ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΤΗΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ

ΑΛΓΕΒΡΗΣ

Ἐκ τοῦ Γερμανικοῦ μεταφρασθέντα εἰς τὴν ἡμετέραν διάλεκτον ὑπό τινος Φιλογενοῦς ὁμογενοῦς χάριν τῶν ὁμογενῶν

Ἰένῃ

ἐν τῇ Τυπογραφίᾳ τοῦ Φίδλερ.

ἐν ἔτει 1800.

ΤΩ ΣΟΦΟΛΟΓΙΩΤΑΤΩ

ΚΥΡΙΩ

ΜΟΙ ΚΥΡΙΩ

ΛΑΜΠΡΩ ΦΩΤΙΑΔΗ

Πρώτω Διδασκάλω της εν Βουκουρεςίω

Αυθεντικής Σχολής.

Τίνι ποτ' αν άλλω ή παρούσα βίβλος, ή το κοινόν αφορώσα όφελος, ανατεθείη δικαιότερον, Ανερ Ελλόγιμε! ή ΣΟΙ, τω διά παντός την κοινήν πνέοντι ωφέλειαν, και φερωνύμως την πάλαι του γένους λαμπρότητα εις τα ίδια παντί τρόπω αποκαταςήσαι φιλοτιμουμένω. Πολλούς γαρ τη ση εκλαμπρύνων διδασκαλία, εκ του σκότους της αγνοίας εις το φως αυτούς άγεις της γνώσεως, τοσαύτα φώτα δι' αυτών, εἰς φωτισμὸν τοῦ γένους ἅπτων, τῷ σῷ φωτὶ αὐτοὺς καταφωτιζόμενος· ΣΕ τοίνυν δικαίως ἐπικαλεῖται καὶ ἡ βίβλος προςάτην, λαμπρὰ μὲν οὖσα καθ' ἑαυτὴν, (πόνημα γὰρ ἀνδρῶν, ὧν λόγος ἐπὶ σοφία πολὺς) λαμπρὰ δὲ καὶ διαμεῖναι βουλομένη, εἴτι ἐσκότισαι τῇ τοῦ μεταφράσαντος ἀμαθεία. Οὐδεὶς γὰρ, εὖ οἶδα, κατατολμήσειεν αὐτῆς, ΣΕ προςάτην σεμνυνομένη. Ἀποδεξάμενος οὖν τὴν βίβλον, ἐνέχυρον τῆς πρὸς ΣΕ εὐγνωμοσύνης μου, ὑπὲρ ὧν παρὰ σοῦ ἔτυχον εὐεργετημάτων, ἀναπλήρωσον τὰ ἐλλείποντα, τὰ ἡμαρτημένα ἐπανορθῶν, κἀμὲ τῇ ΣΑΥΤΟΥ διατηρῶν εὐνοίᾳ, ὅς καὶ εἰμὶ

τῆς Σῆς Σοφολογιότητος

ὑποκλινὴς δοῦλος

ὁ Μεταφραςής.

Τῷ

Τῷ Ἐντευξομένῳ.

Ὅσον τὸ τῆς Μαθηματικῆς χρῆμα τοῖς εἰς τὰ τῆς φύσεως ἄδυτα εἰσδύναι βουλομένοις ἀναγκαῖον, πείρᾳ μαθὼν ἔγνων, καὶ πᾶς τις, εὖ οἶδα, ἐμοὶ τοῦτο ξυνομολογήσει, ὃ καὶ μικρὸν γοῦν τοῦ πράγματος ἀψάμενος. Αὕτη γὰρ ἡ θυρὶς τυγχάνει, δι' ἧς, καὶ ἧς οὐκ ἄνευ. Πασῶν δ' ἡγεῖται τῶν Μαθηματικῶν Ἐπιστημῶν ἡ Ἀριθμητικὴ, καὶ Ἀλγεβρα, ἡ μὲν ἐν εἴδει, ἡ δ' ἑτέρα ἐν γένει, τὰ τῶν ποσοτήτων προβάλλουσαι πάθη, καὶ ἰδιότητας. Ὅσῳ οὖν μᾶλλον τούτων τις ἐγκρατὴς, τοσούτῳ ῥᾶον, καὶ ἀπονώτερον καὶ εἰς τὰ λοιπὰ τῆς

Μαθ-

Μαθήσεως εἴδη χωρήσει, ἐκ τῶν εὐληπτοτέρων ἐπὶ τὰ μᾶλλον προϊὼν δυσκατανόητα, μετὰ τοσούτῳ πλείονος ἡδονῆς, καὶ ὠφελείας τὰ Φυσικὰ τῶν συγγραμμάτων ἀναγνώσεται. Μᾶλλον δέ τις τούτων ἐγκρατὴς γίνεται, βίβλοις ἐντυγχάνων, σαφῶς καὶ εὐκρινῶς τὸ αὐτῶν ὑποκείμενον παριςώσαις. Ὧν τοῖς μὲν ἄλλοις τῶν γενῶν εὐπορία, πανταχόθεν ἑαυτοῖς τὸ πρᾶγμα ἐξευμαρίζουσιν. ἡμῖν δὲ, ὅσαγε κἀμὲ εἰδέναι, ἀπορία μεγίςη, τοιούτων βίβλων σπανίζουσι. Καίτοι γὰρ πολλαὶ τῶν βίβλων αἱ περιφερόμεναι τῶν Μαθηματικῶν καὶ πάρ' ἡμῖν, ἀλλὰ τῶν ταύτας συγγραψάντων τοῖς μὲν, τῶν ἀναγκαιοτάτων μόνον ἐμέλησε, καὶ ςοιχειωδεςάτων· οἱ δὲ, πολλὰ ἐν μικρᾷ βίβλῳ περιλαβεῖν ἐθελήσαντες, σκότῳ πολλῷ καὶ ἀχλύϊ τὸν προβαλλόμενα ἐκάλυψαν, ὥςε καὶ διδάξοντος δεῖσθαι, ὡς τὰ πολλὰ δὲ καὶ οὕτω κατὰ σκότον ἠλάσκειν. Τοῖς τῆς Μαθήσεως τοίνυν ἐραςαῖς χαρισόμενος, ὧν τὴν ἔφεσιν τὰ ῥηθέντα ναρκᾶν ποιεῖ, καὶ πολλαῖς περιςοιχούμενος φροντίσι τῶν ἀνὰ χεῖρας μαθημάτων, καὶ μηδεμίαν ἄγων σχολὴν, πάντα τὰ ἐμαυτοῦ τῆς τοῦ γένους ὠφελείας δεύτερα ποιη-σάμενος, τήνδε τὴν βίβλον ἐκ τοῦ Γερμανικοῦ εἰς τὴν ὑμετέραν μεταφράσαι διάλεκτον οὐκ ἀπώκνησα, πάνυ σαφῆ οὖσαν, καὶ οὐδενὸς ἑτέρου χειραγωγοῦ ἐπιδεομένην, κατατολμήσας τοῦ ἔργου οὐκ εἰς ἐπί-δειξιν. (τὸ, τε γὰρ ὕφος ἀκαλλὲς, ἀφελὲς, καὶ ἀκόσμητον, καὶ τὰ ἐν τῇ βίβλῳ οὐ τοῦ ἐμοῦ νοός ἐπι-γεννήματα) ἀλλ' εἰς ὠφέλειαν τῶν ἐντυγχανόντων. Τῶν γὰρ ἐν αὐτῇ ἕκαςος, οἶμαι, συνήσει, ὁ μετὰ προσοχῆς τὰς ἀρχὰς ἀναλεγόμενος, καὶ εἰς τὸ πρό-σω μηδόλως ἐπειγόμενος, εἰ μὴ τῶν ἡγουμένων ἐν συνέσει γένοιτο. Πολλαχοῦ δὲ τῆς βίβλου καὶ παλλιλογία τῶν ῥηθέντων οὐκ ὀλιγάκις ἀπαντᾷ. Σολοικισμοίτε τυχὸν, καὶ μάλιςα βαρβαρισμοί. (ἁ-μάρτημα οὐ τοσοῦτον τῇ τοῦ ἐκδόντος ἀμελείᾳ, ὅσον τῇ τοῦ ςοιχειοθέτου παρεισδύσαν ἀγνοίᾳ,) Ἀλ-λὰ τὸ μὲν α'. ἐπίτηδες ἐγένετο, ἀναπτύξεως μείζο-νος ἕνεκα. τοῦ δὲ β'. ὁ εὐγνώμων τῆς βίβλου ἀνα-γνώςης, τὸν καρπὸν αὐτῆς θηρώμενος, οὐκ ἂν πικ-ρὸς καθίσειε δικαςὴς, μικροπρεπὲς τοῦτο ἡγούμενος, καὶ τὸ τοιοῦτο ἀπαιτῶν, οἷς ἐπάγγελμα τὸ κομ-

ψῶς

ψιῶς, καὶ περιττῶς γράφειν. Καὶ ὠφεληθεὶς μὲν χάριτας ἴςω τοῖς Συγγραφεῦσιν, ἀφ' ὧν ταῦτα ἐξηράνισαι· προσοχθίζων δὲ τῇ μεταφράσει, καὶ τῷ ὕφει ταῖς βίβλου τὸν μεταφράσαντα αἰτιάσθω, εἰ καὶ τῷ ὄντι οὐδὲ οὗτος ὑπ' εὐθύνην, τὸ κατὰ δύναμιν παρασχών.

ὁ Μεταφραςής

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ, ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΗΣ.

§. 1.

Ποσότης, ἢ **Ποσὸν** καλεῖται, ᾧτινι προσθεῖναι, ἢ ἀφ' οὗ ἀφελεῖν τι δυνάμεθα. Π. Χ. ὅιδε οἱ ὀβολοί· οἵδε οἱ ἵπποι, κτ. οἵτινες, προςεθέντων τούτοις καὶ ἑτέρων ὀβολῶν, ἢ ἵππων, αὔξονται. ἀφαιρεθέντων δὲ ἀπὸ τούτων, μειοῦνται.

§. 2. **Μονὰς** δὲ, οἱαδηποτοῦν Ποσότης, ἣν ἀντὶ τούτου, ἤτοι ἀντὶ μονάδος παραλαμβάνειν βουλόμεθα. π. χ. μία μνᾶ. εἷς ὀβολός. εἷς ἄνθρωπος. καὶ, λ'. ἄνθρωποι. ἡμίσεια μνᾶ. εἴκοσι ὀβολοί. κτ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ ὁρισμὸς τῆς μονάδος προξενεῖ περισσοτέραν σύγχυσιν, παρὰ ἀνάπτυξιν τῆς ἐννοίας τῆς μονάδος.

 διότι

διότι ἡ ἔννοια αὐτῆς εἶναι γνωςὴ εἰς καθ' ἕνα, καὶ χωρὶς τοῦ ὁρισμοῦ.

§. 3. Πλείους ὁμοειδεῖς μονάδες ἀποτελοῦσιν Ἀριθμόν. π. χ. ἐὰν ἡ μονὰς ἡ ἄνθρωπος, τριάκοντα, ἢ δέκα, ἢ πέντε κτ. ἄνθρωποι, εἰσὶν ἀριθμός. ἐὰν ἡ μονὰς ἡ εἷς ἵππος, εἷς κύων, καὶ εἷς λέων, ὑπὸ ταύτην τὴν προσηγορίαν θεωρούμενα ταῦτα τὰ τρία οὐδένα παρέχουσιν ἀριθμόν. οὔτε γὰρ τρεῖς ἵπποι, οὔτε τρεῖς κύνες, οὔτε τρεῖς λεοντές εἰσιν. ἐὰν δὲ θῶμεν τὴν μονάδα εἶναι ζῶον. εἷς ἵππος, εἷς κύων, καὶ εἷς λέων ποιοῦσι τρία ζῶα, καὶ ἑπομένως ἀριθμόν. ὥςε ἀριθμός ἐςι σωρεία μονάδων πολλῶν ὁμοειδῶν, ἢ δύω τουλάχιςον.

§. 4. Ἐὰν ἐν τῷ ἀριθμεῖν καὶ τὸ ὄνομα τῆς μονάδος ἀπαγγέλληται, ὁ ἀριθμὸς καλεῖται Συγκεκριμένος· οἷον, εἴκοσι δραχμαί· λ' ὀβολοί· ὀκτὼ ζῶα. ἐὰν δὲ μὴ, Ἀφηρημένος· ὡς τρία, δέκα, εἴκοσι·

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Πολλάκις, πραγμάτων ἀριθμητῶν μὴ προκειμένων, ἀριθμοῦμεν, ἕν, δύω, τρία κτ. λέγοντες· ἢ ἀνατυπούμενοι εἰς τὴν διάνοιάνμας καὶ πράγματα δὲν τὰ ἐκφωνοῦμεν, τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν μόνον ἐκφέροντες.

§. 5. Πᾶς ἀφηρημένος (§. 4.) ἀριθμὸς περιλαμβάνει ἐν ἑαυτῷ ἅπαντα συγκεκριμένον, ὅς (συγκ') ἐκ τοσούτων μονάδων σύγκειται, ἐξ ὅσων κἀκεῖνος· ὡς ὁ ἀριθμὸς πέντε, (ὁ ἀφηρ') δύναται σημαίνειν, ὅ, τι ἂν βούλῃ, πέντε ἵππους, πέντε λέοντας, πέντε μνᾶς, καὶ ἐν συντόμῳ, οἱασδηποτοῦν πέντε ὁμοειδεῖς μονάδας· (ἀλλὰ μόνον πέντε. οὔτε δὲ πλείους, οὔθ' ἐλάσσους) ὁ ἀφηρημένος ἀριθμὸς ἄρα γενικῆς σημασίας τετυτετύχηκεν· ἔνθεντοι τὸ κατ᾽ αὐτοῦ λεγόμενον, ἀληθεύσει ἀείποτε καὶ καθ᾽ ἑκάςου ὁμοειδοῦς συγκειμένου λεγόμενον, ὃς τοσαύτας μονάδας, ὅσας ἐκεῖνος (ὁ ἀφ᾽) περιέχει· οἷον, εἰ πέντε, καὶ δύω ποιοῦσιν ἑπτὰ, καὶ πέντε ἵπποι, καὶ δύω ἵπποι ἑπτὰ ἵππους ποιήσουσι, κτ.

§. 6. Ἔςω ἀριθμὸς, ἡλίκος ἂν ᾖ· τούτου δυνάμεθα ἕτερον μονάδι μείζονα νοῆσαι· αὔξουσιν ἄρα οἱ ἀριθμοὶ, οἱ ἀείποτε μονάδι ἀλλήλων διαφέροντες, ἀπὸ τῆς μονάδος ἐπ᾽ ἄπειρον προαγόμενοι.

§. 7. Χαρακτῆρες εἰσὶ σημεῖα, δὶ ὧν οἱ ἀριθμοί (ἤτοι τὸ πλῆθος τῶν αὐτῶν πραγμάτων) παρίςανται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 8. Χαρακτῆρας ἀποδοῦναι, δὶ ὧν πάντες οἱ ἀριθμοὶ, οἱ ἀείποτε μονάδι ἀλλήλων διαφέροντες, προσφυῶς ἂν παραςαῖεν.

ΛΥΣΙΣ.

Τὸ ἁπλουςατον, ὃ ἄν παντὶ ἐπὶ τοῦ τοιούτου ἐπελθεῖν ἔχοι Προβλήματος, ἐςι τὸ εἰς δήλωσιν τῆς μονάδος χαρακτῆρι π. χ. τῷ δε (1) χρήσασθαι, καὶ τοῦτον τοσάκις ἐφεξῆς καταγράψαι, ὅσαι μονάδες ἔνεισι τῷ ἀριθμῷ τῷ ἐκδηλωθησομένῳ, ὧδε.

1 . . .	ἕν	1111 . . .	τέσσαρα
11 . . .	δύω	11111 . . .	πέντε
111 . . .	τρία	111111 . . .	ἕξ κτ.

Ἡ τοιαύτη μέθοδος ἐπίπονος οὖσα, ἢ δῆλον, συνεπιτμηθῆναι δύναται, μείζονας ἀριθμοὺς δηλώσειν μέλλουσιν, ἰδιαιτέρων χαρακτήρων παραλαμβανομένων·

οὕτω παρὰ τοῖς Ῥωμαίοις ὁ χαρακτὴρ

V τῷ πέντε	C ἑκατόν
X δέκα	D πεντακόσια, καὶ
L πεντήκοντα	M χίλια

Ἰσοδυνάμει, προϋποτιθεμένοις τὸν ὑποδεέστερον ἀριθμὸν προτιθέμενον τοῦ ὑπερτέρου, ὅσαις μονάσιν οὗτος (ὁ ἀνώτερος) τῆς φυσικῆς σημασίας ἠλάττωται, ἐμφαίνειν, τόνδε τὸν τρόπον·

I.	ἕν	XXX.	τριάκοντα
II.	δύω	XL.	μ'
III.	τρία	L.	ν'
IV.	τέσσαρα	LX.	ξ'
V.	πέντε	LXX.	ο'
VI.	ἕξ	LXXX	π'
VII.	ἑπτά	XC.	ϥ'
VIII.	ὀκτώ	C.	ρ'
IX.	ἐννέα	CC.	σ'
X.	δέκα	CCC.	τ'
XI.	ἕνδεκα	CD.	υ'
XII.	δώδεκα	D.	φ'
XIII.	δεκατρία	DC.	χ'
XIV.	δεκατέσσαρα	DCC.	ψ'
XV.	δεκαπέντε	DCCC.	ω'
XVI.	δεκαέξ	CM.	ϡ
XVII.	δεκαεπτά	M.	͵α
XVIII.	δεκαοκτώ	MM.	͵β κτ.
XIX.	δεκαεννέα		:
XX.	εἴκοσι		

Ἄμεινον δ' ἂν ἐπιτμηθείη ἡ προτεθεῖσα μέθοδος τοῦ τοὺς ἀριθμοὺς ἐκφέρειν, εἰ, ἀντὶ τοῦ πλείοσι σημαντικοῖς χαρακτῆρσι χρῆσθαι, τῷδε (1) κατὰ τοὺς διαφόρους αὐτοῦ τόπους, ἐφεξῆς γραφομένω, διάφορος ἀποδοθῇ καὶ ἡ δύναμις· καὶ σημαινέτω π. χ. ἐν μὲν τῷ α'· τόπῳ (τῶν τόπων δεξιόθεν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ χωρούντων) ἕν· ἐν δὲ τῷ β'· δύω· ἐν δὲ τῷ γ'. τέσσαρα· ἐν δὲ τῷ δ'· ὀκτώ· ἐν δὲ τῷ ε'· δεκαέξ· ἐν δὲ τῷ ϛ'· τριάκοντα δύω, κτ· καὶ ὅλως ἐπὶ παντὸς ἀνωτέρου τόπου διπλάσια τοῦ ἐγγὺς κατωτέρου, καὶ κατὰ τοῦτο ἀποδοθήσονται αἱ τῶν τόπων δυνάμεις οὕτω·

ἕν	1
δύω	1
τέσσαρα	1
ὀκτώ	1
δεκαέξ	1
τριάκονταδύω	1

καὶ οἱ χαρακτῆρες οἵδε

1	ἕν	1111	δεκαπέντε
11	τρία	11111	τριάκονταέν.
111	ἑπτά	111111	ἑξήκοντατρία. κτ.

σημανοῦσιν·

Ἀλλὰ τούτου τεθέντος, τοὺς μεταξὺ ἀριθμοὺς παραστῆσαι οὐκ ἔχομεν· καὶ σημανεῖ μὲν (1) ἐν τῷ β'· τόπῳ, δύω· ἐν τῷ γ'. τέσσαρα· ἐν τῷ δ'· ὀκτώ, κτ· ἀλλ' ὁ β'. τόπος οὐκ ἂν συσταίη ἄνευ τοῦ α'· ὡς οὐδ' ὁ γ'· ἄνευ τοῦ β'· καὶ α'. οὐδ' ὁ δ'· τοῦ γ'· β'· καὶ α'· χωρίς. Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου καὶ ὁ δύω οὐκ ἂν ἐξενεχθείη τοῦ ἑνὸς ἄνευ, οὐδ' ὁ τέσσαρα τοῦ δύω, καὶ ἑνός, οὐδ' ὁ ὀκτώ, τοῦ δ'· β'· καὶ ἑνὸς ἄνευ· ἀναγκαῖος τοίνυν καὶ ἕτερος χαρακτὴρ, π. χ. τόδε (O) τὸ

σημεῖ-

σημεῖον, τὸ μηδενικὸν καλούμενον, τὸ τὸν κενὸν τόπον δεικνύον· τούτου δὴ παραληφθέντος, οἱ ἑξῆς χαρακτῆρες σημαίνουσι.

10	δύω	1000	ὀκτώ
100	τέσσαρα	10000	δεκαέξ κτ·

Τοὺς δὲ μεταξὺ ἀριθμοὺς δηλώσομεν, τιθέντες, ἔνθα ἀναγκαῖόν ἐςιν, αὐτὶ τοῦ μηδενικοῦ αὖθις τὸ (1) ὡς

1	ἕν	10001	δεκαεπτά
10	δύω	10010	δεκαοκτώ
11	τρία	10011	δεκαεννέα
100	τέσσαρα	10100	εἴκοσι
101	πεντε	10101	εἰκοσιέν
110	ἕξ	10110	εἰκοσιδύω
111	ἑπτά	10111	εἰκοσιτρία
1000	ὀκτώ	11000	εἰκοσιτέσσαρα
1001	ἐννέα	11001	εἰκοσιπεντε
1010	δέκα	11010	εἰκοσιέξ
1011	ἕνδεκα	11011	εἰκοσιεπτά
1100	δώδεκα	11100	εἰκοσιοκτώ
1101	δεκατρία	11101	εἰκοσιεννέα
1110	δεκατέσσαρα	11110	τριάκοντα
1111	δεκαπέντε	11111	τριακονταέν.
10000	δεκαέξ	100000	τριακονταδύω κτ·

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοὺς δύω τούτους χαρακτῆρας, 1 καὶ 0 τοὺς ἐπενόησεν ὁ περικλεὴς Λεϊβνίτιος εἰς ἔκφρασιν παντὸς ἀριθμοῦ, οἱ ὁποῖοι ὀνομάζονται ἡ Δυαδικὴ τοῦ Λεϊβνιτίου (ἤτοι ἀριθμητις), καὶ εἰς παράςασιν τῆς ἐκ τοῦ μηδενὸς παραγωγῆς τῆς κτίσεως μὲ τὸν ςίχον τὸν ἑξῆς

omni-

Omnibus ex nichilo ducendis sufficit unum.

Εἰς τὸ ἅπαντα ἐκ τοῦ μηδενὸς παραγαγεῖν ἀρκεῖ ἕν.

Ἐὰν δὲ καὶ ἕτερος ἔτι σημαντικὸς παραληφθῇ χαρακτὴρ ὅδε (2), τὴν δύναμιν ἀμφοτέρων (1 καὶ 2) κατὰ τὸ τριπλοῦν ἐπαυξήσομεν, ὥςε ἑκάςην μονάδα τούτων ἐν μὲν τῷ β΄ τόπῳ γ΄ ἐν δὲ τῷ γ΄ θ΄ ἐν δὲ τῷ δ΄ κζ΄ ἴσα δύνασθαι, καὶ πάντα ἀριθμὸν ἔτι συντομώτερον τόνδε τὸν τρόπον δηλώσομεν.

1	ἕν	121	δεκαέξ
2	δύω	122	δεκαεπτά
10	τρία	200	δεκαοκτώ
11	τέσσαρα	201	δεκαεννέα
12	πέντε	202	εἴκοσι
20	ἕξ	210	εἰκοσιέν
21	ἑπτά	211	εἰκοσιδύω
22	ὀκτώ	212	εἰκοσιτρία
100	ἐννέα	220	εἰκοσιτέσσαρα
101	δέκα	221	κε΄
102	ἕνδεκα	222	κς΄
110	δώδεκα	1000	κζ΄
111	δεκατρία	1001	κη΄
112	δεκατέσσαρα	1002	κθ΄
120	δεκαπέντε	1010	λ΄ κτ.

Παραπλησίως καὶ τέσσαρας χαρακτῆρας (1, 2, 3, καὶ 0) παραλαβεῖν ἔξεςι, τὰς τούτων δυνάμεις κατὰ τὸ τετραπλοῦν προσαύξοντας, καὶ οὕτω γράφοντας·

1	α'	100	ιϛ'
2	β'	101	ιζ'
3	γ'	102	ιη'
10	δ'	103	ιϑ'
11	ε'	110	κ'
12	ϛ'	111	κα'
13	ζ'	112	κβ'
20	η'	132	λ'
21	ϑ'	220	μ'
22	ι'	302	ν'
23	ια'	330	ξ'
30	ιβ'	331	ξα'
31	ιγ'	332	ξβ'
32	ιδ'	333	ξγ'
33	ιε'	1000	ξδ' κτ.

ὡσαύτως καὶ πέντε (1, 2, 3, 4, 0) κατὰ τὸ πενταπλοῦν·

1	α'	31	ιϛ'
2	β'	32	ιζ'
3	γ'	33	ιη'
4	δ'	34	ιϑ'
10	ε'	40	κ'
11	ϛ'	41	κα'
12	ζ'	42	κβ'
13	η'	43	κγ'
14	ϑ'	44	κδ'
20	ι'	100	κε'
21	ια'	110	λ'
22	ιβ'	130	μ'
23	ιγ'	200	ν'
24	ιδ'	220	ξ'
30	ιε'	240	ο'

310	π′	440	ρκ′
330	υ′	444	ρκδ′
400	ρ′	1000	ρκε′
420	ρι′	1001	ρκϛ′. κτ.

Ἐκ τούτων ῥάδιον συνιδεῖν, ὅτι καὶ μετὰ ἓξ χαρακτήρων (1, 2, 3, 4, 5, 0.)

καὶ μεθ' ἑπτὰ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 0.)
καὶ - ὀκτὼ (1, 2, 3, 4, 5, 6. 7, 0.)
καὶ - ἐννέα (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0.)
καὶ - δέκα (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.)

Καὶ μετὰ ἔτι πλειόνων ὁ βουλόμενος πάντα δυνατὸν ἀριθμὸν παραςήσει, εἰ μόνον ἀείποτε ἐν τούτοις τὸ μηδενικὸν παραλαμβάνοιτο, καὶ αἱ τούτων δυνάμεις κατὰ τὸ τοσαπλοῦν ἐπαύξοιντο, ὅσοι οἱ παραληφθέντες χαρακτῆρες.

Ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τῶν ἀριςερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ αἱ τῶν χαρακτήρων δυνάμεις ἐπαύξεσθαι δύνανται· τοῦτο γὰρ οὐδεμίαν μεταβολὴν τῷ ἀριθμητικῷ ἐμποιήσειε συςήματι, εἰ μὴ τὸ ἐφ' ἑκάςου ἀριθμοῦ τοὺς χαρακτῆρας ἐν ἀντιςρόφῳ τῇ τάξει ἀποδίδοσθαι.

§. 10. Ὅσῳ πλείους οἱ παραληφθέντες χαρακτῆρες, τοσούτῳ ἐπιτομώτερον ἐκδηλωθείη ἂν πᾶς ἀριθμὸς μείζων· οὕτω τὸ (1000) ἐν τῷ ἀριθμητικῷ συςήματι τῷ ἐκ δύω χαρακτήρων, ἰσοδυναμεῖ τῷ ὀκτώ. ἐν δὲ τῷ ἐκ πέντε, τῷ ἑκατὸν εἰκοσιπέντε.

§. 11. Ἐκ πάντων τούτων, καὶ τῶν παραπλησίων συςημάτων, τῶν εἰς λύσιν τοῦ ἡμετέρου τεινόντων προβλήματος, ἐν χρήσει ἐςὶ τὸ ἐκ δέκα χαρακτήρων, ὧν αἱ δυνάμεις ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριςερὰ κατὰ τὸ δεκαπλοῦν ἐπαύξονται.

§. 12. Τίσι δὲ προσηγορίαις τὰς διαφόρους δυνάμεις τῶν χαρακτήρων ἐν οἱῳδηποτοῦν τόπῳ ἐπισημειώσομεν, ἐν ὁποίᾳ τε τῇ τάξει τούτους ἀπαγγελτέον, καὶ γραπτέον, τὸ ἑξῆς διδάσκει ἡμᾶς πινακίδιον.

μονάδες	2	ἑκατοντάδες	τετραλλιόνια.
	7	δεκάδες	
	6	μονάδες	
χιλιάδες	5	ἑκατοντάδες	
	4	δεκάδες	
	3	μονάδες	
μονάδες	7	ἑκατοντάδες	τριλλιόνια
	6	δεκάδες	
	5	μονάδες	
χιλιάδες	2	ἑκατοντάδες	
	8	δεκάδες	
	1	μονάδες	
μονάδες	9	ἑκατοντάδες	διλλιόνια
	4	δεκάδες	
	3	μονάδες	
χιλιάδες	2	ἑκατοντάδες	
	1	δεκάδες	
	1	μονάδες	
μονάδες	3	ἑκατοντάδες	μιλλιόνια
	9	δεκάδες	
	8	μονάδες	
χιλιάδες	7	ἑκατοντάδες	
	6	δεκάδες	
	5	μονάδες	
μονάδες	2	ἑκατοντάδες	μονάδες
	4	δεκάδες	
	3	μονάδες	

Ὡς

Ὡς ἐκ τοῦ προκειμένου παραδείγματος δῆλον. οἱ τόποι διατέμνονται δεξιόθεν πρὸς τὰ ἀριςερὰ εἰς γενικωτέρας κλάσεις, ὧν ἑκάςη ἓξ τόπους ἐν ἑαυτῇ περιλαμβάνει· καλοῦνται δὲ αὗται, ἀπὸ τῆς κατωτάτης ἀρχομένοις, μονάδες, μιλλιόνια, διλλιόνια, τριλλιόνια, τετραλλιόνια, πενταλλιόνια, κτ·

Ἑκάςη αὖθις τῶν γενικωτέρων κλάσεων ὑποτέμνεται εἰς δύο ἐλάσσους, τρεῖς χαρακτῆρας ἑκατέραν περιεχούσας, ὧν ἡ μὲν κατωτέρα τῷ ὀνόματι, μονάς, ἡ μονάδες, ἡ δ' ὑπερτέρα τῷ, χιλιάς, ἡ χιλιάδες, ἐπισημαίνεται.

Οἱ τρεῖς τόποι ἑκάςης κατωτέρας κλάσεως καλοῦνται, ἀπὸ τοῦ κατωτάτου τῆς ἀρχῆς γινομένης, Μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες·

Ἡ δὲ τιμὴ, καὶ δύναμις τελευταῖον, ἡ τῷ σχήματι τῶν χαρακτήρων (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) ἀποδιδομένη, ἀπαγγέλλεται διὰ τοῦ, ἕν, δύω, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα·

ΣΧΟΛΙΟΝ. α'

Καὶ τὸ μηδενικόν (0) (§. 8.) χρησιμεύει κατὰ πολλὰ εἰς τὴν ἀρίθμησιν· διότι μέχρι τῶν ἐννέα ἀριθμοῦντες, ἢ γράφοντες λαμβάνομεν ἕνα ἀπὸ τοὺς ἐννέα χαρακτῆρας· ὅταν ὅμως θέλωμεν νὰ γράψωμεν δέκα, ἐπειδὴ καθ' ἕνας ἀπὸ τοὺς ἐννέα χαρακτῆρας, εἰς τὸν ἀνώτερον τόπον τὸν ἐγγὺς μετατεθεὶς, σημαίνει τὸ δεκαπλάσιον (§. 11.) ἀπὸ ἐκεῖνο, ὁποῦ ἐσήμαινεν εἰς τὸν ἐγγὺς κατώτερον τόπον, μετατίθεμεν τὸ 1 (ὁποῦ σημαίνει μόνον ἓν εἰς τὸν α' τόπον, εἰς τὸν β' τόπον, καὶ οὕτω σημαίνει δεκάκις περισσότερα, ἤτοι δέκα· ἀλλὰ διὰ νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι ἡ μονὰς (1) μετετέθη

εἰς

εἰς τὸν ἀνώτερον τόπον, ἐν τῷ α΄ τόπῳ τίθεται τὸ μηδενικὸν, δεικνύον, ὅτι ὁ α΄ τόπος εἶναι κενός.

ΣΧΟΛΙΟΝ. β΄.

Ἐν γένει σημειωτέον, ὅτι τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ τοῦ εἰς τὸν ἐγγὺς ἀνώτερον τόπον μετατεθέντος ἑκάστη μονὰς δύναται δεκάκις περισσότερον ἀπὸ ἑκάστην μονάδα τοῦ ἐγγὺς κατωτέρου· π. χ. ὁ 9 σύγκειται ἀπὸ ἐννέα μονάδας· οὗτος ἐν τῷ α΄ τόπῳ σημαίνει ἐννέα ἁπλᾶς μονάδας. Ὡσαύτως καὶ 99, ὁ 9 ἐν τῷ β΄ τόπῳ σύγκειται ἀπὸ ἐννέα μονάδας· ὅμως κάθε μονὰς τοῦ ἐν τῷ β΄ τόπῳ 9 ὑπερέχει δεκάκις κάθε μονάδα τοῦ ἐν τῷ α΄· ὥστε τοῦ β΄ αἱ μονάδες αἱ ἐννέα εἶναι ἴσαι μὲ ἐννενήκοντα, ἐν ᾧ τοῦ α΄ εἰσὶν ἴσαι μὲ ἐννέα· οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

Περὶ δὲ τῆς τάξεως, καθ' ἣν τὰς διαφόρους τιμὰς καὶ δυνάμεις ἀπαγγελτέον, σημειούσθω τὰ ἑξῆς·

α΄. Ἡ λέξις, μονὰς, καὶ ἐν τῷ ἀναγινώσκειν, καὶ ἐν τῷ ὑπαγορεύειν οὐδέποτε ἀπαγγέλλεται. (ὡς προκειμένων 158, οὐ λέγομεν, 158 μονάδες, ἀλλὰ μόνον ἑκατὸν πεντήκοντα ὀκτὼ, ὑπονουμένου τοῦ ὀνόματος, μονάς.)

β΄. Ἐφ' ἑκάστου χαρακτῆρος ἀπαγγέλλομεν τὴν δύναμιν τοῦ κατ' αὐτὸν σχήματος α΄ εἶτα καὶ τὴν τοῦ τόπου· εὑθέντοι ἐν τῷ ἀνωτάτῳ τόπῳ τῆς ἐλάσσονος κλάσεως λέγεται, μία ἑκατοντὰς, ἢ ἑκατόν.

Δύω ἑκατοντάδες, ἢ διακόσια.
Τρεῖς ἑκατοντάδες, ἢ τριακόσια.
Τέσσαρες ἑκατοντάδες, ἢ τετρακόσια.

Πεύτε

Πέντε ἑκατοντάδες, ἢ πεντακόσια.
Ἓξ ἑκατοντάδες, ἢ ἑξακόσια.
Ἑπτὰ ἑκατοντάδες, ἢ ἑπτακόσια.
Ὀκτὼ ἑκατοντάδες, ἢ ὀκτακόσια.
Ἐννέα ἑκατοντάδες, ἢ ἐννεακόσια.

Ἐν δὲ τῷ μέσῳ τόπῳ λέγεται,

Δέκα αὐτὶ τοῦ, μία δεκάς.
Εἴκοσι, αὐτὶ τοῦ, δύω δεκάδες.
Τριάκοντα αντὶ τοῦ, τρεῖς δεκάδες.
Τεσσαράκοντα, αντί τοῦ, δ' δεκάδες.
Πεντήκοντα ἀντί τοῦ, πέντε δεκάδες, κτ.

Ἐπειδὴ ἡ λέξις, Μονάς, οὐδέποτε ἀπαγγέλλεται, ἐν τῷ κατωτάτῳ τόπῳ ὀιομάζομεν μόνον τὴν δύναμιν τοῦ σχήματος (ἤτοι λέγομεν μόνον, ἕν, δύω, τρία, κτ')

γ'. Ἐφ' ἑκάςης ἐλάσσονος κλάσεως (§. 12.) ἐκφέρομεν α'. τὸν ἀνώτατον χαρακτῆρα, εἶτα τὸν μέσον, καὶ τελευταῖον τὸν κατώτατον· ὡς

425, τετρακόσια εἰκοσιπέντε, κτ.

δ'. Ἐφ' ὁιασοῦν γενικωτέρας κλάσεως, ἀπαγγέλλεται ἡ κλάσις τῶν χιλιάδων πρὸ τῆς κλάσεως τῶν μονάδων, κἀκείνῃ μὲν προςίθεται τὸ ὄνομα, χιλιάς, ταύτῃ δὲ τὸ ὄνομα μονὰς, οὐχί· οἷον

426789 τετρακόσιαι εἰκοσιπέντε χιλιάδες, καὶ 789.

ε'. Ἐπίτινος σειρᾶς χαρακτήρων, πρὸ πάντων ἀναγινώσκεται ἡ ὑπερτάτη γενικωτέρα κλάσις, εἶτα ἡ ἐγγὺς ἐλάσσων, καὶ αἱ ἐφεξῆς κατὰ τάξιν μέχρι τέλους, ὧν πᾶσαι, πλὴν τῆς ἐσχάτης, ὀνομάζονται· (ἤτοι προςίθεται αὐταῖς τὸ ὄνομα, διλλιόνιον, ἢ μιλλιόνιον, ἢ χιλιάς).

ς'. Οἷα-ς´ Οἱοσδήποτοῦν τόπος, ᾧ τινι τὸ μηδενικὸν πρόσεστιν, οὐκ ἀναγινώσκεται· ἐὰν δὲ κλάσει τινὶ μόνον μηδενικὰ ἐνυπάρχωσι, καὶ αὕτη παραλιμπάνεται· ὡς

405 τετρακόσια καὶ πέντε.
600 ἑξακόσια.
4004 τέσσαρες χιλιάδες, καὶ τέσσαρα.
70006 ἑβδομήκοντα χιλιάδες καὶ ἕξ·

Ἵνα δὲ ἐπὶ τινος πλείοσι χαρακτῆρσι συγκειμένου ἀριθμοῦ τὰς κλάσεις ῥᾶστα ἀπ' ἀλλήλων διακρίνωμεν, διαστελλέσθωσαν αἱ μὲν ἐλάσσους δι' ἑνὸς σημείου, (·) αἱ δὲ γενικώτεραι, διὰ γραμμῆς (') οὕτως, ὥστε τὴν α' γενικωτέραν κλάσιν διαστέλλεσθαι ἀπὸ τῆς β' γενικωτέρας διὰ μιᾶς (') τὴν β' ἀπὸ τῆς γ' διὰ δύω, (") τὴν γ' ἀπὸ τῆς δ' διὰ τριῶν (''') κτ.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς διαστελήσεται, καὶ ἀπαγγελθήσεται οὕτω·

276,'''' 543. 765,''' 281, 543.'' 211. 398,' 765. 243.

276 τετραλλιόνια, 543 χιλιάδες καὶ 765 τριλλιόνια, 281 χιλιάδες, καὶ 543 διλλιόνια, 211 χιλιάδες, καὶ 398 μιλλιόνια, 765 χιλιάδες, καὶ 243.

Γράφοντας δὲ τοὺς χαρακτῆρας προσεκτέον τῷ ἑξῆς· ἐὰν μετὰ τὸν ὑπέρτερον τόπον, ἢ τὴν κλάσιν, ὁ ἐγγὺς κατιώτερος, ἢ κατωτέρα οὐχ ὑπαγορεύηται, ἐπισημειούσθωσαν τοῖς μηδενικοῖς· οἷον, εἰ δέοι ἑκατὸν μιλλιόνια, τετρακοσίας πέντε χιλιάδας, καὶ ἑπτακόσια ἐν γράψαι.

Γράψον α', τὴν κλάσιν τῶν μιλλιονίων 100, εἶτα τὴν τῶν χιλιάδων 405, καὶ τελευταῖον τὴν τῶν μονά-

μονάδων 701, ὡς ὑπηγορεύθησαν, ἐφεξῆς, καὶ προκύψει οὗτος ὁ ἀριθμός· 100, 40ι, 701; ἐνταῦθα οἱ δύω κατώτεροι τόποι ἐν τῇ κλάσει τῶν μιλλιονίων, ὁ μέσος ἐν τῇ τῶν χιλιάδων, καὶ μονάδων τῷ (0) ἐπεσημάνθησαν, ὅτι ἐν τῷ ὑπαγορεύειν οὐδεὶς τῶν τόπων τούτων κατωνόμασαι.

Ἐκ τούτων ῥάδιον συνιδεῖν, ὅτι αἱ προσηγορίαι, καὶ τὰ ὀνόματα, δι᾽ ὧν αἱ διάφοροι τιμαὶ καὶ δυνάμεις τῶν χαρακτήρων ἐν διαφόροις τόποις παρίσανται, ὡσαύτως καὶ ἡ τάξις, ἐν ᾗ ἀπαγγέλλονται, ἀπὸ βουλῆς ἤρτηνται, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, σειράτις ἀριθμῶν ἐκκειμένων τὸ αὐτὸ σημαίνει παρὰ τοῖς Γάλλοις, Γερμανοῖς, κτ. ὃ καὶ παρ᾽ ἡμῖν τοῖς Ἕλλησι.

§. 14. Οὐκ ὀλιγάκις συμβαίνει ἀντὶ πλειόνων ἀριθμῶν ὡς 32451 καὶ 26136 ἕνα μόνον ζητεῖσθαι ἐκείνοις ἰσοδυναμοῦντα· ὁ Παῦλος ὀφείλει τῷ δεῖνι 32451 ὀβολούς, καὶ ἑτέρῳ αὖθις 26136. Ζητεῖται οὖν, πόσα ὁ Παῦλος ἐν γένει ὀφείλει· ὅπως οὖν τὰ τοιαῦτα ἐπιλύονται προβλήματα, ἡ Πρόσθεσις τοῦτο διδάξει.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ.

§. 15. **Πρόσθεσίς** ἐστιν ἀριθμοῦ εὕρεσις, ἴσου τοῖς δοθεῖσιν ἀριθμοῖς.

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καλοῦνται **Προσθετέοι**, ὁ δὲ ζητούμενος, τὸ τούτων **κεφάλαιον**.

§. 16. Σημεῖον τῆς προσθέσεως εἴληπται τὸ $+$, ἐμφαῖνον τῷ ἡγουμένῳ ἀριθμῷ καὶ τὸν μετὰ τοῦτο προσθεῖναι δεῖν· ἀπαγγέλλεται δὲ τῇ φωνῇ, **πλέον**· οἷον, εἰ δέοι π. χ· 5, 7, 8, ἀλλήλοις προσθεῖναι, δειχθήσεται οὕτω $5 + 7 + 8$, 5, πλέον 7, πλέον $8 = 20$.

β'.

§. 17. Ἔνθα κὶ ἕτερον σημεῖον ὁρῶμεν, τὸ =, ὅ περ σημεῖον τῆς ἰσότητος καλεῖται· οἱ γὰρ ἀριθμοὶ 5 + 7 + 8 ἀποτελοῦσιν 20. ὥςε, ἴσοι, ἤτοι = 20. ὅθεν καὶ ἀντ' ἐκείνων τεθείη ἂν ὁ 20.

§. 18. Πᾶς ἀριθμὸς συνίςαται μόνον ἐξ ὁμοειδῶν μονάδων (§. 3.) ἀλλὰ καὶ τὸ κεφάλαιον ἐξ ἀνάγκης τὰς αὐτὰς μονάδας περιέξει ἐν ἑαυτῷ, ἃς καὶ οἱ δοθέντες ἀριθμοί· ἄλλως γὰρ οὐκ ἂν εἴη ἴσον ἐκείνοις· ἔνθεντοι καὶ τὸ κεφάλαιον τὸ ἐξ ἑτερογενῶν ἀριθμῶν ἀποδοθῆναι οὐκ ἔχει· οὕτω τὸ ἐκ 3. ἵππων, καὶ 5. ἀνθρώπων κεφάλαιον οὐκ ἂν εἴη οὔτε ὀκτὼ ἵπποι, οὔτε ὀκτὼ ἄνθρωποι.

§. 19. Ἁπλοῦς ἀριθμός ἐςιν ὁ ἐξ ἑνὸς χαρακτῆρος· ὡς 2, 3 κτ. σύνθετος δὲ, ὁ ἐκ δύω, ἢ πλειόνων· ὡς 22, 188, κτ. συνιςάμενος.

§. 20. Τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἁπλῶν ὄντων (§. αὐ) ῥαδίως ἂν γένοιτο ἡ τούτων πρόσθεσις· πρόδηλον καὶ γὰρ τῶν 7 ὀβολῶν, καὶ 2 τὸ κεφάλαιον εἶναι 9.

§. 21. Συνθέτων δὲ (§. αὐτ.) ὡς ὁ 32451 καὶ 26136, ἀκριβῶς τὸ ἐπιταχθὲν πληρώσομεν, ἀριθμὸν εὑρόντες τοσαύτας μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας, χιλιάδας, κτ· περιέχοντα ἐν ἑαυτῷ, ὅσας οἱ δοθέντες· προσαθροίζομεν οὖν ἀλλήλαις α'· τὰς μονάδας τῶν δοθέντων, εἶτα τὰς δεκάδας, μεθ' ὃ τὰς ἑκατοντάδας, κτ· ὅλως δὲ, πάντα τὰ ὁμοειδῆ μέρη τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ κατωτάτου μέχρι τοῦ ἀνωτάτου, συντιθέντες ἐκ τῶν προκυψάντων ἐν μέρει κεφαλαίων τῶν μονάδων, δεκάδων, κτ· αὖθις ἀριθμόν, ὅς τὸ ζητούμενον ἔςαι κεφάλαιον· ἵνα δὲ τοῦτο

μετὰ

μετὰ πλείονος εὐχερείας γένηται, οὕτω γραφέσθωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ, ὥςε τὰ ὁμοειδῆ αὐτῶν μέρη ἀκριβῶς ὑπάλληλα εἶναι, καὶ γραμμῆς πλαγίας διαχθείσης, τὸ τῶν ὁμοειδῶν μερῶν κεφάλαιον ἐν τῷ προσήκοντι τόπῳ ἀποτιθέσθω· οἷον.

32451)	οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ, ἢ οἱ
26136)	προσθετέοι
58587	τὸ τούτων κεφάλαιον·

Ὁ δὲ λόγος, ὅτι μόνον τὰ ὁμοειδῆ ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν· ὅθεν δεκὰς καὶ μονὰς, ἢ μονὰς καὶ ἑκατοντὰς οὐ προσαθροισθήσονται.

§. 22. Ἐὰν ὡς ἐν τῷ προκειμένῳ παραδείγμ' τὰ κεφάλαια τῶν μονάδων, τῶν δεκάδων κτ. ἁπλοῖ ἀριθμοί (§. 19.) ὦσι, παρέξουσιν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐν τῷ αὐτῶν τόπῳ καταγραφέντα αὐτίκα τὸ ζητούμενον γενικὸν κεφάλαιον. Ἐὰν δὲ τὰ ἐν μέρει κεφάλαια ἐκ μονάδων, καὶ δεκάδων, ἢ ἐκ μον' δεκ. ἑκατ. κτ. συγκέωνται, ἐν μέρει ταῦτα γράφοντες ζητοῦμεν αὖθις τὸ κεφάλαιον τῶν ἐν μέρει κεφαλαίων· ὡς

134589	
64395	οἱ δοθ. ἀρ.
674679	
23	τὸ κεφάλαιον τῶν μονάδων
240	τὸ κεφ. τῶν δεκάδων
1400	τὸ κεφ. τῶν ἑκατοντάδων
12000	- - τῶν χιλιάδων
160000	- - τῶν δεκάδων χιλιάδων
700000	- - τῶν ἑκατοντάδων χιλιάδων
873663	τὸ κεφάλαιον ἁπάντων τῶν ἐν μέρει.

κεφαλαίου, καὶ ἑπομένως τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

§. 23. Ὁσάκις τὸ ἐν μέρει κεφάλαιον ἐκ δύω συγκροτεῖται χαρακτήρων, πάρεςι καθορᾶν, ὅτι ὁ τούτων κατώτερος ἀείποτε ὁμοειδὴς ἐςὶ τοῖς μέρεσι τοῖς ἐνεργεία προςιθεμένοις, ὁ δ' ὑπέρτερος ὁμοειδὴς τοῖς ἀμέσως μετὰ τοῦτο προςεθησομένοις· ἄμεινον οὖν τοῦ πόνου φειδομένοις τοῦ τὰ ἐν μέρει κεφάλαια καταγράφειν, καὶ εἶτα ἀλλήλοις προςιθέναι, ἑκάςου ἰδιαιτέρου κεφαλαίου μόνον τὸν κατώτερον ἀριθμὸν γράφοντας, τὸν ἀνώτερον τοῖς ἀμέσως ἑπομένοις ἀνωτέροις μέρεσι προσαριθμεῖν· ἔνθεντοι ἐν τῷ προτεθέντι παραδείγματι

$$\left.\begin{array}{r} 134589 \\ 64395 \\ 674679 \end{array}\right\} \text{οἱ δ. ἀρ.}$$

$$\begin{array}{rl} \hline 873663 & \text{τὸ κεφ.} \end{array}$$

γράφοντες τὰς 3 μονάδας τοῦ τῶν μονάδων κεφαλαίου 23. προσαριθμοῦμεν τὰς 2 δεκάδας ταῖς δεκάσι τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· ὡσαύτως καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν δεκάδων 26. τὰς 6 δεκάδας γράφοντες, τὰς 2 ἑκατοντάδας ταῖς ἑκατοντάσι τῶν δοθέντων ἀριθμῶν συγκαταλέγομεν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ὥςε καὶ τὸ ὑπὸ τὴν γραμμὴν κεφάλαιον προκύψει, ὡς πρότερον.

Σχόλιον.

Ἐὰν τὸ κεφάλαιον τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν ὑπερέχῃ τὸν 9, ἤτοι ἐὰν ἦναι 10, ἂς τεθῇ ἐν τῷ τόπῳ τοῦ κεφαλαίου τῶν μονάδων τὸ 0. ὅτι ἅπασαι αἱ μονάδες δεκάδα ἀπετέλεσαν, ἡ ὁποία πρέπει νὰ γραφῇ εἰς τὸν τόπον τῶν δεκάδων. (§. 23.)

§. 24. Ὡσαύτως χωρήσομεν, καὶ εἰ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ (§. 4.) μετὰ διαφόρων μερῶν τῆς μονάδος προςεθῆναι πρόκεινται· π.χ. ὀργυιαὶ, πόδες, καὶ δάκτυλοι· ζητοῦμεν ἀμέλει τὸ κεφάλαιον τῶν δακτύλων, εἶτα τὸ τῶν ποδῶν, καὶ τελευταῖον τῶν ὀργυιῶν. καὶ ὁ ἐκ τούτων τῶν ἰδιαιτέρων κεφαλαίων συγκεισόμενος ἀριθμὸς ἔςαι τὸ κεφάλαιον τῶν δοθέντων.

	ὀργ.	πό.	δ.	
ἔςωσαν	240	5	9	οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ
	35	3	7	
	4567	2	6	
καὶ	4842	10	22	ἔςαι τὸ τούτων κεφάλαιον,
ἢ	4843,	5,	10	

ἐπειδὴ γὰρ ἡ ὀργυιὰ 6 πόδας περιέχει, ὁ δὲ ποῦς 12 δακτύλους, οἱ 22 δάκτυλοι δώσουσιν ἕνα πόδα, καὶ 10 δακτ. οἱ 11 πόδες, 1 ὀργυιὰν, καὶ 5 πόδας.

Σχόλιον.

Ἐις τὴν πρόσθεσιν τῶν τοιούτων ἀριθμῶν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἰξεύρωμεν, μὲ πόσας μονάδας κατωτέρας εἶναι ἰσοδύναμος μία ἀνωτέρα· π.χ. ἐνταῦθα μία ἀνωτ· μονὰς, ἤτοι μία ὀργ· εἶναι ἴση μὲ 6 κατωτέρας μον. ἤτοι μὲ 6 πόδας, καὶ εἷς ποῦς = 12 δακτύλοις· πλείω παραδείγματα εὑρίσκονται εἰς τὰ κοινὰ ἀριθμητικὰ βιβλία·

§. 25. Βασανίσομεν δὲ τὴν πρόσθεσιν ἀπταίςως τῇ ἐπαναλήψει τῆς ἀθροίσεως τῶν ἀριθμῶν κάτωθεν εἰς τὰ ἄνω ἰόντες, καὶ ἀνάπαλιν, τὰ λοιπὰ εἴδη τῶν βασάνων, ὡς οὐ πάνυ ἀσφαλῆ, παραλείποντες.

§. 26. Δύω ὁμοειδῶν ἀριθμῶν δοθέντων, οἷον τοῦ 32451, καὶ 26136, εὑρεθήσεται, ὡς εἴρηται (§. 21) τὸ τούτων κεφάλαιον 58587· ἐὰν δὲ τὸ κεφάλαιον 58587 δεδομένον ᾖ, καὶ ὁ ἕτερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 32451 γνωστὸς ᾖ, ὅπως τὸν ἕτερον 26136 εὑρήσομεν, αὐτίκα ῥηθήσεται· π. χ. ὀφείλων τῷ Παύλῳ 58787 ὀβολοὺς ἀπέτισα αὐτῷ 32451. Ζητεῖται οὖν, πόσους ἔτι αὐτῷ ὀφείλω; τοσούτους δήπου, ὅσοι τῷ 32451 προσεθέντες παρέξουσι τὸν 58587.

ΠΕΡΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

§. 27. Ἀφαίρεσίς ἐςιν ἡ ἐκ τοῦ δοθέντος κεφαλαίου δύω ἀριθμῶν, καὶ τοῦ ἑτέρου τούτων, τοῦ ἑτέρου εὕρεσις·

Τὸ κεφάλαιον καλεῖται, Μειωτέος· ὁ ἕτερος τῶν ἀριθμῶν, Ἀφαιρετέος. ὁ δὲ ζητούμενος, διαφορὰ τῶν δοθέντων.

§. 28. Σημεῖον Ἀφαιρέσεώς ἐςι τὸ —, διὰ τοῦ, μεῖον, ἐκφερόμενον, καὶ τοῦ ἀφαιρετέου προτιθέμενον.

§. 29. Ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον ἀναγκαίως ὁμοειδές ἐςι τοῖς μέρεσιν, ἐξ ὧν σύγκειται· (§. 18.) οἱ ἑτερογενεῖς ἀριθμοὶ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεθῆναι οὐ δύνανται.

Σχόλιον.

Ἡ ποσότης, ἡ ἀπ' ἄλλης τινὸς ἀφαιρετέα, πρέπει νὰ ἦναι ὁμοειδὴς αὐτῇ· διότι ἀπὸ 5 ὀβολῶν εἶναι ἀδύ-

ἀδύνατον νὰ ἀφέλωμεν π. χ. 4 μῆλα· ἂν ὅμως οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀφῃρημένοι, (§. 4.), ἠμποροῦν νὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπ᾽ ἀλλήλων· διότι τότε, καθὸ ἀριθμοὶ, εἶναι ὁμοειδεῖς ὅλοι.

§. 30. Ἔςω ἀφαιρετέος 5 ἀπὸ 12. ὅ ἐςι, 12 ἐςὶ τὸ κεφάλαιον δύω ἀριθμῶν, καὶ 5 ὁ ἕτερος τούτων. εὑρεθήτω οὖν ὁ ἕτερος· τοῦτον δὲ οὕτως ἔχειν χρὴ, ὥςε τῷ 5 προστεθέντα 12 παρέχειν· ἔνθεντοι συνιδεῖν οὐ χαλεπὸν, ὅτι ὁ 6 πάνυ βραχύς ἐςι· (6 γὰρ καὶ 5 ἀποτελοῦσιν 11) καὶ ὅτι ὁ 8 πάνυ μέγας. (8 γὰρ καὶ 5 παρέχουσι 13) καὶ ὅτι τελευταῖον 7 ἡ ζητουμένη ἐςὶ διαφορά· ὅτι τῶν 7 καὶ 5 τὸ κεφάλαιον ἐςὶ 12.

Σχόλιον.

Ὁ ἀκριβῶς τὴν πρόσθεσιν καταμαθὼν δὲν θέλει εὕρει κάμμίαν δυσκολίαν εἰς τὸ νὰ ἀφαιρῇ τοὐλάχιςον τοὺς ἁπλοῦς (§. 19.) ἀριθμούς· διότι εὐθὺς διὰ τῆς προσθέσεως, κατὰ τὸ ἀνωτ. παράδειγμα, θέλει ἰδεῖ, πότερον ὁ ἀριθμὸς ὁ ζητούμενος πάνυ βραχὺς, ἢ πάνυ μέγας, ἢ ἴσος τῷ ζητουμένῳ.

§. 31. Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἐκ μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, χιλιάδων κτ· συγκροτῶνται, εὑρήσομεν τὴν διαφορὰν, τὰ αὐτὰ ποιήσαντες, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς προσθέσεως, ζητήσαντες ἀμέλει κατὰ τάξιν τὴν διαφορὰν τῶν μονάδων, τὴν τῶν δεκάδων, κτ. ἔνθεντοι εὐχερείας χάριν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν οὕτως ὑπὸ τὸ δοθὲν καταγράψομεν κεφάλαιον, ὥςε τὰ ὁμοειδῆ τούτων μέρη κατὰ ςήλην ὑπάλληλα κεῖσθαι, τὰς μονάδας δηλονότι ταῖς μονάσι, κτ· καὶ γραμμῆς ἀχθείσης, αἱ ἐν μέρει διαφοραὶ ὑπ᾽ αὐτὴν ἐν τῷ δέοντι τόπῳ ταχθήσονται, ἵνα τὴν ζητουμένην ὁλικὴν διαφορὰν παράσχωσιν·

ἔςω

ἔξω 58587 τὸ δοθὲν κεφ.
32451 ὁ δοθεὶς ἀρ.

26136 ἡ τούτων διαφορά·

Ἀπαγγέλλομεν δὲ τὸν τρόπον τῆς ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν οὕτω·

1 ἀπὸ 7, ἀφαιρ. ὑπολείπεται 6· 5 ἀπὸ 8, 3. 4 ἀπὸ 5, 1. 2 ἀπὸ 8, 6. 3 ἀπὸ 5, 2. καὶ ἐπειδὴ 6 καὶ 1 = 7. 3 καὶ 5 = 8. 1 καὶ 4 = 5. 6 καὶ 2 = 8. 2 καὶ 3 = 5. δῆλον, ὅτι 26136 τῷ 32451 προστεθὲν δίδωσι 58587. (ὅπερ καὶ βάσανός ἐστι τῆς ἀφαιρέσεως) ἔστιν ἄρα 26136 ἡ ζητουμένη διαφορά.

§. 32. Συμβὰν δὲ χαρακτῆρα τινὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ μείζονα εἶναι τοῦ ὁμοειδοῦς αὐτῷ χαρακτῆρος τοῦ ἐν τῷ δοθέντι κεφαλαίῳ, ὡς

937082 τὸ δ. κεφ.
462537 ὁ δ. ἀρ.

Ἔνθα 7 ἀπὸ 2, 5 ἀπὸ 0, καὶ 6 ἀπὸ 3 ἀφαιρετέοι εἰσίν, οἵτινες (7, 5, 6) μείζους εἰσὶ τῶν ὁμοειδῶν, ἤτοι ὁ 7 τοῦ 2, ὁ 5 τοῦ 0, καὶ ὁ 6 τοῦ 3, προστιθέντες τῷ χαρακτῆρι τοῦ κεφαλαίου (ἀφ' οὗ ὁ μείζων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφαιρεθήσεται) 10, ἀπομειοῦμεν τὸν ἐγγὺς ἀνώτερον τόπον μονάδι, ὅτι ἑκάστη μονὰς τοῦ χαρακτῆρος τοῦ ἀνωτέρου τόπου ἀείποτε 10 τοῦ ἐγγὺς κατωτέρου ἰσοδυναμεῖ· (§. 11.) παραστήσομεν οὖν τῇ ἡμετέρᾳ διανοίᾳ τὸ ὑπ' ὄψιν παράδειγμα οὕτω.

8	(13)	6	(10)	7	(12)	τὸ δ. κ.
4	6	2	5	3	7	ὁ ὑ. ἀρ.
4	7	4	5	4	5	ἡ διαφ.

Λέγοντες, 7 ἀπὸ 12, ὑπολείπεται 5. 3 ἀπὸ 7, 4. 5 ἀπὸ 10, 5. 2 ἀπὸ 6, 4. 6 ἀπὸ 13, 7. 4 ἀπὸ 8, 4.

§. 33. Ἐὰν τῷ τόπῳ τοῦ κεφαλαίου, ὃν μονάδι ἀπομειώσειν μέλλομεν, ἢ ἀφ᾽ οὗ μονάδα λαβεῖν βουλόμεθα 10 μονάσι τοῦ κατωτέρου ἰσοδυναμοῦσαν, τὸ 0 ἐνυπάρχῃ, ὡς

4000502	τὸ δ. κ.
2567346	ὁ δ. ἀρ.

Ἀπομειοῦντες τὸν ἐγγὺς τοῦ 0 ἀνώτερον τόπον μονάδι, τιθέαμεν ἐν τῷ ἐγγὺς κατωτέρῳ, τῷ μετὰ τοῦ 0 ἐπισεσημειωμένῳ, οὐχὶ 10, ἀλλὰ μόνον, 9, κατάγοντες μίαν μονάδα τοῦ 10, (διὸ καὶ 9 ὑπολείπεται, ἔνθα τὸ 0 ἐςι) ἥτις αὖθις δέκα μονάσι τοῦ μετὰ τὸ 0 χαρακτῆρος ἴση ἐςι, καὶ προςιθέντες αὐτὴν τῷ χαρακτῆρι τῷ ἐλάττονι ὄντι τοῦ ἀφαιρετέου χαρακτῆρος, ἀφαιροῦμεν· νοήσομεν δὲ τὸ προτεθὲν παράδειγμα οὕτω·

(399	(10)	4	9	(12)	τὸ δ. κ.
256	7	3	4	6	ὁ δ. ἀρ.
143	3	1	5	6	ἡ τούτων διαφ.

Καὶ γὰρ 6 ἀπὸ 12, ὑπολείπεται, 6. 4 ἀπὸ 9, 5. 3 ἀπὸ 4, 1. 7 ἀπὸ 10, 3. 6 ἀπὸ 9, 3. 5 ἀπὸ 9, 4. καὶ 2 ἀπὸ 3, 1. ἡ γὰρ μονὰς, ἡ ἐκ

τοῦ

τοῦ ζ' τόπου παραληφθεῖσα ἰσοδυναμεῖ 10 μον. ἐν τῷ ς'. ἔνθα 9 μόνον καταλείποντες, ἕξομεν αὖθις 10 ἐν τῷ ε' κἀνταῦθα πάλιν μένοντος τοῦ 9, ἕξομεν 10 ἐν τῷ δ'. ὡσαύτως μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ γ' τόπου εἰς 10 ἀναλυθείσης, τίθεται 9 ἐν τῷ β'. καὶ 10 ἐν τῷ α'.

παραπλησίως, ἐὰν	9000000	τὸ δ. ἢ κεφ.
	3456782	ὁ δ. ἀρ.
ἔσαι	5543218	ἡ τούτων διαφορά.

Ἐκ γὰρ τοῦ ζ' τόπου μονάδος ἐκπεσούσης, ἀντὶ ταύτης θήσομεν ἐν τῷ ς'. ε'. δ'. γ'. καὶ β'. 9. ἐν δὲ τῷ α' 10, οὕτως ἀφαιροῦντες. 2 ἀπὸ 10 ὑπολ. 8. 8 ἀπὸ 9, 1. 7 ἀπὸ 9, 2. 6 ἀπὸ 9, 3. 5 ἀπὸ 9, 4. 4 ἀπὸ 9, 5. καὶ 3 ἀπὸ 8, 5.

§. 34. Εἰ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ μετὰ διαφόρων μερῶν τῆς μονάδος εἰς ἀφαίρεσιν ἀπ' ἀλλήλων πρόκεινται, τὸν αὐτὸν προβήσῃ τρόπον, ἀπὸ τῶν ἀνωτέρων μονάδα λαμβάνων, καὶ εἰς τὰς κατωτέρας αὐτὴν ἀναλύων, ὡς

ὀργυιαί.	πόδ.	δάκτ.	
10	5	7	τὸ δοθὲν κεφ.
8	6	10	ὁ δοθεὶς ἀριθμός.
1	4	9	ἡ διαφορά.

Ἀντὶ γὰρ 1 ποδὸς προςίθεμεν τοῖς 7 καὶ 12 δακτύλοις, καὶ ἀπὸ τῶν 19. δ. ἀφαιροῦμεν 10. καὶ ἀντὶ 1 ὀργυιᾶς προςίθεμεν τοῖς 4 π. ἔτι 6 πόδας, καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῶν 10, 6. ὅρα καὶ τὸ σχ. τοῦ §. 24.

§. 35. Μέχρι τοῦδε σιωπῆ ὑποτέθειται τὸ δοθὲν κεφάλαιον μεῖζον εἶναι τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ· ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς μείζων ἢ τοῦ δοθέντος κεφαλαίου, οἷον, εἰ πρόκειται 12 ἀπὸ 7 ἀφαιρεθῆναι, ἀναγκαῖον πάντως ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὅς τῷ 12 προςεθεὶς 7 ἂν ἀποτελοίη· ἐπεὶ δὲ ὁ 12 τοῦ 7 μείζων, πᾶς ἀριθμὸς τῷ 12 προςεθεὶς ἀριθμὸν δήπου μείζονα τοῦ 7 παρέξει, εἰ μὴ τοιοῦτος εἴη, ὥςε τῷ 12 προςεθεὶς τοσαύτας μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ 12 ἀναιρήσει, ὅσαις ὁ 12 τὸν 7 ὑπερέχει· τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς ἐπιγνωσόμεθα ἤδη.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΑΤΑΦΑΤΙΚΩΝ. ΚΑΙ ΑΠΟΦΑΤΙΚΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ.

§. 36. Οὕτω καλοῦνται ποσότητες, αἱ ἀμέσως ἀλλήλαις ἀντικείμεναι.

Ὡς χρηματικὴ περιουσία, καὶ ὄφλημα· ἀριςερὰ ὁδὸς, καὶ δεξιά· ἄνω ὁδὸς, καὶ κάτω. κτ. ἐκ τῶν δύο ἐναντίως ἐχουσῶν ποσοτήτων καταφατικὴν ἔξεςι παραλαβεῖν, ἣν ἂν βουλώμεθα· ἡδ᾽ ἑτέρα ἔςαι ἀείποτε ἀποφατική· π. χ. εἰ ἡ περιουσία καταφατικὴ ὑποτίθεται, τὸ ὄφλημα ἔςαι ἀποφατικόν· ἢ τούτου καταφατικοῦ τεθέντος, ἐκείνην ἀποφατικὴν ἐκδεξόμεθα.

§. 37. Ὁ 100. μνᾶς κεκτημένος, καὶ 100 ὀφείλων, οὗτος κέκτηται οὐδέν· ὁ τρεῖς βαθμίδας τῆς κλίμακος ἀναβὰς, καὶ τρεῖς καταβὰς, οὗτος οὐδεμίαν ἀναβέβηκεν· αἱ ὀφειλόμεναι ἄρα 100 μναῖ ἀναιροῦσι τὰς 100 μνᾶς τῆς περιουσίας, καὶ αἱ τρεῖς βαθμίδες αἱ εἰς τὰ κάτω τὰς τρεῖς τὰς εἰς τὰ ἄνω· ἐν ταύτῃ τῇ ἐννοίᾳ ὀρθῶς λέγεται· ἴσαι καταφατικαὶ, καὶ ἀποφατικαὶ ποσότητες ἀναιροῦσιν ἀλλήλας.

Σχόλιον.

100 μναῖ περιουσίας, καὶ 100 χρέους εἶναι ποσότητες ὁμοειδεῖς, αἱ ὁποῖαι ὅμως σμικρύνουσιν ἡ μία τὴν ἄλλην, ὅταν συνάπτωνται μετ᾿ ἀλλήλων· διότι θέλων νὰ διορίσω τὴν περουσίαν τινὸς, πρέπει νὰ ἀφελῶ ἐκεῖνα ὁποῦ χρεωςεῖ ἀπὸ ἐκεῖνα ὁποῦ ἔχει· καὶ ἐπομένως ἡ περιουσία σμικρύνεται ὑπὸ τοῦ χρέους· ὅθεν καὶ τὸ, ὁ Πέτρος ἔχει 100 μνᾶς ἀποφατικὴν περιουσίαν, θέλει ἐξηγηθῇ οὕτως· ὁ Πέτρος ὄχι μόνον εἶναι χωρὶς περιουσίας, ἀλλὰ πρὸς τούτῳ εἶναι καὶ χρεώςης 100 μνῶν, ἐὰν δηλονότι τὸ χρέος τὸ ἐκλάβωμεν ὡς ἀποφατικόν.

§. 38. Πρὸ τῶν καταφατικῶν τίθεται σημεῖον τὸ +· πρὸ δὲ τῶν ἀποφατικῶν τὸ —· οὕτω τὸ + 7 σημαίνει 7 καταφατικάς· τὸ δὲ — 7, 7 ἀποφατικὰς μονάδας.

Σχόλιον.

Τὸ σημεῖον + ἐν τῇ ἀρχῇ, καὶ ἀμέσως μετὰ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος (=) παραλιμπάνεται· ὥςε ὅπου δὲν βλέπομεν τὸ —, πρέπει νὰ ἐκλαμβάνωμεν τὴν ποσότητα καταφατικῶς· οὕτως ἀναγινώσκομεν, καὶ γράφομεν

$7 - 4 = 3.$ ἀντὶ τοῦ $+ 7 - 4 = + 3.$
$9 - 5 = 4.$ ἀντὶ τοῦ $+ 9 - 5 = + 4.$

§. 39. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον = ἰσότητα δηλοῖ, ὡς δῆλον (§. 17.) ὡς τῶν ἴσων καταφατικῶν, καὶ ἀποφατικῶν ποσοτήτων ἀλλήλας ἀναιρουσῶν (§. 37.) ἔςαι

$$+ 7 - 7 = 0$$
$$+ 9 - 9 = 0$$

§. 40.

§. 40. Ἐπειδὴ καταφατικαὶ ποσότητες καταφατικὰς οὐκ ἀναιροῦσιν, ἢ παντὶ δῆλον, ὡς οὐδ' ἀποφατικαὶ ἀποφατικάς π. χ. $7 + 9 = 16$. καὶ $- 7 - 9 = - 16$, πάρεσι καθορᾶν, ὅτι τὰ διὰ τῶν σημείων ($+$, καὶ $-$) συναπτάμενα σχήματα ἐπιτέμνοιντο, ἐὰν ὁ ἐλάττων ἀριθμὸς τῶν μὴ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐχόντων ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρῆται, καὶ τῆς διαφορᾶς τὸ σημεῖον τοῦ μείζονος προτιθῆται, οἱ δὲ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἔχοντες ἀλλήλοις συνάπτωνται, τοῦ κεφαλαίου πρὸ ἑαυτοῦ τὸ τούτων σημεῖον λαμβάνοιτος· ἔνθεντοι $+ 8 - 5 + 6 - 3 + 4 - 9 = + 1$· καὶ γάρ $+ 8 - 5$ δίδωσι $+ 3$, $+ 3$ (ἡ ἤδη προκύψασα διαφορὰ) καὶ $+ 6$ δίδωσι $+ 9$.

$+$	9	$-$	3	δίδωσι	$+$	6
$+$	6	$+$	4	δίδωσι	$+$	10
$+$	10	$-$	9	δίδωσι	$+$	1

Τῶν ἐπιτετμημένων τρόπων, ὡς ἐνταῦθα τὸ $+ 1$, σαφεστέρων ὄντων, ἢ τῶν συνθέτων, ὡς τοῦ $+ 8 - 5 + 6 - 3 + 4 - 9$, χρηστέον τῇ ἐπιτομῇ, ἔνθα χώραν ἔχειν δύναται·

Σχόλιον. α'

Χώραν ἡ ἐπιτομὴ ἔχει ἐν τοῖς ἀριθμοῖς πάντοτε· ἐν τοῖς γράμμασιν ὅμως, διὰ τὰ ὁποῖα θέλει ῥηθῆ εὐθὺς, οὐχὶ πάντοτε.

β.'

Ὅτι αἱ καταφατικαὶ ποσότητες πρέπει νὰ προστιθῶνται ταῖς καταφατικαῖς εἶναι φανερόν· 10 δραχμαὶ περιουσίας, ὁποῦ ἔχει τις, καὶ ἔτι 6 δραχμαὶ περιουσίας διορίζουσι τὴν περιουσίαντου, ἤγουν λέγομεν περὶ τοῦ τοιούτου ὅτι ἔχει περιουσίαν 16 δραχμῶν· (ἰδοὺ ἐνταῦθα προστίθενται αἱ καταφατικαὶ ἀλλήλαις·) ἀλ-

λὰ

λὰ καὶ αἱ ἀποφατικαὶ ἀποφατικαῖς· ἐκεῖνος ὅπου χρεωςεῖ 5 δραχμὰς, καὶ ἔτι 4, ἔχει — 5 δρ· καὶ ἔτι — 4. ὥςε ὁμοῦ — 9 δραχμάς· ἤτοι χρεωςεῖ 9 δραχμάς· πρὸς τούτοις καὶ αἱ +, καὶ —, μὲ τὸ νὰ ἀφαιρῆται ἀπὸ τὴν μείζονα ποσότητα ἡ διαφορὰ, καθ' ἣν αἱ ἐναντίαι ποσότητες ἀλλήλων διαφέρουσι· π. χ. ἐὰν ἔχω 10 δραχμὰς περιουσίας, καὶ 6 ὀφείλω, διὰ νὰ μάθω, πόσας ἔχω τῇ ἀληθείᾳ, ἤτοι πόσαι μοὶ ὑπολείπονται, πρέπει νὰ προσθέσω + 10 δρ. καὶ — 6 δρ. οὕτω·

+ 10 δρ.,	ἤτοι κυρίως πρέπει νὰ ἀφέλω τὸ χρέος
— 6 δ.	ἀπὸ τὴν περιουσίαν.
+ 4	

Σχόλιον. γ'

Τοῦτον τὸν τρόπον τῆς προσθέσεως τὸν μεταχειριζόμεθα καὶ εἰς τὸν κοινὸν βίον. π. χ. εἰ τὰ λήμματά τινος εἶναι 3 μναῖ, 5 δραχμαὶ, 4 ὀβολοί· καὶ ἔτι 5 μναῖ, 16 δραχμαὶ, καὶ 2 ὀβολοί· αἱ δὲ δαπάναι 7 μναῖ, 8 δρ. 2 ὀβ. καὶ ἔτι 12 δρ. καὶ 5 ὀβ. πόση εἶναι ἡ περιουσία του; ἐνταῦθα τῶν λημμάτων, ὡς καταφατικῶν ληφθέντων, τῶν δὲ δαπανῶν ἀποφατικῶν, κατὰ τὰ διάφορα σημεῖα τὸ παράδειγμα ἐκκείσεται οὕτω.

3	μν.	+	5	δρ.	+	4	ὀβ.
5	μν.	+	16	δρ.	+	2	ὀβ.
— 7	μν.	—	8	δρ.	—	2	ὀβ.
		—	12	δρ.	—	5	ὀβ.
+ 1	μνᾶ	+	1	δρ.	—	1	ὀβ.

Ἔχει οὖν ἔτι 1 μνᾶν, 1 δρ. πλὴν ἑνὸς ὀβολοῦ·

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

§. 41. Οἱ ἀφῃρημένοι ἀριθμοὶ (§. 4.) ἔχουσι γενικωτέραν σημασίαν, ἢ οἱ συγκεκριμένοι· 5 δραχμαὶ π. χ. μόνον περὶ τῶν δραχμῶν, καὶ περὶ οὐδενὸς ἑτέρου ἂν λέγοιντο· τοὐναντίον δὲ, ὁ ἀφῃρημένος (5) ἁρμόζει ἑκάςαις πέντε ὁμοειδέσι μονάσι π. χ., δραχμαῖς, ὀβολοῖς, ἵπποις, κτ. ἀλλ' οὗτος ὁ 5 οὐ δύναται σημαίνειν καὶ 4, ἢ 6, ἢ 2, ἢ 3, ἢ 10 μονάδας. μᾶλλον δὲ οὐδεμίαν ἑτέραν πλῆθυν ὁμοειδῶν μονάδων, ἢ 5 μόνον.

Δίδονται οὖν ἔτι γενικώτεροι ἀριθμοὶ, οἱανοῦν πλῆθυν ὁμοειδῶν μονάδων ἐν ἑαυτοῖς περιλαμβάνοντες, οἵτινες Ἀλγεβραϊκοὶ ἀριθμοὶ καλοῦνται· παρίςανται δὲ διὰ τοῦ α, β, γ, δ, ε, κτ.

Σημαίνει τοίνυν α πάντα ἀριθμόν· ὡσαύτως καὶ β πάντα ἀριθμὸν, ὡς τὸ α· α καὶ β δὲ σημαίνουσιν ὁποιουσοῦν δύω· α, β, καὶ γ ὁποιουσοῦν τρεῖς, κτ.

Ὁ λέγων α δραχμὰς ἐκφέρει πᾶσαν πλῆθυν δραχμῶν, ἄνευ ἐξαιρέσεως· καὶ ὁ λέγων α δρ. καὶ β δρ. οἱασοῦν δύω πλήθυας δραχμῶν αὖθις ἄνευ ἐξαιρέσεως· ὅ, τι οὖν κατὰ τοῦ α καὶ β λέγεται, λεχθήσεται καὶ καθ' ἑκάςων δύω ὁμοειδῶν ἀριθμῶν· καὶ ὅ, τι ἀληθεύει περὶ τοῦ α, β, γ, καὶ δ, ἀληθεύσει καὶ περὶ οἱωνοῦν τεσσάρων ὁμοειδῶν ἀριθμῶν.

Σχόλιον.

Τὸ α ἠμπορεῖ νὰ σημαίνῃ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20, 100, 1000 κτ. ὡσάυτως καὶ τὸ β φανερώνει κάθε δυνατὸν ἀριθμὸν, 1, 2, 3, 4, κτ. καὶ ὅλως, πάντα ἀριθμόν· ἕνα δηλαδὴ, ὅποιον θέλῃς, ὄχι ὅμως καὶ ὅλους ὁμοῦ εἰς τὸν ἴδιον καιρόν· τί δὲ τὸ, ἐν τῷ ἀνωτ. §. ὅ, τι κατὰ τῶν γραμμάτων λέγεται, λεχθήσεται καὶ κατὰ τῶν δυνατῶν ἀριθμῶν, καὶ ποσοτήτων, ὁποῦ παραςαίνονται διὰ τῶν γραμμάτων, θέλομεν τὸ καταλάβει ἀρκετὰ ἐν τοῖς ἑξῆς.

§. 42. Εἴθιςαι τοῖς Μαθηματικοῖς ἐν τῷ διὰ τῶν γραμμάτων ὑπολογισμῷ τὰς ποσότητας, ἢ τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς δοθέντας, ἢ γνωςοὺς διὰ τῶν πρώτων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, διὰ τοῦ α, β, γ, δ, ε, ζ, κτ. ἐκφαίνειν· (ἔνθα ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖςον ἕκαςον γράμμα ἑτέραν οἱανοῦν ποσότητα σημαίνει, ἢ τὰ λοιπά·) τοὺς δὲ ἀγνώςους, ἢ τοὺς ζητουμένους, καὶ διὰ τῶν γνωςῶν εὑρεθησομένους διὰ τῶν ἐσχάτων· υ, φ, χ, ψ, ω.

Σχόλιον.

Τὰ γράμματα ἔχομεν τὴν ἄδειαν νὰ τὰ λαμβάνωμεν ἀντὶ πάσης ποσότητος· ἀφ' οὗ ὅμως τὰ διορίσωμεν, πρέπει νὰ ἐμμένωμεν εἰς τὸν διορισμὸν μέχρι τέλους τοῦ ἀνὰ χεῖρας ὑπολογισμοῦ· π. χ. ἂν ἐκλάβῃς τὸ x ὡς τοῦ 5 σημαντικὸν, ἢ 6, ἢ κτ· τήρει τὴν ἐκδοχὴν τὴν αὐτὴν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν ἐν τῷ αὐτῷ ὑπολογισμῷ α· τὰ αὐτὰ ῥητέον καὶ περὶ τῶν ἄλλων γραμμάτων.

§. 43 Ἀποδέδοται τοῖς γράμμασιν ἡ καθόλου αὕτη σημασία, ἵνα διὰ τούτου ῥαδίως ἅπασαι ἐν γένει ἐκδηλῶνται ποσότητες, καὶ τῶν κατ' αὐτὰς ἰδιοτήτων θεωρουμένων, γενικαὶ ἀλήθειαι ἐκκαλύπτωνται, ταῖς μερικοτέραις ποσότησιν, ὡς κανόνες ἐφαρμόζουσαι (§. 41. καὶ σχ.)

§. 44. Ποσότης ἀλγεβραϊκὴ, ἡ ἑνὶ γράμματι παριςαμένη, ἁπλῆ ἀκούει· ὡς α, β, γ. δυσὶ δὲ, ἢ πλείοσι, σύνθετος. οἷον, αβ, βγδδ. ἑκατέρα, μόνη τιθεμένη, ἀσύμπλεκτος λέγεται· ὡς α, αβγ.

δε,

δε, χχ. τοῖς δὲ σημείοις (§. 38.) συναπτομένη, συμπεπλεγμένη· ὡς αβ + εδ. ἢ α — β.

§. 45. Οἱουσοῦν ἀριθμοὺς σημαίνωσιν α, καὶ β, τὰ ἑξῆς συμπεπλεγμένα σχήματα, ἐπὶ τὸ συντομώτερον συςαλῆναι ἔχουσι· (§. 40. σχ. β'.)

$$-5\beta - 6\beta = -11\beta.$$
$$3\alpha + 2\alpha = 5\alpha.$$
$$5\alpha - 3\alpha = 2\alpha.$$
$$-9\beta + 4\beta = -5\beta.$$
$$3\alpha + 7\beta - 8\alpha = 7\beta - 5\alpha.$$
$$17\alpha + 6\beta - 11\alpha - 13\alpha = 6\alpha - 7\beta.$$

Περὶ προσθέσεως τῶν καταφατικῶν, καὶ ἀποφατικῶν ἀριθμῶν·

§. 46. Πρόσθεσίς ἐςιν ἀριθμοῦ εὕρεσις, ἴσου τοῖς δοθεῖσι. (§. 19.)

ὅθεν ἐὰν $+\alpha$, $+\beta$ οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ὦσι

ἔςαι $+\alpha+\beta$ τὸ τούτων κεφάλαιον.

ἐὰν $+\alpha$, $-\beta$ οἱ δ. ἀρ.

ἔςαι $+\alpha-\beta$. τὸ τούτων κεφ.

ἐὰν $-\alpha$, $+\beta$ οἱ δ. ἀρ.

ἔςαι $-\alpha+\beta$ τὸ τούτ. κεφ.

ἐὰν $-\alpha$, $-\beta$ οἱ δ. ἀρ.

ἔςαι $-\alpha-\beta$ τὸ τ. κεφ.

Οἱ γὰρ συμπεπλεγμένοι (§. 44.) ἀριθμοὶ ($+\alpha+\beta$), καὶ ($+\alpha-\beta$), καὶ ($-\alpha+\beta$), καὶ ($-\alpha-\beta$) ἀναμφιβόλως ἴσοι εἰσὶ τοῖς ἁπλοῖς, ἐξ ὧν συνίςανται.

Ἐπε-

Ἐπειδὴ τοίνυν α, καὶ β πάντα δυνατὸν ἀριθμὸν (§. 41.) σημαίνουσιν, ἐπιφέρομεν καθόλου, ὅτι τὸ κεφάλαιον δύω ἀριθμῶν εὑρίσκεται, ἐὰν ἐφεξῆς ἀλλήλων ἑκάτερος μετὰ τοῦ κατ' αὐτὸν σημείου καταγράφηται.

Ἔςωσαν $\left.\begin{array}{r}+12\\+18\end{array}\right)$ οἱ δοθ. ἀρ.

$12+18=30$ (§. 41. σχ. β'.) ἔςαι τὸ τούτων κεφάλαιον

ἔς. $\left.\begin{array}{r}+8\\-5\end{array}\right)$ οἱ δ. ἀρ.

$+8-5=3$ (§. αὐτ.) ἔςαι τὸ τ. κ.

ἔς. $\left.\begin{array}{r}-9\\+2\end{array}\right)$ οἱ δ. ἀρ.

$-9+2=-7$ (§. αὐτ.) τ. τ. κ.

ἔς. $\left.\begin{array}{r}-10\\-5\end{array}\right)$ οἱ δ. ἀρ.

$-10-5=-15$ (§. αὐτ.) τ. τ. κ.

ἔςωσαν $\left.\begin{array}{r}9\alpha-5\beta+7\gamma\\-4\alpha+7\beta-12\gamma\end{array}\right)$ οἱ δοθ. ἀρ.

$9\alpha-4\alpha-5\beta+7\beta+7\gamma-12\gamma=5\alpha+2\beta-5\gamma$ τὸ κεφάλαιον (§. αὐτ.)

Εἰ, ὡς ἐν τῷ προκειμένῳ παραδείγματι, ἡ ἐπιτομὴ χώραν ἔχειν δύναται, θεωρήσομεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς, ὡς μέρη τοῦ κεφαλαίου, τῇ ἐπιτομῇ ἀμέσως χρώμενοι, ἵν' ἐφάπαξ ἐν τῷ κεφαλαίῳ τὸ, ὡς οἷόντε, ἐπιτομώτατον προκύψῃ σχῆμα. (§. 40.)

Οὕτως ἐν τῷ αὐτῷ παραδείγματι

$$\left.\begin{array}{rrr} 9\,\alpha & -\ 5\,\beta & +\ 7\,\gamma \\ -\ 4\,\alpha & +\ 7\,\beta & -\ 12\,\gamma \end{array}\right\}\ \text{οἱ δοθ. ἀρ.}$$
$$\overline{5\,\alpha \quad +\ 2\,\beta \quad -\ 5\,\gamma} \quad \text{τ. τ. κεφ.}$$

Τῶν δοθέντων ἀριθμῶν μὴ ἐφεξῆς γραφέντων ἐν τῷ κεφαλαίῳ, ὡς ἀνωτέρω, λέγομεν $+ 9\,\alpha - 4\,\alpha$ δίδωσι $+ 5\,\alpha$ (§. 45.) $- 5\,\beta + 7\,\beta$ δίδωσι $+ 2\,\beta$ (§. αὐτ.) καὶ $+ 7\,\gamma - 12\,\gamma$ δίδωσι $- 5\,\gamma$·

$$\text{Ὡσαύτως καὶ}\ \left.\begin{array}{l} 17\,\alpha - 9\,\beta + 7\,\gamma. \\ \qquad\quad + 3\,\delta \\ -5\,\alpha + 9\,\beta - 9\,\gamma \end{array}\right\}\ \text{οἱ. δ. α.}$$
$$\overline{12\,\alpha - 2\,\gamma + 3\,\delta} \quad \text{τὸ κεφ.}$$

Καὶ γὰρ $+ 17\,\alpha - 5\,\alpha = + 12\,\alpha.\ - 9\,\beta + 9\,\beta = 0$ (§. 37.) $+ 7\gamma - 9\gamma = - 2\,\gamma.$

Σχόλιον α΄·

Ἐπειδὴ εἴπομεν (§. 18.) ὅτι μόνον ὁμοειδῆ ἠμποροῦν νὰ προςεθοῦν ἀλλήλοις, καὶ τὰ αὐτὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ἀνθ᾽ οἱασοῦν ποσότητος παραληφθέντα, σημαίνουν τὸ αὐτὸ ἐν τῷ ἰδίῳ ὑπολογισμῷ (§. 42. ἐν τῷ σχ.) διὰ τοῦτο, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ κεφάλαιον, συνάπτονται ἀλλήλοις διὰ τὴν ἐπιτομὴν τὸ α, καὶ α, καὶ τὸ β, καὶ β, κτ᾽ ὅταν ἔχουν τὰ αὐτὰ σημεῖα· ἢ τὸ α ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ α, τὸ β ἀπὸ τοῦ β, κτ. ὅταν ἔχουν ἀνόμοια. (§. 40. σχ. β΄).

β΄·

Ἐὰν τὰ γράμματα, ὁποῦ ἔχουν νὰ προςεθοῦν ἀλλήλοις, δὲν εἶναι ὁμοειδῆ, προκύψει τὸ κεφάλαιον τούτων, μὲ τὸ νὰ γράφωνται ἐφεξῆς ἕκαςον μὲ τὸ σημεῖον

 μεῖον

μειόντου· ὡς, εἰ δέοι προσθεῖναι $+ \alpha + 4\beta + 3\gamma - 4\chi - 4\psi + 3\omega$· οὐδὲν γὰρ οὐδενὶ ὁμοειδές· τὸ ἴδιον θέλομεν κάμει, καὶ εἰ μόνον ἓν γράμμα πρόκειται προσθετέον ὡς β, ἢ γ. τουτέςι θέλομεν τὸ γράψει μὲ τὸ σημεῖόντου.

§. 47. Ὁ ἀριθμὸς, ὅς τῷ γράμματι πρόσεςι, καλεῖται συνεργος, δεικνύων, ποσάκις ληπτέα ἡ μετ᾽ αὐτὸν ποσότης, ἢ διὰ τίνος πολλαπλασιαςέα· π. χ. 14γ. ἐνταῦθα ὁ 14 λέγεται συνεργὸς τοῦ γ· ἐὰν δὲ τὸ γράμμα οὐδένα ἀριθμὸν πρὸ ἑαυτοῦ ἔχῃ, ὡς τούτου συνεργος ἡ μονὰς ὑπονοεῖται· ὡς γ· ἔνθα συνεργὸς τοῦ γ ἐςὶν ἡ μονὰς, καίτοι ἐνεργεία μὴ παροῦσα· τοιοῦτοι συνεργοὶ ἔνεισι τοῖς γράμμασιν ἐν ἅπασι τοῖς εἴδεσι τῶν ὑπολογισμῶν (προσθέσει, ἀφαιρέσει, κτ·)

Σχόλιον.

Ὅταν τὰ αὐτὰ γράμματα, ὧν τὰ σημεῖα εἶναι ἐναντία, ἔχουν ἀνίσους συνεργούς, τὸ ἔχον τὸν μικρότερον συνεργὸν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ τὸν μείζονα ἔχοντος, καὶ τὸ λείψανον εἶναι τὸ κεφάλαιον· ὡς $+ 4\alpha - 3\alpha = + 1\alpha = + \alpha$ (§. ἀνωτ.)· ὅταν δὲ καὶ οἱ συνεργοὶ ἦναι ἴσοι ἀλλήλοις, τότε ἀφαιρούμενον τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου οὐδὲν ὑπολείπει· ὡς $+ 4\alpha - 4\alpha = 0$· (§. 37.)

§. 48. Προκείσθωσαν ἤδη καίτινα ἀξιώματα, οὐ μικρὰν ἡμῖν ἐν τοῖς ἑξῆς οἴσοντα τὴν ὄνησιν.

α· Ἐὰν δύω ποσότητες ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ ταύταις ἕτεραι δύω ἴσαι ἀλλήλαις ποσότητες προςεθῶσι, τὰ προκύπτοντα κεφάλαια ἔσονται ἴσα· π. χ. $4 = 4$, αἱ δύω αὗται ποσότητες εἰσὶν ἴσαι· $6 = 6$· καὶ αὗται ἴσαι ἀλλήλαις· ἔςαι οὖν

$$\begin{array}{rcl} 4 & = & 4 \\ 6 & = & 6 \\ \hline 10 & = & 10 \end{array}$$

καὶ τὰ κεφάλαια $10 = 10$ ἴσα ἀλλήλοις· καὶ ἐν γράμμασιν ἐν γένει·

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \alpha \\ \beta & = & \beta \\ \hline \alpha + \beta & = & \alpha + \beta. \end{array}$$

τοῦτο δὲ ἀληθεύσει, καὶ ἐὰν τὸ β ἴσον 4 π. χ. τεθῇ.

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \alpha \\ \beta & = & 4 \\ \hline \alpha + \beta & = & \alpha + 4. \end{array}$$ ὅ ῥάδιον συνιδεῖν.

β'. Ἐὰν δύω ποσότητες ἄνισοι ὦσι, καὶ τῇ μείζονι τὸ αὐτὸ προςεθῇ, ὅ καὶ τῇ ἐλάσσονι, ἔςαι τὸ πρῶτον κεφάλαιον μεῖζον τοῦ δευτέρου. π. χ.

$$\begin{array}{rcl} 5 & \text{μεῖζον} & 3 \\ 6 & = & 6 \\ \hline 5 + 6 & \text{μεῖζον τοῦ} & 3 + 6. \end{array}$$ ἢ ἐν γράμμασιν.

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \text{μεῖζον τοῦ} & \beta \\ \gamma & = & \gamma \\ \hline \alpha + \gamma & \text{μεῖζον τοῦ} & \beta + \gamma. \end{array}$$

Σχόλιον.

Οἱ Μαθηματικοὶ μεταχειρίζονται τὸ σημεῖον $>$, θέλοντες νὰ δείξουν, ὅτι ἡ πρὸ τούτου ποσότης εἶναι μείζων τῆς μετὰ τοῦτο, καὶ τὸ $<$, τὸ ὁποῖον δεικνύει ἐλάττονα τὴν πρὸ αὐτοῦ τῆς μετ' αὐτό· π' χ' ἐπειδὴ ὁ 5 μείζων τοῦ 3, γράψον οὕτω· $5 > 3$· καὶ ὁ 3 ἐλάττων τοῦ 6 οὕτω· $3 < 6$. $\alpha > \beta$. καὶ $\alpha < \varepsilon$.

Περὶ ἀφαιρέσεως τῶν καταφατικῶν, καὶ ἀποφατικῶν ἀριθμῶν.

§. 49. Ἀφαίρεσις ἐςὶν ἐκ τοῦ δοθέντος κεφαλαίου δύω ἀριθμῶν, καὶ τοῦ ἑτέρου τούτων τὸν ἕτερον εὑρεῖν (§. 27.) τὸν δ' ἕτερον, ἤτοι τὸν εὑρεθέντα οὕτως ἔχειν χρὴ, ὥςε τῷ δοθέντι ἀριθμῷ προςεθέντα τὸ δοθὲν κεφάλαιον ἀποτελεῖν

ἔνθεντοι ἐὰν $+\alpha$) τὸ δοθὲν κεφ. ἢ
$+\beta$) ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς

ἔςαι $+\alpha-\beta$ ἡ τούτων διαφορά.

Καὶ γὰρ $+\alpha-\beta$ τῷ $+\beta$ προςεθὲν δώσει $+\alpha-\beta+\beta=+\alpha$ (§. 37.)

καὶ $+\alpha$
$-\beta$

ἡ διαφ. $+\alpha+\beta$. ὅτι $+\alpha+\beta$ τῷ $-\beta$ προςεθὲν παρέξει $+\alpha+\beta-\beta=+\alpha$ (§. αὐτ.)

κα

γ'. Ἐὰν δύω ποσότητες ἄνισοι ὦσι, καὶ τῇ μείζονι μείζων ποσότης προςεθῇ, τῇ δ' ἐλάσσονι ἐλάσσων, τὸ τῆς μείζονος κεφάλαιον ἔςαι πολλῷ μεῖζον τοῦ τῆς ἐλάσσονος· π. χ.

$$\begin{array}{l} 5 > 4 \\ 4 > 3 \\ \hline 4 + 5 > 4 + 3. \end{array}$$

καὶ ἐν γράμμασι

$$\begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \\ \hline \alpha + \gamma > \beta + \delta. \end{array}$$

δ'. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα· $\alpha = \gamma$· $\beta = \gamma$· ἄρα $\alpha = \beta$. $4 = 2 + 2$· $3 + 1 = 2 + 2$. ὥςε καὶ $4 = 3 + 1$.

$$\begin{array}{l} \text{καὶ}\quad -\alpha \\ \qquad +\beta \\ \hline -\alpha-\beta \end{array}$$

ὅτι τοῦ $-\alpha-\beta$ τῷ $+\beta$ προςεθέντος, ἔςαι $-\alpha-\beta+\beta=-\alpha$ (§. αὐτ.)

$$\begin{array}{l} \text{καὶ}\quad -\alpha \\ \qquad -\beta \\ \hline -\alpha+\beta \end{array}$$

ὅτι $-\alpha+\beta$ τῷ $-\beta$ προςεθὲν δώσει $-\alpha+\beta-\beta=-\alpha$ (§. αὐτ.)

Εὑρίσκομεν τοίνυν τὴν διαφοράν, ἐὰν τὸ δοθὲν κεφάλαιον μετὰ τοῦ κατ᾽αὐτὸ σημείου, τὸν δὲ δοθέντα ἀριθμὸν μετ᾽ ἐναντίως ἔχοντος ἐκείνῳ σημείου ἐφεξῆς γράφωμεν.

$$\begin{array}{lll} \text{ἔςω} & 7 & \text{τὸ δοθὲν κεφ.} \\ & 12 & \text{ὁ δ. ἀρ.} \\ \hline \text{καὶ} & 7-12=-5 & \end{array}$$

ἔςαι ἡ τούτων διαφορά.

Ὅτι -5 τῷ $+12$ προςεθὲν δώσει $12-5=+7$ (§. 40. σχ. β΄.)

Σχόλιον.

Οὕτω συμβαίνει καὶ εἰς τὰ λοιπὰ τρία παραδείγματα τὰ διὰ γραμμάτων, ἂν ἀντὶ τῶν γραμμάτων λάβωμεν ἀριθμούς·

Ἕτερον παράδειγμα·

$$\begin{array}{ll} 5\alpha+2\beta-5\gamma & \text{τὸ δοθὲν κεφ.} \\ 9\alpha-5\beta+7\gamma & \text{ὁ δ. ἀρ.} \\ \hline \end{array}$$

$5\alpha-9\alpha+2\beta+5\beta-5\gamma-7\gamma=-4\alpha+7\beta-12\gamma$ (§. 45.) ἡ τούτων διαφορά.

§. 49.

§. 50. Ἐπειδὴ ἡ ἀφαίρεσις ἡ διὰ γραμμάτων ἐν τούτῳ μόνον συνίσταται, ἵν τῷ τὸ μὲν δοθὲν κεφάλαιον μετὰ τοῦ κατ' αὐτὸ σημείου, τὸν δὲ δοθέντα ἀριθμὸν τῷ ἐναντίῳ σημείῳ καταγράφειν (§. ἀνωτ.) ῥάδιον συνιδεῖν, ὅτι κἀνταῦθα, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς προσθέσεως, ἐπιτεμεῖν δυνάμεθα, εἰ μόνον τὰ σημεῖα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εἰς τὰ ἐναντία τρέψαιμεν· οὕτως ἐν τῷ προτέρῳ παραδείγματι

$$\begin{array}{rl} 5\alpha + 2\beta - 5\gamma & \text{τὸ δ. κ.} \\ 9\alpha - 5\beta + 7\gamma & \text{ὁ δ. ἀρ.} \\ \hline -4\alpha + 7\beta - 12\gamma & \text{ἡ διαφ.} \end{array}$$

Αὐτίκα ἐν τῇ διαφορᾷ τὸ ἐπιτομώτατον ἀναφανήσεται σχῆμα, λέγουσι $+5\alpha - 9\alpha$ δίδωσι -4α· $+2\beta + 5\beta$ δίδωσι $+7\beta$· καὶ $-5\gamma - 7\gamma$, δ. -12γ·

$$\begin{array}{lrl} \text{ἔστω} & 12\alpha - 3\beta + 7\gamma - 13\delta - 5\varepsilon & \text{τὸ δ. κ.} \\ & -4\alpha - 7\beta + 3\gamma - 8\delta + 9\varepsilon & \text{ὁ δ. ἀρ.} \\ \cline{2-2} & 16\alpha + 4\beta + 4\gamma - 5\delta - 14\varepsilon & \text{ἡ δ.} \end{array}$$

Ὅτι $12\alpha + 4\alpha = 16\alpha$· $-3\beta + 7\beta = 4\beta$· $+7\gamma - 3\gamma = 4\gamma$· $-13\delta + 8\delta = -5\delta$· καὶ $-5\varepsilon - 9\varepsilon = -14\varepsilon$.

Σχόλιον.

Ὅταν ἀπό τινος μέρους τοῦ Μειωτέου δὲν ἔχωμεν νὰ ἀφέλωμεν μέρος τι τοῦ Ἀφαιρετέου, προσαριθμεῖται καὶ ἐκεῖνο ἀμετάβλητον ὑπὸ τὴν γραμμὴν τῇ διαφορᾷ μὲ τὸ σημεῖόν του ὡς

$$\begin{array}{rrr} 4\alpha & +\ 2\beta & +\ 5\gamma \\ 3\alpha & +\ \beta & \\ \hline +\alpha & +\ \beta & +\ 5\gamma\cdot \end{array}$$

§. 51. Συμβαίνει δ' ἐνίοτε ταῖς ἁπλαῖς ποσότησιν, ὡς καὶ ταῖς συνθέτοις διὰ γραμμάτων παριςαμέναις τὸ μὴ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεῖσθαι ἔχειν διὰ τὸ ἀνομοιοειδές· ἡ ἀφαίρεσις τούτων δείκνυται μόνον, ἐπ' ἐκείνων μὲν, μεταβαλλομένου τοῦ σημείου τῆς ἀφαιρεθησομένης ποσότητος εἰς τὸ ἐναντίον, ὡς

$$\begin{array}{r} +\ \beta \\ +\ \varepsilon \\ \hline \beta - \varepsilon \end{array}$$

ἐπὶ τούτων δὲ, ἐν παρενθέσει ἐναπολαμβανομένων τοῦτε μειωτέου, καὶ ἀφαιρετέου χωρὶς, καὶ τοῦ τῆς ἀφαιρέσεως σημείου παρεντιθεμένου· ὡς εἰ δέοι ἀπὸ τοῦ $4\alpha - 3\beta + 2\gamma$ ἀφαιρεθῆναι τὸ $7\zeta + \chi - \psi$, ἔςαι $(4\alpha - 3\beta + 2\gamma) - (7\zeta + \chi - \psi)$.

Σχόλιον. α΄.

Τὰς ποσότητας, ὅπου εἶναι κεκλεισμέναι ἐν τῇ παρενθέσει πρῶτον τὰς προςίθεμεν ἀλλήλαις ἐν ἑκατέρῳ σχήματι χωρὶς, καὶ εἶτα τὰς ἀφαιροῦμεν· τὸ ὁποῖον γίνεται τότε, ὅταν αἱ ποσότητες ἦναι ἀριθμοὶ, ἢ ὅταν τὰ γράμματα διορισθῶσι· π. χ. ἔςω $\alpha = 3$· $\beta = 2$· $\gamma = 5$· $\zeta = 0$· $\chi = 7$· $\psi = 1$· ἔςαι οὖν $4\alpha = 12$ (§. 47.) $3\beta = 6$, κτ. ὥςε $(4\alpha - 3\beta + 2\gamma) - (7\zeta + \chi - \psi) = (12 - 6 + 10 - (42 + 7 - 1) = 16 - 48 = -32$. (§. 40. σχ. β΄.)

Σχόλιον β΄.

Ἡ βάσανος ἐν τῇ τῶν γραμμάτων ἀφαιρέσει γίνεται παραπλησίως, ὡς καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς· ἤτοι μὲ το νὰ προςιθῆται ἡ διαφορὰ τῷ ἀφαιρετέῳ (§. 31.) διότι οὕτω προκύπτει πάλιν ὁ Μειωτέος.

§. 52.

Ἐὰν ἀπό τινος ἀριθμοῦ, π. χ. ἀπὸ τοῦ 6 διηνεκῶς ἡ 1 ἀφαιρῆται, αἱ διαφοραὶ ἀποδοθήσονται κατὰ τὸ (§. 49.) οὕτω·

1 ἀπὸ τοῦ 6 ὑπολείπει	$6 - 1 = 5$	(§. 40. σχ. β΄.)
1 ἀπὸ τοῦ 5 - -	$5 - 1 = 4$	
1 ἀπὸ τοῦ 4 - -	$4 - 1 = 3$	
1 ἀπὸ τοῦ 3 - -	$3 - 1 = 2$	
1 ἀπὸ τοῦ 2 - -	$2 - 1 = 1$	
1 ἀπὸ τοῦ 1 - -	$1 - 1 = 0$	
1 ἀπὸ τοῦ 0 - -	$0 - 1 = -1$	
1 ἀπὸ τοῦ -1 - -	$-1 - 1 = -2$	
1 ἀπὸ τοῦ -2 - -	$-2 - 1 = -3$	
1 ἀπὸ τοῦ -3 - -	$-3 - 1 = -4$	
1 ἀπὸ τοῦ -4 - -	$-4 - 1 = -5$	

Ἐὰν οὖν ἀφ' οὑτινοσοῦν ἀριθμοῦ, ὡς ἐνταῦθα ἀπὸ τοῦ 6, διηνεκῶς 1 ἀφαιρῶμεν, ὁ ἀριθμὸς ἀπομειοῦται διηνεκῶς· καὶ ἀφαιρεθεισῶν τοσούτων μονάδων, ὅσας αὐτὸς περιέχει, ἐξισωθήσεται τῷ 0. προαγομένης δὲ τῆς ἀφαιρέσεως τῆς 1, γενήσεται ἴσος -1, -2, -3, -4, -5, -6 κτ.

Ὁ ἀποφατικὸς ἄρα ἀριθμὸς ἐςιν ἐλάττων τοῦ μηδενὸς, καὶ τοσούτῳ ἐλάττων, ὅσῳ πλείους ἀποφατικὰς μονάδας ἐν ἑαυτῷ περιέχει.

Σχόλιον. α΄.

Ἡ αἰτία, δι' ἣν αἱ ἀποφατικαὶ ποσότητες εἶναι ἐλάττους τοῦ μηδενὸς εἶναι προφανής· ἐάν τις οὐδεμίαν περιουσίαν ἔχῃ, καὶ πρὸς τούτοις εἶναι καὶ χρεώςης π. χ. 100. δραχμῶν, οὗτος τῷ ὄντι ἔχει ὀλιγώτερον ἀπὸ ἐκεῖνον ὁποῦ δὲν ἔχει μὲν τίποτε, δὲν εἶναι ὅμως χρεώςης· ὅθεν τὸ, ἐλάττων τοῦ μηδενὸς, λαμβάνεται σχετικῶς· διότι ἂν αἱ ἀποφατικαὶ ποσότητες δὲν ἀναφέρωνται εἰς τὰς θετικὰς, εἶναι μείζους τοῦ μηδενὸς, καὶ τῷ ὄντι ποσότητες, ὡς καὶ αἱ θετικαί.

β'.

Κάθε μείζων ἀριθμὸς, καθ' ἑαυτὸν θεωρούμενος, ὑπερέχει τὸν ἐγγὺς ἐλάττονα· ὡς ὁ 5 τὸν 4, ὁ 4 τὸν 3, κτ· ἀποβλέποντες ὅμως εἰς τὸ πρὸ αὐτοῦ ἀποφατικὸν σημεῖον —, τόσον μικρότερον θέλομεν τὸν ὀνομάσει, ὅσῳ μεγαλήτερος εἶναι φυσικά· ὡς ὁ $-2 < -1$· $-5 < -4$· τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα διὰ τῶν δραχμῶν σαφηνίζει ἱκανῶς τὸ λεγόμενον·

Ἀξιώματα.

§. 53. α'. Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἔςαι ἴσα.

$$\begin{array}{rcl} 8 & = & 8 \\ 2 & = & 2 \quad \text{ἀφαιρ.} \\ \hline 6 & = & 6 \end{array}$$

τὰ λείψανα ἴσα· ἢ $8 - 2 = 8 - 2$.

ἐν γράμμασι

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \varrho \\ \gamma & = & \delta \\ \hline \alpha - \gamma & = & \varrho - \delta \end{array}$$

β'. Ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφέλῃς, τὸ λείψανον τῆς μείζονος ποσότητος ἔςαι μεῖζον τοῦ λειψάνου τῆς ἐλάττονος·

$$\begin{array}{c} 10 > 8 \\ 5 = 5 \quad \text{ἀφ.} \\ \hline 10 - 5 > 8 - 5 \end{array} \quad \text{καὶ} \quad \begin{array}{c} \alpha > \beta \\ \gamma = \gamma \\ \hline \alpha - \gamma > \beta - \gamma \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{c} \alpha > \beta \\ \gamma = \delta \\ \hline \alpha - \gamma > \beta - \delta \end{array}$$

γ'. Ἐὰν δύω ποσότητες ἴσαι ὦσι, καὶ ἀπὸ τῆς α' ἀφέλῃς ποσότητά τινα μείζονα, ἢ ἀπὸ τῆς β' τὸ

τῆς

τῆς α΄ λεῖψανον ἔςαι ἔλαττον τοῦ λειψάνου τῆς β΄·

$$\frac{\begin{array}{ccc}12 & = & 12\\ 5 & > & 3\end{array}}{12-5<12-3 \text{ ἢ } 7<9} \qquad \frac{\begin{array}{ccc}\alpha & = & \alpha\\ \beta & > & \gamma\end{array}}{\alpha-\beta<\alpha-\gamma}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\begin{array}{ccc}\alpha & = & \beta\\ \gamma & > & \delta\end{array}}{\alpha-\gamma<\beta-\delta.}$$

§. 54. Ὅσα περὶ τῆς προσθέσεως (§. 21. κτ.) εἴρηται, κρατοῦσι διὰ παντὸς, εἴτε ἴσοι, εἴτε ἄνισοι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶεν· ἐὰν ὦσιν ἴσοι, ὡς ἐν τῷδε τῷ παραδείγμ.

3 2 1 2	
3 2 1 2	
3 2 1 2	οἱ δ. ἀρ.
3 2 1 2	
1 2 8 4 8	τὸ τούτων κεφάλ.

συντομώτερον τὴν πρᾶξιν ποιήσομεν, ἐὰν τοῦ ἀριθμοῦ 3 2 1 2 ἅπαξ καταγραφέντος, αἱ τούτου μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες, καὶ ὅλως ἅπαντα τὰ τούτου μέρη τοσάκις λαμβάνωνται, ὁσάκις τοῦτον γράψαι ἔδει, λέγουσι·

4: κις 2 = 8	4: κις 2 = 8
4: κις 1 = 4	4: κις 3 = 12

Ὅπως οὖν ἐπὶ τῶν τοιούτων εἰς ἔργον χωρητέον, μαθησόμεθα ἤδη·

ΠΕΡΙ

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

§. 55. Πολλαπλασιασμὸς ἐςὶ τὸ ἀριθμόν τινα τοσάκις λαμβάνειν, ἢ τοσάκις τῷ ο προςιθέναι, ἢ ἑαυτῷ, ὁσάκις ἕτερός τις δεικνύει, ἢ ὁσάκις ἡ μονὰς περιέχεται ἐν τῷ ἑτέρῳ·

Σχόλιον.

Πολλαπλασιάσαι 32 μὲ 12 ἐςὶ 32 λαβεῖν τοσάκις, ὁσάκις ὁ 12 τὴν μονάδα περιέχει· οὗτος δὲ περιέχει δωδεκάκις τὴν μονάδα· ἄρα 32 μὲ 12 πολλαπλασιάσαι ἐςὶ 32 δωδεκάκις λαβεῖν.

§. 56. Τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ μὲν καλεῖται πολλαπλασιαςέος, ὁδ' ἕτερος, πολλαπλασιαςής· ἄμφω δὲ παράγοντες· τὸ δὲ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτον, παραγόμενον, ἢ τὸ τούτων πολλαπλοῦν.

§. 57. Πολλαπλασιασμοῦ σημεῖον ἐτέθη τὸ X, μεταξὺ τῶν παραγόντων ἀριθμητικῶν χαρακτήρων ἐγγραφόμενον, ἢ τὸ (.) παρενςιζόμενον· ἀπαγγέλλονται δὲ ταῦτα (3 X 4, ἢ 3. 4 = 12.) ἐν φωναῖς οὕτω· 3 πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 4 παράγει 12, ἢ ἴσος 12.

Σχόλιον.

Τὸ X, ἢ (.) τὸ μεταχειριζόμεθα εἰς ἀποφυγὴν συγχύσεως· διότι εἰ θέλοντες νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν, οἷον τὸν 5 δι ἄλλου, οἷον τοῦ 4, γράψομεν αὐτοὺς χωρὶς τοῦ παρεγκειμένου σημείου X, ἢ (.) ὡς 54· θέλομεν ἐκλάβει τοὺς παράγοντας, ὡς σημαίνοντας 54, καὶ οὐχὶ ὡς πολλαπλασιασθῆναι προκειμένους·

§. 58. Ἔςω πολλαπλασιαςέος ὁ 3212 μετὰ

τοῦ

τοῦ 4· τοῦτο δ' ἐστι, ληφθήτω ὁ 3212 τετράκις, ἢ προστεθήτω τετράκις τῷ 0, ἢ ἑαυτῷ (§. 55.)

Ἐὰν τεθῶσι 5 σημεῖα τρὶς ὑπάλληλα,

· · · · ·

· · · · ·

· · · · ·

τέθεινται καὶ 3 σημεῖα πεντάκις ἐφεξῆς· καὶ εἰ 3212 τετράκις ὑπάλληλα γραφήσονται, κείσονται καὶ 4 σημεῖα 3212:κις ἐφεξῆς ἀλλήλων· ἐκ τούτων δῆλον, ὅτι ἀεὶ τὸ αὐτὸ προκύπτει, ἤτοι τοῦ 5 μετὰ τοῦ 3, ἢ ἀνάπαλιν πολλαπλασιασθέντων· ὡσαύτως καὶ τοῦ 3212 μετὰ τοῦ 4, ἢ τοῦ 4 μετὰ τοῦ 3212· καὶ ἐν γένει, ὁπότερος τῶν παραγόντων μετὰ τοῦ ἑτέρου πολλαπλασιασθῇ.

§. 59. Τῷ τὴν πρόσθεσιν ἐπισταμένῳ ῥάδιον ἔσται τὸν ἑπόμενον πίνακα ἐκ τῶν ἁπλῶν παραγόντων, καὶ τῶν ἐκ τούτων παραγομένων καταγράψαι, καὶ τοῦτον οὕτω διὰ μνήμης ἔχειν, ὥστε μὴ μόνον ἐκ τῶν δοθέντων παραγόντων τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον, ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ δοθέντος παραγομένου, καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων τὸν ἕτερον παράγοντα εὐθὺς διαγινώσκειν.

Παράγον-

Παράγοντες.	Παραγόμ.	Παράγοντες.	Παραγόμ.	Παράγοντες.	Παραγόμ.
1 X 1	= 1	3 X 9	= 27	6 X 7	= 42
2 X 2	= 4	3 X 10	= 30	6 X 8	= 48
2 X 3	= 6	4 X 4	= 16	6 X 9	= 54
2 X 4	= 8	4 X 5	= 20	6 X 10	= 60
2 X 5	= 10	4 X 6	= 24	7 X 7	= 49
2 X 6	= 12	4 X 7	= 28	7 X 8	= 56
2 X 7	= 14	4 X 8	= 32	7 X 9	= 63
2 X 8	= 16	4 X 9	= 36	7 X 10	= 70
2 X 9	= 18	4 X 10	= 40	8 X 8	= 64
2 X 10	= 20	5 X 5	= 25	8 X 9	= 72
3 X 3	= 9	5 X 6	= 30	8 X 10	= 80
3 X 4	= 12	5 X 7	= 35	9 X 9	= 81
3 X 5	= 15	5 X 8	= 40	9 X 10	= 90
3 X 6	= 18	5 X 9	= 45	10 X 10	= 100
3 X 7	= 21	5 X 10	= 50		
3 X 8	= 24	6 X 6	= 36		

§. 60. Ἐὰν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων, ὡς ὁ 3212 ἐκ μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, κτ. συγκέηται, ὁ δ' ἕτερος, ὡς ὁ 4, ἁπλοῦς ἀριθμὸς ᾖ, τὸ ζητούμενον παραγόμενον, ἢ τὸ πολλαπλοῦν (§. 56.) προκύψει, ὡς ἀνωτέρω, τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, κτ. καὶ πάντων τῶν μερῶν τοῦ συνθέτου παράγοντος τοσάκις λαμβανομένων, ὁσάκις ὁ ἁπλοῦς ἐμφαίνει παράγων, καὶ τοῦ κεφαλαίου ζητουμένου (§. 21.) τῶν ἐν μέρει πολλαπλῶν· ὡς ἐὰν

3212	)	οἱ παράγ. ὡσι
4	)	
8		τὸ τετραπλοῦν τῶν μονάδων
40		τὸ τῶν δεκάδων
800		τὸ τῶν ἑκατοντάδων
12000		τὸ τῶν χιλιάδων
12848		τὸ κεφάλαιον τῶν ἰδιαιτέρων

τετραπλῶν ἁπάντων τῶν μερῶν τοῦ ἀριθμοῦ 3212. καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου τὸ τετραπλοῦν τοῦ ὁλικοῦ ἀριθμοῦ.

ἐὰν	3897	)	οἱ παράγ. ὡσι
	6	)	
ἔςαι	42		τὸ ἑξαπλοῦν τῶν μονάδων
	540		τὸ τῶν δεκάδων
	4800		τὸ τῶν ἑκατ.
	18000		τὸ τῶν χιλ.
	23382		τὸ 6: πλοῦν τοῦ ὁλικοῦ ἀριθμοῦ

3897·

§. 61. Τῶν ἐν μέρει παραγομένων τῶν μονάδων, δεκάδων, κτ. ἐξ ἑνὸς μόνου χαρακτῆρος συνιςαμένων, ὡς ἐν τῷ α′ παραδ. συντομωτέρα γενήσεται ἡ πρᾶξις, ἐὰν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ταῦτα ἐν τῷ προσήκοντι τόπῳ γράφωνται· ὡς

3212	)	οἱ παράγ.
4	)	
12848		τὸ παραγ. λέγουσι

$$4 \times 2 = 8 \quad \| \quad 4 \times 2 = 8$$
$$4 \times 1 = 4 \quad \| \quad 4 \times 3 = 12$$

Ἡ αὐτὴ ἐπιτομὴ ἔχει χώραν, καὶ τῶν ἐν μέρει παραγομένων τῶν μονάδων, δεκάδων κτ· ἐκ δύω χαρακτήρων συγκροτουμένων, ὡς ἐν τῷ β′· παραδ. εἰ μόνον, ὡς ἐπὶ τῆς προσθέσεως, [τοῦ κατωτέ-

ρου

ρου τούτων χαρακτῆρος καταγραφομένου, ὁ ἀνώτερος τῷ παραγομένῳ τῶν ὁμοειδῶν ὑπερτέρων μερῶν προσαριθμοῖτο·

$$\begin{array}{rl} 3897\ ) & \text{οἱ παράγ.} \\ 6\ ) & \\ \hline 23382 & \text{τὸ παραγόμ.} \end{array}$$

καὶ γὰρ $6 \times 7 = 42$
$6 \times 9 = 54$, καὶ $4 = 58$.
$6 \times 8 = 48$, καὶ $5 = 53$.
$6 \times 3 = 18$, καὶ $5 = 23$.

§. 62. Ἐκ τῆς φύσεως τοῦ παραληφθέντος συςήματος (§. 11.) γνωςόν ἐςιν ἕκαςον χαρακτῆρα δεξιόθεν πρὸς ἀριςερὰ ἐνὶ τόπῳ μεταβιβασθέντα, 10: πλῆν, δυσὶν, 100: πλῆν. τρισὶ, 1000: πλῆν. κτ' δύναμιν ἔχειν τῆς, ἣν ἐν τῷ α'· τόπῳ εἶχεν· οὕτως ἐν τῷδε τῷ ἀριθμῷ (333333), ὁ 3, ἐν τῷ δ'· τόπῳ σημαίνει τὸ δεκαπλάσιον τοῦ, ὅ ἐν τῷ γ'· σημαίνει· τὸ 100: πλάσιον τοῦ, ὅ ἐν τῷ β'· καὶ τὸ 1000: πλάσιον· τοῦ, ὅ ἐν τῷ α'· εἰ τοίνυν πρόκειται ὁποιονοῦν ἀριθμὸν 10:κις 100:κις 1000:κις 10000:κις, κτ' λαβεῖν, ἀρκεῖ ἕκαςον χαρακτῆρα αὐτοῦ ἑνὶ, δυσὶ, τρισὶ, τέσσαρσιν, ἢ πέντε τόποις, κτ' ἐκ δεξιῶν πρὸς ἀριςερὰ προσβιβάζειν, τουτέςιν ἕν, δύω, τρία, τέσσαρα, ἢ πέντε ο κτ' μετ' αὐτὸν γράφειν· ἔνθεντοι

$$\begin{array}{rcrcl} 354 & \times & 10 & = & 3540 \\ 354 & \times & 100 & = & 35400 \\ 354 & \times & 1000 & = & 354000 \\ 354 & \times & 10000 & = & 3540000 \text{ κτ.} \end{array}$$

§. 63. Ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ παραγόμενον προκύπτει, οὑτινοσοῦν παράγοντος ἐπὶ τὸν ἕτερον πολλαπλασιαζομένου, (§. 58.) ἔςιν ἄρα

9	X	20	=	20	X	9	=	180
9	X	30	=	30	X	9	=	270
9	X	40	=	40	X	9	=	360
9	X	50	=	50	X	9	=	450 κτ.

Προκύπτει ἄρα τὸ 20, 30, 40, ἢ 50: πλοῦν ἀριθμοῦ τινὸς, οἷον τοῦ 9, ἐὰν τὸ τούτου 2, 3, 4, ἢ 5: πλοῦν 10: κις λαμβάνηται.

§. 64. Εἰ δέοι τὸν ἀριθμὸν 34589 λαβεῖν 354: κις, λαμβάνοντες τὸ 4: πλοῦν· εἶτα τὸ 50: πλοῦν· καὶ τελευταῖον τὸ 300: πλοῦν αὐτοῦ προςίθεμεν ἀλλήλοις τὰ ἐν μέρει πολλαπλᾶ, καὶ οὕτω τὸ ἀνακύψαν κεφάλαιον ἔςαι τὸ 354: πλοῦν αὐτοῦ· ὡς

34589 354	} οἱ παράγ.
138356	τὸ τετραπλοῦν
1729450	τὸ 50: πλοῦν·
10376700	τὸ 300: πλοῦν.
12244506	τὸ 354: πλοῦν·

Ἐπειδὴ τὸ 50: πλοῦν ἐςὶ τὸ 5: πλοῦν 10: κις ληφθὲν, ἓν μηδενικὸν τιθέντες γράφομεν τὸ 5: πλοῦν πρὸ αὐτοῦ· καὶ ἐπεὶ αὖθις τὸ 300: πλοῦν ἐςὶ τὸ 3: πλοῦν· 100: κις ληφθὲν, γράψοντες δύω μηδενικὰ τιθέαμεν τὸ 3: πλοῦν πρὸ αὐτῶν.

§. 65. Ἐπειδὴ τὰ ἐν τέλει κείμενα ο τῶν ἰδιαιτέρων πολλαπλῶν (§. ὀν.) τὸ τούτων κεφάλαιον οὔτ' αὔξουσιν, οὔτ' ἐλαττοῦσι, (§. 8.) συντομίας χάριν παραλειφθῆναι δύνανται· ἀλλ' ἐπιτηρητέον, ἵνα τὸ πολλαπλοῦν τοῦ β' χαρακτῆρος ἐν τῷ β' τόπῳ, τὸ τοῦ γ' ἐν τῷ γ' τὸ τοῦ δ' ἐν τῷ δ', κτ' γράφηται· ἔνθεντοι τὸ προηγηθὲν παράδειγμα οὕτως ἀποδοθήσεται·

34589

$$\begin{array}{r l}
34589 & \Big) \text{ οἱ παράγ.} \\
354 & \Big) \\
\hline
138356 & \\
172945 & \\
103767 & \\
\hline
12244506 & \text{ τὸ παραγόμ.}
\end{array}$$

§. 66. Κατὰ τὸ (§. 63.)

$$30 \times 20 = 60 \times 10 = 600$$
$$400 \times 20 = 800 \times 10 = 8000 \text{ κτ.}$$

Ἐὰν οὖν ἀμφοῖν τοῖς παράγουσι μηδενικὰ ἐν τέλει προσῇ, ληφθήτω τὸ ἐκ τῶν παραγόντων παραγόμενον, ἀμελουμένων τῶν 0, καὶ ἐν τέλει ἐκείνου τοσαῦτα μηδενικὰ γραφήτωσαν, ὅσα ἀμφοῖν τοῖς παράγουσιν ἔνεισιν· ἔνθεντοι τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα εἰς τόδε τραπήσεται.

$$30 \times 20 = 600$$
$$400 \times 20 = 8000 \text{ κτ.}$$

Ὅτι $2 \times 3 = 6$ καὶ τῶν δύω μηδενικῶν ἐν τέλει τεθέντων, ἔσται $= 600$.
$2 \times 4 = 8$, καὶ τῶν τριῶν $0 = 8000$.

Ὡσαύτως καὶ οἱ μᾶλλον σύνθετοι παράγοντες, οἷς πλείω μηδενικὰ ἔνεισι, ῥᾶον ἂν πολλαπλασιασθεῖεν, χωρὶς τῶν μηδενικῶν. ὡς

$$\begin{array}{r}
3045600 \\
30200 \\
\hline
60912 \\
91368 \\
\hline
91977120000
\end{array}$$

§. 67. Τοὺς δὲ συγκεκριμένους ἀριθμοὺς, τοὺς ἐκ διαφόρων μερῶν τῆς μονάδος συγκειμένους πολλαπλασιάσομεν, ἐὰν ὑπὸ τὴν κατωτάτην μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστέου ὁ πολλαπλασιαστὴς γραφεὶς ἐπάγηται ἐπὶ πάντα τὰ μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἀπὸ τοῦ κατωτάτου ἀρξαμένοις. ὡς

πόδ.	δάκτ.	γραμ.
42	7	8
		40
1680	280	320

καὶ ἐπειδὴ 12 γραμμαὶ ἀποτελοῦσιν ἕνα δάκτυλον, ἐν τῷ κεφαλαίῳ τῶν γραμμῶν 320, περιέχονται 26. δάκτυλοι, καὶ 8 γραμμαί. οἱ οὖν 26 δάκτυλοι προςεθήτωσαν τῷ κεφαλαίῳ τῶν δακτύλων 280, καὶ ἔσται = 306· γραμμῶν 8 μόνον ὑπὸ τὰς γραμμὰς μενουσῶν· ἐπειδὴ δὲ 12 δάκτ. ποιοῦσιν ἕνα πόδα, τὸ δὲ 306 κεφάλ. τῶν δακτ. περιέχει 25 πόδας, προςεθέντων τῶν 25 τῷ κεφαλαίῳ τῶν ποδῶν, μενοῦσιν ἐν τῷ κεφ. τῶν δακτ. μόνον 6 δάκτ. ὥςε τὸ ὁλικὸν παραγόμενον ἔσονται 1705 πόδ. 6 δάκτ. καὶ 8 γραμμαί· οὕτω ποίει καὶ ἐπὶ ἄλλων παραδ.

§. 68. Πολλαπλασιάζονται μετ' ἀλλήλων καὶ ποσότητες, αἵτινες τοῖς σημείοις + καὶ — εἰσι συνημμέναι, τῷ ἐν παρενθέσει α' ἐναπολαμβάνεσθαι, καὶ εἶτα ἀλλήλαις προςίθεσθαι, καὶ τελευταῖον τὰ ἐξ ἑκατέρων κεφάλαια πολλαπλασιάζεσθαι ὡς $(4 + 5 - 4 - 1) . (3 + 9 + 1 - 2 - 4) = 4 . 7 = 28.$

§. 69. Ὁ ἀριθμὸς, ὁ διὰ τῆς μονάδος πολλαπλασιαζόμενος οὐδεμίαν μεταβολὴν ὑφίςαται, ἢ ἡ μονὰς οὐ πολλαπλασιάζει· καὶ γὰρ ἅπαξ 30 ἐςὶ 30. ἅπαξ 100 ἐςὶν 100 κτ. ὁμοίως καὶ ὁ ἀριθμὸς, ὁ μετὰ τοῦ 0 πολλαπλασιαζόμενος γίνεται μηδὲν, ἢ = 0· ὁσάκις γὰρ ἂν ληφθῇ τὸ μηδενικὸν, δίδωσι μηδέν· 6: κις 0 ἐςὶν = 0· ἀλλὰ καὶ 0: κις 6 ἐςὶ μηδέν· ἑκάςη γὰρ ποσότης, ἡλίκη ἂν ᾖ, ἐὰν 0:

κις

κις λαμβάνηται, δώσει παραγόμενον μηδὲν, ἢ $= 0$·

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ
μετὰ γραμμάτων, ἢ μετὰ ἀλγεβραϊκῶν ἀριθμῶν·

§. 70. Γράμματα ἐφεξῆς ἀλλήλων προσγραφόμενα, δίχα παρεμπτώσεως σημείου τινὸς, τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον σημαίνειν ὑποτέθειται·

αβ ἄρα μήτε α μόνον σημαίνει, μήτε β, ἀλλὰ τὸν ἀριθμὸν τὸν προερχόμενον τῷ πολλαπλασιασμῷ τοῦ α διὰ τοῦ β, ἢ τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον·

Ὡσαύτως καὶ αβδ ἐςὶ τὸ παραγόμενον ἐξ ὁποιωνοῦν τριῶν ἀριθμῶν, α, β, καὶ δ. καὶ αβδε τὸ ἐξ ὁποιωνοῦν τεσσάρων α, β, δ, ε.

Τεθήτω $\alpha = 2$· $\beta = 3$· $\delta = 4$· $\varepsilon = 5$· καὶ ἔςαι $\alpha\beta = 2 \times 3 = 6$· $\alpha\beta\delta = 2 \times 3 \times 4 = 24$· $\alpha\beta\delta\varepsilon = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

§. 71. Εἰ καὶ τὸ αὐτὸ ἐςιν ἀδιαφόρως γράφειν τὰ γράμματα ἕτερον πρὸ τοῦ ἑτέρου, ὡς αβ, ἢ βα, αβδ, ἢ βδα, ἢ δαβ, ὅτι τοῦ τούτων τόπου μεταβληθέντος, παραγόμενον προκύπτει τὸ αὐτὸ, ὡς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς εἴδομεν· (§. 58.) φιλοῦσι μέντοι τὰ πρῶτα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου τῶν ἑπομένων προτιθέναι, ὡς αβδ, αβδε, κτ.

§. 72. Εἰ δέοι τὸ α. π. χ. ἅπαξ, δὶς, τρὶς, ἢ 4: κις λαβεῖν, ἔςαι

$\alpha \times 1 = \alpha$	$\alpha \times 3 = 3\alpha$
$\alpha \times 2 = 2\alpha$	$\alpha \times 4 = 4\alpha$ κτ.

 Ὅθεν

Ὅθεν σημαίνει 4α τὸ παραγόμενον ἐκ τοῦ 4 καὶ α·
3α τὸ — ἐκ τοῦ 3 καὶ α·
2α τὸ — ἐκ τοῦ 2 καὶ α·
καὶ α τὸ — ἐκ τῆς 1 καὶ α·

Ἐὰν οὖν οἱ παράγοντες, ἤτοι τὰ γράμματα ἔχωσι συνεργοὺς, (§. 47.) τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον προκύψει, εἰ τοῦ παραγομένου τοῦ ἐκ τῶν γραμμάτων τὸ ἐκ τῶν συνεργῶν παραγόμενον προγράφεται· ὡς

$$8\alpha \times 9\beta = 72\alpha\beta$$
$$7\alpha \times 3\beta \times 4\gamma = 84\alpha\beta\gamma\cdot$$

Σχόλιον.

Καὶ ὅταν τὰ γράμματα ἔχωσι πρὸ ἑαυτῶν συνεργοὺς, εἶναι δυνατὸν νὰ δείξωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τούτων μετ' ἀλλήλων, μὲ τὸ νὰ γράψωμεν τὰ γράμματα, καὶ τοὺς συνεργοὺς ἐφεξῆς, χωρὶς σημείου. (§. 70.) ἀλλ' ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν ἠμπορεῖ νὰ συμβῇ ταραχὴ, (§. 57. σχ.) τίθεται μεταξὺ τῶν ἀριθμητικῶν χαρακτήρων τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· (§. 57.) οἷον εἰ δέοι πολλαπλασιάσαι 4α μὲ 5β, καὶ ἔτι μὲ 6γ, γράψομεν οὕτω· 4. 5. 6. αβγ. ἀλλὰ μήτε τοῦτο εἶναι ἐν χρήσει· εὐχρηστότερον εἶναι νὰ πολλαπλασιάζωνται οἱ ἀριθμοὶ ὁμοῦ, καὶ νὰ προτιθῶνται τῶν γραμμάτων· ἂν ὅμως οἱ συνεργοὶ ἦναι συγκείμενοι ἐκ πολλῶν χαρακτήρων, συνάπτονται ἀλλήλοις μόνον μὲ τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλ· ὡς προκειμένου τοῦ 720γ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸ 84αβ, θέλομεν δείξει τὸν πολλαπλασιασμὸν οὕτω· (720. 84.) αβγ.

§. 73. Ὁσάκις τὸ ἐκ διαφόρων μερῶν συμπεπλεγμένον σχῆμα (§. 44.) (ὡς $3\alpha + \beta$) ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων γενέσθαι ὀφείλει, (ἤτοι πολλαπλασιαστέος, ἢ πολλαπλασιαστὴς) ἐναποληπτέον τοῦτο ἐν παρενθέσει οὕτω ($3\alpha + \beta$).

Ὅθεν

Ὅθεν $\gamma\,(3\,\alpha + \beta)$, ἢ $(3\,\alpha + \beta)\,\gamma$ σημαίνει τὸ παραγόμενον, οὗ γ ὁ ἕτερος, καὶ $3\,\alpha + \beta$ ὁ ἕτερος ἐςὶ τῶν παραγόντων· ὡσαύτως καὶ $(3\alpha + \beta)$ $(4\,\gamma + \delta)$.

Σχόλιον.

Ὅταν καὶ οἱ δύω παράγοντες ἦναι συμπεπλεγμένοι, κλείονται ἑκάτερος χωρὶς ἐν παρενθέσει· ὅταν δὲ ὁ ἕνας ἦναι ἁπλοῦς, μόνον ὁ σύνθετος (§. ἀνωτ.)

§. 74. Ἔςω πολλαπλασιαςέον $3\,\alpha + \beta$ ἐνεργείᾳ μετὰ τοῦ γ.

Ἐνταῦθα ἀναμφιβόλως ληφθήσεται ὁ πολλαπλασιαςέος $(3\,\alpha + \beta)\,\gamma$: κις, (ὅ ἐςι τοσάκις, κατὰ τὸν διορισμὸν, ὅν ἂν τὸ γ λάβῃ) ἐὰν ἑκάτερον μέρος τούτου τοῦ πολλαπλασιαςέου γ: κις λάβωμεν· ὅθεν $(3\,\alpha + \beta)\,\gamma = 3\,\alpha\gamma + \beta\gamma$.

Σχόλιον.

Προσεκτέον, νὰ μὴ λαμβάνωμεν εἰς τὸ ἑξῆς τὸ α: κις, β: κις, γ: κις, δ: κις κτ· διωρισμένως, ἀντὶ τοῦ ἅπαξ, δίς, τρίς, τετράκις, κτ· ἀλλ' ἀορίςως, ἕως νὰ διορισθῇ, ἀντὶ τίνος ἀριθμοῦ λαμβάνεται καθε ἓν ἀπὸ αὐτά·

β'.

Πῶς πολλαπλασιάζονται αἱ ἁπλαῖ ποσότητες, ἤτοι τὰ γράμματα, τὰ μὴ διὰ τῶν σημείων ($+$, καὶ $-$) συμπεπλεγμένα, (§. 44.) εἴπομεν. (§. 70.) αἱ συμπεπλεγμέναι ὅμως ποσότητες (§. 44.) πολλαπλασιάζονται οὕτως· ἐπειδὴ ἐκ τῶν δύω παραγόντων ὁ ἕνας ὀνομάζεται πολλαπλασιαςέος, ὁ δὲ ἄλλος πολλαπλασιαςὴς, (§. 56.) ἂς γραφοῦν α'· ὡς καὶ οἱ ἀριθμοὶ, οἱ μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιαζόμενοι· (§. 60.) εἶτα ἂς πολλαπλασιασθῇ καθε μέρος τοῦ πολλαπλασιαςοῦ, σιαστοῦ, ἂν ἦναι σύνθετος καὶ αὐτὸς, ἢ ὁ πολλαπλασιαστὴς μόνος, ἂν ἦναι ἁπλοῦς, μὲ καθε μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου· καὶ τῶν ἐν μέρει παραγομένων ὑπὸ τὴν γραμμὴν τεθέντων, θέλομεν ἔχει τὸ ὁλικὸν παραγόμενον· οἷον

$$\begin{array}{ll} 3\alpha + \beta & \text{ὁ πολλαπλασιαστέος} \\ \gamma & \text{ὁ πολλαπλασιαστής} \\ \hline 3\alpha\gamma + \beta\gamma. & \end{array}$$

τὸ γ πολλαπλασιασθὲν μὲ τὸ β δίδωσι $+ \beta\gamma$.
τὸ γ πολλαπλασ. μὲ τὸ 3α δίδ. $+ 3\alpha\gamma$.

Καὶ

$$\begin{array}{r} 3\alpha + \beta \\ 4\gamma + \delta \\ \hline 3\alpha\delta + \beta\delta \\ 12\alpha\gamma + 4\beta\gamma \\ \hline 12\alpha\gamma + 3\alpha\delta + \beta\delta + 4\beta\gamma \end{array}$$

τὸ δ πολλαπλασιασθὲν μὲ τὸ β δίδ. $+ \beta\delta$· τὸ δ πολλαπλ. μὲ τὸ 3α δίδ. $+ 3\alpha\delta$ τὸ 4γ. πολλαπλασ. μὲ τὸ β δίδωσι $+ 4\beta\gamma$· καὶ 4γ πολλ. μὲ τὸ 3α δίδ. $+ 12\alpha\gamma$. (§. 72).

Σχόλιον.

Ἡ ἀρχὴ τοῦ διὰ γραμμάτων πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ἀδιάφορος· διότι τὸ ἴδιον προκύπτει, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 4γ ἀρχόμεθα, ἢ ἀπὸ τοῦ δ. ὁμοίως ἀδιάφορος εἶναι καὶ ὁ ὑπὸ τὴν γραμμὴν τόπος καθε παραγομένου·

§. 75. Ει πρόκειται $3\alpha + \beta$ μετὰ τοῦ $4\gamma + \delta$ πολλαπλασιάσαι,

ληφθήσεται τὸ $3\alpha + \beta$, $4\gamma + \delta$: κις· ἐὰν α· τὸ $3\alpha + \beta$ λάβωμεν 4γ: κις, καὶ εἶτα δ: κις,

καὶ

καὶ τὰ ἐν μέρει παραγόμενα ἀλλήλοις συνάψωμεν· ὅθεν

$$(3\alpha + \beta)\cdot(4\gamma + \delta) = 12\,\alpha\gamma + 4\beta\gamma + 3\,\alpha\delta + \beta\delta.$$

ἔςωσαν $3\alpha + 2\beta + \delta$) οἱ παραγ.
$2\alpha + 3\gamma$)

$6\,\alpha\alpha + 4\,\alpha\beta + 2\,\alpha\delta$ τὸ παραγ. τὸ ἐκ τοῦ 2α·
καὶ $9\,\alpha\gamma + 6\beta\gamma + 3\,\gamma\delta$ τὸ ἐκ τοῦ 3γ·

ἄρα $6\,\alpha\alpha + 4\,\alpha\beta + 2\,\alpha\delta + 9\,\alpha\gamma + 6\beta\gamma + 3\,\gamma\delta$ τὸ ἐκ τοῦ $2\alpha + 3\gamma$.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ
μετὰ καταφατικῶν, καὶ ἀποφατικῶν ἀριθμῶν.

§. 76. Μέχρι τοῦδε παρελαμβάνοντο καταφατικοὶ ἄμφω οἱ παράγοντες, ὧν τὸ παραγόμενον πάντως καταφατικὸν προέκυπτε.

Ζητεῖται ἤδη, πότερον τὸ παραγόμενον καταφατικὸν, ἢ ἀποφατικὸν ἔσοιτο.

α΄· Ἐὰν τῶν παραγόντων ὁ μὲν καταφατικὸς, ὁδ' ἕτερος ἀποφατικὸς ἤ· καὶ

β΄· Ἐὰν ἄμφω οἱ παράγοντες ἀποφατικοὶ ὦσιν·

Ἐκτοῦ (§ 52.) δῆλον, ὅτι καταφατικός τις ἀριθμὸς, διηνεκῶς μονάδι ἀπομειούμενος, τελευταῖον γίνεται 0, καὶ μετὰ τοῦτο ἀποφατικός· εἰ οὖν ὁ ἕτερος τῶν δύω καταφατικῶν παραγόντων διηνεκῶς μονάδι ἐλαττονοῖτο, κατὰ τίνα νόμον τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον μεταβάλλεται, ἐπιτηροῦντες, ἀπταίςως ἐκκαλυψόμεν, πότερον καταφατικὸν τοῦτο σώζεται, ἢ γίνεται ἀπο ἀποφατικὸν, τοῦ μειουμένου παράγοντος ἐκ τοῦ καταφατικοῦ διὰ τοῦ ο εἰς τὸ ἀποφατικὸν διαβαίνοντος·

ἀλλὰ

$3 \times 4 = 12$	$3 \times 1 = 3$
$3 \times 3 = 9$	$3 \times 0 = 0$ (§. 69).
$3 \times 2 = 6$	

Ὁσάκις ἄρα ὁ μεταβλητὸς παράγων μονάδι μειοῦται, τοσάκις τὸ παραγόμενον ἐλαττοῦται κατὰ τὸν ἕτερον παράγοντα. (ἤτοι ἀναιροῦνται τοσαῦται μονάδες τοῦ παραγομένου, ὅσας ἔχει ὁ ἕτερος παράγων) κἀκείνου (τοῦ παράγοντος) ἴσου τοῦ ο γεγονότος, ἔςαι καὶ τοῦτο $=$ ο· ἔνθεντοι, ἐὰν ὁ μεταβλητὸς παράγων ἐλαττωθῇ μονάδι τοῦ ο, ἤτοι $-$ 1 γένηται, ἀνάγκη πᾶσα καὶ τὸ παραγόμενον κατὰ 3 ἔλαττον τοῦ ο, ἢ $-$ 3 γενέσθαι· καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου ἔςαι

$3 \times -1 = -3$	$3 \times -3 = -9$
$3 \times -2 = -6$	$3 \times -4 = -12$

ὡσαύτως καὶ ἐὰν τεθῇ ὁ ἕτερος παράγων 3 διηνεκῶς μονάδι ἀπομειούμενος, ἔςαι

$3 \times 4 = 12$	$1 \times 4 = 4$
$2 \times 4 = 8$	$0 \times 4 = 0$

Γίνεται ἄρα τὸ παραγόμενον ἔλαττον κατὰ τὸν παράγοντα 4, ὁσάκις ὁ ἕτερος παράγων μονάδι ἀπομειοῦται, καὶ αὖθις μετὰ τούτου ἴσου ο· καὶ ἑπομένως κατὰ 4 ἔλαττον τοῦ ο, ἢ $-$ 4, ὁσάκις ἐκεῖνος ὁ παράγων μονάδι ἐλάττων, ἢ $-$ 1 γίνεται· ἔνθεντοι ἔςαι

$-1 \times 4 = -4$	$-3 \times 4 = -12.$
$-2 \times 4 = -8$	$-4 \times 4 = -16.$

Καὶ ἐπειδὴ καθόλου πᾶν παραγόμενον αβ ἀεὶ τὸ κεφάλαιον τοσούτων β ἐςιν, ὅσας μονάδας περιέχει

τὸ

τὸ α, (§. 55.) γενήσεται αβ κατὰ β, 2β, 3β, 4β ἔλαττον, εἰ τὸ α μονάδι, δυάδι, τριάδι, τετράδι κτ' ἐλαττονοῖτο· ἄρα μετὰ τοῦ α ἴσον o, καὶ κατὰ β, 2β, 3β, 4β ἔλαττον τοῦ o, ἢ — β — 2β — 3β — 4β, τοῦ α γεγονότος ἐλάττονος τοῦ o, ἤτοι ἴσου — 1, — 2, — 3, — 4· ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ κανών.

Τῶν παραγόντων τοῦ μὲν καταφατικοῦ, τοῦ δ' ἀποφατικοῦ ὄντων, τὸ παραγόμενον ἀεὶ ἀποφατικὸν ἔςαι·

Ἐὰν τεθῇ ὁ μὲν τῶν παραγόντων ἀποφατικὸς, ὁ δ' ἕτερος καταφατικὸς, καὶ οὗτος (ὁ καταφ.) μονάδι ἀπομειῶται, ἔςαι

$-4 \times 5 = -20$	$-4 \times 2 = -8$
$-4 \times 4 = -16$	$-4 \times 1 = -4$
$-4 \times 3 = -12$	$-4 \times 0 = 0$

Καὶ τούτου κειμένου, τὸ παραγόμενον αὔξει ἄρα (§. 52.) κατὰ 4, ὁσάκις ὁ καταφατικὸς παράγων μονάδι ἀπομειοῦται· καὶ τούτου ἴσου τῷ o γεγονότος, ἔςαι καὶ τὸ παραγόμενον ἴσον o· εἰδ' οὗτος μονάδι ἐλάττων τοῦ o γένοιτο, ἢ — 1, τὸ παραγόμενον γενήσεται κατὰ 4 μεῖζον τοῦ o, ἢ + 4.

ἔνθεντοι ἔςαι

$-4 \times -1 = +4$	$-4 \times -4 = +16$
$-4 \times -2 = +8$	$-4 \times -5 = +20$
$-4 \times -3 = +12$	$-4 \times -6 = +24$

Καὶ ἐπεὶ ἐν γένει ἕκαςον ἀποφατικὸν παραγόμεμενον — αβ, ἀεὶ τὸ κεφάλαιον τοσούτων ἀποφατικῶν β ἐςιν, ὅσας μονάδας περιέχει τὸ α· (§. 55.) τὸ παραγόμενον — αβ γενήσεται μεῖζον κατὰ β, 2β, 3β, 4β, ὁσάκις τὸ α κατὰ 1, 2, 3, 4 μειοῦ-

ται

ται· καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου μετὰ τοῦ α ἴσον ο, καὶ κατὰ β. 2β, 3β. 4β μεῖζον τοῦ ο. ἢ + β, + 2 β, + 3 β, + 4 β, τοῦ α ἐλάττονος γεγονότος τοῦ ο, ἤτοι ἴσου — 1, — 2, — 3, — 4· ἐκ τούτου ἐπιφέρομεν τὸν κανόνα·

Δύω ἀποφατικοὶ παράγοντες ἀεὶ καταφατικὸν παράγουσι παραγόμενον.

§. 77. Εὐχερέςερον δὲ τῆς τοιαύτης ἂν ἐφικοίμεθα ἀληθείας, τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀποφατικοῦ ἀριθμοῦ τῇ ἐννοίᾳ τοῦ παράγοντος συνάπτοντες, ὡς ἕπεται·

Ὁ ἀποφατικὸς ἀριθμὸς σημαίνει ἀεὶ τὸ ἐναντίον τοῦ, ὅ ὡς καταφατικὸς σημαίνει· (§. 36.) ἀλλ' ὁ καταφατικὸς παράγων ἐμφαίνει, ποσάκις ὁ ἕτερος παράγων τῷ ο προσθετέος (§. 55.), ἵνα τὸ παραγόμενον τὸ ἐκ τούτων προέλθῃ·

Ὁ ἀποφατικὸς ἄρα παράγων δείξει, ποσάκις ὁ ἕτερος παράγων ἀπὸ τοῦ ο ἀφαιρετέος, ὥςε τὸ ἐκ τούτων προκύψαι παραγόμενον.

ὅθεν α'· $+ 4 \times + 3$ σημαίνει ὅτι $+ 4$ τρὶς τῷ ο προσθετέον· ὥςε $+ 4 \times + 3 = 0 + 4 + 4 + 4 = 12$·

καὶ $- 4 \times + 3$ σημαίνει, ὅτι $- 4$ τρὶς τῷ ο προσθ: ὥςε $- 4 \times + 3 = 0 - 4 - 4 - 4 = - 12$.

β'· $+ 4 \times - 3$ .... $+ 4$ τρὶς ἀπὸ τοῦ ο ἀφαιρετέον. ὥςε $+ 4 \times - 3 = 0 - 4 - 4 - 4 = - 12$.

καὶ $- 4 \times - 3$ .... $- 4$ τρὶς ἀπὸ τοῦ ο ἀφαιρετέον· ὥςε $- 4 \times - 3 = 0 + 4 + 4 + 4 = + 12$.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ οὖν τοῦτο ἑκάστοις δύω παράγουσιν, ὡς ἐνταῦθα τῷ 4 καὶ 3 ἐφαρμόζει, ἐποίσομεν καθόλου, ὅτι δύω παράγοντες τοῖς αὐτοῖς ἐπισημειούμενοι σημείοις (+ καὶ +) ἢ (− καὶ −), καταφατικὸν, ἐναντίως δὲ ἔχουσι τοῖς σημείοις (+ καὶ −) ἢ (− καὶ +) ἀποφατικὸν παρέχουσι παραγόμενον·

Ὅθεν $(3\alpha - \beta) \times 4\gamma = 12\alpha\gamma - 4\beta\gamma$·

$(3\alpha - 5\beta) \times -2\gamma = -6\alpha\gamma + 10\beta\gamma$

Καὶ

$$\begin{array}{ll} 3\alpha - 2\beta \\ 5\alpha - 6\beta \end{array} \Big\} \text{ οἱ παράγ.}$$

$$\begin{array}{ll}
15\alpha\alpha - 10\alpha\beta & \text{τὸ παραγόμ. ἐκ τοῦ } + 5\alpha \\
\quad - 18\alpha\beta + 12\beta\beta & \text{τὸ ἐκ τοῦ } - 6\beta\text{·} \\
\hline
\text{ὥστε } 15\alpha\alpha - 28\alpha\beta + 12\beta\beta & \text{τὸ ἐκ τοῦ } + 5\alpha - 6\beta\text{·}
\end{array}$$

Καὶ $$\begin{array}{ll} 3\alpha + 4\beta \\ 2\alpha - 7\beta \end{array} \Big\} \text{ οἱ παράγ.}$$

$$\begin{array}{l}
6\alpha\alpha + 8\alpha\beta \\
\quad - 21\alpha\beta - 28\beta\beta \\
\hline
6\alpha\alpha - 13\alpha\beta - 28\beta\beta \quad \text{τὸ παραγ·}
\end{array}$$

Τελευταῖον·

$$\begin{array}{l} 3\alpha + 2\beta - 4\delta \\ 3\alpha - 2\beta + 4\delta \end{array} \Big\} \text{ οἱ παράγοντ.}$$

$$\begin{array}{l}
9\alpha\alpha + 6\alpha\beta - 12\alpha\delta \\
-6\alpha\beta - 4\beta\beta + 8\beta\delta \\
12\alpha\delta + 8\beta\delta - 16\delta\delta \\
\hline
9\alpha\alpha - 4\beta\beta + 16\beta\delta - 16\delta\delta. \quad \text{τὸ παραγόμ.}
\end{array}$$

Σχόλ.

Σχόλιον εἰς μείζω ἀνάπτυξιν τῶν δύω κανόνων τοῦ §. 76.

δ' τρόποι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀπαντῶσι μὲ σημεῖα. ἤτοι + μὲ +, ἢ + μὲ —, ἢ — μὲ +, ἢ — μὲ —.

α' + μὲ + δίδει ἀναμφιβόλως παραγόμενον +· εἰ δέοι + 4 μὲ + 4 πολλαπλασιάσαι, τοῦτο ἐξ ἀνάγκης δώσει + 16. διότι τοῦτο σημαίνει τὸ + 4 νὰ ληφθῇ τετράκις θετικῶς· ὥςε καὶ + α μὲ + β δίδει αβ, ἢ + αβ· (§. 38. σχ.)

β' + μὲ — δώσει παραγόμενον —· διότι ἡ ποσότης τότε πρέπει νὰ ληφθῇ οὐχὶ θετικῶς, ἀλλὰ τὸ ἐναντίον, ἤτοι ἀποφατικῶς τοσάκις, ὁσάκις ζητεῖ ὁ ἕτερος παράγων· τοῦτο δὲ πάντη εὔδηλον· οἷον + 6 μὲ — 2 πολλαπλασιάσαι δηλοῖ τὸ, πρέπει νὰ ληφθῇ τὸ + 6 οὐχὶ δὶς θετικῶς, ἀλλ' ἐν ἀντικειμένῃ ἐννοίᾳ, ἤτοι δὶς ἀποφατικῶς.

γ' Καὶ — μὲ + παραγόμενον παρέχει —· ὡς — α μὲ + 3 πολλαπλ. = — 3 α· διότι ἂν θεωρηθῇ τὸ — α, ὡς χρέος, (§. 36.) εἶναι φανερὸν, ὅτι, ἂν τοῦτο τὸ χρέος ληφθῇ τρὶς, ἀναγκαίως πρέπει νὰ αὐξηθῇ κατὰ τὸ τριπλοῦν· ὥςε τὸ ζητούμενον παραγόμενον ἔςαι — 3 α· ἐντεῦθεν ὁ κανὼν (§. 76.)

δ' — μὲ — δίδει παραγόμενον +· τὸ παραγόμενον πρέπει νὰ ἔχῃ πρὸ ἑαυτοῦ ἢ τὸ +, ἢ τὸ —· τὸ — δὲν ἠμπορεῖ νὰ τὸ ἔχῃ· ὅτι — α μετὰ τοῦ β πολλαπλ. δίδωσιν — αβ· (γ') ὥςε — α μὲ — β πολλαπλασιασθὲν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ, ἤτοι τὸ —· ἄρα τὸ παραγόμενον ἔςαι + αβ· ὅθεν δήλη τοῦ β' κανόνος ἡ ἀλήθεια (§. 76.) ἓν παράδειγμα σαφηνίσει τὸ λεγόμενον· ἐάν τις χρεωςῇ 10 δραχμὰς, τὸ χρέος θεωρηθήτω ὡς ἀποφατικὸν, καὶ ἔςαι = — 10· ταύτας τὰς — 10 πολλαπλασιάσαι μὲ — 4 δὲν δηλοῖ τὸ, τετράκις αὐτὰς αὐξη-

αὐξῆσαι, (διότι τοῦτο ἔπρεπε νὰ γένῃ μὲ τὸ + 4) ἀλλὰ τὸ, τὸ χρέος νὰ μὴ πληρωθῇ τετράκις· ὥςε ἐκ τούτου ἕξει + 40.

§. 78. Φιλοῦσιν οἱ Μαθηματικοὶ τὰ παραγόμενα, εἴπερ ἐγχωρεῖ, ἐπιτομώτερον γράφειν· ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ γὰρ, εἰ δίοι τὰς καθόλου ποσότητας (τὰ γράμματα) εἰς ἀριθμοὺς μεταβαλεῖν, οὐ μικρὰν τοῦτο τὴν ὄνησιν παρέχεται· τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν πᾶσιν, ἢ ἔντισι μόνον μέλεσιν ἓν, ἢ πλείω τὰ αὐτὰ γράμματα, ἢ παράγοντες ἐνυπάρχωσι· τότε γὰρ λαμβάνεται τοῦτο τὸ γράμμα, ἢ οἱ παράγοντες οἱ κοινοὶ ὄντες ταῖς ποσότησιν, εἰς γενικὸν παράγοντα, τῶν ποσοτήτων τῶν διὰ τούτου πολλαπλασιασθησομένων ἐν παρενθέσει ἐναπολαμβανομένων, αὐτοῦ δὲ πρὸ, ἢ μετὰ τὸ τῆς παρενθέσεως σημεῖον τιθεμένου· π. χ.

αα — 3 αβ γραφείη ἂν καὶ οὕτως (α — 3 β) α· πολλαπλασιάσας γὰρ τὸν κοινὸν παράγοντα α μετὰ τοῦ α — 3 β, ἕξεις αα — 3 αβ. (§. 74.)

Ὡσαύτως καὶ τὸ ααβδ + 2 ααββ — 5 αβδ οὕτως ἐπιτομώτερον ἐκδηλώσομεν (αδ + 2 αβ — 5 δ) αβ· τὸ γὰρ α καὶ β εἰσὶ κοινοὶ παράγοντες καὶ τῶν τριῶν ὅρων· ὥςε ἐὰν ἐνεργείᾳ πολλαπλασιασθῶσι, (§. 74.) προκύψει αὖθις τὸ ααβδ + 2 ααββ — 5 αβδ.

Σχόλιον.

Τὰς τοιαύτας ἐπιτομὰς τὰς μανθάνομεν δι᾽ ἐπιμελοῦς ἀσκήσεως, καὶ ἀναγνώσεως Ἀλγεβραϊκῶν βιβλίων.

Ἀξιώματα·

§. 79. α΄. Αἱ ἴσαι ποσότητες δι᾽ ἴσων πολλαπλασιασθεῖσαι παράγουσιν ἴσα παραγόμενα· π. χ· α = β· τῷ ν πολλαπλασ. ἄμφω ἔσονται αν = βν· ἢ 3 X 4 = 2 X 6· ὥςε καὶ 3 X 4 X 5 = 2 X 6 X 5.

β·

β' Ἴσαι ποσότητες δὶ ἀνίσων πολλαπλασιασθεῖσαι παράγουσιν ἄνισα παραγόμενα· καὶ ὁ μείζων πολλαπλασιασθεὶς παρέξει μεῖζον παραγόμενον, ἢ ὁ ἐλάττων· ὡς $\alpha = \beta$· $\nu > \mu$. $\alpha\nu > \beta\mu$· $3 \times 4 = 2 \times 6$· $4 > 3$· $3 \times 4 \times 4 > 2 \times 6 \times 3$.

γ' Ἐὰν δύω ἀνίσων ποσοτήτων ἡ μείζων μείζονι ἀριθμῷ πολλαπλασιασθῇ, ἢ ἡ ἐλάσσων, ἐκείνη πολλῷ μείζων ταύτης γενήσεται· οἷον $\alpha > \beta$. $\gamma > \delta$· $\alpha\gamma > \beta\delta$· $5 > 4$· $6 > 5$· $5 \times 6 > 4 \times 5$.

§. 80. Δύω παραγόντων ὁποιωνοῦν δοθέντων, ὡς τοῦ 3212, καὶ 4, τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον 12848 εὑρεθήσεται κατὰ τὰ ἤδη ῥηθέντα· οὐκ ὀλιγάκις δὲ συμβαίνει τὸ παραγόμενον μετὰ τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων γνωστὰ εἶναι· οἷον τὸ, 12848 καὶ 3212, τὸν δ' ἕτερον παράγοντα 4 ζητεῖσθαι·

Γραφήτωσαν αὖθις 5. σημεῖα τρίς, καὶ 7 σημεῖα τετράκις ὑπάλληλα οὕτω·

. . . .
. . . .
. . . .
              . . . .

τὰ μὲν οὖν 15 σημεῖα τὸ ἐκ τοῦ 3 καὶ 5 παριστῶσι παραγόμενον· τὰ δὲ 28 τὸ ἐκ τοῦ 4 καὶ 7.

Ἔστι δὲ ἐν τῷ παραγομένῳ 15 προφανῶς ὁ παράγων 5 τρὶς, ὁ δὲ 3 πεντάκις περιεχόμενος· ἢ ὁ παράγων 5 ἐστὶ τὸ τρίτον, ὁ δὲ 3 τὸ πέμπτον μέρος αὐτοῦ· ὡσαύτως καὶ ἐν τῷ παραγομένῳ 28 ὁ παράγων 7 περιέχεται τετράκις, ὁ δὲ 4 ἑπτάκις· ἢ ὁ 7 ἐστὶ τὸ τέταρτον μέρος, ὁ δὲ 4 τὸ ζ' αὐτοῦ·

Καὶ ἐὰν 3212 σημεῖα τετράκις ὑπάλληλα ταχθῶσι, 12848 σ μεῖα τὸ ἐκ τοῦ 3212 καὶ 4 δηλώσουσι παραγόμενον· ὥστε αὖθις ἐν τῷ παραγομένῳ 12848 ὁ παράγων 3212 περιέχεται τετράκις, ὁ δὲ, 4, 3212: κις·

ὁ ἕτερος ἄρα τῶν παραγόντων τοσάκις περιέχεται ἐν τῷ παραγομένῳ, ὁσάκις ὁ ἕτερος δεικνύει·

Ἐὰν οὖν τὸ παραγόμενον, καὶ ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων δεδομένοι ὦσιν, ὁ δ' ἕτερος ζητηθῆναι πρόκειται, εὑρεθήτω ἀριθμὸς, ὁ τοσάκις ἐν τῷ παραγομένῳ περιεχόμενος, ὁσάκις ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων δεικνύει, ἢ διορισθήτω δι' ἀριθμοῦ, ποσάκις τὸ δοθὲν παραγόμενον τὸν δοθέντα περιέχει παράγοντα· τοῦτο δὲ γενήσεται, ἀφαιρουμένου τοῦ δοθέντος παράγοντος ἀπὸ τοῦ δοθέντος παραγομένου, μέχρις ἂν τοῦτο ἐκκενωθῇ.

Ἔςιν οὖν ἐν τῷ προτεθέντι παραδείγματι

α'	12848	)	τὸ δοθὲν κεφάλαιον
	3212	)	ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς
	9636		ἡ διαφορά·
β'	9636	)	τὸ δ. κ.
	3212	)	ὁ δ. ἀρ.
	6424		ἡ διαφ.
γ'	6424	)	τὸ δ. κ.
	3212	)	ὁ δ. ἀρ.
	3212		ἡ διαφ.
δ'	3212	)	τὸ δ. κ.
	3212	)	ὁ δ. ἀρ.
	0000		ἡ διαφ.

Ἐπεὶ οὖν ὁ δοθεὶς παράγων 3212, 4: κις ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ τοῦ δοθέντος παραγομένου 12848 παντάπασι τοῦτο ἐξεκένωσεν, ἔςι τὸ δ' μέρος τούτου, ἢ ἐμπεριέχεται τούτῳ τετράκις· ὥςε 4 ἔςιν ὁ ζητούμενος παράγων, ὃς ὡσαύτως 3212: κις ἐν τῷ παραγομένῳ 12848 περιέχεται· ἔςιν ἄρα ἡ διαίρεσις, περὶ ἧς αὐτίκα ειρήσεται, ἐπανειλημμένη ἀφαίρεσις, ὡς

καὶ

καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπανειλημμένη πρόσθεσις. (§. 54.)

§. 81. Τῆς (§. ἀνωτ.) μεθόδου διεξοδικωτάτης οὔσης, ὅτε ὁ δοθεὶς παράγων πολλάκις τῷ παραγομένῳ ἐμπεριέχεται, ὅπως αὕτη ἐπιτέμνεται, ὀψόμεθα ἤδη.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

§. 82. Διαίρεσις ἐςὶν ἐκ τοῦ δοθέντος παραγομένου δύω παραγόντων, καὶ τοῦ ἑτέρου τούτων τῶν παραγόντων, τὸν ἕτερον εὑρεῖν·

Ἔςω διαιρετέος ὁ 12 διὰ τοῦ 4· τοῦτο δ' ἐςιν, ἔςω ὁ 12 τὸ παραγόμενον δύω παραγόντων, καὶ ὁ 4 ὁ ἕτερος τούτων· ὁδ' ἕτερος πρόκειται εἰς εὕρεσιν· ζητεῖται οὖν, ποσάκις ὁ 12 περιέχει τὸν 4· ἢ, ὅ ταὐτὸν ἐςι, τίς τῶν ἀριθμῶν περιέχεται ἐν τῷ 12 τετράκις· δῆλον, ὅτι ὁ ἀριθμὸς, 3· ὅτι 4 $\times$ 3 $=$ 12.

Τὸ δοθὲν παραγόμενον 12 καλεῖται διαιρετέος· ὁ δοθεὶς παράγων 4. διαιρέτης· ὁ δὲ ζητούμενος παράγων 3, πηλίκον·

§. 83. Ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος δι' ἑτέρου δείκνυται τῷ σημείῳ (:), τῷ μεταξὺ τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιρέτου παρεντιθεμένῳ· ὡς 12 : 4 $=$ 3. ἀπαγγέλλεται δὲ οὕτω· 12 διαιρεθὲν διὰ 4 ἐςὶν ἴσον 3· ἢ 4 περιέχεται ἐν τῷ 12, τρίς·

§. 84. Ἐὰν ὁ διαιρετέος τὸ παραγόμενον ᾖ ἐκ δύω ἁπλῶν παραγόντων, ῥαδίως ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων εὑρεθήσεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρου πίνακος, (§. 59.), τοῦ ἑτέρου δοθέντος·

Οὕτω ῥάδιον συνιδεῖν, ὅτι

12 : 4

$12 : 4 = 3$		$63 : 9 = 7$
$27 : 9 = 3$		$49 : 7 = 7$
$45 : 9 = 5$		$56 : 8 = 7$

Σχόλιον.

Ἐὰν διαιρετέος, καὶ διαιρέτης ᾖ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ἢ ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῆται δι᾽ ἑαυτοῦ, τὸ πηλίκον ἔςαι 1. εὔληπτον γὰρ, ὅτι κάθε ἀριθμὸς περιέχεται εἰς τὸν ἑαυτόντου ἅπαξ· οὕτω π. χ. ἔςαι $\frac{3}{3} = 1$· $\frac{aaa}{aaa} = 1$, κτ· ἀλλὰ καὶ τὸ μηδὲν διαιρεθὲν διὰ τοῦ μηδενὸς, ἢ $\frac{0}{0}$ εἶναι $= 1$· τὸ γὰρ μηδὲν περιέχει τὸ μηδὲν ἅπαξ· καὶ ἐὰν ὁ ἕτερος παράγων ἦναι $= 0$. ἔςαι καὶ τὸ παραγόμενον $= 0$· ὅθεν τὸ 0 ἂν διαιρεθῇ δι᾽ ὁποιουοῦν ἀριθμοῦ δίδωσι πάλιν πηλίκον 0· ὡς

$0 : 4 = 0$		$0 : 100 = 0$
$0 : 8 = 0$		$0 : 1000 = 0$ κτ·

§. 85. Εἰ δέοι 3 διὰ 4 διελεῖν, ἡ 1 ἐν τῷ πηλίκῳ ἐςὶν ὡς μεγίςη. (ἤτοι τὸ πηλίκον οὐκ ἂν εἴη μονάς)· ὅτι $4 \times 1 = 4$· καὶ 0 ἐςὶ πάνυ βραχύ· ὅτι $4 \times 0 = 0$· (§. 69.) τὸ οὖν πηλίκον, ὃ 4: κις ληφθὲν 3 δώσει, ἐςὶ μεῖζον τοῦ 0, καὶ ἔλαττον τῆς 1.

Ἀλλὰ χαρακτῆρες, δι᾽ ὧν τοὺς μεταξὺ 0 καὶ 1 κειμένους ἀριθμοὺς ἐκδηλώσομεν, ἡμῖν οὐχ ὑπάρχουσιν· ἀναγκαῖον ἄρα πάντη ἑτέρους χαρακτῆρας ἐπινοῆσαι εἰς παράςασιν τῶν τοιούτων πηλίκων, ἢ διορίσαι, ὅπως ταῦτα τοῖς παραληφθεῖσι, καὶ ἐν χρήσει οὖσι χαρακτῆρσιν ἐξενεχθήσονται· ἔδοξεν οὖν τοῖς Μαθηματικοῖς, ὥςε τὰ τοιαῦτα τῶν πηλίκων ἐμφαίνειν, τὸν διαιρέτην ὑπὸ τὸν διαιρετέον γράφοντας διὰ γραμμῆς ἀλλήλων διαςέλλειν· ὡς ($\frac{3}{4}$). τὸ οὖν $\frac{3}{4}$ σημαίνει τὸ προκύπτον πηλίκον, ἐὰν ὁ 3 διαιρεθῇ διὰ τοῦ 4, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν, ὅς 4: κις ληφθεὶς τὸν 3 παράξει·

ὡσαύτως καὶ $5 : 6 = \frac{5}{6}$ || $9 : 11 = \frac{9}{11}$

$7 : 10 = \frac{7}{10}$ || $9 : 13 = \frac{9}{13}$

ὅθεν αὖθις καὶ

$$\frac{5}{6} \times 6 = 5$$
$$\frac{7}{10} \times 10 = 7$$
$$\frac{9}{11} \times 11 = 9$$
$$\frac{9}{13} \times 13 = 9, \text{ κτ·}$$

Σχόλιον.

Τὰ τέτοια πηλίκα ὀνομάζονται κλάσματα, ἢ ἀριθμοὶ κεκλασμένοι, (περὶ ὧν κατωτέρω) καὶ ἀπαγγέλλονται οὕτω

$\frac{3}{4}$ τρία τεταρτημόρια, ἢ τρία τέταρτα· ἢ 3 διαιρεθ. διὰ 4·

$\frac{5}{6}$ πέντε ἑκτημόρια, ἢ πέντε ἕκτα, ἢ 5 διαιρεθ. διὰ 6. κτ.

§. 86. Προκειμένου τοῦ 8 διὰ τοῦ 3 διαιρεθῆναι, ἔςαι αὖθις τὸ πηλίκον μεῖζον τοῦ 2, καὶ ἔλαττον τοῦ 3· ὅτι $3 \times 2 = 6$· καὶ $3 \times 3 = 9$· ὅθεν λέγεται· 3 περιέχεται ἐν τῷ 8 δὶς, ὑπολειπομένου καὶ 2· ἢ 3 ἐςὶν ἐν τῷ 8 (2 καὶ $\frac{2}{3}$): ις περιεχόμενον· ἢ

$8 : 3 = 2\frac{2}{3}$ || $3 : 2 = 1\frac{1}{2}$

$9 : 4 = 2\frac{1}{4}$ || $29 : 6 = 4\frac{5}{6}$

$11 : 4 = 2\frac{3}{4}$ || $38 : 7 = 5\frac{3}{7}$

ὅτι $\frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{3} = 2$· καὶ $2 \times 3 = 6$· ὥςε $2\frac{2}{3} \times 3 = 8$·

ὡσαύτως καὶ

$$2\frac{1}{4} \times 4 = 9$$
$$2\frac{3}{4} \times 4 = 11$$
$$1\frac{1}{2} \times 2 = 3$$
$$4\frac{5}{6} \times 6 = 29$$
$$5\frac{3}{7} \times 7 = 38$$

Σχόλιον.

Ἐὰν συμβῇ εἰς τὸ πηλίκον ὑπολείπηται καὶ λεί-ψανον, ψκνον, γίνεται τοῦτο διαιρετέος, καὶ ὁ διαιρέτης ὑπογράφεται εἰς τὴν γραμμὴν, καὶ προσκοτᾶται τῷ πηλίκῳ· ἐν τῷ περὶ κλασμάτων θέλουν ἀναπτυχθῇ ταῦτα σαφέςερον·

§. 87.

αὖθις	8000 : 2 = 4000.	ἔςι γὰρ	4000 × 2 = 8000
	600 : 2 = 300	- -	300 × 2 = 600
	40 : 2 = 20	- -	20 × 2 = 40
	8 : 2 = 4	- -	4 × 2 = 8

Ἐὰν ἄρα χιλιάδες, ἑκατοντάδες, δεκάδες, ἢ μονάδες δι᾽ ἁπλῶν ἀριθμῶν διαιρῶνται, προκύψουσι καὶ ἐν τῷ πηλίκῳ χιλιάδες, ἑκατοντάδες, δεκάδες, ἢ μονάδες·

Ἔνθεντοι ἔςαι 8648 : 2 = 4324.

Ἐπειδὴ γὰρ 2 ἐν 8000, 4000 : κις, ἐν 600, 300 : κις· ἐν 40, 20 : κις· καὶ ἐν 8, 4 : κις περιέχεται, ἔςαι καὶ 2 ἐν 8648, 4324 : κις περιεχόμενον· ἄρα 4324 ἐςὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον· ἐὰν οὖν ὁ διαιρετέος ἐκ μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, κτ᾽ συγκροτῆται, ὁ δὲ διαιρέτης ἁπλοῦς ἀριθμὸς ᾖ, εὑρήσομεν τὸ πηλίκον, ζητοῦντες α᾽ τὸ ἐν μέρει πηλίκον τοῦ ἀνωτάτου χαρακτῆρος, εἶτα τοῦ ἐγγὺς κατωτέρου, καὶ μετ᾽ αὐτὸ τοῦ ἑπομένου, κτ᾽ τοῦτο δὲ οὕτως ἐκπληρώσομεν συντόμως·

8 : 2	δίδωσι	4	‖	4 : 2	δίδωσι	2
6 : 2	—	3	‖	8 : 2	—	4

ὡσαύτως καὶ 864 : 2 = 432

2644 : 2 = 1322 κτ᾽

§. 88. Ἐὰν τόποις τισὶ τοῦ διαιρετέου μηδενικὰ προσῇ, ἐπεὶ οὐδὲν διαιρετέον ἐν τούτοις πάρεςι, τοὺς ὁμοειδεῖς τόπους τοῦ πηλίκου αὖθις τῷ 0 ἐπισημειώσομεν·

ὡς	80004 : 4	=	20001	
ὅτι	8 : 4	δίδωσι	2	
	0 : 4	-	0	(§. 84. σχ.)
	0 : 4	-	0	
	0 : 4	-	0	
	4 : 4	-	1	(§. αὐτ.)

§. 89. Εἰ δέοι 9856 διὰ 2 διαιρεθῆναι, ἔςαι 9856 : 2. = 4928.

Ἐπειδὴ γὰρ τὸ πηλίκον (9 : 2) δι' οὐδενὸς ὁλοσχερούς ἀριθμοῦ ἐκδηλῶσαι ἔχομεν, διαιροῦμεν μόνον 8, τιθέντες, ἀντὶ τῆς ὑπολειφθείσης 1, καὶ μὴ διαιρεθείσης, εἰς τὸν ἐγγὺς ὑποδεέςερον τόπον 10 μονάδας, ὥςε ἐν τῷ ἑπομένῳ τόπῳ ἀντὶ 8, 18 ἤδη μονάδας εἰς διαίρεσιν προκεῖσθαι· καὶ ἐπειδὴ ὁ 5 διὰ 2 οὐ διαιρέσιμος, διαιρεθέντος μόνον τοῦ 4, γράφονται ἀντὶ 6, τοῦ ἐν τῷ ἑπομένῳ τόπῳ, 16·

ὅτι	9 : 2	δίδωσι	4,	καὶ 1 εἰς λείψανον·
	18 : 2	-	9,	
	5 : 2	-	2,	καὶ 1 εἰς λ.
καὶ	16 : 2	-	8.	

Ὁσάκις ἄρα ἔντινι τόπῳ τοῦ διαιρετέου λείψανον ὑπολείπηται, τὸ 10 : πλοῦν τούτου προσαριθμητέον τῷ ἐγγὺς κατωτέρῳ τόπῳ· καὶ ἐὰν ἔντινι τόπῳ ὁ διαιρετέος ἀριθμὸς ἐλάττων ᾖ τοῦ διαιρέτου, ὁ ὁμοειδὴς τόπος τοῦ πηλίκου σημειωθήσεται μετὰ τοῦ 0, καὶ τὸ 10 : πλοῦν τούτου τοῦ ἀριθμοῦ αὖθις τῷ ἐγγὺς ὑποδεεςέρῳ τόπῳ προσαριθμηθήσεται· οὕτως 8401218 : 6 = 1400203·

ὅτι	8 : 6	δίδωσιν	1,	καὶ 2 εἰς λείψανον·
	24 : 6	-	4	
	0 : 6	-	0	
	1 : 6	-	0,	καὶ 1 εἰς λείψ.

	12 : 6	-	2
	1 : 6	-	0, καὶ 1 εἰς λεῖψ.
καὶ	18 : 6	-	3, ἄνευ λειψάνου.

§. 90. Ἐὰν ὁ ἀνώτατος χαρακτὴρ τοῦ διαιρετέου ἐλάττων ἢ τοῦ διαιρέτου, οὐκ ἀναγκαῖον τὸ τιθέναι εἰς τὸ πηλίκον τὸ 0· τοῦτο γὰρ πρὸ τῶν χαρακτήρων τεθὲν οὔτε τὸν τύπον, οὔτε τὴν δύναμιν αὐτῶν μεταβάλλει· ὅθεν συνάπτοντες αὐτὸν τῷ ἐγγὺς κατωτέρῳ ἀριθμῷ διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου·

3489561 : 9 = 387729
ὅτι 34 : 9 δίδωσι 3, καὶ 7 εἰς λεῖψ. κτ·

§. 91. Ἔστω 149 διὰ 42 διαιρετέον· καὶ ἐπειδὴ 42 μήτε ἐν τῇ 1, μήτε ἐν τῷ 14, ἀλλ' ἐν τῷ 149 περιέχεται, τὸ πηλίκον οὔτ' ἐξ ἑκατοντάδων, οὔτ' ἐκ δεκάδων, ἀλλ' ἐκ μονάδων συσήσεται· Ζητεῖται οὖν, ποσάκις ὁ 42 περιέχεται ἐν 149· ὅπερ δῆλον ἡμῖν γενήσεται, εἰ τῶν κατωτάτων χαρακτήρων τοῦ διαιρέτου, καὶ διαιρετέου μηδένα λόγον ποιούμενοι ἐρευνῶμεν, ποσάκις 40 περιέχεται ἐν 140, ἢ αἱ 4 δεκάδες ἐν 14 δεκάσιν, ἢ 4 ἐν 14 ἁπλῶς· προφανὲς οὖν, ὅτι ὁ 4 ἐν 14· ἀλλὰ καὶ αἱ 4 δεκάδες ἐν 14 δ' ἢ 40 ἐν 140 περιέχεται τρίς. τοῦ 3 τοίνυν εἰς τὸ πηλίκον τεθέντος, καὶ τοῦ διαιρέτου 42, τρὶς ληφθέντος = 126 ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 149 ἀφαιρεθέντος, εὑρήσομεν 23 εἰς λεῖψανον, ὃ ἔτι διὰ 42 διαιρεθὲν δώσει πηλίκον $\frac{23}{42}$ ὡς

$$\begin{array}{l} 149 : 42 = 3\frac{23}{42} \\ \underline{126} \\ 23 \end{array}$$

Λέγουσι 4 ἐν 14 περιέχεται τρίς· 3 X 2 = 6· 3 X 4 = 12· 6 ἀφαιρεθὲν ἀπὸ 9 ὑπολείπει 3· 2 ἀπὸ 4 ὑπολ. 2· καὶ 1 ἀπὸ 1 οὐδὲν ὑπολείπει· ὅθεν τὸ ζητούμενον πηλίκον 3 $\frac{23}{42}$·

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ οὖν 149 μονάδες, διὰ 42 διαιρεθεῖσαι, παρέσχον 3 μονάδας ἐν τῷ πηλίκῳ, καὶ 23 μονάδας εἰς λείψανον, καὶ 149 δεκάδες, διὰ 42 διαιρεθεῖσαι, δώσουσιν ἐν τῷ πηλίκῳ 3 δεκάδας, καὶ 23 δεκάδας εἰς λείψ. καὶ 149 ἑκατοντάδες, διὰ 42 διαιρ: 3 ἑκατ' ἐν τῷ π. καὶ 23 ἑκ. εἰς λ. καὶ 149 χιλ' διὰ 42 διαιρ. 3 χιλ' ἐν τῷ π. καὶ 23 χ. εἰς λείψ. κτ' εἴτε γὰρ μονάδας, εἴτε δεκάδας, εἴτε ἑκατοντ' εἴτε χιλ' σημαίνει ὁ 149, ἀεὶ τὸ πηλίκον $3\frac{23}{42}$ ἔςαι τὸ 42: ον μέρος τούτου, καὶ σημανεῖ ἄρα ἤτοι μονάδας, ἢ δ. ἢ ἑκ. ἢ χ.

Ἔςω αὖθις 7108608 : 832 = 8544.

	6656
ἑκατοντ.	4526
	4160
δεκάδες	3660
	3328
μονάδες	3328
	3328
	0

α' γὰρ 7108 χιλιάδες διὰ 832 διαιρεθεῖσαι διδοῦσιν 8 χιλιάδας ἐν τῷ πηλίκῳ, καὶ 452 χιλιάδας, ἢ 4520 ἑκατοντάδας εἰς λείψ.

β' 4526 ἑκατοντ. διὰ 832 διαιρ. διδοῦσι 5 ἑκατ. ἐν τῷ πηλ. καὶ 366 ἑκατ. ἢ 3660 δεκάδας εἰς λείψ.

γ' 3660 δεκ. διὰ 832 διαιρ. διδ. 4 δεκ. ἐν τῷ π. καὶ 332 δεκ. ἢ 3320 μονάδας εἰς λείψ. καὶ

δ' 3328 μον. διὰ 832 διαιρ. δ. 4 μον. ἐν τῷ π. ἄνευ λειψάνου.

Τούτῳ

Τούτῳ τῷ τρόπῳ ἀφῃρέθησαν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 7108608.

α'·	832	X	8000 =	6656000	
β'·	832	X	500 =	416000	
γ'·	832	X	40 =	33280	
δ'·	832	X	4 =	3328·	ὥςε

ἐν γένει 832 X 8544 = 7108608. ὅπερ τὸν διαιρετέον ἐκκενοῖ· καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου 8544 ἐςὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον.

§. 92. Ἐὰν ἄρα ἐξ ὁποιουοῦν δοθέντος διαιρετέου τοσοῦτοι τῶν ἀνωτάτων χαρακτήρων αὐτοῦ λαμβάνωνται, ὅσοι ἀναγκαῖοι εἰς τὸ τὸν διαιρέτην περιέχειν, ἕξομεν τὸν α'· ἐν μέρει διαιρετέον, ὅς διὰ τοῦ διαιρέτου διαιρεθεὶς παρέξει ἐν τῷ πηλίκῳ τὸν ἀνώτατον χαρακτῆρα, ὁμοειδῆ ἀεὶ ὄντα τῷ κατωτάτῳ χαρακτῆρι τοῦ ἐν μέρει διαιρετέου.

Καταχθέντος δ' εἶτα μετὰ τὸ λείψανον καὶ τοῦ ἐγγὺς κατωτέρου χαρακτῆρος τοῦ ὁλικοῦ διαιρετέου, ἀναφανήσεται ὁ β'· ἐν μέρει διαιρετέος, ὅς διαιρεθεὶς αὖθις ἐν τῷ πηλίκῳ χαρακτῆρα δώσει, ὁμοειδῆ τῷ ἐσχάτῳ χαρακτῆρι αὐτοῦ, εἰς τὸν ἐγγὺς κατώτερον τόπον τοῦ ἤδη εὑρεθέντος χαρακτῆρος τοῦ πηλίκου ἀνήκοντα· καὶ οὕτως εὑρεθήσονται οἱ χαρακτῆρες τοῦ πηλίκου μετ' εὐχερείας ἐφεξῆς ἀπὸ τοῦ ἀνωτάτου μέχρι τοῦ κατωτάτου, καταρχὰς μόνον εἰς τὸν ἀνώτατον χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου βλέπουσιν· οὕτω καὶ

2879793546 : 8029 = 358674
24087

β' διαιρετ. 47109
40145

γ' διαιρετέος 69443
64232

δ', διαιρετέος 54115
48174

ε'. διαιρετέος 59414
56203

ϛ' διαιρετέος 32116
32116

0

§. 93. Ἐάντις τῶν ἐν μέρει διαιρετέων ἐλάττων ᾖ, ἢ ὁ διαιρέτης, ὡς τούτου ἐκείνῳ μὴ ἐμπεριεχομένου, ὁ ὁμοειδὴς τόπος τοῦ πηλίκου τῷ 0 σημειωθήτω, καὶ τοῦ ἑπομένου χαρακτῆρος τοῦ ὁλικοῦ διαιρετέου καταχθέντος, γενέσθω ἡ πρᾶξις, ὡς σύνηθες.

οἷον 170594208 : 8402 = 20304
16804

25542
25206

33608
33600

0

§. 94. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις τῶν χαρακτήρων ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριϛερὰ κατὰ τὸ δεκαπλοῦν αὔξονται, ἕκαϛος χαρακτὴρ ἀριϛερόθεν πρὸς τὰ δεξιὰ ἑνὶ τόπῳ καταβιβασθεὶς σημαίνει μόνον τὸ 10 : τον, δυσὶ τόποις μόνον τὸ 100 : ϛὸν, τρισὶ μόνον τὸ 1000 : ϛὸν μέρος τῆς τιμῆς, καὶ δυνάμεως, ἣν ἐν τῷ προηγου-

μένῳ

μένῳ τόπῳ σημαίνει· π. χ. ἐν τῷ δε τῷ ἀριθμῷ (333333) ὁ 3 ἐν τῷ γ'· τόπῳ σημαίνει μόνον τὸ 10:τον μέρος τοῦ, ὅ ἐν τῷ δ'· δηλοῖ, μόνον τὸ 100:ςὸν τοῦ, ὅ ἐν τῷ ε'· μόνον τὸ 1000:ςὸν τοῦ, ὅ ἐν τῷ ς'·

Ἐὰν ἄρα οἱοσοῦν ἀριθμὸς διὰ 10, 100, 1000 κτ' διαιρεθῆναι προκέηται, ἕκαςος χαρακτὴρ τούτου τοῦ ἀριθμοῦ καταβιβασθήτω κατὰ ἕνα, δύω, τρεῖς κτ. τόπους ἀριςερόθεν πρὸς τὰ δεξιὰ, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, ἐν τῷ διαιρετέῳ τοσοῦτοι τῶν κατωτάτων τόπων ἀποβληθήτωσαν, ὅσα μηδενικὰ ὁ διαιρέτης περιέχει, οἱ δὲ χαρακτῆρες οἱ ἐν τοῖς ἀποβληθεῖσι τόποις θεωρηθήτωσαν ὡς λείψανον·

ἔνθεντοι
$$3450 : 10 = 345$$
$$34500 : 100 = 345$$
$$345000 : 1000 = 345$$
$$3450000 : 10000 = 345$$
$$345 : 10 = 34\tfrac{5}{10}$$
$$8256 : 100 = 82\tfrac{56}{100}$$
$$34567 : 1000 = 34\tfrac{567}{1000}$$
$$34567 : 10000 = 3\tfrac{4567}{10000} \text{ κτ.}$$

§. 95. Ἐὰν τὸ 10:τον μέρος ἀριθμοῦ τινος διὰ 2, 3, 4, 5, ἢ 6 διαιρῶμεν, προκύπτει τὸ 20, 30, 40, 50, ἢ 60:ςὸν μέρος αὐτοῦ·

ὡς
$$120 : 20 = 12 : 2 = 6$$
$$120 : 30 = 12 : 3 = 4$$
$$120 : 40 = 12 : 4 = 3$$
$$120 : 50 = 12 : 5 = 2\tfrac{2}{5}$$
$$120 : 60 = 12 : 6 = 2$$
$$120 : 70 = 12 : 7 = 1\tfrac{5}{7}$$

Διαι-

Διαιρεθέντος δὲ τοῦ 100: ςοῦ μέρους ἀριθμοῦ τινος διὰ 2, 3, 4, 5, ἢ 6, προελεύσεται τὸ 200, 300, 400, 500, ἢ 600: ςὸν μέρος αὐτοῦ, οἷον

$$1200 : 200 = 12 : 2 = 6$$
$$1200 : 300 = 12 : 3 = 4$$
$$1200 : 400 = 12 : 4 = 3$$
$$1200 : 500 = 12 : 5 = 2\tfrac{2}{5}$$
$$1200 : 600 = 12 : 6 = 2$$
$$1200 : 700 = 12 : 7 = 1\tfrac{5}{7}$$

Ὡσαύτως ἀνακύψει τὸ 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, ἢ 6000: ςὸν μέρος ἀριθμοῦ τινος, εἰ τὸ 1000: ςὸν μέρος αὐτοῦ διὰ 2, 3, 4, 5, 6 διαιροῦμεν·

ὡς
$$24000 : 2000 = 24 : 2 = 12$$
$$24000 : 3000 = 24 : 3 = 8$$
$$24000 : 4000 = 24 : 4 = 6$$
$$24000 : 5000 = 24 : 5 = 4\tfrac{4}{5}$$
$$24000 : 6000 = 24 : 6 = 4$$

Ἐὰν οὖν τοῖς τελευταίοις τόποις τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιρέτου μηδενικὰ προσῇ, τοσούτους τόπους ἐν ἀμφοτέροις παριδόντες, ὡς ἔθος, διαιρήσομεν. ὡς

```
70452 (000 : 342 (000 = 206
684
-----
  2052
  2052
  -----
    0
```

§. 96. Ἐὰν τοῖς τελευταίοις τόποις τοῦ διαιρετέου μηδενικὰ μὴ παρῇ, τοσοῦτοι τόποι ἐν τούτῳ παροφθήσονται, ὅσα μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου ἀποβάλλονται· ἀλλ'

ἀλλ' ἐν τῷ διορισμῷ τοῦ κλάσματος ἀμφοῖν αὖθις λόγον ποιησόμεθα·

ὡς $128592\,(34 : 282\,(00 = 456\tfrac{34}{28200}$

$$
\begin{array}{r}
1128 \\
\hline
1579 \\
1410 \\
\hline
1692 \\
1692 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Σχόλιον.

Ἡ μονὰς δὲν διαιρεῖ· διότι ἂν ζητῶμεν, ποσάκις ἡ 1 περιέχεται ἐν τῷ διαιρετέῳ, θέλομεν εὕρει, ὅτι εἰς κάθε διαιρετέον ἡ 1 περιέχεται τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει ἐκεῖνος· ὥςε τὸ πηλίκον δὲν διαφέρει παντελῶς ἀπὸ τὸν διαιρετέον· ὡς $\frac{6}{1} = 6.\ \frac{12}{1} = 12$

$\frac{54326}{1} = 54326$· κτ·

§. 97. Αἱ δὲ συγκεκριμέναι (§. 4.) ποσότητες διαιροῦνται οὕτως·

ὑπογραφέντος τοῦ διαιρέτου τῇ μεγίςῃ τῶν μονάδων, ζητηθήτω τὸ πηλίκον· τὸ δὲ λείψανον, εἰ ὑπολειφθῇ, μεταβληθήτω εἰς τὰς ἐγγὺς κατωτέρας μονάδας, καὶ προςεθήτω ταύταις, καὶ διαιρεθήτωσαν καὶ αὗται διὰ τοῦ διαιρέτου· ὧν αὖθις τὸ λεῖψανον μεταχειρισθήτω ἐπίσης· οἷον· 19 πόδες, 8 δάκτ. καὶ 6 γραμμαὶ διαιρεθήτωσαν διὰ 6.

				ποδ.	δάκτ.	γρ.
19.	8.	6	|	3	3	5
(6)	12	24				
(18)	20	30				
1	(6)	(6)				
	18	30				
	2	0				

§. 98. Βάσανος δὲ τῆς διαιρέσεως ἐςὶν, ἐὰν τὸ πηλίκον μετὰ τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιασθὲν (προςιθεμένου ἐν τῷ παραγομένῳ καὶ τοῦ λειψάνου, εἴτι ὑπολέλειπται) ἀκριβῶς τὸν διαιρετέον ἀποδῷ, ἢ τὰ παραδείγματα τοῦτο δηλοῖ· διὰ τῆς διαιρέσεως βασανίζεται καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς (§. 60. κτ.) εἰ ἀκριβής· τοῦ γὰρ παραγομένου διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων διαιρεθέντος, προκύψει ἐν τῷ πηλίκῳ ὁ ἕτερος·

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

μετὰ γραμμάτων, ἢ Ἀλγεβραϊκῶν ἀριθμῶν.

§. 99. Ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως ἀριθμὸς ζητεῖται, ὃς μετὰ τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιασθεὶς τὸν διαιρετέον παρέξει, (§. ἀν.) ῥάδιον συνιδεῖν, ὅτι

$$\alpha\beta : \beta = \alpha. \text{ ὅτι } \alpha \times \beta = \alpha\beta.$$
$$\alpha\beta\gamma : \alpha = \beta\gamma. \text{ ὅτι } \beta\gamma \times \alpha = \alpha\beta\gamma.$$
$$\alpha\beta\gamma : \alpha\beta = \gamma. \text{ ὅτι } \gamma \times \alpha\beta = \alpha\beta\gamma.$$
$$6\alpha\beta : 3\alpha = 2\beta. \text{ ὅτι } 2\beta \times 3\alpha = 6\alpha\beta.$$
$$10\alpha\beta\gamma : 5\gamma = 2\alpha\beta. \text{ ὅτι } 2\alpha\beta \times 5\gamma = 10\alpha\beta\gamma.$$

Σχόλιον.

Ἡ διαίρεσις, ὡς δῆλον, εἶναι πρᾶξις ἐναντία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· ὅταν θέλωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν π. χ. α μὲ β, ἢ νὰ λάβωμεν τὸ α, β : ις (§. 70.), τοῦτο

τοῦτο γίνεται οὕτως $=$ αβ· διὰ νὰ κάμωμεν τὸ ἐναντίον τούτου, ἤτοι νὰ ἐλαττιώσωμεν τὸ αβ, β: ις, πρέπει νὰ ἀφέλωμεν ἀπὸ τοῦ αβ τὸ β· τὸ ὁποῖον εἰς τὴν διαίρεσιν ἀποδίδοται οὕτως· αβ διαιρούμενον διὰ τοῦ β δίδωσι πηλίκον τὸ α· εὐκολώτερον θέλομεν καταλάβει τὸ λεγόμενον, ἂν διορίσωμεν τὸ α καὶ β· ἔςω α $= 2$· καὶ β $= 3$· καὶ ἔςαι αβ $= 2 \times 3$, ἢ 2 ἐλήφθη τρίς· εἰ δέοι οὖν τὴν ποσότητα 2×3 διὰ 3 διελεῖν, ἀποβλητέον 3 ἀπ' αὐτῆς, διὰ νὰ ὑπολειφθῇ μόνον 2· διότι διὰ τούτου, τὸ 2×3 ἐλαττοῦται τρίς· ὑπολείπεται λοιπὸν 2, ὅ παρίςαται διὰ τοῦ α· ὥςε τοῦτον τὸν τρόπον θέλομεν μεταχειρισθῇ εἰς τὰ γράμματα· ὅθεν αβ: β $=$ α καὶ αβ: α $=$ α· καὶ ααγβ: αα $=$ γβ.

β'.

Ἐπὶ τῆς διαιρέσεως τῶν γραμμάτων, πηλίκον εἶναι τὸ γράμμα, ἢ τὰ γράμματα, ὁποῦ δὲν εὑρίσκονται εἰς τὸν διαιρέτην· ὅταν δὲ καὶ ὁ διαιρετέος, καὶ ὁ διαιρέτης ἔχωσι καὶ συνεργοὺς (§. 47.), τότε διαιρεῖται ὁ συνεργὸς τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συνεργοῦ τοῦ διαιρέτου, καὶ μετὰ τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν γράφονται ἀμέσως τὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου, ὁποῦ δὲν περιέχει ὁ διαιρέτης· ὡς

αβγ: β $=$ αγ καὶ	αβγ : 6αβ $= \frac{1}{6}$ γ·
12 αβδ : 4 αδ $=$ 3 β	(§. 47. καὶ 85.)
24 αβδε : 8 βε $=$ 3 αδ	5 αβγ : 6 βγ $= \frac{5}{6}$ α.

§. 100. Ἐὰν μηδὲν, ἢ μὴ πάντα τὰ γράμματα τοῦ διαιρέτου τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχωνται, τὴν διαίρεσιν διὰ τοῦ κεκλασμένου ἐκδηλώσομεν πηλίκου (§. 85.)

Οὕτως $\alpha : \beta = \dfrac{\alpha}{\beta}$. καὶ $\alpha\beta : \delta\varepsilon\zeta = \dfrac{\alpha\beta}{\delta\varepsilon\zeta}$, εἰδότες μόνον περὶ τῶν τοιούτων πηλίκων, ὅτι μετὰ τοῦ

διαι-

διαιρέτου πολλαπλασιασθέντα τὸν διαιρετέον πάλιν παράγουσιν· ἢ ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta} \times \beta = \alpha \cdot \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha\beta}{\delta\epsilon\zeta} \times \delta\epsilon\zeta = \alpha\beta.$$

Σχόλιον.

Δείχνομεν τὴν διαίρεσιν ὄχι μόνον μὲ τὸ νὰ παρενςίζωμεν τὰ δύω σημεῖα, (§. 83.) ἀλλὰ καὶ οὕτω· $\frac{\alpha}{\beta}$· καὶ ἐν ἀριθμοῖς $\frac{6}{3}$. τὰ ὁποῖα σχήματα παριςῶσι τὸ μὲν, τὸ πηλίκον τὸ προκύπτον, διαιρεθέντος τοῦ α διὰ τοῦ β· τὸ δὲ, τὸ τοῦ 6 διαιρ. διὰ 3, ἤτοι τὸ 2· ὥστε εἰς παράςασιν τῆς διαιρέσεως μεταχειριζόμεθα ἢ τὰ δύω σημεῖα· ὡς $\alpha\beta + \gamma + \chi$ διαιρ: διὰ τοῦ $\mu + \nu$, ἀποδοθήσεται $\alpha\beta + \gamma + \chi : \mu + \nu$, ἢ τὸν νῦν ῥηθέντα τρόπον· τοῦτον μάλιςα τότε, ὅτε (κατὰ τὸ ἀνωτ.) ὁ ἕτερος τρόπος χώραν οὐκ ἔχει.

§. 101. Ὁσάκις ὁ διαιρετέος, ἢ ὁ διαιρέτης συμπεπλεγμένος (§. 44.) ᾖ, ἐναπολαμβάνεται ἐν παρενθέσει· ὅθεν τὸ $(6\alpha\beta + 12\alpha\delta + 30\alpha\gamma\delta) : 3\alpha$ σημαίνει τὸ, ὁ συμπεπλεγμένος διαιρετέος $6\alpha\beta + 12\alpha\delta + 30\alpha\gamma\delta$ διαιρεθήτω διὰ 3α· ὃ περανοῦμεν, ζητοῦντες, ποσάκις 3α ἑκάςῳ μέρει τοῦ συνθέτου διαιρετέου ἐμπεριέχεται·

ἔςι δὲ 3α ἐν $6\alpha\beta$, 2β: ις (§ 99. σχ. β·)
ἐν $12\alpha\delta$, 4δ: ις
καὶ ἐν $30\alpha\gamma\delta$, $10\gamma\delta$: ις περιεχόμ: ἄρα

ἐν $(6\alpha\beta + 12\alpha\delta + 30\alpha\gamma\delta)$, $(2\beta + 4\delta + 10\gamma\delta.)$: ις περιεχόμενον.

ἢ $(6\alpha\beta + 12\alpha\delta + 30\alpha\gamma\delta.) : 3\alpha = 2\beta + 4\delta + 10\gamma\delta.$

ὡσαύ-

ὡσαύτως καὶ $(14\alpha\beta\delta + 21\alpha\beta\gamma + 35\alpha\beta\delta\varepsilon) : 7\alpha\beta$
$= 2\delta + 3\gamma + 5\delta\varepsilon$·

καὶ $10\alpha\beta + 25\alpha\beta\delta + 30\beta\delta\varepsilon + 45\delta) : 5\beta$
$= 2\alpha + 5\alpha\delta + 6\delta\varepsilon + 9\frac{\delta}{\beta}$.

Σχόλιον.

Ἐάν τι μέλος, ἢ ὅρος τοῦ διαιρετέου δὲν ἠμπορῇ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ διαιρέτου, τὸ ἐντεῦθεν ἀναφυόμενον πηλίκον παραςαίνεται κεκλασμένως· ὡς, εἰ δέοι $\alpha + \beta$ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ α, ἔςαι τὸ πηλίκον $1 + \frac{\beta}{\alpha}$, ὅτι $\alpha : \alpha = 1$ (§.84.σχ.) καὶ ἐπειδὴ τὸ α ὡς ὡρισμένον διελεῖν τὸ ἀόριςον β οὐ δύναται, ἐκφέρεται οὕτω· $\frac{\beta}{\alpha}$ ὡσαύτως καὶ $45\delta : 5\beta = 9\frac{\delta}{\beta}$.

§. 102. Ἐὰν δὲ ἀμφω συμπεπλεγμένοι ὦσι, χωρήσομεν αὖθις εἰς ἔργον, ὡς καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς, καταρχὰς μόνον εἰς τὸ α΄ μέρος τοῦ διαιρετέου ἀφορῶντες· οὕτως εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον τοῦ

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 5\gamma + 6\delta. \\
15\alpha\gamma + 18\alpha\delta + 20\beta\gamma + 24\beta\delta) : (3\alpha + 4\beta) \\
\underline{15\alpha\gamma \qquad\qquad 20\beta\gamma} \\
\qquad + 18\alpha\delta + 24\beta\delta. \\
\qquad \underline{+ 18\alpha\delta + 24\beta\delta.} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

λέγοντες·

α΄· 3α περιέχεται ἐν $15\alpha\gamma$, 5γ: ις· ὅτι $(3\alpha + 4\beta) \times 5\gamma$ (§. 74.σχ.|β΄.) $= 15\alpha\gamma + 20\beta\gamma$, ὃ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $15\alpha\gamma + 18\alpha\delta + 20\beta\gamma + 24\beta\delta$ διαιρετέου ὑπολείπει $18\alpha\delta + 24\beta\delta$ λείψανον· καὶ β'· 3α ἐν $18\alpha\delta$ περιέχεται 6δ: ις' ὅτι $(3\alpha + 4\beta) \times 6\delta = 18\alpha\delta + 24\beta\delta$·

ὃ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $18\alpha\delta + 24\beta\delta$ οὐδὲν ὑπολείπει· ὡσαύτως εὑρεθήσεται καὶ

$$= 3\alpha + 2\beta + \delta\cdot$$

$$(6\alpha\alpha + 4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 9\alpha\gamma + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta) : (2\alpha + 3\gamma)$$

$$\begin{array}{llll}
6\alpha\alpha & & .\,9\alpha\gamma & \\
\hline
4\alpha\beta + 2\alpha\delta & + 6\beta\gamma & + 3\gamma\delta. & \\
4\alpha\beta & + 6\beta\gamma & & \\
\hline
2\alpha\delta & + & 3\gamma\delta & \\
2\alpha\delta & + & 3\gamma\delta & \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}$$

λέγουσι·

α'· 2α ἐν $6\alpha\alpha$ περιέχεται 3α: ις' ὅτι $(2 + 3\gamma) \times 3\alpha = 6\alpha\alpha + 9\alpha\gamma$· ὃ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $6\alpha\alpha + 4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 9\alpha\gamma + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta$ δίδωσι $4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta$ λείψ.

β'· 2α ἐν $4\alpha\beta$ περιέχεται 2β: ις' ὅτι $(2\alpha + 3\gamma) \times 2\beta = 4\alpha\beta + 6\beta\gamma$· ὃ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta$ δίδωσι λείψ. $2\alpha\delta + 3\gamma\delta$.

γ'· 2α ἐν $2\alpha\delta$ περιέχεται δ: ις' ὅτι $(2\alpha + 3\gamma) \times \delta = 2\alpha\delta + 3\gamma\delta$· ὃ ἀπὸ τοῦ $(2\alpha\delta + 3\gamma\delta)$ ἀφαιρεθὲν αὖθις οὐδὲν ὑπολείπει.

§. 103. Ἐὰν ἡ διαίρεσις τοῦτον τὸν τρόπον περανθῆναι οὐκ ἔχῃ, ἀγαπητέον τῷ κεκλασμένῳ πηλίκῳ (§. 85. καὶ §. 100.) ὡς $(3\alpha + 6\beta) : (\mu + 3\rho) = \dfrac{3\alpha + 6\beta}{\mu + 3\rho}$, περὶ οὗ μόνον οἴδαμεν, ὅτι

$$\left(\frac{3\alpha + 6\beta}{\mu + 3\rho}\right) \times (\mu + 3\rho) = 3\alpha + 6\beta.$$

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ
μετὰ καταφατικῶν, καὶ ἀποφατικῶν ἀριθμῶν, καὶ γραμμάτων.

§. 104. Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος τὸ παραγόμενόν ἐςιν ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων τοῦ γνωςοῦ, ἤτοι τοῦ διαιρέτου, καὶ τοῦ ἑτέρου τοῦ ἀγνώςου, ἤτοι τοῦ πηλίκου· (§. 98.) καὶ τὸ καταφατικὸν παραγόμενον ἀείποτε ἀνήκει δυσὶ παράγευσι τὰ αὐτὰ σημεῖα, τὸ δ' ἀποφατικὸν δυσὶ τὰ ἐναντία ἔχουσιν· (§. 77.) ὁ διαιρέτης ἄρα, καὶ τὸ πηλίκον τοῖς αὐτοῖς σημείοις σημειωθήσονται, τοῦ διαιρετέου καταφατικοῦ, τοῖς δ' ἐναντίοις, ἀποφατικοῦ ὄντος·

ὅθεν α'· $(+\alpha\beta : +\beta = \alpha$

$(+\alpha\beta : -\beta = -\alpha$

β'· $(-\alpha\beta : +\beta = -\alpha$

$(-\alpha\beta : -\beta = +\alpha$

ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ γενικὸς κανών.

Τὸ πηλίκον ἔςαι καταφατικὸν, τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιρέτου τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐχόντων· ($+$ καὶ $+$, ἢ $-$ καὶ $-$) ἀποφατικὸν δὲ, τὰ ἐναντία ($+$ καὶ $-$, ἢ $-$ καὶ $+$).

ὡς $12 : 4 = 3$ || $15\alpha\beta : -3\alpha = -5\beta$·

$12 : -4 = -3$ || $-26\alpha\beta\delta : -13\alpha\delta = 2\beta$·

$-12 : 4 = -3$ || $\alpha\alpha + 2\alpha\beta - 30\alpha\delta : 2\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \beta - 15\delta$·

$-12 : -4 = 3$ ||

|| $\alpha\alpha + 6\alpha\beta - 21\alpha\delta : -7\alpha = -\frac{1}{7}\alpha - \frac{6}{7}\beta + 3\delta$·

Σχόλιον.

Τὸ $\alpha\alpha : 2\alpha = \frac{\alpha\alpha}{2\alpha}$ (§. 100. σχ.). καὶ ἐπειδὴ τὸ α τοῦ διαιρέτου ἀναιρεῖ ἓν α τοῦ διαιρετέου, ἔςαι

$\frac{\alpha\alpha}{2\alpha} = \frac{\alpha}{2}$. ἀντὶ τοῦ $\frac{\alpha}{2}$ ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ τὸ $\frac{1}{2}\alpha$. ὅτι $\frac{1}{2}\alpha$ ἰσοδυναμεῖ τῷ $\frac{\alpha}{2}$· δι' ἀριθμῶν ἐςιν εὐληπτότερον· ἔςω $\alpha = 6$· ὅθεν $\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{2} = 3$. $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}6$. τοῦτο δὲ $= 3$· ἄρα $3 = 3$. ἄρα $\frac{1}{2}6 = \frac{6}{2}$. καὶ $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\alpha$. ὡσαύτως καὶ $\alpha\alpha : -7\alpha = \frac{\alpha\alpha}{-7\alpha} = \frac{\alpha}{-7} = -\frac{1}{7}\alpha$. κτ.

Αὖθις εὑρεθήσεται, ὅτι $(\alpha\alpha - \beta\beta) : (\alpha - \beta) = \alpha + \beta$

$$\begin{array}{l} \alpha\alpha - \alpha\beta \\ \hline \alpha\beta - \beta\beta \qquad (\S. 49.) \\ \alpha\beta - \beta\beta \\ \hline 0 \end{array}$$

ὅτι

α'. $+\alpha$ ἐν $+\alpha\alpha$ περιέχεται $+\alpha$: ις· καὶ γὰρ $(\alpha - \beta) \times +\alpha = +\alpha\alpha - \alpha\beta$· τοῦτο ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $+\alpha\alpha - \beta\beta$ δώσει $+\alpha\beta - \beta\beta$ λείψ.

β'. $+\alpha$ ἐν $+\alpha\beta$ (τῷ λειψ.) περιέχεται $+\beta$: ις· ὅτι $(\alpha - \beta) \times +\beta = +\alpha\beta - \beta\beta$. ὃ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $+\alpha\beta - \beta\beta$ οὐδὲν ὑπολείπει.

ὡσαύ

ὡσαύτως καὶ $(\alpha\alpha - \beta\beta) : (\alpha + \beta) = \alpha - \beta$

$$\begin{array}{c} \alpha\alpha + \alpha\beta \\ \hline -\,\alpha\beta - \beta\beta \\ -\,\alpha\beta - \beta\beta \\ \hline 0 \end{array} \qquad (\S.\,49.)$$

ὅτι α΄· + α ἐν + αα περιέχεται + α: ις΄ καὶ γὰρ $(+\alpha + \beta) \times \alpha = \alpha\alpha + \alpha\beta$· ὃ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $\alpha\alpha - \beta\beta$ δίδωσι $-\,\alpha\beta - \beta\beta$ λεῖψ.

β΄ + α ἐν $-\,\alpha\beta$ περιέχεται $-\,\beta$: ις΄ ὅτι $(\alpha + \beta) \times -\,\beta = -\,\alpha\beta - \beta\beta$· τοῦτο ἀφερεθὲν ἀπὸ τοῦ $-\,\alpha\beta - \beta\beta$ οὐδὲν ὑπολείπει·

αὖθις $(\alpha\alpha - 1) : (\alpha + 1) = \alpha - 1.$

$$\begin{array}{c} \alpha\alpha + \alpha \\ \hline -\,\alpha - 1 \\ -\,\alpha - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

ὅτι $\alpha\alpha : \alpha = \alpha$· πολλαπλασιασθὲν τὸ πηλίκον α ἐφ' ὅλον τὸν διαιρέτην $(\alpha + 1)$ δώσει $\alpha\alpha + \alpha$· ὅτι $\alpha \times \alpha = \alpha\alpha$· καὶ $1 \times \alpha = \alpha$· τὸ οὖν αα ἀναιρεῖ τὸ αα τοῦ διαιρετέου· τὰ γὰρ σημεῖα τούτων ἐναντία (§. 37. §. 49.) τὸ + α, τὸ παραχθὲν διὰ τοῦ + 1 τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον α, οὐκ ἔχει ἀφαιρεθῆναι ἀπό τινος· ὅθεν τίθεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν τῷ ἐναντίῳ σημείῳ· ὡσαύτως τίθεται καὶ τὸ − 1 τοῦ διαιρετέου· ὅθεν τὸ α τοῦ διαιρέτου διελὸν τὸ − α τοῦ λειψάνου δώσει − 1 (§. 84 σχ. §. 76.) κτ.

καὶ $(\alpha\alpha - 2\alpha\beta + \beta\beta) : (\alpha - \beta) = \alpha - \beta$·

$$\begin{array}{r}
\alpha\alpha - \alpha\beta \qquad\qquad \\
\hline
-\alpha\beta + \beta\beta \\
-\alpha\beta + \beta\beta \\
\hline
0
\end{array}$$

ὅτι τὸ — $\alpha\beta$ τοῦ ἀφαιρετέου, ὡς τῷ ἐναντίῳ σημείῳ, ἤτοι τῷ + σημειωθῆναι ὀφεῖλον, ἀναιρεῖ ἐκ τῶν — $2\alpha\beta$ τὸ — $1\alpha\beta$· ὅθεν ὑπολείπεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν — $1\alpha\beta = -\alpha\beta$ (§. 69.)

$$= 3\alpha - 2\beta\cdot$$

καὶ $(9\alpha\alpha - 12\alpha\beta + 4\beta\beta) : (3\alpha - 2\beta)$,

$$\begin{array}{r}
9\alpha\alpha - 6\alpha\beta \qquad\qquad \\
\hline
-6\alpha\beta + 4\beta\beta \\
-6\alpha\beta + 4\beta\beta \\
\hline
0
\end{array}$$

$$= 2\alpha - 7\beta\cdot$$

καὶ $(6\alpha\alpha - 13\alpha\beta - 28\beta\beta) : (3\alpha + 4\beta\cdot)$

$$\begin{array}{r}
6\alpha\alpha + 8\alpha\beta \qquad\qquad \\
\hline
-21\alpha\beta - 28\beta\beta \\
-21\alpha\beta - 28\beta\beta \\
\hline
0
\end{array}$$

$$: (3\alpha + 2\beta - 4\delta) = 3\alpha - 2\beta + 4\delta$$

καὶ $(9\alpha\alpha - 4\beta\beta + 16\beta\delta - 16\delta\delta)$

$$\begin{array}{l}
9\alpha\alpha + 6\alpha\beta - 12\alpha\delta \\
\hline
-6\alpha\beta + 12\alpha\delta - 4\beta\beta + 16\beta\delta - 16\delta\delta \\
-6\alpha\beta - 4\beta\beta + 8\beta\delta \\
\hline
12\alpha\delta + 8\beta\delta - 16\delta\delta \\
12\alpha\delta + 8\beta\delta - 16\delta\delta \\
\hline
0
\end{array}$$

Σχόλιον.

Καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς, καὶ ἡ διαίρεσις ἡ διὰ γραμμάτων δὲν ἔχουν κάμμίαν δυσχέρειαν εἰς ἐκεῖνον ὁποῦ

ὁποῦ μὲ ἐπιςασίαν ἤθελε μελετήσῃ τοὺς περὶ τῶν σημείων κανόνας, καὶ τοὺς περὶ ἀφαιρέσεως, καὶ τὰ λοιπὰ, ὅσα προηγουμένως ἐῤῥέθησαν· οἱ ἴδιοι κανόνες, οἱ ἀνήκοντες τοῖς γράμμασιν, ἁρμόζουν καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς, ὡσὰν ὁποῦ οἱ ἀριθμοὶ διαφέρουν ἀπὸ τὰ γράμματα μόνον κατὰ τὸ εἰδικὸν, τούτων ἐν γένει, ὡς εἴρηται, πάντα ἀριθμὸν σημαινόντων.

§. 105. Τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιρέτου δύω ὁποιωνοῦν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν ὄντων, τὸ τούτων πηλίκον προκύψει, εἴτε ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, εἴτε κεκλασμένος, εἴτε ἐξ ὁλοσχεροῦς, καὶ κεκλασμένου συγκείμενος· οὕτω

$12 : 3 = 4$ ὁλοσχ. ἀρ.

$12 : 17 = \frac{12}{17}$ (§. 35. καὶ σχ.) κεκλασμ. ἀρ.

$12 : 5 = 2\frac{2}{5}$ ἐκ τοῦ ὁλοσχεροῦς 2, καὶ τοῦ κεκλ· $\frac{2}{5}$ συγκείμ:

Εἰ δὲ τὸ πηλίκον ἀεὶ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς εἶναι ὀφείλει, οὐδέποτε ἀριθμὸν ἐλάττονα διὰ μείζονος διαιρετέον· οὕτω γὰρ τὸ πηλίκον ἔςαι πάντως κλασματικόν· ἀλλ᾽ ἐπεὶ πᾶς ἀριθμὸς $\alpha = 1 \times \alpha$ (§. 72.) καὶ πᾶς ἀριθμὸς διαιρεθήσεται διὰ τῆς 1, καὶ δι᾽ ἑαυτοῦ.

Λῦσις ἐπεὶ $\alpha\gamma : \gamma = \alpha$, καὶ $\nu\alpha\gamma : \gamma = \nu\alpha$ (§. 99. καὶ σχ. β΄)·

Πᾶς ἀριθμὸς γ, ὁ οἱονοῦν ἀριθμὸν $\alpha\gamma$ διαιρῶν, διαιρήσει ἀεὶ καὶ πᾶν πολλαπλοῦν τοῦ $\alpha\gamma$· π. χ· ἐπεὶ ὁ 3 διαιρεῖ τὸν ἀριθμὸν 6, ἔςι καὶ $2 \times 6 = 12$· $3 \times 6 = 18$· $4 \times 6 = 24$· καὶ $\nu \times 6 = 6\nu$ διὰ 3 διαιρέσιμον.

Καὶ ἐπειδὴ $(\alpha\gamma + \beta\gamma) : \gamma = \alpha + \beta$· καὶ

$(\alpha\gamma - \beta\gamma) : \gamma = \alpha - \beta$·

Πᾶς ἀριθμὸς γ, δι᾽ οὗ δύω ὁποιοιοῦν ἀριθμοὶ $\alpha\gamma$, καὶ $\beta\gamma$ διαιροῦνται, διαιρήσει ἀεὶ καὶ τὸ τούτων κεφά-

κεφάλαιον $\alpha\gamma + \beta\gamma$, καὶ τὴν τούτων διαφορὰν $\alpha\gamma - \beta\gamma$·

Οἷον, ἐπεὶ 4 διαιρεῖ καὶ τὸν 24, καὶ 16, διαιρεθήσονται δὶ αὐτοῦ καὶ $24 + 16 = 40$, καὶ $24 - 16 = 8$·

Οἱ ἀριθμοὶ, οἱ μόνον διὰ τῆς μονάδος, καὶ δὶ ἑαυτῶν διαιρούμενοι, καλοῦνται ἁπλοῖ, ἢ πρῶτοι· εἰσὶ δὲ οὗτοι

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. κτ·

Οἱ δὲ μὴ μόνον διὰ τῆς 1, καὶ δὶ ἑαυτῶν, ἀλλὰ καὶ δὶ ἑτέρων ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν, σύνθετοι, ἢ παραγόμενα· ὡς

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30· κτ·

ἐπειδὴ

$$\begin{aligned} 12 &= 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3 \\ 18 &= 2 \times 9 = 2 \times 3 \times 3 \\ 30 &= 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 5 \\ 60 &= 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

Οὐ χαλεπὸν συνιδεῖν, ὅτι πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς τὸ παραγόμενόν ἐστιν ἐκ μόνων πρώτων ἀριθμῶν· ὥστε εἰ πρόκειται παραγόμενόντι, ἀντὶ τούτου τεθῆναι ἔχουσιν οἱ τοῦτο παράγοντες· ζητεῖται οὖν,

Ὅπως εὑρίσκονται παντὸς ἀριθμοῦ οἱ ἁπλοῖ παράγοντες.

§. 106. Τότε μόνον ὁ πρῶτος ἀριθμὸς λέγεται παράγων τὸν σύνθετον, ὅτε οὗτος δὶ ἐκείνου ἀκριβῶς καταμετρεῖται, ἤτοι ἄνευ λειψάνου διαιρεῖται· ἀναγκαῖον οὖν διορίσαι, διὰ τίνων πρώτων ἀριθμῶν πᾶς σύνθετος εἴη ἂν διαιρέσιμος.

Ἐπειδὴ ὁ 10 διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, ἔςαι καὶ πᾶν πολλαπλοῦν τοῦ 10, (§. 56.) ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς χωρὶς τῶν κατ' αὐτὸν μονάδων θεωρούμενος ὡς ὁ 100, ὁ 1000, κτ' οἱ μὴ ἔχοντες μονάδας ἐν τῷ τόπῳ τῶν μονάδων, ἀλλὰ μόνον μηδενικά) διὰ τοῦ 2 διαιρέσιμος· ἔνθεντοι καὶ πάντες οἱ ἀριθμοὶ διαιρεθήσονται διὰ 2, ὧν αἱ μονάδες διὰ 2 διαιρέσιμοι, ἢ ὧν τὸν κατώτατον τόπον 0, 2, 4, 6, ἢ 8 κατειλήφασιν· οὗτοι καλοῦνται ἀριθμοὶ ἄρτιοι, οἵτινες οἵδε εἰσί· 0· 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 κτ' οἱ δὲ λοιποὶ ἀκούουσι περιττοί· ὡς 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, κτ'

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ὁ 10 διαιρεθῆναι διὰ 5 ἔχει, ἔςαι καὶ πᾶς ἀριθμὸς διὰ 5 διαιρέσιμος, οὗ αἱ μονάδες διὰ 5 διαιροῦνται, ἢ οὗ ὁ κατώτατος τόπος τῷ 0, ἢ 5 κατείληπται·

Ἑκάςη δεκὰς διὰ 3 διαιρεθεῖσα δίδωσιν 1 εἰς λείψανον· ὥςε 2 δεκάδες διδοῦσι 2. 3 δεκάδες 0. 4 δεκ' 1. 5 δεκ. 2. 6 δεκ. 0. 7 δεκ. 1. 8 δεκ. 2. 9 δεκ. 0. καὶ 10 δεκ. ἢ ἑκάςη ἑκατοντὰς διδοῦσι τὴν 1 εἰς λείψ.

Ὥςε 2 ἑκατοντ. διδοῦσι 2. 3 ἑκατ' 0. 4 ἑκατ' 1· 5 ἑκατ' 2· 6 ἑκατ' 0· 7 ἑκατ. 1. 8 ἑκατ' 2. 9 ἑκατ. 0. καὶ 10 ἑκατ' ἢ ἑκάςη χιλιὰς 1 εἰς λείψ.

Ὥςε 2 χιλιάδες διδοῦσι 2. 3 χιλ' 0. 4 χιλ. 1. 5 χιλ' 2. 6 χιλ. 0. 7 χιλ. 1. 8 χιλ' 2. 9 χιλ. 0. καὶ 10 χιλ. ἢ ἑκάςη δεκὰς χιλιάδων 1 εἰς λείψ. κτ'

Αἱ δεκάδες ἄρα, ἑκατοντ. χιλιάδες, ἢ δεκάδες χιλιάδων ἀριθμοῦ τινος διὰ 3 διαιρεθεῖσαι δώσουσι τὸ λείψανον, ὃ προκύπτει, ἐὰν τοσαῦται μονάδες διὰ 3 διαιρεθῶσι.

Π-

Πᾶς ἀριθμὸς ἄρα διαιρέσιμος ἔςαι διὰ 3, οὗ τὰ λείψανα τῶν κατ' αὐτὸν χαρακτήρων προσαθροισθέντα κεφάλαιον δώσουσι διὰ 3 διαιρεθῆναι δυνάμενον.

Οὕτως ὁ ἀριθμὸς 54672 εἴη ἂν διὰ 3 διαιρέσιμος, ὅτι τὸ λείψανον τοῦ 5 (διαιρεθέντος διὰ τοῦ 3) $= 2$. τοῦ 4 (διαιρ. διὰ 3) $= 1$. τοῦ $6 = 0$· τοῦ $7 = 1$. τοῦ $2 = 2$. τὸ κεφάλαιον τῶν λειψάνων $2 + 1 + 0 + 1 + 2 = 6$· καὶ $6 : 3 = 2$ ἄνευ λειψάνου.

84557 δὲ οὐκ ἂν διαιρεθείη διὰ 3· ὅτι τὸ λείψανον τοῦ $8 = 2$. τοῦ $4 = 1$. τοῦ $5 = 2$. τοῦ $5 = 2$. τοῦ $7 = 1$. τὸ κεφάλαιον τῶν λειψάνων $2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 8$· καὶ $8 : 3 = 2\frac{2}{3}$.

§. 107. Ῥᾴδιον οὖν ἐκ τούτων ἐπιγνωσόμεθα, εἰ ὁ προκείμενος ἀριθμὸς, διὰ 2, 3, ἢ 5 διαιρέσιμος· πότερον δὲ, ὁ αὐτὸς καὶ διὰ 7, 11, 13, 17, 19, ἢ διάτινος ἀνωτέρου πρώτου ἀριθμοῦ διαιρεῖται, ἢ οὐχὶ, τοῦτο ἡ πεῖρα διδάξει.

Ἔνθεν τοι οὐδεμία μέθοδος ἡμῖν πάρεςι τοῦ πάντας τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εὑρίσκειν, ἢ τὸ διαιρεῖν αὐτὸν διὰ τῶν κατωτάτων πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7 κτ. ἕως ἂν τὸ πηλίκον πρῶτος ἀριθμὸς ᾖ, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου μετὰ τῶν προηγηθέντων διαιρετῶν πάντας τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀποτελῇ.

Ἔςω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 2310. ἔςιν οὖν (διὰ τὰ ἀνωτ.)

$2310 : 2 = 1155$	$385 : 5 = 77$
$1155 : 3 = 385$	$77 : 7 = 11$

ἄρα $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$.

ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθ. 360. καὶ ἔσται

$360 : 2 = 180$	$45 : 3 = 15$
$180 : 2 = 90$	$15 : 3 = 5$
$90 : 2 = 45$	

ἄρα $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$.

ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 37800· καὶ ἔσται

$37800 : 2 = 18900$	$1575 : 3 = 525$
$18900 : 2 = 9450$	$525 : 3 = 175$
$9450 : 2 = 4725$	$175 : 5 = 35$
$4725 : 3 = 1575$	$35 : 5 = 7$

ἄρα $37800 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$.

ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 2717· καὶ ἔσται

$2717 : 11 = 247$· καὶ $247 : 13 = 19$.

ἄρα $2717 = 11 \times 13 \times 19$.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 311· ἐπειδὴ 311 διὰ 2, 3, ἢ 5 οὐκ ἂν διαιρεθείη, πειρασώμεθα τῆς διαιρέσεως τούτου διὰ τῶν ἐγγὺς ἀνωτέρων πρώτων ἀριθμῶν.

ἔστι δὲ α΄· $311 : 7 = 44\frac{3}{7}$

β΄· $311 : 11 = 28\frac{3}{11}$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \hline 91 \\ 88 \\ \hline 3 \end{array}$$

γ΄· $311 : 13 = 23\frac{12}{13}$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \hline 51 \\ 39 \\ \hline 12 \end{array}$$

δ΄· 311:

$$\delta' \quad 311 : 17 = 18\tfrac{5}{17}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \hline 141 \\ 136 \\ \hline 5 \end{array}$$

Ἐπειδὴ οὖν 19 μείζων τοῦ πηλίκου 18 $\frac{5}{17}$, ὁ 19 ἄρα οὐκ ἂν περιέχοιτο 17:κις ἐν 311. ἔνθεν τοι τὸ πηλίκον τοῦ (311 : 19) ἐςιν ἔλαττον τοῦ 17. ἄρα οὐχ ὁλοσχερὴς ἀριθμός· οὐδεὶς γὰρ τῶν πρώτων ἀριθμῶν, τῶν ἐλαττόνων τοῦ 17, παράγων τοῦ 311 εὕρηται· ὅπερ ἐγένετο, εἰ ὁ (311 : 19) ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν ἐν τῷ πηλίκῳ ἐδίδου, ἐλάττονα τοῦ 17· ὥςε ὁ 311 δι' οὐδενὸς ἀριθμοῦ διαιρεθήσεται, εἰ μὴ διὰ τῆς 1, καὶ δι' ἑαυτοῦ, ἢ ὁ 311 ἐςι πρῶτος ἀριθμός.

Ὡσαύτως ῥητέον, ὡς περὶ τοῦ 311, καὶ περὶ παντὸς ἀριθμοῦ, ὅτι πρῶτος ἀριθμός ἐςιν, εἰ προάγοντες τὴν διαίρεσιν, ἄνευ τοῦ διαιρέτην τινὰ εὑρεῖν, ἀριθμῷ τινι ἀπαντήσομεν, ὡς τῷ 19, μείζονι ὄντι τοῦ προηγηθέντος πηλίκου, ὡς ὁ 19 τοῦ 18 $\frac{5}{17}$.

§. 108. Ἐν τοῖς τῶν παραγόντων πίναξι, τοῖς τοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς μὴ διὰ 2, 3, ἢ 5 διαιρεσίμους, περιέχουσιν, ἐκτέθεινται οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ, ἔνθα δείκνυνται καὶ οἱ ἁπλοῖ παράγοντες ἑκάςου παραγομένου·

Σχόλιον.

Πίνακες τῶν παραγόντων εὑρίσκονται διάφοροι· ἀξιολογώτεροι ὅμως εἶναι Φέλκελ τινὸς, οὕτως ἐπιγραφόμενοι· Πίνακες πάντων τῶν ἁπλῶν παραγόντων τῶν ἀριθμῶν, τῶν διὰ 2, 3, καὶ 5 μὴ διαιρουμένων ἀπὸ 1 μέχρι 408000.

§. 109. Προκειμένου οὖν ἀριθμοῦ τινος, διαιρέσομεν τοῦτον, ὁσάκις ἂν ἐγχωρῇ, διὰ 2, 3, καὶ

5· τὸ δ' ἔσχατον πηλίκον, ἐὰν τὸν ἀριθμὸν 408000 μὴ ὑπερβαίνῃ, εὑρήσομεν ἐν τοῖς πίναξιν, εἰ πρῶτος ἀριθμός, ἢ τὸ πολλαπλοῦν, ἤτοι τὸ παραγόμενόν ἐστιν ἐκ διαφόρων παραγόντων.

ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 120765· ἔσται οὖν

$120765 : 3 = 40255$

$40255 : 5 = 8051$. καὶ διὰ τῶν πινάκων

$8051 = 83 \times 97$

ὥστε $120765 = 3 \times 5 \times 83 \times 97$.

ἕτερον παράδειγμα·

$693132 : 2 = 346566$

$346566 : 2 = 173283$

$173283 : 3 = 57761$ καὶ διὰ τῶν πινάκων

$57761 = 11 \times 59 \times 85$.

ὥστε $693132 = 2 \times 2 \times 3 \times 11 \times 59 \times 89$.

Σχόλιον.

Ταύτην τὴν μέθοδον τοῦ εὑρίσκειν τοὺς παράγοντας ἠμπορεῖ νὰ τὴν μεταχειρισθῇ καθε ἕνας, ὁποῦ ἔχει τοιούτους πίνακας· ἡ κτῆσις τούτων εἶναι εὔκολος, καὶ οἱ πίνακες εὐκολοκατάληπτοι καὶ εἰς ἕνα, ὁποῦ δὲν ἰξεύρει κάμμίαν Εὐρωπαϊκὴν διάλεκτον, ὡσὰν ὁποῦ δὲν χρειάζονται κάμμίαν ἀνάπτυξιν περαιτέρω.

§. 110. Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἢ ἀλγεβραϊκὸν ἁπλοῦν σχῆμα (§. 44.). ἕκαστον γράμμα ἔσται εἰς παράγων τοῦ σχήματος· ὡς $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon = \alpha \times \beta \times \gamma \times \delta \times \epsilon$.

Εἰ δὲ σύνθετον, (§. αὐτ.) καὶ πολλαπλοῦν, ἢ παραγόμενον ἐξ ἁπλοῦ, καὶ συνθέτου παράγοντος, ὡς $\alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\delta$, ὁ μὲν ἁπλοῦς παράγων α ἐπιγνωσθήσεται ἐκ τοῦ πᾶσι τοῖς μέλεσιν, ἢ ὅροις τοῦ σχήματος ἐμφιλοχωρεῖν, ὁ δὲ σύνθετος προκύψει.

κύψει, ἐὰν τὸ παραγόμενον διὰ τοῦ ἁπλοῦ διαιρῆται· ὅθεν συνορᾷν πάρεστιν, ὅτι π. χ.

$$\alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\delta = \alpha(\beta + \gamma - \delta)$$
$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta - \alpha\beta\varepsilon = \alpha\beta(\gamma + \delta - \varepsilon)$$
$$\alpha\beta\gamma - \alpha\gamma\delta - \beta\gamma\delta = \gamma(\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\delta)$$
$$\alpha\alpha - \alpha\beta + \alpha = (\alpha - \beta + 1)$$
$$\alpha\alpha - 7\alpha + \alpha\beta = \alpha(\alpha - 7 + \beta)$$
$$\alpha\beta\delta - \alpha\gamma\delta + \alpha\delta = \alpha\delta(\beta - \gamma + 1)$$
$$6\alpha\beta - 12\beta\gamma - 3\beta = 3\beta(2\alpha - 4\gamma - 1)$$
$$\alpha\beta - \beta\beta = \beta(\alpha - \beta)$$
$$\gamma\gamma - \gamma = \gamma(\gamma - 1)$$

Ἐὰν δὲ τὸ σύνθετον σχῆμα τὸ παραγόμενον ᾖ ἐκ πλειόνων συνθέτων παραγόντων, μαθησόμεθα τὴν εἰς τοὺς παράγοντας τούτου ἀνάλυσιν δι' ἐπιμελοῦς μόνης ἀσκήσεως·

ὡς $\alpha\alpha + 2\alpha\beta + \beta\beta = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$
$$\alpha\alpha - 2\alpha\beta + \beta\beta = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)$$
$$\alpha\alpha - \beta\beta = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$
$$\alpha\alpha + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)(\alpha + 1)$$
$$\alpha\alpha - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)(\alpha - 1)$$
$$\alpha\alpha - 1 = (\alpha + 1)(\alpha - 1)$$
$$\alpha\alpha - \beta\beta + 2\beta\gamma - \gamma\gamma = (\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)$$

Σχόλιον.

Ὁ Φιλόπονος ἀναγνώστης παρατηρῶν τοὺς κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τῆς προσθέσεως, καὶ τῶν σημείων, ἂν πολλαπλασιάσῃ τὰ ἐν παρενθέσει σχήματα, ἤτοι τοὺς παράγοντας μετ' ἀλλήλων, θέλει εὕρει ἀλη-

ἀληθῶς παραγόμενα τὰ πρὸς ἀριςερὰν κείμενα σχήματα.

§. 111. Ἐπειδὴ πᾶν παραγόμενον αβγδε οὐ μόνον δι' ἑκάςου ἁπλοῦ παράγοντος, ἀλλὰ καὶ δι' ἑκάςου παραγομένου, προκύπτοντος ἐκ τῶν παραγόντων, ἀνὰ 2, ἀνὰ 3, ἀνὰ 4, κτ' λαμβανομένων, ἄνευ λειψάνου διαιρεθῆναι ἔχει, εὑρήσομεν ἑκάςου ἀριθμοῦ πάντας τοὺς διαιρέτας, εἰ πρῶτον πάντας τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας, εἶτα δὴ πάντα τὰ παραγόμενα, τὰ προκύπτοντα, ἀνὰ 2, ἀνὰ 3, κτ' ἐκείνων λαμβανομένων, ζητοῦμεν' ἔνθεντοι·

Ἐπεὶ αβγδε $=$ α $\times$ β $\times$ γ $\times$ δ $\times$ ε· οἱ διαιρέται ἔσονται.

α'· α, β, γ, δ, ε.
β'· αβ, αγ, αδ, αε, βγ, βδ, βε, γδ, γε, δε·
γ'· αβγ, αβδ, αβε, αγδ, αγε, αδε, βγδ, βγε, βδε, γδε.
δ'· αβγδ, αβγε, αβδε, αγδε, βγδε.
ε'· αβγδε, καὶ ι (§. 105.)

Ἐπειδὴ ααβγδ $=$ α $\times$ α $\times$ β $\times$ γ $\times$ δ· ἔσονται οἱ διαιρέται.

α'· α, β, γ, δ.
β'· αα, αβ, αγ, αδ, βγ, βδ, γδ.
γ'· ααβ, ααγ, ααδ, αβγ, αβδ, αγδ, βγδ.
δ'· ααβγ, ααβδ, ααγδ, αβγδ.
ε'· ααβγδ, καὶ ι·

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ $\alpha\alpha\alpha\beta\gamma = \alpha \times \alpha \times \alpha \times \beta \times \gamma$· ἔσονται οἱ διαιρέται.

α'· α, β, γ.

β'· $\alpha\alpha, \alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma$.

γ'· $\alpha\alpha\alpha, \alpha\alpha\beta, \alpha\alpha\gamma, \alpha\beta\gamma$·

δ'· $\alpha\alpha\alpha\beta, \alpha\alpha\alpha\gamma, \alpha\alpha\beta\gamma$.

ε'· $\alpha\alpha\alpha\beta\gamma$ καὶ 1.

Ὡσάυτως ἐπειδὴ $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$. ἔσονται οἱ διαιρέται·

α. 2, 3, 5, 7, 11

β'.	$2 \times 3 = 6$	$3 \times 7 = 21$
	$2 \times 5 = 10$	$3 \times 11 = 33$
	$2 \times 7 = 14$	$5 \times 7 = 35$
	$2 \times 11 = 22$	$5 \times 11 = 55$
	$3 \times 5 = 15$	$7 \times 11 = 77$
γ'.	$2 \times 3 \times 5 = 30$	$2 \times 7 \times 11 = 154$
	$2 \times 3 \times 7 = 42$	$3 \times 5 \times 7 = 105$
	$2 \times 3 \times 11 = 66$	$3 \times 5 \times 11 = 165$
	$2 \times 5 \times 7 = 70$	$3 \times 7 \times 11 = 231$
	$2 \times 5 \times 11 = 110$	$5 \times 7 \times 11 = 385$
δ'.	$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$	
	$2 \times 3 \times 5 \times 11 = 330$	
	$2 \times 3 \times 7 \times 11 = 462$	
	$2 \times 5 \times 7 \times 11 = 770$	
	$3 \times 5 \times 7 \times 11 = 1155$	

ε'· 1, καὶ 2310.

Ἐπειδὴ

Ἐπειδὴ $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$· ἔσονται οἱ διαιρέται·

$$\alpha'.\left\{\begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}\right.$$

$$\beta'\left\{\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 2 \times 3 = 6 \\ 2 \times 5 = 10 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 3 \times 5 = 15 \end{array}\right.$$

$$\gamma'.\left\{\begin{array}{l} 2 \times 2 \times 2 = 8 \\ 2 \times 2 \times 3 = 12 \\ 2 \times 2 \times 5 = 20 \\ 2 \times 3 \times 3 = 18 \\ 2 \times 3 \times 5 = 30 \\ 3 \times 3 \times 5 = 45 \end{array}\right.$$

$$\delta'.\left\{\begin{array}{l} 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24 \\ 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40 \\ 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36 \\ 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 60 \\ 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90 \end{array}\right.$$

$$\varepsilon'.\left\{\begin{array}{l} 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72 \\ 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120 \\ 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180 \end{array}\right.$$

$$\varsigma'\left\{\ 1 \text{ καὶ } 360\right.$$

Τελευταῖον, ἐπειδὴ $2717 = 11 \times 13 \times 19$· ἔσονται οἱ διαιρέται·

$$\alpha'\cdot \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 13 \\ 19 \end{array} \right. \qquad \beta'\cdot \left\{ \begin{array}{l} 11 \times 13 = 143 \\ 11 \times 19 = 209 \\ 13 \times 19 = 247 \end{array} \right.$$

$$\gamma'\cdot \left\{ 1 \text{ καὶ } 2717 \right.$$

§. 112. Ἐὰν οὖν δύω ἀριθμῶν προκειμένων ἑκάτερον εἰς τοὺς κατ' αὐτὸν ἁπλοῦς παράγοντας διατέμωμεν, ἔσονται γνωςοὶ καὶ οἱ ἀριθμοὶ, οἱ ἀμφοῖν κοινοί· ζητοῦντες δὲ καὶ τὰ παραγόμενα ἐκ τούτων τῶν παραγόντων ἀνὰ 2, ἀνὰ 3, ἀνὰ 4, κτ. εἰλημμένων, εὑρήσο.

ρήσομεν καὶ πάντας τοὺς κοινοὺς αὐτῶν διαιρέτας, ἐν οἷς τὸ παραγόμενον ἐκ πάντων τῶν κοινῶν ἁπλῶν παραγόντων ἀείποτε τὸ μέγιςον ἔςαι.

ἐπειδὴ τοίνυν τοῦ $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$· καὶ
$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5·$$
οἱ κοινοὶ ἁπλοῖ παράγοντες εἰσὶ 2, 3, 5. ἄρα καὶ οἱ κοινοὶ αὐτῶν διαιρέται.

$$\alpha'·\begin{cases}2\\3\\5\end{cases}\qquad \beta'·\begin{cases}2 \times 3 = 6\\2 \times 5 = 10\\3 \times 5 = 15\end{cases}$$

$$\gamma'·\begin{cases}1 \text{ καὶ}\\30\end{cases}$$

καὶ ὁ μέγιςος τούτων κοινὸς διαιρέτης $2 \times 3 \times 5 = 30$.

Ἐπειδὴ πολλάκις ἀναγκαία ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίςου κοινοῦ διαιρέτου δύω ἀριθμῶν, καὶ ἡ μέθοδος τοῦ πάντα ἀριθμὸν εἰς τοὺς κατ' αὐτὸν ἁπλοῦς παράγοντας λύειν, μάλιςα τῷ μὴ τοὺς τῶν παραγόντων πίνακας ἀνὰ χεῖρας ἔχοντι, ζητητέον ἑτέραν τινὰ ἰδιαιτέραν μέθοδον ἐκκαλύψαι τοῦ

Ὁποιωνοῦν δύω ἀριθμῶν τὸν μέγιςον κοινὸν διαιρέτην εὑρίσκειν·

§. 113. Ἔςω ὁ μείζων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν α, ὁ ἐλάττων β, καὶ ὁ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης χ· ἐπειδὴ τὸ χ διαιρεῖ τὸ β, οὐκ ἔχει μεῖζον εἶναι τοῦ β, ἴσον δὲ καὶ μάλα, εἰ τὸ α διὰ τοῦ β διαιρέσιμον· διαιροῦσιν οὖν τὸ α διὰ τοῦ β τεθήτω τὸ πηλίκον εἶναι μ· καὶ τὸ λείψανον ἔςαι $\alpha - \mu\beta = o$· καὶ ἐκτοῦ ἑπομένου $\chi = \beta$· ἢ τὸ λείψανον $\alpha - \mu\beta = \gamma$ ἔςαι ἔλαττον τοῦ διαιρέτου β. καὶ τηνικαῦτα ἀνάγκη πᾶσα τὸ χ διελεῖν καὶ γ· τὸ γὰρ χ διαιρεῖ

τὸ

τὸ β· ἄρα καὶ τὸ $\mu\beta$· καὶ εἰ τὸ χ διαιρεῖ τὸ α, ἄρα τὸ χ διαιρεῖ καὶ τὴν τούτων διαφορὰν $\alpha - \mu\beta = \gamma$·

Ἐὰν οὖν $\alpha : \beta$ οὐδὲν ὑπολείπῃ, ἔσται $\chi = \beta$· ἐὰν δ' ὑπολείπῃ τὸ λεί ψ. γ, ἔσται τὸ χ καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ β καὶ γ·

Εἰ οὖν $\beta : \gamma$ οὐδὲν ὑπολείπει, ἔσται $\chi = \gamma$· εἰδὲ $\beta : \gamma$ ὑπολείπει λείψ. τὸ δ, ἔσται χ καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ γ καὶ δ·

Εἰ οὖν $\gamma : \delta$ οὐδὲν ὑπολείπει, ἔσται $\chi = \delta$· εἰδὲ $\gamma : \delta$ ὑπολείπει ε, ἔσται χ καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ δ καὶ ε·

Εἰ οὖν $\delta : \varepsilon$ οὐδὲν ὑπολείπει, ἔσται $\chi = \varepsilon$· εἰδὲ $\delta : \varepsilon$ ὑπολείπει ζ, ἔσται χ καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ ε καὶ ζ· ὥςε αὖθις χ ἴσον τῷ ζ, εἰ τὸ $\varepsilon : \zeta$ οὐδὲν ὑπολείπει·

Ἐὰν οὖν ὁ μείζων ἀριθμὸς διὰ τοῦ ἐλάττονος διαιρῆται, ὁ ἐλάττων διὰ τοῦ λειψάνου, τὸ α'· λείψ· διὰ τοῦ β'· τὸ β'· διὰ τοῦ γ'· τὸ γ'· διὰ τοῦ δ'. κτ· μέχρις ἂν τὸ λείψ· ἴσον τῷ ο γένηται, ὁ ἔσχατος διαιρέτης ἔσται ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· ἤ

Ἐὰν α'· $\alpha : \beta = \mu$· καὶ $\alpha - \beta\mu = \gamma$·

β'· $\beta : \frac{\beta\mu}{\gamma} = \nu$. καὶ $\beta - \gamma\nu = \delta$

γ'· $\gamma : \frac{\gamma\nu}{\delta} = \pi$. καὶ $\gamma - \delta\pi = \varepsilon$

δ'· $\delta : \frac{\delta\pi}{\varepsilon} = \rho$. καὶ $\delta - \varepsilon\rho = \zeta$

ε'· $\varepsilon : \frac{\varepsilon\rho}{\zeta} = \sigma$. καὶ $\varepsilon - \zeta\sigma = 0$.

ἔσται οὖν $\chi = \zeta$.

Σχόλιον.

Διαρισθήτωσαν τὰ γράμματα δι᾽ ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι, ἂς ἀντικαταςοῦν ἀντὶ τούτων, καὶ ἔςαι δῆλα τὰ διὰ γραμμάτων λεγόμενα.

Παράδ.

Ἔςωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ 2310, καὶ 360.

$$
\begin{array}{l}
2310 : 360 = 6 \\
\underline{2160} \\
360 : 150 = 2 \\
\underline{300} \\
150 : 60 = 2 \\
\underline{120} \\
60 : 30 = 2 \\
\underline{60} \\
0
\end{array}
$$

ὁ 30 ἄρα ἐςὶν ὁ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 2310, καὶ 360.

Διαιρεθήτω ἔτι 58604 καὶ 4665, καὶ οὐδεὶς κοινὸς εὑρεθήσεται διαιρέτης, εἰμὴ ἡ μονάς.

Ἀξιώματα·

§. 114. α΄· Ἐὰν δύω, ἢ πλείους ἴσαι ποσότητες διὰ δύω, ἢ πλειόνων ἴσων ποσοτήτων, ἤ, ὃ ταὐτόν ἐςι, διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου διαιρεθῶσιν, ἔςαι καὶ τὰ τούτων πηλίκα ἴσα·

$$\alpha = \beta = \gamma \cdot \quad \chi = \psi = \omega.$$

ἔςαι οὖν $\frac{\alpha}{\chi} = \frac{\beta}{\psi} = \frac{\gamma}{\omega} \cdot$ ἢ $\frac{\alpha}{\chi} = \frac{\beta}{\chi} = \frac{\gamma}{\chi}$

ἐν ἀριθμοῖς·

$24 = 6 \cdot 4 = 3 \cdot 8.$ καὶ $3 = 3 = 3.$ ἄρα

$\frac{24}{3} = \frac{6 \cdot 4}{3} = \frac{3 \cdot 8}{3}.$ τὸ γὰρ πηλίκον ἐςὶν 8· τὸ αὐτὸ κρατεῖ, καὶ συμπεπλεγμένων οὐσῶν τῶν ποσοτήτων.

β'· Ἴσαι ποσότητες, διὶ ἀνίσων διαιρεθεῖσαι, παρέχουσι πηλίκα ἄνισα· ἔνθα τὸ πηλίκον μεῖζον ἔςαι τοῦ ἑτέρου, εἰ ὁ διαιρέτης ἐλάττων εἴη τοῦ ἑτέρου·

$$\begin{array}{llll} \alpha = \beta. & \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\delta}. & 8 = 2.4 & \frac{8}{4} < \frac{2 \cdot 4}{2} \\ \gamma > \delta. & & 4 > 2. & \end{array}$$

γ'· Ἄνισοι ποσότητες, διὶ ἴσων διαιρεθεῖσαι, δώσουσι καὶ πηλίκα ἄνισα· τούτων δὲ μεῖζον ἔςαι τὸ ἐκ τῆς μείζονος διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου προκύπτον·

$$\begin{array}{llll} \alpha > \beta. & \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}. & 8 > 6. & \frac{8}{2} > \frac{6}{2} \\ \gamma = \delta. & & 2 = 2. & \end{array}$$

δ'· Ἐὰν ποσότης τις μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθῇ, καὶ διαιρεθῇ, οὐδεμίαν τροπὴν ὑφίςαται· ὅ ἐςιν, ἡ ποσότης μένει ἡ αὐτή· ὅσῳ γὰρ τῷ πολλαπλασιασμῷ αὔξεται, τοσούτῳ μειοῦται διὰ τῆς διαιρέσεως· μένει ἄρα ἡ αὐτὴ, ἥτις πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τῆς διαιρέσεως ἦν· ὡς

$6 \times 10 : 10 = 6$· καὶ $\alpha \times \beta : \beta = \alpha$· ἢ

$$\frac{\alpha\beta}{\beta} = \alpha$$

ε'· Ἐὰν ὁ διαιρετέος, καὶ ὁ διαιρέτης ἅμα διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος ἤτοι πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι, τὸ πηλίκον μένει ἀμετάβλητον·

 ἔςω

Ἔςω 20 ὁ διαιρετέος, καὶ 4 ὁ διαιρέτης, ὧν τὸ πηλίκον 5·

$$20 \times 8 = 160 \cdot \text{ καὶ } 4 \times 8 = 32 \cdot \quad \frac{160}{32} = 5.$$

ὡσαύτ. $20 : 2 = 10$· καὶ $4 : 2 = 2$.

$$\frac{10}{2} = 5 \cdot$$

Καὶ ἐν γένει·

Ἔςω α ὁ διαιρετέος, καὶ β ὁ διαιρέτης· καὶ τὸ τούτων πηλίκον Κ· ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta} = K$· πολλαπλασιασθήτω α καὶ β ἄμφω ἐπὶ τὸ ν· καὶ τὸ πηλίκον μένει αὖθις Κ· ὡς $\frac{\alpha . \nu}{\beta . \nu} = K$· τὸ γὰρ ν τοῦ διαιρετέου ἀναιρούμενον ὑπὸ τοῦ ν τοῦ διαιρέτου ὑπολείπει αὖθις $\frac{\alpha}{\beta}$, διαιρεθήτωσαν ἄμφω διὰ τοῦ ν· καὶ τὸ πηλίκον ἔςαι αὖθις Κ· οἷον $\frac{\alpha : \nu}{\beta : \nu} = \frac{\alpha}{\beta} = K$·

Ὁ δὲ λόγος προφανής· ἄμφω γὰρ μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθέντες αὔξονται ἐπίσης, καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρεθέντες μειοῦνται ἐπίσης· ὁ διαιρέτης ἄρα περιέχεται ἐν τῷ διαιρετέῳ, ὁσάκις καὶ πρότερον· ἄρα καὶ πηλίκον τὸ αὐτό·

ς΄· Ἐάντις πληθὺς ποσοτήτων, διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως (§. 16) συνημμένη, διαιρεθῇ δι' οἱασοῦν ποσότητος, τὸ πηλίκον ἔςαι τὸ αὐτὸ τῇ ποσότητι τῇ προκυπτούσῃ, εἰ ἑκάςης τῶν ποσοτήτων ἐν μέρει διὰ τοῦ δοθέντος διαιρέτου διαιρεθείσης, τὰ ἐν μέρει πηλίκα προσαθροισθῇ·

Ἔςωσαν ποσότητες α, β, γ, δ κτ· τὰ ἐν μέρει πηλί-

πηλίκα τοῦ $\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\delta}{\nu}$ ἀμαλγ-φθέντα ἔϛαι ἴσα τῷ πηλίκῳ τοῦ $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{\nu}$.

ἢ ἐν ἀριθμοῖς·

$$\frac{4}{2} + \frac{6}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} = \frac{4+6+8+12}{2}$$

$$= \frac{30}{2} = 16·$$

Χάριν τῶν πρωτοπείρων δειχθήσεται τοῦτο σαφέϛερον οὕτως· Ἔϛω τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ἐν μέρει πηλίκων, εἰ ἑκάϛη ποσότης ἐν μέρει διαιρεῖται, $= K$· ἤτοι $\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\delta}{\nu} = K$· αἱ δύω αὗται ποσότητες εἰσὶ πάντῃ ἴσαι ἀλλήλαις, ἢ δῆλον· ἀλλὰ διὰ τὸ (§. 79.α΄.) ἔσονται ἴσαι, καὶ εἰ μετὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιασθήσονται· κληθήτω αὐτὴ $= \nu$· πολλαπλασιασθήτω οὖν $\frac{\alpha}{\nu}$ μετὰ τοῦ ν, καὶ $\frac{\beta}{\nu}$ μετὰ τοῦ ν, καὶ $\frac{\gamma}{\nu}$ μετὰ τοῦ ν, καὶ $\frac{\delta}{\nu}$ μετὰ τοῦ ν· καὶ τελευταῖον καὶ K μετὰ τοῦ ν· κατὰ τὸ δ΄ τοῦδε τοῦ §. ἔϛαι $\frac{\alpha}{\nu} \times \nu$

$$+ \frac{\beta}{\nu} \times \nu + \frac{\gamma}{\nu} \times \nu + \frac{\delta}{\nu} \times \nu$$

$= \alpha + \beta + \gamma + \delta$· καὶ $K \times \nu = K\nu$· ὥϛε $\alpha + \beta + \gamma + \delta = K\nu$· ἢ

$(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = K\nu$· κατὰ τὸ α΄· τοῦδε ἔςαι καὶ $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{\nu} = \frac{K\nu}{\nu}$· ἀλλὰ διὰ τὸ δ΄· $\frac{K\nu}{\nu} = K$· ἄρα $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{\nu} = K$· ἦν δὲ, ὡς ἐν ἀρχῇ τῆς δείξεως ὑποτέθειται, $\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\delta}{\nu} = K$· ἔςι δὲ καὶ $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{\nu} = K$· ἄρα καὶ

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\delta}{\nu}$$

(§. 48. δ΄.)

Συντομώτερον δὲ οὕτως ἡ δεῖξις ἐπαχθήσεται.

$$\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\delta}{\nu} = K.$$

. ν, ἤτοι πολλαπλ. ἐπὶ τὸ ν·

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = K\nu$$

: ν, ἤτοι διαιρ. διὰ τοῦ ν·

$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)}{\nu} = K.$$

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\delta}{\nu}.$$

Τοῦτο ὡς καθόλου ἁρμόζει πᾶσι τοῖς ἀριθμοῖς·

ζ΄· Ἐὰν ὁ διαιρετέος ᾖ διαφορὰ δυοῖν ποσοτήτων, ὡς $\alpha - \beta$, ὁ δὲ διαιρέτης ὁποσοῦν ἀριθμὸς ᾖ, οἷον ν, ἔςαι ἔϛαι $\frac{\alpha - \beta}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}$. τουτέϛι, τὸ αὐτὸ ἐϛι, τὸ τὰς ποσότητας τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεῖσθαι ἀπ᾽ ἀλλήλων, καὶ τὴν διαφορὰν διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ δοθέντος διαιρέτου, τῷ, ἑκατέραν ποσότητα ἐν μέρει διαιρεῖσθαι, καὶ τὰ πηλίκα ἀφαιρεῖσθαι ἀπ᾽ ἀλλήλων· π. χ.· --

$\frac{15 - 6}{3} = \frac{15}{3} - \frac{6}{3}$. ἐϛι γὰρ $15 - 6 = 9$· καὶ $9 : 3 = 3$. ἔϛι δὲ καὶ $\frac{15}{3} = 5$. καὶ $\frac{6}{3} = 2$. ὥϛε $5 - 2 = 3$· δεικτέον τοῦτο καὶ ἐν γένει·

$\frac{\alpha - \beta}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}$. ἡ διαφορὰ τοῦ $\alpha - \beta$ κληθήτω δ· ὥϛε $\alpha - \beta = \delta$· διὰ τὸ α΄ τοῦδε τοῦ §. ἔϛαι $\frac{\alpha - \beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$. θεωρηθήτωσαν ἤδη τὰ δύω ἴσα ποσὰ ἄνευ τοῦ διαιρέτου ν, ἤτοι μόνον $\alpha - \beta = \delta$· ἐὰν ἀμφοῖν $+ \beta$ προϛεθῇ, μενοῦσιν αὖθις ἴσα (§. 48. α΄.). ἤτοι $\alpha - \beta + \beta = \delta + \beta$. ἀλλὰ $\alpha - \beta + \beta = \alpha$· (§. 37.) ἄρα $\alpha = \delta + \beta$· καὶ διὰ τὸ α΄ τοῦδε τοῦ §. $\frac{\alpha}{\nu} = \frac{\delta}{\nu} + \frac{\beta}{\nu}$.. ἐὰν ἴσον ἀπὸ ἴσου ἀφαιρεθῇ, αἱ διαφοραὶ ἔσονται ἴσαι (§. 53. α΄.)· ἔϛω $\frac{\beta}{\nu} = \frac{\beta}{\nu}$. καὶ ἀφαιρεθήτω ἀπ᾽ ἀμφοῖν $\frac{\beta}{\nu}$. ἔϛαι οὖν $\frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}$ (§. 49.) $= \frac{\delta}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}$. ὅ ἐϛιν $\frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$ (§. 37.)·

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ $\frac{\alpha-\beta}{\nu}=\frac{\delta}{\nu}$. ἐν ἀρχῇ, καὶ $\frac{\alpha}{\nu}-\frac{\beta}{\nu}=\frac{\delta}{\nu}$. ὡς ἤδη δέδεικται· ἔσται ἄρα καὶ $\frac{\alpha-\beta}{\nu}=\frac{\alpha}{\nu}-\frac{\beta}{\nu}$. (§. 48. δ'.)

Συντομώτερον.

$$\frac{\alpha-\beta}{\nu}=\frac{\alpha}{\nu}-\frac{\beta}{\nu}.$$

Δεῖξις.

Ἔστω $\alpha-\beta=\delta$. : ν. διαιρ. διὰ ν

$$\frac{\alpha-\beta}{\nu}=\frac{\delta}{\nu}$$

Αὖθις

$$\alpha-\beta=\delta$$
$$+\beta=+\beta \quad \text{προς: } +\beta.$$
$$\alpha-\beta+\beta=\delta+\beta, \text{ ἤτοι}$$
$$\alpha=\delta+\beta \text{ : ν. διαιρ. διὰ ν·}$$
$$\frac{\alpha}{\nu}=\frac{\delta}{\nu}+\frac{\beta}{\nu}$$
$$\frac{\beta}{\nu}=\frac{\beta}{\nu}. \text{ ἀφαιρ. } \frac{\beta}{\nu}$$
$$\frac{\alpha}{\nu}-\frac{\beta}{\nu}=\frac{\delta}{\nu}+\frac{\beta}{\nu}-\frac{\beta}{\nu}. \text{ τουτέστιν}$$
$$\frac{\alpha}{\nu}-\frac{\beta}{\nu}=\frac{\delta}{\nu}$$

Ἐπειδὴ οὖν $\frac{\alpha-\beta}{\nu}=\frac{\delta}{\nu}$ ἐν ἀρχῇ·

Ἤδη δὲ $\frac{\alpha}{\nu}-\frac{\beta}{\nu}=\frac{\delta}{\nu}$: ἔσται (§. αὐτ.) καὶ $\frac{\alpha-\beta}{\nu}=\frac{\alpha}{\nu}-\frac{\beta}{\nu}$.

Περὶ

Περὶ τῶν κλασμάτων·

§. 115. Ἐπὶ τῆς διαιρέσεως, ὁ διαιρέτης ἦν ἐλάσσων τοῦ διαιρετέου, περιεχόμενος ἐν τούτῳ ἅπαξ, ἢ πολλάκις, ὅ διὰ τοῦ πηλίκου γνωςὸν ἡμῖν ἐγίνετο· ἐνίοτε δὲ καὶ λείψανον ὑπελείπετο· ἀλλὰ ληφθήτω ἤδη ὁ διαιρέτης μείζων τοῦ διαιρετέου· καὶ α΄· ἐπὶ τῆς μονάδος· ἤτοι διαιρεθήτω ἡ μονὰς διὰ 2, 3, 4, κτ· ὅπερ γραφόμενον οὕτως ἀποδοθήσεται (§. 85.) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, κτ· ἐνταῦθα ὁ διαιρέτης οὐδ᾽ ἅπαξ τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχεται· δύναται μέντοι μονάς τις ἤτοι ἐνεργείᾳ, ἢ γοῦν ἐπινοίᾳ ἀείποτε εἰς 2, 3, καὶ πλείω μέρη διαιρεθῆναι· ταῦτα δὲ, (τὰ μέρη) ἢ δῆλον, οὐχ ὅλα, ἀλλὰ μέρη εἰσὶ τοῦ ὅλου, **Κλάσματα** καλούμενα·

Οὕτω τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{1}{2}$ ἐςὶν ἡ ἡμίσεια μονὰς, καὶ καλεῖται ἥμισυ· τοῦ $\frac{1}{3}$, τὸ γ΄· μέρος τῆς μον· τριτημόριον λεγόμενον· τοῦ $\frac{1}{4}$, τὸ δ΄. μέρος τῆς μον· τεταρτημόριον λεγόμ. κτ· ὅλως δὲ, ταῦτα τὰ κλάσματα, ἅπερ ἅμα καὶ τὸ πηλίκον παριςῶσι, (§. αὐτ. σχ.) τὴν προσηγορίαν εἰλήφασιν ἐκ τοῦ πλήθους τῶν μερῶν, εἰς ἃ ἡ μονὰς διῄρηται, ὡς καὶ κατωτέρω ῥηθήσεται.

Σχόλιον.

Ἐὰν ἀριθμός τις διάτινος ἄλλου, ὡς ὁ 7 διὰ 3, δὲν διαιρῆται, τοῦτο νοητέον οὕτως· ὅτι δηλαδὴ τὸ πηλίκον δὲν ἠμπορεῖ νὰ παραςαθῇ δι᾽ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, ὄχι ὅμως, ὅτι εἶναι ἀπολύτως ἀδύνατον νὰ λάβωμεν ἰδέαν τοῦ πηλίκου· νόει μοι μίαν γραμμὴν 7 ποδιαίαν· ἡ ὁποία χωρὶς ἀμφιβολίαν εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἴσα μέρη, τῶν ὁποίων μερῶν τοῦ μεγέθους λαμβάνομεν καὶ πάνυ τὴν ἰδέαν.

§. 116. Ἀλλὰ καὶ εἰς ὅσα ἂν βούλῃ μέρη, τὴν μονάδα διαιρεθῆναι ἔχειν οὐ χαλεπὸν συνιδεῖν· εἰς 5 γὰρ, 6, 10, 30, 80, 1000, καὶ εἰς ἔτι πλείω, ἢ ἐλάττω μέρη ταύτην διελὼν οὕτω ταῦτα δηλώσεις $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{80}$, $\frac{1}{1000}$ κτ· τοῦτο δ' ἂν εἴη τῆς μονάδος τὸ ε΄ ς΄ ι΄ λ΄ π΄ καὶ αςὸν μέρος.

§. 117. Ἐὰν οὖν τῆς μονάδος εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διαιρεθείσης, π. χ. εἰς 3, ἢ 4, ἢ κτ· ἓν τούτων ληφθῇ, ὡς $\frac{1}{3}$, ἔξεςί σοι βουλομένῳ καὶ ἔτι ἓν μέρος ἐκείνῳ προσθεῖναι· καὶ οὕτως ἕξεις $\frac{1}{3}$, καὶ ἔτι $\frac{1}{3}$, ἤτοι δύω τριτημόρια, ἢ τρίτα, οὕτω ταῦτα γράψας ($\frac{2}{3}$)· καὶ ἔτι ἓν δὲ προσθεὶς ἕξεις $\frac{3}{3}$. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον χωροῦντός σου, καὶ ἀεὶ ἓν ἴσον μέρος τοῖς προληφθεῖσι προσαθροίζοντος, προκύψουσι ($\frac{4}{3}$)· δ΄ τρίτα· ($\frac{5}{3}$)· ε΄ τρίτα, κτ ἅπερ πάντα κλάσματα καλοῦνται· ὡς $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{1000}{4}$, κτ· εἰσὶ κλάσματα, ὡσαύτως ἀναφυέντα, εἴτουν τῷ $\frac{1}{4}$ διηνεκῶς καὶ ἑτέρου ἴσου μέρους προσιθεμένου· τὰ οὖν κλάσματα, ὁποῖα ἂν ὦσι, τῷ εἰρημένῳ τρόπῳ ἀνακύπτουσι· π. χ. $\frac{7}{25}$. ἐνταῦθα διῄρηται ἡ μονὰς εἰς 25 ἴσα μέρη· καὶ ἀεὶ ἑνὸς τούτων λαμβανομένου, συμπεπλήρωται τὰ 7 μέρη, τουτέςιν $\frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{7}{25}$. καὶ τοῦτο γίνεται ἐπὶ πάντων, ἡλίκος ἂν ᾖ ὁ διαιρέτης.

§. 118. Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἴσος ᾖ τῷ διαιρετέῳ, τὸ πηλίκον ἔςαι = 1· (§. 84. σχ.) ἐλάττονος δὲ ὄντος, ἢ ὁ διαιρετέος, τὸ πηλ. ἔςαι μεῖζον τῆς 1· τότε γὰρ περιέχεται ὁ διαιρέτης τῷ διαιρετέῳ ἅπαξ, ἢ τοσάκις· μείζονος δὲ, ἢ ὁ διαιρετέος, τὸ πηλίκον ἐξ ἀνάγκης ἐλαττωθήσεται τῆς 1· (ἐὰν ὁ ἐλάττων ἀριθμὸς διὰ τοῦ μείζονος διαιρῆται, προκύπτει πηλίκον ἔλαττον τῆς 1· π. χ. εἰ γραμμὴ δύω ποδῶν εἰς 3. ἴσα μέρη διατμηθῇ, ἕκαςον τούτων προφανῶς ἔλαττον ἔςαι

τοῦ

τοῦ ποδός) τὰ κλάσματα, ὧν ὁ διαιρέτης μείζων τοῦ διαιρετέου, ὅ ἐςι τὰ ἐλάττονα τῆς 1, καλοῦνται γνήσια· ὡς $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{5}{33}$, κτ· ὧν] δὲ ὁ διαιρέτης ἐλάσσων τοῦ διαιρετέου, νόθα· οἷον $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{27}{20}$, κτ· τὰ τοιαῦτα ἄμεινον ἂν διὰ δύω μελῶν, ἢ] ὅρων παραςαῖεν, τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου διαιρεθέντος, καὶ τῷ ὁλοσχερεῖ πηλίκῳ τοῦ λειψάνου παραρτηθέντος, ὑπογραφομένου τῷ λειψάνῳ καὶ τοῦ διαιρέτου· ὡς $\frac{12}{7}$ εἴη ἂν $= 1 + \frac{5}{7}$· καὶ $\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$· (§. 86. σχ.) τὰ δὲ ἴσον τὸν διαιρετέον τῷ διαιρέτῃ ἔχοντα εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις· ὡς $\frac{4}{4} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{5}{5} = \frac{8}{8} = \frac{100}{100} = 1$· ἐν πᾶσι γὰρ τούτοις ὁ διαιρέτης ἅπαξ τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχεται·

§. 119. Ὁ μὲν ἐπὶ τὴν γραμμὴν ἀριθμὸς, ἢ ὁ διαιρετέος, ἀκούει Ἀριθμητὴς, ὡς τὰ παραληφθέντα μέρη τῆς εἰς ἴσα μέρη διαιρεθείσης μονάδας ἀριθμῶν, ἢ ὡς δεικνύων, ὁπόσα μέρη τῆς μονάδος ἐπὶ τοῦδε τοῦ κλάσματος παρείληπται· ὁ δ' ὑπ' αὐτὴν, ἤτοι ὁ διαιρέτης, Παρονομαςὴς κέκληται, ὡς, εἰς ὅσα μέρη ἴσα ἡ μονὰς διῄρηται, ἐκφέρων· ἄμφω δὲ κοινῷ ὀνόματι, ὅροι τοῦ κλάσματος.

§. 120. Ἐπειδὴ διὰ τῶν γραμμάτων πᾶσα ποσότης, ἢ ἀριθμὸς δηλοῦται· καὶ κλάσματα, ὡς δῆλον, ταῦτα διασημάναι ἔχουσι· π. χ. $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\nu}{\nu}$.

ἔνθα ὡσαύτως τὸ μὲν ἄνω ἀριθμητὴς, τὸ δὲ κάτω παρονομαςὴς καλεῖται, ἀπαγγελλόμενα διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$, α β μόριον· $\frac{\gamma}{\delta}$, γ δ μόριον· ἐὰν δὲ καὶ τούτων ὁ ἀριθμητὴς ᾖ ὁ αὐτὸς τῷ παρονομαςῇ, ἔςαι $= 1$· τότε γὰρ ὁ διαιρέτης ἅπαξ τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχε-

ριέχε-

ριέχεται· ἀλλὰ καὶ ἀλλήλοις ἴσα διὰ τὸ (§. 48. δ'.) ἕκαστον γὰρ τούτων $= 1$· ὥστε $\frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta} = \frac{\gamma}{\gamma} = \frac{\delta}{\delta} = 1$.

§. 121. Ἐπὶ τῆς κοινῆς διαιρέσεως δύνανται πηλίκα διαφόρων παραδειγμάτων ἴσα ἀλλήλοις εἶναι, καίτοι τοῦ διαιρέτου, καὶ διαιρετέου τῶν παραδ. ἀνίσων ὄντων· τοῦτο μόνον παρατηρητέον, εἰ ἐν τοῖς διαφόροις παραδειγμ. ὁ διαιρετέος τὸν διαιρέτην ἐπίσης τοσάκις περιέχει· ὡς π. χ. τὰ πηλίκα τοῦ 8 διὰ τοῦ 4 διαιρεθέντος, καὶ τοῦ 12 διὰ τοῦ 6 εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις. ἄμφω $= 2$· ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ κλάσματι ὁ μὲν ἀριθμ. ὡς διαιρετέος, ὁ δὲ παρονομ. ὡς διαιρέτης θεωρεῖται, καί τοι τῆς διαιρέσεως ἀεὶ ἐνεργείᾳ γενέσθαι ἀδυνατούσης, δῆλον, ὅτι καὶ διάφορα κλάσματα ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται, τῶν ἀριθμητῶν, καὶ παρονομαστῶν διαφόρων ὄντων· ὡς $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$· ὃ καὶ κατωτ. δειχθήσεται. Καὶ ὥσπερ ἐπὶ τῶν τῆς διαιρέσεως παραδ. ἐν οἷς ὁ διαιρετέος διάφορος τοῦ διαιρέτου, τὰ πηλίκα εἰσὶ μείζω, ἢ ἐλάττω πρὸς ἄλληλα παραβαλλόμενα, ἤπερ ὁ διαιρέτης τῷ διαιρετέῳ πλεονάκις, ἢ ἐλαττονάκις ἐμπεριέχοιτο, οὕτως ἐροῦμεν καὶ περὶ τῶν κλασμάτων· καὶ ταῦτα γὰρ, ἐν διαφόροις ἀριθμηταῖς, καὶ παρονομασταῖς, θάτερον θατέρου μεῖζον ἂν εἴη, ἢ ἔλαττον· ὅπερ διὰ τῆς διαιρέσεως ἀναφανήσεται, εἰ ἐγχωρεῖ· ὅπως οὖν τὸ μεῖζον, ἢ ἔλαττον τῶν κλασμάτων πρὸς ἄλληλα παρεξεταζομένων διαγνωσθήσεται, δεικτέον ἤδη, τὴν ἐν χρήσει μέθοδον παραλαμβάνοντας, καὶ ἑτέραν τινὰ ἐν οἰκείῳ τόπῳ ἀποταμιεύοντας.

§. 122. Καὶ δὴ ἀρκτέον ἀπὸ τῶν ἐλαχίστων· δύω κλασμάτων προκειμένων, πρὸς ἄλληλα ταῦτα παραβαλεῖν ἐθέλουσι, θεωρητέον, εἰ τοὺς αὐτοὺς, ἢ

μὴ

μὴ, παρονομαςὰς ἔχουσι· καὶ Εἰ μὲν τὸ α΄· ἡ τούτων παράθεσις καθ' ἑαυτὴν δήλη· μεῖζον γὰρ ἐςαι, οὗ μείζων ὁ ἀριθμητὴς· ὡς $\frac{2}{6}$, καὶ $\frac{5}{6}$· ἔνθα καταφανὲς τὸ $\frac{5}{6}$ μεῖζον εἶναι τοῦ $\frac{2}{6}$· ἐκεῖνο γὰρ μείζονα ἔχει τὸν ἀριθμητήν· ὅ ἐςιν, ἐπ' ἀμφοῖν τῆς μονάδος εἰς 6 ἴσα μέρη διαιρεθείσης, ἐν μὲν τῷ $\frac{2}{6}$ ἐλήφθησαν 2, ἐν δὲ τῷ $\frac{5}{6}$, 5 τούτων τῶν μερῶν· τὸ δὲ $2 < 5$· ἄρα, κτ· ὡσαύτως καὶ τῶν $\frac{12}{133}$ καὶ $\frac{24}{133}$ τὸ β΄. ἐςὶ μεῖζον τοῦ α΄· Εἰ δὲ τὸ β΄· πειρατέον, εἰ οἷόντε, τὰ κλάσματα οὕτω μεταβαλεῖν, ὥςε τοῦ αὐτοῦ ἄμφω παρονομαςοῦ μετασχόντα, τὴν προτέραν αὐτῶν δύναμιν πάντῃ ἀμετάβλητον διατηρῆσαι· ῥᾶον γὰρ ἐκ τούτου πρὸς ἄλληλα παραβληθήσονται· ἡ δὲ πρᾶξις καλεῖται, κλάσματα ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν ἀνάγειν· ἐν τῷ (§. 114. δ΄.) δέδεικται, ποσότητα οἱανοῦν, μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιαζομένην, καὶ διαιρουμένην, μηδεμίαν τροπὴν ὑφίςασθαι· ὅσῳ γὰρ αὔξεται, τοσούτῳ καὶ μειοῦται· ἀλλ' ἐπὶ τοῦ κλάσματος ὁ μὲν ἀριθμ. θεωρεῖται ὡς διαιρετέος, ὁ δὲ παρονομ. ὡς διαιρέτης· ἐὰν οὖν ἄμφω (ἀριθμ. καὶ παρ.) διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι, τὸ αὐτὸ ἐςιν, ὥσπερ ἂν εἰ ἡ ποσότης οὐδόλως μεταβάλλοιτο· οἷον εἰ τοῦ $\frac{4}{5}$ τὸν ἀριθμητὴν 4 τῷ 7 πολλαπλασιάσομεν, τουτέςι 7: κις αὐξήσομεν, ὡσαύτως καὶ τὸν παρανομ. οὐ τρέπει τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$· ὃ πολλαπλασιασθὲν οὕτως ἀποδοθήσεται $\frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{28}{35}$. ἀληθεύσει δὲ τοῦτο, καὶ εἰ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἄμφω διαιρήσομεν· τοσούτῳ γὰρ ὁ διαιρετέος, ἤτοι ὁ ἀριθμ. μειωθήσεται, ὅσῳ καὶ ὁ διαιρέτης, ἤτοι ὁ παρον· καὶ τὸ πηλίκον ἄρα μενεῖ τὸ αὐτό (§. 114. ε΄.) οἷον $\frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$. τοῦτο ῥητέον καὶ περὶ τῶν γραμμάτων· ἐπειδὴ γὰρ $\frac{\alpha}{\beta}$ πᾶν

κλάσμα

κλάσμα παριςᾷ, καὶ $\frac{\mu}{\mu} = 1$ (§. 84. σχ.) ἄρα καὶ $\frac{\alpha.\mu}{\beta.\mu}$ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ οὐ διάφορον· ἔςι γὰρ $\frac{\alpha.\mu}{\beta.\mu} = \frac{\alpha.1}{\beta.1}$ (§. αὐτ.) $= \frac{\alpha}{\beta}$. (§. 65.). διὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ $\frac{\alpha:\mu}{\alpha:\mu}$ οὐδόλως διαφέρει τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$. ὅτι $\frac{\alpha:\mu}{\alpha:\mu}$ $= \frac{\alpha:1}{\beta:1} = \frac{\alpha}{\beta}$. ἐξ οὗ ὁ κανών.

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς, καὶ παρονομ. ἑκάςου κλάσματος μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἄμφω πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι, τὸ κλάσμα οὐδόλως μεταβάλλεται·

§. 123. Οὐδὲν οὖν δυσχερὲς, τοῦτο εἰδόσι, δύω δοθέντα κλάσματα ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν ἀνάγειν, ἤτοι τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν ἑκατέρῳ διδόναι· ἔςαι δὲ τοῦτο τῷ πολλαπλασιασμῷ τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ παρονομαςοῦ ἑκατέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαςὴν τοῦ ἑτέρου· ὡς $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{5}{6}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν ἀναχθέντα ἔςαι $\frac{4}{5} = \frac{4.6}{5.6}$. καὶ $\frac{5}{6} = \frac{5.5}{6.5}$. ἔνθα ὁρᾷς, ὅτι καὶ ὁ ἀριθμ. καὶ ὁ παρ. ἑκατέρου κλάσμ. τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἐπολλαπλασιάσθησαν. τοῦ μὲν α'. κλ. τῷ 6, τοῦ δὲ β'. τῷ 5· οὐ μεταβέβληνται ἄρα (§. ἀνωτ.). ὥςε $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{5}{6} = \frac{4.6}{5.6}$ καὶ $\frac{5.5}{6.5} = \frac{24}{30}$, καὶ $\frac{25}{30}$. καὶ ὅτι ἀμφοῖν τοῖς κλάσμασι παρονομαςὴς ὁ αὐτὸς προσεγένετο· τὸ δ' ἐν ἀντιςρόφῳ τῇ τάξει τοὺς παράγοντας εἶναι τοῦ παρονομαςοῦ, οὐδὲν πρὸς ἔπος· τοῦτο γὰρ οὐδεμίαν ἐμποιεῖ διαφοράν. (§. 58.)

Προκεί-

Προκείσθω ἤδη καὶ ἕτερα παραδείγματα·

$\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{5}{7} = \frac{3\cdot7}{8\cdot7}$ καὶ $\frac{5\cdot8}{7\cdot8} = \frac{21}{56}$ καὶ $\frac{40}{56}$·

ὡσαύτως $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{7} = \frac{1\cdot7}{4\cdot7}$ καὶ $\frac{1\cdot4}{7\cdot4} = \frac{7}{28}$ καὶ $\frac{4}{28}$·

$\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{7}{12}$ $= \frac{3\cdot12}{4\cdot12}$ καὶ $\frac{7\cdot4}{12\cdot4} = \frac{36}{48}$ καὶ $\frac{28}{48}$.

Τούτων οὖν τεθέντων, πότερον τούτων μεῖζον, ῥαδίως γνωσόμεθα· μεῖζον γὰρ ἔςαι τὸ μείζονα ἔχον ἀριθμητήν· τούτῳ τῷ τρόπῳ τοῦ κλάσματα δύω ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀνάγειν παρονομ. καὶ ἐπὶ τῶν τοῖς γράμμασι παριςαμένων κλασμάτων χρησόμεθα, ὡς καὶ τούτων ποσότητας καὶ ἀριθμοὺς σημαινόντων, καὶ ἐν ὑπολογισμῷ τῷ αὐτῷ τῶν αὐτῶν γραμμάτων τὴν αὐτὴν ποσότητα· (§. 42. σχ.)·

Ἐὶ δίοι $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ὑπὸ τὴν αὐτὴν παρονομασίαν ἀγαγεῖν, ἔςαι $= \frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \delta}$ καὶ $\frac{\gamma \times \beta}{\delta \times \beta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta}$ καὶ $\frac{\gamma\beta}{\delta\beta}$.

Αὖθις $\frac{\nu}{\mu}$ καὶ $\frac{\rho}{\sigma} = \frac{\nu\cdot\sigma}{\mu\cdot\sigma}$ καὶ $\frac{\rho\cdot\mu}{\sigma\cdot\mu} = \frac{\nu\sigma}{\mu\sigma}$ καὶ $\frac{\rho\mu}{\sigma\mu}$.

καὶ $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{\rho}{\mu} = \frac{1\cdot\mu}{2\cdot\mu}$ καὶ $\frac{2\cdot\rho}{2\cdot\mu} = \frac{\mu}{2\mu}$ καὶ $\frac{2\rho}{2\mu}$.

§. 124. Ἀλλὰ καὶ πλείω κλάσματα παραβαλεῖν θέλοντες τὸν αὐτὸν χωρήσομεν τρόπον, τουτέςι, πάντων τῶν κλασμάτων, ὅσα ἂν παρῇ, ἑκάςου τὸν ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαςὴν ἐπὶ τοὺς παρονομαςὰς τῶν ἑτέρων πολλαπλασιάσομεν.

Ὅτι

Ὅτι οὖν πάντα τὸν αὐτὸν λαμβάνουσι παρονομαστὴν, δῆλον ἐκ τοῦ τὸν παρονομαστὴν ἑκάστου τῷ πολλαπλασιασμῷ ἴσων παραγόντων ἀναφύεσθαι, ὡς μετὰ τῶν λοιπῶν ἁπάντων παρονομαστῶν πολλαπλασιαζόμενον· ὅτι δὲ οὔτε τὴν δύναμιν αὐτῶν μεταβάλλει, φανερὸν ἐκ τοῦ ἐφ' ἑκάστου τούτων, πλὴν τοῦ ἰδίου ἀριθμητοῦ, καὶ παρον· τῷ ἀριθμ. καὶ παρον. ἴσους παράγοντας προσεῖναι· τοῦτο δ' ἐστὶ ταὐτὸν, ὥπερ εἰ ποσότης τις ἐν τῷ διαιρετέῳ, καὶ διαιρέτῃ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ πεπολλαπλασίασται·

Παραδείγματα·

$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, = \frac{2\cdot4\cdot6\cdot2}{3\cdot4\cdot6\cdot2}$ καὶ $\frac{3\cdot3\cdot6\cdot2}{4\cdot3\cdot6\cdot2}$ καὶ $\frac{5\cdot3\cdot4\cdot2}{6\cdot3\cdot4\cdot2}$ καὶ $\frac{1\cdot3\cdot4\cdot6}{2\cdot3\cdot4\cdot6} = \frac{96}{144}$ καὶ $\frac{108}{144}$ καὶ $\frac{120}{144}$, καὶ $\frac{72}{144}$. ἤδη τοίνυν παραβληθήτωσαν·

Αὖθις $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} = \frac{1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}$ καὶ $\frac{1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{3\cdot2\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}$ καὶ $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot7}{4\cdot2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot7}$ καὶ $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7}{5\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7}$ καὶ $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7}{6\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7}$, καὶ $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{7\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = \frac{2520}{5040}$ καὶ $\frac{1680}{5040}$ καὶ $\frac{1260}{5040}$ καὶ $\frac{1008}{5040}$ καὶ $\frac{840}{5040}$ καὶ $\frac{720}{5040}$.

§. 125. Ὡσαύτως ἀνάξομεν ὑπὸ τὴν αὐτὴν παρονομασίαν καὶ κλάσματα πλείω ἀλγεβραϊκὰ διὰ λόγον τὸν αὐτόν· ὡς $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha\delta\zeta}{\beta\delta\zeta}$, καὶ $\frac{\gamma\beta\zeta}{\delta\beta\zeta}$, καὶ $\frac{\varepsilon\beta\delta}{\zeta\beta\delta}$.

Αὖθις $\frac{\nu}{\mu}, \frac{\rho}{\sigma}, \frac{\chi}{\upsilon}, \frac{\iota}{\chi} = \frac{\nu\sigma\upsilon\chi}{\mu\sigma\upsilon\chi}, \frac{\rho\mu\upsilon\chi}{\sigma\mu\upsilon\chi}, \frac{\chi\mu\sigma\chi}{\upsilon\mu\sigma\chi}, \frac{\mu\sigma\upsilon}{\chi\mu\sigma\upsilon}$.

Σχόλ.

Σχόλιον.

Τὰ δὲ ἀριθμῶν κλάσματα, ὁποῦ ἔχουν νὰ ἀναχθοῦν εἰς κοινὸν παρονομαστὴν, ἠμποροῦν ἐνίοτε νὰ παρασταθοῦν ἐπιτομώτερον· λόγος δὲ ὁ ἐν (§. 122. καν.) ἐνίοτε δηλονότι διὰ νὰ μὴ προκύπτῃ πάνυ μέγα τὸ παραγόμενον, (ὅταν δέῃ νὰ ἀνάξωμεν πολλὰ κλάσμ. εἰς τὸν αὐτὸν παρον.) εἶναι ἀναγκαῖον εἰς μερικὰ κλάσματα νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν μὲ τοῦτον τὸν ἀριθμὸν, εἰς ἄλλα δὲ μὲ ἐκεῖνον, καὶ εἰς ἄλλα νὰ διαιρῶμεν μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν ἀριθμ· καὶ παρον. μάλιστα δὲ συμβαίνει τοῦτο, ἂν οἱ παρονομασταὶ τῶν διαφόρων κλασμάτων οὕτως ἔχωσιν, ὥστε, ἐὰν οἱ μείζονες παρονομασταὶ ἐν τοῖς διαφόροις κλάσμασι κατατμηθῶσιν εἰς παράγοντας, οἱ ἐλάττους παρονομασταὶ, ἐν μέρει δὲ καὶ ἀριθμηταὶ, περιέχονται ἐν τοῖς μείζοσι παράγουσι· π. χ. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{3}{12}$· ἐνταῦθα ἐν τοῖς παράγουσι τῶν μειζόνων παρονομαστῶν, τοῦ 16, καὶ 12, (ὧν ὁ μὲν ἐκ τοῦ 4×4· ὁ δὲ ἐκ τοῦ 3×4 προκύπτει) περιέχονται καὶ οἱ ἐλάσσους παρον. 2, καὶ 4· ὁ οὖν μικρὸν διασκεπτόμενος εὑρήσει, ὅτι ὁ 4 ἠμπορεῖ νὰ γένῃ ὁ τούτων κοινὸς παρονομαστής. ὥστε πολλαπλασιασθήτω ἐν τῷ α· κλάσματι ὁ ἀριθμ. καὶ παρον. μετὰ τοῦ 2, καὶ προκύψει $\frac{2}{4}$· τὸ β· κλάσμα μένει ἀμετάβλητον, ὡς ἔχον παρονομαστὴν τὸν 4· ἤτοι $\frac{3}{4}$. ἐν τῷ γ· κλ· διαιρεθέντων τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ παρονομ. διὰ 4, ἕξομεν τὸ $\frac{1}{4}$· καὶ ἐν τῷ δ'· τελευταίον διὰ 3, ὡσαύτως $\frac{1}{4}$· ἐστὶν οὖν $\frac{1.2}{2.2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4:4}{16:4}$, $\frac{3:3}{12:3} = \frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$. ἡ τοιαύτη μὲ συντομίαν παράστασις μανθάνεται διὰ τῆς συχνῆς ἀσκήσεως· ἀλλὰ χάριν τῶν πρωτοπείρων προκείσθω καὶ ὁ ἑξῆς κανών·

Ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς, ὁ δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ τῶν δοθέντων κλασμάτων διαιρέσιμος, προκύψει, ἐὰν πάντες οἱ ἐλάσσους παρονομασταὶ, καὶ πάντες οἱ παράγοντες τῶν ἐλασσόνων παρονομαςῶν, οἱ τοῖς μείζοσι παρονομ. ἐμπεριεχόμενοι, παραλείπωνται, οἱ δ' ὑπολειφθέντες παρονομαςαὶ, καὶ παράγοντες τῶν παρονομαςῶν μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιάζωνται.

Ἔςωσαν τὰ δοθέντα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$. Ἔςιν ἄρα 2 ἐν 4, 3 ἐν 6, καὶ ὁ ἕτερος παράγων τοῦ 4, ἤτοι ὁ 2, ὁμοίως ἐν 6 περιεχόμενος· ὥςε $2 \times 5 \times 6 = 60$, τῷ ἐλαχίςῳ κοινῷ παρονομαςῇ, ὃν τὰ κλάσματα ταῦτα ἕξουσιν· ἀναχθέντα τοίνυν ὑπὸ κοινὸν παρονομαςὴν ἔςαι $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $= \frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$.

Ἔςωσαν δοθέντα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{12}$. ὁ οὖν 2 περιέχεται ἐν τῷ 4, ὁ 3 ἐν τῷ 6, ὁ 4 ἐν 8, ὁ 6 ἐν 12, καὶ ὁ ἕτερος παράγων τοῦ 8, ἤτοι ὁ 4, ὡσαύτως ἐν 12. ὥςε $2 \times 12 = 24$, τῷ ἐλαχίςῳ κοινῷ παρονομαςῇ αὐτῶν· ἔνθεντοι, εἰ ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν ταῦτα ἀνάξομεν, ἔςαι

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{8},\ \frac{3}{12},\ = \frac{12}{24},\ \frac{16}{24},\ \frac{18}{24},\ \frac{20}{24},\ \frac{21}{24},\ \frac{6}{24}.$$

Ἔςωσαν δοθέντα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{15}$. ἐνταῦθα ὁ 2 περιέχεται ἐν 6, ὁ 3 ἐν 6, ὁ 5 ἐν 10, ὁ ἕτερος παράγων τοῦ 6, ὁ 3, ἐν 15, ὁ δ' ἕτερος, ἤτοι ὁ 2, ἐν 10· καὶ τελευταῖον τοῦ 10 ὁ ἕτερος παράγων 5 ἐν 15. ὅθεν $2 \times 15 = 30$, τῷ ἐλαχίςῳ κοινῷ παρονομαςῇ αὐτῶν·

Ἔνθεντοι, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{15}$ $= \frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{6}{30}$, $\frac{25}{30}$, $\frac{9}{30}$, $\frac{14}{30}$. ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρον. ἀναχ.

Τελευταῖον ἔςωσαν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$. ἐνταῦθα οὐδεὶς τῶν παρονομαςῶν περιέχει ἕτερόν τινα· ὥςε $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$· τῷ ἐλ. κ. παρ· ὥςε $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, $= \frac{105}{210}$, $\frac{70}{210}$, $\frac{168}{210}$, $\frac{90}{210}$, ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρ' ἀν·.

§. 125.

§. 125. Ἐν τῷ §. 122. καν. δέδεικται, ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιάζωμεν, ἢ διαιρῶμεν τὸν ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαςὴν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα οὐ μεταβάλλεται· Καὶ ἔσονται ἄρα πλείω τῶν κλασμάτων ἰσοδύναμα, καίτοι διάφορα τῷ σχήματι δοκοῦντα· π. χ· $\frac{2}{3} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{24}{36} = \frac{80}{120}$, κτ· ταῦτα πάντα προέκυψε τῷ τὸν ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαςὴν τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$ νῦν μὲν, τῷ 5, νῦν δὲ, τῷ 6, εἶτα, τῷ 12, καὶ τέλος, τῷ 40 πολλαπλασιασθῆναι· τοῦτο δὲ εἴασεν ἄτρεπτον τὸ κλάσμα. (§. αὐτ.) ἀλλ᾽ ἐπειδὴ πᾶν κλάσμα ῥᾶον τῇ διανοίᾳ ἀνατυπούμεθα, εἰ οἱ τούτου ὅροι, ὁ ἀριθμ. καὶ παρονομαςὴς. ἐλάσσονές εἰσιν, ὡς δυνατὸν, ἢ εἰ μείζους εἶεν, ὡς τῶν $\frac{2}{3}$, καὶ $\frac{80}{120}$ τὸ α᾽· μᾶλλον εὐξύνετον· οὐκ ὀλίγα δὲ κλάσματα ἀπαντῶσιν, ὧν οἱ ὅροι μέγιςοι, εὑρήσομεν τοὺς ἐλαχίςους ὅρους, εἰ τὸν ἀριθμητὴν, καὶ παρονομ· διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρήσομεν, τῆς τοῦ κλάσματος δυνάμεως ἀτρέπτου διὰ τοῦτο διαμενούσης· (§. αὐτ.) ἐπὶ οὖν τῶν ὀλιγαρίθμων κλασμάτων ἀποπειρωμένοις παρέξαι ἡμῖν ἀριθμὸν ἀνιχνεῦσαι, δι᾽ οὗ ὁ ἀριθμ. καὶ παρ. διαιρεθέντες τοὺς ἐλαχίςους ὅρους παράξουσιν· ἐν κλάσμασι δὲ, ὧν ὁ. ἀριθ. καὶ παρ. ἐκ πολλῶν σύγκεινται χαρακτήρων, οὐκ ἂν τοῦτο ῥαδίως γένοιτο· ἔνθεντοι, κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα (§. 113.) τρόπον ζητήσομεν τὸν μέγιςον κοινὸν διαιρέτην δύω ἀριθμῶν, (διαιροῦντες τὸν μείζονα διὰ τοῦ ἐλάσσονος) οὗ εὑρεθέντος, ποιήσομεν τοῦτον εἰς διαιρέτην τοῦ ἀριθμ. καὶ παρον. καὶ οὕτω προκύψει τὸ κλάσμα ἐν τῷ ἐλαχίςῳ σχήματι· ὡς τοῦ $\frac{384}{812}$ ὁ μέγ. κοινὸς διαιρέτης ἀμφοῖν (§. αὐτ.) ἐςὶ 4· ὥςε $\frac{384:4}{812:4} = \frac{96}{203}$. τὸ οὖν $\frac{96}{203}$ οὐκ ἔτι ἂν εἰς ἐλάσσονας ὅρους ἀναχθείη· ἐὰν δὲ οὐδὲν μέγιςον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν ἔχωμεν ἕτερον, εἰ μὴ τὴν 1· ἐπειδὴ αὕτη οὐ διαιρεῖ, (§. 96. σχ.) καὶ τὸ τοῦ προκειμένου κλάσματος ἰσχῆμα, ἠλίκον ἂν ᾖ, ὧ ἔλαττον ἀνάξαι οὐχ οἷόντε· ὡς τὸ $\frac{53}{120}$, κτ.

Σχόλιον.

Ἂν ἡ μονὰς, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἐλάβομεν τὸ κλάσμα, ἦναι πολλὰ μικρὰ, ὥςε ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ἐν μόριον τοῦ παρονομαςοῦ δὲν σημαίνει πολὺ τίποτε, συνηθίζουν νὰ προσθέτουν εἰς τὸν ἀριθμητὴν, ἢ παρονομαςὴν ἀκόμη ἓν μόριον, ἂν διὰ τούτου ἠμποροῦν νὰ ἀναχθοῦν εὐκολώτερα εἰς ἐλάσσονας ὅρους. π. χ· ἂν τὰ ἀνωτ. $\frac{53}{120}$ ἤθελαν ἦναι μόρια ἑνὸς δακτύλου, ἤτοι, ὁ δάκτυλος διῃρημένος εἰς 120 μόρια, ἐξ ὧν ἐλάβομεν τὰ 53, καὶ ὁ ὑπολογισμὸς δὲν ζητῇ μεγάλην ἀκρίβειαν, εἶναι δυνατὸν τὸ $\frac{53}{120}$ νὰ γένῃ $\frac{54}{120}$, οὗ ὁ μέγισος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 6· ὥςε $\frac{54}{120} = \frac{54:6}{120:6} = \frac{9}{20}$.

§. 126. Εἰ πρόκεινται νόθα κλάσματα εἰς ἐλαχίστους ὅρους ἀναχθῆναι, γενέσθω α΄· τὸ (§. 118.) περὶ αὐτῶν ῥηθέν· ὅτε καὶ τὸ παρηρτημένον κλάσμα ῥᾶον μεταχειρισθείη, τῆς μεθόδου (§. ἀνωτ.) μὴ δεομένοις· οἷον $\frac{26}{4} = 6\frac{2}{4} = 6\frac{2:2}{4:2} = 6\frac{1}{2}$.

§. 127. Τὰ διὰ γραμμάτων κλάσματα, ἐὰν τουτοις καὶ συνεργοὶ (§. 47.) ἐνυπάρχωσιν, ἀναχθεῖεν ἂν εἰς ἐλάσσονας ὅρους, α΄· εἰ συνεργοὺς ἄμφω οἱ ὅροι (§. 119.) ἔχουσιν, ὧν τὸ κοινὸν μέτρον, ἢ ὁ μέγισος κοινὸς διαιρέτης εὑρεθῆναι ἔχει· β΄· εἰ ἀμφοῖν τοῖς ὅροις τὰ αὐτὰ ἔνεισι γράμματα, ἢ γ΄· εἰ ἑκάτερον αὐτοῖς πάρεςι· τότε γὰρ κρατεῖ ὡσαύτως τὰ ἐν (§. 125.) π. χ. τὸ $\frac{4\alpha\beta}{12\gamma}$ ἀνάξομεν εἰς ἐλαχίςους ὅρους, διαιροῦντες τῷ 4. ὡς κοινῷ μέτρῳ ὄντι (§. 113.) τοῦ 4, καὶ 12. ἔςαι οὖν $\frac{4\alpha\beta:4}{12\gamma:4} = \frac{1\alpha\beta}{3\gamma} = \frac{\alpha\beta}{3\gamma}$

(§. 69.)

(§. 69.) ὡσαύτως $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\delta\gamma} = \frac{\alpha\beta\gamma:\alpha\gamma}{\alpha\delta\gamma:\alpha\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$. (§. 114. ε΄)

ἄλλωςδὲ οὐκ ἔνι· Τὰ γὰρ γράμματα, ὡς καθόλου ποσότητες, θεωρούμενα, ἀδιόριςά εἰσιν· ὥςε οὐδὲ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης τούτων ζητηθήσεται· ὡς τοῦ $\frac{\alpha\gamma}{\delta\beta}$, ἢ $\frac{3\alpha\beta}{5\gamma\delta}$, ἢ $\frac{\chi}{\psi\delta}$ ἡ ἐπ' ἐλάχιςον ἀναγωγὴ ἀμήχανος·

§. 128. Ἐπειδὴ ἡ 1 οὐ διαιρεῖ· (§. 96. σχ.) πᾶς ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς εἰς κλάσμα γενέσθαι δύναται, οὗ παρονομαςὴς ἡ 1. οἷον $6 = \frac{6}{1}$· $12 = \frac{12}{1}$; $116 = \frac{116}{1}$· Καὶ ἐν γράμμασιν· $\alpha = \frac{\alpha}{1}$· $\chi\psi = \frac{\chi\psi}{1}$· ὅπερ αὐτόθεν δῆλον· τὴν δὲ τούτου χρῆσιν κατωτέρω μαθησόμεθα·

§. 129. Μετὰ ταύτας τὰς περὶ τῶν κλασμάτων γνώσεις, ῥητέον ἤδη καὶ περὶ προσθέσεως, ἀφαιρέσ· πολλαπλ· καὶ διαιρέσ. αὐτῶν·

Περὶ Προσθέσεως τῶν κλασμάτων·

§. 130. Ἐὰν τὰ κλάσματα ἔχῃ τοὺς αὐτοὺς παρονομαςὰς, ἥκιςα δυσχερὴς ἡ τούτων πρόσθεσις, ὡς ὁμοειδῶν ὄντων· τότε γὰρ, προσαθροισθεῖσι τοῖς ἀριθμηταῖς ὑπογραφήτω ὁ κοινὸς παρονομαςής· ὡς $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$· οὕτω ποιοῦμεν, καὶ πλειόνων τῶν κλασμάτων ὄντων· οἷον $\frac{1}{24} + \frac{5}{24} + \frac{7}{24} + \frac{8}{24} = \frac{21}{24}$· τοῦτο δὲ κατανοῆσαι καὶ πάνυ ῥᾴδιον· μέρη γὰρ μονάδων ἀλλήλοις προςεθῆναι πρόκεινται, τῆς μονάδος εἰς ἴσα μέρη διαιρεθείσης· οὕτω καὶ μετὰ τῶν γραμμάτων· $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta}$

+ ν

$+ \frac{\nu}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma + \nu}{\beta}$. Καὶ $\frac{2\alpha}{\delta} + \frac{\chi}{\delta} + \frac{\rho}{\delta}$
$= \frac{2\alpha + \chi + \rho}{\delta}$. ὁ δὲ λόγος ὁ αὐτός.

Σχόλιον.

Ἂς ληφθῶσιν $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{5}{8}$ ἑνὸς πήχεως· π. χ. ὑφάσματός τινος· τουτ. τεθήτω ὁ πῆχυς εἰς 8 ἴσα μέρη διῃρημένος, ἐξ ὧν ἐλήφθη 1 μέρος, καὶ ἔτι 2, καὶ τελευταῖον 5. εἰς τοῦτο δὲν εἶναι καμμία ἀμφιβολία, ὅτι ὅλα τὰ μέρη τὰ ληφθέντα ὁμοῦ εἶναι ἴσα μὲ 8, καὶ ἴσα ἀλλήλοις· ἐπειδὴ ἡ μονὰς, ἤτοι ὁ πῆχυς εἰς 8 ἴσα μέρη διῃρέθη· ὥςε $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8}$ $= 1$. (§. 84. σχ.)

§. 131. Ἐὰν δὲ τὰ κλάσματα μὴ ὦσι τῆς αὐτῆς παρονομασίας, ἀναγκαῖον α' εἰς τὸν αὐτὸν ἀναχθῆναι παρονομασὴν, τουτ: ὁμοειδῆ γενέσθαι, καὶ οὕτως εἶτα προςεθῆναι· (§. ἀνωτ.)

Ὡς $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1.3.2.8}{5.3.2.8}$
$+ \frac{1.5.2.8}{3.5.2.8} + \frac{1.5.3.8}{2.5.3.8} + \frac{1.5.3.2}{8.5.3.2}$ (§. 124.)
$= \frac{48}{240} + \frac{80}{240} + \frac{120}{240} + \frac{30}{240} = \frac{48+80+120+30}{240}$
$= \frac{278}{240} = 1\frac{38}{240}$ (§. 118.) $= 1\frac{19}{120}$ (§. 125.)
σχεδὸν $= 1\frac{20}{120}$ (§. αὐτ. σχ.) $= 1\frac{1}{6}$. (§. 125.)

Καὶ ἐν γράμμασιν $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\nu}{\mu} + \frac{\chi}{\upsilon}$
$= \frac{\alpha\delta\mu\upsilon}{\beta\delta\mu\upsilon} + \frac{\gamma\beta\mu\upsilon}{\delta\beta\mu\upsilon} + \frac{\nu\beta\delta\upsilon}{\mu\beta\delta\upsilon} + \frac{\chi\beta\delta\mu}{\upsilon\beta\delta\mu}$
$= \frac{\alpha\delta\mu\upsilon + \gamma\beta\mu\upsilon + \nu\beta\delta\upsilon + \chi\beta\delta\mu}{\beta\delta\mu\upsilon}$· ἔνθα καὶ οὐδεμί. ἀναγωγὴ εἰς ἐλάσσονας ὅρους χώραν ἔχει·

§. 132.

§. 132. Τὸν αὐτὸν τρόπον προσθήσομεν ἀλλήλοις καὶ τὰ νόθα τῶν κλασμάτων, (§. 118.) $\frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5.2.3+3.4.3.+1.4.2}{4.2.3} = \frac{30+36+8}{24} = \frac{74}{24} = 3\,\frac{2}{24}$ (§. αὐτ.) $= 3\,\frac{1}{12}$.

§. 133. Ἀλλὰ καὶ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς τοῖς κλάσμασι προσθεῖναι ἔχομεν, (ὡς οὐκ ὀλιγάκις ἡμῖν χρήσιμον τοῦτο ὂν) ὡς κλάσματα αὐτοὺς θεωροῦντες, (§. 128.), ὧν παρον. ἡ 1· καὶ μετὰ τοῦ κλάσματος εἰς τὸν αὐτὸν παρον· αὐτοὺς ἀνάξαντες τελέσομεν τὸ (§. 130.) οἷον $4 + \frac{3}{4} = \frac{4}{1} + \frac{3}{4} = \frac{4.4}{1.4} + \frac{3.1}{4.1} = \frac{16}{4} + \frac{3}{4} = \frac{19}{4} = 4\,\frac{3}{4}$.

Σχόλιον.

Κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον θέλει προκύψει τὸ κεφάλαιον τοῦ $4 + \frac{3}{4}$, ἤτοι τὸ $\frac{19}{4}$, κτ· πολὺ συντομώτερον· πολλαπλασίασον τὸν ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν μετὰ τοῦ παρον: τοῦ κλάσμ. καὶ προσθεὶς εἰς τὸ παραγόμενον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, ποίησον τὸ κεφάλ. ἀριθμητὴν, παρονομαστοῦ μένοντος τοῦ προτέρου· διότι οὐδεὶς ἕτερος παρονομαστὴς εἶναι δυνατὸς, ὡσὰν ὁποῦ ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς ἔχει παρον· τὴν 1. ὁ δὲ καινὸς παρον· ἀνακύπτει διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν προτέρων παρονομ. εἰς ἀλλήλους· ἀλλ' ἡ μονὰς οὐ πολλαπλασιάζει.

Οἷον $4 + \frac{3}{4} = \frac{4.4+3}{4} = \frac{19}{4}$. Καὶ $2\,\frac{3}{4} = \frac{2.4+3}{4} = \frac{11}{4}$. κατὰ δὲ τὸν α· τρόπον $2 + \frac{3}{4} = \frac{2}{1} + \frac{3}{4} = \frac{2.4}{1.4} + \frac{3.1}{4.1} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$. Ὁμοίως καὶ ἐν γράμμασιν· $\alpha + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{1} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{1.\delta} + \gamma$.

$+ \frac{\gamma \cdot 1}{\delta \cdot 1} = \frac{\alpha\delta}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta + \gamma}{\delta}$· ἢ $\alpha + \frac{\gamma}{\delta}$ $= \frac{\alpha\,\delta + \gamma}{\delta}$ κατὰ τὸν β΄ τρόπον·

§. 134. Εἰ δὲ πλείους ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ παρεισιν, ἕκαςος καὶ κλάσμα παρηρτημένον ἔχων, προςεθέντων α΄ ἐκείνων ἐν μέρει, προσαθροισθήτωσαν εἶτα ἀλλήλοις τὰ κλάσματα. (§. 130.) τὸ δ᾽ ἐκ τούτων ἀναφυὲν καινὸν κλάσμα, γνήσιον ὄν, (§. 118.) προσαρτηθήτω τῷ κεφαλαίῳ τῶν ὁλοσχερῶν· νόθου δὲ ὄντος, γενέσθω τὸ (§. αὐτ.) ἔνθα ἡ προκύψασα διὰ τῆς διαιρέσεως 1, (ἢ μονάδες) προςεθήτω τῷ κεφαλαίῳ τῶν ὁλοσχερῶν εἰς ἓν κεφάλαιον· παραδείγματα· $1\frac{2}{3} + 4\frac{1}{2} + 2\frac{1}{8} + 3\frac{5}{6} = 1 + 4 + 2 + 3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{5}{6} = 10 + \frac{2.2.8.6 + 3.8.6 + 3.2.6 + 5.3.2.8}{3.2.8.6}$ (§. 124.) $= 10 + \frac{192 + 144 + 36 + 240}{288}$ $= 10 + \frac{612}{288} = 10 + 2\frac{36}{288} = 10 + 2\frac{1}{8}$ $= 12\frac{1}{8}$· κατὰ δὲ τὸ ἐν (§. 133. καὶ σχολ᾽) ἔςαι $1\frac{2}{3} + 4\frac{1}{2} + 2\frac{1}{8} + 3\frac{5}{6} = \frac{5}{3} + \frac{9}{2} + \frac{17}{8} + \frac{3}{1} + \frac{5}{6} = \frac{480 + 1296 + 612 + 864 + 250}{288}$ (§. 124. §. 130.) $= \frac{3402}{288} = 12\frac{36}{288} = 12\frac{1}{8}$·

Περὶ τῆς τῶν κλασμάτων ἀφαιρέσεως·

§. 135. Ἤτοι κλάσματα ἐνταῦθα ἀφαιροῦνται ἀπὸ κλασμάτων, ἢ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ ἀπὸ κλασμάτων, ἢ κλάσματα ἀφ᾽ ὁλοσχερῶν, ἢ ὁλοσχερεῖς μετὰ κλασμάτων ἀφ᾽ ὁλοσχερῶν καὶ κλασμάτων, ἢ ὁλοσχερεῖς μόνον ἀφ᾽ ὁλοσχ. καὶ κλ. ἢ ἀνάπαλιν·

Τὸ

Τὸ α'. τούτων· ἐνταῦθα οἱ παρονομαςαὶ ἤτοι οἱ αὐτοὶ, ἢ οὐχί· ἐπεὶ τοίνυν μόνα τὰ ὁμοειδῆ ἀφαιρεῖται ἀπ' ἀλλήλων, (§. 29.) εἰ μὲν ἐκεῖνο, εὐχερὴς ἔςαι ἡ τούτων ἀφαίρεσις· Τοῦτο δ' ἐςιν, ἀπότινος προκειμένου πλήθους μερῶν, ὧν ἡ μονὰς εἰς ἴσα μέρη διήρηται, ἕτεραν τινὰ πλῆθυν ἰσομεγεθῶν, καὶ τοῖς προτέροις ὁμοειδῶν μερῶν, ἀφαιρεῖν· οἷον δεήσαν ἀφαιρεθῆναι ἀπὸ $\frac{5}{6}$ τὰ $\frac{3}{6}$, ὅ ἐςιν ἀπὸ 5 μερῶν τῆς μονάδος, εἰς 6 ἴσα μέρη διαιρεθείσης, 3 μέρη τῆς μονάδος, ὁμοίως εἰς 6 ἴσα μέρη διαιρεθείσης, ὧν ἕκαςον ἰσομέγεθες ἑκάςῳ τοῦ προτέρου, ἀφαιρεθέντων, ὑπολειφθήσονται καὶ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (§. 125.) ἐντεῦθεν ὁ κανών· Κλάσματα, οἷς ὁ αὐτὸς παρον. ὑπάρχει, ἀφαιροῦνται ἀπ' ἀλλήλων, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ἀφαιρετέου κλάσματος ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου ἀφαιρῆται, καὶ παρονομαςὴς ὁ αὐτὸς τηρῆται· τὰ δὲ κλάσματα καλοῦνται, ὡς καὶ οἱ ἀριθμοί, ὡσαύτως καὶ τὸ ὑπολειπόμενον. (§. 27.) σημεῖον δὲ, τὸ σύνηθες τῆς ἀφαιρέσεως (§. 28.) Παραδείγματα· ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ $\frac{2}{3}$ τὸ $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$.

Ἀπὸ τοῦ $\frac{11}{12}$ τὸ $\frac{3}{12} = \frac{11-3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Καὶ ἐν γράμμασιν ὡσαύτως· εἰ μὴ ὅτι ἐνταῦθα ἡ ἀφαίρεσις δείκνυται μόνον τῷ —, οὐ γίνεται δὲ καὶ ἐνεργείᾳ, ὡς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς· ὅτι τὰ γράμματα εἰσὶν ἀόριςα· Ἄφελε ἀπὸ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}$.

Ἀπὸ τοῦ $\frac{\chi\upsilon}{\mu}$ τὸ $\frac{\eta}{\mu} = \frac{\chi\upsilon-\eta}{\mu}$.

Εἰ δὲ τὸ β'· ἀνακτέον αὐτὰ ἐπὶ κοινὸν παρονομαστήν. (§.123.) ἵνα ὁμοειδῆ γένωνται, καὶ ἀφαιρετέον ἀπ' ἀλλήλων· οἷον ἄφελε ἀπὸ τοῦ $\frac{3}{4}$ τὸ $\frac{2}{9} = \frac{3}{4} - \frac{2}{9} = \frac{3\cdot 9}{4\cdot 9} - \frac{2\cdot 4}{9\cdot 4} = \frac{27-8}{36} = \frac{19}{36}$. Καὶ ἐν γράμμ.

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} - \frac{\gamma\beta}{\delta\beta} = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\beta\delta}\cdot$$

Τὸ β'· καὶ γ'· π. χ. ἄφελε ἀπὸ τῆς 1 τὸ $\frac{3}{4}$· ἔσαι οὖν $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{1} - \frac{3}{4}$ (§.128.) $= \frac{1\cdot 4}{1\cdot 4} - \frac{3\cdot 1}{4\cdot 1} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}\cdot$

Ἄφελε ἀπὸ τοῦ $\frac{3}{4}$ τὴν 1· $= \frac{3}{4} - 1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{1}$ (§.αὐτ.) $= \frac{3\cdot 1}{4\cdot 1} - \frac{1\cdot 4}{1\cdot 4} = \frac{3}{4} - \frac{4}{4} = \frac{3-4}{4} = -\frac{1}{4}\cdot$

Καὶ ἐν γράμμασιν· $\alpha - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{1} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha.\delta}{1.\delta} - \frac{\gamma.1}{\delta.1} = \frac{\alpha\delta - \gamma.}{\delta}$

Καὶ $\zeta + \eta - \frac{\nu}{\mu} = \frac{\zeta+\eta}{1} - \frac{\nu}{\mu} = \frac{(\zeta+\eta)\mu}{1.\mu} - \frac{\nu.1}{\mu.1} = \frac{\zeta\mu + \eta\mu}{\mu} - \frac{\nu}{\mu} = \frac{\zeta\mu + \eta\mu - \nu}{\mu}\cdot$ ἢ καὶ $\frac{(\zeta+\eta).\mu - \nu}{\mu}$ (§. 73.) Παραπλησίως $\frac{\alpha}{\beta} - \delta = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\delta}{1} = \frac{\alpha.1}{\beta.1} - \frac{\delta.\beta}{1.\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\delta\beta}{\beta} = \frac{\alpha - \delta\beta.}{\beta}$

Σχόλιον. α'·

Ὅτε ὁ μειωτέος εἶναι ἐλάττων τῆς 1, ἤτοι κλά-

σμα

σμα γνήσιον, (§. 118.) ὁ δὲ ἀφαιρετέος εἶναι ἡ 1, ἢ ἕτερος ὁλόσχερὴς ἀριθμὸς, προκύψει ἡ διαφορὰ ἀποφατικὴ, ἤτοι — · διότι τότε ἀφαιρεῖται ἀπ' ἐκείνου πλέον, ἢ οὗτος δύναται· ὥςε τὸ λείψανον διαβήσεται εἰς τὸ ἀποφατικόν· (§. 35. καὶ 52.) Ἐπὶ τῶν τοιούτων ἂς γίνηται ἡ ἀφαίρεσις ἀνάπαλιν, ἤτοι ἂς ἀφαιρῆται ὁ μειωτέος ἀπὸ τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ ἂς γράφηται ἡ διαφορὰ μὲ τὸ σημεῖον —·

Σχόλιον β'.

Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφέλωμεν κλάσμα ἀπὸ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, ἠμποροῦμεν νὰ μεταχειρισθῶμεν καὶ τὸν ἑξῆς τρόπον, ἤτοι λαμβάνομεν μίαν μονάδα τοῦ ὁλοσχεροῦς, καὶ τὴν μεταφέρομεν εἰς κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαςὴν, τὸν παρονομαςὴν τοῦ κλάσματος, καὶ οὕτως ἀφαιροῦμεν· οἷον $1 - \frac{5}{12} = \frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$· ὡσαύτως $2 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$· καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ τοῦ ὁλοσχεροῦς 2 ἐλήφθη μόνον 1 μονὰς, ὑπελείφθη καὶ 1· ὥςε τὸ λείψανον εἶναι 1, καὶ $\frac{1}{4}$·

Τὸ δ'. ε'. καὶ ς'. ἀπὸ τοῦ $4\frac{3}{4}$ ἄφελε $2 = 4\frac{3}{4} - 2 = \frac{19}{4} - 2$ (§. 133. σχ.) $= \frac{19}{4} - \frac{2}{1} = \frac{19\cdot1}{4\cdot1} - \frac{2\cdot4}{1\cdot4} = \frac{19}{4} - \frac{8}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$·

Ἀπὸ τοῦ $4\frac{3}{4}$ ἄφελε τὸ $3\frac{1}{8} = 4\frac{3}{4} - 3\frac{1}{8} = \frac{19}{4} - \frac{25}{8} = \frac{19\cdot8}{4\cdot8} - \frac{25\cdot4}{8\cdot4} = \frac{152}{32} - \frac{100}{32} = \frac{152-100}{32} = \frac{52}{32} = 1\frac{20}{32} = 1\frac{5}{8}$·

Ἀπὸ τοῦ $4\frac{3}{4}$ ἄφελε $5\frac{1}{8} = 4\frac{3}{4} - 5\frac{1}{8} = \frac{19}{4} - \frac{41}{8} = \frac{19\cdot8}{4\cdot8} - \frac{41\cdot4}{8\cdot4} = \frac{152}{32} - \frac{164}{32} = \frac{152-164}{32} = -\frac{12}{32}$ (§ 35. καὶ 54.) $= -\frac{3}{8}$ (§. 125.)

Ἀπὸ

Ἀπὸ τοῦ $5\frac{3}{7}$ ἄφελε $\frac{3}{8} = \frac{38}{7} - \frac{3}{8} = \frac{38.8}{7.8}$
$- \frac{3.7}{8.7} = \frac{304}{56} - \frac{21}{56} = \frac{283}{56} = 5\,\frac{3}{56}$.

Ἀπὸ τοῦ $\frac{3}{8}$ ἄφ. $1\frac{3}{4} = \frac{3}{8} - \frac{7}{4} = \frac{3.4}{8.4} - \frac{7.8}{4.8}$
$= \frac{12}{32} - \frac{56}{32} = -\frac{44}{32} = -1\,\frac{12}{32} = -1\,\frac{3}{8}$.

Καὶ ἐν γράμμασιν· ἄφελε ἀπὸ τοῦ $\alpha + \frac{\gamma}{\delta}$

τὸ β. $= \frac{\alpha\delta + \gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\iota}$ (§. 133. σχ.) $= \frac{\iota\alpha\delta + \iota\gamma}{\delta.\iota}$
$- \frac{\beta\delta}{\iota.\delta} = \frac{\alpha\delta + \gamma}{\delta} - \frac{\beta\delta}{\delta} = \frac{\alpha\delta + \gamma - \beta\delta}{\delta}$.

Ἀπὸ τοῦ $\alpha + \frac{\gamma}{\delta}$ ἄφελε τὸ $\beta + \frac{\nu}{\mu} = \frac{\alpha\delta + \gamma}{\delta}$
$- \frac{\beta\mu + \nu}{\mu} = \frac{(\alpha\delta + \gamma)\mu}{\delta\mu} - \frac{(\beta\mu + \nu)\delta}{\mu\delta}$
$= \frac{(\alpha\delta + \gamma)\mu - (\beta\mu + \nu)\delta}{\delta\mu}$
$= \frac{\alpha\delta\mu + \gamma\mu - \beta\mu\delta + \nu\delta}{\delta\mu}$.

Ἀπὸ τοῦ $\mu + \frac{\nu}{\mu}$ ἄφ. τὸ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu\mu + \nu}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta}$
$= \frac{(\mu\mu + \nu)\beta}{\mu\beta} - \frac{\alpha.\mu}{\beta.\mu} = \frac{(\mu\mu + \nu)\beta - \alpha\mu}{\beta\mu}$
$= \frac{\mu\mu\beta + \nu\beta - \alpha\mu}{\beta\mu}$.

Ἀπὸ τοῦ $\chi + \frac{\nu}{\mu}$ ἄφ. τὸ $\chi + \frac{\varrho}{\sigma} = \frac{\chi\mu + \nu}{\mu}$
$- \frac{\chi\sigma + \varrho}{\sigma} = \frac{(\chi\mu + \nu)\sigma}{\mu\sigma} - \frac{(\chi\sigma + \varrho)\mu}{\sigma\mu}$
$= (\chi\mu + \nu)$

$$=\frac{(\chi\mu+\nu)\sigma-(\chi\sigma+\rho)\mu}{\mu\sigma}=\frac{\chi\mu\sigma+\nu\sigma-\chi\mu\sigma-\rho\mu}{\mu\sigma}$$

$$=\frac{\nu\sigma-\rho\mu}{\mu\sigma}.$$

§. 136. Καὶ κλάσματα δὲ ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς συνημμένα ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεῖν οἷόν τε, τὸ — πρὸ αὐτῶν ἔχοντα· ἔνθα παντὶ τῷ τὸν νοῦν ἐπιστήσαντι δῆλον, ὅτι α'· ἀπὸ τοῦ Μειωτέου ἀφαιρεθῆναι τὸ πρὸς αὐτῷ κλάσμα χρή, ὁμοίως καὶ ἀπὸ τοῦ Ἀφαιρετέου τὸ οἰκεῖον, εἶτα δὲ καὶ τὰ λείψανα ἀπ' ἀλλήλων·

Ἄφελε ἀπὸ τοῦ $4-\frac{3}{4}$ τὸ $3\frac{1}{8}=\frac{4}{1}-\frac{3}{4}=\frac{4.4}{1.4}-\frac{3}{4}=\frac{16}{4}-\frac{3}{4}=\frac{16-3}{4}=\frac{13}{4}$. Ἤδη ἀπὸ τοῦ $\frac{13}{4}$ ἀφαιρεθὲν τὸ $3\frac{1}{8}$, ἔσται $\frac{13}{4}-3\frac{1}{8}=\frac{13}{4}-\frac{25}{8}=\frac{13.8}{4.8}-\frac{25.4}{8.4}=\frac{104}{32}-\frac{100}{32}=\frac{104-100}{32}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$·

Ἄφελε ἀπὸ τοῦ $4-\frac{3}{4}$ τὸ $2-\frac{1}{6}$· α'· $4-\frac{3}{4}=\frac{4}{1}-\frac{3}{4}=\frac{4.4}{1.4}-\frac{3.1}{4.1}=\frac{16-3}{4}=\frac{13}{4}$.
β'· $2-\frac{1}{6}=\frac{2}{1}-\frac{1}{6}=\frac{2.6}{1.6}-\frac{1}{6.1}=\frac{12-1}{6}=\frac{11}{6}$.

Καὶ $\frac{13}{4}-\frac{11}{6}=\frac{13.6}{4.6}-\frac{11.4}{6.4}=\frac{78}{24}-\frac{44}{24}=\frac{34}{24}=1\frac{10}{24}=1\frac{5}{12}$·

Ἢ βραχύτερον $(4-\frac{3}{4})-2-\frac{1}{6})=\frac{13}{4}-11=\frac{78-44}{24}=\frac{34}{24}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$·

§. 137. Ἐν τῷ περὶ ἀφαιρέσεως τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν (§. 49. κτ.) δέδεικται, ὅπως ἀφαιρετέοι εἰσὶν οἱ ἀριθμοὶ μετ' ἀντιθέτων σημείων· τοῦτο δ' αὐ-

τὸ

τὸ καὶ τοῖς κλάσμασιν ἁρμόζει· καὶ ταῦτα γὰρ (οὕτως ἔχοντα) ἀφαιρεῖσθαι ἀπ' ἀλλήλων δύνανται· καὶ τὰ μὲν μέχρι τοῦδε παραδείγμ. ἦν $+$· Εἰ γὰρ ἀπὸ $\frac{3}{4}$ ἀφαιρεῖται $\frac{1}{2}$, ἄμφω εἰσὶν, ᾗ δῆλον, καταφατικά· ἤδη δ'. ἐκκείσονται κλάσματα, ὧν θάτερον ἀποφατικὸν, ἐν οἷς τὰ ἐκεῖ ὁροθετηθέντα (§. αὐτ.) κρατεῖ· τουτέστι μεταβαλὼν τὸ σημεῖον τοῦ ἀφαιρετέου εἰς τὸ ἀντικείμενον. τρέψον τὴν ἀφαίρεσιν εἰς πρόσθεσιν· οἷον, εἰ ἀφελεῖν δέοι ἀπὸ $+\frac{3}{4}$ οὐχὶ $+\frac{3}{8}$, ἀλλὰ $-\frac{3}{8}$, ἔσται $+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{3\cdot8}{4\cdot8}+\frac{3\cdot4}{8\cdot4}=\frac{24}{32}+\frac{12}{32}$ $=\frac{36}{32}=1\frac{4}{32}=1\frac{1}{8}$.

Ἄφελε ἀπὸ τοῦ $-\frac{3}{4}$ τὸ $+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ $=-\frac{4}{4}$ (§. 135.) $=-1$. Καὶ ἐν γράμμασιν·

Ἀπὸ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἀφαιρεθὲν τὸ $-\frac{\gamma}{\delta}$, ἔσται $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}$ $=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}$.

§. 138. Ἐνίοτε ἀπαντῶσι καὶ ὁλόκληροι σειραὶ κλασμάτων, αἷς τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$ ἐναλλὰξ πρόσεισιν, ἅτινα εἰς μίαν ποσότητα ἀναγαγεῖν βουλόμεθα· οἷον εἰ ἥδε ἡ σειρὰ εἴη $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$ $+\frac{1}{2}$· ἐπὶ τῶν τοιούτων σύναψον ἐν μέρει τὰς τῷ $+$, ὡσαύτως καὶ τὰς τῷ $-$ σημειουμένας, καὶ ἄφελε αὐτὰς ἀπ' ἀλλήλων· ἐν τῷ προκειμένῳ παραδείγμ. ποσότητες ἀποφατικαί εἰσιν αἱ $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, καταφατικαὶ δὲ αἱ $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$· Ἀναχθεῖσαι αἱ α΄ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομ. ἔσονται $=\frac{3\cdot6}{4\cdot6}$ καὶ $\frac{1\cdot4}{6\cdot4}=\frac{18}{24}$ καὶ $\frac{4}{24}=\frac{22}{24}$ $=\frac{11}{12}$. Αἱ δὲ β΄. $=\frac{1\cdot8\cdot2}{4\cdot8\cdot2}$ καὶ $\frac{3\cdot4\cdot2}{8\cdot4\cdot2}$, καὶ $\frac{1\cdot4\cdot8}{2\cdot4\cdot8}$ $=\frac{16}{64}$ καὶ $\frac{24}{64}$, καὶ $\frac{32}{64}=\frac{72}{64}=\frac{9}{8}$.

Ὥστε

Ὥςε ἀπὸ $\frac{9}{8}$ ἀφαιρετέον, ἢ μᾶλλον τῷ ἀντικειμένῳ σημείῳ προσθετέον τὸ $\frac{11}{12}$. τοῦτο δ' ἂν εἴη $\frac{9}{8} - \frac{11}{12} = \frac{9.12}{8.12} - \frac{11.8}{12.8} = \frac{108}{96} - \frac{88}{96} = \frac{20}{96} = \frac{5}{24}$.

Καὶ ἐν γράμμασιν ὡσαύτως· οἷον, εἰ πρόκειται ἡ ἑξῆς σειρά, ἣν εἰς μίαν ποσότητα ἐπιτεμεῖν βουλόμεθα· $\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} + \alpha - \frac{\zeta}{\eta}$· καταφατικαὶ εἰσὶν αἱ $\frac{\gamma}{\delta} + \alpha = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\alpha}{1} = \frac{\gamma + \alpha\delta}{\delta}$· ἀποφατικαὶ δὲ αἱ $\frac{\beta}{\delta}$ καὶ $\frac{\zeta}{\eta} = \frac{\beta\eta + \zeta\delta}{\delta\eta}$· τὸ οὖν παράδειγμα ἔςαι $\frac{\gamma + \alpha\delta}{\delta} - \frac{(\beta\eta + \zeta\delta)}{\delta\eta}$· δῆλον δὲ, ὅτι, ἐὰν μόνον ἐπὶ τοῦ α' κλάσμ. ἄμφω οἱ ὅροι πολλαπλασιασθῶσι μετὰ τοῦ η, ἄμφω τὰ κλάσματα ἕξουσι τὸν αὐτὸν παρονομαςήν· ὥςε $\frac{\gamma\eta + \alpha\delta\eta - (\beta\eta + \zeta\delta)}{\delta\eta}$ $= \frac{\gamma\eta + \alpha\delta\eta - \beta\eta - \zeta\delta}{\delta\eta}$

§. 139. Ἐντεῦθεν ῥᾷςα ἄντις συνίδοι, ὅπως ἂν τὰ τῆς πράξεως χωρῆσαι, τοῦ ἑξῆς παραδείγμ. τῆς ἀφαιρέσεως δοθέντος· $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\cdot\right)$ Ἀμέλει ὁ μειωτέος ἀχθήσεται α'· εἰς μίαν ποσότητα, εἶτα καὶ ὁ ἀφαιρετέος, καὶ τελευταῖον ἄμφω ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν, καὶ τότε ἀφαιρεθήσονται ἀπ' ἀλλήλων.

Αἱ καταφατικαὶ ποσότητες τοῦ μειωτέου εἰσὶ $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3.2}{4.2} + \frac{1.4}{2.4} = \frac{6}{8} + \frac{4}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

Αἱ ἀποφατικαὶ ποσότητες τοῦ αὐτοῦ $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, $= \frac{4}{32}$ καὶ $\frac{24}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$·

Αἱ καταφ. καὶ ἀποφ. ποσ. τοῦ μειωτέου ἅμα $\frac{5}{4} - \frac{7}{8} = \frac{5 \cdot 8}{4 \cdot 8} - \frac{7 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{40}{32} - \frac{28}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ $=$ ὅλῳ τῷ μειωτέῳ·

Αἱ τοῦ ἀφαιρετέου καταφ. ποσότ. $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2}{12} + \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$·

Αἱ τοῦ ἀφαιρετέου - ἀποφ. 1, $\frac{1}{8}$, $= \frac{8}{8}$, $\frac{1}{8}$ $= \frac{8}{8}$ καὶ $\frac{1}{8} = \frac{9}{8}$·

Τοῦ ἀφαιρετέου αἱ καταφ. καὶ ἀποφ. ποσότ ὁμοῦ $\frac{5}{4} - \frac{9}{8} = \frac{5 \cdot 8}{4 \cdot 8} - \frac{9 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{40 - 36}{32} = \frac{4}{32}$ $= \frac{1}{8}$·

Τοῦ Μειωτέου, καὶ ἀφαιρετέου αἱ ποσότητες ὁμοῦ $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} =$ ὅλῳ τῷ παραδ·

Περὶ τοῦ τῶν κλασμάτων πολλαπλασιασμοῦ·

§. 140. Ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν κλασμάτων, πολλαπλασιάζονται κλάσματα (εἴτε γνήσια, εἴτε νόθα·) ἐπὶ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς, ἢ κλάσματα ἐπὶ κλάσματα· (εἴτε γνήσια ἄμφω, ἢ νόθα, ἢ θάτερον μόνον) περὶ παντὸς τρόπου ἐπάξομεν γενικὸν κανόνα, βραχέα τινὰ ἐν μέρει θεωρήσαντες· παραληφθήτω α΄: ὁ μὲν ἕτερος παράγων, κλάσμα, ὁ δ᾽ ἕτερος, ὁλοσχερὴς οἷον ἔςω πολλαπλασιαςέον $\frac{3}{4}$ μετὰ τοῦ 5, ἢ, ὅ ταυτὸν, 5 μετὰ τοῦ $\frac{3}{4}$· (§. 58.) τοῦτο δ᾽ ἐςὶν ὁ πολλαπλα:

λαπλασιαςέος $\frac{3}{4}$ προςεθήσεται ἑαυτῷ τοσάκις, ὁσάκις ἡ 1 τῷ 5 ἐμπεριέχεται (§. 55.), ἤτοι πεντάκις· οἷον $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$. τὸ δὲ $= \frac{15}{4}$· (§. 130.) ταυτὸ δὲ προκύψει, καὶ εἰ ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς τῷ ἀριθμητῇ τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζοιτο· ἔνθεν „συνάγεται ὁ κανών· κλάσματα πολλαπλασιασθή- „σονται μεθ' ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς ἐκεί- „νων τῷ δοθέντι ὁλοσχερεῖ πολλαπλασιάζηται ὥςε $\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$. τῷ αὐτῷ τρόπῳ χρηςέον, καὶ εἰ νόθον κλάσμα μεθ' ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ πολλαπλασιάσαι πρόκειται· ἐντεῦθεν δῆλον, καὶ ὅπως ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν, μετὰ κλάσματος συνημμένον, μεθ' ἑτέρου ὁλοσχεροῦς πολλαπλασιάσομεν· οἷον $1\frac{3}{4}$ μετὰ 4· τοῦ γὰρ ὁλοσχεροῦς μετὰ τοῦ κλάσματος εἰς νόθον κλάσμα τραπέντος, (§. 133. καὶ σχ.) ὁ τοῦ καινοῦ κλάσματος ἀριθμητὴς τῷ ὁλοσχερεῖ πολλαπλασιασθήσεται· $1\frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{7}{4} \cdot 4 = \frac{28}{4} = 7$.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν κλασμάτων ἐν γράμμασι μετὰ γραμμάτων, ὁλοσχερεῖς παριςώντων, τελεσθήσεται ὡσαύτως· π. χ. $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \delta = \frac{\alpha\delta}{\beta}$. ὅτι δὲ οὕτως ἔχειν ἀνάγκη, αὐτόθεν δῆλον· πρόκειται γὰρ ἡ ποσότης $\frac{\alpha}{\beta}$, δ: ις (§. 55.) ληφθῆναι, ἢ δ: ις ἑαυτῇ προςεθῆναι· (§. αὐτ.) ὅπερ, ὡς ἀνωτ. δέδεικται, διὰ τοῦ πολλαπλ. τοῦ ἀριθμητοῦ γίνεται· Καὶ τὰς τοιάςδε τῶν ποσοτήτων, οἷα ἡ $\alpha + \frac{\beta}{\gamma}$ πολλαπλασιάσομεν μεθ' ἑτέρας, οἷον μετὰ τῆς δ, μεταχειριζόμενοι αὐτὰς τὸν ὅμοιον τρόπον, ὡς καὶ τοὺς ἀριθμούς· καὶ γὰρ $\alpha + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{\gamma}$ (§. 128.)

 $= \alpha\gamma$

$= \frac{\alpha\gamma}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}. = \frac{\alpha\gamma + \beta}{\gamma}.$ (§. 130.)

Ὁ πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ δ ἔςαι $= \frac{\alpha\gamma + \beta}{\gamma}.\delta$

$= \frac{(\alpha\gamma + \beta)\,\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma\delta + \beta\delta}{\gamma}.$ Ἔςω $\alpha = 1.$ $\beta = 2.$ $\gamma = 3.$ $\delta = 4.$ Ἐὰν οὖν οἱ ἀριθμοὶ ἀντικαταςῶσι τῶν γραμμάτων ἔςαι $\frac{\alpha\gamma\delta + \beta\delta}{\gamma}$

$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4}{3} = \frac{12 + 8}{3} = \frac{20}{3}.$

Τὸ αὐτὸ δ' ἂν προέκυψε, καὶ εἰ ἐν ἀρχῇ τὰ γράμματα ἐμερίζοντο· ἦν γὰρ $\alpha + \frac{\beta}{\gamma} \cdot \delta =$

$1 + \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{5}{3} \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4}{3} = \frac{20}{3}$

$= 6\,\frac{2}{3}.$

Αὖθις $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \delta + \gamma = \frac{\alpha\,.\,(\delta + \gamma)}{\beta}$

$= \frac{\alpha\delta + \alpha\gamma}{\beta}.$ Καὶ $\alpha\gamma - \frac{\nu}{\mu}.\zeta = \frac{(\alpha\gamma\mu - \nu)\zeta}{\mu}$

$= \frac{\alpha\gamma\mu\zeta - \nu\zeta}{\mu}.$

§. 141. Ὁ κλασμάτων μετὰ κλασμάτων πολλαπλασιασμὸς. ὡς τοῦ $\frac{3}{4}.\frac{5}{8}$, οὐδὲν δυσχερὲς ἔχει· κατὰ τὸ (§. ἀνωτ.), εἰ κλάσμα ὁλοσχερεῖ ἀριθμῷ πολλαπλασιάσειν ἐμέλλομεν, ἐπολλαπλασιάζετο ὁ ἀριθμητὴς μόνον· Εἰ οὖν καὶ ἐπὶ τούτων οὕτω χωρήσομεν, τουτ: εἰ μόνον τὸν ἀριθμ· τοῦ ἑτέρου κλάσμ· μετὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἑτέρου πολλαπλασιάσομεν, ὁ δὲ παρονομαςὴς νομαςής τοῦ πολλαπλασιαςέου ὁ αὐτὸς τηρηθείη, τὸ παραγόμενον πάνυ ἂν μέγα προκύψειε· πρόκειται γὰρ ὁ πολλαπλασιαςέος πολλαπλασιασθῆναι οὐχὶ μετὰ τηλικούτου ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, ἡλίκος ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πολλαπλασιαςοῦ, ἀλλὰ μετ᾽ ἀριθμοῦ διῃρημένου διὰ τοῦ παρονομαςοῦ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ· πολλαπλασιασθέντων τοίνυν τῶν ἀριθμητῶν ἀμφοῖν τῶν κλασμάτων μετ᾽ ἀλλήλων, τοσούτῳ ηὔξηται τὸ παραγόμενον, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ παρονομαςὴς τοῦ ἑτέρου κλάσματος· ἀναγκαῖον ἄρα τοσούτῳ καὶ μειωθῆναι· τὸ δὲ γενήσεται, εἰ τὸν διαιρέτην, τουτ. τὸν παρονομαςὴν, τοσάκις αὐξήσομεν· ἔςαι δὲ τοῦτο, εἰ καὶ τοὺς παρονομαςὰς τῶν κλασμάτων μετ᾽ ἀλλήλων πολλαπλασιάσομεν· ὥςε κλάσματα πολλαπλασιάζονται μετὰ κλασμάτων, ἐὰν πολλαπλασιάζωμεν μετ᾽ ἀλλήλων τοὺς ἀριθμητὰς, ὡσαύτως καὶ τοὺς παρονομαςάς. ἢ ἐὰν τὸ ἐκ τῶν ἀριθμητῶν παραγόμενον εἰς καινὸν ἀριθμητὴν, τὸ δ᾽ ἐκ τῶν παρονομαςῶν εἰς καινὸν παρονομαςὴν γίνηται· π. χ. $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8} = \frac{3\cdot5}{4\cdot8} = \frac{15}{32}$.

Δειχθήσεται δὲ ὁ κανὼν ἄμεινον διὰ γραμμάτων.

Ἔςω $\frac{\alpha}{\beta}$ πολλαπλασιαςέον μετὰ τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$· ταῦτα παριςῶσι πᾶν κλάσμα· Ὅ, τι οὖν κατὰ τούτων δειχθήσεται, κρατήσει καὶ κατὰ παντὸς κλάσματος· καὶ τὸ μὲν πηλίκον, ὃ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ δίδωσι, (διαιρεθὲν γὰρ α διὰ τοῦ β δώσει πάντως πηλίκον τι) ῥηθήτω ν· ὥςε $\frac{\alpha}{\beta} = \nu$· Ὃ δὲ τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$, μ· τουτέςι $\frac{\gamma}{\delta}$

 $= \mu$·

$= \mu\cdot$ ἄρα $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \nu \,.\, \mu\cdot$ ἴδωμεν οὖν, ὅπως τοῦτο ἀνακύψειεν·

$$\frac{\alpha}{\beta} = \nu \qquad\qquad \frac{\gamma}{\delta} = \mu$$

πολλαπλ. β· μετὰ τοῦ β. $\frac{\alpha \,.\, \beta}{\beta} = \beta\nu.$ καὶ $\frac{\gamma \,.\, \delta}{\delta} = \delta\mu\cdot$ δ πολλαπλ. μετὰ τοῦ δ·

$\alpha = \beta\nu\cdot$ καὶ $\gamma = \delta\mu$ (§. 114. δ')

Ἐπεὶ δὲ $\alpha = \beta\nu$, καὶ
$\gamma = \delta\mu$

Ἔσται καὶ $\alpha \,.\, \gamma = \beta\nu \,.\, \delta\mu$ (§. 79. α')

$: \beta\delta\cdot$

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \frac{\beta\nu \,.\, \delta\mu}{\beta\delta} = \nu\mu.$$

Ἦν δὲ καὶ $\frac{\alpha}{\beta} \,.\, \frac{\gamma}{\delta} = \nu\mu$, ὡς εἴδομεν ἐν ἀρχῇ·

Ἔσται ἄρα καὶ $\frac{\alpha}{\beta} \,.\, \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}\cdot$ (§. 48. δ')

Ἐπὶ δὲ τοῦ $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ ὁρῶμεν τοὺς ἀριθμητὰς τῶν κλασμάτων μετ' ἀλλήλων πεπολλαπλασιασμένους, ὡσαύτως καὶ τοὺς παρονομαστάς, διὰ δὲ τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ παρίσταται οἱονδηποτοῦν κλάσμα· δῆλος ἄρα ὁ ἀνωτέρω κανών·

Προ-

Προκείσθω ἤδη καὶ παραδείγματα.

$\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{35}$. Καὶ $\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} \cdot \frac{\nu}{\mu} = \frac{\alpha\gamma\varepsilon\nu}{\beta\delta\zeta\mu}\cdot$$

§. 142. Ἐὰν δὲ καὶ ἓν, ἢ πλείω, ἢ καὶ πάντα τὰ κλάσματα, τὰ μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθησόμενα, νόθα ἢ κλάσματα, τοὐτ' μείζω τῆς 1 (§. 118.), ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς γενήσεται κατὰ τὰ αὐτά, ὡς τῆς ἀνωτέρω διὰ τῶν γραμμάτων δείξεως κατὰ πάντων τῶν κλασμάτων κρατούσης· ὡς $\frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{63}{64}$. Εἰ δ' οἱ παράγοντες (§ 16.) ὁλοσχερεῖς εἰσιν ἀριθμοὶ μετὰ κλασμάτων, οἷον $1\frac{3}{4}$. $2\frac{1}{2}$, εἰς νόθα κλάσματα τραπέντες κατὰ τὸν δοθέντα κανόνα μεταχειρισθήσονται· $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ (§. 133. σχ.) καὶ $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. ὥςε $\frac{7}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$.

Καὶ ἐπειδὴ πᾶς ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς ὡς κλάσμα θεωρηθῆν 1 ἔχει, οὗ παρονομ' ἡ 1, (§. 128.) ἐὰν ἐν τοῖς παράγουσι καὶ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ ἐνῶσι, γραφήσονται ὡς κλάσματα, καὶ πολλαπλασιασθήσονται· $\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{96}{84} = 1\frac{12}{84} = 1\frac{1}{7}$.

Σχόλιον.

Τὸ παραγόμενον, ὁποῦ προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γνησίων κλασμάτων, εἶναι πάντοτε ἔλαττον τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων· οἷον $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$. ὡς ὁρᾷς, τὸ $\frac{3}{7} <$ τοῦ $\frac{5}{7}$, ὡσαύτως καὶ τοῦ $\frac{3}{5}$. ὅτι ἐν τῷ $\frac{3}{5}$ διῃρέθη ἡ μονὰς μόνον εἰς ς μέρη, ἐν δὲ τῷ παραγομένῳ εἰς 7, ἐξ ὧν (5, καὶ 7) ἐλήφθησαν 3 εἰς τὸν ἀριθμητήν· ἡ δ' αἰτία, ὅτι τὸ γνήσιον κλάσμα ἔλαττον τῆς 1. Ὅτε λοιπὸν πολλαπλασιάζεται γνήσιον κλάσμα διὰ γνησίου, ἀναγκαίως τὸ παραγόμεγόμενον ἔλαττον ἔςαι τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων· ὁ γὰρ ἕτερος παράγων ἐλήφθη ἔλαττον, ἢ ἅπαξ. τῶν δὲ νόθων πολλαπλασιαζομένων, τὸ παραγόμενον μεῖζον τοῦ ἑτέρου, ἢ τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων· ὅτι τὸ νόθον κλάσμα μεῖζον τῆς 1.

§. 143. Περὶ δὲ τῶν σημείων + καὶ —, χώραν ἔχει κἀνταῦθα τὰ ῥηθέντα (§. 77. καν.)· ὅτι καὶ τὰ κλάσματα ποσότητές εἰσι· π. χ. $+ \frac{5}{8} . + \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$. Καὶ $- \frac{5}{8} . - \frac{3}{8} = + \frac{15}{64}$·

Καὶ $- \frac{5}{8} . + \frac{3}{8} = - \frac{15}{64}$· καὶ $+ \frac{5}{8} . - \frac{3}{8} = - \frac{15}{64}$· Καὶ ἐν γράμμασιν.

$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$· Καὶ $- \frac{\alpha}{\beta} \times (- \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$. Καὶ $\frac{\alpha}{\beta} \times - \frac{\gamma}{\delta} = - \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$·

Καὶ $- \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\beta} = - \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$· Ὡσαύτως καὶ εἰ ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς εἴη, ἢ νόθον κλάσμα, ἢ ἑκάτεροι νόθα κλάσματα.

Περὶ τῆς τῶν κλασμάτων διαιρέσεως·

§. 144. Ἐν τῇ τῶν κλασμάτων διαιρέσει ἀριθμὸν ζητεῖν πρόκειται, ποσάκις ὁ διαιρέτης τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχεται, ἐμφαίνοντα, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως τῶν ὁλοσχερῶν· (§. 82.) ὁ δὲ ζητούμενος τὸ πηλίκον ἐςίν· οἷον ἔςω διαιρετέον $\frac{3}{4}$ διὰ τοῦ $\frac{2}{3}$, ὅ ἐςι, ζητητέον, ποσάκις ὁ $\frac{3}{4}$ περιέχει τὸν $\frac{2}{3}$· ἐνταῦθα ἀπαντῶσι διάφοροι τρόποι.

1) Ὁ διαιρέτης ἐςὶν ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, ὁ δὲ διαιρετέος κλάσμα, γνήσιον, ἢ νόθον· ἢ τὸ ἀνάπαλιν·

2) Ὁ

2) Ὁ διαιρέτης, καὶ διαιρετέος, ἄμφω κλάσματα, ἤτοι γνήσια, ἢ νόθα· ἢ ὁ μὲν, γνήσιον, ὁ δὲ, νόθον·

§. 145. Ῥητέον οὖν α'· περὶ τοῦ α'· προτεθείσθω τὸ κλάσμα $\frac{8}{9}$ διὰ 2 διαιρεθῆναι· ἐκ τοῦ §. 117. δῆλον, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{8}{9}$ ἀναφύεται, ἐὰν, τῆς μονάδος εἰς 9 μέρη διαιρεθείσης, 8 τούτων λάβωμεν· ὅτι $\frac{8}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$. Εἰ οὖν $\frac{8}{9}$ διὰ 2 διελεῖν δέοι, ζητεῖται, ποσάκις δύω μέρη (ὧν ἑκάτερον ἴσον) τοῦ $\frac{1}{9}$ ἔνεισι· προφανὲς οὖν, ὅτι 4 τοιαῦτα μέρη τοῦ $\frac{1}{9}$ ἔνεισιν· ὥςε ἀνάγκη πᾶσα τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{4}{9}$. Ἔνθεντοι $\frac{8}{9} : 2 = \frac{4}{9}$. τοῦτο δὲ προκύπτει καὶ εἰ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ δοθέντος ὁλοσχεροῦς διαιρέτου διαιρεθῇ, τοῦ παρονομαςοῦ ἀμεταβλήτου τηρουμένου. οὕτως ἂν εἴη καὶ $\frac{8}{9} : 4 = \frac{8:4}{9} = \frac{2}{9}$. καὶ $\frac{6}{10} : 3 = \frac{6:3}{10} = \frac{2}{10}$. καὶ ἐπειδὴ τὰ γράμματα πάντα ἐκδηλοῦσιν ἀριθμὸν, εἴη ἂν $\frac{\alpha}{\beta} : \delta = \frac{\alpha : \delta}{\beta}$.

Τὰ αὐτὰ δὲ κρατοῦσι, καὶ τοῦ διαιρετέου νόθου ὄντος κλάσματος· ὡς $\frac{16}{13} : 2 = \frac{16:2}{13} = \frac{8}{13}$. Ὅτι δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει, αὐτόθεν δῆλον· εἰδέναι γὰρ βουλόμεθα, ποσάκις τοσαῦτα μέρη, ὅσα ὁ διαιρέτης δεικνύει, τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχονται.

§. 146. Ἐφ' ὅσον τοίνυν ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ διαιρέτου διαιρέσιμος ᾖ, ἔχει χώραν τὸ ῥηθέν. (ς. ἀν.) Ἐὰν δὲ τοῦτο οὐκ ἐγχωρῇ, οἷον εἰ $\frac{5}{7}$ διὰ 2 διαιρεθῆναι δέοι, τὸ προκείμενον κλάσμα εἰς ἕτερον μεταβάλλουμεν ἰσοδύναμον, (§. 125.) τῷ πολλαπλασιασμῷ ἀμφοῖν τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὥςε τὸν ἀριθμητὴν τῷ δοθέντι ὁλοσχερεῖ διαιρέτῃ ἐνεργείᾳ διαιρεῖσθαι δύνασθαι· προσφυέςερος δ' εἰς τοῦτο ὁ ἀριθμὸς αὐτοῦ τοῦ διαιρέτου· οὕτω $\frac{5}{7} : 2$ εἴη ἂν

$= \frac{5}{7}\ \frac{2}{2}$

$\frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 2} : 2$. Ἐὰν οὖν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ δοθέντος διαιρέτου διέλωμεν, ὁ μὲν 2, μεθ' οὗ πεπολλαπλασίασται, ἐκπίπτει πάλιν, ἀναιρούμενος ὑπὸ τοῦ 2 διαιρέτου, καὶ μένει μόνον ὁ 5. ἐν δὲ τῷ παρονομαστῇ τηρεῖται ὁ 2 οὕτω. $\frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 2} : 2 = \frac{5}{7 \cdot 2} = \frac{5}{14}$.

Θεωρηθήτω τοῦτο καὶ ἐν γένει· Ἔστω διαιρετέον τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ τοῦ γ οὕτως· $\frac{\alpha}{\beta} : \gamma$. πολλαπλασίασον ἤδη ἄμφω τοὺς ὅρους διὰ γ, $\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \gamma} : \gamma$· δίελε μόνον τὸν ἀριθμ' διὰ τοῦ γ $= \frac{\alpha \cdot \gamma : \gamma}{\beta \cdot \gamma} = \frac{\alpha}{\beta\gamma}$ (§. 99. σχ. β'.) Ἐπειδὴ οὖν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ παριστᾷ πᾶν κλάσμα, εἴτε γνήσιον, εἴτε νόθον, τὸ δὲ γ πάντα ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν, ἕπεται ὁ κανὼν ἐντεῦθεν· κλάσματα διαιροῦνται δι' ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν, ἐὰν μόνον ὁ τούτων παρονομαστὴς μετὰ τῶν ὁλοσχερῶν πολλαπλασιάζηται· διὰ ταύτης τῆς πράξεως προκύπτει τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ διαιρουμένου· ὥστε τὸ $\frac{8}{9} : 2$ κατὰ τὸν α' τρόπον $= \frac{8 : 2}{9} = \frac{4}{9}$· κατὰ δὲ τὸν δεύτερον $\frac{8}{9} : 2 = \frac{8}{9 \cdot 2} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ = τῷ πηλίκῳ τοῦ α'.

§. 147. Τὸ δ' ἀνάπαλιν τοῦ ἐν (§. 145.) ἐστὶ $3 : \frac{5}{8}$· κατὰ τὸ (§. 128.) $3 = \frac{3}{1}$. ὥστε $3 : \frac{5}{8}$ εἴη ἂν καὶ $\frac{3}{1} : \frac{5}{8}$· τὸ δ' ἐστι ταὐτὸ, ὡς εἰ κλάσμα διὰ κλάσματος διαιρεθῆναι προὔκειτο· γνωστὸς δὲ καὶ ὁ

τρόπος

τρόπος τοῦ κλάσματα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀνάγειν παρονομαςήν. (§. 123.) καὶ $\frac{3}{1} : \frac{5}{8} = \frac{8.8}{1.8} : \frac{1.5}{8.1} = \frac{3.8}{8} : \frac{5}{8}$ $= \frac{24}{8} : \frac{5}{8}$· Ἐπειδὴ οὖν ἄμφω ἐγένοντο κλάσματα, καὶ ἐφ' ἑκατέρων ἡ μονὰς εἰς ἴσα μέρη διῄρηται, ἥπερ ὁρᾷν πάρεςι, θεωρητέον μόνον τοὺς ἀριθμητὰς, ὡς ὁλοσχερεῖς, ὡς τῶν παρονομαςῶν οὐκέτι ἐνταῦθα τεινόντων, (ἕκαςον γὰρ μόριον τοῦ 24 τηλικοῦτόν ἐςιν, ἡλίκον καὶ ἕκαςον τοῦ 5) καὶ διαιρετέον ἐνεργείᾳ 24 διὰ τοῦ 5· διαιροῦμεν οὖν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ διαιρέτου· ὥςε $\frac{24}{8} : \frac{5}{8} = \frac{24}{5}$.

Παραδείγματα· $3 : \frac{2}{5} = \frac{3}{1} : \frac{2}{5} = \frac{3.5}{5} : \frac{2}{5} = \frac{15}{5} : \frac{2}{5}$ $= \frac{15}{2}$.

Καὶ ἐν γράμμασι·

$$\gamma : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{1} : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma.\beta}{\beta} : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma\beta}{\alpha}.$$

§. 148. Ὅπως οὖν ἡ διαίρεσις τελεῖται, ἐὰν ὁ διαιρετέος ὁλοσχερὴς ἢ ἀριθμὸς, ὁ δὲ διαιρέτης κλάσμα, ἤδη εἴρηται· τὸ δ' αὐτὸ ἂν ἐποιήσαμεν, καὶ εἰ τὸ ἀνάπαλιν εἴη, εἰ μὴ συντομωτέραν μέθοδον εὑρεῖν ἠδυνήθημεν. (§. 145.) ἐκ τούτου μανθάνομεν καὶ τὴν τῶν κλασμάτων μεταχείρισιν, εἰ ἄμφω, διαιρετέος, καὶ διαιρέτης, εἰσὶ κλάσματα ὁποιαοῦν· καὶ ἄνωτ. γὰρ ἄμφω ἐγένοντο κλάσματα· τουτέςιν, ἐὰν „ὁ διαιρετέος, καὶ διαιρέτης, κλάσματα ὦσιν, ἀναγα„γὼν ἄμφω εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν δίελε τὸν ἀριθ„μητὴν διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ·

Παραδείγματα· $\frac{3}{5} : \frac{5}{8} = \frac{3.8}{5.8} : \frac{5.5}{8.5} = \frac{24}{40} : \frac{25}{40}$ $= \frac{24}{25}$. Καὶ ἐν γένει·

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha.\delta}{\beta.\delta} : \frac{\gamma.\beta}{\delta.\beta} = \frac{\alpha\delta}{\gamma\beta}.$$ Καὶ

$\frac{\nu}{\mu}$:

$$\frac{\nu}{\mu} : \frac{\varrho + \sigma}{\tau} = \frac{\nu\tau}{\mu\tau} : \frac{(\varrho + \sigma)\mu}{\tau\mu}$$

$$= \frac{\nu\tau}{(\varrho + \sigma)\mu} = \frac{\nu\tau}{\varrho\mu + \sigma\mu}$$

Ἵνα δὲ γενικὸν κανόνα ἐπάξωμεν, πᾶσι τοῖς τρόποις ἐφαρμόζοντα· Ἔςω $\frac{\nu}{\mu}$ διαιρετέον διὰ τοῦ $\frac{\varrho}{\sigma}$· δι' οὗ πᾶν κλάσμα παρίςαται, εἴτε γνήσιον, εἴτε νόθον· ἀλλὰ καὶ ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν τὸ ἕτερον τούτων σημᾶναι δύναται, ἤτοι τοῦ μ τοῦ παρονομαςοῦ, ἢ τοῦ σ ἀντὶ μονάδος παραλαμβανομένου· διελεῖν οὖν τὸ παρὸν παράδειγμα βουλομένοις ἀνακτέον ἐςὶν εἰς τὸν κοινὸν παρονομαςήν· $\frac{\nu}{\mu} : \frac{\varrho}{\sigma} = \frac{\nu \,.\, \sigma}{\mu \,.\, \sigma} : \frac{\varrho \,.\, \mu}{\sigma \,.\, \mu}$, καὶ οὕτω τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ διαιρετέον $= \frac{\nu\sigma}{\varrho\mu}$·

Ἀλλὰ τούτου ἀκριβῶς θεωρουμένου, εὔδηλον, ὅτι τὸ αὐτὸ ἂν προκύψειε, καὶ εἰ τὸν διαιρέτην ἀναςρέψας ἀντὶ τοῦ $\frac{\varrho}{\sigma}$ γράψῃς $\frac{\sigma}{\varrho}$, καὶ τὴν διαίρεσιν εἰς πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων μεταβάλῃς, ἔνθα ὁ ἀριθμητὴς μετὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ ὁ παρονομαςὴς μετὰ τοῦ παρονομαςοῦ πολλαπλασιάζονται· ὅτι $\frac{\nu\sigma}{\varrho\mu}$, ἢ $\frac{\nu \,.\, \sigma}{\mu \,.\, \varrho}$ τὸ αὐτό ἐςιν· ἐντεῦθεν ὁ κανών·

Κλασμάτων διὰ κλασμάτων διαιρεθῆναι προκειμένων, ἀναςρέψας τὸν διαιρέτην (τουτ: τὸν ἀριθμ. παρον. καὶ τοῦτον ἀριθμητ. ποιήσας) μετάβαλε τὴν διαίρεσιν εἰς πολλαπλασιασμόν·

Σχόλ

Σχόλιον.

Ἐὰν ὁ διαιρέτης ᾖ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, ἂς μεταβληθῇ εἰς κλάσμα, καὶ εἶτα ἂς ἀνασραφῇ· ὁμοίως καὶ εἰ ὁ διαιρετέος ὁλοσχερής ἐςι·

Παραδείγματα. $\frac{1}{8} : 3 = \frac{1}{8} : \frac{3}{1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$.

$2 : \frac{3}{8} = \frac{2}{1} : \frac{3}{8} = \frac{2}{1} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$.

$1\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{3}{2} : \frac{3}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{24}{6} = 4$.

$\frac{3}{5} : 2\frac{1}{6} = \frac{3}{5} : \frac{13}{6} = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{13} = \frac{18}{65}$.

$\frac{9}{10} : \frac{7}{10} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{7} = \frac{90}{70} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$.

Ὡσαύτως καὶ ἐν κλάσμασι διὰ γραμμάτων, ἐξ ὅσων ἂν συγκέωνται ὅρων· π. χ. $\frac{\rho+\chi}{\alpha-\beta} :$

$$\frac{\nu-\mu}{\gamma} = \frac{\rho+\chi}{(\alpha-\beta)} \cdot \frac{\gamma}{(\nu-\mu)} = \frac{(\rho+\chi)\gamma}{(\alpha-\beta)(\nu-\mu)}$$

$$= \frac{\gamma\rho+\gamma\chi}{\alpha\nu-\alpha\mu+\beta\mu-\beta\nu}\cdot$$

§. 149. Ἐνίοτε δ' εὑρίσκομεν καὶ κλάσματα, ἢ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς μετὰ κλασμάτων ἰδιαιτέρῳ τινὶ τρόπῳ ἐκφερόμενα· ἀλλ' ὡς ἐπὶ τοὺς ῥηθέντας καὶ ταῦτα κανόνας ἀναγόμενα ῥαδίως διαγνωσθήσονται. π. χ.

$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}$ ἐςὶ $\frac{3}{8} : \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$· Καὶ $\frac{1\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$

$= 1\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{7}{4} : \frac{5}{7} = \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{49}{20} = 2\frac{9}{20}$.

Ἀλλὰ καὶ τόδε τὸ σχῆμα $\frac{\frac{2}{3}}{1 : \frac{5}{8}}$ εἰς κατανόησιν εὐχερές. α'· γὰρ διαιρετέον τὴν 1 διὰ τοῦ $\frac{5}{8}$, καὶ εἶτα διὰ τοῦ πηλίκου τὸ $\frac{2}{3}$ οὕτω·

$\frac{5}{8} =$

$$\frac{\frac{2}{3}}{1 : \frac{5}{8}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1 \cdot 8}{1 \cdot 5}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{5}} = \frac{2}{3} : \frac{8}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}$$
$$= \frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$$

§. 150. Εἰ πρόκειται κλάσμα δι᾽ ἑαυτοῦ διαιρεθῆναι, τὸ πηλίκον ἔσται 1· (§. 84. σχ.) π. χ. $\frac{3}{4} : \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$. Καὶ $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = 1$.

Σχόλιον.

Εἰς τὴν ἐρώτησιν, τί τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{3}{4}$, ἀπαντητέον, τὸ παραγόμενον ἐκ τοῦ $\frac{3}{4}$ μετὰ τοῦ $\frac{1}{2}$ πολλαπλασιασθέντος· ὡσαύτως καὶ τί τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{8}$, τὸ παραγόμενον ἐκ τοῦ $\frac{5}{8}$ πολλαπλασιασθέντος μετὰ τοῦ $\frac{2}{3}$, κτ·

§. 151. Περὶ δὲ τῶν σημείων κρατοῦσι καὶ ἐν τοῖς κλάσμασι τὰ ὁροθετηθέντα· (§. 77. καν.) ὡς $+\frac{5}{8} : +\frac{3}{5} = +\frac{5}{8} \cdot +\frac{5}{3} = +\frac{25}{24} = +1\frac{1}{24}$. Καὶ $-\frac{5}{8} : -\frac{3}{5} = +1\frac{1}{24}$. Τὸ δὲ $-\frac{5}{8} : +\frac{3}{5} = -1\frac{1}{24}$. Ὡσαύτως καὶ $+\frac{5}{8} : -\frac{3}{5} = -1\frac{1}{24}$.

§. 152. Ἡ μέθοδος τῆς βασάνου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν (§. 93.) χώραν ἔχει καὶ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ, καὶ διαιρέσει τῶν κλασμάτων.

Βάσανος τοῦ πολλαπλ. τῶν κλασμάτων·

$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$· Δίελε τοῦτο τὸ παραγόμενον διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων, π. χ. διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$,

$\frac{\alpha}{\beta}$, καὶ τὸ πηλίκον ἔςαι $\frac{\gamma}{\delta}$ ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων·

ὥςε $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha\gamma\beta}{\beta\delta\alpha}$· Ἔνθα τὸ α καὶ β τοῦ παρονομαςοῦ ἀναιρεῖ τὸ α καὶ β τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ ὑπολείπεται $\frac{\gamma}{\delta}$, ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων.

Καὶ ἐν ἀριθμοῖς· $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$· Δίελε τὸ παραγόμενον τῷ ἑτέρῳ τῶν παραγόντων, π. χ. τῷ $\frac{5}{8}$, καὶ προκύψει πηλίκον τὸ $\frac{3}{4}$· ὡς $\frac{15}{32} : \frac{5}{8} = \frac{15}{32} \cdot \frac{8}{5} = \frac{120}{160} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$·

Βάσανος τῆς διαιρέσεως τῶν κλασμάτων·

Ἔςω $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$, ὅ τὸ πηλίκον ἐςί. πολλαπλασίασον τὸ πηλίκον μετὰ τοῦ διαιρέτου $\frac{\gamma}{\delta}$, καὶ προκύψει σοι ὁ διαιρετέος $\frac{\alpha}{\beta}$· ὡς $\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta\gamma}{\beta\gamma\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$· Καὶ ἐν ἀριθμοῖς· $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} =$ τῷ πηλίκῳ. Ὁ πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ διαιρέτου $\frac{2}{3}$, δώσει $\frac{4}{5}$ τὸν διαιρετέον· Ἔςι γὰρ $\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$· ὡσαύτως καὶ $6 : \frac{1}{8} = 6 . \frac{8}{1} = \frac{48}{1} = 48$· ὅ πολλαπλ. μετὰ τοῦ $\frac{1}{8}$ ἔςαι $48 \times \frac{1}{8} = \frac{48}{1} \cdot \frac{1}{8} = \frac{48}{8} = \frac{6}{1} = 6$.

Σχόλιον.

Τὰ δ΄ εἴδη, ἤτοι πρόσθ. ἀφαίρ. πολλαπλασ. καὶ διαίρ. τῶν συγκεκριμένων (§. 4.) κλασμάτων εἶναι

ναι πάντη τὰ αὐτὰ μὲ τὰ τῶν ἀφῃρημένων εἴδη, τὰ ὁποῖα ἤδη ἐπραγματευσάμεθα· Ὅθεν εἶναι περιττὸν νὰ παρατεθοῦν καὶ αὐτῶν παραδείγματα· Ὁ ἀναγνώςης θέλει ἑυρεῖ αὐτὰ εἰς κάθε κοινὸν ἀριθμητικὸν βιβλίον·

Περὶ τῶν Δεκαδικῶν κλασμάτων.

§. 153. Ἐπὶ τοῦ παραληφθέντος ἀριθμητικοῦ συςήματος τοῦ ἐκ δέκα χαρακτήρων, (§. 11.) τῆς ἀριθμήσεως δεξιόθεν χωρούσης, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ὁ ἐν τῷ β'· τόπῳ τὸ δεκαπλάσιον σημαίνει τοῦ, ὅ ἐν τῷ α'· τόπῳ δηλοῖ· (§. 62.) Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἀριςερόθεν τῆς ἀρχῆς τῆς ἀριθμήσεως γενομένης, ἕκαςος χαρακτὴρ τὸ δεκατημόριον δυνήσεται τοῦ ἀμέσως προηγησαμένου. Καὶ τοῦτο νόμος τῶν ἀριθμῶν γενικὸς, ἀπὸ βουλῆς ἠρτημένος· (§. 12. ἐν τέλει.) Ἀλλὰ καὶ τοῦτο δῆλον, ὅτι, ἐὰν ὁ τόπος τῶν ἁπλῶν, ἔνθα ὁ χαρακτὴρ ἐν τῇ φυσικῇ αὐτοῦ ἵςαται σημασίᾳ, τουτ: ὁ α'· τόπος, ὅθεν οἱ ἀριθμοὶ ἄρχονται, ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριςερὰ προαγόμενοι, κόμματι διαςαλῇ, καὶ μετ' αὐτὸ καὶ ἕτεροι ἀριθμοὶ γραφῶσιν, ὁ α'·τούτων τὸ δεκατημόριον σημανεῖ ἑκάςου ἀριθμοῦ τοῦ ἐν τῷ τόπῳ τῶν ἁπλῶν, ὁ δὲ β'· τὸ δεκατημόριον τοῦ α'·, κτ' π. χ' 5555, 5555·. ἔνθα τὸ κόμμα ἐςὶν, ἐνταῦθα ἀπολήγει καὶ ἡ ἁπλῆ σημασία τοῦ 5, (ἤτοι σημαίνει, ὅπερ διώρισαι, τουτ. 5 μονάδας) ὁ δὲ 5 μετὰ τὸ κόμμα δηλοῖ $\frac{5}{10}$, ὁ δὲ μετὰ τοῦτο β'· δεκάκις ἔλαττον δύναται τοῦ α'· ἤτοι σημαίνει $\frac{5}{100}$, ὁ γ'· $\frac{5}{1000}$, ὁ δ'· $\frac{5}{10000}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων χαρακτήρων.

§. 154. Ὁ τοῦτο ἀκριβῶς θεωρῶν εὐχερῶς κατανοήσει, ὅτι, ἐπειδὴ ἡ δύναμις τῶν χαρακτήρων ἐφ' ἑκάςου τόπου δεκάκις ἐλαττοῦται τῆς τῶν προηγησαμένων, οἱ μετὰ τὸ κόμμα ἀριθμοὶ κλάσματα γίνονται, ὧν ἑκάςου ὁ παρονομαςὴς δεκάκις τὸν πρὸ αὐτοῦ ὑπερέχει· τὰ τοιαῦτα τῶν κλασμάτων καλοῦνται δεκαδικὰ, ὅτι καὶ ταῦτα κατὰ τὸν δεκαδικὸν διατέτακται νόμον· ὥςε κἀνταῦθα δέκα μονάδες τῆς κατωτέρας τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἐγγὺς ἀνωτέρας·

§. 155. Γράφουσι δὲ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, διαςαλτέον ταῦτα τῷ κόμματι (,) (§. 153.) ἀπὸ τῶν ὁλοσχερῶν, τοὺς δὲ παρονομαςὰς ἀναγνωςέον ταῖς φωναῖς, δεκατημόρια, ἑκατοςημόρια, χιλιοςημόρια, δεκαχιλιοςημόρια, ἑκατονχιλιοςημόρια, μιλλιοςημόρια, κτ· Εἴθιςαι μέντοι τοὺς παρονομαςὰς μὴ ὑποτιθέναι τοῖς δεκαδικοῖς, ὡς τῶν δυνάμεων τῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν κατ' αὐτοὺς διοριζομένων τόπων· π. χ. 15,34502 σημαίνει 15 ὁλοσχερεῖς, 3 δεκατημ. 4 ἑκατοςημ. 5 χιλιοςημ. οὐδὲν δεκαχιλιοςημ· 2 ἑκατονχιλιοςημόρα· Εἰ δὲ οὐδεὶς ὁλοσχερὴς πάρεςιν, ἐν τῷ τόπῳ τούτων τοῦ μηδενικοῦ τεθέντος εἰς δήλωσιν τοῦ μηδένα παρεῖναι ὁλοσχερῆ, καὶ μετὰ τοῦτο τοῦ κόμματος, γραφήτωσαν τὰ δεκαδικά· π. χ. 0,54002. ἔνθα οὐδεὶς ὁλοσχερὴς, 5 δεκατημ· 4 ἑκατοςημ· οὐδὲν χιλιοςημ· οὐδὲν δεκαχιλιοςημ· 2 ἑκατονχιλιοςημ··

§. 156. Τὰ δεκαδικὰ κλάσματα διττῶς γράφειν, καὶ ἀναγινώσκειν ἔχομεν, ἤτοι ἕκαςον χαρακτῆρα, ὡς ἰδιαίτερον κλάσμα θεωροῦντες, καὶ τὸν τούτῳ προσήκοντα παρονομαςὴν γράφοντες, καὶ ἀναγινώσκοντες, ὡς ἐν τῷ ἀνωτ. §. ἢ πάντας τοὺς δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, ὡς τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς μόνου κλάσματος ἐκδεχόμενοι· οὗ παρονομαςὴς ὁ παρονομαςὴς τοῦ ἐσχάτου δεκαδικοῦ χαρακτῆρος πρὸς τὰ δεξιά· π. χ.

0,243

0, 243 κατὰ μὲν τὸν ἄνωτι τρόπον ἐστὶ $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{100}$, καὶ $\frac{3}{1000}$· Κατὰ δὲ τὸν β'· τρόπον $\frac{243}{1000}$, ἤτοι 243 χιλιοστημόρια· Ὅτι δὲ τοῦτο οὐδεμίαν ἐμποιεῖ διαφορὰν τῇ δυνάμει τῶν κλασμάτων, δείκνυται διὰ τῆς τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἀναγωγῆς· Ἔστι γὰρ $\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{200}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{3}{1000}$ (§. 124.) ταῦτα δὲ $= \frac{243}{1000}$· (§. 130·) ἄρα καὶ $\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{243}{1000}$ (§. 48. δ'·).

Σχόλιον. α'·

Ἐὰν γράφωμεν τὰ κλάσματα κατὰ τὸν β'· τρόπον, ὁ παρονομ· λαμβάνει τόσα μηδενικὰ, ὅσα δεκαδικὰ κλάσματα πάρεισι· πρὸ δὲ τῶν μηδενικῶν τοῦ παρονομ· τίθεται ἡ 1· π. χ· 15, 243 $= 15 + \frac{243}{1000}$· ἢ 15 $\frac{243}{1000}$. Καὶ 6, 0045 $= 6\ \frac{45}{10000}$ (ἐδῶ εἶναι δ'· μηδενικὰ, ὅτι καὶ οἱ τόποι τῶν δεκαδικῶν εἰσὶ δ'· (καί τοι τῶν μηδενικῶν τόπον δύω χαρακτήρων ἐν τῷ ἀριθμητῇ ἐπεχόντων) καὶ 0, 4021 $= \frac{4021}{10000}$· κτ.

Σχόλιον β'·

Ὅταν ἐν τῷ α'· β'· γ'· κτ. τόπῳ τῶν δεκαδικῶν ἦναι μηδενικὰ, συντομίας χάριν παραλείπονται, γραφομένων μόνον τῶν σημαντικῶν χαρακτήρων ἐν τῷ ἀριθμητῇ· τὰ δὲ μηδενικὰ τοῦ παρονομαστοῦ δείξουσι

τὴν

τὴν δύναμιν τῶν χαρακτήρων· οἷον 0, 00056 $= 0 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{6}{100000}$ $= \frac{56}{100000}$.

Σχόλιον γ'·

Καὶ τοὺς ὁλοσχερεῖς χαρακτῆρας ἠμποροῦμεν να τοὺς γράψωμεν ἐν τῷ ἀριθμητῇ μὲ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, καὶ νὰ τοὺς διακρίνωμεν ὡς ὁλοσχερεῖς κατὰ τὸ α'· σχολ· ὡς 4, 56 γραφείη ἂν καὶ οὕτω $\frac{456}{100} = 4, \frac{56}{100}$.

Περὶ Προσθέσεως, καὶ Ἀφαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν.

§. 157. Ἡ τῶν δεκαδικῶν πρόσθεσις, ἤτοι μόνων ὄντων, ἢ καὶ μεθ' ὁλοσχερῶν συμπεπλεγμένων, πάντη εὐχερής· τελεῖται γάρ, ὡς καὶ ἡ τῶν ὁλοσχερῶν. (§. 21.) ὅτι κἀνταῦθα δέκα μονάδες τῆς κατωτέρας τάξεως μίαν τῆς ἐγγὺς ἀνωτέρας ἀποτελοῦσιν· αὐτόθεν δὲ δῆλον, ὅτι τὰ ὁμοειδῆ ὑπὸ τὰ ὁμοειδῆ γραπτέα, ὡς δεκατημόρια ὑπὸ δεκατημ. κτ' τὸ δὲ κόμμα, τὸ τὰ δεκαδικὰ ἀπὸ τῶν ὁλοσχερῶν διαςέλλον, ἐν τῷ κεφαλαίῳ τὸν αὐτὸν καταλήψεται τόπον, ὃν καὶ ἐν τοῖς προσθετέοις (§. 15.) εἶχε· τὸ γὰρ τῶν ἑκατοςημορίων κεφάλ. ἑκατοςημόρια δηλώσει, τὸ δὲ τῶν δεκατημορίων αὖθις δεκατημόρια, κτ. οἷον,

15,543	Καὶ	3,0021
0,236		12,999
5,002		0,9
0,0 03		12,00096
20,7813		0,000004
		28,902064

§. 158. Ὡσαύτως καὶ ἡ τούτων ἀφαίρεσις κατὰ πάντα ὁμοία τῇ τῶν ὁλοσχερῶν: (§. 31.) περὶ δὲ τοῦ κόμματος κρατεῖ τὰ αὐτά. (§. ἀνωτ.) οἷον,

Μειωτέος.	16,4325	Καὶ	15,0004	Μειωτ.
Ἀφαιρετέος.	5,0294		14,9987	Ἀφαιρ.
Διαφορά.	11,4031		00,0017	Διαφ.

§. 159. Βασανίζονται δὲ, κατὰ τὸν ῥηθέντα τρόπον. (§. §. 25. 31.). Ἐνταῦθα κρατοῦσι καὶ τὰ ὁροθετηθέντα περὶ τῆς προσθέσεως, καὶ ἀφαιρέσεως μετ' ἐναντίως ἐχόντων σημείων. (§. 40. σχ. β'. 49.)

π. χ.	+ 3,0562	Καὶ	— 5,0321	Μειωτ.
	— 2,143		+ 2,1432	Ἀφαιρ.
τὸ κεφ.	+ 0,9132		— 7,1753.	Διαφ.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν.

§. 160. Καὶ οὗτος οὐδὲν διαφέρει τοῦ τῶν ὁλοσχερῶν πολλαπλασιασμοῦ· (§. 58. κτ.) Σημειῶσαι μόνον τὸν ἑξῆς κανόνα ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν, εἴτε ἐν τῷ ἑτέρῳ, εἴτε ἐν ἑκατέρῳ τῶν παραγόντων, ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ τοῖς δεκαδικοῖς συνάπτονται, εἴτε οὐδεὶς ὁλοσχερὴς πάρεστι· Πολλαπλασιασθήτωσαν οἱ ἀριθμοὶ (§. αἰτ.) (ὡς εἰ πάντες ὁλοσχερεῖς εἶεν, μηδένα λόγον τῶν δεκαδικῶν ποιουμένων) μετ' ἀλλήλων, καὶ τὸ τούτων παραγόμενον τοσαῦτα δεκαδικὰ περιέξει, ὅσα ἀμφοῖν τοῖς παράγουσιν ἐνυπῆρχον, ὁμοῦ ληφθέντα·

Παράδειγμα.

```
   5,43
   0,23
  ------
   1629
  1086
  ------
  1,2489
```

Ἐπειδὴ οὖν τὰ τῶν παραγόντων δεκαδικὰ δ'· εἰσὶν, ὁμοῦ ληφθέντα, καὶ χαρακτῆρες τοσοῦτοι τοῦ παραγομένου διαστέλλονται τῷ κόμματι, εἰς δεκαδικὰ γινόμενοι· Ἔστι δὲ $1,2489 = 1,\frac{2489}{10000}$· (§. 155. καὶ σχ. α'· τοῦ §. 156.) Δειχθήσεται δὲ οὕτω·

$$5,43 = \tfrac{543}{100}\ (\text{§. } 156.\ \sigma\chi.\ \gamma'.).\quad 0,23 = \tfrac{23}{100}$$

$$5,43 \times 0,23 = \tfrac{543}{100} \times \tfrac{23}{100}$$
$$\tfrac{543}{100} \times \tfrac{23}{100} = \tfrac{12489}{10000}\ (\text{§. } 141.)$$

$$5,43 \times 0,23 = \tfrac{12489}{10000}\ (\text{§. } 43.\ \delta'.) = 1,2489$$
(§. 156. σχ. γ'.)

Οὕτω δείξομεν καὶ τὰ λοιπὰ τῶν παραδειγμάτων, ἐν οἷς εἴτε μόνον ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων τοῖς δεκαδικοῖς συνημμένος εὑρίσκεται, εἴτε οὐδεὶς ὁλοσχερὴς πάρεςι.

§. 161. Ἐὰν ἐν τῷ παραγομένῳ μὴ τοσοῦτοι χαρακτῆρες προκύπτωσιν, ὅσοι κατὰ τὸν κανόνα (§. ἀν.) τῷ κόμματι διαςαλῆναι ὤφειλον, πληρούτω τὰ μηδενικὰ τὸν λοιπὸν τόπον, καὶ ἐν τῷ τόπῳ τῶν ἁπλῶν μονάδων ἑνὸς μετὰ τοῦ κόμματος τιθεμένου· (§. 155.) π. χ.

0,0000032	Καὶ	0,0000032
6		0,00324
0,0000192		128
		64
		96
		0,000000010368

Σημείωσαι, ὅτι τὰ σημεῖα + καὶ — κἀνταῦθα ἕπονται τοῖς γενικοῖς κανόσι· (§. 77. καν.)

Περὶ Διαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν.

§. 162. Ὁ δὲ τῆς διαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν κανὼν (ἐν ᾗ, ἤτοι τῷ διαιρετέῳ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ μετὰ δεκαδικῶν ἔνεισιν, ἢ μόνον δεκαδικὰ, τῷ δὲ διαιρέτῃ μόνον ὁλοσχερεῖς, ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ τελευταῖον ἀμφοῖν δεκαδικὰ μετὰ, ἢ ἄνευ ὁλοσχερῶν, τὰ δὲ δεκαδικὰ ἐπ' ἀμφοῖν ἤτοι ἰσάριθμα, ἢ τῷ μὲν, πλείω, τῷ δ' ἐλάττω) ἐςὶν ὁ ἑξῆς.

Δίελε, κατὰ τὸν συνήθη τρόπον. εἶτα ἀρίθμησον, εἰ ὁ διαιρετέος, ἢ ὁ διαιρέτης, πλείω ἔχει δεκαδικὰ, ἢ ἄμφω, ἰσάριθμα· Καὶ εἰ μὲν τοῦτο, οἱ τοῦ πηλίκου χαρακτῆρες δηλοῦσιν ὁλοσχερεῖς ἀριθμούς· εἰ δὲ τῷ διαιρετέῳ πλείω δεκαδικὰ πάρεισι, τοσούτους τῶν χαρακτήρων τοῦ πηλίκου ποίησον δεκαδικὰ, ὅσοις ὁ διαιρετέος τοῦ διαιρέτου πλεονεκτεῖ· Εἰ δὲ τελευταῖον τῷ διαιρέτῃ πλείω πάρεισι, τοσαῦτα πρόσαψον τῷ πηλίκῳ μηδενικὰ, καθ' ὅσους χαρακτῆρας ὁ διαιρετέος τοῦ διαιρέτου μειονεκτεῖ·

Παράδειγμα, ἔνθα τὰ δεκαδικὰ τοῦ διαιρετέου ἰσάριθμα τοῖς τοῦ διαιρέτου·

```
65,19 : 1,23  | 53
61 5·
-----
03 69
 3 69
-----
 000
```

Ἐνταῦθα τὸ πηλίκον ἐςὶ 53. ἢ 1, 23 ἐμπεριέχεται τῷ 65, 19. 53 : κις·

Δεῖξις·

$$65,19 : 1,23 = \frac{6519}{100} : \frac{123}{100} \ (\S.156. \ \sigma\chi. \ \gamma')$$
$$= \frac{6519}{100} \cdot \frac{100}{123} \ (\S.148. \ \kappa\alpha\nu.) = \frac{651900}{12300} = 53.$$

Παραδείγματα τοῦ β' τρόπου.

1) Ἐπ' ἀμφοῖν ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ, καὶ δεκαδικά·

```
12,236 : 2,3  | 5,32.
11 5··
------
00 73
   69
------
   046
    46
   ---
    00
```

Ἐν τούτῳ, πρόσῃν τῷ διαιρετέῳ γ' δεκαδικὰ, τῷ δὲ διαιρέτῃ ἕν· Ὥςε κατὰ τὸν κανόνα, ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος δυσὶ δεκαδικοῖς τὸν διαιρέτην ὑπερέχει, ἀποτμηθήσονται δύω χαρακτῆρες τοῦ πηλίκου εἰς δεκαδικά·

2) Ὁ

2) Ὁ μὲν διαιρέτης ἔςω εἷς ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, τῷ δὲ διαιρετέῳ ἔςωσαν ὁλοσχερεῖς, καὶ δεκαδικά. ὡς

31,155 : 5 | 6,231
30 . . .
11
10
15
15
005
5
0

Τῷ διαιρέτῃ οὐδὲν ἦν δεκαδικὸν, τῷ δὲ διαιρετέῳ ἦν γ' ὥςε γ χαρακτῆρες τοῦ πηλίκου τῷ κόμματι διαςέλλονται·

3) Ὁ διαιρέτης εἷς ὁλοσχερὴς, ὁ δὲ διαιρετέος μόνον δεκαδικά· οἷον

0,009768 : 3 | 3256
9
07
6
16
15
18
18
00

Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος καθ' ἓξ δεκαδικὰ τὸν διαιρέτην ὑπερέχει, (ἐνταῦθα τῷ διαιρέτῃ οὐδὲν προσῆν) διαςαλτέον 6 χαρακτῆρας τοῦ πηλίκου, ἐν δὲ τῷ τόπῳ τῶν ἁπλῶν μονάδων, ἤτοι τῶν ὁλοσχερῶν, θετέον 0. (§. 155.) τὸ οὖν πηλίκον ἔςαι 0,003256.

4) Ἐπ' ἀμφοῖν μόνον δεκαδικὰ, ἀλλὰ τῷ διαιρετέῳ πλείω· ὡς

0,006816 : 0,0213 | 32
639
0426
426
0

Ἐπειδὴ τῷ διαιρέτῃ δ' δεκαδικὰ προσῆν, τῷ δὲ διαιρετέῳ 6, τουτ: οὗτος ὑπερεῖχεν ἐκεῖνον δυσὶ δεκαδικοῖς, δύο χαρακτῆρας τοῦ πηλίκου διαςαλῆναι χρή· Καὶ ἐπειδὴ ἐνταῦ-

ταῦθα μόνον δύω εἰσιν, εἰς σημεῖον τοῦ ἁπλοῦ ἀριθμοῦ, ἤτοι τοῦ ὁλοσχεροῦς, ἐν τῷ τόπῳ τούτου τεθήτω τὸ 0 μετὰ τοῦ κόμματος· Ὥςε τὸ πηλίκον ἔςαι 0, 32, τουτ' ὁ διαιρέτης περιέχεται τοσάκις ἐν τῷ διαιρετέῳ·

Δεῖξις·

$12,236 : 2,3 = \frac{12236}{1000} : \frac{23}{10}$ (§. 156. σχ. γ'.) $= \frac{12236}{1000} . \frac{10}{23}$ (§. 148. καν.). $= \frac{122360}{23000}$, ἢ $= \frac{12236}{2300}$. Δίελε ἄμφω τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ $23 = \frac{532}{100} = 5\frac{32}{100} = 5,32$. Ὡσαύτως καὶ $0,006816 : 0,0213 = \frac{006816}{1000000} : \frac{0213}{10000}$ $= \frac{6816}{1000000} : \frac{213}{10000}$ (§. 156. σχ. β'.) $= \frac{6816}{1000000} \times \frac{10000}{213} = \frac{6816}{21300} = \frac{32}{100}$.

Παραδείγματα τοῦ γ' τρόπου.

```
504,3 : 1,23 | 41
492 .
 123
 123
 000
```

Τῷ πηλίκῳ προςίθεται καὶ 0, καὶ ἔςι κυρίως 410. ὅτι ὁ διαιρέτης τοῦ διαιρετέου πλεονεκτεῖ καθ' ἓν δεκαδικόν.

Καὶ

```
492 : 1,23 | 4
492
000
```

Τῷ πηλίκῳ προςίθενται καὶ δύω 0, καὶ ἔςι κυρίως 400. Ὅτι ὁ διαιρέτης τοῦ διαιρετέου (ᾧ τινι ἐνταῦθα οὐδὲν δεκαδικὸν πρόσεςι) δυσὶ δεκαδικοῖς πλεονεκτεῖ·

Καὶ

Καὶ 0,3325 : 0,00025 | 133

```
 25
 82
 75
  75
  75
  00
```

Ἐνταῦθα ὁ μὲν διαιρετέος ἔχει 4 δεκαδικά, ὁ δὲ διαιρέτης 6· Ὥςε 2 πλέον· Ἔνθεντοι καὶ τῷ πηλίκῳ προσαρτῶνται ἔτι δύω μηδενικά, καὶ ἐςὶ 13300.

Δεῖξις.

$$504,3 : 1,23 = \frac{5043}{10} : \frac{123}{100} \quad (\S.\ 156.\ \sigma\chi.\ \gamma'.)$$

$= \frac{5043}{10} \cdot \frac{100}{123} = \frac{5043 \cdot 100}{10 \cdot 123} = \frac{504300}{123}$. Δίελε ἄμφω τοὺς ὅρους διὰ 123, καὶ ἔςαι $= 4100$·

§. 163. Ἐν τοῖς μέχρι τοῦδε παραδείγμασιν, ὁ διαιρέτης κατεμέτρει ἀκριβῶς τὸν διαιρετέον, ἤτοι διῄρει αὐτὸν ἄνευ λειψάνου· Ἐὰν δ' ἐπίτινος παραδείγμ. καὶ λείψανον ὑπολείπηται, μεταχειρισθησόμεθα τοῦτο κατὰ τὴν ἑξῆς μέθοδον.

§. 164. Πᾶν κλάσμα, ὁποῖον ἂν ᾖ, (§. 118.) δύναται μεταβληθῆναι εἰς δεκαδικόν· Μέθοδος λίαν ἐν χρήσει οὖσα· Ἐὰν μετὰ τὸ κόμμα, ὅπερ ὁριόν ἐςὶ τῶν ἁπλῶν ὁλοσχερῶν, καὶ δεκαδικῶν, (§. 151.) μηδενικὰ τεθῶσιν, ὅσα ἂν βούλῃ, ὁ πρὸ τοῦ κόμματος ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς οὐδεμίαν ὑποίσεται μεταβολήν, ὡς ἐν τῷ τόπῳ τῶν δεκατημορίων, ἑκατοςημ. κτ' μηδενικῶν ὄντων, μηδὲν σημαινόντων· π. χ. 5, ἢ 5,0000 ἰσοδυναμοῦσιν ἀλλήλοις· Ὡσαύτως καὶ 124 τῷ 12400000· Εἰοῦν, κλάσματος προκειμένου, ἐν τῷ ἀριθμητῇ, ἔνθα αἱ ἁπλαῖ μονάδες ἀπολήγουσι, κόμμα ποιήσαντες μηδενικὰ προσάψομεν, τὸ κλάσμα μένει ἀμετάβλητον· π. χ. $\frac{3}{5}$, ἢ $\frac{3,000}{5}$ ἴσα ἀλλήλοις. Ἐν γὰρ τοῖς τόποις τῶν δεκαδικῶν μηδενικὰ πάρεισιν· Ἐπεὶ δὲ τὸ γνήσιον κλάσμα (§. 118.)

(οὗπερ

(οὗπερ ὁ ἀριθμητὴς θεωρεῖται ὡς διαιρετέος, ὁ δὲ παρονομ. ὡς διαιρέτης) διελεῖν οὐκ ἔχομεν, ὡς τοῦ ἀριθμητοῦ ἐν τούτῳ ἐλάττονος ὄντος τοῦ παρον: ἐὰν προσαρτήσαντες τῷ ἀριθμητῇ μηδενικὰ μετὰ τοῦ κόμματος ὄπισθεν τοῦ τόπου τῶν ὁλοσχ. μονάδων μὴ διέλωμεν τὸ κλάσμα, τηρεῖται, ὡς εἴρηται, ἀμετάβλητον· Οἷόντε δὲ βουλομένοις καὶ διαιρεῖν, τῷ παρον: τοῦ κλάσμ. διαιρέτῃ χρωμένους, καὶ τῶν τοῦ πηλίκου χαρακτήρων τοσούτους διαςέλλοντας τῷ κόμματι, ὅσα μηδενικὰ τῷ ἀριθμητῇ προςέθειντατ· π. χ. $\frac{3}{4}$. τῷ 3 δύω μηδενικῶν προσαφθέντων, ἔςαι $\frac{300}{4}$. Οὗ ἐνεργεία διαιρεθέντος, τὸ πηλίκον ἔςαι 75· Ἔςι δὲ τοῦτο ἑκατοντάκις μεῖζον, ἢ εἶναι ὤφειλεν, ὡς τοῦ ἀριθμητοῦ τῇ τῶν μηδενικῶν προσθέσει ἑκατοντάκις αὐξηθέντος· Ἀνάγκη ἄρα τὸ πηλίκον ἔτι διὰ 100 διαιρεθῆναι· Οὗ γεγονότος, ἔςαι $\frac{75}{100}$ = 0, 75. Ἀλλ' εἰς τοῦτο βραχύτερον ἂν ἔλθοιμεν, εἰ, αὐτίκα ἐν τῇ διαιρέσει, ὅσα μηδενικὰ τῷ ἀριθμητῇ προσετέθη, εἰς τοσούτους κατὰ τὸ δεκαπλοῦν κατωτέρους τόπους τὸ πηλίκον καταβιβάσομεν. Ὅθεν εἰ ἀντὶ τοῦ $\frac{3}{4}$ τεθείη $\frac{300}{4}$, διαιρήσομεν οὕτως, ὡς' εὐθὺς ἐν ἀρχῇ πρὸ τοῦ πηλίκου τὸ μηδενικὸν μετὰ τοῦ κόμματος τιθέναι· 0, 75· τὸ γὰρ πηλίκον τοῦ 30 διὰ 4 ἐγένετο δεκάκις κατώτερον, τῇ προσθέσει τοῦ μηδενικοῦ. Ὥςε οὐκ ἔςι μονὰς, ἀλλὰ δεκατημόριον, ὅπερ δείκνυται τῷδε τῷ τρόπῳ 0, 75. Ὁ οὖν κανὼν ἐςιν· Ἀπόδος τῷ διαιρέτῃ τοσαῦτα μηδενικὰ, ὅσα ἂν βούλῃ. Δίελε εἶτα διὰ τοῦ παρονομαςοῦ, θεὶς πρὸ τοῦ πηλίκου εὐθὺς τὸ μηδενικὸν μετὰ τοῦ κόμματος, τὴν τῶν ὁλοσχερῶν ἀπουσίαν δεικνύον, καὶ οὕτω προάγων τὴν διαίρεσιν, ἐφ' ὅσον βούλῃ, ἢ δύνῃ, ἕξεις τὸ πηλίκον ἐν δεκαδικοῖς κλάσμασιν, ὅπερ ἴσον ἐςὶ τῷ δοθέντι κλάσματι,

σματι, ἢ τοὐλάχιςον ἔγγιςα αὐτοῦ· π. χ. $\frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 0,5$·
$\frac{3}{8} = \frac{3000}{8} = 0,375$. Καὶ $\frac{5}{8} = \frac{5000}{8} = 0,625$

Ἐπειδὴ ἕκαςον νόθον κλάσμα μεταβάλλεται εἰς ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν, καὶ γνήσιον κλάσμα, (§. 118.) ἐξενεχθείη ἂν καὶ τοῦτο (τὸ γν' κλ') αὖθις ἐν δεκαδικοῖς· π. χ. $\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5} = 3\frac{40}{5} = 3,8$.

§. 165. Ἐπὶ τῶν προχειρισθέντων παραδειγμάτων τῆς μεταβολῆς τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ, ἡ διαίρεσις οὐδὲν λείψανον ὑπέλειπε· πολλάκις μέντοι τὴν διαίρεσιν εἰς πέρας ἀφικέσθαι οὐχ οἷόντε, ὅσα ἂν μηδενικὰ προσαρτήσῃς, καὶ ἐφ' ὅσον ἂν τὴν διαίρεσιν προαγάγῃς· Οὕτω δ' ἔγγιςα τῆς ἀληθείας ἂν γένοιο, ὡς τελευταῖον τὸ ἁμάρτημα ὡς τὸ μηδὲν ἐκλογίζεσθαι· Ὅσῳ γὰρ πλείω μηδενικὰ προςεθῇ, τοσούτῳ ἐλάσσων καὶ ἡ ἀπάτη γενήσεται· Ἔςω μεταβλητέον τὸ $\frac{3}{7}$ εἰς δεκαδικὸν κλάσμα· προσαφθήτωσαν 6 μηδενικὰ τῷ ἀριθμητῇ $\frac{3000000}{7}$, καὶ διαιρεθήτω· τὸ πηλίκον ἔςαι 0, 428571 . . . Ἐνταῦθα τὸ ἔλλειμμα ἔλαττον μιλλιοςημορίου· Ἐὰν γὰρ ἀντὶ τοῦ ἑνὸς μιλλιοςημορίου, τοῦ ἐν τῷ ἐσχάτῳ χαρακτῆρι τοῦ πηλίκου, 2 μιλλιοςημόρια τεθῇ. καὶ τὸ πηλίκον μετὰ τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιασθῇ, τὸ παραγόμενον ἔςαι μεῖζον τοῦ διαιρετέου· Ἐν πλείςοις τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ἔνθα μεγίςη οὐκ ἀπαιτεῖται ἀκρίβεια, προάξομεν τὸ πηλίκον μέχρι τῶν δεκαχιλιοςημορίων, ἢ καὶ χιλιοςημορίων· Ἔξεςι δὲ, ὅτε τὸ πηλίκον ἀκριβῶσαι βουλόμεθα, καὶ τὸ λείψανον αὐτῷ προσαρτᾶν, οὗ παρονομαςὴς ἔςαι ὁ διαιρέτης μετὰ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσα ἐνῆν τῷ διαιρετέῳ· ὥςε τὸ $\frac{3}{7}$ ἀκριβέςατα ἐξενεχθὲν ἔςαι $0,428571\frac{3}{7000000}$. Τοῦτο γὰρ

$$= \frac{428571}{1000000} + \frac{3}{7000000} = \frac{428571 \cdot 7}{1000000 \cdot 7} + \frac{3}{7000000}$$

$=$

$= \frac{2999997}{7000000} + \frac{3}{7000000} = \frac{3000000}{7000000} = \frac{3}{7}$. Ἀλλὰ τοῦτο οὐκ ἐν χρήσει τοῖς μόνον τοῖς δεκαδικοῖς ἀρκουμένοις.

§. 166. Τῇ (§. 164.) μεθόδῳ χρῆσθαι δυνάμεθα καὶ ἐπὶ τῶν κοινῶν τῆς διαιρέσεως παραδειγμάτων, ἐν οἷς λείψανα ὑπολείπονται· ἀντὶ γὰρ τοῦ τὸ λείψανον μετὰ τοῦ διαιρέτου ὡς κοινὸν κλάσμα τῷ πηλίκῳ προσαρτᾷν, ἄμεινον ἂν ποιήσαιμεν, εἰ τοῦτο εἰς τοσαῦτα δεκαδικὰ τρέψαιμεν κλάσματα, ὅσα ἱκανὰ εἰς τὸ τὴν ἀπάτην ἐλαχίςην ἀποδοῦναι. π. χ. 5432 διὰ 21 διαιρεθὲν δώσει πηλίκον 258, καὶ λείψανον τὸ 14, ἢ $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$· ἀλλὰ τῷ 14 προςεθέντος ἑνὸς 0, διαςαλήτωσαν οἱ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ τοῦ πηλίκου μετὰ τοῦ κόμματος, μεθ' ὃ τεθήτω τὸ α' πηλίκον τοῦ 140 : 21 = 6, δεκαδικὰ σημαῖνον· καὶ οὕτως ἀεὶ τῷ λειπομένῳ 0 προςιθεὶς προάγαγε τὴν διαίρεσιν, ἐφ' ὅσον ἂν δόξῃ σοι· Τὸ οὖν ὁλικὸν πηλίκον ἔςαι 258, 6666...

§. 167. Ἀλλὰ καὶ δύω, ἢ καὶ πλείω κλάσματα ῥᾷον πρὸς ἄλληλα παραβαλοῦμεν, (§. 121. 122.) εἰς δεκαδικὰ αὐτὰ τρέψαντες· ἐκ τούτου γὰρ δῆλον ἔςαι, ὁπότερον τὸ ἕτερον ὑπερέχει· π. χ. $\frac{5}{13}$ καὶ $\frac{3}{11}$ ἐν δεκαδικοῖς κλάσμασιν = 0, 384615... καὶ 0, 272727.... Ἔνθα προφανὲς, ὅτι τὸ $\frac{5}{13}$ μεῖζον τοῦ $\frac{3}{11}$· ἐκείνου γὰρ τὸ α' δεκαδικὸν $\frac{3}{10}$, τούτου δὲ $\frac{2}{10}$.

§. 168. Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαιρέσεως μετὰ τῶν δεκαδικῶν (§. 162.) καὶ λείψανον ὑπολείπηται, καὶ τοῦτο εἰς δεκαδικὰ μεταβαλεῖν ἔνι· τοῦτο δὲ γίνεται, τοῖς λειψάνοις μηδενικῶν ἀεὶ προσαπτομένων, καὶ τῆς διαιρέσεως προαγομένης, καὶ τῶν πηλίκων, ὡς δεκαδικῶν κλασμάτων, εἰς τοὺς αὐτοῖς προσήκοντας τόπους τιθεμένων· Καὶ ἔνθα μὲν ἐπ' ἀμφοῖν (διαιρετέῳ, καὶ διαιρέτῃ) ρέτη) ἰσάριθμα τὰ δεκαδικὰ, ὧν τὸ πηλίκον ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, (§. 162.) ὁ τόπος τοῦ α'· δεκαδικοῦ κλάσματος αὐτόθεν δῆλος· τουτέςιν, ἔνθα τὰ πηλίκα τῆς προαγομένης διαιρέσεως τοῦ λειψάνου ἄρχονται· Ἔνθα δὲ τῷ διαιρέτῃ πλείω δεκαδικὰ ἔνεισι τῶν τοῦ διαιρετέου, τουτ: ἔνθα τῷ πηλίκῳ τοσαῦτα μηδενικὰ προστιθέναι χρὴ, ὅσοις δεκαδικοῖς ὁ διαιρέτης τὸν διαιρετέον ὑπερέχει, (§. αὐτ.) ἀντὶ τῶν μηδενικῶν τιθέαμεν τοσούτους ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς, (διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν λειψάνων, οἷς τὰ μηδενικὰ προσηφθῃ, εἰς τὸ δύνασθαι διαιρεθῆναι, προκύπτοντας) ὅσα μηδενικὰ τῷ πηλίκῳ προσεθῆναι χρῆν· Ἐὰν δὲ τοῦ διαιρετέου τὰ δεκαδικὰ πλείω, διαςέλλονται α'· ἐν τῷ πηλίκῳ, ὡς δεκαδικὰ, οἱ ἀπαιτούμενοι ἀριθμοὶ, (§. αὐτ.) καὶ εἶτα τοῦ τοῖς λειψάνοις μηδενικὰ προσαρτᾶν ἀρχόμεθα, ὧν τὰ πηλίκα τοῖς προηγουμένοις δεκαδικοῖς προςιθέσθω· ὁ δὲ τόπος τούτων αὐτόθεν διορίζεται.

Παραδείγματα καὶ τῶν τριῶν τρόπων·

Τοῦ α'· 5143,2 : 3,2 | 1607,25· 1607 ἐςὶ τὸ ὁλοσχερὲς πηλίκον, καὶ μετὰ τοῦτο ἄρχονται τὰ δεκαδικά· τὸ δ' ὁλικὸν πηλίκον ἐςὶ 1607,25· ὅτι ἐνταῦθα οὐδὲν ἔτι λείπεται·

Τοῦ β'· 368,72 : 0, 034 | 10844,7058· 10844 εἰσιν οἱ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ τοῦ πηλίκου· καὶ ἐπειδὴ τῷ διαιρέτῃ ἦν γ'· δεκαδικὰ, τῷ δὲ διαιρετέῳ 2, προσθετέον ἦν τῷ πηλίκῳ καὶ ἓν μηδενικὸν, κα. τὸ λείψανον τὸ δὲ ἦν $\frac{10}{34}$· Ἀλλ' ἄμεινον ... χωροῦντας τῇ διαιρέσει, καὶ τοῖς λειψάνοις τὸ μηδενικὸν προσαρτῶντας, ἀντὶ τοῦ ἑνὸς τῷ πηλίκῳ προςεθησομένου μηδενικοῦ, τῷ πηλίκῳ τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν τὸν ἀριθμὸν, τὸν ἤδη εἰς πηλίκον προκύπτοντα, προςιθέναι, καὶ εἶτα τὰ δεκαδικὰ κλάσματα·

Τοῦ γ'· 63, 2155 : 315 | 18, 0615714..

Τὸ

Τὸ πηλίκον ἐνταῦθα κατὰ τὴν συνήθη διαίρεσιν ἐςὶ 18001. Ἐπεὶ δὲ ὁ διαιρετέος τρισὶ δεκαδικοῖς τοῦ διαιρέτου πλεονεκτεῖ, διαςαλτέοι τρεῖς χαρακτῆρες τοῦ πηλίκου· καὶ τοῦτο ποιήσας, καὶ τὴν διαίρεσιν προάγων, τῷ τὰ μηδενικὰ τοῖς λειψάνοις προςιθέναι, θὲς τὰ προϊόντα πηλίκα πρὸς τοῖς δεκαδικοῖς. Τὸ οὖν πηλίκον ἔςαι 18, 0615714 . . . .

§. 169. Ἡ βάσανος τοῦ ἀκριβοῦς πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν ἐςὶν ἡ αὐτὴ τῇ τῶν ὁλοσχερῶν. (§. 98.) πλὴν ὅτι ἐνταῦθα, ἐὰν τὰ δεκαδικὰ ἐπ' ἄπειρον χωρῶσι, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ὁ διαιρετέος οὐκ ἀκριβῶς προκύπτει· ὅ, τι δὲ τοῖς σημείοις $+$ καὶ $-$ ἀνήκει, (§. 77.) ἁρμόζει κἀνταῦθα.

§. 170. Ἀλλὰ καὶ τὰ δεκαδικὰ εἰς τὰ κοινὰ μεταβαλοῦμεν αὖθις κλάσματα, εἰ ἀναγκαῖον. Ἐπὶ γὰρ τῶν μὴ ἐπ' ἄπειρον χωρούντων, ῥᾴδιον· Τουτέςι γραφήτω παρονομαςὴς ἡ 1 μετὰ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσοι οἱ τῶν δεκαδικῶν τόποι, καὶ διαιρεθήτω ὁ ἀριθμητὴς, καὶ παρονομαςὴς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, δι' οὗ εἰς τοὺς ἐλαχίςους ὅρους ἀνάγονται· π. χ. $0, 75 = \frac{75}{100}$· ἄμφω διὰ τοῦ 25 διαιρεθέντες ἔσονται $= \frac{3}{4}$· Καὶ $0, 025 = \frac{25}{1000}$· διαιρεθὲν διὰ $125 = \frac{1}{8}$· ἴδε καὶ §. 114. ε'. Εἰ δ' οἱ ἀριθμοὶ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος εἰς ἄπειρον χωροῦσιν, ἡ προτεθεῖσα μέθοδος οὐκ ἀσφαλής.

Περὶ τῶν Τετραγώνων, καὶ Κυβικῶν Ἀριθμῶν·

§. 171. Ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος τὸ προκύπτον παραγόμενον καλεῖται Ἀριθμὸς Τετράγωνος· ὁ δ' ἀριθμὸς, ἡ τούτου Τετραγωνικὴ Ῥίζα· ὡς $12 \times 12 = 144$· Ἐνταῦθα 144 ἐςὶν ὁ τετράγωνος, καὶ 12 ἡ ῥίζα.

Σχόλ.

Σχόλιον.

Ἡ προσηγορία τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ ἐλήφθη ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν, ὅπου τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου σχήματος, τουτ: τοῦ ἰσοπλεύρου, καὶ ὀρθογωνίου εὑρίσκεται, ἐὰν ἡ πλευρὰ τούτου ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθῇ·

§. 172. Ἐπειδὴ οἱ τετράγωνοι ἀριθμοὶ προκύπτουσιν, ἐὰν τὴν ῥίζαν μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιάζωμεν, ἡ 1 μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθεῖσα δίδωσιν 1. ὥςε 1 ἔςαι ὁ τετράγωνος τῆς 1· ὡσαύτως καὶ 4 ἐςὶν ὁ τετράγ. τοῦ 2· οὗτος δὲ ἡ ῥίζα ἐκείνου.

§. 173. Τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκονται καὶ οἱ τετραγωνικοὶ ἀριθμοὶ τῶν κλασμάτων, ἐὰν δηλονότι τὸ κλάσμα δι' ἑαυτοῦ πολλαπλασιάζηται· ὥςε τοῦ $\frac{1}{2}$ ὁ τετράγ. ἐςὶν $\frac{1}{4}$· ὅτι $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. (§. 141.) τοῦ $\frac{1}{3}$ ὁ τετρ. ἐςιν $\frac{1}{9}$, κτ' τουτέςι τετραγωνίσομεν ἄμφω τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος· οἷον, τοῦ $\frac{4}{5}$ ὁ τετρ: $= \frac{16}{25}$·

§. 174. Ὁ δὲ τετράγωνος ἀριθμοῦ ὁλοσχεροῦς, κλάσματι συνημμένου, ἀναφανήσεται, εἰ εἰς νόθον κλάσμα ταυτα μεταμείψαντες τὸν τετράγωνον τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος λάβωμεν· ὡς $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. ὁ δὲ τετράγ. $= \frac{25}{4}$, κτ' Ὥςε δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι, ἐὰν ἡ ῥίζα κλάσμα περιέχῃ, καὶ ὁ τετράγωνος αὐτῆς περιέξει·

§. 175. Ἐν γένει δὲ, ἐὰν ἡ ῥίζα ᾖ α, ὁ τετράγ. αὐτῆς ἔςαι αα· τῆς δὲ ῥίζης 2α ὁ τετρ. ἐςὶ 4αα· ὡσαύτως καὶ τῆς αβ ἐςὶν ααββ· κτ'

§. 176. Ἐὰν οὖν ἡ ῥίζα ἐκ 2, ἢ πλειόνων παραγόντων συγκέηται, πολλαπλασιαςέον μετ' ἀλλήλων τοὺς τετραγώνους τούτων, καὶ προκύψει ὁ ὁλικὸς τετράγωνος·. Καὶ ἀνάπαλιν· Ἐὰν ὁ τετράγωνος ἐκ 2, ἢ πλειόνων παραγόντων συγκροτῆται, ὧν ἑκαςος τετράγωνος, πολλαπλασιάσομεν τὰς ῥίζας τούτων μετ' ἀλλήλων, καὶ τὸ παραγόμενον ἔςαι ἡ ὁλικὴ ῥίζα· οἷον. ἐπειδὴ 2304 ἴσον τῷ 4. 16. 36. ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτων ἐςὶ 2. 4. 6, ὅ ἐςι 48· ἄρα ἡ 48 ἡ τετραγωνικὴ ἐςὶ ῥίζα τοῦ 2304. ὅτι 48. 48 = 2304·

§. 177· Ἐὰν τῇ ῥίζῃ τὸ σημεῖον + προσῇ, ὡς ἐν τοῖς παραληφθεῖσι παραδείγμ. ἔςαι καὶ ὁ τετράγ. ἀριθμὸς καταφατικός. ὅτι + μετὰ + πολλ. δίδωσι +. (§. 77.) ὥςε καὶ ὁ τοῦ + α τετράγ. ἐςὶ + αα· Ἐὰν δὲ ἡ ῥίζα ἡ ἀποφατική, ὡς — α, ὁ τετράγ. ἔςαι ὡσαύτως καταφατικός· ὅτι — α $\times$ — α = + αα (§. αὐτ.) Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, + αα ῥηθῆναι δύναται ὁ τετράγωνος καὶ τῆς ῥίζης + α, καὶ τῆς — α Καὶ παντὸς τετραγώνου δύω ἄρα ῥίζας ἀποδοῦναι δυνάμεθα, τὴν μὲν, θετικήν, τὴν δ' ἑτέραν ἀποφατικήν. Ἡ οὖν τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 25 ἐςὶ καὶ + 5, καὶ — 5. ὅτι + 5 $\times$ + 5 = 25. καὶ — 5 $\times$ — 5 = 25.

§. 178. Ἐὰν ἀριθμὸς τρὶς ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῇ, ἢ ἐὰν ὁ τετράγωνος ἐπὶ τὴν ῥίζαν πολλαπλασιασθῇ, τὸ παραγόμενον καλεῖται Κύβος, ἢ Κυβικὸς ἀριθμός· οἷον α $\times$ α $\times$ α = ααα = κύβῳ τοῦ α· Ἢ αα $\times$ α = ααα = κύβῳ τοῦ α· καὶ 5 $\times$ 5 $\times$ 5 = 125. Ἢ 25 $\times$ 5 = 125 = κύβῳ τοῦ 5.

§. 179. Ῥαδίως δὲ καὶ τοὺς κυβικοὺς ἀριθμοὺς τῶν κλασμάτων εὑρήσομεν, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· Οἷον τοῦ $\frac{1}{2}$ ὁ κύβος ἐςὶν $\frac{1}{8}$· καὶ τοῦ $\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$· τουτέςι ληψόμεθα ἐν μέρει τὸν κύβον τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ παρονομαςοῦ.

§. 180. Τὸν δὲ κύβον ἀριθμοῦ τινος, κλάσματι συνημμένου, ἀνιχνεύσομεν, ὡς καὶ τὸν τετράγωνον (§. 174.)

(§. 174.) Οἷον $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{27}{8} =$ τῷ κύβῳ τοῦ $1\frac{1}{2}$ κτ.

§. 181. Ἐπειδὴ τοῦ ἀριθμοῦ α ὁ κύβος = ααα, καὶ ὁ κύβος τοῦ ἀριθμοῦ αβ ἔςαι αααβββ· Ἐὰν οὖν ὁ ἀριθμὸς δύω, ἢ πλείους παράγοντας ἔχῃ, ευρίσκεται ὁ κύβος τῷ μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασμῷ τῶν κυβικῶν ἀριθμῶν ἁπάντων τῶν παραγόντων· ὡς 12 = 3 . 4. πολλαπλασίασον τὸν κύβον τοῦ 3 = 27 μετὰ τοῦ κύβου τοῦ 4 = 64, καὶ ἕξεις 1728 τὸν κύβον τοῦ 12.

§. 182. Ὁ κύβος ἀριθμοῦ θετικοῦ + α ἔςαι, ἢ δῆλον, καταφατικός· + ααα· τοῦ ἀποφατικοῦ δὲ — α, ἔςαι ἀποφατικός· καὶ γὰρ — α X — α = + αα. (§. 77 καν.) + αα X — α = — ααα (§. αὐτ.) Ὥςε ὁ κύβος τῆς — 1 ἐςὶ — 1· τοῦ — 2 = — 8, κτ.

Περὶ τῶν Δυνάμεων ἐν γένει.

§. 183. Ἐὰν ποσότης τις (εἴτε ἀριθμὸς, εἴτε γράμμα) ἅπαξ, ἢ πολλάκις μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθῇ, τὸ παραγόμενον καλεῖται, Δύναμις, ἢ Ἀξία· Ἐπεὶ δὲ ὁ τετράγωνος (§. 171.) γεννᾶται, ἐὰν ἀριθμός τις ἅπαξ μεθ' ἑαυτοῦ, ὁ δὲ κύβος, (§. 178.) ἐὰν ὁ τετράγωνος ἐπὶ τὴν ῥίζαν (§. 171.) πολλαπλασιασθῇ, καὶ οἱ τετράγωνοι, καὶ οἱ κύβοι περιλαμβάνονται ὑπὸ τῷ ὀνόματι τῶν Ἀξιῶν, ἢ Δυνάμεων.

§. 184. Αἱ δυνάμεις (§. ἀν.) διακρίνονται ἀπ' ἀλλήλων τῇ πληθύϊ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ποσότητος μεθ' ἑαυτῆς· ὥςε α' δύναμις ἀκούει πᾶσα ποσότης, ἣν μονάδι μόνον πολλαπλασιασθεῖσαν νοοῦμεν· ὡς 1, 2, 3, 4, κτ· ἢ α, β, γ, δ κτ. δὶς δ' ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθείσης, τὸ παραγόμενον καλεῖται, ἡ β' ταύτης δύναμις, ἢ ἀξία, ἰσοδυναδυναμοῦσα τῷ τετραγώνῳ· (§. 171.) ὡς $2 \times 2 = 4$. $3 \times 3 = 9$. ἢ $\alpha \times \alpha = \alpha\alpha$· $\beta \times \beta = \beta\beta$, κτ· Ἔνθα 4 ἡ β' ἐςὶ δύναμις τοῦ 2. 9 τοῦ 3. αα τοῦ α· καὶ ββ τοῦ β· τρὶς δὲ, ἡ γ' δύναμις, τὴν αὐτὴν τῷ κυβῳ δύναμιν ἔχουσα· ὡς $2 \times 2 \times 2 = 8$· $3 \times 3 \times 3 = 27$· Καὶ $\alpha \times \alpha \times \alpha = \alpha\alpha\alpha$, κτ· τετράκις δὲ, ἡ δ' δύναμις, ἢ ὁ Διτετράγωνος· οἷον, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$· Καὶ $\alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha = \alpha\alpha\alpha\alpha$· Ἐξ οὗ δῆλον, καὶ τίς ἡ ε' καὶ ς' κτ· δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ·

§. 185. Οὗτος ὁ τρόπος τοῦ τὰς δυνάμεις ἀριθμοῦ τινος ἐκφέρειν, καὶ μάλιςα τὰ ὑπερτέρας, ὡς πάνυ διεξοδικὸς, παραλιμπάνεται· Ἐὰν γὰρ θῶμεν τὴν ἑκατοςὴν δύναμιν τοῦ α ζητεῖσθαι, κατὰ τὰ εἰρημένα, γραπτέον τὸ α ἑκατοντάκις ἐφεξῆς· Εἰς ἀποφυγὴν μέντοι τούτου, εἰώθασι τῇ ποσότητι πρὸς τὰ δεξιὰ χαρακτῆρα ἐπιγράφειν, ἐμφαίνοντα, ποσάκις ἡ ποσότης μεθ' ἑαυτῆς πολιαπλασιαςέα· καλεῖται δ' Ἐκθέτης, ἢ τὸ Ἐπίσημον τῆς δυνάμεως· Οἷον, α^{100}· Ἐνταῦθα 100 ἐςιν ὁ ἐκθέτης τοῦ α· Ἀπαγγέλλεται δὲ, α εἰς τὴν ἑκατοςὴν ἀρθὲν δύναμιν, ἢ α πολλαπλασιαςέον μεθ' ἑαυτοῦ ἑκατοντάκις· καὶ 4^6. 6 ἐςὶν ὁ ἐκθέτης τοῦ 4. τοῦτο δὲ, ἤτοι τὸ $4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$· Ἐὰν ἡ ποσότης ἐν τῇ α' ἡ δυνάμει, καίτοι τὴν μονάδα, ὡς ἐκθέτην, ἐπιγραφῆναι δέον· π. χ· α^1, οὐκ ἔςι μέντοι τοῦτο ἐν χρήσει, ἀλλὰ τὸ α· Ὡσαύτως καὶ 5 ἐςὶν $= 5^1$, κτ.

§. 186 Ἡ ποσότης, ἐξ ἧς ἡ δύναμις ἀνέφυ διὰ τοῦ ἅπαξ, ἢ πολλάκις πολλαπλασιασμοῦ μεθ' ἑαυτῆς, καλεῖται Ῥίζα, ἥτις τῳδε $\sqrt{}$ τῷ σημείῳ ἐκδηλοῦται· ἐφ' ἧς αὖθις ἀριθμὸς γράφεται, (Ἐκθέτης τῆς ῥίζης καλούμενος) σημαίνων, ποσάκις τὴν προκειμένην ποσότητα μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθῆναι ἔδει, μέχρις ἂν τοιαύτη ζητουμένη δύναμις προέλθη, οἵα ἐςίν, ἧς τὸ $\sqrt{}$ σημεῖον προτέθειται, ἢ ἡλίκη ἐςὶν ἡ ῥίζα, περὶ ἧς ὁ λόγος· Ἡ ῥίζα τῆς β' δυνάμεως ἀκούει Τετραγωνικὴ, οὕτω γραφομένη $\sqrt{}$, ἢ καὶ οὕτω $\sqrt[2]{}$· ἡ δὲ τῆς γ' Κυβικὴ, οὕτως ἀποδιδομένη $\sqrt[3]{}$· ἡ δὲ τῆς δ' ε' ς' κτ. δυνάμεως ῥίζα, οὕτω $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[6]{}$, κτ. π. χ. $α^2$ ἐςὶν ἡ β'. δύν. τοῦ α, τὸ δὲ α ἡ ῥίζα· δηλωθήσεται οὖν $\sqrt[2]{α^2} = α$· α'. γὰρ τὸ α ἤρθη εἰς τὴν β'. δύν. εἶτα ἐκ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐλήφθη ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνική· Καὶ $\sqrt[3]{α^3} = α$, κτ.

§. 187. Ἀλλὰ καὶ ἐν γένει, ἡλίκην ἂν δύναμιν παραςῆσαι βουλώμεθα, ἀντὶ τοῦ ἐκθέτου, τοῦ δι' ἀριθμοῦ δηλουμένου, ἀλγεβραϊκῇ ποσότητι, ἤτοι γράμματι, χρησόμεθα. ὡς $α^{ρ}$, $χ^{ν}$ ποσότητες εἰσὶν ἀόριςοι εἰς ἀορίςους ἠρμέναι δυνάμεις· Εὑρίσκομεν δὲ καὶ ποσότητας ἐν τοιαύταις δυνάμεσι. π. χ. $χ^{ν+μ}$, ἢ $υ^{ν-μ}$. ἢ $α^{ν+2}$, ἢ $α^{ρ+2}$, ἢ καὶ $α^{ν-ρ}$, ἢ $α^{ν-2}$ κτ. Ἐντεῦθεν φανερὸν, ὅτι καὶ ἡ ῥίζα τῆς τῷ ἐπ' αὐτὴν καθόλου ἐκθέτῃ ἐπισημειουμένης ποσότητος, (ἥτις ποσ. ἀνέφυ τῷ τοσάκις πολλαπλασιασμῷ τῆς ῥίζης μεθ' ἑαυτῆς, ὁσάκις δεικνύει ὁ ἀόριςος ἐκθέτης, μετὰ τὸ διορισθῆναι) ἐπισημειωθήσεται ὡσαύτως τῷ αὐτῷ ἀορίςῳ ἐκθέτῃ· ὡς $\sqrt[ν]{α^{ν}} = α$· ἡ πολλαπλασιασθήτω ἡ ποσότης α, ν: κις, ἵνα προκύψῃ ἡ δύναμις $α^{ν}$, ἧς τὸ α ἐςὶν ἡ ν ῥίζα, ὅ, τι ἂν σημαίνῃ τὸ ν·

§. 188. Αἱ δυνάμεις ἑκάςου παραγομένου,

οἷον τοῦ $\alpha\beta$, εὑρίσκονται, ἐὰν ἑκατέρου παράγοντος ἡ δύναμις χωρὶς λαμβάνηται· τουτ: $\alpha\beta$, ἢ $\alpha^2\beta^2$, $\alpha^3\beta^3$, $\alpha^4\beta^4$, $\alpha^5\beta^5$, κτ. Ὡσαύτως καὶ αἱ τῶν κλασμάτων· οἷον τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ δυνάμεις εἰσὶν αἱ ἑξῆς·

$$\frac{\alpha^1}{\beta^1},\ \frac{\alpha^2}{\beta^2},\ \frac{\alpha^3}{\beta^3},\ \frac{\alpha^4}{\beta^4},\ \frac{\alpha^5}{\beta^5}\ \text{κτ·}$$

§. 189. Τοῦ ἀποφατικοῦ ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ $-\alpha$, αἱ δυνάμεις ἕψονται ἀλλήλαις κατὰ τάξιν οὕτω. $-\alpha$, $+\alpha^2$, $-\alpha^3$, $+\alpha^4$, $-\alpha^5$, $+\alpha^6$ κτ· (§ 7..) τουτέςιν, αἱ δυνάμεις, ὧν οἱ ἐκθέται περιττοὶ ἀριθμοὶ, γίνονται ἀποφατικαί. ὧν δὲ ἄρτιοι, καταφατικαί. ὥςε ἡ γ΄· ε΄· ζ΄· θ΄· κτ. δύναμις τῶν ἀποφατικῶν ῥιζῶν ἕξει τὸ $-$ σημεῖον· ἡ δὲ β΄. δ΄. ς΄. η΄. κτ· τὸ $+$.

Ἡ μέθοδος τοῦ τὰ δ΄. εἴδη τοῦ ὑπολογισμοῦ μετὰ ποσοτήτων, διαφόρους ἐκθέτας τῆς δυνάμεως, καὶ ῥίζης ἐχουσιῶν, ὑπολογιςεύειν, καλεῖται ὁ μετὰ ἐκθετῶν ὑπολογισμός.

Περὶ τῆς τούτων Προσθέσεως, καὶ Ἀφαιρέσεως.

§. 190. Τὴν τῶν ποσοτήτων, τῶν εἰς δυνάμεις ἀοριστῶν, Πρόσθεσιν, καὶ ἀπ' ἀλλήλων Ἀφαίρεσιν, καθ' ὃν ἐδιδάχθημεν τρόπον, ἐν τῷ περὶ Προσθ. καὶ Ἀφαιρ. τῶν ὅλοσων, περανοῦμεν. Εἰ μὲν γὰρ ὁμοειδεῖς, ἢ ὁμόρριζοι, τουτ: εἰ αἱ αὐταὶ ῥίζαι, καὶ οἱ αὐτοὶ ἐκθέται, προςίθενται, καὶ ἀφαιροῦνται, ὡς καὶ αἱ λοιπαὶ ὁμοειδεῖς ποσότητες. π. χ. εἰ δέοι προσθεῖναι $2\alpha^2$ τῷ $3\alpha^2$, (ἔνθα καὶ ῥίζαι, καὶ ἐκθέται τὰ αὐτὰ) ἔςαι $2\alpha^2 + 3\alpha^2 = 5\alpha^2$. Καὶ $3\alpha^2\chi^3$ τῷ

$5\alpha^2 \chi^3$, ἔςαι $8\alpha^2\, 2\chi^3$. Καὶ $+ 4\chi^3 \upsilon^2$ τῷ $- 2\chi^3 \upsilon^2$, (τοῦτο δ' ἐςιν ἐναντία προςιθέναι) ἔςαι $2\chi^3 \upsilon^2$.

Ἐςὼ ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ $4\alpha^2$ τὸ $+ 2\alpha^2$. Ἡ διαφορὰ ἔςαι $2\alpha^2$. (§. 49.) Ἀπὸ τοῦ $4\alpha^\nu \chi^\mu$ τὸ $+ \alpha^\nu \chi^\mu$. ἡ διαφ. $= + 3\alpha^\nu \chi^\mu$. Καὶ ἀπὸ τοῦ $4\alpha^\nu \chi^\mu$ τὸ $- 3\alpha^\nu \chi^\mu$ ἀφαιρεθὲν παρέξει διαφ. τὸ $+ 7\alpha^\nu \chi^\mu$.

Καὶ ἕτερον παρ. $\alpha^{2\nu+1}\upsilon - 3\chi^{3-\mu} + 5\upsilon^{\varrho+1} - 18$

πρόσθες $- 5\alpha^{2\nu+1}\upsilon + 6\chi^{3-\mu} + 3\upsilon^{\varrho+1} + 14$

$$-4\alpha^{2\nu+1}\upsilon + 3\chi^{3-\mu} + 8\upsilon^{\varrho+1} - 4.$$

Εἰ δὲ μὴ ὁμοειδεῖς εἶεν αἱ ποσότητες, αἱ εἰς δυνάμεις γεγονυῖαι, καὶ προςεθῆναι, ἢ ἀφαιρεθῆναι πρόκεινται, δείκνυται μόνον τοῦτο τοῖς σημείοις τῆς προσθ. (§. 16.) καὶ ἀφαιρ. (§. 28.) π. χ. τῷ χ^3 προςεθὲν τὸ υ^2 ἔςαι $\chi^3 + \upsilon^2$. Τῷ $\chi^\nu \alpha^\mu$ τὸ υ^ϱ, ἔςαι $\chi^\nu \alpha^\mu + \upsilon^\varrho$. Ὡσαύτως καὶ ἀπὸ τοῦ χ^3 ἀφαιρεθὲν τὸ υ^2 ἔςαι $\chi^3 - \upsilon^2$. Καὶ ἀπὸ τοῦ χ^ν τὸ $\upsilon^{\mu+\varrho}$, ἔςαι $\chi^\nu - \upsilon^{\mu+\varrho}$.

Περὶ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τούτων.

§. 191. Ἐὰν αἱ ποσότητες, αἱ εἰς δυνάμεις ἀρθεῖσαι, ὁμοειδεῖς ὦσι, πολλαπλασιασθήσονται αἱ δυνάμεις μετ' ἀλλήλων, ἐὰν οἱ τούτων ἐκθέται προςιθῶνται ἀλλήλοις.

 Ὁμοει-

Ὁμοειδεῖς δὲ, ἢ Ὁμοβάθμιοι δυνάμεις εἰσὶν αἱ δυνάμεις, αἷς τὰ αὐτὰ πρόσεςι γράμματα· π. χ. $\alpha^2 . \alpha^3 = \alpha^{2+3} = \alpha^5$. α^2 καὶ α^3 εἰσὶν ὁμοειδεῖς δυνάμεις τοῦ α, ὅτι καὶ τὸ α^2, καὶ τὸ α^3 εἰσὶ τὰ αὐτὰ γράμματα, διαφόρους μόνον ἐκθέτας ἔχοντα· Εἰς σαφεςέραν τούτου κατάληψιν ἀναπτυχθήτω τὸ παράδειγμα· α^2 ἐςὶν $= \alpha\alpha$· Καὶ $\alpha^3 = \alpha\alpha\alpha$· ὥςε $\alpha^2 . \alpha^3 = \alpha\alpha . \alpha\alpha\alpha$. Ἀλλ' ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔξεςι τὰ γράμματα ἐφεξῆς γράφειν καὶ ἄνευ τοῦ σημείου (§. 70.) Ὅθεν $\alpha\alpha . \alpha\alpha\alpha = \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$· τοῦτο δ' ἐςιν α^5. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ α^5 προκύπτει καὶ τῇ προσαθροίσει τῶν ἐκθετῶν τοῦ α^2 καὶ α^3.

Οὕτω καὶ $\chi^3 . \chi^4 = \chi^{3+4} = \chi^7$. Ἔςι γὰρ $\chi^3 = \chi\chi\chi$· Καὶ $\chi^4 = \chi\chi\chi\chi$· ἴσον ἀντὶ ἴσου τεθὲν ἔςαι

$$\chi^3 . \chi^4 = \chi\chi\chi . \chi\chi\chi\chi.$$ τοῦτο δὲ ἐςι

$$\chi\chi\chi\chi\chi\chi\chi = \chi^7.$$ Ἄρα

$$\chi^3 . \chi^4 = \chi^{3+4} = \chi^7.$$

Οὕτω ποιήσομεν, καὶ εἰ πλείω γράμματα, ἢ ἀριθμοὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰσι συνημμένα. οἷον $\chi^2 \upsilon^2 . \chi^3 \upsilon^4 = \chi^{2+3} \upsilon^{2+4}$. Καὶ ἐνεργείᾳ τῶν ἐκθετῶν προςεθέντων $= \chi^5 \upsilon^6$. Ὡσαύτως καὶ $\chi^3\upsilon . \chi\upsilon = \chi^3 \upsilon^1 . \chi^1 \upsilon^1 = \chi^{3+1} \upsilon^{1+1} = \chi^4 \upsilon^2$. Καὶ ἐν ἀριθμοῖς. $2^4 . 6^5 . 2^3 . 6^2 = 2^{4+3} 6^{5+2} = 2^7 6^7$. Ἐὰν δὲ αἱ ποσότητες μὴ ὁμοειδεῖς ὦσι, παρατίθενται μόνον ἀλλήλαις, ὡς τῶν κατὰ ταύτας ἐκθετῶν προςεθῆναι μὴ ἐχόντων· π. χ. εἰ πρόκειται υ^3 μετὰ τοῦ χ^4 πολλαπλασιάσαι, γράψομεν $\upsilon^3\ \chi^4$. εἰ γὰρ ἀναπτυχθῇ, ἔςαι $\upsilon\upsilon\upsilon\chi\chi\chi\chi = \upsilon^3\ \chi^4$.

Ἐὰν οἱ ἐκθέται ἀλγεβρ. ἀριθμοὶ, (γράμ.) Αἱ δὲ ποσότητες, αἷς αἱ δυνάμεις ἀνήκουσιν, ὁμοειδεῖς ὦσι, συνάπτονται οἱ ἐκθέται διὰ τοῦ σημείου +. π. χ. $\alpha^{\varrho}\ \alpha^{\mu} = \alpha^{\varrho+\mu}$. Καὶ $\upsilon^{\varrho}\ \chi^{\mu}.\ \upsilon^{4}\ \chi^{\beta} = \upsilon^{\varrho+4}\ \chi^{\mu+\beta}$. Ἄλλως γὰρ οὐκ ἂν προσαθροισθεῖεν, διὰ τὸ τοὺς ἐκθέτας γενικὰς εἶναι ποσότητας, τουτ: ἀορίςους, εἰς ὧν τὸν διορισμὸν πᾶς ἀριθμὸς τεθῆναι δύναται· Εἰ δ' αἱ ποσότητες, αἱ εἰς δυνάμεις ἀρθεῖσαι, καὶ πολλαπλασιασθῆναι προκείμεναι, μὴ ὁμοειδεῖς εἶεν, παρατίθενται ἀλλήλαις, ὡς ἐπὶ τοῦ πολλαπλατιασμοῦ. (§. αὐτ.) οἷον

$$\chi^{\varrho}.\ \upsilon^{\nu} = \chi^{\varrho}\ \upsilon^{\mu}.\ \text{Καὶ}\ \chi^{\varrho+\nu}.\ \alpha^{\mu+1} = \chi^{\varrho+\nu}\ \alpha^{\mu+1}.$$

Προκείσθω καὶ ἕτερα παραδείγματα, πᾶσι τοῖς ῥηθεῖσι τρόποις τοῦ τῶν δυνάμεων πολλαπλασιασμοῦ μετ' ἀλλήλων ἁρμόζοντα.

Πολλαπλασίασον $\alpha\upsilon^3\ \chi^4$ μετὰ τοῦ $\upsilon\chi$· τουτέςιν $= \alpha\upsilon^3\ \chi^4.\ \chi^1\ \upsilon^1 = \alpha\upsilon^{3+1}\ \chi^{4+1} = \alpha\upsilon^4\ \chi^5$.

$\chi^2\ \upsilon^2\ \alpha^4$ μετὰ τοῦ $\alpha^3\ \chi\upsilon^3\ \beta = \chi^{2+1}\ \upsilon^{2+3}\ \alpha^{4+3}\ \beta = \chi^3\ \upsilon^5\ \alpha^7\ \beta$.

α^{μ} μετὰ τοῦ $\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$. Καὶ $\alpha^{\mu+1}$ μετὰ τοῦ $\alpha^{\mu} = \alpha^{\mu+\mu+1} = \alpha^{2\mu+1}$.

$\chi^{\mu-2}\ \upsilon^{\varrho}$ μετὰ τοῦ $\chi^{\nu}\ \upsilon^{\varrho-1} = \chi^{\mu+\nu-2}\ \upsilon^{\varrho+\varrho-1} = \chi^{\mu+\nu-2}\ \upsilon^{2\varrho-1}$.

$\chi^{\varrho+\mu}$

$\chi^{\rho+\mu}\,\upsilon^{\nu}$ μετὰ τοῦ $\beta^{\nu}\,\delta^{\chi} = \chi^{\rho+\mu}\,\upsilon^{\nu}$ $\beta^{\nu}\,\delta^{\chi}$.

Καὶ $\alpha^{\nu+1}\,\chi^{3\nu+1}\,\upsilon^{\nu+1}.\ \alpha^{-\nu}\,\chi^{-3\nu}\,\upsilon^{-\nu}$ $= \alpha^{\nu+1-\nu}\,\chi^{3\nu+1-3\nu}\,\upsilon^{\nu+1-\nu} = \alpha^1\chi^1\upsilon^1$ $= \alpha\,\chi\,\upsilon$.

Καὶ μείζω τούτων παραδείγματα κατὰ τοὺς αὐτοὺς κανόνας μεταχειρισθησόμεθα· οἷον, εἰ δέοι $\pi\chi +$ $\alpha\chi^2 - \alpha^2$ πολλαπλασιάσαι μετὰ τοῦ $\chi^2 + \alpha^2$, ὁ κανὼν ὁ ἀνωτ. καταλλήλως κἀνταῦθα προσαρμοσθήσεται. ἐκκείσεται οὖν τὸ παράδ. οὕτω·

$$
\begin{array}{r}
\pi\chi + \alpha\chi^2 - \alpha^2 \\
\chi^2 + \alpha^2 \\
\hline
+ \alpha^2\,\pi\chi + \alpha^3\,\chi^2 - \alpha^4 \\
\pi\chi^3 + \alpha\chi^4 - \alpha^2\,\chi^2 \\
\hline
\pi\chi^3 + \alpha^2\,\pi\chi + \alpha\chi^4 + \alpha^3\chi^2 - \alpha^2\chi^2 - \alpha^4.
\end{array}
$$

Ἐὰν γὰρ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀπὸ τοῦ $+\alpha^2$ μετὰ τοῦ $-\alpha^2$ ἀρξώμεθα, δῆλον ὅτι, κατὰ τὸν δοθέντα κανόνα τοῦ τὰς ὁμοειδεῖς δυνάμεις τῇ προσθέσει τῶν ἐκθετῶν πολλαπλασιάζεσθαι, $-\alpha^4$ προκύψει· (§. 77.) Ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ τοῦ πολλαπλασιασέου ἐςὶν αὖθις ἓν α, ἤτοι ἐν τῷ $\alpha\chi^2$. Τοῦτο πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ α^2 ἔςαι $\alpha\chi^2\alpha^2$. Ἀλλ' ἐνταῦθα τὸ α καὶ α^2 καὶ ἐνεργείᾳ πολλαπλασιάσαι οἷόν τε, τῇ τῶν κατ' αὐτὰ ἐκθετῶν προσθέσει, καὶ προκύψει $\alpha^3\,\chi^2$. Ὅτι α, ἢ α^1 δύναται τὸ αὐτό· (§. 18ϛ.) κτ' Ἀλλὰ καὶ ἐν γένει, εἴπου ἐγχωρεῖ, τοῦ κανόνος οὐκ ἀμελητέον.

$$
\begin{array}{rl}
\pi.\chi. & \alpha^{\rho}\pi^{\mu} - \beta\chi^{\nu} + \alpha\chi^{2\nu} \\
 & \alpha^{\nu} \quad - \chi^{\mu} \\
\hline
 & -\alpha^{\rho}\pi^{\mu}\chi^{\mu} + \beta\chi^{\nu+\mu} - \alpha\chi^{2\nu+\mu} \\
 & +\alpha^{\rho+\nu}\pi^{\mu} - \alpha^{\nu}\beta\chi^{\nu} + \alpha^{\nu+1}\chi^{2\nu} \\
\hline
\end{array}
$$

$$\alpha^{\rho+\nu}\pi^{\mu} - \alpha^{\nu}\beta\chi^{\nu} - \alpha^{\rho}\pi^{\mu}\chi^{\mu} + \alpha^{\nu+1}\chi^{2\nu} + \beta\chi^{\nu+\mu} - \alpha\chi^{2\nu+\mu}.$$

Ἐπὶ γὰρ τοῦ ἐσχάτου ὅρου $+ \alpha\chi^{2\nu}$ μετὰ τοῦ $-\chi^{\mu}$ πολλαπλασιασθέντος, προςίθεμεν ἀλλήλοις τοὺς ἐκθέτας τοῦ πολλαπλασιαςέου, καὶ πολλαπλασιαςοῦ. τὸ δὲ σημεῖον ἔςαι —. (§. 177.) Ὥςε μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν, οὗτος ὁ ὅρος ἔςαι $- \alpha\chi^{2\nu+\mu}$. Οὕτω καὶ τοὺς ἑτέρους ὅρους μετὰ προσοχῆς παρατηροῦσιν, εἴ μόνον τῶν προηγηθέντων ἐν συνέσει ἐγενόμεθα, οὐδεμία δυσχέρεια ἡμῖν ἀπαντήσει.

Σχόλιον.

Σημείωσαι, ὅτι ἡ πρόσθεσις τῶν δυνάμεων δὲν πρέπει νὰ συγχέηται μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν δυνάμεων. ὅθεν διὰ μνήμης ἔχε ἀεὶ τὸν κανόνα, ὅτι δυνάμεις πολλαπλασιάζειν ἐςὶ τὸ τοὺς αὐτῶν ἐκθέτας προςιθέναι·

§. 192. Καὶ ἐνεργείᾳ δυνάμεις εἰς ἄλλας ἔτι ὑπερτέρας δυνάμεις διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κατ' αὐτὰς ἐκθετῶν ἀνυψῶσαι δυνάμεθα· π. χ. εἰ τὸ προκείμενον α^2 (ὅ ἐςι β'. δύν. τοῦ α) εἰς τὴν β'. ἐξᾶραι βούλει δύναμιν, πολλαπλασιάσας τὸν ἐκθέτην τοῦ α^2 διὰ τοῦ 2, ἕξεις τὴν β'. δύν: τοῦ α^2. Οἷον $\alpha^{2\cdot 2} = \alpha^4$. Εἰ δὲ εἰς τὴν γ, διὰ τοῦ

3.

3, καὶ ἔςαι ἡ γ'. δύν. τοῦ $\alpha^2 = \alpha^{2\cdot 3} = \alpha^6$. Ἔνθεντοι αἱ δοθεῖσαι δυνάμεις ἀρθήσονται εἰς ὑπερτέρας, ἐὰν τοὺς αὐτῶν ἐκθέτας τῷ ἀριθμῷ πολλαπλασιάσωμεν, τῷ τὴν δύναμιν ἐμφαίνοντι, εἰς ἥν ταύτας ἐξᾶραι βουλόμεθα. Ὁ δὲ λόγος δῆλος ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγμ. Εἰ δέοι α^2 εἰς τὴν γ'. δύναμιν ἐξᾶραι, ποιήσομεν τοῦτο, εἰ α^2 τρὶς μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθῇ, ὅπερ ἂν εἴη $\alpha^2.\ \alpha^2.\ \alpha^2$. Δυνάμεις δὲ πολλαπλασιάζειν δεῖ τοὺς αὐτῶν ἐκθέτας προςιθέναι. Ὥςε $\alpha^2.\ \alpha^2.\ \alpha^2$ ἔςαι $= \alpha^{2+2+2} = \alpha^6$. ἀλλὰ τούτου συντομώτερον ἐφικοίμεθα, εἰ, ἀντὶ τοῦ τὸν ἐκθέτην 2 τρὶς ἑαυτῷ προςεθῆναι, μετὰ 3 πολλαπλασιάσαιμεν ὅπερ ἴσα δύναται τῇ τριττῇ προσθέσει τοῦ 2, καὶ οὕτως ἀρεῖται α^2 εἰς τὴν γ'. δύν. Αὖθις α^4 εἰς τὴν ε'. δύν ἀρθὲν ἔςαι $\alpha^4.\ \alpha^4.\ \alpha^4.\ \alpha^4.\ \alpha^4.$ ἢ $\alpha^{4+4+4+4+4} = \alpha^{20}$. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ α^{20} προκύψει, εἰ τὸν ἐκθέτην 4 μετὰ τοῦ 5 πολλαπλασιάσομεν· Ἔςαι γὰρ $\alpha^{4\cdot 5} = \alpha^{20}$. Οὕτω καὶ $\alpha^6\ \upsilon^4$ εἰς τὴν γ'. ἀρθὲν δύν. ἔςαι $\alpha^{6\cdot 3}\ \upsilon^{4\cdot 3} = \alpha^{18}\ \upsilon^{12}$. Καὶ ἐν γένει· Ἔςω α^{ν} εἰς τὴν γ'. ἀρτέον δύναμιν. Ἔςαι οὖν $\alpha^{\nu\cdot 3}$, ἢ $\alpha^{3\nu}$. Καὶ $\alpha^{\rho}\ \upsilon^{\chi}$ εἰς τὴν ε'. $= \alpha^{5\rho}\ \upsilon^{5\chi}$. Καὶ $\alpha^{\rho+1}\ \upsilon^{2\rho}$ εἰς τὴν δ'. $= \alpha^{(\rho+1)4}\ \upsilon^{(2\rho)4} = \alpha^{4\rho+4}\ \upsilon^{8\rho}$. Ὡσαύτως καὶ εἰ ἡ δοθεῖσα γενικὴ δύναμις εἰς ἑτέραν δοθεῖσαν γενικὴν δύναμιν ἐξαρτέα. Οἷον υ^{χ} εἰς τὴν μ δύν. ἀρθὲν ἔςαι $\upsilon^{\chi\cdot\mu}$. Καὶ $\alpha^{\nu+1}$ εἰς τὴν μ δύν. $= \alpha^{(\nu+1)\mu}$, ἢ $\alpha^{\nu\mu+\mu}$.

§. 193. Πολλάκις εὑρίσκομεν καὶ ποσότητας διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ καὶ διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως συνημμένας, εἰς δυνάμεις ἀρθῆναι προκειμένας. π. χ. $(\alpha\chi)^2$. ὅ ἐςιν $\alpha\chi$ εἰς τὴν β'.

χρὴ

χρὴ ἀρθῆναι δύν. (ἐνταῦθα $\alpha\chi$ εἰσὶ δύω ποσότ. συνημμέναι τῷ πολλαπλ.) Τότ' οὖν ἑκατέρα, (εἰ δύω), ἢ ἑκάστη (εἰ πλείους) τῶν ποσοτήτων ἐπισημειωθήσεται τῷ ἐκθέτῃ. Καὶ $(\alpha\chi)^2$ γένοιτο ἄρα $\alpha^2\chi^2$. Ὡς καὶ $(\alpha\chi\upsilon)^3 = \alpha^3\chi^3\upsilon^3$. Καὶ $(\alpha^2\chi)^4 = \alpha^{2\cdot4}\chi^4 = \alpha^8\chi^4$. Ὁ δὲ λόγος αὖθις καταφανὴς, ἐὰν τὰς ποσότητας ἀναλύσωμεν· $(\alpha\chi)^2$ ἐστὶν $\alpha\chi\cdot\alpha\chi$. ἤτοι $\alpha\alpha\chi\chi$. ἢ $\alpha^2\chi^2$. Καὶ $(\alpha^2\chi)^4 = \alpha^2\chi\cdot\alpha^2\chi\cdot\alpha^2\chi\cdot\alpha^2\chi = \alpha^2\alpha^2\alpha^2\alpha^2\cdot\chi\chi\chi\chi = \alpha^8\chi^4$. τουτ. πολλαπλασιάζομεν τὴν δοθεῖσαν δύναμιν ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ἑκάστης προκειμένης ποσότητος· Τῶν δὲ ποσοτήτων, τῶν ἑτέρους ἐκθέτας μὴ ἐχουσῶν, νοεῖται ἡ 1 ἐκθέτης· Ὡς ἐπὶ τοῦ $(\alpha\chi)^2$ οὐδετέρα τῶν ποσοτήτων ἐκθέτης πάρεστιν· ἀλλὰ ταύτας θεωρήσομεν ὡς $(\alpha^1\chi^1)^2$. (§ 185.) Καὶ πολλαπλασιασθέντων τοίνυν τῶν ἐκθετῶν τοῦ α καὶ χ, ἤτοι τῆς 1, καὶ 1 μετὰ τοῦ 2, προκύπτει $\alpha^2\chi^2$. Καὶ ἐν γένει $(\alpha\chi)^\rho = (\alpha^1\chi^1)^\rho = \alpha^\rho\chi^\rho$. Καὶ $(\alpha^\nu\chi^\rho)^\mu = \alpha^{\nu\mu}\chi^{\rho\mu}$.

Καὶ τῷ τῆς προσθέσεως σημείῳ συνημμέναι ποσότητες εἰς δυνάμεις ἐξαίρεσθαι δύνανται. $(\alpha+\beta)^2$ ποσότης ἐστὶ σύνθετος εἰς τὴν β'. ἀρθησομένη δύναμιν· ὅ ἐστιν, ἡ ποσότης $\alpha+\beta$ πολλαπλασιασθεῖσα μεθ' ἑαυτῆς· καὶ τούτου ἐνεργείᾳ γεγονότος, προκύψει $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. ὅ ἐστιν $(\alpha+\beta)^2$. Ὡσαύτως καὶ $(\alpha+\beta)^3$. Ἐν τούτῳ πολλαπλασιασθήτω α'. $\alpha+\beta$ μετὰ τοῦ $\alpha+\beta$. (ὅ ἐστιν ἀρθήτω α'. εἰς τὴν β' δύναμιν) καὶ τὸ παραγόμ. $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ εἶτα ἔτι μετὰ τοῦ $\alpha+\beta$. καὶ ἔσται $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3$. Καὶ τοῦτο ἔχει ἀντ' ἐκείνου τοῦ σχήματος ἀντικαθίστασθαι, καὶ ἀνάπαλιν· ἐνίοτε γὰρ εὐχερείας, ἢ ἄλλου τινὸς ἕνεκα

γραγράφουσι τὸ $(\alpha+\beta)^2$ ἀντὶ τοῦ $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$, ἢ καὶ ἀντὶ τοῦ $(\alpha+\beta)^3$ τὸ $(\alpha+\beta).(\alpha+\beta).(\alpha+\beta)$ κτ. Οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων. Ὡσαύτως καὶ αἱ τῷ — σημείῳ συνημμέναι. π. χ. $(\alpha-\beta)^2$. Ὅπερ $= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$. ἐὰν ἀμέλει $\alpha-\beta$ μετὰ τοῦ $\alpha-\beta$ πολλαπλασιασθῇ.

Σχόλιον.

Ὅταν δείχνωμεν, ὅτι πρέπει νὰ ἐξαρθῇ εἰς δύναμιν μία διὰ τοῦ +, ἢ — συμπεπλεγμένη (§. 44.) ποσότης, πάντοτε εἶναι ἀναγκαῖον νὰ κλείηται ἐν παρενθέσει, καὶ ὁ ἐκθέτης νὰ βάνηται ἐπάνω πρὸς τὰ δεξιὰ, ὡς σύνηθες· διότι ἀλλέως ἠμπορεῖ νὰ ἀκολουθήσῃ ἀπάτη. π. χ. ἄλλο σημαίνει τὸ $(\alpha+\beta)^2$ ἀπὸ τὸ $\alpha+\beta^2$. Τὸ α'. θέλει νὰ εἰπῇ, ὅτι ἡ ποσότης $\alpha+\beta$ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ μεθ' ἑαυτῆς. Τὸ δὲ β.' ὅτι εἰς τὴν ποσότητα α πρέπει νὰ προστεθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ β· Ἂς τεθῇ τὸ $\alpha=5$: καὶ τὸ $\beta=10$, καὶ ἔσαι $(\alpha+\beta)^2 = (5+10)^2 = 15^2 = 15.15 = 225$. Ἀλλὰ τὸ $\alpha+\beta^2$ ἔσαι $= 5+10^2 = 5+10.10 = 5+100 = 105$. Τὸ οὖν 225 πάντῃ διάφορον τοῦ 105.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Δυνάμεων.

§. 194. Δυνάμεις ὁμόῤῥιζοι (ὅ ἐστι τὴν αὐτὴν ποσότητα ῥίζαν ἔχοντες) διαιροῦνται δι' ἀλλήλων, ἐὰν οἱ ταύτων ἐκθέται ἀφαιρῶνται ἀπ' ἀλλήλων·

Ἡ Δεῖξις τούτου γενέσθω διὰ γραμμάτων.

Ἀξία, κατὰ τὰ εἰρημ. καλεῖται ἡ προκύψασα ποσότης διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μετ' ἀλλήλων ὁμοειδῶν ποσοτήτων. Οὕτως α. α. α. α. ἐστὶν ἡ δ'. ἀξία, ἢ δύν. τοῦ α. ἢ α^4. γραφείη δ' ἂν καὶ αααα. Ἀλλὰ διὰ τῆς διαιρέσεως τὰ γράμματα χωρίζονται αὖθις ἀπ' ἀλλήλων,

λων, καὶ ἀφαιροῦνται τοσαῦτα, ὅσα ὁμοειδῆ γράμματα περιέχει ὁ διαιρέτης. (§. 99. σχ. β΄.) Οἷον, εἰ αααα $= \alpha^4$ διαιρεθῆναι δέοι διὰ αα, ὑπολειφθήσεται αα· Ἀλλὰ τὸ αὐτό ἐςι τοσαῦτα γράμματα ἀφαιρεῖν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τῷ ἐν τῷ ἐκθέτῃ δεικνύναι, πόσα τούτων ἀφαιρετέα· Τοῦτο δὲ γένοιτο διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφαιρέσεως οὕτως. α^4 διὰ α^2 διαιρεθὲν γραφήσεται $\alpha^4 : \alpha^2$, ἢ $\frac{\alpha^4}{\alpha^2} = \alpha^{4-2} = \alpha^2$. Ἐφαρμόσει δὲ ὁ κανὼν καὶ τοῖς διὰ γραμμάτων ἐκθέταις, ὡς καὶ τούτων διορισθῆναι δι᾽ ἀριθμῶν δυναμένων. οἷον $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$. Ἐὰν δὲ αἱ ῥίζαι τῶν δυνάμεων μὴ ὁμοειδεῖς ὦσιν. (τουτ: μὴ τὰ αὐτὰ γράμ. ἢ) ὁ κανὼν χώραν οὐκ ἔχει, ὡς παντίπου ἐκ τῆς διαιρέσεως δῆλον· $\alpha^{\mu}\ \beta^{\nu}$ οὐκ ἔςιν $= \alpha^{\mu-\nu}$. Ἀλλὰ δηλώσομεν τὴν τούτων διαίρεσιν ἤτοι $\alpha^{\mu} : \beta^{\nu}$, ἢ $\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\nu}}$.

§. 195. Ἐπὶ τῶν ὁμοειδῶν ὁ κανὼν κρατεῖ, καὶ ἐὰν ἡ δύναμις μὴ μόνη, ἀλλὰ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μεθ᾽ ἑτεροειδῶν συνημμένη ᾖ, μόνον εἰ ὁ διαιρετέος, καὶ ὁ διαιρέτης ὁμοειδεῖς εἶεν δυνάμεις, τουτ: δυνάμεις τὰς αὐτὰς ἔχουσαι ῥίζας. π. χ. $\alpha^3 \chi^4 : \alpha^2 \chi^2 = \alpha^{3-2} \chi^{4-2} = \alpha^1 \chi^2 = \alpha\chi^2$ (§. 185.) Καὶ $\alpha^5 \chi^4 : \alpha = \alpha^{5-1} \chi^4 = \alpha^4 \chi^4$. Εἰ δὲ τῷ διαιρέτῃ καὶ δύναμις οὐχ ὁμοειδὴς πρόσεςιν, ἐν τῷ πηλίκῳ οὐκ ἂν μία ἐκ τῶν δύω ποσότης προκύψειεν, ἀλλ᾽ ἐν μέρει καὶ τὴν ἑτέραν δεικτέον. π. χ. $\alpha^5 \chi^4 : \alpha^2 \psi^2 = \alpha^{5-2} \chi^4 : \psi^2$, ἢ $\frac{\alpha^3 \chi^4}{\psi^2}$.

§. 196. Ἐὰν ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρέτου ἐν ὁμοειδέσι δυνάμεσι μείζων ᾖ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου,

ἀνάγκη

ἀνάγκη πᾶσα τὸν ἐκθέτην τοῦ πηλίκου ἀποφατικὸν εἶναι. Οἷον εἰ α^{μ} διελεῖν δέον διὰ α^{ν}, καὶ ν ἐςὶ μεῖζον τοῦ μ, ἔςαι $\mu - \nu$ ἀναγκαίως ἀποφατικὴ ποσότης, ὅπερ ἐμφαίνουσι καὶ οἱ ἀριθμοί. π. χ. $\alpha^{3} : \alpha^{7} = \alpha^{3-7} = \alpha^{-4}$. ἢ α ἐν τῇ δυνάμει -2. Καὶ $\alpha\chi\upsilon : \alpha^{3}\ \chi^{2}\ \upsilon^{4} = \alpha^{1-3}\ \chi^{1-2}\ \upsilon^{1-4} = \alpha^{-2}\ \chi^{-1}\ \upsilon^{-3}$. Τί δὲ τοῦτό ἐςιν, εἰ ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως ἀποφατικὴ ποσότης γίνεται, δειχθήσεται αὐτίκα, καὶ ὅπως ἀντὶ ταύτης ἑτέραν ἔκφρασιν εὑρεῖν ἔχομεν.

§. 197. Τὰ ἑξῆς παραδείγμ. παριςῶσι τὰ ῥηθέντα σαφέςερον $\chi^{4} : \chi^{3} = \chi^{4-3} = \chi^{1} = \chi$. Καὶ $\chi^{5} : \chi^{7} = \chi^{5-7} = \chi^{-2}$.

Καὶ $\chi^{3}\ \upsilon^{2} : \chi\upsilon = \chi^{3-1}\ \upsilon^{2-1} = \chi^{2}\upsilon$. $\chi^{3}\ \upsilon^{5} : \chi^{4}\ \upsilon^{2} = \chi^{3-4}\ \upsilon^{5-2} = \chi^{-1}\ \upsilon^{3}$.

Καὶ $\chi^{5}\ \upsilon^{4}\alpha : \chi^{7}\ \upsilon^{5}\ \alpha^{2} = \chi^{5-7}\ \upsilon^{4-5}\ \alpha^{1-2} = \chi^{-2}\ \upsilon^{-1}\ \alpha^{-1}$.

Καὶ $\alpha^{\nu} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}$.

Καὶ $\alpha^{\nu+1} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+1-\mu}$.

Καὶ $\alpha^{\nu-1} : \alpha^{\mu+1} = \alpha^{\nu-1-(\mu+1)} = \alpha^{\nu-1-\mu-1} = \alpha^{\nu-\mu-2}$.

$\alpha^{\nu}\ \chi^{\mu}\ \upsilon : \alpha^{\rho}\ \chi^{3}\ \upsilon^{2} = \alpha^{\nu-\rho}\ \chi^{\mu-5}\ \upsilon^{1-2} = \alpha^{\nu-\rho}\ \chi^{\mu-5}\ \upsilon^{-1}$.

Καὶ $\chi^{\rho}\ \upsilon^{5} : \chi^{\mu} = \chi^{\rho-\mu}\ \upsilon^{5}$.

$\chi^{4}\upsilon^{2}$

$$(\chi^4 \upsilon^2 - \upsilon^3 \chi^3) : \alpha\chi^3\upsilon = \frac{\chi^{4-3}\,\upsilon^{2-1} - \upsilon^{3-1}\,\chi^{3-3}}{\alpha}$$

$$= \frac{\chi\upsilon - \chi^2\,\upsilon^2}{\alpha}.$$

$$(\alpha\chi^2\,\upsilon^3 - \alpha\beta\chi^2\,\upsilon^2 - \alpha\chi^2\,\upsilon^2) : \alpha\chi\upsilon$$
$$= \chi\upsilon^2 - \beta\chi\upsilon - \chi\upsilon = (\upsilon - \beta - 1)\,\chi\upsilon.$$

§. 198. Τὴν τῶν ὁμοειδῶν δυνάμεων δι' ἀλλήλων διαίρεσιν μαθοῦσι, ῥᾴδιον ἔςαι δεῖξαι, καὶ ὅπως αἱ δυνάμεις, αἱ δι' ὁμοειδοῦς α' δυνάμεως διαιρούμεναι, διηνεκῶς μειοῦνται, καὶ ὅπως ἐκ τούτου σειράτις τῶν δυνάμεων εἰς τοὐπίσω ἀναφύεται. Εἰς γὰρ τὸ πρόσω αὔξονται ἀεὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ὁμοειδοῦς α. δυνάμεως· μέμνησο δὲ κἀνταῦθα τοῦ (§. 84. σχ.), ὅτι ἡ δι' αὐτῆς διαιρουμένη ποσότης $= 1$. Ὥςε καὶ $\frac{\chi}{\chi} = 1$, ὡς ἡμῖν ἤδη τοῦτο ἀναγκαῖον εἰδέναι· Τὰ λοιπὰ δὲ δῆλον, ὅτι τὸ χ γενικὴ ἐςὶ ποσότης· καὶ ὅ, τι κατ' αὐτῆς ἀληθεῦον εὑρεθήσεται, ἀληθεύσει καὶ κατὰ πάσης ποσότητος διωρισμένης·

Ἐὰν χ ἐν τῇ α' δυνάμει παρῇ, (ὅ ἐςιν, εἴπερ ἡ δοθεῖσα ποσότης εἰς οὐδεμίαν ἔτι ἐξῆρται δυναμιν, ἥντινα καὶ οὕτω δηλῶσαι δυνάμεθα, χ^1) καὶ πολλαπλασιασθῇ μετὰ χ, καὶ τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον αὖθις μετὰ χ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὡς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δῆλον, ἡ ἑπομένη ἀνακύψει σειρὰ τῶν δυνάμεων. χ, χ^2, χ^3, χ^4, χ^5, χ^6, καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον.

Ἀλλ' ἀπὸ τοῦ χ^6 τῆς διαιρέσεως διὰ χ ἀρξαμένοις, κατὰ τον ὑποδειχθέντα τρόπον, ἀφανήσεται ἥδε ἡ σειρά.

$$\frac{\chi^6}{\chi}$$

$\frac{\chi^6}{\chi} = \chi^{6-1} = \chi^5$. Καὶ $\frac{\chi^5}{\chi} = \chi^{5-1} = \chi^4$. Καὶ $\frac{\chi^4}{\chi} = \chi^{4-1} = \chi^3$. Καὶ $\frac{\chi^3}{\chi} = \chi^{3-1} = \chi^2$. Καὶ $\frac{\chi^2}{\chi} = \chi^{2-1} = \chi^1$, ἢ χ. ὅτι χ^1 καὶ χ ἰσοδυναμεῖ (§. 185.)

Αὖθις $\frac{\chi}{\chi} = \chi^{1-1} = \chi^0$, ἢ $= 1$. (ἐπειδὴ γὰρ $\frac{\chi}{\chi} = 1$. (§. 84. σχ.) τὸ δὲ $\frac{\chi}{\chi} = \chi^{1-1} = \chi^0$. ἄρα καὶ (48. δ'.) $\chi^0 = 1$.) Ὥςε ἀντὶ τοῦ χ^0 ἀντικαθιςᾶν τὴν 1 ἔξεσιν, ὡς ἴσην αὐτῷ.

Αὖθις $\frac{\chi^0}{\chi}$ ἢ $(\frac{1}{\chi}) = \chi^{0-1} = \chi^{-1}$. Ὅτι $0 - 1 = -1$.

Καὶ $\frac{\chi^{-1}}{\chi}$, ἢ $\frac{1}{\chi} : \chi$ (ὅτι, ὡς ἤδη δέδεικται, $\frac{1}{\chi} = \chi^{-1}$. ὅθεν ἀντὶ τοῦ διαιρετέου χ^{-1}, ἀντικαταςαίη ἂν τὸ $\frac{1}{\chi}$) $= \frac{1}{\chi^2}$. Ὅτι τὸ $\frac{1}{\chi}$ ἔτι χ:ις μειωθῆναι χρή· (τοῦτο γὰρ δηλοῖ ἡ διαίρεσις ἡ διὰ τοῦ χ) Ἀλλὰ $\frac{1}{\chi}$ μειωθήσεται κατὰ τὸ χ, ἐὰν ὁ διαιρέτης χ:ις αὐξηθῇ· τοῦτο δ' ἔςαι, ἐὰν τὸν διαιρέτην μετὰ τοῦ χ πολλαπλασιάσωμεν. Ἀλλ' ἐπεὶ, ὡς δέδεικται, $\frac{1}{\chi} = \chi^{-1}$. τοῦτο δὲ τὸ χ^{-1} διαιρεθὲν διὰ τοῦ χ ἔςαι $\chi^{-1-1} = \chi^{-2}$. Ἀντὶ τὶ τοῦ $\frac{1}{\chi^2}$ χρησόμεθα τῷ χ^{-2}. Καὶ $\frac{1}{\chi^2} : \chi = \frac{1}{\chi^3} = \chi^{-3}$. Καὶ $\frac{1}{\chi^3} : \chi = \frac{1}{\chi^4} = \chi^{-4}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Προτεθείσθωσαν ἤδη αἱ δύω ἴσαι σειραὶ τῶν μειουμένων δυνάμεων, καὶ τὰ σχήματα τὰ ἀλλήλοις ἴσα γραφήτω ὑπάλληλα· Ἀρκτέον δ' ἀπὸ τοῦ χ^6. ἡ β'. σειρὰ ἐςὶ κατὰ πάντα ἴση τῇ α'. π. χ.

$$\chi^6,\ \chi^5,\ \chi^4,\ \chi^3,\ \chi^2,\ \chi^1,\ \chi^0,\ \chi^{-1},\ \chi^{-2},\ \chi^{-3},\ \chi^{-4} \ldots \chi^{-\nu}.$$

$$\chi^6,\ \chi^5,\ \chi^4,\ \chi^3,\ \chi^2,\ \chi^1,\ 1\ \ \frac{1}{\chi},\ \frac{1}{\chi^2}\ \ \frac{1}{\chi^3}\ \ \frac{1}{\chi^4} \ldots \frac{1}{\chi^\nu}.$$

Ἡ ἀντικατάςασις τῶν ἴσων σχημάτων οὐ μικρὸν ἐν διαφόροις ὑπολογισμοῖς συμβάλλεται, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς σαφῶς ὀψόμεθα· π. χ. ἀντὶ τοῦ $\frac{1}{\chi}$ ἀντικαταςῆναι δύναται τὸ ἴσον χ^{-1}, καὶ ἀντὶ τοῦ $\frac{1}{\chi^\nu}$ τὸ $\chi^{-\nu}$. Ἀντὶ δὲ τοῦ $\frac{1}{\chi^\upsilon}$ τὸ χ^{-1} υ^{-1}, κτ.

Σχόλιον.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς μετὰ ἐκθετῶν καταφ. καὶ αποφ. παρελείφθη ἀνωτέρω. διότι ἠγνοοῦμεν τὴν σημασίαν τῶν τοιούτων σχημάτων. ὡς α^{-1}, α^{-2} κτ. Οὐ χαλεπὸν δὲ ταῦτα εἰδόσι κἀκείνους πολλαπλασιάζειν. οἷον α^{-1} μετὰ τοῦ α^2 πολλαπλ. δίδωσιν α^1. ὅ ἐςιν α· Φανερὸν δὲ καὶ ἐκ τούτου, $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$.

$= \frac{1}{a}$ τοῦτο πολλαπλ. μετὰ τοῦ αα ἔξαι $\frac{aa}{a}$, (§. 140.) ἤτοι α. Ὡσαύτως καὶ a^{-2} μετὰ a^2 πολλαπ. $= a^{-2+2} = a^0 = 1$. Καὶ a^{-3} τῷ a^2 πολλ. $= a^{-3+2} = a^{-1}$.

§. 199. Πᾶσα ποσότης ἐν τῇ δυνάμει 0 ἐςὶν $= 1$. (§. ἀνωτ.) Καὶ ἐπειδὴ τὸ χ ὡς ἀόριςον, οἱανοῦν σημαίνει ποσότητα, δύναται σημάναι καὶ $(a + \beta)$. Ἐπεὶ οὖν $\chi^0 = 1$, ἔξαι καὶ $(a + \beta)^0 = 1$. Καὶ τοῦτο ἀληθεύει καθόλου καὶ 0^0 γὰρ ἐςιν $= 1$. Καί τοι γὰρ τὸ μηδενικὸν εἰς οὐδεμίαν ὑψωθῆναι δύναμιν ἔχει (ὅτι τὸ μηδὲν ἀεὶ μηδὲν) ἀλλὰ τὸ 0^0 ὡς $\frac{0}{0}$ νοεῖν ἕξεις καὶ μάλα. καὶ τὸ μηδὲν ἐμπερίχεται τῷ μηδενὶ ἅπαξ, ἵνα τι καὶ ἀφῃρημένως φθεγξώμεθα.

Προκείσθω καὶ ἕτερα παραδείγματα, εἰς διαίρεσιν ἐν (§. 197.) μὴ προχειρισθέντα.

$a^4 \chi^9 \upsilon^5 : a^4 \chi^9 \upsilon = a^{4-4} \chi^{9-9} \upsilon^{5-1} = a^0 . \chi^0 \upsilon^{5-1} = 1.1. \upsilon^{5-1} = \upsilon^{5-1} = \upsilon^4$.

$a^{5+1} \chi^2 : a^{5+1} \chi = a^{5+1-(5+1)} \chi^{2-1} = a^0 \chi^1 = 1 . \chi^1 = \chi^1 = \chi$.

$(a^2 \chi^2 \upsilon^2 - a\beta\chi\upsilon - a\chi\upsilon) : a\chi\upsilon = a\chi\upsilon - \beta - 1$.

§. 200. Ὅπως ἡ δοθεῖσα δύναμις εἰς ἑτέραν δύναμιν ζητουμένην ἐξαίρεται, εἴρηται. (§. 192.) συνορᾶν δὲ πάρεςιν, ὅτι οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων διὰ τῆς ἐνεργεία διαιρέσεως καταίρονται. Ἐν τῷ (§. 186.) δέδεικται προηγουμένως, καὶ τί ἐςι ῥίζα· ἢ $\sqrt{}$ ἐν γένει καὶ τί ταῦτα $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[\upsilon+1]{}$, κτ. σημαίνει.

ἀλλ'

ἀλλ' ἑκάστην δύναμιν (ἢ μᾶλλον πάντα ἐκθέτην τῆς δυνάμεως) νοεῖν ἔχομεν, ὡς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μεθ' ἑτέρας ποσότητος προκύψασαν, καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὴν παροῦσαν δύναμιν ἀρθεῖσαν. (§. 192.) ἡ ποσότης δὲ, δι' ἧς εἰς τὴν προκειμένην ὑψώθη δύναμιν, ἣν ἡ ῥίζα· εἰ γὰρ π. χ. α^4 εἰς τὴν γ'. ἀρθῆναι προὔκειτο δύναμιν, ἐπολλαπλασιάζετο $\alpha^{4\cdot 3} = \alpha^{12}$. (§. αὐτ.) Εἰ οὖν τὴν τούτου τριπλῆν ῥίζαν λαβεῖν βουλόμεθα, ποιήσομεν τοῦτο διὰ τῆς ἀντικειμένης τῷ πολλαπλ. μεθόδου, τουτ: διὰ τῆς διαιρέσεως. ὥστε ἀναγκαῖον τὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ α^{12} διὰ τοῦ 3 διελεῖν· ὡς $\alpha^{\frac{12}{3}}$. Καὶ τούτου ἐνεργείᾳ διαιρεθέντος, προκύψει α^4, ὃ τῷ ὄντι ἡ $\sqrt[3]{\ }$ ἐστὶ τοῦ α^{12}. ὅτι α^4 τρὶς μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθὲν δίδωσιν α^{12}. Εἰδέναι τοίνυν δέον, ὁποία ῥίζα τῆς δυνάμεως ζητεῖται, ὅ ἐστι, τὸν ἐκθέτην (§. 186.) τῆς ῥίζης δεδομένον εἶναι χρή. Ἄλλως γὰρ μυρίας ῥίζας ποιῆσαι δυνάμεθα· π. χ. Ἔστω α^{12}. ἡ $\sqrt[12]{\ }$ τούτου ἔσται $\alpha^{\frac{12}{12}} = \alpha^1 = \alpha$· τὸ γὰρ α δωδεκάκις μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθὲν δίδωσιν α^{12}. Ἡ $\sqrt[4]{\ }$ τοῦ α^{12} ἐστιν $\alpha^{\frac{12}{4}}$, ἢ α^3. ἡ $\sqrt[3]{\ }$ τοῦ $\alpha^{12} = \alpha^{\frac{12}{3}} = \alpha^4$. ἡ $\sqrt[2]{\ }$ τούτου, ἥτις ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον $\sqrt{\ }$ ἄνευ ἐκθέτου γράφεται, (§. αὐτ.) $= \alpha^{\frac{12}{2}} = \alpha^6$, κτ. Ὁ οὖν κανὼν τοῦ τὰς ῥίζας τῶν ἐκθετῶν εὑρίσκειν, τὰς εἰς εὕρεσιν προκειμένας, ἐστὶν ὁ ἑξῆς. Δίελε τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως διὰ τοῦ δοθέντος ἐκθέτου τῆς ῥίζης, καὶ τὸ ἐκ τῶν ἐκθετῶν πηλίκον, τὸ διὰ τῆς διαιρέσεως προελθὸν, δείξει σοι τὴν ζητουμένην ῥίζαν. Ἔνθεν τοι $\sqrt{\alpha^6} = \alpha^{\frac{6}{2}} = \alpha^3$. Καὶ $\sqrt[4]{\alpha^4} = \alpha^{\frac{4}{4}} = \alpha$. $\sqrt[2]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{2}}$.

Σημείωσαι, ὅτι τοῦ ἐκθέτου τῆς ῥίζης ὑπὸ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τεθέντος, τὸ ῥιζικὸν σημεῖον $\sqrt{}$ ἐκπίπτει· Ὁ δὲ κανὼν κρατεῖ ἐπὶ πάντων. Καὶ ἐὰν ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως διὰ τοῦ ἐκθέτου τῆς ῥίζης διαιρέσιμος μὴ ᾖ, ὁ ὀρθὸς λόγος διδάσκει οὕτω χωρεῖν ἀναγκαῖον εἶναι. π. χ. $\sqrt[3]{\chi^{3}} = \chi^{\frac{3}{3}}$. Καὶ $\sqrt[3]{\chi} = \chi^{\frac{1}{3}}$. Ὡσαύτως καὶ εἰ οἱ ἐκθέται εἰσὶ γράμματα. ὡς $\sqrt[\mu]{\chi^{\rho}} = \chi^{\frac{\rho}{\mu}}$. $\sqrt[\nu+1]{\chi^{\rho+\mu}} = \chi^{\frac{\rho+\mu}{\nu+1}}$. Τὰ τοιαῦτα τῶν σχημάτων, καίτοι περαιτέρω ἐκτεθῆναι, καὶ ἀναπτυχθῆναι μὴ δυνάμενα, ἔχουσι μέντοι αὐτόθεν τὸ ἐναργὲς, καὶ ἀκριβές.

§. 201. Καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἡνωμέναι ἀπαντῶσι ποσότητες, ἐξ ὧν τὴν ῥίζαν ἐξάγειν ἐπιταττόμεθα· Τότε οὖν ἐξάγεται ἡ ῥίζα ἑκάστης ποσότητος, ὡς τοῦ ἐκθέτου αὐτῶν διὰ πολλαπλασιασμοῦ προκύψαντος. π. χ. $\sqrt[3]{a^{2}\chi^{4}\upsilon} = a^{\frac{2}{3}}\chi^{\frac{4}{3}}\upsilon^{\frac{1}{3}}$. Καὶ $\sqrt[3]{a^{6}\chi^{9}\upsilon^{3}} = a^{\frac{6}{3}}\chi^{\frac{9}{3}}\upsilon^{\frac{3}{3}} = a^{2}\chi^{3}\upsilon$. ὅτι ἐν τούτῳ τῷ παραδ. ἡ διαίρεσις χωρεῖ· Ἡ $\sqrt{a^{4}\chi^{2}\upsilon} = a^{\frac{4}{2}}\chi^{\frac{2}{2}}\upsilon^{\frac{1}{2}} = a^{2}\chi\upsilon^{\frac{1}{2}}$.

Καὶ $\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}\upsilon^{\nu}} = \chi^{\frac{\mu}{\nu}}\upsilon^{\frac{\nu}{\nu}} = \chi^{\frac{\mu}{\nu}}\upsilon$· ὅτι $\frac{\nu}{\nu} = 1$.

§. 202. Ὁ τρόπος τοῦ τὸ ῥιζικὸν σημεῖον παραλείπειν, καὶ ἀντὶ τούτου τὸν ἐκθέτην τοῦ ῥιζικοῦ σημείου ὑπὸ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τιθέναι, καὶ π. χ. ἀντὶ τοῦ $\sqrt{a^{4}}$, $a^{\frac{4}{2}}$ γράφειν, λίαν ἐν χρήσει, καὶ συντελεῖ τὰ μέγιστα, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς ὀψόμεθα· Τὰς οὕτω γραφομένας ποσότητας, ὁμοειδεῖς οὔσας, καὶ ὁμοειδεῖς ἐκθέτας τῆς ῥίζης ἐχούσας, πολλαπλασιάσομεν,

σομεν, καὶ διαιρήσομεν κατὰ τά. (§. §. 191. 194.) Οἷον $\alpha^{\frac{3}{2}} : \alpha^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} = \alpha^{\frac{2}{2}}$. Καὶ $\upsilon^{\frac{3}{4}} : \upsilon^{3} = \upsilon^{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}}$. Ἀλλὰ περὶ τούτων κατωτέρω πλατύτερον.

§. 203. Παραδείγματα διαιρέσεως τῶν δυνάμεων, ἐς τόδε ἀποταμιευθέντα, ὡς τὸν τρόπον τῆς τούτων ἀγνοοῦσι διαιρέσεως.

Δίελε $\alpha^6 + \beta^6$ διὰ τοῦ $\alpha^2 + \beta^2$

$$
\begin{array}{l|l}
(\alpha^2+\beta^2)\ \ \alpha^6 + \beta^6 & \alpha^4 - \alpha^2\beta^2 + \beta^4 \\
\qquad\qquad\ \ \underline{\alpha^6 + \alpha^4\beta^2} & \\
\qquad\qquad\ \ -\alpha^4\beta^2 + \beta^6 & \\
\qquad\qquad\ \ \underline{-\alpha^4\beta^2 - \alpha^2\beta^4} & \\
\qquad\qquad\qquad +\alpha^2\beta^4 + \beta^6 & \\
\qquad\qquad\qquad +\alpha^2\beta^4 + \beta^6 &
\end{array}
$$

Καὶ

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{6\gamma^2 - \beta^4\gamma + 4\alpha^2} \\
30\gamma^4 - 5\beta^4\gamma^3 + 20\alpha^2\gamma^2 - 18\alpha\gamma^2 + 3\alpha\beta^4\gamma - 12\alpha^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (5\gamma^2 - 3\alpha) \\
\underline{30\gamma^4 \qquad\qquad\qquad\qquad - 18\alpha\gamma \qquad\qquad\qquad} \\
\quad -5\beta^4\gamma^3 + 20\alpha^2\gamma^2 \qquad + \quad 3\alpha\beta^4\gamma - 12\alpha^3 \\
\quad \underline{-5\beta^4\gamma^3 \qquad\qquad\qquad + \quad 3\alpha\beta^4\gamma \qquad\qquad} \\
\qquad\qquad +20\alpha^2\gamma^2 \qquad\qquad\qquad\qquad - 12\alpha^3 \\
\qquad\qquad +20\alpha^2\gamma^2 \qquad\qquad\qquad\qquad - 12\alpha^3
\end{array}
$$

§. 204. Ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων κλάσματα ὦσι, (§. 200.) μεταχειρισθησόμεθα καὶ ταῦτα, ὡς καὶ τὰ λοιπὰ τῶν κλασμάτων· τουτ: ἐὰν καὶ τούτων ἄμφω τοὺς ὅρους μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιάσωμεν, ἢ διέλωμεν, τὸ κλάσμα οὐδόλως μεταβάλπαραβάλλεται· π. χ. $\chi^{\frac{3}{4}}$ = τῷ $\chi^{\frac{3.2}{4.2}} = \chi^{\frac{6}{8}}$. Καὶ ἐπεὶ $\chi^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\chi^3}$. Τὸ δὲ $= \chi^{\frac{6}{8}} = \sqrt[8]{\chi^6}$, (§. αὐτ.) ἔςαι καὶ $\sqrt[4]{\chi^3} = \sqrt[8]{\chi^6}$ (§. 48. δ΄.) Ἀλλὰ καὶ ἐὰν ἄμφω οἱ ὅροι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρεθῶσι, τὸ κλάσμα μένει αὖθις ἀμετάβλητον. $\chi^{\frac{6}{4}} = \chi^{\frac{6:2}{4:2}} = \chi^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{\chi^3}$. Ὡςὲ $\chi^{\frac{6}{4}}$, ἢ $\sqrt[4]{\chi^6} = \sqrt[2]{\chi^3}$

Τούτῳ τῷ τρόπῳ δυνάμεις, τὰς κλασματικοὺς ἐχούσας ἐκθέτας, προςιθέναι, ἀφαιρεῖν, πολλαπλασιάζειν, καὶ διαιρεῖν δυνάμεθα. Ἀλλὰ σημειωτέον, ὅτι ἡ τούτων πρόσθεσις, καὶ ἀφαίρεσις οὐ κατὰ πάντα ὁμοία τῇ τῶν κοινῶν κλασμάτων, ὧν οἱ ἀριθμηταὶ, μετὰ τὸ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομ. ἀναχθῆναι τὰ κλάσματα, προςίθενται, (§. 130.) ἀλλὰ μεταξὺ τῶν δυνάμεων τιθέαμεν μόνον τὸ σημεῖον +, ἢ —, ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομ. ταύτας μείζονος σαφηνείας χάριν, ἀναγκαίας οὔσης ἐνίοτε τοῦ ὑπολογισμοῦ, ἀνάγοντες. (ἡ γὰρ πρόσθεσις, καὶ ἀφαίρεσις τῶν ἐκθετῶν, ὁ τούτων πολλαπλασιασμός ἐςι, καὶ ἡ διαίρεσις μετ' ἀλλήλων) Οἷον, εἰ δέοι $\sqrt{\chi^3}$, καὶ $\sqrt[3]{\chi^4}$ προσθεῖναι, ἔςαι $\chi^{\frac{3}{2}} + \chi^{\frac{4}{3}}$. Ἀλλὰ καὶ ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρον. τὰς δύω κλασματικὰς ἀναγαγόντες δυνάμεις μεταχειρισθησόμεθα ταύτας, ὡς καὶ τὰς λοιπάς.

$$\chi^{\frac{3}{2}} + \chi^{\frac{4}{3}} = \chi^{\frac{3.3}{2.3}} + \chi^{\frac{4.2}{3.2}} = \chi^{\frac{9}{6}} + \chi^{\frac{8}{6}} = \sqrt[6]{\chi^9} + \sqrt[6]{\chi^8}.$$

Τὸ δὲ $\chi^{\frac{9}{6}} + \chi^{\frac{8}{6}} = \chi^{\frac{9+8}{6}} = \chi^{\frac{17}{6}} = \sqrt[6]{\chi^{17}}$ οὐκ ὀρθόν. Δειχθήσεται δὲ, ὅτι ἐκείνως, καὶ οὐκ ἄλλως χωρητέον.

Καὶ

Καὶ ἐν γράμμασι·

$$\sqrt[\nu]{\upsilon^{\rho}} + \sqrt[\mu]{\upsilon^{\sigma}} = \upsilon^{\frac{\rho}{\nu}} + \upsilon^{\frac{\sigma}{\mu}} = \upsilon^{\frac{\rho\mu}{\nu\mu}} + \upsilon^{\frac{\sigma\nu}{\mu\nu}} = \sqrt[\nu\mu]{\upsilon^{\rho\mu}} + \sqrt[\mu\nu]{\upsilon^{\sigma\nu}}.$$

Ὡσαύτως καὶ εἰ αἱ ποσότητες ἀφαιροῦνται ἀπ' ἀλλήλων. ὡς $\chi^{\frac{3}{2}} - \chi^{\frac{4}{3}} = \chi^{\frac{3.3}{2.3}} - \chi^{\frac{4.2}{3.2}} = \chi^{\frac{9}{6}} - \chi^{\frac{8}{6}} = \sqrt[6]{\chi^{9}} - \sqrt[6]{\chi^{8}}$. Αὖθις $\chi^{\frac{1}{2}} - \chi^{\frac{1}{4}} = \chi^{\frac{1.4}{2.4}} - \chi^{\frac{1.2}{4.2}} = \chi^{\frac{4}{8}} - \chi^{\frac{2}{8}} = \sqrt[8]{\chi^{4}} - \sqrt[8]{\chi^{2}}$. Καὶ ἐν γράμμασι.

$$\chi^{\frac{\nu}{\mu}} - \chi^{\frac{\tau}{\rho}} = \chi^{\frac{\nu\rho}{\mu\rho}} - \chi^{\frac{\tau\mu}{\rho\mu}} = \sqrt[\mu\rho]{\chi^{\nu\rho}} - \sqrt[\rho\mu]{\chi^{\tau\mu}}$$

§. 205. Τὸ οὕτω τὰς δυνάμεις, ὧν οἱ ἐκθέται κλάσματα, μεταβάλλειν, χρησιμώτατον πολλάκις ἐν ὑπολογισμοῖς, ὅτε τὰς δυνάμεις εἰς ἕτερα σχήματα, εἰς πλείω ἀνάπτυξιν, τρέψαι βουλόμεθα· τοῦτο δ' ἀεὶ ἐγχωρεῖ, καὶ τῶν δυνάμεων κλασματικὸν ἐκθέτην μὴ ἐχουσῶν· ὑποτίθεται γὰρ ὁ ἐκθέτης, ὡς κλασματικὸς, οὐ παρόν, ἢ 1. π. χ. $\alpha^{\mu-1}$ νοηθείη ἂν καὶ οὕτως $\alpha^{\frac{\mu-1}{1}}$. Καὶ τότε, εἰ ἀναγκαῖον, καὶ τὸ κλάσμα ἄλλως γραφήσεται, τῆς ποσότητος ἥκιστα τροπὴν ὑφισαμένης. Οὕτω τὸ $\alpha^{\frac{\mu-1}{1}}$ = τῷ $\alpha^{\frac{\mu-1}{1}}$. τοῦτο δὲ $= \alpha^{\frac{(\mu-1)\nu}{1.\nu}} = \alpha^{\frac{\mu.\nu-\nu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu\nu-\nu}}$.

Καὶ $\alpha^{\frac{1}{\mu}} = \alpha^{\frac{1.\nu}{\mu.\nu}} = \alpha^{\frac{\nu}{\mu\nu}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\nu}}$. Τὰ τοιαῦτα σχήματα μάλιστα χρήσιμα ἐν ταῖς Ἐξισώσεσι (περὶ ρι ὧν μετὰ ταῦτα) Ὅθεν ἐπιμελῶς παντὶ ἑαυτὸν ἀσκητέον·

§ 206. Ὅσα περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δυνάμεων εἴρηται, (§. 191) τῶν ταὐτορρίζων, κρατοῦσι καὶ περὶ τῶν κλασματικῶν ἐκθετῶν. ὅτι καὶ οὗτοι, ὡς ἀληθεῖς δυνάμεις, θεωρητέοι· ἀ μέντοι τοὺς ἐκθέτας ἀνακτέον ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, καὶ εἶτα προσθετέον τοὺς ἀριθμητὰς, τὸν κοινὸν παρονομ. ὑπογράφοντας, διὰ τὸ §. 130. π. $\chi^{\frac{1}{2}} \cdot \chi^{\frac{2}{5}} = \chi^{\frac{1.5}{2.5}} \chi^{\frac{2.2}{6.2}} = \chi^{\frac{5}{10}} \cdot \chi^{\frac{4}{10}} = \chi^{\frac{5+4}{10}} = \chi^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{\chi^{9}}$. Αὖθις $\chi^{\frac{1}{2}} \cdot \chi^{\frac{\nu}{\mu}} = \chi^{\frac{1.\mu}{2.\mu}} \cdot \chi^{\frac{\nu.2}{\mu.2}} = \chi^{\frac{\mu+2\nu}{2\mu}} = \sqrt[2\mu]{\chi^{\mu+2\nu}}$.

Πρὸς τούτοις, ὡς εἰδόσιν, ὅπως αἱ τοιαῦται ποσότητες, $\frac{1}{\chi}$, $\frac{1}{\chi^2}$, κτλ. καὶ ἄλλως ἐκφέρονται, (§. 98.) προκείσθω καὶ τούτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ παραδ. Ὡς $\frac{1}{\sqrt{\chi}} = \frac{1}{\chi^{\frac{1}{2}}} = \chi^{-\frac{1}{2}}$. Τοῦτο πολλαπλ. διὰ τοῦ χ ἔσται $\chi^{-\frac{1}{2}} \cdot \chi^{1} = \chi^{-\frac{1}{2}} \cdot \chi^{\frac{1}{1}} = \chi^{-\frac{1.1}{2.1}} \cdot \chi^{\frac{1.2}{1.2}} = \chi^{-\frac{1}{2}} \cdot \chi^{\frac{2}{2}} = \chi^{\frac{-1+2}{2}} = \chi^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\chi}$. Ὥστε $\frac{1}{\sqrt{\chi}} \cdot \chi = \sqrt{\chi^{1}} = \sqrt{\chi}$.

Αὖθις, ἐπειδὴ $\frac{1}{\sqrt[4]{\chi^2}} = \frac{1}{\chi^{\frac{2}{4}}} = \chi^{-\frac{2}{4}}$. Καὶ $\frac{1}{\sqrt[3]{\chi}} = \frac{1}{\chi^{\frac{1}{3}}} = \chi^{-\frac{1}{3}}$. Ἔσται καὶ $\frac{1}{\sqrt[4]{\chi^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\chi}} = \chi^{-\frac{2}{4}} \cdot \chi^{-\frac{1}{3}} = \chi^{-\frac{2.3}{4.3}} \cdot \chi^{-\frac{1.4}{3.4}} = \chi^{-\frac{6}{12}} \cdot \chi^{-\frac{4}{12}} = \chi^{-\frac{10}{12}}$

$$= \chi^{-\frac{4}{12}-6} = \chi^{-\frac{10}{12}} = \sqrt[12]{\chi^{-10}} = \frac{1}{\sqrt[12]{\chi^{10}}}.$$

Ὡσαύτως καὶ $\sqrt{\chi} \cdot \frac{3}{\sqrt{\chi^3}} \cdot \frac{1}{\upsilon} = \chi^{\frac{1}{2}} \cdot$

$$3\chi^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\upsilon} = 3\chi^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\upsilon} = 3\chi^{-\frac{2}{2}} \frac{1}{\upsilon}$$

$= \frac{3}{\sqrt{\chi^2}} \frac{1}{\upsilon} = \frac{3}{\chi\upsilon}.$ Προσέτι $\frac{1}{\chi} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{\chi^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\chi}}$

$$\chi^4 \cdot \sqrt{\chi^3} = \chi^1 \cdot 2\chi^{-\frac{2}{3}} \cdot \chi^{-\frac{1}{2}} \cdot \chi^{\frac{4}{2}} \chi^{\frac{3}{2}}$$

$$= \chi^{-\frac{6}{6}} \cdot 2\chi^{-\frac{4}{6}} \cdot \chi^{-\frac{3}{6}} \cdot \chi^{\frac{24}{6}} \cdot \chi^{\frac{9}{6}} = 2\chi$$

$$-\tfrac{6}{6} - \tfrac{4}{6} - \tfrac{3}{6} + \tfrac{24}{6} + \tfrac{9}{6} = 2\chi^{-\frac{13}{6}}$$

$$+\tfrac{33}{6} = 2\chi^{\frac{20}{6}} = 2\chi^{\frac{10}{3}} = 2\sqrt[3]{\chi^{10}}.$$

Καὶ $\frac{1}{\chi^2} \cdot \frac{1}{3\chi^3} \cdot 3\sqrt{\chi^{10}} = \chi^{-2} \; \tfrac{1}{3}\chi^{-3}.$

$$3\chi^{\frac{10}{2}} = \chi^{-\frac{4}{2}} \cdot \frac{1}{} \chi^{-\frac{6}{2}} \cdot 3\chi^{-\frac{10}{2}} \cdot$$

3

$$= \frac{3\chi^{-\frac{4}{2}-\frac{6}{2}+\frac{10}{2}}}{3} = \frac{3\chi^{-\frac{10}{2}+\frac{10}{2}}}{3} = \frac{3\chi^{0}}{3}$$

$= \frac{3\cdot 1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$ Ἀλλὰ περὶ πάντων τούτων πλατύτερον ἐν τῷ περὶ ῥιζικῶν ποσοτήτων.

Καὶ ἕτερον παράδ. ἐν γράμμασι. $\chi^{\frac{\nu}{\mu}} \cdot \chi^{\frac{1}{\varrho}}$

$$= \chi^{\frac{\nu\varrho}{\varrho\mu}} \cdot \chi^{\frac{1\mu}{\varrho\mu}} = \chi^{\frac{\nu\varrho+\mu}{\varrho\mu}} = \sqrt[\varrho\mu]{\chi^{\nu\varrho+\mu}}.$$

§. 207. Δυνάμεις, ὧν οἱ ἐκθέται κλασματικοὶ, εἰς ὑπερτέρας ἀνυψώσομεν ἀξίας, πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν τῆς κλασματικῆς δυνάμεως μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐμφαίνοντος, εἰς ἡλίκην δύναμιν

μιν ἐξαρθῆναι χρή· π. χ. $\chi^{\frac{3}{2}}$ ἔστω εἰς τὴν β'. ἀρτέον δύναμιν· $= \chi^{\frac{3.2}{2}} = \chi^{\frac{6}{2}} = \sqrt{\chi^{6}}$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ 6 διαιρεθῆναι δύναται διὰ τοῦ ῥιζικοῦ ἐκθέτου 2, ἐξενεχθείη τὸ $\sqrt{\chi^{6}}$ ἄμεινον διὰ τοῦ χ^{3}. Ὁ δὲ λόγος αὐτόθεν δῆλος· ἐπειδὴ γὰρ πολλαπλασιάζειν ἐστὶ τὸ τὴν ποσότητα τοσάκις ἑαυτῇ προστιθέναι, ὅσας μονάδας ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων περιέχει· πρόκειται δὲ τὸ $\chi^{\frac{3}{2}}$ εἰς τὴν β'. ἀρθῆναι δύναμιν· ὁ ἐκθέτης τοσάκις ἑαυτῷ προστεθήσεται, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς, ἤτοι δὶς, ἤτοι $\chi^{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = \chi^{\frac{6}{2}} = \chi^{3}$, ὅπερ εὐχερέστερον προκύπτει διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ· Οἷον $a^{\frac{1}{3}}$ εἰς τὴν ε'. ἀρθὲν δύναμιν ἔσται $= a^{\frac{1.5}{3}} = a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^{5}}$. Καὶ $\frac{1}{\sqrt{\chi}}$ ἀρθήτω εἰς τὴν ε'. δύναμιν. Ἐπειδὴ $\frac{1}{\sqrt{\chi}} = \frac{1}{\chi^{\frac{1}{2}}} = \chi^{-\frac{1}{2}}$. τὸ $\chi^{-\frac{1}{2}}$ εἰς τὴν ε'. ἀρθὲν δύν. ἔσται $= \chi^{\frac{-1.5}{2}}$

$$= \chi^{-\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{\chi^{-5}} = \frac{1}{\sqrt[2]{\chi^{5}}}$$ Καὶ $\upsilon^{\frac{\nu}{\rho}}$ εἰς τὴν μ: ην δύναμιν $= \upsilon^{\frac{\nu.\mu}{\rho}} = \sqrt[\rho]{\upsilon^{\nu\mu}}$.

§. 208. Τὰς κλασματικοὺς ἐκθέτας ἐχούσας δυνάμεις, δι' ἑτέρων διαιρήσομεν ταυτορρίζων δυνάμεων, τῇ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρέσει τῶν κατ' αὐτὰς ἐκθετῶν· (§. 194.) Ἀλλὰ τοὺς κλασματικοὺς ἐκθέτας ὑπὸ τὸν αὐτὸν χρὴ α'. παρονομ. ἀνάγειν, καὶ οὕτως ἀφαιρεῖν τὸν ἀριθμητὴν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ. π. χ.

$$a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1.4}{2.4}} : a^{\frac{1.2}{4.2}} = a^{\frac{4}{8}} : a^{\frac{2}{8}} = a^{\frac{4-2}{8}} = a^{\frac{2}{8}} = a^{\frac{1}{4}}.\ (\S.\ 125.) = \sqrt[4]{a}.$$

Ὡσαύτως $\upsilon^{\frac{3}{4}} : \upsilon^{\frac{1}{2}} = \upsilon^{\frac{3.2}{4.2}} : \upsilon^{\frac{1.4}{2.4}} = \upsilon^{\frac{6}{8}} : \upsilon^{\frac{4}{8}} = \upsilon^{\frac{6-4}{8}} = \upsilon^{\frac{2}{8}} = \upsilon^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\upsilon}$.. Αὖθις

$$\upsilon^{\frac{\nu}{\mu}} : \upsilon^{\frac{\rho}{\sigma}} = \upsilon^{\frac{\nu\sigma}{\mu\sigma}} : \upsilon^{\frac{\rho\mu}{\mu\sigma}} = \upsilon^{\frac{\nu\sigma - \rho\mu}{\mu\sigma}}$$

=ρμ

$= \sqrt[\sigma\mu]{\upsilon^{\nu\sigma - \rho\mu}}$. Καὶ $\upsilon^{\frac{3}{4}} : \upsilon = \upsilon^{\frac{3}{4}} : \upsilon^{\frac{1}{1}}$
$= \upsilon^{\frac{3\cdot1}{4\cdot1}} : \upsilon^{\frac{1\cdot4}{1\cdot4}} = \upsilon^{\frac{3}{4}} : \upsilon^{\frac{4}{4}} = \upsilon^{\frac{3-4}{4}}$

$$= \upsilon^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\upsilon^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\upsilon}}$$

§. 209. Ὥσπερ αἱ κλασματικαὶ δυνάμεις τῷ πολλαπλασιασμῷ τοῦ κατ' αὐτὰς ἀριθμητοῦ εἰς ὑπερτέρας δοθείσας δυνάμεις ἐξαίρονται, οὕτως ἐκ τοὐναντίου διὰ τῆς τῶν ἐκθετῶν καταίρονται διαιρέσεως, ἤ, ὃ ταυτόν ἐςι, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ παρονομαςοῦ τοῦ κλασμ. ἐκθέτου· (οὕτω γὰρ διαιρεῖται τὸ κλάσμα δἰ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ (§. 146.)) Τοῦτο δὲ καλεῖται, τὴν ῥίζαν ἐκ τοῦ κλασματικοῦ ἐκθέτου ἐξάγειν. π. χ. δεῆσαν ἀπὸ τοῦ $a^{\frac{1}{4}}$ τὴν τριπλῆν ῥίζαν ἐξαχθῆναι, ἔςαι $a^{\frac{1}{4}} : 3 = a^{\frac{1}{4\cdot3}} = a^{\frac{1}{12}}$. Ὅτι δὲ τὸ $a^{\frac{1}{12}}$ ἡ τριπλῆ ἐςὶ ῥίζα τοῦ $a^{\frac{1}{4}}$, ἢ ὅτι $\frac{1}{4}$ διὰ τοῦ τρὶς πολλαπλασιασμοῦ τοῦ $a^{\frac{1}{12}}$ ἀνέψυ, οὐ χαλεπὸν συνιδεῖν, εἰδόσιν, ὅτι δυνάμεις πολλαπλασιάζειν ἐςὶ τὸ τοὺς αὐτῶν ἐκθέτας προςιθέναι, καὶ ὅτι, ἐὰν ὁ ἐκθέτης τοῦ $a^{\frac{1}{12}}$ τρὶς ἑαυτῷ προςεθῇ, ἐξ ἀνάγκης προκύψει τὸ $a^{\frac{1}{4}}$. Ἔςι γὰρ $a^{\frac{1}{12}} \cdot a^{\frac{1}{12}} \cdot a^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}} = a^{\frac{3}{12}} = a^{\frac{1}{4}}$. Αὖθις ἡ 4 : πλῆ ῥίζα τοῦ $\chi^{\frac{3}{4}} = \chi^{\frac{3}{4}} : 4 = \chi^{\frac{3}{4\cdot4}} = \chi^{\frac{3}{16}} = \sqrt[16]{\chi^{3}}$. ἡ μ : πλῆ ῥίζα τοῦ $\chi^{\frac{\rho}{\sigma}} = \chi^{\frac{\rho}{\sigma}} : \mu = \chi^{\frac{\rho}{\sigma\cdot\mu}} = \sqrt[\sigma\mu]{\chi^{\rho}}$.

Σχόλιον.

Τὰς ῥιζικὰς ποσότητας θέλομεν τὰς πραγματευθῇ κατωτέρω ἀκριβέςερον, καὶ ἐναργέςερον, ἰδιαιτέρως· Ἡ τούτων γνῶσις εἶναι ἀπολύτως ἀναγκαία, ὡσὰν ὁποῦ ἀλλέως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ καταλάβῃ τινὰς τὰ Μαθηματικὰ συγγράμματα, εἰς τὰ ὁποῖα προϋποτίθεται

ται αὐτή· Ὅθεν ὁ εὐκόλως προχωρῆσαι βουλόμενος ἂς προσέχῃ εἰς τοὺς κανόνας, καὶ παραδείγματα.

Περὶ Λύσεως τῶν κλασμάτων εἰς Ἀπείρους Σειράς.

§. 210. Ἕκαςον κλάσμα οὐ μόνον γράφοντες, ἀλλὰ καὶ διὰ σειρᾶς ὅρων παραςῆσαι δυνάμεθα, ἧς τὸ πέρας, ἐφ' ὅσον ἂν βούλῃ, τοῦ ὑπολογισμοῦ προαγομένου, οὐχ εὑρίσκεται· καὶ τοῦτό ἐςιν, ὃ Ἄπειρος Σειρὰ καλεῖται· ἔνθα μᾶλλον, καὶ μᾶλλον τῇ ἀληθείᾳ προσεγγίζουσι, πάντῃ αὐτῆς ἐφικέσθαι οὐχ οἷόντε· ἡ δὲ τούτων χρῆσις ἐπίσημος, ὡς κατωτέρω δειχθήσεται.

§. 211. Πᾶς ἀριθμὸς τῆς 1 μείζων, οὐ μόνον ὡς τῇ προσθέσει δύω ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν προκύψας, ἔχει θεωρηθῆναι, ἀλλὰ καὶ δυσὶν ἀριθμοῖς τοῦτον ἓν παραςῆσαι· π. χ. τὸν 3 παραςήσομεν ὡς ἐκ $2+1$, καὶ τὸν 5 ὡς ἐκ $3+2$, ἢ ἐκ $4+1$ συγκείμενον· Ἀλλὰ τοὺς αὐτοὺς καὶ ὡς διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἀπ' ἀλλήλων δύω ποσοτήτων ἀναφυέντας ἂν θεωρήσαιμεν. Οἷον τὸν 3 ἐκ τοῦ $5-2$, καὶ τὸν 5 ἐκ τοῦ $6-1$, ἢ καὶ καθ' ὀντιναοῦν ἕτερον τρόπον. Ὥςε κλάσμα δι ἀπείρου σειρᾶς παραςῆσαι βουλόμενος ἀπόδος τὸν παρον. διὰ ποσότητος, ἐκ β'. μερῶν συνιςαμένης, ἤτοι τῷ τῆς προσθέσεως, ἢ τῷ τῆς ἀφαιρέσεως συνημμένων σημείω. Ὡς $\frac{2}{3}$ παράςησον διὰ $\frac{2}{2+1}$, ἢ $\frac{2}{4-1}$. καὶ ἐνεργείᾳ διαιρῶν εὑρήσεις πηλίκον τὴν ἄπειρον σειράν. Ἵνα δὲ τοῦτο ἐν γένει δηλωθῇ, παραληπτέον ἐπ' ἀμφοῖν τῶν τρόπων ἀλγεβραϊκὸν κλάσμα, ὡς διὰ τούτου ἁπάντων τῶν κλασμάτων σημαινομένων. Γράψον οὖν κλάσμα τὸ $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, καὶ τὸ μὲν α παριςάτω πάντα ἀριθμὸν, καὶ αὐτὴν τὴν 1, τὸ δὲ $\beta+\gamma$ ὡσαύτως οἱουσοῦν δύω ἀριθμοὺς, μείζους τῆς 1, ἅμα ληφθέντας· π. χ. ἐν τῷ κλ. $\frac{2}{3}$. α ἔςαι $=5$. καὶ ἐὰν τὸ $\beta = 4$ τεθῇ, ἔςαι $\gamma = 2$. Παραπλησίως καὶ τὸ $\frac{\alpha}{\beta - \gamma}$ παραςήσει πᾶν δυνατὸν κλάσμα· Προκείσθω τοίνυν ἄμφω τὰ παραδείγ. ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta + \gamma}$, καὶ $\frac{\alpha}{\beta - \gamma}$, ὧν τὴν ἄπειρον σειρὰν εὑρόντες, ἀντικαταςήσαμεν ῥαδίως ἀντὶ τῶν γραμμάτων ἀριθμούς.

Καὶ α΄. τὸ α΄ ἤτοι τὸ $\frac{\alpha}{\beta + \gamma}$ οὕτως ἐκκείμενον.

$$\beta + \gamma)\ \alpha \ \Big|\ \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\gamma}{\beta\beta} + \frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta\beta} - \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta} + \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta\beta}, \text{κτ.}$$

$$\alpha + \frac{\alpha\gamma}{\beta}$$

$$- \frac{\alpha\gamma}{\beta}$$

$$- \frac{\alpha\gamma}{\beta} - \frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta} + \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta}$$

$$- \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta}$$

$$- \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta} - \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta}$$

$$+ \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta} + \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta\beta}.$$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Του.

Τουτέςι, τὸ β τοῦ διαιρέτου περιέχεται ἐν τῷ α (τῷ διαιρετέῳ) $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐς. Τεθήτω τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἰς τὸ πηλίκον, καὶ πολλαπλασιασθήτω μετὰ τοῦ διαιρέτου. (μέμνησο, ὅπως τὰ κλάσματα πολλαπλασιάζ. καὶ διαιροῦνται). Τὸ γ τοῦ διαιρέτου μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ πολλαπλ. δίδωσιν $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$. Καὶ τὸ β τοῦ διαιρ. μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ αὖθις, δίδ. α. τεθήτωσαν ἄμφω ὑπὸ τὸν διαιρετέον α. Καὶ ἄφαλε α ἀπὸ τοῦ α. Ταῦτα τοίνυν ἀναιροῦσιν ἄλληλα. Ἐπεὶ δὲ οὐκ ἔςιν, ἀφ' ὅτου τὸ $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ ἀφαιρεθήσεται, τίθεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐναντίῳ τῷ σημείῳ· Ὅτι, ὡς εἴρηται, ἐν τῇ ἀφαιρέσει ὁ ἀφαιρετέος τρέπει τὰ ἑαυτοῦ σημεῖα εἰς τἀναντία. Αὖθις τὸ β τοῦ διαιρέτου ἐν τῷ λειψ. $-\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ περιέχεται $-\frac{\alpha\gamma}{\beta\beta}$. τεθήτω εἰς τὸ πηλίκον, καὶ πολλαπλ. μετὰ τοῦ διαιρέτου· $+\gamma.\ -\frac{\alpha\gamma}{\beta\beta} = -\frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta}$. Καὶ $+\beta.\ -\frac{\alpha\gamma}{\beta\beta} = -\frac{\alpha\gamma}{\beta}$. Τεθὲν ὑπὸ τὸν διαιρετέον ἀφαιρεθήτω. Τὸ $-\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ τοῦ ἀφαιρετέου (ὡς τοῦ $-$ σημείου εἰς τὸ $+$ τρεπομένου, διὰ τὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως.) ἀναιρεῖ τὸ $-\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ τοῦ μειωτέου· Καὶ $-\frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta}$, διὰ τὸ μὴ ἔχειν ἀπό τινος ἀφαιρεθῆναι, τίθεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν τῷ σημείῳ +. Καὶ οὕτω χωρούσης τῆς διαιρέσεως, καὶ τῶν κανόνων τῆς ἀφαιρ. πολλαπλ. διαιρέσ. καὶ τῶν + καὶ — σημείων παρατηρουμένων, προκύψει ἐν τῷ πηλίκῳ ἡ προὀφθαλμιῶν σειρὰ, ἣν καὶ περαιτέρω προάξεις ἐπ᾽ ἄπειρον, τούς δε τοὺς κανόνος σημειῶν· 1) τὰ σημεῖα + καὶ — ἐν τῷ πηλίκῳ ἐναλλὰξ ἐπαμείβονται. 2) Ἐν πᾶσι τοῖς ὅροις τοῦ πηλίκου τὸ α ἐςὶν ἐν τῇ α᾽ δυνάμει. 3) Τὸ γ ἐν τῷ ἀριθμ. τοῦ β. ὅρου, τῆς α᾽. ὂν δυνάμεως, ἐπὶ πάντων τῶν ἑπομένων ὅρων, εἰς τὰς φυσικῇ τῇ τάξει χωρούσας δυνάμεις ἐξαίρεται· τὸ δὲ β τοῦ παρονομαςοῦ εὐθὺς ἐν τῷ α. ὅρῳ, τῆς. α᾽. ὂν δυνάμεως, ἐν τοῖς ἑπομένοις διηνεκῶς κατὰ τάξιν εἰς τὰς ὑπερτέρας ἄνεισι δυνάμεις; ἐν πᾶσι τοῖς ὅροις μιᾷ δυνάμει ὑπερτεροῦν τοῦ γ. Τούτων τοίνυν κειμένων, ῥαδίως τὴν σειρὰν προάξεις ἐφ᾽ ὅσον ἂν βούλῃ.

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} - \frac{\alpha\gamma^3}{\beta^4} + \frac{\alpha\gamma^4}{\beta^5} - \frac{\alpha\gamma^5}{\beta^6} \text{ κτ.}$$

Ἐκ τούτου καθορᾶν πάρεςιν, ὅτι τὸ πηλίκον οὐκ ἐντελὲς, ἀλλ᾽ ἀεὶ ἔγγιον τῆς ἀληθείας γίνεται· ὥςε καὶ τὸ λείψ. τῆς διαιρέσ. ὡς κλάσμα τῷ πηλίκῳ προςεθῆναι ἀνάγκη.

Ἔςω $\frac{1}{6}$ ἐξενεκτέον δι᾽ ἀπείρου σειρᾶς· Ἐνταῦθα ἔςαι α = 1. ἔςω β = 4. ὥςε γ = 2. ἀντὶ τῶν γραμμάτων τεθήτωσαν οἱ ἀριθμοὶ ἐν τῇ ἀνωτ. σειρᾷ·

$$\frac{1}{4+2} = \frac{1}{4} - \frac{1\,.\,2}{4^2} + \frac{1\,.\,2^2}{4^3} - \frac{1\,.\,2^3}{4^4} + \frac{1\,.\,2^4}{4^5} \ldots\ldots$$

Ἡ

Ἡ τῶν δυνάμεων ἐνεργεία ἐκδηλωθεισῶν $= \frac{1}{4} - \frac{2}{16} + \frac{4}{64} - \frac{8}{256} + \frac{16}{1024} \ldots$

Ἄθροισον ἐνταῦθα τὰ καταφατικὰς ποσότητας $\frac{1}{4}, \frac{4}{64}, \frac{16}{1024}$, αἵτινες ὑπὸ τὴν αὐτὴν παρονομ. ἀναχθεῖσαι ἀποτελοῦσι $\frac{336}{1024} = \frac{21}{64}$· Ὡσαύτως καὶ τὰς ἀποφατικὰς $-\frac{2}{16} - \frac{8}{256} = \frac{5}{32}$. Καὶ ἄφελε $\frac{5}{32}$ ἀπὸ $\frac{21}{64}$, ὑπὸ τὸν αὐτὸν αἱ παρονομ. τὰ κλάσματα ἀναγαγὼν, καὶ ἔσαι ἡ διαφορὰ $\frac{11}{64}$, ὅπερ οὐ πολλῷ μεῖζον τοῦ $\frac{1}{6}$ (§. 122.) Ἀλλ' ὅσῳ ἄντις τὴν σειρὰν προάγῃ διὰ τῶν $+$ καὶ $-$ σημείων, τοσούτῳ ἂν ἔγγιον τῆς ἀκριβείας γένοιτο.

Εἰ δέοι $\frac{2}{7}$ κατὰ τὸν ἀνωτ. τρόπον ἐκδηλῶσαι, ἔσαι $\alpha = 2$. Ἔσω $\beta = 4$. ὥςε $\gamma = 3$. ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta+\gamma} = \frac{2}{4+3}$. ἀντικατάσησον εἰς τὴν τῶν γραμμάτων σειρὰν τὰς διωρισμένας ποσότητας, καὶ ἔσαι ἡ σειρά.

$$\frac{2}{4+3} = \frac{2}{7} = \frac{2}{4} - \frac{2.3}{4^2} + \frac{2.3^2}{4^3} - \frac{2.3^3}{4^4} + \frac{2.3^4}{4^5} - \frac{2.3^5}{4^6} + \frac{2.3^6}{4^7} - \frac{2.3^7}{4^8} \ldots$$

$$\text{κτ.} = \frac{2}{4} - \frac{6}{16} + \frac{18}{64} - \frac{54}{256} + \frac{162}{1024} - \frac{486}{4096} + \frac{1458}{16384} - \frac{4374}{65536}.$$ Ἀφελὼν

οὖν

σῶν τὰς — ποσότ. ἀπὸ τῶν +, μετὰ τὸ εἰς τὴν αὐτὸν αὐτὰς ἀναγαγεῖν παρονομαστὴν, ἕξεις κλάσμα σου πολλῷ ἔλαττον τοῦ $\frac{2}{7}$.

§. 211. Δεικτέον ἤδη, ὅπως σειρὰ ποσοτήτων διὰ τῆς ἐνεργείας διαιρέσεως τοιούτου κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta-\gamma}$, ἀναφύεται. καὶ διὰ τούτου γὰρ, ὡς εἴρηται, πᾶν κλάσμα παρίσταται· παρατεθήτω κἀνταῦθα τὸ ἀνωτ. διαιρεθὲν παράδειγμα· Ὁ γὰρ τὴν διαίρεσιν ἐπιστάμενος οὐ χαλεπῶς καὶ τοῦτο κατανοήσει·

$$\beta-\gamma)\ \alpha \quad \Big|\ \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}+\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3}+\frac{\alpha\gamma^3}{\beta^4},\ \text{κτ.}$$

$$\alpha-\frac{\alpha\gamma}{\beta}$$

$$+\frac{\alpha\gamma}{\beta}$$

$$+\frac{\alpha\gamma}{\beta}-\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2}$$

$$+\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2}$$

$$+\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2}-\frac{\alpha\gamma^3}{\beta^3}$$

$$+\frac{\alpha\gamma^3}{\beta^3}$$

$$+\frac{\alpha\gamma^3}{\beta^3}-\frac{\alpha\gamma^4}{\beta^4}$$

$$+\frac{\alpha\gamma^4}{\beta^4}$$

Ταύτης

Ταύτης τῆς σειρᾶς οἱ ὅροι πάντες εἰσὶ καταφατικοὶ, καὶ ἡ σειρὰ χωρεῖ ἐπ' ἄπειρον.

$$\frac{\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}+\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3}+\frac{\alpha\gamma^3}{\beta^4}+\frac{\alpha\gamma^4}{\beta^5}+\frac{\alpha\gamma^5}{\beta^6}\ \text{κτ.}$$

Τὸ ἑξῆς παράδειγμα δι' ἀριθμιῶν ἀναπτύξει τὸ λεγόμενον. Ἔςω ζητητέα ἡ σειρὰ τοῦ $\frac{1}{2}$. Ἔςω $\alpha = 1$. $\beta = 4$. καὶ $\gamma = 2$. Καὶ ἔςαι $\frac{\alpha}{\beta-\gamma}$ $=\frac{1}{4-2}$, ὅ ἐςιν $\frac{1}{2}$. Ἀντὶ τῶν γραμμάτων τεθήτωσαν οἱ ἀριθμοί. ὡς $\frac{1}{4-2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 2}{4^2}$ $+\frac{1\cdot 2^2}{4^3}+\frac{1\cdot 2^3}{4^4}+\frac{1\cdot 2^4}{4^5}\ldots$

$$=\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{4}{64}+\frac{8}{256}+\frac{16}{1024}\ldots.$$

Ἐὰν οὖν τὰ κλάσματα ταῦτα ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομ. ἀναχθέντα προςεθῶσι, δώσουσι κεφάλαιον σχεδὸν $\frac{1}{2}$. Ἔςι γὰρ τὸ κεφάλ. $\frac{31}{64}$, ἤτοι τοῦ $\frac{1}{2}$ διάφορα ἔτι κατὰ $\frac{1}{64}$. Καὶ τῆς σειρᾶς προαχθείσης, οὕτως ἀκριβῶς ἐξενεχθήσεται, ὥςε τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ δοθέντος κλάσματος, καὶ τοῦ ἐκ τῆς προσθέσεως τῆς σειρᾶς προκύψαντος, ἀπειροςὴν εἶναι, ἤτοι ἀπείρως μικρὰν, καὶ ἀσφαλῶς τὴν σειρὰν ἀντὶ τοῦ κλάσματος ἀντικαταςῆναι δύνασθαι.

Περὶ Λόγων.

§. 212. Ἡ δύω ἀριθμῶν ὁμοειδῶν, (ἢ ποσοτήτων ἐν γένει) πρὸς ἀλλήλους παράθεσις, τὴν τούτων

ταυ-

ταυτότητα, ἡ διαφορὰν ἀφορῶσα, Λόγος ἀκούει· αὐτοὶ δὲ οἱ παραβαλλόμενοι ἀριθμοὶ, Ὅροι τοῦ Λόγου. ὧν ὁ μὲν προτιθέμενος, Ἡγούμενος, ὁ δ' ἐπιτιθέμενος, Ἑπόμενος καλοῦνται. Ὁ δὲ λόγος διττός. ἤτοι γὰρ, ὅσαις μονάσιν ὁ ἕτερος ὅρος τοῦ ἑτέρου διαφέρει, θεωροῦμεν, (ὃ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἀνακαλύπτομεν) ὅτε καὶ ὁ λόγος Ἀριθμητικός. ἢ ποσάκις ὁ ἕτερος τῷ ἑτέρῳ ἐμπεριέχεται, (ὃ διὰ τῆς διαιρέσεως εὑρίσκομεν) ἔνθα ὁ λόγος Γεωμετρικὸς κέκληται·

Σχόλιον α'.

Ὁ α'. τρόπος τῶν Λόγων ὠνομάσθη ἀριθμητικὸς, ὅτι ἡ παράθεσις γίνεται δι' ἀριθμήσεως τῶν μονάδων, εἰς τὰς ὁποίας κυρίως ἡ Ἀριθμητικὴ καταγίνεται· ἐν δὲ τῷ Γεωμετρικῷ ἡ παράθεσις τῶν δύω ἀριθμῶν γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθὼς παραβάλλομεν ἐν Γεωμετρικὸν ἀντικείμενον. π. χ. μίαν γραμμὴν πρὸς ἑτέραν. τουτ. ἔνθα ζητοῦμεν, ποσάκις ἡ ἐλάττων γραμμὴ, ὡς μέτρον λαμβανομένη, ἐφαρμόζει τῇ μείζονι, ὡς μετρητῷ.

Σχόλιον β'.

Τὸ, Γεωμετρικὸς, παραλιμπάνεται πολλάκις· Ὅθεν ἔνθα τὸ, λόγος, μόνον ἀπαντᾷ, νοητέον τὸν Γεωμετρικόν.

Περὶ Ἀριθμητικοῦ Λόγου.

§. 213. Ὁ ἐν τῷ ἀριθμητικῷ λόγῳ (§. ἀνωτ.) τὴν μεταξὺ τῶν δύω ἀριθμῶν διαφορὰν παριςῶν ἀριθμὸς, Διαφορὰ εἴρηται. Ἐὰν οὖν οἱ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις ἴσοι ὦσιν, ἡ τούτων διαφορὰ ἐςὶ τὸ μηδενικόν. ὡς 6 =

2. 3. Ἐὰν δὲ ἄνισοι, ὡς 9 καὶ 16, τούτους ἀριθμητικῶς παραβάλλουσιν, ἔσονται διάφοροι ἀλλήλων ἑπτὰ μονάσιν. Ἡ δὲ διαφορὰ εὑρίσκεται, τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθέντος, ὡς ἐνταῦθα τοῦ 9 ἀπὸ τοῦ 16. Σημεῖον δὲ τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου, τὸ τῆς ἀφαιρέσεως. (—) (§. 28.) Οἷον $+ 16 - 9$ ἢ $+ 5 - 3$. ἢ $7 - 5$. σημαίνει τὸν ἀριθμητικὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν· ἢ ἐν γένει, $\alpha - \beta$. Ἐπὶ τούτου τοῦ λόγου θεωρητέον γ΄. τινά. α΄.) τὸν μείζω ἀριθμόν. β΄.) τὸν ἐλάσσω. καὶ γ΄.) τὴν τούτων διαφοράν· ταῦτα δὲ οὕτως ἀλλήλοις συνῆπται, ὥστε τῶν δύω δοθέντων, τὸ τρίτον ῥαδίως εὑρήσομεν. Κληθήτω ὁ μείζων α. ὁ ἐλάσσων β. καὶ ἡ διαφορὰ δ. Καὶ ἔσται ὁ μείζων $\alpha = \beta + \delta$. ὁ ἐλάττων $\beta = \alpha - \delta$· καὶ ἡ διαφορὰ $\delta = \alpha - \beta$. Τεθήτω $\alpha = 10$. $\beta = 6$. $\delta = 4$. καὶ ἔσται $\alpha = \beta + \delta$. ἤτοι $10 = 6 + 4$. $\beta = \alpha - \delta$. $6 = 10 - 4$. καὶ $\delta = \alpha - \beta$. ἢ $4 = 10 - 6$. Ὅτι αἱ δὲ παραβαλλόμεναι ποσότητες ὁμοειδεῖς (§. ἀνωτ.) εἶναι ὀφείλουσι, δῆλον. 5 γὰρ ὧραι π. χ. οὐκ ἂν παραβληθεῖεν πρὸς 7 δραχμάς.

Σχόλιον.

Σημείωσαι, ὅτι ἐν τῷ ἀριθμητικῷ λόγῳ $\alpha - \beta$, ἐὰν καὶ εἰς τοὺς δύω ὅρους ἤτοι προστεθῇ ἀριθμός τις, οἷον ὁ γ, ἤτοι ἀφαιρεθῇ, ἡ διαφορὰ μένει ἡ αὐτή· Ὥστε ἐὰν δ ἦναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ α καὶ β, ἔσται ὡσαύτως δ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν $\alpha + \gamma$, καὶ $\beta + \gamma$, καὶ τῶν $\alpha - \gamma$, καὶ $\beta - \gamma$. Καὶ ἂν οἱ δύω ἀριθμοὶ α, καὶ β διπλασιασθῶσι, θέλει διπλασιασθῇ καὶ ἡ διαφορά. ἤτοι ἐὰν $\alpha - \beta = \delta$, ἔσται καὶ $2\alpha - 2\beta = 2\delta$.

Περὶ

Περὶ Ἀριθμητικῆς Ἀναλογίας.

§. 214. Δύω ἀριθμητικοὶ λόγοι, ἀλλήλοις ἴσοι, συςήσουσι σειρὰν ἀριθμῶν, ἐκ δ'. ὅρων συγκειμένην, ἥτις Ἀριθμητικὴ Ἀναλογία καλεῖται. Ἴσοι δὲ οἱ λόγοι ἔσονται, ἑκατέροις τῆς αὐτῆς διαφορᾶς ἐνούσης. ὡς 4 — 7. καὶ 8 — 11. ἔνθα ἐπ' ἀμφοῖν ἡ διαφορὰ, ἡ δ = 3. Ὥςε οἱ δύω λόγοι, ὡς χρὴ, τεταγμένοι, ἀναλογία λέγονται, ἧς σημεῖον τὸ τῆς ἰσότητος, (=) (§. 17.) μεταξὺ ἐκείνων ἐμπίπτον. Οἷον, 5 — 7 = 6 — 8· Καὶ 4 — 12 = 10 — 18 εἰσὶν ἀναλογίαι δύω, ὧν τῆς α'. ἡ διαφορὰ = 2. Τῆς δὲ β'. = 8. Τοὺς δὲ ὅρους τῆς ἀναλογίας οὕτω διατακτέον, ὥςε τοῦ μείζονος ὅρου ἐν τῷ α'. λόγῳ ἡγουμένου, τὸν μείζονα καὶ ἐπὶ τοῦ β'. λόγου ἡγεῖσθαι, καὶ ἀνάπαλιν.

§. 215. Ἐπειδὴ ἐπὶ παντὸς ἀριθμητικοῦ λόγου ὁ μείζων ὅρος ἐκ τοῦ ἐλάσσονος, πλέον τῆς διαφορᾶς, σύγκειται. (§. 213.) εἰς α'. δὲ ὅρον τοῦ λόγου, ἑκάτερος γενέσθαι δύναται, ὡς τοῦ λόγου σώου διὰ τοῦτο τηρουμένου. ἐὰν ὁ ἐλάσσων κληθῇ α, καὶ α'. ὅρος γένηται, ἡ δὲ διαφορὰ δ. ὁ λόγος ἐξενεχθείη ἂν οὕτως $\alpha - \alpha + \delta$· ἢ $\alpha - (\alpha + \delta)$. Ἐὰν δὲ καὶ ὁ α'. τοῦ β'. λόγου, β, ῥηθῇ· ἀνάγκη πᾶσα καὶ τὸν β'. ὅρον τούτου ἐκ τοῦ α'· συνίςασθαι, καὶ τῆς διαφορᾶς· ὡς, $\beta - (\beta + \delta)$. Ὥςε τῶν δύω λόγων, ὡς χρὴ, διαταχθέντων, ἔςαι $\alpha - (\alpha + \delta) = \beta - (\beta + \delta$ γενικὴ ἀναλογία, οἱανοῦν ἀριθμητικὴν παριςῶσα ἀναλογίαν. Οὐδὲν δὲ τὸ κωλύον τὸ τὸν ἑπόμενον ὅρον ἐλάττονα εἶναι τοῦ ἡγουμένου ἐν τῷ α'. λόγῳ. (ὅτε καὶ ἐν τῷ β'. λόγῳ ὁ ἑπόμ. ἐλάττων ἔςαι τοῦ ἡγουμένου. (§. ἀνωτ.).) Τότε γὰρ ἡ διαφορὰ, δ, ἔςαι ποσότης ἀποφατική· ὅπερ τὴν γενικὴν οὐ περιτρέπει ἀναλογίαν. π. χ. 12 — 8 = 15 — 11. ἀριθμητικὴ ἀναλογία, ἧς ὁ β'. καὶ ὁ δ'. ὅρος ἐλάσσων τοῦ α'. καὶ γ'. Ἡ διαφορὰ, ἤ, δ, μεταξὺ ἑκατέρας τῶν ὅρων δυάδος = — 4. Ὥςε + δ γίνεται = — 4. Ἄρα τὸ σχῆμα ἔςαι 12 — (12 — 4) = 15 — (15 — 4.). Ἐπεὶ δὲ ἡ διαφορὰ = 4, ἔξεςι τοὺς ὅρους ἀντιςρέφειν, καὶ ἡ διαφορὰ αὖθις ἡ αὐτὴ μενεῖ, 4. Ἡ ἀναλογία οὖν ἔςαι 8 — 12 = 11 — 15, κατὰ πάντα σύμφωνος τῷ γενικῷ σχήματι α — (α + δ) = β — (β + δ).

§. 216. Διττὴ δὲ ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία, ἤτοι Συνεχὴς, ἢ Διακεκριμένη· Καὶ τοῦτο μὲν, εἰ ὁ γ'. ὅρος διάφορος τοῦ β'. οἷα τὰ προτεθέντα παραδείγματα. Ἐκεῖνο δὲ, τοῦ γ'. ὅρου τοῦ αὐτοῦ τῷ β'. ὄντος. Ὡς, 9 — 13 = 13 — 17. Τὸ δὲ γενικὸν σχῆμα (§. ἀνωτ.) καὶ τῇ συνεχεῖ ἐφαρμόσει ἀναλογίᾳ, εἰ μόνον β = α + δ, ἤτοι ὁ γ'. ὅρος ἴσος τῷ β'. τεθῇ· Εἰ οὖν, ἐπὶ τοῦ γενικοῦ σχήματος, τὸ α + δ ἀντικατας῀ῇ τοῦ β, τραπήσεται εἰς τόδε· α — (α + δ) = (α + δ) — (α + δ + δ). ἢ α — (α + δ) = (α + δ) — (α + 2 δ). Ὅπερ ὁ τύπος τῶν συνεχῶν ἀναλογιῶν. Παράδ. δι' ἀριθμῶν. 9 — 16 = 16 — 23. Ἡ κατὰ τὸν τύπον, (ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ = 7) 9 — (9 + 7) = (9 + 7) — (9 + 2. 7.)

Σχόλιον α'·

Ἂν ὁ α'. ὅρος παράγηται ἐκ τοῦ β'. ὡς ὁ δ'. ἐκ τοῦ γ'. ὀνομάζεται Ἀντίςροφος ἡ ἀναλογία· ἢ λόγος Ἀντίςροφος. ἢ Ἀντιπεπονθώς· οἷον 9, 5, 7, 11. ἔνθα 9 ἀνακύπτει ἐκ τοῦ 5, ὄχι ὡς 7 ἐκ τοῦ 11, ἀλλ' ὡς 11 ἐκ τοῦ 7. τουτ. διὰ προσθέσεως τῆς διαφορᾶς 4. Ὥςε οἱ ἀριθμοὶ 9, 5, 7, 11 εἶναι ἐν ἀντιςρόφῳ λόγῳ, ἢ ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ, ἢ ἐν ἀντιςρόφῳ ἀναλογίᾳ.

Σχόλιον β'.

Εἰς διαφερὰν, ἡ ἀναλογία ἡ μὴ ἀντίςροφος λέγεται Ὀρθὴ, καὶ ὁ λόγος Ὀρθὸς, ἢ Εὐθὺς, ἢ Εὔθετος εἰς τὴν ὀρθὴν ἀναλ. δύναται νὰ μεταβῇ κάθε ἀντίςροφος, ἐὰν μεταξῇ τοῦ ἑτέρου λόγου ὁ ἕτερος ὅρος.

§. 217. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται, ὅτι, ἐπὶ πασῶν τῶν ἀριθμητικῶν ἀναλογιῶν, (συνεχῶντε, καὶ διακεκριμένων (§. ἀνωτ.)) τὸ κεφάλαιον τῶν δύω μέσων ὅρων ἴσον ἐςὶ τῷ κεφαλαίῳ τῶν δύω ἄκρων. π. χ. $4 - 9 = 16 - 21$. Ἔνθα $4 + 21. = 9 + 16$, ἄμφω $= 25$. Καὶ ἐν συνεχεῖ. $7 - 13 = 13 - 19$. κἀνταῦθα $7 + 19 = 13 + 13 = 26$. Τοῦτο δ'ἕπεται ἐκ τῶν γενικῶν τύπων. (§. ἀνωτ.) Τῆς γὰρ διακεκριμένης ἀναλογίας ὁ γενικὸς τύπος ἦν $\alpha - (\alpha + \delta) = \beta - (\beta + \delta)$. Ἔνθα οἱ δύω ἄκροι ὅροι $\alpha + \beta + \delta = \alpha + \delta + \beta$ τοῖς δύω μέσοις. Τῆς δὲ συνεχοῦς ὁ $\alpha - (\alpha + \delta) = (\alpha + \delta) - (\alpha + 2\delta)$. Οὗ οἱ ἄκροι $\alpha + \alpha + 2\delta = \alpha + \delta + \alpha + \delta = \alpha\alpha + 2\delta = (\alpha + \delta)\,2$, τοῖς μέσοις. Τοῦτο δὲ καὶ βάσανον ἕξομεν τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Τοῦ γὰρ κεφαλαίου τῶν δύω μέσων ἴσου τῷ κεφαλαίῳ τῶν δύω ἄκρων ὄντος, ἡ ἀναλογία ἔςαι Ἀριθμητική. ἄλλως δ' οὐχί.

§. 218. Ἐφ' οἱασοῦν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας, ἔξεςι τοὺς ὅρους καὶ εἰς ἀλλήλους μεταμείβεσθαι, ὥςε τὸν α'. εἰς β'. καὶ τοῦτον αὖθις εἰς α'. γίνεσθαι· ὅπερ ἅμα καὶ τοῖς τοῦ β'. λόγου ὅροις συμβαίνειν ἀνάγκη, τῆς ἀναλογίας διὰ τοῦτο μὴ οἰχομένης. Καὶ πᾶσαν τὴν ἀναλογίαν ἀντιςρέφεσθαι. Οἷον ἥδε ἡ ἀναλογία $5 - 7 = 9 - 11$ μεταμειφθείη ἂν εἰς τήνδε. $7 - 5 = 11 - 9$. καὶ εἰς τήνδε. $9 - 11 = 5 - 7$. Ἐφ' ἑκατέραν τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων, ἢ τῶν

ἄκρων

ἄκρων ὅρων $= 16$. Ὥςε ἄμφω ἀριθμητικαὶ ἀναλογίαι.

§. 219. Ἀλλὰ καὶ εναλλὰξ τῶν ὅρων λαμβανομένων, (τουτ: α'. καὶ γ'. β'. καὶ δ'.) τὰ τῆς ἀναλογίας αὖθις σώζεται· $5 - 9 = 7 - 11$. τοῦτο δὲ καὶ τῇ συνεχεῖ ἁρμόζει ἀναλογία· ὅπερ ἐκ τῶν καθόλου τύπων, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κατατεχθέντων, σαφῶς πρόδηλον.

§. 220. Τριῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας δοθέντων, ῥᾷςα ὁ δ'. εὑρεθήσεται· Ἔςι γὰρ οὗτος ἡ διαφορὰ τοῦ α'. ὅρου ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τοῦ β'. καὶ γ'. ἀφαιρεθέντος. Ἡ ἐὰν ὁ πρῶτος, α, κληθῇ, ὁ δεύτερος β. καὶ ὁ τρίτος γ, ἔςαι ὁ δ'. ὁ ζητούμενος, ὅς χ ῥηθήτω, $\chi = \beta + \gamma - \alpha$. Δείκνυται δὲ οὕτως. Ἡ ἀναλογία ἐςὶν $\alpha - \beta = \gamma - \chi$. Ἐπεὶ δὲ

$$\begin{array}{l} \alpha + \chi = \beta + \gamma \quad (\S.217.) \\ \underline{\quad\alpha \quad = \quad \alpha\quad} \text{ ἀφαιρ. ἔςαι} \\ \chi = \beta + \gamma - \alpha \end{array}$$

Παράδειγμα. $5 - 12 = 16 - \chi$. ἔνθα $\chi = 16 + 12 - 5 = 28 - 5 = 23$. Ὅθεν ἡ ἀναλογία $5 - 12 = 16 - 23$. Ἐπεὶ δὲ κατὰ τὸ (§. 218.) πᾶς ὅρος τῆς ἀναλογίας ἔσχατος ἂν γένοιτο, ἀληθεύει ἄρα ἐν γένει, ὅτι τριῶν ὅρων δοθέντων, εὑρήσομεν τὸν δ'. διὰ τούτων. Ἀπέςω π. χ. ὁ α'· ὥςε $23 - 16 = 12 - \chi$. ἔνθα $\chi = 12 + 16 - 23 = 28 - 23 = 5$. ἢ ὁ β'. ὥςε $16 - 23 = 5 - \chi$. καὶ $\chi = 5 + 23 - 16 = 12$. ἢ ὁ γ'. $12 - 5 = 23 - \chi$. ἔνθα $\chi = 23 + 5 - 12 = 16$. αἰτία δὲ, τὸ πάντα ὅρον ζητούμενον εἰς ἔσχατον γίνεσθαι· Καὶ ἐν γένει. Ὁ γενικὸς τύπος ἐςὶν $\alpha - \alpha + \delta = \beta - (\beta + \delta.)$ Ἀπέςω ὁ α'· ὅρος α, καὶ ἡ ἀναλογία μενεῖ, ἐὰν τὸ α ἔσχατος ὅρος γένηται· τηνικαῦτα

γὰρ

γὰρ ἔςαι $(\beta+\delta)-\beta=(\alpha+\delta)-\chi$. καὶ $\chi=(\beta+\alpha+\delta)-(\beta+\delta)$, ὁ ἀφαιρεθὲν ὑπολείψει α. Ἀπέςω ὁ β. καὶ ἔςαι $\beta-(\beta+\delta)=\alpha-\chi$. Καὶ $\chi=(\alpha+\beta+\delta)-\beta=\alpha+\delta$. Ὁ γ. καὶ ἔςαι $(\alpha+\delta)-\alpha=(\beta+\delta)-\chi$. καὶ $\chi=(\beta+\delta+\alpha)-(\alpha+\delta)=\beta$. Τὰ αὐτὰ ποιήσομεν κἀπὶ τῶν συνεχῶν ἀναλογιῶν.

§. 221. Τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας τρεῖς ὅρους κυρίως ἐχούσης, ἐὰν οἱ δύω ἄκροι δεδομένοι ὦσιν, αὐτίκα τὸν μέσον εὑρήσομεν, τῇ διαιρέσει τοῦ κεφαλαίου τῶν δύω ἄκρων διὰ 2. Ἡ δὲ τοιαύτη ἀναλογία ἔςω $\alpha-\chi=\chi-\delta$.

καὶ $\alpha+\delta=\chi+\chi=2\chi$. διαιρ. διὰ 2.

$$\frac{\alpha+\delta}{2}=\frac{2\chi}{2}=\chi.$$

Παράδειγμα $3-\chi=\chi-19$. Ἔνθα $\chi=\frac{19+3}{2}=\frac{22}{2}=11$. Ἡ δ' ἀναλογία $3-11=11-19$.

Περὶ Ἀριθμητικῆς Προόδου.

§. 222. Ἐὰν συνεχεῖς ἀριθμητικαὶ ἀναλογίαι (§. 216.) οὕτω συγκροτῶνται, ὥςε τὸν α'. ὅρον λόγον ἔχειν πρὸς τὸν β', ὃν ὁ β'. πρὸς τὸν γ'. ὃν ὁ γ'. πρὸς τὸν δ'. κτ. Ἢ ἐὰν ἐφ' οἱασοῦν συνεχοῦς ἀναλογίας ὁ γ. ὅρος αὖθις εἰς α'. γένηται, καὶ ὁ δ'. εἰς β'. καὶ γ'. ἑτέρας καινῆς συνεχοῦς ἀναλογίας, κἀκ τούτων αὖθις ὁ δ'. ὅρος ζητῆται, καὶ διηνεκῶς οὕτω χωρῶμεν, ἀνακύψει σειρὰ ἀριθμῶν Ἀριθμητικὴ Πρόοδος καλουμένη· ὡς $2-4=4-6$. Αὖθις $4-6=6-8$. Καὶ $6-8=8-10$. Καὶ $8-10=10-12$. Ἔνθα οἱ α'.

δύω

δύω ὅροι, (2, καὶ 4,) καὶ πάντες οἱ μετὰ τούτους εὑρεθέντες, Ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς Προόδου ἀκούουσιν. Ἡ δὲ προκειμένη πρόοδος σύγκειται ἐκ τῶν ἀριθμῶν, 2, 4, 6, 8, 10, 12. Ἐὰν δὲ καὶ καθόλου θεωρηθῇ, ἐκκείσονται οὕτως αἱ ἀναλογίαι ἀλλήλαις ἑπόμεναι. $\alpha \div (\alpha + \delta) = (\alpha + \delta) - (\alpha + 2\delta)$. Αὖθις $(\alpha + \delta) \div (\alpha + 2\delta) = (\alpha + 2\alpha\delta) - (\alpha + 3\delta)$. Καὶ $(\alpha + 2\delta) - (\alpha + 3\delta) = (\alpha + 3\delta) - (\alpha + 4\delta)$ κτ. Οἱ ὅροι οὖν τῆς προόδου, ὧν δ τὴν διαφορὰν ἐμφαίνει, εἰσὶν οἵδε.

$\alpha,\ \alpha + \delta,\ \alpha + 2\delta,\ \alpha + 3\delta,\ \alpha + 4\delta$ κτ. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι σειράτις ποσοτήτων, ἢ ἀριθμῶν, κατάτινα κοινὸν νόμον ἐπίσης αὐξουσῶν, ἢ μειουμένων, ἐξ ὅσων ἂν συγκροτῆται ὅρων, ἀριθμητικὴ ἀκούει Πρόοδος. αἱ δὲ ποσότητες, ἢ οἱ ἀριθμοὶ, ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς προόδου. Ὅτι δὲ τοῦτο ἀληθεύει λεγόμενον, καὶ εἰ ἐπίσης μειοῦνται, ῥάδιον κἂν ἐκ τούτου συνιδεῖν, ὅτι τὴν τῶν ποσοτήτων σειρὰν καὶ εἰς τοὐπίσω (τουτ: δεξιόθεν πρὸς ἀριστερὰ) θεωρεῖν ἔχομεν. ἢ ὅτι δ καὶ ἀποφατικὴ ποσότης εἶναι δύναται, ἑκάστου ὅρου κατὰ δ ἐλαττουμένου. Ἡ οὖν Πρόοδος ἤτοι Αὔξουσά ἐστιν, ἢ Μειουμένη, ἤπου ἂν οἱ κατ' αὐτὴν ὅροι ἔχοιεν· κἀκεῖνο μὲν ἔσται, ἐὰν οἱ ὅροι διηνεκῶς αὔξωσι. τοῦτο δὲ, τῶν ὅρων ἀεὶ ἐλαττουμένων. Οὕτως ἂν εἴη 2, 4, 6, 8, 10 κτ. αὔξουσα πρόοδος. Καὶ 12, 9, 6, 3, 1, μειουμένη. ἧς (μειουμένης) ἡ διαφορὰ τῶν ὅρων = 3.

§. 223. Ὁ ἀριθμὸς, καθ' ὃν οἱ ὅροι τῆς ἀριθμ: προόδου αὔξονται, ἢ μειοῦνται, καλεῖται ὡσαύτως Διαφορά. (§. 213.) Ἐὰν οὖν ὁ α. ὅρος, καὶ ἡ διαφορὰ δοθῶσιν, ἐφ' ὅσον βουλώμεθα, τὴν ἀριθμητικὴν πράξομεν πρόοδον· ἕκαστος γὰρ ὅρος εὑρεθήσεθήσεται, τῆς διαφορᾶς τῷ προηγουμένῳ ὅρῳ προςεθείσης. ὡς 2, 5, 8, 11, 14 κτ.

§. 224. Γράφομεν δὲ καὶ ἐπὶ τοὺς ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου τοὺς φυσικῇ τάξει ἀλλήλους διαδεχομένους χαρακτῆρας, ἵν' ἡ τάξις ἑκάςου τούτων ῥαδίως ἐπιγινώσκηται, οὕς (χαρακτ:) τὸν Δείκτην ἀποκαλοῦσιν. Ἀλλ' ἵνατί τὸ ἐκ τούτου ἑπόμενον ἴδωμεν, προκείσθω ἔτι ἅπαξ ἡ σειρά·

$\overset{1}{\alpha}$, $\overset{2}{\alpha + \delta}$, $\overset{3}{\alpha + 2\delta}$, $\overset{4}{\alpha + 3\delta}$, $\overset{5}{\alpha + 4\delta}$, $\alpha + 5\delta$, κτ. ἔνθα οἱ ἀριθμοὶ, 1, 2, 3, κτ. οἱ δεῖκται εἰσίν· Ἐν ταύτῃ ἔπεςι καθορᾶν, ἐφ' ἑκάςου ὅρου τὸ δ, ἢ τὴν διαφορὰν, μονάδι ἐλάσσονα εἶναι τῆς κατὰ τὸν ὅρον πληθύος, ἢ τοῦ Δείκτου· οὕτω π. χ. τῷ ε'. ὅρῳ 4δ. ἔνεισι, τῷ ς'. 5δ, κτ. Ἐξ ὧν συνάγεται, ὅτι, ἐὰν ὁ α'. ὅρος $= \alpha$, καὶ ἡ διαφορὰ $= \delta$, δοθῶσιν, ἕκαςος ζητούμενος ὅρος ῥαδίως εὑρεθήσεται. ἔςι γὰρ $\alpha +$ τοῦ μονάδι ἐλάττονος δ τῆς κατὰ τὸν ζητούμενον ὅρον πληθύος, ἢ τοῦ δείκτου· οὕτως ἂν εἴη ὁ κ'. ὅρος $\alpha + 19\delta$. ὁ δὲ μ'. $\alpha + 39\delta$. διὰ τῆς τούτων θεωρίας, καὶ καθόλου τύπον εἰς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου ὅρου ἑκάςης ἀριθμητικῆς εὑρεῖν δυνάμεθα προόδου. ἐὰν γὰρ ἡ πλῆθυς τῶν ὅρων ἐν γένει $= \pi$ τεθῇ, ἀνάγκη πᾶσα ἐν τῷ ἐσχάτῳ ὅρῳ τὸ δ μονάδι ἔλαττον εἶναι τῆς κατὰ τὸν ὅρον πληθύς, ἤτοι ἔςαι $(\pi - 1)\,\delta$. Ὁ οὖν ἔσχατος ὅρος ἐπὶ πάντων ἔςαι $\alpha + (\pi - 1)\,\delta$.

Παράδειγμα. Ἔςω ὁ α'. ὅρος, ἢ τὸ $\alpha = 1$. καὶ δ ὡσαύτως $= 1$, ἤτοι ἔςωσαν οἱ ὅροι μονάδι ἀλλήλων διαφέροντες· Ἡ τῶν ὅρων πλῆθυς, ἤτοι τὸ π, ἔςω 12. ἔςαι οὖν ὁ π:ος ὅρος, ἤτοι ἐνταῦθα ὁ ἔσχατος δωδέκατος ὅρος, ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἀντὶ τῶν γραμμάτων ἀντικατας῀ῶσιν, $= 1 + (11.)\,1$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μονὰς οὐ πολλαπλασιάζει $= 1 + 11 = 12$. Καὶ αὕτη ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶεν ἂν οἱ

φυσι-

Φυσικοὶ χαρακτῆρες. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. οἵτινες ἐν ἀριθμητικῇ τῷ ὄντι προόδῳ, ὧν ἡ διαφορὰ $=1$, ἵςανται.

Ἕτερον παράδειγμα· Ἔςω $\alpha = 3$. $\delta = 2$. καὶ π, ἤτοι ἡ πλῆθυς τῶν ὅρων $= 11$. Ἡ δὲ σειρὰ ἔςαι $3 + 5 + 7$. κτ. Ὁ δ' ἑνδέκατος ἐνταῦθα ζητούμενος ὅρος $= \alpha + (\pi - 1)\delta = 3 + (11 - 1)2 = 3 + 10.\ 2 = 3 + 20 = 23$.

Ἔςω αὖθις $\alpha = 1$. $\delta = 6$. $\pi = 36$. Ἡ οὖν σειρὰ εἴη ἂν 1, 6, 12, κτ. καὶ ὁ ἔσχατος, ἤτοι ἐνταῦθα ὁ λϛ'. ὅρος $= 1 + (36 - 1)\ 6 = 1 + 35.\ 6 = 211$.

Ἔνθεντοι ἐκ τοῦ α'. ὅρου, καὶ τῆς διαφορᾶς, εὑρεῖν δυνάμεθα τὸν ζητούμενον ὅρον. Ἀεὶ γὰρ ὁ τύπος τούτῳ ἐφαρμόζει, ὡς τὸν ζητούμενον ὅρον ἀντὶ τοῦ π. ἤτοι τοῦ ἐσχάτου θεωρεῖν ἐχόντων.

§. 225. Ἐφ' οἱασοῦν ἀριθμητικῆς προόδου δ'. τινὰ θεωρητέα.

1) Ὁ πρῶτος ὅρος. ὃς α κληθήτω.

2) Ὁ ἔσχατος. ὅς τις $= \omega$ τεθήτω.

3) Ἡ διαφορὰ $= \delta$.

4) Ἡ πλῆθυς τῶν ὅρων $= \pi$. Τριῶν οὖν ἐκ τούτων δοθέντων, ῥᾷςα τὸ τέταρτον εὑρήσομεν.

1) Ἔςωσαν δεδομένα α, ω, καὶ δ. ἤτοι ὁ α'. ὅρος, καὶ ὁ ἔσχατος μετὰ τῆς διαφορᾶς, καὶ ζητηθήτω π, ἤτοι ἡ τῶν ὅρων πλῆθύς. ὁ ἔσχατος ὅρος ἦν (§. ἀνωτ.) $= \alpha + (\pi - 1)\delta$. ὥςε $\omega = \alpha + (\pi - 1)\delta$· ἡ ἐνεργείᾳ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γεγονότος,

$\omega = \alpha + \pi\delta - \delta$. Ἐνταῦθα ζητεῖται τὸ π.
$\alpha = \alpha$. ἄφελε ἀπ' ἀμφοῖν τὸ α.

$\omega - \alpha = \pi\delta - \delta$. δίελε ἄμφω διὰ δ.

$\frac{\omega - \alpha}{\delta} = \pi - 1$

$+ 1 = + 1$ πρόσθες ἀμφοῖν + 1.

$\frac{\omega - \alpha}{\delta} + 1 = \pi$. Ὥςε π, ἤτοι ἡ πλῆθυς τῶν ὅρων, ἐςὶν ὁ ἔσχατος ὅρος, πλὴν τοῦ πρώτου, διαιρεθεὶς διὰ τῆς διαφορᾶς, καὶ μονάδος τῷ πηλίκῳ προςεθείσης.

Παράδειγμα. Ἔςω ὁ α'. ὅρος τῆς προόδου $= 4$. ὁ ἔσχατος 34, καὶ ἡ διαφορὰ 3. Ὥςε ζήτησον τὴν πλῆθυν τῶν ὅρων οὕτως. $\alpha = 4$. $\omega = 34$. $\delta = 3$. Καὶ ἔςαι $\pi = \frac{34 - 4}{3} + 1 = \frac{30}{3} + 1 = 10 + 1 = 11$. Ἡ δὲ σειρὰ χωρήσειεν οὕτω.

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34.

Ἕτερον παράδειγμα. $\alpha = 216$. $\omega = 6$. $\delta = 5$. Ὁ οὖν ἔσχατος ὅρος, ἢ $\pi = \frac{6 - 216}{5} + 1 = -\frac{210}{5} + 1 = -43$. Ὅτι δὲ ὃ διαιρετέος ἐνταῦθα ἀποφατικὸς, διὸ καὶ τὸ πηλίκον ἀποφατικὸν προέκυψε, (§. 77.) μηδένα εἰς ἀπάτην παρατρεπέτω· Ἔςι γὰρ ἡ σειρὰ μειουμένη (§. 222.) ὡς τοῦ α'. ὅρου μείζονος ληφθέντος τοῦ ἐσχάτου· Ἔξεςι δὲ, τοῦ α'. καὶ ἐσχάτου ὅρου δοθέντων, τὴν σειρὰν καὶ ἀνάπαλιν θεωρεῖσθαι, καὶ τὸν α'. ὅρον, ὡς τὸν ἔσχατον, ὃ τὴν τοῦ ὅρων πλῆθυν ἥκιςα μεταβάλλει· καὶ τηνικαῦτα ἔςαι $\pi = \frac{216 - 6}{5} + 1 = 43$.

Σχόλ.

Σχόλιον.

Ἂς μὴ ξενίσῃ τινὰ τὸ ἐν τῷ β'. παραδ. $-\frac{210}{5}+1=43$. διότι ἀγκαλὰ καὶ κατὰ τὸ φαινόμενον ὤφειλεν εἶναι -41. Ὅτι $-\frac{210}{5}=-42+1=-41$. Ἀλλὰ τὸ ἄτοπον οἴχεται, ἐὰν ληφθῇ 5, ὅ ἐςιν ἡ διαφορὰ ἀποφατική. Ἐπὶ γὰρ τῆς μειουμένης σειρᾶς ἀεὶ ἡ διαφορὰ τοιαύτη. Ὅθεν $-\frac{210}{-5}=+42$. (§. 77.) $+1=43$. ἢ -43. ὡς τῆς προόδου μειουμένης οὔσης·

2) Δοθέντων τοῦ α, ω, καὶ π, ἤτοι τοῦ α', καὶ ἐσχάτου ὅρου, καὶ τῆς τῶν ὅρων πληθύος, ζητηθήτω δ, ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ὅρων, ἥτις ὡσαύτως διὰ τοῦ προτέρου τύπου εὑρίσκεται.

$\omega=\alpha+\pi\delta-\delta$. ἀφαιρεθήτω ἑκατέρωθεν α.

$\omega-\alpha=\pi\delta-\delta$. ἢ

$\omega-\alpha=(\pi-1)\delta$. διαιρεθ. ἄμφω διὰ $\pi-1$.

$\frac{\omega-\alpha}{\pi-1}=\frac{(\pi-1)\delta}{\pi-1}$. ἢ $=\delta$. Ὅτι τὸ $\pi-1$ τοῦ διαιρετέου ἀναιρεῖται ὑπὸ τοῦ $\pi-1$, τοῦ διαιρέτου· ὥςε ὁ ἔσχατος ὅρος, πλὴν τοῦ α'. διαιρεθεὶς διὰ τῆς μονάδι μειωθείσης πληθύος τῶν ὅρων, παρέξει σοι τὴν διαφοράν.

Παράδειγμα. Ἔςω ὁ α'. ὅρος 5. ὁ ἔσχατος 97. καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὅρων 19. Ὥςε $\alpha=5$. $\omega=97$. καὶ $\pi=19$. Ἔςαι οὖν $\delta=\frac{97-5}{19-1}=\frac{92}{18}=5\frac{1}{9}$.

Ἡ δὲ πρόοδος ἂν εἴη 5, $10\frac{1}{9}$, $15\frac{2}{9}$, $20\frac{3}{9}$, $25\frac{4}{9}$, $30\frac{5}{9}$, $35\frac{6}{9}$, κτ. μέχρι τῶν 97. ἣν ἕκαςος συγκρατήσει, εἰ μόνον ἀεὶ ἑκάςῳ ὅρῳ προηγηθέντι τὴν διαφορὰν, ἢ $5\frac{1}{9}$, προςίθησι.

3) Εἰ

3) Εἰ δέδονται α, δ, π, ἤτοι ὁ α'. ὅρος, ἡ διαφορὰ, καὶ ἡ πλῆθυς τῶν ὅρων, ζητηθήτω ὁ ἔσχατος. Κατὰ τὸ (ἀρ. 1) ὁ ἔσχατος, ἤτοι $\omega = \alpha + (\pi - 1)\delta$.

Παράδειγμα. Ἔςω $\alpha = 2$. $\delta = 3$. $\pi = 12$. Ἐςὶν ἄρα $\omega = 2 + (12 - 1)3 = 2 + 11.3 = 2 + 33 = 35$. Ἡ δὲ πρόοδος ; ωροίη ἂν οὕτω. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35.

4) Ἐὰν ὦσι γνωςὰ ω, δ, π, ἤτοι ὁ ἔσχατος ὅρος, ἡ διαφορὰ, καὶ ἡ πλῆθυς τῶν ὅρων, εὑρήσομεν α, ἤτοι τὸν α'. ὅρον, κατὰ τὸν ἐγνωσμένον τρόπον.

$$\omega = \alpha + (\pi - 1)\delta$$ ἀφαιρ. ἴσον ἀπ' αμφοῖν τὸ

$$\frac{(\pi - 1)\delta = (\pi - 1)\delta}{\omega - (\pi - 1)\delta = \alpha}$$ ἤτοι ὁ ἔσχατος ὅρος, πλὴν τῆς μονάδι μειωθείσης πλήθυος τῶν ὅρων, πολλαπλασθιασθεὶς ἐπὶ τὴν διαφορὰν, δίδωσι τὸν α'.

Παράδειγμα. $\omega = 72$. $\pi = 11$. $\delta = 2\frac{1}{2}$. Ὁ α'. ὅρος $\alpha = 72 - (11 - 1)2\frac{1}{2} = 72 - 10 \cdot \frac{5}{2}$. (133.) $= 72 - 25 = 47 =$ τῷ α'. ὅρῳ. Ἡ δὲ πρόοδος ἔςαι 47, $49\frac{1}{2}$, 52, $54\frac{1}{2}$, 57, $59\frac{1}{2}$, 62, $64\frac{1}{2}$, 67, $69\frac{1}{2}$, 72.

Εἰς μνήμης ἐπιβοήθημα ἐκκείσθωσαν τὰ τέσσαρα τῶν σχημάτων ἐν τῷ ἑξῆς πινακιδίῳ.

Ἐὰν δοθῇ α, ω, καὶ δ, ἔςαι $\pi = \frac{\omega - \alpha}{\delta} + 1$.

Ἐὰν δὲ α, ω, καὶ π, ἔςαι $\delta = \frac{\omega - \alpha}{\pi - 1}$

Ἐὰν δὲ α, δ, καὶ π, ἔςαι $\omega = \alpha + (\pi - 1)\delta$

Ἐὰν δὲ δ, π, καὶ ω, ἔςαι $\alpha = \omega (\pi - 1)\delta$.

§. 226.

§. 226. Ἡ ἀριθμητικῆς οἰασοῦν προόδου καθόλου σειρὰ ἦν. §. 224.

$$\div \overset{1}{\alpha},\ \overset{2}{\alpha + \delta},\ \overset{3}{\alpha + 2\delta},\ \overset{4}{\alpha + 3\delta},\ \overset{5}{\alpha + 4\delta},\ \alpha + 5\delta,\ \ldots$$

Ἐὰν οὖν δύω τῶν τυχόντων ὅρων ἀριθμητικῆς οἰασοῦν προόδου, τῶν ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφισαμένων, προςεθῶσιν, ἀεὶ τὸ αὐτὸ προκύψει κεφάλαιον· Οἷον ἐπὶ τοῦ προκειμ. παραδ. ὁ α'. καὶ ς'. ὁ β'. καὶ ε'. ὁ γ'. καὶ δ'. παρέξουσι $2\alpha + 5\delta$, τὸ δὲ οὐδὲν ἔχει δυσξύμβλητον. Οἱ γὰρ ὅροι, ἀπὸ τέλους ἀριθμούμενοι, μειοῦνται διηνεκῶς κατὰ δ. ἀπ' ἀρχῆς δὲ, αὔξουσι κατὰ δ. Ὥς ἐξ ἀνάγκης ἀληθεύει ὁ κανών. π. χ. ἐν τῇδε τῇ προόδῳ 3, 5, 7, 9, 11, 13, τὸ κεφάλαιον τὸ ἐκ δύω ἐπίσης ἀπ' ἀλλήλων, καὶ ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφισαμένων ὅρων ἔσαι $=16$.

Ἐκ τούτου καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλικοῦ κεφαλαίου ἁπάντων τῶν ὅρων ἑκάσης ἀριθμητικῆς προόδου ποδηγετούμεθα. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἐκ δύω ὅρων κεφάλ. ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφισαμένων, καὶ ἀπ' ἀλλήλων, τὸ αὐτὸ ἐςι τῷ κεφαλαίῳ ἑτέρων δύω ὅρων, ὡσαύτως ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφισαμένων. Ἀναγκαῖον ἄρα, τὸ κεφάλαιον τὸ ἐκ δύω τοιούτων ὅρων διὰ τῆς ἡμισείας πλήθυος τῶν ὅρων πολλαπλασιάζειν, τὸ ὁλικὸν τῆς προόδου κεφάλαιον εἰδέναι θέλοντας. Ὡς 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 28. Τὸ κεφάλ. δύω ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφισαμένων ὅρων $= 31$. Ἵν' οὖν τὸ ὁλικὸν τῆς προόδου εὕρωμεν κεφάλαιον, πολλαπλασιασθήτω 31 ἐπὶ τὸ 4. (Οἱ γὰρ ὅροι τῆς προόδου 8· ὧν τὸ ἥμσυ 4.) Καὶ ἔσαι $= 124 =$ τῷ κεφαλαίῳ τῷ ὁλικῷ τῆς προόδου. Τὰ δὲ τοῦ κανόνος κρατήσει, καὶ τῆς πλήθυος τῶν ὅρων περιττῆς (§. 106.) οὔσης. Οἷον 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27.

27. Κανταῦθα τὸ κεφ. δύω ἐπ. ἀπὸ τῶν ἄκρ. ἀφις. ὅρ. $= 30$. Ἡ τῶν ὅρων πλῆθυς $= 7$. Ἧς τὸ ἥμισυ $= \frac{7}{2}$. Ἢ $= 3\frac{1}{2}$ δυάσι. Ἐὰν οὖν 30 μετὰ τοῦ $\frac{7}{2}$ πολλαπλασιασθῇ, ἀνακύψει τὸ κεφάλ. τῆς προόδου. $30 . \frac{7}{2} = \frac{210}{2} = 105$.

Ἐν γένει. Ἔςω ὁ α'. ὅρος $= \alpha$. Ἡ τῶν ὅρων πλῆθυς $= \pi$. Ὥςε αἱ τῶν ὅρων δυάδες, εἴτε ἄρτιοι, εἴτε περιττοὶ εἶεν $= \frac{\pi}{2}$. ὁ ἔσχατος ὅρος $=$ $\alpha + (\pi - 1)\delta$ (§. 224.) Τὸ κεφάλαιον τὸ ἐκ δύω ὅρων ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφιςαμένων $= 2\alpha + (\pi - 1)\ \delta$. Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου τὸ κεφάλ. τῆς ὁλικῆς προόδου $= (2\alpha + (\pi - 1)\delta) . \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{2\alpha\pi}{2} + \frac{(\pi - 1)\delta\pi}{2} = \alpha\pi + \frac{(\pi - 1)\delta\pi}{2}.$$

Ἢ καὶ $\alpha\pi + \frac{(\pi^2 - \pi)\ \delta}{2}$.

Ἔνθεντοι ἐκ τοῦ α'. Ὅρου, τῆς πλήθυος τῶν ὅρων, καὶ τῆς διαφορᾶς, εὑρίσκομεν τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

Παραδείγματα, καὶ Προβλήματα· α'. ἡλίκον τὸ κεφάλαιον τῶν φυσικῶν χαρακτήρων ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 50;

Ἐνταῦθα δέδοται ὁ α'. Ὅρος $\alpha = 1$. Ἡ τῶν ὅρων πλῆθυς $\pi = 50$. Καὶ ἡ διαφορὰ $\delta = 1$. Ὥςε τὸ κεφάλ. ἡ $K = \alpha\pi + \frac{(\pi - 1)\pi\delta}{2}$. Ἤτοι $= 1 . 50 + \frac{(50 - 1)50 . 1}{2} = 50 + \frac{49 . 50}{2} = 50 + 49 . 25 = 50 + 1222 = 1275$.

β'. Ποσάβ'. Ποσάκις ἠχεῖ Ὡρολόγιόντι ἠχοῦν, ἐν 24 ὥραις; Ὧδε πρόκεινται δύω πρόοδοι ἀλλήλαις ἴσαι. Τουτ: ἡ ἑτέρα ἀπὸ τῆς 1 μέχρι 12. Ὡσαύτως καὶ ἡ ἑτέρα ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι 12. Τὴν ἑτέραν οὖν τούτων ὑπολογιζεύσαντες πολλαπλασιάσομεν τὸ εὑρεθὲν μετὰ 2. $K = \alpha\pi + \frac{(\pi - 1)\pi\delta}{2}$. Ἔνθα $\alpha = 1.\ \pi = 12.\ \delta = 1.$

$$\text{Ὥςε } 1.12 + \frac{(12 - 1)\,12.1.}{2} = 12 + \frac{11.12}{2}$$

$= 12 + 11.6 = 12 + 66 = 78$. Ὥςε ἑβδομηκονταεπτάκις ἐν 12, καὶ 156 ἐν 24. Εἰ δὲ καὶ ποσάκις τὰ τεταρτημόρια ἠχοῦσι προσαριθμήσομεν, δεκάκις ἐν ἑκάςῃ ὥρᾳ ἠχοῦντα, 240 ἐν 24 ὥραις, ἔςαι $156 + 240 = 396$.

Περὶ Γεωμετρικοῦ Λόγου.

§. 227. Τὸ ἐπὶ τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου διὰ τῆς διαιρέσεως (§. 212.) τοῦ ἑτέρου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἑτέρου προκύπτον πηλίκον. Ἤτοι τὸν ἀριθμὸν, ὅς ποσάκις ὁ ἕτερος τῷ ἑτέρῳ ἐμπεριέχεται, ἐμφαίνει, Ἐκθέτην, ἢ Ὄνομα τοῦ λόγου ὀνομάζουσιν. Οἷον, ἐὰν 18 πρὸς 6 Γεωμετρικῷ τῷ λόγῳ παρεξετάζωμεν, διελοῦσι 18 διὰ 6, τὸ πηλίκον 3 (ἢ ὁ ἐκθέτης) δείξει, ποσάκις ὁ 18 περιέχει τὸν 6. Σημειοῦται δ' οὗτος ὁ λόγος τῷ ἑτέρῳ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως, (§. 83.) μεταξὺ τῶν παραβαλλομένων παρεντιθεμένῳ. Ὡς 7: 21. ἢ 48: 12. Ἢ καὶ οὕτως $\frac{7}{21}$, ἢ $\frac{48}{12}$. Καὶ ἐν γένει $\alpha : \beta$, ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$. Τὸ δὲ σημεῖον ἀπαγγέλλεται, α πρὸς β.

Ὁ δὲ τοῦ λόγου ἐκθέτης ἤτοι ὁλοσχερὴς ἐςὶν ἀριθμὸς, ἢ κεκλασμένος. Οὗτος δὲ (ὁ κεκλ.) ἤτοι γνήσιον κλάσμα, ἢ νόθον. Ὥσπερ γὰρ, ποσάκις ὁ ἐλάσ-σιν ἀριθμὸς τῷ μείζονι ἐμπεριέχεται ζητοῦμεν, οὕτω καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ποσάκις ὁ ἐλάσσων τὸν μείζονα περιέχει ζητῆσαι δυνάμεθα, ὅτε καὶ ὁ ἐκθέτης ἐλάσσων ἔςαι τῆς 1, ἤτοι κλάσμα. Οὐμὴν ἀλλὰ καὶ εἰ Γεωμετρικῶς τὸν ἐλάσσονα πρὸς τὸν μείζονα παραβάλλομεν, οὐκ ἀεὶ ἐκεῖνος οὕτως ἀκριβῶς τούτῳ περιληφθήσεται, ὥςε τὸν ἐκθέτην, ἤτοι τὸ, ποσάκις, δι' ὁλοσχεροῦς ἀποδίδοσθαι. Ἐὰν τοίνυν ὁ ἡγούμενος (§. 212.) ὅρος τοῦ λόγου ἐλάσσων ᾖ τοῦ ἑπομένου, ὁ ἐκθέτης ἔςαι ἀεὶ κεκλασμένος. Ὡς 12 : 48. οὗ ὁ ἐκθέτης $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$. ἢ 48 περιέχεται ἐν 12 μόνον $\frac{1}{4}$: ις. Τοῦ 24 : 18. ἧ $\frac{24}{18}$ ὁ ἐκθέτης $= \frac{24}{18} = 1\frac{6}{18} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. ἢ 18 περιέχεται ἐν 24 πλέον, ἢ ἅπαξ, ἤτοι $1\frac{1}{3}$, ἢ $\frac{4}{3}$: ις.

Σχόλιον.

Οἱ λόγοι διαφέρουσιν ἀλλήλων, διαφόρους ἔχοντες ἐκθέτας. Καὶ ἕπονται ἄρα τοσαῦτα εἴδη λόγων διάφορα, ὅσοι διάφοροι ἐκθέται δίδονται. Καὶ α'. μὲν εἶδος λόγων ἀναμφιβόλως θέλομεν εἰπεῖ, ἔνθα ἄμφω οἱ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις ἴσοι. Ὡς 3 : 3. 4 : 4. α : α. Ὧν ἐκθέτης ἡ 1. (§. 84. σχ.) Διὸ καὶ τὸ τοιόνδε εἶδος καλεῖται **Λόγος τῆς Ἰσότητος.** Τούτῳ δ' ἕπονται οἱ ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν ἐκθέτην ἔχοντες λόγοι. Ὡς 4 : 2. Ἔνθα ἐκθέτης ὁ 2. Καὶ 12 : 4. Ἔνθα ἐκθέτης ὁ 3. μεθ' οὓς, οἱ κλασματικὸν ἐκθέτην ἔχοντες.

§. 228. Ἔςω α ὁ ἡγούμενος ὅρος. β ὁ ἑπόμενος, καὶ ε ὁ ἐκθέτης. Ἐὰν οὖν δύω ἐκ τούτων δοθῶσιν, εὑρήσομεν ῥᾷςα τὸν γ'. Ἔςι γὰρ $\alpha = \beta.\,\varepsilon$. Καὶ $\beta = \frac{\alpha}{\varepsilon}$. Καὶ $\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta}$.

§. 229. Ἐκ τοῦ σημείου τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου, (§. 227.) καὶ τῆς τούτου ἰδιότητος ἕπεται, ὅτι ὡς κλάσμα τοῦτον θεωρῆσαι δυνάμεθα. Εἰ δὲ τοῦτο, ἐφαρμόσει ἄρα τῷ λόγῳ καὶ τὰ παντὶ κλάσματι ἐφαρμόζοντα. Ὅθεν τοι ὁ ἡγούμενος, καὶ ἑπόμενος ὅρος τοῦ λόγου μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθέντες, ἢ διαιρεθέντες, τὸν λόγον ἥκιςα μεταβαλοῦσι. (§. 122.) π. χ. $12 : 48 = \frac{12}{12} : \frac{48}{12}$, ἢ $= 1:4$. Ἔςι γὰρ $\frac{12}{48} = \frac{12}{48} : \frac{12}{12} = \frac{1}{4}$. (§. αὐτ.) Αὖθις $12 : 48 = 12 . 6 : 48 . 6$. ἢ $= 72 : 288$. Ἔςι γὰρ $\frac{12}{48} = \frac{12 . 6}{48 . 6} = \frac{72}{288}$. Ὥςε τὸ πηλίκον, ἢ ὁ ἐκθέτης τοῦ λόγου μένει ἀμετάβλητος.

Καὶ ἐν γένει

$$\alpha : \beta = \alpha . \gamma : \beta . \gamma. \text{ ἢ καὶ } \frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\beta}{\gamma}.$$

(§. 114. ε΄.) Εἰ λόγος τις πάρεςιν, οὗ τοὺς ὅρους εἰς ἐλάσσονας ἀναγαγεῖν ἔχομεν, ποιήσομεν τοῦτο, κατὰ τὸ (§. 125. σχ.). Οἷον προκειμένου τοῦ λόγου $137 : 548 = \frac{137}{548}$. Ἄμφω τοὺς ὅρους διαιρήσομεν τῷ 137. Ἤτοι $\frac{137}{548} = \frac{137}{548} : \frac{137}{137} = \frac{1}{4}$. Ὥςε ὁ λόγος $137 : 548 =$ τῷ $1 : 4$. Ὅςπερ ῥᾶον κατανοηθήσεται, ἢ ὁ $137 : 548$.

§. 230. Ἐὰν οἱ ὅροι δύω, ἢ πλειόνων Γεωμετρικῶν λόγων μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιαθῶσιν, ἡγούμενοι μεθ' ἡγουμένων, καὶ ἑπόμενοι μεθ' ἑπομένων, τὸ παραγόμ. ῥηθήσεται Λόγος Σύνθετος. Οἱ δ' ἁπλοῖ λόγοι, Λόγοι Συντιθέντες. Ὡς, ἐκ τῶν λόγων $\alpha : \beta$, $\gamma : \delta$, $\varepsilon : \zeta$ προκύπτει διὰ τῆς συνθέσεως ὁ λόγος $\alpha\gamma\varepsilon : \beta\delta\zeta$. Καὶ $2 : 8$. καὶ $4 : 16$ διδόασι τὸν λόγον $8 : 128$. Ὁ δ' ἐκθέτης τοῦ Συνθέτου λόγου τὸ παραγόμενόν ἐςιν ἐκ τῶν ἐκθετῶν τῶν συντιθέντων. Ὡς ὁ 16 τοῦ $4 . 4$.

§. 231. Ἐὰν οἱ λόγοι, οἱ οὕτω συντιθέμενοι ἴσοι ἀλλήλοις ὦσιν, ἀναφύονται ἐκ τούτων Λόγοι

πολ-

Πολλαπλασίονες. τουτ: ἐκ δύω ἴσων ὁ Διπλασίων, ἢ Τετραγωνικὸς Λόγος. Ἐκ τριῶν ἴσων, ὁ Τετραπλασίων, ἢ Κυβικὸς, κτ. Ὥςε, τῶν λόγων $\alpha : \beta$ καὶ $\alpha : \beta$, ὁ σύνθετος λόγος ἐςὶν $\alpha^2 : \beta^2$. Ὅθεν λέγεται ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ τὰ τετράγωνα ἴςανται ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν κατ' αὐτὰ πλευρῶν. Καὶ ἐκ τοῦ λόγου $\alpha : \beta$ τρὶς τεθέντος, ἀνακύπτει ὁ λόγος $\alpha^3 : \beta^3$. Ὅθεν οἱ κύβοι, ἢ αὐτόθι λέγεται, εἰσὶν ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῶν κατ' αὐτοὺς πλευρῶν.

Περὶ Γεωμετρικῆς ἀναλογίας.

§. 232. Ἡ Γεωμετρικὴ ἀναλογία ἐκ δύω σύγκειται Γεωμετρικῶν λόγων, (§. 212.) ἀλλήλοις ἴσων· Ἴσοι δὲ λέγονται, εἰ ἐκθέτης (§. 227.) ὁ αὐτὸς ἀμφοῖν πάρεςιν. Οἷον τοῦ λόγου (§. 212.) 2 : 8 ὁ ἐκθέτης $=$ 4. Ληφθήτω καὶ ἕτερος λόγος 5 : 20. Οὗ ὁ ἐκθέτης αὖθις $=$ 4. Ἔνθεντοι, ὡς ἴσοι, τὴν Γεωμετρικὴν, ὡς εἴρηται, ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, καὶ ταύτην τῷ τῆς ἰσότητος δεικνυμένην σημείῳ. ($=$) Καὶ ἐκκείσεται ἄρα ἡ Γεωμετρικὴ ἀναλογία οὕτω. 2 : 8 $=$ 5 : 20. Ἣν οὕτως ἀπαγγέλοῦμεν· 2 πρὸς 8, ὡς 5 πρὸς 20. Τὸν δ' ἐκθέτην τοῦ λόγου (§. 227.) οὐκ ἀεὶ ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν εἶναι συμβαίνει, ἀλλ' ἐνίοτε καὶ κλάσμα, γνήσιον, ἢ νόθον. Ἀλλ' οὐδεὶς τούτου λόγος, ὡς τῆς ἀναλογίας σωζομένης· Ἐπὶ γὰρ δυοῖν λόγων, ἴσων ἀλλήλοις, ζητεῖται, εἰ ἐφ' ἑκατέρου ὁ ἕτερος ὅρος ἐπίσης τῷ ἑτέρῳ ἐμπεριέχεται. Τὸ δ' ἐπίσης τοσάκις ἐμπεριέχεσθαι, εἴτε διὰ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, εἴτε διὰ κλάσματος ἐκφέρεται, πάντῃ ἀδιάφορον. Οὕτως ἂν εἴη 6 : 5 $=$ 12 : 10 ὡσαύτως ἀναλογία. Ἧς ὁ ἐκθέτης $\frac{5}{6}$. Ὁ 6 γὰρ τῷ 5 οὐδὲ ἅπαξ ἐμπεριέχεται, ἀλλὰ μόνον $\frac{5}{6}$: ις. Ὅτι δὲ τοῦτο ἀληθὲς, ἡ βάσανος τῆς

 διαι-

διαιρέσεως δείξει (§ 98.) $\frac{3}{6} \times 6 = \frac{3}{6}^{?} = 5$ = τῷ διαιρετέῳ· Παραπλησίως καὶ 12 ἐν 10, $\frac{10}{12}$: 15, ἢ $\frac{?}{?}$: 15 ἐμ ἐμπεριέχεται. Ὥςε ἡ ἀναλογία ὀρθή.

§. 233. Ἀκριβῶς τὴν ἀναλογίαν θεωροῦμεν εὔδηλον ἐκ τεττάρων συγκροτεῖσθαι ὅρων. Τοῦ μὲν α'. καθ' ἑαυτὸ Τοῦ δὲ β'. ἐκ τοῦ α'. ἐπὶ τὸν ἐκθέτην πολλαπλασιασθέντος. Τοῦ δὲ γ'. πάλιν καθ' ἑαυτόν· Τοῦ δὲ δ'. ὡσαύτως ἐκ τοῦ γ'. ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῶν δύω α'. ὅρων Ἐὰν οὖν ὁ α'. ὅρος = α κληθῇ, ὁ δὲ γ'. (ὃς ὁ α' ἐςιν ἐπὶ τοῦ β'. λόγου) = β, ὁ δ' ἐκθέτης τῶν δύω πρώτων ὅρων = μ, ἔςαι ἡ ἑξῆς Γεωμετρικὴ ἀναλογία ἡ καθολικωτάτη. α : αμ = β : βμ. Ὡς δι' αὐτῆς ἁπασῶν τῶν ἀναλογιῶν παριςαμένων. Ἐν ᾗ ὁ ἐκθέτης μ σημαίνει ὡσαύτως ἕκαςον ἀριθμὸν, εἴτε ὁλοσχερὴς, εἴτε κεκλασμένος εἴη.

§. 234. Ἡ ἀναλογία, ἐφ' ᾗς ὁ γ'. ὅρος διάφορος τοῦ β'. Διακεκριμένη ἀκούει. Ὡς ἡ ἐν §. ἄνωτ. Ἔςω α = 4. β = 6. μ = 5. Καὶ ἔςαι 4 : 4 . 5 = 6 : 6 . 5. ἢ 4 : 20 = 6 : 30. Διακεκριμένη ἀναλογία. Ἢ α = 6. β = 12. μ = $\frac{1}{3}$. Καὶ ἔςαι 6 : 6 . $\frac{1}{3}$ = 12 : 12 . $\frac{1}{3}$. ἢ 6 : 2 = 12 : 4 αὖθις Διακεκριμένη. Ἐφ' ᾗς δ' ὁ γ'. ὅρος ὁ αὐτὸς τῷ β'. ἢ αμ = β. Συνεχής Ὅθεν ἐὰν ἐν τῇ καθόλου ἀναλογίᾳ ἀντὶ τοῦ β τὸ αμ ἀντικαταςῇ, ἡ ἑξῆς ἀνακύψει συνεχὴς ἀναλογία. α : αμ = αμ : αμ . μ. ἢ α : αμ = αμ : $αμ^2$. Ἢ καὶ ἐὰν α = 5. μ = 3. τεθῇ, ἔςαι 5 : 5 . 3 = 5 . 3 : 5 . 3 . 3. ἢ 5 : 15 = 15 : 45. Καὶ 12 : 6 = 6 : 3. Ἄμφω συνεχεῖς.

Σχόλιον.

Ἀντίςροφος Γεωμετρικὴ Ἀναλογία, ἢ Ἀντίςροφος Γεωμετρικὸς Λόγος λέγεται,

ται, ἐὰν ἀπὸ δ'. ποσότητας ἡ α'.. πρὸς τὴν β'. λόγον ἔχει, ὃν ἡ δ'. πρὸς τὴν γ'. Οἷον 4, 6, 15, 10. ἔσονται ἐν ἀντισρόφῳ Γεωμετρικῷ λόγῳ. Ὅτι 4 ἔχει πρὸς 6, ουχὶ ὡς 15 πρὸς 10, ἀλλ' ὡς 10 πρὸς 15.

§. 235. Ἐφ' οἱασοῦν Γεωμετρικῆς ἀναλογίας, εἴτε διακεκριμένης, $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$, εἴτε συνεχοῦς $\alpha : \alpha\mu = \alpha\mu : \alpha\mu^2$, τὸ ἐκ τῶν δύω ἄκρων ὅρων παραγόμενον ἴσον τῷ ἐκ τῶν δύω μέσων. Ἐπ' ἐκείνης γὰρ $\alpha\beta\mu = \alpha\mu\beta$ Ἐπὶ δὲ ταύτης $\alpha\alpha\mu^2 = \alpha\mu\alpha\mu = \alpha^2\mu^2$ Ἐὰν δὲ καὶ τῶν δύω ἡγουμένων ὅρων διὰ τοῦ ἰδίου ἑπομένου (§. 212) ἑκάτερος διαιρεθῇ, ἢ καὶ ἀνάπαλιν, τὰ πηλίκα ἔσαι ἴσα.

Καὶ ἐν μὲν τῇ διακεκριμένῃ. $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$, ἔσαι $\frac{\alpha}{\alpha\mu} = \frac{\beta}{\beta\mu}$. ἢ $\frac{\alpha\mu}{\alpha} = \frac{\beta\mu}{\beta}$. (Ἔνθα τῶν α'. δύω κλασμάτων τὸ πηλίκον $= \frac{1}{\mu}$. Τὸ γὰρ α τοῦ ἀριθμητοῦ διαιρεθὲν διὰ τοῦ α τοῦ παρονομ: δίδωσι πηλίκον τὴν 1 (§. 84. σχ.) ἐν τῷ ἀριθμ: Τὸ δὲ μ μένει παρονομαςής. Ὡσαύτως καὶ τὸ $\frac{\beta}{\beta\mu}$ δίδ. πηλίκον τὴν 1 ἐν τῷ ἀριθμ. καὶ μ ἐν τῷ παρον: Τῶν δὲ β'. δευτέρων τὸ πηλίκον ἴσον μ. (§. 114. δ'.) (Σημειῶση ἐνταῦθα, ὅτι οἱ ὁμόλογοι ὅροι γίνονται διαιρέται. Ὁμόλογοι δὲ, ὁ α'. τῷ γ'. καὶ ὁ β'. τῷ δ'.) Ἐν δὲ τῇ συνεχεῖ $\alpha : \alpha\mu = \alpha\mu : \alpha\mu^2$. ἔσαι $\frac{\alpha}{\alpha\mu} = \frac{\alpha\mu}{\alpha\mu^2}$, ἢ $\frac{\alpha\mu}{\alpha} = \frac{\alpha\mu^2}{\alpha\mu}$. (Ἔνθα τῶν α'. δύω κλα μ πηλίκον τὸ $\frac{1}{\mu}$, τῶν δὲ β'. δευτέρων τὸ μ). Βάσανος δὲ τῆς ἀναλογίας (εἰ ἀκριβὴς εἴη)

εὐχε-

εὐχερεςέρα, ἡ ἰσότης τῶν παραγομένων ἐκ τῶν δύω ἄκρων ὅρων. καὶ ἐκ τῶν δύω μέσων, κατὰ τὸν κανόνα, ἢ ἡ εὕρεσις τοῦ ἐκθέτου τῶν δύω λόγων. Τοῦτον γὰρ ἐνίοτε καὶ κλάσμα εἶναι συμβαίνει. Οὕτω π. χ. $2 : 9 = 4 : 18$ Γεωμετρική ἐςιν ἀκριβὴς ἀναλογία. Ὅτι $4 \cdot 9 = 2 \cdot 18$. Ἄμφω $= 36$.

Αὖθις, ἐπειδὴ τὰ ἐκ τῶν ὁμολόγων ὅρων πηλίκα ἴσα ἀλλήλοις, ἢ $\frac{\alpha}{\alpha\mu} = \frac{\beta}{\beta\mu}$. Καὶ $\frac{\alpha\mu}{\alpha} = \frac{\beta\mu}{\beta}$ ἕπεται, ὅτι καὶ δύω κλάσματα ἴσα ἀλλήλοις (§. 125.) ἀναλογίαν συςήσουσι. Καὶ ἀνάπαλιν, οἱ δύω λόγοι ἀναλογίας οἱασοῦν διὰ κλασμάτων ἐξενεχθήσονται. Εἰ οὖν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, ἔςαι καὶ $\alpha : \beta = \gamma : \delta$. Καὶ $\alpha\delta = \beta\gamma$. Καὶ ἐν ἀριθμοῖς. Εἰ $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, ἔςαι καὶ $3 : 5 = 9 : 15$. Καὶ $5 \cdot 9 = 3 \cdot 15$.

§. 236. Ὁ λόγος δύω κλασμάτων, ὡς $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$ δι' ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν ἐξενεχθῆναι δύναται. Εἰ γὰρ ἄμφω μετὰ τῶν παρονομ. βδ πολλαπλασιάσεις, προκύψει $\frac{\alpha\beta\delta}{\beta} : \frac{\gamma\beta\delta}{\delta} = \alpha\delta : \beta\gamma$. Καὶ $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = \frac{15 \cdot 24 \cdot 36}{24} : \frac{25 \cdot 24 \cdot 36}{36} = 15 \cdot 36 : 24 \cdot 25 = 9 : 10$.

§. 237. Ἐὰν δύω κλάσμασιν ἡ μονὰς, ἢ ὁ αὐτὸς προσῆ ἀριθμητὴς, ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα ἀντίςροφον τῶν παρονομαςῶν. Ὡς $\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha} : \frac{\alpha\beta}{\beta}$ (§. ἀνωτ.) $= \beta : \alpha$. Καὶ

$\frac{1}{\alpha}$

$\frac{\varepsilon}{\alpha} : \frac{\varepsilon}{\beta} = \frac{\varepsilon\alpha\beta}{\alpha} : \frac{\varepsilon\alpha\beta}{\beta} = \varepsilon\beta : \varepsilon\alpha =$ $\beta : \alpha$. Ἐὰν δὲ δύω κλάσματα τὸν αὐτὸν ἔχωσι παρονομαςὴν, ὡς $\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\beta}{\gamma}$, ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα τὸν τῶν ἀριθμητῶν, δηλ: ὡς $\alpha : \beta$. Καὶ ἐν ἀριθμοῖς παραδ. ἀμφοῖν τῶν τρόπων. $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = \frac{6}{16} : \frac{3}{16} = 6 : 3 = 2 : 1$. Καὶ $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$. ἢ $2 : 3$.

§. 238. Δύω ἀλλήλοις ἴσα παραγόμενα Γεωμετρικὴν παρέξουσιν ἀναλογίαν, ἐν ᾗ ὁ ἕτερος παράγων τοῦ α΄. παραγομένου ἕξει πρὸς τὸν ἕτερον τοῦ β΄., ὡς ὁ ἕτερος τοῦ β΄. πρὸς τὸν ἕτερον τοῦ α΄. Ἔςω $\mu\rho = \nu\pi$. Δίελε ἄμφω διὰ $\nu\rho$, καὶ ἔςαι $\frac{\mu\rho}{\nu\rho} = \frac{\nu\pi}{\nu\rho}$. (§. 114. α΄) ἤτοι $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\pi}{\rho}$. ἤτοι ἔςαι $\mu : \nu = \pi : \rho$. (§. 235.)

§. 239. Ἡ δὲ βάσιμος ἀναλογία. $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$, ἐφ' ἧς αἱ λοιπαὶ πᾶσαι ἐρείδονται, ἥτις καὶ ὡς συνεχὴς ἂν ληφθείη, τοῦ $\beta = \alpha\mu$ τεθέντος, διαφόρως ἀμείβεσθαι δύναται.

1) Διὰ τῆς τῶν ὅρων μεταςάσεως. $\alpha\mu : \alpha = \beta\mu : \beta$. Καὶ ἐπεὶ τὰ παράγομενα ἐκ τῶν ἄκρων, καὶ μέσων ὅρων ἴσα ἀλλήλοις, ἔςαι καὶ τόδε τὸ σχῆμα ἀναλογία ἀκριβής. Καὶ ἐν ἀριθμοῖς $5 : 6 = 10 : 12$. Καὶ $6 : 5 = 12 : 10$.

Καὶ ἐναλλάξ. $\alpha : \beta = \alpha\mu : \beta\mu$. Καὶ $5 : 10 = 6 : 12$. Καὶ τῶν ὅρων ἀντιςραφέντων, ἔςαι $\beta : \alpha = \beta\mu : \alpha\mu$. Καὶ $10 : 5 = 12 : 6$.

Καὶ ὅλης τῆς ἀναλογίας ἀντιςραφείσης, ἔςαι $\beta\mu : \alpha\mu = \beta : \alpha$. ἢ $12 : 6 = 10 : 5$

2) Διὰ

2) Διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ β'. ὅρου τῷ α'. καὶ τοῦ δ'. τῷ γ'. Ἢ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ β'. ἀπὸ τοῦ α'. καὶ τοῦ δ'. ἀπὸ τοῦ γ'. Ὡς $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$. ἢ $5 : 6 = 10 : 12$. Ἔςι δὲ καὶ $\alpha + \alpha\mu : \alpha\mu = \beta + \beta\mu : \beta\mu$. ἢ $5 + 6 : 6 = 10 + 12 : 12$. τουτ: $11 : 6 = 22 : 12$.

Καὶ $\alpha - \alpha\mu : \alpha\mu = \beta - \beta\mu : \beta\mu$. ἢ $5 - 6 : 6 = 10 - 12 : 12$. τουτ: $-1 : 6 = -2 : 12$.

Ἀλλὰ καὶ τῷ β'. καὶ δ'. Ὅρῳ ἔξεςι τὸν α'. καὶ γ'. προςιθέναι, ἢ ἀπ' ἐκείνων τούτους ἀφαιρεῖν. Ὡς $\alpha : \alpha\mu + \alpha = \beta : \beta\mu + \beta$. ἢ $5 : 6 + 5 = 10 : 12 + 10$. Τουτ. $5 : 11 = 10 : 22$.

Καὶ $\alpha : \alpha\mu - \alpha = \beta : \beta\mu - \beta$. ἢ $5 : 6 - 5 = 10 : 12 - 10$. τουτ: $5 : 1 = 10 : 2$.

3) Διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὅτε ἤτοι πάντας τοὺς τῆς ἀναλογίας ὅρους τῇ αὐτῇ πολλαπλασιάζομεν ποσότητι, ἢ μόνον δύω, δηλαδὴ 1) τὸν α'. καὶ τὸν β'. 2) Τὸν γ' καὶ τὸν δ'. 3) Τὸν α'. καὶ τὸν γ'. ἢ 4) τὸν β'. καὶ τὸν δ'. Ἀεὶ γὰρ ἀληθὴς ἡ ἀναλογία, εἰ τὸ παραγόμενον τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων ὅρων. Πολλαπλασιασθήτωσαν οὖν πάντες οἱ ὅροι τῆς καθόλου ἀναλογίας μετὰ τοῦ γ. καὶ ἔςαι $\alpha\gamma : \alpha\mu\gamma = \beta\gamma : \beta\mu\gamma$. ἢ $5 \cdot 2 : 6 \cdot 2 = 10 \cdot 2 : 12 \cdot 2$. τουτ. $10 : 12 = 20 : 24$.

Αὖθις $\alpha\gamma : \alpha\mu\gamma = \beta : \beta\mu$. ἢ $5 \cdot 3 : 6 \cdot 3 = 10 : 12$. τουτ. $15 : 18 = 10 : 12$.

Καὶ $\alpha : \alpha\mu = \beta\gamma : \beta\gamma\mu$. ἢ $5 : 6 = 10 \cdot 3 : 12 \cdot 3$.

Καὶ $\alpha\gamma : \alpha\mu = \beta\gamma : \beta\mu$. ἢ $5 \cdot 4 : 6 = 10 \cdot 4 : 12$. τουτ. $20 : 6 = 40 : 12$.

Καὶ

Καὶ $\alpha : \alpha\mu\gamma = \beta : \beta\mu\gamma$. ἢ $5 : 6 \cdot 4 = 10 : 12 \cdot 4$. τουτ. $5 : 24 = 10 : 48$.

Ἐκ τούτων ἕπεται τὸ Θεώρημα. Ἐὰν οἱ δύω ὅροι τοῦ ἑτέρου λόγου τῆς ἀναλογίας, ἢ δύω ὁμόλογοι ὅροι τῆς ἀναλογίας, ἢ καὶ ἅπαντες οἱ ὅροι τῆς Ἀναλογίας, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθῶσιν, ἡ ἀναλογία οὐ μεταβάλλεται. Ὃ καὶ κατωτ. δειχθήσεται.

4) Διὰ τῆς διαιρέσεως. ὅτε ἤτοι ἅπαντας τοὺς τῆς ἀναλογίας ὅρους, διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ἢ μόνον δύω διαιροῦμεν. 1) Τὸν α'. καὶ β'. 2) Τὸν γ'. καὶ δ'. 3) Τὸν α'. καὶ γ'. Καὶ 4) τὸν β'. καὶ δ'. Ἔνθα ἡ Γεωμετρικὴ ἀναλογία τηρεῖται.

Ὡς $\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha\mu}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} : \frac{\beta\mu}{\gamma}$. Ἢ $\frac{8}{2} : \frac{16}{2} = \frac{20}{2} : \frac{40}{2}$. τουτ. $4 : 8 = 10 : 20$.

Αὖθις $\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha\mu}{\gamma} = \beta : \beta\mu$. ἢ $\frac{8}{2} : \frac{16}{2} = 20 : 40$. τουτ: $4 : 8 = 20 : 40$.

Καὶ $\alpha : \alpha\mu = \frac{\beta}{\gamma} : \frac{\beta\mu}{\gamma}$. ἢ $8 : 16 = \frac{20}{2} : \frac{40}{2}$. τουτ. $8 : 16 = 10 : 20$.

Καὶ $\frac{\alpha}{\gamma} : \alpha\mu = \frac{\beta}{\gamma} : \beta\mu$. ἢ $\frac{8}{2} : 16 = \frac{20}{2} : 40$. τουτ. $4 : 16 = 10 : 40$.

Καὶ $\alpha : \frac{\alpha\mu}{\gamma} = \beta : \frac{\beta\mu}{\gamma}$. ἢ $8 : \frac{16}{2} = 20 : \frac{40}{2}$. τουτ. $8 : 8 = 20 : 20$.

5) Διὰ τῆς τῶν ὅρων εἰς δυνάμεις ἐξάρσεως, καὶ δι' ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν. Ἐπεὶ δὲ τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξα-

ἐξαγωγῆς οὔπω λόγος ἐγένετο, διὰ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου (§. 186.) αὐτὴν ἐκδηλώσομεν· Ἀλλὰ σημειωτέον, ὅτι ἤτοι πάντες οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας εἰς ὁμοβαθμίους δυνάμεις, ἤτοι εἰς δυνάμεις τοὺς αὐτοὺς ἐχούσας ἐκθέτας ἀνυψωθῆναι, ἢ ἀπὸ πάντων ῥίζαι, τῶν αὐτῶν ἐκθετῶν, ἐξαχθῆναι ὀφείλουσιν. ἄλλως γὰρ τὰ τῆς ἀναλογίας οὐ σώζεται. Οἷον $\alpha^2 : \alpha^2 \mu^2 = \beta^2 : \beta^2 \mu^2$. ἢ $4^2 : 16^2 = 9^2 : 36^2$. Τουτ. $16 : 256 = 81 : 1296$.

Καὶ $\alpha^\nu : \alpha^\nu \mu^\nu = \beta^\nu : \beta^\nu \mu^\nu$. Ἔστι γὰρ $\alpha^\nu \beta^\nu \mu^\nu = \alpha^\nu \mu^\nu \beta^\nu$. Ἐνταῦθα ἐφαρμόζουσι καὶ τὰ ἀπὸ 1 μέχρι 5 ῥηθέντα, τῆς ἀναλογίας αὖθις τηρουμένης.

Ὡς $\alpha^\nu \pm \alpha^\nu \mu^\nu : \alpha^\nu \mu^\nu = \beta^\nu \pm \beta^\nu \mu^\nu : \beta^\nu \mu^\nu$. Τὸ γὰρ παραγόμενον $\alpha^\nu \beta^\nu \mu^\nu \pm \alpha^\nu \mu^\nu \beta^\nu \mu^\nu =$ τῷ παραγομ. $\alpha^\nu \mu^\nu \beta^\nu \pm \mu^\nu \mu^\nu \alpha^\nu \beta^\nu$.

Ἐπεὶ δὲ καὶ δυνάμεις δίδονται, ὧν ὁ ἐκθέτης ἀποφατικός, ἕξομεν καὶ τοιάσδε ἀναλογίας $\alpha^{-\nu} : \alpha^{-\nu} \mu^{-\nu} = \beta^{-\nu} : \beta^{-\nu} \mu^{-\nu}$. ἢ $4^{-2} : 16^{-2} = 9^{-2} : 36^{-2}$. Καὶ ἐπειδὴ $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$, (§. 198.) τὰς τοιαύτας τῶν ἀναλογιῶν ἐκδηλώσομεν καὶ οὕτως.

$\frac{1}{\alpha^\nu}$

$$\frac{1}{\alpha^{\nu}} : \frac{1}{\alpha^{\nu}\mu^{\nu}} = \frac{1}{\beta^{\nu}} : \frac{1}{\beta^{\nu}\mu^{\nu}}.$$ Ἢ

$$\frac{1}{4^2} : \frac{1}{16^2} = \frac{1}{9^2} : \frac{1}{36^2}.$$

Ὡσαύτως καὶ δι' ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης.

$\sqrt{\alpha}:\sqrt{\alpha\mu} = \sqrt{\beta}:\sqrt{\beta\mu}$. ἢ $\sqrt{4}:\sqrt{16} = \sqrt{9}:\sqrt{36}$. Τουτ. $2 : 4 = 3 : 6$.

Ἢ καὶ $\sqrt[\nu]{\alpha} : \sqrt[\nu]{\alpha\mu} = \sqrt[\nu]{\beta} : \sqrt[\nu]{\beta\mu}$. Καὶ διὰ τὸ §. 200. ἐξενεχθείη ἂν καὶ οὕτω.

$$\alpha^{\frac{1}{\nu}} : \alpha^{\frac{1}{\nu}}\mu^{\frac{1}{\nu}} = \beta^{\frac{1}{\nu}} : \beta^{\frac{1}{\nu}}\mu^{\frac{1}{\nu}}.$$

§. 240. Δύω ὅρων τῆς ἀναλογίας διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιασθέντων, ἢ διαιρεθέντων, ἡ ἀναλογία οὐ μεταβάλλεται. Δείκνυται δὲ οὕτως. $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$. κατὰ τὸ §. 235. $\frac{\alpha}{\alpha\mu} = \frac{\beta}{\beta\mu}$. Ἄμφω κλάσματα ἰσοδύναμα. Ἀλλὰ καὶ $\frac{\alpha\gamma}{\alpha\mu\gamma}$. ἢ $\frac{\alpha:\gamma}{\alpha\mu:\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha\mu}$. (§. 122.) Ὡσαύτως, καὶ $\frac{\beta\gamma}{\beta\mu\gamma}$. ἢ $\frac{\beta:\gamma}{\beta\mu:\gamma} = \frac{\beta}{\beta\mu}$. Ὥςε καὶ $\alpha \cdot \gamma : \alpha\mu\gamma = \beta : \beta\mu$. ἢ $\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha\mu}{\gamma} = \beta : \beta\mu$. Τὸ αὐτὸ δειχθήσεται καὶ κατὰ τῶν ἐσχάτων δύω ὅρων. Ἄρα περὶ ἁπάντων τῶν τεσσάρων, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

§. 241. Ἐὰν τρεῖς ὅροι τῆς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ἤτοι συνεχοῦς, ἢ διακεκριμένης, δοθῶσιν, εὑρήσομεν ἀεὶ καὶ τὸν

τὸν δ'. Ἔςι γὰρ οὗτος τὸ ἐκ τῶν δύω μέσων ὅρων παραγόμενον, διὰ τοῦ α' ὅρου διαιρεθέν. Ἢ ἐὰν ὁ δ'. ῥηθῇ χ, ἡ δὲ $\alpha : \alpha\mu = \beta : \chi$. Ἔςαι ὁ ζητούμενος ὅρος $\chi = \frac{\alpha\mu\beta}{\alpha} = \mu\beta$. Ἡ δὲ δεῖξις εὐχερής.

Ἔςι γὰρ (§. 235.)

$$\alpha\chi = \alpha\mu\beta \quad : \alpha$$

$$\frac{\alpha\chi}{\alpha} = \frac{\alpha\mu\beta}{\alpha} \quad (\S.\ 114.\ \alpha'.)$$

$$\chi = \mu\beta.$$

Ἐπειδὴ κατὰ τὸ §. 239. ἕκαςος ὅρος εἰς δ'. γενέσθαι δύναται, ἐκ τριῶν δοθέντων ὅρων ἀείποτε ὁ ἀπὼν εὑρεθήσεται. π. χ. τεθήτω μὴ παρεῖναι τὸν γ'. ὅρον. Ὡς $\alpha : \alpha\mu = \chi : \beta\mu$. Ἀμειψαμένοις τοίνυν τοὺς ὅρους, ἔςαι. $\alpha\mu : \alpha = \beta\mu : \chi$. Καὶ $\chi = \frac{\beta\mu\,.\,\alpha}{\alpha\mu} = \beta$. Ἐν ἀριθμοῖς. $6 : 18 = \chi : 12$. ἢ $18 : 6 = 12 : \chi$. Καὶ $\chi = \frac{12\,.\,6}{18} = \frac{72}{18} = 4$. Ὥςε $6 : 18 = 4 : 12$.

Τοῦτο δὲ κρατεῖ καὶ ἐπὶ τῶν συνεχῶν ἀναλογιῶν ἐν τῷ α'. καὶ ἐσχάτῳ ὅρῳ· Τῆς δὲ εὑρέσεως τοῦ μέσου ὅρου ζητητέα ἑτέρα μέθοδος, περὶ ἧς ἐνταῦθα διαλαβεῖν ἀκριβῶς οὐχ οἷόν τε, τὴν τῆς ῥίζης ἐξαγωγὴν μὴ εἰδότας. Ἐροῦμεν μέντοι καὶ περὶ ταύτης τινά. Μετὰ δὲ τὸ διδαχθῆναι τὴν τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγὴν, ἣν οὐκ ἀλόγως μετὰ τὴν περὶ τῶν ἀναλογιῶν διδασκαλίαν ὑπερεθέμεθα, ῥαδίως ἐνεργεία γενήσεται, ὅπερ ἤδη μόνου διὰ σημείων ἐμφαίνομεν. π. χ. Ἔςω ζητητέος ὁ μέσος ὅρος τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας. Ἤτοι $\alpha : \chi = \chi : \alpha\mu^2$. Ἐπειδὴ τοίνυν $\alpha^2\mu^2 = \chi\chi$. ἔςαι καὶ, αμφοῖν τῆς ῥίζης ληφθείσης $\sqrt{\alpha^2\mu^2} = \sqrt{\chi^2}$. ἄρα καὶ $\alpha\mu = \chi$. Εἰ πρόκειται ζητῆσαι τὸν μέσον ἀνάλο-

ἀνάλογον ἀριθμὸν τοῦ 4 καὶ 9 ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ἔςαι $4 : \chi = \chi : 9$. ὥςε $4 \cdot 9$, ἢ $36 = \chi^2$. Καὶ $\sqrt{36} = \sqrt{\chi^2}$. Καὶ ἐπεὶ ἡ ῥίζα τοῦ 36 $= 6$, ἢ δῆλον. Ἄρα $6 = \chi$. ἤτοι $4 : 6 = 6 : 9$.

Προκείσθω καὶ ἕτερα παραδείγματα τῆς τοῦ δ'. ὅρου εὑρέσεως.

Ἔςω δεδομένη ἡ ἀναλογία $5 : 15 = 9 : \chi$. ἢ ζητηθήτω ὁ δ'. ὅρος. Ἔςιν οὖν $\chi = \frac{9 \cdot 15}{5} = 27$. ἡ δὲ ἀναλογία $5 : 15 = 9 : 27$. Οὗτος ὁ τρόπος τοῦ τὸν δ'. ζητεῖν ὅρον καθόλου τυγχάνει, εἴτε ὁλοσχερεῖς ἀριθμοί, εἴτε κλασματικοὶ οἱ τρεῖς εἶεν ὅροι. Ὡς καὶ ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $\frac{1}{4} : \frac{3}{8} = 3 : \chi$. ὁ δ'. ὅρος ἔςαι $\chi = \frac{3 \cdot 3}{8} : \frac{1}{4} = \frac{9}{8} \cdot \frac{4}{1}$ (§. 148.) $= \frac{36}{8} = 4\frac{1}{2}$. ἡ δ' ἀναλογία $\frac{1}{4} : \frac{3}{8} = 3 : 4\frac{1}{2}$.

§. 242. Ἔςω ἡ μονὰς ὁ α'. ὅρος. β ὁ δεύτερος, καὶ γ ὁ τρίτος. ὁ δὲ δ'. (§ ἀνωτ.) $\beta \times \gamma : 1$, ἤτοι $\beta \times \gamma$ Ἔνθεντοι ἔςαι $1 : \beta = \gamma : \beta \times \gamma$, ὅ ἐςιν, ἡ μονάς, ὁ πολλαπλασιαςέος, ὁ πολλαπλασιαςής, καὶ τὸ παραγόμ. συνιςῶσιν ἀεὶ Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἀριθμὸν δι' ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζειν ἐςὶ πρὸς τὴν μονάδα, καὶ τοὺς δύω δοθέντας ἀριθμοὺς τὸν δ' Γεωμετρικὸν ζητεῖν ἀνάλογον. Ἐὰν δὲ ὁ β'. καὶ γ'. ὅρος οἱ αὐτοὶ εἶεν, π. χ. β. ὁ ἔσχατος ὅρος εἴη ἂν $\beta \times \beta : 1$, ὅ ἐςι β^2. Ὥςε $1 : \beta = \beta : \beta^2$. Τουτέςιν, ἡ μονάς, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, καὶ ὁ Τετράγωνος ποιοῦσι Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν. Καὶ ἡ τετρ. ῥίζα ἔςιν ἄρα ὁ μέσος ἀνάλογος μεταξὺ μονάδος, καὶ τετραγώνου.

§. 243. Ἔςω α ὁ α'. β ὁ β'. καὶ 1 ὁ γ'. ὅρος. ὁ δὲ δ'. $= \beta \times 1 : \alpha$, ἤτοι $\beta : \alpha$. Ὥςε $\alpha : \beta = 1 : \frac{\beta}{\alpha}$ Τουτ. τὸ πηλίκον ἐςὶν ὁ δ'.

γεω-

γεωμετρικὸς ἀνάλογος πρὸς τὸν διαιρέτην, διαιρετέου, καὶ τὴν μονάδα. Εἰ τοίνυν πρὸς δύω δοθέντας ποσότητας, καὶ τὴν μονάδα, ὁ δ'. ἀνάλογος ζητεῖται, ἐγένετο ἡ διαίρεσις.

§. 244. Συμβαίνει δὲ καὶ ἀναλογίαν πρὸς ἄλλην δοθεῖσαν παραβάλλεσθαι, ἐνίοτε δὲ καὶ ἀπαιτεῖσθαι τοῦτο. Ἐξ ὧν αὖθις καινήτις ἀνακύπτει ἀναλογία. Ἐνθεντοι ἐκκείσθω καὶ τούτων τὰ κυριώτατα, καὶ ἀναγκαιότατα, ὧν ἡ δεῖξις παρὰ πόδας, ὡς τῶν παραγομένων ἴσων (§. 235.) ὄντων.

1) Ἐὰν δύω διαφόρων ἀναλογιῶν οἱ τῶν πρώτων, ἢ οἱ τῶν ἐσχάτων λόγων ὅροι, ἴσοι ἀλλήλοις ὦσιν, ἔσονται καὶ οἱ λοιποὶ τῶν ὅρων πρὸς ἀλλήλους ἀνάλογοι π. χ.

$$\begin{array}{rl} & \alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \\ & \alpha : \alpha\mu = \gamma : \gamma\mu \\ \hline \text{ἄρα καὶ} & \beta : \beta\mu = \gamma : \gamma\mu \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 3 : 6 = 4 : 8 \\ & 3 : 6 = 5 : 10 \\ \hline \text{καὶ} & 4 : 8 = 5 : 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Ἢ καὶ} & \alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \\ & \gamma : \gamma\mu = \beta : \beta\mu \\ \hline \text{ἄρα καὶ} & \alpha : \alpha\mu = \gamma : \gamma\mu \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3 : 6 = 4 : 8 \\ 8 : 16 = 4 : 8 \\ \hline 3 : 6 = 8 : 16 \end{array}$$

Τοῦτο δ' ἕπεται καὶ ἐκ τοῦ ἀξιώματος. (§. 48. δ'.)

Τὸ τοιόνδε τοῦ συνάγειν εἶδος ὅροις τεχνικοῖς Ἁπλῶς Δι' ἴσου ἀποκαλοῦσιν.

2) Ἐὰν δὲ ὁ α'. καὶ γ'. ὅρος, ἢ ὁ β'. καὶ δ'. ἐν δυσὶν ἀναλογίαις ἴσοι ὦσιν,

$$\begin{array}{rl} \text{ὡς} & \alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \\ & \alpha : \alpha\nu = \beta : \beta\nu \\ \hline \text{ἔσαι καὶ} & \alpha\mu : \alpha\nu = \beta\mu : \beta\nu \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3 : 6 = 4 : 8 \\ 3 : 12 = 4 : 16 \\ \hline 6 : 12 = 8 : 16 \end{array}$$

Αὖθις

Λύσις $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \qquad 3 : 6 = 4 : 8$

$\alpha\nu : \alpha\mu = \beta\nu : \beta\mu \qquad 9 : 6 = 12 : 8$

ἄρα καὶ $\alpha : \alpha\nu = \beta : \beta\nu. \qquad 3 : 9 = 4 : 12$

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἀναλογίας ὁ β΄. ὅρος τῷ α΄. τῷ ἐπὶ τῆς ἑτέρας, καὶ ὁ δ΄. τῷ γ΄. ἴσοι ὦσι. π. χ.

$\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \qquad 3 : 6 = 4 : 8$

$\alpha\mu : \alpha\nu = \beta\mu : \beta\nu \qquad 6 : 9 = 8 : 12$

ἴσαι καὶ $\alpha : \alpha\nu = \beta : \beta\nu \qquad 3 : 9 = 4 : 12$

Τοῦτο καλεῖται Τεταγμένως Δι' Ἴσου.

3) Ἐὰν α΄) οἱ δύω ἄκροι ὅροι δύω διαφόρων ἀναλογιῶν ἀλλήλοις ἴσοι ὦσιν. ἢ β΄) οἱ δύω μέσοι. ἢ γ΄) ἐὰν ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἀναλογίας ὁ β΄. ὅρος τῷ α΄. τῷ ἐπὶ τῆς ἑτέρας, καὶ ὁ γ΄. τῆς α΄. τῷ δ΄. τῆς β΄. ἢ ὁ β΄. καὶ γ΄. τῆς α΄. τῷ α΄. καὶ δ΄. τῆς β΄. ἴσοι ὦσιν. Οἷον

α΄) $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \qquad 3 : 6 = 8 : 16$

$\alpha : \alpha\mu\nu = \frac{\beta}{\nu} : \beta\mu. \qquad 3 : 12 = 4 : 16$

ἴσαι καὶ $\alpha\mu : \alpha\mu\nu = \frac{\beta}{\nu} : \beta \qquad 6 : 12 = 4 : 8$

β΄) $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \qquad 3 : 6 = 8 : 16$

$\alpha\mu\nu : \alpha\mu = \beta : \frac{\beta}{\nu} \qquad 4 : 6 = 8 : 12$

ἄρα καὶ $\alpha : \alpha\mu\nu = \frac{\beta}{\nu} : \beta\mu \qquad 3 : 4 = 12 : 16$

γ΄) $\alpha : \alpha\mu$

γ.) $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$: $3 : 6 = 8 : 16$.

$\alpha\mu : \alpha\mu\nu = \frac{\beta}{\nu} : \beta$: $6 : 4 = 12 : 8$

ἄρα καὶ $\alpha : \alpha\mu\nu = \frac{\beta}{\nu} : \beta\mu$ $3 : 4 = 12 : 16$

ἀκούει δὲ Δι' Ἴσου Τεταραγμένως συνάγειν.

§. 245. Ἀλλὰ καὶ ἐὰν οἱ ὁμόλογοι ὅροι πάντη διαφόρων δοθεισῶν ἀναλογιῶν μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι, καιναὶ προκύψουσιν ἀναλογίαι.

Ἔστω ἀναλογία $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$. Τῶν ὁμολόγων
Ἔστω καὶ ἑτέρα $\gamma : \gamma\nu = \delta : \delta\nu$. πρὸς ἀλλήλους πολλαπλασιασθέντων, ἔσται. $\alpha\gamma : \alpha\gamma\mu\nu = \beta\delta : \beta\delta\mu\nu$.

Οὕτω καὶ τοὺς ὅρους τριῶν, τεσσάρων, πέντε, καὶ πλειόνων ἔτι ἀναλογιῶν πολλαπλασιάζειν μετ' ἀλλήλων δυνάμεθα.

Π. χ. ἐν ἀριθμοῖς $2 : 4 = 6 : 12$

$$3 : 9 = 5 : 15$$

$$5 : 2 = 10 : 4$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 : 4 \cdot 9 \cdot 2 = 6 \cdot 5 \cdot 10 : 12 \cdot 15 \cdot 4 \text{ ἢ}$$
$$30 : 72 = 300 : 720.$$

Παραπλησίως, καὶ ἐὰν οἱ ὅροι τῆς δοθείσης ἀναλογίας διὰ τῶν ὅρων ἑτέρας διαιρεθῶσι, προελεύσεται ὡσαύτως ἀληθὴς Γεωμετρικὴ ἀναλογία. Φανερὸν, ὅτι κἀνταῦθα τοὺς ὁμολόγους ὅρους δι' ἀλλήλων διαιρεῖν χρή.

$\alpha : \alpha\mu$

$$\begin{array}{c} \alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \\ \gamma : \gamma\nu = \delta : \delta\nu \\ \hline \frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha\mu}{\gamma\nu} = \frac{\beta}{\delta} : \frac{\beta\mu}{\delta\nu} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 8 : 24 = 7 : 21 \\ 3 : 9 = 4 : 12 \\ \hline \frac{8}{3} : \frac{24}{9} = \frac{7}{4} : \frac{21}{12} \end{array}$$

§. 246. Πολλάκις ἐπὶ δύω, ἢ καὶ πλειόνων ἀναλογιῶν, ὧν οἱ ὅροι δι᾽ ἀλλήλων πολλαπλασιάζοι, δύω ὅροι τῶν μὴ ὁμολόγων ἴσοι ἀλλήλοις. Ἐὰν τοῦτο δυσὶ συμβαίνῃ ἀναλογίαις, καινὴ προκύψει ἀναλογία διὰ τοῦ τῶν ὅρων πολλαπλασιασμοῦ, ἐν ᾗ ὁ α΄. ὅρος πρὸς τὸν β΄. λόγον ἔχει, ὃν ὁ γ΄. τῆς β΄. πρὸς τὸν δ΄. τῆς α΄. οἷον, ἐὰν

$$\begin{array}{c} \alpha : \alpha\mu = \beta . \beta\mu \\ \gamma\nu : \gamma = \beta\nu : \beta \\ \hline \end{array}$$

ἔςαι καὶ $\alpha\gamma\nu : \alpha\gamma\mu = \beta\nu : \beta\mu$. Ἐὰν γὰρ ἐνεργείᾳ τοὺς ὅρους μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς ἀναλογίαν τάξωμεν, ἔςαι

$\alpha\gamma\nu : \alpha\gamma\mu = \beta\beta\nu : \beta\beta\mu$. καὶ διὰ β τῶν ὅρων τοῦ β΄. λόγου διαιρεθέντων, ἔςαι

$\alpha\gamma\nu : \alpha\gamma\mu = \beta\nu : \beta\mu$ (§. 240.)

Ἐν ἀριθμοῖς.

$$\begin{array}{c} 4 : 6 = 8 : 12 \\ 16 : 4 = 32 : 8 \\ \hline 64 : 24 = 32 : 12 \end{array}$$

Τῶν δὲ ἀναλογιῶν οὕτως ἐκκειμένων.

$$\begin{array}{c} \alpha\mu : \alpha = \beta\mu : \beta \\ \gamma : \gamma\nu = \beta : \beta\nu \\ \hline \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{c} \alpha : \beta = \gamma : \delta \\ \rho : \sigma = \delta : \varepsilon \\ \hline \end{array}$$

ἔςαι καὶ $\alpha\gamma\mu : \alpha\gamma\nu = \beta\mu : \beta\nu$ $\qquad$ $\alpha\rho : \beta\sigma = \gamma\delta : \delta\varepsilon$

Ἐν ἀριθμοῖς

$$\begin{array}{c} 3 : 6 = 8 : 16 \\ 2 : 5 = 16 : 40 \\ \hline 2.3 : 5.6 = 8 : 40 \\ \text{ἢ} \quad 6 : 30 = 8 : 40 \end{array}$$

Εὐχερέςερον δὲ ἡ καινὴ προκύψει ἀναλογία, εἰ τὰς ποσότητας πρὸς ἀλλήλας ἐξαλείψομεν, ἃς προορῶμεν· καὶ ἐνεργεία μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθείσας, διὰ τῆς διαιρέσεως (ὅτι δύω ὅρους τῆς ἀναλογίας διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος διαιρεῖν ἔχομεν, τῆς ἀναλογίας διὰ τοῦτο μηδεμίαν τροπὴν ὑφιςαμένης) πάλιν ἐκπεσουμένας.

Π. χ. $3 : 6 = 8 : 16$

$2 : 5 = 16 : 40$

$6 : 30 = 8 : 40$. Ἄλλως γὰρ ἂν εἴη $6 : 30 = 8 \cdot 16 : 16 \cdot 40 = 6 : 30 = 8 : 40$. τοῦ 16 διὰ 16 διαιρεθέντος.

Ἐὰν οὕτως ἐν τῷ κοινῷ βίῳ δύω ἀναλογίαι συντεθῶσιν, ὡς ἐκ τούτων τὴν γ'. ἀνακύψαι, καλεῖται τοῦτο ἡ Μέθοδος τῶν Πέντε. Ζητεῖται γὰρ ἡ ς'. ποσότης, τῶν 5 δοθεισῶν, ὡς ἐνταῦθα ἐκ τοῦ 3, 6, 8, 2, 5 ζητοῦμεν τὸν 40. Εἰ γὰρ οὗτος ἀπῆν, εἶχεν ἂν οὐ δυσχερῶς εὑρεθῆναι. Καὶ γὰρ

$4 : 6 = 8 : 16$

$2 : 5 = 16 : \chi$

$6 : 30 = 8 : \chi$. Καὶ $\chi = \frac{30 \cdot 8}{6} = 40$. (§. 241.)

§. 247. Ἀλλὰ καὶ πλείους ἀναλογίαι οὕτω διατάττεσθαι δύνανται, ὥς ἀεὶ τῇ ἐγγὺς ἀναλογίᾳ κοινόν τινα τῇ προτέρᾳ ὅρον ἐνυπάρχειν, οὐχ ὁμόλογον μέντοι· ὡς ἐν ταῖς ἑξῆς ἀναλογίαις.

$$\begin{array}{l} \alpha : \beta = \gamma : \delta \\ \eta : \vartheta = \delta : \nu \\ \rho : \sigma = \nu : \varepsilon \\ \pi : o = \varepsilon : \tau \\ \upsilon : \varphi = \tau : \psi. \end{array}$$

Ἡ δ' ἐκ τούτων καινὴ ἀναλογία $\alpha . \eta . \rho . \pi . \upsilon : \beta . \vartheta . \sigma . o . \varphi = \gamma : \psi$. Ἐὰν γὰρ ἐνεργείᾳ καὶ οἱ ὅροι τῶν ἐσχάτων λόγων τῆς ἀναλ. πολλαπλασιασθῶσιν, ἐν τῇ καινῇ ὅμως ἀναλογίᾳ οἱ δύω ἔσχατοι ὅροι διὰ τῆς διαιρέσεως (§. 240.) εἰς τοὺς $\gamma : \psi$ ἀναχθεῖεν. Οὕτω ποίησον καὶ ἐν ἀριθμοῖς.

Περὶ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου.

§. 248. Οὕτω κέκληται, ὅτι τριῶν δοθέντων ὅρων, ζητεῖται ὁ δ'. ἐν πράγμασι μάλιϛα, ὧν πολλὴ ἐν τῷ κοινῷ βίῳ ἡ χρῆσις. Τὰ δὲ τῆς ἀναλογίας πράγματα Λόγον τινὰ πρὸς ἄλληλα ἔχειν ἐπάναγκες· Οὕτω π. χ. τὰ ὤνια, καὶ ἡ τούτων τιμὴ ἐν λόγῳ ἵϛανται. Τουτ. ὅσῳ πλέον τις ὠνεῖται, τοσούτῳ πλέον καὶ καταβαλεῖ. Καὶ δὶς τοσαῦτα ὤνια, διπλῆν ἀπαιτοῦσιν ἄρα καὶ τὴν τιμήν. Παραπλησίως χρόνος, καὶ τόκος τῶν δανεισθέντων, καὶ μυρία ἄλλα, ὧν τίνα πρὸς ἄλληλα σχέσιν ἔχει, ὁ ὀρθὸς εὑρήσει λόγος, τὰ περὶ τούτων ἐπιλύσειν μέλλων προβλήματα.

§. 249. Διαιρεῖται δὲ εἰς Ὀρθὴν, καὶ Ἀντίϛροφον· Καὶ ὀρθὴ μὲν, ἐὰν οἱ ὁμόλογοι ὅροι τῆς ἀναλογίας οὕτω πρὸς ἀλλήλους ἔχωσιν, ὥϛε π. χ. τοῦ β'. ὅρου μείζονος, ἢ ἐλάττονος ὄντος, ἢ ὁ πρῶτος, καὶ τὸν δ'. οὕτως ἔχειν χρή. Ἐπὶ δὲ τῆς ἀντιϛρόφου τοῦτο οὐκ ἔϛι. Παράδειγμα τῆς μὲν α'. τὸ, Ἐάν τινος ὠνίου λίτραι 5, μνῶν πιπράσκωνται 7· πόσου ἄρα ἀπεμπωληθήσονται τοῦ αὐτοῦ ὠνίου λίτραι 13; τουτ: ἐπειδὴ αἱ 13 λ. πλείους τῶν 5, ὠνηθήσουται ἀμέλει καὶ πλείστος, ἢ αἱ 7 εἰσι μνᾶι. Ὅθεν λέγομεν $5 : 13 = 7 : \chi$. Τῆς δὲ β΄. τὸ, Ἐὰν 10 γεωργοὶ ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ 20 πλέθρα σκάπτωσι, πόσου χρόνου δεηθήσονται εἰς τοῦτο 20 γεωργοί; Ἐνταῦθα οὐκ ὀρθὸν τὸ ἐπαγαγεῖν, 10 γεωργοὶ πρὸς 20 γ. ὡς 1 ἡμέρα : χ ἡμ. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ 20 γ. πλέον ἐργάζονται κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον, ἢ οἱ 10. ἐροῦμεν, ὡς $20 : 10 = 1 : \chi$.

§. 250. Πότερον δὲ, προκειμένῳ τινὶ παράδειγμα τῇ ὀρθῇ, ἢ τῇ ἀντιστρόφῳ ἁρμόζει μεθόδῳ, τῷ τὸν νοῦν ἐπιστήσαντι ῥάδιον συνιδεῖν. Καὶ τούτου τεθέντος, τὰ μὲν ὁμοειδῆ τὸν α΄. καὶ β΄. τῆς ἀναλογίας καταλήψονται τόπον, τὸ δ' ἀνομοιοειδὲς τὸν γ΄. Τὸ δὲ ζητούμενον τὸν δ΄. Ἐπεὶ δὲ ἡ προκειμένη μέθοδος ἀληθὴς Γεωμετρικὴ τυγχάνει ἀναλογία, ἧς οἱ τρεῖς ὅροι δέδονται, ὁ δὲ δ΄. ζητεῖται· εἰς εὕρεσιν τούτου, γενήσεται τὸ ἐν §. 241. εἴτε ὁλοσχερεῖς, εἴτε κλάσματα (ὧν τὸν πολλαπλ. καὶ διαίρ. ἐν τοῖς §. §. 140. 144. ἐπραγματευσάμεθα) εἶεν οἱ δοθέντες ὅροι· οἷον, Πόσου ἄντις 32 πήχεις ὑφάσματός τινος ὠνήσαιτο, εἰ 5 π. ὠνησάμενος 7 δραχμὰς ἀπέτισε;

$$5 : 32 = 7 : \chi . \quad \text{Καὶ}\ \chi = \frac{32 \cdot 7}{5} = 44 + \frac{4}{5} . \ \text{δραχ.}$$

§. 251. Ἡ δὲ βάσανος τοῦ ὀρθῶς τὸ παράδειγμα ὑπολελογίσθαι ἐν §. 235. δέδεικται. Ἐν γὰρ ὀρθῶς ἐχούσῃ ἀναλογίᾳ τὰ ἐκ τῶν ἄκρων παραγόμενα ἴσα τοῖς ἐκ τῶν μέσων. Ἄρα καὶ $5 \cdot 44\frac{4}{5} = 32 \cdot 7$.

§. 252. Ἐν ἀντιστρόφῳ τῇ τῶν τριῶν μεθόδῳ, (§. 2 9) οἱ ὅροι οὐ τὴν αὐτὴν τηροῦσι τάξιν, ἥν καὶ ἐν τῇ ὀρθῇ, ἀλλ' ἐξενεχθήσονται, ὡς καὶ ἐν τῇ ἀντιστρόφῳ ἀναλογίᾳ. (§. 234. σχ.) Τὸ αὐτὸ ἔργον ὑπὸ πλειόνων ἐν ἐλάσσονι χρόνῳ πληρωθήσεται, ἢ ὑπ' ἐλασσόνων. Ὥςε ὁ χρόνος, καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν εἰσὶν ἐν ἀντιςρόφῳ λόγῳ. τουτ: ὅσῳ πλείους ἐργάζονται, τοσούτῳ καὶ ἐλάσσονος αὐτοῖς χρόνου χρεία. Ἡ δὲ βάσανος ἡ αὐτὴ, ὡς καὶ ἡ τῆς ὀρθῆς. (§. ἀνωτ.)

Σχόλιον.

Σημείωσαι καθόλου, ὅτι τὴν ὀρθὴν τῶν τριῶν μέθοδον τὴν μεταχειριζόμεθα, ὅτε δυνάμεθα νὰ εἰπῶμεν, ὅσῳ πλέον τοῦτο, τοσούτῳ πλέον ἐκεῖνο· ἢ ὅσῳ ἔλαττον τοῦτο, τοσούτῳ ἔλαττον ἐκεῖνο. ὅσῳ πλείων ὁ πόνος, τοσούτῳ πλείων καὶ ὁ μισθός, καὶ ἀνάπαλιν· ἡ δ' ἀντίςροφος χωρεῖ, ὅτε πρέπει νὰ εἰπῶμεν. ὅσῳ πλέον τοῦτο, τοσούτῳ ἔλαττον ἐκεῖνο. ἢ καὶ, ὅσῳ ἔλαττον τοῦτο, τοσούτῳ πλέον ἐκεῖνο. ὡς δηλοῖ τὸ παράδ. τοῦ ἀνωτ. §.

§. 253. Ἐπὶ τῶν προβλημάτων, ἔνθα τῇ τῶν τριῶν μεθόδῳ δὶς χρῆσθαι ἀνάγκη, ἐν οἷς καὶ δύω μὴ ὁμόλογοι ὅροι ἐπ' ἀμφοῖν ταῖς ἀναλογίαις ἀλλήλοις ἴσοι, (§. 246.) ἡ μέθοδος, τῶν Πέντε Μέθοδος ἀκούει. τουτ: πέντε τινῶν δοθέντων, τὸν ϛ. ζητεῖν πρόκειται. Οἷον 8 ἄνθρωποι ἐν ἡμέραις 12 κτίζουσι τείχους πόδας 4. πόσους πόδας κτίσουσι 36 ἄνθρωποι ἐν 18 ἡμέραις; Ῥητέον οὖν $8 : 36 = 4 : \chi$. καὶ $\chi = \frac{4 \cdot 36}{8} = 18$. ὡσαύτως καὶ $12 : 18 = 18 : \psi$. καὶ $\psi = \frac{18 \cdot 18}{12} = 27$. Ἀλλὰ τὰς δύω ἀναλογίας οὕτω τακτέον.

$$\begin{array}{ccccccc} 8 & : & 36 & = & 4 & : & \chi \\ 12 & : & 18 & = & \chi & : & \psi \\ \hline 8 \cdot 12 & : & 36 \cdot 18 & = & 4 & : & \psi \\ 2\ \ 3 & & 9 \cdot 9 & & 1 & & \\ 1 & & 3 & & & & \end{array}$$

Ἐπειδὴ τοὺς ὅρους δύω ἀναλογιῶν πολλαπλασιάζει, καὶ δύω ὁμολόγους ὅρους τῆς ἀναλογίας διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρεῖν

ἔξεςι

ἕξεσι, τῆς ἀναλογίας αὖθις τηρουμένης, διὰ τῆς ἐξασκήσεως τοὺς πολυαρίθμους πολλαπλασιασμοὺς τῶν δύω ἀναλογιῶν φυγεῖν δυνάμεθα, τῷ δύω ὅρους τῆς ἀναλογίας διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύω προκυψάντας ἀναλογιῶν, τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ διαιρεῖν. Οὕτως ἐν τῷ προκειμένῳ παραδείγμ. ὁ α'. καὶ γ'. ὅρος διῄρηνται διὰ τοῦ 4. Ὅθεν ὑπὸ τὸν 4 ἐτέθη τὸ πηλίκον, ἡ 1, καὶ ὑπὸ τὸν 8 ἐν τῷ α'. ὅρῳ, ὁ 2. Εἶτα οὗτος ὁ 2. καὶ ὁ 18 ἐν τῷ β'. ὅρῳ αὖθις διὰ τοῦ 2, εἶτα ὁ 12 καὶ 36 ἄμφω διὰ τοῦ 4, καὶ τελευταῖον τὰ ἐκ τούτων πηλίκα 3, καὶ 9 ἐν τῷ α'. ὅρῳ ἄμφω διὰ τοῦ 3. Ὥςε ὑπολείπεται ἥδε ἡ ἀναλογία $1 : 3 . 9 = 1 : \psi$. ὥςε $\psi = \frac{1 . 3 . 9}{1} = 27$. Κατὰ τοῦτο τὸ διεξοδικῶς ἀναπτυχθὲν παράδειγμα, καὶ ἕτερα ἡμῖν προβαλλόμενα παραδείγματα ἐπιτομώτερον ἐπιλύσομεν. Δίδονται δ' ἐνίοτε καὶ προβλήματα, ὧν ἡ λύσις ἐν τῇ τῶν πέντε μεθόδῳ τὴν ἀντίςροφον τῶν τριῶν μέθοδον ἀπαιτεῖ, ἐξοῦ ἐκείνῃ καὶ τὸ ὄνομα, Μέθοδος τῶν Πέντε Ἀντίςροφος, ἁρμόζει. Πότε δὲ ταύτῃ χρησόμεθα, αὐτὰ διδάξει τὰ προβλήματα.

Σχόλιον.

Εἶναι καὶ ἄλλαι μέθοδοι τῶν Ἑπτὰ, τῶν Ἐννέα, κτ. ὀνομαζόμεναι, καὶ ἄλλα εἴδη ὑπολογισμῶν, τὰ ὁποῖα ἔλαβον τὴν ὀνομασίαν ἐκ τῶν πραγμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα προσαρμόζονται, ὡς ὁ τοῦ Τόκου ὑπολογισμὸς, ὁ τοῦ Κέρδους, καὶ τῆς Ζημίας, ὁ τῆς Κοινωνίας, ἢ Συντροφίας, ὁ τῆς Μίξεως πραγμάτων ἑτεροειδῶν, κτ. οἵτινες τῷ ὄντι εἰς τὴν ἀναλογίαν ἐρείδονται. Περὶ τούτων οὐδὲν ἀναφέρομεν. διότι ἓν παράδειγμα δὲν ἀρκεῖ εἰς τὸ νὰ εὐχαριςήσῃ τὸν περίεργον, τὰ δὲ πολλὰ ἤθελαν ἦναι ἔξω τοῦ σκοποῦ.

Ἀλλὰ

Ἀλλὰ πρὸ τοῦ νὰ μεταβῶμεν εἰς ἑτέραν διδασκαλίαν, πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι δίδονται καὶ ἰδιαίτερα εἴδη ὑπολογισμῶν περίτινων πραγμάτων. Ὅθεν εἰς ἐκεῖνον ὁποῦ θέλει νὰ λύσῃ προβλήματα περὶ τῶν τοιούτων, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἰξεύρῃ τοῦτο τὸ εἶδος τῶν Λόγων· διότι ἀλλέως, ἂν ἰξεύρῃ καὶ τὴν Ἀριθμητικὴν, δὲν θέλει δυνηθῇ νὰ τὰ λύσῃ· διὰ παράδειγμα ἂς ἀναφέρωμεν μόνον ἕν.

Ἡ τιμὴ τῶν Ἀδαμάντων δὲν διευθύνεται κατὰ τὸ βάρος των, ὥςε τὸ δύω φοραῖς π. χ. βαρύτερον νὰ ἦναι ἄξιον καὶ διπλῆς τιμῆς. ἀλλὰ κατὰ Λόγον πολλῷ μείζονα τούτου. Ἐπὶ τῶν Ἀδαμάντων αἱ τιμαὶ ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν οἱ τετράγωνοι ἀριθμοὶ τοῦ βάρους. ςαθμῶνται δὲ κατὰ κεράτιον, καὶ κόκκον. τὸ δὲ κεράτιον = 4 κόκκοις. Ἀδάμαντος οὖν προκειμένου, ςαθμοῦ κόκκων δύω, τοῦ δ' ἑνὸς κόκκου ἀδάμαντος 5 μνῶν τιμωμένου, διὰ νὰ μάθωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀδάμαντος δὲν πρέπει νὰ συνάξωμεν 1 κόκκος : 2 κόκ. = 5 μναῖ : χ μνᾶς. ἀλλ' ὡς $1^2 : 2^2 = 5 : \chi$ ἤτοι ὡς $1 : 4 = 5 : \chi$. Ὥςε ὁ δύω κόκκων ἀδάμας 20 μνῶν ἄξιος. Εἰ δὲ δύω Ἀδάμαντες πρόκεινται, οὓς πρὸς ἀλλήλους παραβαλεῖν βουλόμεθα, καὶ ὧν ἑκατέρων τὸ βάρος, τὴν δὲ τιμὴν τοῦ ἑτέρου μόνον οἴδαμεν. Οἷον ὁ ἕτερος ἐςὶ τριῶν κόκκων, 45 μνῶν ἄξιος, ὁ δ' ἕτερος 5 κόκκων, συνάξομεν. $3^2 : 5^2 = 45 : \chi$. ἢ $9 : 25 = 45 : \chi$. Καὶ χ, ἤτοι ἡ τιμὴ τοῦ β'. = 125 μναῖς. Ἀλλ' ἐπὶ τῶν Ἀδαμάντων θεωρητέον καὶ ἄλλας ἰδιότητας αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀνήκουν ἐνταῦθα. Ὡς τὴν τούτων πυκνότητα, κτ.

Περὶ

Περὶ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου.

§. 254. Ἀριθμῶν πλῆθυς, ἢ Ποσοτήτων, διηνεκῶς αὐξομένων, ἢ μειουμένων, ὧν ἑκάςη ἄμεσος δυὰς τὸν αὐτὸν ἔχει ἐκθέτην, (§. 227) ὃν καὶ αἱ λοιπαὶ, (δι ἀλλήλων· ἀμέλει τῶν δύω ἀριθμῶν διαιρουμένων) Γεωμετρικὴ ἀκούει Πρόοδος. Ὡς 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, κτ. ἢ 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$. κτ. ἔνθα τῆς α'. ὁ ἐκθέτης = 2. τῆς δὲ β'. = 3. Ἀναφύεται δὲ ἐκ τῆς συνεχοῦς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας, (§. 234.) ἧς ὁ γενικὸς τύπος ὅδε ἦν. $\alpha : \alpha\mu = \alpha\mu : \alpha\mu^2$ Ἐὰν οὖν τοὺς δύω ἐσχάτους ὅρους τῆσδε τῆς ἀναλογίας, πρώτους ὅρους ἑτέρας καινῆς συνεχοῦς ἀναλογίας ποιήσωμεν, καὶ οὕτως ἀεὶ χωρῶμεν, τόνδε τὸν λόγον οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας ἕξουσι. τουτ. ἔςαι ὁ α'. πρὸς τὸν β'. ὡς ὁ β'. πρὸς τὸν γ'. ὡς ὁ γ'. πρὸς τὸν δ'. κτ. Αἱ δ' ἀναλογίαι οὕτως ἀποδοθήσονται.

$\alpha : \alpha\mu = \alpha\mu : \alpha\mu^2$. Καὶ $\alpha\mu : \alpha\mu^2 = \alpha\mu^2 : \alpha\mu^3$. Καὶ $\alpha\mu^2 : \alpha\mu^3 = \alpha\mu^3 : \alpha\mu^4$. κτ. Ἐπεὶ δὲ οἱ δύω ἔσχατοι ὅροι τῆς ἀναλογίας ἀεὶ ἐπαναλαμβάνονται, ἐξενεχθείη ἂν καὶ ὧδε τὸ σχῆμα. $\alpha : \alpha\mu = \alpha\mu : \alpha\mu^2 = \alpha\mu^2 : \alpha\mu^3 = \alpha\mu^3 : \alpha\mu^4$, κτ. Ἀλλ' ἐὰν ληφθῶσιν ἐνταῦθα οἱ δύω πρῶτοι δοθέντες ὅροι, καὶ οἱ διὰ τούτων ἐφεξῆς εὑρισκόμενοι, καὶ εἰς σειρὰν τεθῶσι, προκύψει σειρὰ ἡ ἑξῆς α, $\alpha\mu$, $\alpha\mu^2$, $\alpha\mu^3$, $\alpha\mu^4$, $\alpha\mu^5$, $\alpha\mu^6$, $\alpha\mu^7$, κτ. Ἔνθα τὸ μ διηνεκῶς μιᾷ δυνάμει ἐπαύξει, καὶ ἕκαςος ὅρος, ὁ προηγησάμενος τυγχάνει πολλαπλασιασθεὶς, ἢ διαιρεθεὶς διὰ τοῦ ἐκθέτου. (κἀνταῦθα γὰρ τὸ μ Ἐκθέτης τῆς Προόδου καλεῖται, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ἀναλογίας, Ἐκθέτης τοῦ λόγου, ἢ τῆς ἀναλογίας, (§. 227.) ἐμφαίνων, ποσάκις ἕκαςος ὅρος τὸν πρὸ αὐτοῦ περιέχει, ἢ ἐν ἐκείνῳ περιέχεται) Ἵνα δὲ τὸ λεγόμενον ὑπ' ὄψιν παραςήσω-

μεν

μεν, ἀντικαταςήτωσαν ἐν τῇ σειρᾷ ἀντὶ τῶν γραμμάτων ἀριθμοί. Ἔςω οὖν $\alpha = 1$. καὶ $\mu = 2$. ἡ δὲ σειρὰ ἔςαι 1, 1 . 2, 1 . 2 . 2, 1 . 2 . 2 . 2, 1 . 2 . 2 . 2 . 2, 1 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2, κτ. $=$ 1, 2, 4, 8, 16, 32, κτ. Ἐφ' ἧς προφανῶς καθορῶμεν, ὅπως ἕκαςος ὅρος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸν πρὸ αὐτοῦ.

Ἐὰν δὲ αὖθις ἡ $\alpha = 1$, καὶ μ, ἤτοι ὁ Ἐκθέτης $= \frac{1}{2}$, ἔςαι ἡ σειρά.

1, $1 . \frac{1}{2}$, $1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$, $1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$ κτ.

ἢ 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, κτ.

§. 255. Ἐὰν ἐπὶ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου οἱ ὅροι ἐπὶ τὸ διηνεκὲς αὔξωσι, καλεῖται ἡ Σειρὰ, Αὔξουσα. Μειουμένων δὲ, Μειουμένη. Κἀκεῖνο μὲν γίνεται, ἐὰν ὁ Ἐκθέτης, ἤτοι μ, μείζων τῆς 1 τυγχάνῃ, εἴτε ὁλοσχερὴς εἴη ἀριθμὸς, εἴτε νόθον κλάσμα. Τοῦτο δὲ, ἐλάττονος τῆς 1, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, γνησίου κλάσματος τοῦ Ἐκθέτου ὄντος. Εἰ δ' Ἐκθέτης ἡ 1 εἴη, οἱ ὅροι ἔσονται ἀλλήλοις ἴσοι.

§. 256. Τῶν ὅρων τῆς ἐν γένει σειρᾶς (§. 254.) τοῖς Φυσικοῖς ἐπισημειωθέντων χαρακτῆρσιν, $\overset{1}{\alpha}$, $\overset{2}{\alpha\mu}$, $\overset{3}{\alpha\mu^2}$, $\overset{4}{\alpha\mu^3}$, $\overset{5}{\alpha\mu^4}$, $\overset{6}{\alpha\mu^5}$, $\overset{7}{\alpha\mu^6}$, κτ. δῆλον, ὅτι ἡ δύναμις τοῦ Ἐκθέτου μ ἀεὶ μονάδι ἐλαττοῦται τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐφ' ἑκάςου ὅρου. π. χ. ἐν τῷ ς' ὅρῳ τῆς Προόδου ἡ μὲν δύναμις τοῦ μ ἐςὶ 5, ὁ δ' ἐπ' αὐτοῦ ἀριθμὸς 6. Ὡσαύτως καὶ ἐν τῷ δ'. ἡ μὲν δύν. 3, ὁ δ' ἐπ' αὐτοῦ ἀριθμὸς 4, οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν· Ἔνθεντοι, ἐὰν ἡ τῶν ὅρων πληθὺς π ῥηθῇ, ἀναγκαίως ἡ δύναμις τοῦ ἐκθέτου τοῦ κατὰ τὸν ἔσχατον ὅρον, ἢ ἡ δύναμις τοῦ π ὅρου ἔςαι $\pi - 1$. Εἰ π. χ. ἡ τῶν ὅρων πληθὺς 6, ταυτ: $\pi = 6$, ἡ δύναμις

ναμις τοῦ ϛ'. ὅρου ἔςαι 6 — 1, ἢ 5. Ὡς' ἐπὶ πάντων. ὁ ἔσχατος ὅρος οἱασοῦν Γεωμετρικῆς προόδου = $\alpha\mu^{\pi-1}$, ἐὰν ἐν γένει ἡ τῶν ὅρων πληθὺς π κληθῇ. Ἐπεὶ δὲ ἐφ' ἑκάςου ἐγγὺς προηγησαμένου ὅρου ἡ δύναμις τοῦ ἐκθέτου 1 ἐλαττοῦται τῆς τοῦ ἑπομένου ὅρου, ἡ τοιαύτη σειρά, καθόλου θεωρουμένη, οὕτως ἂν ἐκδηλωθείη.

$$\alpha,\ \alpha\mu,\ \alpha\mu^{2}\ \ldots\ldots\ \alpha\mu^{\pi-3},\ \alpha\mu^{\pi-2},\ \alpha\mu^{\pi-1}.$$

Ἡ ἐὰν ἡ σειρὰ ἀντιςραφῇ, καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος α'. γένηται, εἴη ἂν ὁ γενικώτατος τύπος, ὁ πάσαις ταῖς Γεωμετρικαῖς ἐφαρμόζων Προόδοις, ὅδε·

$\alpha\mu^{\pi-1},\ \alpha\mu^{\pi-2},\ \alpha\mu^{\pi-3},\ \alpha\mu^{\pi-4},\ \alpha\mu^{\pi-5}$ . . κτ. μέχρις οὗ ἡ τῶν ὅρων πληθὺς τῷ π ἐξισωθῇ. Τηνικαῦτα γὰρ ἔςαι $\alpha\mu^{\pi-\pi}$, ἢ $\alpha\mu^{0}$. ἀλλὰ $\mu^{0} = 1$. (§. 198.) ἄρα καὶ ὁ ὅρος $= \alpha . 1 = \alpha$. ὅπερ ὡς α'. ὅρος καὶ ἡμῖν παρείληπται.

Ἐὰν δὲ καὶ αὖθις τὴν Γεωμετρικὴν Πρόοδον θεωρήσωμεν,

$$\alpha,\ \alpha\mu,\ \alpha\mu^{2},\ \alpha\mu^{3},\ \alpha\mu^{4},\ \alpha\mu^{5},\ \alpha\mu^{6}\ ..$$

Εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ δύω ἄκροι ὅροι, καὶ ἀεὶ δύω ἐπίσης ἀπὸ τῶν δύω ἄκρων ἀφιςάμενοι, τὸ αὐτὸ παρέχουσι παραγόμενον. Ὡς ὁ α'. α, καὶ ὁ ἔσχατος $\alpha\mu^{6}$ = τῷ β'. $\alpha\mu$, καὶ τῷ ϛ'. $\alpha\mu^{5}$ = τῷ γ'. $\alpha\mu^{2}$, καὶ τῷ ε'. $\alpha\mu^{4}$, κτ. Ἐναργέςερον δὲ δι' ἀριθμῶν. Ἔςω $\alpha = 3$. $\mu = 4$. ἡ δὲ Πρόοδος $3,\ 3\cdot4,\ 3\cdot4^{2},\ 3\cdot4^{3},\ 3\cdot4^{4},\ 3\cdot4^{5}$. ἢ
3, 12, 48, 192, 768, 3072, κτ.

ἧς τὰ

ἧς τὰ παραγόμενα ἐκ τῶν ταῖς γραμμαῖς συνημμένων ὅρων ἴσα ἀλλήλοις, ἤτοι $=$ 9216.

Εἰ οὖν, ὡς δέδεικται, γενικώτατα, ὁ α΄. ὅρος α κληθῇ, ὁ δ' ἔσχατος $\alpha\mu^{\pi-1}$, ἀείποτε τὸ ἐκ δύω ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφισαμένων ὅρων παραγόμενον ἔσαι $\alpha\,.\,\alpha\mu^{\pi-1} = \alpha^2\,\mu^{\pi-1}$.

§. 257. Τούτων κειμένων, ῥαδίως τὰ ἑξῆς ἐπιλυθήσονται Προβλήματα. Δοθέντος τοῦ α΄. ὅρου μετὰ τοῦ Ἐκθέτου τῆς Προόδου, καὶ τῆς πλήθυος τῶν ὅρων, τὸν ἔσχατον ὅρον εὑρεῖν. Ὁ ἔσχατος ὅρος, $= \alpha\mu^{\pi-1}$. (§. ἀνωτ.) Ἔςω $\alpha = 3$. Ὁ ἐκθέτης $\mu = 2$. ἡ δὲ τῶν ὅρων πλῆθυς, ἢ $\pi = 17$. ὁ δὲ ἔσχατος $= 3\,.\,2^{17-1} = 3\,.\,2^{16}$. Ἔνθευτοι, ὁ 2 ἐξάρτεος εἰς τὴν ις΄. δύν. καὶ εἶτα πολλαπλασιασέος τῷ 3. τόνδε τὸν τρόπον. (§. 191.)

$2^1\,.\,2^1 = 2^2 = 4$. Ἀλλὰ $2^2\,.\,2^2 = 2^4 = 4\,.\,4 = 16$. Αὖθις $2^4\,.\,2^4 = 2^8 = 16\,.\,16 = 256$. Καὶ $2^8\,.\,2^8 = 2^{16} = 256\,.\,256 = 65536$. Ὁ μετὰ τοῦ 3 ἔτι πολλαπλ. παρέξει τὸν ἔσχατον ὅρον $= 196608$. Εἰ δ' ὁ α΄. ὅρος, ἢ $\alpha = 1$ ἦν, ἱκανὸν εἰς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου ὅρου τὸν Ἐκθέτην, καὶ τὴν τῶν ὅρων πλῆθυν εἰδέναι· Ὅτι ἡ 1 οὐ πολλαπλασιάζει.

Προκείσθω καὶ ἓν παράδ. τῆς μειουμένης σειρᾶς, ἧς ὁ ἐκθέτης κλάσμα. (§. 255.) Ἔςω $\alpha = 2\,.\,\mu = \frac{1}{3}$. ἡ δὲ τῶν ὅρων πλῆθυς, ἢ $\pi = 7$. Ὁ οὖν ἔσχατος ὅρος $= \alpha\mu^{\pi-1}$. καὶ τῶν ἀριθμῶν ἀντικαταςάντων ἐνταῦθα $= 2\,.\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} =$

2.

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 2 \cdot \frac{1^6}{3^6} = 2 \cdot \frac{1}{3^6} =$$

$\frac{2 \cdot 1}{729}$ Ὥςε ὁ ἔσχατος ὅρος $= \frac{2}{729}$. Τὸ δὲ κλάσμα εἰς ἐλάσσονας ὅρους ἀποβραχύνειν οὐκ ἔνι.

Αὕτη δὲ ἡ σειρά.

$2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{27},\ \frac{2}{81},\ \frac{2}{243},\ \frac{2}{729}.$

Δοθέντων τοῦ ἐσχάτου ὅρου, τῆς πλήθυος τῶν ὅρων, καὶ τοῦ Ἐκθέτου, τὸν α΄. εὑρεῖν. Κληθήτω ὁ ἔσχατος ὅρος ὀνόματι γενικωτάτῳ $= \beta$.

Ὅθεν $\alpha\mu^{\pi - 1} = \beta$

$$\frac{\alpha\mu^{\pi-1} = \beta}{} : \mu^{\pi-1}\ (\text{§. } 114.\ \alpha'.)$$

$$\frac{\alpha\mu^{\pi-1}}{\mu^{\pi-1}} = \frac{\beta}{\mu^{\pi-1}}$$

ἢ $\alpha = \dfrac{\beta}{\mu^{\pi-1}}$ Τουτ: ὁ α΄. ὅρος ἴσος τῷ ἐσχάτῳ, διαιρεθέντι διὰ τοῦ Ἐκθέτου, εἰς δύναμιν ἐξηρμένου ἐλάττονα μονάδι τῆς τῶν ὅρων πλήθυος.

Ἔςω ὁ ἔσχατος ὅρος τῆς Προόδου 18, ἤτοι $\beta = 18$. Ἡ δὲ τῶν ὅρων πλῆθυς 5, ἤτοι $\pi = 5$. Ὁ δ᾽ ἐκθέτης 2, τουτ $\mu = 2$. Ἔςι δὴ ὁ α΄. ὅρος $\alpha = \frac{18}{2^{5-1}} = \frac{18}{2^4} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$. Ἡ οὖν σειρὰ προαχθείη οὕτως $\frac{9}{8},\ \frac{18}{8},\ \frac{36}{8},\ \frac{72}{8},\ \frac{144}{8}$. ἢ διαιρεθέντος, ὅπερ ἐνεργείᾳ διαιρεθῆναι δύναται, ἔςαι $\frac{9}{8},\ 2\frac{1}{4},\ 4\frac{1}{2},\ 9,\ 18,\ \ldots$ Αὖθις, τοῦ α΄. καὶ β΄. ὅρου τῆς Γεωμετρικῆς δοθέντων προόδου,

δου, ῥᾷςα οἱ ἑπόμενοι εὑρεθήσονται. Εἰ γὰρ ὁ β΄. ὅρος διὰ τοῦ α΄. διαιρεθείη, προκύψει ὁ Ἐκθέτης (§. 254.) τῆς Προόδου, μεθ᾽ οὗ ἕκαςος ὅρος πολλαπλασιασθεὶς τὸν ἑπόμενον παράξει.

Ἔςω καθόλου ὁ α΄. ὅρος $=$ α. Καὶ ὁ β΄. $=$ αμ. Τοοὺν $\frac{\alpha\mu}{\alpha}$ δίδωσι πηλίκον τὸ μ, ἤτοι τὸν Ἐκθέτην, δι᾽ οὗ πάντας τοὺς ἑπομένους ὅρους τῆς Προόδου εὐχερῶς ἂν εὕροιμεν, ἤτοι αὐξούσης, ἢ μειουμένης. (§ 255.)

Παράδειγμα. Τεθήτω ὁ α΄. ὅρος $=$ 4. ὁ β΄. $=$ 9. Ὁ ἄρα Ἐκθέτης $= \frac{9}{4}$. ἐπὶ τοῦτο τὸ κλάσμα πολλαπλασιασθήτω ἕκαςος ὅρος, ἤτοι α΄. ὁ β΄. 9 ἐπὶ τὸν $\frac{9}{4}$, καὶ τὸ παραγόμενον $\frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$. ἔςαι ὁ γ΄. ὅρος. Ὃς αὖθις μετὰ τοῦ $\frac{9}{4}$ πολλαπλασιασθεὶς δίδωσι τὸν δ΄. ὅρον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἡ Πρόοδος δὲ 4, 9, $20\frac{1}{4}$, $45\frac{9}{16}$, $102\frac{33}{64}$, κτ.

Ἔςω ὁ α΄. ὅρος 5, ὁ β΄. 1, Ὁ δ᾽ ἐκθέτης $\frac{1}{5}$. Ἡ δὲ πρόοδος

5, 1, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{625}$, κτ.

Ἐὰν ὁ α΄. ὅρος τῆς Προόδου μὴ 1 ᾖ, εὐχερῶς τοῦτον εἰς μονάδα τρέψομεν, τῇ διαιρέσει ἁπάντων τῶν ὅρων διὰ τοῦ α΄. ὅρου. Καὶ τούτου γεγονότος, προκύψει σειρὰ, τὸν αὐτὸν ἐκθέτην, καὶ τὸν αὐτὸν λόγον τῇ προτέρᾳ ἔχουσα.

Ἔςω ἐν γένει ἡ σειρὰ α, αμ, $\alpha\mu^2$, $\alpha\mu^3$, $\alpha\mu^4$, $\alpha\mu^5$. κτ.

Ἥτις διαιρεθ. διὰ τοῦ α ἔςαι 1, μ, μ^2, μ^3, μ^4, μ^5, κτ. τὰς δυνάμεις τοῦ μ μόνον ἔχουσα.

Καὶ

Καὶ δυνάμεθα ἄρα οἱανοῦν σειρὰν εἰς τοιαύτην ἀνάγειν, ἧς ὁ α΄. ὅρος $= 1$.

Παράδειγμα. Ἔςω ἡ σειρὰ . 2 , 6 , 18 , 54 , 162 , 486 κτ.

Ἧς ὁ ἐκθέτης $= 3$. Ἁπάντων οὖν τῶν κατ᾽ αὐτὴν ὅρων διὰ τοῦ 2 διαιρεθέντων, ὁ μὲν α΄. ὅρος $= 1$ γενήσεται, ἡ δὲ σειρὰ $=$

1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , κτ. οἵτινες δυνάμεις εἰσὶ τοῦ 3.

§. 258. Καὶ ἑτεράτινα τῶν Προβλημάτων, ἅπερ ἐχομένως ὑποσυνάψομεν, διὰ τῶν εἰρημένων προχείρως ἤδη ἔχει ἐπιλυθῆναι.

Ἐπὶ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου εὑρήσομεν καὶ τοὺς μέσους ὅρους, τῶν ἄκρων δοθέντων. ὅ ἐςι, μεταξὺ δύω δοθέντων ἀριθμῶν ἕνα, ἢ πλείους ἀριθμοὺς συνεχῶς ἀναλόγους. (§. 234.) Ἀλλὰ πρὸ τούτου, ἐπιμνηςέον τῶν ἐν §. 200. περὶ τῶν Ποσοτήτων, ἐν αἷς ῥιζικὸν σημεῖον $\sqrt{}$ ἀπαντᾷ, προηγουμένως ῥηθέντων.

Οἱ δύω δοθέντες ἀριθμοὶ, ὧν μεταξὺ ἕνα, ἢ πλείους συνεχῶς ἀναλόγους εὑρεῖν δέοι, ὁ α΄. καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος τῆς Γεωμετρικῆς τυγχάνουσι Προόδου. Ἐπειδὴ οὖν δέδονται, ὁ μὲν α΄. ἀριθμὸς α ῥηθήτω, ὁ δ᾽ ἔσχατος β. Καὶ α΄. ζητηθήτω μεταξὺ τούτων εἷς μέσος ἀνάλογος, ὅς $= \chi$ τεθήτω. Ἡ πρόοδος οὖν εἴη α , χ , β. Γνωςὸν δὲ, τὰ ἐκ τῶν ἄκρων παραγόμενα, καὶ τὰ δύω ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφιςαμένων ὅρων, ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. (§. 256.) Τὸ δὲ χ ἐν μέσῳ κεῖται. Ἀφίςαται ἄρα ἀπὸ τῶν δύω ἄκρων ἐπίσης. Ὥςε ἀναγκαῖον ἐφ᾽ ἑαυτὸ πολλαπλασιασθῆναι. Ἔςαι γὰρ $\alpha : \chi = \chi : \beta$. Καὶ $\alpha\beta = \chi^2$. Ἐκ δύω δὲ ἴσων Ποσοτήτων καὶ αἱ ἐξαχθεῖσαι $\sqrt{}$

ἴσαι·

ἴσαι $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\chi^2}$. ἢ $\sqrt{\alpha\beta} = \chi$. Ἀλλ' ἐπεὶ οὔπω τὴν ῥίζαν ἐξάγειν ἐδιδάχθημεν, ἱκανὸν ἐν τοσούτῳ καὶ τὸ $\sqrt{}$ σημεῖον.

Παράδ. δὶ ἀριθμῶν. Ἔςω ὁ α'. ὅρος, ἤτοι $\alpha = 4$. Ὁ ἔσχατος $\beta = 9$. Ὁ ἄρα μέσος ἔςαι $= \sqrt{4 \cdot 9}$. ἢ $\chi = \sqrt{36} = 6$. Ἡ δὲ πρόοδος $4, 6, 9$. ἧς ὁ ἐκθέτης $= \frac{3}{2}$. Συμβαίνει δὲ πολλάκις μεταξὺ δύω ἀριθμῶν πλείους συνεχῶς ἀναλόγους ζητεῖσθαι. π. χ. τρεῖς. Τῶν δύω δοθέντων ὁ μὲν α'. ἔςω $= \alpha$. ὁ δ' ἔσχατος $= \beta$. Ζητείσθωσαν ἤδη τύποι α'. τῶν ὅρων, τῶν εἰς ζήτησιν προκειμένων, οὓς κατὰ τὸν τῆς ἀναλογίας κανόνα εὑρήσομεν. Ἔςω ὁ α'. τῶν εὑρεθησομένων ὅρων $= \chi$. Ἔνθεντοι κατὰ τὸ §. 254. ἔςαι $\alpha : \chi = \chi : \frac{\chi^2}{\alpha}$.

Καὶ $\chi : \frac{\chi^2}{\alpha} = \frac{\chi^2}{\alpha} : \frac{\chi^3}{\alpha^2}$. Ἡ δὲ Πρόοδος

$\alpha, \chi, \frac{\chi^2}{\alpha}, \frac{\chi^3}{\alpha^2}, \beta$. Ἔςι δὲ §. 255.

$$\alpha\beta = \chi \cdot \frac{\chi^3}{\alpha^2}.$$

$$\text{Ἢ} \quad \alpha\beta = \frac{\chi^4}{\alpha^2}$$

$$\overline{\alpha^3\beta = \chi^4} \cdot \alpha^2 \ (\text{§. 79. α'.})$$

Καὶ (§. 200.) $\sqrt[4]{\alpha^3\beta} = \sqrt[4]{\chi^4} = \chi^{\frac{4}{4}} = \chi$.

Ἔνθεντοι εἰς εὕρεσιν τοῦ χ, τὴν τετραπλῆν ῥίζαν τοῦ $\alpha^3\beta$ ἐξαγαγεῖν δεήσει. Οὗ γεγονότος, ἅπαντες οἱ ἑπόμενοι ὅροι πολλαπλασιασμῷ μόνῳ εὑρεθήσονται. Προκείσθω καὶ τούτου παράδειγμα εἰς ἀνάπτυξιν τοῦ ῥηθέντος.

Ὁ

Ὁ α΄. ὅρος, ἢ α ἔςω = 1. Ὁ δ' ἔσχατος β = 81. Ὥςε, τριῶν μέσων ὅρων ζητουμένων, ἔςαι τούτων ὁ α΄. ἢ $\chi = \sqrt[4]{1^3 . 81}$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ 1 ἀεὶ 1 μένει. Ἔςαι $\chi = \sqrt[4]{81}$, ὅ ἐςιν = 3. Ἐὰν γὰρ 3 εἰς δ΄. ἐξαρθῇ δύναμιν, ἔςαι = 81. Ἄρα καὶ ἡ τετραπλῆ √ τοῦ 81 = 3. Ἡ δὲ σειρὰ 1, 3, 9, 27, 81.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, τουτ: δὶ ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης. δυνάμεθα καὶ τὸν α΄. καὶ ἔσχατον ὅρον εὑρεῖν, δοθέντων τοῦ παραγομένου ἐκ τῶν δύω ἄκρων, τῆς πληθύος τῶν ὅρων, καὶ τοῦ Ἐκθέτου.

Ἔςω δεδομένον τὸ παραγόμ. ἐκ τῶν δύω ἄκρων ὅρων = ε. Ὁ Ἐκθέτης δεδομένος = μ. Ὡσαύτως καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὅρων = π. Ἔςω ὁ α΄. ὅρος ἄγνωςος = χ. Ὁ ἔσχατος παραπλησίως = ψ. Τὸ ἐκ τῶν δύω ἄρα ἄκρων παραγόμενον ἔςαι

$$\varepsilon = \chi\psi \quad : \chi \quad (\S. 114. \alpha'.)$$

$$\frac{\varepsilon}{\chi} = \psi$$

Ἀλλ' ἐπεὶ ὁ α΄. ὅρος = χ. κατὰ τὸ §. 256. ἔςαι

$$\chi\mu^{\pi-1} = \psi$$

$$\frac{\varepsilon}{\chi} = \chi\mu^{\pi-1} \quad (\S. 48. \delta'.)$$

$$. \chi \quad (79. \alpha'.)$$

$$\varepsilon = \chi^2\mu^{\pi-1} \quad : \mu^{\pi-1} \quad (\S. 114. \alpha'.)$$

$$\frac{\varepsilon}{\mu^{\pi-1}} = \chi^2.$$

Καὶ ἐξ ἀμφοῖν τῶν Ποσοτήτων τῆς ῥίζης ἐξαχθείσης.

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\mu^{\pi-1}}} = \sqrt{\chi^2} = \chi.$$

Οὕτω

Οὕτω τοίνυν τοῦ χ, ἤτοι τοῦ α'. ὅρου εὑρεθέντος, ῥᾷστα καὶ τὸ ψ, ἤτοι ὁ ἔσχατος, εὑρεθήσεται. Ἔςι γὰρ (§. 256.) $= \chi\mu^{\pi-1}$. ἢ καὶ $= \frac{\varepsilon}{\chi}$. Ὅτι, ὡς εἴδομεν, $\frac{\varepsilon}{\chi} = \chi\mu^{\pi-1}$. Τὸ δὲ χ εὕρηται.

Παράδ. Ἔςω τὸ παραγόμ. ἐκ τῶν δύω ἄκρων, ἢ $\varepsilon = 49$. Ὁ ἐκθέτης, ἢ $\mu = 2$. Ἡ τῶν ὅρων πληθὺς, ἢ $\pi = 5$. Τὸ οὖν χ, ἢ ὁ α'. ὅρος ἔςαι $= \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2^{5-1}}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2^4}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}}$.

Ἐκ τούτων οὐ χαλεπὸν τὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν, καίτοι περὶ ταύτης οὐδὲν ἔτι διαλαβοῦσιν. Ἄμφω γὰρ αἱ Ποσότητες τῷ Πυθαγορικῷ (§. 59.) ἐνυπάρχουσι πίνακι. Ἔνθεν τοι $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$. Ὁ δ' ἔσχατος ὅρος $= \frac{\varepsilon}{\chi} = \frac{49}{\frac{7}{4}} = 49 \cdot \frac{4}{7} = \frac{196}{7} = 28$. Καὶ ἐπεὶ $\mu = 2$, ἡ σειρὰ οὕτως ἂν χωροίη $\frac{7}{4}$, $\frac{14}{4}$, $\frac{28}{4}$, $\frac{56}{4}$, $\frac{112}{4}$. ἢ $1\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{2}$, 7, 14, 28.

Ὁ ἐν τοιούτοις παραδείγμασιν ἑαυτὸν ἐξασκῶν καλῶς ποιήσει, μετὰ τὸ τὴν περὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης διδασκαλίαν (περὶ ἧς μετ' ὀλίγα ἐροῦμεν) ἐκμαθεῖν.

§. 259. Ἅπαντες οἱ ὅροι τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, ἅμα ληφθέντες, ἀποτελοῦσιν ἓν κεφάλαιον. Δοθέντων οὖν τῶν ὅρων, ἢ εὑρεθέντων, κατὰ τὰ ἀνωτ. εὑρεθείη ἂν τὸ κεφάλαιον τούτων, τῇ προσθέσει. Ἀλλὰ τοῦτο ἐν προόδοις, ὧν οἱ ὅροι εἰς μέγα πλῆθος ἐκτείνονται, λίαν ἐργῶδες. Ἔνθεν τοι καὶ περὶ τούτου βραχεῖάν τινα ὑποσυνάψωμεν μέθοδον. Εἰς εὕρεσιν τοῦ κατὰ τὴν Γεωμετρικὴν Πρόοδον κεφαλαίου, ἀναγκαία ἡ γνῶσις τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ ἐσχάτου ὅρου, καὶ τοῦ ἐκθέτου. Οὗτοι δὲ ἤτοι δεδομένοι, ἢ ζητητέοι, κατὰ τὰ Προβλήματα τὰ προηγηθέντα. Ταῦτα γὰρ τὰ τρία ἐξ ἀνάγκης ἀπαιτεῖ ὁ τύπος, ὃν εἰς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου ὑποδεῖξαι βουλόμεθα. Ζητηθήτω τοίνυν ἐν γένει τὸ τῆς Προόδου κεφάλαιον.

Ἔςω ὁ α'. ὅρος $=$ α. Ὥςε ὁ ἔσχατος $=$ $\alpha\mu^{\pi-1}$, ἐὰν ἡ τῶν ὅρων πλῆθυς $= \pi$. Κ ἄρα, ἤτοι τὸ κεφάλαιον ἁπάντων τῶν ὅρων, ἔςαι

$$K = \alpha + \alpha\mu + \alpha\mu^2 + \alpha\mu^3 \ldots \alpha\mu^{\pi-2} + \alpha\mu^{\pi-1} \quad \S.\ 256.$$

$$\overline{\phantom{K = \alpha + \alpha\mu + \alpha\mu^2 + \alpha\mu^3 \ldots \alpha\mu^{\pi-2} + \alpha\mu^{\pi-1}}}\ .\ \mu$$

ἤτοι ἁπάντων τῷ μ πολλαπλασιασθέντων, προκύψει

$$\mu K = \alpha\mu + \alpha\mu^2 + \alpha\mu^3 + \alpha\mu^4 \ldots \alpha\mu^{\pi-1} + \alpha\mu^{\pi}.\ \S.\ 191.$$

Ἕκαςος ἄρα ὅρος αὔξει μιᾷ δυνάμει τοῦ μ. Ἐντεῦθεν καὶ ὁ ἔσχατος $\alpha\mu^{\pi-1}$, πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τοῦ μ, ἔςαι $\alpha\mu^{\pi-1+1} = \alpha\mu^{\pi}$. (§. αὐτ.)

Ἄφελε ἤδη τὰς δύω σειρὰς ἀπ' ἀλλήλων. Καὶ ἵνα τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων ἀφαιρεθῇ, οἱ ὅροι τῆς α. σειρᾶς ὑποτεθήτωσαν ὑπὸ τοὺς τῆς τῷ μ πολλαπλασιασθείσης οὕτως, ὥςε τοὺς ἴσους ὑπαλλήλους εἶναι. Ὡς

$$\mu K = \alpha\mu + \alpha\mu^2 + \alpha\mu^3 + \alpha\mu^4 \ldots \alpha\mu^{\pi - 1} + \alpha\mu^{\pi}$$

$$K = \alpha + \alpha\mu + \alpha\mu^2 + \alpha\mu^3 + \alpha\mu^4 \ldots \alpha\mu^{\pi - 1}$$

$$\mu K - K = -\alpha. \qquad\qquad + \alpha\mu^{\pi}$$

Καὶ ἐνεργεία τῆς ἀφαιρέσεως γεγονυίας, ὑπολείπεται $\mu K - K = -\alpha + \alpha\mu^{\pi}$, ἢ $\alpha\mu^{\pi} - \alpha$. Τὸ γὰρ $\alpha\mu^{\pi}$ μόνον τῶν μειωτέων ὅρων οὐκ ἀνῃρέθη ὑπό τινος ἀφαιρετέου. Ὡσαύτως καὶ τὸ α τοῦ ἀφαιρετέου ἐτέθη ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐναντίω τῷ σημείω, (§. 49.) ὡς ἀπότινος ἀφαιρεθῆναι μὴ ἔχον. Ὥςε

$$\mu K - K = \alpha\mu^{\pi} - \alpha, \quad ἢ$$

$$(\mu - 1)\, K = \alpha\mu^{\pi} - \alpha \quad ἄμεινον\ ἐκδηλωθέν.$$

$$: \mu - 1.$$

$$\frac{(\mu - 1)\, K}{\mu - 1} = \frac{\alpha\mu^{\pi} - \alpha}{\mu - 1}. \quad τουτέςι.$$

$$K = \frac{\alpha\mu^{\pi} - \alpha}{\mu - 1}.$$ Τὸ δὲ ἦν τὸ ζητούμενον.

Τὸ κεφάλαιον ἄρα οἱασοῦν Γεωμετρικῆς Προόδου εὑρίσκεται, ἐὰν ὁ α΄. ὅρος μετὰ τοῦ ἐκθέτου πολλαπλασιασθῇ, εἰς δύναμιν ἠρμένου, ἡλίκη ἡ τῶν ὅρων πληθὺς, καὶ ἀπὸ τοῦ παραγομένου ὁ α΄. ὅρος ἀφαιρεθῇ, καὶ εἶτα ἡ διαφορὰ διὰ τοῦ ἐκθέτου, ἀφ' οὗ α΄. ἡ μονὰς ἀφαιρετέα, διαιρεθῇ.

Παράδειγμα. Προκειμένου εἰδέναι τὸ κεφάλαιον τῆς ἑξῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, ἧς οἱ ὅροι 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. Εὑρετέος α΄.

ὁ ἐκθέτης κατὰ τὸ §. 257. ὅς ἐνταῦθα. $= 2$. Οἱ δὲ ὅροι 9. Ὥςε $a = 1$. $\mu = 2$. $\pi = 9$. Τὸ δὲ κεφάλ. ἁπάντων τῶν ὅρων, ἢ $K = \frac{1 \cdot 2^9 - 1}{2 - 1}$

$$= \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = \frac{2^9 - 1.}{1} = 2^9 - 1.$$ Ἡ δ' ἐννάτη δύναμις τοῦ $2 = 512 - 1 = 511 =$ τῷ κεφαλαίῳ τῶν τῆς Προόδου ὅρων.

Ἔςω ὁ α'. ὅρος 3. Ἡ πλῆθυς τῶν ὅρων 10. Ὁ ἐκθέτης $\frac{3}{2}$. Τὸ ἄρα κεφάλ. τῆς ὁλικῆς Προόδου $K = \frac{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 3}{\frac{3}{2} - 1}$. Τὸ δὲ $\left(\frac{3}{2}\right)^{10} =$

$\frac{3^{10}}{2^{10}} = \frac{59049}{1024}$. Ἔνθεντε $K = \frac{3 \cdot \frac{59049}{1024} - 3}{\frac{3}{2} - 1}$

$$= \frac{\frac{177147}{1024} - 3}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{177147 - 3072}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{174075}{1024}}{\frac{1}{2}} =$$

$\frac{174075}{1024} \cdot \frac{2}{1} = \frac{348150}{1024} = 339 \frac{1014}{1024} = 339 \frac{507}{512} =$ τῷ κεφ. τῆς Προόδου.

Ἡ δὲ σειρὰ ἥδε. $3,\ \frac{9}{2},\ \frac{27}{4} \ldots\ldots\ 115 \frac{169}{512}$.

ἢ $3,\ 4\frac{1}{2},\ 6\frac{3}{4} \ldots\ldots\ 115 \frac{169}{512}$.

Παράδειγμα μειουμένης σειρᾶς. Ἔςω ὁ α'. ὅρος 8. Ὁ ἐκθέτης $\frac{2}{3}$. Ἡ τῶν ὅρων πλῆθυς 7. Ὥςε

$$K = \frac{a\mu^{\pi} - a.}{\mu - 1} \text{ ἐνταῦθα} = \frac{8 \left(\frac{2}{3}\right)^7 - 8}{\frac{2}{3} - 1}.$$

Τὸ δὲ $\left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{2^7}{3^7} = \frac{128}{2187}$. Τουτ: $K =$

$8 \cdot \frac{128}{}$

$$8 \cdot \frac{\frac{128}{2187} - 8}{\frac{2}{3} - \frac{3}{3}} = \frac{\frac{1024 - 17496}{2187}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{16472}{2187} \cdot -\frac{3}{1}.$$

Καὶ ἐνεργείᾳ τῶν δύω ἀποφατικῶν Ποσοτήτων πολλαπλασιασθεισῶν $= + \frac{49416}{2187} = 22\ \frac{1302}{2187} =$ τῷ κεφ. ὅλης τῆς Προόδου. Σειρὰ δὲ ἥδε. $8,\ 5\frac{1}{3},\ 3\frac{5}{9} \cdots\cdots \frac{512}{729}$.

Ἐὰν ᾖ γνωστὰ 1) τὸ κεφάλ. $=$ Κ. 2) ὁ α΄. ὅρος α. 3) ὁ ἔσχατος β. 4) ὁ ἐκθέτης μ 5) καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὅρων π, καὶ ἐκ τούτων τῶν πέντε μόνον τρία δοθῇ, τὰ λοιπὰ δύω ἀεὶ εὑρεθήσεται δι' ἐκείνων. Ὧν τινὰ προβλήμ. ἐπιλέλυται, ἕτερα δὲ Λογαριθμικῶς ἐπιλύονται, καὶ δι' Ἐξισώσεων, περὶ ὧν ἐν οἰκείῳ τόπῳ.

260. Ἀλλὰ καὶ Προόδους παριςᾶναι τῇ διανοίᾳ δυνάμεθα, ἐπ' ἄπειρον χωρούσας, καὶ ζητεῖν, εἰ καὶ τὸ τούτων κεφάλαιον εὑρεθῆναι δυνατόν. Ἐπὶ μὲν οὖν τῆς μειουμένης σειρᾶς τὸ ζήτημα καταψήσομεν, ἧς ὁ Ἐκθέτης ἐλάττων τῆς 1, ἤτοι γνήσιον κλάσμα. Τηνικαῦτα γὰρ οἱ ὅροι οὕτω τελευταῖον ἀπομειοῦνται, ὡς ἴσους τῷ μηδενὶ ἐκλογίζεσθαι. Εἰ δ' ὁ ἐκθέτης μείζων τῆς 1, οἱ ὅροι αὐξηθήσονται συνεχῶς, καὶ τελευταῖον ἐν ἀπείροις ταῖς σειραῖς, ἔσονται καὶ οὗτοι ἀπείρως μέγιςοι. Τῆς οὖν τοιαύτης σειρᾶς τὸ κεφάλαιον ἀμήχανον εὑρεῖν, ὡς καὶ ἡ τοῦ πράγματος φύσις διδάσκει. Τῶν δὲ μειουμένων ἀπείρων σειρῶν ταῖς μὲν οἱ ὅροι πάντες καταφατικοὶ, ταῖς δὲ τὰ ἐνόντα σημεῖα ἐναλλὰξ ἐπαμείβονται. Ὧν ἀμφοῖν ἐν γένει τὸν τύπον, καὶ τὴν δεῖξιν ἐπάξομεν.

Καὶ α΄. τοῦ α΄. Ἔςω ὁ α΄. ὅρος $=$ α. Ὁ τῆς προόδου ἐκθέτης γνήσιον κλάσμα $= \frac{\beta}{\gamma}$. πλείω

τούτων οὐκ ἀναγκαῖον εἰδέναι.

Ἡ σειρὰ ἔςαι ἄρα

$$\alpha + \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} \cdot \text{ καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον.}$$

Ὅθεν τὸ κεφάλαιον αὐτῆς, ἢ

$$K = \alpha + \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} \ldots$$

ὁμοίως ἐπ' ἄπειρον.

Πολλαπλασιασθήτωσαν μετὰ τοῦ $\frac{\beta}{\gamma}$.

Καὶ ἔςαι $K \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} + \frac{\alpha\beta^6}{\gamma^6} \ldots$ ἐπ' ἄπειρον.

Ἔνθα ἐφ' ἑκάςου ὅρου, εἰ καὶ ἐπ' ἄπειρον ἡ σειρὰ νοοῖτο, ἡ δύναμις τοῦ β καὶ γ διηνεκῶς μονάδι ἐπαύξεται.

Ἐὰν οὖν ἀπὸ τῆς α'. σειρᾶς ἡ β'. ἀφαιρεθῇ, ἥτις ἐλάσσων τῆς α'. ὡς κλάσματι πολλαπλασιασθεῖσα, τῶν ἴσων ὅρων ὑπαλλήλων τεθέντων, ὅπερ μέχρις ἐπ' ἄπειρον νοηθῆναι γοῦν ἔχει, ἤτοι

$$K = \alpha + \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} + \frac{\alpha\beta^6}{\gamma^6} \ldots$$

$$K . \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} + \frac{\alpha\beta^6}{\gamma^6} \ldots$$

ὑπολειφθήσεται

$K - K . \frac{\beta}{\gamma} = \alpha.$ Οἱ δὲ λοιποὶ ὅροι ἀναιροῦσιν ἀλλήλους. Ἡ τοῦ λειψάνου καταλληλότερον ἐξενεχθέντος.

$$\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right)K=\alpha.$$

$$: \left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right) \quad (§.114.\alpha'.)$$

$$K = \frac{\alpha}{1-\frac{\beta}{\gamma}}$$

Ἢ καὶ τῆς μονάδος κλάσματος γεγονυίας·

$$K = \frac{\alpha}{\frac{\gamma-\beta}{\gamma}}$$

Ὃ καὶ οὕτως ἂν παρασταίη.

$$K = \alpha : \frac{\gamma-\beta}{\gamma}.$$ τουτέστι (§. 148. καν.)

$$K = \frac{\alpha \,.\, \gamma}{\gamma-\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\gamma-\beta}$$

Εὑρήσομεν τοίνυν τὸ κεφάλαιον τῆς ἐπ' ἄπειρον προόδου, ἧς οἱ ὅροι καταφατικοί, ἐὰν ὁ α' ὅρος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ Ἐκθέτου, καὶ τὸ παραγόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ παρον. τοῦ Ἐκθέτου, ἀφαιρεθέντος ἀπ' αὐτοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἐκθέτου.

Παράδειγμα. Ζήτησον τὸ κεφάλ. τῆς ἀπείρου σειρᾶς, τῆς ὧδε χωρούσης.

$3,\ 2,\ 1\frac{1}{3},\ \frac{8}{9},\ \frac{16}{27}$ .... καὶ οὕτως ἐπ' ἄπ.

Ἐνταῦθα ὁ α'. ὅρος, ἢ $\alpha = 3$. Ὁ ἐκθέτης, ἢ τὸ κλάσμα $= \frac{2}{3} = \frac{\beta}{\gamma}$. Εἰ γὰρ μετὰ $\frac{2}{3}$ πολλαπλασιάσομεν, ἔσται τὸ παραγόμ. $= 2$ $=$ τῷ β'. ὅρῳ. Ὥστε $\beta = 2$. Καὶ $\gamma =$

$\gamma = 3$. Ἄρα $K = \frac{\alpha\gamma}{\gamma - \beta} = \frac{3 \cdot 3}{3 - 2} = \frac{9}{1} = 9$. Καὶ τοῦτο ἐςὶ τὸ κεφάλ. τῆς ἀπείρου ταύτης σειρᾶς.

Αὖθις. Ζητηθήτω τὸ κεφ. τῆςδε $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, καὶ οὕτως ἐπ' ἄπ.

Ἔνθα $\alpha = \frac{1}{2}$. Ὁ ἐκθέτης, ἢ $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{1}{2}$. Ὥςε $\beta = 1$, καὶ $\gamma = 2$.

Ὅθεν $K = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{2 - 1} = \frac{\frac{2}{2}}{1} = \frac{1}{1} = 1 =$ τῷ κεφαλαίῳ ταύτης.

Εὑρεθήτω τὸ κεφάλ. τῆς σειρᾶς $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{12}{125}$ .... καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον. Ἔνθα $\alpha = \frac{3}{5}$. $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{2}{5}$. Ὥςε $\beta = 2$. καὶ $\gamma = 5$. Καὶ τὸ κεφάλαιον $= \frac{\frac{3}{5} \cdot 5}{5 - 2} = \frac{\frac{15}{5}}{3} = \frac{3}{3} = 1 =$ τῷ κεφαλαίῳ τῆς ἀπείρου σειρᾶς.

Εἰ δὲ τὰ σημεῖα ἐναλλὰξ ἐπαμείβονται, δυνατὸν ὡσαύτως ἐν μειουμένῃ σειρᾷ τύπον τοῦ κατ' αὐτὴν ἀποδοῦντι κεφαλαίου. Ἔςω αὖθις ὁ α'. ὅρος $= \alpha$. ὁ δ' ἐκθέτης γνήσιον κλάσμα $= \frac{\beta}{\gamma}$. Καὶ ἔςαι τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον τῆς ἀπείρου σειρᾶς, ἢ $K = \alpha - \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} - \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4}$ .... ἐπ' ἄπειρον.

Πολλαπλασίασον ἤδη ὅλην τὴν σειρὰν τῷ $\frac{\beta}{\gamma}$.

Διὰ

Διὰ τούτου ἕκαςος ὅρος μέχρις ἐπ' ἄπειρον αὐξηθήσεται κατὰ μίαν δύναμιν, τὴν $\frac{\beta}{\gamma}$. οὕτω

$$K \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} - \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} - \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} \ldots\ldots$$

ἐπ' ἄπειρον.

Πρόσθες τῇ σειρᾷ, τῇ τῷ K ἀνηκούσῃ, τὴν σειράν, τὴν τῷ $K \cdot \frac{\beta}{\gamma}$ προσήκουσαν, τοὺς ἴσους ὅρους ὑπαλλήλους καταγράψας, οὕτω

$$K = \alpha - \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} - \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} \ldots$$

$$K \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} - \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} \ldots$$ Ὥςε

$$K + K \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \alpha \ldots$$ Οὐδὲν γὰρ ἄλλο ὑπολείπεται.

Τοῦτο δὲ ἁρμοδιώτερον ἐκφανθὲν εἴη $\left(1+\frac{\beta}{\gamma}\right) K = \alpha$.

ἢ $\left(\frac{\gamma+\beta}{\gamma}\right) \cdot K = \alpha$.

Καὶ διελὼν ἄμφω διὰ τοῦ $\frac{\gamma+\beta}{\gamma}$ ἕξεις $K = \frac{\alpha}{\frac{\gamma+\beta}{\gamma}}$

$= \frac{\alpha \cdot \gamma}{\gamma+\beta}$. (§. 148. κ.) Ὃ τὸ κεφάλαιον τῆς τοιαύτης σειρᾶς καταλλήλως ἐμφαίνει.

Παράδειγμα. Ἔςω ἡ σειρὰ

$\frac{3}{4}$ —

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27}, \text{ κτ.}$$

Ἔνθα $\alpha = \frac{3}{4}$. Ὁ ἐκθέτης, ἢ $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{2}{3}$.

Ὥςε $\beta = 2$. $\gamma = 3$. Καὶ $K = \frac{\frac{3}{4} \cdot 3}{3 + 2}$

$= \frac{\frac{9}{4}}{5} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{20} =$ τῷ κεφαλαίῳ.

Ἔςω ἡ σειρὰ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ κτ.

$\alpha = 1$. $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{1}{2}$. Ὥςε $\beta = 1$. καὶ

$\gamma = 2$. ἄρα

$$K = \frac{1 \cdot 2}{2 + 1} = \frac{2}{3}.$$

§. 261. Πρὶν ἢ πέρας τῷ περὶ Γεωμετρικῆς Προόδου κεφαλαίῳ ἐπιθεῖναι, δέοικται δι' ἑνὸς παραδείγματος, ἐκ τοῦ κοινοῦ εἰλημμένου βίου, τὴν μέχρι τοῦδε ἀναπτύξαι διδασκαλίαν

Ἀνήρτις τὸν βίον καταλύσας τὴν ἑαυτοῦ οὕτω διέθετο περιουσίαν, ὥςε τῶν ε'. υἱέων τὸν μὲν α'. 1500 κομίσασθαι μνᾶς. Ἕκαςον δὲ τῶν ἑπομένων $\frac{1}{2}$ πλέον, ἢ ὁ προηγησάμενος ἐκομίσατο. Ζητεῖται, πόση ἡ περιουσία, καὶ πόσον ἕκαςος ἐκομίσατο.

Ἐνταῦθα Γεωμετρικὴ πάρεςι πρόοδος, ἧς οἱ ὅροι $= 5$. Οἱ γὰρ υἱεῖς τοσοῦτοι Ὁ δ' Ἐκθέτης $= 1\frac{1}{2}$ $= \frac{3}{2}$. Ὁ γὰρ ἑπόμενος $\frac{1}{2}$ πλέον, ἢ ὁ προηγησάμενος κομίζεται. Ὁ α'. ὅρος 1500 τυγχάνει. Ἐκ τούτων εὑρεθήσεται τὸ κεφάλαιον αὐτῆς, ὅ ἡ ἐπίλυσις τοῦ α'. ζητήματος. Ἔςι γὰρ (§. 259.)

$$K = \frac{\alpha\mu^{x} - \alpha}{\mu - 1} = \frac{1500\,(\frac{3}{2})^5 - 1500}{\frac{3}{2} - 1}.$$ Τὸ

δὲ

δὲ $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}$.

Ἄρα $K = \frac{1500 \cdot \frac{243}{32} - 1500}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{9890\frac{5}{8}}{\frac{1}{2}}$ $= 9890\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{1} = 19781\frac{1}{4}$ μνῶν = πάσῃ τῇ περιουσίᾳ. Ἡ δὲ πρόοδος προβαίη ἂν οὕτω.

$1500 + 1500 \cdot \frac{3}{2} + 1500 \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1500 \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 1500 \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 1500 + 2250 + 3375 + 5062\frac{1}{2} + 7593\frac{3}{4}$. Ἅπερ καὶ αἱ τῆς κληρονομίας μερίδες. Καὶ ταῦτα μὲν ἀρκούντως περὶ τούτων. ῥητέον δέ τι καὶ

Περὶ τοῦ Ἀπείρου.

§. 262. Κυρίως οὐδεὶς ἀριθμὸς, ἢ Ποσότης δίδοται, ὅς τῷ ὄντι ἀπείρως μέγιςος, ἢ ἀπείρως ἐλάχιςος τυγχάνει. Ὅσῳ γὰρ ἂν μέγιςος ὁ ἀριθμὸς ᾖ, ὃν τῇ διανοίᾳ παρεςήσαμεν, δυνάμεθα μέν τοι τὸν αὐτὸν τοῦτον ἐπινοῆσαι καὶ διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, κτ. Παραπλησίως καὶ ὁ ἐλάχιςος ἀριθμὸς, τῇ ἐπινοίᾳ γοῦν, διαιρεθήσεται εἰς μέρη. Ὥςε Ἀπείρως μέγιςον, καὶ ἀπείρως ἐλάχιςον λέγονται καταχρηςικῶς, δηλοῦντα, οὕτω ποσότητά τινα ἐπαυξῆσαι, ἢ μειωθῆναι, ὥςε πρὸς οὐδεμίαν ἑτέραν ποσότητα παραβάλλεσθαι, ἀλλὰ πᾶσαν ποσότητα πρὸς τὴν οὕτως ἐπαυξηθεῖσαν, ὡς τὸ μηδὲν λογίζεσθαι, καὶ τὴν οὕτω μειωθεῖσαν ἐν τῷ ὑπολογισμῷ πρὸς πᾶσαν ἑτέραν ὡς τὸ μηδὲν θεωρεῖσθαι. Τῇ οὖν ἐπινοίᾳ παραςήσομεν τὴν ποσότητα μᾶλλον, καὶ μᾶλλον αὐξομένην, καὶ εἰς τοσοῦτον μέγεθος ἀφικομένην, ὥςε οὐδεμία ταύτης μείζων ἂν γένοιτο. Καὶ τοῦτο καλεῖται Ἀπείρως μέγιςος ἀριθ-

ἀριθμὸς, ἢ Ποσότης. Νόει μοι γραμμήν τινα ἀπὸ τοῦ A ἀρξαμένην, καὶ διὰ τοῦ B, A ——B—— ἀεὶ εἰς τὸ πρόσω χωροῦσαν ἄνευ πέρατος. Καὶ αὕτη τυγχάνει ἀπείρως μεγίςη γραμμή. Καὶ ἐπὶ δύω γραμμῶν παραλλήλων, ἑκατέρωθεν προεκβαλλομένων, μηδέποτε δὲ συμπιπτουσῶν, λέγεται, ὅτι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις ἐν ἀπείρῳ ἀποςάσει, τουτ: οὐδέποτε. Τὸ δὲ σημεῖον, δι' οὗ ἡ ἄπειρος παρίςαται ποσότης, τόδε (∞) τυγχάνει.

§. 263. Ὡσαύτως καὶ Ποσότητα νοεῖν πάρεςιν, οὕτως ἀεὶ μειουμένην, ὥςε τελευταῖον ἐλάσσονα πάσης νοουμένης ἑτέρας ποσότητος γίνεσθαι, καὶ τοῦτό ἐςιν ἡ Ἀπειροςὴ Ποσότης, ἢ ἡ ἀπείρως ἐλαχίςη, ἡ ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ὡς τὸ μηδὲν θεωρεῖσθαι δυναμένη, (§. ἀνωτ.) ὡς τούτῳ ἔγγιςα οὖσα. Διαφόρεις δὲ τοῖς τρόποις καὶ αὕτη ἐπισημανθήσεται, ὡς καὶ ἡ ἀπείρως μεγίςη ποσότης. Δείκνυσι μέντοι τόδε τὸ σχῆμα $\frac{1}{\infty}$ ἀεὶ Ποσότητα ἀπειροςήν.

§. 264. Πᾶν κλάσμα, εἴτε γνήσιον, εἴτε νόθον, ἀπείρως μεγίςη Ποσότης γενήσεται, ἐὰν ὁ τούτου ἀριθμητὴς πεπερασμένος, ὁ δὲ παρονομαςὴς ἀπείρως ἐλάχιςος, ἢ $= 0$, ᾖ. Ἔςω κλάσμα οἱονδηποτοῦν, οὗ ὁ ἀριθμητὴς ἐν γένει α κληθήτω, ὁ δὲ παρονομαςὴς ω, τουτ: $\frac{\alpha}{\omega}$. Καὶ α μὲν ἔςω ὁ Διαιρετέος, ω δὲ ὁ Διαιρέτης. Τὸ ἐκ τούτων πηλίκον ῥηθήτω $= \pi$. Δῆλον οὖν, ὅτι ἐὰν ω, ἢ ὁ Διαιρέτης ἡμισευθῇ, τὸ πηλίκον, ἢ π, διπλασιασθήσεται. Ἐὰν δὲ τετράκις, δεκάκις, ἑκατοντάκις, κτ. ω ἐλαττωθῇ, τὸ π τετραπλασιασθήσεται, δεκαπλασιασθήσεται, ἑκατονταπλασιασθήσεται, κτ. π. χ. Θετέον εἶναι τὸ $\alpha = 8$. Τὸ δὲ $\omega = 4$. Ὥςε $\frac{8}{4} = 2$,

ἢ

ἡ π = 2. Σημαινέτω ἤδη ω τὸ ἥμισυ τοῦ προτέρου. Τὸ οὖν πηλίκον ἔςαι $\frac{8}{2} = 4$. διπλάσιον τοῦ προτέρου. Ἔςω ω δεκάκις ἔλαττον. Καὶ ω, ὅπερ ἐν ἀρχῇ = 4 ἦν, ἔςαι = $\frac{4}{10}$. Καὶ $\frac{8}{0,4} = 20$. Ὥςε π δεκαπλάσιον, κτ. Ἀλλὰ τὸ ω ὡς ἀπείρως ἐλάχιςον νοεῖν ἔχομεν. Ἄρα ἐξ ἀνάγκης π ἀπείρως μέγιςον. Ὅσῳ οὖν ω ἐλαττοῦται, τοσούτῳ ἐγγύτερον τοῦ 0 γίνεται. Εἰ δὲ τὸ ω = 0 γένηται, ἀναγκαίως τὸ π ὡς ἀπείρως μέγιςον νοήσομεν. Εἰ γὰρ, τοῦ ω ἔτι ὡς ἀπείρως ἐλαχίςης ποσότητος θεωρουμένου, τὸ πηλίκον ἄπειρον ἦν, πολλῷ μᾶλλον ἔςαι τοῦτο, τοῦ ω = 0 γεγονότος. Τὸ γὰρ 0, οὕτως εἰπεῖν, ἡ ἐλαχίςη τῶν ἀπείρως ἐλαχίςων Ποσοτήτων. Ἔνθεν τοι τὰ σχήματα $\frac{a}{\frac{1}{\infty}}$, ἢ καὶ $\frac{a}{0}$, ἄπειρον ἐμφαίνουσι ποσότητα, ἢ $\frac{a}{\frac{1}{\infty}} = \frac{a}{0} = \infty$. Ἐν §. 229. δέδεικται, ὡς ἕκαςον κλάσμα θεωρεῖν δυνάμεθα ὡς τὸν Λόγον δύω ἀριθμῶν. Ὥςε καὶ τὸ σχῆμα $\frac{a}{\frac{1}{\infty}}$ θεωρηθείη ἂν ὡς ὁ λόγος $a : \frac{1}{\infty}$. Τὸ δὲ a, ὁποῖον ἂν ᾖ, ἔςαι ἀπείρως μέγιςον πρὸς τὸ ἀπείρως ἐλάχιςον. Παραπλησίως καὶ $\frac{a}{0}$ ὁ λόγος τυγχάνει τοῦ $a : 0$. Τὸ δὲ a αὖθις, ὅ, τι ἂν σημαίνῃ, ἀπείρως μέγιςον ἔςαι πρὸς τὸ μηδενικόν. Ὥςε, εἰ ἀντὶ τοῦ a πᾶς ἀριθμὸς, ἢ ποσότης τεθῇ, ἀεὶ τὸ σχῆμα τοῦ ἀπείρως μεγίςου τηρηθήσεται. Ὅθεν $\frac{12}{0}$, ἢ $\frac{12}{\frac{1}{\infty}} = \infty$, ἢ καὶ

$\frac{1}{\frac{1}{\infty}}$, ἢ $\frac{1}{0} = \infty$. Ὧν τὸ ἔσχατον μᾶλλον ἐν χρήσει εἰς τὴν τοῦ ἀπείρου δήλωσιν. Ὅθεν ἐφ' ἑκάστης Ποσότητος, ἥτινι ὡς Διαιρέτης τὸ 0 προσήκει, ἀντικαθιστῶσι τὸ ∞.

§. 265. Ἐὰν δὲ τοῦ κλάσματος ὁ μὲν Ἀριθμητὴς πεπερασμένος, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἀπείρως μέγιστος ᾖ, τηνικαῦτα τὸ κλάσμα γενήσεται Ποσότης ἀπείρως ἐλαχίστη, καὶ ὅλως ἴσον τῷ μηδενί. Τεθήτω Ποσότης τις $= \alpha$ δι' ἑτέρας $= \omega$ διαιρουμένη. Ὥστε τὸ κλάσμα ἔστω, $\frac{\alpha}{\omega}$. Καὶ τὸ μὲν α μενέτω ἀμετάβλητον, τὸ δὲ ω ἀεὶ αὐξέτω. Ἐὰν οὖν ω διπλασιασθῇ, τὸ πηλίκον ἡμισευθήσεται. Εἰ δὲ δεκάκις ω ηὔξηται, τὸ πηλίκον δεκάκις ἐλαττωθήσεται, κτ. Ἀλλὰ τὸ ω οὕτω μέγα ἔχομεν ἐπινοῆσαι, ὥστε μηδεμίαν Ποσότητα ταύτης μείζω δίδοσθαι. Τότε οὖν καὶ τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{\alpha}{\omega}$ ἀπειροστὸν γενήσεται, καὶ ὡς 0 θεωρηθήσεται. π. χ. Ἔστω $\alpha = 8$. $\omega = 2$. Καὶ ἔσται π, ἢ τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{\alpha}{\omega} = \frac{8}{2} = 4$. Αὐξηθήτω 2, καὶ γενέσθω 4, καὶ ἔσται $\pi = 2$. Αὐξανέσθω ἔτι ω μᾶλλον καὶ μᾶλλον μέχρι τῶν 10000, καὶ γενήσεται $\pi = \frac{8}{10000} = \frac{1}{1250}$. Καὶ ἐὰν ω ἐπαύξηται μέχρι μιλλιονίων, διλλιονίων, τριλλιονίων, μᾶλλον δ' ἐπὶ τοσοῦτον, ὅσον τῇ ἐπινοίᾳ ἂν παραστάιη, ἀναγκαίως θεωρήσομεν, καὶ μεταχειρισθησόμεθα τὸ π ὡς οὐδέν. Ὅθεν ὁ τύπος $\frac{\alpha}{\infty} = 0$. Κἀνταῦθα ὁ λόγος τυγχάνει $\alpha : \infty$, καὶ α, ὁποῖον ἂν ᾖ, πρὸς τὸ ∞ οἰχήσεται.

§. 266. Ἐὰν ἐν τοῖς ὑπολογισμοῖς Ποσότητες ἀπαντῶσι μετ' ἀπείρως μεγίςων ποσοτήτων τῷ πολλαπλασιασμῷ συνημμέναι, ἢ καὶ ἀπείρως μέγιςαι ποσότητες μόναι, πᾶσαι αἱ λοιπαὶ τῶν ποσοτήτων οἴχονται πρὸς ἐκείνας, καὶ $= 0$ γίνονται, διὰ τὰ ἀνωτέρω. π. χ. Εἴπερ εἴη $3\alpha\beta\nu + 2\alpha\beta\infty = \pi\infty$ οἴχεται ἡ $3\alpha\beta\nu$, καὶ μένει μόνον $2\alpha\beta\infty = \pi\infty$. ἢ $\frac{\rho P\infty}{3\rho \quad + \rho^2 - 2P} = \zeta$, αἱ ρ^2 καὶ $-2P$ οἴχονται πρὸς τὴν $3\rho\infty$, καὶ λείπεται μόνον $\frac{\rho P\infty}{3\rho\infty} = \zeta$. Εὑρίσκομεν δὲ τὰς ἀπείρους ποσότητας καὶ εἰς δυνάμεις ἠρμένας. ὡς ∞^2, ∞^3, κτ.

Ἐὰν ὑπερτέρα τις δύναμις ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ἀπαντᾷ, αἱ τοῦ ∞ ὑποδεέςεραι δυνάμεις οἴχονται πρὸς τὰς ὑπερτέρας. π. χ. Ἔςω $\frac{\rho P\infty + \rho\infty^2}{3\nu\infty - 2\pi\infty^2} = \tau$. Ἔνθα τὸ ∞ τοῦ ἀριθμητοῦ ἐκπίπτει πρὸς τὸ ∞^2, (δῆλον δ' αὐτόθεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ τοῦ ἀριθμητοῦ Ποσότητες.) Καὶ ἐν τῷ παρονομαςῇ τὸ ∞ πρὸς τὸ ∞^2, καὶ αἱ λοιπαὶ μετ' ἐκείνου Ποσότητες. Ὑπολείπεται οὖν $\frac{\rho\infty^2}{-2\pi\infty^2} = \tau$. Τοῦτο δὲ πλατύτερον ἀναπτύξαι, οὐ τῆς παρούσης θεωρίας. Ταὐτὸ συμβαίνει καὶ ταῖς ἀπειροςαῖς Ποσότησι. Τὸ γὰρ $\frac{1}{\infty}$, ἢ τὸ ἀπείρως ἐλάχιςον, ἐκπίπτει ἐν παντὶ ὑπολογισμῷ πρὸς ἑτέρας Ποσότητας, καὶ γίνεται $= 0$. π. χ. $\alpha + \frac{\beta}{\infty} = \nu$. Ἐνταῦθα οἴχεται τὸ $\frac{\beta}{\infty}$, ὡς ἀπείρως ἐλάχιςον. Ἔςι γὰρ $= 0$. ὑπολείπεται δὲ $\alpha = \nu$. Καὶ πᾶσα ποσότης, ἢ τῷ $\frac{1}{\infty}$

πολλα-

πολλαπλασιαζομένη, γίνεται $= 0$. ὡς α. $\frac{1}{\infty} = 0$.

Ἐὰν ἐν ὑπολογισμοῖς δυνάμεις τοῦ $\frac{1}{\infty}$ ἀπαντῶσιν, οἴχονται πᾶσαι πρὸς τὸ $\frac{1}{\infty}$, καὶ αἱ μείζους πρὸς τὰς ἐλάσσους· Ὡς πρὸς τὸ $\frac{1}{\infty^2}$ οἴχεται τὸ $\frac{1}{\infty^3}$, πρὸς τὸ $\frac{1}{\infty}$ τὸ $\frac{1}{\infty^2}$ κτ.

Ἀλλὰ πύθοιτο ἄντις, εἰ, τοῦ ∞ ποσότητα σημαίνοντος, ἧς μείζων οὐκ ἔχει ἐπινοηθῆναι, καὶ τοῦ $\frac{1}{\infty}$ ὄντος $= 0$, πλείους, ὡς εἰπεῖν, ἀπειρότητες δίδονται, τουτ. εἰ ἄπειρόντι τοῦ ἑτέρου μεῖζον, καὶ ο ἔλαττον ἑτέρου ος ἀποφάσκοντες ἀποκρινούμεθα. Συμβάλλεται δὲ τὰ ῥηθέντα εἰς τὸ τοὺς λόγους τῶν Ποσοτήτων πρὸς ἀλλήλας διορίζειν. Ἀλλὰ τοῦτο οὐ τοῦ παρόντος σκοποῦ.

§. 267. Πᾶν κλάσμα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἅμα ἐν τῷ ἀριθ. καὶ παρ. πολλαπλασιασθὲν, ἢ διαιρεθὲν, τροπὴν οὐχ ὑφίςαται. (§. 122.) Ὅτι ταὐτό ἐςιν, ὥσπερ εἰ τῇ μονάδι τοῦτο πολλαπλασιάζομεν, ἢ διαιροῦμεν, ἥτις οὔτε πολλαπλασιάζει, οὔτε διαιρεῖ. Τοῦτο δ' ἀληθεύει, καὶ ἐὰν ἡ ποσότης, δι' ἧς τοῦτο γίνεται, ἀπείρως μεγίςη, ἢ ἀπείρως ἐλαχίςη ᾖ. Ἐπειδὴ καὶ τὸ $\frac{\infty}{\infty} = 1$, καὶ $\frac{0}{0} = 1$, ὡς τοῦ διαιρέτου ἅπαξ τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριεχομένου. Ποσότης οὖν, π. χ. ἥδε $\frac{\alpha \cdot \infty}{\beta \cdot \infty} = \frac{\alpha}{\beta}$. Καὶ $\frac{\alpha \cdot \frac{1}{\infty}}{\beta \cdot \frac{1}{\infty}} = \frac{\alpha}{\beta}$ τυγχάνει. Τουτέςι μεταξὺ

τῶν

τῶν Ποσοτήτων α καὶ β ὁ αὐτὸς μένει Λόγος, ὃν καὶ πρότερον εἶχον, καίτοι ἀμφοῖν ἐν τῷ $\frac{\alpha \,.\, \infty}{\beta \,.\, \infty}$, ὡς ἀπείρως μεγίστων θεωρουμένων, καὶ ἐν λόγῳ οὐσῶν $\alpha\,\infty : \beta\,\infty$.

Παραπλησίως, καὶ εἰ ἄμφω μετ' ἀπείρου ἐλαχίστης ποσότητος, ἣν $=0$ ἔχομεν ἐκδέξασθαι, ἐπολλαπλασιάσθησαν. Μεταξὺ γὰρ τοῦ $\alpha \,.\, \frac{1}{\infty} : \beta \,.\, \frac{1}{\infty}$ ὁ αὐτὸς λόγος, ὃς καὶ μεταξὺ τοῦ $\alpha : \beta$.

Περὶ τῆς τῶν Ῥιζῶν Ἐξαγωγῆς.

§. 269. Ἐν τοῖς προηγηθεῖσι, περὶ τῶν Ῥιζῶν, καὶ Ῥιζικῶν σημείων ὀλίγ' ἄττα ἐν παρόδῳ διαλαβόντες, ἐν τῷ παρόντι τὴν περὶ τούτων ἀκριβεστέραν ἀπεταμιευσάμεθα διδασκαλίαν. Ἀλλ' ἵνα τὴν τούτων συνέχειαν οἱονεὶ πρὸ ὀφθαλμῶν ἔχωμεν, ἀναγνωστέον τὰ ἐν §. §. 186. κτ. 200. κτ. ῥηθέντα. Ὅπως δὲ ἀπὸ δοθεισῶν ποσοτήτων, ἢ ἀριθμῶν, τὰς ζητουμένας ῥίζας ἐξάγειν δυνησόμεθα, καὶ δὴ ῥητέον. Ἐπεὶ γὰρ νοηθῆναι δυνατὸν, τὰς ποσότητας διὰ τοῦ τοσάκις πολλαπλασιασμοῦ ποσότητος ἑτέρας, οἵα ἡ ζητουμένη ῥίζα, προελθεῖν, οὐ δυσχερὲς τήνδε δι' ὑπολογισμῶν ἀνακαλύπτειν. Ἀλλ' ὡς δῆλον ἑξῆς γενήσεται, πάσας ἀκριβῶς εὑρεῖν οὐκ ἔνι, ὅσον βούλει, ἐλάχιστον τὸ ἔλλειμμα ποιήσαντι. Ἔνθεντοι αἱ Ῥίζαι, αἱ ἀκριβῶς μὴ ἀποδιδόμεναι, Ἄλογοι Ῥίζαι καλοῦνται. ὥσπερ τοὐναντίον, Λογικαὶ, ἃς ἀκριβῶς ἀποδοῦναι οἷόν τε. Οὕτως ἡ $\sqrt{2}$, ἡ $\sqrt{3}$, κτ. Ἄλογοι τυγχάνουσιν. Ἀλλ' εἰ καὶ τὰς τοιαύτας ἀλόγους ῥίζας ἐντελῶς ἐξάγειν ἀμήχανον, ἰδέαν μέντοι τινὰ καὶ πάνυ καὶ τὸ τούτῳ προςεθὲν πηλίκον) μετὰ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου πολλαπλασιάζοντες, καὶ τὸ παραγόμενον ἀπὸ τοῦ λειψάνου τοῦ τετραγώνου ἀφαιροῦντες.

Προκείσθω τὸ παράδ. δι' ἀριθμῶν, εἰς ὃ ὁ τοῦ 14 τετράγ. ληφθήτω, εἰς δύω μέρη, κατὰ τὸ Δυώνυμον διαιρεθέντος, τουτ: εἰς $8 + 6 = \alpha + \beta$.

Κατὰ τὸν τύπον οὖν ταχθὲν ἔςαι $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 8 \cdot 8 + 2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6 =$ τῷ Τετραγώνῳ τοῦ 14. Ἐξ οὗ πρόκειται τὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν.

$$
\begin{array}{rl|l}
:\ 8) & 8 \cdot 8 + 2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6 & 8 + 6 \\
 & 8 \cdot 8 & \\
\hline
 & 2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6 & \\
:\ 2 \cdot 8 + 6) & 2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6 &
\end{array}
$$

Τοῦ $8 \cdot 8$ ἡ ῥίζα 8 τυγχάνει. Τεθήτω ὡς α'. μέρος τῆς ῥίζης. Καὶ $8 \cdot 8 = 8 \cdot 8$ Οὗ ἀφαιρεθέντος, ὑπόλοιπον τὸ $2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6$. Τὸ α'. μέρος τῆς ῥίζης, ἢ 8 δὶς ληφθὲν $= 2 \cdot 8$. Διὰ τούτου, τοῦ β'. ὅρου τοῦ Τετραγώνου, ἤτοι τοῦ $2 \cdot 8 \cdot 6$ διαιρεθέντος, προκύψει πηλίκον $+ 6$. Οὗ καὶ τῷ καινῷ Διαιρέτῃ $2 \cdot 8$ προςεθέντος, ἔςαι $2 \cdot 8 + 6$. Τοῦτο οὖν μετὰ τοῦ β'. μέρους τῆς ῥίζης πολλαπλασιασθὲν παράξει $2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6$. Ὃ ἀπὸ τοῦ λειψάνου ἀφαιρεθὲν οὐδὲν ὑπολείπει. Ὥςε εὕρηται ἡ ῥίζα $= 8 + 6$. Ἀλλὰ τοῦτον τὸν τρόπον οὐ δίδονται ἡμῖν οἱ ἀριθμοί, ἀφ' ὧν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι ἐξακτέαι, ἀλλ' οὕτω, $(14)^2 = 196$. Ὥςε ἐκ τούτου ἐξακτέα ἡ ῥίζα.

§ 271. Πρὸ πάντων οὖν τοὺς Τετραγώνους τῶν ἁπλῶν χαρακτήρων ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τῶν 9, σημειωτέον, οὓς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, κατὰ τὸν Πυθαγορικὸν πίνακα, ῥᾷςα εὑρήσομεν. Μᾶλλον δὲ,

ἐν

ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ὑποσυνάψομεν πινακιδίῳ, προσθέντες καὶ τοὺς Κύβους, καὶ Διτετραγώνους, (§. 184.) ἵνα μὴ τούτους ὕϛερον ἐν μέρει καταγράφειν ἀναγκαζώμεθα.

Τετρ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ῥί :	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Κύ.	1	8	27	64	125	216	343	512	74[illegible]
Διτ.	1	16	87	250	256	1296	2401	4096	6561

Ἔνθα ὁρᾷς οὐδένα Τετράγωνον τῶν ἁπλῶν ἐννέα χαρακτήρων πλείους τῶν δύω ἀριθμοὺς περιέχοντα. Δύω δὲ τούτων μόνον ἕνα. Οὐδένα Κύβον πλείους τῶν τριῶν· τινὰς δὲ μόνον δύω, καὶ ἕνα. Οὐδένα Διτετράγωνον πλείους τῶν δ'. τινὰς δὲ μόνον τρεῖς, καὶ δύω.

§. 272. Προκειμένου τοίνυν ἀριθμοῦ, ἐξ οὗ τὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν βούλει, χωρήσεις κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

1) Δίελε τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς κλάσεις, ἀνὰ δύω χαρακτῆρας ἑκάϛην περιεχούσας, δεξιόθεν ἐπ' ἀριϛερὰ προϊὼν, ὥϛε περιτταρίθμων τῶν χαρακτήρων τυχόντων, καὶ μοναδικὸν ἔχειν χαρακτῆρα τὴν κλάσιν τὴν ἀριϛερωτάτην.

2) Ζήτησον ἐν τῷ Πινακιδίῳ (§ ἀνωτ.) τὴν ῥίζαν τῆς α'. κλάσεως, ἀπὸ τῶν ἀριϛερῶν δηλονότι ἀρχόμενος, ἢ τὴν ἐγγὺς ἐλάσσονα, εἰ ὁ ἀριθμὸς, οὗ ἡ ῥίζα ζητεῖται, οὐκ ἐϛ' ἀκριβὲς τετράγωνος. Τοῦτο δὲ ὑπὲ[illegible]μα σαφὲς τῇ α'. κλάσει καίτι τοῦ διπλοῦ τῶν μερῶν τῆς ῥίζης ἐνεῖναι, ἐν γένει τοῦ 2 αβ.

3) Τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν, ἢ τὴν ἐγγὺς ἐλάττονα, εἰ ἡ ζητουμένη οὐχ εὕρηται, γράψον ἐν τῷ πηλίκῳ,

λίκω, ὡς τὸ α΄. μέρος τῆς ῥίζης, ἢ ὡς τὰ α. (§. 270.) καὶ μεθ' ἑαυτῆς αὐτὴν πολλαπλασιάσας ἄφελε τὰ παραγόμενου ἀπὸ τῆς α΄. κλάσεως.

4) Διπλασίασον τὸ εὑρεθὲν α΄. μέρος τῆς ῥίζης, καὶ θὲς τὸν ἔσχατον τούτου χαρακτῆρα ὑπὸ τὸν α΄. τῆς β΄. κλάσεως, ἧς τοὺς χαρακτῆρας κατάγαγε, προσθέμενος αὐτοὺς τῷ λειψάνῳ τῆς α΄. κλάσεως. Ἐὰν δὲ τὸ διπλοῦν παραγόμενον τοῦ α΄. μέρους τῆς ῥίζης πλείους ἀριθμοὺς, ἢ ἕνα παρέχῃ, προάγονται ἀεὶ πρὸς τὰ ἀριστερά.

5) Δίελε ἤδη μετὰ τοῦ διπλοῦ παραγομένου, ὡς καινοῦ διαιρέτου. Τὸ δὲ πηλίκον μὴ πάνυ μέγα λαμβανέσθω. Ὃ ἐστι τὸ β΄. μέρος τῆς ῥίζης, ἢ τὸ β. Πρόσθες τὸ ἤδη εὑρεθὲν πηλίκον καὶ τῷ Διαιρέτῃ, ὑπὸ τὸν β΄. χαρακτῆρα τῆς β΄. κλάσεως, ἔνθα ὁ τόπος κενὸς, αὐτὸ θέμενος, καὶ πολλαπλασιάσας τὸ πηλίκον μεθ' ὅλου τοῦ διαιρέτου, τοῦ ἐκ τοῦ διπλοῦ παραγομένου τοῦ α. μέρους τῆς ῥίζης, καὶ τοῦ ἤδη προκύψαντος πηλίκου συγκειμένου, ἄφελε τὸ παραγόμενον ἀπὸ τῆς β΄. κλάσεως. Ἐὰν δὲ τὸ παραγόμενον μεῖζον ᾖ τοῦ ἀριθμοῦ, ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῆναι δέοι, τὸ πηλίκον εἴληπται πάνυ μέγα. Ὅθεν μονάδι μειωτέον, ἵνα τὸ παραγόμενον ἔλαττον τυγχάνῃ. Καὶ οὕτω προκύψαντος καὶ τοῦ β΄. μέρους τῆς ῥίζης, κατάγαγε τὸ λείψανον, εἴτι ὑπολέλειπται, καὶ τὴν ἑπομένην κλάσιν.

6) Εἰ δὲ πλείους τῶν δύω κλάσεις πάρεισι, θεωρῶν τὰ εὑρεθέντα δύω μέρη τῆς ῥίζης, ὡς τὸ α΄. μέρος, διπλασίασον αὐτὰ, θεὶς τὸν ἔσχατον χαρακτῆρα ὑπὸ τὸν α΄. τῆς καταχθείσης κλάσεως, τοὺς δὲ λοιποὺς πρὸς τὰ ἀριστερά. Δίελε αὖθις, καταγράφων τὸ πηλίκον καὶ πρὸς τοῖς εὑρεθεῖσι μέρεσι τῆς ῥίζης, καὶ πρὸς τῷ Διαιρέτῃ. Πολλαπλασίασον, καὶ ἄφελε, ὡς ἀνωτ. παραπλησίως χωρῶν, εἰ καὶ ἕτεραι κλάσεις ἔτι ὑπάρχουσιν.

Οὕτως

Οὕτως οὖν εὑρήσομεν ἀκριβῶς τὴν ῥίζαν, εἰ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀληθὴς τυγχάνει τετράγωνος.

§. 273. Τοὺς προχειρισθέντας κανόνας καὶ διὰ παραδειγμ. ἀναπτύξαι οὐκ ἂν ὀκνήσαιμεν. Δεῖ δὲ καὶ τὸν ἐν γένει τύπον καταρχὰς καταγράφεσθαι, ἵν', ὅπως ἐν τῷ Τετραγώνῳ ἐμπεριέχηται, δῆλον γένηται.

Ἐξαχθήτω ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 1764 Τετραγ.

$$\begin{array}{rcl|l|l} & & 17 & 64 & \alpha + \beta \\ (\alpha^2) & = & 16 & & 4 \quad\; 2 \\ \hline (2\alpha\beta + \beta^2) & = & 1\;64 & & \\ 2\alpha + \beta & = & (82) & & \\ 2\alpha\beta + \beta^2 & = & 1\;64 & & \end{array}$$

α΄. Διαιρεθεὶς δεξιόθεν πρὸς ἀριστερὰ εἰς κλάσεις δίδωσι δύω κλάσεις. (κ. 1.) Ὥστε καὶ τῆς ῥίζης οἱ χαρακτῆρες δύω.

β΄. Ζήτησον ἐν τῷ πινακιδίῳ τὸν 17 ἐν τοῖς Τετραγώνοις, (κ. 2.) ὅστις οὐ πάρεστιν. Ἐγγὺς δὲ ὁ ἐλάττων αὐτοῦ Τετράγ. ἤτοι ὁ 16, οὗ ἡ ῥίζα 4. γραφήτω ἐν τῷ Πηλίκῳ, ὡς τὸ α΄. μέρος τῆς ῥίζης, τουτ. α. Μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθέντος τοῦ 4. τεθήτω τὸ παραγόμ. ὑπὸ τὴν α΄. κλάσιν. $4 \cdot 4 = 16 = \alpha^2$. καὶ ἀπὸ τοῦ 17 τοῦ 16 ἀφαιρεθέντος, ὑπολείπεται 1. (κ. 3.) Καταχθέντος ἤδη τοῦ λειψάνου, τουτ: τοῦ $2\alpha\beta + \beta^2$, διπλασίασον τὸ α΄. μέρος τῆς ῥίζης, ἤτοι τὸν 4. καὶ ἔσται $2 \cdot 4 = 8$. τοῦτο δ' ἐστι 2α. καὶ θὲς αὐτὸ ὑπὸ τὸν 6 τῆς β΄. κλάσεως. (κ. 4.) Δίελε 16 διὰ 8, καὶ ἕξεις πηλίκον τὸν 2. Τεθήτω καὶ οὗτος εἰς τὸ πηλ. ὡς τὸ β΄. μέρος τῆς ῥίζης, ὅ ἐστι β, καὶ πρὸς τῷ Διαιρέτῃ 8. Καὶ τοῦ 82 ἐπὶ τὸν 2 πολλαπλασιασθέντος, προκύψει

164

164, τουτ: $(2\alpha+\beta)\,\beta$. ἢ $2\alpha\beta+\beta^2$. Ὃ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τῆς καταχθείσης κλάσεως, καὶ τοῦ λειψάνου τῆς α΄. (κ. ς.) οἴχεται παντάπασιν. Ἐπεὶ οὖν οὐδὲν ὑπολέλειπται, ἡ ἀκριβὴς ῥίζα 42 τυγχάνει.

Τοῦτο βασανίσαι βουλόμενος, πολλαπλασιασὸν μεθ' ἑαυτῆς τὴν ῥίζαν, καὶ ἀναγκαίως προκύψει ὁ Τετράγωνος. Ἔστι γὰρ $42 \,.\, 42 = 1764$.

Ὑποτεθήτω ἔτι καὶ ἕτερα τῶν παραδ. πολυαριθμότερα, παρ' οἷς καὶ τὸν τύπον γράφειν οὐκ ἐπιλησέον. Ὁ γὰρ τοῦτον μετὰ προσοχῆς μετιὼν ῥαδίως ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν μιμηθήσεται τὸ παράδειγμα.

Ἐξαχθήτω ἡ ῥίζα ἐκ τοῦ $817216 \mid \alpha+\beta$

$$
\begin{array}{rr|r|r|l}
 & 1 & & & \alpha+\beta \\
 & 81 & 72 & 16 & 904 \\
\alpha^2 = & 81 & & & \\
\hline
2\alpha\beta+\beta^2 = & & 72 & & \\
2\alpha\beta+\beta = & (1 & 80) & & \\
(2\alpha+\beta)\,.\,\beta = & 0 & 00 & & \\
\hline
 & & 72 & 16 & \\
 & 2\alpha+\beta & (1804) & & \\
 & (2\alpha+\beta)\,.\,\beta & 7216 & & \\
\hline
 & & 0000 & &
\end{array}
$$

Σημείωσαι ἐνταῦθα, ὅτι ἐπὶ τῆς β΄. ἣν κατηγάγομεν, κλάσεως, ὁ 7 οὐ διαιρέσιμος διὰ 18. Ὥστε τὸ πηλίκον $= 0$. Ἀλλὰ καὶ ἡ μετ' αὐτοῦ πολλαπλασιασθεῖσα ποσότης $= 0$. (§. 69.) Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου ἀπὸ 72 οὐδὲν ἀφῄρηται, ἀλλ' ὅλος (ὁ 72) κατήχθη. Τούτῳ δὲ τῷ παραδ. ἐχρησάμεθα, εἰς τὸ δεῖξαι, ὅπως χωρεῖν δέον ἐπὶ τῶν τοιούτων, καὶ ὅτε τῇ ῥίζῃ μηδενικὰ ἐνυπάρχουσι. Προκείσθω ἤδη παράδ. ἐν ᾧ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ῥίζης μηδενικὰ ἀπαντῶσιν.

Ἐξάγα-

Ἐξάγαγε τὴν ῥίζαν τοῦ 1440000 | $\alpha + \beta$

$$
\begin{array}{r|c|c|c|l}
 & & & & \alpha + \beta\,: \\
1 & 44 & 00 & 00 & \alpha + \beta\,:\,: \\
\alpha^2 = 1 & & & & 1\;2\;0\;0 \\
\hline
2\alpha\beta + \beta^2 = & 44 & & & \\
2\alpha + \beta = & 22 & & & \\
(2\alpha + \beta)\,.\,\beta = & 44 & & & \\
\hline
 & 000000 & & &
\end{array}
$$

Ἔνθα τῶν δύω τυλευταίων τάξεων ἡ ῥίζα = 0. Τοῦ γὰρ 0 ῥίζα = 0.

§. 274. Τῶν προχειρισθεισῶν Ποσοτήτων ἀκριβῶν οὐσῶν Τετραγώνων, καὶ αἱ τούτων ῥίζαι ἀκριβῶς ἀποδέδονται. Τοῦτο δὲ οὐκ ἀεὶ συμβαίνει. Δίδονται γὰρ καὶ ἀριθμοί, ὧν καὶ λείψανον ὑπολείπεται, εἰ ἀπὸ τῆς τελευταίας κλάσεως τὸ τελευταῖον ἀφαιρεθῇ παραγόμενον. Τὸ δὲ ὑπολειπόμενον γνήσιον τυγχάνει κλάσμα, τουτ: τῆς 1 ἔλαττον. Ὅθεν καὶ τὸ ἐν τετραγωνικῇ ῥίζῃ παράπτωμα οὐδὲ μονάδι ἐξισοῦται. Εἰ γὰρ τὸ ἐλλεῖπον μεῖζον ἦν τῆς 1, τὸν ἔσχατον τῆς ῥίζης χαρακτῆρα ἅπαξ, ἢ πολλάκις προσαυξῆσαι ἂν εἴχομεν. Ὡς οὖν ἐν τοῖς τοιούτοις τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκριβῶς μὴ ἐχούσης ἀποδοθῆναι, ἐπινενόηται μέθοδος, δι' ἧς, πλὴν τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν, τὸ λοιπὸν ἐν δεκαδικοῖς ζητεῖται κλάσμασιν, ὅτι ἔγγιστα τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τούτῳ τῷ τρόπῳ γινομένοις. Καὶ τοῦτό εἰσιν αἱ ἄλογοι ῥίζαι. (§. 2:9.) Προκείσθω οὖν τις τῶν τετραγώνων, οὗ ἡ ῥίζα πάντῃ πάντως ἀναπόδοτος.

Ληφθήτω

Ληφθήτω ἡ ῥίζα τοῦ 1321.

```
1 3 | 21 | 36
  9 |    |
----
  4 | 21
    |(66)
  3 | 96
  --------
      25
```

Ἥτις ὁ 36 τυγχάνει, ἀλλ' οὐκ ἀκριβῶς. (ὑπολείπεται γὰρ 25) Καὶ μονάδι προσαυξηθῆναι, ἤτοι 37 εἶναι, οὐ δύναται· παρεμπίπτει δὲ μεταξὺ 36, καὶ 37. Ἵνα δὲ τούτου πεῖραν λάβῃς, ἐπὶ τοῦ β'. μέρους τῆς ῥίζης λαβὲ 7 ἀντὶ 6, καὶ ὄψει τὸ παραγόμενον τὸ ἀφαιρετέον μεῖζον εἶναι τοῦ μειωτέου. Ἀναγκαῖον τοίνυν πρὸς τῷ ὁλοσχερεῖ ἀριθμῷ 36 καὶ κλάσμα εὑρεῖν, ὃ τῷ ὁλοσχερεῖ προσαρτητέον, ὡς καὶ τοῦτο τῇ ῥίζῃ προσῆκον. Εἰ οὖν τῷ 36 καὶ $\frac{1}{4}$ προσάψεις, καὶ 36 . $\frac{1}{4}$ μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιάσεις, ἕξεις παραγόμενον 1314 $\frac{1}{16}$. Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{1}{4}$ πάνυ βραχύ. Εἰ δὲ $\frac{3}{8}$, τουτ: 36 $\frac{3}{8}$, προκύψει παραγόμ. 1323 $\frac{9}{64}$. Ἄρα τὸ $\frac{3}{8}$ πάνυ μέγα. Τὸ τοίνυν κλάσμα, τὸ τῇ ὁλοσχερεῖ ῥίζῃ προσαρτητέον, μεταξὺ $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{3}{8}$ κεῖται· Ἀλλ' εἰ καὶ διὰ πολλοῦ τοῦτο ζητοίης, οὐχ εὑρήσεις. Ἔνθεντοι καὶ ἑτέραν ὁδὸν ἐτράποντο τήνδε. Ποίησον, διὰ τὸ ἐν §. 164. ῥηθὲν, τοσαύτας καινὰς κλάσεις ἐκ μόνων μηδενικῶν, ὅσα μέρη τῆς ῥίζης ἔτι ἐν δεκαδικοῖς ἔχειν βούλει κλάσμασι, δύω μηδενικὰ ἑκάστῃ κλάσει ἐπὶ τετραγωνικῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς διδοὺς, καὶ οὕτω χωρῶν ζήτει τρόπῳ τῷ προδιδαχθέντι τὰ μέρη τῆς ῥίζης. Ἔνθα μέντοι τὸ μέρος τῆς ῥίζης, τῆς ἀπὸ τῶν δοθέντων ὁλοσχερῶν ἐξαχθείσης, ἀπολήγει, κόμματι διαστέλλειν χρή· μετὰ γὰρ τοῦτο τὰ μέρη τῆς ῥίζης ἐν δεκαδικοῖς ἀποδίδονται κλάσμασιν. Ὁ δὲ λόγος τοῦ δύω

μηδεν-

μηδενικὰ προσαρτᾶν τῷ λειψάνῳ, ὅτι ἐξ ἑκάστης κλάσεως ἓν καινὸν δεκαδικὸν ἀνακύπτει κλάσμα. Ὅτι δὲ ἡ τοιαύτη πρᾶξις ὀρθή, ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι διὰ τοῦ τόπου, ὃν τὰ δεκαδικὰ καταλαμβάνουσι κλάσματα, δείκνυται ταῦτα διὰ τῆς 1, τοσαῦτα μηδενικὰ ἐχούσης, διαιρεῖσθαι, ὅσαι δυάδες μηδενικῶν τῷ λειψάνῳ προσήφθησαν.

Παράδειγμα εἰς ἀνάπτυξιν ληφθήτω τὸ πρότερον.

1 3	2 1				36,345
9					
4	2 1				
	(66)				
3	9 6				
	2 5	00	00	00	
	(7	23)	::	::	
	2 1	6 9	::	::	
	3	3 1		::	
		(72	64)	::	
	2	90	56	::	
		40	44	00	
		(7	26	85)	
		36	34	25	
		4	09	75	

Ἔνθα τριῶν δυάδων μηδενικῶν προσαφθεισῶν, καὶ τρία δεκαδικὰ προέκυψαν, οὕτω κυρίως ἐκδηλούμενα $\frac{345}{1000}$. Ἀλλ' ὁ τόπος, ὃν κατέλαβον, τὸ αὐτὸ δηλοῖ. Εὕρηται οὖν ἡ ῥίζα, εἰ καὶ μὴ πάντη ἐπ' ἀκριβές, ἐλλείπει μέντοι τοῦ ἀκριβοῦς ἧττον, ἢ χιλιοστημόριον, μεταξὺ τοῦ 36,345, καὶ 36,346

ἐμ-

ἐμπίπτουσα. Καὶ ἔτι ἀκριβέςερον ἂν εὑρέθη, εἰ πλείους αἱ κλάσεις τῶν μηδενικῶν εἶεν οὕτως, ὥςε τὸ ἔλλειμμα καὶ τριλλιοςημορίου ἔλαττον εἶναι. Ἐὰν οὖν ἤδη 30. 345 μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθῇ, καὶ τὰ δεκαδικὰ προσηκόντως ἐξαλειφθῇ, προκύψει σχεδὸν 1321. Ἐντελῆ δὲ τὴν ῥίζαν λαβεῖν ἀμήχανον, μηδενικῶν, ὅσα ἂν βούλῃ, προσαφθέντων τῷ λειψάνῳ, ὡς ἄλογον οὖσαν. (§. 269.)

§. 275. Χρήσιμος δὲ ἡ μέθοδος τοῦ τὰς ῥίζας, ὡς ἔγγιςα, εὑρίσκειν, καὶ εἰ ἐξ ἁπλῶν ἀριθμῶν τὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν πρόκειται. Τοσαῦται γὰρ κλάσεις μηδενικῶν παραληφθήσονται, ὅσα δεκαδικὰ ἔχειν βουλόμεθα. Ζητηθήτω ἡ $\sqrt{3}$ ἐν 3 δεκαδικοῖς. Ὥςε τῷ 3 τρεῖς κλάσεις μηδενικῶν προσθετέαι·

```
3 | 00 | 00 | 00 |  1, 732 . . .
1 | :: | :: | :: |
------------------
2 | 00 | :: | :: |
  |(27)| :: | :: |
1 | 89 | :: | :: |
------------------
    11 | 00 | :: |
   (3  | 43)| :: |
    10 |  9 | :: |
    -------------
       | 71 | 00 |
       |(34 | 62)|
       | 69 | 24 |
       ----------
```

Ἐὰν οὖν 1, 732 μεθ' ἑαυτοῦ πολλασιασθῇ, προκύψει σχεδὸν 3.

```
   1,732
   1,732
  ------
   3 464
  51 96
1212 4
1732
--------
```

2,999824 $=$ 2, $\frac{999824}{1000000}$. Ἐλλείπει τοίνυν τοῦ 3 ἔτι $\frac{176}{1000000}$, (ἐὰν γὰρ 176 τῷ 999824 προσθῇς, ἔσται ὁ ἀριθμ. 1000000 ἴσος τῷ παρονομ: τουτ: τὸ κλάσμα $=$ 1, ἥτις προστεθεῖσα τῷ 2 δώσει κεφαλ. 3) ὅπερ οὐδὲ $\frac{1}{1000}$ τῆς μονάδος ἐξισοῦται.

§. 276. Καὶ ἐξ ἀριθμῶν, οἷς δεκαδικὰ ἐνυπάρχει, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν δυνατὸν, τῇ αὐτῇ χρωμένους μεθόδῳ, παρ' ὅσον ἐν τῇ τῶν κλάσεων διαιρέσει οἱ μὲν ὁλοσχερεῖς καθ' ἑαυτοὺς διαιρετέοι, τὰ δὲ δεκαδικὰ ἀριστερόθεν πρὸς τὰ δεξιὰ, εἴπερ ἄμελει τοῖς ὁλοσχερέσι συνῆπται. Ἐν οἷς ἀριθμοῦ λείποντος, ὥστε τὴν κλάσιν μὴ συμπληροῦσθαι, προσαρτάσθω καὶ μηδενικόν. (τὸ αὐτὸ γὰρ παριςᾷ, ὃ καὶ τὰ προσαρτηθέντα δεκαδικά. πλὴν ὅτι ταῦτα (τὰ δεκ.) ἐνεργείᾳ ποσότητες τυγχάνουσι.) Ἐν δὲ τῷ πηλίκῳ, τῷ τὰ μέρη τῆς ῥίζης περιέχοντι, τὸ κόμμα μὴ παραλειπέσθω, τὸ τοὺς ὁλοσχερεῖς ἀπὸ τῶν μηδενικῶν διαςέλλον, ἐκ τῶν ὁλοσχερῶν τοῦ τετραγώνου προκύψαντας.

Παραδ.

Παραδ. Ἐξαχθήτω ἡ ῥίζα τοῦ 135,543.

1	35,	54	30	11, 64 . . . .
1	: :	: :	: :	
	35	: :	: :	
	(21)	: :	: :	
	21	: :	: :	
	14	54	: :	
	(2	26)	: :	
	13	56	: :	
		98	30	
		(23	24)	
		92	96	
		5	34	

Κἀνταῦθα καὶ ἕτεραι κλάσεις μηδενικῶν προςεθεῖεν, εἰς ἀκριβεστέραν τῆς ῥίζης εὕρεσιν, ἥτις, κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, ἐν τοῖς δεκαδικοῖς, ὧν ἠρξάμεθα, κλάσμασι προάγεται.

Εἰ δέοι ἀπὸ κλάσματος τὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν, ἀπ' ἀμφοῖν ἐξακτέα τῶν ὅρων. π. χ. ἡ $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$. Ἦν γὰρ $\frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{9}{25}$. Ὅθεν ἀνάγκη πᾶσα καὶ τὴν ῥίζαν οὕτως ἐξάγειν.

Ὥστε εἰ ἐν γένει κλάσμα ὁποιονοῦν $\frac{\alpha}{\beta}$ κληθῇ, ἔσται

ἡ $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$. Καὶ $\sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{2,236}{2,828}$. Σημείωσαι, ὅτι, εἰ δέοι τὴν ῥίζαν ὅλου τοῦ κλάσματος ἐξαχθῆναι, τὸ ῥιζικὸν σημεῖον τίθεται μεταξὺ ἀμφοῖν τῶν ὅρων. Εἰ δὲ ὑπέρ, ἢ ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν κεῖται, σημαίνει, ἤτοι μόνου τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ μόνου τοῦ παρονομαστοῦ τὴν ῥίζαν ληπτέαν.

Ταυ

Ταὐτὸ συμβαίνει, καὶ τοῖς δεκαδικοῖς κλάσμασιν. Ἡ τοῦ 0, 0043 $= \sqrt{\dfrac{43}{10000}} = \dfrac{\sqrt{43}}{\sqrt{10000}}$

$$= \frac{6,557}{100} = 0,06557\ldots$$

Ἢ ἐπιτομώτερον, κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ἔνθα τὸ μηδενικὸν μετὰ τοῦ κόμματος τὰς ἁπλᾶς διαςέλλει μονάδας, γενέσθω μία κλάσις, καὶ ἀπὸ τῶν ἀριςερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ προβαίνων δίελε τὰ δεκαδικὰ εἰς κλάσεις. Μοναδικοῦ δὲ ἀριθμοῦ ἐν τῇ τελευταίᾳ ὑπολειφθέντος τάξει, πρόσθες αὐτῷ καὶ μηδενικὸν, ὡς τοῦτο τὰ δεκαδικὰ μηδόλως μεταβάλλον. Καὶ ἀπὸ τῶν δεξιῶν δὲ ἡ διαίρεσις ἐπὶ τὰ λαιὰ ἂν χωροίη, εἰ τὰ δεκαδικὰ, ὧν ἡ πλῆθυς περιττὴ, τῇ προσθέσει τοῦ 0 ἄρτια ποιήσαιμεν. Θὲς εἶτα εἰς τὸ πηλίκον, τὸ τὰ μέρη τῆς ῥίζης περιέξον, α΄. τὸ μηδενικὸν μετὰ τοῦ κόμματος, τὴν τῶν ὁλοσχερῶν δηλοῦν ἀπουσίαν, μεθ᾽ ὃ τὰ δεκαδικά. Εἰ δ᾽ ἐν τῷ τετραγώνῳ πρὸς ἀριςερὰν καὶ κλάσεις ἔνεισι, μηδενικὰ μόνον περιέχουσαι, ἀνθ᾽ ἑκάςης (θὲς εἰς τὸ πηλ:) ἓν μηδενικὸν μετὰ τὸ κόμμα, καὶ εἶθ᾽ οὕτως ἐξάγαγε τὴν τετρ. ῥίζαν. Ἀλλὰ καὶ, εἴσοι βουλητὸν, τοῖς δεκαδικοῖς τοῦ τετρ: τοῖς πρὸς δεξιὰν, ὅσα βούλει, μηδενικὰ ἔξεςι προσάψαι, ὥςε πλείω τὰ μέρη τῆς ῥίζης προκύψαι.

Παραδ. ἑκάςου τούτων. Ἡ √ 0, 1444

```
0,|14|44|0,38
  | 9|  |
---------
   5|44
  (68)
   5 44
---------
   0 00
```

Ὥςε ἡ √ τοῦ 0, 1444 = 0, 38.

Ἡ √ 0, 545

```
0,|54| 50|0,7382 . . .
  |49| ::|
-----------
   5| 50
  (1| 43)
   4| 29
------------------------
   1|2.1.|0.0 |00
    |(14 |68) |: :
   1 17  44   : :
------------------------
      3.|56. |0.0
     (1 |47  |62)
       2|95  |24
------------------------
         66  |76
```

Ἡ √ 0, 00000485I

```
0,|00|00|04|85|10|0,00220
  |  |  | 4|::|  |
         ------------
           85 |
          (42)|
           84 |
      -----------
            1 |10
           (4 | 4)
```

Κἀνταῦθα τοῖς τελευταίοις ἀριθμοῖς, ἤτοι 110, καὶ ἑτέρας κλάσεις μηδενικῶν προσθεῖναι δυνάμεθα, τὴν ῥίζαν ἀκριβεςέραν ἔχειν βουλόμενοι. §. 177.

§. 277. Καὶ ἐξ Ἀλγεβραϊκῶν Ποσοτήτων, ἀκριβῶς τετραγώνων οὐσῶν, καὶ αἱ ῥίζαι ἀκριβεῖς ἐξάγονται. Ἀλλ' αἱ ποσότητες, κατὰ τὰς αὐτῶν δυνάμεις, ἐν οἰκείῳ τόπῳ ἑκάςῃ τακτέαι, ὥςε τὴν μείζονα δύναμιν τὸν α'. τόπον καταλαμβάνειν, καὶ ταύτῃ τὰς λοιπὰς κατὰ τάξιν ἕπεσθαι. Τὸ δὲ καθόλου σχῆμα $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ὑπ' ὄψιν ἔςω, καθ' ὅ τῆς ῥίζης ἐξαγομένης, ἐὰν αἱ ποσότητες ἀλλήλας πᾶσαι οὐκ ἀναιρῶσι, δεῖγμα σαφὲς τὴν δοθεῖσαν ποσότητα μὴ εἶναι ἀκριβῆ τετράγωνον.

Παράδ. Ἡ $\sqrt{(\gamma^2 + 6\gamma\beta + 9\beta^2.)}$ Ἡ δὲ Ποσότης ταχθήτω κατὰ τὰς τοῦ γ δυνάμεις.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \gamma^2 + 6\gamma\beta + 9\beta^2 & \alpha + \beta \\
\alpha^2 = & \gamma^2 & \gamma + 3\beta \\
\hline
2\alpha\beta + \beta^2 = & + 6\gamma\beta + 9\beta^2 & \\
2\alpha = (2\gamma) & & \\
2\alpha\beta + \beta^2 = (2\gamma + 3\beta)3\beta = & 6\gamma\beta + 9\beta^2 & \\
\hline
 & 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Ἡ ῥίζα τοῦ $\gamma^2 = \gamma$. Διπλασιασθήτω, ἵνα ὁ καινὸς προκύψῃ διαιρέτης. Εἶτα πολλαπλασιασθήτω τὸ καινὸν πηλίκον, καὶ ὁ καινὸς διαιρέτης ἐπὶ τὸ καινὸν πηλίκον, κτ. ὡς τὸ παράδ. προφανῶς ὑπεμφαίνει.

$$
\begin{array}{l|l}
\text{Ἡ } \sqrt{\gamma^4 + 2\gamma^3 + 3\gamma^2 + 2\gamma + 1} & \alpha + \beta \\
\quad \gamma^4 + 2\gamma^3 + 3\gamma^2 + 2\gamma + 1 & \alpha + \beta \\
\alpha^2 = \gamma^4 & \gamma^2 + \gamma + 1 \\
\hline
2\alpha\beta + \beta^2 = + 2\gamma^3 + 3\gamma^2 + 2\gamma + 1 & \\
2\alpha = 2\gamma^2 & \\
2\alpha\beta + \beta^2 = (2\gamma^2 + \gamma).\gamma = 2\gamma^3 + \gamma^2 & \\
\hline
\qquad + 2\gamma^2 + 2\gamma + 1 & \\
2\alpha + 2\gamma^2 + 2\gamma & \\
2\alpha\beta + \beta^2 = (2\gamma^2 + 2\gamma + 1)1 = + 2\gamma^2 + 2\gamma + 1 & \\
\hline
\qquad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

§. 278. Πᾶσα Τετραγωνικὴ ποσότης ἔχει ῥίζαν καὶ καταφατικὴν, καὶ ἀποφατικήν. (§. 177.) Ὅτε τοίνυν τὴν ῥίζαν καταφατικῆς ποσότητος δεῖξαι βουλόμεθα, ἀμφοῖν τοῖς σημείοις $+$, και $-$ χρώμεθα. ὡς ἡ $\sqrt{25} = \pm 5$. ἡ $\sqrt{144} = \pm 12$. ἡ $\sqrt{\frac{4}{25}} = \pm \frac{2}{5}$. Τοῦτο δὲ καὶ ἱκανῶς ἡμᾶς διδάσκει ἐξ ἀποφατικῆς ποσότητος οὐδεμίαν ἐξάγεσθαι ῥίζαν δυνατὸν εἶναι, ὡς ἀδύνατον οὖσαν. π. χ. ἡ $\sqrt{-16}$ οὔτε $= +4$. οὔτε $= -4$. ἀμφοῖν γὰρ ὁ Τετράγωνος $+16$. Ἐνταῦθα δὲ ζητεῖται ῥίζα, ἧς ὁ τετράγ. -16, ἀδύνατος ἄρα.

§. 279. Ἡ δὲ τῆς Κυβικῆς ῥίζης ἐξαγωγὴ, καίτοι μὴ συχνάκις ἀπαντῶσα, ἐργωδεστέρα μέντοι τυγχάνει. Ἀλλ' ὥσπερ ἐπὶ τῆς Τετραγωνικῆς, οὕτω καὶ ἐπὶ τῆς παρούσης, καθόλου τις τύπος, καὶ σχῆμα δίδοται, ὑφ' οὗ εἰς τὴν ταύτης ἐξαγωγὴν ὁδηγούμεθα.

$\alpha + \beta$ εἰς τὴν γ'. ἀρθὲν δύναμιν, ἡ $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$. Τὸ γὰρ $\alpha + \beta$ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν $=$

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. (§. 270.) Ὃ ἔτι μετὰ τοῦ $\alpha + \beta$ πολλαπλασιασθὲν, ἤτοι

$$\begin{array}{rl} & \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\ & \alpha + \beta \\ \hline & \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ & + \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \\ \hline \text{ἔςαι} = & \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3. \end{array}$$

Ἡ γ′. ἄρα δύν. ῥίασοῦν ποσότητος διμεροῦς ἐν γένει τῷ προκειμένῳ ἂν παραςαίη τύπῳ, ἡ δὲ ῥίζα αὐτῆς τοῦ ($\alpha + \beta$). Ἐὰν οὖν ἐξ αὐτοῦ (τοῦ τύπου) τὸ $\alpha + \beta$ (τὴν ῥίζαν) αὖθις ἀνακαλύψαι δυνηθῶμεν, κανόνα ἡμῖν τοῦτο παρέξει τοῦ τὴν κυβικὴν ἐξάγειν ῥίζαν.

$$\begin{array}{ll} \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 & \big| \; \alpha + \beta \\ \alpha^3 & \\ \hline \quad\; 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 & \\ 3\,\alpha^2 & \\ \text{ἐν μέρει παραγόμ.} \; 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 & \\ \hline \quad\; 0 \quad\; 0 \quad\; 0 & \end{array}$$

Τὸ α′. μέρος τῆς ῥίζης προχείρως εὑρίσκομεν. Ἔςι γὰρ $= \alpha$. Ὃ εἰς κύβον ἐξαρθὲν ἀναιρεῖ τὸ α^3. Ὥςε δὲ καὶ τὸ β′. μέρος αὐτῆς, ἤτοι τὸ β, εὑρεῖν, τετραγωνιςέον τὸ α′. μέρος τῆς ῥ. καὶ μετὰ τοῦ 3 πολλαπλασιαςέον, καὶ διὰ τούτου τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ κύβου διαιρετέον. Τὸ δὲ πηλίκον $+ \beta$ ἔςαι τὸ β′. μέρος. Ὅπως δὲ εἰδῶμεν, εἰ τοῦτο τὸ μέρος τῆς ῥίζης τὸ ἀληθὲς, 1) τετραγωνιςέον α τὸ α′. μέρος τῆς ῥίζης. καὶ τὸ τετράγ. πολλαπλασιαςέον ἐπὶ τὸ β′. μέρος αὐτῆς. καὶ τοῦτο ἔτι ἐπὶ τὸν 3. Ὅπερ δίδωσι τὸ α΄ ἐν μέρει παραγόμενον, ἐνταῦθα τὸ $3\alpha^2\beta$. 2) τετραγωνιζέον τὸ β΄. μέρος τῆς ῥ. πολλαπλασιάζοντας τοῦτο ἐπὶ τὸ α΄ μέρος, καὶ ἔτι μετὰ τοῦ 3. καὶ οὕτως ἕξομεν τὸ β΄. ἐν μέρει παραγόμ. ὧδε τὸ $3\alpha\beta^2$. 3) Ἀρτέον εἰς κύβον τὸ β΄. μέρος τῆς ῥ. ὃ παρέξει τὸ γ΄. ἐν μέρει παραγόμ. β^3. Ταῦτα, τὰ γ΄. ἐν μέρει παραγόμενα, ἀπὸ τοῦ καταχθέντος λειψάνου ἀφαιρεθέντα, οὐδὲν ὑπολείψουσιν. Ἡ τοίνυν κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha + \beta$. Ἐκ τούτου, καὶ τῆς θεωρίας τῆς κυβικῆς ποσότητος, συνάγομεν ἐν γένει τοὺς ἑξῆς κανόνας εἰς ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης ἐξ ἀριθμῶν.

1) Δίελε τὸν δοθέντα ἀριθμὸν δεξιόθεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ εἰς κλάσεις, τρεῖς ἑκάστην χαρακτῆρας περιεχούσας, μηδόλως φροντίζων, εἰ ἡ πρὸς τὰ λαιὰ τελευταία δύω, ἢ ἕνα τούτων περιλαμβάνει. Δίδονται γάρ, κατὰ τὸ πινακίδιον, (§. 271.) καὶ τοιοῦτοι Κύβοι.

2) Ζήτησον ἐν τῷ Πινακιδίῳ τὴν ῥίζαν τοῦ Κύβου τῆς α΄. κλάσεως πρὸς ἀριστερὰν, καὶ γράψον αὐτὴν ἐν τῷ Πηλίκῳ, ὡς τὸ α΄. μέρος τῆς ῥίζης. Ἐὰν δὲ τοιοῦτος ἀριθμὸς αὐτῷ (τῷ Πιν:) οὐχ ὑπάρχῃ, οἷος ὁ ἐν τῇ α΄. κλάσει, λαβὲ τὴν ῥίζαν τοῦ ἐγγὺς ἐλάσσονος Κύβου.

3) Ἆρον εἰς κύβον τὸ εὑρεθὲν α΄. μέρος τῆς ῥίζης, καὶ ἄφελε τοῦτον ἀπὸ τῆς α΄. κλάσεως, καταγαγὼν τὸ λείψανον μετὰ τῶν χαρακτήρων τῆς β΄. κλάσεως.

4) Τετραγώνισον τὸ εὑρεθὲν α΄. μέρος τῆς ῥίζης, πολλαπλασιάσας τὸν Τετράγ. ἐπὶ τὸν 3, καὶ δίελε διὰ τοῦ παραγομένου τὸ καταχθὲν λείψ. Τὸ ἐκ

τοῦτούτων πηλίκον γράψον, ὡς τὸ β'. μέρος τῆς ῥίζης. Ἀλλὰ τὸ πηλίκον μὴ πάνυ μέγα λαμβανέσθω. Τρία γὰρ ἐν μέρει τὰ παραγόμενα, τὰ ἀπὸ τοῦ καταχθέντος λειψάνου ἀφαιρεθησόμενα.

5) Πολλαπλασίασον ἤδη τὸ εὑρεθὲν β'. μέρος τῆς ῥίζης μετὰ τοῦ τριπλοῦ Τετραγώνου τοῦ α'. μέρους τῆς ῥίζης. Ὅπερ δώσει σοι τὸ α'. ἐν μέρει παραγόμενον, οὗ ὁ τελευταῖος χαρακτὴρ ἐπὶ τὰ δεξιὰ γραφήτω ὑπὸ τὸν ἀνώτατον χαρακτῆρα πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς β'. καταχθείσης κλάσεως.

6) Τετραγώνισον τὸ εὑρεθὲν β'. μέρος τῆς ῥίζης, πολλαπλασιάσας τὸν τετράγ. μετὰ τοῦ α'. μέρους τῆς ῥίζης, καὶ μετὰ τοῦ 3. Τοῦτο δὲ παρέχει τὸ β'. ἐν μέρει παραγόμενον, οὗ τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα ὑπὸ τὸν μέσον τῆς β'. κλάσεως γράψον.

7) Ὕψωσον ἤδη εἰς κύβον τὸ β'. μέρος τῆς ῥίζης, καὶ δώσει σοι τὸ γ'. ἐν μέρει παραγόμ. οὗ τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα ὑπὸ τὸν τελευταῖον τῆς β'. κλάσεως γράψον.

8) Τὰ ἐν μέρει παραγόμενα πάντα προσαθροίσας ἄφελε τὸ τούτων κεφάλαιον ἀπὸ τοῦ καταχθέντος λειψάνου. Εἰ τοίνυν δύω κλάσεις μόναι προὔκειντο, καὶ οὐδὲν ὑπολείπεται, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀκριβὴς κύβος τυγχάνει, καὶ τὰ τῆς ῥίζης μέρη ἀκριβῶς εὕρηνται. Εἰ δὲ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν καὶ λείψ. ὑπολείπεται, ἀψευδὲς σημεῖον τοῦ μὴ ἀκριβῆ τὸν κύβον εἶναι. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ οὐκ ἂν εἴη = 1. Εἰ γὰρ τοῦτο, εὑρέθη ἂν ἡ 1 ἐπὶ τῆς ἐξαγωγῆς, τὸ β'. μέρος τῆς ῥίζης μονάδι προσαυξῆσασι.

9) Πλειόνων δὲ οὐσῶν τῶν κλάσεων, καταχθεισῶν καὶ τούτων καὶ τῶν δύω εὑρεθέντων μερῶν τῆς ῥίζης, ὡς ἑνὸς θεωρουμένων, τετραγωνίζομεν αὐτὰ

αὐτὰ ἐπὶ τὸν 3 ἐπάγοντες, καὶ διὰ τούτων τὸ λεῖψανον διαιροῦντες, ὥςε τὸ καινὸν β, ἤτοι ἕτερον μέρος τῆς ῥίζης, εὑρεῖν. Τὰ δὲ λοιπὰ γίνονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς οἱ κανόνες 5, 6, 7, 8. ἐπιτάττουσι.

Διὰ τῶν παραδειγμ. ἐκθησόμεθα σαφῶς τὰ ῥηθέντα, πρὸ ὀφθαλμῶν τὸν καθόλου κυβικὸν τύπον ἔχοντες.

Ἡ $\sqrt[3]{}$ 79507.

$$
\begin{array}{rrl}
 & & \alpha + \beta \\
 & 79|507 & 4 \quad 3 \\
 & \alpha^3 = 64|::: & \\
\hline
 & = 15|507 & \\
\text{Διαιρέτης} & 3\alpha^2 = (48) & \\
 & 3\alpha^2\beta = 144 & \\
\text{ἐν μέρει παραγόμ.} & 3\alpha\beta^2 = \quad 108 & \\
 & \beta^3 = \quad 27 & \\
\hline
 & 15507 & \\
\hline
 & 00000 &
\end{array}
$$

Ἡ οὖν τούτου ῥίζα = 43.

Ἡ $\sqrt[3]{34965783}$.

(α΄. καν. καὶ β΄.)	34|965|783	$\alpha + \beta$
		$\alpha + \beta$:
(γ΄. καν.)	$\alpha^3 = 27$ | | :::	3 2 7
	7|965| :::	
(δ΄. καν.) διαιρέτης	$3\alpha^2 = (27)$ | :::	
(ε΄. ϛ΄. ζ΄. καν.)	$3\alpha^2\beta = 54$ | :::	
ἐν μέρει παραγόμ..	$3\alpha\beta^2 = 36$ | :::	
	$\beta^3 = 8$ | :::	
κεφ. τῶν ἐν μέρει παραγ.	$= 5768$ | :::	
(θ΄. καν.) τὸ λεῖψ.	$= 2197$ | 783	
καινὸς διαιρέτης, ἐν ᾧ	$\alpha = 32$	
ἴσε	$3\alpha^2 = (3072)$	
	$3\alpha^2\beta = 21504$	
ἐν μέρει παραγόμ.	$3\alpha\beta^2 = 4704$	
	$\beta^3 = 343$	
κεφάλ. τῶν ἐν μέρει παραγ.	$= 2197783$	
τὸ λεῖψ.	$= 0000000$	

Ὡς μηδενὸς τοίνυν ὑπολειπομένου, ἡ κυβικὴ ῥίζα = 327. ἥτις τρὶς ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθεῖσα τὸν κύβον παράγει 34965783.

§. 280. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς μὴ ἀκριβὴς Κύβος ᾖ, ὅτε καὶ ἡ τούτου ῥίζα οὐκ ἂν ἀκριβῶς ἀνιχνευθείη, καὶ ἧς τὸ παράπτωμα ἔλαττον μονάδος, κλάσεις τῶν μηδενικῶν κἀνταῦθα προσαρτῶντες, τρία ἑκάστην περιεχούσας, ὅσον βούλει, ἔγγιστα τῆς ἀληθοῦς ῥίζης γενησόμεθα. Τὰ δὲ τῇ τῶν μηδενικῶν προσθέσει τῷ λειψάνῳ προκύπτοντα ἑπόμενα μέρη τῆς ῥίζης, τοῖς προευρεθεῖσιν ὡς δεκαδικὰ προςεθείσθω. Τοσαῦτα δὲ ἀνακύψουσιν, ὅσαι μηδενικῶν κλάσεις προσήρτηνται.

Ἡ $\sqrt[3]{}$

Ἡ $\sqrt{}$ 5789436 ,

$\alpha + \beta$

$\alpha + \beta$:

$\alpha + \beta$!

5|789|136|179,5...

$\alpha^3 = 1$ | ::: | :::

4|789| :::

διαιρέτης $3\alpha^2 = (3)$ :::

ἐν μέρει παραγόμ. $\begin{cases} 3\alpha^2\beta = 21 \quad ::: \\ 3\alpha\beta^2 = 147 \\ \beta^3 = 343 \end{cases}$

κεφ. τῶν ἐν μέρει παραγ. $= 3913$| :::

τὸ λεῖψ. 876|436

καινὸς διαιρέτ. ὅπου $\alpha = 17$

ὥστε $3\alpha^2 = (867)$

ἐν μέρει παραγόμ. $\begin{cases} 3\alpha^2\beta = 7803 \\ 3\alpha^2\beta = 4131 \\ \beta^2 = 729 \end{cases}$

τὸ τούτων κεφ. $= 822339$

τὸ λεῖψ. $= 54097$|000

καινὸς διαιρ. ἔνθα $\alpha = 179$

ὥστε $3\alpha^2 = (9612|3)$

ἐν μέρει παραγόμ. $\begin{cases} 3\alpha^2\beta = 480615 \\ 3\alpha\beta^2 = 13425 \\ \beta^3 = 125 \end{cases}$

τὸ τούτων κεφ. $= 48195875$

τὸ λεῖψ. $= 5901125$

Ὁ τὴν οὕτως ἐργώδη πρᾶξιν πολλάκις ἐπαναλαμβάνειν μὴ ὀκνῶν, καὶ ἕτερα δεκαδικὰ παράξει κλάσματα, ὅσα βούληται.

§. 281. Αἱ διάφοροι τῶν Ποσοτήτων, αἱ ἐν §. 275. κτ. προβληθεῖσαι, ἀφ' ὧν τετραγωνικαὶ ῥίζαι ἦσαν

ἦσαν ἐξακτέαι, ἵνα καὶ κυβικὰς ῥίζας ἐκ τούτων ἐξαγάγωμεν, δοθῆναι δύνανται. Γίνονται δὲ τὰ αὐτὰ, ὥσπερ ἐκεῖ, μόνον ὅτι, εἰ 1) ὁλοσχερεῖς ἁπλοῖ ἀριθμοὶ πρόκεινται, τοσαύτας κλάσεις μηδενικῶν εὐθὺς ἐν ἀρχῇ προσαρτῶμεν, ὅσα μέρη ῥίζης ἐν δεκαδικοῖς βουλόμεθα ἔχειν κλάσμασι.

Π. χ. $\sqrt[3]{6}$

$$
\begin{array}{lrl}
 & & \alpha+\beta \\
 & & \alpha+\beta: \\
 & 6,|000|000 & 1,\ 81\ \ldots \\
 & \alpha^3 = 1|\ \vdots\ \vdots\ | & \\
\hline
 & 5.|000| & \\
\text{διαιρέτης} & 3\alpha^2 = (|3) & \\
\text{ἐν μέρει παραγόμ.} & \left\{\begin{array}{l} 3\alpha^2\beta = 2\ 4 \\ 3\alpha\beta^2 = 1\ 92 \\ \beta^3 = \ \ 512 \end{array}\right. & \\
\hline
\text{τὸ τούτων κεφ:} & 4\ 832 & \\
\hline
\text{λείψ.} & 168|000 & \\
\text{καινὸς διαιρέτ. ἔνθα } \alpha = 18 & & \\
\text{ὥστε} & 3\alpha^2 = (97\ 2) & \\
\text{λειψ.} & & \\
\text{ἐν μέρει παραγόμ.} & \left\{\begin{array}{l} 3\alpha^2\beta = 97\ 2 \\ 3\alpha\beta^2 = \quad 54 \\ \beta^3 = \qquad 1 \end{array}\right. & \\
\hline
\text{τὸ τούτων κεφ.} & = 97\ 741 & \\
\hline
\text{λείψ.} & = 70\ 259. & \\
\end{array}
$$

Ἡ $\sqrt[3]{6} = 1,\ 81\ \ldots.$

2) Προκειμένων δὲ ἀριθμῶν, οἷς καὶ δεκαδικὰ ἔνεισι, διαιρείσθωσαν οἱ ὁλοσχερεῖς μόνοι δεξιόθεν πρὸς ἀριστερὰ, τὰ δὲ δεκαδικὰ ἀνάπαλιν. Εἰ δ' αἱ κλάσεις αἱ πρὸς δεξιὰ οὐ πλήρεις, προστιθέσθωσαν καὶ μηδενικά.

π. χ.

Π. χ. Ἡ $\sqrt[3]{126,52}$.

$$
\begin{array}{llcr}
 & & & 126,|520|5,02 \\
 & a^3 & = & 125| \quad\quad \\
\hline
 & & & 1|520| \quad \\
\text{διαιρέτης} & 3a^2 & = & (7|5\;) \quad \\
\hline
 & & & 1\;520|000 \\
\text{καινὸς διαιρέτης, ἔνθα} & a & = & 50 \quad\quad\quad \\
\text{ὥστε} & 3a^2 & = & (750|0) \\
\text{ἐν μέρει παραγ.} & \left\{\begin{array}{l} 3a^2\beta \\ 3a\beta^2 \\ \beta^3 \end{array}\right. & \begin{array}{c} = \\ = \\ = \end{array} & \begin{array}{r} 1\;500|0 \\ 600 \\ 8 \end{array} \\
\hline
\text{τὸ τούτων κεφ.} & & = & 1506008 \\
\hline
\text{λείψ.} & & = & 13992
\end{array}
$$

3) Εἰ δὲ δεκαδικὰ μόνα πάρεισι, γραφέσθω ἐν τῷ τῆς ῥίζης πηλίκῳ τὸ σύνηθες μηδενικὸν διὰ τὴν τῆς μονάδος ἀπουσίαν, καὶ γινέσθω εἶτα ἡ εἰς κλάσεις διαίρεσις ἀριστερόθεν πρὸς τὰ δεξιά. Ἐλλιπεῖς δ' ὄντες οἱ τόποι τῆς τελευταίας κλάσεως πληρούσθωσαν μηδενικῶν. Ἐὰν δὲ καὶ πρὸς τὰ λαιὰ πρὸ τῶν χαρακτήρων μηδενικὰ ὑπάρχωσι, μετὰ τὸ κόμμα, τιθέσθω παραπλησίως εἰς τὸ τῶν ῥιζῶν πηλίκον τοσαῦτα ἔτι μηδενικά, ὅσαι αἱ κλάσεις αἱ μηδενικῶν πλήρεις. Τὰ λοιπὰ δὲ προβήσῃ τὸν συνήθη τρόπον.

Παράδ. $\sqrt{0,0000045}$

$$\alpha^3 = \begin{array}{l|l|l|l|l} 0, & 000 & 004 & 500 & 0,016\ldots \\ & & 1 & & \\ \hline & & 3 & 500 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{διαιρέτης } 3\alpha^2 & = & (3) \\ \text{τὰ ἐν μέρει παραγόμ.}\left\{\begin{array}{l} 3\alpha^2\beta \\ 3\alpha\beta^2 \\ \beta^2 \end{array}\right. & \begin{array}{l} = \\ = \\ = \end{array} & \begin{array}{r} 1\ 8 \\ 1\ 08 \\ 216 \end{array} \\ \hline \text{τὸ τούτων κεφ.} & = & 3\ 096 \\ \hline \text{λείψ.} & = & 404, \text{ κτ.} \end{array}$$

Ἐπὶ τῶν κλασμάτων ἐξάγομεν τὰς κυβικὰς ῥίζας ἐξ ἀμφοῖν τῶν ὅρων, τοῦ ῥιζικοῦ σημείου μεταξὺ ἀμφοῖν κειμένου. Ἄλλως γάρ, ἤτοι μόνον ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ μόνον ἀπὸ τοῦ παρονομαστοῦ ἡ τῆς κυβικῆς ἐξαγωγὴ ἀπαιτεῖται ῥίζης.

Π. χ. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$. Καὶ $\sqrt[3]{\frac{81}{125}} = \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4,326\ldots}{5}$. Ἐκ γὰρ τοῦ ἀριθμητοῦ ἡ $\sqrt[3]{}$ ἀκριβῶς ἐξαχθῆναι οὐκ ἔχει. Ἀλλὰ $\sqrt[3]{\frac{81}{125}} = \frac{81}{5} = 16\frac{1}{5}$. Καὶ $\frac{\sqrt[3]{81}}{125} = \frac{4,326\ldots}{125}$. Καὶ ἐν γένει $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}}$.

§. 282. Καὶ ἐξ Ἀλγεβραϊκῶν Ποσοτήτων τὴν $\sqrt[3]{}$ ἐξάγειν δυνάμεθα, ἀκριβῶν οὐσῶν κύβων. Ἡ δ' ἐξαγωγὴ τελεῖται κατὰ τὸν γενικὸν τύπον. Ἀλλ' ἐπειδὴ τοῦτο σπανίως ἀπαντᾷ, προκείσθω καὶ τούτου παράδειγμα.

Η

Ἡ $\sqrt[3]{(\mu^3 + 12\mu^2 + 48\mu + 64)}$

$$\begin{array}{lrl|l}
 & & \mu^3 + 12\mu^2 + 48\mu + 64 & \alpha + \beta \\
 & & & \vdots \quad \vdots \\
 & \alpha^3 = & \mu^3 & \mu + 4 \\
\hline
 & & 12\mu^2 + 48\mu + 64 & \\
\text{διαιρέτης} & 3\alpha^2 = & 3\mu^2 & \\
\text{ἐν μέρει παραγόμ.} & 3\alpha^2\beta = & + 12\mu^2 & \\
 & 3\alpha\beta^2 = & + 48\mu & \\
 & \beta^3 = & + 64 & \\
\hline
\text{τὸ τούτων κεφ.} & = & 12\mu^2 + 48\mu + 64. &
\end{array}$$

Ὥστε ἡ κυβικὴ ῥίζα τῆς προτεθείσης Ποσότητος τὸ $\mu + 4$ τυγχάνει.

§. 283. Ἡ κυβικὴ ῥίζα ποσότητος ἀποφατικῆς ἀποφατικὴ τυγχάνει, καταφατικῆς δὲ καταφατική. Ἔνθεντοι ἐξ ἀποφατικῶν κυβικὰς ῥίζας ἐξάγειν οἷόντε, ὅπερ ἐπὶ ἀποφατικῶν τετραγώνων οὐκ ἐγχωρεῖ. (§. 278.) ὡς $\sqrt[3]{125} = 5$. Καὶ $\sqrt[3]{-125} = -5$. Καὶ γὰρ $-5 \cdot -5 \cdot -5 = -125$.

§. 284. Εἰς ἐξαγωγὴν τῶν Διτετραγώνων ῥιζῶν, ἀναγκαῖος α΄. γενικός τις τύπος τῆς δ΄. δυνάμεως, ἤτοι $\alpha + \beta$ εἰς τὴν δ΄. δύναμιν ἐξαρτέον, ἵνα κατὰ τοῦτον καὶ ταύτας μεταχειριζώμεθα. $(\alpha + \beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$. Ἀλλ᾽ ἐπεὶ τοῦτο, ὡς ἐκ τοῦ τύπου δῆλον, λίαν ἐργῶδες, ὡς τεσσάρων ἐν μέρει παραγομένων ἀνακυπτόντων, γενικόν τινα ἐκζητώμεθα κανόνα, ὃν ὁ πολὺς τὴν σοφίαν ἐπενόησε Νεύθων, καθ᾽ ὃν ἁπασῶν τῶν δυνάμεων αἱ ῥίζαι διά τινος σειρᾶς ὅρων λαμβάνονται, ἡλίκαι ἂν εἴησαν αἱ δυνάμεις.

§. 298.

§. 285. Ἐπεὶ οὖν εἰς τοῦτο αἱ δυνάμεις τοῦ Διωνύμου, ἢ τῆς ποσότητος, τῆς ἐκ δύω συγκειμένης ὅρων, οἷοι $\alpha + \beta$, ἐν χρήσει παραλαμβάνονται, ὑποδεῖξαι διὰ βραχέων βουλόμεθα, ὅπως ῥᾷστα οἱανοῦν διώνυμον ποσότητα εἰς ἡλικηνοῦν ζητουμένην δύναμιν ἐξαίρειν δυνάμεθα, τουτ: καθ' ὃν τρόπον διοριζονται, καὶ διατάττονται ἐν τοῖς ὅροις αἱ τοῦ α καὶ β δυνάμεις, ὡσαύτως καὶ οἱ Συνεργοὶ, οὓς αὗται ἐν ἀριθμοῖς ἔχουσι. Διὸ παραληφθήτω $\alpha + \beta$ μέχρις εἰς τὴν δεκάτην ὑψωτέον δύναμιν, ὧν ἑκάστη ἐν τῷ ἑξῆς ἐκκείσθω πινακιδίῳ. Ἐὰν $\alpha + \beta$ ἐπὶ τὸ $\alpha + \beta$ πολλαπλασιασθῇ προκύψει ἡ β'. τούτου δύναμις. Ἐὰν δὲ καὶ τὸ παραγόμ. αὖθις ἐπὶ τὸ $\alpha + \beta$, ἡ γ'. καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Αἱ δυνάμεις τοίνυν τοῦ $\alpha + \beta$ αἵδε τυγχάνουσι.

α'. δύν. $\alpha + \beta$

β'. δύν. $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

γ'. δύν. $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$.

δ'. δύν. $\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$.

ε'. δύν. $\alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5$.

ϛ'. δύν. $\alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^5 + \beta^6$.

ζ'. δύν. $\alpha^7 + 7\alpha^6\beta + 21\alpha^5\beta^2 + 35\alpha^4\beta^3 + 35\alpha^3\beta^4 + 21\alpha^2\beta^5 + 7\alpha\beta^6 + \beta^7$.

η'. δύν. $\alpha^8 + 8\alpha^7\beta + 28\alpha^6\beta^2 + 56\alpha^5\beta^3 + 70\alpha^4\beta^4 + 56\alpha^3\beta^5 + 28\alpha^2\beta^6 + 8\alpha\beta^7 + \beta^8$.

θ'. δύν.

ϑ'. δύν. $\alpha^{9} + 9\alpha^{8}\beta + 36\alpha^{7}\beta^{2} + 84\alpha^{6}\beta^{3}$
$+ 126\alpha^{5}\beta^{4} + 126\alpha^{4}\beta^{5} + 84\alpha^{3}\beta^{6}$
$+ 36\alpha^{2}\beta^{7} + 9\alpha\beta^{8} + \beta^{9}$.

ι'. δύν. $\alpha^{10} + 10\alpha^{9}\beta + 45\alpha^{8}\beta^{2} + 120\alpha^{7}\beta^{3}$
$+ 210\alpha^{6}\beta^{4} + 252\alpha^{5}\beta^{5} + 210\alpha^{4}\beta^{6}$
$+ 120\alpha^{3}\beta^{7} + 45\alpha^{2}\beta^{8} + 10\alpha\beta^{9}$
$+ \beta^{10}$.

Ἐὰν ληφθῇ δυώνυμον, οὗ ὁ ἕτερος τῶν ὅρων ἀποφατικὸς, ὡς $\alpha - \beta$, αἵτε δυνάμεις, καὶ οἱ τούτων συνεργοὶ χωρήσουσιν ὡσαύτως, εἰ μὴ ὅτι οἱ ἄρτιοι ὅροι, οἷον ὁ β΄. δ΄. ϛ΄. η΄, κτ. γίνονται ἀποφατικοὶ, ἔνθα δηλονότι αἱ περιτταὶ δυνάμεις τοῦ β πάρεισι.

§. 286. Ὡς ἐκ τοῦ πίνακος προφανὲς, τῷ α καὶ β ἐν τῇ α′. δυνάμει οὐδεὶς ἐνυπάρχει ἐκθέτης, ὡς καὶ ἡ τοῦ πράγματος φύσις τοῦτο ἀπαιτεῖ, ἢ ἀκριβέςερον φάναι, τοῦ α, καὶ β ὁ ἐκθέτης $=$ 1 ἐν τῇ α′. δυνάμει. Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν δυνάμεων, ἐν μὲν τῷ α′. ὅρῳ τὸ α μόνον κεῖται ἐν τῇ ὑπερτάτῃ δυνάμει, ἐν δὲ τῷ β′. καὶ τοῖς λοιποῖς μετὰ τοῦ β πεπολλαπλασιασμένον ὁρᾶται, μιᾷ δυνάμει τοῦ πρὸ αὐτοῦ α ἐλαττούμενον, μέχρις οὗ παντάπασιν ὁ τῆς αὐτοῦ δυνάμεως ἐκθέτης ἐκλίπῃ. Τὸ δὲ β ἄρχεται ἐν τῷ β′. ὅρῳ ἐκθέτου ἀμοιροῦν, ἀεί τε χωρεῖ δυνάμει μιᾷ αὐξανόμενον, μέχρις ἂν τῆς ὑπερτάτης ἐφίκηται δυνάμεως, ἔνθα ἡ σειρὰ πέρας λαμβάνει. τουτέςιν, οἱ μὲν τοῦ β ἐκθέται διηνεκῶς αὔξουσιν, οἱ δὲ τοῦ α μειοῦνται.

§. 287. Ῥᾴδιον οὖν ἔςαι τοὺς ὅρους οἱασοῦν δυνάμεως εὑρεῖν, ἡλικηοῦν ἂν εἴη, τὰ ἐν τῷ ἀνωτ. §. παρατηροῦντας. Οὕτως ἂν οἱ ὅροι, τοῦ

$\alpha+\beta$

$\alpha + \beta$ εἰς τὴν ιβ'. ἀρθέντος δύναμιν εἶεν, α^{12}, $\alpha^{11}\beta$, $\alpha^{10}\beta^2$, $\alpha^9\beta^3$, $\alpha^8\beta^4$, $\alpha^7\beta^5$, $\alpha^6\beta^6$, $\alpha^5\beta^7$, $\alpha^4\beta^8$, $\alpha^3\beta^9$, $\alpha^2\beta^{10}$, $\alpha\beta^{11}$, β^{12}. Ἐκ τούτου δὲ, ὡς καὶ ἐκ τῶν προτέρων, δῆλον τὴν σειρὰν ἑνὶ ὅρῳ πλεονεκτεῖν τοῦ ἀριθμοῦ τῆς ζητουμένης δυνάμεως. Ἐπὶ γὰρ τῆς δ'. δυνάμεως ε'. οἱ ὅροι. ἐπὶ τῆς ς'. ἑπτά. ἐπὶ τῆς ιβ'. δεκατρεῖς. Καὶ ἐν γένει, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῆς δυνάμεως $= \mu$ τεθῇ, οἱ ὅροι αὐτῆς ἔσονται ἀναγκαίως $\mu + 1$. Ἀναγκαῖον δὲ καὶ τὸ τοὺς συνεργοὺς εὑρεῖν. Ὡς ἐν τῷ πίνακι ἐφ' ἁπασῶν π'ρεστι καθορᾶν τῶν δυνάμεων, ἀείποτε ὁ β'. ὅρος τῆς σειρᾶς συνεργὸν κέκτηται τὸν ἀριθμὸν, ὃς ὁ ἐκθέτης τῆς προηγηθείσης ὑπερτάτης δυνάμεως τοῦ α ἦν, ἤτοι τοῦ α'. τῆς σειρᾶς ὅρου. Οὕτως ἐπὶ τῆς γ'. δυνάμεως ὁ συνεργὸς τοῦ β'. ὅρου $= 3$. ἐπὶ τῆς ε'. $= 5$. ὁ αὐτὸς δ' ἀριθμὸς ἦν καὶ τῷ α'. ὅρῳ ὁ ἐκθέτης τῆς αὐτοῦ δυνάμεως. Τῶν δ' ἑπομένων ὅρων οἱ συνεργοὶ τόνδε τὸν τρόπον ἀναφύονται. Πολλαπλασίασον ἕκαστον ὅρον, ἀπὸ τοῦ γ'. ἀρχόμενος, μετὰ πάντων τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων τῶν προηγηθέντων ὅρων, τῶν τοῦ α φημὶ, ἐξαιρουμένων τῶν δυνάμεων τοῦ α ἐκείνου τοῦ ὅρου, οὗ ὁ συνεργὸς ζητεῖται, καὶ δίελε τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον διὰ τοῦ παραγομένου πάντων τῶν τοῦ β. ἐκθετῶν τῶν προηγησαμένων ὅρων, καὶ αὐτοῦ τούτου τοῦ ὅρου, οὗ ὁ συνεργὸς εἰς ζήτησιν πρόκειται. Ἢ καὶ τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τοῦ β'. γινομένης ὅρου, ὁ κανὼν κρατεῖ ὡσαύτως, καὶ οὕτως εὑρήσεις τοὺς συνεργοὺς ἁπάντων τῶν ὅρων. Ληφθήτω εἰς παράδειγμα ἡ ς'. δύναμις, ἧς οἱ ὅροι (§. 285.) α^6, $\alpha^5\beta$, $\alpha^4\beta^2$, $\alpha^3\beta^3$, $\alpha^2\beta^4$, $\alpha\beta^5$, β^6. καὶ ζητηθήτωσαν τούτων οἱ συνεργοί. α'. τοῦ β'. ὅρου, ἢ τοῦ $\alpha^5\beta$. Κατὰ τὸν κανόνα λαβὼν τὸ παραγόμ. τῶν ἐκθετῶν τῶν προηγηθεισῶν δυνάμεων τοῦ α, (τῆς δυνάμεως τοῦ α τούτου τοῦ ὅρου, ἤτοι τοῦ β'. ἐξαιρουμένης) δίελε αὐτὸ

διὰ

διὰ τοῦ παραγομένου τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων τῶν προηγησαμένων ὅρων τοῦ β, καὶ τῆς δυνάμεως τούτου τοῦ ὅρου συνάμα ληφθείσης. Πρὸ τοῦ β'. ὅρου ἦν μόνον εἷς ὅρος α^6, ἐν ᾧ οὐδὲν β παρὸν ἐτύγχανεν. Ὥςε καὶ οὐδεμία τούτου δύναμις ἐν τῷ β'. ὅρῳ· (ἢ μᾶλλον δύναμις αὐτοῦ (τοῦ β) ἐν τούτῳ τῷ ὅρῳ ἡ 1) Ἀλλὰ β, ἢ β^1 παραληπτέον εἰς παραγόμενον τοῦ διαιρέτου, ἢ ὡς διαιρέτην. Ὁ συνεργὸς ἄρα τοῦ β'. ὅρου $= \frac{6}{1} = 6$. Τοῦ γ'. ὅρου ὁ συνεργός. Αἱ δυνάμεις τῶν προηγησαμένων ὅρων τοῦ α ἦσαν 6 καὶ 5, μὴ παραλαμβανομένης τῆς δυνάμεως τοῦ α τοῦ ἀνὰ χεῖρας ὅρου. αἱ δὲ τῶν προηγηθέντων ὅρων τοῦ β μετὰ καὶ τῆς δυνάμεως τοῦ β τοῦδε τοῦ ὅρου $=$ 1 καὶ 2. Ὁ συνεργὸς ἄρα τούτου τοῦ ὅρου $= \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$.

Ὡσαύτως καὶ τοῦ δ'. ὅρου ὁ συνεργὸς $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$. Τοῦ ε'. $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$. Τοῦ ς'. $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6$. Τοῦ ζ. $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1$. ἥτις οὐ προτίθεται τῆς ποσότητος, ὡς μὴ πολλαπλασιάζουσα. Εὕρηνται τοίνυν οἱ συνεργοὶ τοῦ $(\alpha + \beta)$. Ἡ δὲ σειρὰ εἴη ἂν $\alpha^6 + \frac{6}{1}\alpha^5\beta + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}\alpha^4\beta^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3\beta^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\alpha^2\beta^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\alpha\beta^5 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\beta^6 = \alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^5 + \beta^6$. Ὃ τῷ ἐν τῷ πίνακι συνάδει, καὶ πᾶς τις διὰ πολλαπλασιασμοῦ εὑρεῖν ἔχει. Οὕτως ἂν εὑρεθεῖεν πάντες οἱ συνεργοὶ ἁπάντων τῶν κατὰ πάσας τὰς δοθείσας δυνάμεις ὅρων. Ἀλλ' ἐν τούτοις μετὰ προσοχῆς παρατηρουμένοις ὁρῶμεν ἕκαςον ὅρον ἔντε τῷ ἀριθμητῇ, καὶ παρονομαςῇ ξεων του Πολλαπλασιασμοῦ ὁ αὐτοῦ συνεργὸς συγκροτεῖται, μονάδι ἐλάσσονας χαρακτῆρας ἔχειν, ἢ ἡ τάξις τοῦ ζητουμένου ὅρου τυγχάνει. π. χ. ὁ δ'. ὅρος ἔχει μόνον τρεῖς χαρακτῆρας ἐν τῷ ἀριθμητῇ μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθησομένους, καὶ τρεῖς ἐν τῷ παρονομ. ὡσαύτως μετ' αλ. πολλαπλ. Πρὸς τούτοις τοῦ μὲν ἀριθμητοῦ τοὺς χαρακτῆρας ἀπὸ τηλικούτου ἄρχεσθαι ἀριθμοῦ, εἰς ἡλίκην δυναμιν $\alpha + \beta$ ἀρθῆναι δέοι. Ἕκαςον δὲ τούτων (τῶν χαρ:) μονάδι τοῦ προηγουμένου ἐλαττοῦσθαι, ἢ ἕπεσθαι ἀλλήλοις κατὰ φυσικὴν τάξιν, ἀντίςροφον μέντοι. Ἐν δὲ τῷ παρονομ. ἀείποτε ἀπὸ μονάδος τὴν ἀρχὴν γίνεσθαι, τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν ἐν φυσικῇ τάξει ἀλλήλους διαδεχομένων Καὶ τούτου καθόλου ὄντος, οὐ χαλεπὸν ἑκάςου ὅρου οἱασοῦν δοθείσης δυνάμεως τοὺς συνεργοὺς, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, καὶ ὅλον τὸν ὅρον εὑρεῖν, εἰδότας προσέτι, καὶ ὅσοι ὅροι ἑκάςῃ δυνάμει ἐνυπάρχουσι· Πρὸ πάντων οὖν εὑρετέον τὰς δυνάμεις τοῦ α καὶ β. ἡ τοῦ β δύν. ἀεὶ μονάδι ἐλάττων τοῦ κατὰ τὸν ὅρον ἀριθμοῦ. τὴν δὲ τοῦ α δύν. ἐν ἑκάςῳ ὅρῳ ἀνακαλύπτομεν, ἀπὸ τῆς ὑπερτάτης δυνάμεως ἀφαιροῦντες τὸν ἐκθέτην τοῦ β, τοῦ ἐν τῷ ἀνὰ χεῖρας ὅρῳ. Οἷον ὁ ζ'. ὅρος τοῦ $(\alpha + \beta)^{10}$ ἐςὶν ὁ $\alpha^4 \beta^6$ Τὸ γὰρ β τοῦ ζ' ὅρου ἐν τῇ ς' δυνάμει τυγχάνει. β^6. ἄρα τὸ α ἐν τῷ αὐτῷ ὅρῳ ἔςαι $\alpha^{10-6} = \alpha^4$. Ἐν τῷ ε' ὅρῳ τοῦ $(\alpha + \beta)^7$ τὸ μὲν β ἐν τῇ δ'. δυνάμει, ὡς β^4. τοῦ δὲ α ἡ δύναμις $= \alpha^{7-4} = 3$. Ὥςε ἀμφω, $\alpha^3 \beta^4$. Παραπλησίως καὶ ὁ η'. ὅρος τοῦ $(\alpha + \beta)^{10} = \alpha^{10-7} \beta^7 = \alpha^3 \beta^7$. Ῥᾷςα οὖν ἤδη καὶ τοὺς συνεργοὺς εὑρήσομεν. Ἔςω π. χ. ὁ συνεργὸς τοῦ ζ'. ὅρου τῆς 10:ης δυνάμεως τοῦ $\alpha + \beta$ εὑρετέος. Ὁ ζ'. ὅρος $= \alpha^4\beta^6$. Ὁ δὲ συνεργὸς τὸ παραγόμενον τυγχάνει ἐξ ἀριθμῶν ἐν μὲν τῷ ἀριθμητῇ ἀπὸ τοῦ 10 ἀρχομένων, καὶ διηνεκῶς μονάδι ἐλαττουμένων, ἐν δὲ τῷ παρονομαςῇ ἀπὸ 1 μέχρι τοῦ 6. Ἄρα ὁ ζ. ὅρος τοῦ $(\alpha + \beta)^{10}$ $= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \alpha^4 \beta^6 = 210 \alpha^4 \beta^6$. Ὁ ε'. ὅρος τοῦ $(\alpha + \beta)^7 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^3 \beta^4 = 35 \alpha^3 \beta^4$.

§. 288. Ἔστω ἡ δύναμις, εἰς ἣν τὸ διώνυμον ἐξῆρται $= \mu$. Ἐπεὶ οὖν κατὰ τὸ ἐν §. §. 286. 287. ἡ τοῦ α δύναμις ἐν τοῖς ἑπομένοις ὅροις ἀεὶ μονάδι μειοῦται, ἡ δὲ τοῦ β ἐν μὲν τῷ β'. ἀπὸ 1 ἄρχεται, ἐν δὲ τοῖς ἐφεξῆς διηνεκῶς μονάδι προσαύξει, καὶ ὁ συνεργὸς τοῦ β'. ὅρου ὁ ἐκθέτης τῆς ὑπερτάτης δυνάμεως τοῦ α, διὰ 1 διαιρεθείς, τῶν δ' ἐχομένων ὅρων οἱ συνεργοὶ τὸ πηλίκον κλάσματος τυγχάνουσιν, οὗ οἱ ὅροι, κατὰ τὰ ἀνωτ. εὕρηνται, ἐκδηλωθείη ἂν τὸ Διώνυμον γενικώτατα διὰ τῆς δε τῆς σειρᾶς.

$$(\alpha + \beta)^{\mu} = \alpha^{\mu} + \frac{\mu}{1} \alpha^{\mu - 1} \beta + \frac{\mu \cdot \mu - 1}{1 \cdot 2} \alpha^{\mu - 2} \beta^{2} + \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^{\mu - 3} \beta^{3} + \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^{\mu - 4} \beta^{4} + \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3 \cdot \mu - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \alpha^{\mu - 5} \beta^{5}$$

, κτ. ἥτις ἐκπερανθήσεται, ἢ ἧς ἅπαντες οἱ ὅροι τῆς δυνάμεως εἰς πέρας ἥξουσι γραφόμενοι, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ α (ἤτοι τοῦ μ) ἀφαιρούμενος, ἴσος ᾖ τῷ μ. π. χ. εἰ $\mu = 4$ εἴη περανθείη ὂν καὶ ἡ σειρὰ ἐπὶ τοιούτου ὅρου $\alpha^{\mu - 4} \beta^{4}$.

Τὴν

§. 289. Ἐκκείσθωσαν καὶ παραδείγμ. τούτων.

Εἰ δέοι ς εἰς τὴν ϛ΄. ἐξαρθῆναι δύναμιν, εἴη ἂν κατὰ τὸ $(\alpha + \beta)^{\mu}$, $\mu = 6$. καὶ $(\alpha + \beta) = 5$. Δίελε τὸν ς, ᾗ βούλει. Ἔςω $\alpha = 2$. ἄρα $\beta = 3$. Γράψας οὖν ἤδη τὸν ἐν γένει τύπον τοῦ ἀνωτ. §. σύνθες κατὰ τοῦτον τὴν σειράν, ἥτις ἔςαι $(2+3)^6$

$$= 2^6 + \frac{6}{1} 2^5 \cdot 3 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} 2^4 \cdot 3^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^3 \cdot 3^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 2^2 \cdot 3^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 2 \cdot 3^5 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} 3^6$$

$$= 2^6 + 6 \cdot 2^5 \cdot 3 + 15 \cdot 2^4 \cdot 3^2 + 20 \cdot 2^3 \cdot 3^3 + 15 \cdot 2^2 \cdot 3^4 + 6 \cdot 2 \cdot 3^5 + 3^6.$$

Καὶ τῶν ποσοτήτων ἐνεργείᾳ εἰς δυνάμεις ἀρθεισῶν, $= 64 + 6 \cdot 32 \cdot 3 + 15 \cdot 16 \cdot 9 + 20 \cdot 8 \cdot 27 + 15 \cdot 4 \cdot 81 + 6 \cdot$

Τηνικαῦτα γὰρ ἔςαι $\alpha^{4-4}\beta^4 = \alpha^0\beta^4$. Ἀλλὰ ποσότης ἐν τῇ 0 δυνάμει $= 1$. (§. 198.) ἄρα $\alpha^0\beta^4 = 1\beta^4 = \beta^4$, ὅς ὁ ἔσχατός ἐςιν ὅρος, ᾧ οὐδεὶς συνεργὸς, ὡς ἐν τοῖς προηγηθεῖσι σαφῶς καθείδομεν. Καὶ β ἔςαι τηνικαῦτα ἐν τῇ ὑπερτάτῃ δυνάμει, εἰς ἣν τὸ διώνυμον ἔδει ἐξαρθῆναι.

Τὸ μ ὡς πᾶσαν ποσότητα ἐν γένει παριςῶν καὶ κλάσμα ὑποδηλώσει, καὶ ὁ τῆς μνήμης μὴ ἀποβαλὼν, ὅ §. 200. εἴρηται, ῥαδίως συνήσει, ὅτι καὶ ῥίζαν διὰ τούτου τοῦ διωνύμου ἐξάγειν ἔχομεν. π. χ. Ἔςω $\mu = \frac{1}{3}$. Καὶ ἔςαι $(\alpha + \beta)^\mu = (\alpha + \beta)^{\frac{1}{3}}$. Τὸ δὲ ἴσα δύναται τῷ $\sqrt[3]{(\alpha+\beta)}$, ἢ τῇ κυβικῇ ῥίζῃ αὐτοῦ. Ἔςω $\mu = \frac{3}{4}$. Ὥςε $(\alpha + \beta)^\mu = (\alpha + \beta)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(\alpha + \beta)^3}$.

$+ 6 . 2 . 243 + 729 = 64 + 576 + 2160 + 4320 + 4860 + 2916 + 729 = 15625.$

Ἀλλ' εἴποι ἄντις πολλῷ ταχύτερον 5 κατὰ τὸν συνήθη τρόπον ἤρθη ἂν εἰς τὴν ϛ'. δύναμιν, ἢ οὕτως. Εἰσὶ μέντοι δυσχερέστερα παραδείγμ. ἔνθα τοῦτο πλεῖστα συμβάλλεται, καὶ μάλιστα ἐπὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν μετὰ μείζονος ἐκθέτου. π. χ. Ἔστω ἐξακτέα ἡ $\sqrt{6}$. Ὥστε $(\alpha + \beta)^{\mu}$. Ἐνταῦθα $\alpha + \beta = 6$. καὶ $\mu = \frac{1}{2}$. Τεθήτω α ὡς 4, καὶ β ὡς 2. Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, προτεθήτω ἡ σειρὰ τοῦ Διωνύμου τοῦ $(4 + 2)^{\frac{1}{2}}$. Ἐὰν οὖν γράφωσιν ἐν τῷ γενικῷ τύπῳ τοῦ Διωνύμου §. ἀνωτ. ἀντὶ τοῦ α καὶ β, καὶ μ τὰ ἰσοδύναμα, ὅπερ οὐ δυσχερῶς γενήσεται, τοῦ τύπου πρὸ ὀφθαλμῶν ληφθέντος, ἕξομεν τὴν ἑπομένην σειράν. $(4 + 2)^{\frac{1}{2}} =$

$$4^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\, 4^{\frac{1}{2} - 1} . 2 + \frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{2} - 1}{1 . 2}\, 4^{\frac{1}{2} - 2}\, 2^2 + \frac{\frac{1}{2}\, \frac{1}{2} - 1 . \frac{1}{2} - 2}{1 . 2 . 3}\, 4^{\frac{1}{2} - 3} 2^3 + \frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{2} - 1 . \frac{1}{2} - 2 . \frac{1}{2} - 3}{1 . 2 . 3 . 4}\, 4^{\frac{1}{2} - 4} . 2^4,$$

κτ. Τοῦτο δέ, ἐὰν οἱ συνεργοὶ προσηκόντως πολλαπλασιασθῶσι, καὶ διαιρεθῶσιν $=$

$$4^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} . 4^{\frac{1}{2} - 1} . 2 - \tfrac{1}{8} . 4^{\frac{1}{2} - 2}\, 2^2 + \tfrac{1}{16} . 4^{\frac{1}{2} - 3} . 2^3 - \tfrac{3}{128}\, 4^{\frac{1}{2} - 4} . 2^4,$$

κτ. Ἀλλὰ $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$, καὶ ἀντὶ τοῦ $\alpha^{\frac{1}{2} - 1}$. ἔχει ἀντικατασῆναι τὸ $\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}$, ἀντὶ δὲ τοῦ $\alpha^{\frac{1}{2} - 2}$ τὸ $\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha^2}$. Τὸ γάρ, ἐφ' ᾧ καὶ αὖθις τοῦτο ἐπαναλαβεῖν, ἀπὸ τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων ἀφαιρεῖντι, διαιρεῖν ἐςιν αὐτοὺς διὰ δυνάμεως τηλικαύτης, ἡλίκος ὁ ἀφαιρεθεὶς ἀριθμός. §. 194. Ἔνθεντοι ἔςαι ἡ σειρὰ $\sqrt{4} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4}{4}} \cdot 2 - \frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{4}{4^2}} \cdot 2^2 + \frac{1}{16} \cdot \sqrt{\frac{4}{4^3}} \cdot 2^3 - \frac{5}{128} \cdot \sqrt{\frac{4}{4^4}}\, 2^4$ . . Τοῦτο δὲ $= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot 2, - \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{16} \cdot 4, + \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{64} \cdot 8 - \frac{5}{128} \cdot \frac{2}{256} \cdot 16$, κτ. $= 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$, κτ. Καὶ προσεθέντων τῶν καταφατικῶν ὅρων, ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἀποφατικῶν ἐν μέρει, καὶ τῶνδε ἀπ' ἐκείνων ἀφαιρεθέντων, ἕξομεν καταφατικὸν μὲν $\frac{161}{64}$, ἀποφατικὸν δὲ $\frac{69}{1024}$. Ἄμφω δ' αἱ ποσότητες ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀχθεῖσαι παρονομαςὴν δώσουσι $\frac{2576 - 69}{1024} = \frac{2507}{1024} = 2\,\frac{459}{1024}$. ἢ ἐν δεκαδικοῖς κλάσμασιν $=$ 2, 448 . . . Ὁ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 6 ὡς ἔγγιςα, ἧς τινος ἀκριβῶς ἐξάγεσθαι μὴ ἐχούσης, καὶ ἡ σειρὰ ἂν εἴη ἀπέραντος, ἀεὶ μέντοι ἔγγιον τῆς ἀκριβοῦς. Καὶ τὰς μὲν τετραγωνικὰς, καὶ κυβικὰς ῥίζας οὐκ ἂν δήπου τοῦτον τὸν τρόπον ἐξαγάγοιμεν. Εἰ δὲ ῥίζας ἐξαγαγεῖν πρόκειται, μείζονας τοὺς ἐκθετας ἐχούσας, τὸ Διώνυμον οὐ μικρὰν ἡμῖν εἰς τοῦτο τὴν ὄνησιν ἐμποιήσει. Ἔνθεντοι ζητητέος προσφυέςερός τις τύπος τοῦ Διωνύμου.

§. 290. Διὰ τοῦτον τὸν λόγον γράψον ἔτι ἅπαξ τὸν τοῦ Διωνύμου τύπον.

$$\alpha^{\mu} + \frac{\mu\alpha^{\mu-1}}{1}\beta + \frac{\mu \cdot \mu - 1}{1 \cdot 2}\alpha^{\mu-2}\beta^{2}$$

+ μ.

$$+ \frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2}{1 . 2 . 3} \alpha^{\mu - 3} \beta^{3}$$

$$+ \frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2 . \mu - 3}{1 . 2 . 3 . 4}$$

$\alpha^{\mu - 4} \beta^{4}$, κτ. Ἐπειδὴ (194.) $\alpha^{\mu - 1} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha}$, καὶ $\alpha^{\mu - 2} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{2}}$, τοῦ ἴσου ἀντὶ τοῦ ἴσου ἀντικαταστάντος, οὕτως ἂν ἐκκέοιτο ἡ σειρά.

$$\alpha^{\mu} + \frac{\mu \alpha^{\mu} \beta}{\alpha} + \frac{\mu . \mu - 1}{1 . 2} \frac{\alpha^{\mu} \beta^{2}}{\alpha^{2}}$$

$$+ \frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2}{1 . 2 . 3} \frac{\alpha^{\mu} \beta^{3}}{\alpha^{3}}$$

$$+ \frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2 . \mu - 3}{1 . 2 . 3 . 4} \frac{\alpha^{\mu} \beta^{4}}{\alpha^{4}}$$

κτ. ἥτις ἐν ἅπασι τοῖς κατ' αὐτὴν ὅροις μετὰ τὸν α'. τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ περιέχει. ἐν γὰρ τῷ β'. ὅρῳ αὐτίκα δῆλον. ἐν δὲ τῷ γ'. τὸ $\frac{\beta^{2}}{\alpha^{2}}$ ἐνυπάρχει $= \frac{\beta}{\alpha} . \frac{\beta}{\alpha}$. ἐν δὲ τῷ δ'. τὸ $\frac{\beta^{3}}{\alpha^{3}} = \frac{\beta}{\alpha} . \frac{\beta}{\alpha} . \frac{\beta}{\alpha}$, κτ. Κληθήτω τοίνυν $\frac{\beta}{\alpha} = \Pi$. Καὶ ἡ σειρὰ ἕξει, ἀντὶ τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$ τοῦ Π, καὶ ἀντὶ τοῦ $\frac{\beta^{2}}{\alpha^{2}}$ τοῦ Π^{2}, κτ. τεθέντος, $\alpha^{\mu} + \frac{\mu}{1} \alpha^{\mu} \Pi$

$$+ \frac{\mu . \mu - 1}{1 . 2} \alpha^{\mu} \Pi^{2} + \frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2}{1 . 2 . 3} \alpha^{\mu}$$

$$a^{\mu}\,\Pi^{3} + \frac{\mu\,.\,\mu-1\,.\,\mu-2\,.\,\mu-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\;a^{\mu}\,\Pi^{4},\ \text{κτ.}$$

Κἂν ταύτῃ τῇ σειρᾷ, ἡ δῆλον, ὁ α΄. ὅρος ἐμπεριέχεται τῷ β΄. ὁ β΄. τῷ γ΄. ὁ γ΄. τῷ δ΄, κτ. ἢ σαφέστερον. Ὁ β΄. ὅρος προκύπτει τῷ Πολλαπλασιασμῷ τοῦ α΄. ὅρου a^{μ} μετὰ τοῦ $\frac{\mu}{1}\Pi$. Ὁ δὲ γ΄. τῷ τοῦ β΄. μετὰ τοῦ $\frac{\mu-1}{2}\Pi$. Ὁ δὲ δ΄. τῷ τοῦ γ΄. μετὰ $\frac{\mu-2}{3}\Pi$, κτ. ὡς ἐκ τῆς προόδου σαφές.

Ῥηθήτω ὁ α΄ ὅρος Α., ὁ β΄. Β. ὁ γ΄. Γ ὁ δ΄. Δ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, καὶ ἡ σειρὰ ἄλλως ἐκφανθήσεται. Ὁ οὖν α΄. ὅρος, ἢ $a^{\mu} = A$. Ἄρα ὁ β΄. ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ α΄. καὶ τοῦ $\frac{\mu}{1}\Pi$ συνιστάμενος $= \frac{\mu}{1}A\Pi = B$. Ἐνθεντοι ὁ γ΄. ὅς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ β΄. καὶ τοῦ $\frac{\mu-1}{2}\Pi$ συγκροτεῖται $= \frac{\mu-1}{2}B\Pi = \Gamma$. Ὥστε καὶ ὁ δ΄. $\frac{\mu-2}{3}\Gamma\Pi. = \Delta$. ἡ δὲ σειρὰ

$$a^{\mu} + \frac{\mu}{1}A\Pi + \frac{\mu-1}{2}B\Pi + \frac{\mu-2}{3}\Gamma\Pi$$

$+\ \mu$

$+ \frac{\mu - 3}{4} \Delta \Pi$, κτ. Ἐν ᾗ τοῦτο μόνον σημειωτέον, ὅτι $\Pi = \frac{\beta}{\alpha}$, καὶ ὅτι τὰ μείζω τῶν γραμμάτων Α, Β, Γ, Δ, κτ. ἐφ' ἑκάστου ὅρου τὴν τιμὴν ἀεὶ καὶ δύναμιν τοῦ προηγηθέντος ἐμφαίνουσιν ὅρου. Τοῦτον τὸν τύπον ἀκριβῶς τῇ διανοίᾳ ἐντυπώσασθαι ἀναγκαῖον. Τὸ γὰρ πάνυ χρήσιμον τοῦ Διωνύμου πᾶς τις ἐπιγνώσεται εἰς τὰ τῆς Μαθηματικῆς ὑψηλότερα θεωρήματα χωρήσας. Σημειωτέον προτέτι, ὅτι τὸ μ καὶ κλάσμα, καὶ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς εἶναι δύναται. Τὸ α'. ἔςαι ἀείποτε ἐπὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης τῇ συνεργείᾳ τοῦδε τοῦ τύπου, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς ὀψόμεθα παραδείγματι.

§. 291. Εἰ δέοι τὸν ἀριθμὸν 12 εἰς τὴν γ'. δύναμιν ἐξᾶραι, διαιρεθήτω εἰς $4 + 8$.

Ὥςε $\alpha = 4$. καὶ $\beta = 8$. Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{8}{4} = 2$. Τὸ δὲ ἐςὶ τὸ Π.

Ἔνθεντοι $\Pi = 2$ ἐνταῦθα. Τὸ δὲ $\mu = 3$. ἄρα $\alpha^{\mu} = 4^3. = 64 = A$.

$\mu A \Pi = 3 \cdot 64 \cdot 2 = 384 = B$.

$\frac{\mu - 1}{2} B\Pi = 1 \cdot 384 \cdot 2 = 768 = \Gamma$.

$\frac{\mu - 2}{3} \Gamma\Pi = \frac{1}{3} \cdot 768 \cdot 2 = 512 = \Delta$.

$\frac{\mu - 3}{4} \Delta\Pi = \frac{0}{4} \cdot 512 \cdot 2 = 0$.

Ἡ σειρὰ ἐφικνεῖται τοῦ πέρατος ἐπὶ τοῦ πρὸ τοῦ τελευταίου ὅρου, ὡς τοῦ ἐσχάτου μετὰ τοῦ μηδενικοῦ πολλαπλασιασθέντος, ὅπερ ὅλον τὸν ὅρον εἰς μηδε-

μηδενικὸν τρέπει. (§. 69.) Ταύτῃ τοι καὶ ἅπαντες οἱ ἑξῆς ὅροι = τῷ 0. Οἱ δ' ἀναφυέντες ἀριθμοὶ ἀλλήλοις προςεθέντες παρέχουσι κεφάλ. $1728 = 12^3$.

Ἐξάγαγε τὴν $\sqrt{2}$. Διαιρεθήτω ὁ 2 εἰς δύω μέρη, ἤτοι $= 1 + 1$. Ὥςε πρόκειται τὴν $\sqrt{(1+1)} = (1+1)^{\frac{1}{2}}$ ἐξαγαγεῖν.

Ἐνταῦτα $\mu = \frac{1}{2}$. $\Pi = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$. Ἡ δὲ σειρὰ ὧδε προαχθείη.

$$+ \alpha^{\mu} = 1^{\frac{1}{2}} = +1 = A.$$

$$+ \frac{\mu}{1} = A\Pi = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} = B.$$

$$+ \frac{\mu - 1}{2} B\Pi = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{8} = \Gamma.$$

$$+ \frac{\mu - 2}{3} \Gamma\Pi = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{8} \cdot 1 = +\frac{1}{16} = \Delta.$$

$$+ \frac{\mu - 3}{4} \Delta\Pi = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot 1 = -\frac{5}{128} = E.$$

$$+ \frac{\mu - 4}{5} E\Pi = -\frac{7}{10} \cdot -\frac{5}{128} \cdot 1 = +\frac{35}{1280} = Z.$$

$$+ \frac{\mu - 5}{6} Z\Pi = -\frac{3}{4} \cdot \frac{35}{1280} \cdot 1 = -\frac{105}{5120} = H.$$ κτ.

Ὥςε ἡ $\sqrt{2}$ εἴη ἂν $= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{35}{1280} - \frac{105}{5120}$, κτ. ἐπ' ἄπειρον. Ἐπεὶ δ' ἡ παροῦσα ἅλις ἐγγὺς τῆς ἀληθοῦς ῥίζης, ἔχοιμεν ἂν πέρας αὐτῇ ἐπιθεῖναι.

Ἐὰν οὖν αἱ καταφατικαὶ ποσότητες προσαθροι-

σθῶσιν

σθῶσιν ἀλλήλαις, καὶ ἀπὸ τούτων αἱ ὁμοίως ἀλλήλαις προςτεθεῖσαι ἀποφατικαὶ ἀφαιρεθῶσιν, ἀμφοτέρων τῶν κλασμάτων α'. εἰς τὸν αὐτὸν παρονομ. ἀχθέντων, προκύψει $1\frac{415}{1024}$. Ἐν δὲ δεκαδικοῖς 1,405, ὅπερ οὐ πολὺ τῆς $\sqrt{2}$ ἀφίςαται.

§. 292. Καὶ τὰ μὲν μέχρι τοῦδε ῥηθέντα περὶ τῆς ἀνὰ χεῖρας διδασκαλίας, διεξοδικωτάτης οὔσης, ἰσαγωγικήν τινα μόνον γνῶσιν παρέχοντα, ἀρκεῖ. Τοῦτο γὰρ τὸ εἶδος τῶν ὑπολογισμῶν δυσχερὲς πάνυ τοῖς, δι' οὓς ταῦτα γέγραπται. Ἔνθεντοι καὶ ὅπως διὰ τοῦ Διωνύμιου ἔτι μείζους ἐξάγονται ῥίζαι, ὅπως τε ἀποφατικαὶ δυνάμεις διὰ τούτου ἐξαίρονται, ὡς $(\alpha + \beta)^{-2} = \frac{1}{(\alpha + \beta)^2}$. ἢ καὶ ὅπως ἡ τούτων ῥίζα ἐξάγεται, οἷον $(\alpha + \beta)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(\alpha + \beta)^3}}$, κτ. ἐπίτηδες παρελείφθη. Ὁ δὲ πλείω περὶ τουτου ζητῶν μετελθέτω τὰ τῶν Νεωτέρων περὶ τούτου Μαθηματικὰ συγγράμματα. Ὁ γὰρ τὰ ῥηθέντα κατέχων μετ' ὠφελείας χρήσεται τοῖς τούτων συγγράμμασι.

Πλατυτέρα Θεωρία τῶν Ῥιζικῶν, Ἀλόγων τε καὶ Ἀδυνάτων Ποσοτήτων.

§. 293. Εἰ καὶ ἐν ἐνίοις φθάσασι τῶν Ῥιζικῶν, καὶ ἀλόγων ποσοτήτων μνείαν ἐποιησάμεθα, ἐφ' ᾧ μέντοι τὰ ῥηθέντα σαφέςερον ἐκθεῖναι, καὶ πλατύτερον, ἰδί περὶ τούτων πραγματεύσασθαι δεῖν ἔγνωμεν. Πρὶν ἢ δὲ τῆς τούτων ἅψασθαι θεωρίας, τοὺς ἀναγνώςας εἰς τὴν ἀνάγνωσιν τῶν ἐν §. §. §. 186. 200. 204, κτ. διαληφθέντων παραπέμπομεν.

§. 294. Ἐὰν τὸ ῥιζικὸν σημεῖον (§. 186.) ποσοτήτων συμπεπλεγμένων (§. 44.) προτιθῆται, τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ κεφαλαίου τῆς προκειμένης ποσότητος σημαίνει. ὡς $\sqrt[3]{(\alpha^2 - 3\alpha\chi + \beta)}$ Ὅπερ τὴν $\sqrt[3]{}$ ἀπὸ τῶν τριῶν ὅρων τῆς ποσότητος ἐξακτέαν δηλοῖ. Τὸ δὲ σχῆμα εἴη ἂν καὶ $= (\alpha^2 - 3\alpha\chi + \beta)^{\frac{1}{3}}$. (§. 200.) Προκειμένης δὲ ποσότητος, τῷ πολλαπλασιασμῷ παραχθείσης, καὶ ἐκ παραγόντων ἀναφῦσαν ἐχούσης νοηθῆναι, ἧς τὸ $\sqrt{}$ προτέθειται, ἁρμόζει ὡσαύτως τὸ $\sqrt{}$ πᾶσι τοῖς ἁπλοῖς παράγουσι. π. χ. $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha} \,.\, \sqrt{\beta}$. Καὶ $\sqrt{48} = \sqrt{4} \,.\, \sqrt{4} \,.\, \sqrt{3}$. Εὐχερῶς δὲ τὸ λεγόμενον κατανοήσομεν, τῆς ἐξάρσεως τῶν ποσοτήτων εἰς δυνάμεις μνησθέντες. Ἦν γὰρ $(\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2$, ὡς τὸ $(\alpha\beta)^2$ διὰ τοῦ $\alpha\beta \,.\, \alpha\beta$ παραχθέν, Ὡσαύτως καὶ $(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}} \beta^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha} \,.\, \sqrt{\beta}$. Ἄρα $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha} \,.\, \sqrt{\beta}$. Οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

§. 295. Πᾶσα ποσότης ὑφ' ὁποιονοῦν ῥιζικὸν σημεῖον ὑπαχθήσεται, τῆς κατὰ ταύτην δυνάμεως σωζομένης, ἐὰν εἰς δυνάμεις τηλικαύτας ἐξαρθῇ, ἡλίκος ὁ ἐκθέτης τοῦ ῥιζικοῦ, ὑφ' ὃ ταύτην ὑπάγειν ἐπιταττόμεθα. Οἷον, εἰ δέοι $\alpha^2\beta$ ὑπὸ τὸ $\sqrt[3]{}$ ὑπαχθῆναι, εἴη ἂν $\sqrt[3]{\alpha^{2.3}\beta^3} = \sqrt[3]{\alpha^6\beta^3}$. Ἔνθα τὸ $\alpha^2\beta$ εἰς τὴν γ'. ἐξῆρται δύναμιν. Ὥστε ἀνάγκη πᾶσα τὴν τούτου $\sqrt[3]{} = \alpha^2\beta$ εἶναι. Ἡ $\sqrt[3]{\alpha^6\beta^3} = \alpha^{\frac{6}{3}} \beta^{\frac{3}{3}} = \alpha^2\beta$. Ἡ ἄρα ποσότης οὐδεμίαν ὑπέστη τροπήν. Διὰ ταύτης τῆς μεθόδου ὁ ὑπολογισμὸς οὐκ ὀλιγάκις ἐξευμαρίζεται. Προτεθείσθω ἔτι καὶ ἕτερ' ἄττα τοιαῦτα παραδ: ἵνα διὰ τούτων ἅμα δειχθῇ, ὅτε τὸ $\sqrt{}$ τῇ ποσότητι παράκειται, ὅπως πᾶσα ἡ ποσότης ὑπὸ τοῦτο ὑπάγεται. Ὡς $\beta\sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha\beta^2}$. ὅπου τὸ β εἰς δύναμιν ἐξῆρται, ὥστε, ἐὰν ἡ ῥίζα, ἥτις τῷ α προσήκει, καὶ ἀπὸ τούτου (τοῦ β) ἐξαχθῇ, αὖθις β γενέσθαι. Ἔστι γὰρ $\sqrt{\alpha\beta^2} = \alpha^{\frac{1}{2}} \beta^{\frac{2}{2}}$

$= \beta\sqrt{\alpha}$.

$\beta \sqrt{\alpha}$. Τὸν αὐτὸν δὲ προβήσῃ τρόπον καὶ ἐν ἀριθμοῖς, εἰς παράγοντας διατμηθεῖσι, καὶ τούτους μεταβαλεῖς, τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦτο ἀπαιτοῦντος, καὶ τῶν παραγόντων ἐπιτρεπόντων. π. χ. Εἰ πρόκειται 12 ὑπὸ τὸ $\sqrt[3]{}$ ὑπαγαγεῖν, διαφόροις τρόποις ἂν γένοιτο. Εἴη γὰρ ἂν $= \sqrt[3]{12^3} = \sqrt[3]{1728}$. ἢ ἐπεὶ $12 = 2 \cdot 6 = \sqrt[3]{2^3 \cdot 6^3} = \sqrt[3]{8 \cdot 216} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{216}$, καὶ οὕτω πολλαχῶς.

§ 206 Ἀλλὰ καὶ ἀνάπαλιν, ποσότητας ὑπὸ τὰ ῥιζικὰ κειμένας πολλάκις ἤτοι διόλου, ἢ γοῦν ἐν μέρει τούτων ἂν ἀπαλλαξαίμεθα. Ἐὰν μὲν ὦσι δυνάμεις, τὸν αὐτὸν Ἐκθέτην ἔχουσαι, ὃν καὶ τὸ $\sqrt{}$, ἢ ἐὰν τὰς ῥίζας ἐξάγειν οἷόντε ᾖ, ποιοῦμεν τοῦτο, γράφοντες μόνον τὰς ῥίζας. ὡς $\sqrt[5]{\alpha^5} = \alpha^{\frac{5}{5}} = \alpha$. Καὶ $\sqrt[3]{\alpha^3\beta^3} = \alpha\beta$. Καὶ $\sqrt[3]{64} = 4$, κτ. Ἐὰν δὲ ποσότητες, ἐκ παραγόντων συγκείμεναι, τυγχάνωσιν, ἐγχωρεῖ ἐνίοτε τὸ ἕνα, ἢ καίτινας τῶν παραγόντων ἀπὸ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου ἀπαλλάττεσθαι, εἴπερ ἀμέλει ἡ τούτου, ἢ τούτων ῥίζα δυνατὴ ἐξαχθῆναι Τηνικαῦτα οὖν τοῦτο ποιῶν τίθει πρὸ τῶν ἄλλων τὸ $\sqrt{}$. τὴν δ' ἐξαχθεῖσαν ῥίζαν πρὸ τοῦ $\sqrt{}$. Εἰ δ' ἀριθμοὶ πρόκεινται, ανατέμνων αὐτοὺς εἰς παράγοντας τὰ αὐτὰ τέλει. Ταῦτα δὲ τῇ περὶ Ἐξάρσεως, καὶ Διαιρέσεως τῶν Δυνάμεων διδασκαλίᾳ ἐρείδεται. Οἷον $\sqrt{\alpha^2\beta} = \alpha^{\frac{2}{2}}\beta^{\frac{1}{2}} = \alpha\sqrt{\beta}$. Ἡ $\sqrt[3]{\alpha^6\beta^3\gamma^4} = \alpha^{\frac{6}{3}}\,\beta^{\frac{3}{3}}\,\gamma^{\frac{4}{3}} = \alpha^2\beta\sqrt[3]{\gamma^4}$. Ἡ $\sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{8 \cdot 7} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{7} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{7}$. Τοῦτο δὲ μάλιστα ἐν χρήσει ἐπὶ τῶν Ἀλόγων ἀριθμῶν. Ἐπὶ γὰρ τῶν ἄλλων οὐκ ἀναγκαῖον, ὡς ἐκ τούτων τῆς ῥίζης ἐνεργείᾳ ἐξαγομένης. π. χ. $\sqrt{45}$. ἡ τούτου ῥίζα τῷ ὄντι ἄλογος. Ἀλλὰ $45 = 9 \cdot 5$. Ὥστε $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 9^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5}$. Καὶ

$\sqrt{27}$

$\sqrt{27} = \sqrt{9.3} = \sqrt{9} \,.\, \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Καὶ $\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{64.3} = \sqrt[3]{64} \,.\, \sqrt[3]{3} = 4 \,.\, \sqrt[3]{3}$. Καὶ $\sqrt[4]{486} = \sqrt[4]{81.6} = \sqrt[4]{81} \,.\, \sqrt[4]{6} = 3\sqrt[4]{6}$. Καὶ $2\sqrt{32} + 4\sqrt{288} - \sqrt[3]{64} = 2\sqrt{16.2} + 4\sqrt{36.8} - 4 = 2.4\sqrt{2} + 4.6\sqrt{2.4} - 4 = 8\sqrt{2} + 48\sqrt{2} - 4 = 56\sqrt{2} - 4$. Καὶ $\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{128} = 4 - \sqrt[3]{8.16} = 4 - \sqrt[3]{8.8.2} = 4 - 4\sqrt[3]{2}$. Καὶ $\sqrt{48} + \sqrt{512} = \sqrt{3.16} + \sqrt{4.128} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{4.32} = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{\ }.4.8 = = 4\sqrt{3} + 8\sqrt{8} = (\sqrt{3} + 2\sqrt{8})4$. Καὶ $\sqrt[3]{1728} + 3\sqrt[4]{81} - 2\sqrt{64} = \sqrt[3]{8.216} + 3.3 - 2.8 = 2\sqrt[3]{8.27} + 3.3 - 2.8 = 2.2.3 + 3.3 - 2.8 = 12 + 9 - 16 = 21 - 16 = +5$.

Ἐπὶ πάντων τῶν τοιούτων παραδειγμ. πᾶσα ἡ σπουδὴ στρέφεται εἰς τὸ παράγοντάτινα ἐκκαλύψαι, (εἰς οὓς ἡ ποσότης διατέμνεται) ὃς Τετράγωνος, ἢ Κύβος, ἢ Διτετράγ. κτ. τυγχάνει, ἐξ ὧν ἡ ῥίζα ἐξάγεται. Ἀναγκαῖον δ' ἐνίοτε τὸ τὴν ποσότητα δἰ ἑτέρων τροπῶν εἰς τοῦτο προπαρασκευάζειν, ὃ τῇ συχνῇ μελέτῃ, καὶ ἀναγνώσει τῶν ἐνταῦθα τεινόντων συγγραμμάτων ἐκμανθάνομεν. Ὥστε δὲ καὶ τούτου ἰδέαν τινὰ παρασχεῖν, προκείσθω τὸ ἑξῆς παράδειγμα. $\sqrt{\ }(\alpha^2\psi + 2\,\alpha\psi\omega + \omega^2\,\psi.)$. Ἐπειδὴ οὖν ἐνταῦθα ψ ὁ κοινὸς τῶν τριῶν τυγχάνει ὅρων, τραπείη ἂν τὸ παράδ. εἰς τὸ $\sqrt{\ }\ \alpha^2 + 2\alpha\omega + \omega^2\,)\,\psi$. Ἀλλ' ἀπὸ τοῦ α΄. τὴν ῥίζαν ἐξάγειν ἔχομεν. Ἔστι γὰρ $\alpha + \omega$. Ἄρα ἡ ὁλικὴ ποσότης $= (\alpha + \omega)\sqrt{\ }\ \psi$.

§. 297. Καὶ κλάσματα δὲ, ὑπὸ τὸ $\sqrt{\ }$ κείμενα, Ἄλογα, τῆς ἀλογίας ἐν μέρει ἀπαλλάττειν δυνατὸν,

ὥστε

ὥςε τὸν τούτων ἀριθμ. ἢ παρον. Λογικὸν γίνεσθαι. Λόγος δὲ ὁ ἐν (§. 122. καν.) Τηνικαῦτα οὖν πολλαπλασιάζομεν ἄμφω τοὺς ὅρους τοῦ κλάσμ. ἤτοι τῷ ἀριθμ. ἢ παρονομαςῇ (ἥπερ ἂν τὸν ἀριθμ. ἢ παρον. λογικὸν ἔχειν βουλόμεθα) τοσάκις, μέχρις οὗ ὁ ὅρος τοῦ κλάσμ. ὁ λογικὸς γενησόμενος, διὰ τούτου εἰς δύναμιν ἐξαρθῇ, ἡλίκος ὁ ἐκθέτης τοῦ $\surd$, ἢ ὁσάκις ὁ Ἐκθέτης τοῦ $\surd$ τὴν μονάδα περιέχει. π. χ. ἐν τῷ $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, γενέσθω ὁ ἀριθμ. λογικός. Ὥςε πολλαπλασιασθήτωσαν ἄμφω οἱ ὅροι μετὰ τοῦ $\surd\alpha$. (§. αὐτ.)

$$= \sqrt{\frac{\alpha \cdot \surd\alpha}{\beta \cdot \surd\alpha}} = \frac{\alpha}{\surd\alpha\beta} \text{. ἢ καὶ } = \frac{\alpha \cdot \surd 1}{\surd\alpha\beta},$$

ὃς ἔσχατος τρόπος συςατὸς, ὅτι τῆς 1 ἡ $\surd = 1$. Ἐνθεντοι $\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}}$ καὶ $\frac{1}{\surd\alpha\beta}$ ἴσα. Ἤδη δὲ καὶ ὁ παρονομαςής. Πολλαπλασίασον οὖν ἄμφω τοὺς ὅρους τῷ $\surd\beta$. ἤτοι $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\beta \cdot \beta}} = \frac{\surd\alpha\beta}{\surd\beta\beta} = \frac{\surd\alpha\beta}{\beta} = \frac{1}{\beta}\surd\alpha\beta$.

Παράδειγμα ἐν ἀριθμοῖς. $\sqrt[3]{\tfrac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{45}} = \frac{3}{\sqrt[3]{45}}$: ἢ $3 \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{45}}$. Καὶ $\sqrt[4]{\tfrac{2}{3}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{54}}{3} = \tfrac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{54}$.

Μεταβάλλονται δ' ἐνίοτε καὶ κατάτινα τρόπον ἀσυνήθη. Ὡς $\frac{16}{\surd 2} = \frac{\surd 2 \cdot \surd 2 \cdot \surd 64}{\surd 2} = \surd 2$.

$\sqrt{2 \cdot 64} = \sqrt{128} = \sqrt{4 \cdot 32} = 2\sqrt{32} = 2\sqrt{16 \cdot 2} = 2 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$

Καὶ $\frac{\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{256}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2.128}} = \frac{1}{\sqrt{128}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 32}} = \frac{1}{2\sqrt{32}} = \frac{1}{2\sqrt{16.2}} = \frac{1}{2.4\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 64}} = \frac{1}{\sqrt{128}}.$

Αἱ τοιαῦται τῶν τροπῶν, καὶ μεταβολῶν λίαν εἰσὶν ἀξιοσημείωτοι. Ἐπὶ του α΄. τῶν δύω ἤδη προτεθέντων παραδ. ἐγένετο ὁ ἀριθμ. ἐπὶ δὲ τοῦ β΄. ὁ παρον. λογικός. Δίδονται δὲ καὶ κλάσματα, ἐξ ὧν τὴν ζητουμένην ῥίζαν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ὅρου ἐξάγειν, καὶ τοῦ $\sqrt{\ }$ ἀπαλλάττειν δυνάμεθα, π. χ. $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ὁ γὰρ $2 = \sqrt[3]{8}$.

Καὶ $\sqrt[4]{\frac{81}{144}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{144}} = \frac{3}{\sqrt[4]{144}}$. Ἐν τούτῳ τῷ ὑποδείγματι ἀπὸ μὲν τοῦ ἀριθμητοῦ ἐξάγεται ἡ $\sqrt[4]{\ }$. Ὁ δὲ παρονομ. ἔχοι ἂν καὶ αὐτὸς ἐν μέρει τῆς ἀλογίας ἀπαλλαχθῆναι, τῇ εἰς παράγοντας αὐτοῦ (§. ἀνωτ.) κατατομῇ $= \frac{3}{\sqrt[4]{16 \cdot 9}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{9}}$.

§. 298. Ἐὰν αἱ τοιαῦται ἄλογοι ποσότητες ἐφεξῆς εἰς λόγον τεθῶσιν, (§ 212.) ὁ λόγος κληθήσεται Ἄλογος, ὡς μὴ ἐντελῶς ἔχων διορισθῆναι.

Δυνα-

Δυνατὸν μέντοι καὶ ἀλόγους ποσότητας Λόγον ἔχειν λογικὸν πρὸς ἀλλήλας, ἢ Λόγον ἀκριβῶς ἀποδοθῆναι δυνάμενον. Τοῦτο δ' ἔςαι, εἰ, ὡς εἴρηται, ἐν μέρει τῶν ῥιζικῶν σημείων ταύτας ἀπαλλάξαι πειρώμεθα, ὅτε. καὶ εἰ ὁ λόγος λογικὸς γένηται, οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ ἐπιτίθενται τῷ $\sqrt{}$, οἱ δὲ πρὸ αὐτοῦ, (ἤτοι τοῦ $\sqrt{}$) οἱ ἀριθμοί, ἢ οἱ ὅροι τοῦ Λόγου τυγχάνουσιν. Ὡς $\sqrt{27}$ καὶ $\sqrt{12}$. Ἄμφω ἄλογοι. Ἀλλὰ $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$. Καὶ $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$. Ἔχουσιν οὖν λόγον πρὸς ἀλλήλους $\sqrt{27} : \sqrt{12} = 3\sqrt{3} : 2\sqrt{3}$. Καὶ διαιρεθέντων τῶν ἐσχάτων ὅρων ἀμφοῖν διὰ τοῦ $\sqrt{3}$, ἔςαι $= 3 : 2$. Ὥςε $\sqrt{27} : \sqrt{12} = 3 : 2$. Ὡσαύτως καὶ $\sqrt{80}$ καὶ $\sqrt{245}$ ἄμφω ἄλογοι. Ἀλλὰ $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$. καὶ $\sqrt{245} = \sqrt{49 \cdot 5} = 7\sqrt{5}$. Ἄρα $\sqrt{80} : \sqrt{245} = 4\sqrt{5} : 7\sqrt{5} = 4 : 7$.

§. 299. Ποσότητες ῥιζικαί, εἴτε λογικαί, εἴτε ἄλογοι, δύνανται ἀλλήλαις προςίθεσθαι, ἀφαιρεῖσθαι, πολλαπλασιάζεσθαι, καὶ διαιρεῖσθαι, μόνον εἰ, τῆς χρείας ἀπαιτούσης, μεταβάλλονται.

Περὶ τῆς τούτων Προσθέσεως, καὶ Ἀφαιρέσεως.

§. 300. Ἐπειδὴ μόνα τὰ ὁμοειδῆ προςιθέναι ἀλλήλοις, καὶ ἀφαιρεῖν ἔξεςιν, ἀναγκαῖον καὶ τὰς ῥιζικὰς ποσότητας ὁμοειδεῖς εἶναι, ὅ ἐςιν, οὐ μόνον τὰ $\sqrt{}$ τοὺς αὐτοὺς ἔχειν ἐκθέτας, ἀλλὰ καὶ τὰς μετ' αὐτὰ ($\sqrt{}$) ποσότητας ἴσας εἶναι χρή. π. χ. $\sqrt{3}$. καὶ ἔτι $\sqrt{3}$ καὶ προςεθεῖεν ἄν, καὶ ἀφαιρεθεῖεν. Καὶ προςεθεῖσαι μὲν $= 2\sqrt{3}$ (ὅτι $\sqrt{3}$, καὶ $\sqrt{3}$. $= 1\sqrt{3}$, καὶ $1\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.) ἀφαιρεθεῖσαι δὲ $= 0$. Ἀθροίζονται γὰρ συνάμα, ἢ ἀφαιροῦνται· Ὡσαύτως καὶ $5\sqrt[3]{8}$ καὶ $2\sqrt[3]{8}$,

καὶ

καὶ $\sqrt[3]{8}$. ἃς προσθέντες ἕξομεν κεφάλαιον $8\sqrt[3]{8}$. Ἐπειδὴ γὰρ μετὰ τὸ $\sqrt{}$, ἡ αὐτὴ κεῖται ποσότης, ἤτοι 8, ἀναγκαῖον μόνον τοὺς πρὸ τοῦ $\sqrt{}$ ἀριθμοὺς προσαθροῖσαι. Ἔνθα δὲ πρὸ τοῦ $\sqrt{}$ οὐδεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει, ὑπονοεῖται ἡ μονάς. Ὅθεν $5 + 2 + 1 = 8$. Ἀλλὰ $\sqrt{8}$ καὶ $\sqrt[3]{8}$ οὔτε προσεθῆναι, οὔτ' ἀφαιρεθῆναι ἀπ' ἀλλήλων δύνανται, ὡς μὴ ὁμοειδεῖς. Τὸ γὰρ $\sqrt{}$ διάφορον τοῦ $\sqrt[3]{}$. καίτοι τῶν μετὰ τὰ $\sqrt{}$ ἀριθμῶν τῶν αὐτῶν ὄντων. Πᾶσαι οὖν αἱ τοιαῦται ποσότητες, ἐπὶ μὲν τῆς προσθέσεως διὰ τοῦ $(+)$, ἐπὶ δὲ τῆς ἀφαιρέσεως διὰ τοῦ $(-)$ δείκνυνται. ὡς $\sqrt{8} + \sqrt[3]{8}$. ἢ $\sqrt{8} - \sqrt[3]{8}$. Παραπλησίως καὶ $\sqrt{4}$ καὶ $\sqrt{5} = \sqrt{4} + \sqrt{5}$. ἢ $\sqrt{4} - \sqrt{5}$. Καὶ $\sqrt[3]{6}$ καὶ $\sqrt[4]{5}$ ἤτοι $= \sqrt[3]{6} + \sqrt[4]{5}$, ἢ $\sqrt[3]{6} - \sqrt[4]{5}$. Καὶ ἐν γένει. Ἐὰν ν καὶ μ ἀριθμοὺς πρὸ τῶν $\sqrt{}$ σημαίνωσιν, α τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς μετὰ τὰ $\sqrt{}$, καὶ ζ τὸν ἐκθέτην τῆς ῥίζης, π δὲ τὸν τῆς δυνάμεως, μόνον τὰς τοιαύτας τῶν ποσοτήτων τῶν ῥιζικῶν προσθεῖναι, ἢ ἀφελεῖν ἔχομεν. Ὡς $\nu\sqrt[\zeta]{\alpha^{\pi}}$ καὶ $\mu\sqrt[\zeta]{\alpha^{\pi}}$. Ἔνθα μ καὶ ν προσαθροίζονται, ἢ ἀφαιροῦνται. Ἐπὶ τῆς προσθέσεως, καὶ ἀφαιρέσεως ἐναντίας ἐχουσῶν ποσοτήτων, οὐκ ἐπιλησέον τῶν §. §. 46. 49.

Παραδείγμ. ἐν γράμμασι, καὶ ἀριθμοῖς, ἐν οἷς τὰ ὁμοειδῆ ὑπὸ τὰ ὁμοειδῆ τακτέον.

Πρόσθες $2\alpha\sqrt{\beta\gamma}-5\beta\sqrt{\delta\zeta}+\sqrt{\zeta}+5$ τῷ $-\alpha\sqrt{\beta\gamma}-\beta\sqrt{\delta\zeta}+2\sqrt{\zeta}+\rho$.

$$\begin{array}{ll} \text{Ἀποδίδ. δὲ} & 2\alpha\sqrt{\beta\gamma}-5\beta\sqrt{\delta\zeta}+\sqrt{\zeta}+5 \\ & -\alpha\sqrt{\beta\gamma}-\beta\sqrt{\delta\zeta}+2\sqrt{\zeta}+\rho \\ \hline \text{Τὸ κεφάλ.} = & \alpha\sqrt{\beta\gamma}-6\beta\sqrt{\delta\zeta}+3\sqrt{\zeta}+5+\rho \end{array}$$

Ἐν ἀριθμοῖς.

$$\begin{array}{ll} \text{Πρόσθες} & 5\sqrt{6}-3\sqrt[4]{5^2}+\sqrt{7}-8 \\ \text{τῷ} & -4\sqrt{6}+2\sqrt[4]{5^2}+3\sqrt{7}+2 \\ \hline \text{Τὸ κεφάλ.} = & \sqrt{6}-\sqrt[4]{5^2}+4\sqrt{7}-6. \end{array}$$

Παράδειγμα Ἀφαιρέσεως.

$$\begin{array}{ll} \text{ἀπὸ τοῦ} & 3\beta\sqrt{\zeta\eta}-2\alpha\sqrt[4]{\zeta\mu}+4\sqrt[3]{\alpha\delta}-\delta \\ \text{ἄφελε} & +\beta\sqrt{\zeta\eta}+\alpha\sqrt[4]{\zeta\mu}-2\sqrt[3]{\alpha\delta}-\beta \\ & -\qquad -\qquad +\qquad + \\ \hline \text{ἡ Διαφορὰ} & 2\beta\sqrt{\zeta\eta}-3\alpha\sqrt[4]{\zeta\mu}+6\sqrt[3]{\alpha\delta}-\delta+\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Ἄφελε ἀπὸ τοῦ} & 5\sqrt[3]{}\ -\sqrt{48}-3\sqrt{8^2}-6\sqrt{2}-8 \\ \text{τὸ} & 2\sqrt[3]{6}-2\sqrt{48}+\sqrt{8^2}-6\sqrt{2}-5 \\ & -\quad +\qquad -\quad +\quad + \\ \hline \text{ἡ Διαφορὰ} & 3\sqrt[3]{6}+\sqrt{48}-4\sqrt{8^2}\qquad -3 \end{array}$$

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Ῥιζικῶν Ποσοτήτων.

§. 301. Εἰ καὶ ἐνταῦθα κυρίως περὶ τῶν Ἀλόγων ποσοτήτων ὁ λόγος, ὡς τῶν Λογικῶν, π. χ. $\sqrt{4}$,

$\sqrt{4}$, καὶ $\sqrt[3]{8}$, κτ. ἀκριβῶς ἐκφέρεσθαι δυναμένων, (ἐστι γὰρ $\sqrt{4} = 2$, καὶ $\sqrt[3]{8} = 2$, κτ.) ἀλλὰ τὸ λεγόμενον ἐν γένει καθ' ἑκατέρων ῥηθήσεται. Ἐνίοτε γὰρ οὐχ ὁλοσχερῶς τὰς Λογικὰς ἐκφέρειν βουλόμεθα. Καὶ ἵνα ἐκ τῶν ἐλασσόνων πρὸς τὰ μείζω χωρήσωμεν, πρὸ πάντων σημειωτέον πᾶσαν τετράγωνον ῥιζικὴν ποσότητα, εἴτ' ἐξ ἁπλῆς, εἴτε καὶ ἐκ συμπεπλεγμένης συνίσαται ποσότητος, μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθεῖσαν, αὐτὴν τὴν ποσότητα τοῦ ῥιζικου ἄνευ παράγειν σημείου. Ὡς $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} = \alpha$. Καὶ $\sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = 4$. Καὶ $\sqrt{12} \cdot \sqrt{12} = 12$, κτ. Αὖθις $\sqrt{(\alpha^2 + \beta - \chi)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \beta - \chi)} = (\alpha^2 + \beta - \chi)$. ἢ $\sqrt{(25 + 16 - 9)} \cdot \sqrt{(25 + 16 - 9)} = 25 + 16 - 9 = 32$.

Τοῦτο δὲ ῥᾳδίως κατανοήσομεν, εἰδότες, ὅτι πᾶσαν ποσότητα θεωρεῖν ἔχομεν, ὡς διὰ πολλαπλασιασμοῦ δύω ποσοτήτων ἀναφυεῖσαν. Αἱ δὲ τυγχάνουσιν αἱ $\sqrt{}$. Αὗται οὖν πολλαπλασιασθεῖσαι τὴν ποσότητα δήπου αὐτὴν παράξουσιν. Ὃ καὶ ταῖς Ἀλόγοις, καὶ Λογικαῖς ἁρμόζει. Καὶ ἡ ἄλογος γὰρ, ποσότης τῷ ὄντι τυγχάνει, εἰ καὶ οἱ ἡμέτεροι χαρακτῆρες αὐτὴν παραστῆσαι οὐ δύνανται.

Δύω ἴσαι Κυβικαὶ ῥίζαι, ἐπ' ἀλλήλας ἀχθεῖσαι, παρέχουσιν Ἐκθέτην τῆς Δυνάμεως $\frac{2}{3}$. π. χ. $\sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\alpha^2}$. Τὸ γὰρ $\sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{3}}$. Ἄρα $\alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{2}{3}}$. Πολλαπλασιασθέντος δ' ἔτι ἅπαξ μετὰ τοῦ $\sqrt[3]{\alpha}$, προκύψει α. Ὅτι $\alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{1+1+1}{3}} = \alpha^{\frac{3}{3}} = \alpha$.

Ἐν γένει, ἑκάστη ῥιζικὴ ποσότης, εἰ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου ἀπαλλαχθῆναι δέοι, τοσάκις μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιαζέα, ἡλίκος ὁ ἐκθέτης τῆς ῥίζης. Τὸ δ' αὐτὸ τοῦτο χώραν ἔχει καὶ περὶ τῶν συμπεπλεγμένων ποσοτήτων. Ὡς $\sqrt[3]{(\alpha+\beta)}. \sqrt[3]{(\alpha+\beta)}. \sqrt[3]{(\alpha+\beta)} = (\alpha+\beta)^{\frac{1}{3}}. (\alpha+\beta)^{\frac{1}{3}}. (\alpha+\beta)^{\frac{1}{3}} = (\alpha+\beta)^{\frac{3}{3}} = \alpha+\beta$.

§. 302. Ὅτε ῥιζικὰς ποσότητας μετ' ἄλλων ποσοτήτων πολλαπλασιάσαι πρόκειται, εἴτε ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ εἶεν, εἴτε καὶ κλασματώδεις, πολλαπλασιάζομεν τὸν πρὸ τοῦ $\sqrt{}$ κείμενον ἀριθμὸν, ἢ ποσότητα μετὰ τῶν ἄλλων ποσοτήτων. Ἐὰν δὲ οὐδεμία (ποσ.) πρὸ ἐκείνου (τοῦ $\sqrt{}$) κέοιτο, προτίθεται αὐτοῦ ὁ ἀριθμὸς, (ἢ ποσότης) ὁ δι' οὗ πολλαπλασιάζομεν. ἔνθα καὶ τῶν κανόνων, τῶν τοῖς $+$, καὶ $-$ σημείοις ἀνηκόντων, λόγον ποιητέον. Ἐὰν δὲ οὐδεμία ποσότης πρὸ ἀμφοῖν τῶν ῥιζικῶν ποσοτήτων ὑπάρχῃ, οὐδεμία καὶ πολλαπλασιαζέα, ἥπου καθ' ἑαυτὸ δῆλον, ὡς οὐδεμία παροῦσα. π. χ. $(4\sqrt{3})6 = 4.6\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$. Καὶ $(-5\sqrt[3]{6}) - 4 = +20\sqrt[3]{6}$. Καὶ $(-6\sqrt{24}). +4 = -24\sqrt{24}$. Καὶ $\sqrt{18}.5$ (ἔνθα οὐδεὶς ἀριθμὸς πρὸ τοῦ $\sqrt{}$ κεῖται) $= 5\sqrt{18}$. Καὶ $\sqrt{3}. -4 = -4\sqrt{3}$ Καὶ $\sqrt{(\alpha\beta)}.\gamma = \gamma\sqrt{\alpha\beta}$. Καὶ $-\sqrt{(\delta\zeta)}.\beta = -\beta\sqrt{\delta\zeta}$, κτ. Τὰς τοιαύτας ποσότητας καὶ ἐν μέρει μετατρέπειν ἔνι. (§. 296.)

Δύω ῥιζικῶν ποσοτήτων μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιαζομένων, αἱ ῥίζαι ἤτοι τοὺς αὐτοὺς, (ὡς $\sqrt[3]{8}$ καὶ $\sqrt[3]{5}$) ἢ οὐχὶ, (ὡς $\sqrt[3]{8}$ καὶ $\sqrt[2]{5}$) ἐκθέτας ἔχουσιν. Εἰ οὖν τὸ β'. οὕτως αὐτὰς μεταβλητέον, (§. 204.) ὥστε τοὺς αὐτοὺς λαβεῖν ἐκθέτας. Εἶτα

πολ-

πολλαπλασιαςέον α'. τὰς ποσότητας μετ' ἀλλήλων, τὰς πρὸ τοῦ $\sqrt{}$ κειμένας, μεθ' ὃ καὶ τὰς μετὰ τὸ $\sqrt{}$, προτιθέντας τούτου (τοῦ β' παραγομένου) τὸ κοινὸν $\sqrt{}$ μετὰ τοῦ καινοῦ ἐκθέτου, καὶ μὴ ἀμελοῦντας τῶν περὶ τοῦ $+$ καὶ $-$ κανόνων. Καὶ τελευταῖον, εἰ ἐγχωρεῖ, κατὰ τὸ (§. 296.) πάσας συνάμα ὑπὸ τὸ ἁπλούςατον ἀκτέον σχῆμα, καὶ, εἰ ἀναγκαῖον, καὶ τοὺς πρὸ τοῦ $\sqrt{}$ κειμένους ἀριθμοὺς ὑπὸ τὸ ῥιζικόν. (§. 295.)

Παραδείγμ. $3\beta \sqrt{(\gamma\delta)} \cdot 4\alpha \sqrt{(\gamma\delta)} = 12\,\alpha\beta \sqrt{\gamma\delta} \cdot \sqrt{\gamma\delta} = 12\,\alpha\beta\gamma\delta$ (§. ἀνωτ.)

Ὡσαύτως $2\beta \sqrt{(\gamma\delta)} \cdot -3\gamma \sqrt{(\beta\gamma)} = -6\gamma\beta \sqrt{(\beta\gamma^2\delta)} = -6\gamma\beta\gamma \sqrt{(\beta\delta)} = -6\gamma^2\beta \sqrt{(\beta\delta)}$. Καὶ $-\sqrt[4]{\gamma^3} \cdot -\sqrt[4]{\gamma} = +\sqrt[4]{\gamma^4} = + \cdot = +\gamma^{\frac{4}{4}} = +\gamma$.

Ἐν ἀριθμοῖς. $5\sqrt{18} \cdot 4\sqrt{2} = 20\sqrt{36} = 20 \cdot 6 = 120$. Καὶ $-3\sqrt{12} \cdot 2\sqrt{2} = -6\sqrt{24} = -6\sqrt{4 \cdot 6} = -6 \cdot 2\sqrt{6} = -12\sqrt{6}$.

Ἐὰν οἱ τῶν ῥιζῶν ἐκθέται ἄνισοι ὦσιν, εἰς τοὺς αὐτοὺς ἀκτέοι, ὡς εἴρηται, ἐκθέτας. π. χ. $\sqrt[2]{(\gamma\delta)} \cdot \sqrt[3]{(\gamma^2\delta)} = (\gamma\delta)^{\frac{1}{2}} \cdot (\gamma^2\delta)^{\frac{1}{3}} = (\gamma\delta)^{\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}} \cdot (\gamma^2\delta)^{\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}} = (\gamma\delta)^{\frac{3}{6}} \cdot (\gamma^2\delta)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(\gamma\delta)^3} \cdot \sqrt[6]{(\gamma^2\delta)^2}$. Καὶ ἐὰν ἐνεργείᾳ αἱ ποσότητες εἰς τὰς δυνάμεις ἀρθῶσι τὰς δεικνυμένας, ἴσονται $= \sqrt[6]{(\gamma^3\delta^3)} \cdot \sqrt[6]{(\gamma^4\delta^2)} = \sqrt[6]{(\gamma^7\delta^5)}$. Αὖθις $3\sqrt[6]{\gamma} \cdot -2\sqrt[4]{\zeta} = -6\gamma^{\frac{1}{6}} \cdot \zeta^{\frac{1}{4}} = -6\gamma^{\frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4}} \cdot \zeta^{\frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 6}} = -6\gamma^{\frac{4}{24}} \cdot \zeta^{\frac{6}{24}}$

$= -$

$= - 6\gamma^{\frac{2}{12}} \cdot \zeta^{\frac{3}{12}} = - 6 \sqrt[12]{\gamma^2 \zeta^3}$. Ἐν ἀριθμοῖς. $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}} \cdot 2^{\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}} = 5^{\frac{3}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{125 \cdot 4} = \sqrt[6]{500}$. Καὶ $2 \sqrt[3]{5} \cdot - 3 \sqrt[4]{6} = - 6 \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{4}} = - 6 \cdot 5^{\frac{4}{12}} \cdot 6^{\frac{3}{12}} = - 6 \sqrt[12]{5^4 \cdot 6^3} = - 6 \sqrt[12]{625 \cdot 216} = \sqrt[13]{135000}$.

Οὕτω προπαρασκευασθεὶς πᾶς τις δυνήσεται πολλαπλασιάζειν μετ' ἀλλήλων καὶ πολυμερεῖς Λογικὰς, καὶ Ἀλόγους ποσότητας. ὅτι καὶ αἱ πολυμερεῖς ἐκ μονομερῶν διὰ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$ συγκροτοῦνται. Πρὸ μέντοι τοῦ τούτων πολλαπλασιασμοῦ, πάσαις ταῖς ῥιζικαῖς ποσότησι τοὺς αὐτοὺς δοτέον ἐκθέτας.

Προκείσθω πολλαπλασιασθῆναι

$$\begin{array}{rl}
 & \alpha\beta \sqrt{\gamma} + \delta \sqrt{\zeta} \\
\text{μετὰ τοῦ} & 2\beta \sqrt{\gamma} + \delta \sqrt{\zeta} \\
\hline
 & + \alpha\beta\delta \sqrt{\zeta\gamma} + \delta^2 \zeta \\
 & + 4\beta^2\gamma + 2\beta\delta \sqrt{\zeta\gamma} \\
\hline
 & 4\beta^2\gamma + 4\beta\delta \sqrt{\zeta\gamma} + \delta^2\zeta.
\end{array}$$

Καὶ

$$\begin{array}{r l}
\text{Καὶ} & 1 + \sqrt{2} \\
& 1 + \sqrt{2} \\
\hline
& \quad + 1\sqrt{2} + 2 \\
& 1 + 1\sqrt{2} \\
\hline
& 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}.
\end{array}$$

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Ῥιζικῶν Ποσοτήτων.

§. 303. Ἀρξώμεθα ὡσαύτως ἀπὸ τῶν εὐχερεςάτων. Ἔςωσαν ὁ Διαιρετέος, καὶ ὁ Διαιρέτης τῶν μονομερῶν, ἢ ἁπλῶν ποσοτήτων, καὶ ἤτοι ὁ Διαιρέτης, ἢ ὁ Διαιρετέος Ἄλογος, ὁ δ' ἕτερος Λογικὸς, ἢ ἄμφω Ἄλογοι.

Ἐὰν ὁ Διαιρετέος Ἄλογος ᾖ, ὡς $\sqrt{\frac{21}{7}}$, ἀναγκαῖον ἄμφω τὰς ποσότητας ὑπὸ τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν θεῖναι σημεῖον, ὅπερ κατὰ τὸ (§. 295.) ῥαδίως ἐκπερανθήσεται, καὶ τηνικαῦτα εὐχερῶς τὴν διαίρεσιν τελέσομεν. τῶν ποσοτήτων εἰς παράγοντας ἀνατεμνομένων, εἰ ἄλλως αὗται διαιρέσιμοι, ἢ καὶ ἐνεργείᾳ ταύτας διαιρεῖν, καὶ μὴ μόνον τοῖς σημείοις δεικνύναι βουλόμενοι, ἐν ᾧ καὶ τὰ περὶ τοῦ $+$, καὶ $-$ καλῶς ἐν νῷ καθέξομεν. π. χ. $\sqrt{\frac{21}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 7}}{\sqrt{7 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$. Καὶ $\sqrt[3]{\frac{24}{6}} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{6^3}} = \frac{\sqrt[3]{4.6}}{\sqrt[3]{6.6.6}} = \sqrt[3]{\frac{4}{6.6}} = \sqrt[3]{\frac{4}{36}} = \sqrt[3]{\frac{4}{4 \cdot 9}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Ἐὰν

Ἐὰν δ' ὁ Διαιρέτης ἄλογος τυγχάνῃ, γίνεται τὰ αὐτά. Οἷον $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}}$, ἢ καὶ $= 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Καὶ $\frac{-4}{2\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{2^2 \cdot 8}} = -\sqrt{\frac{16}{32}} = -\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{2 \cdot 16}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Αὖθις $\frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{2^2 \cdot 6}} = \sqrt{\frac{9}{24}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 8}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Τοῦ Διαιρέτου, καὶ Διαιρετέου, ἀμφοῖν ἀλόγων ὄντων, αἱ ῥίζαι, ἤτοι τοὺς αὐτοὺς, ἢ οὐχὶ, ἐκθέτας ἔχουσι. Κἀκείνως μὲν, τῇ τῶν ποσοτήτων διατομῇ εἰς τοὺς αὐτῶν παράγοντας, εἰσόμεθα, πότερον ἡ ποσότης διαιρέσιμος, ἢ μή. Ὅτε καὶ τὸν Διαιρέτην, ἢ Διαιρετέον, ἥπερ ἂν τὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἀπαιτοίη, τῆς αὐτοῦ ἀλογίας ἔχοιμεν ἂν ἀπαλλάξασθαι. (§.297.) Οὕτω δὲ, μεταβληθήσονται οὕτως, ὥστε ἀμφοῖν τοὺς αὐτοὺς ἐνυπάρχειν Ἐκθέτας, καὶ εἶτα, ὡς ἐν τοῖς προηγηθεῖσι δέδεικται, αὐτοὺς διαιρήσομεν. Ἔστω διαιρετέον $\sqrt{6}$ διὰ $\sqrt{8}$, ἤτοι $\sqrt{\frac{6}{8}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Αὖθις $\sqrt{\frac{(\gamma^4\delta^2)}{\gamma^2\delta}} = \sqrt{\frac{(\gamma^2\gamma^2\delta\delta)}{\gamma^2\delta}} = \sqrt{\frac{(\gamma^2\delta)}{1}} = \sqrt{(\gamma^2\delta)} = \gamma\sqrt{\delta}$, ὃ τὸ πηλίκον τυγχάνει.

Εἰ πρόκειται διαιρεθῆναι $\sqrt[6]{24}$ διὰ τοῦ $\sqrt{6}$ ἤτο ἤτοι $\frac{{}^6\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ ἔσται $= \frac{24^{\frac{1}{6}}}{6^{\frac{1}{2}}} = \frac{24^{\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{2}}}{6^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}} = \frac{24^{\frac{2}{6}}}{6^{\frac{3}{6}}} = {}^6\sqrt{\frac{24^2}{6^3}} = {}^6\sqrt{\frac{24.24}{6.6.6}} = {}^6\sqrt{\frac{4.4}{6}} = {}^6\sqrt{\frac{2.2.4}{2.3}} = {}^6\sqrt{\frac{2.4}{3}} = {}^6\sqrt{\frac{8}{3}}$.

Αὖθις $\frac{\sqrt{48}}{{}^4\sqrt{12}} = \frac{48^{\frac{1}{2}}}{12^{\frac{1}{4}}} = \frac{48^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{4}}}{12^{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2}}} = \frac{48^{\frac{4}{8}}}{12^{\frac{2}{8}}}$. ἢ ἄμεινον $= \frac{48^{\frac{2}{4}}}{12^{\frac{1}{4}}} = {}^4\sqrt{\frac{48^2}{12}} = {}^4\sqrt{\frac{48.48}{12}} = {}^4\sqrt{192} = {}^4\sqrt{16.3.4} = 2\,{}^4\sqrt{12}$. Καὶ τοῦτό ἐστι τὸ πηλίκον τὸ ζητούμενον τοῦ $\frac{\sqrt{48}}{{}^4\sqrt{12}}$. Ὡσαύτως $\frac{{}^3\sqrt{\gamma\delta}}{{}^2\sqrt{\gamma\delta}} = \frac{(\gamma\delta)^{\frac{1}{3}}}{(\gamma\delta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\gamma\delta)^{\frac{2}{6}}}{(\gamma\delta)^{\frac{3}{6}}} = {}^6\sqrt{\frac{(\gamma\delta)^2}{(\gamma\delta)^3}} = {}^6\sqrt{\frac{\gamma^2\delta^2}{\gamma^3\delta^3}}$. ἢ $= {}^6\sqrt{\frac{\gamma\gamma\delta\delta}{\gamma\gamma\gamma\delta\delta\delta}} = {}^6\sqrt{\frac{1}{\gamma\delta}} = \frac{1}{{}^6\sqrt{\gamma\delta}}$.

Ἡ βάσανος τῆς Διαιρέσεως τῶν ἀλόγων ποσοτήτων γίνεται, ἐὰν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον ἐπὶ τὸν Διαιρέτην πολλαπλασιασθῇ, δι' οὗ ὁ Διαιρετέος προκύπτει, ἔνθα καὶ ταῖς ῥηθείσαις μεταβολαῖς ἐνίοτε χρηστέον.

§. 304. Τὴν τῶν μονομερῶν ἀλόγων ποσοτήτων διαίρεσιν καταμαθόντας, καὶ εἰς τὰς πολυμερεῖς χωρητέον. Καὶ α'. παραληφθήτω ὁ Διαιρετέος, ὡς ποσότης πολυμερής, τοῦ Διαιρέτου μονομεροῦς μένοντος. Ἡ δ' ἀρχὴ ἐνταῦθα γινέσθω ἐκ τοῦ εἰς τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν ὑπάγειν σημεῖον ἁπάσας τοῦ Διαιρετέου τὰς ποσότητας,

τας, καὶ αὐτὸν τὸν Διαιρέτην, εἰ τοῦτο οὐ τυγχάνουσιν. (Εἰ καὶ ἐνίοτε τρόποι ἂν ἀπαντῷεν, ἔνθα τοῦτο οὐκ ἀναγκαῖον, καὶ ἔνθα οἱ ἀριθμοὶ, οἱ πρὸ τοῦ $\surd$ τυχὸν κείμενοι, ὡς ἔχουσιν, ἂν μένοιεν. Ἀλλ' ἡ μὴν ἐνταῦθα λόγος περὶ τῶν εὐχερεςάτων, καὶ μᾶλλον ἐν χρήσει) Καὶ εἶτα διαιρεθήτω ἑκάςη ποσότης ἐν μέρει διὰ τοῦ διαιρέτου, τῷ συνήθει τοῦ διαιρεῖν τρόπῳ. π. χ.

$$\surd 24 + \surd 48 - \surd 72 \text{ διαιρεθ. διὰ τοῦ } \surd 6.$$

$$\begin{array}{r|l}
\surd 6)\ \surd 24 + \surd 48 - \surd 72 & \surd 4 + \surd 8 \\
\underline{\surd 24 \quad : \quad : \quad :} & \quad - \surd 12 \\
0 \quad \surd 48 \quad : & \\
\underline{\surd 48 \quad :} & \\
0 - \surd 72 & \\
\underline{- \surd 72} & \\
0 &
\end{array}$$

Ἔςιν ἄρα τὸ πηλίκον $\surd 4 + \surd 8 - \surd 12$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ῥίζα ἔχει ἐν μέρει ἐξαχθῆναι, τραπείη ἂν εἰς τόδε. $2 + \surd 4 \cdot 2 - \surd 4 \cdot 3 = 2 + 2\surd 2 - 2\surd 3 = (1 + \surd 2 - \surd 3) \cdot 2$.

Δίελε $\gamma\surd\gamma\delta - \zeta\surd\gamma\zeta - \gamma\surd\delta\zeta$ διὰ τοῦ $-\surd\gamma$. Ἃ ὑπὸ τὸ ῥίζικὸν τεθέντα σημεῖον ἔςαι $= \surd\gamma^2\gamma\delta - \surd\zeta^2\gamma\zeta - \surd\gamma^2\delta\zeta : -\gamma$

$$= \frac{\surd\gamma^3\delta - \surd\zeta^3\gamma - \surd\gamma^2\delta\zeta}{- \surd\gamma}$$

Δίελε οὖν ἤδη ἐνεργείᾳ.

$-\surd\gamma$

$$
\begin{array}{rl|l}
-\sqrt{\gamma}\,) & \sqrt{\gamma^3\delta} - \sqrt{\zeta^3\gamma} - \sqrt{\gamma^2\delta\zeta} & -\sqrt{\gamma^2\delta} + \zeta^3 \\
 & \underline{\sqrt{\gamma^3\delta}\qquad\qquad\qquad\qquad} & \quad + \sqrt{\gamma\delta\zeta} \\
 & \quad o - \sqrt{\zeta^3\gamma} & \\
 & \quad \underline{- \sqrt{\zeta^3\gamma}\quad} & \\
 & \qquad\qquad o - \sqrt{\gamma^2\delta\zeta} & \\
 & \qquad\qquad \underline{- \sqrt{\gamma^2\delta\zeta}\quad} & \\
 & \qquad\qquad\qquad o &
\end{array}
$$

Ὥςε τὸ πηλίκον $= - \sqrt{\gamma^2\delta} + \sqrt{\zeta^3} + \sqrt{\gamma\delta\zeta} = - \gamma\sqrt{\delta} + \zeta\sqrt{\zeta} + \sqrt{\gamma\delta\zeta}$.

Β΄. δ' ἔςωσαν καὶ ὁ Διαιρετέος, καὶ ὁ Διαιρέτης ποσότητες πολυμερεῖς. Ἔνθα αὖθις, εἰ ἀναγκαῖον, ἁπάσαις χρηςέον ταῖς προπαρασκευαῖς, τουτ: ἁπάσας τὰς ποσότ. ὑπὸ τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν ὑπακτέον, καὶ ταύτας προσηκόντως κατὰ τὰς αὐτῶν δυνάμεις τακτέον, ὥσπερ τοῦτο ἡ μετὰ γραμμάτων συνήθης ἐδίδαξε διαίρεσις, καὶ εἶτα, ἡ σύνηθες, διαιρετέον, ἔνθα καὶ οἱ περὶ τοῦ $+$ καὶ $-$ κανόνες οὐ παροπτέοι.

Δίελε $6\sqrt{6} + 2\sqrt{15} - 3\sqrt{10} - 5$ διὰ $3\sqrt{2} + \sqrt{5}$. θέμενος α΄. πάντας τοὺς ὅρους ὑπὸ τὸ ῥιζικόν.

$= \sqrt{36}$.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{5} \quad = \sqrt{36\cdot 6} + \sqrt{4\cdot 15} - \sqrt{9\cdot 10} - \sqrt{25} & \sqrt{2\cdot 6} - \sqrt{5} \\
\phantom{\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{5} \quad =} \sqrt{9\cdot 2\cdot 2\cdot 6} \quad \sqrt{2\cdot 6\cdot 5} & \\
\hline
\phantom{\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{5} \quad =} 0 \qquad\qquad 0 - \sqrt{9\cdot 10} - \sqrt{25} & \\
\phantom{\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{5} \quad = 0 \qquad\qquad 0} - \sqrt{9\cdot 2\cdot 5} - \sqrt{25} & \\
\hline
\phantom{\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{5} \quad = 0 \qquad\qquad 0 -} 0 \qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Διέλε $\gamma\sqrt{\beta\gamma} - \gamma\sqrt{\beta\delta} + \delta\sqrt{\gamma\mu} - \delta\sqrt{\delta\mu}$ διὰ τοῦ $\sqrt{\gamma} - \sqrt{\delta}$. Ὑπὸ τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν τεθέντες οἱ ὅροι τοῦ Διαιρετέου $= \sqrt{\gamma^2\beta\gamma} - \sqrt{\gamma^2\beta\delta} + \sqrt{\delta^2\gamma\mu} - \sqrt{\delta^2\delta\mu}$.

$$
\begin{array}{l|l}
\text{ἢ} \qquad = \sqrt{\gamma^3\beta} - \sqrt{\gamma^2\beta\delta} + \sqrt{\delta^2\gamma\mu} - \sqrt{\delta^3\mu} & \sqrt{\gamma^2\beta} \\
\text{διὰ τοῦ } \sqrt{\gamma} - \sqrt{\delta})\ \sqrt{\gamma^3\beta} - \sqrt{\gamma^2\beta\delta} & + \sqrt{\delta^2\mu}. \\
\hline
\qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0 + \sqrt{\delta^2\gamma\mu} - \sqrt{\delta^3\mu} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \sqrt{\delta^2\gamma\mu} - \sqrt{\delta^3\mu} & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Ὥϛε τὸ πηλίκον $= \sqrt{\gamma^2\beta} + \sqrt{\delta^2\mu} = \gamma\sqrt{\beta} + \delta\sqrt{\mu}$.

Τὸ μετὰ ἀλόγων διαιρεῖν ἀείποτε ἐργῶδες, μάλιϛα ἐν παραδείγμασιν ἐκ πλειόνων συγκροτουμένοις ὅρων, ἔνθα πολλάκις οὐδ' ἐκπερᾶναι τὴν διαίρεσιν ἔνι, ὡς ἤτοι τοῦ Διαιρέτου μὴ ἀκριβῶς τῷ Διαιρετέῳ ἐμπεριεχομένου, ἢ οὕτω τῶν ποσοτήτων ἐχουσῶν, ὥϛε οὐκ ἐκ πρώτης ὄψεως συνιδεῖν πάρεϛιν, ὅπως ἀλλήλας περιέχουσι. Τηνικαῦτα παραδέδονται διάφοροι τῶν Μεθόδων, ἐνίοτε χρήσιμοι οὖσαι. Ὧν μία καὶ τὸ τὰς ποσότητας εἰς κλάσμα ἀνάγειν, καὶ τὸν παρονομαϛὴν λογικὸν ποιεῖν, ἥπερ (§. 297.) εἴρηται. Ἀλλὰ καὶ τοῦτο ἐπὶ τῶν λίαν συνθέτων δυσχερέϛατον, καὶ λίαν ἐπίπονον. Προτεθείσθω καὶ τούτου παράδειγμα.

Δίελε $8 - 5\sqrt{2}$

διὰ $3 - 2\sqrt{2}$

Ἐὰν ἄμφω οἱ ὅροι πολλαπλασιασθῶσι διὰ τοῦ $3 + 2\sqrt{2}$, τὸ κλάσμα τροπὴν οὐχ ὑφίϛαται

$$\begin{array}{ll} & 8 - 5\sqrt{2} \\ \text{πολλαπλ. διὰ} & 3 + 2\sqrt{2} \\ \hline & +16\sqrt{2} - 10 \cdot 2 \\ & +24 - 15\sqrt{2} \\ \hline & +24 + \sqrt{2} - 20 \\ & = 4 + \sqrt{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Ὁ παρονομ.} & 3 - 2\sqrt{2} \\ \text{πολλαπ. διὰ} & 3 + 2\sqrt{2} \\ \hline & +6\sqrt{2} - 4 \cdot 2 \\ & +9 - 6\sqrt{2} \\ \hline & 9 - 8 = +1 \end{array}$$

Ὥϛε τὸ πηλίκον $= \frac{4 + \sqrt{2}}{1} = 4 \sqrt{2}$.

'Η

Ἡ δὲ βάσανος γίνεται κατὰ τὰ ἐν (§. 98.)

§. 105. Καὶ ταῦτα μὲν ἱκανὰ τοῖς Πρωτοπείροις. Περὶ δὲ τῶν Ἀδυνάτων Ποσοτήτων καὶ δὴ λέγωμεν. Οὕτω δὲ καλοῦνται ῥίζαι, αἱ ἄρτιον Ἐκθέτην ἔχουσαι, καὶ ἀποφατικῶν ποσοτήτων προκείμεναι. Ὡς $\sqrt{-4}$. ἢ $\sqrt{-8}$. ἢ καὶ $\sqrt[4]{-18}$. ἢ $\sqrt[4]{-16}$, κτ. τὴν προσηγορίαν λαχοῦσαι, ἐκ τοῦ μηδεμίαν δίδοσθαι ποσότητα, ἥτις ἀρτιάκις πολλαπλασιασθεῖσα δώσει ἀποφατικὸν Ἀριθμόν. Καταφατικῶς γὰρ τῆς ποσότητος ληφθείσης, πάντα τὰ ἐξ αὐτῆς παραγόμενα, μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθείσης, καταφατικά. Ἀποφατικῶς δὲ, πᾶν παραγόμενον ἐξ αὐτῆς, (αὖθις μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθείσης) τὸ ἀρτίαν δύναμιν λαμβάνον, καταφατικὸν, τὸ δὲ περιττὴν, ἀποφατικὸν ἐςαι. Ἐπεὶ τοίνυν ἑκάςη ῥίζα ἤτοι $+$, ἢ $-$, οὐδεμία ποσότης, ἢ ἀριθμὸς δίδοται, ὅς ἡ ῥίζα ἂν εἴη ἀδυνάτου ποσότητος. Ἔςω παράδειγμα $\sqrt{-16}$, ὃ ἀδύνατον ποσότητα ἐμφαίνει. Ἡ γὰρ τούτου ῥίζα ἤτοι $+4$, ἢ -4. Ἀλλὰ πολλαπλατίασον $+4$, ἢ -4 μεθ' ἑαυτοῦ, καὶ ἀεὶ προκύψει $+16$. Ὥςε οὐδένα ἀριθμὸν δυνατὸν ἀποδοῦναι, ὅς δι ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθεὶς -16 παραγόμενον παρέξει. Ἀποφατικαὶ μέντοι ποσότητες, ὧν τὸ $\sqrt{}$ σὺν περιττῷ Ἐκθέτῃ πρόκειται, οὐκ ἀδύνατοι τυγχάνουσι. πάντως γὰρ τῷ πολλαπλασιασμῷ ἀποφατικῆς ποσότητος μεθ' ἑαυτῆς ἀνέφυσαν. π. χ. $\sqrt[3]{-a^3}$ ἔςι δήπου ἐνεργείᾳ ποσότης. Ἔςι γὰρ $= -a$. Ὅτι ἐνεργείᾳ ἡ $-a$ πολλαπλασιασθεῖσα παράξει $-a^3$. ($-a \cdot -a = +a^2$ (§. 77. καν.). $-a = -a^3$. (§. αὐτ.)) Καὶ ἡ $\sqrt[3]{-8} = -2$. Ὅτι $-2 \cdot -2 \cdot -2 = -8$. Ὡσαύτως καὶ

αἱ

αἱ λοιπαὶ ἀποφατικαὶ ποσότ. ὧν οἱ ῥιζικοὶ Ἐκθέται περιττοί. Αἱ ἄρα ἀδύνατοι ποσότητες μήτε καταφατικαί, μήτε ἀποφατικαὶ οὖσαι, οὐδαμῶς μέντοι τῷ μηδενὶ ἐξισοῦνται. Εἰσὶ δὲ τοῦτ' αὐτὸ, ἤτοι Ἀδύνατοι. Ὧν ἡ ὕπαρξις πάντως ἐν τῇ φαντασίᾳ γοῦν χώραν ἔχειν δύναται. Φαντασθῆναι γάρ π. χ. δυνατὸν, δίδοσθαι ποσότητα, ἥτις μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθεῖσα τὸν ἀποφατικὸν παράγει ἀριθμόν, καίτοι ἄγνωςον οὖσαν. Ἔνθεντοι ἀκούουσι καὶ Φαντασιώδεις Ποσότητες.

§. 306. Καὶ τούτῳ τῷ τῶν ῥιζῶν γένει τὰ δ'. εἴδη τῶν ὑπολογισμῶν ὑπολογιςεῦσαι δυνάμεθα. Καὶ γὰρ καὶ ἐπιτομώτερον ἐκφέρονται, προςίθενται, ἀφαιροῦνται, πολλαπλασιάζονται, καὶ διαιροῦνται, εἰ μόνον τὰ λοιπὰ τοιαῦται, ὥςε τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις ταύταις ἐφαρμόζεσθαι. Περὶ ὧν μικρόν τι ἐροῦμεν. Τὰ γὰρ περὶ τῶν ἀλόγων ῥηθέντα ποσοτήτων κἀνταῦθα τελεῖται. Βουλομένοις οὖν ταύτας ἐπιτετμημένως ἐκδηλοῦν ἀναγκαῖον εἰς παράγοντας αὐτὰς κατατέμνειν, ὧν ἀφ' ἑνὸς ἡ ῥίζα ἐξαχθῆναι δύναται. π. χ. $\sqrt{-18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-2} = 3\sqrt{-2}$. Καὶ $\sqrt{-8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-2} \cdot = 2\sqrt{-2}$. Διὰ τούτου ἡ ποσότης ἀπαλλάττεται ἐν μέρει καὶ τοῦ ἀδυνάτου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ 1 ἀείποτε ὡς εἷς παράγων οἱασοῦν ποσότητος νοεῖται, χρηςέον καὶ ταύτῃ, ἵν' ἁπάσας τὰς ἀδυνάτους ποσότ. ἐν μέρει τοῦ ἀδυνάτου ἀπαλλάττωμεν. Ὡς $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$. Καὶ $\sqrt{-12} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1}$, καὶ ἐπεὶ 12 ἔχει περαιτέρω ἀνατέμνεσθαι $= \sqrt{4 \cdot 3} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{-3}$. Καὶ $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{-1} = 2\sqrt[4]{-1}$, κτ. Ἡ Πρόσθεσις, καὶ Ἀφαίρεσις τῶν Ἀδυνάτων τὸν αὐτὸν ἐκπεραίνεται τρόπον, ὃν καὶ ἡ τῶν

τῶν Ἀλόγων. (§. 300.) Ἀλλὰ κἀνταῦθα τὰ ὁμοειδῆ μόνα προσαθροίζεται, καὶ ἀφαιρεῖται·

Πρόσθες	$3\sqrt{-2}+\sqrt{-4}-5\sqrt{-1}$
τῷ	$2\sqrt{-2}-2\sqrt{-4}-2\sqrt{-1}$
τὸ κεφάλ.=	$5\sqrt{-2}-\sqrt{-4}-7\sqrt{-1}$
Ἀπὸ τοῦ	$3\sqrt{-2}+\sqrt{-4}-5\sqrt{-1}$
ἄφελε τὸ	$2\sqrt{-2}-2\sqrt{-4}-2\sqrt{-1}$
	$-\quad\quad+\quad\quad+$
ἡ Διαφορὰ	$\sqrt{-2}+3\sqrt{-4}-3\sqrt{-1}$

§. 307. Ἐπὶ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ μετ' ἀδυνάτων ποσοτήτων σημειωτέα εἰσὶ τὰ ἑξῆς. Ἐὰν δύω ἴσαι ἀδύνατοι Ποσότ. ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθῶσιν, ἡ ἐκ τούτων προκύπτουσα Ἀποφατικὴ τυγχάνει. Οἷον $\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{-3}=-3$. Τὸ γὰρ σημεῖον τὸ μετὰ τὴν ῥίζαν οὐ μεταβάλλει τὸ σημεῖον τῆς Ποσότητος. Ὅπερ ῥάδιον συνιδεῖν, ὡς τῆς ῥίζης τῆς Ποσότητος μόνον δεικνυμένης, οὐχὶ δὲ καὶ ἐκφερομένης, καὶ, κατὰ τὴν τῶν ῥιζῶν, ἣν ἐλάβομεν, ἔννοιαν, τῆς ποσότητος ἀναφυομένης τῷ πολλαπλασιασμῷ ἐκείνων (τῶν ῥιζῶν) μετ' ἀλλήλων. Αὖθις $\sqrt{-8}\,.\,\sqrt{-8}=-8$. Καὶ $\sqrt[4]{-16}\,.$ $\sqrt[4]{-16}=-16^{\frac{2}{4}}=-16^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-16}$ $=\sqrt{16}\,.\,\sqrt{-1}=4\sqrt{-1}$.

Ἐν γένει, τὸ σημεῖον — τῶν ἀδυνάτων ποσοτήτων, τὸ μετὰ τὴν ῥίζαν, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ οὐ μεταβάλλεται ἐπὶ τοῦ τοιούτου πολλαπλασιασμοῦ τῆς εἰς δυνάμεις ἐξάρσεως, καὶ ὁ κανὼν ὁ περὶ τῶν σημείων (§. 77.) ἁρμόζει μόνον τοῖς σημείοις, τοῖς πρὸ τοῦ $\sqrt{}$ κειμένοις. Ἀλλ' ὅτε δύω διαφόρους ἀδυνά-

ἀδυνάτους ποσότητας δι᾽ ἀλλήλων πολλαπλασιάζειν δέοι, συμβαίνει ἑτερόντι. ἔνθα χρήσιμον πάνυ τὸ ταύτας εἰς τοὺς αὐτῶν ἁπλοῦς παράγοντας διατέμνειν πρὸ τοῦ τούτων πολλαπλασιασμοῦ. π. χ. $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-2} = -\sqrt{6}$. Ἔστι γὰρ $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$. καὶ $\sqrt{-2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1}$. Ὥστε $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{6} \cdot -1 = -\sqrt{6}$. Ὅπου ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀδυνάτων ποσοτήτων δυνατόν τι προκύπτει. Αὐτὸ δὲ τοῦτο καὶ συνεργείᾳ τοῦ σημείου, τοῦ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ κειμένου, ἂν γένοιτο. π. χ. $(\sqrt{-8} + \sqrt{-2}) \cdot (\sqrt{-8} - \sqrt{-2})$ δίδωσι δυνατὴν ποσότητα $= -6$. Ὁ δῆλον τῷ ἐνεργείᾳ πολλαπλασιασμῷ.

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{-8} + \sqrt{-2} & \\
\sqrt{-8} - \sqrt{-2} & \\
\hline
- \sqrt{-16} - (-2), & \text{ἢ } + 2 \\
-8 + \sqrt{-16} & \\
\hline
-8 & + 2 = -6.
\end{array}$$

Ἀδυνάτων δὲ ποσοτήτων μετὰ δυνατῶν πολλαπλασιαζομένων, τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον ἀεὶ ἀδύνατον. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{-2}$ δίδωσι $\sqrt{-10}$. Τὸ γὰρ $\sqrt{5} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-10}$ Εἰώθασι μέντοι συχνάκις μὴ ἐνεργείᾳ πολλαπλασιάζειν, ἀλλὰ μόνον τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀδυνάτων μετὰ τῶν δυνατῶν δεικνύναι, ἵν᾽ εὐχερέστερον ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ὁ πολλαπλασιασμὸς γνωρίζηται. π. χ. $\sqrt{\alpha}$ πολλαπλ. μετὰ τοῦ $\sqrt{-\gamma}$, γράφεται μόνον $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{-\gamma}$. Εἰ καὶ ἀντὶ τούτου καὶ τὸ $\sqrt{-\alpha\gamma}$ ἂν τεθείη. Ὡσαύτως καὶ $\sqrt{4} \cdot \sqrt{-3}$ μένει πολλάκις ἄτρεπτον.

Τελευταῖον συμβαίνει καὶ δυνατῶν μετ' ἀδυνάτων πολλαπλασιαζομένων, δυνατήντινα προκύπτειν ποσότητα. Τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν ἀμφοῖν τοῖς παράγουσιν ἐνυπάρχωσιν ἀδύνατοι ποσότητες, ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ τὰ τῶν παραγόντων σημεῖα μὴ τὰ αὐτὰ ᾖ. Ἔνθεντοι τὸ λεγόμενον οὐκ ἀντιφάσκει τοῖς προηγηθεῖσι. π. χ. $2\gamma\sqrt{-\delta} \cdot -3\beta\sqrt{-\delta} = -6\beta\gamma\sqrt{-\delta} \cdot \sqrt{-\delta} = -6\beta\gamma - \delta = +6\beta\gamma\delta$. Καὶ $6\sqrt{-4} \cdot -5\sqrt{-4} = -30 \cdot \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-4} = -30 \cdot -4 = +120$.

§. 308. Ἡ Διαίρεσις τῶν ἀδυνάτων Ποσοτ. δι' ἀλλήλων τελεῖται κατὰ τοὺς αὐτοὺς νόμους, ὡς καὶ ὁ τούτων πολλαπλασιασμός. Χρήσιμον δ' ἐπὶ τῶν δυσχερεςέρων παραδ. καὶ τοῖς Πρωτοπείροις ῥᾶον εἰς κατάληψιν, τὸ ταύτας, κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον, ἀναλύειν. π. χ. $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{4} = 2$. Ἀλλὰ $\frac{-\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}} = \frac{-\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{4} = -2$. Καὶ $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-4}} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \sqrt{2}$.

Ἔνθα καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως ἀδυνάτων δυναταὶ ἀνέδυσαν. Ἀλλ' ὡς τὰ πολλὰ δεικνύομεν μόνον τὴν διαίρεσιν, ταῖς ποσότησι τὸ τοῦ κλάσματος σχῆμα διδόντες, ἐὰν μὴ ῥαδίως διαιρῶνται. Ἄλλως γὰρ εἰς

τὸ

τὸ βραχύτατον αὐτὰς πειρατέον ἀνάγειν. ὡς $\sqrt{-\alpha} : \sqrt{-\beta} = \dfrac{\sqrt{-\alpha}}{\sqrt{-\beta}}$. Καὶ $\gamma\delta\sqrt{-\gamma} : -\delta\sqrt{-\gamma} = \dfrac{\gamma\delta\sqrt{-\gamma}}{-\delta\sqrt{-\gamma}} = -1\gamma = -\gamma$. Καὶ $8\sqrt{-6} : -4\sqrt{-2} = \dfrac{8\sqrt{-6}}{-4\sqrt{-2}} = -2\sqrt{-3}$.

§. 309. Ἡ δ' ὄνησις, ἣν αἱ ἀδύνατοι ποσότητες τῇ Ἀριθμητικῇ παρέχονται, λίαν ἐπίσημος. πολλάκις γὰρ προτείνονται Προβλήματα, περὶ ὧν ἄδηλον, πότερον δυνατὰ, ἢ μή. Τοῦτο δ' ἐπὶ τὸ πέρας γενόμενοι τοῦ ὑπολογισμοῦ μαθησόμεθα. Ἐὰν γὰρ τηνικαῦτα ποσότητες προέλθωσιν ἀδύνατοι, τὸ Ζήτημα ἀδύνατον, ἢ ἀνεπίλυτον τυγχάνει. Τὰ δὲ τοιαῦτα μάλιςα ἐν ταῖς Ἐξισώσεσιν ἀπαντᾷ. Οἷον, εἰ ζητεῖται 10 εἰς δύω μέρη διαιρεθῆναι, ἃ ἐπ' ἄλληλα πολλαπλασιασθέντα δώσουσι 3 παραγόμενον. τοῦ Ζητήματος διαταχθέντος, (ὡς τοῦτο αἱ Ἐξισώσεις διδάξουσιν) οὕτω, (τῶν δύω μερῶν, ὡς ἀγνώςων, τοῦ μὲν χ, τοῦ δὲ υ ῥηθέντος)

$$\chi + \upsilon = 10 \qquad \chi\upsilon = 36$$
$$\chi = 10 - \upsilon \qquad \chi = \frac{36}{\upsilon}$$
$$10 - \upsilon = \frac{36}{\upsilon} \quad (\S.48.\delta'.)$$
$$10\upsilon - \upsilon^2 = 36$$
$$\upsilon^2 - 10\upsilon = -36$$
$$\upsilon^2 = 10\upsilon - 36$$
$$\upsilon = 5 \pm \sqrt{25 - 36}$$
$$\upsilon = 5 + \sqrt{-11}$$
$$\upsilon = 5 - \sqrt{-11}$$

 Ἀνα-

Ἀναφανήσονται ἐν τέλει οἱ παράγοντες $5\sqrt{-11}$, καὶ $5-\sqrt{-11}$, ἀδυνάτους δηλοῦντες ποσότητας. Ὥςε καὶ τὸ ζητούμενον οὐκ ἐπιλύσιμον. Καὶ δίδωσι μὲν ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν δύω ἀδυνάτων ποσοτήτων μετ' ἀλλήλων τῷ ὄντι 36, ἀλλὰ τοιαῦται ποσότητες κυρίως οὐ δίδονται.

Πολλαπλασιασθήτωσαν ἄμφω δι' ἀλλήλων.

$$\begin{array}{r} 5+\sqrt{-11} \\ 5-\sqrt{-11} \\ \hline -5\sqrt{-11}-(-11) \\ +25+5\sqrt{-11} \\ \hline 25\ .\ 0\ -(-11)=+11. \end{array}$$

Ὥςε $25+11=36$.

Σημειωτέον πρὸς τούτοις, ὅτι τὰς ἀδυνάτους ποσότητας ἐν ταῖς Δείξεσι φευκτέον, μάλιςα, ἔνθα ἡ Δεῖξις δι' ἐνεργείᾳ ποσοτήτων (καίτοι χαλεπῶς ἐνίοτε) ἔχει ἐπαχθῆναι. Δι' ἐκείνων γὰρ, ὡς ἀδυνατων, οὐδὲν νοῆσαι δυνάμεθα, καὶ τῇ διανοίᾳ λαμπρότερον ἐπιλάμπει φῶς, τῶν συμπερασμάτων δυναταῖς ποσότησι συναγομένων.

§. 310. Ἐπιμνηςέον τελευταῖον καὶ εἴδους ῥιζῶν ἑτέρου, καὶ τούτων ἐνίοτε ἀπαντωσῶν. Προκεῖσθαι γὰρ συμβαίνει ἐκ ῥίζης καὶ ἑτέραν ἔτι ἐξάγειν, ὅπερ οὕτως ἐκφαίνεται. $\sqrt{\sqrt{5}}$ Ὅ ἐςιν, ἐξαχθήτω ἀπὸ τοῦ 5 ἡ $\sqrt{}$, καὶ ἐκ τῆς προκυψάσης ποσότητος αὖθις ἡ $\sqrt{}$. ἢ καὶ $\sqrt{\sqrt[3]{16}}$. ἢ ἐν γένει $\sqrt[\nu]{\sqrt[\varrho]{\alpha}}$. Ἐὰν οὖν αἱ ποσότητες, ἐξ ὧν ἡ α'. ῥίζα, ἡ πλησίον τῆς ποσότητος κειμένη, ἐξακτέα, τοιαῦται

ται ὦσιν, ὥςε τὴν τούτων ῥίζαν ἀκριβῶς ἀποδίδοσθαι, μόνον ἓν ῥιζικὸν κυρίως πάρεςιν, ὡς τῆς ἑτέρας ῥίζης ἐξαχθῆναι δυναμένης. π. χ. $\sqrt{\sqrt{9}}$. εἴη ἂν (ὅτι τοῦ 9 ἡ ῥίζα ἀκριβῶς ἀποδίδοται) $= \sqrt{3}$. Καὶ $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$. Καὶ $\sqrt{\sqrt{\alpha^2}} = \sqrt{\alpha}$. Τῶν δὲ ποσοτήτων ἀλόγων οὐσῶν, οὐ δυσχερὲς ἀμφοῖν ἓν μόνον ῥιζικὸν προθεῖναι σημεῖον, εἰ τοῦτο ἀναγκαῖον. Ὡς γὰρ ἔφημεν, τὰς ῥίζας, ὡς δυνάμεις, κλασματικοὺς ἐκθέτας ἐχούσας, γράφειν ἔξεςι, καὶ, ὅτε τοὺς ἐκθέτας τῶν δυνάμεων διαιροῦμεν, τὰς τούτων ῥίζας διὰ τούτου ἐξάγομεν. (§. 200.) Ὥςε τούτῳ τῷ τρόπῳ καινὸν, καὶ ἓν μόνον ῥιζικὸν παρέξαι σημεῖον. π. χ. $\sqrt{\sqrt[3]{\gamma}} = \gamma^{\frac{1}{3}:2} = \gamma^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \gamma^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\gamma}$. Καὶ $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}} = 8^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}} = 8^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{8}$. Καὶ $\sqrt{\sqrt[3]{8^2}} = 8^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 8^{\frac{2}{6}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$. Καὶ ἐν γένει. $\sqrt[\rho]{\sqrt[\sigma]{\alpha^{\nu}}} = \alpha^{\frac{\nu}{\sigma}\cdot\frac{1}{\rho}} = \alpha^{\frac{\nu}{\sigma\rho}} = \sqrt[\sigma\rho]{\alpha^{\nu}}$. Ἐὰν τεθῇ $\rho = 3$. $\sigma = 2$. $\nu = 4$. $\alpha = 12$. ἔςαι $\alpha^{\frac{\nu}{\sigma\rho}} = 12^{\frac{4}{6}} = 12^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{12^2} = \sqrt[3]{144}$.

Τὰ ἀναγκαιότατα περὶ τῶν ῥιζικῶν ὑπολογισμῶν εἰπεῖν πειρασάμενοι πλατύτερον τούτους ἐξεθέμεθα εἰς πλείω ἐνάργειαν. Ὥςε καὶ ἐλπὶς ἡμῖν πάρεςι τοὺς πρωτοπείρους, τοὺς μετὰ προσοχῆς τὰ ῥηθέντα ἀναλεξομένους, ῥαδίως προχωρήσειν εἰς τὰ τελειότερον περὶ τούτων πραγματευόμενα συγγράμματα.

Περὶ Λογαρίθμων.

§. 311. Ἡ τῶν Λογαρίθμων χρῆσις οὐκ ἂν εἴποιτις ὅσην τὴν ὄνησιν διὰ πάσης ἐπαγγέλλεται τῆς Μαθήσεως, καὶ ὅσην εὐχέρειαν ἐν παντὶ εἴδει παρέχεται ὑπολογισμῶν, περὶ ὧν πρὸ τῆς περὶ τῶν Ἀναλογιῶν, Προόδων, καὶ Ῥιζῶν ἐξαγωγῆς διδασκαλίας οὐκ ἐπραγματευσάμεθα, ὡς τούτοις τῆς περὶ τῶν Λογαρίθμων διδασκαλίας ἐπερειδομένης. Ἡ λέξις Λογάριθμος, ἤπου παντὶ δῆλον, σύγκειται ἐκ τῶν λέξεων, Λόγων, καὶ Ἀριθμὸς, ὅπερ τὸν ἀριθμὸν, ἢ τὴν πλῆθὺν ὑπεμφαίνει τῶν Λόγων. (§. 212.) Τοῦτο καὶ γὰρ τῷόντι οἱ λογάριθμοι ποιοῦσι, δεικνύοντες ἀμέλει, ποσαπλασίων ὁ Λόγος, ἀπὸ τοῦ θεμελιώδους λόγου δύω ἐγγὺς ἀλλήλων ὅρων τῆς Γεωμετρικῆς σειρᾶς ἀρχομένοις. Κατωτέρω γενήσεται σαφέστερον τὸ λεγόμενον.

Ὁ δὲ τούτων ἐφευρετὴς ἀμφισβητήσιμος. Οἱ μὲν γὰρ Γερμανῷ τινι Ἰούστῳ Βυργίῳ τούτους ἀποδιδόασιν. οἱ δὲ, Σκότον τινὰ Ἰωάννην Νεππέρον, Βαρῶνον, ὡς τούτους πρῶτον ἐπινοήσαντα ἐκδιδόασιν. Ὅς μέντοι τυχὸν τὴν τούτων χρῆσιν κοινωφελεστέραν ἐποίησεν. Ἐξέδωκε γὰρ Πόνημα, Περιγραφὴ Θαυμασίου Κανόνος τῶν Λογαρίθμων 1614 ἐν Ἐδινβούργ, ἐπιγραφόμενον. Εὐρίκος δὲ Βρίγγιος, ᾧτινι τὸ Μαθηματικὸν εἶδος ἠσκεῖτο ἐξ ἐπαγγέλματος (Professor), τύποις ἐξέδωκε τὴν ἑαυτοῦ, Ἀριθμητικὴν Λογαριθμικὴν, ἐν ἔτει 1624, ἐν ᾗ, συμβουλῇ τοῦ Νεππέρου, ἕτερον Λογαριθμικὸν Σύστημα, καὶ εἰς χρῆσιν προσφορώτερον, ὑπελογίστευσεν, ἢ τὸ τοῦ Νεππέρου, ὅ καὶ κατὰ τοῦτο τοῦ Νεππερικοῦ διάφορον. Ὁ μὲν γὰρ Νεππέρος ὡς Γενικὴν Σειρὰν Πρόοδον Μειουμένην (§. 255.) ὑπεστήσατο. ὁ δὲ, τοὐναντίον, Αὔξουσαν, (§. αὐτ.) πρότερον καὶ αὐτὸς ἑτέραν Βάσιν τοῦ ἰδίου συστήματος παραλαραλαβών. Τούτων ἁπάντων ὅσον οὔπω ἐναργῆ ἔννοιαν ληψόμεθα. Ἀλλὰ τὸ περὶ τούτων διεξοδικῶς λέγειν οὐ κατὰ σκοπὸν ἂν εἴη τῆς παρούσης Βίβλου, καὶ τοῖς Πρωτοπείροις ἀνοίκειον. Ἐπειδὴ οὖν οἱ Νεππερικοὶ Λογάριθμοι οὐκέτι ἐν χρήσει, τὸ δὲ κοινὸν, καὶ ἐν χερσὶ πάντων Λογαριθμικὸν Σύστημα, τὸ τοῦ Βριγγίου, ὅ καὶ ἐν τοῖς οὕτω καλουμένοις Λογαριθμικοῖς Πίναξιν εὑρίσκεται, περὶ τούτου ἐροῦμεν, καὶ τοῦτο προσηκόντως ἀναπτύξομεν, δεικνύντες, ὅπως δι αὐτοῦ ὑπολογιςέον.

§. 312. Ἀρκτέον οὖν τοῦ οὕτω τούτους ἐκτιθέναι, ἥπερ ἂν ῥᾷςα θεωρηθεῖεν, καὶ ἀναπτυχθεῖεν, κατὰ τοὺς ἐν κοινῇ χρήσει ὄντας Βριγγιανοὺς Λογαρίθμους.

Ἐὰν ὑπὸ Γεωμετρικήν τινα Πρόοδον, (§. 254.) ὁποία ἂν ᾖ, ἧς ὁ α΄. ὅρος ἀπὸ 1, ἄρχεται, ἑτέρα Πρόοδος ὑπογραφῇ Ἀριθμητικὴ, (§. 242.) ἧς α΄. ὅρος τὸ 0, ὁποία ἂν ᾖ καὶ αὕτη, ὥςε ὑφ᾽ ἕκαςον ὅρον τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου ἕκαςον τῆς Ἀριθμητικῆς κεῖσθαι, ἕκαςος ὅρος τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου καλεῖται ὁ Λογάριθμος τοῦ ἐπ᾽ αὐτὸν κειμένου ὅρου τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου.

Π. χ. Γεωμετρικὴ Πρόοδος	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256
Ἀριθμητική.	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Ἔνθα ἕκαςος ὅρος τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου τὸν Λογάριθμον παρίςησι τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν ὅρου τῆς Γεωμετρικῆς. π. χ. 5 ὁ Λογάριθμος τυγχάνει τοῦ 32. ἡ 5 ἐμφαίνει, ὅτι 32 ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ ὁ πενταπλασίων ἐςὶ Λόγος τοῦ 1 : 2. Ἐὰν γὰρ οὕτω συνάγωμεν 1 : 2 = 2 : 4 . 2 : 4 = 4 : 8 . 4 : 8 = 8 : 16 . 8 : 16 = 16 : 32. πρόδηλου

λου ἑκάστῳ, ὅτι τοῦτο ὁ ε΄. λόγος. Πέντε γάρ οἱ Λόγοι ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τῶν 32. οἷον 1 : 2. (εἷς) 2 : 4. (δύω) 4 : 8. (τρεῖς) 8 : 16. (τέσσαρες) 16 : 32. (πέντε). Ἐπεὶ δὲ πᾶσαν Γεωμετρικὴν Πρόοδον ἀφ' οἱασοῦν ἂν ἄρχηται ποσότητος, εἰς ἑτέραν ἔχομεν τρέψαι, ἧς ὁ α΄. ὅρος ἀπὸ 1 ἄρχεται, τοῦ νόμου, καὶ τοῦ Λόγου, καθ' οὓς οἱ ὅροι χωροῦσι, μηδόλως τροπὴν ὑφισαμένων. (§. 257.) ἔξεσιν οἱανοῦν Γεωμετρικὴν Πρόοδον εἰς ταύτην ἀνάγειν (τὴν ἀπὸ 1 ἀρχ.). Ἔνθεντοι καὶ εἰκότως ἐκείνην, ὡς τοιαύτην ἂν θεωροίημεν, (ἤτοι ἀπὸ 1 ἀρχ.) καίτοι τοῦτο ἀναγκαῖον μὴ ὄν. Ὡσαύτως οὐ πᾶσα ἀνάγκη τὸ, ὡς ἐν τῷ προτεθέντι παραδείγματι, τὴν Ἀριθμητικὴν Σειρὰν ἀπὸ τοῦ 0 ἄρχεσθαι, (καίτοι τοῦτο ἁπλούςατον, καὶ μάλιςα τῇ φύσει συνᾶδον) οὐδὲ μὲν οὖν τὸ κατὰ τὴν τάξιν τῶν φυσικῶν χαρακτήρων χωρεῖν, κατὰ τὸ παράδειγμα. Καὶ κατ' ἄλλην γὰρ τάξιν τῶν ὅρων (τῆς Ἀριθμ. Σ.) χωρούντων, ἡ τῶν Λόγων πλῆθυς ἂν παραςαίη. Καὶ τούτου δὲ μὴ κειμένου, ἀλλὰ καθόλου τῶν Γεωμετρικῶν, καὶ Ἀριθμητικῶν Σειρῶν ἐμφαινομένων, ὡς

$$\alpha, \quad \alpha\mu, \quad \alpha\mu^2, \quad \alpha\mu^3, \quad \alpha\mu^4, \quad \alpha\mu^5, \quad \alpha\mu^6 \ldots$$

$$\alpha, \; \alpha+\delta, \; \alpha+2\delta, \; \alpha+3\delta, \; \alpha+4\delta, \; \alpha+5\delta, \; \alpha+6\delta \ldots$$

ἐγχωροῦσι μέντοι μεταξὺ τῆς ἀποςάσεως δύω ὅρων τῆς Γεωμετρικῆς Σειρᾶς τοσοῦτοι Λόγοι, ὅσαι διαφοραὶ ἐνυπάρχουσι μεταξὺ τῆς ἀποςάσεως δύω ὅρων τῆς Ἀριθμητικῆς σειρᾶς, καὶ ἡ πλῆθυς τῶν δ, ἢ τῶν διαφορῶν, ἐμφήνειεν ἂν τοῦτο, τῆς ἑτέρας, ἢ καὶ ἑκατέρας τῶν σειρῶν αὐξούσης, ἢ μειουμένης οὔσης, ἢ ἐν γένει, ὅπως ἂν αὗται ἔχωσιν. Ἀλλ' αἱ τοιαῦται θεωρίαι τοῦ ἡμετέρου σκοποῦ ἡμᾶς ἀπάξουσι. λόγος καὶ γὰρ ἐνταῦθα μόνον περὶ τῶν ἁπλουςάτων, καὶ εὐχερεςάτων. Ἀρκτέον οὖν καθόλου Γεωμετρικῆς τινος

Προ-

Προόδου ἀπὸ 1, ὅπερ ἴσαι, τὴν ἀνωτέρω Γεωμετρικὴν διὰ τοῦ α διελοῦσι, καὶ τῆς Ἀριθμητικῆς ἀπὸ τοῦ δ, ὥςε τὸ ἐν ἀρχῇ αὐτῆς α = ο γενέσθαι, καὶ ἁπάντων ἐκπεσεῖν τῶν ὅρων.

Αἱ δὲ Πρόοδοι ἀποδοθεῖεν ὧδε.

Γεωμ. Πρόοδος. $1,\ \mu,\ \mu^2,\ \mu^3,\ \mu^4,\ \mu^5,\ \mu^6\ ..$

Ἀριθ. Πρ. $o,\ \delta,\ 2\delta,\ 3\delta,\ 4\delta,\ 5\delta,\ 6\delta\ ...$

Οποῖαι ἂν ἐνταῦθα παραληφθῶσιν ἄμφω αἱ σειραὶ, εἴτε αὔξουσαι, εἴτε μειούμεναι, ἢ διάφοροι, πάρεςι μέντοι κατανοεῖν, ὅτι ἡ τῶν διαφορῶν πλῆθυς τὸν ἀριθμὸν τῶν λόγων τοῦ 1 : μ δείκνυσιν, ἢ ἡ πλῆθυς τῶν διαφορῶν δεικνύει τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ μ. Τούτου δὲ οὕτως ἔχοντος, ἐὰν καὶ μετὰ τῶν ὅρων τῆς Ἀριθμητικῆς σειρᾶς τὰ αὐτὰ γίνωνται, ἃ καὶ μετὰ τῶν ἐκθετῶν τῶν ὁμοταγῶν δυνάμεων ἐγίνετο. βουλόμενοι τούτους πολλαπλασιάζειν μετ' ἀλλήλων, διαιρεῖν, εἰς καινὰς δυνάμεις ἐξαίρειν, ἢ τὴν ῥίζαν ἐξάγειν, τὸ αὐτὸ ἕξομεν συναγόμενον, ὅπερ κἀκεῖ, καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμητικὸς ὅρος ἐξ ἀνάγκης δηλώσει τὴν ἐπ' αὐτοῦ κειμένην δύναμιν τοῦ μ, ἧς ὁ ἐκθέτης τηλικοῦτος, ἡλίκος ὁ ἀριθμὸς, ἢ ἡ πλῆθυς τῆς διαφορᾶς τούτου τοῦ ἀριθμητικοῦ ὅρου. Θεωρηθήτω ἔτι ἅπαξ ἡ σειρά.

$$1,\ \mu,\ \mu^2,\ \mu^3,\ \mu^4,\ \mu^5,\ \mu^6,\ \mu^7\ ...$$
$$o,\ \delta,\ 2\delta,\ 3\delta,\ 4\delta,\ 5\delta,\ 6\delta,\ 7\delta\ ...$$

Βουλομένοις οὖν μ^2 μετὰ τοῦ μ^4 πολλαπλασιάσαι, προσθετέοι μόνον οἱ τούτων Λογάριθμοι. (ὁμοειδεῖς γὰρ δυνάμεις πολλαπλασιάζειν ἐςὶ τοὺς αὐτῶν ἐκθέτας προςιθέναι) τὸ δὲ κεφάλαιον δείξει τὸν ὅρον τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, τὸν ὑπὲρ τὴν ποσότητα, τὴν ἤδη ἀνακύψασαν, κείμενον. Ὁ τοῦ μ^2 λογάριθμος $= 2\delta$. Ὁ δὲ τοῦ $\mu^4 = 4\delta$. Ὧςε $2\delta + 4\delta = 6\delta$.

Ἐφ' οὗ

Ἐφ' οὗ μ^6 τυγχάνει. Ἀλλὰ καὶ μ^2, καὶ μ^4 ὡσαύτως δώσει μ^6. Παραπλησίως, καὶ εἰ τὰς δυνάμεις τοῦ μ δι' ἀλλήλων διαιρεῖν πρόκειται, ἔξεςιν ἀφαιρεῖν μόνον τοὺς τούτων Λογαρίθμους. Οὕτως ἂν εἴη $\mu^5 : \mu^3$, λογαριθμικῶς θεωρηθὲν, $5\delta - 3\delta = 2\delta$, ἐφ' οὗ μ^2 κεῖται. καὶ $\mu^5 : \mu^3 = \mu^2$. (§. 194.) Εἰ δέοι τὰς δυνάμεις τοῦ μ εἰς καινὰς δυνάμεις ἐξᾶραι, ποιοῦμεν τοῦτο, κατὰ τὸ (§. 192.) Ἔξεςι μέντοι κἀνταῦθα μόνον τοὺς τούτων Λογαρίθμους μετὰ τοῦ τοιούτου ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζειν. π. χ. Ἀρθήτω μ^2 εἰς τὴν γ'. δύν. Ὁ τούτου Λογάριθμος $= 2\delta$. Ὅς ἐπὶ τὸν 3 πολλαπλασιασθεὶς 6δ παρέχει, καὶ ἡ δύναμις τοῦ μ, τοῦ ἐπὶ τοῦ 6δ, $= \mu^6$. καὶ μ^2 εἰς τὴν γ'. ἀρθὲν δύν: $= \mu^6$. Οὕτω καὶ ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης, ἥτις, ὡς γνωςὸν, ἡ διαίρεσις ἐςὶ τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῆς ῥίζης, (§. 200.) διὰ τῶν Λογαρίθμων τελεσθήσεται. π. χ. $\sqrt[3]{\mu^6}$. Ὁ τοῦ μ^6 Λογάρ. $= 6\delta$. Ὃ διὰ 3 διαιρεθὲν ἔςαι $= 2\delta$. ἐφ' οὗ μ^2 κεῖται $= \sqrt[3]{\mu^6}$. (ἔςι γὰρ $\sqrt[3]{\mu^6} = \mu^{\frac{6}{3}} = \mu^2$). Ὁρᾶν οὖν πάρεςιν, ὅπως ὁ Πολλαπλασιασμὸς εἰς Πρόσθεσιν τῶν Λογαρίθμων, ἡ Διαίρεσις εἰς τὴν τούτων Ἀφαίρεσιν, ἡ εἰς δυνάμεις ἔξαρσις εἰς πολλαπλασιασμὸν, καὶ ἡ Ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης εἰς διαίρεσιν αὐτῶν μεταβάλλεται, καὶ ὅπως οἱ Λογάριθμοι, καθόλου θεωρούμενοι, ὡς ἐνεργεία ἐκθέται τῶν Δυνάμεων ποσότητος οἱασοῦν ἔχουσι θεωρεῖσθαι.

§. 313 Παραληφθέντος ἤδη ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω δύω Σειρῶν ὁποιουοῦν ἑτέρου σειρῶν, ἡ Προόδων εἴδους, ἁρμόσουσι καὶ τούτοις ἀναγκαίως τὰ ῥηθέντα. Ἔςω ἡ Γεωμετρικὴ Σειρὰ 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 ... ἡ δὲ Ἀριθμητικὴ, ἡ οἱ Λογάρ. 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 ... Εἶεν ἂν οὖν οἱ τοῦ 3 . 27 λογάριθμοι $2 + 6 = 8$. Οὗτος δὲ (ὁ Λογ. 8) προσήκει τῷ 81, ὅς καὶ $=$

3 . 27. Αὖθις τοῦ $\frac{243}{27}$ οἱ λογ. $= 10 - 6 = 4$. Ὅτι ὁ τοῦ 243 λογάρ. $= 10$, ὁ δὲ τοῦ $27 = 6$, ἐν τῷ ἡμετέρῳ ἤδη παραληφθέντι Συςήματι. Ὁ δὲ λογάρ. 4 ἀνήκει τῷ $9 = \frac{243}{27} = 9$.

Ὡσαύτως 3 εἰς τὴν δ'. ἀρθὲν δύναμιν εἴη ἂν λογαριθμικῶς, ὁ Λογάρ. τοῦ 3 μετὰ τοῦ 4 πολλαπλασιασθείς. Ὥςε $2 \cdot 4 = 8$. ὅς λογάριθμος ὑπὸ τὸν 81 κεῖται. Ὅς $= 3^4$. Καὶ $\sqrt{729}$ εἴη λογαριθμικῶς, λογάρ. τοῦ 729 διαιρεθεὶς διὰ 2. Ἀλλὰ λογάρ. τοῦ 729 ἐςὶ 12. ὅς διὰ 2 διαιρεθεὶς δίδωσι τὸν λογάρ. 6 τῷ 27 προσήκοντα $=$ τῇ $\sqrt{729}$.

Ἀλλὰ καὶ ἑτέρου Λογαριθμικοῦ πειρασώμεθα Συςήματος, ἑτέρων τεθεισῶν Σειρῶν (ὅπερ Λογαριθμικὸν ἀκούει Σύςημα)

Γεωμετρική. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256} \ldots$

Ἀριθμητ. ἢ

Λογάριθμοι $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots$

Ὥςε $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64}$ λογαριθμικῶς ὑπολογισθὲν $= 1 + 6 = 7 =$ τῷ λογαρ. τοῦ $\frac{1}{128}$. Τοῦτο δὲ προκύπτει, καὶ ἐὰν $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64}$ δι' ἀλλήλων πολλαπλασιασθῇ. (§. 141.) Παραπλησίως καὶ $\frac{1}{64} : \frac{1}{8}$ λογαριθμικῶς $= 6 - 3 = 3 =$ τῷ λογαρίθμῳ τοῦ $\frac{1}{8}$. Ὃ προκύπτει καὶ τοῦ $\frac{1}{64} : \frac{1}{8}$ ἐνεργείᾳ διαιρεθέντος. (148.) κτ.

§. 314. Καὶ συνήσει μὲν πᾶς τις, ὡς οἶμαι, καλῶς, ὡς ἐπὶ τῶν ὅρων ταύτης, ἢ ἐκείνης τῆς σειρᾶς τῆς Γεωμετρικῆς διὰ τῶν Λογαρίθμων ὑπολογίσασθαι δυνάμεθα, ἀλλ' ἀπορήσειεν, ὅπως οἱ λογάριθμοι τῶν ὅρων εὑρεθεῖεν, τῶν μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς παραληφθείσης Γεωμετρικῆς σειρᾶς ἐμπιπτόντων. π. χ.

ἐν

ἐν τῇ σειρᾷ. 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 . . οἱ λογάριθμοι τῶν μὴ παρόντων ὅρων, τουτ: τῶν 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10 κτ. ὥςε ἐν γένει καὶ τούτοις Λογαριθμικῶς πᾶν εἶδος ὑπολογισμοῦ ἐφαρμόζεσθαι, ὃ δήπου εὐχερεςέρας ποιεῖται τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, ἐν πάνυ πολυαρίθμοις παραδείγμασι Πολλαπλασιασμοῦ, Διαιρέσεως, κτ. Εἰς λύσιν τούτου, καὶ εἰς τὸ καθόλου τὴν περὶ τούτων ἔννοιαν ἐναργεςέραν λαβεῖν, τὸ Βριγγιανὸν Σύςημα θεωρητέον, ἑρμηνευτέον τε, καὶ δεικτέον τὸν τρόπον, καθ᾽ ὃν τοὺς λογαρίθμους ἁπάντων τῶν ἀριθμῶν κατὰ τοῦτο τὸ σύςημα εὑρήσομεν, καὶ τοῖς αὐτοῦ ἐκδοθεῖσι Πίναξι τῶν Λογαρίθμων χρῆσθαι δυνησόμεθα.

§. 315. Ἐνρῖκος Βρίγγιος συμβουλίᾳ τῇ τοῦ Βαρώνου Νεππέρου, ὡς εἴρηται, ἕτερον τοῦ Νεππερικοῦ Λογαριθμικὸν ἐξηριθμήσατο Σύςημα, ἐν ᾧ τὸν Λόγον (§. 2 2.) 1 : 0, ὡς ἁπλοῦν ἐκλαβόμενος, (καὶ τὴν ἀριθμητικὴν Πρόοδον τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν, ἧς ἀπὸ τοῦ 0 ἤρξατο, καὶ εἰς τὴν 1, 2, 3, 4, κτ. προηγάγετο) ἐκ τούτου τὴν Γεωμετρικὴν διωρίσατο πρόοδον. Ἀνέκυψεν οὖν ἡ ἑξῆς Γεωμετρικὴ, καὶ Ἀριθμητικὴ Πρόοδος

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, κτ.
0, 1, 2, 3, 4, 5 . .

Ἡ Ἀριθμητικὴ αὕτη Πρόοδος, ἢ οἱ Λογάριθμοι τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, οἱ ἀληθεῖς ἐκθέται τυγχάνουσι τῶν δυνάμεων τοῦ 10. Ὡς καὶ τὸ 0 ὑπὸ τὴν μονάδα ταύταις ἀνήκει. Ἔςι γὰρ $10^0 = 1$. (§. 198.) Ἦν οὖν ἀναγκαῖον μετὰ τοῦτο, ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Σειρᾷ τῶν Φυσικῇ τάξει ἀλλήλους διαδεχομένων ἀριθμῶν τοὺς Λογαρίθμους εὑρεῖν Μεταξὺ τῆς 1 καὶ 10 ἐλλείπουσιν ἔτι 8 χαρακτῆρες, μεταξὺ τῶν 10, καὶ 100 ἔτι πλείους, καὶ ἔτι πλείους μεταξὺ τῶν λοιπῶν όρων. Ἀλλ' ἅπαντες οἱ ἀριθμοὶ (οἱ ἐλλείποντες) θεωρηθεῖεν ἂν ὡς δυνάμεις τοῦ ο. Ὅτι μεταξὺ 1 καὶ 10, ἢ ὅ ταυτὸν, μεταξὺ τοῦ 10^0 καὶ 10^1, καὶ ἑτέρας μυρίας δυνάμεις νοεῖν ἔχομεν, ὧν οἱ ἐκθέται ἐλάττους τῆς 1, καὶ μείζους τοῦ 0. Οὕτω καὶ μεταξὺ τοῦ 10^1 καὶ 10^2, ἤτοι μεταξὺ τοῦ 10 καὶ 100, καὶ ἄλλοι μυρίοι ἀριθμοὶ, ὧν ἡ δύναμις ὑπερέχει μὲν τὴν 1, ὑπερέχεται δὲ ὑπὸ τοῦ 2. Ἐκ τούτων δῆλον, ὅτι ἅπαντες οἱ Ἐκθέται τῶν δυνάμεων, τουτ: ἅπαντες οἱ ὅροι τῆς Ἀριθμητικῆς Σειρᾶς, ἢ ἅπαντες οἱ Λογάριθμοι τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ 1 καὶ 10 γνήσιά εἰσι κλάσματα, ὡς ἐλάσσους ὄντες τῆς 1. καὶ ἅπαντες οἱ Λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν, τῶν ὑπὲρ 10, ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ, προσηρτημένα ἑαυτοῖς καὶ κλάσματα ἔχοντες, ὅ ἐςι νόθα κλάσματα. (τῶν ὁλοσχερῶν, καὶ τῶν κλασμάτων εἰς κλάσμα γεγονότων) οὕτω π. χ. ἅπαντες οἱ ἀριθμοὶ μεταξὺ 10, καὶ 100, ἔχουσι λογάρ. τὴν 1, καὶ κλάσμα. ὅτι μόνον ἐπὶ τοῦ 100 ὁ Λογάριθμος 2 γίνεται, κτ. Τούτους δὲ τοὺς ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς, καὶ τὸ 0, τοὺς παρὰ τοῖς Λογαρίθμοις κειμένους, τὸ τούτων Χαρακτηριςικὸν ἀποκαλοῦσι, καὶ παρὰ τούτῳ (τῷ χαρ.) ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν (πλὴν τῶν ἐν τῇ σειρᾷ ἀπαντώντων, ἤτοι τοῦ 10, 100, 1000, 10000, τῶν ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς λογαρίθμους ἐχόντων) κεῖται τὸ κλάσμα. Ἐὰν οὖν τὸ κλάσμα ἐν γένει διὰ $\frac{\mu}{\nu}$ ἐκδηλωθῇ, εἴη ἂν π. χ. ὁ τοῦ 5 λογάρ. $= 0 + \frac{\mu}{\nu}$. ὁ τοῦ 45 $= 1 + \frac{\mu}{\nu}$, κτ. Ἐπεὶ δὲ οἱ Ἐκθέται τῶν δυνάμεων ἁπάντων τῶν ἀριθμῶν, (ἢ οἱ τούτων λογάριθμοι) τῶν μεταξὺ ἐκείνων (τῶν ἀρ:) κειμένων, οἷς ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς τὸ Χαρακτηριςικὸν, ἢ ἡ δύναμις, ὡς ἐνεργείᾳ δυνάμεις τοῦ 10

θεω-

θεωρητέοι, τόδε τὸ κλάσμα πάντη ἐπ' ἀκριβὲς ἐκδηλῶσαι ἀμήχανον. Ἔνθεντοι ἀρκεῖσθαι χρὴ τῷ ὡς ἔγγιςα γίνεσθαι τῆς κλασματικῆς δυνάμεως, ἡ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν, τῶν μεταξὺ τῶν ὅριων τῆς σειρᾶς ἐμφιλοχωρούντων. Ταύτητοι τὰ δεκαδικὰ παρείληπται κλάσματα. τῷ Χαρακτηριςικῷ προσαφθέντα, μέχρι τῶν 7 ἐν τοῖς ἐκδεδομένοις ἐλάσσοσι Πίναξιν ὑπολογιςευθέντα, πλὴν τοῦ χαρακτηριςικοῦ. Ὥςε, εἰ καὶ οὐδεὶς λογάριθμος παντάπασιν ἀκριβής, εἰ μὴ μόνον οἱ τῶν δυνάμεων τοῦ 10, ἤτοι τῆς 1, 10, 100, 1000, κτ. τὸ παράπτωμα οὐδὲ δεκαμιλλιοςημορίῳ ἐξισοῦσθαι.

§. 316. Ἀλλὰ πῶς εὕρηνται οἱ Λογάριθμοι; ἐργωδεςάτῳ τινόντι, καίτοι μὴ δυσχερεςάτῳ τῷ τρόπῳ. Διὰ ζητήσεως ἀμέλει τῶν μέσων ἀναλόγων ἀριθμῶν, μεταξὺ τῆς Ἀριθμητικῆς, καὶ Γεωμετρικῆς Σειρᾶς, οἵτινες μέχρις 7 δεκαδικῶν ἐζητοῦντο κλασμάτων, (ἐν τοῖς ἐν χρήσει οὖσι δηλονότι Πίναξι) μέχρις οὗ τελευταῖον ἀριθμῷ ἐνέτυχον, οὕτως ἐγγὺς ὄντι τοῦ ζητουμένου, ὥςε τὸ διάπτωμα μηδὲ $\frac{1}{10000000}$ (§. ἀνωτ.) εἶναι, ὃν καὶ ὡς ἀληθῆ παρέλαβον, πρὸς ᾧ καὶ ὁ τούτου λογάριθμος προέκυπτεν, ὃν διὰ ζητήσεως τοῦ μέσου ἀριθμητικῶς ἀναλόγου ἀριθμοῦ εὗρον. ("Ηδη δ' ἐπινενόηνται μέθοδοι ἕτεραι τοὺς λογαρίθμους εὑρίσκειν εὐχερέςεραι, ὑπὸ τῶν τοὺς Πίνακας καταγραψαμένων ἀγνοούμεναι.) Ζητητέος οὖν, ἵνα τὸ ῥηθὲν παραδειγματίσωμεν, ὁ τοῦ 9 λογάρ. καὶ ὅπως οἱ ἀναγνῶςαι τῆς ἐργώδους πράξεως, ἥπερ οἱ πρῶτον τούτους εὑρόντες ἐχρήσαντο, μὴ ἄπειροι ὦσι. Κατὰ τὸ (§. 241.) ἐὰν ζητῆται ὁ μέσος γεωμετρικῶς ἀνάλογος ἀριθμὸς, τῶν δύω ἄκρων δοθέντων, οἵτινες α καὶ β ἐνταῦθα κληθήτωσαν, προβαίνομεν τόνδε τὸν τρόπον. $\alpha : \chi = \chi : \beta$. Ὥςε $\chi^2 = \alpha\beta$. (§. 238.) καὶ ἀμφοῖν τῆς ῥίζης ληφθείσης $\chi = \sqrt{\alpha\beta}$.

$\sqrt{\alpha\beta}$. Εἰς εὕρεσιν οὖν τοῦ μέσου γεωμετρικῶς ἀναλόγου ἀριθμοῦ πολλαπλασιαςέοι μετ' ἀλλήλων οἱ δύω δοθέντες ἄκροι ὅροι, καὶ ἐκ τοῦ παραγομένου ἐξακτέα ἡ $\sqrt[2]{}$. Τὸν δὲ μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον εὑρίσκομεν, κατὰ τὸ (§. 221.) ἐὰν οἱ ἄκροι γ καὶ δ ῥηθῶσι, $\gamma - \chi = \chi - \delta$. διὰ τὸ (§. 218.) ἔςαι $\chi + \chi$, ἢ $2\chi = \gamma + \delta$. Καὶ ἀμφοῖν διὰ 2 διαιρεθέντων, εὑρίσκεται τὸ $\chi = \frac{\gamma + \delta}{2}$. Ὥςε προςθετέοι α'. οἱ δύω ἄκροι, καὶ εἶτα τὸ κεφάλαιον διαιρετέον διὰ 2. Οὕτως οὖν προκύπτει ὅ, τε μέσος γεωμετρικῶς ἀνάλογος, καὶ ὁ τούτου λογάριθμος. Προκειμένων τοίνυν δύω δυνάμεων τοῦ 10, π. χ. 10^{ν}, καὶ $10^{\nu+1}$, ὧν μεταξὺ ὁ μέσος ἀνάλογος ζητεῖται, οὕτω χωρητέον. $10^{\nu} : \chi = \chi : 10^{\nu+1}$. Ἔνθεντοι $10^{\nu} . 10^{\nu+1} = \chi^{2}$. Ἀλλὰ $10^{\nu} . 10^{\nu+1} = 10^{\nu+\nu+1} = 10^{2\nu+1}$. Ἄρα $10^{2\nu+1} = \chi^{2}$. καὶ τῆς ῥίζης ἀμφοῖν ἐξαχθείσης $\sqrt[2]{10^{2\nu+1}} = \chi$. Ἔςι δὲ $\sqrt[2]{10^{2\nu+1}} = 10^{\frac{2\nu+1}{2}}$. Ἄρα $10^{\frac{2\nu+1}{2}} = \chi$. Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ καινοῦ μέσου ἀριθμοῦ οἱ λογάριθμοι τῶν δύω προτέρων τυγχάνουσιν ἀλλήλοις προςτεθειμένοι, καὶ διὰ 2 διῃρημένοι. Ὁ δὲ μέσος καινὸς ἀριθμὸς οἱ δύω πρότεροι πολλαπλασιασθέντες, καὶ τῆς ῥίζης τούτων ἐξαχθείσης, ὅ καὶ ἀνωτ. ἔφημεν.

§. 317. Πειρασώμεθα ἤδη τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ 9 μέχρις ἑπτὰ δεκαδικῶν ζητῆσαι. Διὸ καὶ τοῖς δεδομένοις ἀριθμοῖς τῆς Γεωμετρικῆς, καὶ Ἀριθμητικῆς Προόδου 7 μηδενικὰ προσαφθήτω, ὡς 7 μέντοι δεκαδικὰ κλάσματα, ἅτινα ὡς μηδενικὰ οὐδὲν σημαίνει, καὶ τοὺς ἀριθμοὺς ἥκιςα μεταβάλλει. Οἱ δύω δοθέντες ἀριθμοὶ τῆς Γεωμετρικῆς προόδου, ὧν μεταξὺ 9 ἐμπίπτει, 1 καὶ 10 εἰσίν. Ὅθεν συνάγομεν $1,0000000 : \chi = \chi : 10,0000000$. Ὥςε $\chi^2 = 10,00000000000000$. Καὶ $\chi = \sqrt{10,00000000000000}$. Ἡ δὲ $= 3,1622777$.. ἐν ἑπτὰ δεκαδικοῖς. Ὁ δὲ ὁ μέσος ἀνάλογος τυγχάνει. Ὁ δὲ τούτου λογάριθμος εὑρίσκεται οὕτως. Ἐπεὶ ὁ τῆς 1 λογάρ. $= 0$, ὁ δὲ τοῦ 10 ἡ 1, ἐν ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ συνάξομεν ὧδε $\div 0 \cdot \chi = \chi - 1$. Ἄρα $0 + 1 = 2\chi$. ἢ $1 = 2\chi$. Ὥςε $\chi = \frac{1}{2}$. Ταύτητοι τῇ 1 προσαφθήτω καὶ 7 μηδενικά, καὶ εἶτα διαιρεθήτω. Ἔνθεντοι $\frac{10000000}{2} = 0,5000000$. Εὕρηται τοίνυν ὁ μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς μεταξὺ 1 καὶ 10, καὶ ὁ τούτου λογάριθμος. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς ἐςὶν ὁ 3,1622777..., ὁ δε τούτου λογάριθμος 0,50000000. Ἀλλ' οὗτος οὐκ ἔςιν ὁ ζητούμενος 9 μετὰ τοῦ ἰδίου λογαρίθμου· Ζητείσθωσαν οὖν αὖθις οἱ μέσοι ἀνάλογοι γεωμετρικῶς τε καὶ ἀριθμητικῶς μεταξὺ τοῦ εὑρεθέντος, καὶ τοῦ 10. Ἀναγκαῖον μέντοι αὖθις τὸν εὑρεθέντα ἀριθμόν, καὶ 10 μεθ' ἑπτὰ προσηρτημένων δεκαδικῶν μηδενικῶν δι' ἀλλήλων πολλαπλασιάζειν, καὶ ἐκ τοῦ παραγομένου τὴν $\sqrt[2]{\ }$ ἐξάγειν, καὶ οὕτω προκύψει αὖθις ὁ μέσος γεωμετρικὸς μεταξὺ 3,1622777 καὶ 10. Εἶτα προςίθενται οἱ λογάριθμοι τῶν δύω ἀριθμῶν, καὶ τὸ τούτων κεφάλαιον διαιρεῖται διὰ 2, τὸ δὲ πηλίκον ἔςαι ὁ λογάριθμος τοῦ καινοῦ μέσου γεωμετρικῶς ἀναλόγου.

π. χ. $3,1622777 \cdot 10,0000000 =$

31, 62277700000000. ἡ δὲ ῥίζα τούτου μέχρις 7 δεκαδικῶν = 5,6234132. Ὁ τούτου λογάρ. ὁ λογάρ. ἐςὶ τοῦ προτέρου ἀριθμοῦ, προςεθεὶς τῷ τοῦ 10 λογαρίθμῳ, τοῦ κεφαλαίου διὰ 2 διαιρεθέντος, ἤτοι

$$\frac{0,5000000 + 1}{2} = \frac{1,5000000}{2} =$$

0, 7500000. Οὗτος δ' αὖθις οὐχ ὁ 9, καὶ ὁ τούτου λογάρ. Ὥςε πάλιν ζήτησον τὸν μέσον ἀνάλογον μεταξὺ 10, καὶ 5, 6234132, καὶ τὸν τούτου λογάριθμον, καὶ οὕτω χωρῶν εἰς ζήτησιν τοῦ μέσου ἀναλόγου μεταξὺ δύω ἀριθμῶν, καὶ τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ, εἰς τὸν ζητούμενον τελευταῖον καταντήσεις, ὅς, ἀντὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ἐξαχθείσης τῆς ῥίζης, μεθ' ἑαυτὸν ἔχει μόνον τοσαῦτα μηδενικά. Ἐν τῷ ἐχομένῳ Πίνακι δείκνυται οὕτως ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ 9 σὺν τῷ ἰδίῳ λογαρίθμῳ, ἔνθα ὁ μέσος ἀριθμὸς ἑκάςου ὀρθογωνίου, ὁ προκύπτων μέσος ἀνάλογος τυγχάνει, τὰ δὲ γράμματα ἐμφαίνει, μεταξὺ τίνων ζητεῖται, καὶ ὅπως μεταξὺ τοῦ εὑρεθέντος μέσου, καὶ τοῦ ἑτέρου, τοῦ διδομένου, αὖθις ὁ καινὸς ζητεῖται. Ἐν τῇ β'. ςήλῃ παράκεινται οἱ λογάριθμοι τῶν εὑρεθέντων ἀριθμῶν.

	Μέσοι γεωμετρικῶς ἀνάλογοι ἀριθμοί.	Οἱ τούτων λογάριθμοι.
α	1,0000000	0,00000000
γ	3,1622777	0,50000000
β	10,0000000	1,00000000
β	10,0000000	1,00000000
δ	5,6234132	0,75000000
γ	3,1622777	0,50000000

γ β

	Μέσοι γεωμετρικῶς ἀνάλογοι ἀριθμοί.	Οἱ τούτων λογάριθμοι.
β	10,0000000	1,00000000
ε	7.4989421	0.875000000
δ	5,6234132	0,75000000
β	10,0000000	1,00000000
ζ	8,6596432	0,93750000
ε	7,4989421	0,875000000
β	10,0000000	1,00000000
η	9,3057204	0,96875000
ζ	8,6596432	0,93750000
η	9,3057204	0,96875000
ϑ	8,9768713	0,95312500
ζ	8,6596432	0,93750000
η	9,3057204	0,96875000
ι	9,1398170	0,96093750
ϑ	8,9768713	0,95312500
ι	9,1398170	0,96093750
κ	9,0579777	0,95703125
ϑ	8,9768713	0,95312500
κ	9,0579777	0,95703125
λ	9,0173333	0,95507812
ϑ	8,9768713	0,95312500
λ	9,0173333	0,95507812
μ	8,9970796	0,95410156
ϑ	8,9768713	0,95312500
λ	9,0173333	0,95507812
ν	9,0072008	0,95458984
μ	8,9970790	0,95410156

	Μέσοι γεωμετρικῶς ἀνάλογοι ἀριθμοί.	Οἱ τούτων λογάριθμοι
ν	9,0072008	0,95458984
ο	9,0021388	0,95434570
μ	8,9970796	0,95410156
ο	9,0021388	0,95434570
π	8,9996088	0,95422363
μ	8,9970796	0,95410156
ο	9,0021388	0,95434570
ϙ	9,0008737	0,95428467
π	8,9996088	0,95422362
ϙ	9,0008737	0,95428467
ρ	9,0002412	0,95425415
π	8,9996088	0,95422363
ρ	9,0002412	0,95425415
σ	8,9999250	0,95421889
π	8,9996088	0,95422363
ρ	9,0002412	0,95425415
τ	9,0000831	0,95424652
σ	8,9999250	0,95423889
τ	9,0000831	0,95424652
υ	9,0000041	0,95424271
σ	8,9999250	0,95423889
υ	9,0000041	0,95424271
χ	8,9999650	0,95424080
σ	8,9999250	,95423889
υ	9,0000041	0,95424271
ψ	8,9999845	0,95424217
χ	8,9999650	0,95424080

	Μέσοι γεωμετρικῶς ἀνάλογοι ἀριθμοί.	Οἱ τούτων λογάριθμοι.
υ	9,0000041	0,95424271
ω	8,9999943	0,95424223
ψ	8,9999845	0,95424217
υ	9,0000041	0,95424271
a	8,9999992	0,95424247
ω	8,9999943	0,95424223
υ	9,000 041	0,95424271
b	9,0000016	0,95424259
a	9,9999992	0,95424247
b	9,0000016	0,95424259
c	9,0000004	0,95424253
a	8,9999992	0,95424247
c	9,0000004	0,95424253
d	8,9999998	0,95424250
a	8,9999992	0,94424247
c	9,0000004	0,95424253
e	9,0000000	0,95424251
d	8,9999998	0,95424250

Ἔνθα ὁ τελευταῖος μέσος ἀνάλογος, ὁ παρὰ τῷ e κείμενος, οὕτως ἐγγὺς τοῦ 9, ὥςε τὸ διάπτωμα μηδὲ δεκαμιλλιοςημορίῳ ἐξισοῦσθαι. Ὥςε δυνάμεθα τοῦτον ἀντὶ τοῦ 9 λαβεῖν. Ὁ δὲ τούτου λογάριθμος, ὁ παρ' αὐτῷ ἀριθμός. 0,95424251. Προὐχώρησαν δὲ οἱ Λογάριθμοι μέχρι τῶν 8 δεκαδικῶν, ἐπειδὴ τελευταῖον οἱ λογάριθμοι ἐν τοῖς πρώτοις ἑπτὰ δεκαδικοῖς ἴσοι ἀλλήλοις γίνεσθαι ἄρχονται.

Οὕτως ἐργώδει τῷ τρόπῳ ὑπελογίσθησαν οἱ λογάριθμοι πλειόνων ἀριθμῶν, ἀλλ' οὐ πάντων. Ἀναγκαῖον

ναγκαῖον γάρ ἦν μόνον τοὺς λογαρίθμους τῶν ὁλοσχερῶν εὑρεῖν, τῶν εἰς παράγοντας κατατμηθῆναι μὴ δυναμένων, καὶ διὰ τοῦτο Πρώτων Ἀριθμῶν καλουμένων. (§. 105.) π. χ. 2, 5, 7, 11, 13, 17, 19, κτ. Καὶ τούτων γὰρ μέγα τὸ πλῆθος μέχρι τῶν 10000 ἀριθμοῦσιν. Οἱ δὲ τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν λογάρ. διαφόροις ἂν εὑρεθεῖεν τοῖς τρόποις, τουτ' διὰ Προσθέσεως, Ἀφαιρ. καὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν εὑρεθέντων λογαρίθμων. Ἐπειδὴ γὰρ Δυνάμεις πολλαπλασιάζειν ἐςὶ τοὺς αὐτῶν ἐκθέτας προςιθέναι, δοθέντων τῶν λογαρ. διαφόρων πρώτων ἀριθμῶν, ὁ εἰδέναι βουλόμενος, τίς τῶν λογαρίθμων τῷ ἐκ τούτων προσήκει παραγομένῳ, προςιθέτω μόνον τοὺς λογαρίθμους. ὅτι ἐν τούτῳ τῷ λογαριθμικῷ Συςήματι ἅπαντες οἱ ἀριθμοὶ δυνάμεις εἰσὶ τοῦ 10. π. χ. 3 . 5 = 15. Προςεθέντος τοῦ λογαρ. τοῦ 5 τῷ τοῦ 3 λογαρ. προκύψει ὁ τοῦ 15 λογάριθμος. Κατὰ τοὺς ἐκδεδομένους Πίνακας

	λογ. 5	=	0,6989700
	λογ. 3	=	0,4771212
Ὥςε	λογ. 15	=	1,1760912

Καὶ ἐὰν τούτῳ ἔτι καὶ τὸν λογ. ἑτέρου ἀριθμοῦ προσθῶμεν, ἕξομεν τὸν λογάρ. τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν οὗτος (ὁ ἑτ. ἀρ.) τῷ 15 πολλαπλασιασθεὶς παράξει. π. χ. 9 . 15 = 135.

Ὥςε τῷ λογ. τοῦ	15	=	1,1760912
προςεθεὶς ὁ λογ. τοῦ	9	=	0,9542425
δίδωσι τὸν λογ. τοῦ	135	=	2,1303337

Ἀλλὰ καὶ δι' Ἀφαιρέσεως εὑρεῖν αὐτοὺς ἔχομεν, δεδομένων τινῶν. Ὁμοειδεῖς γὰρ Δυνάμεις διαιρεῖν ἐςὶ τοὺς αὐτῶν ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεῖν ἐκθέτας. (§. 194.)

π. χ.

π. χ. λ. 10 = 1,0000000. Δοθέντος οὖν καὶ τοῦ λογ. 5 = 0,6989700, εἴη ἂν ὁ λογ. $\frac{10}{5}$, ἢ λογ. 2 = τῷ λ. 10 — λ. 5. ἤτοι

$$\begin{array}{lcl} \lambda.\ 10 & = & 1,0000000 \\ \lambda.\ \ 5 & = & 0,6989700 \quad \text{ἀφαιρ.} \\ \hline \lambda.\ \ 2 & = & 0,3010300 \end{array}$$

Ὡσαύτως καὶ διὰ Πολλαπλασιασμοῦ. Δυνάμεις γὰρ εἰς καινὰς αἴρειν δυνάμεις ἐςι πολλαπλασιάζειν αὐτὰς τῷ ἀριθμῷ τῷ ἐμφαίνοντι, εἰς ἡλίκην δύναμιν αὐτὰς ἐξαρθῆναι δέοι. Τούτου δὲ γεγονότος μόνον διὰ τῶν λογαρίθμων, ἕξομεν τὸν λογάριθμον τῆς Δυνάμεως. π. χ.

$$9 \cdot 9 = 9^2 = 81. \quad \text{Ἔςι δὲ}$$

$$\begin{array}{rl} \text{ὁ } \lambda \cdot 9 = & 0,9542425 \\ \text{πολλαπλ. μετὰ} & 2 \\ \hline \text{δίδωσι } \lambda.\ 81 = & 1,9084850. \end{array}$$

Οὕτω καὶ ὁ λογάρ. τοῦ 9 πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν 3, δώσει τὸν λογάρ. τοῦ $9^3 = 729$. Ὃς ἔςαι

$$\begin{array}{rl} \lambda \cdot 9 = & 0,9542425 \\ & 3 \\ \hline = & 2,8627275 = \lambda.\ 729. \end{array}$$

§. 318. Οἱ λογάριθμοι τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ μετὰ τοῦ 10, ἢ μετὰ δυνάμεων τοῦ 10 πολλαπλασιασθέντος, μένουσιν οἱ αὐτοὶ τοῖς, οἳ τῷ ἀριθμῷ ἐνυπῆρχον, εἰ μὴ ὅτι τὸ χαρακτηρις ικὸν μεταβάλλεται, καὶ μονάδι, ἢ τοσαύταις μονάσι προσαυξει, ὅσας ὁ ἐκθέτης τῶν τοῦ 10 δυνάμεων, μεθ' ὧν ἐπολλαπλασιάσθη, μονάδας περιέχει. ὅπερ οὐ δυσκατανόητον

τον τῷ διανοουμένῳ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ λογαριθμικῶν ὑπολογισμῶν εἰς πρόσθεσιν μεταβάλλεσθαι, καὶ τὰς τοῦ 10 δυνάμεις μόνον 1, 2, 3, 4, 5, κτ. ἤτοι μόνον ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν ἄνευ παρηρτημένου κλάσματος λογάριθμον, ἔχειν. Οὕτω π. χ. λ. 20 = λ. 2 + λ. 10 = 0,3010300 + 1 = 1,3010300. Ὅτι 20 = 2 . 10. Καὶ λ. 200 = λ. 2 + 100 = 0,3010300 + 2 = 2,30103000. Ὅτι 200 = 2 . 100, κτ. Παραπλησίως λ. 810 = λ. 81 + λ. 10 = 1,9084850 + 1 = 2,9084850. Ὅτι 810 = 81 . 10, κτ.

Ὡσαύτως καὶ ἑκάστη ποσότης, ἡ διὰ τῶν δυνάμεων τοῦ 10 διαιρουμένη, τὸν αὐτὸν τηρεῖ λογάριθμον, πλὴν ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτῆς τοσαύταις μονάσι μειοῦται, ὅσαις ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ 10 μεμείωται. ὡς λ. 2700 = 3,4313638. Ὥστε λ. 270 = λ. 2700 — λ. 10 = 3,4313638 — 1 = 2,4313638. καὶ λ. 27 = λ. 2700 — λ. 100 = 3,4313638 — 2 = 1,4313638. καὶ λ. 2,7. = λ. 27 — λ. 10 = 1,4313638 — 1 = 0,4313638, κτ.

§. 319. Ἐκ τούτων οὖν πᾶς τις ἐπιγνοίη ὅτι ἐπὶ λογαριθμικῶν ὑπολογισμῶν πᾶς Πολλαπλασιασμὸς μεταβάλλεται εἰς Πρόσθεσιν, ἡ Διαίρεσις εἰς Ἀφαίρεσιν, ἡ εἰς Δυνάμεις ἔξαρσις εἰς Πολλαπλασιασμόν. (§. 317.) παραπλησίως καὶ ἡ τῶν Ῥιζῶν ἐξαγωγὴ εἰς Διαίρεσιν τῶν Λογαρίθμων. ἤπου γὰρ οἴδαμεν, Δυνάμεις διὰ Ῥιζικῶν διαιρεῖν Ἐκθετῶν τὴν ῥίζαν ἐστὶν ἐξάγειν. π. χ. ὁ τοῦ 49 λογ. = 1,690 961. Ἄρα ὁ λογ. $\sqrt[2]{49} = \lambda.\ 49^{\frac{1}{2}} = \lambda.\ \frac{49}{2}$. ἢ

1,690.

$\frac{1,6901961}{2} = 0,8450980$. Καὶ οὗτός ἐςιν ὁ λογ. $\sqrt{49}$. Οὗ ἐν τοῖς Πίναξι ζητηθέντος, περὶ ὧν μετὰ ταῦτα ἔςαι λόγος, εὑρήσομεν τὸν τούτῳ προσήκοντα ἀριθμὸν εἶναι τὸν $7 = \sqrt{49}$. Ὡσαύτως λ. $\sqrt[4]{256}$ = λ. $\frac{256}{4} = \frac{2,4082400}{4} =$ $0,6020600$ = λ. 4. ὅς $(4) = \sqrt[4]{256}$.

§. 320. Πρὶν ἢ περὶ τῶν διαφόρων ὑπολογισμῶν διὰ τῶν λογαρίθμων εἰπεῖν τὰ κατὰ σκοπὸν τῆσδε τῆς βίβλου, δεικτέα πρῶτον ἡ τάξις, καὶ χρῆσις τῶν ἐν χρήσει λογαριθμικῶν Πινάκων. Ἐνρῖκος Βρίγγιος ὑπελογίσευσε τῷ εἰρημένῳ τρόπῳ τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 20000 καὶ ἀπὸ 90000 μέχρι τῶν 100000. Ὀλλανδός δέτις, Ἀδριανὸς Φλάκκος μετὰ τοῦτον, ἐξηριθμήσατο τοὺς τῶν ἀριθμῶν λογαρίθμους ἀπὸ τῶν 20000, μέχρι τῶν 90000, ἐκδοὺς αὐτοὺς, ἐν 1628, ὥςε προκύψαι τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 100000. Μετὰ ταῦτα καὶ ἑτέρα τις ἐφάνη Ἔκδοσις, περιέχουσα καὶ τοὺς Βριγγιανοὺς, καὶ Φλακκιανοὺς λογαρίθμους ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 101000, ἐν 1742. Εἰσὶ μέντοι καὶ ἕτεραι ἐκδόσεις, ὧν αἱ μᾶλλον εὐπόριςοι αἱ ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 10000 χωροῦσαι, οὕτω τάξεως ἔχουσαι. Ἐν ἀρχῇ πρόκεινται οἱ πίνακες τῶν Ἡμιτόνων, Ἀπτομένων, καὶ Τεμνουσῶν μετὰ τῶν οἰκείων Λογαρίθμων, περὶ ὧν ἐν τῇ Τριγωνομετρίᾳ. Τούτοις δ' ἕπονται οἱ τῶν λογαρίθμων πίνακες ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 10000, ὧν ἐπὶ μὲν τῆς ἑτέρας ςήλης οἱ χαρακτῆρες, ἐπὶ δὲ τῆς ἀντιςοιχούσης οἱ τούτων λογαρίθμοι μετὰ τοῦ οἰκείου παράκεινται Χαρακτηριςικοῦ, (§. 315.) εἰς ἑπτὰ δεκαδικὰ προαγόμενοι κλάσματα. Τὸ δὲ χαρακτηριςικὸν ἀπὸ μὲν 1 μέχρι τῶν

τῶν 9 = 0. ἀπὸ δὲ τοῦ 10 μέχρι τοῦ 99 = 1. ἀπὸ δὲ τοῦ 100 μέχρι τοῦ 999 = 2, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἐν γένει γὰρ, τῆς τοῦ 10 δυνάμεως 1 αὐξομένης, μονάδι κἀκεῖνο (τὸ χαρ.) προσαύξεται. Δῆλον δ' ἐκ τούτου, ὅτι τὸν ἀριθμὸν εἰδότες, (ᾧ τὸ χαρ: προσήκει) ἅμα καὶ ὅσαι μονάδες τῷ τούτου χαρακτηριστικῷ ἔνεισι γινώσκομεν. Γνωστὸν γὰρ, μεταξὺ τίνων ὁλοσχερῶν δυνάμεων τοῦ 10 ὁ ἀριθμὸς ἐμπίπτει. καὶ ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν παντὸς ἀριθμοῦ μονάδι ἐλαττοῦται τῆς πληθύος τῶν χαρακτήρων, οὓς ὁ ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου περιείληφε. π. χ. ἅπαντες οἱ μεταξὺ 100 καὶ 1000 ἀριθμοὶ ἐκ τριῶν σύγκεινται χαρακτήρων, ὧν τὸ χαρακτηριστικὸν μονάδι ἔλαττον, τουτ: = 2. Τὸ δὲ τῶν μεταξὺ 1000 καὶ 10000 ἀριθμῶν, τῶν ἐκ δ'. χαρακτήρων συγκροτουμένων = 3, κτ. Δυνατὸν οὖν τὸ χαρακτηριστικὸν παραλείπειν, ὡς ἐν τοῖς μείζοσιν ἐγένετο πίναξι. Τὸν λογάριθμον τοίνυν ἀριθμοῦ τινος βουλόμενος εὑρεῖν, ζήτησον ἐν τοῖς πίναξι τὸν ἀριθμὸν, καὶ ὄψει καὶ τὸν ἴδιον λογάριθμον αὐτῷ ἀντιστοιχοῦντα. Τοῦ λογαρίθμου δὲ δοθέντος, ζήτησον αὐτὸν αὐτόθι, ὃν αὐτίκα εὑρήσεις, τὸ χαρακτηριστικὸν εἰδὼς, καὶ παρ' αὐτῷ ἐν τῇ ἐγγὺς στήλῃ κεῖται ὁ ἀριθμὸς, ὁ τούτῳ προσανήκων. Ἐὰν δὲ δοθῇ λογάριθμος ἐν τοῖς πίναξιν ἐπ' ἀκριβὲς μὴ περιεχόμενος, ἀλλὰ μόνον 4 τυχὸν, ἢ 5 τῶν πρώτων χαρακτήρων αὐτοῦ τῷ ἐν τοῖς πίναξι λογαρίθμῳ συνάδωσιν, ὁ ἀριθμὸς (ᾧ ὁ λογ. ἀνήκει) μείζων, ἢ ἐλάττων δεκαδικοῖς τισι κλάσμασι τυγχάνει τοῦ ἐν τῷ πίνακι ἀριθμοῦ. Ὅσῳ οὖν μᾶλλον οἱ ἀριθμοὶ τῶν λογαρίθμων ἀλλήλοις συνάδουσι, τοσούτῳ ἐλάττων ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν, οἷς ἐκεῖνοι (οἱ λογ.) ἀνήκουσιν, ἧς ἐν οὐκ ὀλίγοις ὑπολογισμοῖς παραμελεῖν εἰώθασι.

§. 321. Ἐπεὶ δὲ ἡμῖν ἐνταῦθα ὁ λόγος ἐξαιρέτως ρέταις περὶ τῶν ἐλασσόνων λογαριθμικῶν πινάκων, τούτοις μάλιστα καὶ χρησόμεθα, τούτοις ἁρμόζοντα παραδείγματα μεταχειριζόμενοι. (εἰ καὶ τὸ ἐνταῦθα λεγόμενον καὶ τοῖς μείζοσι προσανήκει) Καὶ ὅπως μὲν ὁ λογάριθμος τοῦ ὁλοσχεροῦς, ἀριθμοῦ, ὁ τοῖς πίναξιν ἐνυπάρχων εὑρίσκεται, εἴρηται ἤδη. (§. ἄνωτ.) Ὅτι δὲ καὶ δύω, ἢ πλειόνων ἀριθμῶν δι' ἀλλήλων πολλαπλασιασθῆναι προκειμένων, διὰ τῆς προσθέσεως τῶν κατὰ τούτους λογαρίθμων, ὡς κεφάλαιον λογάριθμος προκύψει, τῷ παραγομένῳ ἐκ τούτων ἀντιςοιχῶν, προηγουμένως δῆλον. Ἀλλὰ θεωρηθήτω ἀκριβέςερον. π. χ. 136 . 24 . 2 λογαριθμικῶς = λ. 136 + λ. 24 + λ. 2.

Ἔνθεντα	λ.	136	= 2,1335389	
	λ.	24	= 1,3802112	
	λ.	2	= 0,3010300	προς.

ἄρα λ. 136 . 24 . 2 = 3,8147801

Ὃς τῷ ἀριθμῷ 6528 ἀντιςοιχεῖ = 136. 24 . 2 ὄντι. Τὰ αὐτὰ τελεῖται καὶ ἐπὶ τῆς Διαιρέσεως, παρ' ὅσον ἐν ταύτῃ οἱ λογάριθμοι ἀφαιροῦνται ἀπ' ἀλλήλων, τῆς τούτων διαφορᾶς ἐν τοῖς πίναξι τῷ πηλίκῳ ἀντιςοιχούσης. Οἷον, 8815 διαιρεθεὶς διὰ 1763 ἔσται λογαριθμικῶς. λ. 8815 — λ. 1763.

ἤτοι	λ.	8815	= 3,9452223	
	λ.	1763	= 3,2462523	ἀφαιρ.

ἄρα λ. 8815 — λ. 1763 = 0,6989700

Ὃν τῷ ἀριθμῷ 5 ἀντιςοιχοῦντα εὑρήσομεν $= \frac{8815}{1763}$.

Εἰ

Εἰ δ' ἐναντίως ἐχούσας ποσότητας πολλαπλασιάσαι, ἢ διελεῖν δέοι, ὁπότερον τῶν σημείων (§. 77. καν.). τῷ παραγομένῳ, ἢ τῷ πηλίκῳ ἁρμόζει, ἐπιςάμενοι, ὑπολογιζόμεθα τοὺς λογαρίθμους, ὡσπερεὶ αἱ ποσότητες καταφατικαὶ εἶεν, καὶ τὸν ἀριθμὸν ζητήσαντες τοῦ εὑρεθέντος λογαρίθμου τὸ προσῆκον σημεῖον τῷ εὑρεθέντι ἀριθμῷ ἀποδώσομεν.

Εἰς δυνάμεις δ' ἐξαίρονται λογαριθμικῶς αἱ ποσότητες, καὶ αἱ ῥίζαι λογαριθμικῶς ἐξάγονται, κατὰ τὰ ἐν §. §. 319, κτ. Ἀλλ' ἐπὶ τούτου σημειωτέον ἔτι τινά. Ἐὰν ἡ ῥίζα τῆς ποσότητος μὴ ὁλοσχερὴς ᾖ, οὐδὲ τῷ εὑρεθέντι λογαρίθμῳ ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς ἀντιςοιχήσει. Ληφθεὶς οὖν τις τῶν λογαρίθμων τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν, τῶν τῷ εὑρεθέντι ὡς ἔγγιςα γινομένων, εἴη ἂν οὗτος (ὁ ληφθεὶς λογ.) νῦν μὲν μεγίςῃ διαφορᾷ πάνυ βραχὺς, νῦν δὲ πάνυ μέγας. Ἄριςα τοίνυν ποιήσεις ζητῶν τινὰ τῶν λογαρίθμων τῶν μειζόνων ἀριθμῶν, τῶν ἐν τοῖς πίναξι, τὸν ἐκείνῳ ἴσον. (τῷ α'. εὑρεθέντι λογ.) Τούτου δὲ μὴ εὑρισκομένου, ἐτερόντινα τὸν ἐγγύτατον, μηδένα λόγον τοῦ χαρακτηριςικοῦ ποιούμενος. Καὶ τούτου κειμένου, διάςειλον τοῦ ἐν τοῖς πίναξιν ἀριθμοῦ (ὅς τῷ ἤδη εὑρεθέντι λογαρίθμῳ ἀνήκει) τοσούτους χαρακτῆρας δεξιόθεν ἀρχόμενος, εἰς δεκαδικὰ ποιῶν αὐτοὺς κλάσματα, ὅσαις μονάσι τὸ χαρακτηριςικὸν τοῦ ἐν ἀρχῇ λογαρίθμου ἐλαττοῦται, καὶ οὕτως ἔςαι ἡ ῥίζα ἀκριβεςέρα. π. χ. $\sqrt[3]{1648}$ λογαριθμικῶς $= \lambda. \dfrac{1648}{3} = \dfrac{3{,}2169572}{3}$

$= 1{,}0723190$. Οὗτος ὁ λογάριθμος ζητηθεὶς οὐχ εὑρίσκεται ἀκριβῶς παρὰ τοῖς ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς, ὧν ἡ 1 τὸ χαρακτηριςικόν. Ὁ ἐγγύτατος εἴη ἂν ὁ τοῦ 12 λογάρ. ὅς 1,0791812 τυγχάνει. Ἀλλὰ 12 πάνυ μέγας. ὅτι ὁ γ'. χαρακτὴρ τοῦ κατ' αὐτὸν λογαρίθμου μείζων, ἢ ὁ γ'. τοῦ εὑρεθέντος. Ζητηθήτω ούν ἐν τοῖς μείζοσιν ἀριθμοῖς, τοῦ χαρακτηριστικοῦ παπαραμελοῦσιν. ὁ τοῦ 1181 λογάρ. (πλὴν τοῦ χαρακτηριστικοῦ) = 0722499. ὁ δὲ τοῦ 1182 = 0726175. Ὁ β΄. τούτων (τῶν λογ.) ἐστὶ μείζων, (τοῦ εὑρεθέντος) ὁ δὲ α΄. ἐλάσσων. Ἀλλὰ ληφθήτω ὁ α΄. Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ καταρχὰς λογ. ἦν ἡ 1, τὸ δὲ τοῦ ἤδη ληφθέντος 3. Ὥστε ἡ τούτων διαφορὰ 2. Ἀναγκαῖον ἄρα δύω χαρακτῆρας τοῦ ἀριθμοῦ διαστεῖλαι, τοῦ τῷ ληφθέντι λογαρίθμῳ ἀνήκοντος, δεκαδικὰ αὐτοὺς ποιοῦντας, καὶ ἀντὶ 1181 γράψαι 11,81. Εἰδ' ὁ β΄. παρείληπτο λογάριθμος, ἐγράψαμεν ἂν 11,82. Τὸ τοίνυν διάπτωμα κεῖται μεταξὺ τῶν δύω ἀριθμῶν, οὐδὲ $\frac{1}{100}$ ἐξισούμενον. τουτ: ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 1648 ἐλάσσων τοῦ 11,82, καὶ μείζων τοῦ 11,81 τυγχάνει. Ὁ δὲ τοὺς μείζους τῶν πινάκων κεκτημένος εὑρήσει ταύτην ἔτι ἀκριβέστερον.

Ζητουμένων δὲ τῶν λογαρίθμων τῶν γνησίων κλασμάτων, λαβὼν τὸν λογάρ. τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ παρονομαστοῦ ἐκ τῶν πινάκων, (ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος μὴ μείζους ὦσι τῶν ἐν τοῖς πίναξιν ἀριθμῶν, περὶ οὗ κατωτέρω) ἄφελε τὸν τοῦ παρον. λογάρ. ἀπὸ τοῦ λογ. τοῦ ἀριθμητοῦ. Ἐπεὶ δὲ ὁ παρονομ. τοῦ γνησίου κλάσματος μείζων ἀεὶ τοῦ ἀριθμητοῦ, ἐξ ἀνάγκης καὶ ἡ τῶν λογαρ. διαφορὰ ἔσται ἀποφατική. Ἔνθεν τοι τὴν ἀφαίρεσιν ἀνάπαλιν ποιησάμενος, θὲς πρὸ τῆς διαφορᾶς, ὃς ὁ εὑρεθεὶς λογάριθμος τυγχάνει, τὸ —. Ὥστε ἅπαντες οἱ τῶν γνησίων κλασμάτων λογάρ. εἴτε τῶν κοινῶν εἶεν τὰ κλάσματα, εἴτε τῶν δεκαδικῶν, ἀποφατικοὶ τυγχάνουσι. Τὰ αὐτὰ γίνεται καὶ ἐπὶ τῶν Δεκαδικῶν τουτ. ὑποτεθέντος τούτοις τοῦ προσήκοντος παρονομαστοῦ, οὗ ὁ λογάρ. (ὡς τῶν παρον. δυνάμεων τοῦ 10 ὄντων) ἀεὶ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαίρεσις, ὡς ἤδη λέλεκται, τελείσθω. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι τὸ

χαρα-

χαρακτηριςικὸν τιῦν κλασματικῶν λογαρίθμων, τῶν μεταξὺ 1 καὶ 0, 1 παρεμπιπτόντιων = 0, τῶν δὲ μεταξὺ 0, 1 καὶ 0, 01 = — 1, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὡς ἡ ἐχομένη πρόοδος ἐμφαίνει.

	0, 0001 '	0, 001 .	0, 01 '	0, 1
Χαρακτηριςικὸν	— 4,	— 3,	— 2,	— 1,

	1,	10,	100,	1000,	10000
Χαρακτηριςικὸν	0,	1,	2,	3,	4 .

Παραδείγματα.

$$\lambda.\ \tfrac{3}{4} = \lambda.\ 3 - \lambda.\ 4$$

$$\lambda.\ 3 = 0,4771212$$

$$\lambda.\ 4 = 0,6020600$$

$$\text{ἄρα}\quad \lambda.\ \tfrac{3}{4} = -\ 0,1249388$$

Ὁ λ. 0,0532 =

$$\lambda.\ \tfrac{532}{10000} = \lambda.\ 532 - \lambda.\ 10000.$$

$$\text{Ὥςε}\quad \lambda.\ 532 = 2,7259116$$

$$\lambda.\ 10000 = 4,0000000$$

$$-\ 1,2740884\ .$$

Καὶ ζητηθέντιων τῶν δε τιῦν λογαρίθμων ἐν τοῖς τῶν μειζόνων ἀριθμῶν λογαρίθμοις, εὑρίσκεται ὁ τοῦ α'. (λογ.) ἐγγύτατος ἀριθμὸς, ῷ μάλιςα ἐκεῖνος συνᾴδει, 1333, καὶ τοῦ σημείου — παροραθέντος, εἴη ἂν ὁ ἀριθμὸς (ὅτι ἐπὶ τοῦ προκειμένου λογαρ. τὸ χαρακτηριςικὸν = 0) = 1, 333. Ἐπεὶ δὲ τὸ ἀποφατικὸν πρόκειται σημεῖον, ἔςιν ὁ ἀριθμὸς = $\frac{1}{1,333}$. Ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου λογαρίθμου, ῷ σχεδὸν ὁ ἀριθμὸς 1880 ἐν τοῖς μεγίςοις λογαρίθμοις ἀντιπαράκειται. Καὶ τοῦ μὲν χαρακτηριςικοῦ + 1 ὄντος, εἴη

εἴη ἂν ὁ ἀριθμὸς 18,8.. Ἐπεὶ δὲ — 1, (τὸ χαρακτ:) ἐςὶν $\frac{1}{18,8}$. Εἰς δεκαδικὸν δὲ κλάσμα γεγονότων ἀμφοῖν τῶν κλασμάτων, αὐτίκα εὑρήσομεν, ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ α΄. τὸ πηλίκον 0,75 $= \frac{3}{4}$, ἐπὶ δὲ τοῦ β΄. 0,0532 προκύψει. Καὶ γὰρ $\frac{1}{1,333} = \frac{1000}{1333}$ $=$ 0,750.. Καὶ $\frac{1}{18,8} = \frac{10}{188} =$ 0,05319.. σχεδὸν $=$ 0,0532. Ὁ δὲ λόγος, δι᾽ ὃν οὐκ ἀκριβῶς ἴσον, ὅτι οἱ λογάριθμοι οὐκ ἀκριβῶς ἥρμοζον, περὶ οὗ κατωτέρω.

Τὸ δὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦ τοιούτου λογαρίθμου, οὗ τὸ — πρόκειται, κλάσμα εἶναι, οὗ ἀριθμητὴς ἡ 1, παρονομαςὴς δὲ ὁ τῷ λογαρίθμῳ ἐν τοῖς πίναξι προςήκων ἀριθμός, καὶ μάλα σαφῶς κατανοεῖται τῷ διανοουμένῳ τοὺς λογαρίθμους ἐκθέτας εἶναι τῶν δυνάμεων, καὶ ὅτι (§. 198.) $a^{-1} = \frac{1}{a}$. καὶ $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$. ἢ $a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu}$, ὅπερ τὸ ῥηθὲν διαλευκαίνει. Ἐὰν οὖν ζητῶνται οἱ λογάριθμοι τῶν κλασμάτων, τῶν τὴν 1 ἀριθμητὴν ἐχόντων, ληφθήτω μόνον ἐκ τῶν πινάκων ὁ τοῦ παρονομαςοῦ λογάριθμος, καὶ τούτου τὸ — προτεθήτω, καὶ οὗτος ἔςαι ὁ λογάρ. τοῦ τοιούτου κλάσματος. Ὡς λ. $\frac{1}{16} = -$ 1, 2041200. Ἔςι γὰρ $=$ λ. 1 — 16. Ἀλλὰ λ. 1 $=$ 0. Ἔςιν ἄρα $=$ —λ. 16 $=$ — 1, 2041200.

§. 322. Ὥςε δὲ καὶ τοὺς λογαρ. τῶν νόθων εὑρεῖν κλασμάτων, μεταχειριζόμεθα ταυτα ὡς ἐνεργείᾳ διαιρέσεως παραδείγματα, εἰ τούτων κατὰ τὰ (§. ἀνωτ.) ὁ λογάριθμος ζητεῖται. Οὗτος δ᾽ ἀείποτε καταφατικός, ὡς ἐπὶ τῶν τοιούτων κλ. τοῦ

ἀριθ-

ἀριθμητοῦ μείζονος ὄντος τοῦ παρονομαςοῦ. Ἐνθέντοι καὶ ῥάδιον ἔςαι λογαρίθμους εὑρεῖν ὁλοσχερῶν, οἷς καὶ κλάσματα πρόσκεινται· ὅτι ῥαδίως εἰς νόθα μεταφέρονται κλασματα.

Π. χ. λ. $3\frac{5}{8}$ = λ. $\frac{29}{8}$ = λ. 29 — λ. 8. Ἀλλὰ

	λ. 29	=	1,4623980
ἀφαιρ.	λ. 8	=	0,9030900
ἄρα λ. $\frac{29}{8}$ =	λ. $3\frac{5}{8}$	=	0,5593080

Ζητηθέντος οὖν τούτου ἐν τοῖς πίναξι τρόπῳ τῷ ῥηθέντι, εὑρήσομεν τούτῳ παρακείμενον τὸν ἀριθμὸν, 3, 625, ὅπερ ἔςαι καὶ $\frac{29}{8}$, ἢ $3\frac{5}{8}$, εἰς δεκαδικὸν μεταποιηθὲν κλάσμα. Ἐὰν δέ τινι ἀριθμῷ καὶ δεκαδικὰ προσκέωνται κλάσματα, μεταβάλλεται πᾶσα ἡ ποσότης εἰς νόθον κλάσμα, ὅπερ γίνεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μετὰ δυνάμεων τοῦ 10, παρονομαςὴν λαμβάνον τοιοῦτον, οἷα ἡ, δι᾽ ἧς ἐπολλαπλασιάσθη, τοῦ 10 δύναμις. Τὰ λοιπὰ δὲ γίνεται τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ τῆς διαιρέσεως παραδείγματος, οὗ ὁ λογάρ. ζητεῖται. Καὶ οὗτος ἔςαι ὡσαύτως καταφατικός. Ἐνταῦθα λόγος ἐςὶν ἔτι περὶ ποσοτήτων, ὧν οἱ ἀριθμοὶ τοῖς πίναξιν ἔνεισι. π. χ. λ. 2, 545 = λ. 2, $\frac{545}{1000}$ = λ. $\frac{2545}{1000}$ = λ. 2545 — λ. 1000.

λ.	2545	=	3,4056878	
λ.	1000	=	3,0000000	ἀφαιρ.
			0,4056878	= λ. $\frac{2545}{1000}$

= λ. 2,545, ᾧ ἀκριβῶς ὁ ἀριθμὸς 2, 545 ἀντιςοιχεῖ.

§. 323. Μετὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς εὑρέσεως τῶν λογαρίθμων ἑκάςου εἴδους κλασμάτων, ῥάδιον ἔςαι

μετὰ

μετὰ κλασμάτων, ἢ μετὰ κλασμάτων, καὶ ὁλοσχερῶν, καὶ ὅλως, ἅπαν εἶδος ὑπολογισμῶν λογαριθμικῶς ὑπολογίζεσθαι· ὡς πολλαπλασιάζειν, διαιρεῖν, εἰς δυνάμεις ἐξαίρειν, ῥίζας ἐξάγειν, κτ.

Παραδείγμ. $\frac{3}{4} \cdot 8$ εἴη ἂν λ. $\frac{3}{4}$ + λ. 8.

$$
\begin{aligned}
\lambda.\ \tfrac{3}{4} &= -\ 0{,}1249388 \quad (\S.\ 321.) \\
\lambda.\ 8 &= +\ 0{,}9030900 \\
\hline
&= +\ 0{,}7781512 = \lambda.\ \tfrac{3}{4} \cdot 8.
\end{aligned}
$$

Ὧ τινι λογαρίθμῳ ὁ ἀριθμὸς 6 προσήκει. καὶ $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$.

Ὡσαύτως $(\frac{3}{4})^2 = 2.\ \lambda.\ \frac{3}{4} = -\ 0{,}1249388$

$$
\begin{array}{r}
2 \\
\hline
-\ 0{,}2498776
\end{array}
$$

Ὃς (λογ.) ἀντιςοιχεῖ σχεδὸν τῷ ἀριθμῷ $\frac{1}{1{,}778}$· καὶ $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$ σχεδὸν $= \frac{1}{1{,}778}$, ἢ $\frac{1000}{1778}$. Ὅτι $\frac{9}{16}$, καὶ $\frac{1000}{1778}$ παρέχουσι σχεδὸν τὰ αὐτὰ πηλίκα, ἀμφοῖν εἰς δεκαδικὰ γεγονότων κλάσματα, ἤτοι 0, 5625. Εἰ δὲ τὴν $\sqrt{\frac{3}{4}}$ λογαριθμικῶς ζητεῖν δέοι, εἴη ἂν λ. $\frac{3}{4} : 2 = -\ \frac{0{,}1249388}{2} = -$ 0, 0624694, ᾧ τινι ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{1{,}155}$ ὅτι ἔγγιςα προσήκει· Τὸ τοίνυν $\frac{1}{1{,}155}$ ἡ $\sqrt{\frac{3}{4}}$ τυγχάνει. Ἔςι γὰρ $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}7320\ ..}{2} = 0{,}8660\ ..$

Ὡσαύτως καὶ $\frac{1}{1{,}155} = \frac{1000}{1155} = 0{,}8640$ . . ὅπερ κατά τι ἔλαττον τοῦ 0, 8660, ὡς τοῦ λογαρίθμου ἀκριβῶς τοῖς πίναξι μὴ ἐμπεριεχομένου. περὶ οὗ κατωτέρω.

§. 324. Κἀπὶ τῶν Ἀναλογιῶν τοὺς λογαρίθ-

μους

μους ἐν χρήσει παραλαμβάνεσθαι, καὶ πάνυ συνεχῶς, πᾶς τις συνορᾷ. Ὁ οὖν πολλαπλασιάζειν, καὶ διαιρεῖν διὰ λογαρίθμων εἰδὼς, οὐδεμίαν ἕξει ἐν τούτῳ δυσχέρειαν, μεμνημένος, ὅτι ἐπὶ τῶν λογαριθμικῶν ὑπολογισμῶν ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς πρόσθεσιν, καὶ ἡ διαίρεσις εἰς ἀφαίρεσιν μεταβάλλεται, καὶ τῶν κανόνων, τῶν περὶ τῶν ἀντιθέτων ποσοτήτων. π. χ. 100 λίτρας ὠνήσατότις τὸ, ὅ, τι ἄντις καθ' ὑπόθεσιν εἴποι, 76 δραχμῶν. πόσου ὠνήσεται 7350 λίτρας; Ὑπολογισθήτω λογαριθμικῶς, καίτοι τοῦτο εὐχερέςερον ἂν ἐπιλυθείη τῷ συνήθει τρόπῳ. ἤτοι $100 : 7350 = 76 : \chi$. Καὶ ἐπειδὴ $\chi = \frac{7350 \cdot 76}{100}$, ἔςαι λογαριθμικῶς, λ. 7350 + λ. 76 — λ. 100.

	λ.	7350	=	3,8662873
	λ.	76	=	1,8808136
προςεθ.				5,7471009
	λ.	100	=	2,0000000 ἀφαιρ.
				3,7471009

Ὅς ἐν πίναξι τῷ 5586 προσεπανήκει. Τοσούτων ἄρα δραχμῶν ὠνηθήσονται 7350 λίτραι.

Ἕτερον παράδ. Ἔςωσαν δύω κύβοι, ὁ μὲν σιδηροῦς, ὁ δὲ μολιβδοῦς, ὧν τὰ βάρη λόγον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὃν 176 : 256. Τεθήτω καὶ ἑτέρα τις σιδηρᾶ σφαῖρα, 1 λίτραν ἕλκουσα. Ζητεῖται, πόση ἔςαι ἡ ὁλκὴ σφαίρας μολιβδίνης, τὸν αὐτὸν ἔχουσα ὄγκον, καὶ σχῆμα; Φημὶ δή.

$$176 : 256 = 1 \text{ λίτρα} : \chi \text{ λίτ.}$$

$$\text{καὶ } \chi = \tfrac{256,1}{176} \cdot \text{λογαριθμ. } \lambda.\ 256 - \lambda.\ 176.$$

$$\begin{array}{rcll} \lambda.\ 256 & = & 2,4082400 & \\ \lambda.\ 176 & = & 2,2455127 & \\ \hline & & 0,1627273 & \text{ἀφαιρεθ.} \end{array}$$

Οὗτος ὁ λογάριθμος ἐν τοῖς μείζοσιν ἀριθμοῖς ζητηθεὶς τῶν πινάκων, τῶν προσηκόντων τῷ χαρακτηριςικῷ καλῶς παρατηρηθέντων, δώσει ἀριθμὸν μεταξὺ 1,454 καὶ 1,455 ἐμπίπτοντα. Τὸ διάπτωμα τοίνυν, διὰ τὸ τὸν ἀριθμὸν ἀκριβῶς τοῖς πίναξι μὴ ἐνυπάρχειν, ἔλαττον, ἢ $\frac{1}{1000}$ λίτρας, ὅ περίπου τὸ $\frac{1}{2}$. ἐςὶ μέρος τῆς δραχμῆς. Καὶ οὐ πόῤῥω τοίνυν τοῦ ἀληθοῦς ὑποθεῖναι δυνάμεθα τὴν μολιβδίνην σφαῖραν ἕλκειν 1,454 λίτρας, ἢ $1 + \frac{454}{1000}$ λίτ. Ἐκ τούτου δῆλος ὁ τρόπος, καθ' ὅν, τριῶν δοθέντων οἱωνοῦν ἀριθμῶν τῆς Γεωμετρικῆς Ἀναλογίας, ὁ δ'. ἀεὶ λογαριθμικῶς ἐξευρίσκεται, διὰ τὸ ἕκαςον τῶν ὅρων εἰς τέταρτον γίνεσθαι. (§. 239.)

§. 325. Ἀλλ' εἴποι ἄν τις, ὁποῖοι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀποφατικῶν ποσοτήτων, π. χ. ὁ λ. — 8. ὁ λ. — 1000. ἢ ὁλ. — 2. κτ; οὐδένα τούτων ὑπάρχειν ἀπαντῶμεν, ἢ τούτων τοὺς λογαρίθμους ἀδυνάτους εἶναι ποσότητας. Οἱ μὲν γὰρ θετικοὶ τοῖς θετικοῖς ἁρμόζουσιν ἀριθμοῖς, τοῖς μείζοσι τῆς 1. Οἱ δ' ἀποφατικοὶ τοῖς κλάσμασι, τοῖς ἐλάττοσι τῆς 1 (§. 321.) μείζοσι μέντοι τοῦ 0. Ἡ δ' ἀποφατικὴ ποσότης οὐδέτερον τούτων. Οἱ δὲ λογάριθμοι ἤτοι καταφατικοί, ἢ ἀποφατικοί. Ἄρα τούτων οὐδεὶς ὑπάρχει λογάριθμος

§. 326. Καὶ μέχρι τοῦδε μὲν μετὰ λογαρίθμων ἐλογισάμεθα, οὓς καὶ ἐν τοῖς ἐλάττοσι πίναξι, τοῖς ἐν χρήσει οὖσιν, εὑρίσκομεν. Ὥρα δὲ καὶ τὰ ἑξῆς ἐπιλῦσαι τῶν Προβλημάτων.

1) Δο-

1) Δοθέντος ἀριθμοῦ τινος, ζητηθήτω ὁ τούτου λογάριθμος, ὁ τοῖς πίναξι μὴ ἐνυπάρχων.

2) Δοθέντος λογαρίθμου τινὸς, ζητηθήτω ὁ τούτου ἀριθμὸς, ὁ τοῖς πίναξι μὴ ἐνυπάρχων·

Τουτ: ἐὰν ποσότητες προκέωνται μείζους τῶν ἐν τοῖς πίναξιν, ὧν οἱ λογάριθμοι εὑρετέοι, ἢ λογάριθμοι, ὧν τὸ χαρακτηριστικὸν μεῖζον τοῦ ἐν τοῖς πίναξι, καὶ ὧν οἱ ἀριθμοὶ τοῖς τῶν ἐν τοῖς πίναξι λογαρίθμων ἀριθμοῖς οὐ πάντη συνάδουσιν, ἢ ἐὰν ἄμφω μὴ παρῇ.

§. 327. Εἰς ἐπίλυσιν τοῦ α΄. Προβλήμ. προσεκτέον τοῖς ἑξῆς. Ἐρεύνησον πανταχόθεν, εἰ ὁ ἀριθμὸς εἰς παράγοντας ἔχει ἀναλύεσθαι, τοῖς πίναξιν ἐνυπάρχοντας. Εἰ οὖν τοῦτο, προσθεὶς τοὺς λογαρίθμους (τῶν παραγ.) ἕξεις τὸν ζητούμενον λογάριθμον. (§. 317.) Καὶ τοῦτο ἡ μέθοδος ἡ εὐχερεστάτη, ἀρίστη, καὶ ἀσφαλεστάτη τυγχάνει.

Παράδ. Ζήτησον τὸν λογάριθμον τοῦ 183220, τοῦ ἐν τοῖς πίναξι μὴ εὑρισκομένου, ἔχοντος μέντοι διαφόρως εἰς παράγοντας κατατέμνεσθαι· π. χ. εἰς 10 . 2 . 9161. ἢ εἰς 20 . 9161.

$$\begin{array}{lrl} \text{Ὥστε} & \lambda.\ 20 = & 1{,}3010300 \\ & \lambda.\ 9161 = & 3{,}9619429 \\ \hline \text{ἄρα}\ \lambda.20+\lambda.9161 = & \lambda.183220 = & 5{,}2629729 \end{array}$$

Ἕτερον. ὁ λ. τοῦ 1492992 = λ. 36 + λ. 128 + λ. 324, ἅτε τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τούτους τοὺς παράγοντας ἀναλυομένου. ἢ 1492992 = 36 . 128 . 324. Ἔνθεντοι λ. 36 = 1,5563025

λ. 128 = 2,1072100

λ. 324 = 2,5105450

ἄρα λ. 14 2992 = 6,1740575, κτ.

Ἐὰν δ' ὁ ἀριθμὸς εἰς παράγοντας οὐκ ἂν διατέμνοιτο, τοὺς λογαρίθμους διὰ τῶν διαφορῶν ἀνακαλύψομεν. Ἐπὶ γὰρ τῶν μειζόνων ἀριθμῶν αἱ διαφορὰι δύω ἀριθμῶν, καὶ αἱ τῶν κατ' αὐτοὺς λογαρίθμων σχεδὸν αἱ αὐταὶ, μικρόν τι ἀλλήλων διαφέρουσαι.

π. χ. ὁ λογ. τοῦ 9991 = 3,9996090

ὁ λογ. τοῦ 9990 = 3,9995655

ἡ τούτων λογαριθ. διαφορὰ = 435

Αὖθις λ. 9992 = 3,9996524

λ. 9990 = 3,9995655

ἡ τούτων λογαριθμ. διαφορὰ = 869

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ 9990, καὶ 9991 = 1, καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ 9990, καὶ 9992 = 2. Ὡσαύτως ἡ λογαριθμικὴ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ 9990, καὶ 9992, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, δύω ἀριθμῶν, δυάδι διαφερόντων, σχεδὸν ἔτι ἅπαξ τηλικαύτη, ἡλίκη ἡ λογαρ. διαφ. δύω ἀρ. μονάδι διαφερόντων. Καὶ γὰρ 435 . 2 σχεδὸν = 869. Καὶ οἱ λογάριθμοι ἐλαττοῦνται μόνον ἑνὶ δεκαμιλλιοστημορίῳ. Καὶ τοῦτο κομιδῇ ἀκριβὲς ἐν ἑπτὰ δεκαδικοῖς, εἰς ὅσα οἱ λογάριθμοι τῶν ἐλασσόνων ὑπελογίσθησαν πινάκων. ἀλλ' οὔτε πλείω τῶν 7 δεκαδικὰ τῶν λογαρίθμων ἐπὶ τῶν πλειόνων ἀπαιτοῦνται ὑπολογισμῶν. Δυνατὸν τοίνυν τὰς διαφορὰς τῶν ἀριθμῶν πρὸς τὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων ἐν μείζοσιν ἀριθμοῖς παραβάλλειν, ἄνευ ἐπι-

σήμου

σήμου τοῦ παραπτώματος. Τούτοις ἐρείδεται καὶ τὰ ἑξῆς

1) Δοθέντων ἀριθμῶν μειζόνων, οὓς οἱ πίνακες οὐκ ἐμπεριλαμβάνουσι, διαςέλλομεν τοσούτους τῶν ἀριθμῶν ἀριςερόθεν πρὸς τὰ δεξιὰ, ὥςε τοσούτους μόνον ὑπολείπεσθαι ἐν τοῖς ἀριςεροῖς, ὅσοι τοῖς πίναξιν ἔνεισι, τῶν λοιπῶν ἐν τοσούτῳ, ὡς δεκαδικῶν θεωρουμένων. π. χ. δοθέντος τοῦ ἀριθμοῦ 8946352, διάςειλον μέχρι τῶν 6 (ὅτι μέχρι τοῦδε ὁ ἀριθμὸς ἐνυπάρχει τοῖς πίναξι) οὕτως αὐτὸν θεωρῶν 8946, 352.

2) Ζήτησον ἤδη τοὺς λογαρίθμους τοῦ διαςαλέντος, καὶ τοῦ μονάδι τοῦτον ὑπερέχοντος, καὶ ἄφελε τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τοῦ μείζονος. π. χ.

$$\begin{array}{lcl} \lambda.\ 8947 & = & 3{,}9516774 \\ \lambda.\ 8946 & = & 3{,}9516289 \\ \hline \end{array}$$

ἡ διαφορὰ τῶν β'. ἀρ. = 1 καὶ ἡ λογ. διαφ. = 485, ἢ ἄμεινον 0, 0000485.

Ἀνέκυψεν οὖν ἡ λογαριθμικὴ διαφορὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ μονάδι μείζονος, ἢ ὁ 8946.

3) Ἐπειδὴ οἱ γ'. τελευταῖοι χαρακτῆρες τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ὡς δεκαδικὰ τεθεώρηνται, οὐκ ἔτι εἰσὶν = 1 Ὥςε διὰ τὰ ἀνωτ. ἐν ἀρχῇ τοῦ §. ἔχοιμεν ἂν τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν, καὶ τῶν λογαρίθμων διὰ Γεωμετρικῆς παραβάλλειν ἀναλογίας εἰς εὕρεσιν δ'. ἀριθμοῦ.

4) Συνάγω τοίνυν. ὃν λόγον ἔχει ἡ Διαφορὰ 1 πρὸς τὸ δεκαδικὸν κλάσμα, τὸ τῷ ἀριθμῷ προσκείμενον, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ἡ εὑρεθεῖσα λογαριθμικὴ διαφορὰ

φορὰ

φορὰ πρὸς τὴν εὑρετέαν, τὴν ἔτι τῷ δεκαδικῷ προσεπανήκουσαν κλάσματι. Ὥςε $1 : 0,352 = 0,0000485 : \chi$. καὶ $\chi = \frac{0,352 \cdot 0,0000485}{1} = 0,0000170720.$

5) Τοῦτο προσθέντες τῷ λογαρίθμῳ τοῦ διαςαλέντος ἀριθμοῦ, τουτ: μόνον τοὺς α΄. ἀριθμοὺς τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς, δηλονότι τὰ ἴσα δεκαδικὰ τοῖς ἴσοις, ἐνταῦθα 170, ἕξομεν τὸν λογάρ. τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ μετὰ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος.

Ὡς	λ. 8946	$= 3,9516289$
	πρόσθες τούτῳ	170
δίδωσι τὸν	λ. 8946,352	$= 3,9516459$

6) Ἐπεὶ δὲ οὐ τὸν λογάρ. τούτου τοῦ ἀριθμοῦ μετὰ δεκαδικοῦ, ἀλλ' ὁλικὸν τὸν ἀριθμὸν ἄνευ δεκαδικοῦ ἔχειν βουλόμεθα, προςίθεμεν τῷ χαρακτηριςικῷ τοῦ εὑρεθέντος λογαρίθμου τοσαύτας ἔτι μονάδας, ἢ 1, ὅσα ἦν τὰ δεκαδικὰ τοῦ ἀριθμοῦ κλάσματα, καὶ οὕτω προκύπτει ὁ λογάρ. τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τοῦ ὁλοσχεροῦς. Ἐνταῦθα τοίνυν τῷ εὑρεθέντι λογαρίθμῳ προσθετέον ἔτι 3. Ὅτι 3 ἦν τὰ δεκαδικὰ γεγονότα. Καὶ ἔςαι λ. $8946352 = 6,9516459$. Τοῦτο δὲ τὸ β΄. ῥαδίως κατανοῆσαι δυνάμεθα. Καὶ γὰρ $8946,352 \cdot 1000 = 8946352$. Ἔνθεντοι καὶ λογ. $8946,352 +$ λ. $1000 =$ λ. 8946352. Ἀλλὰ λογ. $1000 = 3,0000000$. Ἄρα ἀνάγκη ἦν τοῦτον τῷ τοῦ προτέρου χαρακτηριςικῷ προςεθῆναι, δι' οὗ πρόεισιν ὁ λογάριθμος ἐν τοῖς πρώτοις 7 δεκαδικοῖς τόποις ἀκριβής.

§. 328.

§. 328. Ὑποκείσθω καὶ ἕτερον παράδειγμα. Ζήτησον τὸν λογάρ. τοῦ 196668.

Ἔνθεντοι κατὰ τὸν α'. κανόνα 1966,68.

κατὰ τὸν β'. λ. 1967 = 3,2938044
λ. 1966 = 3,2935835

ἡ λογαρ. διαφ. = 2209
ἢ μᾶλλον = 0,0002209

κατὰ τὸν δ'. καν. 1 : 0, 68 = 0,0002209 : χ
Καὶ χ = 0, 68 . 0,0 02209 = 0,000150212.

κατὰ τὸν ε'. καν. λ. 1966 = 3,2935835
προςεθ. 1502

ἄρα λογάρ. 1966,68 = 3,2937337
κατὰ τὸν ς'. καν. λ. 196668 = 5,2937337.

Σημείωσαι, ὅτι ὁ προκείμενος ἀριθμὸς καὶ εἰς παράγοντας ἂν ἀναλυθείη. Τούτου δὲ γεγονότος, καὶ τῶν λογαρίθμων προςεθέντων, προκύψει ὁ αὐτὸς οὗτος λογάριθμος.

§. 329. Αὐτόματον ἐκ ταύτης ἕπεται τῆς μεθόδου, ὅτι καὶ τοὺς λογαρίθμους μειζόνων, καὶ ἐλασσόνων ἀριθμῶν, οἷς πλεῖςα δεκαδικὰ προσήρτηνται, μέχρι τῶν 7 δεκαδικῶν ἂν εὕροιμεν τόπων, εἰ μόνον ἀείποτε ἐν ἀρχῇ θεωροῖντο, ὡς τέσσαρας ἀριθμοὺς ἔχοντες ὁλοσχερεῖς, καὶ κατὰ τοῦτο ὁ ὑπολογισμὸς κατασκευάζοιτο. Τοῦ δὲ ὑπολογισμοῦ εἰς πέρας ἀχθέντος, ἔτι ἅπαξ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ θεωρηθέντος, δῆλον ἔςαι, πότερον προσθετέαι μονάδες τῷ χαρακτηριςικῷ, ἢ τούτου ἀφαιρετέαι. π. χ. λ. 473,8425. πρῶτον θεωρηθήτω, ὡς 4738,425.

Ἔςι

Ἔςι δὲ λ. 4739 = 3,6756867
λ. 4738 = 3,6755951

λογαρ. διαφ. = 916

Ὥςε 1 : 0,425 = 0,0000916 : χ. καὶ χ = 0,0000916 . 0,425 = 0,0000389300.

ἄρα λ. 4738 = 3,6755951
πρόσθες 389

3,6756340 = τῷ λ. τοῦ 4738,425. Ἐπεὶ μέντοι ὁ λογ. τοῦ 473,8425 ζητεῖται, ἀφαιρετέα ἡ 1 ἀπὸ τοῦ χαρακτηριςικοῦ. Ὅθεν λ. 473,8425 = 2,6756340.

§. 330. Τὸ β'. Πρόβλημα. (§. 326.) Αὐτίκα δῆλον ἐνταῦθα, ὅτι, τοῦ προβλήματος ἐπιλυθέντος, εὑρεθήσονται οἱ ἀριθμοὶ, εἴτε τοῦ λογαρίθμου οὕτως ἔχοντος, ὥςε μείζονος μὲν χαρακτηριςικοῦ εἶναι, ἢ τὸ ἐν τοῖς ἐν χρήσει πίναξι, τὰ αὐτὰ δὲ δεκαδικὰ προσκείμενα ἔχειν, εἴτε ἅμα μείζονος χαρακτηριςικοῦ, καὶ διαφόρων δεκαδικῶν τούτῳ προσόντων Εἰ οὖν τὸ α'. ἀναγκαῖον μόνον τὸν τούτων ἐν τοῖς πίναξιν εὑρεθέντα ἀριθμὸν μετὰ δυνάμεως τοῦ 10 πολλαπλασιάζειν, ἢ διαιρεῖν, ἡλίκον τὸ χαρακτηριςικὸν τοῦ λογαρίθμου, τουτ: ἤπερ πλείους, ἢ ἐλάσσους μονάδας ἔχει τοῦ ἐν τοῖς πίναξιν εὑρεθέντος μετὰ τῶν αὐτῶν δεκαδικῶν. π. χ. Ἔςω δεδομένος ὁ λογάρ. 5,7550359. Τὰ δεκαδικὰ τούτου (τοῦ λογ.) ἔνεισιν ἀκριβῶς καὶ τῷ λογ. τοῦ ἀριθμοῦ 5689. Ἀλλὰ τούτου τὸ χαρακτ. = 3. ἐνταῦθα δὲ = 5. τουτ: δύω μονάσι μεῖζον. Πολλαπλασιάζομεν οὖν μόνον 5689 ἐπὶ 10^2, ἢ 100, καὶ 568900 ἔςαι ὁ ἀριθμὸς τοῦ δοθέντος λογαρίθμου. Ὡσαύτως καὶ ὁ λογάρ. 1,5933968. οὗ τὰ δεκαδικὰ ἴσα τοῖς τοῦ

3921.

3821. Ἐπεὶ δὲ τούτου τὸ χαρακτ. 3, ἐνταῦθα δὲ 1, διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς (διὰ τὸ τὴν διαφορὰν τῶν δύω χαρακτ. $=$ 2 εἶναι) διὰ 10^2. Ἔςιν οὖν $\frac{3921}{100}$ $=$ 39,21. Εἰ δὲ τὸ τὸ β′. τὸν ἑξῆς χωρήσεις τρόπον.

1) Ζήτησον ὑπὸ τὸ χαρακτηριςικὸν 3 δυάδα λογαρίθμων, ὧν μεταξὺ τὰ δεκαδικὰ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ἐμπίπτουσιν, ὅπερ οὐ χαλεπῶς εὑρήσεις, διὰ τὸ τινὰς τῶν τούτου πρώτων ἀριθμῶν ἀείποτε τούτοις συνᾴδειν.

2) Ζήτησον ἤδη μεταξὺ τοῦ ἐγγὺς μείζονος, καὶ ἐγγὺς ἐλάσσονος λογαρίθμου τὴν λογαριθμικὴν διαφοράν. ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τούτοις (τοῖς λογ.) ἀντιςοιχούντων ἀριθμῶν $=$ 1, μηδόλως τῷ χαρακτηριςικῷ προσέχοντι.

3) Ἄφελε ἀπο τοῦ δοθέντος λογαρίθμου τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα, καὶ ἕξεις αὖθις τὴν διαφοράν, ἀμφοῖν τοῦ χαρακτηριςικοῦ παρεωραμένου,

4) Ἐπιφέρων οὕτως. ὡς ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων, οἷς ὁ δοθεὶς παρεμπίπτει, πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ δοθέντος, καὶ τοῦ ἐγγὺς καταδεεςέρου, οὕτως ἡ 1 πρὸς τὸν εὑρετέον ἀριθμόν.

5) Τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν πρόσθες, ὡς δεκαδικὸν κλάσμα, τῷ ἀριθμῷ, ὥτινι λογάριθμος ἴδιος ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων λογάριθμος προσῆν.

6) Τοῦ οὖν χαρακτηριςικοῦ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, ἴσου τῷ χαρακτηριςικῷ 3 ὄντος, ὑφ᾽ ὃ οἱ τῆς παραθέσεως ἐζήτηνται λογάριθμοι, μένει τὸ κατὰ τὸν προηγηθέντα κανόνα προσηρτημένον δεκαδικὸν κλάσμα ἐν τῷ οἰκείῳ σχήματι. Μείζονος δὲ ὄντος, (τοῦ χαρακτ.) ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται μετὰ δυνάμεως τοῦ 10, ἐκθέτην ἐχούσης ἀριθμὸν, τοσαύτας μονά-

μονάδας περιέχοντα, ὅσαις τὸ χαρακτηρ. τοῦ δοθέντος λογαρίθμου πλεονεκτεῖ. Ἐλάττονος δὲ, διαιρεῖται (ὁ ἀρ.) διὰ δυνάμεως τοῦ 10, ἧς ὁ ἐκθέτης τοσαύτας περιέχει μονάδας, ὅσαις (τὸ χαρακτ.) ἐλαττοῦται. Καὶ τούτῳ τῷ τρόπῳ προκύπτει ἀριθμὸς μέχρις 6, ἢ 7 χαρακτήρων ἀκριβὴς, ἀλλ' οὐ μέχρι πλειόνων ἐπὶ τῆς χρήσεως τῶν λογαρίθμων τῶν ἐλασσόνων πινάκων, ὃ κατάδηλον καὶ ἐκ τῶν προτέρων §. §. καὶ τῆς ὁλικῆς τούτων μεταχειρίσεως.

§. 331. Δοθέντος τοῦ λογαρίθμου 5,4325798, ζήτησον τὸν ἀριθμὸν κατὰ τὸν α'. κανόνα, οὗ μεταξὺ τοῦ λογαρίθμου ὁ δοθεὶς ἐμπίπτει, τοῦ χαρακτ. παραμελῶν

$$\begin{array}{rcl} \lambda.\ 2708 & = & 3,4326487 \\ \lambda.\ 2707 & = & 3,4324882 \\ \hline \end{array}$$

διαφορὰ τῶν λογ. διαφορὰ $=$ 1605

δύω ἀριθμῶν $=$ 1.

Κατὰ τὸν γ'. καν. ὁ δοθεὶς λογ. $=$ 5,4325798

ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων $=$ 3,4324882

λογαρ. διαφορὰ $=$ 916

Κατὰ τὸν δ'. καν. 1605 : 916 $=$ 1 : χ

καὶ $\chi = \frac{916}{1605} = 0{,}5707$.

Κατὰ τὸν ε'. προσαρτηθὲν τῷ 2707 ὡς δεκαδικὸν δίδωσι 2707,5707.

Κατὰ τὸν ϛ'. καν. πολλαπλασιασθῆναι χρὴ τοῦτο ἐπὶ $10^2 = 100$, (διὰ τὸ ἐνταῦθα τὸ χαρακτ. 5 εἶναι, δυάδι τοῦ 3 ὑπερέχον, οὗ τὸν ἀριθμὸν ἤδη εὕρομεν) καὶ ἔςαι $=$ 270757,07. ὅς ὁ ἀριθμὸς τοῦ δοθέντος τυγχάνει λογαρίθμου.

Ἔςω

Ἔϛω δεδομένος λογάρ. 1,3456789. οὗ τὰ δεκαδικὰ μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν τῶν ἑξῆς ἐμπίπτει λογαρίθμων

ὁ λογ. τοῦ	2217	$= 3,3457657$
ὁ λογ. τοῦ	2216	$= 3,3455698$
	διαφορὰ	1959
	ὁ δοθεὶς λογάρ.	1,3456789
ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων ἐν τοῖς πίναξι, τοῦ χαρακτηρ. παραμελουμένου.		3,3455698
	διαφορὰ	1091

Σύναξον οὖν. $1959:1091 = 1:\chi$. καὶ $\chi = \frac{1091}{1959} = 0,556$.

Ὁ τοίνυν ἀριθμὸς τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, τοῦ χαρακτηρ. $= 3$ ὄντος, εἴη ἂν 2216,556.

Ἐπεὶ δὲ τὸ χαρ. $= 1$. ἔϛιν ὁ ἀριθμὸς $= \frac{2216,556}{100} = 22,16556$. Εἰ δὲ τὸ χαρακτ. τοῦ δοθέντος λογαρ. $= 0$ ἐτύγχανεν, ἦν ἂν ὁ ἀριθμὸς 2,216556. Εἰ δὲ τὸ χαρακτ. $= -1$. ὁ ἀριθμὸς $= \frac{1}{22,16556}$ (§. 321.) Εἰ δὲ τὸ $\chi = +6$. ὁ ἀριθμὸς $= 2216556$.

§. 332. Ὅπως οὖν ἐπινενόηνται, παρίϛανταίτε, καὶ ἐν χρήσει τυγχάνουσιν οἱ λογάριθμοι ἐν τοῖς δι᾽ ἀριθμῶν ὑπολογισμοῖς, ἅλις εἰπόντες, ἴδωμεν ἔτι καὶ τὸν τρόπον, τὸν ἐν τοῖς διὰ γραμμάτων ὑπολογισμοῖς, ἤτοι τὸν καθόλου. Ἐπὶ οὖν τούτων, ἡ λέξις, λογάριθμος, τῷ γράμματι λ ἐκδηλοῦται, προτιθεμένῳ τῆς ποσότητος. π. χ. ὁ λ. τοῦ $\alpha = \lambda\alpha$. ὁ λ. τοῦ $\chi = \lambda\chi$, κτ. Ἐπεὶ δ᾽ οἱ λογάριθμοι Ἐκθέται εἰσὶ

τῶν

τῶν Δυνάμεων, οὕτω καὶ μεταχειριζόμεθα αὐτοὺς ἐν τοῖς, περὶ ὧν ὁ λόγος, ὑπολογισμοῖς. Ἔνθεντοι ὡσαύτως τὸν Πολλαπλασιασμὸν εἰς Πρόσθεσιν, τὴν Διαίρεσιν εἰς Ἀφαίρεσιν, τὴν Ἐξαγωγὴν τῶν Ῥιζῶν εἰς Διαίρεσιν, κ ὶ τὴν εἰς Δυνάμεις ἔξαρσιν εἰς Πολλαπλασιασμὸν τρέπομεν. Ἐὰν οὖν παραγομένοντι ἐκ διαφόρων ζητῆται ποσοτήτων, ἐκδηλωθείη ἂν διὰ τῆς τῶν λογαρίθμων προσθέσεως. Εἶτα δὲ, δὶ ἀριθμῶν διορισθὲν, εὑρεθῆναι δύναται. Ὡς τὸ παραγόμ. $\alpha\beta\gamma$ λογαριθμικῶς παραςὰν εἴη $\lambda\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma$. Παραπλησίως καὶ γδ λογαριθμικῶς $= \lambda 3 + \lambda\gamma + \lambda\delta$. Καὶ ἐν Συμπεπλεγμέναις Ποσότητι $(\nu\mu + \alpha - \chi) = \lambda\,(\nu\mu + \alpha - \chi)$, ἀλλ' οὐχὶ $= \lambda\nu + \lambda\mu + \lambda\alpha - \lambda\chi$. Τοῦτο γὰρ δηλώσει τῶνδε τῶν ποσοτήτων πολλαπλασιασμὸν μετ' ἀλλήλων. Τὸ δὲ σχῆμα $\nu\mu + \alpha - \chi$ σημαίνει, ἤπου δῆλον, τὸ ν ἐπὶ τὸ μ πολλαπλασιάσαι χρῆναι, καὶ τῷ ἐκ τούτων παραγομένῳ α προςεθῆναι, καὶ τοῦ Κεφαλαίου τὸ χ ἀφαιρεθῆναι· Οὗ γεγονότος, ὁ τούτου λογάριθμος ἀποδοθήσεται. Καὶ ἡ Διαίρεσις τῶν λογαρίθμων τὸν αὐτὸν τρόπον γίνεται, ὃν καὶ ἐν ἀριθμοῖς, τουτ: δὶ Ἀφαιρέσεως, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. ὁ Λ. τοῦ $\frac{\alpha}{\beta} =$ $\lambda\alpha - \lambda\beta$. Καὶ τὸ σχῆμα $\frac{\alpha\mu}{\varrho}$ λογαριθμικῶς ἂν οὕτω παραςαίη. $\lambda\alpha + \lambda\mu - \lambda\varrho$. Τὸ δὲ $\frac{\gamma\delta}{\nu\varrho}$ ὧδε. $(\lambda\gamma + \lambda\delta) - (\lambda\nu + \lambda\varrho)$ τουτ: οἱ δύω ἔσχατοι λογάριθμοι προςεθέντες ἀφαιροῦνται ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τῶν δύω πρώτων. Τὸ δὲ $\frac{\beta\zeta - \mu\varrho}{2\nu}$ τόνδε τὸν τρόπον. $\lambda\,(\beta\zeta - \mu\varrho) - (\lambda 2 + \lambda\nu)$.

§. 333. Ἐπειδὴ ἡ εἰς Δυνάμεις ἔξαρσις γίνεται

διὰ

διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ Ἐκθέτου τῆς Ποσότητος, ἀναγκαῖον καὶ τοὺς λογαρίθμους οὕτω παρίςασθαι. Ἔνθεντοι α^2 λογαριθμιῶς εἴη 2λα. Ὅ ἐςι, τοῦ λογ. τοῦ α πολλαπλασ ἐπὶ 2, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦδε τοῦ λογαρίθμου ζητηθέντος, προκύψει α^2 ἀριθμὸς, τοῦ α πρότερον ὡς ἀριθμοῦ διορισθέντος. χ^3 λογαριθμικῶς $=$ 3. λχ. Καὶ $\chi^\nu = \nu.\, \lambda\chi$. Κἀκ τούτων καὶ δυσχερέςερα τούτων ὑποδείγματα διορίζειν μανθάνομεν π. χ. $\alpha^{\nu-2}$ λογαριθμικῶς ἐςι $\nu.\,\lambda\alpha - 2.\,\lambda\alpha$. Ἡ γὰρ δύναμις τοῦτο ποιεῖν ἐπιτάττει, καὶ οἱ λογάριθμοι δυνάμεις δήπου τυγχάνουσι. Τὸ δὲ κἀκ τούτου δῆλον, ὅτι $\alpha^{\nu-2} = \alpha^\nu : \alpha^2 = \frac{\alpha^\nu}{\alpha^2}$. Ἄρα καὶ $\nu.\,\lambda\alpha - 2.\,\lambda\alpha$. Ταῦτα οὖν μετ' ἐπιςάσεως θεωροῦντες πλείω τῶν σχημάτων εὐχερῶς κατανοήσαιμεν. Ὡς $\alpha^{\nu-\mu}\chi\omega$ λογαριθμικῶς ἐςι $\nu.\,\lambda\alpha - \mu.\,\lambda\alpha + \lambda\chi + \lambda\omega$. Καὶ $\alpha^\nu \chi^{3-\nu}\mu$ ἐςι λογαρ. $\nu.\,\lambda\alpha + 3.\,\lambda\chi - \nu.\,\lambda\chi + \lambda\mu$. Καὶ τὸ ἑξῆς $\alpha^\nu \mu^{-3}$ ἐςι $\nu.\,\lambda\alpha - 3.\,\lambda\mu$. Ἔςι γὰρ $\alpha^\nu \mu^{-3}$ $\frac{\alpha^\nu\, 1}{\mu^3}$ (§. 198.) $= \frac{\alpha^\nu}{\mu^3}$. Ἐὰν αἱ τῶν ποσοτήτων δυνάμεις κλάσματα ὦσι, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, καὶ ῥίζαι παριςῶνται, τελοῦνται αὖθις τὰ αὐτά. Τίθεται γὰρ ὁ κλασματικὸς Ἐκθέτης ὡσαύτως πρὸ τοῦ λ. ὃ τὸν λογάριθμον ἐμφαίνει· π. χ. $\chi^{\frac{3}{4}}$ λογαριθμικῶς εἴη $\frac{3}{4}.\,\lambda\chi$. ἢ $\frac{3\lambda\chi}{4}$, ὅ ἐςιν, ὁ λογάριθμος τοῦ χ πολλαπλασιασθῆναι μετὰ τοῦ 3 ὀφείλει, καὶ τὸ παραγόμ.

ραγόμ. διὰ 4 διαιρεθῆναι, καὶ τοῦ προκύπτοντος λογαρίθμου τὸν ἀριθμὸν ζητηθῆναι, διορισθέντος πρότερον ἀμέλει τοῦ χ. π. χ. Ἔςω $\chi = 36$. $\chi^{\frac{3}{4}} = 36^{\frac{3}{4}}$ $= \sqrt[4]{36^3}$, καὶ λογαριθμικῶς $= \frac{3}{4} \lambda . 36$.

$$\text{Ὥςε} \quad \frac{3\lambda . 36}{4} = \lambda . 36 = 1{,}5563025$$

πολλαπ. διὰ 3

$$= 4{,}6689075$$

διαιρ. διὰ $4 = 1{,}1672268$

Οὗτινος λογαρίθμου ἐκ τῶν πινάκων ἐξενεχθέντος, εὑρίσκομεν σχεδὸν τὸν ἀριθμὸν 14,7. Ὥςε $36^{\frac{3}{4}}$, ἢ $\sqrt[4]{36^3} = 14{,}7$. Κἀντεῦθεν προφανὴς ἡ μεγίςη ὄνησις τῶν λογαριθμικῶν ὑπολογισμῶν. Ὡσαύτως καὶ τὸ σχῆμα $\chi^{\frac{\nu}{\mu}} = \frac{\nu\lambda\chi}{\mu}$. ἢ $\frac{\nu}{\mu}\lambda\chi$. καὶ $(\nu\mu + \varrho\chi)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}\lambda(\nu\mu + \varrho\chi)$, κτ. ὡς ἀνωτ.

Ἐφ' ᾧ τοῦτο διὰ παραδείγμ. διαλευκᾶναι, ἐκ τῶν Γεωμετρικῶν ληφθέντος Προόδων, κἀν τούτῳ τὴν τῶν λογαριθμικῶν σχημάτων δεῖξαι χρῆσιν, ἔςω ἐν Γεωμετρικῇ Προόδῳ δοθεὶς ὁ α΄. ὅρος, καὶ ὁ ἔσχατος, καὶ ὁ τῆς Προόδου ἐκθέτης. Ἐκ τούτων εὑρετέα ἡ πληθὺς τῶν ὅρων.

Ὁ α΄. ὅρος ἔςω $= \alpha$. ὁ ἐσχ. $= \beta$. ὁ τῆς Προόδου ἐκθέτης $= \mu$. καὶ ἡ τῶν ὅρων πληθὺς $= \chi$. ἥτις ζητεῖται. Ἀντὶ τοῦ ἐσχάτου ὅρου $= \beta$, ἀντικαταςῆσαι δυνάμεθα τὸ $\beta = \alpha\mu^{\chi - 1}$. (§. 257.)

ἤτοι

ἤτοι $\beta = \alpha\mu^{\chi - 1}$. λογαριθμικῶς

$$\lambda\beta = \lambda\alpha + \chi\lambda\mu - \lambda\mu$$
$$+ \lambda\mu \qquad\qquad + \lambda\mu$$

$$\lambda\beta + \lambda\mu = \lambda\alpha + \chi\lambda\mu \quad (\S.\ 48.\ \alpha'.)$$
$$- \lambda\alpha \qquad\qquad - \lambda\alpha$$

$$\lambda\beta + \lambda\mu - \lambda\alpha = \chi\lambda\mu \quad (\S.\ 53.\ \alpha'.)$$
$$: \lambda\mu$$

$$\frac{\lambda\beta + \lambda\mu - \lambda\alpha}{\lambda\mu} = \frac{\chi\lambda\mu}{\lambda\mu} \quad (\S.\ 114.\ \alpha'.)$$ ἢ

$$\frac{\lambda\beta + \lambda\mu - \lambda\alpha}{\lambda\mu} = \chi.$$ Καὶ προσφυέστερον ἐκδηλωθέν.

$$\frac{(\lambda\beta - \lambda\alpha)}{\lambda\mu} + \frac{\lambda\mu.}{\lambda\mu} = \chi.$$ καὶ ἔτι προσφυέστερον

$$\frac{(\lambda\beta - \lambda\alpha)}{\lambda\mu} + 1 = \chi.$$

Τοῦτο δ' ἐςι χ, ἢ ἡ τῶν ὅρων πλῆθυς ἡ ζητουμένη, λογαριθμικῶς ἐξενεχθεῖσα. Θῶμεν οὖν τὴν σειρὰν οὕτως ἔχειν, ἤτοι τὸν α'. ὅρον εἶναι 2, ἢ $\alpha = 2$. τὸν ἔσχατον 1458, ἢ $\beta = 1458$. τὸν ἐκθέτην $= 3$. ἢ $\mu = 3$. καὶ τὴν πλῆθυν τῶν ὅρων, ἤτοι χ, ζητεῖσθαι. Ἔςαι οὖν κατὰ τοῦτο τὸ σχῆμα $\chi = \frac{(\lambda\beta - \lambda\alpha)}{\lambda\mu} + 1$. ἤτοι $\chi = \frac{(\lambda\,.\,1458 - \lambda 2)}{\lambda 3} + 1$.

Ἔςι

$$\begin{array}{lcl} \text{Ἐςὶ δὲ λ. } 1458 & = & 3{,}1637575 \\ \text{ἀφαιρ. λ. } 2. & = & 0{,}3010300 \\ \hline & & 2{,}8627275 \end{array}$$

οὗτος διαιρ. διὰ τοῦ λ. 3. Ἀλλὰ λ. 3 = 0,4771212.

Ὥςε $\frac{2,8627275}{0,4771212} = \frac{28627275}{4771212}$ (ὅτι ἀμφοῖν ἴσα δεκαδικὰ ἔνεισι.) =

$$\begin{array}{l|l} 28627275 & 6. \\ (4771212) & \\ 28627272 & \end{array}$$

Ὅ τὸ πηλίκον τυγχάνει. Τὸ δὲ λείψ. 5 ὑπολέλειπται, ὅτι οἱ λογάριθμοι σχεδὸν πάντες ἄλογοι ποσότητες εἰσί. Τούτῳ προσεθήτω ἔτι 1. Ὥςε 6 + 1 = χ = τῇ πληθύϊ τῶν ὅρων. Ὅθεν 7 οἱ ὅροι. Καὶ ἡ Σειρὰ ἔςαι

2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458.

Περὶ Συνδυασμοῦ.

§. 334. Ἡ Μέθοδος, καθ' ἣν, ποσαχῶς ἡ τάξις δεδομένων πραγμάτων οἱωνοῦν, καὶ ὁποσωνοῦν, μετακινεῖται, καὶ μετατίθεται, ἀνὰ δύω, ἢ ἀνὰ τρία, ἢ ἀνὰ δ', κτ. λαμβανομένων. ἡ ἐν γένει, καθ' ἣν Συζυγίαι καὶ Μεταθέσεις τῶν δοθέντων καθ' ὁροθετηθέντας γίνονται νόμους, καὶ ποσάκις τοῦτο ἐν δοθείσῃ τινὶ πληθύϊ πραγμάτων τελέσαι δυνατὸν, εὑρεῖν δυνάμεθα, Συνδυασμοῦ Μέθοδος καλεῖται. Αὐτίκα οὖν δῆλον ταύτην διεξοδικωτάτην, καὶ ἐπὶ μυρίων εἶναι ἐν χρήσει, ὡς πᾶς τις συνομολογήσει, ἐνίων μόνον ἁψαμένοις.

§. 335. Ἀπὸ τοίνυν τῶν εὐχερεςάτων ποιησάμενοι τὴν ἀρχὴν εἴπωμεν περὶ τῆς δυνατῆς Μεταθέσεως ὀλιγαρίθμων δοθέντων πραγμάτων. Ἐὰν δύω τινὰ δοθῶσι, (νοήσεις δὲ ὅ, τι ἂν βούλῃ, δύω ἀριθμοὺς, ἢ ὀνόματα, ἢ ἀνθρώπους, ἢ γράμματα, κτ.) ἅπερ α καὶ β ῥηθήτω, μόνον δὶς ταῦτα μετακινῆσαι, καὶ μεταθεῖναι δυνήσῃ, τουτ. μόνον δύω θέσεις διαφόρους ἡ τούτων ὑποίσεται τάξις. ἤτοι γὰρ οὕτως, αβ, ἢ οὕτω, βα, τεθήσεται. Αἱ δυναταὶ ἄρα δύω τινῶν Μεταθέσεις καὶ οὕτως ἂν ἐκδηλωθεῖεν. 1 . 2 = 2. ἤτοι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μετ' ἀλλήλων τῶν δύω πρώτων ἀριθμητικῶν χαρακτήρων. Ληφθήτω πρὸς τούτοις καὶ τρίτον τι, τὸ γ, ὅπερ πρὸς τῷ αβ τρισσῶς τεθῆναι δύναται, ἐν ἀρχῇ, γαβ, μεταξὺ τούτων, αγβ, καὶ μετ' αὐτὰ, αβγ. Τρισσῶς δὲ καὶ πρὸς τῷ βα. τουτ. γβα. βγα. βαγ. Τοῦτο οὖν δίδωσι μεταθέσεις τριπλασίονας τῶν προτέρων, ἤτοι τῶν τοῦ αβ. Ὥςε τὸν ἀριθμὸν, ἢ τὴν πληθὺν τῶν προτέρων μεταθέσεων ἐπὶ τὸν 3 πολλαπλασιάσαι χρὴ. ἐφ' ᾧ, ποσάκις τρία τινὰ μετατεθῆναι δύνανται, εἰδέναι. ἤτοι 1 . 2 . 3 = 6. Ὅπερ αὖθις διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πρώτων τριῶν ἀριθμητικῶν προκύπτει χαρακτήρων. Πλείους δὲ τῶν 6 μεταθέσεις ἐπὶ τριῶν οὐ δυναταί. Αὖθις τοῦ δ'. γράμματος παραληφθέντος, ἤτοι τοῦ δ, ἔσονται δυναταὶ μεταθέσεις τῶν δ'. γραμμάτων 24. Εἰσὶ δὲ. δγαβ . γδαβ . γαδβ . γαβδ . δαγβ . αδγβ . αγδβ . αγβδ . δαβγ . αδβγ . αβδγ . αβγδ . δγβα . γδβα . βγδα . γβαδ . δβγα . βδγα . βγδα . βγαδ . δβαγ . βδαγ . βαδγ . βαγδ . Τῆς τοίνυν πληθύος τῶν προτέρων μεταθέσεων τῷ 4 πολλαπλασιασθείσης, ἔςαι γνωςὸν, ποσάκις δ'. τινὰ μετατεθῆναι δυνατόν. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς, ὁ, ποσάκις τρία μετατίθενται, δηλῶν, προέκυψε διὰ τοῦ 1 . 2 . 3. Ὁ δὲ, ποσάκις δ'. διὰ τοῦ 1 . 2 . 3 . 4 = 24,

 προ-

προκύψει. Ἐὰν δὲ ε΄. ὑποτεθῶσιν, ὧν τὴν μετάθεσιν ..ὲναι βουλόμεθα, δῆλον, ὅτι μετατεθήσονται 1 . 2 . 3 . 4 . 5 : κις = 120 : κις. Καὶ ἐν γένει. ὁ τῶν μεταθέσεων δυνατὸς ἀριθμὸς, ἢ πλῆθυς προελεύσεται, τοσούτων χαρακτήρων, ἀλλήλοις φυσικῇ τάξει ἑπομένων, (ἀπὸ τῆς 1 τῆς ἀρχῆς γινομένης) πολλαπλασιαζομένων, ὅσα τὰ πράγματα, περὶ ὧν τῆς δυνατῆς μεταθέσεως λόγος. Οὕτω π. χ. καὶ ϛ΄. πραγμάτων αἱ δυνατοὶ μεταθέσεις εἶεν ἂν 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720. Ἐὰν οὖν ὁ ἀριθμὸς τῶν δοθέντων π κληθῇ, τὴν τῶν δυνατῶν μεταθέσεων πληθὺν διὰ τοῦ ἑξῆς γενικοῦ ἂν παραστήσαιμεν τύπου. π . π — 1 . π — 2 . π — 3 . π — 4 . π — 5, κτ. μέχρις ἂν ὁ ἔσχατος ὅρος = 1 γένηται. Ὅπερ τελευταῖον ἀναγκαίως γενήσεται, εἰ τὸ π ἐνεργείᾳ τυγχάνει ἀριθμὸς, ἤτοι εἰ διορισθῇ. Τὸ αὐτὸ γὰρ προκύπτει, τῶν παραγόντων, τῶν μετ᾽ ἀλλήλων πολλαπλασιασθησομένων, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἴτ᾽ ἐκ δεξιῶν, εἴτ᾽ ἐξ ἀριστερῶν ἀρχομένου. Ἐπὶ τοῦ ὑποτεθέντος τύπου ἡ μὲν ἀρχὴ γίνεται ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ἀριθμοῦ, τοῦ π, τὸ δὲ πέρας εἰς τὴν 1. Παράδειγμα εἰς ἀνάπτυξιν. Ζητεῖται, ποσάκις αἱ λέξεις „μία σωτηρία ἡττηθεῖσι μηδεμίαν ἐλπίζειν σωτηρίαν„ ἂν μετατεθεῖεν; Ἐπειδὴ ἓξ αἱ λέξεις, μετατεθήσονται δήπου καὶ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720 : κις. Ἕτερον. Εἰ δέοι δέκα τινὰς τοσάκις ἑστιᾶσαι, ὁσάκις ἡ τάξις ἐκείνων ἀνακειμένων ἔχει μετατεθῆναι, ἔσται τοῦτο 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 : κις = 3628800 : κις. Ἐὰν οὖν τις τούτους δὶς ἑστιᾷ τῆς ἡμέρας, ἀπαλλαγείη ἂν τῶν ξένων σχεδὸν μετὰ 4971 ἐνιαυτούς.

§. 336. Σημείωσαι, ὅτι, ἐὰν ἐν τοῖς δεδομένοις, καί τι, ἢ τινὰ τὰ αὐτὰ δὶς, ἢ τρὶς, ἢ πολλάκις ἀπαιτᾷ, τηνικαῦτα ἐξαιρέσει ὁ ἀνωτέρω κανὼν ὑ-

πόκει-

πόκειται. Ἐάν τι τὸ αὐτὸ ἐν τῇ τῶν δοθέντων πληθυῒ δὶς ἐνυπάρχῃ, ἐλαττωθήσονται κατὰ τὸ ἥμισυ αἱ Συζυγίαι. (εἰ δ' ὡς διάφορον τῷ ἀριθμῷ θεωρεῖται, κρατήσει ὁ α'. νόμος) Ἔςω α μόνον. προσελθέτω καὶ ἕτερον α, καὶ ἔςαι αα, μία μόνη μετάθεσις, τουτ: τὸ ἥμισυ τῶν μεταθέσεων, ἃς δύω διάφορα τῷ εἴδει συνιςῶσι. Προςεθέντος δὲ τῷ αα καὶ τοῦ γ, ἕξομεν ααγ . γαα . αγα, τρεῖς μόνον μεταθέσεις, τὸ ἥμισυ τῶν ἐκ τριῶν διαφόρων τῷ εἴδει ἀνακυπτουσῶν. (§. ἀνωτ.) Ἔνθεν τοι τὴν τῶν δοθέντων πληθὺν (τοῦ ἑνὸς δὶς ἀπαντῶντος) διὰ 2 διαιρεῖν χρή. Ὁ δὲ γενικὸς τούτου τύπος ἂν εἴη, τῆς πληθύος τῶν πραγμάτων $= \pi$ τεθείσης, $\frac{\pi . \pi - 1 . \pi - 2 . \pi - 3 . \pi - 4,}{1 . 2}$ τῆς σειρᾶς τοῦ ἀριθμητοῦ προαγομένης, ἕς δ' ὁ ἔσχατως ὅρος $= 1$ ᾖ. Εἰ δὲ δύω τὰ αὐτὰ ἐν τοῖς δοθεῖσι, τὸ σχῆμα εἰς τόδε τραπήσεται. $\frac{\pi . \pi - 1 . \pi - 2 . \pi - 3,}{1 . 2 . 1 . 2}$ κτ. Εἰ δὲ τρία, εἰς τόδε. $\frac{\pi . \pi - 1 . \pi - 2 . \pi - 3 . \pi - 4,}{1 . 2 . 1 . 2 . 1 . 2}$ κτ. Εἰ δέ τι τὸ αὐτὸ τρὶς ἀπαντήσειεν ἐν τοῖς δοθεῖσιν, ὁ Διαιρέτης ἔςαι $1 . 2 . 3 = 6$. Τηνικαῦτα γὰρ ἀναγκαίως αἱ μεταθέσεις κατὰ τὸ ς'. μειωθήσονται, ὡς τῶν ἑξάκις μεταθέσεων τῶν τριῶν, τῶν ἤδη ὡς τὸ αὐτὸ θεωρουμένων, ἐκπιπτουσῶν. Εἰ γὰρ π. χ. α τρὶς ἐνυπάρχει, εἴη ἂν τοῦ ααα μία καὶ μόνη μετάθεσις, ἐν ᾧ τούτου μὴ ἔχοντος οὕτως, ἓξ ἂν ἐγένοιτο. (§. ἀνωτ.) Ὥςε ὁ γενικὸς τύπος ἔςαι

$$\frac{\pi . \pi - 1 . \pi - 2 . \pi - 3 . \pi - 4 .}{1 . 2 . 3}$$

Τετράκις δέ τινος παρόντος, διὰ τὰ αὐτὰ ἔςαι τὸ σχῆμα

$$\frac{\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2 \cdot \pi - 3 \cdot \pi \cdot 4 \cdot \pi - 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

κτ. Ἐὰν δὲ συμβῇ τι τρὶς παρεῖναι, δὶς δ᾽ ἕτερόν τι, εὐχερῶς ἐκ τῶν ῥηθέντων καὶ τοῦτο ἂν διορίσαιμεν. τουτέςιν ὁ διαιρέτης ἐκ τῶν 1 . 2 . 3 . 1 . 2 συςήσεται. ὅτι ἓξ μεταθέσεις ὡς μία, καὶ δύω αὖθις ὡς μία ὑπολογισθήσονται. π. χ. Τεθήτωσαν αἱ ποσότητες αααββγ. ποσάκις αὗται μετατεθῆναι δύνανται; ὡς οὖν ὁ τυγχάνουσαι, μετατεθήσονται 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 : κις. Ἐπεὶ δὲ τὸ α τρὶς, καὶ τὸ β δὶς παρὸν τυγχάνει, ὁ διαιρέτης ἔςαι 1 . 2 . 3 . 1 . 2. τουτ. τὸ σχῆμα $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 60$: κις. Ὡσαύτως. ποσάκις τὰ ἐννέα ταῦτα ααααββββγγ μεταθεῖναι δυνατόν; 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 : κις. Διὰ δὲ τὸν διαιρέτην 1 . 2 . 3 . 4 . 1 . 2 . 3 . 1 . 2 = $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 1260$: κις. Αἱ γὰρ μεταθέσεις, αἱ ἐκ τεσσάρων ἀναφυόμεναι, ὡς μία νομίζονται, ὡς τοῦ α τετράκις. αἱ δ᾽ ἐκ τριῶν, ὡσαύτως ὡς μία, ὡς τοῦ β τρὶς αἱ δ᾽ ἐκ τοῦ γ παραπλησίως ὡς μία, ὡς τοῦ γ δὶς. παρόντων. Παράδ. μεταξὺ τῶν 10 (§. ἀνωτ.) ἔςωσαν καὶ 5 γυναῖκες. Αἱ δὲ τούτων μεταθέσεις οὕτω γινέσθωσαν, ὥς᾽ ἑκάςην γυναῖκα παρὰ τῷ ἰδίῳ εἶναι ἀεὶ ἀνδρί. Ἐπεὶ οὖν ὁ ἀνὴρ, καὶ ἡ γυνὴ ὡς ἓν ὑπολογίζονται, ἔςαι μόνον τῶν 5 μετάθεσις. Ὥςε 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120 : κις οἱ τούτων τόποι μετατεθήσονται. Ἄρα δὶς τῆς ἡμέρας ἑςιωμένων, 60 ἡμερῶν μόνον χρεία.

§. 337. Καὶ μυρία ἕτερα εἴδη Συνδυασμῶν δίδοται, ὧν κανόνας οὐ δυσχερὲς ἐπινοῆσαι. Θεωρηθήτω τω καὶ τούτων τινά. Ἀριθμοῦ τινὸς πραγμάτων δοθέντος, ἐξ ὧν τοσαύτας διαφόρους Δυάδας, τοσαύτας διαφόρους Τριάδας, τοσαύτας διαφ. Τετράδας λαμβάνειν δέοι, ὅσα Κ π. χ σημαίνει αὗται καλοῦνται Συνδυασμοὶ, Συντρισσασμοὶ, ἢ Συντρισσεύσεις, Συντετρασσεύσεις, κτ. Ζητητέος ἤδη ὁ τῶν δυάδων νόμος. Εἰ ς τινὰ δοθεῖεν, ἅπερ ἀνὰ δύω συνάψαι δέοι, ἔνθα μέντοι οὐδένα λόγον ποιούμεθα τοῦ, πότερον ἐφ᾽ ἑκάςης δυάδος προτίθεται, ἢ ἐπιτίθεται, εὑρήσομεν τὰς δυάδας κατα τὸ ἐχόμενον Πινακίδιον, οὗ ἐν τῇ α΄. σεσημ ἡ τῶν δοθέντων πληθὺς, ἐν δὲ τῇ β΄. αὐτὰ τὰ δοθέντα, ἐν δὲ τῇ γ΄. αἱ τούτων δυάδες κεῖνται

ἡ τῶν πραγμάτων πληθύς.		αὐτὰ τὰ πράγμ.	αἱ δυάδες.
	1	α	ο
	2	β	αβ
	3	γ	αγ, βγ.
	4	δ	αδ, βδ, γδ
	5	ε	αε, βε, γε, δε.

Αὐτόθεν φανερὸν, ὅτι ἕν τι οὐδεμίαν δυάδα δύναται ἀποτελέσαι. διὰ τοῦτο κεῖται ο ἐν τῷ α΄. τόπῳ. Ἐκ δὲ δύω τελεῖται δυὰς, ἤτοι αβ, οὐδένα λόγον τῆς τούτων θέσεως ἐχόντων, καὶ αβ, ἢ βα ὡς τὸ αὐτὸ θεωρούντων, καὶ εἰς τὰς δυάδας ἤδη μόνον ἀφορώντων. ληφθὲν δὲ καὶ τὸ γ΄. ἤτοι τὸ γ, δώσει μεθ᾽ ἑκατέρου τῶν προτέρων, μετὰ τοῦ α καὶ β, καινὴν δυάδα. Ὥςε δύω δυάδες, αἷς καὶ τῆς α΄. προςεθείσης, ἔσονται τρεῖς αἱ δυάδες. Ἔνθεν τοι τρία πράγματα διδοῦσι τρεῖς δυάδας. Αὖθις καὶ τὸ δ΄. ληφθὲν, ἤτοι τὸ δ, παρέξει σὺν ἑκάςῳ τῶν προηγηθέντων τριῶν καινὴν δυάδα. ἄρα τρεῖς δυάδες, αἷς καὶ τὰς πρότερον τρεῖς προσαριθμήσαντες ἕξομεν ἓξ δυάδας. Τὸ ε΄. δίδωσι

μεθ᾽

μεθ' ἑκάςου τῶν προτέρων τεσσάρων τέσσαρας καινὰς δυάδας, σὺν ταῖς ἓξ ταῖς προηγηθείσαις $=$ 10 δυάδας. Ἤδη οὖν καὶ τὸν νόμον εὐχερῶς ἂν διορίσαιμεν. Πᾶσαι ἀμέλει αἱ δυάδες τὸ κεφάλαιόν εἰσι τῶν ὅρων Ἀριθμητικῆς Σειρᾶς, ἧς ἡ ἀρχὴ μονάδι ἐλαττοῦται τῆς δοθείσης πληθύος τῶν πραγμάτων, καὶ διηνεκῶς μονάδι μειοῦται. ἢ ἧς ἡ διαφορὰ ἡ 1, καὶ τὸ πέρας ἡ 1. Ὡς ἐπὶ τῶν πέντε τῶν δοθέντων ἡ τῶν δυάδων πληθὺς εἴη ἂν τὸ κεφάλαιον τοῦ $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. Ἓξ δὲ δοθέντων τὸ κεφάλαιον $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. Ἢ δυνάμεθα θεωρῆσαι αὐτάς, ὡς τὸ κεφάλαιον Ἀριθμητικῆς Σειρᾶς, ἧς τινι α'. ὅρος $= 1$, καὶ ἡ διαφορὰ $= 1$. Ὁδ' ἔσχατος μονάδι ἐλαττούμενος τῆς τῶν δοθέντων πληθύος. Τὸ τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου κεφάλαιον $= \alpha\pi + \frac{(\pi^2 - \pi)\,\delta}{2}$. (§. 226.) Ἔνθα π τὸν ἀριθμὸν, ἢ τὴν πληθὺν σημαίνει τῶν ὅρων. α τὸν α'. ὅρον, καὶ δ τὴν διαφοράν, Ἐπεὶ δ' ἐνταῦθα $\alpha = 1$, καὶ $\delta = 1$, ὑπολείπεται μόνον ἐν τῷ σχήματι $\pi + \frac{(\pi^2 - \pi)}{2}$. Ἀλλὰ λόγον ποιητέον καὶ τοῦ, ὅτι οἱ ὅροι μονάδι ἐλαττοῦνται τῆς πληθύος τῶν δοθέντων. Ἐν γὰρ 5 πράγμασι π. χ. τέσσαρες οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς, δι' ὧν τὸ ταύτης ἐξευρίσκεται κεφάλαιον. Ὥςε ἐν π πράγμασι, $\pi - 1$ οἱ ὅροι. Εἰ οὖν ἡ τῶν δοθέντων πληθὺς, ἡ ἀνὰ δύω συνδυασθησομένη $= \pi$, οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς, ἧς τὸ κεφάλαιον τὴν τῶν συνδυασμῶν ὑποδείκνυσι πληθὺν, εἶεν $\pi - 1$. Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου ἀντὶ τοῦ π γραπτέον τὸ $\pi - 1$. Ὥςε ὁ τύπος $\pi + \frac{(\pi^2 - \pi)}{2}$ εἰς τόνδε μετασχηματισθήσεται, $\pi - 1$

+ (π

$+ \frac{(\pi - 1)^2 - (\pi - 1)}{2}$. ὃς ἀναπτυχθεὶς ἔςαι $\pi - 1 + \frac{\pi^2 - 2\pi + 1 - \pi + 1}{2}$.

Εἰ δὲ καὶ τὸ $\pi - 1$ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀνάξομεν παρονομαςὴν, εἴη ἂν $=$

$\frac{2\pi - 2 + \pi^2 - 2\pi + 1 - \pi + 1}{2}$,

καὶ τῇ προσθέσει $= \frac{\pi^2 - 3\pi + 2\pi + 2 - 2}{2}$

$= \frac{\pi^2 - \pi}{2}$. Ἀλλὰ $\frac{\pi^2 - \pi}{2} = \frac{\pi(\pi - 1)}{2}$.

Τοῦτο ἄρα ἔςαι ὁ γενικὸς τύπος Συζυγιῶν ἀνὰ δύω.

Παράδ. Ποσάκις δυνάμεθα ἐννέα τινὰ σὺν δύω μετ' ἀλλήλων συζεῦξαι; Ἐνταῦθα $\pi = 9$. ἄρα $\frac{9(9 - 1)}{2}$. ἢ $\frac{9 \cdot 8}{2}$: κις $= 36$. Τοσαῦται δυάδες ἐμπεριέχονται τοῖς ἐννέα· Ἐκ τούτου, καὶ ὅπως ἐν τοῖς δημοσίοις Λάχεσι τὰς ἀνὰ δύω συζυγίας τῶν ἀριθμῶν (Amben) ζητεῖν χρὴ, μανθάνομεν. Εἰ π. χ. 12 οἱ ἀριθμοὶ, πόσαι Amben τούτοις ἐνυπάρχουσι; $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$. Ἐν δὲ 90 ἀριθμοῖς ἔνεισιν $\frac{90 \cdot 89}{2}$ Amben $= 4005$. Τῶν δὲ 90 ἐξάγονται μόνον 5 ἀριθμοί. τούτοις ἄρα $\frac{5 \cdot 4}{2}$ $= 10$ Amben. Ὥςε τὸ πιθανὸν τοῦ μίαν Ambe ἐξαχθήσεσθαι ἐςὶ 10, τοῦ δὲ μὴ ἐξαχθήσεσθαι 39 5 τουτ: ὁ λόγος τοῦ πιθανοῦ πρὸς τὸ ἀπίθανον ἐςὶν ὡς 10 : 3995. ἢ 1 : 399,5.

§. 338.

§. 338. Ἐὰν δὲ τὰ δοθέντα ἀνὰ τρία συνάψαι βουλώμεθα, τῆς τούτων θέσεως, καὶ τάξεως παραμελοῦντες, καὶ π ἡ τῶν δοθέντων ἡ πλῆθυς, ἔςαι ὁ τούτων γενικὸς τύπος $\frac{\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Εἰ δ᾽ ἀνὰ τέσσαρα, ὁ $\frac{\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2 \cdot \pi - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Οὓς (τύπους) ἀποδεῖξαι οὐκ ἔχομεν, ὡς τῆς διδασκαλίας περὶ τῶν Ἐσχηματισμένων ἀριθμῶν προαπαιτουμένης, περὶ ἧς κατωτέρω ῥηθήσεται ὀλίγ᾽ ἄττα. Τῷ δὲ βουλομένῳ παντάπασι καθόλου τύπον πρὸ ὀφθαλμῶν ἔχειν, ἐὰν ἐκ π δοθέντων πραγμάτων ρ συζυγίας ποιῆσαι δέῃ, ἔςαι ὁ τύπος τοῦτο, $\frac{\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2 \ldots\ldots (\pi - \rho + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \rho}$ ὅ ἐςιν, οἱ τοῦ ἀριθμητοῦ παράγοντες γίνονται τοσοῦτοι, ὅσαι συζυγίαι δίδονται, οἱ δὲ τοῦ παρονομαςοῦ ἀπὸ 1 αὖθις τοσοῦτοι, ὅσαι αἱ συζυγίαι. Παραδείγματα, Πόσας τριάδας περιέχουσιν 20 ἀριθμοὶ, τουτ. 20 ἀριθμοὶ ἀνὰ τρεῖς εἰλημμένοι; Τὰ π δοθέντα εἰσὶν 20, ἢ $\pi = 20$. Πρόκεινται δὲ εἰς ρ συζυγίας γενέσθαι, ἐνταῦθα εἰς τριάδας, ἢ ἀνὰ τρεῖς ληφθῆναι. Ὥςε $\rho = 3$. Ἄρξαι οὖν ἐν τῷ ἀριθμητῇ ἀπὸ τοῦ 20, πολλαπλασιάζων τοῦτον ἐπὶ τὸν ἐγγὺς ὑποδεέςερον ἀριθμὸν, καὶ οὕτω χωρῶν, μέχρις ἂν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $(\pi - \rho + 1)$ γένοιο $= 20 - 3 + 1 = 20 - 2 = 18$. Ὅ ἐςι κατὰ τὸν τύπον

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1140.$$

Πόσας δὲ τετράδας; $= \frac{\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2 \cdot \pi - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4845.$$

§. 339. Ἐὰν δὲ Συνδυασμοὶ, Συντριασσεύσεις, κτ. ζητῶνται, ἐν οἷς καὶ τῆς τάξεως, ἢ θέσεως, ἣν τὰ δοθέντα πρὸς ἄλλ λα ἔχει, οὐκ ὀλιγωροῦμεν. καὶ ἕκαστον τῶν δεδομένων δὶς, τρὶς, κτ. ἑαυτῷ συναφθῆναι δέῃ, ὁ τούτων νόμος ἕτερος ἔσαι τοῦ προτέρου. Οἷον, εἰ πρόκειται α καὶ β πρὸς δύω συνάψαι, (οὕτω μέντοι, ὥςε καὶ εἰς τὴν τούτων ἀφορᾶν τάξιν, ὅπερ ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω Συνδυασμῶν οὐκ ἐγίνετο) καὶ ἕκαςον τούτων καὶ μεθ' ἑαυτοῦ, προκύψουσι Συζυγίαι οὐ πλείους τῶν τεσσάρων, ἤτοι αβ, βα, αα, ββ. Τριῶν δὲ παρόντων, τοῦ α, β, γ, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀνὰ δύω συζευγνυμένων, ἔσονται ἐννέα αἱ Συζυγίαι. αβ, αγ, βγ, βα, γα, γβ, αα, ββ, γγ. Τῶν οὖν δύω 4 αἱ Συζυγίαι, ὃς (4) ὁ τετράγωνος τοῦ 2 τυγχάνει. Τῶν δὲ τριῶν, ἀνὰ δύω λαμβανομένων, 9 = τῷ τετρ. τοῦ 3. Τῶν δὲ τεσσάρων, αὖθις πρὸς δύω, 16 = τῷ τετρ. τοῦ 4. Ὥςε καὶ ἐν γένει, π πράγματα, οὕτω συναπτόμενα, παρέχουσι π^2 Συζυγίας.

Παράδ. Ποσάκις οἱ ἐννέα χαρακτῆρες οἱ ἀριθμητικοὶ, πρὸς δύω ἀλλήλοις συνάπτονται. καὶ τῆς τούτων τάξεως ἀμέλει θεωρουμένης, καὶ ἑκάςου τούτων καὶ ἑαυτῷ συναπτομένου; $9 \cdot 9$. ἢ $9^2 =$ 81:κις. Εἰ δὲ τούτοις καὶ οἱ 9 ἁπλοῖ χαρακτῆρες προσαριθμηθῶσι, καὶ χωρὶς τούτων, καὶ ἕκαςος χαρακτὴρ ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τῶν 9 τῷ 0 συναφθῇ. ὡς 10, 20, κτ. τουτ: καὶ 18 ἔτι ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῷ 81 προςεθῶσιν, ἕξομεν 99, τουτ. πάντας τοὺς μεταξὺ 1 καὶ 100 ἀριθμούς. Τῶν δὲ δοθέντων πρὸς τρία συναπτομένων, ἡ τῶν Συζυγιῶν πληθὺς ἀεὶ ὁ κύβος αὐτῶν ἔςαι. Ἢ ἐὰν τὰ δοθέντα π ᾖ, αἱ τούτων πρὸς τρία συζυγίαι ἔσονται π^3, κτ.

Παράδ. Ποσάκις τοὺς 9 χαρακτῆρας πρὸς τρεῖς συνάψαι δυνάμεθα; $9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 =$

729:

729:κις. Ἐπεὶ δ' οἱ 9 χαρακτῆρες ἀνὰ δύω 81:κις ἀλλήλοις ἔχουσι συναφθῆναι, ἐὰν ἑκάστη τούτων συζυγία καὶ τὸ 0 (τὸ μηδ:) προστεθῇ, δι' οὗ ἑκάστη τρεῖς περιέξει χαρακτῆρας, προκύψουσιν ἔτι 81 ἀνὰ τρεῖς (χαρακτ. ἔχουσαι) συζυγίαι. Εἰ δὲ θῶμεν καὶ ἕκαστον ἁπλοῦν χαρακτῆρα δυσὶ μηδενικοῖς συνάπτεσθαι, (δι' οὗ αὖθις ἕκαστος ἁπλοῦς ἐκ τριῶν συγκείσεται) γενήσονται 9 ἔτι συζυγίαι, ἀνὰ τρεῖς. Πρὸς τούτοις τὸ 0 καὶ εἰς τὸ μέσον τῶν 81 συζυγιῶν (τῶν ἀνὰ δύω) τεθῆναι δυνατόν. Ἐκ τούτου αὖθις ἔσονται 81 συζυγίαι, τρεῖς ἑκάστη χαρακτῆρας περιλαμβάνουσαι. Ὥστε προσθετέον 729 + 81 + 81 + 9, ἵνα προέλθωσι πάντες οἱ ἀριθμοὶ, οἱ μεταξὺ 100 καὶ 999. (ἀμφοῖν τοῦ 100 καὶ 999 τούτοις συμπεριλαμβανομένων) Συζυγίαι δ' εἰσὶν 900 ἀνὰ τρεῖς. Καὶ τοσοῦτοι οἱ ἀριθμοὶ ἀκριβῶς μεταξὺ 100 καὶ 999. Ὧ δὲ τοὺς δυνατοὺς τρόπους τῶν Συλλογισμῶν ὑπολογιστεῦσαι βουλητὸν, τῶν διὰ τοῦ Α Ε Ι Ο ἐκδηλουμένων, τέσσαρα εἶναι ταῦτα εἰδὼς, πρὸς τρία, ἡ ἀνωτ. δέδεικται, συνάψας 4^3 συζυγίας προκύψειν, ἤτοι 64 : κις ἀνὰ τρία συζευχθήσεσθαι, οὐδόλως ἐνδοιάσειε.

§. 340. Οἱ δ' Ἐσχηματισμένοι ἀριθμοὶ (ὥστε καὶ τούτους μὴ παραδραμεῖν) οὕτω κέκληνται διὰ τὴν, ἣν λαμβάνουσι, θέσιν, σχήματα παριστῶντες Γεωμετρικά.

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	
1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	
1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	
1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	
1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	
1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	
1	8	28	56	70	56	23	8	1	0	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1,	κτ.

Ἐν τῇ α'. κατὰ κάθετον σειρᾷ μονάδες ἔνεισι μόναι, ἐφ' ὅσον ἂν βούλῃ, προαγόμεναι. ἐπὶ δὲ τῆς β'. τὰ κεφάλαιά εἰσι τῶν ἁπλῶν ὅρων, ὡς ἀεὶ τοὺς προηγηθέντας ὅρους τῆς προτέρας σειρᾶς ἕνα ὅρον τῆς β'. ἢ τῆς ἀμέσως ἐχομένης συμπληροῦν. π. χ. τῆς β'. κατὰ κάθετον σειρᾶς ἀρκτικὸν ἔστι τὸ 0. Οὐδεὶς γὰρ ὅρος τῆς πρώτης σειρᾶς προηγήσατο, ὃς εἰς κεφάλαιον ἂν γένοιτο. Ὁ β'. ὅρος τῆς β'. σ. = 1, ὡς τοῦ προηγησαμένου ὅρου τῆς α'. = 1 ὄντος. Ὁ γ'. τῆς β'. = 2. τὸ γὰρ κεφάλαιον τῶν δύω προηγηθέντων ὅρων τῆς α'. = 1 + 1 = 2. Διὰ τοῦτο καὶ ὁ δ'. τῆς β'. = 3 = τῷ κεφαλαίῳ τῶν τριῶν προηγουμένων τῆς α'. = 1 + 1 + 1 = 3. Καὶ τοῦτον τὸν τρόπον παράγονται ἐπὶ τῆς β'. σειρᾶς οἱ φυσικοὶ χαρακτῆρες. Αὖθις ἐν τῇ γ'. σειρᾷ εὑρίσκομεν τὰ κεφάλαια τῶν τῆς β'. φυσικῶν χαρακτήρων, ὡς ἀεὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν προηγουμένων ὅρων τῆς προηγηθείσης σειρᾶς καινὸν ὅρον ἀποτελεῖν. Οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν σειρῶν. Ἔνθεν τοι καὶ ἀνάγκη πάσας τὰς σειρὰς ἀπὸ τοῦ 0 ἄρχεσθαι, καὶ, ὅσῳ περαιτέρω χωροῦσι, τοσούτῳ πλείω 0 τοῖς πρώτοις ὅροις (πρὸς τὰ κάτω) ἐνυπάρχειν. Ὅτι προηγούμενοι ὅ-

ροι

ροι τῶν προηγουμένων σειρῶν εἰς συγκεφαλαίωσιν οἱ πρόκεινται. π. χ. ὁ δ'. ἀριθμὸς τῆς γ'. σειρᾶς = 10. τὸ γὰρ κεφάλαιον τῶν προηγηθέντων ὅρων τῆς β'. = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Ὁ δ'. ἀριθμὸς τῆς ε'. = 35 = τῷ κεφ. τῶν προηγ ὅρων τῆς δ'. = 0 + 0 + 0 + 1 + 4 + 10 + 20 = 35, κτ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ τιμὴ καὶ δύναμις ἁπάντων τῶν ὅρων οὕτω κατὰ νόμους διορίζεται, πᾶς τις ἂν συνίδοι, ὅτι καὶ γενικοὺς τύπους ἀνακαλύψαι δυνάμεθα εἰς εὐχερῆ εὕρεσιν ἑκάσου ὅρου οἱασοῦν σειρᾶς. Καὶ αἱ μὲν ὁριζόντειαι Σειραὶ τῶν προτεθεισῶν σειρῶν τοὺς συνεργοὺ τοῦ Διωνύμου περιέχουσι. (§. 285.) π. χ. τῇ δ' ὁριζοντείῳ σειρᾷ ἐνυπάρχουσιν 1, 3, 3, 1. Οὗτο δὲ καὶ οἱ συνεργοὶ τοῦ $(\alpha + \beta)^3$. τῇ δὲ ς'. 1 5, 10, 10, 5, 1 = τοῖς συνεργοῖς τοῦ $(\alpha + \beta)^5$ καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἐκ δὲ τῆς θεωρίας τῶν κατὰ κάθετον σειρῶν οἱ νόμοι τῶν Συνδυασμῶν, Συντριασμώσεων, καὶ τῶν κατὰ τὸ δοκοῦν Συζυγιῶν (§. 338. ἀποδείκνυνται. περὶ ὧν εἰπεῖν ἄλλης ἂν εἴη Πραγματείας, ἡμῶν ἐν παρόδῳ μόνον τούτων ἐν τῇ παρούσῃ ἀπτομένων.

§. 341. Ἀριθμητικῶν Προόδων προκειμένων ὧν ἡ τῶν ὅρων διαφορὰ ἢ 1, ἢ 2, ἢ 3, ἢ ὁςισοῦν ἀριθμὸς, διὰ τῆς Προσθέσεως τῶν προηγηθέντων ὅρων τοιαύτης σειρᾶς, ἀναφύεται ὅρος καινὸς, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου καὶ Σειρὰ καινὴ, οὓς Πολυγώνους ἀριθμοὺς καλοῦσι, τοῖς Εσχηματισμένοις προσήκοντας ἀριθμοῖς. Ὁ δὲ λόγος τῆς τούτων προσηγορίας ὅτι ὁ β. τούτων ὅρος δεικνύει, ὅσας γωνίας Σχήματι Γεωμετρικὸν περιλαμβάνει, καὶ ὅτι πλείους ἂν τούτων ἐνεργείᾳ διὰ τοσούτων σημείων, ὅσαι τῷ δεδομένῳ τῆς σειρᾶς ὅρῳ αἱ μονάδες, τοιούτῳ σχήματι, ἐξ οὗ καὶ τῇ σειρᾷ τὸ ὄνομα, παραςαῖεν.

Παράδ

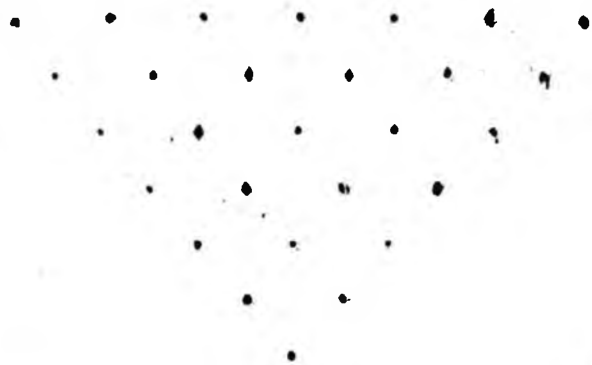
Παράδ. Ἔςω ἡ διαφορὰ τῶν ὅρων τῆς α'. ἀριθμ. σειρᾶς ἡ 1.

Ἀριθμ. Σειρά. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, κτ.

Πολύγωνοι ἀριθμοί. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28

Τουτ. ἀεὶ τῶν ὅρων τῆς προηγηθείσης σειρᾶς προςθεμένων, ἀνακύπτουσιν ἐκ τούτων οἱ καινοί. Ἔςι γὰρ 1 = 1. 1 + 2 = 3. 1 + 2 + 3 = 6. 1 + 2 + 3 + 4 = 10, κτ. Καλοῦνται δὲ εἰδικῶς οὗτοι Τρίγωνοι ἀριθμοί. Ὁ β'. ὅρος δείκνυσι τὸς γωνίας τοῦ Τριγώνου τρεῖς εἶναι. Ἕκαςος οὖν ὅρος ταύτης τῆς σειρᾶς διὰ τῶν σημείων ὡς Τρίγωνον παραςήσεται. π. χ. ὁ ὅρος 15. Ἐν τούτῳ, ὡς κἀπὶ τῶν λοιπῶν ὅρων, ἡ πληθὺς τῶν ὅρων τῆς α'. σειρᾶς, δι' ὧν τοῦ κεφαλαίου ὁ παρὼν προέκυψε, τὰ μέρη τῆς πλευρᾶς τοῦ Τριγώνου, ἢ ἐνταῦθα τὰ σημεῖα παριςᾷ, ἐξ ὧν ἀναγκαίως ἑκάςη πλευρὰ συνίςαται. 15 ἀνέφυ τῷ κεφαλαίῳ τῶν 5 ὅρων τῆς προηγ. σειρᾶς. ἄρα ἡ τούτου πλευρὰ περιέξει δήπου 5 σημεῖα, οὕτως ἀποδιδόμενα.

28 δὲ τῷ κεφαλαίῳ τῶν 7 ὅρων. Ὥςε ἡ πλευρὰ τοῦ Τριγώνου ἐξ 7 σημείων, ὧδε παριςαμένων.

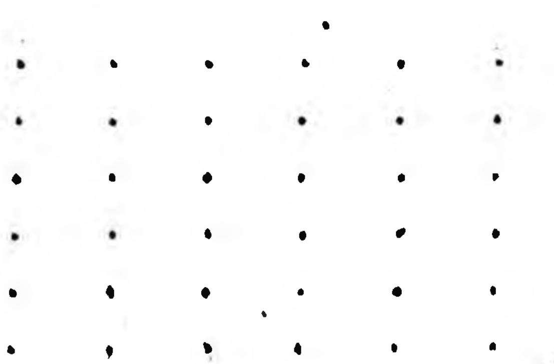


Ἐὰν οὕτω καὶ τοὺς ὅρους τῆς Ἀριθμητικῆς Σειρᾶς, ὧν ἡ διαφορὰ = 2, συγκεφαλαιῶμεν, καινὴν σειρὰν ποιοῦντες, ἀνακύπτουσιν Ἀριθμοὶ Τετράγωνοι. Ὁ δὲ β'. τούτων ὅρος αὖθις ἐμφαίνει τὰς γωνίας τοῦ Τετραγώνου, καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὅρων, ὧν τῇ προσθέσει ἀεὶ καινὸς ὅρος τῆς τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν σειρᾶς προέρχεται, τὴν πλευρὰν, ἢ τὰ σημεῖα, τὰ ἑκάστῃ πλευρᾷ τοῦ Τετρ. ἀνήκοντα.

Π. χ. Ἀριθμ. Σειρά. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

Πολύγωνοι ἀριθμοί. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

Ληφθήτω π. χ. 36 διὰ τῆς προσθέσεως 6 ὅρων συναπαρτισθεὶς, ὃς Τετράγωνον δώσει, οὗ ἡ πλευρὰ = 6 σημείοις.



Ἐὰν

Ἐὰν τῆς Ἀριθμ. Σ. ἡ διαφορὰ = 3 τεθῇ, ἡ τῶν Πολυγώνων ἀριθμῶν σειρὰ Πενταγώνους ἀριθμοὺς παριςᾷ. π. χ.

Ἀριθμ. Σ.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	κτ.
Πολύγ. ἀρ.	1	5	12	22	35	51,		κτ.

Οὗτοι οὐχ οὕτω καλῶς διὰ σημείου παραςῆναι δυνήσονται, καίτοι τοῦ καινῶς μὴ ἐξαιρούμενοι. Τῆς δὲ κατὰ τὴν Ἀριθμ. Σ. διαφορᾶς = 4 ληφθείσης, οἱ Ἑξάγωνοι ἀναφανήσονται ἀριθμοὶ, κτ. Εἰ δὲ καὶ τοὺς Πολυγώνους οὕτως ἀλλήλοις προσθήσομεν, οἱ Πυραμιδοειδεῖς.

Π. χ. πολύγ. τρίγωνοι	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28
Πυραμιδοειδεῖς	1	4	10	20	35	56	

Τῶν δὲ Πυραμιδοειδῶν αὖθις οὕτω προσαθροισθέντων, οἱ Πυραμιδοειδεῖς τῶν ὑπερτέρων τάξεων, κτ. οἷς οἱ ἀρχαιότεροι Ἀριθμητικοὶ ἐνησχολοῦντο. Προβλήματα κατὰ τούτους (τοὺς ἀρ.) προτείνοντες, ὧν ἡ ἐπίλυσις ῥαδία τῷ τὰς ἰδιότητας τῶν ἀριθμῶν μετελθεῖν ἐθέλοντι.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ἐν γένει, καὶ περὶ τῶν Ἐξισώσεων τοῦ α'. βαθμοῦ, καὶ τῆς τούτων ἐπιλύσεως.

§. 342. Ἐξίσωσις ἐςὶν Ἔκφρασις διάφορος τῆς αὐτῆς Ποσότητος, ἧς μεταξὺ τὸ τῆς ἰσότητος τίθεται σημεῖον (=). Ὡς $5 + 7 = 10 + 2$. ἢ $4 \cdot 6 = 3 \cdot 8$, κτ. Ἧς (Ἐξισ.) δύω οἱ ὅροι, ὁ μὲν δεξιόθεν, ὁ δ' ἀριςερόθεν τοῦ σημείου κείμενος. Ἑκάτερος δὲ ἤτοι ἁπλοῦς, ἢ συμπεπλεγμένος. Εἰ οὖν ταύτῃ τῇ Ἐξισώσει ἄγνωςος ἐνυπάρχοι Ποσότης, ὡς $4 \cdot 6 = 3 \cdot \chi$, διὰ τῶν δοθεισῶν ῥαδίως ἂν εὑρεθείη. Ἀναγκαῖον μέντοι τὴν Ἐξίσωσιν οὕτω μετατίθεσθαι, ὥς' ἀεὶ ἑκατέρωθι τοῦ σημείου τοὺς ὅρους ἰσοδυναμεῖν, εἰς ὃ τὸ χ (ἤτοι ἡ ἄγνωςος ποσότης, ἡ δι' αὐτοῦ δηλουμένη (§. 42.) μονωθὲν τὴν ἑαυτοῦ δύναμιν ἡμῖν ὑποδείξῃ. Ἵνα δὲ τὸ χ μόνον ἐπὶ τάδε, ἢ ἐπ' ἐκεῖνα τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος ὑπολειφθῇ, χρηςέον Προσθέσει, Ἀφαιρέσει, Πολλαπλασιασμῷ, Διαιρέσει, εἰς Δυνάμεις ἐξάρσει, Ἐξαγωγῇ τῶν Ῥιζῶν, Λογαριθμικοῖς, καὶ παντὸς ἑτέρου εἴδους ὑπολογισμοῖς κατὰ τὴν χρείαν, ὅπερ ὑπὸ τοῦ ὀρθοῦ διδαχθησόμεθα λόγου. Ἐπὶ τοῦ προτεθέντος παραδ. διαιρεθέντων ἀμφοῖν τῶν ἴσων διὰ 3, μονωθήσεται τὸ χ, (ἐκείνων καὶ μετὰ τοῦτο ἴσων τηρουμένων (§. 11. α'.)) ἴσον ὂν ταῖς γνωςαῖς ποσότησι, ταῖς ἐπὶ θάτερα τοῦ σημείου. Ἔςαι γὰρ

4 · 6

$$4 \cdot 6 = 3 \cdot \chi$$

$$\overline{\qquad\qquad} : 3$$

$$\frac{4 \cdot 6}{3} = \frac{3 \cdot \chi}{3} = \chi. \text{ Ἀλλ' } \frac{4 \cdot 6}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

Ἄρα $8 = \chi$.

§. 343. Προβλήματος δὲ εἰς ἐπίλυσιν προκειμένου, τὰς αὐτοῦ καταστάσεις, καὶ τὰς ἐν αὐτῷ γνωστὰς, καὶ ἀγνώστους Ποσότητας ὅτι μάλιστα διασκέπτεσθαι, καὶ ἐκ τούτων τὴν Ἐξίσωσιν συνιστᾶν χρή. Κανόνες γὰρ τούτων οὐ δίδονται. Χρήσιμος δ' εἰς τοῦτο καὶ ἡ συνεχὴς ἄσκησις, θήγουσα τὴν διάνοιαν, ὥστε ῥαδίως τὰ προβαλλόμενα κατανοεῖν, καὶ τὴν ἐκ τούτων Ἐξίσωσιν διατάττειν. Πολλάκις δὲ ἡ ἐπίλυσις τοῦ Προβλήματος καθ' ἑαυτὴν εὐχερεστέρα, ἢ ἡ τῶν ὅρων τῆς Ἐξισώσεως διάταξις, ἔνθα προσοχῆς πολλῆς χρεία. Ὅλως δὲ, ἡ Ἄλγεβρα χρησμός ἐστιν ἀτεχνῶς, ἀεὶ μὲν ἀποκρινομένη, ὀρθῶς δὲ καὶ ἀπταίστως τῷ οὕτω χρηστηριαζομένῳ.

§. 344. Καὶ αὐτὰ δὲ τὰ Προβλήματα πολλῷ ἀλλήλων διαφέροντα τυγχάνει. Τοῖς μὲν γὰρ, *μία καὶ μόνη ἄγνωστος Ποσότης*, τοῖς δὲ, δύω, *τρεῖς, καὶ ἔτι πλείους ζητούμεναι* πάρεισιν. Ἔνθεν τοι ἐπ' ἐκείνων μὲν, καὶ *Ἐξισώσεως μιᾶς* χρεία, ἐπὶ δὲ τούτων, *τοσούτων*, ὅσαι αἱ ζητούμεναι ἄγνωστοι, ἃς πάσας (Ἐξισ.) ἐκ τοῦ Προβλήματος ἐπαγαγεῖν δεήσει. Αὖθις τῶν Προβλημάτων τὰ μὲν *Διωρισμένα*, οἷς μοναχῶς ἀπαντῶμεν. Τὰ δὲ, *Ἀδιόριστα*, ἢ *Ἀόριστα*, οἷς πολλαχῶς. Περὶ τῶν (Ἀδιορ.) ὕστερον. Ἤδη δὲ λόγος περὶ τῶν διωρισμένων, ἔνθα τὸ Πρόβλημα διὰ τῶν κατ' αὐτὸ καταστάσεων οὕτω διορίζεται, ὥστε τὴν τιμὴν καὶ δύναμιν τῆς ἀγνώστου ποσότητος μίαν εἶναι καὶ μόνην. Καὶ

Ἐξίσωσις μὲν τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἀκούει, ἐν ᾗ ἡ ἄγνωςος ποσότης πρώτης τυγχάνει δυνάμεως, οἷον χ, ψ, ω. Ἡ δ' Ἐξίσωσις καταλλήλως διαταχθεῖσα, ἐὰν ἡ ἄγνωςος ἐν τῇ β'. ᾖ δυνάμει, ὡς χ^2, ψ^2, κτ., τοῦ δευτέρου βαθμοῦ καλεῖται. Τοῦ δὲ χ, ἢ καὶ ἑτέρων ἀγνώςων εἰς τὴν γ'. ἐξηρμένων δύναμιν, οἷον χ^3, ψ^3, κτ. τοῦ τρίτου βαθμοῦ. Ὅλως δὲ, ἡ Ἐξίσωσις ἐκ τῆς δυνάμεως, εἰς ἣν ἡ ἄγνωςος ἠρμένη ἀπαντᾶ, προσαγορεύεται. Τούτων δ' εὐχερέςεραι εἰς ἐπίλυσιν αἱ τοῦ α'. βαθμοῦ, περὶ ὧν καὶ δὴ ῥητέον.

§. 345. Καὶ τούτων αὖθις, (τῶν τοῦ α'. βαθμοῦ) ἃς διὰ Προσθέσεως, ἢ Ἀφαιρέσεως μόνης δυνατὸν ἐπιλύειν, αἱ μάλιςα εὐχερεῖς. π. χ. Ἔςω $\chi + \alpha = \beta$. Ἐὰν ἀμφοῖν $+ \alpha$ ἀφαιρεθῇ, ἢ $- \alpha$ προςεθῇ, ἐπὶ θάτερα τοῦ σημείου τοῦ χ μονωθέντος, ἀναφανήσεται ἡ τούτου δύναμις. Ἐπειδὴ γὰρ $\chi + \alpha = \beta$. Ἔςαι καὶ (§.48.α'.)

$$\begin{array}{rl} & \chi + \alpha = \beta \\ \text{προς.} & \underline{-\alpha = -\alpha} \\ & \chi = \beta - \alpha \end{array}$$

Διὰ γὰρ τῆς προσθέσεως τοῦ $-\alpha$, τοῦ τῷ χ συμπεπλεγμένου $+\alpha$ ὑπ' ἐκείνου ἀναιρεθέντος, μένει μόνον τὸ χ. Ἡ δὲ πλαγίως ἀγομένη γραμμὴ τὸ, Ἄρα σημαίνει.

Ὡσαύτως καὶ
$$\begin{array}{rl} & \chi - \alpha = \beta \\ & \underline{+\alpha = \beta} \ \text{προς.} \\ & \chi = \beta + \alpha \end{array}$$

Ἐν ἀριθμοῖς.

$$\begin{array}{rl} & 4 + \chi = 16 \\ & \underline{-4 = -4} \ \text{προς.} \\ & \chi = 16 - 4 = 12 \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{rl} \text{Καὶ} & \chi - 8 = 15 \\ \text{προς.} & \underline{+8 = 8} \\ & \chi = 15 + 8 + 23 \end{array}$$

§. 346. Ἤπου ἑκάστῳ, τὰς προκειμένας Ἐξισώσεις θεωροῦντι, πρὸ ὀφθαλμῶν παρίσαται, ἐὰν, ἵνα ὁ χ μόνον ὑπολειφθῇ, τὴν τούτῳ προσκειμένην ποσότητα διὰ προσθέσεως, ἢ Ἀφαιρέσεως ἀπὸ θατέρου τῆς Ἐξισώσεως ἀποβάλλωμεν, ἐναντίως ἔχοντι τῷ σημείῳ ἐπὶ θάτερα μετατίθεται ἡ αὐτὴ ποσότης. Ὅθεν ὁ κανών. Ἀπὸ θατέρου ἐπὶ θάτερα τοῦ σημείου ποσότητα μεταθεῖναι βουλόμενος, ἀπαλείψας αὐτὴν θὲς ἐπὶ θάτερα ἀντιθέτῳ τῷ σημείῳ. Οἷον, εἰ Ἐξίσωσις πρόκειται

$$\chi + \alpha - \gamma\delta = \beta$$

ἔσαι

$$\chi = \beta - \alpha + \gamma\delta,$$

τῶν γνωςῶν ποσοτήτων μετ' ἐναντίων τοῖς προτέροις σημείων εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ σημείου μετενεχθεισῶν.

§. 347. Τῶν δ' Ἐξισώσεων οὕτως ἐχουσῶν, ὥςε τὴν ἄγνωςον ἐγνωσμένῃ ἑτέρα τῷ πολλαπλασιασμῷ συνημμένην εἶναι, διὰ τῆς διαιρέσεως τὸ χ μονώσαντες ἐφ' ἑκάτερα τοῦ τῆς ἰσότητος σημείου τὸ ἴσον τηρήσομεν. ὡς

$$\beta\chi - \gamma + \delta = 5\alpha$$

$$\beta\chi = 5\alpha + \gamma - \delta \qquad :\beta$$

$$\chi = \frac{5\alpha + \gamma - \delta}{\beta}.$$

Παράδειγμα. Παῖς τις πρὸς ἕτερον Φησίν. εἴπερ τετραπλασίω τῶν σῶν μῆλα ἔσχον, καὶ 8 πρὸς τούτοις, εἶεν ἂν τὰ ἐμὰ 60. Ζητεῖται οὖν, πόσα εἶχεν ὁ ἕτερος. Ἐπειδὴ ἄγνωςα, τεθήτω $=\chi$. Ὁ α΄ ἔφη. εἰ τετραπλασίω ἔσχε, καὶ ἔτι 8, εἶεν ἂν τὰ αὐτοῦ $= 60$. Ὥςε ἀνάγκη τέσσαρα χ, καὶ $8 = 60$ εἶναι. Ἔςαι ἄρα ἡ Ἐξίσωσις

$$4\chi + 8 = 60$$

8 ἐπὶ τάδε μετεν.

$$4\chi = 60 - 8 = 52$$

: 4

$$\frac{4\chi}{4} = \chi = \frac{52}{4}$$

· ἢ

$$\chi = 13.$$

Τὰ οὖν τοῦ ἑτέρου παιδὸς μῆλα $= 13$. Καὶ γὰρ $13 \cdot 4 + 8 = 60$.

§. 348. Τῶν δὲ ὅρων τῆς Ἐξισώσεως ἤτοι πάντων, ἢ τινῶν, κλασματικῶν ὄντων, πειρατέον τῷ πολλαπλασιασμῷ ἁπάντων τῶν ὅρων ἐπὶ πάντας τοὺς τῶν κλασμάτων παρονομαςὰς, εἰς ὁλοσχερεῖς αὐτοὺς μεταβαλεῖν ἀριθμούς. Καὶ μετὰ τοῦτο γάρ, οἱ ἑκατέρωθι ὅροι τὸ ἴσον τηρήσουσι. (§. 79. α΄.) ἢ ἐκ πάντων τῶν παρονομαςῶν ἕνα ποιήσαντες, μετὰ τούτου τοὺς τῆς Ἐξισώσεως πολλαπλασιάσομεν ὅρους.

Ὡς

Ὡς $\frac{\chi}{3} + \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta\delta}{4} = \gamma$

$$\overline{} \cdot 3$$

$$\chi + \alpha - \frac{3\beta\delta}{4} = 3\gamma$$

$$\overline{} \cdot 4$$

$$4\chi + 4\alpha - 3\beta\delta = 12\gamma$$

$$4\chi = 12\gamma - 4\alpha + 3\beta\delta. \quad (\S. 346.)$$

$$\overline{} : 4$$

$$\chi = \frac{12\gamma - 4\alpha + 3\beta\delta.}{4}$$

ἢ $\chi = 3\gamma - \alpha + \frac{3\beta\delta.}{4}$

Τὸ αὐτὸ δ' ἂν προκύψειε, καὶ ἐὰν ἡ Ἐξίσωσις τῷ κοινῷ τῶν κλασμάτων παρονομαστῇ, ἤτοι τῷ 36, πολλαπλασιασθῇ, ἢ τῷ 12. (§. 125. σχόλ.)

Τὰ αὐτὰ γενήσεται, καὶ τῆς ἀγνώστου ποσότητος τῷ τοῦ κλάσματος παρονομαστῇ ὑπαρχούσης. οἷον

$$\frac{100}{\chi} - 8 = 12$$

$$\overline{} \cdot \chi$$

$$100 - 8\chi = 12\chi$$

$$100 = 12\chi + 8\chi = 20\chi$$

$$\overline{} : 20$$

$$5 = \chi$$

Ὡσαύτως καὶ τοῦ ἑπομένου παραδείγ. προκειμένου.

5χ + 3

$$\frac{5\chi + 3}{\chi - 1} = 7$$

$$\cdot \; \chi - 1$$

$$5\chi + 3 = 7\chi - 7$$

$$3 + 7 = 7\chi - 5\chi \quad (\S.\ 346.)$$

$$10 = 2\chi. \quad \text{ἢ} \quad \tfrac{10}{2} = \chi. \quad \text{ἢ} \quad 5 = \chi.$$

Ἔνθα ἑκατέρωθι τοῦ σημείου, τοῦ κλάσματος ἀποσκευασθέντος τῆς Β'. Ἐξισώσεως. ἔγκειται ἡ ἄγνωςος ποσότης. Τούτου οὖν κἀπὶ ἄλλων οὕτως ἐχόντος, διὰ σπουδῆς ἔχειν χρὴ μετ' ἀντικειμένων σημείων ἐπὶ θάτερα μόνον τὴν ἄγνωςον μεταβιβάζειν. Εἰ δὲ τὸ χ ἐν πλείοσιν ὅροις ὁλοσχερῶν ποσοτήτων, τὸ προτεθὲν παράδειγμα, ὅπως χωρητέον, διδάξει. τουτ. τῶν συνεργῶν τοῦ χ ἀριθμῶν ὄντων, προςτιθέαμεν τούτους ἀλλήλοις, ἢ ἀφαιροῦμεν, ὡς ἐνταῦθα. Ἔςι γὰρ $7\chi - 5\chi = 2\chi$. Τῆς δ' Ἐξισώσεως καθόλου οὔσης, τουτ. μόνον ἐκ γραμμάτων συγκειμένης, τὴν ἄγνωςον ποσότητα, πλείοσιν ὅροις ἐνυπάρχουσαν τῆς αὐτῆς δυνάμεως, ὡς τοῦτο ἀεὶ αἱ τοῦ α'. βαθμοῦ Ἐξισώσεις ἀπαιτοῦσι, γενικὸν παράγοντα ποιητέον. τὰς λοιπὰς δὲ τῷ σημείῳ τῆς Παρενθέσεως ἐναποληπτέον. (§. 78.). Καὶ ἐν γένει, ἐπὶ πασῶν τῶν Ἐξισώσεων τὰς ποσότητας εἰς τοὺς κατ' αὐτὰς παράγοντας ἀναλύειν, καὶ τρόποις ἑτέροις, τὴν εὕρεσιν τῆς ἀγνώςου ἐξευμαρίζουσι, χρῆσθαι, ὅτι χρήσιμον. Ἔςω ἡ Ἐξίσωσις,

$\alpha\chi + \beta$

$$\frac{\alpha\chi + \beta}{\chi - \gamma} = \eta\delta - \zeta$$

$$\overline{} \;.\; \chi - \gamma$$

$$\alpha\chi + \beta = \eta\delta\chi - \zeta\chi - \gamma\eta\delta + \gamma\zeta.$$ μεταχθ. τὸ αχ.

$$\beta = \eta\delta\chi - \alpha\chi - \zeta\chi - \gamma\eta\delta + \gamma\zeta:$$ πᾶσαι αἱ γνωςαὶ ἐπὶ θάτερα.

$$\beta + \gamma\eta\delta - \gamma\zeta = \eta\delta\chi - \alpha\chi - \zeta\chi$$

Ἔνθα τὸ χ κοινὸς ὅρος. Ὥςε

$$\beta + \gamma\eta\delta - \gamma\zeta = (\eta\delta - \alpha - \zeta)\,\chi$$

$$\overline{} \;:\; \eta\delta - \alpha - \zeta$$

$$\frac{\beta + \gamma\eta\delta - \gamma\zeta}{\eta\delta - \alpha - \zeta} = \chi. \text{ ἢ } \frac{\beta + (\eta\delta - \zeta)\gamma}{\eta\delta - \alpha - \zeta} = \chi.$$

κλασματικῆς δὲ οὔσης τῆς ἀγνώςου ἐν πλείοσιν ὅροις τῆς Ἐξισ. τῶν κλασμάτων ἀλλήλοις προσαθροισθέντων, μετὰ τὸ εἰς τὸν αὐτὸν ἀχθῆναι παρονομ. τελεῖται τὰ συνήθη.

Παράδειγμα. Ποιμήν τις ἐρωτηθεὶς, πόσα πρόβατα ἔχοι; ἀπεκρίνατο τὸ δ'. μέρος τῶν προβάτων ὁ ἐμὸς ποιμαίνει δοῦλος. τὸ η'. ὁ ἐμὸς ἀδελφός. τὰ δ' ὑπ' ἐμοῦ ποιμαινόμενα τὸ ἥμισυ πάντων, ὧν ἔχω, εἰσὶ προβάτων. Εἰσὶ δ' ἔτι καὶ 4, ἐν τῇ μάνδρᾳ. Ζητεῖται οὖν τὸ κεφάλαιον τῶν αὐτοῦ προβάτων. Ὡς ἄγνωςον ῥηθήτω χ.

Τούτων

Τούτων ὁ δοῦλος ποιμαίνει τὸ δ'. μέρος. ὥςε $\frac{1}{4}\chi$.
ὁ ἀδελφὸς . . τὸ η'. ἤτοι $\frac{1}{8}\chi$.
αὐτὸς δὲ . . τὸ ἥμισυ. τουτ. $\frac{1}{2}\chi$.
ἐν δὲ τῇ μάνδρᾳ εἰσὶ 40.

Ὥςε πάντα εἰσὶ $\frac{1}{4}\chi + \frac{1}{8}\chi + \frac{1}{2}\chi + 40$. Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου ταῦτα ἐξισοῦνται τῇ ἀγνώςῳ ποσότητι, ἤτοι τῷ χ. Κατὰ τοῦτο οὖν ῥᾷςα τὴν Ἐξίσωσιν περανοῦμεν.

$$\frac{1}{4}\chi + \frac{1}{8}\chi + \frac{1}{2}\chi + 40 = \chi$$

πρόσθες τὰ κλάσμ.

$$\frac{7}{8}\chi + 40 = \chi$$

. 8 ἀποσκευασθήτω τὸ κλάσμα διὰ πολλαπλ. (§. 348.)

$$7\chi + 320 = 8\chi$$

$$320 = 8\chi - 7\chi \quad (\S.\ 346.)$$

ἢ

$$320 = \chi$$

Ἔχει τοίνυν 320 πρόβατα. Τούτων ποιμαίνει ὁ δοῦλος $\frac{1}{4}\chi = \frac{320}{4} = 80$

ὁ ἀδελφὸς	$\frac{1}{8}\chi$	=	$\frac{320}{8}$	=	40
αὐτὸς δὲ	$\frac{1}{2}\chi$	=	$\frac{320}{2}$	=	160
καὶ 40 ἐν τῇ ποίμνῃ		=			40
τὸ κεφ.		=			320

§. 349. Ἐνίοτε δὲ ἡ τοῦ α'. βαθμοῦ Ἐξίσωσις, β. βαθμοῦ εἶναι δοκεῖ, διὰ τὸ δευτέρας δυνάμεως εἶναι τὸ ταύτης χ, καίτοι τῷόντι τοῦ α'. οὖσα. π. χ. ἐπὶ τοῦδε τοῦ Προβλήματος, Ζήτησον ἀριθμὸν, οὗ οὗ ὁ Τετράγωνος τηλικοῦτος, ἡλίκος ὁ ἀριθμὸς, δὶς ληφθείς. Ἔςω ὁ ἀριθμος $= \chi$. Ὥςε κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. $\chi^2 = 2\chi$.

$$\frac{\chi^2 = 2\chi}{\chi = 2} : \chi$$

Ὁ 2 ἄρα ἐςὶν εἷς καὶ μόνος ἀριθμὸς τοιοῦτος. Ἔςι γὰρ $2^2 = 4$. καὶ $2 \,.\, 2 = 4$.

Καὶ ῥιζικῶν δὲ σημείων τῇ Ἐξισώσει προσόντων, μένοι μέντοι τοῦ α'. βαθμοῦ. Ἀλλ' ἐπὶ τὸ τὸ ῥιζικὸν διαφυγεῖν σημεῖον, εἰς τὴν εἰς δυνάμεις ἔξαρσιν καταφευκτέον. π. χ. Ζητηθήτω ἀριθμὸς, οὗ ἀπὸ 1000 ἀφαιρεθέντος τὸ λείψανον ἕξει ῥίζαν Τετραγωνικὴν τὸν 16 ἀριθμόν. τουτ. ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ λειψάνου $= 16$. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔςω $= \chi$. Οὗτος ἀφαιρεθήτω ἀπὸ 1000, καὶ ἀπὸ τοῦ λειψάνου ἐξαχθήτω ἡ τετρ. ῥίζα. Τὸ δὲ σχῆμα εἴη ἂν $\sqrt{(1000 - \chi)}$. Καὶ τούτου γεγονότος, ἡ ῥίζα ἔςαι $= 16$. Ὥςε προκύπτει ἡ Ἐξισ. $\sqrt{(1000 - \chi)} = 16$. Καὶ τῶν ὅρων τῆς Ἐξισ. εἰς Τετράγωνον ἀρθέντων, ἐκπίπτει τὸ $\sqrt{}$.

Ἤτοι $1000 - \chi = 16 \,.\, 16 = 256$.

$$1000 = 256 + \chi$$

$$1000 - 256 = \chi. \quad \text{ἢ} \quad 744 = \chi.$$

Εἰ οὖν ἀπὸ 1000 ὁ 744 ἀφαιρεθῇ. ὑπολείπεται λείψανον ὁ ἀριθμὸς 256, οὗ ἡ τετρ. ῥίζα 16. ἤτοι $\sqrt{256} = 16$.

§. 350. Εἰδ' ἡ ἄγνωςος ποσότης, ἤτοι τὸ χ, ὡς Ἐκθέτης ἑτέρας πάρεςι ποσότητος, τῆς α. ὃν καὶ αὐτὸ δυνάμεως, τὴν Ἐξίσωσιν ὡς α'. βαθμοῦ θεωρήσαντες,

τες, διὰ τῶν λογαρίθμων αὐτὴν ἐπιλύσομεν. π. χ.
Ἔςω ἡ Ἐξίσωσις

$$2^{\chi} = 512$$

Διὰ τὴν ἰσότητα τῶν δύω ποσοτήτων, ἔσονται ἴσοι καὶ οἱ λογάριθμοι. Ὥςε

$$\chi \lambda . 2 = \lambda . 515$$

ἄρα $\chi = \dfrac{\lambda\ 515}{\lambda . 2}$

Καὶ τῶν λογαρίθμων ἐκ τῶν πινάκων ληφθέντων, ἔςαι

$$\chi = \frac{2,7092700}{0,3010300}.$$

Τῶν δ' ὅρων ἀμφοῖν τοῦ κλάσμ. τῷ 10 πολλαπλασιασθέντων, προκύψει παραγόμενον $= \dfrac{27092700}{3010300} = 9$. Ὥςε $\chi = 9$.

Καὶ $2^{\chi} = 2^{9} = 512$.

Ἔςω δεδομένον. $5 \cdot 3^{2\chi} - 100 = 305$

: 5 πάντας τοὺς ὅρους

$$3^{2\chi} - 20 = 61$$

$$3^{2\chi} = 61 + 20 = 81$$

$$2\chi \Lambda . 3 = \Lambda . 81$$

: Λ 3

$$2\chi = \frac{\Lambda . 81}{\Lambda 3}$$

: 2

$$\chi = \frac{\Lambda\ 81}{2 . \Lambda . 3}$$

Καὶ

Καὶ τοὺς λογαρίθμους ζητήσαντες, ἴςα $\chi = \frac{1,9084850}{0,4771212.2} = \frac{1,9084850}{0,9542424}.10 = \frac{19084850}{9542424} = 2 = \chi$. Τὸ δ' ὑπολειπόμενον λείψ. 2 μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν προῆλθεν ἐκ τοῦ τὸν ἔσχατον ἀριθμὸν τοῦ Λ. 3 μὴ εἶναι ἀκριβῆ, ὅς μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν κυρίως 5 ὤφειλεν εἶναι,

Παραδείγματα γυμνασίας χάριν.

§. 351. Α΄. Δίελε 30 εἰς δύω μέρη, ὥςε τὸ μεῖζον τούτων 8 μονάσι τοῦ ἐλάσσονος πλεονεκτεῖν.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἄμφω τὰ μέρη ἄγνωςα, ἔςω τὸ μεῖζον $= \chi$. Ἐπεὶ δὲ τὸ μεῖζον, κατὰ τὴν ὑποθ. ὀκτὼ μονάσι τοῦ ἐλάσσονος ὑπερτερεῖ, ἀνάγκη πᾶσα τὸ ἔλαττον 8 μονάσι τοῦ μείζ. ἐλαττοῦσθαι, ἤτοι τοῦ χ. Ὥςε τὸ ἔλαττον $= \chi - 8$. Ἐξ ἀμφοῖν οὖν, τοῦ χ, καὶ $\chi - 8$ συνίςαται ὁ 30 ἀριθμός. ἄμφω γὰρ ἅμα 30 ἔσονται. Ὥςε παρὰ πόδας καὶ ἡ Ἐξίσωσις, δι' ἧς τοῦ χ, ἤτοι τοῦ μείζ. μέρους εὑρεθέντος, γνωσθήσεται καὶ τὸ ἔλαττον, ἤτοι τὸ $\chi - 8$. Ἔνθεντοι

$$\chi + \chi - 8 = 30$$

$$\chi + \chi = 30 + 8 \quad \text{ἢ}$$

$$2\chi = 38 \quad : 2$$

$$\chi = \tfrac{38}{2} = 19 =$$ τῷ μείζονι μέρει. Τὸ δ' ἔλαττον $\chi - 8 = 19 - 8 = 11$. Καὶ $19 + 11 = 30$. Καὶ ἐν γένει. Δίελε a εἰς δύω μέρη, ὥςε τὸ ἕτερον τούτων μεῖζον τοῦ ἑτέρου κα-

τὰ τὸ γ εἶναι. Κἀπὶ τούτου εἴη ἂν τὸ μὲν μεῖζον χ, τὸ δ' ἔλαττον χ — γ.

Καὶ $\chi + \chi - \gamma = \alpha$

$$2\chi = \alpha + \gamma$$

$$\chi = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Ἐπειδὴ οὖν εὕρηται τὸ μεῖζον, ῥᾷστα διορίζεται καὶ τὸ ἔλαττον. Ἔςι γὰρ $= \frac{\alpha + \gamma}{2} - \gamma = \frac{\alpha + \gamma}{2} - \frac{2\gamma}{2}$ (§. 133.) $= \frac{\alpha + \gamma - 2\gamma}{2} = \frac{\alpha - \gamma}{2}.$

§. 352. Β'. Μῦθος. Ὅτε κατὰ τοὺς Αἰσωπείους χρόνους τὰ ζῶα ὁμόφωνα ἦν τοῖς ἀνθρώποις, Ἀλώπηξ, πολλὰς ὄρνιθας γεωργοῦ καταφαγοῦσα, τέλος ὑπ' αὐτοῦ συνελήφθη. Μέλλουσα οὖν ἀποκτανθήσεσθαι, ἐδεῖτο αὐτοῦ ἀφεθῆναι. οὐ δὲ γὰρ τοσαύτας ὄρνιθας καταφαγεῖν. Τοῦ δὲ, ὅσας, πυθομένου, ἀπεκρίνατο, δὶς τοσούτους ἀλεκτρυόνας, ὅσας ὄρνιθας, ἀπεκτονέναι, λέγουσα· εἰ ἕκαςος ἀλεκτρυὼν 2 λεπτῶν, ἑκάςη δὲ ὄρνις 6 ὑπ' ἐμοῦ ἀπημπωλήθη, ἔσχον ἂν ἤδη 100 Ταλήρους. Ἔχω μέντοι τούτους, καί σοι αὐτοὺς χαριζομένη, ἀντὶ τούτων σωτηρίας τυχεῖν δέομαι. Πόσους τοίνυν ἀλεκτρυόνας, καὶ ὄρνιθας ἡ Ἀλώπηξ κατεβεβρώκει;

Λύσις. Ἐπειδὴ δὶς τοσούτους ἀλεκτρυόνας, ἢ ὄρνιθας ἀπέκτεινεν, ὁ μὲν τῶν ἀλεκτρυόνων ἀριθμὸς ἔςω $= \chi$. ὁ δὲ τῶν ὀρνίθων, ἅτε τὸ ἥμισυ ἐκείνων $= \frac{1}{2}\chi$, ἢ $\frac{\chi}{2}$ (§. 104. σχ.) Εἰ τοίνυν ἕκα-

ςον

ςον ἀλεκτρυόνα 2 λεπτῶν ἀπεδέδοτο, εἶεν ἂν τὰ λεπτὰ 2χ. καὶ εἰ ἑκάστην ὄρνιθα 6, εἶεν ἂν $\frac{\chi}{2}$. ὁ τά. λεπτὰ $= \frac{6\chi}{2} = 3\chi$ λεπ. Ἄμφω αἱ τιμαὶ 100 συμπληροῦσι θαλήρους $=$ 28800 λεπτοῖς. Ἐξ ὧν ἡ Ἐξίσωσις.

$$\begin{array}{lcl} 2\chi \text{ λεπ.} + 3\chi \text{ λεπ.} & = & 28000 \text{ λεπ.} \\ \hline 5\chi & = & 28000 \\ \hline \chi & = & \frac{28800}{5} = 5760. \end{array}$$ πρόσθες χ

Τὸ δὲ χ σημαίνει τοὺς ἀλεκτρυόνας· ἀπέκτεινεν ἄρα ἡ Ἀλώπηξ 5760 ἀλεκτ. καὶ $\frac{\chi}{2} = \frac{5760}{2} = 2880$ ὄρνιθας

§. 353. Γ'. Πατήρ τις ἀποθνήσκων οὕτω τοὺς τρεῖς υἱοὺς τὴν ἑαυτοῦ χρηματικὴν-περιουσίαν διανεῖμαι πρὸς ἀλλήλους ἠθέλησε· τὸν μὲν α'. τὸ ἥμισυ τῆς κληρονομίας κομίσασθαι, πλὴν 1000 θαλήρων. τὸν δὲ β'. τὸ τριτημόριον αὐτῆς, πλὴν 800 θ. τὸν δὲ γ'. τὸ τεταρτημόριον, πλὴν 600 θ. Ζητεῖται πᾶσα ἡ κληρονομία, καὶ ἡ ἑκάστου μερίς.

Λύσις. Τεθήτω ἡ περιουσία $= \chi$. Ὁ α'. ἄρα κομίζεται $\frac{\chi}{2} - 1000$. Ὁ β'. $\frac{\chi}{3} - 800$. Ὁ γ'. $\frac{\chi}{4} - 600$. Αἱ δὲ τρεῖς αὗται μερίδες ἴσαι πάσῃ τῇ περιουσίᾳ τῇ πατρικῇ $= \chi$. Ὅθεν ἡ Ἐξίσωσις.

$\chi - 1000$

$$\frac{\chi}{2} - 1000 + \frac{\chi}{3} - 800 + \frac{\chi}{4} - 600 = \chi$$

ἢ

$$\frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{3} + \frac{\chi}{4} - 1000 - 800 - 600 = \chi$$

πρός.

$$\frac{13}{12}\chi - 2400 = \chi. \quad .12$$

$$13\chi - 2400 \,.\, 12 = 12\chi$$

$$13\chi - 12\chi = 2400 \,.\, 12$$

$\chi = 2400 \,.\, 12 = 28800 =$ πάσῃ τῇ κληρονομίᾳ. ἐξ ἧς ὁ α'. ἐκομίσατο $\frac{\chi}{2} - 1000 = \frac{28800}{2} - 1000 = 13400$ Θαλ.

Ὁ β'. $\frac{\chi}{3} - 800 = \frac{28800}{3} - 800 = 8800.$

Ὁ γ'. $\frac{\chi}{4} - 600 = \frac{28800}{4} - 600 = \frac{6600}{28800}$ Θαλ.

§. 354. Δ'. Δίελε 50 Θαλ. εἰς 10 μέρη, ὥς' ἀεὶ ἕκαςον μέρος μεῖζον εἶναι τοῦ ἑτέρου Θαλήρῳ. Ὁποῖον τὸ ἐλάχιςον μέρος, καὶ ἕκαςον τῶν μερῶν; Λύσις. Ἔςω τὸ ἐλάχιςον $= \chi$. τὸ ἄρα τούτῳ ἀμέσως ἑπόμενον, τὸ μονάδι αὐτοῦ μεῖζον $= \chi + 1$. τὸ δὲ τούτῳ, $\chi + 2$, κτ. Τοῦτο δὲ Ἀριθμητ. Πρόοδον ἡμῖν παρέχει, ἐκ 10 ὅρων. Καὶ ἐπεὶ ὁ ἔσχατος ὅρος ἑκάςης Ἀριθμ. Πρ. ἐν γένει $= \alpha + (\pi - 1)\delta$. §. 224. Ἐνταῦθα δὲ α, ἢ ὁ α'. ὅρος $= \chi$. ἡ πλῆθυς τῶν ὅρων $= \pi = 10$, καὶ δ, ἢ ἡ διαφορὰ $= 1$. Ἔςαι ὁ ἔσχατος ὅρος, $\chi + 10 - 1$, ἢ $\chi + 9$. Ὥςε τὸ ὁλικὸν κεφάλ. τῆς Προόδου, ὅπερ εὑρίσκεται, (§. 226.) ἐὰν ὁ α'. καὶ ἔσχατος ὅρος προσαθροισθέντες

τες τῇ ἡμισεία πληθυϊ τῶν ὅρων πολλαπλασιασθῶσιν, ἴσαι $(\chi + \chi + 9) \cdot 5 = (2\chi + 9) \cdot 5 = 10\chi + 45$. Ὁ κατὰ τὴν ὑπόθ. $= 50$. πάντες γάρ οἱ ὅροι τοὺς 50 συμπληροῦσι θαλ.

Ἡ οὖν Ἐξίσωσις

$$10\chi + 45 = 50$$

$$10\chi = 50 - 45 = 5$$

$\chi = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Τὸ α΄. τοίνυν μέρος $\frac{1}{2}$ θαλ. τυγχάνει· τὰ δὲ λοιπὰ χωροῦσι κατὰ τὴν ἑξῆς τάξιν. $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2} = 50$.

§. 355. Ε΄. Τρεῖς μύλοι ἀλήθουσιν, ὁ μὲν α΄. ἐν 2 ὥραις 6 σίτου μεδίμνους ὁ δὲ β΄ ἐν 3 ὥρ. 5 μεδ. Ὁ δὲ γ΄. ἐν 4 ὥρ 3 μεδ. Ἐὰν οὖν ἅμα τοῦ ἀλήθειν ἄρξωνται, Ζητεῖται, ἐν πόσαις ὥραις ἀλεσθήσονται 130 μέδιμνοι, καὶ πόσους μεδ. ἕκαςος ἀλήσει;

Λύσις. Αἱ ἄγνωςοι ὧραι τεθήτωσαν $= \chi$. πόσους δὲ μεδ. ἕκαςος μύλος ἀλήσει ἐν χ ὥραις, εὑρήσομεν διὰ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου. (§. 248.)

2 ὧραι : 6 μεδ. $=$ χ ὧραι : $\frac{6\chi}{2} = 3\chi$ μεδ.

τοσούτους ἀλήσει ὁ α΄.

Αὖθις. 3 ὧραι : 5 μεδ $=$ χ ὧραι: $\frac{5\chi}{3}$ μεδ.

τοσσ. ἀλ. ὁ β΄.

Καὶ 4 ὧραι : 3 μεδ. $=$ χ ὧραι : $\frac{3\chi}{4}$ μεδ.

τοσούτους ἀλήσει ὁ γ΄.

ἅπαντες

ἅπαντες δὲ οἱ μέδ. οἱ ὑπὸ τῶν τριῶν ἐν χ ὥραις ἀλεσθησόμενοι ἴσοι 130 μεδ.

"Οθεν ἡ Ἐξίσωσις.

$$\underline{3\chi + \tfrac{2}{3}\chi + \tfrac{3}{4}\chi = 130}$$ τὰ κλάσμ. πρὸς. ὑπὸ

$$\underline{3\chi + \tfrac{29}{12}\chi = 130}\ .$$ τὴν αὐτὴν παρονομ. ἀχθ. 12

$$\underline{36\chi + 29\chi = 1560.} \quad \text{ἢ} \quad 65\chi = 1560$$

$\chi = \frac{1560}{65} = 24.$ "Ωςε 24 ὡρῶν χρεία, εἰς τὸ τοὺς τρεῖς μύλους τοὺς 130 μεδ. ἀλῆσαι.

Ἐπεὶ οὖν τὸ χ γνωςὸν. τὸ τὰς ὥρας δηλοῦν, γνωςὸν καὶ τὸ, πό ους ἕκαςος μεδ. ἀλήσει ἐν 24 ὥραις, ἅμα ἀρχόμενοι, καὶ ἅμα παυόμενοι. "Ητοι

'Ο μὲν α'. $3\chi = 3 . 24 = 72$ μεδ.

'Ο δὲ β'. $\frac{2}{3}\chi = \frac{2}{3} . 24 = 40$ μεδ.

'Ο δὲ γ'. $\frac{3}{4}\chi = \frac{3}{4} . 24 = 18$ μεδ.

τὸ κεφάλ. = 130 μεδ.

Ἐπὶ τούτου τοῦ παραδ. προαπαιτεῖται ἡ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου γνῶσις, δι' ἧς καὶ ἡ Ἐξίσωσις τελευταῖον συνάγεται, εἰς εὕρεσιν τῶν ἀγνώςων ποσοτήτων. Τὸ δὲ Πρόβλημα καὶ ἀνάπαλιν ἔχει προβάλλεσθαι, τουτ: δοθεισῶν τῶν ὡρῶν, εὑρεῖν τοὺς μεδίμνους, τοὺς ὑπὸ τῶν τριῶν μύλων ἐν τοσαύτοις ὥραις ἀλεσθησομένους, οὗ ἡ ἐπίλυσις κατὰ τὸν αὐτὸν γίνεται τρόπον. Καὶ τῶν μύλων πλειόνων ὄντων, ῥαδίως ἂν αὖθις αἱ ὧραι, καὶ οἱ μέδιμνοι εὑρεθεῖεν.

Δύναται δὲ καὶ καθόλου προτεθῆναι. Τριῶν μύλων ὁ μὲν α' ἀλήθει ἐν α ὥραις β μεδ. ὁ δὲ β'. ἐν γ ὥραις δ μεδ. ὁ δὲ γ'. ἐν ε ὥρ. ζ μεδ. Ἐν πόσαις ὥραις ἀλήσου-

$$\overline{\gamma\varepsilon\beta\chi + \alpha\varepsilon\delta\chi + \alpha\gamma\zeta\chi = \alpha\gamma\eta\varepsilon}$$

ἢ

$$\overline{(\gamma\varepsilon\beta + \alpha\varepsilon\delta + \alpha\gamma\zeta)\chi = \alpha\gamma\eta\varepsilon}$$

$$\chi = \frac{\alpha\gamma\eta\varepsilon}{\gamma\varepsilon\beta + \alpha\varepsilon\delta + \alpha\gamma\zeta}.$$

Εὕρηται οὖν ἐν γένει τὸ χ. Τῶν δὲ γραμμάτων, κατὰ τὸ ἀνιστ. παράδ. διορισθέντων, ἔςαι $\alpha = 2$. $\beta = 6$. $\gamma = 3$. $\delta = 5$. $\varepsilon = 4$. $\zeta = 3$, καὶ $\eta = 130$.

Ὥςε $\chi = \frac{2 . 3 . 130 . 4}{3.4.6 + 2.4.5 + 2.3.3} = \frac{3120}{72 + 40 + 18}$

$= \frac{3120}{130} = 24.$

ἀλήσουσιν ἢ μεδίμνους; Τεθεισῶν κἀνταῦθα τῶν ὡρῶν $= \chi$, συνάξομεν

$$\alpha \text{ ὧραι} : \beta \text{ μεδ.} = \chi \text{ ὧραι} : \frac{\beta\chi}{\alpha} \text{ μεδ.}$$

$$\text{Καὶ } \gamma \text{ ὧραι} : \delta \text{ μεδ.} = \chi \text{ ὧραι} : \frac{\delta\chi}{\gamma} \text{ μεδ.}$$

$$\text{Καὶ } \varepsilon \text{ ὧραι} : \zeta \text{ μεδ.} = \chi \text{ ὧραι} : \frac{\zeta\chi}{\varepsilon} \text{ μεδ.}$$

Ἡ δ' Ἐξίσ. $\frac{\beta\chi}{\alpha} + \frac{\delta\chi}{\gamma} + \frac{\zeta\chi}{\varepsilon} = \eta$

$$\overline{\phantom{\beta\chi + \frac{\alpha\delta\chi}{\gamma} + \frac{\alpha\zeta\chi}{\varepsilon} = \alpha\eta}} \,.\, \alpha$$

$$\beta\chi + \frac{\alpha\delta\chi}{\gamma} + \frac{\alpha\zeta\chi}{\varepsilon} = \alpha\eta$$

$$\overline{\phantom{\gamma\beta\chi + \alpha\delta\chi + \frac{\alpha\gamma\zeta\chi}{\varepsilon} = \alpha\gamma\eta}} \,.\, \gamma$$

$$\gamma\beta\chi + \alpha\delta\chi + \frac{\alpha\gamma\zeta\chi}{\varepsilon} = \alpha\gamma\eta$$

Ἐφαρμόσει δὲ τὸ παράδ. ἐν γένει, καὶ ἐὰν διάφορα πράγματα ἐν διαφόρῳ χρόνῳ διάφορα παράγωσιν ἀποτελέσματα, καὶ εἰδέναι βουλώμεθα τὸ παραγόμενον συνάμα ἐκείνων ἐνεργούντων. π. χ. Τρεῖς οἰκοδόμοι ὁ μὲν ἐν 1 ἡμέρᾳ 6 κυβικοὺς οἰκοδομεῖ πόδας, ὁ δ' ἕτερος ἐν 2 ἡμ. 9 κυβ. πόδ. ὁ δὲ γ'. ἐν 3 ἡμ. 14 κυβ. π. πόσον χρόνον οἰκοδομήσουσιν 180 κυβ. πόδας, συνάμα ἐργαζόμενοι;

Κατα τὸν τύπον ἔςι $\chi = \frac{\alpha\gamma\eta\varepsilon}{\gamma\varepsilon\beta + \alpha\varepsilon\delta + \alpha\gamma\zeta}$

$\alpha = 1.\ \beta = 6.\ \gamma = 2.\ \delta = 9.\ \varepsilon = 3.$ $\zeta = 14.\ \eta = 180.$ καὶ $\chi =$

$$\frac{1.2.180.3}{2.3.6 + 1.3.9 + 1.2.14} = \frac{1080}{36 + 27 + 28}$$

$\frac{1080}{91} = 11 \frac{79}{91}$ ἡμ. σχεδὸν $= 11 \frac{8}{9}$ ἡμ.

§. 356. Ζ'. Ἐργάτας τις μισθωσάμενος, τὸν μισθὸν αὐτοῖς τελέσειν μέλλων, οὐχ ἱκανῶς ἔχει χρημάτων, εἰς τὸ ἑκάςῳ ἴσον μισθὸν ἀποδοῦναι. Εἰ μὲν γὰρ ἕκαςος παρ' αὐτοῦ 6 θαλήρους λάβοι, τὸν ὁμολογηθέντα μισθὸν, ἐνδεῖ αὐτῷ (τῷ μισθωσαμένῳ) ἔτι 20 θαλήρων. Εἰδὲ 4. ὑπολείπονται αὐτῷ ἔτι 12. Ζητεῖται, πόσα τὰ χρήματα, καὶ πόσοι οἱ ἐργάται;

Λύσις. Ἔςω τῶν ἐργατῶν ὁ ἀριθμὸς $= \chi$. Ἐπειδὴ οὖν ἑκάςῳ 6 θαλ. ὀφείλει ὁ τούτους μισθωσάμ. εἴη ἂν τὸ ὁλικὸν κιφάλαιον τῶν καταβληθησομένων χρημάτων ἴσον τῷ ἀριθμῷ τῶν ἐργατῶν, πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν θαλ. τῶν ἑκάςῳ ὀφειλομένων, τουτ: $= 6\chi$ ἀλλ' εἰ ἕκαςος 6 θαλ. λήψεται, κατὰ τὴν ὑπόθ. δεήσει τῷ μισθώσ. ἔτι 20 θαλ. τουτ: ἔχει $6\chi - 20$ θαλ. Βούλεται δ' ἑκάςῳ θαλ. 4 δοῦναι, ὥςε πᾶσιν ἅμα 4χ. Ὑπολειπονλείπονται δ' αὐτῷ ἔτι 12. Ὥςε ἔχει ἐνεργεία $4\chi + 12$ θαλ. Προέκυψαν οὖν οὕτω δύω τιμαὶ τῶν αὐτοῦ χρημάτων, ἴσαι ἀλλήλαις ἀναγκαίως οὖσαι, ὡς ἄμφω ἀληθεύουσαι. Ἐξ ὧν Ἐξίσωσις συνίςαται, τὸ χ διορίσουσα.

Καὶ γὰρ

$$\frac{\frac{\frac{\frac{6\chi - 20 = 4\chi + 12}{6\chi - 4\chi - 20 = 12}\ (\S.\ 346.)}{2\chi - 20 = 12}\ \text{ἢ}}{2\chi = 12 + 20 = 32}}{\chi = \frac{32}{2} = 16 = \text{τοῖς ἐργάταις.}}$$

Ἐφ' ᾧ δὲ καὶ τὰ χρήματα εὑρεθῆναι, ἀντικαταςήτω ἐφ' ἑτέρας τῶν πρώτων τιμῶν τὸ εὑρεθὲν ἀντὶ τοῦ χ. Οἷον ἐπὶ τοῦ $4\chi + 12$. Ἐπειδὴ $\chi = 16$, ἔςαι $4\chi + 12 = 4 \cdot 16 + 12 = 64 + 12 = 76 =$ τοῖς χρήμασιν. Ἐπεὶ δὲ τὰ ὀφειλόμενα $6\chi = 6.16 = 96$ θαλ. τυγχάνουσιν, εἰκότως ἄρα 20 θαλ. αὐτῷ ἐδέησε.

Καὶ ἐν γένει δὲ καὶ τοῦτο ἐπιλῦσαι δυνατόν. Εἰ γάρ τις ἐργατῶν ἀριθμῷ α θαλ. δοῦναι βουλόμενος, β θαλ. ἔτι χρείαν ἔχει, καὶ διὰ τοῦτο δίδωσιν αὐτοῖς γ θαλ. ὑπολειπομένων αὐτῷ καὶ δ θαλ. κατὰ ταῦτα ἂν εἴη

$$\frac{\frac{\frac{\alpha\chi - \beta = \gamma\chi + \delta}{\alpha\chi - \gamma\chi = \beta + \delta}\ \text{μετενεχθ. αἱ γνωςαὶ ἑτέρωσε, ὡσαύτως καὶ αἱ ἄγνωςοι}}{(\alpha - \gamma)\chi = \beta + \delta}\ \text{ἢ}}{\chi = \frac{\beta + \delta.}{\alpha - \gamma}}$$

§. 357.

§. 357. Η΄. Ἐκ δύω εἰδῶν οἴνου, τοῦ μὲν ἀρίςου ὁ ξέςης 15 ὀβολῶν τιμᾶται, τοῦ δὲ κακίςου 10. Ἐθέλει οὖν τις τούτους κεράσαι, κἀκ τῶν δύω εἰδῶν ἕνα ξέςην ποιῆσαι, 12 ὀβολῶν τιμώμενον. Πόσον λήψεται ἐξ ἑκατέρου;

Λύσις. Λαβέτω ἀπὸ μὲν τοῦ κακίςου τὸ μέρος χ, ὅπερ (χ) κλάσμα τοῦ ξέςου τυγχάνει, ὡς ἔλαττον τοῦ ξέςου εἶναι κατὰ τὴν ὑπόθ. ὀφεῖλον. ἀπὸ τοῦ ἀρίςου ἄρα εἰς συμπλήρωσιν τοῦ ξέςου $1 - \chi$. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ ὅλου τοῦ ξέςου ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ τοῦ κακίςου οἴνου ληφθὲν ἤτοι τὸ χ, λειπόμενον ἔτι καὶ τὸ τοῦ ἀρίςου μέρος. τουτ. ἀπὸ μὲν τοῦ κακ. $= \chi$. ἀπὸ δὲ τοῦ ἀρ. $= 1 - \chi$. Ὁ ξέςης τοῦ κακ: τιμᾶται 10. ὥςε τὸ μέρος χ, $10 . \chi$. τοῦ δ᾽ ἀρίςου 15 ὀβολῶν Ὥςε τὸ μέρος $1 - \chi$ τιμηθήσεται $(1 - \chi) . 15 = 15 - 15\chi$. Ἔνθεν τοι ὁλικῶς ὁ ξέςης τιμᾶται $10 . \chi + 15 - 15\chi$. τοῦτο δὲ κατὰ τὴν ὑπόθ. εἶναι ὀφείλει $= 12$. Ἐκ τούτου εὑρήσομεν τὸ χ. Ἡ δ᾽ Ἐξίσωσις ἔςαι

$$10\chi - 15\chi + 15 = 12$$

$$15 - 12 = 15\chi - 10\chi$$

$$3 = 5\chi.$$

Καὶ $\chi = \frac{3}{5}$. Ἤτοι ἀπὸ μὲν τοῦ κακίςου λήψεται $\frac{3}{5}$, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου ἀπὸ τοῦ ἀρίςου $\frac{2}{5}$. Ἔςι γὰρ $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$. Ἀντὶ δὲ τοῦ ξέςου καὶ ἕτερον μέτρον ἂν παραληφθείη.

Εἰ οὖν ὁ ξέςης τοῦ κακίςου 10 τιμᾶται ὀβολῶν, $\frac{3}{5}$ τοῦ ξέςου τιμηθήσονται $\frac{3 . 10}{5} = 6$ ὀβ. τοῦ δὲ

ἀρίςου

ἀρίςου 15 ὀβ, $\frac{2}{5}$ ξ. τιμ. $\frac{2 \cdot 15}{5} = 6$ ὀβ. Ὥςε

$6 + 6 = 12$ = τῇ τιμῇ τοῦ κραθέντος οἴνου.

Καὶ ἐν γένει. Ἔςω μικτέα δύω τινὰ, ὧν ἡ τιμὴ δεδομένη, εἰς τρίτοντι. Καὶ τοῦ μὲν ἡ τιμὴ κείσθω $= \alpha$, τοῦ δ' ἑτέρου $= \beta$, τοῦ δ' ἐκ τῆς μίξεως ἀμφοτέρων $= \gamma$. Ὥςε κἀνταῦθα ἡ μὲν τοῦ κακίςου τιμὴ εἴη τὸ $\alpha\chi$, ἡ δὲ τοῦ ἀρίςου τὸ $(1 - \chi)\beta = \beta - \beta\chi$. Ἄμφω δὲ $= \gamma$.

Ὥςε $\alpha\chi + \beta - \beta\chi = \gamma$

$$\alpha\chi - \beta\chi = \gamma - \beta$$

$$(\alpha - \beta)\chi = \gamma - \beta$$

$$\chi = \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}$$

Καὶ τοῦτό ἐςιν ὁ γενικὸς τύπος τῆς Μεθόδου τῆς Μίξεως διαφόρων εἰς ἓν, χρήσιμος ὢν παντὶ μίξεως εἴδει, χρυσοῦ, ἀργύρου, κτ.

§. 358. Θ'. Α ———— Γ. Ὁδοιπάρος τις ἀπὸ τοῦ Α ἀποδημήσας ἐπὶ τὸ Γ πορεύεται, 80 μίλλια τοῦ Α ἀπέχον, 6 μίλλια καθ' ἑκάςην διανύων ἡμέραν. Μετὰ δὲ 4 ἡμέρας, ἕτερος ἱππάζων ἀποδημήσας αὐτῷ ἕπεται, 10 μίλλια ἑκάςης διανύων ἡμέρας. Ζητεῖ μαθεῖν, ἐν πόσαις αὐτὸν καταλήψεται ἡμέραις.

Λύσις. Κἀπὶ τούτου ἡ τῶν Τριῶν Μέθοδος ἀναγκαία. Ἔςωσαν αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς αὐτὸν ὁ Β'. καταλήψεται $= \chi$. ὁ δὲ α' πρὸ δ' ἡμ. ἀποδημήσας, καὶ 6 μίλ. τῆς ἡμέρας διανύων, ἤδη $4 \cdot 6 = 24$ μιλ. τὸν β'. ὑπερέχει. Ἐν χ ἡμ. ἐν αἷς α. τὸν ὁ Β'.

κα. α.

καταλήψεται, ἔχεται τῆς ὁδοῦ. 6 μίλ. ὁσημέραι διανύων. ἐν χ ἄρα ἡμέρας ὁδοιπορήσει 6 χ μίλ. Ὅτι 1 ἡμέρα : χ μίλλ. = χ ἡμ. : 6χ μίλ. Ὥςε ἡ ὁλικὴ ὁδοιπορία τοῦ α΄. πρὶν καταληφθῇ, ἐςὶν 24 + 6χ μίλ. Ὁ β΄. ὁσημέραι ἱππάζεται 10 μίλ. ἤνθεντοι ἐν χ ἡμ. 10χ μίλ. Καὶ ἐπειδὴ μετὰ τοῦτο τὸν α΄. καταλήψεται, τὰ διαςήματα, τὰ ὑπ᾽ ἀμφοῖν διανυσθέντα, ἐξ ἀνάγκης ἔςαι ἴσα.

ἤτοι $$24 + 6\chi = 10\chi$$

$$24 = 10\chi - 6\chi = 4\chi$$

$$\frac{24}{4} = \chi. \text{ ἢ } 6 = \chi.$$ Ἐν 6 ἄρα ἡμ. καταληφθήσεται ὁ α΄. Ὥςε καὶ τὸ διάςημα τὸ διανυσθὲν ἔςαι = 60 μιλλίοις.

Ἐὰν αἱ ὁσημέραι ὁδοιπορίαι τοῦ α΄. ὁδοιπόρου = α κληθῶσι. τοῦ β΄. = β. ὁ χρόνος, καθ᾽ ὃν ὁ α΄. προεπορεύθη = γ. ἔςαι τοῦ α΄. τὸ διανυσθὲν διάςημα α΄. = αγ, καὶ β΄. ἔτι αχ. ὅτι γ ἡμέρας προώδευσε, καὶ χ ἡμέρας ὁδεύει ἔτι. Τηνικαῦτα οὖν τοῦ β΄. τὸ διάς. ἔςαι = βχ. Καὶ ἐπεὶ ἀμφοῖν τὰ διανυσθ. διαςήμ. ἴσα, ἔςαι $$\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta\chi$$

$$\alpha\gamma = \beta\chi - \alpha\chi = (\beta - \alpha)\chi$$

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta - \alpha} = \chi = \text{τῷ χρόνῳ, ἐν}$$

ᾧ τὸν α΄. ἂν καταλάβοι.

Ἀλλὰ θῶμεν τὸν χρόνον, ἐν ᾧ ἐκεῖνον καταλήψεται, διωρισμένον, ἤτοι τὸ χ δεδομένον εἶναι, καὶ ζητεῖσθαι, πόσα μίλλια τὸν β΄. ὁσημέραι διανύειν χρὴ ἵνα τὸν α΄. καταλάβῃ. Ἐπειδὴ οὖν χ γνωτὸν, καὶ

β ζ

β ζητεῖται. ῥᾶςα διὰ τῆς ἑξῆς εὑρεθήσεται Ἐξισώσεως.

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta - \alpha} = \chi$$

$$\overline{} \cdot \beta - \alpha$$

$$\alpha\gamma = \beta\chi - \alpha\chi$$

$$\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta\chi$$

ἢ $(\gamma + \chi)\alpha = \beta\chi$ $: \chi$

$$\frac{(\gamma + \chi)\alpha}{\chi} = \beta.$$

ἢ καί, ἐπειδὴ $\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta\chi$ $: \chi$

$$\frac{\alpha\gamma + \alpha\chi}{\chi} = \beta$$

$$\frac{\alpha\gamma}{\chi} + \alpha = \beta$$

Ἔνθεντοι ἐν τῷ προτέρῳ παραδείγμ. ἔνθα $\alpha = 6$. $\gamma = 4$. καὶ $\chi = 6$. β ἔςαι, ἡ πορεία τοῦ β'. ἡ ζητουμένη. ἥτις, τοῦ ὑπολογισμοῦ ἀκριβοῦς ὄντος, $= 10$ ἔςαι. Ἀλλὰ $\frac{\alpha\gamma}{\chi} + \alpha = \frac{6 \cdot 4}{6} + 6 = 10.$

§. 359. Γ'. Ἄνθρωπός τις 100 χρυσοῦς καθ' ἕκαςον δαπανῶν ἐνιαυτὸν, κερδαίνει τοσοῦτον, ὥςε τὴν λοιπὴν αὐτοῦ περιουσίαν κατὰ τὸ τρίτον ἐπαύξειν. Μετὰ δὲ τρεῖς ἐνιαυτοὺς δὶς τοσοῦτον πλούσιος, ὅσου

ἐν

ἐν ἀρχῇ ἦν, ἀναφαίνεται. Πόσους οὖν χρυσοῦς κατ' ἀρχὰς ἐσχήκει, καὶ πόσους ἤδη;

Λύσις. Τεθήτω ἡ ἐν ἀρχῇ αὐτοῦ περιουσία $= \chi$ χρυσ. ἀφ' ὧν 100 λαμβάνει ἐν τῷ πρώτῳ ἐνιαυτῷ. Ἔχει οὖν ἔτι $\chi - 100$. Αὔξει δὲ τὸ λείψανον τοῦτο κατὰ τὸ τριτημόριον. Τὸ δὲ γ: μόριον τοῦ $\chi - 100 = \frac{\chi - 100}{3}$. Ἔχει ἄρα μετὰ τὸν α'. ἐνιαυτὸν $\chi - 100 + \frac{\chi - 100}{3}$.

Ἃ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀχθέντα παρονομ: $= \frac{3\chi - 300 + \chi - 100}{3} = \frac{4\chi - 400}{3}$.

Ἐκ τούτων λαμβάνει ἐν ἀρχῇ τοῦ β'. ἐνιαυτοῦ αὖθις 100 χρυσοῦς. Ὑπολείπονται δ' αὐτῷ ἔτι $\frac{4\chi - 400}{3} - 100$. Καὶ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀχθ. παρον. $= \frac{4\chi - 400 - 300}{3} = \frac{4\chi - 700}{3}$.

Αὔξεται δὲ τοῦτο ἔτι κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$. Τὸ τρίτον μέρος τούτου ἐςὶ $\frac{4\chi - 700}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\chi - 700}{9}$. Ἐν τέλει ἄρα τοῦ β'. ἐνιαυτοῦ ἔσχε $\frac{4\chi - 700}{3} + \frac{4\chi - 700}{9}$

$$= \frac{12\chi - 2100 + 4\chi - 700}{9} = \frac{16\chi - 2800}{9}.$$

Λαμβάνει δ' ἐκ τούτων ἐν ἀρχῇ τοῦ γ'. ἐνιαυτοῦ πάλιν 100 χρυσοῦς. Εἰσὶν οὖν αὐτῷ ἔτι $\frac{16\chi - 2800}{9} - 100$

$$= \frac{16\chi - 2800 - 900}{9} = \frac{16\chi - 3700}{9}$$

ὑπὸ

ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀχθ. παρον. Αὔξεται δὲ τὸ λεῖψανον ἐν τῷ γ'. ἐνιαυτῷ αὖθις κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$. Τὸ δὲ τριτημόριον ἐςὶ $\frac{16\chi - 3700}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16\chi - 3700}{27}$.

Ἐν τέλει τοίνυν τοῦ γ'. ἐνιαυτοῦ ἔχει $\frac{16\chi - 3700}{2} +$

$$\frac{16\chi - 3700}{27} = \frac{48\chi - 11100 + 16\chi - 3700}{27}$$

$$= \frac{64\chi - 14800}{27}$$ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀνεχθ. παρον. Τὸ δὲ πᾶσα ἡ αὐτοῦ περιουσία ἐςὶν ἐν τέλει τοῦ γ'. ἐνιαυτοῦ. Κατὰ δὲ τὸ Πρόβλημα διπλάσιον τοῦτο εἶναι ὀφείλει τοῦ ἐν ἀρχῇ. Ἐπεὶ δ' ἐν ἀρχῇ χ εἶχεν, ἀναγκαίως τοῦτο ἔςαι $= 2\chi$. Ὅθεν ἡ Ἐξίσωσις

$$\frac{64\chi - 14800}{27} = 2\chi$$

$$\overline{} \cdot 27$$

$$64\chi - 14800 = 54\chi$$

$$64\chi = 54\chi + 14800$$

$$64\chi - 54\chi = 10\chi = 14800$$

$$\overline{} : 10$$

$\chi = \frac{14800}{10} = 1480$. Ἐν ἀρχῇ ἄρα εἶχε 1480 χρυσοῦς. Μετὰ δὲ τρία ἔτη $1480 \cdot 2 = 2960$.

§. 360. ΙΑ'. Δεσπότης τις τῷ ἑαυτοῦ ὑπισχνεῖται δούλῳ ἐν τῷ α'. ἐνιαυτῷ 40 θαλ; μισθὸν αὐτῷ παρέξειν, καὶ 10 θαλήροις τοῦτον καθ' ἕκαςον τῶν ἑξῆς ἐπαυἐπαύξειν ἐνιαυτῶν, ἀλλὰ καὶ δῶρον αὐτῷ δωρεῖσθαι, ὥςε τὸ τοῦ β' ἐνιαυτοῦ 2 θαλήροις τὸ τοῦ α'. ὑπερτερεῖν, ὡσαύτως καὶ τὸ τοῦ γ' τὸ τοῦ β', κτ. Τῶν 5 δὲ παρῳχηκότων ἐνιαυτῶν, ὁ δοῦλος ἔτι λήψεται 235 θαλ. πλὴν 100, οὓς ἐν τοσούτῳ παρὰ τοῦ δεσπότου ἔλαβε. Ζητεῖται, 1) πόσος ὁ μισθὸς τῶν 5 ἐνιαυτῶν. καὶ 2) πόσου τὰ δῶρα τιμηθήσονται; Ἐπειδὴ ὁ δοῦλος ἐν γένει 100 + 235 θαλ. = 335 θ. παρὰ τοῦ δεσπότου ἀπαιτεῖ. ὁ δὲ τούτου μισθὸς, κατὰ τὴν ὑπόθ. 40 + 50 + 60 + 70 + 80 = 300 θαλ. τὰ δῶρα, ἤπου δῆλον, ἐν τοῖς ὑπολειπομένοις 35 θαλ. ἐμπεριέχεται. Ἔςω ἄρα τὸ δῶρον τοῦ α'. ἐνιαυτοῦ = χ. καὶ κατὰ τὴν ὑπόθ. προκύψει ἡ ἐχομένη τῶν δώρων σειρά. χ, $\chi + 2$, $\chi + 4$, $\chi + 6$, $\chi + 8$ = $5\chi + 20 = 35$.

$$5\chi = 35 - 20 = 15$$

$$\chi = \frac{15}{5} = 3 \text{ θαλ.}$$

= τῇ τιμῇ τοῦ δώρου τοῦ α'. ἐν. Ὥςε τὸ τοῦ β'. = 5. τὸ τοῦ γ'. = 7 τὸ τοῦ δ'. = 9. τὸ τοῦ ε'. = 11. πάντα = 35 θαλ.

§ 261. ΙΒ'. Ἀποθανών τις καταλείπει τοῖς ἑαυτοῦ παισὶ κληρονομίαν, σκεύη ἀργυρᾶ, λίθους τιμίας, ἱμάτια λινᾶ, καὶ χρήματα, πάντα συνάμα 1800 θαλ τιμώμενα. Εἰσὶ δ' αἱ μὲν λίθοι τρὶς τοσούτου ἄξιαι, ὅσου τὰ ἀργυρᾶ σκεύη, τὰ δὲ χρήματα 30 θαλήροις ἐλάττω τῆς ἡμισείας τιμῆς τῶν ἀργυρῶν σκευῶν, καὶ τῶν λίθων συνάμα. τῶν δὲ λινῶν ἱματίων ἡ τιμὴ 1 θαλήροις ἐλάττουται τοῦ ἡμίσεος τῶν χρημάτων. Ζητεῖται, πόσου ἕκαςον ἄξιον.

Λύσις. Ἔςω τὰ ἀργυρᾶ σκεύη χ θαλ. ἄξια. Ἐπεὶ δὲ τῶν λίθων ἡ τιμὴ τριπλῆ, ἔσονται ἄξιαι 3χ θαλ. Ἐπεὶ δὲ καὶ τὰ χρήματα 30 θαλ. ἐλαττοῦται

τῆς

τῆς ἡμισείας τιμῆς ἀμφοῖν συνάμα τῶν προηγησαμένων, ἔςαι $\frac{\chi + 3\chi}{2} - 30 = \frac{4\chi}{2} - 30 = 2\chi - 30.$ = Τῶν δὲ λινῶν ἱμ. 10 θαλ. ἐλαττουμένου τοῦ ἡμίσεος τῶν χρημάτων ἡ τιμὴ $= \frac{2\chi - 30}{2} - 10 = \chi - 15 - 10 = \chi - 25.$ Ἡ δὲ τιμὴ ἀπάντων

$$\chi + 3\chi + 2\chi - 30 + \chi - 25 = 1800$$ ἢ μᾶλλον

$$7\chi - 55 = 1800$$

$$7\chi = 1800 + 55 = 1855.$$

$$\chi = \frac{1855}{7} = 265 \text{ θαλ.}$$

Ὥςε τὰ ἀργυρᾶ σκεύη ἄξια $= \chi = 265$ θαλ.

αἱ λίθοι 3χ $= 795$ θ.

τὰ χρήματα $2\chi - 30 = 530 - 30 = 500$

τὰ λινᾶ ἱμάτια $\chi - 25 = 256 - 25 = 240$

1800 θαλ.

§. 262. Δίδονται δὲ καὶ Προβλήματα, ὧν ἡ ἐπίλυσις καὶ ἀκριβῶς ὑπολογιζομένοις ἀδύνατος, ἥτις μέντοι δυνατὴ, τῶν τοῦ Προβλήμ. ὑποθέσεων, καὶ καταςάσεων μεταβληθεισῶν. π. χ. Δίελε 32 εἰς δύω μέρη, ὥςε τοῦ μείζονος τὸ πηλίκον, διὰ τοῦ 8 διαιρεθέντος, καὶ τὸ τοῦ ἐλάσσονος διὰ τοῦ 6, ἄμφω τῷ 4 ἐξισοῦσθαι. Κείσθω τὸ μεῖζον $= \chi$. Τὸ ἔλαττον ἄρα $= 32 - \chi$. διαιρεθήτω τὸ μεῖζον διὰ 8, ἤτοι $\frac{\chi}{8}$, καὶ τὸ ἔλαττον διὰ τοῦ 6, τουτ: $\frac{32 - \chi}{6}$.

Ἄμφω

Ἄμφω τὰ πηλίκα, κατὰ τὴν ὑπόθ. $=4$. Ἐντεῦθεν ἡ Ἐξίσωσις

$$\frac{x}{8}+\frac{32-x}{6}=4. \quad \cdot 8$$

$$x+\frac{296-8x}{6}=32 \quad \cdot 6$$

$$6x+256-8x=192$$

$$6x-8x=192-256$$

$$-2x=-64.$$

ἄρα καὶ

$$+2x=+64$$

. Ὥστε ὁ μείζων ἀριθμός ἐστὶ

$$x=32$$

32. Καὶ ἐπεὶ ὁ ἐλάττων $32-x$, εἴη ἂν $32-32$ $=0$. Ὅθεν οὐδεὶς ἐλάσσων πάρεστιν. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθ. παρεῖναι δεῖ καὶ τὸν ἐλάσσονα. Ἄρα τὸ Πρόβλ. κατὰ τὸν δοθέντα τρόπον ἀδύνατον.

§. 363. Προβλήματος δὲ προτιθεμένου τοῦ α'. βαθμοῦ, ᾧ δύω, τρεῖς, ἢ καὶ πλείους τῶν ἀγνώστων ἐνυπάρχουσι ποσοτήτων, τοσαύτας Ἐξισώσεις συστήσομεν, κατὰ τὰς τοῦ Προβλήματος ὑποθέσεις, ὅσαι τῶν ποσοτήτων αἱ ζητούμεναι ἄγνωστοι. Ἀλλ' οὐδεμίαν τούτων (τῶν ἀγν.) ἐφ' ἑτέραν (καὶ ταύτην ἄγν:) πεπολλαπλασιασμένην εἶναι χρή. Ἄλλως γὰρ ἐν τῇ τοῦ Προβλήμ: ἐπιλύσει οὐχ ἁπλαῖ προκύψουσιν Ἐξισώσεις. Χρῶνται δὲ, τὰ τοιαῦτα τῶν Προβλ. ἐπιλύσειν μέλλοντες, διαφόροις Μεθόδοις. Ἤτοι γὰρ ἡ εὑρεθεῖσα δύναμις μιᾶς ἀγνώστου ἐπὶ τῶν ἑτέρων

ἑτέρων ἀντικαθίςαται Ἐξισώσεων, ἢ καὶ ἐκ δύω Ἐξισώσεων τὴν δύναμιν μιᾶς εὑρόντες ἀγνώςου, ἄμφω τὰς δυνάμεις καινὴν ποιοῦμεν Ἐξίσωσιν, ἢ τρίτον δυάδα Ἐξισώσεων προσθέντες, ἢ ἀφελόντες, τάχιςα εἰς πέρας τοῦ προκειμένου ἂν ἀφικοίμεθα. Διὰ παραδειγμάτων ἀναπτυχθήσεται τὸ λεγόμενον.

§. 364. Καὶ α΄. Εἰ δύω ἄγνωςοι ποσότητες τῷ προβλήματι ἔνεισι.

Δοθέντων τοῦ Κεφαλαίου, καὶ τῆς Διαφορᾶς δύω ἀριθμῶν, εὑρεθήτωσαν οἱ ἀριθμοί. Κληθήτωσαν δὲ, ἅτε ἄγνωςοι, ὁ μὲν μείζων χ, ὁ δ' ἐλάσσων ψ. Τὸ τούτων Κεφάλαιον δέδοται. Ὅπερ ἔςω $= \alpha$. Ἀλλὰ καὶ ἡ τούτων Διαφορὰ, ἥτις $= \beta$ τεθήτω. Ἐκ τούτων σύνίςανται δύω Ἐξισώσεις αἱ ἑξῆς. $\chi + \psi = \alpha$. Καὶ $\chi - \psi = \beta$, ἃς κατὰ τοὺς διαφόρους ἐπιλύσωμεν τρόπους.

1) Διὰ τῆς ἀντικαταςάσεως τῆς εὑρεθείσης τιμῆς καὶ δυνάμεως τῆς ἑτέρας τῶν ἀγνώςων ἐπὶ τῆς ἑτέρας Ἐξισώσεως. $\chi + \psi = \alpha$. $\chi = \alpha - \psi$. Τὸ τῷ χ ἴσα δυνάμενον, ἤτοι τὸ $\alpha - \psi$ θὲς ἐπὶ τῆς ἑτέρας Ἐξισ. ἤτοι τῆς $\chi - \psi = \beta$, ἀντὶ τοῦ χ, ἥτις εἰς τήνδε τραπείη $\alpha - \psi - \psi = \beta$

$$\text{ἢ } \alpha - 2\psi = \beta$$

$$\alpha = \beta + 2\psi$$

$$\alpha - \beta = 2\psi \quad : 2$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \psi$$

Ἐπειδὴ οὖν εὕρηται τὸ ψ, ἔςαι γνωςὸν καὶ τὸ χ. Ἐπειδὴ γὰρ κατὰ τὴν α΄. Ἐξίσ. $\chi = \alpha - \psi$, ἀντικαταςήσας

τοῦ

τοῦ ψ τὸ ἰσοδύναμον ἕξεις $\chi = \alpha - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $= \frac{2\alpha - (\alpha - \beta)}{2} = \frac{2\alpha - \alpha + \beta}{2}$ $= \frac{\alpha + \beta}{2}$. Ὥςε ὁ μείζων ἀριθμὸς $\chi = \frac{\alpha + \beta}{2}$, καὶ ὁ ἐλάσσων, ἢ $\psi = \frac{\alpha - \beta}{2}$.

2) Ἐὰν ἐξ ἑκατέρας Ἐξισώσ. ἡ δύναμις καὶ τιμὴ τῆς αὐτῆς ποσότητος ζητῆται, καὶ ὡς καινὴ Ἐξίσωσις θεωρῆται. Καὶ οὗτός ἐςιν ὁ Φυσικώτατος τρόπος. Τῇ γὰρ δευτέρᾳ Ἐξισώσει τηνικαῦτα μία καὶ μόνη ἄγνωςος παρέςαι. Τουτ.

$$\frac{\chi + \psi = \alpha.}{\chi = \alpha - \psi} \qquad \text{Καὶ} \qquad \frac{\chi - \psi = \beta}{\chi = \psi + \beta}$$

Ὥςε καὶ $\alpha - \psi = \beta + \psi$ (§. 48. δ'.)

$$\frac{\alpha = \beta + \psi + \psi = \beta + 2\psi}{\alpha - \beta = 2\psi}$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \psi$$

Ἵνα δὲ οὕτω καὶ τὸ χ εὕρωμεν, Ἔςω αὖθις

$$\frac{\chi + \psi = \alpha.}{\psi = \alpha - \chi} \qquad \text{Καὶ} \qquad \frac{\chi - \psi = \beta}{\frac{-\psi = \beta - \chi}{\chi - \beta = +\psi}}$$

Ἔνθεντοι

Ἔνθεντοι καὶ $\alpha - \chi = \chi - \beta$ (§. αὐτ.)

$$\alpha = 2\chi - \beta$$

$$\alpha + \beta = 2\chi$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \chi$$

3) Διὰ τῆς προσθέσεως τῶν Ἐξισώσεων, πάνυ καλῶς ἐνταῦθα ἐγχωρούσης.

$$\chi + \psi = \alpha$$
$$\chi - \psi = \beta$$

$$2\chi = \alpha + \beta$$

$$\chi = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Εἰδὲ τὸ ψ εὑρεῖν βούλει, ἔςαι τοῦτο διὰ τῆς Ἀλγεβραϊκῆς Ἀφαιρέσεως. $\chi + \psi = \alpha$

$$\chi - \psi = \beta$$
$$\quad + \quad\; -$$

$$2\psi = \alpha - \beta$$

$$\psi = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

§. 365.

ἐπὶ πάντων, ὁ μείζων ἀριθμὸς τὸ ἥμισυ κεφάλαιον ἐςί, καὶ ἡ ἡμίσεια διαφορᾶς, ὁ δ' ἐλάσσων. τὸ ἥμισυ κεφάλαιον πλὴν τῆς ἡμισείας διαφορᾶς.

Τὸ παράδειγμα ἐν ἀριθμοῖς. Ἔςω τὸ Κεφάλαιον δύω.ἀριθμῶν 24, ἡ τούτων Διαφορὰ $= 6$. Τίνες οἱ ἀριθμοὶ; Ἐνταῦθα $\alpha = 24$. καὶ $\beta = 6$. Ἔνθεντοι $\chi = \frac{24 + 6}{2} = \frac{30}{2} = 15$. Καὶ $\psi = \frac{24 - 6}{2} = \frac{18}{2} = 9$. Ὥςε ὁ μείζων ἀριθμὸς 15, ὁ δ' ἐλάττων 9.

§. 365. Ἑτέρου παράδ. Δύω τινῶν ἐν καλάθοις μῆλα φερόντων, ὁ ἕτερος ἐρωτηθεὶς, πόσα ἄμφω φέροιεν, ἀπεκρίνατο. Ἐὰν ἐκ τῶν ἐμῶν 100 λαβὼν τοῖς τοῦ ἑταίρου μου ταῦτα προσθῇς, ἕξει ἐν τῷ ἑαυτοῦ καλάθῳ τρὶς τοσαῦτα, ὅσα ἐν τῷ ἐμῷ. Ἐὰν δ' ἐκ τῶν ἐκείνου 100 τοῖς ἐμοῖς προσθῇς, ἔσονται ἴσα τὰ μῆλα ἐν ἀμφοῖν τοῖς καλάθοις.

Λύσις. Ἐνταῦθα πρόκειται δύω ἄγνωςοι. Ὅθεν καὶ δύω Ἐξισώσεις, ἵνθα οὐδετέρα τῶν ἀγνώςων τῇ ἑτέρα διὰ πολλαπλασιασμοῦ συναπτέα εἶναι ὀφείλει. Ἐν τῷ α'. καλάθῳ ἔςω χ μῆλα, ἐν δὲ τῷ β'. ψ. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ α'. 100. λάβῃς, ὑπολείποντ' ἔτι $\chi - 100$. Τὰ δὲ τοῦ ἑτέρου, οἷς τὰ 100 προςίθειται, $\psi + 100$. Οὕτως οὖν ἐγένοιτο ταῦτα τρὶς τοσαῦτα, κατὰ τὴν ὑπόθ. ὅσα τὰ τοῦ α'. Ἄρα $\psi + 100 = (\chi - 100) . 3 = 3\chi - 300$. Ἡ α'. Ἐξίσωσις. Αὖθις, ληφθέντων ἀπὸ τῶν ψ μήλων 100, εἶεν ἂν λοιπὰ $\psi - 100$. Καὶ τηνικαῦτα, ἡ τὸ Πρόβλημα βούλεται, ἴσα ἑκατέρων τὰ μῆλα. Ὥςε $\psi - 100 = \chi + 100$. Ἡ β'. Ἐξίσ. Αἱ δύω τοίνυν. Ἐξισώσεις, $\psi + 100 = 3\chi - 300$.

Καὶ

Καὶ $\psi - 100 = \chi + 100$ ῥᾷςα διὰ τῆς Ἀφαιρέσεως ἐπιλυθῆναι δύνανται. Οὕτω γὰρ τὸ ψ τῶν Ἐξισώσεων ἐκπεσεῖται.

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Ἤτοι} & \psi + 100 = & 3\chi - 300 \\
\text{Καὶ} & \psi - 100 = & \chi + 100 \\
 & + & \quad - \quad \text{ἄφελε} \\
\hline
 & + 200 = & 2\chi - 400. \ (\S.\ 49.) \\
\hline
 & 200 + 400 = 600 = & 2\chi \\
\hline
 & \frac{600}{2} = 300 = & \chi
\end{array}
$$

Ἀντικατάςησον ἤδη τοῦ χ ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν Ἐξισ. τὸ εὑρεθὲν ἴσον, ἤτοι 300, καὶ ἕξεις ψ. Γενέσθω τοῦτο ἐν τῇ β΄. $\psi - 100 = \chi + 100$.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Ὅθεν} & \psi - 100 = 300 + 100 = 400 \\
\hline
 & \psi = 400 + 100 = 500
\end{array}
$$

Ὡς' ἐν τῷ ἑτέρῳ καλάθῳ, τὰ χ μῆλα $= 300$. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ τὰ $\psi = 500$. Ἐὰν ἀπὸ τῶν 300 ἑκατὸν ἀφαιρεθῇ, καὶ τοῖς 500 προςεθῇ, ἔςαι $500 + 100 = 600 = 200 . 3$. Ἑκατὸν δ' ἀπὸ τῶν 500 ἀφαιρεθέντα, καὶ τοῖς 300 προςεθέντα, ποιήσουσι $300 + 100 = 400 =$ τοῖς τοῦ ἑτέρου ὑπολειφθεῖσι 400.

§ 366 Τριῶν δ' ἀγνώςων τῇ πρωτοβαθμίῳ ἐνυπαρχόντων Ἐξισώσει, εἴπερ ἐκ τοῦ Προβλήματος τρεῖς Ἐξισώσεις συςαταὶ, καὶ τοῦτο ἔχει πάντως, κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον, ἐπιλυθῆναι. λίαν μέντοι δυσχερῶς τῶν πλειόνων ἕνεκα Ἐξισώσεων, ὅτε καὶ κίνΰυνος τοῦ ἀκριβοῦς ὑπολογισμοῦ ἁμαρτάνειν. Ἀλλ' ἐπιλυτέον καὶ κατὰ τοῦτο τὴν εὐχερεςέραν, ἵνα μὴ καὶ τῆς τοιαύτης ἄμοιροι ὦμεν.

§. 367. Εὑρεθήτωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, οὕτως ἔχοντες, ὥςε τὸ Κεφάλαιον τοῦ α'. καὶ β'. $=\alpha$, τὸ Κεφάλ. τοῦ α'. καὶ γ'. $=\beta$, τὸ Κεφάλ. τοῦ β'. καὶ γ'. $=\gamma$ εἶναι.

Λύσις. Ῥηθήτωσαν οἱ ἀριθμοὶ, χ, ψ, καὶ ω. Ὥςε κατα τὸ Πρόβλημα $\chi+\psi=\alpha$. $\chi+\omega=\beta$. Καὶ $\psi+\omega=\gamma$. Τρεῖς ἄρα αἱ Ἐξισώσεις.

$$\chi+\psi=\alpha$$
$$\chi+\omega=\beta$$
$$\psi+\omega=\gamma.$$

Πρὸ πάντων ἄφελε τὴν β'. ἀπὸ τῆς α'.

$$\chi+\psi=\alpha$$
$$\chi+\omega=\beta \quad \text{ἀφαιρ.}$$

$$\psi-\omega=\alpha-\beta \quad (\S\ 49.)$$

πρόσθες ταύτῃ τὴν γ'. $\psi+\omega=\gamma$

$$2\psi=\alpha+\gamma-\beta$$

Προέκυψεν οὖν οὕτως Ἐξίσωσις, μετὰ μιᾶς μόνου ἀγνώςου. Ὥςε $2\psi=\alpha+\gamma-\beta$

$$\psi=\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$$

Καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου ἀντὶ τοῦ ψ ἀντικαταςάντος ἐν τῇ α'. ἢ γ'. Ἐξισώσει, εὑρεθήσεται χ, καὶ ω.

Καὶ

Καὶ ἡ μὲν α΄. ἔςαι οὕτω

$$\chi + \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} = \alpha .$$

$$\overline{} \cdot 2$$

$$2\chi + \alpha + \gamma - \beta = 2\alpha$$

$$2\chi = 2\alpha - \alpha - \gamma + \beta$$

ἢ
$$2\chi = \alpha - \gamma + \beta$$

$$\overline{} : 2$$

$$\chi = \frac{\alpha - \gamma + \beta}{2} .$$

Η δὲ γ΄.

$$\frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} + \omega = \gamma$$

$$\overline{} \cdot 2$$

$$\alpha + \gamma - \beta + 2\omega = 2\gamma$$

$$2\omega = 2\gamma - \gamma - \alpha + \beta = \gamma - \alpha + \beta$$

$$\overline{} : 2$$

$$\omega = \frac{\gamma - \alpha + \beta}{2}$$

Παράδ. ἐν ἀριθμοῖς. Ἔςω $\chi + \psi = 16$. $\chi + \omega = 24$. $\psi + \omega = 32$. Ὥςε $\alpha = 16$. $\beta = 24$. $\gamma = 32$. Καὶ ἔςαι, κατὰ τὰ ἀνακύψαντα ἰσοδύναμα τῶν ἀγνώςων,

$$\psi = \frac{16 + 32 - 24}{2} = \tfrac{24}{2} = 12$$

$$\chi = \frac{16 - 32 + 24}{2} = \tfrac{8}{2} = 4$$

$$\omega = \frac{32 - 16 + 24}{2} = \tfrac{40}{2} = 20.$$

Ἔςιν ἄρα $\chi + \psi = 4 + 12 = 16$

$\chi + \omega = 4 + 20 = 24$

$\psi + \omega = 12 + 20 = 32.$ Καὶ τῶν μὲν τοῦ α'. βαθμοῦ Ἐξισώσεων ἅλις.

Περὶ τῶν Ἐξισώσεων τοῦ β'. βαθμοῦ.

§. 368. Τοῦ δὲ δευτέρου βαθμοῦ, ἢ Τετραγωνικαὶ Ἐξισώσεις καλοῦνται, ἐν αἷς ἡ ὑπερτάτη δύναμις τῆς ἀγνώςου ἡ β'. τυγχάνει. Ὡς $\chi^2 = 3\alpha + \beta$. ἢ $3\chi^2 - \gamma = 5\alpha\beta + \frac{\delta}{2}$. ἢ $\chi^2 - \pi\chi = 3\pi\rho - \frac{3}{4}\delta$. ἢ $5\chi^2 - 3\pi\chi + \rho\chi = 2\gamma\chi + \delta$.

§. 369. Προὔργου δὲ κἀνταῦταις, κατὰ τὰς τοῦ προβλήματος ὑποθέσεις, τὴν Ἐξίσωσιν συγκροτεῖν, τοὺς ὅρους, τοὺς τὴν ἄγνωςον περιέχοντας, ἄγοντας ἐπὶ θάτερα τῇ Προσθέσει, ἢ Ἀφαιρέσει, ἢ μᾶλλον, τῇ τῶν σημείων τροπῇ. Ὡς, εἰ αὕτη πρόκειται

κειται $3\chi^2 + 5\chi\gamma - \gamma = 15\chi + \rho$. ἥτις, μετατεθέντων τῶν ὅρων, ἔςαι $3\chi^2 + 5\chi\gamma - 15\chi = \rho + \gamma$. Οὕτως οὖν οὐ μόνον τοὺς γνώςους, καὶ ἀγνώςους τῶν ὅρων ἰδίᾳ ἐπὶ θάτερα. ἀλλὰ καὶ τὴν Ἐξίσωσιν εἰς τὸ o (ὅ ἐςι τὸ o τὸν ἕτερον ὅρον (§. 342.) εἶναι τῆς Ἐξισώσεως) ἀγαγεῖν ἔχομεν, ἐς τὰ μάλιςα τοῦτο χρήσιμον ὂν ἐπὶ τῶν ὑπερτέρων Ἐξισώσεων, ὡς κατωτέρω δειχθήσεται. π. χ. τῆσδε τῆς Ἐξισώσεως $3\chi^2 + 5\gamma\chi - 15\chi = \rho + \gamma$ εἰς τὸ o ἀχθῆναι προκειμένης, διὰ τῆς μεταθέσεως τοῦ $\rho + \gamma$ μετ' ἀντικειμένων σημείων δεξιόθεν πρὸς τ' ἀριςερὰ τοῦ σημείου, εὐχερῶς τὸ ζητούμενον τελεσθήσεται. Ἐὰν γὰρ ἀμφοῖν τοῖς τῆς Ἐξισώσεως ὅροις τὸ $-\rho - \gamma$ προςεθῇ, ἐπὶ θάτερα μὲν μετὰ τοῦ ἀποφατικοῦ προςεθήσεται σημείου, ἐπὶ δὲ θάτερα, τὸ $\rho + \gamma$ ἀναιρήσει, καὶ ἀντεισάξει τὸ o. Οἷον

$$3\chi^2 + 5\gamma\chi - 15\chi = \rho + \gamma$$

$$\text{προς.} \qquad -\rho - \gamma = -\rho - \gamma$$

$$3\chi^2 + 5\gamma\chi - 15\chi - \rho - \gamma = 0$$

Ὅσα δ' ἂν χ^2, ἢ χ παρῇ, μετὰ, ἢ ἄνευ συνεργῶν, τοῖς αὐτοῖς, ἢ καὶ διαφόροις σημείοις, τὸ χ^2, ἢ χ, ὡς κοινὸς θεωρούμενον παράγων, μετὰ τὸ τὰς λοιπὰς ποσότητας ἐν παρενθέσει ἐναπολαβεῖν, ἐν δεξιᾷ, ἢ ἀριςερᾷ τῆς παρενθέσεως τεθήσεται. Ὡσαύτως καὶ πλείους τῶν γνωςῶν προκείμεναι ποσοτήτων, διὰ τῆς προσθέσεως, ἢ ἀφαιρέσεως εἰς ἕνα ὅρον γενήσονται. Οἷον, ἡ Ἐξίσωσις $3\chi^2 + 6\gamma\chi - \chi = \chi^2 + 5\alpha\chi - \gamma + \delta\upsilon$ εἴη ἂν $= 3\chi^2 - \chi^2 + 6\gamma\chi - 5\alpha\chi - \chi + \gamma - \delta\upsilon = 0$. Αὕτη δὲ $= (3 - 1)\chi^2 + (6\gamma - 5\alpha - 1)\chi + \gamma - \delta\upsilon = 0 = 2\chi^2 + (6\gamma - 5\alpha - 1)\chi + \gamma - \delta\upsilon = 0$. Ἐπεὶ δὲ οἱ ἔσχατοι γνωςοὶ

ὅροι

ὅροι (τὸ γ — δυ) ἐπὶ πάντων προςιθέμενοι ἀλλήλοις, ἢ ἀφαιρούμενοι εἰς ἕνα ὅρον γενέσθαι δύνανται, κληθήτωσαν ἐν γένει $= \rho$. οὗ ἀντὶ τοῦ γ — δυ ἀντικαταςάντας, ὡδέπως ἂν ἡ Ἐξίσωσις ἀποδοθείη. $2\chi^2 + (6\gamma - 5\alpha - 1)\chi \pm \rho = 0$. Ἀποδέδοται δὲ τῷ ρ δύω διάφορα σημεῖα $+$ καὶ $-$, διὰ τὸ τὸν ἔσχατον ὅρον καὶ καταφατικὴν, καὶ ἀποφατικὴν ποσότητα ἔχειν εἶναι. Διὰ γὰρ τῆς προσθέσεως, ἢ ἀφαιρέσεως τῶν δεδομένων ποσοτήτων ἐνεργεία τοῦτο γίνεται. Αὖθις καὶ τοὺς συνέργους τῶν ἀγνώςων ὅρων, εἰς τὸν ἤδη δειχθέντα τύπον ἀχθέντας, ὡς μίαν ποσότητ᾽ ἂν ἐκδεξαίμεθα. Τὰ γὰρ $6\gamma - 5\alpha - 1$ γνωςὰ ὄντα εἰς μίαν συγκεφαλαιωθήσονται, ἤτοι καταφατικὴν, ἢ ἀποφατικὴν ποσότητα. Παραπλησίως, ἐὰν ἕν, ἢ πλείω χ^2 συνεργοὺς ἔχωσι, θεωρήσομεν καὶ τούτους ὡς μίαν, ἀλλὰ $+$ ἀεὶ, ἤτοι καταφατικὴν ποσότητα, διὰ λόγον τὸν αὐτίκα ῥηθησόμενον. Καὶ τὸ μὲν ἐκ τῶν διαφόρων συνεργῶν τοῦ χ^2 προκύψον, εἰς μίαν ποσότητα προσθέσει, ἢ ἀφαιρέσει ἀχθέντων, κείσθω $= \alpha$, τὸ δὲ διὰ τῶν συνεργῶν τοῦ $\chi = \beta$. Πᾶσαι οὖναί δυναταὶ τῶν Ἐξισώσεων, αἱ Τετραγωνικαὶ, εἰς τὸ μηδενικὸν ἀχθεῖσαι, τοιόνδε λήψονται σχῆμα.

$$\alpha\chi^2 \pm \beta\chi \pm \rho = 0.$$

Τοὺς δὲ συνεργοὺς τοῦ χ^2, ὡς καταφατικὴν ἀεὶ ἐκδεχόμεθα ποσότητα, τὸ $+$ αὐτῶν προτιθέντες. Εἰ γὰρ καὶ ἐκ τῶν διαφόρων συνεργῶν τῶν διαφόρων χ^2, εἰς μίαν γεγονότων ποσότητα, ἀποφατικὴ προκύψειεν, ἀλλ᾽ οὖν τὸ χ^2, ἐπὶ θάτερα τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος μεταβιβασθὲν σὺν ταῖς λοιπαῖς ποσότησι, καταφατικὸν ἔςαι, τῇ τῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ ἐν τῇ τῆς Ἐξισώσεως ἐπιλύσει λίαν συμβαλβαλλόμενον. Οἷον, $4 - 3\chi^2 = 5\chi - 6$. ἔνθα τὸ χ^2 ἀποφατικόν. Ἀλλ' ἀχθείσης εἰς τὸ μηδενικὸν τῆς Ἐξισώσ. ἔςαι τὸ χ^2 καταφατικόν. $3\chi^2 + 5\chi - 10 = 0$. Ἢ τοιᾶςδε προκειμένης Ἐξισώσεως,

$$-5\chi^2 + 10\chi - 8 = 0$$

προσθεὶς ἑκατέρ.

$$+5\chi^2 - 10\chi + 8 = 5\chi^2 - 10\chi + 8$$

ἕξεις $0 = 5\chi^2 - 10\chi + 8$. Ἢ ἀμειψαμένῳ πάντων τῶν ὅρων τὰ σημεῖα, ἔςαι τὸ χ^2 καταφατικόν.

§. 370. Ὁ τύπος τῆς γενικῆς Τετραγωνικῆς Ἐξισώσ. κατὰ τὸ §. ἀνωτ. ἐςὶν $\alpha\chi^2 \pm \beta\chi \pm \rho = 0$. Καὶ κλασμάτων δὲ ταῖς Ἐξισώσ. ἐνυπαρχόντων, εἰς ἐκεῖνο, τὸ ἐκ τριῶν συνιςάμε[illegible] ἀναχθεῖεν ἂν σχῆμα, καὶ τῆς ἀγνώςου ποσότητος τῷ παρονομαςῇ τῶν κλασμάτων ἐνούσης. Ὡς

$$\frac{\alpha\chi+\beta}{\gamma\chi+\delta}=\frac{\varepsilon\chi+\zeta}{\eta\chi+\vartheta}$$ Ἀποσκυβαλισθήτω τὰ κλάσματα τῷ πολλαπλασιασμῷ.

Ὥςε πολλαπλ. μετὰ τοῦ $\gamma\chi+\delta$

$$\alpha\chi+\beta=\frac{\gamma\varepsilon\chi^2+\zeta\gamma\chi+\delta\varepsilon\chi+\zeta\delta}{\eta\chi+\vartheta}\quad\cdot\ \eta\chi+\vartheta$$

$$\alpha\eta\chi^2+\beta\eta\chi+\alpha\vartheta\chi+\vartheta\beta=\gamma\varepsilon\chi^2+\zeta\gamma\chi+\delta\varepsilon\chi+\zeta\delta$$

$$\alpha\eta\chi^2-\gamma\varepsilon\chi^2+\beta\eta\chi+\alpha\vartheta\chi-\zeta\gamma\chi-\delta\varepsilon\chi=\zeta\delta-\vartheta\beta$$

$$(\alpha\eta-\gamma\varepsilon)\chi^2+(\beta\eta+\alpha\vartheta-\zeta\gamma-\delta\varepsilon)\chi=\zeta\delta-\vartheta\beta$$

$$(\alpha\eta-\gamma\varepsilon)\chi^2+(\beta\eta+\alpha\vartheta-\zeta\gamma-\delta\varepsilon)\chi-\zeta\delta+\vartheta\beta=0$$

Ἐνταῦθα

Ἐνταῦθα, κατὰ τὸν καθόλου τύπον, $\alpha\chi^2 \pm \beta\chi \pm \rho = 0$, τὰ μὲν $(\alpha\eta - \gamma\varepsilon)$ παρίςησι τὸ α. τὰ δὲ $(\beta\eta + \alpha\vartheta - \zeta\gamma - \delta\varepsilon)$ τὸ β, καὶ $- \zeta\delta + \vartheta\beta$ τὸ ρ. Ὥςε οἱ πάντων τῶν ὅρων συνεργοὶ εἰς ὁλοσχερεῖς ἐγένοντο ποσότητας ἀριθμὸν πάντα, καὶ αὐτὴν τὴν 1 σημαινούσας. Ἡ δὲ τοιαύτη Ἐξίσωσις, ἥτινι χ^2, καὶ χ, καὶ πρὸς τούτοις καὶ γνωςὴ ἔνεςι ποσότης, Ἐντελὴς Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις, καὶ Μικτὴ ἀκούει. Τοῦ δὲ μέσου ὅρου ἀπόντος, τοῦ μετὰ τοῦ χ πολλαπλασιασθέντος, ὅ ἐςιν ἐπὶ τοῦ γενικοῦ τύπου τὸ $\pm \beta\chi$, ὡς ὑπολείπεσθαι $\alpha\chi^2 \pm \rho = 0$, καλεῖται Ἀμιγὴς Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις. ἣν καὶ διὰ τοῦ γενικοῦ τύπου παραςῆσαι δυνατὸν, τὸν συνεργὸν β τοῦ β'. ὅρου $= 0$ τιθεμένους. ἐκπεσεῖται γὰρ οὕτως ὅλος ὁ ὅρος. (§. 69.) Ἐὰν δ' ἐπίτινος Ἐξισώσεως ἡ γνωςὴ ἀπῇ τῶν ποσοτήτων, τουτ: $\pm \rho$, τῶν χ^2, καὶ χ παρόντων μόνον μετὰ συνεργῶν, ὡς $\alpha\chi^2 \pm \beta\chi = 0$, τηνικαῦτα ἡ Ἐξίσωσις τοῦ α'. βαθμοῦ ῥηθείη.

Ἔςι γὰρ $\alpha\chi^2 = \pm \beta\chi$

διέλε διὰ χ

$$\alpha\chi = \pm \beta$$

$: \alpha$

$$\chi = \pm \frac{\beta}{\alpha}$$

§. 371. Ὁ ἄρα τύπος τῆς ἀμιγοῦς δευτεροβαθμίου Ἐξισώσεως ὁ γενικὸς, ὁ $\alpha\chi^2 \pm \rho = 0$, ἢ $\alpha\chi^2 = \pm \rho$ τυγχάνει. Ἐπεὶ δὲ τὸν τῆς ἀγνώςου συνεργὸν ἀπεῖναι τοῦ χ^2 χρὴ, ὡς ἡ δυνάμεως τοῦ χ ζητουμένης, διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦτον ἀποσκευασόμεθα. Ἔνθεν τοι

$\alpha\chi^2$

$$\frac{\alpha\chi^2 = \pm\ \varrho}{\chi^2 = \pm\ \frac{\varrho}{\alpha}} : \alpha$$

Ἀντὶ δὲ τοῦ κλάσματος $\frac{\varrho}{\alpha}$ τεθήτω ἑτέρα τις ποσότης. Ὥςε κείσθω ἐν γένει $\frac{\varrho}{\alpha} = \zeta$.

Τὸ οὖν γενικώτατον σχῆμα πασῶν τῶν Τετραγωνικῶν ἀμιγῶν Ἐξισώσεων ἐςὶ $\chi^2 = \pm\ \zeta$, τοῦ ζ ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν, ἢ κλάσμα (γνήσιον, ἢ νόθον) καταφατικὸν, ἢ ἀποφατικὸν ὑπεμφαίνοντος. Τῷ ἄρα τοιαύτην Ἐξίσωσιν ἐπιλύσαι βουλομένῳ, ἢ τὸ χ εὑρεῖν, ἐξακτέα ἐξάμφοῖν τῶν ὅρων ἡ $\surd$. Ἡ $\surd\ \chi^2$ δὲ $= \chi$. Ἐνταῦθα τοίνυν $\chi = \surd \pm\ \zeta$. Σημειωτέον δὲ τὰ ἑξῆς.

Πρῶτον. Τῆς γνωςῆς ποσότητος ἐπὶ θάτερα τοῦ σημείου τῷ καταφατικῷ σημείῳ συνεζευγμένης οὔσης, μόνον μίαν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν ἔχειν, ἢ τὴν $\surd + \zeta$ μόνον ἐνεργείᾳ ποσότητα εἶναι, ὡς τῆς $\surd$ τῆς ἀποφατικῆς ποσότητος, ἢ τῆς $\surd - \zeta$ ἀδυνάτου καθεςηκυίας (§. 305.) Ἐν δὴ τῷ ὑπολογίζεσθαι ἐπὶ τετραγωνικῶν ὑπολογισμῶν τοιούτῳ σχήματι περιτυχοῦσι δεῖγμα σαφὲς τὸ Πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον. π. χ.

$$\frac{\chi^2 = -\ 18\,.}{\chi = \surd -\ 18}$$

Σώζεται τοίνυν ὁ τύπος τῶν ἐνεργείᾳ δυνατῶν τετραγωνικῶν ἀμιγῶν Ἐξισώσεων ὧδε. $\chi^2 = \surd\,\zeta$.

Δεύτερον. Καὶ καταφατικοῦ τοῦ ζ ὄντος, οὐκ ἀεὶ τὴν $\surd$ ἀκριβῶς ἐξάγεσθαι, ἀλλ' ὡς τὰ πολλὰ ἔτι ἔγγιςα γίνεσθαι αὐτῆς ἀρκεῖσθαι δεῖν. Τοῦ γὰρ ζ ἀ-

κρι-

κριβοῦς τετραγώνου ὄντος, καὶ ἡ τοῦ χ τιμὴ καὶ δύναμις ἀκριβὴς, καὶ λογικὴ ἔςαι. π. χ.

$$\frac{\chi^2 = 144}{\chi = \sqrt{144} = 12}$$ τῆς $\sqrt{}$ ἀμφοῖν ἐξαχθ. Ὡσαύτως

$$\frac{\chi^2 = \frac{16}{25}}{\chi = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}}$$ τῆς $\sqrt{}$ ἀμφοῖν ληφθ. Ἀλλὰ $\frac{\chi^2 = 18}{\chi = \sqrt{18}}$

ἡ δύναμις τοῦ χ οὐ λογικὴ, ὡς τῆς $\sqrt{18}$ ἀκριβῶς ἐξαχθῆναι μὴ ἐχούσης.

Ὡσαύτως καὶ $\chi^2 = \frac{24}{25}$. Καὶ τῆς ῥίζης ἀμφοῖν ἐξαχθείσης, $\chi = \sqrt{\frac{24}{25}}$. ἢ $\chi = \sqrt{\frac{24}{5}}$ τοῦ γὰρ 25 ἡ $\sqrt{}$ λογικὴ, ἄλογος δὲ ἡ τοῦ 24.

Τρίτον. Ἐπειδὴ τῆς ἀποφατικῆς ποσότητος ῥίζα οὐ δίδοται τετράγωνος, μόναις ταῖς δυναταῖς Ἐξισώσεσι τῶν ἀμίγων τετραγωνικῶν Ἐξισώσεων τὸν τύπον $\chi = \sqrt{\zeta}$ ἀνήκειν. Ἀλλὰ τὴν $\sqrt{\zeta}$ καὶ καταφατικὴν, καὶ ἀποφατικὴν εἶναι δύνασθαι. Εἴτε γὰρ $+$, εἴτε $-$ ἡ $\sqrt{\zeta}$ ληφθῇ, ἀεὶ τὸ ζ καταφατικὸν ἔςαι. Ἔςι γὰρ $-\sqrt{\zeta}.-\sqrt{\zeta} = +\zeta$. Καὶ $+\sqrt{\zeta}.+\sqrt{\zeta}$ αὖθις $= \zeta$. Ἢ ἐν ἀριθμοῖς. Εἰ $\chi^2 = 49$. ἔςαι $\chi = \sqrt{49} = +7$, ἢ -7. Ὅτι $+7.+7 = 49$. Καὶ $-7.-7 = 49$. Ταῦτ' ἄρα ἐπὶ τῶν Τετραγωνικῶν Ἐξισώσεων προτίθεται τοῦ ῥιζικοῦ ἄμφω τὰ σημεῖα $+$, καὶ $-$. Ὡς ἐν γένει $\chi^2 = \zeta$. Καὶ $\chi = \pm\sqrt{\zeta}$, ὅπερ δυνατὴν Ἐξίσωσιν παρίςησι. Καὶ τοῦτο κυρίως ὁ ἀληθὴς καθόλου τύπος τῶν δυνατῶν ἀμίγων Τετραγ. Ἐξισώσεων.

§. 372. Θηράσιμος δ' ἡ ἐπίλυσις τῶν τοιῶνδε Ἐξισώσ. καὶ διὰ λογαρίθμων. Εἰ γὰρ

$$\underline{\chi^2 = \zeta}$$

ἔςαι καὶ $2\,\Lambda \quad \chi = \Lambda\,.\,\zeta$ (§. 333.)

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} : 2$$

$\Lambda\,.\,\chi = \dfrac{\Lambda\,.\,\zeta}{2}$. Τουτ. ζητήσομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ καινοῦ λογαρίθμου. τοῦ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ $\Lambda\,.\,\zeta$ προελθόντος, τὴν τοῦ χ δύναμιν δεικνύοντα. Τοῦτο δ' ἐπὶ τῶν Ἐξισώσεων ὑπερτέρου βαθμοῦ μᾶλλον ἐν χρήσει. Ἀλλ' ἀναπτυχθήτω τὸ ῥηθὲν καὶ παραδείγματι.

$$\underline{\chi^2 = 148}$$

$$\underline{2\Lambda\,.\,\chi = \Lambda\,.\,148}$$

$\Lambda\,.\,\chi = \dfrac{\Lambda\,.\,148}{2}$. Ἔςι δὲ ὁ λογ. τοῦ $148 = \dfrac{2{,}1702617}{2}$. Ὃς διὰ 2 διαιρεθεὶς δίδωσι 1,0851308 λογ. Ζητηθέντος δὲ τούτου ἐν τοῖς μείζοσιν ἀριθμοῖς, καὶ κατὰ τὸ χαρακτηριςικὸν τῆς τῶν ἀριθμῶν δυνάμεως διορισθείσης, ὡς εἴρηται, ὁ ἀριθμὸς, ὁ τῷ χ ἰσοδύναμος, μεταξὺ 12, 16 καὶ 12, 17 ἐμπίπτει. Κατὰ δὲ τὸν συνήθη τρόπον τοῦ ὑπολογισμοῦ πρυτανευθέντος, ἐπειδὴ $\chi^2 = 148$. ἔςαι καὶ $\chi = \pm \sqrt{148}$. Ὡς οὖν ἄλογος ἡ ῥίζα τοῦ 148 οὖσα οὐκ ἂν ἀκριβῶς ἐξαχθείη. Ὡς ἔγγιςα δ' αὐτῆς γενέσθαι. βουλομένοις ἔςαι $= 12{,}165 = \chi$.

§. 373. Ἀναπτύξεως χάριν τῶν προχειρισθέντων, κείσθω τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

Α΄. Ζήτησον ἀριθμὸν, οὗ τὸ ἥμισυ ἐπὶ τὸ αὐτοῦ τεταρτημόριον πολλαπλασιάσας, καὶ ἀπὸ τοῦ παραγομένου 10 ἀφελὼν, ἕξεις διαφορὰν τὸν 152 ἀριθμόν.

Λύσις. Ἔςω ὁ ἀριθμὸς $= \chi$. οὗ τὸ ἥμισυ $= \frac{\chi}{2}$. Τὸ δὲ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ $\frac{\chi}{4}$, ἔςαι $\frac{\chi}{2} \cdot \frac{\chi}{4} = \frac{\chi^2}{8}$. Ἀφαιρεθέντος δ' ἀπὸ τοῦδε τοῦ 10, ὑπολείπεται $\frac{\chi^2}{8} - 10$. Τοῦδο δὲ $= 152$.

Ὅθεν ἡ Ἐξίσωσις $\frac{\chi^2}{8} - 10 = 152$

$$\frac{\chi^2}{8} = 152 + 10 = 162$$

$$\cdot\ 8$$

$$\chi^2 = 162 \cdot 8 = 1296$$

Ἐξάγαγε τὴν $\sqrt{}$

$$\chi = \pm \sqrt{1296} = \pm\ 36.$$

Τούτου τὸ ἥμισυ, ἤτοι $\frac{\chi}{2} = 18$. τὸ δὲ τεταρτημ. $\frac{\chi}{4} = 9$. Ὥςε $18 \cdot 9 = 162 - 10 = 152$.

§. 374. Β΄. Δοθέντος τοῦ κεφαλαίου δυεῖν ἀριθμῶν, ὅ $= \alpha$ τεθήτω, καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν Τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν $= \beta$, εὑρεῖν ἐκ τούτων τοὺς ἀριθμούς.

Λύσις. Κατὰ τὸ §. 364. δοθέντων τοῦ κεφαλαίου, καὶ τῆς διαφορᾶς δύω ἀριθμῶν, εὑρίσκηνται οἱ ἀριθμοὶ, ὥςε, εἰ α τὸ κεφάλ. τῶν ἀριθμῶν, καὶ β τὴν

τὴν διαφορὰν σημαίνει, τὸν μείζω ἀριθμὸν $= \frac{\alpha + \beta}{2}$, τὸν δ' ἐλάσσονα $= \frac{\alpha - \beta}{2}$ εἶναι. Ἐν τῷ παρόντι Προβλήμ. τὸ μὲν κεφάλαιον τῶν δύω ἀριθμῶν $= \alpha$, δέδοται, οὐχὶ δὲ καὶ ἡ τούτων διαφορά. Τεθήτω οὖν αὕτη $= \psi$. Ἔνθεντοι ὁ μείζων ἀριθμὸς $= \frac{\alpha + \psi}{2}$, ὁ δ' ἐλάσσων $= \frac{\alpha - \psi}{2}$.

Δέδοται δὲ καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦ Τετραγώνου ἀμφοῖν τῶν ἀρίθμιῶν $= \beta$. Κατὰ τὸ Πρόβλ. τοίνυν, τετραγωνιστέον τὸν μείζω, καὶ ἐλάσσω ἀριθμὸν, καὶ εἶτα ἀλλήλοις προσθετέον τοὺς τετραγώνους, ἵνα τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς εὕρωμεν. Ἀλλὰ $\left(\frac{\alpha + \psi}{2}\right)^2 =$

$$\left(\frac{(\alpha + \psi) . (\alpha + \psi)}{4}\right) = \frac{\alpha^2 + 2\alpha\psi + \psi^2}{4}.$$

Καὶ $\left(\frac{\alpha - \psi}{2}\right)^2 = \left(\frac{(\alpha - \psi . (\alpha - \psi)}{4}\right)$ $= \frac{\alpha^2 - 2\alpha\psi + \psi^2}{4}$. Προσεθέντες ἄρα οἱ Τετράγωνοι ἀλλήλοις ἴσονται ἴσοι τῷ δοθέντι β.

Προσεθ. $\alpha^2 - 2\alpha\psi + \psi^2$

$$\begin{array}{l} \alpha^2 + 2\alpha\psi + \psi^2 \\ \hline 2\alpha^2 \qquad\qquad + 2\psi^2. \end{array}$$

Ὥστε $\dfrac{2\alpha^2 + 2\psi^2}{4} = \beta$. ἢ

$$\frac{\alpha^2 + \psi^2}{2} = \beta \;.\; 2$$

$$\alpha^2 + \psi^2 = 2\beta$$

$$\psi^2 = 2\beta - \alpha^2$$

$$\psi = \pm\sqrt{(2\beta - \alpha^2)}.$$

Ὁ μείζων ἀριθμὸς ἦν $\dfrac{\alpha + \psi}{2}$. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ ψ τὸ εὑρεθὲν ἰσοδύναμον ἀντικατασταθῇ τῷ $+$ σημείῳ, ἔσται $= \dfrac{\alpha^2 + \sqrt{(2\beta - \alpha^2)}}{2}$. Ὁ δ' ἐλάσσων $\dfrac{\alpha - \psi}{2} = \dfrac{\alpha - \sqrt{(2\beta - \alpha^2)}}{2}$. Ἐνταῦθα τῆς ῥίζης τὰ σημεῖα τὸ $+$ καὶ $-$ ἄμφω χρήσιμα.

Παράδ. ἐν ἀριθμοῖς. Ἔστω τὸ κεφ. τῶν δύω ἀριθμῶν $= 10$. τὸ δὲ τῶν κατ' αὐτοὺς τετραγώνων $= 58$. Τίνες οἱ ἀριθμοί; $\alpha = 10$. Καὶ $\beta = 58$. Ὥστε ὁ μείζων ἀριθμὸς $= \dfrac{10 + \sqrt{(2.58 - 10^2)}}{2}$ ὁ δ' ἐλάσσων $= \dfrac{10 - \sqrt{(2.58 - 10^2)}}{2}$. Ἡ

ὁ μὲν

ὁ μὲν μείζων $= \frac{10 + \sqrt{(116 - 100)}}{2} = \frac{10 + \sqrt{16}}{2} = \frac{10 + 4}{2} = 7$. Ὁ δ' ἐλάσσων $= \frac{10 - \sqrt{(116 - 100)}}{2} = \frac{10 - \sqrt{16}}{2} = \frac{10 - 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Ὧν τὸ κεφάλ. $3 + 7 = 10 = \alpha$. Τὸ δὲ τῶν Τετραγ. $= 49 + 9 = 58 = \beta$.

§. 375. Ἔμποροί τινες κοινωνίαν ποιησάμενοι, ἕκαστος τὸ ἑαυτοῦ μέρος συνεισήνεγκε δεκάκις τοσούτους θαλήρους, ὅσα τὰ τῆς κοινωνίας πρόσωπα. Ἐμπορευσαμένοις οὖν, ἑκάστη θαλήρων ἑκατοντὰς δὶς τοσοῦτον, ὅσοι αὐτοὶ, κέρδος ἤνεγκεν. Ἐὰν τοίνυν τὸ ἑκατοστὸν τοῦ κέρδους μέρος ἐπὶ $2\frac{2}{9}$ πολλαπλασιασθῇ, προκύψει ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐμπόρων. Πόσοι οὖν ἦσαν, πόσα ἐκέρδησαν, καὶ πόσους θαλ. ἕκαστος συνεισήνεγκε, ζητεῖται.

Κείσθωσαν οἱ ἔμποροι $= \chi$. Ἕκαστος τούτων συνεισήν. δεκάκις τοσούτους θαλ. ὅσοι αὐτοί. ὥστε 10χ θαλ ἕκαστος. πόσον δὲ τὸ κεφάλαιον τῆς τούτων ἁπάντων συνεισφορᾶς, μανθάνομεν διὰ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου. 1 ἔμπορος : 10χ θαλ. $= \chi$ ἔμποροι : $10 \cdot \chi^2$ θαλ. Ὥστε τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον $= 10 \cdot \chi^2$. Ἐπεὶ δ' ἑκάστη ἑκατοντὰς τοῦ κεφαλαίου δὶς τοσοῦτον κέρδος ἤνεγκεν, ἢ οἱ ἔμποροι. Οὗτοι δὲ $= \chi$. Ἑκάστη ἄρα ἤνεγκε 2χ θαλ. Πόσα δὲ, ὅλῳ τῷ κεφαλαίῳ χρησάμενοι, ἐκέρδησαν, ἡ ἑχομένη ἀναλογία ὑποδηλοῖ. 100 θάληροι : 2χ θαλ. κέρδους $= 10\chi^2$ θάληροι : $\frac{10\chi^2 \cdot 2\chi}{100} = \frac{20\chi^3}{100} = \frac{\chi^3}{5}$

$=$ τῷ

τῷ ὁλικῷ κέρδει. Τὸ ἑκατοςημόριον τοῦ κέρδους, ὅ ἐςι $\frac{\chi^3}{5} \cdot \frac{1}{100} = \frac{\chi^3}{500}$ πολλαπλασιαςέον ἐπὶ $2\frac{2}{9}$ $= \frac{20}{9}$. Τὸ δ' ἐκ τούτου παραγόμενον ἔςαι ὁ τῶν ἐμπόρων ἀριθμός. Οὗτοι δὲ τέθεινται $= \chi$.

ὥςε
$$\frac{\chi^3}{500} \cdot \frac{20}{9} = \chi$$
$$\frac{20\chi^3}{500.9} = \chi$$
ἢ
$$\frac{\chi^3}{225} = \chi \qquad .\ 225$$
$$\chi^3 = 225\chi \qquad :\ \chi$$
$$\chi^2 = 225$$
$$\chi = \pm \sqrt{225} = 15.$$

Οἱ ἔμποροι τοίνυν εἰσὶ 15. Τὸ καταβληθὲν μέρος ἑκάςου $= 10\chi = 10 \cdot 15 = 150$ θαλ. Τὸ ἁπάντων $= 10\chi^2$ θαλ. $= 10 \cdot 15^2 = 10 \cdot 225 = 2250$ θαλ. Ἑκάςη ἑκατοντὰς ἦν. κ. 2χ θαλ. $= 30$ θαλ. Τὸ ὁλικὸν κέρδος $= \frac{\chi^3}{5} = \frac{15^3}{5} = \frac{3375}{5} = 675$ θαλ.

§. 376. Αἱ δὲ μικταὶ τῶν Ἐξισώσεων, αἱ Τετραγωνικαί, οὕτω κέκληνται διὰ τὸ μὴ ἐντελῆ Τετράγωνον περιέχειν. Εἰσὶ δέ, ὡς εἴρηται, (§ 370.) ἐν αἷς ἡ ἄγνωςος τῆς β'. δυνάμεως τυγχάνει, καὶ ἔτι καὶ τῆς α'. καὶ γνωςῆς αὐτῇ ποσότητος προσκειμένης. Ὡς $\chi^2 + \pi\chi = \varrho$, ἔνθα π, καὶ ϱ αἱ γνωςαί. Νένει δ' ἀεὶ ἡ Ἐξίσ. Τετράγωνος, τοῦ χ^2 καὶ ἐν πλείοσιν ὅροις, καὶ διαφόροις σημείοις ἀπαντιῶντος. Ὡσαύτως, καὶ τοῦ χ οὕτως ἔχοντος. Τῆς γὰρ Ἐξισώσεως διαταχθείσης, ἀνάξομεν αὐτὴν εἰς τὸν τύπον, ὥςε τὸ χ^2 ἑνὶ ὅρῳ ἐνυπάρχειν, καὶ ἕνα ὅρον μετὰ τῶν λοιπῶν ἀποτελεῖν, παραπλησίως καὶ τὸ χ ἕνα, τρίτον δὲ εἶναι τὸν τὰς γνωςὰς περιλαμβάνοντα. (§. 369.)

§. 377. Πρὸ δὲ πάντων τὴν ὑπερτέραν δύναμιν τῆς ἀγνώςου, ἢ τὸ χ^2 τοῦ οἰκείου συνεργοῦ ἀπαλλακτέον, εἰ πάρεςι, τῇ διαιρέσει πάντων τῶν ὅρων διὰ τοῦ συνεργοῦ τοῦ χ^2. Ὡς $6\chi^2 + 4\chi = 48$. Δίελε διὰ 6, καὶ ἔςαι $\chi^2 + \frac{4\chi}{6} = \frac{48}{6}$. ἢ $\chi^2 + \frac{2}{3}\chi = 8$. Καὶ τούτου τελεσθέντος, ἡ Ἐξίσωσις καταλλήλως ἡ Τετραγωνικὴ, ἡ Μικτὴ φημὶ, τῷδε τῷ γενικωτάτῳ ἐκφανθείη τύπῳ. $\chi^2 \pm \pi\chi = \pm \rho$. Ἀλλὰ σημείωσαι α'. τὴν τοιαύτην Ἐξίσωσι ἀεὶ ἐκ τριῶν συνίςασθαι ὅρων. β'. τοῦ $\pi\chi$, καὶ ρ ἀμφοῖν τὰ ἐναντία σημεῖα προκεῖσθαι, ὡς τῶν ὅρων τούτων καταφατικῶν τε, καὶ ἀποφατικῶν εἶναι δυναμένων. γ'. τὸ π καὶ ρ πᾶσαν δυνατὴν ἐγνωσμένην παριςᾶν ποσότητα, ἤτοι ὁλοσχερεῖς, καὶ κλασματώδεις ἀριθμοὺς, καὶ τὴν 1. ἄγεσθαι δὲ εἰς τὸ o (§. 369.) τῇ προσθέσει τῶν ποσοτήτων ἐπὶ θάτερα ἐναντίῳ τῷ σημείῳ. ὡς $\chi^2 \pm \pi\chi \pm \rho = 0$.

§. 378. Ἀλλ' εἴπερ ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^2 \pm \pi\chi = \pm \rho$ τὸ $\chi^2 + \pi\chi$, ἢ $\chi^2 - \pi\chi$ ἐνεργεία, καὶ ἀληθῶς τετράγωνον ἦν, τῇ ἐξαγωγῇ ἑκατέρωθεν τῆς τετραγ. ῥίζης, ἡ τιμὴ τοῦ ρ εὕρητο ἂν ῥαδίως. Ἀλλὰ τούτου μὴ ἔχοντος οὕτως, ἑτέραν ὁδὸν τραπέσθαι χρή. Ἐν τοῖς προηγηθεῖσι δέδεικται πᾶσαν ποσότητα ἔχειν θεωρεῖσθαι, ὡς ἐκ δύω μερῶν συνιςαμένην,

μένην, κἀντεῦθεν καὶ τὸ Διώνυμον ἀναφύεσθαι. (§. 270.) Καὶ τὸ $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, καὶ $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ εἶναι. Τὸ οὖν ἐντελὲς τετράγωνον τοῦ Διωνύμου ἐκ τριῶν συνίσταται ὅρων. Ἀλλ' ἐν τῷ $\chi^2 \pm \pi\chi$ δύω αἱ ποσότητες, χ καὶ π, καὶ αὐτὴν τὴν 1 τοῦ π δηλοῦντος. Οἱ δὲ ὅροι μόνον δύω. Οὐκέτι ἄρα ἐντελὲς τετράγωνον. Τοὺς δὲ γενικοὺς τύπους $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, καὶ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ ἐπιτηροῦντες ὁρῶμεν τὸν τρίτον ὅρον, ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ β', μέρους τῆς ῥίζης ἀνακύπτειν, ἐὰν τὸ τῷ δευτέρῳ ὅρῳ ἐνυπάρχον, (πλὴν τοῦ α'. μέρους τῆς ῥίζης) ἤτοι ὁ συνεργὸς ἡμισευθῇ, καὶ ἡ ἡμισευθεῖσα ποσότης τετραγωνισθῇ, ἢ μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθῇ. Οἷον ἐν τῷ β'. ὅρῳ $+ 2\alpha\beta$, πλὴν τοῦ α, ἔνεσι καὶ 2β. ὃ ἡμισευθὲν δίδωσι $+\beta$, ὃ τετραγωνισθὲν δίδωσι β^2, ἤτοι τὸν γ'. ὅρον. Ὡσαύτως καὶ ἐν τῷ $- 2\alpha\beta$. τὸ $- 2\beta$ ἡμισ. δίδ. $-\beta$, τοῦτο τετραγ. δίδ. $+\beta^2$, τὸν γ'. αὖθις ὅρον. Οὕτω μεταχειριζομένων καὶ τὸν συνεργὸν τῆς ἀγνώστου ποσότητος ἐν τῷ β'. ὅρῳ τῆς τετραγωνικῆς Ἐξισώσεως, προκύψει κἀνταῦθα γ'. ὅρος. Ὡς ἐπὶ θάτερα τοῦ τῆς ἰσότ. σημείου ἐντελὴς τετράγωνος, ἐκ διμεροῦς ποσότητος συγκροτούμενος. Ἀλλ' ὁ γ'. ὅρος ἀναγκαίως τηνικαῦτα κἀπὶ θάτερα προσεθήσεται, ἵνα τὸ ἴσον τῆς Ἐξισώσεως τηρηθῇ. Οὗτος δ' ὁ ἐφ' ἑκάτερα προσεθεὶς ὅρος ἀεὶ ποσότης ἐγνωσμένη τυγχάνει, ἐκ τῶν συνεργῶν τοῦ χ, γνωστῶν ὄντων, προκύπτων. π. χ. $\chi^2 + \pi\chi = \varrho$ Ἡμισευθεὶς ὁ π συνεργὸς τοῦ χ ἔσαι $\frac{\pi}{2}$. τετραγωνισθεὶς δὲ, $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$, καὶ ἐφ' ἑκάτερα προσεθεὶς ποιήσει τὴν Ἐξίσωσιν $\chi^2 + \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} = + \varrho$

$+ \frac{\pi^2}{4}$. Παραπλησίως $\chi^2 - \pi\chi = \pm \rho$. ἐὰν $-\pi$ ἡμισευθῇ, ἔςαι $-\frac{\pi}{2}$. τετραγων. δὲ $= -\frac{\pi}{2} . -\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$. καὶ προς. $\chi^2 - \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} = \pm \rho + \frac{\pi^2}{4}$.

Ἔχομεν οὖν ἐπὶ θάτερα ἐντελῆ δυώνυμον τετράγωνον, οὗ καὶ ἡ ῥίζα γνωςή. Τὸ γὰρ ἕτερον μέρος τῆς ῥίζης ἡ α΄. δύναμις τῆς ἀγνώςου ἐςὶ ποσότητος. θάτερον δὲ ὁ ἡμισυνεργὸς τοῦ χ τοῦ ἐν τῷ β΄. ὅρῳ μετὰ τοῦ σημείου, τοῦ τῷ χ προσόντος. π. χ. τοῦ $\chi^2 + \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} = \pm \rho + \frac{\pi^2}{4}$ ἡ ῥίζα τοῦ ἑτέρου ὅρου τῆς Ἐξισώσ. ἐςὶ $\chi + \frac{1}{2}\pi$ τοῦ δὲ $\chi^2 - \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} = \pm \rho + \frac{\pi^2}{4}$ ἡ ῥίζα τοῦ ἑτ. ὅρ. τῆς Ἐξ. $\chi - \frac{1}{2}\pi$. Ἐὰν οὖν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ὅρου τῆς Ἐξισ. ῥίζα ἐξάγηται, ἐξακτέα καὶ ἀπὸ θατέρου. ἄλλως γὰρ οἱ ὅροι τῆς Ἐξισ. ἰσοδυναμεῖν οὐκ ἔχουσιν. Ὅθεν ἐπὶ τῆς α΄. Ἐξισώσεως.

$\chi^2 +$

$$\chi^2 + \pi\chi + \frac{\pi}{4} = \pm\rho + \frac{\pi^2}{4}$$

ἐξαχθ. τῆς ῥίζ. ἔςαι

$$\chi + \frac{\pi}{2} = \sqrt{\left(\pm\rho + \frac{\pi^2}{4}\right)}$$

Ὥςε

$$\chi = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(\pm\rho + \frac{\pi^2}{4}\right)}$$

Ἐπὶ δὲ τῆς β'. $\chi^2 - \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} = \pm\rho + \frac{\pi^2}{4}$

τῆς $\sqrt{\ }$ ἐξ. ἔςαι

$$\chi - \frac{\pi}{2} = \sqrt{\left(\pm\rho + \frac{\pi^2}{4}\right)}$$

καὶ

$$\chi = +\frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(\pm\rho + \frac{\pi^2}{4}\right)}$$

Ἀλλὰ σημειωτέον κἀνταῦθα ἐν γένει, ὅτι, ἐπειδὴ πᾶσα τετραγωνικὴ ῥίζα, ὡς κἀπὶ τῶν ἀμιγῶν τετραγωνικῶν Ἐξισώσ. καὶ καταφατ. καὶ ἀπαφ. λαμβάνεται, πρὸ τοῦ $\sqrt{\ }$ τίθενται ἄμφω τὰ σημεῖα + καὶ —.

Ὥςε $\chi + \frac{\pi}{2} = \pm\sqrt{\left(\pm\rho + \frac{\pi^2}{4}\right)}$

καὶ $\chi = -\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\left(\pm\rho + \frac{\pi^2}{4}\right)}$

Ὡσαύτως κἀπὶ τοῦ ἑτέρου $\chi = +\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\left(\pm\rho + \frac{\pi^2}{4}\right)}$. Ἐπεὶ δὲ ἡ ῥίζα καταφατικῶς ληφθεῖσα, καὶ τῷ π προςεθεῖσα, τὴν ἑτέραν τοῦ χ

τιμὴν

τιμὴν παρέχει, ἀποφατικῶς δὲ, τὴν ἑτέραν, ἐπὶ τῆς ἐσχάτης Ἐξισ. ἔςαι α΄. $\chi = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(\pm \rho + \frac{\pi^2}{4}\right)}$.

καὶ β΄. $\chi = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\left(\pm \rho + \frac{\pi^2}{4}\right)}$.

Τὴν οὖν ῥίζαν ἐξάξομεν, τὰς ποσότητας, τὰς μετὰ τὸ ῥιζικὸν κειμένας, συνάψαντες τῇ προσθέσει. πρόκειται δὲ τοῦ ρ τὸ $+$ καὶ $-$, ὡς καὶ καταφατικοῦ, καὶ ἀποφατικοῦ εἶναι δυναμένου, ἐν ᾧ τὸ $\frac{\pi^2}{4}$ ἀεὶ καταφατικὸν τυγχάνει. Τούτοις δὴ πρόσθες καὶ τὸ, ἐὰν ἡ δοθεῖσα γνωςὴ ποσότης, ἤ τὸ ρ, ἡ ἀποφατικὴ, καὶ μείζων τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$, τηνικαῦτα $\sqrt{\left(-\rho + \frac{\pi^2}{4}\right)}$ ἡ ῥίζα γίνεται ἀδυνάτου ποσότητος, ἐξαχθῆναι ἀδυνατοῦσα, (§. 305.) καὶ τὸ πρόβλημα ἀδύνατον εἶναι, κατὰ τὴν τοιαύτην ὑπόθεσιν, δεικνύουσα.

§. 379. Ἐκ πάντων τούτων οἱ τῆς ἐπιλύσεως κανόνες τῶν μεμιγμένων Τετραγωνικῶν πηγάζουσιν Ἐξισώσεων. τουτέςι, τῆς Ἐξισώσεως, κατὰ τὰ προηγηθέντα, διαταχθείσης, ἡμίσευσον, καὶ τετραγώνισον τὸν συνεργὸν τοῦ χ, προσθεὶς τοῦτον ἑκατέρωθι, καὶ τὴν ῥίζαν ἐξαγαγὼν ἑκατέρωθεν, (ἥτις ἐπὶ θάτερα, ἔνθα αἱ ἄγνωςοι τῶν ποσοτήτων, ῥαδίως εὑρίσκεται. (§. ἀνωτ.)) μετάθες τὸ β. μέρος τῆς ῥίζης, τὸ παρὰ τῷ χ ὄν, ἐναντίῳ τῷ σημείῳ ἐπὶ θάτερα, καὶ τὸ χ ὑπολειφθήσεται σοι μόνον, καὶ ἡ τούτου διττὴ δύναμις ἐν γνωςαῖς ποσότησι.

§. 380. Τὰ ἑξῆς παραδείγματα τὰ ἐς δεῦρο ῥηθέντα σαφῶς ἀναπτύξουσι.

Α΄. Ζήτησον δύω ἀριθμοὺς, ὧν ὁ ἕτερος 12 μονάσι τοῦ ἑτέρου μείζων. Τούτων μετ᾽ ἀλλήλων πολλαπλασιασθέντων τὸ παραγόμενον ἐςὶ 220.

Λύσις. Ἔςω ὁ ἐλάττων $= \chi$. Ὁ ἄρα μείζων $\chi + 12$. Οὗτοι πολλαπλασιασθήτωσαν. Ὥςε $\chi \cdot (\chi + 12) = \chi^2 + 12\chi$. Τὸ δὲ προκύψαν παραγόμ. $= 220$.

Ἡ δ᾽ Ἐξίσωσις

ἡμίσ. τὸν συν. $\chi^2 + 12\chi = 220$.
τοῦ χ. τετρ. ————————————
αὐτὸν, $\chi^2 + 12\chi + 36 = 220 + 36 = 256$
καὶ πρ. ἑκατ. ————————————————————
Ἐξάγ. τὴν $\chi + 6 = \pm \sqrt{256} = \pm 16 =$ τῇ ῥίζῃ
ρ. ἑκατ.

$$\chi = -6 \pm 16$$

Ἔχει ἄρα τὸ χ δύω τιμὰς, ἢ δυνάμεις, ἄμφω δυνατὰς οὔσας. ἤτοι $\chi = -6 + 16 = 10$. Καὶ $\chi = -6 - 16 = -22$. Ὥς᾽ ἐπὶ μὲν τοῦ α΄. ὁ μείζων ἀριθμὸς $= 10 + 12 = 22$. ἐπὶ δὲ τοῦ β΄. $= -22 + 12 = -10$ Ἐπ᾽ ἀμφοῖν δ᾽ ἀληθεύει καὶ τὸ Πρόβλημα. Καὶ γὰρ $10 \cdot 22 = + 220$. Καὶ $-22 \cdot -10 = + 220$. Τῆς δ᾽ Ἐπιλύσεως τοῦ προβλ. γενικῶς ἀποδιδομένης, κείσθω $= \chi$ ὁ ἐλάσσων. Ἡ μεταξὺ τῶν δυοῖν διαφορὰ $= \beta$. ὁ μείζων ἄρα $\chi + \beta$. Τὸ ἐξ ἀμφοῖν παραγόμ. ἔςω $= \gamma$. Ἡ δ᾽ Ἐξίσωσις

$$\chi \cdot (\chi + \beta) = \gamma$$

ἢ

$$\chi^2 + \beta\chi = \gamma .$$

ἀναπλήρ. τὸ τετράγ. $\chi^2 + \beta\chi + \frac{1}{4}\beta^2 = \gamma + \frac{1}{4}\beta^2 = \frac{4\gamma + \beta^2}{4}$

Ἐξαχθ. ἡ $\surd$

$$\chi + \tfrac{1}{2}\beta = \pm \surd \left(\frac{4\gamma + \beta^2}{4}\right)$$

Καὶ ἐπεὶ ἡ ῥίζα τοῦ παρονομ. λογικὴ,

$$\chi + \tfrac{1}{2}\beta = \pm \surd \frac{(4\gamma + \beta^2)}{2}$$

$$\chi = -\tfrac{1}{2}\beta \pm \surd \frac{(4\gamma + \beta^2)}{2}$$

§. 381. Β'. Ζητηθήτωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, ἐν συνεχεῖ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ κείμενοι, καὶ οὕτως ἔχοντες, ὥςε τὸ κεφάλ. τοῦ α'. καὶ β'. = 10 εἶναι, τὴν δὲ διαφορὰν τῶν δύω τελευταίων = 24.

Λύσις. Ἔςω ὁ α'. = χ. Καὶ ἐπεὶ τὸ κεφάλ. τοῦ α'. καὶ β'. = 10, κατὰ τὴν ὑπόθ. ἀναγκαίως ὁ β'. τοσούτῳ ἐλάττων ἔςαι τοῦ 0, ὅσῳ μέγας ὁ α'. τουτ. ἔςαι 10 — χ. Ὅτι 10 — χ + χ = 10. Ἐπεὶ δ' αὖθις οἱ δύω ἔσχατοι διάφοροι ἀλλήλων 24 μονάσι, καὶ συνεχῆ γεωμετρικὴν ἀναλογίαν εἶναι χρὴ, ἔνθα ὁ β' καὶ γ'. ἀριθμὸς ἴσοι ἀλλήλοις. (§. 234.) ἤτοι καὶ ὁ γ' = 10 — χ. ὁ δ'. ἀριθμὸς, ὃς ὁ παρ' ἡμῖν ζητούμενος γ'. τυγχάνει = 34 — χ ἔςαι. Τὴν γὰρ διαφορὰν 24 εἶναι χρὴ ἀπὸ τοῦ προηγουμένου, καὶ ἐὰν 10 — χ ἀπὸ τοῦ 34 — χ ἀφαιρεθῇ, ὑπολείπ. ἡ διαφορὰ 24. Πᾶσα οὖν ἡ ἀναλογία εἴη

χ : 10 χ = 10 — χ : 4 χ.

Ἐὰν

Ἐὰν οἱ δύω ἄκροι, καὶ οἱ δύω μέσοι ὅροι ἐπ' ἀλλήλους πολλαπλασιασθῶσι, προκύψει ἥδε ἡ Ἐξίσωσις.

$$34\chi - \chi^2 = \chi^2 - 20\chi + 100$$

$$-100 = 2\chi^2 - 54\chi \quad : 2$$

$$-50 = \chi^2 - 27\chi$$

ἀναπλήρ τὸ τετράγ.

$$-50 + \left(\tfrac{27}{2}\right)^2 = \chi^2 - 27\chi + \left(\tfrac{27}{2}\right)^2 \quad \text{ἢ}$$

$$-50 + \tfrac{729}{4} = \chi^2 - 27\chi + \tfrac{729}{4}$$

$$\tfrac{529}{4} = \chi^2 - 27\chi + \tfrac{729}{4}$$

ἐξάγ. τὴν $\surd$

$$\pm \surd \tfrac{529}{4} = \chi - \tfrac{27}{2} \quad (\text{§. }178.)$$

Ἡ τῆς ῥίζης ἐνεργεία ἐξαχθείσης

$$\pm \tfrac{23}{2} = \chi - \tfrac{27}{2}$$

$$\tfrac{27}{2} \pm \tfrac{23}{2}. \text{ ἢ } \frac{27 \pm 23}{2} = \chi$$

Ὥςε χ. α΄. $= \dfrac{27 + 23}{2} = \tfrac{50}{2} = 25$

Καὶ β΄. $= \dfrac{27 - 23}{2} = \tfrac{4}{2} = 2$.

Ὡς ἐπὶ μὲν τοῦ α΄. οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ χ, $10 - \chi$, $34 - \chi$ εἰσὶ $+ 25 - 15$ καὶ $+ 9$ ἡ δ' ἀναλογία $25 : -15 = -15 : 9$. Ἐπὶ δὲ τοῦ β΄. οἱ τρεῖς ἀριθμοί, 2, 8, 32. καὶ ἡ ἀναλογία $2 : 8 = 8 : 32$. Ἐπ' ἀμφοῖν τὸ κεφάλ. τοῦ α΄. καὶ β΄. ὅρου $= 10$. Ὅτι καὶ $25 - 15$, Καὶ $2 + 8 = 10$.

$= 10$. Καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δύω τελευτ. ὅρων $= 24$. κατὰ τὸ Πρόβλημα.

§. 382. Γ'. Ζήτησον 2 ἀριθμοὺς, ὧν τὸ κεφάλ. 15, καὶ ὧν τὸ παραγόμενον 54. Τοῦτο δοκεῖ Ἐξίσωσιν παράγειν, δύω ἀγνώςους περιλαμβάνουσαν, χ καὶ ψ. Ἀλλ' εὐχερῶς, ὡς αὐτίκα προφανὲς ἔςαι, εἰς μίαν ἄγνωςον ἀναχθήσεται. Οἱ δύω ἀριθμοὶ ἔςωσαν χ καὶ ψ. Ὥςε κατα τὸ Πρόβλ. $\chi + \psi = 15$. Καὶ $\chi\psi = 54$.

Ἐπειδὴ $\chi + \psi = 15$ ἀντικαταςάντος τούτου αὐτὶ τοῦ χ ἐν τῇ

$\chi = 15 - \psi$ Ἐξισ. $\chi\psi = 54$. ἔςαι

$$(15 - \psi)\,\psi = 54$$

$$15\,\psi - \psi^2 = 54$$

ἢ

$$-\,54 = \psi^2 - 15\,\psi$$

ἀναπ. τὸ τετρ.

$$-\,54 - (\tfrac{15}{2})^2 = \psi^2 - 15\,\psi - (\tfrac{15}{2})^2$$

$$-\,54 + \tfrac{225}{4} = \psi^2 - 15\psi + \tfrac{225}{4}$$

ἢ

$$-\tfrac{216}{4} + \tfrac{225}{4} = \tfrac{9}{4} = \psi^2 - 15\,\psi + \tfrac{225}{4}$$

Ὥςε

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \tfrac{3}{2} = \sqrt{(\psi^2 - 15\,\psi + \tfrac{225}{4})} = \psi - \tfrac{15}{2}$$

$\tfrac{3}{2} + \tfrac{15}{2} = \tfrac{18}{2} = 9 = \psi$. Ἦν δε $\chi + \psi = 15$. ψ δὲ $= 9$. ἄρα $\chi = 6$.

§. 383. Γυνήτις ἐρωτηθεῖσα, ποσαετὴς εἴη, ἀπεκρίνατο. Ἡ ἐμὴ μήτηρ ἐν τῷ γεγεννηκέναι με ἦν εἰκοτιτεσσαραετής. Ἐὰν οὖν ἡ παροῦσα ἡλικία τῆς

μη-

μητρός μου μετὰ τῆς ἐμῆς, ἣν ἤδη ἄγω, ἡλικίας πολλαπλασιασθῇ, προκύψουσιν 756 ἔτη. Ζητεῖται, ποσαετὴς ἡ θυγατὴρ, καὶ ποσαετὴς ἡ μήτηρ.

Λύσις. Κείσθω τὴν θυγατέρα εἶναι χ ἐτῶν. Ἡ μήτηρ ἄρα ἔσαι $24 + \chi$ ἐτῶν, ἣν γὰρ 24 ἐτῆς, ἐκείνην γεννήσασα, οἷς (24 ἔτ.) προςίθεται καὶ τὰ παρόντα ἔτη τῆς θυγατρὸς, πολλαπλ. δὲ ἀλλήλων τὰ ἔτη ἀμφοῖν. $(24 + \chi) \cdot \chi = 24\chi + \chi^2$. Ταῦτα δ' ἔσαι $= 756$. Ὅθεν ἡ Ἐξίσ.

$$\chi^2 + 24\chi = 756$$

ἡμίσ. τὸν συν. τοῦ χ. τετρ. καὶ πρόσθες ἑκατ. $\chi^2 + 24\chi + 144 = 756 + 144$

ἢ

$$\chi^2 + 24\chi + 144 = 900$$

ἐξ. τὴν $\sqrt{}$ ἐκ.

$$\chi + 12 = \pm \sqrt{900} = \pm 30.$$

$$\chi = -12 \pm 30 =$$ τῇ ἡλικίᾳ

τῆς θυγατρός. Ἐνταῦθα μόνον ἡ ἑτέρα τιμὴ τοῦ χ χρήσιμος, ἤτοι $\chi = -12 + 30 = 18$. Οὐχὶ δὲ καὶ ἡ ἑτέρα $\chi = -12 - 30$. Ὥςε ἡ μὲν θυγάτηρ 18 ἐτής. Ἡ δὲ μήτηρ, ὡς 24 ἐτὴς, ἐν τῷ ταύτην τεκεῖν, ἐςὶν ἤδη $24 + 18 = 42$ ἐτῶν. Καὶ $42 \cdot 18 = 756$. Λέλυται ἄρα τὸ ζητούμενον.

§. 384. Ε. Πρόβατά τινος 200 θαλήρων ὠνησαμένου, εἰ τοσούτου 20 ἔτι εἰλήφει, ἕκαςον πρόβατον ἡμίσει θαλήρῳ ἔλαττον ἂν ἐτιμήθη, ἢ ἤδη. Ζητεῖται, πόσα τὰ πρόβατα;

Λύσις.

Λύσις. Τεθήτω τὰ πρόβ. ψ. Καὶ ἐπεὶ πάντα 200 θαλήρων ἄξια, ἕκαςον πρόβ. τιμᾶται $\frac{200}{\psi}$ θαλ.

Καὶ γὰρ ψ πρόβατα : 200 θαλ. $=$ 1 πρόβατον : $\frac{200}{\psi}$ θαλ. εἴκοσι πρόβ. ἔτι ἐκείνοις προςεθ. εἶεν ἂν $\psi + 20$ πρόβ. Καὶ τηνικαῦτα ἦν ἂν τὸ πρόβ. ἄξιον $\frac{200}{\psi + 20}$ θαλ. Τὸ δὲ ἡμ. θαλ. ἔλαττον ἄξιον τῆς προτέρας τιμῆς τοῦ προβάτου. Ὥςε, ἐὰν ἀπὸ τῆς προτέρας τιμῆς ἑκάςου προβάτου $\frac{1}{2}$ θάλ. ἀφαιρεθῇ, ἔςαι ἴση τῇ β'. τιμῇ. τουτ.

$$\frac{200}{\psi+20} = \frac{200}{\psi} - \frac{1}{2}$$

τὰ κλ. ὑπὸ τὸν αὐτ. παρον.

$$\frac{200}{\psi+20} = \frac{400 - \psi}{2\psi}$$

τὰ κλ. τῷ πολλαπ. αποσκευασθ.

$$400\psi = 400\psi - \psi^2 + 8000 - 20\psi$$

τὰς ἀγν. ἐπὶ θάτ.

$$\psi^2 + 20\psi = 8000.$$

τὸ τετρ. ἀναπλ.

$$\psi^2 + 20\psi + 100 = 8100$$

ἐξαχθ. ἡ $\surd$.

$$\psi + 10 = \pm \surd\, 8100 = \pm\, 90$$

$$\psi = -\, 10 \pm 90.$$

Τὸ $-\,90$ περιττόν.

Ὥςε ὑπολείπεται ἡ ἑτέρα τοῦ ψ τιμή. ἤτοι $\psi = -\, 10 + 90 = 80$. Ὠνήσατο ἄρα 80 πρόβ.

$$\chi^2 + \chi + 1 + \chi = 121$$

ἤ

$$\chi^2 + 2\chi + 1 = 121$$

ἐξάγ. τὴν $\sqrt{}$.

$$\chi + 1 = \sqrt{121} = \pm 11$$

$\chi = -1 + 11$. Κἀνταῦθα ἡ $+$ μόνον τιμὴ τοῦ χ χρήσιμος. Ὥςε $\chi = -1 + 11 = 10$. Ἔνθεντοι Α ἔχει 10 θαλ. Β. 11. καὶ Γ. 100.

Εἰ δ' ἡ τιμὴ -11 παρείληπτο, ἦν ἂν $\chi = -12$. Καὶ $\chi + 1 = -11$. Καὶ $\chi^2 = +144$. Ὅθεν καὶ -11 — 12 καὶ $+144$ ὡσαύτως $= 121$. Ἀλλὰ ταύτῃ χρήσασθαι περιττόν.

§. 386.

πρόβ. 200 θαλ. Ὧν ἕκαϛον ἄξιον $\frac{200}{ϙ0} = 2\frac{2}{9}$ θαλ.

Εἰ δ' ἔτι καὶ 20 εἰλήφει τοσούτου, εἶχεν ἂν 100. πρόβ. τῶν ἑκ. 2 θαλ. ἐτιμήθη, ἤτοι $\frac{2}{9}$ θαλ. ἔλαττον, ἢ ἤδη.

§. 386. Ζ'. Ἵππον τρεῖς Α, Β, καὶ Γ κοινῶς πριάμενοι 120 θαλ. συνέθεντο καταβαλεῖν. Ζητοῦσι δ' εἰ τοσαῦτα χρήματα μεθ' ἑαυτῶν ἔχοιεν, 121 θάλ. τοῖς τρισὶν ἅμα πάρεισιν, οὕτω μέντοι, ὥϛε Β 1 θαλήρῳ τοῦ Α πλεονεκτεῖν, Γ δὲ τοσούτους ἔχειν, ὅσος ὁ τῶν θαλ. τοῦ Α ἀριθμὸς, ἑαυτῷ πολλαπλασιασθεὶς, ἢ τετραγωνισθείς. Πόσους ἕκαϛος ἰσχύκει;

Λύσις. Ἐχέτω Α, χ θαλ. Β, $\chi + 1$, Γ δὲ $\chi \cdot \chi = \chi^2$. πάντες δὲ ἴσοι 121. Ἤτοι

§. 386. Εἰσὶ δὲ καὶ Προβλήματα εἰς τετραγωνικὰς φθάνοντα Ἐξισώσεις, ἐν οἷς δύω, τρεῖς, καὶ πλείους ἐνυπάρχουσι τῶν ἀγνώςων ποσοτήτων. Ἐὰν οὖν καὶ τοσαῦται συνιςῶνται τῶν Ἐξισώσεων, τὸ Ζήτημα ἐςὶ διωρισμένον. Καὶ δίδονται ἄρα δύω διωρισμέναι τιμαὶ, κατὰ τὸν αὐτὸν εὑρισκόμεναι τρόπον, ὡς κἀπὶ τῶν τοῦ α'. βαθμοῦ Ἐξισώσ. (§. 363. κτ.)

§. 387. Η'. Ἄνδρες καὶ γυναῖκες συνέπιον ἀριθμοῦντινα ξεςῶν οἴνου, τὸ ἥμισυ τῶν ξεςῶν, ὅσος ὁ τῶν γυναικῶν ἀριθμός. Ἀποτίσαι δ' ὑπὲρ τούτων Θαλ. 3, καὶ γρόσσους 20 (ἕκαςος γρόσσος = 2 ὀβ. καὶ 2 λεπτοῖς παρ' ἡμῖν) χρή. Ἀλλὰ συντίθενται ἀλλήλοις κληρώσασθαι, πότερον, οἱ ἄνδρες, ἢ αἱ γυναῖκες ἀποτίσουσι. Καὶ εἰ μὲν οἱ ἄνδρες, ἕκαςος ἀποτίσει τετράκις τοσαῦτα λεπτὰ, ὅσοι αὐτοὶ ἅμα. Εἰ δ' αἱ γυναῖκες, τοσαῦτα λεπτὰ, ὅσαι αὐταί. Πόσοι οἱ ἄνδρες, καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες; πόσους ξεςας οἴνου ἔπιον; καὶ πόσου ἕκαςος τιμᾶται ξέςης;

Λύσις. Τὰ δύω τελευταῖα τῶν Ζητημάτων, ὡς ἐκ τοῦ προβλήμ. δῆλον, διὰ τῆς ἐπιλύσεως διορίζονται τῶν πρώτων. Κείσθωσαν ψ ἄνδρες, καὶ χ γυναῖκες. Εἴπερ οἱ ἄνδρες ἀποτίσαι ὀφείλουσι, καταβαλεῖ ἕκαςος τετράκις τοσαῦτα, ἢ αὐτοί. Ἐκ τούτου ἔχομεν εὑρεῖν τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνδρῶν καταβληθησόμενον. ἤτοι 1 ἀνὴρ : $4\psi = \psi$ ἀνδ. : $4\psi^2$. Ὥςε $4\psi^2$ λεπτὰ διδοῦσι πάντες οἱ ἄνδρες. Ἐιδ' αἱ γυναῖκες, κατὰ τὴν ὑποθ.

1 γυνὴ : χ λεπτὰ $= \chi$ γυναῖκες: χ^2 λεπτά. Ἔνθεντοι πᾶσαι αἱ γυναῖκες διδόασι χ^2 λεπτά. Ἐπεὶ δ' ἄμφω ἴσα, ἔςαι ἄρα $\chi^2 = 4\psi^2$

$$\chi = \sqrt{4\psi^2} = 2\psi.$$

Ὥςε

Ὥςε ὅτι ἅπαξ τοσαῦται γυναῖκες, ἢ ἄνδρες. τὸ κεφάλ. τὸ ὑπὸ τῶν γυν. καταβλ. ἦν χ^2 λ. ἦν δὲ 3 θαλ. καὶ 20 γρ $=$ 1024 λεπτοῖς. Ὅθεν

$$\chi^2 = 1024$$

$\chi = \sqrt{1024} = 32 =$ τῷ ἀριθμῷ τῶν γυναικῶν. Καὶ ἐπειδὴ $\chi = 2\,\psi$. $\frac{\chi}{2} = \psi$. ἦσαν $\frac{32}{2} = 16$ ἄνδ. ἔπιον δὲ οἶνον ἥμισυ ξεςῶν, ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν, ἤτοι $\frac{\chi}{2}$ ξές. $\frac{32}{2} = 16$ ξές. Ἐπεὶ δὲ 16. ξ. τιμῶνται 3 θαλ. καὶ 20 γρόσσων, ὁ ξ. τιμᾶται 8 γρ. Εἰ οὖν οἱ ἄνδρες ἀποτίσουσιν, ὀφείλει ἕκαςος 4ψ λεπτ. ἢ $4 \cdot 16$ λεπτ. $=$ 8 γρόσ. Εἰ δ᾽ αἱ γυναῖκες, ἑκάςη καταβαλεῖ χ λεπτ. ἢ 32 λεπτ. $=$ 4 γρόσ. Ἐπ᾽ ἀμφοῖν προκύπτει 3 θαλ. 20 γρόσ.

§. 388. Θ΄. Ζήτησον δύω ἀριθμοὺς, χ καὶ ψ, ὧν τὸ παραγόμενον, τὸ κεφάλαιον, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν κατ᾽ αὐτοὺς τετραγώνων ἴσα.

Λύσις. Τὸ παραγόμ. τῶν ἀριθμῶν τεθήτω $= \chi\psi$. τὸ τούτων κεφάλαιον $\chi + \psi$. ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν $= \chi^2 - \psi^2$. Ὥςε, κατὰ τὸ πρόβλημα, I) $\chi + \psi = \chi\psi$. II) Καὶ $\chi^2 - \psi^2 = \chi\psi$. Καὶ $\chi + \psi = \chi^2 - \psi^2$. Ἀλλὰ $\chi^2 - \psi^2 = (\chi + \psi) \cdot (\chi - \psi)$, ἐξ ὧν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκεῖνο ἀναφύεται. Ἄρα, ἐὰν

$$\chi + \psi = \chi^2 - \psi^2$$ ἔςαι καὶ

$$\chi + \psi = (\chi + \psi) \cdot (\chi - \psi)$$: $\chi + \psi$.

$$\frac{\chi + \psi}{\chi + \psi} = \chi - \psi$$ ἢ

$$1 = \chi - \psi$$ ὥςε

$$1 + \psi = \chi.$$

Ἐπειδὴ ἐν 1) $\chi + \psi = \chi\psi$, ἀντικαταςήσασιν ἐν ταύτῃ τῇ Ἐξισώσει τὸ ἰσοδύναμόν τοῦ χ, ἤτοι ἀντὶ τοῦ χ τὸ $1+\psi$, ἔςαι $1 + \psi + \psi = (1 + \psi) . \psi$ ἢ

$$2\psi + 1 = \psi^2 + \psi$$

$$1 = \psi^2 + \psi - 2\psi = \psi^2 - \psi$$

τὸν συνεργὸν τοῦ ψ, ὅς = 1 ἐςιν, ἡμισ. τετραγ. καὶ πρόσθες ἑκατερ.

$$1 + \tfrac{1}{4} = \psi^2 - \psi + \tfrac{1}{4}$$ ἐξαγ. τ. $\sqrt{}$

$$\pm \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \psi - \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \psi$$ Καὶ ἐπειδὴ ἡ ῥίζα τοῦ 4 λογική.

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \psi$$

Ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν προηγηθεῖσαν Ἐξίσωσιν $1 + \psi = \chi$, ἀντικαταςάντος, ἀντὶ τοῦ ψ, τοῦ εὑρεθέντος, ἔςαι $\chi =$ $1 + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. ἢ $\frac{2}{2} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} =$

3

$\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \chi$. Εὕρηνται οὖν οἱ ἀριθμοὶ οἱ ζητούμενοι. Ἕκαστος δ' ἔχει δύω τιμάς, ὧν ἐν τοῖς ῥιζικοῖς σημείοις ταῖς δύω $+$ ποσότησιν, ἢ ταῖς δύω $-$ ἂν χρησαίμεθα. παραληφθήτωσαν αἱ $+$ ποσότητες, ἐν αἷς 1) τὸ παραγόμ. ἀμφοῖν τῶν ἀριθμῶν ἐςὶ $\chi\psi$, ἢ $\psi\chi$. Ὥςε $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$:

ὃ πολλαπλ.

$$
\begin{array}{r}
\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\
\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\
\hline
+ \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{3}{4} \\
+ \frac{3}{4} + 3\sqrt{5}
\end{array}
$$

$$\overline{4}$$

$$\tfrac{3}{4} + \frac{4\sqrt{5}}{4} + \tfrac{5}{4} = \tfrac{8}{4} + \sqrt{5} = 2 + \sqrt{5}.$$

Τὸ κεφάλαιον ἀμφοῖν τῶν ποσοτήτων, ἢ $\chi + \psi$ $= \tfrac{1}{2}\ \frac{\sqrt{5}}{2} + \tfrac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \tfrac{4}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{2} =$ $2 + \sqrt{5}.$

Ἡ διαφορὰ τῶν Τετραγώνων, ἢ $\chi^2 \mp \psi^2.$

Τετραγων. τὸ ψ. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$
\begin{array}{r}
\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\
\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\
\hline
+ \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} \\
\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \\
\hline
\end{array}
$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \psi.$$

τεραγων. καὶ χ ἤδη

$$
\begin{array}{r}
\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\
\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\
\hline
+ \frac{3\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} \\
+ \frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{4} \\
\hline
\end{array}
$$

$$\frac{9}{4} + \frac{6\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} = \frac{14}{4} + \frac{6\sqrt{5}}{4} = \frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Ὥστε $\chi^2 - \psi^2 = \left(\frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$= \frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} +$

$\frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{7-3}{2} + \frac{3\sqrt{5} - \sqrt{5}}{2} = \frac{4}{2} +$

2

$\frac{2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5} = \chi^2 - \psi^2$. Λύλυται ἄρα τὸ Πρόβλημα.

§. 389. Καὶ ταῦτα μὲν ἱκανὰ περὶ τῶν Τετραγωνικῶν Ἐξισώσεων. Πρὶν ἢ δ' εἰς τὰς τοῦ γ'. βαθμοῦ μεταβῆναι, σημειωτέον ἔτι τινὰ περὶ ἐκείνων, τῆς ἐκείνων φύσεως, καὶ ἐπιλύσεως μᾶλλον καθολικωτέραν τὴν ἔννοιαν παρέχοντα. Αἱ τετραγωνικαὶ τῶν Ἐξισώσεων, καθὰ προϋχειρίσαμεν, ἐπιδεκτικαὶ διπλῆς ἐπιλύσεως τυγχάνουσιν, ὡς πρὸ τῆς ῥίζης ἀμφοῖν τῶν σημείων + καὶ — προκειμένων, καὶ τῆς τετραγ. ῥίζης καταφατικῆςτε καὶ ἀποφατικῆς ἐκληφθῆναι δυναμένης. ἀεὶ γὰρ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῆς ἐφ' ἑαυτὴν καταφατικὸς προκύπτει τετράγωνος. Ἐὰν δὲ καὶ τὸ β'. μέρος τῆς ῥίζης, τὸ παρὰ τῷ χ, ἐπὶ θάτερα μετενεχθῇ, ἵνα τὸ χ μονωθῇ, τὸ χ, ἢ κυρίως, ἡ ῥίζα τῆς Ἐξισώσεως διπλῆν τιμὴν λαμβάνει. καὶ ἐπὶ μὲν τῶν πλειόνων Ἐξισώσεων γίνεται τοῦτο ἐνεργεία, τουτ. ἡ ῥίζα αὐτῶν ἅμα τὰς τιμὰς ἄμφω παραδέχεται, αἵτινες ἤτοι ἄμφω καὶ καταφατικαί, ἢ ἄμφω ἀποφατικαί, ἢ ἡ μὲν καταφατική, ἡ δ' ἑτέρα ἀποφατική. Ἐνίοτε δὲ μίαν καὶ μόνην λαμβάνει, μᾶλλον δὲ ἄμφω εἰσὶν ἀδύνατοι. Ὡς ἐκ τῶν παραδ. δῆλον ἡμῖν ἔςαι.

Ἡ Ἐξίσωσις $\chi^2 - 12\chi + 36$, καταλλήλως ἐπιλυθεῖσα, δίδωσι $\chi = + 6 + \sqrt{0}$. ἢ ἐπειδὴ ἡ $\sqrt{0} = 0$, $\chi = + 6$. Ἔςιν ἄρα τῷ χ μία μόνη τιμή. Εἰ γὰρ $\chi^2 - 12\chi + 36 = 0$, ἔςί καὶ $\chi^2 - 12\chi = - 36$. ἄρα καὶ $\chi^2 - 12\chi + 36 = - 36 + 36 = 0$. Ὥςε $\chi - 6 = \sqrt{0}$. καὶ $\chi = + 6 + \sqrt{0}$. Ἡ δ' Ἐξίσ. $\chi^2 + 10\chi + 48 = 0$ δίδωσι α'. $\chi = - 5 + \sqrt{-23}$. Καὶ β'. $\chi = - 5 - \sqrt{-23}$, ἄμφω ἀδυνάτους τι-

 μὰς

μ..ς οὔσας. Συνιδεῖν δὲ ῥάδιον, ὅτι, ἐὰν καὶ τιμαὶ τοῦ χ προκύψωσι, καὶ τὰς τοιαύτας τῶν Ἐξισ. εἰς τὴν $\chi = 0$ ποιεῖν ἔχομεν. Τοῦτο δ' ἔςαι, εἰ τὴν εὑρεθεῖσαν, ἢ εὑρεθείσας τιμὰς τοῦ χ, ἢ τῆς ῥίζης τῷ χ ἀντικειμένοις τοῖς σημείοις προσθείημεν. Εἰ π. χ. ἐκ τῆς Ἐξισώσεως $\chi^2 + \chi - 20 = 0$, αἱ τιμαὶ $\chi = - 5$, καὶ $\chi = + 4$ εὑρεθεῖεν, προςεθέντος ἐπὶ τῆς α΄. τοῦ 5 τῷ χ ἐναντίῳ τῷ σημείῳ, ἡ Ἐξίσ. γενήσεται $\chi = 0$. Ἐὰν $\chi = - 5$, ἔςαι καὶ $\chi + 5 = 0$ ἀναγκαίως. Ὅτι $- 5 + 5 = 0$. Ἔνθα τὰ χ ἄμφω διάφορα. Ἐννοοῦνται δὲ διὰ τούτων (τῶν χ) αἱ τῆς Ἐξισώσ. ῥίζαι. Ὅθεν ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλ. χ^2 παράξουσιν. Ἐὰν ἄρα $\chi = + 3$, ἔςαι καὶ $\chi - 3 = 0$. ἢ ἐν γένει, ἐὰν $\chi = -\alpha$, ἔςι καὶ $\chi + \alpha = 0$. καὶ εἰ $\chi = + \alpha$, ἔςι καὶ $\chi - \alpha = 0$.

Ἐὰν δὲ δύω τοιαῦται τοῦ χ τιμαὶ, αἱ εἰς 0 ἀχθεῖσαι, ἢ καὶ μία, εἰ μία παρῇ, ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθῶσιν, ἀνάγκη πᾶσα τετραγωνικὴν Ἐξίσωσιν προελθεῖν $= 0$ ὡσαύτως οὖσαν, ἧς αἱ τιμαὶ καὶ δυνάμεις τῶν ὅρων ἀλλήλας ἀναιροῦσιν, εἴπερ ἀμέλει τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ χ ἀντὶ τοῦ χ ἐν τῇ Ἐξισ. ἀντικαθιςῶμεν, ὅλην τὴν Ἐξίσ. εἰς τὸ μηδενικὸν ἄγοντες. Ἀλλὰ καὶ τοιαύτην Ἐξίσωσιν προκύψαι ἀνάγκη, ἥτις, ἐπιλυομένη, τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ χ παράσχοι, ἐξ ὧν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀνέφυ. Οἷον ἐπὶ τῆς Ἐξισ. $\chi^2 + 8\chi + 15 = 0$. ἢ $\chi^2 + 8\chi = - 15$, ἡ μὲν ἑτέρα τιμὴ τοῦ $\chi = - 5$, ἡ δ' ἑτέρα $\chi = - 3$. ἔςιν ἄρα $\chi + 5 = 0$, καὶ $\chi + 3 = 0$, αἵτινες πολλαπλασιασθ. μετ' ἀλλήλων,

$$\begin{array}{r}
\chi + 5 = 0 \\
\chi + 3 = 0 \\
\hline
+ 3\chi + 15 \\
\chi^2 + 5\chi \qquad\quad \\
\hline
\end{array}$$

$\chi^2 + 8\chi + 15 = 0.$ ἢ $\chi^2 + 8\chi = -15.$ Τὸ γὰρ ο μετὰ τοῦ ο πολλ. δίδ. ο. Ταυτὸ γίνεται, καὶ ἀδυνάτων οὐσῶν τῶν τιμῶν, ὅπερ ἀεὶ ἄμφω αἱ τιμαὶ εἶναι ὀφείλουσιν. Εἰ γὰρ τὴν τιμὴν τοῦ χ ἐν ἀδυνάτοις ῥίζαις ἐν γένει θῶμεν $\chi = \alpha \pm \sqrt{-\beta}$, δῆλον ὅτι $\alpha + \sqrt{-\beta}$. καὶ $\alpha - \sqrt{-\beta}$ ἀδύνατοι ποσότητες. Ἀλλ' ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθεῖσαι ἀναγκαίως Ἐξίσωσιν παράξουσιν, ἧς τιμαὶ ὑπάρχουσι. π. χ. ἡ Ἐξίσ. $\chi^2 - 6\chi + 12 = 0$ δίδωσι τιμὰς τοῦ χ, α'. $\chi = +3 + \sqrt{-3}$. καὶ β'. $\chi = +3 - \sqrt{-3}$. Ὥςε $\chi - 3 - \sqrt{-3} = 0$. καὶ $\chi - 3 + \sqrt{-3} = 0$. πολλαπλ. μετ' ἀλλήλων.

$$\begin{array}{r}
\chi - 3 - \sqrt{-3} = 0 \\
\chi - 3 + \sqrt{-3} = 0 \\
\hline
+ \chi\sqrt{-3} - 3\sqrt{-3} + 3 \\
- 3\chi + 9 + 3\sqrt{-3} \qquad \\
\chi^2 - 3\chi - \chi\sqrt{-3} \qquad\qquad \\
\hline
\chi^2 - 6\chi + 9 + 3 = 0 \\
= \chi^2 - 6\chi + 12 = 0.
\end{array}$$

§. 390. Γνωςῶν οὖν τῶν τοῦ χ οὐσῶν τιμῶν, καὶ τῆς ἑτέρας τούτων ἐν τῇ εἰς τὸ ο ἀχθείσῃ Ἐξισώσει τεθείσης, γενήσεται διὰ τούτου καὶ ἡ Ἐξίσ. ο. Καὶ, ἐὰν ἡ Ἐξίσ. διάτινος ἀριθμοῦ ἐν αὐτῇ, ἀντὶ τοῦ

χ τε

χ τεθέντος, ο γένηται, ὁ τεθεὶς ἀριθμὸς ἔςαι τιμὴ τοῦ χ π. χ. ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^2 + 8\chi + 15 = 0$. ἦν $\chi = -5$, καὶ $\chi = -3$. Θὲς ἀντὶ τοῦ χ τὸν -5 ἐν τῇ Ἐξισώσει, καὶ ἔςαι $+25 - 40 + 15 = +40 - 40 = 0$. Καὶ ἐὰν ἀντὶ του χ ὁ -3 τεθῇ, ἔςαι $+9 - 24 + 15 = +24 - 24 = 0$. Ὅπερ ἄλλως ἔχειν οὐ δύναται.

§. 391. Ἐκ πάντων τῶν εἰρημένων συνάγομεν, ὅτι πᾶσα τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις, εἰς τὸ 0 ἀχθεῖσα, θεωρηθείη ἄν, ὡς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύω παραγόντων, εἰς τὸ 0 ἀχθέντων, παραχθεῖσα. Ἄμφω δ' αἱ τιμαὶ τοῦ χ, ἐξ ὧν ἡ τοιαύτη ἀνέφυ Ἐξίσωσις, καλοῦνται Ῥίζαι τῆς Ἐξισώσεως. Καὶ πᾶσαν Τετραγ. Ἐξίσ. οὐκ ἂν πλείους, ἢ δύω τοιαύτας τιμὰς τοῦ χ. ἢ δύω ῥίζας ἔχειν. Εἰ γὰρ τρεῖς ἢ καὶ πλείους, εἴη ἂν καὶ τὸ χ εἰς κύβον, ἢ εἰς ὑπερτέραν τινὰ ἠρμένον δύναμιν, καὶ ἡ Ἐξίσωσις οὐκέτι Τετραγωνικὴ ἀκούει

§. 392. Ἀλλὰ θεωρήσωμεν ἔτι γενικώτατα τὴν Τετραγ. Ἐξίσ. 1) Ἀμφοῖν τῶν τοῦ χ τιμῶν θετικῶν παραληφθεισῶν, τουτ: εἰ θῶμεν $\chi = \alpha$, καὶ $\chi = \beta$, καὶ ἑχομένως $\chi - \alpha = 0$, καὶ $\chi - \beta = 0$, καὶ ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθεισῶν, προκύψει $\chi^2 - \beta\chi - \alpha\chi + \alpha\beta = \chi^2 - (\alpha + \beta)\chi + \alpha\beta = 0$. 2) Ἀποφατικῶν δ' ἀμφοῖν, ἤτοι $\chi = -\alpha$, καὶ $\chi = -\beta$, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου $\chi + \alpha = 0$, καὶ $\chi + \beta = 0$, καὶ ἐπ' ἀλλ: αὖθις πολλαπλ. προκύψει $\chi^2 + (\alpha + \beta)\chi + \alpha\beta = 0$. 3) Τῆς μὲν καταφατικῆς, τῆς δ' ἀποφατικῆς, τουτ. $\chi = +\alpha$, καὶ $\chi = -\beta$. Ὅθεν $\chi - \alpha = 0$, καὶ $\chi + \beta = 0$, καὶ δι' ἀλλ. αὖθις πολλαπλ. προκύψει $\chi^2 + (\beta - \alpha)\chi - \alpha\beta = 0$. Ἐπιτηροῦσι δὲ πρῶτον καθορᾶται κἀπὶ τῶν τριῶν τρόπων τῷ γνώμῳ τὸ παραγόμενον τῶν τιμῶν τοῦ χ ἐνυπάρχειν. Εἰ οὖν αἱ

Τετραγ.

Τετράγ. τῶν Ἐξισώσεων οὐ καθ' ἑαυτὰς εὐχερεῖς εἰς ἐπίλυσιν εἶεν, τὸ παραγόμενον εἰς τοὺς κατ' αὐτὸ ἀναλύσαντες παράγοντας, καὶ τιθέντες ἀντὶ τοῦ χ εἰς τὴν Ἐξίσ. τοὺς παράγοντας καθ' ἕνα, εἰς ὃ ἡ Ἐξίσ. $= 0$ γένοιτο, εἴχομεν ἂν τὴν τιμὴν τοῦ χ. Ἐργωδέστατον δὲ τοῦτο, τῆς τιμῆς τοῦ χ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ μὴ οὔσης. Χρῶνται μέντοι τῷ τρόπῳ τούτῳ ἐπὶ τῶν ὑπερτέρων Ἐξισώσεων. δεύτερον. τῷ β' ὅρῳ ἀεὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ῥιζῶν, ὡς συνεργὸν τοῦ χ παρεῖναι. Καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ α'. τρόπου τῷ μέσῳ ὅρῳ ἦν συνεργὸς τὸ $-(\alpha+\beta)$, τῷ δὲ β'. τὸ $+(\alpha+\beta)$, τῷ δὲ γ'. τὸ $+(\beta-\alpha)$, ὅπερ (τὸ γ.) ἀλγεβραϊκῶς προστεθὲν δώσει τὸ κεφάλαιον τῶν ῥιζῶν. Καὶ δυνάμεθα τοίνυν τὴν ῥίζαν εἰκάσασθαι τῇ τῶν συνεργιῶν τοῦ β'. ὅρου εἰς μέρη κατατομῇ, ἀπόπειραν ποιούμενοι, εἰ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τούτων ὁ γ'. προκύπτει ὅρος. τρίτον. ἀμφοῖν τῶν ῥιζῶν, ἢ τιμῶν τοῦ χ θετικῶν οὐσῶν, τὸν μέσον ὅρον τῆς εἰς τὸ 0 ἀχθείσης Ἐξισώσεως ἀποφατικὸν εἶναι, ἄμφω δὲ τοὺς ἑτέρους θετικούς. Ἀποφατικῶν δ' ἐκείνων οὐσῶν, πάντας τοὺς ὅρους τῆς εἰς τὸ 0 ἀχθ. Ἐξ. καταφατικούς. Ἀλλὰ τῆς μὲν καταφατικῆς, τῆς δ' ἀποφατικῆς οὔσης, τὸν μὲν β'. ὅρον καὶ ἀποφατικὸν, καὶ καταφατικὸν εἶναι, ἤπερ ἐν τῷ $+(\beta-\alpha)$ τὸ β. ἢ α μεῖζον εἴη, τὸν δὲ γ'. ἀεὶ ἀποφατικὸν, τὸν δὲ α'. ἀεὶ καταφατικόν. Ὅθεν ἐκ τῶν σημείων τῶν ὅρων τῆς Ἐξισώσεως ἔσται γνωστὸν, πότερον καταφατικὰς, ἢ ἀποφατικὰς ῥίζας ἔχουσιν. Οὕτως ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^2 - 24\chi + 108 = 0$, ἄμφω αἱ ῥίζαι καταφατικαί. Εἰσὶ δὲ $+18$ καὶ $+6$. Ἐν δὲ τῇ $\chi^2 + 16\chi + 55 = 0$ ἄμφω ἀποφατικαί, αἱ -5, καὶ -11. Ἐν δὲ τῇ $\chi^2 + \chi - 2 = 0$ τελευταῖον, ἡ μὲν ἀποφατικὴ, ἡ δ' ἑτέρα καταφατική. -2 καὶ $+1$ Ὡσαύτως κἂν τῇ $\chi^2 - 5\chi - 6 = 0$ αὖθις ἡ μὲν καταφατικὴ $+6$, ἡ δ' ἀποφ. -1. τέταρτον. τού-

τῳ

τῳ τῷ τρόπῳ εὐχερῶς τὰς Ἐξισώσεις ποιεῖσθαι, αἷς δύω δοθεῖσαι τιμαὶ ἐνυπάρχουσιν, ἤτοι τῇ προσθέσει τῶν δύω δοθεισῶν τιμῶν προελεύσεται ὁ συνεργὸς τοῦ β΄. ὅρου, ἢ ὁ συνεργὸς τοῦ χ, καὶ τῷ πολλαπλασιασμῷ δὶ ἀλλήλων, ὁ γ΄. ὅρος. Τὰ δὲ σημεῖα μετὰ τὴν πρόσθεσιν, καὶ πολλαπλασιασμὸν καθ' ἑαυτὰ δῆλα. π. χ. Εἰ δέοι τετραγωνικὴν Ἐξίσωσιν ποιῆσαι, ἔνθα αἱ τοῦ χ τιμαὶ -8 καὶ $+3$ εἰσίν, ὥςε $\chi + 8 = 0$, καὶ $\chi - 3 = 0$, πρόσθες -3 καὶ $+8$, ὅπερ $= 5$, καὶ πολλαπλασίασον $+8$ ἐπὶ -3 $= -24$. Ἐὰν οὖν τὸ κεφάλαιον τῶν ῥιζῶν συνεργὸς τοῦ β΄ ὅρου τεθῇ, καὶ τὸ παραγόμενον γ΄. ὅρος γένηται, ἔςαι ἡ Ἐξίσωσις $\chi^2 + 5\chi - 24 = 0$.

§. 193. Ἐὰν δὲ μία μόνον τιμὴ τοῦ χ ἐν τετραγωνικῇ δοθῇ Ἐξισώσει, τῇ διαιρέσει τῆς Ἐξισώσεως δὶ αὐτῆς προκύψει ἡ ἑτέρα. τουτέςι διαιρεθείσης τῆς εἰς τὸ ο ἀχθείσης Ἐξισώσεως διὰ τοῦ εἰς τὸ ο ἀχθέντος γνωςοῦ χ,. ἐπειδὴ τοῦτο ὁ ἕτερος ἐςὶ παράγων, διὰ τῆς διαιρέσεως ὁ ἕτερος πρόεισιν, εἰς πηλίκον γινόμενος, κατὰ τοὺς ὅρους τῆς διαιρέσεως. π. χ. τῆς Ἐξισώσ. $\chi^2 + 9\chi - 36 = 0$ ἡ ἑτέρα ῥίζα $= +3$. Ὥςε $\chi = +3$, καὶ $\chi - 3 = 0$. Δίελε τὴν Ἐξίσωσιν διὰ τοῦ χ 3, καὶ τὸ πηλίκον ἔςαι ἡ ἑτέρα ῥίζα. (Ἡ γὰρ Ἐξίσωσις τῷ πολλαπλασιασμῷ ἀμφοῖν τῶν ῥιζῶν παρήχθη.) Οἷον

$$
\begin{array}{r|l}
\chi - 3 = 0)\ \ \chi^2 + 9\chi - 36 = 0 & \chi + 12 = 0 \\
\chi^2 \pm 3\chi \qquad\quad & \\
\hline
+ 12\chi - 36 & \\
+ 12\chi - 36 & \\
\hline
0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Ὥςε καὶ $\chi + 12 = 0$. ἄρα $\chi = -12 =$ τῇ ἑτέρᾳ ῥίζῃ.

Αἱ μέχρι τοῦδε πᾶσαι θεωρίαι τὴν φύσιν καὶ ἰδιότητας τῶν ὑπερτέρων Ἐξισώσεων ἀνιχνεύουσιν ὅτι χρήσιμοι. Ἐπὶ δὲ τῶν τετραγ. μόνων Ἐξισ. οὐκ ἀναγκαῖαι.

Περὶ τῶν Κυβικῶν Ἐξισώσεων, καὶ περὶ τῶν ὑπερτέρων Ἐξισώσεων ἐν γένει.

§. 394. Κυβικαὶ δ᾽ Ἐξισώσεις ἀμιγεῖς, ἔνθα μόνον ὁ κύβος τῆς ἀγνώςου ποσότητος πάρεςιν, ἐξισούμενος γνωςῇ τινι ποσότητι. τουτ: ἔνθα χ^3 καθ᾽ ἑαυτὸ, οὐδεμία δ᾽ ἑτέρα τῶν ἀγνώςων. Εἰ δὲ τὸ χ^3 καὶ συνεργῷ συνῆπται, ἀχθείη ἂν, ἢ ἐν τοῖς ἀνωτέρω δέδεικται, μόνον ἐπὶ θάτερα. Ὡς $\chi^3 = 343$ ἐςὶν Ἐξίσ. Κυβικὴ ἀμιγής. Ὡσαύτως καὶ ἥδε. $3\chi^3 + 15 = 549$ τοιαύτη ἂν γένοιτο. $3\chi^3 = 549 - 15$. ἢ $3\chi^3 = 534$. καὶ $\chi^3 = \frac{534}{3} = 178$. ἢ καθόλου. $\chi^3 = a$, τοῦ a ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν, ἢ κλάσμα, ἢ οἱανδήτινα ἐγνωσμένην ποσότητα σημαίνοντος.

§. 395. Τῷ τοίνυν τὰς τοιαύτας τῶν Ἐξισώσεων ἐπιλύσειν μέλλοντι, ἐξακτέα ἡ κυβικὴ ῥίζα ἐξ ἀμφοῖν τῶν ποσοτήτων, κατὰ τὰ προηγηθέντα, τὴν τοῦ χ διωρισμένην τιμὴν δεικνύουσα, εἴτε καταφατικὴν, εἴτε ἀποφατικὴν οὖσαν, ἤπερ ἂν τὸ σημεῖον ἔχοι, τὸ πρὸ τῆς δεδομένης. Ἡ γὰρ κυβικὴ ῥίζα θάτερον τῶν δυοῖν εἶναι δύναται, ἀλλ᾽ οὐκ ἄμφω ἅμα. π. χ. $\chi^3 = 343$

$$\sqrt[3]{\chi^3} = \sqrt[3]{343}.$$

Καὶ $\chi = 7 =$ τῇ κυβικῇ ῥίζῃ τοῦ 343.

Παρα-

Παραπλησίως καὶ $\chi^3 = \frac{64}{125}$

$$\sqrt[3]{\chi^3} = \sqrt[3]{\tfrac{64}{125}}.\quad \text{ἢ}\quad \chi = \tfrac{4}{5}.$$

Ἐςι γὰρ $\sqrt[3]{64} = 4$. καὶ $\sqrt[3]{125} = 5$. Καὶ ἐν γένει. $\chi^3 = \alpha$

$$\chi = \sqrt[3]{\alpha}.$$

§. 396. Ἡ δὲ ῥίζα τῆς ἀγνώστου μία καὶ μόνη ἐπὶ τῶν κυβικῶν. (§. ἀνωτ.) Ἐπ' ἀμφοῖν δὲ τῶν Τετρ. Ἐξισ. δύω. Ἀλλὰ ζητεῖται, εἰ κἀνταῦθα πλείους εὑρεθεῖεν ῥίζαι. πάντως γε. τὰς γὰρ λοιπὰς τῶν ῥιζῶν, τὰς δύω (τρεῖς γὰρ ταῖς Κυβικαῖς ἀποδιδόαμεν Ἐξισ.) ῥᾷςα εὑρήσομεν, τὴν Ἐξίσωσιν διὰ τοῦ χ, τῆς εὑρεθείσης πρῶτον ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθείσης ῥίζης, διαιροῦντες, ἐξ οὗ Τετραγ. Ἐξίσ. προκύψει, κατὰ τὸν συνήθη ἐπιλυομένη τρόπον. Οἷον, ἔςω $\chi^3 = 64$

$\chi = \sqrt[3]{64} = 4$. Ἐπεὶ οὖν $\chi = 4$, ἔςαι $\chi - 4 = 0$. Καὶ ἐπειδὴ $\chi^3 = 64$, ἔςαι καὶ $\chi^3 - 64 = 0$. Ἀνάγκη δὲ $\chi^3 - 64 = 0$ διὰ τοῦ $\chi - 4 = 0$ διαιρέσιμον εἶναι. Ἐςι γὰρ τιμὴ τοῦ $\chi = 4$. Καὶ ἐὰν ἡ τιμὴ ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^3 - 64 = 0$ τοῦ χ ἀντικαταςῇ, ἡ Ἐξίσωσις χωρήσει εἰς τὸ μηδέν.

$$\begin{array}{l|l|l}
\chi - 4) & \chi^3 - 64 & \chi^2 + 4\chi + 16 \\
 & \chi^3 - 4\chi & \\
\hline
 & +4\chi^2 - 64 & \\
 & +4\chi^2 - 16\chi & \\
\hline
 & \quad +16\chi - 64 & \\
 & \quad +16\chi - 64 & \\
\hline
 & \quad\quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Ἡ

Ἡ οὖν προκύψασα Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις ἐςὶ $\chi^2 + 4\chi + 16 = 0$. Ἀνάγκη δὲ πᾶσα — 0 εἶναι, ὡς τοῦ Διαιρέτου, καὶ Διαιρετέου $= 0$ ὄντων. Ἐπιλυθήτω τοίνυν

$$\chi^2 + 4\chi + 16 = 0$$

$$\chi^2 + 4\chi = -16$$

$$\chi^2 + 4\chi + 4 = -16 + 4 = -12$$

$$\chi + 2 = \pm\sqrt{-12}$$

$$\chi = -2 \pm \sqrt{-12}.$$

Καὶ οὕτω προῆλθον καὶ αἱ λοιπαὶ δύω τιμαὶ τοῦ χ. Ὅθεν 1) $\chi = +4$. 2) $\chi = -2 + \sqrt{-12}$. 3) $\chi = -2 - \sqrt{-12}$. Ὧν αἱ δύω τελευταῖαι τιμαὶ τοῦ χ ἀδύνατοι ποσότητες. ἄρα καὶ ἄχρηςοι. Ἀλλ' ἐὰν μία τούτων τρὶς ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθῇ, ἀναγκαίως προκύψει καὶ ἡ Ἐξίσωσις. $\chi^3 = 64$ Ἡ μία τιμὴ τοῦ χ ἦν $-2 + \sqrt{-12}$. Ὃ ἐφ' ἑαυτ. πολλ.

$$-2 + \sqrt{-12}$$

$$-2\sqrt{-12} - 12$$

$$+4 - 2\sqrt{-12}$$

$$+4 - 4\sqrt{-12} - 12 = -8 - 4\sqrt{-12}$$

τὸ παραγόμ. αὖθις πολλ. μετὰ

$$-4\sqrt{-12} - 8$$

$$-2 + \sqrt{-12}$$

$$+48 - 8\sqrt{-12}$$

Ὥςε τὸ $+8\sqrt{-12} + 16$

παραγόμ. $+8\sqrt{-12} + 64 - 8\sqrt{12} - + 4$

Ὡςαύ-

Ὡσαύτως καὶ ἡ ἑτέρα ῥίζα $-2-\sqrt{-12}$ τρὶς ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθεῖσα δώσει $+64$ παραγόμενον. Καὶ πᾶσαι αἱ τρεῖς ῥίζαι εἰς τὸ 0 ἀχθεῖσαι, καὶ ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθεῖσαι, δώσουσιν αὖθις τὴν Ἐξίσωσιν $\chi^3 = 64$.

§. 397. Ἐν τῷ προτεθέντι παραδείγματι αἱ μὲν δύω τοῦ $\chi^3 = 64$ ῥίζαι ἦσαν ἀδύνατοι. Οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἀμιγῶν κυβικῶν Ἐξισώσεων, τῆς μιᾶς μόνον τῶν τριῶν δυνατῆς οὔσης, εἴτε καταφατικῆς, εἴτε ἀποφατικῆς. Ἐξισώσεως δὲ κυβικῆς ἀμιγοῦς προκειμένης, ἧς ἡ ῥίζα οὐκ ἔχει ἀκριβῶς ἀποδοθῆναι, τὸ ὡς ἔγγιςα αὐτῆς γενέσθαι πειρασόμεθα ἐν τῇ Ἐξαγωγῇ. Ἄλογος γὰρ τηνικαῦτα οὖσα πάντῃ πάντως ἀναπόδοτος. π. χ. ἐὰν $\chi^3 = 148$

$$\text{ἔςαι } \chi = \sqrt[3]{148} = 5,289\ldots$$

Παραδείγμ. Α΄. Ζήτησον ἀριθμὸν, οὗ ὁ ἡμιτετράγωνος ἐπ' αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιασθεὶς 256 παραγόμενον δώσει.

Λύσις. Ἔςω ὁ ἀριθμὸς $= \chi$. Οὗ ὁ τετράγ. $= \chi^2$. ὁδ' ἡμιτετράγ. $= \frac{\chi^2}{2}$. Ὅς (ἡμιτετ.) πολλαπλ. ἐπὶ χ ἐξισωθ. τῷ 256.

$$\text{ὥςε } \chi \cdot \frac{\chi^2}{2} = 256$$

ἢ

$$\frac{\chi^3}{2} = 256 \qquad \cdot 2$$

$$\chi^3 = 512$$

$$\chi = \sqrt[3]{512} = 8.$$ Εὑ-

θέντος

θεντοι $\frac{\chi^2}{2} = \frac{64}{2} = 32$. καὶ ἐπειδὴ $\chi = 8$, λέλυται τὸ ζητούμενον. Ἔςι γὰρ $32 \cdot 8 = 256$.

Β'. Γεωργός τις τυροὺς ὀρνίθων ἀνταλλαξάμενος ἀντὶ δύω τυρῶν λαμβάνει τρεῖς ὄρνιθας. Αἱ δ' ὄρνιθες τίκτουσιν ἑκάςη $\frac{1}{3}$ ὠῶν, ὅσος ὁ αὐτῶν ἀριθμός. Τῶν δ' ὠῶν ὑπ' αὐτοῦ πωλουμένων, 9 ὠὰ τοσούτων λεπτῶν ἀποδίδοται, ὅσα ὠὰ ἑκάςη τέτοκε. συνάγει δ' ἐκ τούτων 72 λεπτά. Πόσους οὖν τυροὺς, ὄρνιθας, καὶ ὠὰ ἐσχήκει;

Λύσις. Ἔςω ὁ τῶν τυρῶν ἀριθμὸς $= \chi$. Ἐπειδὴ οὖν ἀντὶ δύω τυρῶν 3 λαμβάνει ὄρνιθας, ἡ τῶν Τριῶν Μέθοδος δείξει τὰς ληφθείσας ὄρνιθας. ἤτοι 2 τυροί : χ τυρ. $=$ 3 ὄρνιθες : $\frac{3\chi}{2}$ ὀρν. Ἑκάςη ὄρνις $\frac{1}{3}$ ὠῶν τίκτει, ἔςαι αὐταί. Ὁ ἀριθμὸς ἄρα τῶν ὀρνίθων μετὰ τοῦ $\frac{1}{3}$ πολλαπλασιασθεὶς δίδωσι τὸν ἀριθμὸν τῶν ὠῶν ἑκάςης ὄρνιθος. τουτέςι $\frac{3\chi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3\chi}{6} = \frac{1}{2}\chi$. ἐκ τούτων διὰ τῆς ἑχομένης Ἀναλογίας εὐχερῶς ἂν εὕροιμεν, πόσα ὠὰ ἅπασαι τετόκασιν αἱ ὄρνιθες. 1 ὄρνις : $\frac{1}{2}\chi$ ὠὰ $= \frac{3}{2}\chi$ ὄρνιθες : $\frac{3}{4}\chi^2$ ὠὰ, ἤτοι $\frac{3}{4}\chi^2$ ὠὰ τετόκασιν. Ἐκ τούτων πωλεῖ 9 τοσούτων λεπτῶν, ὅσα ὠὰ ὑφ' ἑκάςης ἐτέχθη. Ἐτέχθη δὲ ὑφ' ἑκάςης $\frac{1}{2}\chi$. Ἄρα 9 ὠὰ εἰσὶν ἄξια λεπτῶν $\frac{1}{2}\chi$. Αὖθις δὲ διὰ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου ἀνακαλύψομεν, πόσου ἅπαντα τετίμηται τὰ ὠά.

$$9 \text{ ὠὰ} : \tfrac{1}{2}\chi \text{ λεπτ.} = \tfrac{3}{4}\chi^2 \text{ ὠὰ} : \frac{3\chi^3}{8 \cdot 9} \text{ λεπτ.}$$

$= \frac{\chi^3}{24} =$ τῇ τιμῇ τῶν ὠῶν ἀπάντων.. Ὅθεν κα-

τὰ

τὰ τὸ Πρόβλημα $\frac{\chi^3}{24} = 72$

$$\frac{}{\chi^3 = 1728} \cdot 24$$

$$\chi = \sqrt[3]{1728} = 12.$$ Ἐπειδὴ οὖν χ ἦν ὁ ζητούμενος τῶν τυρῶν ἀριθμὸς, ἔσχεν ἄρα 12 τυρούς. Ἔλαβε $\frac{3}{2}\chi$ ὄρνιθας $= \frac{3 \cdot 12}{2} = 18$. Ἐκάσημέτικε $\frac{1}{2}\chi$ ὠὰ $= \frac{1 \cdot 12}{2} = 6$. ἅπαντα τὰ ὠὰ ἦν $\frac{3}{4}\chi^2 = \frac{3 \cdot 12 \cdot 12}{4} = 108$. ἀπέδοτο 9 ὠὰ $\frac{1}{2}\chi$ λεπτ. ἢ $\frac{1 \cdot 12}{2} = 6$ λεπτ. Ὥς ἀναγκαίως 108 ὠὰ 72 λεπτῶν ἄξια.

§. 398. Ἐξισώσεις δ' ἐντελεῖς Κυβικαὶ, ἐν αἷς πλὴν τοῦ Κύβου τῆς ἀγνώσου, καὶ ὁ ταύτης τετράγωνος. καὶ ἡ α. αὐτῆς δύναμις, καὶ ἔτι μία δεδομένη Ποσότης. Ὡς $\chi^3 + 9\chi^2 + 20\chi = -12$. Ἥτις εἰς τὸ 0 ἀχθεῖσα ἐςὶ $\chi^3 + 9\chi^2 + 20\chi + 12 = 0$. ἢ ἐν γένει. $\chi^3 \pm \pi\chi^2 \pm \rho\chi \pm \beta = 0$. Ἔνθα π, ρ, καὶ β ἀριθμοὺς γνωςοὺς, καταφατικοὺς, ἢ ἀποφατικοὺς, (διὰ τοῦτο γὰρ ἄμφω τὸ σημεῖα προκεχάρακται), ἢ καὶ κλάσματα παριστῶσιν. Ἐπὶ τῆς τῶν τοιούτων ἐπιλύσεως τὰς διαφόρους παραδραμόντες μεθόδους, δι' ὧν τὰς τῆς Ἐξισώσεως εὑρίσκουσι ῥίζας, μέθοδόν τινα τῆς τῶν τοιούτων Ἐξισώσ. ἐπιλύσεως ὑποδείξομεν.

§. 399. Ἐπιςάσεως ἄξιον, ὅτι καὶ αὗται, καθὰ καὶ περὶ τῶν ἀμιγῶν τοῦ γ. Βαθμοῦ λέλεκται, τρεῖς τιμὰς τοῦ χ, ἢ τρεῖς ῥίζας ἔχουσιν, οὐκ ἀεὶ μέντοι, ὡς ἐπ' ἐκείνων, τῶν δύω ῥιζῶν ἀδυνάτων οὐσῶν. Δυνατὸν γὰρ καὶ τὰς τρεῖς δυνατὰς εἶναι, καὶ τοῦτο οὐκ ὀλιγάκις. π. χ. $\chi^3 + 9\chi^2 + 20\chi + 12 = 0$. ταύτῃ τρεῖς αἱ δυναταὶ ῥίζαι $\chi = -1$, $\chi = -$ [illegible], $\chi = -6$. Ἡδ' Ἐξίσωσις ἀνέφυ τῷ πολλαπλασισμῷ τῶν τριῶν παραγόντων, εἰς τὸ ο ἀχθέντωνὶ ἤτοι $(\chi + 1) \cdot (\chi + 2) \cdot (\chi + 6)$. Καὶ πᾶσαν δὲ Κυβικὴν Ἐξίσωσιν θεωρεῖν ἔνι, ὡς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τριῶν παραγόντων, ἔνθα αἱ τιμαὶ τοῦ χ εἰς τὸ ο ἤχθησαν, παραχθεῖσαν, καίτοι τῶν τριῶν τοῦ χ τιμῶν ἐνίοτε τῶν αὐτῶν εἶναι δυναμένων. Ὥς ἐν τῇ Ἐξισώσει, $\chi^3 - 6\chi^2 + 12\chi - 8 = 0$. τὸ $\chi = 2$ τυγχάνει. Ἀλλ' ἡ Ἐξίσωσις ἀνέψυ τῷ τριττῷ πολλαπλασιασμῷ τοῦ $\chi - 2 = 0$.

Τεθήτω ἐν γένει ἡ τριττὴ τοῦ χ τιμὴ, ἢ μᾶλλον, ἑκάςης ῥίζης τῆς Ἐξισώσεως, τῆς τῷ χ δεικνυμένης, καίτοι τῶν τριῶν διαφόρων ἐχουσῶν εἶναι, καὶ πολλαπλασιασθήτωσαν πρὸς ἀλλήλας αἱ τρεῖς τιμαί. Ἔςω $\chi = -\pi$. Καὶ $\chi = -\varrho$. καὶ $\chi = -\sigma$. Ὥςε $\chi + \pi = 0$. Καὶ $\chi + \varrho = 0$. Καὶ $\chi + \sigma = 0$. Πολλαπλ.

$$\begin{array}{r}
\chi + \pi = 0 \\
\chi + \varrho = 0 \\
\hline
+ \varrho\chi + \pi\varrho \\
\chi^2 + \pi\chi \qquad\quad \\
\hline
\chi^2 + \pi\chi + \varrho\chi + \pi\varrho \\
\chi + \sigma \\
\hline
\sigma\chi^2 + \sigma\pi\chi + \sigma\varrho\chi + \sigma\pi\varrho \\
\varrho\chi^2 \qquad + \pi\varrho\chi \qquad\quad \\
\chi^3 + \pi\chi^2 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
\chi^3 + (\pi + \varrho + \sigma)\chi^2 + (\sigma\varrho + \pi\varrho + \sigma\pi)\chi + \\
\sigma\pi\varrho = 0
\end{array}$$

Καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ προτεθέντος καὶ αἱ τρεῖς τοῦ χ τιμαὶ, ἢ καὶ αἱ τρεῖς ῥίζαι, ἦσαν ἀποφατικαί.

Εἰ

Εἰ δὲ καταφατικαὶ εἶεν, τὸ ἐκ τῶν τριῶν παραγόμενον εἴη ἂν

$$\chi^3 - (\sigma + \pi + \rho)\chi^2 + (\sigma\rho + \pi\rho + \sigma\pi)\chi - \sigma\pi\rho = 0.$$

§. 400. Αἱ τῆς ἐν γένει ταύτης Ἐξισώσεως ἰδιότητες, ἀκριβῶς θεωρουμένης, λίαν εἰσὶν ἀξιοσημείωτοι, ἢ ὥστε ταύτας παρελθεῖν, τῶν ῥιζῶν ἀμέλει δυνατῶν οὐσῶν, ὡς ἐνταῦθα ταύτας παρελάβομεν.

1) Πασῶν τῶν ῥιζῶν ἀποφατικοῦν οὐσῶν, πάντες οἱ ὅροι τῆς εἰς τὸ 0 ἀχθείσης Ἐξισώσεως ἔχουσι πρὸ ἑαυτῶν τὸ $+$.

Καταφατικῶν δὲ πάντων οὐσῶν, τὰ σημεῖα ἐναλλὰξ ἐπαμείβεται. Ἐκ τούτων συνάγουσιν, ὅτι, ὁσάκις τὰ σημεῖα τῆς εἰς τὸ 0 ἀχθ. Ἐξισ. ἐπαμείβεται, καὶ τοσαῦται καταφατικαὶ ῥίζαι. ὁσάκις δὲ τὰ αὐτὰ σημεῖα, εἴτε $+$, εἴτε $-$ ἀλλήλοις ἕπονται, καὶ τοσαῦται ῥίζαι ἀποφατικαὶ ταύτῃ ἐνυπάρχουσιν· οὕτω τῆς Ἐξισώσεως $\chi^3 - 6\chi^2 + 11\chi - 6 = 0$, καὶ αἱ τρεῖς ῥίζαι καταφατικαί. τὰ γὰρ σημεῖα τρὶς ἐπαμείβεται. Αἱ δὲ ῥίζαι εἰσὶ $+1$, $+2$, καὶ $+3$. Τῆς δὲ $\chi^3 + 6\chi^2 + 11\chi + 6 = 0$, πᾶσαι ἀποφατικαί. Τρὶς γὰρ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἀλλήλοις ἕπεται. Εἰσὶ δὲ καὶ ταύτῃ ῥίζαι ταῖς ἀνωτ. αἱ αὐταί. -1, -2, καὶ -3. Ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^3 - \chi^2 - 10\chi - 8$ ἅπαξ τὰ σημεῖα ἐπαμείβεται. Εὐθὺς γὰρ ἐν ἀρχῇ ἢ τοῦ $+$ εἰς τὸ $-$ ἐπαμοιβή. Ἕπεται δὲ δὶς εἶτα τὰ αὐτὰ σημεῖα. Καὶ ἕξει ἄρα τῶν τριῶν ῥιζῶν τὴν μὲν μίαν καταφατικήν, τὰς δὲ λοιπὰς δύω ἀποφατικάς, ἤτοι -1, -2, καὶ $+4$.

2) Ἐν τῷ β'. ὅρῳ τούτων (τῶν Ἐξισ.) τὸ κεφάλαιον πασῶν τῶν ῥιζῶν, ἢ μᾶλλον, τὸ κεφάλαιον τῶν ποσοτήτων, τῶν ταῖς ῥίζαις ἀντικειμένων, ἔνεστιν. Εἰδὴ

Εἰδὴ τῶν ῥιζῶν τὰ σημεῖα διάφορα, θεωρητέον καὶ τὸ κεφάλαιον ἀλγεβραϊκῶς. Καὶ διὰ τῆς προσθέσεως γὰρ τῶν καταφ. καὶ ἀποφ. Ποσοτήτων κεφάλαιόντι προκύπτει.

3) Ὁ γ'. ὅρος περιέχει τὸ κεφάλαιον τῶν ῥιζῶν, ἀνὰ δύω εἰλημμένων.

4) Καὶ τελευταῖον ὁ δ'. ὅρος, ἡ τελευταῖος τὸ παραγόμενον τῶν τριῶν ῥιζῶν. Ὅπερ μάλιϛα σημειώσεως ἄξιον. διὰ τούτου γὰρ εἰς ἐπίλυσιν τῶν τοιούτων Ἐξισ. προδιατεθέντες, καὶ τὴν τῶν ὑπερτέρων οὐ μετὰ πολλοῦ περανοῦμεν τοῦ πόνου.

§. 401. Πρὸ πάντων δὲ, ἐὰν ἡ Ἐξίσωσις οὕτως ἔχῃ, ὥϛε τὸ χ^3 ἐν ἀρχῇ μόνον εἶναι, καὶ τοὺς συνεργοὺς τῶν ἑτέρων ποσοτήτων μετὰ τοῦ ἐσχάτου ὅρου ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς εἶναι, δῆλον, ὅτι ἡ τοιαύτη Κυβικὴ Ἐξίσωσις, εἰ λογικὰς ἔχει ῥίζας, ἑτέρας οὐχ ἕξει, ἢ ὧν ὁ πολλαπλασιασμὸς τὸ ἔσχατον παρήγαγε παραγόμενον. Ἔνθεντοι τοῦ ἐσχάτου παραγομένου εἰς παράγοντας τοὺς προσήκοντας ἀναλυθέντος, τεθήτωσαν (οἱ παράγ.) καταφατικοὶ, καὶ ἀποφατικοὶ (τὰ σημεῖα τῆς Ἐξισ. ἐμφαίνουσι τοῦτο, ὡς εἴρηται) ἐν τῇ Ἐξισ. ἀντὶ τοῦ χ οὕτως, ὡς ἐν μὲν τῷ χ^3 τοὺ παράγοντα εἰς κύβον ἠρμένον, ἐν δὲ τῷ χ^2 εἰς τετράγωνον, καὶ τῷ συνεργῷ πεπολλαπλασιασμένον εἶναι, ἐν δὲ τῷ χ μόνον τῷ συνεργῷ (πεπολλ. εἶναι) Τούτοις δὲ καὶ τῆς γνωϛῆς ποσότητος τοῦ ἐσχάτου ὅρου προστεθείσης, ἀνάγκη διὰ τοῦ παράγοντος, εἰ ῥίζα τῆς Ἐξισ. ἐϛὶ, πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς ἀναιρεθῆναι, τουτ. τὴν Ἐξισ. εἰς τὸ μηδὲν χωρῆσαι. Εἰ δ' οὐδεὶς τῶν παραγόντων τοῦτο ποιῆσαι δυνατὸς, οὐδεμίαν λογικὴν ῥίζαν τότε ταύτῃ (τῇ Ἐξ.) παρεῖναι δείκνυσι. Μιᾶς δὲ ῥίζης εὑρεθείσης, ῥᾶσα τὰς λοιπὰς ἀνακαλύψομεν δύω τῇ τῆς Ἐξισώσεως διαιρέσει διάτινος παράγοντος

 αὐτῆς,

αὐτῆς, ὅς προκύπτει, ἐὰν τὸ ὡς ῥίζα εὑρεθὲν ἐπὶ θάτερα μετατιθῆται, τῷ χ ἀντικειμένῳ τῷ σημείῳ συμπλεκόμενον. τηνικαῦτα γὰρ ἡ ἐκ τούτου τετραγωνικὴ Ἐξίσ. ῥαδίως ἐπιλύεται. Οἷον $\chi^3 + 4\chi^2 - 4\chi - 16 = 0$. Ἐνταῦθα δὶς ἕπεται τὰ αὐτὰ σημεῖα, καὶ ἅπαξ ἀμείβεται. Τὸ γὰρ $+ \chi^3$ καὶ $+ 4\chi^2$ ἕπονται ἀλλήλοις, τὰ αὐτὰ ἔχοντα σημεῖα, καὶ -4χ καὶ -16 ὡσαύτως. Ἀλλὰ $+ 4\chi$ καὶ $- 4\chi$ ἀμείβει τὰ σημεῖα. Εἰσὶν ἄρα δύω ῥίζαι ἀποφατικαί, καὶ μία μόνη καταφατική. Ἀλλ' ἀναλύσωμεν ἤδη τὸν 16 εἰς τοὺς κατ' αὐτὸν παράγοντας, παραλαμβάνοντες τὸν ἕτερον μετὰ τὸν ἕτερον ἀντὶ τοῦ χ. Καί, ἐπεὶ αἱ πλείους τῶν ῥιζῶν ἀποφατικαί, μόνον τὰς ἀποφατικὰς τιμάς.

Παράγοντες τοῦ ἐσχάτου ὅρου	Τὸ ἐκ τῆς Ἐξισώσ. προκύπτον, ἐὰν ἡ τιμὴ τῶν παραγόντων, ἢ οἱ παράγοντες, τοῦ χ ἀντικαταστῶσι, καὶ αἱ ἀποφατικαί, καὶ καταφ. ποσότητες αναιρῶσιν ἀλλήλας.
± 1	τοῦ -1 ἀντὶ τοῦ χ τεθέντ. προκ. -9
± 2	τοῦ -2 . . 0
± 4	τοῦ -4 . . 0
± 8	τοῦ -8 . . -240
± 16	τοῦ -16 . . -3024

Εὕρηνται οὖν δύω ῥίζαι, ἤτοι -2, καὶ -4. διὰ τούτων γὰρ ἀντὶ τοῦ χ τεθέντων, ἡ Ἐξίσωσις εἰς τὸ μηδὲν οἴχεται. Ἀλλ' ἐπὶ τῶν Κυβικῶν Ἐξισ. καὶ μιᾷ ῥίζῃ ἀγαπητέον, ὡς τῶν ἑτέρων διὰ ταύτης ἀνακαλυπτομένων. Οἷον τεθήτω τὴν -2 εὑρεθῆναι. Ὥστε, ἐὰν $\chi = -2$, ἔστι $\chi + 2 = 0$ Διὰ τούτου τοῦ τῆς Ἐξισ. παράγ. διαιρ. ἡ Ἐξίσ.

$\chi + 2)$

$$\begin{array}{l|l}
\chi+2)\quad \chi^3+4\chi^2-4\chi-16 & \chi^2+2\chi-8 \\
\qquad\quad\ \ \chi^3\pm 2\chi^2 & \\
\hline
\qquad\qquad\ \ +2\chi^2-4\chi & \\
\qquad\qquad\ \ \pm 2\chi^2\pm 4\chi & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -8\chi-16 & \\
\qquad\qquad\qquad \mp 8\chi\mp 16 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\ \ 0 \qquad 0 &
\end{array}$$

Ἡ οὖν τετραγωνικὴ Ἐξίσ. ἐςὶ

$$\chi^2+2\chi-8=0$$

$$\chi^2+2\chi=+8$$

$$\chi^2+2\chi+1=+8+1=9$$

$$\chi+1=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

$$\chi=-1\pm 3$$

Ὥςε χ. α′. $=-1+3=+2$. καὶ β′. $=-1-3=-4$. Αἱ ἄρα ῥίζαι σὺν τῇ πρώτως εὑρεθείσῃ τυγχάνουσι -2, $+2$, καὶ -4. Ἡ δ' Ἐξίσ. ἀνέφυ τῷ πολλαπλ. τῶν ἑξῆς Ποσοτήτων $\chi+2=0$, καὶ $\chi-2=0$, καὶ $\chi+4=0$. ὡς ἐκ τῆς πείρας ἑκάςῳ δῆλον γενήσεται, ταύτας πολλαπλασιάσαντι.

Ζήτησον τὰς ῥίζας τῆς Ἐξισώσ. $\chi^3-10\chi^2+31\chi-30=0$; πάσας καταφατικὰς οὔσας, ὡς τῶν σημείων τρὶς ἐπαμειβομένων. Ὁ 30 διατέμνεται εἰς παράγοντας τούςδε. 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15.

Πειρασώμεθα οὖν αὖθις τοὺς παράγ. καταφατικοὺς λαμβάνοντες. Καὶ αἱ ῥίζαι γὰρ τοιαῦται. Ἐὰν τὸ $\chi = +1$ τεθῇ, προκύψει ἐκ τῆς Ἐξισ. -8. Ὥςε 1 οὐκ ἂν εἴη ῥίζα τῆς Ἐξισ. Ἐὰν δὲ $\chi = +2$, πάντες οἱ ὅροι ἀναιρήσουσιν ἀλλήλους, εἰς τὸ μηδὲν χωροῦντες. Ἄρα $+2$ ἐςὶ μία ῥίζα τῆς Ἐξισ. Καὶ ἑπομένως $\chi - 2 = 0$.

Δίελε τὴν Ἐξίσ. διὰ τούτου

$$
\begin{array}{l|l}
\chi - 2 \,)\, \chi^3 - 10\chi^2 + 31\chi - 30 & \chi^2 - 8\chi + 15. \\
\quad\ \ \chi^3 \mp 2\chi^2 & \\
\hline
\qquad -8\chi^2 + 31\chi & \\
\qquad \pm 8\chi^2 \pm 16\chi & \\
\hline
\qquad\qquad + 15\chi - 30 & \\
\qquad\qquad + 15\chi - 30 & \\
\hline
\qquad\qquad\ \ 0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

Ὥςε

$$\chi^2 - 8\chi + 15 = 0$$

$$\chi^2 - 8\chi = -15$$

$$\chi^2 - 8\chi + 16 = -15 + 16 = +1$$

$$\chi - 4 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$\chi = +4 \pm 1$$

Ὥςε χ. α΄. $= 4 + 1 = 5$

καὶ β΄. $4 - 1 = 3$

Αἱ ῥίζαι ἄρα $+2$, $+3$, $+5$, ἣ ἡ Ἐξισ. πα-

ρήχθη

ῥήχθῃ τῷ Πολλ. τοῦ $\chi - 2 = 0$, $\chi - 3 = 0$, $\chi - 5 = 0$.

§. 402. Καὶ τοῦτον τοίνυν τὸν τρόπον τὰς λογικὰς τῶν Ἐξισ. ῥίζας ζητοῦμεν, ἐὰν χ^3, ἢ καὶ ἐν γένει (τοῦτο γὰρ ἐπὶ πασῶν τῶν ὑπερτέρου βαθμοῦ Ἐξισ. χώραν ἔχει) ἡ ὑπερτάτης δυνάμεως ἄγνωςος ποσότης καθ' ἑαυτὴν ᾖ, καὶ οἱ τῶν λοιπῶν ὅρων συνεργοὶ κλασματικοὶ μὴ ὦσιν. Ἀλλὰ καὶ τὰ κλάσματα δυνάμεθα, τὴν Ἐξίσ. εἰς ἑτέραν τρέποντες, ἀποσκευάσασθαι. Ἐπειδὴ δὲ λόγος περὶ τῆς τῶν Ἐξισ. ἐγένετο τροπῆς, ῥητέον καὶ περὶ τούτου βραχέα τινά. Χρησόμεθα δὴ τοῖς δ'. τῶν ὑπολογισμῶν εἴδεσι, Προσθ. Ἀφαιρ. Πολλ. καὶ Διαιρ. ἐπὶ τῶν Ἐξισ. εἰς τὸ καινὰς παραγαγεῖν, ὧν τῶν ῥιζῶν εὑρεθεισῶν, καὶ τῆς προτέρας τῆς δοθείσης αἱ ῥίζαι εὐχερῶς προχειρίζονται. Πᾶσα δὲ ἡ μέθοδος ἐν τούτῳ ςρέφεται, ἐν τῷ δεξιότητα ἔχειν ἀμέλει ἐν τῷ θάτερον ἀντὶ θατέρου ἀντικαθιςᾷν, ἤτοι ἴσον ἀντὶ ἴσου. χρησόμεθα δὲ οὐχ ἁπλῶς, ἀλλ' ᾗπερ τὴν τῶν ῥιζῶν τῆς Ἐξισ. εὕρεσιν ῥᾷον ἀνακαλύπτειν ἡγοίμεθα. Καὶ ἐν μὲν τῇ προσθέσει, τῷ χ ἑτέραν τινὰ ἐγνωσμένην προςιθέντες ποσότητα, ἐξισώσομεν ἄμφω ἀγνώστῳ ἑτέρᾳ, κατὰ τὸ δοκοῦν, ἐν δὲ τῇ Ἀφαιρέσει ἀφαιροῦντες ἐκείνην. Οἷον, εἰ δέοι τὴν Ἐξισ. $\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi + 15$ διὰ τῆς προσθέσεως εἰς ἑτέραν τρέψαι, πρόσθες τῷ χ ἕτερον δεδομένον ἀριθμὸν, καὶ εἶτα ἐξίσωσον αὐτὰ τῷ ψ. Ὡς $\chi + 3 = \psi$. Ἔςω γὰρ χ, ὅ, τι ἂν βούλῃ. ἐάν τι τούτῳ προςεθῇ, ἔςαι ἄμφω ἴσα ἑτέρᾳ ποσότητι ἀγνώςῳ. Ἔςω οὖν $\chi + 3 = \psi$. ἄρα $\chi = \psi - 3$. Ἤδη ἀντὶ τοῦ χ ἀντικατάςησον πανταχοῦ τῆς Ἐξισ. τῆς δοθείσης τὸ $\psi - 3$. Ἤτοι

ἀντὶ

$$
\begin{array}{lllr}
\text{ἀντὶ τοῦ } \chi^3 \text{ τὸ} & (\psi - 3)^3 & = & \psi^3 - 9\psi^2 + 27\psi - 27 \\
- 7\chi^2 = & (\psi - 3)^2 \cdot - 7 & = & - 7\psi^2 + 42\psi - 63 \\
+ 7\chi = & (\psi - 3) \cdot 7 & = & + 7\psi - 21 \\
+ 15 = & & = & + 15 \\
\hline
0 = & & &
\end{array}
$$

πρόσθες τοὺς ὅρους τῆς καινῆς Ἐξισ. οὕτω. $\psi^3 - 16\psi^2 + 76\psi - 96$

Ἐνταῦθα τὸ $\psi - 3$, α΄. εἰς κύβον ἀρθὲν καταγέγραπται. εἶτα ἐτετραγωνίσθη, καὶ οἱ ὅροι πάντες τοῦ Τετραγώνου τῷ συνεργῷ τῆς προτέρας ἐπολλαπλασιάσθησαν Ἐξισώσεως. γ΄. τὸ $\psi - 3$ ἐπολλαπλασιάσθη μόνον ἐπὶ τὸν συνεργὸν τοῦ χ, καὶ τελευταῖον ἡ γνωςὴ ποσότης, ὡς καὶ πρότερον, ἐγκεχάρακται, τῶν ἴσων δυνάμεων ὑπὸ τὰς ἴσας τεθεισῶν, καὶ τῶν ὅρων ἁπάντων προςεθέντων. Μία οὖν τῶν ῥιζῶν τῆς καινῆς Ἐξισώσεως, ἢ μία τιμὴ τοῦ ψ ἐςὶν $= + 2$. Ἐπεὶ δὲ $\chi + 3 = \psi$. ἐπειδὴ $\psi = 2$, ἔςαι καὶ $\chi + 3 = 2$. (§. 48 δ΄.) Ὥςε $\chi = 2 - 3 = - 1$. Ἔνθεντοι μία τιμὴ τοῦ $\chi = - 1$. Ἐξ αὐτῆς δ' εὑρίσκομεν καὶ τὰς λοιπάς. Εἰσὶ δὲ $+ 5$. καὶ $+ 3$. Εἰ δὲ δι' Ἀφαιρέσεως τρέπεται, ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῆς ἀγνώςου γνωςήν τινα, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον Ἐξίσωσιν καινὴν παράγομεν. Οἷον, $\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi + 15 = 0$. Ἔςω $\chi - 3 = \psi$. Ἔςιν ἄρα $\chi = \psi + 3$. Ἐκ ταύτης γενέσθω ἡ καινὴ Ἐξίσ. ὡς πρότερον. Ἔνθεντοι

$$
\begin{array}{lllr}
\text{ἀντὶ τοῦ } \chi^3 \text{ τὸ} & (\psi + 3)^3 & = & \psi^3 + 9\psi^2 + 27\psi + 27 \\
- 7\chi^2 = & (\psi + 3)^2 \cdot - 7 & = & - 7\psi^2 - 42\psi - 63 \\
+ 7\chi = & (\psi + 3) \cdot 7 & = & + 7\psi + 21 \\
+ 15 = & & & + 15 \\
\hline
0 = & & & \psi^3 + 2\psi^2 - 8\psi \quad 0
\end{array}
$$

Ὑπο-

Ὑπολείπεται οὖν $\psi^3 + 2\psi^2 - 8\psi$. Ὁ δ' ἔσχατος ὅρος διὰ τῆς τροπῆς τῆς Ἐξισ. ἐκπέπτωκε. Σημειωτέον οὖν, ὅτι, εἰ τοῦτο συμβαίνει, μία τῶν ῥιζῶν $= 0$. Ἐπεὶ γὰρ ὁ γ'. ὅρος τὸ παραγόμενον πασῶν ἐςι τῶν ῥιζῶν, ἀναγκαίως ἐκπίπτει ὁ ὅρος τῷ 0 πολλαπλασιασθείς. Ὥςε $\psi = \pm 0$. Ἀδιάφορον δ' ὁπότερον τῶν σημείων ἐνταῦθα τεθῇ. Ὅτι $+ 0$ καὶ $- 0$ τὸ αὐτὸ, ἤτοι μηδέν. Ἦν δὲ $\chi - 3 = \psi$. ἄρα καὶ $\chi - 3 = 0$, ἀντὶ τοῦ ψ τοῦ ἴσου ἀντικαταςάντος. Καὶ ἑπομένως $\chi = 0 + 3 = 3$. Ἔςι τοίνυν μία τῶν ῥιζῶν τοῦ $\chi = 3$. Τὰς δὲ λοιπὰς αὐτίκα εὑρήσομεν τῇ διαιρέσει τῆς πρώτης Ἐξισ. διὰ τοῦ $\chi - 3 = 0$. Ὁ αὐτὸς τρόπος ἐςὶν ἐν τῇ τῆς Ἐξισ. τροπῇ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὡς ἡ Ἐξίσ. $\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi + 15$ πολλαπλ. διὰ 2, ὅ ἐςιν, ἡ ἄγνωςος ποσ. χ πολλαπ. διὰ 2, καὶ τὸ παραγ. ἐξισωθήτω ἑτέρᾳ καινῇ ἀγνώςῳ ποσότητι, οὕτω. $2\chi = \psi$. Ὥςε $\chi = \frac{\psi}{2}$. Ἀντικαταςήτω τὸ εὑρεθὲν ἴσον $\frac{\psi}{2}$ τοῦ χ ἐν τῇ Ἐξ.

$$
\begin{aligned}
\text{Ἤτοι } \chi^3 &= \left(\frac{\psi}{2}\right)^3 = \frac{\psi^3}{8}\\
-7\chi^2 &= \left(\frac{\psi}{2}\right)^2 \cdot -7 = -7\frac{\psi^2}{4}\\
+7\chi &= \frac{\psi \cdot 7}{2} = + \frac{7\psi}{2}\\
+15 &= \qquad\qquad + 15\\
\hline
0 &= \frac{\psi^3}{8} - \frac{7\psi^2}{4} + \frac{7\psi}{2} + 15.
\end{aligned}
$$

Εἰ

Εἰ δ' ἡ τοιαύτη Ἐξίσ. $\chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ διὰ τοῦ δ πολλαπλασιασθῇ, εἴη ἂν

$$\delta\chi = \psi. \text{ Ὥςε } \chi = \frac{\psi}{\delta}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{ἄρα } \chi^3 & = & +\frac{\psi^3}{\delta^3} \\ +\alpha\chi^2 & = & +\frac{\alpha\psi^2}{\delta^2} \\ +\beta\chi & = & +\frac{\beta\psi}{\delta} \\ +\gamma & = & +\gamma \\ \hline o & = & \frac{\psi^3}{\delta^3} + \frac{\alpha\psi^2}{\delta^2} + \frac{\beta\psi}{\delta} + \gamma \end{array}$$

Ἐὰν δὲ τῆς Ἐξισ. ταύτης πάντας τοὺς ὅρους τῷ δ^3 πολλαπλασιάσωμεν,

$$o = \frac{\psi^3}{\delta^3} + \frac{\alpha\psi^2}{\delta^2} + \frac{\beta\psi}{\delta} + \gamma$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \;.\; \delta^3$$

ἔςαι $o = \psi^3 + \delta\alpha\psi^2 + \delta^2\beta\psi + \delta^3\gamma$.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι, εἰ ἡ ῥίζα τῆς Ἐξισώσ. ἐπίτινα δοθέντα πολλαπλασιασθῆναι πρόκειται ἀριθμὸν, καὶ οὕτω χωρεῖν δυνάμεθα, τουτ. ἕκαςον ὅρον τῆς Ἐξισ. ἐπὶ τὰς δυνάμεις τοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζειν, ἐκ Γεωμετρικῆς ἀναφυομένας Προόδου, ἧς ὁ α'. ὅρος $=$ 1, ὁ β'. ὁ ἀριθμός. ὁ γ'. ὁ τούτου Τετράγωνος. ὁ δ'. ὁ τούτου Κύβος, κτ π. χ. εἰ πρόκειται πολλαπλασιάσαι τὴν ῥίζαν τῆς εἰς τὸ ο ἀχθείσης Ἐξισ $\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi + 15$ ἐπὶ τὸν 2, ποιήσομεν τοῦτο, ὑποθέντες ὑπὸ τοὺς ὅρους Γεωμ. Πρόοδον, ἧς ὁ α'. ὅρος 1, οἱ δὲ λοιποὶ αἱ δυνάμεις τοῦ ἀριθμοῦ 2, καὶ ἕκαςον

καςον ὅρον τῆς Ἐξισ. τῷ ὑπ' αὐτὸν κειμένῳ τῆς προόδου ὅρῳ πολλαπλασιάσαντες. Ὥςε, εἰ $2\chi = \psi$, οὕτω καταγράψομεν τὴν Ἐξίσωσιν

$$\psi^3 - 7\psi^2 + 7\psi + 15 = 0$$

1, 2, 4, 8. Γεωμ. πρόοδος
πολλαπ. τοὺς ——————— τῶν δυν. τοῦ 2
ὅρ. τῆς Ἐξ. $\psi^3 - 14\psi^2 + 28\psi + 120 = 0$
μετὰ τούτων

Τῷ αὐτῷ τρόπῳ τρέπομεν τὰς Ἐξισ. καὶ διὰ τῆς Διαιρέσεως. Τραπήτω αὖθις ἡ αὐτὴ Ἐξίσ. $\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi + 15$. Ὥςε, ἐπεὶ $\frac{\chi}{2} = \psi$, ἔςιν ἄρα $\chi = 2\psi$

Γενέσθω ἤδη ἀντικατάςασις

$$\begin{array}{rcl} \chi^3 = (2\psi)^3 & = & 8\psi^3 \\ -7\chi^2 = (2\psi)^2 \cdot -7 & = & -28\psi^2 \\ +7\chi = (2\psi) \cdot 7 & = & +14\psi \\ +15 & = & +15 \\ \hline 0 & & 8\psi^3 - 28\psi^2 + 14\psi + 15 \end{array}$$

Καὶ ἐν γένει $\chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$. Ἐὰν $\frac{\chi}{\delta} = \psi$ τεθῇ, ἔςαι $\chi = \delta\psi$. Ὥςε ἀντικαταςάντος, ἔςαι

$$\begin{array}{rcl} \chi^3 = (\delta\psi)^3 & = & +\delta^3\psi^3 \\ +\alpha\chi^2 = (\delta\psi)^2\alpha & & +\delta^2\psi^2\alpha \\ +\beta\chi = (\delta\psi)\beta & & +\delta\psi\beta \\ +\gamma & = & +\gamma \\ \hline 0 & = & \delta^3\psi^3 + \delta^2\psi^2\alpha + \delta\psi\beta + \gamma \end{array}$$

Ἐνταῦθα γίνεται τὸ ἀνάπαλιν τῆς προτέρας πράξεως. Ἤτοι, τῆς Γεωμετρ. Σειρᾶς ἀναςραφείσης, καὶ ὑπὸ

μὲν

μὲν τὸν ἔσχατον ὅρον τῆς ι τεθείσης, ὑπὸ δὲ τοὺς λοιποὺς τῶν δυνάμεων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἐφεξῆς ἀνάπαλιν, καὶ τῶν ὅρων τῆς Ἐξισ. ταύταις πολλαπλασιασθέντων, τελέσομεν τὸ αὐτό.

Ληφθήτω ἡ αὐτὴ Ἐξισ. ἔνθα χ διὰ δ προὔκειτο διαιρεθῆναι, ἤτοι $\frac{\chi}{\delta} = \psi$. καὶ $\chi = \psi\delta$.

Καταγραφείσης οὖν τῆς Ἐξισ. καὶ ἀντὶ τοῦ χ τοῦ ψ ἀντικατασάντος ἐν τῇ αὐτῇ δυνάμει, ἔςαι τὸ σχῆμα

$$\begin{array}{cccc} \psi^3 + & \alpha\psi^2 + & \beta\psi + & \gamma \\ \delta^3, & \delta^2, & \delta, & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\delta^3\psi^3 + \delta^2\alpha\psi^2 + \delta\beta\psi + \gamma.$$

Ὥςε, εἰ δέοι Ἐξίσωσίν τινα διὰ τῆς Διαιρέσεως τρέψαι, ἀντικατάςησον τοῦ χ τὸ ψ, καὶ ὑπογράψας ὑπὸ τὸ ψ τὸν ἀριθμὸν, δι' οὗ τὸ χ διαιρεθῆναι πρόκειται, ἐν σειρᾷ δυνάμεων ἀνάπαλιν, ἀπὸ μονάδος ἀρχομένη, καὶ ἐφ' ἑκάςου ὅρου μιᾷ δυνάμει αὐξομένῃ, πολλαπλασίασον ἐπὶ ταύτην τοὺς τῆς Ἐξισ. ὅρους. π. χ. $\chi^3 + 2\chi^2 + \chi - 12 = 0$. Ἔςω ἡ Ἐξισ. αὕτη μεταβλητέα διὰ τῆς Διαιρέσεως. καὶ $\frac{\chi}{2} = \psi$. Ὥςε $\chi = 2\psi$. Λαβὲ οὖν ἀντὶ τοῦ χ τὸ ψ ἐν τῇ αὐτῇ δυνάμει, καὶ ὑπόγραψον τὴν σειράν. Ἤτοι

$$\begin{array}{cccc} \psi^3 + & 2\psi^2 + & \psi - & 12 = 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$8\psi^3 + 8\psi^2 + 2\psi - 12 = 0$$

Εἰ δὲ τύχοι ἔντινι Ἐξισώσει τοῦτον, ἢ ἐκεῖνον τὸν ὅρον ἀπεῖναι, ὁ τούτου τόπος ἀςερίσκῳ χαρακτηρίζεται, εἰς σημεῖον τῆς τοῦ ὅρου ἀπουσίας. Ἀλλ' ἐν τῇ τῆς Ἐξισώσεως διὰ τοῦ Πολλ. ἢ τῆς Διαιρ. μεταβολῇ, ἀναγκαῖον ὑπὸ τὸν ἀπόντα ὅρον τῆς Ἐξ. τὸν προσήκοντα ὅρον τῆς ὑπ' αὐτὴν Γεωμ. καταγράφεσθαι Προόδου, καίτοι τῷ ἐπ' αὐτὸν ὅρῳ πολλαπλασιασθῆναι μὴ ἔχοντα, ὡς ο, ἢ μηδὲν ὄντα. Ὅθεν οὐδὲ παραγόμενον ὑπὸ τὴν γραμμὴν προκύπτει. Οἷον, εἰ δέοι τὴν Ἐξισ. $\chi^3 + 3\chi - 6 = 0$. τῷ Πολλαπλ. ἐπὶ τὸν 3 μεταβληθῆναι, ὥςε $3\chi = \psi$, ἔνθεντοι καὶ $\frac{\psi}{3} = \chi$ εἶναι, ἀποδεθείη οὕτω

$$\begin{array}{l} \psi^3 * + 3\psi - 6 = 0 \\ 1,\ 3,\ \ 9,\ \ 27 \\ \hline \psi^3 * + 27\psi - 162 = 0 \end{array}$$

Καὶ ἐὰν ἐν τῇ αὐτῇ Ἐξισ. $\frac{\chi}{3} = \psi$ εἴη, ὥςε καὶ $\chi = 3\psi$, καὶ οὕτω.

$$\begin{array}{l} \psi^3 * + 3\psi - 6 = 0 \\ 27,\ 9,\ \ 3,\ \ 1 \\ \hline 27\psi^3 * + 9\psi - 6 = 0 \end{array}$$

Τὸ δὲ ψ^3 μονωθήσεται, εἰ διὰ τοῦ κατ' αὐτὸ συνεργοῦ πάντες οἱ τῆς Ἐξισώσεως διαιροῦνται ὅροι, οὕτω. $\psi^3 * + \frac{9\psi}{27} - \frac{6}{27} = \psi^3 * + \frac{\psi}{3} - \frac{2}{9}$. Ἢ ἐὰν ἐν γένει ἡ Ἐξίσ. ᾖ

$$\frac{\delta^3\psi^3 + \delta^2 \alpha\psi^2 + \delta\beta\psi + \gamma = 0}{\frac{\psi^3}{1} + \frac{\alpha\psi^2}{\delta} + \frac{\beta\psi}{\delta^2} + \frac{\gamma}{\delta^3}}$$ διὰ δ^3 διαιρεθεῖσα ἔςαι

Οὕτως

Οὕτως εἰώθασι καὶ τὰς διὰ τῆς διαιρέσεως μεταβληθεῖσας Ἐξισώσεις παριςᾶν.

§. 403. Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἐὰν ἐπίτινος Ἐξισ. καὶ κλάσματα παρῇ, ἀπαλλάξαι τούτων δυνάμεθα τῷ πολλαπλ. (§. ἀνωτ.) Τουτέςι, ζητήσομεν ποσότητα, ἥτις ὁ κοινὸς τυγχάνει παράγων ἁπάντων τῶν παρονομαςῶν τῶν κλασμάτων, τῶν τῇ Ἐξισ. παρόντων, ὡς συνεργῷ τοῦ χ ταύτῃ χρησάμενοι. π. χ. $a\chi$ Τὸ δὲ $a\chi = \psi$ θήσομεν Ὥςε καὶ $\chi = \frac{\psi}{a}$. τούτου ἐν τῇ ἐξισ. ἀντικαταςάντος, προκύψει καινὴ Ἐξίσ. ἥτινι οὐδὲν ὑπάρχει κλάσμα. Ἀλλὰ τοιοῦτον παράγοντα αἱρετέον, ὥςε, εἰ τὸ καινὸν $\frac{\psi}{a}$ εἰς τὴν ὑπερτάτην ἐξήρθῃ δύναμιν, καὶ ὑπὸ τὸ ψ τὸν ὑπέρτατον παρονομαςὴν ἁπάντων τῶν ὅρων τῆς Ἐξισ. εἰς τὴν ὑπερτάτην δύναμιν ἠρμένον, ὑποτίθεσθαι. Οὕτω γὰρ εἶτα τῷ τῶν ὅρων πολλαπλ. ἐπὶ ταύτην τὴν ποσότ. τὰ κλάσματα πάντα δυνατὸν ἀποσκευάσασθαι. Ἐὰν δὲ οἱ παρονομαςαὶ τῶν κλασμάτων οὐδένα κοινὸν ἔχωσι παράγοντα, τίθεται ὡς τοῦ χ συνεργὸς τὸ παραγόμ. ἁπάντων τῶν παρονομαςῶν. ὡς ἐν τῇ Ἐξισώσει.

$\chi^3 - \frac{3}{4}\chi^2 + \frac{3}{16}\chi + 20 = 0$, ἐν ᾗ ὁ κοινὸς παράγων τοῦ παρονομαςοῦ, ὅντις παραλαβεῖν ἔχοι, $= 4$. Ὥςε τεθήτω $4\chi = \psi$. Ὥςε $\chi = \frac{\psi}{4}$. Ἡ δὲ καινὴ Ἐξίσ. ἐςὶ

$\chi^3 =$

$$\chi^3 = \frac{\psi^3}{64}$$

$$-\tfrac{3}{4}\chi^2 = -\frac{3\psi^2}{64}$$

$$+\tfrac{3}{16}\chi = +\frac{3\psi}{64}$$

$$* \; 20 = * \; 20$$

$$0 = \frac{\psi^3}{64} - \frac{3\psi^2}{64} + \frac{3\psi}{64} + 20$$

πολλαπλ. ἐπὶ $64.0 = \psi^3 - 3\psi^2 + 3\psi + 1280.$

Εἰ αὕτη πρόκειται ἡ Ἐξίσ. $\chi^3 - 3\chi^2 + \frac{11}{4}\chi - \frac{3}{4} = 0.$ Τεθήτω $2\chi = \psi$. ὁ γὰρ 2 ὁ γενικός ἐςι παράγων ἁπάντων τῶν παρονομαςῶν τῶν κλασμάτων ἐν ταύτῃ τῇ Ἐξισ. ὥςε $\chi = \frac{\psi}{2}$. Ἀντικαταςήτω ἤδη

$$\chi^3 = \frac{\psi^3}{8}$$

$$-3\chi^2 = -\frac{3\psi^2}{4}$$

$$+\tfrac{11}{4}\chi = +\frac{11\psi}{8}$$

$$-\tfrac{3}{4} = -\tfrac{3}{4}$$

ὥςε $0 = \frac{\psi^3}{8} - \frac{3\psi^2}{4} + \frac{11\psi}{8} - \frac{3}{4}$

πολλαπλ. τοῦτο ἐπὶ $8.0 = \psi^3 - 6\psi^3 + 11\psi - 6.$

Αἱ ῥίζαι τῆς τελευταίας Ἐξισώσ. εἰσὶ $\psi = + 1$. $\psi = + 2$. $\psi = + 3$ Καὶ ἐπεὶ $\chi = \frac{\psi}{2}$, ἔςιν ἄρα $\chi = \frac{1}{2}$. $\chi = 1$, $\chi = \frac{3}{2}$.

Καὶ ἐν γένει. $\chi^3 + \frac{\alpha\chi^2}{\beta} + \frac{\gamma\chi}{\delta} + \frac{\gamma}{\zeta} = 0$. καὶ τῶν π(ρ)ονομαςῶν τῶν κλασμάτων παρὰ τῷ χ τεθέντων, ἢ $\beta\delta\zeta \cdot \chi = \psi$, ἔςαι $\chi = \frac{\psi}{\beta\delta\zeta}$

$$\text{ἄρα}\qquad \chi^3 = + \frac{\psi^3}{\beta^3\delta^3\zeta^3}$$

$$+ \alpha\chi^2 = + \frac{\alpha\psi^2}{\beta^2\delta^2\zeta^2}$$

$$+ \frac{\gamma\chi}{\delta} = + \frac{\gamma\psi}{\beta\delta^2\zeta} -$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\zeta} = + \frac{\varepsilon}{\zeta}$$

$$0 = \frac{\psi^3}{\beta^3\delta^3\zeta^3} + \frac{\alpha\psi^2}{\beta^2\delta^2\zeta^2} + \frac{\gamma\psi}{\beta\delta^2\zeta} + \frac{\varepsilon}{\zeta}$$

πολλαπλ. $0 = \psi^3 + \alpha\delta\zeta\psi^2 + \beta^2\gamma\delta\zeta^2\psi + \beta^3\delta^2\zeta^3\varepsilon$, ἐπὶ $\beta^3\delta^3\zeta^3$ οἷς οὐδὲν ἔνεςι κλάσμα.

§. 404. Διὰ τῶν τροπῶν τῶν Ἐξισώσεων τῷ Πολλαπλ. ἢ Διαιρέσει, καὶ ἐὰν ἔντινι Ἐξισ. τῶν συνεργῶν τινὲς τῶν Ποσοτήτων ἄλογοι ὦσι, διὰ τούτου ἤτοι πάντες, ἢ τινὲς λογικοὶ γενέσθαι δύνανται. Ὡς ἐν τῇδε τῇ Ἐξισώσει. $\chi^3 + \chi^2\sqrt{5} - 3\chi - 3\sqrt{5} = 0$.

Τεθήτω $\chi\sqrt{5} = \psi$. Ὥςε $\chi = \frac{\psi}{\sqrt{5}}$. Δι' ἀντικαταςάσεως ἔςαι

$\chi^3 =$

$$\chi^3 = \left(\frac{\psi}{\sqrt{5}}\right)^3 = +\frac{\psi^3}{5\sqrt{5}}$$

$$+\chi^2\sqrt{5} = \left(\frac{\psi}{\sqrt{5}}\right)^2 . \sqrt{5} = +\frac{\psi^2\sqrt{5}}{5} = \frac{\psi^2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{\psi^2}{\sqrt{5}}$$

$$-3\chi = \frac{\psi}{\sqrt{5}} . -3 = \qquad -\frac{3\psi}{\sqrt{5}}$$

$$-3\sqrt{5} = \qquad -3\sqrt{5}$$

$$o = \qquad \frac{\psi^3}{5\sqrt{5}} + \frac{\psi^2}{\sqrt{5}} - \frac{3\psi}{\sqrt{5}} - 3\sqrt{5}$$

Πλαπλ. ἐπὶ $5\sqrt{5}$

$$o = \psi^3 + 5\psi^2 - 15\psi - 75$$

Τούτου αἱ ῥίζαι 'αἱ δύω, ἀποφατικαὶ, μία δὲ καταφατική, (Τὰ γὰρ αὐτὰ σημεῖα δὶς ἀλλήλοις ἐφέπεται, ἅπαξ δ' ἐπαμείβεται) ἤτοι -5. Καὶ $+\sqrt{15}$. Καὶ $-\sqrt{15}$. Καὶ ἐπειδὴ $\chi = \frac{\psi}{\sqrt{5}}$, ἔςαι, εἰ ἀντὶ τοῦ ψ τὸ εὑρεθὲν τεθῇ, $\chi = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5} . +\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ $= -\sqrt{5}$. Αὖθις $\chi = +\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = +\sqrt{3}$. Καὶ ἔτι $\chi = -\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{3}$. Αἱ τρεῖς ἄρα τοῦ χ δυνάμεις $-\sqrt{3}$, $+\sqrt{3}$ $-\sqrt{5}$.

§. 405. Ἐὰν ἐπίτινος Ἐξισώσεως ὁ ἔσχατος ὅρος, εν ᾧ τὸ παραγόμενον τῶν ῥιζῶν ἐμπεριέχεται, ὅτι μέγας ᾖ, πλείςους ἔχων παράγοντας, λίαν ἐργῶδες πειρωμένοις τὸν παράγοντα εὑρεῖν, δι' οὗ οἱ τῆς Ἐξισωξισ. ὅροι ἀναιροῦνται. ὅς τηνικαῦτα ἡ ῥίζα τυγχάνει. Ἐπινενόηται τοίνυν μέθοδος τὴν Ἐξίσ. εἰς ἑτέραν μεταβάλλειν, ἐλάσσονα τὸν ἔσχατον ἔχουσαν ὅρον, εἰς τοὺς κατ' αὐτὸν παράγοντας ῥᾶον ἀναλυθῆναι δυνάμενον, καὶ τὴν ῥίζαν τῆς Ἐξισ. εὑρεθῆναι. Γίνεται δὲ τοῦτο διὰ τῆς τροπῆς τῆς Ἐξισ. τῇ Προσθέσει, ἢ Ἀφαιρέσει, κατὰ τὰ εἰρημένα. Χρησόμεθα δὲ τῇ ἑτέρα τῶν μεθόδων, ἥπερ ἂν τὰ σημεῖα τῶν ποσοτήτων ἔχοιεν. Κείσθω ἀμέλει ἀντὶ τοῦ χ ἕτερος κατὰ τὸ δοκοῦν ἀριθμὸς, ὃς ἐν γένει α ῥηθήτω, ἐν τῇ Ἐξισώσει τῷ καταφ ἢ ἀποφ. σημείῳ. (ἄμφω γὰρ πειρατέον). Καὶ τούτου προϋποτεθέντος, προσεκτέον, τί τὸ ἐξ ἁπάντων τῶν τῆς Ἐξισ. ὅρων προκύπτον. ἅμα ὑπολογισθέντων. Εἰ γὰρ τεθῇ $\chi = \psi \pm \alpha$, προκύψει καινὴ Ἐξίσωσις, ἐν ᾗ, ὡς τοῦ ἐσχάτου ὅρου ἐλάσσους ἔχοντος παράγοντας, αἱ τοῦ ψ τιμαὶ ῥᾶον εὑρεθεῖεν, κἀκ τούτων αἱ τοῦ χ ἄμεινον ἂν διορισθεῖεν. Οἷον $\chi^3 + 2\chi^2 - 56\chi - 192 = 0$. Ὁ 192 ἔχει κατατμηθῆναι εἰς πλείους παράγοντας. Ὡς 1, 2, 3, 4, 6, 8, κ. καὶ εἰς τοὺς παράγοντας, τοὺς ἐν μέρει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύω τοιούτων παραγόντων ἀναφυομένους. Ἐὰν οὖν θῶμεν -3 ἀντὶ τοῦ χ, ἀνακύπτει -33, ὃς ἀριθμὸς, πολλῷ ἐλάσσους παράγοντας, ἢ ὁ -192 ἔχει. Ἔστω εἶτα $\chi + 3 = \psi$. ἄρα $\chi = \psi - 3$. καὶ ἀντικατάστησον.

$$
\begin{array}{lr}
\chi^3 = (\psi - 3)^3 = & \psi^3 - 9\psi^2 + 27\psi - 27 \\
+2\chi^2 = (\psi - 3)^2 \cdot + 2 = & +2\psi^2 - 12\psi + 18 \\
-56\chi = (\psi - 3) . -56 = & -56\psi + 68 \\
-192 = & -192 \\
\hline
0 = & \psi^3 - 7\psi^2 - 41\psi - 33
\end{array}
$$

Τῷ

Τοῦ οὖν -33 ἐλάσσους οἱ παράγοντες τῶν τοῦ -192. Εἰσὶ δὲ 1, 3, 11. Καὶ ἐπειδὴ ἐν τῇ προτεθείσῃ Ἐξισώσει σημεῖα δὶς ἕπεται ἀλλήλοις τὰ αὐτά, ἅπαξ δ' ἐπαμείβεται, τῶν ῥιζῶν αἱ μὲν δύω ἀποφατικαί, μία δὲ καταφατική. Εἰς ἀπόπειραν ληφθήτωσαν α΄. αἱ ἀποφατικαὶ ποσότητες. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ ψ τεθῇ ἐν τῇ Ἐξισ. -1, γενήσεται (ἡ Ἐξ.) $=0$. Ὥςε $\psi=-1$, καὶ $\psi+1=0$. Διαιρεθείσης δὲ τῆς Ἐξισ. διὰ τούτου, εὑρήσομεν $\psi^2-8\psi-33=0$. ἥτις ἐπιλυθεῖσα δίδωσι $\psi=+4\pm7$. Ὥςε α΄. $\psi=+11$. καὶ β΄. $\psi=-3$. Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν (ἐπειδὴ $\chi=\psi-3$) τὰς τιμὰς τοῦ $\chi=-4$. $\chi=+8$. καὶ $\chi=-6$.

Ἕτερον παράδ. Ἔςω ἡ Ἐξίσ. $\chi^3+19\chi^2+94\chi+120=0$. Κἀνταύτῃ τῷ 120 πλείους ἔνεισιν οἱ παράγοντες. Ἐὰν κατὰ τὸ δοκοῦν ἐν τῇ Ἐξισ. -4 ἀντὶ τοῦ χ ἀντικαταςῇ, προέρχεται -16 (τῶν καταφ. καὶ ἀποφ. ποσοτ ἀλλήλοις προςεθεισῶν) ἐλάσσους ἔχων τοὺς παράγοντας. Τεθήτω τοίνυν $\chi+4=\psi$. ἢ $\chi=\psi-4$, καὶ ἀντικαταςήτω τοῦ χ τὸ $\psi-4$.

$$
\begin{array}{rcrrrr}
\chi^3 & = & \psi^3 & -12\psi^2 & +48\psi & -64 \\
+19\chi^2 & = & & +19\psi^2 & -152\psi & +304 \\
+94\chi & = & & & +94\psi & -376 \\
+120 & = & & & & +120 \\
\hline
0 & = & \psi^3 & +7\psi^2 & -10\psi & -16
\end{array}
$$

Οἱ τοῦ 16 παράγοντες εἰσὶν 1, 2, 4, 8. Ἐὰν ληφθῇ ἀντὶ τοῦ ψ $+1$ καὶ -1, οἱ τῆς Ἐξίσ. ὅροι οὐκ ἀναιροῦνται. Διὰ δὲ τοῦ $+2$ καὶ μάλα. Ἔςιν ἄρα ὁ 2 μία ῥίζα τῆς Ἐξισ. Αἱ δὲ λοιπαὶ δύω

εὑρε-

εὑρεθήσονται τῇ Διαιρέσει τῆς Ἐξισ. διὰ $\psi - 2$. Εἰ γὰρ $\psi = 2$, ἔςι καὶ $\psi - 2 = 0$. Δίελε οὖν

$$
\begin{array}{l|l}
\psi - 2)\ \psi^3 + 7\psi^2 - 10\,\psi - 16 & \psi^2 + 9\psi + 8 \\
\qquad\quad \psi^3 \pm 2\psi^2 & \\
\hline
\qquad\qquad + 9\psi^2 - 10\psi & \\
\qquad\qquad + 9\psi^2 \mp 18\psi & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad + 8\psi - 16 & \\
\qquad\qquad\qquad + 8\psi - 16 &
\end{array}
$$

Ἐπεὶ οὖν $\psi^2 + 9\psi + 8 = 0$ ἔςι καὶ

$$\psi^2 + 9\psi + \tfrac{81}{4} = -8 + \tfrac{81}{4} = \tfrac{49}{4}$$

$$\psi = \qquad -\tfrac{9}{2} \pm \tfrac{7}{2}$$

Ὥςε α΄. $\psi = -\frac{16}{2} = -8$ . . καὶ β΄. $= -\frac{2}{2} = -1$ Εὕρηται δὲ καὶ $\psi = 1.\ 2.$ Τὸ δὲ χ ἦν $= \psi - 4$. Ἄρα $\chi = -12$. Καὶ $= -5$. Καὶ $= -2$.

§. 406. Εἴθιςαι δ᾽ ἐν ταῖς Ἐξισ. καὶ τὸν β΄. ὅρον ἐκ μέσου ποεῖν, τὴν ἐπίλυσιν τῆς Ἐξισ. διὰ τῶν παραγόντων ἐξευμαρίζοντας. Ἐν τῷ β΄. ὅρῳ τῆς Ἐξισ. ὡς δεδήλωται, τὸ κεφάλαιον ὑπάρχει τῶν ῥιζῶν. Τὴν οὖν τροπὴν τῆς Ἐξισ. οὕτω περαίνουσιν, ὥςε τὰς ῥίζας ἀναιρεῖν ἀλλήλας διὰ τῆς Προσθέσεως, καὶ τὸ τούτων κεφάλ. $= 0$ γίνεσθαι, ἔςαι ἀεὶ ὁ β΄. ὅρος

ὅρος = ο, καὶ ἑπομένως ἐκπεσεῖται. Δηλωθήτω ἐν γένει πᾶσα Ἐξίσ. τοῦ γ'. βαθμοῦ τῷ δε τῷ γενικῷ τύπῳ. $\chi^3 + \pi\chi^2 + \varrho\chi + \sigma = 0$. Τῷ π δ' ἐνυπάρχει τὸ κεφάλ. καὶ τῶν τριῶν ῥιζῶν.

Ὅπερ ἀποσκευασθῆναι χρὴ, καὶ εἰς τὸ μηδὲν χωρῆσαι. Ἵνα δὲ τούτου γενικὴν ἔχωμεν τὴν ἔκφρασιν, ἔνθα ὁ β'. ὅρος ἐκ συμπεπλεγμένης ποσότητος σύγκειται, ὃς = ο τεθῆναι δύναται, ἔσω $\chi = \psi + \varepsilon$. Ἔνθεντοι

$$\begin{array}{lcllll}
\chi^3 & = & \psi^3 & + 3\varepsilon\psi^2 & + 3\varepsilon^2\psi & + \varepsilon^3 \\
+\pi\chi^2 & = & & + \pi\psi^2 & + 2\pi\varepsilon\psi & + \pi\varepsilon^2 \\
+\varrho\chi & = & & & + \varrho\psi & + \varrho\varepsilon \\
+\sigma & = & & & & + \sigma \\
\hline
0 & = & \multicolumn{4}{l}{\psi^3 \begin{matrix}+3\varepsilon\\+\pi\end{matrix}\left\{\begin{matrix} & +3\varepsilon^2\\ \psi^2 & +2\pi\varepsilon\\ & +\varrho\end{matrix}\right\}\psi \begin{matrix}+\varepsilon^3\\+\pi\varepsilon^2\\+\varrho\varepsilon\\+\sigma.\end{matrix}}
\end{array}$$

Τούτῳ δὲ τῷ τρόπῳ πάσας τὰς τοῦ γ'. βαθμοῦ Ἐξισώσεις, τὰς πλήρεις τοὺς ὅρους ἐχούσας, παρασῆσαι δυνάμεθα. Εἰ οὖν ἐνταῦθα τὸν β'. ὅρον = ο γενέσθαι δέοι, ἀναγκαῖον τὴν Ἐξίσ. εἰς ἑτέραν μεταβαλεῖν, ἐν ᾗ τὸ κεφάλ. τῶν ῥιζῶν, ὅπερ οἱ συνεργοὶ τοῦ β'. εἰσὶν ὅρου, ἢ ἔνθα τὸ $3\varepsilon + \pi = 0$ ἂν γένοιτο. Εἰ τοίνυν

$$\frac{\frac{3\varepsilon + \pi = 0}{3\varepsilon = -\pi}}{\varepsilon = -\frac{\pi}{3}}$$ ἔςαι καὶ

Ὥςε προφανὲς ἐνταῦθα, ὁποίαν τιμὴν τῷ ε ἀποδοῦναι χρὴ ἐν κυβικῇ Ἐξισ. ἔνθα ὁ β'. ὅρος καταφατικὸς, ἀντὶ τοῦ χ τὸ ψ + ε θεῖναι βουλομένους. ἔςαι ἀμέλει $-\frac{1}{3}\pi$, ἢ $-\frac{\pi}{3}$. Εἰ οὖν ἀντὶ τοῦ χ τὸ ψ $-\frac{1}{3}\pi$ ἀντικατέςη, εἴη αὐτὸ τῶν ῥιζῶν κεφάλ. = ο. καὶ ὁ β'. ὅρος ἐκπέσοι. Οὕτω δείξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ἡ Ἐξισ. εἴη $\chi^3 - \pi\chi^2$ κτ. ἤτοι, ἐὰν ὁ β'. ὅρος ἀποφατικὸς, ἀντὶ τοῦ ε τὸ $+\frac{1}{3}\pi$ ἀντικαταςῆσαι χρὴ, καὶ ὅτι, ἐὰν ἀντὶ τοῦ χ = ψ + ε ληφθῇ, $\chi = \psi + \frac{1}{3}\pi$ δι' ἀντικαταςάσεως ταύτης τῆς ποσότητος, ἀντὶ τοῦ χ ὁ β'. ὅρος ἐκπεσεῖν ἔχοι. Ἐξ οὗ ὁ Κανών.

Ἐπ' κυβικῶν τῶν Ἐξισ. ὁ β'. ὅρος ἐκπεσεῖται, ἐὰν ἀντὶ τοῦ χ ἑτέρα τις ἄγνωςος ποσότης τεθῇ, οἷον Ψ, καὶ τούτῳ τὸ τριτημόριον τοῦ συνεργοῦ τοῦ β'. ὅρου ἀντικειμένῳ τῷ σημείῳ προςεθῇ, ἥπερ ἦν ἐν τῇ Ἐξισώσει, καὶ τούτου ἀντικαταςάντος ἐν τῇ Ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ χ.

Παραπλησίως δειχθήσεται καὶ ὅτι, ἐὰν ἀπό τινος Ἐξισ. οἱουδηποτοῦν βαθμοῦ τὸν β'. ἐκβαλεῖν βουλώμεθα ὅρον, ἀντὶ τοῦ χ ἑτέραν ἄγν. ποσότ. θεῖναι χρὴ, ἥτινι καὶ ὁ συνεργὸς τοῦ β'. ὅρου μετ' ἀντικειμένου τοῦ σημείου, ἢ πρότερον εἶχε, προςίθεςίθεται, διαιρούμενος μέντοι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅς ὁ Ἐκθέτης τῆς ὑπερτάτης Δυνάμεως τῆς ἀγνώςου ποσότητος ἐν τῇ Ἐξισώσει τυγχάνει. Οἷον, ἔςω ἐν γένει ἡ Ἐξίσ. μ βαθμοῦ, ἢ ἡ ὑπερτάτη ἄγνωςος ποσότης ἔςω χ^{μ}. Ὁ συνεργὸς τοῦ β'. ὅρου ῥηθήτω $\pm \pi$, ἤπερ τὸ αὐτοῦ σημεῖον +, ἢ — εἴη. καὶ ὁ β'. ὅρος ἐκ μέσου γενήσεται ἀντὶ τοῦ χ τοῦ $\psi \mp \frac{\pi}{\mu}$ ἀντικαταςαθέντος, ἤτοι ἐὰν ὁ β'. ὅρος ἐν τῇ Ἐξ. + ᾖ, τίθεται $\chi = \psi - \frac{\pi}{\mu}$. Ἐὰν δὲ —, $\chi = \psi + \frac{\pi}{\mu}$. Ληφθήτω παράδ. ἐκ τῶν τοῦ γ' βαθμοῦ Ἐξισ.

§. 407. Ἔςω $\chi^3 - 9\chi^2 + 26\chi - 24 = 0$. Ἐκπεσέτω ὁ ταύτης β'. ὅρος. Ὥςε κατὰ τὸν κανόνα τεθήτω $\chi = \psi + \frac{9}{3}$. ἢ $\chi = \psi + 3$.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
\text{Ἔνθεν τοι} \quad \chi^3 = & \psi^3 & +9\psi^2 & +27\psi & +27 \\
-9\chi^2 = & & -9\psi^2 & -54\psi & -81 \\
+26\chi = & & & +26\psi & +78 \\
-24 = & & & & -24 \\
\hline
0 = & \psi^3 & * & -\psi & *
\end{array}
$$

Ἐνταῦθα καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος ἐκπέπτωκεν, οὕτω συμβάν. οὐ γὰρ ἀεὶ τοῦτο. προῆλθε δὲ, ὅτι μία τῶν ῥιζῶν τοῦ ψ ἔςαι $= 0$. Ὥςε καὶ μία τῶν τοῦ $\chi = 3$. Εἰ γὰρ $\psi = 0$, ἔςι $\chi = 0 + 3 = 3$. Ἐπὶ τούτου ἄρα καὶ εἰς ἀμιγῆ Τετραγωνικὴν ἡ μεταβέβληται Κυβικὴ Ἐξίσωσις. Ἐὰν γὰρ

γὰρ $\psi^3 - \psi = 0$. ἔςι καὶ

$$\begin{array}{l} \psi^3 = +\psi \\ \hline \psi^2 = +1 \\ \hline \psi = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \end{array} \quad :\psi$$

Ὡς οὖν τοῦ ἐσχάτου ἐκπεπτωκότος ὅρου, ἔςαι ἡ γʹ ῥίζα τοῦ $\psi = 0$. (§. 402.) Ἐπεὶ δὲ $\chi = \psi + 3$, ἐὰν ἀντὶ τοῦ ψ αἱ τούτου ἀντικατασιῶσι τιμαὶ, ἔςαι μία τιμὴ τοῦ $\chi = 0 + 3 = 3$. ἡ δ' ἑτέρα $\chi = +1 + 3, + 4$. ἡ δὲ γʹ. $\chi = -1 + 3 = +2$. Ὅπερ τωόντι οὕτως ἔχει. Ἔςω ἡ Ἐξισ. $\chi^3 + 9\chi^2 + 14\chi - 24 = 0$. Καὶ ἀποσκευασθήτω ὁ βʹ. ὅρος. Ὡςε κατὰ τὸν κανόνα ἔςω $\chi = \psi - \frac{9}{3} = \psi - 3$. ἄρα

$$\begin{array}{rcrrrr} \chi^3 & = & \psi^3 & -9\psi^2 & +27\psi & -27 \\ +9\chi^2 & = & & +9\psi^2 & -54\psi & +81 \\ +14\chi & = & & & +14\psi & -42 \\ -24 & = & & & & -24 \\ \hline 0 & = & \psi^3 & * & -13\psi & -12 \end{array}$$

Αἱ δὲ ῥίζαι $\psi = -1$. Καὶ $\psi = -3$. Καὶ $\psi = +4$. Κακ τούτων $\chi = +1$. Καὶ $\chi = -4$. Καὶ $\chi = -6$.

§. 408. Καὶ μέθοδοι δὲ δίδονται, ὅπως ὁ γʹ. καὶ δʹ ὅρος, ἢ ὁςισοῦν ἕτερος, ἐκ τῆς Ἐξισώσεως αἴρωνται. ἀλλ' ὡς τῆς τούτων χρήσεως μικρᾶς οὔσης, ἐνταῦθα παραλείπονται. Ὁ δὲ βʹ. ἀποσκευάζεται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, διὰ τὸ ἴτον ὑπολογισμὸν μετὰ τῶν τῆς Ἐξισ. ῥιζῶν διὰ τούτου συνεπιτέμνεσθαι. Ὁποῖον δ' ἂν ὅρον ἀποσκευάσασθαι βούλῃ, μόνον τὸν,

ᾧ τὰ

ῷ τὸ χ ἐνυπάρχει, δυνήσῃ. Εἰ γὰρ καὶ πάνυ χρήσιμον πάντας τοὺς τῆς Ἐξ. ὅρους, ἡλίκη ἂν ᾖ, ἐκ μέσου αἴρειν, τοῦ α΄. καὶ τελευταίου ἐξαιρουμένου, ἀλλ' ἀδύνατον. Ἀμήχανον γὰρ, π. χ. ἑκάστην Κυβικὴν Ἐξίσ. οὕτω μεταβαλεῖν, ὥστε τελευταῖον $\psi^3 + \gamma = o$ ὑπολειφθῆναι, καὶ τηνικαῦτα ἐκ τοῦ ψ τὸ χ εὑρεθῆναι. Δῆλον δὲ τὸ λεγόμενον κἀκ τούτου, ὅτι τῇ ἐντελεῖ κυβικῇ Ἐξισώσει τρεῖς αἱ δυναταὶ τιμαὶ τοῦ χ, τῆς τοῦ $\psi^3 + \gamma = o$, ἢ $\psi^3 = -\gamma$ μίαν μόνον δυνατὴν, τὰς δὲ δύω ἀδυνάτους ἐχούσης. (§. 397.) ὥστε τὰς τιμὰς τοῦ χ διὰ τῆς τοῦ ψ εὑρεῖν μὴ δύνασθαι.

§. 409. Ὥσπερ ἐκ τῆς Ἐξισ. ὅρον τινὰ δυνατὸν ἐξαγαγεῖν, οὕτω καὶ ἀνάπαλιν αὖθις εἰσαγαγεῖν ἔχομεν, εἰ ἀναγκαῖον, τῇ τῆς ῥίζης ἑνὶ ἀριθμῷ ἐπαυξήσει, ἢ τοῦ χ τὸ $\psi + 1$, ἢ $\psi + 2$, κτ. τιθέντες προσηκόντως ἀντικαταστήσομεν. Ἔστω ἡ Ἐξισ. $\psi^3 - 13\psi - 12$. ἧς ὁ β΄. ἄπεστιν ὅρος, καὶ ἧς αἱ ῥίζαι -1, -3, καὶ $+4$. Ἐὰν οὖν τεθῇ $\psi = \chi + 1$, προκύψει Ἐξίσ. ἡ ἑξῆς.

$$
\begin{array}{rcl}
\psi^3 & = & \chi^3 + 3\chi^2 + 3\chi + 1 \\
-13\psi & = & -13\chi - 13 \\
-12 & = & -12 \\
\hline
o & = & \chi^3 + 3\chi^2 - 10\chi - 24.
\end{array}
$$

ἧς αἱ ῥίζαι -2, -4, καὶ $+3$.

§. 410. Ὅπως τὰς ἐνεργείᾳ ῥίζας οἱασοῦν Ἐξισ. ἀπόπειραν λαμβάνοντες ἂν εὕροιμεν. ἀντὶ τοῦ χ ἕνα τῶν εὑρεθέντων παραγόντων τοῦ ἐσχάτου ὅρου ἐν τῇ Ἐξισώσει ἀντικαθιστάντες, δέδεικται. Ἀλλ' ἐὰν ποσότης τις εἰς πολλοὺς ἀναλύηται παράγοντας,

ὀχληρὸν

σχληρὸν πάνυ ἐκεῖνο ποιεῖν. Ἐπενόησαν οὖν μεθόδους τὰ τῶν ῥιζῶν ὅρια, ἢ πέρατα εὑρίσκειν, ὃ ἐςι τοὺς ἀριθμοὺς, ὧν μεταξὺ τῶν ῥιζῶν ἐμπίπτουσιν αἱ δυναταί. Εἰ τοίνυν ἀριθμοὶ δύω καταφατικοὶ πρόκεινται, ὧν ὁ μὲν μείζων, ὁ δ' ἐλάττων τῶν ῥιζῶν, καλοῦνται οὗτοι τὰ ὅρια, ἢ οἱ ὅροι τῶν θετικῶν ῥιζῶν. Εἰ δ' οἱ δύω ἀριθμοὶ ἀποφατικοὶ, οἱ ὅροι τῶν ἀποφατικῶν ῥιζῶν. Ὅπως δὲ ἡ ζήτησις τῶν κατὰ τὰς ῥίζας ὅρων δι' Ἐξισώσεως εὐεπιχείρητος ᾖ, μετάβαλε τὴν Ἐξισ. εἰς ἑτέραν, ἧς ὁ β'. ὅρος ἄπεςι (§. 405.) Ἔςω Ἐξισ. ἡ β'. ἀμοιροῦσα ὅρου ἥδε $\chi^3 - \pi\chi + \gamma = 0$. Ἔςιν οὖν $\chi^3 + \gamma = + \pi\chi$. Ἀναγκη ἄρα πᾶσα τὸ $\pi\chi$ μεῖζον εἶναι τοῦ χ^3. Ἵνα γὰρ τὸ χ^3 τῷ $\pi\chi$ ἐξισωθῇ, προσθετέον αὐτῷ (τῷ χ) καὶ τὸ γ. Ὥςε

$$\frac{\pi\chi > \chi^3}{\pi > \chi^2} : \chi$$

$$\frac{\pi > \chi^2}{\sqrt{\pi} > \chi} \text{ Ἐξ. ἡ } \sqrt{\ }$$

Εὕρηται οὖν ἀριθμὸς μείζων τῆς ῥίζης. Ζητηθήτω καὶ ἕτερος ἐλάσσων αὐτῆς. Ἐπειδὴ $\chi^3 - \pi\chi + \gamma = 0$, ἔςι καὶ $\chi^3 + \gamma = \pi\chi$. Ὥςε τὸ γ μόνον πάντως, ἔλαττον τοῦ $\pi\chi$. Τὸ γὰρ χ^3 τούτῳ ἔτι προσθῆναι χρὴ, ἵνα τῷ $\pi\chi$ ἴσον γένηται. Ἔνθεντει

$$\frac{\gamma < \pi\chi}{\frac{\gamma}{\pi} < \chi} : \pi$$

Ἰδοὺ καὶ ἑτέρα ποσότης. τῆς ῥίζης ἐλάσσων. Η ἄρα καταφατικὴ ῥίζα κεῖται μεταξὺ $\sqrt{\pi}$, καὶ $\frac{\gamma}{\pi}$. Ὅθεν οὐδ' ἀπόπειραν τῶν παραγόντων ληπτέον.

Παράδ. ἐν ἀριθμοῖς $\chi^3 - 25\chi + 36 = 0$

$$\chi^3 + 36 = + 25\chi$$

$$\chi^3 < 25\chi \quad : \chi$$

$$\chi^2 < 25$$

$$\chi < \sqrt{25}.\ \text{ἢ} < 5.$$

Αὖθις. ἐπειδὴ $\chi^3 + 36 = 25\chi$

ἔςαι καὶ $36 < 25\chi \quad : \chi$

$$\tfrac{36}{25} < \chi$$

Ἀλλὰ $\frac{36}{25} = 1,44$. Ἡ θετικὴ τοίνυν ῥίζα κεῖται μεταξὺ 1, 44 καὶ 5. ἢ τῷ βουλομένῳ ἐν ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς ἀπόπειραν λαβεῖν οὐκ ἀναγκαῖον ἐλάσσονος τοῦ 2. καὶ μείζονος τοῦ 4 ἀποπειράσασθαι. Ὁ γὰρ 5 πάνυ μέγας. Καὶ ἡ μὲν θετικὴ λογικὴ ῥίζα τῆς Ἐξισ. $\chi^3 - 25\chi + 36 = 0$ ἐςὶ τῷ ὄντι $= + 4$, αἱ δὲ λοιπεὶ δύω ἄλογοι, ὧν ἡ μὲν $+ 1, 6 \ldots$ ἡ δὲ $- 5, 6 \ldots$

§. 411. Ἀδιόριςον δὲ Πρόβλημα καλεῖται τὸ πολλαχῶς ἐπιλυθῆναι δυνάμενον. (§. 344) Οἷον, ἔςωσαν προσθετέοι τρεῖς ἀριθμοὶ, ὧν τὸ κεφάλαιον $= 10$. Τοῦτο οὖν πολλαχῶς ἂν ποιήσαιμεν.

Ὡς

Ὡς $1 + 2 + 7 = 10$. $1 + 3 + 6 = 10$. $1 + 4 + 5 = 10$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 412. Παράδειγμα. Ζήτησον δύω ἀριθμοὺς ὧν τὸ κεφάλαιον, καὶ ὧν τὸ παραγόμενον ἅμα ἴσα δεδομένῳ τινὶ ἀριθμῷ, π. χ. α. Ἐπειδὴ ἄγνωςοι, οἱ δύω ἀριθμοὶ, ῥηθήτωσαν χ, καὶ ψ. Τὸ ἄρα τούτων κεφάλαιον ἐςὶ $\chi + \psi$. τὸ δὲ παραγόμενον $\chi\psi$. Ὥςε $\chi + \psi + \chi\psi = \alpha$. Ἀλλ' εἴκαι, ὡς εἴρηται, εἷς ἄγνωςος ἀριθμὸς διὰ μιᾶς Ἐξισώσ. δύω δὲ διὰ δυοῖν διορίζονται, καὶ ἐν γένει, τοσαύτας εἶναι τὰς Ἐξισώσεις χρὴ, ὅσαι τῶν ποσοτήτων αἱ ἄγνωςοι. Τοῦτο μέντοι οὐκ ἀεὶ δυνατόν. Ἔνθεν τοι ἀναγκαίως καὶ μία, ἢ πλείους τῶν ἀγνώςων ἀδιόριςαι μένουσιν, ἤπερ ἂν Ἐξισώσεις κατὰ τὸ πρόβλημα συςαταὶ εἶεν, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος παραδ. ἔνθα, δύω ἀγνώςων προκειμένων, μία μόνον Ἐξίσωσις ἐκ τοῦ προβλ, συςατή. Ὥς ἡ ἑτέρα τῶν ἀγνώςων ἀδιόριςος μενεῖ. Ζητητέα οὖν ἡ τοῦ χ τιμὴ, τοῦ ψ ἀδιορίςου μένοντος.

$$\chi + \psi + \chi\psi = \alpha$$
$$\chi + \chi\psi = \alpha - \psi \quad \text{ἢ}$$
$$(1 + \psi)\chi = \alpha - \psi \quad : 1 + \psi$$
$$\chi = \frac{\alpha - \psi}{1 + \psi}$$

Ἐνταῦθα, ὅ, τι ἂν τὸ ψ ὑποτεθῇ, τὸ χ διώρισαι. Καὶ μυρίαι τούτου αἱ ἐπιλύσεις, μάλιςα, εἰ τὸ ψ καὶ κλασματικὸν παραληφθῇ π, χ. ἔςω $\psi = \frac{1}{4}$. καὶ α σημαινέτω 6, καὶ ἔςαι $\chi = \frac{6 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{23}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{23}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{23}{5}$. Καὶ $\chi + \psi + \chi\psi = 6$ ἔςαι $= 6$.

Ἐςι

Ἔςι γὰρ $\frac{23}{5} + \frac{1}{4} + \frac{23}{20} = 6$ ἢ

$$\frac{92 + 5 + 23}{20} = 6$$ ἢ

$$\frac{120}{20} = 6$$

Εἰ δ' ὁ ἕτερος τῶν ἀριθμῶν ὁλοσχερὴς θετικὸς ᾖ, τὸ Πρόβλημα ἔτι μᾶλλον ἔςαι διωρισμένον. Ἔςω γὰρ ψ ὁλοσχερὴ ἀριθμὸς, καὶ παραπλησίως $a = 6$. Ὥςε

$$\chi = \frac{6 - \psi}{1 + \psi}$$

Ἔνθα ψ οὐκ ἂν εἴη $= 0$, οὐδὲ $= 6$. Καὶ τὸ μὲν α'. ὅτι ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν εἶναι χρή. τὸ δὲ β'. ὅτι οὕτως αὖθις $= 0$ ἂν γένοιτο, καὶ τοῦ χ οὐδεμία τιμὴ προκύψειεν. Ἀλλ' οὔτε ἀποφατικὸν εἶναι δυναται, διὰ τὴν ὑπόθεσιν. Ὅθεν πέντε μόνον ἐπιλύσεις δυναται. Ἤτοι ψ εἶναι δύναται $1, 2, 3, 4, 5$, καὶ τὸ χ = ταῖς ἑξῆς ποσότησι $\frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}$. Ἀλλ' οὐδ' ἄμφω οἱ ἀριθμοὶ ἐπὶ τούτου ὁλοσχερεῖς καταφατικοὶ εἶεν. Εἰ δὲ τοῦτο ἀπαιτεῖται, τὸ πρόβλ. τυγχάνει ἀδύνατον. Τεθέντων δ' ἐν τῇ Ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ χ καὶ ψ οἱ τούτοις ἀνήκοντες ἀριθμοὶ, κἀπὶ τῶν 5 τρόπων τὸ κεφάλ. τῆς Ἐξισ. ἔςαι $= 6$.

§. 413. Δίελε 25 εἰς δύω μέρη, ὧν θάτερον διὰ 2, θάτερον δὲ διὰ 3 διαιρέσιμον. Λύσις. Ἔςωσαν τὰ δύω μέρη (μετὰ τὴν ἐνεργεία γεγονυίαν διαίρεσιν τοῦ μὲν διὰ 2, τοῦ δὲ διὰ 3) χ καὶ ψ. Ὥςε χ δὶς, καὶ ψ τρὶς ληφθὲν ἔσονται ἅμα 25, καὶ διὰ μὲν τοῦ 2χ παραςαίη ὁ ἕτερος τῶν ζητουμένων, διὰ δὲ τοῦ 3ψ ὁ ἕτερος. Ὅθεν

2χ

$$2\chi + 3\psi = 25$$
$$2\chi = 25 - 3\psi$$
$$\chi = \frac{25 - 3\psi}{2}$$

Ἐπειδὴ χ ὁλοσχερὴς καταφατικὸς ἐςιν ἀριθμὸς καὶ ψ τοιοῦτον εἶναι χρὴ, οὐκ ἔχει ἄρα ψ μεῖζον εἶναι τοῦ 8. Εἰ γὰρ τοῦτο, ἐγένετο ἂν $\frac{25 - 3\psi}{2}$ ἀποφατικὴ ποσότης. καὶ χ, τὸ τούτῳ ἴσον, ὡσαύτως, κατὰ τῆς ὑποθ. Ἀλλ' οὐδ' ἄρτιος ἀριθμὸς τὸ ψ ἂν εἴη. ἄλλως γὰρ καὶ 3 ψ ἀρτιωθήσεται. (διὰ γὰρ τοῦ μετ' ἀλλήλων πολλαπλ. περιττοῦ καὶ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἀεὶ ἄρτιος ἀναφύεται) καὶ εἰ 3 ψ ἄρτιος, 25 — 3ψ οὐκέτι διὰ 2 διαιρεθείη. (πᾶς γὰρ ἄρτιος ἀπὸ περιττοῦ ἀφαιρεθεὶς περιττὸν ὑπολείπει, διὰ 2 μὴ διαιρέσιμον) Ἐπεὶ οὖν ψ μεῖζον τοῦ 8 εἶναι οὐκ ἔχει, οὐδὲ μὲν οὖν ἄρτιος ἀριθμὸς, οὐδὲ 0, (ὅτι ἀριθμὸν εἶναι χρὴ) δέδοται δ' ἐνταῦθα μόνον μία Ἐξίσωσις τῶν δύω ἀγνώςων, ἔχομεν ἐκ τούτων τὸ ψ ἀποδοῦναι. Ἤτοι δύναται παραςῆσαι πάντα περιττὸν καταφατικὸν ἀριθμὸν, μεταξὺ 0 καὶ 8 κείμενον. Ὥςε ψ εἴη ἂν 1, 3, 5, 7, καὶ κατὰ τοῦτο διορίζεται καὶ τὸ χ. Ἐπιδέχεται ἄρα τὸ Προβλ. δ'. ἐπιλύσεις

Ἐὰν	ψ	=	1	ἔςι	χ	=	11
Ἐὸν	ψ	=	3	ἔςι	χ	=	8
Ἐὰν	ψ	=	5	ἔςι	χ	=	5
Ἐὰν	ψ	=	7	ἔςι	χ	=	2

Εἰσὶν οὖν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ 2χ + 3ψ α'. 22 + 3. β'. 16 + 9. γ'. 10 + 15. καὶ δ'. 4 + 21.

§. 414.

§. 414. Ἐν συνελεύσει τινὶ ἀνδρῶν, καὶ γυναικῶν δεδαπάνηνται 1000 γρόσσοι. Καὶ ἕκαστος μὲν τῶν ἀνδρῶν 19, ἑκάστη δὲ τῶν γυναικῶν 13 γρ. κατέβαλε. Πόσοι οἱ ἄνδρες, καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

Λύσις. Αὐτίκα δῆλον, ὅτι τῶν τῆς Ἐξισ. ὑποθέσεων ἐκ μέσου ἀρθεισῶν, ἡ τοῦ Ζητήματος ἐπίλυσις οὕτως ἂν ἀποδέδοτο, Δίελε 1000 εἰς δύω μέρη, ὧν τὸ μὲν διὰ 19, τὸ δ' ἕτερον διὰ 13 διαιρεσίμου, ὧν τὰ πηλίκα ὁλοσχερεῖς, καὶ καταφατικοὶ ἀριθμοί. Διαιρεθέντα τὰ ζητούμενα μέρη διὰ 19, καὶ 13 ἔστωσαν χ, καὶ ψ. Ἔσονται ἄρα τὰ μέρη $19\chi + 13\psi$, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου $19\chi + 13\psi = 1000$. Ζητήτωμεν τὸ ψ, ὡς εὐχερέστερον εἰς εὕρεσιν. Ἔνθεντοι

$$13\psi = 1000 - 19\chi$$

$$\psi = \frac{1000 - 19\chi}{13}$$

Εἰ οὖν ἐνταῦθα πεῖραν λαμβάνοντες ζητῆσαι βουλόμεθα, τί τὸ χ σημαίνοι, ἐφ' ᾧ $\frac{1000 - 19}{13}$ ὁλοσχερῆ καταφατικὸν εἶναι, ὡς καὶ τὸ χ τοιοῦτον λίαν διεξοδικόν. Πειρατέον τοίνυν ἄλλως, καὶ $\frac{1000 - 19\chi}{13}$ ἐνεργείᾳ διαιρετέον. Ὥστε $\psi = \frac{1000 - 19\chi}{13}$

$$= \frac{1000}{13} - \frac{19\chi}{13} = 76 + \frac{12}{13} - \chi - \frac{6\chi}{13}$$

$-\frac{6\chi}{13} = 76 - \chi + \frac{12 - 6\chi}{13}$. Ἐπειδὴ δὲ ψ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς εἶναι ὀφείλει, καὶ χ ὡσαύτως, ἔςι καὶ $76 - \chi$ ὁλοσχερὴς ἀριθμός. Ἀνάγκη ἄρα καὶ $\frac{12 - 6\chi}{13}$ ὁλοσχερῆ ἀρ. εἶναι. Ἄλλως γὰρ ψ οὐκ ἂν εἴη ὁλοσχερής. Οὐ μόνον δὲ $12 - 6\chi$ διὰ 13 διαιρέσιμος, ἀλλὰ καὶ τὸ ϛ : μόριον αὐτοῦ, ἢ $2 - \chi$. Ἔςι γὰρ $\frac{12 - 6\chi}{13} = \frac{(2 - \chi)}{13} . 6$. Ἐπεὶ δ' ὁ ἕτερος παράγων 6 διὰ τοῦ 13 οὐκ ἔχει διαιρεθῆναι, ἀνάγκη πᾶσα τὸν ἕτερον παράγ. διαιρεῖσθαι δύνασθαι, εἴπερ πᾶσα ἡ ποσοτης διὰ τούτου διαιρέσιμος εἶναι ὀφείλει. Ἄλλως γὰρ οὐ δυνατόν. Ὥςε $2 - \chi$ διὰ 13 διαιρέσιμος.

Παραληφθήτω καὶ ἑτέρα καινὴ ἄγνωςος ποσότης. ἐπειδὴ γὰρ $2 - \chi$ διὰ 13 διαιρέσιμος, ἔςω τὸ πηλίκον $= \omega$. Ἀλλὰ τοῦτο ἀποφατικὸν εἶναι χρὴ, ὡς τοῦ χ μείζονος εἶναι ὀφείλοντος, ἢ ὁ 2. ἄλλως γὰρ ἡ διαίρεσις οὐκ ἂν γένοιτο. Ὥςε $\frac{2 - \chi}{13} = -\omega$. καὶ ἐπομένως $\frac{2 - \chi = -13\omega.}{13\omega + 2 = \chi}$ ἀντικαταςήτω ἐν τῇ Ἐξισώσει. Ἦν τὸ $\psi = 76 - \chi + \frac{12 - 6\chi}{13}$. Δι' ἀντικαταςάσεως γίνεται $\psi = 76 - 2 - 13\omega + \frac{12 - 12 - 78\omega}{13} = 74 - 13\omega - 6\omega = 74 - 19\omega$. Ἐπειδὴ $\psi = 74 - 19\omega$, καὶ θετικὸν δὲ, (τὸ ψ) τὸ

ω οὐ

ω οὐ τηλικουντον εἶναι χρὴ, ὥςε 74 ἀναιρεῖν. Εἰ γὰρ 4 τεθῇ, πάνυ ἂν μέγα εἴη. Ὅτι $4 \cdot 19 = 76$. Ὅθεν ἀνάγκη ἔλαττον τοῦ 4 εἶναι, καὶ ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν. Δύναται οὖν $\omega = 0, 1, 2, 3$ εἶναι. Εἰ $= 0$, ἔςαι $\psi = 74$. Εἰ δὲ $= 1$, ἔςαι $\psi = 55$. Εἰ δὲ $= 2$, ἔςαι $\psi = 36$. Εἰ δὲ $= 3$, ἔςαι $\psi = 17$. Τέσσαρες ἄρα ἐπιλύσεις τοῦ Προβλήμ. δυναταί. Εἰ γὰρ $\psi = 74$, ἔςαι χ 12. Ἦν γὰρ $\chi = \frac{1000 - 13\psi}{19}$. Εἰ δὲ $\psi = 55$, ἔςαι $\chi = 15$. Εἰ δὲ $\psi = 36$, ἔςαι $\chi = 28$. Εἰ δὲ $\psi = 17$, ἔςαι $\chi = 41$. Ὅτι χ τοὺς ἄνδρας, καὶ ψ τὰς γυναῖκας σημαίνει. Καὶ εἷς ἀνὴρ καταβάλλει 19 γρ. μία δὲ γυνὴ 13 γρ.

Ἦσαν οὖν

1) 2 ἄνδρες, καὶ 74 γυναῖκες. καὶ οἱ μὲν 38 γρ. καταβάλλουσιν, αἱ δὲ γυναῖκες 962.

2) 15 ἄνδ. καὶ γυν. ὧν οἱ μὲν 285, αἱ δὲ 715 γρ. ἀποτίουσι.

3) 28 ἄνδ. καὶ 36 γυν. καὶ οἱ μὲν 532 γρ. αἱ δὲ 468 καταβ.

4) 41 ἄνδ. καὶ 17 γυν. ὧν οἱ μὲν 779, αἱ δὲ 221 καταβάλλουσι.

Ἅλις τῶν Ἐξισώσεων, ὅσον τοῖς Πρωτοπείροις ἀρκεῖ, καὶ καταβάλωμεν.

Τέλος.

Σημείωσις εἰς τὸ §. 312.

„Οἱ Λογάριθμοι, καθόλου θεωρούμενοι, ὡς ἐνεργεία Ἐκθέται τῶν Δυνάμ. ἔχουσι θεωρεῖσθαι.

Ἔςω Γεωμ. Πρόοδος.	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.	
Ἀριθμ.	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	

Ἐν τῇ Γεωμετρικῇ προόδῳ ὁ Ἐκθέτης (§. 294.) ἐςὶ 2. ἐν ᾗ ὁ μὲν 2 (ὁ β΄. ὅρος) ἡ α΄. δύναμις ἐςὶ τοῦ ἐκθέτου.. ὁ δὲ 4. ἡ β΄. ὁ δὲ 8 ἡ γ΄. κτ. Ὅθεν γράψον τὴν πρόοδον οὕτως.

$1,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6.$	ὑπογράψας καὶ
$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$	τὴν ἀριθμ. σ.

Ὁρᾷς οὖν, ὅτι ἕκαςος ὅρος τῆς προόδου τῆς ἀριθμ. ὡς ἀξία τοῦ ἐκθέτου τῆς γεωμ. πρ. θεωρεῖται, καὶ ὅτι οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων τῶν ὅρων τῆς προόδου τοῖς λογαρίθμοις πάντῃ συνᾴδουσιν ὁ λογάριθμος ἄρα, ὁ ἐκθέτης ἐςὶ τῆς ἀξίας, εἰς ἣν ὁ κατὰ τὸ δοκοῦν ληφθεὶς ἀριθμὸς ἀρθῆναι ὀφείλει, ἵν' ἐξισωθῇ ἑτέρῳ δοθέντι ἀριθμῷ. ὡς ὁ λογ. τοῦ 128 ἐν τῷ παρόντι συςήματι ὁ ἐκθέτης ἐςὶ τῆς ἀξίας, εἰς ἣν ὁ ἀριθμὸς 2 ἀρτέος, ἵνα ἴσος τῷ 128 γένηται. ἢ ἐν γένει, τοῦ α ὁ λογ. ἐςὶ ν τοῦ α^{μ} ὁ μ.

„Ἐπὶ

Εἰς τὸ). 327.

„Ἐπὶ γὰρ τῶν μειζ. ἀριθμῶν αἱ διαφοραὶ τῶν κατ' αὐτοὺς λογαρ σχεδὸν αἱ αὐταί.

Ἐὰν τὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων, καὶ τὰς διαφορας τῶν ἀριθμῶν, οἷς ἐκεῖνοι ἀνήκουσι, πρὸς ἀλλήλους παραβάλλωμεν, εὑρίσκομεν τὰς τῶν λογαρ. διαφορὰς, τὸν αὐτὸν σχεδὸν λόγον ἐχούσας, ὃν καὶ αἱ τῶν ἀριθμῶν. Ἀλλ' ἐπὶ μὲν τῶν ἐλασσόνων ἀριθμῶν τὸ παράπτωμα ἐπίσημον, ἐπὶ δὲ τῶν μειζόνων, μάλιςα δὲ, τῶν ὑπερ 8000 οὕτως ἐλάχιςαν, ὥςε μόλις ἀνακαλυφθῆναι δυνατόν. Ἔνθεντοι οὗτος ὁ τρόπος λίαν ἐν χρήσει τοῖς βουλομένοις τοὺς λογαρίθμους εἰδέναι τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ἐν τοῖς κοινοῖς μὴ ἐνόντας πίναξιν. ὡς

λ. 669 = 2,8254261
λ. 668 = 2,8247765

διαφ. τῶν ἀρ. 1 διαφ. τ. λογ. 6496

λ. 669 = 2,8254261
λ. 665 = 2,8228216

διαφ. τῶν ἀρ. 4 διαφ. τ. λ. 26045

Πειρατέον οὖν, εἰ αἱ διαφορὰι τῶν ἀριθμῶν, 1 καὶ 4 τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον, ὃν αἱ τῶν κατ' αὐτοὺς λογ. 6496, καὶ 26045. Τοῦ λόγου 1 : 4 ὁ ἐκθέτης ἐςι 4. τοῦ δὲ 6496 : 26045 ἐςι $4\frac{61}{6496}$. Ὥςε μείζων κατὰ $\frac{61}{6496}$ οὗτος ἐκείνου. Ἔνθεντοι ἐν τούτοις αἱ τῶν ἀρ. διαφ. καὶ αἱ τῶν κατ' αὐτοὺς λογ οὐδεμίαν ἀκριβῆ παρέχουσιν ἀναλογίαν. Θεωρητέον τοῦτο καὶ ἐν μείζονι τῶν ἀριθμῶν.

λ. 8236 = 3,9157163
λ. 8235 = 3,9156636

διαφ. τῶν ἀρ. 1. διαφ. τῶν λ. 527

λ. 8236 = 3,9157163
λ. 8234 = 3,9156109

διαφ. τῶν ἀρ. 2 διαφ. τῶν λ. 1054

Ἔνθα αἱ διαφοραὶ τῶν ἀρ. 1 καὶ 2 τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον, ὃν αἱ τῶν λογ. 527, καὶ 1054.

Ἐπὶ γὰρ 1 : 2 = 527 : 1054. ἀμφοῖν τῶν λόγων ὁ ἐκθέτης 2.

Εἰς τὸ §. 326.

Ἐν τῆς ἐλάσσοσι τῶν Πινάκιων περιέχονται οἱ λογ. ἀπὸ 1 μέχρι 10000. Ἔςω εὑρετέος ὁ λογάρ. τοῦ 86759. Χορήτωμεν δὲ οὕτω. διάςειλον τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα τοῦ ἀριθμοῦ ἐν δεξιοῖς, ἵν' ὑπολειφθῇ ἀριθμὸς, οὗ ὁ λογάρ τοῖς πίναξιν ἔνεςι. Καὶ ἐν μὲν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἐξ 6 σύγκειται χαρακτήρων, διαςαλτέον 2, εἰθ' ἐξ. 7, 3, κτ. Εἶτα ζήτησον καὶ τὸν λογ. τοῦ ἀριθμοῦ 8675, καὶ τὸν τοῦ ἐγγὺς μείζονος 8676. ποιῶν ἐκ τούτων τοὺς λογ. τῶν ἀριθμῶν 86750, καὶ 86760, (ἐπαύξων τὸ χαρακτηριςικὸν τῶν προτέρων μονάδι.) ὧν μεταξὺ ὁ ζητούμενος λογ. τοῦ 86759 ἐμπίπτει. Ἄφυλε ἤδη ἀπ' ἀλλήλων καὶ τοὺς ἀριθμοὺς, καὶ τοὺς τούτων λογ. εἰς εὕρεσιν τῶν διαφορῶν, συνάγων οὕτως. „ Ὡς ἡ διαφορὰ τοῦ α' καὶ γ'. ἀριθμοῦ πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ ἑτέρου καὶ γ'. οὕτω καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ α'. καὶ γ'. λογαρίθμου πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ ἀγνώςου ἑτέρου, καὶ γ'. λογαρίθμου. „ Καὶ εὑρεθεῖσα ἡ διαφορὰ διὰ τῆς τῶν Τριῶν μεθόδου, ἥτις ἐν τοσούτῳ χρηθήτω, προςεθήτω τῷ ἐλάσσονι λογαρίθμῳ, ὥςε τὸν ζητούμενον λογάρ. προκύψαι. Τουτέςιν, ἐνταῦθα ὁ μείζων ἀριθμὸς καλεῖται ὁ α'. καὶ ὁ ἐλάσσων ὁ γ'. ἡ δ' εὑρεθεῖσα διαφ. ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ λογ. τοῦ α'. ἤτοι τοῦ μείζ. ἀριθμοῦ.

	λογ. 8675	=	3,9382695
	λογ. 86750	=	4,9382695
	λογ. 8676	=	3,9383195
1)	λογ. 86760	=	4,9383195
3)	λογ. 86750	=	4,9382695
διαφ. τῶν ἀρ.	10	τῶν λογ.	500
2)	λογ. 86759	=	. . . .
3)	λογ. 86750	=	4,9382695
διαφ. τῶν ἀρ.	9	τῶν λογ.	χ.

$10 : 9 = 500 : \chi$. Καὶ $\chi = \frac{5000}{10} = 450 = \chi$.

λογ. 86750	=	4,9382695
χ	=	450
λογ. 86759	=	4,9383145

Ὡσαύτως εὑρεῖν δυνάμεθα καὶ λογαρίθμου τὸν ἀριθμὸν, μείζονα ὄντα τῶν ἐν ταῖς πίναξιν. Ἔστω δεδομένος ὁ λογ. 4,9383145. Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς, ὁ τούτῳ προσήκων. Ζήτησον α΄. τὸν δε τὸν λογάριθμον ἐν ἐλάσσονι χαρακτηριστικῷ, π. χ. ἐν τῷ χαρακτ. 3. τῷ τοῖς πίναξιν ἐνυπάρχοντι. Εἰ δ' οὐδεὶς λογαρ. εὑρίσκεται τὰ αὐτὰ ἔχων δεκαδικὰ, λάβε τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα, καὶ ἐγγὺς μείζονα τοῦ δοθέντος, τὸ χαρακτηριστικὸν ἑκατέρου ἴσον ποιῶν τῷ τοῦ δοθέντος, τοῖς δ' ἀριθμοῖς τοσαῦτα μηδενικὰ προστιθεὶς πρὸς τὰ δεξιὰ, ὅσαι μονάδες τῷ χαρακτ. του λογ. προσετέθησαν. β΄. ἄφελε τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα λογαρ. ἀπὸ τοῦ ἐγγὺς μείζονος, ὁμοίως καὶ τοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς προσήκοντας τούτοις, ἀπ' ἀλλήλων, ἀφαιρῶν ἔτι καὶ τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα λογάρ. ἀπὸ τοῦ δοθέντος, καὶ ζητῶν πρὸς τὰς δύω διαφορὰς τῶν λογαρίθμων, καὶ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν τὸν δ΄, ἀνάλογον. Οἷον

κατὰ

κατὰ τοὺς πίνακας, ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων λογάρ. ἐν χαρακτηρ. 3 ἐςὶ

	3.9382695	=	λογ. 8675
ἄρα	4,9382695	=	λογ. 86750
	ὁ ἐγγὺς μείζων λογ. ἐςὶ		
	3,9383195	=	λογ. 8676
ἄρα	4,9383195	=	λογ. 86760
ἀφ.	4,9382695	=	λογ. 86750

διαφ. τῶν λογ. 500 . διαφ. τ. ἀρ. 10

ὁ δοθεὶς λογ.	4,9383145	=	......
ὁ ἐγγὺς ἐλάσ.	4,9382695	=	λογ. 86750

διαφ. τῶν λογ. 450 . διαφ. τῶν ἀρ. χ

$500 : 450 = 10 : \chi$. Καὶ $\chi = \frac{450 \cdot 10}{500} = 9$

Ἐπειδὴ 9 ἡ διαφορὰ ἐςι μεταξὺ τοῦ γνωςοῦ ἐλάσσονος ἀριθμοῦ 86750, καὶ τοῦ ἀγνόςου μείζονος, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔςαι 86750 + 9 = 86759.

Τὰ

Τὰ παροράματα διόρθωσον οὕτω.

Σελίδι	1	ςίχῳ 15	διότ	ἀνάγνωθι	διότι.
	2	17	ἐαὶ	—	ἐάν.
	4	26	τἰ	—	τὴ
	αὐτ.	28	β	—	β
	5	19	καὶ σί	—	καὶ οἱ
		29	οἐκ	—	οὐκ
	6	7	αὐτὶ	—	ἀντὶ
	12	19	ὑπαγορείειν	—	ὑπαγορεύειν
	-	21	ὑμονουμένου	—	ὑπονοουμένου
	-	25	εὔθεντοι	—	ἔνθετοι
	13	7	αὐτὶ	—	ἀντὶ
		9	αντὶ	—	ἀντί.
	14	12	δία	—	διὰ
	16	2	κὶ	—	καὶ
	17	14	ὦσι	—	ὦσι
	25	8	εἴκ	—	εἴη
	51	19	αὐτὸ ἐςιν	—	αὐτό ἐςιν
	99	8	ἐλάττων	—	ἐλάττων
	109	31	$\frac{4}{c}\,\frac{1}{2}$	—	$\frac{4}{c}\,\frac{2}{2}$

Σελ. 112	στίχῳ	9	ὥπερ	ἀνάγνωθι	ὥσπερ
136		23	τόν δ' ἐςι	—	τὸ δ' ἐςι
151		10	5013 · 100 10 · 123	—	περιττόν
160		19	πολιαπλασιαςέα	—	πολλαπλασ.
169		2	Τὸτ	—	Τότε
173		9	εἰς τοὔπίσω	—	ἀνάπαλιν
197		2	Εὐθὺς, ἢ Εὔθετος	—	περιττόν.
233		12	Πρόοδοι	—	Πρόδοι
266		9	τυλευταίων	—	τελευταίων
416		2	διαφορᾶς	—	διαφορά.
			ὁ δ' ἐλάσσων,	—	ὁ δ' ἐλάσσων,
		8	ὁ	—	ὁ
		10	Ἕτέρου	—	Ἑτέρου
		26	Ἐξίσωεις	—	Ἐξίσωσις
		30	τοίνυν.	—	τοίνυν

Δι ἀναγκαίαν ἀπουσίαν τοῦ Μεταφραστοῦ, καὶ τοῦ Στοιχειωθέτου ἄγνοιαν, τοσαῦτα εἰσέφρησαν παροράματα ἐν τῇ ἀρχῇ, ἐν τῇ ἀφιερωτ. ἐπισ. καὶ ἐν τῇ πρὸς τὸν ἀναγνώστην, ὡσαύτως καὶ περὶ τὰ τέλη τῆς βίβλου, ὥστε καὶ ἑτέρου ἐλέγχου δεηθῆναι τῶν κυριωτέρων παροραμάτων, βαρβαρισμοὺς πολλοὺς παριδόντας, ὑφ' ἑκάστου ῥᾶστα ἐπιγινωσκομένους.

		ἐν ἀρχῇ
Ἀριθμιτηκῆς	γρ.	Ἀριθμητικῆς
Ἀλγίβρης	—	Ἀλγέβρας μεθ' ἑλλ. ρ.
		ἐν τῇ ἀφ. ἐπισ.
τὸ μοι	ἀνάγν. μετὰ τοῦ α'. κυρίω. ἤτοι κυρίῳ μοι.	
λάμπρότ.		λαμπρότ.
		ἐν τῇ πρὸς τὸν ἀναγ.
Μάλλον		Μᾶλλον.
ἑαυτοὶς		ἑαυτοῖς
εἰ δέναι		εἰδέναι.
τὸν προβαλλόμ.		τὰ προβαλ.

ποιῶ

		ποιεὶ	ποιεῖ.
		ἐμαιτοῦ.	ἐμαυτοῦ.
		ὑμετ.	ἡμετ.
		τὸ, τε,	τό, τε.
		ἀναγνωσης.	ἀναγνώσεως.
		ταῖς βίβλου	τῆς βίβλου.

Σελ. 386. ς. 31. $\chi=15+8+23$· γρ. $\chi=15+8=23$.

394	4	$=\lambda.515$	$=\lambda.512$.
	5	$\frac{\lambda.515}{\lambda.2}$	$\frac{\lambda.512}{\lambda.2}$
395	1	ἔξα	ἔξαι.
402	7	κυβ. 5.	κυβ. π.
	18	μεταξὺ τοῦ $\frac{1080}{36+27+28}$ καὶ $\frac{1080}{91}$ τεθήτω τὸ $=$	
404	21	$15\chi=10\chi$	$15\chi-10\chi$
406	26	ζητεῖσθει	ζητεῖσθαι.
	27	γνωτὸν	γνωστόν
407	13	ἔξαι, ἢ πο.	ἔξαι ἢ πο.
409	4	$\frac{16\chi-3700}{2}$ γρ.	$\frac{16\chi-3700}{9}$
410	5	πλὴν ἑκατὸν	πρὸς ἑκατόν.
	28	1 θαλ. ἐλάττ.	10 θ. ἐλ.
414	6	τῆς αὐτῆς ποσ.	τῆς αὐτῆς ἀγνώστου ποσ.
416	2	διαφορᾶς	διαφορά.
	10	Ἕτερον	Ἕτερον
	26	Ἐξισωεις	Ἐξίσωσις.
	30	τοίνυν. Ἐξισ.	τοίνυν Ἐξισ.
417	22	ἐνυπαρχόντων	ἐνυπαρχουσῶν
418	2	ἵνα	ἵνα
425	9	ἀοκύει	ἀκούει.
426	10	ἐξαμφοῖν	ἐξ ἀμφοῖν.
427	13	ἢ $\chi=\sqrt{\frac{24}{5}}$	ἢ $\chi=\frac{\sqrt{24}}{5}$
429	9	ἀφαιρεθένπος.	ἀφαιρεθέντος.
	10	Τοῦδο	Τοῦτο

Σελ.

Σελ. 440	ἐν τέλει	$\chi ; 10$ κτ.	$\chi : 10 - \chi = 10 - \chi : 34 - \chi$
441	19	καὶ $+ . 9$	καὶ $+ 9 .$
447	6	τὼν	τῶν
449	14	$= \frac{1}{2} \underline{\sqrt{5}}$ / 2	$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$
452	11	καταφοτικῆς	καταφ.
453	8	Εἰ	Εἰ
454	8	ἡν	ἦν
455	6	ὄλοσχεροῦς	ὁλοσχεροῦς
459	ἐν τέλει	$+ 4$	$+ 64$
464	9	ἀποφατικοῦν	ἀποφατικῶν.
	12	πάντων	πασῶν
468	9	$\chi - 2\chi)^2$	$\chi - 2)\chi^2$
470	9	ἐτετρ.	ἐτετρ.
470	26	$^2\psi$	ψ^2
476	9	$\alpha\chi$ Τὸ δὲ.	$\alpha\chi$. Τὸ δὲ (
477	4		οἱ ἀσερίσκοι περιττοί.
478	12	$+ \beta^2 \delta^2 \zeta^2 \varepsilon$ γρ.	$\beta^2 \delta^2 \zeta^2 \varepsilon$
480	19	κατάτμ.	κατατμ.
481	αὐτ.	ἀλλήλοις.	ἀλλήλαις.
482	15	$= - + 1$	$= - 1$
	αὐτ	$\psi = 1 . 2$ γρ.	$\psi = 2$
484	14	ποσότητος, ἀντὶ τοῦ χ	ποσότητος ἀντὶ τοῦ χ.
	16	Ἐπ᾽ κυσικῶν τῶν.	Ἐπὶ τῶν κυβικῶν
485	8	ἀντικασαςάντος	ἀντικαταςάντος
	ἐν τέλει.	ἡ μετ. κ. Ἐξ.	ἡ κ. Ἐξ. μετ.
486	8	$+ 1 + 3 + 4$	$+ 1 + 3 = \pm 4$
	12	$\psi - \frac{9}{4}$	$\psi - \frac{9}{4}$
	22	καὶ δ᾽ ὅρος	καὶ δ΄. ὅρος
	23	σχρήσεως	χρήσεως
488	24	προσθῆναι	προσθεῖναι
489	19	λοιποὶ	λοιπαὶ·
490	10	δυοεῖν	δυεῖν.
	13	ἀδιόρισαι	ἀδιόρισοι
491	7	ὁλοσχερὴ	ὁλοσχερὴς
	17	ποσότης	ποσότητι
	20	τεθέντῶν . . . οἱ τούτοις ἀν. ἀρ. γρ. τεθέντων τῶν τούτοις ἀν. ἀρ.	

Σελ.

Σελ. 493	5	αὐτικα.	αὐτίκα:
	8	διαιρεσίμου	διαιρέσιμον
	13	ζητήτωμεν	ζητήσωμεν.
	19	τοιοῦτον	τοιοῦτον,
494	14	παραλυλ.	παραληΦϑ.
495	1	τηλικουντου	τηλικοῦτον
	8	ἐςαὶ χ 12	ἔςαι χ = 2
	9	Εἲ,	Εἰ
	16	κατάβαλλουσι	καταβάλ.
	17	15 ἀνδ. καὶ γ.	15 ἀνδ. καὶ 55 γυν.
496	15	συνᾳδουσιν	συνᾳδουσιν.
			ν
	20	τοῦ α ὁ λογ.	τοῦ α ὁ λογ.
497	1	Εἰς τὸ).	Εἰς τὸ §.
	27	ἀκριβὴ	ἀκριβῆ
	28	μειζονι	μείζοσι·
498	9	ἐν τῆς ἐλ.	ἐν τοῖς ἐλ.
	11	χορήσωμεν	χωρήσομεν
	14	ἐν μὲν	εἰ μὲν
	20	ἄψυλη	ἄΦυλη
500	15	τοῦ ἀγνέςου	τοῦ ἀγνώςου.
	16	ἐςαι	ἔςαι

Πίναξ Κεφαλαιώδης.

Σελίδ.