ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ

ΕΚ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΣΥΛΛΕΧΘΕΙΣΩΝ

ΥΠΟ Κ. Μ. ΚΟΥΜΑ

ΛΑΡΙΣΣΑΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

Περιέχων, τὴν Ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν, τὴν τοῦ Συμβολικοῦ Λογισμοῦ τῇ στοιχειώδει Γεωμετρίᾳ προσεφαρμογήν, Ἐπιτομὴν τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας, τὴν Ὑψηλοτέραν Γεωμετρίαν, εἴτ' οὖν τὰς τοῦ Κώνου τομὰς, καὶ τὰ περὶ τῶν ἄλλων καμπύλων, καὶ μέρος τοῦ Λογισμοῦ τῶν Ἀπείρων.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗι ΤΗΣ ΑΥΣΤΡΙΑΣ

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΕΝΔΩΤΟΥ.

Α Ω Ζ.

ΠΙΝΑΞ ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΗΣ.

Τῶν ἐν τῷ Γ'. Τόμῳ περιεχομένων.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Ε'.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ ς'.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Ζ'.

ΥΨΗΛΟΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Α'.

Σελ.

ΥΨΗΛΟΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Β΄.

ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜ. ΤΗΣ ΩΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΘΕΩΡΟΥΜ. ΠΟΣΟΥ. ΤΜΗΜΑ Α΄.

Σελ.

ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ ΤΩΝ ΗΜΑΡΤΗΜΕΝΩΝ.

ΣΕΛΙΔΙ 5, ςίχῳ 7. *Τῆς ὑπὸ ΖΚ*, *Γρ. Τῆς ὑπὸ ΖΚΓ.* — Σελ. 6, ςίχ. 8, *Τῷ συνημιτόνῳ*, *Γρ. Τῦ συνημιτόνυ.* — Σελ. 9, ςίχ. 8. κ. 12. *Γρ.* κ. 2. — Σελ. 15. ςίχ. 20, *Γρ.* κ. 2. — ςίχ. 19 *Γρ.* κ. 5 — ςίχ. 22. *Τῷ ΚΝ. Γρ. Τῆς ΚΝ.* — Σελ. 50, ςίχ. 6 (452), *Γρ.* (552). — Σελ. 60, ςίχ. 2 *Ἐπειικῶς*, *Γρ. Ἐπιεικῶς.* — Σελ. 62, ςίχ. 6. (454), *Γρ.* (453). — Σελ. 104. ςίχ. 15. (κ 16) *Γρ.* (κ 61) — Σελ. 108. ςίχ. 2 *Γρ.* (κ. 65). — Σελ. 114. ςίχ. 29 (348), *Γρ.* (*Γεωμ.* 348). — Σελ. 129, ςίχ. 7. *Κατὰ*, *Γρ. Μετά.* — Σελ. 145. ςίχ. 2. (299) *Γρ.* (248). — Σελ. 153. ςίχ. 21. (452) *Γρ.* (456.) — Σελ. 157. ςίχ. 21. (131) *Γρ.* (*Γεωμ.* 131) — Σελ. 166. ςίχ. 1, εγ. *Γρ.* γε — ςίχ. 4 (156). *Γρ.* (160). — Σελ. 177. ςίχ. 18. (330). *Γρ.* (332). — Σελ. 195. ςίχ. 13. *Γρ.* κ. 101. — Σελ. 201. ςίχ. 21. (180). *Γρ.* (160). — Σελ. 212. ςίχ. 3 (243) *Γρ.* (253). — Σελ. 236. ςίχ. 28 (191) *Γρ.* (192). Σελ. 267 ςίχ. 18. *ἐνάριθμαι*, *Γρ. ἐνάριθμοι.* — Σελ. 273. ςίχ. 23 *Ἀποτετμημένη ΑΗ*, *Γρ. Τεταγμένη ΑΗ* — ςίχ. 24 *Αἱ ἀποτετμημέναι* = 2, = 4 κτ. *Γρ. Αἱ ἀποτετμημέναι* = 1, = 2, κτ, ϗ ἠγέρθωσαν *αἱ τεταγμέναι* = 2, = 4, κτ. — Σελ. 293. ςίχ. 17, $\pi\chi^{\nu+1}$, *Γρ.* $\pi\chi^{\nu-1}$. — Σελ. 295. ςίχ. 7. *Τῆς ἐν π. Γρ. Τῆς ἐν Π.* — Σελ. 302. ςίχ. 11, *Μεινεμένη*, *Γρ. Μειωμένη.* — Σελ. 314, ςίχ. 16, *Τῦ* § 20, *Γρ. Τῦ* § 273.

ΣΕΙΡΑ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΕΜΠΤΟΝ
Τριγωνομετρία ἐπίπεδος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.
Ἔκθεσις τῶν ἐν αὐτῇ ἐξετάζεσθαι εἰωθότων.

480 ΟΡΙΣΜΟΣ. Τριγωνομετρία καλεῖται ἡ τὸ πρόβλημα τόδε ἐπιλύουσα ἐπιστήμη „παντὸς τριγώνου, „τρεῖς πλευρὰς ϗ τρεῖς γωνίας ἀναγκαίως περιέχοντος, „ἐὰν τρία τούτων τῶν ἕξ δοθῶσιν, ἐν οἷς ὑπάρχοι ϗ μία „τῶν πλευρῶν, εὑρεῖν τἄλλα τρία.“

481. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀναγκαίως δὲ τῶν γνωστῶν ἱπ-

ἄρχειν καὶ μίαν τῶν πλευρῶν ὁ ὁρισμὸς ἀπαιτεῖ, ὅτι ἀπειράριθμα τρίγωνα ὅμοια ὑπάρχειν δύνανται, ὧν αἱ γωνίαι ἴσαι ἑκάστη ἑκάστῃ· ἐὰν οὖν μὴ ᾖ ἐν τοῖς δεδομένοις καὶ μία τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, ἄδηλον ἔσται, τίνος τῶν ἀπείρων ὁμοίων τριγώνων τὴν λύσιν θηρώμεθα.

482. ΟΡΙΣΜΟΣ. Γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΚΔ, καὶ τοῦ τόξου ὡσαύτως ΖΔ (σχ. 1), τοῦ τὴν γωνίαν ταύτην καταμετροῦντος, ἡμίτονον κοινῇ ἀκούει κάθετος, ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Ζ πέρατος τῆς τε ἑτέρας πλευρᾶς ΖΚ καὶ τοῦ τόξου ΔΖ ἐπὶ τὴν ἑτέραν ΔΚ.

483. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΚΔ ἡμίτονον ΖΠ τὸ ἥμισύ ἐστι τῆς ΖΠκ χορδῆς, ἥτις ὑποτείνει τὸ ΖΔκ τόξον, ὅ ἐστι διπλοῦν τοῦ τὴν γωνίαν ταύτην μετροῦντος ΔΖ τόξου· ἡ γὰρ ΚΔ ἀκτὶς κάθετος ἐφέστηκε τῷ ΖΠ ἡμιτόνῳ (72)· ἄρα (157) ΖΠ = Πκ. Τὸ ἄρα γωνίας τινὸς ἡμίτονον ἥμισύ ἐστι χορδῆς τόξου, ὅ ἐστι διπλοῦν τοῦ τὴν γωνίαν ταύτην μετροῦντος.

484. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐπεὶ ἄρα ά. τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας, καὶ τοῦ αὐτὴν μετροῦντος τόξου, ἐστὶ ταὐτὸν (482)· β΄. τὸ ἡμίτονον ἁπάσης γωνίας ἐστὶν ἥμισυ τῆς τόξον διπλοῦν τοῦ τὴν γωνίαν ταύτην μετροῦντος ὑποτεινούσης χορδῆς (483)· τέλος δὲ, ἐπεὶ τὰ ἡμίση πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ὡς τὰ ὅλα (Συμβ. Λογ. 234)· ἐντεῦθεν ἄρα, ἃ ταῖς χορδαῖς παραβαλλομέναις πρὸς τὰ ὑποτεινόμενα τόξα δέδεικται, ἔξεστι ἀπονεμηθῆναι τὰ αὐτὰ καὶ τοῖς ἡμιτόνοις, παραβαλλομένοις πρὸς τὰς ἑαυτῶν γωνίας, ἢ τὰ καταμετροῦντα ταύτας τόξα· οὖν,

485. ά. Τὰ ἡμίτονα τῶν μεταξὺ ἐλαχίστου τόξου $= 0$, καὶ τόξου $= 90°$ κειμένων τόξων συναύξουσι τοῖς τό-

ξοις· καὶ γὰρ αἱ μὲν χορδαὶ αὔξȣσι μέχρι τῶν 180° (50)· τὰ δὲ ἡμίτονα ἀντιςοιχȣ̃σι τοῖς ἡμίσεσι τόξοις, τοῖς ὑποτεινομένοις ὑπὸ τȣ́των τῶν χορδῶν (483)· φθίνȣσι δὲ αἱ χορδαὶ, τῶν τόξων ἀπὸ 180° ἐς 360° αὐξομένων (52)· φθίνȣσιν ἄρα ϗ τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν, αὐτῶν αὐξομένων ἀπὸ 90° ἐς 180° (53).

486. β΄. Ἡ ἄρα ἀκτὶς ΒΚ τὸ πάντων μέγιςόν ἐςιν ἡμίτονον, ἐπανῆκον ὀρθῇ γωνίᾳ τῇ ΒΚΔ, ἢ 90°· ἐντεῦθεν ἄρα ἡ ἀκτὶς ὁ λ ι κ ὸ ν ἀποκαλεῖται ἡ μ ί τ ο ν ο ν, ϗ ὑποτίθεται = 1 σὺν ὁσοισδήποτε μηδενικοῖς, φέρ᾽ εἰπεῖν δέκα, τȣτέςιν ὑποτίθεται = 10000000000· ταυτὸν εἰπεῖν, διῃρημένη εἰς μοίρας ἰσαλλήλȣς δέκα διλλιονίων· αἱ δ᾽ ἐν τῷ κύκλῳ ἄλλαι εὐθεῖαι κατὰ λόγον, ὃν ἔχȣσι πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἔσονται πλείω, ἢ ἐλάττω, μέρη τῶν δέκα διλλιονίων.

Ἡ ἀκτὶς, ἢ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, σημαίνεται ἀεὶ διὰ τȣ̃ Η, ὃ δηλοῖ ἡμιδιάμετρον.

487. γ΄. Ὥσπερ αἱ χορδαὶ (54), ȣ̃τω ϗ τὰ ἡμίτονα ȣ̓κ ἀναλόγως αὐξομένοις τοῖς τόξοις, ἢ ταῖς γωνίαις, συναύξονται· ἐπεὶ ἥμισυ τῶν χορδῶν εἰσι τὰ ἡμίτονα.

488. Ἀόριςον μέν ἐςι τὸ μῆκος τῶν ἁπτομένων, ἃς κατείδομεν (148, κτ)· ἐνταῦθα δὲ καλεῖται ἁ π τ ο μ έ ν η, ἡ κάθετος ἡ ἐπὶ τȣ̃ πέρατος Δ τῆς ἀκτῖνος, ἥτις ἐςὶν ἡ ἑτέρα τῶν τῆς ΔΚΖ γωνίας πλευρῶν, προαγομένη, μέχρις ἂν συναντήσῃ τῇ ἀκτῖνι ΚΖ, ἐκβληθείσῃ ἐς τὸ Η, ἥτις ἐςὶν ἑτέρα τῶν πλευρῶν τῆς ΔΚΖ γωνίας· ἡ δὲ ἀκτὶς αὕτη προαγομένη, ἕως ȣ̃ συναντήσῃ τῇ ἁπτομένῃ, τȣτέςιν ἡ ΚΖΗ, καλεῖται τ έ μ ν ȣ σ α.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ ΖΚΒ γωνία τοῦ παραπληρωματος τῆς ΖΚΔ α΄. ἡμίτονον μὲν ἑαυτῆς ἔχει τὴν ΖΤ κάθετον, καθειμένην ἀπὸ τȣ̃ Ζ πέρατος τῆς ΖΚ πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ΒΚ ἀκτῖνα. ἥτις ἐςὶν ἡ ἑτέρα πλευρὰ ταύτης τῆς γωνίας· β΄. ἀπτομένη δ᾽ αὐτῆς ἐςὶν ἡ ΒΟ· γ΄. τέμνȣσα δὲ ἡ ΚΖΟ.

489. Τὸ δὲ ΖΤ ἡμίτονον τῆς ΖΚΒ γωνίας Συνημίτονον ὀνομάζεται τῆς ΖΚΔ· τὐναντίον δὲ τὸ ΖΠ ἡμίτονον τῆς ΖΚΔ συνημίτονον καλεῖται τῆς ΖΚΒ παραπληρώματος τῆς ΖΚΔ· ταυτὰ ῥητέον ϗ περὶ τῆς ἀπτομένης ϗ τῆς τεμνέσης· εἰς δὲ συντομίαν γράφονται· συνημ. συναπτ. συνδιατ. ἐκεῖν συνημίτονον τῆς ΖΚΔ γωνίας ἐςὶν ἡ ΖΤ, συναπτομένη δὲ αὐτῆς ἡ ΒΟ, συνδιατεμνȣ̃σα δὲ ἡ ΚΟ.

Τἀνάπαλιν δὲ τῆς ΒΚΖ γωνίας συνημ. ΖΠ, συναπτ. ΔΗ, συνδιατ. ΚΗ.

490. Ἥτε ἀπτομένη ϗ ἡ τέμνȣσα ταῖς γωνίαις συναύξȣσιν ἀπὸ ο μέχρις 90^{0}· ἀλλὰ τηνικαῦτα ἡ ἀπτομένη, τῇ τεμνέσῃ γινομένη παράλληλος, ȣ̓δέποτε αὐτῇ συμπεσεῖται· τῆς ȣ̃ν 90^{0} γωνίας ἥτε τέμνȣσα ϗ ἡ ἀπτομένη εἰσὶν ἄπειροι.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπείπερ ὀρθῆς γωνίας ἡ ἀπτομένη ϗ ἡ τέμνȣσα ȣ̓δαμȣ̃ πραγματικῶς συνίασιν· ὥριςαι δὲ ἀπτομένη ἡ τῇ ΔΚ ἀκτῖνι κάθετος, ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τȣ̃ πέρατος τῆς ἀκτῖνος, ϗ τȣ̃ σημείȣ, καθ᾽ ὃ συναπαντᾷ τῇ τεμνέσῃ, ἐξέςαι εἰπεῖν, ὡς αὗται αἱ δύω εὐθεῖαι, γωνίᾳ ἐπανήκȣσαι ὀξείᾳ, βραχύτι διαφερȣ́σῃ ὀρθῆς, προσέλαβον ἅπασαν τὴν δυνατὴν αὐτῶν αὔξησιν· προςεθέντος ἀλλ᾽ ȣ̃ν τῇ ὀξείᾳ τῇδε γωνίᾳ τȣ̃ βραχέος ἐκείνȣ, ᾧ ἐνέδει ὀρθῆς, κἀκ τȣ́τȣ τῆς γωνίας καθιςαμένης ὀρθῆς, ἥτε ἀπτομένη ϗ ἡ τέμνȣσα, ἀποβάλλȣσαι τὸ ἀλλήλαις συνιέναι, τὸ εἶναι συναποτίθενται, εἴτ' ἐν μηδενὶ ἴσαι γίνονται· ἄλλο τετὶ ὑπόδειγμα, τῆ ποσότητα ἅπασαν ἐξεθενῆσθαι μετὰ τὸ προσκτήσασθαι ἅπασαν τὴν δυνατὴν ἑαυτῆς αὔξησιν, ἤ, ὡς εἰώθασι λέγειν, μετὰ τὸ γενέσθαι μεγίστην, εἰ πρὸς ταύτῃ τῇ μεγίστῃ αὐξήσει κἂν ἐλάχιστόν τι προσεπιτεθείη (76).

491. ΠΟΡΙΣΜΑ. Γωνίας ἀμβλείας τῆς ὑπὸ ΖΚ ἡμίτονόν ἐστι τὸ τῆς ὀξείας ΖΚΔ, ἥτις τῇ εἰρημένῃ ἀμβλείᾳ ὑπάρχει ἀναπλήρωμα (211)· τετὶ δέ ἐστιν, ὅτι τόξον τὸ ΖΓκ $>$ 180° χορδὴν ἔχει τὴν τῆ τόξε ΖΔκ, ὃ μετὰ τῆ προτέρε παρέχει 360° (46), ἢ ὅτι τὸ ἡμίτονον τὸ ἥμισύ ἐστι τῆς χορδῆς ταύτης (483).

Ἕπεται δὲ τῦτο ἢ ἐκ τῆ ὁρισμῆ τῆ ἡμιτόνε· ἢ γὰρ τὸ ἡμίτονον τῆς ΖΚ γωνίας ὀφείλει εἶναι κάθετος, ἀπό τινος πλευρᾶς τῆς ΖΚ τῆ πέρατος Ζ καθειμένη ἐπὶ τὴν ΚΓ πλευρὰν (482)· ἀλλαμὴν ἀπὸ τῆ Ζ ἐπὶ τὴν ΠΚΓ εὐθεῖαν μία μόνη κάθετος ἄγεται ἡ ΖΠ (116)· ἄρα ἡ ΖΠ, ἥτις ἡμίτονόν ἐστι τῆς ὀξείας γωνίας ΖΚΠ ἡ αὐτὴ ἔσαι ἡμίτονον ἢ τῆς ἀμβλείας γωνίας ΖΚΓ· ἵνα ἄρα εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον γωνίας = 110° φέρ' εἰπεῖν, ἀφαιρετέον 110° ἀπὸ 180°, τὸ δὲ κατάλοιπον 70° ἔσαι τὸ ἡμίτονον τῆς 110° ἀμβλείας γωνίας.

492. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡμίτονον πλάγιον καλεῖται τῆ ΔΖ τόξε, ἢ τῆς ὑπὸ ΖΚΔ γωνίας, μέρος τῆς ἀκτῖνος τὸ ΔΠ, ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ΔΖ περιφερείας, ἢ τῆ ΖΠ ἡμιτόνε, ὃ παραβαλλόμενον πρὸς τὸ ΔΠ ὀνομάζεται ἡμίτονον ὀρθόν.

493. Ἡμεῖς ἀλλ' ἐν ἐνταῦθα περὶ μόνε τῆ ὀρθῆ ἡμιτόνε διαληψόμεθα, ὡς βάσεως ὄντος, ἢ θεμελίε, τῆ τριγωνομετρικῆ λογισμῆ· ἀλλ' ἐκ ἔστιν ὅπως ἀγρηστον

κάμπταν φύσομεν τὴν τῦ πλαγίυ ἡμιτόνυ γνῶσιν· ἡ γὰρ θεωρία τῶν διαφόρων τῆς Φυσικῆς εἰδῶν τὰ πολλὰ φέρει εἰς τὰς τῦ πλαγίυ ἡμιτόνυ ἰδιότητας, ὡς δείξομεν ἐν τοῖς ἑφεξῆς.

494. Ἀλλὰ τυτὶ ἡμῖν μόνον τὸ 1 σχῆμα χαρίζεται· ἐπὶ αὐτῦ γὰρ ῥᾷστα πᾶς ἄντις ἀναγνοίη, ὅτι τὸ πλάγιον ἡμίτονον ἴσον ἐστὶ τῇ ἀκτῖνι ἢ τῷ ὁλικῷ ἡμιτόνῳ πλὴν τῦ ΠΚ = ΖΤ, εἴτ' ὖν τῷ συνημιτόνῳ διὰ τὸ ΖΤΠΚ παραλληλόγραμμον.

Ἵν' ὖν εὑρεθῇ τὸ πλάγιον ἡμίτονον ΔΠ τόξυ τῦ ΔΖ = 60° φέρ' εἰπεῖν, ζητηθήτω ἐν τοῖς πίναξι τὸ ἡμίτονον τόξυ τῦ ΖΒ = 30° ὅ ἐστι τῦ 60° τὸ παραπλήρωμα, καὶ παρίσαται διὰ ΖΤ = ΠΚ· καὶ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῆς ΔΚ ἀκτῖνος, εἴτ' ὖν ἀπὸ 10000000000· τὸ δὲ κατάλοιπον ἔσαι τὸ πλάγιον ἡμίτονον ΔΠ.

495. Ἐπεὶ τὸ πάσης γωνίας ἡμίτονον ἥμισύ ἐστι τῆς χορδῆς, ἥτις ὑποτείνει τόξον διπλῦν τῦ ταύτην τὴν γωνίαν μετρῦντος· ἡ δ' ὑποτείνυσα τόξον 60° ἴση ἐστὶ τῇ ἀκτῖνι (252)· ἐντεῦθεν ἄρα τὸ γωνίας = 30° ἡμίτονον ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει τῆς ἀκτῖνος.

496. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Παντὸς τριγώνυ τῦ ΑΒΓ (σχ. 6.) τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ὑπ' αὐτὰς ὑποτεινύσαις πλευραῖς.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὸ ἡμίτονον ἐστὶν ἥμισυ χορδῆς ὑποτεινύσης τόξον διπλῦν τῦ τὴν γωνίαν τῦ ἡμιτόνυ τύτυ μετρῦντος (483)· ἀλλ' ἑκάστη πλευρὰ ΒΓ ἐστὶ χορδὴ τόξυ διπλασίυ τῦ τὴν ὑποτεινομένην γωνίαν Α μετρῦντος (201)· τὸ ἄρα γωνίας ἁπάσης ἡμίτονον ἥμισύ ἐστι τῆς αὐτὴν ὑποτεινύσης πλευρᾶς· ἀλλὰ τὰ ἡμίση ἀνάλογόν εἰσι τοῖς ὅλοις (Συμβ. λογ. 234.)· ἄρα τὰ τῶν γωνιῶν ἡμίτονα ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ὑπ' αὐτὰς ὑποτεινέσαις πλευραῖς· Ο. Ε. Δ.

497. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Τριγώνε ὀρθογωνίε τῦ ΑΒΓ (σχ. 7.) ἡ πρὸς τῇ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ πλευρὰ ΑΓ ἐςὶ πρὸς τὴν ἑτέραν ΒΓ· ὡ ἡ ἀκτίς ΑΓ (*) πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς Α ὀξείας γωνίας ΒΓ· ὃ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον.

498. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Η' ἀπτομένη γωνίας $=45^{\circ}$ ἐςὶν ἴση τῇ ἀκτῖνι.

ΔΕΙΞΙΣ. Ο'ρθογωνίε γὰρ τριγώνε τῦ ΚΔΗ (σχ.1), τῆς Κ ὔσης $=45^{\circ}$, ἔςαι καὶ Η $=45^{\circ}$ (212)· τριγώνου τοίνυν τῦ ΚΔΗ ὄντος ἰσοσκελῦς (221), ἔςαι ἡ ΔΗ ἀπτομένη ἴση τῇ ἀκτῖνι ΚΔ. Ο. Ε. Δ.

499. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Τριγώνε ἰσοσκελῦς, ἢ σκαληνῦ, τὸ ἄθροισμα δυεῖν πλευρῶν ἀνίσων πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν λόγον ἔχει, ὃν ἡ ἀπτομένη τῦ ἡμιαθροίσματος τῶν δύω γωνιῶν, ἃς ὑποτείνεσιν αἱ ῥηθεῖσαι πλευραὶ, πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς αὐτῶν ἡμιδιαφορᾶς.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. α'. Προήχθω ἡ ΑΟ (σχ. 8.), ὥςε γενέσθαι ΟΠ$=$ΟΖ, ᾗ ἑπομένως ΑΠ$=$ΑΟ$+$ΟΖ· ὑκῦν γωνία ἡ ὑπὸ ΖΟΠ$=$Α$+$Ζ (216), ἀθροίσματι τῶν γωνιῶν, ἃς ὑποτείνεσιν αἱ ΑΟ, ΟΖ πλευραί· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΖΟΠ ἰσοσκελές ἐςιν, ἐκ κατασκευῆς· ἄρα (217) ἡ ἀχθῇ κάθετος ἡ ΟΔ δίχα τεμεῖ τὴν ὑπὸ ΖΟΠ γωνίαν· ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta O \Pi = \dfrac{Z O \Pi}{2} = \dfrac{A + Z}{2}$.

β'. Κέντρῳ τῷ Ο, ᾗ διαςήματι τῷ ΟΔ, γεγράφθω

(*) Η' ΑΓ ἀκτίς ἐςι κύκλε τῦ ΓΟ, γεγραμμένε περὶ τὸ Α ὡς περὶ κέντρον.

τόξον τὸ ΔΓΗ μετρῦν τὴν ὑπὸ ΔΟΠ γωνίαν, ἴσην τῇ $\frac{A+Z}{2}$. ὑκῦν ἡ ΔΠ, ἔσα ἀπτομένη τῆς ὑπὸ ΔΟΠ γωνίας (488), ἔςαι ϗ τῆς $\frac{A+Z}{2}$.

γ΄. Ἀχθείσης παραλλήλυ τῆς ΟΓ παρὰ τὴν ΑΖ, ἔςαι ἡ ὑπὸ ΓΟΠ = Α (132)· ὑκῦν ἡ Ζ = ΖΟΠ — ΓΟΠ, εἴτ᾽ ὖν — Α, = ΖΟΓ· ἄρα ἡ μείζων Ζ ἴση ἐςὶ τῷ ἡμιαθροίσματι αὐτῶν σὺν τῇ ἡμιδιαφορᾷ (Συμβ. λογ. 442.)· ἡμιδιαφορὰ δὲ αὐτῶν ἐςὶν ἡ ὑπὸ ΔΟΓ γωνία, ἧς ἀπτομένη ἐςὶν ἡ ΔΓ·

δ΄. Ἀχθεισῶν τῶν ΤΔ ϗ Ββ παραλλήλων τῇ ΑΖ, ἐπεὶ ΖΔ = ΔΠ (217) ἔςαι (313) ϗ ΑΤ = ΤΠ, ϗ (Συμβ. λογ. 442) ΤΟ ἔςαι ἡμιδιαφορὰ τῶν ΑΟ, ΟΖ· δεικτέον ὖν ὡς ἔςιν ΑΠ : 2ΤΟ :: ΔΠ : ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπείπερ ΟΓ παράλληλος ἐςι τῇ ΤΔ, τῇ Ββ, ἐςι ΤΠ : ΔΠ :: ΤΟ : ΔΓ (313)· ὑκῦν ϗ (Συμβ. λογ. 242.) ΤΠ : ΤΟ :: ΔΠ : ΔΓ, ἔνθεν διπλασιασμῷ τῦ πρώτυ λόγυ (Συμβ. λογ. 246) 2ΤΠ : 2ΤΟ : ΔΠ : ΔΓ, ἢ ΑΠ : 2ΤΟ :: ΔΠ : ΔΓ. Ο. Ε. Δ.

500. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Παντὸς σκαληνῦ τριγώνυ ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύω λοιπῶν ἐςὶν, ὡς ἡ διαφορὰ τῶν δύω λοιπῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τμημάτων, ἃ τέμνονται ὑπὸ καθέτυ τῇ μείζονι πλευρᾷ καθιεμένης ἀπὸ τῆς, ἣν αὕτη ὑποτείνει, γωνίας.

ΔΕΙΞΙΣ. Κέντρῳ μὲν τῷ Β (σχ. 9) διαςήματι δὲ τῷ ΒΕ γεγράφθω ἀπέραντον τόξον τὸ Ο Ε Τ ϗ προήχθω ἡ ΒΓ μέχρι τῦ Τ· ὑκῦν ἔςαι ΒΤ = ΒΕ, = ΒΟ (45)· ἄρα ἡ ΓΟ διαφορά ἐςι τῶν ΒΓ, ΒΕ· ἐπεὶ δὲ ἡ ΒΔ καθετος εφέστηκε τῇ ΗΕ χορδῇ, ἄρα ΗΔ=ΔΕ (157.)· ἄρα ΓΗ ἐστιν ἡ διαφορὰ τῶν τῆς μεγάλης πλευρᾶς ΓΕ τμημάτων ΓΔ, ΔΕ, ἃ τέμνονται ὑπὸ τῆς ΒΔ καθιεμένης ἀπὸ τῆς, ἣν ὑποτείνει ἡ μεγάλη πλευρὰ, γωνίας· ἀλλαμὴν (330) ΛΕ : ΓΤ :: ΓΟ : ΓΗ· ἄρα κτλ. Ο. Ε. Δ.

501. ΘΕΩΡΗΜΑ ϛ΄. Α᾿είποτε ὑπάρχουσιν αἱ ἑξῆς ἀναλογίαι· ά. ἡ ἀκτὶς πρὸς τὸ συνημίτονον τόξου (σχ. 12), ὥσπερ ἡ ἁπτομένη τοῦ αὐτοῦ τόξου πρὸς τὸ αὐτοῦ ἡμίτονον, εἴτ᾿ οὖν Η : συνημ :: ἁπ : ἡμ· β΄. Η : ἡμιτ :: συναπ : συνημ· γ΄. ἁπ. : Η :: Η συναπ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ε᾿πεὶ γὰρ ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα ΚΔΒ, ΚΑΝ διὰ τὰς παραλλήλους ΒΔ, ΑΝ· ἄρα ΚΑ : ΚΔ :: ΑΝ : ΒΔ, εἴτ᾿ οὖν Η : συνημ :: ἁπ : ἡμιτ· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Τὰ τρίγωνα ΗΚΜ, ΙΚΒ εἰσὶν ὅμοια· ἄρα Η = ΗΚ : ΙΚ=ΔΒ=ἡμ :: ΗΜ (συναπ. τοῦ ΒΑ) : ΙΒ (συνημ τοῦ ΒΑ), εἴτ᾿ οὖν Η : ἡμ :: συναπ : συνημ· ὅπερ ἦν τὸ β΄.

Τὰ τρίγωνα ΗΚΜ, ΝΚΑ ἔχουσιν ἑκάτερον μίαν γωνίαν ὀρθὴν, τὸ μὲν τὴν πρὸς τῷ Η, τὸ δὲ τὴν πρὸς τῷ Α, καὶ τῶν ΚΑ, ΗΜ παραλλήλων οὐσῶν, ἡ πρὸς τῷ Μ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΝΚΑ· εἰσὶν ἄρα ὅμοια· διὸ ΝΑ : ΚΑ :: ΗΚ : ΗΜ, εἴτ᾿ οὖν ἁπτ : Η :: Η : συναπ = $\frac{\text{Η Η}}{\text{ἁπ}}$

502. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Α῎ρα ά. ἡμιτ = $\frac{\text{ἁπ} \times \text{συνημ}}{\text{Η}}$

β΄. $\sigma\upsilon\nu\eta\mu = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\pi \times \eta\mu\iota\tau}{H}$. γ΄. $\dot{\alpha}\pi = \frac{H^2}{\sigma\upsilon\nu\alpha\pi\tau}$· δ΄. ὑποτιθεμένης $H = 1$ ἡ πρώτη ἐξίσωσις προβάλλει $\eta\mu\iota\tau = \alpha\pi\tau \times \sigma\upsilon\nu\eta\mu$, ἢ $\dot{\alpha}\pi\tau = \frac{\eta\mu}{\sigma\upsilon\nu\eta\mu}$· ε΄. ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εὐμαρῶς ἀποφέρεται $\sigma\upsilon\nu\alpha\pi\tau = \frac{\sigma\upsilon\nu\eta\mu}{\eta\mu} = \frac{1}{\dot{\alpha}\pi\tau.}$, ὁ γὰρ τρίτος τύπος προβάλλει $\sigma\upsilon\nu\alpha\pi = \frac{H^2}{\dot{\alpha}\pi\tau.} = \frac{1}{\dot{\alpha}\pi\tau}$. ϛ΄. ἐκ τῆς $\sigma\upsilon\nu\alpha\pi = \frac{1}{\dot{\alpha}\pi}$, πρόεισι $\sigma\upsilon\nu\alpha\pi.\,\alpha \times \dot{\alpha}\pi\;\alpha = 1 = \sigma\upsilon\nu\alpha\pi\;\beta \times \dot{\alpha}\pi\tau.\,\beta$, τῶν α, β τόξα, ἢ γωνίας σημαινόντων· ἐὰν δ' ἐν τῷ τετάρτῳ τύπῳ ἀντικατασαθῇ ἡ δύναμις $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha\pi}$ τῆς ἀπτομένης, πορισθήσεται πολλαπλασιασμῷ ἐπὶ συνημ. ὁ τύπος $\eta\mu = \frac{\sigma\upsilon\nu\eta\mu}{\sigma\upsilon\nu\alpha\pi\tau}$· ἀντικατασάντος δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ τύπῳ τοῦ $\frac{1}{\dot{\alpha}\pi\tau}$ ἀντὶ τῆς συναπτομένης (ὑποτιθεμένης ἀεὶ $H = 1$), πορισθήσεται $\sigma\upsilon\nu\eta\mu = \frac{\eta\mu}{\alpha\pi\tau}$.

503. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐκ τοῦ τρίτου τύπου τοῦ ἐκτεθέντος ἤδη πορίσματος, εἴτ' οὖν τῆς ἐξισώσεως $\dot{\alpha}\pi = \frac{H^2}{\sigma\upsilon\nu\alpha\pi\tau}$ δῆλον, ὡς, εἰ προκέοιντο δύω τόξα α καὶ β, εὑρεθήσεται $\dot{\alpha}\pi.\,\alpha : \dot{\alpha}\pi.\,\beta :: \frac{H^2}{\sigma\upsilon\nu\alpha\pi.\,\alpha} : \frac{H^2}{\sigma\upsilon\nu\alpha\pi.\,\beta}$· ἢ (ἐπεὶ τὰ τὸν

αὐτὸν ἀριθμητὴν ἔχοντα κλάσματα εἰσὶν ἐν λόγῳ (Συμϐ. Λογ. 261) ἀντιςρόφῳ τῶν παρονομαςῶν)· ἀπ. α : ἀπ. β :: συναπ. β : συναπ. α, τȣ̃τ' ἔςιν αἱ ἀπτόμεναι ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ εἰσὶ τῶν συναπτομένων· αὐτὸ δὲ τȣ̃το ϗ ὕτω δειχθήσεται· ἐκ τȣ̃ προλαϐόντος θεωρήματος ἔςιν ἀπ. : η :: η : συναπ· ἄρα απ. α × συναπ. α = η^2, ϗ ἀπ. β × συναπ. β = η^2· ἄρα απ. α × συναπ α = απ. β × συναπ. β. ἄρα ἀπ. α : ἀπ. β :: συναπ. β. συναπ. α.

504. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄ Δοθέντος τȣ̃ ἡμιτόνȣ ΑΖ, τόξȣ τȣ̃ ΑΜ εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον τόξȣ διπλασίȣ τȣ̃ ΑΜΒ. (σχ. 3.).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθω ΒΔ κάθετος τῇ ΚΑ, ϗ ἐκ τȣ̃ Κ σημείȣ κάθετος ἡ ΚΜ κατὰ τὸ μέσον Ζ τῆς χορδῆς ΒΑ. γνωςῆς δὲ ἔσης τῆς ΑΖ, γνωςὴ ἔσεται ϗ ἡ αὐτῆς διπλασία ΑΒ· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΚΖΑ, ΒΔΑ, ἔχοντα γωνίαν κοινὴν τὴν πρὸς τῷ Α, ϗ μίαν ἔτι ὀρθὴν, εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ΚΑ : ΚΖ :: ΒΑ : ΔΒ· τȣ̃τ' ἔςιν· η : συνημ. τοῦ δοθέντος τόξου : 2 ημ τοῦ αὐτοῦ τόξου : ημ τοῦ διπλοῦ.

505. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ὑποτέθειται γνωςὸν τὸ συνημίτονον ΚΖ· τȣ̃ γὰρ ἡμιτόνȣ ΑΖ γνωςȣ̃ ὄντος, δῆλον ὅτι διὰ τῆς ἰδιότητος τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΚΖΑ ἔςι $KZ = \sqrt{(KA^2 - ZA^2)}$, εἴτ' ȣ̃ν συνημιτ $= \sqrt{(\eta^2 - \eta\mu^2)}$, „τȣ̃τ' ἔςιν ὅταν δοθέντος μὲν τȣ̃ ἡμιτόνȣ ζητῆ„ται τὸ συνημίτονον, τȣ̃ τετραγώνȣ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος „ἀφαιρετέον τὸ ἀπὸ τȣ̃ ἡμιτόνȣ τετράγωνον, ϗ τȣ̃ κα„ταλοίπου ἐξακτέον ῥίζαν τὴν τετραγώνειον· δοθέντος „δὲ τοῦ συνημιτόνου, ζητῆται τὸ ἡμίτονον, ἀφαιρετέα

„τὸ ἀπὸ τοῦ συνημιτόνου τετράγωνον ἀπὸ τοῦ τῆς ἀ-
„κτῖνος, καὶ ἐκ τοῦ καταλοίπου ληπτέον ῥίζαν τὴν τετρα-
„γώνειον."

506. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Βουλομένοις δὲ εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον τόξου ὑποδιπλασίου τοῦ ΑΜ, δεδομένου ἤδη τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τόξου διπλασίου τοῦ ΑΒ ληπτέον αὐτὸ ἐκ τῆς ἰδιότητος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\mathrm{BA}^2 = \mathrm{B\Delta}^2 + \mathrm{\Delta A}^2$, ἢ $\mathrm{BA}^2 = \text{ημ}^2\,\alpha + \text{παρημ.}^2\,\alpha$, ὑποτιθεμένοις α τὸ διπλάσιον τόξον· ἄρα $\mathrm{BA} = \sqrt{(\text{ημ}^2.\alpha + \text{παρημ}^2.\,\alpha)}$ καὶ $\mathrm{AZ} = \frac{\mathrm{BA}}{2} =$ ἡμ. τοῦ ὑποδιπλασίου τόξου $= \frac{1}{2}\sqrt{(\text{ημ}^2.\alpha + \text{παρημ}^2.\,\alpha)}$· γνωσθέντος δὲ τοῦ ἡμιτόνου, γνωσθήσεται ῥᾷστα τό, τε συνημίτονον, καὶ τὸ παρημίτονον ΔΑ, ὅπερ ἐστὶν = ΚΑ — ΚΔ (494).

507. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Δοθέντων τῶν δυοῖν τόξοιν ἡμιτόνων, εὑρεῖν τὰ ἡμίτονα τοῦ τε ἀθροίσματος, καὶ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς. (σχ. 4.).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΔΛ = β, ΑΛ = α· δῆλον οὖν ὅτι ΔΞ ἐστὶν ἡμίτονον τοῦ ΑΔΒ τόξου ἀθροίσματος τῶν δύο· ἐὰν δὲ ληφθῇ ΛΒ = ΔΛ, τὸ βχ ἡμίτονον τοῦ ΑΛ — ΒΛ, ἢ τοῦ ΑΛ — ΔΛ, ἔσται τὸ ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς· γινωσκομένων τῶν ἡμιτόνων τοῦ α καὶ β, γινώσκεται καὶ τὰ αὐτῶν συνημίτονα (505)· ἐκ δὲ τῶν σημείων Δ, Λ, Β κατήχθωσαν κάθετοι τῇ ΚΑ, καὶ ἐκ τοῦ Β κάθετος τῇ ΔΞ ἡ ΒΠ, καὶ ἐκ τοῦ Ο μέσου τῆς χορδῆς ΔΒ αἱ κάθετοι ΟΘ, ΟΜ· ἀχθεῖσα δὲ ἡ ΚΟ, ἐπεὶ διήκει διά τε τοῦ κέντρου, καὶ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς ΔΒ, ἀναγκαίως ἐφεστήξει αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς (164)· διὰ δὲ τὰς παραλλήλους ΠΒ, ΘΟ αἱ εὐθεῖαι ΔΠ, ΔΒ ἀναλόγως τμηθήσονται κατά τε τὸ

Θ ϗ τὸ Ο (318)· ἀλλὰ μὴν ΔΒ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ο· ἄρα ΔΠ δίχα κατὰ τὸ Θ, ϗ ΔΘ = ΘΠ· ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΛΝ, ΚΟΜ πρόεισι ΚΛ : ΚΟ :: ΛΝ : ΟΜ, ἢ η : συνημ. β :: ἡμ. α : ΟΜ = $\frac{\text{ἡμ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta}{\eta}$· ἐπεὶ δὲ ϗ τὰ τρίγωνα ΚΛΝ, ΔΘΟ ὅμοια, ὡς ἔχοντα ἐκ κατασκευῆς ἁπάσας τὰς πλευρὰς καθέτους ἀλλήλαις (220. Πορ. Γ), ἄρα ΚΛ : ΚΝ :: ΔΟ : ΘΔ, εἴτ' οὖν η : συνημ. α :: ἡμ. β : ΘΔ = $\frac{\text{ημ. } \beta \times \text{συνημ. } \alpha}{\eta}$· ἀλλὰ ΔΞ = ΟΜ + ΔΘ = ΞΘ + ΘΔ, ϗ Βχ = ΘΞ — ΠΞ = ΔΞ — ΔΘ· ἄρα ΔΞ, εἴτ' οὖν

$$\text{ἡμ } (\alpha + \beta) = \frac{\text{ἡμ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta + \text{ἡμ. } \beta \times \text{συνημ. } \alpha}{\eta} \cdot \text{ ϗ}$$

$$\text{Β}\chi = \text{ημ } (\alpha - \beta) = \frac{\text{ημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta - \text{ημ. } \beta \times \text{συνημ. } \alpha}{\eta}$$

· τουτέστι „τὸ ἡ-„μίτονον τοῦ ἀθροίσματος δύω τόξων α, β (ὑποτιθεμένου „α > β) ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ α ϗ „τοῦ συνημιτόνου τοῦ β σὺν τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου β ϗ τοῦ „συνημιτόνου τοῦ α, συνάμα διαιρεθεῖσι διὰ τῆς ἀκτῖνος· τὸ „δὲ ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν τόξων ἴσον ἐστὶ τῷ „γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ α, ϗ τοῦ συνημιτόνου τοῦ β, „πλὴν τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ β ϗ τοῦ συνημιτό-„νου τοῦ α, διαιρεθεῖσι διὰ τῆς ἀκτῖνος."

508. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.** Δοθέντων τῶν συνημιτόνων δύω τόξων α καὶ β, εὑρεῖν τὸ συνημίτονον ΚΞ τοῦ αὐτῶν ἀθροίσματος, καὶ τὸ συνημίτονον Κχ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς.

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τὰς παραλλήλους ΔΞ, ΟΜ, αἱ εὐθεῖαι ΔΒ, Ξχ ἀναλόγως τέτμηνται κατὰ τὸ Ο ϗ Μ (314)· ἀλλ' ἡ ΔΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ο, ἄρα ϗ ἡ Ξχ κατὰ τὸ Μ· τούτου δὲ τεθέντος, ἐπείπερ τὰ τρίγωνα ΚΛΝ, ΚΟΜ εἰσὶν ὅμοια (318)· ἄρα ΚΛ : ΚΟ :: ΚΝ : ΚΜ, εἴτ' οὖν η : συνημ. β :: συνημ. α : ΚΜ $= \frac{\text{συνημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta}{\eta}$· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΛΝ, ΔΘΛ (220 Πόρ. Γ΄.)· πρόσεισι ΚΛ : ΛΝ :: ΔΟ : ΘΟ = ΞΜ = Μχ, εἴτ' οὖν η : ἡμ. α :: ἡμ. β : ΞΜ $= \frac{\text{ἡμ. } \alpha \times \text{ἡμ. } \beta}{\eta}$· ἄρα ΚΞ = ΚΜ − ΞΜ =

$$\frac{\text{συνημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta - \text{ἡμ. } \alpha \times \text{ἡμ. } \beta}{\eta},$$ ϗ Κχ = ΚΜ

$$+ \text{Μχ} = \frac{\text{συνημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta + \text{ἡμ. } \alpha \times \text{ἡμ. } \beta}{\eta},$$ τοῦτ'

„ἔστι, τὸ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος δύο τόξων ἴσον ἐστὶ „τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν συνημιτόνων τῶν αὐτῶν τόξων „πλὴν τοῦ γινομένου ὑπὸ τῶν κατ' αὐτὰ ἡμιτόνων· τὸ δὲ „τῆς διαφορᾶς, τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν συνημιτόνων τῶν „αὐτῶν τόξων σὺν τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν κατ' αὐτὰ ἡμι„τόνων, διαιρεθεῖσιν ἅπασι διὰ τῆς ἀκτῖνος.“

509. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ΄. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμιτόνων δύο γωνιῶν α ϗ β, ἔστι πρὸς τὴν αὐτῶν διαφοράν, ὥσπερ ἡ ἁπτομένη τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν αὐτῶν γωνιῶν πρὸς τὴν τῆς ἡμιδιαφορᾶς.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπείπερ αἱ ὑποτείνουσαι τὰς γωνίας πλευραὶ εἰσίν, ὡς τὰ ἡμίτονα τῶν αὐτῶν (496), δῆλον τὸ θεώρημα ἐκ τῶν δειχθέντων (499)· ἔστιν ἄρα ἡμ. α +

ἡμ. β : ἡμ. α — ἡμ. β : : ἀπ. $(\frac{\alpha+\beta}{2})$: ἀπ. $(\frac{\alpha-\beta}{2})$.

510. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἔςιν ἄρα κ̀ συνημ. α + συνημ. β : συνημ. α — συνημ. β : : συναπ. $(\frac{\alpha+\beta}{2})$: συναπ. $(\frac{\alpha-\beta}{2})$. τὰ γὰρ συνημίτονα εἰσὶν ἡμίτονα. τῶν κατὰ τὰ παραπληρώματα γωνιῶν (489)· ἄρα, κατὰ τὸ θεώρημα, τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμιτόνων τῶν κατὰ τὰ παραπληρώματα γωνιῶν ἔςι πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν, ὥσπερ ἡ ἀπτομένη τȣ̃ ἡμιαθροίσματος τῶν κατὰ τὰ παραπληρώματα γωνιῶν πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν αὐτῶν.

511. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Βȣλομένοις δ' εὑρεῖν τὴν τέμνȣσαν διὰ τȣ̃ συνημιτόνȣ κ̀ τῆς ἀκτῖνος, πορισθήσεται ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΚΔ, ΝΚΑ· ἔςι γὰρ (ὑποτεθείσης τῆς ὑπὸ ΒΚΑ = α) συνημ. α : ΒΚ = η : : ΚΑ = η : ΚΝ = τεμ. α = $\frac{\eta^2}{\text{συνημ. }\alpha}$· δῆλον δὲ κ̀ ὅτι ΚΝ = τεμ. α = $\sqrt{(\eta^2 + \text{ἀπ.}^2\ \alpha)}$ κ̀ ΚΜ = συντ. α = $\sqrt{(\eta^2 + \text{συντ.}^2\ \alpha)}$.

512. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ἡμίτονον ἁπάσης γωνίας τῆς α, ἔςι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς ἀκτῖνος κ̀ τȣ̃ συνημιτόνȣ τῆς αὐτῆς γωνίας, ὥσπερ ἡ ἀπτομένη τῆς ἡμισείας γωνίας α πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω γωνία ΑΚΠ = α· ἐκεῖν ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ΑΒΠ = $\frac{\alpha}{2}$ (178), κ̀ ἀχθείσης διὰ τȣ̃ κέντρȣ Κ τῶ ΚΝ παραλλήλως τῇ ΒΠ, ἔςαι ἡ γωνία ΝΚΑ = ΠΒΑ (45) = $\frac{\alpha}{2}$, κ̀ ΑΝ ἔςαι ἀπτ. $\frac{\alpha}{2}$· ἀλλ' ἐκ τῶν ὀρθογωνίων ὁμοίων τριγώνων ΒΠΔ (180) ΝΚΑ (151) ἔςι

ΠΔ : ΔΒ : : ΝΑ : ΚΑ, εἴτ' ἂν ἡμ. $\alpha : \eta +$ συνημ. α : : ἀπτ. $\frac{\alpha}{2} : \eta$· ἄρα $\eta +$ συνημ. $\alpha = \frac{\eta \times \text{συνημ. } \alpha.}{\text{ἀπτ. } \frac{\alpha}{2}}$

513. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπείπερ ἡ ὑπὸ ΑΠΔ γωνία μετρεῖται ὑπὸ τῦ ἡμίσεως τῦ τόξυ ΑΖ, ϗ ΑΖ = ΑΠ, ὃ τὸ ἥμισυ μετρεῖ τὴν ὑπὸ ΝΚΑ γωνίαν, δῆλον ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΝΑΚ, ΠΔΑ εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ΠΔ : ΑΔ : : ΚΑ : ΑΝ, τῦτ' ἔστιν· ἡμ. $\alpha : \eta -$ συνημ. $\alpha : : \eta$: ἀπ. $\frac{\alpha}{2}$· ἐκῦν Η — συνημ. $\alpha = \frac{\text{ἡμ. } \alpha}{\eta}$· ἀπ. $\frac{\alpha}{2}$, ϗ (διαιρέσει δήπυ τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ τῆς προευρημένης (512))

$$\frac{\text{Η} - \text{συνημ. } \alpha}{\text{Η} + \text{συνημ. } \alpha} = \frac{\text{ἀπ.}^2 \frac{\alpha}{2}}{\eta^2}\text{· ἄρα } \eta^2 \cdot \left(\frac{\text{Η} - \text{συνημ. } \alpha}{\text{Η} + \text{συνημ. } \alpha}\right) =$$

(ἀπτ.)^2 $\frac{1}{2}\alpha$· ἀλλὰ (συναπ.)$^2 = \frac{\eta^4}{(\text{ἀπ.})^2}$ (501)· ἄρα (συναπ.)^2 $\frac{1}{2}\alpha = \eta^2 \cdot \left(\frac{\text{Η} + \text{συνημ. } \alpha}{\text{Η} - \text{συνημ. } \alpha}\right)$ (*).

Εἴδομεν ἤδη (512) ὡς ἔστιν ἡμ. $\alpha : \eta +$ συνημ. α : :

(*) Ἐπεὶ γὰρ ἁπλῶς (συναπ.)$^2 = \frac{\eta^4}{(\text{ἀπτ.})^2}$· ἄρα (συναπ.)^2 $\frac{1}{2}\alpha$ ἐστὶν ἴση τῷ η^4 διαιρημένῳ διὰ (ἀπτ.)^2 $\frac{1}{2}\alpha$, ἔστι δὲ (ἀπτ.)^2 $\frac{1}{2}\alpha = HH \left(\frac{\eta - \text{συνημ. } \alpha}{\eta + \text{συνημ. } \alpha}\right)$· ἄρα (ἀπτ.)^2 $\frac{1}{2}\alpha =$

$$\eta^4 : HH \cdot \left(\frac{\eta - \text{συνημ. } \alpha}{\eta + \text{συνημ. } \alpha}\right) = H^4 : \frac{HH. (\eta - \text{συνημ. } \alpha)}{\eta + \text{συνημ. } \alpha}$$

$$= H^4 \times \frac{\eta + \text{συνημ. } \alpha}{HH. (\eta - \text{συνημ. } \alpha)} = H^2 \left(\frac{H + \text{συνημ. } \alpha}{\eta - \text{συνημ. } \alpha}\right).$$

ἀπ. $\frac{\alpha}{2}$: η· ἀλλὰ (49.5)· ἀπ. $\frac{\alpha}{2} : \eta :: \text{H} :$ συναπ. $\frac{\alpha}{2}$· ἄρα ἡμ. $\alpha : \text{H} +$ συνημ. $\alpha :: \text{H} :$ συναπ. $\frac{\alpha}{2}$· ἐὰν ἂν γένηται τὸ κυκλικὸν τεταρτημόριον $= \nu$, προκύψει συναπ. $\frac{\alpha}{2} =$ ἀπ. $(\nu - \frac{\alpha}{2}) =$ ἀπ. $(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu - \alpha}{2}) =$ ἀπ. $(\frac{\nu + \pi}{2})$· ὑποτεθέντος ἀμέλει $\nu - \alpha = \pi$· ἔστι δὲ καὶ ἡμ. $\alpha =$ συνημ. π, καὶ ἡμ. $\pi =$ συνημ. α· ἄρα ἡ ἀναλογία ἡμ. $\alpha : \text{H} +$ συνημ. $\alpha :: \text{H} :$ συναπ. $\frac{\alpha}{2}$ γενήσεται συνημ. $\pi : \text{H} +$ ἡμ. $\pi :: \text{H} :$ ἀπ. $(\frac{\nu + \pi}{2})$· ἔστι δὲ καὶ ἡμ. $\alpha : \text{H} -$ συνημ. $\alpha :: \text{H} :$ ἀπ. $\frac{\alpha}{2} ::$ συνημ. $\frac{\alpha}{2} : \text{H}$· ἄρα, ἐπεὶ συναπ. $\frac{\alpha}{2} =$ ἀπ. $(\nu - \frac{\alpha}{2})$ $=$ ἀπτ. $(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu - \alpha}{2}) =$ ἀπτ. $(\frac{\nu + \pi}{2})$, καὶ ἡμ. $\alpha =$ συνημ. π, καὶ ἡμ. $\pi =$ συνημ. α· ἐκ τούτων ποριςθήσεται συνημ. π $: \text{H} -$ ἡμ. $\pi ::$ ἀπ. $(\frac{\nu + \pi}{2}) : \text{H}$· ἄρα $\text{H} +$ ἡμ. $\pi =$

$$\frac{\text{συνημ. }\pi.\ \text{ἀπ.}(\frac{\nu+\pi}{2})}{\text{H}},\quad \text{H} - \text{ἡμ. }\pi = \frac{\text{συνημ. }\pi.\ \text{H}}{\text{ἀπ}(\frac{\nu+\pi}{2})},$$

$$\frac{\text{H} + \text{ἡμ. }\pi}{\text{H} - \text{ἡμ. }\pi} = \frac{(\text{ἀπ.})^2\,(\frac{\nu+\pi}{2})}{\text{H}^2},$$ καὶ τελευταῖον

$$\frac{\text{H}^2\,(\text{H} + \text{ἡμ. }\pi)}{\text{H} - \text{ἡμ. }\pi} = (\text{ἀπτ.})^2\,(\frac{\nu+\pi}{2}).$$

514. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε εἰρημένων οἵτε πίνακες τῶν τε ἡμιτόνων, ϗ συνημιτόνων, ϗ ἀπτομένων, ϗ συναπτομένων, κατασκευάζονται, ϗ ἅπαν τριγωνομετρικὸν πρόβλημα, καθάπερ ὀψόμεθα ἐν τῷ ἐφεξῆς κεφαλαίῳ, λύσιμον ἀποκαθίσταται· ἡμιτόνου γὰρ γωνίας $= 30^\circ$ δοθέντος (495), εὑρεθήσεται ῥᾳδίως τὸ γωνίας $= 15^\circ$ (506), ἑξῆς δὲ τὸ $7^\circ \frac{1}{2}$, εἶτα τὸ $3^\circ \frac{1}{4}$, ϗ ἐφεξῆς ὁμοίως, τὰ ἡμίση θηρωμένοις μέχρι δωδεκάτης πράξεως, καθ' ἣν εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον γωνίας $= 52'' \, 44''' \, 3'''' \frac{3}{4}$· ἐπεὶ δὲ τὰ βραχυτάτων τόξων ἡμίτονα αὐτοῖς τοῖς τόξοις συμπίπτουσι, ϗ εἰσὶν αὐτοῖς ἀνάλογα κατὰ τὸ ἀκόλουθον, εὑρεθήσεται τὸ γωνίας $= 1'$ ἐκ τῆς ἀναλογίας „ὥσπερ γωνία $= 52'' \, 44''' \, 3'''' \frac{3}{4}$ πρὸς τὸ ἡμίτονον αὐτῆς, οὕτω γωνία $= 1'$ πρὸς τὸ ζητούμενον αὐτῆς ἡμίτονον“· τούτου δὲ εὑρεθέντος ἀπόνως ἐκπορίζεται τὸ γωνίας $= 2'$ (504)· ἑξῆς δὲ ὑποτεθέντων $\beta = 1'$, ϗ $\alpha = 2'$, εὑρεθήσεται ϗ τὸ τῆς $3'$ (507)· τούτου δὲ ὑποτεθέντος $= \alpha$, ϗ $\beta = 1'$ εὑρεθήσεται ϗ τὸ τῆς $4'$, καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως μέχρι τοῦ γωνίας $= 30^\circ$· εὑρεθέντος δὲ τοῦ γωνίας $= 30^\circ$ ἡμιτόνου, ἵν' εὑρεθείη τὸ γωνίας μείζονος, φέρ' εἰπεῖν, τῆς $= 35^\circ$, γενέσθω $\alpha = 30^\circ$, ϗ $\beta = 5^\circ$· εἰς δ' εὕρεσιν τοῦ γωνίας $= 30^\circ \, 1'$, γενέσθω $30^\circ = \alpha$, ϗ $1' = \beta$, ϗ οὕτως ἑξῆς ἕως τοῦ γωνίας $= 60^\circ$· τούτου δὲ ἅπαξ γνωσθέντος, τὰ ἕως 90° θηρευθήσεται, τιθεμένου $\alpha = 60^\circ$, ϗ $\beta = 1^\circ$, $= 2^\circ$, $= 3^\circ$. κτλ.· ἡμιτόνων δὲ γωνίαις προσανηκόντων μείζοσιν, ἢ 90°, ἐπεὶ ταυτίζεται τοῖς τῶν αὐτοῖς ἀναπληρωμάτων (491), εὐμαρεστάτη ἡ εὕρεσις· ἡμίτονον γὰρ γωνίας $= 100^\circ$ ταυτόν ἐστι ϗ γωνίας $= 80^\circ$· ἀταλαιπώρως δὲ ϗ τὰ συνημίτονα πορίζονται, τῶν ἡμιτόνων γινωσκομένων· τὸ γὰρ συνη-

μίτονον ἰσȣ̃ται τῇ τετραγωνείῳ ῥίζῃ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος τετράγωνον ὑπερεκπίπτει τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ ἡμιτόνȣ (505)· ἐπεὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα (σχ. 2) ΚΔΒ, ΚΑΝ εἰσὶν ὅμοια· ἐντεῦθεν ἄρα ΚΔ : ΔΒ : : ΚΑ : ΑΝ, εἴτ' ȣ̃ν συνημ. : ἡμ. : : Η : ἀπ.· γινωσκομένων ȣ̃ν τȣ̃ τε ἡμιτόνȣ ϗ τȣ̃ συνημιτόνȣ γωνίας τινὸς, εὐχερῶς εὑρεθήσεται ἡ αὐτῆς ἁπτομένη· ἐκ δὲ τῆς ἀναλογίας (501) απ : Η : : Η : συναπ. ῥαδίως πορισθήσεται ϗ ἡ συναπτομένη· ἐὰν ȣ̃ν ὑποτεθῇ ἡ ἀκτὶς = 10000000000, τὸ γωνίας = 30° ἡμίτονον ἔςαι = 5000000000· ἐκ δὲ τῶν προειρημένων εὑρεθήσονται οἱ τὰ ἡμίτονα, συνημίτονα ϗ ἁπτομένας, τόξων τῶν τε μειζόνων ϗ τῶν ἐλαττόνων ἢ 30°, ἐκδηλȣ̃ντες ἀριθμοί· τȣ̀ς δὲ ἀριθμȣ̀ς εὑρόντες, ζητȣ̃μεν τȣ̀ς αὐτῶν λογαρίθμȣς ἐν τοῖς πίναξιν· οἷς ϗ μόνοις χρώμεθα ἀντὶ τῶν ἡμιτόνων, συνημιτόνων κτλ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ ἐπιλύσεως τῶν κατὰ τὰ τρίγωνα προβλημάτων.

515. Προϋποτεθειμένων τῶν πινάκων, οἳ περιέχȣσι τὰ ἡμίτονα, ἁπτομένας, συνημίτονα, συνεφαπτομένας (514), διὰ τῶν προτεθέντων θεωρημάτων ἐπιλύειν δυνάμεθα ἅπαν ἐπὶ τριγώνȣ γινόμενον πρόβλημα, ὃ ἐςι τριῶν διδομένων, ἐν οἷς ϗ μία πλευρὰ, τὰ ἄλλα τρία εὑρίσκειν.

516. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Τριγώνȣ τȣ̃ ΒΓΕ δύω γωνιῶν δοθεισῶν. τῶν Β, Γ, ϗ τῆς ΒΓ πλευρᾶς, εὑρεῖν τὰ ἄλλα (σχ. 9).

ΛΥΣΙΣ. Η' τρίτη γωνία Ε πορίζεται, ἐὰν ἀφαιρεθῇ Β + Γ ἀπὸ 180° (210)· εἰς δὲ εὕρεσιν τῆς ΒΓ πλευρᾶς χρηςέον τῇ μεθόδῳ τῶν τριῶν. Τὸ γὰρ ἡμίτονον τῆς Γ γωνίας, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ γνωςὴ πλευρὰ ΒΕ, ἐςὶ πρὸς αὐτὴν τὴν γνωςὴν πλευρὰν, ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς Ε γωνίας, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ ΒΓ πρὸς αὐτὴν τὴν ΒΓ, ἣν ζητῦμεν (496)· ἔςω ὖν Β = 100°, ϗ Γ = 15°· ὖκὖν Ε ἔςαι = 180° — 115° = 65°· ἔςω δὲ ϗ ΒΕ = 20 ὀργυιαῖς· ζητείσθω εἶτα ἐν τοῖς πίναξι τὸ ἡμίτονον τῆς Γ γωνίας = 15°, ϗ τὸ τῆς Ε = 65°, ϗ χηματισθήτω ἡ μέθοδος τῶν τριῶν ὖτω· 2588190 : 20 :: 9063078 : χ $= 70\ \frac{88160}{2588190}$, δύναμις τῆς ΒΓ πλευρᾶς.

Βυλόμενοι δὲ εὑρεῖν τὴν ΓΕ πλευρὰν, τίθεμεν τρίτον ὅρον τῆς ἀναλογίας τὸ ἡμίτονον τῆς Β γωνίας, ὑφ' ἣν αὕτη ὑποτείνει· ταύτης δὲ τῆς γωνίας ἀμβλείας ὖσης, τὸ αὐτῆς ἡμίτονον τὸ αὐτὸ ἔςαι τῦ αὐτῆς ἀναπληρώματος (491), εἴτ' ὖν τῆς 80°· ἐντεῦθεν ὖν 2588190 : 20 :: 9848077 : χ $= 26 + \frac{259100}{2588190}$ = ΓΕ.

517. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Των ἡμιτόνων ἐκτιθεμένων δὶ ἀριθμῶν μεγάλων, ἡ μέθοδος τῶν τριῶν λίαν ἐπίπονος γίνεται· ἀνθ' ὅτυ δὴ ζητήσαντες οἱ Μαθηματικοὶ τὺς λογαρίθμυς τῶν ἡμιτόνων πασῶν τῶν γωνιῶν τῦ κυκλικῦ τεταρτημορίυ, ἔθεντο πρὸ ἑκάςυ ἡμιτόνυ τὸν οἰκεῖον αὐτῦ λογάριθμον, εἰς ἓν τεῦχος συνάψαντες τὺς πίνακας τῶν ἡμιτόνων, ϗ τὺς λογαρίθμυς τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· ἀντὶ ὖν ἡμιτόνων ϗ πλευρῶν τιθέντες τὺς αὐτῶν λογαρίθμυς, τὴν γεωμετρικὴν εἰς ἀριθμητικὴν τῶν τριῶν μέθοδον μεταποιῦμεν, ϗ τῦ προκύψαντος λογαρίθμυ ἐν τοῖς πίναξι τὸ ἀντιςοιχον ἡμίτονον, ἢ τὴν πλευρὰν, ἣν ζητῦμεν, εὑρίσκομεν.

Οὕτως ἡ προεκτεθεῖσα τῶν τριῶν γεωμετρικὴ μέθοδος (516) γενήσεται 9,4129962 · 1,3010300 : 9,9572757 . χ· τῶν μέσων ἔν συναφθέντων, ϗ ἀπὸ τῦ ἀθροίσματος ἀφαιρεθέντος τῦ γνωςῦ ἄκρυ, τὸ κατάλοιπον χ = 1,8453095, ἔςαι λογάριθμος, ὃς ἐν τοῖς πίναξιν ἀντιςοιχεῖ τῷ 70 καίτινι πρὸς, ὅς ἐςι δύναμις ἐγγίζυσα τῇ ΒΓ πλευρᾷ. .

518. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐμφαίνων τὴν ἐγνωσμένην πλευρὰν περιέχῃ ὀργιὰς ϗ πόδας, πάντα ἀνήχθωσαν εἰς πόδας, ϗ εἰλήφθω τῦ ἀριθμῦ τύτυ ὁ λογάριθμος εἰς ἐκτέλεσιν τῆς ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν μεθόδυ.

519. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐν τῇ ἀριθμητικῇ τῶν τριῶν μεθόδῳ, ἀντὶ τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων, ϗ τῶν πλευρῶν, σημειέσθωσαν χάριν συντομίας αὐταὶ αἱ γωνίαι ϗ αἱ πλευραί· ὅτως ἔν ἐκτεθήσεται ἡ ἐν (517) ἀριθμητικὴ ἀναλογία Γ · ΒΕ : Ε · ΒΓ.

520. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ΄. Τῦ ὁλικῦ ἡμιτόνυ, εἴτ' ἔν τῦ γωνίας ὀρθῆς, ὄντος = 10000000000 (486), ὁ αὐτῦ λογάριθμος ἔςαι 10 ὡς ὁλοχερὴς (Συμβ. Λογ. 322)· ἐὰν ἔν λογαρίθμῳ προσθεῖναι δέῃ τὸν λογάριθμον τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἀπόχρη συνάψαι 1 ταῖς δεκάσι τῦ χαρακτηριςικῦ τῦ λογαρίθμυ ἐκείνυ, ἐὰν ὑπερέχῃ τὸν 10, ἢ προθεῖναι πρὸς ἀριςερὰν 1, ἐὰν ᾖ τῦ 10 ἥττων· ἐὰν δὲ ἀφελεῖν δέῃ, ἀποκεκόφθω 1 τῶν τῦ χαρακτηριςικῦ δεκάδων. Τὸ ἑξῆς ὑπόδειγμα διαλευκανεῖ τὸ λεγόμενον.

521. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Τριγώνυ ὀρθογωνίυ (σχ. 10) τῦ ΑΔΖ δοθείσης τῆς πλευρᾶς ΔΖ = 30 ὀργυιαῖς, καὶ τῆς γωνίας Ζ = 40°, εὑρεῖν τὰ λοιπά.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ γωνία Α = 90° — 40° = 50° (212)· εἰς εὕρεσιν δὲ τῆς βάσεως ΑΖ (496, 519) γενέσθω Α · ΔΖ

: Δ · ΑΖ · δί ἀριθμῶν δέ · 9,834254 · 1,477121 : 10 · χ· τὸ τῶν μέσων ἄθροισμα ἐςὶν 11,477121 (520), ἒ ἀφαιρεθέντος τᾶ γνωςᾶ ἄκρα λειφθήσεται χ = 1,592867 λογάριθμος ἐγγίζων τῷ 39, ἐκδηλᾶντι τὴν ζητεμένην βάσιν· ἔσης δὲ τῆς ΑΖ = 39 ὀργυιαῖς, γινωσκομένης τε τῆς γωνίας Ζ, εὑρεθήσεται ἡ τὴν Ζ ὑποτείνεσα πλευρὰ ΑΔ διὰ τῆς ἀναλογίας τῆς ἀριθμητικῆς Δ · ΑΖ : Ζ · ΑΔ (496, 516).

522. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.** Τριγώνε δοθεισῶν δύω πλευρῶν, ἐ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας, εὑρεῖν τὰ λοιπά.

ΛΥΣΙΣ. Ἤτοι ἐςὶν ΑΠ = ΑΓ (σχ. 11), ἐ γνωςῆς ἔσης τῆς Α, ἔςαι (206) ἑκατέρα τῶν Π, Γ, = $\dfrac{180^\circ - \text{A}}{2}$ (210)· γνωςῆς ἒν ἔσης τῆς γωνίας Π, εὑρεθήσεται ἡ ΠΓ πλευρὰ δί ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν μεθόδε (519) Π · ΑΓ : Α · ΠΓ · ἢ εἰσὶν ἄνισοι αἱ δοθεῖσαι ΑΟ, ΖΟ (σχ. 8)· κἀντεῦθεν ἤδε γενήσεται ἡ μέθοδος τῶν τριῶν· „τὸ ἄθροισμα τῶν δύω δοθεισῶν πλευρῶν ἐςὶ „πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν, ὡς ἡ ἀπτομένη τᾶ ἡμιαθροί„σματος τῶν γωνιῶν, ὑφ' ἃς αἱ πλευραὶ ὑποτείνεσι, πρὸς „τὴν ἀπτομένην τῆς αὐτῶν ἡμιδιαφορᾶς.

Γνωςῶν ἒν ἐσῶν τῶν δύω πλευρῶν, ῥᾶςα εὑρίσκεται τό,τε ἄθροισμα αὐτῶν, ἐ ἡ διαφορὰ, ἅπερ συνίςησι τὰς δύω προτέρας τῆς ἀναλογίας ὅρας· δυνατὸν δὲ εὑρεῖν ἐ τὸν τρίτον· ἐ γὰρ Α + Ζ = 180° — Ο· ἐκᾶν τρίτος ὅρος ἔςαι ἡ ἀπτομένη τῆς $\dfrac{180^\circ - \text{O}}{2}$, ἣ εὑρίσκεται ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων· ὁ δὲ τέταρτος ὅρος χ τῆς πράξεως διεκπερανθείσης ἀποδώσει τὴν ἀπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν γωνιῶν τῶνδε· εὑρόντες ὖν ἐν τοῖς πίναξι διὰ τῆς ἀπτομένης ταύτης τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶνδε τῶν γωνιῶν, ἕξομεν τὴν ἐλάττονα γωνίαν Α ἴσην τῷ ἡμιαθροίσματι πλὴν τῆς ἡμιδιαφορᾶς (Συμβ. Λογ. 442).

Τέλος δὲ ἐκ τῆς ἀναλογίας Α : ΖΟ : : Ο : ΑΖ (496, 519) εὑρεθήσεται ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΖ.

Ἔςω ΓΑ = ΑΠ, ϗ Α = 142°· ὖκὖν Π = Γ = 19°· ἔςω δὲ ϗ ΑΓ = 12 ὀργυιαῖς· ἔςι δὲ τῦ μὲν 19° λογάριθμος 1,5126, τῦ δὲ ἀριθμῦ 12 ὁ 1,0791· τῦ δὲ 142° ὁ αὐτὸς ὢν τῷ τῦ 38° (491), ἔςιν 1,7893· τοιγαρῦν ἡ μέθοδος διατεθήσεται ὗτω·

1,5126 · 1,0791 : 1,7893 : χ = ΠΓ, ὖκὖν λογάριθμος πρόεισιν ὁ 1,3558 ἀριθμῷ ἀντιςοιχῶν ἐγγύς πυ τῷ 23, ὅς παρίςησιν, ὅσων ὀργυιῶν ἐςὶν ἡ ΠΓ.

$$\begin{array}{r} 1{,}0791 \\ \underline{1{,}7893} \\ 2{,}8684 \\ \underline{1{,}5126} \\ 1{,}3558 \end{array}$$

523. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δʹ. Δύω πλευρῶν δοθεισῶν ϗ μιᾶς γωνίας, ὑφʼ ἣν ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν ὑποτείνει, εὑρεῖν τὰ λοιπά, γινωσκομένυ μέντοι, εἰ ἡ γωνία, ὑφʼ ἣν ἑτέρα πλευρὰ ὑποτείνει, ὀξεῖά ἐςιν, ἢ ἀμβλεῖα.

ΛΥΣΙΣ. Ἤτοι γάρ εἰσιν ἴσαι αἱ δοθεῖσαι, οἷον ΑΠ = ΑΓ (Σχ. 11), ϗ γινωσκομένης τῆς Γ, ὑφʼ ἣν ὑποτείνει ἡ ΑΠ, γνωσθήσεται ϗ ἡ Π (204), ϗ δὴ ϗ ἡ Α (210)· γνωσθήσεται δὲ ϗ ἡ ΠΓ ἐκ τῆς μεθόδυ Γ . ΑΠ : Α . ΠΓ· ἢ ἄνισοι, καὶ τηνικαῦτα, γνωςῶν ὐσῶν τῶν ΑΟ, ΟΖ (Σχ. 8) ϗ τῆς Α γωνίας, ἔςαι ΖΟ . Α : ΑΟ . Ζ· ὁ ὖν τέταρτος ὅρος, εἴτʼ ὖν τὸ λογαριθμικὸν ἡμίτονον τῆς Ζ, ἐπίσης δύναται εἶναι γωνίας ὀξείας τε ϗ ἀμβλείας (491)· ἐπάναγκες ὖν εἰδέναι τὴν Ζ, εἰ ἔςιν ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα, ἵνα δυνηθῶμεν συναγαγεῖν τὴν τῆς Ο δύναμιν· ἁπασῶν δὲ τέλος τῶν γωνιῶν γνωσθεισῶν ἀποληφθήσεται ἡ δύναμις τῆς ΑΖ διὰ Α . ΟΖ : Ο . ΑΖ

524. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. *Τριγώνου τῶν τριῶν πλευρῶν δοθεισῶν, εὑρεῖν τὰς γωνίας.*

ΛΥΣΙΣ. Ἤτοι ἰσάλληλοί εἰσιν ἅπασαι αἱ πλευραὶ, ϗ ἑκάστη γωνία ἔσαι $= \frac{180^\circ}{3}$ (205, 210)· ἢ δύω μόνον εἰσὶν ἴσαι ΑΠ = ΑΓ, ϗ ἡ ἐκ τῆς Α γωνίας ἀχθεῖσα τῇ ΠΓ κάθετος δίχα τεμεῖ τὴν ΠΓ (217)· ἄρα ΠΘ = ΘΖ· ἀλλὰ τοῦ καινοῦ τριγώνου ΑΘΠ γινώσκονται, δύω μὲν πλευραὶ ΑΠ, ΠΘ, μία δὲ γωνία ἡ Θ· ἐκεῖν ΑΠ . Θ : ΠΘ . Α· ὅθεν πρόεισιν ἡ δύναμις τῆς Α γωνίας τοῦ ΑΠΘ τριγώνου, ἧς τὸ διπλοῦν ἐστιν ἡ Α γωνία τοῦ ΑΠΓ τριγώνου· ταύτης δὲ τῆς γωνίας γνωσθείσης, ἡ λοιπὴ ῥᾶστα θηρευθήσεται (522).

Ἢ τελευταῖον αἱ τρεῖς πλευραὶ ΒΓ, ΒΕ, ΓΕ (σχ. 9) εἰσὶν ἄνισοι· ϗ δὴ α΄. ἐστὶ ΓΕ : ΓΤ :: ΓΟ : ΓΗ (500)· β΄. διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδου εὑρεθείσης ἐν ἀριθμοῖς τῆς ΓΗ, τὸ μὲν μεῖζον τμῆμα ΓΔ ἔσαι $= \frac{\Gamma\text{E}}{2} + \frac{\Gamma\text{H}}{2}$, τὸ δ' ἔλαττον ΔΕ $= \frac{\Gamma\text{E}}{2} - \frac{\Gamma\text{H}}{2}$ (Συμβ. Λογ. 442)· γ΄. Τριγώνου τοῦ ΗΔΕ γινωσκομένων τῶν δύω πλευρῶν ΒΕ, ΔΕ, ϗ τῆς ὀρθῆς γωνίας Δ, εὐχερῶς εὑρεθήσεται ϗ ἡ Ε γωνία (523)· ὡσαύτως τριγώνου τοῦ ΒΓΔ γνωστῶν ὄντων τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΔ, ϗ τῆς Δ γωνίας, εὑρεθήσεται ϗ ἡ Γ· τοῦ οὖν ὁλικοῦ τριγώνου ΒΓΕ γνωστῶν ὄντων τῶν δύω γωνιῶν Γ, Ε, ἔσαι γνωστὴ ϗ ἡ τρίτη Β (210).

525. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς΄. *Τριγώνου παντὸς ΒΓΕ, τριῶν δοθέντων, ἐν οἷς ἐστὶ ϗ μία πλευρὰ, εὑρεῖν τὴν αὐτοῦ ἐπιφάνειαν.*

ΛΥΣΙΣ. Εὑρεθεισῶν τῶν τε γωνιῶν αὐτȣ̃ ϗ πλευρῶν (516, 522, 523, 524), ζητηθήτω ἡ δύναμις τῆς καθέτȣ ΒΔ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας Δ. ΒΓ : Γ. ΒΔ, ϗ πεπολλαπλασιάσθω ἡ ΓΕ βάσις ἐπὶ τὸ ἥμισυ ταύτης τῆς εὑρεθείσης καθέτȣ (288).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΚΤΟΝ.

Ἐν ᾧ ὁ Συμβολικὸς Λογισμὸς τῇ ςοιχειώδει Γεωμετρίᾳ προσεφαρμόζεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ γεωμετρικῆς κατασκευῆς τῶν συμβολικῶν ποσοτήτων.

Ἦν μὲν ἀκόλȣθον ἐφεξῆς τὰ περὶ τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας ὑποσυνάψαι, καθὰ ϗ ἄλλοις ἔθος Γεωμέτραις· ἐπεὶ δ' ἡμῖν ἔδοξεν ἐν τῇ φυσικωτέρᾳ Μαθηματικῇ τῆς Ἀςρονομίας, ὡς ἐκείνῃ τὰ μάλιςα συντελȣ̃σαν, προτάξασθαι, φέρ' ἴδωμεν διὰ βραχέων ἐνταῦθα τὴν τȣ̃ Συμβολικȣ̃ Λογισμȣ̃ πρὸς τὴν ςοιχειώδη Γεωμετρίαν συνάφειαν, εἴτ' ȣ̃ν, ὡς λέγειν εἰώθασι, τὴν ἐκείνȣ ταύτῃ προσεφάρμοσιν· ϗ πρῶτον ὅπως ποσὰ γραμματικὰ γεωμετρικῶς κατασκευάζεται.

526. Αἱ γραμμαὶ, καὶ αἱ ἐπιφάνειαι, καὶ τὰ στερεὰ, ποσότητες οὖσαι, τὰς αὐτὰς μὲν ἐπιδέχονται πράξεις, ἃς οἵτε ἀριθμοὶ, καὶ αἱ συμβολικαὶ ποσότητες· τὰ δ' ἐντεῦθεν προϊόντα ἀποτελέσματα διττῶς ἂν ἔχοι μάλιστα ἐκτιμᾶσθαι, ἤτοι δι' ἀριθμῶν, ἢ διὰ γραμμῶν· κἀκείνως μὲν ἑκάστης τῶν δεδομένων ποσοτήτων δι' ἀριθμῶν δηλωθείσης, οὐδὲν ἔργον ὅλως ὑπάρχει ταῖς πράξεσιν· οὐδὲν γὰρ ἄλλο λοιπὸν, ἢ ἀντὶ γραμμάτων ἀριθμητικὰς ἀντικαταστῆσαι ποσότητας, καὶ πράξεις, ἃς ἡ διάθεσις τῶν γραμμάτων καὶ τῶν συμβόλων ἐνδείκνυσιν, ἐκπεράναι· οὕτω δὲ, ὡρισμένους τινὰς ἐπάναγκες ἐπιγνῶναι τύπους, οἷς ἂν ἅπαντες ἀναχθεῖεν οἱ ἄλλοι· ἴδωμεν οὖν πρῶτον ὅπως οἱ στοιχειώδεις οὗτοι κατασκευάζονται τύποι· εἶτα δὲ ὅπως οἱ ἄλλοι ἐκείνοις ἐπανάγονται· καλεῖται δὲ τοῦτο κατασκευὴ τῶν συμβολικῶν ποσοτήτων, ἢ τῶν ταύταις προσεφαρμοζομένων προβλημάτων.

527. Ἐὰν ἡ μὲν εἰς κατασκευὴν προκειμένη ποσότης ᾖ λογικὴ, εἴτ' οὖν ῥιζικῶν ποσῶν ἄνευ, αἱ δὲ τοῦ ἀριθμητοῦ διαστάσεις μονάδι τῶν τοῦ παρονομαστοῦ ὑπερέχωσιν, ἡ κατασκευὴ διαπερανθήσεται ἀεὶ τετάρτης ζητουμένης ἀναλόγου τῶν τριῶν δεδομένων εὐθειῶν.

528. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Προκειμένης οὖν εἰς κατασκευὴν τῆς ποσότητος $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, ἐφ' ἧς α, β, γ γνωστὰς εὐθείας ἐμφαίνουσιν, ἤχθωσαν εὐθεῖαι ἀπέραντοι (σχ. 12) αἱ ΑΨ, ΑΧ, γωνίαν τυχοῦσαν περιέχουσαι, καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας αὐτῶν τῆς ΑΧ εἰλήφθω ἡ ΑΒ ἴση τῇ ἐμφαινομένῃ τῷ γ, καὶ ἡ ΑΔ ἴση ἀτέρᾳ τῶν α, β, τῇ α φέρ' εἰπεῖν· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ΑΨ εἰλήφθω ἡ ΑΓ ἴση τῇ β· καὶ ἐπεζευκέτω τὰ πέρατα Β, Γ τῆς πρώτης, καὶ τῆς τρί-

της ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ϰ ἤχθω διὰ τȣ Δ πέρατος τῆς δευτέρας ἡ ΔΕ παράλληλος παρὰ τὴν ΒΓ, ἥτις διορίσει ἐπὶ τῆς ΑΨ τὴν ΑΕ ἴσην τῇ δυνάμει τȣ τύπȣ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$· καὶ γὰρ (318) ἐκ τῶν παραλλήλων ΔΕ, ϰ ΒΓ πρόεισιν ἡ ἀναλογία ΑΒ : ΑΔ :: ΑΓ : ΑΕ, τȣτ' ἔστιν $\gamma : \alpha :: \beta :$ ΑΕ· ἄρα ΑΕ $= \frac{\alpha\beta}{\gamma}$· δηλοῖ δὲ τȣτο, εὑρεῖν τετάρτην ἀνάλογον εὐθεῖαν τριῶν δοθεισῶν. κατασκευασθήσεται ἄρα ὁ τύπος $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ χρησαμένοις μεθόδῳ τῇ ἐκτεθείσῃ (319).

529. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἄρα προκέηται εἰς κατασκευὴν ὁ τύπος $\frac{\alpha\alpha}{\gamma}$, τὸ ζήτημα συμπεριπεσεῖται τῷ ἤδη ἐκτεθέντι (528)· τηνικαῦτα γὰρ ἡ εὐθεῖα β ἐξισȣται τῇ α.

530. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Κείσθω κατασκευάσαι γεωμετρικῶς τὴν Συμβολικὴν ποσότητα $\frac{\alpha\beta+\beta\delta}{\gamma+\delta}$· ἐπεὶ ȣ̃ν $\frac{\alpha\beta+\beta\delta}{\gamma+\delta} = \frac{(\alpha+\delta)\times\beta}{\gamma+\delta}$ (Συμϐ. Λογ. 68. ά.), λαμϐανομένης τῆς $\alpha+\delta$ ὡς μιᾶς εὐθείας ἐμφαινομένης ὑπὸ μ, ϰ τῆς $\gamma+\delta$ ἀντὶ μιᾶς ἄλλης δηλȣμένης ὑπὸ ν, τρέψεται ὁ τύπος εἰς $\frac{\mu\beta}{\nu}$, ὃς γεωμετρικῶς κατασκευασθήσεται κατὰ τὸν ἐκτεθέντα (528).

531. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἐὰν ᾖ $\frac{\alpha\alpha-\beta\beta}{\gamma}$, ἐπεὶ ταυτίζεται τῇ $\alpha\alpha-\beta\beta$ τῇ $(\alpha+\beta)\times(\alpha-\beta)$, ὡς ἔ-

ϛι δῆλον ἐκτελȣμένȣ τȣ̃ σεσημειωμένȣ πολλαπλασιασμȣ̃, παρεςάσθω ἡ ποσότης $\frac{\alpha\alpha - \beta\beta}{\gamma}$ ὑπὸ σχήματι τοιῷδε $\frac{(\alpha+\beta)\times(\alpha-\beta)}{\gamma}$, ϗ ζητηθήτω τετάρτη ἀνάλογος τῶν γ, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ (319).

532. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Δʹ. Ε'ὰν προκέηται εἰς κατασκευὴν ἡ ποσότης $\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon}$, ἐπείπερ ὑπάρχει $\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon} = \frac{\alpha\beta}{\delta} \times \frac{\gamma}{\varepsilon}$, κατεσκευάσθω πρῶτον ὁ τύπος $\frac{\alpha\beta}{\delta}$ (528), ϗ ἡ ἐκ τῆς κατασκευῆς προκύψασα τετάρτη ἀνάλογος κληθήτω μ· ἐκεῖν ἔςαι $\frac{\alpha\beta}{\delta} \times \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{\mu\gamma}{\varepsilon}$, ἥτις κατασκευασθήσεται ϗ αὐτὴ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

533. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ι'ν' ἄρα κατασκευασθῇ ἡ ποσότης $\frac{\alpha^2\beta}{\gamma^2}$, πρῶτον αὐτὴν παραςαθῆναι δεῖ ȣ̔́τως $\frac{\alpha^2}{\gamma} \times \frac{\beta}{\gamma}$· εἶτα κατασκευασθῆναι τὴν $\frac{\alpha^2}{\gamma}$· τελευταῖον δὲ τῆς κατ' αὐτὴν δυνάμεως διὰ μ δηλωθείσης, κατασκευασθῆναι τὴν ποσότητα $\frac{\mu\beta}{\gamma}$.

534. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Α'ναλύειν ȣ̃ν χρὴ τὴν προκειμένην ποσότητα εἰς μέρη, ὧν ἕκαςον ἂν ἰσοδυναμοίη τῷ τύπῳ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, ἢ $\frac{\alpha^2}{\gamma}$· κἂν τȣ̃το τὰ πολλὰ δυσχερὲς εἶναι δοκῇ, διὰ μέντοι μεταμορφώσεων εὐτυχῶς διανύεται.

535. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Εʹ. Κείσθω κατασκευάσαι

γεωμετρικῶς τὴν ποσότητα $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\gamma^2}$· ὑποτεθείσθω οὖν πρὸς τὸ δοκοῦν $\beta^3=\alpha^2\mu$, καὶ $\gamma^2=\alpha\nu$· ἄρα τηνικαῦτα $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\gamma^2}=\frac{\alpha^3+\alpha^2\mu}{\alpha^2+\alpha\nu}$ (Συμβ. Λογ. 70) $=\frac{\alpha^2+\alpha\mu}{\alpha+\nu}=\frac{(\alpha+\mu).\,\alpha}{\alpha+\nu}$ (Συμβ. Λογ. 68. ά.), ἥτις εὐμαρῶς κατασκευάζεται (531), εἰ μόνον γνωσθεῖεν τὰ μ, ν· γινώσκεται δὲ ταῦτα ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\beta^3=\alpha^2\mu$ καὶ $\gamma^2=\alpha\nu$· ὅθεν $\mu=\frac{\beta^3}{\alpha^2}$, καὶ $\nu=\frac{\gamma^2}{\alpha}$, ἃ ῥᾳδίως κατασκευάζεται (529, 533).

536. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Συμβαίνει ἐνίοτε τὰς ποσότητας οὕτω σχηματίζεσθαι, ὡς ἀχρήστους πάμπαν δοκεῖν τὰς μεταμορφώσεις· γίνεται δὲ τοῦτο ὅταν μὴ ᾖ ὁμογενὴς ἡ ποσότης, τοῦτ' ἔστιν ὅταν ἕκαστος τῶν τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ τοῦ παρονομαστοῦ, ὅρων μὴ συγκέηται ἐξ ἴσων ποιητῶν, ὅταν ᾖ, φέρ' εἰπεῖν, τοιάδε $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\gamma^2+\beta}$· παρατηρητέον μέντοι, ὅτι οὐδέποτε τοιόνδε ποσὸν προέρχεται, πλὴν ὅταν ἐπὶ λογισμοῦ διὰ τὸ ἁπλούστερον ποσά τινα μονάδι ἴσα ἐκλαμβάνωνται· οὕτω φέρ' εἰπεῖν ὁ τύπος $\frac{\alpha^3+\beta^2\gamma}{\alpha^2+\gamma^2}$, ὑποτεθέντος $\beta=1$, τρέπεται εἰς τὸν $\frac{\alpha^3+\gamma}{\alpha^2+\gamma^2}$· ἐπεὶ μέντοι ἀδύνατον ἐγχειρῆσαι τῇ κατασκευῇ, τὰ, ἐξ ὧν ἔσται ἡ κατασκευὴ, ἀγνοοῦντας στοιχεῖα, γινώσκεται ἀείποτε ἡ μονάδι ἴση ὑποτεθεῖσα ποσότης· ἔξεστι ἄρα ἀεὶ ταύτην ἀντικαθιστᾶν ἀντὶ τῆς μονάδος· κωλύει δὲ τὸ τοιοῦτον οὐδέν· ἐπεὶ γὰρ

τὰς διαστάσεις ἑκάστε ὅρε τῦτε ἀριθμητῦ, ϗ τῦ παρωνομαστῦ χρὴ ἴσας ἀεὶ εἶναι (δυνατὸν ἄλλως διαφέρειν τὰς ἐκείνε τῶν τῦτε ὅρων), ἀντεισακτέον ἑκάστῳ ὅρῳ βαθμὸν τῆς μονάδι ἰσωθείσης εὐθείας πρὸς ἀναπλήρωσιν τῦ τῶν διαστάσεων ἀριθμοῦ· οὕτως εἰ κατασκευάσαι προκέοιτο $\frac{\alpha^3+\beta+\gamma^2}{\alpha+\beta^2}$, ὑποτιθέντες τὴν μονάδι ἰσωθεῖσαν εὐθεῖαν εἶναι δ, γράψωμεν $\frac{\alpha^3+\beta\delta^2+\gamma^2\delta}{\alpha\delta+\beta^2}$· εἰς κατασκευὴν δὲ ταύτης θῶμεν $\beta^2=\delta\mu$, $\gamma^2=\delta\nu$, ϗ $\alpha^3=\delta^2\pi$· ὅθεν ἡ προτεθεῖσα ποσότης μεταπεσεῖται εἰς τὴν $\frac{\delta^2\pi+\beta\delta^2+\delta^2\nu}{\alpha\delta+\delta\mu}$ $=\frac{\delta\pi+\beta\delta+\delta\nu}{\alpha+\mu}=\frac{(\pi+\beta+\nu)\,\delta}{\alpha+\mu}$, ἥτις εὐμαρῶς κατασκευάζεται προκατασκευασθεισῶν τῶν δυνάμεων μ, ν, π, εἴτ' ἂν $\mu=\frac{\beta^2}{\delta}$, $\nu=\frac{\gamma^2}{\delta}$, $\pi=\frac{\alpha^3}{\delta^2}$, αἳ ϗ αὗται εὐμαρῶς κατασκευάζονται (528, 533).

537. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν ἁπάσαις ταῖς ἄρτι ἐκτεθειμέναις κατασκευαῖς, ὁ ἀριθμὸς τῶν ποιητῶν, εἴτ' ἂν τῶν διαστάσεων ἑκάστε τῶν κατὰ τὸν ἀριθμητὴν ὅρων, ὑποτέθειται μονάδι ὑπερέχειν τῶν κατὰ τὸν παρονομαστήν· δυνατὸν δὲ ὑπερέχειν αὐτῶν δυσὶν, ἢ ϗ τρισὶ, μονάσι, πλείοσιν ἀλλ' ἂν ἐδαμῶς, εἰ μὴ εὐθεῖά τις ἰσῷτο μονάδι, ἢ ποιηταὶ τινὲς ἀριθμὲς ἐμφαίνοιεν.

538. Ὅταν αἱ διαστάσεις τῦ ἀριθμητῦ τῆς προκειμένης ποσότητος ὑπερέχωσι τὰς τῦ παρονομαστῦ δυσὶ μονάσιν, ἡ ποσότης παρίστησιν ἐπιφάνειαν, ἧς δυνατὸν ἀεὶ τὴν κατασκευὴν εἰς τὴν παραλληλογράμμε, ἢ ϗ τετραγώνε μεταβαλεῖν.

539. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἐὰν εἰς κατασκευὴν πρόκειται τὸ ποσὸν $\frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta}{\alpha+\gamma}$, ἐκληπτέον αὐτὸ ὡς $\alpha \times \frac{\alpha^2 + \alpha\beta}{\alpha+\gamma}$· ἀλλαμὴν $\frac{\alpha^2 + \alpha\beta}{\alpha+\gamma}$ εὐχερῶς κατασκευάζεται (528), ἐκλαμβανόμενον ὡς $\alpha \times \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \gamma}$· ἄρα, τῆς ἐντεῦθεν ἐξιούσης δυνάμεως κληθείσης μ, ἔσαι $\alpha \times \frac{\alpha^2 + \alpha\beta}{\alpha+\gamma} = \alpha\mu$· ἐὰν ἂν γένηται α μὲν ὕψος, μ δὲ βάσις παραλληλογράμμου, ἔσαι $\alpha\mu$ τοῦ παραλληλογράμμου ἡ ἐπιφάνεια· τοὐναντίον ἄρα τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην ἐμφαίνει τὸ $\alpha\mu = \frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta}{\alpha+\gamma}$.

540. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ὡσαύτως κατασκευασθήσεται καὶ τὸ ποσὸν $\frac{\alpha^3 + \beta\gamma^2 + \delta^3}{\alpha+\gamma}$, ὑποτεθέντος $\beta\gamma = \alpha\mu$, καὶ $\delta^2 = \alpha\nu$· τηνικαῦτα γὰρ ὁ τύπος γενήσεται $\frac{\alpha^3 + \alpha\mu\gamma + \alpha\nu\delta}{\alpha+\gamma} = \alpha\left(\frac{\alpha^2 + \mu\gamma + \nu\delta}{\alpha+\gamma}\right)$· ἀλλ' ὁ ποιητὴς $\frac{\alpha^2 + \mu\gamma + \nu\delta}{\alpha + \gamma}$ κατασκευάζεται εὐχερῶς ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων (528), ὡσαύτως καὶ αἱ δυνάμεις τοῦ μ, καὶ ν· εὑρεθείσης ἂν τῆς τοῦ ποιητοῦ τούτου δυνάμεως, καὶ δηλωθείσης διὰ π, οὐδὲν ἄλλο λοιπὸν, ἢ κατασκευάσαι τὸ $\alpha \times \pi$, τοῦτ' ἔσι συςῆσαι παραλληλόγραμμον, οὗ ὕψος μὲν εἴη τὸ α, βάσις δὲ ἡ π.

541. Τελευταῖον δὲ, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν τοῦ ἀριθμητοῦ διαςάσεων τρισὶν ὑπερέχῃ τὰς τοῦ παρονομαςοῦ, ἡ πο-

σότης ἐμφαίνει ςερεὸν, ἐ τὴν κατασκευὴν ἀεὶ τρέπειν ἔξεσιν εἰς τὴν παραλληλεπιπέδε.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐὰν προκέηται εἰς κατασκευὴν ἡ ποσότης $\frac{\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2}{\alpha+\gamma}$, ἐκληπτέον αὐτὴν ὡς $\alpha\beta \times \frac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha+\gamma}$ κατασκευασθείσης δὲ κατὰ τὰ προειρημένα (528) τῆς ποσότητος $\frac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha+\gamma}$, ἐὰν ἡ ἐντεῦθεν προκύψασα γραμμὴ κληθῇ μ, τὸ ζήτημα ἀναχθήσεται εἰς τὸ κατασκευάσαι τὸ ποσὸν $\alpha\beta \times \mu$· ἀλλαμὴν $\alpha\beta$ ἐμφαίνει, ὡς εἴδομεν (540), παραλληλόγραμμον· ἐὰν ἄρα ἐπινοηθῇ παραλληλεπίπεδον, ἐ βάσις μὲν εἴη τὸ εἰρημένον παραλληλόγραμμον, ὕψος δὲ ἡ εὐθεῖα μ, ἡ τε παραλληλεπιπέδε ςερεότης ἐκδηλωθήσεται διὰ $\alpha\beta \times \mu = \frac{\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2}{\alpha+\gamma}$.

542. Καὶ τὰ μὲν εἰρημένα ἱκανά εἰσι πρὸς κατασκευὴν ἁπάσης ῥητῆς ποσότητος· ἴδωμεν δὲ ἤδη τῶν ῥιζικῶν ποσοτήτων τὰς δευτεροβαθμίες.

Δυνατὸν ἐν ταύτας κατασκευάζειν, ἤτοι διὰ μέσης ἀναλόγε δυεῖν εὐθειῶν δεδομένων, ἢ διὰ τῆς ὑποτεινέσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τριγώνε ὀρθογωνίε, ἢ τελευταῖον διὰ τῆς ἑτέρας τῶν δυεῖν λοιπῶν πλευρῶν τριγώνε ὀρθογωνίε.

543. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Κείσθω κατασκευάσαι τὸ ῥιζικὸν $\sqrt{\alpha\beta}$· ἤχθω τοίνυν εὐθεῖα (σχ. 13) ἀπέραντος ἡ ΑΒ, ἐφ' ἧς εἰλήφθω $\text{ΑΓ}=\alpha$, ἐ $\text{ΓΒ}=\beta$· ἐπὶ δὲ τῆς ὅλης ΑΒ, ὡς διαμέτρε, γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, ἐ ἐκ τε Δ ἐςάσθω κάθετος τῇ ΑΒ ἡ ΔΓ τελευτῶσα πρὸς τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Γ, ἥτις ἔςαι ἡ δύναμις τε ῥιζικε $\sqrt{\alpha\beta}$, τετ' ἔςιν εἰς εὕρεσιν τῆς δυνάμεως τε ῥιζικε ποσε $\sqrt{\alpha\beta}$ εὑρετέον μέσην ἀνάλογον τῶν δυεῖν

εὐθειῶν τῶν δὶ α, β ἐκδηλεμένων (347)· ἔςι γὰρ ΑΓ : ΓΔ : : ΓΔ : ΓΒ, τετ᾽ ἔςιν α : ΓΔ : : ΓΔ : β (343)· ἄρα $\Gamma\Delta^2 = \alpha\beta$, ϗ $\Gamma\Delta = \sqrt{\alpha\beta}$.

544. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἐὰν ᾖ ποσότης εἰς κατασκευὴν προκειμένη ἡ $\sqrt{(3\alpha\beta+\beta^2)}$, ἐκληπτέον ταύτην ὡς $\beta \times \sqrt{(3\alpha+\beta)}$ (Συμϛ. Λογ. 167), ϗ εὑρετέον μέσην ἀνάλογον τῶν δυεῖν εὐθειῶν $3\alpha+\beta$, ϗ β.

515 ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἐὰν ᾖ $\sqrt{(\alpha\alpha-\beta\beta)}$, ἐκληπτέον αὐτὴν ὡς $\sqrt{(\alpha+\beta)} \times \sqrt{(\alpha-\beta)}$, εἴτ᾽ ὂν $\sqrt{\overline{(\alpha+\beta) \times (\alpha-\beta)}}$, καὶ εὑρετέον μέσην ἀνάλογον τῶν $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$· ἐὰν δὲ ᾖ $\sqrt{(\alpha^2+\beta\gamma)}$, γενέσθω $\beta\gamma = \alpha\mu$· ἔςαι ὂν ἡ ποσότης $\sqrt{(\alpha^2+\alpha\mu)} = \sqrt{(\alpha+\mu)} \times \alpha$· εὑρεθήσεται ἄρα μέση ἀνάλογος τῶν $\alpha+\mu$, α προκατασκευασθείσης τῆς δυνάμεως $\mu = \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$ (528).

546. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ΄. Ἵνα κατασκευασθῇ ἡ $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$, δυνατὸν μὲν ὑποθεῖναι $\beta^2 = \alpha\mu$, ϗ κατασκευάσαι τὴν $\sqrt{(\alpha^2+\alpha\mu)}$, ὡς ἀνωτέρω (545)· δυνατὸν δὲ ϗ ἄλλως τὰ τῆς κατασκευῆς μετελθεῖν· ἤχθω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ (ϭχ. 14) $= \alpha$, ϗ ἐκ τῦ πέρατος αὐτῆς Α ἀνάχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ $\mathrm{A\Gamma} = \beta$· ἔςαι ὂν ἡ ἐπιζευχθεῖσα $\mathrm{B\Gamma} = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$· τῦ γὰρ ΑΒΓ τριγώνε ὀρθογωνίε ὄντος, ἔςι (349) $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 = \alpha^2 + \beta^2$· ἄρα $\mathrm{B\Gamma} = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$.

547. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Δυνατὸν δὲ διὰ τῦ ὀρθογωνίε τριγώνε ϗ τὴν ποσότητα $\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)}$ ἄλλως, ἢ ὡς ἀνωτέρω (545), κατασκευάσαι· ἤχθω γὰρ εὐθεῖα (ϭχ. 15) ἡ $\mathrm{AB} = \alpha$, ϗ ἐπὶ τῆς ΑΒ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΓΒ, ϗ ἐκ τῦ Α ἐπεζεύχθω χορδὴ ἡ ΑΓ =

β· τοιγαρ͂ν ἡ ἐπιζευχθεῖσα ΓΒ ἔςαι $=\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)}$· ὀρθογωνίου γὰρ ὄντος τε͂ ΑΓΒ τριγώνε (180) ἔςαι (349) $AB^2=A\Gamma^2+\Gamma B^2$· ἄρα $B\Gamma^2=AB^2-A\Gamma^2=\alpha^2-\beta^2$· ἄρα $B\Gamma=\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)}$.

548. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Δυνατὸν ὡσαύτως κατασκευάσαι ϗ τὴν ποσότητα $\sqrt{(\alpha^2+\beta\gamma)}$ ἄλλως, ἢ ὡς κατεσκεύασαι (545)· γενέσθω γὰρ $\beta\gamma=\mu^2$, ϗ $\sqrt{(\alpha^2+\mu^2)}$ κατεσκευάσθω, ὡς καταδέδεικται (546)· ἐξευρεῖν μέντοι χρὴ πρότερον τὴν τε͂ μ δύναμιν, ἥτις πορίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\mu^2=\beta\gamma$· ὅθεν $\mu=\sqrt{\beta\gamma}$· ἐςιν ἄρα ἡ μ μέση ἀνάλογος τῶν $\beta\gamma$ κατασκευαζομένη, ὡς ἀνωτέρω (543) εἴρηται.

549. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Ἐὰν δὲ πλειόνων ἢ δυοῖν ὅρων ὑπάρχῃ περιεκτικὸν τὸ ὑπόῤῥιζον ποσὸν, ἡ κατασκευὴ ἀναχθήσεται ἐπί τινας τῶν προαποδοθεισῶν μεθόδων διὰ μεταμορφώσεων· ἐὰν φέρ' εἰπεῖν ᾖ $\sqrt{(\alpha^2+\beta\gamma+\varepsilon\zeta)}$, γενέσθω $\beta\gamma=\alpha\mu$, ϗ $\varepsilon\zeta=\alpha\nu$· ὀκε͂ν ἡ ποσότης γενήσεται $\sqrt{(\alpha^2+\alpha\mu+\alpha\nu)}=\alpha\times\sqrt{(\alpha+\mu+\nu)}$, ἥτις κατασκευάζεται, λαμβανομένης μέσης ἀναλόγε τῶν α, $\alpha+\mu+\nu$, προκατασκευασθεισῶν ἀμέλει τῶν δυνάμεων μ, ν, εἴτ' ε͂ν $\mu=\dfrac{\beta\gamma}{\gamma}$, ϗ $\nu=\dfrac{\varepsilon\zeta}{\alpha}$· δυνάμεθα μέντοι ποιήσαντες $\beta\gamma=\mu^2$, ϗ $\varepsilon\zeta=\nu^2$ κατασκευάσαι τὴν ποσότητα $\sqrt{(\alpha^2+\mu^2+\nu^2)}$· ἀλλὰ γὰρ ἐὰν ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης ᾖ σειρὰ ποσοτήτων ὑπαρκτικῶν, οἷα, φέρ' εἰπεῖν, ἡ $\sqrt{(\alpha^2+\eta^2+\nu^2+\pi^2,\ \kappa\tau\lambda)}$, γενέσθω $\sqrt{(\alpha^2+\mu^2)}=\eta$, ϗ $\sqrt{(\eta^2+\nu^2)}=\iota$, καὶ $\sqrt{(\iota^2+\pi^2)}=\kappa$, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως· ϗ ἐπεὶ ἑκάςη τῶν δε τῶν ποσοτήτων διὰ τῆς πρὸ αὐτῆς προσδιορίζεται, ἐκ τῆς ἐςχάτης προκύψει ἡ δύναμις τῆς $\sqrt{(\alpha^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2+\kappa\tau\lambda.)}$· ἵνα δὲ κατασκευασθῶσιν,

ὡς οἷόν τε, ἁπλέστερον αἱ ποσότητες αὗται, ἐκληφθήτω ἑκάστη ὑποτείνουσα ὀρθὴν γωνίαν τριγώνου, ἄλλη μετ᾽ ἄλλην, ὡς πλευρά· τεθήτω φέρ᾽ εἰπεῖν (σχ. 16.) ΑΒ$=\alpha$, καὶ ἑστάθω κάθετος ΑΓ$=\mu$· ἔσται οὖν ἡ ἐπιζευχθεῖσα ΒΓ$=\eta$· ἑξῆς δ᾽ ἑστάθω ἐκ τοῦ Γ τῇ ΒΓ κάθετος ἡ ΓΔ$=\nu$· ἡ τοίνυν ἐπιζευγνυμένη ΒΔ ἔσται $=\iota$· ἐκ δὲ τοῦ πέρατος Δ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθείσης τῆς ΔΕ$=\pi$, ἔσται ΒΕ $=\kappa=\sqrt{(\alpha^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2)}$· ἐὰν δὲ μεταξὺ ὦσι καὶ τετράγωνα λειπτικά, πεπράχθω τὰ εἰρημένα εἰς κατασκευὴν τῆς ποσότητος $\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)}$ (547).

550. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Ε΄. Ἐὰν προκέηται κατασκευάσαι ποσότητα ἔχουσαν τύπον τοιόνδε $\frac{\alpha\sqrt{(\beta+\gamma)}}{\sqrt{(\delta+\varepsilon)}}$, πολλαπλασιασθεῖσα τόν τε ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ $\sqrt{(\delta+\varepsilon)}$, τραπήτω εἰς $\frac{\alpha\sqrt{(\beta+\gamma)(\delta+\varepsilon)}}{\delta+\varepsilon}$, καὶ ζητηθήτω μέση ἀνάλογος τῶν $\beta+\gamma$, καὶ $\delta+\varepsilon$· ταύτης δὲ κληθείσης μ, λοιπὸν ἔσται κατασκευάσαι τὴν ποσότητα $\frac{\alpha\mu}{\delta+\varepsilon}$, ὃ ῥαδίως δήπου ἐπιτηδευθήσεται (528).

551. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν γένει δ᾽ εἰπεῖν ἁπλούστατα πολλάκις αἱ συμβολικαὶ ποσότητες κατασκευάζονται διὰ τῶν ἐκτεθειμένων ἀρχῶν· τοῦτο μέντοι ἐκ σκέψεων τινῶν περιγίνεται ἰδιαιτέρων, οἰκείως ἐχουσῶν ἑκάστῳ ζητήματι, καὶ κανόσι περιορισθῆναι οὐκ ἔχει· σημειωτέον μόνον, ὅτι ἡ τῶν ῥιζικῶν ποσῶν κατασκευὴ ἀνάγεται εἰς τὸ εὑρίσκειν τετάρτας ἀναλόγους, καὶ μέσας ἀναλόγους, καὶ τρίγωνα κατασκευάζειν ὀρθογώνια· δυνατὸν ἀλλ᾽ οὖν ἔσθ᾽ ὅτε τὰς κατασκευὰς μᾶλλον ἢ ἧττον ἁπλᾶς, καὶ κομψάς, ἀπεργάζεσθαι, καθ᾽ ἣν ἂν ἑλοίμεθα μέθοδον, εἰς εὕρεσιν τῶνδε τῶν

μέσων ἀναλόγων· διὸ δὴ παρὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν ἐν (347) μεθόδυς ἄλλας δισσὰς ἐνταῦθα ὑποςρώσομεν τῦ εὑρίσκειν μέσην ἀνάλογον δυεῖν εὐθειῶν δεδομένων.

552. ΜΕΘΟΔΟΣ Α΄. Ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας μιᾶς τῶν δυεῖν δεδομένων γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ (σχ. 15.), ϗ ληφθέντος τῦ ΑΔ αὐτῆς μέρυς ἴσυ θατέρα, ἐςάθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΓ· ἐπιζευχθεῖσα ὖν ἡ ΑΓ ἔςαι μέση ἀνάλογος τῶν ΑΒ, ΑΔ· ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΓΒ, τὸ τρίγωνον ΑΓΒ ἐςιν ὀρθογώνιον (180), ϗ ἐκ τῦ ἀκολύθυ ἡ ΑΓ μέση ἐςὶν ἀνάλογος τῆς τε τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινύσης ΑΒ, ϗ τῦ τμήματος ΑΔ (342).

553. ΜΕΘΟΔΟΣ Β΄. Ἤχθω εὐθεῖα (σχ. 17.) ἡ ΑΒ ἴση τῇ μείζονι τῶν δυεῖν δεδομένων εὐθειῶν, ϗ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῆς μέρος τὸ ΑΓ τῇ ἐλάσσονι ἴσον, ϗ ἐπὶ τῦ λοιπῦ ΒΓ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΓΔΒ, ὗ ἤχθω ἡ ἁπτομένη ΑΔ (153), ἥτις ἐςὶ μέση ἀνάλογος τῶν ΑΒ, ΑΓ (331).

554. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δῆλον ἄρα, ὡς αἱ μὲν ῥηταὶ ποσότητες ἀεὶ δύνανται κατασκευάζεσθαι δι' εὐθειῶν, τῶν δὲ ῥιζικῶν αἱ δευτεροβάθμιοι, διὰ κύκλυ ϗ εὐθείας ἀλλήλοις συνερχομένων· αἱ μέντοι καθυπερτέρων βαθμῶν ῥιζικαὶ ποσότητες διὰ τῆς συνδρομῆς παντοίων καμπύλων γραμμῶν, περὶ ὧν ἐν τῇ ὑψηλοτέρᾳ Γεωμετρίᾳ ῥηθήσεται, κατασκευῆς τυγχάνυσι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Γεωμετρικῶν προβλημάτων ἐπίλυσις διὰ τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ.

555. Ἡ μέθοδος τοῦ γεωμετρικὰ προβλήματα διὰ τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ ἐπιλύειν *ἀνάλυσις γεωμετρικὴ* ἤκουσε· προαπαιτοῦνται δ' ἐν ταύτῃ ὡς γνώριμα ἔνιαι τῆς, περὶ ἧς ζητεῖται, ποσότητος ἰδιότητες, δι' ὧν κατασκευάζεται ἐξίσωσις ἡ τὸ ζήτημα ἐπιλύουσα· οὐχ' ὅπως δὲ, ἃ παρέδομεν ἐν τῷ δευτέρῳ τόμῳ (Συμβ. Λογ. Τμ. Γ.), ἀναγκαῖα ὑπάρχει ἐνταῦθα, ἀλλὰ δὴ καὶ ἄλλα, ἃ προϊοῦσι μᾶλλον καὶ μᾶλλον γνώριμα καταςαθήσεται.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ὑποδειγμάτων ἀνθαπτέον, ἵν' αὐτοῖς ἅλις προενασκηθέντες οἷοίποτε γενοίμεθα τὰ περὶ ἐπιλύσεως τῶν ἐν ταῖς καμπύλαις ζητουμένων ἀκριβῶς εἰδέναι.

556. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τῷ δοθέντι (σχ. 18.) τριγώνῳ ΕΗΙ, εἴτ' οὖν, οὗ αἵτε πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι καὶ τὸ ὕψος ἐγνωσμένα ὑπάρχουσι, τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ ἐγγράψαι.

ΛΥΣΙΣ. Τὸ πρόβλημα τόδε καλῶς ἐπιςήσασιν οὐδὲν βούλεται, ὅτι μὴ ἐπὶ τοῦ ὕψους ΕΖ σημεῖον ὁρίσαι τὸ Θ, δι' οὗ ἀχθεῖσα παράλληλος τῇ ΗΙ ἴση εἴη τῇ ΘΖ, εἴτ' οὖν διὰ συμβολικῶν ποσοτήτων διορίσαι τὴν ΑΒ εὐθεῖαν $=$ τῇ ΖΘ.

Ἔςω οὖν τὸ μὲν γνωςὸν ὕψος ΕΖ $=\alpha$, ἡ δὲ γνωςὴ βάσις ΑΙ $=\beta$· καὶ ἡ ἄγνωςος ΘΖ $=\chi$· οὐκοῦν ΕΘ $=\alpha-\chi$· ἐπεὶ τοίνυν ΑΒ παράλληλός ἐςι τῇ ΗΙ (318 321)· ἄρα ΕΖ : ΕΘ :: ΖΙ : ΘΒ :: ΗΙ : ΑΒ, εἴτ' ἐν ΕΖ : ΕΘ : : ΗΙ : ΑΒ, τῦτ᾽ ἔςιν $\alpha : \alpha - \chi : : \beta :$ ΑΒ, ἄρα ΑΒ $= \frac{\alpha\beta - \beta\chi}{\alpha}$ (Συμβ. λογ. 250.)· ἐπεὶ δὲ ΑΒ δέον εἶναι $=$ ΘΖ, ἔςαι $\frac{\alpha\beta - \beta\chi}{\alpha} = \chi$, ὅθεν διὰ τῶν καταδειχθέντων κανόνων (Συμβ. λογ. 415, κτλ.) $\chi = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$·

Εἰς κατασκευὴν δὲ ταύτης τῆς ποσότητος, ἐπάναγκες διορίσαι (528) τετάρτην ἀνάλογον ταῖς $\alpha+\beta$, β, α· ἤχθω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΖΟ $= \alpha + \beta =$ ΕΖ $+$ ΗΙ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΟ, ϗ εἰλήφθω ΖΜ $=$ ΗΙ $= \beta$, ϗ παράλληλος τῇ ΕΟ ἤχθω ἡ ΜΘ, ἥτις συμβαλῦσα τῇ ΕΖ διορίσει τὴν ΘΖ $= \chi$· ἐκ γὰρ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕΖΟ, ΘΖΜ, ἀποφέρεται ΖΟ : ΖΜ : ΖΕ : ΖΘ, εἴτ᾽ ῦν, $\alpha+\beta :$ $\beta : : \alpha :$ ΖΘ $= \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. Ο.Ε.Π.

557. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β. Δοθέντων (σχ. 19) τῶν ὑψῶν ΑΓ, ΒΔ δύω ῥαβδίων ΑΓ, ΒΔ, ἐπιπέδῳ ἐφιςαμένων, ϗ τῦ ΑΒ αὐτῶν ἀποςήματος, εὑρεῖν ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον τὸ Ε, ὃ ἴσον ἀπέχοι τῦ τε Γ, ϗ τῦ Δ.

ΛΥΣΙΣ. Εἰ μὲν ἐξείη ἐπιζεῦξαι εὐθεῖαν τὴν ΓΔ, ὐδὲν ἂν ἔδει ποιῆσαι, ἢ ἐγεῖραι ἐκ τῦ μέσυ τῆς ΓΔ κάθετον τὴν ΚΕ, προσδιορίσυσαν τὸ σημεῖον Ε (402)· εἰ δ᾽ ῦν· κατάγε μὴν τὸν ἐφεξῆς προσδιορισθήσεται τρόπον.

Ἔςω ΑΓ $= \alpha$, ϗ ΔΒ $= \beta$, ϗ ΑΒ $= \gamma$, ϗ ΑΕ $= \chi$· ὐκῦν ΒΕ $= \gamma - \chi$, ϗ ΓΕ $= \sqrt{(\alpha\alpha + \chi\chi)}$, (351)· ϗ ΔΕ $= \sqrt{(\beta\beta + (\gamma - \chi)^2)}$· ἀλλὰ ζητεῖται εἶναι ΓΕ $=$ ΔΕ· ἄρα $\sqrt{(\alpha\alpha + \chi\chi)} = \sqrt{(\beta\beta + (\gamma - \chi)^2)}$· ὅθεν τετραγωνιζομένων ἑκατέρου τῶν μελῶν, καὶ τῶν μεταξὺ πράξεων γινομένων, ἀποφέρεται $\chi = \frac{\gamma\gamma - \alpha\alpha + \beta\beta}{2\gamma} = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\cdot\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{\gamma}$· ἐντεῦθεν ἡ κατασκευὴ γενήσεται τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Διὰ τοῦ μέσου σημείου Λ τῆς ΑΒ ἤχθω ΙΛΘ παράλληλος τῇ ΑΓ, ἥτις συμβαλεῖ τῇ ΔΖ παραλλήλῳ τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Θ, καὶ εἰλήφθω ΛΙ $=\frac{1}{2}\gamma=$ ΛΑ, καὶ ΛΗ $=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$ ΓΖ, καὶ ΛΟ $=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\beta=$ ΘΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΙΟ, καὶ διὰ τοῦ Η ἤχθω τῇ ΙΟ παράλληλος ἡ ΗΕ, ἥτις συμβαλεῖ τῇ ΑΒ κατὰ τὸ ζητούμενον σημεῖον Ε· καὶ γὰρ ΛΙ : ΛΟ :: ΛΗ : ΛΕ, τουτ᾿ ἔστι $\frac{1}{2}\gamma : \frac{1}{2}(\alpha+\beta) :: \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$: ΛΕ· ἄρα ΛΕ $= \frac{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\times\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\frac{1}{2}\gamma} = \frac{1}{2}\frac{(\alpha+\beta)\times(\alpha-\beta)}{\gamma}$,

ἀλλὰ ΑΕ $=$ ΑΛ $-$ ΛΕ $= \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\frac{(\alpha+\beta)\times(\alpha-\beta)}{\gamma}$, ἄρα ΑΕ $=\chi$· Ο Ε Π.

558. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τρίτον δὲ ὑπόδειγμα τοιόνδε ἐφεξῆς ἐκθησόμεθα, ὃ δώσει κατιδεῖν, ὅπως ἐμπερικλείειν ἐξισώσεσι καθολικαῖς δυνησόμεθα προβλήματα γεωμετρικά, καὶ ὅπως διὰ διαφόρων προπαρασκευῶν τῶν ἐξισώσεων ἐξέσται καινὰς ἰδιότητας ἀνακαλύπτειν.

559. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Τριγώνου τοῦ ΑΒΓ (σχ. 20) δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν, εὑρεῖν τὰ τμήματα ΑΔ, ΔΓ, καὶ τὴν τέμνουσαν κάθετον ΒΔ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπειδὴ (349) ΒΔ$^2+$ΓΔ$^2=$ΒΓ^2, καὶ ΑΔ^2 $+$ ΒΔ$^2=$ΑΒ^2, ἐὰν ῥηθῇ ΒΑ $=\upsilon$, καὶ ΓΔ $=\chi$, καὶ ΒΓ $=\alpha$, καὶ ΑΒ $=\beta$, καὶ ΑΓ $=\gamma$, καὶ δὴ ΑΔ $=$ ΑΓ $-$ ΓΔ

$=\gamma-\chi$, ἀποφέρονται δύω ἐξισώσεις, $\chi\chi+\upsilon\upsilon=\alpha\alpha$, ϗ $\gamma\gamma-2\gamma\chi+\chi\chi+\upsilon\upsilon=\beta\beta$.

Ἐπεὶ δὲ $\chi\chi$ ϗ $\upsilon\upsilon$ ἐν ἑκατέρᾳ ἐξισώσει ὐδένα συνεργὸν ἔχεσιν, ἢ τὴν μονάδα, ἀφῃρήσθω ἡ δευτέρα ἀπὸ τῆς πρώτης, ϗ δὴ καταλειφθήσεται $2\gamma\chi-\gamma\gamma=\alpha\alpha-\beta\beta$· ὅθεν $\chi=\frac{\alpha\alpha-\beta\beta+\gamma\gamma}{2\gamma}=\frac{\alpha\alpha-\beta\beta}{2\gamma}+\frac{1}{2}\gamma$, ὃ γράψαι ὕτω δυνάμεθα $\chi=\frac{1}{2}\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\gamma}+\frac{1}{2}\gamma$.

Ἐν τύτῳ ὖν τῷ τύπῳ αὐτίκα σαφὲς, ὡς εἰς εὕρεσιν τῆς χ ἐπάναγκες (528) τετάρτην λαβεῖν ἀνάλογον πρὸς τὰς γ, $\alpha+\beta$, ϗ $\alpha-\beta$, ϗ ταύτης λαβόντας τὸ ἥμισυ, προσθεῖναι αὐτῷ τὸ $\frac{1}{2}\gamma$, εἴτ᾽ ὖν $\frac{1}{2}$ ΑΓ.

Ἀλλὰ γὰρ ἐκ τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων πολλὰ ϗ ἄλλα ἔξεσαι συναγαγεῖν, ὧν ἔνια τοῖς πρωτοπείρων ὀφθαλμοῖς ὑποβαλεῖν ὐχ᾽ ὅπως ἐπωφελὲς ἀλλὰ δὴ ϗ ἀναγκαῖον ἴσμεν ἑπόμενον.

560. Α΄. Ἡ ἐξίσωσις $2\gamma\chi-\gamma\gamma=\alpha\alpha-\beta\beta$ ταὐτὸν δύναται, ὃ ϗ $\gamma\cdot(2\chi-\gamma)=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$· ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως σαφὲς προϊέναι ἀναλογίαν τοιάνδε $\gamma:\alpha+\beta::\alpha-\beta:2\chi-\gamma$· ἀλλὰ $2\chi-\gamma=\chi-(\gamma-\chi)$· ἄρα ἀντὶ τῶν συμβολικῶν ἐκθέσεων ἀντικατασαθεισῶν τῶν αὐταῖς ἐμφαινομένων εὐθειῶν, ἔσαι $\mathrm{A}\Gamma:\mathrm{B}\Gamma+\mathrm{A}\Gamma::\mathrm{B}\Gamma-\mathrm{A}\Gamma:\Gamma\Delta-\mathrm{A}\Delta$, ὅπερ ταὐτόν ἐσιν ἀκριβῶς τῷ ἀποδειχθέντι (500).

561. Β΄. Ἐὰν κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διασήματι δὲ τῷ ΒΓ τόξον γραφῇ τὸ ΒΟ, ϗ ἐπιζευχθῇ ἡ χορδὴ ΒΟ, ἔσαι $\mathrm{B}\Delta^2+\Delta\mathrm{O}^2=\mathrm{BO}^2$· ἀλλὰ $\Delta\mathrm{O}=\Gamma\mathrm{O}-\Gamma\Delta=\mathrm{B}\Gamma-\Gamma\Delta=\alpha-\chi$· ἄρα $\mathrm{BO}^2=\upsilon\upsilon+\alpha\alpha-2\alpha\chi+\chi\chi$· εὕρηται δὲ ἀνω-

τέρω (459) $\upsilon\upsilon + \chi\chi = \alpha\alpha$· ἄρα $BO^2 = 2\alpha\alpha - 2\alpha\chi = 2\alpha(\alpha - \chi)$· τεθείσης ὖν ἀντὶ χ τῆς αὐτῆ δυνάμεως $\frac{\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma}{2\gamma}$, πορισθήσεται $BO^2 = 2\alpha\left(\alpha + \frac{\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\gamma}{2\gamma}\right) = 2\alpha\,\frac{(2\alpha\gamma - \alpha\alpha - \gamma\gamma + \beta\beta)}{2\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} \times [\beta\beta - (\alpha - \gamma)^2]$, εἴγε $2\alpha\gamma - \alpha\alpha - \gamma\gamma = -(\alpha\alpha - 2\alpha\gamma + \gamma\gamma) = -(\alpha - \gamma)^2$· ἀλλ' ἐκληφθείσης $\alpha - \gamma$ ἀντὶ μιᾶς μόνης ποσότητος, ἀποφέρεται $\beta\beta - (\alpha - \gamma)^2 = (\beta + \alpha - \gamma)(\beta - \alpha + \gamma)$· ἄρα $BO^2 = \frac{\alpha}{\gamma}(\beta + \alpha - \gamma)(\beta - \alpha + \gamma)$, ὅπερ παραςῆσαι δυνάμεθα διὰ τῆ δε τῆ τύπȣ $BO^2 = \frac{\alpha}{\gamma}(\alpha + \beta + \gamma - 2\gamma)(\alpha + \beta + \gamma - 2\alpha)$· τοιγαρῦν ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν κληθῇ $2\varkappa$, ἔςαι $BO^2 = \frac{\alpha}{\gamma}(2\varkappa - 2\gamma)(2\varkappa - 2\alpha) = 4\frac{\alpha}{\gamma}(\varkappa - \gamma)(\varkappa - \alpha)$· ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ τῆ Γ κάθετος ἀχθῇ τῇ ΟΒ ἡ ΓΙ, ἔςαι (496) ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΓΙΟ ἡ ἀναλογία ΓΟ : ΟΙ :: Η : ἡμ. ΟΓΙ, τȣτ' ἔςιν $\alpha : \frac{1}{2}BO :: H :$ ἡμ. ΟΓΙ· ἄρα $\frac{1}{2}BO = \frac{\alpha\,\text{ἡμ. ΟΓΙ}}{H}$, ἡ $BO = \frac{2\alpha\,\text{ἡμ ΟΓΙ}}{H}$, ϗ δὴ $BO^2 = \frac{4\alpha^2\,(\text{ἡμ. ΟΓΙ})^2}{H^2}$· ἐκ δὴ τῶν δύω δυνάμεων τȣ̃ BO^2 ἀποφέρεται $\frac{4\alpha}{H^2}(\text{ἡμ. ΟΓΙ})^2 = \frac{4\alpha}{\gamma}(\varkappa - \gamma)(\varkappa - \alpha)$· διαιρέσει δὲ διὰ 4α, ϗ ἄρσει τῶν παρονομαςῶν, ἔσεται $\alpha\gamma\,(\text{ἡμ. ΟΓΙ})^2 = H^2\,(\varkappa - \gamma)(\varkappa - \alpha)$· ἐντεῦθεν ἄρα

$\alpha\gamma : (\varkappa-\gamma)(\varkappa-\alpha) :: \mathrm{H}^2 : (\acute{\eta}\mu.\ \mathrm{O\Gamma I})^2$· ὅθεν ἐκπηγάζει κανὼν ἁπλῶς εἰς θήρευσιν γωνίας ἡςινοσοῦν τριγώνου εὐθυγράμμου, οὗ αἱ τρεῖς δέδονται πλευραί· ἀμέλειτοι

„Τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν τριῶν πλευρῶν ἀφῃρήσθω „ἄλλη μετ' ἄλλην ἑκατέρα τῶν τὴν ζητουμένην γωνίαν περιε- „χουσῶν πλευρῶν· ὅθεν ἐξίασι δύω κατάλοιπα· ἑξῆς δὲ „γενέσθω ἥδε ἡ ἀναλογία : τὸ γινόμενον ὑπὸ δύω πλευρῶν „τῶν τὴν ζητουμένην γωνίαν περιεχουσῶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν „δύω καταλοίπων γινόμενον, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος τε- „τράγωνον πρὸς τέτρατόν τινα ὅρον, ὅς ἔςαι τὸ ἀπὸ τοῦ ἡ- „μιτόνου τῆς ἡμισείας ζητουμένης γωνίας τετράγωνον."

562. Γ. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon\upsilon + \chi\chi = \alpha\alpha$ ἀποφέρεται $\upsilon\upsilon = \alpha\alpha - \chi\chi = (\alpha+\chi)(\alpha-\chi)$· ἀντὶ ἄρα τοῦ χ ἀντικαταςάσεως τῆς αὐτοῦ δυνάμεως προκύψει $\upsilon\upsilon =$

$$\left(\alpha + \frac{\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma}{2\gamma}\right)\left(\alpha + \frac{\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\gamma}{2\gamma}\right) =$$

$$\left(\frac{2\alpha\gamma + \alpha\alpha + \gamma\gamma - \beta\beta}{2\gamma}\right) \times \left(\frac{2\alpha\gamma - \alpha\alpha - \gamma\gamma + \beta\beta}{2\gamma}\right)$$

$$= \left(\frac{(\alpha+\gamma)^2 - \beta\beta}{2\gamma}\right) \times \left(\frac{\beta\beta - (\alpha-\gamma)^2}{2\gamma}\right) =$$

$$\frac{(\alpha+\gamma+\beta)(\alpha+\gamma-\beta)}{2\gamma} \times \frac{(\beta+\alpha-\gamma)\times(\beta-\alpha+\gamma)}{2\gamma}$$

ἄρα $4\gamma\gamma\upsilon\upsilon = (\alpha+\gamma+\beta)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\alpha-\gamma)(\beta-\alpha+\gamma)$, ἢ $4\gamma\gamma\upsilon\upsilon = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma-2\beta)(\alpha+\beta+\gamma-2\gamma)(\alpha+\beta+\gamma-2\alpha)$· τεθέντος οὖν $2\varkappa = \alpha+\beta+\gamma$, ἔξομεν $4\gamma\gamma\upsilon\upsilon = 2\varkappa\cdot(2\varkappa-2\beta)(2\varkappa-2\gamma)(2\varkappa-2\alpha)$, ἢ $4\gamma\gamma\upsilon\upsilon = 16\,\varkappa\cdot(\varkappa-\alpha)(\varkappa-\beta)(\varkappa-\gamma)$· διαιρέσει δὲ διὰ 16 καὶ ἀναγωγῇ, καὶ ἐξαγωγῇ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, προέρχεται $\frac{\gamma\upsilon}{2} = \sqrt{[\varkappa \cdot (\varkappa - \alpha)\ (\varkappa - \beta)}$ $(\varkappa - \gamma)]$· ἀλλὰ $\frac{\gamma\upsilon}{2}, = \frac{\mathrm{A\Gamma \times B\Delta}}{2}$, ἐστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἄρα „Τριγώνου παντὸς, οὗ δέδονται αἱ τρεῖς „πλευραὶ, ἵν' εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια, τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν „πλευρῶν ἀφαιρετέον ἄλλην μετ' ἄλλην ἑκάστην τῶν τριῶν „πλευρῶν, καὶ πολλαπλασιαστέον τὰ κατάλοιπα ἐπ' ἄλληλά „τε, καὶ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα, τοῦ δὲ γινομένου ἐξακτέον ῥί- „ζαν τὴν τετραγώνειον."

563. Δ'. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $2\gamma\chi - \gamma\gamma = \alpha\alpha - \beta\beta$ πρόεισι $\beta\beta = \alpha\alpha + \gamma\gamma - 2\gamma\chi$ (σχ. 21)· ἐὰν μέντοι ἡ κάθετος ἐκτὸς τῆς βάσεως πίπτῃ, εὑρεθείη ἂν, τηρουμένων τῶν αὐτῶν ὀνομάτων, $\upsilon\upsilon + \chi\chi = \alpha\alpha$, καὶ $\beta\beta = \upsilon\upsilon + \gamma\gamma + 2\gamma\chi + \chi\chi$· ἡ γὰρ ΑΔ, τὸ πρὶν οὖσα $\gamma - \chi$, ἐστι τανῦν $\gamma + \chi$· οὐκοῦν ἀφαιρεθείσης τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἀπὸ τῆς δευτέρας, πρόεισι $\gamma\gamma + 2\gamma\chi = \beta\beta - \alpha\alpha$, ἢ $\gamma\,(\gamma + 2\chi) = (\beta + \alpha) \times (\beta - \alpha)$· ὅθεν $\gamma : \beta + \alpha :: \beta - \alpha : \gamma + 2\chi$· ἀλλὰ $\gamma + 2\chi = \chi + \gamma + \chi = \mathrm{\Gamma\Delta + A\Delta}$· ἄρα καὶ $\mathrm{A\Gamma : AB + B\Gamma :: AB - B\Gamma : \Gamma\Delta + A\Delta}$, ὃ καὶ ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει δείκνυσι τὴν καθολικότητα τῆς ἀποδειχθείσης προτάσεως (500).

564. Ε'. Ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως $\gamma\gamma + 2\gamma\chi = \beta\beta - \alpha\alpha$ προκύπτει $\beta\beta = \alpha\alpha + \gamma\gamma + 2\gamma\chi$· ταύτην οὖν τὴν ἐξίσωσιν παρατιθεμένοις πρὸς τὴν $\beta\beta = \alpha\alpha + \gamma\gamma - 2\gamma\chi$, τὴν ἐπὶ τοῦ 20 σχήματος, κατάδηλον, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Γ πλευρᾶς ΑΒ τετράγωνον $\beta\beta$ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀθροίσματος $\alpha\alpha + \gamma\gamma$ τῶν ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν τετραγώνων τῷ $2\gamma\chi$· τοὐναντίον δὲ τὸ ἀπὸ

τῆς ὑποτεινούσης τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν (σχ. 21) πλευρᾶς ΑΒ τετράγωνον ββ δύναται αα + γγ + 2γχ, τοῦτ᾽ ἔστι μεῖζόν ἐστι τοῦ εἰρημένου ἀθροίσματος τῇ αὐτῇ ποσότητι 2γχ· ἑκάτερα δὲ ταῦτα, ἡμῖν μὲν ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἄχρηστα ἐγένοντο· τῷ δ᾽ Εὐκλείδῃ τὸ μὲν πρῶτον ἡ ΙΓ΄. τὸ δὲ δεύτερον ἡ ΙΒ΄. καταριθμοῦνται τῶν τοῦ δευτέρου βιβλίου προτάσεων.

565. ς΄. Αἱ δύω ἐξισώσεις $\beta\beta = \alpha\gamma + \gamma\gamma - 2\gamma\chi$ καὶ $\beta\beta = \alpha\alpha + \gamma\gamma + 2\gamma\chi$ δεικνῦσι τὴν τῶν λειπτικῶν πρὸς τὰς ὑπαρκτικὰς ποσότητας ἐναντιότητα· ἐὰν μὲν γὰρ (σχ. 20, 21) ἡ κάθετος ΒΔ ἐπὶ τῆς βάσεως πίπτῃ τοῦ τριγώνου, τὸ τμῆμα ΓΔ πρὸς δεξιὰν κεῖται τῆς καθέτου· ἐὰν δ᾽ ἐκτὸς, πρὸς ἀριστεράν· ἀλλ᾽ ἐν ταῖς δυσὶν ἐξισώσεσιν ὁ ὅρος 2γχ ἔχει ἀληθῶς σύμβολα ἐναντία· ἄρα τἀναντίον, ὁποῖοι ἂν εἶεν οἱ λογισμοὶ ἐπὶ θατέρου τῶν δύω τριγώνων, ἕξομεν τὰ συμβαίνοντα ταῖς ἀναλόγοις περιπτώσεσι θατέρου, ἀπονέμοντες σύμβολα ἐναντία τοῖς ἐναντίως ἔχουσι θέσεως μέρεσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας· ἀλλ᾽ ἐπὶ τῶν ἤδη εἰρημένων (561, 562)· τὸ ΓΔ τμῆμα οὐδεμίαν ἔχει χώραν· οἱ δύω ἄρα κανόνες ἐκεῖνοι καθόλου ἐπαληθεύουσι παντὶ εὐθυγράμμου τριγώνου εἴδει.

566. ΣΧΟΛΙΟΝ. Καίπερ ἐν γένει τοσούτῳ ῥᾶον τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα ἐν ἐξισώσεσι περικλείονται, ὅσῳ περ ἂν πλείους ἴσμεν ἰδιότητας τῶν γραμμῶν· ἐπείπερ ὅμως αὐτὸς ὁ συμβολικὸς λογισμὸς ἀνιχνεύει τὰς ἰδιότητας ταύτας, ὧν ἐπιδεόμεθα προτάσεων, λίαν εἰσὶν ὀλιγάριθμοι. Τὰ γὰρ „ὅτι τῶν ὁμοίων τριγώνων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογον ἔχουσι“ καὶ „τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετραγώνοις“, κρηπῖς ταῦτα ὑφέστηκε τῆς τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ τῇ Γεωμετρίᾳ

προσεφαρμόσεως. Α'λλὰ κατὰ τὴν διάφορον φύσιν τῶν ζητημάτων, ἔξεςαι διαφόρως χρήσασθαι ταύταις ταῖς προτάσεσιν· ᾗ ἦν μὲν ῥάςη ἡ χρῆσις τῶν ἀναλογιῶν ἐν τῷ ἄρτι διαληφθέντι προβλήματι· ἑξῆς δὲ, ὧν ἐποριζόμεθα πρὸς λογισμὸν τῆς γωνίας διὰ τῶν τριῶν πλευρῶν, ᾗ τῆς χορδῆς (σχ. 20) ΒΟ διὰ τοῦ γραφέντος τόξου ΒΟ, ᾗ τοῦ τῆς ὑπὸ ΟΓΙ γωνίας ἡμιτόνου, αὐτίκα δυσχερὴς ἐπιεικῶς προσέπιπτεν ἡ κατασκευή· εἰσὶ δὲ ᾗ ἄλλα προβλήματα, ἐφ' οἷς, εἴτε εὐθείας προαγαγεῖν δέοι, ἐς τ' ἂν ἄλλαις συμβάλωσι, εἴτε παραλλήλους πρὸς ἑτέρας, ἢ γωνίαν δεδομένην μεθ' ἑτέρων ποιούσας, δυσχερῶς τὰ τῆς κατασκευῆς ἐπιτηδεύεται· συνελόντι δ' εἰπεῖν ἡ τὴν τυχοῦσαν ἀπαιτεῖ ἀγχίνοιαν ᾗ κρίσιν ἐν τῇ αἱρέσει τῶν κατασκευαςικῶν μέσων ἢ τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ τῇ Γεωμετρίᾳ προσοικείωσις· ἐπεὶ δὲ τῆς κρίσεως ταύτης διὰ τῆς χρήσεως ἐγκρατεῖς γινόμεθα, φέρε παντοίοις ἄλλοις ὑποδείγμασι τοὺς τὴν ἀνάλυσιν μελετῶντας ἐγγυμνάσωμεν.

567. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Α'πὸ σημείου τοῦ Α (σχ. 22), οὗ δέδοται ἡ θέσις ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΗΔ, ΔΙ, περιεχούσας γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΗΔΙ, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν, ὅπως τὸ συνιςάμενον τρίγωνον ΕΔΘ, ἴσον ᾖ τῷ δοθέντι τετραγώνῳ γγ.

ΛΥΣΙΣ. Ε'κ τοῦ Α ἤχθω τῇ ΔΗ παράλληλος ἡ ΑΒ, ᾗ ἡ ΑΓ ἐςάθω κάθετος τῇ ΔΘ προαχθείσῃ, ᾗ ἐκ τοῦ Ε, καθ' ὃ ἡ ΑΕΘ συναντᾷ τῇ ΔΗ κατήχθω κάθετος ἡ ΕΖ· γνωςῶν οὖν γενομένων τῶν ΕΖ, ΔΘ, ἔςαι $\frac{ΕΖ\,.\,ΔΘ}{2} =$ ΕΔΘ $= γγ$· ᾗ δὴ ἔςω ΔΘ $= χ$· τὴν δὲ ΕΖ σκεπτέον, εἰ ἄρα διορίσαι δυνάμεθα, εἴτε διὰ τῆς $χ$, εἴτε διὰ τῶν ἐν τῷ προβλήματι δεδομένων· ἐπεὶ δὲ γνωστή ἐστιν ἡ θέσις τοῦ Α σημείου, ἐκληπτέον ὡς γνωστὸν τὸ ἀπόστημα ΒΔ, δι᾽ οὗ δίεισιν ἡ παράλληλος ΑΒ, καὶ δὴ καὶ τὸ τοῦ Α ἀπὸ τῆς ΔΘ προεκβληθείσης ἀπόστημα ΑΓ. Τοιγαροῦν κληθήτω $ΒΔ = \alpha$, καὶ $ΑΓ = \beta$· ἐκ μὲν οὖν τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΘ, ΕΔΘ ἀποφέρεται $ΒΘ : ΔΘ :: ΑΘ : ΕΘ$· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων καὶ αὐτῶν τριγώνων ΑΓΘ, ΕΖΘ πρόεισιν $ΑΘ : ΕΘ :: ΑΓ : ΕΖ$· ἄρα $ΒΘ : ΔΘ :: ΑΓ : ΕΖ$, τοῦτ᾽ ἔστιν $\alpha + \chi : \chi :: \beta : ΕΖ = \frac{\beta\chi}{\alpha + \chi}$, ἐπεὶ δὲ ζητεῖται εἶναι $ΕΔΘ = \gamma\gamma$, δέον ὑπάρχειν $ΕΖ \times \frac{ΔΘ}{2} = \frac{\beta\chi}{\alpha+\chi} \times \frac{\chi}{2} = \gamma\gamma$, εἴτ᾽ οὖν $\frac{\beta\chi\chi}{2\alpha + 2\chi} = \gamma\gamma$, ἤ, ἀφανισμῷ τοῦ παρονομαστοῦ, $\beta\chi\chi = 2\alpha\gamma\gamma + 2\gamma\gamma\chi$.

Ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως ἐπιλυθείσης κατὰ τοὺς κανόνας τῶν δευτεροβαθμίων προβλημάτων (453 κτ.)· προέρχονται δύο δυνάμεις $\chi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} + \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta})}$, ὧν ἄχρηστος ἐνταῦθα ἡ τὸ — ἔχουσα.

Εἰς δὲ κατασκευὴν τοῦ προβλήματος μετηνέχθω ἡ ἔκθεσις εἰς τὸν ἐφεξῆς τύπον $\chi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} + \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} + 2\alpha)\frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$. τούτου τεθέντος ἤχθω ἀπέραντος εὐθεῖα (σχ. 23) ἡ ΠΞ, καὶ ἀπό τινος αὐτῆς σημείου τοῦ Γ ἐστάσθω κάθετος ἡ $ΑΓ = \beta$, καὶ εἰλήφθων ἐπὶ τῶν ΓΑ καὶ ΓΠ αἱ εὐθεῖαι ΓΟ, ΓΜ ἴση ἑκατέρα τῇ τοῦ δοθέντος τετραγώνου πλευρᾷ γ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΜ ἤχθω παρ᾽ αὐτὴν διὰ τοῦ σημείου Ο παράλληλος ἡ ΟΝ, ἥτις διορίσει τὴν ΓΝ δύναμιν τοῦ $\frac{\gamma\gamma}{\beta}$, εἴγε τῶν τριγώνων ΑΓΜ, ΟΓΝ ὁμοίων ὄντων, ἐστὶν ΑΓ : ΟΓ :: ΓΜ : ΓΝ, εἴτ' οὖν $\beta : \gamma :: \gamma :$ ΓΝ $= \frac{\gamma\gamma}{\beta}$· τοιγαροῦν ἡ δύναμις τοῦ χ ἀποβαίνει $\chi =$ ΓΝ $+ \surd[($ΓΝ$ + 2\alpha) \times$ ΓΝ$]$· ἀλλὰ $\surd[($ΓΝ$+ 2\alpha) \times$ ΓΝ$]$ ἐμφαίνει, ὡς δῆλον, μέσην ἀνάλογον πρὸς τὰς ΓΝ καὶ ΓΝ $+ 2\alpha$· οὐδὲν οὖν λείπεται ἄλλο, ἢ διορίσαι ταύτην τὴν μέσην ἀνάλογον, καὶ ταύτην προσθεῖναι τῇ ΓΝ· πρὸς δὲ τοῦτο, ἐπὶ τῆς ΝΓ προαχθείσης εἰλήφθω ΓΞ $= 2\alpha$, καὶ ἐπὶ τῆς ΝΞ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΝΥΞ συμβάλλον τῇ ΓΑ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Υ, καὶ ἡ ΝΥ χορδὴ μετηνέχθω ἐκ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ Π· οὐκοῦν ἔσται ΓΠ δύναμις τοῦ χ· καὶ γὰρ ΝΥ ἐστὶ μέση ἀνάλογος τῶν ΝΓ, ΝΞ (522), εἴτ' οὖν τῶν ΓΝ καὶ ΓΝ $+ 2\alpha$· ἄρα ΝΥ, ἢ ΠΝ $= \surd[($ΓΝ$+ 2\alpha) \times$ΓΝ$]$· ἄρα ΓΠ $=$ ΓΝ $+$ ΠΝ $=$ ΓΝ $+ \surd[($ΓΝ$ + 2\alpha) \times$ ΓΝ$] = \chi$· τοιγαροῦν μετενεγκόντες τὴν ΓΠ ἐκ τοῦ (σχ. 22.) Δ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ εὑρόντες τὸ σημεῖον Θ, δι' αὐτοῦ καὶ διὰ τοῦ Α ἀγαγόντες τὴν ΑΘ, ἕξομεν τὸ τρίγωνον ΕΔΘ $= \gamma\gamma$. ΟΕΠ.

568. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Βουλομένοις δὲ εἰδέναι, ὃ δύναται ὁ δεύτερος τύπος τοῦ χ, τοῦτ' ἔστι $\chi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} - \surd[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} + 2\alpha)\frac{\gamma\gamma}{\beta}]$, σημειωτέον, ὅτι μὴ διορίσαντες, εἰ περὶ τῆς ὑπὸ ΕΔΘ γωνίας τὸ ζήτημα γίνοιτο, ἢ περὶ τῆς ἐκείνῃ ἴσης Ε'ΔΘ' τῆς ὑπὸ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ΘΔ, ΕΔ προαχθεισῶν περιεχομένης (99), ἡ δευτέρα ἐπίλυσις διαπερανεῖ τὰ αὐτὰ ἐπὶ τῆς Ε'ΔΘ' γωνίας, ἀξίᾳ καὶ ἐπὶ τῆς

ΕΔΘ ἡ πρώτη· καὶ γὰρ κληθείσης χ τῆς ΔΘ', καὶ τῶν αὐτῶν ὀνομάτων τηρηθέντων, ἐπεὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΘ', Ε'ΔΘ', διὰ τὰς ΑΒ, ΔΕ' παραλλήλους, εἰσὶν ὅμοια (135, 99, 218), προέρχεται ΒΘ : ΔΘ' :: ΑΘ' : ΘΕ' καὶ καταγομένης τῆς καθέτου Ε'Ζ' τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΘ', Ε'Ζ'Θ' διδόασιν ΑΘ' : Θ'Ε' :: ΑΓ : Ζ'Ε'· ἄρα ΒΘ' : ΔΘ' :: ΑΓ : Ζ'Ε', τοῦτ' ἔστιν, $\alpha - \chi : \chi :: \beta : Z'E' = \frac{\beta\chi}{\alpha - \chi}$· ἐπεὶ οὖν ζητεῖται εἶναι Θ'Ε'Δ $= \gamma\gamma$, ἄρα ἀνάγκη ὑπάρχειν $\frac{\beta\chi}{\alpha - \chi} \times \frac{\chi}{2} = \gamma\gamma$· ὅθεν $\beta\chi\chi = 2\alpha\gamma\gamma - 2\gamma\gamma\chi$, καὶ ἑπομένως $\chi = \frac{-\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} + \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta})}$ δυνάμεις τῆς χ παρὰ τοσοῦτον τῶν ἐν τῇ προτέρᾳ περιπτώσει διενηνόχυται, ὅσον ἐκεῖναι ἀντίθετα σύμβολα τῶν κατὰ ταύτας ἔχουσι· καί γε εἰκότως· ἡ γὰρ χ ποσότης ἐκ τῶν ἀντιθέτων εἴληπται μερῶν· καινὴ αὕτη ἐμπέδωσις τοῦ τὰς λειπτικὰς τῶν ποσοτήτων κατ' ἔννοιαν ἀντίθετον λαμβάνεσθαι ταῖς ὑπαρκτικαῖς (565).

Ἡ δέ γε ἀποδοθεῖσα ἐπὶ τῆς προτέρας περιπτώσεως κατασκευὴ εὔχρηστος κἀνταῦθα, εἰ μόνον ἡ ΝΤ. (σχ. 23) ἐκ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ Κ πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Ξ μετενεχθείη· οὕτω γὰρ ἡ ἐκεῖθι οὖσα ΓΠ τοῦ χ δύναμις ἐνταῦθα ἔσεται ΓΚ· ἡ γὰρ δύναμις τοῦ χ, ἡ ταύτῃ τῇ περιπτώσει συνᾴδουσα, ἐστι $\chi = -\frac{\gamma\gamma}{\beta} + \sqrt{(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} + \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta})}$, ἢ $\chi = -\frac{\gamma\gamma}{\beta} + \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} + 2\alpha) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$, τοῦτ' ἔστι $\chi = -\Gamma N + \sqrt{[(\Gamma N + 2\alpha) \times \Gamma N]}$· ἐπεὶ οὖν $NT = \sqrt{[(\Gamma N + 2\alpha) \times \Gamma N]}$, ἕξομεν $\chi = -\Gamma N + NT = -\Gamma N + NK = \Gamma K$· τοιγαροῦν τὴν ΓΚ ἐκ τοῦ Δ (σχ. 22) ἐπὶ τὸ Θ' μετενεγκόντες, ᾗ ἐκ τῦ Α διὰ τῦ ὅτως ὁρισθέντος σημείυ Θ^1 ἀγαγόντες τὴν $A\Theta^1E^1$, ἕξομεν τὸ τρίγωνον $\Theta^1\Delta E^1$ ἴσον τῷ τετραγώνῳ $\gamma\gamma$· ᾗ δὴ αὕτη δευτέρα ὑπάρχει τῦ προβλήματος ἐπίλυσις.

569. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ τὸ σημεῖον Α κείμενον ἔνερθεν τῆς εὐθείας ΒΘ (σχ. 24), ἡ ποσότης β, εἴτ' ὖν ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔσεται λειπτική, ᾗ δὴ ἑκατέρα τῶν δύω προτέρων δυνάμεων τῆς χ ἔςαι $\chi = -\frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} - \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta})}$, ἢ $\chi = -\frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$, ἔνθα κατάδηλον, ὅτι τὸ πρόβλημα ἀδύνατον εἴη, εἰ $2\alpha < \frac{\gamma\gamma}{\beta}$ ὑπάρχοι· ἐπεὶ τηνικαῦτα ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης ἔςαι λειπτική, ᾗ τῦ χ αἱ δυνάμεις ἀνύπαρκτοι (Συμ. Λογ. 175)· ἀλλὰ τῦτο μὲν ὡς πρὸς τὴν γωνίαν ΗΔΙ, πρὸς μέντοι τὴν αὐτῇ ἴσην $E^1\Delta\Theta^1$ ἀφορῶσι, διττῶς ἂν ἐπιλυθείη τὸ πρόβλημα· τῦτὶ δὲ ὡς ἂν γένοιτο, κατασκευαςέον τὰς δύω δυνάμεις $\chi = -\frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{((\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta})}$ κατὰ τὸν ἐφεξῆς τρόπον· ὁρισθείσης, ὡς ἀνωτέρω, τῆς δυνάμεως ΓΝ τῦ $\frac{\gamma\gamma}{\beta}$, εἰλήφθω (σχ. 25) $N\Xi = 2\alpha$, καὶ ἐπ' αὐτῆς ἡμικυκλίυ γραφέντος τῦ ΝΤΞ, ἤχθω ἁπτομένη αὐτῦ ἡ ΓΤ, ᾗ μετηνέχθω ἡ ΓΤ ἐκ τῦ Γ ἐπὶ τὸ Π πρὸς τὸ Ν, ᾗ πρὸς τ' ἀντίθετα ἐκ τῦ Γ ἐπὶ τὸ Κ· ᾗ δὴ ΝΠ,

ϰ̀ ΝΚ ἔσονται δύω δυνάμεις τῆς χ, αἳ μητηνέχθωσαν (σχ. 24) ἐκ τȣ̃ Δ ἐπὶ τὸ Θ ϰ̀ ἐκ τȣ̃ Δ ἐπὶ τὸ Θ', ϰ̀ ἐκ τȣ̃ Α διὰ τῶν σημείων Θ, Θ' ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΕΘ, Ε'Θ'· ἔςαι ȣ̃ν ἑκάτερον τῶν ΕΔΘ, Ε'ΔΘ' τριγώνων ἴσον τῷ τετραγώνῳ γγ. Ὅτι δὲ αἱ ΝΠ, ΝΚ (σχ. 25) εἰσὶν αἱ δύω δυνάμεις τῆς χ, ἐντεῦθεν δῆλον· ἡ γὰρ ΓΤ (452) μέση ȣ̃σα ἀνάλογος τῶν ΓΝ, ΓΞ ἐςὶν $= \sqrt{(\Gamma\Xi \times \Gamma N)}$, ἢ (τιθεμένων ἀντὶ τῶν γραμμῶν τῶν κατ' αὐτὰς δυνάμεων) ΓΤ, ἢ ΓΠ, ἢ ΓΚ $= \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$· ἄρα ΝΠ $= \Gamma N - \Gamma \Pi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} - \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$, ϰ̀ ΝΚ $= \Gamma N + \Gamma \Pi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} + \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$· ἀλλ' αἱ δύω αὗται ποσότητες αἱ αὐταί εἰσι ταῖς τȣ̃ χ δυνάμεσι μετ' ἀντιθέτων συμβόλων· ἄρα μετενεχθεῖσαι ἐκ τȣ̃ Δ πρὸς τὸ Θ (σχ. 24) ἔσονται αἱ δυνάμεις τȣ̃ χ.

570. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'. Εἰ δὲ τὸ Α (σχ. 26) ἐν αὐτῇ κέοιτο τῇ ὑπὸ ΗΔΙ γωνίᾳ, τηνικαῦτα ΒΔ πιπτȣ́σης ἐπὶ τ' ἀντίθετα τοῖς ἐξ ἀρχῆς, τὸ μὲν α λειπτικὸν, αἱ δὲ ἀρχικαὶ δυνάμεις τȣ̃ χ γένοιντ' ἂν $\chi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} - \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta})}$, αἵτινες εἰσὶν αἱ αὐταὶ (μετ' ἐναντίων συμβόλων) αἷς πρὸ μικρȣ̃ κατεσκευάσαμεν· σαφὲς ȣ̃ν τηνικαῦτα, ὅτι δεῖ τὰ τῆς κατασκευῆς μετελθεῖν ὡς κἀπὶ (σχ. 25), ἀλλὰ μετενεγκεῖν τὰς τȣ̃ χ δυνάμεις ΝΠ, ϰ̀ ΝΚ ἐκ τȣ̃ Δ

πρὸς τὸ I (χ. 26)· ὅθεν ἀναφύονται τὰ δύω τρίγωνα ΔΕΘ, ΔΕ'Θ' ἑκάτερον ὁμολογῦν τῷ ζητήματι.

571. ΣΧΟΛΙΟΝ Δ'. Εἰ δὲ τὸ σημεῖον (χ. 27) Α κέοιτο, ἔνερθεν μὲν τῆς ΒΔ, ἐν αὐτῇ μέντοι τῇ γωνίᾳ ΒΔΕ', τηνικαῦτα ἥτε α ἢ ἡ β ἔσονται λειπτικαὶ· ὅθεν ἔσεται χ

$$= -\frac{\gamma\gamma}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} + \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta}\right)},$$ αἵτινες ἐπ' ἀκριβὲς εἰσὶ (τῦ συμβόλυ μόνυ διαμαχομένυ) δυνάμεις, ἃς πρὸ μικρῦ ὑπὲρ τῆς χ ἐθηρευσάμεθα· κατασκευασθήσεται ἄρα ἢ ἐνταῦθα τὸ πρόβλημα ὥσπερ ἢ ἐπὶ (χ. 22)· ἢ δὴ ἡ μὲν ΓΚ ἔςαι δύναμις τῦ χ ὑπαρκτικὴ, ἡ δὲ ΓΠ δύναμις αὐτῦ λειπτικὴ· κἀκείνη μὲν μετενεχθήσεται ἐκ τῦ Δ ἐπὶ τὸ Θ πρὸς τὸ Β, αὕτη δὲ τὐναντίον ἐκ τῦ Δ ἐπὶ το Θ'.

572. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Παρηγάγομεν ἐνταῦθα τὰς παντοίας τῆς ἐπιλύσεως ταύτης περιπτώσεις, ἵνα δείξωμεν, ὅπως ταύτας πάσας μία μόνη ἐξίσωσις περιλαμβάνει, ἢ ὅπως διὰ μόνης μεταλλαγῆς τῶν συμβόλων ἀνακαλύπτονται, ἢ ὅπως αἱ ἐναντίαι τῶν γραμμῶν θέσεις ἐναντίοις διασημαίνονται τοῖς συμβόλοις, ἢ τ' ἀνάπαλιν· λείπεται ἔτι ἐνδεῖξαι ἐνίας τῆς αὐτῆς ἐπιλύσεως χρήσεις.

573. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. Σημείυ δοθέντος τῦ Α (χ. 28) κειμένυ ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τριγώνυ δεδομένυ τῦ ΔΗΙ. ἀπ' αὐτῦ εὐθεῖαν ἀγαγεῖν τὴν ΑΖ, ὅπως διαιρῇ τὸ τρίγωνον εἰς δύω μερίδας ΔΕΖ, ΕΖΙΗ, αἳ εἶεν πρὸς ἀλλήλας ἐν λόγῳ ἐγνωσμένῳ μ : ν.

ΛΥΣΙΣ. Τῦδε ἡ ἐπίλυσις τῇ τῦ προτέρυ ἐμπεριλαμβάνεται· ἐπεὶ γὰρ δέδοται μὲν τὸ τρίγωνον ΔΗΙ, ἐγνῶσαι δὲ ποσημόριον τῦ ΔΗΙ ὀφείλει εἶναι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· ἐὰν ζητηθῇ τέταρτος ὅρος ταύτης τῆς ἀναλογίας μ + ν :

μ :: ΔΗΙ, εὑρεθήσεται τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· ἀλλὰ δυνατὸν ἀεὶ εὑρεῖν τετράγωνον γγ ἴσον ταύτῃ τῇ ἐπιφανείᾳ (362), τὸ ζήτημα ἄρα εἰς τοῦτο ἥκει, ἀγαγεῖν ἀμέλει ἀπὸ τοῦ σημείου Α εὐθεῖαν τὴν ΑΕΖ, ὅπως μετὰ τῶν δύω πλευρῶν ΔΗ, ΔΙ περιέχῃ τρίγωνον τὸ ΔΕΖ ἴσον τῷ τετραγώνῳ γγ, τοῦτ' ἔστιν ἀνάγεται εἰς τὸ πρότερον πρόβλημα (567).

574. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δῆλον ἔτι, ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἀνάγεται καὶ τὸ, πᾶν σχῆμα εὐθύγραμμον τεμεῖν διὰ εὐθείας, ἀχθείσης ἀφ' οὑτινοσοῦν σημείου (σχ. 29) τοῦ Α, εἰς δύω τμήματα ΒΓΖΕ, ΕΖΔΗΚ, ἃ ἔχοιεν πρὸς ἄλληλα τὸν δοθέντα λόγον· γνωστοῦ γὰρ ὄντος τοῦ σχήματος ΒΓΔΗΚ, γινώσκονται πᾶσαι αὐτοῦ αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραί· εὐμαρῶς ἄρα γνωσθήσεται τὸ τρίγωνον ΒΛΓ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύω πλευρῶν προεκβεβλημένων τῶν ΚΒ, ΔΓ, ἐπεὶ γινώσκεται ἥτε πλευρὰ ΒΓ, καὶ δύω γωνίαι ΛΒΓ, ΛΓΒ ἀναπληρώματα τῶν δύω γνωστῶν γωνιῶν ΓΒΚ, καὶ ΒΓΖ· οὐκοῦν ὡς γνωστὸν ἐκληπτέον τὸ τρίγωνον ΛΒΓ· ἐπεὶ δὲ τὸ ΕΒΓΖ δεῖ εἶναι μέρος διωρισμένον τῆς ὅλης ἐπιφανείας, καὶ αὐτὸ ὡσαύτως γινώσκεται· τὸ ζήτημα ἄρα ἀνάγεται εἰς τὸ, ἀγαγεῖν εὐθεῖαν τὴν ΑΕΖ, ἥτις ἐν τῇ γωνίᾳ ΚΛΔ τρίγωνον συνίστησιν ἴσον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ· τέλος δ' ἐντεῦθεν ἄν τις συνίδοι, ὅπως τὸ σχῆμα τόδε εἰς πλείω διέλοι τμήματα, ὧν οἱ λόγοι εἶεν δεδομένοι.

575. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν ποσότητες δεδομέναι, εἰσιοῦσαι εἰς τὴν πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος χρησιμεύουσαν ἐξίσωσιν, τοιαίδε ὦσιν, ὥστε μεταβαλλομένων τῶν κατ' αὐτὰς συμβόλων τὴν ἐξίσωσιν μηδεμίαν ὑφίστασθαι ἀλλοίωσιν· ἢ μεταβαλλομένης τῆς θέσεως τῆς γραμμῆς, ἢ τῶν γραμμῶν τῶν ζητουμένων ἐν τῷ σχήματι, μήτε τὴν θέσιν μήτε τὸ μέγεθος τρέπεσθαι τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τηνι-

καῦτα ἐν ταῖς διαφόροις τοῦ χ δυνάμεσιν, εἰ πολλαὶ εἶεν ἐν τῇ ἐξισώσει, εὑρεθήσεται ἀεὶ μία, ἥτις ἀνεπιβόλως ἐπιλύσει τὸ πρόβλημα ἐν περιπτώσει, ἣν ἐμφαίνει ἡ μεταβολή· οὕτως ἐν τῷ ἀρτίως ἡμῖν ἐπιλυθέντι προβλήματι (567) μία τῶν δυνάμεων τοῦ χ ἐπέλυεν εὐθυβόλως τὸ πρόβλημα τῆς εὐθείας ΑΕΘ ἐμπιπτούσης εἰς τὴν γωνίαν ΗΔΙ· ἀλλ' εἴδομεν ἅμα ὡς ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ χ ἐπέλυε τὸ πρόβλημα οὐκέτι ἐν τῇ γωνίᾳ ΗΔΙ, ἀλλ' ἐν τῇ κατὰ κορυφὴν αὐτῇ Ζ'ΔΕ'· ὁ δέ γε τούτου λόγος, ὅτι ἐφ' ἑκάστης περιπτώσεως, τὰς αὐτὰς εἰς χρῆσιν ἐχούσας ποσότητας, καὶ τοὺς αὐτοὺς εἰς ἐκτέλεσιν λογισμοὺς, εἰς τὴν αὐτὴν ἐπάναγκες καταντῆσαι ἐξίσωσιν, ἥτις οὐκ ἔστιν ὅπως οὐχὶ τὰς αὐτὰς παρέξεται ἐπιλύσεις.

576. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'. Ἐπὶ τῆς φορᾶς τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ σημεῖον εὑρεῖν τὸ Γ (σχ. 30.), ὅπως τὸ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Α ἀπόστημα μέσον ᾖ ἀνάλογον πρὸς τὸ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Β ἀπόστημα, καὶ τὴν ὅλην εὐθεῖαν ΑΒ.

ΛΥΣΙΣ. Ῥηθήτω α ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ, καὶ χ τὸ ζητούμενον ἀπόστημα ΑΓ· οὐκοῦν $\mathrm{B\Gamma} = \alpha - \chi$· καὶ ἐπεὶ ζητεῖται εἶναι $\mathrm{AB : A\Gamma :: A\Gamma : \Gamma B}$· εἴτ' οὖν $\alpha : \chi :: \chi : \alpha - \chi$· ἄρα $\chi\chi = \alpha\alpha - \alpha\chi$, ἢ $\chi\chi + \alpha\chi = \alpha\alpha$, ἐξίσωσις δευτεροβάθμιος, ἥτις ἐπιλυθεῖσα δίδωσι $\chi = -\frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \alpha\alpha)}$.

Εἰς οὖν κατασκευὴν τῆς πρώτης δυνάμεως $\chi = -\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \alpha\alpha)}$ ἀνάγκη ἐπιστῆσαι τῷ σημείῳ Β τὴν κάθετον $\mathrm{B\Delta} = \frac{1}{2}\alpha$· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΔ, ἔσται $\mathrm{A\Delta} = \sqrt{(\mathrm{B\Delta}^2 + \mathrm{AB}^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \alpha\alpha)}$· λείπεται τοίνυν ἀφελεῖν ταύτης τῆς εὐθείας τὴν ποσότητα $\frac{1}{2}\alpha$, ὃ δὴ τελεῖται μεταφερομένης τῆς ΔΒ ἐκ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ο· τηνικαῦτα οὖν ΑΟ δύναται $\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \alpha\alpha)} - \frac{1}{2}\alpha$, τοῦτ' ἔστιν ἴση ἔσεται τῷ χ· μετενεχθείσης ἄρα τῆς ΑΟ ἐκ τῦ Α ἐπὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Β, τὸ σημεῖον Γ, ἐφ' ὃ τελευτᾷ, ἔσεται τὸ ζητύμενον.

Περὶ δὲ τῆς δευτέρας δυνάμεως τῦ χ, εἴτ' ὖν $-\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$, ἐὰν μετενεχθῇ ΒΔ ἐκ τῦ Δ ἐπὶ τὸ Ο' ἐπὶ τῆς ΑΔ προαχθείσης ΑΟ' τηνικαῦτα δυνήσεται $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$· ἐπεὶ ἄρα ἡ δύναμις τῦ χ ἡ αὐτή ἐςι ποσότης θεωρυμένη λειπτικῶς, μετηνέχθω ΑΟ' ἐκ τῦ Α ἐπὶ τὸ Γ' ἐπὶ τῆς ΑΒ προαχθείσης ἐπὶ τὰ ἀντίθετα τοῖς προτέροις· ϗ δὴ εὑρεθήσεται δεύτερον σημεῖον Γ, ὡς εἶναι τὴν Γ'Α τῶν ΓΒ, ΑΒ μέσην ἀνάλογον.

577. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τῦτὶ δὲ τὸ πρόβλημα περιλαμβάνει ϗ τὴν τῆς εὐθείας κατ' ἄκρον ϗ μέσον λόγον τομήν· ὕτως ἡ ἤδη ἀποδεδομένη κατασκευὴ ταὐτόν πως δύναται τῇ ἀποδοθείσῃ (335)· ἀλλὰ καταφανὲς, ὡς ὁ μὲν Συμβολικὸς ὑπολογισμὸς ἄγει εἰς εὕρεσιν ταύτης τῆς κατασκευῆς· ἡ δὲ Γεωμετρία ὑποτίθησιν ἤδη εὑρημένην αὐτὴν, ϗ μόνον ἐμπεδοῖ αὐτῆς τὴν ἀλήθειαν.

578. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Μικρὸν ἐπιςήσασι τῇ, ἣν περιεπατήσαμεν, ὁδῷ ἐν τοῖς προεκτεθεῖσι προβλήμασι δῆλον αὐτίκα, ὅτι ἀεὶ μίαν ὡς ἄγνωςον ἐξελάβομεν εὐθεῖαν, ἥτις ἅπαξ γνωσθεῖσα ὑπηρέτησεν ἡμῖν εἰς εὕρεσιν ἁπασῶν τῶν ἄλλων, τηρήσασιν ἀκριβῶς τὰς τῦ προβλήματος θέσεις· τῦτὶ δὴ ϗ πρακτέον ἀείποτε εἶναι φαμέν· ἀλλὰ γὰρ τηρητέον ϗ τόδε· εἰσὶ γὰρ πολλάκις εὐθεῖαι, ὧν ἑκάςη γνωσθεῖσα ὐχ ἧττον διορίσειεν ἁπάσας τὰς ἄλλας ἀλλ' ἐν ταύταις ἔςι καίτις, ἣ πολὺ συνθετωτέρας τὰς ἐξισώσεις ἀπεργάζεται· εἰς ὖν αἵρεσιν τῆς εὐμαρέςερον ἐπὶ τὸ τέλος ἂν ἀγαγύσης εὐθείας τίθεμεν ἐνταῦθα τόνδε τὸν κανόνα.

579. „Ἐὰν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν, ἢ τῶν ποσοτή-„των, ὧν ὡς ἄγνωστος ἐκληφθεῖσα ἑκάστη δύναται ἐπίσης „συμβαλεῖν εἰς διορισμὸν ἁπασῶν τῶν ἄλλων, εὑρεθῶσι „δύω τὸν αὐτὸν τρόπον ἑκατέρα χρησιμεύουσα, ὡς εἰς „τὴν αὐτὴν φέρειν ἐξίσωσιν (μετὰ συμβόλων $+$ ἢ $-$), „τηνικαῦτα δὴ οὐδετέρα τούτων χρηστέον, ἀλλ' ἐκληπτέον „ὡς ἄγνωστον ἄλλην ποσότητα, ἑκατέρας τῶν δυεῖν ἐπί-„σης ἐξηρτημένην“ ἐκληπτέον, δὸς εἰπεῖν, τὸ ἡμιάθροισμα, ἢ τὴν ἡμιδιαφορὰν, ἢ τὴν μέσην αὐτῶν ἀνάλογον κτλ. ἀεὶ γὰρ ἀφιξόμεθα εἰς ἐξίσωσιν ἁπλουστέραν, ἢ εἴπερ ἐ-χρώμεθα θατέρα τῶν δυεῖν ποσοτήτων. Τὸ δ' ἐφεξῆς πρόβλημα πολλὰ ἡμῖν ἐπιδαψιλεύσεται ὑποδείγματα.

580. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'. Ἀπὸ σημείου τοῦ Δ, κειμένου (σχ. 31.) ἐν τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ΙΑΕ, καὶ ἴσον ἀπέχοντος ἑκατέρας τῶν πλευρῶν ΙΑ, ΑΕ, ἀγαγεῖν εὐθεῖαν τὴν ΔΒ, ὅπως τὸ μέρος ΓΒ, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ἐν τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ΕΑΒ, ἴσον ὑπάρχῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

ΛΥΣΙΣ Α'. Καταχθεισῶν τῶν καθέτων ΔΕ, ΔΙ ἀδιαφόρως ὡς ἄγνωστον δυνάμεθα ἐκλαβεῖν τὴν ΓΕ, ἢ ΑΒ, ΑΓ, ἢ ΙΒ, ΓΔ, ἢ ΔΒ· ἐὰν μὲν οὖν φέρε, ἐκλάβωμεν ὡς ἄγνωστον τὴν ΓΕ, τηνικαῦτα κληθείσης τῆς μὲν ΓΕ, χ, α δὲ ἑκατέρας τῶν δύω ἴσων εὐθειῶν ΔΕ, ΔΙ, ἅσπερ ἐκδεχόμεθα ὡς γνωστὰς, κληθείσης δὲ γ καὶ τῆς δεδομένης εὐθείας, ᾗ δεῖ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ, ἕξαμεν $\mathrm{А\Gamma} = \mathrm{AE} - \mathrm{\Gamma E} = \alpha - \chi$· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΔΕΓ, ΓΑΒ προέρχεται $\mathrm{\Gamma E} : \mathrm{\Delta E} :: \mathrm{A\Gamma} : \mathrm{AB}$ τοῦτ' ἔστι $\chi : \alpha :: \alpha - \chi : \mathrm{AB} = \dfrac{\alpha\alpha - \alpha\chi}{\chi}$· ἀλλὰ διὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου (349) ἔστιν $\mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2$· ἀντικαταστάσει ἄρα ἀντὶ τῶν εὐθειῶν τῶν κατ' αὐτὰς συμβολικῶν δυνάμεων, ἔξομεν $(\alpha - \chi)^2 + \left(\frac{\alpha\alpha - \alpha\chi}{\chi}\right)^2 = \gamma\gamma$, εἴτ' ὖν $\alpha\alpha - 2\alpha\chi + \chi\chi + \frac{\alpha^4 - 2\alpha^3\chi + \alpha^2\chi^2}{\chi\chi} = \gamma\gamma$, εἴτ' ὖν, ἀφανισμῷ τῦ παρονομαςῦ, μεταθέσειτε ϗ ἀναγωγῇ, $\chi^4 - 2\alpha\chi^3 + 2\alpha\alpha.\chi\chi - \gamma\gamma\chi\chi - 2\alpha^3\chi + \alpha^4 = 0$, ἐξίσωσις τεταρτοβάθμιος, ἥτις ὐκ ἔςιν ἡ ἁπλυςέρα τῶν πρὸς ἐπίλυσιν τεινυσῶν τῦ προβλήματος, πολλῦ γε ϗ δεῖ.

Β. Ἐὰν δὲ ἀντὶ ΓΕ λάβωμεν ὡς ἄγνωςον τὴν ΙΒ, ϗ καλέσωμεν αὐτὴν χ, μιμέμενοι τὴν προεκτεθεῖσαν ἐπίλυσιν, ἔξομεν ἐξίσωσιν ὐδενὶ διενηνοχυῖαν τῆς προτέρας, πλὴν ὅτι ἐν ταύτῃ ἔςαι $\chi - \alpha$ ἀντὶ $\alpha - \chi$, τῦτ' ἔςιν ἀπολύτως τὴν αὐτὴν, εἴγε ταύτας τὰς ποσότητας τετραγωνίζειν αἰτεῖ ἡ φύσις τῦ προβλήματος· εἴτε δὲ $\alpha - \chi$, εἴτε $\chi - \alpha$ τετραγωνισθεῖεν, ἡ αὐτὴ, ὡς δῆλον, προκύψει ποσότης· ὡσαύτως τῷ θεμένῳ εἰς ἄγνωςον τὴν ΑΒ ὐδεμία διαφορὰ ἔςαι πρὸς τὸν λαβόντα ὡς τοιαύτην τὴν ΑΓ, ὅτι μὴ ἡ τῶν συμβόλων· ὡσαύτως ἐκ τῶν εὐθειῶν ΔΒ, ΔΓ ἡ ἑτέρα τῶν ἐξισώσεων τοῖς συμβόλοις τῆς ἑτέρας διοίσει· ὐδεμίαν ἄρα τύτων ληπτέον.

Γ'. Ἀλλ' ἐὰν εἰς ἄγνωςον θῶμεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύω εὐθειῶν ΔΒ, ΔΓ, ϗ τῦτο δηλώσωμεν διὰ 2χ, ἔξομεν (Συμβ. Λογ. 442)· $\Delta B = \chi + \frac{1}{2}\gamma$, ϗ $\Delta\Gamma = \chi - \frac{1}{2}\gamma$· ἀλλ' ἐκ τῶν παραλλήλων ΔΙ, ΓΑ, τῶν εἰς εὕρεσιν τῶν ΑΒ, ΑΓ, προκύπτυσιν αἱ ἐφεξῆς ἀναλογίαι $\Delta\Gamma : \Gamma B :: \Gamma A$ ἢ $\Delta E : AB$, ϗ $\Delta B : \Gamma B :: \Delta I : A\Gamma$, τῦτ' ἔςι $\chi - \frac{1}{2}\gamma : \gamma :: \alpha : AB$, καὶ $\chi + \frac{1}{2}\gamma : \gamma :: \alpha : A\Gamma$· ἄρα $AB = \frac{\alpha\gamma}{\chi - \frac{1}{2}\gamma}$ ϗ $A\Gamma = \frac{\alpha\gamma}{\chi + \frac{1}{2}\gamma}$. ἄρα, ἐπεὶ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΓΑΒ ἐστιν $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$, ἕξομεν $\frac{\alpha^2\gamma^2}{(\chi-\frac{1}{2}\gamma)^2} + \frac{\alpha^2\gamma^2}{(\chi+\frac{1}{2}\gamma)^2} = \gamma\gamma$, εἶτ' οὖν, ἄρσει τῶν κλασμάτων, καὶ διὰ γγ διαιρέσει, $\alpha^2(\chi+\frac{1}{2}\gamma)^2 + \alpha^2(\chi-\frac{1}{2}\gamma)^2 = (\chi+\frac{1}{2}\gamma)^2 + (\chi-\frac{1}{2}\gamma)^2$· ἐκτελέσει δὲ τῶν σεσημειωμένων πράξεων, μεταθέσει τε καὶ ἀναγωγῇ, γενήσεται $\chi^4 - (\frac{1}{2}\gamma\gamma + 2\alpha\alpha)\chi^2 = \frac{1}{2}\alpha\alpha\gamma\gamma - \frac{1}{16}\gamma^4$, ἐξίσωσις τεταρτοβάθμιος μὲν, εὐμαρεστέρα δὲ τῆς πρὶν εἰς ἐπίλυσιν, ἅτε δὴ κατὰ τὰς δευτεροβαθμίους ἐπιλύεσθαι δυναμένη (*).

Δʹ. Δυνατὸν δὲ εἰς ἁπλουστέρας ἔτι ἐξισώσεις ἀφικέσθαι, εἰ δυσὶν ἀγνώστοις χρησαίμεθα, ὧν ἡ μὲν ἐστιν ἄθροισμα τῶν δύω εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ἑτέρα δὲ ἡ αὐτῶν διαφορά, τοῦτ' ἔστιν εἰ θείημεν $AB + A\Gamma = 2\chi$, καὶ $AB - A\Gamma = 2\upsilon$· ὅθεν (Συμβ. Λογ. 442) $AB = \chi + \upsilon$, καὶ $A\Gamma = \chi - \upsilon$· καὶ ἐν μὲν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ ἐστιν $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$· ἐν δὲ τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΑΒΓ, ΙΒΔ, ΑΒ : ΑΓ :: ΙΒ : ΙΔ· ὅθεν προΐασιν ἐξισώσεις δύω ἀναγκαῖαι πρὸς διορισμὸν τῆς χ καὶ υ· ἀπὸ τῆς ἑτέ-

---

(*) Διαιρεθεῖσα γὰρ διὰ χ^2 ἡ ἐξίσωσις, δευτεροβάθμιος ἀποκαθίσταται (Συμβ. Λογ. 470 Πρόβ. βʹ.) ο ἀλλὰ, κἂν μὴ γένοιτο αὕτη ἡ διαίρεσις, ἡ ἐξίσωσις, φέρ' εἰπεῖν, $\chi^4 + \chi^2 = 20$ ἐπιλυθῆναι ἔχει κατὰ τὰ δευτεροβάθμια προβλήματα εἶτ' οὖν $\chi^4 + \chi^2 + \frac{1}{4} = 20 + \frac{1}{4}$· ὅθεν $\chi^2 + \frac{1}{2} = \sqrt{20 + \frac{1}{4}}$ καὶ $\chi^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{20 + \frac{1}{4}}$, καὶ $\chi = \pm \sqrt{(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{20 + \frac{1}{4}})}$· ὡσαύτως ἐπιλυθῆναι ἔχει καὶ πᾶσα ἐξίσωσις, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος δείκτην ἔχει τοῦ κατὰ τὸν δεύτερον διπλάσιον, οἱ δὲ ἄλλοι πάντες ἄπεισιν, οἷα ἐστὶν ἡ $\chi^6 + \pi\chi^3 - \rho = 0$, κτλ.

ρας δὲ ἀποφέρεται ἡ δύναμις τοῦ $\chi\chi$, ἧς ἀντικαταστάσης ἐν θατέρᾳ, προκύπτει ὑπὲρ τῆς υ ἐξίσωσις δευτεροβάθμιος· ἀλλὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦδε τοῦ λογισμοῦ τοῖς πρωτοπείροις ἀφέντας πρὸς ἄσκησιν, ἐπανιτητέον ἐπὶ τὴν καθ' ἡμᾶς ἐξίσωσιν.

Ἔξομεν οὖν $\chi^4 - (\frac{1}{2}\gamma\gamma + 2\alpha\alpha)\chi^2 + (\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha)^2 = (\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha)^2 + \frac{1}{2}\alpha\alpha\gamma\gamma - \frac{1}{16}\gamma^4 = \alpha\alpha\gamma\gamma + \alpha^4$· τὴν δὲ τετράγωνον ῥίζαν ἐξαγαγόντες (*), $\chi^2 - (\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha) = \pm\sqrt{(\alpha\alpha\gamma\gamma + \alpha^4)}$ καὶ ἐπομένως $\chi^2 = \frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha \pm \sqrt{(\alpha\alpha\gamma\gamma + \alpha^4)}$· ἐξαγαγόντες δὲ πάλιν τὴν τετραγώνειον ῥίζαν ἔξομεν τελευταῖον $\chi = \pm\sqrt{[\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha \pm \sqrt{(\alpha\alpha\gamma\gamma + \alpha^4)}]}$, ἢ $\chi = \pm\sqrt{[\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha \pm \alpha\sqrt{(\gamma\gamma + \alpha\alpha)}]}$.

Τῶν δὲ τεττάρων τοῦ χ δυνάμεων, ὧν δίδωσιν ὁ διττὸς συνδυασμὸς τῶν συμβόλων $\pm$, μία μόνη ἐξικανοῖ πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προτεθέντος ζητήματος· τοῦτ' ἐστι $\chi = +\sqrt{[\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha + \alpha\sqrt{(\gamma\gamma + \alpha\alpha)}]}$· ἡ δέ γε δύναμις $\chi = +\sqrt{[\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha - \alpha\sqrt{(\gamma\gamma + \alpha\alpha)}]}$ ἐπιλύει τὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΓΒ ὑπάρχῃ ἐν τῇ αὐτῇ γωνίᾳ, ἔνθα καὶ τὸ σημεῖον Δ (ὅρα σχ. 32)· καὶ τηνικαῦτα τὸ χ παρίστησιν οὐχὶ τὸ ἡμιάθροισμα, τὴν δὲ ἡμιδιαφορὰν τῶν δύω εὐθειῶν ΔΒ, ΔΓ· ῥαδίως δὲ τουτὶ ἐξελέγχεται κληθείσης 2χ ταύτης τῆς διαφορᾶς, καὶ τοῦ προβλήματος ἐπιλυθέντος, καθὰ καὶ πρότερον· ἔξομεν γὰρ $\Delta B = \frac{1}{2}\gamma + \chi$, καὶ $\Gamma\Delta = \frac{1}{2}\gamma - \chi$· ἐκ δὲ τῶν ΔΙ, ΓΑ παραλλήλων $\Delta B : \Gamma B :: \Delta I : \Gamma A$, καὶ $\Delta\Gamma : \Gamma B :: A I : A B$, εἶτ' οὖν $\frac{1}{2}\gamma + \chi : \gamma :: \alpha : \Gamma A$, καὶ $\frac{1}{2}\gamma - \chi : \gamma :: \alpha :$

(*) Ἀμέλει κατὰ τὴν προεκτεθεῖσαν σημείωσιν.

ΑΒ· ἄρα ΓΑ $= \frac{\alpha\gamma}{\frac{1}{2}\gamma+\chi}$, ϗ ΑΒ $= \frac{\alpha\gamma}{\frac{1}{2}\gamma-\chi}$· ἐπεὶ ἄρα τὸ τρίγωνον ΓΑΒ ἐςὶν ὀρθογώνιον, ἔσεται $\frac{\alpha^2\gamma^2}{(\frac{1}{2}\gamma+\chi)^2} + \frac{\alpha^2\gamma^2}{(\frac{1}{2}\gamma-\chi)^2} = \gamma\gamma$, γενομένων δὲ τῶν αὐτῶν, ἃ ϗ ἀνωτέρω, προκύψει $\chi^4 - (\frac{1}{2}\gamma\gamma + 2\alpha\alpha)\chi^2 = \frac{1}{4}\alpha\alpha\gamma\gamma - \frac{1}{16}\gamma^4$, ἐξίσωσις ἀπολύτως ἡ αὐτὴ τῇ, ἣν εὕρομεν ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύω εὐθειῶν ΒΔ, ΓΔ (σχ. 31)· ἄρα ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις ἑκατέρᾳ ἀπόχρη περιπτώσει, ὧν θατέρᾳ μὲν τὰς ῥίζας τὸ ἄθροισμα, θατέρᾳ δὲ ἡ διαφορᾷ ποιίζεται· ῥᾴδιον δὲ παντὶ συνιδεῖν τὰς δύω ταύτας ὑπάρχειν τὰς ἡμῖν ἤδη καταδειχθείσας, τῶν ἄλλων δύω ῥιζῶν λειπτικῶν τε ὑσῶν, ϗ μόνον ἐπανηκουσῶν περιπτώσεσιν ἀντιθέτοις, ἢ ταῖς θεωρηθείσαις ἐφ' ἑκάςης ἐπιλύσεως.

581. Ἵνα δ' εὑρεθῶσιν, αἷς περιπτώσεσιν ἐπανήκουσιν αἱ δύω ἕτεραι αὗται ῥίζαι, παρατηρητέον, ὡς οὐδὲν διώρισαι ἐπὶ τοῦ ζητήματος, ἢ γοῦν ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως, εἰ τὸ σημεῖον Δ (σχ. 31) κέοιτο, ὡς ἐν ἀρχῇ ὑποτέθειται, ἔνερθεν τῆς ΑΙ ϗ ἐν ἀριςερᾷ τῆς ΑΕ, ἢ γοῦν ἐκείνης μὲν ὕπερθεν, πρὸς δεξιὰν δὲ ταύτης, ὥςπερ φαίνεται ἐπὶ τῶν Α'Ι' Α'Ε'· ἀλλὰ μὴν ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἡ ποσότης α πίπτουσα ἐν τοῖς ἀντιθέτοις, ἢ τὸ κατ' ἀρχὰς, γίνεται λειπτική· θηρευθήσεται ἄρα ἡ ταύτῃ τῇ περιπτώσει συνᾴδουσα ἐπίλυσις, τιθεμένης $-\alpha$ ἀντὶ $+\alpha$ ἐν τῇ προευρημένῃ ἐξισώσει $\chi^4 - (\frac{1}{2}\gamma\gamma + 2\alpha\alpha)\chi^2$ κτ. ἐπεὶ δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη οὐδὲν μεταβάλλεται, ἡ αὐτὴ ἐπιλύσει τὸ πρόβλημα κἂν ἑκατέρᾳ τῶν καινῶν τούτων περιπτώσεων· τῶν δύω ἄρα τοῦ χ δυνάμεων, ἡ μὲν τὸ ἄθροισμά ἐςι τῶν

δύω εὐθειῶν ΔΕ', ΔΓ' (σχ. 31)· ἡ δ' ἑτέρα ἡ αὐτῶν ὑπάρχει διαφορὰ (σχ. 32). πᾶς δέ τις ἐπεικῶς ὁρᾶ ὡς ἐν ταύτῃ τῇ νέα θέσει, τῶν σημείων Β, Γ ἐκ τῶν ἀντιθέτων πιπτόντων, τό, τε ἄθροισμα, καὶ δὴ καὶ ἡ διαφορὰ, τῶν δύω εὐθειῶν ΔΒ'. ΔΓ' λειπτικὰ ὀφείλουσιν εἶναι, καθὰ δὴ καὶ ἡ ἐξίσωσις αὐτὰ ἀποδείκνυσι.

582. Ἵνα δὲ κατασκευάσωμεν τὴν προευρημένην ἐπίλυσιν, ληπτέον ἐπὶ τῆς ΕΑ προαχθείσης (σχ. 31, 32) $\mathrm{AN} = \gamma$, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΙΝ, καὶ μετενεχθείσης ἐπὶ τὴν ΔΙ προαχθεῖσαν ἐκ τοῦ Ι εἰς τὸ Κ, ἐπὶ τῆς ΔΚ, ὡς διαμέτρου, γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΚΛΔ, συμβάλλον κατὰ τὸ Λ τῇ ΑΙ προαχθείσῃ· καὶ ἐκ τοῦ τῆς ΑΝ μέσου Η ἐπεζεύχθω ἡ ΙΗ, ἥτις μετηνέχθω ἐκ τοῦ Ι ἐς τὸ Μ (σχ. 31)· καὶ δὴ ἔσται ἡ ΛΜ πρώτη δύναμις τοῦ χ· ἐπὶ δὲ τοῦ 32 σχήμ. κέντρῳ μὲν τῷ Λ, διαστήματι δὲ τῷ ΙΗ, μικροῦ τόξου γραφέντος, ὃ τέμνει τὴν ΙΚ κατὰ τὸ Μ, ἔσται ἡ ΙΜ δευτέρα δύναμις τοῦ χ· καὶ ἐπείπερ ἐστὶ $\mathrm{B\Delta} = \chi + \frac{1}{2}\gamma$, ἔσται $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Lambda M} + \mathrm{AH}$ (σχ. 31)· καὶ $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{IM} + \mathrm{AH}$ (σχ. 32)· οὐκοῦν κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῇ οὕτως ὁρισθείσῃ ΒΔ, γεγράφθω τόξον τέμνον κατάτι σημεῖον τὸ Β τὴν ΙΑ προαχθεῖσαν· ἡ δὲ ΒΔ ἔσεται ἡ ζητουμένη εὐθεῖα· ἐστὶ γὰρ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΙΑΝ (σχ. 31 καὶ 32). IN καὶ $\mathrm{IK} = \sqrt{(\mathrm{IA}^2 + \mathrm{AN}^2)} = \sqrt{(\alpha\alpha + \gamma\gamma)}$, καὶ ἐπείπερ ἡ ΛΙ μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν ΔΙ, ΙΚ, ἀποφέρεται $\mathrm{I\Lambda}^2 = \mathrm{\Delta I} \times \mathrm{IK} = \alpha\sqrt{(\alpha\alpha + \gamma\gamma)}$· οὐκοῦν ἐν μὲν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΙΑΗ ἐστὶν ΙΗ, ἢ $\mathrm{MI} = \sqrt{(\mathrm{IA}^2 + \mathrm{AH}^2)} = \sqrt{(\alpha\alpha + \frac{1}{4}\gamma\gamma)}$· ἐν δὲ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΛΙΜ (σχ. 31)· $\mathrm{\Lambda M} = \sqrt{(\mathrm{MI}^2 + \mathrm{I\Lambda}^2)} = \sqrt{[\alpha\alpha\ \frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\sqrt{(\alpha\alpha + \gamma\gamma)}]} = \chi$, καὶ (σχ. 32) $\mathrm{IM} = \sqrt{(\Lambda}$-

$M^2 - IΛ^2) = \sqrt{[αα + \frac{1}{4}γγ - α \sqrt{(αα + γ\text{-}γ)}]} = χ$.

583. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἰϛέον δὲ ἐπὶ ταύτης τῆς ἐσχάτης δυνάμεως, ὡς ἐν τῇ ἡμῖν ἀποδοθείσῃ κατασκευῇ (σχ. 32) ὑποτίθεται ΙΗ $>$, ἢ γῦν = ΑΙ, εἰ δ' εἴη $<$, ὑπῆρχεν ἂν ἀδύνατον τὸ ζήτημα ἐπὶ τῆς ἐσχάτης περιπτώσεως, ὅπερ καὶ ἐκ τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ καταφαίνεται· ἐπὶ γὰρ τῆς ἐκθέσεως $χ = \sqrt{[αα + \frac{1}{4}γγ - α \sqrt{(αα+γγ)}]} = χ$, εἰ $αα + \frac{1}{4}γγ$, ὅπερ ἐϛὶν IH^2, εἴη $< α\sqrt{(αα+γγ)}$, ὅπερ ἐϛὶν $IΛ^2$, τὸ πρῶτον ὑπόρριζον ποσὸν ἔσεται λειπτικὸν, καὶ ἡ τοῦ χ δύναμις ἐπίπλασος.

584. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Θέμενοι εἰς ἄγνωϛον τὸ τῶν δυεῖν εὐθειῶν ΔΒ, ΔΓ ἄθροισμα (σχ. 31), ἢ τὴν αὐτῶν διαφορὰν (σχ. 32), ἐξίσωσιν ἔχομεν ἁπλουϛέραν, ἢ εἴπερ ἐτιθέμεθα ΓΕ, ἢ ΑΓ, ἢ ΑΒ, ἢ ΙΒ· ἡ γὰρ τῶν ΔΒ, ΔΓ πρὸς τὰς ΙΒ, ΑΒ σχέσις ὁμοία ἐϛὶ τῇ τῶν ΔΒ, ΔΓ πρὸς τὰς ΑΓ, ΓΕ, τοῦτ' ἔϛιν ἐκεῖναι δι' ὁμοίων πράξεων ὁρισθῆναι δύνανται χρησαμένοις ταῖς ΙΒ, ΑΒ, ἢ ταῖς ΑΓ, ΓΕ· καθόλου δὲ εἰπεῖν, ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις ἐμπερικλείειν ὀφείλει πάσας τὰς σχέσεις τῆς ζητουμένης ποσότητος πρὸς τὰς, ἐξ ὧν ἤρτηται, τοσοῦτον ἀεὶ ἁπλουϛέρα ἔσεται, ὅσον ἐλάττους ἔχει σχέσεις πρὸς τὰς λοιπὰς ἡ εἰς ἄγνωϛον ληφθεῖσα ποσότης.

585. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η΄. Ἐν σφαίρᾳ (σχ. 33.) τῇ ΑΒΕΔ τῇ γεννωμένῃ ἐκ τῆς τοῦ ἡμικυκλίου ΑΒΕ περὶ τὴν ΑΕ διάμετρον περιαγωγῆς, ἐν ᾗ καὶ τομεὺς ὁ ΑΒΓ ἀπογεννᾷ τομέα σφαιρικὸν, ὃς σύγκειται ἔκ τε τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος τοῦ γεννωμένου ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ ἡμιτμήματος ΑΒΠ, καὶ κώνου γεννωμένου ἐκ τοῦ ὀρθο-

γωνίȣ τριγώνȣ ΑΠΓ, εὑρεῖν τὸν τόπον, ἔνθα τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἴσον ἔσεται τῷ κώνῳ.

ΛΥΣΙΣ α΄. Ἀναμνηςέον ȣ̂ν (464), ὡς τομέως σφαιρικȣ̂ ἡ ςερεότης ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ΒΑΔ ϗ $\frac{1}{3}$ ΑΓ· β΄. ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια εὑρίσκεται (454) πολλαπλασιαζομένης τῆς περιφερείας ΑΒΕΔ ἐπὶ τὸ ὕψος ΑΠ τȣ̂ τμήματος ΒΑΔ· ἐὰν ἄρα $\alpha : \pi$ ἐμφαίνῃ τὸν τῆς ἀκτῖνος πρὸς τὴν κυκλικὴν περιφέρειαν λόγον, ϗ κληθῇ $\mathrm{AK} = \beta$, ϗ $\mathrm{A\Pi} = \chi$, εὑρεθήσεται ἡ περιφέρεια ΑΒΔΕ διὰ τῆς ἀναλογίας $\alpha : \pi :: \beta : \mathrm{AB\Delta E} = \frac{\pi\beta}{\alpha}$. ȣ̂κȣ̂ν ἡ ἐπιφάνεια τȣ̂ τμήματος ἔςαι $\frac{\varpi\beta\chi}{\alpha}$, ϗ δὴ ἡ τȣ̂ τομέως ςερεότης ἔςαι $= \frac{\varpi\beta\chi}{\alpha} \times \frac{1}{3}\beta = \frac{\pi\beta\beta\chi}{3\alpha}$.

γ΄. Εἰς εὕρεσιν δὲ τῆς ςερεότητος τȣ̂ κώνȣ, πολλαπλασιαςέον τὴν βάσιν, εἴτ' ȣ̂ν τὸν κύκλον, ȣ̂ ἀκτὶς ἡ ΒΠ, ἐπὶ $\frac{1}{3}$ τȣ̂ ὕψȣς ΚΠ· ἀλλ' ἐπεὶ $\mathrm{K\Pi} = \mathrm{KA} - \mathrm{A\Pi} = \beta - \chi$, ϗ $\mathrm{KB} = \beta$ ἔςαι ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΒΠΚ, $\mathrm{B\Pi} = \sqrt{(\Gamma\mathrm{B}^2 - \mathrm{K\Pi}^2)} = \sqrt{(\beta\beta - \beta\beta + 2\beta\chi - \chi\chi)} = \sqrt{(2\beta\chi - \chi\chi)}$· εἰς δὲ εὕρεσιν τȣ̂ κύκλȣ, ȣ̂ ἀκτὶς ἡ ΒΠ, πολλαπλασιαςέον τὴν περιφέρειαν ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν ἀκτῖνα· τὴν δὲ περιφέρειαν εὑρετέον διὰ τῆς ἀναλογίας $\alpha : \pi :: \sqrt{(2\beta\chi - \chi\chi)}$ πρὸς τέταρτον ὅρον, ὃς ἔςαι $\frac{\pi\sqrt{(2\beta\chi - \chi\chi)}}{\alpha}$. τȣ̂τον ȣ̂ν πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν ἀκτῖνα $\frac{\sqrt{(2\beta\chi - \chi\chi)}}{2}$ ἕξομεν $\frac{\pi.(2\beta\chi - \chi\chi)}{2\alpha}$ ἐπιφάνειαν τῆς κωνικῆς βάσεως, ἥν πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ τὸ τρίτον τῦ ὕψȣς ΚΠ, εἴτ' ȣ̃ν ἐπὶ $\frac{\alpha-\chi}{3}$ ἕξομεν $\frac{\pi(2\beta\chi-\chi\chi)}{2\alpha} \times \frac{\alpha-\chi}{3}$ στερεότητα τῦ κώνȣ· ἀλλ' ἵνα ὁ κῶνος ἴσος εἴη τῷ τμήματι, ἀνάγκη πᾶσα τὸν τομέα, ὃς ἐςι τὸ ἄθροισμα ἑκατέρων, διπλάσιον ὑπάρχειν θατέρȣ τῶν δύω· ἀνάγκη ἄρα πᾶσα ὑπάρχειν $\frac{\pi\beta\beta\chi}{3\alpha} = 2\pi \times \frac{2\beta\chi-\chi\chi}{2\alpha} \times \frac{\beta-\chi}{3}$, ἢ $\frac{\pi\beta\beta\chi}{3\alpha} = \frac{\pi.(2\beta\chi-\chi\chi).(\beta-\chi)}{3\alpha}$, (ἐκθλίψει τῦ 2 κοινῦ ποιητῦ τῦτε ἀριθμητῦ ϗ τῦ παρονομαςῦ) ἐξίσωσις, ἣ ἐπιλύσει τὸ ζήτημα· δυνατὸν δὲ ἁπλȣςέραν ἀπεργάσασθαι τὴν ἐξίσωσιν, ἐξάγοντας 3α κοινὸν διαιρέτην, ϗ πχ κοινὸν πολλαπλασιαςὴν ἑκατέρȣ τῶν δύω μελῶν· ϗ δὴ ἀποληφθήσεται $\beta\beta = (2\beta-\chi).(\beta-\chi)$, ἢ $\chi\chi - 3\beta\chi = -\beta\beta$· ἐντεῦθεν ἄρα εὑρίσκεται κατὰ τȣ̀ς ἀλλαχόθι ἀποδοθέντας κανόνας $\chi = \frac{3}{2}\beta \pm \sqrt{(\frac{5}{4}\beta\beta)}$· ἀλλὰ τῶν δύω τȣ́των ἐπιλύσεων μόνη ἐξαρκεῖ ἡ $\chi = \frac{3}{2}\beta - \sqrt{(\frac{5}{4}\beta\beta)}$· ἐπεὶ γὰρ $\chi = \frac{3}{2}\beta + \sqrt{(\frac{5}{4}\beta\beta)}$ δύναται πλέον ἢ 2β, εἴτ' ȣ̃ν πλέον ἢ τὴν διάμετρον, ἡ καταδεικνυμένη ἐπίλυσις ȣ̓ συμβαίνει τῇ σφαίρᾳ.

Βȣλομένοις δὲ κατασκευάσαι τὴν ἐπίλυσιν $\chi = \frac{3}{2}\beta - \sqrt{(\frac{5}{4}\beta\beta)}$ ἀποδοτέον αὐτῇ τὸν τύπον $\chi = \frac{3}{2}\beta - \sqrt{(\frac{5}{4}\beta\beta)}$, ϗ λαβόντας ΑΜ $= \frac{3}{2}\beta$ γραπτέον ὡς ἐπὶ διαμέτρȣ τῆς ΑΜ ἡμικύκλιον τὸ ΑΟΜ, ϗ ἐναρμόσαντας τὴν χορδὴν ΑΟ $= \beta$ ἐπιζευκτέον τὴν ΟΜ, ἣν μετενεκτέον ἐκ τῦ Μ ἐπὶ τὸ Π πρὸς τὸ Α· τὸ δὲ σημεῖον Π, εἰς ὃ ἀποτελευτᾷ, προσδιορίσει τὸ ὕψος ΑΠ $= \chi$· ϗ γὰρ τῦ ΑΟΜ τριγώνȣ ὀρθογωνίȣ ὄντος, ἐςὶν ΟΜ, ἢ ΠΜ =

$\surd(AM^2 - AO^2)\surd(\frac{9}{4}\beta\beta - \beta\beta)$· ἄρα ΑΠ = ΑΜ — ΠΜ = $\frac{1}{2}\alpha - \surd(\frac{9}{4}\beta\beta - \beta\beta) = \chi$.

586. Ἡ δὲ δευτέρα ἐπίλυσις $\chi = \frac{3}{2}\beta + \surd(\frac{5}{4}\beta\beta)$, ὡς ἤδη εἴρηται, τῷ παρόντι ζητήματι ἐ προσανήκει· προσανήκει δὲ, καθὰ ϗ ἡ πρώτη, ἑτέρῳ τοιέτῳ ζητήματι, ὅπερ ἡ ἀνάγνωσις τῆς ἐξισώσεως $\chi\chi - 3\beta\chi = \beta\beta$, ἢ $3\beta\chi - \chi\chi = \beta\beta$ παρέχεται (ϗ. 34)· ἀμέλειτοι „εὐθείας δεδομένης τῆς ΑΝ εἰς τρία ἰσάλληλα μέρη διαι„ρεθείσης κατὰ τὰ σημεῖα Β, Δ, εὑρεῖν ἐπ' αὐτῆς ση„μεῖον τὸ Π, ὅπως τὸ τμῆμα ΑΔ μέσον ὑπάρχῃ ἀνάλο„γον πρὸς τά τε Π ἀπὸ τῶν περάτων Α, Ν ἀποτμήματα" ϗ γὰρ ἐὰν κληθῇ β μὲν τὸ τρίτον μέρος ΑΔ τῆς ἐγνωσμένης εὐθείας ΑΝ, χ δὲ ἡ ΑΠ, ἀποφέρεται ΠΝ = 3β — χ· ἐκ δὲ τῶν τε προβλήματος θέσεων πρόεισιν ἡ ἀναλογία $\chi : \beta :: \beta : 3\beta - \chi$, ὅθεν ἡ ἐξίσωσις $3\beta\chi - \chi\chi = \beta\beta$, ἧς ῥίζαι ὡς ἀνωτέρω $\chi = \frac{3}{2}\beta \pm \surd(\frac{5}{4}\beta\beta)$, αἳ ἄμφω προΐασι διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, εἴτ' ἂν ὑπὲρ τῆς $\chi = \frac{3}{2}\beta + \surd(\frac{5}{4}\beta\beta)$ μετενεχθήσεται ΜΟ ἐκ τε Μ ἐπὶ τὸ Π πρὸς τὸ Ν, ϗ τηνικαῦτα ΑΠ ϗ ΑΠ' ἔσονται αἱ δύω τε χ δυνάμεις.

587. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ μὲν ἂν Γεωμετρικὴ Ἀνάλυσις, ὅσον αὐτῆς περὶ τὴν ϛοιχειώδη ἔχει Γεωμετρίαν, σχεδόν τι αὕτη, ἣν οἱ μελετῶντες, ϗ ἐξ ἑαυτῶν ὑποδείγματα τοῖς ἐντεθεῖσιν ἀδελφὰ ἐπιλύειν πειράσθωσαν· τὴν αὐτὴν δὲ ὑψηλοτέραν ὀψόμεθα ἐν τῇ ὑψηλῇ Γεωμετρίᾳ· ἤδη δὲ ῥητέον ἅττα περὶ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας πρὶν ἐκείνης ἐφάψασθαι.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Πρακτικὴ Γεωμετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ Χωροςαθμίσεως.

588. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δύω τόποι (σχ. 35) *ὁμόςαθμοι*, ἢ ἐν τῇ *αὐτῇ ἐπιφανείᾳ* εἶναι, λέγονται, ἐὰν ἴσον τȣ̃ τῆς γῆς κέντρȣ Κ ἀπέχωσι· τὸ δ' εὑρίσκειν, εἰ δύω τόποι ἴσον ἀπέχȣσι τȣ̃ τῆς γῆς κέντρȣ, ἢ γȣ̃ν, ὅση τῶν ἑκατέρȣ ἀποςάσεων ἐςὶν ἡ διαφορὰ, τȣτὶ καλεῖται *χωροςάθμισις*.

Ἐὰν ȣ̃ν θεατὴς, ἐπὶ τȣ̃ Δ καθήμενος, θεᾶται πρᾶγμα κατὰ τὸ Ε κείμενον διὰ τῆς εὐθείας ΔΕ, ἥτις ἅπτεται τῆς γηΐνης σφαίρας κατὰ τὸ Δ, ϗ ἰδίῳ ὀνόματι καλεῖται γραμμὴ *ὁριζόντιος*, ȣ̃τος κρινεῖ ὡς τὸ ὁρώμενον πρᾶγμα τῷ Δ ὁμόςαθμον· διὰ ταῦτ' ἄρα τὸ μὲν σημεῖον Ε καλεῖται *φαινομένη ὁμοςαθμία*, τὸ δὲ *ὁ ἀληθής*· ἵν' ȣ̃ν ὁρισθῇ ἡ τῶν δύω τȣ́των ὁμοςαθμιῶν διαφορὰ, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΔΕ παρέξει $KE^2 = K\Delta^2 + \Delta E^2$ (349)· ȣ̉κȣ̃ν $KE = \sqrt{K\Delta^2 + \Delta E^2}$.

589. Ἐπεὶ τοίνυν ἡ τῆς γῆς ἀκτὶς ἐςι περίπȣ ποδῶν 19612344, ἐὰν τὸ μεταξὺ Δ ϗ Ε ἀπόςημα ὑπο-

τεθῇ = μιᾷ λεύγῃ = 2282 ὀργυιαῖς = 13692 ποσὶν, ἔςαι, $\sqrt{\text{ΚΔ}^2 + \text{ΔΕ}^2} = \sqrt{19612344^2 + 13692^2}$ = 19612348 ποσὶ σὺν περίπυ 9 δακτύλοις, ἀφ᾽ ὗ ἀφαιρεθείσης τῆς ΚΟ ἀκτῖνος καταλειφθήσονται 4 πόδες καὶ σχεδὸν 9 δάκτυλοι, δύναμις τῆς οΕ διαφορᾶς τῆς ἀληθῦς ὁμοςαθμίας πρὸς τὴν φαινομένην· εὑρεθήσεται δὲ ἡ αὐτὴ ἐ ἀναγομένων τῶν λευγῶν εἰς ἔτι ἐλάττονα εἴδη· ἐ ὕτως ἐπὶ ἀποςήματος = 600 ὀργ. προκύψει διαφορὰ = 4 δακ., ἐπὶ δὲ, = 100, μία γραμμὴ + $\frac{1}{3}$, ἐπὶ δὲ, = 20 ὀργυιαῖς, διαφορὰ ἔςαι ἐλάττων, ἢ ἡμίσιγμα.

590. Ἐν γένει ἄρα ἡ διαφορὰ τῆς φαινομένης ὁμοςαθμίας πρὸς τὴν ἀληθῆ ἐπὶ ἀποςήματος = 100 περίπυ ὀργυιῶν, ἐκληπτέα ἐν τῇ πρακτικῇ = 0.

591. ΟΡΙΣΜΟΣ. Χωροςάθμη ἐςὶν ὄργανον, δι᾽ ὗ ἐξετάζεται ἡ δυοῖν τόπων ἀπὸ τῦ τῆς γῆς κέντρυ ἀπόςασις· παντοῖα μὲν ὖν ἐςιν εἴδη χωροςάθμης· ἣν δ᾽ ἡμεῖς ἁπλυςέραν τε ἐ εὐχρηςοτέραν τῶν ἄλλων κρίνομεν, ὑπάρχει, ἧς αὐτίκα τὴν κατασκευὴν ὑπογράψομεν.

592. Εἰλήφθω σίφων ὀρειχάλκειος ὁ ΑΒ, ἐ τοῖς πέρασιν αὐτῦ Α, Β (σχ. 36) συγκεκολλήσθων σίφωνες δύω ὑέλινοι πρὸς ὀρθὰς γωνίας οἱ γδ, αζ ἀκριβῶς προσαρμοσθέντες, ὡς μὴ ἐκχέεσθαι τὸ ἐμβαλλόμενον ὕδωρ· ὑκῦν συςαθήσεται ὁ δΑΒζ σίφων, συγκείμενος ἔκ τε τῦ ΑΒ ὀρειχαλκείυ, ἐ τῶν δγ, αζ ὑελίνων σιφώνων· τὸ δ᾽ αὐτῷ ἐγχεόμενον ὕδωρ, κατὰ τὺς τῆς ὑδροςατικῆς νόμυς, κἂν μὴ τὸ ὄργανον ἀκριβῶς ἔχῃ θέσιν κάθετον, ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ ἐφ᾽ ἑκατέρυ τῶν ὑελίνων σιφώνων ἔςαι, εἴτ᾽ ὖν τὸ ὕψος αὐτῦ ἐν ἑκατέρῳ ἴσον ἔςαι ἀπέχον τῦ τῆς γῆς κέντρυ· περιτίθενται δὲ τοῖς ὑελίνοις σίφωσι διὰ δα-

κτυλιδίων ἢ διόπτραι δύω, ὡς εἶναι δι αὐτῶν χρῆσθαι τῷ ὀργάνῳ εὐπετέστερον, ὡς δῆλον ἐκ τῶν εἰρησομένων ἔσαι· τυτὶ ὂν τὸ ὄργανον ἐσιν, ὃν ἀνωτέρω εἴπομεν, ἡ χωροςάθμη.

593. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Χωροςαθμίσαι τὸ πρανὲς διάστημα ΑΒΟΗΜΥ.

ΛΥΣΙΣ. Εἰλήφθω δὴ πρῶτον τὸ ΑΟ (σχ. 37), διάστημα = 20 ὀργυιαῖς περίπυ, ἢ τεθείσθω ἡ ΒΓΔ χωροςάθμη κάθετος τῷ ὁρίζοντι σχεδὸν κατὰ τὸ τυδε τῦ διαστήματος μέσον Β.

Γινώσκεται δὲ, εἰ κάθετόν ἐσιν ἐπίπεδον τῷ ὁρίζοντι, διὰ νήματος μολύβδῳ κατὰ τὸ πέρας προσδεδεμένυ· ἢ γὰρ τὸ τῦ μολύβδυ βάρος (ἢ ἑτέρυτυ βάρος ἔχοντος τῷ τῦ νήματος πέρατι προσηρτημένυ) ἐκτεῖνον τὸ νῆμα, καθ' ἣν ἐλεύθερον κάτεισιν εἰς τὸν ὁρίζοντα φορὰν, φέρεται πρὸς τὸ τῆς γῆς κέντρον, ἢ, ὃ ταὐτὸν, κάθετον τῷ ὁρίζοντι ἐφίςαται.

Στάθμης ἐν τεκτονικῆς τεθείσης πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι τῆς Αβ διὰ τῆς ΔΓδ ὀπτικῆς ἀκτῖνος διοπτευθήτω τὸ Δ· ἕτερος δέ τις σημειύτω τὸ δ σημεῖον, ἐν ᾧ περατῦται ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς, ἢ τῆς Αδ σάθμης ἀφαιρείτω τὸ ἐγνωσμένον τῦ ὀργάνυ ὕψος ΒΕ, τὸ δὲ κατάλοιπον ΑΚ ἐσιν ἡ διαφορὰ τῦ ὑψώματος τῶν τόπων Β, Α.

Εἶτα ἐκ τῦ Γ ληφθείσης ὡς ὀπτικῆς ἀκτῖνος τῆς ΓΔΖ, τῆς σάθμης τε τεθείσης κατὰ τὸ Ο, τὸ ΖΟ ἀφῃρήσθω τῦ ΒΕ, τὸ δὲ ΒΙ δείκνυσι τὴν διαφορὰν τῶν Ο, Β.

Τεθείσης ἑξῆς τῆς χωροςάθμης τῷ Η ἀπέχοντι τῦ Ο ὀργυιὰς περὶ τὰς 10, τῆς δὲ σάθμης ἐν τῷ Ο, ἢ εἶτα ἐν τῷ Μ, εὑρεθήσεται, ὡς πρότερον, ἡ διαφορὰ τῶν Η, Ο τόπων, ἢ ἡ τῶν Μ, Η· τῆς δὲ πράξεως ἐπαναληφθείσης μέχρι τῦ Υ, ἢ τῶν μερικῶν διαφορῶν συναφθεισῶν, προκύψει τέλως ἡ ὁλικὴ διαφορὰ τȣ̃ ὕψȣς τῶν Υ, Α τόπων. Ο. Ε. Π.

594. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δῆλον ȣ̃ν, ὡς εἰ κατ' ἀνάγκην παραλλὰξ ἐν ἀνόδοις ϗ καθόδοις τὰ τῆς πράξεως τελεσθῆναι δέα, ἐπάναγκες κατέχειν τὸν κατάλογον τῶν μερικῶν διαφορῶν τῶν ἀνόδων ϗ τῶν καθόδων, ϗ ταύτας ἀφαιρεῖν ἀπ' ἐκείνων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Πρακτικῆς Μηκομετρίας.

595. Δυνάμεθα καταμετρῆσαι ἐπὶ τῆς γῆς ἢ μῆκος, ἢ ἐπιφάνειαν· τὸ δὲ μῆκος ἐςὶν ἀεὶ εὐθεῖα γραμμή· ȣ̓κȣ̃ν ὅταν ἐξῇ περιπατῆσαι εὐθεῖαν, μετρȣ̃μεν αὐτὴν ἐφαρμόζοντες ἅπαξ, ἢ πολλάκις, μῆκος ἐγνωσμένον, φέρ' εἰπεῖν, ὀργυιάν.

596. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Διάςημά τι μετρῆσαι, καθ' ȣ̃ ἓν μόνον πέρας προσβάσιμον, ποταμȣ̃ φέρε, ἢ λίμνης, ἥτȣ τοιȣ́τȣ τὸ πλάτος.

ΛΥΣΙΣ. Κείσθω μετρῆσαι τὸ πλάτος ΠΔ (σχ. 38) λίμνης τινός· ἐν τῷ Π ὢν ἐςὼς ὁ Γεωμέτρης προσβλεψάτω σημείῳ τινὶ τῷ Δ πέραν τῆς λίμνης· ϗ πηξάτω δύω ῥάβδȣς τὰς Π, Τ, ὡς ἂν εἴη αἰσθητὸν τὸ αὐτῶν απόςημα πρός γε τὸ ΠΔ διάςημα, ϗ ἐν ὀργυιαῖς μετρήσας τὸ ΠΤ απόςημα, τιθέτω ἐν τῷ Π τὸ τȣ̃ γραφομέτρȣ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ὁρίζοντι, ϗ μετρείτω τὴν ὑπὸ ΔΠΤ γωνίαν (87)· ὡσαύτως τὸ γραφόμετρον ἐν τῷ Τ θεὶς, μετρείτω τὴν ὑπὸ ΠΤΔ· τέλος ζητησάτω τὴν ΠΔ πλευρὰν, ἢ γράφων ἐπὶ χάρτȣ τρίγωνον ὅμοιον τῷ κατὰ γῆν ΠΔΤ (219), ἢ διὰ τῆς κλίμακος ἀναλογικῶς αὐτὴν πορίζόμενος (279), ἢ διὰ τῆς τριγωνομετρίας (516), λαμβάνων πρῶτον τὴν γωνίαν Δ = 180° — Π — Τ (210), ἢ ἐν ἀριθμοῖς συνιςῶν τὴν ἀριθμητικὴν τῶν τριῶν μέθοδον (516, 519) Δ. ΠΤ : ΤΠ. Δ.

597. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἡ ΠΤ γνωςὴ πλευρὰ τῦ τριγώνυ, ἥτις ὀνομάζεται βάσις τῆς πράξεως, ὀφείλει ἔχειν λόγον τινὰ πρὸς τὴν δι᾽ αὐτῆς ζητυμένην πλευρὰν ἐπαισθητὸν, εἴτ᾽ ὖν ὑπάρχειν αὐτῆς τὸ γῦν πεμπτημόριον· ἄλλως γὰρ, ἀπάτη ἡτισῦν τῷ τῶν γωνιῶν μέτρῳ παρεισφρήσασα λεληθότως, ἢ μάλα ἐπαισθητὴ ἔσεται πρὸς τὴν ζητυμένην πλευράν

Πολλάκις μέντοι τά,τε τῆς γῆς ἀνώμαλον, ἢ ἄλλα πλεῖςα ὐκ ἐῶσι μετρηθῆναι δι᾽ ὀργυιᾶς τὴν βάσιν τὴν τῆς πράξεως· ἐν ταύτῃ ὖν τῇ περιπτώσει χρήζοντες τῆς ὅλης βάσεως ΤΔ, ἣν ὀργυιᾶ μετρῆσαι ἀδύνατον, λαμβάνομεν ὡς βάσιν ἄλλην πλευρὰν τὴν ΒΤ, ἢ ἐπὶ τῶν περάτων Β, Τ, πράττομεν, καθ᾽ ὃν εἴρηται τρόπον πρὸς λύσιν τῦ ΒΤΔ τριγώνυ, ἢ εὕρεσιν τῆς ΔΤ πλευρᾶς· δυνατὸν δὲ ἀεὶ ἐπαναλαμβάνειν τὰς πράξεις, ζητῦντας διὰ βάσεως ἥττονος βάσιν μείζονα.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Σημειωτέον μέντοι, ὡς ὅσῳ μᾶλλον ἂν πολλαπλασιασθῶσιν αἱ τοιάιδε πράξεις, τοσύτῳ ἔλαττον ἐφιξόμεθα τῆς ἀκριβείας τῦ ἀποτελέσματος.

598. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Γραμμὴν εὐθεῖαν, ἢ τὸ ΑΒ (σχ. 39) διάςημα, τὸ καθ᾽ ἑκάτερον τῶν περάτων ἀπροσπέλασον, καταμετρῆσαι.

ΛΥΣΙΣ. Ἐμπεπήχθωσαν δύω ῥάβδοι αἱ Π, Ε, ἢ ὀργυιᾶ μετρηθήτω τὸ αὐτῶν ἀπόςημα ΠΕ, ἢ ἐν τῷ Π εἰλήφθωσαν διὰ τῦ ἡμικυκλίυ αἱ γωνίαι ΑΠΒ, ΑΠΕ, ΒΠΕ· ἐν δὲ τῷ Ε αἱ γωνίαι ΒΕΠ, ΑΕΠ· Τριγώνȣ ἐν τȣ̃ ΒΠΕ γνωςῶν ὄντων τῆς ΠΕ πλευρᾶς ϗ τῶν πρὸς αὐτῇ γωνιῶν Π, Ε, ἑπομένως δὲ ϗ τῆς Β γωνίας, εὑρίσκεται ἡ ΒΠ (516)· ὡσαύτως (210) τȣ̃ ΑΠΕ τριγώνȣ γνωςῶν ὄντων τῆς ΠΕ πλευρᾶς, ϗ τῶν γωνιῶν Π, Ε, ϗ Α ἑπομένως, εὑρίσκεται ϗ ἡ ΑΠ· ἐντεῦθεν ἄρα τριγώνȣ τȣ̃ ΑΒΠ, δύω πλευρῶν τῶν ΑΠ, ΒΠ ϗ τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας Π γινωσκομένων, εὑρεθήσεται (522) ἡ ΑΒ πλευρὰ, εἴτ' ȣ̃ν τὸ ζητȣ́μενον διάςημα.

599. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ λύσις τȣ̃δε τȣ̃ προβλήματος χορηγεῖ τὸν τρόπον, καθ' ὃν παράλληλος ἄγεται εὐθεία ἀπροσπελάςω τῇ ΑΒ, ὡς ὅτε παράλληλον σειρὰν πυροβόλων ὅπλων θεῖναι βȣλόμεθα τῇ κατ' ἐνώπιον ἐπ' εὐθείας ἱσαμένῃ ἐχθρικῇ ςρατιᾷ· ϗ γὰρ τριγώνȣ τȣ̃ ΑΒΠ γνωςῶν ὄντων τῶν πλευρῶν ΑΠ, ΠΒ, ϗ τῆς Π γωνίας, γνωσθήσεται (522) ἡ ὑπὸ ΑΒΠ γωνία· ἀχθεῖσα ȣ̃ν διὰ τȣ̃ Π ἡ ΠΕ εὐθεῖα, μετὰ τῆς ΒΠ ποιήσασα τὴν ὑπὸ ΒΠΕ = ΑΒΠ, παράλληλος ἔςαι τῇ ζητȣμένῃ (137)· τέλος δὲ ἡ τῇ ΓΟ ἀνεγερθεῖσα κάθετος, ἔσεται τȣ̃το ϗ τῇ ΟΒ

600. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὕψος τόπȣ τȣ̃ Δ καλεῖται ἡ αὐτȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ τῆς γῆς κέντρȣ ἀπόςασις ΔΚ (σχ. 35)· ἐκȣ̃ν ἡ ὑπεροχὴ ὕψȣς τόπȣ τȣ̃ Ε ὑπὲρ τὸ τȣ̃ Δ ἐςὶ ΚΕ — Κο = οΕ· ἐὰν ȣ̃ν κληφθῇ ὕψος τȣ̃ τόπȣ Ε ἡ οΕ ὑπεροχὴ, τὸ Ηο ὕψος (σχ. 40) πύργȣ τινὸς ἐκληφθήσεται ὡς πρὸς τὸν εἰ μόνον ἡ γῆ, εἴτ' ȣ̃ν ἡ ὁριζόντιος γραμμὴ ΔΟ, ἐπαισθητῶς ȣ̃σα ἐπιμήκης πρὸς τὸ Ηο ὕψος, ἐκμετρηθείη δι' ὀργυιᾶς (597)· ἀλλὰ τὸ βΓ ὕψος αὐτȣ̃ τȣ́τȣ τȣ̃ πύργȣ μέχρι τȣ̃ ἀεροδείκτȣ, ἢ τὸ ΓΔ ὕψος ὄρȣς τινὸς (σχ. 42), ἔςαι ἀπροσέγγιςον.

601. ΠΡΟΒΛΗΒΑ Γ΄. Προσιτὸν εὑρεῖν ὕψος (40).

ΛΥΣΙΣ. Κείσθω τὸ ΗΠ ὕψος πύργε τινός· ἐκεῖν ἐμπεπήχθω ῥάβδος ἡ Κα, ϗ μετρηθήτω τῇ ὀργυιᾷ τὸ ΑΠ διάσημα, ϗ τεθήτω κατὰ τὸ Κ τὸ ἐπίπεδον τε γραφομέτρε κάθετον τῷ ὁρίζοντι, ϗ εἰλήφθω ἡ ΗΚο γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ δυεῖν ὀπτικῶν ἀκτίνων τῶν ΚΗ, ΚΟ· ἡ μὲν ἐν ο ὀρθή ἐςι· γνωσθείσης ἐν ϗ τῆς Κ, κἀκ τέτε ϗ τῆς Η (212), εὑρεθήσεται διὰ τῶν ἡμιτόνων ἐκ τῆς ἀναλογίας Η. Αο : Δ. ΗΟ (516, 519)· συναφθέντας δὲ τῇ ΗΟ ϗ τε μέρες οΠ, ὃ δὶ ὀργυᾶς, πήχεως, κτ., μετρηθῆναι δύναται, ἔξομεν τὸ ζητέμενον. Ο. Ε. Π.

602. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Εὑρεῖν τὸ ἀπρόσιτον ὕψος τε ΓΔ ὄρες (σχ. 42).

ΛΥΣΙΣ. Ἐμπεπήχθωσαν δύω ῥάβδοι Ι, Τ ϗ μετρηθήτω τὸ αὐτῶν ἀπόςημα· α΄. ἐν τεθήτω ἐν αὐτοῖς τὸ γραφόμετρον, ὡς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τε ΙΤΓ τριγώνε, ϗ εἰλήφθων αἱ γωνίαι ΓΙΤ, ΙΤΓ. β΄. τεθέντος ἐν τῷ Ι φέρ᾿ εἰπεῖν τε γραφομέτρε πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁριζοντι, μετρηθήτω ἡ ΓΙΔ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ὀπτικῆς ὁριζοντίε γραμμῆς ΙΔ, ϗ τῆς ὀπτικῆς ἀκτῖνος ΙΓ τῆς πρὸς τὴν κορυφὴν τε ὄρες φερομένης.

Τριγώνε ἐν τε ΙΓΤ γνωςῶν ὄντων τῆς ΙΤ πλευρᾶς, ϗ τῶν δύω γωνιῶν Ι, Τ, ϗ ἑπομένως τῆς Γ (210), εὑρεθήσεται τὸ ἀπὸ τε Ι μέχρι τῆς κορυφῆς τε ὄρες ἀπόςημα διὰ τῆς ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν μεθόδε (516) Γ. ΤΙ : Τ. ΓΙ.

Τριγώνε τοίνυν τε ΙΔΓ γνωςῆς ἔσης τῆς ΙΓ πλευρᾶς, ϗ τῆς ὑπὸ ΓΙΔ γωνίας μετρηθείσης, τῆς δὲ Δ ὀρθῆς ἔσης, τῆς ὑπὸ τε ΓΔ ὕψες πρὸς ὀρθὰς ἱςαμένε τε ὁρίζοντι κ̀ τῆς ΙΔ ὁριζοντίȣ περιεχομένης, γνωσθήσεται κ̀ ἡ Γ γωνία· εὑρεθήσεται τοίνυν ἡ ζητȣμένη ΓΔ πλευρὰ ἐκ τῆς μεθόδȣ Δ.ΙΓ : Ι.ΓΔ. Ο.Ε.Π.

603. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Καὶ ἄλλως τὸ πρόβλημα τόδε ἐπιλυθήσεται· ἔςω γὰρ ἐπὶ χάρτȣ ἡ ΙΤ = ΙΤ τῇ ἐπὶ τῆς γῆς, κ̀ ἐκ τῶν περάτων Ι, Τ ὑπὸ γωνίας τὰς ΓΤΙ, ΤΙΓ τὰς ἐπὶ τῆς γῆς εὑρεθείσας ἤχθωσαν δύω εὐθεῖαι· συςαθήσεται ȣ̓̃ν τὸ ΙΤΓ τρίγωνον· κ̀ δὴ τεθείσθω ἡ ΙΓ πλευρὰ ἐπὶ τῆς κλίμακος, κ̀ ȣ̃τως ἀποληφθήσεται τὸ μεταξὺ τῆς ῥίζης Ι ἀπόςημα κ̀ τῆς τȣ̃ ὄρȣς κορυφῆς· τέλος δὲ ἐκ τȣ̃ Ι πέρατος συνεςάσθω ἡ ἐπὶ τῆς γῆς εὑρεθεῖσα ὑπὸ ΓΙΔ γωνία διὰ τῆς ἀπεράντȣ ΙΔ, κ̀ ἐςάσθω ἐκ τȣ̃ Γ κάθετος τῇ ἀπεράντῳ ΙΔ ἡ ΓΔ, ἥτις ἐπιτεθεῖσα τῇ κλίμακι σημανεῖ τὸ τȣ̃ ὄρȣς ὕψος.

604. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ὑποτέθειται (σχ. 40, 42) ἐν τοῖς δυσὶ φθάσασι τῶν προβλημάτων ἡ ὑπὸ τȣ̃ ὕψȣς κ̀ τῆς ὁριζοντίȣ γραμμῆς περιεχομένη γωνία ὀρθὴ, ὅπερ ἐςὶν ἀληθῶς προδηλότατον· ἔςω γὰρ (σχ. 35) Κ τὸ κέντρον τῆς γῆς· αἱ ἀληθεῖς δὲ ὁμαςαθμίαι ο, Δ σὺν τῷ Κ συνιςᾶσι τρίγωνον ἰσοσκελὲς, ȣ̃ αἱ δύω ἴσαι πλευραὶ ΔΓ, οΓ εἰσὶ δύω τῶν τῆς γῆς ἀκτίνων· ἀλλ᾽ ἡ διαφορὰ οΕ τῆς ἀληθȣ̃ς ὁμαςαθμίας πρὸς τὴν φαινομένην ȣ̓δέποτε μὲν ἔςαι μείζων ἢ ἡμίςιγμα ἐπὶ ὕψȣς προσιτȣ̃, ὃ μετρεῖν πρόκειται (589), πόδες δ᾽ εὐάριθμοί τινες ἐπὶ ὕψȣς ἀπροσίτȣ· ȣ̓κȣ̃ν ἐπαυξήσει τὴν γηΐνην ἀκτῖνα Κο μόνον ἀπειροςῷ τινι μεγέθει· ἄρα τὸ ΚΔΕ τρίγωνον καὶ ȣ̃τω προφανῶς ἔςαι ἰσοσκελές· ἀλλ᾽ ἐπεὶ τὸ (σχ. 40, 42) Δο, ἢ ΔΙ ἀπόςημα, ἀφ᾽ ȣ̃ ἔθος μετρεῖσθαι τὸ προσιτὸν, ἢ ἀπρόσιτον ὕψος, ἀνεπαίσθητόν ἐςιν ὡς πρὸς τὴν γηΐνην ἀκτῖνα, ἡ ὑπὸ ΔΚο (σχ. 35) γωνία, ὑφ᾽ ἣν αὕτη ὑπο-

τείνει, ὡς ἀπειροςὴ ἐκληπτέα, ϗ ἑκατέρα τῶν δύω γωνιῶν Δ, ὁ ἔςαι $= \frac{180}{2} = 90°$ (210), εἴτ' ἔν ἑκατέρα ἐκληπτέα ὡς ὀρθή.

605. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Εὑρεῖν τὸ ὁριζόντιον ἀπόςημα δύω τόπων κειμένων ἐπὶ τᾶ πρανᾶς.

ΛΥΣΙΣ. Ἐὰν τὸ διάςημα μὴ ᾖ ἀξιόλογον, ὡς ὅτε πρόκειται μετρῆσαι τὸ μῆκος ἢ πλάτος μικρᾶ τινος τμήματος τῆς γῆς, ἵν' εὑρεθῇ (σχ. 43) ἡ ΒΠ εὐθεῖα, τὸ ὁριζόντιον ἀπόςημα τῆς Α κορυφῆς ἀπὸ τᾶ Β σημείᾳ, προσηρμόσθω τῷ πέρατι ὀργυιᾶς γνώμων ϗ ςάθμη τεκτονική, ϗ διατεθείσθω ὁριζοντικῶς ἡ ὀργυιὰ διὰ τᾶ γνώμονος, ϗ τῆς ςάθμης, ὡς ὁρᾶται ἐν τῷ ΒοΔ σχήματι, ϗ μεμετρήσθω διὰ τῆς ὀργυιᾶς, ἀναβαίνεσιν ἐκ τᾶ Β ἐπὶ τὸ Α, ἡ ὁριζόντιος ΒΠ, ἥτις ἰσᾶται τοῖς μέρεσιν οΔ, κτλ.· ἀλλ' ἡνίκ' ἂν προκέηται μέγατι ἀπόςημα, ὡς τὸ ΙΔ (σχ. 42) τὸ μεταξὺ τῆς Γ κορυφῆς ὄρας τινὸς, ϗ τᾶ τόπα Ι, ἐν ᾧ ἡ θέσις τῆς γῆς ἥκιςα ἐπιτρέπει τὴν ἀνωτέρω πρᾶξιν· τό τε δὴ εὑρήσομεν τὸ ὕψος Γ διὰ τᾶ ὀρθογωνία τριγώνα ΙΔΓ (602)· κἂν τάτῳ εὑρεθήσεται ϗ ἡ ζητεμένη ὁριζόντιος γραμμὴ ΙΔ (516). Ο. Ε. Π.

606. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς΄. Μετρῆσαι τὸ ὄρας τινὸς πρανὲς Γη.

ΛΥΣΙΣ. Τᾶ ὕψας ΓΔ ϗ τῆς ὁριζοντία ΙΔ εὑρεθέντων (602, 605), ζητείσθω, κατὰ τὴν χρείαν πηγνυμένων δύω ῥάβδων τῶν Ι, ο, διὰ τῆς ἐπιλύσεως τᾶ Ιοη τριγώνα τὸ τῆς ὁριζοντία μέρος Ιη, ᾗ τινος ἀπὸ ΔΙ ἀφαιρεθέντος, καταλείπεται ἡ Δη· Τριγώνα ἂν ὀρθογωνία τᾶ ΓΔη, ἐγνωσμένων τῶν τὴν Δ ὀρθὴν γωνίαν περιεχεσῶν πλευρῶν, ἔςαι, ἡ ταύτην ὑποτείνεσα Γη = $\sqrt{(\eta\Delta^2 + \Delta\Gamma^2)}$ (349).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Ἰχνογραφίας.

607. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. *Πίνακα γεωγραφικὸν σχεδιάσαι.*

ΛΥΣΙΣ. Μετρηθείσης ἀκριβῶς μιᾶς βάσεως (σχ. 44) τῆς ΟΠ, εἰλήφθωσαν πρὸς τῷ Ο διὰ τῦ γραφομέτρυ πᾶσαι αἱ γωνίαι ΖΟΠ, ΕΟΠ, ΔΟΠ, κτ., ἃς συνιςῶσι μετὰ τῆς ΟΠ πάντες οἱ ἐκ τῶν Ο, Π ὁρώμενοι τόποι· ὡσαύτως πρὸς τῷ Π εἰλήφθωσαν πᾶσαι αἱ γωνίαι ΖΠΟ, ΕΠΟ, ΔΠΟ, κτ· ἐντεῦθεν ἂν προκύψεσι τρίγωνα τὰ ΠΟΖ, ΠΟΕ, κτ., ἐν οἷς γνωςά εἰσι μία πλευρὰ ἡ ΟΠ, καὶ δύω αἱ πρὸς αὐτῇ γωνίαι Ο, Π· ζητυμένων ἂν καὶ τῶν λοιπῶν ἑκάςυ τριγώνυ, καὶ ἐπὶ χάρτυ συνιςαμένων (379) ὁμοίων τύτοις τριγώνων (219), ἐκτεθήσεται ἡ ἑκάςυ τόπυ θέσις ὡς πρὸς τὴν ΟΠ βάσιν· τὰ αὐτὰ δὲ γενέσθαι δύναται καὶ ὑπὲρ τῶν τόπων τῶν ἔνερθεν τῆς ΟΠ κειμένων.

Εἰς δὲ ὁρισμὸν τῆς θέσεως τῦ Α τόπυ διὰ τὰς ΑΟΠ λίαν ἀμβλείας γωνίας, καὶ διὰ τὰς λίαν ὀξείας ΑΠΟ, αὐτὰς μὲν διὰ τῦ γραφομέτρυ ἥκιςα μετρῦμεν, διορίζομεν δὲ ταύτην τὴν θέσιν διὰ τῆς προευρημένης προσεχῦς πλευρᾶς ΒΟ τῦ ΒΑΟ τριγώνυ, λαμβάνοντες ἐκ μὲν τῦ Ο τὴν ὑπὸ ΒΟΑ γωνίαν, ἐκ δὲ τῦ Β τὴν ὑπὸ ΟΒΑ.

Ὁπόταν τόπος ὁ Η παρατηρητέος ᾖ ἐκ δύω ἑτέρων τόπων Τ, Δ, ὧν εἴληπται ἡ θέσις, ὁρᾶν αὐτὸν μὴ δυνάμενοι ἐκ τῶν Ο, Π, λαμβάνομεν κατὰ τὸ Δ ϗ Τ τὰς γωνίας ΤΔΗ, ΗΤΔ, ϗ ἀγομένης ἐπὶ τῦ πίνακος τῆς ΔΤ εὐθείας, συνιςάσθωσαν ἐπ' αὐτὴν αἱ ἐπὶ τῆς γῆς εὑρεθεῖσαι γωνίαι ΤΔΗ, ΗΤΔ, τὸ δὲ σημεῖον τῆς κοινῆς διατομῆς Η ἐμφανεῖ ἐπὶ τῦ πίνακος τῆς θέσιν τῦ Η τόπυ.

608. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ συχνάκις παρεπηδῦσα ταῖς δε ταῖς πράξεσιν ἀπάτη γίνεται μάλιςα, ἡνίκ' ἂν ἡ γωνία, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ μετρηθησομένη πλευρά, ᾖ λίαν ἀμβλεῖα, ἢ λίαν ὀξεῖα· τύτυ χάριν ἐπὶ τῆς πράξεως, ὅσον ἔνεςι, φεύγομεν τῶν τοιῶνδε γωνιῶν τὴν καταμέτρησιν.

Δυνατὸν ἔτι θέσθαι (σχ. 45) ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ τῦ πίνακος, ὅσυς ἂν βυλώμεθα τόπυς, ἀοράτυς μὲν ἐκ τῶν Ο, Π, ὁρατὺς μέντοι ἐκ δύω ἤδη τεθέντων τόπων.

609. Σανίδιον ΑΒ ἐςὶ μικράτις σανὶς κυκλικὴ, ἢ τετράγωνος, λίαν ὁμαλὴ, ἐφ' ἧς τίθεται κανὼν κινητὸς, ὅμοιος σχεδόντι τῷ τῦ γραφομέτρυ, ὃς ἐνταῦθα δρομεὺς ὀνομάζεται, ἐπ' αὐτὸ δὲ χάρτης κολλᾶται τῷ σφαγιςικῷ κηρῷ, ἵν' ἔχοιεν ευμαρῶς ἄγεσθαι ἐπ' αὐτῦ αἱ ὧν δεόμεθα ευθεῖαι.

610. Ἄλλη Μέθοδος. Τῷ σανιδίῳ. Δυνάμεθα εὑρεῖν τὴν θέσιν τῶν τριῶν τόπων Τ, Ζ, Π· ἐκτεθείσθω γὰρ ἡ Οη ἐπὶ τῦ σανιδίυ ἐμφαίνυσα τὴν ΟΗ βάσιν, ϗ περιέχυσα τοσαῦτα μέρη ὅμοια τῆς γεωμετρικῆς κλίμακος, ὁσάκις φέρ' εἰπεῖν ἡ ΟΗ βάσις περιέχει τὰς 100 ὀργυάς· τεθείσθω δὲ τὸ τῦ σανιδίυ ἐπίπεδον ὁριζοντικῶς ἐπὶ τῦ ο πέρατος τῆς ΟΗ βάσεως, ὥςε τὴν ἐπὶ τῦ σανιδίυ εὐθεῖαν οΗ διευθύνεσθαι πρὸς τὴν ΟΗ βάσιν· εἶτα ἑνὸς τῶν περάτων τῦ δρομέως τιθεμένυ ἐπὶ τῦ ο πέρατος τῆς οη εὐθείας, διευθυνέσθω ἐκ διαδοχῆς πρὸς τὺς τόπυς

Τ, Ζ, Π, ἐ ἤχθωσαν πρὸς τὸν δρομέα ἐπὶ χάρτε αἱ εὐθεῖαι ΤΟ, ΖΟ, ΠΟ, αἵτινες γίνονται δο, χο, πο.

Μεταβεβιβάσθω εἶτα τὸ σανίδιον ἐπὶ τῆ Η, ἐ τεθήτω ὡς ἐ πρότερον, ἐ ἐπιτεθήτω ἓν πέρας τῆ δρομέως ἐπὶ τῆ η, ἐ διευθυνθήτω ὁ δρομεὺς ἐκ διαδοχῆς πρὸς τὰς τόπες Τ, Ζ, Π· αἱ ἦν εὐθεῖαι δη, χη, πη, αἱ κατὰ μῆκος τῆ δρομέως ἀγόμεναι, τέμνεσαι τὰς ἐκ τῆ ο ἀχθείσας εὐθείας, παρέξεσι τὰ σημεῖα δ, χ, π, ὧν ἡ θέσις ἡ αὐτὴ ἔςαι τῶν τόπων Τ, Ζ, Π· ἐ γὰρ ἕκαςον τῶν ἐπὶ τῆ σανιδίε τριγώνων, ἔχον δύο γωνίας ο, η, ἴσας ταῖς ἀντιςοίχαις Ο, Η, ἐν τῷ μεγάλῳ τριγώνῳ ΗΟΤ, τῷ ἐπὶ τῆς γῆς, ἀναγκαίως αὐτῷ ἔςαι ὅμοιον.

611. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ο ἐπαρχίας τινὸς πίναξ, ἐδὲν ἕτερόν ἐςιν, ἢ θέσις ὁριζοντικὴ τῶν κυριωτέρων τόπων αὐτῆς, τετέςιν ἡ θέσις, ἣν εἶχον ἂν πρὸς ἀλλήλες, εἰ ἦσαν ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ· τέτε δὴ χάριν ἵνα λάβωμεν τὰς γωνίας, αἵτινες παριςῶσι τὴν θέσιν τῶν διαφόρων τόπων, κατέχειν δεῖ τὸ τῆ γραφομέτρε ἢ τὸ τῆ σανιδίε ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ὁρίζοντι· ἐντεῦθεν ἄρα αἱ ὀπτικαὶ ἀκτῖνες, αἱ διὰ τῶν διόπτρων παραλλήλως τῷ τῆ γραφομέτρε, ἢ σανιδίε, ἐπιπέδῳ πρὸς δύο ῥάβδες διαγόμεναι, τμηθήσονται ἐν σημείοις, ἃ δύνανται ἀσφαλῶς θεωρηθῆναι ὡς κείμενα ἐπὶ τῆς ὁριζοντίε θέσεως (604). Τοιγαρῶν, ἵνα τῆ γραφομέτρε, ἢ τῆ σανιδίε, παραλλήλως τεθέντος τῷ ὁρίζοντι, ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς ἐμπης διευθύνηται πρὸς τὴν κορυφὴν Α ὄρες τινός, τὴν μᾶλλον ἀπέχεσαν τῆ ὄμματος διόπτραν δεήσει εἶναι ἄλις ὑψηλήν, ἐ τοσέτῳ μᾶλλον, ὅσῳ μᾶλλον ἀλλήλων ἀποςήσονται.

612. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Χωρίον σχεδιάσαι ἐν ἐπιπέδῳ κείμενον, ἐ ἀπρόσιτον ὄν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκτὸς τῦ (σχ. 46) ΟΗΤΠ ἐπιπέδυ εἰλήφθω βάσις ἡ ΑΒ, ϗ μετρείσθωσαν διὰ τῦ γραφομέτρυ πᾶσαι αἱ γωνίαι ΤΒΑ, ΠΒΑ, κτ., ὡς ἐν τῷ προεκτεθέντι ὑποδείγματι (607)· εἶτα ἐπὶ τῆς μικρᾶς βάσεως ΑΒ ἐν τῷ χάρτῃ ληφθείσης συνεςάτωσαν τρίγωνα ΑΒΤ, ΑΒΠ, κτ., ὅμοια τοῖς ἐπὶ τῆς γῆς μεγάλοις τριγώνοις ΑΒΤ, ΑΒΠ, κτλ.· ὅθεν ἔςαι ἡ θέσις τῶν γωνιῶν Η, Π, Τ, Ο, αἵτινες εἰσὶν ἐπὶ τῆς γῆς· ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν κορυφῶν Η, Π, Τ, Ο δι εὐθειῶν, προκύψει τὸ ζητέμενον ἐπίπεδον ΗΠΤΟ.

613. Διὰ τῦ σανιδίυ· Ἤχθω μικρὰ εὐθεῖα (σχ. 47) ἐπὶ τῦ σανιδίυ ἡ δΒ, ϗ τιθέσθω τοδὶ τὸ ὄργανον ἐπὶ τῦ Α ὥςε τὴν δΒ εὐθειαν, ἔχυσαν τὸ πέρας αὐτῆς ἐπὶ τῦ Α, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἶναι τῇ ἐπὶ τῆς γῆς βάσει ΑΒ· ϗ διοπτευθήτωσαν αἱ κορυφαὶ Η, Π, Ο, Τ, ϗ ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΗΑ, ΠΑ, ΟΑ, ΤΑ, αἵτινες γίνονται ἐπὶ τῦ σανιδίυ ηδ, πδ, οδ, χδ, ὡς ἀδιόριςοι· τεθείσθω εἶτα τὸ σανίδιον ἐπὶ τῦ Β πέρατος, τὸ μὲν Β ἔχον ἐπὶ τῦ Β, τὸ δὲ δ διατεῖνον πρὸς τὸ Α, ϗ ἤχθωσαν παρὰ τὸν δρομέα, ἥκυσαι πρὸς τὰ σημεῖα Η, Π, Ο, Τ, αἱ εὐθεῖαι ΗΒ, ΠΒ, ΟΒ, ΤΒ, αἵτινες τέμνυσαι τὰς προτέρας ἐν τοῖς σημείοις η, π, ο, χ, παρέξυσι τὸ ζητέμενον ἐπίπεδον.

614. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἵνα σχεδιασθῇ ἐπιπεδόντι ὁριζοντικὸν, τὸ τῦ γραφομέτρυ, ἢ τῦ σανιδίυ, ἀεὶ δεῖ εἶναι παράλληλον τῷ ὁρίζοντι.

615 ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Χωρὶς προσιτῦ δι ἐνίων τῶν αὐτῦ πλευρῶν μόνον, ὐ μὴν δὲ ϗ ἐν τοῖς αὐτῦ ἐσωτετρικοῖς μέρεσιν, εἴτ᾽ ὖν (σχ. 48) λίμνης τῆς ΑΒΓΔΕΖ, τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσαι.

ΛΥΣΙΣ. Μετρηθήτω διὰ τῆς ὀργυιᾶς μία πλευρὰ τῆς λίμνης ἡ ΑΒ· καὶ δὴ ἐπίτε τῆς γῆς ϗ τῦ χάρτε μεθοδευέσθω διὰ τῦ γραφομέτρυ, ἢ τῦ σανιδίυ, ὡς εἴπερ αἱ γωνίαι Ζ, Ε, Δ, Γ, ἦσαν τόπων θεατῶν, ὧν πρῦκειτο σχεδιάσαι τὸν γεωγραφικὸν πίνακα (607, 610)· ληφθήσης ἐν ὕτως ἐπὶ τῦ χάρτυ τῆς θέσεως τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, κτλ., ἐπεζεύχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΒΓ, ΓΔ, κτ· ὅθεν προκύψει τὸ ἐπίπεδον τῆς λίμνης.

616. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Χωρίυ τῦ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 49) τῦ ἐπὶ πρανῦς κειμένυ, ῦ τα ἔσω ὑπάρχει προσβάσιμα, τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσαι.

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τῦ γραφομέτρυ ληφθέντος τινὸς ἐσωτερικῦ σημείυ τῦ Ι, μετρηθήτωσαν αἱ ὑπὸ ΑΙΟ, ΟΙΖ, κτλ. γωνίαι, ϗ διὰ τῆς ὀργυιᾶς μετρηθήτωσαν αἱ εὐθεῖαι ΙΑ, ΙΟ, κτλ.· ἐκτεθεισῶν δὲ ἐπὶ τῦ χάρτυ τῶνδε τῶν γωνιῶν διὰ τῦ ἀναγωγέως, ϗ τῶν εὐθειῶν διὰ τῆς γεωμετρικῆς κλίμακος, ἐπεζεύχθωσαν τὰ πέρατα Α, Ο, κτλ., διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΟ, κτλ., ὅθεν προκύψει τὸ τῆς γῆς ἐπίπεδον.

Τῦ σανιδίυ τεθέντος ἐν τῷ Ι, ϗ τῦ δρομέως ἐκ διαδοχῆς διευθυνομένυ πρὸς τὰς γωνίας Α, Ο, κτλ., ἤχθωσαν εὐθεῖαι πέρας μὴ ἔχυσαι αἱ ΙΑ, ΙΟ, κτλ., ϗ ἐκτελεσθήτω ἡ πρᾶξις, ὡς πρότερον.

Ἄλλως. Μετρηθείσης τῆς ΟΖ πλευρᾶς ὡς βάσεως, σχεδιασθήτω τὸ ἐπίπεδον τῆς γῆς, ὡς εἰ ἦσαν ἀπρόσιτα τὰ ἐν αὐτῷ μέρη (615).

617. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Σχεδιάσαι τὸ ὁριζοντικὸν ἐπίπεδον χωρίυ κατὰ τῦ πρανῦς κειμένυ.

ΛΥΣΙΣ. Γενέσθω ἀπολύτως, ὡς εἰ τὸ χωρίον ἦν ἐπίπεδον, κατεχομένε ἀεὶ τε̃ ἐπιπέδε τε̃ γραφομέτρε, ἢ τε̃ σανιδίε παραλλήλως τῷ ὁρίζοντι (613 κτλ.).

618. Ἵνα μέντοι σχεδιασθῇ τὸ ὁριζοντικὸν ἐπίπεδον ὄρες, εἰλήφθω ἡ θέσις τῶν σημείων, ἃ περιέχεσι τὴν αὐτε̃ ὁριζόντιον περίμετρον, ἢ κατὰ τὴν μέθοδον τε̃ πίνακα γεωγραφικὸν σχεδιάζειν (607), ἢ ἐκδεξαμένοις τὰς διαφόρες προσόψεις τε̃ ὄρες ὡς ἀπροσίτες (612), καὶ λαβε̃σι τὰ ἰδιαίτερα ἐπίπεδα αὐτῶν τῶν προσόψεων διὰ τῶν ἐπὶ τε̃ ἐπιπέδε διαφόρων βάσεων, ἢ ἐκδεξαμένοις ἑκάστην τῶν προσόψεων ὡς χωρίον προσιτὸν διὰ μιᾶς μόνης πλευρᾶς (615), ἢ ἅμα χρησαμένοις ἁπάσαις ταῖς δε ταῖς μεθόδοις, καθ' ἣν ἑκάστη πρόσοψις παρίστησι χρῆσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Σύνοψις τῆς ὀχυροποιΐας.

619. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἐπίπεδον ἐπὶ χάρτε δοθὲν κατὰ γῆς σχεδιάσαι, εἴτ' ε̃ν τὸ ἀκονόνιστον ἐπίπεδον (σχ. 50) αβγδεζ.

ΛΥΣΙΣ. α΄. Εἰλήφθω σημεῖον τὸ Ι ἐν τῷ μέσῳ τε̃δε τε̃ ἐπιπέδε, καὶ τεθέντος ἐπ' αὐτὸ ἑνὸς πέρατος τε̃ δρομέως διοπτευθήτωσαν ἐκδιαδοχῆς πᾶσαι αἱ γωνίαι α, β, γ, κτ., καὶ προσηλωθήτωσαν ἐν τῇ γῇ ἐν ταῖς δειχθείσαις φοραῖς αἱ ῥάβδοι Α, Β, Γ, κτλ.

β΄. Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς κλίμακος διὰ τε̃ διαβήτε ἑκάστη εὐθεῖα Ια, Ιβ, κτλ., καὶ ἐὰν ἐπὶ τῆς κλίμακος ἡ Ια = 100 φέρ' εἰπεῖν, γενέσθω ἐπὶ τῆς γῆς ΙΑ = 100 ὀργυιαῖς ταὐτὸ δὲ γενέσθω κἀπὶ τῶν ἄλλων εὐθειῶν Ιβ, Ιγ, κτλ.

γ΄. Τέλος δὲ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, κτλ.· τὸ δὲ ΑΒΓΔΕΖ ἔσαι σχῆμα ὅμοιον τῷ ἐπὶ τῦ χάρτυ δοθέντι· τὰ γὰρ Ιαβ, ΙΑΒ τρίγωνα διὰ τὴν Ι κοινὴν γωνίαν ϗ διὰ τὰς ἀναλόγυς πλευρὰς Ια, Ιβ, ΙΑ, ΙΒ, εἰσὶν ὅμοια (337)· ὁμοίως δὲ ϗ τὰ ἄλλα τρίγωνα.

620. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Τῦ ἀριθμῦ τῶν πλευρῶν δοθέντος, ϗ τῆς ἀκτῖνος, κανονικὸν πολύγωνον ἐπὶ τῆς γῆς συςῆσαι, ἐχυροποιΐα, ἢ ἄλλῳ τῳ, συντελῦν.

ΛΥΣΙΣ. Κείσθω ἐχυροποιῆσαι (σχ. 51) τὸν τόπον Ι ϗ δὴ περὶ τὸ Ι, ὡς περὶ κέντρον, προκείσθω συςῆσαι ἑξάγωνον κανονικὸν ἐπὶ ἀκτῖνος ΙΑ = 180 ὀργ.

ά. Ἐν παντὶ ἑξαγώνῳ κανονικῷ ἡ πρὸς τῷ Ι κέντρῳ παντὸς τριγώνυ τῦ ΙΑΒ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ δύω πλαγίων ἀκτίνων ΙΑ, ΙΒ, ἐςιν = 60° (396)· ἐκ τῦ Ι ὖν διοπτευθείσης διὰ τῦ δρομέως πρὸς τὸ δοκῦν μιᾶς ἀκτῖνος, ἐμπεπήχθω ῥάβδος κατὰ τὸ Χ· παρεκλιθέντος δὲ τῦ δρομέως μοίραις 60 ἐμπεπήχθω ἐνταῦθα κατὰ τὴν φορὰν ΙΨ ἄλλη ῥάβδος· ἐκ δὲ τύτυ πάλιν παρεκκλίσεως 60 ἄλλων μοιρῶν γινομένης, ἐμπεπήχθω ἄλλη ῥάβδος κατὰ τὴν Ικ φορὰν, ϗ ὕτως ἐφεξῆς.

β΄. Ἐκ δὲ δὴ τῦ Ι μετρηθεισῶν ἐπὶ τῆς ΙΧ ὀργυιῶν 180, ϗ ἐπὶ τῆς ΙΨ δὲ, κἀπὶ τῶν ἄλλων εὐθειῶν, προκύψυσιν αἱ εὐθεῖαι ΙΑ, ΙΒ, ΙΟ κ. τ. λ., ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΟ κ. τ. λ. γενήσεται ἑξάγωνον κανονικὸν τὸ ΑΒΟΔΕΖ, κατεσκευασμένον ἐπ᾿ ἀκτῖνος = 180 ὀργυιαῖς κατὰ τὴν ζήτησιν, ὃ καθ᾿ ἑαυτὸ πρόδηλον (249).

Εἰς δὲ κατασκευὴν κανονικῦ πενταγώνυ, παρατηρηθήτω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία παντὸς τριγώνυ τῷ ἐν αὐτῷ ἐςιν $=72°$ (249)· ταδ' ἄλλα διαπεπράχθω, ὡς ἀνωτέρω.

Υ'πὲρ δὲ τετραγώνȣ τελείȣ γενέσθω ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ὑπὸ ΧΙΖ γωνία $= 90°$, ϗ $= 120°$ ὑπὲρ τριγώνȣ (249), ϗ τὰ λοιπὰ πεπράχθω, ὡς ϗ πρότερον.

Υ'πὲρ δὲ κανονικȣ̃ ἑπταγώνȣ, ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία ἐςὶν $= 50° + 25' + 42''$ κ.τ.λ., διὰ τȣ̃ γραφομέτρȣ τὰ τῆς πράξεως ȣ̓κ ἂν ἐξακριβωθείη· ταὐτὸν δὲ νοητέον ϗ περὶ παντὸς ἄλλȣ κανονικȣ̃ πολυγώνȣ, ȣ̃ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία Ι ȣ̓κ ἂν εἴη ἐν ὁλοσχερέσι μοίραις ἐκδηλȣμένη· ὑπὲρ δὲ ὀκταγώνȣ γενέσθω ἡ γωνία $= 45$, ὑπὲρ ἐννεαγώνȣ $=40°$, ὑπὲρ δεκαγώνȣ $= 36°$ κ.τ.λ. (249).

621. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ε'ὰν δὲ μὴ ἐξῇ ἐκ τȣ̃ μέσȣ τȣ̃ ἐχυροποιηθησομένȣ τόπȣ κατασκευάσαι πολύγωνα, διαπραξόμεθα τὰ ἑξῆς.

ά. Α'ναμνηςέον, ὡς ἐν γένει ἑκάςη ἐσωτερικὴ γωνία κανονικȣ̃ πολυγώνου ἴση ἐςὶ δὶς τοσαύταις ὀρθαῖς πλὴν τεσσάρων, ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον, διαιρεθείσαις τῷ ἀριθμῷ τῶν πλευρῶν (267)· ἐντεῦθεν τριγώνȣ μὲν ἐςὶν $= 60°$, τετραγώνȣ δὲ $= 90°$, πενταγώνȣ δὲ $= 108°$, ἑξαγώνȣ δὲ $= 120°$, ἑπταγώνȣ δὲ $= 128° + 34'$ κτ., ὀκταγώνȣ δὲ $= 135°$ ϗ τὰ ἑξῆς.

β'. Ε'ὰν ȣ̃ν ζητῆται κανονικὸν ἑξάγωνον, ςὰς ἐν τῷ σημείῳ Α, εἰλημμένῳ περὶ τὸν ἐχυροποιηθησόμενον τόπον, προσήλȣ ῥαβδίον ἐπὶ τῆς τȣ̃ δρομέως φορᾶς ΑΒ· ςρέψας δὲ τὸν δρομέα πρὸς τὸ Ζ, ἕως ἂν διαδράμῃ μοίρας $120°$, προσήλȣ ἕτερον ῥαβδίον ἐπὶ τὴν ΑΖ φοράν.

Παρατηρȣ̃ντι δὲ, ὡς τὸ ἐν ἑξαγώνῳ κανονικῷ τρίγωνον ἐςὶν ἰσόπλευρον (251), γενέσθω ἑκάςη πλευρὰ

ΑΒ, ΑΖ ἴση τῇ ἀκτῖνι = 180 ὀργυιαῖς· τῶν δὲ δύω πλευρῶν ΑΒ, ΑΖ ὕτως ὁρισθεισῶν, συνεςάτωσαν ἐπὶ τῶν κατ' αὐτὰς περάτων Β, Ζ δύω νέαι γωνίαι ἑκατέρα = 120° διὰ τῶν νέων πλευρῶν ΒΟ, ΖΕ, ὧν ἑκατέρα γενέσθω = 180 ὀργυιαῖς, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως· ἐντεῦθεν συςαθήσεται ἐπὶ τῆς γῆς ἑξάγωνον κανονικὸν ἐπὶ τῆς αἰτηθείσης ἀκτῖνος.

Ἐν παντὶ δὲ ἄλλῳ κανονικῷ σχήματι ὁριςέον τριγωνομετρικῶς, ὅσον δεῖ εἶναι τὸ μῆκος ἑκάςης πλευρᾶς, τῦ τῆς ἀκτῖνος δεδομένυ μήκυς.

622. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθω κατασκευάσαι κανονικὸν πεντάγωνον ἐπὶ ἀκτῖνος τῆς ΙΑ = 180 ὀργυιαῖς· ἐπεὶ ἦν ἡ ἐσωτερικὴ ὑπὸ ΒΑΖ γωνία τῦ πενταγώνυ ἐςὶν = 108° (267), ἡ ὑπὸ ΒΑΙ γωνία τῦ ΑΒΙ τριγώνυ ἡμίσεια αὐτῆς ἔςαι, εἴτ' ἦν 54°, ἡ δὲ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία ΑΙΒ = 72° (249). Τριγώνυ ἦν τῦ ΙΒΑ γνωςῶν ὄντων τῶν τε δύω γωνιῶν Α, Ι ϗ τῆς πλευρᾶς ΙΒ = ΙΑ = 180 ὀργυιαῖς, ἡ συνήθης τῶν τριῶν μέθοδος (516) συνημ. Α : ΙΒ : : συνημ. Ι : ΑΒ ἐκδηλώσει τὸ μῆκος, ὃ ἀπονεμηθῆναι δεῖ ἑκάςῃ πλευρᾷ ΑΒ, ΑΖ κ. τ. λ. τῦ πενταγώνυ· τὰ δὲ λοιπὰ, ὡς πρότερον, διαπραχθήσεται.

Ὁρισμοί.

623. Ὑποτεθείσθω τὸ ἡμιεξάγωνον (σχ. 52) ΑΒΓΔ ἥμισυ ἐπιπέδυ, ἐν γῇ γενομένης ἐχυροποιίας· τὸ μὲν ἦν ΑΒΓΔ καλεῖται *πολύγωνον ἐξωτερικὸν*, τὸ δὲ χβΤδ, *πολύγωνον ἐσωτερικόν*· ϗ *γραμμὴ μὲν τῆς βάσεως* καλεῖται μία τις πλευρὰ ΒΓ τῦ ἐξωτερικῦ πολυγώνυ· *πύργος* δὲ, ὅλον τὸ μέρος ΒΕτκΖ· ἡ

δὲ γραμμὴ ΒΕ, ἡ ΒΖ προπύργιον· ἡ δὲ δύω πύργυς διακρίνυσα γραμμὴ κο, χόρτος.

624. Ἡ κΖ γραμμὴ καλεῖται πλευρόν.

625. Γωνία ἠλαττωμένη ἐςὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΖ ἡ ὑπὸ τῆς βάσεως ΒΓ ἢ ἑνὸς προπυργίυ ΒΖ περιεχομένη, γωνία δὲ πλευρώδης, ἡ ὑπὸ δύω προπυργίων τῶν ΒΕ, ΒΖ περιεχομένη· κέκληται δὲ ὕτως ὡς φρυρυμένη ὑπὸ τῶν δύω προπυργίων Μο, ΠΡ.

626. Γωνία πλευρῦ ἐςιν ἡ Ζκο ἡ ὑπὸ τῦ πλευρῦ Ζκ ἢ τῦ χόρτυ κο περιεχομένη· γωνία δὲ νώτυ, ἡ ΒΖκ ἡ περιεχομένη ὑφ' ἑνὸς προπυργίυ τῦ ΒΖ, ἢ ἑνὸς πλευρῦ τῦ Ζκ.

627. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. *Δοθέντος τῦ κανονικῦ πολυγώνυ, καθ' ὃ πρόκειται κατασκευάσαι ἐχυροποιΐαν τινά, ἐπὶ χάρτυ, λογίσαθαι δι' αὐτῦ τὰς γωνίας ἢ τὰς γραμμὰς τῆς ἐπὶ τῆς γῆς κατασκευαθησομένης ἐχυροποιΐας.*

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ὖν ἑξάγωνον τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔ·α΄. γενέθω ἡ γραμμὴ τῆς βάσεως ΒΓ = 180 ὀργυαῖς περίπυ ὑπὲρ μετρίας ἐχυροποιΐας· ἢ ἐςάθω κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς ἡ κάθετος ΗΙ, ἥτις ἔςω ἴση τῷ ἑκτημορίῳ τῆς ΒΓ ὑπὲρ ἑξαγώνυ, τῷ πεμπτημορίῳ ὑπὲρ πενταγώνυ, τῷ ὀκτημορίῳ ὑπὲρ ὀκταγώνυ κ.τ.λ.· διὰ δὲ τῦ Ι διήχθωσαν πέρας μὴ ἔχυσαι αἱ εὐθεῖαι ΒΙο, ΓΙκ.

β΄. Τριγώνυ ὖν τῦ ΒΗΙ, γνωςῶν ὄντων τῆς πλευρᾶς ΒΗ $= \frac{180}{2} =$ 90 ὀργυαῖς, ἢ τῆς ΗΙ $= \frac{180}{6} =$ 30 ὀργυαῖς, ἢ τῆς ὀρθῆς γωνίας Η, πρὸς εὕρεσιν τῆς ἠλαττωμένης γωνίας ΗΒΙ φημί: τὸ τῶν δύω πλευρῶν ΒΗ, ΗΙ ἄθροισμα 120 ἔςι πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν 60, ὡς ἡ ἁπτομένη τῦ ἡμιαθροίσματος 45° (212) τῶν δύω γωνιῶν

Β, Ι πρὸς τὴν χ ἀπτομένην τῆς ζητυμένης ἡμιδιαφορᾶς τῶν δε τῶν γωνιῶν (499)· ἥτις διὰ τῆς μεθόδυ τῶν τριῶν εὑρίσκεται $= 26° + 34'$· ἐκῶν ἐςιν ἡ ἠλαττωμένη γωνία ΗΒΙ $= \frac{22°}{2} - 26° - 34'$ (210) $= 18° + 26'$· ἀφαιρυμένης ὖν τῆς $18° + 26'$ ἀπὸ $60°$ ἡμίσεως τῆς γωνίας Β τῦ πολυγώνυ, ἔςαι κατάλοιπον $41° + 34'$ ἡμιγωνία πλευρώδης ΖΒβ· ἄρα ὅλη ἡ πλευρώδης γωνία ἐςιν $= 83° + 8' =$ ΖΒΕ.

γ'. Ἐπιλυθέντος δὲ τῦ ΒΗΙ τριγώνυ εὑρεθήσεται α'. ἡ γωνία Ι $= 71° + 34'$· ἄρα ἡ ΒΙΓ $= 143° + 8'$· β'. ἡ ΒΙ $= 94$ ὀργυαῖς $+$ ποσὶ 5.

δ'. Ἀπονεμηθέντος ὖν τῷ προπυργίῳ ΖΒ μήκυς περὶ τὰ δύω επτημόρια τῆς ΒΓ, ἢ 51 ὀργ. ἢ ἀχθείσης τῆς ΖΜ, ἡ ΖΙ, ἢ ΜΙ ἴση ἔςαι 94 ὀργυαῖς ϰ) 5 ποσὶ — 51 ὀργυῶν, εἴτ' ὖν ἴση 43 ὀργυαῖς ϰ) 5 ποσί. Τριγώνυ ὖν ἰσοσκελῦς τῦ ΖΜΙ, γωνία μὲν ἡ Ζ ἴση ἐςὶ τῇ ἡμιηλαττωμένῃ ΖΒΗ (132)· δυνατὸν ἄρα γινωσκομένης ϰ) τῆς ΖΙ, τῆς γωνίας Ι $= 143° + 8°$, τῆς γωνίας Μ $=$ Ζ εὑρεῖν τὴν ΖΜ ἐκ τῆς ἀναλογίας Μ. ΖΙ : Ι. ΖΜ $= 83$ ὀργυαῖς ϰ) ποδὶ 1.

ε'. Γενομένων ΖΟ ϰ) Μκ $=$ ΖΜ, ϰ) ἀχθέντων τῶν πλευρῶν Μο, Ζκ ἕως τῶν περάτων ο, κ, ναιμὴν ϰ) τῦ χόρτυ οκ, ἔςαι Ιο $= 83$ ὀργ. $+ 1$ ποδ. — ΖΙ $= 39$ ὀργ. $+ 2$ ποσί· ἐκ δὲ δὴ τῶν ὁμοίων ἰσοσκελῶν τριγώνων ΖΜΙ, Ικο ἐςι ΖΙ. ΖΜ : Ιο. κο $= 74$ ὀργυαῖς $+ 3$ ποσὶ $=$ τῷ χόρτῳ.

ς'. Εἰς δὲ εὕρεσιν τῆς Ζκο γωνίας τῦ πλευρῦ, τριγώνυ ἰσοσκελῦς τῦ ΖΜκ γινώσκεται ἡ γωνία Μ $=$ Γ (132) $=$ τῇ ἠλαττωμένῃ γωνίᾳ Β $= 18° + 26'$· ἄρα ἡ ὑπὸ Μκ

$$Z\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha = \frac{180^\circ - 18^\circ - 26'}{2}\ (206,\ 210) = 80^\circ +$$

$47'$· συναφθείσης δὲ τὴν Ικο γωνίας τῇ ἠλαττωμένῃ γωνίᾳ $\Gamma = B$, ἀποληφθήσεται ἡ γωνία τῆ πλευρᾶ Zκο $= 99^\circ + 13'$· εὑρεθήσεται δὲ αὐτὸ τὸ πλευρὸν Zκ ἐπιλυομένε τῆ τριγώνε ZκM, ᾗ μεθόδε γινομένης κ. ZM : M . Zκ $=$ 26 ὀργυαῖς $+$ 3 ποσί· ἐκ δὲ τῆ Zκο τριγώνε ἀποληφθήσεται ἡ γωνία τῆ νώτε BZκ $= \kappa + o$ (216) $= 99^\circ + 13' + 18^\circ + 26' = 117^\circ + 39'$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ χωρομετρίας.

628. Κείσθωσαν δύω δένδρα (σχ. 53) δ, ζ ἐπὶ τῆς κορυφῆς ὄρες τινὸς τῆ ΘΠ, ἓ τὸ ὑπὲρ τὸν ΗΟ ὁρίζοντα ὕψος ἐςιν ἡμισείας λεύγης· τὰ δὲ δένδρα ἀλλήλων ἀπέχεσιν ὀργυὰς 3· ἐὰν ἓν ἐπινοηθῶσι κατιόντα κατὰ τὰς φορὰς δK, ζK τῆς βαρύτητος, συμπεσῦνται ἐν τῷ τῆς γῆς κέντρῳ K· ἐκῦν τὸ τριῶν ὀργυῶν διάςημα, τὸ ταῦτα ὁρίζον, ὁλοχερῶς ἀφανισθήσεται μετὰ τὸ διαδραμεῖν τὰ δένδρα λεύγας 1433, διὰ τὸ τὴν τῆς γῆς ἀκτῖνα ὅτι ἔγγιςα ἰσῦσθαι λεύγαις $1432\frac{1}{2}$.

629. Ἐὰν δὲ μόνον κατέλθωσι μέχρι τῆ ὁρίζοντος ΗΟ, προσπελάσεσιν ἀλλήλοις τῇ ποσότητι, ἥπερ ἡ ΗΟ ἐςιν ἐλάττων τῆς δζ· ἀλλὰ δK : KH :: δζ : ΗΟ, ἢ 1433 : $1432\frac{1}{2}$ :: 3 ὀργυαὶ : χ· μεθόδου γενομένης τῶν τριῶν ΗΟ ἰσῦται τῇ δζ $- \frac{1}{955}$ ὀργυᾶς· ἐκῦν τὰ δύω δένδρα δ, ζ κατελθόντα μέχρι τῆ ὁρίζοντος, εἶτ' ἓν δια-

δραμόντα τὸ ἡμισείας λεύγης ὕψος τȣ̃ ὄρȣς προσεγγίζȣσιν ἀλλήλοις τῷ $\frac{1}{3^{-}}$ ὀργυᾶς, ὅπερ ȣ̓δὲ γραμμὴν ὅλην συνίςησιν.

630. Ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ τὸ ΘΠ ὄρος ἐπικαλυπτόμενον δένδρεσι, τρεῖς ὀργυὰς ἀπέχȣσιν ἀλλήλων, πρὸς ὀρθὰς ἐφεςηκόσι τῷ ὁρίζοντι κατὰ τὰς εὐθείας δΚ, ζΚ, ἐπινοηθῶσι δὲ κατιόντα μέχρι τȣ̃ ὁριζοντικȣ̃ διαςήματος ΗΟ, ὃ περιλαμβάνει τὸ ὄρος, ἀλλήλοις ἅπαντα προσεγγίζȣσι σχεδὸν μιᾷ γραμμῇ.

631. Δῆλον ἄρα ἐντεῦθεν τοσαῦτα μικρȣ̃ δεῖν οἰόντε εἶναι φυτεῦσαι δένδρα, τόσȣς οἰκοδομήσασθαι οἴκȣς κτλ., ἐπὶ τȣ̃ ὁριζοντικȣ̃ διαςήματος ὄρȣς τινὸς, ὅσα κἀπὶ τῆς ἐπικαμπȣ̃ς αὐτȣ̃ ἐπιφανείας.

632. Ἐντεῦθεν ἄρα χώρας μετρȣ̃ντες οἱ Γεωμέτραι τὴν ὁριζοντικὴν αὐτῶν ἐπιφάνειαν μόνον ἐκτιμῶσι, ϗ ταύτην ἀεὶ μετρεῖν εἰώθασι· ἐντεῦθεν ἄρα ȣ̓ χρῶνται τῇ ἐκμετρήσει γῆς ἀνάντους, ἢ κατάντους, ἀλλὰ μόνον ἐν λόγῳ τῆς ὁριζοντικῆς αὐτῆς ἐπιφανείας· ϗ τȣ̃τ' ἔςιν, ὃ εἴωθεν ἀεὶ καταμετρεῖσθαι.

633. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Καταμετρῆσαι τὴν ὁριζοντικὴν χωρίȣ ἐπιφάνειαν.

Τῷ σανιδίῳ. Σχεδιάσαντες τὸ ὁριζοντικὸν ἐπίπεδον τȣ̃ χωρίȣ (617), λογιȣ̃μεθα τὸ ἐμβαδὸν κατὰ τάδε.

Ἔςω τὸ ἐπὶ χάρτȣ ἐσχεδιασμένον τȣ̃ χωρίȣ ἐπίπεδον τὸ ἀκανόνιςον πεντάγωνον (σχ. 54) ΑΟΠΡΧ· ά. διῃρήσθω εἰς τρίγωνα διὰ τῶν κατεςιγμένων ΑΡ, ΑΠ· β'. εἰλήφθω διὰ τῆς κλίμακος ἡ κατεςιγμένη ΑΡ, ὡς τεθῆναι ἔχȣσα εἰς κοινὴν βάσιν τῶν δύω προσεχῶν τριγώνων ΑΡΧ, ΑΡΠ, ϗ ἐπ' αὐτῆς ἠγέρθω ὡς ὕψος τȣ̃ ΑΧΡ τριγώνȣ κάθετος ἡ Χδ, ἡ δὲ ΠΓ κάθετος, ὡς ὕψος τȣ̃

ΑΠΡ τριγώνȣ· τȣ́των δὲ τῶν δύω καθέτων τῇ κλίμακι μετρηθεισῶν, ἔςαι τὸ μὲν ΑΡΧ τρίγωνον $= \frac{ΑΡ \times δΧ}{2}$,

τὸ δὲ ΑΠΡ $= \frac{ΑΡ \times ΠΤ}{2}$ (285, 321).

Τὸ δὲ τρίτον τρίγωνον ΑΠΟ, μετρηθείσης τῇ κλίμακι τῆς ΑΟ βάσεως, ϗ τȣ̃ Πη ὕψȣς, ἔςαι $= \frac{ΑΟ \times Πη}{2}$.

Τὸ δὲ τῶν τριῶν τȣ́των τριγώνων ἄθροισμα ἐκδηλώσει τὴν ὁλικὴν τȣ̃ χωρίȣ ἐπιφάνειαν, ἣν ἔδει μετρῆσαι.

634. ΑΛΛΩΣ. Ἵνα μετρηθῇ ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ τριγωνικȣ̃ χωρίȣ (σχ. 55) ΑΒΓ, μετρηθήτω πρῶτον τῇ ὀργυᾷ ἡ ΑΓ ὡς βάσις· ἐπ' αὐτῆς δὲ προαχθείσης ἠγέρθω κάθετος ἡ ΒΖ ὡς ὕψος, ϗ μετρηθήτω τῇ ὀργυᾷ, ϗ πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ τὴν ΑΓ βάσιν· τὸ δὲ τȣ̃ γινομένȣ ἥμισυ ἔςαι ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ τριγώνȣ (285, 288).

635. Ἐὰν δὲ εὐχερέςερον ᾖ, ὡς βάσιν μὲν λαβεῖν τὴν ΑΒ εὐθεῖαν, ὡς δὲ ὕψος τὴν ΓΔ κάθετον, ἔςαι ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια $= \frac{ΑΒ \times ΓΔ}{2}$.

636. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἰεὶ δ' ἀναμνηςέον ἐπὶ τῆς χωρομετρίας, ὡς εἰ τὸ πρὸς καταμέτρησιν τρίγωνον ΒΓΔ (σχ. 56) κεκλιμένον εἴη ἐπὶ τȣ̃ ὁρίζοντος, ἡ αὐτȣ̃ μὲν ἐπιφάνεια ἥκιςα, τȣ̃ δ' ἀντιςοιχȣ̃ντος ΒΓδ ὁριζοντικȣ̃ τριγώνȣ, μετρηθήσεται· μετρητέον ȣ̓̃ν τῇ ὀργυᾷ, βάσιν μὲν τὴν ΒΓ, ὕψος δὲ τὸ Γδ, καθ' ὃν προείρηται τρόπον (605)· ταυτὸν δὲ νοητέον ἐν γένει περὶ πάσης κατάντȣς ἐπιφανείας.

637. Ἐὰν τὸ πρὸς καταμέτρησιν προκείμενον χω-

ρίον παραλληλόγραμμον ᾖ, μετρητέον διὰ τῆς ὀργυᾶς τὴν βάσιν, καὶ τὸ ὕψος· τὸ δ' ὑπὸ τούτων γινόμενον ἐκδηλώσει τὴν αὐτοῦ ἐπιφάνειαν.

638. Ἐὰν δὲ τὸ καταμετρηθησόμενον χωρίον κανονικὸν ᾖ πολύγωνον, ὃ σπανιώτατα ξυμβαίνει· ά. δύω κάθετοι, ἐκ τῶν μέσων δύω πλευρῶν συναντηθεῖσαι ἀλλήλαις, ἐμφανοῦσι τὸ αὐτοῦ κέντρον· β΄. διὰ τῆς ὀργυᾶς μία πλευρὰ μετρηθεῖσα πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν εἰς εὕρεσιν τῆς τοῦ πολυγώνου περιμέτρου· γ΄. ἐκ τοῦ κέντρου μιᾷ πλευρᾷ καθέτου ἀχθείσης, καὶ τῇ ὀργυᾷ μετρηθείσης, δι' αὐτῆς πολλαπλασιαθήτω τὸ τῆς περιμέτρου ἥμισυ· ὅθεν θηρευθήσεται ἡ τοῦ πολυγώνου ἐπιφάνεια (297).

639. Ἐν γένει μέντοι, ἐὰν ἡ πρὸς καταμέτρησιν ἐπιφάνεια (σχ. 54) μήτε παραλληλόγραμμον ᾖ, μήτε κανονικὸν πολύγωνον, οἷα ἡ ΑΟΠΡΧ, διῃρήσθω εἰς τρίγωνα τὰ ΑΠΟ, ΑΠΡ, ΑΡΧ· καὶ διὰ τοῦ γνώμονος, ἢ τοῦ γραφομέτρου, ἠγέρθωσαν κάθετοι, καὶ τῇ ὀργυᾷ μετρηθήτωσαν αἱ Χδ, ΠΤ ἐπὶ τὴν κοινὴν τοῖς δυσὶ τριγώνοις ΑΡΧ, ΑΠΡ βάσιν ὡς ὕψη αὐτῶν τῶν τριγώνων, εἶτα ἠγέρθω ἡ Πη κάθετος ὡς ὕψος τοῦ ΑΟΠ τριγώνου (287)· τέλος δὲ πολλαπλασιαθήτω ἡ ἑκάστου τριγώνου βάσις ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ εὑρεθέντος ὕψους (285).

640. Ὅταν μὲν αἱ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος ἐκδηλοῦντες ἀριθμοὶ ἀμιγεῖς περιέχωσι ποσότητας, τουτέστιν ὀργυὰς μόνας κτ., ἄπονος ὅλος ὑπάρχει ὁ πολλαπλασιασμός· ἐὰν γὰρ τὸ μὲν ἥμισυ τῆς (σχ. 55) ΑΓ βάσεως ᾖ = 12 ὀργυιαῖς· τὸ δὲ ΒΖ ὕψος = 12 ὀργυαῖς, εὐχερῶς πάνυ ἡ ἐπιφάνεια εὑρεθήσεται περιέχουσα 144 τετραγωνικὰς ὀργυάς.

641. Ἡνίκα μέντοι ὁ τὴν βάσιν, ἢ τὸ ὕψος, ἢ ϗ ἀμφότερα, ἐκδηλῶν ἀριθμὸς ὑπάρχει συμμιγὴς, περιέχων ἅμα ὀργυὰς ϗ πόδας, ἢ ὀργυὰς ϗ πόδας ϗ δακτύλους, ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς πολύπλοκός τις καθίσταται.

642. Εὕρηνται δὲ εἰς τοῦτο δύω μέθοδοι γενικαὶ, ἑκατέρα θατέρᾳ εἰς βάσανον συμβάλλουσαι· ἀμφότεραι δὲ τῷ τοῦ μείζονος εἴδους τετραγώνῳ ὑποτιθέασι μέρη τοῦ ἐλάττονος εἴδους, ἐμφαινόμενα τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐκδηλοῦντος, ποσάκις τῷ μείζονι γραμμικῷ εἴδει ἐμπεριέχεται τὸ ἔλαττον γραμμικὸν εἶδος (280)· οὗτος δὲ ὁ τῶν μερῶν ἀριθμὸς ἐστιν ὁ ἐνυποτεθεὶς τῇ τετραγωνικῇ ὀργυᾷ, ἢ τῷ τετραγωνικῷ ποδὶ κτ. ἐπὶ τοῦ ὑποστρωθέντος πίνακος (Ἀριθμ. 155)· δέδεικται δὲ (280) ὡς τὸ πρᾶγμα οὕτως ὑπάρχειν ὀφείλει (σχ. 57)· ἡ γὰρ τετραγωνικὴ ὀργυὰ ΑΗΒΠ περιέχει ἐξ ἀνάγκης 36 πόδας τετραγωνικοὺς, ἐμφαινομένους ὑπὸ τοῦ ἀπὸ 6 τετραγώνου· ὁ δὲ τετραγωνικὸς ποὺς περιέχει ἀναγκαίως (280) δακτύλους τετραγωνικοὺς 144, ὅς ἐστιν ὁ ἀπὸ 12 γραμμικῶν δακτύλων τετράγωνος· ἐντεῦθεν ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ὀργυὰ περιέχει ἀναγκαίως δακτύλους τετραγωνικοὺς $144 \times 36 = 5184$, τετράγωνος ἀπὸ 72, ὃς ἐκδηλοῖ, πόσους ἡ ὀργυὰ περιέχει γραμμικοὺς δακτύλους.

Οὐκοῦν διχῶς ἄν τις εὕροι, πόσα φέρ᾽ εἰπεῖν στίγματα τετραγωνικὰ περιέχει ὀργυὰ ἡ τετράγωνος· ά. ἀναγομένης τῆς γραμμικῆς ὀργυᾶς εἰς στίγματα 10368, ϗ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦδε τετραγωνιζομένου· β΄. εἰδότες, ὡς ἡ μὲν τετράγωνος ὀργυὰ περιέχει 36 πόδας τετραγωνικοὺς, τούτων δὲ ἕκαστος 144 δακτύλους τετραγωνικοὺς, τῶν δὲ ἕκαστος, 144 τετραγωνικὰς γραμμὰς, τούτων δὲ ἑκάστη, 144 στίγματα τετραγωνικὰ, πολλαπλασιάζομεν τρὶς ἐκ διαδοχῆς τὸν 36 ἐπὶ 144, τὸ δὲ ἔσχατον γινόμενον 107495424 ἰσωθήσεται τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ 10368, ὡς πρότερον εὕρηται· ἐντεῦθεν δῆλον, ὡς οἱ δύω ἦτοι τρόποι ἀμοιβαδὸν ἀλλήλοις εἰς βάσανον συμβάλλουσι.

643. Ἐὰν δὲ γνῶναι βουλώμεθα, ὅτι ἀληθῶς ἡ τετραγωνικὴ ὀργυὰ περιέχει τὰ εἰρημένα τετραγωνικὰ σίγματα, ἐννοήσωμεν (σχ. 57) τὴν ΠΗ βάσιν οὐχὶ συγκειμένην ἐκ ποδῶν 6, ἀλλ' ἐκ σιγμάτων 10368, ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ ΒΠ ὕψος· καὶ δὴ οὕτως ἡ τετραγωνικὴ ὀργυὰ, ἀντὶ τοῦ περιέχειν ἓξ παραλληλόγραμμα ἐκ ποδῶν 6 ἕκαστον σύνθετον, περιέξει παραλληλόγραμμα 10368 ἕκαστον ἐκ σιγμάτων τετραγωνικῶν 10368, εἴτ' οὖν περιέξει σίγματα τετραγωνικὰ 10368 × 10368 = 107495424.

644. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπεὶ δὲ τὸ θεωρεῖν εἶδος ἀνώτερον ἐν ἐπιφανείᾳ, διῃρημένον εἰς μέρη εἴδους ἧττονος, ἀεὶ παρέχει πράξεις ἀριθμητικὰς ἄλις μακροσκελεῖς, ἐπενοήσαν οἱ Γεωμέτραι ἐπιτομωτέραν τινὰ μέθοδον, ἐν τῇ πρακτικῇ ἀεὶ πρὸ τῶν ἄλλων αὐτὴν ἐγκρίναντες, ἣν καὶ ἡμῖν σιγῇ παρελθεῖν ἥκιστα ἔδοξεν.

645. Ἐὰν τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς (σχ. 58) ΑΒ ΓΔ τὸ ΔΓ ὕψος μόνον διαιρεθῇ εἰς ἓξ ἰσάλληλα μέρη Δζ, ζϑ, κτ., εἰς ἓξ δηλονότι πόδας, εἰς ποὺς Δζ τοῦ ὕψους παρέξει ἓν παραλληλόγραμμον ΑΔεζ, ὃ καλεῖται ποὺς τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, καὶ ἔστι προδήλως τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ΑΒΓΔ τὸ ἑκτημόριον· ἐὰν οὖν βάσις ἡ ΑΔ μιᾶς ἢ πλειόνων ὀργυῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ὕψος ἑνὸς, ἢ πλειόνων ποδῶν, ἢ τ' ἀνάπαλιν, προκύψουσιν ἐντεῦθεν πόδες τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· ΑΔ φέρε

μία ἕσα ὀργυὰ, πολλαπλασιαθεῖσα ἐπὶ Δη = 3 ποσὶ, παρέξει τρεῖς πόδας τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

646. Ἐὰν ἓν ἐπινοηθῇ εἷς πῦς ὁ ΔΖ διῃρημένος εἰς 12 δακτύλες, ἕκαςος δάκτυλος, οἷον ὁ Δυ, παρέξει παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔτυ, ὃ ἔςαι $\frac{1}{12}$ τῦ ποδὸς τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ΑΔεζ· τουτὶ δὲ τὸ παραλληλόγραμμον καλεῖται δάκτυλος τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

Ἐὰν δὲ ληφθῇ ἓν δωδεκατημόριον μόνον τῦ Δυ δακτύλε, ἢ πολλαπλασιαθῇ ἐπὶ τὴν ΑΔ ὀργυὰν, τυτὶ τὸ παραλληλόγραμμον ἔςαι $\frac{1}{12}$ τῦ δακτύλε τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ΑΔτυ· ὃ καλεῖται γραμμὴ τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· τέλος δὲ $\frac{1}{12}$ τῦδε τῦ ἐχάτε ὕψες, ἢ $\frac{1}{144}$ τῦ δακτύλε Δυ παρέξει μετὰ τῆς ΑΔ βάσεως παραλληλόγραμμον, ὃ καλεῖται ςίγμα τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

647. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ α΄. Τὸ τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ςίγμα ἐςὶ δωδεκατημόριον τῆς γραμμῆς τῆς αὐτῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· ἡ δὲ γραμμὴ τῦ δακτύλε, ὁ δὲ, τῦ ποδός· αὐτὸς δὲ, τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, εἰσὶ δωδεκατημόρια.

648. β΄. 1 ποῦς Δχ, πολλαπλασιαθεὶς ἐφ' ἕνα πόδα ΔΖ, δίδωσι προδήλως $\frac{1}{6}$ τῦ δακτύλε τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ΑΔεζ, κ.τ.λ. ἢ δὴ τὸ διπλῦν τῦ δακτύλε ΑΔτυ τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, εἴτ' ἓν δύω δακτύλες τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· ἐντεῦθεν ἄρα, ὅταν παριςᾶται γινόμενόν τι ἐκ ποδῶν, τὸ διπλῦν αὐτῦ παρέξει δακτύλους τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, αἳ καταγραφήσονται ἐν τῷ χώρῳ τῶν δακτύλων τέτων.

649. γ΄. 1 πῦς, πολλαπλασιαθεὶς ἐφ' ἕνα δάκτυλον, παρέξει $\frac{1}{12}$ τῦ γινομένε ὑπὸ πόδος, ἐφ' ἕνα πολ.

λαπλασιαθέντος, εἴτ' οὖν $\frac{1}{12}$ τῶν δύω δακτύλων τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, ἤ 2 γραμμὰς τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· ἔχοντες τοίνυν γινόμενόν τι ὑπὸ ποδῶν καὶ δακτύλων, διπλασιάζομεν αὐτὸ καὶ τίθεμεν ἐν τῷ χώρῳ τῶν γραμμῶν τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

650. δ'. 1 δάκτυλος, πολλαπλασιαθεὶς ἐφ' ἕνα δάκτυλον, ὀφείλει παρέχειν $\frac{1}{12}$ τοῦ ἤδη προκύψαντος πολλαπλασιασμῷ τοῦ 1 ποδὸς ἐφ' ἕνα δάκτυλον, εἴτ' οὖν τῶν δύω γραμμῶν, ταὐτὸν εἰπεῖν δύω στίγματα τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, ὅταν οὖν ᾖ γινόμενόν τι ὑπὸ δακτύλων, καὶ δακτύλων, λαμβάνοντες τὸ διπλοῦν τοῦδε τοῦ γινομένου, τίθεμεν ἐν τῷ χώρῳ τῶν στιγμάτων τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

Ἔστωσαν οὖν ἤδη 20 ὀργυαὶ καὶ 5 πόδες καὶ 9 δάκτυλοι βάσεως ἐφ' ᾧ πολλαπλασιαθῆναι ἐπὶ 6 ὀργυὰς καὶ 4 πόδας καὶ 7 δακτύλους ὕψους.

20	5	9		
6	4	7		
τετραγ. ὀργ.	πόδες τῆς τετ. ὀργ.	δάκ. τῆς τετ. ὀρ.	γραμ. τῆς τετ. ὀρ	στιγ. τῆς τετρ. ὀρ
120	30	54		
	80	40	72	
		140	70	126
141	4	6	8	6

20 Ὀργυαὶ πολλαπλασιαθεῖσαι ἐπὶ 6 ὀργυὰς διδοῦσιν 120 τετραγωνικὰς ὀργυὰς (283), αἳ γεγράφθωσαν.

5 Πόδ. πολλαπ. ἐπὶ 6 ὀργ. διδοῦσι 30 πόδας τετραγωνικῆς ὀργυᾶς (645), οἳ γεγράφθωσαν.

9 Δάκτυλ. πολλαπ. ἐπὶ 6 ὀργ. διδῦσι 54 δακ. τετρ. ὀργ. (640) οἳ γεγράφθωσαν.

20 Ὀργ. πολλαπ. ἐπὶ 4 πόδ. διδῦσι 80 πόδ. τετρ. ὀργ. (645), οἳ γεγράφθωσαν.

5 Πόδ. πολλαπ. ἐπὶ 4 ποδ. διδῦσιν 20, ὧν τὸ διπλῦν ἐςὶ 40 δακ. τετραγ. ὀργ. (648), οἳ γεγράφθωσαν.

9 Δάκτ. πολλαπ. ἐπὶ 4 πόδ. διδοῦσι 36, ὧν τὸ διπλῦν ἐςιν 72 γραμ. τετραγ. ὀργ. (649), αἳ γεγράφθωσαν.

20 Ὀργυαὶ πολλαπ. ἐπὶ δακ. 7 παρέχυσιν 140 δακτ. τετρ. ὀργ. (646), οἳ γεγράφθωσαν.

5 Πόδες πολλαπ. ἐπὶ 7 δακ. διδῦσι 35, ὧν τὸ διπλῦν 70 γραμαὶ τετραγ. ὀργ. (649), αἳ γεγράφθωσαν.

9 Δάκτ. πολλαπ. ἐπὶ 7 δάκτ. διδῦσιν 63, ὧν τὸ διπλῦν ἐςιν 126 ςίγμ. τῆς τετρ. ὀρ. (650), ἃ γεγράφθωσαν.

Οὐδὲν ὖν λοιπὸν, ἢ συνάψαι ὡς ἔθος (Ἀριθμ. 209) ταύτας τὰς ποσότητας, ἀναμιμνησκομένους μόνον, ὅτι διαιρεῖν δεῖ διὰ 12, ἵνα, τὰ μὲν ςίγματα εἰς γραμμὰς, αἱ δὲ, εἰς δακτύλυς, οἱ δὲ, εἰς πόδας, ἀναχθῶσιν, ἵν᾽ εἰς ὀργυὰς δ᾽ ἀναχθῶσιν οἱ πόδες, διὰ 6.

Συνάψει ὖν προκύψυσιν ἐπὶ τῦ προτεθέντος ὑποδείγματος 141 ὀργυαὶ τετραγωνικαὶ, ϗ 4 πόδες, ϗ 6 δάκτυλοι, καὶ 8 γραμμαὶ, καὶ 6 ςίγματα τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Σαφὲς δὲ, ὅτι ἕκαςον εἶδος ἀναχθήσεται κἀνταῦθα εἰς τὰ μείζονα· ϗ γὰρ 80 πόδες φέρε τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς συμπληρῦσι 13 ὀργυὰς τε.

τραγωνικὰς, ϗ 2 πόδας τῆς τετραγωνικῆς ὀργυιᾶς· ϗ δὴ γραφήσονται, 13 μὲν ὀργυιαὶ ἐν τῷ χώρῳ τῶν ὀργυιῶν, 2 δὲ πόδες ἐν τῷ οἰκείῳ αὐτῶν χώρῳ.

651. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Τὸ πέρας, πρὸς ὃ ἄγουσι τῶν προεκτεθεισῶν ἑκατέρα μέθοδος (642), διαπιστοῖ ἡμᾶς σαφέστερον περὶ τῶν συντιθέντων μερῶν ἐπιφανείας, ὡς τετραγώνου θεωρουμένης, εἴτ᾽ οὖν ὡς οὔσης τετραγώνου ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γραμμικῶν μερῶν, ἃ περιέχει ἡ πλευρὰ ταύτης τῆς ἐπιφανείας· πάρεστι γὰρ ἐντεῦθεν ὁρᾶν ὡς ὁ τετραγωνικὸς ποῦς ὀφείλει περιέχειν δακτύλους τετραγωνικοὺς 144, ὅς ἐστι τετράγωνος ἀπὸ 12 τοῦ ἐκδηλοῦντος, ὅσα περιέχει δακτυλιαῖα μέρη γραμμικὰ ὁ ποῦς.

Ἡ μέντοι τρίτη μέθοδος, ἐπεὶ τοῖς αὐτοῖς ὀνόμασι καλεῖται τὰ τοῦ ἐν ἐπιφανείᾳ μέτρου μέρη, οἷς ϗ τὰ ὁμώνυμα μέρη τοῦ γραμμικοῦ μέτρου (ἥτε γὰρ τετραγωνικὴ ϗ ἡ γραμμικὴ ὀργυιὰ πόδας ἓξ περιέχουσιν ἐνταῦθα, ϗ ὁ ποῦς δὲ ὁ τετράγωνος δακτύλους 12, ὅσους περιέχει ϗ ὁ γραμμικὸς κ. τ. λ.), τῷ κοινωνικῷ βίῳ μᾶλλον καθέστηκε χρήσιμος· ἐργάτης τις, φέρ᾽ εἰπεῖν συνθέμενος ἐπὶ λίτραις 20 ἐργάσασθαι ἑκάστην ὀργυιὰν διήνυσεν οἰκοδομῶν 141 ὀργυιάς, ϗ 4 πόδας, ϗ 6 δακτύλους, ϗ 3 γραμμάς, ϗ 6 στίγματα· τελέσαι οὖν αὐτῷ ὀφείλω α. εἰκοσάκις 141 λίτρας· β΄. ⅔ τῶν 20 λιτρῶν· γ΄. ½ λίτρας ὑπὲρ ἑνὸς ποδός· δ΄. ⅔ ὑπὲρ ἑνὸς δακτύλου· ε. ½ ὑπὲρ γραμμῆς μιᾶς.

652. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Αὕτη δὲ ἡ τρίτη μέθοδος οὐδὲν ὅλως διενήνοχε τῆς τῶν συμμέτρων μερῶν, πλὴν ὅτι αὕτη τῇ τετραγωνικῇ ὀργυιᾷ ὑποτίθησι μέρη ὁμώνυμα τοῖς τῆς κατὰ γραμμὴν ὀργυιᾶς, ϗ ὅτι, τῆς ὑποθέσεως ταύτης τηρηθείσης, ὁ λογισμὸς ἐπιτομώτερον ἐκτελεῖται.

653. Ἐὰν εἰδέναι βυλώμεθα πόσοις μέρη τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, εὑρεθέντα διὰ τῆς τρίτης μεθόδυ, ἰσοδυναμῦσι τετραγωνικοῖς μέρεσι, συλλογιύμεθα ὕτως· εἷς πῦς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ἰσοδυναμεῖ 36 ποσὶ τετραγωνικοῖς, διαιρεθεῖσι διὰ 6, εἶτ' ὖν 6 ποσὶ τετραγωνικοῖς· εἷς δάκτυλος τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ἴσος ἐςὶ 5184 δακτ. τετρ. διαιρεθεῖσι διὰ 72, εἶτ' ὖν ἴσος 72 δακ. τετ. ὁ γὰρ δάκτυλος ἐςιν $\frac{1}{72}$ τῆς ὀργυᾶς· μία δὲ γραμμὴ τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ἴση ἐςὶ τῷ $\frac{746496}{864}$ = 864 γραμμαῖς τετραγωνικαῖς, εἴγε ἡ γραμμὴ ἐςιν = $\frac{1}{864}$ τῆς ὀργυᾶς (Ἀριθμ. 149)· ἓν σίγμα τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ἐςιν = $\frac{107495424}{10368}$ = 10368 τετραγωνικοῖς σίγμασιν· ἐπεὶ τὸ σίγμα ἐςιν = $\frac{1}{10368}$ τῆς ὀργυᾶς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ πρακτικῆς Στερεωμετρίας.

654. Ἐὰν κυβικῆς ὀργυᾶς τῆς ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 57) τμηθῇ ἡ ὕπερθεν βάσις ΑΟΕΖ, εἶτ' ὖν ἡ τετραγωνικὴ ὀργυιὰ, εἰς ἓξ καὶ τριάκοντα τετραγωνικὺς πόδας, εἷς πῦς ὁ ΑΙ τῶν ἐν τῷ ὕψει ΑΒ παράξει ςερεὸν τὸ ΑΙΟτυΕΖ, συγκείμενον ἐκ ποδῶν κυβικῶν ἓξ· ἡ ἄρα κυβικὴ ὀργυιὰ περιέξει κυβικὺς πόδας 6 × 36 = 216.

655. Ὡσαύτως, ἐπείπερ ὁ τετραγωνικὸς πῦς ΑδτΡ περιέχει 144 τετραγωνικὺς δακτύλυς, ἕκαςος τῶν δακτύλων Αν, τῶν ἐν ἑνὸς κυβικῦ ποδὸς ὕψει ΑΙ, παράξῃ ςερεὸν τὸ ΑνΛγδΡ 144 κυβικῶν δακτύλων· ὁ κυβικὸς ἄρα πῦς ἔςαι σύνθετος ἐκ κυβικῶν δακτύλων 144 × 12 = 1728· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ὁ μὲν κυβικὸς δάκτυλος περιέχει κυ-

βικὰς γραμμὰς 1728· ἡ δὲ κυβικὴ γραμμή, κυβικὰ σίγματα 1728.

656. Ἐν γένει δὲ κυβικόν τι στερεὸν περιέχει κυβικὰ μέρη, ἐκδηλέμενα ὑπὸ τȣ͂ κύβȣ τȣ͂ ἀριθμȣ͂, τȣ͂ δηλȣ͂ντος ὅσα κατὰ μῆκός τι μέτρον ὁμώνυμον τῷ στερεῷ περιέχει τοιάδε κατὰ μῆκος μέρη· ȣ̔́τως ὁ ἀριθμὸς τῶν κυβικῶν ποδῶν, τῶν τῇ κυβικῇ ὀργυιᾷ ἐμπεριεχομένων, ἐστὶ 216 κύβος τȣ͂ 6· κ, γὰρ ἡ κατὰ μῆκος ὀργυιὰ περιέχει 6 πόδας κατὰ μῆκος· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν κυβικῶν δακτυλων τῶν ἐμπεριεχομένων τῷ κυβικῷ ποδὶ ἐστὶν 1728, κύβος τȣ͂ 12.

657. α΄. Ὥστε εὑρεῖν ἐξέστι πόσα σίγματα Φέρ᾽ εἰπεῖν κυβικὰ περιέχει ἡ κυβικὴ ὀργυιὰ διττῶς, ἢ πολλαπλασιαζομένȣ τρὶς ἑξῆς τȣ͂ 216 ἀριθμȣ͂ τῶν ἐν αὐτῇ κυβικῶν ποδῶν ἐπὶ 1728. β΄. ἢ κυβιζομένȣ τȣ͂ 10368 ἀριθμȣ͂ τῶν κατὰ μῆκος σιγμάτων, ἃ περιέχει ἡ κατα μῆκος ὀργυιά. ἑκατέρως ȣ̓͂ν εὑρεθήσεται ἡ κυβικὴ ὀργυιὰ περιέχȣσα κυβικὰ σίγματα 1114512556032.

658. Ἵν᾽ ἀναχθῇ εἶδός τι κατώτερον εἰς τὸ ἀμέσως ἀνώτερον, αἱ κυβικαὶ Φέρε γραμμαὶ εἰς κυβικȣ̀ς πόδας, διαιρετέον τὸν τὸ κατώτερον εἶδος ἐκδηλȣ͂ντα ἀριθμὸν διὰ 1728, ἐξαιρȣμένων τῶν κυβικῶν ποδῶν, ἢ διαιρεῖν δεῖ διὰ 216, ἵν᾽ ἀναχθῶσιν εἰς κυβικὴν ὀργυιάν (Ἀριθ. 169. Γ΄.).

659. Οὗτός ἐστιν ὁ ἀριθμὸς τῶν μερῶν, ἃ προλαβόντες ἐξεθέμεθα ἐν τῷ πίνακι τῶν κυβικῶν μέτρων (Ἀριθμ. 156), προσφυέστατα ἔχων τῇ, ἣν συνελάβομεν, ἰδέα τȣ͂ στερεȣ͂ ὡς κύβȣ θεωρȣμένȣ· ἐξεθέμεθα δὲ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ κ, δύω γενικὰς μεθόδȣς τȣ͂ λογίζεσθαι ταῦτα τὰ μέρη, ἢ τὴν τȣ͂ στερεȣ͂ χωρητικότητα (Ἀριθ. 217.) κτλ.

660. Ἀλλὰ γὰρ τȣ͂ ἀριθμȣ͂ τῶνδε τῶν κυβικῶν με-

ρῶν ἀεὶ αὔξοντος (Ἀριθ. 156), ἀναγκαίως ἑκατέρα μέθοδος μακρὰ καθίςαται ᾗ ἐπίπονος· ταῦτ' ἄρα ἐπινενοήκασι περὶ τέτε, καθὰ δὴ ᾗ περὶ τῆ τῶν ἐπιφανειῶν μέτρυ (644), τρίτην τινὰ μέθοδον, ἣν οἵτε Γεωμέτραι ᾗ οἱ Μηχανικοὶ ἀεὶ προκρίνεσι τῶν ἄλλων ἐπὶ τῆς πράξεως.

661. Ὑποτεθείσθω γὰρ ἡ τετραγωνικὴ ὀργυὰ ΛΜΚχ τετμημένη (χ. 58.) εἰς ἓξ πόδας τετραγωνικῆς ὀργυᾶς (645) αὕτη οὖν πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὴν τοῦ ὕψους ὀργυὰν ΜΘ παρέξει τὴν κυβικὴν ὀργυὰν ΛΜΘ ΗΠΚ· πολλαπλασιασθεῖσα δὲ ἐφ' ὕψος ἑνὸς ποδὸς τῆ ΜΤ, παρέξει ςερεὸν τὸ ΛΜΤοΖχΚ, ὅπερ καλεῖται πὲς τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς, καὶ ἔςι προδήλως $\frac{1}{6}$ τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς· πολλαπλασιασθεῖσα δὲ ἐπὶ Μα = ἑνὶ δακτύλῳ ὕψες, παρέξει ςερεὸν τὸ ΛΜαχιΚτ, ὃ ἔςιν $\frac{1}{12}$ τε ποδὸς τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς, ᾗ παρὰ τῦτο καλεῖται δάκτυλος τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς· πολλαπλασιασθεῖσα δὲ ἐφ' ὕψος = 1 γραμμῇ, ἀποδώσει ςερεὸν = $\frac{1}{12}$ τῦ δακτύλυ τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς, ᾗ ὅτως ἑξῆς.

662. Τὸ γινόμενον ὑπὸ ποδῶν ἐπὶ πόδας, διπλασιασθὲν, παρέξει δακτύλες τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς· τὸ δ' ὑπὸ ποδῶν ἐπὶ δακτύλες, γραμμὰς τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς· τὸ δ' ὑπὸ δακτύλων ἐπὶ δακτύλες, ςίγματα, καθ' ὃν δὴ λόγον δέδεικται κἀπὶ τῶν ἐπιφανειῶν (648. κτλ.).

663. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Οἰκίσκυ τινὸς, ἔχοντος μῆκος μὲν 4 ὀργυὰς ᾗ 1 πόδα, πλάτος δὲ 2 ὀργυὰς ᾗ 5 πόδας, ὕψος δὲ τέλος 1 ὀργυὰν, ᾗ 2 πόδας, ᾗ 4 δακτύλες, πόση ἐςὶν ἡ χωρητικότης;

α. Ζητηθήτω ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως, ἢ τὸ ἔδαφος τῦ οἰκίσκυ κατὰ τὴν τρίτην τῶν περὶ ἐπιφανειῶν ἀποδείξεων μέθοδον (244, κτλ.), κ̕ δὴ εὑρεθήσεται 11 ὀργυ. τετραγωνικῶν, 4 ποδ. κ̕ 10 δακτύλων τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς

11 ὀργ. τετραγ.	4 πόδ.	10 δακτ. τετρ. ὀρ.		
1	2	4		
ὀργ. κυβ.	πόδ. τῆς κυβ. ὀρ.	δακτ. τῆς κυβ. ὀρ.	γραμ. τῆς κυβ. ὀργ.	σιγμ. κυβ. ὀρ.
11	4	10		
	22	16	40	
		44	32	80
16	2	4	6	8

β΄. Τὸ γινόμενον ὑπὸ 11 ὀργυῶν τετραγ. κ̕ μιᾶς ὀργ. ὕψους δίδωσιν 11 ὀργ. κυβικάς· τὸ δὲ ὑπὸ 4 ποδῶν κ̕ μιᾶς ὀργυᾶς, 4 πόδας τῆς κυβ. ὀργ. τὸ δὲ ὑπὸ 10 δακτύλων κ̕ 1 ὀργυᾶς, 11 ποδ. τῆς κυβ. ὀρ. ἑξῆς δὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ 19 ὀργ. κ̕ 2 ποδ. δίδωσιν 22 ποδ. τῆς κυβ. ὀργ. τὸ δὲ ὑπὸ 10 δακτύλων κ̕ 2 ποδῶν, 40 γραμμὰς τῆς κυβ. ὀργ· τέλος δὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ 11 ὀργ. κ̕ 4 δακτ. δίδωσι 44 δακτύλους τῆς κυβικ. ὀργ. τὸ δ᾽ ὑπὸ 4 ποδ κ̕ 4 δακτ., 32 γραμμὰς τῆς κυβ. ὀργ· τὸ δ᾽ ὑπὸ 10 δακτ. κ̕ 4 δακτ. 80 σίγματα τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς (662).

Συνήφθωσαν δὲ ὡς ἔθος (Ἀριθ. 209), διαιρούμενα ἑκάστου εἴδους διά 12, τῶν δε ποδῶν δια 6, πρὸς τὴν ἐπὶ τὰ μείζω τῶν εἰδῶν ἀναγωγήν· κ̕ δὴ εὑρεθήσεται ὁ οἰκίσκος περιέχων 16 κυβικὰς ὀργυὰς, κ̕ 2 ποδ. κ̕ 4 δακτ. κ̕ 6 γραμ. κ̕ 8 σίγμ. τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς.

664. ΣΧΟΛΙΟΝ. Πάντα τὰ ἐπὶ τῆς τρίτης μεθόδου τῆς τῶν ἐπιφανειῶν καταμετρήσεως (651, 652) παρατηρηθέντα κατὰ λέξιν ἐφαρμοστέον ἐνταῦθα· τιθεμένων μόνον ἐν κύβοις τῶν

δυνάμεων, αἵπερ ἐκεῖθι ἐν τετραγώνοις ἐτίθεντο. Οὕτως εὑρεθήσεται ἡ δύναμις ποδὸς τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς ἐν ποσὶ κυβικοῖς, διαιρουμένου τοῦ 216 διὰ 6 (661), ἴση ποσὶ κυβικοῖς 36· ἡ δὲ τῦ δακτύλυ τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς, διαιρυμένυ τῦ 373248 διὰ 72, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως (Ἀριθ. 149, 156).

Περὶ Μετρητικῆς ῥάβδου.

665. Ἐπινοηθήτω κύλινδρος ὁ ΑΒΓΔΕ (σχ. 59), οὗ ἡ χωρητικότης ἀκριβῶς ἐςὶ φέρ' εἰπεῖν ςάμνος, καὶ γεγράφθω ἡ τῆς βάσεως αὐτῦ διάμετρος ΑΓ (σχ. 60) ἐπὶ πίνακος ὁμαλῦ ἴση τῇ ΒΑ, ϗ ὑψώσθω ἐπὶ τῦ Β πέρατος αὐτῆς κάθετος ἡ ἀπέραντος ΒΜ· ϗ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΜ ἡ Βι = ΒΑ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ιΑ, ἣ δὴ ἔςαι διάμετρος βάσεως κυλίνδρυ νέου, ὃς, ἰσοϋψὴς ὢν τῷ προτέρῳ, περιέξει δύω ςάμνυς· τῶν γὰρ δύω τύτων κυλίνδρων ἰσοϋψῶν ὄντων, αἱ ςερεότητες ἔσονται ὡς αἱ βάσεις, εἴτ' ὖν ὡς αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κύκλων, οἵτινές εἰσιν αὐτῶν βάσεις (422), αἱ δὲ εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ΒΑ, ιΑ τετράγωνα (398)· ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ιΑ τετράγωνον διπλάσιόν ἐςι τῦ ἀπὸ ΒΑ (349)· ὁ κύλινδρος ἄρα ὁ ἔχων βάσιν, ἧς ἐςὶ διάμετρος ἡ ιΑ, διπλῦς ἔςαι τῦ κυλίνδρυ ΑΒΓΔΕ· περιέχει δὲ ἐκεῖνος ςάμνον, ὐκῦν ὗτος περιέξει δύω.

Ἐπιτεθείσθω δὲ ἡ ιΑ ἐπὶ τῆς ΒΜ, ϗ δὴ προκύψει Β2 ϗ ἐπεζεύχθω ἡ Α2, ἥτις ἔςαι διάμετρος βάσεως ἄγγυς τριῶν ςάμνων περιεκτικῦ· ϗ γὰρ $A2^2 = AB^2 + B2^2$· ὐκῦν ἡ ἐπιφάνεια τῦ κύκλυ, ὗ διάμετρος ἡ Α2 ἴση ἐςὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, βάσεως ὄντος κυλίνδρυ, ὃς περιέχει ςάμνον, συνάμα τῇ ἐπιφανείᾳ τῦ διάμετρον τὴν Β2 ἔχοντος κύκλυ, ὅς ἐςι βάσις κυλίνδρυ περιέχοντος δύω ςάμνυς· ἄρα Α2 ἐςὶ διάμετρος κυλίνδρυ, τρεῖς περιέχοντος ςάμνυς, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως.

666. Ἐκ τῆς τῦ σχήματος κατασκευῆς, ἡ Β1 = ΒΑ ἐμφαίνει ἓν μέτρον· Β2 = Α1, δύω· Β3 = Α2, τρία, ἢ ὕτως ἑξῆς ὑποτιθεμένυ τῷ κυλίνδρῳ, ὗ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων αὔξυσι τῷ εἰρημένῳ λόγῳ, ὕψυς ἀεὶ τῦ αὐτῦ, ὃ εἶχε τὸ ἐν ἀρχῇ ληφθὲν ἄγγος, τὸ ἑνὸς μέτρυ περιεκτικόν.

667. Οὐκῦν κατασκευασθήτω ῥάβδος σιδηρᾶ, ἢ ξυλίνη, ἡ ΒΓ, ἥτις ἐςὲν ἀλλ' ἢ παραλληλεπίπεδον κυρίως ἐςὶ λίαν ἐπίμηκες, ἔχον μῆκος ἀνάλογον τοῖς ἄγγεσιν, ἢ κάδοις, τοῖς πρὸς καταμέτρησιν ἀεὶ προβαλλομένοις· ἐγκεχαράχθω δὲ ἡ ῥάβδος ΒΓ τιθεμένων ἐπ' αὐτῆς ἀκριβῶς τῶν κατατομῶν Β1, Β2 κτλ. αἳ ἐσημειώθησαν ἐπὶ τῦ πίνακος· ὅθεν προκύψυσιν ἐπὶ τῆς ῥάβδυ β1, β2, β3 κτλ. ὅσῳ δὲ πλεονάκις ἡ ὑποτείνυσα λαμβάνεται ἐπὶ τῆς ΒΜ πλευρᾶς, ἢ ὅσῳ πληθύνονται αἱ κατοτομαὶ Β1 κτ. ἐπὶ τῆς ΒΓ ῥάβδυ, τοσύτῳ ἐπιτηδειοτέρα γίνεται ἡ ῥάβδος πρὸς καταμέτρησιν μεγάλων ἄγγεων· καλέσομεν δὲ τυτὶ τὸ ἐπίμηκες εὐθύγραμμον ΒΟΓΙ πλευρὰν τῶν βάσεων.

668. Εἰλήφθω εἶτα τὸ ΑΕ ὕψος τῦ κυλίνδρυ, ὅσπερ, ἐκ τῆς διαμέτρυ ΒΑ, ἓν μέτρον περιέχει, ἢ διπλασιασθήτω, τριπλασιασθήτω κτ. κατὰ τὰ μῆκος ἑτέρας ῥάβδυ, ἥτις κληθήσεται πλευρὰ τῶν μηκῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Αὐτόθεν κατάδηλον, ὡς αἱ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τῶν βάσεων κατατομαὶ, ὅσῳ ἄνισιν ἐς τὸ Μ, τοσύτῳ ἐλάττυς γίνονται, ἢ ἑπομένως, ὅσῳ ἀναβαίνυσιν ἐπὶ τὸ Γ· ἢ γὰρ ἡ ὑπεροχὴ τῦ Α2, ἥτις ἐςὶ ῥίζα τριπλῦ τετραγώνυ, ὑπὲρ τὴν ιΑ ὐκ ἔςιν ὕτω μεγάλη, ὡς ἡ τῆς ιΑ αὐτῆς ῥίζης ὔσης τετραγώνυ διπλῦ ὑπὲρ τὴν ΒΑ = Βι ῥίζαν τετραγώνυ περιέχοντος ἓν μέτρον· ἀλλὰ γὰρ αἱ κατατομαὶ, τὰ μήκη ἐκδηλῦσαι, ἀεὶ ὀφείλυσιν εἶναι αἱ αὐταὶ· αἱ γὰρ ςερεότητες δύω κυλίνδρων, τὴν αὐτὴν ἐχόντων βάσιν, εἰσὶν ἁπλῶς ὡς τὰ μήκη (460).

Ἡ τοίνυν ῥάβδος, ἡ ἑκατέρωθεν, ὡς εἴρηται, κατατετμημένη ἐςὶν, ὃ καλεῖται μετρητιμὴ ῥάβδος, ἡ χρησόμεθα ὕτω.

669. Καίτοι ἡ διάμετρος κάδου παντὸς οἰνοδόχου ἀεὶ μείζων ἐςὶ κατὰ τὸ μέσον, ἢ κατὰ τὰς δύω αὐτοῦ βάσεις τὰς κυκλικὰς, θεωρείσθω μέντοι ὡς κύλινδρος ἀκριβὴς, ἔχων ἀμέλει τὴν αὐτὴν διάμετρον διὰ παντὸς τοῦ μήκυς, τοιάνδε μέντοι, οἵαν εἶναι μέσην μεταξὺ τῆς κατὰ τὸ μέσον, ϗ τῆς κατὰ τὰς βάσεις· εἰλήφθω ἓν διὰ τῆς ῥάβδυ ταύτης ἐκ τῦ τῆς πλευρᾶς τῶν βάσεων μέρυς ἡ διάμετρος τῦ ἄγγυς, ϗ δὴ εὑρεθήσονται, ἐξ ὑποθέσεως τῆς ῥάβδυ ἐμβαπτιζομένης τῷ ἄγγει διὰ τῆς κατὰ τὸ μέσον γινομένης ὀπῆς, δι᾽ ἧς ὁ οἶνος, ἢ ἕτερόν τι ὑγρὸν ἐγχέεται, καὶ καθέτυ ἐφιςαμένης τῇ ἐσωτερικῇ αὐτῦ κοιλότητι, 30 κατατομαὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τῶν βάσεων· εἰλήφθω εἶτα ὁ ἀριθμὸς τῶν αὐτῶν κατατομῶν, αἳ ἐμπεριέχονται τῇ ῥάβδῳ, εἰς τὰς βάσεις τεθεῖσῃ τῦ κάδου· ϗ δὴ εὑρεθήσονται κατατομαὶ 28· τὸ δὲ ἡμιάθροισμα τύτων τῶν δύω ἀριθμῶν, εἴτ᾽ ὖν 29, ἔςαι ἡ μέση διάμετρος, ἥτις ἐμφαίνει 29 μέτρα, ἀποδοθέντος τῷ κάδῳ τῦ μήκυς τῦ κυλινδρικῦ ἄγγυς, ᾧ ἐχρησάμεθα πρὸς κατασκευὴν τῆς ῥάβδυ, τῦ ἐκδηλυμένυ διὰ μιᾶς τῶν ἴσων κατατομῶν τῶν σεσημειωμένων ἐπὶ τῆς τῶν μηκῶν πλευρᾶς· ὐκῦν μετρη-

θήτω ὁ ἀριθμὸς τῶν δε τῶν ἴσων κατατομῶν, αἳ ἂν ἐμβαπτισθείησαν τῷ κάδῳ κατὰ μῆκος· ϗ δὴ εὑρεθήσονται ἐξ ὑποθέσεως 20· ἐντεῦθεν ἄρα συμπερανθήσεται, ὡς ὁ κάδος ἔτος ἐξισῦται 20 κάδοις, ἢ κυλίνδροις, ἔχυσιν ἅπασι, διάμετρον μὲν ἴσην τῇ ἑαυτῦ μέσῃ, μῆκος δὲ μίαν μόνην κατατομὴν, ἢ ἐμφαίνει τὸ ὕψος ἄγγους ἑνὸς μέτρυ· ἐπεὶ δὲ ἕκαςος τύτων τῶν κάδων, ἢ κυλίνδρων, περιέχει 29 μέτρα, ὁ προτεθεὶς περιέξει 29 × 20 = 580.

ΥΨΗΛΟΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Η"

Περὶ τῶν Καμπύλων γραμμῶν.

ΤΜΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τῶν τȣ̃ Κώνȣ τομῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ γενέσεως αὐτῶν.

Υ'ψηλοτέρα καλεῖται Γεωμετρία ἡ περὶ τὰς τῶν καμπύλων γραμμῶν ἀσχολȣμένη ἰδιότητας, ἐπιςήμη δήπȣ, ὅσον εὐρεῖα, τοσȣ̃τον ἔχȣσα ϗ τὸ χρήσιμον· τῶν δὲ καμπύλων αἱ μᾶλλον θρυλλȣ́μεναι, ϗ τῇ Μαθηματικωτέρᾳ Φυσικῇ λίαν συμβάλλȣσαι, εἰσὶν αἱ καλȣ́μεναι Κωνικαὶ τομαὶ, περὶ ἃς ἴσμεν οὐ βραχύτι μοχθήσαντας τȣ̀ς πάλαι Γεωμέτρας· τȣ́των ȣ̃ν ϗ ἡμεῖς τὰς κυριωτέρας ἐκθέμενοι ἰδιότητας, ϗ τῆς τῶν ἄλλων θεωρίας ἀκροθιγῶς ὕςερον ἐφαψόμεθα.

1. Κῶνος ἅπας δι' ἐπιπέδȣ πενταχῶς ἂν ἔχοι διχῇ τμηθῆναι.

Η' γὰρ τὸ τέμνον ἐπίπεδον (σχ. 61) ΑΒΓ διὰ τῆς τȣ̃ Κώνȣ κορυφῆς Α διήκει, ϗ τῇ βάσει ΒΜ' ΓΜ' τȣ̃ κώνȣ, εἴτε πρὸς ὀρθὰς, εἴτε πλαγίως, ἐφέςηκε· ϗ δὴ ἡ ἐντεῦθεν προϊȣ̃σα τομὴ ΑΒΓ ἀεὶ ἔςαι τρίγωνον· ὅπερ καθ' ἑαυτὸ δῆλον· ἢ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, μὴ διὰ τῆς κορυφῆς διῆκον, κατά τινα τῶν ἐφεξῆς τεσσάρων τρόπων τὸν κῶνον τέμνει.

2. α΄. Ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον δΜΤΜ παράλληλον ᾖ τῇ τȣ̃ κώνȣ βάσει ΒΜ' ΓΜ', ἡ γινομένη τομὴ ΜΜΤ ἔςαι κύκλος, ὡς ἐν τῶν τȣ̃ κώνȣ ςοιχείων ὑπάρχȣσα (Γεωμ. 444).

3. β΄. Ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον δΜΤΜ κεκλιμένον ᾖ τῇ τȣ̃ κώνȣ βάσει ΗΜη, ποιῇ δὲ μετὰ τῆς βάσεως γωνίαν ἐλάττονα (σχ. 62), ἢ τὴν ὑπὸ μιᾶς τȣ̃ κώνȣ πλευρᾶς ΑΓ ϗ τῆς βάσεως περιεχομένην, ἡ καμπύλη ΗΜΜη ἔσεται καμπύλη πρὸς ἑαυτὴν ἀνακάμπτȣσα (*), ἥτις Ἔλλειψις ὀνομάζεται· ἐπεὶ ȣ̓̃ν ὁ κύκλος δΜΜΤ (σχ. 16) ȣ̓κ ἂν γένοιτο ἔλλειψις ΗΜηΜ (σχ. 62), εἰμὴ τὸ πρὶν τῇ βάσει παράλληλον ἐπίπεδον δΜΤΜ βραχύτι αὐτῇ προσκλιθείη, θεωρηθῆναι δύναται ὁ κύκλος ὡς ἔλλειψις, ἧς τὸ ἐπίπεδον ἀπειροςόντι τῇ βάσει προσκέκλιται.

4. γ΄. Ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον ΤΜδ διήκῃ ἐκ διαδοχῆς διὰ πασῶν τῶν πρὸς τὴν βάσιν ΒΜ' ΓΜ' τȣ̃ κώνȣ γενέσθαι δυναμένων ἐγκλίσεων (ὅθεν προκύψȣσι πᾶσαι αἱ ποικίλαι ἐλλείψεις, αἱ ἐκ τȣ̃ κώνȣ προελθεῖν δυνάμεναι) ἔςτ' ἂν τέλος ȣ̔́τω προσκλιθείη, ὡς ϗ μία τῶν τȣ̃ κώνȣ πλευρῶν ΑΒ· ὥσπερ κλίσεως ἔχει τὸ ἐπίπεδον ΗπΜ'Μ'·

(*) *Καλῶ δὲ ἀνακάμπτȣσαν καμπύλην, ἧς οἱ κλῶνες ΗΜη, ΗΜη, ἀπὸ τȣ̃ Η ἀρχόμενοι, συνίασιν ἀλλήλοις καθ' ἓν σημεῖον τὸ η.*

σαφὲς τηνικαῦτα τὸ τέμνον ἐπίπεδον παράλληλον τῇ τοῦ κώνου πλευρᾷ AB γίνεσθαι, οὐδ' αὐτῇ συμπεσεῖν ποτε δύνασθαι· καὶ δὴ ὅσῳ μᾶλλον ὁ κῶνος ἂν προαχθείη, τοσούτῳ οἱ κλῶνες HM′, HM′ τῆς ἐντεῦθεν ἀπογεννωμένης τομῆς ἀποχωροῦσιν ἀλλήλων· ἔσεται ἄρα αὕτη τομὴ ἄπειρος, ἣ καλεῖται *Παραβολή*.

5. Ἐπεὶ τοίνυν οὐκ ἂν γένοιτο παραβολή, εἰμὴ τὸ πρὶν ἐπὶ μιᾶς τῶν τοῦ κώνου πλευρῶν κεκλιμένον ἐπίπεδον (σχ. 62), καὶ ἐντεῦθεν ἔλλειψιν προάγον, παραλλήλως ἀχθείη μιᾷ τινι πλευρᾷ τῇ AB (σχ. 61), θεωρηθῆναι δύναται καὶ ἡ παραβολὴ ὡς ἔλλειψις, συνισαμένη ἐπὶ ἐπιπέδου ἀπειροστόντι προσκεκλιμένου τῇ τοῦ κώνου πλευρᾷ AB, ὥσπερ ἔλλειψις ἑπομένως, ἥτις οὐδύναται συμπεσεῖν τῇ τοῦ κώνου πλευρᾷ AB, εἰμὴ μετὰ διάστημα ἄπειρον, κἀντεῦθεν ἐξ ἀνάγκης καθισαμένη ἄπειρος.

6. δ'. Τέλοςδὲ, ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον HπM′M′, τὸ πρὶν τῇ πλευρᾷ AB παράλληλον (σχ. 16), ἐγγίζῃ μᾶλλον τοῦ εἶναι κάθετον τῇ βάσει BΓ, ἢ ἡ πλευρὰ, εἴτ' οὖν ποιῇ τὴν ὑπὸ HΠB γωνίαν μείζονα τῆς ὑπὸ HBΠ, οἷον τὸ HπM (σχ. 64), ἢ καὶ κάθετον αὐτῇ ἐφεστήκῃ· ἡ ἐντεῦθεν παραγομένη τομὴ καὶ αὐτὴ ἄπειρος γίνεται· καλεῖται δὲ ὅμως *Ὑπερβολή*· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ κῶνος ἕτερος ὁ AδΔ, κατὰ τὴν κορυφὴν A συνημμένος τῷ πρώτῳ, καὶ αὐτῷ ἴσος, τὸ τέμνον ἐπίπεδον προαχθὲν ἐς γ' ἐπ' αὐτὸν, καὶ τεμὸν κἀκεῖνον, ἀπογεννήσει νέαν ὑπερβολὴν ἴσην τῇ προτέρᾳ τὴν ηXχ, ἥτις ἀκούει *Ἀντικειμένη ὑπερβολή*.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Δῆλον ἄρα ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων κωνικῶν τομῶν μόνα τὸ τρίγωνον καὶ ἡ ὑπερβολὴ δύναται ἔχειν ἀντικειμένην τομὴν, εἴτ' οὖν, ὧν τὸ ἐπίπεδον προαγόμενον ἐς τὸν κατὰ κορυφὴν ἀντικείμενον κῶνον, παράγει τομὴν τῇ προτέρᾳ ἴσην· κἂν γὰρ ἀεὶ ἐπὶ πάσης τομῆς δύω νοηθῶσιν οἱ κῶνοι ἴσοι ϗ κατὰ κορυφὴν συνημμένοι, ὅτε μὴν τὸ τὸν κύκλον, ὐδὲ τὸ τὴν παραβολὴν, ὐδὲ τὸ τὴν ἔλλειψιν παράγον ἐπίπεδον δύναται προσχθῆναι ἐς τὸν ἕτερον κῶνον, ὐδ' ἅψασθαι αὐτῦ, μήτιγε τεμεῖν, ὡς παντὶ τῷ ϗ μικρὸν ἐπιςήσαντι προφανές.

7. Ἡ εὐθεῖα (σχ. 61, 62, 64) Ηπ, περὶ ἣν δύναται ἡ τομὴ περιαχθῆναι, Ἄξων ἀκέει· τὸ δὲ σημεῖον Η, ἢ τὰ Η, η, δι' ὧν ὁ ἄξων συνάπτεται τῇ τομῇ, Κορυφὴ, ἢ Κορυφαὶ τῆς τομῆς· αἱ δὲ τῷ ἄξονι κάθεται ΠΜ, πΜ, Τεταγμέναι ἐπὶ τὸ ἄξονα· ὅλη δέ τις εὐθεῖα ἡ ΠΜΜ, Διπλῆ Τεταγμένη· Ἀποτετμημένη δὲ μέρος τῦ ἄξονος τὸ ΗΠ τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Η καί τινος τεταγμένης τῆς ΠΜ ἀπολαμβανόμενον· ὐκῦν ἡ ΗΠ ἐςιν ἀποτετμημένη ὑπὸ τεταγμένης τῆς ΠΜ, ἡ δὲ Ηπ ὑπὸ τῆς πΜ· Συναποτετμημένη δὲ, θάτερον μέρος τοῦ ἄξονος τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ϗ τῆς ἑτέρας κορυφῆς η ἀπολαμβανόμενον (σχ. 62)· ὅτως ὖν η ηΠ συναποτετμημένη ἐςὶ τῇ ΗΠ ὑπὸ τεταγμένης τῆς ΠΜ.

8. Οὐκῦν παραβολὴ ἡ ΗΜ'Μ' (σχ. 16), μίαν μόνην ἔχυσα κορυφὴν Η, ἀμοιρεῖ συναποτετμημένων· ὑπερβολῆς δὲ (σχ. 64), τῶν δύω κορυφῶν Η, η, πρός γε τὴν αὐτὴν τεταγμένην ΠΜ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κειμένων, ἥτε ἀποτετμημένη ΠΗ ϗ ἡ συναποτετμημένη Πη ἐπὶ τῶν αὐτῶν λογιθήσονται.

9. Εἰώθασι δὲ, διὰ μὲν υ τὰς τεταγμένας ΠΜ, διὰ δὲ χ τὰς ἀποτετμημένας ΗΠ, ἐμφαίνειν· δύω δὲ διάφοροι τεταγμέναι ἐκδηλῦνται διὰ υ, Υ, διὰ δὲ χ, Χ δύω διάφοροι ἀποτετμημέναι.

10. ΟΡΙΣΜΟΣ. Συνέκθεσιν ποσότητος ἀποκαλῶ τὴν αὐτῆς ταύτης μετ᾽ ἄλλων ποσοτήτων συνεπιπλοκήν· οὕτως 2υ, $\frac{\upsilon}{2}$, υ^2, $\upsilon^3 + \upsilon$ τέτταρες διάφοροι συνεκθέσεις παρίστανται τῆς τεταγμένης υ.

11. Λόγος ἄτρεπτος ἐν τῇ αὐτῇ τομῇ ἐστιν, ὃν ἔχει ὡρισμένη τις καὶ μόνιμος συνέκθεσις τῶν τεταγμένων πρὸς ὡρισμένην καὶ μόνιμον συνέκθεσιν τῶν ὑπ᾽ αὐτῶν ἀποτετμημένων· εὑρίσκεται δὲ οὗτος διὰ τῆς ἀνιχνεύσεως τῆς φύσεως καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῆς τομῆς.

Ἡ ἐξίσωσις δὲ ἡ τοῦτον τὸν λόγον ἐκτιθεῖσα καλεῖ. ἐξίσωσις τῆς τομῆς· οὕτως (σχ. 63) ἐν τριγώνῳ τῷ ΗΔΜ ληφθείσης ὡς ἄξονος τῆς Ππ, διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΗΠΜ, ΗπΜ, ἔσται ΠΜ : πΜ : : ΗΠ : Ηπ (Α)· ἀλλ᾽ αἱ κάθετοι ΠΜ, πΜ εἰσὶ τεταγμέναι ἐπὶ τὸν ἄξονα (7), ϗ ΗΠ ἐστὶν ἀποτετμημένη ὑπὸ τῆς τεταγμένης ΠΜ, ἡ δὲ Ηπ ὑπὸ τῆς πΜ· ἄρα ἐν τριγώνῳ αἱ τεταγμέναι εἰσὶν ὡς αἱ ὑπ᾽ αὐτῶν ἀποτετμημέναι· ἔστω οὖν ΠΜ $= \upsilon$, ϗ πΜ $=$ Τ, ϗ ΗΠ $= \chi$, ϗ Ηπ $=$ Χ· οὐκοῦν ἡ ἀναλογία Α γενήσεται $\upsilon : \mathrm{T} : : \chi : \mathrm{X}$· ἄρα (Συμβ. Λογ. 250) $\upsilon = \frac{\mathrm{T} \times \chi}{\mathrm{X}}$ (Β)· τοιγαροῦν ἡ Β ἐξίσωσις, ἥτις παρίστησι τὸν λόγον τινὸς συνεκθέσεως τῆς τεταγμένης υ (ἥτις συνέκθεσις ἐνταῦθα ἡ αὐτὴ υ ἐστὶ, εἴτ᾽ οὖν $\upsilon \times 1 = \upsilon$), ὃν ἔχει πρὸς τὴν ὑπ᾽ αὐτῆς ἀποτετμημένην (ἔστι δὲ ὁ λόγος οὗτος ἡ ἰσότης τῆς τεταγμένης, καθ᾽ ἣν αὕτη ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῷ προκύπτοντι ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου ὑπὸ τῆς ἀποτετμημένης ϗ ἑτέρας τεταγμένης, διὰ τῆς Χ ἀποτετμημένης ὑπὸ τῆς συστοίχου αὐτῇ τεταγμένης), ἐστὶν ἡ τοῦ τριγώνου ἐξίσωσις.

12. Ὡσαύτως ἐπὶ τοῦ κύκλου. διὰ τὴν τῷ ἄξονι κάθετον ΠΜ, καὶ ἐπ' αὐτὸν τεταγμένην, ἔστι (Συμβ. Λογ. 248, καὶ Γεωμ. 343) $ΠΜ^2$ $(υ^2)$ $= ΠΗ \times Πη$ (Ρ)· ἔστω οὖν $Ηη = 2α$, καὶ $ΗΠ = χ$· ἑπομένως ἔσται $Πη = 2α - χ$· ἡ δὲ Ρ ἐξίσωσις ἔσται $υ^2 = 2αχ - χ^2$, ἥτις ἐστὶ τοῦ κύκλου.

13. Καὶ αἱ μὲν τοῦ τε τριγώνου καὶ τοῦ κύκλου κυριώτεραι ἰδιότητες ἐκ τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας ἐγνώσθησαν· τὰς δὲ τῆς παραβολῆς, καὶ ἐλλείψεως, καὶ ὑπερβολῆς, ἑξῆς ἂν εἴη ἐκθέσθαι.

14. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἐν παραβολῇ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ' αὐτῶν ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, εἴτ' οὖν $ΠΜ^2 : πΜ'^2 :: ΗΠ : Ηπ$ (σχ. 61).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω κύκλος ὁ δΤΜΜ παράλληλος τῇ βάσει ΒΓΜ'Μ', καὶ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἐστάσθω τῷ κύκλῳ τῷδε κάθετον· αἱ οὖν διάμετροι Τδ, ΒΓ τῶν δύο κύκλων, αἵ εἰσιν ἅμα καὶ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου, ἔσονται παράλληλοι· ἄρα αἱ ἐν τοῖς δυσὶ κύκλοις τεταγμέναι ΠΜ, πΜ', κάθετοι οὖσαι ταῖς διαμέτροις Τδ, ΒΓ, ἔσονται ὡσαύτως καὶ τοῖς τριγωνικοῖς στοιχείοις Τδ, ΒΓ, καὶ ἑπομένως ἁπάσῃ γραμμῇ τοῦ τριγωνικοῦ ἐπιπέδου, εἴτ' οὖν τῇ ΗΠπ, ἐφ' ἣν ταῦτα πίπτουσι (Γεωμετρ. 400)· ἐπεὶ γὰρ ΗΠπ καὶ Τδ ἀμφότεραί εἰσιν, ὡς εἴδομεν, ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ τριγωνικοῦ ἐπιπέδου, ἡ ΠΜ, κάθετος οὖσα τῇ Τδ κατὰ τὸ σημεῖον Π, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας αὗται αἱ δύο γραμμαὶ, ἔσται κάθετος καὶ τῇ ΗΠπ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ πΜ' κάθετος ἐφέστηκε τῇ ΗΠπ κατὰ τὸ π· ἐχέτω οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἀρχομένη παραβολὴ ΗΜ'Μ' τὸ ἑαυτῆς ἐπίπεδον κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. α. τοίνυν ἃ ἄξων ΗΠπ, παράλληλος ὢν κατὰ τὴν τῆς παραβολῆς ἰδιότητα τῇ πλευρᾷ ΑΒ, διελεύσεται ἀναγκαίως διὰ τῶν σημείων Π, π τῦ ΗΠπ τριγωνικῦ ςοιχείυ· β΄. αἱ τεταγμέναι ΠΜ ἐν τοῖς κύκλοις, ἃς καθέτυς εἴδομεν κατὰ τὰ Π, π τῷ τριγωνικῷ ςοιχείῳ ΗΠπ, ἔσονται κάθετοι ϗ τῷ τῆς παραβολῆς ἄξονι ΗΠπ· ὑκῦν αἱ ἐν τοῖς κύκλοις τεταγμέναι ΠΜ, πΜ', ἔσονται ὐδὲν ἧττον τεταγμέναι κἂν τῇ παραβολῇ (7).

Παρὰ ταῦτα, διὰ τὴν φύσιν τῦ κύκλυ, ἔςι $\Pi M^2 = \delta\Pi \times \Pi T$ (Συμβ. Λογ. 248, ϗ Γεωμετρ. 343) ϗ $\pi M'^2 = \pi\Gamma \times B\pi$· ἄρα $\Pi M^2 : \pi M'^2 :: \delta\Pi \times \Pi T : \pi\Gamma \times B\pi$· ἀλλὰ, διὰ τὸν τῇ ΑΒ πλευρᾷ παράλληλον ἄξονα, ΗΠπ, ἔςι $\Pi T = B\pi$· ὐκῦν $\Pi M^2 : \pi M^2 :: \delta\Pi \times B\pi : \pi\Gamma \times B\pi$, ϗ δὴ $M\Pi^2 : \pi M'^2 :: \delta\Pi : \pi\Gamma$ (Συμβ. Λογ. 247).

Τελευταῖον δὲ ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΗΠδ, ΗπΓ, ἔςι $\delta\Pi : \pi\Gamma :: H\Pi : H\pi$· ἄρα $M\Pi^2 : \pi M'^2 :: \delta\Pi : \pi\Gamma$· ἔςι δὲ, ὡς εἴδομεν, ϗ $\delta\Pi : \pi\Gamma :: H\Pi : H\pi$· ἄρα $\Pi M^2 : \pi M'^2 :: H\Pi : H\pi$. Ο. Ε. Δ.

15. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἐν ἐλλείψει (σχ. 62) τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν συςοιχύντων ἀποτετμημένων ϗ συναποτετμημένων, εἴτ᾽ ὖν $\Pi M^2 : \pi M'^2 :: H\Pi \times \eta\Pi : H\pi \times \eta\pi$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἁπάντων ἀνελλειπῶς προκατασκευασθέντων, ὥσπερ ἐπὶ τῦ προσεχῶς ἐκτεθέντος θεωρήματος, ἔςαι ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΗΠδ, ΗπΤ, $\Pi\delta : \pi T :: H\Pi : H\pi$, ἐν δὲ τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ηΠΟ, ηπχ, $\Pi O : \pi\chi :: \eta\Pi : \eta\pi$· πολλαπλασιασθεισῶν δὲ τύτων τῶν δύο ἀναλογιῶν ἐπ᾽ ἀλλήλας (Συμβ. Λογ. 262), ἔςαι $\Pi\delta \times \Pi O : \pi T \times \pi\chi :: H\Pi \times \eta\Pi : H\pi \times \eta\pi$· διὰ δὲ τὴν φύσιν τῆ κύκλε ἐςι $ΠΜ^2 = Πδ \times ΠΟ$, ϗ $πΜ^2 = πΤ \times πχ$ (Γεωμ. 343)· ἄρα $ΠΜ^2 : πΜ^2 :: ΗΠ \times ηΠ : Ηπ \times ηπ$. Ο. Ε. Δ.

16. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἐν ὑπερβολῇ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνά εἰσιν, ὡς τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν συςοιχεσῶν ἀποτετμημένων ϗ συναποτετμημένων, εἴτ᾽ ἐν $ΠΜ^2 : πΜ^2 :: ΗΠ \times ηΠ : Ηπ \times πη$.

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἐςω κύκλος ὁ ΤΜΜΟ παράλληλος τῇ βάσει ΒΜΜΓ, ϗ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κάθετον τῇ βάσει, ἡ δὲ ὑπερβολὴ ΗΜΜ κάθετος τῷ τε τριγώνε ἐπιπέδῳ· ὡς ϗ ἀνωτέρω, δείκνυται ὅτι ἡ ΠΜ κοινή ἐςι τεταγμένη ἔντε τῷ κύκλῳ ϗ ἐν τῇ ὑπερβολῇ.

β΄. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΗΠΤ, ΗπΒ, ἐςιν $ΗΠ : ΠΤ :: ΗΠ : πΒ$· ἐν δὲ τοῖς ηΠΟ, ηπΓ ὁμοίοις ϗ αὐτοῖς τριγώνοις ἐςιν $ηΠ : ΠΟ :: ηπ : πΓ$· πολλαπλασιασμῷ δὲ, $ΗΠ \times ηΠ : ΠΤ \times ΠΟ :: Ηπ \times ηπ : πΒ \times πΓ$· ἀλλὰ, διὰ τὴν κυκλικὴν ἰδιότητα, ἐςι $ΠΜ^2 = ΠΤ \times ΠΟ$, ϗ $πΜ^2 = πΒ \times πΓ$· ἄρα $ΗΠ \times ηΠ : ΠΜ^2 :: πΒ \times πΓ : πΜ^2$· ἄρα (Συμβ. Λογ. 242) $ΠΜ^2 : πΜ^2 :: ΗΠ \times ηΠ : πΒ \times πΓ$. Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ φύσεως τῶν Κωνικῶν τομῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγεγραμμένων.

17. Πᾶσα καμπύλη (σχ. 66, 67, 68) ΗΜΜ, ΗΜΜη, ἐν ᾗ δύω ἀποςήματα, καθ᾽ ἃ ἀπέχεσι δύω τινὰ σημεῖα αὐτῆς Η, μ, ἀπό τινος ἐντὸς κειμένε σημεῖε, ὃ καλεῖται Ἑςία, ἀνάλογά εἰσι δυσὶν ἀποςήματ, καθ᾽

ἃ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἀπό τινος εὐθείας ΓΓ, ἐκτὸς τῆς καμπύλης κειμένης, ἣν καλοῦμεν Διευθετοῦσαν, τουτέστιν, ἐν ᾗ ὑπάρχει ΗΕ : μΕ :: ΗΑ : μΟ, Κωνικὴ τομὴ ἀποκέκληται.

Καὶ ἐὰν μὲν ᾖ ΗΕ = ΗΑ (σχ. 66, 67, 68), ἡ καμπύλη ἐστὶ παραβολή· ἐὰν δὲ ΗΕ < ΗΑ, ἔλλειψις· ἐὰν δὲ τέλος ΗΕ > ΗΑ, ὑπερβολή.

18. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Κωνικὴν τομὴν καταγράψαι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἤχθω (σχ. 66, 67, 68) ἡ διευθετοῦσα ΓΓ, καὶ ἐστάθω αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΗΠ· καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῆς δύω σημεῖα τὰ Η, Ε, τιθεῖσιν ΗΕ = ΗΑ εἰς καταγραφὴν παραβολῆς, καὶ ΗΕ < ΗΑ εἰς καταγραφὴν ἐλλείψεως, καὶ ΗΕ > ΗΑ εἰς καταγραφὴν ὑπερβολῆς· καὶ ἐστάθω κατὰ τὸ Η κάθετος ἡ ΗΒ = ΗΕ· διὰ δὲ τοῦ πέρατος αὐτῆς Α ἤχθω ἡ ΑΒΤ πέρατος ἄνευ· καὶ ἐστάθωσαν κάθετοι τῇ ΑΗΠ προσεχέσταται ἀλλήλαις αἱ ΠΔ, ΠΔ περιοριζόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΗΠ καὶ τῆς ἀπεράντου ΑΒΤ· καὶ διὰ τοῦ διαβήτου ἐκ τοῦ Ε ἑκάστη ΠΔ μετενεχθήτω ἐπ' αὐτὴν ταύτην τὴν ΠΔ· προκύψουσιν οὖν ἐντεῦθεν σημεῖα ἑξῆς κείμενα τὰ Μ, Μ, ἅτινα μετὰ τῶν ἀπ' εὐθείας αὐτοῖς ἀντιθέτων, καὶ ἴσον ἑτέρωθεν τοῦ ἄξονος ἀπεχόντων, συγκροτήσουσι τὴν ζητουμένην καμπύλην.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν ἑκάστῳ γὰρ τῶν οὕτω καταγραφέντων τριῶν σχημάτων, τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΗΒ, ΑΠδ παρέξουσιν ΑΗ : ΗΒ :: ΑΠ : Πδ· ἀλλὰ ΗΒ = ΗΕ, καὶ Πδ = Εμ (ἐκ κατασκευῆς), καὶ ΑΠ = μΟ (Γεωμ. 127)· ἄρα ἀντικαταστάσει ἔσται ΑΗ : ΗΕ :: μΟ : Εμ. Ο.Ε.Δ.(17).

19. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὀρθία πλευρὰ ἀκούει εὐθεῖα (σχ. 69) ἡ ΕΜ, ἡ ἀπὸ τῆς ἑστίας πρὸς ἓν τῶν τῆς καμπύλης σημείων ἀγομένη· Ἁπτομένη δὲ, ἡ καὶ ἐν μό-

νον σημεῖον τῆς καμπύλης ἐπιψαύουσα, οἷα ἡ ΤΜ. Τὸ δὲ ΤΠ μέρος τοῦ ἄξονος, τὸ ἀπολαμβανόμενον ἀπὸ τῆς ἁπτομένης ΜΤ καὶ τῆς τεταγμένης ΠΜ, ἥτις τάττεται ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς Μ ἐπὶ τὸν ἄξονα, καλεῖται Ὑφαπτομένη· ἐὰν δὲ τῇ ἁπτομένῃ κατὰ τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον πρὸς ὀρθὰς σταθῇ ἡ ΜΤ, αὕτη καλεῖται Ἰδίᾳ Κάθετος, ἢ Κανονική· τὸ δὲ μέρος ΠΤ τοῦ ἄξονος, τὸ ἀπὸ τῆς καθέτου, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς ἀφῆς σημείου τεταγμένης ἀπολαμβανόμενον, καλεῖται Ὑποκάθετος, ἢ Ὑποκανονική.

20. Παράμετρος ἀκούει ἡ διπλῆ τεταγμένη, ἡ διὰ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἑστίας διήκουσα.

21. Τὸ ΗΕ ἀπόστημα τῆς κορυφῆς Η ἀπὸ τῆς ἑστίας Ε ἀεὶ κληθήσεται α· ἡ δὲ τεταγμένη, υ· δύω δὲ τεταγμέναι, ἡ μὲν υ, ἡ δὲ Υ· ἡ δὲ ἀποτετμένη, Χ· δύω δὲ ἀποτετμημέναι διάφοροι, ἡ μὲν χ, ἡ δὲ Χ· τέλος δὲ ἡ παράμετρος κληθήσεται π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Παραβολῆς.

22. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Παραβολῆς (σχ. 66) οἱ δύω κλῶνες ΗΜ, ΗΜ', ἐπ' ἄπειρον προϊόντες, ἀποχωροῦσι τοῦ ἄξονος ΗΠ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΗΒ = ΑΗ, καὶ πάντα τὰ ἑξῆς κείμενα τρίγωνα ΑΠΔ ὅμοια τῷ ΑΗΒ, ἑκάστη ΑΠ ἴση ἐστὶ τῇ ἑαυτῆς ΠΔ· ἄρα πΔ = Απ = ΕΜ'' + Επ (*)· οὐκοῦν

(*) Ὅτι ΕΜ = Μτ (17) = ΑΕ (Γεωμετ. 236)

μεταφερομένη ἡ πΔ ἀποςήσει τὸ Μ''' ἀπὸ τῆς ΑΠ μᾶλλον, ἢ ἡ ΕΜ'' ἀπέςησε τὸ οἰκεῖον αὐτῆς Μ''· ἄρα ΕΜ''' $>$ ΕΜ''· ταὐτὸν δὲ νοητέον περὶ πάντων τῶν ἀλληλοδιαδόχων σημείων τῶν εὑρισκομένων ὑφ' ἑκάςης ΠΔ $=$ ΑΠ, μεταφερομένης ἐκ τῦ Ε ἐφ' ἑαυτήν. Ο. Ε. Δ.

23. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Παραβολῆς μία μόνη ἐςὶν ἡ κορυφὴ Η.

ΔΕΙΞΙΣ. Οἱ γὰρ κλῶνες ΗΜ, ΗΜ' διὰ μόνυ τῦ Η σημείυ συνάπτονται τῷ ἄξονι (22)· ἐπεὶ δὲ ΑΗ $=$ ΗΕ, πᾶσαι αἱ ὕπερθεν τῦ Η λαμβανόμεναι ΠΔ, ἐλάττυς ἔσαι ἑκάςη τῆς ἑαυτῆς ΕΠ, ῦ δυνήσονται ὑπὲρ τὸ Η ἐπὶ τῆς ΕΑ προαχθείσης σημεῖα χαράξαι ἐπανήκοντα τῇ καμπύλῃ· ἄρα ἡ καμπύλη ἐν ἑνὶ μόνῳ σημείῳ τῷ Η συμπίπτει τῷ ἄξονι (7). Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Παραβολῆς μία ἔςαι καὶ ἡ ἑςία Ε, καὶ ὁ ἄξων αὐτῆς ὑποτεθῆναι δύναται $= \infty$.

24. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἐν παραβολῇ τὸ ἀφ' οἱασῦν τεταγμένης τετράγωνον $ΠΜ^2 = υ^2$, ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς συςοίχυ ἀποτετμημένης $ΗΠ = χ$ καὶ τῦ τετραπλῦ $ΗΕ = α$ ἀποςήματος τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς ἑςίας· εἴτ' ῦν $υ^2 = 4αχ$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΕΠμ, ἐςὶ $Πμ^2 = υ^2 = Εμ^2 - ΕΠ^2$, Α (Γεωμετ. 351)· ἀλλὰ $Εμ = Πδ$ (18) $= ΑΠ$ (22) $= ΑΗ + ΗΠ = α + χ$ (εἴγε $ΑΗ = ΗΕ = α$) καὶ $ΕΠ = α - χ$, ἐὰν ῇ ὑπερθεν τῦ Ε ἡ ΠΜ, ἢ $χ - α$, ἐὰν ῇ ἔνερθεν· τετραγωνισθεισῶν δὲ τῶν δυνάμεων τύτων τῆς τε Εμ, καὶ ΕΠ, ἡ ἐξίσωσις Α γίνεται $υ^2 = α^2 + 2αχ + χ^2 - α^2 + 2αχ - χ^2$· ἀναγωγῇ δὲ $υ^2 = 4αχ$. Ο. Ε. Δ.

25. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐκ τῆς $υ^2 = 4αχ$ ἐξισώσεως

πρόεισιν $υ^2 : Υ^2 :: 4αχ : 4αΧ :: χ : Χ$ (Συμβ. Λογ. 247), τουτέστι „τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα πρὸς ἄλ-„λήλά εἰσιν, ὡς αἱ ὑπ' αὐτῶν ἀποτετμημέναι" · ἡ καμπύλη ἄρα αὕτη ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ τοῦ κώνου προκυπτούσῃ ἐν ἐπιπέδῳ μιᾷ αὐτοῦ πλευρᾷ παραλλήλῳ τεμνομένου (4, 14).

26. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Παραβολῆς (σχ. 66) ἡ παράμετρος $π$ ἐστὶν $= 4ΗΕ = 4α$· καὶ γὰρ $υ^2 = 4αχ$ (24)· ἀλλ' ἐπὶ τῆς παραμέτρου ἐστὶ $χ = α$, ἐκ κατασκευῆς· ἄρα $υ^2 = 4α \times α = 4α^2$· ἄρα $υ = 2α$· καὶ $2υ = π = 4α$· ἐντεῦθεν ἄρα

27. α'. Παραμέτρου (σχ. 70) τῆς μΕμ δοθείσης, δι' αὐτῆς καταγραφήσεται παραβολὴ ἡ ΗΜΜ, ἐφισταμένης τῷ μέσῳ Ε ταύτης ἀπεράντου εὐθείας τῆς ΕΑ, καὶ τῆς Εμ ἐπ' αὐτὴν μεταφερομένης, καὶ τὸ Α ὁριζούσης· ἐκεῖνο τὸ μέσον σημεῖον Η τῆς ΑΕ ἔσται τῆς παραβολῆς ἡ κορυφή· καὶ γὰρ οὕτως ἔσται $Εμ = ΗΕ = 2α$· τὰ δὲ λοιπὰ ἐκπερανθήσεται, ὡς προδιώρισται (18).

28. β'. Ἡ $υ^2 = 4αχ$ εἰσαγωγῇ τῆς παραμέτρου γενήσεται $υ^2 = πχ$· τουτέστιν „ἐν παραβολῇ τὸ ἀπὸ τῆς „τεταγμένης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς „ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένης, καὶ τῆς παραμέτρου."

29. γ'. Ἐκ τῆς $υ^2 = πχ$ προέρχεται $χ : υ :: υ : π$ (Συμβ. Λογ. 241), τουτέστιν, ὃ ταυτὸν τῷ ἤδη εἰρημένῳ „ἡ παράμετρος ἐστὶ τρίτη ἀνάλογος ἑκάστης ἀποτετμη-„μένης, καὶ τῆς αὐτῇ συστοίχου τεταγμένης."

30. Ὥστε δοθείσης μιᾶς ἀποτετμημένης τῆς Ηπ, καὶ τῆς τεταγμένης πΜ, εὑρεθήσεται ἡ παράμετρος τῆς παραβολῆς, ζητηθείσης τρίτης ἀναλόγου τῶν Ηπ, πΜ (348).

31. Δοθεισῶν ἄρα μιᾶς ἀποτεμημένης τῆς Ηπ, καὶ

τῆς ἀντιςοίχου τεταγμένης πΜ, ἀναγράψαι δυνατὸν ἔςαι τὴν αὐταῖς ἐπανήκυσαν παραβολήν· εἴγε, τῆς πρὸς τὰς δοθείσας τρίτης ἀναλόγυ εὑρεθείσης, τὸ τέταρτον αὐτῆς πρὸς τὰ ἄνω ἐκ τῦ μέσυ Ε μετενεχθὲν, ἐμφανεῖ τὴν κορυφὴν Η, ἐκ δέ Η πρὸς τὰ ὑπὲρ αὐτὸ πάλιν μετενεχθὲν, σημανεῖ τὴν διευθετῦσαν· ἐκῦν τῆς Ε ἑςίας, τῆς Η κορυφῆς, ἐ τῆς διευθετύσης αὐτῆς, δοθέντων, ἀναγραφήσεται ἡ παραβολή.

32. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Διὰ τῦ δοθέντος ἐπὶ τῆς παραβολῆς σημεῖυ Μ ἁπτομένην αὐτῆς ἀγαγεῖν (σχ. 69).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθω ἡ ΕΜ, ἐ ἐςάθω ΜΟ τῇ διευθετύσῃ κάθετος· ἐκῦν ἡ ΜΤ, ἡ δίχα τέμνυσα τὴν ΕΟ, ἔσεται, ἣν ζητῦμεν, ἡ ἁπτομένη.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΜΟ = ΜΕ (17, 18) τὸ ΜΕΟ ἐςὶ τρίγωνον ἰσοσκελές· ἐκῦν (Γεωμετ. 137, 217) ΜΤ κάθετος ἐφέςηκε τῇ ΕΟ· πάντα τοίνυν τὰ τῆς ΜΤ σημεῖα ἴσον ἀπέχυσι τῶν Ε, Ο (Γεωμ. 249)· ἐκ δὲ τύτυ ἅπαν σημεῖον πλὴν τῦ Μ, τὶ Β φέρ' εἰπεῖν, ὐκ ἔςαι κοινὸν τῇ καμπύλῃ, ἐ δὴ ἡ ΜΤ ἁπτομένη ἔςαι τῆς καμπύλης (19)· ἀχθεῖσα γὰρ ἡ κάθετος Βχ, ἐλάττων ἔςαι τῆς ΒΟ (Γεωμ. 113), ἐ δὴ $Βχ < ΒΕ$ (ἐπεὶ ΒΕ = ΒΟ)· ἄρα (17) Β ὐκ ἔςαι ἐπὶ τῆς καμπύλης· ὡσαύτως δὲ συλλογιύμεθα ἐ περὶ παντὸς ἄλλυ σημείυ, ὃ κεῖται ὕπερθεν ἢ ἔνερθεν τῦ Μ· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

33. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπειδὴ ἡ ὑπὸ ΑΜβ = ΟΜΤ = ΤΜΕ (Γεωμ. 99, 217)· σώματι προσπίπτον ἐπὶ τῦ Μ κατὰ φορὰν τὴν ΑΜ παράλληλον τῷ ἄξονι, ἐ τὴν γωνίαν τῆς ἀνακλάσεως ΤΜΕ ἴσην ποιῦν τῇ τῆς προσπτώσεως γωνίᾳ ΑΜβ, ἀνακλαθήσεται ἐπὶ τὴν ἑςίαν· ἐντεῦθεν ἄρα.

34. α. Ἀπευθυνθέντος τοῦ ΗΠ ἄξονος τοῦ παραβολοειδοῦς κοίλου σώματος πρὸς τὸ τοῦ ἡλίου κέντρον, ἅπασαι αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες παράλληλοι οὖσαι ἀλλήλαις, (*) ἑπομένως δὲ καὶ τῷ ἄξονι ΗΠ, μετὰ τὸ προσβαλεῖν τοῖς κοίλοις τοῦ παραβολοειδοῦς, ἀνακλασθήσονται πρὸς τὴν Ε ἑστίαν, (**) καὶ κατακαύσουσι τὰς ἐκεῖ τιθεμένας καυσίμους ὕλας.

35. Ἔξεστι δὲ καὶ τὴν ἑστίαν ῥᾶστα θεῖναι, ἐφ' οὗ ἂν βουλώμεθα σώματος, λαμβάνοντας παραβολοειδὲς, ἐφ' οὗ ἡ ἑστία Ε βραχύτι ἀπέχει τοῦ Η, καὶ ἱκανῶς ἀποτέμνοντας αὐτὸ πρὸς τὸ Η, ἵν' ἡ ἑστία ἐκτὸς κέηται τοῦ παραβολοειδοῦς.

36. β. Ἐὰν ἐν τῇ ἑστίᾳ παραβολοειδοῦς κοίλου τοῦ ΗΔδ (σχ. 71) λαμπὰς τεθῇ, αἱ φωτιστικαὶ ἀκτῖνες ΕΑ, Εη ἀνακλασθήσονται παραλλήλως τῷ ἄξονι, καὶ ἐν διαστήματι 300, ἢ 400 ποδῶν οὕτω περιλάμψουσιν, ὡς ἐκεῖ σκότους ὄντος εὐπετῶς βιβλίον ἀναγινώσκειν.

(*) Ὁ ἥλιος (αὐτὸ δὲ τοῦτο νοητέον καὶ περὶ παντὸς ἄλλου φωτοβόλου σώματος) πανταχόθεν ἑαυτοῦ βάλλει τὸ φῶς, καὶ ἐν εἴδει σφαίρας, ὡς ὀψόμεθα ἐν τῇ Ὀπτικῇ· ἐὰν οὖν δύω ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ἐπὶ φωτιζομένου σώματος ποδιαίου τὸ πλάτος θεωρηθῶσιν, αἱ δύω αὐτῶν φοραὶ, αἱ ἐν τῷ τοῦ ἡλίου κέντρῳ συνερχόμεναι, μετὰ τοῦ πλάτους τοῦ φωτιζομένου σώματος τρίγωνον συγκροτοῦσιν, οὗ μία μὲν τῶν πλευρῶν ἐστι ποδιαία, ἑκατέρα δὲ τῶν λοιπῶν δύω ἴση περίπου λεύγαις 31000000· ἡ τοίνυν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ ἡλίου γωνία ἐπεὶ ὑποτείνει ὑπὸ πλευρὰν ποδιαίαν, ἀπειροστὴ ἐκληπτέα· ἢ, ὃ δὴ ταυτὸν, αἱ δύο ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ἄνευ ἀξιολόγου διαπτώματος ἐκληπτέαι εἰσὶν ὡς παράλληλοι.

(**) *Καὶ γὰρ τὸ φῶς τὴν γωνίαν τῆς ἀνακλάσεως ΤΜΕ ἀεὶ ἴσην ποιεῖ τῇ τῆς ἐπιπτώσεως γωνίᾳ ΑΜβ.*

37. γ΄. Ἐὰν παραβολοειδὲς (σχ. 72) ἀποτμηθῇ πρὸς τῇ κορυφῇ μέχρι τῆς ἑστίας, κἀκεῖ τεθῇ τὸ στόμιον σάλπιγγος· πᾶσαι αἱ φωνητικαὶ γραμμαὶ ΕΜ, ΕΜ (*), ἀποχωροῦσαι τοῦ Ε, καὶ προσβάλλουσαι τοῖς κοίλοις τῆς σάλπιγγος, ἀνακλασθήσονται παραλλήλως τῷ ἄξονι (**), καὶ προαγόμεναι κατὰ τὰς φορὰς ΜΑ ἅλις πόῤῥω πρὸς τὸ Τ ἀκουσθῆναι ποιήσουσι τὰς κατὰ τὸ Ε ἀπαγγελλομένας φωνάς.

38. δ΄, Ἐὰν πρὸς τῇ τοῦ κοίλου παραβολοειδοῦς ΕΜΜ (σχ. 73) ἑστίᾳ, οὕτως ἀποτμηθέντος τὴν κορυφὴν, προσαρμοσθῇ ἀνεμοπορθμεῖον τὸ ΕΠδΜΜ, γενήσεται ἀκουστικόντι ὄργανον κάλλιστον, ὃ οἱ δύσκωφοι τῷ ὠτίῳ ἐντιθέμενοι ἐκ τοῦ Π πέρατος, τὸ δὲ λοιπὸν ὄργανον πρὸς τὸν λαλοῦντα στρέφοντες, τῶν φωνητικῶν ἀκτίνων πρὸς τὸ ὄργανον προσβαλλουσῶν, καὶ πρὸς τὴν ἑστίαν μετὰ τὴν ἀνάκλασιν ἁπασῶν συνιουσῶν, ἀκούσουσιν ἐντελῶς ἅπαντα τὰ λεγόμενα.

39. ε΄. Ἐὰν οἱ δύω παραστάται καμίνου τινὸς παραβολικὸν ἔχωσι σχῆμα, γεννώμενον ἀμέλει ὑπὸ τῶν κλωνῶν ΒΔ, Βδ παραλλήλως ἑαυτοῖς κινηθέντων, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἱσταμένων τῷ ἐδάφει· ὁ δὲ τόπος, ἐν ᾧ ἐστὶ τὸ πῦρ, κατὰ τὴν ἑστίαν τῆς γεννητρίας παραβολῆς κέηται, ἡ κάμινος ἐν βραχυτάτῳ χρόνῳ τὸν θάλαμον θερμανεῖ· κατὰ γὰρ ταύτην τὴν κατασκευὴν, ἐὰν ἐπὶ τοῦ Ε κάθετος ἐπινοηθῇ, ἐπ᾿ αὐτῆς κείσονται ἐφεξῆς πᾶσαι αἱ ἑστίαι τῶν παραβολῶν ἁπασῶν, ἃς καταγράφει ἡ

(*) Τοῦτ᾿ ἔστιν αἱ εὐθεῖαι, καθ᾿ ἃς φέρεται ὁ ἦχος.

(**) Ὁ γὰρ ἦχος, καθὰ δὴ καὶ τὸ φῶς, ἀνακλώμενος ποιεῖ τὴν γωνίαν τῆς ἀνακλάσεως ἴσην τῇ τῆς ἐπιπτώσεως.

κινηθεῖσα γεννήτρια παραβολή· ὅθεν ἡ κατὰ ταύτην τὴν εὐθεῖαν αἰρομένη φλὸξ, κατὰ πλευρὰν τῇ καμίνῳ προσβάλλουσα ἀνακλᾷ τὰς καυστικὰς αὐτῆς ἀκτῖνας ΕΑ, Εη· παραλλήλως τῇ ΕΤ πρὸς τὸ ἔδαφος τοῦ θαλάμου, ὃς ἐν ἀκαριαίῳ χρόνῳ θερμανθήσεται· ἀλλὰ γὰρ, κατὰ τὴν κοινὴν τῶν καμίνων κατασκευὴν, αἱ ἀκτῖνες ἀνακάμπτονται πρὸς τὸ μέσον τῆς καμίνου, καὶ διὰ τοῦ ὀχετοῦ ἐκρέουσι μάτην.

40. ϛ'. Ἔστωσαν δύω παραβολοειδῆ ἀντίθετα τὰ ΗΜΜ, ηΜΜ, κοινὸν ἔχοντα ἄξονα τὸν Ηη (σχ. 74)· ἐὰν ἕν ἀκτινοβόλον τι τεθῇ ἐπὶ τοῦ Ε, πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες ἀθροισθήσονται κατὰ τὸ δ, κἀκεῖ ἀναγνῶναι γράμματα καθαρῶς ἐξέσται, κἂν μέγα τύχῃ ὂν τὸ ἀπὸ Ε ἀπόστημα· ὡσαύτως, ἐὰν πῦρ τεθῇ ἐν τῷ Ε, αἱ φλογιστικαὶ ἀκτῖνες ἐν τῷ δ ἀθροισθήσονται, καὶ ἐν μετρίῳ ἀπὸ τοῦ Ε ἀποστήματι σῶμάτι καυθήσεται.

41. Ἐὰν τὰ διαληφθέντα παραβολοειδῆ φυσικαὶ ὦσι στοαὶ, ἢ καὶ χειροποίητοι· δύω τινὲς, ὁ μὲν ἐπὶ τοῦ Ε, ὁ δ' ἐπὶ τοῦ δ, ἱστάμενοι προσδιαλεχθῆναι ἀλλήλοις δυνηθήσονται, κἂν μέγα ᾖ τὸ μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστημα Εδ· ἑτέρου τινὸς, ἐπὶ τοῦ μέσου Τ ἱσταμένου, μηδ' ἀκούειν αὐτῶν τοὺς λόγους ὅλως ἔχοντος· καὶ γὰρ αἱ ἠχητικαὶ ἀκτῖνες ΕΜ ἀπὸ τοῦ Ε ἀποχωροῦσαι κατὰ τὸ δ συνάπτονται, καὶ τοὐναντίον, καὶ δὴ τὴν τῶν λόγων ἀκρόασιν ἐπαισθητοτάτην κατὰ τὸ δ ἐργάζονται· αὐταὶ δὲ αἱ ἀκτῖνες ἐκ τοῦ Ε προϊοῦσαι κατὰ τὸ Τ λίαν εἰσὶν ἀσθενεῖς, καὶ μικρὰν, ἢ οὐδεμίαν, προσβολὴν τῷ ἀκουστικῷ ἐμποιοῦσιν ἐκεῖ ὀργάνῳ.

42. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ἡ ὑποκάθετος ΠΤ ἀεί ἐστιν ἄτρεπτος, ἐξισουμένη τῷ $\frac{\pi}{2}$, εἴτ' οὖν τῇ ἡμιπαραμέτρῳ (σχ. 69).

ΔΕΙΞΙΣ. Αἱ ΕΟ, ΤΜ εὐθεῖαι (32), αἱ τρίτῃ τινὶ τῇ ΤΜ κάθετοι, ϗ ὑπὸ δύω παραλλήλων ΤΤ, ΟΑ περατέμεναι, εἰσὶ παράλληλοι (Γεωμ. 137) ϗ ἴσαι (Γεωμ. 127)· ἐκεῖν τὰ τρίγωνα ΠΤΜ, ΔΕΟ, διὰ τὰς δύω ἴσας πλευρὰς ΕΟ, ΤΜ, ϗ διὰ τὰς ἴσας γωνίας (ϗ γὰρ Μ = Ο (Γεωμ. 132) ϗ Π = Δ, ϗ ἑπομένως Τ = Ε) εἰσὶν ἴσα (Γεωμ. 221)· ἄρα $ΠΤ = ΔΕ = 2α = \frac{π}{2}$. Ο. Ε. Δ.

43. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐςιν οὖν ἡ κανονικὴ $ΜΤ = \sqrt{πχ + \frac{π^2}{4}}$· ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΠΤΜ ἐςιν $ΤΜ^2 = ΠΜ^2 + ΠΤ^2$ (Γεωμ. 349) $= υ^2 + \frac{π^2}{4} = πχ + \frac{π^2}{4}$ (28)· ἄρα $ΜΤ = \sqrt{πχ + \frac{π^2}{4}}$.

44. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τὸ τοῦ σημείου Τ, καθ᾽ ὃ ἡ κανονικὴ συμβάλλει τῷ ἄξονι, ἀπὸ τῆς κορυφῆς Η ἀπόσημα ΗΤ ἐςιν $= χ + \frac{π}{2} = ΗΠ + ΠΤ$.

45. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Ἡ ὑφαπτομένη ΤΠ ἐςὶ διπλῆ τῆς ἀποτετμημένης ΗΠ, εἶτ᾽ οὖν $= 2χ$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΤΤΜ διὰ τὴν ΠΜ κάθετον ἐςὶ (Γεωμ. 341) ΠΤ = (*) $2α : ΠΜ = υ :: ΠΜ = υ : ΤΠ$· ἄρα $ΤΠ = \frac{υυ}{2α} = \frac{4αχ}{2α}$ (28) $= 2χ$· Ο. Ε. Δ.

46. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπεὶ $ΤΠ = 2χ$, ϗ $ΗΠ = χ$· ἄρα $ΗΤ = χ = ΗΠ$.

47. Ἵν᾽ οὖν ἁπτομένη κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἀχθῇ, ἀποχρήσει τεταγμένως ἀγαγόντας τὴν ΠΜ, λαβεῖν ΗΤ = ΗΠ, ϗ τὴν ΤΜ ἐπιζεῦξαι.

(*) $ΠΤ = \frac{π}{2}$ (42)· $π = 4α$ (26)· ἄρα $ΠΤ = 2α$.

48. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τύπος τῆς ἀπτομένης ΤΜ ἐςὶν ὁ $\sqrt{\pi\chi + 4\chi^2}$· ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΤΠΜ ἐςὶ $ΤΜ^2 = ΠΜ^2 (= \pi\chi)$ (28) $+ ΤΠ^2 (= 4\chi^2)$· ἄρα $ΤΜ = \sqrt{\pi\chi + 4\chi^2}$.

49. ΘΕΩΡΗΜΑ ς΄. Τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς καθέτου ΕΓ, τῆς ἀγομένης ἀπὸ τῆς ἑςίας ἐπὶ τὴν ἀπτομένην ΤΜ, ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΕΜ, τῆς ἐπὶ τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον ἀγομένης, καὶ τοῦ τεταρτημορίου τῆς παραμέτρου· εἴτ᾽ οὖν $ΕΓ^2 = ΕΜ \times \frac{\pi}{4}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΕΓΤ, ΕΓΗ ἐςὶ ΤΕ : ΕΓ :: ΕΓ : ΕΗ· οὐκοῦν $ΕΓ^2 = ΤΕ \times ΗΕ$· ἐςὶ δὲ παρὰ ταῦτα γωνία ἡ ὑπὸ ΤΜΕ = ΟΜΤ (32) = ΜΤΕ (Γεωμ. 133)· τοιγαροῦν τὸ τρίγωνον ΤΕΜ ἐςὶν ἰσοσκελές· ἄρα ΤΕ = ΕΜ· ἐςὶ δὲ $ΗΕ = \frac{\pi}{4}$ (27)· ἀντικαταςάσει ἄρα τῶνδε τῶν δυνάμεων ἀντὶ ΤΕ, καὶ ΕΗ, ἡ ἐξίσωσις $ΕΓ^2 = ΤΕ \times ΕΗ$ γενήσεται $ΕΓ^2 = ΕΜ \times \frac{\pi}{4}$ Ο. Ε. Δ.

50. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ ἀπὸ τῆς ἑςίας ἐπὶ δύω ἀπτομένας ἱςάμεναι κάθετοι ἀνάλογόν εἰσι ταῖς τετραγωνικαῖς ῥίζαις τῶν ὀρθίων πλευρῶν, τῶν ἀγομένων ἐπὶ τὰ τῆς ἀφῆς σημεῖα· καὶ γάρ ἐςιν $ΕΓ^2 = ΕΜ \times \frac{\pi}{4}$· οὐκοῦν $ΕΓ^2 : \varepsilon\gamma^2 :: ΕΜ \times \frac{\pi}{4} : \varepsilon\mu \times \frac{\pi}{4}$· ἄρα ΕΓ : εγ :: $\sqrt{ΕΜ} : \sqrt{\varepsilon\mu}$ (Συμβ. Λογ. 263).

51. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ΄. Τύπος τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΕΜ ἐςὶν ὁ $\chi + \frac{\pi}{4}$.

ΔΕΙΞΙΣ. ΕΜ = ΜΟ (17) = ΗΠ + ΔΗ (Γεωμ. 127) $= \chi + \frac{\pi}{4}$ Ο. Ε. Δ.

52. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐξίσωσιν εὑρεῖν τῆς κυρτῆς παραβολῆς, ἀναφερομένην πρὸς τὴν ΗΡ ἁπτομένην, τὴν τῷ ἄξονι κατὰ τὸ σημεῖον Α κάθετον (σχ. 75).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ΗΡ $= \chi$, καὶ ΡΜ $= \upsilon$· ἐςὶν οὖν διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς παραβολῆς (28) $\Pi M^2 = HP^2 = \pi \cdot \times$ ΗΠ, εἶτ' οὖν $\chi^2 = \pi\upsilon$· ἀπόχρη ἄρα ἐν τῇ εὑρεθείσῃ (28) ἐξισώσει τὸ υ εἰς χ μεταβαλεῖν, καὶ τ' ἀνάπαλιν, εἰς εὕρεσιν τῆς τὴν κυρτὴν παραβολὴν, ὡς τὸ πρόβλημμα ἀπαιτεῖ, ἐμφαινούσης ἐξισώσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ διαμέτρων τῆς παραβολῆς.

53. Κέντρον κωνικῆς τομῆς ἀκούει (σχ. 67) σημεῖον Κ τοῦ ἄξονος, ἐν ἴσῳ ἀφιςάμενον ἑκατέρας τῶν κορυφῶν· τοιγαροῦν κέντρου πραγματικοῦ ἡ παραβολὴ ἠμοίρησεν (23).

54. Ἀλλὰ γὰρ τῆς παραβολῆς ἐλλείψεως οὔσης, ἧς ἡ ἑτέρα κορυφὴ Η τῆς ἑτέρας ἀπείρως ἀφίςαται (5), δυνατὸν ὑποθέσθαι τὸ κέντρον ἀπὸ τῆς Η κορυφῆς ἀπέχον ἀποςήματι $= \frac{\infty}{2}$.

55. Διάμετρος ἐςὶν εὐθεῖα διὰ τοῦ τῆς τομῆς

κέντρȣ διήκȣσα, ϗ πρὸς αὐτῇ τῇ τομῇ ἑκατέρωθεν πεπερατȣμένη.

56. Ὥςε α. ϗ ὁ ἄξων αὐτὸς ὑπάρχει διάμετρος· β΄. εὐθεῖα ἀπὸ σημείȣ Μ τῆς παραβολῆς ἀγομένη, καὶ μία τῶν αὐτῆς διαμέτρων ὑποτιθεμένη, τῷ κέντρῳ ȣ̓ μὴ συναντήσει, πρὶν ἢ προαχθῆναι ἐπ᾽ ἄπειρον· διάμετρος ȣ̃ν ἐν αὐτῇ ἔςαι αὐτός τε ὁ ἄξων, ϗ πᾶσα εὐθεῖα τῷ ἄξονι παράλληλος ἡ ΑΜ (σχ. 69).

57. Ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένη ὀνομάζεται εὐθεῖα ἡ νδ, ἡ ΗΒ (σχ. 75, 76), ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου ϗ τῆς καμπύλης ἀπολαμβανομένη, ϗ παράλληλος ȣ̓̃σα τῇ διὰ τῆς Μ ἀρχῆς τῆς διαμέτρȣ διηκέσῃ ἐφαπτομένῃ.

58. Τὸ Μδ μέρος (σχ. 75.) τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ἀρχῆς Μ μιᾶς τινος διαμέτρȣ, ϗ τῆς ἐπ᾽ αὐτὴν τεταγμένης νδ, καλεῖται Ἀ π ο τ ε τ μ η μ έ ν η· ἐν γένει δὲ ἐπὶ τῶν καμπύλων, ἀφ᾽ ἧς ἂν γραμμῆς ἀποτμηθῶσιν αἱ εἰρημέναι γραμμαὶ, ἐκείνη ἑνὶ τῶν τριῶν τῶνδε διασημαίνεται ὀνομάτων, Ἄ ξ ω ν τ ῶ ν ἀ π ο τ ε τ μ η μ έ ν ω ν, Δ ι ά μ ε τ ρ ο ς τ ῶ ν ἀ π ο τ ε τ μ η μ έ ν ω ν, Γ ρ α μ μ ὴ τ ῶ ν ἀ π ο τ ε τ μ η μ έ ν ω ν.

59. Διάμετρος σ υ ζ υ γ ὴ ς ἡ ΜΜ (σχ. 76) ἑτέρᾳ διαμέτρῳ τῇ Μ′ Μ′′ καλεῖται, ὅταν ἡ ἑτέρα παράλληλος ῇ τῇ ἁπτομένῃ ΤΜ, τῇ διὰ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑτέρας διηκȣ́σῃ· ἀμφότεραι δὲ ἤτε ΜΜ ϗ Μ′ Μ′′ καλȣ̃νται διάμετροι σ υ ζ υ γ ε ῖ ς.

60. Συζυγῶν ἄρα διαμέτρων ἄμοιρος ἡ παραβολὴ (23).

61. Παραβολῆς διαμέτρȣ παράμετρός ἐςιν εὐθεῖα τετραπλῆ τȣ̃ ἀποςήματος ΜΓ (σχ. 75), καθ᾽ ὃ ἀπέχει ἡ τῆς διαμέτρȣ ἀρχὴ Μ ἀπὸ τῆς διευθετȣ́σης ΑΓ.

62. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἐν παραβολῇ ἡ ἡςτινοσȣ̃ν

διαμέτρυ ΜΒ παράμετρος Π ἴσεται τῇ τῦ ἄξονος παραμέτρῳ π σὺν τῇ τετραπλῇ ἀποτετμημένῃ ΗΠ, ἥτις ἀντισοιχεῖ τῇ Μ ἀρχῇ τῆς διαμέτρυ· ἔσι δηλονότι Π = π + 4 χ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ παράμετρος Π = 4 ΜΓ (61) ἀλλὰ 4 ΜΓ = 4 ΑΠ = 4 ΑΗ + 4 ΤΗ = π + 4χ (17, 27, 7)· Ο. Ε. Δ.

63. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ πάσης διαμέτρυ ΜΒ παράμετρος Π τρίτη ἀνάλογός ἐσι πρὸς τὴν ἀποτετμημένην ΗΠ, ϗ τὴν ἁπτομένην ΤΜ· ἔσι γὰρ Π = π + 4χ, ϗ ΗΠ = χ, ϗ ΤΜ = $\sqrt{\pi\chi + 4\chi^2}$ (48)· ἄρα χ : $\sqrt{\pi\chi + 4\chi^2}$ :: $\sqrt{\pi\chi + 4\chi^2}$: π + 4χ (Συμϐ. Λογ. 240).

64. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων νδ, ΗΒ ἐπί τινα διάμετρον ΒΜ τετράγωνα εἰσὶν, ὡς αἱ ἀντίσοιχοι ὑπ᾽ αὐτῶν ἀποτετμημέναι, τυτέσι· $\nu\delta^2$: ΗΒ^2 :: ΜΔ : ΜΒ (σχ. 75).

ΔΕΙΞΙΣ. Τετάχθωσαν ἐπὶ τὸν ἄξονα αἱ ΠΜ, Ιν· ἐκεῖν ά. τὰ τρίγωνα ΖΡΜ, ΤΗΖ προδήλως ὅμοια (Γεωμ. 220) εἰσὶν ἔτι ϗ ἴσα, ὅτι ΜΡ = ΗΠ (Γεωμ. 127) = ΗΤ (Γεωμ. 148), ϗ γωνίαι αἱ αὐταῖς προσκείμεναι ἴσαι.

β΄. Τὸ τρίγωνον ΗΒΡ ἴσον ἐσὶ τῷ παραλληλογράμμῳ ΤΗΒΜ· καὶ γὰρ παρὰ τὸ ἑκατέρῳ κοινὸν ΗΖΜΒ τὸ ΖΡΜ = ΤΗΖ.

γ΄. Τὸ τρίγωνον ΟνΙ ἴσον ἐσὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΗΙΡΕ· ἔσι γὰρ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΤΠΜ, ΟνΙ, ὡς τὸ ΤΠΜ : ΟνΙ :: ΠΜ^2 : Ιν^2 (Γεωμ. 389)· ἀλλὰ ΠΜ^2 : Ιν^2 :: ΗΠ : ΗΙ (14) ἄρα ΤΠΜ : ΟνΙ :: ΗΠ : ΗΙ, ἢ ΤΠΜ : ΗΠ :: ΟνΙ : ΗΙ (Ρ)· ἀλλὰ ΙΕ = ΠΜ (Γεωμ. 127)· ἐκ τῆς Ρ ἄρα πρόεισι καινὴ ἀναλογία· ΤΠΜ :

ΗΠ × ΠΜ :: ΟνΙ : ΗΙ × ΙΕ (Συμϐ. Λογ. 246)· ἀλλὰ ΤΠΜ = ΗΠ × ΠΜ (Γεωμ. 285 ϗ ἐνταῦθα 46)· ἄρα ϗ ΟνΙ = ΗΙ × ΙΕ, εἴτ' ἓν τῷ παραλληλογράμμῳ ΗΙΡΕ (Γεωμ. 283).

δ'. Τὸ τρίγωνον ΟΗκ ἴσον ἐςὶ τῷ τραπεζίῳ κνΡΕ· ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῶν ἴσων ΟνΙ ΗΙΡΕ ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΗκΙν, ἔσονται ἴσα τὰ κατάλοιπα ΟΗκ, κνΡΕ.

έ. Τὸ τρίγωνον νδΔΕ ἴσον ἐςὶ τῷ παραλληλογράμμῳ δΜΟΤ· ἀποχρήσει ἓν εἰς τοῦτο ἵνα παρὰ τὸ κοινὸν νΤδΜ ᾖ ΤΕΜ = ΤΟνΤ· ἀλλὰ ΤΗΡ = ΖΡΜ (ά)· ἐὰν ἄρα τοῖς ΓΗΖ, ΖΡΜ, τὸ αὐτὸ ποσὸν κΖνΤ προσθέντες, ἀφέλωμεν ἀπὸ τῶν ἴσων ὅλων τὰς ἴσας ποσότητας ΟΗκ, κνΡΕ (δ'.), ἕξομεν ΤΟνΤ = ΤΕΜ· ἄρα τὸ τρίγωνον νδΕ = τῷ παραλληλογράμμῳ δΜΟΤ.

ς'. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις νδΕ, ΗΒΡ (Γεωμ. 220) ἐςι (Γεωμ. 389) νδΕ : ΗΒΡ :: $\nu\delta^2$: HB^2 ἐπεὶ δὲ νδΕ = δΜΟΤ (ἄνωτ) ϗ ΗΒΡ = ΤΗΒΜ (β'.), ἔςαι δΜΟΤ : ΤΗΒΜ :: $\nu\delta^2$: HB^2.

ζ. Τέλος δὲ τὰ παραλληλόγραμμα δΜΟΤ, ΤΗΒΜ, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΗΓ, ΒΜ ὄντα, εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις Μδ, ΜΒ (Γεωμ. 290).

Ἐντεῦθεν ἄρα αὐτόματος προχεῖται ἡ δεῖξις· δΜΟΤ : ΤΗΒΜ :: $\nu\delta^2$: HB^2 (ς'.)· ἀλλὰ δΜΟΤ : ΤΗΒΜ : Μδ : ΒΜ· ἄρα $\nu\delta^2$: HB^2 :: Μδ : ΜΒ· Ο. Ε. Δ.

65. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἔςω νδ = υ, ϗ ΗΒ = Υ, ϗ Μδ = χ, ϗ ΜΒ = Χ· ποριςθήσεται τοίνυν $\upsilon^2 : \Upsilon^2 :: \chi : \mathrm{X}$· ἄρα $\upsilon^2 = \dfrac{\Upsilon^2 \times \chi}{\mathrm{X}}$. τοιγαροῦν.

66. ά. $\upsilon = \pm\sqrt{\dfrac{\Upsilon^2 \times \chi}{\mathrm{X}}}$ (Συμϐ. Λογ. 127)· ά-

πάσῃ ἄρα τεταγμένῃ νδ ἀντιςοιχεῖ ὡς λείπεσα (εἴτ' ἒν κατ' ἀντίθετον ἔννοιαν) ἑτέρα τεταγμένη ἴση ἡ δΨ· ἅπασα ἄρα διάμετρος διχῆ τέμνει τὰς ἐφ' ἑαυτὴν διπλᾶς τεταγμένας, νδ = δψ· καὶ τῦτο ἄρα διάμετρος ἀκέειν ἐκληρώσατο.

67. β΄. $\upsilon^2 = \frac{\Upsilon^2 \chi}{X}$ ἐςὶν ἐξίσωσις τῶν ἐφ' ἅπασαν διάμετρον πλὴν τῦ ἄξονος τεταγμένων· ἀλλ' ἐςιν ἐν ταῖς ἐπὶ τὸν ἄξονα τεταγμέναις $\upsilon^2 : \Upsilon^2 :: \chi : X$ (25), ὅθεν ἡ αὐτὴ τῇ ἀνωτέρω προκύπτει ἐξίσωσις $\upsilon^2 = \frac{\Upsilon^2 \chi}{X}$· ὥςε ἐν παραβολῇ ἡ τῶν ἐφ' ἅπασαν διάμετρον τεταγμένων ἐξίσωσις ἐςιν ἡ αὐτὴ τῇ τῶν ἐπὶ τὸν ἄξονα· διάμετρος ἄρα πᾶσα τὰς αὐτὰς ἔχει τῷ ἄξονι ἰδιότητας, πλὴν ὅσον αἱ ἐπ' ἐκείνας τεταγμέναι πλαγίως ἵςανται· γίνεται δὲ τῦτο, ὅτι ἡ τῦ ἄξονος ἁπτομένη Ηκ, πρὸς ὀρθὰς ἐφέςηκεν αὐτῷ· αἱ δὲ τῶν ἄλλων διαμέτρων ἁπτόμεναι πλαγίως ἐπ' αὐτὰς πίπτυσι· πᾶσα δὲ τεταγμένη παράλληλος ὑπάρχει τῇ τῆς ἑαυτῆς διαμέτρυ ἐφαπτομένῃ (57).

68. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Παραβολῆς δοθείσης, τὸν ἄξονα αὐτῆς εὑρεῖν (σχ. 77).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθωσαν δύω παράλληλοι αἱ δε, Βζ, ϗ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ σημεῖα ο, τ· διὰ δὲ αὐτῶν ἤχθω ἡ εὐθεῖα ΠΞ, ἣ γενήσεται μία τῶν διαμέτρων τῆς παραβολῆς (66), ϗ ἐςάθωσαν ἐπὶ τὴν ΠΞ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΠΡ, δΤ, περατέμεναι ἑκατέρωθεν ὑπὸ τῆς παραβολῆς· αὗται ὖν ἔσονται αἱ διπλᾶι τεταγμέναι ἐπὶ τὸν ἄξονα, ὅτι ἡ ΠΞ, διάμετρος ὖσα, παράλληλος ἔςαι τῷ ἄξονι (56)· δίχα ὖν τεμῦσα ταύτας τὰς δύω εὐθείας κάθετος ἡ ΑΜ (Γεωμ. 106) ἔσεται ἄξων ὁ ζητέμενος. Ο. Ε. Δ.

69. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Παραβολῆς δοθείσης τῆς ΗΜΜ', εὑρεῖν αὐτῆς τὴν παράμετρον (σχ. 66).

ΛΥΣΙΣ. Εὑρεθήτω ὁ ἄξων ΗΠ (ἄνωτ.) ᾗ ἀπό τινος σημείȣ Μ''' ἤχθω τεταγμένως ἡ πΜ''', ᾗ ζητηθήτω τρίτη ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀποτετμημένην Ηπ, ᾗ τὴν τεταγμένην πΜ''' (Γεωμ. 348)· αὕτη ȣ̓ν ἔςαι ἡ ζητȣμένη παράμετρος (30).

70. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Τετραγωνίζειν ἡμιπαραβόλιον τὸ ΗΔΕ (σχ. 78).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθω ἡ ΤΔ ἀπτομένη κατὰ τὸ Δ (32), ᾗ τετάχθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸν ἄξονα, ᾗ αὐτῷ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΟ, ἥτις διῃρήσθω εἰς μέρη ἰσάλληλα ἐλάχιςα τὰ ΓΑ, ΑΓ κτλ., ᾗ ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ ΔΕ διὰ τῶν χ, Ι σημείων αἱ ΑΒ, ΓΠ, τῇ δὲ ΔΟ αἱ ΘΚ, ΖΥ· ἐπεὶ ȣ̓ν τὰ ΤΔΕ, χΔΚ τρίγωνα (Γεωμ. 220) ὅμοιά εἰσιν, ἔςι ΤΕ : ΔΕ :: χΚ : ΔΚ· ἀλλὰ ΤΕ = 2ΗΕ (45) = 2ΔΟ, ᾗ χΚ=ΒΕ· ἄρα 2ΔΟ : ΔΕ :: ΒΕ : ΔΚ· ἄρα 2ΔΟ × ΔΚ = ΔΕ × ΒΕ· εἶτ' ȣ̓ν τὸ ἐκτὸς τῆς παραβολῆς ὀρθογώνιον ΑΔΒΕ διπλȣ̃ν ἐςὶ τȣ̃ ἐκτὸς αὐτῆς ὀρθογωνίȣ ΚΘΔΟ (*)· ἐπεὶ ἄρα ἅπαν ὀρθο-

---

(*) Υποτίθημι τὸ ΑΔΒΕ ὡς ὅλον ἐντὸς κείμενον τῆς παραβολῆς, ὅπερ ἀσφαλῶς ποιῆσαι δύναμαι· ᾗ γὰρ τὸ ἐκτὸς κείμενον τριγωνίδιον ΑχΔ γινόμενον ὑπὸ τȣ̃ ἀπειροςȣ̃ $\frac{ΑΔ}{2}$ ᾗ τȣ̃ ἀπειροςȣ̃ Αχ ἀπειροςόν ἐςι δευτεροταγὲς (Συμβ. Λογ. 527), ὅπερ ὡς πρὸς τὸ πρωτοταγὲς ἀπειροςὸν ΑΔΒΕ ἐκλαμβάνεται ἴσον μηδενί (Συμβ. Λογ 520)· διὰ τὸν αὐτὸν γώνιον, ὃ συντίθησι τὴν ΗΔΕ μερίδα τȣ̃ ΗΟΔΕ ὀρθογωνίȣ, διπλȣ̃ν ἐςὶ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τȣ̃ ἀντιςοιχȣ̃ντος ἐν τῇ ΔΟΗ μερίδι τȣ̃ ἐκτὸς τȣ̃ ἡμιπαραβολίȣ· ἄρα τὸ ὅλον ἐσωτερικὸν ἐμβαδὸν ΗΔΕ διπλȣ̃ν ἐςι τȣ̃ ὁλικȣ̃ ἐξωτερικȣ̃ ἐμβαδȣ̃· ἄρα τὸ ΗΔΕ τȣ̃ ἡμιπαραβολίȣ ἐμβαδὸν ἴσον ἐςὶ δυσὶ τριτημορίοις τȣ̃ ὀρθογωνίȣ ΗΟΔΕ, τȣ̃ βάσιν μὲν τὴν τεταγμένην ΔΕ, ὕψος δὲ τὸν ΗΕ ἄξονα ἔχοντος. Ο. Ε. Π.

ΑΛΛΩΣ. Ἐπείπερ ΔΕ $=$ 'υ' $= \sqrt{\pi\chi}$ (28)· ἐὰν τέθῃ $\pi = 1$, ἔςαι $\upsilon = \sqrt{\chi}$, εἴτ' ȣ̃ν $\upsilon = \chi^{\frac{1}{2}}$· τοιγαρȣ̃ν ὅπως ἂν εὑρεθείη τὸ ἄθροισμα τῶν μεταξὺ Η ϗ ΔΕ τεταγμένων, συναπτέον τὴν σειραν $1^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}}, 4^{\frac{1}{2}}, 5^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots \chi^{\frac{1}{2}}$· ἀλλὰ τὸ ταύτης ἄθροισμα. (Συμβ. λογ. 568.) ὑπάρχει $\frac{\chi^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\chi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\chi^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\chi^3} = \frac{2}{3}\chi\sqrt{\chi}$, εἴτ' ȣ̃ν (ἐπεὶ $\upsilon = \sqrt{\chi}$) $= \frac{2}{3}\chi\upsilon$· Τὸ ἄρα παραβολικὸν χωρίον ΗΔΕ δυσὶν ἰσȣ̃ται τριτημορίοις τοῦ ἔκτε τῆς τεταγμένης καὶ τῆς ἀποτετμημένης γενομένου, εἴτ' οὖν τοῦ ὀρθογωνίου ΗΟΔΕ· ὅρα δὲ τὸ αὐτὸ καὶ ἄλλως ἔτι δεικνύμενον ἐν Τόμ. Β΄. σελίδ. 116 τῶν μαθηματικῶν ςοιχείων Νικηφόρου τοῦ Θεοτόκȣ.

71. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄρα τὸ τȣ̃ ἡμιπαραβολίȣ ἐμβα-

λόγου ὅλον τὸ ΟΘΔΚ ἐκτὸς τῆς παραβολῆς ὑποτίθημι· ὡσαύτως ὡς ἐντὸς μὲν ὅλον ἐκδέχομαι τὸ ὀρθογώνιον ΒΠξχ, ὡς ὅλον δὲ ἐκτὸς τὸ ΤΘυχ· δείκνυται δὲ εὐπετῶς ϗ ἐν τȣ́τοις, ὅτι ΒΠξχ $=$ 2ΤΘυχ.

δὸν εὑρεθήσεται, πολλαπλασιαθείσης τῆς ἐσχάτης τεταγμένης ἐπὶ δύω τριτημόρια τοῦ ΗΕ ἄξονος.

72. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Εὑρεῖν τὴν στερεότητα τῆς παραβολικῆς κωνοΐδος.

ΛΥΣΙΣ. Ἐν τῷ τὴν καμπύλην (σχ. 66) ΗΜΜ΄ περὶ τὴν ΗΠ περιάγεσθαι, καὶ ἀπογεννᾷν τὴν κωνοΐδα, πᾶσαι αἱ τεταγμέναι ΠΜ κύκλους καταγράφουσιν· οἱ δὲ κύκλοι οὗτοι ἀπὸ τῆς Η κορυφῆς προϊόντες αὔξουσιν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ΠΜ τετράγωνα (Γεωμ. 398)· ταῦτα δέ, ὡς αἱ ἀποτετμημέναι (25)· αἱ δὲ ὡς 1. 2. 3. 4. . . . . ∞, ἢ ὡς ÷ 0. 1. 2. 3. 4. . . . ∞, Α· ἄρα οἱ κύκλοι, εἴτ' οὖν τὰ στοιχεῖα τῆς κωνοΐδος αὔξουσι, κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον Α· καὶ δὴ τῶν αὐτῶν τὸ ἄθροισμα ἐμφαίνεται διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου Α.

Ἀριθμὸς δὲ τῶν ὅρων ταύτης τῆς προόδου ἐστὶν ὁ ἄξων ΗΠ· ὁ δὲ ἔσχατος ὅρος ∞ ἐμφαίνει τὸν κύκλον, ὃς ἐστὶ βάσις τῆς παραβολικῆς κωνοΐδος, καὶ ὃν ἡμεῖς καλοῦμεν ἤδη Β· ἄρα τοῦτο τὸ ἄθροισμα ἐστὶ (Συμβ. Λογ. 217) $\frac{\text{Β} \times \text{ΗΠ}}{2}$· ἀλλὰ Β × ΗΠ κύλινδρός ἐστι, βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον Β, ὕψος δὲ ΗΠ (Γεωμ. 456)· ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων, εἴτ' οὖν ἡ στερεότης τῆς παραβολικῆς κωνοΐδος, ἴση ἐστὶ τῷ ἡμίσει τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς παραβολικῆς κωνοΐδος, ὕψος δὲ ὁ ἄξων. Ο. Ε. Π.

73. Ἵν' ἄρα εὑρεθῇ ἡ τῆς παραβολικῆς κωνοΐδος στερεότης, θηρευτέον τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐτοῦ βάσεως, καὶ πολλαπλασιαστέον αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἡμιάξονα· σαφὲς ἄρα, ὡς ὁ ἀπόλυτος τῆς παραβολικῆς κωνοΐδος κυβισμὸς ἐξήρτηται τοῦ ἀπολύτου κυκλικοῦ τετραγωνισμοῦ (Γεωμ. 363. κτλ.).

Περὶ τῦ ὅπως ὑπόνομοι κοιλαίνονται.

Ὑπόνομός ἐςιν ὑπόγειον κοίλωμα, ἐν ᾧ κόνις πυρῖτις τίθεται πρὸς τὸ δι' αὐτῆς ἀναῤῥῆξαι τὴν ὑπερκειμένην γῆν· ὖκῦν ἡ ἱκανῦσα τῆς κόνεως ποσότης ὁρισθήσεται ὕτω.

Δῆλον ἐκ πείρας ὡς ἐν γῇ πάντη ὡσαύτως ἀνθιςαμένης τὸ κατὰ τὴν ἀνάῤῥηξιν καταλειπόμενον κενὸν ἐςιν (σχ. 79) οἷα ἡ ΤΗΓ παραβολικὴ κωνοῒς· ὁρισθείσης ὖν τῆς τύτυ ςερεότητος ἀποτελυμένης ἐκ τῦ ὑπονόμυ, γνωσθήσεται ϗ ἡ ἱκανῦσα κόνις, γινομένης πείρας τὸ πρῶτον, ὅση ἱκανὴ ἔςαι εἰς ἀνάῤῥηξιν γῆς κυβικῦ ποδός.

74. Εἰσὶ δ' ἐκ πείρας βέβαια καὶ ταῦτα· ά. ἡ ἐξ ὑπονόμυ σχηματιζομένη παραβολικὴ κωνοῒς ΓΗΤ, ἔχει τὴν ἑςίαν ἐν τῷ μέσῳ τῦ χώρυ, ἐν ᾧ ἡ κόνις· β'. ἡ ΒΕ κάθετος ἐγχωννυμένη τῷ ὑπονόμῳ, ϗ μέρος ἀποτελυμένη τῦ κατὰ τὴν κωνοῒδα ἄξονος, ἴση εὑρίσκεται τῇ ἀκτῖνι ΒΓ τῦ μεγίςυ τῶν ἐν τῇ κωνοῒδι κύκλων· ἔςω ὖν διευθετῦσα ἡ ΟΔ· ὅθεν $\Gamma E = \Gamma O$ (17) $= B\Delta$· ἔςω δὲ ϗ $B\Gamma = BE$, ὡς ἤδη εἴρηται $= \nu$· ἐπεὶ ὖν τὸ ΒΓΖ τρίγωνον ἐςὶν ὀρθογώνιον· ἄρα $\Gamma E^2\ (B\Delta^2) = \nu^2 = 2\nu^2$· ἄρα $B\Delta = \sqrt{2\nu^2}$· ἄρα $E\Delta = \sqrt{2\nu^2} - \nu$· ἄρα $EH = \frac{\sqrt{2\nu^2} - \nu}{\alpha}$ (17)· ἄρα $BH = \nu + \frac{\sqrt{2\nu^2} - 2}{2}$ (Π).

75. Γνωσθείσης ὖν τῆς καθέτυ $BE = \nu$, καθ' ἣν ἐςὶν ὑπορωρυγμένος ὁ ὑπόνομος, ἅπαν γνωςὸν ἔςαι διὰ τῆς Π ἐξισώσεως· πολλαπλασιασθέντος δὲ τῦ κύκλυ, ὖ ἀκτὶς $B\Gamma = \nu$, ἐπὶ τὸ $\frac{BH}{2}$ ὕτως εὑρημένον, ἀποτελη-

φθήσεται ἡ ζητȣμένη ςερεότης Σ. ἀλλὰ γὰρ εὔδηλον, ὡς ἡ μικρὰ παραβολικὴ κωνοὶς ΗχΕ διεσχημάτιςαι πρὸς τὸ Δ βίᾳ τῆς κόνεως, τῆς πράγματι ἀποῤῥαγείσης γῆς ἔσης μόνης τῆς κολȣ́ρȣ κωνοΐδος ΓΤχΕ· δεῖ ȣ̃ν ἀποκόψαι τῆς εὑρημένης Σ ςερεότητος, τὴν τȣ̃ ΗχΕ.

76. Εἰς δέ γε τȣ̃το, γνωςὸν μέν ἐςι τὸ ὕψος ΕΗ $= \frac{\sqrt{2v^2 - v}}{2}$· ἐπεὶ δὲ $EZ = 2EH$ (27), γνωςὴ ἄρα ἐςὶ ϗ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως χΕΖ τῆς κωνοΐδος χΗΖ, ϗ δὴ ϗ ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς τῆς βάσεως (Γεωμ. 298), ἣν πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ $\frac{HE}{2}$, ἕξομεν τὴν ςερεότητα τȣ̃ ΗχΖ, ἧς ἀφαιρεθείσης ἀπὸ Σ, καταλειφθήσεται ἡ ἀληθῶς ἀποκρυφθεῖσα γῆ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ Ἐλλείψεως.

77. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἡ ἔλλειψις ἐςὶ καμπύλη ἀνακάμπτȣσα.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ $AH > HB$ (σχ. 67), ϗ πάντα τὰ ἐφεξῆς κείμενα τρίγωνα ΑΠΔ ὅμοιά εἰσι τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ, αἱ ΑΠ τάχιον αὔξȣσιν, ἢ αἱ αὐτῶν ΠΔ· τελευταῖον ȣ̃ν ἔςαι τις $E\Pi = \Pi\Delta$ τῇ ἑαυτῆς· αὕτη ȣ̃ν ἡ ΠΔ μετενεχθεῖσα ἐφ᾽ ἑαυτὴν ἐκ τȣ̃ Ε, πεσεῖται ἐπὶ τȣ̃ ἄξονος κατὰ τὸ η· οἱ δύω ἄρα κλῶνες ΗΜη, ΗΜ΄η συνενωθήσονται κατὰ τὸ η. Ο. Ε. Δ.

78. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τῇ ἐλλείψει ἄρα, δύω μὲν ἔσονται αἱ κορυφαὶ Η, η, εἷς δ' ὡρισμένος ἄξων ὁ Ηη.

79. Αἴτημα. Ἐπὶ τῆς Ηη εἰλήφθω ηε = ΗΕ, καὶ ἐπ' αὐτῆς προεκβληθείσης, Ιη = ΗΑ· ἐξάχθω κατὰ τὸ η κάθετος ἡ ηβ = ΗΒ, καὶ διὰ τοῦ β ἤχθω ἡ Ιτ· ἐπεὶ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΗ, Ιβη ἴσα, πάντατε τὰ τρίγωνα ΑΠΔ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀντιστοίχοις ΙΠδ ἕκαστον ἑκάστῳ, καὶ αἱ Πδ ἴσαι ταῖς ΠΔ, ταῖς ἀπεχούσαις ἀπὸ τοῦ Η, ὅσον αἱ Πδ ἀπὸ τοῦ η, ἐντεῦθεν ἄρα . . .

80. α'. Τὸ σημεῖον ε ἐστιν ἑστία ὡς καὶ τὸ Ε, καὶ δι' αὐτῆς γραφῆναι δύναται ἡ καμπύλη· δύω ἄρα τῇ ἐλλείψει αἱ ἑστίαι Ε, ε, ἴσον ἀπέχουσαι ἑκατέρα τῆς κορυφῆς Η, ἢ η.

81. β'. Αἱ τεταγμέναι ΠΜ, καὶ αἱ διπλαῖ τεταγμέναι ἑπομένως, αἱ ἰσοδιεστῶσαι τῶν κορυφῶν Η, η ἑκατέρα ἑκατέρας, ἴσαι ἔσονται· ἡ ἔλλειψις ἄρα ἐν δυσίτισιν ἀντιθέτοις σημείοις τὴν αὐτὴν ἔχει καμπυλότητα· καὶ ἐπὶ ΠΜ = ΠΜ τῇ ἑαυτῆς ἀντιστοίχῳ δήπουθεν, ἡ καμπύλη αὕτη δίχα τέμνεται διὰ τοῦ ἄξονος Ηη.

82. γ'. Ἐλάττων ἄξων καλεῖται ἡ διπλῆ τεταγμένη ΜΚΜ'', ἡ διήκουσα διὰ τοῦ μέσου τοῦ ἄξονος ὃς καλεῖται μείζων ὡς πρὸς τὸν ἐλάττω· ἑκάτερος ἄρα τῶν ἀξόνων δίχα τέμνει τὴν ἔλλειψιν.

83. Τὸ σημεῖον Κ, καθ' ὃ ἀλλήλους οἱ ἄξονες τέμνουσι, Κέντρον καλεῖται τῆς ἐλλείψεως· τὸ δὲ ΚΕ, ἢ Κε ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀφ' ἑκατέρας ἑστίας Ἐκκεντρότης καλεῖται τῆς ἐλλείψεως.

84. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ὁ μείζων ἄξων τῆς ἐλλείψεως ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν σημείου παντὸς μ τῆς

καμπύλης δύω ἀποςημάτων ἀφ' ἑκατέρας τῶν ἑςιῶν· εἴτ' ἐν Ηη = Εμ + εμ.

ΔΕΙΞΙΣ. ΗΕ = ΗΒ = ηβ, ϗ ηΕ = ηΔ (ἐκ κατασκευῆς)· ἄρα Ηη = βηΔ, = μιᾷ τινι Δδ (ἐπεὶ Ιτ παράλληλος τῇ ΑΤ, ϗ Δηδ ἴση μιᾷ τινι Δδ).

Παρὰ ταῦτα Εμ = ΠμΔ' (ἐκ κατασκ.)· ϗ εμ = ΠΜ'''δ, εἴγε τὰ μ, Μ''' σημεῖα εὑρέθησαν μεταφερομένης ἐκ τῦ ε τῆς ΠΜ'''δ ἐφ' ἑαυτὴν (80)· ὖκῦν Εμ + εμ = ΠμΔ' + ΠΜ'''δ, εἴτ' ἐν τῇ ὅλῃ Δ'μ = Μ'''δ, ἢ μιᾷ τινι Δδ.

Ἐπεὶ τοίνυν Ηη = Δδ, ϗ Εμ + εμ = Δδ· ἄρα ϗ Ηη = Εμ + εμ· Ο. Ε. Δ.

85· ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐντεῦθεν ἄρα εὐχερῶς πάνυ ἔλλειψιν γράφειν μεμαθήκαμεν· εἰλήφθω γὰρ (χ. 80) ἄξων ὁ Ηη, ϗ δύω ἑςίαι Ε, ε, τιθεμένων Η : = ηε, ϗ γενέσθω ΑΗ = ΗΕ· ϗ κέντρῳ τῷ ε γεγράφθωσαν ἐφεξῆς τόξα τὰ ΜΟΔ, ΜΟ'Δ'· εἶτα δὲ ἐκ τῦ Α εἰλήφθω ἕκαςον ἀπόςημα ΑΔ, ϗ μετηνέχθω ἐκ τῦ Ε ἐπὶ τὸ ἑαυτῷ ἀντίςοιχον τόξον· ϗ δὴ πάντα τὰ ὕτως εὑρεθέντα σημεῖα ἔσονται ἐπὶ τῆς καμπύλης.

Καὶ γὰρ εΜ' = εΔ' (Γεωμ. 4.) ἀλλὰ ΕΜ' = ΑΔ' = ΗΔ' + εη (ἐκ κατασκευῆς)· ἄρα ΕΜ' + εΜ' = ΗΔ' + εη + εΔ' = Ηη· πάντα ἄρα τὰ ὕτως εὑρεθέντα σημεῖα ἔςαι ἐν ἐλλείψει (84).

86. Καὶ ἁπλυςέρα δὲ ἄλλη πορίζεται μέθοδος τοῦ γράφειν ἔλλειψιν, δοθέντος τῦ μείζονος ἄξονος Ηη, ϗ τῦ τῶν ἑςιῶν ἀποςήματος Ε, ε· νήματος γὰρ ἴσυ τῷ Ηη, θάτερον μὲν πέρας πεπήχθω ἐπὶ τῦ Ε, θάτερον δὲ ἐπὶ τῦ ε· ἧλος δὲ ὁ Μ' ἔνδοθεν τὸ νῆμα τείνων ὀρθὸς πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον περιηχθω· λέγω δὴ ὅτι ὁ

ἥλος M′ ἔλλειψιν καταγράφει· ἐν παντὶ γὰρ σημείῳ τῷ ὑπ᾽ αὐτῦ γραφομένῳ ἐςὶν $EM' + \varepsilon M' = H\eta$ (84).

87. ΠΟΡΙΣΜΑ Β′ Τῶν εὐθειῶν τῶν ἀπὸ τῦ πέρατος τῦ ἐλάττονος ἄξονος ἐπὶ τὰς ἐςίας ἐπιζευγνυμένων ἑκάςη ἴση ἐςὶ τῷ μείζονι ἡμιάξονι· ϗ γὰρ (℅. 67) $EM'' + \varepsilon M'' = H\eta$ (84)· ἀλλ᾽ $EM'' = \varepsilon M''$, ἐπεὶ ὕσης KM'' πλευρᾶς κοινῆς, ϗ $KE = K\varepsilon$, ϗ τῆς K γωνίας ὀρθῆς, τὰ τρίγωνα KEM'', $K\varepsilon M''$ εἰσὶν ἴσα (Γεωμ. 221)· ἄρα $EM'' = \frac{H\eta}{2} = \varepsilon M''$.

88. Ὑπόθεσις. Τὸν μὲν μείζονα ἡμιάξονα ἐν τοῖς ἐφεξῆς ἀποκαλέσομεν α, ϗ δὴ $EM'' = \alpha$ (87), τὸν δ᾽ ἐλάττονα β· τὴν δ᾽ ἐκκεντρότητα KE, ἢ $K\varepsilon = \varkappa$· χ δὲ τὸ ἀπόςημα μιᾶς τινος τεταγμένης ἀπὸ τῦ κέντρυ· ἐκῦν ἡ ἀποτετμημένη ἐξ ὑποθέσεως $\Pi' H = \alpha + \chi$, ἡ δὲ $\Pi' \eta = \alpha - \chi$· γινόμενον δὲ ὑπὸ τῶν ἀποτετμημένων $\Pi' H \times \Pi' \eta$ ἐν τῇ ἐλλείψει, $\alpha^2 - \chi^2$.

89. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ′. Ὁ ἐλάττων ἡμιάξων KM'' ἐςι μέσος ἀνάλογον (℅. 67) τῶν ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν κορυφῶν δύω ἀποςημάτων τῆς ἑτέρας τῶν ἐςιῶν, εἴτ᾽ ἂν $HE = \alpha - K : KM'' = \beta :: KM'' = \beta : E\eta = \alpha + K$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ EKM'', ἔςι $KM''^2 (\beta^2) = EM''^2 (\alpha^2) - KE^2 (-\varkappa^2)$, ἢ $\beta^2 = \alpha^2 - \varkappa^2$· ἐπινοηθήτω νῦν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως ὡς $\overline{\alpha + \varkappa} \times \overline{\alpha - \varkappa}$ (Συμϐ. Λογ. 44)· ἐπεὶ δὲ πᾶσα ἐξίσωσις ἀναλογίαν παρέχει (Συμϐ. Λογ. 240), ἐςὶν ἄρα $\alpha - \varkappa : \beta :: \beta : \alpha + \varkappa$. Ο. Ε. Δ.

90. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ′. Τὸ ἀπὸ πάσης τεταγμένης ἐπὶ τὸν μείζονα ἄξονα τετράγωνον πρὸς τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ὑπ᾽ αὐτῆς ἀποτετμημένων ἐςὶν, ὡς τὸ ἀπὸ τῦ ἐλάτ-

τονος ἡμιάξονος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῦ μείζονος ἡμιάξονος.

ΔΕΙΞΙΣ. Φημὶ δὴ ὡς ἐςι (σχ. 81) $\Pi M^2 = \upsilon^2 : H\Pi \times \Pi \eta = \alpha^2 - \chi^2$ (87) $:: KM^2 = \beta^2 : \alpha^2$, ἢ $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$.

Ἐςι γὰρ α'. $\Pi E = \chi - \kappa$, ϗ $\Pi \varepsilon = \chi + \kappa$, ϗ $E\mu + \varepsilon\mu = 2\alpha$ (84).

Τεθείσθω νῦν $\varepsilon\mu - E\mu = 2\nu$· ϗ δὴ ἔςαι $\varepsilon\mu = \alpha + \nu$, ϗ $E\mu = \alpha - \nu$ (Συμδ. Λογ. 442).

β'. Ἐν τῷ τριγώνῳ ΕΠμ ἐςὶ $\Pi\mu^2$ $(\upsilon^2) = E\mu^2$ $(\overline{\alpha - \nu}^2 = \alpha^2 - 2\alpha\nu + \nu^2) - \Pi E^2$ $(\overline{-\chi + \kappa}^2 = - \chi^2 + 2\kappa\chi - \kappa^2)$ Α.

γ'. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ Πμε ἐςὶ $\Pi\mu^2$ $(\upsilon^2) =$ $\mu\varepsilon^2$ $(\alpha^2 + 2\alpha\nu + \nu^2) - \Pi\varepsilon^2$ $(\overline{-\chi - \kappa}^2 = - \chi^2 - 2\chi\kappa - \kappa^2)$ Β.

δ'. Ἀντικαταςάσει ἄρα ἀντὶ υ^2 ἐν τῇ Β ἐξισώσει, τῆς ἐν τῇ Α εὑρεθείσης δυνάμεως ἔςαι $\alpha^2 - 2\alpha\nu + \nu^2 - \chi^2 + 2\kappa\chi - \kappa^2 = \alpha^2 + 2\alpha\nu + \nu^2 - \chi^2 - 2\kappa\chi - \kappa^2$· ἀναγωγῇ δὲ γίνεται $4\alpha\nu = 4\kappa\chi$· ἄρα $\alpha\nu = \kappa\chi$· ἄρα $\nu = \frac{\kappa\chi}{\alpha}$.

ε'. Ἀντικαταςήτω νῦν ἀντὶ ν ἡ αὐτῦ δύναμις ἐν τῇ Α ἐξισώσει, ἥτις γενήσεται $\upsilon^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha\kappa\chi}{\alpha} + \frac{\kappa^2\chi^2}{\alpha^2} - \chi + 2\kappa\chi - \kappa^2$· ἀναγωγῇ δὲ, $\upsilon^2 = \alpha^2 + \frac{\kappa^2\chi^4}{\alpha^2} - \chi^2 - \kappa^2$· ἀπαλλαγῇ τῦ κλάσματος, $\alpha^2 \upsilon^2 = \alpha^4 + \kappa^2\chi^2 - \alpha^2\chi^2 - \alpha^2\kappa^2$ (Μ).

Ἐπεὶ δὲ ἀνασκοποῦσιν εὑρίσκεται ἡ Μ ἐξίσωσις γινομένη ὑπὸ δύω παραγόντων τῶν $\alpha^2 - \chi^2$, $\alpha^2 - \kappa^2$, γεγράφθω $\alpha^2 \upsilon^2 = \alpha^2 - \chi^2 \times \alpha^2 - \kappa^2$ Ν· πρὸς τὸ δύνασθαι διαγινώσκειν ἑκάτερον παράγοντα.

ϛ΄. Ἐςι δὲ $\alpha^2 - \kappa^2 = \beta^2$ (89)· δυνατὸν ἄρα διελεῖν τὴν Ν ἐξίσωσιν διὰ β^2 (Συμβ. 393)· ϗ δὴ γενήσεται $\frac{\alpha^2\upsilon^2}{\beta^2} = \alpha^2 - \kappa^2$ Π.

ζ΄. Τέλος δὲ ἐπείπερ ἡ Π ἐξίσωσις ἀναλογίαν ἀεὶ προβαλέσθαι ἔχει· ἐςι δὲ τὸ κατ᾽ αὐτὴν πρῶτον μέλος $\frac{\alpha^2 \upsilon^2}{\beta^2}$ κλασματικὸν, ὑποτεθῆναι δύναται, ὁ μὲν ἐν αὐτῷ ἀριθμητὴς ὡς παραγόμενον ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων τῆς ἀναλογίας, ὁ δὲ παρονομαςὴς ὡς εἷς τῶν μέσων· τὸ δὲ $\alpha^2 - \chi^2$ ὡς τῶν μέσων ὁ ἕτερος· ἐντεῦθεν οὖν $\alpha^2 : \beta^2 :: \alpha^2 - \chi^2 : \upsilon^2$· ἢ $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$. Ο. Ε. Δ.

91. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐκ δὲ ταύτης τῆς ἀναλογίας πρόεισιν ἡ ἐξίσωσις $\upsilon^2 = \frac{\alpha^2\beta^2 - \beta^2\chi^2}{\alpha^2}$· ϗ αὕτη ἐςὶν ἡ τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσις, περιέχουσα τὰς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτεμνομένας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἄρα $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2 - \chi^2)}$· ἐὰν δὲ γένηται $\chi = 0$, ἔςαι $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2 - 0^2)} = \upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2} = \frac{\beta}{\alpha}\alpha = \frac{\beta\alpha}{\alpha} = \beta$.

92. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν δὲ ἀποτέμνωνται πρὸς τῇ κορυφῇ Η, ἔςαι $\text{ΗΠ} = \gamma$, ϗ $\nu\text{Π} = 2\alpha - \chi$, ϗ ΗΠ

$\times$ ηΠ $= 2\alpha\chi - \chi^2$· ἄρα ἡ προεκτεθεῖσα ἀναλογία γε-νήσεται $\upsilon^2 : 2\alpha\chi - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· ὅθεν $\upsilon^2 = \frac{\beta^2(2\alpha\chi - \chi^2)}{\alpha^2}$,

ἢ $\upsilon\upsilon = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(2\alpha\chi - \chi\chi)$ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως τῶν πρὸς τῇ κορυφῇ ἀποτετμημένων περιεκτική.

93. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐὰν ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ (Ρ), ὑποτεθῇ $\beta^2 = \alpha^2$, εἴτ' ἐν τεθῇ ἴσος ὁ μείζων τῷ ἐλάττονι ἄξονι, ἀποληφθήσεται $\upsilon^2 = \frac{\alpha^4 - \alpha^2\chi^2}{\alpha^2}$· ἀναγωγῇ δὲ, $\upsilon^2 = \alpha^2 - \chi^2$, ἐξίσωσις τῦ κύκλυ, περιέχυσα τὰς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένας· ἡ γὰρ $\upsilon^2 = 2\alpha\chi - \chi^2$ (12) περιέχει τὰς πρὸς τῇ κορυφῇ· σαφὲς ἄρα ἐντεῦθεν ὡς ὁ κύκλος ἔλλειψίς ἐστιν, ἧς ὁ ἐλάττων ἄξων ἀπειροστόντι διαφέρει τῦ μείζονος, ἢ ϗ ἴσος ἐστὶ τῷ μείζονι· ἡ δ' αὐτῦ ἐκκεντρότης ἐστὶν $= \frac{1}{\infty} = 0$ (3).

94. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐκ δύω τεταγμένων υ, Υ ἔχομεν α΄. $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· β΄. $\Upsilon^2 : \alpha^2 - X^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· ἄρα $\upsilon^2 : \Upsilon^2 :: \alpha^2 - \chi^2 : \alpha^2 - X^2$, τυτέστιν „ἐν ἐλλείψει ϗ δὴ ϗ ἐν κύκλῳ τὰ ἀπὸ τῶν ἐπὶ „τὸν μείζονα ἄξονα τεταγμένων τετράγωνα πρὸς ἄλλη-„λά εἰσιν, ὡς τὰ γινόμενα ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτετμη-„μένων ϗ συναποτετμημένων.“

95. Τυτὶ ἄρα τὸ σχῆμα ταυτόν ἐστι τῇ τῦ κώνυ προελθέσῃ τομῇ (15)· ὑποτιθεμένων, τῦ μὲν $2\alpha > 2\beta$, τῦ δὲ $\upsilon^2 < \alpha^2 - \chi^2$.

96. Τελευταῖον δὲ, ἐχ' ὅτι ἐν καμπύλῃ ἐστὶν $\upsilon^2 : \Upsilon^2 :: \alpha^2 - \chi^2 : \alpha^2 - X^2$, παρὰ τῦτο ἔσαι ἔλλειψις

ἡ καμπύλη ἀνίσες ἔχεσα ἄξονας· ταύτην γὰρ τὴν ἰδιότητα ὁ κύκλος ἔχων εὑρίσκεται (93)· ἀλλ' ἔςαι ἔλλειψις, ἐὰν ᾖ ϗ $\upsilon^2 < \alpha^2 - \chi^2$.

97. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἡ παράμετρος (σχ. 67) ΜΕΜ' $= \pi$ τῦ πρώτυ τῆς ἐλλείψεως ἄξονος ἐςιν εὐθεῖα τρίτη ἀνάλογον τῦ πρώτυ ϗ τῦ δευτέρυ τῶν ἀξόνων· ὑπὲρ γὰρ τῆς παραμέτρυ ὄντος $\chi = \kappa$ (88) ἡ Ρ ἀναλογία (93) γενήσεται $\upsilon^2 : \alpha^2 - \kappa^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· ἀλλ' $\alpha^2 - \kappa^2 = \beta^2$ (89)· ἄρα $\upsilon^2 : \beta^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· ἄρα $\upsilon : \beta :: \beta : \alpha$ (Συμβ. Λογ. 263)· ϗ ἑπομένως $2\upsilon = \pi : 2\beta :: 2\beta : 2\alpha$, ἢ $2\alpha : 2\beta :: 2\beta : \pi$.

98. Ὥςε τύπος τῆς παραμέτρυ π ἔςαι $= \dfrac{4\beta^2}{2\alpha} = \dfrac{2\beta^2}{\alpha}$

99. Κύκλυ ἄρα ἡ παράμετρος ἴση ἐςὶ τῇ διαμέτρῳ· ἐπεὶ γὰρ $\beta = \alpha$, ἔςαι $\pi = \dfrac{2\alpha^2}{\alpha} = 2\alpha$.

100. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Ὁ τύπος, τῆς μὲν μείζονος ὀρθίας πλευρᾶς εμ ἐςὶν $\alpha + \dfrac{\kappa\chi}{\alpha}$, τῆς δ' ἐλάττονος Εμ $= \alpha - \dfrac{\kappa\chi}{\alpha}$ (σχ. 81).

ΔΕΙΞΙΣ. Εἴγε εμ $= \alpha + \nu$, ϗ Εμ $= \alpha - \nu$ (89. ἐν τῇ δείξει)· ἀλλὰ $\nu = \dfrac{\kappa\chi}{\alpha}$ (89. δ΄.) ἄρα κτ. Ο.Ε.Δ.

101. ΘΕΩΡΗΜΑ ς΄. Τὸ τῆς ἐλλείψεως ΗΜ'ηΜ' ἐμβαδὸν ρ (σχ. 82) πρὸς τὸ τῦ ΗΒηΟ κύκλυ, τῦ γεγραμμένυ ἐπὶ τῦ μείζονος τῶν ἐκείνης ἀξόνων, ἐςιν ὡς ὁ ἐλάττων ἄξων πρὸς τὸν μείζονα· τυτέςι ρ : Ρ :: Μ'Μ' : ΒΟ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςι μὲν γὰρ ἐν τῇ ἐλλείψει ΠΜ² : ΠΜ'²

$:: H\Pi \times \Pi\eta : H\Pi' \times \Pi'\eta$ (94)· ἔςι δὲ ὡσαύτως καὶ τῷ κύκλῳ $\Pi\beta^2 : \Pi'\beta^2 :: H\Pi \times \eta\Pi : H\Pi \times \Pi'\eta$ (αὐτ.)· ἄρα $\Pi M^2 : \Pi' M'^2 :: \Pi\beta^2 : \Pi' B^2$· ἄρα $\Pi M : \Pi' M' :: \Pi\beta : \Pi' B$· τετέςιν, αἱ ἐν τῇ ἐλλείψει τεταγμέναι ἀνάλογόν εἰσι πρὸς τὰς ἐν τῷ κύκλῳ ἀντιςοιχέσας· ἄρα τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν τεταγμένων, εἴτ' ὖν τὸ ἐμβαδὸν ρ τῆς ἐλλείψεως, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τεταγμένων, εἴτ' ὖν τὸ τῦ κύκλυ ἐμβαδὸν P, ὡς μία τεταγμένη ἐν τῇ ἐλλείψει ἡ $\Pi' M'$ πρὸς μίαν ἀντίςοιχον τεταγμένην ἐν τῷ κύκλῳ τὴν $\Pi' B$, εἴτ' ὖν $\rho : P :: \Pi' M' : \Pi' B$· ἄρα (Συμβ. Λογ. 234) $\rho : P :: 2\Pi' M' = M'\Pi' M' : 2\Pi B = H\eta$. Ο. Ε. Δ.

102. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ τῆς ἐλλείψεως ἐμβαδὸν ρ ἐξισῦται τῷ κύκλῳ Δ, ὖ ἡ διάμετρος χ ἐςὶ μέση ἀνάλογον τῦ μείζονος ἄξονος $H\eta$, καὶ τῦ ἐλάττονος $M'M'$· ἔςω γὰρ τὸ τῦ ΗΒΟ κύκλυ ἐμβαδὸν $= P$· ὖκῦν ἔςαι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\div H\eta : \chi : M'M'$· ἄρα (Συμβ. Λογ. 269) $H\eta : M'M' :: H\eta^2 : \chi^2$· ἀλλὰ $P : \rho :: H\eta : M'M'$ (10)· ἄρα $P : \rho :: H\eta^2 : \chi^2$· καὶ δὴ $P : \Delta :: H\eta^2 : \chi^2$ (Γεωμ. 398)· ἄρα $P : \rho :: P : \Delta$ (Γεωμ. 327)· ἢ $P : P :: \rho : \Delta$· ἄρα $\rho = \Delta$ (Γεωμ. 336. Σχ.)· ὖκῦν ἡ τῆς ἐλλείψεως ἐπιφάνεια $\rho = \Delta$ ἐπιφανείᾳ τῦ κύκλυ, ὖ διάμετ. κτ.

103. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Τῆς ἐλλείψεως ἀγαγεῖν ἁπτομένην κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ (σχ. 83).

ΛΥΣΙΣ. Ἐπὶ τῆς εΜ προαχθείσης εἰλήφθω $MP = EM$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΡ· φημὶ δὴ ὡς ἡ εὐθεῖα ΤΜΧ, ἡ δίχα τέμνυσα τὴν ΕΡ, ἔςιν, ἣν ζητῦμεν, ἡ ἁπτομένη· ἐπεὶ γὰρ $EM = MP$, ἡ ΤΧ, ἡ δίχα τέμνυσα τὴν ΕΡ, κάθετος αὐτῇ ἐπιςήσεται (Γεωμ. 164, 217)· ὖκῦν $OE = OP$.

Ἐὰν ὖν ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΤΧ ἕτερον σημεῖον παρὰ τὸ

Μ. τὸ Ο φέρε, φημὶ δὴ, ὡς τῦτο ὐκ ἔςαι ἐπὶ τῆς καμπύλης· ϗ γὰρ εΡ = εΜ + ΜΕ (ἐκ κατασκευῆς) = Ηη (84)· ἀλλ' εΟ + ΟΕ = εΟΡ > εΡ (Γεωμ. 17), ϗ δὴ μείζων τῆς Ηη· ἄρα (84) Ο ὐκ ἂν εἴη ἐπὶ τῆς καμπύλης. Ο. Ε. Δ.

104. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ γωνίαι ΕΜΤ, εΜΧ, αἱ περιεχόμεναι ἐπὶ τῆς ἁπτομένης ὑπὸ δύω ὀρθίων πλευρῶν εΜ, ΕΜ, εἰσὶν ἴσαι· ϗ γὰρ ΕΜΤ = ΤΜΡ (Γεωμ. 217), ϗ ΤΜΡ = εΜΧ (Γεωμ. 99)· ἄρα ΕΜΤ = εΜΧ.

105. Ἐπεὶ τοίνυν ἡ γωνία τῆς ἀνακλάσεως ἴση ἐςὶ τῇ τῆς ἐπιπτώσεως, αἱ φωτιςικαὶ ἀκτῖνες, αἱ ἐκ τῆς ἑςίας Ε ἐπὶ τὸ περιφερὲς τῆς ἐλλείψεως προσβάλλυσαι, ἀνακλασθήσονται πρὸς τὴν ἑτέραν ἑςίαν ε· ἐντεῦθεν ἄρα...

106. α΄. Ἐὰν τῷ Ε ςομίῳ (σχ. 84) παραβολικῆς σάλπιγγος (37) ἐφαρμοσθῇ τὸ ἐλλειψοειδὲς ΙεΠΕ, ὖ ἡ μὲν τῶν ἑςιῶν συμπίπτει τῇ τῦ παραβολοειδῦς ἑςίᾳ Ε, ἡ δ' ἑτέρα ε κεῖται ἐν τῷ τόπῳ, ἔνθα γενέσθαι δεῖ τὴν φωνὴν, αἱ ἠχητικαὶ ἀκτῖνες ἀποχωρῦσαι ἐκ τῦ ε συναφθήσονται κατὰ τὸ Ε, κἀκ τύτῦ πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς παραβολικῆς σάλπιγγος προσπίπτυσαι, παραλλήλως τῷ ἄξονι χωρήσυσι· αὕτη τοίνυν ἡ σάλπιγξ αἱρετωτέρα ἐςὶ τῆς περὶ ἧς εἴρηται (37)· αἱ γὰρ φωναὶ αἱ ἐν τῷ ἐλλειπτικῷ ςερεῷ γενόμεναι, πρὸς τὸ Ε ἀθροιζόμεναι πᾶσαι, ἰσχυρότερον προχέονται τῆς σάλπιγγος, ϗ ἀκυςότεραι καθίςανται.

107. β΄. Ἐὰν κατὰ τὸ ε ἀποτμηθῇ τὸ ἐλλειψοειδὲς ΕΜε (σχ. 85), ὡς πίπτειν τὸ ε ἐκτὸς τῦ καταλοίπυ ἐλλειψοειδῦς, ἐφ' ἧς ἂν βυλώμεθα ὕλης, λαμπάδος τῆς ἐν τῷ Ε ἐπιτεθείσης, πᾶσαι αἱ φωτιςικαὶ ἀκτῖνες κατὰ τὸ ε συναφθήσονται, ϗ πάντα τὰ ἐκεῖθι ἐλάχιςα μόρια ὁρα-

θήσονται· οἱ τοίνυν ἀσχολέμενοι περὶ τὰ ἐλάχιςα μόρια, χρήσαιντ' ἂν τῷ ἐλλειψοειδεῖ τέτῳ ὡς λαμπάδι φωτιςικωτάτῃ.

108. γ'. Ἐὰν ἡ θαλάμε τινὸς ςοὰ ἐλλειψοειδὴς ᾖ ὡς ΕεΜ· καί τις ἐν τῷ Ε λαλῶν ἥσυχον προΐηται τὴν φωνήν· ἕτερος ἐν τῷ ε καθήμενος ἐπακέσαι αὐτε δυνήσεται, καὶ τἀνάπαλιν, καίτοι τῶν μεταξὺ καθημένων πρὸς τῷ Κ ἐπαΐειν αὐτῶν μὴ δυναμένων· αἱ γὰρ ἠχητικαὶ ἀκτῖνες ἐκ τε Ε ἀποχωρεσαι, καὶ ἀνακλώμεναι ἐκ τῆς τε ἐλλειψοειδες κοιλότητος, συνάπτονται πᾶσαι κατὰ τὸ ε, καὶ ἀνάπαλιν.

109. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. Ὁ τῆς ὑποκαθέτε τύπος ἐςὶ $\Pi T = \frac{\beta^2 \chi}{\alpha^2}$ (σχ. 83).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΜΤ παράλληλος τῇ ΡΕ (Γεωμ. 137), ἐςὶ (Γεωμ. 318) $\varepsilon P = 2\alpha$ (103 ἐν τῇ δείξει) : $\varepsilon E = 2\kappa$: : $MP = EM$ (ἐκ κατασκευῆς) $= \alpha - \frac{\kappa\chi}{\alpha}$ (100) $= \frac{\alpha^2 - \kappa\chi}{\alpha} : ET = 2\kappa \times \frac{\alpha^2 - \kappa\chi}{\alpha} : 2\alpha = \frac{2\alpha^2\kappa - 2\kappa\chi}{2\alpha^2} = \frac{\alpha^2\kappa - \kappa\chi}{\alpha^2}$ (Α)· τῆς Α δὲ δυνάμεως ἀφῃρήσθω $\kappa - \chi$, εἴτ' ἐν $\frac{\alpha^2\kappa - \alpha^2\chi}{\alpha^2}$. καὶ δὴ ἔςαι $ET - E\Pi = \Pi T = \frac{\alpha^2\kappa - \kappa^2\chi - \alpha^2\kappa + \alpha^2\chi}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2\chi - \kappa^2\chi}{\alpha^2} = \frac{(\alpha^2 - \kappa^2)\chi}{\alpha^2}$·

ἀλλὰ $\alpha^2 - \kappa^2 = \beta^2$ (89)· ἄρα $\Pi T = \frac{\beta^2\chi}{\alpha^2}$. Ο. Ε. Δ.

110. ΘΕΩΡΗΜΑ Η΄. Η῾ ὑφαπτομένη ἐςὶ ΤΠ $= \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ε᾿ν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΜΤΤ (19), διὰ τὴν πρὸς ὀρθὰς τῇ ὑποτεινούσῃ ΤΤ ἱςαμένην ΜΤ (7), ἐςὶ ΠΤ $= \frac{\beta^2\chi}{\alpha^2}$: ΠΜ $= \upsilon$: : ΠΜ $= \upsilon$: ΤΠ (Γεωμ. 341) $= \upsilon^2 : \frac{\beta^2\chi}{\alpha^2} = \upsilon^2 \times \frac{\alpha^2}{\beta^2\chi}$· ἀλλὰ $\upsilon^2 = \frac{\alpha^2\beta^2 - \beta^2\chi^2}{\alpha^2}$ (91)· ἄρα ΤΠ $= \frac{\alpha^2\beta^2 - \beta^2\chi^2}{\alpha^2} \times \frac{\alpha^2}{\beta^2\chi} = \frac{\alpha^4\beta^2 - \alpha^2\beta^2\chi^2}{\alpha^2\beta^2\chi} = \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$. Ο. Ε. Δ.

111. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ε᾿ὰν ἐν τῷ τύπῳ ΠΤ $= \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$ ὑποτεθῇ $\chi = 0$, ἔςαι ΠΤ $= \frac{\alpha^2}{0} = \infty$ (Συμβ. Λογ. 539)· οὐκοῦν ἡ κατὰ τὸ πέρας τοῦ ἐλάσσονος ἄξονος τῆς ἐλλείψεως ἁπτομένη ἄπειρός ἐςι, καὶ τῷ μείζονι ἄξονι παράλληλος· τιθεμένης δὲ λειπτικῆς τῆς χ, καὶ ἡ ΠΤ καθίςαται λειπτική· ὃ δὴ τεκμήριον ὑπάρχει σαφὲς τοῦ πᾶσαν ποσότητα ἐξ ὑπάρξεως ἐπὶ λεῖψιν μεταβαίνουσαν, νῦν μὲν διήκειν διὰ τοῦ ἀπείρου, νῦν δὲ διὰ τοῦ μηδενὸς, ὡς καταφαίνεται ἐν τῇ ἀριθμητικῇ προόδῳ ÷ 4. 2. 0. — 2. — 4 κτ.· ὁ δὲ τούτου λόγος, ὅτι ποσότης ἐξ ὑπάρξεως ἐπὶ λεῖψιν μεταβαίνουσα ὀφείλει εὑρίσκεσθαι ἐν ὅρῳ, ὃς μὴ μᾶλλον εἴη ὑπαρκτικὸς, ἢ λειπτικός· ἀλλὰ τό,τε μηδὲν καὶ τὸ ἄπειρον οὐδὲν μᾶλλόν εἰσι λειπτικὰ, ἢ ὑπαρκτικά· ποσότης μέντοι ἡ $\sqrt{\alpha - \chi}$ οὐδύναται ἐκ πραγματικῆς γενέσθαι ἀνύπαρκτος, οὔτε μὴν ἐξ ἀνυπ-

ἀρκτυ πραγματικὴ, εἰ μὴ ἡ $\alpha - \chi$ ποσότης, ἐκείνως μὲν ἐξ ὑπαρκτικῆς λειπτικὴ, ὕτω δὲ ἐκ λειπτικῆς ὑπαρκτικὴ γένοιτο· ποσότης ἄρα πᾶσα ἐκ πραγματικῆς ἀνύπαρκτος, ἢ ἐξ ἀνυπάρκτυ πραγματικὴ γενέσθαι ὐ δύναται· εἰ μὴ διέλθοι διὰ o, ἢ διὰ ∞· ὅπερ ἀκριβῶς ἐςὶ σημειωτέον.

112. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄρα ΚΤ ἀπόςημα τῦ κέντρυ ἀπὸ τῦ σημείυ, καθ' ὃ ἡ ἀπτομένη συμβάλλει τῷ ἄξονι, ἐςὶν $= \frac{\alpha^2}{\chi}$· ἢ γὰρ $\text{ΚΤ} = \text{ΤΠ} + \text{ΠΚ} = \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi} + \chi$ $= \frac{\alpha^2 - \chi^2 + \chi^2}{\chi} = \frac{\alpha^2}{\chi}$.

113. Ὥςε $\alpha . \chi : \alpha :: \alpha : \text{ΚΤ}$ (Συμβ. Λογ. 406), τυτέςιν „ἡ ΚΤ τρίτη ἀνάλογός ἐςι πρὸς τὴν ἀποτετμημένην, ἢ τὸν μείζονα ἡμιάξονα."

114. β΄. Μιᾶς ἀποτετμημένης, ἢ τῦ ἡμιάξονος ΗΚ, δοθέντων, εὑρεθήσεται ἡ ΚΤ τρίτη ἀνάλογος ὖσα τῶν δύω προτέρων· εὑρεθήσεται δὲ ἢ ἡ ὑφαπτομένη ΤΠ, ἀφαιρεθείσης τῆς $\chi = \text{ΠΚ}$ ἀπὸ τῆς ΚΤ τῆς ἤδη εὑρημένης.

115. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐξίσωσιν εὑρεῖν τῆς ἐν τῇ ἐλλείψει κυρτότητος, ἀναφερομένην εἰς τὴν κατὰ κορυφὴν αὐτῆς ἀπτομένην, ἢ τῷ ἄξονι κάθετον ΗΝ (σχ. 76).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω $\text{ΗΝ} = \chi$, ἢ $\text{ΝΜ} = \upsilon = \text{ΗΔ}$· ὐκῦν $\Delta\eta = 2\alpha - \upsilon$· ἢ $\text{ΗΔ} \times \Delta\eta = \overline{2\alpha - \upsilon} \times \upsilon = 2\alpha\upsilon - \upsilon\upsilon$· ἐπεὶ δὲ $\text{ΔΜ}^2 = \text{ΗΝ}^2 : \text{ΗΔ} \times \Delta\eta :: \beta^2 : \alpha^2$ (90)· ἄρα $\chi^2 : 2\alpha\upsilon - \upsilon\upsilon :: \beta^2 : \alpha^2$· ἢ δὴ $\chi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot (2\alpha\upsilon - \upsilon\upsilon)$. Ο. Ε. Π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ διαμέτρων τῆς ἐλλείψεως.

116. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Πᾶσα διάμετρος ΜΜ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Κέντρον (σχ. 86).

ΔΕΙΞΙΣ. Τετάχθω ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ ΜΕ, ϗ ἔςω ΚΔ = ΚΕ· ϗ δὴ ἴσα ἔςαι τὰ τρίγωνα ΚΕΜ, ΚΔΜ· παρὰ γὰρ τὰς ὀρθὰς γωνίας Ε, Δ, εἰσὶν ἴσαι ϗ αἱ ο, τ ὡς κατὰ κορυφήν· πᾶσαι ἄρα αἱ ἀντίςοιχοι γωνίαι εἰσὶν ἴσαι· τὰ δύω ἄρα τρίγωνα, ἔχοντα ϗ μίαν πλευρὰν ἴσην τὴν πρὸς δυσὶν ἴσαις γωνίαις, εἰσὶν ἴσα· ἄρα ΜΕ = ΔΜ, ϗ ΚΜ = ΚΜ· ἀλλ' ἡ ΜΕ τεταγμένη ἀπέχει τῦ κέντρυ, ὅσον ϗ ἡ ΜΔ· ἄρα ΜΔ (81) ἔςι ϗ αὕτη τεταγμένη· ἄρα τὸ Μ σημεῖον, πέρας τῆς ΜΔ ϗ δὴ ϗ τῆς ΚΜ, ἔςιν ἐν τῇ καμπύλῃ· ἄρα ΚΜ = ΚΜ ἔςιν ἀληθὲς μέρος τῆς διαμέτρυ, κείμενον μεταξὺ τῦ κέντρυ καὶ τῆς καμπύλης. Ο. Ε. Δ.

117. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἐὰν ἀπὸ τῶν περάτων δύω δεδομένων συζυγῶν διαμέτρων (σχ. 85) τῶν ΜΜ, Μ'Μ'' τεταγμένως ἀχθῶσιν ἐπὶ τὸν ἄξονα αἱ ΕΜ, Μ'Π τὸ ΚΕ^2 τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τῦ ἀποςήματος τῦ κέντρυ ἀπὸ τεταγμένης, ἴσον ἐςὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἀποτετμημένων ὑπὸ τῆς ἑτέρας τεταγμένης, εἴτ' ἦν τῷ ΠΗ × Πη.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω ΚΕ = ρ· ὅθεν Εη = $\alpha - \rho$, καὶ ΗΕ = $\alpha + \rho$, ϗ ΕΗ × Εη = $\alpha^2 - \rho^2$· ἐν ἦν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΤΠΜ, ΚΕΜ ἔςι ΠΜ' : ΕΜ :: ΤΠ : ΚΕ·

$\Pi M'^2 : EM^2 :: T\Pi^2 = \frac{\alpha^4 - 2\alpha^2\chi^2 + \chi^4}{\chi^2}$ (110) : $KE^2 = \rho^2$.

Ἀλλὰ $\Pi M'^2 : EM^2 :: H\Pi \times \Pi\eta = \alpha^2 - \chi^2 : EH \times E\eta = \alpha^2 - \rho^2$ (94)· ἄρα (Γεωμ. 327) $\frac{\alpha^4 - 2\alpha^2\chi^2 + \chi^4}{\chi^2} : \rho^2 :: \alpha^2 - \chi^2 : \alpha^2 - \rho^2$· ἄρα (Συμβ. Λογ. 238)

$$\frac{\alpha^6 - 2\alpha^4\chi^2 + \alpha^2\chi^4 - \alpha^4\rho^2 + 2\alpha^2\rho^2\chi^2 - \rho^2\chi^4}{\chi^2}$$

$= \alpha^2\rho^2 - \rho^2\chi^2$· ἀπαλλαγῇ τοῦ κλάσματος, $\alpha^6 - 2\alpha^4\chi^2 + \alpha^2\chi^4 - \alpha^4\rho^2 + 2\alpha^2\rho^2\chi^2 - \rho^2\chi^4 = \alpha^2\rho^2\chi^2 - \rho^2\chi^4$· μεταθέσει δὲ τῶν ὅρων $\alpha^4\rho^2$, $2\alpha^2\rho^2\chi^2$, $-\rho^2\chi^4$, καὶ ἀναγωγῇ, $\alpha^6 - 2\alpha^4\chi^2 + \alpha^2\chi^4 = \alpha^4\rho^2 - \alpha^2\rho^2\chi^2$· διαιρέσει διὰ α^2, $\alpha^4 - 2\alpha^2\chi^2 + \chi^4 = \alpha^2\rho^2 - \rho^2\chi^2$ (P)· ἐπεὶ δὲ τὸ δεύτερον μέλος τῆς P ἐξισώσεως ἀνασκοπουμένοις εὑρίσκεται γινόμενον ὑπὸ δύο παραγόντων ρ^2, $\alpha^2 - \chi^2$, διαιρέσει διὰ $\alpha^2 - \chi^2$, ἔσται $\rho^2 = \alpha^2 - \chi^2$, εἴτ' οὖν $KE^2 = \Pi H \times \Pi\eta$. Ο.Ε.Δ.

118. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπεὶ οὖν πρὸς τὸ δοκοῦν εἴληπται τὸ ΚΕ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς ἀποτετμημένης ΕΜ, καὶ τὸ αὐτοῦ τετράγωνον KE^2 ἴσον δέδεικται τῷ περιεχομένῳ ἐκ τῶν ἀποτετμημένων ὑπὸ τῆς τεταγμένης ΠΜ', ἐὰν ληφθῇ τὸ ΚΠ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΠΜ', ἔσται $K\Pi^2 = EH \times E\eta$.

119. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἀλλὰ γὰρ τεταγμένης τῆς ΕΜ, ἐστὶ $KE = \chi$, $KE^2 = \chi^2$· ὡσαύτως τεταγμένης τῆς ΚΠ, ἐστὶ $\Pi M' = X$, καὶ $K\Pi^2 = X^2$· ἐπεὶ οὖν $KE^2 = \chi^2 = \Pi H \times \Pi\eta$, ἡ ἀποτετμημένη $KE = \chi$ ὑπὸ τεταγμένης τῆς ΕΜ ἔσται μέση ἀνάλογος τῆς ἀποτετμη-

μένης, ϗ τῆς συναποτετμημένης ὑπὸ τῆς ἑτέρας τεταγμένης ΠΜ'· ἔστι ϗ γὰρ ΠΗ : χ :: χ : Πη (Συμβ. Λογ. 299)

120. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Τὸ ἀφ' ὁποιασοῦν τεταγμένης δΙ (σχ. 85) ἐπὶ τὴν Μ'Μ'' διάμετρον τετράγωνον ἐστὶ πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένων ΜΙ' × ΙΜ'' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου ΚΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἡμιδιαμέτρου ΚΜ, εἴτ' οὖν $\delta I^2 : M'I \times IM'' :: KM^2 : KM'^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. α'. Τετάχθωσαν ἐπὶ τὸν ἄξονα αἱ Μ'Π, δΠ', ΜΔ, ΜΕ, ϗ ἤχθωσαν αἱ κάθετοι Ιο, ΑΓ.

β'. Ἔστω ΠΚ $= \chi$, ϗ ΚΜ $= \nu$, ϗ Κο $= \eta$, ϗ οΠ $=$ ΑΙ $= \Xi$· ὅθεν ηΠ $= \Xi + \alpha - \eta$, ϗ ΗΠ' $= \alpha - \Xi - \eta$, ϗ δὴ ηΠ' × ΗΠ' $= \alpha^2 - \Xi^2 - 2\Xi\eta - \eta^2$.

γ'. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΤΠΜ', ΙδΑ (Γεωμ. 220) ἐστὶ ΤΠ $= \dfrac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$ (110) : ΠΜ' $= \upsilon$ :: ΑΙ $=$ Ξ : Αδ $= \dfrac{\Xi\chi\upsilon}{\alpha^2 - \chi^2}$.

δ'. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΚΠΜ', ΚοΙ ἐστὶ α'· ΚΠ $= \chi$: ΠΜ' $= \upsilon$ :: Κο $= \eta$: Ιο $= \dfrac{\upsilon\eta}{\chi}$· β'. ΚΠ $= \chi$: ΚΜ' $= \nu$ :: ΚΟ $= \eta$: ΓΙ $= \dfrac{\nu\eta}{\chi}$· ἐστὶ δὲ καὶ Μ'Ι $= \nu - \dfrac{\nu\eta}{\chi}$, καὶ ΙΜ'' $= \nu + \dfrac{\nu\eta}{\chi}$, ϗ δὴ ἀκολούθως ΙΜ' × ΙΜ'' $= \nu^2 - \dfrac{\nu^2\eta^2}{\chi^2}$.

ε'. Ἔστι παρὰ ταῦτα δΠ' $=$ Αδ $(= \dfrac{\Xi\chi\upsilon}{\alpha^2 - \chi^2} +$ Ιο

$(=\frac{\eta\upsilon}{\chi})$· ἄρα $\delta\Pi'^2 = \frac{\Xi^2\chi^2\upsilon^2}{\alpha^4-2\alpha^2\chi^2+\chi^4} + \frac{2\Xi\eta\upsilon^2}{\alpha^2-\chi^2} + \frac{\eta^2\upsilon^2}{\chi^2}$ (Ρ).

ϛ΄. Ἔϛι δὲ ϗ $\delta\Pi'^2 : \Pi M'^2 = \upsilon^2 :: \eta\Pi' \times \Pi'H = \alpha^2 - \Xi^2 + 2\Xi\eta + \eta^2 : H\Pi \times \eta\Pi = \alpha^2 - \chi^2$ ἄ. ρα $\delta\Pi'^2 = \frac{\alpha^2\upsilon^2 - \Xi^2\upsilon^2 + 2\Xi\eta\upsilon^2 - \eta^2\upsilon^2}{\alpha^2-\chi^1}$ (Σ).

ζ΄. Παραβαλλομένων ὖν τῶν δύω τῦ $\delta\Pi'^2$ δυνάμεων Ρ, Σ (ε΄., ϛ΄.) ἀναφύεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{\Xi^2\chi^2\upsilon^2}{\alpha^4..2\alpha^2\chi^2+\chi^4} + \frac{2\Xi\eta\upsilon^2}{\alpha^2-\chi^2} + \frac{\eta^2\upsilon^2}{\chi^2} = \frac{\alpha^2\upsilon^2 - \Xi^2\upsilon^2 - \eta^2\upsilon^2}{\alpha^2-\chi^2} + \frac{2\Xi\eta\upsilon^2}{\alpha^2-\chi^2}$.

ή. Μεταθέσει τῦ $\frac{2\Xi\eta\upsilon^2}{\alpha^2-\chi^2}$, γίνεται $\frac{\Xi^2\chi^2\upsilon^2}{\alpha^4-2\alpha^2\chi^2+\chi^2} + \frac{\eta^2\upsilon^2}{\chi^2} = \frac{\alpha^2\upsilon^2 - \Xi^2\upsilon^2 - \eta^2\chi^2}{\alpha^2-\chi^2}$· ἐντεῦθεν ἄρα ἀπ. αλλαγῇ τῶν κλασμάτων, ϗ μεταθέσει, $\Xi^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2\eta^2}{\chi^2} + \eta^2 - \chi^2$ (Τ).

θ΄. Ἐκ τῆς Τ ἐξισώσεως προελθεῖν δύναται ἡ ἀναλογία, $AI^2 = \Xi^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2\eta^2}{\chi^2} - \eta^2 - \chi : KE^2 = \alpha^2 - \chi^2$ (117) $:: MI \times IM'' = \nu^2 - \frac{\nu^2\eta^2}{\chi^2}$ (δ΄.): $KM'^2 = \nu^2$ (β΄.)· τὸ γὰρ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων, ὡς δῆλον, ἐξισῦται τῷ ἐκ τῶν μέσων.

ϛ. Τέλος δὲ ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΙΑδ, ΚΕΜ ἐστιν $AI : KE :: \delta I : KM$, καὶ $AI^2 : KE^2 :: \delta I^2 : KM^2$.

Ἐντεῦθεν ἡ δεῖξις· εὕρηται μὲν ἄρτι $AI^2 : KE^2 :: \delta I^2 : KM^2$· ἀλλ' εὕρηται καὶ $AI^2 : KE^2 :: M'I \times IM'' : KM'^2$ (θ'.)· ἄρα $\delta I^2 : KM^2 :: M'I \times IM'' : KM'^2$· ἄρα καὶ $\delta I^2 : M'I \times IM'' :: KM^2 : KM'^2$ (Β) Ο. Ε. Δ.

121. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἔστω $\delta I = \upsilon$, καὶ $KM' = \alpha$, καὶ $KM = \beta$· ὅθεν $M'I = \alpha - \chi$, καὶ $IM'' = \alpha + \chi$· ἡ δὲ Β ἐξίσωσις γενήσεται $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$.

Ἐν τῇ ἐλλείψει ἄρα αἱ δύω συζυγῶν διαμέτρων ἰδιότητες αἱ αὐταί εἰσι ταῖς τῶν δύω ἀξόνων (92), παρ' ὅσον αἱ τεταγμέναι πλαγίως ἴσανται ταῖς διαμέτροις διὰ τὸ καὶ τὰς ἁπτομένας πλαγίας αὐταῖς ἐπικεῖσθαι.

122. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ προέρχεται $\upsilon^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 - \chi^2 \beta^2}{\alpha^2}$ καὶ

$$\upsilon = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 \beta^2 - \chi^2 \beta^2}{\alpha^2}},$$

τουτέστιν ἑκάστῃ τεταγμένῃ δΙ ἀντιστοιχεῖ ἑτέρα ἀποφατικὴ ἴση ἡ Ιζ· β'. καὶ ἀκολούθως πᾶσα διάμετρος δίχα τέμνει τὴν ἐφ' ἑαυτὴν διπλῆν τεταγμένην.

123. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Δυνατὸν ἐπιπεσεῖν τὸ Π τῷ Ε· τηνικαῦτα τοίνυν αἱ ΚΜ, ΚΜ', ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθὰς γωνίας τῶν τριγώνων ΚΠΜ', ΚΕΜ, ἴσαι ἔσονται, εἴτ' οὖν $KM = KM'$, καὶ δὴ $\alpha = \beta$, ἐπὶ οὖν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως τοῦ α ἀντὶ β εἰσαχθέντος, ἔσται $\upsilon^2 = \frac{\alpha^2 \alpha^2 - \chi^2 \alpha^2}{\alpha^2} = \alpha^2 - \chi^2$, ὑποτιθεμένων ἀμέλει ἴσων τῶν δύω συζυγῶν διαμέτρων· ἀλλ' ἐστιν ἡ αὐτὴ τῇ

τῦ κύκλε (93)· ἡ αὐτὴ ἄρα ἐξίσωσις, κυκλικὴ μὲν ἐςὶ τῶν τεταγμένων πρὸς ὀθὰς ἐφεξηκκῶν τῇ διαμέτρῳ· τἐναντίον δὲ, ἐλλειπτική.

124. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐπείπερ ἡ ἀπτομένη ΗΒ παράλληλός ἐςι τῷ ἐλάττονι ἄξονι (σχ. 67) ΜΚΜ″ οἱ δύω ἄξονες εἰσὶ πάντως συζυγεῖς διάμετροι (59)· ἔςιν ἄρα ἡ ἀναλογία „τὸ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὸν ἐλάττονα ἄξονα „τεταγμένης τετράγωνον πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ὑπ᾿ „αὐτῆς ἀποτετμημένων ἐςιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῦ μείζονος ἡ„μιάξονος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος“· ἐν τῇ ἐλλείψει ἄρα ἰδιότητες εὑρίσκονται αἱ αὐταὶ, εἴτε ὁ μείζων, εἴτε ὁ ἐλάσσων ἄξων ληφθῇ (90).

125. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Εἰς δὲ πλείω τῶν λεγομένων ἐμπέδωσιν, κείσθω εὑρεῖν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσιν περιέχυσαν τεταγμένας ἐπὶ τὸν δεύτερον ἄξονα, ϗ ἀποτετμημένας ἀπ᾿ αὐτῦ πρὸς τῷ κέντρῳ· ἐπεὶ τοίνυν (σχ. 87) $\mu\pi = \mathrm{K\Pi} = \chi$, ϗ $\mathrm{K}\pi = \Pi\mu = \upsilon$, ἀπόχρη μόνον μεταβαλεῖν τὴν υ εἰς χ, ϗ τἀναντίον· ὅθεν προκύψει $\chi^2 = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} \times \overline{\alpha^2 - \upsilon^2}$, ἐξίσωσις ἡ ζητεμένη· ἐκ ταύτης δὲ γίνεται $\chi^2 \times \alpha^2 = \beta^2 \times \alpha^2 - \upsilon^2 \times \beta^2$, μεταθέσει, $\upsilon^2 \times \beta^2 = \beta^2 \times \alpha^2 - \chi^2 \times \alpha^2$, ὅθεν $\upsilon^2 : \beta^2 - \chi^2 :: \alpha^2 : \beta^2$, ϗ $\upsilon^2 = \dfrac{\alpha^2}{\beta^2} \times \overline{\beta^2 - \chi^2}$· δῆλον ἄρα, ὅτι ἀληθής ἐςιν ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα ἀναλογία (124).

126. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἡ τῦ δευτέρυ ἄξονος ὑφαπτομένη ΠΤ ἐςιν $= \dfrac{\beta^2 - \upsilon^2}{\upsilon}$, κληθείσης υ τῆς ἀ-

πὸ τῦ δευτέρυ ἄξονος ἀποτετμημένης $K\pi$· ὁμοίων γὰρ ὄντων τῶν τριγώνων $\tau\mu\Pi$, $\mu T\pi$, ἐςὶ $\tau\Pi : \Pi\mu = \pi K ::$ $\mu\pi = \Pi K : \pi T$, τῦτ' ἐςὶν $\frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$ (110) $: \upsilon :: \chi :$ $\pi T = \frac{\chi^2 \upsilon}{\alpha^2 - \chi^2}$ · ἀλλ' ἐςὶν $\alpha^2 - \chi^2 = \frac{\alpha^2 \upsilon^2}{\beta}$, ὡς ῥᾷ-ςα συνάγεται ἐκ τῆς κατὰ τὴν ἔλλειψιν ἐξισώσεως $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ $\times (\alpha^2 - \chi^2) = \upsilon^2$, ὅθεν ἀποφέρεται καὶ $\chi^2 =$ $\frac{\alpha^2 \beta^2 - \alpha^2 \upsilon^2}{\beta^2}$ · ἀντικαταςάσει ἄρα τῶν δε τῶν δυνάμεων ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\chi^2 \upsilon}{\alpha^2 - \chi^2}$ γίνεται $\pi T = \frac{\beta^2 - \upsilon^2}{\upsilon}$.

127. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον εὑρεθήσεται βυληθεῖσι ϗ ἡ ὑποκάθετος, ϗ αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι, ἐν αἷς ἐμφέρειά τε τῶν τύπων φανήσεται, ὐ μὴν ἀλλὰ ϗ ταὐτότης πρός γε τὰς σχέσεις, ὡς περιεργότερον ἐπιςήσασι δῆλον καθίςαται.

128. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Δέδεικται δὲ ὡς τὸ απόςημα τῦ κέντρυ ἀπὸ τῦ σημείυ, καθ' ὃ ὁ μείζων ἄξων συμβάλλει τῇ ἁπτομένῃ, τῇ ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐπὶ τὸν μείζονα ἄξονα τεταγμένης ἀχθείσῃ, ἐςὶ τρίτη ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀποτετμημένην ὑπ' αὐτῆς τῆς τεταγμένης ϗ πρὸς τὸν μείζονα ἡμιάξονα, εἴτ' ὖν $\chi : \alpha :: \alpha : KT$ (113)· ταὐτὸν ἄρα δειχθήσεται (τῶν ἰδιοτήτων ὡς εἴρηται ταὐτιζομένων) κἀπὶ τεταγμένης ἐπὶ τὸν ἐλάττω ἄξονα, ἢ ϗ πᾶσαν διάμετρον· ἔςω ὖν (σχ. 88) ἡ ἡμιδιάμετρος $KI = \alpha$, ϗ ἡ ὑπὸ τῆς τεταγμένης ΔX ἀποτετμημένη

ΚΔ = χ· ἢ γινομένης ΚΤ ἐνταῦθα τῆς ΚΗ, ἔςαι ΚΔ = χ : ΚΙ = α : : ΚΙ = α : ΚΗ.

129. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἐν ἐλλείψει τὸ ὑπὸ δύω συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων ΚΙ, ΚΜ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΚΙΒΜ ἶσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἡμιαξόνων ΚΧ, ΟΡ.

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἤχθω ἡ ΜΧ, ἢ ἐςάθω κάθετος ἡ ΠΜ, ἢ διὰ τῦ Χ ἤχθω ΕΔ παραλλήλως τῇ ΚΜ, ἢ δὴ ἔςαι ἶσα τὰ παραλληλόγραμμα ΚΔΕΜ, ΑΧΠΚ τὸ γὰρ τρίγωνον $\text{ΚΜΧ} = \frac{\text{ΚΔΕΜ}}{2}$, διὰ τὴν αὐτὴν βάσιν ΚΜ, ἢ τὸ αὐτὸ ὕψος (τὸ ἀπὸ τῦ κέντρυ ἀπόςημα τῶν δύω παραλλήλων ΚΜ, ΔΕ)· ἐςι δὲ ἢ $\text{ΚΜΧ} = \frac{\text{ΚΧΑΠ}}{2}$, διὰ τὴν αὐτὴν βάσιν ΚΙΧ, ἢ τὰς δύω παραλλήλυς ΑΠ, ΚΧ· ἄρα (Συμϐ. Λογ. 234) ΚΔΕΜ = ΚΧΑΠ.

β΄. Παρὰ δὲ ταῦτα α. τὰ παραλληλόγραμμα ΚΔΕΜ, ΚΙΒΜ, ΚΗηΤ, ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, ἢ κείμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΚΗ, ΒΤ, ἔσονται ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις ΚΔ, ΚΙ, ΚΗ (Γεωμ. 290)· ἀλλ' ἐςι ΚΔ : ΚΙ : : ΚΙ : ΚΗ (128)· ἄρα ΚΔΕΜ : ΚΙΒΜ : : ΚΙΒΜ : ΚΗηΤ. (Α) β΄. τὰ παραλληλόγραμμα ΚΧΑΠ, ΚΧΟΡ, ΚΗητ διὰ τὰς παραλλήλυς ΗΟ, ΚΤ εἰσὶν ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις ΚΠ, ΚΡ, ΚΤ· ἐπεὶ ἦν ΚΠ : ΚΡ : : ΚΡ : ΚΤ (128), ἄρα ΚΧΑΠ : ΚΧΟΡ : : ΚΧΟΡ : ΚΗηΤ (Β).

Ἀλλ' ἐν ταῖς δυσὶ συνεχέσιν ἀναλογίαις Α, Β ἑκάτερον ἄκρον τῆς ἑτέρας ἰσῦται ἑκατέρῳ ἄκρῳ τῆς ἑτέρας· εἴγε ΚΔΕΜ = ΚΧΑΠ (α΄.)· ἄρα ἢ τὸ μέσον ἰσῦται τῷ μέσῳ, εἴτ' ἦν ΚΙΒΜ = ΚΧΟΡ. Ο. Ε. Δ.

130. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἀλλὰ τὸ μὲν παραλληλόγραμ-

μον ΚΙΒΜ ἴσεται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ΚΙ, ϗ τῆς καθέτυ ΕΜ (Γεωμ. 282), τὸ δ᾽ ὀρθογώνιον ΚΧΟΡ $=$ ΚΧ $(=\alpha)\times$ ΚΡ $(=\beta)$, ἄρα ΚΙ $\times$ ΕΜ $=\alpha\times\beta$ τυτέςι „τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς καθέτυ ΕΜ, τῆς ἀγομέ-„νης ἀπὸ τῦ πέρατος διαμέτρυ ἐπὶ τὴν αὐτῆς συζυγῆ, „ϗ ὑπ᾽ αὐτῆς τῆς συζυγῦς ἡμιδιαμέτρυ, ἴσον ἐςὶ τῷ πε-„ριεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἡμιαξόνων.“

131. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἐλλείψεως δοθείσης τῆς ΑΒΓΔ, εὑρεῖν τὸ κέντρον ϗ τὺς ἄξονας ϗ τὰς ἑςίας αὐτῆς (σχ. 89).

ΛΥΣΙΣ. α΄. Ἤχθωσαν παραλλήλως δύω χορδαὶ αἱ ΑΒ, δζ, ϗ τετμήσθωσαν δίχα, ϗ διὰ τῶν μέσων σημείων ο, υ διήχθω εὐθεῖα ἡ Θη, ἥτις ἔςαι μία τῶν διαμέτρων (122)· τὸ δὲ μέσον αὐτῆς χ ἔςαι κέντρον τῦς ἐλλείψεως. β΄. κέντρῳ μὲν τῷ χ, διαςήματι δὲ τῷ Θχ, γεγράφθω κύκλος, ὅςτις, ἤτοι ὐ μὴ τεμεῖ ὅλως τὴν ἔλλειψιν· ϗ δὴ τότε ἡ διάμετρος ἔςαι [illegible] ΑΓ· ἢ τεμεῖ κατὰ τέσσαρα σημεῖα α, Θ, ι, λ, [illegible]διεςῶτα τῶν κορυφῶν Α, Γ (81)· ϗ δὴ ἐπεζεύχθω ἡ ιλ, ἣν δίχα τεμνέτω ἡ κάθετος ΑχΓ, ἥτις ἔςαι ὁ μείζων ἄξων (81)· ἡ δὲ κάθετος ΒχΔ ἀπὸ τῦ χ ἀχθεῖσα ἔςαι ὁ ἐλάττων· τέλος δὲ τὸ ἥμισυ χΓ τῦ μείζονος ἄξονος, ἀπὸ τῦ Β πέρατος τῦ ἐλάττονος ἄξονος μετενεχθὲν ἐπὶ τὸν μείζονα, ἐκδηλώσει τὰς δύω ἑςίας Ε, ε (87) Ο. Ε. Π.

132. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως.

ΛΥΣΙΣ. α΄. Ζητηθήτω ἡ ἐπιφάνεια κύκλυ, ὗ ἐςὶ διάμετρος ὁ τῆς ἐλλείψεως μείζων ἄξων ΑΚ (Γεωμ. 268, 370)· β΄. γενέσθω μέθοδος τῶν τριῶν· ΑΓ:ΒΔ, ὡς τὸ εὑρεθὲν κυκλικὸν ἐμβαδὸν πρὸς τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως (101).

Ηʹ ζητηθείσης μέσης ἀναλόγου τῶν ΑΚ, ΒΔ, κύκλος ὁ διαμέτρῳ τῇ μέσῃ ἀναλόγῳ γραφεὶς ἔσαι ἴσος τῇ ἐλλείψει (102).

133. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γʹ. Εὑρεῖν τὴν ϛερεότητα τῆς ἐλλειπτικῆς κωνοιδοῦς (σχ. 82).

ΛΥΣΙΣ. Ἐπινενοήσθωσαν ἥτε ἡμίσεια ἔλλειψις ΗηΜʹ, ϗ τὸ ἡμικύκλιον ΗηΒ, περιενεχθέντα ἅπαξ περὶ τὴν Ηη· ἐκεῖν ἡ μὲν ἡμίσεια ἔλλειψις κωνοΐδα, τὸ δ' ἡμικύκλιον σφαῖραν ἀπογεννήσουσι· ϛοιχεῖα δ' αὐτῶν ἔσονται οἱ κύκλοι, οἱ καταγραφόμενοι διάτε τῶν ἐν τῇ ἐλλείψει τεταγμένων ΠΜʹ, ΠΜʹ, ϗ διὰ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ΠʹΒ, Ππ.

αʹ. Οὖν αἱ τεταγμέναι ΠΜʹ τῆς ἐλλείψεως ἔσονται πρὸς τὰς τοῦ κύκλου ΠʹΒ :: ΠΜʹ = β : ΠʹΗ = α (101) κληθείσης οὖν ἐν τῇ ἐλλείψει τῆς ΠʹΜʹ = υ ϗ τῆς ΠʹΒ = Υ τῆς ἐν τῷ κύκλῳ ἀντιϛαχούσης· ἔσαι υ : Υ :: β : α· ϗ δὴ $υ^2 : Υ^2 :: β^2 : α^2$.

βʹ. Κύλινδρος ὁ τῇ ἐλλείψει περιγεγραμμένος, οὗ τὸ ἥμισυ = ΚΔΗη πρὸς κύλινδρον τὸν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένον, οὗ τὸ ἥμισυ = ΑΗΡη, ὡς ὁ κύκλος, οὗ ἡ ηΔ, ἢ ὁ ἐλάττων ἡμιάξων β, ἐϛὶν ἀκτὶς, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ ἀκτὶς ηΡ ὁ μείζων ἡμιάξων α· ἔχοντες ϗ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος Ηη οἱ κύλινδροι, ἔσονται ὡς αἱ βάσεις, ἢ οἱ δύω κύκλοι ἔχοντες, ὁ μὲν Δη = β, ὁ δὲ ηΡ = α, ἀκτῖνας (Συμβ. Λογ. 306)· ἀλλ' οἱ δύω κύκλοι εἰσὶν ὡς τὰ τετράγωνα $ηΔ^2 = β^2$, $ηΡ^2 = α^2$ (Γεωμ. 398)· κύλινδρος ἄρα ὁ τῇ ἐλλείψει περιγεγραμμένος πρὸς κύλινδρον τὸν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένον :: $β^2 : α^2$.

γʹ. Ἕκαϛος κύκλος γεγραμμένος διὰ μιᾶς ἐν τῇ ἐλλείψει τεταγμένης υ ὡς ϛοιχεῖον τῆς κωνοΐδος πρὸς τὸν ἀντίϛοιχον κύκλον τὸν διὰ τῆς Υ τεταγμένης ὡς ϛοιχεῖον σφαιρικὸν γεγραμμένον :: $υ^2 : Υ^2$ (Γεωμ. 398)· ἐκεῖν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ϛοιχείων τῆς κωνοΐδος πρὸς τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ϛοιχείων τῆς σφαίρας, εἴτ' οὖν ἡ κωνοῒς πρὸς τὴν σφαῖραν :: $υ^2 : Υ^2$, ϗ ἑπομένως (133 ἐν τῇ λύσει) :: $β^2 : α^2$· ἐπεὶ τοίνυν ὁ τῇ κωνοΐδι περιγεγραμμένος κύλινδρος πρὸς τὸν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένον :: $β^2 : α^2$ (ἀνωτ.)· ἄρα (Γεωμ. 327) ἡ ϛερεότης τῆς κωνοΐδος πρὸς τὴν τῆς σφαίρας, ὡς ὁ τῇ κωνοΐδι πρὸς τὸν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένον κύλινδρον.

Ἄρα ϗ ἐναλλάξ· ἡ ϛερεότης τῆς κωνοΐδος πρὸς τὸν αὐτῇ περιγεγραμμένον κύλινδρον, ὡς ἡ ϛερεότης τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ταύτῃ περιγεγραμμένον κύλινδρον.

134. Ἀλλ' ἡ ϛερεότης τῆς σφαίρας ἐςὶ $\frac{2}{3}$ τȣ αὐτῇ περιγεγραμμένȣ κυλίνδρȣ (Γεωμ. 463)· ἄρα ϗ ἡ ϛερεότης τῆς κωνοΐδος ἐςὶ $\frac{2}{3}$ τȣ αὐτῇ περιγεγραμμένȣ κυλίνδρȣ.

Ἄρα ἡ τῆς κωνοΐδος ϛερεότης εὑρεθήσεται ζητηθέντος κυλίνδρȣ, ἔχοντος βάσιν μὲν κύκλον, ȣ̃ ἐςὶν ἀκτὶς ὁ ἐλάττων ἡμιάξων Δ'η, ἢ Π'Μ', ὕψος δὲ τὸν μείζονα ἄξονα Ηη (Γεωμ. 452), ϗ τῆς αὐτȣ̃ ϛερεότητος $\frac{2}{3}$ ληφθέντων. Ο. Ε. Π.

135. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ο' ἄρα τῆς ἐλλειπτικῆς κωνοΐδος, καθὰ δὴ ϗ τῆς παραβολικῆς (73), κυβισμὸς τȣ̃ κατὰ τὸν κύκλον τετραγωνισμȣ̃ ἐξήρτηται· ἀμήχανον γὰρ ἄλλως αὐτῶν εὑρεῖν τὴν ϛερεότητα, πρὶν ἢ τȣ̀ς πολλαπλασιαςέȣς κύκλȣς τετραγωνίσαι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ τῆς ἐν τοῖς ὀπτικοῖς χρήσεως τῶν τῆς ἐλλείψεως ἰδιοτήτων.

136. Ὅταν τὸ φῶς ἀπὸ μέσου διαφόρου ἐπὶ μέσον διάφορον πλαγίως ἐμβάλλῃ, ἀπ᾽ ἀέρος φέρ᾽ εἰπεῖν εἰς ὕελον, ἀφίσαται τῆς οἰκείας φορᾶς, θραυνόμενον, ὡς λέγειν εἰώθασι· ἡ δ᾽ ἐπιστήμη, ἡ περὶ ταύτην τὴν τοῦ φωτὸς θραῦσιν ἀσχολουμένη, καλεῖται Διοπτρική, περὶ ἧς ἡμῖν εἰρήσεται ὕστερον.

137. Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΕΜΔ (σχ. 90) κάθετος τῇ ΒΤ ἐπιφανείᾳ τοῦ μέσου ΗΜη κατὰ τὸ σημεῖον Μ, ἔνθα εἰσδύει φωτοφυὴς ἀκτὶς ἡ ΠΜ· καλεῖται ἐν γωνία ἐπιπτώσεως ἡ ὑπὸ ΠΜΔ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς καθέτου ΔΜ καὶ τῆς φορᾶς ΠΜ τῆς ἀκτῖνος· γωνία δὲ θραύσεως ἡ ὑπὸ ΖΜΕ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς νέας φορᾶς ΜΕ, καθ᾽ ἣν τῆς προτέρας ἀποχωρεῖ, καὶ τῆς καθέτου ΜΕ· διὰ πείρας τοίνυν δεδειγμένα εἰσὶ τὰ ἑξῆς.

138. α΄. Ἐὰν φωτοφυὴς ἀκτὶς ἡ ΔΜ διὰ τοῦ αὐτοῦ μέσου διήκῃ πρὸς ὀρθὰς τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ τοῦ μέσου, οὐδεμίαν ὑφίσαται θραῦσιν, εἶτ᾽ οὖν φέρεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἀεὶ ὁδόν.

139. β΄. Τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς ἐπιπτώσεως, καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς θραύσεως, τὸν αὐτὸν ἔχουσιν ἀεὶ λόγον, τῆς μεταβάσεως ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ αὐτὸ τελουμένης μέσον· ἐὰν φέρε γνωσθῇ ἡ γωνία τῆς θραύσεως, ἣν ὑφίσαται τὸ φῶς, ἀπὸ τοῦ ἀέρος μεταπίπτον ἐπὶ

τὴν ὕελον· εἶτα, ἑτέρας ἐπιπτώσεως δοθείσης, δι ἀναλογίας γνωσθήσεται ἡ οἰκεία αὐτῆς θραῦσις.

140. γ΄. Ο' λόγος τῶν ἡμιτόνων τῶν τε φωτὸς γωνιῶν, ἀπ' ἀέρος εἰσιόντος ἐς ὕελον, ἐςι σχεδὸν :: 3 : 2, ἀφ' ὑελέυ δ' ἐπ' ἀέρα :: 2 : 3· τεθείσθωσαν δὲ ἀκριβεῖς οἱ λόγοι ὗτοι.

141. Ε῎ςω ἤδη ἔλλειψις, ἐν ᾗ Ηη : Εε :: 3 : 2, καταγραφομένη προδήλως τῷ ἀποτμηθῆναι εἰς τρία ἰσάλληλα μέρη τὴν εὐθεῖαν Ηη, ἣ ὡς ἄξων μείζων λαμβάνεται, ϗ μετενεχθῆναι ἀφ ἑκάςυ πέρατος ἐπ' αὐτὴν τὸ ἑνός τινος τῶνδε τῶν τμημάτων ἥμισυ ΕΗ = εη, εἰς εὕρεσιν τῶν ἑςιῶν τῆς γραφησομένης ἐλλείψεως· τοιγαρῦν ὄσης Ηη = 3, ϗ εΕ = 2, ἔςαι Ηη : Εε :: 3 : 2· μετὰ ταύτην δὲ τὴν κατασκευὴν φημί.

142. Πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες τῦ φωτὸς αἱ παράλληλοι τῷ ἄξονι Ηη, ὡς ἡ ΠΜ, διϊῦσαι διὰ τῆς ἐλλειπτικῆς περιφερείας, συλλεχθήσονται κατὰ τὴν ἑςίαν Ε, τὴν μᾶλλον ἀπέχυσαν τῦ ἀκτινοβόλυ σώματος.

Εἰς δέ γε τὴν τύτυ δεῖξιν, ά. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΕΜ προαχθείσης ΜΡ = εΜ· ὅθεν ΕΡ = Ηη (84)· ἡ δὲ κατὰ τὸ Μ ἁπτομένη ΜΤ ἐπιςήσεται πρὸς ὀρθὰς τῇ Ρε εὐθείᾳ (103).

β΄. Εἀν ἐπὶ τῆς τῇ ἁπτομένῃ ΜΤ καθέτυ ΔΜ, ληφθῇ ΔΜ = ΕΜ = ΜΤ, ϗ κέντρῳ μὲν τῷ Μ, ἀκτῖνι δὲ τῇ ΜΔ, κύκλος γραφῇ διερχόμενος διὰ Δ, Π, Ε, ἡ κάθετος ΠΙ ἡμίτονον ἔσεται τῆς γωνίας τῆς ἐπιπτώσεως ΠΜΔ, ἡ δὲ κάθετος ΕΖ, ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ΕΜΖ (Γεωμ. 482).

Φημὶ δὴ ὡς ἡ ὑπὸ ΕΜΖ ἐςιν ἡ αὐτὴ τῇ τῆς θραύσεως γωνίᾳ, ἐὰν ἡ τῦ φωτὸς ἀκτὶς ΜΠ διελθῦσα διὰ

Μ φέρηται πρὸς τὸ Ε· ἐ γὰρ ὀρθῶν ἴσων τῶν γωνιῶν ΠΙ Μ, ΕΖχ, ἐ τῆς ὑπὸ ΠΜΙ = ΕχΖ (αἱ γὰρ παράλληλαι ΠΜ, Ηη τέμνονται ὑπὸ τῆς ΔΕ εὐθείας), τὰ τρίγωνα ΠΙΜ, ΕχΖ ὅμοιά εἰσι· ἐ δὴ ΠΙ : ΕΖ :: ΠΜ = ΕΜ (ἐκ κατασκευῆς) : Εχ.

Οὐσῶν δὲ παραλλήλων ἐ τῶν Μχ, Ρε ὡς τῇ ΜΤ καθέτων (103) εἰσὶ ἐ τὰ ΕΜχ, ΕΡε τρίγωνα ὅμοια· ἐ δὴ ΕΜ : Εχ :: ΕΡ = Ηη : Εε· ἄρα ΠΙ : ΕΖ :: Ηη : Εε· ἐπεὶ δὲ ἐκ κατασκευῆς Ηη : Εε :: 3 : 2· ἐὰν ἄρα τεθῇ ΠΙ = 3, ἔςαι κατὰ τὸν νόμον τῆς θραύσεως ΖΕ = 2, ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς θραύσεως· ἄρα ἡ γωνία τῆς θραύσεως ΖΜΕ ἔςαι τοιάδε, ὡς τὴν ἀκτῖνα ΠΜ φέρεσθαι πρὸς τὸ Ε. Ο. Ε. Δ.

143. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἄρα ἔλλειψις, ἐν ᾗ ἐςὶ Ηη : Εε :: 3 : 2 περιενεχθεῖσα ἀπογεννήσῃ ἐλλειπτικὴν κωνοΐδα, πᾶσαι αἱ δι' αὐτῆς διελθῦσαι τῦ φωτὸς ἀκτῖνες, παραλλήλως τῷ ἄξονι ἀναθραυσθεῖσαι, συλλεχθήσονται ἐν τῇ ἑςίᾳ Ε.

144. Ἐὰν τοίνυν ἐν τῇ γεννητρίᾳ ἐλλείψει ΗΟηκ, ἐκ τῦ Ε γραφῇ τόξον κύκλε τὸ Μυτ, ἐ τὸ σχῆμα Μυτη περιαχθῇ περὶ τὴν νη ὡς περὶ ἄξονα, ἀπογεννηθήσεται μέρος τῆς εἰρημένης κωνοΐδος τὸ Μυτη, ἐν ᾧ πᾶσαι αἱ τῷ νη ἄξονι παραλλήλως ἐμβάλλυσαι ἀκτῖνες ΠΜ συλλεχθήσονται κατὰ τὸ Ε σημεῖον, τὸ ἐκτὸς τῆς κωνοΐδος κείμενον· εἰσιῦσαι γὰρ φέρονται πᾶσαι πρὸς τὸ Ε, ὡς ἤδη δέδεικται, ἐξιῦσαι δὲ κατὰ τὰς φορὰς ταύτας ἀκτῖνες καθίςανται τῦ Μυτ κύκλε, τῦ ἐκ τῦ Ε γραφέντος, ἐξιῦσαι φημὶ καθέτως τῇ κοίλῃ τῦ ἀέρος ἐπιφανείᾳ, ὐδόλως θραυσθήσονται (138), ἐ πᾶσαι τενῦσι πρὸς τὸ Ε.

145. Ἀποκαθίςαται, ἄρα τὸ εἰρημένον μέρος, ὑέλινος καυςικὸς φακὸς ἐξαίσιος.

146. Ἵνα μὴ ἡ πυκνότης τῆς ὑέλυ ἐξαθενίζῃ πάμπαν τὸ φῶς, ληπτέον ὕελον λεπτοτάτην· ὅπερ ἔςαι λαμβανομένης γεννητρίας ἐλλείψεως μεγάλης, καὶ ταύτης τόξυ λίαν μικρῦ εἰς χρῆσιν τιθεμένυ.

147. Καὶ τῶν ἑπτὰ δὲ χρωμάτων, ἃ συντιθέασι μίαν τινὰ δέσμην τῦ φωτὸς, διαφόρως θραυομένων ἐπὶ τὴν αὐτὴν τῆς ἐπιπτώσεως γωνίαν, ὡς ἀποδεικνύυσιν αἱ πεῖραι τῦ ὑελίνυ τριγωνικῦ πρίσματος, περὶ ὗ ἐρῦμεν, ἐν τῇ διαληφθείσῃ περιπτώσει, ὐ συλλέγονται πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες ἀκριβῶς κατὰ τὴν ἑςίαν Ε, ἀλλ᾽ ὡς ἔγγιςα κατ᾽ αὐτήν.

148. Ἔςω σχῆμα ἀποτελύμενον ἀπὸ τῆς μερίδος Μητ τῆς ἐλλείψεως, καὶ ἀπὸ τῦ Χυτόξυ κύκλυ, τῦ κέντρῳ μὲν τῷ Ε, ἀκτῖνι δὲ μείζονι, ἢ Εη, γεγραμμένυ, συνημμένων διὰ τῶν εὐθειῶν υΜ, Χτ· φημὶ δὴ, ὡς τυτὶ τὸ σχῆμα, περιενεχθὲν περὶ ἄξονα τὸν ην, ἀπογεννήσει ςερεὸν, οἷον ἅπασαι αἱ τῷ ἄξονι παράλληλοι ἀκτῖνες ΜΟ, εἰσελθῦσαι εἰς τὴν κοιλότητα Μντ, συγκροτήσυσι, μετὰ τὴν αὐτῶν ἔξοδον ἐκ τῦ ςερεῦ φερόμεναι πρὸς τὸ ψ, ἀποχωρῦσαι ἀλλήλων (131), ὥσπερ εἰ πᾶσαι ἀπὸ τῦ Ε ἐκινήθησαν· ἡ ΟΜ φέρε χωρήσει τὴν φορὰν ΜΡ, προαγωγὴν ὖσαν τῆς ΜΕ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ ἀκτὶς ΜΟ, εἰσιῦσα εἰς τὴν ἐλλειπτικὴν κοιλότητα Μητ κατὰ τὸ Μ, ἀποχωρεῖ τοσῦτον τῆς τῇ καμπύλῃ καθέτυ ΜΔ, ὅσον ἡ προαγωγὴ αὐτῆς ΜΠ εἰσδύυσα εἰς τὴν κυρτότητα Μητ, ἀφίςαται τῆς ΜΖ προαγωγῆς τῆς ΔΜ· καὶ γὰρ τῆς κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνίας ΟΜΕ ἴσης ὔσης τῇ κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνίᾳ ΠΜΔ, ὡς κατὰ κορυφὴν, ἡ τῆς θραύσεως γωνία ΔΜΡ ἴση ἔσεται τῇ τῆς θραύσεως γωνίᾳ ΕΜΖ (139)· ἄρα ἡ φορὰ ΡΜ, ἣν θραυσθεῖσα φέρεται ἡ ΜΟ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς κεῖται εὐθείας, ἐφ' ἧς ϗ ἡ ΜΕ· ἄρα ἡ ΜΟ θραυσθεῖσα κινηθήσεται ὡς φερομένη ἀπὸ τῦ Ε· ἀλλ' ἐξιῦσα διατηρήσει πρὸς τὸ Ρ τὴν φορὰν ΜΡ, ὡς τῦ ΙΧ ἀκτὶς ΡΕ, κάθετος τῇ τῦ ἀέρος ἐπιφανείᾳ ΙΧ· ἔξεισιν ἄρα τῆς ὑέλυ, καθάπερ εἰ ἐφέρετο ἐκ τῦ Ε.

149. Φακὸς ἄρα ὁμοιόσχημος τῷ διαληφθέντι ὑέλινος ξυντελεῖ λίαν τοῖς ἀμβλύωψι· ϗ γὰρ αἱ ἀκτῖνες αἱ ἀπὸ σώματος λίαν ἀφεςῶτος ἀποπεμπόμεναι πρὸς αἴσθησιν, ὖσαι παράλληλοι, μετὰ τὸ διελθεῖν τὴν τῆς ὑέλυ κοιλότητα εἰσχωρήσυσιν εἰς τὸν κατὰ τὸ Υ κείμενον ὀφθαλμὸν, ὡς εἰ ἐφέροντο πᾶσαι ἀπὸ τῆς ἑςίας Ε· δυνήσεται ἄρα ἰδεῖν τὸ ἀφεςὼς ὁρατὸν, ὡς εἰ ἔκειτο κατὰ τὸ Ε.

150. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Σαφὲς ἄρα ἐκ τῆς προεκτεθείσης δείξεως, ὡς ἐν καμπύλῃ οἱαδήποτε τῇ ΗΟηκ, ἡ γωνία τῆς ἐπιπτώσεως ΟΜΕ = ΠΜΔ ἡ αὐτή ἐςιν ἐπὶ ἀκτῖνος τῆς ΟΜΠ, τῆς εἴτε εἰς τὴν κυρτότητα, εἴτε εἰς τὴν κοιλότητα τῆς καμπύλης εἰσιύσης· ϗ δὴ ϗ ἡ γωνία τῆς θραύσεως ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περιπτώσεων ἡ αὐτὴ ἔσεται ΕΜΖ = ΡΜΔ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ τῆς Ὑπερβολῆς.

151. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Οἱ ὑπερβολικοὶ κλῶνες ΗΜ, ΗΜ΄ ἐπ' ἄπειρον ἀποχωρῦσι τῦ ἄξονος ΗΠ (σχ. 68).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΗΒ > ΑΗ (17), ϗ τὰ ἐφεξῆς κείμενα τρίγωνα ΑΠΔ ὅμοια τῷ τριγώνῳ ΑΗΒ, ἑκάςη

ΠΔ τάχιον αὔξει, ἢ ἡ ΕΠ· ἑκάστη ἄρα ΠΔ ἐκ τῦ Ε ἐφ' ἑαυτὴν μεταφερομένη ἀποστήσει μᾶλλον κ̀ μᾶλλον τὴν καμπύλην ἀπὸ τῆς ΗΠ. Ο. Ε. Δ.

152. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Προήχθω ἡ μὲν ΑΤ πρὸς τὸ ζ, ἡ δ' ΑΠ πρὸς τὸ ε· ὐκῦν αἱ ὕπερθεν τῦ Α ἐς τὸ ε, ΠΔ ἔσονται πρῶτον ἐλάττυς, ἢ αἱ αὐτῶν ΕΠ· ἀλλ' ἐπείπερ αἱ ΠΔ διὰ τὸ εἶναι ΗΒ > ΑΗ τάχιον αὔξυσιν, ἢ αἱ ΕΠ, εὑρεθήσεται τέλος μίατις ΠΔ = ΕΠ, εἴτ' ὖν ἡ ηΔ', ἥτις, μετενεχθεῖσα ἐκ τῦ Ε ἐφ' ἑαυτὴν, πεσεῖται ἐπὶ τῦ σημείυ η· τοιγαρῦν μετενεχθεισῶν ἀπὸ τῦ Ε ἐφ' ἑαυτὰς τῶν ἐφεξῆς ΠΔ', εὑρεθήσονται δύω νέοι ὑπερβολικοὶ κλῶνες ηκ, ηΜ'· τῦθ' ὅπερ ἡμῖν κ̀ δὴ δειχθήσεται.

153. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Αἱ δύω κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι καμπύλαι ΗΜΜ, ηκΜ' μιᾷ μόνῃ ὑπερβολῇ ἐπανήκυσι.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΑΗΒ, ΑηΔ' ἐστιν ηΔ' : ΗΒ :: ηΑ : ΗΑ· ἐπεὶ δὲ ηΔ' = ηΕ, κ̀ ΗΒ = ΗΕ (ἐκ κατασκευῆς) ἀντικαταστάσει ἄρα ἔσται ηΕ : ΗΕ :: ηΑ : ΗΑ (17). Ο. Ε. Δ.

154. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ ὑπερβολὴ ἄρα δύω μὲν κορυφὰς Η, η, ἕνα δὲ ἄξονα Ηη ὡρισμένον ἔχει.

155. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἡ ὑπερβολὴ μόνη δύναται ἔχειν ἀντικειμένας καμπύλας.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τῇ παραβολῇ ἕκαστον σημεῖον ὕπερθεν τῦ Α κείμενον (σχ. 66) αὐτῇ ἐπανήκειν ἀμήχανον (23)· ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει, ὅτι ΗΒ < ΑΗ (σχ. 67), πᾶσα ὑπὲρ τὸ Α κειμένη ΠΔ ὐμὴ ἰσωθήσεται τῇ ΠΕ· ἄρα ὐδ' ἐν τῇ ἐλλείψει σημειωθήσονται ὑπὲρ τὸ Α σημεῖα αὐτῇ ἐπανήκοντα. Ο. Ε. Δ.

156. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐφάνη δὲ τῦτο κἀπὶ τῶν τῦ

κώνε τομῶν (6)· ὡς ἐ̜ ἐνταῦθα ἐν ταῖς κατὰ τὸ ἐπίπεδον γεγραμμέναις κωνικαῖς τομαῖς.

157. ΑΙΤΗΜΑ. Ἐὰν, ληφθείσης ηΕ = ΗΑ, ἐ̜ ηδ = ΗΒ, ἐ̜ ηε = ΗΕ (φ. 68), ἀχθῇ τέρματος ἄνευ ἡ Εδ, ἐ̜ ἡ διευθετεῦσα Εβ, εὑρεθήσεται ἐ̜ διὰ ταύτης τῆς ἀπεράντε ἡ καινὴ καμπύλη ηκΜ΄· ἀλλ᾽ ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΒ = Εηδ· ἄρα ἐ̜ ἡ καμπύλη ΗΜΜ = ηκΜ΄· ἄρα ἐ̜ διὰ τῆς ἑςίας ε γραφῆναι δύνανται ἀμφότεραι αἱ καμπύλαι ΗΜΜ, ηκΜ΄· ἐκεῖνα΄. ἡ ὑπερβολὴ ἀναγκαίως ἔχει δύω ἑςίας Ε, ε· β΄. αἱ τεταγμέναι ἐν ταῖς καμπύλαις ΗΜΜ, ηκΜ΄, αἱ ἴσον ἀπέχεσαι τῶν κορυφῶν, εἰσὶν ἴσαι.

158. ΟΡΙΣΜΟΣ. Εὐθεῖα ἡ Ηη καλεῖται πρῶτος ἄξων τῆς ὑπερβολῆς· τὸ δὲ μέσον σημεῖον Κ τῆς Ηη, κέντρον· ἡ δὲ κάθετος ΧΚΧ προαχθεῖσα ὥτως, ὡς τὸ ἀπόςημα ΕΕ τῦ κέντρε ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν ἑςιῶν μετενεχθὲν ἐκ τῦ Η ἐπὶ τὴν ΧΚΧ πίπτειν ἐπὶ τῶν περάτων Χ, Χ, δεύτερος ἄξων, ἢ ἄξων συζυγὴς, ἡ δὲ ὑπερβολὴ καλεῖται μὲν ἰσοσκελὴς, ἢ κυκλικὴ, ἐὰν ᾖ ΧΚΧ = Ηη, σκαληνὴ δὲ, ἢ ἐλλειπτικὴ, ἐὰν ὦσιν ἄνισοι οἱ ΧΚΧ, Ηη ἄξονες.

159. Τηρήσομεν δὲ ἐν ταύτῃ τῇ καμπύλῃ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῇ ἐλλείψει ὀνόματα (88), εἴτ᾽ ὖν $\frac{Hη}{2} = α$, ἐ̜ $\frac{XK}{2} = β$, ἐ̜ ΠΜ $= υ$, ἐ̜ ΠΚ $= χ$, ἐ̜ ΚΕ $= κ$· ὅθεν ΗΠ‴ $= χ - α$, ἐ̜ ηΠ‴ $= χ + α$, ἐ̜ δὴ ΗΠ‴ × ηΠ‴ $= χ^2 - α^2$.

160. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ὁ πρῶτος ἄξων Ηη ἴσος ἐςὶ τῇ τῶν ἑνός τινος σημείε τῆς καμπύλης ἀφ᾽ ἑκατέρας

τῶν ἑςιῶν ἀποςημάτων διαφορᾷ· εἴτ' ἦν $M'''E - M'''\varepsilon = H\eta$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐςι γὰρ $M'''\varepsilon = \Pi''\delta$, ϗ $M'''E = \Pi''\Delta'$ (ἐκ κατασκευῆς)· ἄρα $M'''E - M'''\varepsilon = \Delta'\delta$· ἀλλὰ α΄. παραλλήλε ἔσης τῆς $E\delta$ παρὰ τὴν $A\varepsilon$, πᾶσαι αἱ $\Delta\delta$ εἰσὶν ἴσαι (Γεωμ. 127)· β΄. $H\eta = \Delta'\delta$· εἴγε $H\eta = \eta E - HE = \eta\Delta' - \eta\delta$ (ἐκ κατασκευῆς) $= \Delta'\delta$· ἄρα $M'''E - M'''\varepsilon = H\eta$. Ο. Ε. Δ.

161. Ἐντεῦθεν ἄρα ῥᾷςα ὑπερβολὴν καταγράφειν διδασκόμεθα· ληφθέντος γὰρ ἄξονος τῆ $H\eta$, ϗ τῶν εὐθειῶν HE, $\eta\varepsilon$, HA ἴσων, ἐὰν κέντρῳ τῷ ε γραφῶσιν ἑξῆς (σχ. 91) τόξα τὰ $M\delta M$, ϗ μετενεχθῇ ἐκ τῆ E ἑκάςη $A\delta$ ἐπὶ τὸ ἑαυτῆς σύςοιχον τόξον, τὰ ἕτως εὑρεθέντα σημεῖα M, M' ἔσονται ἐν ὑπερβολῇ· ϗ γὰρ $\varepsilon M' = \varepsilon\delta'$, ϗ $EM' = A\delta'$ (ἐκ κατασκευῆς)· ἄρα $\varepsilon M' - EM' = \varepsilon A$· ἀλλὰ $\varepsilon A = H\eta$ (ἐπεὶ $\varepsilon\eta = A\Theta$)· ἄρα $\varepsilon M' - EM' = H\eta$, ἰδιότης τῆς ὑπερβολῆς (160).

162. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Ὁ δεύτερος ἡμιάξων ἐςὶν εὐθεῖα μέση ἀνάλογος πρὸς τὰ δύω ἀποςήματα τῶν δύω περάτων τῆ πρώτε ἄξονος ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν ἑςιῶν, εἴτ' ἦν $EH = \varkappa - \alpha : KX = \beta :: KX = \beta : E\eta = \varkappa + \alpha$ (σχ. 68).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ HKX ἐςι $KX^2 = HX^2 - KH^2$· ἀλλὰ $KX^2 = \beta^2$, καὶ $HX^2 = KE^2$ (158) $= \varkappa^2$, ϗ $KH^2 = \alpha^2$· ἄρα $\beta^2 = \varkappa^2 - \alpha^2$· ἄρα $\varkappa - \alpha : \beta :: \beta : \varkappa + \alpha$ (Συμβ. Λογ. 240). Ο. Ε. Δ.

163. ΘΕΩΡΗΜΑ ς΄. Ἐν ὑπερβολῇ τὸ ἀπὸ τεταγμένης ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα τετράγωνον πρὸς τὸ ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένων γινόμενον ἐςιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆ

δευτέρε ἡμιάξονος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τε πρώτε εἴτ' ἐν $\Pi'''M''^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςιν $\varepsilon\Pi''' = \chi + \varkappa$, καὶ $E\Pi''' = \chi - \varkappa$, καὶ $\varepsilon M'' - EM'' = 2\alpha$ (160)· ἔςω δὴ καὶ $\varepsilon M'' + EM'' = 2\nu$· τοιγαρεν ἔςαι $\varepsilon M'' = \nu + \alpha$, καὶ $EM'' = \nu - \alpha$ (Συμϐ. Λογ. 442).

Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ $EM''\Pi'''$ ἔςιν EM''^2 ($= \nu^2 - 2\alpha\nu + \alpha^2$) $= \Pi'''M''^2$ ($= \upsilon^2$) $+ E\Pi^2$ ($= \chi^2 - 2\varkappa\chi + \varkappa^2$) A· ἐν δὲ τῷ $\varepsilon\Pi'''M''$ ἔςιν $\varepsilon M''^2$ ($= \nu^2 + 2\alpha\nu + \alpha^2$) $= \Pi''M''$ ($= \upsilon^2$) $+ \varepsilon\Pi'''^2$ ($= \chi^2 + 2\varkappa\chi + \varkappa^2$)· ἀφαιρέσει δὲ τῆς A ἐξισώσεως ἀπὸ τῆς B, λειφθήσεται $4\alpha\nu = 4\varkappa\chi$· ὅθεν $\alpha\nu = \varkappa\chi$, καὶ $\nu = \frac{\varkappa\chi}{\alpha}$, καὶ $\nu^2 = \frac{\varkappa^2\chi^2}{\alpha^2}$

Ἀντικαταςάσει ἀντὶ ν τῆς αὐτε δυνάμεως ἐπὶ τῆς A ἐξισώσεως, γίνεται $\frac{\varkappa^2\chi^2}{\alpha^2} - 2\varkappa\chi + \alpha^2 = \upsilon^2 + \chi^2 - 2\varkappa\chi + \varkappa^2$· μεταθέσει δὲ τε $-2\varkappa\chi$, $\frac{\varkappa^2\chi^2}{\alpha^2} + \alpha^2 = \upsilon^2 + \varkappa^2 + \chi^2$· ἄρα $\upsilon^2 = \frac{\varkappa^2\chi^2}{\alpha^2} + \alpha^2 - \varkappa^2 - \chi^2$· ἀπαλλαγῆ τε κλάσματος, $\alpha^2\upsilon^2 = \varkappa^2\chi^2 + \alpha^4 - \alpha^2 \times \overline{\varkappa^2 - \chi^2}$ (ἢ $\overline{\varkappa^2 - \alpha^2} \times \chi^2 + \overline{\alpha^2 - \varkappa^2} \times \alpha^2$) (Δ).

Ἀλλὰ $\varkappa^2 - \alpha^2 = \beta^2$ (162)· καὶ δὴ $\alpha^2 - \varkappa^2 = -\beta^2$· ἡ Δ ἄρα ἐξίσωσις γενήσεται $\alpha^2\upsilon^2 = \beta^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2$· ἐντεῦθεν ἄρα $\upsilon^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ (Συμϐ. Λογ. 411) (P) Ο.Ε Δ.

164. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐκ τῆς P ἀναλογίας πρόεισιν $\upsilon^2 = \frac{\overline{\chi^2 - \alpha^2}\,\beta^2}{\alpha^2}$ (P), ἢ $\upsilon^2 = \frac{\chi^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2}{\alpha^2}$,

ἐξίσωσις γενικὴ τῆς ὑπερβολῆς· ἐὰν μέντοι ὑποτεθῇ $\beta^2 = \alpha^2$, ἔσαι $\upsilon^2 = \chi^2 - \alpha^2$, ἐξίσωσις ἐπανήκουσα τῇ κυκλικῇ ὑπερβολῇ.

165. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Η῾ ἄρτι εὑρεθεῖσα τῆς ὑπερβολῆς ἐξίσωσις ἐκτεθῆναι δύναται ὅτως· $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\chi^2 - \alpha^2)}$· ἐὰν δὲ ἡ ἀποτετμημένη τῷ ἄξονι ἰσωθῇ, εἴτ᾽ ὂν γένηται $\chi = \alpha$, ἔσαι $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2 - \alpha^2)} = \frac{\beta}{\alpha} \times \sqrt{0} = \frac{\beta}{\alpha} \times 0 = 0$, τὅτ᾽ ἔσιν, ὐδεμία αὐτῇ ἀντισοιχήσει τεταγμένη· ἡ ὑπερβολὴ ἄρα διὰ τῶν τῦ ἄξονος διήκει περάτων.

166. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ε᾽ὰν δὲ ἀποτμηθῶσι πρὸς τῇ κορυφῇ Η αἱ εὐθεῖαι, ἔσεται $\text{Η}\Pi''' = \chi$· ὅθεν $\eta\Pi''' = 2\alpha + \chi$, ϗ $\text{Η}\Pi''' \times \Pi'''\eta = 2\alpha\chi + \chi^2$· ἡ δὲ Ρ ἀναλογία τρέψεται εἰς $\upsilon^2 : 2\alpha\chi + \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$, ἡ δὲ ρ ἐξίσωσις ἔσαι $\upsilon^2 = \frac{2\alpha\chi\beta^2 + \beta^2\chi^2}{\alpha^2}$, ἢ $\upsilon^2 = \frac{2\beta^2\chi}{\alpha} + \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$.

167. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ε᾽πεὶ σαθερός ἐσιν ὁ λόγος $\beta^2 : \alpha^2$, ἡ ῥηθεῖσα ἀναλογία Ρ ἐν διαφόροις ἀποτετμημέναις προβαλεῖ $\upsilon^2 : \Upsilon^2 :: \chi^2 - \alpha^2 : \text{X}^2 - \alpha^2$, τὅτέσιν ἐν ταύτῃ τῇ καμπύλῃ „τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων „τετράγωνα πρὸς ἄλληλα εἰσὶν, ὡς τὰ ἐκ τῶν ὑπ᾽ αὐ„τῶν ἀποτετμημένων ϗ συναποτετμημένων γινόμενα“. ἄρα ἡ καμπύλη αὕτη ἡ αὐτή ἐσι τῇ εὑρεθείσῃ ἐκ τῆς τῦ κώνυ τομῆς (16).

168. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Η῾ παράμετρος ΜΕΜ΄ τῦ πρώτυ ἄξονος τῆς ὑπερβολῆς ἐσὶν εὐθεῖα τρίτη ἀνάλογος

τῦ δευτέρυ ἄξονος ᾗ τῦ πρώτυ· ᾗ γὰρ ἐν τῇ παραμέτρῳ ἐςὶ χ = ΚΕ = $\varkappa$ (159)· ἄρα ἀντικατατάσει γενήσεται ἡ Ρ ἀναλογία $\upsilon^2 : \varkappa^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ · ἄρα, ἐπεὶ $\varkappa^2 - \alpha^2 = \beta^2$ (162)· $\upsilon^2 : \beta^2 :: \beta^2 : \alpha^2$, ἢ $\upsilon : \beta :: \beta : \alpha$· ἄρα $2\upsilon : 2\beta :: 2\beta : 2\alpha$ (Συμβ. Λογ. 246).

169. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Ἐςι δὲ ᾗ ἐν τῇ ἐλλείψει $\pi : 2\beta :: 2\beta : 2\alpha$ (97)· ἀλλ' ἡ παραβολὴ ἐςι καὶ αὐτὴ ἔλλειψις (5)· ἄρα ᾗ ἐν αὐτῇ $\pi : 2\beta :: 2\beta : 2\alpha$, τυτέςιν ἐν ἁπάσῃ κωνικῇ τομῇ α΄. ἡ παράμετρος π ἐςι τρίτη ἀνάλογος τῦ δευτέρυ καὶ τῦ πρώτυ τῶν ἀξόνων· β΄. $\pi = \frac{4\beta^2}{2\alpha} = \frac{2\beta^2}{\alpha}$.

170. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ΄. Τύπος τῆς μὲν μείζονος ὀρθίας πλευρᾶς ἐςὶν $\varepsilon M'' = \frac{\varkappa\chi + \alpha^2}{\alpha}$ · τῆς δὲ ἐλάττονος $EM'' = \frac{\varkappa\chi - \alpha^2}{\alpha}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Καὶ γὰρ $\varepsilon M'' = \nu + \alpha$, ᾗ $EM'' = \nu - \alpha$ (163. ἐν τῇ δείξει) ᾗ $\nu = \frac{\varkappa\chi}{\alpha}$ (ἀντ.)· ἄρα $\varepsilon M'' = \frac{\varkappa\chi}{\alpha} + \alpha = \frac{\varkappa\chi + \alpha^2}{\alpha}$· ὡσαύτως εὑρεθήσεται $EM'' = \frac{\varkappa\chi}{\alpha} - \alpha = \frac{\varkappa\chi - \alpha^2}{\alpha}$. Ο. Ε. Δ.

171. ΘΕΩΡΗΜΑ Η΄. Τύπος τῦ ἀπὸ ἐπὶ τὸν ἐλάσσω ἄξονα ἠγμένης τεταγμένης τετραγώνυ ἐςὶ $\frac{\alpha^2\upsilon^2 + \alpha^2\beta^2}{\beta^2}$, εἴτ' ὖν $\frac{\alpha^2}{\beta^2} \times (\upsilon^2 + \beta^2)$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ γὰρ $\upsilon^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ (163)·

ἄρα $\chi^2 - \alpha^2 = \frac{\alpha^2 \upsilon^2}{\beta^2}$ · ἄρα $\chi^2 = \frac{\alpha^2 \upsilon^2}{\beta^2} + \alpha^2 = \frac{\alpha^2 \upsilon^2 + \alpha^2 \beta^2}{\beta^2}$ · ἀλλὰ $M'I^2 = K\Pi'^2 = \chi^2$ · ἄρα $MI^2 = \frac{\alpha^2 \upsilon^2 + \alpha^2 \beta^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \times (\upsilon^2 + \beta^2)$. Ο. Ε. Δ.

172. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῆς διαληφθείσης ἐξισώσεως προέρχεται $M'I^2 : \upsilon^2 + \beta^2 :: \alpha^2 : \beta^2$ (Η)· ἀλλ' ἡ ἀποτετμημένη ΚΙ, ἣ ἀντιστοιχεῖ τῇ $M'I = \Pi M' = \upsilon$, ἄρα $\upsilon^2 = KI^2$ · τουτέστι „τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ἐπὶ „τὸν δεύτερον ἄξονα τετράγωνον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν „τετραγώνων τοῦ τε ἀπὸ τῆς συστοιχούσης ἀποτετμημένης, „καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἡμιάξονος, ὡς τὸ τετράγωνον τὸ „ἀπὸ τοῦ πρώτου ἡμιάξονος πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου“· δῆλον ἄρα ἐντεῦθεν, ὡς αἱ ἰδιότητες τῶν τῆς ὑπερβολῆς ἀξόνων ἥκιστα ταυτίζονται, καθὰ ξυμβαίνει τῇ ἐλλείψει (124)· καὶ οὕτως ἄρα οἱ δύω ὑπερβολικοὶ ἄξονες οὐκ ἂν κληθείησαν συζυγεῖς.

173. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς σημείου Μ ἁπτομένην ἀγαγεῖν (σχ. 92).

ΛΥΣΙΣ. Πεπράχθω τὰ πάντα, ὡς ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως (103)· εἰλήφθω ἀμέλει ἐπὶ τῆς εΜ, ΜΡ$=$ΜΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΡ· φημὶ δὴ ὡς εὐθεῖα ἡ ΤΜΧ, δίχα τέμνουσα τὴν ΕΡ, ἐστιν, ἣν ζητοῦμεν, ἡ ἁπτομένη· ἐπεὶ γὰρ ΕΜ $=$ ΜΡ, ἡ ΤΧ δίχα τέμνουσα τὴν ΕΡ, αὐτῇ ἐπισταθήσεται κάθετος (Γεωμ. 164, 217)· ἄρα ΟΕ $=$ ΟΡ· ἅπαν οὖν σημεῖον τῆς ΤΧ παρὰ τὸ Μ, τὸ Ο φέρ' εἰπεῖν, οὐ δύναται εἶναι ἐν τῇ καμπύλῃ· καὶ γὰρ εΡ $=$ εΜ $-$ ΕΜ (ἐκ κατασκευῆς) $=$ Ηη· ἀλλ' εΟ $-$ ΟΡ $<$ εΡ· εἰ-εγ εΡ+ΟΡ γωνιώδη γραμμὴν συνίςησι, τῆς εΟ εὐθείας ἔ. σης· ἄρα εΟ — ΟΡ < Ηη. ἐπεὶ ἄρα ΟΡ = ΟΕ, ἔςαι εΟ — ΕΟ < Ηη· ἄρα τὸ Ο σημεῖον ἐκ ἔςιν ἐν τῇ καμπύ. λῃ (156)· Ο. Ε. Π.

174. ΠΟΡΙΣΜΑ. Καθάπερ καὶ ἐν τῇ ἐλλείψει (104), ἡ γωνία ΕΜΤ = εΜΤ, διὰ τὸ τὴν ΤΜ δίχα τέμνειν τὴν ΕΡ (Γεωμ. 217).

157. ΘΕΩΡΗΜΑ Θ΄. Τύπος τῆς ὑποκαθέτε ΠΤ ἔςι $\frac{\beta^2\chi}{\alpha^2}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ παράλληλός ἐςι τῇ ΤΜ ἡ ΕΡ (Γεωμ. 138), ἔςιν εΡ : εΕ :: ΜΡ : ΕΤ (Γεωμ. 318)· ἀλλ' εΡ = εΜ — ΕΜ = 2α, διὰ τὴν ΕΡ = ΕΜ (ἐκ κατασκευῆς), ἢ εΕ = 2κ, ἢ ΜΡ = ΜΕ = $\frac{\kappa\chi-\alpha^2}{\alpha}$ (170)· ἄρα ἀν. τικαταςάσει, $2\alpha : 2\kappa :: \frac{\kappa\alpha-\alpha^2}{\alpha}$: ΕΤ, ἢ $\alpha : \kappa :: \frac{\kappa\chi-\alpha^2}{\alpha}$: ΕΤ $=\frac{\kappa^2\chi-\alpha^2\kappa}{\alpha^2}$, ὃ ἀφαιρεθέντος ΠΕ = ΠΚ — ΚΕ $=\chi-\kappa$, ἔςαι ΠΤ $=\frac{\kappa^2\chi-\alpha^2\kappa}{\alpha^2}-\chi+\kappa$ $=\frac{\kappa^2\chi-\alpha^2\kappa-\alpha^2\chi+\alpha^2\kappa}{\alpha^2}=\frac{\kappa^2\chi-\alpha^2\chi}{\alpha^2}=$ $\frac{(\kappa^2-\alpha^2)\times\chi}{\alpha^2}$. ἀλλὰ $\kappa^2-\alpha^2=\beta^2$ (162) ἄρα ΠΤ = $\frac{\beta^2\chi}{\alpha^2}$. Ο. Ε. Δ.

176. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ κανονικὴ ΤΜ $= \sqrt{\Pi M^2 + \Pi T^2}$ $= \sqrt{\frac{\beta^2 \chi^2 - \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^4 \chi^2}{\alpha^4}}$ (164, 175).

177. ΘΕΩΡΗΜΑ Ι'. Τύπος τῆς ὑφαπτομένης ΤΠ ἐςι $\frac{\chi^2 - \alpha^2}{\chi}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΤΥΜ (19) ἐςι $\div$ ΠΤ $= \frac{\beta^2 \chi}{\alpha^2}$ (175): ΠΜ $= \upsilon$: ΤΠ (Γεωμ. 341). ἄρα ΤΠ $= \upsilon^2 : \frac{\beta^2 \chi}{\alpha^2}$· ἐςι δὲ $\upsilon^2 = \frac{\beta^2 \chi^2 - \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2}$ (164)· ἄρα ΤΠ $= \frac{\beta^2 \chi^2 - \alpha^2 \beta^2}{\beta^2} \times \frac{\alpha^2}{\beta^2 \chi} =$ $\frac{\beta^2 \chi^2 - \alpha^2 \beta^2}{\beta^2 \chi} = \frac{\chi^2 - \alpha^2}{\chi}$. Ο. Ε. Δ.

178. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν δ' ἐν τύπῳ ΠΤ $= \frac{\chi^2 - \alpha^2}{\chi}$ αἱ εὐθεῖαι ἀποτετμημέναι ὦσι πρὸς τῇ κορυφῇ, εἴτ' οὖν τῇ ἀρχῇ τοῦ ἄξονος, τηνικαῦτα χ τρέψεται εἰς $\alpha + \chi$, οὗτινος ἀντὶ χ ἀντικατασαθέντος γενήσεται ὁ τύπος ΠΤ $= \frac{2\alpha\chi + \chi^2}{\alpha + \chi}$· ἐὰν δὲ ἀπὸ ΠΤ ἀφαιρεθῇ ΗΠ $=$ χ, γενήσεται ΠΤ $-$ ΗΠ $=$ ΗΤ $= \frac{2\alpha\chi + \chi^2}{\alpha + \chi} - \chi =$ $\frac{\alpha\chi}{\alpha + \chi}$· ἐν τούτῳ οὖν τῷ τύπῳ ὑποτεθέντος $\chi = \infty$, εὑρεθήσεται ΗΤ $= \frac{\alpha \cdot \infty}{\infty} = \alpha$· ἡ ἄρα ΗΤ μείζων τῆς

ΗΚ οὐδέποτε γίνεται· ϗ πᾶσαι αἱ τῆς ὑπερβολῆς ἁπτόμεναι μεταξὺ τῶν Η, Κ πίπτουσιν· ἀλλ' ἐν τῇ παραβολῇ $\text{ΗΤ} = \chi$ (46), ὑποτεθέντος $\chi\ \infty$, ΗΤ καθίςαται ἄπειρος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ὑπερβολῆς.

179. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐὰν ἐπιςῇ κάθετος (σχ. 93) τῷ πρώτῳ ἄξονι κατὰ τὴν κορυφὴν Σ ἡ $\Sigma\eta = \text{ΚΝ}$, εἴτ' οὖν τῷ δευτέρῳ ἡμιάξονι, ϗ $\Sigma\Xi = \Sigma\eta$, ϗ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ Κητ, ΚΞΒ· αὗται Ἀσύμπτωτοι ἀκούουσι τῆς ὑπερβολῆς· αἱ δ' εὐθεῖαι Με, ΕΜ, ΡΜ αἱ παράλληλαι, εἴτε τῷ πρώτῳ, εἴτε τῷ δευτέρῳ ἄξονι, εἴτε καὶ τῇ ἀντιθέτῳ ἀσυμπτώτῳ, τεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον ὀνομάζονται.

180. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον τεταγμένης παραλλήλου τῷ δευτέρῳ ἄξονι, ϗ τῆς αὐτῆς προαγωγῆς ΜΑ προεκβαλλομένης εἰς τὴν ἑτέραν ἀσύμπτωτον, ἀεὶ ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἡμιάξονος τετραγώνῳ· εἴτ' οὖν $\text{Με} \times \text{ΜΑ} = \text{ΚΝ}^2 = 6^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΚΣη, ΚΠε ἐςὶ $\text{ΚΣ} = \alpha : \Sigma\eta = \beta :: \text{ΚΠ} = \chi : \text{Πε}$· ἄρα $\text{Πε} = \frac{\beta\chi}{\alpha}$.

ἀλλὰ $\text{Με} = \text{Πε} - \text{ΠΜ} = \frac{\beta\chi}{\alpha} - \upsilon$, ϗ $\text{ΜΑ} = \text{Πε}$ $\left(= \frac{\beta\chi}{\alpha}\right) + \text{ΠΜ}\ (= \upsilon)$· ἄρα $\text{Με} \times \text{ΜΑ} =$

$$\frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \upsilon^2 = \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2} \ (164) = \beta^2 \cdot \text{ἄρα}$$

Mε × MA $= \beta^2$ · Ο. Ε. Δ.

181. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐπεὶ ἑκάτερον τῶν γινομένων ΜΕ × ΜΑ, Ιτ × ΙΒ ἐςὶν $= \beta^2$, ϗ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα· ϗ ὅσα δήποτε δὲ ἄλλα τοιάδε γινόμενα ἴσα ἔσονται.

182. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐπεὶ δὲ Mε × MA $=$ KN², ἄρα Mε : KN :: KN : MA, τουτέςιν „ὁ δεύ„τερος ἡμιάξων ἐςὶ μέση ἀνάλογος τῆς τεταγμένης ἐπὶ „τὴν ἀσύμπτωτον, ϗ τῆς προαγωγῆς αὐτῆς προεκβληθεί„σης εἰς τὴν ἑτέραν ἀσύμπτωτον.‟

183. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἡ ὑπερβολὴ προσεγγίζει μᾶλλον ϗ μᾶλλον τῇ ἀσυμπτώτῳ· ϗ γὰρ Mε × MA $=$ KN² $= \beta^2$ · ἄρα $\text{M}\varepsilon = \dfrac{\beta^2}{\text{MA}}$ (Συμβ. Λογ. 258)· ἀλλ' ὅσον ἐπεκτείνεται ἡ ὑπερβολὴ, ἀεὶ αὔξεται ἡ MA, ἄρα ἡ Mε ἐλαττοῦται (Συμβ. Λογ. 259)

184. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἡ ὑπερβολὴ, καίτοι ἐπ' ἄπειρον τῆς ἀσυμπτώτου ἐγγὺς γίνεται, οὐδέποτε μέντοι αὐτῇ συμπίπτει· ἐςὶ γὰρ $\Pi\varepsilon^2 = \dfrac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$ (180), ϗ

$$\Pi\text{M}^2 = \upsilon^2 = \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \beta^2 \cdot \text{ἄρα } \Pi\varepsilon^2 < \Pi\text{M}^2, \text{ ϗ}$$

Πε < ΠΜ ἀείποτε δείκνυται (Συμβ. Λογ. 291).

185. Διὰ ταῦτ' ἄρα καμπύλης ἀσύμπτωτος ἐν γένει καλεῖται εὐθεῖα, ἡ ἐπ' ἄπειρον αὐτῆς ἐγγὺς γινομένη, μηδέποτε δὲ αὐτῇ συμπεσεῖν ἔχουσα.

186. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Τὸ γινόμενον ἐκ τεταγμένης ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον παραλλήλου τῇ ἑτέρᾳ, ϗ τῆς

ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένης ΡΚ, ἐστὶν ἀεὶ εὐσταθὲς ἰσούμενον τῷ $\Sigma\Delta^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω Μο παράλληλος τῇ ΡΚ· ὅθεν Μο = ΡΚ· α'. ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΣΔη, ΜΡε (Γεωμ. 820) ἐστι ΜΡ : ΣΔ :: Με : Ση (β)· ἀλλὰ Με : β :: β : ΜΑ (182)· ἄρα ΜΡ : ΣΔ :: β : ΜΑ.

β'. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΣΔη, ΜΑο ἐστι Ση = β : ΜΑ :: ηΔ = ΣΔ (*) : Μο = ΡΚ· ἄρα ΜΡ : ΣΔ :: ΣΔ : ΡΚ· ἄρα ΜΡ × ΡΚ = $\Sigma\Delta^2$. Ο. Ε. Δ.

157. ΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαγωνίου ΣΔ τετράγωνον $\Sigma\Delta^2$, ἡ ΣΔ × ΔΚ (σημ. τοῦ β'.) δύναμις ὑπερβολικὴ ὀνομάζεται.

188. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἔστω ΜΡ = υ καὶ ΡΚ = χ· ἔσται δὴ $\chi\upsilon = \Sigma\Delta^2$ (186 β'.)· ἐὰν οὖν κληθῇ ΣΔ = $\varkappa$, $\varkappa^2 = \chi\upsilon$ ἔσται ἐξίσωσις τῶν τῆς ὑπερβολῆς ἀσυμπτώτων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἡ ὑπερβολικὴ δύναμις ἰσοῦται τῷ τεταρτημορίῳ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τοῦτε ἀπὸ τοῦ πρώτου ἡμιάξονος καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ γὰρ ΣΔ = $\frac{\Sigma N}{2}$ (Γεωμ. 244) ἄρα $\Sigma\Delta^2 = \frac{\Sigma N^2}{4}$· ἀλλὰ $\Sigma N^2 = K\Sigma^2 + KN^2$ (Γεωμ. 349)· ἄρα $\Sigma\Delta^2 = \frac{K\Sigma^2 + KN^2}{4}$.

189. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ Νε ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἐπὶ τὴν ἑτέραν ἀσύμπτωτον ἀχθῇ, διαπερῶσα τὴν ὑπερβολήν, ἔσται Νκ = Με (σχ. 94).

(*) Ἐπείπερ αἱ διαγώνιοι Κη, ΝΣ τοῦ ὀρθογωνίου ΚΝηΣ εἰσὶν ἴσαι, καὶ τὰ ἡμίση ηΔ, ΣΔ εἰσὶν ἴσα (Γεωμ. 244)·

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἔςωσαν ΜΓ, ΜΡ, καὶ κΘ, κτ παράλληλοι ταῖς ἀσυμπτώτοις· ἔςαι ὖν ΜΡ × ΜΓ (= ΚΡ) = ΣΔ² (χ. 93) ϗ κτ × κΘ = ΣΔ² (185)· ἄρα (χ. 94) ΜΡ × ΜΓ = κτ × κΘ ἄρα ΜΡ : κΘ :: κτ : ΜΓ (Συμβ. Λογ. 241).

β΄. Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜΡε, εκΘ ἐςὶ ΜΡ : κΘ :: Με : εκ· ἄρα Με : εκ :: κτ : ΜΓ.

γ΄. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις Νκτ, ΝΜΓ, ἐςὶ κτ : ΜΓ :: Νκ : ΝΜ· ἄρα Με : εκ :: Νκ : ΝΜ: ἄρα (Συμβ. Λογ. 244) εκ — Με : Με :: ΝΜ — Νκ : Νκ· τυτέςι Μκ : Με :: Μκ : Νκ, ἢ Μκ : Μκ :: Με : Νκ· ἄρα Με = Νκ· Ο. Ε. Δ.

190. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Πᾶσα ἁπτομένη αβη περατυμένη πρὸς ταῖς ἀσυμπτώτοις δίχα τέμνεται κατὰ τὸ τῆς ἁφῆς σημεῖον β· ἅπτεται γὰρ καθ' ἓν μόνον σημεῖον τὸ β τῆς καμπύλης (19)· τὰ δὲ αὐτῆς μέρη τὰ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων ϗ τῆς καμπύλης ἀπολαμβανόμενα εἰσὶν ἴσα (189)· ἄρα αβ = βη.

191. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Δοθεισῶν τῶν ἀσυμπτώτων (χ. 96) ΚΤ, ΚΖ, ϗ σημείυ τυχόντος τῦ ν ὑπὸ τὴν γωνίαν ΤΚΖ κειμένυ, καταγραφήσεται ὑπερβολὴ, διῖυσα διὰ τῦ δοθέντος σημείυ ν· ἀγομένων γὰρ τῶν εὐθειῶν ρνΡ, ΖνΖ΄ κτ, ϗ λαμβανομένων οΡ = ρν, ϗ ΔΖ΄ = νΖ κτ, τὰ σημεῖα Δ, ο κτ ἔσονται ἐν ὑπερβολῇ (189)· δυνάμεθα δὲ χρήσασθαι ϗ τοῖς σημείοις, Δ, Ο, καθάπερ τῷ ν εἰς εὕρεσιν ϗ ἄλλων τῆς ὑπερβολῆς σημείων, κἀκείνοις εἰς εὕρεσιν ἄλλων, ϗ ὕτως ἐφεξῆς, μέχρις ἂν πυκνότατα εὑρεθέντα σημεῖα συγκροτήσωσι τὴν ὑπερβολήν.

192. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Τὰ γινόμενα ΜΤ × ΗΜ, ΒΔ × ΑΒ (χ. 95) ἐκ δύο ὡντινωνῦν εὐθειῶν, ἀγομένων

ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἀσυμπτώτε ἐπὶ τὴν ἑτέραν παραλλήλως μιᾷ τινι ἁπτομένῃ τῇ ΠΕν, εἰσὶν ἴσα.

ΔΕΙΞΙΣ. Διὰ τῶν σημείων Β, Μ, ἀχθεισῶν παρ. αλλήλως τῷ δευτέρῳ ἄξονι τῶν ΤΒχ, ἢ ΘΜΣ, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΔΤ, ΜΘΤ ἔςαι (Γεωμ. 220) ΒΤ : ΜΘ :: ΒΔ : ΜΤ (Ρ), ἐκ δὲ τῶν ΑΒχ, ΣΜΗ ἢ αὐτῶν ὁμοίων, Βχ : ΣΜ :: ΑΒ : ΗΜ (η)· πολλαπλασιασμῷ δὲ τῆς Ρ ἐπὶ η, ἔςαι ΒΤ × Βχ : ΜΘ × ΣΜ :: ΒΔ × ΑΒ : ΜΤ × ΗΜ· ἀλλὰ ΒΤ × Βχ = ΜΘ × ΣΜ (181)· ἄρα ΒΔ × ΑΒ = ΜΓ × ΗΜ. Ο. Ε. Δ.

193. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπὶ δὲ τῆς ἁπτομένης Πν, τὰ μέρη ΑΒ, ΒΔ καθίςανται ΠΕ, Εν, $= \frac{\Pi\nu}{2}$ (199)· ἄ.

ρα $B\Delta \times AB = \Pi E \times E\nu = E\nu^2$, τυτέςι τὰ γινόμε-
„να $B\Delta \times EB$, κτλ. εἰσὶν ἴσα ἕκαςον τῷ τετραγώνῳ
„$E\nu^2$ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιαπτομένης".

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ ὑπερβολικῶν Λογαρίθμων.

194. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἐὰν αἱ ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτυ πρὸς τῷ Κ (σχ. 97) ἀποτετμημέναι Κμ, Κν, Κξ κτλ. ἐν προόδῳ ὦσι γεωμετρικῇ αὐξέσῃ, αἱ θατέρᾳ ἀσυμπτώτῳ παραλλήλως τεταγμέναι ἔσονται ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ φθινέσῃ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ γὰρ $\chi\upsilon = x^2$ (188)· ἐν ἄλλῃ τινὶ χ', ἐν τῇ αὐτῆς ἀντιςοίχῳ Τ, ἕξομεν $\chi' T = x^2$, κτ᾽ ἥγικα ἄρα ἀποτετμημένη διπλασιάζεται, ἡ ἀντίστοιχος αὐτῇ τεταγμένη ὑποδιπλασία καθίσαται· τριπλασιαζομένης δὲ τῆς ἀποτετμημένης, ἡ τεταγμένη τοὐναντίον ὑποτριπλασία γίνεται· ἄλλως γὰρ τὸ γινόμενον ὑπὸ πάσης ἀποτετμημένης χ ϗ τῆς αὐτῇ ἀντιστοίχως τεταγμένης υ οὐκ ἂν ἦν ἴσον ποσῷ μονίμῳ τῷ κ^2· ἐὰν ἄρα αἱ ἀποτετμημέναι ἄυξωσι κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν, αἱ τεταγμέναι μειοῦνται ὡσαύτως κατὰ πρόοδον γεωμετρικήν. Ο. Ε. Δ.]

195. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἐὰν αἱ ἀποτετμημέναι Κγ, Κμ, Κν, Κξ κτλ. ὦσιν ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ, ϗ αἱ διαφοραὶ αὐτῶν γμ, μν, νξ, κτ ἔσονται ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ.

ΔΕΙΞΙΣ. Αὐτόματον τοῦτο ἕπεται ἐκ τῶν δειχθέντων (Συμβ. Λογ. 274).

196. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Τὰ ὑπερβολικὰ χωρία αγμμ, μνμν, κτ τὰ ἐπὶ τῶν εἰρημένων διαφορῶν βεβηκότα, ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα.

ΔΕΙΞΙΣ. Τετμήσθωσαν αἱ διαφοραὶ γμ, μν κτλ· εἰς μέρη, ἰσάριθμα μὲν, ἀπειροστὰ δὲ, πρὸς ἑκάστην δοθεῖσαν γμ, μν ἀναφερόμενα· ἐπινενοήσθωσαν δὲ τὰ χωρία γαμμ, μνμν, κτλ. συγκείμενα ἐκ τῶν ἀπειροστῶν ἐπιφανειῶν σομμ, πτνν τῶν ἐπὶ τοῖς εἰρημένοις ἀπειροστοῖς μορίοις βεβηκυιῶν, αἵπερ ἔσονται στοιχεῖα τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος χωρίων· ἔχει δὲ ἐξ ὑποθέσεως ἕκαστον χωρίον ἴσα τὸν ἀριθμὸν στοιχεῖα, ἃ δὴ εἰσὶ ϗ ἰσάλληλα· ἐπεὶ γὰρ αἱ εὐθεῖαι γμ, μν διῄρηνται εἰς μέρη τὸν ἀριθμὸν ἴσα, ἕκαστον μόριον ομ τῆς πρώτης πρὸς ἕκαστον μέρος πν τῆς δευτέρας ἐστὶν ὡς γμ : μν· ἄρα ομ : πν :: γμ : μν· ἐπεὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως ἐστὶ Κγ : Κμ :: Κμ : Κν, ἔσαι Κγ — Κμ (= γμ) : Κμ :: Κν — Κμ (= μν) : Κν ϗ γμ : μν :: Κμ : Κν· ἀλλὰ Κμ × μμ = Κν × νν (186)· ἄρα Κμ : Κν :: νν : μμ· ἄρα ομ : πν :: νν : μμ, ἢ ομ × μμ = πν × νν, εἴτ' ἂν οομμ = πνννἄρα τὰ ςοιχεῖα τῶ χωρίω ναμμ εἰσὶν ἴσα τοῖς ςοιχείοις τῶ χωρίω μνμν τόντε ἀριθμὸν ἢ τὸ μέγεθος· ἄρα τὰ χωρία ταῦτα εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις. Ο. Ε Δ.

197. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ληφθῶσιν ἄπειροι ἀποτετμημέναι κατὰ πρόοδον χωρῦσαι γεωμετρικὴν, ἐκ τῶν ἀριθμῷ ἀπείρων διαφορῶν προκύψωσιν ὑπερβολικὰ χωρία ἰσάλληλα, πεπερασμένα μὲν καθ' ἓν ἕκαςον, ἀριθμῷ δὲ ἀπερίληπτα· τὸ χωρίον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτω ἢ τῆς ὑπερβολῆς ἀπολαμβανόμενον ἔςιν ἄπειρον.

198, ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ὑποτέθειται ἐν ταύτῃ τῇ δείξει τὰ ςοιχεῖα, εἴτ' ἂν τὰ τραπέζια ομομ, πνπν ὀρθογώνια, ὅπερ ἥκιςα ἀληθές· ἀλλὰ γὰρ τῶν εὐθειῶν ομ, πν ἀπειροςῶν ὄσῶν, τὰ τραπέζια ομμο, δύναται ἐκληφθῆναι ὡς ὀρθογώνια, κυκλικῆς γῶν τῆς ὑπερβολῆς ὑπαρχέσης· τηνικαῦτα γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένη γωνία ἔςιν ὀρθὴ, εἴγε ἔςιν (158) (σχ. 93). ΣΞ = ΚΗ = ΚΣ, ὅπερ ποιεῖ ἰσοσκελὲς τὸ τρίγωνον ΚΣΞ, ἄρα ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΣΚΞ, ΣΚβ ἔςιν = 45°· ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΚβ ἴση 90°· ὑποτιθεμένης ἀλλ' ἂν ἐλλειπτικῆς τῆς ὑπερβολῆς, τὰ τραπεζίδια (σχ. 96) ομομ ἐκληφθῆναι δύνανται ὡς παραλληλόγραμμα, ὧν αἱ παρακείμεναι ταῖς ἴσαις γωνίαις μ, ν πλευραὶ ἀντιπεπονθότως εἰσὶν ἀνάλογοι.

199. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Τῆς ὑπερβολῆς ἐλλειπτικῆς ἔσης τὰ τραπεζίδια οομμ, ππνν ἔσονται ἴσα τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ τῆς καθέτω, τῆς ἀπὸ τοῦ πέρατος ἑκάςης τεταγμένης μμ, νν ἐπὶ τὴν βάσιν καταγομένης· αἱ δὲ κάθετοι αὗται μεθ' ἑκάςης τεταγμένης περιέ-

ξυσι τὴν ἀπόμοιραν τῆς ἀσυμπτώτυ, τὴν ἀπολαμβανομένην ἀπό τε τῆς τεταγμένης ᾗ τῆς καθέτυ τῶν ὁμοίων τριγώνων, ὧν τὰ ὕψη εἶεν ἀνάλογα ταῖς ἀντιςοίχοις τεταγμέναις· τὰ ἄρα, περὶ ὧν προείρηται, παραλληλόγραμμα, ἔχοντα ὕψη τὰς καθέτυς ταύτας, ἔχυσι τὰς ἑαυτῶν βάσεις ἀντιπεπονθότως ἀναλόγυς τοῖς ὕψεσι: διὸ εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις· εἰσὶ δὲ αἱ κάθετοι αὗται ᾗ ὡς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀντιςοίχων γωνιῶν οομ = χγμ· ἄρα τὰ ὑπερβολικὰ χωρία τῆς ὑπερβολῆς ἐλλειπτικῆς ὕσης πρὸς τὰ ὑπερβολικὰ χωρία τῆς ὑπερβολῆς ὕσης κυκλικῆς εἰσὶν, ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ἐλλειπτικῆς ὑπερβολῆς περιεχομένης γωνίας πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

200. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ Κα, Κμ, Κν, Κξ κτ, οἱ ὑπερβολικοὶ τομεῖς Καγ, Κμν, Κνκ, κτλ. ἔσονται ἴσοι ἀλλήλοις τε ᾗ τοῖς ὑπερβολικοῖς τραπεζίοις αγμμ, μνμν, νκνκ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐςι γὰρ Κγ × αγ = Κμ × μμ (186)· ὅθεν Κγ : Κμ :: μμ : αγ, τυτέςι τριγώνων τῶν Κγα Κμμ αἱ τὰς ἴσας γωνίας περιέχυσαι πλευραὶ ἀντιπεπονθότως εἰσὶν ἀνάλογον· δῆλον ὗν ὡς τὰ ὕψη τῶν δε τῶν τριγώνων εἰσὶν, ὡς αἱ πλευραὶ αγ, μμ, ταὐτὸν εἰπεῖν, ἐν λόγῳ ἀντιπεπονθότι τῶν βάσεων, ἢ ᾗ τῶν ἡμιβάσεων· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἰσὶν ἰσάλληλα· κοινῆ δὲ ἀφαιρεθέντος τῦ Κηγ τριγώνυ, καταλειφθήσεται Καη = ηγμμ· κοινῆ δὲ προςεθέντος τῦ αημ, ἔσεται ὁ τομεὺς Καμ = αγμμ· ᾗ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως· Ο. Ε. Δ.

201. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῶν δύω προτεθέντων θεωρημάτων δῆλον, ὡς οἱ τομεῖς, ᾗ τὰ ὑπερβολικὰ τραπέζια, τὰ ἐπὶ τῶν κατὰ γεωμετρικὴν πρόοδον χωρυσῶν ἀποτετμημένων βεβηκότα, συνιςῶσι πρόοδον ἀριθμητικήν· δύνανται

ἄρα θεωρηθῆναι ὡς ὄντα αὐτῶν λογάριθμοι (Συμβ. Λογ. 313)· κἂν ἐὰν ὑποτεθῇ ὡς ἄρα Κγ ἐμφαίνει ἀριθμὸν, ȣ̃ λογάριθμος ἐςὶ ο, τὸ χωρίον αγμμ ἐμφανεῖ τὸν λογάριθμον τȣ̃ ἀριθμȣ̃ Κμ, τὸ δὲ αγνν, τȣ̃ Κν, κτ· ἀκȣ́ȣσι δὲ ȣ̃τοι λογάριθμοι ὑπερβολικοὶ τῆς ὑπερβολῆς κυκλικῆς ȣ̃σης.

202. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ὑποτεθείσης κυκλικῆς τῆς ὑπερβολῆς ακ, ϗ τῆς ἀποτετμημένης Κο = τῇ τεταγμένῃ οο = 1, εὑρεῖν το χωρίον οονν.

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τὴν φυσικὴν ἰδιότητα τῆς ὑπερβολῆς ῥηθείσης ον = χ, ἔξομεν οο × Κο = Κν × νν (188), εἴτ' ȣ̃ν 1 × 1 = (1 + χ) × υ, εἴτ' ȣ̃ν 1 = υ × (1 + χ)· ὅθεν

$$υ = \frac{1}{1+χ} = 1 - χ + χ^2 - χ^3,\ κτ.$$ τȣ́τȣ τεθέντος,

ἐὰν ἀθροισθῶσι πᾶσαι αἱ υ, αἱ ἀπὸ τῶν τεταγμένων οο, ϗ νν ἀπολαμβανόμεναι, εὑρεθήσεται τὸ ζητȣ́μενον, ἢ, ὃ δὴ ταὐτὸν, ἐὰν εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν σειρῶν $χ^0 - χ + χ^2 - χ^3$ κτ. τῶν ἀντιςοιχȣσῶν ἑκάςῃ υ· ἀλλὰ δυνάμεθα τὰς χ ἐπινοῆσαι αὐξȣ́σας κατὰ τὴν πρόοδον ÷ 0.1.2.3.4, κτ. μέχρι τῆς τελευταίας χ = ων, ἥτις ὑποτεθῆναι ἔχει = ∞, ὡς ȣ̃σα ἀπειράκις μείζων τῆς πρώτης, ἥτις ὑποτίθεται ἐκείνης ἀπειροςή· ἐὰν ȣ̃ν ληφθῇ ἡ ἄπειρος σειρὰ τῶν $χ^0 = 1$, εἶτα ἡ ἄπειρος σειρὰ τῶν − χ, εἴτ' ȣ̃ν τῶν κατὰ φυσικὴν τάξιν προϊόντων λειπτικῶν ἀριθμῶν − 1. − 2. − 3. − 4, κτ., ἑξῆς δὲ ἡ ἄπειρος σειρὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ 1.2.3.4.5 κτ., ϗ αἱ σειραὶ τῶν ἀκολȣ́θων ὅρων ὁμοίως, εὑρεθήσεται τὸ ζητȣ́μενον χωρίον· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ~~ὅρων~~ 1, 1, 1, 1 κτ. ἐςὶν = χ· τὸ δὲ τῶν − χ ἐςὶν = −

$\frac{\chi^2}{2}$, τὸ δὲ τῶν χ^2 ἐστιν $= \frac{\chi^3}{3}$ κτ. (ὡς ἐκ τοῦ ἀποδοθέντος (Συμβ. Λογ. 567) τύπου δῆλον)· ἄρα τὸ ζητούμενον χωρίον ἐστιν $= \chi - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{2} - \frac{\chi^4}{4}$ κτ.· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ογ $= -\chi$ (ὅτι αἱ ἀπὸ τοῦ ο πρὸς τὸ ν χωροῦσαι χ κατ' ἐναντίαν ἔννοιαν ταῖς ἤδη τιθεμέναις ἐλήφθησαν), ἔσται Κγ $= 1 - \chi$, καὶ ὑποτεθείσης αγ $= \upsilon$, πορισθήσεται $(1-\chi) \times \upsilon = 1$, εἶτ' οὖν $\upsilon = \frac{1}{1-\chi}$, ἢ (τῆς διαιρέσεως ἐνεργείᾳ γενομένης) $\upsilon = 1 + \chi + \chi^2 + \chi^3$, κτ. τὸ δὲ χωρίον οσαγ εὑρεθήσεται ὂν $= \chi + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{3} + \frac{\chi^4}{4}$ κτ. Ο. Ε. Π.

203. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.** Ἐπείπερ τῶν δύω διαληφθέντων χωρίων, τὸ μὲν ἐμφαίνει τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ Κν, ὅς ἐστι μονάδος μείζων, θάτερον δὲ, τοῦ ἀριθμοῦ Κγ $<$ 1 $=$ Κο, ἐξ ὑποθέσεως, αἱ ἤδη ἡμῖν εὑρεθεῖσαι σειραὶ ἐμφαίνουσι τοὺς ὑπερβολικοὺς λογαρίθμους τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν $1+\chi$, καὶ $1-\chi$· ἀλλ' ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ $1-\chi$, ὅς ἐστιν ἐλάττων μονάδος, καὶ ἑπομένως κλασματίας, ὀφείλει εἶναι λειπτικὸς (Συμβ. Λογ. 330)· τρεπτέον ἄρα τὸ τῶν ὅρων τῆς δευτέρας σειρᾶς σύμβολον, καὶ πάντας τοὺς ὅρους ἀναδεικτέον λειπτικούς· ὅθεν πορισθήσεται ἐν γένει ἡ σειρὰ $\pm \chi - \frac{\chi^2}{2} \pm \frac{\chi^3}{3} - \frac{\chi^4}{4} \pm \frac{\chi^5}{5}$ κτ., δι' ἧς ἐκδηλοῦνται οἱ ὑπερβολικοὶ λογάριθμοι ἀριθμοῦ παντὸς μείζονος, ἢ γοῦν ἐλάττονος, τῆς μονάδος.

204. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Η' σειρὰ αὕτη ἐ μὴ εὐχρηςήσει, εἰμὴ ὑποτεθείη $\chi = 1$, ἢ $\chi < 1$· ἄλλως γὰρ ἐκ ἂν γένοιτο συγκλίνεσα.

205. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ι"ν' εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμε κλασματώδες, ἀφαιρεῖν ἐπάναγκες τε κατὰ τὸν ἀριθμητὴν λογαρίθμε τὸν κατὰ τὸν παρονομάζοντα (Συμβ. Λογ. 336), ἄρα $\Lambda\left(\frac{1+\chi}{1-\chi}\right)$ εὑρεθήσεται ἀφαιρεμένης τῆς σειρᾶς $-\chi - \frac{\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3}$, κ.τ.λ. ἀπὸ τῆς σειρᾶς, $\chi - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{3}$ κ.τ.λ. ὅθεν εὑρεθήσεται $\Lambda\left(\frac{1+\chi}{1-\chi}\right)$ $= 2\chi + \frac{2\chi^3}{3} + \frac{2\chi^5}{5} +$ κ.τ.λ.

206. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Υ'ποτεθείσθω $\frac{1+\chi}{1-\chi} = \frac{\pi}{\kappa}$, ἢ δὴ τῶν κλασμάτων ἀρθέντων πορισθήσεται $\kappa + \kappa\chi = \pi - \pi\chi$, ἢ μεταθέσει, $\kappa\chi + \pi\chi = \pi - \kappa$, ἢ διαιρέσει διὰ $\pi + \kappa$, $\chi = \frac{\pi - \kappa}{\pi + \kappa}$· ἀλλὰ $\Lambda\left(\frac{\pi}{\kappa}\right) = 2\chi + \frac{2\chi^3}{3}$ κτ.· ἐὰν ἄρα ἐν ταύτῃ τῇ σειρᾷ εἰσαχθῶσιν αἱ δυνάμεις τε χ, χ, κτ. πορίζόμεναι ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi = \frac{\pi - \kappa}{\pi + \kappa}$, θηρευθήσεται ὁ λογάριθμος ἕτος ἐν ἀριθμοῖς γνωςῶν ὑποτιθεμένων τῶν ἀριθμῶν π ἢ κ.

Ζητηθήτω φέρ' εἰπεῖν ἀριθμε τε 2 ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος· ἐκεν ἐςὶ $\frac{1+\chi}{1-\chi} = \frac{\pi}{\kappa} = \frac{2}{1}$, τιθεμένων

$\pi = 2$ ϗ $\varkappa = 1$ (εἰδ' εἴη ὁ προκείμενος ἀριθμὸς κλασματίας ϗ $= \frac{2}{1}$ φέρε, γενήσεται $\frac{2}{1} = \frac{\pi}{\varkappa}$)· ϗ δὴ ἕξομεν $\chi = \frac{\pi - \varkappa}{\pi + \varkappa} = \frac{1}{3}$· τιθεμένης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῇ σειρᾷ $2\chi + \frac{2\chi^3}{3} +$ κτ. πορισθήσεται ὁ ζητέμενος ὑπερβολικὸς λογάριθμος· ὃ δὴ πραχθήσεται ἀναγομένων τῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ προκύπτοντα μέχρι τῶν ἑκατὸν μιλλιονίων

$$\chi = \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{1} \times 0,33333333 = 0,33333333$$

$$\frac{\chi^3}{3} = \tfrac{1}{9} \times \frac{\chi}{3} = \tfrac{1}{3} \times 0,03703703 = 0,01234567$$

$$\frac{\chi^5}{5} = \tfrac{1}{9} \times \frac{\chi^3}{5} = \tfrac{1}{5} \times 0,00411522 = 0,00082304$$

$$\frac{\chi^7}{7} = \tfrac{1}{9} \times \frac{\chi^5}{7} = \tfrac{1}{7} \times 0,00045724 = 0,00006532$$

$$\frac{\chi^9}{9} = \tfrac{1}{9} \times \frac{\chi^7}{9} = \tfrac{1}{9} \times 0,00005080 = 0,00000564$$

$$\frac{\chi^{11}}{11} = \tfrac{1}{9} \times \frac{\chi^9}{11} = \tfrac{1}{11} \times 0,00000564 = 0,00000051$$

ἄθροισμα = ... 0,34657351

ὃ τὸ διπλῦν 0,69314702

ὁ ὑπερβολικὸς ἐςὶ λογάριθμος τῦ 2.

207. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ἐν δυσὶν ὑπερβολαῖς τὰ ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ἀντίςοιχα χωρία, τὰ συγκείμενα ἐκ τῶν βεβηκότων ἐπὶ ταῖς διαφοραῖς τῶν ἐφεξῆς κειμένων ἀποτετμημένων, τῶν κατὰ πρόοδον βαινϭσῶν γεωμετρικὴν,

ϗ ἰσȣμένων ἑκάςȣ ἑκάςῳ, εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀτρέπτῳ τὰ τῆς ἑτέρας πρὸς τὰ ἐν θατέρᾳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἰλήφθωσαν γὰρ τέσσαρα χωρία τῆς ἑτέρας ϗ τέσσαρα τῆς ἑτέρας ὑπερβολῆς· ταῦτα ȣ̃ν ἐν ἑκατέρᾳ ἰσάλληλα ἔσονται (196)· τὰ δὲ αὐτῶν ἀθροίσματα, ὧν ἑκάτερον ἐμφαίνει ὁ λογάριθμος τῆς μείζονος ἀποτετμημένης (τῆς πασῶν ἐλάττονος ὑποτιθεμένης = 1), ἔσονται πρὸς ἄλληλα ὡς ἓν ὁποιονȣ̃ν χωρίον τῆς ἑτέρας πρὸς ἓν ὁποιονȣ̃ν χωρίον τῶν ἐν θατέρᾳ· ἄρα κτ.

208. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ ὑπερβολὴ, ἐν ᾗ τὰ μὲν χωρία τῶν ἀσυμπτώτων παριςῶσι τȣ̀ς τῶν κανονίων λογαρίθμȣς, αἱ δ' ἀπὸ τῶν ἀσυμπτώτων ἀποτετμημέναι τȣ̀ς αὐτοῖς συςοιχȣ̃ντας ἀριθμȣ̀ς, εὑρεθήσεται ἀεὶ ὁ λογάριθμος ἀριθμȣ̃ παντὸς τȣ̃ ἐν τοῖς κανονίοις, τȣ̃ 10 δὸς εἰπεῖν, λόγον ἔχων πρὸς τὸν ὑπερβολικὸν λογάριθμον τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃, ὃν ἔχει ὁ ἐν τοῖς κανονίοις λογάριθμος τȣ̃ ἀριθμȣ̃ 2 πρὸς τὸν ὑπερβολικὸν λογάριθμον τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃ 2· ἄρα 0,301030 (λογ. ἐν τοῖς κανον. τȣ̃ 2) : 0,693147 (λογ. ὑπερβ. τȣ̃ 2 ἐν ἑπτὰ μόνοις χαρακτῆρσι) :: 1 (λογ. ἐν τοῖς κανον. τȣ̃ 10) : 2,302585 (λογ. ὑπερβ. τȣ̃ 10)· τοιγαρȣ̃ν, ὅπως ἂν εὑρεθείη λογάριθμος ὁ ἐν τοῖς κανονίοις ἀριθμȣ̃ παντὸς χ, ȣ̃ δέδοται ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος, ὑποτιθεμένȣ μ τȣ̃ ὑπερβολικȣ̃ λογαρίθμȣ τȣ̃ χ, γενέσθω ἡ ἀναλογία· 2,302585 : 1 :: μ : υ = μ × $\frac{1}{2,302585}$, ἢ (ἐνεργείᾳ πραχθείσης τῆς τȣ̃ 1 διὰ 2,302585 διαιρέσεως) υ = μ × 0,434294· ἄρα, ἵν' εὑρεθῇ ὁ τοῖς κανονίοις λογάριθμος παντὸς ἀριθμȣ̃, ἀπόχρη πολλαπλασιάσαι τὸν αὐτȣ̃ ὑπερβολικὸν λογάριθμον ἐπὶ 0,434294· ἐπεὶ δὲ ν

$= \mu \times 0,434$, κτ., πορισθήσεται $\mu = \dfrac{\upsilon \times 1}{0,430,\ \text{κτ.}}$
$= \upsilon \times 2,302585$, τῦτ' ἔςιν „ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθ-
„μος παντὸς ἀριθμῦ ἴσος ἐςὶ τῷ ἐν τοῖς κανονίοις λογαριθ-
„μῳ τῦ αὐτῦ ἀριθμῦ, πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ 2,302585.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ ὑπερβολικῶν ἡμιτόνων ϗ συνημιτόνων.

209. Ἐπεὶ δὲ περὶ ὑπερβολικῶν λογαρίθμων εἴρηται, ὐκ ἂν εἴη ἄπο σκοπῦ παραθέσθαι βραχέα ϗ περὶ ὑπερβολικῶν ἡμιτόνων ϗ συνημιτόνων· ὑπερβολῆς ὖν κυκλικῆς τῆς ΣΑΖ (σχ. 93) ὁ ἡμιάξων ΠΑ = Ο καλείσθω ὁλόκληρον ἡμίτονον ἀναλόγως τῷ κατὰ τὸν κύκλον· ἔςω δὲ $= \mu$ ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος ἀριθμῦ δηλυμένυ διὰ ΠΘ, ϗ τετάχθω ΓΘ πρὸς ὀρθὰς τῇ ἀσυμπτώτῳ ΠΘ, ϗ ἤχθω κάθετος τῷ ἄξονι ἡ ΓΒ· τοιγαρῦν ἡ μὲν ΠΒ ἔςαι τὸ συνημίτονον, ἡ δὲ ΒΓ τὸ ἡμίτονον τῦ ἀριθμῦ μ· ϗ τὸ μὲν ἡμίτονον τῦ μ δηλύσθω διὰ ἡμ. υ.μ, τὸ δὲ συνημίτονον διὰ συνημ. υ.μ· ἐπεὶ δὲ πρὸς τῷ σημείῳ α ἔςι $\beta\gamma = o$, ϗ ΠΒ = Ο = ΠΑ ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν ΣΡ, ΑΚ παραλλήλως τῇ ΘΓ, πορισθήσεται ὑπὲρ τῦ ἀριθμῦ ΠΚ, ἡμ. υ.μ = ο, ϗ συνημ. υ.μ = Ο· οἱ ἀριθμοὶ μ οἱ ἐλάττονες τῦ ΠΚ, ὃν δυνάμεθα ὑποθεῖναι = 1 (ἡ γὰρ 1 ἔςι ποσότης λαμβανομένη πρὸς τὸ δοκῦν) εἰσὶ λειπτικοὶ, ὑπαρκτικὰ μὲν συνημίτονα, λειπτικὰ δὲ ἡμίτονα, ἔχοντες· ἐὰν ὖν γένηται ΠΘ : ΠΚ :: ΠΚ : ΠΡ, πορισθήσεται ΠΡ $= \dfrac{1}{\text{ΠΘ}}$ (ὅτι ΠΚ = 1)· ἐκῦν ὁ λογάριθ-

μος τοῦ ΠΡ ἔσεται $=$ Λ . 1 $-\mu = 0 - \mu = -\mu$, εἴγε ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος τοῦ 1 ἐστὶν $= 0$, ὥσπερ ϗ ὁ ἐν τοῖς κανονίοις· ἀχθείσης οὖν τῆς ΣΡ, ἐπιζευχθεῖσα ἡ εὐθεῖα ΣΓ κάθετος ἐφεστήξει τῷ ἄξονι· ἐπεὶ γὰρ τὰ τρίγωνα ΙΘΓ, ΙΡΣ ὅμοιά εἰσι διὰ τὰς παραλλήλους ΘΓ, ΡΣ. ἄρα ΙΘ : ΙΡ :: ΘΓ : ΡΣ :: ΡΠ : ΠΘ (διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ὑπερβολῆς) (*) ϗ διαιρέσει λόγου, ΙΘ : ΡΘ :: ΡΠ : ΡΘ· ἄρα ΙΘ $=$ ΠΡ· ἐστὶ δὲ ϗ ΠΡ : ΡΚ :: ΤΡ : ΑΚ (διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΠΡΤ, ΠΑΚ) ϗ ἐπείπερ ΠΡ : ΠΚ :: ΠΚ : ΠΘ :: ΘΓ : ΑΚ, ἔσεται ΡΤ : ΑΚ :: ΘΓ : ΑΚ, εἴτ' οὖν ΤΤ : ΘΓ :: ΑΚ : ΑΚ· ἄρα ΘΓ $=$ ΡΤ· ἄρα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΠΡΤ, ΙΘΓ ἔχουσι τὰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχούσας πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἄρα εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις· ἡ δὲ γωνία ΘΙΓ $=$ ΤΠΡ· ἀλλὰ ΤΠΡ $= 45°$· ἄρα ϗ τὸ αὐτῆς παραπλήρωμα ΠΤΡ $= 45°$· ἄρα τριγώνου τοῦ ΠΒΙ ἐστὶν ἥτε Π ϗ Ι γωνία ἑκατέρα $= 45°$· ἄρα ἡ γωνία Β $= 90°$· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΣΓΙ κάθετος ἐφέστηκε τῷ ἄξονι.

210. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ ταύτης τῆς δείξεως ἕπεται εἶναι συνημ. υ . μ $=$ συνημ. υ . $-\mu$· ἑκάτερον γάρ ἐστιν $=$ ΠΒ, εἴγε συνημίτονον τοῦ μ ἐστὶ μέρος τοῦ ἄξονος ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τοῦ κέντρου, ϗ τῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα τεταγμένως ἀγομένης ἀπὸ τοῦ σημείου, ἀφ' οὗ ἄγεται κάθετος τῇ ἀσυμπτώτῳ κατὰ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ λήγει ὁ ἀριθμὸς ΠΡ, ἢ ΠΘ· ἀλλὰ ἡμ. υ $-\mu = -$ ἡμ. υ . μ· ϗ

(*) Ἐστι γὰρ $\upsilon\chi = \varkappa^2$ (188). ἐὰν οὖν κληθῇ ΠΡ $= \chi$, ϗ ΡΣ $= \upsilon$, ϗ ΠΘ $= \chi'$, ϗ ΘΓ $= \upsilon'$· ἔσται $\chi\upsilon = \varkappa^2$, $\chi'\upsilon' = \varkappa^2$· ἄρα $\chi\upsilon = \chi'\upsilon'$· ἄρα $\upsilon' : \upsilon :: \chi : \chi'$, εἴτ' οὖν ΘΓ : ΡΣ :: ΡΠ : ΠΘ.

γὰρ ἡμ. υ. μ = ΒΓ, ϗ ἡμ. υ. — μ = ΒΣ· ἀλλὰ καίτοι ΒΓ = ΒΣ, τὸ μὲν ἔμπης ὑπαρκτικὸν, θάτερον δὲ ἐκληφθήσεται λειπτικὸν διὰ τὴν ἐναντίαν αὐτῶν θέσιν.

211. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δοθέντων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων δύω λογαρίθμων μ, ν, εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον ϗ τὸ συνημίτονον τοῦ αὐτῶν ἀθροίσματος μ + ν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΠΒ = συνημ. υ. μ, ϗ ΒΓ = ἡμ. υ. μ, ϗ ΠΔ = συνημ. υ. ν, καὶ ΔΖ = ἡμ. υ. ν· καὶ ὑποτεθείσθω ΠΜ = συνημ. υ. $\overline{\mu+\nu}$, ϗ ΜΝ = ἡμ. υ. $\overline{\mu+\nu}$· ἐπεὶ δὲ ἡ γωνία ΑΠΚ = 45° = ΠΙΒ, ἔσται ΠΒ = ΒΙ, ϗ δὴ ϗ ΠΔ = ΔΛ, ϗ ΠΜ = ΜΞ· ἔσται ἄρα ΓΙ = ΙΒ — ΒΓ = ΠΒ — ΒΓ = συνημ. υ. μ — ἡμ. υ. μ, ϗ ΖΛ = συνημ. υ. ν — ἡμ. υν, ϗ Νκ = συνημ. υ. $\overline{\mu+\nu}$ — ἡμ. υ. $\overline{\mu+\nu}$· παρὰ ταῦτα, ἐπεὶ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΠΚ ἐστὶν ὀρθογώνιον κατὰ τὸ Κ, ϗ ΠΑ = Ο, ἔσται ΠΚ^2 + ΑΚ^2, ἢ 2ΠΚ^2 = Ο^2, ϗ ΠΚ$^2 = \frac{\text{Ο}^2}{2}$ ϗ ΠΚ $= \frac{\text{Ο}}{\sqrt{2}}$· διὰ δὲ τὸ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΙΘΓ, ἔστι 2ΘΙ^2 = ΓΙ^2, ἢ ΘΙ $= \frac{\text{ΓΙ}}{\sqrt{2}} = \frac{\text{συνημ. υ. μ — ἡμ. υ. μ.}}{\sqrt{2}}$

ὡσαύτως ΗΛ $= \frac{\text{συνημ. υ. ν — ἡμ. υ. ν}}{\sqrt{2}}$, καὶ κΟ $= \frac{\text{συνημ. υ } (\mu+\nu) \text{ — ἡμ. υ } (\mu+\nu)}{\sqrt{2}}$· τελευταῖον δὲ, ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΠΒΙ ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ Β, πρόεισι ΠΙ^2 = ΠΒ^2 + ΒΙ^2 = 2ΠΒ^2, ἢ ΠΙ = $\sqrt{2}$ × συνημ. υ. μ· κατάδηλον δὲ, ὅτι ϗ ΠΛ = $\sqrt{2}$ × συνημ. υ. ν, ϗ Πκ

$= \sqrt{2} \times \text{συνημ.}\ \upsilon\ \overline{\mu + :}$ ἐντεῦθεν ἄρα $\Pi\Theta = \sqrt{2} \times \text{συνημ.}\ \upsilon\mu - \left(\frac{\text{συνημ.}\ \upsilon\mu - \text{ημ.}\ \upsilon\,.\,\mu}{\sqrt{2}}\right)$, ἢ ἀναχθέντος τῦ ὁλοχερῦς εἰς κλάσμα, $\Pi\Theta = \frac{\text{συνημ.}\ \upsilon\,.\,\mu + \text{ημ.}\ \upsilon\,.\,\mu}{\sqrt{2}}$. ὡσαύτως $\Pi H = \frac{\text{συνημ.}\ \upsilon\,.\,\nu + \text{ημ.}\ \upsilon\,.\,\nu}{\sqrt{2}}$, καὶ $\Pi O = \frac{\text{συνημ.}\ \upsilon\,(\mu+\nu) + \text{ημ.}\ \upsilon\,(\mu+\nu)}{\sqrt{2}}$, ἀλλὰ $\Pi K : \Pi\Theta :: \Pi H : \Pi O$ (*)· ἄρα $\frac{O}{\sqrt{2}} : \frac{\text{συνημ.}\ \upsilon\ \mu + \text{ημ.}\ \upsilon\ \mu}{\sqrt{2}} :: \frac{\text{συνημ.}\ \upsilon\,.\,\nu + \text{ημ.}\ \upsilon\,.\,\nu}{\sqrt{2}} : \frac{\text{συνημ.}\ \upsilon\,(\mu+\nu) + \text{ημ.}\ \upsilon\,(\mu+\nu)}{\sqrt{2}}$ ὅθεν ἀποφέρεται ἡ ἐξίσωσις (A) $\text{συνημ.}\ \upsilon\,(\mu+\nu) + \text{ημ.}\ \upsilon\,(\mu+\nu) = \frac{(\text{συνημ.}\ \upsilon\,.\,\mu + \text{ημ.}\ \upsilon\,.\,\mu) \times (\text{συνημ.}\ \upsilon\,.\,\nu + \text{ημ.}\ \upsilon\,.\,\nu)}{O}$.

ἐπεὶ δὲ ἡ τῆς κυκλικῆς ὑπερβολῆς ἐξίσωσις (164) δίδωσιν $\upsilon^2 = B\Gamma^2 = \overline{\text{ημ.}\ \upsilon\,.\,\mu}^2 = \chi^2 - \alpha^2 = \Pi B^2 - \overline{\Pi A}$ $= \overline{\text{συνημ.}\ \upsilon\,.\,\mu}^2 - O^2$ · ἄρα $\overline{\text{συνημ.}\ \upsilon\,.\,\mu}^2 - \overline{\text{ημ.}\ \upsilon\,.\,\mu}^2 = O^2 = (\text{συνημ.}\ \upsilon\,.\,\mu + \text{ημ.}\ \upsilon\,.\,\mu) \times (\text{συνημ.}\ \upsilon\,.\,\mu - \text{ημ.}\ \upsilon\,.\,\nu)$,

---

(*) Ὁ μὲν γὰρ λογάριθμος τῦ $\Pi K = 1$ ἐςιν $= 0$· τῦ δὲ κατὰ τὸν ΠO ἴσυ ὄντος ἐξ ὑποθέσεως τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τῦ $\Pi\Theta$ ϗ τῦ ΠH, οἱ λογάριθμοι τῦ ΠK ϗ τῦ ΠO ἔσονται ὅροι ἄκροι ἀναλογίας ἀριθμητικῆς, ἧς μέσοι ἔσονται οἱ λογάριθμοι τῦ $\Pi\Theta$ ϗ τῦ ΠH· ἄρα οἱ ἀριθμοί, ὧν αὐτοί εἰσι λογάριθμοι, συγκροτῦσιν ἀναλογίαν γεωμετρικήν.

ἢ $\text{συνημ.}\ \upsilon.\mu + \text{ημ.}\ \upsilon.\mu = \dfrac{O^2}{\text{συνημ.}\ \upsilon.\mu - \text{ημ.}\ \upsilon.\mu}$· διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον, $\text{συνημ.}\ \upsilon.\nu + \text{ημ.}\ \upsilon.\nu = \dfrac{O^2}{\text{συνημ.}\ \upsilon.\nu - \text{ημ.}\ \upsilon.\nu}$, καὶ $\text{συνημ.}\ \upsilon.\overline{\mu+\nu} + \text{ημ.}\ \upsilon.\overline{\mu+\nu} = \dfrac{O^2}{\text{συνημ.}\ \upsilon\,(\mu+\nu) - \text{ημ.}\ \upsilon\,(\mu+\nu)}$· εἰσαχθεισῶν δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει Α τῶν εὑρεθεισῶν δυνάμεων τοῦ $\text{συνημ.}\ \upsilon\mu + \text{ημ.}\ \upsilon\mu$, καὶ τοῦ $\text{συνημ.}\ \upsilon.\nu + \text{ημ.}\ \upsilon.\nu$, καὶ ἀναγωγῆς γενομένης, πορισθήσεται

$$\frac{O^4}{\text{συνημ.}\ \upsilon\,(\mu+\nu) - \text{ημ.}\ \upsilon\,(\mu+\nu)} = \text{συνημ.}\ \upsilon\,(\mu+\nu) + \text{ημ.}\ \upsilon\,(\mu+\nu) = \frac{O^3}{(\text{συνημ.}\ \upsilon\mu - \text{ημ.}\ \upsilon\mu) \times (\text{συνημ.}\ \upsilon.\nu - \text{ημ.}\ \upsilon.\nu)}$$

· αἰρομένων ἄρα τῶν κλασμάτων, διαιρέσει διὰ O^3 καὶ μεταθέσει, εὑρεθήσεται ἡ ἐξίσωσις

$$\text{συνημ.}\ \upsilon\,\overline{\mu+\nu} - \text{ημ.}\ \upsilon\,\overline{\mu+\nu} = \frac{(\text{συνημ.}\ \upsilon\mu - \text{ημ.}\ \upsilon\mu) \times (\text{συνημ.}\ \upsilon.\nu - \text{ημ.}\ \upsilon.\nu)}{O} \quad (\text{B})$$

· συναπτομένης δὲ τῆς ἐξισώσεως Β τῇ ἐξισώσει Α (τὰς δὲ δύω ἐξισώσεις ταύτας ὡς δύω ἐξαίρετα θεωρήματα ἐκληπτέον)· εἶτα ἀφαιρουμένης Β ἀπὸ τῆς Α εὑρεθήσεται

$$\text{συνημ.}\ \upsilon\,(\mu+\nu) = \frac{(\text{συνημ.}\ \upsilon\mu + \text{ημ.}\ \upsilon\mu) \times \overline{(\text{συνημ.}\ \upsilon.\nu + \text{ημ.}\ \upsilon.\nu} +}{2O}$$
$$\frac{\overline{\text{συνημ.}\ \upsilon\mu - \text{ημ.}\ \upsilon\mu) \times (\text{συνημ.}\ \upsilon\nu - \text{ημ.}\ \upsilon\nu)}}{2O} \quad (\Gamma)$$

$$\text{ϗ ἡμ. υ } (\mu + \nu) = \frac{\overline{(\text{συνημ. υ } \mu + \text{ ἡμ. υ } \mu) \times}}{2O}$$

$$\frac{\overline{(\text{συνημ. υ . } \nu \times \text{ ἡμ. υ . } \nu)} - \overline{(\text{συνημ. υ } \mu. - \text{ ἡμ. υ } \mu}}{2O}$$

$$\frac{\overline{\times \text{ συνημ. υ}\nu - \text{ ἡμ. υ}\nu)}}{2O} = \frac{\text{συνημ. υ.}\mu \times \text{ ἡμ. υ .}\nu +}{O}$$

$$\frac{\text{συνημ. υ.}\nu \times \text{ ἡμ. υ. }\mu}{O} \; (\Delta). \text{ Ο. Ε. Π.}$$

212. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὸ συνημίτονον ϗ τὸ ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς δύω λογαρίθμων μ ϗ ν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\mu > \nu$, ἀπόχρη θεῖναι ἐν τοῖς δισὶν ἐχάτοις τύποις ἀντὶ συνημ. υ . ν ϗ ἡμ. υ . ν, τὰς ποσότητας συνμ. υ — ν ϗ ἡμ. υ — ν· ἀλλὰ ἡμ. υ — ν = — ἡμ. υ . ν, ϗ συνημ. υ — ν = συνημ. υ . ν (εἰ γὰρ ΠΡ ὑποτεθείη ἴσος ἀριθμῷ $< \iota =$ ΠΚ, τὸ μὲν ἡμίτονον αὐτῦ ΣΒ ἐςὶν ἀριθμὸς λειπτικὸς, τὸ δὲ αὐτῦ συνημίτονον ΠΒ προδήλως ὑπαρκτικός)· ἀπόχρη ἄρα ἐν τοῖς προεκτεθεῖσι τύποις ἀπονεῖμαι τὸ σύμβολον — τῷ ημ. υ . ν· καὶ δὴ πορισθήσεται

$$\text{συνημ. υ } (\mu - \nu) = \frac{\text{συνημ. υ . } \mu \times \text{ συνημ. υ . } \nu \; -}{O}$$

$$\frac{\text{ἡμ. υ . }\mu \times \text{ ἡμ. υ . }\nu}{O}, \text{ ἡμιτ. υ } (\mu - \nu) = \frac{\text{συνημ. υ . }\nu \times \text{ ἡμ υ.}\mu}{O}$$

$$\frac{- \text{ συνημ. υ . }\mu \times \text{ ἡμ. υ . }\nu.}{O}$$

Ἐὰν δ' ὑποτεθῇ μ — ν, συνήφθω ἡ ἐξίσωσις Δ τῇ ἐξισώσει Γ, ϗ εἶτα ἀφῃρήσθω ἡ Δ τῆς Γ· ϗ δὴ εὑρεθύσονται δύω ἕτεραι ἐξισώσεις

$$\sigma υνημ.\, υ\,.\, 2μ + ημ.\, υ\,.\, 2μ = \frac{(\sigma υνημ.\, υ\,.\, μ + ημ.\, υ\,.\, μ)^2}{O}\ (Z)$$

$$\sigma υνημ.\, υ.\, 2μ - ημ.\, υ.\, 2μ = \frac{(\sigma υνημ.\, υ.\, μ - ημ.\, υ.\, μ)^2}{O}\ (Θ).$$

συναπτομένης δὲ τῆς Θ τῇ Ζ ϗ διὰ 2 διαιρυμένης, εἶτα δὲ τῆς Θ ἀπὸ τῆς Ζ ἀπαγομένης ϗ διὰ 2 διαιρυμένης, προΐασιν αἱ δύω ἐφεξῆς ἐξισώσεις

$$\sigma υνημ.\, υ\,.\, 2μ = \frac{(\sigma υνημ.\, υ\,.\, μ + ημ.\, υ\,.\, μ)^2 +}{2O}$$

$$\frac{(\sigma υνημ.\, υ\,.\, μ - ημ.\, υ\,.\, μ)^2}{2O},\quad ημ.\, υ.\, 2μ =$$

$$\frac{(\sigma υνημ.\, υ\, μ + ημ.\, υ\, μ)^2 - (\sigma υνημ.\, υ\, μ - ημ.\, υμ)^2}{2O}$$

ἐὰν δὲ πρὶν ἢ ἀλλήλαις συναφθῶσιν, ἢ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἐξισώσεις Θ, Ζ, ἐξαχθῶσιν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι αὐτῶν, ἐν τῇ μετ' ἀλλήλων συνάψει, ϗ ἐν τῇ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρέσει, προΐασιν αἱ ἐξισώσεις

$$\sigma υνημ.\, υ\, μ = \frac{(\sigma υνημ.\, υ\, 2μ + ημ.\, υ\, 2μ)^{\frac{1}{2}} +}{2O^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(\sigma υνημ.\, υ\, 2μ - ημ.\, υ\, 2μ)^{\frac{1}{2}}}{2O^{\frac{1}{2}}},\quad ημ.\, υ\, μ =$$

$$\frac{(\sigma υνημ.\, υ\, μ + ημ.\, υ\, 2μ)^{\frac{1}{2}} - (\sigma υνημ.\, υ\, 2μ - ημ.\, υ\, 2μ)^{\frac{1}{2}}}{2O^{\frac{1}{2}}}.$$

ἐὰν δὲ τοῖς δυσὶ λογαρίθμοις μ, ν προσεθῇ τρίτος ὁ π, ἐκ τῶν ἐξισώσεων Α, Β (211) ἕπεται

$$\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\ (\mu+\nu+\pi) + \eta\mu.\ \upsilon\ (\mu+\nu+\pi) = \frac{\overline{\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\upsilon(\mu+\nu) + \eta\mu.\upsilon(\mu+\nu)} \times \overline{\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\upsilon\pi + \eta\mu.\upsilon\pi}}{\mathrm{O}},$$

$$\text{κ}\ \sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\ (\mu+\nu+\pi) - \eta\mu.\ \upsilon\ (\mu+\nu+\pi) = \frac{\overline{\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\upsilon(\mu+\nu) - \eta\mu.\upsilon(\mu+\nu)} \times \overline{\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\upsilon\pi - \eta\mu.\upsilon\pi}}{\mathrm{O}}.$$

εἰσαχθεισῶν δὲ ἐν ταύταις ταῖς ἐξισώσεσι τῶν δυνάμεων τῦ $\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\ (\mu+\nu) + \eta\mu.\ \upsilon\ (\mu+\nu)$ κ τῦ $\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\ (\mu+\nu) - \eta\mu.\ \upsilon\ (\mu+\nu)$, λαμβανομένων ἐκ τῶν ἐξισώσεων A, B, πορισθήσονται ταῦτα τὰ δύω ἄλλα θεωρήματα·

$$\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\ (\mu+\nu+\pi) + \eta\mu.\ \upsilon\ (\mu+\nu+\pi) = \frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\,\mu + \eta\mu.\ \upsilon\,\mu) \times (\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon.\nu + \eta\mu.\ \upsilon.\nu)}{\mathrm{O}^2} \frac{\times (\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\pi + \eta\mu.\ \upsilon\pi)}{\mathrm{O}^2}\ (\mathrm{H})\cdot$$

$$\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\ (\mu+\nu+\pi) - \eta\mu.\ \upsilon\ (\mu+\nu+\pi) = \frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\,\mu - \eta\mu.\ \upsilon\,\mu)}{\mathrm{O}^2}. \frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\,\nu - \eta\mu.\ \upsilon\,\nu)\ .\ (\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon.\pi - \eta\mu.\ \upsilon\,\pi)}{\mathrm{O}^2}\ (\mathrm{I})\cdot$$

ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\mu = \nu = \pi$, κ προςεθῇ ἡ I τῇ H, καὶ ἀπ᾽ αὐτῆς εἶτα ἀφαιρεθῇ, προκύψωσι

$$\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon.\ 3\mu = \frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon.\mu + \eta\mu.\ \upsilon\,\mu)^3}{2.\mathrm{O}^2} + \frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon.\mu + \eta\mu.\ \upsilon\,\mu)^3}{2.\mathrm{O}^2},$$

κ

$$\eta\mu.\ \upsilon.\ 3\mu = \frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\,\mu + \eta\mu.\ \upsilon\,\mu)^3 - (\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\,\mu - \eta\mu.\ \upsilon\,\mu)^3}{2.\mathrm{O}^2}.$$

ἐὰν δὲ πρὸ τῆς προθέσεως ϗ ἀφαιρέσεως ληφθῶσιν αἱ κυβικαὶ ῥίζαι, εὑρεθήσεται

$$\text{συνημ. } \upsilon . \mu = \frac{(\text{συνημ. } \upsilon\, 3\mu + \text{ημ. } \upsilon\, 3\mu)^{\frac{1}{3}} +}{2.\, O^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{(\text{συνημ. } \upsilon\, 3\mu - \text{ημ } \upsilon\, 3\mu)^{\frac{1}{3}}}{2.\, O^{\frac{2}{3}}}, \text{ ϗ ἡμ. } \upsilon \mu =$$

$$\frac{(\text{συνημ. } \upsilon . 3\mu + \text{ημ. } \upsilon . 3\mu)^{\frac{1}{3}} - (\text{συνημ. } \upsilon\, 3\mu + \text{ημ } \upsilon\, 3\mu)^{\frac{1}{3}}}{2.\, O^{\frac{2}{3}}}$$

καὶ ἐν γένει:

$$\text{συνημ. } \upsilon . \nu\mu = \frac{(\text{συνημ. } \upsilon\, \mu - \text{ημ. } \upsilon \mu)^{\nu} +}{2.\, o^{\nu - 1}}$$

$$\frac{(\text{συνημ. } \upsilon\, \mu - \text{ημ. } \upsilon\, \mu)^{\nu}}{2.\, o^{\nu - 1}}, \text{ ϗ ἡμ. } \upsilon . \nu\mu =$$

$$\frac{(\text{συνημ. } \upsilon . \mu + \text{ημ. } \upsilon\, \mu)^{\nu} - (\text{συνημ. } \upsilon\, \mu - \text{ημ. } \upsilon\, \mu)}{2.\, o^{\nu - 1}}$$

τοῦ ν πάντα ἀριθμὸν δυναμένου. Παραβαλλομένων δὲ τῶνδε τῶν τύπων πρὸς τοὺς τῶν ἡμιτόνων ϗ συνημιτόνων τῶν πολλαπλῶν κυκλικῶν τόξων (Γεωμ. 507, 508), μεγάλη ἀναλογία φανήσεται τῶν κυκλικῶν πρὸς τὰ ὑπερβολικά.

ΚΕΦΑΛ. ΔΕΚΑΤ. ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ διαμέτρων τῆς ὑπερβολῆς.

213. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Πᾶσα διάτετρος Μμ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ κέντρον (σχ. 99).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἤχθω τεταγμένως ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ ΜΕ ϗ ἔςω ΚΔ = ΚΕ, ϗ Δμ κάθετος τῇ ΚΔ· ὐκῦν τὸ ΚΕΜ = ΚΔμ· ἄρα ΕΜ = Δμ· ἀλλ' ἐν τῇ ὑπερβολῇ δύω ἴσον ἀπέχυσαι τῦ κέντρυ Κ εἰσὶν ἴσαι· τῆς ΕΜ ἄρα τεταγμένης ἔσης, ϗ Δμ ἔσεται τεταγμένη· ἄρα τὸ σημεῖον μ πέρας τῆς Δμ ϗ τῆς Μμ ὡσαύτως ἔςαι ἐν τῇ καμπύλῃ· ἄρα Κμ = ΚΜ ἔςι τὸ ἀληθὲς μέρος τῆς διαμέτρυ τὸ ἀπὸ τῦ κέντρυ Κ ϗ τῆς καμπύλης ἀπολαμβανόμενον. Ο. Ε. Δ.

214. ΘΕΩΡΗΜΑ Β. Πᾶσα διάμετρος μΜδ δίχα τέμνει τὰς ἐφ' ἑαυτὴν διπλᾶς τεταγμένας, δΙ = δτ (σχ. 100).

ΔΕΙΞΙΣ Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΜΤ, Κδρ ἔςι ΜΤ : δρ :: ΚΜ : Κδ· ἐκ δὲ τῶν ΚξΜ, Κοδ ὁμοίων ϗ αὐτῶν, Μξ : δο :: ΚΜ : Κδ· ἄρα ΜΤ : δρ :: Μξ : δο, ϗ ἐναλλὰξ, ΜΤ : Μζ :: δρ δο· ἀλλὰ ΜΤ = Μξ (190)· ἄρα δρ = δο· ἀλλὰ Ιρ = οτ (189)· ἄρα δΙ = δτ. Ο. Ε. Δ.

215. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὁρίζεται ἐν ὑπερβολῇ διάμετρος ἡ Μ΄΄μ΄ συζυγὴς ἑτέρᾳ διαμέτρῳ τῇ Μμ, διαπερωμένης διὰ τῦ Κ κέντρυ τῆς Μ΄΄μ΄ παραλλήλυ τῇ ΤΜ άπτομέ-

τῃ διὰ M ἀρχῆς τῆς πρώτης διαμέτρȣ Mμ διηκέσῃ, ϗ γινομένης $K\mu'$ ϗ $KM'' = TM$.

216. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἐν ὑπερβολῇ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τεταγμένης ἐπὶ διάμετρον Mμ ἐςι πρὸς τὸ περιεχόμενον ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένων, εἴτ' ȣ̃ν $\delta\mu \times \delta M$, ὡς τὸ τετράγωνον $K\mu'^2$ τὸ ἀπὸ τῆς συζυγȣ̃ς ἡμιδιαμέτρȣ πρὸς τὸ τετράγωνον KM^2 τὸ ἀπὸ τῆς ἑτέρας συζυγȣ̃ς.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω $\delta\tau = \upsilon$, ϗ $K\mu' = \beta$, ϗ $KM = \alpha$, ϗ $K\delta = \chi$· ὅθεν $\delta M = \chi - \alpha$, ϗ $\delta\mu = \chi + \alpha$, ϗ $\delta M \times \delta\mu = \chi^2 - \alpha^2$· φημὶ δὴ ὡς ἐςιν $\upsilon^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$.

Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις KMT, Kδρ, ἐςι $KM = \alpha : TM :: K\delta = \chi : \delta\rho$· ἀλλὰ $TM = K\mu = \beta$ (215)· ἄρα $\alpha : \beta :: \chi : \delta\rho$· ἄρα $\delta\rho = \frac{\beta\chi}{\alpha}$· ἐςι δὲ $I\delta = \delta\tau$ (214) υ. ἄρα $I\rho = \frac{\beta\chi}{\alpha} - \upsilon$, ϗ $Io = I\delta + \delta\tau + \tau o, = \frac{\delta\chi}{\alpha} + \upsilon$ (ἐπεὶ $\tau o = I\rho$)· ἄρα $I\rho \times Io = \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \upsilon^2$.

Ἀλλὰ $I\rho \times Io = MT^2$ (193), $K\mu'^2 = \beta^2$· ἄρα $\beta^2 = \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \upsilon^2$· ἄρα $\upsilon^2 \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \beta^2 = \frac{\beta^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2}{\alpha^2}$· ἐντεῦθεν ἄρα $\upsilon^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ (P) Ο. Ε. Δ.

217. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πρὸς τῷ κέντρῳ μὲν τῆς ἀποτο-

μῆς γινομένης, ὡς δέδεικται, ἔςαι $\upsilon^2 = \dfrac{\beta^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2}{\alpha^2}$ ἐξίσωσις τῶν ἐπὶ πᾶσαν διάμετρον τεταγμένων· ὁ δὲ τύπος ταυτίζεται τῷ εὑρεθέντι ὑπὲρ τῶν ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα τεταγμένων (164).

Πρὸς μέντοι τῇ κορυφῇ Μ τῆς διαμέτρυ Μμ ἀρχομένης τῆς ἀποτομῆς, ἔςαι $\delta\mathrm{M} = \chi$, ϗ $\delta\mu = 2\alpha + \chi$, ϗ $\delta\mathrm{M} \times \delta\mu = 2\alpha\chi + \chi^2$· ἡ δὲ ῥηθεῖσα ἐξίσωσις ἐπὶ πάσης διαμέτρυ γενήσεται $\upsilon^2 \dfrac{2\alpha\chi\beta^2 + \chi^2\beta^2}{\alpha^2}$, ὥσπερ κἀπὶ τῦ πρώτυ ἄξονος εὕρηται (166).

218. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἐν ὑπερβολῇ τὸ ὑπὸ δύο συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΚΜμΤ, ἰσῦται τῷ ὑπὸ τῶν ἡμιαξόνων ΒηΚΣ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ $\mathrm{M}\nu \times \mathrm{K}\nu = \mathrm{K}\Pi \times \Sigma\Pi$ (186, 187) ἐςι $\mathrm{K}\Pi : \mathrm{K}\nu :: \mathrm{M}\nu : \Sigma\Pi$· ἤχθωσαν ἐν κάθετοι αἱ Μυ, Σχ· ἐκ δὴ τῶν ὁμοίων τριγώνων Μυν, ΣχΠ (*) ἔςαι $\mathrm{M}\nu : \Sigma\Pi :: \mathrm{M}\upsilon : \Sigma\chi$· ἄρα $\mathrm{K}\Pi : \mathrm{K}\nu :: \mathrm{M}\upsilon : \Sigma\chi$· ἄρα $\mathrm{K}\Pi \times \Sigma\chi = \mathrm{K}\nu \times \mathrm{M}\upsilon$.

Παρὰ ταῦτα α΄. $\mathrm{K}\Pi \times \Sigma\chi = 2\mathrm{K}\Pi\Sigma$ (Γεωμ. 285)· ἐςι δὲ $2\mathrm{K}\Pi\Sigma = \mathrm{K}\eta\Sigma$, ὅτι $\mathrm{K}\Pi = \Pi\eta$ (Γεωμ. 244)· ἄρα $\mathrm{K}\nu \times \mathrm{M}\upsilon = \mathrm{K}\eta\Sigma$· β΄. $\mathrm{K}\nu \times \mathrm{M}\upsilon = \mathrm{KMT}$· ἐπεὶ $\mathrm{K}\nu \times \mathrm{M}\upsilon = 2\mathrm{K}\nu\mathrm{M} = 2\mathrm{KMA}$ (Γεωμ. 237)· ἀλλὰ $2\mathrm{KMA} =$

(*) Ἡ μὲν γὰρ Μν ἔςι παράλληλος τῇ ἀσυμπτώτῳ Κρ· ἀλλὰ ϗ ΣΠ ἔςι παράλληλος τῇ αὐτῇ ἀσυμπτώτῳ Κρ, ὅτι ἐκ κατασκευῆς (179) παραλληλόγραμμόν ἐςι τὸ ΒΣΚη· ἄρα Μυ παράλληλός ἐςι τῇ ΣΠ· ἐντεῦθεν ἄρα δύο τρίγωνα τὰ Μυν, ΣΠχ ἔχυσι δύο πλευρὰς παραλλήλυς ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ϗ ἑπομένως εἰσὶν ὅμοια.

ΚΜΤ, εἴγε ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΚξΤ, ΤΜΑ, ἐςὶ ΤΚ : ΤΑ :: Τξ : ΤΜ· ἄρα ἐπεὶ ΤΜ $= \frac{\text{Τ}\xi}{2}$ (190), ἐςαι ΤΑ $= \frac{\text{ΤΚ}}{2}$· ἄρα 2ΚΜΑ = ΚΜΤ· ἄρα Κυ × Μυ = ΚΜΤ· ἄρα ΚηΣ = ΚΜΤ· ἐντεῦθεν ἄρα (Γεωμ. 237), τὸ ὅλον ὀρθογώνιον ΒηΚΣ, τὸ ὑπὸ τῶν δύω ἡμιαξόνων περιεχόμενον, ἴσον ἐςὶ τῷ ὅλῳ παραλληλογράμμῳ ΚΜμΤ, τῷ ὑπὸ δύω συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων περιεχομένῳ (Συμϐ. Λογ. 234) Ο. Ε. Δ.

219. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὡς δέδεικται κἀν τῇ ἐλλείψει, ἐπεὶ ΚΤΜμ' = μ'Κ × ΜΞ, ἔςαι ΜΞ × μΚ = ΚΣ (= α) × ΒΚ (= β) (181).

220. Ἐὰν αἱ ἐπὶ ἀσύμπτωτον ὑπερϐολῆς τεταγμέναι ΜΡ, παράλληλοι δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ ΚΒ, προαχθῶσιν, ἕς ὃ ἂν γένηται ΜΡ = ΡΔ· αὐτὸ δὲ τῦτο γένηται ϗ ἐπὶ τῶν ἄλλων τριῶν κλωνῶν τῶν δύω ἀντικειμένων ὑπερϐολῶν, διὰ δὲ τῶν ὕτως ὁριζομένων σημείων διαχθῶσιν αἱ καμπύλαι δΛΔ, Νλν, πορισθήσονται δύω ἀντικείμεναι ὑπερϐολαὶ, αἵτινες κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι ταῖς ΜΣμ, Οσο, ὡς ϗ αὗται ἐκείναις, ἀκῦσι, τὺς αὐτὺς ἔχυσι πᾶσαι ἄξονας, πλὴν ὅτι, ὁ μὲν δεύτερος τῶν πρώτων ἔςαι πρῶτος, ὁ δὲ πρῶτος, δεύτερος ἄξων τῶν δευτέρων ὑπερϐολῶν· ὅτι δὲ ὑπερϐολαὶ ἡμῖν αἱ καμπύλαι, δῆλον· ὄντος γὰρ ΚΡ × ΜΡ = ΚΤ² = $\varkappa^2$, ἐπεὶ ΜΡ = ΡΔ, ἔςαι ϗ ΚΠ × ΡΔ = ΚΤ² = $\varkappa^2$ (188) = χυ.

221. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄρα $\upsilon = \frac{\varkappa^2}{\chi}$ ἐπὶ ἑκατέρο.

τῶν κλωνῶν ΣΜ, ΛΔ· ὅσῳ τοίνυν αὔξει ἡ χ, τοσέτῳ μειῦται ἡ υ, τετ' ἔστιν αἱ τεταγμέναι ἐπὶ τὲς συστοίχες κλῶνας τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ὑπερβολῶν ἐν λόγῳ εἰσὶν ἀντιπεπονθότι τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτετμημένων πρὸς τῷ κέντρῳ· ἐὰν δὲ γένηται $\chi = \infty$, ἔσαι $\upsilon = \frac{\kappa^2}{\infty} = o$ (Συμβ. Λογ. 530), τετέστιν ἡ ἀσύμπτωτος ΓΡ ἐφάψεται ἑκατέρε κλωνὸς, ὅταν οἵτε κλῶνες ϗ ἡ ἀσύμπτωτος ἐπ' ἄπειρον προαχθέντα ἐπινοηθῶσι· συνελόντι δ' εἰπεῖν, αἱ ἀσύμπτωτοι τῶν πρώτων ὑπερβολῶν ἔσονται αἱ αὐταὶ ταῖς τῶν κατὰ συζυγίαν ἐκείναις ἀντικειμένων· ἐὰν ἐν οἱ ὀκτὼ κλῶνες προαχθῶσιν ἐπ' ἄπειρον, συνδραμῦνται ἀδιατμήτως ταῖς ἀσυμπτώτοις ἀνὰ δύω, ϗ ὕτως ἀπογεννηθήσεται σχῆμα, πρὸς τοῖς τέσσαρσι τοῖς συνδρομῆς σημείοις περατέμενον, τοῖς τε κέντρε ἀπείρως ἀπέχεσι.

222. Ἤχθω ἐκ τε Σ τεταγμένως ἡ ΣΤ, ϗ προήχθω εἰς τὴν συζυγῆ ὑπερβολήν· ἐπεὶ ὖν ἐστι ΜΡ = ΡΔ ἔσαι ϗ ΣΤ = ΤΛ· τὸ δὲ Λ ἔσαι κορυφὴ τῆς ὑπερβολῆς δΛΔ, καθάπερ ϗ τὸ Σ τῆς ΜΣμ· ἐπεὶ δὲ αἱ ἀσύμπτωτοι ἁπάσης ὑπερβολῆς ὁρίζονται ἀγομένων εὐθειῶν ἐκ τε κέντρε Κ, ϗ τῶν περάτων b, B εὐθείας καθέτε ἀγομένης τῷ πρώτῳ ἄξονι, ἰσεμένης τῷ δευτέρῳ, ϗ δίχα τεμνομένης ὑπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὑπερβολῆς (179), δῆλον ὅτι Ab μέν ἐστι δεύτερος ἡμιάξων, ΛΚ δὲ πρῶτος ἡμιάξων τῆς δΛΔ ὑπερβολῆς.

223. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Ἐὰν ἐκ τε πέρατος Δ τῆς ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον τῆς ὑπερβολῆς δΛΔ τεταγμένης ἀχθῇ εὐθεῖα ἡ ΔΚΝ, διὰ μὲν τε κέντρε Κ διήκεσα, τῇ δ' ἀντικειμένῃ ὑπερβολῇ συμβάλλεσα, ἡ ΔΝ ἔσαι συ.

ζυγὴς διάμετρος τῆς ΜΟ, τῆς ἀπὸ τῦ Δ σημείυ τῦ ἀντιςοίχυ τῷ Ν ἀρχομένης, ϗ διὰ τῦ κέντρυ διερχομένης, ϗ πρὸς τῷ Ο σημείῳ τῆς ΟσΟ ὑπερβολῆς περατυμένης.

ΔΕΙΞΙΣ. Διάμετρος γὰρ συζυγὴς τῇ ΜΟ ἐςιν ἡ ἀγομένη διὰ τῦ κέντρυ Κ παραλλήλως τῇ κατὰ τὸ Μ ἁπτομένῃ ϑΜε (215)· ἀλλ' ἐςὶ ΚΔ = Μϑ, ϗ ΚΝ = Με διὰ τὰ παραλληλόγραμμα ΚΔΜϑ, ΚεΜΝ· ἐπεὶ γὰρ ἐκ κατασκευῆς ΔΠ = ΠΜ, ϗ ΔΜ = Κϑ, (εἴγε διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα εΔϑ, εΡΜ ἐπεί ἐςι ϑε = 2Με (190), ἐςὶ ϗ Κϑ = 2ΡΜ = ΔΜ)· ἄρα τὸ ΔΚΜϑ ἐςὶ παραλληλόγραμμον, ϗ ΔΚ παράλληλός ἐςι πρὸς τὴν Μϑ, ὅπερ ἀπαιτεῖ ἡ ἰδιότης τῶν συζυγῶν διαμέτρων. Ο. Ε. Δ.

224. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ ἄρα συζυγεῖς ὑπερβολαὶ διήκυσι διὰ τῶν περάτων τῶν συζυγῶν διαμέτρων τῶν ἐν ταῖς πρώταις ὑπερβολαῖς, ϗ τὸ ἀνάπαλιν.

225. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἐξίσωσις τῶν ὑπερβολῶν, αἷς ἄξων ἐςὶ Σσ, ὑπάρχει $\upsilon = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = (\chi^2 - \alpha^2)$ (164)· ἀλλὰ τῦ Σσ ὄντος δευτέρυ ἄξονος τῶν συζυγῶν ὑπερβολῶν, ἡ αὐτῶν ἐξίσωσις περιέχυσα τὸν εἰρημένον ἄξονα ἔςαι $\Upsilon^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \times (\alpha^2 + \chi'\chi')$, ὡς εἴτις ἐπιςαμένως τὰ ῥηθέντα (171) ἐπισκέψαιτο γνώσεται· ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις αὕτη τῆς προτέρας μακρῷ διενήνοχεν· ἄρα αἱ συζυγεῖς ὑπερβολαὶ, ἐὰν μὴ ὦσι κυκλικαὶ, μακρῷ διαφέρυσι τῶν αὐταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων.

225. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῆς εἰρημένης σημειώσεως μανθάνομεν, ὡς εἰ ληφθεῖεν δύω τεταγμέναι ἐπὶ τὸν πρω-

τον ἄξονα τῆς ὑπερβολῆς ΣΜ, ϗ κληθεῖεν υ Υ, ϗ δύω τεταγμέναι ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα Σσ τῆς ὑπερβολῆς ΛΔ, ϗ κληθεῖεν π, Π, πορισθήσεται $\upsilon^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ ($\chi^2 - \alpha^2$) καὶ $\Upsilon^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ $(\chi'\chi' - \alpha^2)$, καὶ $\pi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ $(\alpha^2 + \omega^2)$ καὶ $\Pi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ $(\alpha^2 + \omega'\omega')$· συντομίας δὲ χάριν ὑποτεθέντων $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \delta$, ϗ $\chi^2 - \alpha^2 = \sigma$, ϗ $\chi'\chi' - \alpha^2 = \Sigma$ ϗ $\alpha\alpha + \omega^2 = \xi$, ϗ $\alpha\alpha + \omega'\omega' = \Xi$ (ω δὲ ϗ ω' τὰς ἐν τῇ ὑπερβολῇ δ ΛΔ ἀποτετμημένας ἐμφαινόντων) προκύψεσιν $\upsilon^2 : \delta\sigma :: \Upsilon^2 : \delta\Sigma :: \pi^2 : \delta\xi :: \Pi^2 : \delta\Xi$· (εἴγε ἑκάστε τῶνδε τῶν λόγων οἱ ὅροι εἰσὶν ἰσάλληλοι)· διαιρεθέντων δὲ ἑκάστε τῶν ἑπομένων ὅρων διὰ δ, πρόεισιν $\upsilon^2 : \sigma :: \Upsilon^2 : \Sigma :: \pi^2 : \xi :: \Pi^2 : \Xi$· ἐκ τέτων ἄρα δῆλον ὅτι $\upsilon^2 : \sigma :: \pi^2 : \xi$, εἶτ' ἐν (ἀντικαθισαμένων τῶν δυνάμεων τε σ, ϗ ξ) $\upsilon^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \pi^2 : \alpha\alpha + \omega^2$· ὅθεν ϗ $\upsilon^2 : \pi^2 :: \chi^2 - \alpha^2 : \alpha^2 + \omega^2$· „τετ' ἐςι τὰ „τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων, ὧν αἱ μὲν ἐπὶ „τὴν ἑτέραν, αἱ δ' ἐπὶ τὴν ἑτέραν τῶν ἀντισοίχων συ„ζυγῶν ὑπερβολῶν τετάχαται, λόγον ἔχεσι πρὸς ἄλλη„λα, ὃν τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀποτετμημένων πρὸς τῷ „κέντρῳ ἀπὸ τε πρώτε ἄξονος πρὸς τὸ ἄθροισμα τε ἀπὸ τε „δετε πρώτε ἄξονος τετραγώνε, ϗ τε τετραγώνε τε ἀπὸ „τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένης ὑπὸ τεταγμένης „ἀπὸ τυχόντος σημείε τῆς ὑπερβολῆς τῆς συζυγε̃ς ἐπ' „αὐτὸν ἐκεῖνον τὸν πρῶτον ἄξονα.“

226. ΘΕΩΡΗΜΑ ϛ'. Ἐὰν ἀπὸ τῶν περάτων Μ,

Ν δύω συζυγῶν διαμέτρων ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα Σσ τῶν πρώτων ὑπερβολῶν αἱ ΜΠ, ΝΞ, ἔςαι τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ΚΞ τῆς ἐναπολαμβανομένης ὑπὸ τῦ κέντρυ Κ ϗ τῆς τεταγμένης ΝΞ ἴσον τῷ γινομένῳ ἐκ τῶν ἀποτετμημένων ὑπὸ τῆς ἑτέρας τεταγμένης ΜΠ, εἴτ' ὖν τῷ $\chi^2 - \alpha^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐκ γὰρ τῦ ἤδη ἐκτεθέντος πορίσματος (225) ἐςὶ $\text{ΜΠ}^2 : \text{ΝΞ}^2 :: \chi^2 - \alpha^2 : \alpha^2 + \omega^2$· ἀλλὰ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΤΜΠ, ΚΞΝ (ἔχυσι γὰρ δύω πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς παραλλήλυς ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΜΠ τῇ ΞΝ ἐξ ὑποθέσεως, τὴν δὲ ΜΤ τῇ ΚΝ κατὰ τὸ 223) ἔςι $\text{ΜΠ}^2 : \text{ΝΞ}^2 :: \text{ΤΠ}^2 : \text{ΚΞ}^2$· ἄρα $\chi^2 - \alpha^2 : \alpha^2 + \omega^2 :: \text{ΤΠ}^2 : \text{ΚΝ}^2 :: \dfrac{(\chi^2 - \alpha^2)^2}{\chi^2}$ (177) $: \omega^2$· ὥςε $\omega^2 \times (\chi^2 - \alpha^2) = (\alpha^2 + \omega^2) \times \dfrac{(\chi^2 - \alpha^2).(\chi^2 - \alpha^2)}{\chi^2}$· διαιρεθεῖσα δὲ αὕτη ἡ ἐξίσωσις διὰ $\chi^2 - \alpha^2$, ϗ πολλαπλασιαθεῖσα ἐπὶ χ^2, γίνεται $\omega^2 \chi^2 = (\alpha^2 + \omega^2).(\chi^2 - \alpha^2) = \alpha^2 \chi^2 - \alpha^4 + \omega^2 \chi^2 - \alpha^2 \omega^2$· διὰ δὲ μεταθέσεως γενήσεται $\alpha^2 \omega^2 = \chi^2 \alpha^2 - \alpha^4$, διαιρέσει δὶ α^2 ἀποβαίνει $\omega^2 = \chi^2 - \alpha^2$. Ο. Ε. Δ.

227. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄρα $\chi^2 = \alpha^2 + \omega^2$.

228. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Ὑπερβολῆς δοθείσης τῆς ΣΜμ, εὑρεῖν τὺς ἄξονας, ϗ τὰς ἀσυμπτώτυς, ϗ τὸ κέντρον αὐτῆς (σχ. 102).

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τῶν μέσων σημείων δύω παραλλήλων τῶν βΣ, δρ, ϗ δύω ἑτέρων τῶν οξ, ΣΕ, δύω εὐθεῖαι ἀχθεῖσαι αἱ ΚΝ, Κν, διάμετροι ἔσαι (214), σημανῦσι διὰ τῆς αὐτῶν ὑπ' ἀλλήλων διατομῆς τὸ κέντρον Κ, ϗ ΚΣ ἀχθεῖσα ἐκ τῦ Κ ἐπὶ τὸ ἔγγιςα σημεῖον τῷ Κ, ἔσεται ὁ πρῶτος ἡμιάξων· ἐπεὶ ΚΣ μετενεχθείσης ἐπὶ τὴν ἀπέραντον κάθετον ΚΡ, $=$ ΒΚ, φημὶ, ὡς μετενεχθείσης τῆς ΒΣ ἐπὶ τὴν ΚΣΘ, $=$ ΠΚ, ἡ τεταγμένη ΠΜ, ἥτις ἀντιςοιχεῖ τῷ σημείῳ Π, ἔσεται ὁ δεύτερος ζητϐμενος ἡμιάξων Κχ, $= \beta$.

Καὶ γὰρ $\Sigma B^2 = K\Sigma^2 + BK^2 = 2K\Sigma^2$ (ἐκ κατασκευῆς) $= 2\alpha^2$ · ἄρα $K\Pi^2 = \chi^2 = \Sigma B^2$ (ἐκ κατασκευῆς) $= 2\alpha^2$.

Ἐν ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $\Pi M^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ (163) ἀντικαταςάσης ἀντὶ χ^2 τῆς κατ' αὐτὴν δυνάμεως $2\alpha^2$, ϗ ἀναγωγῆς γενομένης ἔςαι $\Pi M^2 : \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ · $\Pi M^2 : \beta^2 :: \alpha^2 : \alpha^2$ · ἄρα $\Pi M = \beta$ · ἀναςαθεισῶν ἄρα ἐκ τῦ Σ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΚΘ τῶν εὐθειῶν ΣΚ, ΣΨ, $=$ ΠΜ, $= \beta$, ἀχθήσονται αἱ ἀσύμπτωτοι ΚΓΤ, ΚΨε. Ο. Ε. Π.

229· ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν διὰ προσεγγίσεως τὸ ἐμβαδὸν (Δ) ὑπερβολῆς τῆς ΣϑΘ (σχ. 93).

ΛΥΣΙΣ. Εὑρεθείσης τῆς ἐπιφανείας (Β) τῦ τραπεζίϐ ΣΞδε, ϗ ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν δϑ, ΒΓ κτ. ἔγγιςα ἀλλήλων, παραλλήλως τῇ ΞΣ, συςαθήσονται ὡς πρὸς αἴσθησιν τραπέζια τὰ δϑΒΓ κτ, ὧν ληφθέντος τῦ Α ἀθροίσματος τῶν ἰδίων ἐπιφανειῶν, ἔςαι Β — Α $=$ Σϑε, ϗ 2Σϑε $=$ Δ· ὃ καθ' ἑαυτὸ δῆλον.

230. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Εὑρεῖν τὸν κυβισμὸν τῆς ὑπερβολικῆς κωνοΐδος ΣΤτ (σχ. 103).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςωσαν αἱ ἀσύμπτωτοι ΚΗ, Κβ, ϗ ἡ κάθετος Σξ $=$ ΚΜ, εἴτ' ἐν τῷ δευτέρῳ ἡμιάξονι, $=$ ΣΞ· ἡ δὲ ΣΟ τετμήσθω διὰ τῶν ἔγγιςα καθέτων Σξ, Πρ, κτλ. ἤχθωσαν δὲ ϗ αἱ ἄλλαι εὐθεῖαι ἐν τῷ σχήματι· ϗ περιηνέχθω ὅλον τὸ μέρος ΣξβΟ περὶ τὴν ΣΟ· ϗ δὴ πάντα μὲν τὰ ἐφεξῆς κείμενα παραλληλόγραμμα καταγράψυσι κυλίνδρυς· τὸ δὲ τραπέζιον ΣξβΟ κῶνον κόλυρον τὸν ΣξβΗΞ, τὸ δὲ ἡμιυπερβόλιον ΣτΟ ὑπερβολικὴν κωνοΐδα τὴν ΣΤτ.

Ἔϛω ὖν Α μὲν κύλινδρος ὁ ἀπογεννηθεὶς ἐκ ΣχΠρ, Β δὲ ὁ ἐκ ΣΠΜν· ϗ Δ μὲν κύκλος ὁ γραφεὶς ὑπὸ Πρ· ὁ δὲ ὑπὸ ΠΜ = Ε· Θ δὲ ὁ ὑπὸ Σξ· ἔϛαι ὖν $A = \Delta \times \Sigma\Pi$, ϗ $B = E \times \Sigma\Pi$ (Γεωμ. 456). ἄρα $A - B = \overline{\Delta - E} = \Sigma\Pi$. (Ρ).

Ἀλλ' ἐν τοῖς δυσὶν ὁμοκέντροις κύκλοις Δ, Ε, ἡ ὑπεροχὴ τῦ μείζονος ὑπὲρ τὸν ἐλάσσονα Δ — Ε ἴση ἐϛὶ κύκλῳ, ὗ ἡ ἀκτίς ἐϛι μέση ἀνάλογος τῆς ΝΜ, (*) ϗ Μρ· φημὶ ταύτην εἶναι τὴν Σξ, ἢ τὸν δεύτερον ἡμιάξονα· ϗ γὰρ $MN \times M\rho = \Sigma\xi^2$ (193)· ἄρα $MN : \Sigma\xi :: \Sigma\xi : M\rho$· ὕτως ὖν $\Theta = \Delta - E$· ἄρα ἐν τῇ Ρ ἐξισώσει ἐϛὶν $A - B = \Theta \times \Sigma\Pi$.

Ἀλλ' ἐφόδῳ συλλογισμῦ ὁμοίᾳ φανήσεται, ὅτι τῆς Σξ μέσης ὔσης ἀναλόγυ μεταξὺ ἑκάϛης Μ΄ρ΄ ϗ τῦ ἑτέρυ τμήματος Μ΄Ν΄, ἡ ὑπεροχὴ ἑκάϛυ κυλίνδρυ περιγεγραμμένυ περὶ τὸν κόλυρον κῶνον ΣξΗβΞ ὑπὲρ τὸν ἀντίϛοιχον κῶνον, τὸν τῇ ὑπερβολικῇ κωνοΐδι περιγεγραμμένον, ἐϛὶ $\Theta \times \Sigma\Pi$· ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τῦ ἀθροίσματος πάν-

---

(*) *ΝΜ* γὰρ ἐϛὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν δύω κύκλων *Δ*, *Ε*· ἔϛι γὰρ $\Pi M + \Pi P = \Pi M + \Pi N = MN$, ὅτι δὲ ἡ διαφορὰ τῦ *Ε* ὑπὲρ τὸν *Δ* κύκλον ἴση ἐϛὶ κύκλῳ γεννωμένῳ ὑπὸ μέσης ἀναλόγυ τῦ ἀθροίσματος *ΜΝ*, ϗ τῆς αὐτῶν διαφορας *Μρ*, δῆλον (Γεωμετ. 355, 401).

των τῶν προτέρων κυλίνδρων ὑπὲρ τὸ πάντων τῶν ὑςέρων ἐςὶ ΘΧΣΠ, ἰσάκις ἂν ἐπαναληφθῶσιν, ὅσητε ἂν ᾖ ἡ πυκνότης τέτων τῶν κυλίνδρων· ἄρα ἡ ὑπερβολικὴ κωνοὶς ΣΤτ ἴση ἐςὶ τῷ κολέρῳ κώνῳ ΞξΗβ πλὴν ΘΧΣΟ.

Τετέςιν, ἡ ςερεότης τῆς ὑπερβολικῆς κωνοΐδος πορισθήσεται εὑρεθείσης τῆς ςερεότητος Ε κώνε κολέρε, ἐ ἀκτὶς, τῆς μὲν ὕπερθεν βάσεως ἔςιν ὁ δεύτερος ἡμιάξων, τῆς δ' ἔνερθεν, ἡ ἐσχάτη κάθετος Οβ, ἀγομένη ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτε ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἢ ἀφαιρεθείσης ἀπὸ Ε τῆς ςερεότητος κυλίνδρε, ἐ ἀκτὶς μὲν ἐςιν ὁ δεύτερος ἡμιάξων, ὕψος δὲ τὸ τῆς ὑπερβολικῆς κωνοΐδος.

ΑΙΤΗΜΑ. Τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν περὶ τὸν κόλερον κῶνον περιγεγραμμένων κυλίνδρων ὡς ςερεότητα αὐτῆ τε κολέρε κώνε ἐκλαβεῖν· πράγματι γὰρ ἀπειροςῷ τι ἀλλήλων διενηνόχασιν (70)· τὸ αὐτὸ δὲ νοητέον ἢ περὶ τῶν τῇ ὑπερβολικῇ κωνοΐδι περιγεγραμμένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῆς ἐν τῇ Διοπτρικῇ χρήσεως τῆς ὑπερβολῆς.

231. Ἔςω ὑπερβολὴ (σχ. 104), ἐν ᾗ Σσ : Εε :: 2 : 3 ἢ Μβ = ΜΕ· ἢ κέντρῳ μὲν τῷ Μ, ἀκτῖνι δὲ τῇ Μβ, γεγράφθω κύκλος ὁ βΕτ, διήκων διὰ τῶν Ε, β· ἡ ἐν αβ ἡ τῇ αΜ κάθετος ἔςαι πάντως ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βΜα γωνίας· ἡ δὲ ΕΟ ἡ τῇ ΜΟ κάθετος ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ΕΜΟ γωνίας· ἔςω δὲ ἢ κατὰ τὸ Μ ἀπτομένη ἡ Μϑ, ἢ ἐςάθωσαν πρὸς ὀρθὰς τῇ ϑΜχ αἱ ΟΜ, εΡ.

Τέτων τεθέντων φημὶ, ὡς ἀκτίς τις φωτὸς ἡ βΜ εἰσδῦσα τὸ ἐπίπεδον νΙΜ τῦ ὑπερβολοειδῦς σνΙΜ, τῦ περιαγωγῇ τῆς σΜν καμπύλης περὶ τὴν σΙ ἀποτελυμένυ, ἐξελθῦσα ἐκ τῦ Μ, πρὸς τὸ Ε χωρήσει.

Ἐπιςαθείσης γὰρ πρὸς ὀρθὰς τῇ Εη τῆς Κδ, τὰ τρίγωνα ΕΜΟ, ΚΜδ εἰσὶν ὅμοια, διὰ τὰς ὀρθὰς γωνίας Ο, δ, ϗ ἐπεὶ ΕΜΟ = ΚΜδ, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα Κδ : ΕΟ : : ΚΕ : ΕΜ = Μβ.

Καὶ τὰ τρίγωνα δὲ ΙΜΚ, αβΜ ὅμοιά εἰσιν· εἴγε παρὰ τὰς ὀρθὰς γωνίας Ι, α, ἔςι ϗ ὑπὸ ΙΚΜ = αΜβ διὰ τὰς παραλλήλυς Μβ, ΙΚ· ἄρα ΚΜ : Μβ : : ΙΜ : αβ· ἄρα Κδ : ΕΟ : : ΙΜ : αβ· ϗ (Συμβ. Λογ. 242) αβ : ΕΟ : : ΙΜ : Κδ.

Τέλος δὲ ϗ τὰ τρίγωνα ΕΚδ, ΕΙΜ ὅμοια εἰσιν, ἐπείπερ παρὰ τὰς ὀρθὰς γωνίας δ, Ι, ἔχυσι κοινὴν τὴν Ε· τοιγαρῦν ΙΜ : Κδ : : ΕΜ : ΕΚ· ἄρα αβ : ΕΟ : : ΕΜ : ΕΚ.

Ἐπεὶ τοίνυν τῶν εΡ, ΚΜ παραλλήλων ὑσῶν, ὡς καθέτων τῇ ἁπτομένῃ Μϑ, ϗ ἔτι (Γεωμ. 318) ΕΜ : ΕΚ : : ΕΡ : εΕ, ἔςαι αβ : ΕΟ : : ΕΡ : εΕ· ἀλλὰ ΕΡ = ΕΜ — εΜ, εἴγε (173) Με = ΜΡ· ἔτι δὲ ΕΜ — εΜ = Σσ (180)· ἄρα ΕΡ = Σσ· ἄρα αβ : ΕΟ : : Σσ : Εε : : 2 : 3.

Ἄρα ἀκτῖνες ὁποιαιῦν αἱ βΜ παράλληλοι τῷ ἄξονι ἡμίτονον τῆς μὲν κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνίας ποιῦσαι τὸ αβ, τῆς δὲ κατὰ τὴν ϑλάσιν τὸ ΕΟ, ἔχοντα πρὸς ἄλληλα : : 2 : 3, ἐκ τῆς ὑέλυ εἰς τὸν ἀέρα μεταβαίνυσαι, φέρονται πρὸς τὸ Ε.

232. Φακὸς ἄρα ὑέλινος ὁμοιοσχήμων τῷ εἰρημένῳ ἔχων τὴν ἰδιότητα τῦ συλλέγειν ἐν τῇ ἑςίᾳ Ε πάσας τὰς ἀκτῖνας, καυςικωτάτην ἕξει τὴν δύναμιν.

233. Τανάπαλιν δὲ ἀκτὶς φωτὸς ἡ ΕΜ ἐκ τȣ̃ Ε ἐρχομένη, προσβάλλȣσα κατὰ τὸ Μ τῇ κυρτότητι τȣ̃ ὑπερβολοειδȣ̃ς, χωρήσει τὴν βΜ φορὰν παράλληλον τῷ ἄξονι· ϗ γὰρ τὸ ἡμίτονον ΕΟ τῆς κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον αβ τῆς κατὰ τὴν θλάσιν, τῆς διόδȣ ἀπ' ἀέρος ἐφ' ὕελον γινομένης, ἔςαι :: 3 : 2.

234. Ἀλλὰ γὰρ ἀκτὶς φωτὸς ἡ ξΜ παράλληλος τῷ ἄξονι ἐλευθέρως φερομένη ἐν ἀέρι πρὸς τὸ β, εἰ διέλθοι τὴν κυρτοτητα τῆς ὑπερβολῆς, θλαθήσεται ὅτως, ὡς φαίνεσθαι ἐρχομένη ἀπὸ τȣ̃ Ε, τῆς φορᾶς Μβ γινομένης Μη· ἔςι γὰρ ἡ κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνία ξΜτ ὑπὲρ τῆς ξΜ ἴση τῇ βΜα τῇ ὑπὲρ τῆς βΜ, ὡς κατὰ κορυφὴν ἀντικείμεναι· ὡσαύτως ἄρα ἔςαι ἡ αὐτὴ ϗ ἡ κατὰ θλάσιν γωνία· ἔςι δὲ ὑπὲρ τῆς βΜ γωνία κατὰ θλάσιν ἡ ΕΜΟ = αΜη (231)· ἄρα ὑπὲρ ξΜ ἔσεται αΜβ· ἄρα ἡ ξΜ ἀκτὶς τὴν φορὰν Μη χωρήσει.

235. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν ἐν ςερεῷ ἀπογεννωμένῳ (σχ. 105) ἐκ τȣ̃ σχήματος ΠνΗΣρΟ, ἐφ' ȣ̃ ΠνηΣ εἴη ὑπερβολὴ, ἔχȣσα ἑςίαν ἐκτὸς κειμένην τὴν Τ, ϗ ΠΟρΣ ἑτέρα ὑπερβολὴ, ἔχȣσα ἑςίαν ἐκτὸς κειμένην τὴν τ, ἄξονα δὲ κοινὸν ἑκατέρᾳ τὸν Τθ, ὀφθαλμὸς ἐπιτεθῇ αὐτῷ πρὸς τὸ θ, ὄψεται κατὰ τὸ τ τὸ ἐν τῷ Τ κείμενον ὁρατόν· αἱ γὰρ ἀκτῖνες τȣ̃ φωτὸς ἐκ τȣ̃ Τ ἥκȣσαι πρὸς τὴν κυρτότητα ΠνηΣ παράλληλοι γενήσονται τῷ ἄξονι (233)· εἰσιȣ̃σαι δὲ εἰς τὴν καινὴν ὑπερβολικὴν κυρτότητα ΠΟρΣ, ὅτω χωρήσȣσιν, ὡς τὴν φορὰν αὐτῶν διευθύνεσθαι πρὸς τὴν τ ἑςίαν αὐτῆς τῆς δευτέρας ὑπερβολῆς (234).

Αὕτη ἄρα ἡ ὕελος μέγιςον οἴσει πρὸς ὁράσεως ἐνίχυσιν τοῖς ἀμβλυωποῦσιν· ὃ γὰρ κατὰ τὸ Τ οὐ θεῶνται, κατὰ τὸ τ γοῦν, ἐν διαστήματι ἀμέλει ἐλάσσονι, ὄψονται.

236. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τοὐναντίον δὲ, ἐὰν Τ ἐστία ᾖ τῆς ΠΟρΣ, καὶ τ τῆς ΠνΗΣ, αἱ ἀπὸ τοῦ τ ἀποχωροῦσαι ἀκτῖνες, διὰ μὲν τῆς πρώτης θλάσεως παράλληλοι τῷ ἄξονι γενήσονται, διὰ δὲ τῆς δευτέρας, ἀλλήλων ἀποστήσονται, ὡς ἥκουσαι ἐκ τοῦ Τ· ὁρατόντι ἄρα κείμενον κατὰ τὸ τ, ὁραθήσεται ὡς εἰ ἦν ἐν τῷ Τ· ὕελος ἄρα τοιάδε κάλλιστος ἂν εἴη φακὸς ὀπτικὸς τοῖς πρεσβύωψιν, οἳ τὰ ἐγγὺς μὴ δυνάμενοι ἰδεῖν, ἀφεστηκότα μικρὸν ὡς ἀπὸ τοῦ τ ἐπὶ τὸ Τ τηλαυγῶς ὁρῶσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος.

237. Κύκλος ὁ διήκων διὰ τριῶν σημείων, ἔγγιστα ἀλλήλων κειμένων (σχ. 103, 107) τῶν ν, Μ, ν΄ καμπύλης τινὸς, ἧς ἡ κατὰ τὸ Μ καμπυλότης τῇ τοῦ κύκλου συμπίπτει, καλεῖται κύκλος φιλῶν· ἡ δὲ αὐτοῦ ἀκτὶς, ἥτις διορίζει τὴν καμπυλότητα τῆς καμπύλης καθ' ἓν σημεῖον δεδομένον, ὀνομάζεται ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος, ἡ ἀκτὶς τοῦ φιλοῦντος κύκλου, ἡ ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης.

238. ΛΗΜΜΑ. Τὸ πλάγιον ἡμίτονον ΠΒ (Γεωμ. 492) τόξου ἀπειροστοῦ τοῦ ΒΡΜ (σχ. 108) ἐστιν $= \frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha}$.

ΔΕΙΞΙΣ. $\upsilon\upsilon = 2\alpha\chi - \chi^2$ (12) $= \chi \times \overline{2\alpha - \chi}$· ἄρα $\chi = \frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha - \chi}$ (Συμβ. Λογ. 253)· ἀλλὰ $2\alpha - \chi$

$= 2\alpha$, ὅτι $\chi =$ ΠΒ ἐςὶν ἀπειροςὴ (Συμϐ. Λογ. 530)· ἄρα $\chi = \text{ΠΒ} = \frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha} = \frac{\text{ΠΜ}^2}{\text{ΑΒ}}$. Ο. Ε. Δ.

239. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἔςω $\alpha = \xi$· ἄρα $\chi = \frac{\upsilon\upsilon}{2\xi}$.

240. Ἔςω ὁ πρῶτος ἄξων (σχ. 106, 107) Σσ $=$ 2Α, ϗ ὁ δεύτερος $=$ 2Β, ϗ ἡ διάμετρος ΑΜ $= 2\alpha$, ϗ ἡ αὐτῇ συζυγὴς ΒΔ $= 2\beta$, ϗ ἡ ὀρθία πλευρὰ εΜ $= \rho$, ϗ ἡ τȣ̃ φιλȣ̃ντος κύκλȣ ἀκτὶς Μτ $= \xi$, ϗ τὸ μέρος ΜΟ τὸ ἀπολαμϐανόμενον ὑπὸ Μ, ϗ τῆς συζυγȣ̃ς διαμέτρȣ $= \eta$, ϗ ἡ ἀπειροςὴ τεταγμένη νΙ, ἡ νε $= \upsilon$, ϗ ἡ ὑπ᾿ αὐτῆς ἀποτετμημένη ΜΙ, ἡ ἐπὶ τῆς ΜΑ, $= \chi$, τὸ δὲ τȣ̃ κυκλικȣ̃ τόξȣ Μν πλάγιον ἡμίτονον Με $= \frac{\upsilon\upsilon}{2\xi}$, ϗ ἡ τῇ ἀπτομένῃ κάθετος εΓ $= \psi$· τȣ́των τεθέντων. . .

241. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος ἔντε τῇ ἐλλείψει κἀν τῇ ὑπερϐολῇ ἐςι $\frac{\rho\beta}{\eta}$. (*)

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜΙε, ΜΚΟ, ἐςι ΜΙ $= \chi$: Με $= \frac{\upsilon\upsilon}{2\xi}$ (239) :: ΜΚ $= \alpha$: ΜΟ $= \eta$· ἄρα $\eta\chi = \frac{\alpha\upsilon\upsilon}{2\xi}$ (Ρ): ἀλλ᾿ ἐςιν $\upsilon\upsilon : 2\alpha\chi \mp \chi\chi$ ::

(*) Τȣ̃τ᾿ ἔςιν ἰσȣ̃ται τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ ἡμιδιαμέτρȣ τῆς ΒΔ συζυγȣ̃ς διαμέτρῳ δεδομένης τȣ̃ ΑΜ, διῃρημένῳ διὰ τȣ̃ [illegible] ΜΟ τῆς ἀκτῖνος ταύτης, τȣ̃ ἀπολαμϐανομένȣ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς Μ τῆς διαμέτρȣ ΑΜ, ϗ τῆς ταύτῃ συζυγȣ̃ς ΒΔ.

$\beta\beta:\alpha\alpha$ (92, 217)· ϗ $\chi\chi$ ἐστιν ἀπειροστὸν δευτεροταγὲς, εἴγε τὰ σημεῖα Μ, ν, ν′ ἀπείρως ἐτέθησαν ἔγγιστα (237), καὶ τότε ἡ ἀποτετμημένη $\mathrm{MI} = \chi$ ἐστιν ἀπειροστὸν πρωτοταγὲς, ἀφ᾽ ὃ τὸ τετράγωνον ἀποτελεῖται δευτεροταγές· ἔσται ἄρα ἀναμφηρίστως $\nu\nu : 2\alpha\chi :: \beta\beta : \alpha\alpha$ (Συμϐ. Λογ. 528)· ἄρα $\nu\nu = \frac{2\alpha\chi\beta\beta}{\alpha\alpha} = \frac{2\chi\beta\beta}{\alpha}$.

Ἐὰν οὖν τῇ Ρ ἐξισώσει ἀντὶ νυ ἀντικαταστάσης τῆς εὑρεθείσης δυνάμεως, ἔσται $\eta\chi = \frac{2\alpha\chi\beta\beta}{2\alpha\xi} = \frac{\beta\beta\chi}{\xi}$· ἄρα $\eta = \frac{\beta\beta\chi}{\xi\chi} = \frac{\beta\beta}{\xi}$ (Συμϐ. Λογ. 250)· ἄρα $\eta\xi = \beta\beta$, ϗ $\xi = \frac{\beta\beta}{\eta}$. Ο. Ε. Δ.

242. ΠΟΡΙΣΜΑ Α′. $\beta \times \eta$ ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν ἡμιαξόνων Α, Β (130, 219) εἴτ᾽ οὖν $\beta\eta = \mathrm{AB}$· ἄρα $\beta = \frac{\mathrm{AB}}{\eta}$· ϗ $\beta\beta = \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2}{\eta^2}$· ἀντικαταστάσει δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἀντὶ $\beta\beta$, ἔστι $\xi = \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2}{\eta^3}$· ἐντεῦθεν ἄρα $:\xi:\Xi:: \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2}{\eta^3} : \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2}{\mathrm{H}^3}$· ἀλλαμὴν $\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2}{\eta^3} : \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2}{\mathrm{H}^3} :: \mathrm{H}^3 : \eta^3$ (Συμϐ. Λογ. 259)· ἄρα $\xi : \Xi : \mathrm{H}^3 : \eta^3$ (Π) τουτέστιν „αἱ ἀκτῖνες τῆς καμπυλότητος ἐν διαφόροις σημείοις τῆς ἐλλείψεως ϗ τῆς ὑπερβολῆς ἀντιπεπονθότως εἰσὶν ἀνάλογοι τοῖς κύβοις τῶν τμημάτων ΜΟ $= \eta$ (240) τῶν ἀκτίνων αὐτῶν, ἀπολαμβανομένων ὑπὸ τῆς ἀρχῆς Μ διαμέτρου τινὸς ΑΜ, ϗ τῆς αὐτῇ συζυγοῦς ΒΔ.“

243. Ἐκ τῆς ἀναλογίας Π πρόεισι $\xi = \frac{\Xi \times H^3}{\eta^3}$.

ἀλλὰ παραθέσει, τῆς μὲν ξ πρὸς Ξ, τῆς δὲ η πρὸς Η, ἐκληφθῆναι ἀεὶ δύναται ὡς πρὸς τὴν ξ ἡ Ξ = 1, καὶ ὡς πρὸς τὴν η ἡ Η = 1· οὕτως οὖν ἡ εἰρημένη ἐξίσωσις γενήσεται $\xi = \frac{1 \times 1}{\eta^3} = \frac{1}{\eta^3}$.

244. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος ξ ἐν διαφόροις σημείοις τῆς ἐλλείψεως, ἢ τῆς ὑπερβολῆς, ἴση ἐστὶ τῷ κύβῳ ρ^3 τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, διαιρεθέντι διὰ τοῦ κύβου ψ^3 τῆς ἐπισταθείσης καθέτου ἐκ τῆς ἑστίας ἐπὶ τὴν ἁπτομένην (240)· εἴτ' οὖν $\xi = \frac{\rho^3}{\psi^3}$.

ΔΕΙΞΙΣ Α΄. Ἐν τῇ ἐλλείψει ἀχθείσης τῆς ΕΤ παραλλήλου τῇ ΜΓ, ἔσται ἡ ὑπὸ ΜΕΤ = ΕΜΖ (Γεωμ. 133)· ἀλλ' ἔστιν ὑπὸ ΕΜΖ = ΤΜΓ (104)· ἄρα ΜΕΤ = ΤΜΓ· ἀλλ' ἔστιν ὑπὸ ΜΤΕ = ΤΜΓ· ἄρα ΜΕΤ = ΜΤΕ· τοῦ ἄρα τριγώνου ΕΜΤ ἰσοσκελοῦς ὄντος, ἔστι ΜΕ = ΜΤ (Γεωμ. 204)· ἄρα εΜ + ΜΤ = εΜ + ΕΜ· ἄρα εΤ ἐστὶν ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀποστημάτων εΜ· ἄρα $2\text{ΜΤ} + \varepsilon\text{Τ} = 2\text{Α}$· ἄρα $\text{ΜΤ} + \frac{\varepsilon\text{Τ}}{2} = \text{Α}$.

β΄. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕεΤ, εΚψ ἔστιν Εε $= 2\kappa : \text{ΕΚ} = \kappa :: \varepsilon\text{Τ} : \varepsilon\psi$· ἄρα $\varepsilon\psi = \text{Τ}\psi = \frac{\psi\text{Τ}}{2}$· ἄρα ΜΤ + Τψ = Α· ἄρα Μψ = Α.

γ΄. Ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ, ἀχθείσης παραλλήλου τῇ ΜΓ τῆς εΤ, διὰ τῶν αὐτῶν ἐφόδων, τιθεμένης μέντοι ε ἀντὶ Ε, ἔσται α΄. εΜ = ΜΤ· β΄. ἐκ τῶν τριγώνων

$E\epsilon T$, $EK\psi$, $T\psi = \frac{ET}{2}$· ἀλλ' ἐςιν ἐν τῇ ὑπερβολῇ $2A = EM - \epsilon M$ (140) $= EM - MT$ (διὰ τὸ εἶναι $\epsilon M = MT$) $= ET - 2MT = 2\psi T - 2MT$· ἄρα $A = \psi T - MT = M\psi$.

δ'. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $M\epsilon\Gamma$, $MO\psi$, ἐςι $MO = \eta$ (240) $: M\psi = A$ (ἐν τῇ ἀνὰ χεῖρας δείξει) $::$ $\epsilon\Gamma = \psi$ (240) $: \rho$· ἄρα $\eta = \frac{A\psi}{\rho}$· ἄρα $\eta^3 = \frac{A^3\psi^3}{\rho^3}$· ἀλλ' ἐςι $\xi = \frac{A^2 B^2}{\eta^3}$ (242)· ἄρα $\xi = A^2B^2 : \frac{A^3\psi^3}{\rho^3} = \frac{A^2B^2\rho^3}{A^3\psi^3} = \frac{B^2\rho^3}{A\psi^3}$· ἄρα διὰ τὴν ἀμετάτρεπτον $\frac{B^2}{A}$, ἐςι $\xi = \frac{\rho^3}{\psi^3}$. Ο.Ε.Δ.

245. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ταυτὰ δὲ δείκνυται καὶ ἐν τῇ παραβολῇ· ἀλλ' ἐν τῷ κύκλῳ, ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος ξ, ϗ ἡ ἀκτὶς τῦ κύκλυ, ϗ ἡ ὀρθία πλευρὰ ρ, ϗ ἡ τῇ ἁπτομένῃ κάθετος ψ, ἅπαντα ὑπάρχει ταυτά· διὸ ἔςαι $\xi = \frac{\rho^3}{\psi^3} = \frac{1}{1}$· ἐν γένει ἄρα ἁπάσης κωνικῆς τομῆς ἡ τῆς καμπυλότητος ἀκτὶς ἐςι $\xi = \frac{\rho^3}{\psi^3}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΠΕΜΤΟΝ.

Περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν παραθέσεως.

246. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἡ ἐπὶ τῶν ἀξόνων γενικὴ ἐξίσωσις ἁπάσης κωνικῆς τομῆς, περιέχυσα τὰς πρὸς τῇ κορυφῇ ἀποτετμημένας, ἐςὶν $\upsilon^2 = \frac{\alpha\beta^2\chi}{\alpha} \mp \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$ (Α).

ΔΕΙΞΙΣ, ά. Ἐὰν τεθῇ $\alpha = \beta$, ϗ ληφθῇ τὸ σύμβολον — ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ τῦ δευτέρυ μέλυς, ἡ ἐξίσωσις Α γενήσεται $\upsilon^2 = \frac{2\alpha^2\chi}{\alpha} - \frac{\alpha^2\chi^2}{\alpha^2} = 2\alpha\chi - \chi^2$, ἐξίσωσις τῦ κύκλυ (12).

β΄. Ἐὰν α ἀπειράκις μεῖζον ᾖ τῦ β, τῦ — συμβόλυ τεθέντος ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ, ἡ ἐξίσωσις Α γίνεται $\upsilon^2 = \frac{2\beta^2\chi}{\infty} - \frac{\beta^2\chi^2}{\infty^2}$· ἀλλὰ $-\frac{\beta^2\chi^2}{\infty^2}$ ἀπειροςόν ἐςι δευτεροταγές, ϗ μηδὲν πρὸς τὸ $\frac{2\beta\chi}{\infty}$· ἄρα (Συμβ. Λογ. 528) πάντως, $\upsilon^2 = \frac{2\beta^2\chi}{\infty} = \frac{2\beta^2\chi}{\alpha} = \pi\chi$ (169), ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς.

γ΄. Ἐὰν α μείζων ᾖ τῦ β μεγέθει πεπερασμένῳ, ϗ τεθῇ — ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ, ἀποτελεσθήσεται $\upsilon^2 = \frac{2\beta^2\chi}{\alpha} - \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$, ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως (92).

δ΄. Ἐὰν δὲ τέλος ᾖ $\alpha = \beta$, ἢ $\alpha < \beta$, ἢ $\alpha > \beta$, ϗ ληφθῇ τὸ + ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ, ἡ Α ἀποκατυςαθήσεται $\upsilon^2 = \frac{2\beta^2\chi}{\alpha} + \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$, ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς (164). Ο.Ε.Δ.

247. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ὁ μὲν ἄρα κύκλος ἐςὶν ἔλλειψις, ἐν ᾗ $\alpha = \beta$· ἡ δὲ παραβολὴ, ἔλλειψις, ἐν ᾗ $\alpha = \infty$· ἡ δὲ τέλος ὑπερβολὴ ἔλλειψίς ἐςιν, ἧς ἡ ἑτέρα τῶν ἑςιῶν, καὶ μὴν ϗ τῶν κορυφῶν, εἰσὶ λεικτικαὶ, εἴτ' οὖν τεθειμέναι κατὰ θέσιν ἐναντίαν θατέρᾳ ἑςίᾳ ϗ κορυφῇ· ὃ δὴ, ἀπεργαζόμενον τὸ τῶν ἀποτετμημένων γινόμενον $= \alpha^2 + \chi^2$, τρέπει τὸ δεύτερον σύμβολον τῆς κοινῆς ἐλλείψεως ἐκ — ἐπὶ +

248. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τῶν ἐξισώσεων τῆς τε ἐλλείψεως ϗ τῆς ὑπερβολῆς μόνοις τοῖς — + κατὰ τὸν δεύτερον ὅρον τῦ δευτέρυ μέλυς διαφερυσῶν, οἱ λογισμοὶ καθ' ἕνα τρόπον ἐν ἑκατέρᾳ διαπερανθῆναι ἔχυσι.

249. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ ἐν ἁπάσῃ κωνικῇ τομῇ γενικὴ ἐξίσωσις τῆς παραμέτρυ τῦ πρώτυ ἄξονος ἐςὶν $\upsilon^2 = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$ (Β).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ ἁπάσῃ κωνικῇ τομῇ ἐςὶ $\pi = \frac{2\beta^2}{\alpha}$ (169), ϗ ἑπομένως $\frac{\pi}{2\alpha} = \frac{2\beta^2}{\alpha \times 2\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$· δυνατὸν ἄρα ἐν τῇ γενικῇ ἐξισώσει Α τῇ ἐπὶ τῦ πρώτυ ἄξονος (246) ἀντικατας ῆναι, π μὲν ἀντὶ $\frac{2\beta^2}{\alpha}$, $\frac{\pi}{2\alpha}$ δὲ ἀντὶ $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$· ὅθεν ἡ Α τραπήσεται εἰς τὴν $\upsilon^2 = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$. Ο.Ε.Δ.

250. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐκ τῆς γενικῆς ἐξισώσεως

$\upsilon\upsilon = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha}$ πρόεισι $2\alpha\upsilon\upsilon = 2\alpha\pi\chi \mp \pi\chi\chi = \pi$ $(2\alpha\chi \mp \chi\chi)$· ὅθεν ἡ ἀναλογία $\upsilon\upsilon : 2\alpha\chi \mp \chi\chi :: \pi : 2\alpha$· ἀλλαμὴν $2\alpha\chi \mp \chi\chi = (2\alpha \mp \chi)\chi = \sigma\Pi \times \Pi\Sigma$, ἐν γένει ἄρα „τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ἐπὶ τὸν „πρῶτον τῆς ἐλλείψεως ϗ τῆς ὑπερβολῆς ἄξονα τετρά„γωνα πρὸς τὰ ὑπὸ τῶν συςοιχȣσῶν ἀποτετμημένων γι„νόμενα λόγον ἔχει, ὃν ἡ παράμετρος πρὸς τὸν πρῶτον ἄξονα.“

251. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἔςαι ἄρα, ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως $\upsilon^2 = \pi\chi - \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς $\upsilon^2 = \pi\chi + \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$ (248)· ἐπὶ δὲ τȣ͂ κύκλȣ, ἐπεὶ $\pi = 2\alpha$ (99), $\upsilon^2 = \pi\chi - \chi^2$· ἐπὶ δὲ τέλος τῆς παραβολῆς, $\upsilon^2 = \pi\chi - \frac{\pi\chi^2}{2\infty} = \pi\chi$ (Συμβ. Λογ. 530).

252. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἡ παράμετρος τῆς κωνικῆς τομῆς π ἐςὶν, ἴση μὲν τῷ ΗΕ$=\nu$ ἀποςήματι, καθ᾽ ὃ ἀπέχει ἡ κορυφὴ ἀπὸ τῆς ἑςίας, τετράκις εἰλημμένῳ ἐν τῇ παραβολῇ, εἴτ᾽ ȣ͂ν $\pi = 4\nu$· ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει $\pi < \nu$· ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ $\pi > \nu$· εἰλήφθω γὰρ ἡ διὰ τῆς ἑςίας διιȣ͂σα υ· ϗ δὴ ἔςαι $2\upsilon = \pi$· $\upsilon = \frac{\pi}{2}$· $\upsilon^2 = \frac{\pi^2}{4}$· ἀντικαταςάσης ἄρα ἐν Β ἀντὶ υ^2 ταύτης τῆς δυνάμεως ἔςαι $\frac{\pi^2}{4} = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$· διαιρέσει διὰ π, $\frac{\pi}{4} = \chi \mp \frac{\chi^2}{2\alpha}$· $\pi = 4\chi \mp \frac{4\chi^2}{2\alpha}$ (Δ).

Α'λλ' ὑπὲρ τῆς παραμέτρȣ, ἡ ἀποτετμημένη $\chi =$ ΗΕ $= \nu$ ἀποςήματι τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς ἑςίας, ἡ ἐξίσωσις Δ γενήσεται $\pi = 4\nu \mp \frac{4\nu^2}{2\alpha}$· ἐπὶ δὲ τȣ́τοις, ἐν τῇ παραβολῇ, ἔςι $2\alpha = \infty$· ἄρα $\frac{4\nu^2}{2\alpha}$ ἔςι μηδὲν ὡς πρὸς 4ν· ἔςαι ἄρα ἀναμφιβόλως $\pi = 4\nu$· ἀλλ' ἐν τῇ ἐλλείψει ἔςι $\pi = 4\nu - \frac{4\nu^2}{2\alpha}$, ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ, $\pi = 4\nu + \frac{4\nu^2}{2\alpha}$.

253. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἐν ἁπάσῃ κωνικῇ τομῇ πᾶσα ὀρθία πλευρὰ εμ λόγον ἔχει πρὸς τὸ ἀπόςημα τȣ̃ πρὸς τῇ καμπύλῃ πέρατος αὐτῆς μ ἀπὸ παντὸς τῆς διευθετȣ́σης σημείȣ Θ, ὃν ἄλλη τις ὀρθία πλευρὰ εμ' πρὸς τὸ ἀπόςημα τȣ̃ πέρατος αὐτῆς μ' ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ τῆς διευθετȣ́σης σημείȣ Θ, τȣτ' ἔςιν εμ : μΘ : : εμ' : μ'Θ (σχ. 109).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςι γὰρ εμ : εμ' : : μΠ' : μ'Π (17)· ἀλλ' ὀρθῶν μὲν ȣ̓σῶν τῶν πρὸς τοῖς Π, Π γωνιῶν, κοινῆς δὲ τῆς πρὸς τῷ Θ, τὸ μ'ΠΘ τρίγωνον ὅμοιόν ἐςι τῷ μΠ'Θ τριγώνῳ· ἄρα μΠ' : μ'Π : : μΘ : μ'Θ· ἀντικαταςάντος δὲ ἐκ τῆς προτέρας ἀναλογίας τȣ̃ ἴσȣ λόγȣ εμ : εμ', ἔςαι εμ : εμ' : : μΘ : μ'Θ· ταυτὰ δ' εὐμαρῶς δείκνυται ἐπὶ πάσης τομῆς· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

254. ΘΘΩΡΗΜΑ Δ'. Ἐν πάσῃ κωνικῇ τομῇ, ἐὰν εὐθεῖα ΜΠ, διὰ τῆς ἑςίας Ε διήκȣσα, συμβάλῃ, τῇ μὲν διευθετȣ́σῃ κατὰ τὸ Ξ, τῇ δὲ καμπύλῃ κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Π, τὸ δὲ σημεῖον Μ κέηται μεταξὺ τῶν σημείων Ε, Ξ, τμηθήσεται αὕτη ἡ εὐθεῖα κατὰ τὰ σημεῖα Μ,

Ε (σχ. 110), ϗ κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Ξ (σχ. 111), ἐν ἁρμονικῇ ἀναλογίᾳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστι γὰρ (243) ΕΠ : ΕΜ :: ΠΞ : ΜΞ (σχ. 110)· ἀλλ' ἐν μὲν ταῖς τρισὶν εὐθείαις ΠΞ, ΕΞ, ΜΞ, αἱ ΠΞ, ΜΞ εἰσὶν ἄκρα, αἱ δὲ ΕΠ, ΕΜ, αἱ διαφοραὶ, αἷς τὰ ἄκρα τῆς μέσης διαφέρουσιν· ἐν δὲ ταῖς τρισὶν (σχ. 111) ΕΠ : ΕΞ, ΕΜ, αἱ μὲν ΕΠ, ΕΜ εἰσι τὰ ἄκρα, αἱ δὲ ΠΞ, ΜΞ, αἱ διαφοραὶ, αἷς τὰ ἄκρα διενήνοχε τῆς μέσης· ἄρα ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων τὰ ἄκρα εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ διαφοραὶ τῶν ἄκρων, αἷς τῆς μέσης διαφέρουσι· τοῦτο δέ ἐστιν ἐν ἁρμονικῇ ἀναλογίᾳ (Συμ. Λογ. 543). Ο. Ε. Δ.

255. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τῷ 110 σχήματι χρῆσθαι ἔχομεν ὑπέρ τε τῆς ἐλλείψεως ϗ τῆς παραβολῆς· ἡ δὲ κοινὴ αὐτοῖς διευθετοῦσα ἐστιν ἡ ΞΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΕΚΤΟΝ.

Περὶ ὁμοίων κωνικῶν τομῶν.

256. *Δύω ὁμοειδεῖς κωνικαὶ τομαὶ ὅμοιαι λέγονται, ὅταν ὦσιν ἀνάλογοι οἱ αὐτῶν ἄξονες.*

257. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐὰν ἄρα δύω ὅμοιαι ἐλλείψεις, ἢ δύω ὅμοιαι ὑπερβολαὶ, κοινὸν μὲν ἔχωσι κέντρον τὸ Κ (σχ. 112, 113), τοὺς δὲ ἄξονας ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, αἱ ἀντίστοιχοι συζυγεῖς αὐτῶν διάμετροι ἔσονται ϗ αὐταὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· περιέχουσι γὰρ μετὰ τῶν ἀξόνων γωνίας ἴσας, εἴγε αἱ κωνικαὶ τομαὶ οὐδενὶ ἀλλήλων διαφέρουσιν, εἰ μὴ ὅτι αἱ ἐν θατέρᾳ εὐθεῖαι μείζονές εἰσι τῶν ἐν θατέρᾳ ἀντιστοίχων εὐθειῶν· ἐν ἑκατέρᾳ δὲ ἑ-

χυσι θέσιν τὴν αὐτὴν πρός γε τὺς ἄξονας· ὥςε τῶν ἀξόνων ϗ τῶν διαμέτρων τῆς ἐλάσσονος κατὰ τὴν αὐτὴν θέσιν προεκβαλλομένων, ἐς ὃ ἂν ἰσωθῶσι ταῖς τῦ μείζονος, αἱ δύω τομαὶ συμπεσῦνται ἀλλήλαις, ϗ μία ἐξ ἀμφοῖν ἀποβήσεται καμπύλη.

258. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἡ ΡΣ τέμνῃ δύω ὁμοίας ϗ ὁμοκέντρυς κωνικὰς τομὰς, τὰ τμήματα ΡΟ, ΣΟ΄, τὰ ὑπὸ τῶν καμπύλων ἐναπολαμβανόμενα, ἴσα ἔσονται· ἁπτομένη γὰρ τῆς ἐσωτερικῆς καμπύλης ἡ σρ ἔςω παράλληλος τῇ ΣΡ (χ. 112, 113, 114)· ϗ διάμετρος ἡ χυ διηκέτω τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον· ὑκῦν ἡ ΟΞ τεταγμένη ἔςαι ἐπὶ ταύτην τὴν διάμετρον (57)· ϗ ἐπείπερ ἡ ἀντίςοιχος διάμετρος τῆς ἐσωτερικῆς τομῆς ἐπὶ τῆς αὐτῆς κεῖται εὐθείας τῇ τῆς ἐξωτερικῆς (257), δῆλον ὅτι ΣΡ ϗ σρ ἔσονται διπλαῖ τεταγμέναι ἐν τῇ ἐξωτερικῇ τομῇ· ἄρα ΡΞ $=$ ΣΞ, ϗ ρτ $=$ τς· ἐπεὶ δὲ ϗ Ο΄Ξ $=$ ΞΟ, ἄρα ϗ ΣΟ΄ $=$ ΟΡ· διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον, ϗ ΟΜ $=$ ΙΝ, ϗ δλ $=$ δΛ· ἃ δ᾽ εἴρηται ἐνταῦθα, ϗ ἐπὶ τῆς παραβολῆς κρατεῖ, ἀπείρυ οἷον ἐλλείψεως ὔσης.

259. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἐὰν τῆς τε ἐσωτερικῆς καὶ τῆς ἐξωτερικῆς τῶν ὑπερβολῶν ὑποτεθῇ παράμετρος ἡ αὐτὴ $= \pi$ κειμένη ἐπὶ τῦ αὐτῦ ἄξονος, ϗ γένηται ἡ ἁπτομένη $\Delta\Lambda = \delta$, ἔςαι $\mathrm{MO} \times \mathrm{ON} = \delta^2$ (χ. 113).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςι γὰρ, ἐν μὲν τῇ ἐξωτερικῇ ὑπερβολῇ $\pi \times \mathrm{A\Pi} = \mathrm{M\Pi}^2$, ἐν δὲ τῇ ἐσωτερικῇ $\pi \times \Delta\mathrm{O} = \mathrm{O\Pi}^2$ (29)· ἀλλὰ $\mathrm{M\Pi}^2 - \Pi\mathrm{O}^2 = \mathrm{NO} \times \mathrm{MO}$ (Γεωμ. 356) $= \mathrm{A\Pi} \times \pi - \Delta\Pi \times \pi = \mathrm{A}\Delta \times \pi$· καὶ $\mathrm{A}\Delta \times \pi = \Lambda\Delta^2$ (29)· ἄρα $\mathrm{NO} \times \mathrm{MO} = \Lambda\Delta^2 = \delta^2$. Ο. Ε. Δ.

260. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ἐὰν ἀντὶ τῶν ἐπὶ τὸν ἀ-

ξονα τεταγμένων ληφθῶσιν αἱ ἐπὶ τὰς διαμέτρους $χυ$, εὑρεθήσεται $ρο \times ος = ΡΤ^2 = ΤΣ^2$ (258).

261. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ἐπειδὴ αἱ παραβολαὶ πᾶσαι οὐδενὶ ἀλλήλων διαφέρουσιν ὅτι μὴ ταῖς παραμέτροις, ὥσπερ οἱ κύκλοι πάντες τῷ μεγέθει τῶν κατ' αὐτοὺς ἀκτίνων· τούτου χάριν ἅπασαι ὑπάρχουσιν ὅμοια σχήματα.

262. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἐν ὁμοίαις ἐλλείψεσι καὶ ὑπερβολαῖς ἀεὶ ἐστὶ $ΡΟ \times ΟΣ = ρτ^2$ (σχ. 112, 114).

ΔΕΙΞΙΣ. Κληθήτω γὰρ ἡ διάμετρος $χυ = 2α$, ἡ δ' αὐτῇ συζυγὴς $= 2β$, καὶ αἱ ἐπὶ τὴν $χυ$ τεταγμέναι $ρΞ = υ$, καὶ $Τ$, αἱ ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον τῆς ἐσωτερικῆς καμπύλης διάμετρον $= 2γ$, καὶ $2δ$ ἡ συζυγὴς αὐτῇ διάμετρος, καὶ $ΚΞ = χ$· καὶ δὴ ἔσται, ἐπὶ μὲν τῆς ἐξωτερικῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ἐξωτερικῆς ὑπερβολῆς $υ^2 : \pm α^2 \mp χ^2 :: β^2 : α^2$ (121, 216)· ἐπὶ δὲ τῶν ἐσωτερικῶν $Τ^2 : \pm γ^2 \mp χ^2 :: δ^2 : γ^2$ (αὐτ.)· ἀλλ' ἐπείπερ αἱ ἐσωτερικαὶ ταῖς ἐξωτερικαῖς εἰσιν ὅμοιαι· ἐκ τούτου (256) $β^2 : α^2 :: δ^2 : γ^2$· ἄρα $υ^2 : \pm α^2 \mp χ^2 :: Τ^2 : \mp γ^2 \mp χ^2$, καὶ $υ^2 : Τ^2 :: \pm α^2 \mp χ^2 : \pm γ^2 \mp χ^2$, καὶ (ἀφαιρέσει τῶν ἑπομένων ὅρων) $υ^2 - Τ^2$ ($= ΡΟ \times ΟΣ$ (Γεωμ. 356)) $: υ^2 :: \pm α^2 \mp γ^2 : \pm α^2 \mp χ^2 :: τρ^2 : υ^2 =$ ($ΡΞ^2$) (*)· ἄρα $ΡΟ \times ΟΣ : υ^2 :: τρ^2 : υ^2$, καὶ $ΡΟ \times ΟΣ : τρ^2 :: υ^2 : υ^2$· ἄρα $ΡΟ \times ΟΣ = τρ^2$.

(*) Ῥᾷστα δ' ἄν τις συνίδοι τὴν ἀναλογίαν $\pm α^2 \mp γ : \pm α^2 \mp :: τρ^2 : ΡΞ^2$, τὰ ἐν τοῖς (94, 216) ἀναμνησθείς, καὶ τοῖς προκειμένοις σχήμασι τὸν νοῦν μικρὸν ἐπιστήσας· ἐστι γὰρ $ΚΙ = γ$ (ὡς πρὸς τὴν ἐσωτερικὴν καμπύλην κατὰ τὴν ὑπόθεσιν) $= χ$ ὡς πρὸς τὴν τεταγμένην $ΡΤ$ ἐπὶ τὴν διάμετρον $χυ$, καὶ $ΚΞ = χ$ ἀποτετμημένη ἄλλη ὑπὸ τῆς τε-

263. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι τεταγμέναι ὦσιν ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα, πορισθήσεται $\text{ΜΟ} \times \text{ΟΝ} = \text{ΔΛ}^2 = \vartheta$, κληθείσης ϑ τῆς ΔΛ.

264. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\text{ΜΟ} = \mu$, ϰ $\text{ΟΝ} = \omega$ (ὑποτιθεμένȣ ὡσαύτως κἀν τῇ παραβολῇ χ. 113, $\text{ΔΛ} = \vartheta$), ἔσαι ἐπὶ τῶν προεκτεθέντων θεωρημάτων καὶ τȣ̃ ἀνωτέρȣ πορίσματος, $\mu\omega = \vartheta^2$· γινομένȣ δὲ ἀπείρȣ τȣ̃ ω, ὃ τῇ ἐλλείψει ȣ̓δέποτε συμβαίνει, εὑρεθήσεται $\mu = \frac{\vartheta^2}{\omega} = \frac{\vartheta^2}{\infty} = 0$, τȣ̃τ' ἔςιν ἡ ἐξωτερικὴ καμπύλη συνέρχεται τῇ ἐσωτερικῇ, ἐς ἄπειρον χωρήσασα διάςημα, ὃ ȣ̓δέποτε συμβαίνει τῇ ἐλλείψει, ἅτε μηδέποτε ἐπ' αὐτῆς γινομένȣ $\omega = \infty$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ τȣ̃ λογισμȣ̃ τῶν ςοῶν.

265. Τοσαῦται διαφέρȣσαι εἴδει ςοαὶ ὑπάρχειν δύνανται, ὅσα ϰ εἴδη καμπύλων· αἱ μέντοι μᾶλλον εὔχρηςοι εἰσὶν αἱ ἐφεξῆς.

Στοὰ μὲν *ἔγκεντρός* ἐςιν, ὅταν ἡ περιφέρεια αὐτῆς ΑΟΒ (σχ. 115), ἀρχὰς ἔχȣσα τὰς Α, Β, ᾖ μέρος τι κυκλικόν· *τριτόσημος* δὲ, ὅταν ΑΟΒ ᾖ ὥσπερ τριγωνική· *ταπεινὴ* δὲ, ὅταν ΑΟΒ ᾖ ἡμιελλεί-

---

ταγμένης ΡΞ· τὰ δὲ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων κατὰ τὰς εἰρημένας παραγράφȣς εἰσὶν ἐν τῷ λόγῳ τῶν γινομένων ὑπὸ τῶν ἀποτετμημένων.

ψιον· ἀλλὰ α΄. εἰς κατασκευὴν στοᾶς τοῦ δοθέντος εἴδους, ἐπισταθήτω τῷ ἐδάφει ἡ καμπύλη ΑΟΒ, καθ᾽ ἣν ἡ στοὰ τὸ σχῆμα κατασκευασθήσεται, καὶ ἐφηρμόσθωσαν αὐτῇ ὑπὸ τοῦ οἰκοδόμου οἱ λίθοι· β΄. εἰς καταμέτρησιν τῆς στερεότητος μιᾶς τινος στοᾶς, εὑρεθήτω ἡ ἐπιφάνεια ΑΟΒ, καθ᾽ ὃν ἡ καμπύλη αὕτη τετραγωνίζεται τρόπον, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ Μν μῆκος τῆς στοᾶς· καὶ οὕτως εὑρεθήσεται ἡ στερεότης εἴτε πλήρους, εἴτε κενῆς, τῆς στοᾶς τῆς ἀπογεννηθείσης ὑπὸ τῆς ΑΟΒ καμπύλης, ἑρπυσάσης τὴν Μν ὁδόν· ἀλλὰ γὰρ μόνης τῆς στερεότητος τοῦ οἰκοδομήματος ζητουμένης, εὑρεθήτω ἡ ἐπιφάνεια Κοδ ἡ ὁμοία τῇ ΑΟΒ, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ Μν· τὸ δὲ γινόμενον ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς προευρεθείσης στερεότητος· τὸ δὴ κατάλοιπον ἔσται ἡ ζητουμένη στερεότης, ἡ ἀπογεννωμένη ἐκ τοῦ σχήματος ΑΚΟΒδ, ἑρπύσαντος τὴν ὁδὸν Μν.

Ἀλλ᾽ ἐὰν ἡ στοὰ ᾖ ἐξειργασμένη κατὰ τὸ σχῆμα τοῦ οἰκίσκου αβγδΟο (σχ. 116), θεωρηθῆναι δύναται ὡς γεγεννημένη ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ αΟδ περὶ τὸν αὐτοῦ ἄξονα, ἡ δ᾽ ὁλικὴ αὐτῆς στερεότης, εἴτε πλήρους, εἴτε κενῆς, ἔσεται ἡμισφαίριον, ἢ ἡμιπαραβολοειδές, ἢ ἡμιελλειψοειδές, κτ., ἀμέλειτοι ὡς ἔχει φύσεως ἡ καμπύλη αΟδ· ζητηθείσης ἄρα τῆς στερεότητος ταύτης, κατὰ τὴν εὐχρηστοῦσαν πρὸς τὸ στερεὸν τόδε μέθοδον, εὑρεθήτω εἶτα καὶ ἡ στερεότης τοῦ ἐκ τῆς βογ ἀπογεννωμένου σώματος· καὶ τῆς δευτέρας ἀπὸ τῆς πρώτης ἀφαιρεθείσης, γνωσθήσεται ἡ τοῦ οἰκοδομήματος τῆς στοᾶς στερεότης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ Κωνικῶν τομῶν γενῶν ὑπερτέρων.

266. Ἐὰν ἡ καμπύλη αμΑ (σχ. 117), ἐν ᾗ αΑ $= 2\alpha$ (ἡ κληθείη ἂν ἄξων), ϗ ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ ἀποτετμημένη αΠ $= \chi$, ϗ ἡ τεταγμένη Πμ $= \upsilon$, ὑπάρχῃ δὲ $\chi^{\mu} : \iota^{\mu} :: \upsilon^{\nu} : \mathrm{A\Pi}^{\nu} = (2\alpha - \chi)^{\nu}$, προκύψει ἐξίσωσις $\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^{\mu}(2\alpha - \chi)^{\nu}$, ἥτις καλεῖται ἐξίσωσις κύκλων γενῶν ὑπερτέρων· καλῦνται δὲ ὕτω διὰ τὴν ταύτης τῆς ἐξισώσεως πρὸς τὴν τῦ συνήθυς κύκλυ ἐμφέρειαν· ἐὰν γὰρ ὑποτεθῇ $\mu = \nu = 1$, πρόεισιν $\upsilon^2 = 2\alpha\chi - \chi^2$ ἐξίσωσις τῦ συνήθυς κύκλυ· ὡς εἰ διὰ τῶν παρὰ ταύτην τὴν ὑπόθεσιν ἐξισώσεων κύκλοι γραφῶσιν, ἔσονται ὐ ςρογγύλοι, καθ' ὃν ἅπαντες ἴσμεν κύκλον, μακρῷ δὲ διαφέροντες ἐκείνυ τῷ σχηματισμῷ, καθ' ἣν ἔχει φύσιν ἡ ἐξίσωσις· ἐὰν δὲ ἀποτμηθῶσιν αἱ εὐθεῖαι πρὸς μέσῳ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ κ,ποριςθήσεται $\iota^{\mu+\nu} = (\alpha - \chi)^{\mu} \times (\alpha + \chi)^{\nu}$· τῦ δὲ Αα ὑποτεθέντος $= \alpha$, ἡ πρώτη ἐξίσωσις γενήσεται $\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^{\mu}(\alpha - \chi)^{\nu}$· ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^{\mu}(\alpha - \chi)^{\nu}$ ὑποτεθῇ ἐκ διαδοχῆς $\mu = 1, 2, 3, 4, 5$ κτ, ϗ $\nu = 1$, ποριςθήσεται ὁ καλύμενος πρῶτος κύκλος πάντων τῶν γενῶν, τῦτ' ἔςιν $\upsilon^2 = \alpha\chi - \chi^2$, $\upsilon^3 = \alpha\chi_2 - \chi^3$, κτλ.· εἰ δὲ γένηται $\mu = 3$ ϗ $\nu = 2$, εὑρεθήσεται $\upsilon^5 = \chi^3(\alpha - \chi)^2$, ἥτις ἐμφαίνει τὸν δεύτερον κύκλον τῆς πρώτης τάξεως, ὑποτιθεμένυ δὲ $\mu = 2$, ϗ $\nu = 3$, ἔςαι $\upsilon^5 = \chi^2(\alpha - \chi)^3$, ἐκδηλῦσα κύκλον τρίτον τάξεως πέμπτης· ἐν γένει δὲ ὁ κύκλος εἴωθε λέγεσθαι πρῶτος, δεύ-

τερος, τρίτος κτ, ὡς ἂν εἴη ὑποτεθειμένον τὸ ν (δείκτης τῦ καταλοίπυ τῦ ἄξονος) $= 1, 2, 3$ κτλ.

267. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Τὸ γένος τῆς γραμμῆς ἐκ τῦ βαθμῦ τῆς κατ' αὐτὴν ἐξισώσεως ἐκλογιζόμεθα· δυνάμεθα μέντοι ἀρχὴν ποιήσαϑαι τῶν γενῶν ϗ ἀπὸ τῦ συνήθυς κύκλυ, ὃν ἐκλάβοιμεν ἂν κύκλον πρωτογενῆ, ἢ πρωτοταγῆ, ἑξῆς δὲ, ὃν ὠνομάσαμεν πέμπτης τάξεως, ἢ πέμπτυ γένυς, ὡς τετάρτης τάξεως, ἢ τετάρτυ γένυς, ἐκδέξαϑαι, ὥςε τὸν κύκλον τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^{\mu+1} = \alpha\chi^{\mu} - \chi^{\mu+1}$ ἐγκαταριθμεῖϑαι τάξει δηλυμένῃ διὰ $\mu + 1 - 1 = \mu$· δῆλον ὂν ὡς ἀδιάφορον τῦτο.

268. Πᾶσαι αἱ παραβολαὶ παραςαθῆναι δύνανται διὰ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu} = \chi^{\nu}$, ὑποτιθεμένυ $\alpha = 1$· ἐὰν μὲν ὂν ἐπὶ πασῶν τύτων τῶν καμπύλων γένηται $\chi = 0$, ἔςαι ϗ $\upsilon = 0$· ἐὰν δὲ γένηται $\chi = \infty$, ἔσεται ϗ $\upsilon = \infty$, εἰ μόνον μὴ εἴη ἀνύπαρκτος τύπος· ἡ γεμὴν ποικιλία τῶν δεικτῶν μ καὶ ν προσδιορίζει τὴν θέσιν τῶν παραβολικῶν κλωνῶν· κείϑω γὰρ ἐξαγαγεῖν τὴν ῥίζαν $\mu + \nu$ ἀφ' ἑκατέρυ τῶν μελῶν τῆς γενικῆς ἐξισώσεως· ὅθεν εὑρίσκεται $\upsilon = \sqrt[\mu+\nu]{\alpha^{\mu}\chi^{\nu}}$· εἰ μὲν τοίνυν μ ϗ ν εἶεν ἀριθμοὶ περιττοὶ ϗ ὑπαρκτικοὶ, $\mu + \nu$ ἔςαι ἀριθμὸς ἄρτιος, ϗ χ^{ν} ποσὸν ὑπαρκτικὸν, ϗ ῥίζα ἀρτιοβάθμιος ποσότητος ὑπαρκτικῆς· υ ἄρα δύω ἕξει δυνάμεις, τὴν μὲν ὑπαρκτικὴν, τὴν δὲ λειπτικήν· ϗ ἔνθεν μὲν αἱ ἀποτετμημέναι ΚΒ ὑπαρκτικαὶ εἶεν (σχ. 118), ἡ καμπύλη πρὸς ταῦτα ἀναφύσει δύω κλῶνας ΚΠ, ΚΞ, τὸν μὲν πρὸς τὰ ἐπὶ ΚΜ, ὅπυ ὑπαρκτικαί εἰσιν αἱ ἀποτετμημέναι, τὸν ἕτερον δὲ πρὸς τὰ ἐπὶ ΚΜ, ὗ εἰσι λειπτικαί· ἔνθεν δὲ λειπτικαὶ εἶεν αἱ χ, ϗ χ^{ν} ἔσεται ποσότης λει-

πτική, ἡ δὲ υ γενήσεται ἀνύπαρκτος, ῥίζα ἦσα ἀρτία ποσότητος λειπτικῆς (τῆ α ὑπαρκτικῆ ὑποτιθεμένε)· πρὸς ἄρα τὰ ἐπὶ ΚΑ, ὅπε λείπεσιν αἱ χ, ἐδένα ἐπεκτενεῖ κλῶνα ἡ καμπύλη. Ἐὰν δὲ συνάμα τῇ χ καὶ α ὑπάρχῃ λειπτικὸν, καὶ ἔτως ἔσαι ἡ ἐξίσωσις $\upsilon^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu}$, ἐξ ἧς ἡ καμπύλη, δύω μὲν ἕξει κλῶνας, ἔνθα λειπτικαί εἰσιν αἱ ἀποτετμημέναι, ἐδένα μέντοι, ἔνθα ὑπαρκτικαί· θῶμεν ἦν ἤδη, τὸν μὲν μ ἄρτιον, τὸν δὲ ν περιττὸν, ὡς εἶναι $\mu+\nu$ ἀριθμὸν περιττεύοντα· ἐὰν μὲν ἦν ὑποτεθῇ ὑπαρκτικὸν τὸ χ, ἔσεται καὶ χ^{ν} ὑπαρκτικὸν, καὶ υ ἔσεται ῥίζα περισσὴ ποσότητος ὑπαρκτικῆς, μίαν μόνην ἐχέσης ῥίζαν πραγματικὴν καὶ ὑπαρκτικήν· σαφὲς γὰρ ὡς ὑποτιθεμένης ἐξισώσεως $\chi^3 = \gamma^3$, ἐξ ἧς πρόεισι $\chi = \sqrt[3]{\gamma^3} = \gamma$, αἱ δύω λοιπαὶ ῥίζαι, αἳ πορίζονται διαιρεμένης τῆς $\chi^3 - \gamma^3 = o$ διὰ $\chi - \gamma = o$, εἰσὶν ἀνύπαρκτοι, εἴγε τὸ πηλίκον $\chi^2 + \gamma\chi + \gamma^2 = o$ προβάλλει ῥίζας ἀνυπάρκτες τὰς $\chi = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\gamma}{2}\sqrt{-3}$· ἄρα ἡ καμπύλη (σχ. 119) ἕνα μόνον κλῶνα ἔχει τὸν ΚΠ, ἐπεκτεινόμενον πρὸς ὅπερ εἰσὶν ὑπαρκτικαὶ αἵτε ἀποτετμημέναι καὶ τεταγμέναι· ἐὰν δ᾽ ὑποτεθῇ τὸ χ λειπτικὸν, ἔσεται καὶ χ^{ν} ποσότης λειπτική· ἄρα υ ἔσεται ῥίζα περισσὴ ποσότητος λειπτικῆς, μίαν μόνην, πραγματικὴν μὲν, λειπτικὴν δὲ, ἐχέσης δύναμιν· ἡ ἄρα καμπύλη ἕξει καὶ ἕτερον κλῶνα ΚΞ, ἔνθ᾽ αἵτε ἀποτετμημέναι καὶ αἱ τεταγμέναι εἰσὶ λειπτικαί· δῆλον δὲ πρὸς τέτοις, ὡς ἐν τῇ ἐξισώσει $\upsilon^{\mu+\nu} = -\alpha^{\mu}\chi^{\nu}$, ταῖς μὲν ὑπαρκτικαῖς ἀποτετμημέναις ἀντισοιχῆσι τεταγμέναι λειπτικαὶ, ταῖς δὲ λειπτικαῖς τἀναντίον ὑπαρκτικαί· ἐὰν μὲν γὰρ ἡ λειπτικὴ ἡ χ, ἔςαι $υ^{μ+ν} = -α^μ \times -χ^ν$, ϗ δὴ $υ^{μ+ν} = α^μ χ^ν$· ἐὰν δὲ ἡ ὑπαρκτικὴ, γενήσεται $υ^{μ+ν} = -α^μ \times +χ^ν$, ϗ δὴ $υ^{μ+ν} = -α^μ χ^ν$, εἴτ' οὖν $-υ^{μ+ν} = -α^μ χ^ν$.

Θῶμεν ἐφεξῆς, ἄρτιον μὲν τὸν ν, περισσὸν δὲ τὸν μ· ϗ δὴ, τοῦ χ ὑπαρκτικοῦ ὄντος, ἔςαι ϗ $χ^ν$ ποσότης ὑπαρκτική· πορισθήσεται ἄρα, ὡς ϗ πρότερον, εἷς κλὼν ὁ ΚΠ (σχ. 120) πρὸς ἅπερ εἰσὶν ὑπαρκτικαὶ αἵτε χ ϗ αἱ υ· ἀλλ᾽ ἐπειδὴ βαθμὸς ἅπας ἄρτιος ἀπὸ ποσότητος λειπτικῆς καθίσταται ποσότης ὑπαρκτικὴ, τοῦ χ λειπτικοῦ ὄντος, $χ^ν$ γενήσεται ποσότης ὑπαρκτική· υ ἄρα ἔσεται ῥίζα περισσὴ ποσότητος ὑπαρκτικῆς· ἡ καμπύλη ἄρα ἕξει ϗ ἕτερον κλῶνα τὸν ΚΞ, ἔνθα λειπτικαὶ μὲν εἰσὶν αἱ ἀποτετμημέναι, ὑπαρκτικαὶ δὲ αἱ τεταγμέναι· ἐν δὲ τῇ ἐξισώσει $υ^{μ+ν} = -α^μ χ^ν$ ἑκάτερος τῶν κλωνῶν κείσεται πρὸς τὰ ἐπὶ ΚΜ, ἔνθα εἰσὶν αἱ τεταγμέναι λειπτικαί.

Θῶμεν τελευταῖον τόν τε μ ϗ τὸν ν ἀρτίους, ὡς ὑπάρχειν μ + ν ἀριθμὸν ἄρτιον· ὑποτιθεμένου οὖν τοῦ χ εἴτε ὑπαρκτικοῦ εἴτε λειπτικοῦ, $χ^ν$ ἀεὶ ἔσεται ποσότης ὑπαρκτική· υ ἄρα ἔςαι ῥίζα ἄρτιος ποσότητος ὑπαρκτικῆς, ϗ δὴ ἕξει δυνάμεις δύω, τὴν μὲν ὑπαρκτικὴν, τὴν ἑτέραν δὲ λειπτικήν· ἡ ἄρα καμπύλη τέσσαρας ἕξει κλῶνας (σχ. 121), ἐπεκτεινομένους, ἔνθα τε αἱ χ ϗ υ εἰσὶν ὑπαρκτικαὶ, ϗ ἔνθα αἱ χ ϗ υ εἰσὶ λειπτικαί· ἡ δὲ καμπύλη $υ^{μ+ν} = -α^μ χ^ν$ ἔςαι ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει πάντῃ ἀνύπαρκτος.

269. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Ἰςέον ἐν παρόδῳ, ὅτι ἡ παραβολὴ τῆς ἐξισώσεως $χ^{μ+ν} = α^μ υ^ν$ ἡ αὐτή ἐςι τῇ, περὶ ἧς ἤδη εἰρήκαμεν, πλὴν ὅτι αἱ ἐν ἐκείνῃ τεταγμέναι

παράλληλοί εἰσι ταῖς ἐν τῇ πρώτῃ ἀποτετμημέναις, αἱ δὲ ἀποτετμημέναι παράλληλοι ταῖς τεταγμέναις· ὑποτιθεμένε δὲ $\mu = 4$, ἢ $\nu = 1$, πορισθήσεται $\upsilon^5 = \alpha^4\chi$, ἐξίσωσις τῆς πρώτης πεμπτογενὲς παραβολῆς· γινομένε δὲ $\mu = 3$, ἢ $\nu = 2$, πορισθήσεται $\upsilon^5 = \alpha^3\chi^2$, παραβολὴ δευτέρα πεμπτογενής· καθόλε δὲ εἰπεῖν, αἱ μὲν πρῶται παραβολαὶ προκύπτεσι, γινομένε $\nu = 1$, αἱ δὲ δεύτεραι, ὑποτιθεμένε $\nu = 2$, αἱ δὲ τρίται, $\nu = 3$, κτλ.

270. Ἐὰν ἐν τῇ καμπύλῃ αμΑ (σχ. 117) ὑποτεθῇ $\upsilon^2 : \alpha\Pi \times A\Pi = \alpha\chi - \chi^2 :: \pi : \alpha$, πορισθήσεται τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσις $\frac{\alpha}{\pi}\,\upsilon^2 = \alpha\chi - \chi^2$· διαιρεθεῖσα γὰρ αὕτη διὰ α, ἢ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ π, γενήσεται $\upsilon^2 = \pi\chi - \frac{\pi\chi^2}{\alpha}$, ἔνθα ἀντὶ α εἰσαγομένε 2α, προκύψει $\upsilon^2 = \pi\chi - \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$, ἐξίσωσις ἡ εὑρεθεῖσα (251)· ἐὰν μέντοι ὑποτεθῇ $\upsilon^{\mu+\nu} : \chi^\mu \times (\alpha - \chi)^\nu :: \pi : \alpha$, προκύψει $\frac{\alpha}{\pi}\,\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^\mu\,(\alpha - \chi)^\nu$, ἐξίσωσις τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη ἐλλείψεων· ἢ ἵνα μὲν εὑρεθείη ἡ πρώτη, φέρ' εἰπεῖν, πεμπτογενὴς ἔλλειψις, γενέσθω $\nu = 1$, ἵνα δὲ ἡ δευτέρα, ὑποτεθήτω $\nu = 2$ κτ.

271. Ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ ῥηθέντος, α μὲν τε πρώτε ἄξονος, π δὲ τῆς παραμέτρε, ἀνακύψει $\frac{\alpha}{\pi}\,\upsilon^2 = \alpha\chi + \chi^2$· ἐὰν μέντοι γένηται $\upsilon^{\mu+\nu} : \chi^\mu \times (\alpha + \chi)^\nu :: \alpha : \pi$, ἐντεῦθεν προελεύσεται $\frac{\alpha}{\pi}\,\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^\mu\,(\alpha + \chi)^\nu$, ἐξίσω-

σις τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη ὑπερβολῶν· αἱ δὲ πρῶται, δεύτεραι, τρίται, κτ. ὑπερβολαί, αἱ πεμπτογενεῖς φέρε, διορισθήσονται γενομένε $\nu = 1, 2, 3$ κτ.

272. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν μὲν ὁ δείκτης $\mu + \nu$ τῦ υ ᾖ ἀριθμὸς περιττὸς, τὸ υ μίαν μόνην ῥίζαν πραγματικὴν περιέξει· δύω δὲ, ἐὰν ᾖ ἄρτιος· ἐκείνως μὲν ἄρα ἑκάςη ἀποτετμημένη μίαν σύςοιχον ἕξει τεταγμένην, ὅτω δὲ δύω· κἀκείνως μὲν εἷς κλὼν μόνος ἔσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῦ ἄξονος, ὅτω δὲ δύω· ταῦτα δ᾽ ὐχ᾽ ἧττον κρατεῖ ἐπί τε τῶν κύκλων ϗ τῶν ἐλλείψεων ϗ τῶν παραβολῶν, τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη· ἑξῆς δ᾽ ὀψόμεθα, ὡς ὐχὶ τ᾽ αὐτὰ κρατεῖ κἀπὶ τῶν ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ὑπερβολῶν, τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη.

273. Ἐὰν γένηται $\chi^\mu : \alpha^\mu :: \alpha^\nu : \upsilon^\nu$, προκύψει $\chi^\mu \upsilon^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$ ἐξίσωσις τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ὑπερβολῶν (*) ὅθεν ἀποφέρεται $\upsilon^\nu = \dfrac{\alpha^{\mu+\nu}}{\chi^\mu}$ · ἐὰν ὖν ὑποτεθῇ χ ἀπειροςὸν, προκύπτει $\upsilon^\nu = \infty$, ϗ $\upsilon = \sqrt[\nu]{\infty}$ · εἰ δ᾽ ὑποτεθείη $\chi = \infty$, ἔςαι $\upsilon^\nu = 0$, ϗ $\upsilon = 0$ · ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^\nu = \dfrac{\alpha^{\mu+\nu}}{\chi^\mu}$, ἀποφέρεται $\upsilon = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha^{\mu+\nu}}{\chi^\nu}}$, ἐξίσωσις παρεχομένη τὰς ἐφεξῆς συνεπείας.

(*) Δυνάμεθα δὲ ποιῆσαι ϗ $\chi^\nu : \alpha_\nu :: \alpha^{\mu-\nu} : \upsilon^{\mu-\nu}$, ὅθεν $\alpha^\mu = \upsilon^{\mu-\nu} \chi^\nu$, ἑτέρα ἐξίσωσις τῶν ὑπερβολῶν, παρέχεσα, ὃ ϗ ἡ πρώτη, ἀποτέλεσμα.

Α΄. Ἐὰν μὲν μ ᾗ ν ὦσιν ἀριθμοὶ περιττοὶ, ὃ συμβαίνει τῇ συνήθει ὑπερβολῇ, ὑπαρκτικοῦ ὄντος τοῦ χ, ἔσεται ᾗ χ^{μ} ποσὸν ὑπαρκτικόν· ἄρα υ μίαν μόνον ἕξει δύναμιν πραγματικήν· διὸ δὴ ἕνα κλῶνα ἕξει ἡ καμπύλη τὸν Π (σχ. 122), ἔνθα αἱ ἀποτετμημέναι ᾗ αἱ τεταγμέναι ὑπάρχουσιν ὑπαρκτικαί· λειπτικοῦ δὲ ὄντος τοῦ χ, ἔσεται ᾗ χ^{μ} ποσότης λειπτική, ᾗ υ ἔσαι ποσότητος λειπτικῆς ῥίζα περισσὴ, ἔχουσα μίαν μόνην δύναμιν, πραγματικὴν μὲν, ἀλλὰ λείπουσαν· ἐντεῦθεν ἄρα ἀναφυήσεται κλὼν ἕτερος ὁ Ξ, πρὸς ἃ μέρη λειπτικαὶ τίθενται αἱ χ καὶ αἱ υ.

Β΄. Ἐὰν δὲ ν μὲν ᾖ ἀριθμὸς περισσὸς, μ δὲ ἄρτιος, εἴτε ὑπαρκτικοῦ, εἴτε λειπτικοῦ ὑποτιθεμένου τοῦ χ, χ^{μ} ἔσεται ἀείποτε ὑπαρκτικόν· ἄρα υ ἔσαι ποσότητος ὑπαρκτικῆς ῥίζα περισσὴ, μίαν μόνην δύναμιν πραγματικὴν ᾗ ὑπαρκτικὴν ἔχουσα· ἡ ἄρα καμπύλη σύγκειται ἐκ δύω κλώνων Π ᾗ Ξ (σχ. 123), ὧν ὁ μὲν πρῶτος τάς τε ἀποτετμημένας ᾗ τὰς τεταγμένας ἕξει ὑπαρκτικὰς, θατέρῳ δὲ, λειπτικαὶ μὲν ἔσονται αἱ ἀποτετμημέναι, ὑπαρκτικαὶ δὲ αἱ τεταγμέναι.

Γ΄. Ἐὰν δὲ τοῦ ν ὄντος ἀριθμοῦ ἀρτίου, ὁ μ ὑπάρχῃ περισσὸς, ὑποτιθεμένου χ ὑπαρκτικοῦ, ἔσαι ᾗ χ^{ν} ποσότης ὑπαρκτική, ᾗ υ ἔσεται ποσότητος ὑπαρκτικῆς ῥίζα ἄρτιος, δύω εὐμοιροῦσα δυνάμεων, τῆς μὲν ἐν ὑπάρξει, ἐν λείψει δὲ τῆς ἑτέρας· ἡ ἄρα καμπύλη (σχ. 124) δύω προβαλεῖται κλῶνας, τόν τε Π, ἔνθα αἱ τεταγμέναι εἰσὶν ὑπαρκτικαὶ, ᾗ τὸν Ξ, ἔνθα λειπτικαί εἰσιν αἱ υ· εἰ δὲ χ εἴη λειπτικὸν, ἔσεται ᾗ χ^{μ} ὡσαύτως· ἐκεῖν υ ἔσαι ποσότητος λειπτικῆς ῥίζα ἄρτιος, ᾗ ἑπομένως ἀνύπαρκτος· ἡ ἄρα καμπύλη οὐδενὸς εὐμοιρήσει κλωνὸς, ἔνθα αἱ χ εἰσὶ λειπτικαί· ἐν ἁπάσαις δὲ ταῖς ῥηθείσαις περιπτώσεσιν, εἴπερ εἴη ἐξίσωσις $\chi^\mu\, \upsilon^\nu = - \alpha^{\mu + \nu}$, ἀπογεννήσει τὰς αὐτὰς ὑπερβολὰς, μετατρεπομένων τῶν ὑπαρκτικῶν χ ϗ υ εἰς λειπτικὰς, ϗ τ' ἀνάπαλιν.

Δ΄. Τελευταῖον δὲ, ἐὰν μ ϗ ν ὦσιν ἀριθμοὶ ἄρτιοι, τȣ̃ χ εἴτε ὑπαρκτικȣ̃, εἴτε λειπτικȣ̃ ὄντος, ἔσεται ἀεί. ποτε χ^μ ποσὸν ὑπαρκτικὸν, ϗ υ, ῥίζα ȣ̓̃σα ἀρτία ποσότητος ὑπαρκτικῆς, δυεῖν δυνάμεων ευμοιρήσει, τῆς μὲν ὑπαρκτικῆς, τῆς δ' ἑτέρας λειπτικῆς, ἀντιστοιχȣσῶν ἑκατέρας ἑκατέρα ὑπαρκτικῇ, ἢ λειπτικῇ χ· ἡ ἄρα καμπύλη (χ. 125) συγκείσεται ἐκ τεσσάρων κλωνῶν Π, Ξ, Θ, Ρ ἐπεκτεινομένων, ἔνθατε εἰσὶν αἱ ὑπαρκτικαὶ χ, υ, ϗ ἔθα αἱ λειπτικαὶ, ἐνταύτῃ δὲ τῇ περιπτώσει ἡ ἐξίσωσις $\chi^\mu\, \upsilon^\nu = - \alpha^{\mu + \nu}$ ὑπάρχει ἀδύνατος.

274. ΣΗΜΕΩΣΙΣ. Αἱ, περὶ ὧν ἤδη ἐν τῇ ἐσχάτῃ περιπτώσει εἰρήκαμεν, ὑπερβολαὶ ȣ̓δὲν ἀλλ' ἢ αἱ τῶν προεκτεθεισῶν περιπτώσεων ὑπάρχȣσιν, ἀθρόον εἰλημμένων· ἐξαγομένης γὰρ τῆς τετραγωνείȣ ῥίζης ἐς ὃ ἂν ἕτερος τῶν δεικτῶν τȣ̃ χ, ἢ τȣ̃ υ, ἢ ϗ ἑκάτερος, εἶεν περισσοὶ, παριθήσεται ἐξίσωσις, ἐν ᾗ διὰ τὸ διπλȣ̃ν σύμβολον $\pm$ παραστήσονται ὑπερβολαὶ ἐπανήκȣσαι τινι τῶν εἰρημένων περιπτώσεων· κατάδηλον δε, ὅτι ὡσαύτως συλλογίζεσθαι προσήκει ἐν τῇ τῆς παραβολῆς ἐξισώσει $\upsilon^{\mu + \nu} = \alpha^\mu\, \chi^\nu$, ἡνίκα μ ϗ ν εἶεν ἀριθμοὶ ἄρτιοι.

ΥΨΗΛΟΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Καμπύλων ἐν γένει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Περὶ Γεωμετρικῶν Καμπύλων.

275. Πᾶσα γραμμὴ νοηθῆναι δύναται ὡς γεννωμένη ἐκ κινήσεως σημείου (Γεωμ. 10, 11)· καὶ εἰ μὲν τὸ γεννητικὸν σημεῖον κατὰ σταθερὸν νόμον ἕρπει, καλεῖται κανονική· ἀκανόνιστος δὲ, εἰ τοὐναντίον· Πᾶσα δὲ εὐθεῖα ὑποτεθῆναι δύναται ὡς πλευρὰ τριγώνου τοῦ ΗΔΜ (σχ. 63), ἐν ᾧ αἱ τεταγμένως ἐφ᾽ ἕκαστον σημεῖον, καταλειπόμενον ὑπὸ τοῦ γεννητικοῦ σημείου, ἀχθεῖσαι, εἰσὶν ὡς αἱ ἀντίστοιχοι ἀποτετμημέναι, ὁ δὲ λόγος, καθ᾽ ὃν τὸ σημεῖον εἵρπυσε, παρίσταται διὰ πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως τῆς $\upsilon = \frac{\text{T}\times\chi}{\text{X}}$ (11)· πᾶσα ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ ἐστὶ κανονική· ἄρα πᾶσα ἀκανόνιστος ἔσται ἀναγκαίως καμπύλη.

276. Καμπύλη Ἀριθμητικὴ, ἢ Γεωμετρικὴ, λέγεται, ὅταν τῇ κατ᾽ αὐτὴν ἐξισώσει εὐθεῖαι ἐμπίπτωσιν, ὧν ὁ λόγος δηλωθῆναι δύναται ἐν ἀριθμοῖς· τοιαίδε εἰσὶν αἱ τέσσαρες ἐγνωσμέναι καμπύλαι, αἳ κωνικαὶ τομαὶ ἤκουσαν· καμπύλη δὲ Ὑπερβατικὴ, ὅταν τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν συντιθῶσι γραμμαὶ, ὧν ὁ λόγος δι᾽ οὐδενὸς ἀ-

ριθμȣ̃ δηλωθῆναι ἔχει· καμπύλη φέρ' εἰπεῖν, ἧς συνέκθεσίς τις τεταγμένων πρὸς συνέκθεσιν ἀποτετμημένων ἔστιν, ὡς ἡμίτονόν τι πρὸς τὸ αὐτȣ̃ κυκλικὸν τόξον, ὑπάρχει ὑπερβατική· ἐπεὶ γὰρ γεωμετρικῶς ἡ κυκλικὴ περιφέρεια ȣ̓δέπω μεμέτρηται, ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς ῥηθῆναι τὸν μεταξὺ ἡμιτόνȣ κ̀ κυκλικȣ̃ τόξȣ λόγον.

277. Οἱ μὲν ȣ̓̃ν διάφοροι βαθμοὶ τῶν ἐξισώσεων, οἱ ἐμφαίνοντες τὴν φύσιν τῶν ἀριθμητικῶν καμπύλων, διορίζουσι τὰ γένη, ἢ τὰς τάξεις, τῶν καμπύλων· οἱ δὲ ποικίλοι συνδυασμοὶ τῶν κατὰ τὰς ἀποτετμημένας κ̀ τεταγμένας συνεκθέσεων τὰ ποικίλα εἴδη τῶν καμπύλων τὰ τῷ γένει ὑπαγόμενα ἐμφαίνȣσι· καλεῖται τοίνυν γραμμὴ πρωτοταγής, ἢ πρώτȣ γένȣς, ἧς πρωτοβάθμιος ἡ ἐξίσωσις, δευτεροταγὴς δέ, ἢ δευτέρȣ γένȣς, ἧς δευτεροβάθμιος κτλ. κ̀ τȣ̃ μὲν πρώτȣ γένȣς, μόνη ἡ εὐθεῖα ὑπάρχει· τȣ̃ δὲ δευτέρȣ αἱ τέσσαρες κωνικαὶ τομαί· τȣ̃ δὲ τρίτȣ παρὰ τὰς τῶν καθυπερτέρων γενῶν κωνικὰς τομὰς (266) κ̀ ἄλλαι εἰσὶ πλεὶν ἢ 72· τȣ̃ δὲ τετάρτȣ πλείȣς ἢ 140· κ̀ ȣ̓́τως ἐπ' ἄπειρον αὔξȣσιν· εἰσὶν ἄρα ἄπειροι εἴδει διαφέρȣσαι καμπύλαι κανονικαὶ ἀριθμητικαί.

Ὥστε ἐν γένει, ἵνα γραφῇ καμπύλη, ἧς δέδοται ἡ καθόλȣ συμβολικὴ ἐξίσωσις, ἤχθω εὐθεῖα τέρματος ἄνευ, κ̀ εἰλήφθω κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς σημεῖον, ὃ δεῖ τεθῆναι εἰς ἀρχὴν τῶν ἀποτετμημένων, κ̀ ἀνεσπάσθωσαν ἑξῆς πρὸς αὐτὴν τεταγμέναι ὑπαρκτικαί τε κ̀ λειπτικαί, ἀντιστοιχȣ̃σαι ἑκάστῃ τῇ οἰκείᾳ αὐτῆς ἀποτετμημένῃ· τȣτὶ δὲ μάλα φανήσεται δι' ὑποδείγματος.

278. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Δοθείσης ἐξισώσεως καμπύλης ἀριθμητικῆς, ἀναγράψαι τὴν καμπύλην.

ΛΥΣΙΣ. Δεδόσθω ἡ ἐξίσωσις δευτεροβάθμιος ἡ $\upsilon^2 = \frac{\beta^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2}{\alpha^2}$ (Ρ)· ὑποτεθείσθω δὲ κατὰ τὸ δοκοῦν $\alpha = 6$ (6 ὀργυιαῖς, ἢ ποσὶ ἢ κτλ.) καὶ $\beta = 3$· μετὰ δὲ τὸ ληφθῆναι τὴν δύναμιν $\alpha =$ ΚΣ ἐπὶ τῆς ἀπεράντου ΚΛ (σχ. 126)· υ ἐν τῇ ἐξισώσει Ρ, ἀεὶ εὑρίσκεται ἀνύπαρκτος, ἕως οὗ ὑποτίθεται $\chi < 6$· ἐκ τούτου ἄρα συνάγειν ἔξεστιν, ὡς οὐδεμία εὐθεῖα ταχθῆναι δύναται ἐπὶ τὴν ΚΣ· ὑποτεθείσης ἄρα $\chi = 6$, υ ἐν τῇ Ρ εὑρίσκεται $= 0$· τουτέστιν ἡ καμπύλη διελεύσεται διὰ τοῦ πέρατος Σ. β΄. γενομένης $\chi = 7$, ἔσται, $\upsilon = \sqrt{\frac{117}{6}}$. εὑρεθεῖσα ἄρα διὰ προσεγγίσεως ἡ κατὰ τὴν υ δύναμις, ἡ ἀντίστοιχος τῇ $\chi = 7$, ὑψούσθω ὡς τεταγμένη· ἀντὶ δὲ χ τεθεισῶν ἐκ διαδοχῆς τῶν 8, 9 κτλ, εὑρεθήσονται διὰ πράξεων ἐκ διαδοχῆς αἱ υ, καὶ ἡ διὰ τῶν περάτων τῶνδε τῶν τεταγμένων καταγραφομένη γραμμὴ ἔσεται ἡ ζητουμένη καμπύλη. Ο. Ε. Π.

Ἀλλὰ α΄. ἐπείπερ ἐν τῇ Ρ, α^2, β^2 εἰσὶν ἄτρεπτοι, τῶν χ αὐξομένων συναυξοῦνται καὶ αἱ υ, καὶ μᾶλλον χωροῦσι πόῤῥω τοῦ ἄξονος ΣΤ οἱ κλῶνες· β΄. $\upsilon = + \frac{\sqrt{\beta^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2}}{\alpha}$, τουτέστιν ἑκάστῃ ὑπαρκτικῇ ἀντιστοιχεῖ καὶ λειπτικὴ ἄλλη ἴση· πρὸς ἄρα τὰ ἀριστερὰ τῆς ΣΛ τιθεμένων κατὰ τὸ συνεχὲς τῶν ἀντιστοίχων λειπτικῶν θηρεύονται ἑκάτεροι οἱ κλῶνες τῆς ΣΤτ· ἀλλὰ γὰρ χ γενομένου ἐν τῇ ἐξισώσει λειπτικοῦ, προϊασιν ἀποτετμημέναι χ ἐκ τοῦ Κ, καὶ πᾶσαι αἱ ἐν τῇ Ρ υ ἐλέγχονται ἀνύπαρκτοι, ἕστ' ἂν τεθῇ $-\chi = -6$· γενομένης δὲ $-\chi = -6$, εὑρίσκεται $\upsilon = 0$, τοῦτο δὲ δηλοῖ, τὴν καμπύλην διελεύσεσθαι διὰ τῆς ἑτέρας κορυφῆς σ· τέλος δὲ, ἐπεὶ ἀεὶ ἐστι χ^2, κἂν ᾖ $-\chi$, κἂν $+\chi$, εὑρεθήσονται, ἐκ διαδοχῆς τιθεμένης $\chi = -7$, -8 κτ, αἱ αὐταὶ τεταγμέναι, αἱ κἂν τοῖς σημείοις 7, 8· μεταγομένων ἄρα ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ τῆς σχ τῶν ἀπὸ τοῦ Κ ἀποτεμνομένων, $=$ Κ7, Κ8, ὡς λειπτικῶν τε καὶ ὑπαρκτικῶν, εὑρεθήσονται αἱ δύο καινοὶ κλῶνες σΜν.

Φημὶ οὖν, ὡς εἰ δέοι ἔχειν τὴν καμπύλην ἀποτετμημένας, γνωσθήσεται ἐξ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως· οἷον ἐν τῇ ἐξισώσει $\upsilon^2 = \pi\chi$ (τῇ τῆς παραβολῆς) ἐὰν τεθῇ λειπτικὸν τὸ χ, ἔσται $\upsilon^2 = -\pi\chi$, καὶ $\upsilon = \pm\sqrt{-\pi\chi}$, ποσότης ἀνύπαρκτος· ἡ ἄρα ἐκ ταύτης τῆς ἐξισώσεως ἐμφαινομένη καμπύλη λειπτικῶν ἀποτετμημένων ἔσεται ἀνεπίδεκτος.

279 ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Δοθείσης ἐξισώσεως τῆς $\upsilon^3 - \alpha\chi^2 = 0$, τὴν δι᾽ αὐτῆς ἐμφαινομένην ἀναγράψαι καμπύλην (σχ. 127).

ΛΥΣΙΣ. Υποτεθείσθωσαν αἱ τεταγμέναι κάθετοι ταῖς ἀποτετμημέναις, καὶ ἀποτεμνέσθωσαν τῇ χ δυνάμεις ἐκ διαδοχῆς ἀπὸ τοῦ ο ἀρχόμεναι καὶ εἰς ∞ τελευτῶσαι, καὶ ἑκάστης τῶν δυνάμεων τῆς χ ζητηθήτω δύναμις ἀντίστοιχος τῆς υ· ὑποτεθήτω οὖν $\chi = 0$· ἐκεῖ ἔσται καὶ $\upsilon = 0$· λαμβανομένου ἄρα τοῦ σημείου κ ὡς ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων, ἡ καμπύλη δι᾽ αὐτοῦ διαβήσεται· γενέσθω εἶτα $\chi = 1$· ἐκεῖ ἔσται $\upsilon^3 = \alpha$ καὶ $\upsilon = \sqrt[3]{\alpha}$· ὑποτιθεμένου δὲ $\alpha = \frac{1}{8}$ (ἐνὶ φέρε ποδὸς ὀκτημορίῳ), εὑρεθήσεται $\upsilon = \frac{1}{2}$· εἰλήφθω τοιγαροῦν κα $= \chi = 1$, καὶ ἤχθω ἐπὶ τὸ α τεταγμένως ἡ αΒ $= \frac{1}{2}$· τὸ δὲ Β σημεῖον ἔσται ἐν τῇ καμπύλῃ· ἑξῆς δὲ γενέσθω $\chi = 2$· καὶ δὴ προκύψει $\upsilon^3 = 4\alpha = \frac{1}{2}$, καὶ $\upsilon =$

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ · τεθέντος ȣ̃ν κ $\Pi = \chi = 2$, ἀνεςάθω τεταγμένη ἡ $\Pi\mu = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (ὅπερ ὡς ἔγγιςα εὑρίσκεται ἐν δεκαδικοῖς ἡ δύναμις)· τιθεμένων δ᾽ ἔπειτα ἐκ διαδοχῆς $\chi = 3, 4$, κτ, ζητηθήτωσαν αἱ αὐταῖς σύςοιχοι υ· γενομένων δὲ ϗ $\chi = -1, = -2$, κτ, εὑρεθήσονται δυνάμεις αἱ ἀντίςοιχοι ταῖς λειπτικαῖς ἀποτετμημέναις· γραμμῆς δὲ διελθέσης διὰ τῶν περάτων πασῶν τῶν εὑρημένων υ, πορισθήσεται καμπύλη ἡ Μκμ τοσέτῳ ἀκριβεςέρα, ὅσῳ ἂν προσεχέςερον ἀλλήλων τεθῶσιν αἱ υ, ϗ ἀκριβέςερον εὑρεθῶσιν αἱ κατ᾽ αὐτὰς δυνάμεις. Ο. Ε. Π.

280. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Ἐξισώσεως τῆς $\upsilon = \sqrt{\chi} \pm \sqrt[4]{\chi^3}$ δοθείσης, τὴν ὑπ᾽ αὐτῆς ἐμφαινομένην ἀναγράψαι καμπύλην (σχ. 123.)

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ΑΒ ἄξων, ϗ Α ἀρχὴ τῶν ἀποτετμημένων· ὐκȣ̃ν ἡ καμπύλη ὐδένα κλῶνα ἕξει πρὸς τὰς λειπτικὰς χ· ϗ γὰρ λειπτικȣ̃ ὑποτιθεμένȣ τȣ̃ χ, προέρχεται $\upsilon = \sqrt{-\chi} \pm \sqrt[4]{-\chi^3}$ ποσότης ἀνύπαρκτος· ὑποτεθείσθω ȣ̃ν $\chi = 1$· ϗ δὴ ἔςαι $\upsilon = 1 \pm 1$, εἴτ᾽ ȣ̃ν $\upsilon = 2$, ϗ $\upsilon = 0$· ὑποτιθεμένȣ ἄρα τȣ̃ $\mathrm{AB} = 1$, εἷς μὲν τῶν κλώνων τῆς καμπύλης ὁ ΑΜ συμβαλεῖ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Β, ἅτερος δὲ διαβήσεται διὰ ν πέρατος τῆς τεταγμένης $\mathrm{B}\nu = 2$· εἰ δὲ εἴη $\chi = \mathrm{A}\Pi = \frac{8}{10}$, εὑρεθήσεται διὰ προσεγγίσεως $\upsilon = 1, 741$, ϗ $\upsilon = 0, 047$· τὸ τοίνυν σημεῖον Ν τῆς μείζονος τεταγμένης ἐπανήκει τῷ κλωνὶ Αν, τὸ δὲ μ τῆς ἐλάττονος Πμ, τῷ κλωνὶ ΑμΒ· ϗ ἐπειδὴ μεταξὺ Α ϗ Β αἱ δύω δυνάμεις τῆς υ ἀεὶ εἰσὶν ὑπαρκτικαὶ, ἑκάτερος τῶν δύω κλωνῶν Αμ, Αν κείσεται ὕπερθεν τȣ̃ ἄξονος· ὡς εἰ γένοιτο $\chi > 1$, εὑρεθήσονται τȣ̃ υ δύω δυνάμεις, ἡ μὲν ὑπαρκτικὴ, ἡ δὲ λειπτικὴ, ὥστε τὸν μὲν Αν κλῶνα μένειν ἀεὶ ὕπερθεν τοῦ ἄξονος, τὸν δὲ ΑμΒ κατιέναι ἔνερθεν τοῦ αὐτοῦ ἄξονος· λογισθεισῶν δὲ τῶν τοῦ υ δυνάμεων ἐν δεκαδικοῖς, εὑρεθήσονται ὅσα ποτὲ βουλόμεθα σημεῖα τῆς καμπύλης· τοσούτῳ δ' ἀκριβέστερον, ὅσῳ ἂν ἐγγύτερον τοῦ ἀληθοῦς τὸν λογισμὸν παραγάγωμεν· εἰ δ' ὑποτεθείη $\chi = \infty$, ἔσαι $\upsilon = \infty^{\frac{1}{2}} \pm \infty^{\frac{3}{4}} = \pm \infty^{\frac{3}{4}}$ (ὁ γὰρ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον ἀφανίζεται)· τοιγαροῦν ἑκάτερος τῶν κλωνῶν ἀπείρως ἀποχωρεῖ τοῦ ἄξονος, ὁ μὲν ἔνερθεν, ὁ δὲ ὕπερθεν· Σημειωτέον δὲ ἐν παρόδῳ, ὡς ἑκάτερος τῶν κλωνῶν τοῦ σημείου Α ἀποχωρῶν σρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, ὡς τὴν θατέρου κοιλότητα ἐσράφθαι πρὸς τὴν θατέρου καμπυλότητα.

281. Ἐὰν δοθῇ ἐξίσωσις ἡ $\chi^5 - \chi + \upsilon + \upsilon^3 = 0$, ὑποτεθέντων ἐκ διαδοχῆς $\chi = 1, 2, 3$ κτ· $-1, -2$ κτ, τῇ ἐπιλύσει τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως, γνωσθήσονται αἱ συσοιχοῦσαι δυνάμεις τοῦ υ· κἂν μὴ ἀκριβῶς ἐπιλυθείη ἡ ἐξίσωσις, εὑρεθήσονται μέντοι αἱ προσεχέσαται ταῖς ἀληθέσι δυνάμεις τοῦ υ.

282. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀλλὰ περὶ μὲν τούτων, κἂν βραχέα, ἱκανὰ μέντοι ἐν τῇ προκειμένῃ ἡμῖν προθέσει· ἀφθονώτερα δ' ὁ βουλόμενος εὑρήσει ἐν ταῖς τῶν νεωτέρων βίβλοις, αἷς σκοπὸς αὐτὴν μόνην τὴν ὑψηλοτέραν Γεωμετρίαν πραγματεύσασθαι· μετιέτω δὲ πρὸς τοῖς ἄλλοις καὶ Σαυρίου τὴν πεντάτομον μαθηματικὴν ὁδὸν, ἀφ' ἧς ἡμῖν τὰ πλεῖσα ἐνταῦθα μετωχέτευται· ἀλλ' εἴπωμεν νῦν διὰ βραχέων καὶ περὶ τῶν Γεωμετρικῶν τόπων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Γεωμετρικῶν Τόπων.

283. Ἐξίσωσις πᾶσα ἀόριστος δύω ἀγνώστων περιεκτικὴ χ καὶ υ, δηλοῦσα εὐθεῖαν γραμμὴν ἢ καμπύλην, καλεῖται Τόπος Γεωμετρικός· ἐὰν γὰρ ληφθῇ ἡ ΜΝ γραμμὴ (σχ. 129) ὡς ἄξων τῶν χ, καὶ αἱ ΠΖ, ΣΔ, ΣΗ, κτλ. κληθῶσιν υ, τῶν μὲν ὑπαρκτικῶν υ ἐν ἀριστερᾷ, τῶν δὲ λειπτικῶν κειμένων ἐν δεξιᾷ τῆς ΜΝ, ἡ μὲν εὐθεῖα ΔΞ ἔσται τόπος τῶν ὑπαρκτικῶν τεταγμένων, τῶν συστοιχουσῶν τῷ τμήματι ΚΝ τοῦ τῶν ἀποτετμημένων ἄξονος, καὶ ἔτι τόπος τῶν λειπτικῶν τεταγμένων, τῶν συστοιχουσῶν τῷ τμήματι ΚΜ· ἡ δὲ ἀπέραντος γραμμὴ Ηκ ἔσται τόπος τῶν τε λειπτικῶν τεταγμένων, τῶν συστοιχουσῶν τῷ ΚΝ, καὶ τῶν ὑπαρκτικῶν τῶν συστοιχουσῶν τῷ ΚΜ· ἐὰν οὖν γένηται ΚΠ $= \alpha$, καὶ ΖΠ τετάρτη ἀνάλογος δεδομένων εὐθειῶν τῶν ν, μ, α, εἴτ' οὖν $= \frac{\mu\alpha}{\nu}$ ἐφισταμένη κάθετος τῇ ΜΝ, καὶ ΠΤ $= \chi$, καὶ ἡ τεταγμένη ΤΨ τῇ ΠΖ παράλληλος $= \upsilon$, ἔσται ΚΤ $=$ ΚΠ $+$ ΠΤ $= \alpha + \chi$· καὶ ἐπείπερ ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα ΚΖΠ, ΚΨΤ, ἔσται ΚΠ $= \alpha :$ ΠΖ $= \frac{\mu\alpha}{\nu} ::$ ΤΚ $= \alpha + \chi :$ ΤΨ $= \upsilon = \frac{\mu\alpha + \mu\chi}{\nu}$. αὕτη ἄρα ἡ ἐξίσωσις ἔσται τόπος γεωμετρικὸς τῶν ὑπαρκτικῶν καὶ λειπτικῶν υ· ἐὰν οὖν ἡ $\chi = o$, ἡ ΠΖ συμπεσεῖται τῇ ΤΨ, καὶ ὁ ζητούμενος τόπος ἔσεται

εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν ἀποτετμημένων· ἐὰν δὲ ᾖ $\upsilon = o$, ὁ τόπος τῶν χ ἔςαι εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν τεταγμένων.

284. Ἐὰν ὦσι δύω γεωμετρικαὶ πρωτοβάθμιοι, δυεῖν ἀγνώςων περιεκτικαὶ, ἐξισώσεις, δυνατὸν προσδιορίσαι ἐν γραμμαῖς πεπερασμέναις τὴν τῶν ἀγνώςων, εἰ πεπερασμένη εἴη, δύναμιν· ἔςωσαν γὰρ δύω ἐξισώσεις $\upsilon = \dfrac{\alpha\chi - \alpha\beta}{\nu}$, ϗ $\upsilon = \dfrac{\gamma\chi - \gamma\delta}{\mu}$· ϗ ζητηθήτω πρῶτον ἑκατέρας τῶ ἐξισώσεων ὁ τόπος· ὑποτεθείσθω δὴ τὸ Α ἀρχὴ τῶν χ, ϗ τεθήτω $AK = \beta$, ϗ $K\Pi = \nu$, ϗ κατήχθω ΠΖ $= \alpha$ περιέχουσα μετὰ τῆς ΜΝ γωνίαν ὁποιανοῦν τὴν πρὸς τῷ Π, ϗ ἤχθω ἡ ΔΖΞ, ϗ ἡ ΝΞ παράλληλος τῇ ΠΖ· ἐπεὶ οὖν ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα ΚΠΖ, ΚΝΞ, ἔςι $K\Pi : \Pi Z :: KN = AN - KA : \Xi N = \upsilon$, εἴτ' οὖν $\nu : \alpha :: \chi - \beta : \upsilon = \dfrac{\alpha\chi - \alpha\beta}{\nu}$· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΚΞ ἔςαι τόπος τῆς πρώτης ἐξισώσεως· ϗ ἀποτετμημέναι μὲν ἔσονται αἱ ΑΝ, τεταγμέναι δὲ αἱ ΝΞ· ὁ δὲ τῆς δευτέρας εὑρεθήσεται οὕτως· ὑποτεθήτω τὸ Α ὡς ἀρχὴ τῶν χ, ϗ ἔςω $A\Theta = \delta$, ϗ $\Theta\tau = \mu$, ϗ ἤχθω τῇ ΝΞ παράλληλος ἡ $TP = \gamma$, ϗ πέρατος ἄνευ ἡ ΘΡ· ἐκοῦν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΘΡΤ, ΘΟΒ ἔςαι $\Theta T : TP :: \Theta B : BO$· ἀλλὰ $\Theta T = \mu$, ϗ $TP = \gamma$, ϗ $\Theta B = AB - A\Theta = \chi - \delta$, ϗ ΒΟ ἔςι τεταγμένη υ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως· ἄρα $\mu : \gamma :: \chi - \delta : \upsilon = \dfrac{\gamma\chi - \gamma\delta}{\mu}$· τοιγαροῦν ἡ ΘΡ ἐςὶν ὁ τόπος τῆς δευτέρας ἐξισώσεως· ἐὰν δὲ ἡ ΘΡ τέμνῃ τὴν ΚΞ κατά τι σημεῖον τὸ Ξ, ἡ τεταγμένη ΞΝ κοινὴ ἔςαι ἑκατέρῳ

τόπῳ τῶν δύω δοθεισῶν ἐξισώσεων· ἡ ΝΞ ἄρα διοριυθήσεται ὑπὸ τῆς συνδρομῆς τῶν δύω εὐθειῶν ΚΞ, ΘΡ. τ' αὐτὸ δὲ γενήσεται ᾗ περὶ τῆς χ, ἥτις ἔςαι = ΑΝ· ὥςε διὰ τῶν δύω δοθεισῶν πριτοβαθμίων ἐξισώσεων δυνατόν ἐςι προσδιορίσαι τὴν γεωμετρικὴν δύναμιν τῶν ἀγνώςων υ καὶ χ.

285. Εἰς δέ γε πληρεςέραν κατάληψιν ταύτης τῆς κατασκευῆς σημειωτέον τὰ ἐφεξῆς· ἐὰν γὰρ λόγος ὁ $\upsilon : \alpha$ ἴσος ᾖ τῷ $\mu : \gamma$, ἔςαι ἐν τοῖς τριγώνοις ΚΠΖ, ΘΤΡ, ΚΠ : ΠΖ :: ΘΤ : ΤΡ· ἀλλ' αἱ γωνίαι Π, Τ εἰσὶν ἴσαι διὰ τὰς παραλλήλες ΠΖ, ΤΡ· ἄρα τὰ τρίγωνα ἔχϐσι δύω πλευρὰς ἀναλόγϐς δυσὶ πλευραῖς, ᾗ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν γωνίας ἴσας· εἰσὶν ἄρα ὅμοια (Γεωμ. 337)· ἄρα ᾗ αἱ γωνίαι Κ, Θ εἰσὶν ἴσαι ᾗ ἑπομένως παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι ΚΖ, ΘΡ. Τοιγαρϐν τῶν εὐθειῶν τέτων ἀλλήλαις οὐδέποτε συμβαλλουσῶν, ἀδύνατόν ἐςι προσδιορίσαι τὰς χ ᾗ υ, αἵτινες, ἐπεὶ τὸ Ξ δύναται θεωρηθῆναι ὡς ἀπείρως ἀφεςηκὼς διὰ τὸ τὰς δύω παραλλήλϐς δύνασθαι θεωρεῖσθαι ὡς συμπιπτέσας ἐν διαςήματι ἀπείρῳ, δυνήσονται ἐκληφθῆναι ὡς ἄπειροι (*).

Ἀνίσων δὲ ὄντων τῶν λόγων $\upsilon : \alpha$, $\mu : \gamma$, οἱ το-

---

(*) Ἐὰν ἡ ὑπὸ ΡΘΤ γωνία ἐπινοηθῇ κατὰ βραχὺ ἐλαττϐμένη, τὸ Ξ ἀεὶ κατὰ βραχὺ ἀποςήσεται· ἡνίκα δὲ ἡ γωνία ἐγγὺς εἴη τϐ ἰσωθῆναι τῇ ὑπὸ ΠΚΖ γωνίᾳ, αἱ εὐθεῖαι ΚΞ, ΘΡ, μικρϐ δεῖν παράλληλοι ἦσαι, συμπεσϐνται ἐν διαςήματι ὑπέρπολυ μεγάλῳ, ὅπερ ἔςαι μεῖζον παντὸς δεδομένϐ διαςήματος, ὅταν αἱ εἰρημέναι γωνίαι διαφέρωσιν ἀλλήλων ποσότητι ἐλάσσονι πάσης δεδομένης· ὅταν ἄρα ἰσάλληλοι ὦσιν αἱ δύω αὗται γωνίαι, τὸ διάςημα θεωρηθήσεται ἄπειρον.

ποι συναντήσονται πάντως κατά τι σημεῖον τὸ Ξ, ἀλλ' ἐξεταστέον, εἴπερ ἡ γωνία ΤΘΡ εἴη ἐλάσσων ἢ μείζων τῆς ὑπὸ ΠΚΖ· καὶ οὕτω μὲν τὸ τῆς συνδρομῆς σημεῖον κείσεται πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ β, καθάπερ τὸ σχῆμα παρίστησιν· ἐκείνως δὲ τὸ Ξ πεσεῖται πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Δ.

Ἐὰν δ' ὑποτεθῇ $\beta = \delta$, εὑρεθήσεται $\chi = \beta$ καὶ $\upsilon = o$· ἐν ταύτῃ γὰρ τῇ περιπτώσει τὰ σημεῖα Ν, Ξ ἐπιπεσοῦνται τῷ Κ· πρὸς δὲ τῷ Κ, $\chi =$ ΑΝ ἐστιν $=$ ΑΚ $= \beta$, καὶ ΝΞ $= \upsilon = o$· ὃ δὴ καὶ ἡ ἀνάλυσις δείκνυσιν· ἐπεὶ γὰρ αἱ δυνάμεις τοῦ υ ἰσοῦσθαι ἀλλήλαις ὀφείλουσι πρὸς τῷ Ξ, ἔστι πάντως $\frac{\alpha\chi - \alpha\beta}{\nu} = \frac{\gamma\chi - \gamma\beta}{\mu}$, ἢ $\frac{\alpha}{\nu} \times (\chi - \beta) = \frac{\gamma}{\nu} \cdot (\chi - \beta)$, ἢ $(\frac{\alpha}{\nu} - \frac{\gamma}{\mu}) \cdot (\chi - \beta) = o$· ἄρα ὁ ἕτερος τῶν δύω ποιητῶν τοῦ πρώτου μέλους ἀναγκαίως ἔσεται $= o$· ἀλλαμὴν οὐκ ἔστιν ὁ πρῶτος, ἅτε δὴ τῶν ἐν αὐτῷ ποσοτήτων πρὸς τὸ δοκοῦν λαμβανομένων· ἄρα $\chi - \beta = o$, ὅθεν $\chi = \beta$· ἐὰν οὖν ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν $\upsilon = \frac{\alpha\chi - \alpha\beta}{\nu}$, $\upsilon = \frac{\gamma\chi - \gamma\delta}{\mu}$ ἀντικατασταθῇ β ἀντὶ χ, ἐπεὶ καὶ $\delta = \beta$, εὑρεθήσεται πανταχοῦ $\upsilon = o$· οὐδυσχερῶς δὲ καταφαίνεται, ὅ,τι ἂν συμβαίη, εἴγ' εἴη $= o$, ἢ καὶ λειπτικὸν o· τελευταῖον δὲ, ἐπεὶ εὐθεῖαι δύω καθ' ἓν μόνον σημεῖον τέμνουσιν ἀλλήλας, κατάδηλον ὡς οἱ τόποι ΔΞ, ΘΡ μίαν μόνην δύναμιν τοῦ χ καὶ τοῦ υ παρέχονται.

Περὶ κατασκευῆς δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, δύω περιεχουσῶν ἄγνωστα.

286. Πᾶσα δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἀναχθῆναι δύ-

ναται εἰς μίαν τῶν τὰς κωνικὰς τομὰς ἐμφαινουσῶν ἐξισώσεων· εἰσὶ δὲ αἱ γοῦν ἡμῖν ἀποδεδομέναι αἱ ἐφεξῆς.

$\upsilon^2 = \pm \pi\chi$	τῆς παραβολῆς (28)
$\chi^2 = \pm \pi\upsilon$	τῆς παραβολῆς, τῶν χ λαμβανομένων ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἁπτομένης (52)
$\upsilon^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha - \chi^2)$. .	τῆς ἐλλείψεως, πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτεμνομένων τῶν χ (91)
$\upsilon^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot (2\alpha\chi - \chi^2)$.	τῆς ἐλλείψεως, τῶν χ πρὸς τῇ κορυφῇ ἀποτεμνομένων (92)
$\left.\begin{array}{l} \upsilon^2 = \alpha^2 - \chi^2 \\ \upsilon^2 = 2\alpha\chi - \chi^2 \end{array}\right\}$ . .	τῶν ἴσων συζυγῶν διαμέτρων τῆς ἐλλείψεως, εἰ ὀξεῖα εἴη ἡ γωνία τῶν συντεταγμένων (123), καὶ τοῦ κύκλου, εἰ ὀρθή
$\chi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot (2\alpha\upsilon - \upsilon\upsilon)$.	τῆς ἐλλείψεως, τῶν χ ἐπὶ τῆς κατὰ τὴν κορυφὴν ἁπτομένης λαμβανομένων (115)
$\left.\begin{array}{l} \upsilon^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \times \overline{\chi^2 - \alpha^2} \\ \upsilon^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \times \overline{2\alpha\chi + \chi^2} \end{array}\right\}$	τῆς ὑπερβολῆς ἐπὶ τοῦ πρώτου ἄξονος (164, 166)
$\chi^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}(\upsilon^2 + \alpha^2)$.	τῆς ὑπερβολῆς ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἄξονος (171)
$\upsilon\chi = \kappa^2$	τῆς ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώταις (187)

ἴδωμεν ἔν ὅπως ἐξισώσεις αἱ δευτεροβάθμιοι εἰς ἕνα τινὰ τῶν ἐκτεθέντων τέτων τύπων ἀναχθῆναι ἔχεσι.

287. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας δοθείσης, κατασκευάσαι τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi + \alpha\beta = \upsilon$.

ΛΤΣΙΣ. Ἐπειδὴ $\alpha\chi + \alpha\beta = \alpha \cdot \overline{\chi + \beta}$, ἐὰν τεθῇ $\chi + \beta = \psi$, προκύψει $\alpha\psi = \upsilon^2$, ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς· ἐπὶ διαμέτρε ἔν τῆς ΑΜ (σχ. 130), παραμέτρῳ $= \alpha$, γεγράφθω ἡ παραβολὴ ΓΑΝ, ἧς αἱ συντεταγμέναι ΑΠ, ΠΓ περιέχοιεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν· ἐ δὴ ΑΠ ἔςαι $= \psi$, ἐ ΓΠ $= \upsilon$· ἀλλὰ $\chi = \psi - \beta$· ἄρα τιθεμένης ΑΔ $= \beta$, αἱ ΔΠ ἔσονται $\chi = \psi - \beta$· τοιγαρἕν τὸ σημεῖον Δ ἔςαι ἀρχὴ τῶν χ τῶν, πρὸς μὲν τὸ Μ ὑπαρκτικῶν, πρὸς δὲ τὸ Α λειπτικῶν, ἐσομένων· εἰ δ' ὑπάρχοι ἐξίσωσις $\alpha\chi - \alpha\beta = \upsilon^2$, τοριωθείη ἂν $\chi - \beta = \psi$, ἐ δὴ $\chi = \psi + \beta$· ἐὰν ἔν γένηται ΑΘ $= \beta$, αἱ χ ἄρξονται ἀπὸ τἕ Θ.

288. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Κατασκευάσαι τὴν ἐξίσωσιν $\chi\upsilon + \alpha\chi = \alpha^2 - \alpha\upsilon$.

ΛΤΣΙΣ. Γενέσθω πρῶτον $\upsilon + \alpha = \psi$, εἶτ' ἔν $\upsilon = \psi - \alpha$ εἰς εὕρεσιν $\psi\chi = 2\alpha^2 - \alpha\psi$, ἐ μεταθέσει, $2\alpha^2 = \psi\chi + \alpha\psi$· γενέσθω εἶτα $\chi + \alpha = \pi$· ἐ δὴ ἔςαι $\psi\pi = 2\alpha^2 = \kappa^2$· γενομένε δὲ $2\alpha : \kappa :: \kappa : \alpha$ πρόεισιν ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ἡ $\psi\pi = \kappa^2$· τοιγαρἕν ἤχθωσαν ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν, ἢ τὴν τυχἕσαν, εἰμὴ δέδοτο, γωνίαν, αἱ εὐθεῖαι Μμ, Νν (σχ. 131), ἐ γενέσθω Κα $= \alpha$, ἐ $\alpha\beta = 2\alpha$, ἐ ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις Μμ, Νν γεγράφθω ὑπερβολὴ διήκεσα διὰ τἕ σημείε β (192)· αἱ τοίνυν ΚΖ ἔσονται $= \pi$, αἱ δὲ ΖΘ $= \psi$· ἀλλὰ $\chi = \pi - \alpha =$ ΚΖ $-$ αΚ· ἄρα αἱ χ ἄρξονται ἀπὸ τἕ Α· ἐπεὶ δὲ $\upsilon = \psi - \alpha$, διορίϑω $\alpha B = 2\alpha$ δίχα κατὰ τὸ Δ, ϰ διήχθω δι' αὐτῦ παράλληλος τῇ $N\nu$ ἡ ΔH· ϰ δὴ πορισθήσεται $H\Theta = \psi - \alpha = \nu$· ϰ ἐπεὶ $\Delta H = \alpha Z$, πορισθήσονται αἱ μὲν $\chi = \Delta H$, αἱ δὲ $\nu = \Theta H$· ἐὰν δ' ὑπάρχῃ $\chi = 0$, ἔςαι $\nu = \Delta B = \alpha$· ἐὰν δ' ἡ χ ὑπαρκτικὸν ϰ $< \alpha$, αἱ τεταγμέναι ἔσονται ὑπαρκτικαί· εἰ δὲ $\chi = \alpha$, ἔςαι $\nu = 0$· τηνικαῦτα γὰρ $\pi = \chi + \alpha = 2\alpha$· ἄρα $\psi = \frac{2\alpha^2}{\pi} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha} = \alpha$, ϰ $\nu = \psi - \alpha = \alpha - \alpha = 0$· εἰ δὲ $\chi > \alpha$, αἱ τεταγμέναι ἔσονται λειπτικαί· ὑποτιθεμένε δὲ $\chi = \infty$, ἔςαι $\nu = -\alpha$· τῦ δὲ χ λειπτικῦ τε ὄντος ϰ $<\alpha$, αἱ τεταγμέναι ἔσονται ὑπαρκτικαί· τῦ δὲ χ ὄντος $= -\alpha$, ἡ τεταγμένη ν ἔςαι ἄπειρος.

Εἰ δ' εἴη ἐξίσωσις $\chi\nu + \alpha\chi = \alpha\nu - \alpha^2$, ποιῦντες $\nu + \alpha = \psi$, καὶ $\chi - \alpha = \pi$, ἕξομεν $\pi\psi = -2\alpha^2$· διὸ δὴ τεθέντος $K\alpha = \alpha$, γενήσεται $\alpha\Pi = 2\alpha$, ἔνθα λειπτικαί εἰσιν αἱ τεταγμέναι· αἱ δὲ συντεταγμέναι ἔσονται ΔH, ϰ HI.

Ὑπετέθησαν μέχρι τῦδε αἱ ἀμετάβλητοι ποσότητες ὡς ἱφιςάμεναι συναδύσας ἀντικαταςάσεις· εἰ δ' εἶεν μᾶλλον σύνθετοι, δεήσει ἀναγαγεῖν αὐτὰς ἐφ' ἁπλεςέρες τύπες· ἔςω γὰρ ἐξίσωσις $\alpha^2 - \beta\chi = \nu^2$· γενέσθω ἐν πρῶτον $\alpha^2 = \beta\gamma$· ϰ δὴ ἔςαι $\beta\cdot(\gamma - \chi) = \nu^2$· γενέσθω εἶτα $\gamma - \chi = \psi$· ἐκῦν γενήσεται $\beta\psi = \nu^2$, ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς· ὡσαύτως ἐν τῇ ἐξισώσει $\alpha\frac{\delta\delta}{\mu} + \beta\chi = \nu^2$, ὑποτεθείσθω δὲ $= \beta\zeta$, ἵνα γένοιτο $\frac{\beta.(\alpha\zeta)}{\mu}$

$+ \beta\chi = \upsilon^2$· γεγονότος δὲ $\frac{\alpha\zeta}{\mu} + \chi = \psi$, ἡ ἐξίσωσις τρέψεται εἰς τὴν προτέραν· ἐν δὲ τῇ ἐξισώσει $\frac{\alpha^2\chi - \beta^2\chi + \upsilon^3}{\alpha + \beta} = \upsilon^2$, ὑποτεθείσθω πρῶτον $\upsilon^3 = (\alpha\alpha - \beta\beta) . \gamma$, ἵνα γένοιτο $(\alpha - \beta) \cdot \chi + (\alpha - \beta) \cdot \gamma = \upsilon^2$, ἑξῆς δὲ ὑποτεθείσθω $\chi + \gamma = \psi$ καὶ $\alpha - \beta = \delta$, ἵνα πορισθῇ $\delta\psi = \upsilon^2$, ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς.

289. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἔστω ἐξίσωσις $\chi^2 + 2\alpha\chi = \upsilon \cdot (\alpha + \beta)$, ἥτις ἀναπληρωθεῖσα τὸ ἐλλειπὲς τετράγωνον γενήσεται $\chi^2 + 2\alpha\chi + \alpha^2 = \upsilon \cdot (\alpha + \beta) + \alpha^2$· ὑποτεθέντος δὲ $\chi + \alpha = \pi$, ἀποβήσεται $\pi^2 = (\alpha + \beta) \times (\frac{\alpha^2}{\alpha + \beta} + \upsilon)$· γενομένου δὲ καὶ $\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta} + \upsilon = \psi$, προκύψει ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς $\pi^2 = \psi \cdot (\alpha + \beta)$. (σχ. 132) παραμέτρῳ ἐν τῇ $\alpha + \beta$ γραφείσης τῆς παραβολῆς ΑΘ, ἧς ἁπτομένη κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἄξονος Α εἴη ΑΖ, ἔσονται αἱ μὲν $ΑΖ = \pi$, αἱ δὲ $ΘΖ = \psi$· ἀλλὰ $\pi - \alpha = \chi$· ἄρα λαμβανομένης τῆς $ΑΚ = \alpha$, αἱ ΚΖ ἔσονται χ· ὡσαύτως ἐπεὶ $\upsilon = \psi - \frac{\alpha^2}{\alpha + \beta}$, καὶ, διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς παραβολῆς, $ΔΓ = \frac{\alpha^2}{\alpha + \beta}$, ἀχθείσης διὰ τοῦ Δ τῆς ΗΔ παραλλήλως τῇ ΖΑ, εὑρεθήσεται $ΔΗ = ΚΖ = \chi$, καὶ $ΘΗ = \upsilon$.

290. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ΄. Ὑποτεθείσθω ἡ ἐξίσωσις περιέχειν τὰ ἀπὸ δύω ἀγνώστων τετράγωνα· ὥσπερ ἡ $\chi^2 + \alpha\chi = 2\upsilon^2 - 2\beta\upsilon$· ἀναπληρωθέντος ἐν τοῦ πρώτου μέλους, καὶ γενομένου $\chi + \frac{\alpha}{2} = \pi$, πορισθήσεται π^2

$= 2\upsilon^2 - 2\beta\upsilon + \frac{\alpha^2}{4}$, εἴτ' οὖν $\pi^2 - \frac{\alpha^2}{4} = 2\upsilon^2 - 2\beta\upsilon$, ἥτις διαιρεθεῖσα διὰ 2, καὶ τὸ δεύτερον ἀναπληρωθεῖσα μέλος, ὑποτεθέντος $\upsilon - \frac{\beta}{2} = \psi$, γενήσεται $\psi^2 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\beta^2}{4}$· τρεῖς δὲ δυνατὸν ἐνταῦθα συμβῆναι περιπτώσεις.

Α'. Ὑποτεθέντος γὰρ $\alpha^2 = 2\beta^2$, ἡ ἐξίσωσις γενήσεται $\frac{\pi^2}{2} = \psi^2$, καὶ $\pi^2 = 2\psi^2$, εἴτ' οὖν $\pi = \pm \psi \sqrt{2}$, ὅθεν $\pi : \psi :: \sqrt{2} : 1 :: \sqrt{2\beta^2} : \beta :: \alpha : \beta$ (καὶ γὰρ $2\beta^2 = \alpha^2$) $:: \frac{\alpha}{2} : \frac{\beta}{2}$· ἔςω τοίνυν (χ. 133) $\Gamma A = \frac{\alpha}{2}$, καὶ ἤχθω $BA = \frac{\beta}{2} = A\Delta$, καὶ ἀπέραντοι ἤχθωσαν αἱ ΓΒ, ΓΔ· ἐκεῖν ἔσονται, αἱ μὲν $\Gamma Z = \pi$, αἱ δὲ $Z\Theta = \psi$· ἀλλὰ $\upsilon = \psi + \frac{\beta}{2}$· ἄρα ἀχθείσης διὰ τοῦ Δ τῆς ΗΔ παραλλήλως τῇ ΖΑ, αἱ ΗΘ ἔσονται υ· ὡσαύτως $\chi = \pi - \frac{\alpha}{2}$· ἄρα αἱ $\Delta H = AZ$ ἔσονται χ· καὶ ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἡ ἐξίσωσις ἔςαι τῶν εὐθειῶν ΓΘ, ΓΔ.

Β'. Ἐὰν ᾖ $\alpha^2 > 2\beta^2$, ὑποτεθείσθω $\alpha^2 - 2\beta^2 = \mu^2$, ἵνα γένοιτο $\frac{\pi^2}{2} - \frac{\mu^2}{8} = \psi^2$, εἴτ' οὖν $\pi^2 - \frac{\mu^2}{4} = 2\psi^2$· ἄρα $\pi^2 - \frac{\mu^2}{4} : \psi^2 :: 2 : 1 :: \frac{\mu^2}{4} : \frac{\mu^2}{8}$, ἀναλογία προσφυῶς ἔχουσα ὑπερβολῇ ὡς πρὸς τὰς δύο αὐτῆς διαμέτρας μ, $\frac{\mu}{\sqrt{2}}$· εἰλήφθωσαν ἐν δύω ἡμιδιάμετροι (σχ. 134) $KN = \frac{\mu}{2}$, ϗ $KM = \frac{\mu}{2\sqrt{2}}$, ϗ ἐπὶ τῆς KNZ γραφεῖσα ὑπερβολὴ ἡ $N\Theta$ ἕξει, τὰς μὲν $KZ = \pi$, τὰς δὲ $Z\Theta = \psi$· ἀποτμηθείσης δὲ $KA = \frac{\alpha}{2}$, εὑρεθήσεται $AZ = \pi - \frac{\alpha}{2} = \chi$· ἀχθεισῶν δὲ, τῆς μὲν $A\Delta$ παραλλήλως τῇ KM, τῆς δὲ ΔH τῇ KZ, ϗ ληφθείσης $A\Delta = \frac{\beta}{2}$, πορισθήσεται $H\Theta = \psi + \frac{\beta}{2} = \upsilon$· αἱ ἄρα συντεταγμέναι τῆς προκειμένης ἐξισώσεως ἔσονται $\Delta H = AZ = \chi$, ϗ $\Theta H = \upsilon$.

Γ'. Ἐὰν ἡ $\alpha^2 < 2\beta^2$, γενέσθω $2\beta^2 - \alpha^2 = \mu^2$ ἵνα προέλθῃ $\frac{\pi^2}{2} + \frac{\mu^2}{8} = \psi^2$, εἶτ' ἐν $\pi^2 + \frac{\mu^2}{4} = 2\psi^2$· ἄρα $\pi^2 + \frac{\mu^2}{4} : \psi^2 :: 2 : 1 :: \frac{\mu^2}{4} : \frac{\mu^2}{8}$. λαμβανομένης τοίνυν δευτέρας ἡμιδιαμέτρε KM (ἢ δευτέρε ἡμιάξονος, εἰ τῶν συντεταγμένων ἡ γωνία εἴη ὀρθὴ) $= \frac{\mu}{2}$, ϗ πρώτης ἡμιδιαμέτρε $KN = \frac{\mu}{2\sqrt{2}}$, ὑπερβολὴ γραφεῖσα (σχ. 135) ἡ $N\Theta$ ἕξει, τὰς μὲν $KZ = \pi$, τὰς δὲ $Z\Theta = \psi$· ληφθεισῶν ἄρα $KA = \frac{\alpha}{2}$, ϗ $A\Delta = \frac{\beta}{2}$ ϗ παραλλήλε τῇ KN, ϗ τῆς ΔH παραλλήλε γενομένης τῇ ΚΖ, ἔσονται αἱ μὲν ΑΖ $=\chi$, αἱ δὲ ΗΘ $= \upsilon$· ἐν ταύτῃ ἄρα τῇ περιπτώσει ἡ ἐξίσωσις ἐςὶν ὑπερβολῆς, ἀναφερομένης ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον.

291. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐκ τῶν ἤδη ἐκτεθέντων ὑποδειγμάτων κατάδηλον τὸ πᾶν κεῖσθαι ἐν τῷ ἀντικαθιςᾶν ἄγνωςον ἀνθ' ἑτέρας ἀγνώςε, συνημμένης ἀμεταβλήτῳ ποσότητι, ἤτοι ὑπαρκτικῇ, ἢ λειπτικῇ, ϗ ἐν τῷ ἀναπληρῦν δὲ πολλάκις θάτερον τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν· τῆς δὲ καμπύλης ἀναγραφείσης τῆς τὰς ἀντικαταςάσεις παρεχομένης, ἐπαναςρέφειν δεῖ πρὸς διορισμὸν τῶν χ ϗ υ, εἶτ' ἐν τῶν συντεταγμένων τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· ἐπεὶ δὲ ἡ μέθοδος αὕτη ἔσθ' ὅτε πολύπλοκός τις ϗ δυσχερὴς καθίςαται ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων, αἷς ἔνι τῶν τετραγώνων χ^2, ἢ υ^2, ἢ ϗ ἀμφότερα ἐμπεριέχονται, ὀμὴν ἀλλὰ ϗ τὸ ὀρθογώνιον $\chi\upsilon$· τούτου χάριν ἐν ταῖς τοιαῖσδε ἐξισώσεσι χρησόμεθα τῇ τῶν ἀορίςων μεθόδῳ, τηρῦντες ἀεὶ τρόπον, καθ' ὃν τὰ τῆς κατασκευῆς ὡς λίαν ἐξευμαρίζεται· πρὸς δὲ τοῦτο τὴν ἐξίσωσιν οὕτω διαθησόμεθα, ὡς πάντα τὰ υ κεῖσθαι ἑτέρωθι, τοῦ τὸ υ^2 περιέχοντος ὅρου ὑπαρκτικοῦ τε ὄντος ϗ συνεργοῦ δίχα· προσιθέντες δ' ἐφεξῆς ἑκατέρωσε τῆς ἐξισώσεως τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμισυνεργοῦ τοῦ υ τετράγωνον, ἕξομεν τὸ πρῶτον μέλος τετράγωνον ἐντελὲς, οὗ τὴν ῥίζαν τιθέμεθα $= \psi$· τὰ δὲ τῆς κατασκευῆς ἐπιτηδεύοντες εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν μὴ περιέχουσαν τὸ ὀρθογώνιον $\psi\chi$· ἐὰν δὲ κατασκευασθῇ ἡ καμπύλη τῶν ἀορίςων ψ ϗ χ, τῶν ἀντικαταςάσεων ἀνακαλουμένων, αἱ υ πρὸς τῇ γραμμῇ τῶν χ οὐ προσδιορισθήσονται, ἀλλὰ πρὸς ἄλλῃ, ἧς αἱ ἀποτετμημέναι ἔσονται πρὸς τὰς ἀποτετμημένας χ ἐν λόγῳ δεδομένῳ· ἀνθ' ὅτου δὴ τὴν ἐξίσωσιν κατασκευάζοντες ληψόμεθα $\mu\chi$, ἀλλ'

οὐ χ ἀποτετμημένας (μ δὲ ποσότης ἐςὶν, ἥτις ἐφεξῆς διορισθήσεται)· τούτου τεθέντος, ἄγομεν διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν μχ γραμμὴν εὐθεῖαν, ποιοῦσαν μετὰ τῶν μχ γωνίαν τοιαύτην, ὥςε προςιθεμένης τῇ ψ, ἢ ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρουμένης ποσότητος, ἣν ἐμφαίνει ὁ λογισμὸς, δύνασθαι τὴν υ προσδιορίζεσθαι, προςιθεμένης, ἢ ἀφαιρουμένης, εἰ δέοι, ποσότητος ἀμεταβλήτου. Τελευταῖον δὲ προσδιορισθήσεται ἡ δύναμις τοῦ υ, οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ τὸ μέγεθος τῶν γωνιῶν, ἃς ἐμφιλοχωρεῖν δέοι, ὡς ἂν αἱ εὐθεῖαι χ, υ περιέχωσι τὴν δεδομένην γωνίαν.

292. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Ε΄. Ἔςω ἐξίσωσις $υ^2 - 2αυ + χυ = α^2 + 4αχ - χ^2$· προςεθέντος οὖν ἑκατέρῳ μέλει τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ $χ - α$ ἡμισυνεργοῦ τῆς υ, ἵνα γένοιτο $(υ - αχχ)^2 = 2α^2 + 2αχ$, καὶ ὑποτεθέντος $υ - α + χ = ψ$, προελεύσεται ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς $ψ^2 = (χ+α)\cdot 2α$· ἀλλὰ γὰρ τὴν καμπύλην κατασκευάζειν, ὡς εἶναι τὰς ἀποτετμημένας μχ, ἀλλ' οὐ χ· διὰ ταῦτ' ἄρα, τῆς ἰσότητος διατηρουμένης, διατεθείσθω ἡ ἐξίσωσις οὕτω· $ψ^2 = \frac{2α}{μ}\cdot(μα + μχ)$· ὑποτεθείσθω οὖν ἡ παραβολὴ ΑΙ (σχ. 136), γεγραμμένη ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΖ παραμέτρῳ $= \frac{2α}{μ}$· ἐν ταύτῃ δὲ ἔςωσαν αἱ ἀποτετμημέναι $ΑΖ = μα + μχ$, καὶ αἱ τεταγμέναι ΖΗΙ (παράλληλοι τῇ ἁπτομένῃ ΑΒ) $= ψ$· εἰλήφθω δὲ $ΑΚ = μα$· καὶ δὴ ἔςαι $ΚΖ = μχ$· ἵνα δὲ πορισθείη $υ = ψ + α - χ$, προήχθω ἡ ΒΑ ἐς τὸ Δ, ὡς εἶναι $ΑΔ = α$, καὶ παράλληλος τῇ ΖΑ ἤχθω ἡ ΔΘ, καὶ προεκβληθεῖσα ἡ ΙΖ ἕςτ' ἂν ἀπαντήσεται τῇ ΘΔ ἐκ- οὖν πορισθήσεται $ΗΘ = ΚΖ = μχ$, καὶ $ΘΙ = ψ + α$·

ἀφοριθείσης δὲ τῆς χ ἀπὸ $\psi + \alpha$, καταλειφθήσεται ἡ τῦ υ δύναμις· ὑποτεθείσθω δὲ ἡ εὐθεῖα ΜΗ ὕτως ἠγμένη, ὥςτε τὴν ἀπολαμβανομένην ΘΗ εἶναι $= \chi$· περιθήσεται τοίνυν $\text{ΗΙ} = \text{ΘΙ} - \text{ΘΗ} = \psi + \alpha - \chi = \upsilon$· ἵνα δὲ αἱ υ προσδιορισθῶσι πρὸς τῇ γραμμῇ τῶν χ, ἐπάναγκες εἶναι $\text{ΜΗ} = \chi$· δεῖ ὖν εὑρεῖν δύναμιν τῆς μ τοιάνδε, ὡς εἶναι $\text{ΘΗ} = \text{ΜΗ} = \chi$, δεδομένης τῆς ὑπὸ ΜΗΘ γωνίας. Συνεςάσθω τρίγωνον τὸ ΡΤΣ, ἕ ἡ μὲν γωνία Σ ἴση εἴη τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῶν χ ἢ υ, εἴτ' ὖν τῇ ὑπὸ ΜΗΘ, αἱ δὲ πλευραὶ ΣΡ, ΣΤ ἰσάλληλοι· ὑποτεθείσθω ὖν, ἑκατέρα μὲν τέτων $= \alpha$, ἡ δὲ $\text{ΡΤ} = \gamma$· τέτυ τεθέντος ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΡΤ, ΗΜΘ πρόεισιν $\alpha : \gamma :: \chi : \mu\chi :: 1 : \mu$· ἄρα $\mu = \frac{\gamma}{\alpha}$· ἡ ἄρα παράμετρος $\text{ΑΒ} = \frac{2\alpha}{\mu} = \frac{2\alpha^2}{\gamma}$, ἡ δὲ εὐθεῖα $\text{ΚΑ} = \text{ΔΜ} = \mu\alpha = \gamma$· ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ $\text{ΜΘΗ} = \text{Τ}$, ἡ ὑπὸ ΒΑΖ παραπλήρωμα ἔςαι τῆς γωνίας Τ, εἴγε εἰσὶν ἴσαι αἱ γωνίαι Θ, ΑΖΙ· ἔςι δὲ ἡ ΒΑΖ παραπλήρωμα τῆς ὑπὸ $\text{ΖΑΔ} = \text{ΑΖΙ}$· διὸ δὴ ἐπὶ διαμέτρυ τῆς ΑΖ διὰ παραμέτρυ $\text{ΑΒ} = \frac{2\alpha^2}{\gamma}$, ὑπὸ γωνίαν τὴν ΒΑΖ παραπλήρωμα τῆς γωνίας Τ, γραφήσεται ἡ παραβολὴ ΑΙ, ἢ λειφθήσεται $\text{ΔΑ} = \alpha$, ἀγομένης παραλλήλυ τῆς ΔΘ τῇ ΖΑ, ἢ ἐπὶ τῆς ΔΘ ἀποτμηθήσεται $\text{ΔΜ} = \gamma$, ἢ ἐπιζευχθήσεται ἡ ΜΗ ὕτως, ὡς τὴν ὑπὸ ΘΜΗ γωνίαν εἶναι $= \text{Τ} = \text{Ρ}$, ἢ περισθήσεται $\text{ΜΗ} = \chi$, ἢ $\text{ΗΙ} = \upsilon$· εἰ δὲ τὰς χ ἢ υ περιέχειν δέοι γωνίαν ὀρθὴν, εὑρεθήσεται $\mu = \sqrt{2}$.

293. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ϛ'. Ἔςω ἐξίσωσις εὐτάκτως

διατεθειμένη ἡ $\upsilon^2 - \chi\upsilon = \alpha^2 - \chi^2$· πρῶτον ἓν ἀνα. πληρωθέντος τοῦ πρώτου μέλους, εἶτα ὑποτεθέντος $\upsilon - \frac{\chi}{2} = \psi$, ἀποβήσεται $\psi^2 = \alpha^2 - \chi^2 + \frac{1}{4}\chi^2$, εἶτ' ἓν $\psi^2 = \alpha^2 - \frac{3}{4}\chi^2$, ἐξίσωσις ἐλλείψεως· ἵνα δ' αἱ ἐν αὐτῇ συντεταγμέναι εἶεν $\mu\chi$ καὶ ψ, πολλαπλασιασθήτω μὲν ἡ ἐξίσωσις διὰ μ^2, διαιρεθήτω δὲ διὰ $\frac{3}{4}$· καὶ δὴ τρέ. ψεται εἰς τόνδε τὸν τύπον $\frac{4\mu^2\psi^2}{3} = \frac{4\mu^2\alpha^2}{3} - \mu^2\chi^2$, ὅθεν πρόεισι $\frac{4\mu^2\alpha^2}{3} - (\mu\chi)^2 : \psi^2 :: \frac{4\mu^2\alpha^2}{3} : \alpha^2$· ἐπὶ ἓν ἡμιδιαμέτρων τῶν $\text{KA} = \frac{2\mu\alpha}{\sqrt{3}}$ καὶ $\text{KB} = \alpha$ ὑποτε. θείσθω γεγραμμένη ἡ ἔλλειψις AIB (σχ. 137)· καὶ δὴ πορισθήσονται, αἱ μὲν $\text{KE} = \mu\chi$, αἱ δὲ $\text{EI} = \psi$, ὑπο. τιθεμένης τῆς EI παραλλήλου τῇ KB· ἐπεὶ μέντοι $\upsilon = \psi + \frac{\chi}{2}$, ἀχθείσης τῆς KH ὡς εἶναι $\text{HE} = \frac{\chi}{2}$, πορισθή. σεται $\text{HI} = \upsilon$· ἀλλ' ἵνα αἱ υ ὁρισθῶσι πρὸς τῇ τῶν χ γραμμῇ, ἐπάναγκες εἶναι $\text{KH} = \chi$· ἐπεὶ δὲ KH δι. πλῆν εἶναι δεῖ τῆς EH, δέδοται δὲ ἡ τῶν συντεταγμέ. νων γωνία KHI, κατεσκευάσθω τρίγωνον τὸ ΡΣΤ, οὗ ἡ μὲν Σ γωνία ἴση εἴη τῇ δεδομένῃ, ἡ δὲ πλευρὰ ΣΡ διπλασία τῆς ΣΤ· ἔσω δὴ $\text{Ρ}\Sigma = \alpha$, καὶ $\Sigma\text{Τ} = \frac{\alpha}{2}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\text{ΡΤ} = \gamma$· τοιγαροῦν ἔσαι $\alpha : \gamma :: 1 : \mu = \frac{\gamma}{\alpha}$ ὅθεν ἡ μὲν ἡμιδιάμετρος $\text{KA} = \frac{2\gamma}{\sqrt{3}}$· ἡ δ' ὑπὸ KPH γωνία = BKA (διὰ τὰς παραλλήλους BK, IH) = T·

διὸ δὴ τῶν ἡμιδιαμέτρων ΚΒ, ΑΚ τὴν ὑπὸ ΒΚΑ $=$ Τ γωνίαν ποιησαμένων, γραφήσεται ἡ ἔλλειψις ΒΑ· τελευταῖον δὲ τῆς ΚΗ ἀχθείσης ὕτως, ὡς τὴν ὑπὸ ΗΚΕ γωνίαν εἶναι $=$ Ρ, αἱ μὲν ΚΗ ἔσονται $= \chi$, αἱ δὲ ΗΙ $= \upsilon$· ἐὰν δὲ ἡ Σ $=$ ΙΗΚ $= 90°$, πορισθήσεται $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

294. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Ζ΄. Ἔςω ἐξίσωσις $2\alpha\upsilon - 3\alpha\chi + 4\chi^2 = -2\upsilon^2 + 6\chi\upsilon$· μετατεθέντων ὖν πάντων τῶν τῦ υ περιεκτικῶν ὅρων ἐν τῷ πρώτῳ μέλει, τῶν δὲ λοιπῶν ἐν τῷ δευτέρῳ, ϗ διαιρεθέντων ἁπάντων διὰ 2, πρόεισιν ἐξίσωσις εὐτάκτως διατεθειμένη ἡ $\upsilon^2 - 3\chi\upsilon + \alpha\upsilon = \frac{3\alpha\chi}{2} - 2\chi^2$· τῦ τοίνυν πρώτυ μέλυς ἀναπληρωθέντος, ϗ ὑποτεθείσης τῆς ῥίζης $\upsilon - \frac{3\chi}{2} + \frac{\alpha}{2} = \psi$, πρόεισι $\psi^2 = \frac{\chi^2 + \alpha^2}{4}$, εἴτ' ὖν $4\psi^2 = \chi^2 + \alpha^2$. Ζητεῖται ὖν ἤδη ὁ τόπος τῶν συντεταγμένων ψ ϗ $\mu\chi$· πολλαπλασιασθήτω δὴ ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ μ^2· ὅθεν ἔςαι $4\mu^2\psi^2 = \mu^2\chi^2 + \mu^2\alpha^2$, ἐντεῦθεν δ' ἀποφέρεται $(\mu\chi)^2 + (\mu\alpha)^2 : \psi^2 :: (\mu\alpha)^2 : \frac{\alpha^2}{4}$· γεγράφθω τοίνυν ἡ ὑπερβολὴ ΒΙ (Σχ. 138), ἧς δευτέρα μὲν ἡμιδιάμετρος εἴη ΚΛ $= \mu\alpha$, πρώτη δὲ ΚΒ $= \frac{\alpha}{2}$· ϗ δὴ αἱ μὲν ΚΖ ἔσονται $= \mu\chi$, αἱ δὲ ΖΙ $= \psi$· ἤχθω δὲ ἡ ΒΓ παράλληλος τῇ ΚΖ, ἵνα γένοιτο ΙΓ $= \psi - \frac{\alpha}{2}$· ταύτῃ δὲ τῇ ποσότητι προςτεθείσθω $\frac{3}{2}\chi$ ἵνα γένοιτο υ· διὸ δὴ ἤχθω ἡ ΒΗ ὕτως, ὡς εἶναι Ηκ $= \frac{3}{2}\chi$, ἵνα γένοιτο ΗΙ $= \psi - \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}\chi$

$= \nu$· ἵνα δὲ ὑπὸ γωνίαν τὴν δοθεῖσαν ΒΗΙ πορισθείη ΒΗ $= \chi$, ϗ ΓΗ $= \frac{1}{2}\chi$, ὑποτεθείσθω ἡ γωνία Σ $=$ ΒΗΙ, ϗ γενέσθω ΡΣ $= \alpha$, ϗ ΣΤ $= \frac{3\alpha}{2}$, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΡΓ $= \gamma$· ὑποτεθείσθω δὲ ϗ $\mu . \alpha = \gamma$· ὑκοῦν ἔσαι $\alpha : \gamma :: 1 : \mu = \frac{\gamma}{\alpha}$· ἡ ἄρα ἡμιδιάμετρος ΚΑ $= \mu\alpha = \gamma$, τῆς ΚΒ ἀεὶ ἔσης $= \frac{\alpha}{2}$· συνεςάτωσαν ἂν αἱ ἡμιδιάμετροι αὗται γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΚΑ $=$ Τ, ϗ γεγράφθω ἡ ὑπερβολὴ ΒΙ, ϗ ἤχθω ἡ ἁπτομένη ΒΓ ἐξ ἀνάγκης παράλληλος τῇ ΚΖ, ϗ ΒΗ ἀχθεῖσα ποιείτω μετὰ τῆς ΒΚ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΗΒΚ $=$ Ρ· πορισθήσονται ἂν, αἱ μὲν ΒΗ $= \chi$, αἱ δὲ ΗΙ $= \nu$· τῆς δὲ γωνίας Σ ὀρθῆς ἔσης, πορισθήσεται $\gamma^2 = \alpha^2 + \frac{9\alpha^2}{4} = \frac{13\alpha^2}{4}$, ϗ $\gamma = \frac{\alpha}{2}\sqrt{13}$, ϗ $\mu = \frac{\sqrt{(13)}}{2}$.

295. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐφαρμοςέον δ᾽ ἂν εἴη τὴν μέθοδον ϗ ταῖς τῦ ν^2 μὴ περιεκτικαῖς ἐξισώσεσιν· ἐν ταύτῃ δὲ τῇ περιπτώσει διαθετέον τὸ ἐπίπεδον $\chi\nu$, ὡς εἶναι ὑπαρκτικὸν, συνεργῦ δίχα, ϗ κείμενον πρὸς ἃ μέρη ϗ χ^2.

296. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Η΄. Ἔςω ἐξίσωσις $\chi\nu - \frac{\chi^2}{2} = \alpha\chi - \alpha\nu + \alpha^2$· ὑποτεθείσθω ἂν ὁ τῦ χ πολλαπλασιασὴς $\nu - \frac{\alpha}{2} = \psi$, εἶτ᾽ ὖν $\nu = \psi + \frac{\alpha}{2}$, ϗ ἀντικατασαθήτω ἡ δύναμις τῦ ν ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, ἵνα γένηται

$\chi\psi = \frac{\alpha\chi}{2} - \alpha\psi + \alpha^2$, εἶτ' οὖν $\psi\chi - \frac{\alpha\chi}{2} = \alpha^2 - \alpha\psi$· γενέσθω δὲ $\psi - \frac{\alpha}{2} = \kappa$· καὶ δὴ ἔσαι $\chi\kappa = \frac{\alpha^2}{2} - \alpha\kappa$, εἶτ' οὖν $\chi\kappa + \alpha\kappa = \frac{\alpha^2}{2}$· ἐὰν οὖν ἐν τῇ καμπύλῃ ἀποτετμημέναι ὦσιν αἱ χ, εὑρεθήσονται αἱ κ προσοριζόμεναι τῇ γραμμῇ τῶν χ· διὸ δὴ πολλαπλασιασθείσης τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ μ, ἵνα γένοιτο $\kappa\,(\mu\chi + \mu\alpha) = \frac{\mu\alpha^2}{2}$, καὶ ὑποτεθέντος $\mu\chi + \mu\alpha = \pi$, προκύψει $\pi\kappa = \frac{\mu\alpha^2}{2}$ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις· ἐπὶ μιᾶς οὖν τῶν ἀσυμπτώτων (σχ. 139) εἰλήφθω ΚΑ = $\mu\alpha$, καὶ ἤχθω ΒΑ = $\frac{\alpha}{2}$ καὶ παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ ΚΜ· ὑπερβολῆς δὲ, διὰ τοῦ Β διηκούσης, γραφείσης, ἔσονται αἱ μὲν ΚΖ = π, αἱ δὲ ΖΙ = κ· ἀλλὰ $\mu\chi = \pi - \mu\alpha$· ἄρα ΑΖ = $\mu\chi$· παρὰ ταῦτα δὲ, ἐπεὶ $\psi = \kappa + \frac{\alpha}{2}$, γενομένης ΑΔ = $\frac{\alpha}{2}$, καὶ διὰ τοῦ σημείου Δ ἀγομένης τῆς ΔΝ παραλλήλου τῇ ΚΖ, ἔσονται, αἱ μὲν ΔΘ = ΑΖ = $\mu\chi$, αἱ δὲ ΘΙ = ψ· ἀλλ' $\upsilon = \psi + \frac{\chi}{2}$· ἀχθείσης ἄρα τῆς ΔΗ οὕτως, ὡς εἶναι ΗΘ = $\frac{1}{2}\chi$, ἔσαι τηνικαῦτα ΗΙ = υ· ἵνα δὲ ἡ υ προσδιορισθῇ τῇ γραμμῇ τῶν χ, δεῖ εἶναι ΔΗ = χ· διοριστέον οὖν ἐνταῦθα τὴν τοῦ μ δύναμιν· ἐπείπερ ἡ ὑπὸ ΔΗΙ γωνία τῶν συντεταγμένων γνωςὴ ὑποτίθεται, ἢ ἔτι ΔΗ : ΘΗ :: $\chi : \frac{\chi}{2}$ :: 2 : 1, συνεςάσθω τρίγωνον τὸ ΡΣΤ, ἔ ἡ γωνία Σ ἴση εἴη τῇ δεδομένῃ γωνίᾳ· ἢ τεθήτω ΡΣ $= \alpha$, ἢ ΣΤ $= \frac{\alpha}{2}$, ἢ ΡΤ ὑποτεθείσθω $= \gamma = \mu\alpha$· ἄρα $\mu = \frac{\gamma}{\alpha}$· διὰ ταῦτ' ἄρα μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ΚΜ, ΚΛ περιεχουσῶν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΜΚΛ $=$ Τ, ληφθείσης τῆς ΚΛ $= \mu\alpha = \gamma$, ἢ ΒΛ $= \frac{\alpha}{2}$ γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ ΒΙ διὰ τῦ Β διερχομένη· γενομένης δὲ ΑΔ $=$ ΑΒ, ἤχθω τῇ ΚΛ παράλληλος ἡ ΔΝ, ἢ ἤχθω ἡ ΔΗ ὕτως, ὡς τὴν ὑπὸ ΗΔΘ γωνίαν εἶναι $=$ Ρ· ἢ δὴ αἱ ΔΗ ἔσονται $= \chi$, αἱ δὲ τῇ ΚΜ παράλληλοι ΗΙ ἔσονται $= \upsilon$· τῆς δὲ Σ γωνίας ὀρθῆς ὔσης, πορισθήσεται $\gamma^2 = \frac{5\alpha^2}{4}$ ἢ $\gamma = \frac{\alpha}{2}\sqrt{5}$.

297. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν τῦ χυ ὀρθογωνίυ μετὰ τῦ τετραγώνυ υ^2 τῇ ἐξισώσει παρόντων, ἀπῇ τὸ χχ, τρεπτέον τὴν υ εἰς χ ἢ τ' ἀνάπαλιν· ἢ δὴ πορισθήσεται ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἐξίσωσις ὁμοία ταῖς ἄρτι κατεσκευασμέναις. Ἀλλὰ γὰρ ἴωμεν ἤδη εἰς τὸ ἐπιλύσασθαι ἔνια τῶν ἀορίςων δευτεροβαθμίων προβλημάτων.

298. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τῆς Αμ ἁπτομένης κύκλυ (σχ. 140), ὗ κέντρον τὸ κ, ἢ Ξμ ἀεὶ ὑποτιθεμένης παραλλήλυ τῇ διαμέτρῳ ΑΒ ἢ ἴσης τῇ ἐναπολαμβανομένῃ Βμ, εὑρεῖν τὺς τόπυς πάντων τῶν σημείων Ξ.

ΛΥΣΙΣ. Καθείσθω πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ΒΑ προεκβληθεῖσα ἡ ΞΠ $=$ Αμ $= \upsilon$, ϗ ΑΠ ἔσω $= \chi =$ Ξμ $=$ Ρμ, ϗ κΑ $= \alpha$· διὰ τοίνυν τὴν ἰδιότητα τῦ κύκλυ (Γεωμ. 344) ἐςὶν Αμ$^2 =$ μΡ $\times$ μΜ, εἶτ' ὖν $\upsilon^2 = \chi \cdot (\chi + 2\alpha)$, τῦτ' ἔςιν $\upsilon^2 = 2\alpha\chi + \chi^2$, ἐξίσωσις κυκλικῆς ὑπερβολῆς, ἧς οἱ ἄξονες ἴσοι τῇ δοθείσῃ διαμέτρῳ· κατάδηλον δὲ, ὡς αἱ μὲν ἐναπολαμβανόμεναι Ρμ τῦ κυκλικῦ τεταρτημορίυ Αδ διδόασι τὸν κλῶνα ΑΞ, αἱ δὲ ἐναπολαμβανόμεναι πΤ, τὸν ΑΖ· ὐδὲ τῦτο δὲ δυσχερὲς συνιδεῖν ὡς ἄρα διὰ τῆς ἁπτομένης ΝΒΚ συςαίη ἂν ἡ ἀντικειμένη ὑπερβολὴ νΒΗ.

299. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Σημείυ δοθέντος τῦ Ν (σχ. 141), μεταξὺ δύω πλευρῶν τῆς ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας εὑρεῖν καμπύλην τὴν ΝΜ, ὅπως ἀγομένης διὰ τῦ Ν εὐθείας ἁπάσης τῆς ΑΜΓ, αἱ ἐναπολαμβανόμεναι ΑΜ, ΝΓ ἀεὶ ἴσαι ὦσιν.

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τῶν Μ, Ν σημείων ἤχθωσαν ΜΣ, ϗ ΝΔ παράλληλοι τῇ πλευρᾷ ΒΓ, ϗ ὑποτεθείσθω ΒΣ $= \chi$, ϗ ΜΣ $= \upsilon$, ϗ ΝΔ $= \alpha$· ϗ ἐπεὶ διὰ τὴν φύσιν τῦ προβλήματος ΑΜ $=$ ΝΓ, ἔςαι ΑΣ $=$ ΒΔ $= \beta$ (διὰ γὰρ τὰς παραλλήλυς ΝΔ, ΜΣ ἐςὶ ΜΑ : ΓΝ :: ΣΑ : ΔΒ· ἀλλὰ ΜΑ $=$ ΓΝ· ἄρα ϗ ΣΑ $=$ ΒΔ)· ἄρα ΑΔ $=$ ΒΣ $= \chi$· ἀλλὰ διὰ τὰς παραλλήλυς ΣΜ, ΝΔ ἐςὶ ΣΑ : ΣΜ :: ΑΔ : ΔΝ, εἶτ' ὖν $\beta : \upsilon :: \chi : \alpha$· ἄρα $\chi\upsilon = \beta\alpha = \gamma^2$· γενομένυ ἄρα $\beta\alpha = \gamma^2$, ἔςαι $\chi\upsilon = \gamma^2$, ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ΑΒ, ΒΓ· ἐὰν ἄρα μεταξὺ τῶν δε τῶν εὐθειῶν ὑπερβολὴ γραφῇ, διήκυσα διὰ τῦ σημείυ Ν, πορισθήσεται ἡ ζητυμένη καμπύλη.

300. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Τετράγωνον συςήσασθαι ἴσον ὀρθογωνίῳ, ὗ αἱ πλευραὶ διαφέρωσιν ἀλλήλων γραμμῇ εὐθείᾳ δεδομένῃ τῇ 2α.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω υ ἡ τȣ̃ τετραγώνȣ πλευρὰ ϗ χ ἡ ἐλάσσων τȣ̃ ὀρθογωνίȣ πλευρά· ἡ ἄρα μείζων ἔςαι $= \chi + 2\alpha$· ἐκ δὲ τῆς τȣ̃ προβλήματος φύσεως ἐςὶν $\upsilon^2 = 2\alpha\chi + \chi^2$, ἐξίσωσις κυκλικῆς ὑπερβολῆς, ἧς οἱ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἑκάτερος τῇ εὐθείᾳ 2α. Τὸ ἄρα ἀφ᾽ ἡςινοσȣ̃ν τεταγμένης τετράγωνον υ^2 ἀεὶ ἔςαι ἴσον ὀρθογωνίῳ, ȣ̃ αἱ πλευραὶ διαφέρȣσιν ἀλλήλων τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ 2α.

301. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δʹ. Τετράγωνον συςήσασθαι ἴσον ὀρθογωνίῳ, ȣ̃ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν εἴη ἀμετάβλητον ϗ ἴσον τῷ 2α.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω υ ἡ τȣ̃ ζητȣμένȣ τετραγώνȣ πλευρὰ, ϗ χ ἡ ἑτέρα τῶν τȣ̃ ὀρθογωνίȣ πλευρῶν· ἁτέρα τοίνυν ἔςαι $= 2\alpha - \chi$· ἔςι δὲ ἐκ τῆς τȣ̃ προβλήματος φύσεως $\upsilon^2 = 2\alpha\chi - \chi^2$, ἐξίσωσις κύκλȣ, ȣ̃ ἡ διάμετρος $= 2\alpha$· ἄρα τὸ ἀφ᾽ ἑκάςης τεταγμένης τετράγωνον, ϗ τὸ ὑπὸ τῶν συςοιχȣσῶν ἀποτετμημένων ὀρθογώνιον, ἕξȣσι τὴν ζητȣμένην ἰσότητα.

302. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Εʹ. Τῆς θέσεως δύω παραλλήλων ΑΗ, ΒΘ (σχ. 142), ὧν τὰ πέρατα Α ϗ Β μόνιμά εἰσι, δοθείσης, εὑρεῖν μεταξὺ αὐτῶν σημεῖον τὸ Μ, δι᾽ ȣ̃ ἂν ϗ διὰ τȣ̃ Α ἀχθεισῶν τῆς τε εὐθείας ΑΜΔ ϗ τῆς ΠΜΞ παραλλήλȣ τῇ ΒΑ, ἡ ΒΔ εἴη πρὸς τὴν ΜΠ, ὡς μία δεδομένη εὐθεῖα ἡ φ πρὸς τὴν ΒΑ.

ΛΥΣΙΣ. Κείσθω τὸ πρᾶγμα ὡς γεγονός· ϗ δὴ ἔςω $AB = \alpha$, $A\Pi = \chi$, ϗ $\Pi M = \upsilon$· τῶν ȣ̃ν τριγώνων ΑΒΔ, ΜΠΑ ὁμοίων ὄντων, ἔςι $M\Pi : \Pi A :: AB : B\Delta$, εἴτ᾽ ȣ̃ν $\upsilon : \chi :: \alpha : B\Delta = \frac{\chi\alpha}{\upsilon}$· ἀλλὰ διὰ τὴν φύσιν τȣ̃ προβλήματος ἔςι $\frac{\chi\alpha}{\upsilon} : \upsilon :: \varphi : \alpha$· ἄρα $\varphi\upsilon = \frac{\alpha^2\chi}{\upsilon}$, εἴτ᾽

ἂν $\varphi \upsilon \upsilon = \alpha^2 \chi$, ἢ $\upsilon \upsilon = \frac{\alpha^2 \chi}{\varphi}$, ἢ τέλος, τεθέντος $\frac{\alpha^2}{\upsilon} = \pi$, $\upsilon^2 = \pi' \chi$, ἐξίσωσις παραβολῆς, ἧς ΑΗ ἐςὶν ἡ γραμμὴ τῶν χ.

303. Ἔςιν δὲ τῶν προβλημάτων δυσχερέςερα τὸ πρῶτον δοκεῖ, ὧν μέντοι ἡ ἐπίλυσις ῥάςη, μικρόντι ἐπιςήσασι τὸν νοῦν ἰδιότητί τινι τῶν καμπύλων· οἷον

304. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'. Καμπύλην εὑρεῖν τὴν ΑΛΔΒ (χ. 143), ὅπως περὶ τὸν ἄξονα ΑΒ, ἀπείρων παραβολῶν γραφεισῶν ΛΑ, ΖΑ, ΔΑ, κτ. (ὡς εἶναι ἀλλ' ἂν τὴν μεγίςην παράμετρον $<$ 2ΑΒ) καὶ ἐκ σημείου τοῦ Β τῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΒ ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν ΒΛ, ΒΖ κτλ. καθέτων ταύταις ταῖς παραβολαῖς, ἡ καμπύλη ΑΖΘΒ διήκῃ διὰ πάντων τῶν σημείων, ἐν οἷς αὗται αἱ κάθετοι συναντῶσι ταῖς αὐτῶν παραβολαῖς.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῶν σημείων Λ, Ζ, Δ ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΛΡ, ΖΞ, ΔΠ, κτ. κάθετοι τῷ ἄξονι ΑΒ, οὐκοῦν ἡ μὲν Βπ ἐςὶν ὑποκάθετος τῆς παραβολῆς ΘΑ, ἡ δὲ ΒΠ τῆς ΔΑ κτ. ἔςω ἤδη $\Delta\Pi = \upsilon$, καὶ $A\Pi = \chi$, καὶ $AB = 2\beta$· ἄρα $B\Pi = 2\beta - \chi$· διὰ δὲ τὴν φύσιν τῆς παραβολῆς ΔΑ, τιθεμένης τῆς κατ' αὐτὴν παραμέτρου $= 2\pi$, πρόεισιν $\upsilon^2 = 2\pi\chi$. Ἀλλ' ἡ ὑποκάθετος ΒΠ ἡμίσειά ἐςὶ τῆς παραμέτρου· ἄρα $B\Pi = \pi = 2\beta - \chi$, καὶ $\upsilon^2 = 2\,(2\beta\chi - \chi\chi)$· ὡσαύτως δὲ γενομένης $B\pi = 2\beta - \chi$, καὶ $A\pi = \chi$, καὶ $\Theta\pi = \upsilon$, εὑρεθήσεται καὶ ἐπὶ τῆς ΘΑ παραβολῆς $\upsilon^2 = 2\,.\,(2\beta\chi - \chi\chi)$· ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἄλλων παραβολῶν· ἐν ἄρα τῇ καμπύλῃ ΑΛΒ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα εἰσὶν, ὡς τὰ διπλᾶ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀποτετμημένων χ καὶ $2\beta - \chi$, τοῦτ' ἐςὶν ἀεὶ ὑπάρχει

$\upsilon^2 : 2\beta\chi - \chi\chi :: 2 : 1 :: \alpha\alpha : \beta\beta$ (ὑποτιθεμένης $\alpha\alpha = 2\beta\beta$)· ἄρα $\upsilon^2 : 2\beta\chi - \chi\chi :: \alpha\alpha : \beta\beta$ ϗ $\upsilon^2 = \frac{\alpha\alpha}{\beta\beta}(2\beta\chi - \chi\chi)$, ἐξίσωσις ἐλλείψεως· ἐκεῖν ἡ καμπύλη ΑΔΒ ἐστὶν ἡμιελλείψιον, ὃ ὁ μὲν ἄξων ΑΒ $= 2\beta$, ὁ δ' ἡμιάξων ΞΙ $= \alpha$· ἵνα δ' εὑρεθείη ἡ ΙΞ, εἰλήφθω τὸ γινόμενον ὑπὸ δύω τῶν τυχουσῶν ἀποτετμημένων (ΑΠ, ΠΒ φέρε), ϗ γενέσθω ΑΠ $\times$ ΒΠ $= 2\beta\chi - \chi\chi$: ΔΠ$^2 = \upsilon^2 :: \beta\beta : \alpha\alpha$· ὁ δὲ ταύτης τῆς ἀναλογίας τέταρτος ὅρος γνωςὸν ποιήσει τὸν ἡμιάξονα $\alpha =$ ΙΞ.

Περὶ Γεωμετρικῆς ἐπιλύσεως τῶν ὡρισμένων ἐξισώσεων τῦ τρίτε ϗ τῦ τετάρτε βαθμῦ.

305. Ἐὰν ἐξίσωσις ὡρισμένη τριτοβάθμιος ἢ τεταρτοβάθμιος εἰς δύω ἀναλυθῇ ἐξισώσεις ἀορίςες δευτεροβαθμίες, αἱ διατομαὶ τῶν καμπύλων, ἃς ἐμφαίνεσιν αἱ ἀόριςοι αὗται ἐξισώσεις, ἀποδώσεσι τὰς ῥίζας τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· Ἵνα δὲ τὸ πρᾶγμα λαμπρότερον ἀναφανείη, ἔςων ἐξισώσεις αἱ $\chi^2 = \alpha\upsilon$, $\chi\upsilon = \alpha\beta$· εἰσὶν ὖν ἡμῖν ἐξισώσεις τε δύω ϗ δύω ποσότητες ἄγνωςοι· ὖκῦν ἀφικέσθαι δυνησόμεθα εἰς ἐξίσωσιν μιᾶς μόνης ἀγνώςυ περιεκτικήν· ἐκ γὰρ τῆς πρώτης ἐξισώσεως πρόεισι $\frac{\chi^2}{\alpha} = \upsilon$, ταύτης δὲ τῆς τῦ υ δυνάμεως ἀντικαταςαθείσης ἐν τῇ δευτέρα, προκύψει ἐξίσωσις ὡρισμένη τριτοβάθμιος $\frac{\chi^3}{\alpha} = \alpha\beta$, εἴτ' ὖν $\chi^3 = \alpha\alpha\beta$· τὐναντίον δὲ ταύτην τὴν ὡρισμένην ἐξίσωσιν εἰς δύω ἀορίςες δευτεροβαθμίες

ἀναλύσαι δυνάμεθα, ὑποτιθέμενοι $\chi^2 = \alpha\upsilon$, ϗ $\chi\upsilon = \alpha\beta$, ἐξ ὧν τῆς συνθέσεως ἀποτελεῖται ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 = \alpha^2\beta$.

Τῆς τοίνυν τριτοβαθμίου, ἢ τεταρτοβαθμίου, ἐξισώσεως εἰς δύο ἀναλυθείσης ἀορίστους δευτεροβαθμίους, εἰλήφθω ἡ εὐθεῖα ΑΠ ὡς ἄξων (σχ. 144), τὸ δὲ σημεῖον Α ὡς ἀρχὴ τῶν χ ἑκατέρας τῶν ἐν ταύταις ταῖς ἐξισώσεσι δοθεισῶν κωνικῶν τομῶν· γραφεισῶν ἐν τῶν δε τῶν καμπύλων, αἱ ῥίζαι τῆς προκειμένης ἐξισώσεως ὁρισθήσονται ὑπὸ τῶν σημείων, τῶν οἷς ἀλλήλας τέμνουσιν αἱ καμπύλαι· ἐν γὰρ τῷ προτεθέντι ὑποδείγματι γραφεῖσα ἡ παραβολὴ Αμ ἐπὶ τῆς ἁπτομένης ΑΠ ἔσαι τόπος τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 = \alpha\upsilon$· ἀχθείσης εἶτα τῆς ΑΝ παραλλήλως ταῖς τεταγμέναις Πμ, ϗ γραφείσης τῆς ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi\upsilon = \alpha\upsilon$ ὑπερβολῆς μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ΑΠ, ΝΑ, τὸ σημεῖον μ τῆς τῶν καμπύλων Αμ, μΜ, διατομῆς προσδιορίσει τὴν τεταγμένην μΠ, ϗ τὴν ἀποτετμημένην ΑΠ μίαν μόνην ῥίζαν τῆς ἐξισώσεως $\chi^3 = \alpha^2\beta$· αἱ γὰρ ἄλλαι ῥίζαι εἰσὶν ἀδύνατοι· ὥσπερ ϗ αἱ καμπύλαι Αμ, μΜ, καθ' ἓν μόνον σημεῖον διατέμνονται.

Μόνη τοιγαροῦν ἀπαιτεῖται ἡ τῆς τριτοβαθμίου, ἢ τεταρτοβαθμίου, ἐξισώσεως εἰς δύο ἀορίστους δευτεροβαθμίους ἀνάλυσις, τοιάς δε μέντοι, οἵαι ἀποδιδόναι αὐ ἔχειν ϗ ἀνακαθισᾶν τὴν προτιθεμένην ἐξίσωσιν· εἰς πλείω δὲ εὐμάρειαν δυνατὸν ὑποθέσθαι τὰς τεταρτοβαθμίους, ἢ τριτοβαθμίους, ἐξισώσεις ἀπηλλαγμένας τοῦ δευτέρου ὅρου· προςιθέναι μόνον δεῖ ταῖς εὑρεθείσαις ἂν ῥίζαις τὸ τρίτον τοῦ κατὰ τὸν ἀφανισθέντα δεύτερον ὅρον συνεργοῦ, ἢ τὸ τέταρτον, εἰ τεταρτοβάθμιος εἴη ἡ προκειμένη ἐξίσωσις, μετὰ συμβόλου ἐναντίου, καθάπερ δέδεικται (Συμβολ. Λογιστ. 465)· τὸ δὲ τρίτον τοῦτο, ἢ τέταρτον, γραμμὴν εὐθεῖαν εἶναι, ἀλλὰ μὴ καμπύλην, μὴ οὐχὶ περιττὸν ᾖ προσεπισημειῶσαι;

306. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἔστω γενικὴ ἐξίσωσις τριτοβάθμιος, τοῦ δευτέρου ὅρου ἀπηλλαγμένη, ἡ $\chi^3 + \alpha\beta\chi - \alpha\zeta^2 = 0$, ἐφ᾽ ἧς α καὶ β ὑποτεθῆναι δύνανται εἴτε ὑπαρκτικαὶ, εἴτε λειπτικαί· γενέσθω οὖν $\chi^2 = \alpha\upsilon$, καὶ ἀντικαταστασθήτω ἡ τοῦ χ^2 δύναμις ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει, ἥτις ἔσεται διὰ α διαιρεθεῖσα $\upsilon\chi + \beta\chi - \zeta^2 = 0$· ἡ μὲν οὖν ἐξίσωσις $\chi^2 = \alpha\upsilon$ ἐστὶ παραβολῆς· εἰς δέ γε κατασκευὴν τῆς ἑτέρας ἐξισώσεως, γενέσθω $\upsilon + \beta = \psi$· καὶ τοίνυν ἔσται διὰ μεταθέσεως $\chi\psi = \zeta^2$, ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις. Παραμέτρῳ οὖν $= \alpha$, ἐπὶ τῆς ΔΜ (σχ. 145) ληφθείσης ὡς γραμμῆς τῶν χ, ὧν ἡ ἀρχὴ ἐστὶ κατὰ τὸ Δ, γεγράφθω ἡ παραβολὴ ΠΔΝ ἧς ἅπτεται ἡ ΔΜ κατὰ τὸ Δ ἀρχὴν τοῦ τῶν υ ἄξονος ΔΣ· ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὴν παραβολὴν ἰδιότητος, ἐστὶ $\Delta\mathrm{M}^2 = \Sigma\mathrm{N}^2 = \chi^2 = \alpha \times \Delta\Sigma = \alpha\upsilon$· ἄρα ΔΝ ἐστὶν ἡ ζητουμένη παραβολή· εἰς δὲ κατασκευὴν τῆς ἐν τῇ ἐξισώσει $\psi\chi = \zeta^2$ ὑπερβολῆς, ἐπειδὴ ἑκατέραν τῶν καμπύλων ἔχειν ἐπάναγκες τὸν αὐτὸν ἄξονα καὶ τὴν αὐτὴν ἀρχὴν τῶν χ, εἰλήφθω ΚΔ $= \beta$, καὶ διὰ τοῦ Κ ἤχθω τῇ ΔΜ παράλληλος ἡ ΙΚΞ· ἡ ἄρα τῶν ἀσυμπτώτων γωνία ΞΚΣ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΜΔΣ γωνίᾳ τῶν χ καὶ τῶν υ, ὅπερ ἀεὶ οὕτως ἔχειν προσήκει ἐν ταῖσδε περιπτώσεσι. Τούτου τεθέντος ζητηθήτω σημεῖόν τι τῆς ὑπερβολῆς ΜΝ, τιθεμένοις

$$\zeta : \mathrm{K\Xi} :: \Xi\mathrm{N} : \zeta\text{· ἄρα } \Xi\mathrm{N} = \frac{\zeta^2}{\Xi\mathrm{K}}\text{·}$$ ἀλλὰ ΞΚ ῥᾳδίως ἔχει γνωσθῆναι· ἄρα καὶ ΞΝ εὐχερῶς γνωσθήσεται· ἄρα εὐμαρῶς εὑρεθήσεται σημεῖόν τι τὸ Ν τῆς ὑπερβολῆς· εὑρεθήσονται δὲ καὶ ἕτερα σημεῖα ποικιλλομένης τῆς ΚΞ·

ἐστιν ἄρα $\Xi N = \psi = \upsilon + \beta$, καὶ $\upsilon = \psi - \beta = \Xi N -$ $\mu\Xi$· ἄρα $\mu N = \upsilon$ καὶ $\Delta\mu = K\Xi = \chi$· ῥᾷστα ἐν καταφαίνεται, ὡς τὸ τῆς διατομῆς σημεῖον Ν μίαν τὴν Δμ προσδιορίσει ἐκ τῶν ῥιζῶν τῆς προκειμένης ἐξισώσεως, τῶν δὲ α καὶ β ὑπαρκτικῶν ὄντων ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ παραβολὴ καθ' ἓν μόνον σημεῖον διατμηθήσονται, καὶ ἡ ἐξίσωσις μίαν μόνην ἕξει ῥίζαν πραγματικήν· τ' αὐτὸν ἔσαι, κ' ἦν ἡ $\beta = 0$.

307. **ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄.** Ἔστω ἤδη ἐξίσωσις γενικὴ τεταρτοβάθμιος $\chi^4 + \zeta\theta\chi^2 + \zeta^2 \cdot \beta\chi \pm \zeta^3\gamma = 0$· ὑποτεθείσθω ἓν $\zeta^3\gamma = \chi^2\upsilon^2$, καὶ γενομένης ἀντικαταστάσεως, πρόεισι $\chi^4 + \zeta\theta\chi^2 + \zeta^2\beta\chi + \chi^2\upsilon^2 = 0$· γεγράφθω δὲ ὁ τρίτος ὅρος οὕτω $\frac{\zeta^2\beta}{\zeta\sqrt{\zeta\gamma}}\,\zeta\sqrt{(\zeta\gamma)}\,\chi$· ἐν αὐτῷ δὲ τῷ ὅρῳ ἀντικατασταθήτω $\chi\upsilon$ ἀντὶ $\zeta\sqrt{(\zeta\gamma)}$· (ἐκ γὰρ τῆς ἐξισώσεως $\zeta^3\gamma = \chi^2\upsilon^2$ ἀποφέρεται $\chi\upsilon = \zeta\sqrt{(\zeta\gamma)}$)· καὶ δὴ ἔσαι $\chi^4 + \zeta\theta\chi^2 + \frac{\beta\sqrt{(\zeta)}}{\sqrt{\gamma}}\chi^2\upsilon + \chi^2\upsilon^2 = 0$, ἥτις διὰ χ^2 διαιρεθεῖσα γενήσεται $\chi^2 + \zeta\theta + \frac{\beta\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\gamma}}\upsilon \pm \upsilon^2 = 0$· αὕτη τοίνυν ἡ ἐξίσωσις, ληφθέντος τοῦ $-$ συμβόλου ἐν τῷ ἐσχάτῳ ὅρῳ, ἐλλείψεως μὲν ἔσαι τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας μὴ ὀρθῆς ἔσης· κύκλου δὲ, ὀρθῆς· ὑπερβολῆς δὲ κυκλικῆς, τοῦ $-$ τεθέντος ἐν τῷ ἐσχάτῳ ὅρῳ· καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει συζεύχθω ἡ ἔλλειψις, ἢ ὁ κύκλος, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἡ κυκλικὴ ὑπερβολὴ τῇ ὑπερβολῇ τῆς ἐξισώσεως $\zeta\sqrt{(\zeta\gamma)} = \chi\upsilon$· αἱ δὲ αὐτῶν διατομαὶ προσδιορίσουσι τὰς ζητουμένας ῥίζας. Τῆς δὲ τῶν συντεταγμένων γωνίας ὀρθῆς ὑποτεθείσης, καὶ τοῦ συμβόλου $-$ ληφθέντος, πορισθήσονται αἱ ῥίζαι διὰ τῶν διατομῶν δύο ὑπερβολῶν κυκλικῶν· εὐχερῶς δὲ κατανο-

εἶται, ὡς ἄρα ἐξίσωσις τριτοβάθμιος πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ $\chi = o$, ἢ ἐπὶ $\chi - o = o$ τεταρτοβάθμιος γίνεται, ϗ εὐμαρῶς αὐτῆς αἱ ῥίζαι εὑρίσκονται.

Δυνατὸν δὲ κατασκευάσαι τὴν γενικὴν τεταρτοβάθμιον ϗ τριτοβάθμιον ἐξίσωσιν ϗ διὰ παραβολῆς ϗ κύκλȣ· ἔςω γὰρ παραβολὴ ἡ ΔΕΖ (σχ. 144), ἧς ἐξίσωσις $\upsilon^2 = \beta\chi + \chi^2$, τȣ͂ Β ἀρχῆς ὄντος τῶν ἀπὸ τῆς εὐθείας ΜΝ ἀποτετμημένων, ϗ ὀρθῆς τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας· ϗ ἐπὶ τῆς ἀπεράντȣ ΒΑ εἰλήφθω $\text{ΒΘ} = \delta$ (ἢ $= -\delta$, εἰ ληφθείη ἐπὶ τῆς Βα), ϗ ἐπὶ τῆς ΘΗ παραλλήλȣ τῇ ΜΝ εἰλήφθω $\text{ΘΚ} = \zeta$, ἢ ἀποδοτέον τὸ $-$, εἰ ληφθείη πρὸς τὰ ἀριςερά· ϗ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαςήματι δὲ τῷ $\text{ΚΖ} = \gamma$, γεγράφθω κύκλος ὁ ΖΑ, τέμνων τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ Ζ· ἐπεὶ ȣ͂ν $\text{ΖΙ} = \upsilon$ ϗ $\text{ΒΙ} = \chi$ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν παραβολὴν, ἔςαι $\text{ΖΗ} = \upsilon - \text{ΗΙ} = \chi^2 + \beta\chi - \delta$, ϗ $\text{ΚΗ} = \text{ΑΙ} = \text{ΘΗ} - \text{ΘΚ} = \chi - \zeta$· ἐκ δὲ τȣ͂ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΚΗΖ πρόεισι

$$\begin{aligned}\gamma^2 = \chi^4 + 2\beta\chi^3 + \beta^2\chi^2 &- 2\delta\chi^2 - 2\beta\delta\chi + \delta^2\\ &+ \chi^2 \;\; - 2\zeta\chi + \zeta^2\end{aligned}$$

εἶτ' ȣ͂ν

$$\begin{aligned}\chi^4 + 2\beta\chi^3 + \beta^2\chi^2 &- 2\beta\delta\chi + \delta^2 = o \;(\text{A})\\ - 2\delta\chi^2 &- 2\zeta\chi + \zeta^2\\ + \chi^2 & \qquad\quad - \gamma^2\end{aligned}$$

εἰλήφθω ἤδη ἐξίσωσίς τις τεταρτοβάθμιος, ἥτις ἀεὶ ἐμπεριεχεθήσεται τῇ καθολικῇ $\chi^4 + \pi\chi^3 + \xi\chi^2 + \rho\chi + \sigma = o$ (Β)· αἱ δὲ, ἃς εὑρεῖν δεῖ, ΒΙ ἔσονται αἱ χ, εἶτ' ȣ͂ν αἱ δυνάμεις τῶν ταύτης τῆς ἐξισώσεως ῥιζῶν· ἴσης ȣ͂ν ὑποτεθεμένης τῆς Β τῇ Α, ϗ ταύτης πρὸς ἐκείνην παραβαλλομένης, ἕξομεν $2\beta = \pi$, ϗ $\beta\beta - 2\delta + 1 = \xi$, ϗ $- 2\beta\delta - 2\zeta = \rho$, ϗ $\delta\delta + \zeta\zeta - \gamma\gamma = \sigma$· αἱ τοίνυν διὰ τῶν γραμμάτων $\beta, \delta, \zeta, \gamma$ ἐμφαινόμεναι εὐθεῖαι ἀεὶ δύνανται γενέσθαι μεγέθες τȣ̃ ἀπαιτȣμένȣ, ἵν' εἶεν ἀληθεῖς αἱ ἐξισώσεις, αἱ πρὸς διορισμὸν αὐτῶν ξυντελȣ̃σαι· ἐκεῖν ἔςαι $\beta = \frac{1}{2}\pi$, ϗ $\delta = \frac{\beta^2 + 1 - \xi}{2} = \frac{\frac{1}{4}\pi^2 + 1 - \xi}{2}$,

ϗ $\zeta = \frac{-2\beta\delta + \varrho}{2} = \frac{-\frac{1}{4}\pi^3 + \pi - \pi\xi + 2\varrho}{4}$, ϗ

$\gamma = \sqrt{(\delta\delta + \zeta\zeta - \sigma)}$· ἐκ δὲ ψιλῆς ἐποπτείας δῆλον καθίςαται, ὅτι β, δ, ζ ȣ̉δέποτε κατ' ἐπίνοιαν δύνανται εἶναι· ἡ δὲ γ, μόνον ἡνίκα σ ποσότης εἴη ὑπαρκτικὴ $> \delta\delta + \zeta\zeta$· ἀλλ' ἐπείπερ δ ȣ̉ μόνον διὰ π ϗ ξ προσδιορίζεται, ἀλλὰ ϗ διὰ τῆς μονάδος τῆς εὐθείας, ἥν, ὅσον ἂν βȣλοίμεθα, μεγάλην λαβεῖν δυνάμεθα, ἐξέςαι ἀεὶ ποιεῖν $\delta\delta + \zeta\zeta > \sigma$, ἐφ' ᾧ τὴν γ ποσότητα τελεῖσθαι πραγματικήν.

Εἰ μὲν ὁ κύκλος τετραχθὰ τὴν παραβολὴν τέμνει, ἡ προκειμένη ἐξίσωσις τεσσάρων ῥιζῶν πραγματικῶν εὐμοιρήσει· δυεῖν δὲ, εἰ δίχα· ȣ̉δεμιᾶς δὲ πραγματικῆς, ἀλλὰ πασῶν ἀνυπάρκτων, τȣ̃ κύκλȣ μὴ συμβαλόντος ὅλως τῇ παραβολῇ· ἑτέρωθεν δὲ, ἐπεὶ αἱ ἀνύπαρκτοι ῥίζαι πάσης ἐξισώσεως εἰσὶν ἀεὶ ἀρτιάριθμοι, ὁ κύκλος τέμει δίχα, ἢ τετραχθὰ, ἢ ȣ̉δόλως, τὴν παραβολήν. τȣ̃ δὲ κύκλȣ μόνον ἁπτομένȣ τῆς παραβολῆς, ἕκαςον σημεῖον ἀφῆς δηλώσει δύω ῥίζας ἴσας, αἵτινες εἰς μίαν συμπεσεῖν δύνανται· ὡς εἰ δύω εἶεν τὰ τῆς ἀφῆς σημεῖα, δηλωθήσονται τέσσαρες ῥίζαι ἀνὰ δύω ἰσάλληλοι.

308. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ. Ἔςω ἐξίσωσις κυβικὴ $\chi^3 + \pi\chi^2 + \xi\chi + \varrho = 0$, ἥτις πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ χ γίνεται $\chi^4 + \pi\chi^3 + \xi\chi^2 + \varrho\chi = 0$ (A), ἐξίσωσις τεταρτοβάθμιος, ἧς παραβαλλομένης τῇ ὁμοβαθμίῳ καθ-

ολικῇ, εὑρίσκεται $\sigma = o$· ὥςε ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει, $\gamma = \surd(\delta\delta + \zeta\zeta - \sigma)$ γίνεται $= \surd(\delta\delta + \zeta\zeta)$, ὅπερ δείκνυσιν ἐνταῦθα μίαν τῶν ῥιζῶν τῆς Α ἐξισώσεως εἶναι $= o$, ἢ κύκλον τὸν, κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαςήματι δὲ τῷ γ, γραφόμενον διήκειν διὰ τῦ σημείυ Β, ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων· αἱ δὲ λοιπαὶ τῆς προκειμένης ἐξισώσεως Α ῥίζαι εὐπετῶς εὑρίσκονται· ἐπεὶ γὰρ ἐξίσωσις πᾶσα τριτοβάθμιος μιᾶς εὐμοιρεῖν ὀφείλει ῥίζης πραγματικῆς, ἢ δυεῖν ἀνυπάρκτων, ἢ γῦν τριῶν πραγματικῶν, ὁ κύκλος διατεμεῖ τὴν παραβολὴν καθ' ἕν, ἢ τρία σημεῖα, ἢ καθ' ἓν μὲν αὐτὴν τεμεῖ, καθ' ἕτερον δ' αὐτῆς ἐφάψεται.

Ἐπίλυσις ἐνίων Γεωμετρικῶν Προβλημάτων, ὡρισμένων τε ἢ ἀορίςων, βαθμῶν ὑπερτέρων.

309. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Δύω εὐθειῶν τῶν α, β δοθεισῶν, δύω μέσας ἀνάλογον τὰς χ, υ εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω, ἡ μὲν πρώτη τῶν ζητυμένων $= \chi$, ἡ δὲ δευτέρα $= \upsilon$· διὰ δὲ τὴν φύσιν τῦ προβλήματος ἔςιν $\alpha : \chi :: \chi : \upsilon :: \upsilon : \beta$· ἄρα (Συμβ. Λογ. 270) $\alpha^3 : \chi^3 :: \alpha : \beta$ ἢ $\chi^3 = \alpha^2\beta$, ἐξίσωσις τριτοβάθμιος, ἣν ἤδη κατεσκευάσαμεν (305) διὰ παραβολῆς ἢ ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις· ὥςε ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ (σχ. 144) ἔςιν ἡ ζητυμένη ῥίζα τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· ἔςω ὖν ΑΠ $= \gamma$· ἢ δὴ ἐκ τῆς τῦ προβλήματος φύσεως ἔςιν $\alpha : \gamma :: \gamma : \upsilon = \frac{\gamma\gamma}{\alpha}$, δευτέρα τῶν ζητυμένων μέσων ἀναλόγων.

310. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπειδὴ, διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς γεωμετρικῆς προόδου, ἐστιν $\alpha^3 : \chi^3 :: \alpha : \beta$, ἐὰν ᾖ $\alpha : \beta : 2 : 1$· ὁ ἀπὸ τῆς α εὐθείας κύβος διπλάσιος ἔσται τοῦ ἀπὸ τῆς εὐθείας χ· ὄντος δὲ $\alpha = 3\beta$, ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου ἔσται τριπλάσιος· ἐντεῦθεν ἄρα ἐπιλύεται τὸ παρὰ τοῖς πάλαι περιβόητον δηλιακὸν πρόβλημα, ὅπερ ἦν τὸ διπλασιάσαι τὸν κύβον, περὶ οὗ μέτιθι τὰ τοῦ Εὐτοκίου ἐν τῷ τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου β΄. βιβλίῳ.

311. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Γωνίας ὀρθῆς τῆς ΑΒΗ (σχ. 147), καὶ σημείου μονίμου τοῦ Α ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτῆς πλευρῶν, δοθέντων, ἀπὸ δὲ τοῦ Α ἀγομένης εὐθείας, ἕως ἂν ἀπαντήσῃ τῇ πλευρᾷ ΒΗ, καὶ εὐθείας τῆς ΒΘ ἀεὶ εὑρισκομένης = ΘΜ, εὑρεῖν τίνος καμπύλης εἰσὶ πάντα τὰ σημεῖα Μ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τοῦ Μ σημείου κατήχθω κάθετος ἡ ΜΠ τῇ ΑΒ πλευρᾷ, καὶ γενέσθω $AB = \alpha$, καὶ $A\Pi = \chi$, καὶ $\Pi M = \upsilon$· οὐκοῦν ΠΒ ἔσται $= \alpha - \chi$, καὶ $AM = \sqrt{\chi^2 + \upsilon^2}$ ἐκ δὲ τῶν τριγώνων ΑΠΜ, ΑΒΘ πρόεισι $\chi : \upsilon :: \alpha : B\Theta = \frac{\alpha\upsilon}{\chi} = \Theta M$, ἐξ ὑποθέσεως· ἀλλὰ διὰ τὰς παραλλήλους ΠΜ καὶ ΒΘ ἐστιν $A\Pi : \Pi B :: AM : \Theta M$, εἴτ' οὖν $\chi : \alpha - \chi :: \sqrt{(\alpha^2 + \upsilon^2)} : \Theta M = \Theta B = \frac{\alpha\upsilon}{\chi}$. ἐντεῦθεν ἄρα $\alpha\upsilon = (\alpha - \chi)\cdot\sqrt{(\chi^2 + \upsilon^2)}$, εἴτ' οὖν $\alpha^2\upsilon^2 = (\alpha - \chi)^2 \cdot (\chi^2 + \upsilon^2)$, ἢ $\upsilon^2 = \frac{(\chi - \alpha)^2 \cdot \chi^2}{2\alpha\chi - \chi^2}$ $= \frac{(\alpha - \chi)^2 \cdot \chi}{2\alpha - \chi}$, εἴτ' οὖν $\upsilon = \pm \frac{\alpha\chi - \chi^2}{\sqrt{(2\alpha\chi - \chi^2)}}$. ἐξ οὗ δῆλον, ὡς ἑκάστῃ ἀποτετμημένῃ συστοιχοῦσι δύω ἴσαι τεταγμέναι, ἡ μὲν ὑπαρκτικὴ, ἡ δ' ἑτέρα λειπτική· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\chi < 2\alpha$, αἱ τεταγμέναι ἔσονται πραγματικαί· ἡ ἄρα καμπύλη διήξει τηνικαῦτα διὰ τῦ B, οἱ δὲ δύω αὐτῆς κλῶνες ἐπεκτενῦνται, ὁ μὲν πρὸς ν, ἅτερος δὲ πρὸς N· ἐὰν δὲ ληφθῇ $\Theta N = \Theta B$, ἐκ τῶν τριγώνων $AB\Theta$, $A\Xi N$ πρόεισι $\chi : \upsilon :: \alpha : B\Theta = \frac{\alpha\upsilon}{\chi} = \Theta N$· ἀλλὰ, διὰ τὰς παραλλήλυς $B\Theta$ ϗ ΞN, ἐστὶν $A\Xi : B\Xi :: AN : \Theta N$, εἶτ' ὖν $\chi : \chi - \alpha :: \sqrt{(\chi^2 + \upsilon^2)} : \frac{\alpha\upsilon}{\chi}$, ὅθεν ἀποφέρεται $\upsilon = \pm \frac{\chi^2 - \alpha\chi}{\sqrt{(2\alpha\chi - \chi^2)}}$, ἐξίσωσις ἐπὶ τῶν κλωνῶν BN, $B\nu$· κέντρῳ μὲν τῷ B, διαστήματι δὲ $= \alpha$, γεγράφθω κύκλος, ῦ $A\Delta$ ἐστὶ διάμετρος, ϗ ἤχθω ἀπέραντος ἡ ἀπτομένη $\zeta\Delta Z$, ἥτις ἔσται ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης· ἐὰν γὰρ ὑποτεθῇ $\chi = 2\alpha$, ἔσται $\upsilon = \pm \frac{2\alpha^2}{0} = \pm \infty$· ἐὰν δ' ὑποτεθῇ $\upsilon = \sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}$, ἀντικατασταθείσης ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῇ ἤδη εὑρημένῃ ἐξισώσει, τῶν κλασμάτων ἐξωθέντων, πορισθήσεται $2\alpha\chi - \chi^2 = \chi^2 - \alpha\chi$, εἶτ' ὖν $2\alpha - \chi = \chi - \alpha$, ἢ $3\alpha = 2\chi$, ϗ $\chi = \frac{3\alpha}{2}$· ἀλλ' ἡ καμπύλη συναντᾷ τῷ κύκλῳ, ὅταν αὐτῆς ἡ τεταγμένη ἰσωθῇ τῇ τῦ κύκλυ· ἄρα ἡ καμπύλη συναντήσῃ τῷ κύκλῳ ἐν σημείοις ἀντιστοίχοις τῇ ἀποτετμημένῃ $AT = \frac{3\alpha}{2}$.

312. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Τόξον κύκλυ δοθὲν τὸ μπ ΞΝ εἰς τρία ἴσα τόξα διελεῖν (σχ. 148).

ΛΥΣΙΣ. Υποτεθείσθω δὴ τὸ πρᾶγμα ὡς γεγονὼς, ϰ̀ ἐκ τῶν τῆς διατομῆς σημείων π, Ξ ἐςάθωσαν πρὸς ὀρθὰς τῇ χορδῇ μΝ αἱ πΣ, ΞΤ, ϰ̀ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ ἡ μΝ· δῆλον ὂν ὅτι ΣΔ = ΔΓ, ἐπεὶ μπ = πΞ = ΞΝ, ϰ̀ πΞ παράλληλός ἐςιν ἐκ κατασκευῆς τῇ μΝ· τούτου τεθέντος ἔςω ἡ ἄτρεπτος μΔ = α, καὶ ΔΣ = χ, ϰ̀ Σπ = υ· οὐκοῦν ἔςαι ΣΤ = 2χ = πΞ = μπ· ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου μΣπ, ἔςι $4\chi^2 = \upsilon^2 + \alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2$, μεταθέσει δὲ ϰ̀ ἀναγωγῇ, ϰ̀ διαιρέσει διὰ 3, ϰ̀ ἀναπληρώσει, προκύπτει ἐξίσωσις $(\chi + \frac{\alpha}{3})^2 = \frac{4\alpha^2}{9} + \frac{\upsilon^3}{3}$· ὑποτεθέντος δὲ $\chi + \frac{\alpha}{2} = \psi$, γίνεται $\psi^2 = \frac{4\alpha^2}{9} + \frac{\upsilon^3}{3}$, εἴτ᾽ οὖν $\psi^2 - \frac{4\alpha^2}{9} = \frac{\upsilon^2}{3}$· ὅθεν $\psi^2 - \frac{4\alpha^2}{9} :: 1 : 3 :: \frac{4\alpha^2}{9} : \frac{4\alpha^2}{3}$, ἀναλογία προσφυὴς ὑπερβολῇ, ἧς, πρῶτος μὲν ἡμιάξων = $\frac{2\alpha}{3}$, δεύτερος δὲ = $\frac{2\alpha}{\sqrt{3}}$. ἡ δὲ γωνία τῶν συντεταγμένων ἐνταῦθα ἐςὶν ὀρθή· ἵνα δὲ ἀναγραφείη αὕτη ἡ ὑπερβολὴ, διῃρήσθω ἡ μΝ εἰς τρία ἰσάλληλα μέρη μΡ, ΡΑ, ΑΝ. ϰ̀ κέντρῳ μὲν τῷ Α, δευτέρῳ δὲ ἡμιάξονι τῷ $\frac{2\alpha}{\sqrt{3}}$, γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ πΡΜΠ· ἡ δὲ π κοινὴ διατομὴ αὐτῆς τε ϰ̀ τοῦ κύκλου ἀποδώσει τὸ μπ τόξον τριτημόριον τοῦ μπΝ τόξου· διὰ δὲ τοῦ σημείου π ἤχθω παράλληλος ἡ πΞ τῇ μΝ· τὸ οὖν σημεῖον τῆς διατομῆς Ξ προσδιορίσει τὸ δεύτερον τριτημόριον πΞ, ϰ̀ ΝΞ ἔςαι τὸ τρίτον· τέμνει δὲ ἡ ὑπερβολὴ τὸν κύκλον κ̔ καθ' ἕτερον σημεῖον τὸ Π, ὅπερ ἐκτίθησι τὸ τριτημόριον τȣ̃ τόξȣ μΠΝ ἀναπληρώματος εἰς 360° τȣ̃ προτεθέντος τόξȣ· βȣλομένοις γὰρ κ̔ τόδε τὸ τόξον εἰς τρία ἰσάλληλα μέρη διελεῖν, ΔΖ ὑποθεμένοις $= \chi$, κ̔ ΖΠ $= \upsilon$, προκύψει ἡ αὐτὴ τῇ ἄρτι εὑρημένῃ ἐξίσωσις.

313. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐντεῦθεν καταφαίνεται, ὅπως δυνάμεθα εἰς τρεῖς ἴσας γωνίας διελεῖν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν· ἀπόχρη γὰρ διελεῖν τὸ τὴν γωνίαν μετρȣ̃ν τόξον· ὅπερ, ἡμῖν μὲν δι' ὑπερβολῆς κ̔ κύκλȣ ἐπιτετήδευται, ἄλλοις δὲ διὰ παραβολῆς κ̔ κύκλȣ, καθὰ κ̔ τὸ τῆς εὑρέσεως τῶν μέσων συνεχῶς ἀνάλογον (309) διὰ δύω παραβολῶν ἐπιλύεται, ὡς ἔςιν ἰδεῖν ἐν Γ'. τόμῳ τῶν Μαθημαт. τȣ̃ Θεοτόκου §. 318, κ̔ 322, κ̔ ἐν τοῖς ὑπ' Ἀσάνȣς τȣ̃ Κεφαλλῆνος παρεντεθεῖσι τῷ τȣ̃ Καΐλλȣ συμβολικῷ λογισμῷ §. 436, 440.

314. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Δοθεισῶν δύω εὐθειῶν α, β κ̔ μεταξὺ αὐτῶν συνεχῶς ἀναλόγων ἐμφαινομένων ὑπὸ τȣ̃ ἀριθȣ̃ μ, εὑρεῖν τὴν τῆς ν τάξεως· ὑποτεθέντος, φέρ' εἰπεῖν, $\mu = 10$, κ̔ $\nu = 7$, εὑρεῖν τὴν μεταξὺ α κ̔ β ἑβδόμην τῶν μέσων συνεχῶς ἀναλόγων.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω χ ἡ πρώτη τῶν μέσων ἀναλόγων· κ̔ δὴ πορισθήσεται ἡ ἐφεξῆς σειρὰ $\because\ \alpha : \chi : \dfrac{\chi^2}{\alpha} :$

$$\frac{\chi^3}{\alpha^2} : \frac{\chi^4}{\alpha^3} \ldots\ldots \frac{\chi^\nu}{\alpha^{\nu-1}} \ldots\ldots \frac{\chi^\mu}{\alpha^{\mu-1}} : \frac{\chi^{\mu+1}}{\alpha^\mu}$$

$= \beta$· ȣ̓κȣ̃ν, ἐπεὶ οἱ δεῖκται τὰς τάξεις ἐμφαίνȣσι τῶν ὅρων, ὁ τῆς ν τάξεως ἔςι $= \dfrac{\chi^\nu}{\alpha^{\nu-1}}$· ὑποτεθείσθω δὴ ȣ̓̃τος

$= \psi$· ὅθεν γενήσεται $\chi^{\nu} = \alpha^{\nu-1}\psi$· ἀλλ' ἐπεὶ $\frac{\chi^{\mu+1}}{\alpha^{\mu}} = \beta$, καὶ $\chi^{\mu+1} = \alpha^{\mu}\beta$, τῶν ῥιζῶν ἐξαχθεισῶν, ἔσαι $\chi = \alpha^{\frac{\mu}{\mu+1}}\beta^{\frac{1}{\mu+1}}$· ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως εἰς τὸν ν ὑψωθείσης βαθμὸν, ἔσαι $\chi^{\nu} = \alpha^{\frac{\mu\nu}{\mu+1}}\beta^{\frac{\nu}{\mu+1}} = \alpha^{\nu-1}\psi$· ὅθεν $\psi = \alpha^{\frac{\mu-\nu+1}{\mu+1}}\beta^{\frac{\nu}{\mu+1}}$, τύπος παρισῶν τὴν ζητεμένην μέσην ἀνάλογον.

Ὡς ἂν ὖν εἰς τὴν κατασκευὴν ἀφικώμεθα, ὑψέσθω ἑκάτερον μέλος εἰς τὸν βαθμὸν $\mu+1$, ἵνα γένοιτο $\psi^{\mu+1} = \alpha^{\mu-\nu+1}\beta^{\nu}$· τῦ δὲ μ περιττῦ ἀριθμῦ ὄντος, καὶ ὑποτεθέντος $\psi^2 = \alpha\upsilon$, παριθήσεται $\alpha^{\mu-2\mu+1}\beta^{\nu} = \alpha^{\frac{\mu+1}{2}}\upsilon^{\frac{\mu+1}{2}}$, ὅθεν $\upsilon^{\frac{\mu+1}{2}} = \alpha^{\frac{\mu-2\mu+1}{2}}\beta^{\nu}$· ἐὰν δὲ διὰ ταύτης τῆς ἐξισώσεως εὑρεθῇ ἡ υ, εὑρεθήσεται καὶ ἡ ψ μέση ἀνάλογος μεταξὺ α καὶ υ· εἰ δὲ $\frac{\mu=1}{2}$ ἀριθμὸς εἴη ἄρτιος τῇ αὐτῇ χρησαμένοις μεθόδῳ, μετήχθω ὁ τύπος εἰς τρίτην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν α, υ τὴν π, ὥσπερ ἐγένετο ὡς πρὸς τὴν υ τρίτην ἀνάλογον τῶν α, ψ, καὶ ὕτως ἑξῆς, μέχρις ἂν ἀφικώμεθα εἰς δείκτην περισσάριθμον· ἀποχρήσει ἄρα κατασκευάσαι τὸν τύπον ὑποτιθεμένυ περιττῦ τῦ $\mu+1$· πολλαπλασιασθήτω τοίνυν τηνικαῦτα ἐπὶ ψ, ἵνα γένοιτο $\psi^{\mu+2} = \alpha^{\mu-\nu+1}\beta^{\nu}\psi$· καὶ δὴ ὁ δείκτης $\mu+2$ ἔσεται ἄρτιος· γενομένυ δὲ $\psi^2 = \alpha\upsilon$, διαιρέσει παριθήσεται $\upsilon^{\frac{\mu+2}{2}} = \alpha^{\frac{\mu-2\nu}{2}}\beta^{\nu}\psi$, τῦ $\frac{\mu+2}{2}$ ἀριθμῦ ὑπάρχοντος τῶν ἐλαχερῶν· ἐπὶ ἄξονος ὖν τῦ ΑΔ (χ. 149) γεγράφθω παραβολὴ ἡ ΑΒΜ διὰ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἤδη εὑρημένης. αἱ τοίνυν ΑΔ ἔσονται $=\psi$· γεγράφθω εἶτα παραβολὴ ἡ ΑΒΜ διὰ τῆς ἐξισώσεως $\psi^2 = \alpha\upsilon$· τῶν ἂν δύω παραβολῶν τεμνομένων κατὰ τὸ Β, ἀχθείσης ἐντεῦθεν τεταγμένως τῆς ΔΒ, ΑΔ $=\psi$ ἔσαι μέση ἀναλογος ἡ ζητεμένη, ϗ ΔΒ τρίτη ἀνάλογος ταῖς εὐθείαις α, ψ.

315. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Πολλῶν εὐθειῶν ἐκκειμένων κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν, τῆς πρώτης δοθείσης, εὑρεῖν τὴν δευτέραν, ὅπως ἡ δευτέρα σὺν τῇ ἐχάτῃ ἴση ᾖ ποσότητι δεδομένῃ τῇ β.

ΛΥΣΙΣ. Ἔσω α ἡ πρώτη ϗ χ ἡ δευτέρα· ἡ ἄρα ἐχάτη ἔσαι $\beta - \chi$· ἡ γὰρ ἐχάτη μετὰ τῆς χ ὑποτίθεται $= \beta$· τῆς ὂν α πρώτης ὄσης τῶν ἀναλόγων εὐθειῶν, ϗ χ τῆς δευτέρας, ἡ τρίτη ἔσαι $\frac{\chi^2}{\alpha}$· τηρηθείσης δὲ ἐν τῷ λογισμῷ ταύτης τῆς ἐκθέσεως, ἡ τετάρτη ἀνάλογος περιέξει τὸν τρίτον βαθμὸν τῆς ἀγνώσε· ἵνα δὲ τῦτο φύγοιμεν, γενέσθω $\frac{\chi^2}{\alpha} = \upsilon$, ϗ τῆς υ ἀντὶ τρίτε ἀναλόγε ληφθείσης, εὑρεθήσεται ἡ τετάρτη διχῶς ἐκτιθεμένη, ἤτοι διὰ τῶν γραμμάτων α, χ, υ, εἶτ᾽ ὂν $\frac{\chi\upsilon}{\alpha}$, ἢ διὰ $\frac{\upsilon^2}{\chi}$· ἐὰν δ᾽ εἶτα γένηται $\upsilon : \frac{\chi^\upsilon}{\alpha} :: \frac{\chi^\upsilon}{\alpha} : \psi = \frac{\chi^\upsilon \upsilon^2}{\upsilon\alpha^2} = \frac{\upsilon^2}{\alpha}$, εἴγε $\upsilon = \frac{\chi^2}{\alpha}$, εὑρεθήσεται ἡ πέμπτη $= \frac{\upsilon^2}{\alpha}$· ἐν τέτοις ὂν τοῖς τύποις ἡ ἄγνωσος ὀκ ἄνεισιν εἰς βαθμὸν τῦ δευτέρε ὑπέρτερον· ἐὰν δε, τηρεμένων τέτων, προαγαγεῖν περαιτέρω βεληθῶμεν τὸν λογισμὸν, τρίτοις ϗ τετάρτοις ἐμπεσούμεθα πάντως βαθμοῖς· οὐκοῦν ἵνα τοῦτο ἐκκλίναιμεν, ὑποτεθείσθω ἡ τετάρτη ἀνάλογος $= \tau$, καὶ δὴ ἡ πέμπτη ἔσεται $= \frac{\tau\chi}{\alpha} = \frac{\tau\upsilon}{\chi} = \frac{\tau^2}{\upsilon}$· τῆς δὲ πέμπτης ὑποτεθείσης $= \psi$, αἱ λοιπαὶ μέχρι τῆς ἐννάτης διορισθήσονται, ὡς ἐνταῦθα καθορῶνται· δυνατὸν δὲ τὸν λογισμὸν ἔτι περαιτέρω προαγαγεῖν, ὑποτιθεμένοις τὴν ἐννάτην $= \sigma$.

Α΄.	Β΄.	Γ΄.	Δ΄.	Ε΄.	ς΄.	Ζ΄.	Η΄.	Θ΄.
α	χ	$\frac{\chi^2}{\alpha}$	. .	. .				
		υ	$\frac{\chi\upsilon}{\alpha}$	$\frac{\upsilon^2}{\alpha}$				
			$\frac{\upsilon^2}{\chi}$					
			Τ	$\frac{\tau\chi}{\alpha}$	$\frac{\tau\upsilon}{\alpha}$			
				$\frac{\tau\upsilon}{\chi}$	$\frac{\tau\tau}{\chi}$			
				$\frac{\tau\tau}{\upsilon}$				
				ψ	$\frac{\chi\psi}{\chi}$	$\frac{\psi\upsilon}{\alpha}$	$\frac{\psi\tau}{\alpha}$	$\frac{\psi\psi}{\alpha}$
					$\frac{\psi\upsilon}{\chi}$	$\frac{\tau\psi}{\chi}$	$\frac{\psi\psi}{\chi}$	
					$\frac{\psi\tau}{\upsilon}$	$\frac{\psi\psi}{\upsilon}$		
					$\frac{\psi\psi}{\tau}$			

ἴωμεν ἤδη ἐπὶ τὴν κατασκευήν· ἐὰν ὑποτεθῇ ἑκάτη ἡ πέμπτη ἀνάλογος, εἰλήφθω ἡ ἔκθεσις $\frac{\upsilon^2}{\alpha}$· κατὰ τοίνυν τὴν τοῦ προβλήματος θέσιν ἐστὶν $\frac{\upsilon^2}{\alpha} = \beta - \chi$, ἢ $\upsilon^2 = \alpha\,(\beta - \chi)$, ἐξίσωσις παραβολῆς, ἧς παράμετρος $= \alpha$· ἐπεὶ δὲ $\frac{\chi^2}{\alpha} = \upsilon$· ἐντεῦθεν ἄρα $\chi^2 = \alpha\upsilon$, ἐξίσωσις ἄλλη παραβολῆς, τὴν αὐτὴν ἐχούσης παράμετρον· εἰλήφθω οὖν παράμετρος $AB = \alpha$ (σχ. 150) καὶ δι' αὐτῆς γεγράφθω παραβολὴ ἡ ΑΔ, ἧς ἀπτέσθω ἡ ΑΠ. καὶ δὴ ποριθήσεται ἡ ἐκ τῆς $\chi^2 = \alpha\upsilon$ ἐξισώσεως παριςαμένη παραβολή· εἰλήφθω εἶτα $AK = \beta$, καὶ τοῦ Κ τεθέντος ἀντὶ κορυφῆς, γεγράφθω ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΚΑ παραβολὴ ἡ ΚΔ, τὴν αὐτὴν ἔχουσα παράμετρον· αὕτη οὖν τὴν πρώτην κατὰ τὸ Δ διατεμεῖ, καὶ ἀχθείσης τεταγμένως τῆς ΔΠ, ἡ ἀποτετμημένη $A\Pi = \chi$ ἔσαι ἡ δευτέρα ζητουμένη ἀνάλογος· τῆς γὰρ δευτέρας ὑπαρχούσης χ, ἡ μὲν τρίτη ἔσαι $\frac{\chi^2}{\alpha}$, ἡ δὲ πέμπτη $\frac{\chi^4}{\alpha^3} = \beta - \chi$ ἐξ ὑποθέσεως· ὅθεν ἀποφέρεται $\chi^4 = \alpha^3\,(\beta - \chi)$· ἐὰν οὖν ληφθῇ ἡ τοῦ υ δύναμις ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 = \alpha\upsilon$, καὶ ἀντικατασαθῇ ἐν τῇ ἐξισώσει $\upsilon^2 = \alpha \cdot (\beta - \chi)$, προκύψει ἐξίσωσις $\chi^4 = \alpha^3 \cdot (\beta - \chi)$.

Ἐὰν δὲ ἐχάτη ὑποτεθῇ ἡ ἕκτη ἀνάλογος, ποριοθήσεται $\frac{\tau\tau}{\chi} = \beta - \chi$, ἢ $\tau\tau = \beta\chi - \chi\chi$, ἐξίσωσις κύκλου, οὗ διάμετρος $= \beta$· γεγράφθω οὖν πρῶτον ἡ παραβολὴ ΑΔ (σχ. 151) ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 = \alpha\upsilon$, ἣν δίδωσιν ἡ ἀντικατάςασις· αἱ δὲ ἀποτετμημέναι κείσονται ἐπὶ τῆς ἁπτομένης ΑΠ· ἤχθωσαν δὲ αἱ τεταγμέναι $\Pi\Delta = \upsilon$

κάθετοι τῇ ΑΠ, καὶ γενέσθω πανταχοῦ ΑΒ $=$ α : ΑΠ $=$ χ :: ΔΠ $=$ υ : ΖΠ $=$ τ, καὶ διὰ πάντων τῶν σημείων Ζ διήχθω καμπύλη· εἰλήφθω τελευταῖον ΑΚ $=$ β, καὶ ἐπ' αὐτῆς ὡς διαμέτρου γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΚ, ὃ διατεμεῖ τὴν καμπύλην ΑΜΖ καθ' ἓν σημεῖον τὸ Ζ, καθ' ὃ προσδιορισθήσεται ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ $=$ χ, δευτέρα ζητουμένη ἀνάλογος.

Ἣι ἐχρησάμεθα ἐν τῷδε τῷ προβλήματι, ἡ μέθοδος δύναται συχνάκις ἀστείας ποιεῖν τὰς τῶν ὑπὲρ τὸν τρίτον καὶ τέταρτον βαθμὸν προβλημάτων λύσεις· κεῖται δ' ἡ μέθοδος αὕτη ἐν τῷ τιθέναι ἀντὶ τῶν τύπων, οἵτινες, εἰ μείνειαν ἐν τῷ λογισμῷ, ἀπεργάζονται τὰς καμπύλας ὑπερτέρας τῆς δευτέρας τάξεως, ἀγνώστους ἄλλας καὶ ἄλλας, καὶ οὕτω διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν, ἢ καμπύλων ὑπερτέρων μὲν, γραφομένων δὲ διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν, ἐπιλύειν τὸ πρόβλημα· ἵνα δὲ ἡ λύσις ἀστειοτέρα γένηται, προσέχειν δεῖ, ὅπως αἵ,τε ἀντικαταστάσεις καὶ αἱ ἄγνωστοι ποσότητες ὡς οἷόν τε ἐνάριθμοι ὦσιν ἐν τῇ ἐσχάτῃ ἐξισώσει.

316. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐφ' ᾧ δὲ ἐν τῇ κατασκευῇ τῶν προβλημάτων ἀποφεύγειν τὰς ὑπερτέρας καμπύλας, τὴν ἐφεξῆς ἐξέθεντο μέθοδον οἱ Ἀναλυτικοί· ἐὰν μὲν ὁ βαθμὸς τῆς κατασκευασθησομένης ἐξισώσεως ᾖ ἀριθμὸς τετράγωνος, χρηστέον ἐστὶ δυσὶ καμπύλαις, ὧν ἑκατέρας ἡ τάξις ἰσοῦται τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς προκειμένης τάξεως· ἐὰν δὲ μὴ ᾖ τετράγωνος, ἀφαιρετέον αὐτοῦ τὸν μείζονα τετράγωνον, καὶ εἰ μὲν τὸ κατάλοιπον εἴη ἴσον ἢ ἔλαττον τῆς ῥίζης τοῦ μείζονος τετραγώνου, χρηστέον αὖθις δυσὶ καμπύλαις, ὧν τῆς μὲν ὁ βαθμὸς εἴη ἴσος τῇ ῥίζῃ, τῆς δὲ μείζων τῆς ῥίζης μονάδι· εἰ δ' εἴη τὸ κατάλοιπον τῆς ῥίζης

μεῖζον, χρηςέον τηνικαῦτα δυσὶ καμπύλαις, ὧν ἑκατέρας ὁ βαθμὸς ὑπερέχοι μονάδι τῆς τοῦ τετραγώνου ῥίζης· οὕτως εἰς κατασκευὴν ἐξισώσεως ἐννεαβαθμίου χρηςέον δυσὶ καμπύλαις τριτογενέσι· τῆς δ' ἐξισώσεως ἑνδεκαβαθμίου οὔσης, ἀφαιρετέον τοῦ 11 τὸν μείζω τετράγωνον 9· καὶ δὴ καταλειφθήσεται 2 $<$ 3 ῥίζης τετραγωνικῆς τοῦ 9· κατασκευαςέον ἄρα τὴν ἐξίσωσιν, χρησαμένοις δυσὶ καμπύλαις, τῇ μὲν τριτοβαθμίῳ, θατέρᾳ δὲ τεταρτοβαθμίῳ· ἐν ταύτῃ δὲ τῇ περιπτώσει πολλαπλασιάζεται ἡ ἑνδεκαβάθμιος ἐξίσωσις ἐπὶ $\chi = o$ (ἢ καὶ ἐπὶ $\chi - o = o$), ἵν' ἀποβῇ δωδεκαβάθμιος· τῆς δὲ ἐξισώσεως οὔσης 13^o, 14^o, 15^o, ὡς ἀφαιρέμενον τὸν 9 τοῦ 13, 14, 15 καταλείπειν μείζω ἀριθμὸν τοῦ 3, χρηςέον τηνικαῦτα δυσὶ καμπύλαις, ἑκατέρᾳ τετάρτης τάξεως. Ἀλλὰ γὰρ μάτην ἂν τοιάδε τις ἀποδοθείη μέθοδος, εἰ καὶ ὅπως ταύτῃ δέον χρήσασθαι μὴ προσαποδοθῇ, ἄλλως τε ἀδύνατον δοκεῖ τοιαύτην τηρηθῆναι μέθοδον· αἱ μὲν γὰρ ἐξισώσεις τοῦ 10^o καὶ 11^o βαθμοῦ εἰς τὸν 12^o ἀνάγονται, πολλαπλασιαζόμεναι, αἱ μὲν ἐπὶ $\chi^2 = o$, αἱ δὲ ἐπὶ $\chi = o$· ἔςω δὲ ἐξίσωσις τοῦ 12^o βαθμοῦ, τοῦ δευτέρου αὐτῆς ὅρου ἀπηλλαγμένη ἡ $\chi^{12} + \alpha\chi^{10} + \beta\chi^9 + \kappa\tau. = o$· γενομένου οὖν $\chi^3 = \upsilon$, τραπήσεται ἡ ἐξίσωσις εἰς τὴν $\upsilon^4 + \alpha\upsilon^3\chi + \kappa\tau. = o$, ἐξίσωσις τεταρτοβάθμιος· ὑποτεθέντος δὲ $\chi^4 = \upsilon$, γίνεται $\upsilon^3 + \alpha^2\upsilon^2\chi^2 + \beta\upsilon\chi + \kappa\tau. = o$· οὕτως οὖν ἀδύνατον τηρεῖν δύω καμπύλας, τὴν μὲν τρίτου, τὴν δὲ τετάρτου βαθμοῦ, καθάπερ ἡ μέθοδος διακελεύεται· προκειμένης δὲ ἐξισώσεως βαθμοῦ 16^o ἡ $\chi^{15} + \alpha\chi^{14} + \beta\chi^{13} + \kappa\tau. = o$, ὑποτεθέντος $\chi^4 = \upsilon$, γενήσεται $\upsilon^4 + \alpha\upsilon^3\chi^3 + \kappa\tau. = o$ ἐξίσωσις πεμπτοβάθμιος· ἄρα ἡ 16^o βαθ-

μιᾶς ἐξίσωσις ἐ κατασκευάζεται δι' ἐξισώσεων δύω τεταρτοβαθμίων, ὡς ἡ μέθοδος ἐντέλλεται.

Οὐ μὴν ἀλλὰ μᾶλλον τὸν νῦν προσεκτέον τῇ εὐμαρείᾳ τῆς κατασκευῆς, ἢ τῇ τῶν ἐξισώσεων ἁπλότητι· ϗ γὰρ ἡ μὲν κατὰ τὴν παραβολὴν ἐξίσωσις ἁπλυςέρα ἐςὶ τῆς τῦ κύκλυ, ἡ μέντοι τύτυ ἀναγραφὴ τῆς κατ' ἐκείνην πολὺ ῥάων· ξυμβαίνει ὖν πολλάκις τὰς ὑψηλοτέρας τῶν καμπύλων εὐμαρεςέρας ὑπάρχειν εἰς ἀναγραφὴν τῶν ταπεινοτέρων· ἀλλὰ γὰρ ταύτην τὴν μέθοδον καταλιπόντες, ὅπως δεῖ πᾶσαν ἐξίσωσιν ὡρισμένην διὰ καμπύλης ὁμοβαθμίυ ϗ εὐθείας κατασκευάζειν, εἴπωμεν ἤδη διὰ βραχέων· ἐπὶ τύτῳ τοίνυν ὅλη ἡ ἐξίσωσις διῃρήσθω διὰ πάντων τῶν ποιητῶν τῦ ἐχάτυ ὅρυ, πλὴν ἑνὸς, ὃς γενέσθω $= \upsilon$, ϗ γεγράφθω ἡ καμπύλη, ἧς τεταγμένη μὲν ἐςιν ἡ υ, ἀποτετμημένη δὲ ἡ χ, διαφόρυς δυνάμεις ὑποδυομένη· τῆς δὲ καμπύλης καθάπαξ γραφείσης, ἤχθω ταῖς ἀποτετμημέναις παράλληλος εὐθεῖα ἀπέχυσα αὐτῶν ποσότητι ὑποτιθεμένη $= \upsilon$· ἐκ δὲ τῆς κοινῆς διατομῆς τῆς εὐθείας ϗ τῆς καμπύλης πᾶσαι αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τῆς προκειμένης ἐξίσωσεως προκύψυσι.

317. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἔςω ἐξίσωσις $\chi^5 - 2\alpha^2\chi^3 + \alpha^4\chi - \alpha^4\beta = 0$· διῃρήσθω ὖν πᾶσα διὰ α^4, ὑποτεθέντος $\beta = \upsilon$, ϗ μεταθέσει ἔςαι $\frac{\chi^5}{\alpha^4} - \frac{2\chi^3}{\alpha^2} + \chi = \upsilon$· γεγράφθω τοίνυν ἡ ταύτης τῆς ἐξισώσεως καμπύλη· εἰς δὲ τῦτο εἰλήφθω, ἄξων μὲν ὁ ΓΒ (σχ. 152), ἀρχὴ δὲ τῶν χ τὸ Α· ϗ ὑποτεθέντος $\chi = 0$, εὑρίσκεται $\upsilon = 0$· ἡ ἄρα καμπύλη συμπεσεῖται τῷ τῶν ἀποτετμημένων ἄξονι κατὰ τὸ Α· ὑποτεθέντος δ' εἶτα $\chi = \pm\, \alpha$, εὑρίσκεται

$\upsilon = o$· ἡ καμπύλη ἄρα συμπεσεῖται ϰ̓ τοῖς δυσὶ σημείοις Γ ϰ̓ Β τοῦ ἄξονος ὡρισμένοις, εἰ ληφθείη $AK = AB = \alpha$· ὑποτεθέντος δὲ $\chi = \pm 2\alpha$, εὑρίσκεται $\chi = \pm 17\alpha$· ἐντεῦθεν καταφανές, ὅπως θηρεύονται, ὅσα ποτ' ἂν βουληθείημεν σημεῖα, τῆς προκειμένης καμπύλης· ὑποτεθείσθω τοίνυν ὡς γεγραμμένη ἡ καμπύλη· ϰ̓ ἤχθω διὰ τοῦ Α ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων παραλλήλως ταῖς τεταγμέναις ἡ εὐθεῖα $AM = \beta$, ϰ̓ ἐπείπερ $\upsilon = \beta$ ἐςὶν ἐξίσωσις εὐθείας παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν χ, διὰ τοῦ Μ ἤχθω ἡ ΜΝ παραλλήλως ταῖς ἀποτετμημέναις· ϰ̓ δὴ αἱ εὐθεῖαι ΜΠ, ΜΞ, ΜΝ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ὑπὸ τοῦ σημείου Μ, ϰ̓ τῶν σημείων, οἷς ἡ ΜΝ συμβάλλει τῇ καμπύλῃ, εἰσὶν αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· ϰ̓ γὰρ κληθεισῶν Τ τῶν τεταγμένων ἐπὶ τὸν νέον ἄξονα ΜΝ, ἔςαι $T = \upsilon - \beta$· ἀλλ' αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\frac{\chi^5}{\alpha^4} - \frac{2\chi^3}{\alpha^2} + \chi = T = \upsilon - \beta$ συςοιχοῦσι σημείοις, ἐν οἷς $T = \upsilon - \beta$ ἔςιν $= o$· ἄρα κτ. (*)· οὐ μὴν ἀλλ' ἐὰν ληφθῇ ἡ δύναμις τῆς υ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon - \beta = o$, ϰ̓ ἀντικατας αθῇ ἐν τῇ ἐξισώσει $\frac{\chi^5}{\alpha^4} - \frac{2\chi^3}{\alpha^2} + \chi = \upsilon$, ῥᾷςα εὑρεθήσεται ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις.

318. Εἰ δὲ προκέοιτο εἰς κατασκευὴν ἡ ἐξίσωσις $\chi^5 + \alpha\beta\chi^3 + \gamma = o$, ἠδύνατο ὑποτεθῆναι $\gamma = \upsilon$, ϰ̓ $\delta = 1$,

---

(*) Τοῦ δὲ ἄξονος ΜΝ ἁπτομένου τῆς καμπύλης καθ' ἕντι σημεῖον, ἔσονται πᾶσαι αἱ ῥίζαι ἴσαι, εἴ γε τηνικαῦτα τὰ σημεῖα τῆς διατομῆς ἐκληφθήσονται ὡς συμπεπτωκότα εἰς ἕν.

κἀκ τούτου γενέσθαι $υ = -\frac{\chi^7}{\delta^6} - \frac{\alpha\beta\chi^3}{\delta^4}$, ὅπερ ἥκιστα κινεῖ τὴν τῶν ὅρων δύναμιν· οὐ γάρ ἐστιν ὅπως ἡ μονὰς διαιρεῖ· τοιγαροῦν οἱ ὅροι τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εὐμαρῶς ἔχουσι κατασκευῆς ὑπὲρ πάσης δυνάμεως τῆς χ.

319. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου δυνάμεθα εὑρεῖν τὰς πραγματικὰς ῥίζας ἐξισώσεως ἀριθμητικῆς· ἔστω γὰρ ἐξίσωσις $\chi^5 - 2\chi^3 + 3\chi - 192 = 0$· γενέσθω δὴ $\alpha = 2$, καὶ $\beta = 3$, καὶ $\gamma = 192$, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ ῥίζαι, ὡς εἰ α, β, γ γραμμαὶ εἴησαν, ἔχουσαι τοὺς λόγους τῶν ἀριθμῶν, οἷς ἴσα ὑπεθέμεθα ταῦτα τὰ γράμματα· ὑποτεθέντος οὖν δ ὡς μονάδος γραμμῆς (ὅπερ οὐδὲν ὅλως τὸ κωλύον), ἔσται $\delta = 1$, καὶ $\alpha = 2\delta$· κτ.· τιθεμένου δὲ $\gamma = 0$, εὑρίσκονται αἱ ῥίζαι τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως· ὑποθώμεθα οὖν τὰς πραγματικὰς ῥίζας ταύτης τῆς ἐξισώσεως ΜΠ, ΜΞ, ΜΝ, τῶν ἄλλων ἀνυπάρκτων οὐσῶν· ἐφαρμοσθέντος οὖν δ ταύταις ταῖς ῥίζαις, ἐὰν εὑρεθῇ $ΜΠ = 2\delta$, καὶ $ΜΞ = 6\delta$, καὶ $ΜΝ = 15\delta$, συναχθήσεται ἐντεῦθεν τὰς ζητουμένας ῥίζας εἶναι 2, 6, 15.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Ὑπερβατικῶν Καμπύλων.

Τίνες μὲν οὖν εἰσὶν αἱ ὑπερβατικαὶ καμπύλαι, πρὸ μικροῦ εἴρηται (276), ἀμέλειτοι, ὧν τὴν φύσιν ἐκδηλῶσαι οὐ δύναται ἐξίσωσις, περιέχουσα τὸν τῶν ἀποτετμημένων καὶ τεταγμένων λόγον· ῥητέον μέντοι ἰδίᾳ καὶ περὶ αὐτῶν βραχέα. Πᾶσα συνέκθεσις, ἣ οὐκ ἔστι γεωμετρική, ὑπερβατικὴ καὶ ἔστι καὶ λέγεται· τοιαίδε εἰσὶν αἱ τόξων, ἡμιτόνων, συνημιτόνων, ἀπτομένων, τεμνουσῶν, λογαρίθμων περιεκτικαὶ, καὶ αἱ περιέχουσαι δὲ ποσὰ ἀνύπαρκτα, ἃ ἄντις εἰς πραγματικὰ τρέψειε, καὶ ἔτι αἷς ῥιζικὰ ἄλογα δεῖκται ἐπιτίθενται· οἷον $\upsilon = \chi^{\sqrt{3}}$ ἐὰν οὖν κληθῶσιν, υ μὲν αἱ τεταγμέναι, χ δὲ αἱ ἀποτετμημέναι, πᾶσαι αἱ καμπύλαι, ὧν ἡ φύσις ἐμφαίνεται διὰ τῶν ἐφεξῆς ἐξισώσεων, εἰσὶν ὑπερβατικαὶ, ἃς καὶ μηχανικὰς εἰσὶν οἳ ὀνομάζουσι· $\upsilon = \alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\eta.\,\chi$ (σημαίνει δὲ ὁ τύπος, ὡς ἄρα τὸ υ ἰσοῦται τῷ τόξῳ α, οὗ τὸ συνημίτονον ἴσον τίθεται τῇ ἀποτετμημένῃ χ)· $\upsilon = \alpha\,.\,\eta\mu.\,\chi$· $\upsilon = \alpha\,.\,\dot{\alpha}\pi.\chi$· $\upsilon = \alpha\,.\,\tau\varepsilon\mu.\chi$· $\upsilon = \lambda.\chi$· $\upsilon^{\mu} = \lambda\chi^{\nu}$ (τοῦ λ δηλοῦντος τὸν λογάριθμον)· τελευταῖον δὲ πᾶσα ἐξίσωσις, μὴ ἐμφαίνουσα τὸν τῶν ἀποτετμημένων καὶ τεταγμένων λόγον, λογικὴ μὴ οὖσα, ἔστιν ὑπερβατικὴ, καὶ ὑπερβατικὴν παρίστησι καμπύλην· τὰς δὲ ὑπερβατικὰς, ἃς ἐμφαίνουσιν ἐξισώσεις, ἐφ' ὧν αἱ τρεπταὶ ποσότητες ἀλόγους ἔχουσι δείκτας, οἷον $\upsilon = \chi^{\sqrt{5}}$, $\upsilon = \chi^{\sqrt{2}}$, ὁ Λεϊβνίτιος καμπύλας διαβατικὰς (intercedentes) ἀπεκάλει.

Αἱ δὲ τοιαίδε καμπύλαι οὐδαμῶς ἂν ἄλλως κατασκευασθείησαν, ὅτι μὴ διὰ τῶν λογαρίθμων· τῶν γὰρ κατὰ τὰς ἴσας ποσότητας λογαρίθμων ἰσουμένων, ἐκ τῆς ἐκθέσεως $\upsilon = \chi^{\sqrt{2}}$ πρόεισι $\lambda\upsilon = \lambda\,\chi^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,.\,\lambda\,.\,\chi$· ἐπεὶ οὖν $\lambda\upsilon = \sqrt{2}\,.\,\lambda\,.\,\chi$, πολλαπλασιαζομένου τοῦ λογαρίθμου ἑκάστης ἀποτετμημένης ἐπὶ $\sqrt{2}$, θηρευθήσεται ὁ τῆς ἀντιστοιχούσης τεταγμένης λογάριθμος, ὅς γνωσθήσεται διὰ προσεγγίσεως· ὑποτιθεμένων γὰρ τῶν χ ὑπαρκτικῶν, ἐὰν μὲν ἡ $\chi = 0$, ἔσεται ϗ $\upsilon = 0$· ἐὰν δ' ἡ $\chi = 1$, ἔϛαι ϗ $\upsilon = 1$, ὥσπερ καθ' ἑαυτό ἐϛι κατάδηλον· εἰ δὲ χ εἴη $= 2$, $\lambda\upsilon = \sqrt{2}.\lambda.2 = 0,4257274$ περίπε· ἄρα $\upsilon = 2,665186$ περίπε· εἰδ' εἴη $\chi = 10$, τορισθήσεται $\lambda.\upsilon = 1,4142356$ περίπε, ϗ $\upsilon = 25,956$ περίπε· εἰ δέ τοι ὑποτεθείη $\chi = -1, -2, -3$, κτ., ἀμήχανον ὅλως διορισθῆναι τὴν δύναμιν τȣ̃ υ.

Ἐκ τῶν μονονȣ̀κ ἀπείρων τῷ εἴδει ὑπερβατικῶν καμπύλων, τὰς ἑξῆς ἡμεῖς μόνον ὑποϛρωσόμεθα.

320. Λογαριθμικαὶ καμπύλαι εἰσὶν, ὧν ταῖς ἐξισώσεσιν ἔνεισιν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀποτετμημένων, ἢ τῶν τεταγμένων· τοιάδε ἕν ἐϛιν ἡ $\lambda\upsilon = \chi$, ἐν ᾗ ἀποτετμημέναι εἰσὶν οἱ λογάριθμοι τῶν τεταγμένων· τοιγαρȣ̃ν εἰς καταγραφὴν τοιᾶσδε καμπύλης, ἔϛωσαν αἱ δύω πρόοδοι Ἀριθμητική τε ϗ Γεωμετρικὴ

$$\infty \;\ldots\; -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,:\, 2 \;\ldots\; \infty \,.\, \mathrm{A}$$

$$\tfrac{1}{\infty} \;\ldots\; \tfrac{1}{2} \,.\, 1 \,.\, 2 \,:\, 4 \;\ldots\; \infty \,.\, \mathrm{B}$$

ἕκαϛος ὅρος τῶν ἐν τῇ Α ἔϛαι πάντως λογάριθμος ἑκάϛȣ ἀντιϛοίχȣ κατὰ τὸ Β (Συμϐ. Λογ. 313)· ȣ̓κȣ̃ν πρὸς τῷ σημείῳ Α τῆς Πε (χ. 153) ἔϛω ἀποτετμημένη $= 0$, ἡ δ' ἀντίϛοιχος ἀποτετμημένη ΑΗ $= 1$, ϗ εἰλήφθωσαν πρὸς τὸ Β αἱ ἀποτετμημέναι $= 2$, $= 4$ κτ. ὅθεν ἀποληφθήσεται καμπύλη ἀπέραντος, ἐπεκτεινομένη πρὸς τὸ Β· εἰλήφθωσαν εἶτα πρὸς τὸ β λειπτικαὶ ἀποτετμημέναι -1, -2 κτ., ϗ αὐταῖς ἀντίϛοιχοι τεταγμέναι $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ κτ., ϗ δὴ ἡ καμπύλη ἐς ἄπειρον ἐπεκταθήσεται πρὸς τὸ β, ἀεὶ μᾶλλον ϗ μᾶλλον ἔγγιον γιγνομένη τῆς εὐθείας Ββ, διὰ τὰς ἐπ' ἄπειρον φθινέσας τεταγμένας

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ .... $\frac{1}{\infty}$· ἄρα Πε ἔσαι ἀσύμπτωτος τῆς προκειμένης καμπύλης· παρὰ δὲ ταῦτα σαφὲς, ὡς ἀντὶ τοῦ διπλοῦ λόγου, τοῦ ἐν τῇ προόδῳ Β κρατοῦντος, δύναται ἀντικατασῆναι ἑτερός τις οἱοσοῦν, ἐκτεθειμένος ἐν ὅροις, εἴτε ὁλοσχερέσιν, εἴτε κλασματικοῖς· ἐντεῦθεν ἄρα ἀναφύουσιν ἄπειροι καμπύλαι λογαριθμικαὶ, ἀλλήλων διάφοροι.

Ἔσω ἤδη ἐξ ἐναντίας $\upsilon = \lambda\chi$, καὶ εἰς καταγραφὴν τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως ταύτης παρισαμένης καμπύλης εἰλήφθωσαν αἱ δύο πρόοδοι

$$\div\ 1 \,.\, 2 \,.\, 3 : 4 \ldots\ldots \infty \quad \Delta$$

$$\because\ 1 : \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{8} \ldots\ldots \tfrac{1}{\infty} \quad \mathrm{E}$$

ἐὰν οὖν ληφθῶσιν, αἱ μὲν χ ἐν τῷ Ε, αἱ δὲ υ ἐν τῷ Δ, ἔσω Α ἀρχὴ τῶν ἀποτετμημένων (σχ. 154), καὶ ΒΑ = ΒΚ = 1· ΒΚ οὖν ἔσαι τεταγμένη ἀντίσοιχος τῇ ἀποτετμημένῃ ΒΑ· λαμβανομένων εἶτα, κατὰ τὴν πρόοδον, ἐκ διαδοχῆς, ὡς ἀποτετμημένων μὲν $\mathrm{EA} = \frac{\mathrm{BA}}{2}$, $\mathrm{AZ} = \frac{\mathrm{BA}}{4}$ κτ., ὡς δὲ τεταγμένων ΕΗ = 2ΒΚ, ΖΙ = 3ΒΚ κτ., ἀποληφθήσεται ἡ ζητουμένη καμπύλη ΚΗΙ· Ἀλλ' ἔσι γὰρ πάντως πρόδηλον ἐκ τῆς Ε προόδου, ὡς μεταξὺ Ε καὶ Α ἐναπολαμβάνονται ἄπειροι ἀποτετμημέναι, καὶ ἀεὶ ἐλάττους γινόμεναι, αἷς ἀντισοιχοῦσιν ἄπειροι τεταγμέναι, ἀεὶ μεγεθυνόμεναι· ἄρα ἡ καμπύλη, ἀπειράκις μὲν ἔγγισα γενήσεται τῇ εὐθείᾳ Αψ, οὐδέποτε μέντοι αὐτῇ συμπεσεῖται· ἄρα Αψ ἐσὶν αὐτῆς ἀσύμπτωτος.

321. Συγκαταλεκτέον δὲ ταῖς λογαριθμικαῖς τὰς δεικτικὰς καλουμένας καμπύλας, ἅτε δὴ εἰσιούσων αὐτῶν ταῖς ἐξισώσεσι δεικτῶν συμμεταβλήτων· οἵα ἐσὶν ἡ καμπύλη, ἣν ἐμφαίνει ἡ ἐξίσωσις $\upsilon = \chi^{\chi}$, δι' ἧς σημαίνεται τὰς τεταγμένας ἀνάλογον ἔχειν τοῖς ἀπὸ τῶν

ἀποτετμημένων χ βαθμοῖς χ· ὅθεν ἀποφέρεται $\lambda.\upsilon = \chi.\lambda.\chi$· ἐὰν οὖν ὑποτεθῇ $\chi = 0$. ἔσαι $\upsilon = 1$, ἐὰν δὲ $\chi = 1$, καὶ $\upsilon = 1$· ἐὰν δὲ $\chi = 2$, ἔσαι $\upsilon = 2^2 = 4$· ἐὰν δὲ $\chi = 3$, ἔσαι $\upsilon = 3^3 = 27$ κτ.· ἐὰν ἄρα ληφθῇ ἡ ἀποτετμημένη $\mathrm{A\Gamma} = \chi = 1$ (σχ. 155), εὑρεθήσεται $\upsilon = \mathrm{\Gamma\Delta} = 1$, ὑποτιθεμένων ὑπαρκτικῶν τῶν πρὸς τὸ Γ, χ· μεταξὺ δὲ Α καὶ Γ ἀεὶ ἔσαι $\chi < 1$· ὡς, ἐὰν τεθῇ $\mathrm{A\Xi} = \frac{1}{2}$, γίνεσθαι $\upsilon = \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$· ὑποθετέον δὲ ἤδη $\mathrm{A\Theta} = -\chi$· καὶ δὴ ἔσαι $\upsilon = (-\chi)^{-\chi} = \frac{1}{(-\chi)^{\chi}}$· ἐὰν οὖν ᾖ $\chi = -1$, ἔσαι $\upsilon = -1$· ἄρα ὑποτιθεμένης $\mathrm{A\Theta} = -1$, πορισθήσεται τεταγμένη $\mathrm{\Theta T} = -1$· τὸ δὲ σημεῖον Τ ἔσαι τῆς καμπύλης· ἐὰν δ' ὑπάρχῃ $\chi = -2$, πορισθήσεται $\upsilon = \frac{1}{4}$· ἄρα ἡ ΑΖ $= -2$ ἀποτμηθήσεται ὑπὸ τεταγμένης, ὑπαρκτικῆς μὲν τῆς $\mathrm{ZM} = \frac{1}{4}$, λειπτικῆς δὲ οὐδεμιᾶς· ἐὰν δὲ αἱ λειπτικαὶ ἀποτετμημέναι χωρῶσι κατὰ πρόοδον αὔξουσαν 1, 2, 3, κτ., αἱ δὲ τεταγμέναι τεθῶσι προσεχέσατα ἀλλήλων, πορισθήσονται τεταγμέναι παραλλὰξ ὑπαρκτικαί τε καὶ λειπτικαὶ, ὧν τὰ πέρατα ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος ἄπειρα σημεῖα διακεκριμένα ἀλλήλων, ἅτινα καμπύλην μὲν συνεχῆ ἥκισα συνιστῶσι, φαινόμενον δὲ τοιαύτης καμπύλης· τοιαύτη δὲ ἰδιότης οὐδεμίαν χώραν ἔχει ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς καμπύλαις· ἴδωμεν δὲ, εἰ τοιουτώδη σημεῖα ἐμφιλοχωρεῖν δύναται ταῖς ὑπαρκτικαῖς χ· ἔσω $\chi = \frac{1}{2}$, οὐκοῦν ἔσαι $\upsilon = \frac{1}{\pm\sqrt{2}}$· ἄρα τῇ ἀποτετμημένῃ $\mathrm{A\Xi} = \frac{1}{2}$ συσοιχοῦσι δύω τεταγμέναι ἴσαι

ΞΝ, Ξν, ἡ μὲν ὑπαρκτικὴ, ἡ δὲ λειπτική· ὑποτιθεμένων δὲ ἐκ διαδοχῆς $\chi = \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{7}{8}$ κτ. ῥᾷστα φανήσεται, ὅτι τοῖς μὲν κλάσμασιν, ὧν ἄρτιος ὁ παρονομαστὴς, δύω συστοιχῦσι τεταγμέναι, ἡ μὲν ὑπαρκτικὴ, ἡ δὲ λειπτικὴ, τοῖς δ', ὧν ὁ παρονομαστὴς περιττὸς, μόνον ὑπαρκτικαί· ἄρα πρὸς τὰ ἐπὶ τὰς ὑπαρκτικὰς χ ἡ καμπύλη ἔχει ὕπερθεν τῦ ἄξονος ἄπειρα σημεῖα διακεκριμένα ἀλλήλων.

322. Αἱ παρὰ τοῖς πάλαι λίαν διαβοηθεῖσαι τέσσαρες καμπύλαι, ὡς αὐτοῖς εὐχρηστῦσαι εἰς ἐπίλυσιν τῶν δύω περικλεῶν προβλημάτων, τῦτε περὶ διπλασιασμῦ τῦ κύβυ, ἐ τῦ περὶ τῦ κυκλικῦ τετραγωνισμῦ, εἰσὶν ἡ Κισσοειδεὶς, ἡ Τετραγωνίζυσα, ἡ Κογχοειδὴς, ἐ ἡ Σπειροειδεὶς.

323. Κισσοειδής. Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒβ (σχ. 156), ἐ ἀπτομένη ἡ ΑΡ, ἐ πᾶσαι σιχηδὸν αἱ εὐθεῖαι ΑΡ· ἐὰν ὖν ἐφ' ἑκάστης ΑΡ ληφθῇ ἡ οἰκεία Αβ, ἐ μετενεχθῇ ἐκ τῦ Ρ ἐπὶ τὴν ΑΡ (ὅθεν δῆλον, ὡς ΡΙ = Αβ), καμπύλη ἡ διήκυσα διὰ πάντων τῶν σημείων Ι ἐστὶν ἡ καλυμένη κισσοειδὴς· ἐκῦν ά. ἐπεὶ ΑΡ ἀεὶ μᾶλλον ἐπὶ τῆς ΒΡ ἐγκλίνεται, ἐ Αβ, ὅσω ἀφίσαται τῦ Β, ἐλαττῦται, ἡ καμπύλη αὕτη μᾶλλον ἐ μᾶλλον τῇ εὐθείᾳ ΒΡ πλησιάζει· β΄. ἔξεσιν ΑΡ ἀπείρυς ἀγαγεῖν ἐπὶ τῆς ΒΡ προαχθείσης ἐπ' ἄπειρον· ἡ δὲ ΑΒ διὰ τὰς τοιάσδε ἐπ' ἄπειρον προηκύσας ΑΡ ὐδέποτε γενήσεται = ο, διὰ τὸν ἀναγκαῖον πλαγιασμὸν τῶν ΑΡ ἐπὶ ΒΡ· αὕτη δὲ ἡ Αβ, μεταφερομένη ἐπὶ τὴν οἰκείαν ἑαυτῆς ΑΡ, ἀεὶ διακρίνεται τῆς ΒΡ τὴν καμπύλην· ἄρα ΑΙΙ ἐπ' ἄπειρον ἐγγίζυσα τῇ ΒΡ, ὐδέποτε ἔμπης αὐτῇ συμπεσεῖται· ἡ ἄρα ΒΡ ἀσύμπτωτός ἐσιν αὐτῆς τῆς καμπύλης.

324. Ἐὰν τὸ κυκλικὸν τεταρτημόριον ΑΜ (σχ. 157), ϗ ἡ ἀκτὶς αὐτȣ̃ ΑΒ, εἰς ὁσαδήποτε μέρα ἴσα τμηθῶσι, ϗ ἀχθῶσιν ἅπασαι αἱ ἡμιδιάμετροι, ϗ παραλλήλως τῇ ΒΜ τεθῶσιν αἱ ΝΟ, ΔΟ συμβάλλȣσαι ταῖς διαμέτροις, ἡ τὰ σημεῖα Ο, Ο ἐπιζευγνῦσα καμπύλη καλεῖται Τετραγωνίζȣσα τȣ̃ Δεινοςράτȣ.

325. Ἐκ τῆς φύσεως ταύτης τῆς καμπύλης τὸ τόξον ΑΓ πρὸς τὸ τεταρτημόριον ΑΓΜ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ἀποτετμημένη ΑΝ πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΑΒ· ἐὰν ȣ̃ν γένηται $A\Gamma = \chi$, ϗ $A\Gamma M = \beta$, ϗ $AN = \upsilon$, ϗ $AB = \alpha$, ἔςαι $\chi : \beta :: \upsilon : \alpha$, ὅθεν $\alpha\chi = \beta\upsilon$, ἐξίσωσις τῆς Δεινοςρατείȣ τετραγωνιζȣ́σης· ἵνα δὲ εὑρεθείη τὸ σημεῖον ξ, καθ' ὃ ἡ καμπύλη ἀπαντᾷ τῇ ἀκτῖνι ΒΜ, ὑποτεθήτω ἡ ἀκτὶς Βκ ἀπειράκις μικρά· ϗ δὴ ϗ τόξον τὸ ΜΘ ἔςαι ϗ αὐτὸ ἀπειροςὸν μόριον τῆς κατὰ τὸ Μ ἁπτομένης τȣ̃ κύκλȣ, ἣ κατὰ τὴν τȣ̃ κύκλȣ ἰδιότητα ἐφέςηκε πρὸς ὀρθὰς τῇ ἀκτῖνι ΜΒ· τȣ́τȣ τεθέντος, τὰ τρίγωνα ΘΒΜ, Βκν ὅμοιά εἰσιν, ὅτι ὀρθαὶ μὲν αἱ πρὸς τοῖς Μ, κ γωνίαι, ἰσάλληλοι δὲ αἱ ἐναλλὰξ Βνκ, ΘΒμ· ἄρα $BM : \nu\kappa :: \Theta M : \kappa B$· ἀλλ' ὑποτιθεμένης τῆς κΒ ἀπειράκις μικρᾶς, τὸ σημεῖον ν ἐκλαμβάνεται ὡς συμπεπτωκὸς τῷ ξ, ὡς ὑπάρχειν $\kappa\nu = B\xi$· ἔςι δὲ ἐκ τῆς ἰδιότητος τῆς τετραγωνιζȣ́σης, $\Theta M : \kappa B :: A\Gamma M : AB$· ἄρα $MB = AB : B\xi :: A\Gamma M : AB$, εἴτ' ȣ̃ν $\alpha : B\xi :: \beta : \alpha$, ὅθεν $B\xi \times \beta = \alpha^2$, εἴτ' ȣ̃ν $\beta : \alpha :: \alpha : B\xi$, τȣτέςιν „ἡ Βξ τρίτη „ἀνάλογός ἐςι τῆς τȣ̃ κυκλικȣ̃ τεταρτημορίȣ περιφε„ρείας, ϗ τῆς ἀκτῖνος, ϗ ἑπομένως ἡ τȣ̃ κυκλικȣ̃ τε„ταρτημορίȣ περιφέρεια τρίτη ἀνάλογός ἐςι τῆς εὐθείας „Βξ ϗ τῆς ἀκτῖνος."

326. Ἐὰν ἄρα γεωμετρικῶς εὑρεθῇ τὸ σημεῖον ξ,

εὑρεθῆναι δύναται γεωμετρικῶς ϗ τὸ μῆκος τῆς τȣ κυκλικȣ τεταρτημορίȣ περιφερείας, ἧς τὸ τετραπλȣν ἐςὶν ὅλη ἡ κυκλικὴ περιφέρεια· ὅθεν παρέπεται ὁ τȣ κύκλȣ τετραγωνισμός· ἀλλὰ γὰρ ἀμήχανον τόδε τὸ σημεῖον προσδιορισθῆναι γεωμετρικῶς· ἡ γὰρ κν, ἐγγίςη ὑποτιθεμένη τῇ ΒΜ, ȣ̓μὴ τεμεῖ τὴν ἀκτῖνα ΒΘ τȣ̃ Θ τῷ Μ συμπίπτοντος· εἴγε ἡ κν, παράλληλος ȣ̓̃σα τῇ ΒΜ, ἔςαι παράλληλος ϗ τῇ ΒΘ, ἢ, εἰ ϗ τȣ̃το βȣλοίμεθα, ἡ κν συμπίπτει τηνικαῦτα τῇ τε ΒΘ ϗ τῇ ΒΜ.

327. Ἐὰν ἀκτὶς ἡ ΑΒ (σχ. 158) ἐπὶ τῆς ΒΓ παραλλήλως ἑαυτῇ κινηθῇ, ἕως ȣ̓̃ διανύσῃ αὐτὴ μὲν τὸ κυκλικὸν τεταρτημόριον ΑΔΓ, κατὰ δὲ τὸν αὐτὸν χρόνον ἡ πμ, παράλληλος ἀεὶ μένȣσα τῇ ΒΓ, διαδράμῃ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν, ὥςε ἀεὶ ὑπάρχειν τὴν τȣ̃ κυκλικȣ̃ τεταρτημορίȣ περιφέρειαν ΑΔΓ : ΑΔ : : ΑΒ : ΑΠ, καμπύλη ἡ διὰ πάντων τῶν σημείων μ, καθ' ἃ τέμνονται αἱ εὐθεῖαι ΖΔ, ΠΜ διήκȣσα καλεῖται τετραγωνίζȣσα τȣ̃ Tschirnaus, ὃς ταύτην εὕρατο, τὸν Δεινόςρατον μιμησάμενος· ἐὰν δὲ γένηται $ΑΔΓ = β$, ϗ $ΑΔ = χ$, ϗ $ΑΠ = υ$, ϗ $ΑΒ = α$, ἕξομεν $β : χ : : α : υ$, ὅθεν $αχ = βυ$, ἐξίσωσις ταύτης τῆς καμπύλης.

328. Βȣλομένοις δὲ ἐξίσωσιν διάφορον ἔχειν, ἢ τὴν εὑρεθεῖσαν, σημειωτέον, ὅτι $ΠΜ = ΟΔ$ ἐςὶν ἡμιτ. $χ$, ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως $αχ = βυ$, ἔςιν $υ = ΑΠ = \frac{αχ}{β}$. ἄρα $ΒΠ = α - \frac{αχ}{β}$· ἀλλ' ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΠΜΒ (ὑποτιθεμένης $ΒΜ = ψ$) ἔςι $ψ^2 = \overline{ημ.\, χ}^2 + (α - \frac{αχ}{β})^2$, εἴτ' ȣ̓̃ν $α^2ψ^2 = α^2 \,.\, (ημ.\, χ)^2 + (βα - αχ)^2$.

329. Ἐν δὲ τῇ Δεινοστρατείῳ (σχ. 157) ἀγομένης τῆς ιΓ παραλλήλως τῇ ΜΒ, ἔσται ΝΟ = ημ. χ, ϗ ιΒ = συνημ. χ, ϗ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi = \beta\upsilon$ πρόεισιν $\upsilon = \mathrm{AN} = \frac{\alpha\chi}{\beta}$· ἀλλ' ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΒιΓ, ΒΟΝ, ἐστὶ Βι : ΒΓ :: ΒΝ : ΒΟ, εἴτ' οὖν συνημ. $\chi : \alpha :: \alpha - \frac{\alpha\chi}{\beta} : \psi$, ὑποτεθείσης $\mathrm{BO} = \psi$· ἄρα $\psi = \frac{\beta\alpha^2 - \alpha^2\chi}{\alpha.\ \text{συνημ.}\ \chi}$· ϗ αὕτη δὲ ἡ ἐξίσωσις οὐδόλως συντελεῖ πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου ξ· ἐὰν γὰρ γένηται $\chi = \beta$, ἔσται $\psi = \frac{\alpha.\beta^2 - \alpha^2.\beta}{0} = \frac{0}{0}$, ἐξίσωσις οὐδενὸς σημαντική· ὃ δείκνυσιν ἀδύνατον τὴν γεωμετρικὴν εὕρεσιν τοῦ σημείου Ο.

330. Ἡ Κογχοειδής. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΡΣ (σχ. 159) πρὸς ὀρθὰς σταθῇ εὐθείᾳ τῇ ΘΖ, ϗ ἐκ τοῦ Ρ ἑκατέρωσε τῆς ΟΣ ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι ἀσυγχύτως, καὶ ληφθῇ ἐφ' ἑκάστης εὐθείας ὕπερθεν τῆς ΘΓ μέρος τι ἴσον τῇ ΟΣ, ἐκ τοῦ σημείου, καθ' ὃ αὕτη τὴν ΘΓ τέμνει, ἀρχόμενον, ϗ ἐπ' εὐθείας πρὸς τὰ ἄνω ἐπεκτεινόμενον, τὰ μέρη ταῦτα τὰ ἴσα ἕκαστον τῇ ΟΣ, ἐγχαράξουσι σημεῖα τὰ Κ, Κ, ἃ ἡ ἐπιζευγνῦσα καμπύλη, καλεῖται κογχοειδής· ἀλλὰ γὰρ δῆλον τῶν ΚΙ ἀεὶ μᾶλλον ϗ μᾶλλον πλαγιαζομένων ἐπὶ τῆς ΖΘ, μηδέποτε δὲ αὐτῇ παραλλήλων γινομένων, οἱ δύο κλῶνες τῆς καμπύλης, ἐπ' ἄπειρον μὲν προσπελάσουσι τῇ ΖΘ, οὐδέποτε μέντοι αὐτῇ συμπεσοῦνται· ἄρα ἡ ΖΘ ἀσύμπτωτός ἐστι ταύτης τῆς καμπύλης.

331. Ἡ Σπεῖρα. Διῃρήσθω κύκλος τε ὁ ΒΓΙ (σχ. 160), ϗ ἡ αὐτοῦ ἀκτὶς ΑΓ εἰς ὁσαδήποτε ἰσόμηλα μέρη· ϗ ἤχθωσαν ἀκτῖνες πρὸς πάντα τὰ τῆς διαιρέσεως

τȣ͂ κύκλȣ σημεῖα, ϗ μετηνέχθω ἐκ τȣ͂ Α ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΑΔ, τὴν προσεχῆ τῆς ΑΓ, ἓν τῶν ἰσαλλήλων μερῶν τῆς ΑΓ, ϗ δύω ἐπὶ τὴν ἑξῆς ΑΕ, ϗ τρία ἐπὶ τὴν τρίτην, ϗ ὅτως ἐφεξῆς ἕως τῆς ΑΓ, ἐφ᾽ ἣν μετενεχθήσονται πάντα τὰ ἰσάλληλα αὐτῆς μέρη, εἴτ᾽ ȣ͂ν αὐτὴ ἡ ΑΓ ἐφ᾽ ἑαυτήν· ἐκεῖν ἡ τὰ ὅτως εὑρεθέντα ἐπὶ τῶν ἀκτίνων σημεῖα ἐπιζευγνῦσα καμπύλη καλεῖται σπεῖρα, καὶ Ἕλιξ Ἀρχιμήδειος· ἐὰν δὲ διπλασιασθείσης τῆς ἀκτῖνος $ΑΓ = ΑΡ$, γραφῇ ἄλλος κύκλος ὁ ΡΤΟ, ϗ προαχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ἐς τὴν αὐτȣ͂ περιφέρειαν, ϗ ἐπὶ τῆς ΑΟ μετενεχθῇ $ΑΓ + 1$, ἐπὶ δὲ τῆς ΑΚ, $ΑΓ + 2$, κτ, προκύψει ἡ συνέχεια τῆς σπείρας ΑΜΓ ἐκ τῆς καινῆς καμπύλης ΓΧΡ· ἡ δὲ ὅλη σπεῖρα κληθήσεται διπλῆς περιελίξεως· ἐὰν δὲ τριπλασιασθῇ ἡ ΑΓ ἀκτὶς, γεννηθήσεται σπεῖρα τριπλῆς περιελίξεως ϗ ὅτως ἑξῆς· ἐὰν δὲ κληθῇ $ΑΓ = α$, ἡ δὲ περιφέρεια $ΒΓΙ = π$, ἓν δέ τι κυκλικὸν τμῆμα $= χ$, ἓν δέ τι τῆς ἀκτῖνος τμῆμα $= υ$, ἐκ τῆς ἰδιότητος τῆς σπείρας προκύψει $υ : α :: χ : π$, ὅθεν $υπ = αχ$, ἐξίσωσις τῆς σπείρας.

Δυνάμεθα δὲ ἐννοῆσαι τὴν σπεῖραν ὡς γραφομένην ἐπὶ τȣ͂ Γ ὑπὸ σημείȣ τȣ͂ Α, κινȣμένȣ ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΑΓ ἐκ τȣ͂ Α ταχυτῆτι τῇ αὐτῇ, ἡ κινεῖται τὸ πέρας Γ τῆς ἀκτῖνος ΑΓ, περιφερομένης κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον περὶ τὴν περιφέρειαν.

Α΄. Ἐὰν ὑποτεθῇ $υ^μ : α^μ :: χ^ν : π^ν$, ποριθήσεται ἐντεῦθεν $π^ν υ^μ = α^μ χ^ν$, ἐξίσωσις τῶν παντὸς γένȣς σπειρῶν· αὗται δὲ αἱ σπεῖραι παραβολικαὶ μὲν, εἰ μ ϗ ν ἀριθμοὶ εἶεν ὑπαρκτικοὶ, ὑπερβολικαὶ δὲ, εἰ λειπτικοὶ, προσαγορεύονται· τῶν δὲ π, α, χ, υ εὐθείας ἐμφαινόντων, παραβολῶν μὲν ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, ὑπερβολῶν δ᾽ ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἡ ἐξίσωσις ἔσαι· ὑποτίθεται δὲ ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἅτερος τῶν ἐκθετῶν ὁ μ, ἢ ὁ ν τῆς μονάδος διαφέρων· ἐὰν δ' ὑποτεθῇ $\mu = +1$, καὶ $\nu = -1$, καὶ γένηται $\alpha\pi = \beta^2$, πορισθήσεται $\upsilon\chi = \beta^2$, ἐξίσωσις ἐμφαίνεσα σπεῖραν ὑπερβολικὴν (καθάπερ κοινῶς ἅπαντες αὐτὴν ὀνομάζεσι)· ὅθεν $\upsilon = \frac{\beta^2}{\chi}$· ὑπὲρ ἄλλης ἄρα τεταγμένης υ', ἀποφέρεται $\upsilon' = \frac{\alpha^2}{\chi'}$· ἐκἒν $\upsilon : \upsilon' :: \frac{\alpha^2}{\chi} : \frac{\alpha^2}{\chi'} :: \frac{1}{\chi} : \frac{1}{\chi'} :: \chi' : \chi$, τἒτ' ἔσιν, ἐν ταύτῃ τῇ καμπύλῃ αἱ τεταγμέναι ἀντιπεπόνθασι ταῖς ἀποτετμημέναις· ἀλλ' αἱ ἀποτετμημέναι εἰσὶ κυκλικαὶ καὶ ἀνάλογοι τῇ γωνίᾳ τῇ γραφομένῃ ὑπὸ τἒ σημεἱε Γ, ἐν ᾧ κινεῖται ἡ ἀκτὶς ΑΓ (ἄνωτ.)· ἐν ἄρα τῇ ὑπερβολικῇ σπείρᾳ αἱ τεταγμέναι εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀντισρόφῳ τῶν περιόδων, τἒτ' ἔσιν, ἐὰν δὶς ἡ ἀκτὶς περιενεχθῇ, ἡ ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ τεταγμένη διπλασία ἔσαι τῆς ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀκτῖνος, καὶ ἑπομένως ἡ γωνίᾳ ὑποδιπλασίᾳ συσοιχἒσα ἀκτὶς διπλασία ἔσαι ἀκτῖνος συσοιχἒσης διπλασίᾳ γωνίᾳ· ἐὰν γὰρ ἐπινοηθῇ τόξον μοιρῶν 300, δυνάμεθα συλλαβεῖν τῷ νοΐ, ὅτι γραμμὴ εὐθεῖα περιήνεκται περὶ τὸ κέντρον τἒδε τἒ τόξε, καταγράφεσα διὰ τἒ πέρατος αὐτῆς τό δε τὸ τόξον, εἴτ' ἒν τόξον ἴσον τριπλασίῳ τόξε 100 μοιρῶν, ταὐτὸν εἰπεῖν, τόξα πλείω, ἃ ἅμα δύνανται μοίρας 300· ἐὰν δὲ τὸ καταγραφὲν τόξον ᾖ $360° + 100 = 460°$, καταμετρήσει ὡρισμένον ἀριθμὸν γωνιῶν, αἳ ἅμα δύνανται 460°, ὧν τὸ ἄθροισμα καλεῖται γωνία 460° κτ.

Ἵνα δὲ γραφῶσιν αἱ σπεῖραι, εὑρεῖν ἀνάγκη τὴν δύναμιν τἒ ἑκάσῃ ἀκτῖνι συσοιχἒντος τόξε· μεθ' ὃ ῥᾷσα καταγράφονται διὰ τῶν σημείων, ὡς εἰ καὶ εἴησαν καμπύλαι γεωμετρικαί· τοσύτῳ δὲ ἀκριβέςερον, ὅσῳ ἄν τις λάβοι ἀκριβέςερον τὰς τῶνδε τῶν τόξων δυνάμεις.

Β΄. Εμφαινέτω σ γωνίαν ὁποιανῦν, ἢ τὸ ταύτην μετρῦν τόξον, ὗ ἡ ἀκτὶς $= 1$· Καμπύλη ὖν, ἣν παρίςησιν ἡ ἐξίσωσις $\sigma = \nu \,.\, \Lambda \,.\, \frac{\upsilon}{\alpha}$ καλεῖται σπεῖρα λογαριθμική· ἐφ᾽ ἧς (σχ. Β. 160) αἱ περὶ τὸ Κ γωνίαι σ, ἢ τὰ τόξα τῆς περιφερείας, ἧς ἀκτὶς $= 1$, ἀνάλογα ὄντα ταῖς γωνίαις σ, εἰσὶν ἀνάλογα τοῖς λογαρίθμοις τῶν ἀκτίνων υ· ἐὰν τοίνυν ὑποτεθῇ $\nu = 1 = \alpha$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\sigma = \lambda\,.\,\upsilon$· ὑποτιθεμένων ἄρα τῶν γωνιῶν σ, ἢ τῶν περὶ ὧν εἰρήκαμεν τόξων, ἐν προόδῳ ἀριθμητικῇ, αἱ συςοιχῦσαι αὐταῖς ἀκτῖνες (ἃς ἐμφαινέτωσαν αἱ ΚΑ, Κν, ΚΒ κτ) ἔσονται ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ· ἐὰν δὲ ΚΑ ἐμφαίνῃ τὴν ἀκτῖνα (ἣ ὑποτίθεται $= 1$) τῦ γεννήτορος κύκλυ, κατάδηλον ὡς ἐπ᾽ αὐτῆς δυνατόν ἐςι λαβεῖν ἄπειρα μέρη κατὰ γεωμετρικὴν φθίνυσαν πρόοδον· ὥςε ἡ καμπύλη ἀπείρυς ποιήσει περιόδυς περὶ τὸ σημεῖον Κ, ἕως ἂν αὐτῦ τῦ σημείυ ἐφίκηται· δυνατὸν δὲ ὑποθεῖναι τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, Κμ, κτ. κ̀ κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν αὔξυσαν.

332. Εναρίθμιος δὲ φέρεται καμπύλαις ταῖς ὑπερβατικαῖς κ̀ ἡ Κυκλοειδής, ἧς ἡ ἐπὶ τῶν τεχνῶν ἐφαρμογὴ ἐγνώρισε ταύτην ἅπασιν ἐν τοῖς νῦν χρόνοις· ἐὰν κύκλος ὁ ΒΔΕ (σχ. 161) ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ περικυλισθῇ, ἀρχόμενος ἐκ τῦ Α, τὸ αὐτῦ σημεῖον Ζ, ὃ ἦν ἐν ἀρχῇ κατὰ τὸ Α, ἐν τέλει δὲ εὕρηται κατὰ τὸ Γ, ἐν ταύτῃ τῇ περικυλίσει καταγράψει καμπύλην τὴν ΑΔΓ, ἥτις ἀκύει Κυκλοειδής· κ̀ ἡ μὲν ΒΔ εὐθεῖα ἄξων

αὐτῆς καλεῖται· ἡ δὲ ΑΓ, βάσις· ὁ δὲ ΒΔΕ κύκλος, γεννήτωρ κύκλος.

Τοιγαροῦν α΄. ἡ ΑΓ ἴση ἐςὶ τῇ ὅλῃ περιφερείᾳ τοῦ γεννήτορος κύκλου, ἡ δὲ ΑΒ τῇ αὐτοῦ ἡμιπεριφερείᾳ· β΄. ὑπόδειγμα ἁπλέςατον τῆς κυκλοειδοῦς ἐςὶν ἡ περιαγωγὴ τοῦ τῆς ἁμάξης τροχοῦ, περιφερομένου ὁλοσχερῶς ἐπί τι ἐπίπεδον· γ΄. ἵν᾽ ἐπὶ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ κυκλοειδὴς καταγραφῇ, κατακλιθήτω τὸ τοῦ ΒΕΔ κύκλου ἐπίπεδον ἐπὶ τὸ δεδομένον ἐπίπεδον, καὶ τῇ περιφερείᾳ αὐτοῦ προσηλώσθω ἧλος σμικρὸς ἐξ᾽ ὕλης ςερεᾶς, οἷα καταγράφειν σημεῖα ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου, καὶ κινηθήτω ὁ κύκλος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἐπακουμβῶν κανόνι, ἵνα μὴ ἡ κίνησις αὐτοῦ διαςραφῇ· καὶ δὴ ἐκ τῆς ὁλοσχεροῦς τοῦ κύκλου περιαγωγῆς γραφήσεται ἐκ τοῦ μικροῦ ἥλου ἡ κυκλοειδής.

333. Ὑποτεθείσθω ἤδη ὁ γεννήτωρ κύκλος ΒΕΔ ἐν τῇ θέσει ΖΜ, καὶ ἤχθω ἡ ΖΟΡ παράλληλος τῇ ΑΒ· σαφὲς οὖν ὅτι τὸ τόξον ΖΙΜ ἐςὶν ἴσον τῷ τόξῳ ΟΒχ (Γεωμ. 169)· καὶ ἔτι τόξον τὸ ΖΙΜ ἴσον ἐςὶ τῇ εὐθείᾳ ΑΜ, ἧς τοῖς σημείοις ἐκ διαδοχῆς ἐφηρμόσθησαν τὰ σημεῖα τοῦ ΖΙΜ· ἄρα ΟΒχ = ΑΜ· ἄρα καὶ ΔΟ = ΜΒ (ἐπεὶ τὸ ὅλον τόξον ΒΟΔ = ΑΒ)· ἀλλὰ ΜΒ = ΖΟ (καὶ γὰρ ΖΜ = ΟΒ (Γεωμ. 47)), καὶ ἐν δυσὶ παραλλήλαις κείμεναι· ἄρα τὸ ΖΟΜΒ ἐςὶ παραλληλόγραμμον· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΟ ἴση ἐςὶ τῷ τόξῳ ΔΟ.

Ἐπεὶ δὲ ΟΡ ἐςὶν ἡμίτονον τοῦ ΔΟ τόξου (Γεωμ. 482), ἡ ὅλη εὐθεῖα ΖΟΡ ἔςαι ἴση τῷ ἀθροίσματι τοῦ τόξου ΔΟ, καὶ τοῦ ἐν αὐτῷ ἡμιτόνου.

„Τουτέςιν ἰδιότης γενικὴ τῆς κυκλοειδοῦς ἐςὶ, τεταγ-„μένην πᾶσαν τὴν ΖΡ ἰσοῦσθαι τῷ κατὰ τὸν γεννήτορα „κύκλον ἐπὶ τοῦ ἄξονος γεγραμμένον τόξῳ, ἀπολαμβανο-

„μένω ὑπό τε τῆς τεταγμένης, ϗ τῆς κορυφῆς Δ, συνά-
„μα τῷ ἡμιτόνῳ ΟΡ τᾶδε τᾶ τόξα.

Ἔςω ἂν υ τεταγμένη ἡ ΖΡ, ϗ χ τὸ ἐναπολαμβανόμενον τόξον ΔΟ· θηρευθήσεται ἂν ἐντεῦθεν $\upsilon = \chi +$ ημ. χ, ἐξίσωσις τῆς κυκλοειδᾶς.

334. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πᾶσα εὐθεῖα Εξ παράλληλος τῇ ΒΓ, περιεχομένη ὑπὸ τῆς καμπύλης ϗ τᾶ γεννήτορος κύκλα ΒΔΕ, ἰσᾶται τῷ τόξῳ ΔνΕ, τῷ ταύτῃ ἀντιςοιχᾶντι· ϗ γὰρ $\upsilon = \text{Ρ}\xi = \chi\ (= \text{Δ}\nu\text{Ε}) +$ ἡμ. $\chi\ (=\text{ΡΕ})$· ἄρα $\text{Ε}\xi = \text{Δ}\nu\text{Ε}$.

335. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἡ τῆς κυκλοειδᾶς καθ' ἓν δεδομένον σημεῖον ξ ἁπτομένη Πξ παράλληλός ἐςι τῇ χορδῇ ΔΕ, τῇ ἀπολαμβανομένῃ ὑπὸ τῆς κορυφῆς Δ τῆς κυκλοειδᾶς ϗ τᾶ κατὰ τὸν γεννήτορα κύκλον σημείᾳ Ε, τᾶ ἀντιςοιχᾶντος τῷ τῆς ἀφῆς σημείῳ ξ.

ΔΕΙΞΙΣ α΄. Ἤχθω Εξ παράλληλος τῇ ΒΓ· φημὶ ἂν ὡς Εξ ἴση ἐςὶ τῷ ΕΠ μέρει τῆς τᾶ κύκλα κατὰ τὸ Ε ἁπτομένης, τῷ ὑπὸ τᾶ Ε ϗ τᾶ σημείᾳ, καθ' ὃ συναντᾷ τῇ Πξ ἁπτομένῃ, ἀπολαμβανομένῳ· ἔςω γὰρ ἑτέρα παράλληλος τῇ Εξ ἀπείρως ἐγγὺς ἡ Στ· τὰ ἂν τόξα ξΣ, Ετ ἐκληφθῆναι δύνανται ὡς εὐθεῖαι, ϗ ὡς μέρη ἐλάχιςα τῶν ἁπτομένων ΠΕ, Πξ· ἐκ δὲ δὴ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΠΕξ, ΠτΣ πρόεισιν $\text{Ε}\xi : \tau\Sigma :: \text{ΕΠ} : \tau\Pi$· ἄρα $\text{Ε}\xi - \tau\Sigma : \text{Ε}\xi :: \text{ΕΠ} - \tau\Pi : \text{ΕΠ}$· ἀλλὰ $\text{Ε}\xi - \tau\Sigma = \text{ΔΕ} - \text{Δ}\tau$ (ἢ τΕ) (334) ϗ $\text{ΕΠ} - \tau\Pi = \tau\text{Ε}$· ἄρα $\tau\text{Ε} : \text{Ε}\xi :: \tau\text{Ε} : \text{ΕΠ}$, ἢ $\tau\text{Ε} : \tau\text{Ε} :: \text{Ε}\xi : \text{ΕΠ}$· ἄρα α΄. $\text{Ε}\xi = \text{ΕΠ}$· β΄. ἐκ τάτα ἡ ΔΕ παράλληλός ἐςι τῇ Πξ.

Ἐν γὰρ τῷ τριγώνῳ ΠΕξ ἐςὶν ἡ ὑπὸ $\Pi = \xi$ διὰ τὰς ὑπ' αὐτὰς ὑποτεινάσας ἴσας πλευρὰς, ὡς ἤδη δέδεικται· ἄρα $\Sigma = \Pi$ (Γεωμ. 132), ϗ ἡ ἐκτὸς γωνία ΠΕν ἰσȣ̃ται ταῖς γωνίαις $\Pi + \xi$ (216), ἢ $= 2\Pi$· ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΠΕυ μέτρον ἔχει τὸ τόξον $\frac{\text{Ε}\Delta\upsilon}{2}$ (Γεωμ. 184) ἢ τὸ ΔτΕ· ἡ δὲ γωνία ΠΕΔ ἔχει μέτρον τὸ τόξον $\frac{\Delta\tau\text{Ε}}{2}$· ἄρα ἡ ὑπὸ ΠΕυ $= 2$ ΠΕΔ· ἄρα $2\Pi = 2$ ΠΕΔ ϗ $\Pi = 1$ ΠΕΔ· ἄρα ἡ ἁπτομένη Πξ παράλληλός ἐϛι τῇ χορδῇ ΔΕ (Γεωμ. 137) Ο. Ε. Δ.

336. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἵνα τοίνυν ἁπτομένη ἀχθῇ καθ' ἓν δεδομένον σημεῖον ξ, γενέϛθω παράλληλος ἡ Εξ τῇ ΒΓ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ χορδὴ ΔΕ, ϗ διὰ τȣ̃ ξ διήχθω αὐτῇ παράλληλος ἡ ξΠ, ἥτις ἔϛαι ἡ ἐπιταχθεῖσα ἁπτομένη.

337. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἡ ἡμιπεριφέρεια τȣ̃ γεννήτορος κύκλȣ ΔΒ κληθῇ α, ἡ δὲ ἡμίσεια βάσις ΒΑ $= \beta$, ϗ ΔΟ $= \chi$, ϗ ΟΖ $= \upsilon$· δῆλον ἐκ τῶν εἰρημένων (332, 335), ὡς ἔϛαι $\alpha:\beta::\chi:\upsilon$, ὅθεν $\alpha\upsilon = \beta\chi$, ἐξίσωσις ἑτέρα τῆς κυκλοειδȣ̃ς· ἐὰν δὲ γένηται $\alpha^{\mu} : \beta^{\nu} :: \chi^{\mu} : \upsilon^{\nu}$, εὑρεθήσεται $\alpha^{\mu}\upsilon^{\nu} = \beta^{\nu}\chi^{\mu}$, ἐξίσωσις γενικὴ παντὸς γένȣς κυκλοειδȣ̃ς.

338. Ἐὰν νῆμα τὸ ΒΑΕ (σχ. 162) ἰσόμηκες καμπύλῃ τῇ ΒΑΕ, ἐφηρμοσμένον αὐτῇ, ἀποχωρίζηται ἐπ' αὐτῆς, τὸ πέρας αὐτȣ̃ Ε καταγράψει γραμμὴν τὴν ΕΓΘ, ἥτις καλεῖται ἐ ξ ε ι λ ι γ μ έ ν η, ἡ δὲ ΒΑΕ ἐ ν ε ι λ ι γ μ έ ν η ἀκȣ́ει.

Ἄρα α'. πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, καθ' ἃς φέρεται ἐκχωριζόμενον τὸ νῆμα (καλȣ̃νται δὲ φ ι λ ȣ̃ σ α ι ἡ μ ι δ ι ά μ ε τ ρ ο ι), ἁπτόμεναί εἰσι τῆς ἐνειλιγμένης ΒΑΕ· διὰ γὰρ τὴν καμπὴν ἡ καμπύλη ΒΑΕ ȣ̓δὲν ἄλλο κοινὸν τῇ ΑΓ εὐθείᾳ σημεῖον ἔχει, ἢ τὸ Α.

β΄. Κάθετος ἡ ΜΓ ἐπὶ τοῦ πέρατος τῆς φιλούσης ἡμιδιαμέτρου ἐςὶ προδήλως ἀπτομένη τῆς ἐξειλιγμένης· εἴγε ἀπτομένη ἐν γένει ἐςὶν ἡ φορὰ, ἣν φέρεται τὸ γεννητικὸν σημεῖον ἐν τῷ ἀπογεννᾷν τὴν καμπύλην πρὸς ἕν τι δεδομένον σημεῖον αὐτῆς τῆς καμπύλης· ἀλλὰ ΜΓ ἐςὶ προδήλως φορὰ, ἣν φέρεται τὸ γεννητικὸν σημεῖον Ε πρὸς τὸ σημεῖον Γ· ἐντεῦθεν ἄρα πᾶσαι αἱ τῆς ἐξειλιγμένης ἀπτόμεναι ΜΓ κάθετοί εἰσι ταῖς τῆς ἐνειλιγμένης ἀπτομένης ΑΓ, ϗ τἀνάπαλιν.

γ΄. Πᾶσα φιλοῦσα ἡμιδιάμετρος ἴση ἐςὶ τῷ τόξῳ ΑΕ, ἀφ᾽ οὗ ἀποχωρίζεται.

339. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ ἐξειλιγμένη ΒΖ ἐςὶν ἡμικυκλοειδὴς, ἐξισουμένη τῇ ἐνειλιγμένῃ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΓ (σχ. 163).

ΔΕΙΞΙΣ α΄. Εἰλήφθω φιλοῦσα ἡμιδιάμετρος Ρρ ἡ ϗ τῆς ΒΓ ἀπτομένη, ϗ ἤχθω ΡΟ παράλληλος τῇ ΒΕ· ἡ τοίνυν χορδὴ ΒΟ παράλληλος ἔσεται τῇ Ρρ (*)· ἄρα ἡ ὑπὸ Βνρ = ΟΒν (Γεωμ. 133)· γραφέντος οὖν ἐπὶ τῆς καθέτου νΤ = ΕΖ = ΕΓ ὡς ἐπὶ διαμέτρου, κύκλου τοῦ νρΤ, ἔςαι τὸ τόξον νρ = ΒΟ· ϗ γὰρ ἡ γωνία Βνρ μετρεῖται τῷ τόξῳ $\frac{\nu\rho}{2}$ (Γεωμ. 184)· ἡ δὲ γωνία ΟΒν μετρεῖται τῷ τόξῳ $\frac{BO}{2}$· ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ Βνρ = ΟΒν, ὡς ἤδη ἐφάνη· ἄρα $\frac{\nu\rho}{2} = \frac{BO}{2}$· ἄρα νρ = ΒΟ.

(*) Τὸ γὰρ *Β* κορυφή ἐςι τῆς ἡμικυκλοειδοῦς *ΒΡΓ*, ϗ *Ρρ* ἔςιν αὐτῆς ἀπτομένη, ϗ *ΒΟ* ἔςι χορδὴ, ἐναπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς κορυφῆς *Β*, ϗ τοῦ κατὰ τὸν γεννήτορα κύκλον σημείου *Ο*, ὃ συςοιχεῖ τῷ τῆς ἀφῆς σημείῳ *Ρ*· ἄρα (335) *ΒΟ* παράλληλός ἐςι τῇ *Ρρ*.

β΄. Παρὰ ταῦτα, ἐπεὶ ΟΡ παράλληλος τῇ Βν (ἐκ κατασκευῆς) ϗ ΒΟ τῇ Ρν παράλληλος (335), ἄρα Βν = ΟΡ (Γεωμ. 236) = τῷ τόξῳ ΒΟ (334) = τῷ τόξῳ νρ (ἀνωτ. α΄.)· γραφέντος ȣ̃ν ἐπὶ τῆς ΕΖ τȣ̃ κύκλȣ ΕβΖ, ϗ ἀχθείσης ρβ παραλλήλȣ τῇ Βν, ἔσονται ἴσα τὰ τόξα νρ, βΕ (Γεωμ. 169)· ἄρα τȣ̃ Βν ἰσȣμένȣ τῷ τόξῳ νρ, ϗ ἑπομένως τῷ βΕ, νΕ ἰσωθήσεται τῷ τόξῳ βΖ (ἐπεὶ ΒνΕ ἰσȣ̃ται τῷ ὅλῳ τόξῳ ΕβΖ, 332)· ἀλλὰ, διὰ τὰς ἴσας χορδὰς νρ, βΕ (Γεωμ. 47) ϗ ἐν δυσὶ παραλλήλαις κειμένας, ἔϛαι τὸ ρνΒΕ παραλληλόγραμμον· ἄρα ρβ = νΕ = τῷ τόξῳ βΖ, ϗ ρυ = βΖ σὺν τῷ βυ, ὅ ἐϛι προφανῶς ἡμίσυ τȣ̃ βΖ τόξȣ· ἐπεὶ ἄρα, γενομένης ρυ = υ, ϗ τȣ̃ τόξȣ βΖ = χ, ἔϛαι υ = χ + ἡμ. χ, ἐξίσωσις τῆς κυκλοειδȣ̃ς (333)· τὸ ἄρα σημεῖον ρ τȣ̃ κύκλȣ ρΤν ἐπανήκει ἀναμφιβόλως τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ, ἧς ἐϛι γεννήτωρ ὁ ΕβΖ κύκλος.

Φημὶ δὴ τέλος, ὡς πρὸς τῷ ρ ἐϛὶν ἡ ἡμιδιάμετρος ρΡ κάθετος τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ, τῇ ἀπογεννηθείσῃ ὑπὸ κύκλȣ γεννήτορος τȣ̃ ΕβΖ· καὶ γὰρ ἀχθείσης τῆς ρΤ παραλλήλȣ τῇ χορδῇ βΖ, ρΤ ἔϛαι ἁπτομένη τῆς καμπύλης κατὰ τὸ ρ (335)· ἀλλ᾽ ἐκ τῶν παραλλήλων ρν, βΕ, ϗ ρΤ, βΖ, ἡ ὑπὸ Τρν = τῇ ὀρθῇ (Γεωμ. 180) ΖβΕ· ἄρα ρΤ κάθετός ἐϛιν ἐπὶ τȣ̃ ρ τῇ ἁπτομένῃ ρΤ, ϗ δὴ ϗ τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ, κατὰ τὸ ρ, ὅ ἐϛιν ἀρχὴ ταύτης τῆς ἁπτομένης.

Τῆς ἡμιδιαμέτρȣ ἄρα Ρρ πρὸς τὸ δοκȣ̃ν εἰλημμένης, δυνατὸν εἰπεῖν ἐν γένει, ὡς ἅπασαι αἱ ἡμιδιάμετροι τῆς ἐνειλιγμένης εἰσὶ κάθετοι τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ· ἔσονται ἄρα κάθετοι ϗ τῇ ζητȣμένῃ ἐξειλιγμένῃ· ϗ γὰρ ἡ ἑκάϛης ἡμιδιαμέτρȣ φορὰ Ρρ ἔϛι προδήλως κάθετος τῇ φορᾷ τȣ̃ πέρατος ρ ἐν ἑκάςῳ καταλειπομένῳ ἴχνει εἰς ςοι-χεῖον τῆς ἐξελιγμένης (338)· παρὰ δὲ ταῦτα, δύω καμπύλαι, κοινὸν ἔχȣσαι σημεῖον τὸ Β, ȣ̓ δύνανται ἔχειν κοινὰς τὰς καθέτȣς (*)· τῆς ἄρα ἐξειλιγμένης ΒΓ κοινὸν ἐχȣ́σης σημεῖον τὸ Β τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ τῇ ὡς παρὰ τȣ̃ κύκλȣ ἀπογεννηθείσῃ, ΒΖ ἔςαι καμπύλη ἐξειλιγ-μένη τῆς ΒΓ· ἄρα ἡ ἐξειλιγμένη ἁπάσης ἡμικυκλοειδȣ̃ς ἐςὶν ἑτέρα ἡμικυκλοειδὴς, ἀκριβῶς ἴση τῇ ἐνειλιγμένῃ. Ο. Ε. Δ.

340. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἡ χορδὴ ρν = ΒΟ (Γεωμ. 47), ϗ διὰ τὸ ΒΟΡν παραλληλόγραμμον, ἡ χορδὴ ΒΟ = Ρν· ἐςὶν ἄρα Ρρ = 2ΒΟ. Ρρ = τῷ τόξῳ ΒΡ· ἄρα ΒΡ = 2ΒΟ, τȣτέςιν ἐν γένει „πᾶν τόξον κυκλοειδȣ̃ς „τὸ ΒΡ διπλȣ̃ν ἐςὶ τῆς ἀντιςοιχȣ́σης ΒΟ χορδῆς τȣ̃ γεν-„νήτορος κύκλȣ· ἄρα ὅλη ἡ ἡμικυκλοειδὴς, ἔχȣσα χορδὴν „ἀντιςοιχȣ̃ν τῇ διαμέτρῳ ΖΕ τȣ̃ γεννήτορος κύκλȣ, ἔσε-„ται διπλῆ ταύτης τῆς διαμέτρȣ· ἄρα ὅλη ἡ κυκλοει-„δὴς ΒΖΘ ἴση ἐςὶ τῇ τετραπλῇ διαμέτρῳ τȣ̃ γεννήτο-„ρος κύκλȣ.‟

341. ΠΟΡΙΣΑΑ Β΄. Ἐὰν ὦσι δύω ἀντίθετοι ἴσαι κυκλοειδεῖς ΤΒ = ΓΘ, ϗ ἐκκρεμὲς σῶμα, προσδεδεμένον τῷ Ζ πέρατι τȣ̃ νήματος ΓΖ, ἀπολικνῆται ἐκ τȣ̃ Β ἐπὶ τὸ Θ, διαδραμεῖται προδήλως ἐς μὲν τὸ Ζ ἐξειλιγ-μένην ΒΖ· εἶτα ἐνειλισσόμενον τῇ ΓΘ, διαδραμεῖται τὴν ΘΖ ἐξειλιγμένην τῆς ΓΘ· τὸ ἄρα ἐκκρεμὲς Ζ δια-νύσει τὴν ὅλην κυκλοειδῆ ΒΖΘ.

(*) Ἵνα γὰρ ὦσι δύω διάφοροι καμπύλαι, ἐπάναγκες τὰ δύω γεννητικὰ αὐτῶν σημεῖα, ἀποχωρήσαντα τȣ̃ κοινȣ̃ σημείȣ Β, κατὰ διαφόρȣς κινηθῆναι φοράς· ὅθεν ἡ θατέρα κάθετος ȣ̓κ ἔτι ἔσεται τȣτὶ ϗ θατέρᾳ.

342. ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἰ ἄρα τὸ ὡρολογίȣ τινὸς ἐκκρεμὲς ἠδύνατο ἐφαρμόζεσθαι μεθ' ἑκάστην ἀναλίκνησιν ἐπὶ τῶν τόξων ΓΘ, ΓΒ τῶν κυκλοειδῶν, σφαιρίδιον τὸ προσδεδεμένον τῷ αὐτȣ̃ πέρατι Ζ καταγράψει τὴν κυκλοειδῆ ΘΖΒ· ἀλλὰ γάρ, ὡς ἐν τῇ Φυσικῇ δειχθήσεται, αἱ ἀναλικνήσεις ἐκκρεμȣ̃ς, κυκλοειδῆ καταγράφοντος, εἰσὶν ἰσόχρονοι, τȣτέστιν ἴσον διαρκȣ̃σιν, ὅσῳ ἂν μείζȣς, ἢ ἐλάττȣς, γένωνται· τȣτὶ δὲ ἀνακεκάλυπται πρὸς τῷ τέλει τȣ̃ 17 αἰῶνος ὑπὸ τȣ̃ περικλεȣ̃ς Οὐγενίȣ· καὶ ἐδόκει γενέσθαι ἤδη ἡ τελειότης τῶν ὡρολογίων· ἀλλ' ἡ δυσχέρεια τȣ̃ ἀκριβῶς ἐφαρμόζεσθαι τοῖς κυκλοειδέσι τόξοις τὰ μεταλλικὰ νήματα, αἱ διάφοροι ὑψώσεις, αἱ ἐν καιροῖς ποικίλοις φωραθεῖσαι, τὸ ἐπικαμπὲς μέρος τȣ̃ ἐκκρεμȣ̃ς, ὃ τοῖς τόξοις ἐφηρμόζετο, ἀπέδειξαν κυκλικὰς τὰς ἀναλικνήσεις.

Ἀλλὰ καὶ τȣ́των ȣ̔́τως ἐχόντων, τόξον μέντοι κύκλȣ τȣ̃ ΕβΖ τὸ Ζ, ὃ εἴη τριῶν, ἢ τεσσάρων, μοιρῶν, συμπίπτει ὡς πρὸς αἴσθησιν τῇ κυκλοειδεῖ ΒΖΘ· καθισαμένȣ ἄρα ἅλις ἐπιμήκȣς τȣ̃ ἐκκρεμȣ̃ς τῶν ὡρολογίων, ȣ̓ αἱ ἀναλικνήσεις εἶεν φυσικῶς κυκλικαί, ἔσονται αἱ ἀναλικνήσεις αὗται ὡς πρὸς αἴσθησιν ἰσόχρονοι, ὡς λίαν σμικραί· κατὰ τȣ̃τον ἄρα τὸν τρόπον ἱκανῶς ἐτελειοποιήθησαν τὰ ὡρολόγια· καὶ ȣ̔́τως ἄρα καμπύλη εὑρεθεῖσα τὸ κατ' ἀρχὰς ἐκ μόνης ἁπλῆς περιεργείας καὶ διατριβῆς, ὡς καταγραφομένη ἐκ τῶν τροχῶν τῶν ἁμαξῶν, καθάπερ ἤδη εἴρηται, τέχνας πρὸς τελειότητα ἀποβλέπειν παραίτιος ἐγένετο. Ἀλλὰ περὶ τȣ́των ἐρȣ̃μεν καὶ ἐν τῇ Μηχανικῇ.

ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΩΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΘΕΩΡΟΥΜΕΝΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΟΣ.

ΤΜΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τοῦ Λογισμοῦ τῶν Ἀπειροστῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τοῦ, ὅπως τὰ ἀπειροστὰ εὑρίσκονται.

1. Ἐὰν ποσότης ἡ χ μέρει ἑαυτῆς ἀπειροστῷ αὐξηθῇ, καὶ εἶτα ἡ χ πρὸς τὴν οὕτως αὐξηθεῖσαν χ παραβληθῇ, ἡ παράθεσις αὕτη ἐκτεθήσεται οὕτω $\chi:\chi+\frac{\chi}{\infty}$.

Σαφὲς οὖν ἐστιν, ὡς ἡ διαφορὰ τῆς πρώτης καταστάσεως τῆς χ πρὸς τὴν δευτέραν ἐστὶ $\frac{\chi}{\infty}$· ταύτην δὲ τὴν διαφορὰν ἐξέστω σημῆναι διὰ $\delta\chi$, ἔκθεσις, ἣν ἀπαγγέλλομεν οὕτως: ἡ διαφορὰ τῆς ἁπλῆς ποσότητος χ, ᾗ διαφέρει ἑαυτῆς, ἀπειροστῷ τινι μέρει προσαυξηθείσης· α΄. οὐκ ἐκληπτέον ταύτην τὴν ἔκθεσιν ὡς $\delta\times\chi$ (Συμ. Λογ. 11)· ἀλλὰ μόνον ὡς διαφορὰν τῆς χ, ᾗ διαφέρει τῆς χ, ἀπειροστὸν ἐπαυξηθείσης· β΄. τὴν χ ἥκιστα νομιστέον ἄγνωστον, ἀλλὰ μόνον ποσότητα εὐμετάβλητον (Συμ. Λογ. 3)· γ΄. ἡ ἔκθεσις αὕτη $\delta\chi$ κληθῆναι δύναται ἀπειροστὸν μέρος τῆς χ, ἢ ἁπλῶς ἀπειροστόν, τοῦ οὐσιαστικοῦ ἐξυπακουομένου.

2. Ἐὰν δὲ ἡ ποσότης χ μειωθῇ μέρει ἑαυτῆς ἀπειροστῷ, γενήσεται πάντως $\chi - \frac{\chi}{\infty}$· ἔστω οὖν $-\frac{\chi}{\infty} = -\delta\chi$· εἴτ' οὖν ἀπειροστὸν τῆς χ λειπτικόν.

3. Αὔξονται δὲ οὕτως, ἢ μειοῦνται, μόναι αἱ μεταβληταὶ ποσότητες, οἷαί εἰσιν ἐν ταῖς καμπύλαις αἱ τεταγμέναι, αἱ ἀποτετμημέναι κτ., ἃς καὶ διὰ τῶν ὑστέρων γραμμάτων τοῦ Ἀλφαβήτου σημαίνουσιν, οἷον χ, υ, ψ, ω· αὐξομειώσεων δὲ ἀνεπίδεκτοι διατελοῦσιν αἱ ἄτρεπτοι ποσότητες, οἷοί εἰσιν οἱ ἄξονες, αἱ διάμετροι κτ., ἃς καὶ διὰ τῶν πρώτων γραμμάτων, α, β, γ, κτ. ἐμφαίνουσι.

4. **ΠΟΡΙΣΜΑ.** Τὸ ἀπειροστὸν τῆς ποσότητος χ ἐστὶν, ᾧ διαφέρει ἑαυτῆς αὐξηθείσης, ἢ μειωθείσης, ἐλαχίστῳ τινὶ μεγέθει.

5. Πᾶσα μεταβλητὴ ποσότης, θεωρεῖσθαι ἔχουσα ὡς ἐξ ἀπείρων ἰσαλλήλων μερῶν συνεστηκυῖα, εἰς αὐτὰ ταῦτα ὡς εἰς στοιχεῖα ἀναλύεσθαι ἔχει.

6. **ΟΡΙΣΜΟΣ.** Λογισμὸς τῶν ἀπειροστῶν ἀκούει ὁ τρόπος, καθ' ὃν, ποσοτήτων μεταβλητῶν δοθεισῶν, εὑρίσκονται ταῦτα τὰ αὐτῶν ἀπειροστὰ μέρη, ἢ στοιχεῖα.

7. Ὅταν οὖν ποσότης μεταβλητὴ χ, υ, ψ, ἄμοιρος ᾖ δείκτου, καὶ συνεργοῦ, ληφθήσεται αὐτῆς τὸ ἀπειροστὸν, γράφουσι δχ, δυ, δψ, ἐὰν ἐλαχίστῳ μεγέθει προσαύξηται· ἐὰν δὲ μειῶται, —δχ, —δυ, —δψ.

8. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.** Ἐπεὶ τὸ ἀπειροστὸν δχ ποσότητός τινος τῆς χ μέρος ἐλάχιστόν ἐστιν αὐτῆς τῆς ποσότητος· α'. ὁ ποσότητος τρεπτῆς πρὸς τὸ κατ' αὐτὴν ἀπειροστὸν λόγος δι' οὐδενὸς ἀριθμοῦ δηλωθῆναι δύναται· β'. τὸ ἀπειροστὸν δχ ὡς ἀπειροστὸν τῆς χ μέρος, πρὸς αὐτὴν παραβαλλόμενον, ἐκληφθῆναι δύναται ὡς 0 (Συμβ. Λογ. 530).

9. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Διάφορα μέντοι ἀπειροστὰ $\delta\chi$, $\delta\upsilon$ ἀλλήλοις παραβληθῆναι δύνανται, ὡς καὶ αἱ αὐτῶν ὅλαι ποσότητες χ, υ πρὸς ἀλλήλας παραθετέαι ὑπάρχουσιν· ὁ λόγος οὖν τῶν $\delta\chi$, $\delta\upsilon$ ἔσαι πεπερασμένος, καὶ ὁ αὐτὸς τῷ τῶν χ, υ· ἐὰν γὰρ ᾖ $\chi = 2\upsilon$, καὶ $\delta\chi = 2\delta\upsilon$· καὶ ὅλως ἔσαι $\delta\chi : \delta\upsilon :: \chi : \upsilon$ (Συμ. Λογ. 234).

10. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἥκιστα δὲ ἐκληπτέον τὸ ἀπειροστὸν ὡς φύσει ὑφεσώς τι ποσὸν πραγματικῶς, εἴτ᾽ οὖν φυσικῶς· ἔστι γὰρ ἀληθῶς πρᾶγμα τὸ πεπερασμένον καὶ ὡρισμένον· ὑποτίθεται δὲ κατ᾽ ἐπίνοιαν ποσόν τι δι᾽ ἀπείρου ἀριθμοῦ διῃρημένον· ἄλλως τε τὰς ἐκφράσεις, ἄπειρον, ἀπειροστὸν, ἐν τῇ μαθηματικῇ ἐκληπτέον ὡς ὅρους σχετικούς.

11. ΘΕΩΡΗΜΑ Ποσότητος ἁπλῆς, ἐκτιθεμένης δι᾽ ἑνὸς γράμματος καὶ δι᾽ ἑνὸς συνεργοῦ, οἷα ἡ $\pi\chi$, ἀπειροστόν ἐστι τὸ $\delta\chi \times \pi$, εἴτ᾽ οὖν $\pi\delta\chi$.

ΔΕΙΞΙΣ. Καὶ γὰρ, ἐὰν μόνη ἡ χ αὐξηθῇ μέρει ἑαυτῆς ἀπειροστῷ, παρέξει $\delta\chi$· ἡ δὲ 2χ αὐξηθεῖσα ὡσαύτως, παρέξει $2\delta\chi$, ἡ δὲ 3χ, $3\delta\chi$, καὶ ἐν γένει $\pi\chi$ παρέξει $\pi\delta\chi$.

12. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ποσότητος ἁπλῆς δείκτου εὐμοιρέστης, οἷα ἡ χ^{ν}, εὑρεῖν τὸ ἀπειροστόν.

ΛΥΣΙΣ. α΄. Πεπολλαπλασιάσθω αὕτη ἡ ποσότης χ ἐπὶ τὸν αὑτῆς δείκτην ν· ὅθεν ἔσαι $\nu\chi$· β΄. τεθείσθω τῷ χ ἐπὶ τοῦδε τοῦ γινομένου δείκτης ὁ πρὶν, ἠλαττωμένος μονάδι, οἷον $\nu-1$· γ΄. τὸ οὕτω γεγονὸς $\nu\chi^{\nu-1}$ πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ $\delta\chi$, ἀπειροστὸν τῆς χ· καὶ οὕτως ὅλον τὸ $\nu\chi^{\nu-1}\,\delta\chi$ ἔσαι ἀπειροστὸν τῆς χ^{ν}· οὕτω δὲ ἀπειροστὸν τῆς χ^2, ἔσαι τὸ $2\chi^{2-1}\,\delta\chi = 2\chi\delta\chi$ τῆς δὲ χ^3, τὸ $3\chi^{3-1}\,\delta\chi = 3\chi^2\delta\chi$ καὶ οὕτως ἑξῆς.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν χ, ἀπειροστῷ μεγέθει αὐξομένη, γένηται $\chi + \frac{\chi}{\infty}$, ἢ $\chi + \delta\chi$ (1), ἡ χ^2 μετὰ ταύτης τῆς αὐξήσεως ἔσται $\overline{\chi+\delta\chi} \times \overline{\chi+\delta\chi} = \chi^2 + 2\chi\delta\chi + \delta\chi^2$· ἀλλὰ $\delta\chi^2$ γινόμενόν ἐστι τῆς $\delta\chi$ ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθείσης, καὶ ἑπομένως ἀπειροστὸν δευτεροταγὲς (Συμβ. Λογ. 527), καὶ ἴσα καὶ μηδενὶ ἐκληπτέον· ἀπειροστὸν ἄρα ἔσται τοῦ χ^2, τὸ $2\delta\chi\delta\chi$· ὅπερ ταὐτόν ἐστι τῷ $2\chi^{2-1}\delta\chi$.

13. Ὡσαύτως ἐπὶ τοῦ κατὰ τὴν χ^3 ποσότητα ἀπειροστοῦ, τὸ γινόμενον ὑπὸ $\overline{\chi+\delta\chi} \times \overline{\chi+\delta\chi} \times \overline{\chi+\delta\chi} = \overline{\chi+\delta\chi}^3 = \chi^3 + 3\chi^2\delta\chi + 3\chi\delta\chi^2 + \delta\chi^3$ (Συμβ. Λογ. 95)· ἀλλ' ἐπεὶ τὸ δευτεροταγὲς $3\chi\delta\chi^2 = 0$, καὶ τὸ τριτοταγὲς $\delta\chi^3 = 0$, καταλείπεται τῆς χ^3 ἀπειροστὸν, τὸ $3\chi^2\delta\chi = 3\chi^{3-1}\delta\chi$.

14. Συναχθήσεται δὲ ὡσαύτως, ἀπειροστὸν μὲν τῆς χ^4 τὸ $4\chi^{4-1}\delta\chi = 4\chi^3\delta\chi$, ἐν γένει δὲ τῆς χ^π, τὸ $\pi\chi^{\pi+1}\delta\chi$.

15. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ῥιζικὴ ᾖ ἡ ἁπλῆ ποσότης, οἵα ἡ $\sqrt[\pi]{\chi}$, α΄. τρεπτέον αὐτὴν εἰς $\chi^{\frac{1}{\pi}}$, ἐξαλείφοντας τὸ σύμβολον (Συμβ. Λογ. 148)· β΄. ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων ἀπειροστὸν τῆς $\chi^{\frac{1}{\pi}} = \sqrt[\pi]{\chi}$, ἔσται τὸ $\frac{1}{\pi}\chi^{\frac{1}{\pi}-1}\delta\chi$· τῆς δὲ $\sqrt{\chi} = \chi^{\frac{1}{2}}$ ἐστὶ τὸ $\frac{1}{2}\chi^{\frac{1}{2}-1}\delta\chi = \frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi$ τῆς δὲ $\sqrt[3]{\chi} = \chi^{\frac{1}{3}}$, τὸ $\frac{1}{3}\chi^{\frac{1}{3}-1}\delta\chi = \frac{1}{3}\chi^{-\frac{2}{3}}\delta\chi$· τῆς δὲ $\sqrt[\pi]{\chi^\nu} = \chi^{\frac{\nu}{\pi}}$, τὸ $\frac{\nu}{\pi}\chi^{\frac{\nu}{\pi}-1}\delta\chi$.

16. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.** *Εὑρεῖν τὸ ἀπειροστὸν τοῦ ὑπὸ δύω τρεπτῶν παραγόντων γινομένου* $\chi\upsilon$.

ΛΥΣΙΣ. Πεπολλαπλασιάσθω ὁ πρῶτος παράγων χ ἐπὶ τὸ τοῦ δευτέρου ἀπειροστόν· καὶ εἶτα ὁ δεύτερος υ ἐπὶ τὸ τοῦ πρώτου· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύω γινομένων $\chi\delta\upsilon + \upsilon\delta\chi$ ἔσεται τὸ ἀπειροστὸν τῆς $\chi\upsilon$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν χ μὲν αὐξηθὲν γένηται $\chi+\delta\chi$, τὸ δέ, $\upsilon+\delta\upsilon$, τὸ γινόμενον $\upsilon\chi$ ἔσεται $\overline{\chi+\delta\chi}\times\overline{\upsilon+\delta\chi} = \chi\upsilon + \upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon + \delta\chi\times\delta\upsilon$· ἀλλὰ $\delta\chi\times\delta\upsilon$, γινόμενον ὑπὸ δύω ἀπειροστῶν, ἀπειροστόν ἐστι δευτεροταγὲς (Συμβ. Λογ. 527)· καὶ μηδὲν πρὸς τὰ πρωτοταγῆ $\chi\delta\upsilon$, $\upsilon\delta\chi$ (Συμβ. Λογ. 528), καὶ $\chi\upsilon$ ἐστιν ἡ δοθεῖσα ποσότης· καταλείπεται ἄρα τῆς $\chi\upsilon$ ἀπειροστὸν τὸ $\chi\delta\upsilon + \upsilon\delta\chi$.

Τὸ τῆς $\chi^3\upsilon^2$ ἀπειροστὸν ἔσται $\chi^3\times 2\upsilon\delta\upsilon + \upsilon^2\times 3\chi^2\delta\chi = 2\chi^3\upsilon\delta\upsilon + 3\chi^2\upsilon^2\delta\chi$.

17. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.** Τὸ ἀπειροστὸν τοῦ ὑπὸ τριῶν τρεπτῶν παραγόντων γινομένου $\chi\upsilon\psi$, εὑρεθήσεται, ἐὰν ἕκαστον γινόμενον ὑπὸ δύω παραγόντων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ ἀπειροστὸν τοῦ τρίτου παράγοντος, καὶ εἰς ἓν συναφθῶσιν ἅπαντα τὰ γινόμενα· οὕτως οὖν τοῦ $\chi\upsilon\psi$ ἀπειροστὸν ἔσται τὸ $\chi\upsilon\delta\psi + \chi\psi\delta\upsilon + \upsilon\psi\delta\chi$, καὶ γὰρ $\overline{\chi+\delta\chi}\times\overline{\upsilon+\delta\upsilon}\times\overline{\psi+\delta\psi} = \chi\upsilon\delta\chi + \chi\psi\delta\upsilon + \upsilon\psi\delta\chi$, ἀλογουμένων ἀμέλει τῶν ἡττοταγῶν ἀπειροστῶν.

18. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.** Ἐὰν γινομένῳ τινὶ τῷ $\pi\chi\upsilon$ ἐνυπάρχῃ ποσὸν ἄτρεπτον τὸ π, πεπολλαπλασιάσθω $\pi\chi$ ἐπὶ τὸ ἀπειροστὸν τῆς υ, εἶτα υ ἐπὶ τὸ τῆς $\pi\chi$· ὅθεν ἔσται $\pi\chi\delta\upsilon + \upsilon\pi\delta\chi$· τοῦ γὰρ $\pi\chi$ γινομένου $\pi\chi + \pi\delta\chi$ (11), καὶ υ, $\upsilon+\delta\upsilon$, ἔσται $\overline{\pi\chi+\pi\chi\delta\chi}\times\overline{\upsilon+\delta\upsilon} = \pi\chi\upsilon = \pi\chi\upsilon + \upsilon\pi\delta\chi + \pi\chi\delta\upsilon + \pi\delta\chi\delta\upsilon$· ὅθεν ἀποῤῥιπτέον μέν ἐστι

πάντως ὡς δευτεροταγὲς τὸ $\pi\delta\chi\delta\upsilon$, ἀφαιρετέον δὲ τὸ ἐν ἀρχῇ $\pi\chi\upsilon$.

19. Ἐν γένει δὲ πρὸς εὕρεσιν ἀπειροςȣ̃ ποσότητος τῆς π ἀντεισακτέον ἀντὶ τῶν τρεπτῶν, χ, υ κτ, ἐξ ὧν σύγκειται αὕτη, τας ποσότητας $\chi+\delta\chi$, $\upsilon+\delta\upsilon$, κτ· ᾗ δὴ πορισθήσεται ποσότης ἄλλη, ἥτις κληθήτω Π· τῆς ȣ̃ν π ἀφαιρετέον τὴν π, ἵνα γένοιτο $\Pi-\pi$, ταύτης δὲ τῆς ποσότητος ἀποκοπτέον τȣ̀ς πρὸς ἄλλȣς ὅρȣς μηδὲν γινομένȣς· τὸ δὲ κατάλοιπον ἔςαι τὸ ζητȣ́μενον ἀπειροςὸν $\delta\pi$, ἐλεύθερον τῶν ἀχρήςων ὅρων· ἔςω $\pi=\chi\upsilon$· ἀντικαταςαθέντος ȣ̃ν $\chi+\delta\chi$ ἀντὶ χ, ᾗ $\upsilon+\delta\upsilon$ ἀντὶ υ, πορισθήσεται $\Pi=\chi\upsilon+\upsilon\delta\chi+\chi\delta\upsilon+\delta\chi\delta\upsilon$, ᾗ $\Pi-\pi$ ἔςαι $\chi\upsilon+\upsilon\delta\chi+\chi\delta\upsilon+\delta\chi\delta\upsilon-\chi\upsilon=\upsilon\delta\chi+\chi\delta\upsilon$, παρορωμένȣ τȣ̃ δευτεροταγȣ̃ς $\delta\chi\delta\upsilon$.

Ἐὰν δὲ ταῖς τρεπταῖς συνεζευγμέναι ὦσι ᾗ ἄτρεπτοι, οἷον $\alpha+\chi$, ᾗ $\beta\gamma+\chi\chi$, ἐν τῇ τῶν ἀπειροςῶν λήψει, αἱ ἄτρεπτοι, ἐπείπερ ἀπειροςῶν ἀμοιρȣ̃σι (3), παραλείπονται· ȣ̓κȣ̃ν τῆς μὲν $\alpha+\chi$ ἀπειροςόν ἐςι τὸ $\delta\chi$ τȣ̃ α παρορωμένȣ, τῆς δὲ $\beta\gamma$, τὸ $2\chi\delta\chi$.

20. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Τȣ̃ κλάσματος $\frac{\upsilon}{\chi}$ τὸ ἀπειροςὸν εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπεὶ $\frac{\upsilon}{\chi}=\upsilon\times\frac{1}{\chi}$, καὶ $\frac{1}{\chi}=\chi^{-1}$ (Συμβ. Λογ. 149) ἄρα $\frac{\upsilon}{\chi}=\upsilon\chi^{-1}$· τȣ̃ δὲ $\upsilon\chi^{-1}$ ληφθέντος τȣ̃ ἀπειροςȣ̃ (16), ἔςαι $\upsilon\delta(\chi^{-1})+\chi^{-1}\delta\upsilon$, ᾗ ἑπομένως (12) $\delta(\upsilon\chi^{-1})=-\upsilon\chi^{-2}\delta\chi+\chi^{-1}\delta\upsilon$. Ο. Ε. Π.

21. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αὕτη δὲ ἡ ποσότης δι' ἀναγωγῆς γίνεται $-\frac{\upsilon\delta\chi}{\chi^2}+\frac{\delta\upsilon}{\chi}=\frac{\chi\delta\upsilon-\upsilon\delta\chi}{\chi^2}$,

τἒτ' ἔςι „τὸ παντὸς κλάσματος $(\frac{\upsilon}{\chi})$ ἀπειροςὸν ἴσἒται „τῷ γινομένῳ ὑπὸ τἒ παρονομαςἒ ϗ τἒ κατὰ τὸν ἀριθ„μητὴν ἀπειροςἒ, πλὴν τἒ γινομένἒ ὑπὸ τἒ ἀριθμητἒ, „ϗ τἒ κατὰ τὸν παρονομαςὴν ἀπειροςἒ, διῃρημένῳ διὰ „τἒ ἀπὸ τἒ παρονομαςἒ τετραγώνἒ" ϗ ἕτός ἐςιν ὁ κοινῆ ἀποδιδόμενος κανὼν εἰς εὕρεσιν τῶν κατὰ τὰ κλάσματα ἀπειροςῶν.

22. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Εἰ λαβεῖν προκέοιτο τὸ ἀπειροςὸν τἒ $\alpha\chi^3\upsilon^2$, θεωρητέον τὸ πρῶτον χ^3 ϗ υ^2 ὡς δύω ἁπλᾶς τρεπτὰς ποσότητας· ϗ δὴ εὑρεθήσεται (16, 19) $\delta(\alpha\chi^3\upsilon^2)=\alpha\chi^3\,\delta(\upsilon^2)+\alpha\upsilon^2\delta\,(\chi^3)$· ἑξῆς δὲ (12) $\delta(\alpha\chi^3\upsilon^2)=2\,\alpha\chi^3\upsilon\delta\upsilon+3\,\alpha\upsilon^2\chi^2\,\delta\chi$, ϗ ἐν γένει $\delta(\alpha\chi^\mu\upsilon^\nu)=\alpha\chi^\mu\,\delta(\upsilon^\nu)+\alpha\upsilon^\nu\,\delta(\chi^\mu)=\nu\alpha\chi^\mu\upsilon^{\nu-1}\,\delta\upsilon+\mu\alpha\,\upsilon^\nu\chi^{\mu-1}\,\delta\chi$.

23. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Εἰ δὲ προκέοιτο λαβεῖν τὸ ἀπειροςὸν ποσότητος πολυωνύμἒ, ἧς χωρὶς ἕκαςον μέρος ὑψῶτο εἰς ἕνα τινὰ βαθμὸν, εἰλήφθω χωρὶς ἑκάςἒ ὅρἒ τὸ ἀπειροςόν· ἔτω $\delta\,(\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi\upsilon)=3\alpha\chi^2\,\delta\chi^2\,\delta\chi+\gamma\chi\delta\upsilon+\gamma\upsilon\delta\chi$· ὡσαύτως $\delta\,(\alpha\chi^2+\beta\chi+\frac{\gamma\upsilon}{\chi^2})=\delta\,(\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma\chi^{-2}\upsilon)=2\alpha\chi\delta\chi+\beta\delta\chi-2\gamma\chi^{-3}\upsilon\delta\chi+\gamma\chi^{-2}\,\delta\upsilon$· ὁμοίως $\delta(\chi^3\upsilon+\alpha\upsilon^2+\beta3)=3\chi^2\upsilon\delta\chi+\chi^3\delta\upsilon+2\alpha\upsilon\delta\upsilon$, τἒ $\beta3$ ὡς ποσότητος ἀτρέπτἒ ἀπειροςὸν ἐδὲν ὅλως ἔχοντος (19).

24. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δʹ. Ποσότητος πολυωνύμε εἰς βαθμὸν ὑψωμένης εὑρεῖν τὸ ἀπειροςόν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω τοιάδε ποσότης ἡ $(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2)^5$· θεωρείσθω ἐν αὐτῃ, ὡς εἰ ἦν μία μόνη τρεπτὴ, ἧς εἰλήφθω τὸ ἀπειροςὸν κατὰ τὸν ἀποδοθέντα κανόνα (12)· τοιγαρῦν ἔςαι $\delta(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2)^5 = 5(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2)^4 \times \delta(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2) = 5(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2)^4 \times (\beta\delta\chi + 2\gamma\chi\delta\chi)$· ὡσαύτως $\delta(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{2}{3}} \times \delta(\alpha+\beta\chi^2) = \frac{5}{3}(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{2}{3}} \times 2\beta\chi\delta\chi = \frac{10}{3}\beta\chi\delta\chi(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{2}{3}}$. Ο. Ε. Π.

25. ΣΧΟΛΙΟΝ Αʹ. Ἐὰν δὲ πολυώνυμος ἐσα ἡ ποσότης συγκέηται ϰ᾽ ἐκ διαφόρων ποιητῶν, θεωρητέον ἕκαςον ποιητὴν ὡς ἁπλῦν ποσὸν τρεπτὸν, ϰ᾽ χρηςέον τῷ ἀποδοθέντι κανόνι (16)· ἔτω τὴν $\chi^3(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}$ ἐκδεκτέον ὡς σύνθετον ἐκ δύω ποιητῶν χ^3 ϰ᾽ $(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}$· ϰ᾽ δὴ ἔςαι $\delta\left(\chi^3(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}\right) = (\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}\delta(\chi^3) + \chi^3\,\delta(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}$, ὅπερ ἐκ τῶν ἤδη ἐκτεθειμένων κανόνων γίνεται $3\chi^2\delta\chi(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}} + \frac{10}{3}\beta\chi^4\delta\chi(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{2}{3}}$. ὡσαύτως $\delta\left(\frac{(\chi+\alpha)^3}{(\chi+\beta)^2}\right) = \delta((\chi+\alpha^3)\times(\chi+\beta)^{-2}) = (\chi+\alpha)^3\delta(\chi+\beta)^{-2} + (\chi+\beta)^{-2}\delta(\chi+\alpha)^3$, ταὐτὸν εἰπεῖν $= -2(\chi+\alpha)^3(\chi+\beta)^{-3}\delta\chi + 3(\chi+\beta)^{-2}(\chi+\alpha)^2\delta\chi$, ὅπερ τρέπεται εἰς $-\frac{2(\chi+\alpha)^3\delta\chi}{(\chi+\beta)^3}$

$+\dfrac{3(\chi+\alpha)^2\,\delta\chi}{(\chi+\beta)^2}$, καὶ ἀνάγεται εἰς

$$\frac{(\chi+3\beta-2\alpha)(\chi+\alpha)^2\,\delta\chi}{(\chi+\beta)^3}.$$

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἐὰν δὲ ῥιζικὰ πολυώνυμα προκέωνται εἰς τὸ εὑρεῖν αὐτῶν τὰ ἀπειροστὰ, ἐκ τῶν (15) καὶ τῶν ἤδη ἐκτεθειμένων κανόνων ἐπιτηδευθήσεται αὐτῶν ἡ εὕρεσις· οὕτω $\delta(\sqrt{\alpha\alpha-\chi\chi}) = \delta(\alpha\alpha-\chi\chi)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}\,\delta(\alpha\alpha-\chi\chi) = -\chi\delta\chi\,(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{-\chi\,\delta\,\chi}{\sqrt{\alpha\alpha-\chi\chi}}$· καὶ ἐν γένει $\delta(\chi^{\mu}\sqrt[\kappa]{((\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi})}) = \delta[\chi^{\mu}(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\frac{\pi}{\kappa}}] = \chi^{\mu}\,\delta(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\frac{\pi}{\kappa}} + (\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\frac{\pi}{\kappa}}\,\delta(\chi^{\mu}) = \dfrac{\pi\nu\beta}{\kappa}\chi^{\mu+\nu-1}\,\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\frac{\pi}{\kappa}-1} + \mu\chi^{\nu-1}\,\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\frac{\pi}{\kappa}}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ ἀπειροστῶν δευτέρων, τρίτων κτ.

26. Παρὰ τὰ ἤδη θεωρηθέντα ἡμῖν, ἃ καλεῖται πρῶτα ἀπειροστὰ, εἰς θεωρίαν ὑπάγονται καὶ δεύτερα, καὶ τρίτα κτ. προτάττουσι δὲ τῆς τρεπτῆς ποσότητος δύω μὲν δ, εἰ περὶ δευτέρου, τρία δὲ, εἰ περὶ τρίτου, λόγος γίνεται, καὶ ἑξῆς ὁμοίως· οὕτω $\delta\delta\chi$ ἐμφαίνει τῆς χ τὸ δεύτερον ἀπειροστόν.

27. Τῶν ἀπειροςῶν τὰ δεύτερα ἀνασκοπῶσιν ἐκληπτέον τὰς τρεπτὰς ποσότητας κατὰ βαθμὸς ἀνίσους, ὧν μέντοι ἡ διαφορὰ ἀπειροςήτις τυγχάνει, παρατιθεμένη αὐτοῖς τοῖς αὐξήμασιν· οὕτω δδχ ἀπειροςή ἐςι, τῇ δχ παραβαλλομένη· ὡσαύτως ἐν τοῖς τρίτοις δδδχ, ἡ $\delta^3\chi$ (ἑκατέρως γὰρ σημαίνεται) ἀπειροςήτις ἐςὶ, τῇ δδχ παρατιθεμένη, καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

28. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Εἰς δήλωσιν τοῦ ἀπὸ δχ τετραγώνου γραπτέον πάντως $(\delta\chi)^2$· ἁπλούςερον μέντοι ἐκθετέον $\delta\chi^2$, ὃ ἥκιςα δήπου δηλοῖ τὸ τοῦ χ^2 ἀπειροςὸν, ὅπερ εἰώθαμεν σημειοῦν οὕτω· $\delta(\chi^2)$· ἰςέον δὲ ὡς καίτοι δδχ, καὶ $\delta\chi^2$ ἀπειροςὰ δευτεροταγῆ ἐμφαίνουσιν· οὐκ ἔςι μέντοι $\delta\delta\chi = \delta\chi^2$· τὸ μὲν γὰρ δδχ ἔςιν ἀπειροςὸν δεύτερον τοῦ χ· τὸ δὲ $\delta\chi^2$ ἔςι τὸ ἀπὸ δχ τετράγωνον.

29. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Β΄. Ἵνα δὲ διορισθείη τὸ δεύτερον ἀπειροςὸν, ὅ,τι δήποτ' ἐςὶ φυσικῶς, θεωρητέον τὴν τρεπτὴν ποσότητα ἐν τρισὶν ἀλληλοδιαδόχοις προσεχεςάταις καταςάσεσι, καὶ ληπτέον τὸ ἀπειροςὸν τῆς δευτέρας, ᾧ διαφέρει τῆς πρώτης, καὶ τὸ τῆς τρίτης, ᾧ διαφέρει τῆς δευτέρας· καὶ τελευταῖον τὴν διαφορὰν, ᾗ τοῦ πρώτου διαφέρει τὸ δεύτερον ἀπειροςόν· οὕτω πρώτη μὲν κατάςασις τῆς χ, ἔςι χ· δευτέρα δὲ αὐξηθεῖσα τῷ δχ ἔςι $\chi+\delta\chi$· αὕτη δὲ πάλιν προσηυξήσθω τῇ ποσότητι $\delta\chi+\delta(\delta\chi)$· τοιγαροῦν αἱ τρεῖς ἀλληλοδιάδοχοι τῆς χ καταςάσεις εἰσὶ, χ, $\chi+\delta\chi$, $\chi+2\delta\chi+\delta(\delta\chi)$· ἔςιν ἄρα ἡ τῆς δευτέρας ὑπὲρ τὴν πρώτην διαφορὰ δχ· ἡ δὲ τῆς τρίτης ὑπὲρ τὴν δευτέραν, $\delta\chi+\delta(\delta\chi)$· τέλος δὲ ἡ διαφορὰ τῶν δύω τούτων ἀπειροςῶν, εἴτ' οὖν τῆς χ τὸ δεύτερον ἀπειροςὸν, ἔςι $\delta(\delta\chi)$· ἄρα $\delta\delta\chi = \delta(\delta\chi)$· ἵν' οὖν τὰ δεύτερα εὑρίσκωμεν ἀπειροςὰ, ἐπάναγ-

κες λαμβάνειν τῶν πρώτων ἀπειροστῶν τὰ ἀπειροστὰ κατὰ τοὺς προαποδοθέντας κανόνας.

30. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** *Εὑρεῖν τὰ δεύτερα ἀπειροστὰ τῆς* $\chi\upsilon$ *ποσότητος.*

ΛΥΣΙΣ. *Τὰ μὲν πρῶτα ταύτης εἰσὶ* (16) $\chi\delta\upsilon + \upsilon\delta\chi$· *τούτων οὖν αὖθις εἰλήφθω τὰ ἀπειροστὰ, ὡς εἴπερ* χ *καὶ* $\delta\chi$, υ *καὶ* $\delta\upsilon$ *εἶεν ἁπλῶς ποσότητες τρεπταί· ἑκατέρου οὖν ὅρου, ὡς ἐκ δύω ποιητῶν παραγομένου, δύω παρέχοντος ὅρους* (16), *τὰ ἀμφοτέρων ἀπειροστὰ ἔσονται* $\chi\delta\delta\upsilon + \delta\upsilon\delta\chi + \delta\upsilon\delta\chi + \upsilon\delta\delta\chi$, *εἴτ' οὖν* $\chi\delta\delta\upsilon + 2\delta\upsilon\delta\chi + \upsilon\delta\delta\chi$.

31. **ΠΟΡΙΣΜΑ.** *Ὡσαύτως τὸ δεύτερον ἀπειροστὸν τοῦ* χ^2 *εὑρεθήσεται λαμβάνουσι πρῶτον τὸ πρῶτον αὐτοῦ ἀπειροστὸν* $2\chi\delta\chi$· *ἑξῆς δὲ τούτου, ἐκληφθέντων τοῦτε* χ *καὶ τοῦ* $\delta\chi$, *ὡς εἰ ἦσαν ποσὰ τρεπτὰ, κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον τὸ ἀπειροστὸν* $2\chi\delta\delta\chi + 2\delta\chi^2$ · *ὡσαύτως* $\delta\delta(\alpha\chi^{\mu}) = \delta(\mu\alpha\chi^{\mu-1}\,\delta\chi) = \mu\cdot(\mu-1)\,\alpha\chi^{\mu-2}\,\delta\chi^2 + \mu\alpha\chi^{\mu-1}\,\delta\delta\chi$ (*)· *εἰ δὲ προκέοιτο εὑρεῖν τὰ ἀπειροστὰ ποσοτήτων, αἷς ἔνεστι πρῶτα ἀπειροστά· εἴτ' ἐξ ἀκριβοῦς, εἴτε καὶ μὴ, προελθόντα πράξεως, τῇ αὐτῇ αὖθις χρηστέον μεθόδῳ· οὕτω* $\delta(\chi\delta\upsilon) = \chi\delta\delta\upsilon + \delta\chi\delta\upsilon$· *ὡσαύτως* $\delta\left(\frac{\delta\upsilon}{\chi}\right) = \delta$

(*) *Εὐλόγως ἄντις ἐνταῦθα διαπορήσειεν· εὑρισκομένων γὰρ τῶν πρώτων ἀπειροστῶν, παρορῶνται αἱ ἀπειροσταὶ δευτεροταγεῖς ποσότητες· ἀλλ' ἐπείπερ καὶ τὰ δεύτερα δευτεροταγεῖς εἰσιν ἀπειροσταὶ ποσότητες, μὴ, παρορῶντες ταῦτα ἐν τῇ ἐκτιμήσει τῶν πρώτων, τὰ δεύτερα ἐλλείποντα ἀπεργασώμεθα; οὐ μὰ Δία· τὸ γὰρ παροραθὲν δευτεροταγὲς ἀπειροστὸν ἐν τῇ λήψει τῶν δευτέρων συνεισενεγκεῖν δύναται ἀπειροστὸν τριτοταγὲς, ὅπερ παρατιθέμενον τῷ δευτέρῳ, ἐπείπερ τοῦτ' ἔστιν ἀπειροστὸν δευτεροταγὲς, παρορᾶται, ἴσον τῷ μηδενὶ ἐκλαμβανόμενον.*

$(\chi^{-1}\,\delta\upsilon) = -\,\chi^{-2}\,\delta\chi\delta\upsilon + \chi^{-1}\,\delta\delta\upsilon$· ὡσαύτως

$$\delta\left(\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}\right) = \delta\left(\delta\chi\delta\upsilon^{-1}\right) = \delta\delta\chi\,\delta\upsilon^{-1} - \delta\chi\delta\upsilon^{-2}\,\delta\delta\upsilon = \frac{\delta\delta\chi}{\delta\upsilon} - \frac{\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\upsilon^{2}}.$$

32. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Συχνάκις τοῖς λογισμοῖς, οἷς εἰσέρχονται πολλαὶ τρεπταὶ, συμβαίνει ὑποτίθεσθαι ἄτρεπτον τὸ πρῶτον ἀπειροστὸν μιᾶς τῶν τρεπτῶν ποσοτήτων· τουτὶ δὲ συγχωρηθὲν (ἀεὶ γάρ τις ἔχει ἐκδέξασθαι ἓν τῶν πρώτων ἀπειροστῶν ὡς ὅρον μόνιμον παραθέσει πρὸς τ' ἄλλα πρῶτα) ἁπλουστέρους ἀπεργάζεται τοὺς λογισμούς· οἱ γὰρ, οἷς συμπέπλεκται τὸ ταύτης τῆς τρεπτῆς δεύτερον ἀπειροστὸν, ὅροι τοῦ λογισμοῦ ἐξαφανίζονται· τοῦ γὰρ $\delta\chi$ ἀτρέπτου ὑποτεθέντος, ἔσται $\delta\delta\chi = 0$, ὅπερ σβέννυσι πάντας τοὺς ὅρους, οἷς ἐνυπάρχει τὸ $\delta\delta\chi$··· δεῖ δὲ προσοχῆς ἐνταύτῃ τῇ περιπτώσει, ἵνα μηδὲν λαμβάνηται ἀπειροστὸν τοῦ $\delta\chi$ (εἴτ' οὖν τῆς ὡς ἀτρέπτου λαμβανομένης ποσότητος), ἐνθ' ἂν ἀπαντᾷ ὁ ὅρος οὗτος, τοιγαροῦν τὸ ἀπειροστὸν τοῦ $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$, τοῦ μὲν $\delta\chi$ ἀτρέπτου ὑποτεθέντος, εἴτ' οὖν τὸ τοῦ $\delta(\delta\chi\delta\upsilon^{-1})$, ἔστι $-\,\delta\chi\delta\upsilon^{-2}\,\delta\delta\upsilon$, εἴτ' οὖν $-\,\frac{\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\upsilon^{2}}$, τοῦ δὲ $\delta\upsilon$ ἀτρέπτου ληφθέντος, ἔστι $\frac{\delta\delta\chi}{\delta\upsilon}$.

33. ΣΧΟΛΙΟΝ. Καὶ τὰ τρίτα δὲ, ὥσπερ τάτε πρῶτα ϗ δεύτερα, εὑρίσκονται, ἐκλαμβανομένων ἀμέλει τῶν τε πρώτων, ϗ δευτέρων οἷα ἁπλῶς τρεπτῶν ποσοτήτων· ὡσαύτως δὲ ἐπιτηδευθήσεται ϗ τῶν ἔτι ὑπερτέρων

ἀπειροστῶν ἡ εὕρεσις· παρατηρητέον μέντοι, ἵν' ἐν τῇ διελεύσει ἀπὸ τῶν πρώτων ἐπὶ τὰ δεύτερα, ἑνὸς ἅπαξ ἀπειροστοῦ ὡς ἀτρέπτου ληφθέντος, διατηρῆται ὡσαύτως ἄτρεπτον διὰ πασῶν ἐφεξῆς τῶν πράξεων.

34. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὑπεθέμεθα μὲν ἐν τοῖς φθάσασι πάσας τὰς τρεπτὰς χ, υ, κτ ἅμα αὐξούσας, εἶτ' οὖν τῆς χ γινομένης $\chi + \delta\chi$, τὴν υ ἀποτελεῖσθαι $\upsilon + \delta\upsilon$, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὡσαύτως· συμβαίνει μέντοι τινῶν αὐξομένων, τὰς ἄλλας μειοῦσθαι· τηνικαῦτα τοίνυν μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἀπειροστῶν ἀπονέμειν ἀνάγκη τὸ σύμβολον $-$ τῇ μειουμένῃ ποσότητι· ἢ γοῦν δυνάμεθα ἐᾶν τὰ ἀπειροστὰ, οἷα προῆλθον ἐκ τῶν ἀποδεδομένων κανόνων· ἐφαρμόζοντες μέντοι ταῦτα ζητήματί τινι, λαμβάνειν ὀφείλομεν λειπτικῶς τὴν ποσότητα, ἣ ἔνεστι τὸ τῆς μειουμένης τρεπτῆς ποσότητος ἀπειροστόν· εἰ γὰρ ἡ υ μειοῦται τῇ ποσότητι κ, ἐν δὲ τῷ λαμβάνειν αὐτῆς τὸ ἀπειροστὸν ὑποτεθῇ υ γινομένη $\upsilon + \delta\upsilon$· ἔστιν ἄρα $\upsilon - \kappa = \upsilon + \delta\upsilon$, εἶτ' οὖν $-\kappa = \delta\upsilon$, ἢ γοῦν $\kappa = -\delta\upsilon$· οὕτως οὖν πανταχοῦ τηνικαῦτα τεθήσεται $-\delta\upsilon$ ἀντὶ $+\delta\upsilon$· ἐν τοῖς ἐφεξῆς δὲ ὀψόμεθα τούτου παραδείγματα· ὡσαύτως δὲ κἀπὶ τῶν δευτέρων ἀπειροστῶν· τοῦ γὰρ πρώτου ἀπειροστοῦ μειουμένου, τὸ μὲν δεύτερον, ὡς ἔθος, ληψόμεθα, ἐν δὲ τῇ ἐφαρμογῇ ζητήματός τινος χρησόμεθα τῷ $-\delta\delta\chi$ ἀντὶ $+\delta\delta\chi$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῶν κατὰ τὰ ἡμίτονα, συνημίτονα κτ. ἀπειροςῶν.

35. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.** *Εὑρεῖν τὸ ἀπειροςὸν τȣ͂ ἡμιτόνȣ τῆς γωνίας, ἢ τȣ͂ τόξȣ* ψ.

ΛΥΣΙΣ. *Γενέσθω ἡ γωνία* ψ, $\psi + \delta\psi$· *καὶ δὴ τηνικαῦτα* $\text{ἡμ.}(\psi+\delta\psi) - \text{ἡμ}\cdot\psi$ *ἔςαι τὸ ἀπειροςὸν τȣ͂ ἡμιτόνȣ τῆς* ψ· *ἀλλὰ* (Γεωμ. 507)· $\text{ἡμιτ.}\ (\psi+\delta\psi) = \text{ἡμ.}\ \psi \times \text{συνημ}\ \delta\psi + \text{ἡμ.}\ \delta\psi \times \text{ἡμ.}\ \psi$, *ὑποτιθεμένης τῆς ἀκτῖνος* $= 1$· *ἔςι δὲ, τȣ͂ μὲν ἀπειροςȣ͂ τόξȣ* $\delta\psi$ *ἡμίτονον αὐτὸ τὸ τόξον* $\delta\psi$, *αὐτȣ͂ δὲ τέτȣ τὸ συνημίτονον ἐδὲν ὅλως διαφέρει τῆς ἀκτῖνος*· *ἄρα* $\text{ἡμ.}\ \delta\psi = \delta\psi$, *καὶ* $\text{συνημ.}\ \delta\psi = 1$· *ἄρα* $\text{ἡμ}\ (\psi+\delta\psi) = \text{ημ.}\ \psi + \delta\psi \times \text{συνημ.}\ \psi$· *ἄρα* $\text{ἡμ}\ (\psi+\delta\psi) - \text{ἡμ.}\ \psi = \delta\ (\text{ημ.}\ \psi) = \delta\psi \times \text{συνημ.}\ \psi$, *τȣ͂τ᾽ ἔςι* „*τὸ ἀπειροςὸν ἡμιτόνȣ γωνίας,* „*ἢ τόξȣ, ἧς ἡ ἀκτὶς ὑποτίθεται* $= 1$, *εὑρίσκεται, πολλα-* „*πλασιαζομένȣ τȣ͂ ἀπειροςȣ͂ τῆς γωνίας ἐπὶ τὸ συνημίτονον αὐτῆς.*"

36. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.** *Εὑρεῖν τὸ ἀπειροςὸν τȣ͂ συνημιτόνȣ γωνίας, ἢ τόξȣ* ψ.

ΛΥΣΙΣ. *Ἔςαι δὴ τὸ ζητέμενον* $\delta\ (\text{συνημ.}\ \psi) = \text{συνημ}\ (\psi+\delta\psi) - \text{συνημ.}\ \psi = \text{συνημ.}\ \psi \times \text{συνημ.}\ \delta\psi - \text{ἡμ.}\ \psi \times \text{ἡμ.}\ \delta\psi - \text{συνημ.}\ \psi$· *καὶ γὰρ* (Γεωμ. 508) $\text{συνημ.}\ (\psi+\delta\psi) = \text{συνημ.}\ \psi \times \text{συνημ.}\ \delta\psi - \text{ἡμ.}\ \psi \times \text{ἡμ.}\ \delta\psi$· *ἐπεὶ ȣ͂ν* $\text{ἡμ.}\ \delta\psi = \delta\psi$, *καὶ* $\text{συνημ}\ \delta\psi = 1$· *ἄρα* $\delta(\text{συνημ.}\ \psi) = \text{συνημ}\ \psi - \delta\psi \times \text{ἡμ}\ \psi - \text{συνημ.}\ \psi$

$= - \delta\psi \times$ ἡμ. ψ, τȣτ' ἐςὶ „τὸ ἀπειροςὸν συνημιτόνȣ γωνίας, ἧς ἡ ἀκτὶς ὑποτίθεται $= 1$, εὑρίσκεται, πολλαπλασιαζομένȣ τȣ͂ ἀπειροςȣ͂ τῆς γωνίας (λειπτικῶς μέντοι λαμβανομένȣ) ἐπὶ τὸ ἡμίτονον αὐτῆς."

37. ΣΧΟΛΙΟΝ Τῶν ȣ͂ν ἐκτεθέντων δυοῖν προβλημάτων, τȣ͂ μὲν τὴν λύσιν ἐμφαίνει ὁ τύπος $\delta($ἡμ.$\psi)$ $= \delta\psi \times$ συνημ. ψ· τȣ͂ δὲ δευτέρȣ, ὁ $\delta\,($συνημ. $\psi) = -$ $\delta\psi \times$ ἡμ. ψ· τȣ́τας δὲ τοῖς δυσὶ τύποις χειραγωγȣ́μενοι εὑρεῖν δυνάμεθα τὰ ἀπειροςὰ ἁπάσης ποσότητος συγκειμένης ἐξ ἡμιτόνων ϗ συνημιτόνων, παραλαμβάνοντες εἰς τȣ͂το ϗ τȣ̀ς προαποδοθέντας κανόνας· ȣ῞τως εἰς εὕρεσιν τȣ͂ ἀπειροςȣ͂ τȣ͂ συνημ. 3ψ, πορισθήσεται $\delta($συνημ. $3\psi) = - 3\delta\psi$ $\times$ ἡμ. 3ψ· ὡσαύτως $\delta($συνημ. $\mu\psi)$ (τȣ͂ μ ἐμφαίνοντος ἀριθμὸν ἄτρεπτον) $= - \mu\delta\psi \times$ ἡμ. $\mu\psi$, ϗ $\delta($ἡμ.$\mu\psi) =$ $\mu\delta\psi \times$ συνημ. $\mu\psi$· ὁμοίως $\delta($ἡμ.$\psi \times$ συνημ. $\tau) =$ συνημ. $\tau \times \delta\,($ἡμ $\psi) +$ ημ. $\psi \times \delta\,($συνημ. $\tau) = \delta\psi \times$ συνημ. $\tau \times$ συνημ. $\psi - \delta\tau \times$ ἡμ. $\psi \times$ ἡμ. τ· ϗ $\delta($ἡμ. $\psi)^{\mu} =$ $\mu\,($ἡμ. $\psi)^{\mu-1}\,\delta\,($ἡμ. $\psi) = \mu\delta\psi \times$ συνημ. ψ $($ἡμ. $\psi)^{\mu-1}$.

38. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Εὑρεῖν τὸ ἀπειροςὸν τῆς ἁπτομένης γωνίας τῆς ψ.

ΛΥΣΙΣ. Τῆς ἀκτῖνος ὑποτιθεμένης $= 1$ ἡ ἁπτομένη τῆς γωνίας ψ ἔςαι $\chi\ \dfrac{\text{ἡμ.}\,\psi}{\text{συνημ.}\,\psi}$ (Γεωμ. 502)· ἔςαι ἄρα $\delta\Big(\dfrac{\text{ἡμ.}\,\psi}{\text{συνημ.}\,\psi}\Big) = ((\text{ἡμ}\ \psi)\ (\text{συνημ.}\ \psi)^{-1}) =$ $\delta\psi \times$ συνημ$\psi = ($συνημ. $\psi)^{-1} + \delta\psi \times ($ημ. $\psi)^{2} \times$ $(\text{συνημ.}\ \psi)^{-2} = \dfrac{\delta\psi \times \text{συνημ.}\,\psi}{\text{συνημ.}\,\psi} + \dfrac{\delta\psi(\text{ἡμ.}\,\psi)^2}{(\text{συνυμ.}\,\psi)^2} =$

$$\frac{\delta\psi \times (\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \psi)^2 + \delta\psi \times (\acute{\eta}\mu.\ \psi)^2}{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \psi)^2} = \frac{\delta\psi}{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \psi)^2}\cdot$$ ἐπεὶ γὰρ $(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \psi)^2 + (\acute{\eta}\mu.\ \psi)^2 = 1$· εἴγε ἡ ἀκτὶς ὑποτείνει ὀρθὴν γωνίαν, τὴν περιεχομένην ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου· τοῦτ' ἔςι „τὸ ἀπειροςὸν ἀ„πτομένης γωνίας, ἧς ἡ ἀκτὶς ὑποτίθεται $= 1$, ἐςὶν ἴσον „τῷ πηλίκῳ τῷ προϊόντι ἐκ τῆς διαιρέσεως τῦ ἀπειροςῦ „ταύτης τῆς γωνίας, διαιρεθέντος διὰ τῦ τετραγώνυ τῦ „ἀπὸ τῦ συνημιτόνυ αὐτῆς.“

30. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ ἄρα ἀπειροςὸν ἁπάσης γωνίας ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ ἀπειροςῦ τῆς ἀπτομένης αὐτῆς καὶ τῦ ἀπὸ τῦ συνημιτόνυ τετραγώνυ· ἐπεὶ γὰρ $\delta\left(\frac{\acute{\eta}\mu.\ \psi}{\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \psi}\right)$, εἴτ' οὖν $\delta\,(\acute{\alpha}\pi.\psi) = \frac{\delta\psi}{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \psi)^2}$, ἄρα $\delta\psi = (\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \psi)^2 \times \delta\,(\acute{\alpha}\pi.\ \psi)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Τὸ ἀπειροςὸν τῆς συναπτομένης γωνίας τῆς ψ εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ συναπτομένη γωνίας τῆς ψ ἐςὶ (Γεωμ. 502) $= \frac{\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \psi}{\acute{\eta}\mu.\ \psi}$· ἔςω οὖν συνημ. $\psi = \chi$, καὶ ἡμ. $\psi = \upsilon$. ἐκοῦν ἔςαι $\delta\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \psi}{\acute{\eta}\mu.\ \psi}\right) = \delta\left(\frac{\chi}{\upsilon}\right) = \frac{\upsilon\delta\chi - \chi\delta\upsilon}{\upsilon^2}$

$$(20) = \frac{-\delta\psi \times (\eta\mu.\ \psi)^2 - \delta\psi \times (\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \psi)^2}{(\eta\mu.\ \psi)^2} =$$

$$\frac{-\delta\psi \times ((\acute{\eta}\mu.\ \psi)^2 + (\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \psi)^2)}{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \psi^2)} = \frac{-\delta\psi}{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \psi)^2},$$

ἐπεὶ, ὃ καὶ ἀνωτέρω εἴρηται, $(\acute{\eta}\mu.\ \psi)^2 + (\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \psi)^2 = 1$. „Τὸ ἄρα ἀπειροςὸν συναπτομένης γωνίας τινὸς, ἧς ἡ „ἀκτὶς ὑποτίθεται $= 1$, ἐξισῦται τῷ πηλίκῳ τῦ τῆς αὐ-

„τῆς γωνίας ἀπειροςῦ (λειπτικῶς μέντοι λαμβανομένυ), „διαιρεθέντος διὰ τῦ τετραγώνυ τῦ ἀπὸ τῦ ἡμιτόνυ ταύ„της τῆς γωνίας.“

41. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὴν δέ γε χρῆσιν τῶν δε τῶν ἀπειροςῶν τρανῶς εἰσόμεθα προϊόντες ἐπὶ τὰ πρόσθεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ λογαριθμικῶν ἀπειροςῶν.

42. Λογάριθμοί εἰσιν, ἧπερ εἴρηται ἐν τῷ συμβολικῷ λογισμῷ (313), σειρὰ ἀριθμῶν κατὰ πρόοδόν τινα ἀριθμητικὴν προϊῦσα, ἧς ἕκαςος ὅρος ἀντιςοιχεῖ ἑκάςῳ ὁμοταγεῖ ὅρῳ σειρᾶς, κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν προϊούσης· ἔςωσαν ὧν υ καὶ υ' ὅροι προσεχεῖς προόδυ γεωμετρικῆς, ἧς, πηλίκον μέν ἐςι π, πρῶτοι δὲ ὅροι οἱ α, α'. ἔςωσαν δὲ ἢ χ, χ' ὅροι προσεχεῖς προόδυ ἀριθμητικῆς, ἧς β, β' εἰσὶν οἱ δύω ἀρκτικοὶ ὅροι· ὑποτεθείσθωσαν δὲ οἱ χ, χ' τὰς αὐτὰς κατέχειν χώρας ἐν τῇ ἀριθμητικῇ προόδῳ, ἃς ἢ οἱ υ, υ' ἐν τῇ γεωμετρικῇ· τοιγαρῶν οἱ χ, χ' εἰσὶ λογάριθμοι τῶν υ, υ'· κατὰ τοίνυν τὴν ἰδιότητα τῆς γεωμετρικῆς προόδυ (Συμβ Λογ. 227) ἔςιν $\upsilon' = \upsilon\pi$, ἢ $\alpha' = \alpha\pi$· ἀντικαταςαθείσης δὲ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει τῆς τῦ π δυνάμεως, θηρευομένης ἐκ τῆς δευτέρας, ἔςαι $\upsilon' = \frac{\alpha'\upsilon}{\alpha}$, εἴτ' ὧν $\frac{\upsilon'}{\upsilon} = \frac{\alpha'}{\alpha}$· ὑποτεθείσθω ἤδη ἡ τῶν υ', υ διαφορὰ $= \psi$, εἴτ' ὧν $\upsilon' = \upsilon + \psi$· πορισθήσεται τοίνυν $\frac{\upsilon+\psi}{\psi}$, ἢ $1 + \frac{\psi}{\upsilon} = \frac{\alpha'}{\alpha}$, ἢ ἑπομέ-

γως $\frac{\psi}{\upsilon} = \frac{\alpha'}{\alpha} - 1 = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha}$, καὶ δὴ $\frac{\alpha\psi}{\upsilon} = \alpha' - \alpha$· ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ἰδιότητος ἐςι $\chi' - \chi = \beta' - \beta$ (Συμϐ. Λογ. 192).

43. Πρὸς εὕρεσιν δὲ τȣ̃ πρὸς ἀλλήλας λόγȣ τῶν δύω τȣ́των προόδων, ὑποθώμεθα τὴν διαφορὰν $\alpha' - \alpha$ τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς πρώτης λόγον ἔχειν πρὸς τὴν διαφορὰν $\beta' - \beta$ τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς δευτέρας, ὃν ἡ μονὰς πρὸς ἀριθμόν τινα μ, τȣ̃τ' ἔςιν $\alpha' - \alpha : \beta' - \beta :: 1 : \mu$, ὅθεν $\mu\,(\alpha' - \alpha) = \beta' - \beta$· ἐν ταύτῃ δὲ τῇ ἐσχάτῃ ἐξισώσει ἀντικαθιςάντες ἀντὶ $\alpha' - \alpha$, καὶ $\beta' - \beta$ τὰς ἀνωτέρω εὑρημένας αὐτῶν δυνάμεις, ἕξομεν $\frac{\mu\alpha\psi}{\upsilon} = \chi' - \chi$, ἐξίσωσιν, ἥτις ἐν γένει παρίςησι τὸν ἁπάσης γεωμετρικῆς προόδȣ πρὸς πᾶσαν αὐτῇ συςοιχȣ̃σαν ἀριθμητικὴν πρόοδον λόγον.

44. Ἐπινοήσωμεν ἤδη ἑκατέρας προόδȣ τȣ̀ς ὅρȣς ἀπείρως προσεχεῖς ἀλλήλων· ȣ̓κȣ̃ν ψ, ὃ ἐμφαίνει τὴν διαφορὰν τῶν υ', υ, ἔσεται $= \delta\upsilon$, καὶ $\chi' - \chi$, ὃ δηλοῖ τὴν τῶν χ', χ διαφορὰν, ἔςαι $= \delta\chi$· ἐντεῦθεν ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα ἐξίσωσις μεταϐάλλει εἰς $\frac{\mu\alpha\delta\upsilon}{\upsilon} = \delta\chi$· τὸ δὲ μ, ὃ παρίςησι τὸν λόγον τῆς διαφορᾶς τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδȣ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς, ȣ̓δὲν ἧττον ἔςαι ἀριθμὸς πεπερασμένος, καίτοι ἀπειροςῶν ȣ̓σῶν τῶν διαφορῶν· εἴγε δυεῖν ἀπειροςῶν ποσοτήτων ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν περιέχειν δύναται, ὁσάκις καὶ πεπερασμένη πεπερασμένην ποσότητα (9).

45. Ἡ ἄρα ἐξίσωσις $\frac{\mu \alpha \delta \upsilon}{\upsilon} = \delta \chi$ τρανῶς ἐκδιδάσκει, ὅτι τὸ ἀπειροστὸν δχ λογαρίθμου ἀριθμοῦ παντὸς, ἐμφαινομένου διὰ υ, ἰσοῦται τῷ ἀπειροστῷ δυ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, διαιρεθέντι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ υ, καὶ πολλαπλασιασθέντι ἐπί τε τὸν πρῶτον ὅρον α τῆς εἰς βάσιν ὑποτεθείσης γεωμετρικῆς προόδου, καὶ τὸν ἀριθμὸν μ, ὃς ἐμφαίνει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ διαφορὰ τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς· τοῦ δὲ ἀριθμοῦ μ ὁρισθέντος, ὁ λόγος τῶν δύω προόδων καλεῖται μέτρον (module).

46. Δῆλον ἄρα, ὅτι κατὰ τὴν ὑποτιθεμένην δύναμιν τοῦ μ καὶ τοῦ πρώτου ὅρου α τῆς γεωμετρικῆς προόδου, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς υ διαφόρους λογαρίθμους ἔχειν δύναται· ἀλλὰ γὰρ πάντων, ὡς εἰπεῖν, τῶν λογαριθμικῶν συστημάτων εὐχρηστότερον ὑπάρχει ἐν τοῖς συμβολικοῖς λογισμοῖς, ὅπερ ὁ μὲν πρῶτος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἐστὶ 1, τὸ δὲ μέτρον καὶ αὐτὸ 1· τηνικαῦτα δὲ ἡ γενικὴ πάντων τῶν λογαριθμικῶν συστημάτων ἐξίσωσις $\frac{\mu \alpha \delta \upsilon}{\upsilon} = \delta \chi$ γίνεται $\frac{\delta \upsilon}{\upsilon} = \delta \chi$.

47. Ἐν ἄρα τῷ λογαριθμικῷ συστήματι, ᾧ χρώμεθα ἐν ταῖς διὰ τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ πράξεσι, τὸ ἀπειροστὸν δχ τοῦ λογαρίθμου χ παντὸς ἀριθμοῦ τοῦ υ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπειροστῷ δυ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ υ, διαιρεθέντι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ υ· καὶ αὕτη βάσις οἱονεὶ προκαταβάλλεται, ἐφ' ἣν εὐχερῶς ἐποικοδομεῖται ἡ εὕρεσις ἀπειροστοῦ λογαρίθμου ἁπάσης συμβολικῆς ποσότητος· ἀλλὰ γὰρ πρὶν ἢ ταῦ-

τη χρησώμεθα, ἴσέαν, Α΄. ὡς οἱ, περὶ ὧν ἐνταῦθα ὁ λόγος, λογάριθμοι ἐκ εἰσὶν οἱ ἐν τοῖς κανονίοις· ἄλλοι δὲ, οἷς ἐπώνυμον ὑπερβολικοὶ, περὶ ὧν ἐφθημένε εἰπόντες (Τ΄ψ. Γ.201, κτ. ..) ϗ ἐρῦμεν δὲ ἐν τοῖς ἐφεξῆς· ἀπὸ μέντοι τέτων ἐπ' ἐκείνες ἐδυσχερὲς μεταβαίνειν, ὡς ϗ τῦτο ἔγνομεν ϗ ὀψόμεθα ἐν τοῖς ἐφεξῆς. Β΄. ἐπεὶ ὁ πρῶτος ὅρος β τῆς ἀριθμητικῆς προόδε ἐχ' εὑρίσκεται ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\mu\alpha\delta\upsilon}{\upsilon}$ $=\delta\chi$, αὔτητε ἡ γενικὴ ἐξίσωσις, ϗ δὴ ϗ ἡ μερικὴ $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon}=\delta\chi$, ἀείποτε μενῦσιν ἐπικρατῦσαι, ὅςτις ἂν ᾖ ὁ πρῶτος ὅρος β, τῦτ' ἔςιν ὁ λογάριθμος τῦ πρώτε ὅρε α τῆς γεωμετρικῆς προόδε· δυνάμεθα ἄρα διὰ τὸ εὐχερέςερον ϗ ἁπλέςερον ὑποθέσθαι τὸν λογάριθμον τῦ πρώτε ὅρε τῆς γεωμετρικῆς προόδε ἴσον τῷ μηδενί· ἐπεὶ δὲ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς γεωμετρικῆς προόδε ὑπεθέμεθα ἴσον μονάδι, ἕξομεν ἄρα τὸ μηδενικὸν λογάριθμον τῆς μονάδος· λαμβάνοντες ἐν, τὴν μὲν μονάδα ὡς πρῶτον ὅρον τῆς γεωμετρικῆς προόδε, τὸ δὲ μηδενικὸν ὡς πρῶτον ὅρον τῆς ἀριθμητικῆς, ἢ ὡς λογάριθμον τῆς μονάδος, ῥᾶςα ἐνταῦθα ἐφαρμόζομεν τὲς ἀποδοθέντας κανόνας (Συμβ. Λογ. 362)· ἔτως ἐν (τῦ λ ἐμφαίνοντος λογάριθμον) ἀντὶ λ $(\alpha\beta)$ λαβεῖν δυνάμεθα $\lambda\alpha+\lambda\beta$· ϗ $\lambda\,\frac{\alpha}{\beta}=\lambda\alpha-\lambda\beta$· ϗ $\lambda\alpha^{\mu}=\mu\lambda\alpha$· ϗ $\lambda\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\lambda\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\frac{\mu}{\nu}\lambda\alpha$· τέτων τεθέντων.

48. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.** Λογαρίθμε ἀριθμῦ δοθέντος, εὑρεῖν αὐτῦ τὸ ἀπειροςόν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστιν οὖν (47) $\delta\lambda\chi = \frac{\delta\chi}{\chi}$, καὶ $\delta\lambda\,(\alpha+\chi) = \frac{\delta(\alpha+\chi)}{\alpha+\chi} = \frac{\delta\chi}{\alpha+\chi}$, καὶ $\delta\lambda\,(\frac{\alpha}{\alpha+\chi}) = \delta\,(\lambda\alpha - \lambda\,(\alpha+\chi)) = -\frac{\delta(\alpha+\chi)}{\alpha+\chi} = -\frac{\delta\chi}{\alpha+\chi}$, ἔνθα δῆλον, ὅτι τὸ τῆς ἀτρέπτου ποσότητος $\lambda\alpha$ ἀπειροστὸν ἐστι μηδέν· ὡσαύτως $\delta\lambda\,\frac{1}{\chi} = \delta\,(\lambda 1 - \lambda\chi) = -\frac{\delta\chi}{\chi}$· καὶ $\delta\lambda\,(\chi^2) = \delta\,(2\lambda\chi) = \frac{2\delta\chi}{\chi}$· καὶ $\delta\lambda\,(\chi\upsilon) = \delta\,(\lambda\chi + \lambda\upsilon) = \frac{\delta\chi}{\chi} + \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$· καὶ $\delta\,(\lambda\frac{\chi}{\upsilon}) = \delta\,(\lambda\chi - \lambda\upsilon) = \frac{\delta\chi}{\chi} - \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$· καὶ $\delta\lambda\,(\frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi}) = \delta\,(\lambda(\alpha+\chi) - \lambda(\alpha-\chi)) = \frac{\delta\chi}{\alpha+\chi} + \frac{\delta\chi}{\alpha-\chi}$· καὶ $\delta\,(\lambda\,(\alpha\alpha+\chi\chi)) = \frac{\delta(\alpha\alpha+\chi\chi)}{\alpha\alpha+\chi\chi} = \frac{2\chi\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi}$· καὶ $\delta\lambda\,\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)} = \frac{\delta\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)}}{\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)}} = \frac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)}\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)}} = \frac{\chi\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi}$, ἢ καὶ οὕτω· $\delta\lambda\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)} = \delta\,(\frac{1}{2}\lambda\,(\alpha\alpha+\chi\chi)) = \frac{\chi\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi}$· καὶ $\delta\lambda\,(\chi^{\mu}(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi} = \delta\,(\lambda\chi^{\mu} + \lambda\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}) = \delta\,(\mu\lambda\chi + \pi\lambda\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})) = \frac{\mu\delta\chi}{\chi} + \frac{\nu\pi\beta\chi^{\nu-1}\delta\chi}{\alpha+\beta\chi^{\nu}}$.

Ταυτὶ τὰ βραχέα ὑποδείγματα ἱκανὰ, οἶμαι, χειραγωγῆσαι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀπειροστοῦ ἁπάσης ἄλλης δεδομένης λογαριθμικῆς ποσότητος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ ἀπειροστῶν τῶν κατὰ τὰς δεικτικὰς ποσότητας.

49. Δεικτικαὶ ἡμῖν ἤκουσαν αἱ ποσότητες, αἷς δείκτης ἐπιγέγραπται ἄστατος, οἷον γ^{χ}, χ^{υ} κτ· ἀφ' ὧν καὶ καμπύλαι ὡσαύτως προσηγορεύθησαν δεικτικαὶ (Τ. Ψ. Γ. 321)· τούτων οὖν ἐνταῦθα κείσθω εὑρεῖν τὰ ἀπειροστά.

50. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ποσότητος δεικτικῆς τὸ ἀπειροστὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπ' αὐτῆς τῆς δεικτικῆς ποσότητος καὶ τοῦ ἀπειροστοῦ τοῦ κατ' αὐτὴν λογαρίθμου.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω γὰρ ποσότης δεικτικὴ $\chi^{\upsilon} = \psi$, καὶ τῶν ἑκατέρου μέλους λογαρίθμων ληφθέντων ἔσται $\lambda\chi^{\upsilon} = \lambda\psi$, καὶ ἑπομένως $\delta\lambda\,(\chi^{\upsilon}) = \frac{\delta\psi}{\psi}$ (48)· ἄρα $\delta\psi = \psi\delta\lambda\,(\chi^{\upsilon})$, εἴτ' οὖν (ἀντικαθισαμένων ἀντὶ ψ καὶ $\delta\psi$ τῶν κατ' αὐτὰ δυνάμεων) $\delta\,(\chi^{\upsilon}) = \chi^{\upsilon}\,\delta\lambda\,(\chi^{\upsilon})$· Ο. Ε. Δ.

51. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οὐκοῦν $\delta\,(\chi^{\upsilon}) = \chi^{\upsilon}\,\delta\lambda\,(\chi^{\upsilon}) = \chi^{\upsilon}\delta\,(\upsilon\lambda\chi) = \chi^{\upsilon}\,(\delta\upsilon\lambda\chi + \frac{\upsilon\delta\chi}{\chi})$· ὡσαύτως $\delta\,(\alpha^{\chi} + \upsilon^{\psi}) = \delta\,(\alpha^{\chi}) + \delta\,(\upsilon^{\psi}) = \alpha^{\chi}\delta\,(\lambda\alpha^{\chi}) + \upsilon^{\psi}\delta\,(\lambda\upsilon^{\psi}) = \alpha^{\chi}\delta\,(\chi\lambda\alpha) + \upsilon^{\psi}\delta\,(\psi\lambda\upsilon) = \alpha^{\chi}\delta\chi\lambda\alpha + \upsilon^{\psi}\,(\delta\psi\lambda\upsilon + \frac{\psi\delta\upsilon}{\upsilon}$· ὡσαύτως $\delta\,(\alpha\alpha + \chi\chi)^{\chi} = (\alpha\alpha + \chi\chi)^{\chi}\,\delta\chi\,(\alpha\alpha$

$+ \chi\chi)^{\chi} = (\alpha\alpha + \chi\chi)^{\chi}\, \delta\, (\chi\lambda\, (\alpha\alpha + \chi\chi)) = (\alpha\alpha +$ $\chi\chi)^{\chi}\, (\delta\chi\lambda\, (\alpha\alpha + \chi\chi) + \frac{2\chi^2\delta\chi}{\alpha\alpha + \chi\chi}$ · ἐ ἐφεξῆς ὁμοίως.

52. ΣΧΟΛΙΟΝ. Συχνάκις ἐν τῷ λογισμῷ εἰς χρῆσιν λαμβάνεται ἡ δεικτικὴ ποσότης κ^{χ}, τῦ κ ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος, ὗ λογάριθμος ἐςὶν $= 1$· ταύτης ὖν τῆς ποσότητος ἀπειροςὸν ὑπάρχει (50) τὸ $\kappa^{\chi}\delta\,(\lambda\kappa^{\chi})$, εἴτ' ὖν $\kappa^{\chi}\delta\,(\chi\lambda\kappa) = \kappa^{\chi}.\ \delta\chi\lambda\kappa$· ἐπεὶ δὲ $\lambda\kappa = 1$ ἐξ ὑποθέσεως, ἡ ἔκθεσις ἐπὶ τὸ ἁπλύςερον μεταβαλεῖ, γινομένη $\delta(\kappa^{\chi}) = \delta\chi\kappa^{\chi}$, τῦτ' ἐςιν „αὕτη ἡ ἰδιαιτέρα δει„κτικὴ ποσότης ἔχει ἀπειροςὸν τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῆς, „ἐ τῦ ἀπειροςῦ τῦ κατ' αὐτὴν δείκτυ.“

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Χρῆσις τῶν προεκτεθέντων κανόνων εἰς εὕρεσιν τῶν ἐν ταῖς καμπύλαις γραμμαῖς ἁπτομένων, ὑφαπτομένων, ὑποκαθέτων κτ.

53. Ἵνα δὲ γνωσθῇ ἡ χρῆσις τῶν προαποδεδομένων κανόνων, ἐφαρμοςέον ἂν εἴη τέτυς ὑποδείγμασι γεωμετρικοῖς τε ἐ τοῖς ἐκ τῦ συμβολικῦ λογισμῦ, ἃ γνωςῶς ἡμῖν ἐγένετο ἐκ τῶν προεκτεθεισῶν πραγματειῶν.

54. Ἵνα καμπύλης ἁπάσης τῆς ΑΜ (σχ. 164) εὐθεῖαν ἁπτομένην ἄξωμεν, ἐκληπτέον τὴν καμπύλην ταύτην ἴσα καὶ πολύγωνον, ἐξ ἀπειραρίθμων ἀπειροςῶν πλευρῶν συγκροτύμενον· μία δὲ τῶν πλευρῶν τῶν δε ἡ

Μμ (ἣν ἐπινοητέον παντὸς δεδομένου ποσοῦ ἐλάσσονα) προαχθεῖσα, καὶ γενομένη ΤΜ, καλεῖται ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης· διορίζεται δὲ αὕτη ἐφ' ἑκάστου σημείου Μ λαμβανομένης τῆς δυνάμεως τῆς κατὰ τὴν ὑφαπτομένην ΠΤ, εἴτ' οὖν τὸ μέρος τῆς γραμμῆς τῶν ἀποτετμημένων, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπό τε τῆς τεταγμένης ΠΜ, καὶ τοῦ σημείου Τ, καθ' ὃ ἡ ἁπτομένη προαχθεῖσα ἀπαντᾷ τῇ γραμμῇ τῶν ἀποτετμημένων καὶ αὐτῇ προαχθείσῃ· ἰδὲ δὴ ὅπως ἡ ὑφαπτομένη διορίζεται.

55. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τὴν ὑφαπτομένην ἁπάσης καμπύλης εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἐν γένει καμπύλη ἡ ΑΜ· ἤχθω οὖν τεταγμένως ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ $ΠΜ = υ$, καὶ ταύτῃ ἀπείρως προσεχῶς ἡ Πμ, καὶ ἤχθω ἡ $Μρ = Ππ$ παράλληλος τῷ ἄξονι ΑΠ· καὶ δὴ ἔσται $ΑΠ = χ$, καὶ $Ππ = Μρ = δχ$, καὶ ρμ (εἴτ' οὖν διαφορὰ τῆς πμ ὑπὲρ τὴν ΠΜ) $= δυ$· τὸ δὲ μέρος Μμ τῆς ἁπτομένης, ἀπειροστὸν ὄν, ἐκληφθῆναι δύναται ὡς συμπεπτωκὸς τῷ συστοίχῳ τῆς καμπύλης μέρει, ὅπερ ἐκλαμβάνεται ἴσον· τῶν οὖν τριγώνων Μρμ, ΤΜΠ ὁμοίων ὄντων, ἔσται $ρμ : ρΜ :: ΠΜ : ΠΤ$, εἴτ' οὖν $δυ : δχ :: υ : ΠΤ = \frac{υδχ}{δυ}$ (Β), τύπος γενικὸς ἁπάσης ὑφαπτομένης· τούτου δὲ εἰσαχθείσης τῆς δυνάμεως τοῦ δχ, εὑρισκομένης ἐκ τῆς κατὰ τὴν προκειμένην καμπύλην ἐξισώσεως, πορισθήσεται ὁ τύπος τῆς ὑφαπτομένης ΠΤ ἐλεύθερος ἀπειροστῶν, ὡς ἐκ τῶν ἐφεξῆς ὑποδειγμάτων δῆλον γενήσεται.

56. Ἔστω ἡ καμπύλη παραβολή, ἧς ἐξίσωσις $υ^2 = πχ$· ταύτης δὲ ἀπειροστά εἰσι $2υδυ = πδχ$, ὅθεν δχ

$= \frac{2\upsilon\delta\upsilon}{\pi}$· ἀντικαταςαθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἀντὶ $\delta\chi$ ἐν τῷ τύπῳ Β, εὑρίσκεται $\frac{2\upsilon^2\delta\upsilon}{\pi\delta\upsilon} = \frac{2\upsilon^2}{\pi} = \frac{2\pi\chi}{\pi} = 2\chi$, εἴγε $\upsilon^2 = \pi\chi$, εἴτ' οὖν ἡ ὑφαπτομένη τῆς παραβολῆς διπλασία ἐςὶ τῆς ἀποτετμημένης, ὃ δήπε καὶ ἐν ταῖς κωνικαῖς τομαῖς δέδεικται (Τψ. Γ. 45).

57. Ἔςω ἡ καμπύλη παραβολὴ παντὸς γένες, ἧς ἐξίσωσις $\alpha^\mu \chi^\nu = \upsilon^{\mu+\nu}$· ταύτης δὲ ἀπειροςὰ εἰσὶ $\nu \alpha^\mu \chi^{\nu-1} \delta\chi = (\mu+\nu)\, \upsilon^{\mu+\nu-1} \delta\upsilon$· ὅθεν $\delta\chi = \frac{(\mu+\nu)\upsilon^{\mu+\nu-1}\delta\upsilon}{\nu\alpha^\mu\chi^{\nu-1}}$· ταύτης δὲ τῆς δυνάμεως ἀντικαταςαθείσης ἐν τῷ Β τύπῳ, εὑρίσκεται $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{\mu+\nu}{\nu} \times \frac{\upsilon^{\mu+\nu}}{\alpha^\mu\chi^{\nu-1}} = \frac{\mu+\nu}{\nu} \times \frac{\alpha^\mu\chi^\nu}{\alpha^\mu\chi^{\nu-1}}$ (τιθεμένης ἀμέλει τῆς τῦ $\upsilon^{\mu+\nu}$ δυνάμεως) $= (\frac{\mu+\nu}{\nu}).\,\chi$· ἐὰν δὲ μ μὲν ᾖ $=3$, ν δὲ $=2$, ἔςαι ΠΤ $= \frac{5\chi}{2}$.

58. Ἡ ἐξίσωσις $\alpha^\mu\chi^\nu = \upsilon^{\mu+\nu}$ γίνεται $\alpha^\mu\chi^{-\nu} = \upsilon^{\mu-\nu}$, ὑποτιθεμένε λειπτικῦ τῦ ν· καὶ τηνικαῦτα ἔςαι $\alpha^\mu = \upsilon^{\mu-\nu}\chi^\nu$ (σημείωσ. τῦ §. 20. τῆς Τψ. Γ) ἐξίσωσις παντὸς γένες ὑπερβολῶν ἐν ταῖς ἀσυμπτώταις· ἡ δὲ ὑφαπτομένη ΠΤ (σχ. 165) ἔςαι $\frac{\mu-\nu}{-\nu} = \frac{\mathrm{M}}{-\nu}$ (ὑποτιθεμένε $\mathrm{M} = \mu-\nu$)· ἐὰν δὲ ᾖ $\mathrm{M} = 1$, καὶ $\nu = 1$, ὡς ἐπὶ τῆς πρωτογενῦς ὑπερβολῆς, ἔςαι ΠΤ $= -\chi$, εἴτ' οὖν ἡ ὑφαπτομένη ἴση ἔςαι τῇ ἀποτετμημένῃ, διὰ μέντοι τὸ

— σύμβολον ληπτέον τὴν ὑφαπτομένην ἐκ τῶν ἀντιθέτων μερῶν τῆς ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων· ἐὰν δὲ ἡ Μ $= 7$ ϗ $\nu = 2$, ἔςαι ΠΤ $= \frac{-7\chi}{2}$· εἰδ' εἴη Μ μὲν $= 20$, ν δὲ $= 4$, εὑρεθήσεται ΠΤ $= -5\chi$· ϗ ἐν γένει „ἡ „ὑφαπτομένη τῶν ὑπερβολῶν ἀεί ἐςιν ἴση τῷ γινομένῳ „ὑπὸ τῆς ἀποτετμημένης ϗ τȣ̃ δείκτȣ τῆς τεταγμένης, „διαιρεθέντι διὰ τȣ̃ δείκτȣ τῆς ἀποτετμημένης, λειπτι„κῶς λαμβανομένȣ."

59. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Εὑρεῖν τὴν ὑφαπτομένην τῆς κυκλοειδȣ̃ς (σχ. 166).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθωσαν προσεχέςαται ἀλλήλαις αἱ τεταγμέναι ΜΠ, μπ· ϗ ἡ μὲν ΠΤ ἀπτέσθω κατὰ τὸ Π τȣ̃ γεννήτορος κύκλȣ, ἡ δὲ ΜΤ τῆς καμπύλης κατὰ τὸ Μ· τὰ τοίνυν τόξα Ππ, Μμ ἐκληφθῆναι δύνανται ὡς μέρη ἀπειροςὰ τῶν ἀπτομένων ΠΤ, μΤ· ϗ ἐὰν ἀχθῇ ἡ Μσ παράλληλος τῇ ΤΠ, τὰ τρίγωνα Μσμ, ΤΜΠ ὅμοια ἔσονται· ϗ δὴ μσ : Μσ :: ΜΠ : ΜΤ· ἀλλὰ διὰ τὰς παραλλήλȣς Ππ, Μσ, ϗ ΜΤ, μσ ἔςιν (ὑποτιθεμένȣ τȣ̃ τόξȣ ΒΠ $= \chi$, ϗ ΠΜ $= \upsilon$) μσ $= \delta\upsilon$, ϗ Ππ $=$ Μσ $= \delta\chi$· ἄρα $\delta\upsilon : \delta\chi :: \upsilon :$ ΠΤ $= \frac{\delta\chi\upsilon}{\delta\upsilon} = \upsilon$, εἴγε $\delta\upsilon = \delta\chi$, διὰ τὸ εἶναι $\upsilon = \chi$ (Υ'ψ. Γεωμ. 333)· ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῆς ἀπτομένης τȣ̃ γεννήτορος κύκλȣ ληφθῇ ΠΤ ἴση τῇ τεταγμένῃ υ, ἔςαι αὕτη ὑφαπτομένη τῆς κυκλοειδȣ̃ς.

60. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Εὑρεῖν τὴν ὑφαπτομένην τῆς λογαριθμικῆς ΒΜ (σχ. 167).

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης τῆς καμπύλης (Υ'ψ. Γεωμ. 320), ὅταν αἱ ἀποτετμημέναι ΑΠ, Απ, ΑΞ, Αξ, ὦσιν ἐν προόδῳ ἀριθμητικῇ, αἱ συςοιχȣ̃σαι τεταγμέναι εἰσὶν ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ, ὥςτε τὰς ἀποτετμημένας λογαρίθμους εἶναι τῶν συςοιχούσῶν τεταγμένων· ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ $\Pi M = \upsilon$, ἔςαι $\pi\mu = \pi P + P\mu = \upsilon + \delta\upsilon$· ϗ ἐὰν ὑποτεθῇ $\Xi N = \eta$, ἔςαι $\xi\nu = \eta + \delta\eta$· ἐπεὶ οὖν αἱ ἀποτετμημέναι ΑΠ, Απ, ΑΞ, Αξ ὑποτίθενται ἐν προόδῳ ἀριθμητικῇ, ἔςαι (ὑποτιθεμένης τῆς $A\Pi = \chi$, ϗ $\Pi\pi = \delta\chi = \Xi\xi$) $\upsilon : \upsilon + \delta\upsilon :: \eta : \eta + \delta\eta$· ἄρα $\upsilon : \delta\eta :: \eta : \delta\upsilon$, ὅθεν $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \frac{\delta\eta}{\eta}$· ἀλλ' ἡ ὑφαπτομένη $\Pi T = \frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ὑφαπτομένη $\Xi\tau = \frac{\eta\delta\chi}{\delta\eta}$, εἴγε $\Xi\xi = \delta\chi$· ἀλλὰ $\frac{\upsilon}{\delta\upsilon} = \frac{\eta}{\delta\eta}$· ἄρα $\Xi\tau = \frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon} = \Pi T$, τοῦτ' ἔςιν „αἱ διαφόροις τεταγμέναις ἀντιςοιχοῦσαι ὑφαπτόμεναι „εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις, εἴτ' οὖν ἡ τῆς λογαριθμικῆς ὑφ„απτομένη ἔςιν ἄτρεπτος."

ΑΛΛΩΣ. Ἐπείπερ αἱ μὲν τεταγμέναι ἀριθμοὺς, αἱ δ' ἀποτετμημέναι λογαρίθμους, ἐμφαίνουσι, τὸν δὲ τῶν ἀριθμῶν πρὸς τοὺς λογαρίθμους λόγον ἐμφαίνει ἡ ἐξίσωσις $\frac{\alpha\mu\delta\upsilon}{\upsilon} = \delta\chi$ (43, 44)· ἡ αὐτὴ ἄρα παρίςησι ϗ τὴν λογαριθμικὴν καμπύλην· ἐντεῦθεν ἄρα προκύψει $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{\alpha\mu}{\upsilon}$, ϗ ἑπομένως ἡ ὑφαπτομένη $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$ γενήσεται $\frac{\alpha\mu\upsilon}{\upsilon} = \alpha\mu$· τοῦτ' ἔςιν „ἡ ὑφαπτομένη ΠΤ ἐφ' ἑκάςου σημείου τῆς λογ„αριθμικῆς ἔςιν ἄτρεπτος, ἰσουμένη τοσάκις τῇ πρώτῃ τε„ταγμένῃ $AB = \alpha$, ὁσάκις ἡ μονὰς ἔνεςι τῷ μέτρῳ μ".

61. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Εὑρεῖν τὴν ὑφαπτομένην

τῶν παντὸς γένες σπειρῶν, ὧν ἐξίσωσις ἐςὶ $\pi^\nu \upsilon^\mu = \alpha^\mu \chi^\nu$ (Τψ. Γεωμ. 331).

ΛΥΣΙΣ. Ἐμφαινέτω ἡ Αν (σχ. 168) πάντα τὰ εἴδη ταύτης τῆς καμπύλης· καὶ ἤχθωσαν ἀπείρως προσεχεῖς αἱ ἀκτῖνες ΚΒ, Κπ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Κ διαςήματι δὲ τῷ Κν γεγράφθω τόξον ἐλάχιςον τὸ μν, καὶ ἤχθω ἁπτομένη ἡ ΝΤ· εὐθεῖα ὂν ἡ ΚΤ, ἡ τῇ ΒΚ κάθετος ἐφιςαμένη, ἐςιν, ἣν ζητῦμεν, ἡ ὑφαπτομένη· γενέσθω δὲ τόξον τὸ Απ $= \chi$, καὶ τῆς σπείρας ἡ ἀκτὶς Κν $= \upsilon$, καὶ πΒ $= \delta\chi$, καὶ Νν $= \delta\upsilon$· ἐκ δὲ δὴ τῶν ὁμοίων τομέων ΒΚπ, μΚν πρόεισι $K\pi = \alpha : K\nu = \upsilon :: \pi B = \delta\chi : \nu\mu = \frac{\upsilon\delta\chi}{\alpha}$· τῦ δὲ τόξυ νμ ἐκληφθέντος ὡς εὐθείας ἀπειροςῆς, καθέτυ τῇ ΝΚ $= \upsilon$, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΝΚΤ, Ννμ, ὅμοιά τε ἔσονται, καὶ ταύτην τὴν ἀναλογίαν παρέξονται $N\mu = \delta\upsilon : \nu\mu = \frac{\upsilon\delta\chi}{\alpha} :: NK = \upsilon : KT = \frac{\upsilon\upsilon\delta\chi}{\alpha\delta\upsilon}$· ἀλλ' ἐκ τῆς γενικῆς ἐξισώσεως $\pi^\nu \times \upsilon^\mu = \alpha^\mu \times \chi^\nu$ πρόεισι $\mu\pi^\nu \upsilon^{\mu-1}\delta\upsilon = \nu\alpha^\mu\chi^{\nu-1} \times \delta\chi$, ὅθεν $\delta\chi = \frac{\mu\pi^\nu\upsilon^{\mu-1}\delta\upsilon}{\nu\alpha^\mu\chi^{\nu-1}}$· ἀντικαταςαθείσης ἄρα ταύτης τῆς δυνάμεως τῦ $\delta\chi$ ἐν τῷ τύπῳ τῆς ΚΤ, τοριϑήσεται $KT = \frac{\mu\pi^\nu\upsilon^{\mu+1}}{\nu\alpha^\mu\ \alpha\chi^{\nu-1}} = \frac{\mu\pi^\nu\upsilon^{\mu+1}\ \chi}{\nu\alpha^\mu\chi^\nu\alpha}$ (πολλαπλασιαζομένυ ἀμέλει τῦ τε ἀριθμητῦ καὶ τῦ παρονομαςῦ ἐπὶ χ) $= \frac{\mu\alpha^\mu\chi^\nu\upsilon\chi}{\nu\alpha^\mu\chi^\nu}$ (ἀντικαθιςαμένης τῆς δυνάμεως τῦ $\pi^\nu\upsilon^\mu$) $= \frac{\mu\chi\upsilon}{\nu\alpha}$.

Ἐὰν ἦ $\mu = \nu = 1$, ὥσπερ ἐπὶ τῆς Ἀρχιμηδείυ ἕλικος, ἧς ἐξίσωσις $\pi\upsilon = \alpha\chi$ (Υ'ψ. Γεωμ. 331), ἔςαι ἡ ὑφαπτομένη $= \frac{\chi\upsilon}{\alpha}$· ἐντεῦθεν ἄρα $\alpha : \chi :: \upsilon :$ ΚΤ· ἐὰν δὲ ᾖ $\upsilon = \alpha$, ὃ συμβαίνει ἐπὶ τῦ σημείυ Λ, τηνικαῦτα χ ἰσῦται τῇ περιφερείᾳ τῦ γεννήτορος κύκλυ, ϗ δὴ ΚΤ $= \frac{\chi\alpha}{\alpha} = \chi = \pi$· πορισθείη ἂν ἄρα γεωμετρικῶς γραμμὴ εὐθεῖα ἴση τῇ κυκλικῇ περιφερείᾳ, ϗ δὴ ὁ κύκλος τετραγωνισθήσεται, εἰ δυνατὸν ἦν ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ἁπτομένην τῆς Α'ρχιμηδείυ ἕλικος κατὰ τὸ σημεῖον Α.

Ε'ὰν δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει $\pi^{\nu}\upsilon^{\mu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu}$ ὑποτεθῇ $\nu = -1$, ϗ $\mu = 1$, εὑρεθήσεται $\frac{\upsilon}{\pi} = \frac{\alpha}{\chi}$, εἴτ' ὖν $\upsilon\chi = \alpha\pi$· ἀντικαταςαθεισῶν ὖν τῶν δυνάμεων τῦ μ, ϗ ν ϗ $\upsilon\chi$ ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\mu\chi\upsilon}{\nu\alpha}$, εὑρεθήσεται Κτ $= -\pi$, τῦτ' ἔςιν „ἐν „ταύτῃ τῇ σπείρᾳ ἡ ὑφαπτομένη ἐςὶν ἄτρεπος, ἰσυμένη „τῇ περιφερείᾳ τῦ γεννήτορος κύκλυ, ἢ τῷ τόξῳ π, εἰ „π μέρος τι ἐμφαίνει τῆς κυκλικῆς περιφερείας“· τὸ δὲ σύμβολον ἥκιςα κατὰ μέγεθος ἀλλοιοῖ τὴν ὑφαπτομένην.

Εἰς δὲ εὕρεσιν τῆς ὑφαπτομένης ἐν τῇ λογαριθμικῇ σπείρᾳ, ἀναμνηςέον, ὡς ἐν αὐτῇ τῆς ὑπὸ ΑΚΒ γωνίας, ἢ τῦ τόξυ ΑΒ $= \chi$, λογαρίθμυ ὄντος τῆς συςοίχυ ἀκτῖνος ΚΝ (Υ'ψ. Γεωμ. 331), ἔςαι $\chi = \nu . \Lambda \frac{\upsilon}{\pi} = \nu . \Lambda . \upsilon$ (ὑποτιθεμένης $\pi = 1$)· ἄρα $\delta\chi = \nu . \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$ (48), ϗ ΚΤ $= \frac{\upsilon\delta\chi}{\alpha\delta\upsilon} = \frac{\nu\upsilon}{\alpha}$· ὅθεν $\alpha : \nu :: \upsilon :$ ΚΤ· ἐὰν δὲ $\nu = 1 = \alpha$, ἔςαι ΚΤ $= \upsilon$.

62. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Οὔσης τῆς ΑΥΝ παραβολῆς (σχ. 169), καὶ ἑτέρας καμπύλης δοθείσης τῆς ΑλΜ, ἧς αἱ τεταγμέναι μέσαι εἶεν ἀνάλογοι τῶν ἀποτετμημένων ΑΠ, καὶ τῶν συστοίχων τεταγμένων ΠΝ ἐν τῇ παραβολῇ, εὑρεῖν τὴν ὑφαπτομένην Πϐ ἐν τῇ καμπύλῃ ΑΜ.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἡ ἐν τῇ παραβολῇ τεταγμένη $= \upsilon$, ἡ δ' ἐν τῇ καμπύλῃ ΑΜ τεταγμένη $= \psi$, καὶ ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ $= \chi$, καὶ τῆς παραβολῆς παράμετρος $= \pi$· καὶ δὴ ἔσται $ΝΡ = Μ\rho = Π\pi = \delta\chi$, καὶ $\nu Ρ = \delta\upsilon$, καὶ $\mu\rho = \delta\psi$· ἀπτέσθω δὲ τῆς καμπύλης ΑΜ ἡ Μβ· ἐκ τοίνυν τῶν ὁμοίων τριγώνων μρΜ, ΜΠβ πρόεισι $\delta\psi : \delta\chi :: \psi : \frac{\psi\delta\chi}{\delta\psi} = Πβ$· ἀλλ' ἔστι διὰ τὴν φύσιν τῆς καμπύλης $\upsilon : \psi :: \psi : \chi$, εἴτ' οὖν $\upsilon\chi = \psi^2$, $\upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon = 2\psi\delta\psi$, $\delta\psi = \frac{\upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon}{2\psi}$, ἀντικαταστάσει ἄρα ταύτης τῆς τοῦ $\delta\psi$ δυνάμεως ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\psi\delta\chi}{\delta\psi}$, πορισθήσεται $Πβ = \frac{2\psi^2\delta\chi}{\upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon}$. ἔστι δὲ ἡ τῆς παραβολῆς ἐξίσωσις $\upsilon^2 = \pi\chi$, $2\upsilon\delta\upsilon = \pi\delta\chi$, $\delta\chi = \frac{2\upsilon\delta\upsilon}{\pi}$· ἀντικατασταθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῷ τύπῳ τῆς Πβ, γενήσεται $Πβ = \cfrac{4\psi\psi\upsilon\delta\upsilon}{\cfrac{\pi(2\upsilon\upsilon\delta\upsilon + \pi\chi\delta\upsilon)}{\pi}}$

$= \frac{4\psi\psi\upsilon}{2\upsilon\upsilon + \pi\chi} = \frac{4\upsilon\upsilon\chi}{2\upsilon\upsilon + \upsilon\upsilon.\frac{\pi}{\pi}}$ (ἀντικαθισταμένης, ἐν μὲν τῷ ἀριθμητῇ τῆς τοῦ $\psi\psi$ δυνάμεως, ἐν δὲ τῷ παρονομαστῇ τῆς τὲ χ) $= \frac{4\chi\upsilon^2}{2\upsilon^2 + \upsilon^2} = \frac{4\chi}{3}$· ἐὰν ἄρα ληφθῇ Αβ $=$ $\frac{4\,\Pi\mathrm{A}}{3}$, ϑηρευθήσεται ἡ Πβ ὑφαπτομένη. Ο Ε. Π.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Δῆλον ἄρα, ὅπως ἄντις ποιήσειεν, εἴπερ ἡ καμπύλη ΑΝ εἴη ὑπερβολὴ, ἢ ἄλλη ἡτισοῦν καμπύλη γεωμετρική.

63. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ὅταν τοιάδε ᾖ ἡ τῆς καμπύλης ἐξίσωσις, ὥςε τῆς χ αὐξέσης ἐλαττῦσθαι τὴν υ, τηνικαῦτα ἔςαι ἐν τῷ λογισμῷ $-\,\delta\upsilon$, ϗ εἰς εὕρεσιν τῆς ὑφαπτομένης συμβάλλεσα ἀναλογία γενήσεται $-\,\delta\upsilon : \delta\chi :: \upsilon : \Pi\mathrm{T} = -\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$· τέτῳ ἂν μόνῳ διοίσει τηνικαῦτα ὁ λογισμὸς, ὅτι ἡ ὑφαπτομένη πεσεῖται πρὸς τ' ἀντίθετα τῆς ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων, ὡς εἴδομεν κἂν (58)· ἀνθ' ὅτε δὴ τὸν τύπον $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$ ληπτέον ἀεὶ εἰς εὕρεσιν τῶν ὑφαπτομένων ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς καμπύλαις· ἐὰν δὲ μειῶνται αἱ τεταγμέναι, ἐκληπτέον λειπτικῶς τὸν τύπον $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$, ὅπερ δείκνυσι μετενεκτέον εἶναι τὴν ὑφαπτομένην πρὸς τἀναντία τῆς γενέσεως τῶν χ· ἐὰν, φέρε, ληφθῇ ἡ τὲ κύκλε ἐξίσωσις, ἡ τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένων περιεκτικὴ, εἴτ' ἐν (Τψ. Γ. 93.) $\upsilon\upsilon = \frac{1}{4}\alpha\alpha - \chi\chi$, δῆλον, ὅτι τῆς ΚΠ αὐξέσης (σχ. 170), ἡ ΠΜ $= \upsilon$ μειῦται, τοιγαρῦν ἡ ὑφαπτομένη ΠΤ πεσεῖται ἐπὶ τὰ λαιὰ τῆς ΠΜ, τῆς ἀρχῆς Κ τῶν ἀποτετμημένων κειμένης ἐν τοῖς δεξιοῖς· ὃ δὴ ϗ ὁ λογισμὸς βέλεται· τὰ γὰρ τῆς προτεθείσης κυκλικῆς ἐξισώσεως ἀ-

πειροςὰ εἰσὶ $2\upsilon\delta\upsilon = -2\chi\delta\chi$, ἐξ ἑπομένως $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{-\upsilon}{\chi}$· ἄρα $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{-\upsilon^2}{\chi} = \frac{-(\frac{1}{4}\alpha\alpha - \chi\chi)}{\chi}$. ἔνθα τὸ — ἐθέλει τὴν ὑφαπτομένην κεῖσθαι πρὸς τὰ ἐναντία μέρη, ἢ ἔνθα ἔκειτο διὰ τῦ +

64. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'. Τὸν γενικὸν τύπον εὑρεῖν τῆς ἀπτομένης ἁπάσης καμπύλης (σχ. 164).

ΛΥΣΙΣ. Πρὸς πλείω εὐμάρειαν ὑποτεθείσθωσαν κάθετοι ἀλλήλαις αἱ χ ἐξ αἱ υ· ἐξ ἐπεὶ τὸ Μμρ τρίγωνον ὅμοιόν ἐςι τῷ ΤΠΜ, ἔςαι ρμ : Μμ :: ΠΜ : ΤΜ· ἐπεὶ δὲ ὀρθογώνιόν ἐςι τὸ Μρμ τρίγωνον, ἔςι $M\mu = \sqrt{((\rho M)^2 + (\rho\mu)^2)} = \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$· ἄρα $\delta\upsilon : \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)} :: \upsilon : TM = \frac{\upsilon\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}}{\delta\upsilon} = \frac{\upsilon\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}}{\sqrt{(\delta\upsilon^2)}} = \upsilon\sqrt{(\frac{\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2}{\delta\upsilon^2})} = \upsilon\sqrt{(\frac{\delta\chi^2}{\delta\upsilon^2} + 1)}$· τοιγαρῦν τῶν ἀπειροςῶν ἐξισώσεως καμπύλης δεδομένης λαμβανομένων, ἐξ ἀποφερομένης τῆς δυνάμεως τῦ $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$, ἐξ τῦ ἀπ' αὐτῆς τετραγώνυ ἀντικαθιςαμένυ ἐν τῷ γενικῷ τύπῳ τῆς ἀπτομένης, πορισθήσεται ἡ ἀπτομένη περιέχυσα χ ἐξ ποσότητας ἀτρέπτυς, ὡς ἑκάςῳ ἐφαρμόσαι ὑποδείγμασι τὸν τύπον ἔξεςιν· ἡμῖν δὲ τὰ κυριώτερα ἐκτιθεμένοις, ἰτέον ἐπὶ τὴν εὕρεσιν τῆς ὑποκαθέτυ.

65. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'. Εὑρεῖν τὸν γενικὸν τύπον τῆς ὑποκαθέτυ ΠΞ ἁπάσης γεωμετρικῆς καμπύλης, ὀρθῆς ὑποτιθεμένης τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας (σχ. 164).

ΛΥΣΙΣ. Ἐπεὶ τὰ Μρμ, ΜΠΞ τρίγωνα, ἔχοντα

καθέτως ἀλλήλαις τὰς ἑαυτῶν πλευρὰς, εἰσὶν ὅμοια (Γεωμ. 220. Πορ. Β.)· ἄρα Μρ : ρμ :: ΠΜ : ΠΞ, εἴτ' ὖν δχ : δυ :: υ : ΠΞ $= \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἐὰν ὖν ληφθῶσι τὰ ἀπειροςὰ τῆς κατὰ τὴν δεδομένην καμπύλην ἐξισώσεως, ϗ εὑρεθῶσιν αἱ δυνάμεις τῦτε δυ, ϗ τῦ δχ, ϗ τῷ εὑρημένῳ ἤδη τύπῳ εἰσαχθῶσι, πορισθήσεται ἡ δύναμις τῆς ὑποκαθέτυ ἐν χ ϗ ποσοῖς ἀτρέπτοις.

66. Ἔςω ἡ καμπύλη ἔλλειψις, ἧς ἐξίσωσις $\upsilon\upsilon = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(\alpha\chi - \chi\chi)$ (Τ'ψ. Γ. 92), $2\upsilon\delta\upsilon = -\frac{2\beta\beta\chi\delta\chi}{\alpha\alpha}$, $\delta\upsilon = \frac{-\beta\beta\chi\delta\chi}{\upsilon\alpha\alpha}$· ὑπ. $= \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{-\beta\beta\chi}{\alpha\alpha}$· δηλοῖ δὲ τὸ —, ὅτι ἄρα ληπτέον ἐςὶ τὴν ὑποκάθετον ὕτω θέσεως ἔχυσαν, ὡς προχωρεῖν τῇ ἀρχῇ τῶν ἀποτετμημένων, ἥτις ἐςὶ τὸ κέντρον· ὁ δὲ τύπος προφανῶς ταυτίζεται τῷ εὑρεθέντι (Τ'ψ. Γ. 109)· ἐπεὶ δὲ ἐν τῷ κύκλῳ $\beta = \alpha$, ἔςαι ὑπ. $= -\chi$· τῦτ' ἔςιν ἡ τῦ κύκλυ ὑποκάθετος ἴση ἐςὶ τῇ πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένῃ.

67. Ἔςω δὲ ἡ καμπύλη παραβολὴ, ἧς ἐξίσωσις $\upsilon^2 = \pi\chi$ (Τ'ψ. Γ. 30), $2\upsilon\delta\upsilon = \pi\delta\chi$, $\delta\upsilon = \frac{\pi\delta\chi}{2\upsilon}$· ἀντικαταςαθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῷ τύπῳ ὑπ. $= \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$, πορισθήσεται ὑπ. $= \frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon} = \frac{\alpha}{2}$, „τῦτ' ἔςι παραβο„λῆς ἡ ὑποκάθετος ἄτρεπτος ὑπάρχει, ἰσυμένη τῇ ἡμι„παραμέτρῳ" · καθὰ δέδεικται ϗ ἐν ταῖς τῦ κώνυ τομαῖς (Τ'ψ Γ. 42).

68. Ἐπὶ τῶν παντὸς γένυς παραβολῶν ἔςι δχ =

$\frac{(\mu+\nu)\, \upsilon^{\mu+\nu-1} \delta\upsilon}{\nu\alpha^{\mu}\chi^{\nu-1}}$ (57)· ταύτης δὲ τῆς δυνάμεως ἀντικαταςαθείσης ἐν τῇ ὑποκαθέτῳ, ἤ, ὃ δῆπε ταὐτὸν, διαιρεθέντος τε̃ υδυ διὰ ταύτης τῆς ποσότητος, ἀποφέρεται ὑπ. $= \frac{\nu\alpha^{\mu}\chi^{\nu-1}\upsilon}{(\mu+\nu)\,\upsilon^{\mu+\nu-1}} = \frac{\nu\alpha^{\mu}\chi^{\nu}\upsilon^{\mu}}{(\mu+\nu)\,\chi\upsilon^{\mu+\nu}}$ (πολλαπλασιαθέντων ἀμέλει τε̃ τε παρονομαςε̃, ἐ̣ τε̃ ἀριθμητε̃ ἐπὶ χυ) $= \frac{\nu\upsilon\,.\,\upsilon^{\mu+\nu}}{(\mu+\nu)\,\chi\upsilon^{\mu+\nu}}$ (ἀντικαταςαθείσης τῆς δυνάμεως τε̃ $\alpha^{\mu}\chi^{\nu}$) $= \frac{\nu\upsilon^{2}}{(\nu+\mu)\,\chi}$· ἐὰν ἐ̃ν ᾖ $\nu = \mu = 1$, ὥσπερ ἐπὶ τῆς ἐκ τε̃ κώνε παραβολῆς, ἔςαι ὑπ. $= \frac{\upsilon^{2}}{2\chi} = \frac{\pi\chi}{2\chi} = \frac{\pi}{2}$, ὥσπερ ἐ̣ ἀνωτέρω εὕρηται· ἐὰν δὲ ᾖ $\nu = 7$, ἐ̣ $\mu = 3$, πορισθήσεται ὑπ. $= \frac{7\upsilon\upsilon}{10\chi}$· ὅθεν $10\chi : 7\upsilon :: \upsilon :$ ὑπ.

69. Ἔςω ἐξίσωσις $\upsilon^{\mu}\chi^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu} = 1$· (πᾶσα δὲ τοιάδε ἐξίσωσις, ἐν ᾗ δῆπε τὸ γινόμενον ὑπὸ θετικε̃ βαθμε̃ τῆς τεταγμένης ἐ̣ θετικε̃ βαθμε̃ τῆς ἀποτετμημένης ἰσε̃ται ποσότητι ἀτρέπτῳ, καλεῖται ὑ π ε ρ β ο λ ῶ ν ἐ ξ ί σ ω σ ι ς)· τιθεμένε $\alpha = 1$, εἶτ' ἐ̃ν $\upsilon^{\mu} = \frac{1}{\chi^{\nu}} = \chi^{-\nu}$· ὅθεν $\upsilon = \chi^{-\frac{\nu}{\mu}} = \chi^{\rho}$ (ὑποτιθεμένε $-\frac{\nu}{\mu} = \rho$)· ἐ̣ $\delta\upsilon = \rho\chi^{\rho-1}\delta\chi$· ἀντικαθιςαμένης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως τε̃ δυ ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$, εὑρίσκεται ὑπ. $= \rho\upsilon\chi^{\rho-1} = \frac{\rho\upsilon\chi^{\rho}}{\chi} =$

$\frac{\rho \upsilon \upsilon}{\chi}$ (εἴγε $\upsilon = \chi^{\rho}$)· ἐὰν ἐν ᾖ $\mu = 2$, ϗ $\nu = 10$, ἔςαι

$\rho = -5$, ϗ ὑπ. $= -\frac{5\upsilon\upsilon}{\chi}$· ἐν ταύταις ἄρα ταῖς καμπύλαις ἡ ὑποκάθετος ΠΛ (σχ. 165), λειπτικὴ ἔσα, ἐπεκτενεῖται πρὸς τὴν Α ἀρχὴν τῶν ἀποτετμημένων.

70. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ἐὰν κληθῇ ἡ ὑφαπτομένη Ρ ἐκ τῆς ἰδιότητος τῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΤΜΞ (σχ. 164), προκύψει ΤΠ : ΜΠ :: ΜΠ : ΠΞ, εἶτ᾽ ἐν Ρ : υ :: υ : ὑπ. $=$

$\frac{\upsilon\upsilon}{\text{Ρ}}$· γνωσθείσης ἄρα τῆς ὑφαπτομένης, εὐχερῶς ποριοθήσεται ἡ ὑποκάθετος· ὁ δὲ τύπος ὐχ ἧττον χρήσιμος ϗ ἐν ταῖς καμπύλαις, ὧν αἱ τεταγμέναι ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου προβάλλονται· ἀλλὰ τηνικαῦτα ἡ ὑποκάθετος ΚΛ (σχ. 168) ληφθήσεται ἐπὶ τῆς ΤΚ ὑφαπτομένης ἐπὶ θάτερα προαχθείσης.

Οὕτως ἡ τῶν παντὸς γένους σπειρῶν ὑφαπτομένη ἐςὶ

ΚΤ $= \frac{\mu\chi\upsilon}{\nu\alpha}$ (61)· ὐκὖν ἔςαι $\frac{\upsilon\upsilon}{\text{Ρ}} = \frac{\nu\alpha\upsilon\upsilon}{\mu\chi\upsilon} = \frac{\nu\alpha\upsilon}{\mu\chi}$· ἐὰν ὖν

ᾖ $\mu = 3$, ϗ $\nu = 7$, ἔςαι ὑπ. $= \frac{7\alpha\upsilon}{3\chi}$, ὅθεν $3\chi : 7\alpha ::$

$\upsilon :$ ὑπ. $=$ ΚΛ· ὁ αὐτὸς δὲ εὑρεθήσεται τύπος, ϗ εἴπερ ἀντὶ τῦ διελεῖν υ^2 διὰ τῆς ὑφαπτομένης, περιεχύσης ὅρυς

πεπερασμένυς, διέλωμεν διὰ τῆς ὑφαπτομένης $\frac{\nu\upsilon\delta\chi}{\alpha\delta\upsilon}$ (ὅπερ συνᾴδει ταύτῃ τῇ περιπτώσει) ἐπὶ τὸ εὑρεῖν ὑπ. $=$

$\frac{\alpha\delta\upsilon}{\delta\chi}$, ὅθεν ἐξάγεται ἡ αὐτὴ δύναμις· ἀλλὰ γὰρ τῆς Ρ πεπερασμένυς ὅρυς περιεχύσης, περιττὸν ὅλως ϗ μάταιον, χρήσασθαι τῷ τῶν ἀπειροστῶν λογισμῷ· ἐν δὲ τῇ λογαριθμικῇ σπείρᾳ ἐπεὶ (61) $Ρ = \frac{γυ}{α}$· ἄρα ὑπ. $= \frac{αυ}{γ}$, εἴτ' οὖν $γ : α :: υ :$ ὑπ.· ἐὰν δὲ $γ = α = 1$, πορισθήσεται ὑπ. $= υ$· ἀλλὰ τηνικαῦτα $Ρ = υ$ (61)· ἐν ταύτῃ ἄρα τῇ περιπτώσει ἀεὶ ἰσοῦται ἡ ὑποκάθετος τῇ ὑφαπτομένῃ.

71. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Η' ὑφαπτομένη τῶν γεωμετρικῶν καμπύλων, ὧν παράλληλοι αἱ τεταγμέναι, ἐστὶν $= \frac{υδχ}{δυ}$, ὡς ἤδη εὕρηται (55)· ἐὰν οὖν διαιρεθῇ $υ^2$ διὰ τοῦ τύπου τούτου, εὑρεθήσεται ὑπ. $= \frac{υδυ}{δχ}$, ὥσπερ ἀνωτέρω (65).

72. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η΄. Εὑρεῖν τὸν γενικὸν τύπον τῆς καθέτου ἁπάσης γεωμετρικῆς καμπύλης, ἧς αἱ τεταγμέναι πρὸς ὀρθὰς ἐφεστήκασι ταῖς ἀποτετμημέναις (σχ. 164)

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜμΡ, ΜΠΞ προέρχεται $Μρ : Μμ :: ΜΠ : ΜΞ$, εἴτ' οὖν $δχ : \sqrt{(δχ^2 + δυ^2)} :: υ : ΜΞ = \frac{υ}{δχ} \times \sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}$.

Ἐν τῇ παραβολῇ ἐστὶν $υ^2 = πχ$, $2υδυ = πδχ$, $δυ = \frac{πδχ}{2υ}$· ἄρα $δυ^2 = \frac{ππδχ^2}{4υ^2}$· ἄρα $ΜΞ = \frac{υ}{δχ} \sqrt{(δχ^2 + \frac{ππδχ^2}{4υ^2})} = \frac{υδχ}{δχ} \times \sqrt{(\frac{4υυ + ππ}{4υ^2})} = \frac{υ}{2υ} \sqrt{(4υυ + ππ)} = \frac{1}{2}\sqrt{4πχ + ππ}$, ὃς τύπος τῷ καὶ βραχύτι ἐπισημειωσαμένῳ δῆλον ὅτι ὁ αὐτός ἐστι τῷ εὑρεθέντι (Τ'ψ. Γ. 43).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δῆλον δὲ, ὅτι κληθείσης τῆς ὑποκαθέτου ὑπ, καὶ τῆς καθέτου Μ, ἔσαι $Μ = \sqrt{(ὑπ . ὑπ +}$

υυ), ὅπερ γενικόν ἐςι πασῶν τῶν καμπύλων, ἐφ' ὧν αἱ τεταγμέναι ἀφ' ἑνὸς σημείȣ ἐξίασι.

73. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ΄. Εὑρεῖν τὸν γενικὸν τύπον τῆς γραμμῆς ΑΤ, τῆς ἀπολαμβανομένης ἀπό τε τῆς Α ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων, ἐφ τȣ̃ σημείȣ, καθ' ὃ συμπίπτει τῇ ἀπτομένῃ (σχ. 164).

ΛΥΣΙΣ. Ἀφῃρήσθω τῆς ΠΤ ἡ ΑΠ· ἐφ δὴ λειφθήσεται $\text{ΑΤ} = \frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon} - \chi = \frac{\upsilon\delta\chi - \chi\delta\upsilon}{\delta\chi}$.

74. Ἵν' εὑρεθῇ δὲ ὁ τύπος τῆς ΑΒ, ἐςι ΠΜ : ΠΤ :: ΑΤ : ΑΒ, εἴτ' ȣ̃ν $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon} : \upsilon :: \frac{\upsilon\delta\chi - \chi\delta\upsilon}{\delta\chi}$: $\text{ΑΒ} = \frac{\upsilon\delta\chi - \chi\delta\upsilon}{\delta\chi}$.

75. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι΄. Δοθείσης τῆς καμπύλης ΑΜ (ἐφ' ἧς ἡ γωνία τῶν συντεταγμένων εἴη ὀρθὴ) εὑρεῖν τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ καμπύλη μετά τινος εὐθείας παραλλήλȣ, ἤτοι ταῖς ἀποτετμημέναις, ἢ ταῖς τεταγμέναις, ποιείη γωνίαν τὴν δοθεῖσαν (σχ. 164).

ΛΥΣΙΣ. Ἡ μὲν ὑπὸ μΜρ γωνία περιέχεται ὑπό τε τῆς Μρ εὐθείας παραλλήλȣ ταῖς ἀποτετμημέναις, ἐφ ὑπὸ τῆς καμπύλης, ἢ γȣ̃ν τῆς ἀπτομένης τῆς καμπύλης κατὰ τὸ σημεῖον Μ· ἡ δὲ ὑπὸ Μμρ συνίςαται ὑπό τε τῆς καμπύλης, ἐφ τῆς συςοιχȣ́σης τεταγμένης πμ· ἀλλ' ἐκ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ Μρμ (Γεωμ. 497) ἐςι Μρ : μρ :: ακ : ἀπτ. γωνίας τῆς ὑπὸ μΜρ, = Τ, εἴτ' ȣ̃ν, τιθεμένης τῆς ἀκτῖνος = 1, δχ : δυ :: 1 : $\text{Τ} = \frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἐκ δὲ τȣ̃ αὐτȣ̃ τριγώνȣ προέρχεται δυ : δχ :: 1 : $\tau = \frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$, ἀπτομένη τῆς ὑπὸ Μμρ γωνίας· ἀπόχρη ἄρα ἐξισοῦν τούτους τοὺς τύπους τῇ ἀπτομένῃ τῆς δεδομένης γωνίας, ἵν' ἐκ τούτου ἀποφέρηται διὰ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως ἡ δύναμις τῆς τεταγμένης, ἢ τῆς συστοιχούσης ἀποτετμημένης.

Ἐὰν, φέρε, ζητηθῇ, πρὸς ὅ,τι σημεῖον τῆς παραβολῆς ἡ ὑπὸ τῆς καμπύλης καὶ τῆς τῷ ἄξονι παραλλήλου γραμμῆς περιεχομένη γωνία ἐστὶν $= 45^\circ$, ἐπεὶ ἡ ἀπτομένη γωνίας $= 45^\circ$ (Γεωμ. 498) ἐστὶν $=$ ακ $= 1$, τεθείσθω $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = 1$, $\delta\upsilon = \delta\chi$· ἀλλὰ διὰ τὴν φύσιν τῆς παραβολῆς ἐστὶν $\upsilon\upsilon = \pi\chi$, $2\upsilon\delta\upsilon = \pi\delta\chi$, διὰ δὲ τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος ἐστὶ $\delta\upsilon = \delta\chi$, ἔσται $2\upsilon\delta\chi = \pi\delta\chi$, $2\upsilon = \pi$, $\upsilon = \frac{\pi}{2}$· ἀλλὰ (Τ'ψ. Γ. 20) ἡ διὰ τῆς ἑστίας διήκουσα τεταγμένη ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιπαραμέτρῳ· ἄρα ἐν ἁπάσῃ παραβολῇ γωνία ὑπὸ τῆς καμπύλης καὶ τῆς παραλλήλου τῷ ἄξονι εὐθείας περιεχομένη καὶ ἰσουμένη ἡμιόρθῳ ἐστὶν ἡ συστοιχοῦσα τῷ σημείῳ τῆς ἑστίας.

Ἐὰν δὲ ζητηθῇ, καθ' ὅ,τι ἄρα σημεῖον ἡ ἀπτομένη τῆς γωνίας, ἥτις περιέχεται ὑπὸ τῆς καμπύλης καὶ τῆς τεταγμένης, ἐστὶν $=$ ἡμισείᾳ ἀκτῖνι $= \frac{1}{2}$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς παραβολῆς, γενέσθω $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{1}{2}$, $2\delta\chi = \delta\upsilon$· ἀλλὰ διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς παραβολῆς ἐστὶν $\upsilon\upsilon = \pi\chi$, $2\upsilon\delta\chi = \pi\delta\chi$· ἐν ταύτῃ δὴ τῇ ἐξισώσει ἀντικατασταθείσης τῆς τοῦ δυ δυνάμεως $2\delta\chi$, πορισθήσεται $4\upsilon\delta\chi = \pi\delta\chi$, $4\upsilon = \pi$, $\upsilon = \frac{\pi}{4}$· ταύτης δὲ τῆς τοῦ υ δυνάμεως ἀντικατασταθείσης ἐν τῇ ἐξισώσει $υυ = πχ$, πορισθήσεται $\frac{ππ}{16} = πχ$, $\frac{π}{16} = χ$· τὸ ἄρα ζητέμενον συμβήσεται κατὰ σημεῖον συςοιχεῖν ἀποτετμημένη ἴση τῷ δεκάτῳ ἕκτῳ μέρει τῆς παραμέτρυ.

Ἐὰν δὲ ζητηθῇ, καθ᾽ ὅ,τι σημεῖον τῆς κυκλικῆς ὑπερβολῆς ἡ ἀπτομένη τῆς γωνίας, ἣ περιέχεται ὑπὸ τῆς καμπύλης ἢ τῆς τεταγμένης, ἐςιν $= 1$, μονάδος ὔσης τῆς ἀκτῖνος, γενέσθω $\frac{δχ}{δυ} = 1$, $δχ = δυ$· ἔςι δὲ ἐξίσωσις τῆς κυκλικῆς ὑπερβολῆς $υυ = 2αχ + χχ$ (Τ.Ψ. Γ. 166), $2υδυ = 2αδχ + 2χδχ$, ἢ (ἐπεὶ διὰ τὴν φύσιν τῦ προβλήματος $δχ = δυ$) $2υδχ = 2αδχ + 2χδχ$, $2υ = 2α + 2χ$, $υ = α + χ$· ταύτης δὲ τῆς τῦ $υ$ δυνάμεως ἀντικαταςαθείσης ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς καμπύλης, πορισθήσεται $(α + χ)^2 = 2αχ + χχ$, $αα + 2αχ + χχ = 2αχ + χχ$, ἢ $αα = 2αχ + χχ - 2αχ - χχ = 0$· ὅπερ ἀδύνατον· ἐν ἄρα τῇ κυκλικῇ ὑπερβολῇ ὐδεμία γωνία ἔςαι $= 45°$, περιεχομένη ὑπὸ καμπύλης ἢ εὐθείας παραλλήλυ τῷ ἄξονι.

Ἐὰν ζητηθῇ, ἐν τίνι σημείῳ ἡ ὑπὸ καμπύλης καὶ εὐθείας τῷ ἄξονι παραλλήλυ περιεχομένη γωνία ἐςιν $= 45°$, ἐπὶ καμπύλης ἐμφαινομένης τῇ ἐξισώσει $υυ = 2αχ + 2χχ$, γενέσθω $\frac{δυ}{δχ} = 1$· ἐπεὶ, διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς καμπύλης, $2υδυ = 2αδχ + 4χδχ$· ἄρα $\frac{δυ}{δχ} = \frac{2α + 4χ}{2υ}$, $2υ = 2α + 4χ$, $4υ^2 = (2α + 4χ)^2$, ἢ (ἀντικαταςάσει τῆς τῦ $υυ$ δυνάμεως), $4\,(2αχ + 2χχ) = (2α +$

$4\chi)^2$, $8\alpha\chi + 8\chi\chi = 4\alpha\alpha + 16\alpha\chi + 16\chi^2$· μεταθέσει δὲ καὶ ἀναγωγῇ, $8\chi^2 + 8\alpha\chi = -4\alpha\alpha$, $\chi\chi + \alpha\chi = -\frac{1}{2}\alpha\alpha$· ἀναπληρώσει δὲ τοῦ ἐλλείποντος τετραγώνου,

$$\chi^2 + \alpha\chi + \frac{\alpha\alpha}{4} = \tfrac{1}{4}\alpha\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha = -\frac{\alpha\alpha}{4}\cdot$$ ἄρα $\chi + \frac{1}{2}\alpha = \pm\frac{1}{2}\times\sqrt{(-\alpha\alpha)}$, ποσότης ἀνύπαρκτος· ὅθεν δῆλον ὡς ἡ προτεθεῖσα καμπύλη οὐδαμοῦ μετὰ παραλλήλου ταῖς ἀποτετμημέναις εὐθείας συστῆσαι δύναται γωνίαν $= 45°$.

76. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν μὲν τὸ $\delta\chi$ ὑποτεθῇ ἀπειροστὸν τοῦ $\delta\upsilon$, ἡ ἁπτομένη $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$ ἔσεται τηνικαῦτα ἀπείρως μικρά, καὶ ἡ τεταγμένη παράλληλος τῇ ἁπτομένῃ κατὰ τὸ ζητούμενον σημεῖον, καὶ αὐτῇ συνεπιπεσεῖται, ὥσπερ γίνεται ἐπὶ τῆς Α ἀρχῆς τῶν ἐν τῇ παραβολῇ ἀποτετμημένων· ἐὰν δὲ τὸ $\delta\upsilon$ ὑποτεθῇ τοῦ $\delta\chi$ ἀπειροστόν, γενήσεται τηνικαῦτα ἀπείρως μικρὰ ἡ δύναμις τοῦ $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$· εἴτ᾽ οὖν ἡ ἁπτομένη τῆς γωνίας τῆς περιεχομένης ὑπὸ καμπύλης καὶ εὐθείας ταῖς ἀποτετμημέναις παραλλήλου ἔσται ἀπείρως μικρά· ἀλλὰ ταύτης τῆς γωνίας ἀπειροστῆς ὑπαρχούσης, ἡ αὐτῆς ἐφαπτομένη συμβάλλουσα τῷ ἄξονι μετὰ διάστημα ἄπειρον ἐπινοηθήσεται· καὶ ἡ μὲν ὑφαπτομένη ἐπινοηθήσεται ἄπειρος, ἡ δ᾽ ἁπτομένη τῷ ἄξονι ἔσται παράλληλος· τοῦθ᾽ ὅπερ τῷ κυκλικῷ τεταρτημορίῳ ΑΜ (σχ. 170) συμβαίνει κατὰ τὸ Μ πέρας· σημειωτέον δὲ ἐνταῦθα, ὡς τῆς $\delta\upsilon$ ἐχούσης τι μέγεθος συναντᾷ που τῇ τῶν ἀποτετμημένων γραμμῇ ΠΤ ἡ ἁπτομένη, ἄπειρος δὲ γίνεται ἡ ὑφαπτομένη ΠΤ τῆς Τ γωνίας ἀπείρως ὑπαρχούσης

μικρᾶς· ἀλλ' ἐπείπερ ἡ ἀπτομένη μΤ (ταὐτὸν δ' ἂν εἴη ῥητέον καὶ περὶ τῆς ὑφαπτομένης), γινομένη τῷ ἄξονι παράλληλος, ἄπειρος γίνεσθαι τηνικαῦτα λέγεται· τότε ἄρα τὸ δυ, κατὰ βραχὺ μικρυνόμενον, ἀπολύτως ἀποκαθίσταται $= 0$· καὶ ἀποβαίνει ἄρα ὁ τύπος $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = 0$, ὃς ἐμφαίνει παράλληλον εἶναι τῷ ἄξονι τὴν ὑφαπτομένην· ὁ δὲ τύπος $\frac{\delta\upsilon}{0}$ δείκνυσι τὴν ἀπτομένην ταῖς τεταγμέναις εἶναι παράλληλον· οὐ μέντοι γε διαιρεῖσθαί τι διὰ τοῦ 0, ἀλλὰ τὴν δχ ἀπειροστὴν οὖσαν ἐκδηλοῦμεν, παρατιθεμένην πρὸς τὴν δυ (*).

Ἐὰν ἄρα ζητηθῇ, ἐν τίνι τῆς καμπύλης σημείῳ ἡ ἀπτομένη παράλληλος γίνεται ταῖς ἀποτετμημέναις, δῆλον ὅτι εὑρεθήσεται τουτὶ τὸ σημεῖον, ὑποτιθεῖσι δυ $= 0$ ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$· τοὐναντίον δὲ ζητηθέντος τοῦ τόπου, ἔνθα ἡ ἀπτομένη παράλληλος γίνεται ταῖς τεταγμέναις, ἀπόχρη ὑποθέσθαι τὴν δύναμιν τοῦ κλάσματος $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = 0$, ἤ, ὃ δήπου ταὐτὸν, $\delta\chi = 0$· τοιγαροῦν, ἐὰν ὑποτεθῇ $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{\alpha}{\beta}$, ἡ ἀπτομένη εὑρεθήσεται παράλληλος, ταῖς μὲν

(*) Σαφέστερον δὲ τὸ λεγόμενον γενήσεται ἐπιστήσασι τὸν νοῦν ταῖς δυσὶ τεταγμέναις KM, πN· ἐκλαμβάνονται γὰρ αὗται ὡς οὐδενὶ ἀλλήλων διαφέρουσαι, καὶ περατούμεναι ἑκατέρα πρὸς τῇ εὐθείᾳ $M\Delta$, οὗ συμπίπτον ἐπινοεῖται τὸ τόξον MN· ἵν' οὖν δηλώσαμεν, ὅτι τὸ δυ ἐστιν ἀπείρως ἔλαττον τοῦ δχ, ἢ τοὐναντίον, ἐκείνως μὲν τὸ δυ $= 0$, οὕτω δὲ τὸ δχ $= 0$ ἐκλαμβάνομεν.

τεταγμέναις, τῦ ἀριθμητῦ ὄντος $= 0$, ταῖς δὲ ἀποτετμημέναις, τῦ παρονομαςῦ ὄντος ὡσαύτως $= 0$.

77. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ'. Εὑρεῖν τὸν τόπον τῆς παραβολῆς, ἔνθα ἡ αὐτῆς ἀπτομένη ταῖς τεταγμέναις ὑπάρχει παράλληλος.

ΛΥΣΙΣ. Ἐν τῇ παραβολῇ ἐςιν $\upsilon^2 = \pi\chi$, $2\upsilon\delta\upsilon = \pi\delta\chi$, $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{2\upsilon}{\pi}$· ἐὰν ἦν ὑποτεθῇ ὁ ἀριθμητὴς $2\upsilon = 0$, ἔςαι $\upsilon = 0$· ϗ τῦ 0 ἀντὶ υ ἀντικαταςαθέντος ἐν τῇ ἐξισώσει $\upsilon\upsilon = \pi\chi$, εὑρεθέσεται $0 = \pi\chi$, $\chi = \frac{0}{\pi} = 0$· ἡ ἄρα τῆς παραβολῆς ἀπτομένη παράλληλος ἔςαι ταῖς τεταγμέναις κατὰ τὴν ἀρχὴν τῶν ἀποτετμημένων, ἢ κατὰ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐςι $\chi = 0$· ἐπεὶ δὲ ἀδύνατόν ἐςιν ὑποθέσθαι τὴν παράμετρον $\pi = 0$, ἥτις ἐςὶ παρονομαςὴς τῦ κλάσματος· ὐδαμῦ ἄρα τῆς παραβολῆς ἡ ἀπτομένη ἔςαι ταῖς ἀποτετμημέναις παράλληλος.

78. Ἐν δὲ τῷ κύκλῳ (Τψ. Γ. 12) ἐςιν $\upsilon^2 = 2\alpha\chi - \chi\chi$, $\upsilon = \sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}$, $2\upsilon\delta\upsilon = 2\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi$, $\upsilon\delta\upsilon = (\alpha - \chi)\,\delta\chi$, $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{\upsilon}{\alpha - \chi} = \frac{\sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}}{\alpha - \chi}$. ἐὰν ἦν ὑποτεθῇ $= 0$ ὁ ἀριθμητὴς, ἔςαι $\sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)} = 0$, ϗ ἑκατέρυ μέλυς τετραγωνισθέντος, $2\alpha\chi - \chi\chi = 0$, ϗ μεταλλαγῇ τῶν συμβόλων, $\chi\chi - 2\alpha\chi = -0$, ϗ ἀναπληρώσει τῦ ἐλλειπῦς τετραγώνυ, $\chi\chi - 2\alpha\chi + \alpha\alpha = -0 + \alpha^2 = \alpha^2$, ϗ ἐξαγωγῇ τῆς ῥίζης, $\chi - \alpha = \pm\sqrt{\alpha\alpha} = \pm\,\alpha$, $\chi = \alpha \pm \alpha$, εἴτ' ἦν $\chi = 2\alpha$, ϗ $\chi = 0$· ἡ τῦ κύκλυ ἄρα ἀπτομένη παράλληλος ταῖς τεταγμέναις καθίςαται κατὰ τὰ τῆς διαμέτρυ πέρατα· ἐὰν δὲ ὁ παρονομαςὴς ὑποτεθῇ $= 0$, ἔςαι $\alpha - \chi =$

ο, ϰ̀ $x = \chi$· ἄρα ταῖς ἀποτετμημέναις γίνεται παράλληλος ἡ τοῦ κύκλου ἁπτομένη κατὰ σημεῖον ἀντιστοιχοῦν ἀποτετμημένῃ $\chi = \alpha$, τοῦτ' ἐστι σημεῖον ἀντιστοιχοῦν τῷ κέντρῳ· ἀλλ' ἴωμεν ἤδη ἐπὶ τὰς Ἀσυμπτώτους, ἀμέλει τα τὰς εὐθυγράμμους· περὶ δὲ τῶν καμπύλων ἀσυμπτώτων μέτιθι τοὺς κατὰ πλάτος διαλαβόντας περὶ τοῦ λογισμοῦ τῶν ἀπειροστῶν, μάλιστα δὲ τὸν περικλεῆ Σαύριον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ εὑρέσεως τῶν Ἀσυμπτώτων.

79. Ἀσύμπτωτος ἀκούει τοῖς γεωμετροῦσι γραμμὴ εὐθεῖα, ἥτις ἐκλαμβάνεται ὡς ἁπτομένη τῆς καμπύλης ἐν διαστήματι ἀπείρῳ, εἴτ' οὖν παντὸς δεδομένου μείζονι· ὥστε τὸ ἀπόστημα, καθ' ὃ ἡ ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης ἀπέχει, πάσης δεδομένης ποσότητος ἔλαττον ὄν, ἐκλαμβάνεσθαι ἔχειν ἴσον τῷ μηδενί· τοῦτο μέντοι οὐχ' ἱκανοῖ πρὸς τὸ καταστῆσαι τὴν γραμμὴν ἀσύμπτωτον· προσδεῖ δὲ διορίσαι ϰ̀ τὴν θέσιν, ὡς τὸ ταύτης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς καμπύλης ἀπόστημα πεπερασμένον ὑπάρχειν· τῶν δὲ ἀσυμπτώτων, αἱ μὲν ταῖς ἀποτετμημέναις, αἱ δὲ ταῖς τεταγμέναις, εἰσὶ παράλληλοι· ἵν' οὖν τὰς πρώτας θηρευσώμεθα, ἐπάναγκές ἐστι, α΄. ὑποθέσθαι χ (εἴτε ὑπαρκτικὸν, εἴτε λειπτικὸν) ἄπειρον ἐπὶ τοῦ τύπου $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$, ἢ ἐπὶ τοῦ λόγου $\delta\chi : \delta\upsilon$, τοῦ $\delta\upsilon$ ὄντος $= 0$, ἢ γοῦν ἀπείρως ἐλάττονος τοῦ $\delta\chi$· β΄. τὸ υ ὑπάρχειν, ἤτοι πεπερασμένον ποσὸν, ἢ γοῦν $= 0$· ϰ̀ ὄντος μὲν $\upsilon = 0$, ἡ γραμμὴ τῶν

χ ἔσαι ἡ αὐτὴ τῇ ἀσυμπτώτῳ· ὄντος δὲ τᾶ υ ποσᾶ πεπερασμένα ϗ $=\beta$, φέρ᾽ εἰπεῖν, ἡ τῷ ἄξονι τῶν χ παράλληλος, ϗ αὐτᾶ ἀφισαμένη τῇ ποσότητι β, ἔσαι ἀσύμπτωτος· ἐφ᾽ ᾧ δὲ τῶν ταῖς τεταγμέναις παραλλήλων ἐγκρατεῖς ἐσόμεθα, ὑποθετέον, τὸ $\pm\,\upsilon$ πεπερασμένον λαμβάνοντας, τὴν δύναμιν τᾶ $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}=o$, ἢ γᾶν τὸ $\delta\chi$ ἀπείρως τᾶ $\delta\upsilon$ ἔλαττον, ὅπερ ὑπάρχειν ἀνάγκη ἐν ταύτῃ τῇ ὑποθέσει, ἤτοι $=o$, ἢ ποσὸν πεπερασμένον· ἐὰν δὲ, τᾶ $\pm\,\chi$ ἀπείρα ὑποτεθέντος, ἡ δύναμις τᾶ $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$ ᾖ πεπερασμένη, γνωσθήσεται ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ἀσυμπτώτα ϗ τᾶ τῶν ἀποτετμημένων ἄξονος· ἵνα μέντοι ἡ ὅτω διοριζομένη εὐθεῖα ὑπάρχῃ ἀσύμπτωτος, ἀνάγκη πᾶσα τὸ μέρος τᾶ ἄξονος προαχθέντος, εἰ δέοι, τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν χ, ϗ τᾶ σημεία, καθ᾽ ὃ αὕτη ἡ εὐθεῖα συμβάλλει τῷ ἄξονι, ὑπάρχειν πεπερασμένον· διὸ δὴ εὑρεθείσης τῆς ὑφαπτομένης κατὰ σημεῖον ἀπείρως ἀφεςηκὸς, ϗ ἀπ᾽ αὐτῆς τῆς ἀποτετμημένης ἀφαιρεθείσης, ἐὰν τὸ κατάλοιπον ᾖ, ἤτοι ποσὸν πεπερασμένον, ἢ $=o$, ἡ ἐκ τάτα τᾶ σημεία ὑπὸ γωνίαν διωρισμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἀσύμπτωτος ἔσεται τῆς καμπύλης.

80. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὑρεῖν τὰς ἀσυμπτώτας τῆς καμπύλης ΜΝ (σχ. 171), ἧς ἐξίσωσις, ὑποτιθεμένων, τῶν μὲν ἀποτετμημένων ΑΠ$=\chi$, τῶν δὲ τεταγμένων ΠΝ $=\upsilon$, ἐςὶν ἡ $\upsilon\chi=\alpha\chi+\alpha\beta$, ἢ $\upsilon=\alpha+\frac{\alpha\beta}{\chi}$.

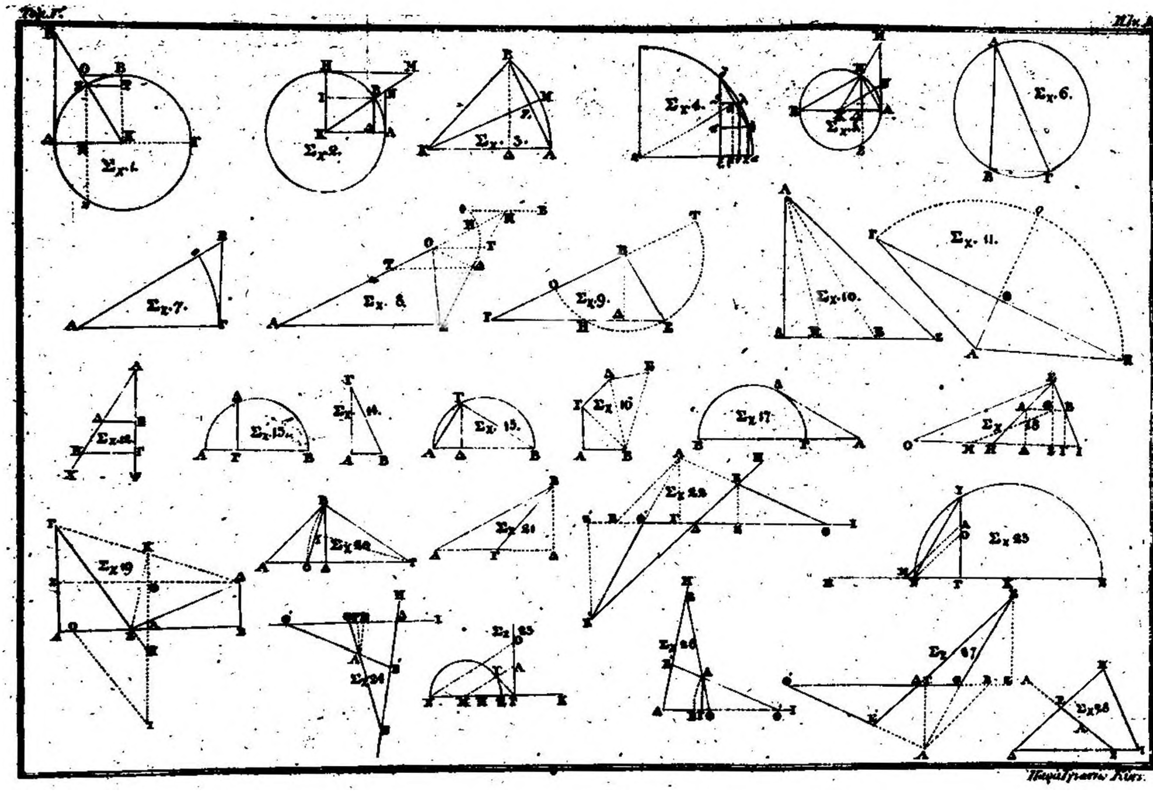
ΛΥΣΙΣ. Υποτεθέντος τῦ $\chi = \infty$, ὁ ὅρος $\frac{\alpha\beta}{\chi}$ ἐξαϑενωϑήσεται· ϗ δὴ ἔϛαι $\upsilon = \alpha$· ἔϛι δὲ ἐκ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως, $\upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon = \alpha\delta\chi$, εἶτ' ἐν $\upsilon\delta\chi - \alpha\delta\chi = -\chi\delta\upsilon$, $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{-\chi}{\upsilon - \alpha}$· ἐὰν ὖν ὑποτεθῇ $\delta\upsilon = 0$, εὑρεθήσεται, ὡς ἀνωτέρω (79) εἴδομεν, ἁπτομένη ταῖς ἀποτετμημέναις παράλληλος· ἐὰν δὲ γένηται ὁ παρονομαϛὴς $\upsilon - \alpha = 0$, ἔϛαι $\upsilon = \alpha$· λαμβανομένυ ἄρα τῦ $\mathrm{A}\Delta = \alpha$, ἡ ἐκ τῦ Δ ἀγομένη τῇ ΑΒ παράλληλος ΔΖ ἔϛαι τῆς καμπύλης ἀσύμπτωτος· εἰ δ' ὑποτεθείη $\upsilon = \infty$, ἡ ἐξίσωσις $\upsilon = \alpha + \frac{\alpha\beta}{\chi}$ ὐχ' ἵϛαται, εἰ μὴ γένοιτο $\chi = \frac{1}{\infty}$· τηνικαῦτα γὰρ ὁ ὅρος α ἀφανίζεται πρός γε τὸν $\frac{\alpha\beta}{\chi}$ ἄπειρον γινόμενον· ἐὰν δὲ ἐπὶ τῦ τύπυ $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{-\chi}{\upsilon - \alpha}$ ὑποτεθῇ ὁ ἀριθμητὴς $= 0$, εὑρεθήσεται $-\chi = 0$, ϗ $\chi = 0$· ταγαρῦν πορισθήσεται ὕτως ἁπτομένη ταῖς τεταγμέναις παράλληλος, διήκυσα διὰ τῦ σημείυ, ᾧ ἀντιϛοιχεῖ $\chi = 0$· ἀχθεῖσα ἄρα διὰ τῦ σημείυ Α, ἀρχῆς τῶν χ, ἡ εὐθεῖα ΑΓ ταῖς τεταγμέναις παράλληλος, ἔϛαι ϗ αὕτη τῆς προτεθείσης καμπύλης ἀσύμπτωτος.

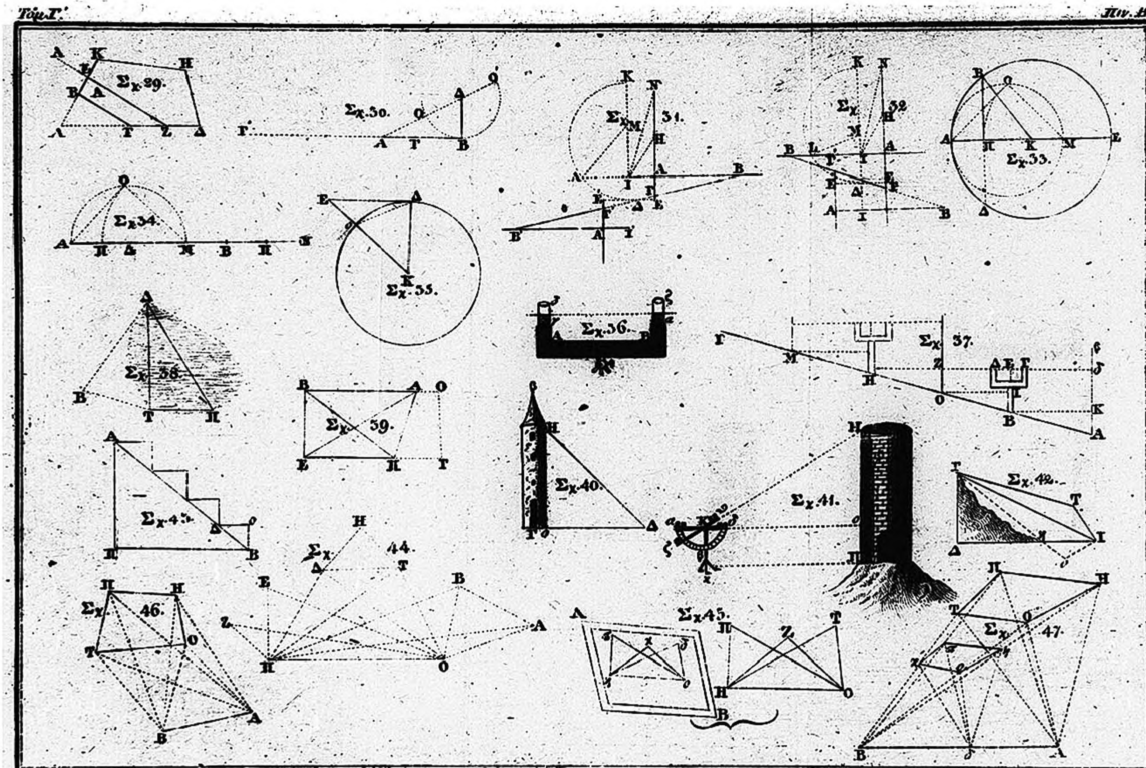
81. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὰς ἀσυμπτώτυς τῆς ὑπερβολῆς, ἧς ἐξίσωσις, ὑποτιθεμένυ τῦ μὲν πρώτυ ἄξονος $= \alpha$, τῆς δὲ κατ' αὐτὸν παραμέτρυ $= \pi$, ἔϛιν $\upsilon^2 = \frac{\pi}{\alpha} \times (\alpha\chi + \chi^2)$.

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω $\chi = \infty$· οὐκοῦν ἔσαι $\upsilon^2 = \frac{\pi}{\alpha}\chi\chi$, $\upsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\chi$, $\delta\upsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\cdot\delta\chi$, $\sqrt{\alpha}.\delta\upsilon = \sqrt{\pi}.\delta\chi$, $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}$· ἐπεὶ τοίνυν ἀδύνατον ὑποτεθῆναι οὔτε α οὔτε $\pi = 0$, ἡ καμπύλη οὐδεμίαν ἕξει ἀσύμπτωτον παράλληλον, οὔτε ταῖς τεταγμέναις, οὔτε ταῖς ἀποτετμημέναις· μόνη δὲ ἡ εὐθεῖα, ἥτις μετὰ τοῦ ἄξονος ποιεῖ γωνίαν, ἧς ἡ ἀπτομένη $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$ ἐσὶν $= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$, ἐκλαμβάνεται ὡς ἀπτομένη τῆς καμπύλης ἐν διασήματι ἀπείρῳ· ἵνα δὲ γνωσὸν γένοιτο, εἰ αὕτη ἡ εὐθεῖα ἐσὶν ἀσύμπτωτος, ζητηθήτω ἡ τῆς ὑπερβολῆς ὑφαπτομένη, ἥτις εὑρίσκεται (55) $= \frac{\alpha\chi+\chi\chi}{\frac{1}{2}\alpha+\chi}$· ἐ δὴ $\frac{\alpha\chi+\chi\chi}{\frac{1}{2}\alpha+\chi} - \chi =$
$\frac{\alpha\chi + \chi\chi - \frac{1}{2}\alpha\chi - \chi\chi}{\frac{1}{2}\alpha+\chi} = \frac{\frac{1}{2}\alpha\chi}{\frac{1}{2}\alpha+\chi} = \text{ΤΛ}$ (σχ. 172), ἥτις, ὄντος $\chi = \infty$, ὡς ἐνταῦθα, γίνεται $= \frac{\frac{1}{2}\alpha\,\infty}{\infty} = \frac{1}{2}\alpha$· ἄρα ἡ ζητεμένη εὐθεῖα διήκει τὸ τοῦ ἄξονος μέσον σημεῖον Κ· ἵνα δὲ διορισθῇ καὶ ἕτερον σημεῖον Β ταύτης τῆς εὐθείας ΚΒ, πορισθήσεται τοῦτο ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΑΒ· ἐσὶ γὰρ συνημ. τῆς γωνίας Κ : ἡμ. Κ :: ΚΑ $= \frac{1}{2}\alpha$: ΑΒ, ἤ, ἐπεὶ $\frac{\text{ἡμ. Κ}}{\text{συνημ. Κ}} = \text{απ. Κ} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$, $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\pi} :: \frac{1}{2}\alpha : \text{ΑΒ} = \frac{1}{2}\alpha\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha\pi}$· ἐὰν οὖν ὑποτεθῇ ὁ δεύτερος ἄξων $= \beta$, εὑρεθήσεται ἡ τοῦ πρώτου

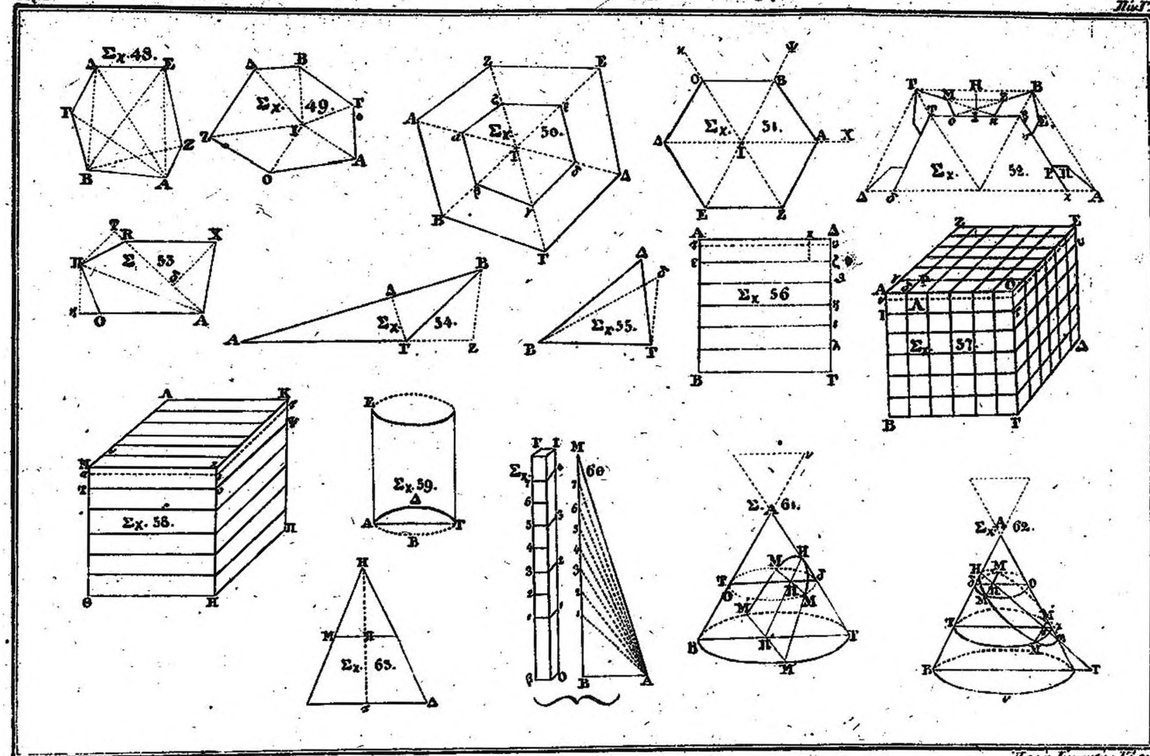
παράμετρος θεμένοις $\alpha : \beta :: \beta : \pi$ (Τ'ψ. Γ. 168), ὅθεν $\beta\beta = \alpha\pi$, ϰ̓ $\beta = \sqrt{\alpha\pi}$, ϰ̓ $\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha\pi}$· ἐὰν ἄρα ἐκ τοῦ σημείου Α ἀνασηθῇ κάθετος τῷ πρώτῳ ἄξονι ἡ ΑΒ $= \frac{1}{2}\beta$, ἡ ἐκ τῶν σημείων Κ, Β διαχθεῖσα εὐθεῖα ἔςαι τῆς ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτος.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Γ'. ΤΟΜΟΥ.

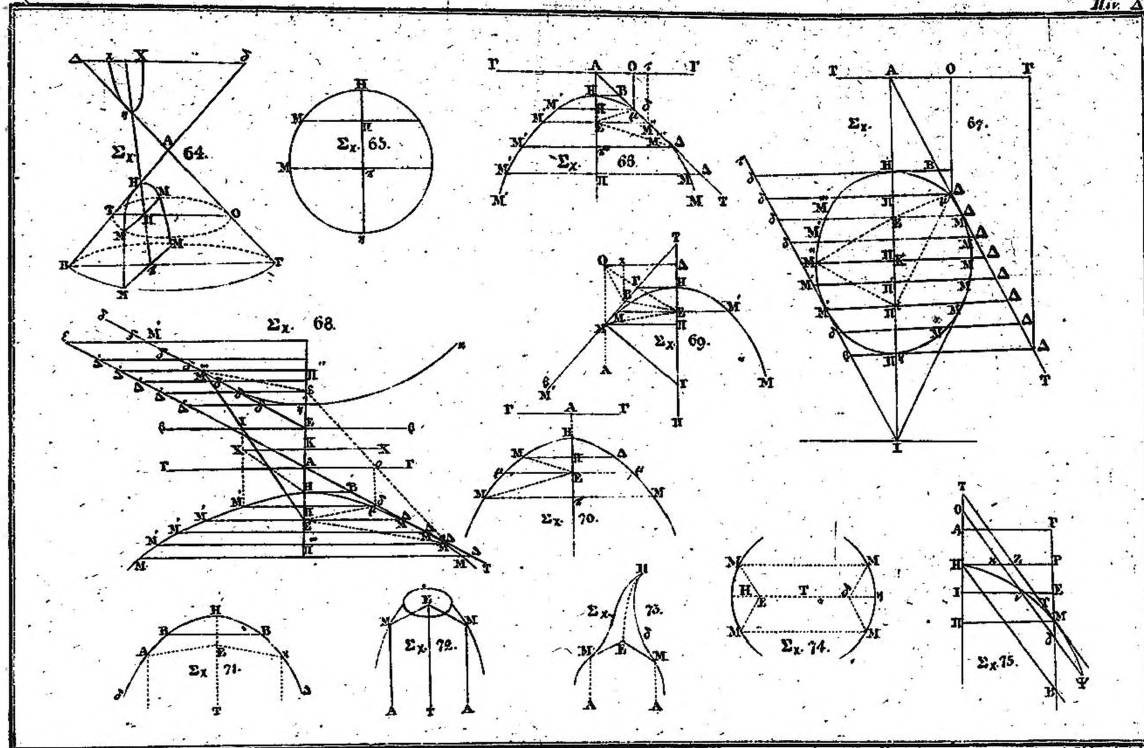

Σχ. 1.
Σχ. 2.
Σχ. 3.
Σχ. 4.
Σχ. 5.
Σχ. 6.
Σχ. 7.
Σχ. 8.
Σχ. 9.
Σχ. 10.
Σχ. 11.
Σχ. 12.
Σχ. 13.
Σχ. 14.
Σχ. 15.
Σχ. 16
Σχ. 17
Σχ. 18
Σχ. 19
Σχ. 20
Σχ. 21
Σχ. 22
Σχ. 23
Σχ. 24
Σχ. 25
Σχ. 26
Σχ. 27
Σχ. 28



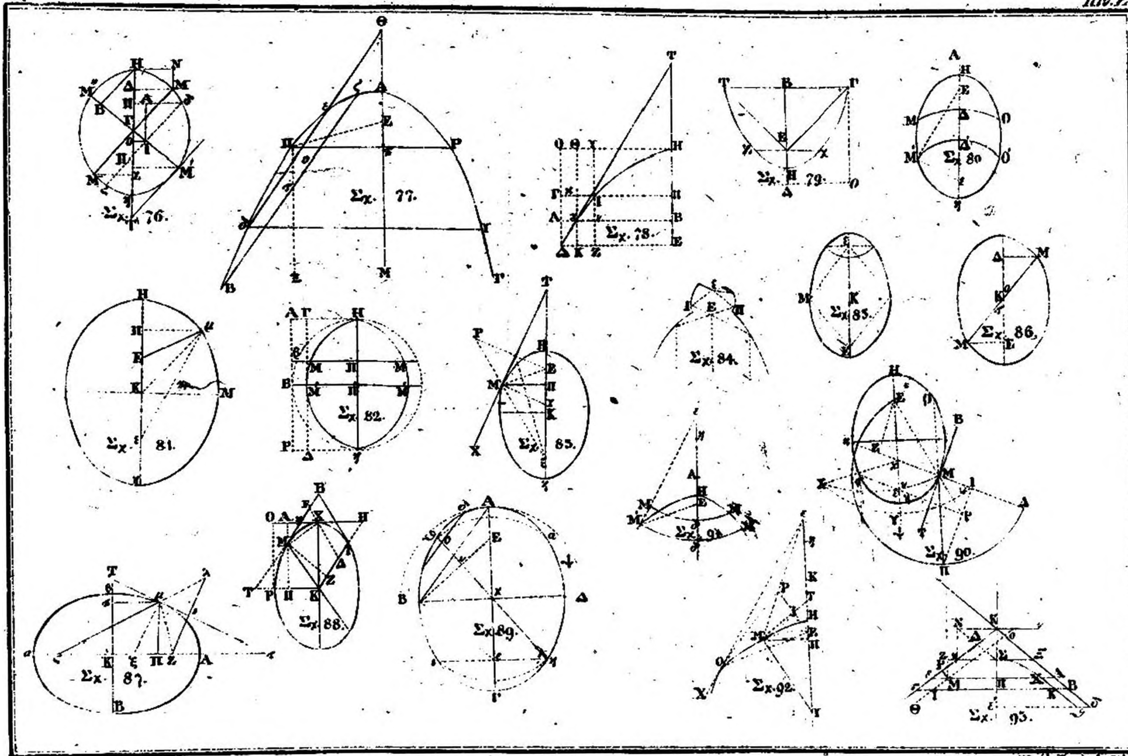
Παρὰ Ἰγνατίῳ Κοκ.



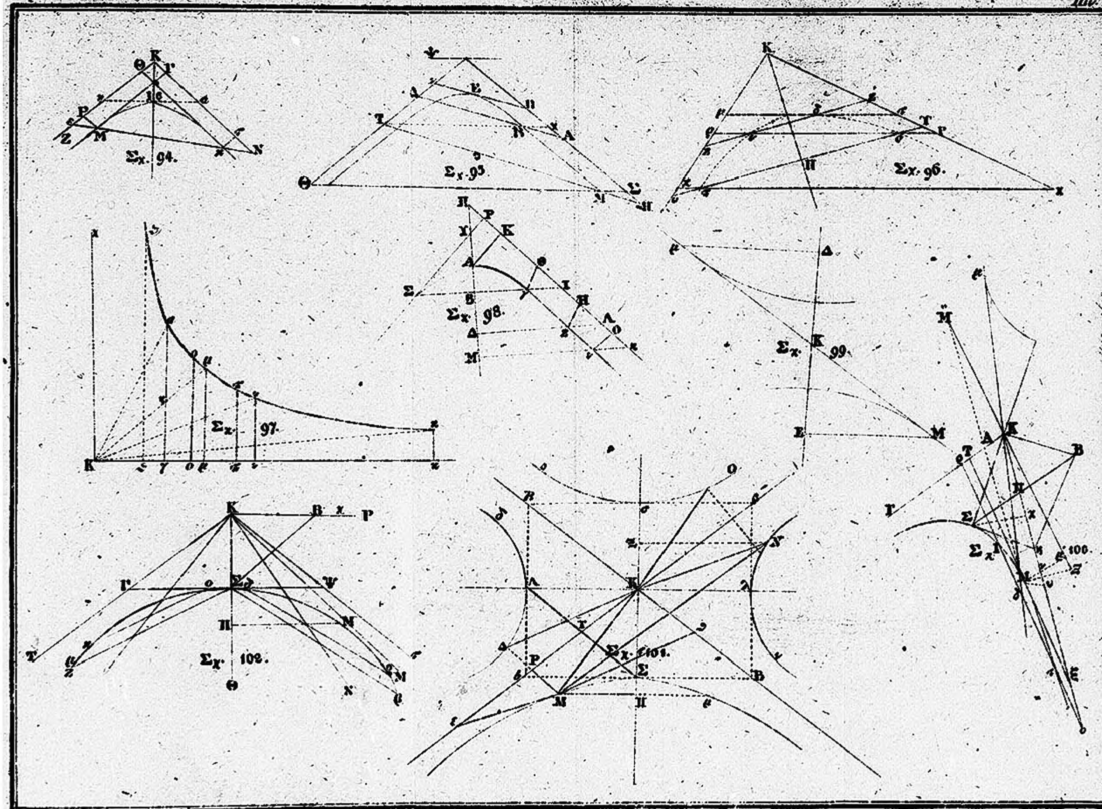
Παρὰ Ἰγνατίῳ Τύπ.



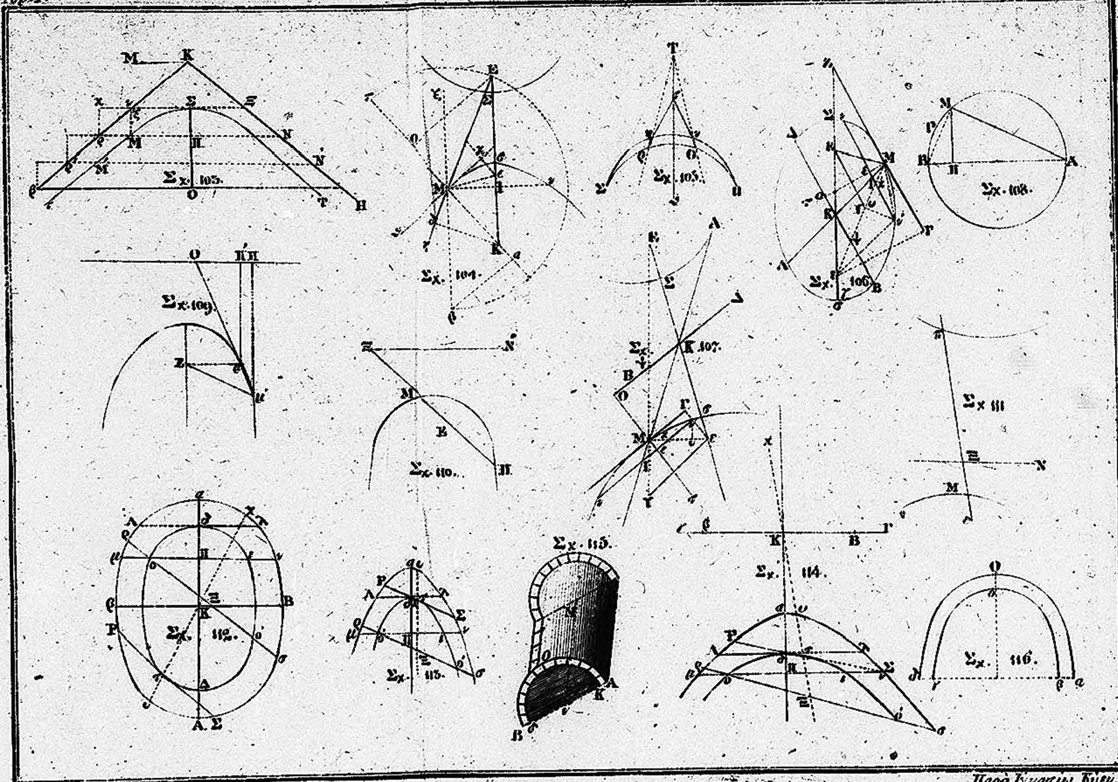
Παρὰ Ἰγνατίῳ Κωεν.

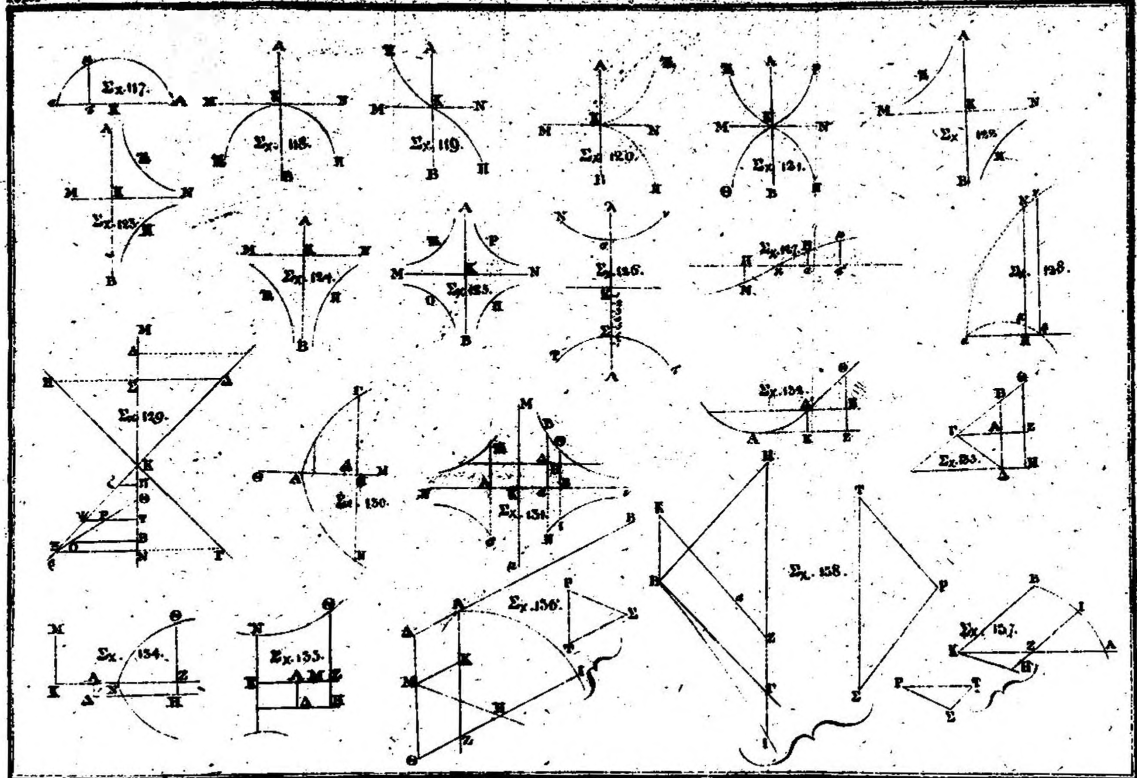


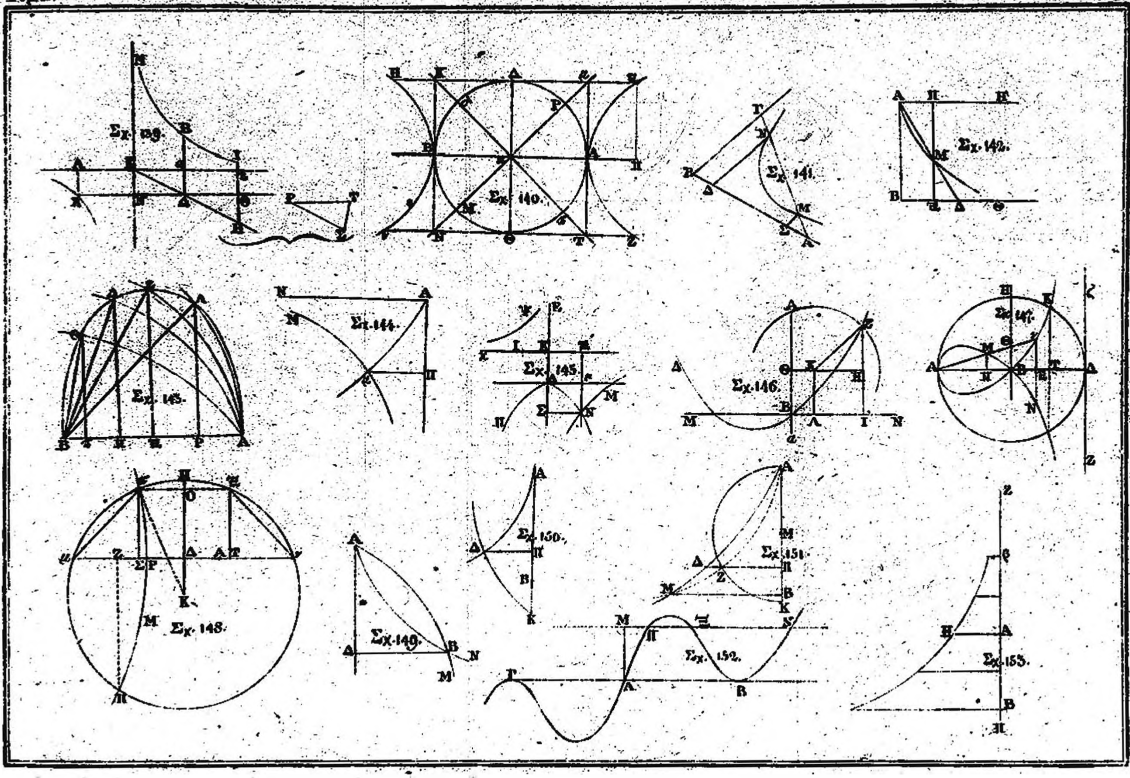
Παρὰ Ιγνατίῳ Κ...

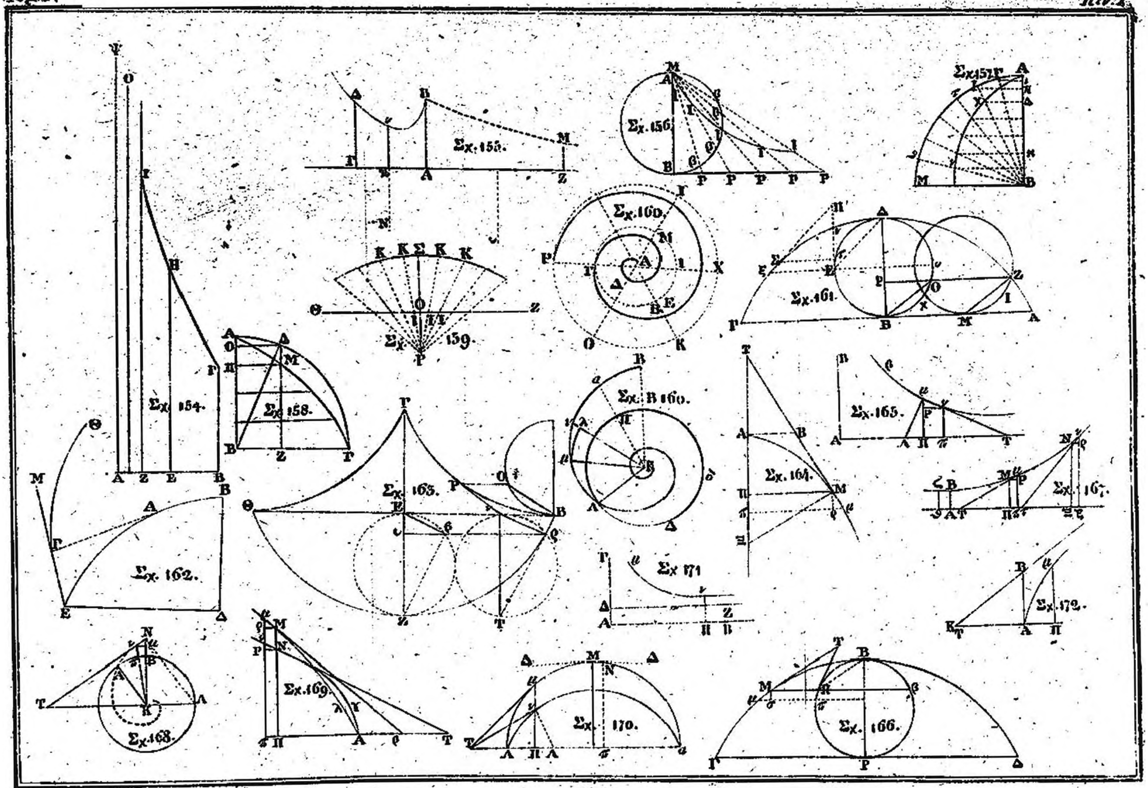


Παρὰ Συγγαττο Κιεν.


Σχ. 103.
Σχ. 104.
Σχ. 105.
Σχ. 106.
Σχ. 107.
Σχ. 108.
Σχ. 109.
Σχ. 110.
Σχ. 111
Σχ. 112.
Σχ. 113.
Σχ. 114.
Σχ. 115.
Σχ. 116.


Σχ. 117.
Σχ. 118.
Σχ. 119.
Σχ. 120.
Σχ. 121.
Σχ. 122.
Σχ. 123.
Σχ. 124.
Σχ. 125.
Σχ. 126.
Σχ. 127.
Σχ. 128.
Σχ. 129.
Σχ. 130.
Σχ. 131.
Σχ. 132.
Σχ. 133.
Σχ. 134.
Σχ. 135.
Σχ. 136.
Σχ. 137.
Σχ. 138.


Σχ. 139.
Σχ. 140.
Σχ. 141.
Σχ. 142.
Σχ. 143.
Σχ. 144.
Σχ. 145.
Σχ. 146.
Σχ. 147.
Σχ. 148.
Σχ. 149.
Σχ. 150.
Σχ. 151.
Σχ. 152.
Σχ. 153.


Σχ. 154.
Σχ. 155.
Σχ. 156.
Σχ. 157.
Σχ. 160.
Σχ. 161.
Σχ. 158.
Σχ. 159.
Σχ. Β 160.
Σχ. 165.
Σχ. 164.
Σχ. 163.
Σχ. 167.
Σχ. 162.
Σχ. 171
Σχ. 172.
Σχ. 168.
Σχ. 169.
Σχ. 170.
Σχ. 166.