Δ Ι Α Σ Α Φ Η Σ Ι Σ.

Εἰς τὴν Επίτομον θεωρίαν τὴν ὑπὸ τοῦ Κυρίου Λακροᾶ ἐκτεθεῖσαν εἰς τὸ Συμπλήρωμα τῆς Αλγέβρας του ἐπάνω εἰς τὴν σημείωσιν τοῦ ἀθανάτου Λαγρανδίου, διὰ τῆς ὁποίας διδάσκει τίνι τρόπῳ διὰ μέσου τῶν λειτουργιῶν τῶν ῥιζῶν μιᾶς ἐξισώσεως δύναται τὶς νὰ λύσῃ τὰς ἐξισώσεις τοῦ $\beta^{\text{ρου}}$, $\gamma^{\text{του}}$, καὶ $\delta^{\text{του}}$, βαθμοῦ, καὶ ὅτι εἶναι ἀδύνατον διὰ ταύτης τῆς μεθόδου, ὡς καὶ διὰ ὅλων τῶν ἄλλων ἕως τοῦ νῦν γνωστῶν, νὰ λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ τετάρτου.

Π Α Ρ Α

ΙΩΑΝΝΟΥ ΚΑΡΑΝΔΙΝΟΥ

ΚΕΦΑΛΛΗΝΟΣ,

Προφέσσορος τῆς Υψηλοτέρας Μαθηματικῆς καὶ

Εφόρου τῆς Ιονίου Ακαδημίας.

ΕΝ ΚΕΡΚΥΡΑ.

1826.

ΕΚΛΑΜΠΡΟΤΑΤΕ ΚΥΡΙΕ!

Πολλὰ καὶ καλὰ ποιήματα γράφονται καθ' ἑκάστην ἀπὸ ἔνδοξα τὴν σοφίαν ὑποκείμενα, καὶ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἀφιερόνονται εἰς ἄνδρας μεγίστους μὲν κατὰ τὸ ἰσχύειν, ὄχι δὲ κατὰ τὴν παιδείαν. Διότι ὄχι βέβαια εὐκόλως ἀπαντῶνται τὰ δύο ταῦτα, συνενωμένα, καὶ διὰ τοῦτο θαυμάζουν καὶ σέβονται μεγάλως οἱ ἄνθρωποι τὸν ὅστις μὲ τὰ καλὰ ταῦτα προτερήματα εἶναι στολισμένος. Ὅθεν καὶ ἐγὼ ἀποφασίσας νὰ προσφέρω εἰς τὴν Ἐκλαμπρότητά Σου τὸ μικρὸν τοῦτο πόνημά μου, καὶ βλέπων αὐτὴν κοσμουμένην καὶ διὰ τῶν δύω τούτων ἐξαιρέτων τοῦ ἀνθρώπου κοσμημάτων, γνωρίζω μὲν ἐμαυτὸν τυχηρότερον ἐκείνων, δεικνύομαι δὲ ἀξιοκατηγόρητος διὰ τὴν τόλμη[illegible] καὶ εἰς τοὺς ἄλλους καὶ εἰς αὐτήν. Ἀλλὰ πρὸς [illegible] τοὺς ἄλλους ἀποκρίνομαι, ὅτι τὰ φυσικὰ κ[illegible]ήματα ἀκολουθοῦσι τοὺς ἰδίους νόμους [illegible] ἓν σῶμα μεταβάλλῃ θέσιν, ἀδύνατο[illegible] νὰ μὴ βιάζῃ καὶ ἓν ἄλλο διὰ τῆς ἑλκτικῆς ἢ ὠθιστικῆς του δυνάμεως εἰς τὸ ν' ἀλλάξῃ κ' ἐκεῖνο τὴν θέσιν του. Οὕτω καὶ ἐγὼ λαβὼν κατὰ πρῶτον τὴν τόλμην νὰ διασαφήσω ἀναφοράν τινα τοῦ διὰ τὴν περὶ τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας πρόοδόν του ἀπαθανατισθέντος Λαγρανγίου, παρεσύρθην ἀπὸ τὴν πρώτην εἰς τὴν δευτέραν ταύτην τόλμην τοῦ νὰ θελήσω ν' ἀφιερώσω τὴν διασάφησιν καὶ ἀνάπτυξιν αὐτῆς εἰς ἄνδρα, σιμὰ εἰς ὅλα τ' ἄλλα καὶ κατὰ τὴν μάθησιν θαυμαστόν· εἰς αὐτὴν δὲ, ὅτι τὸ βαθύτατον σέβας τὸ ὁποῖον αἰσθάνομαι περὶ τοῦ λαμπροῦ της ὑποκειμένου, καὶ ἡ πεποίθησίς μου ὅτι ἡ εὐγενὴς καὶ σπουδαία ψυχή της θέλει τὸ δεχθῆν εὐμενῶς, ἐστάθησαν τῆς τόλμης μου ταύτης τὰ αἴτια. Σύγγνωθι λοιπὸν, ἔνδοξε ἄνερ! καὶ τῆς Πατρίδος ἡμῶν καύχημα! καὶ δέχθητι τὸ ταπεινόν μου τοῦτο πόνημα! Εἰμὶ δὲ

Κερκύρα τῇ 26 Ἰουλίου 1826.

Πρὸς τὸν Ἐκλαμπρότατον Ὕπαρχον
τῆς Κεφαλληνίας Ἰατροφιλόσοφον
Κύρ. Παντάζην Καρίδην

Τῆς [redacted] Σου
ταπεινὸς [redacted]
Ἰωάννης Καρανδῖνος

ΔΙΑΣΑΦΗΣΙΣ.

Εἰς τὴν ἐπίτομον θεωρίαν τὴν ὑπὸ τοῦ Κυρίου Λακροᾶ ἐκτεθεῖσαν εἰς τὸ Συμπλήρωμα τῆς Αλγέβρας του, ἐπάνω εἰς τὴν σημείωσιν τοῦ Κυρίου Λαγρανδίου, εἰς τὴν ὁποίαν ἀποδεικνύεται, πῶς διὰ τῶν λειτουργιῶν τῶν ῥιζῶν ἐξισώσεως τινὸς ἐπιλύονται αἱ ἐξισώσεις τοῦ βρου. γτου. καὶ δτου. βαθμοῦ, καὶ ὅτι ἀδύνατον διὰ ταύτης τῆς μεθόδου, εἴτε δι᾽ ἄλλης τινὸς ἕως τοῦ νῦν γνωστῆς, νὰ λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δτου.

Παρατηροῦντες τὸν σκοπὸν τῆς μεθόδου τοῦ Κυρίου Λαγρανδίου, διὰ τῆς ὁποίας ἐλύσαμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ β.ρου γ.του καὶ δ.του βαθμοῦ, βλέπομεν, ὅτι πρέπει κατὰ μὲν πρῶτον νὰ σχηματισθῇ λειτουργία τὶς, περιεκτικὴ ὅλων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεω, πολλαπλασιαζομένων μὲ τὰς ῥίζας τῆς μονάδος, τὰς ὁποίας συνάγομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἰδίου βαθμοῦ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἥτις ἔχει δύο ὅρους, ὁ δεύτερος τῶν ὁποίων εἶναι, - ι, τουτέστιν ἡ μὲν πρώτη ῥίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως μὲ τὴν πρώτην ῥίζαν τῆς μονάδος, ἡ δὲ δευτέρα μὲ τὴν δευτέραν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Εἰς τὴν Ἐξίσωσιν παραδ. χάριν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\chi^2 + \pi \chi + \kappa = 0$ ἐλάβομεν τὴν λειτουργίαν $\chi' - \chi''$. ὅπου χ', χ'' εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως, καὶ ι, - ι, αἱ ῥίζαι τῆς μονάδος, τὰς ὁποίας συνάγομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\psi^2 - 1 = 0$, Παρομοίως εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^3 + \pi\chi + \varkappa = 0$ ἐλάβομεν τὴν λειτουργίαν $\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi'''$, ὅπου χ', χ'', χ''', εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, καὶ 1, α, α^2 εἶναι αἱ τρεῖς ῥίζαι τῆς μονάδος τὰς ὁποίας συνάγομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\psi^3 - 1 = 0$ Καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^4 + \pi\chi^2 + \varkappa\chi + \rho = 0$ ἐλάβομεν τὴν λειτουργίαν $\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{IV}$, ὅπου πάλιν $\chi', \chi'', \chi''', \chi^{IV}$ εἶναι αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, καὶ 1, α, α^2, α^3 εἶναι αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς μονάδος, τὰς ὁποίας συνάγομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\psi^4 - 1 = 0$.

Λοιπὸν διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ πέμπτου βαθμοῦ τουτέστι τὴν $\chi^5 + \pi\chi^3 + \varkappa\chi^2 + \rho\chi + \sigma = 0$, πρέπει νὰ λάβωμεν τὰς ῥίζας ταύτης τῆς ἐξισώσεως, τὰς ὁποίας καλοῦμεν χ', χ'', χ''' χ^{IV}, χ^{V}, καὶ ἐκείνας τῆς $\psi^5 - 1 = 0$, αἱ ὁποῖαι εἶναι α^1, α^2, α^3, α^4, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἀκόλουθον λειτουργίαν, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν τ'.

$$\tau' = \chi' + \alpha\chi'' \div \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{IV} + \alpha^4\chi^{V}$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ αὕτη ἡ λειτουργία δὲν εἶναι συμμετρικὴ, εἰς πᾶσαν γινομένην μετάθεσιν τῶν ῥιζῶν προκύπτει διαφορετική τις τιμὴ, καὶ διὰ τοῦτο ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἐξίσωσιν βαθμοῦ τοιούτου, ὁποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων τῶν ῥιζῶν ἢ τῶν ἐκθετῶν τῶν συντελεστῶν, οἱ ὁποῖοι τὰς πολλαπλασιάζουν, τουτέστι τῶν, 0, 1, 2, 3, 4. Καὶ ἐπειδὴ ἐν γένει ἀπὸ πέντε ποσότητας προκύπτουν τόσαι μεταθέσεις ὅσας δηλοῖ ὁ ἀριθμὸς 5. 4. 3. 2. 1. = 120, ἔπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἐκ τῆς ὁποίας ἐξήρτηνται αἱ 120 λειτουργίαι, αἵτινες σχηματίζονται διὰ τῶν διαφόρων μεταθέσεων τῶν ῥιζῶν τῆς δοθεί- ἐξισώσεως, ἢ τῶν ἐκθετῶν τῶν συντελεστῶν τῶν πολλαπλασιαζόντων ταύτας τὰς ῥίζας εἰς τὴν ἄνω εἰρημένην λειτουργίαν, θέλει εἶσθαι τοῦ 120.τοῦ βαθμοῦ, τουτέστι σχηματίζεται ἐκ τοῦ γινομένου 120: παραγόντων τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Καλοῦντες λοιπὸν τὴν ἄγνωστον ταύτης τῆς ἐξισώσεως τ, παῤῥησιάζομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν οὕτως,

$$\tau^{120} + A\tau^{119} + B\tau^{118} \ldots + E\tau^{115} \ldots \Delta\tau^{110} \ldots + H\tau^{105} \ldots Z\tau^{100} \ldots + M\tau^{3} \ldots \Upsilon = 0.$$

Οἱ παράγοντες οἱ ὁποῖοι σχηματίζουσι ταύτην τὴν ἐξίσωσιν, εἶναι

$$(\tau - (\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{IV} + \alpha^4\chi^{V}))$$

(τ = ἡ δευτέρα λειτουργία)

— — — — — — — —

— — — — — — — —

(τ — ἡ ἑκατοστὴ εἰκοστὴ λειτουργία)

Ἑκάστη τῶν 120 λειτουργιῶν ἔχει τὸν δεύτερον ὅρον εἰς κάθε παράγοντα τοῦ πρώτου βαθμοῦ, διάφορον τῶν ἄλλων. Ἐπειδὴ δὲ 120 διαφορετικαὶ λειτουργίαι σχηματίζονται ὡς ἐδείξαμεν ἄνωθεν, καὶ μεταξὺ τούτων ὑπάρχουσι μερικαί, συντελεστὴν ἔχουσαι εἰς τὸν πρῶτον ὅρον τὸ α^0 ὅπερ ἐστί, μονάδα, διὰ νὰ γνωρίσωμεν πόσαι εἶναι μεταξὺ αὐτῶν, ὅσαι ἔχουν εἰς τὸν πρῶτον ὅρον συντελεστὴν τὴν μονάδα, καὶ διαφέρουν μόνον κατὰ τοὺς τῶν ἄλλων ὅρων, τουτέστιν εἰς τὴν μετάθεσιν τῶν ἐκθετῶν, συλλογιζόμεθα οὕτως. Αἱ ζητούμεναι λειτουργίαι σχηματίζονται ἐκ τῆς πρώτης, μεταθετομένων τῶν ἐκθετῶν τοῦ α ἐκτὸς τοῦ πρώτου τουτέστι, τῶν 1, 2, 3, 4. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων τεσσάρων ποσοτήτων ἀνὰ τέσσαρας τὴν φορὰν ἐκφράζεται διὰ $4.\ 3.\ 2.\ 1 = 24$. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι μεταξὺ τῶν 120 λειτουργιῶν ὑπάρχουσιν 24: αἵτινες ἔχουν συντελεστὴν εἰς τὸν πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα ἢ α^0. καλοῦντες τὴν πρώτην $\tau', \tau'', \tau''' \ldots \tau^{(24)}$ θέλομεν ἔχειν.

$\tau' = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{IV} + \alpha^4\chi^{V}$, $\tau'' = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^3\chi''' + \alpha^2\chi^{IV} + \alpha^4\chi^{V}$, $\tau''' = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^3\chi''' + \alpha^4\chi^{IV} + \alpha^2\chi^{V}$, $\tau^{IV} \ldots$, $\tau^{(24)}$ (τὴν 24.την)

Θέτοντες εἰς τὴν αὐτὴν ὁριζόντειον γραμμὴν τὰς εἰκοσιτέσσαρας ταύτας ἐξισώσεις, καὶ μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζοντες ἑκάστην τούτων διὰ τοῦ α, α^2, α^3, α^4, θέλομεν σχηματίσειν μὲ τὴν πρώτην ὁριζοντείους γραμμὰς πέντε, ἑκάστην σύνθετον ἐξ εἰκοσιτεσσάρων ἐξισώσεων, οὕτως, ὥστε ὁ ἀριθμὸς ὅλων τῶν ἐξισώσεων, εἶναι 120. Επειδὴ δὲ τὰ δεύτερα μέλη τῶν εἰκοσιτεσσάρων ἐξισώσεων τῆς πρώτης ὁριζοντείου γραμμῆς σχηματίζονται ἀπὸ τὰς εἰκοσιτέσσαρας προειρημένας ἀνίσους λειτουργίας τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἄρα καὶ τὰ ἐξ αὐτῶν γινόμενα διὰ τοῦ α, α^2, α^3, α^4 εἶναι ἄνισα, τουτέστι τὰ δεύτερα μέλη τῶν προειρημένων 120 ἐξισώσεων, εἶναι 120 ἄνισοι λειτουργίαι τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Λοιπὸν ἡ ἐκ τοῦ γινομένου τῶν εἰρημένων ἐξισώσεων σχηματιζομένη ἐξίσωσις εἶναι τοῦ 120.^{του} βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι παῤῥησιάζουν τὰς τιμὰς τῶν 120 λειτουργιῶν, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἶναι τὸ αὐτὸ, ὁποιανδήποτε εἶν' ἡ τάξις των, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἀνὰ πέντε τοὺς παράγοντας τουτέστι τοὺς ἐκ τῆς αὐτῆς λειτουργίας πολλαπλασιασμένης διὰ α^0, α^1, α^2, α^3, α^4, σχηματισθέντας, καὶ ἐντεῦθεν τὸ γινόμενον τῶν 120 παραγόντων τρέπεται εἰς ἓν ἄλλο εἰκοσιτεσσάρων μόνον, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος συντίθεται ἐκ τοῦ γινομένου πέντε ἄλλων παραγόντων τουτέστι.

$$(\tau - \tau')(\tau - \alpha\tau')(\tau - \alpha^2\tau')(\tau - \alpha^3\tau')(\tau - \alpha^4\tau')$$
$$(\tau - \tau'')(\tau - \alpha\tau'')(\tau - \alpha^2\tau'')(\tau - \alpha^3\tau'')(\tau - \alpha^4\tau'')$$
— — — — — — — — — — — — — — —
$$(\tau - \tau^{(24)})(\tau - \alpha\tau^{(24)})\ .\ .\ .\ .\ .\ (\tau - \alpha^4\tau^{(24)}) = 0$$

καὶ ἐπειδὴ $(\tau - \tau')(\tau - \alpha\tau')\ .\ .\ .\ (\tau - \alpha^4\tau') = \tau^5 - \tau'^5$ καὶ παρομοίως ἐκ τῶν δευτέρων προκύπτει $\tau^5 - \tau''^5$, κτ. διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον τῶν 120 παραγόντων θέλει ἐκφρασθῆν τοιουτοτρόπως.

$$(\tau^5 - \tau'^5)(\tau^5 - \tau''^5)(\tau^5 - \tau'''^5)\ .\ .\ .\ (\tau^5 - \tau^{(24)5}) = 0$$

καλοῦντες δὲ $\theta = \tau^5$, ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν $(\theta - \tau'^5)\ (\theta - \tau''^5)\ ..\ (\theta - \tau^{(24)\,5}) = o$, ἢ $\theta^{24} + A\theta^{23} + B\theta^{22} .. \rho\theta + \upsilon = o$ Τουτέστιν ἡ ἐξίσωσις τοῦ 120: βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι παῤῥησιάζουσι τὰς τιμὰς τῶν 120 λειτουργιῶν, αἵτινες σχημασίζονται ἀπὸ τὰς μεταθέσεις τῶν πέντε ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐτράπη εἰς ἐξίσωσιν 24του βαθμοῦ, εἰς θ. αἱ δὲ ῥίζαι αὐτῆς εἶναι αἱ εἰκοσιτέσσαρες λειτουργίαι εἰς τὰς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος ἔχει διὰ συντελεστὴν α^0, τουτέστι τὴν μονάδα. ὅμως ἑκάστη τῶν λειτουργιῶν τούτων ὑψόνεται εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν, ἐπειδὴ θέλ' εἶν' ἴσον μὲ τ^5, καὶ τ^5 ἴσον μὲ τ'^5, ἤτοι $(\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{IV} + \alpha^4\chi^{V})^5$ θεωροῦντες τώρα πόσαι εἶναι μεταξὺ τούτων τῶν εἰκοσιτεσσάρων λειτουργιῶν ἐκεῖναι, εἰς τὰς ὁποίας ὁ δεύτερος ὅρος ἔχει διὰ συντελεστὴν τὸ α, καὶ μόνον εἰς τὴν μετάθεσιν τῶν ἄλλων ἐκθετῶν διαφέρει τουτέστιν εἰς 2, 3, 4, εὑρίσκομεν 3. 2. 1 = 6. δηλαδὴ

$$(\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{IV} + \alpha^4\chi^{V})^5,\ (\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^3\chi''' + \alpha^2\chi^{IV} + \alpha^4\chi^{V})^5 - - - - - -$$

γράφοντες εἰς ὁριζόντειον γραμμὴν ταύτας τὰς ἒξ λειτουργίας καὶ ἀντεισάγοντες εἰς ἑκάστην τούτων ἀντὶ τοῦ α, τὸ α^2, α^3, α^4, σχηματίζομεν ἄλλας τρεῖς ὁριζοντείους γραμμὰς, ἑκάστην σύνθετον ἀπὸ ἒξ λειτουργίας, τουτέστιν ὁμοῦ αἱ τέσσαρες ὁριζόντειοι γραμμαὶ περιέχουν 24 λειτουργίας, καὶ ἔχουν εἰς τὸν πρῶτον ὅρον συντελεστὴν τὸ α^0 ἤτοι τὴν μονάδα, δηλαδὴ εἶναι αἱ εἰκοσιτέσσαρες τοῦ θ τιμαὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ εἰκοστοῦ τετάρτου βαθμοῦ. Αὕτη δὲ ἡ ἐξίσωσις σχηματίζεται ὑπὸ τοῦ γινομένου τῶν εἰκοσιτεσσάρων παραγόντων τοῦ πρώτου βαθμοῦ, καὶ ὁ πρῶτος ὅρος ἑκάστου σχηματίζεται ἐκ τοῦ θ. ὁ δὲ δεύτερος εἶναι μία τῶν 24ρων: ἄνω εἰρημένων λειτουργιῶν τουτέστιν, $(\alpha^0\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{IV} + \alpha^4\chi^{V})^5$ καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ, ὅπως καὶ ἂν ταχθῶσιν οὗτοι, σχηματίζομεν λοιπὸν ἀπὸ τὰς τέσσαρας καὶ εἴκοσιν ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς τὰς ἄνω εἰρημένας 4 ὁριζοντείους γραμμὰς, τοὺς 24: παράγοντας, ὡς ἰδῶ ἀκολουθεῖ.

$$\begin{array}{l}
\theta-(\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{\mathrm{IV}} + \alpha^4\chi^{\mathrm{V}})^5 \\
\theta-(\chi' + \alpha^2\chi'' + \alpha^4\chi''' + \alpha\chi^{\mathrm{IV}} + \alpha^3\chi^{\mathrm{V}})^5 \\
\theta-(\chi' + \alpha^3\chi'' + \alpha\chi''' + \alpha^4\chi^{\mathrm{IV}} + \alpha^2\chi^{\mathrm{V}})^5 \\
\theta-(\chi' + \alpha^4\chi'' + \alpha^3\chi''' + \alpha^2\chi^{\mathrm{IV}} + \alpha\chi^{\mathrm{V}})^5
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\theta-(\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^3\chi''' + \alpha\chi^{\mathrm{IV}} + \alpha^4\chi^{\mathrm{V}}) \\
\theta-(\chi' + \alpha^2\chi'' + \alpha^3\chi''' + \alpha^4\chi^{\mathrm{IV}} + \alpha^3\chi^{\mathrm{V}}) \\
\theta-(\chi' + \alpha^2\chi'' + \alpha\chi''' + \alpha^4\chi^{\mathrm{IV}} + \alpha^2\chi^{\mathrm{V}}) \\
\theta-(\chi' + \alpha^4\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{\mathrm{IV}} + \alpha\chi^{\mathrm{V}})
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\theta-(..)^5,\ \theta-(..)^5,\ \theta-(..)^5,\ \theta-(..)^5 \\
\theta-(..)^5,\ \theta-(..)^5,\ \theta-(..)^5,\ \theta-(--)^5, \\
\theta-(..)^5,\ \theta-(..)^5,\ \theta-(--)^5,\ \theta-(--)^5, \\
\theta-(--)^5,\ \theta-(--)^5,\ \theta-(--)^5,\ \theta-(--)^5,
\end{array}$$

Τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον θέλει μᾶς δώσειν τὴν ἄνω εἰρημένην ἐξίσωσιν τοῦ 24 βαθμοῦ εἰς θ, καὶ ἐπειδὴ ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι τῶν παραγόντων ἡ τάξις, εἰς τὸ τοιοῦτο γινόμενον, θέλομεν ἔχειν πάντοτε τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν, πολλαπλασιάζομεν ἀνὰ τέσσαρας τοὺς παράγοντας (διότι τόσοι ἐσχηματίσθησαν ἐκ τοῦ ἰδίου παράγοντος) ἀντεισάγοντες εἰς αὐτοὺς ἀντὶ τοῦ α, τὸ α^2 , α^3 , α^4 , (καλοῦμεν δὲ τὴν λειτουργίαν ἥτις σχηματίζει τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πρώτου παράγοντος εἰς τὴν πρώτην ὁριζόντειον γραμμὴν θ', καὶ τὰς ἐξ αὐτῆς συναγομένας διὰ τῆς ἀντεισαγωγῆς ἀντὶ τοῦ α, τοῦ α^2 , α^3 , α^4 , θ'', θ''', θ^{IV}). Οὕτως ἡ ἐξίσωσις τοῦ εἰκοσοῦ τετάρτου βαθμοῦ θέλει εἶσθαι τὸ γινόμενον ἐξ παραγόντων, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι σύνθετος ἀπὸ τέσσαρας τοῦ πρώτου βαθμοῦ παράγοντας, δηλαδὴ ἀπὸ ἓξ τοῦ δ.ρω: ὥστε ὁ μὲν πρῶτος τούτων εἶναι $(\theta-\theta')(\theta-\theta'')(\theta-\theta'''(\theta-\theta^{IV})$, καὶ ἐπειδὴ τὸ θ', τὸ ὁποῖον παῤῥησιάζει τὴν πρώτην τῶν ἓξ λειτουργιῶν αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τῶν τεσσάρων ὁριζοντείων γραμμῶν δύναται νὰ παῤῥησιάση τὴν δευτέραν καὶ τὴν τρίτην, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἕως εἰς τὴν ἕκτην, διὰ τοῦτο τὸ θ' εἶναι δεκτικὸν ἓξ τιμῶν. παρομοίως καὶ τὸ θ'', θ''', θ^{IV}, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως τοῦ τετάρτου βαθμοῦ ἤτοι τῆς $(\theta-\theta')(\theta-\theta'')(\theta-\theta''')(\theta-\theta^{IV})=0$ εἶναι δεκτικοὶ ἓξ τιμῶν. ἀλλ᾽ ἐπειδὴ οἱ τοιοῦτοι συντελεσταὶ εἶναι συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν θ', θ'', θ''', θ^{IV} ὡς ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, διὰ τοῦτο ἐξήρτηνται ἀπὸ ἐξίσωσιν τοῦ ἕκτου βαθμοῦ. Καλοῦντες λοιπὸν τὰς ἓξ τιμὰς τοῦ συντελεστοῦ τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς ἐξισώσεως

$$(\theta-\theta')\ (\theta-\theta'')\ (\theta-\theta''')\ (\theta-\theta^{IV})=0$$

T', T'', T''', T^{IV}, T^{V}, T^{VI}, καὶ T τὴν ἄγνωστον τῆς ἐξισώσεως ἐξ ἧς προσδιορίζονται αὗται αἱ ἓξ τιμαὶ, ἐκφράζομεν τὴν τοιαύτην ἐξίσωσιν οὕτως

$$(T-T')(T-T'')(T-T''')(T-T^{IV})(T-T^{V})(T-T^{IV})=0$$

Λοιπὸν πρέπει νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν τοῦ ἕκτου βαθμοῦ, διὰ νὰ γνωρίσωμεν τοὺς συντελεστὰς μιᾶς ἄλλης ἐξισώσεως τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, καὶ τότε προσδιορίζοντες τὰς τέσσαρας τιμὰς τοῦ θ τουτέστι θ', θ'', θ''' καὶ θ^{IV} θέλομεν εὑρεῖν τὰς πέντε ῥίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως τοῦ πέμπτου βαθμοῦ κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. Επειδὴ ὑποθέτομεν θ', θ'', θ''', θ^{IV} γνωστὰ, ἔχομεν

$$\theta'=(\chi'\pm\alpha\chi''\pm\alpha^2\chi'''\pm\alpha^3\chi^{IV}\pm\alpha^4\chi^{V})^5$$

$$\theta'' = (\chi' + \alpha^2 \chi'' + \alpha^4 \chi''' + \alpha \chi^{IV} + \alpha^3 \chi^{V})^5$$
$$\theta''' = (\chi' + \alpha^3 \chi'' + \alpha \chi''' + \alpha^4 \chi^{IV} + \alpha^2 \chi^{V})^5$$
$$\theta^{IV} = (\chi' + \alpha^4 \chi'' + \alpha^3 \chi''' + \alpha^2 \chi^{IV} + \alpha \chi^{V})^5$$

$$\text{ἢ} \quad \sqrt[5]{\theta'} = \chi' + \alpha \chi'' + \alpha^2 \chi''' + \alpha^3 \chi^{IV} + \alpha^4 \chi^{V}$$
$$\text{ἢ} \quad \sqrt[5]{\theta''} = \chi' + \alpha^2 \chi'' + \alpha^4 \chi''' + \alpha \chi^{IV} + \alpha^3 \chi^{V}$$
$$\text{ἢ} \quad \sqrt[5]{\theta'''} = \chi' + \alpha^3 \chi'' + \alpha \chi''' + \alpha^4 \chi^{IV} + \alpha^2 \chi^{V}$$
$$\text{ἢ} \quad \sqrt[5]{\theta^{IV}} = \chi' + \alpha^4 \chi'' + \alpha^3 \chi''' + \alpha^2 \chi^{IV} + \alpha \chi^{V}$$

Καὶ ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς γενικῆς ἐξισώσεως τοῦ πέμπτου βαθμοῦ τὸν ὁποῖον καλοῦμεν A, ἐκφράζει τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν, διὰ τοῦτο ἔχομεν

$$A = \chi' + \chi'' + \chi''' + \chi^{IV} + \chi^{V}$$

προσθέτοντες ταύτας τὰς ἐξισώσεις ἔχομεν $\sqrt[5]{\theta'} + \sqrt{\theta'''} + \sqrt[5]{\theta^{IV}} + A = 5\chi'$. παρομοίως πολλαπλασιάζοντες τὸ $\sqrt[5]{\theta''}$ $\sqrt{\theta''}$, $\sqrt[5]{\theta'''}$, $\sqrt[5]{\theta^{IV}}$ διὰ τὴν πρώτην δύναμιν ἢ τὴν δευτέραν ἢ τὴν τρίτην, ἢ τὴν τετάρτην τῶν ῥιζῶν α, α^2, α^3, α^4, θέλομεν προσδιορίσειν τὸ $5\chi^{V}$, $5\chi^{IV}$, $5\chi'''$, $5\chi''$. Λοιπὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς πέντε ῥίζας τῆς ἐξισώσεως τοῦ πέμπτου βαθμοῦ, εἶναι ἀνάγκη, νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν ἀνωτέρου βαθμοῦ τῆς δοθείσης, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον.

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις εἶναι βαθμοῦ μ, τὸ δὲ μ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, καλοῦντες τὰς ῥίζας ταύτης τῆς ἐξισώσεως χ', χ'', χ''', χ^{IV},..$\chi^{(\mu)}$

καὶ ἐκείνας τῆς ἐξισώσεως $\psi^{\mu} - \iota = o, \iota, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \ldots \alpha^{\mu-\iota}$ σχηματίζομεν εὐθὺς τὴν λειτουργίαν ὡς ἐκείνην τῆς ἐξισώσεως τοῦ πέμπτου βαθμοῦ τουτέςι $\tau' = \alpha^o \chi' + \alpha' \chi'' + \alpha^2 \chi''' + \alpha^3 \chi''' + \alpha^4 \chi^{IV} + \ldots \alpha^{\mu-\iota} \chi^{(\mu)}$ καὶ ἐπειδὴ εἰς ταύτην τὴν λειτουργίαν οἱ ἐκθέται τῶν συντελεςῶν τῶν ῥιζῶν οἱ ὁποῖοι τὴν συνιςῶσιν, εἶναι o, ɪ, 2, 3, 4, 5, 6, . . . μ-ι, τουτέςι μ ἐκθέται, μεταθέτοντές τους σχηματίζομεν μ (μ-ɪ) (μ-2) (μ-3). . . . 4. 3. 2. ɪ. λειτουργίας μεταξὺ τῶν μ ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Λοιπὸν ἡ λειτουργία $\chi' + \alpha \chi'' + \alpha^2 \chi''' + \alpha^3 \chi^{IV} \cdots + \alpha^{\mu-\iota} \chi^{\mu}$ εἶναι δεκτικὴ μ (μ-ι) (μ-2)· · · 4. 3. 2. ɪ, τιμῶν, καὶ διὰ τοῦτο ἐξήρτηται ἀπὸ μίας ἐξίσωσιν βαθμοῦ μ (μ-ι) (μ-2) . . . 4. 3. 2. ɪ. καὶ καλοῦντες τὴν ἄγνωςον τῆς τοιαύτης ἐξισώσεως τ' δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν εἰρημένην ἐξίσωσιν ὡς τὸ γινόμενον μ (μ-ɪ) (μ-2) . . . 4. 3. 2. ɪ παραγόντων τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἕκαςος τῶν ὁποίων ἔχει διὰ πρῶτον ὅρον τὸ τ', καὶ διὰ δεύτερον ὅρον, περιέχων ὁ μὲν πρῶτος παράγων τὴν πρώτην ἀπὸ τὰς μ (μ-ɪ) (μ-2) . . 4. 3. 2. ɪ. λειτουργίας, ὁ δὲ δεύτερος παράγων τὴν δευτέραν καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Αἱ μ (μ-ɪ) (μ-2)... 4. 3. 2. ɪ διάφοροι λειτουργίαι αἱ μὲ τὴν μετάθεσιν τῶν μ ἐκθετῶν, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, σχηματιζόμεναι, καὶ κατ' ἄλλον τρόπον σχηματίζονται. Θεωροῦμεν πόσαι εἶναι, ὅσαι συντελεςὴν εἰς τὸν πρῶτον ὅρον ἔχουν τὸ α^o ἤ τὴν μονάδα, καὶ διαφέρουν μόνον ἀπὸ τοὺς ἄλλους συντελεςάς, μεταθέτομεν δηλαδὴ εἰς τὴν πρώτην λειτουργίαν μόνον τοὺς ἐκθέτας ɪ, 2, 3, 4, ··· μ-ɪ, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτουν (μ-ɪ) (μ-2) (μ-3) ··· 4. 3. 2. ɪ μεταθέσεις, καὶ ἑπομένως (μ-1) (μ-2) ··· 4. 3. 2. 1 διαφόρους λειτουργίας. Θέτοντες λοιπὸν ταύτας κατ' ἐξακολούθησιν εἰς μίαν ὁριζόντειον γραμμὴν, καὶ ἑκάστην μὲ α^0, α^1, α^2 ... $\alpha^{\mu-1}$ πολλαπλασιάζοντες, θέλομεν ἔχειν

$$\tau' = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \cdots \alpha^{\mu-1}\chi^{(\mu)},$$

$$\tau'' = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^3\chi''' + \alpha^2\chi^{\text{IV}} \ldots + \alpha^{\mu-1}\chi^{(\mu)}$$

$$- - - - - - - -$$

$$\alpha\tau' = \alpha\chi' + \alpha^2\chi'' + \alpha^3\chi''' - - - - + \chi^{(\mu)}$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$- - - - - - - -$$

$$\alpha^{\mu-1}\tau' = \alpha^{\mu-1}\chi' + \chi'' + \alpha\chi''' + \alpha^{2\mu-2}\chi^{(\mu)}$$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς, τουτέστι διαφόρους λειτουργίας μ διὰ κάθε μίαν ἀπὸ τὰς (μ-1) (μ-2) ···· 4. 3. 2. 1, λειτουργίας, δηλαδὴ τόσας διαφορετικὰς λειτουργίας ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς μ (μ-1) (μ-2) (μ-3) .. 4. 3. 2. 1. ὥστε ἐσχηματίσαμεν τὰς ἰδίας λειτουργίας ὡς ἄνωθεν, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἄνω εἰρημένης ἐξισώσεως, βαθμοῦ μ (μ-1) (μ-2) ···· 4. 3. 2. 1. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁποιανδήποτε τάξιν βαστάζομεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν παραγόντων, οἵτινες σχηματίζουν τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ μ (μ-1) (μ-2) ··· 4. 3. 2. 1, τὸ γινόμενον, τουτέστιν ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἡ ἰδία, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἀνὰ μ τοὺς παράγοντας τοῦ πρώτου βαθμοῦ, τοὺς σχηματισθέντας ὑπὸ τινος τῶν (μ-1) (μ-2) ···· 4. 3. 2. 1. λειτουργιῶν αἵτινες ἔχουν συντελεστὴν τοῦ πρώτου ὅρου τὸ α^0, καὶ οὕτως ἡ ἐξίσωσις θέλει εἶσθαι τὸ γινόμενον (μ-1) (μ-2) ···· 4. 3. 2. 1, παραγόντων, τῶν ὁποίων ὁ καθεὶς εἶναι σύνθετος ἀπὸ μ παράγοντας πρώτου βαθμοῦ, δηλαδὴ ἕκαστος τῶν συνθέτων παραγόντων ἐστὶ βαθμοῦ μ. Λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις ἐκφράζεται οὕτως

$$(\tau - \tau')(\tau - \alpha\tau')(\tau - \alpha^2\tau') - - - -$$

$$(\tau - \alpha^{\mu-1}\tau') \times (\tau - \tau'') \; (\tau - \alpha\tau'') \ldots$$
$$\ldots (\tau - \alpha^{\mu-1}\tau'') \times \ldots\ldots = 0$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἕκαςος παράγων τοῦ μ βαθμοῦ ἄγεται εἰς $\tau^{\mu} - \tau'^{\mu}$, $\tau^{\mu} - \tau''^{\mu}$ καὶ οὕτως, ἐφεξῆς, διὰ τοῦτο ἡ ἐξίσωσις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ οὕτως

$(\tau^{\mu} - \tau'^{\mu}) \times (\tau^{\mu} - \tau''^{\mu}) \times (\tau^{\mu} - \tau'''^{\mu}) \times \ldots = 0$ καλοῦντες $\tau^{\mu} = \theta$, ἔχομεν $(\theta - \tau'^{\mu}) \times (\theta - \tau''^{\mu}) \times \ldots\ldots 0$

καὶ ἐπειδὴ τὸ θ εἶναι εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, οἱ δὲ παράγοντες τῆς ἐξισώσεως εἰς θ εἶναι

$$\mu\,(\mu-1)\;(\mu-2)\;\ldots\;4.\;3.\;2.\;1$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις βαθμοῦ μ (μ-1) (μ-2) . . . . . 4. 3. 2. 1, εἰς τ, ἐτράπη εἰς μίαν ἄλλην, ἔχουσαν ὡς ἄγνωςον τὴν θ βαθμοῦ (μ-1) (μ-2) (μ-3) - - - 4. 3. 2. 1 καὶ ἐπειδὴ $\theta = \tau^{\mu}$, καὶ $\tau^{\mu} = \tau'^{\mu}$, καὶ $\tau'^{\mu} = (\chi' + \alpha\chi'' \ldots + \alpha^{\mu-1}\chi^{(\mu)})^{\mu}$ ἄρα μία ῥίζα τῆς ἐξισώσεως εἰς θ, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν θ′, παῤῥησιάζει τὴν $(\chi' + \alpha\chi'' \ldots + \alpha^{\mu-1}\chi^{(\mu)})^{\mu}$, τουτέςι

$$\theta' = (\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^{2}\chi''' \ldots + \alpha^{\mu-1}\chi^{(\mu)})^{\mu}$$

Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τῶν ἄνω εἰρημένων μ ὁριζοντείων γραμμῶν μεταξὺ τῶν (μ-1) (μ-2) (μ-3) - - - 4. 3. 2. 1, πόσαι λειτουργίαι εὑρίσκονται, εἰς τὰς ὁποίας ὁ συντελεςὴς τοῦ πρώτου ὅρου εἶναι τὸ α^{0}, καὶ ἐκεῖνος τοῦ δευτέρου ὅρου εἶναι τὸ α, καὶ διαφέρουν μόνον εἰς τὰς μεταθέσεις τῶν ἄλλων ἐκθετῶν τουτέςιν 2, 3, 4, . . μ-1, θέλομεν εὑρεῖν, τόσας ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς (μ-2) (μ-3) (μ-4) - - - - 4. 3. 2. 1 ἐὰν γράψωμεν ταύτας κατ' ἐξακολούθησιν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ὁριζόντειον γραμμὴν μετὰ ταῦτα ἀντεισάξωμεν ἐν ἑκάστῃ τούτων ἀντὶ τοῦ α τὸ α^2, α^3, $\alpha^4 \ldots \alpha^{\mu-1}$, θέλομεν σχηματίσειν ὑποῦ μὲ τὴν πρώτην ὁριζόντειον γραμμὴν τόσας ὁριζοντείους γραμμὰς, ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς $\mu-1$, τῶν ὁποίων ἑκάστη εἶναι σύνθετος ἀπὸ $(\mu-2)(\mu-3) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$, λειτουργίας διαφόρους ὥστε ὅλαι αὐται αἱ λειτουργίαι θέλουν εἶναι τόσαι, ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς $(\mu-1)(\mu-2) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1.$ δηλαδὴ εἶναι αἱ $(\mu-1)(\mu-2) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$ ῥίζαι τῆς ἄνω εἰρημένης ἐξισώσεως βαθμοῦ $(\mu-1) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1.$ ὡς ἄγνωστον ἐχούσης τὴν θ· ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων τῶν σχηματιζόντων τὴν εἰς θ ἐξίσωσιν εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἡ τάξις τῶν παραγόντων, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τοὺς, εἰρημένους παραγόντας ἀνὰ $\mu-1$ τὴν φορὰν τουτέστιν ἐκείνους, οἵτινες ἐσχηματίσθησαν ἀντεισαγομένων ἐν ἑκάστῃ λειτουργίᾳ τῆς πρώτης γραμμῆς τῶν ὁριζοντείων $\mu-1$ γραμμῶν, ἀντὶ τοῦ α, τῶν α^2, α^3, $\alpha^4 \ldots \alpha^{\mu-1}$, ὥστε καλοῦντες θ' τὴν πρώτην λειτουργίαν τῆς εἰρημένης πρώτης ὁριζοντίου γραμμῆς, καὶ θ'', θ''', $\theta^{\text{IV}}, \ldots \theta^{(\mu-1)}$ τὰς λειτουργίας ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ἐξ αὐτῆς ἐσχηματίσθησαν ἀντεισαγομένων ἀντὶ τοῦ α τῶν α^2, α^3, $\alpha^4 \ldots \alpha^{\mu-1}$, ἡ ἐξίσωσις βαθμοῦ $(\mu-1)(\mu-2) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$ ἥτις ἔχει τὴν ἄγνωστον θ, ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου τῶν $(\mu-2)(\mu-3) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$ συνθέτων παραγόντων, ἑκάστου ὄντος εἰς βαθμὸν $\mu-1$ δηλαδὴ

$$(\theta-\theta')(\theta-\theta'') \ldots (\theta-\theta^{(\mu-1)})\ (\theta-) \ldots = 0$$

Καὶ ἐπειδὴ θ' δύναται νὰ παῤῥησιάσῃ τόσον τὴν πρώτην λειτουργίαν τῆς πρώτης τῶν ἄνω εἰρημένων ὁριζοντείων γραμμῶν, ὅσον τὴν δευτέραν, ἢ τὴν τρίτην καὶ οὕτως ἐφεξῆς, (τὸ αὐτὸ δὲ ἀκολουθεῖ καὶ θ'', ἐπάνω εἰς τὴν δευτέραν γραμμὴν τὴν ὁριζόντειον, καὶ οὕτως διὰ θ''', $\theta^{\text{IV}} \ldots \theta^{(\mu-1)}$ διὰ τὰς ἄλλας ὁριζοντείους γραμμάς. Διὰ τοῦτο ἕπεται ὅτι θ', θ'', θ'''. . . $\theta^{(\mu-1)}$, εἶναι ἕκαστον δεικτικὸν τόσων τιμῶν ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς $(\mu-2)\,(\mu-3) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$, ὅστις παῤῥησιάζει τὰς λειτουργίας τὰς ὁποίας περιέχει ἑκάστη ὁριζόντειος γραμμή. καὶ ἐπειδὴ τῶν θ', θ''. . . $\theta^{(\mu-1)}$ αἱ συμμετρικαὶ λειτουργίαι παῤῥησιάζουν τοὺς συντελεστὰς τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ $\mu-1$ εἰς θ, οἱ τοιοῦτοι συντελεσταὶ εἶναι δεκτικοὶ τιμῶν

$$(\mu-2)\,(\mu-3) \ldots\ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1.$$

δηλαδὴ ἐξήρτηνται ἀπὸ μίαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ

$$(\mu-2)\,(\mu-3) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1.$$

Καλοῦντες T', T'', καὶ ἐφεξῆς τὰς τιμὰς τοῦ συντελεστοῦ τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ $\mu-1$ εἰς θ καὶ τὴν ἄγνωστον τῆς ἄνω εἰρημένης ἐξισώσεις T, θέλομεν ἔχειν τὴν ἐξίσωσιν

$$(T-T')\,(T-T'')\,(T-T''') \times \ldots\ldots = 0$$

βαθμοῦ

$$(\mu-2)\,(\mu-3) \ldots\ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1.$$

Λοιπὸν διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ μ, πρέπει πρῶτον νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ $(\mu-2)\,(\mu-3) \ldots\ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$ καὶ καὶ μετὰ ταῦτα μίαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ $\mu-1$.

Πρέπει τώρα νὰ ἐξετάσωμεν, τίνι τρόπῳ σχηματίζονται οἱ συντελεσταὶ τῶν ἐξισώσεων, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν πρώτη βαθμοῦ $(\mu-1)\,(\mu-2) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$ ἔχει ὡς ἄγνωστον τὴν θ, ἡ δὲ δευτέρα βαθμοῦ $(\mu\ 2) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$, ἔχει ὡς ἄγνωστον τὴν T. ἐπειδὴ εἰς τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ $\mu\,(\mu-1)\,(\mu-2) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$, ἥτις εἶχε διὰ ἄγνωστον τ, ὁ ἐκθέτης ταύτης τῆς ἀγνώστου εἰς ὅλους τοὺς ὅρους ἐξισώσεως ἦτοι πολλαπλάσιος τοῦ μ καὶ ἀντεισάξαντες ἀντὶ τοῦ τ^{μ} τὴν θ ηὕραμεν τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ (μ-1) (μ-2) (μ-3) . . . 4. 3. 2. Ὅθεν καὶ οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισσεως εἰς τ, εἶν' οἱ ἴδιοι συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως εἰς θ, ἐπειδὴ ἐκεῖνοι τῆς ἐξισώσεως εἰς τ σχηματίζονται ἀπὸ συμμετρικὰς λειτουργίας τῶν ῥιζῶν ταύτης τῆς ἐξισώσεως, τουτέστιν ἀπὸ τὰς μ (μ-1) (μ-2) . . . 4. 3. 2. 1 λειτουργίας $\chi' + \alpha\chi'' . . + \alpha^{\mu-1}\chi^{(\mu)}$ τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης, αἵτινες ἄγονται εἰς (μ-1) (μ-2) . . . 4. 3. 2. 1 λειτουργίας $(\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + . . . \alpha^{\mu-1}\chi^{(\mu)})^{\mu}$ καὶ εἶν' αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ (μ-1) (μ-2) . . . 4. 3. 2. 1, ὡς ἄγνωστον ἐχούσης τὴν θ, τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ εἶναι συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ῥιζῶν της, τουτέστι τῶν σχηματιζομένων μὴ συμμετρικῶν λειτουργιῶν τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης, καὶ ἐπειδὴ εἰς κάθε συντελεστὴν τῆς ἐξισώσεως εἰς θ εὑρίσκονται ὅλαι αἱ μὴ συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης, διὰ τοῦτο ἕκαστος συντελεστὴς τῆς ἐξισώσεως εἰς θ σύγκειται ἀπὸ συμμετρικὰς λειτουργίας τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης, καὶ ἐκφράζεται διὰ μέσου τῶν συντελεστῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Εἰς δὲ τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ (μ-2) (μ-3) (μ-4) . . . 4. 3. 2. 1 εἰς Τ, οἱ συντελεσταὶ εἶναι συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ῥιζῶν ταύτης τῆς ἐξισώσεως καὶ ἐπειδὴ ἡ ἄγνωστος Τ εἶναι δεκτικὴ τόσων τιμῶν, ὅσων εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ (μ-1) εἰς θ, αἱ ὁποῖαι τιμαὶ εἶναι ὡς ἄνω εἴπομεν (μ-2) (μ-3) (μ-4) . . 4. 3. 2. 1, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν πρώτη σχηματίζεται ἐκ τῶν πρώτων τιμῶν τοῦ $\theta' + \theta'' + \theta''' + . . \theta^{(\mu-1)}$ ἡ δὲ δευτέρα ἐκ τῶν δευτέρων τιμῶν, $\theta' + \theta'' + . . . \theta^{\mu-1}$ τιμῶν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, δηλαδὴ ἀπὸ μ-1 ῥίζας τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ (μ-1) (μ-2) . . . 4. 3. 2. 1, ἥτις ἔχει ὡς ἄγνωστον τὴν θ, λοιπὸν οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως εἰς Τ εἶναι συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως εἰς θ, καὶ διὰ τοῦτο ἐκφράζονται διὰ μέσου τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ

(μ-1) (μ-2) . . . 4. 3. 2. 1

εἰς θ. οἱ δὲ συντελεςαὶ ταύτης ὡς ἀνωτέρω ἀπεδείξαμεν ἐκφράζονται διὰ μέσου τῶν συντελεςῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἄρα οἱ συντελεςαὶ τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ (μ-2) (μ-3) (μ 4) . . . 4. 3. 2. 1 εἰς Τ ἐκφράζονται διὰ μέσου τῶν συντελεςῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Αφ' οὗ λοιπὸν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ (μ-2) (μ-3) . . . . 4. 3. 2. 1 εἰς Τ καὶ προσδιορίσωμεν μίαν ῥίζαν παραδείγματος χάριν τὴν Κ, τότε ἡ ἐξίσωσις βαθμοῦ μ-1 εἰς θ ἔχει τὸν συντελεςὴν τοῦ δευτέρου ὅρου γνωςὸν, τὴν ὁποίαν ἐκφράζομεν οὕτως

$$\theta^{\mu-1} + K\theta^{\mu-2} + P\theta^{\mu-3} \ldots\ldots + \upsilon = o.$$

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς ἄλλους ταύτης συντελεςὰς, τουτέςι Ρ . . . υ, διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ (μ-1) (μ-2) . . . 4. 3. 2. 1 εἰς θ, διὰ τῆς $\theta^{\mu-1} + K\theta^{\mu-2} + P\theta^{\mu-3} \ldots\ldots + \upsilon = o$ καὶ θέλομεν εὑρεῖν ὡς εἰς τὰ ςοιχεῖα τόσας μερικὰς ἐξισώσεις ὅσοι εἰσὶν οἱ ἀπροσδιόριςοι συντελεςαὶ Ρ . . . υ, τοὺς ὁποίους θέλομεν προσδιορίσειν.

Μ' ὅλον ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν τοὺς συντελεςὰς ὅλων τῶν ἄνω εἰρημένων ἐξισώσεων, ἡ πρᾶξις εἶναι τόσον ἐπίπονος, ὥςε σχεδὸν τὸ ζήτημα καταςαίνεται ἀδύνατον καὶ ἀγκαλὰ ὁ περίφημος Λαγράνγιος ἔδωκεν ἓν νέον τέχνευμα διὰ νὰ προσδιορίζωνται, δὲν ἠθέλησε νὰ τοὺς προσδιορίσῃ οὔτε εἰς τὰς ἐκ τοῦ πέμπτου βαθμοῦ συναγομένας. Ας ἐξηγήσωμεν λοιπὸν τὸ εἰρημένον τέχνευμα, καὶ ἂς δώσωμεν ὅσον εἶναι δυνατὸν σαφήνειαν καὶ εἰς αὐτό.

Επειδὴ $\theta' = (\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{IV} + \ldots\ldots \alpha^{(\mu-1)}\chi^{(\mu)})^{\mu}$ ἐκτυλίσοντες τὸ πολυώνυμον τοῦτο, καὶ καλοῦντες 1, α, α², α³ . . . . $\alpha^{\mu-1}$ τὰς ῥίζας τῆς $\psi^{\mu-1} - 1 = o$ ἐξισώσεως, προσέτι τοὺς τῶν διαφόρων δυνάμεων τοῦ α συντελεςὰς, ξ, ξ', ξ'' . . . . .

$\overset{(\mu-1)}{\xi}$, θέλομεν ἔχειν $\theta' = \xi + \xi' \alpha + \xi'' \alpha^2 + \xi''' \alpha^3 + \overset{(\mu-1)}{\xi} \alpha^{\mu-1}$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ θ' ἔχει (μ-2) (μ-3) . . . . 4. 3. 2. 1 τιμάς, διὰ τοῦτο ξ, ξ', ξ'' . . . . $\overset{(\mu-1)}{\xi}$ ἔχει ἕκαστον (μ-2) . . . 4. 3. 2. 1 τιμάς, ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν τὸ α = 1 ἡ λειτουργία $(\chi' + \alpha\chi'' . . . . . + \alpha^{\mu-1} \overset{(\mu)}{\chi})^{\mu}$ τρέπεται εἰς $(\chi' + \chi'' + \chi''' \cdots + \overset{(\alpha)}{\chi})^{\mu}$ τουτέστιν εἰς τὸν συντελεστὴν τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ὑψωμένον εἰς τὴν δύναμιν μ. καὶ καλοῦντες αὐτὸν A, καὶ τὴν τιμὴν τῆς θ', ἥτις ἀνήκει, ὅταν $\alpha^0 = 1$, $\theta^{(o)}$ θέλομεν ἔχειν

$$\overset{(o)}{\theta} = \xi + \xi + \xi'' . . . + \overset{(\mu-1)}{\xi} = \overset{\mu}{A}$$

$$\text{καὶ } \xi = \overset{\mu}{A} - \xi' - \xi'' - \xi''' . . . . . . \overset{(\mu-1)}{\xi}$$

$$\text{ὥστε } \theta' = \overset{\mu}{A} - \xi' - \xi'' - \xi''' . . . . \overset{(\mu-1)}{\xi} +$$

$$\xi' \alpha + \xi'' \alpha^2 . . . + \overset{(\mu-1)}{\xi} \alpha^{(\mu-1)}, \text{ ἤγουν}$$

$$\theta' = A^{\mu} + (\alpha - 1)\xi' + (\alpha^2 - 1)\xi'' . . . + (\alpha^{(\mu-1)} - 1)\overset{(\mu-1)}{\xi}$$

Αἱ τιμαὶ τῆς θ'', θ''', . . . $\overset{(\mu-1)}{\theta}$ συνάγονται ἀπὸ ἐκείνην τῆς θ' ἀφ' οὗ ἀντεισαχθῇ ἀντὶ τῆς α, ἡ α^2, α^3, $\alpha^{\mu-1}$

Παρομοίως ἔχομεν

$$\overset{\nu}{\theta} = \xi_\nu + \xi'_\nu \alpha + \xi''_\nu \alpha^2 . . . \times \overset{(\mu-1)}{\xi_\nu} \alpha^{(\mu-1)}$$

ἔνθα τὸ ν, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὰ ξ, ξ', . . . φανερόνει ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ θ', τουτέστιν ἡ $(\chi' \times \alpha\chi'' . . . . \alpha^{\mu-1} \overset{(\mu)}{\chi})^{\mu}$ ὑψώθη εἰς τὸ ν καὶ ἀντεισάγοντες ἀντὶ α, τὸ α^2, α^3 . . . $\alpha^{\mu-1}$ θέλομεν ἔχειν

$$\theta'^{\nu} = \xi_{\nu} + \xi'_{\nu}\,\alpha + \xi''_{\nu}\,\alpha^2 \ldots + \xi^{(\mu-1)}_{\nu}\,\alpha^{\mu-1}$$

$$\theta''^{\nu} = \xi_{\nu} + \xi'_{\nu}\,\alpha^2 + \xi''_{\nu}\,\alpha^4 \ldots + \xi^{(\mu-1)}_{\nu}\,\alpha^{(\mu-2)}$$

καὶ $\theta'^{\nu} + \theta''^{\nu} + \theta^{(\mu-1)\nu} \ldots = (\mu-1)\,\xi_{\nu} - \xi'_{\nu} - \xi''_{\nu} \ldots \xi^{(\mu-1)}_{\nu}$

τουτέστιν $\Sigma_{\nu}\,\theta = (\mu-1) \times \xi_{\nu} - A^{\mu\nu} + \xi_{\nu} = \mu\xi_{\nu} - A^{\mu\nu}$

Καὶ ἐπειδὴ ξ_{ν} εἶναι δεκτικὸν τόσων τιμῶν, ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς $(\mu-2)\,(\mu-3) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1.$

Διὰ τοῦτο τὸ ἄθροισμα τῶν ν δυνάμεων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ $\mu-1$ εἰς θ εἶναι δεκτικὸν τόσων τιμῶν, ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς $(\mu-2)\,(\mu-3) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1.$

Λοιπὸν καὶ ὁ τύπος $\mu\xi_{\nu} - A^{\mu\nu}$ εἶναι δεκτικὸς τιμῶν $(\mu-2)\,(\mu-3) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$ ἐξ αἰτίας τοῦ ξ_{ν}

Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰ ὅσα ἕως τοῦ νῦν ἐγράψαμεν, ἂς λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^3 + \pi\chi + \kappa = 0$. λοιπὸν ἡ λειτουργία θέλει εἶσθαι $\tau' = \alpha^0\,\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\,\chi'''$ ἐκ τῆς ὁποίας σχηματίζονται διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν τριῶν ἐκθετῶν τόσαι λειτουργίαι ὅσας παρασαίνει ὁ ἀριθμὸς $3.\ 2.\ 1 = 6$, ἐκ τῶν ὁποίων ἐκεῖναι αἵτινες ἔχουν ὡς συντελεστὴν τοῦ πρώτου ὅρου τὸ α^0 εἶναι $2.\ 1 = 2$, ὡς ἐδῶ τὰς γράφομεν τουτέστιν αἱ πρῶται ἕξ

$$\alpha^0\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' \;,\; \alpha^0\chi' + \alpha^2\chi'' + \chi'''\alpha$$
$$\alpha\chi' + \alpha^2\chi'' + \alpha^0\chi''' \;,\; \alpha\chi' + \alpha^0\chi'' + \alpha^2\chi'''$$
$$\alpha^2\chi' + \alpha^0\chi'' + \alpha\chi''' \;,\; \alpha^2\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^0\chi'''$$

ἢ αἱ δύω

$$\alpha^0\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' \;,\; \alpha^0\chi' + \alpha^2\chi'' + \alpha\chi'''$$

$$\frac{A}{\alpha\chi' + \alpha^2\chi'' + \alpha^0\chi'''} \;,\; \frac{B}{\alpha\chi' + \alpha^0\chi'' + \alpha^2\chi'''}$$

$$\alpha^2 \chi' + \alpha^0 \chi'' + \alpha \chi''' \;,\; \alpha^2 \chi' + \alpha \chi'' + \alpha^0 \chi'''$$

$$\Gamma \qquad\qquad\qquad \Delta$$

$$\tau' = \alpha^0 \chi' + \alpha^2 \chi'' + \alpha \chi''' \;,\; \tau'' = \alpha^0 \chi' + \alpha^2 \chi'' + \alpha \chi'''$$

$$\alpha \tau' = \alpha \chi' + \alpha^2 \chi'' + \alpha^0 \chi''' \;,\; \alpha \tau'' = \alpha \chi' + \alpha^0 \chi'' + \alpha^2 \chi'''$$

$$\alpha^2 \tau' = \alpha^2 \chi' + \alpha^0 \chi'' + \alpha \chi''' \;,\; \alpha^2 \tau'' = \alpha^2 \chi' + \alpha \chi'' + \alpha^0 \chi'''$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς δύω, ἑκάστην διὰ τοῦ α, α^2, θέλομεν σχηματίσειν ἄλλας τέσσαρας λειτουργίας, τουτέστιν ἐκ μὲν τῆς πρώτης τῶν δύω, τὰς δύω λειτουργίας τὰς ὑπ' αὐτὴν σημειωμένας μὲ τὸ Α, καὶ ἐκ τῆς δευτέρας, τὰς ἄλλας δύω σημειωμένας μὲ τὸ Β. Περιπλέον αὗται αἱ τέσσαρες λειτουργίαι ἑνωμέναι μὲ τὰς δύω, ἐκ τῶν ὁποίων ἐσχηματίσθησαν, μᾶς δίδουν τὰς πρώτας ἕξ, τὰς ὁποίας γράφομεν εἰς τὰς στήλας Γ καὶ Δ. Σημειώνοντες τὴν πρώτην διὰ τ', ἔχομεν καὶ τὰς ἄλλας δύω τῆς αὐτῆς στήλης τ, $\alpha\tau'$, $\alpha^2 \tau'$, παρομοίως σημειώνοντες τὴν πρώτην λειτουργίαν τῆς στήλης Δ διὰ τ'', ἔχομεν καὶ τὰς ἄλλας δύω $\alpha\tau''$, $\alpha^2 \tau''$. ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις ἥτις μέλλει νὰ προσδιορίσῃ τὴν λειτουργίαν $\alpha^0 \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2 \chi'''$ εἶναι τοῦ ἕκτου βαθμοῦ, διὰ τοῦτο καλοῦντες τὴν ἄγνωστον ταύτης τῆς ἐξισώσεως τ, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις σχηματίζεται ὑπὸ τοῦ γινομένου τῶν ἀκολούθων παραγόντων

$$(\tau - \tau')(\tau - \alpha\tau')(\tau - \alpha^2 \tau')(\tau - \tau'')(\tau - \alpha\tau'')(\tau - \alpha^2 \tau'') = 0$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς μὲν πρώτους τρεῖς ἔχομεν $\tau^3 - \tau'^3$, τοὺς δὲ δευτέρους τρεῖς, ἔχομεν $\tau^3 - \tau''^3$, καὶ καλοῦντες $\tau^3 - \theta$, ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἕκτου βαθμοῦ τρέπεται εἰς μίαν τοῦ δευτέρου, τουτέστιν $(\theta - \tau'^3)(\theta - \tau''^3) = 0$, αἱ ῥίζαι τῆς ὁποίας εἶναι τ'^3, τ''^3 δηλαδὴ

$$(\alpha^0 \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2 \chi''')^3 \text{ καὶ } (\alpha^0 \chi' + \alpha^2 \chi'' + \alpha\chi''')^3$$

νῦν δὲ παρατηροῦντες τὴν δευτέραν ῥίζαν βλέπομεν ὅτι συνάγεται ἐκ τῆς πρώτης, ἀντεισαγομένου εἰς ταύτην ἀντὶ α, τοῦ α^2, λοιπὸν καλοῦντες τὴν λειτουργίαν

$$(\alpha^0 \chi' + \alpha \chi'' + \alpha^2 \chi''')^3 = \theta'$$

καὶ τὴν ἐξ αὐτῆς συναγομένην

$$(\alpha^0 \chi' + \alpha^2 \chi'' + \alpha \chi''')^3 = \theta''$$

θέλομεν ἔχειν τὴν ἐξίσωσιν $(\theta - \theta')(\theta - \theta'') = 0$ τουτέστιν εἰς θ.

Η δὲ ἐξίσωσις ἥτις ἐκφράζει τοὺς συντελεστὰς ταύτης τῆς ἐξισώσεως εἶναι βαθμοῦ $(\mu-2)(\mu-3) \cdots 4.\ 3.\ 2.\ 1.$ τουτέστιν $(3-2) \ldots 1 = 1$. λοιπὸν ἕκαστος συντελεστὴς τῆς ἐξισώσεως εἰς θ ἔχει μίαν μόνην τιμήν.

Ἐὰν τώρα θελήσωμεν ν' ἀναλύσωμεν ἐξίσωσιν εἰς θ, εἰς παράγοντας τοῦ πρώτου βαθμοῦ, τουτέστι ζητοῦντες κατὰ πρῶτον, πόσαι εἶναι αἱ λειτουργίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν συντελεστὴν τοῦ πρώτου ὅρου των τὸ α^0, καὶ τοῦ δευτέρου ὅρου τὸ α, εὑρίσκομεν $1 = 1$. τουτέστι τὴν λειτουργίαν μόνην $(\alpha^0 \chi' + \alpha \chi'' + \alpha^2 \chi''')^3$, εἰς τὴν ὁποίαν ἀλλάττοντες τὸ α εἰς α^2, σχηματίζομεν τὴν δευτέραν ῥίζαν τῆς ἐξισώσεως εἰς θ, καὶ ἐπειδὴ δὲν ἔχομεν πάρεξ ἕνα μόνον παράγοντα, διὰ τοῦτο μίαν μόνην ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν. οὗτος λοιπὸν ὁ παράγων εἶναι ἡ ἰδία ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς θ, τουτέστιν

$$\theta^2 \mp (\theta' + \theta'')\theta + \theta'\theta'' = 0$$

$$\text{ἢ } \theta^2 + \pi'\theta + \kappa' = 0$$

καὶ ἐπειδή, ὡς ἄνω ἀπεδείξαμεν $\Sigma_\nu \theta = \mu\xi_\nu - A^{\mu\nu}$, καλοῦντες $\nu = 1$ καὶ $\mu = 3$, ἔχομεν

$$\Sigma_1 \theta = 3\xi - A^{\mu},$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν λείπει ὁ δεύτερος ὅρος διὰ τοῦτο $A = o$. καὶ ἐπομένως $\qquad \Sigma_{,}\theta = 3\xi$,

Τώρα δὲ διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ξ, Ας ἐκτυλίξωμεν

$$(\alpha^0 \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2 \chi''')^3 = \chi'^3 + 3\alpha\chi'^2 + 3\alpha^2 \chi'^2 \chi''' + 3\alpha^2 \chi' \chi''^2 + 3\alpha\chi'\chi'''^2 + 3\alpha\chi'^2\chi''' + 3\alpha^2\chi''\chi'''^2 + 6\chi'\chi''\chi''' + \chi''^3 + \chi'''^3$$

τουτέστιν

$$(\chi'^3 + \chi'^3 + \chi'''^3 + 6\chi'\chi'\chi''') + 3(\chi'^2\chi'' + \chi'\chi'''^2 + \chi''^2\chi'''^2)\alpha + 3(\chi'^2\chi''' + \chi'\chi''^2 + \chi''\chi'''^2)\alpha^2$$

λοιπὸν $\xi = \chi'^3 \underline{\times} \chi''^3 \underline{\times} \chi'''^3 \underline{\times} 6\chi'\chi''\chi''' = \Sigma'_3 - 6\kappa$

$+$ ἀλλὰ $\Sigma'_1 = \chi' + \chi'' + \chi''' = o$

$\Sigma'_2 = \chi'^2 + \chi''^2 + \chi'''^2 = \Pi^2 - 2K = 2\pi$

$\Sigma'_3 = \chi'^3 + \chi''^3 + \chi'''^3 = \Pi\Sigma'_3 - 3P = \pi - 3\kappa$

$\Sigma'_4 = -\Pi\Sigma'_3 - K\Sigma'_2 - P\Sigma_1 = +2\pi^2$

$\Sigma'_5 = -\Pi\Sigma'_4 - K\Sigma'_3 - P\Sigma'_2 = +3\kappa\pi + 2\pi\kappa = 5\pi\kappa$

$\Sigma'_6 = -\Pi\Sigma'_5 - K\Sigma'_4 - P\Sigma'_3 = -2\pi^3 + 3\kappa^2$

διὰ τοῦτο $\xi = -9\kappa$

Λοιπὸν $\Sigma_{,}\theta = 3\xi - A^{\mu}$ τρέπεται εἰς $\Sigma_{,}\theta = 3 \times -9\kappa = -27\kappa$.

Πάλιν διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ $\Sigma_2\theta = \mu\xi$, πρέπει νὰ ὑψώσωμεν τὴν

$((\alpha^0 \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2 \chi''')^3)^2$, τουτέστιν

$$((\chi'^3 + \chi''^3 + \chi'''^3 + 6\chi'\chi''\chi''') + 3(\chi'^2\chi'' + \chi'\chi''^2 + \chi'^2\chi'')\alpha + 3(\chi'^2\chi''' + \chi'\chi''^2 + \chi''\chi'''^2)\alpha^2)^2$$

Καὶ θέλομεν ἔχειν

$(\chi'^3 + \chi''^3 + 6\chi'\chi''\chi''')^2 + 18(\chi'^2\chi'' + \chi'\chi''^2 + \chi''^2\chi''')(\chi'^2\chi'' + \chi\chi''^2 + \chi''\chi'''^2) + \ldots$

καὶ ἄλλοι ὅροι μὲ τὰς δυνάμεις α, α^2.

λοιπὸν $\xi_2 = (\chi'^3 + \chi''^3 + \chi'''^3 + 6\chi'\chi''\chi''')^2 + 18(\chi'^2\chi'' + \chi'\chi'''^2 + \chi''^2\chi''')(\chi'^2\chi''' + \chi'\chi''^2 + \chi''\chi'''^2$

τουτέστι $\xi_2 = \chi'^6 + \chi''^6 + \chi'''^6 + 36\chi'^3\chi''^2\chi'''^2 + 2\chi'^3\chi''^3 + 2\chi'^3\chi'''^3 + 2\chi''^3\chi'''^3 + 12\chi'^4\chi''\chi''' + 12\chi'\chi''^4\chi''' + 12\chi'\chi''\chi'''^4 + 18\chi'^4\chi''\chi''' + 18\chi'^3\chi''^3 + 18\chi'^2\chi''^2\chi'''^2 + 18\chi'^3\chi'''^3 + 18\chi'^2\chi'''^2\chi''^2 + 18\chi'\chi''\chi'''^4 + 18\chi'^2\chi''^2\chi'''^2 + 18\chi'\chi''^4\chi''' + 18\chi''^3\chi'''^3$
$= 30\chi'^4\chi''\chi''' + 30\chi'\chi''^4\chi''' + 30\chi'\chi''\chi'''^4 + 20\chi'^3\chi''^3 + 20\chi'\chi'''^3 + 20\chi''\chi'''^3 + 90\chi'^2\chi''^2\chi'''^2 + \chi'^6 + \chi''^6 + \chi'''^6$, $= \Sigma_2\theta = ((-2\pi^3 + 3\kappa^2 + (4\pi^3 - 4\pi^3 + 6\kappa^2) \times 15 + 10 \times (9\kappa^2 + 2\pi^3 - 3\kappa^2) + 90\kappa^2)) \times 3 = 3\xi_2$

τουτέστι, $\Sigma_2\theta = 54\pi^3 + 729\kappa^2$

Καὶ ἐπειδὴ ἔχοντες τὰ ἀθροίσματα τῶν δυνάμεων τῶν ῥιζῶν μιᾶς ἐξισώσεως προσδιορίζομεν τοὺς συντελεστὰς τῆς ἰδίας, διὰ τοῦτο

$$\pi' = -\Sigma_1\theta = +27\kappa$$

$$\kappa' = \frac{-\pi'\Sigma_1\theta - \Sigma_2\theta}{2} = \frac{-27\kappa \times -27\kappa - 729\kappa^2 - 54\pi^3}{2}$$

$$\text{ἄρα } \kappa' = \frac{-54\pi^3}{2} = -27\pi^3$$

Καὶ ἀντεισάγοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς θ

τοὺς ἤδη εὑρεθέντας συντελεστὰς ἔχομεν $\theta^2 + 27\kappa\theta - 27\pi^3 = 0$
Λοιπὸν ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $\chi^3 + \pi\chi + \kappa = 0$ τοῦ τρίτου βαθμοῦ συνάγεται ἐκ τῆς λύσεως μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου, τουτέστι $3 - 1 = 2$, καὶ ἀπὸ μίαν τοῦ πρώτου Τ-Τ, ἔνθα τὸ μὲν Τ' παῤῥησιάζει τὸν συντελεστὴν τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς θ, τουτέστι $\theta' + \theta''$ ἢ $(\alpha^0 \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2 \chi''')^3 + (\alpha^0 \chi' + \alpha^2 \chi'' + \alpha\chi''')^3 = -27\kappa$.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν $\theta^2 + 27\kappa\theta - 27\pi^3 = 0$, ἔχομεν

$$\theta' = \frac{-27\kappa \pm \sqrt{27.\,27\kappa^2 + 4.\,27\pi^3}}{2} = 27\left(-\tfrac{1}{2}\kappa \pm \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} + \frac{1}{27}\pi^3}\right)$$

$$\text{καὶ } \tau'^3 = (\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2 \chi''')^3 = 27\left(\tfrac{1}{2}\kappa \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\kappa^2 + \frac{1}{27}\pi^3}\right)$$

$$\text{λοιπὸν } \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' = 3\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\kappa - \sqrt{\tfrac{1}{4}\kappa^2 + \frac{1}{27}\pi^3}}$$

Καὶ ἐπειδὴ θ'' εἶναι $(\chi' + \alpha^2\chi'' + \alpha\chi''')^3$, ἄρα $\tau'' =$

$$\chi' + \alpha^2\chi'' + \alpha\chi''' = 3\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\kappa - \sqrt{\tfrac{1}{4}\kappa^2 + \frac{1}{27}\pi^3}}$$ καὶ ἐπειδὴ

ἔχομεν $\chi' + \chi'' + \chi''' = 0$, συνάγομεν

$$\chi' = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\kappa + \sqrt{\frac{1}{4}\kappa^2 + \frac{1}{27}\pi^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\kappa - \sqrt{\frac{1}{4}\kappa^2 + \frac{1}{27}\pi^3}}$$

$$\chi'' = \alpha^2\sqrt[3]{A} + \alpha\sqrt[3]{B}$$

$$\chi''' = \alpha\sqrt[3]{A} + \alpha^2\sqrt[3]{B}.$$

του' τέστι καλοῦντες Α καὶ Β τὰς ὑπὸ τῶν $\sqrt[3]{}$ εὑρισκωμένας ποσότητας

Ας ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ὁ ἐκθέτης μ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι τὸ γινόμενον δύω πρώτων ἀριθμῶν παραδ: χάριν $\mu = \nu\,\pi$, καὶ ὅτι $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^{\nu-1}$ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\psi^{\nu-1} = 0$, τότε ἡ ἀνωτέρω εἰρημένη λειτουργία

$$\tau' = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{\text{IV}} \ldots + \alpha^{\mu-1}\chi^{(\mu)}$$

τρέπεται εἰς τὴν

$$\begin{aligned}
\tau' &= \chi' + \chi^{(\nu+1)} + \chi^{(2\nu+1)} \ldots + \chi^{(\pi-1)\nu+1} \\
&+ \alpha(\chi'' + \chi^{(\nu+2)} + \chi^{(2\nu+2)} \ldots + \chi^{)\pi-1)\nu+2} \\
&+ \alpha^2(\chi''' + \chi^{(\nu+3)} \ldots\ldots\ldots + \chi^{(\pi-1)\nu+3} \\
&+ \alpha^{\nu-1}(\chi^{(\nu)} + \chi^{(\nu 2)} \ldots\ldots\ldots + \chi^{\pi-1\nu+,}
\end{aligned}$$

Επειδὴ εἰς κάθε ν ὅρους τῆς ἄνω εἰρημένης λειτουργίας ἥτις ἔχει μ ὅρους, συναπαντῶμεν τοσάκις τὰς αὐτὰς δυνάμεις τοῦ α, δηλαδὴ $\alpha^0, \alpha, \alpha^2 \ldots \alpha^{\nu-1}$, καὶ πάλιν $\alpha^0, \alpha', \alpha^2 \ldots \alpha^{\nu-1}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὁσάκις οἱ ν ὅροι περιέχονται εἰς τοὺς μ ἤτοι εἰς τοὺς $\pi\nu$, οἵτινες περιέχονται εἰς π, διὰ τοῦτο ἔχομεν π ὅρους οἵτινες πολλαπλασιάζονται διὰ τοῦ α^0 του' τέστι διὰ τῆς μονάδος, καὶ ἄλλους τόσους διὰ τοῦ $\alpha^{\nu-1}$, πάλιν ἐπειδὴ ἀφοῦ λάβωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς ἄνω εἰρημένης λειτουργίας ὅστις εἶναι χ', πρέπει ν' ἀριθμήσωμεν ν ἄλλους ὅρους κατ' ἐξακολούθησιν διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸν ὅρον, ὅστις ἔχει διὰ συντελεστὴν α^ν ἤτοι τὴν μονάδα, διὰ τοῦτο ἡ ἄγνωστος χ εἰς τὸν τοιοῦτον ὅρον θέλει ἔχειν $\nu+1$ τόνους, διότι πάντοτε εἰς τὰς τοιαύτας λειτουργίας ἡ ἄγνωστος ἔχει ἕνα τόνον περισσότερον ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ ἐκθέτου τῆς α, λοιπὸν ὁ ὅρος τὸν ὁποῖον συναπαντῶμεν εἰς τὴν λειτουργίαν

$$\tau = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' \ldots \alpha^{\mu-1}\chi^{(\mu)}$$

ὅστις ἔχει διὰ συντελεστὴν τὸ α^{ν}, του'τέστι τὴν μονάδα θέλει εἶναι $\chi^{(\nu+1)}$, παρομοίως ἐκεῖνος ὅστις ἔχει διὰ συντελεστὴν $\alpha^{2\nu}$ θέλει εἶναι $\chi^{(2\nu+1)}$ καὶ ὁ τελευταῖος ὅστις ἔχει διὰ συντελεστὴν $\chi^{(\pi-1)}$ θέλει εἶναι $\chi^{(\pi-1)\nu+1}$ καὶ τοῦτο ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν μ ὅρων τῆς ἄνω εἰρημένης λειτουργίας περιέχονται π ὅροι, οἵτινες ἔχουν συντελεστὴν τὴν μονάδα, του'τέστι $\chi' + \chi^{(\nu+1)} + \chi^{(2\nu+1)} + \chi^{(3\nu+1)} \ldots$ καὶ ἐφεξῆς, δηλαδὴ $\chi^{(0.\nu+1)} + \chi^{(1.\nu+1)} + \chi^{(2.\nu+1)} \ldots$ διὰ τοῦτο ὁ τελευταῖος ὅρος ὅστις πληροῖ τὸν ἀριθμὸν π ὅρων πρέπει νὰ ἦναι $\chi^{(\pi-1)\nu+1}$ παρομοίως καὶ οἱ P ὅροι οἵτινες πολλαπλασιάζονται διὰ τῆς $\alpha^{0\,\nu+1}$, $\nu+1$, $\alpha^{2\,\nu+1}$, $\alpha^{3\,\nu+1} \ldots$ δηλαδὴ διὰ τῆς α, εἶναι

$\chi^{(0.\nu+2)} + \chi^{(1.\nu+2)} + \chi^{(2.\nu+2)} \ldots + \chi^{(\pi-1)\nu+2}$

ἐξακολουθοῦντες οὕτως οἱ π ὅροι, οἵτινες πολλαπλασιάζονται διὰ τοῦ $\alpha^{0\,\nu+\nu-1}$, $\alpha^{1.\nu+\nu-1}$, $\alpha^{2.\nu+\nu-1}, \ldots \alpha^{(\pi-1)\nu+\nu-1}$

θέλει εἶναι $\chi^{(\nu)} + \chi^{(2\nu)} + \chi^{(3\nu)} \ldots \chi^{(\pi-1)\nu+\nu\,1+1}$

του'τέστι $\chi^{(\nu)} + \chi^{(2\nu)} + \chi^{(3\nu)} \ldots + \chi^{\pi\nu}$

καλοῦντες $\chi' + \chi^{(\nu+1)} + \chi^{(2\nu+1)} \ldots + \chi^{(\pi-1)\nu+1} = X$

καὶ $\chi'' + \chi^{(\nu+2)} + \chi^{2\nu+2} \ldots + \chi^{(\pi-1)\nu+2} = X''$

$\chi''' + \chi^{(\nu+3)} + \chi^{(2\nu+3)} \ldots + \chi^{(\pi-1)\nu+3} = X'''$

$$\chi^{(\nu)} + \chi^{(2\nu)} + \chi^{(3\nu)} \ldots + \chi^{\pi\nu} = \ddot{X}$$

ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον λειτουργίαν

$$\tau' = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' \ldots + \alpha^{\mu-1}\chi^{(\mu)}$$
$$= X' + X''\alpha^2 + X^{(\nu)}\alpha^{\nu-1}$$

Λοιπὸν ἀπὸ μίαν τῶν ὅσας λειτουργίας δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μεταξὺ τῶν μ ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ μ, ἐσχηματίσαμεν μίαν ἄλλην λειτουργίαν ἥτις σύγκειται ἀπὸ ν ὅρους, καὶ ἕκαστος τῶν συντελεςῶν τῶν δυνάμεων τῆς α, ἤτοι τοῦ α^0, α, α^2, α^3 .... $\alpha^{\nu-1}$, σύγκειται ἀπὸ π ῥίζας τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ μ ἐκτελοῦντες τὸ αὐτὸ καὶ εἰς πᾶσαν ἄλλην λειτουργίαν τῶν ῥιζῶν μ τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ μ, θέλομεν σχηματίσειν ἄλλας λειτουργίας εἰς τὰς ὁποίας οἱ συντελεςαὶ τῶν διαφόρων δυνάμεων τῆς α, ἤτοι τοῦ α^0, α, α^2, α^3 .... $\alpha^{\nu-1}$ νὰ σχηματίζωνται ἀπὸ π ῥίζας τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ μ. Λοιπὸν εἰς τῶν τῆς νέας λειτουργίας συντελεςῶν δύναται νὰ σχηματισθῇ κατὰ τόσους τρόπους, καθ' ὅσους ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ ῥιζῶν ἀνὰ π συνδιαζομένων. Παραδείγματος χάριν X εἶναι δεκτικὸς

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\pi+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \dots\ \pi}\ \text{τιμῶν.}$$

ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαςὴν τούτου τοῦ κλάσματος διὰ τῶν παραγόντων $(\mu-\pi)$ $(\mu-\pi-1)$ $(\mu-\pi-2)$ $(\mu-\pi-3)$ ... 3. 2. 1, θέλομεν ἔχειν ἀντιςρέφοντες τὴν τάξιν τῶν παραγόντων

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ \dots(\mu-\pi)(\mu-\pi+1)\dots(\mu-2)\mu}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \dots(\mu-\pi-3)(\mu-\pi-2)(\mu-\pi-1)\times 1.\ 2.\ 3.\ \dots\ \pi}$$

τουτέςι

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \dots\times\mu}{1.\ 2.\ 3.\ \dots\ (\mu-\pi)\times 1.\ 2.\ 3.\ \dots\ \pi}=A$$

Ἐὰν λάβωμεν μίαν τούτων τῶν τιμῶν διὰ τὸ X' ἐπειδὴ αὐτὸ περιέχει π ῥίζας τῆς ἐξισώσεως μ, μένουν $\mu-\pi$ ῥίζαι τῆς ἰδίας ἐξισώσεως, ἐκ τῶν ὁποίων σχηματίζομεν τὰς τιμὰς τῆς χ'' συνδιάζοντες τὰς $\mu-\pi$ ῥίζας ἀνὰ π τὴν φορὰν, Ο αριθμὸς τῶν τιμῶν τῶν ὁποίων τὸ Y' εἶναι δεκτικὸν, εἶναι

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (\mu-\pi)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (\mu-2\pi) \times 1.\ 2.\ 3.\ \pi}$$

τουτέστιν ἀλλάτοντες εἰς τὸν τύπον (A) τὸ μ εἰς μ-π. Επειδὴ δὲ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ Y ἐμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ὁποιανδήποτε τῶν τιμῶν

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (\mu-\pi)}{1.\ 2.\ \ldots\ (\mu-2\pi) \times 1.\ 2.\ \ldots\ \pi}$$

τοῦ X″, διὰ τοῦτο αἱ δύω ποσότητες X′, X″, εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν εἶναι δεκτικαὶ τόσων τιμῶν, ὅσας ἐκφράζει τὸ γινόμενον τῶν δύων ποσοτήτων

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ \mu \times 1.\ 2.\ \ldots\ (\mu-\pi)}{1.\ 2.\ \ldots\ (\mu-\pi) \times 1.\ 2.\ \ldots\ \pi \times 1.\ 2.\ \ldots\ (\mu-2\pi) \times 1.\ 2.\ .\ \pi}$$

τουτέστιν $$\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots\ \mu}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (\mu-2\pi) \times (1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ \pi)^2}$$

παρομοίως λαμβάνοντες δύω διαφόρους τιμὰς, ἑκάστην αὐτῶν ἀπὸ π ῥίζας τῆς ἐξισώσεως τοῦ μ βαθμοῦ διὰ νὰ παῤῥησιάσωμεν τὴν X′, X″, τὰς δὲ λοιπὰς ῥίζας ἤτοι τὰς μ-2π συνδυάζοντές τας ἀνὰ π διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὰς τιμὰς τοῦ X‴, θέλομεν εὑρεῖν ὅτι τὸ X εἶναι δεκτικὸν τιμῶν

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (\mu-2\pi)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (\mu-3\pi) \times 1.\ 2.\ \ldots\ \pi}$$

Καὶ ἐπειδὴ διὰ μίαν μόνην τιμὴν τοῦ X″, ἐμποροῦμεν νὰ λάβωμεν διὰ τοῦ X′, X″ τόσας τιμὰς ὅσας ἐκφράζει ὁ τύπος

$$\frac{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ \mu}{1.\ 2.\ \ldots\ (\mu-2\pi) \times (1.\ 2.\ \ldots\ \pi)^2}$$

λοιπὸν διὰ ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ X″, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰς

τὰς ποσότητας X', X'', X''' εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν τοσάκις, ὁσάκις φανερόνει τὸ γινόμενον τῶν δύω παραγόντων

$$\frac{1.\ 2.\ldots\mu}{1.\ 2.\ldots(\mu-2\pi)\times(1.\ 2.\ldots\pi)^2}\ \times\ \frac{1.\ 2.\ 3.\ldots(\mu-2\pi)}{1.\ 2.\ 3.\ldots(\mu-3\pi)\ (1.\ 2.\ 3.\ \pi)}$$

τουτέστιν
$$\frac{1.\ 1.\ 3.\ 4.\ldots\mu}{1.\ 2.\ 3.\ldots(\mu-3\pi)\ (1.\ 2.\ 3.\ldots\pi)^3}$$

ἐξακολουθοῦντες τὸν αὐτὸν σχηματισμὸν ἕως νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς μ ῥίζας τῆς ἐξισώσεως τοῦ μ βαθμοῦ, $(\nu-1)$ φοραῖς τὰς π ῥίζας, θέλομεν ἔχειν διὰ τὰς τιμὰς τοῦ $X'\ X''\ X'''\ X^{(\nu-1)}$, τὸν τύπον

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots\mu}{1.\ 2.\ 3.\ldots(\mu-(\nu-1)\pi)\ (1.\ 3\ldots\pi)^{\nu-1}}$$

Καὶ ἐπειδὴ ἀφαιροῦντες $\nu-1$ φοραῖς τὰς π ῥίζας ἀπὸ τὰς μ τουτέστι $\pi\nu-(\nu-1)\pi=\pi$, μένουν μόνον π ῥίζαι ἀπὸ τὰς μ ῥίζας τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ μ διὰ τοῦτο αἱ τελευταῖαι π ῥίζαι σχηματίζουν μίαν μόνην τιμὴν τὴν $X^{(\nu)}$, καὶ ἐπειδὴ αὕτη ἡ τιμὴ ἀνταποκρίνεται μὲ τὰς

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots\mu}{1.\ 2.\ 3.\ldots(\mu-(\nu-1)\pi)\ (1.\ 2.\ 3.\ldots\pi)^{\nu-1}}$$

τιμὰς τῶν $X'\ X''\ X'''\ldots X^{(\nu-1)}$, διὰ τοῦτο αἱ ποσότητες εἶναι δεκτικαὶ τόσων τιμῶν ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots\mu}{1.\ 2.\ 3.\ldots(\mu-(\nu-1)\pi)\ (1.\ 2.\ 3.\ldots\pi)^{(\nu-1)}}$$

ἀντεισάγοντες ἀντὶ τοῦ μ εἰς τὸν παρονομαστὴν τὸ ἴσον του, ἤτοι $\pi\nu$, ἔχομεν $\mu-(\nu-1)\pi=\nu\pi-\nu\pi+\pi=\pi$. καὶ διὰ τοῦτο ὁ τύπος ὅστις ἐκφράζει τὰς τιμὰς τῶν $X', X'', X''', \ldots X^{(\nu)}$ εἶναι ὁ ἀκόλουθος

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ \mu}{(1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots\ \pi)^{\nu}}$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν τὰς ποσότητας $X', X'', X''' \ldots X^{(\nu)}$ ὅτι εἶναι αἱ ῥίζαι μιᾶς ἐξισώσεως ἥτις ἔχει ὡς ἄγνωςον τὸ X, αὕτη θέλ' εἶσθαι βαθμοῦ ν. ἐπειδὴ αἱ ποσότητες $X', X'' \ldots X^{(\nu)}$ εἶναι ν. Καὶ ἐπειδὴ οἱ συντελεςαὶ ταύτης τῆς ἐξισώσεως εἶναι συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ῥιζῶν της, του' τέςι τῶν ποσοτήτων $X'' X''' \ldots X^{(\nu)}$, δηλαδὴ οἱ συντελεςαὶ ταύτης τῆς ἐξισώσεως σχηματίζονται ἢ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρώτων δυνάμεων τούτων τῶν ποσοτήτων ὡς $X' + X'' + X''' \ldots + X^{(\nu)}$, ἢ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων ἀνὰ δύω ὡς $X' X'' + X'' X''' \ldots + X'' X'''$, καὶ, δηλαδὴ συμμετρικαὶ λειτουργίαι, ἑκάςη τῶν ὁποίων περιέχει ὅλας τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ ν, του' τέςι περιέχει ὅλας τὰς ποσότητας $X' X'' \ldots X^{(\nu)}$, καὶ ἐπειδὴ αἱ ποσότητες $X', X'', X''' \ldots X^{(\nu)}$ εἶναι δεκτικαὶ $\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots \mu}{(1.\ 2.\ 3.\ \pi)^{\nu}}$ διὰ τοῦτο καὶ αἱ ἐξ αὐτῶν σχηματιζόμεναι συμμετρικαὶ λειτουργίαι εἶναι δεκτικαὶ ἄλλων τόσων τιμῶν, ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς $\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots \mu}{(1.\ 2.\ 3.\ \pi)^{\nu}}$

Πρέπει ὅμως νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἀντεισάγοντες ἀντὶ τῶν X', $X'' \ldots\ldots X^{(\nu)}$ εἰς τὰς λειτουργίας

$X' + X'' + X''' \ldots\ldots + X^{(\nu)}, X' X'' + X' X''' + \ldots\ldots$
$X''' X^{\text{IV}} \ldots + $ κτλ

ἕως εἰς τὴν λειτουργίαν $X' X'' X''' \ldots X^{(\nu)}$ τὰς τιμάς των αἵτινες εἶναι $\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots \mu}{(1.\ 2\ 3.\ \pi)^{\nu}}$ αἱ τιμαὶ αἵτινες ἀλλάττουν τὸ X' εἰς X'' ἢ εἰς X''', καὶ οὕτως ἐφεξῆς, καὶ ἐν τούτων του' τέςι τὸ X'' εἰς X'''... $X^{(\nu)}$ εἰς τὸ X', σχηματίζουν πάντοτε τὴν ἰδίαν τιμὴν, καὶ διὰ τοῦτο τὸν αὐτὸν συντελεςὴν, καὶ τέλος πάντων πολλάκις τὴν ἰδίαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ ν. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὰς διαφορετικὰς τιμὰς, τῶν ὁποίων εἶναι δεκτικοὶ οἱ συντελεςαὶ τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ ν εἶναι ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν τὰς διαφόρους τιμὰς, τὰς ὁποίας παῤῥησιάζουν αἱ λειτουργίαι $X' + X'' \ldots X^{(\nu)}, \ldots$ καὶ τέλος πάντων ἡ λειτουργία $X' X'' X''' X^{\iota\nu} \ldots X^{(\nu)}$ ὅταν ἀντεισάζωμεν ἀντὶ τῶν X', X'', X''', . . $X^{(\nu)}$ τὰς $\frac{1.\ 2.\ 3.\ \mu}{(1.\ 2.\ 3.\ \pi)^{\nu}}$ τιμάς των· καὶ ἐπειδὴ ν ποσότητες συνδυαζόμεναι ἀνὰ μίαν ἢ ἀνὰ δύω ἢ ἀνὰ ν δίδουν τόσα ἴσα γινόμενα ἢ τόσα ἴσα ἀθροίσματα ὅσα ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς 1. 2. 3. 4. 5.----- ν, ὁ δὲ ἀριθμὸς $\frac{1.\ 2.\ 3.\ldots\mu}{(1.\ 2.\ 3.\ \pi)^{\nu}}$ παῤῥησιάζει ἐν γένει ὅλας τὰς τιμὰς τὰς ὁποίας ἑκάςη λειτουργία $X' + X'' \ldots + X^{(\nu)}$, $X' X'' + X' X''' \ldots + X' X^{(\nu)}, \ldots X' X'' X''' X^{\iota\nu} \ldots X^{(\nu)}$ δέχεται. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὰς διαφορετικὰς τιμὰς ἑκάςης τῶν ἄνω εἰρημένων λειτουργιῶν, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{1.\ 2.\ 3.\ldots\mu}{(1.\ 2.\ 3.\ \pi)^{\nu}}$ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 1. 2. 3. 4.--ν, καὶ οὕτως ἔχομεν διὰ τὰς διαφορετικὰς τιμὰς τῶν ἄνω εἰρημένων λειτουργιῶν, του' τέςι διὰ τὰς διαφορετικὰς τιμὰς τῶν συντελεςῶν τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ ν, τὸν ἀκόλουθον ἀριθμὸν

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ ----\ \mu}{1.\ 2.\ \ldots (\nu-2)\ (\nu-1)\ \nu\ (1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ \pi)^{(\nu)}}$$

Λοιπὸν καὶ ἑκάςη ῥίζα τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ ν, του' τέςι X', X'', X''' - - - $X^{(\nu)}$ εἶναι δεκτικὴ διαφόρων τιμῶν τόσων, ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ \mu}{1.\ 2.\ \ldots (\nu-2)\ (\nu-1)\ \nu\ (1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ \pi)^{\nu}}$$

Επιςρέφοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ ν, ἥτις ἔχει τὴν ἄγνωςον X, βλέπομεν ὅτι μὲ τὸ νὰ ἦναι τὸ ν ἀριθμὸς πρῶτος λύεται ὅταν λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ $\nu-1$ εἰς θ, τῆς ὁποίας οἱ συντελεςαὶ ἐξήρτηνται ἀπὸ μίαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ $(\nu-2)(\nu-3)-4\ldots 3.\ 2.\ 1$ καὶ τῆς ὁποίας οἱ συντελεςαὶ εἶναι συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ ν, του᾽τέςι τῶν $X'\ X''\ldots X^{(\nu)}$, καὶ ἐπειδὴ ἑκάςη τούτων τῶν ποσοτήτων εἶναι δεκτικὴ διαφόρων τιμῶν, τόσων, ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς $\dfrac{1.\ 2.\ 3.\ldots\mu}{1.\ 2.\ (\nu-2)(\nu-1)\,\nu\,(1.\ 2.\ \pi\nu)}$ διὰ τοῦτο καὶ αἱ συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ἰδίων ποσοτήτων ἤτοι οἱ συντελεςαὶ τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ $(\nu-2)(\nu-3)\ldots 3.\ 2.\ 1$ εἶναι δεκτικοὶ τιμῶν τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ· λοιπὸν ἐξήρτηνται ἀπὸ μίαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ $\dfrac{1.\ 2.\ 3.\ldots\mu}{1.\ 2.\ .(\nu-1)\,\nu\,(1.\ 2.\ \rho\,\nu)}$ καὶ διὰ τοῦτο ἐκεῖνοι τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ $\nu-1$ ἐξήρτηνται ἀπὸ ἐξίσωσιν βαθμοῦ

$$1.\ 2.\ 3.\ldots(\nu-3)\,\frac{(\nu-2)\times 1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots\mu}{1.\ 2.\,.(\nu-3)\,(\nu-2)\,(\nu-1)\,\nu\,(1.\ 2.\,.\pi)^{\nu}}\ ;$$

του᾽τέςι βαθμοῦ

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ldots\mu}{(\nu-1)\,\nu\,(1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots\pi^{\nu})}$$

Καὶ λύοντες ταύτην τὴν ἐξίσωσιν μετὰ ταῦτα ἐκείνην εἰς θ βαθμοῦ $\nu-1$, θέλομεν προσδιορίσειν τὰς τιμὰς τῆς θ, καὶ ὕςερον ἐκείνας τῶν $X', X'', \ldots X^{(\nu)}$ προσδιορίζοντας δὲ τὴν τιμὴν τῆς X', ἥτις ἐκφράζει τὸ ἄθροισμα π ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως μ, τότε κάμνομεν

$$X^{\pi} + X'X^{\pi-1} + K\,X^{\pi-2}\ldots + \upsilon = 0$$

Οὗτος ὁ παράγων ὁ ἀπὸ π παράγοντας πρώτου βαθμοῦ σχηματιζόμενος, ὧν ἐξ ἐκείνων οἵτινες συνιςῶσι τὴν δοθεῖσαν, πρέπει νὰ διαιρῇ ἐντελῶς καὶ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ μ, καὶ ἐκ τῆς διαιρέσεως προσδιορίζομεν τοὺς ἄλλους συντελεςὰς K

Λοιπὸν ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ μ ὅταν $\mu = \pi\nu$, τουτέςι τὸ γινόμενον δύω πρώτων ἀριθμῶν ἐξήρτηται ἀπὸ τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως βαθμοῦ

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \cdots \mu}{(\nu-1)\nu\,(1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \cdots \pi)^{\nu}}$$

καὶ ἀπὸ ἐκείνην μιᾶς ἄλλης βαθμοῦ π.

Ἄς ἐφαρμόσωμεν τὰ ἄνω εἰρημένα εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ τετάρτου βαθμοῦ $\chi^4 + \pi\chi^2 + \varkappa\chi + \rho = o$ λοιπὸν $\mu = 4 = 2 \,.\, 2$ ὅθεν $\nu = 2$, $\pi = 2$, ἡ δὲ λειτουργία

$$\tau' = \chi' + \alpha\,\chi'' + \alpha^2\,\chi''' + \alpha^3\,\chi^{\text{IV}}$$

τρέπεται, ἀφοῦ ὑποτεθῇ τὸ 1 καὶ α ὅτι εἶν' αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\psi^2 - 1 = o$ εἰς τὴν ἀκόλουθον λειτουργίαν

$$\tau' = \chi' + \chi''' + (\chi'' + \chi^{\text{IV}})\,\alpha$$

τουτέςι μία τῶν τιμῶν τῆς X' εἶναι $\chi' + \chi'''$, καὶ τῆς X'' εἶναι $\chi'' + \chi^{\text{IV}}$. ἐκτελοῦντες τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰς ἄλλας λειτουργίας τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, εὑρίσκομεν καὶ τὰς ἄλλας τιμὰς διὰ τὸ X', X'', ὅσας δηλοῖ ὁ τύπος

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots\cdots \mu}{(1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots\cdots \pi)^{\nu}}$$

υποτέςιν

$$= \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}{(1 \,.\, 2)^2} = \frac{3 \,.\, 8}{4} = 3 \,.\, 2 = 6.$$

Καὶ τῳόντι συνδυάζοντες ἀνὰ δύω τὰς τέσσαρας ῥίζας χ', χ'', χ''', χ^{IV}, εὑρίσκομεν διὰ τὸ Χ' ἓξ συνδυασμοὺς του'τέςι τὸ Χ' εἶναι δεκτικὸν ἓξ τιμῶν καὶ λαμβάνοντες μίαν ἐξ αὐτῶν τῶν ἓξ τιμῶν διὰ νὰ παῤῥησιάσωμεν τὸ Χ', του'τέςι λαμβάνοντες δύω ἀπὸ τὰς τέσσαρας ῥίζας χ', χ'', χ''', χ^{IV}, τὰς δὲ ἐπίλοιπους συνδυάζοντὲς τας ἀνὰ δύω σχηματίζομεν τὰς τιμὰς τοῦ Χ'', καὶ ἐπειδὴ διὰ μόνης μιᾶς τιμῆς τοῦ Χ ἔχομεν τόσας τιμὰς διὰ τὸ Χ'', ὅσους συνδυασμοὺς ἀποτελοῦν αἱ τέσσαρες μεῖον δύω ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως διὰ τοῦτο θέλομεν ἔχειν διὰ τὰς ἓξ τιμὰς τοῦ Χ', τόσας τιμὰς διὰ τὸ Χ' ὅσας ἐκφράζει τὸ γινόμενον τοῦ 6 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συνδυασμῶν ἀνὰ δύω τῶν τεσσάρων μεῖον δύω ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, καὶ ἐπειδὴ τέσσαρες μεῖον δύω ῥίζαι, ἀνὰ δύω συνδυαζόμεναι δίδουν ἕνα συνδυασμὸν, διὰ τοῦτο 6×1 δίδει 6

Αἱ δύω λοιπὸν ποσότητες χ' καὶ χ'' εἶναι δεκτικαὶ ἓξ τιμῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων συνίςαται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα δύω ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. ὑποθέτοντες τώρα ὅτι Χ' καὶ Χ'' εἶναι αἱ ῥίζαι μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἥτις ἔχει διὰ ἄγνωςον τὸ Χ, οἱ συντελεςαὶ ταύτης τῆς ἐξισώσεως θέλουν εἶσθαι συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ῥιζῶν της, του'τέςιν ὁ συντελεςὴς τοῦ δευτέρου ὅρου θέλει εἶσθαι Χ' + Χ'', καὶ ὁ τοῦ γου, Χ' Χ'' ἀλλὰ Χ' καὶ Χ'' εἶναι δεκτικὸν ἓξ τιμῶν, διὰ τοῦτο κατὰ πρῶτον ἔπρεπε καὶ οἱ συντελεςαὶ των νὰ ἦναι δεκτικοὶ ἓξ τιμῶν. ἀλλ' ἐπειδὴ ἂν τεισάγομεν εἰς τὰς λειτουργίας Χ' + Χ'' καὶ Χ' Χ'' τὰς τιμὰς τοῦ Χ' καὶ Χ'', μερικαὶ τούτων ἄλλο δὲν κάμνουν εἰ μὴ ἀλλάττουν τὸ Χ' εἰς τὸ Χ'', καὶ τὸ Χ'' εἰς τὸ Χ' διὰ τοῦτο θέλομεν ἀπαντήσειν τοσάκις τὴν αὐτὴν τιμὴν διὰ τὴν λειτουργίαν Χ' + Χ'' ἢ Χ' Χ'', ὁσάκις δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν τὸ Χ' εἰς τὸ Χ'', καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ἄλλαι τόσαι μεταθέσεις γίνονται εἰς δύω ποσότητας, ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς 1.2. Λοιπὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς διαφορετικὰς τιμὰς τῶν λειτουργιῶν $X' + X''$ καὶ $X' X''$

Πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τὸν παραςαίνοντα τὰς τιμὰς τοῦ $X' . X''$ διὰ τοῦ 2, τουτέςι τὸ 6 διὰ τοῦ 2 ἤγουν 3. διὰ τοῦτο οἱ συντελεςαὶ τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς X, εἶναι δεκτικοὶ τριῶν διαφόρων τιμῶν, τουτέςι ἐξήρτηνται ἀπὸ ἐξίσωσιν τρίτου βαθμοῦ.

Παρομοίως ἐπειδὴ τὸ 2 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, ἡ ἐξίσωσις εἰς X λύεται κατὰ πρῶτον μὲ τοὺς ἰδίους συλλογισμοὺς ὡς καὶ ἡ ἐξίσωσις βαθμοῦ μ, ὅταν τὸ μ ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος, δηλαδὴ σχηματίζομεν ἐξίσωσιν ἐν πρώτοις εἰς θ. ἥτις εἶναι βαθμοῦ $(\nu - 1)(\nu - 2) \ldots 2 . 1$, τουτέςι βαθμοῦ πρώτου ὡς ἡ πρώτη εἰς θ, δηλαδὴ εἶναι ἡ ἰδία. οἱ δὲ συντελεςαὶ ταύτης τῆς ἐξισώσεως εἶναι συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ ν διὰ τοῦτο ἐκφράζονται διὰ τῶν συντελεςῶν τῆς ἰδίας, οἵτινες ὡς ἀπεδείξαμεν ἐξήρτηνται ἀπὸ ἐξίσωσιν τρίτου βαθμοῦ ὅθεν καὶ οἱ συντελεςαὶ τῆς ἐξισώσεως εἰς θ, ἐξάγονται ἀπὸ ἐξίσωσιν τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ. ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις εἰς θ εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἔχει ἕνα μόνον συντελεςὴν ὁ ὁποῖος εἶναι λοιπὸν δεκτικὸς τιμῶν τριῶν.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὰς ἄνω εἰρημένας ἐξισώσεις, ἐξεύρομεν ὅτι

$$\theta = t'^{2} = (X' + \alpha X'), \text{ καὶ } \theta' = \xi + \xi' \alpha$$

$$\text{δηλαδὴ } \xi + \xi' \alpha = X'^{2} + X''^{2} + 2 X' X'' \alpha,$$

$$\text{ἤτοι } \xi = \chi'^{2} + \chi''^{2} \text{ καὶ } \xi' = 2 \chi' \chi''$$

Παρομοίως $\theta' = (X' + X'')^{2} = A^{2}$, καὶ εἰς τὴν παροῦσαν, περίςασιν $A^{2} = o$. λοιπὸν $\Sigma_\nu \theta = \mu \xi_\nu - A^{\mu\nu}$.

καλοῦντες $\nu = 1$ καὶ $\mu = 2$, θέλομεν ἔχειν $\Sigma_1 \theta = 2 \xi$

τουτέστι $\Sigma, \theta = 2(X'^2 + X''^2)$,

καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων δυνάμεων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως εἰς θ μὲ ἐναντίον σημεῖον εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτέρου ὅρου, διὰ τοῦτο ἡ ἐξίσωσις εἰς θ παῤῥησιάζεται οὕτως

$$\theta - 2(X'^2 + X''^2) = 0,\ \text{ἢ}\ \theta - 2(X' + X'')^2 - 2X'X'' = 0$$

καὶ ἐπειδὴ $X' + X'' = 0$, διὰ τοῦτο $\theta + 4X'X'' = 0$.

Ὄντος δὲ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς εἰς θ ἐξισώσεως ἐπιδεκτικοῦ τριῶν τιμῶν ὡς ἀνωτέρω ἀπεδείχθη, πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν ταύτας τὰς τρεῖς τιμὰς διὰ τῶν τριῶν τιμῶν τοῦ X' καὶ X'', τουτέστι νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς X, οἱ συντελεσταὶ τῆς ὁποίας εἶναι δεκτικοὶ τριῶν τιμῶν, ἤτοι ἐξαρτῶνται ἀπὸ μίαν ἐξίσωσιν τρίτου βαθμοῦ, καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τριτοβάθμιον ἐξίσωσιν, αἱ ῥίζαι τῆς ὁποίας νὰ ἦναι αἱ τιμαὶ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς X, καὶ πάλιν ἄλλην τινὰ τοῦ τρίτου βαθμοῦ, αἱ ῥίζαι τῆς ὁποίας νὰ ἦναι αἱ τιμαὶ τοῦ συντελεστοῦ τῆς ἰδίας ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς χ. διὰ νὰ σχηματίσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῆς ἐξισώσεως τοῦ τρίτου βαθμοῦ, αἱ ῥίζαι τῆς ὁποίας θέλουν εἶσθαι εἷς τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, πράττομεν ὡς ἀκολουθεῖ, κατὰ τὸν συντελεστὴν τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ τρίτου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι νὰ παῤῥησιάζωσι τὰς τρεῖς τιμὰς τῶν ὁποίων εἶναι δεκτικὸς ὁ συντελεστὴς τῆς ἐξισώσεως εἰς χ, συλλογιζόμεθα οὕτως. Ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτέρου ὅρου ταύτης τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἴσος, μὲ ἐναντίον σημεῖον, τῷ ἀθροίσματι τῶν ῥιζῶν τῆς ἰδίας ἐξισώσεως, τουτέστι $-(X' + X'')$, καὶ ἀντεισάγοντες μίαν ἀπὸ τὰς ἓξ τιμὰς τοῦ X', X'', ἤτοι $\chi' + \chi'' + \chi''' + \chi^{IV}$, θέλομεν ἔχειν $-(X' + X'') = -(\chi' + \chi'' + \chi''' + \chi^{IV}) = 0$

Τὸ αὐτὸ θέλει προκύψειν καὶ εἰς πᾶσαν ἄλλην τῶν ἓξ τιμῶν τοῦ χ', χ''. Λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαιμοῦ εἰς χ εἶναι ἐλλειπὴς δευτέρου ὅρου. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς τρεῖς τιμὰς τοῦ συντελεστοῦ τοῦ τρίτου ὅρου τῆς ἰδίας ἐξισώσεως, τουτέστι τὸ $X'X''$, ἀντεισάγοντες ὡς ἀνωτέρω ἀντὶ τοῦ X', X'', μίαν τῶν ἓξ τιμῶν,

θέλομεν ἔχειν $X'X'' = \omega = (\chi' + \chi'')(\chi''' + \chi^{IV})$

$$= \chi'\chi''' + \chi'\chi^{IV} + \chi''\chi''' + \chi''\chi^{IV}.$$

ἢ $X'X'' = \omega = (\chi' + \chi''')(\chi'' + \chi^{IV})$

$$= \chi'\chi'' + \chi'\chi^{IV} + \chi''\chi''' + \chi'''\chi^{IV}$$

καὶ $X'X'' = \omega = (\chi' + \chi^{IV})(\chi''\chi''')$

$$= \chi'\chi'' + \chi'\chi''' + \chi''\chi^{IV} + \chi'''\chi^{IV}$$

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ X', X'' ἀντεισάξωμεν τὴν τετάρτην ἢ τὴν πέμπτην, ἢ τὴν ἕκτην τιμὴν, θέλομεν εὑρεῖν τὰς ἰδίας ποσότητας. Λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις τοῦ τρίτου βαθμοῦ σχηματίζεται ἐκ τοῦ γινομένου τῶν τριῶν παραγόντων

$$(\omega - (\chi'\chi''' + \chi'\chi^{IV} + \chi''\chi''' + \chi''\chi^{IV}))$$
$$(\omega - (\chi'\chi'' + \chi'\chi^{IV} + \chi''\chi''' + \chi'''\chi^{IV}))$$
$$(\omega - (\chi'\chi'' + \chi'\chi''' + \chi''\chi^{IV} + \chi'''\chi^{IV}))$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ

$$\chi'\chi'' + \chi'\chi''' + \chi'\chi^{IV} + \chi''\chi''' + \chi''\chi^{IV} + \chi'''\chi^{IV} = \pi,$$

ἔχομεν διὰ τοῦτο

$$\chi'\chi''' + \chi'\chi^{IV} + \chi''\chi''' + \chi''\chi^{IV} = \pi - \chi'\chi'' - \chi'''\chi^{IV}.$$

παρομοίως $\chi'\chi'' + \chi'\chi^{IV} + \chi''\chi''' + \chi'''\chi^{IV} = \pi - \chi'\chi''' -$

$\chi'' \chi^{IV}$, καὶ $\chi' \chi'' + \chi' \chi''' + \chi'' \chi^{IV} + \chi''' \chi^{IV} = \pi - \chi' \chi^{IV} - \chi'' \chi'''$. Λοιπὸν ἔχομεν,

$$(\omega - \pi + (\chi' \chi'' + \chi''' \chi^{IV}))(\omega - \pi + (\chi' \chi''' + \chi'' \chi^{IV}))(\omega - \pi + (\chi' \chi^{IV} + \chi'' \chi'''))$$

Καὶ καλοῦντες $\omega - \pi = \varphi$, ἔχομεν $(\varphi + (\chi' \chi'' + \chi''' \chi^{IV}))(\varphi + (\chi' \chi''' + \chi'' \chi^{IV}))(\varphi + (\chi' \chi^{IV} + \chi'' \chi''')) = 0$, $\sigma_1 = ((\chi' \chi'' + \chi''' \chi^{IV}) + (\chi' \chi''' + \chi'' \chi^{IV}) + (\chi' \chi^{IV} + \chi'' \chi''')) = -\pi$. $\sigma_2 = \chi'^2 \chi''^2 + \chi'''^2 \chi^{IV2} + 2\chi' \chi'' \chi''' \chi^{IV} + \chi'^2 \chi'''^2 + \chi''^2 \chi^{IV2} + 2\chi' \chi'' \chi''' \chi^{IV} + \chi'^2 \chi^{IV2} + \chi''^2 \chi'''^2 + 2\chi' \chi'' \chi''' \chi^{IV}$

$$= \frac{(\Sigma_2^2 - \Sigma_4)}{2} + 6\rho = \frac{4\pi^2 - 2\pi^2 + 4\rho + 6\rho}{2} \quad \pi^2 + 8\rho$$

$$\sigma_3 = \left|\begin{matrix} \chi'^3 \chi''^3 + 3\chi'^2 \chi''^2 \chi''' \chi^{IV} + 3\chi' \chi'' \chi'''^2 \chi^{IV2} + \chi'''^3 \chi^{IV3} \\ \chi'^3 \chi'''^3 + 3\chi'^2 \chi'''^2 \chi'' \chi^{IV} + 3\chi' \chi''' \chi''^2 \chi^{IV2} + \chi''^3 \chi^{IV3} \\ \chi'^3 \chi^{IV3} + 3\chi'^2 \chi^{IV2} \chi'' \chi''' + 3\chi' \chi^{IV} \chi''^2 \chi'''^2 + \chi''^3 \chi'''^3 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\Sigma_2^2 - \Sigma_4) +$$

$$\begin{array}{r|l} +3\chi' \chi'' & \chi' \chi'' \chi''' \chi^{IV} \\ +3\chi' \chi''' & \\ +3\chi' \chi^{IV} & \\ +3\chi''' \chi'' & \\ +3\chi'' \chi^{IV} & \\ +3\chi''' \chi^{IV} & \end{array}$$

$$-\frac{2}{?}(9x^2-6\theta\rho+2\rho^3-3x^2+3\pi\rho) \quad -(3x^2+\pi^3)$$

Θέτοντες λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν εἰς φ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\varphi^3+A\varphi^2+B\varphi+\Gamma=0$$

ἔχομεν (ὡς εἰς τὸν ἀριθμὸν 9: Συμπλήρ. Λακρ:) $A=-\sigma=+\rho$

$$\text{καὶ } B=\frac{-A\sigma-\sigma_2}{2}=\frac{\pi^2-\pi^2-8\rho}{2}=-4\rho$$

$$\Gamma\ \frac{-B\sigma_1-A\sigma_2-\sigma_3}{3}=\frac{-4\pi\rho-\pi^3-8\pi\rho+3x^2+\pi^3}{3}=-4\pi\rho+x$$

Καὶ διὰ τοῦτο $\varphi^3+\pi\varphi^2-4\rho\varphi-4\pi\rho+x^2$, καὶ ἀντεισάγοντες ἀντὶ τοῦ φ τὸ $\omega-\pi$, θέλομεν ἔχειν

$$\omega^3-2\pi\omega^2+(\pi^2-4\rho)\omega+x^2=0$$

καλουμένου δὲ $\omega=-\psi$, ἔχομεν $-\psi^3-2\pi\psi^2-(\pi^2-4\rho)\psi+x^2=0$

$$\text{ἢ } \psi^3+2\pi\psi^2+(\pi^2-4\rho)\psi-x^2=0$$

Καλοῦντες $+\psi', \psi'', \psi'''$ τὰς ῥίζας ταύτης τῆς ἐξισώσεως ἔχομεν

$$\chi'\chi''=+\psi'',\ \chi'\chi''=+\psi''',\ \text{καὶ } \chi'\chi''=\psi'.$$

τὰς δὲ τιμὰς τοῦ ω, Z', Z'', Z''', ἔχομεν

$$\psi'=-Z',\ \psi''=-Z'',\ \psi'''=-Z'''$$

καὶ $\theta-4Z'=0$, $\theta-4Z''=0$, $\theta-4Z''\ \ 0$, $\theta-4Z'''=0$

καὶ $\sqrt{\theta}=\pm2\sqrt{Z'}$, $\sqrt{\theta}=\pm2\sqrt{Z''}$, $\sqrt{\theta}=\pm2\sqrt{Z'''}$.

καὶ ἐπειδὴ $\theta=\tau'^2=(X'+X''\alpha)^2$, διὰ τοῦτο $X'+X''\alpha=\pm2\sqrt{Z'}$, $X'+X''\alpha=\pm2\sqrt{Z''}$, $X'+X''\alpha=\pm2\sqrt{Z''}$, καὶ $X'+X''=0$.

ἐκ τῶν ὁποίων συνάγομεν $X' = \pm \sqrt{Z'}$, ἢ $X' = \pm \sqrt{Z''}$
καὶ $X' = \pm \sqrt{Z'''}$, καὶ $X'' = \pm \alpha \sqrt{Z'}$ ἢ

$$X'' = \pm \alpha \sqrt{Z''},\ X'' = \pm \alpha \sqrt{Z'''}.$$

καὶ ἐπειδὴ X' παῤῥησιάζει $\chi' \chi''$, $\chi' + \chi''$, ἢ $\chi' + \chi'''$, ἢ $\chi' + \chi^{IV}$.

διὰ τοῦτο

$$\chi' + \chi'' = \pm \sqrt{Z'}$$
$$\chi' + \chi''' = \pm \sqrt{Z''}.$$
$$\chi' + \chi^{IV} = \pm \sqrt{Z}.$$

Λοιπὸν $\chi' = \frac{1}{2}(\pm \sqrt{Z'} \pm \sqrt{Z''} \pm \sqrt{Z'''})$.

Αἱ τιμαὶ τοῦ X'' θέλουν δώσειν τοὺς ἰδίους τύπους διὰ τοῦ χ', χ'' θ., ἐπειδὴ τὸ α ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα.

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^4 + \pi \chi^2 + \kappa\chi + \rho = 0$ διὰ τοῦ $\chi^2 \pm \sqrt{Z'} . \chi + K = 0$, θέλομεν ἔχειν ὑπόλοιπον $(\kappa + 2K\sqrt{Z'} - (\pi + Z')\sqrt{Z'})\chi + \rho - K\pi - KZ', + K^2 = 0$ τοὐτέστι $\kappa + 2K\sqrt{Z'} - (\pi + Z')\sqrt{Z'} = 0$, $K^2 - (\pi + Z')K + \rho = 0$

καὶ

$$K = \frac{(\pi + Z')\sqrt{Z'} - \kappa}{2\sqrt{Z'}}$$

Λοιπὸν ὁ παράγων $\chi^2 + \sqrt{Z'}\chi + K$, τρέπεται εἰς

$$x^2 + \sqrt{Z'} \cdot \chi + \frac{(\pi + Z')\sqrt{Z'} - \kappa}{2\sqrt{Z'}} = 0$$

καὶ τὸ πηλίκον εἰς

$$\chi^2 - \sqrt{Z'}\chi + \pi + Z' - \frac{(\pi + Z')\sqrt{Z'} - \kappa}{2\sqrt{Z'}} = 0$$

ΤΕΛΟΣ.

Ημαρτημένων διόρθωσις.

Σελ. 34, στίχ. 14, γρ. X' καὶ X'' — σελ. 35, στίχ. 20 γρ. $\tau'^2 = (X' + \alpha X'')^2$ καὶ στίχ. 22 γρ., $\xi = X'^2 + X''^2$ καὶ $\xi' = 2X'X$. — σελ. 37, στίχ. 3, γρ. X', X'' ἀντὶ χ', χ'', ξ εἰς X ἀντὶ εἰς χ. ξ στίχ. 11 ἀντὶ $(\chi''\chi''')$ γρ. $(\chi'' + \chi''')$ καὶ στίχ. 17 γρ. ἀντὶ $(\chi'\chi''$, $(\chi'\chi'''$. ξ στίχ. 23, ἀντὶ $\chi'\chi'''$ γρ. $\chi'\chi''$ καὶ στίχ. 24 ἀντὶ $\chi'\chi^{iv}$ γρ. $\chi''\chi^{iv}$ — σελ. 38, στίχ. 1, ἀντὶ $\chi''\chi^{iv}$ γρ. $\chi'\chi^{iv}$, ξ στίχ. 3, ἀντὶ $\chi'\chi''$ γρ. $\chi'\chi'''$. καὶ στίχ. 4, ἀντὶ $\chi''\chi^{iv}$ γρ. $\chi'\chi^{iv}$ καὶ στίχ. 5. ἀντὶ $\chi'\chi''$ γρ. $\chi'\chi'''$. καὶ στίχ. 6 ἀντὶ $\chi''\chi^{iv}$ γρ. $\chi'\chi^{iv}$ καὶ στίχ. 7, γρ. $((\chi'\chi''' \ldots$ καὶ ἀντὶ $\chi''\chi^{iv}$ γρ. $\chi'\chi^{iv}$. καὶ στίχ. 9, ἀντὶ $\chi''^2\chi^{iv2}$ γρ. $\chi'^2\chi''^2$, καὶ στίχ. 11 γρ.

$$+ 6\rho = \frac{4\pi^2 - 2\pi^2 + 4\rho}{2} + 6\rho = \pi^2 + 8\rho.$$

καὶ στίχ. 12, ἀντὶ $\chi'^3\chi''^3$ γρ. $\chi'^3\chi'''^3$ ξ ἐν ἀρχῇ τοῦ 13. στίχου γράφε σ3 = . . . — σελ. 39, στίχ. 1, γρ.

$$\text{ἢ } \sigma 3 = -\tfrac{1}{2}(9\chi^2 - 6\pi\rho + 2\pi^3 - 3\chi^2) + 3\pi\rho = \ldots$$

— σελ. 40, στίχ. 4 γρ. $\chi' + \chi''$ ἀντὶ $\chi'\chi''$, $\chi' + \chi''$, καὶ στίχ. 9 ἀντὶ διὰ τοῦ χ', χ'' θ γρ. διὰ τοῦ χ', χ'', χ''', χ^{iv}.