, ὁλοκληρώσει, $\upsilon + \gamma = \text{O}.\,\delta\chi\,(\chi - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(\chi - 1)^{\frac{3}{2}}$ (Ἀπειρ. 206), προστιθεμένης ϗ ἀμεταβλήτου ποσότητος· ἐὰν δὲ γένηται $\chi - 1 = \psi$, πορισθήσεται $\upsilon + \gamma = \frac{2}{3}\psi^{\frac{3}{2}}$ ἢ $\frac{9}{4}(\upsilon+\gamma) = \psi^3$, ἐξίσωσις τριτογενὴ ἐμφαίνουσα παραβολὴν, ἧς παράμετρος μὲν $= \frac{9}{4}$, τεταγμένη δὲ $= \upsilon + \gamma$, ἀποτετμημένη δὲ $= \psi$· ἐὰν μέντοι ὑποτεθῇ $\gamma = 0$, ὥσπερ ἐνταῦθα προφανῶς ἐπιτρέπεται, ἔσται $\frac{9}{4}\upsilon^2 = \psi^3$· ἄρα ἡ ζητουμένη καμπύλη ΒΜΝ ἐστὶ παραβολὴ τῶν τριτογενῶν (Τ'ψ. Γ. 268. 269), ἧς ἡ μὲν ἀποτετμημένη ΑΠ $= \psi$, ἡ δὲ τεταγμένη ΠΜ $= \upsilon$, ἡ δὲ παράμετρος $= \frac{9}{4}$· ἀλλ' ὅταν ἡ ΑΠ $= \psi = 0$, ἐστὶ $\chi = 1$, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi - 1 = \psi$· ἄρα τῶν χ ἀρχὴ οὐ γίνεται ἐκ τοῦ Β, ἀλλ' ἐκ τοῦ Α, ὑποτιθεμένης ΑΒ $= 1$· ἡ δὲ τῆς παραβολῆς παράμετρος ἔσται $\frac{9}{4}$. ΑΒ $= \frac{9}{4}\alpha$, ὑποτιθεμένης ΑΒ $= 1 = \alpha$, ϗ τηνικαῦτα ἡ πρὸς τῷ Μ ταχυτὴς ἔσται $= \sqrt{\chi} = \sqrt{\text{ΑΠ}} = \sqrt{(\text{ΑΒ} + \text{ΑΠ})}$· ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β ταχυτὴς ἔσται $= \sqrt{\text{ΑΒ}} = \sqrt{\alpha}$· ἵν' ἐν τὸ σῶμα κατίῃ, καθ' ὃν ἀπαιτεῖ τὸ πρόβλημα νόμον, πρὶν ἢ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην κορυφῆς Β ἐφάψηται, εὐμοιρεῖν ἐπάναγκες ταχυτῆτος, ὅσην ἂν προσκτήσαιτο, ἐλευθέρως πίπτον ἀφ᾽ ὕψους = ΑΒ· ἀλλὰ γενομένης α = 1, ἡ παράμετρος ἐστιν = $\frac{2}{1}$ α· ἄρα ἡ ταχύτης πρὸς τῇ τῆς καμπύλης ἀρχῇ Β ἴσῦσθαι ὀφείλει τῇ, ἣν ἂν κτήσαιτο, ἐλευθέρως καταπίπτον ἀφ᾽ ὕψους = $\frac{2}{1}$ τῆς παραμέτρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ κινήσεως τῶν προβαλλομένων σωμάτων.

229. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἅπαν σῶμα πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι ἀναῤῥιπτόμενον, πρῶτον μὲν ἄνεισιν, εἶτα κάτεισι πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι.

ΔΕΙΞΙΣ. Φανερὸν ἐκ πείρας· ἀλλὰ καὶ οὕτω φύσει ὑπάρχειν ἀνάγκη· καὶ γὰρ, ἀρθείσης μὲν τῆς τοῦ μέσου ἐνστάσεως, ἀνελθεῖν δεῖ μέχρι τοσούτου ὕψους, ἐξ ὅσου κατελθεῖν, ἵνα κτήσηται τὴν ταχύτητα, ἣν ἔλαβεν ἐκ τῆς κάτωθεν ἐπὶ τὰ ἄνω προβαλλούσης δυνάμεως (193)· θεωρουμένης δὲ καὶ τῆς τοῦ μέσου ἐνστάσεως, ἀνελθεῖν αὖθις δεῖ μέχρις ἂν ἡ, ἣν προσέλαβε, ταχύτης ἄρδην ἀφανισθῇ, εἴτε διὰ τὸν ἀνθιστάμενον ἀέρα, εἴτε διὰ τὰς τοῦ βάρους συνεχεῖς ἐνεργείας· ἀνελθεῖν δεῖ πρὸς ὀρθάς· εἴγε ὑποτίθεται κινούμενον ὑπὸ καθέτου δυνάμεως· ἀφικόμενον δὲ, ἐς ὃ ἀνελθεῖν δεῖ, καθηρεμήσει ἐν ἀκαριαίῳ χρονικῷ διαστήματι, εἶτ᾽ οὖν ἐν ᾧ περίεστιν αὐτῷ ἔτι βαθμὸς εἷς τῆς ἐκ τῶν κάτω ἐπὶ τὰ ἄνω ταχυτῆτος, ἴσος τῇ τε ἐνστάσει τοῦ μέσου, καὶ τῇ ἐκ τῆς βαρύτητος ἐμποιουμένῃ ἐπὶ τὰ κάτω ταχύτητι ἐν τούτῳ τῷ λεπτῷ· ἀλλ᾽ ἐν τῷ ἐφεξῆς λεπτῷ τῆς ἐκ τῶν κάτω ἐπὶ τὰ ἄνω ταχυτῆτος ἀφανιζομένης πειθαρχῆσαι ἀνάγκη τῇ βαρύτητι μόνῃ, κατιὸν κατὰ τὴν ἐκ τῆς βαρύτητος ταχύτητα ϗ φορὰν, ὅ ἐςι κατὰ κάθετον. Ο. Ε. Δ.

230. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ καμπύλη, ἣν ἐν τῷ κενῷ καταγράφει σῶμα προϊέμενον κατὰ φορὰν, εἴτε ὁριζόντιον, εἴτε τῷ ὁρίζοντι πλαγίαν, ἐςὶ παραβολή.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ προϊεῖσα δύναμις, μεταδοθεῖσα ἅπαξ τῷ κινητῷ Α (Σχ. 106), ἀεὶ ἡ αὐτὴ ἔσα ἐν τῷ κενῷ, εἰ τῦτο κινήσῃ κατὰ τὴν φορὰν ΑΔ τὴν εἴτε κάθετον, εἴτε πλαγίαν τῇ τῆς βαρύτητος φορᾷ ΑΘ, πρῶτον μὲν αὐτὸ ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ μετακομίσει εἰς τὸ Β, διανύσαν τὴν ΑΒ, ἐν δυσὶ δὲ λεπτοῖς εἰς τὸ Γ διανύσαν τὴν $ΑΓ = 2ΑΒ$, ἐν τρισὶ δὲ, τὴν $ΑΔ = 3ΑΒ$ κτ. ϗ δὴ τὰ διατρεχόμενα διαςήματα ἐκ τῆς προβλητικῆς δυνάμεως συγκροτήσυσι τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ÷ 1 . 2 . 3 . 4 κτ.· ἀλλὰ τὰ ἐκ τῆς βαρύτητος διατρεχόμενα διαςήματα αὔξυσι κατὰ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4 κτ. (151)· τεθέντος ὖν $ΑΕ = 1$, ἔςαι ΑΖ, διάςημα ἐκ τῆς βαρύτητος ἐν δυσὶ λεπτοῖς δευτέροις διανυσθὲν, $= 4ΑΕ$, ϗ $ΑΘ = 9ΑΕ$ κτ.· ἐὰν ὖν ἐπὶ τέτων τῶν ἑξῆς κειμένων δυνάμεων συςαθῶσι παραλληλόγραμμα τὰ ΑΕΒΗ, ΑΓΖΙ, τὸ σῶμα ἔςαι κατὰ τὸ Η τελευτῶντος τῦ πρώτυ δευτέρυ λεπτῦ, ϗ κατὰ τὸ Ι ἐν τῷ τέλει τῦ δευτέρυ, ϗ κατὰ τὸ Κ ἐν τῷ τέλει τῦ τρίτυ (131)· διαγράψει ἄρα καμπύλην τὴν ΑΗΙΚ· λέγω δὴ ὡς ἔςιν αὕτη παραβολή· ἐπείπερ αἱ ἀποτετμημέναι ΑΕ, ΑΖ, ΑΘ εἰσὶν ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ (ἐκ κατασκευῆς)· ἀλλὰ αἱ τεταγμέναι ΕΗ, ΖΙ, ΘΚ εἰσὶν ἴσαι ἑκάςῃ ταῖς ἀντιςοίχοις εὐθείαις ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ· ἄρα αἱ ἀποτετμημέναι ΑΕ, ΑΖ, ΑΘ, εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα· ἥτις ἐςὶν ἰδιότης τῆς παραβολῆς (Τ'ψ. Γεωμ. 14) Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Δοθέντος τȣ͂ ΑΒ διαςήματος, ὃ διανύει τὸ προβαλλόμενον σῶμα ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ, ϗ τȣ͂ ΑΕ, ὃ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διὰ τὴν βαρύτητα διατρέχει, εὑρεθήσεται ἡ παράμετρος τῆς καταγραφησομένης παραβολῆς τρίτη ȣ̓͂σα ἀνάλογος τῇ τε ἀποτετμημένῃ ΑΕ, ϗ τῇ τεταγμένῃ ΕΗ = ΑΒ (Τ'ψ. Γ. 29).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Τὰ μέρη ΘΜ, ΜΝ, ΝΚ τῆς ὁριζοντίȣ ΘΚ, ἃ ἀντιςοιχεῖ τοῖς τόξοις ΑΗ, ΗΙ, ΙΚ, τοῖς διανυομένοις ἐν χρόνοις ἴσοις, εἰσὶν ἴσα· ϗ γὰρ (Γεωμ. 127) αἱ παράλληλοι ΑΘ, ΒΜ, ΓΝ, ΔΚ ἴσον ἀλλήλων ἀπέχȣσιν, ὅτι ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ προβολῆς τῶν ἐκ τῶν πυροβόλων ὅπλων σφαιρῶν.

Ἐχομένως τȣ́των εἰώθασιν οἱ Γεωμετρȣ͂ντες τύπον τινὰ ὑποσυνάπτειν τῆς τῶν πυροβολικῶν σφαιρῶν προβολῆς.

231. Ἐὰν σῶμα τὸ Δ (σχ. 107) ἐκ τȣ͂ Γ ἐπὶ τὸ Δ πέσῃ, ἕξει ταχύτητα, δι' ἧς ἂν διέλθῃ ἰσομερῶς ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, ΒΔ = 2ΓΔ (176)· ἀλλὰ προείσθω τὸ Δ κατὰ τὴν φορὰν Δη σὺν τῇ αὐτῇ ταχυτῆτι· ȣ̓κȣ͂ν τὰ ȣ̓́τω διανυσθησόμενα διαςήματα Δη, ΒΔ ἔσονται ὡς οἱ χρόνοι Χ, χ οἱ πρὸς τȣ͂το δαπανηθέντες (110)· ἔςαι ἄρα $\Delta\eta : B\Delta :: X : \chi$· ϗ $\Delta\eta^2 : B\Delta^2 :: X^2 : \chi^2$.

232. Ἔςω Ηη εὐθεῖα, καθ' ἣν τὸ Δ ἠνέχθη ἐν

τῷ χρόνῳ, ἐν ᾧ διήνυσε τὸ Δη· ὄντος δὲ τῦ αὐτῦ χρόνυ Χ ὑπέρτε τῆς Ηη ϗ τῆς Δη, ὁ ὑπὲρ τῆς ΓΔ χρόνος χ ἔςαι ὁ αὐτὸς τῷ ὑπὲρ τῆς ΒΔ· ἔςαι τοίνυν $Hη : ΓΔ :: X^2 : χ^2$ (151)· ἄρα $Hη : ΓΔ :: Δη^2 : BΔ^2$· ἄρα $Hη \times BΔ^2 = ΓΔ \times Δη^2$ (Z)· ἔςω ἐν $ΔA = 2BΔ = 4ΓΔ$ ὅθεν $ΓΔ : BΔ :: BΔ : ΔA$, ϗ δὴ $ΓΔ \times ΔA = BΔ^2$· ἐν τῇ Z ὖν ἀντικαταςάσης ἀντὶ $BΔ^2$ τῆς δυνάμεως ταύτης, ἔςαι $Hη \times ΓΔ \times ΔA = ΓΔ \times Δη^2$, ϗ διαιρέσει διὰ ΓΔ, $Hη \times ΔA = Δη^2$· ἀλλὰ $Hη = ΔΠ$ (Γεωμ. 127)· ἄρα $ΔΠ \times ΔA = Δη^2$.

233. Ἐπεὶ δὲ Δη, ΒΔ ἀνάλογοί εἰσι τοῖς χρόνοις Χ, χ (231), δυνατὸν ἄρα λαβεῖν Χ ἀντὶ Δη· ἀλλὰ $Δη^2 = ΔΠ \times ΔA$ (232)· ἄρα $X^2 = ΔΠ \times ΔA$· κληθείσης δὲ τῆς $ΓΔ = α$, ὅθεν $ΔA = 4α$, ἔςαι $X^2 = ΔΠ \times 4α$ (M).

234. Ἔςω ἤδη ΕΔ εὐθεῖα ὁριζόντιος, ϗ ἡ Δη φορὰ, καθ' ἣν τὸ Δ προσεῖται, περιέξει μετὰ τῆς ΕΔ γωνίαν τὴν ὑπὸ ηΔΕ· κληθήτω δὴ ἡ ἀπτομένη ταύτης τῆς γωνίας = Η· ἐν ὖν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΔηΟ, ἐκλαμβανομένης τῆς ΔΟ ὡς αὐτῆς ἀκτῖνος $= ρ$, ἔςαι (Γεωμ. 497) $ΔO : ηO :: ρ : H$· ἄρα $ηO \times ρ = ΔO \times H$· ἀλλὰ ἀ. δυνατὸν ὑποθέσθαι τὴν ἀκτῖνα, ἥτις ἐςὶ ςαθερὰ, $= 1$· ἄρα (Ἀριθ. 78) $ηO = ΔO \times H$· ϗ $Hη = ηO - HO$, $= ΔO \times H - HO$· β΄. $Δη^2 = ηO^2 + ΔO^2$ (Γεωμ. 349), ϗ ἀντικαταςάσει τῦ X^2 ἀντὶ $Δη^2$, ἔςαι $X^2 = ηO^2 + ΔO^2$· ἐὰν ὖν ληφθῇ ἡ δύναμις τῆς ηΟ, ἡ ἐσχάτη ἐξίσωσις γενήσεται $X^2 = ΔO^2 \times H^2 + ΔO^2$ (O) ἐπεὶ ὖν $X^2 = ΔΠ \times 4α = ηH \times 4α = ΔO \times H \times 4α - HO \times 4α$, ἡ O γενήσεται $ΔO \times H \times 4α - HO \times 4α = ΔO^2 \times H^2 + OΔ^2$ (P).

235. Ἐπὶ τούτοις δὲ, ἐὰν ἐπὶ τῆς ὁριζοντίȣ ΔΕ ληφθῇ σημεῖον ἕτερον τὸ Ο', λογισμῷ χρησαμένοις ϗ περὶ τȣ̃ ΟΔ'η' τριγώνȣ τῷ αὐτῷ, ᾧ ϗ περὶ τȣ̃ ΔΟη, εὑρεθήσεται ἐξίσωσις $ΔΟ' \times Η \times 4α - ΗΟ' \times 4α = ΟΔ'^2 \times Η^2 + ΔΟ'^2$ ὁμοία τῇ Ρ· δυνατὸν ȣ̃ν ἐν τῇ Ρ ἀντὶ μὲν ΔΟ ἀντικαταστῆσαι τὴν τρεπτὴν χ, ἀντὶ δὲ τῆς ΗΟ τὴν τρεπτὴν υ· ϗ δὴ ἔσαι $χ \times Η \times 4α - υ \times 4α = χ^2 Η^2 + χ^2 (Ν)$· ὅθεν ἀρύεται τὰ τείνοντα εἰς τὴν προβολὴν τῶν πυροβολικῶν σφαιρῶν.

236. ΟΡΙΣΜΟΣ. Π λ ά τ ο ς καλεῖται τῆς διὰ προβολῆς καταγραφομένης παραβολῆς ἡ ὁριζόντιος εὐθεῖα ΔΕ, ἡ ἀγομένη ἀπὸ τȣ̃ τῆς προβολῆς σημείȣ μέχρι τȣ̃ σημείȣ Ε, καθ' ὃ ἡ παραβολὴ συναντᾷ τῇ ὁριζοντίῳ.

237. ΠΟΒΛΗΜΑ Α'. Τὴν ἰσχὺν τῆς κόνεως ὁρίσασθαι.

ΛΥΣΙΣ. Ἰσχὺς ἐνταῦθα καλεῖται τῆς κόνεως, καθ' ἣν τὸ Δ, προβαλλόμενον κατὰ τὴν Δη φορὰν, καταγράφει τὴν παραβολὴν ΔΗΕ· δύναται δὲ ὑποτεθῆναι αὕτη ἴση τῇ, ἣν ἂν κτήσαιτο κατιὸν ἐκ τȣ̃ Γ ἐπὶ τὸ Δ (190), ϗ δὴ τὴν αὐτὴν, ἧς χρήζει ἐφ' ᾧ ἀνελθεῖν ἐκ τȣ̃ Δ ἐπὶ τὸ Γ· ἐμφαινέτω ȣ̃ν ταύτην ἡ ΓΔ παριςαμένη διὰ α, ϗ δὴ διὰ τῆς ἐξισώσεως Ν· ἐκεῖν, εἰς εὕρεσιν τῆς δυνάμεως τȣ̃ α, ϗ δὴ τῆς ἰσχύος τῆς κόνεως, ὑποτεθείσθω ἡ γωνία $ηΔΕ = 45°$, ἧς ἁπτομένη ἔσαι αὐτὴ ἡ ἀκτὶς $= 1$ (Γεωμ. 498), ϗ διῃρήσθω ἡ Ν διὰ $4χΗ - αυ$· ὅθεν ἔσαι $α = \frac{χ^2Η^2 + χ^2}{4χΗ - 4υ}$. Π.

Ὑποτιθεμένης ȣ̃ν τῆς, ἧς ςοχαζόμεθα, νύσσης ἐπὶ τῆς ὁριζοντίȣ εὐθείας κατὰ τὸ Ε, $ΗΟ = υ$ ἔσαι $= 0$, ϗ τεθέντος $ΔΕ = χ = 100$ ὀργ., ἡ Π γενήσεται $α =$

$\frac{10000 \times 1 + 10000}{400 \times 1 - 4 \times 0} = -50$· ἐὰν δὲ $\Delta E = \chi = 50$, ἡ Π ἔςαι $\alpha = 25$, τῦτ' ἔςιν ἐν γένει ἡ ἰσχὺς τῆς κόνεως ἴση ἐςὶν τῷ ἡμίσει πλάτει, ἢ τῇ ὁριζοντίῳ γραμμῇ, τῇ ἀποτελυμένῃ ἐκ προβολῆς, γινομένης διὰ γωνίας 45°, πορισθήσεται ἄρα ἡ ἰσχὺς α τῆς κόνεως ἐν προβολῇ διὰ γωνίας 45°, μετρυμένυ τῦ πλάτυς, ϗ λαμβανομένυ αὐτῦ τῦ ἡμίσεως.

238. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Γνωςῶν ὄντων τῆς κατὰ τὴν κόνιν ἰσχύος α (237), τῦ ὁριζοντίυ διαςήματος ΔΟ $= \chi$, τῆς νύσσης Η, τῆς αὐτῦ ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ὑψώσεως $OH = \upsilon$, εὑρεῖν τὴν γωνίαν, ἣν συςῆσαι μετὰ τῦ ὁρίζοντος ὀφείλει ἡ θέσις τῦ κανονίυ, ἵν' ἡ σφαῖρα τύχῃ τῆς Η.

ΛΥΣΙΣ. Πορισθήσεται αὕτη ἡ γωνία διὰ τῆς ἀπτομένης Η, ἧς εἰς διορισμὸν τῆς δυνάμεως μεταθέσει γενέσθω ἡ Ν ἐξίσωσις· $H^2\chi^2 - \chi H 4\alpha = -\chi^2 - 4\alpha\upsilon$· διαιρέσει δὲ διὰ χ^2, $H^2 - \frac{4\alpha H}{\chi} = \frac{-\chi^2 - 4\alpha\upsilon}{\chi^2}$. ἀναπληρώσει δὲ τῦ ἐλλείποντος τετραγώνυ (Συμβ. Λογ. 464), $H^2 - \frac{4\alpha H}{\chi} + \frac{4\alpha^2}{\chi^2} = \frac{-\chi^2 - 4\alpha\upsilon}{\chi^2} + \frac{4\alpha^2}{\chi^2}$. ἐξαγωγῇ ῥιζῶν· $H - \frac{2\alpha}{\chi} = \pm\sqrt{\frac{-\chi^2 - 4\alpha\upsilon}{\chi^2} + \frac{4\alpha^2}{\chi^2}}$ ἄρα $H = \frac{2\alpha}{\chi} \pm \sqrt{\frac{-\chi^2 - 4\alpha\upsilon}{\chi^2} + \frac{4\alpha^2}{\chi^2}}$ (Σ)· ἐντεῦθεν . . .

239. Ἤτοι πρὸς τῷ ὁρίζοντι κεῖται ἡ νύσσα, ἢ ὕπερθεν, ἢ ἔνερθεν αὐτῦ· ϗ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει,

ἐπεὶ ἡ Ε νύσσα ὑποτίθεται πρὸς τῷ ὁρίζοντι, υ ἔσαι $=0$, ϗ δὴ ἡ Σ ἐξίσωσις γενήσεται $H = \frac{2\alpha}{\chi} \pm \sqrt{\frac{4\alpha^2 - \chi^2}{\chi}}$ (Ψ)· ἀλλ' ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει, ἐὰν ὑποτεθῇ $\alpha =$ 50 ὀργ., ϗ τὸ ὁριζόντιον διάςημα $= \chi = 100$ ὀργ., ἡ Ψ ἔσαι $H = \frac{100}{100} \pm \sqrt{\frac{10000 - 1000}{100}} = 1$, $=$ τῇ ἀπτομένῃ τῆς 45° γωνίας (Γεωμ. 498) τῆς ζητυμένης.

Α'λλ' ἐὰν ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἡ $\chi = 50$, ἡ Ψ γενήσεται $H = \frac{100}{50} \pm \sqrt{\frac{10000 - 2500}{50}} = 2 \pm \sqrt{\frac{7500}{50}}, = 2 \pm \frac{8,660230}{50}$ (Συμβ. Λογ. 144) $=$ $2 \pm 1,73205$· συναπτομένυ μὲν ὖν τῷ 2 τῦ ἀριθμῦ 1,73205, ἔσαι 3,73205 ἀπτομένη γωνίας 75°· ἀφαιρυμένυ δὲ (ὃ δηλοῖ τὸ $\pm$) ἔσαι 0,26795 ἀπτομένη γωνίας 15°· ἄμφω δὲ αἱ γωνίαι ἐπίσης τὸ πρόβλημα ἐπιλύυσι· ἐντεῦθεν ἄρα...

240. α'. Τὸ πλάτος ὑπὸ γωνίαν 45° ἐπὶ δεδομένης ποσότητος κόνεως τὸ μέγιςόν ἐςι πάντων τῶν δυνατῶν· ϗ γὰρ ὄντος $\alpha = 50$ ὀργ. ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi > 100$ ὀργ. ὡς εἶχε τὸ ἐν γωνίᾳ 45° πλάτος, $4\alpha^2 - \chi^2$ γενήσεται ἐν τῇ ἐξισώσει Ψ λειπτικὸν, ϗ $\pm \sqrt{\frac{4\alpha^2 - \chi^2}{\chi}}$ ποσὸν ἀνύπαρκτον· β'. ἐν γωνίᾳ 15°, ϗ 75° τὸ αὐτὸ διανύεται πλάτος, ϗ διὰ τῦ Ψ τύπυ ἰδεῖν ἕξεςιν ἐν γένει

δύω γωνίας ἰσοδιεςώσας τῶν 45° ἀποτελέσας ἴσα πλάτη· δυνατὸν ἄρα τυχεῖν τῆς νύσσης, διχῶς ἰθύναντας τὸ κανόνιον (τοῦ ὁριζοντίου διαςήματος, περὶ οὗ ὁ λόγος, ἐλάττονος ὄντος τοῦ ἐν γωνίᾳ 45° πλάτους), παρ' ὅσον ἡ μὲν μείζων ἢ 45° γωνία, ὑψηλότερον μεταίρουσα τὴν σφαῖραν, δεξιὰν αὐτὴν καθίςησιν οἴκους κατερείπειν, ἡ δ' ἐλάττων ἢ 45° δεξιωτέρα ἐςὶ τοὺς ἐχθροὺς λυμήνασθαι, εἴτε ὅτι ταχίςα διὰ τῆς ὁριζοντίου αὐτῆς κινήσεως διαδραμεῖται, εἴτε ὅτι χρόνον ἐλάττονα μετὰ τὴν λάμψιν δαπανήσει, ἵνα διεκδράμῃ· γ'. ἐπεὶ τὸ πλάτος τὸ ὁριζόντιον τὸ ἐν γωνίᾳ 15° ἐςὶν $=$ 50 ὀργ. (239), ἥμισυ τοῦ ὑπὸ 45° ὁριζοντίου πλάτους, ἐμφαίνει αὐτὴν τὴν ἰσχὺν τῆς α κόνεως· ἐςὶν ἄρα εὐχερέςερον ἀποπειρᾶσθαι τῆς κόνεως ἐν γωνίᾳ 15°, ἢ ἐν 45°, λαμβάνουσιν ὑπὲρ τῆς α ὅλον τὸ πλάτος· δ'. τὰ πλάτη ἐν γωνίαις διαφόροις ἐλαττοῦται, περαιτέρω μὲν τῶν 45° ἕως τῶν 90°, κατωτέρω δὲ τῶν 45° μέχρι τοῦ 0· ἐν τούτοις γὰρ τοῖς ὅροις, εἴτ' οὖν κατὰ τὴν φορὰν ΔΑ, ἢ ΔΕ τὸ πλάτος ἔςαι μηδὲν, ὡς δῆλον· ε'. ῥᾷςον κατιδεῖν, ὡς διὰ τοῦ τύπου Ψ πίνακά τις δύναται ἐκθέσθαι πάντων τῶν πλάτεων τῶν ἀποτελουμένων ὑπὸ πληρώματος κόνεως, ἧς ἡ ἰσχὺς δέδοται ἐν διαφόροις γωνίαις, ὃ πέπρακται ὑπὸ τοῦ Μ. Β, ἐν τῷ Γαλλικῷ αὐτοῦ Πυροβολικῷ συγγράμματι.

241. Ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει κείσθω κατὰ τὸ Η ἡ νύσσα, καὶ ληφθέντος διὰ τῆς τριγωνομετρίας τοῦ ὁριζοντίου διαςήματος ΔΟ $= \chi$, καὶ τοῦ ὑψώματος ΗΟ $= \upsilon$, ἀντικαταςήτωσαν ἐν τῷ τύπῳ Σ αἱ δυνάμεις α, χ, υ, καὶ τἆλλα πεπράχθω ὡς ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει.

Ἐν δὲ τῇ τρίτῃ περιπτώσει ἔςω ἡ νύσσα ἐν τῷ Μ· καὶ δὴ ἡ ΜΟ″, εἴτ' οὖν υ, ὡς ἐναντία τῇ ΗΟ, γενήσεται λειπτικὴ, ὃ ποιήσει τὸν τύπον $H = \frac{2\alpha}{\chi} \pm \sqrt{\frac{-\chi^2 + 4\alpha\upsilon + 4\alpha^2}{\chi}}$.

τότε προϋποτεθέντος, τὰ λοιπὰ γενέσθω, ὡς πρότερον.

242. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ὑποτέθεινται μὲν (230) αἱ ἐν διαφόροις σημείοις Α, Η, Ι κτ. τῆς καμπύλης ΑΙΚΗ τῆς ὑπὸ βαρέος καταγραφομένης φορὰὶ ΑΘ, ΒΜ, ΓΝ, κτ. παράλληλοι· ἔσονται δὲ ἀληθῶς, τὸ μεταξὺ τούτων τῶν φορῶν διαστήματος ὡς μηδὲν ἐκλαμβανομένου, παραθέσει τοῦ διαστήματος, καθ᾽ ὃ ἡ καμπύλη τοῦ τῆς γῆς κέντρου ἀπέχει, ἔνθα αἱ φοραὶ αὗται συμπεσοῦνται ἀλλήλαις (170), οὐκ εἰσὶ μέντοιγε κυρίως παράλληλοι· κὴ γὰρ καμπύλη, ἣν καταγράφει ἡ προβολὴ, οὐκ ἔστι κυρίως παραβολὴ, καίτοι ἐγγὺς ἐκείνης τῆς φύσεως προσπελάζουσα.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Τοῦ βάρους τοῦ ἀέρος $\frac{1}{950}$ ὄντος τοῦ βάρους τοῦ ὕδατος, κὴ δὴ $\frac{1}{3350}$ τοῦ βάρους τῆς ὕλης, ἧς κατασκευάζουσι τὰ πυροβολικὰ σφαιρίδια, δοκεῖ τὸ κατ᾽ ἀρχὰς οὐδεμίαν αἰσθητὴν ἐκ τοῦ ἀέρος αὐτοῖς ἐγγίνεσθαι ἔνστασιν· κὴ οὕτω προβαλλόμενα καταγράφειν παραβολήν· οὐ μὴν ἀλλὰ κὴ ὅσα εἰδικὴν ἔχει βαρύτητα, οἷον λίθοι κτ, ἐν ἰσχύϊ προϊέμενα· δοκεῖ δὲ μάλιστα οὕτως ἔχειν, κὴ ὅτι ἐνιστάμενος ὁ ἀὴρ βραχύτι τῇ προβλητικῇ δυνάμει, ἐνίσταται ὡσαύτως κὴ τῇ τῆς βαρύτητος.

243. Ἐὰν μέντοι διανοηθῇ τις α΄. ὡς ἡ ταχύτης σφαίρας τινὸς, ἐξιούσης τοῦ κανονίου, εἰ μὴ τῷ ἀέρι ἐπιβραδύνοιτο, διέτρεχε περίπου πόδας 1200 ἐν ἑνὶ δευτέρῳ, ὅτε πίπτουσα διὰ τῆς βαρύτητος αὐτῆς ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ διανύει μόνον πόδας 15· β΄. ἡ πρὸς τὰς προβολὰς ἔνστασις τοῦ ἀέρος ἐστὶν ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν

ταχυτήτων· γʹ. τῆς τοῦ ἀέρος πυκνότητος αἰσθητῶς διαφόρου οὔσης ἐν τῷ ὁρίζοντι καὶ ἐν διαφόροις ὕψεσιν, εἰς ἃ ἀνίασι τὰ προβαλλόμενα ἐν διαφόροις γωνίαις, ῥαδίως ἄντις κατανοήσειεν, ὡς ὁ ἀὴρ τὴν τῶν προβαλλομένων κίνησιν, καὶ δὴ τὴν ἐξ αὐτῶν διαγραφομένην καμπύλην, ὁπωσοῦν ἀλλοιοῖ.

Ἵνα δὲ κρίνειν ἔχῃ τις πόσον ὁ ἀὴρ μεταβάλλει τὴν ὑπὸ τῶν βαρέων καταγραφεῖσαν ἂν παραβολήν, εἰ φέροιντο ἐν τῷ κενῷ, ὑπ᾽ ὄψιν τοῦ ἀναγνώστου ᾠήθην δεῖν ὑποθέσθαι τὸν πίνακα τῶν ἐμμελῶς γενομένων πειραμάτων ἐν τοῖς βασιλικοῖς παιδευτηρίοις τῆς πυροτεχνίας.

Πίναξ.

Τῶν πλάτεων προβολῶν, γενομένων κατὰ τὸν ὀκτώβριον μῆνα τοῦ 1771, κατὰ τὴν τοῦ ἀέρος ἔνστασιν, καὶ τῶν αὐτῶν πλάτεων λογισθέντων ἐν τῷ κενῷ, ἄνευ τῆς ἐκ τοῦ ἀέρος ἐνστάσεως· αἱ ληφθεῖσαι σφαῖραι ἐν τούτοις τοῖς ἀποπειράμασιν ἦσαν διαμέτρου 11 δακτ. καὶ γραμ. 10, βάρους δὲ 142 λιτρῶν· προέθησαν δὲ διὰ κόνεως 3 λιτρῶν καὶ $\frac{3}{4}$

γωνίαι τῆς προβολ.	πλάτη ἐν τῷ κενῷ.	πλάτη, οἷα παρετηρήθησαν.	διάρκεια πλάτεων ἐν τῷ κενῷ.	διάρκεια πλάτεων οἷα παρετηρήθη.
10 βαθμ.	253 ὀργ.	257 ὀργ.	4 $\frac{3}{5}$ δευτ.	4 δευτ.
		249		
		221		
		228		
20	476	440	8 $\frac{9}{16}$	7 $\frac{1}{5}$
		424		
		394		
		398		

30 βαθμ.	640 ὀργ.	451 ὀργ.	$12\frac{1}{5}$ δευτ.	$10\frac{3}{4}$ δευτ.
		516		
		537		
		492		
40	728	569	$15\frac{3}{5}$	$14\frac{2}{3}$
		575		
		574		
		544		
43	738	506	$16\frac{1}{2}$	14
		517		
		543		
		509		
45	739	490	$17\frac{1}{5}$	$15\frac{1}{3}$
		536		
		505		
		489		
50	728	481	$18\frac{2}{5}$	16
		512		
		488		
		507		
60	640	457	21	$19\frac{1}{3}$
		424		
		457		
		448		
70	470	349	$22\frac{4}{5}$	22
		297		
		349		
		328		
75	370	298	$23\frac{2}{5}$	22
		265		
		261		
		256		

244. **ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄.** *Ἐκ μόνης τῆς ὄψεως τοῦ προτεθέντος πίνακος εὐχερῶς συνάγεται, ὅτι α΄. ἀδύνατον ἀπὸ πλάτους γωνίας τινὸς συναγαγεῖν τὸ πλάτος γωνίας ἀλ-*

λης, εἰμὴ κατὰ προσέγγισιν· ὅτως ὖν τὸ πρῶτον ἄραντες τὸ κανόνιον ἐν γωνίᾳ κλίσεως, ἣν περιέχυσιν οἱ πίνακες ἐπὶ νύσσης, ἧς ἡ θέσις ἔγνωσαι, λείπεται παρατηρῆσαι, πόσον πλάτος ἐςι λίαν ἰσχυρὸν, ἢ λίαν ἀθενὲς, καὶ διορθῶσαι τὸ διάπτωμα, αὔξοντας ἢ ἐλαττῦντας τὴν κλίσιν τῦ κανονίυ, ἔςτ' ἂν τὸ προβαλλόμενον τύχῃ τῆς νύσσης· β'. ὐκ ἐλπιςέον πάντως τεύξεσθαι τῆς νύσσης, εἰ ἐν ἑκάςῳ πλάτει μικρά τις εἴη ἔκτασις· καὶ γὰρ καίτοι ἐν τοῖς προεκτεθεῖσιν ὑποδείγμασιν, ὅσην ἐνῆν κατέθεντο τὴν φροντίδα, ἵν' αἱ ἐν τῇ αὐτῇ γωνίᾳ ἀπόπειραι τὰ αὐτὰ πλάτη ἀποτελῶσι, χρησάμενοι ἀεὶ τῇ αὐτῇ ποσότητι τῆς κόνεως κτ, ὐδέποτε μέντοι εὑρεῖν ἠδυνήθησαν δύω ἰσάλληλα πλάτη· εἰλήφθωσαν γὰρ τέσσαρα πλάτη, ἃ ἐγένοντο ἐν γωνίᾳ 45°, ὑφ' ἣν συνήθως τῆς κόνεως ἀπόπειρα γίνεται· εἰσὶν ὖν τέσσαρα πλάτη πάντῃ διάφορα, ὧν τὸ μέγιςον διαφέρει τῦ ἐλαχίςου ὀργυιαῖς 47, εἴτ' ὖν $\frac{1}{15}$ περίπυ τῦ ἐλαχίςυ πλάτυς· ἀλλὰ καὶ ὕτως ἐπάναγκες εἶναι τὸ πρᾶγμα· παρὰ γὰρ τὰς διαφόρους αἰτίας, τὰς ἀπαντώσας ἐν τῇ ἀναφλέξει τῆς κόνεως, εἰσὶ καὶ αἱ μὴ ὡρισμένως γινόμεναι παραπληρώσεις· ὐκῦν ὅσῳ ἰσχυρότερον παραπληρῦται ἡ κόνις, τοσύτῳ τὸ προβαλλόμενον πόῤῥω χωρεῖ.

245. Ἀλλ' ἐξιύσης τῆς σφαίρας ἐκ τῦ κανονίυ ἐν δυσὶ πληρώμασι κόνεως ἴσοις, ἡ τῦ ἀέρος ἔνςασις διάφορος εἶναι δύναται, καὶ ἐν δυσὶν ὥραις διαφόροις ἀεὶ ἔςαι διάφορος· α'. ἀὴρ γὰρ θερμότερος, ἧττον ἔχει πυκνότητος, καὶ δὴ ἧττον ἐνίςαται ἀέρος ψυχροτέρυ· β'. ἠρεμῦντος, ἢ ἀντιπνέοντος, ἢ καὶ συντρέχοντος τῦ ἀνέμυ ταῖς φοραῖς τῶν σφαιρῶν, ἡ προβολὴ διαφόρως ἀλλοιωθήσεται, ἐλαττυμένη, ἢ αὐξομένη· ἀλλ' ὅ,τε ἀὴρ, καὶ αἱ πνοαὶ

τῶν ἀνέμων συνεχῶς μεταβάλλεσιν· ἄρα ὁρισθῆναι τὰ πλάτη ἐκ πάντων τῶν εἰρημένων ἀδυνάτως ἔχον δείκνυται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ τῆς κατ' ἀναλίκνισιν κινήσεως.

246. Βάρος τὸ Β (σχ. 108) ἐξ ὕλης ϛερεᾶς, ἣν ἐλάττονι ἀπαντᾷ τῇ τῦ ἀέρος ἐνϛάσει, μίτῳ προσηρτημένον τῷ ΑΒ, καλεῖται σῶμα ἐκκρεμές· τὸ δὲ Β σημεῖον τῆς ΑΒ καθέτε καλεῖται σημεῖον ἠρεμήσεως· ἐὰν ὖν τὸ Β ἀρθῇ φέρε, ἐκεῖθεν δὲ ἀφεθῇ, κατελεύσεται εἰς τὸ Β· εἶτα ταχυτῆτα τοσαύτην προσκτήσεται, ὅση ἂν οἷον ᾖ ἀναβῆναι ὕψος τὸ ΒΔ, ἴσον τῷ ἀφ' ἕ κατέπεσε ΓΒ (190), ἁπάσης ἄλλης αἰρομένης αἰτίας (99)· αὕτη ὖν ἡ ὅλη κίνησις ΓΒΔ τῦ ἐκκρεμῦς σώματος καλεῖται ἀναλίκνισις.

Καλῦνται ἀναλικνίσεις ἰσόχρονοι, ἡνίκα χρόνον ἶσον διαρκῦσι.

247. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Μόνης θεωρυμένης τῆς βαρύτητος, ἐὰν ἐγερθῇ τὸ σημεῖον τῆς ἠρεμήσεως Β, τὸ ἐκκρεμὲς ἀποτελέσει ἀναλικνήσεις ἀεὶ ἴσας καὶ ἀπείρυς τὸν ἀριθμόν.

ΔΕΙΞΙΣ. Καταπίπτον γὰρ ἐκ τῦ Γ ἐπὶ τὸ Β, προσκτᾶται ταχύτητα, ὅση ἀνελθεῖν δύναται ἐς τὸ Δ (190)· καταπίπτον δὲ ἐκ τῦ Δ ἐπὶ τὸ Β προσκτᾶται ταχύτητα, ὅση ἂν ἀνέλθοι ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ὕτως ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ο. Ε. Δ.

248. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Αἰρομένης τῆς ἐκ τῦ ἀέρος ἐνϛάσεως, ἐὰν ἀκίνητος ὑποτεθῇ ἡ γῆ, καὶ κατὰ διάμε-

τρον τετρημένη, λίθος ἄφετος εἰς τὴν κατὰ κάθετον ὀπὴν, πεσεῖται εἰς τὸ κέντρον τῆς γῆς, ϗ ἐν τῇ καθόδῳ προσκτήσεται ταχύτητα, ὅσῃ ἀνελθεῖν δυνήσεται εἰς τὲς ἡμῖν ἀντίποδας· ἀφικόμενος δὲ ἐκεῖσε, ϗ πᾶσαν ἀποβαλὼν τὴν ταχύτητα, ἣν ἐκτήσατο πεσὼν ἀφ' ἡμῶν ἐς τὸ τῆς γῆς κέντρον, παλινδρομήσει αὖθις εἰς τὸ κέντρον, κἀκεῖ αὖθις κτησάμενος ταχυτῆτα ἱκανὴν, ἀνελεύσεται ὡς ἡμᾶς, ϗ τῦτο ἐπ' ἄπειρον· ϗ γὰρ ἅπαν σῶμα βαρὺ τὴν αὐτὴν προσκτᾶται ταχυτῆτα, εἴτε πίπτον κατὰ κάθετον τὴν τΒ, ἢ διὰ τῦ τόξυ ΓΒ μέχρι τῦ κέντρυ τῆς ἠρεμήσεως (204), ϗ ἀεὶ κτᾶται ταχύτητα, δι' ἧς ἂν ϗ πέραν τῦ κέντρυ τῆς ἠρεμήσεως ἀνελθεῖν δύναται ἐς ὕψος ἴσον τῷ ἀφ' ὗ κατέπεσεν· ἀλλὰ κέντρον ἠρεμήσεως τῶν γηΐνων βαρέων ἐςὶν αὐτὸ τὸ κέντρον τῆς γῆς, ὡς εἰς τῦτο ὠθέσης αὐτὰ τῆς βαρύτητος (170)· ἄρα ὁ λίθος ἀνελεύσεται εἰς ὕψος ἴσον τῷ, ἀφ' ὗ κατέπεσε, μετὰ τὸ ἀφικέσθαι εἰς τὸ κέντρον τῆς γῆς, ϗ ὕτως ἐπ' ἄπειρον.

249. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.** Ἐὰν *ἄρα βάρος τι τὸ* Β *ἧττον ὑψῶται μεθ' ἑκάςην ἀναλίκνισιν, ϗ τέλος καθηρεμῇ, τῦτὶ γίνεται διὰ τὸν ἐνιςάμενον ἀέρα, ϗ ἔτι τυχὸν διὰ τὸ τῦ μίτυ δύσκαμπτον.*

250. **ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.** Ἐ*ὰν ἐκκρεμὲς τὸ* ΑΒ *πλείω χρόνον δαπανᾷ εἰς τὰς ἑαυτῦ ἀναλικνίσεις ἐν τῷ τύπῳ* Π, *ἢ ἐν τῷ τύπῳ* Ξ, *τῦτο γίνεται, ὅτι ἡ βαρύτης ἧττον ἐπενεργεῖ ἐν τῷ* Π, *ἢ ἐν τῷ* Ξ.

ΔΕΙΞΙΣ. Κ*αθ' ἑαυτὸ δῆλον· μόνη γὰρ ἡ βαρύτης ἐμποιεῖ τὴν ταχύτητα τῶν ἀναλικνίσεων τῦ ἐκκρεμῦς, ϗ ἅπαν ἀποτέλεσμα ἀνάλογον εἶναι δεῖ τῇ ἑαυτῦ αἰτίᾳ* (87).

251. **ΠΟΡΙΣΜΑ.** Α*ἱ ἀναλικνίσεις βραδεῖαι γίνονται αἰσθητῶς ὑπὸ τὸν ἐξισωτὴν, καί τοι τῶν αὐτῶν ἐπι-*

μελῶς τηρουμένων περιςάσεων αὐτοῦ τε, καὶ ἐν τοῖς πόλοις· ἄρα τὰ σώματα εἰσὶν ἡττοβαρῆ ἐν τῷ ἰσημερινῷ, ἢ ἐν τοῖς πόλοις· διαπιςοῦνται δὲ τοῦτο καὶ ἄλλαι δύω αἰτίαι, περὶ ὧν ἐροῦμεν ἐν τοῖς ἑξῆς.

252. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Αἱ διάρκειαι ἑκάςης ἀναλικνίσεως δύω ἐκκρεμῶν ΑΒ, αβ (σχ. 108), διαφόρων τὸ μῆκος, εἰσὶν ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ τῶν μήκεων.

ΔΕΙΞΙΣ. Αἱ ταχύτητες τοῦ βάρους Β, καὶ τοῦ β, ἐν δυσὶν ὁμοίοις τόξοις ΓΒΔ, γβδ, εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκτίνων ΑΒ, αβ (216)· ἐχέτω οὖν ΑΒ : αβ :: 4 : 1· ἄρα καὶ ΓΔ : γδ :: 4 : 1· ἄρα τὸ διατρεχόμενον διάςημα ὑπὸ τοῦ Β ταχυτῆτι διπλῇ, ἔσεται τετραπλάσιον· δεήσει ἄρα διπλοῦ χρόνου, ἵνα διανυσθῇ τὸ ΓΔ, ἢ τὸ γδ· ἡ ἄρα διάρκεια τῆς τοῦ Β ἀναλικνίσεως ἔσεται πρὸς τὴν διάρκειαν τῆς τοῦ β ὡς 2 : 1 :: $\sqrt{}$ΑΒ : $\sqrt{}$αβ. Ο.Ε.Δ.

253. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ο' ἀριθμὸς τῶν ἀναλικνίσεων ἐκκρεμοῦς τοῦ ΑΒ πρὸς τὸν τῶν τοῦ αβ, ἐςιν ἐν ἀντιςρόφῳ ὑποδιπλασίονι λόγῳ τῶν μήκεων, εἴτ' οὖν ὡς $\sqrt{}$αβ : $\sqrt{}$ΑΒ.

254. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ε'πεὶ ἡ διάρκεια τῆς ἀναλικνίσεως αὔξει κατὰ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ κατὰ τὸ ἐκκρεμὲς μήκους, εὑρεθήσεται μεταξὺ τῶν ἀπείρων ἀναλικνίσεων διαφόρων τὴν διάρκειαν, ἐκ μηκῶν τελουμένων διαφόρων, ἀναλίκνισις, ἥτις διαρκέσει ἴσον ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ· ἄρα ἐκκρεμὲς, οὗ τὸ μῆκος τοιοῦτον, ὥςε ἑκάςην ἀναλίκνισιν, τελουμένην ἐν τόξῳ τριῶν ἢ τεσσάρων μοιρῶν, διαρκεῖν ἓν λεπτὸν δεύτερον, καλεῖται ἐκκρεμὲς τῶν δευτέρων· ἐπεὶ δὲ ἑκάςη ὥρα εἰσὶ λεπτὰ δεύ-

τερα 60 × 60 = 3600, τοσαύτας ἀναλικινήσεις ἀποτελεῖν ἀνάγκη τὸ τοιῦτον ἐκκρεμὲς ἐν ἑκάςῃ ὥρᾳ.

Εἶπον, τόξῳ τριῶν ἢ τεσσάρων μοιρῶν· ἐπεὶ, ὡς αὐτίκα φανήσεται, αἱ κυκλικαὶ ἀναλικινήσεις ἐν ἐλαχίςοις μόνον τόξοις εἰσὶν ἰσόχρονοι.

Τὸ ἐκκρεμὲς τῶν δευτέρων λεπτῶν χρησιμώτατόν ἐςι τοῖς φιλοσοφῦσιν εἰς καταμέτρησιν τῆς διαρκείας διαφόρων ἀκαριαίων φαινομένων ὑρανίων τε καὶ γηΐνων. Τὸ δὲ μῆκος αὐτῶν βραχύτι ποικίλλεται κατὰ τὰς διαφόρας χώρας τῆς γῆς· μεγεθυνομένων ἀναλόγως τῇ ἀπὸ τῦ ἰσημερινῦ ἀποςάσει, ϗ τῇ πρὸς τὰς πόλας ἐγγίσει· εἴγε, ὡς ὀψόμεθα, ἡ βαρύτης τῶν σωμάτων αὔξει προϊῦσιν ἀπὸ τῦ ἰσημερινῦ πρὸς τὰς πόλας.

255. Ἰδὰ δὴ κατὰ τὰ εἰρημένα, ὅπως κατασκευάσομεν ἐκκρεμὲς ἁπλῦν, χρήσιμον ἐν παντὶ χώρῳ.

α΄. Εἰλήφθω μῖτος μετάλλινος λεπτὸς, ϗ τῷ πέρατι προσδεδέσθω βάρος κυκλοτερὲς ὕλης πυκνοτάτης, οἷον μολίβδυ, ἢ χρυσῦ, ὡς εἶναι βραχεῖαν αὐτῦ τὴν ἐπιφάνειαν πρός γε τὸ ποσὸν τῆς μάζης, ἢ τῦ βάρυς· ϗ τῇ ἀντιςάσει τῦ ἀέρος αἰσθητῶς μὴ μεταλλοιῦσθαι τὰς ἀναλικινήσεις.

β΄. Γενέσθω τὸ μῆκος τρίπυν ἀκριβῶς, ἐκ τῦ σημείυ καθ' ὃ προσήρτηται ὁ μῖτος μέχρι τῦ κέντρυ τῦ βαρέος σώματος.

γ΄. Ὑψύσθω τὸ βάρος Β ὑπὲρ τὸ τῆς ἠρεμήσεως σημεῖον Β δυσὶν ἢ τρισὶ περίπυ μοίραις, καὶ ἠριθμήσθωσαν αἱ ἐν ἑνὶ φέρε τεταρτημορίῳ ὥρας γενησόμεναι ἀναλικινήσεις.

Ποιείτω δὲ ἐν τύτῳ τῷ χρόνῳ ἀναλικινήσεις 909· φημὶ ὖν 900 ἀναλικινήσεις, εἴτ' ὖν τὸ τέταρτον τῶν 3600, ἃς τὸ ἐκκρεμὲς διανύειν δεῖ ἐν τῷ τεταρτημορίῳ τῆς ὥρας, πρὸς 909, ἃς διανύει τὸ 3 ποδῶν ἐκκρεμὲς, ἐστὶν ὡς $\sqrt{3} = 1,732$ ὡς ἔγγιστα πρὸς την χ τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μήκους, τοῦ τῶν δευτέρων λεπτῶν ἐκκρεμοῦς, εἶτ' οὖν $\chi = 1,74$ ὡς ἔγγιστα· ὃ τετραγωνισθὲν ἴσον ἔσαι 3,0276 ποσὶ, εἶτ' οὖν ποσὶ 3, καὶ γραμμαῖς 3, καὶ στίγμασι 11 καὶ $\frac{7}{8}$ στίγματος ὅτι ἔγγιστα.

256. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ΑΓ ὑποτεθῇ ἡμικυκλοειδὴς ἴση τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΑΤ = ΤΒ = ΓΒ, καὶ πρὸς τῷ Γ σημείῳ προσαρτηθῇ ἐκκρεμὲς τὸ Π, προσδεδεμένον νήματι ἴσῳ τῷ ΑΤΓ, τὸ βάρος Π ἀποχωρίσει κατὰ βραχὺ τὸ νῆμα ΠΤΓ ἀπὸ τῆς κυκλοειδοῦς ΑΓ, καὶ γενόμενον κατὰ τὴν θέσιν ΓΤ ἐνειλίξει αὐτὸ τῶν ἡμικυκλοειδεῖ ΓΒ· καὶ οὕτω τὸ ἐκκρεμὲς Π ἀναλικνισθήσεται καταγράφον τὴν κυκλοειδῆ ΑΤΒ διὰ τῶν δύω κυκλοειδικῶν πετάλων ΓΑ, ΓΒ· ἀχθεισῶν δὲ τῶν ἐν τῷ σχήματι καταφαινομένων γραμμῶν, ἐκ τῆς κατὰ τὴν κυκλοειδῆ ἰδιότητος ἐστὶν ἡ ἡμικυκλοειδὴς ΑΓ = 2. ΑΕ = ΓΝ (ὑψ. Γ. 340)· ἐστὶ δὲ τὸ τόξον ΑΤ ἴσον τῷ ΤΠ μήκει τοῦ νήματος, ὑφ' οὗ ἐνειλίσσεται, τοῦ ἐκκρεμοῦς Π ὄντος πρὸς τῷ Α. ἀλλαμὴν ΑΤ = 2 Αζ (ὑψ. Γ. αὐτόθ.) ἄρα ΠΤ = 2 Αζ = 2. ηΤ. ἐστὶ γὰρ ηΤ τῇ Αζ παράλληλος (ὑψ. Γ. 335), τὸ δὲ σχῆμα ζΤηΑ ἐστὶ παραλληλόγραμμον· ἄρα ηΠ = ηΤ· ἐστὶ δὲ τὸ κυκλικὸν τόξον Αζ ἴσον τῇ τεταγμένῃ ζΤ = Αη (ὑψ. Γ. 333), καὶ ἐπείπερ ΑΔ = ΑζΕ, ἀνάγκη ὑπάρχειν Δη = Εζ = ΜΤ· τὰ γὰρ τόξα ΑΖ, ΔΜ ἴσων κύκλων ὄντα, καὶ ὑπὸ τῶν παραλλήλων Τζ, Αη, τῶν ἴσον ἀπεχουσῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΠΜ, περιεχόμενα, εἰσὶν ἀναγκαίως ἴσα· ἄρα ζΕ = ΜΤ. ἀλλὰ τῶν γωνιῶν ζΑη, ΜΔη, ἡ μὲν μετρεῖται τῷ ἡμίσει τοῦ τόξου Αζ, ἡ

δὲ δευτέρα τῷ ἡμίσει τȣ̃ τόξȣ ΜΔ, ἄρα εἰσὶν αὗται μὲν ἰσάλληλοι, αἱ δὲ ζΑ, ΔΜ εὐθεῖαι παράλληλοι· ȣ̓κȣ̃ν τὸ σχῆμα ηΔΜΠ ἐςὶ παραλληλόγραμμον· ὅθεν ΠΜ = ηΔ = ΜΤ, τȣ̃τ' ἔςιν ἡ τεταγμένη ΠΜ ἰσȣ̃ται τῷ ἀντιςοίχῳ κυκλικῷ τόξῳ ΤΜ· ἄρα

Α΄. Ἡ καμπύλη ΑΠΤ ἐςὶν ἡμικυκλοειδὴς γεννωμένη ἐκ τῆς ἐξελίξεως τῆς ἡμικυκλοειδȣ̃ς ΓΑ. τοιγαρȣ̃ν ἡ ἐξειλιγμένη τῆς κυκλοειδȣ̃ς ἐςὶ ϗ αὕτη κυκλοειδής, ὅπερ ἑτέρῳ λόγῳ δέδεικται ἡμῖν ἀλλαχȣ̃ (ὑψ. Γ. 339)

Β΄. Ἐκκρεμὲς ἀναλικνιζόμενον μεταξὺ δύω πετάλων κυκλοειδικῶν ΑΓ, ΓΒ, ὧν ἑκάτερον ἴσον ἐςὶ τῷ μήκει τȣ̃ κατὰ τὸ ἐκκρεμὲς νήματος, κυκλοειδῆ καταγράφει.

Γ΄. Αἱ τοιȣτώδȣς ἐκκρεμȣ̃ς ἀναλικνίσεις εἰσὶν ἰσόχρονοι διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς κυκλοειδȣ̃ς (226)

Δεῖ μέντοι τὰ πέταλα λίαν ὑπάρχειν ὁμαλά, καὶ ἐλαςικῆς δυνάμεως ἄμοιρα, ἵνα μὴ τῶν ἀναλικνίσεων τὸ ἰσόχρονον τριβῇ τε ϗ ἐλαςικότητι παραλυμαίνηται.

Δ΄. Ἐὰν ἐκκρεμὲς καταγράφῃ κυκλικὸν τόξον μοιρῶν 3, ἢ 4, ἐπεὶ συμπίπτει τῷ κυκλοειδȣ̃ς τόξῳ, αἱ αὐτȣ̃ ἀναλικνίσεις ἰσόχρονοι ἔσονται (254).

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Δ΄. ΤΟΜΟΥ.

ΠΙΝΑΞ ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΗΣ.

Τῶν ἐν τῷ Δ'. Τόμῳ περιεχομένων.

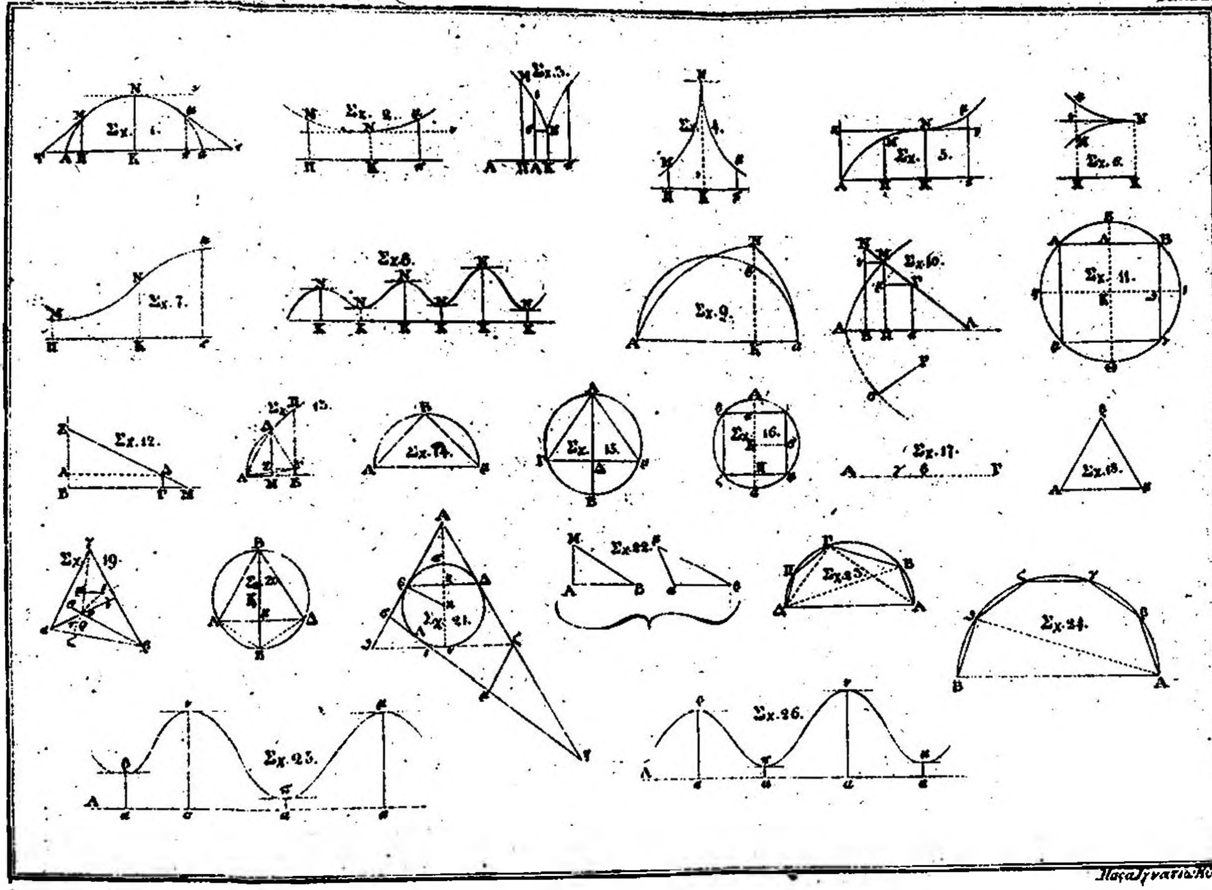
ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΩΝ.

ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ.

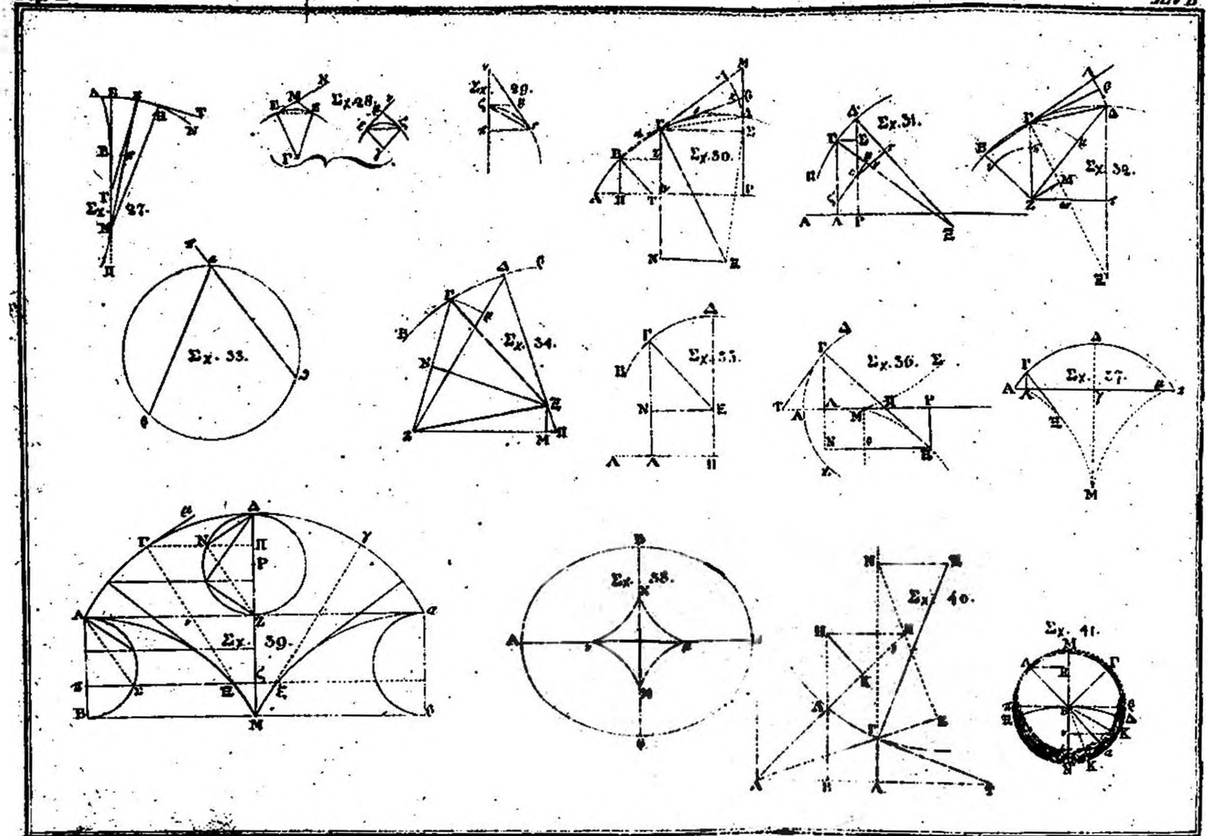
ΤΗΣ ΕΝ ΓΕΝΕΙ ΦΥΣΙΚΗΣ.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ.

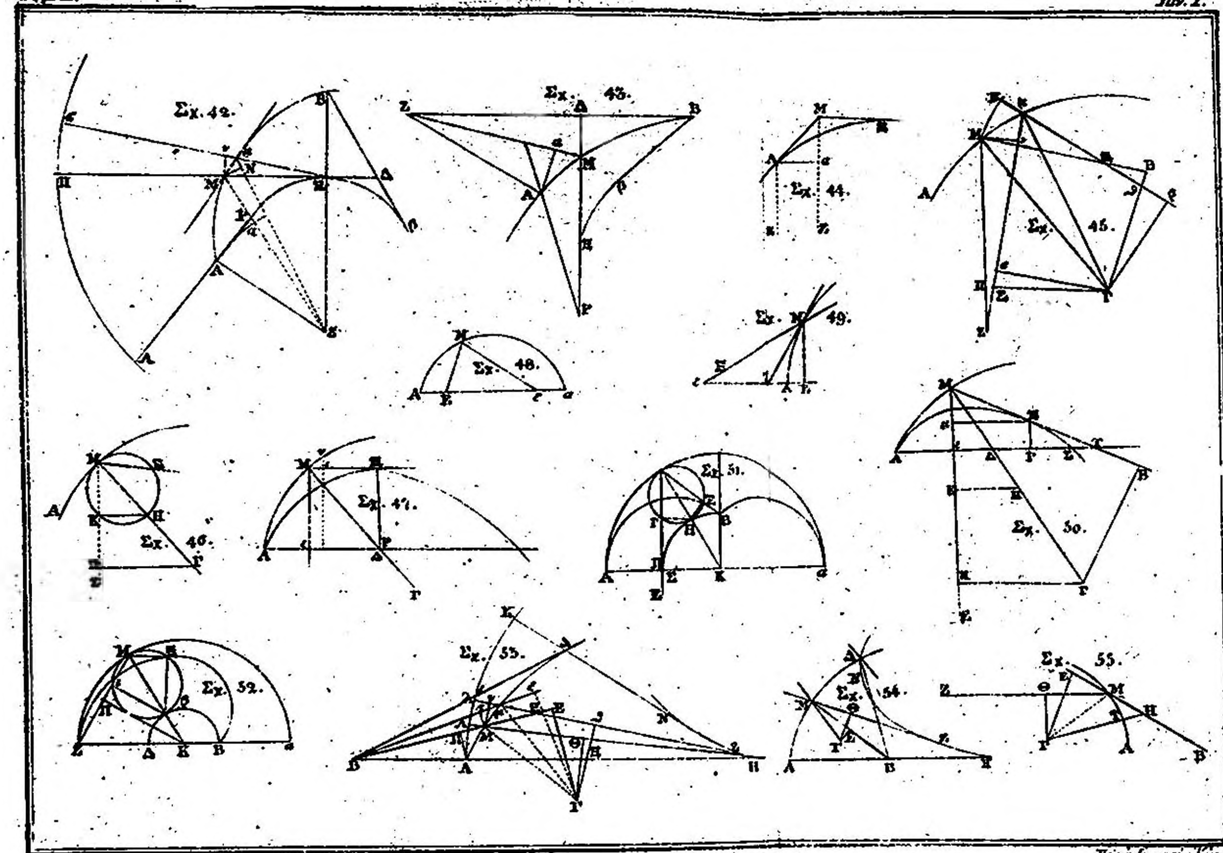
Σελ. 30. ςίχ. 3, $+\frac{\beta^3}{\chi}$, Γρ. $+\frac{\beta^3}{\chi}$ — Σελ. 46. ςίχ. 23. Τίγωνον, Γρ. Τρίγωνον. — Σελ. 65. ςίχ. 28. (κ. 46), Γρ. (κ. 42). — Σελ. 66. ςίχ. 30. (κ. 17), Γρ. (κ. 43). — Σελ. 67. ςίχ. 8. (κ. 16, 17), Γρ. (κ. 42, 43) — ςίχ. 14. (κ. 16), Γρ. (κ. 42). — Σελ. 78. ςίχ. 19. (κ. 28), Γρ. (κ. 54) — ὡσαύτως γράφε διορθῶν ϗ τὸ σελ. 79. ςίχ. 22. — Σελ. 80. ςίχ. 1. (κ. 27), Γρ. (κ. 53). — Σελ. 83. ςίχ. 24. (κ. 29), Γρ. (κ. 55). — Σελ. 84. ςίχ. 1. (κ. 30), Γρ. (κ. 56) — ςίχ. 13. (κ. 33, 34), Γρ. (κ. 59, 60) — ςίχ. 21. Τȣ͂ 32, Γρ. Τȣ͂ 58. — Σελ. 85. ςίχ. 15. (κ. 31), Γρ. (κ. 57) — ςίχ. 18. Τȣ͂ 32, Γρ. Τȣ͂ 58. — Σελ. 89. ςίχ. 1 (κ. 30), Γρ. (κ. 56). — Σελ. 94. ςίχ. 11. Ο′χ, Γρ. Η′χ. — Σελ. 113. ςίχ. 13. (109 κτ.), Γρ. (190 κτ.). — Σελ. 120. ςίχ. 13. Ἐὰν ȣ͂, Γρ. Ἐὰν ἓν. — Σελ. 123. ςίχ. 10. (193), Γρ. (203). — Σελ. 124. ςίχ. 16. (195), Γρ. (205). — Σελ. 126. ςίχ. 19. (193), Γρ. (203). — Σελ. 139. ςίχ. 7. Συνημ. (α + β) συνημ. α κτλ., Γρ. Συνημ. (α + β) = συνημ. α κτλ. — Σελ. 146. ςίχ. 16. Καὶ τȣ͂ $\frac{\alpha}{2}$, Γρ. Καὶ τȣ͂ $\frac{\alpha}{3}$. — Σελ. 147. ςίχ. 6. Τῶν πρώτης, Γρ. Τῆς πρώτης. — Σελ. 153. ςίχ. 20. (210), Γρ. (251). — Σελ. 160. ςίχ. 15. 256, Γρ. 246. — Σελ. 175. ςίχ. 13. Ἧν διαφορὰ, Γρ. Ἧν ἡ διαφορά. — Σελ. 205. ςίχ. 22. +, Γρ. =. — Σελ. 210. ςίχ. 8. Τὸ Π, Γρ. Ο′ Π. — Σελ. 213. ςίχ. 13. Ὑπὲρ τȣ͂ ϑ., Γρ. Ὑπὲρ τȣ͂ ϑ. — Σελ. 232. ςίχ. 19. Πορσφυῶς, Γρ. Προσφυῶς. — Σελ. 239. ςίχ. 14. Ἅπτεϑει, Γρ. Ἅπτεσθαι. — Σελ. 264. ςίχ. 3. Τὸ μὲν, Γρ. Τὸ μέντοι. — Σελ. 266. ςίχ. 8. Ἐξ ἀρις., Γρ. Ἡ′ ἐξ ἀρις. — Σελ. 276. ςίχ. 18. Διαδοχῆς, Γρ. Ἐκ διαδοχῆς. — Σελ. 279. ςίχ. 22. Οὐδὲν, Γρ. Ἕν.



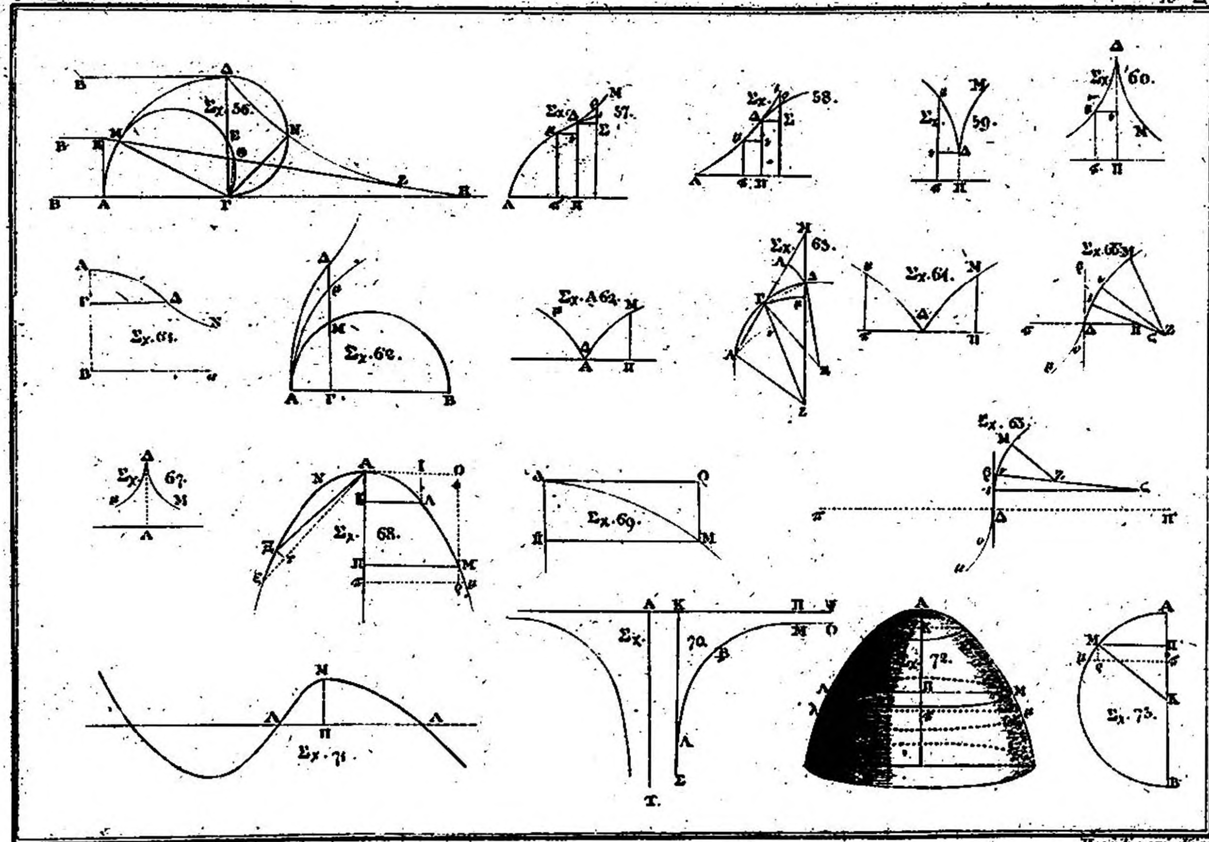
Παπαϊγνατίου Κόιν.



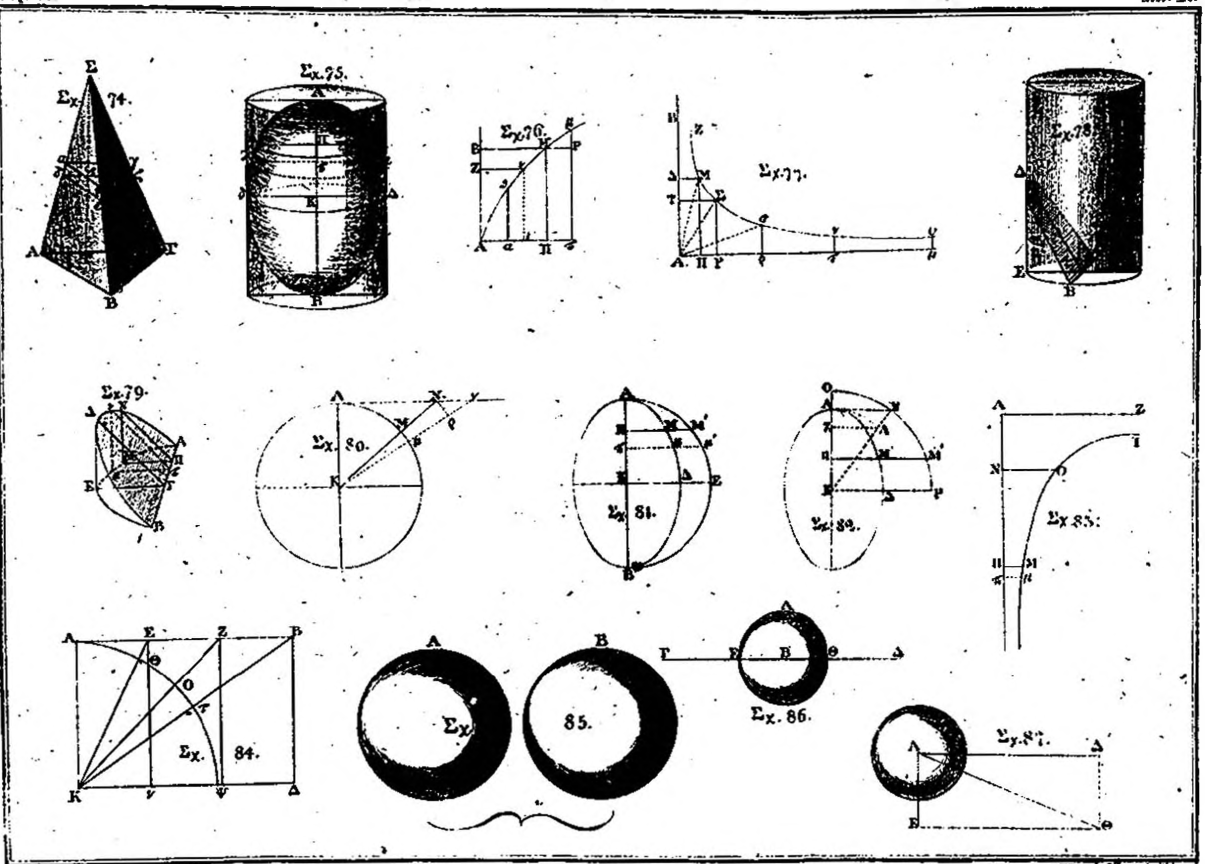
Παρὰ Ιγνατίῳ Κων.

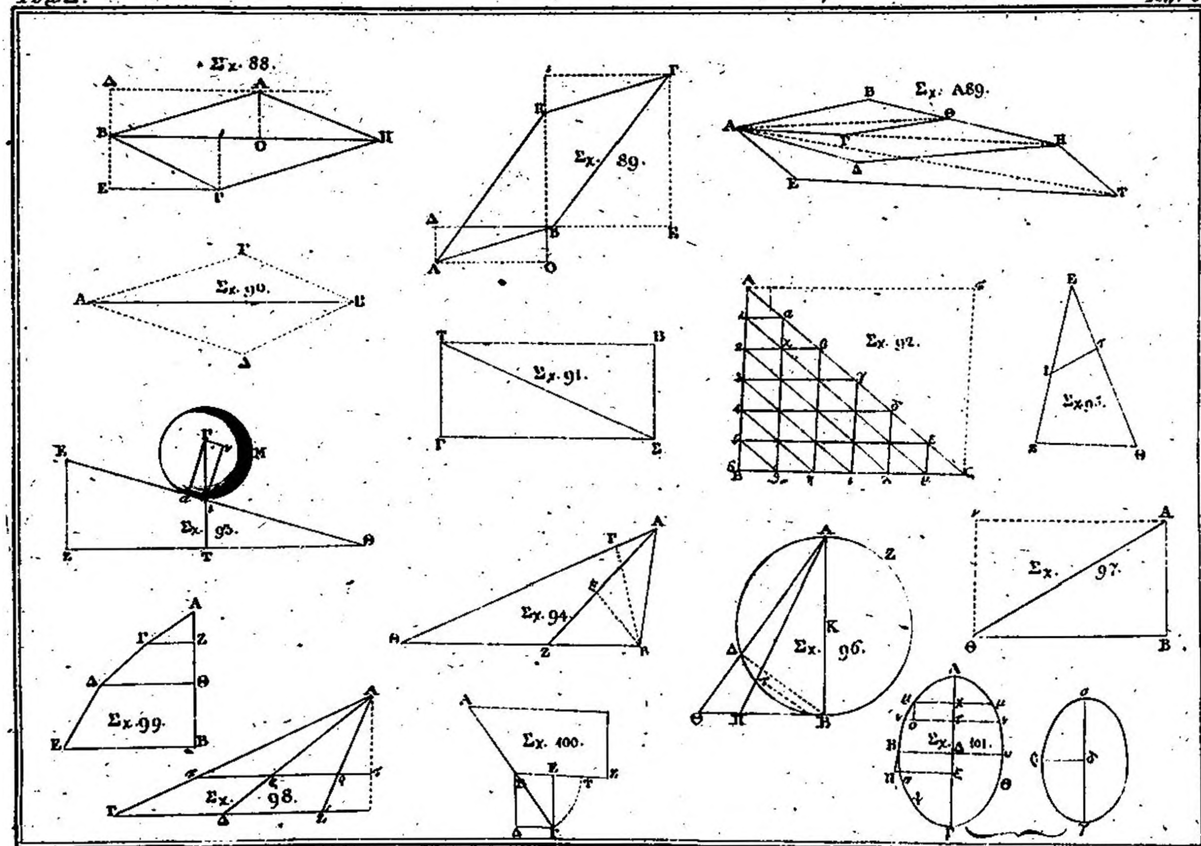


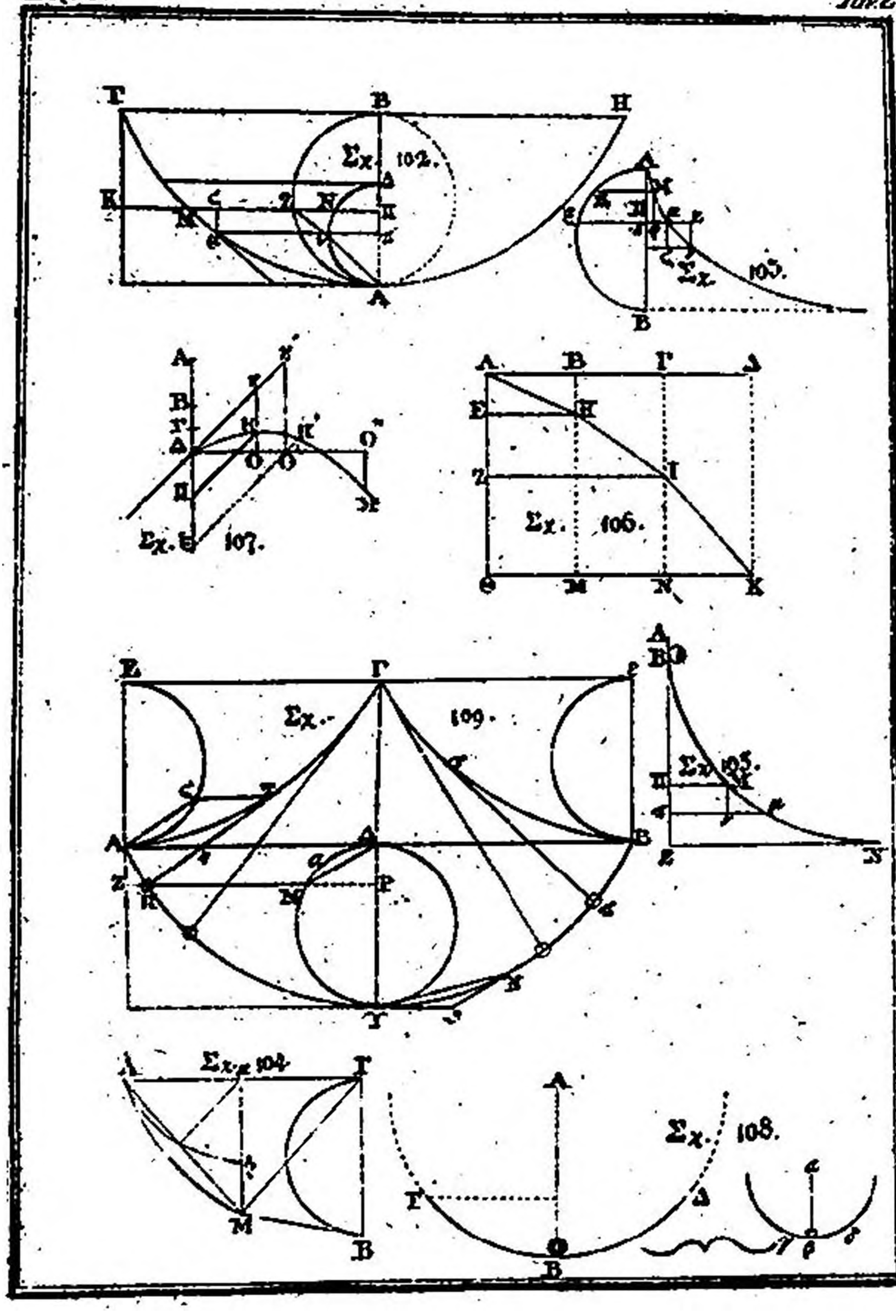
Παρὰ Ἰγνατίῳ Κων.



Παρὰ Ἰγνατίῳ Κύρ.


Σχ. 74.
Σχ. 75.
Σχ. 76.
Σχ. 77.
Σχ. 78.
Σχ. 79.
Σχ. 80.
Σχ. 81.
Σχ. 82.
Σχ. 83.
Σχ. 84.
Σχ. 85.
Σχ. 86.
Σχ. 87.


Σχ. 88.
Σχ. 89.
Σχ. Α89.
Σχ. 90.
Σχ. 91.
Σχ. 92.
Σχ. 93.
Σχ. 94.
Σχ. 95.
Σχ. 96.
Σχ. 97.
Σχ. 98.
Σχ. 99.
Σχ. 100.
Σχ. 101.


Σχ. 102.
Σχ. 103.
Σχ. 107.
Σχ. 106.
Σχ. 109.
Σχ. 105.
Σχ. 104
Σχ. 108.