

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

^{ΕΚ}
ΠΑΛΑΙΩΝ *καὶ* ΝΕΩΤΕΡΩΝ

Συνεραναθέντων

ΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ

ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ

ΠΡΩΗΝ ΑΣΤΡΑΧΑΝΙΟΥ

ΚΤΡΙΟΥ ΝΙΚΗΦΟΡΟΥ,

Φιλοτίμῳ δὲ δαπάνῃ ἐκδοθέντων,
Ὅπως δωρεὰν διανέμονται τοῖς ἐν τοῖς

Ἑλληνομασείοις φοιτῶσιν,

ΤΟΥ ΤΩΝ ΤΙΜΙΩΤΑΤΩΝ *καὶ* ΦΙΛΟΓΕΝΩΝ
ΑΥΤΑΔΕΛΦΩΝ

Ζ Ω Σ Ι Μ Α

Τ Ο Μ Ο Σ Δ Ε Τ Τ Ε Ρ Ο Σ,

περιέχων

ΤΑ ΑΡΧΙΜΗΔΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ,

ΤΗΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΝ,

ΚΑΙ

ΤΑΣ ΤΟΥ ΚΩΝΟΥ ΤΟΜΑΣ.

ΕΝ ΜΟΣΧΑ,

Ἐν τῷ τῆς Κοιότητος Τυπογραφείῳ παρὰ
Ῥηδηγέρω *καὶ* Κλαυδίῳ.

Ἔτει 1799.

Съ дозволенія Московской Цензуры.



ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ, ΟΙΣ ΚΑΙ ΑΛΛΑ ΤΙΝΑ ΠΡΟΣΕΤΕΘΗ.

ΛΗΜΜΑ Α'.



Ὁ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον ἴσον ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ὃ ἢ μὲν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἴση τῇ τῷ κύκλῳ ἡμιδιαμέτρῳ ἢ δὲ, τῇ τῷ πολυγώνῳ περιμέτρῳ.

Ἐστω κανονικὸν πολύγωνον, τὸ ΑΒΓΔΕ περὶ τὸν ΘΛΖΗ κύκλον περιγεγραμμένον. καὶ ἀπὸ τῆς κέντρος Κ ἐπὶ τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον Θ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΘ. ἔστω δὲ τῷ ΠΡΣ τριγώνῳ, ἡ μὲν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρὰ ΠΡ, ἴση τῇ ΚΘ· ἡ δὲ ΡΣ, τῇ τῷ πολυγώνῳ περιμέτρῳ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΠΡΣ τριγώνῳ. πίν. Α. χ. 1.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῆς κέντρος Κ ἐπὶ τε τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ ἐπὶ τὰ τῶν ἐπαφῶν σημεῖα Ζ, Λ, Ι, Η ἐπεζεύχθωσαν αἱ

Α 2

ΚΛ.

ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΕ, καὶ εἰ ΚΖ, ΚΛ, ΚΙ, ΚΗ. καὶ τετμήθω
ἡ ΡΣ εἰς ἴσα μέρη δεκά, τὰ ΡΤ, ΤΦ, ΦΜ, κτ. (α).
καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΠΤ, ΠΦ, ΠΜ, καὶ αἱ ἐξῆς.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ ΚΘΔ, ΚΙΔ, ΚΙΕ, κτ. τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις
εἰσίν. ὡσαύτως καὶ τὰ ΠΡΤ, ΠΤΦ, ΠΦΜ, κτ. (β).
ἀλλὰ τὸ ΚΘΔ = ΠΡΤ. ἔστι γὰρ τὸ μὲν ὕψος ΚΘ =
ΠΡ, ἡ δὲ βάσις ΘΔ = ΡΤ. (γ) ὅλη γὰρ ἡ ΡΣ ἴση
τῇ τῷ πολυγώνῳ περιμέτρῳ, (δ) αἱ δὲ ΘΔ, ΡΤ δεκά-
τημόρια τῶν ὅλων. ἄρα ἕκαστον τῶν ΚΘΔ, ΚΙΔ, ΚΙΕ,
κτ. τριγώνων ἴσον ἕκαστῳ τῶν ΠΡΤ, ΠΤΦ, ΠΦΜ, κτ.
ὅλον ἄρα τὸ πλῦγανον ΑΒΓΔΕ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΠΡΣ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τέτε φανερόν, ὅτι τὸ μὲν περὶ τὸν κύκλον
περιγεγραμμένον κανονικὸν πλῦγανον ἴσον ἐστὶ τριγώνῳ, ὃ
ὕψος μὲν ἡ τῷ κύκλῳ ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ εὐθεῖα ἴση
τῇ τῷ πολυγώνῳ περιμέτρῳ· τὸ δὲ εἰς τὸν κύκλον ἐγγε-
γραμμένον ἴσον τριγώνῳ, ὃ ὕψος μὲν ἡ ἀπὸ τῷ κέντρῳ τῷ
κύκλῳ ἀγομένη κάθετος μιᾷ τῶν τῷ πολυγώνῳ πλευ-
ρῶν, βάσις δὲ εὐθεῖα ἴση τῇ τῷ πολυγώνῳ περιμέτρῳ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. (ε)

Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, ὃ
ἡ μὲν ἐκ τῷ κέντρῳ ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρ-
θὴν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μὲν περίμετρος τῷ κανονικῷ πολυγώνῳ τῷ περὶ
τὸν κύκλον περιγεγραμμένῳ εἰς τὴν τῷ κύκλῳ περιφε-
ρειαν,

(α) Κατὰ τὴν Συνέσ. τῆς ι. τῷ ε'. βιβλ. τῆς Γεωμ. (β) Κατὰ
τὸ Θεώρ. τὸ μετὰ τὴν κγ'. τῷ ε'. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Ὀμοίως.
(ε) Τὸ πρῶτον ἐστὶ τῷ Ἀρχιμ. ἐν τῇ περὶ κύκλου μετρήσεως βιβλ.

ρειαν, αὐτὸ δὲ τὸ πολύγωνον εἰς τὸν κύκλον ἀπολήγει. (ζ)
 ἀλλὰ τὸ εἰρημένον πολύγωνον ἴσον ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, ὃ ἢ μὲν ἐκ τῆς κέντρος ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἢ δὲ περιμέτρος τῇ βάσει. (η) ἄρα καὶ ὁ κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, ὃ ἢ μὲν ἐκ τῆς κέντρος ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἢ δὲ περιμέτρος τῇ βάσει. (θ)

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτων δὴλον, ὅτι πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ, ὃ ὕψος μὲν ἢ τῆς κυκλῆς ἡμιδιαμέτρος, βάσις δὲ εὐθεῖα ἴση τῇ τῆς κύκλῃ περιφερείᾳ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Καὶ εἰ μὴδὲ πω ἐφάνη, πάνυ καλῶς φησὶν ὁ Ἐυτόκιος ὁ Ἀσκαλωνίτης, (ι) δυνατόν, περιφερεῖα κύκλῃ ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ' ὅμως ἐνῶν τινὰ τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτῇ πρὸς ἑδενός ἐστι ζητούμενον. εἰ γὰρ τοιαύτην ἐνὴν πορίσασθαι εὐθεῖαν, ἐπελύετο αὐτὸ πολυθρύλλητον ζήτημα, τετέστιν ἐτετραγωνίζετο ὁ κύκλος. εὐρίσκειται δ' ἐν ὅμως εὐθεῖα, ὡς κατωτέρω διαχθήσεται, τοσούτον ἔγγιστα τῇ εὐθείᾳ ἴση τῇ τῆς κύκλῃ περιφερείᾳ, ὥστε ἴσης λογιζομένης, μὴδὲν ἐπίσημον ἐν ταῖς καταμετρήσεσι προκύπτειν παρὰ πτωμα.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Β'. (κ)

Παντὸς κύκλῃ ἢ περιμέτρος τῆς διαμέτρος τριπλασίῳ ἐστὶ, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἐβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρος, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἐβδομηκοσημόνοις.

(ζ) Κατὰ τὸ α'. Λῆμ. τὸ πρὸ τῆς β'. προτ. τῆς ιβ'. βιβλ.

(η) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ. (θ) Κατὰ τὸ β'. Λῆμ. τὸ πρὸ τῆς β'. προτ. τῆς ιβ'. (ι) Ἐν τῷ ὑπομν. ὡς τὴν Ἀρχιμ. τῆς κύκλ.

μέτρησ. (κ) Τῆς Ἀρχιμ. γ'. ἐστὶν ἐν τῷ α'. βιβλ.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ περίμετρος τῆς πολυγώνου, τῆς ἔχοντος 96 πλευ-
 ράς, καὶ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένης τριπλασίῳ
 ἐστὶ τῆς τῆς κύκλου διαμέτρου, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσ-
 σονι ἢ ἐβδόμῳ μέρει. ἀλλ' ἡ τῆς κύκλου περιφέρεια ἐλάσ-
 σων ἐστὶ τῆς τῆς πολυγώνου. πολλῷ ἄρα ἡ τῆς κύκλου
 περιφέρεια ἐστὶ τριπλασίῳ τῆς τῆς κύκλου διαμέτρου,
 καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι ἢ ἐβδόμῳ αὐτῆς μέρει. ἐπεὶ
 δὲ ἡ περίμετρος τῆς πολυγώνου, τῆς ἔχοντος 96 πλευ-
 ράς, καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένης, τριπλασίῳ
 ἐστὶ τῆς τῆς κύκλου διαμέτρου, καὶ ἔτι ὑπερέχει μείζονι
 ἢ δέκα ἐβδομηκοσημόνοις (τετάρτῃ $\frac{10}{71}$) ἐστὶ δὲ ἡ τῆς
 κύκλου περιφέρεια μείζων τῆς τῆς πολυγώνου περι-
 μέτρου πολλῷ ἄρα ἡ τῆς κύκλου περιφέρεια τῆς διαμέ-
 τρου ἐστὶ τριπλασίῳ, καὶ ἔτι ὑπερέχει μείζονι αὐτῆς
 μέρει, ἢ δέκα ἐβδομηκοσημόνοις.

Ὅτι δὲ αἱ τῶν εἰρημένων πολυγώνων περίμετροι πρὸς
 τὴν τῆς κύκλου διάμετρον τὰς διαληφθέντας ἔχουσι λό-
 γους, δείξομεν ὅτως.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΔΒ, ὃς κέντρον μὲν τὸ Κ, διάμετρος
 δὲ ἡ ΑΒ. καὶ ἐγγεγραφθῶ εἰς αὐτὸν πλευραὶ ἐξαγώ-
 νη ἡ ΑΔ. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΚΔ, ἤχθῳ ἀπὸ τῆς
 Α ἐφαπτομένη τῆς κύκλου ἡ ΑΕ. καὶ διὰ μὲν τῆς ΚΕ,
 τῆς συμπίπτουσης τῇ ἐφαπτομένῃ κατὰ τὸ Ε, δίχα
 τετμήθῳ ἡ ΔΚΑ γωνία, διὰ δὲ τῆς ΚΦ ἡ ΣΚΑ, διὰ
 δὲ τῆς ΚΖ ἡ ΦΚΑ, διὰ δὲ τῆς ΚΗ ἡ ΖΚΑ, διὰ δὲ
 τῆς ΚΓ ἡ ΗΚΑ. καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΕΑ, εἰλήθῳ
 ἡ ΑΛ ἴση τῇ ΑΓ. λέγω Α' ὅτι ἡ ΑΓ πλευρὰ ἐστὶ τῆς
 περὶ τὸν κύκλον ΑΔΒ περιγεγραφομένης πολυγώνου, πλευ-
 ράς ἔχοντος 96. λέγω Β' ὅτι ἡ ΑΓ ληφθεῖσα 96,
 εἴτεν ἡ περίμετρος τῆς εἰρημένης πολυγώνου, τριπλασίῳ
 ἐστὶ τῆς διαμέτρου, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι, ἢ ἐβ-
 δόμῳ αὐτῆς μέρει. ἐπεξεύχθῳ γάρ ἡ ΚΛ. χ. 2.

ΔΕΙ

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐπεὶ ἡ ΑΔ πλευρά ἐστιν ἑξαγώνος εἰς τὸν κύκλον ἑγγεγραμμένη, (λ) ἡ μὲν ΔΚΑ γωνία ἴση $\frac{1}{6}$ τεσσάρων ὀρθῶν (μ) ἡ δὲ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ ΣΚΑ ἴση $\frac{1}{12}$ ἡ δὲ τῆς ΣΚΑ ἡμίσεια, ἤτοι ἡ ΦΚΑ ἴση $\frac{1}{24}$ ἡ δὲ τῆς ΦΚΑ ἡμίσεια, τετάρτην ἡ ΖΚΑ ἴση $\frac{1}{48}$ ἡ δὲ αὐτῆς ἡμίσεια, ἡ ΗΚΑ ἴση $\frac{1}{96}$ ἡ δὲ αὐτῆς ἡμίσεια, ΓΚΑ = $\frac{1}{192}$ τεσσάρων ὀρθῶν. ἔπει δὲ ἐν τοῖς τριγώνοις ΓΚΑ, ΔΚΑ, ἡ μὲν ΓΑ = ΑΔ, (ν) ἡ δὲ ΑΚ κοινὴ, αἱ δὲ περὶ τὸ Α γωνίαι ἴσαι, (ξ) ἡ γωνία ἄρα ἡ ΓΚΑ = ΔΚΑ. (ο) ἡ ἄρα ΔΚΓ διπλασία τῆς ΓΚΑ, εἴτεν ἴση τῇ ΗΚΑ. ἔστι δὲ ἡ ΗΚΑ ἴση $\frac{1}{96}$ τεσσάρων ὀρθῶν, ἡ δὲ ΔΚΓ ἄρα ἴση $\frac{1}{96}$ τεσσάρων ὀρθῶν. ἡ ἄρα ΑΓ πλευρά ἐστὶ τῇ περὶ τὸν κύκλον ΑΔΒ περιγεγραφομένῃ πολυγώνῳ, πλευρὰς ἔχοντος 96.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΔΚΣ, ΑΚΣ, ἡ μὲν ΚΔ = ΚΑ, ἡ δὲ ΚΣ κοινὴ, ἡ γωνία ἡ ΔΚΣ = ΑΚΣ. (π) ἄρα καὶ ἡ ΔΣ = ΣΑ. (ρ) ἡ ἄρα ΑΔ διπλασία τῆς ΑΣ. αἱ δὲ ἡ ΑΔ = ΑΚ. (σ) καὶ ἡ ΑΚ ἄρα διπλασία τῆς ΑΣ. ἔπει δὲ τὰ τρίγωνα ΚΑΕ, ΚΑΣ ὅμοια αἰσθητοῖς αἰσίν, (τ) ὡς ἄρα ΚΕ : ΕΑ :: ΚΑ : ΑΣ. (υ) ἄρα ἡ

Α 4

ἡ

- (λ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (μ) Τίτλοι γὰρ ὀρθῶν ἴσων ἔσων τῶν περὶ τὸ Κ σημάτων γωνιῶν, (κατὰ τὴν γ'. συνίπ. τὴν μετὰ τὴν γ'. τῷ α'). ἡ αὖ ἐξ διηρημένων ἴσα μέρη διὰ τὸ ἑγγεγραμμένον ἑξαγώνον, ἡ ΔΚΑ $\frac{1}{12}$ ἴσῃ (ν) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ξ) Κατὰ τὴν αἱ τῷ γ'. (ο) Κατὰ τὴν δ'. τῷ α'. (π) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ α'. (σ) Κατὰ τὴν β'. συνίπ. τῆς αἱ. τῷ δ'. (τ) Κατὰ τὴν εἰ. τῷ ε'. (υ) Κατὰ τὴν ἀντίπ.

ἡ ΚΕ διπλασία τῆς ΕΑ. καὶ ἐπεὶ δίχα τέτμηται ἡ ΕΚΑ γωνία ὑπὲρ τῆς ΚΦ, (Φ) ἔστιν ἄρα ὡς $EK : KA :: EF : FA$. (Χ) καὶ συντεθέντα ἄρα ὡς $EK + KA : KA :: EF + FA : FA$. (Ψ) καὶ ἐναλλάξ, ὡς $EK + KA : EA :: KA : FA$. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι ὡς $ΦΚ + ΚΑ : ΦΑ :: ΚΑ : ΖΑ$, καὶ ὡς $ZK + KA : ZA :: KA : HA$, καὶ ἔτι ὡς $KH : KA : HA :: KA : ΓΑ$.

Καίθω ἡ $EK = 306$. ἄρα ἡ $EA = 153$. διὸ τὸ μὲν $EK^2 = 93636$, τὸ δὲ $EA^2 = 23409$. ἐπὶ δὲ $EK^2 = KA^2 + EA^2$, ἔσται $KA^2 = EK^2 - EA^2$, καὶ δὲ διπλασθεὶς ἀφαιρέθεις τῷ EA^2 . τὸ ἄρα $KA^2 = 93636 - 23409 = 70227$. διὸ ἡ ΚΑ ἴση τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῷ 70227. ἀλλὰ τέτς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, ἐλάττωσεν δὲ τῆς ἀκριβοῦς, ἔστιν ὁ 265. ἄρα ἡ ΚΑ ≥ 265 . διὸ $EK + KA \geq 306 + 265 = 571$. ἄρα $EK + KA : EA \geq 571 : 153$. ἀλλ' ὡς $EK + KA : EA :: KA : FA$, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ $KA : FA \geq 571 : 153$. καὶ ἑκατέρω τῶν ἀριθμῶν διὰ τῷ 8 πολλαπλασιασθέντος, $KA : FA \geq 4568 : 1224$. ἔστω ἔν ἡ $FA = 1224$. ἡ ἄρα ΚΑ ≥ 4568 .

Ἐπεὶ ἔν ἡ μὲν $FA = 1224$, ἡ δὲ ΚΑ ≥ 4568 , ἔσεται τὸ μὲν $FA^2 = 1498176$, τὸ δὲ $KA^2 \geq 20866624$. ἔστι δὲ τὸ $KΦ^2 = FA^2 + KA^2$. τὸ ἄρα $KΦ^2 \geq 1498176 + 20866624 = 22364800$. ἀλλὰ τέτς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, ἐλάττωσεν δὲ τῆς ἀκριβοῦς, ἔστιν ὁ 4729. ἡ ἄρα $KΦ \geq 4729$. διὸ $ΦΚ + ΚΑ \geq 4729 + 4568 = 9297$. ἄρα $ΦΚ + ΚΑ : ΦΑ \geq 9297 : 1224$. ἀλλ' ὡς $ΦΚ + ΚΑ : ΦΑ :: ΚΑ : ΖΑ$, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ $KA : ZA \geq 9297 : 1224$. εἰάν ἄρα τεθῇ ἡ $ZA = 1224$, ἔσεται ἡ ΚΑ ≥ 9297 .

Ὁμῶς

(Φ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (Χ) Κατὰ τὴν γ'. τῷ ε'. (Ψ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (ω) Κατὰ τὴν ζ'. τῷ αὐτ. βιβλ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Τ Α

Οὐκ ἔν τὸ μὲν $\overline{Z\Lambda^2} = 1498176$, τὸ δὲ $\overline{K\Lambda^2} \supset 86434209$. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{KZ^2} = \overline{Z\Lambda^2} + \overline{K\Lambda^2}$, ἔσται ἄρα τὸ $\overline{KZ^2} \supset 1498176 + 86434209 = 87932385$. ἀλλὰ τέττα ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, ἐλάσσων δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 9377. ἡ ἄρα $KZ \supset 9377$. διὸ $ZK + KA \supset 9377 + 9297 = 18674$. ὥστε $ZK + KA : Z\Lambda \supset 18674 : 1224$. ἀλλ' ὡς $ZK + KA : Z\Lambda :: KA : HA$, ὡς δίδεκεται. ἄρα καὶ $KA : HA \supset 18674 : 1224$. καὶ τῷ ἡμίσεως δὲ ἑκατέρω τῶν ἀριθμῶν ληφθέντος, ἔσεται ὡς $KA : HA \supset 9337 : 612$. εἰάν ἄρα τεθῇ ἡ $HA = 612$, ἔσται ἡ $KA \supset 9337$.

Τοιγαρὲν τὸ μὲν $\overline{H\Lambda^2} = 374544$, τὸ δὲ $\overline{K\Lambda^2} \supset 87179569$. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{KH^2} = \overline{H\Lambda^2} + \overline{K\Lambda^2}$, ἔσται ἄρα τὸ $\overline{KH^2} \supset 374544 + 87179569 = 87554113$. ἀλλὰ τέττα τετραγωνικὴ ρίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, ἐλάττω δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 9357. ἡ ἄρα $KH \supset 9357$. διὸ $KH + KA \supset 9357 + 9337 = 18694$. ἄρα $KH + KA : HA \supset 18694 : 612$. ἀλλ' ὡς $KH + KA : HA :: KA : \Gamma A$, ὡς δίδεκεται. ἄρα καὶ $KA : \Gamma A \supset 18694 : 612$. καὶ τῷ διπλασίῳ μὲν ἑκατέρας τῶν $KA, \Gamma A$, τῷ ἡμίσεως δὲ ἑκατέρω τῶν ἀριθμῶν ληφθέντος, ἔσεται 2. $KA : 2. \Gamma A \supset 9347 : 306$. ἀλλὰ 2 $KA = AB$, καὶ 2 $\Gamma A = \Lambda \Gamma$. ἄρα $AB : \Lambda \Gamma \supset 9347 : 306$. καὶ ἐναλλάξ $AB : 9347 \supset \Lambda \Gamma : 306$. καὶ 96 ληφθείσης τῆς τε $\Lambda \Gamma$, καὶ τῷ 306, ἔξει $AB : 9347 \supset 96. \Lambda \Gamma : 29376$. καὶ ἐναλλάξ, $AB : 96. \Lambda \Gamma \supset 9147 : 29376$. καὶ ἑκατέρω τῶν ἀριθμῶν διὰ τῷ 9347 διαιρεθέντος, ἔξει $AB : 96. \Lambda \Gamma \supset 1 : 3 + \frac{1337}{9347}$ καὶ ἀνάπαλιν $96. \Lambda \Gamma : AB \supset 3 + \frac{1337}{9347} : 1$. ἡ ἄρα 96. $\Lambda \Gamma$, εἴταν ἡ περίμετρος τῷ περὶ τὸν κύκλον ΛB περιγεγραφομένῳ πολυγώνῳ, τριπλασίῳ ἐστὶ τῆς AB , καὶ ἐτι

ὑπερέχει ἑλαττον ἢ $\frac{1337}{9347}$ τῆς διαμέτρου. τὸτο δὲ 70 κλάσμα ἑλαττον ἐστίν, ἢ $\frac{1}{7}$ τῆς διαμέτρου. ἡ περίμετρος ἄρα τῶ πολυγώνου τῷ περὶ ⁷ τὸν κύκλον ΑΔΒ περιγγραφομένη τριπλασίον ἐστὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ, καὶ ἐτι ὑπερέχει ἐλάσσονι ἢ ἐβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου.

Ἔστω πάλιν κύκλος ὁ ΑΔΒ, (χ. 3.) ὃ κέντρον μὲν τὸ Κ, διάμετρος δὲ ἡ ΑΒ. καὶ ἐγγεγραφθῶ εἰς αὐτὸν πλευρά κανονικῆ ἑξαγώνου ἡ ΑΔ. καὶ ἐπιζευχθείης τῆς ΒΔ, τετμήσθω δίχα ἡ μὲν γωνία ΔΒΑ διὰ τῆς ΒΕ, ἡ δὲ ΕΒΑ διὰ τῆς ΒΦ, ἡ δὲ ΦΒΑ διὰ τῆς ΒΖ, ἡ δὲ ΖΒΑ διὰ τῆς ΒΗ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. λέγω Α', ὅτι ἡ ΑΗ πλευρά ἐστὶ τῷ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραφομένῳ πολυγώνῳ, πλευρὰς ἔχοντος 96. λέγω Β', ὅτι ἡ περίμετρος τῷ εἰρημένῳ πολυγώνῳ τριπλασίον ἐστὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ, καὶ ἐτι ὑπερέχει μείζονι, ἢ δέκα ἐβδομηκοσημόνοις (εἴταν $\frac{10}{96}$) τῆς διαμέτρου. ἐπεζεύχθωσαν γάρ αἱ ΑΕ, ΑΦ, ΑΖ, ⁷¹ καὶ αἱ ΚΔ, ΚΕ, ΚΦ, ΚΖ, ΚΗ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α.

Ἐπεὶ ἡ ΑΔ πλευρά ἑξαγώνου ἐστίν, ἡ ΔΚΑ γωνία ἴση ἐστὶν $\frac{1}{6}$ τεσσάρων ὀρθῶν. διὸ ἡ μὲν ΕΚΑ $= \frac{1}{12}$, ἡ δὲ ΦΚΑ $= \frac{1}{24}$, ἡ δὲ ΖΚΑ $= \frac{1}{48}$, ἡ δὲ ΗΚΑ ἴση $\frac{1}{96}$ τεσσάρων ὀρθῶν. ἡ ἄρα ΑΗ πλευρά ἐστὶ τῷ τὸν κύκλον ἐγγεγραφομένῳ πολυγώνῳ, πλευρὰς ἔχοντος 96.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΕΒΑ, ΕΣΑ, ἡ μὲν γωνία ΕΒΑ $=$ ΕΑΣ, (α) ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε κοινὴ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΛΒ $=$ ΕΣΑ. ὡς ἄρα ΑΒ : ΑΣ :: ΒΕ : ΕΑ. (β) καὶ ἐπεὶ δίχα τέτμηται ἡ ΔΒΑ γωνία ὑπὸ τῆς ΒΕ, ἔστιν
ὡς

(α) Κατὰ τὴν αζ. τῷ γ'. (β) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'.

ὡς $\Delta B : BA :: \Delta \Sigma : \Sigma A$. (γ) καὶ συντεθέντα ὡς
 $\Delta B + BA : BA :: \Delta \Sigma + \Sigma A : \Sigma A$. καὶ ἐναλλάξ $\Delta B +$
 $BA : \Delta A :: BA : \Sigma A$. διὸ καὶ ὡς $\Delta B + BA : \Delta A ::$
 $BE : EA$. (δ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθήσεται, ὅτι καὶ
 $\omega s EB + BA : EA :: BF : FA$, καὶ ὡς $FB + BA :$
 $FA :: BZ : ZA$, καὶ ἔτι ὡς $ZB + BA : ZA :: EH : HA$.

Ἔστω ἡ $BA = 1560$. ἄρα ἡ $AK = 780$. ἀλλ' ἡ
 $AD = AK$. (ε) ἄρα καὶ ἡ $AD = 780$. ἔκέν τὸ μὲν
 $\overline{BA}^2 = 2433600$, τὸ δὲ $\overline{AD}^2 = 608400$. ἐπεὶ δὲ
 $\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BA}^2$, (ζ) κοινῶς ἄρα ἀφαιρεθέντος τῆς
 $\overline{AD}^2$. ἔσεται $\overline{DB}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{AD}^2$, εἴτεν $\overline{DB}^2 = 24-$
 $33600 - 608400 = 1825200$. ἀλλὰ τέττε ἡ τετραγώ-
 $\nu\eta\kappa\eta$ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς,
 $\epsilon\sigma\iota\nu$ ὁ 1351. ἡ ἄρα $\Delta B \angle 1351$. διὸ καὶ $\Delta B + BA \angle$
 $1351 + 1560 = 2911$. ὁ ἄρα $2911 : 780 \supset \Delta B +$
 $BA : \Delta A$. καὶ ἑκατέρω τῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς 100 πολλα-
 $\pi\lambda\alpha\sigma\iota\alpha\theta\epsilon\iota\sigma\iota\varsigma$, ἔξει ὁ $291100 : 78000 \supset \Delta B +$
 $BA : \Delta A$. ἀλλ' ὡς $\Delta B + BA : \Delta A :: BE : EA$, ὡς δὲ
 $\delta\epsilon\iota\kappa\tau\alpha\iota$. ἄρα καὶ ὁ $291100 : 78000 \supset BE : EA$. εἰάν
 $\epsilon\nu$ τεθῇ ἡ $EA = 78000$, ἔσεται ἡ $BE \angle 291100$.

Οὐκέν τὸ μὲν $\overline{EA}^2 = 6084000000$, τὸ δὲ $\overline{BE}^2 \angle$
 84739210000 . ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{BA}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EA}^2$, τὸ ἄρα
 $\overline{BA}^2 \angle 90823210000$. ἀλλὰ τέττε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα,
 η σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 301375.
 η ἄρα $BA \angle 301375$. ἄρα καὶ $EB + BA \angle 291100 +$
 $301375 = 592475$. διὸ ὁ $592475 : 78000 \supset EB +$
 $BA : EA$. καὶ ἑκατέρω μὲν τῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς 325
 $\delta\iota\alpha\iota\rho\epsilon\theta\epsilon\iota\sigma\iota\varsigma$, ἑκατέρω δὲ τῶν προκυπτόντων πηλίκων
 $\delta\iota\alpha$ τῆς 11 πολλαπλασιασθέντος, ἔξει ὁ $20053 : 2640 \supset$
 $EB + BA : EA$. ἀλλ' ὡς $EB + BA : EA :: EF : FA$,

κα-

(γ) Κατὰ τὴν γ'. τῇ αὐτ. (δ) Κατὰ τὴν δ. (ε) Κατὰ τὴν β.
 συνίσ. τῆς α. τῇ δ. (ζ) Κατὰ τὴν λ. τῇ γ, καὶ μ. τῇ α.

καθάπερ δέδεικται. ἄρα ὁ $20053:2640 > B\Phi: \Phi A$.
 εἰάν ἄρα τεθῇ ἡ $\Phi A = 2640$, ἔσται ἡ $B\Phi < 20053$.

Τῶν καμμένων, ἔσται τὸ μὲν $\overline{\Phi A}^2 = 6969600$, τὸ δὲ $\overline{B\Phi}^2 < 102122809$. τὸ ἄρα $\overline{BA}^2$ ἴσον ὦν τοῖς $\overline{B\Phi}^2$, $\overline{\Phi A}^2$, ἔλαττον ἔσται τῷ 409092409 . ἀλλὰ τέττε ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 20227 . ἡ ἄρα $BA < 20227$. διὸ $B\Phi + BA < 20053 + 20227 = 40280$. ἄρα ὁ $40280:264 > B\Phi + BA: \Phi A$. καὶ ἑκατέρω μὲν τῶν ἀριθμῶν τῶν διατῶ 40 διαιρεθέντος, ἑκατέρω δὲ τῶν περικυπτόντων πηλίκων διατῶ 6 πολλαπλασιασθέντος, ἔξει ὁ $6042:396 > B\Phi + BA: \Phi A$. ἀλλ' ὡς $B\Phi + BA: \Phi A:: EZ: ZA$, ὡς δέδεικται. ἄρα ὁ $6042:396 > BZ: ZA$. εἰάν ἔν τεθῇ ἡ $ZA = 396$, ἔσται ἡ $BZ < 6042$. Κεῖθω δὴ τῷτο.

Τετραγῶν τὸ μὲν $\overline{ZA}^2 = 156816$, τὸ δὲ $\overline{BZ}^2 < 36505764$. τὸ ἄρα $\overline{BA}^2$ ἴσον ὦν τοῖς $\overline{BZ}^2$, $\overline{ZA}^2$, ἔλαττον ἔσται τῷ 36062580 . ἀλλὰ τέττε ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἡ σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 6055 . ἡ ἄρα $BA < 6055$. διὸ καὶ $EZ + BA < 12097$. ἄρα $12097:396 > EZ + BA: ZA$, ἔτεν (ἑκατέρω τῶν ἀριθμῶν διπλασιασθέντος) $24194:792 > EZ + BA: ZA$. ἀλλ' ὡς $BZ + BA: ZA:: BH: HA$, ὡς δέδεικται. ἄρα ὁ $24194:792 > BH: HA$. εἰάν ἄρα τεθῇ ἡ $HA = 792$, ἔσται ἡ $BH < 24194$. κεῖθω δὴ τῷτο.

Τὸ ἄρα $\overline{HA}^2 = 627264$, τὸ δὲ $\overline{BH}^2 < 585549636$. τὸ ἄρα $\overline{BA}^2$ ἴσον ὦν τοῖς $\overline{BH}^2$, $\overline{HA}^2$, ἔλαττον ἔσται τῷ 585976900 . ἀλλὰ τέττε ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς, ἐστὶν ὁ 24207 . ἡ ἄρα $BA < 24207$. ἡ ἄρα $AH:AB > 792:24207$, ἔτεν, ἑκατέρω τῶν ἀριθμῶν διατῶ 3 διαιρεθέντος, ἡ $AH:AE > 264:8069$, ἔτεν, τῶν ἡγεμένων διατῶ

τῷ 96 πεπλασσιασθέντων, ἡ 96. ΑΗ: ΑΒ $\searrow$ 25344: 8069 καὶ ἑκατέρη τῶν ἀκρίβων διὰ τῷ 8069 διαιρεθέντος, ἡ 96. ΑΗ: ΑΒ $\searrow$ $3 + \frac{1137}{8069}$: 1. ἔστι δὲ ἡ μὲν 96. ΑΗ ἡ περίμετρος τῷ εἰς τὸν κύκλον ΑΔΒ ἐγγεγραμμένῃ πολυγώνῳ, τῷ ἔχοντος 96 πλευράς, ἡ δὲ ΑΒ, ἡ τῷ κύκλῳ διάμετρος, τὸ δὲ $\frac{1137}{8069}$ μείζον ἔστι τῷ $\frac{10}{71}$. ἡ ἄρα περίμετρος τῷ εἰρημένῃ πολυγώνῳ τριπλασίον ἐστὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ, καὶ ἔτι ὑπερέχει μείζονι μέρος αὐτῆς, ἡ δὲ καὶ ἐξδομηκοσημόναις.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Ἐκ τούτου δὴ φανερόν, ὅτι ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ διάμετρος παντὸς κύκλου πρὸς τὴν περιφέρειαν, ὁ μὲν ἐγγύς, ἀλλ' ἐλάσσων τῷ ἀκριβῶς ἐστὶν ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ 1 πρὸς τὰ $3 + \frac{1}{2}$, ἔσταν ὁ 7:22. ὁ δὲ ἐγγύς, ἀλλὰ μείζων, ὃν ἔχει ἡ 1 πρὸς τὰ $3 + \frac{10}{71}$, τῷ 71:223.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐὰν δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραφῇ τε καὶ ἐγγεγραφῇ πολύγωνα πλευράς ἔχοντα πλείονας ἢ 96, εὐρεθήσεται τῷ αὐτῷ τρόπῳ ὁ ἔτι ἐγγύτερος τῷ ἀκριβῶς τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος. τούτο ἢ πεποιήκασιν ὁ, τε Μένιος καὶ ὁ Λαδόλφος, καὶ ἄλλοι. (α) ἔστι δὲ ὁ ὑπὸ Μενίου εὐρεθείς ἐγγύτερος τῷ ἀκριβῶς λόγος, ὃν ἔχει ὁ 113:355. αὐτὸν δὲ τὸν ἀκριβῆ εὐρεῖν ἀμήχανον. ἀλλὰ γὰρ ἀρκῶσιν οἱ προκείμενοι τῇ ἐν ταῖς πράξεσιν ἀπαιτούμενῃ ἀκριβείᾳ. ἔδὲν γὰρ τῇ αὐτῶν πρακτικῇ χρήσει ἐν ταῖς τῷ κύκλῳ μετρήσεσι προκύπτει αἰδητὸν παράπτωμα.

ΠΟ.

(α) "Ορα τὸ ε'. Διὰ τῷ Τακίτ. τὸ ἐν τοῖς τῷ Ἀρχιμ. Διὰ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ἐντεῦθεν, δοθείσης τῆς τῷ κύκλῳ Διαμέτρου, τὸ σύνεγγυς τῷ ἀριβῶς μέτρον αὐτῷ εὐρεῖν ῥαδίον. ἔσω γὰρ ἡ δοθεῖσα διάμετρος ἴση ποσὶν 6, τὴν δὲ περιφέρειαν ἐμφαινέτω τὸ Π. καὶ ἐπεὶ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον ἔχει ὃν ὁ 7 : 22, (α) ἔσαι ὡς ὁ 7 : 22 :: 6 : Π. τὸ ἄρα $\Pi = \frac{132}{7}$. (β) ἐπεὶ δὲ πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ, ὃ ὕψος μὲν ἡ τῷ κύκλῳ ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ εὐθεῖα ἴση τῇ τῷ κύκλῳ περιφέρειᾳ· (γ) πᾶν δὲ τρίγωνον ἴσον τῷ ἡμίσει τῷ γινομένῳ ἐκ τῷ ὕψους αὐτῷ καὶ τῆς βάσεως· (δ) ἔστι δὲ τὸ μὲν τῷ τριγώνῳ ὕψος, εἴτεν ἡ ἡμιδιάμετρος τῷ κύκλῳ, ἴσον 3, ἡ δὲ βάσις, τετῆστιν ἡ περιφέρεια, ἴση $\frac{132}{7}$. ὁ ἄρα Κύκλος ἴσος $\frac{3 \cdot 132}{2 \cdot 7} = \frac{396}{14} = 28 + \frac{2}{7}$. ὅπερ ἐμφαίνει, ὅτι ὁ Κύκλος ἴσος ἐστὶν εἴκοσι καὶ ἑκτῷ ποδίοις τετραγώνοις καὶ δυσὶν ἐβδομημορίοις ἐνὸς ποδίου τετραγώνῳ. ἐκὲν μετρηθήσεται πᾶς κύκλος, τῆς τετάρτης ἀναλόγῃ τῷ 7, καὶ 22, καὶ τῆς αὐτῇ διαμέτρου διὰ τῆς ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιαθείσης, καὶ τῷ γινομένῳ διὰ τῷ 2 διαιρεθέντος· ἢ τῆς εἰρημένης τετάρτης ἀναλόγῃ διὰ τῷ τεταρτημορίῳ τῆς διαμέτρου πολλαπλασιαθείσης.

ΛΗΜΜΑ Β'.

Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς κανονικοῦ πρίσματος ἴση ἐστὶ παραλληλογράμμῳ, ὃ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως
τῷ

(α) Κατὰ τὸ προλ. πόρ. (β) Κατὰ τὸ δ' πρόβλ. τῷ δ'. τῆς Ἀριθμ. βιβλ. (γ) Κατὰ τὸ α' τῷ δὲ τῷ βιβλ. δευρ. (δ) Κατὰ τὸ γ'. πρόβλ. τὸ μετὰ τὸ β'. βιβλ. τῆς Γεωμετρ.

τῷ πρίσματος· ἡ δὲ, τῇ τῷ πρίσματος πλευρᾷ. δὲ δὲ τὴν ὑπὸ τῶν εἰρημένων τῷ παραλληλογράμμῳ πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην εἶναι τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τε τῆς τῷ πρίσματος πλευρᾶς, καὶ τῆς πλευρᾶς τῆς αὐτῷ βάσεως.

Ἐξω κανονικὸν πρίσμα τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ, ἢ παραλληλόγραμμον τὸ ΠΟ· ὃ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ΠΣ, ἴση ἔσω τῇ τῆς βάσεως τῷ πρίσματος περιμέτρῳ, ἔτεν ΖΗ+ΗΘ+ΘΙ+ΙΚ+ΚΖ, ἡ δὲ ΞΠ ἴση τῇ τῷ πρίσματος πλευρᾷ ΑΗ. ἔσω δὲ ἡ γωνία ΑΗΖ ἴση τῇ ΞΠΣ. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῷ πρίσματος ἴση ἐστὶ τῷ παραλληλογράμμῳ. πίν. Β. χ. 4.

Ἐσω πρῶτον ἡ ΑΗΖ γωνία ὀρθή. ὀρθὴ ἔν ἔσται ἢ ἡ ΞΠΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ πᾶσαι αἱ τῷ κανονικῷ πρίσματος πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τὰ ὀρθογώνια ΑΖ, ΑΘ, ΒΙ, ΓΚ, ΔΖ ἴσα ἔσονται τῷ ΑΗ. ΖΗ+ΗΘ, + ΘΙ+ΙΚ+ΚΖ. αἱ δὲ ἡ μὲν ΑΗ=ΞΠ, ἡ δὲ ΖΗ+ΗΘ+ΘΙ+ΙΚ+ΚΖ=ΠΣ. (ε) τὰ ἄρα εἰρημένα ὀρθογώνια ἴσα εἰσὶ τῷ ΞΠ. ΠΣ, ἔτεν τῷ ὀρθογωνίῳ ΠΟ. ἀλλὰ τὰ διαληφθέντα ὀρθογώνια εἰσὶν ἡ τῷ πρίσματος ἐπιφάνεια. ἡ ἄρα τῷ πρίσματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ΠΟ ὀρθογωνίῳ.

Ἀλλ' ἔσω ἡ ΑΗΖ γωνία ὀξεῖα, ἴση δὲ αὐτῇ πάλιν ἡ ΞΠΣ. ἢ ἀπὸ μὲν τῷ Α ἡχθῶ ἡ ΑΝ κάθετος τῇ ΖΗ, ἀπὸ δὲ τῷ Ξ ἡ ΞΡ τῇ ΠΣ. χ. 5.

Ἐπεὶ ἡ ΑΝ κοινὸν ὕψος ἐστὶ πάντων τῶν παραλληλογράμμων ΑΖ, ΑΘ, ΒΙ, ΙΚ, ΕΖ, ἴσα ἄρα εἰσὶ τὰ παραλλη.

ληλύθειν ταῦτα τῶ $AN, ZH, HΘ, ΘΙ, IK, KZ$. (ζ)
 καὶ ἐπὶ ἐν τοῖς τριγώνοις $ΔΗΝ, ΕΠΡ$ ἡ μὲν γωνία
 $ΔΗΝ = ΕΠΡ$, (η) ἡ δὲ $ΔΗΗ = ΕΡΠ$, (θ) ἡ δὲ
 $ΔΗ = ΕΗ$, (ι) ἄρα καὶ ἡ $AN = ΕΡ$. (κ) ἔστι δὲ καὶ
 ταῖς $ZH + HΘ + ΘΙ + IK + KZ = ΠΣ$. τὸ ἄρα
 $ΕΡ. ΠΣ$, ὅτεν τὸ $ΠΘ$ παραλληλόγραμμον ἴσον AN .
 $ZH + HΘ + ΘΙ + IK + KZ$. καὶ τὰ διαληφθέντα
 ἄρα παραλληλόγραμμα, εἴτεν ἡ τῶ πρίσματος ἐπι-
 φάνεια ἴση τῷ παραλληλογράμῳ $ΠΘ$.

ΛΗΜΜΑ Γ'.

Παντὸς κυλίνδρου ἡ ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς
 βάσεως καὶ τῶ ἀπ' ἐναντίας κύκλου, ἴση ἐστὶ
 παραλληλογράμῳ, ὃ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν
 ἴση τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως· ἡ δὲ, τῇ
 πλευρᾷ τῶ κυλίνδρου. δεῖ δὲ τὸ παραλλη-
 λόγραμμον ἴσην περιέχειν γωνίαν τῇ ὑπὸ
 τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως
 τῶ κυλίνδρου περιεχομένην.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μὲν ἐπιφάνεια τῶ πρίσματος τῶ εἰς τὸν κύλιν-
 δρον ἐγγεγραμμένη, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῶ κυλίνδρου
 ἀπολήγει, (λ) ἡ δὲ περίμετρος τῆς βάσεως τῶ πρίσ-
 ματος εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τῶ κυλίνδρου,
 (μ) ἡ δὲ πλευρὰ τῶ πρίσματος εἰς τὴν πλευρὰν τῶ κυ-
 λίν-

(ζ) Κατὰ τὸ β'. πρόβλ. τὸ μετὰ τὸ β'. βιβλ. τῆς Γεωμ.
 (η) Ἐξ ὑποθ. (θ) Ἐκατέρω γὰρ ὁρθὴ ἐκ τῆς κατασκευ. (ι) Ἐξ
 ὑποθ. (κ) Κατὰ τὴν κς. τῶ α'. (λ) Κατὰ τὸ δ'. Λῆμ. τὸ
 μετὰ τὴν ζ. τῶ βιβλ. τῆς Γεωμ. (μ) Κατὰ τὸ α'. Λῆμ. τὸ
 μετὰ τὴν α'. τῶ αὐτῆς βιβλ.

κλίνδρου. ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῷ πρίσματος ἴση ἐστὶ παραλληλογράμῳ, ἧς ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἴση τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ἡ δὲ τῇ πλευρᾷ τῷ πρίσματος. ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῷ κλίνδρῳ ἴση ἐστὶ παραλληλογράμῳ, ἧς ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἴση τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως, ἡ δὲ τῇ πλευρᾷ τῷ κλίνδρῳ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Αἱ τῶν κλίνδρων ἐπιφάνειαι ἐν λόγῳ συγκειμέναι εἰσὶν ἐκ τε τῷ λόγῳ ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλαις αἱ πλευραὶ, καὶ ἐκ τῷ ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλαις αἱ περιφέρειαι, ἢ αἱ διάμετροι τῶν ἑαυτῶν βάσεων. εἰσὶ γάρ αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι, ὡς αἱ διάμετροι. (ν) Ἐὰν ὅν αἱ τῶν κλίνδρων πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, αἱ τῶν κλίνδρων ἐπιφάνειαι ἀνάλογον ἔσονται ταῖς διαμέτροις τῶν βάσεων· ἐὰν δὲ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἴσαι, ἀνάλογον ταῖς πλευραῖς· ἐὰν δὲ αἱ πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ὁμοίως καὶ αἱ διάμετροι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται καὶ αἱ τῶν κλίνδρων ἐπιφάνειαι.

Β'. Ἐὰν αἱ τῶν κλίνδρων πλευραὶ ἐν ἀντιπεπόνθῃτι λόγῳ ὦσι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων, ἴσαι ἔσονται αἱ τῶν κλίνδρων ἐπιφάνειαι καὶ ἐὰν αἱ τῶν κλίνδρων ἐπιφάνειαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἔσονται αἱ πλευραὶ τῶν κλίνδρων ἐν ἀντιπεπόνθῃτι λόγῳ τῶν διαμέτρων τῶν ἑαυτῶν βάσεων.

Γ'. Αἱ τῶν ὁμοίων κλίνδρων ἐπιφάνειαι ἐν διπλασίῳ λόγῳ εἰσὶ τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων, εἴτεν λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλαις, ὃν τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετραγώναι. ἐπεὶ γάρ αἱ τῶν κλίνδρων ἐπιφάνειαι λόγον ἔχουσι συγκείμενον ἐκ τῷ ὃν ἔχει πλευρὰ πρὸς πλευρὰν, καὶ ἐκ τῷ ὃν ἔχει διάμετρος πρὸς διά-

Β

με.

(ν) Κατὰ τὴν συνέπ. τὴν μετὰ τὴν β. τῷ 16. βιβλ. τῆς Γεωμ.

μετρειν. ἔστι δὲ ἐν τοῖς ὁμοίοις κυλίνδρῳις ἄξων πρὸς ἄξονα, (ἔστιν πλευρὰ πρὸς πλευρὰν, ἴσαι γὰρ αἱ πλευραὶ τοῖς ἄξουσιν) ἔτω διάμετρος, πρὸς διάμετρον. (ξ) αἱ ἄρα τῶν ὁμοίων κυλίνδρων ἐπιφάνεια διπλασίονα λόγον ἔχουσι, ἢ περ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Γ'. (ο)

Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἢ ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως ἢ τῆς ἀπ' ἐναντίας κύκλου, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, ὃ ἢ ἐκ τῆς κέντρος μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τῆς κυλίνδρου, καὶ τῆς διαμέτρος τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Ἐστω κύλινδρος ὀρθὸς ὁ ΑΓ, καὶ κύκλος ὁ ΔΕΖ, ὃ ἢ ἡμιδιάμετρος ΚΖ μέση ἀνάλογον ἔστω τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ἢ τῆς διαμέτρος τῆς βάσεως ΓΒ, ἔστιν ἔσω ὡς ΑΒ : ΚΖ :: ΚΖ : ΓΒ. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς κυλίνδρου, χωρὶς τῆς βάσεως ἢ τῆς ἀπεναντίας κύκλου, ἴση ἐστὶ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ. χ. ὁ.

Κ Α Τ Α Σ Κ Ε Τ Η.

Συσαθῆτω τρίγωνον τὸ ΗΛΜ, ὃ τὸ μὲν ὕψος ΗΛ διπλασίον ἔστω τῆς ΑΒ πλευρᾶς, ἢ δὲ βάσις ΛΜ ἴση τῇ ΓΘΒ περιφερείᾳ τῆς τῆς κυλίνδρου βάσεως. ὁμοίως συσαθῆτω τὸ ΚΖΝ τρίγωνον, ὕψος μὲν ἔχον τὴν ΚΖ ἴσην τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς ΔΕΖ κύκλου, βάσιν δὲ τὴν ΖΝ ἴσην τῇ τῆς κύκλου περιφερείᾳ.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Τὸ τρίγωνον ΗΛΜ, πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΖΝ λόγον ἔχει συγκείμενον, ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΗΛ : ΖΚ, ἐκ τῆς ὅν ἔχει

(ξ) Κατὰ τὸν δ'. ὅρισ. τῆς αὐτ. (ο) Τὸ Ἀρχιμ. γ'. ἐν τῇ πρώτῃ ἐπιφάνειᾳ καὶ κυλίνδρῳ. α'. βιβλ.

ἔχει $AM : ZN$. (π) ἀλλὰ τὸ $HA = 2AB$, (ρ) καὶ
ὡς $AM : ZN :: \frac{AB}{2} : KZ$. (σ) αἱ γὰρ $\frac{AB}{2}$ καὶ KZ ἡμι-
διάμετροι εἰσι τῶν περιφερειῶν, αἷς ἴσαι εἰσὶν αἱ AM ,
 ZN . τὸ ἄρα τρίγ. HAM , πρὸς τὸ τρίγ. KZN λόγον
ἔχει συγκείμενον ἐν τῷ ὅν ἔχει $2AB : KZ$, καὶ τῷ ὅν
ἔχει $\frac{AB}{2} : KZ$, εἴτεν τρίγ. $HAM : τρίγ. KZN :: 2AB : \frac{AB}{2}$
 KZ^2 , (τ) ἦτοι τρίγ. $HAM : τρίγ. KZN :: AB : \frac{AB}{2}$
 KZ^2 . ἀλλὰ τὸ $AB : \frac{AB}{2} = KZ^2$. (υ) ἐστὶ γὰρ ὡς $AB :$
 $KZ :: KZ : \frac{AB}{2}$. (φ) ἄρα τὸ $HAM = KZN$. ἀλλὰ τὸ
μὲν HAM τρίγωνον ἴσον τῇ τῷ κυλίνδρῳ AG ἐπιφα-
νείᾳ ἴσον γὰρ παραλληλογράμῳ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ
τῆς AB καὶ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως, (χ) ὃ ἡ
τῷ κυλίνδρῳ AG ἐπιφάνεια ἐστὶν ἴση (ψ) τὸ δὲ τρί-
γωνον KZN ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ DEZ . (ω) ἡ ἄρα ἐπι-
φάνεια τῷ AG κυλίνδρῳ ἴση τῷ DEZ κύκλῳ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΑΙ

Α'. Ἡ ἐπιφάνεια τῷ ὀρθῷ κυλίνδρῳ πρὸς τὴν βάσιν
λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ πρὸς τὸ τεταρτημέριον τῆς
διαμέτρου τῆς βάσεως, εἴτεν κληθείσης τῆς μὲν ἐπι-
φανείας τῷ κυλίνδρῳ, E , τῆς δὲ βάσεως, B , ἔσται
ὡς $E : B :: AB : \frac{BF}{2}$. ἐπεὶ γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τῷ κυ-
λίνδρῳ AG ἴση ἐστὶ τῷ DEZ κύκλῳ ἐστὶ δὲ ὁ κύκλος
 DEZ , πρὸς τὴν βάσιν τῷ κυλίνδρῳ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς
 ZK τετραγώνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισίας τῆς $BΓ$
τετραγώνον. (α) (ἡμιδιάμετρος γὰρ ἡ τῆς $BΓ$
ἡμίσεια) ὡς ἄρα $E : B :: KZ^2 : \frac{BΓ^2}{4}$. ἀλλὰ $KZ^2 =$
 $B \quad 2 \quad 4 \quad AB$

- (π) Κατὰ τὸ Θεώρ. τὸ μετὰ τὴν πγ'. τῷ ε'. τῆς Γεωμ. (ρ) Ἐκ
τῆς κατασκευ. (σ) Κατὰ τὴν συνέπ. τὴν μετὰ τὴν β'. τῷ β'.
βιβλ. τῆς Γεωμ. (τ) Κατὰ τὸν ζ'. ὀρθ. τῷ ε'. (υ) Κατὰ
τὴν ιζ' τῷ ε'. (φ) Ἐξ ὑποθ. (χ) Ἐκ τῆς μα'. τῷ α'. ὁδ. (ψ)
Κατὰ τὸ προλ. Λημ. (ω) Κατὰ τὸ α'. Θεώρ. τῷ δὲ τῷ
βιβλ. (α) Κατὰ τὴν β'. τῷ βιβλ.

ΑΒ. ΒΓ. (β) ὡς ἄρα $E : B :: AB : B\Gamma$. $\overline{B\Gamma}^2$. ἀλλ' ὡς
 $AB : B\Gamma :: AB : \frac{B\Gamma}{4}$ (γ) ὡς ἄρα $E : B :: 4 AB : B\Gamma$,
 (δ) ἔπερ' ἐστίν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῶν κυλίνδρων πρὸς 4
 τὴν βάσιν αὐτῶν, λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ ΑΒ πρὸς τὸ
 τεταρτημέριον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως.

Β'. Ἡ ἐπιφάνεια τῶν κυλίνδρων ΑΓ, τῶν περὶ τὴν σφαῖ-
 ραν περιγεγραμμένων ἴση ἐστὶ κύκλῳ, ἢ ἡμιδιάμε-
 τρος ἴση τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ ΦΖ. ἡ γὰρ ἐπι-
 φάνεια τῶν ΑΓ κυλίνδρων ἴση ἐστὶ κύκλῳ ἢ ἡμιδιά-
 μετρος μέση ἀνάλογον τῶν ΒΓ, ΓΔ. (ε) ἐστὶ δὲ ἡ
 ΦΖ μέση ἀνάλογος τῶν ΒΓ, ΓΔ. ἴσαι γὰρ ἀλλή-
 λαις αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΦΖ. πίν. Γ. χ. 7.

Γ'. Ἡ ἐπιφάνεια τῶν περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμέ-
 νων κυλίνδρων ΑΓ τετραπλασία ἐστὶ τῶν γεννήτορος τῆς
 σφαίρας κύκλου ΦΕΖ. ἐπεὶ γὰρ ἡ τῶν κυλίνδρων ΑΓ ἐπι-
 φάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ ἡμιδιάμετρον ἔχοντι ἴσην τῇ
 ΦΖ, (ζ) εἴτεν διάμετρον διπλασίαν τῆς ΦΖ, ἡ
 ἐπιφάνεια τῶν ΑΓ κυλίνδρων, πρὸς τὸν ΦΕΖ κύκλον
 λόγον ἔχει, ὃν ὁ κύκλος ὁ ἔχων διάμετρον διπλασίαν
 τῆς ΦΖ, πρὸς τὸν κύκλον ΦΕΖ. ἀλλ' οἱ κύκλοι πρὸς
 ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγω-
 να. (η) ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῶν κυλίνδρων ΑΓ, πρὸς
 τὸν ΦΕΖ κύκλον λόγον ἔχει, ὃν ὁ 4 : 1. εἰάν γὰρ
 τεθῇ ἡ ΦΖ = 1, ἔσται ἡ διάμετρος τῶν κύκλων τῶν
 ἴσων τῇ ἐπιφάνειᾳ τῶν ΑΓ κυλίνδρων ἴση 2. διὸ τὰ
 ἀπ' αὐτῶν τετράγωνά εἰσιν 1, καὶ 4.

Δ'. Ἡ ἐπιφάνεια τῶν κυλίνδρων ΑΓ σὺν τῇ βάσει ΔΘΓ καὶ
 τῇ ἀπ' ἐναντίας κύκλῳ ΑΗΒ ἑξαπλασία ἐστὶ τῇ τῆς
 σφαίρας

(β) Ἐκ τῆς ὑποθ. δῆλον. (γ) Κατὰ τὴν α'. τῶν ε'. (δ) Κατὰ
 τὴν ε. τῶν ε. (ε) Κατὰ τὸ γ'. Θεώρ. τῶν δὲ τῆς βιβλ. (ζ) Κα-
 τὰ τὴν προλ. Συνέπ. (η) Κατὰ τὴν β'. τῶν ιβ.

σφαίρας γεννήτορος κύκλου ΦΕΖ. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῶ ΑΓ κυλίνδρου τετραπλευρία δέδεικται τῶ ΦΕΖ κύκλου, ἐκότερες δὲ τῶν ΔΘΓ, ΑΗΒ κύκλων ἴσος τῶ ΦΕΖ. διὸ ἡ ἐπιφάνεια τῶ ΑΓ κυλίνδρου σὺν τῇ βάσει ΔΘΓ ἢ τῶ ἀπ' ἐναντίας κύκλῳ ΑΗΒ ἐξάπλευρία τῶ ΦΕΖ κύκλου.

Ε'. Ἡ ἐπιφάνεια τῶ ΑΓ κυλίνδρου, τῶ περι τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένη διπλευρία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῶ ΖΗ κυλίνδρου τῶ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένη. ἐπεὶ γὰρ ὅμοιοι εἰσιν οἱ ΑΓ, ΖΗ κύλινδροι, ὡς δὴλον, ἡ ἐπιφάνεια τῶ ΑΓ, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῶ ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνου, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ τετραγώνου. (θ) ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνου διπλάσιόν ἐστι τῶ ἀπὸ τῆς ΘΗ τετραγώνου. (ι) ἄρα ἢ ἡ ἐπιφάνεια τῶ περι τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένη κυλίνδρου ΑΓ διπλευρία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῶ ΖΗ κυλίνδρου, τῶ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένη. χ. 8.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ' (κ)

Εἰς ἀνὰ πρὸς κῶνον ἰσοσκελῆ (λ) πυραμίδα περιγγραφή, ἢ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ βάσει μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως ὕψος δὲ, τὴν πλευρὰν τῶ κῶνου.

Εἶπω κῶνος ὁ ΗΑΒΓ, ἡ βάση ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ πυραμὶς περιγεγραφή ἡ ΗΔΕΖ, ὥστε τὴν βάσιν αὐ-

Β 3

τῆς,

(θ) Κατὰ τὴν γ'. Συνέπ. τῶ γ'. Λήμ. (ι) Κατὰ τὴν Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν ζ. τῶ δ. τῆς Γωμ. βιβ. (κ) Τῶ Ἀρχιμ. ἢ. ἐν τῶ περὶ σφαῖρας καὶ κυλίνδρων. α. βιβλ. (λ) Ἰστίον, ὅτι ἰσοσκελὲς κῶνός ἐστιν ὁ τὴν τῆς βάσεως διάμετρον ἴσην ταῖς πλευραῖς ἔχων. ὁ αὐτὸς δὲ καὶ ὁρθός ἐστι.

τῆς, τετέστι τὸ ΔΕΖ πολύγωνον, περιγεγραμμένον περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον εἶναι. καὶ κείῳ τρίγωνον τὸ ΘΚΛ ἴσην ἔχον τὴν μὲν ΘΚ τῇ περιμέτρῳ τῆ ΔΕΖ πολυγώνου, τὴν δὲ ΛΜ κάθετον τῇ ΘΚ ἴσην τῇ ΗΑ πλευρᾷ τῆ κώνου. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς ΗΔΕΖ πυραμίδος, χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ. Χ. 9.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ὁ τῆ κώνου ἄξων ΗΚ, καὶ ἐπεξέυχθω ἡ ΚΑ.

ΔΒΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὁ ΗΚ ἄξων πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ ΑΒΓ κύκλῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ ΑΒΓ κύκλῳ. (μ) ἤκται δὲ δι' αὐτῆς τὸ ΗΚΑ τρίγωνον. τὸ ἄρα ΗΚΑ τρίγωνον πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ ΑΒΓ κύκλῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΑ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῇ κοινῇ τῷ ἐπιπέδῳ τομῇ ΚΑ, (ν) πρὸς ὀρθὰς ἔσται καὶ τῷ ΗΚΙ ἐπιπέδῳ. (ξ) πρὸς ὀρθὰς ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ καὶ τῇ ΗΑ (ο) εἴταν ἡ ΗΑ κάθετός ἐστι τῇ ΔΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἡ μὲν ΗΒ κάθετός ἐστι τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΗΓ τῇ ΖΕ. δ. τὸ μὲν τρίγωνον $\triangle ΗΔΕ = \frac{ΗΑ \cdot ΔΕ}{2}$ τὸ δὲ $\triangle ΗΔΖ = \frac{ΗΒ \cdot ΔΖ}{2}$ τὸ δὲ $\triangle ΗΖΕ = \frac{ΗΓ \cdot ΖΕ}{2}$. (π) ταῦτα ἄρα τὰ τρίγωνα, εἴη ἡ τῆς πυραμίδος ΗΔΕΖ (χωρὶς τῆς βάσεως) ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ $ΗΑ \cdot ΔΕ + ΗΒ \cdot ΔΖ + ΗΓ \cdot ΖΕ$. ἀλλ' $ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ$ ἴσται ἀλλήλαις ² εἰσὶν, ἄτε δὴ τῆ ἴσου κελῆς κώνου πλευραί. ἄρα ἡ τῆς πυραμίδος ΗΔΕΖ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ. φ

(μ) Κατὰ τὴν ιη'. τῆ ια'. (ν) Κατὰ τὴν ιη'. τῆ γ'. (ξ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ια'. (ο) Κατὰ τὸν γ'. ὀρισ. τῆ ια'. (π) Κατὰ τὴν προβλ. τὸ μετὰ τὸ β'. βιβλ.

Φάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τῷ HA . $\overline{DE + \Delta Z + ZE}$

ἀλλ' ἡ μὲν $HA = AM$, ἡ δὲ $\overline{DE + \Delta Z + ZE} = \overline{OK}$.

(ρ) ἡ ἄρα τῆς πυραμίδος $H\Delta EZ$ ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τῷ $\overline{AM \cdot OK}$, ἔτεν τῷ ΔOK τριγώνῳ.

ΣΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἰσοσκελὲς κώνου ἴση ἐστὶ τριγώνῳ, ἔῤῥος μὲν ἡ πλευρὰ, βάσις δὲ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τῆς κώνου. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῆς περὶ τὸν κώνον περιγεγραμμένης πυραμίδος, εἰς τὸν κώνον ἀπολήγει· (σ) ἡ δὲ περίμετρος τῆς βάσεως αὐτῆς, εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τῆς κώνου. (τ)

Β'. Αἱ τῶν κώνων ἐπιφάνειαι ἐν λόγῳ συγκαμίνῳ εἰσὶν ἑκ τε τῆς λόγου, ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ πλευραὶ αὐτῶν, καὶ ἐκ τῆς λόγου, ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ περιφέρειαι, ἢ αἱ διαμέτροι τῶν βάσεων. αἱ γὰρ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ διαμέτροι. (υ) εἴαν ἐν αἱ τῶν κώνων πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, αἱ ἐπιφάνειαι εἰσὶν ὡς αἱ διαμέτροι· εἴαν δὲ αἱ διαμέτροι ἴσαι, εἰσὶν ὡς αἱ πλευραὶ· εἴαν δὲ αἱ πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ὁμοίως καὶ αἱ διαμέτροι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται καὶ αἱ ἐπιφάνειαι.

Γ'. Εἴαν αἱ τῶν κώνων πλευραὶ ἐν ἀντιπεπονητότι λόγῳ ὦσι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων, ἴσαι ἔσονται αἱ τῶν κώνων ἐπιφάνειαι· εἴαν δὲ αἱ ἐπιφάνειαι ἴσαι ὦσιν, αἱ πλευραὶ ἐν ἀντιπεπονητότι λόγῳ ἔσονται τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων.

B 4

Δ'.

(ρ) Ἐξ ὑποθ. (σ) Κατὰ τὸ δ'. Λήμ. τὸ πρὸ τῆς εἰ. τῆς ιβ'.

(τ) Κατὰ τὸ α'. Λήμ. τὸ πρὸ τῆς β'. τῆς αὐτ. (υ) Κατὰ τὴν Σύνισ. τῆς β'. τῆς αὐτ.

Δ'. Αἱ τῶν ὁμοίων κῶνων ἐπιφάνεια ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων, εἴτεν λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὅν τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετραγῶνα. τῶν γὰρ ὁμοίων κῶνων, αἱ μὲν ἄξονες ἀνείλογόν εἰσι ταῖς διαμέτροις τῶν βάσεων, (Φ) αἱ δὲ πλευραὶ τοῖς ἄξουσιν. ὥστε καὶ αἱ πλευραὶ λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὅν αἱ διαμέτροι τῶν βάσεων.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Ε'. (Χ)

Παντὸς κῶντος ἰσοσκελεῖς, χωρὶς τῆς βάσεως, ἢ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, ὃ ἢ ἐκ τῆς κέντρως μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τῆς κῶντος, καὶ τῆς ἐκ τῆς κέντρως τῆς κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τῆς κῶντος.

Ἐξω ἰσοσκελεῖς κῶντος ὁ ΑΒΓ, καὶ κύκλος ὁ ΔΙΑ, ὃ ἢ ἡμιδιάμετρος ΚΛ μέση ἀνάλογον. ἔσω τῆς πλευρᾶς ΑΒ, καὶ τῆς ΖΒ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς βάσεως τῆς κῶντος, εἴτεν ὥς ΑΒ : ΚΛ :: ΚΛ : ΖΒ. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς κῶντος ΑΒΓ ἴση ἐστὶ τῷ κύκλῳ ΔΙΑ.
Χ. 10.

Κ Α Τ Α Σ Κ Ε Τ Η

Συνεσάτω τρίγωνον τὸ Χ, ὕψος μὲν ἔχον τὴν ΘΒ, ἴσην τῇ ΑΒ, βάσιν δὲ τὴν ΒΗ, ἴσην τῇ τε κύκλου ΓΜΒ περιφερείᾳ. ὁμοίως συνεσάτω τρίγωνον τὸ Φ, ὕψος μὲν ἔχον τὴν ΝΟ, ἴσην τῇ ΚΛ, βάσιν δὲ τὴν ΟΙ, ἴσην τῇ τε κύκλου ΔΙΑ περιφερείᾳ.

ΔΕΚ.

(Φ) Κατὰ τὴν δ'. ὁρίσ. τῆς φβ. (Χ) Ἀρχιμ. ιδ'. τῷ περισκελί. καὶ κυλ. α' βιβλ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τρίγωνον X , πρὸς τὸ τρίγωνον Φ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τε τῶ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΘB : NO , καὶ ἐκ τῶ ὃν ἔχει ἡ BH : OH . (ψ) ἀλλ' ἡ μὲν $\Theta B = AB$, ἡ δὲ $NO = KA$. (ω) ἔστι δὲ καὶ ὡς BH : OH :: ZB : KA . (α) αἱ γὰρ BH , OH ἴσαι ταῖς περιφερείαις τῶν IMB , $ΔΙΑ$ κύκλων. (β) τὸ ἄρα X πρὸς τὸ Φ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶ λόγου ὃν ἔχει AB : KA , καὶ ἐκ τῶ ὃν ἔχει ZB : KA , ἴτην X : Φ :: AB . ZB : KA^2 . (γ) ἀλλ' AB , $ZB = KA^2$. (δ) ἔστι γὰρ AB : KA :: KA : ZB . (ϵ) ἄρα καὶ $X = \Phi$. ἀλλὰ τὸ μὲν X ἴσον τῇ τῶ κώνῃ $AB\Gamma$ ἐπιφάνειᾳ, (ζ) τὸ δὲ Φ ἴσον τῷ $ΔΙΑ$ κύκλῳ. (η) ἡ ἄρα τῶ κώνῃ $AB\Gamma$ ἐπιφάνεια ἴση τῷ $ΔΙΑ$ κύκλῳ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5'. (θ)

Παντὸς κώνῃ ἰσοσκελεῖς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ τῶ κώνῃ πρὸς τὴν ἐκ τῶ κέντρου τῆς βάσεως τῶ κώνῃ,

Ἐστω ἰσοσκελεῖς κώνος ὁ $AB\Gamma$, λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς πρὸς τὴν βάσιν IMB τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ AB , πρὸς τὴν ZB . χ . 10.

B 5

ΚΑΤΑ.

(ψ) Κατὰ τὸ Θεώρ. τὸ μετὰ τὴν κγ'. τῶ γ'. (ω) Ἐκ τῆς κατασκ. (α) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς β'. τῶ β'. βιβλ. (β) Ἐκ τῆς κατασκ. (γ) Κατὰ τὸν ζ'. ὅρισ. τῶ δ'. (δ) Κατὰ τὴν ιζ'. τῶ γ'. (ϵ) Ἐξ ὑποθ. (ζ) Κατὰ τὴν α', Συνέπ. τῶ προλαβ. Θεώρ. (η) Κατὰ τὸ α'. Θεώρ. τῶ δε τῶ βιβλ. (θ) Τῶ Ἀρχιμ. ιδ. τῶ ἀρχιμ. βιβλ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εὐρεθήτω μέση ἀνάλογον τῶν ΑΒ, ΖΒ, ἢ ΚΛ, καὶ κέντρον μὲν τῷ Κ, διασηματι δὲ τῷ ΚΛ, κύκλος γὰρ γράφθω ὁ ΔΙΑ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Επεὶ ἡ τῷ κώνυς ΑΒΓ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ΔΙΑ κύκλῳ, (ι) ἔχει ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῷ ΑΒΓ κώνυ, πρὸς τὴν βάσιν ΓΜΒ λόγον, ὃν ὁ ΔΙΑ κύκλος, πρὸς τὸν ΓΜΒ κύκλον. ἀλλ' ὡς ΔΙΑ : ΓΜΒ :: ΚΛ² : ΖΒ², (κ) ἐστὶ δὲ ΚΛ² = ΑΒ · ΖΒ. (λ) ὡς ἄρα ΔΙΑ : ΓΜΒ :: ΑΒ · ΖΒ : ΖΒ². ἀλλ' ὡς ΑΒ · ΖΒ : ΖΒ² :: ΑΒ : ΖΒ. (μ) ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῷ ΑΒΓ κώνυ, πρὸς τὴν βάσιν ΖΜΒ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ ΑΒ, πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμισδιάμετρον ΖΒ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Η' ἐπιφάνεια τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένης ἰσοπλευρῶς κώνυς τετραπλασία ἐστὶ τῆς τῷ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένης ἐπιφανείας. Περιγεγραμμένη γὰρ ἐνοείδωσαν αἱ τῷ περιγεγραμμένῳ κώνυ πλευραὶ ΕΔ, ΔΦ, ΦΕ (χ ι ι) περὶ τὸν τῆς σφαίρας γεννήτορα κύκλον ΒΑΓ, ἐγγεγραμμένη δὲ αἱ τῷ ἐγγεγραμμένῳ, αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἕτως, ὥστε τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΕΔ παράλληλον εἶναι, τὴν δὲ ΒΓ τῇ ΔΦ, τὴν δὲ ΓΑ τῇ ΦΕ. καὶ τετμήθω δίχα ἑκατέρω τῶν ΔΕΦ, ΔΦΕ γωνιῶν διὰ τῶν ΕΛ, ΦΗ. καὶ ἔσται δὴ ἐπὶ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς Κ τὸ τῷ κύκλῳ κέντρον. (ν) ὡσαύτως δίχα τετμήθωσαν καὶ αἱ ΒΑΓ, ΒΓΑ γωνίαι διὰ τῶν ΑΖ, ΓΘ. καὶ ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς ἐστὶ τὸ κέντρον, (ξ) τὸ Κ δὲ, καὶ εἰ
ἀλλ'

(ι) Κατὰ τὸ προλ. Θεώρ. (κ) Κατὰ τὴν β. τῷ ιβ'. (λ) Κατὰ τὴν ιζ'. τῷ ε'. (μ) Κατὰ τὴν α. τῷ αὐτ. (ν) Ἀλλοιὸν ἐκ τῆς ε. τῷ ε'. (ξ) Ὅρα τὴν δ. τῷ δ'.

ἄλλο σημεῖον ἐστὶ τὸ κέντρον. αἱ ἄρα ΑΖ, ΓΘ κατὰ τὸ αὐτὸ Κ ἀλλήλας τέμνουσι, καὶ ταῖς ΕΛ ΦΗ ταυτίζονται. ἐπεὶ δὲ ἐν ταῖς τριγώνοις ΖΑΓ, ΖΑΒ, ἡ μὲν ΑΓ = ΑΒ, (ο) ἡ δὲ ΑΖ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΓΑΖ = ΒΑΖ, (π) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΑΖΓ = ΑΖΒ, καὶ ἡ ΓΖ = ΒΖ. (ρ) οὖν ἡ ΒΓ διπλασία τῆς ΓΖ. εἰμὲν τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΦ διπλασία τῆς ΦΛ. καὶ ἔπει, ὡς ΓΑ : ΓΖ :: ΕΚ : ΚΖ. (σ) ἐστὶ δὲ ἡ ΑΓ διπλασία τῆς ΓΖ, ἄρα καὶ ἡ ΑΚ διπλασία τῆς ΚΖ. ἀλλ' ἡ ΚΛ ἴση τῇ ΑΚ, ἄρα καὶ ἡ ΚΛ διπλασία τῆς ΚΖ. ἀλλ' ὡς ΚΛ : ΑΦ :: ΚΖ : ΖΓ. (τ) ἄρα καὶ ἡ ΑΦ διπλασία τῆς ΖΓ. ὥστε καὶ ἡ ΔΦ διπλασία τῆς ΒΓ. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΦ τετράγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ. ἐστὶ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῳ κώνι ΔΕΦ, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῷ ἐγγεγραμμένῳ ΒΑΓ, ὡς τὸ $\Delta\Phi^2$: ΒΓ^2 . (υ) εἰάν γάρ μενέσθης τῆς ΕΛ, περιεχθῇ τὸ ΔΕΦ τρίγωνον σὺν τῷ κύκλῳ καὶ τῷ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένῳ τριγώνῳ, ἀπὸ μὲν τῶν τριγώνων ὅμοιοι κῶνοι γενήσονται, ὧν αἱ τῶν βάσεων διάμετροί εἰσιν αἱ ΔΦ, ΒΓ, ἀπὸ δὲ τῷ κύκλῳ ἡ ΒΑΓ σφαῖρα. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῷ περιγεγραμμένῳ κώνι ΔΕΦ τετραπλάσια ἐστὶ τῆς τῷ ΒΑΓ τῷ ἐγγεγραμμένῳ,

Β'. Η' βάσις τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῳ ἰσοπλεύρῳ κώνι τριπλασία ἐστὶ τῷ κύκλῳ τῷ τῆς σφαίρας γεννήτορες. Ἐπεὶ γάρ ἡ ΚΓ = ΚΛ, ἡ δὲ ΚΛ διπλασία τῆς ΚΖ, καὶ ἡ ΚΓ ἄρα διπλασία τῆς ΚΖ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΖ τετράγωνον τεταρτη.

(ο) Ἐξ ὑποθ. (π) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. τῇ α'.
(σ) Κατὰ τὴν γ'. τῇ ε'. (τ) Κατὰ τὴν δ'. τῇ ε'. (υ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῇ δ'. Θιωρ. τῇ δὲ τῇ βιβλ.

τημέριον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΓ τετραγώνῳ, εἴτεν τι μὲν $\overline{ΖΚ}^2 = 1$, τὸ δὲ $\overline{ΚΙ}^2 = 4$. ἐπεὶ δὲ $\overline{ΚΓ}^2 = \overline{ΚΖ}^2 + \overline{ΖΓ}^2$, (φ) τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΓ τετραγώνων ἴσον τῷ τεταρτημορίῳ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΓ τετραγώνῳ. ἄλλο τὸ $\overline{ΛΦ}^2$ τετραπλασίον τῷ $\overline{ΖΓ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΛΦ}^2 : \overline{ΖΓ}^2 :: 12 : 3$, καὶ ὡς $\overline{ΛΦ}^2 : \overline{ΚΙ}^2 :: 12 : 4$, εἴτεν $\overline{ΛΦ}^2 : \overline{ΚΙ}^2 :: 3 : 1$. ἀλλ' ἡ βάσις τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῳ κώνῳ, πρὸς τὸν γεννήτορα κύκλον ἔτω $\overline{ΛΦ}^2 : \overline{ΚΙ}^2$. (χ) ἄρα ἡ βάσις τῷ κώνῳ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν γεννήτορα, ἔτω 3 : 1. ὅπερ ἐστίν, οἷον ἡ βάσις τῷ κώνῳ τριπλασία ἐστὶ τῷ κύκλῳ τῷ γεννήτορος.

Γ'. Τὸ ὕψος τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῳ ἰσοπλευρῷ κώνῳ τριπλασίον ἐστὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῇ σφαίρας. ἐπεὶ γάρ ἡ ΚΛ διπλασία ἐστὶ τῆς ΚΖ ὡς δέδεικται, ἐστὶ δὲ ὡς ΚΛ : ΚΖ :: ΚΦ : ΚΓ, ὡς ΚΦ : ΚΓ :: ΚΕ : ΚΑ, (ψ) ἄρα καὶ ὡς ΚΛ : ΚΖ :: ΚΕ : ΚΑ. (ω) διὸ καὶ ἡ ΚΕ διπλασία τῆς ΚΙ ἢ ἄρα ΕΛ τριπλασία τῆς ΚΓ. τὸ ὕψος ἄρα τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῳ κώνῳ τριπλασίον ἐστὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς σφαίρας.

Δ'. Ἡ ἐπιφάνεια τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῳ ἰσοπλευρῷ κώνῳ ἑξαπλασία ἐστὶ τῆς σφαίρας γεννήτορος κύκλου. ἡ μὲν γὰρ βάσις τῷ κώνῳ πρὸς τὸν γεννήτορα κύκλον λόγον ἔχει ὅν 3 : 1. (α) ἀλλ' ἐπιφάνεια τῷ κώνῳ διπλασία ἐστὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ. (β) ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῷ κώνῳ πρὸς τὸν γεννήτορα κύκλον, ὡς 6 : 1, εἴτεν ἡ ἐπιφάνεια τῷ κώνῳ ἑξαπλασία ἐστὶ τῷ γεννήτορος κύκλου.

I

(φ) Κατὰ τὴν μζ. τῇ α. (χ) Κατὰ τὴν β. τῇ ιβ. (ψ) Κατὰ τὴν δ. τῇ ε. (ω) Κατὰ τὴν ι. τῇ ι. (α) Κατὰ τὴν στ. Συνέπ. (β) Κατὰ τὸ ε. Θεώρ. τῷ δὲ τῷ βιβλ.

Ε'. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς ΑΓ ὀρθῆς κυλίνδρου, (χ. 12.)
 πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τοῦ αὐτοῦ ὕψος καὶ βάσιν
 ἴσην ἔχοντος ΕΖΑ κώνη τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν
 ἡ ΑΒ πλευρὰ τῆς κυλίνδρου, πρὸς τὴν ΕΗ, ἔσται πρὸς
 τὸ ἡμισυ τῆς πλευρᾶς τῆς κώνης. ἡ ² μὲν γὰρ τῆς
 κυλίνδρου ΑΓ ἐπιφάνειας ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ἐκ
 τῆς ΑΒ πλευρᾶς καὶ τῆς ΒΔΓ περιφερείας, (γ)
 ἡ δὲ τῆς ΕΖΗ κώνης ἴση τριγώνῳ, ὃ ὕψος μὲν ἡ ΕΗ,
 βάσις δὲ ἡ περιφέρεια ΖΘΗ. (δ) ὡς ἄρα ἐπιφάν. ²
 τῆς κυλίνδ. πρὸς ἐπιφάν. τῆς κών. ἔτω ΑΒ. ΒΔΓ:
 ΕΗ. ΖΗΘ. ἀλλ' ἡ ΒΔΓ=ΖΘΗ. (ε) ὡς ἄρα ἐπιφάν.
 τῆς ² ΑΓ, πρὸς ἐπιφάν. τῆς ΕΖΗ:: ΑΒ: $\frac{ΕΗ}{2}$.

Λ Η Μ Μ Α Δ'.

Ἐσω τριγώνον ὀρθογώνιον τὸ ΒΑΗ, καὶ ἀπο
 τῆς τυχόντος σημείας Δ τῆς ΒΑ ἤχθω ἡ ΔΖ
 παράλληλος τῇ ΑΗ. λέγω, ὅτι τὸ ΒΑ. ΑΗ=
 ΒΔ. ΔΖ+ΔΑ. ΔΖ+ΔΑ. ΑΗ. πίν. Δ'. χ. 13:

ΔΕΙΞΙΣ.

Πεπληρώσω γὰρ τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον. καὶ
 ἐπεὶ τὸ μὲν ΒΑ. ΑΗ ἐστὶ τὸ ΑΓ· τὸ δὲ ΒΔ. ΔΖ, τὸ
 ΔΚ· τὸ δὲ ΔΑ. ΔΖ, τὸ ΑΖ, ἔσται τὸ ΖΓ· τὸ δὲ
 ΔΑ. ΑΗ, τὸ ΑΘ, δῆλον ἄρα ὅτι τὸ ΒΑ. ΑΗ=ΒΔ.
 ΔΖ+ΔΑ. ΔΖ+ΔΑ. ΑΗ, ἥτοι ΒΑ. ΑΗ=ΒΔ.
 ΔΖ+ΔΑ. ΔΖ+ΑΗ.

ΘΕΩ.

(γ) Κατὰ τὸ β'. Λήμ. τῆ δὲ τῆς βιβλ. (δ) Κατὰ τὴν α'. Συνίσ.
 τὴν μὲν τὸ Δ'. Θέωρ. τῆ δὲ τῆς βιβλ. (ε) Ἐξ ὑποθ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. (ζ)

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξύ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ τῶ κῶνος ἴσος ἐστὶ κύκλος, ὃ ἢ ἐκ τῶ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε πλευρᾶς τῶ κῶνος, τῆς μεταξύ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταύταις ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, τῶν ἐν ταῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις.

Ἔστω κῶνος, ὃ τὸ διὰ τῶ ἀξονος τριγώνου ἴσον τῷ ΑΒΓ. καὶ τετμήσθω παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει· καὶ ποιέτω τομήν τὴν ΔΕ. ἄξων δὲ τῶ κῶνος ἔστω ἡ ΕΗ· κύκλος δὲ τις ἐκκείσθω ὁ Θ, ὃ ἢ ἐκ τῶ κέντρου ΚΘ μέση ἀνάλογον ἔστω τῆς τε ΑΔ καὶ τῶν ΔΖ + ΑΗ· λέγω, ὅτι ὁ Θ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῶ κῶνος τῇ μεταξύ τῶν ΔΕ, ΑΓ. χ . 14.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκείσθωσαν κύκλοι, οἱ Α, Ι, καὶ τῶ μὲν Ι κύκλου ἐκ τῶ κέντρου ΚΙ δυνάσθω τὸ ΒΔ. ΔΖ, ὅτεν ἔστω τὸ $\overline{ΚΙ}^2 = \overline{ΒΔ} \cdot \overline{ΔΖ}$, τῶ δὲ Α ἢ ἐκ τῶ κέντρου ΚΑ δυνάσθω τὸ ΒΑ. ΑΗ, ἥτοι ἔστω $\overline{ΚΑ}^2 = \overline{ΒΑ} \cdot \overline{ΑΗ}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὸ ΒΑ. ΑΗ = ΒΔ. ΔΖ + ΔΑ. ΑΗ + ΔΖ. (η) ἔστι δὲ τὸ μὲν ΒΑ. ΑΗ = $\overline{ΚΑ}^2$, τὸ δὲ ΒΔ. ΔΖ = $\overline{ΚΙ}^2$, τὸ ΔΑ. ΑΗ + ΔΖ = $\overline{ΚΘ}^2$. (θ) ἄρα $\overline{ΚΑ}^2 = \overline{ΚΘ}^2 + \overline{ΚΙ}^2$. καὶ ἐπ

(ζ) Τῷ Ἀρχιμ. 15. ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου α. βιβ.

(η) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ. (θ) Ἐξ ὑποθ.

ἐπεὶ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἡμι-
διαμέτρων τετραγώνων, (ι) ἢ ὁ Λ κύκλος ἄρα ἴσος τοῖς
 Θ ἢ Γ . ἀλλ' ὁ μὲν Λ κύκλος ἴσος τῇ τῷ ΒΑΓ γωνίᾳ ἐπι-
φανείᾳ, ὁ δὲ Γ τῇ τῷ ΒΔΕ . (κ) ἢ ὁ Θ ἄρα κύκλος
ἴσος τῇ λοιπῇ τῷ γωνίᾳ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν $\Delta\text{Ε}$, $\Lambda\Gamma$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Η'. (λ)

Ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ ἀρτι-
όπλευρόν τε ἢ ἰσόπλευρον, ἢ διαχθῶσιν ἐν-
θεῖαι ἐπιζευγνύσσαι τὰς πλευρὰς τῷ πολυ-
γώνῳ, αἱ ἐπιζευγνύσσαι πᾶσαι πρὸς τὴν τῷ
κύκλῳ διάμετρον τέτον ἔχουσι τὸν λόγον, ὃν
ἔχει ἡ ὑποταίνουσα τὰς μίαν ἐλάσσονας τῶν
ἡμίσεων, πρὸς τὴν πλευρὰν τῷ πολυγώνῳ.

Ἐξω κύκλος ὁ $\Lambda\Gamma\text{ΕΗ}$, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγ-
γεγράφθω τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘ . ἢ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $\Gamma\Theta$,
 $\Gamma\text{Η}$, $\Delta\text{Ζ}$. λέγω, ὅτι αἱ ἐξημέναι πᾶσαι πρὸς τὴν τῷ
κύκλῳ διάμετρον, τὴν ΑΕ , τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τῷ
τῆς ΒΕ πρὸς ΒΑ . εἴτεν ὅτι εἰν ὡς $\text{Β}\Theta + \Gamma\text{Η} + \Delta\text{Ζ} :$
 $\text{ΑΕ} :: \text{ΒΕ} : \text{ΕΑ}$. χ . 15.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθωσιν αἱ $\Gamma\Theta$, $\Delta\text{Η}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΚ , $\Lambda\Theta\text{Κ}$ ἡ μὲν ΒΚΑ γωνία
ἴση τῇ $\Theta\text{ΚΛ}$, (μ) ἡ δὲ $\text{ΚΕΑ} = \text{Κ}\Theta\Lambda$. (ν) ἢ λοιπὴ ἄρα ἡ
 ΒΑΚ ἴση λοιπῇ τῇ $\text{ΚΛ}\Theta$. τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΒΚ , $\Lambda\Theta\text{Κ}$
ὅμοια ἀλλήλοις εἰσὶ. (ξ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι
ἀπαν-

(ι) Κατὰ τὴν β'. τῷ β'. (κ) Κατὰ τὸ ε'. Θεώρ. (λ) Τῷ Ἀρχιμ.
κ'. τῷ αὐτ. βιβλ. (μ) Κατὰ τὴν ιε'. τῷ α'. (ν) Κατὰ τὴν
κζ'. τῷ γ'. (ξ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'.

ἅπαντα τὰ τρίγωνα ABK , $KΘΛ$, $ΛΓΜ$, $ΜΗΝ$, $ΝΔΟ$
 $ΟΖΕ$ ἑμια ἀλλήλοις εἰσίν. ὡς ἄρα $BK : KA :: KΘ : ΚΛ ::$
 $ΓΜ : ΜΛ :: ΜΗ : ΜΝ :: ΔΟ : ΟΝ :: ΟΖ : ΟΕ$. (ο)
 ἄρα καὶ ὡς $BK : KA :: BK + KΘ + ΓΜ + ΜΗ +$
 $ΔΟ + ΟΖ : KA + ΚΛ + ΛΜ + ΜΝ + ΝΟ + ΟΕ$, (π)
 εἶπεν $BK : KA :: BΘ + ΓΗ + ΔΖ : ΑΕ$, ἐπεὶ δὲ ἐν
 τοῖς τρίγωνοις BKA , $ΒΕΑ$, ἡ μὲν $ΒΑΕ$ γωνία κοινὴ,
 ἡ δὲ ABK ἴση τῇ $ΒΕΛ$, (ρ) ὡς ἄρα $BK : KA :: BE :$
 BA . (σ) ἄρα καὶ ὡς $BΘ + ΓΗ + ΔΖ : ΑΕ :: BE : BA$.
 (τ) ὁ ἔδει δειξάν.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς $BΘ +$
 $ΓΗ + ΔΟ : ΑΟ :: BE : BA$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ἐπιζευγνυσθῶν τὰς πλευρὰς τῶ
 πολυγώνου $ΕΥΘΕΩΝ$, ὡς ἀπὸ μιᾶς, καὶ τῆς πλευρᾶς τῶ
 πολυγώνου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς
 διαμέτρου τῶ κύκλου καὶ τῆς ὑποτείνουσας τὰς κατὰ μίαν
 εἰλάσσοντας τῶν ἡμίσεων τῶ πολυγώνου πλευρῶν περιε-
 χομένῳ ὀρθογώνιῳ. ἐπεὶ γὰρ ὡς $BΘ + ΓΗ + ΔΖ : ΑΕ ::$
 $ΕΕ : ΒΑ$, ἄρα καὶ $BΘ + ΓΗ + ΔΖ : ΒΑ = ΑΕ : BE$. (υ)
 ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $BΘ + ΓΗ + ΔΟ : ΑΟ :: BE : BA$. ἄρα
 καὶ $BΘ + ΓΗ + ΔΟ : ΒΑ = ΑΟ : BE$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Θ. (φ)

Ἡ τῶ ἐγγραφομένην σχήματος εἰς τὴν σφαί-
 ραν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, ὃ ἢ ἐν τῷ
 κέντ.

(ο) Κατὰ τὴν αὐτὴν. (π) Κατὰ τὴν θ'. τῶ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν
 κζ' τῶ γ'. (σ) Κατὰ τὴν δ'. τῶ ε'. (τ) Κατὰ τὴν ε'. τῶ ι'
 (υ) Κατὰ τὴν ιε'. τῶ ε'. (φ) Τῶ Ἀρχιμ. κδ'. τῶ αὐτ. βιβλ

ιέντρῃ δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τῆς χήματος, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνύσασαι τὰς πλευρὰς τῆς πολυγώνου.

Ἐστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΓΕΗ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον. καὶ ἀπὸ τῆς πολυγώνου τῆς ἐγγεγραμμένης νοείτω τί εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφὴν χῆμα. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΒΘ, ΓΗ, ΔΖ. κύκλος δὲ τις ἐκκείτω ὁ Ξ. ἢ ἢ ἐκ τῆς κέντρου ΞΙ δυνάτω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἴσης ταῖς ΒΘ, ΓΗ, ΔΖ, εἴτεν ἔστω $\Xi I^2 = AB \cdot B\Theta + \Gamma H + \Delta Z$. λέγω, ὅτι ὁ κύκλος ἕτος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφομένης χήματος. χ. 16.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκείτωσαν κύκλοι οἱ Π, Ρ, Σ, Τ. καὶ τῆς μὲν Π ἢ ἐκ τῆς κέντρου ΚΠ δυνάτω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΘ, εἴτεν ἔστω $K\P^2 = AB \cdot B\Theta$. ἢ δὲ ἐκ τῆς κέντρου τῆς Ρ δυνάτω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΒΘ, ΓΗ, ἥτοι ἔστω $P R^2 = B\Gamma \cdot B\Theta + \Gamma H$. ἢ δὲ ἐκ τῆς κέντρου τῆς Σ δυνάτω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΓΔ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΓΗ, ΔΖ, τετέστι ἔστω τὸ $S\Sigma^2 = \Gamma\Delta \cdot \Gamma H + \Delta Z$. ἢ δὲ ἐκ τῆς κέντρου τῆς Τ δυνάτω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΕΔ καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΔΖ, εἴτεν ἔστω $T T^2 = E\Delta \cdot \Delta Z$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ τετράγωνα $\overline{ΚΠ}^2 + \overline{ΛΡ}^2 + \overline{ΜΣ}^2 + \overline{ΝΤ}^2 = \frac{\overline{ΑΒ} \cdot \overline{ΒΘ} +$

$\overline{ΒΓ} \cdot \overline{ΒΘ} + \overline{ΓΗ} + \overline{ΓΔ} \cdot \overline{ΓΗ} + \overline{ΔΖ} + \overline{ΖΕ} \cdot \overline{ΔΖ} \cdot (Χ) \text{ ἄλλ' αἰ}$

$\overline{ΑΒ}, \overline{ΒΓ}, \overline{ΓΔ}, \overline{ΕΔ} \text{ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν ἰσόπλευρον γὰρ}$

$\text{τὸ πολύγωνον } (Ψ) \text{ ἄρα } \overline{ΚΠ}^2 + \overline{ΛΡ}^2 + \overline{ΜΣ}^2 + \overline{ΝΤ}^2 =$

$\overline{ΑΒ} \cdot \frac{2 \overline{ΒΘ} + 2 \overline{ΓΗ} + 2 \overline{ΔΖ}}{2}, \text{ ἔσθ' ἐν } \overline{ΚΠ}^2 + \overline{ΛΡ}^2 + \overline{ΜΣ}^2 +$

$\overline{ΝΤ}^2 = \overline{ΑΒ} \cdot \overline{ΒΘ} + \overline{ΓΗ} + \overline{ΔΖ}. \text{ ἀλλὰ καὶ τὸ } \overline{ΞΙ}^2 = \overline{ΑΒ} \cdot$

$\overline{ΒΘ} + \overline{ΓΗ} + \overline{ΔΖ}. (ω) \text{ ἄρα τὸ } \overline{ΞΙ}^2 = \overline{ΚΠ}^2 + \overline{ΛΡ}^2 +$

$\overline{ΜΣ}^2 + \overline{ΝΤ}^2. \text{ καὶ ὁ κύκλος ἄρα } \overline{Ξ} \text{ ἴσος τοῖς } \overline{Π}, \overline{Ρ}, \overline{Σ},$

$\overline{Τ} \text{ κύκλοις. ἄλλ' ὁ μὲν } \overline{Π} \text{ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς}$

$\overline{ΘΑΒ} \text{ κώνε· } (α) \text{ ὁ δὲ } \overline{Ρ} \text{ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς κώνε τῇ με-}$

$\text{ταξὺ τῶν } \overline{ΒΘ}, \overline{ΓΗ}. \text{ ὁ δὲ } \overline{Σ} \text{ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς κώνε τῇ}$

$\text{μεταξὺ τῶν } \overline{ΓΗ}, \overline{ΔΖ}, (β) \text{ καὶ ἔτι ὁ } \overline{Τ} \text{ ἴσος τῇ ἐπιφα-}$

$\text{νείᾳ τῆς } \overline{ΖΕΔ} \text{ κώνε. καὶ ὁ } \overline{Ξ} \text{ ἄρα κύκλος ἴσος ταῖς}$

$\text{εἰρημέναις κωνικαῖς ἐπιφανείαις, ἔσθ' ἐν τῇ τῆς ἐγγεγραμ-}$

$\text{μένης χήματος ἐπιφανείᾳ. ὁ ἴδει διῆξαι.}$

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Ἐπιζευχθείσης τῆς $\overline{ΒΕ}$, τῆς ὑποτενύσης ταῖς μίαν

ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων τῆς πολυγώνου πλευρῶν, ἡ

εἰρημένη τῆς ἐγγεγραμμένης χήματος ἐπιφανείᾳ ἴση

ἔσθ' ἐν κύκλῳ, ἢ ἡ ἐκ τῆς κέντρου $\overline{ΞΙ}$ δύναται τὸ ὀρ-

θογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν $\overline{ΑΕ}, \overline{ΒΕ}$ περιεχόμενον. ἐπεὶ γὰρ

$\overline{ΞΙ}^2 = \overline{ΑΕ} \cdot \overline{ΒΕ}$, τὸ δὲ $\overline{ΑΕ} \cdot \overline{ΒΕ} = \overline{ΑΒ} \cdot \overline{ΒΘ} + \overline{ΓΗ} + \overline{ΔΖ}$, (γ)

ἄρα

(Χ) Ἐκ τῆς κατασκευ. δῆλον. (Ψ) Ἐξ ὑποθ. (ω) Ἐξ ὑποθ. (α) Κατὰ τὸ ἰ. Θιέρ. (β) Κατὰ τὸ ζ'. Θιέρ. (γ) Κατὰ τὸ πόρ. τῆς ἡ. Θιέρ.

ἄρα τὸ $\overline{EI}^2 = AB \cdot B\Theta + \Gamma H + \Delta Z$. ἀλλ' ὁ κύκλος, ὃς ἢ ἐκ τῶν κέντρων δύναται τὸ $AB \cdot B\Theta + \Gamma H + \Delta Z$ ἴσος τῇ τῷ ἐγγεγραμμένῳ χήματος ἐπιφάνειᾳ. (δ) καὶ ὁ κύκλος ἄρα, ὃς ἢ ἐκ τῶν κέντρων δύναται τὸ $AE \cdot BE$ ἴσος τῇ αὐτῇ ἐπιφάνειᾳ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ αἱ ἐν τῷ σφαιρικῷ τμήματι ΔAZ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶ κύκλῳ, ὃς ἢ ἐκ τῶν κέντρων δύναται τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν AO, BE .

Καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, ὃς ἢ ἐκ τῶν κέντρων δύναται τὸ ὑπὸ τῆς AE διαμέτρου τῆς σφαίρας καὶ τῆς BE τῆς ὑποτανύσεως τὰς μίαν ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων τῶν εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγεγραμμένῳ πολυγώνῳ πλευρῶν. ἐπεὶ γὰρ τὰ εἰς τοὺς κύκλους ἐγγεγραμμένα πολύγωνα εἰς αὐτοὺς ἐναπολήγει, (ε) καὶ αἱ κωνικαὶ ἄρα ἐπιφάνειαι αἱ ἐξ αὐτῶν γινόμεναι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἐναπολήγουσι τῆς σφαίρας, τῆς ἐκ τῶν κύκλων, εἰς ὃν τὰ πολύγωνα ἐγγέγραπται γινομένης. ἀλλ' αἱ εἰρημένα κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶ τῷ κύκλῳ, ὃς ἢ ἐκ τῶν κέντρων δύναται τὸ ὑπὸ τῶν AE, BE , περιεχόμενον (ζ) καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἄρα ἐπιφάνεια ἴση τῷ αὐτῷ κύκλῳ. ἴση δὲ ἔσται καὶ κύκλῳ, ὃς ἢ ἐκ τῶν κέντρων δύναται τὸ ἀπὸ τῆς AE διαμέτρου τῆς σφαίρας τετράγωνον. ἐναπολήγοντος γὰρ τῷ πολυγώνῳ εἰς τὸν κύκλον, ἡ BE τῆς AE ποσότητι διοίσει πάσης δοθείσης ἐλάσσονι. διὸ τὸ ὑπὸ τῶν AE, BE περιεχόμενον ἴσον τῷ AE^2 λογίζεται. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ τῷ σφαιρικῷ τμήματι ΔAZ ἐπιφάνεια ἴση κύκλῳ, ὃς ἢ ἐκ τῶν κέντρων δύναται τὸ ὑπὸ τῶν AO, BE .

Γ 2

Γ'.

δ) Κατὰ τὸ θ'. Θεώρ. (ε) Κατὰ τὸ α'. Λήμ. τὸ μετὰ τὴν α'. πρὸς τὴν β'. βιβλ. (ζ) Κατὰ τὴν προλαβ. Σύνεπ.

Γ'. Ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΔ, ἡ ἐπιφάνεια τῷ σφαιρικῷ τμήματος ΔΑΖ ἴση ἔσται κύκλῳ, ὃ ἢ ἐκ τῶ κέντρου ἴση τῇ ΑΔ. ἐπεὶ γὰρ ἡ τῷ σφαιρικῷ τμήματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, ὃ ἢ ἐκ τῶ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΒΕ· (η) ἐναποληγασῶν δὲ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν εἰς τὴν τῷ σφαιρικῷ τμήματος ἐπιφάνειαν, ἡ ΒΕ τῆς ΑΕ. ποσότητι διαφέρει πάσης δευθείσης ἐλάσσονι· ἴση ἄρα ἡ τῷ σφαιρικῷ τμήματος ἐπιφάνεια κύκλῳ, ὃ ἢ ἐκ τῶ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΑΕ. περιεχόμενον, εἴτεν ἴση τῷ $\overline{ΑΔ}^2$. ἔστι γὰρ ΑΕ: ΑΔ:: ΑΔ: ΑΟ. (θ) διὸ ΑΕ. $\overline{ΑΟ} = \overline{ΑΔ}^2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι'. (ι)

Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλάσια ἐστὶ τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν αὐτῇ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ κύκλῳ Ζ, ὃ ἢ ἐκ τῶ κέντρου δύναται τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τετράγωνον $\overline{ΑΕ}^2$. (κ) ἀλλ' ὁ κύκλος Ζ τετραπλάσιός ἐστι τῷ μεγίστῳ κύκλῳ ΑΓΕΗ· εἰσὶ γὰρ οἱ κύκλοι ὥς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· (λ) ἡ τῆς σφαίρας ἄρα ἐπιφάνεια τετραπλάσια ἐστὶ τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν αὐτῇ.

ΛΗΜΜΑ Ε'.

Τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον πολύεδρον, εἰς αὐτὴν ἀπολήγει.

Νρ.

(η) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (θ) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τῆς η'. προτ. τῷ ε'. (ι) Τῷ Ἀρχιμ. λ.α. τῷ αὐτ. βιβλ. (κ) Κατὰ τὴν β'. τῶν προλ. Συνέπ. (λ) Κατὰ τὴν β'. τῷ ιβ'.

Νενοήθω γὰρ περὶ τὴν σφαῖραν Σ (χ. 17.) πολυέδρον περιγεγραμμένον τὸ ΑΒΓΔΕ. καὶ τετμήθωσαν ἡ γωνία αὐτῆ δι' ἐπιπέδων, τῶν ΖΗ, ΘΙ, ΚΛ, ΜΝ, Ο, ἐφαπτομένων τῆς σφαῖρας Σ. ἔκδεν προκύψει πολυέδρον περὶ τὴν σφαῖραν Σ περιγεγραμμένον τὸ ΗΘΙΚΑΜΝΞΟ ἐλάττωσι τῆς σφαῖρας διαφέρων ποσότητι, ἢ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ. εἰάν ἔναι αἱ τῆ προκύψαντος δευτέρου πολυέδρου γωνία καθάπερ καὶ αἱ τῆ πρώτου τμηθῶσι, τρίτον προκύψει πολυέδρον περὶ τὴν σφαῖραν Σ περιγεγραμμένον, καὶ διαφέρων αὐτῆς ἐλάττωσι ποσότητι ἢ περὶ τὸ δεύτερον. ὡσαύτως εἰάν αἱ τῆ τρίτου πολυέδρου γωνία, ὡς εἴρηται τμηθῶσι, καὶ πάλιν αἱ τῆ προκύπτοντος τετάρτου, καὶ ὁμοίως αἱ τῆ πέμπτου, καὶ ἔτιως ἐφεξῆς ἐπ' ἄπειρον, προκύψει πολυέδρον περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον, καὶ διαφέρων αὐτῆς ποσότητι πάσης δοθείσης ἐλάττωσι. τὸ ἴσα περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον πολυέδρον εἰς αὐτὴν ἀπολήγει. (μ)

ΛΗΜΜΑ 5.

Τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον πολυέδρον ἴσον ἐστὶ κώνῳ, ὃ τινος ὕψους ἢ ἡμιδιάμετρος τῆς σφαίρας, βάσις δὲ ἴση τῇ τῆ πολυέδρου ἐπιφανείᾳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον πολυέδρον εἰς τοσαύτας διακεῖται πυραμίδας, ὅσαι αἱ τῆ πολυέδρου βάσεις ὕψος τὸ αὐτὸ ἔχουσας, τὴν ἡμιδιάμετρον δηλαδὴ τῆς σφαίρας· πᾶσαι δὲ αἱ πυραμί-

Γ 3

δες

(μ) Κατὰ τὸν 5. ὅρισμ. τῆ αὐτ.

δες αὐται ἴσαι εἰς πυραμίδι ὕψος ἔχουσιν τὴν ἡμιδιάμετρον τῆς σφαίρας, βάσιν δὲ ἴσην ὅλη τῇ τῷ πολυέδρῳ ἐπιφανείᾳ· ἡ πυραμὶς ἄρα ἡ ὕψος ἔχουσα τὴν ἡμιδιάμετρον τῆς σφαίρας, καὶ βάσιν ἴσην τῇ τῷ πολυέδρῳ ἐπιφανείᾳ ἴση ἐστὶ τῷ πολυέδρῳ. ἐπεὶ δὲ αἱ πυραμίδες αἱ ἐγγεγραμμέναι τε καὶ περιγεγραμμέναι περὶ τὰς κῶνας, εἰς αὐτὰς ἀπολήγουσιν (ν) ἔχουσι δὲ αἱ τριῶν πυραμίδες τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν τοῖς κῶναις, ὡς ὅλον· καὶ ὁ κῶνος ἄρα, ὃς τὸ μὲν ὕψος ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡ δὲ βάσις τῇ τῷ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένῳ πολυέδρῳ ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἐστὶ τῷ πολυέδρῳ.

ΛΗΜΜΑ Ζ'.

Πᾶσα σφαῖρα ἴση ἐστὶ κῶνῳ ὕψος μὲν ἔχοντι ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, βάσιν δὲ τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ πολυέδρον τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν ἀπολήγει, (ξ) ὅλον ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῷ πολυέδρῳ εἰς τὴν τῆς σφαίρας ἀπολήγει ἐπιφανείαν. καὶ ἐπεὶ τὸ πολυέδρον τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον ἴσον ἐστὶ κῶνῳ ὕψος μὲν ἔχοντι ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, βάσιν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τῷ πολυέδρῳ, (ο) καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ἴση ἐστὶ κῶνῳ ὕψος μὲν ἔχοντι ἴσον τῇ τῆς σφαίρας ἡμιδιαμέτρῳ, βάσιν δὲ τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ ἴσην.

ΘΕΩ-

(ν) Κατὰ τὸ δ'. Λῆμ. τὸ μετὰ τὴν θ'. πρατ. τῇ β'. βιβλ.

(ξ) Κατὰ τὸ ε'. Λῆμ. (ο) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΑ'. (π)

Ἰᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνε, βά-
 ιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν
 ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τῶν κέντρων τῆς
 σφαίρας.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφανεία τετραπλασία ἐστὶ τῶν
 ἐγγίστων κύκλων τῶν ἐν αὐτῇ. (ρ) ὁ κώνος ἄρα ὁ ἔχων
 βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας καὶ ὕψος τὴν
 ἐκ τῶν κέντρων τῆς σφαίρας τετραπλάσιός ἐστι τῶν κώνων
 τῶν αὐτοῦ ὕψους ἔχοντος, καὶ βάσιν ἴσην τῷ μεγί-
 στῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων. οἱ γὰρ ἰσοῦψῆς κῶ-
 νοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. (σ) ἀλλ' ὁ κώνος
 ὁ ἔχων βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας καὶ ὕψος
 τὴν ἐκ τῶν κέντρων τῆς σφαίρας ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. (τ)
 ὅτι ἡ σφαῖρα ἄρα τετραπλασία ἐστὶ τῶν κώνων, τῶν βάσιν
 μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαί-
 ρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τῶν κέντρων τῆς σφαίρας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Πᾶν ἄρα ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι κώνου, τῶν τῶν
 αὐτοῦ ὕψους καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος τῷ ἡμισ-
 φαίριῳ. τὸ μὲν γὰρ τῶν ἡμισφαίριων ὕψος ἢ ἐκ τῶν κέν-
 τρων τῆς σφαίρας εἰσὶν, ἢ δὲ βάσεις ὁ μέγιστος κύκλος τῶν ἐν
 τῇ σφαίρᾳ κύκλων. ἐπεὶ ὅτι ἡ σφαῖρα τετραπλασία
 ἐστὶ τῶν τοιούτων κώνων, δῆλον ἄρα ὅτι τὸ ἡμισφαίριον
 διπλάσιον αὐτῷ ἐστὶ.

(π) Τῶν Ἀρχιμ. λβ'. τῶν αὐτ. βιβλ. (ρ) Κατὰ τὸ προλ. Θεώρ.
 (σ) Κατὰ τὴν ια'. τῶν ιβ'. (τ) Κατὰ τὸ προλ. Λήμ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Εντεῦθεν δοθείσης τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς σφαίρας, τήντε ἐπιφάνειαν καὶ αὐτὴν τὴν σφαῖραν καταμετρήσαι πάνυ ῥαδίον. ἔυρεθέντος γὰρ τῷ μεγίστῳ τῶν ἐν αὐτῇ κύκλων, (υ) τὸ τετραπλάσιον αὐτῷ ἴσον ἔσται τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ. ταύτης δὲ διὰ τῷ τρίτημορίῳ τῆς ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιασθείσης, τὸ γινόμενον τὴν σφαῖραν ἐμφαίνει, καθάπερ δὴ καὶ τὸν κῶνον τὸν αὐτῇ ἴσον. (φ)

ΣΧΟΛΙΟΝ

Ἐξω ἢ τῆς σφαίρας ἡμιδιάμετρος ἴση ποσὶν 6. ἢ ἄρα διάμετρος αὐτῆς ἴση 12. τῶν 7, 22, καὶ 12 ἢ τετάρτη ἀνάλογος ἢ $\frac{12 \cdot 22}{7}$ διὰ τῷ ἡμίσεως τῆς ἡμιδιαμέτρου, εἴτεν διὰ τῷ 3 ἢ πολλαπλασιασθήτω. ἔκῃν τὸ γινόμενον $\frac{12 \cdot 22 \cdot 3}{7}$, τὸν μέγιστον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐμφαίνει κύκλον. (χ) Ἔτος τετραπλασιασθεὶς, τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν παρίσῃσιν, (ψ) ἴσην $\frac{12 \cdot 22 \cdot 3 \cdot 4}{7}$. εἰάν ἔν ἢ ἐπιφάνειᾳ αὕτη διὰ τῷ τρίτημορίῳ τῆς 7 ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιασθῇ, ἥτοι διὰ τῷ 2, τὸ γινόμενον $\frac{12 \cdot 22 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2}{7} = 6336 = 905 + \frac{1}{7}$ ἴσον τῇ σφαίρᾳ. ὅπερ ἔδει δεικνύειν, ὅτι ἡ ζήτεμένη σφαῖρα ἴση ἐστὶ κύβοις ποδῶν 905, καὶ ἔτι $\frac{1}{7}$ ποδῶν κύβου.

ΠΟΡΙΣΜΑ

(υ) Κατὰ τὸ β'. πόρ. τὸ μετὰ τὸ β'. Θιῶρ. (φ) Κατὰ τὸ πόρ. τῷ Λήμ τῷ μετὰ τὴν θ' πρότ. τῷ ιβ'. βιβλ. (χ) Κατὰ τὸ αὐτ. πόρ. (ψ) Κατὰ τὸ ι. Θιῶρ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ. (ω)

Πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον ὧν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, (περιγεγραμμένος περὶ τὴν σφαῖραν ἐννοεῖται κύλινδρος.) ἡμιολίος ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁ μὲν γὰρ εἰρηένος κύλινδρος ἑξαπλασίος ἐστὶ τῷ κώνῃ, τῷ βάσιν μὲν χοντος τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τῷ κέντρει. (ὁ αὖτε κύλινδρος ὁ τὴν αὐτὴν ἔχων βάσιν καὶ ὕψος ἴσον τῷ κώνῳ τριπλασίος ἐστὶ τῷ κώνῳ. (α) ὁ αὖτε κύλινδρος ὁ τὴν αὐτὴν μὲν βάσιν ἔχων τῷ κώνῳ, διπλασίον δὲ ἴψος, ἑξαπλασίος ἐστὶ τῷ κώνῳ.) ἡ δὲ σφαῖρα δέδεικται τῷ αὐτῷ κώνῳ τετραπλασία. (β) δὴλον ἔν ὅτι ὁ κύλινδρος ἡμιολίος ἐστὶ τῆς σφαίρας.

Καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῷ εἰρημένῳ κυλίνδρῳ ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἐπεὶ γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τῷ κυλίνδρῳ χωρὶς τῶν βάσεων ἴση δέδεικται (γ) κύκλῳ, ὃ ἢ ἐκ τῷ κέντρει μέση ἀνάλογον ἐστὶ τῆς τῷ κυλίνδρῳ πλευρᾶς, καὶ τῆς διαμέτρει τῆς βάσεως· τῷ δὲ εἰρημένῳ κυλίνδρῳ τῷ περὶ τὴν σφαῖραν ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως· ὁ δὲ κύκλος ὁ τὴν ἐκ τῷ κέντρει ἔχων ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τῷ κυλίνδρῳ τετραπλασίος ἐστὶ τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ· ἔσται ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῷ κυλίνδρῳ χωρὶς τῶν βάσεων τετραπλασία τῷ μεγίστῳ κύκλῳ. ὅλη ἄρα μετὰ τῶν βάσεων ἡ ἐπιφάνεια τῷ κυλίνδρῳ ἑξαπλασία ἔσται τῷ μεγίστῳ κύκλῳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία τῷ μεγίστῳ κύκλῳ. (δ) ὅλη ἄρα ἡ ἐπι-

Γ 5

(α) Τῷ Ἀρχιμ. μετὰ τὸ λβ. Θεώρ. τῷ α βιβλ. καμ. (α) Κατὰ τὴν ι. τῷ ιβ. (β) ἐν τῇ ια Θεώρ. (γ) Κατὰ τὸ γ. Θεώρ. (δ) Κατὰ τὸ ι. Θεώρ.

ἐπιφάνεια τῷ κυλίνδρῳ ἡμισία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

Αἱ ἐπιφάνειαι τῷ κώνῳ καὶ τῷ κυλίνδρῳ τῶν περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένων, καὶ ἡ τῆς σφαίρας εἰς πρὸς ἀλλήλας ἐν λόγῳ συνεχεῖ ἡμισίῳ. ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν τῷ κώνῳ ἐπιφάνεια τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῳ ἑξαπλάσιός ἐστι τῷ μεγίστῳ κύκλῳ, (ε) ἡ δὲ βάσις αὐτῆς τριπλασία (ζ) ὅλη ἄρα ἡ τῷ κώνῳ ἐπιφάνεια ἑνεαπλάσιος τῷ μεγίστῳ κύκλῳ. ἐστὶ δὲ ὅλη ἡ τῷ κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια τῷ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένῳ ἑξαπλάσιος τῷ μεγίστῳ κύκλῳ, (η) ἡ ἄρα τῷ κώνῳ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῷ κυλίνδρῳ λόγον ἔχει ἐν 9 : 6. ἀλλ' ἡ τῷ κυλίνδρῳ πρὸς τὴν τῆς σφαίρας λόγον ἔχει, ὅν 6 : 4. (θ) αἱ ἄρα ἐπιφάνειαι τῷ κώνῳ καὶ τῷ κυλίνδρῳ τῶν περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένων καὶ ἡ τῆς σφαίρας εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ἐν λόγῳ συνεχεῖ ἡμισίῳ, εἶπεν ὡς 9 : 6 :: 6 : 4.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΒ'. (*)

Παντὶ τομῇ σφαίρας, ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τῷ κατὰ τὸν τομέα, ὕψος δ' ἴσον τῇ ἐκ τῷ κέντρους τῆς σφαίρας.

Δειχθήσεται τῷτο, ὡς καὶ τὸ ἐν τῷ Ζ' λήμματι προτεθέν.

ΘΕΣ

(ε) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῷ ε'. Θεωρ. (ζ) Κατὰ τὴν β'. Συνέπ. τῷ αὐτ. Θεωρ. (η) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῷ γ'. Θεωρ. (θ) Κατὰ τὸ προλ. Ηόρ. (*) Τῷ Ἀρχιμ. μβ. τῷ συββλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΓ'. (*)

Παντὶ τμήματι σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν, ἥτις πρὸς τὸ ὕψος τῆς τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὅν συναμφοτέρω, ἢτε ἐκ τῆς κέντρος τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὕψος τῆς λοιπῆς τμήματος, πρὸς τὸ ὕψος τῆς λοιπῆς τμήματος.

Ἐστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος, ὃς διάμετρος ἡ ΒΖ. καὶ τετμήθω ἐπιπέδῳ ἡ σφαῖρα τῷ διὰ τῆς ΚΛ πρὸς ἐξῆς τῇ ΒΖ. καὶ ἔστω κέντρον τὸ Γ. καὶ πεποιθῶ ὡς ΑΟ πρὸς ΒΟ, ἔστω συναμφοτέρω αἱ ΒΓ, ΖΟ, πρὸς τὴν ΖΟ, εἴτεν ὡς ΑΟ : ΒΟ : ΒΓ + ΖΟ : ΖΟ. καὶ πάλιν πεποιθῶ ὡς ΗΟ : ΖΟ : ΖΓ + ΒΟ : ΒΟ. καὶ ἀναγεύξασθωσαν κῶνοι ἀπὸ τῆς κύκλου τῆς περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ, κορυφαῖς ἔχοντες τὰ Α, Η σημεῖα. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν ΚΑΛ κῶνος τῷ κατὰ τὸ Β τμήματι, εἴτεν τῷ ΚΒΛ· ὁ δὲ ΚΗΛ κῶνος τῷ κατὰ τὸ Ζ, ἦτοι τῷ ΚΖΛ τμήματι. χ. 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΖ, ΑΒ, ΑΓ, ΑΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΑΟ : ΒΟ :: ΒΓ + ΖΟ : ΖΟ, (ι) καὶ διαιρεθέντα ἄρα ἔσται ὡς ΑΟ - ΒΟ : ΒΟ :: ΒΓ + ΖΟ - ΖΟ : ΖΟ, (κ) εἴτεν ὡς ΑΒ : ΕΟ :: ΒΓ : ΖΟ. καὶ ἐναλλάξ ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΒΟ : ΖΟ. (λ) καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ΖΟ : ΒΟ ::

(*) Τῇ Ἀρχιμ. β'. τῇ β'. βιβλ. (ι) Ἐξ ὑποθ. (κ) Κατὰ τὴν ιθ. τῇ ι. (λ) Κατὰ τὴν ζ'. τῇ αὐτ.

$BO :: BG : AB$. (μ) ἄρα καὶ ὡς OZ . $BO : \overline{BO}^2 ::$
 $\overline{BG} : AB$. (ν) ἀλλ' OZ . $BO = \overline{KO}^2$. (ξ) ἄρα ὡς $\overline{KO}^2 :$
 $\overline{BO}^2 :: BG : AB$. καὶ ἀνάπαλιν δὲ ὡς $\overline{BO}^2 : \overline{KO}^2 :: AB :$
 BG . καὶ συντεθέντα δὲ $\overline{BO}^2 | \overline{KO}^2 : \overline{KO}^2 :: AB | BG : BG$.
ἀλλὰ $\overline{BO}^2 + \overline{KO}^2 = \overline{KB}^2$, (ο) καὶ $AB + BG = AG$. ἄρα
ὡς $\overline{KB}^2 : \overline{KO}^2 :: AG :: BG$. ἄρα ὁ κῶνος, ὁ ὕψος μὲν
ἔχων τὴν LG , βάσιν δὲ τὸν κύκλον, ἧ ἢ ἐκ τῆς κέν-
τρως ἢ KB , ἴσος τῷ κῶνῳ, τῷ ὕψος μὲν ἔχοντι τὴν
 AG , βάσιν δὲ τὸν κύκλον, ἧ ἢ ἐκ τῆς κέντρως ἢ KO .
ἀντιπεπόνθασιν γὰρ τὰ ὕψη ταῖς βάσεσιν αὐτῶν. (π)
ἀλλ' ὁ κῶνος, ὁ ὕψος μὲν ἔχων τὴν BG , βάσιν δὲ
τὸν κύκλον, ἧ ἢ ἐκ τῆς κέντρως ἴση τῇ KB , ἴσος τῷ
 $IKBA$ τομεῖ. (ρ) ὁ ἄρα $IKBA$ τομεὺς ἴσος κῶνῳ τῷ
ὕψος μὲν ἔχοντι τὴν AG , βάσιν δὲ κύκλον, ἧ ἢ ἐκ
τῆς κέντρως ἢ KO . κοινὸς προσκείσθω ὁ KGL κῶνος. ὁ
κῶνος ἄρα ὁ ὕψος μὲν ἔχων συναμφοτέρας τὰς AG ,
 GO , εἴτεν τὴν AO , βάσιν δὲ κύκλον, ἧ ἢ ἐκ τῆς
κέντρως ἔστιν ἢ KO , ἥτοι ὁ κῶνος KAL ἴσος τῷ σφαιρικῷ
τμήματι KBA . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι ὁ
κῶνος KHL ἴσος τῷ σφαιρικῷ τμήματι KZL .

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Τὸ σφαιρικὸν τμήμα KBA , πρὸς τὸ KZL τμήμα
λόγον ἔχει, ὃν ἡ AO πρὸς τὴν HO . τὸ μὲν γὰρ KBA
ἴσον ἐστὶ τῷ KAL κῶνῳ, τὸ δὲ KZL τῷ KHL . ἀλλ' ὁ
 KAL κῶνος, πρὸς τὸν KHL κῶνον λόγον ἔχει, ἐν ἡ AO ,
πρὸς τὴν HO . (σ) ἄρα καὶ τὸ KBA τμήμα, πρὸς τὸ
 KZL τμήμα λόγον ἔχει, ὃν ἡ AO πρὸς τὴν HO .

ΠΟ.

- (μ) Κατὰ τὴν Συνίπ. τῆς αὐτ. (ν) Κατὰ τὴν α'. τῆς ε'.
(ξ) Κατὰ τὴν β' Συνίπ. τῆς η', τῆς ε'. (ο) Κατὰ τὴν μζ'.
τῆς α'. (π) Κατὰ τὴν ιε'. τῆς ιβ'. (ρ) Κατὰ τε τὸ προλ.
Θεώρ. καὶ τὴν γ'. Συνίπ. τῆς ε'. Θεώρ. (σ) Κατὰ τὴν ιδ'. τῆς ιβ'.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Τὸ ΚΒΛ τμήμα, πρὸς τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον ΚΒΛ κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΒΟ. τὸ γὰρ ΚΒΛ τμήμα, πρὸς τὸν ΚΒΛ κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ὁ ΚΑΛ κῶνος, πρὸς τὸν ΚΒΛ κῶνον. ἀλλ' ὁ ΚΑΛ κῶνος, πρὸς τὸν ΚΒΛ κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΒΟ. (τ) ἔρα καὶ τὸ τμήμα ΚΒΛ, πρὸς τὸν κῶνον ΚΒΛ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΕΟ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΛ τμήμα, πρὸς τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΗΟ πρὸς τὴν ΖΟ.

Τ Ε Λ Ο Σ

ΤΩΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ.

ΤΡΙ-

(τ) Κατὰ τὴν αὐτ.





ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΡΩΤΟΥ



ΟΡΙΣΜΟΙ.

τριγωνομετρία επίπεδος ἐστὶν ἐπισημονικὴ μέθοδος τῇ τὸ μέτρον τῶν πλευρῶν ἢ τῶν γωνιῶν τῶν εὐθυγραμμίων εὐρίσκειν τριγώνων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τῷτὸ ἐστὶ, τριῶν μὲν δοθεισῶν τῇ τριγώνῳ πλευρῶν, τὸ τῶν γωνιῶν εὐρίσκειν μέτρον· δύο δὲ καὶ μιᾷ τῶν γωνιῶν, τὴν λοιπὴν πλευρὰν ἢ τὰς δύο γωνίας· μιᾷ δὲ καὶ τῶν δύο γωνιῶν, τὰς λοιπὰς δύο πλευρὰς ἢ τὴν λοιπὴν γωνίαν. ἐπειδὴν δὲ μόνον αἱ τρεῖς δεδομέναι ᾗσι γωνία, τότε τὸν λόγον ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν αἱ πλευραὶ εὐρίσκομεν, ἢ μὴν δὲ καὶ τὸ τέτων μέτρον.

Β'. Ἡ ΕΔ, ἡ ἀπὸ τινος σημείου Ε τῆς τῇ ἡμικυκλίας περιφερείας ΒΕΖΑ ἀγχομένη κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ ὀρθὸν ἢ μίτονόν ἐστι τῇ τε τῷζ ΒΕ ἢ τῇ ΕΖΑ τῇ ἀναπληρώματος αὐτῇ πρὸς τὴν τῇ ἡμι-

ἡμικυκλίᾳ περιφέρειαν. ἐπιζευχθείσης δὲ ἀπὸ τῆς κέν-
τρῃς Κ ἐπὶ τὸ σημεῖον Ε τῆς ΚΕ, ἡ αὐτὴ ΕΔ ὀρ-
θὸν ἡμίτονόν ἐστι τῆς τε ΕΚΒ γωνίας, τῆς ὑπὸ τῆς
αὐτῆς τόξε ΕΒ καταμετρεμένης, καὶ τῆς ἀναπλη-
ρώματος αὐτῆς πρὸς τὰς δύο ὀρθὰς γωνίας, εἶτεν
τῆς ΕΚΑ γωνίας τῆς καταμετρεμένης ὑπὸ τῆς ΕΖΑ
τόξε. πίν. Α'. χ. ι.

Γ'. Ἡ μὲν ΕΘ ἡ ἀπὸ τῆς τῆς σημείῃς Ε περιφερείας πρὸς
ὀρθὰς ἀγομένη τῇ διαμέτρῳ ΖΓ, ὀρθὸν ἔσται ἡμίτο-
νον τῆς ΕΖ τόξε, τῆς ἔντος παραπληρώματος τῆς
τόξε ΕΒ πρὸς τὸ τῆς κύκλου τεταρτημορίου, καὶ τῆς
ΕΚΖ γωνίας, (α) ἥτις ἐστὶ παραπλήρωμα τῆς ΕΚΒ
πρὸς μίαν ὀρθήν, **Συνημίτονον** λέγεται τῆς τόξε
ΕΒ καὶ τῆς γωνίας ΕΚΒ· ἡ δὲ ΒΔ, ἡ ἀπὸ τῆς πέ-
ρατος τῆς διαμέτρου Β καὶ τῆς τόμης Δ, τῆς ἀπὸ
τῆς καθέτης ΕΔ γινομένης, ἀπολαμβάνομένη, **Πλά-**
γιον ἡμίτονον, ἢ **Παρημίτονον** τῆς τε τόξε ΕΒ
καὶ τῆς ΕΚΒ γωνίας.

Δ'. Ἡ τῆς κύκλου ἡμιδιάμετρος ΚΒ, ἡ ΚΖ, **Ὀλό-**
κληρον ἡμίτονον, ἢ **Ὀλοημίτονον** καλεῖται,
ἅτε δὴ ὀρθὸν ἔσται ἡμίτονον τῆς τε τεταρτημορίου ΒΕΖ
τῆς τῆς κύκλου περιφερείας, καὶ τῆς ὑπ' αὐτῆς κατα-
μετρεμένης ὀρθῆς γωνίας ΖΚΒ. (β)

Ε'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς τῆς διαμέτρου πέρατος Β ἀπτομένη
ἀχθῇ τῆς κύκλου ἡ ΒΛ, ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κέντρῃς Κ
ἐπὶ τι σημεῖον Ε τῆς τῆς κύκλου περιφερείας ἐπιζευ-
χθεῖσα ΚΕ προαχθῇ ἕως ἑ τὴν ἀπτομένην τέμνῃ
κατὰ τὸ Η, ἡ μὲν ΒΗ, ἡ ἀπὸ τῆς τῆς διαμέτρου πέ-
ρατος καὶ τῆς εἰρημένης τομῆς Η ἀπολαμβάνομένη,
τῆς.

(α) Κατὰ τὸν προλαβ. ὅρισμ. (β) Κατὰ τὸν αὐτὸν ὅρισμ.

- τῆτε τόξον BE καὶ τῆς ὑπ' αὐτῷ καταμετρημένης γωνίας BKE , Ἐφαπτομένη λέγεται ἡ δὲ KH , ἡ ὑπὸ τῷ κέντρῳ K καὶ τῆς διατομῆς H περατωμένη, Τέμνουσα τῷ αὐτῷ τόξῳ καὶ τῆς αὐτῆς γωνίας.
- 5'. Ἡ μὲν ZI Ἐφαπτομένη ἔστω τῷ τόξῳ ZE , τῷ παραπληρώματος τῷ EB τόξῳ πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς τῷ κύκλῳ περιφερείας, Συνεφαπτομένη καλεῖται τῷ EB τόξῳ. Ἡ δὲ KI , ἥτις ἐστὶν ἡ τέμνουσα τῷ τόξῳ ZE , Συνδιατέμνουσα λέγεται τῷ αὐτῷ τόξῳ EB .
- Ζ'. Ἡ δὴ σημεῖα, τὰ $A, Γ$, παντὸς τόξου ἐπιζευγῦσα εὐθεῖα $ΑΓ$, χορδὴ καλεῖται. χ. 2.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὸ τὰ Ἡμίτονα, τὰς Ἐφαπτομένας, καὶ τὰς Τέμνουσας εὐρεῖν δι' ἀριθμῶν ἐμφαινομένας εἶδεν ἕτερόν τις, εἰμὴ τὸν λόγον, ἦτοι τὸν ἀληθῆ, ἢ τὸν τῷ ἀληθῆς ἐγγύτατον, ὃν ταῦτα ἔχουσι πρὸς τὴν τῷ κύκλῳ ἡμιδιάμετρον, ἐπιδηλώσας. διάτοι τῷτο ἐννεηθείσης τῆς ἡμιδιαμέτρου εἰς 100000, ἢ 1000000 διηρημένης μέρη, εὐρίσκομεν ὅπως τῶν περιέχει ἑκατὸν τῶν Ἡμιτόνων, καὶ Ἐφαπτομένων, καὶ Τέμνουσῶν. τοσούτον δὲ ἀκριβέστερα τὰ εὐρίσκειν, ὥς ἐκ τῶν κατωτέρω ἐξηγησομένων δηλον, ὅσον ἂν εἰς πλείονα μέρη διηρημένη νοηθῇ ἡ ἡμιδιάμετρος. Πρῶτοι δὲ τῶν Ἡμιτόνων εὐρεταὶ ὁ Ὑπαρχος, (γ) καὶ ὁ Μενέλεως. (δ) τὰ δ' ὑπ' αὐτῶν εὐρεθέντα συ-
νέ-

(γ) Ὁ ἐπὶ Πτολεμαίῳ τῷ Φιλομήτορος ἀκμάσας, ἄνθρωπος ἔτα πρὸ Χριστοῦ 129. διαφορὰς δὲ περὶ Ἀστρον παρατηρήσεις συνέγραψεν ὁ Ὑπαρχος, ἔτι δὲ καὶ τὸ εἰς τὸν Ἀραβικὸν ὑπόμνημα, τὸ ὑπὸ τοῦ Περσικοῦ ἐκλατινισθέν, καὶ τύποις ἐκδοθέν. (δ) Ὁ ἐπὶ Τραϊανῷ ὁ τρίτος περὶ Σφαιρῆς συνθέμενος βιβλία, ὑπὸ τοῦ Μερσεννίου ἐκδοθέντα.

νέτεμέ τε καὶ ἀπήρτισε Πτολεμαῖος ὁ Κλαύδιος, (ε)
ἐπὶ τὸ τελεώτερον δὲ προήγαγεν ὁ Ῥεγιομντάνος, καὶ
μετ' αὐτὸν ἄλλοι, πίνακας κατασκευάσαντες, τὰ Ἡμί-
τονα, τὰς Ἐφαπτομένας καὶ τὰς Τεμνύσας περιέχον-
τας, δι' ἀριθμῶν ἐμφανισμένας, καὶ μὴν ἀλλὰ καὶ τὰς
τέτων λογαρίθμους. τέτων δὲ τῶν πινάκων ἀκριβέστερος
ὁ τῷ Οὐλάκ, ἅτε δὴ τὴν τῷ κύκλῳ ἡμιδιάμετρον εἰς
μέρη 1000000 διηρημένην ἐκλαβόντος, καὶ ἔτω τὸν
ἑαυτῷ κατασκευάσαντος πίνακα. τὸ μὲν ἔν ἑκάστω τῶν
Ἡμιτόνων καὶ τῶν Ἐφαπτομένων καὶ τεμνύσων εὐρεῖν,
πάντη περιττὸν, πινάκων προκειμένων τῶν ταῦτα περι-
εχόντων· τὸ δὲ εἰδέναι τῷ τρόπῳ εὐρηνηται, πάντως
χρήσιμον. διὸ δὴ τὰ ἐξῆς περὶ τοῦ θεωρήματός τε καὶ
Προβλήματός.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Α'.

Τὸ ἡμισυ τῆς ὁποιασὲν χορδῆς ΑΓ, τὸ ὀρ-
θὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ ἡμίσεως τῷ τῆς χορδῆς
τόξῳ ΑΒΓ, καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ὑπὸ τῆς χορ-
δῆς ὑποτανομένης, καὶ ἐν τῷ κέντρῳ τῷ κύκ-
λῳ ἔσσης ΑΚΓ γωνίας. Χ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῷ κέντρῳ Κ ἢ ΚΔ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ,
καὶ ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ συνεχές ἕως ἔς τῷ τόξῳ συμ-
πίση κατὰ τὸ Β.

Δ

ΔΕΙ-

(*) Ὁ ἐκ Πηλυσίου, ὁ ἐπικληθεὶς θαύματος καὶ σοφώτατος, ὁ
ἐπὶ Ἀδριανῷ ἐν Ἀλεξανδρίᾳ περὶ τὸ ἀπὸ Χριστοῦ 138. ἔτος
ἠκμάσας, καὶ πολλὰ φιλοπονήσας ἀστρονομικὰ βιβλία. Ὁρμ
τὸ Γαλλικ. Λεξ. τὸ ἐν Ἀμστερδ. κατὰ τὸ 1770. ἔτος ἐκ-
δόθεν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΚΒ δίχα τέμνει τὴν τε ΓΑ κατὰ τὸ Δ, (ζ) καὶ τὸ τόξον ΑΓ κατὰ τὸ Β, (η) καὶ τὴν ΑΚΓ γωνίαν. (θ) ἡ ΓΔ ἄρα τὸ ἥμισυ ἐστὶ τῆς ΓΑ χορδῆς. ἀλλ' ἡ ΓΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ τε τόξῳ ΓΒ καὶ τῆς γωνίας ΓΚΒ. (ι) τὸ ἥμισυ ἄρα τῆς ΑΓ χορδῆς τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ τε ἡμίσεως τῷ τόξῳ ΑΒΓ, καὶ τῷ ἡμίσεως τῆς ΑΚΓ γωνίας, εἴτεν τῆς ΒΚΓ. ὃ ὅθεν δεῖξαί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον τῷ 45° μοιρῶν τόξῳ εὑρεῖν.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐστω τὸ ΓΕΒ τεταρτημόριον κύκλου περιφερείας, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ. καὶ ἀπὸ τῆς κέντρος Κ ἡχθω πρὸς ὀρθαῖς τῇ ΒΓ ἡ ΚΔ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπίπτει τῷ τόξῳ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΓ. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΓΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ τῶν 45° μοιρῶν τόξῳ. ὅπερ ἴσον ἐστὶ τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς ἡμίσεως τῆς ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΓ τετραγώνου. Χ. 3.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΒΕΓ τεταρτημόριον κύκλου περιφερείας ἐστίν, (κ) εἴτεν μοίραις ἴσον 90° , (λ) ἡ δὲ ΚΕ δίχα τέμνει τὸ ΒΕΓ τόξον, (μ) δηλοῦν ἄρα ὅτι τὸ ΓΕ τόξον ἴσον ἐστὶ μοίραις 45° . ὁμοίως καὶ ἡ ὑπ' αὐτῆς καταμετρημένη γωνία ΕΚΓ, τρεῖς ἴση ἡμισεία ὀρθῆς. ἀλλ' ἡ ΓΔ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ τόξῳ ΓΕ, (ν) ἡ ἄρα ΓΔ
τό

(ζ) Κατὰ τὴν γ'. τῇ γ'. (η) Κατὰ τὴν λ'. τῇ αὐτῇ. (θ) Δὲ λιν ἐκ τῆς η'. τῇ α'. (ι) Κατὰ τὸν β'. ὅρισμ. (κ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (λ) Πᾶσα γὰρ κύκλου περιφέρεια ὡς μοίραις διαιρεῖται 360. (μ) Κατὰ τὴν λ'. τῇ γ'. (ν) Κατὰ τὸν β'. ὅρισμ.

τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ 45° μοιρῶν τόξῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΔΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ΔΚΓ ἡμίσεια ὀρθῆς δέδεται, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ΔΓΚ. (ξ) ἴση ἄρα ἡ ΔΚΓ τῇ ΔΓΚ. διὸ καὶ ἡ ΔΚ = ΔΓ. (ο) ἀλλὰ $\overline{ΚΓ}^2 = \overline{ΚΔ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. (π) ἄρα $\overline{ΚΓ}^2 = 2\overline{ΓΔ}^2$. ἄρα $\overline{ΓΔ}^2 = \frac{\overline{ΚΓ}^2}{2}$. ἄρα $\overline{ΓΔ} = \sqrt{\frac{\overline{ΚΓ}^2}{2}}$, (τὸ $\sqrt{\quad}$ σημαίνει τετραγωνικὴν $\frac{1}{2}$ ἐμφαίνει ρίζαν.) $\frac{1}{2}$ ἴση δηλαδή ἡ ΓΔ τῇ τετραγωνικῇ ρίζῃ τῷ ἡμίσεως τῷ τετραγώνῳ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΓ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Νοείσθω ἡ ΚΓ τετμημένη εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις 10000000. τὸ ἄρα $\overline{ΚΓ}^2 = 100000000000000$. ἀλλὰ $\overline{ΓΔ}^2 = \frac{\overline{ΚΓ}^2}{2}$, ὡς δέδεται. ἄρα $\overline{ΓΔ}^2 = \frac{100000000000000}{2}$, ἦτοι $\overline{ΓΔ}^2 = 50000000000000$. ἄρα $\overline{ΓΔ} = 7071068$. ἐστὶ δὲ ὁ ἀριθμὸς ἔτος ἔχῃ ἡ ἀληθῆς, ἀλλ' ἡ ἐγγύς τῆς ἀληθῆς τετραγωνικῇ ρίζᾳ τῷ 50000000000000. ἐπεὶ γὰρ ὁ ἀριθμὸς 5000000000000000 ἔκ ἐστι τετράγωνος, διὰ τῆτο τὴν ἐπ' ἀκριβὲς τετραγωνικὴν αὐτῇ ρίζαν εὐρεῖν ἀμύχανον. διὰ τῆτο δὲ ἐν τῇ προλαβέσῃ σημειώσεται εἰρηται, ὅτι εἰς ὅσῳ πλείονα μέρη τετμημένη νοεῖται ἡ ἡμιδιάμετρος, τοσάντω ἀκριβέστερα τὰ Ἡμίτονα εὐρίσκειται. ὁμοίαις γὰρ μεθόδοις, εἴτεν ταῖς τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν ἐξαγωγαῖς, τὰ πλεῖστα τῶν Ἡμιτόνων δι' ἀριθμῶν εὐρίσκειται καὶ ἐμφαίνεται, ὡς γνωστῆς δηλονότι καὶ δεδομένης τῆς ἡμιδιαμέτρου λογιζομένης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον τῷ 60° μοιρῶν τόξῳ εὐρεῖν.

Δ 2

ΚΑ-

(ξ) Κατὰ τὴν θ'. Συμπ. τῆς λβ'. τῷ α'. (ο) Κατὰ τὴν ε'. τῷ α'. (π) Κατὰ τὴν μζ'. τῷ α'.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἔστω τὸ ΔΖΒ 60° μοιρῶν τόξον. καὶ ἀπὸ μὲν τῆς κέντρος Κ ἐπὶ τὰ Β, Δ σημεῖα ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΔ· ἀπὸ δὲ τῆς Δ ἐπὶ τὸ Β ἢ ΔΒ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τῆς αὐτῆς Δ ἢ ΔΕ κάθετος τῇ ΒΚ. ἔστω δὴ ἐν ἡ ΕΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον τῆς 60° μοιρῶν τόξου. ὅπερ ἴσον ἐστὶ τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ τῆς τετραγώνου τῆς ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΔ, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ἡμιδιαμέτρου ΕΚ.

Χ. 4. ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΕΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῆς ΔΖΒ τόξου. (ρ) ἀλλὰ τὸ ΔΖΒ ἴσον μοίραις 60°. (σ) τὸ ΕΔ ἄρα τὸ Ἡμίτονόν ἐστι τῆς 60° μοιρῶν τόξου. ἐπεὶ δὲ ΚΔ = ΚΒ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ΚΔΒ = ΚΒΔ. (τ) ἀλλ' ἡ ΔΚΒ ἴση 60° μοίραις, ὥς ὑπὸ τῆς 60° μοιρῶν τόξου ΔΖΒ καταμετρημένη. ἄρα καὶ ἑκατέρω τῶν ΚΔΒ, ΚΒΔ ἴση μοίραις 60°. (υ) ἄρα καὶ ἡ ΔΚΒ = ΔΒΚ. ἄρα καὶ ἡ ΒΕ = ΕΚ. (φ) ἄρα ἡ ΕΚ ἴση τῇ ἡμίσει τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΒ. καὶ ἐπεὶ $\overline{ΚΔ}^2 = \overline{ΕΔ}^2 + \overline{ΕΚ}^2$. ἄρα ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῶν ἴσων τῆς $\overline{ΕΚ}^2$, ἔσεται $\overline{ΕΔ}^2 = \overline{ΚΔ}^2 - \overline{ΕΚ}^2$. ἄρα $ΕΔ = \sqrt{\overline{ΚΔ}^2 - \overline{ΕΚ}^2}$. τὸ Ἡμίτονον δηλαδὴ τῆς 60° μοιρῶν τόξου ἴσον τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ τῆς τετραγώνου τῆς ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΔ καὶ τῆς ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς ΕΚ. ἐπεὶ δὲ ἡ ἡμιδιάμετρος γνωστὴ, καὶ τὸ εἰρημένον ὀρθὸν Ἡμίτονον γνωστὸν ἔσται.

Λ Η Μ Μ Α.

Εἰάν κύκλος ἡμιδιάμετρος ἡ ΚΔ δίχα τμηθῇ κατὰ τὸ Ε, ἀχθῇ δὲ αὐτῇ ἀπὸ τῆς Κ

κέν-

(ρ) Κατὰ τὸν β'. ὁρίσμ. (σ) Ἐκ τῆς κατασκ. (τ) Κατὰ τὴν ἐ. τῆς α'. (υ) Ἐκ τῆς λβ. τῆς α'. δηλον. (φ) Ἐκ τῆς κς'. τῆς α'. δηλον.

κεντρὰς πρὸς ὁρθὰς ἢ ΚΓ, καὶ ἐπιζευχθεΐσης τῆς ΕΓ, ληφθῇ τῇ ΕΓ ἴση ἢ ΕΘ, ἢ ἀπὸ τῆς Θ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευχθεΐσα ΘΓ, πλευρὰ ἑσσιαν κανονικῶς πενταγώνως εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἐγγραφθησομένως. χ. 5.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐνημερόσω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἢ ΑΒ ἴση τῇ ΘΓ. (χ) καὶ ἀχθεΐσης ἀπὸ τῆς Β τῆς ΒΗ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΑΔ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΘ, ΒΚ, ΒΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἐν τῷ ΑΒΚ τριγώνῳ ἤχθη ἡ ΒΗ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΑΚ, (ψ) ἄρα $\overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{KB}^2 - 2AK \cdot KH$. (ω) αἰλλ' $\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2$. (α) ἄρα $\overline{AG}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{KB}^2 - 2AK \cdot KH$. ἀλλὰ $\overline{AG}^2 = \overline{AK} + \overline{KG}^2$. (β) ἄρα $\overline{OK}^2 + \overline{KG}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{KB}^2 - 2AK \cdot KH$. ἀλλὰ $\overline{KB}^2 = \overline{KG}^2$. τῶν ἴσων ἄρα ἀφαιρεθέντων, ἔσεται $\overline{OK}^2 = \overline{AK}^2 - 2AK \cdot KH$. ἐπεὶ δὲ ἡ ΑΚ ὡς ἐτυχε τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ἄρα $\overline{AK}^2 = AK \cdot KΘ + AK \cdot ΑΘ$. (γ) αἰλλ' $AK \cdot ΑΘ = \overline{OK}^2$, ὡς κατωτέρω δευχθήσεται. ἄρα $\overline{AK}^2 = AK \cdot KΘ + \overline{OK}^2$. τῶν ἴσων δὲ ἐκατέρωθεν ἀφαιρεθέντων, ἔσεται $\overline{AK}^2 - AK \cdot KΘ = \overline{OK}^2$. ἀλλὰ $\overline{OK}^2 = \overline{AK}^2 - 2AK \cdot KH$, ὡς δέδεικται. ἄρα $\overline{AK}^2 - AK \cdot KΘ = \overline{AK}^2 - 2AK \cdot KH$. ἀφαιρεθέντων δὲ τῶν ἴσων, ἔσται $-AK \cdot KΘ = -2AK \cdot KH$, ἥτοι $AK \cdot KΘ = 2AK \cdot KH$. ἄρα $2AK : AK :: KΘ : KH$. (δ) ἀλλὰ $2AK$ διπλασία τῆς AK , καὶ ἡ $KΘ$ ἄρα διπλασία τῆς KH . διὸ ἡ $KH = HΘ$. ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΒΗΚ, ΒΗΘ αἱ μὲν KH ,

Δ 3

HB

(χ) Κατὰ τὴν α', τῆ δ'. (ψ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ω) Κατὰ τὴν ιγ'. τῆ β'. (α) Ἐκ τῆς κατασκευ. δῆλον. (β) Κατὰ τὴν μζ'. τῆ α'. (γ) Κατὰ τὴν β'. τῆ β'. (δ) Κατὰ τὴν ις'. τῆ ε'.

HB ἴσαι ταῖς, ΘΗ, ΗΒ, αἱ δὲ πρὸς τῷ Η γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις. (ε) ἄρα καὶ ἡ $B\Theta = BK$. ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ ΘBK τρίγωνον, καὶ γωνία ἡ $B\Theta K = BK\Theta$. (ζ) ἐπεὶ δὲ ὡς $\Delta\Theta : \Delta K :: \Delta K : \Theta K$, (κατωτέρω δευχθήσεται) ἄρα καὶ $\Delta\Theta : \Theta B :: \Theta B : \Theta K$. δέδεικται γὰρ ἡ $\Theta B = BK = \Delta K$. ὁμοίαι ἄρα τὰ τρίγωνα $B\Theta K, B\Theta \Delta$. (η) ἰσοσκελὲς ἄρα καὶ τὸ $B\Theta \Delta$ τρίγωνον. γωνία ἄρα ἡ $\Delta B\Theta = \Delta\Theta B$. (θ) ἀλλ' ἡ $BK\Theta$ διπλασία τῆς $B\Delta\Theta$. (ι) ἄρα καὶ ἡ $E\Theta \Delta$ διπλασία τῆς $B\Delta\Theta$. τὸ ἄρα $\Delta B\Theta$ τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἐστίν, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάτει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. ἑκατέρα ἄρα τέταν ἴση μοίραις 72° , ἡ δὲ λοιπὴ ἡ $B\Delta\Theta$ 36° . αἱ τρεῖς γὰρ ὁμοῖαι ἴσαι δυτὶν ὀρθαῖς, εἴτεν μοίραις 180° . ἄρα καὶ ἡ $BKA = 72^\circ$ μοίραις. δέδεικται γὰρ διπλασία τῆς $B\Delta\Theta$. τὸ AZB ἄρα τόξον πεμπτημόριον ἐστὶ τῆς ὅλης τῆς κύκλου περιφερείας. ἡ AB ἄρα, πλευρά ἐστὶ κανονικῆς πενταγώνου εἰς τὸν κύκλον $AB\Gamma\Delta$ ἐγγραφθησομένης. ὃ ἐδεῖ δεῖξαι.

Ὅτι δὲ ἡ KA κατὰ τὸ Θ τέτμηται, ὥστε εἶναι $AK \cdot \Lambda\Theta = K\Theta^2$, δευχθήσεται ἔτω κείδω τὴν $K\Gamma$ δεῖν τμηθῆναι ὥστε εἶναι $K\Gamma \cdot \Gamma O = K O^2$. ἤχθῃ ἔν πρὸς τὴν $K\Gamma$ κάθετος ἡ $K\Delta$, ἥτις δίχα τέτμηται κατὰ τὸ E . ἐπέξευκται δὲ ἡ $E\Gamma$, καὶ ἐλήφθῃ τῇ $E\Gamma$ ἴση ἡ $E\Theta$. εἰάν ἔν ληφθῇ ἡ KO ἴση τῇ $K\Theta$, δῆλον ὅτι ἡ $K\Gamma$ τέτμηται κατὰ τὸ O , τῷ ἐπιταχθέντι τρόπῳ. (κ) ἀλλ' ἡ $K\Gamma = KA$. καὶ ἡ KA ἄρα τέτμηται, ὥστε εἶναι $AK \cdot \Lambda\Theta = \Theta K^2$. ὅτι δὲ καὶ ἡ $\Delta\Theta$ κατὰ τὸν αὐτὸν τέτμηται λόγον κατὰ τὸ K , ὥστε εἶναι $\Delta\Theta \cdot \Theta K = \Delta K^2$, δείξαις ἔτως ἡ ΔK εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ E , πρόσκειται δὲ αὐτῇ εὐθεία ἐπ' εὐθείας ἡ $K\Theta$. ἄρα $\Delta\Theta \cdot \Theta K$

(ε) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ζ) Κατὰ τὴν ε. τῆ α. (η) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (θ) Κατὰ τὴν ε. τῆ α. (ι) Κατὰ τὴν κ. τῆ γ. (κ) Κατὰ τὴν ια. τῆ β.

$\Theta\text{Κ} + \overline{\text{ΚΕ}}^2 = \overline{\text{ΕΘ}}^2$. (λ) ἄλλ' $\overline{\text{ΕΘ}}^2 = \overline{\text{ΕΓ}}^2$. (μ) ἄρα $\overline{\text{ΕΓ}}^2 = \Delta\Theta$. $\Theta\text{Κ} + \overline{\text{ΚΕ}}^2$. ἄλλ' $\overline{\text{ΕΓ}}^2 = \overline{\text{ΓΚ}}^2 + \overline{\text{ΚΕ}}^2$. (ν) ἄρα $\overline{\text{ΓΚ}}^2 + \overline{\text{ΚΕ}}^2 = \Delta\Theta$. $\Theta\text{Κ} + \overline{\text{ΚΕ}}^2$. τῶν ἴσων δὲ ἀφαιρέθენტων, ἔστι $\overline{\text{ΓΚ}}^2 = \Delta\Theta$. $\Theta\text{Κ}$. ἀλλὰ $\overline{\text{ΓΚ}}^2 = \overline{\text{ΚΔ}}^2$. ἄρα $\overline{\text{ΚΔ}}^2 = \Delta\Theta$. $\Theta\text{Κ}$. ἔξ ὧ δὴ λεν, ὅτι ὡς $\Delta\Theta : \Delta\text{Κ} :: \Delta\text{Κ} : \Theta\text{Κ}$. (ξ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Τὸ Ἡμίτονον τῷ 36° μοιρῶν τόξῳ εὐρεῖν.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῶν κέντρων Κ τῆς ἡμικυκλίδος ΑΒΓΔ ἀνιστάθω ἡ ΚΓ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ΑΔ. καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΔ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τῆς Ε ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευχθείσης τῆς ΕΓ, εἰλήφθω ἡ ΕΗ = ΕΓ. καὶ ἀπὸ τῆς Η ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΓ, ἐφημέρω εἰς τὴν τῆς κύκλου περιφέρειαν ἡ ΑΒ = ΗΓ. καὶ ἀπὸ τῆς κέντρου Κ ἤχθω ἡ ΚΘ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΑ, καὶ ἐκβληθῶσα συμπίπτει τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Ι. λέγω ὅτι ἡ ΒΘ τὸ ζητούμενον Ἡμίτονόν ἐστιν. ἐπεδείχθω γὰρ ἡ ΚΓ. χ. 6.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΚΘ, ΑΚΘ αἱ μὲν πρὸς τῷ Θ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις, (ο) ἡ δὲ ΚΒΘ = ΚΑΒ, (π) ἡ δὲ ΚΘ κοινή. ἄρα καὶ ἡ ΕΚΘ. ἤτοι ἡ ΒΚΙ ἴση τῇ ΘΚΑ, ὅθεν τῇ ΙΚΑ. (ρ) ἔστι δὲ ὅλη ἡ ΒΚΑ ἴση μοίραις 72° . (ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ πλευρά ἐστὶ πενταγώνου κανονικοῦ, εἰς τὴν τῆς κύκλου περιφέρειαν ἐφηρμοσμένη, (σ) τὸ ΑΙΒ τόξον πεμπτημόριον τῆς ὅλης περιφερείας ἐστίν.) ἡ ἄρα

Δ 4

ΒΚΙ

- (λ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ β'. (μ) Ἐκ τῆς κατασκευ. δῆλον. (ν) Κατὰ τὴν μζ'. τῷ α'. (ξ) Κατὰ τὴν ιε'. τῷ ε'. (ο) Ἐκ τῆς κατασκευ. (π) Κατὰ τὴν ε'. τῷ α'. (ρ) Κατὰ τὴν κς'. τῷ β'. (σ) Κατὰ τὸ προλ. Αἴμα.

ΒΚΙ γωνία ἡμίσεια ἕσα τῆς ΒΚΑ, ἴση ἐστὶ μοίραις 36° . ἀλλ' ἡ ΒΘ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ ΒΙ τόξῳ. (τ) ἡ ΒΘ ἄρα τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῷ 36° μοιρῶν τόξῳ.

Ἐπεὶ δὲ $\overline{ΓΕ}^2 = \overline{ΓΚ}^2 + \overline{ΚΕ}^2$, γνωστὰ δὲ αἱ ΓΚ, ΚΕ, γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΕ. ἀλλ' ἡ ΓΕ = ΕΗ, (υ) γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΕΗ. γνωστὴ δὲ καὶ ἡ ΕΚ, ἄρα καὶ ἡ ΚΗ. ἐπεὶ δὲ $\overline{ΓΗ}^2 = \overline{ΓΚ}^2 + \overline{ΚΗ}^2$, γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΗ, εἴτεν ἡ ΒΑ. γνωστὸν ἄρα καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, τῷ τῆς ΒΘ Ἡμίτονον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Δοθέντος τῷ Ἡμίτονῳ ΕΔ τῷ ὁποιοδήποτεν τόξῳ ΓΕ, τὸ Ἡμίτονον ΕΖ τῷ παραπληρώματος ΕΒ πρὸς τὸ τῷ κύκλῳ τεταρτημόριον ΓΕΒ εὑρεῖν. χ. 7.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΚΕ. λέγω ὅτι τὸ Ἡμίτονον ΕΖ τῷ παραπληρώματος ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς διαφορᾶς τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΕ, καὶ τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῷ δοθέντος Ἡμίτονῳ ΕΔ, εἴτεν $ΕΖ = \sqrt{ΕΚ^2 - ΕΔ^2}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

$\overline{ΕΖ}^2 + \overline{ΖΚ}^2 = \overline{ΕΚ}^2$. (φ) ἀφαιρεθέντων ἄρα τῶν ἴσων, εἴσται $\overline{ΕΖ}^2 = \overline{ΕΚ}^2 - \overline{ΖΚ}^2$. ἀλλὰ ΖΚ = ΕΔ. (χ) ἄρα $\overline{ΕΖ}^2 = \overline{ΕΚ}^2 - \overline{ΕΔ}^2$. ἄρα $ΕΖ = \sqrt{ΕΚ^2 - ΕΔ^2}$. ὃ ἐδεῖ δεῖξαι. ἐπεὶ δὲ δεδομένα εἰσὶν αἱ ΕΚ, ΕΔ, γνωστὸν ἄρα τὸ ζητούμενον Ἡμίτονον ΕΖ.

ΠΡΟ-

(*) Κατὰ τὸν β. ὁρισμ. (υ) Ἐκ τῆς κατασκ. (φ) Κατὰ τὴν μζ. τῆς α. (χ) Κατὰ τὴν λδ. τῆς α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

Δοθέντος τῷ Ἡμίτονῳ ΔΗ τῷ ὅποιον τόξῳ ΓΗ, τὸ Ἡμίτονον τῷ ἡμίσεως τῷ αὐτῷ τόξῳ εὐρεῖν. χ. 8.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἀπὸ μὲν τῷ κέντρῳ Κ ἤχθω πρὸς ὁρθῆς τῇ ΔΒ ἡ ΚΘ, ἥτις ἐκβληθεῖσα συμπίπτει τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Γ· ἀπὸ δὲ τῷ Δ ἤχθω ἡ ΔΖ πρὸς ὁρθῆς τῇ ΕΚ. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΔΘ ἐστὶ τὸ ζητούμενον Ἡμίτονον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ἀπὸ τῷ κέντρῳ ΚΘΓ πρὸς ὁρθῆς ἀχθεῖσα τῇ χορδῇ ΒΔ, αὐτὴν τε καὶ τὸ τόξον ΔΒ δίχα τέμνει, ὡς ραδίως δεῖξαι ἔνεστι. τὸ ἄρα ΔΓ τόξον τὸ ἡμισυ ἐστὶ τῷ ΔΓΒ τόξῳ. ἀλλὰ τῷ ΔΓ τόξῳ ὁρθὸν Ἡμίτονόν ἐστιν ἡ ΔΘ. (ψ) ἡ ἄρα ΔΘ τῷ ζητούμενον Ἡμίτονόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ δέδοται τὸ Ἡμίτονον ΔΗ, δεδομένον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΖ Ἡμίτονον τῷ παραπληρώματος ΔΕ. (ω) ἀλλ' ἡ ΔΖ = ΗΚ. γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΚ. ἐστὶ δὲ ὅλη ἡ ΒΚ γνωστὴ, ὡς ἡμιδιάμετρος, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΗ γνωστὴ. ἀλλὰ τὸ $\overline{ΔΒ}^2 = \overline{ΔΗ}^2 + \overline{ΗΒ}^2$. γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΔΒ. διὸ γνωστὸν καὶ τὸ ἡμισυ αὐτῆς, εἴταν τὸ ΔΘ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Σ΄.

Δοθέντος τῷ Ἡμίτονῳ ΔΗ τῷ 60° μοιρῶν τόξῳ ΔΒ σὺν τῷ Ἡμίτονῳ ΕΖ τῷ 36° μοιρῶν τόξῳ ΕΒ, τὸ Ἡμίτονον εὐρεῖν τῷ 12° μοιρῶν τόξῳ. χ. 9.

(ψ) Κατὰ τὸν β. ὅρισμ. (ω) Κατὰ τὸ προλ. πρόβλ.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΕΔ. λέγω δὴ ὅτι τὸ τῆς ΕΔ χορδῆς ἡμισυ τὸ Ἡμίτονόν ἐστι τῷ 12° μοιρῶν τόξῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΔΒ ἐστὶ τόξον μοιρῶν 60° , τὸ δὲ ΕΒ, 36° .
(α) τὸ ἄρα ΔΛΕ τόξον ἐστὶ μοιρῶν 24° , τὸ ἡμισυ ἄρα τῷ ΔΛΕ τόξῳ, τόξον ἐστὶ μοιρῶν 12° . ἀλλὰ τῷ ἡμίσεως τῷ τόξῳ ΔΛΕ Ἡμίτονόν ἐστι τὸ τῆς χορδῆς ΕΔ ἡμισυ. (β) τὸ ἄρα ἡμισυ τῆς ΕΔ χορδῆς τὸ Ἡμίτονόν ἐστι τῷ 12° μοιρῶν τόξῳ. *σ. ε. δ.* Ἐπεὶ δὲ τὰ Ἡμίτονα ΔΗ, ΕΖ δεδομένα εἰσὶ, γνωστὰ ἄρα καὶ τὰ τῶν παραπληρωμάτων Ἡμίτονα ΔΙ, ΕΘ. γνωστὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ τῶν ΔΗ, ΕΖ διαφορά ΔΑ, καὶ ἡ τῶν ΔΙ, ΕΘ, ἡ ΕΑ. ἐπεὶ δὲ $\overline{ΕΔ}^2 = \overline{ΕΑ}^2 + \overline{ΑΔ}^2$, γνωστὸν ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΕΔ}^2$, καὶ ἡ τέταρτὴ ῥίζα ΕΔ, καὶ τὸ ἡμισυ αὐτῆς, ὅπερ ἐστὶ τὸ Ἡμίτονον τῷ 12° μοιρῶν τόξῳ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

Δοθέντων τῶν Ἡμιτόνων ΔΛ, ΖΙ τῶν τόξων ΔΓ, ΖΓ, τῶν διαφερόντων ἀλλήλοις λεπτά 45', τόξῳ τινὸς μέσῳ, οἷον τῷ ΕΓ, τὸ Ἡμίτονον ΕΑ εὑρεῖν. *χ. ιο.*

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῷ Ζ ἡ ΖΘ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΛ. καὶ κείτω τὸ ΖΕ τόξον ἴσον εἶναι λεπτοῖς 15'. καὶ γεγόνετω ὡς ΖΔ: ΖΕ :: ΔΘ: ΕΗ. προσκείτω δὲ τῷ ελάττω Ἡμιτόνῳ ΖΙ ἡ ΕΗ. καὶ ἔσται δὴ τὸ τέτων ἀθροισμα τὸ ζητούμενον Ἡμίτονον τῷ τόξῳ ΕΓ.

ΔΕΙ-

(α) Ἐξ ὑποθ. (β) Ἐκ τῷ προλ. προβλ. ὁπλον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ γνωστὰ τὰ ἡμίτονα ΔΛ, ΖΙ, γνωστὰ ἄρα καὶ τὰ τέτων τόξα ΔΓ, ΖΓ. γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ τέτων διαφορὰ ΔΖ. ὡσαύτως γνωστὴ καὶ τῶν ἡμιτόνων ἡ διαφορὰ, εἴτεν ἡ ΔΘ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΖΕ τόξον γνωστὸν ἐκ τῆς κατασκευῆς. καὶ ἐπεὶ ὡς ΖΔ : ΖΕ :: ΔΘ : ΕΗ, γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΕΗ. (γ) (ὡς εὐθιᾶ λογίζονται διὰ τὴν τέτων σμικρότητα τὰ τόξα ΖΔ, ΖΕ.) προσεθέντος ἔν τῇ ΕΗ τῷ γνωστῷ Ἡμιτόνῳ ΖΙ, γνωστὸν ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον Ἡμίτονον ΕΑ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Ἐκ τῷ εὐρεθέντος Ἡμιτόνῳ τῷ 45° μοιρῶν τόξῳ, γνωστὰ γίνεται Ἡμίτονα ἕξ. τῷ τῷ τῷ Ἡμίτονον τῷ τόξῳ $22^{\circ}.30'$, τῷ ἡμίσεως ὄντος τῷ 45° τόξῳ, ὁμοίως καὶ τὸ τῷ $11^{\circ}.15'$ τόξῳ, ὃ ἐστὶ τὸ τῷ ἡμίσεως ἡμισυ. (δ) ὡσαύτως καὶ τὰ τῶν παραπληρωμάτων αὐτῶν, τῷ $67^{\circ}.30'$, καὶ τῷ $78^{\circ}.45'$. (ε) ἐστὶ δὲ καὶ τὸ τῷ ἡμίσεως τῷ παραπληρώματος, ἥτοι $33^{\circ}.45'$, καὶ τὸ τῷ παραπληρώματος αὐτῷ, εἴτεν τῷ $56^{\circ}.15'$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐκ μὲν τῷ Ἡμιτόνῳ τῷ 60° μοιρῶν τόξῳ γνωστὰ γίνεται δέκα καὶ πέντε Ἡμίτονα· ἐκ δὲ τῷ τῷ 36° , τριάκοντα καὶ ἓν ἐκ δὲ τῷ τῷ 12° , ἑξήκοντα καὶ τρεῖς· συμποσθῆνται δὲ πάντα Ἡμίτονα 120 , ἅπερ Ἡμίτονα εἰσι τόξων ἀλλήλοις διαφερόντων μόνον λεπτὰ πρῶτα $45'$. μεταξὺ δὲ τέτων ἄλλα εὐρίσκονται Ἡμίτονα τόξων ἀλλήλοις $15'$ λεπτὰ διαφερόντων. (ς) καὶ πάλιν μεταξὺ τῶν εὐρεθέντων δῆλα γίνονται ἕτερα τόξα, ὧν ἡ διαφορὰ, λεπτὰ πέντε. καὶ αὐθις
με-

(γ) Κατὰ τὸ β'. πρόβλ. τῷ δ'. τῇ: Ἀριθμ. βιβλ. (δ) Κατὰ τὸ ε'. πρόβλ. (ε) Κατὰ τὸ δ'. πρόβλ. (ς) Κατὰ τὸ ζ'. πρόβλ.

μεταξὺ τέτων ἄλλα τόξων, ὧν ἕτερον τὸ ἕτερον ἐν μόνον λεπτὸν ὑπερέχει.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τῷ εἰρημένῳ τρόπῳ κατεσκευάθησαν οἱ τῶν Ἡμιτόνων πίνακες. ἐπεὶ δὲ ἔτσι Ἡμίτονα τόξων περιέχουσι, μοίρας μόνων καὶ λεπτά πρῶτα ἐμφαινόντων, ῥητέον τῷ τρόπῳ τὰ Ἡμίτονα εὐρίσκεται τῶν τόξων τῶν λεπτά δεύτερα μόνον, ἢ μοίρας, λεπτά πρῶτα καὶ δεύτερα περιεχόντων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

Δοθέντος τῷ Ἡμιτόνῳ ΔΕ τῷ ΔΒ τόξῳ, τῷ ἴσῳ ἐνὶ λεπτῷ πρῶτῳ, καὶ τῷ ΓΒ τόξῳ, τῷ ἴσῳ 40" λεπτοῖς δευτέροις, τὸ Ἡμίτονον αὐτῷ ΓΖ εὐρεῖν χ. 11.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Γεγονέτω ὡς 1' λεπτὸν πρῶτον, ἥτοι 60" λεπτά δεύτερα, πρὸς τὸ Ἡμίτονον τῷ ἐνὸς λεπτῷ πρῶτῳ, εἴτεν τῷ 2909, (ἐν τοῖς τῶν Ἡμιτόνων πίναξι ὁ ἀριθμὸς ἔστος κῆται.) ἔτω τὰ 40" λεπτά δεύτερα, πρὸς τὸν τέταρτον ὅρον, ὅστις τὸ ζητούμενον Ἡμίτονον ΓΖ ἐστί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς εὐθειῶν τῶν ΔΒ, ΓΒ τόξων διὰ τὴν τέτων σμικρότητα λογιζέντων, ἔσεται διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΒΔΕ, ΒΓΖ ὡς ΔΒ: ΔΕ:: ΓΒ: ΓΖ, ἥτοι ὡς 60": 2909:: 40": ΓΖ. διὸ ἡ $ΓΖ = \frac{2909 \cdot 40''}{60''}$. (η)

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Παντὸς ἄρα δοθέντος τόξου διὰ λεπτῶν δευτέρων ἐμφαινομένης τὸ Ἡμίτονον εὐρίσκεις, διελὼν τὸ γνόμενον ἐκ

(η) Κατὰ τὸ β'. πρὸβλ. τῷ δ'. τῆς Ἀριθμ. βιβλ.

ἐκ τῶ Ἡμίτονου τῷ ἐνὸς λεπτῷ πρώτῃ καὶ τῶν δοθέντων λεπτῶν δευτέρων δι' ἐνὸς λεπτῷ πρώτῃ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

Τὸ Ἡμίτονον ΓΘ εὐρεῖν τῷ ΓΑ τόξῳ, τῷ ἐκ μοιρῶν 89° . λεπτῶν πρώτων 59', καὶ λεπτῶν δευτέρων 20'' συγκαμμένῳ. χ. 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰληφθῶ δὴ τόξα τὰ ΔΑ, ΒΑ ἐγγύτατα τῷ ΓΑ. καὶ ἔσω τὸ μὲν ΔΑ μικρόν τι μείζον, ἔστω ἴσον μοιρῶν 90° . τὸ δὲ ΒΑ, μικρόν τι ἑλάττω, ἦτοι ἴσον 89° , 59'. ληφθῆτω δὲ ἀπὸ τῶν πινάκων τὰ τέτων Ἡμίτονα, ἔστω τῷ μὲν ΔΑ τόξῳ τὸ $\Delta K = 10000000$, τῷ δὲ ΒΑ το $BH = 9999999$. καὶ ἀπὸ τῷ Β ἤχθῳ ἡ ΒΕ πρὸς ὁρθῶς τῇ ΔΚ. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΓΖ συν τῇ ΒΗ ἐστὶ τὸ ζητούμενον Ἡμίτονον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΓΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ζητούμενον Ἡμίτονον, ἴσον ἐστὶ τῷ $\Gamma Z + Z\Theta$. ἀλλὰ $Z\Theta = BH$. τὸ ἄρα ζητούμενον Ἡμίτονον ἴσον $\Gamma Z + BH$. ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν τόξον $\Delta A = 90^{\circ}$, τὸ δὲ $BA = 89^{\circ}$, 59'. τὸ ἄρα $\Delta B = 1'$, ἦτοι $60''$. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν $BA = 89^{\circ}$, 59', τὸ δὲ $\Gamma A = 89^{\circ}$, 59', 20''. τὸ ἄρα $\Gamma B = 20''$. ἐπεὶ δὲ ἡ $EK = BH$, ἡ δὲ $BH = 9999999$, ἄρα καὶ ἡ $EK = 9999999$. ἀλλ' ἡ $\Delta K = 10000000$. ἄρα ἡ $\Delta E = 1$. καὶ ἐπεὶ ὡς $\Delta B : \Delta E :: \Gamma B : \Gamma Z$, (θ) ἔστιν ἄρα καὶ ὡς $60'' : 1 :: 20'' : \Gamma Z$. διὸ ἡ $\Gamma Z = \frac{1}{3}$. ἡ ἄρα $\Gamma Z + BH$, ἔστω ἡ $\Gamma\Theta = 9999999 + \frac{1}{3}$. τῷ $\tau\omega^3$ αὐτῷ δὴ τρόπῳ εὐρεθήσεται πᾶν Ἡμίτονον τόξῳ 3 ἐκ μοιρῶν καὶ λεπτῶν πρώτων καὶ δευτέρων συγκαμμένῳ.

ΠΡΟ.

(θ) Διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΒΔΕ, ΒΓΖ ὁμοιότητα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Δοθέντος τῆτε Ἡμιτόνου ΕΒ καὶ τῆ συνημιτόνου ΕΗ τῆ ὁποιαῦν τόξου ΓΕ, τήντε ἐφαπτομένην αὐτῆ ΓΔ καὶ τὴν τέμνουσαν ΚΔ εὐρεῖν. π.ν. Β' γ. 13.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Γεγονέτω ὡς Συνημίτενον. πρὸς Ἡμίτενον, ἕτως ἢ ἡμιδιάμετρος, πρὸς τὴν τετάρτην ἀνάλογον. αὕτη δὴ ἔστι ἡ ζητηθεῖσα ἐφαπτομένη. γεγονέτω δὲ καὶ ὡς Συνημίτενον, πρὸς ἡμιδιάμετρον, ἕτως ἡμιδιάμετρος, πρὸς τὴν τρίτην ἀνάλογον, ἥτις ἡ ζητημένη τέμνουσα ἐστὶ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ τρίγωνα ΚΒΕ, ΚΓΔ ὅμοια ἀλλήλοις εἰσὶν, ὡς ἄρα ΚΒ : ΒΕ :: ΚΓ : ΓΔ. ἀλλὰ ΚΒ = ΕΗ, ὡς ἄρα ΕΗ : ΒΕ :: ΚΓ : ΓΔ. ἐξ ἧς δῆλον τὸ πρῶτον. ἔτι δὲ καὶ ὡς ΚΒ : ΚΕ :: ΚΓ : ΚΔ, ἔστιν ΕΗ : ΚΕ :: ΚΓ : ΚΔ. ἐκ τούτου δὲ δῆλον τὸ δεύτερον. καὶ ἐπεὶ τό, τε Ἡμίτενον καὶ τὸ Συνημίτενον καὶ ἡ ἡμιδιάμετρος γνωσάμενοι, γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΓΔ καὶ ἡ τέμνουσα ΚΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΒΑΓ εἰάν ὡς ὀλοημίτονον, ἔστιν ὡς ἡμιδιάμετρος ληφθῇ ἡ ΒΓ πλευρὰ, ἢ τὴν ὀρθὴν ὑποτένυσσα γωνίαν ΒΑΓ, ἑκατέρω τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τὸ ὀρθὸν Ἡμιτόνον ἐστὶ τῆς ὑπ' αὐτῆς ὑποτανομένης ὀξείας γωνίας ὅτιον

οἶον ἢ μὲν ΓΑ, τῆς ΛΒΓ· ἢ δὲ ΒΑ, τῆς ΒΓΑ.

Χ. 14.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ τεταρτημόριον κύκλος γεγράφθω τὸ ΗΓΔ. πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ ΓΒ κύκλος τεταρτημόριον γεγράφθω τὸ ΖΒΕ. καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ τῶν τριγώνων πλευραὶ ΓΑ, ΒΑ, καὶ συμπίπτέτωσαν ἐπὶ τὰ τῶν περιφερειῶν σημεῖα Ε, Δ.

Ἐκ τῆς τῶν καταγεράμματος θεωρίας καὶ τῶν δευτέρων ὁρισμῶν δῆλον ὅτι ἢ μὲν ΓΑ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῆς ΛΒΓ γωνίας· ἢ δὲ ΒΑ, τῆς ΑΓΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.

Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΓΑΒ ὁποτερασθῆν τῶν πλευρῶν τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν, οἶον τῆς ΓΑ, ὥς Ὀλοσημίτονον ληφθείσης, ἢ ἑτέρα ἢ ΑΒ ἐφαπτομένη γίνεται ἥς ὑποτείνει ὀξείας γωνίας ΑΓΒ· ἢ δὲ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρὰ ΓΒ, τέμνουσα τῆς αὐτῆς γωνίας ΑΓΡ. Χ. 15.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΖ.

Δῆλον ἔκ τε τῶν πέμπτων ὁρισμῶν καὶ τῆς τῶν καταγεράμματος θεωρίας, ὅτι ἢ μὲν ΑΒ ἢ ἐφαπτομένη ἐστὶ τῆς ΑΓΒ γωνίας, ἢ δὲ ΓΒ ἢ τέμνουσα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ εἶναι ληφθεῖν ὥς Ὀλοσημίτονον ἢ ΒΑ, καὶ γεγραφθῆν κύκλος ὁ ΑΕΖ, ἢ μὲν ΑΓ ἢ ἐφαπτομένη γίνεται τῆς ΑΒΓ γωνίας· ἢ δὲ ΒΓ, ἢ τέμνουσα.

ΣΗ-

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰσέον δὲ, ὅτι τῆς ἐτέρας τῶν τριγώνων πλευρᾶς ὡς Ὀλομημίτωνος ληφθείσης, ἔδει καὶ τὴν ἐτέραν τῶν αὐτῶν τριγώνων ὡς Ὀλομημίτονον ἐκλαμβάνειν. ἔτω μὲν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀνισοσκελῶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ αὐτὸ Ἡμίτονον ἔξῃσι καὶ τὴν αὐτὴν τέμνουσαν αἱ ἀνισοὶ γωνίαι. ὅπερ ἄτοπον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'.

Αἱ πλευραὶ παντὸς ὀξυγωνίου καὶ ἀμβλυγωνίου τριγώνου λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὃν τὰ Ἡμίτονα τῶν γωνιῶν τῶν ὑπ' αὐτῶν ὑποτεινομένων.

Εἰ μὲν τὸ τρίγωνον ἰσόπλευρόν ἐστι, δῆλον τὸ προκείμενον. το γὰρ ἰσόπλευρον τρίγωνον, καὶ ἰσογώνιον ἐστὶ. (ι) τῶν δ' ἴσων γωνιῶν ἴσα καὶ τὰ Ἡμίτονα. ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ ΒΓΑ τρίγωνον ὀξυγώνιον, ἀνίσως ἔχον τὰς πλευράς. καὶ ἔστω ἡ ΒΓ μείζων τῆς ΒΑ. χ. 16.

ΚΙ. ΤΑΣΚΕΤΗ.

Εἰλήφθω ἡ ΓΔ ἴση ἢ ΒΑ. καὶ ἀπὸ τῶν Δ καὶ Β σημείων ἤχθωσαν πρὸς ὀρθόν τῇ ΓΑ αἱ ΔΕ, ΒΖ.

ΔΒΙΞΙΣ.

Τὰ τρίγωνα ΓΔΕ, ΓΒΖ ὁμοιά εἰσιν. ὡς ἄρα ΓΒ: ΓΔ :: ΒΖ: ΔΕ. ἀλλ' ἡ ΓΔ = ΒΑ. ὡς ἄρα ΓΒ: ΒΑ :: ΒΖ: ΔΕ. ἀλλ' ἡ μὲν ΒΖ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῆς ΒΑΖ γωνίας, ἥτοι τῆς ΒΑΓ· ἡ δὲ ΔΕ, τῆς ΔΓΕ, εἴτεν τῆς ΒΓΑ. (κ) ἡ ἄρα ΓΒ πλευρὰ, πρὸς τὴν ΒΑ πλευρὰν λόγον ἔχει, ὃν τὸ Ἡμίτονον τῆς ΒΑΓ γωνίας, πρὸς τὸ τῆς ΒΓΑ Ἡμί-

(ι) Κατὰ τὴν α'. Συνίπ. τὴν μετὰ τὴν ε'. τῷ α'. (κ) Κατὰ τὸ β'. Θιύρ.

Ἡμίτονον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, εἰάν ἡ ΑΓ μείζων ἢ τῆς ΑΒ. ἀληθεύσης τῆς ΓΖ ἴσης τῇ ΑΒ, καὶ ἀχθαισῶν τῶν ΖΗ, ΑΔ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΓ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΓΑΔ, ΓΖΗ εἰς ὡς ΓΑ : ΓΖ :: ΑΔ : ΖΗ. ἀλλὰ ΓΖ = ΑΒ. ὡς ἄρα ΓΑ : ΑΒ :: ΑΔ : ΖΗ. ἀλλ' ἡ μὲν ΑΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῆς ΑΒΔ, ἔστιν τῆς ΑΒΙ γωνίας, ἡ δὲ ΖΗ τῆς ΖΙΗ, (λ) ἦτοι τῆς ΑΓΒ. ὡς ἄρα ΓΑ, πρὸς ΑΒ, ἔτω τὸ Ἡμίτονον τῆς ΙΒΑ γωνίας, πρὸς τὸ τῆς ΑΓΒ γωνίας Ἡμίτονον. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΓΒ ΒΑ :: τὸ Ἡμίτ. τῆς ΒΑΓ γων. πρὸς τὸ Ἡμίτ. τῆς ΒΓΑ γων. ὡς δεδεικται. ἄρα καὶ ὡς ΓΑ, πρὸς ΓΒ, ἔτω τὸ Ἡμίτ. τῆς ΓΒΑ γωνίας πρὸς τὸ Ἡμίτ. τῆς ΒΑΓ. (μ)

Ἔσω δὲ τὸ ΒΓΑ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον, ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ΑΒΓ γωνίαν. καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΑΒ κατὰ τὸ συνεχές, ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Γ καὶ Β σημείων ἡ μὲν ΓΔ κάθετος τῇ ΑΔ. ἡ δὲ ΒΖ τῇ ΑΓ. ρ. 17.

Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΖΒ ἔχουσι τὴν μὲν πρὸς τῷ Α γωνίαν κοινὴν, τὴν δὲ ΑΔΓ = ΑΖΒ. (ν) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΔ ἴση λοιπῇ τῇ ΑΒΖ. (ξ) ὡς ἄρα ΑΓ : ΑΒ :: ΓΔ : ΒΖ. (ο) ἀλλ' ἡ μὲν ΓΔ ὀρθὸν ἔσται Ἡμίτονον τῆς ΓΒΔ γωνίας, (π) τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι καὶ τῆς ΓΕΑ γωνίας, ἥτις τὸ ἀναπλήρωμα αὐτῆς ἐστὶ πρὸς δύο ὀρθὰς, (ρ) ἡ δὲ ΒΖ τῆς ΒΓΑ, (σ) ὡς ἄρα ΑΓ, πρὸς ΑΒ, ἔτω τὸ Ἡμίτονον τῆς ΓΒΑ γωνίας, πρὸς τὸ Ἡμίτονον τῆς ΒΓΑ. ὃ ἔδει δεῖξαι.

Ε

ΡΙΒ-

- (λ) Κατὰ τὸ αὐτ. Θιέρ. (μ) Κατὰ τὴν ζ'. καὶ τὴν ι. τὰ ι
(ν) Ἐκ τῆς κρτασκ. (ξ) Κατὰ τὴν ζ'. Συνίτ. τῆς λβ' τὰ α'.
(ο) Κατὰ τὴν δ'. τὰ ε'. (π) Κατὰ τὸ β'. Θιέρ. (ρ) Κατὰ τὸν β'. ὀρισμ. (σ) Κατὰ τὸ β'. Θιέρ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ ἐπιλύσεως τῶν περὶ τὰ τρίγωνα
προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Δοθαισῶν δύο γωνιῶν τῆ ὀρθογωνίᾳ τριγώνῳ ΒΑΓ, τῆς ὀρθῆς δηλαδὴ ΒΑΓ, καὶ τῆς ὀξείας ΑΕΓ, τὸν λόγον εὑρεῖν, ὃν πρὸς αἰκλήλας ἔχουσιν αἱ πλευραί. *χ.* 18.

Ἡ μὲν ὀρθὴ ΑΒΓ γωνία ἴση ἐστὶ 90°. ἔσω δὲ ἡ ΑΒΓ = 44°. 29'. ἔσαι δὲ ἡ ΑΓΒ, παραπλήρωμα ἕσα τῆς ΑΕΓ πρὸς μίαν ὀρθήν, ἴση 45°, 31'. καὶ τὸ μὲν ὀρθὸν Ἡμίτερον τῆς ΒΑΓ = 10000000, τὸ δὲ τῆς ΑΕΓ = 7007018, τὸ δὲ τῆς ΑΓΒ = 7134543. (τ) ὡς ἄρα ΑΒ : ΒΓ :: 7134543 : 10000000. καὶ ὡς ΑΓ : ΓΒ :: 7007018 : 10000000. καὶ ὡς ΑΒ : ΑΓ :: 7134543 : 7007018. (υ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Δοθείσης ὁποτέρᾳ τῶν ὀξείων γωνιῶν τῆ ὀρθογωνίᾳ τριγώνῳ ΒΑΓ, καὶ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΑΓ ὑποτείνουσας πλευρᾶς ΒΓ, ἑκατέραν εὑρεῖν τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, τὴν τε ΑΓ δηλαδὴ καὶ τὴν ΑΒ *χ.* 19.

^α Ἐσω

(τ) Ἐν τοῖς πίναξι ταῦτα εὑρίσκειται. (υ) Κατὰ τὸ β. Θιόν.

"Εστω δὲ ἡ μέν πλὴν BL = 100, ἡ δὲ γωνία
 ABΓ = 50°. καὶ ἐπεὶ ἡ BAT = 90°, ὡς ὁρίσθαι, ἐστὶν
 ἡ AΓB = 30°. (Φ) ἐστὶ δὲ τὸ μέν ὁρίον Hιπτο-
 νων τῆς AET = 8:71673' τὸ δὲ τῆς AIB = 5150-
 381' τὸ δὲ τῆς BAT = 10000000. Ἐπεὶ δὲ ὡς τὸ
 Hιπτο. τῆς BAT, πρὸς τὸ Hιπτο. τῆς AET, ὅτι
 BL, πρὸς AΓ, (Χ) ἐστὶν ὡς 10000000 : 8571.
 673 :: 100 : AΓ. ἡ ἄρα AΓ = $85 + \frac{71673}{100000}$ (Ψ)
 πάλιν ἐπεὶ ὡς Hιπτο. τῆς BAT γων. πρὸς Hιπτο. τῆς
 AIB, ὅτι BL, πρὸς AB, ὡς 10000000 :
 5150381 :: 100 : AB. ἡ ἄρα AB = $51 + \frac{50381}{100000}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ.

Δοθέντος ὁποτεράσθαι τὴν ὁρίων τῶν ὁρίον
 γωνία τρίγωνος BAT γωνίων, καὶ ὁποτεράσθαι
 τὴν τὴν ὁρίον γωνία πρὸς πλὴν BL, ὡς
 τὰς δύο λοιπὰς εὑρεῖν τὰ τρίγωνα πλὴν.

ἑα5. Χ. 20.

"Εστω ἡ μέν γωνία Γ = 39°, 15', ἡ δὲ AB = 50.
 καὶ ἐπεὶ ἡ γωνία A = 90°, ὡς ὁρίσθαι, ἡ ἄρα γωνία
 B = 50°, 45'. ἐστὶ δὲ τὸ μέν ὁρίον Hιπτονον τῆς γων.
 A, 10000000. Ἐπεὶ δὲ ὡς Hιπτονον τῆς γωνίας Γ,
 πρὸς Hιπτονον τῆς γωνίας B, ὅτι AB, πρὸς AΓ,
 ἐστὶν ὡς 6327053 : 7743927 :: 50 : AΓ. ἡ ἄρα
 ἡ AΓ = $61 + \frac{1246117}{6327053}$ πάλιν ἐπεὶ ὡς Hιπτο. τῆς γων.
 Γ,

E 2

(Φ) Κατὰ τὴν δ. Σωφιστ. τῆς ΑΒ. τὰ α. (Χ) Κατὰ τὸ δ. Οἰκιστ.
 λ. (Ψ) Κατὰ τὸ δ. πρὸς ΑΒ. τὰ δ. τῆς ΑΒ. τῆς ΑΒ.

Γ, πρὸς Ἡμίτ. τῆς γων. Α, ἔτως ΑΒ, πρὸς ΒΓ, ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς 6: 27053: 10000000 :: 50: ΒΓ. ἢ ἄρα
 $ΒΓ = 79 + \frac{362813}{6327053}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Δοθείσης τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν τῷ ὀρθογώνιᾳ τριγώνῳ ΒΑΓ ὑποτενύσης πλευρᾶς ΓΒ, καὶ ὑποτερασθῆν των τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, ἑκατέραν τῶν ὀξείων γωνιῶν, καὶ τὴν λοιπὴν πλευρὰν εὐρεῖν. χ. 21.

Ἐστω ἡ μὲν ΓΒ=1000, ἡ δὲ ΑΒ=891. καὶ ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία ἐστὶν, τὸ Ἡμίτονον αὐτῆς ἐστὶ, 10000000.

Ἐπεὶ δὲ ὡς ΓΒ, πρὸς ΑΒ, ἔτω τὸ Ἡμίτονον τῆς Α γωνίας, πρὸς τὸ τῆς Γ γωνίας Ἡμίτονον, ἐστὶν ἄρα ὡς 1000: 891 :: 10000000: Ἡμίτ. τῆς γων. Γ. τὸ ἄρα τῆς Γ γωνίας Ἡμίτονον=8910000. τῷ ἀριθμῷ τῷτε ἐγγύτατος ὁ ἐν τοῖς πίναξιν ἀριθμὸς 8910005, ὁ τὸ Ἡμίτονον ἐμφαίνειν τῆς 63° μοιρῶν γωνίας, ὁ καὶ ἀπεσπταίσιως ἀντὶ τῷ εὐρεθίντες Ἡμίτονος 8910000 ἐκλαμβάνόμενος. ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία=63°. διὸ ἡ πρὸς τῷ Β=27°, ἥς Ἡμίτονον, ὁ 4539905. ἐπεὶ δὲ ὡς Ἡμίτονον τῆς γωνίας Γ, πρὸς Ἡμίτονον τῆς Β, ἔτως ΑΒ: ΑΓ, ἔσθιν ὡς 8910005: 4539905 :: 891: ΑΓ. ἄρα ἡ ΑΓ=45 + $\frac{7638525}{8910005}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

Δοθεσῶν τῶν δύο πλευρῶν, ΑΓ, ΑΒ, τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν Α περιεχουσῶν τῷ ὀρθογώνιᾳ τριγώνῳ ΒΑΓ, ἑκατέραν εὐρεῖν τῶν ὀξείων

ὀξείων Γ, Β, καὶ τὴν λοιπὴν πλευρὰν ΒΓ, τὴν ὑποτέινουσιν τὴν ὀρθὴν γωνίαν. χ. 22.

Ἐστω ἡ ἠ μὲν $ΑΓ=100$, ἡ δὲ $ΑΒ=79$. καὶ ληφθήτω ἡ ΑΓ ὡς Ὀλομήτονον.

Ἐπεὶ ὡς ΑΓ, πρὸς ΑΒ, ἔστω τὸ Ὀλομήτονον, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς Γ γωνίας, (ω) εἴττω ὡς $100:79::10000000:ΑΒ$, ἡ ἄρα $ΑΒ=7900000$. τέττα δὲ τέ ἀριθμὸν ἐγγύτερον ἐν τοῖς πίναξιν εἰς 7902248 , ὃ ἐμφαίνων ἐφαπτομένην τόξον $38^{\circ}, 19'$. ἡ ἄρα γωνία $Γ=38^{\circ}, 19'$. διὸ ἡ γωνία $Β=51^{\circ}, 41'$, ἥς Ἡμίτονον ὃ 7845961 ἀριθμός. ἐπεὶ δὲ ὡς Ἡμίτονον τῆς Β γωνίας, πρὸς Ἡμίτονον τῆς Α, ἔστω ΑΓ, πρὸς ΒΓ, ἥτοι ὡς $7845961:10000000::100:ΒΓ$, ἡ ἄρα $ΒΓ=127+\frac{3562953}{7845961}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5'.

Δοθασῶν πασῶν τῶν τε ὀξυγωνίων τριγώνων ΒΑΓ γωνιῶν, τὸν λόγον εὑρεῖν, ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν αἱ πλευραί. χ. 23.

Ἐστω ἡ μὲν γωνία Α $=69^{\circ}$, ἡ δὲ Β $=71^{\circ}$, ἔστω δὲ ἡ Γ $=40^{\circ}$. καὶ τῆς μὲν γωνίας Α τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον $=9335804$, τὸ δὲ τῆς Β $=9455185$, τὸ δὲ τῆς Γ $=6427876$. ὡς ἄρα $ΒΓ:ΑΓ::9335804:9455185$, εἴττω ὡς $ΒΓ:ΑΓ::1:1+\frac{119381}{9335804}$ καὶ ὡς $ΒΓ:ΑΒ::9335804:6427876$, ἥτοι ὡς $ΒΓ:ΑΒ::1+\frac{2907928}{9335804}$. 1. καὶ ὡς $ΑΓ:ΑΒ::9455185:6427876$, τετέστιν ὡς

Ε 3 ΑΓ:

(*) Κατὰ τὸ γ'. Θεώρ. τῆ προλ. βιβλ.

$ΑΓ : ΑΒ :: 1 + \frac{3027300}{6427876} : 1$. (α) τῶ αὐτῶ δὴ τρόπῳ ἐν-
 ρεθίσεται ὁ λόγος, ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν αἱ τῆ
 ἀμβλυγωνίαι τριγώνων πλευραί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

Μιάς τῶν τῶ ὀξυγωνίαι τριγώνων $ΑΒΓ$ πλευ-
 ρων δοθείσης, καὶ δύο γωνιῶν, τὰς λοιπὰς
 τῶ τριγώνων εὐρεῖν πλευράς. *χ. 24.*

Ἐστω ἡ δοθεῖσα πλευρὰ $ΑΓ = 1000$, καὶ ἡ μὲν γω-
 νία $Β = 39^\circ$, ἡ δὲ $Γ = 55^\circ$. καὶ ἔστω δὴ ἡ γωνία
 $Α = 80^\circ$. ἔστι δὲ τῆς μὲν $Β$ γωνίας τὸ Ἡμίτονον $=$
 6293204 , τὸ δὲ τῆς $Γ = 5191521$, τὸ δὲ τῆς $Α =$
 9975640 . Ἐπεὶ δὲ ὡς Ἡμίτονον τῆς γωνίας $Β$, πρὸς
 Ἡμίτονον τῆς $Γ$, ἔτῳς ἡ $ΑΓ : ΑΒ$, ἔστω καὶ ὡς $6293204 :$
 $5191521 :: 1000 : ΑΒ$. ἡ ἄρα $ΑΒ = 1301 +$
 $\frac{1015649}{1573301}$ πάλιν ἐπεὶ ὡς Ἡμίτ. τῆς γων. $Β$, πρὸς Ἡμίτ.
 τῆς $Α$, ἔτῳς $ΑΓ$, πρὸς $ΒΓ$, ἔστω ὡς $6293204 : 9975-$
 $640 :: 1000 : ΒΓ$, ἡ ἄρα $ΒΓ = 1585 + \frac{227915}{1573301}$ τὰ
 αὐτὰ δὴ ποιητέον καὶ ἀμβλυγώνιον ἢ τὸ τρίγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

Δοθεισῶν δύο τῶν τῶ ὀξυγωνίαι τριγώνων
 $ΑΒΓ$ πλευρῶν, καὶ ὁποτέρᾳ τῶν μὴ ὑπ'
 αὐτῶν περιεχομένων γωνιῶν, τὰς λοιπὰς
 γωνίας καὶ τὴν λοιπὴν πλευρὰν εὐρεῖν. *χ. 25.*

Ἐστω ἡ μὲν $ΑΒ = 150$, ἡ δὲ $ΒΓ = 100$, ἡ δὲ γω-
 νία $Γ = 63^\circ$, ἣς τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον $= 8910065$.

Ἐπεὶ

(α) Ὅμοιόν τὸν β'. Σημ. τὰ ε' ὁρίσμ. τὰ α. τῆς Ἀριθμ.
 βιβλ.

Ἐπεὶ ὡς AB , πρὸς $BΓ$, ἔτω τὸ τῆς $Γ$ γωνίας H' -
μίτονον, πρὸς τὸ τῆς A , ἔσται ἄρα ὡς $150 : 100 ::$
 8910065 , πρὸς τὸ τῆς A H' μίτ. τὸ ἄρα τῆς A
γωνίας H' μίτονον $= 5940043 + \frac{1}{3}$. τέττε δὲ τῷ ἀριθ-
μῷ ὁ ἐν τοῖς πίναξιν ἐγγύτερος, ὁ $\frac{1}{3}$ τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον
ἐμφαίνων τόξον 36° , $27'$, εἰνὶ ὁ 5941211 . διὸ ἡ γω-
νία $A = 36^\circ$, $27'$. εἰ δὲ καὶ ἡ γωνία $Γ = 63^\circ$. ἡ
ἄρα γωνία $B = 80^\circ$, $33'$, ἣς H' μίτονον ὁ 9864293
ἀριθμός. ἐπεὶ δὲ ὡς H' μίτ. τῆς $Γ$, πρὸς H' μίτ. τῆς B ,
ἔτως $AB : AΓ$, ἔσται καὶ ὡς $8910065 : 9864293 ::$
 $150 : AΓ$. ἡ ἄρα $AΓ = 166 + \frac{573160}{8910065}$. τῷ αὐτῷ δὲ
τρόπῳ τὰ αὐτὰ εὐρεθήσονται καὶ τῷ ἀμβλυγωνίῳ τρι-
γώνῳ.

ΠΡΟΒΛΗΜ'Α Θ'.

Δοθασῶν δύο τῶν τῷ $ΛΡΓ$ ὀξυγωνίᾳ τριγώ-
νῳ πλευρῶν, καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομέ-
νης γωνίας $ΒΑΓ$, τὰς λοιπὰς γωνίας καὶ τὴν
λοιπὴν εὐρεῖν πλευράν. πίν. $Γ'$ χ. 25.

Ἐτω ἡ μὲν $AΓ = 16$, ἡ δὲ $AB = 12$, καὶ γωνία
ἡ $A = 63^\circ$, ἣς τὸ ὀρθὸν H' μίτονον $= 8910065$. ἀχ-
θείσης δὲ τῆς $ΒΔ$ πρὸς ὀρθὰς τῇ $AΓ$, ἔσται ἡ γωνία
 $ABΔ = 27^\circ$, ἣς τὸ H' μίτονον $= 4539905$.

Ἐπεὶ δὲ ὡς τὸ τῆς $ΑΔΒ$ γων. H' μίτ. πρὸς τὸ τῆς $ABΔ$,
ἔτως AB , πρὸς AD , ἔσται ὡς $10000000 : 4539905 ::$
 $12 : AD$. ἄρα ἡ $AD = \frac{54478860}{10000000}$ ἀλλ' $AΓ - AD = ΔΓ$.
ἄρα $ΔΓ = 16 - \frac{54478860}{10000000} = \frac{105521140}{100000000}$. πάλιν ἐπεὶ ὡς
τὸ τῆς $ΒΔΑ$ H' μίτ. πρὸς τὸ τῆς A , ἔτως $AB : BD$,
ἥτοι $10000000 : 8910065 :: 12 : BD$. ἡ ἄρα $BD =$

$\frac{10692780}{10000000}$ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ἔν τριγώνῳ ΒΔΓ εἰν ὡς ΒΔ πρὸς ΔΓ, ἔτω τὸ Ὀλομήμιτονον, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ΑΒΓ γωνίας, (β) ἔττω ὡς $\frac{10692780}{10000000}$:: $\frac{105521140}{10000000}$:: 10000000, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς

ΔΒΓ γωνίας. ἡ ἄρα ἐφαπτομένη τῆς ΔΒΓ γωνίας = 98690302. τέττε δὲ τὸ ἀριθμὸς ὁ ἐν τοῖς πίναξιν ἐγγυτέρως ἐστὶν ὁ 9867079, ὁ ἐμφαίνων ἐφαπτομένην τοῦ $44^\circ, 37'$. ἡ ἄρα γωνία ΔΒΓ = $44^\circ, 37'$. ἀλλ' ἡ ΑΒΔ = 27° , ὡς δέδεικται, ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓ = $71^\circ, 37'$. ἐπεὶ ἔν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ γνωσαί εἰσιν αἱ δύο πλευραὶ, ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἡ μὴ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία ΑΒΓ, καὶ τὰ λοιπὰ εὐρεθήσεται. (γ) Ἐὰν δὲ ἡ ΒΑΓ γωνία ἀμβλεία ᾖ, καὶ ἡ ἀγομένη κάθετος ΒΔ ἐκτὸς τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ πίπτῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ ἐκβληθείσης κατὰ τὸ Δ, (χ. 27.) γνωσαί εἰσονται τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἢ τε ΒΔΑ γωνία, ὡς ὀρθή, καὶ ἡ ΒΑΔ ὡς ἀναπλήρωμα πρὸς δύο ὀρθαῖς τῆς δεδομένης ΒΑΓ, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ πλευρὰ ΒΑ δεδομένη, διὸ γνωσαί εἰσονται καὶ αἱ τέττε πλευραὶ, ΒΔ, ΔΑ. (δ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΓ δεδομένη ἐστὶ, γνωστὴ ἄρα ὅλη ἡ ΔΓ. ἐπεὶ ἔν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΒΔΓ γνωσαί εἰσιν αἱ δύο πλευραὶ ΒΔ, ΔΓ, αἱ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΔΓ περιέχεται, γνωστὴ ἄρα ἔσται καὶ ἡ ΒΓ πλευρὰ, καὶ ἡ ΒΓΔ γωνία, (ε) ἐξ ὧν καὶ ἡ ΑΒΓ γνωστὴ ἔσται ἀπερ εἰσὶ τὰ ζητούμενα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ.

Δοθισαὶν πασῶν τῶν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ πλευρῶν, πάσας εὐρεῖν τὰς τῷ τριγώνῳ γωνίας.
χ. 28.

Ἔστω

(β) Ὅρα τὸ β. Θιῶρ τῇ περιλ βιβλ (γ) Κατὰ τὸ προλ πρόβλ. (δ) Κατὰ τὸ β. προβλ. (ε) Κατὰ τὸ ε. προβλ.

Ἐστω ἡ μὲν $AB = 50$, ἡ δὲ $BΓ = 30$, ἡ δὲ $ΑΓ = 64$. καὶ ἡχθῶ ἡ $ΒΔ$ πρὸς ὀρθὰς τῇ $ΑΓ$. εἰάν δὲ ἡ κάθετος $ΒΔ$ ἐκτὸς τῆς τριγώνου πίπτῃ, ἡχθῶ κάθετος ἦτοι ἀπὸ τῆς $Γ$ τῇ $ΑΒ$, ἡ ἀπὸ τῆς $Α$ τῇ $ΒΓ$.

Ἡ ἔν ἀχθείσα κάθετος $ΒΔ$ ἦτοι εἰς ἴσα, ἡ εἰς ἀνίστα τέμνει μέρη τὴν $ΑΓ$. τεμνέτω δὴ αὐτὴν εἰς ἴσα κατὰ τὸ $Δ$. καὶ ἐπεὶ δεδομένη ἡ $ΑΓ$, γνωσὸν ἐστὶ καὶ τὸ ἡμισυ αὐτῆς, εἴτεν ἡ $ΑΔ$. ἐπεὶ δὲ $AB^2 = BD^2 + AD^2$, (ζ) τῶν ἴσων ἄρα ἀφαιρεθέντων, ἔσεται $BD^2 = AB^2 - AD^2$. γνωσῶν δὲ ὄντων τῶν AB^2 , AD^2 , γνωσὸν ἔσται καὶ τὸ BD^2 . διὸ γνωστὴ καὶ ἡ τέττε ῥίζα, εἴτεν ἡ $ΒΔ$. τῆς ὀρθογωνίης ἔν τριγώνου $ΑΒΔ$ γνωσαὶ αἱ δύο πλευραὶ $ΑΔ$, $ΔΒ$ αἱ τὴν ὀρθὴν γωνίαν $ΑΔΒ$ περιέχουσαι, γνωσαὶ ἄρα καὶ αἱ γωνίαι $ΒΑΔ$, $ΑΒΔ$. (η) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ γνωσαὶ εἰσονται καὶ αἱ δύο γωνίαι $ΒΓΔ$, $ΓΒΔ$ τῆς ὀρθογωνίης τριγωνίης $ΒΔΓ$. διὸ γνωστὴ καὶ ὅλη ἡ $ΑΒΓ$ γωνία τῆς $ΑΒΓ$ τριγώνου. γνωσαὶ δὲ, ὡς δέδεικται, καὶ αἱ $Α$ καὶ $Γ$ γωνίαι, πάσαι ἄρα αἱ τῆς τριγώνου γωνίαι εὐρησονται.

Εἰάν δὲ ἡ $ΒΔ$ εἰς ἀνίστα τέμνῃ τὴν $ΑΓ$ κατὰ τὸ $Δ$, τετμήθω ἡ $ΑΓ$ εἰς ἴσα κατὰ τὸ $Ε$. εἰάν ἔν εὐρεθῇ ἡ $ΕΔ$, γνωστὴ ἔσται ἥτε $ΑΔ$ καὶ ἡ $ΔΓ$. διὸ γνωσαὶ εἰσονται καὶ πάσαι αἱ τῆς $ΑΒΓ$ τριγώνου γωνίαι κατὰ τὰ εἰρημένα. (χ. 29.) εὐρεθήσεται δὲ ἡ $ΕΔ$ ἔτω.

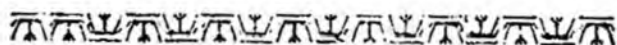
Τὸ $AB^2 = BD^2 + AD^2$. ἀλλ' $AD^2 = AE^2 + ED^2 + 2AE \cdot ED$. $ΕΔ$ (θ) ἄρα $AB^2 = BD^2 + AE^2 + ED^2 + 2AE \cdot ED$. καὶ τῶν ἴσων ἀφαιρεθέντων, ἔσεται $BD^2 = AB^2 - AE^2 - ED^2 - 2AE \cdot ED$. πάλιν τὸ $ΒΓ^2 = BD^2 + ΔΓ^2$.

Ε 5

ΔΓ.

(ζ) Κατὰ τὴν μζ. τῆς α'. (η) Κατὰ τὸ δ. πρὸ βλ. (θ) Κατὰ τὴν δ. τῆς β'.

$$\begin{aligned}
 &\overline{ΔΓ}^2. \text{ ἐπεὶ δὲ } \overline{ΓΔ}^2 + 2ΓΕ. ΕΔ = \overline{ΕΓ}^2 + \overline{ΕΔ}^2, (1) \\
 &\text{τὸ ἄρα } \overline{ΓΔ}^2 = \overline{ΕΓ}^2 + \overline{ΕΔ}^2 - 2ΓΕ. ΕΔ. \text{ ἄρα } \overline{ΒΓ}^2 = \\
 &\overline{ΒΔ}^2 + \overline{ΕΓ}^2 + \overline{ΕΔ}^2 - 2ΓΕ. ΕΔ. \text{ τῶν ἴσων ἄρα ἀφαι-} \\
 &\text{ρεθέντων τε καὶ προσεθέντων, ἔσται } \overline{ΒΔ}^2 = \overline{ΒΓ}^2 - \overline{ΕΓ}^2 - \\
 &\overline{ΕΔ}^2 + 2ΓΕ. ΕΔ. \text{ ἀλλὰ δέδεικται } \overline{ΒΔ}^2 = \overline{ΑΒ}^2 - \overline{ΑΕ}^2 - \\
 &\overline{ΕΔ}^2 + 2ΑΕ. ΕΔ. \text{ ἄρα } \overline{ΒΓ}^2 - \overline{ΕΓ}^2 - \overline{ΕΔ}^2 + 2ΓΕ. ΕΔ = \\
 &\overline{ΑΒ}^2 - \overline{ΑΕ}^2 - \overline{ΕΔ}^2 + 2ΑΕ. ΕΔ. \text{ τῶν ἴσων δὲ ἀφαιρε-} \\
 &\text{θέντων καὶ προσεθέντων, ἔσται } \overline{ΒΓ}^2 + 2. ΓΕ. ΕΔ + \\
 &2ΑΕ. ΕΔ = \overline{ΑΒ}^2. \text{ ἐπεὶ δὲ ἡ } ΓΕ = ΑΕ, \text{ ἄρα } \overline{ΒΓ}^2 + \\
 &4ΓΕ. ΕΔ = \overline{ΑΒ}^2. \text{ διὸ } 4. ΓΕ. ΕΔ = \overline{ΑΒ}^2 - \overline{ΒΓ}^2. \text{ ἄρα} \\
 &\text{τῶν ἴσων διαιρεθέντων διὰ τῷ αὐτῷ } 4ΓΕ, \text{ ἔσται } ΕΔ = \\
 &\frac{\overline{ΑΒ}^2 - \overline{ΒΓ}^2}{4ΓΕ}, \text{ ὅτεν } ΕΔ = \frac{2500 - 900}{128} = \frac{1600}{128} = 12\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



Χρήσις τῶν προεκτεθέντων Θεωρημάτων τε καὶ Προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Δύο τόπων, τῶν Α καὶ Β, τῶν ἀπότινος τρίτου
Γ προσιτῶν εὑρεῖν τὸ ἀπόστημα ΑΒ. χ. 30

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐν ἐκάστῳ τῶν Α, Β, Γ τόπων βακτηρίαν πηξας,
καὶ λεπτὰ ἐπιζεύξας χοινία τὰ ΓΒ, ΓΑ, καὶ ὅσον
οἶοντε αὐτὰ ἐντύναι, ἵνα μὴ ἐπικαμπῇ, ἀλλ' ἐυθέα
ᾖσι, διὰ μὲν τῷ καλεσμένῳ Γωνιόμετρῳ τὴν γωνίαν
Γ, διὰ δὲ τῷ τυχόντῳ μέτρῳ τὰ χοινία καταμέτρη-
σον. καὶ ἐπεὶ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ γνωαί εἰσιν αἱ δύο
πλευραὶ ΓΒ, ΓΑ, καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γω-
νία

(1) Κατὰ τὴν ζ. τῷ β'.

νία ΑΓΒ, γνωσὴ ἔσται καὶ ἡ λοιπὴ τῶν τριγώνων πλευρὰ ΑΒ, (κ) ἥτις ἐστὶ τὸ ζητούμενον ἀπόστημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Τὸ προσιτὲς πύργου ΒΓ τὸ ὕψος εὐρεῖν. χ. 31.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Τόπον εὐρῶν τὸν Α πρὸς τὸ ὄραϊν τὴν τῶν πύργου κορυφὴν Β ἐπιτήδειον, βακτηρίαν τὴν ΑΕ πρὸς ὀρθὰς τῷ ὀρίζοντι πῆξεν. ἐπιζεύξας δὲ λεπτὸν χοινίον τὸ ΑΔ παραλλήλως τῇ ὀριζοντίῳ ΕΓ, τὸν Γωνιομέτρη τε ἐπὶ τὸ Α σήσας, διὰ τῆς διόπτρας τὸ πέρας τῆς τῶν πύργου κορυφῆς Β ὄρα. καταμέτρησον δὲ τὴν τε ΒΑΔ γωνίαν, τὴν ὑπὸ τῶν χοινίων ΑΔ καὶ τῆς ἀκτίνος τῶν φωτὸς τῆς ἀπὸ τῶν πέρατος Β ἐπὶ τὸν ὀφθαλμὸν πεμπομένης περιεχομένην, ἔτι δὲ καὶ τὸ ΑΔ χοινίον. καὶ ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΔΒ γνωσαί εἰσι δύο γωνίαι, ἥτε καταμετρηθεῖσα ΒΑΔ καὶ ἡ ὀρθὴ ΑΔΒ, ἔτι δὲ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΔ, γνωσὴ ἄρα καὶ ἡ ΒΔ. (λ) ἄλλὰ καὶ ἡ ΔΓ γνωστὴ, ὡς ἴση τῇ ΑΕ, γνωσὴ ἄρα καὶ ὅλη ἡ ΒΓ, τετέστι τὸ ζητούμενον ὕψος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Τὸ ἀπόστημα ΑΒ εὐρεῖν δύο τόπων τῶν Α καὶ Β, ἂν ὁ ἕτερος μόνον Α προσιτός. χ. 32.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐν τῷ τυχόντι τόπῳ Γ, ἐξ ἧς ὀρατὸς μὲν ὁ Β, προσιτός δὲ ὁ Α, βακτηρίαν σήσας, ὡσαύτως καὶ τῷ Α τόπῳ, καὶ λεπτὸν χοινίον τὸ ΑΓ ἐπιζεύξας καὶ ἐντάνας, καὶ ἀπὸ ἐκατέρου τῶν τόπων Α καὶ Γ, τὸν Β θεασάμενος, τὰς ΒΑΓ, ΒΓΑ γωνίας, ὧν ἐν τῷ προλαβόντι προ-

(κ) Κατὰ τὸ δ'. πρόβλ. (λ) Κατὰ τὸ γ'. πρόβλ.

προβλήματι εἴρηται τρέπω καταμέτρησον, ἔμην ἀλλὰ καὶ τὸ ΑΓ χοινίον. καὶ ἐπεὶ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ γνωσά. εἰσι δύο γωνίαί αἱ ΑΓΒ, ΓΑΒ, καὶ μία πλευρά ἡ ΑΓ, γνωστὴ ἔσται καὶ ἡ ΑΒ, (μ) τὸ ζητούμενον δηλονότι ἀπόσημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄.

Εὐρεῖν τὸ ΑΒ ἀπόσημα τῶν Α καὶ Β ἀπρὸςίτων τόπων. χ. 33.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Τρεῖς ἐπ' εὐθείας ἐκλέξας τόπους, ἐξ ὧν ὁρατοὶ οἱ δύο Α καὶ Β, ἐπίξευξεν ἐν αὐτοῖς τὸ λεπτόν χοινίον ΔΓΕ. καὶ ἀπὸ ἐνὸς ἑκάστω αὐτῶν διὰ τῶν ΕΒ, ΓΒ, ΓΑ, ΔΑ ἀκτίνων τῶν ἐπὶ τὰς ὀφθαλμοὺς πιπτυσῶν, τὰς Α καὶ Β τόπους θεασάμενος, καταμέτρησον, ὡς εἴρηται, τὰς γωνίας ΒΕΓ, ΒΓΕ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΑΔΓ, καὶ τὰ ΓΕ, ΓΔ χεῖνιά. Ἐπεὶ δὲ τῷ τριγώνῳ ΒΓΕ γνωσά. εἰσι δύο γωνίαί, ἡ ΒΕΓ καὶ ἡ ΒΓΕ, καὶ μία πλευρά ἡ ΓΕ, γνωστὴ ἄρα ἔσται καὶ ἡ ΓΒ. (ν) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ γνωστὴ καὶ ἡ τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ πλευρὰ ΑΓ. ἐπὶ ἔν τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ γνωσά. εἰσι δύο πλευραί, αἱ ΓΒ, ΓΑ, καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενη γωνία ΑΓΒ, γνωστὴ ἄρα ἔσεται καὶ ἡ ΑΒ πλευρά, ἥτις ἐστὶ τὸ ζητούμενον τῶν δύο ἀπρὸςίτων τόπων ἀπόσημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

Τῷ ἀπρὸςίτῳ πύργῳ ΑΒ τὸ ὕψος εὐρεῖν. χ. 34.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Δύο τόπους εὐρῶν τὰς Ε, Ζ, ἐπ' εὐθείας τῇ ὀριζοντίῳ ΕΒ κειμένους, καὶ τὰς Γωνιόμετρας ΕΔ, ΖΗ ἐπ' αὐτῶν

τῶν πρὸς ὀρθαῖς γήσας, καὶ λεπτὸν χοινίον τὸ ΔΗ
 παράλληλον τῇ ΕΒ ἐπιζεύξας καὶ ἐντείνας, καὶ ἀπὸ
 τῶν Δ καὶ Η τὸ ἑκατον τῆς κορυφῆς Α πέρας, καὶ
 τὸ ἑκατον τῆς βάσεως Β θεασάμενος, καταμέτρησον,
 ὡς εἴρηται, τὰς ΑΔΓ, ΑΗΓ, ΓΗΒ γωνίας, καὶ τὸ ΔΗ
 χοινίον. καὶ ἐπεὶ τῷ ΔΑΗ τριγώνῳ γνωστὴ μὲν ἡ ΑΔΗ
 γωνία ὡς καταμετρηθεῖσα, γνωστὴ δὲ καὶ ἡ ΑΗΔ, ὡς
 παραπλήρωμα πρὸς δύο ὀρθαῖς τῆς καταμετρηθείσης
 ΒΗΗ, γνωστὴ δὲ καὶ ἡ ΗΔ πλευρὰ, γνωστὴ ἄρα ἔσται
 καὶ ἡ ΑΗ. (ξ) τῷ ὀρθογωνίῳ ἐν τριγώνῳ ΑΗΓ γνω-
 σαὶ αἱ δύο γωνίαι, ἥτε ὀρθὴ ΑΓΗ, καὶ ἡ καταμε-
 τρηθεῖσα ΑΗΓ, γνωστὴ δὲ καὶ ἡ ΑΗ πλευρὰ, γνωστὰί
 ἄρα ἔσονται καὶ αἱ λοιπαὶ αὐτῷ πλευραί, ΑΓ, ΗΓ. (ο)
 διὰ τὰ αὐτὰ δὴ γνωστὴ ἔσεται καὶ ἡ τῷ ὀρθογωνίῳ
 τριγώνῳ ΗΓΒ πλευρὰ ἡ ΓΒ. γνωστὴ δὲ καὶ ἡ ΑΓ, γνω-
 σται ἄρα ὅλη ἡ ΑΒ, ἥτις ἐστὶ τὸ ζητούμενον ὕψος ΑΒ.
 Ὅμοιαις μεθόδοις καὶ ἄλλα τοιαῦτα, καὶ αὐτὰ δὴ τὰ
 ἀξονομικά, ἐπιλύεται προβλήματα.

Τ Ε Λ Ο Σ

ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ.

ΚΩ.

(ξ) Κατὰ τὸ αὐτ. πρόβλ. (ο) Κατὰ τὸ β. πρόβλ.





ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΑ ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.



Α'. **Ε**ὰν ἀπότινος σημεῖς Λ πρὸς κύκλῳ περιφέρειαν τὴν $\Delta\epsilon\beta$, ὥς ἂν ἔσιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐν ᾧ τὸ σημεῖον, εὐθείᾳ ἐπιζευχθεῖσα ἢ $\Lambda\Delta$, ἐφ' ἑκάτερα προσεκβληθῇ, ἢ μένοντες τὰ σημεῖς Λ , ἢ εὐθείᾳ $\Lambda\Delta$ περὶ τὴν τῷ κύκλῳ περιφέρειαν περιενεχθεῖσα, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὴν γραφθεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας $\Lambda\Delta$ ἐπιφάνειαν, ἢ σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν, κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κεμένων, ὧν ἑκάτερα εἰς ἄπειρον αὐξέται, τῆς γραφθεῖσης εὐθείας εἰς ἄπειρον προσεκβαλλομένης, **Ἐπιφάνειαν κωνικὴν** καλεῖσιν. Α. ς. 1.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. (*)

Εἰς τὸν φανερόν, ὅτι αἱ ἀπὸ τῆς σημείας Α τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σημεία Β, Η, εἴτεν αἱ ΑΒ, ΑΗ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εἰσὶ. μὴ γάρ. ἔκβν εἰάν περιενοχθῇ ἡ ΑΔ, ἢ τὴν κωνικὴν ἐπιφανείαν γεγραφύῃα, καὶ διὰ τῶν σημείων Η καὶ Β ἤξῃ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΖΒ, καὶ αἱ ΑΗ, ΑΘΗ χωρίον περιέξουσιν. ὅπερ ἀδύνατον. χ. 2.

Β'. Κῶνον καλῶσι τὸ περιεχόμενον χῆμα ὑπὸ τε τῆς κύκλου ΔΕΒ, καὶ τῆς μεταξὺ τῆς μεμενηκότες σημείας Α καὶ τῆς κύκλου περιφέρειας κωνικῆς ἐπιφανείας. χ. 1.

Γ'. Κορυφὴν δὲ τῆς τε κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς κῶνος αὐτοῦ τὸ μεμενηκὸς σημεῖον Α.

Δ'. Ἀΐζονα δὲ τῆς τε κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς Κῶνος τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὸ κέντρον Κ τῆς κύκλου ΔΕΒ ἐπιζευγνυμένην εὐθεῖαν ΑΚ.

Ε'. Βάσιν δὲ τῆς μὲν κωνικῆς ἐπιφανείας, τὴν τῆς κύκλου περιφέρειαν τῆς δὲ Κῶνος, αὐτὸν τὸν κύκλον ΔΕΒ.

Ζ'. Καὶ ὀρθὸν μὲν Κῶνον, τὸν ΑΔΕΒ, τὸν πρὸς ὀρθῶς ἔχοντα τῇ βάσει τὸν Ἀΐζονα ΑΚ. (χ. 1.)

Σκαληνὸν δὲ τὸν ΑΓΕΒ, τὸν μὴ πρὸς ὀρθῶς ἔχοντα τῇ βάσει ΓΕΒ τὸν Ἀΐζονα ΑΚ. χ. 3.

Ζ'. Πάσης καμπύλης γραμμῆς, οἷον τῆς ΑΒΘ, ἣτις εἰς ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ, (ἢ τῆς κυλίνδρου ἐλῆξ καὶ τῆς Σφαίρας ἐκ ἑσιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.) Διάμετρον μὲν καλῶσιν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, ἣτις ἡγμένη ἀπὸ τῆς καίμ-

(*) Π' α. πρότ. ἐστὶ τῆ α. βιβλ. τῆ Ἀπολλωνίου.

καμπύλης γραμμῆς $AB\Theta$, πάσας τὰς ἀγομένους ἐν αὐτῇ εὐθείας, $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$ παραλλήλους δίχα τέμνει. χ . 4.

Η'. Ἄξονα δὲ τὴν αὐτὴν Διάμετρον AB , εἰὰν δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ τὰς παραλλήλους IK , ΛM , $NΞ$. χ . 5.

Θ'. Καμπύλων δὲ γραμμῶν τῶν EAZ , $\Theta B\Lambda$ ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ κεμένων, Διάμετρον μὲν πλαγίαν καλῶσιν εὐθεῖαν τὴν ΛM , ἢ BH , ἥτις τὰς δύο καμπύλας γραμμὰς τέμνῃ, πάσας τὰς ἀγομένους παραλλήλους $\Gamma\Delta$, EZ , IK , $\Theta\Lambda$ ἐν ἑκατέρᾳ τῶν καμπύλων γραμμῶν δίχα τέμνει. Ἄξονα δὲ, εἰ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς. χ . 6 καὶ 7.

Ι'. Ὀρθίαν δὲ Διάμετρον εὐθεῖαν τὴν PR , ἥτις κεμένη μετὰ τῶν δύο καμπύλων EAZ , $\Theta B\Lambda$, πάσας τὰς ἀγομένους εὐθείας $E\Theta$, ΓI , ΔK , $Z\Lambda$ παραλλήλους τῇ πλαγίᾳ Διαμέτρῳ ΛM , τὰς ἀπολαμβανόμενας μετὰ τῶν καμπύλων γραμμῶν δίχα τέμνει· εἰ δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς, Ἄξονα ὀρθόν.

ΙΑ'. Καὶ συζυγεῖς μὲν Διαμέτρους καμπύλης γραμμῆς τῆς $BA\Theta$, καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, τῶν EAZ , $\Theta B\Lambda$ εὐθείας τὰς AB , PR , ὧν ἑκατέρᾳ Διάμετρος ἔσται, τὰς τῇ ἑτέρᾳ παραλλήλους δίχα διαίρει· (χ . 4, 6.) εἰ δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς, Ἄξονας συζυγεῖς. χ . 5, καὶ 7.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Πᾶς ἄρα Ἄξων, Διάμετρος ἐστίν, ἔχει δὲ καὶ τὸναντίον.

ΙΒ'. Κορυφή μὲν καμπύλης γραμμῆς λέγεται τὸ ἐν αὐτῇ πέρασ Α τῆς Διαμέτρου ΑΒ. (χ. 8.) Κορυφαί δὲ καμπύλων γραμμῶν τὰ πρὸς αὐταῖς πέρατα Α, Β. χ. 4, 5, 6, 7.

ΙΓ'. Τεταγμένως δὲ κατῆχθαι ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΑΒ, ἢ Τεταγμένη, ἐκάστη τῶν ἐν ταῖς καμπύλαις γραμμαῖς παραλλήλων, ΓΔ, ΕΖ, (χ. 4.) ΙΚ, ΛΜ, (χ. 5.) ΕΖ, ΓΔ, ΙΚ, ΘΛ, (χ. 6, 7.) ΙΚ, ΛΜ. χ. 8.

ΙΔ'. Αποτετμημένη δὲ μέρος, εἶον τὸ ΑΥ, ΑΦ τῆς Διαμέτρου, τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α, καὶ τῆς τεταγμένης ΓΔ, ΙΚ, (χ. 4, 5.) ἢ ΕΖ, ΙΚ, (χ. 6, 7.) ἢ ΛΜ ἀπολαμβάνομενον. (χ. 8. 5.) : ∴

ΙΕ'. Ἐὰν ὁ Κῶνος ΑΒΔ ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς Α, ἡ τομὴ τριγώνον ἔσται ἥτοι τὸ ΒΛΔ, εἰάν διὰ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς Ἀξονος (χ. 1.) ἢ τὸ ΑΒΝ, εἰάν διὰ μόνης τῆς κορυφῆς. χ. 2.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Ἰστέον, ὅτι ὁ ὀρισμὸς ἑστος ἢ τρίτη πρότασις τῆς ἀ. βιβλίας τῆς Ἀπολλωνίου ἐστίν. ἥς ἡ δεῖξις ἐπίδηλος. ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀπὸ τῆς Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη κοινὴ τομὴ ἐστὶ τῆς τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς τῆς Κῶνος ἐπιφανείας, εὐθεῖα ἄρα ἐστίν ἡ ΑΒ, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΑΔ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΒΔ εὐθεῖα. τρίγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΛΔ. χ. 1, 2.

ΙΣ'. Ἐὰν κῶνος ὁ ΑΒΔ ἐπιπέδῳ τμηθῇ τῷ ΗΙΖ παραλλήλῳ τῇ τῆς κῶνος βάσει ΒΕΔ, τὸ ἀπολαμβάνομενον ἐπίπεδον μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας, ἔσται ἡ γινομένη τομὴ, κυκλὸς ἐστὶ, τὸ πέντερον ἔχον ἐπὶ τῆς Ἀξονος ΑΚ. πίν. Β. χ. 1.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Ο ὁρισμὸς ἔτος ἡ τετάρτη πρότασις ἐστὶ τῆς α'. βιβλίῳ τῆς Ἀπολλωνίᾳ, ἥτις καὶ ἐκ τῆς τῆς Κώνης γενέσεως προφανῆς, δέικνυται δ' ἐν ὁμῶς ἔτῳσι συμβαλλέσθω ἐπίπεδον διὰ τῆς ΑΚ, καὶ ἔσται δὴ τρίγωνον τὸ ΑΒΔ. (α) καὶ εἰληφθῶ τυχὸν σημεῖον τὸ Ι ἐπὶ τῆς ΗΙΖ γραμμῆς, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΙ, ἐκβεβλήσθω. αὕτη δὴ συμπεσῇται τῇ περιφερείᾳ τῆς κύκλου ΒΕΔ. (β) καὶ ἀπὸ τῆς σημείῳ Γ, καὶ ὁ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τῷ ΑΚ ἄξιον συμβάλλει, ἐπὶ τὸ Ι ἐπιζεύχθω ἡ ΓΙ, ὁμοίως καὶ ἡ ΚΕ. καὶ ἐπεὶ ὡς ΑΚ : ΑΓ :: ΚΔ : ΓΖ, (γ) ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ΑΚ : ΑΓ :: ΚΕ : ΓΙ, ἄρα καὶ ὡς ΚΔ : ΓΖ :: ΚΕ : ΓΙ. (δ) ἀλλ' ἡ ΚΔ = ΚΕ. ἄρα καὶ ἡ ΓΖ = ΓΙ. (ε) ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῆς Γ σημείῳ πρὸς τὴν ΗΙΖ γραμμὴν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. κύκλος ἄρα ἐστὶν ὁ ΗΙΖ, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τῆς Ἀξὸνος ΑΚ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. (ζ)

Καὶ ἄλλως δὲ τῆς σκαληνῆς Κώνης τεμνομένης, ἡ τομὴ κύκλος ἐστὶ. τετμήσθω γὰρ ὁ ΑΒΔ κώνης (χ. 2.) ἐπίπεδῳ διὰ τῆς Ἀξὸνος ΑΚ, ὁρῶν πρὸς τὴν τῆς Κώνης βάσιν ΒΕΛ. τεμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπίπεδῳ πρὸς ὁρθὰς ὄντι τῷ ΑΒΔ ἔτῳς ὑπεναντίως ἡγμένῳ, ὥστε τὴν ΑΘΖ γωνίαν ἴσην εἶναι τῇ ΑΒΔ, καὶ ποιείτω τομήν ἐν τῇ τῆς Κώνης ἐπιφανείᾳ τὴν ΖΗΘ. λέγω, ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ ΖΗΘ. ἀπὸ γὰρ τῶν τυχόντων σημείων τῆς τε ΖΗΘ γραμμῆς καὶ τῆς ΒΕΛ περιφερείας ἡχθῶσαν αἱ ΗΦ, ΕΙ πρὸς ὁρθὰς τῷ ἐπίπεδῳ ΑΒΔ. αἱτινες δὴ καὶ
ταῖς

- (α) Κατὰ τὸν α'. ὁρισμ. (β) Κατὰ τὸ α'. Πόρ. (γ) Κατὰ τὸν α'. τῆς α'. καὶ τὴν δ'. τῆς ε'. (δ) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (ε) Κατὰ τὴν β'. τῆς ε'. (ζ) Ἡ ε'. πρότ. εἰς τῆς α'. βιβλίῳ τῆς Ἀπολλωνίᾳ.

ταῖς κοιναῖς τῶν ἐπιπέδων τομαῖς ΖΘ, ΒΛ πρὸς ὀρθὰς ἔσονται. (η) παράλληλος ἄρα ἡ ΗΦ τῇ ΕΙ. (θ) καὶ ἀπὸ τῆ Φ, καθ' ὃ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τῷ ΑΚ Ἀξονι συμβάλλει, ἢ χθω ἡ ΔΦΓ παράλληλος τῇ ΒΛ. τὸ ἄρα διὰ τῶν ΗΦ, ΔΓ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΛ, ΕΙ. (ι) ἡ ἄρα ΔΗΓ γραμμὴ κύκλος ἐστί. (κ) τὸ ἄρα ΔΦ. $\Phi\Gamma = \overline{\Phi H}^2$. (λ) ἐστὶ δὲ ὡς ΔΦ: ΘΦ:: ΖΦ: ΦΓ. (μ) ὅμοια γὰρ τὰ ΔΦΖ, ΓΦΘ τρίγωνα. τὸ ἄρα ΔΦ. $\Phi\Gamma = \Theta\Phi$. ΦΖ. (ν) τὸ ἄρα $\overline{\Phi H}^2 = \Theta\Phi$. ΦΖ. ἡ ἄρα ΖΗΘ γραμμὴ κύκλος ἐστὶ, διάμετρον ἔχων τὴν ΖΦΘ. (ξ)

ΙΖ'. Εἰάν Κῶνος ὁ ΑΒΔ (χ. 3.) ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῆ Α'ξονος, καὶ πενήσῃ τομὴν τὸ ΒΛΔ τρίγωνον, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν τῆ κώνος βάσιν ΒΜΔ κατ' ἐυθεῖαν τὴν ΖΜ πρὸς ὀρθὰς ἔσαν τῇ βάσει ΒΔ τῆ διὰ τῆ Α'ξονος τριγώνου ΒΛΔ, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ ΝΚ τῆ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ τῆ διὰ τῆ Α'ξονος τριγώνου, ἡ Διάμετρος τῆς τομῆς καλεσμένη, παράλληλος ἢ μιᾷ πλευρᾷ, τῇ ΑΒ, τῆ διὰ τῆ Α'ξονος τριγώνου, ἡ γενομένη τομὴ ΜΝΖ Παραβολὴ καλεῖται. (ο)

ΙΗ'. Εἰάν Κῶνος ὁ ΑΒΔ (χ. 4.) τμηθῇ διὰ τῆ Α'ξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ, τέμνοντι τὴν τῆ κώνος βάσιν ΒΖΔ κατ' ἐυθεῖαν τὴν ΖΜ πρὸς ὀρθὰς ἔσαν τῇ βάσει ΔΒ τῆ διὰ τῆ Α'ξονος τριγώνου ΔΑΒ, καὶ
Ζ 2
ἢ

(η) Κατὰ τὸν δ' ὀρίσ. τῆ ια'. (θ) Κατὰ τὴν ε'. τῆ ια'. (ι) Κατὰ τὴν ιε'. τῆ ια'. (κ) Κατὰ τὴν β'. σημ. (λ) Κατὰ τὴν β'. Συνίσ. τῆς η'. τῆ ε'. (μ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (ν) Κατὰ τὴν ιε'. τῆ ε'. (ξ) Κατὰ τὴν δ'. Συνίσ. τῆς η'. τῆ ε'. (ο) Τὸν δὲ τὸν ὀρίσ. ἢ ια'. πρίν. τῆ α. βιβλ. τῆ Ἀπολλων. περιέχον.

ἡ τῆς τομῆς Διάμετρος ΝΦ ἐμβαλλομένη συμπίπτῃ μὲν πλευρᾷ, τῇ ΒΑ ἐκβληθείσῃ, τῇ διὰ τῶν Ἀξόνος τριγώνου ἐκτὸς τῆς τῆς Κώνος κορυφῆς, οἷον ἐπὶ τὸ Γ, ἡ γενομένη τομὴ ΜΝΖ Ὑπερβολὴ καλεῖται. (π)

ΙΘ'. Ἐὰν Κώνος ὁ ΒΑΔ (χ. 5.) ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῶν Ἀξόνος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπίπτουσι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τῶν διὰ τῶν Ἀξόνος τριγώνων, μήτε δὲ παραλλήλῳ τῇ βάσει τῆς Κώνος, μήτε ὑπεραντίως ἡγμένῳ, ἡ γενομένη τομὴ ΝΖΨΜ Ἐλλειψις λέγεται. (ρ)

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἐκ τέτων Φανερόν, ὅτι εἰ μὲν ἡ κοινὴ τομὴ ΗΖ (χ. 1.) τῇ διὰ τῶν Ἀξόνος τριγώνων καὶ τῇ τέμνοντες ἐπιπέδῳ παράλληλος ἢ τῇ βάσει ΒΔ τῶν τριγώνων, ἢ (χ. 2.) ὑπεραντίως ἡγμένη ἐν τῷ σκαληνῷ Κώνῳ, ἡ γενομένη τομὴ Κύκλος ἐστίν· εἰ δὲ τῇ ἑτέρᾳ τῶν τῶν τριγώνων πλευρῶν, οἷον τῇ ΑΒ, (χ. 3.) παράλληλος, ὡς ἡ ΝΚ, Παραβολή· Ἐὰν δὲ τῇ ἑτέρᾳ συμπίπτῃ, εἰ μὲν ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τῆς Κώνος, οἷον κατὰ τὸ Γ, (χ. 4.) Ὑπερβολή· εἰ δὲ ἐντὸς, οἷον κατὰ τὸ Ψ, Ἐλλειψις. χ. 5.

Κ'. Ἐὰν οἱ κατὰ κορυφὴν Κώνοι ΑΒΔ, ΑΤΨ (χ. 4.) ἐπιπέδῳ τμηθῶσι μὴ διὰ τῆς κορυφῆς, ἔσται ἐν ἑκατέρῳ Κώνῳ τομὴ, ἡ καλεσμένη Ὑπερβολή. καλεῖσθαι δὲ αἱ μὲν τοιαῦται τομαί, Ἀντικείμεναι, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν κορυφῶν Ν, Γ, τῶν τομῶν ΖΝΜ, ΧΓΤ, εὐθεία, ἡ ΝΓ, πλάγιά πλευρά. (σ)
ΣΗ.

(π) Τῆτον δὲ ἡ ιβ'. τῇ αὐτ. (ρ) Τῆτον δὲ ἡ ιγ'. τῇ αὐτ.
(σ) Ἡ ιδ'. πρότ. ἐπὶ τῇ προσημ. βιβλ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'.

Καὶ ἡ Διάμετρος δὲ τῆς Ἐλλείψεως ΨΝ, ἡ μετα-
ξὺ τῶν κορυφῶν Ν, Ψ πλαγία αὐτῆς πλευρὰ
λέγεται. χ. 5.

ΚΑ'. Ὁρθία Πλευρὰ, ἡ Παράμετρος λέγεται
τῆς μὲν Ἰσαραβολῆς (χ. 3) ἡ τρίτη ἀνάλογος ἀπο-
τετμημένης ὁπσιασῶν, καὶ τῆς ἀπολαμβάνεσης αὐτὴν
τεταγμένης, οἷον ἡ ΝΟ, ἡ τρίτη ἀνάλογος τῶν ΝΠ,
ΖΠ· τῆς δὲ Ὑπερβολῆς, (χ. 4.) ἡ τετάρτη ἀνά-
λογος τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐκ τῆς Διαμέτρου καὶ τῆς
ὁπσιασῶν ἀποτετμημένης, τῶν τετραγώνων τῆς τε-
ταγμένης τῆς αὐτῆς ἀπολαμβάνεσης, καὶ τῆς πλα-
γίας πλευρᾶς, οἷον ἡ ΝΣ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν
ΓΦ, ΦΝ, ΖΦ², ΓΝ· τῆς δὲ Ἐλλείψεως, (χ. 5.) ἡ
τετάρτη ἀνάλογος τῶν ἐκ τῶν τμημάτων τῆς Δια-
μέτρου ὀρθογωνίων, τῶν τετραγώνων τῆς τεταγμένης
τῆς τὴν Διάμετρον τεμνέσης, καὶ τῆς πλαγίας
πλευρᾶς, οἷον ἡ ΝΡ, ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν ΨΦ,
ΦΝ, ΖΦ², καὶ ΨΝ.

ΚΒ'. Τῆς Ὑπερβολῆς καὶ τῆς Ἐλλείψεως ἑκατέρας ἡ
διοχοτομία Κ, ἡ Γ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΝΓ, ἡ ΨΝ,
Κέντρον τῆς τομῆς καλεῖσθαι, ὁμοίως καὶ τῶν Ἀντι-
κειμένων ἡ διοχοτομία Κ. χ. 4, καὶ 5.

ΚΓ'. Ἡ δὲ ἀπὸ τῶν κέντρων πρὸς τὴν τομὴν προσπίπ-
τουσα, ἐκ τῶν κέντρων τῆς τομῆς, οἷον ἡ ΓΜ.
(πίν. Θ. χ. 2.)

ΚΔ'. Ἡ ἀπὸ τῶν κέντρων Γ ἡ γμίνη ΒΔ (πίν. Θ. χ. 1.)
παράλληλος τῇ τεταγμένῃ ΜΘ μέσοντε λόγον ἔχει,
ἐκ τῶν τῶν αἰδῶν πλευρῶν, εἴτεν τῆς πλαγίας ΨΔ

καὶ τῆς ὀρθίας, ΑΥ, καὶ διχοτομημένη, ὑπὸ τῆς κέντρους Δευτέρου Διάμετρος καλεῖται.

ΚΕ'. Δευτεραίᾳ δὲ Διάμετρος ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ ΑΦ, (πίν. Δ. χ. 3. καὶ 5.) ἡ ἀπὸ τῆς σημείου τῆς ἀφῆς Μ τῇ πρώτῃ Διαμέτρῳ ΑΛ ἀγομένη παράλληλος ΜΖ, καὶ δίχα τέμνουσα τὰς τῇ ἐφαπτομένη ΜΓ παραλλήλους, ΕΦ, ΑΧ· ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει ἡ ἀπὸ τῆς κέντρους Γ ἐπὶ τὸ σημῆεν τῆς ἀφῆς Μ ἐπιζευγνυμένη τε καὶ ἐκβαλλομένη, ΜΓΣ. πίν. ΚΑ'. χ. 4.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ε'.

Ἐὰν ἡ Διάμετρος αὐτὴ ἢ ἡ κοινὴ τομὴ τῆς τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς διὰ τῆς Α' ἔξενος τριγώνου, οἷον ἡ ΝΚ, ἢ ΝΦ, ἢ ἡ ΝΨ, Διάμετρος ἐκ τῆς γεννήσεως, ἢ Διάμετρος ἀρχικὴ, ἢ Διάμετρος πρώτη λέγεται. πίν. Β. χ. 3, 4, 5.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ ς'.

Η' μὲν Παραβολὴ, καὶ ἡ Ὑπερβολὴ, καὶ αἱ Διάμετροι αὐτῶν, αἱ πρώται καὶ αἱ δευτεραίαι, τῶν εἰς ἀπειρον εἰσὶν αὐξανομένων, ἡ δὲ Ἐλλείψις καὶ αἱ Διάμετροι αὐτῆς οὐκ ἔτι. πᾶσα γὰρ εἰς αὐτὴν συννεύει ὁμοίως τῷ Κύκλῳ. ἰστέον γὰρ ὅτι καὶ ἡ Ὑπερβολὴ δευτεραίαν ἔχει Διάμετρον, ἐξαγομένην κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ὃν καὶ ἡ ἐν τῇ Παραβολῇ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ ζ'.

Οἱ παλαιοὶ, φησὶν ὁ Γεμῖνος, (1) Κῶνον ὀριζόμενοι τὴν τῆς ὀρθογωνίου τριγώνου περιφορὰν, μενέσης μιᾶς τῶν

(1) Παρὰ Ἐυτοκίῃ ἐν τοῖς Προίμ. τῆς α'. βιβλ. τῶν Κωνικ. τῆς Ἀπελλωσίας.

τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς, εἰκότως καὶ τὰς Κῶνας πάντας ὀρθὰς ὑπελάμβανον γίνεσθαι, καὶ μίαν τομήν ἐν ἐκάστῳ, ἐν μὲν τῷ ὀρθογωνίῳ τὴν νῦν καλεσμένην Παραβολήν, ἐν δὲ τῷ ἀμβλυγωνίῳ τὴν Ὑπερβολήν, ἐν δὲ τῷ ὀξυγωνίῳ τὴν Ἐλλειψιν. καὶ ἔτι παρ' αὐτοῖς εὗρεῖν ὀνομαζομένας ἕτω τὰς τομάς. ὥσπερ ἔν τῶν Ἀρχαίων ἐπὶ ἐνὸς ἐκάστῃ εἶδῃ τριγώνῃ θεωρησάντων τὰς δύο ὀρθὰς, πρότερον ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ, καὶ πάλιν ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ, καὶ ὕστερον ἐν τῷ σκαληνῷ οἱ μεταγενέστεροι καθολικὸν θεώρημα ἀπέδειξαν τοιοῦτον· παντὸς τριγώνῃ αἱ ἐντὸς τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἕτω καὶ ἐπὶ τῶν τῶν Κῶν τομῶν. τὴν μὲν γὰρ λεγομένην ὀρθογωνίῃ Κῶν τομήν ἐν ὀρθογωνίῳ μόνον Κῶν εἰσέωρεν, τεμνομένην ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς μίαν πλευράν τῆς Κῶν· τὴν δὲ τῆς ἀμβλυγωνίῃς Κῶν τομήν, ἐν ἀμβλυγωνίῳ γενομένην Κῶν ἀπεδείκνυσαν· τὴν δὲ τῆς ὀξυγωνίῃς, ἐν ὀξυγωνίῳ, ὁμοίως ἐπὶ πάντων τῶν Κῶν ἄγοντες τὰ ἐπιπέδα ὀρθὰ πρὸς μίαν πλευράν τῆς Κῶν. δηλοῖ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ἀρχαῖα ὀνόματα τῶν γραμμῶν. ὕστερον δὲ Ἀπολλώνιος ὁ Περὶγαῖος καθόλου τι εἰσέωρσεν· ὅτι ἐν παντὶ Κῶν καὶ ὀρθῷ καὶ σκαληνῷ, πᾶσαι αἱ τομαὶ εἰσι, κατὰ διάφορον τῆς ἐπιπέδου πρὸς τὸν Κῶν προσβολήν· ὃν καὶ θαυμάσαντες οἱ κατ' αὐτὸν γενομένοι, διὰ τὸ θαυμάσιον τῶν ὑπ' αὐτῷ δεδειγμένων κωνικῶν θεωρημάτων, μέγαν Γεωμέτρην ἐκάλεον. ταῦτα μὲν ἔν τῳ Γεμίνῳ ἐν τῷ ἑκτῷ τῆς τῶν μαθημάτων θεωρίας, ὁ δὲ Εὐτόκιος ἀναπτύσσων φησὶν.

Ὁ δὲ λέγει σαφὲς ποιήσομεν ἐπὶ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν. ἔσω τὸ διὰ τῆς Ἀ' ξανῆς Κῶνς τριγώνου τὸ ΑΒΓ. (πίν. Β'. κ. δ.) καὶ ἡχθῶ τῇ ΑΒ ἀπὸ τυχόντος σημείου τῆς Ε πρὸς ὀρθὰς ἢ ΔΕΖ, καὶ τὸ, το διὰ

τῆς ΔΖ ἐπίπεδον ἐμβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΒ, τεμ-
 νέτω τὸν Κῶνον. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ,
 ΑΕΖ γωνιῶν. καὶ ὀρθογωνίαι μένοντες τῷ Κῶνι, καὶ ὀρ-
 θῆς δηλονότι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας, ὡς ἐπὶ τῆς πρώ-
 τῆς καταγραφῆς, δύο ὀρθαὶ ἔσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ,
 ΑΕΖ γωνίαι. ὥτε παραλληλὸς ἐστὶν ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ. καὶ
 γίνεται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῷ Κῶνι τομὴ ἡ καλεσμένη
 Παραβολή, ἔτω κληθεῖσα ἀπὸ τῷ παραλλήλῳ εἶναι
 τὴν ΔΕΖ, ἥτις ἐστὶ κοινὴ τομὴ τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ
 καὶ τῷ διὰ τῷ Α'ζωνος τριγώνῳ, τῇ ΑΓ πλευρᾷ τῷ
 τριγώνῳ. Εἴαν δὲ ἀμβλυγώνιος ἢ ὁ Κῶνος, ὡς ἐπὶ
 τῆς δευτέρας καταγραφῆς, (χ. 7.) ἀμβλείας δη-
 λονότι ἔσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, ὀρθῆς δὲ τῆς ὑπὸ ΑΕΖ,
 δύο ὀρθῶν μείζους ἔσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ γωνίαι.
 ὥτε ὁ συμπεσεῖται ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ πλευρᾷ ἐπὶ τὰ
 πρὸς τοῖς Ζ, Γ μέρη, ἀλλὰ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς Α, Ε,
 προσεκβαλλομένης δηλονότι τῆς ΓΑ ἐπὶ τὰ Δ. ποιήσας
 ἐν τῷ τέμνοντι ἐπίπεδον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῷ Κῶνι το-
 μὴν ἐπικαλεσμένην Ὑπερβολὴν, ἔτω κληθεῖσαν ἀπὸ
 τῷ ὑπερβάλλειν τὰς εἰρημένους, τετέστι τὰς ὑπὸ ΒΑΓ,
 ΑΕΖ δύο ὀρθάς, ἢ διὰ τὸ ὑπερβάλλειν τὴν ΔΕΖ τὴν
 κορυφὴν τῷ Κῶνι, καὶ συμπίπτειν τῇ ΓΑ ἐκτός. Ἐάν
 δὲ ὀξυγώνιος ἢ ὁ Κῶνος, ὀξείας δηλονότι ἔσης τῆς ὑπὸ
 ΕΑΓ, (πίν. Γ. χ. 1.) αἱ ΒΑΓ, ΑΕΖ ἔσονται δύο ὀρ-
 θῶν ἐλάσσονες, καὶ αἱ ΕΖ, ΑΓ ἐκβαλλόμεναι συμπεσῶνται
 ὁποῦδήποτε προσανῆξαι γὰρ δύναμαι τὸν Κῶνον. ἔσας
 ἐν ἐν τῇ Ἐπιφανείᾳ τομὴ, ἥτις καλεῖται Ἐλλειψις,
 ἔτω κληθεῖσα ἢ διὰ τὸ ἐλλείπειν δύο ὀρθαῖς τὰς προ-
 ερημένους γωνίας, ἢ διὰ τὸ τὴν Ἐλλειψιν κύκλον εἶναι
 ἐλλειπῆ. ἔτω μὲν ἐν οἱ παλαιοὶ ὑποθέμενοι τὸ τέμνον
 ἐπίπεδον τὸ διὰ τῆς ΔΕΖ πρὸς ὀρθάς τῇ ΑΒ πλευρᾷ
 τῷ διὰ τῷ Α'ζωνος τῷ Κῶνι τριγώνῳ, καὶ ὅτι διαφά-

ρας τὰς Κῶνας ἐθεώρησαν, καὶ ἐπὶ ἐκάστη ἰδίαν τομήν.
ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ὑποθέμενος Κῶνον καὶ ὀρθὸν καὶ σκα-
ληνόν, τῇ διαφέρει τῇ ἐπιπέδῃ κλίσει διαφόρους ἐποίησε
τὰς τομὰς. (υ)



Τ Μ Η Μ Α Π Ρ Ω Τ Ο Ν

Περὶ τῶν τῆς Παραβολῆς συμπτω-
μάτων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Ἐὰν ἐν Παραβολῇ ἀπὸ τῆς τομῆς καταχ-
θῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν Διάμετρον τεταγ-
μένως, ἔσονται ὡς τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα
πρὸς ἀλλήλα, ἕως αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ'
αὐτῶν ἀπὸ τῆς Διαμέτρου πρὸς τὴ κορυφῇ
τῆς τομῆς.

Ἐξω Παραβολῇ, ἥς Διάμετρος ἡ ΝΚ. καὶ εἰλήφ-
θω τινὰ σημεῖα ἐπ' αὐτῆς, τὰ Φ, Μ, καὶ ἀπ' αὐ-
τῶν τεταγμένως κατήχθησαν ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΚΝ
αἱ ΦΙ, ΜΚ. λέγω ὅτι ἔσιν ὡς $\overline{\Phi\Gamma}^2 : \overline{ΜΚ}^2 :: ΝΙ : ΝΚ$.
πίν. Γ. χ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἦχθω διὰ τῆ Ι ἐν τῷ διὰ τῆ Ἀξονος τριγώνῳ
ΔΑΒ ἡ ΓΙΕ παράλληλος τῇ τῆς βάσεως τῆ Κῶνας ΔΑΒ
Διαμέτρῳ ΔΒ. καὶ ἤχθω διὰ τῶν ΦΙ, ΓΕ ἐπίπεδον
τὸ ΓΦΕ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ μὲν ΓΕ τῇ ΔΒ, (α) ἡ δὲ ΦΙ τῇ ΜΚ παράλληλος, (β) καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπίπεδα ΓΦΕ, ΔΜΒ παράλληλά εἰσιν. (γ) ἡ ἄρα ΓΦΕ γραμμὴ κύκλος ἐστὶ. (δ) καὶ ἐπεὶ ἡ γωνία ΦΙΓ = ΜΚΔ, (ε) ἐστὶ δὲ ἡ ΜΚΔ ὀρθή, (ζ) ἄρα καὶ ἡ ΦΙΓ ὀρθή. τὸ μὲν ἄρα $\overline{ΦΙ}^2 = \overline{ΓΙ} \cdot \overline{ΙΕ}$, τὸ δὲ $\overline{ΜΚ}^2 = \overline{ΔΚ} \cdot \overline{ΚΒ}$. (η) ὡς ἄρα $\overline{ΦΙ}^2 : \overline{ΜΚ}^2 :: \overline{ΓΙ} \cdot \overline{ΙΕ} : \overline{ΔΚ} \cdot \overline{ΚΒ}$. (θ) ἀλλ' ὡς $\overline{ΓΙ} \cdot \overline{ΙΕ} : \overline{ΔΚ} \cdot \overline{ΚΒ} :: \overline{ΓΙ} : \overline{ΔΚ}$. (ι) ἐστὶ γάρ ἡ $\overline{ΙΕ} = \overline{ΚΒ}$, (κ) ὡς δὲ $\overline{ΓΙ} : \overline{ΔΚ} :: \overline{ΝΙ} : \overline{ΝΚ}$. (λ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΦΙ}^2 : \overline{ΜΚ}^2 :: \overline{ΝΙ} : \overline{ΝΚ}$. (μ) ὃ ἐδεῖ δεῖξαι.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Αἱ τεταγμέναι ΦΙ, ΜΚ ὑποδιπλασίονα λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ἥπερ αἱ ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνόμεναι ΝΙ, ΝΚ· εἶτ' ἐν $\overline{ΦΙ} : \overline{ΜΚ} :: \sqrt{\overline{ΝΙ}} : \sqrt{\overline{ΝΚ}}$. ἐπεὶ γάρ ὡς $\overline{ΦΙ}^2 : \overline{ΜΚ}^2 :: \overline{ΝΙ} : \overline{ΝΚ}$, ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΦΙ} : \overline{ΜΚ} :: \sqrt{\overline{ΝΙ}} : \sqrt{\overline{ΝΚ}}$. (ν)

Β'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α (χ. 3.) τῆς Παραβολῆς ΑΜ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΑΡ ὁποιαῦν τῶν ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΑΠ τεταγμένων ΜΠ, μπ, αἱ ἀπὸ τῶν σημείων Μ, μ τεταγμένως καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν ΑΡ λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὅν τὰ ἀπὸ τῶν ἀποτετμημένων ὑπ' αὐτῶν ἀπὸ τῆς ΑΡ πρὸς τῇ κορυφῇ τετραγώνω, εἶτ' ἐστὶν ὡς $\overline{ΜΚ} : \frac{\overline{μκ}}{\overline{ΑΚ}^2} :$

- (α) Ἐκ τῆς κατασκευ. (β) Κατὰ τὸν ιγ. ὅρισμ. (γ) Κατὰ τὴν α. τῆ α'. (δ) Κατὰ τὴν β'. Σημ. (ε) Κατὰ τὴν δ. τῆ α'. (ζ) Ἐκ τῆ ιζ. ὅρισμ. δῆλον. (η) Κατὰ τὴν β'. Σημ. τῆ ε. τῆ ε'. (θ) Ἐκ τῆς α. τῆ δ. δῆλον. (ι) Κατὰ τὴν α. τῆ ε'. (κ) Κατὰ τὴν λδ. τῆ α'. (λ) Κατὰ τὴν δ. τῆ ε'. (μ) Κατὰ τὴν δ. τῆ δ. (ν) Κατὰ τὸ ζ. τῶν μετὰ τὸ β. βιβ. Θεωρημ.

$\overline{AK}^2$: $\overline{AK}^2$. ἐπεὶ γὰρ $\Delta\Pi$: $\Delta\pi$:: $\overline{\Pi M}^2$: $\overline{\pi\mu}^2$, (ξ)
 ἔστι δὲ ἡ μὲν $\Delta\Pi \equiv MK$, ἡ δὲ $\Delta\pi$ τῇ $\mu\pi$, ἡ δὲ
 ΠM τῇ ΔK , καὶ ἡ $\pi\mu$ τῇ $\Delta\kappa$ (ο) ἄρα καὶ ὡς
 MK : $\mu\kappa$:: $\overline{AK}^2$: $\overline{\Delta\kappa}^2$. ἔκϋ ἐντὸς μὲν τῆς $\Pi\alpha\rho\alpha\beta\omicron\lambda\eta\varsigma$, αἱ ἀποτετμημέναι λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλή-
 λας ὅν τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετραγώνων ἐκ-
 τὰς δὲ τέναντιον, κινέσθαι αἱ τεταγμέναι λόγον
 ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὅν τὰ ἀπὸ τῶν ἀποτετμη-
 μένων τετραγώνων.

Γ'. Εἰάν ἀπό τινος τῆς ΔP σημείῃς τῆ Γ ἀχθῇ ἡ ΓO
 παρὰ τὴν $\Delta\eta\lambda\omicron\varsigma$ τῇ Διαμέτρῳ $\Delta\Pi$, τέμνουσα τὴν μὲν
 $\Pi\alpha\rho\alpha\beta\omicron\lambda\eta\varsigma$ κατὰ τὸ Φ , τὴν δὲ ἐπικενχυθῆσαν ΔM
 κατὰ τὸ I , τὴν δὲ τεταγμένην $\lambda\eta\eta$ κατὰ τὸ O ,
 ἔσονται αἱ ΓO , ΓI , $\Gamma\Phi$ συνεχῶς ἀνάλογον. ἢ χθῶ-
 σαν γὰρ ἀπὸ τῶν Φ καὶ I σημείων αἱ $\Phi\Delta$, $I\Lambda$
 παρὰ τὴν $\Delta\eta\lambda\omicron\varsigma$ τῇ τεταγμένῃ $M\Pi$. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{\Pi M}^2$:
 $\overline{\Delta I}^2$ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΠM : ΔI . (π)
 ἔστι δὲ ὡς ΠM : ΔI :: $\Delta\Pi$, $\Delta\Lambda$, (ρ) ἔστιν ὡς
 ΓO : ΓI . τὸ ἄρα $\overline{\Pi M}^2$: $\overline{\Delta I}^2$, ἡ τὸ $\overline{\Pi M}^2$: $\overline{\Delta\Phi}^2$ δι-
 πλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓO : ΓI . ἀλλ' ὡς $\overline{\Pi M}^2$
 $\overline{\Delta\Phi}^2$:: $\Delta\Pi$: $\Delta\Delta$, (σ) ἥτοι ὡς ΓO : $\Gamma\Phi$ ἡ ἄρα ΓO : $\Gamma\Phi$ δι-
 πλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓO : ΓI , ὅπερ ἐστίν,
 ΓO : ΓI :: ΓI : $\Gamma\Phi$. (τ)

Δ'. Εἰάν αἱ τεταγμέναι $\Phi\Delta$, $\mu\pi$, $M\Pi$, λόγον ἔχουσι
 πρὸς ἀλλήλας ὅν οἱ ἀριθμοὶ τῆς Φυσικῆς σειράς 1,
 2, 3, αἱ ἀπ' αὐτῶν ἀποτετμημέναι $\Delta\Delta$, $\Delta\pi$, $\Delta\Pi$,
 λόγον ἔχουσιν ὅν τὰ τετραγώνων τὰ ἀπὸ τῶν ἐξην-
 μέ-

(ξ) Κατὰ τὴν προσημ. πρὸτ. (ο) Κατὰ τὴν λδ'. τῆ α'. (σ) Ὡς
 τῆς δ' τῆ ε'. δῆλον. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (σ) Κατὰ
 τὴν προσημ. πρὸτ. (τ) Ὡς τὸ β'. πρὸ τῆ ε'.

μένων ἀριθμῶν, ἔτεν 1, 4, 9. ἔστι γὰρ ὡς ΑΔ:

ΑΠ: $\overline{\Phi\Delta}^2$: $\overline{\mu\pi}^2$, καὶ ὡς ΑΠ: ΑΠ:: $\overline{\mu\pi}^2$: $\overline{ΜΠ}^2$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'. (υ)

Τὸ ἀπὸ πάσης ἐν Παραβολῇ τεταγμένης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ἀποτετμημένης ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐςω Παραβολὴ ἡ ΑΜ, ἥς Διάμετρος μὲν ἡ ΑΚ, ὀρθία δὲ πλευρὰ ἡ ΑΖ, ἡ τρίτη ἀνάλογος τοῖς ἀποτετμημένης ΑΠ, καὶ τῆς τεταγμένης ΜΠ. (φ) λέγω, ὅτι καὶ τὸ $\overline{ΛΙ}^2 = \overline{ΑΙ} \cdot \overline{ΑΖ}$. χ. 4.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ὡς ΑΠ: ΜΠ:: ΜΠ: ΑΖ, (χ) τὸ ἄρα $\overline{ΜΠ}^2 = \overline{ΑΠ} \cdot \overline{ΑΖ}$. (ψ) ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{ΜΠ}^2$: $\overline{ΛΙ}^2$:: ΑΠ: ΑΙ, (ω) ἔστι δὲ ὡς ΑΠ: ΑΙ:: ΑΠ. ΑΖ: ΑΙ. ΑΖ, (α) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΜΠ}^2$: $\overline{ΛΙ}^2$:: ΑΠ. ΑΖ: ΑΙ. ΑΖ. (β) ἀλλὰ τὸ $\overline{ΜΠ}^2 = \overline{ΑΠ} \cdot \overline{ΑΖ}$. ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΛΙ}^2 = \overline{ΑΙ} \cdot \overline{ΑΖ}$. (γ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ $\overline{\Psi\Delta}^2 = \overline{ΑΨ} \cdot \overline{ΑΖ}$, καὶ τὸ ἀπὸ πάσης ἄλλης τεταγμένης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ἀποτετμημένης ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΖ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

ΣΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΖ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α παραλλήλῃ ἀχθείσης ταῖς τεταγμέναις, δίχα δὲ τμηθεῖ.

- (υ) Ἡ ια. ἐστὶ τῷ α. τῷ Ἀπολλων. (φ) Ὅρα τὸν κ. ὁρισμ.
(χ) Ἐξ ἑπεθ. (ψ) Κατὰ τὴν ιζ. τῷ ε'. (ω) Κατὰ τὴν α.
(α) Κατὰ τὴν α. τῷ ε'. (β) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (γ) Κατὰ
τὴν κ. τῷ ε.

θείσης κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Ζ, Γ ἀχθουσὼν τῶν ΖΟ, ΓΡ παραλλήλων τῇ Διαμέτρῳ ΑΚ, ἐκβληθουσὼν τε τῶν τεταγμένων ΜΠ, ΛΙ κατὰ τὰ Ο, Η σημεία, τὸ ἀπὸ τῆς ΜΠ τετραγώνον ἴσον μὲν ἔσται τῷ παραλληλογράμμῳ ΠΖ, διπλάσιον δὲ τῷ ΠΓ· ὡσαύτως τὸ ἀπὸ τῆς ΛΙ ἴσον μὲν τῷ ΙΖ, διπλάσιον δὲ τῷ ΙΓ. τὸ αὐτὸ δὴ ῥητέον καὶ περὶ τῶ ἀπὸ πάσης τεταγμένης τετραγώνου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Τὴν μὲν ΖΟ, Διευθετῶσαν καλεῖν εἰώθασι τὴν δὲ ΓΡ, Ὑποδιευθετῶσαν. καὶ μήτιγε διὰ τῆτο ἡ τοιαύτη τῷ Κώνε τομὴ, Παραβολὴ ἐπεκλήθη, παρὰ τῷ παραβάλλεσθαι δηλαδὴ παρὰ τὴν ὀρθίαν πλευράν ΑΖ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετραγώνοις. καὶ γὰρ καὶ ὁ Εὐκλείδης Φησί, παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἐυθεῖαν παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν. (δ)

Β'. Δοθείσης τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΖ, ῥαδίως ὀρίσασθαι ἐν ἐσὶ, πότερον τὸ δοθεὶς σημεῖον Δ ἐν τῇ Παραβολῇ ἐστὶν ἢ ὀ. κατήχθω γὰρ ἀπὸ τῷ Δ ἡ ΔΨ πρὸς ὀρθᾶς τῇ Διαμέτρῳ ΑΚ, καὶ ληφθείσης τῆς ΨΚ ἴσης τῇ ὀρθίᾳ ΑΖ, ἡμικύκλιον γεγράψω ἐπὶ τῆς ΑΚ. εἰάν ὢν τῆτο διὰ τῷ Δ ἡ Ξη, ἐν τῇ Παραβολῇ ἐστὶ τὸ Δ σημεῖον. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΨ. ΨΚ = $\overline{\Psi\Delta^2}$, (ε) ἐστὶ δὲ ἡ ΨΚ = ΑΖ, ἄρα καὶ τὸ ΑΨ. ΑΖ = $\overline{\Psi\Delta^2}$. ἐξ ὅ δὴ ἔστι, ὅτι τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ Παραβολῇ ΑΜ κεῖται.

Γ'. Καὶ ἡ Παραβολὴ δὲ καταγραφθήσεται, ἥς ἡ ὀρθία δέδοται. ἔσω γὰρ ὀρθίᾳ πλευρᾷ ἡ ΑΚ, (πίν. Δ'.
 Χ.

(δ) Ἐν τῇ μδ'. τῷ α'. (ε) Κατὰ τὴν δ'. Συνίπ. τῆς η'. τῷ ε'.

χ. 1.) καὶ κείδω ἐπ' εὐθείας εὐθείᾳ τῇ ΑΧ, τὸν τῆς παραβολῆς Α'ξωνα ἐμφανέσῃ. καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἢ Χθω τις εὐθεῖα ἢ ΑΨ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΚΧ, καὶ ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ συνεχές. καὶ σημείων συνεχῶν ληφθέντων ἐπὶ τῆς ΑΧ, τῶν Γ, Δ, Μ, Χ, γεγραφθῶ ἐπὶ τῶν ΚΓ, ΚΔ, ΚΜ, ΚΧ ἡμικύκλιος τὴν ΑΨ τέμνοντα κατὰ Η, Ε, Ι, Ψ σημεία, καὶ ἐξ αὐτῶν ἀναστήτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΒ, ΔΔ, ΜΦ, ΧΖ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΑΧ. καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν ΓΒ=ΑΗ, ἡ δὲ ΔΔ=ΑΕ, ἡ δὲ ΜΦ=ΑΙ, ἡ δὲ ΧΖ=ΑΨ. λέγω δὴ ὅτι διὰ τῶν σημείων Β, Δ, Φ, Ζ Παραβολὴ ἦξει, ὅπερ ἐστίν, ἐκζευχθεῖσων τῶν ΑΒ, ΒΔ, ΔΦ, ΦΖ, Παραβολὴ συγκροτηθήσεται, ἥς ὁρθία μὲν πλευρὰ ἡ ΑΚ, Α'ξων δὲ ἡ ΑΧ, καὶ κορυφὴ τὸ Α. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{ΑΗ}^2 = ΚΑ \cdot ΑΓ$, (ζ) ἐστὶ δὲ ἡ ΑΗ=ΓΒ, ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΓΒ}^2 = ΚΑ \cdot ΑΓ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθήσεται ὅτι τὸ μὲν $\overline{ΑΔ}^2 = ΚΑ \cdot ΑΔ$, τὸ δὲ $\overline{ΦΜ}^2 = ΚΑ \cdot ΑΜ$, τὸ δὲ $\overline{ΖΧ}^2 = ΚΑ \cdot ΑΧ$. ἡ ἄρα ΑΖ Παραβολὴ ἐστὶ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Ὅσον ἐγγύτερον ἀλλήλων ἐκλαμβάνεις τὰ Α, Γ, Δ, Μ, Χ σημεία, τοσῶτον μᾶλλον ἀλλήλοις ἐγγίξουσι καὶ τὰ Α, Β, Δ, Φ, Ζ. διὸ ἀκριβέστερον ἡ Παραβολὴ καταγραφθήσεται. δεῖ δὲ καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τὰ αὐτὰ κατασκευάσαι, ὅπως ἀν' ἀρτία γραφῇ ἡ Παραβολή.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'. (η)

Ἐν Παραβολῇ τὸ ὑπὸ δύο ὁποιωνδήποτε τεταγμένων, ὡς ὑπὸ μιᾶς καὶ τῆς ὑπεροχῆς αὐ-

(ζ) Κατὰ τὴν αὐτ. (η) Ἐν τοῖς τῷ Ἀπολλων. εἰχ' ἔχεται, οἷον δι' συνείκια τῆς προληβύσης προτάσεως ἐστίν, ἣν ὁ Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεὺς ἰσχάτην τῷ δ'. βιβλ. τῶν Συλλογ. ἔταξε.

αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ
ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὑπ'
αὐτῶν ἀποτεμνομένων καὶ τῆς ὀρθίας πλευ-
ρᾶς.

Ἐξω Παραβολὴ ἡ ΑΝΕ, ἥς ὀρθία μὲν ἡ ΑΓ,
διάμετρος δὲ ἡ ΑΔ, τεταγμένας δὲ ὁποιαῖς αἱ ΝΜ,
ΕΔ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν δύο ΝΜ, ΕΔ, ὡς ὑπὸ
μίας καὶ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώ-
νιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὑπ' αὐτῶν
ἀποτεμνομένων ΑΜ, ΑΔ, εἴτεν τῷ ὑπὸ τῆς ΜΔ καὶ
τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΓ. πίν. Γ. χ. 5.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθω ἐπὶ τὰ ἕτερα τῆς Παραβολῆς μέρη
ἡ ΕΔ. καὶ ἀπὸ τῆς Ν ἡχθῶ ἡ ΝΗ παράλληλος τῇ ΑΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν $\overline{ΕΔ}^2 = ΑΔ \cdot ΑΓ$, τὸ δὲ $\overline{ΝΜ}^2 = ΑΜ \cdot ΑΓ$.
(θ) τὸ ἄρα $\overline{ΕΔ}^2 - \overline{ΝΜ}^2 = ΑΔ \cdot ΑΓ - ΑΜ \cdot ΑΓ =$
 $ΑΔ - ΑΜ \cdot ΑΓ = ΜΔ \cdot ΑΓ$. (ι) ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{ΕΔ}^2 = ΦΗ \cdot$
 $ΗΕ + \overline{ΔΗ}^2$, (κ) ἐστὶ δὲ ἡ $ΔΗ = ΝΜ$, (λ) τὸ ἄρα $\overline{ΕΔ}^2 =$
 $ΦΗ \cdot ΗΕ + \overline{ΝΜ}^2$. κοινὸν ἀφηρήθω τὸ $\overline{ΝΜ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΕΔ}^2 -$
 $\overline{ΝΜ}^2 = ΦΗ \cdot ΗΕ$. ἀλλὰ δέδεικται τὸ $\overline{ΕΔ}^2 - \overline{ΝΜ}^2 = ΜΔ \cdot$
 $ΑΓ$. τοῦ ἄρα $ΦΗ \cdot ΗΕ = ΜΔ \cdot ΑΓ$. ἐστὶ δὲ ἡ μὲν $ΦΗ$ ἴση ταῖς
δυσὶ τεταγμέναις ΝΜ, ΕΔ· ἡ μὲν γὰρ $ΝΜ = ΗΔ$,
(μ) ἡ δὲ $ΕΔ = ΦΔ$, (ν) ἡ δὲ $ΗΕ$ ἡ ὑπεροχὴ αὐ-
τῶν. τὸ ἄρα ὑπὸ δύο τεταγμένων ὡς ὑπὸ μίας, καὶ
τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ
ὑπὸ

(θ) Κατὰ τὴν α'. (ι) Κατὰ τὸ γ'. Α'ξ. τῆ α'. (κ) Κατὰ τὴν
δ. τῆ β'. (λ) Κατὰ τὴν λδ. τῆ α'. (μ) Κατὰ τὴν αὐτήν.
(ν) Κατὰ τὸν ζ. ὁρισμ.

ὑπὸ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνομένων καὶ
τῆς ὀρθίας πλευρᾶς.

ΣΥΝΕΠΕΙΛΑΙ.

Α'. Ἡ ὀρθία τῆς Παραβολῆς πλευρὰ πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο ὁποιωνῶν τεταγμένων λόγον ἔχει, ὃν ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνομένων. Ἐπεὶ γὰρ ΜΔ. ΑΓ = ΦΗ. ΗΕ, ὡς ἄρα ΑΓ : ΦΗ :: ΗΕ : ΜΔ. (ξ)

Β'. Αἱ ἀπὸ τῶν τυχόντων τῆς Παραβολῆς σημείων Τ, Ν ἀγόμεναί τῃ ΑΔ Διαμέτρῳ παράλληλοι ΤΥ, ΝΗ, καὶ τὴν ΦΕ τεταγμένην τέμνουσαι κατὰ τὰ Υ, Η σημεία, λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ΦΕ περιεχόμενα ὀρθογώνια, εἴτεν εἰν ὡς ΤΥ : ΝΗ :: ΦΥ. ΥΕ : ΦΗ. ΗΕ. τεταγμένως γὰρ καταχθείσης ἀπὸ τῆς Τ τῆς ΤΧ, ἔσεται τὸ μὲν ΧΔ. ΑΓ, ἥτοι ΤΥ. ΑΓ = ΦΥ. ΥΕ, τὸ δὲ ΜΔ. ΑΓ, εἴτεν ΝΗ. ΑΓ = ΦΗ. ΗΕ. ὡς ἄρα ΤΥ. ΑΓ : ΝΗ. ΑΓ :: ΦΥ. ΥΕ : ΦΗ. ΗΕ. (ο) ἄλλ' ὡς ΤΥ. ΑΓ : ΝΗ. ΑΓ :: ΤΥ : ΝΗ. (π) ὡς ἄρα ΤΥ : ΝΗ :: ΦΥ. ΥΕ : ΦΗ. ΗΕ.

Γ'. Τὰ ὑπὸ τῶν τεταγμένων ΦΕ, ΣΝ ἀπολαμβάνομενα τῆς ΤΥ μέρη, ΤΥ, ΤΚ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων ΦΥ, ΥΕ, ΣΚ, ΚΝ τῶν τεταγμένων περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἥτοι εἰν ὡς ΤΥ : ΤΚ :: ΦΥ. ΥΕ : ΣΚ. ΚΝ. τὸ μὲν γὰρ ΦΥ. ΥΕ = ΤΥ. ΑΓ, τὸ δὲ ΣΚ. ΚΝ = ΜΧ. ΑΓ = ΤΚ, ΑΓ. ὡς ἄρα ΤΥ. ΑΓ : ΤΚ. ΑΓ :: ΦΥ. ΥΕ : ΣΚ. ΚΝ. ἔστι δὲ ὡς ΤΥ. ΑΓ : ΤΚ. ΑΓ :: ΤΥ : ΤΚ. (ρ) ἄρα καὶ ὡς ΤΥ : ΤΚ :: ΦΥ. ΥΕ : ΣΚ. ΚΝ. (σ)

Δ'.

(ξ) Κατὰ τὴν α'. τῆς ε'. (ο) Κατὰ τὴν α'. τῆς ε'. (π) Κατὰ τὴν α'. τῆς ε'. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτ. (σ) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'.

Δ'. Ἐὰν ἀπὸ ἐκβληθείσης τεταγμένης τῆς ΨΤ ληφ-
θῇ σημεῖα τὰ Ω, Ζ, αἱ ἀπ' αὐτῶν τῇ Διαμέτρῳ
ΛΔ ἀγόμεναι παράλληλοι ΩΝ, ΖΕ, καὶ τῇ Παρα-
βολῇ κατὰ τὰ Ν, Ε σημεῖα συμπίπτουσαι λόγον
ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὅν τὰ ὀρθογώνια τὰ περι-
εχόμενα ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπὸ τῶν πα-
ραλλήλων τῆς ἐκβληθείσης μερῶν, καὶ τῶν μεταξὺ
αὐτῶν καὶ τῆς Παραβολῆς τμημάτων, εἴτεν εἰς
ὡς ΩΝ: ΖΕ :: ΨΩ. ΩΤ: ΨΖ. ΖΤ. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν
 $\overline{MN}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AG}$, τὸ δὲ $\overline{XT}^2 = \overline{AX} \cdot \overline{AG}$, (τ) ἄρα καὶ τὸ
 $\overline{MN}^2 - \overline{XT}^2$, ἦτοι τὸ $\overline{X\Omega}^2 - \overline{KT}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AG} - \overline{AX} \cdot \overline{AG}$.

$\overline{AG} = \overline{AM} - \overline{AX}$. $\overline{AG} = \overline{XM}$. $\overline{AG} = \overline{\Omega N}$. $\overline{AG}$. ἐπεὶ δὲ τὸ
 $\overline{\Psi\Omega} \cdot \overline{\Omega T} + \overline{XT}^2 = \overline{X\Omega}^2$, (υ) κοινῶ ἀφαιρεθέντος τῷ
 $\overline{XT}^2$, ἔσεται τὸ $\overline{\Psi\Omega} \cdot \overline{\Omega T} = \overline{X\Omega}^2 - \overline{XT}^2$. τὸ ἄρα
 $\overline{\Psi\Omega} \cdot \overline{\Omega T} = \overline{\Omega N} \cdot \overline{AG}$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται,
ὅτι καὶ τὸ $\overline{\Psi Z} \cdot \overline{ZT} = \overline{ZE} \cdot \overline{AG}$. ὡς ἄρα ΩΝ. ΑΓ: ΖΕ.
ΑΓ, εἴτεν ὡς ΩΝ: ΖΕ :: ΨΩ. ΩΤ: ΨΖ. ΖΤ.

Ε'. Ἐὰν δὲ τις τεταγμένη ἡ ΣΝ ἐκβληθεῖσα τέμνῃ τὴν
ἐκβληθεῖσαν ΖΕ, ἔσεται ὅλη ἡ ΖΕ πρὸς τὸ τμηθεῖν
μέρος ΙΕ, ὡς τὸ προειρημένον ὀρθογώνιον ΨΖ. ΖΤ,
πρὸς τὸ ΣΙ. ΙΝ. τὸ μὲν γὰρ ΨΖ. ΖΤ = ΖΕ. ΑΓ, τὸ
δὲ ΣΙ. ΙΝ = ΙΕ. ΑΓ. (φ) ὡς ἄρα ΖΕ. ΑΓ: ΙΕ. ΑΓ,
ἦτοι ὡς ΖΕ: ΙΕ :: ΨΖ. ΖΤ: ΣΙ. ΙΝ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'. (χ)

Ἀπὸ τῆς δοθέντος σημείῃς τῆς δοθείσης Πα-
ραβολῆς εὐθεῖαν ἀπτομένην ἀγαγεῖν.

Η

Ἐξω

(τ) Κατὰ τὴν β'. (υ) Κατὰ τὴν ι. τῆ β'. (φ) Κατὰ τὴν
προλ. Συνέπ. (κ) Ἦτε ιζ', καὶ ἡ λγ'. εἰς τῆ α. βιβλ. τῆ
Ἀπολλων.

Ἐξω πρῶτον τὸ δοθὲν τῆς Παραβολῆς ΦΑΕ σημείον ἢ κορυφὴ αὐτῆς Α. χ. 5.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῆς δοθέντος σημείου Α ἢ ΑΓ παράλληλος ὁποιαῦν τῶν τεταγμένων, οἷον τῇ ΨΤ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ ἐκτὸς τῆς τομῆς πίπτει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, πίπτει ἐντὸς, ὡς ἡ ΑΒ. ἀπὸ τῆς σημείου ἄρα Β τῆς Παραβολῆς ἢ ΒΑ ἤχθῃ παράλληλος μὲν ταῖς τεταγμέναις, συμπιπτέουσα δὲ κατὰ τὸ τῆς Διαμέτρου πέρας Α. ἢ ἄρα ΑΒ τεταγμένη ἐστὶν ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΑΔ, (Ψ) καὶ μὴ διχοτομημένη ὑπ' αὐτῆς. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. (ω) ἐκτὸς ἄρα τῆς Παραβολῆς πίπτει ἡ ΑΓ, καὶ ἐφάπτεται αὐτῆς κατὰ τὸ Α σημείον.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔσω ἢ κορυφὴ τὸ δοθὲν σημείον, ἀλλ' ἄλλο τι, οἷον ἐστὶ τὸ Μ. πίν. Δ'. χ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῆς Μ τεταγμένως κατήχθω ἐπὶ τὴν Διάμετρον ἢ ΜΠ. καὶ ἀπὸ τῆς ἐκβληθείσης Διαμέτρου ἐκτὸς τῆς τομῆς εἰλήθω ἡ ΑΤ=ΑΠ. καὶ ἀπὸ τῆς Τ ἐπὶ τὸ Μ ἐπεζεύχθω ἡ ΤΜ. λέγω ὅτι ἡ ΤΜ καὶ ἐν μόνον σημείον τὸ Μ ἐφάπτεται τῆς τομῆς. (*)

Ἐφαπτέσθω γὰρ, εἰ δυνατόν, καὶ κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΝ παραλλήλῃ τῇ τεταγμένῃ ΜΠ, καὶ τῆς Ὑποδιευθετήσεως ΡΖ, τεταχθῶ ἀπὸ τῆς Δ ἢ ΔΗ, καὶ ἐκβεβλήθω, ὡσαύτως καὶ ἡ ΜΠ, καὶ συμβαλέτωσαν τῇ Ὑποδιευθετήσῃ κατὰ τὰ

Φ

(*) Κατὰ τὸν γ'. ὅρισμ. (ω) Ἐκ τῆς ζ'. ὁρισμ. ὅτι. (ε) Τῆς τομῆς τῆς λῆ. τῆς α'. βιβλ. τῆς Ἀπολλωνίου.

Φ καὶ Ζ σημεῖα. καὶ ἀπὸ τῆς Ζ ἐπὶ τὸ Τ ἐπεξεύχθω ἡ ΖΤ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΠΤ διπλασία ἐστὶ τῆς ΠΑ. (α) τὸ τρίγωνον ἄρα ΖΠΤ ἴσον ἐστὶ τῷ παραλληλογράμῳ ΡΠ. (β) ἀφηρήθω ἀπὸ μὲν τῆς τριγώνου ΖΠΤ τὸ τετράπλευρον ΖΛΗΠ, ἀπὸ δὲ τῆς παραλληλογράμμου ΡΠ τὸ παραλληλόγραμμον ΠΦ, τὸ μείζον τῆς τετραπλεύρου ΖΛΗΠ. λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΤΗ τρίγωνον μείζον λοιπὸν τῆς ΡΗ παραλληλογράμμου. καὶ ἐπεὶ ὡς $ΜΠ^2 : ΔΗ^2 :: ΠΤΜ$ τρίγωνον : $ΗΤΔ$ τρίγων. (γ) ἐστὶ δὲ ὡς $ΠΤΜ : ΗΤΔ :: ΠΤΖ : ΗΤΛ$. καὶ γὰρ ὡς $ΠΤΜ : ΗΤΔ :: ΠΤ^2 : ΗΤ^2$, ὁμοίως καὶ ὡς $ΠΤΖ : ΗΤΛ :: ΠΤ^2 : ΗΤ^2$. (δ) ἄρα καὶ ὡς $ΜΠ^2 : ΔΗ^2 :: ΠΤΖ : ΗΤΛ$. (ε) ἀλλὰ τὸ $ΜΠ^2$ διπλασίον ἐστὶ τῆς ΡΠ, (ζ) διπλασίον ἐστὶ καὶ τῆς ἴσης αὐτῷ τριγώνου ΠΤΖ. ἄρα καὶ τὸ $ΔΗ^2$ διπλασίον τῆς ΗΤΛ. ἀλλὰ τὸ ΗΤΛ μείζον δέδεκται τῆς ΡΗ. ἄρα τὸ $ΔΗ^2$ μείζον τῆς διπλασίας τῆς ΡΗ. ἀλλὰ τὸ αὐτὸ $ΔΗ^2$ ἐστὶ διπλασίον καὶ τῆς ΡΗ. (η) τὸ αὐτὸ ἄρα $ΔΗ^2$ καὶ μείζον καὶ ἴσον τῷ διπλασίῳ τῆς ΡΗ, ὅπερ ἀδύνατον. ἔκ ἄρα ἡ ΤΜ ἐφάπτεται τῆς τομῆς κατὰ τὸ Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι ἐδὲ κατὰ ἄλλο σημεῖον, πλὴν τῆς Μ ἐφάπτεται. ἡ ΤΜ ἄρα ἐστὶν ἡ ζητούμενη.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Ἐντεῦθεν πολλὰ προκύπτουσι τῆς εὐθεῖαν ἀπτομένην ἄγειν ἀπὸ τῆς δοθέντος τῆς Παραβολῆς σημείων μέθοδοι. ἐπὶ γὰρ τὸ $ΜΠ^2$ διπλασίον ἐστὶν, ὡς

Η 2

δέ-

(α) Ἐκ τῆς κατασκευ. δῆλον. (β) Ἐκ τῆς μα'. τῆς α'. δῆλον.
(γ) Κατὰ τὴν ιδ'. τῆς ε'. (δ) Κατὰ τὴν κινήν. (ε) Κατὰ τὴν ι. τῆς ι. (ζ) Κατὰ τὴν α'. Συνακτ. τῆς β'. (η) Κατὰ τὴν αὐτήν.

δείκναι, τὸ ΠΤΖ τριγώνον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΖΠ. ΠΤ. ὡς ἄρα ΖΠ : ΜΠ :: ΜΠ : ΠΤ. ἔκκεν ἔαν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Μ τεταγμένη ἐπὶ τὴν Διάμετρον καταχθῇ ἢ ΜΠ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπέσῃ τῇ Ὑποδιευθετῶσιν κατὰ τὸ Ζ, ἐυρεθῇ δὲ τρίτη ἀνάλογος τῆς τε ΖΠ, τῆς μεταξὺ τῆς Διαμέτρου καὶ τῆς Ὑποδιευθετῶσιν, καὶ τῆς τεταγμένης ΜΠ, ληφθῇ δὲ ἢ ΠΤ ἴση τῇ ἐυρεθείσῃ τρίτῃ ἀναλόγῳ, καὶ ἀπὸ τοῦ Τ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθῇ ἢ ΤΜ, αὕτη ἐφαπτομένη ἐστὶ τῆς Παραβολῆς κατὰ τὸ Μ.

Β'. Ἐάν ἀπὸ τοῦ Μ ἀχθῇ ἢ ΜΒ παράλληλος τῇ Διαμέτρῳ, τὸ ὑπ' αὐτῆς ἐμπεριλαμβανόμενον τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης μέρος, τὸ ΑΒ, διχῶς τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΜΤ κατὰ τὸ Γ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΜΠ : ΓΑ :: ΠΤ : ΑΤ, (θ) ἐστὶ δὲ ἢ ΠΤ διπλασία τῆς ΑΤ, (ι) ἄρα καὶ ἢ ΜΠ, εἴτεν ἢ ΑΒ διπλασία τῆς ΓΑ. ἢ ἄρα ΑΓ = ΓΒ. ἔαν ἔν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Μ παράλληλος τῇ Διαμέτρῳ ἀχθῇ, συμπίπτουσα τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένη τῆς Παραβολῆς, διχοτομηθῇ δὲ τὸ ὑπ' αὐτῶν ἀπολαμβανόμενον μέρος ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῆς διχοτομίας Γ ἐπὶ τὸ δοθέν σημεῖον Μ ἐπιζευχθῇ ἢ ΓΜ, αὕτη τῆς Παραβολῆς ἐφάψεται.

Γ'. Ἐάν δὲ ἢ διάμετρος ΑΠ, ἄξων ἢ, ληφθῇ δὲ τῇ ΠΖ, εἴτεν τῷ ἡμίσει τῆς ἐκείνης πλευρᾶς ΑΝ, ἴση ἢ ΠΥ, καὶ ἀπὸ τοῦ Υ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθῇ ἢ ΥΜ, εἴσεται ἢ γωνία ΥΜΤ ὀρθή. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΖΠ, ἥτοι ΥΠ : ΜΠ :: ΜΠ : ΠΥ, (κ) ἢ δὲ ΜΠ

πρὸς

(θ) Κατὰ τὴν δ', τὴν ε'. (ι) Ἐκ τῆς κατασκευ. (κ) Ὅσον τὴν περιλ. α. Σωίπ.

πρὸς ῥθὰς τῇ ΑΥ, (λ) ὀρθὴ ἄρα ἡ ΥΜΤ γωνία. (μ) εἰάν ἄρα ἀπὸ τῆ δοθέντος σημείου Μ τεταγμένως καταχθῇ ἐπὶ τὸν Ἀΐζονα ἡ ΜΠ, ληφθῇ δὲ τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ἴση ἡ ΠΥ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΥΜ ἀχθῇ ἀπὸ τῆ Μ ἡ ΜΤ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΥΜ, ἔσεται ἡ ΜΤ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Η' μὲν ὑπὸ τῆ σημείου τῆς ἐπαφῆς Μ καὶ τῆς ἐκβεβλημένης Διαμέτρου ΥΤ ἐμπεριλαμβανομένη ΜΤ, Ἐφαπτομένη λέγεται ἡ δὲ ὑπὸ τῆς τεταγμένης ΜΠ καὶ τῆς Ἐφαπτομένης ΜΤ, τετέσιν ἡ ΠΤ, Ὑφαπτομένη ἡ δὲ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ πρὸς ὀρθὰς τῇ Ἐφαπτομένη ΜΤ, καὶ ὑπὸ τῆς Διαμέτρου ΑΥ περατωμένη ΜΥ, Κάθετος ἡ δὲ ΠΥ ἡ ὑπὸ τε τῆς τεταγμένης ΜΠ καὶ τῆς Καθέτης ΥΜ περατωμένη, Ὑποκάθετος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Οὐκ ἔν ἐν Παραβολῇ ἡ μὲν Ὑφαπτομένη ΠΤ διπλασία ἐστὶ τῆς ἀποτετμημένης ΑΠ, ἡ δὲ Ὑποκάθετος ΠΥ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΝ.

Δ. (ν) Τῶν αὐτῶν κειμένων, εἰάν ληφθῇ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ε, (χ. 3.) καὶ καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν Διάμετρον δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν, ἡ ΕΥ, παράλληλος ᾗ τῇ Ἐφαπτομένη ΜΤ, ἡ δὲ ΕΗ, τῇ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Α Ἐφαπτομένη ΑΒ, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον ΕΗΥ ἴσον ἐστὶ τῷ ΗΒ παραλληλογράμμῳ, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς ἀπὸ τῆς

Η 3

τῆς

(λ) Κατὰ τὸν ἡ. ὅρισμ. (μ) Κατὰ τὴν β'. Συνέπ. τῆς ἡ. τῆ γ'. (ν) Ἡ μβ'. ἐστὶ τῆ α'. βιβλ. τῇ Ἀπολλων.

τῆς αἰφῆς κατηγμένης ΑΒ, καὶ τῆς ἀπολαμβάνο-
μένης ΑΗ, ὑπὸ τῆς περὶ κλήλῃς ΕΗ πρὸς τῇ κο-
ρυφῇ Α. ὡς γὰρ τρίγων. ΠΤΜ: τρίγων. ΗΥΕ ::
 $\overline{ΠΜ}^2 : \overline{ΗΕ}^2$. (ξ) ἀλλ' ὡς $\overline{ΠΜ}^2 : \overline{ΗΕ}^2 :: ΑΠ : ΑΗ$.
(ο) καὶ ὡς ΑΠ : ΑΗ :: ΠΒ : ΗΒ, (π) ὡς ἄρα
ΠΤΜ : ΗΥΕ :: ΠΒ : ΗΒ. (ρ) ἀλλὰ τὸ ΠΤΜ =
ΠΒ. (σ) ἄρα καὶ τὸ ΗΥΕ = ΗΒ. διὰ τὰ αὐτὰ
δὴ δαχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ΦΝΥ = ΝΒ, καὶ τὸ
ΧΛΑ = ΑΒ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α. (τ)

Εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς Παραβολῆς, καὶ
τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης αὐτῆς εὐ-
θεΐα εἰ παρεμπεσῆται.

Ἔστω Παραβολή, ἥς Διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, ὁρθία
δὲ πλευρά, ἡ ΑΖ. καὶ ἐφαπτέσθω αὐτῆς ἡ ΓΑ κατὰ
τὸ Α. Λέγω ἡ δ, ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἀπ-
τομένης ΑΓ, καὶ τῆς καμπύλης ΑΗ εὐθεΐα εἰ παρεμ-
πεσῆται. χ. 4.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπίπτειτω, ὡς ἡ ΑΔ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ. καὶ ἀπὸ τοῦ
Δ τεταγμένως κατήχθω ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΑΒ ἡ ΔΕ.
καὶ γεγόνετω ὡς $\overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 :: ΖΑ$ πρὸς τὴν τετάρτην.
καὶ εἰλήφθω ἡ ΘΑ ἴση τῇ ἐντεθείσῃ τετάρτῃ. καὶ
ἀπὸ τοῦ Θ ἦχθω τῇ ΕΔ παράλληλος ἡ ΘΚ.

ΔΕΙ.

(ξ) Κατὰ τὴν 19. τὰ ε'. (ο) Κατὰ τὴν δ. (π) Κατὰ τὴν α.
τὰ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν ε. τὰ ε'. (σ) Κατὰ τὴν μ. τὰ ε'.
(τ) Μίγρη τοῖς τῆς λβ. πρὸς. τὰ α. βιβλ. τὰ Ἀπολλωνίου.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ $\overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 \supset \overline{ΗΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2$. (υ) ἀλλὰ τὸ $\overline{ΗΕ}^2 =$
 $\overline{ΖΑ} \cdot \overline{ΑΕ}$. (φ) τὸ ἄρα $\overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 \supset \overline{ΖΑ} : \overline{ΑΕ} : \overline{ΕΑ}^2$. ἔστι
 δὲ ὡς $\overline{ΖΑ} : \overline{ΑΕ} : \overline{ΕΑ}^2 :: \overline{ΖΑ} : \overline{ΕΑ}$. (χ) τὸ ἄρα $\overline{ΔΕ}^2 :$
 $\overline{ΕΑ}^2 \supset \overline{ΖΑ} : \overline{ΕΑ}$. ἀλλ' ὡς $\overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 :: \overline{ΖΑ} : \overline{ΘΑ}$. (ψ)
 ἄρα ἢ $\overline{ΖΑ} : \overline{ΘΑ} \supset \overline{ΖΑ} : \overline{ΕΑ}$. ἐξ ἧς δῆλον ὅτι ἢ $\overline{ΕΑ} \supset$
 $\overline{ΘΑ} : ἢ \overline{ΕΑ} \supset \overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 :: \overline{ΖΑ} : \overline{ΘΑ}$, (ω) καὶ ὡς $\overline{ΖΑ} :$
 $\overline{ΘΑ} :: \overline{ΖΑ} : \overline{ΘΑ} : \overline{ΘΑ}^2$, (α) ὡς ἄρα $\overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 :: \overline{ΖΑ} :$
 $\overline{ΘΑ} : \overline{ΘΑ}^2$. ἀλλὰ τὸ $\overline{ΖΑ} \cdot \overline{ΘΑ} = \overline{ΘΑ}^2$. (β) ἄρα ὡς
 $\overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 :: \overline{ΘΑ}^2 : \overline{ΘΑ}^2$. (γ) ἀλλ' ὡς $\overline{ΔΕ}^2 : \overline{ΕΑ}^2 :: \overline{ΚΘ}^2 :$
 $\overline{ΘΑ}^2$, (δ) ἄρα ὡς $\overline{ΚΘ}^2 : \overline{ΘΑ}^2 :: \overline{ΘΑ}^2 : \overline{ΘΑ}^2$: τὸ ἄρα
 $\overline{ΚΘ}^2 = \overline{ΘΑ}^2$. καὶ ἢ $\overline{ΚΘ}$ ἄρα ἴση τῇ $\overline{ΘΑ}$. ὅπερ ἄτοπον.
 Ἐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς $\overline{ΑΓ}$ εὐθείας, καὶ τῆς
 $\overline{ΑΗ}$ καμπύλης ἐτέρα εὐθεῖα παρεμπεσείται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'. (ε)

Εἰάν Παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμ-
 πίπτῃ τῇ Διαμέτρῳ, ἢ διὰ τῆς ἀΦῆς πα-
 ραίλληλος ἀγομένη τῇ διαμέτρῳ ἐπὶ ταῦτα
 τῆς τομῆς, τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ πα-
 ραίλληλος τῇ ἐφαπτομένη δίχα τέμναι· εἰσὶ
 δὲ ὡς τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς ἀλ-
 ληλα, ὥτως αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ' αὐτῶν
 ἀπὸ τῆς παραλλήλης τῇ Διαμέτρῳ πρὸς
 τῇ ἀΦῇ.

Η 4

Ἐ5ω

- (υ) Κατὰ τὴν γ', τῇ ε'. (φ) Κατὰ τὴν β'. (χ) Κατὰ τὴν α'
 τῇ ε'. (ψ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ω) Ἐκ τῆς κατασκ. (α) Κα-
 τὰ τὴν α' τῇ ε'. (β) Κατὰ τὴν β'. (γ) Κατὰ τὴν ε', τῇ
 ε'. (δ) Κατὰ τὴν ε', τῇ ε'. (ε) Τὸ μὲν α' μέρ. ἢ μγ'· πρὸς.
 ἐπὶ τῇ α'. βιβλ. τῇ Α' πολλῶν. τὸ δὲ ε'. Σύνιπ. τῆς μδ'. τῇ αὐτῇ.

Ἐςω Παραβολή, ἥς Διάμετρος ἡ ΑΛ, καὶ ἐφαπ-
τέτω τῆς τομῆς ἡ ΤΜ, συμπίπτουσα τῇ ΑΛ κατα-
τὸ Τ. διὰ δὲ τῆς Μ παράλληλος ἤχθω τῇ ΑΛ ἡ ΒΜΚ,
καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Ε,
Λ. καὶ ἤχθωσαν τῇ ΤΜ παράλληλοι αἱ ΕΥΙΦ, ΑΡΧ.
λέγω Α'. ὅτι ἡ μὲν $EI = I\Phi$, ἡ δὲ ΑΡ τῇ ΡΧ. Β'.
ὅτι ὡς $EI^2 : AP^2 :: MI : MP$. χ. 3.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Α' πὸ τῶν Ε, Μ, Φ, Χ σημείων κατήχθωσαν τε-
ταγμένως ἐπὶ τὴν ΑΛ Διάμετρον αἱ ΨΕΗ, ΜΠ, ΦΝ,
ΧΛ. ἤχθω δὲ καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν ἀπτομένη ΑΒ.

ΔΕΙΞΙΣ. ΤΟΤ Α'.

Τὸ μὲν ΦΥΝ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ παραλληλογράμ-
μῳ ΝΒ· τὸ δὲ ΕΥΗ, τῷ ΗΒ, ἀφηρέθω ἀπὸ μὲν τῷ
ΦΥΝ τὸ ΕΥΗ, ἀπὸ δὲ τῷ ΝΒ τὸ ΗΒ, τὸ ἄρα τραπέ-
ζιον ΗΕΦΝ ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΨ. κοινὸν
ἀφηρέθω τὸ ΝΗΕΙΖ τραπέζιον. ἔκβιν τὸ ΖΙΦ τρι-
γωνον ἴσον τῷ ΕΙΨ τριγώνῳ. ἔστι δὲ ὡς $ZI\Phi : EI\P :: \overline{\Phi I}^2 : \overline{IE}^2$. (ζ) τὸ ἄρα $\overline{\Phi I}^2 = \overline{IE}^2$, διὸ καὶ ἡ $\Phi I = IE$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ $AP = PX$.

Εἰάν δὲ ἡ τῇ ἐφαπτομένη ΜΤ ἀχθεῖσα παράλληλος
ΕΦ (χ. 5.) συμπίπτῃ τῇ Διαμέτρῳ ἐντὸς τῆς τομῆς,
κατὰ τὸ Τ, δευχθήσεται πάλιν ἡ μὲν $EI = \Phi I$, ἡ δὲ
 $AP = PX$ ἔτω· τὸ τρίγωνον ΥΦΝ ἴσον ἐστὶ τῷ παρα-
λληλογράμμῳ ΝΒ. κοινὸν ἀφηρέθω τὸ τραπέζιον ΖΙΥΝ.
τὸ ἄρα τρίγωνον ΦΙΖ ἴσον τῷ τραπέζιῳ ΙΒΑΥ, εἴτεν
τῷ ΙΨΗΥ + ΗΒ, ἀλλὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΒ ἴσον,
τῷ τριγώνῳ ΕΥΗ. τὰ ἄρα $\Phi IZ = I\P H Y + EYH$,
εἴτεν τῷ ΕΙΨ τριγώνῳ. ἀλλ' ὡς $\Phi IZ : EI\P :: \overline{\Phi I}^2 : \overline{IE}^2$,
τὸ ἄρα $\overline{\Phi I}^2 = \overline{IE}^2$, διὸ καὶ ἡ $\Phi I = EI$. ἐπεὶ δὲ
τὰ

(ζ) Κατὰ τὴν Δ'. τῇ ε'.

τὸ $\Lambda\Lambda\chi = \Lambda\beta$, κοινὸν ἀφαιρεθέντες τῷ τραπέζιῳ $\Lambda\Delta\text{PK}$, ἔσεται τὸ $\text{APB} = \text{KPK}$. ἀλλ' ὡς $\text{APB} : \text{KPK} :: \overline{\text{AP}}^2 : \overline{\text{PK}}^2$. τὸ ἄρα $\overline{\text{AP}}^2 = \overline{\text{PK}}^2$. διὸ $\text{AP} = \text{PK}$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τῶν AGT , BGM τριγώνων αἱ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνίαι (χ . 3 καὶ 5.) ἴσαι, (η) ἡ δὲ πρὸς τῷ Λ ἴση τῇ πρὸς τῷ β , (θ) ἔστι δὲ καὶ ἡ $\text{AG} = \text{MB}$. ἔστι γὰρ ἡ $\text{MB} = \text{AP}$, ἡ δὲ $\text{AG} = \text{AT}$. (ι) ἴσων ἄρα τὸ AGT τρίγωνον τῷ BGM τριγώνῳ, (κ) κοινὸν προσκείσω τὸ τραπέζιον AGMP . τὸ ἄρα APMT παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ APB τριγώνῳ. ἀλλὰ τὸ $\text{APB} = \text{KPK}$, ὡς δέδοικται. τὸ ἄρα $\text{APMT} = \text{KPK}$. προσκείσω πάλιν ταῖς ἀ. ταῖς τριγώνοις AGT , BGM κοινὸν τὸ τραπέζιον AGMN . ἔν τὸ τετράπλευρον TMZN ἴσον τῷ παραλληλόγραμμῳ NB . ἀλλὰ τὸ $\text{NB} = \text{NΦY}$, τὸ ἄρα $\text{TMZN} = \text{NΦY}$. κοινὸν ἀφηρέσω τὸ τετράπλευρον YIZN τὸ ἄρα παραλληλόγραμμον $\text{TIMT} = \text{IZΦ}$. ὡς ἄρα $\text{APMT} : \text{TIMT} :: \text{KPK} : \text{IZΦ}$. ἀλλ' ὡς μὲν $\text{APMT} : \text{TIMT} :: \text{MP} : \text{MI}$, (λ) ὡς δὲ $\text{KPK} : \text{IZΦ} :: \overline{\text{XP}}^2 : \overline{\text{ΦI}}^2$. (μ) ἄρα καὶ ὡς $\text{MP} : \text{MI} :: \overline{\text{XP}}^2 : \overline{\text{ΦI}}^2$. (ν) ἔστι δὲ ἡ μὲν $\text{XP} = \text{AP}$, ἡ δὲ $\text{ΦI} = \text{EI}$. (ξ) ἄρα καὶ ὡς $\text{MP} : \text{MI} :: \overline{\text{AP}}^2 : \overline{\text{EI}}^2$. καὶ ἀνάπαλιν $\overline{\text{EI}}^2 : \overline{\text{AP}}^2 :: \text{MI} : \text{MP}$.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Δευτεραία ἄρα Διαμέτρος ἔστιν ἡ MZ , (ο) ἀχθείσης δὲ τῆς κατὰ κορυφὴν ἀποτομένης AB , ἔσεται ἡ Ὑφαπτομένη BP διπλασία τῆς ἀποτετμημένης MP .

Η 5

ἐπεὶ

- (η) Κατὰ τὴν ιβ'. τῷ α'. (θ) Κατὰ τὴν κδ'. τῷ α'. (ι) Κατὰ τὸ μετὰ τὴν δ'. Πόρις. (κ) Κατὰ τὴν κς'. τῷ α'. (λ) Κατὰ τὴν α'. τῷ ε'. (μ) Κατὰ τὴν ιδ'. τῷ ε'. (ν) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ι'. (ξ) Κατὰ τὸ α'. μέρ. τῆς προκαμ. προτ. (ο) Κατὰ τὸν κί ὅρισμ.

ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΠΑ = ΑΤ$. (π) ἔστι δὲ ἡ μὲν $ΠΑ = ΜΒ$,
ἡ δὲ $ΑΤ = ΜΡ$. (ρ) ἄρα καὶ ἡ $ΜΒ = ΜΡ$. διὸ ἡ ΒΡ
διπλασία τῆς ΜΡ

ΠΟΡΙΣΜΑ

Εὐτεῦθεν ἄλλη πρόεισι μέθοδος τῷ ἐφαπτομένην
ἀγειν ἀπὸ τῷ δοθέντος τῆς Παραβολῆς σημεῖον, οἷον
τῷ Μ. ἢ χθω γὰρ ἀπὸ τῷ Μ ἡ Δευτεραία Διάμετρος
ΒΜΖ τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένη συμπίπτουσα κατὰ
τὸ Β. καὶ λιφθείσης τῆς ΜΡ ἴσης τῇ ΜΒ, ἀπὸ τῆς κο-
ρυφῆς Α ἐπὶ τὸ Ρ* ἐπεξεύχθω ἡ ΑΡ. ἔσται δὲ ἔν ἡ ἀπὸ
τῷ Μ τῇ ΡΑ ἀγόμενη παρὰλληλος ΜΓ ἐφαπτομένη
τῆς Παραβολῆς κατὰ τὸ Μ.

Β'. Εὐρεθείσης τῆς ὀρθίας πλευρᾶς Χ τῆς Δευτεραί-
ας Διαμέτρου ΜΖ, εἴταν τῆς τρίτης ἀναλόγου τῆς
ἀποτετμημένης ΜΙ, καὶ τῆς τεταγμένης ΙΕ, (σ)
ἔσεται τὸ ἀπὸ πάσης τεταγμένης τετράγωνον, οἷ-
ον τὸ ἀπὸ τῆς ΡΑ ἴσον τῷ ὀρθογώνιῳ τῷ ὑπὸ τῆς
ἀποτεμνομένης ὑπ' αὐτῆς ΜΡ καὶ τῆς ὀρθίας πλευ-
ρᾶς Χ περιεχομένῳ. ἐπεὶ γὰρ ὡς $ΜΙ : ΙΕ :: ΙΕ :$
 $Χ$. ἄρα τὸ $ΜΙ \cdot Χ = ΙΕ^2$. (τ) ἔστι δὲ ὡς $ΜΙ :$
 $ΜΡ :: ΙΕ^2 : ΡΑ^2$, (υ) διὸ καὶ ὡς $ΜΙ : ΜΡ :: ΜΙ \cdot$
 $Χ : ΡΑ^2$. τὸ ἄρα $ΜΙ \cdot ΡΑ^2 = ΜΡ \cdot ΜΙ \cdot Χ$. καὶ τῶν
ἴσων διὰ τῆς ΜΙ διαιρεθέντων, ἔσεται τὸ $ΡΑ^2 =$
 $ΜΡ \cdot Χ$. (φ).

Γ'. Καὶ τὸ ὀρθογώνιον δὲ τὸ ὑπὸ τῷ ἀθροίσματος δύο
ὁποιωνῶν τεταγμένων καὶ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν πε-
ριεχόμενον ἴσον δεχθήσεται τῷ ὀρθογώνιῳ τῷ ὑπὸ
τῆς

(σ) Κατὰ τὸ πρῶτον. Πόρις. (ρ) Κατὰ τὴν λδ'. τῷ α'. (σ) Ὅσον
τὸν καὶ. ὁρίσμι. (τ) Κατὰ τὴν ις' τῷ ε'. (υ) Κατὰ τὸ β'. μίση-
τος προκαμ. πρῶτον. (φ) Ἡ' μδ'. πρῶτον. ἰσὶ τῷ α' βιβλ. τῷ
Α πολλῶν.

τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνομένων καὶ τῆς ὀρθίας περιεχομένων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐχει ἄρα καὶ ἡ Δευτεραία τῆς Παραβολῆς Διάμετρος τὰ τῆς πρώτης καὶ ἀρχικῆς ἰδιώματα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Ἐὰν ληφθῇ μέρος τῆς Ἀξονος τῆς Παραβολῆς πρὸς τῇ κορυφῇ ἴσον τεταρτημορίῳ τῆς ὀρθίας αὐτῆς πλευρᾶς, ἀχθῆσα δὲ ἑφαπτομένη τῆς τομῆς τῷ Ἀξονι συμβάλλῃ, τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀπ' αὐτῆς καὶ τῆς πέρατος τῆς προειρημένῃς μέρους ἀπολαμβανομένης τμήματος τῆς Ἀξονος ἴσον ἔσται τῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ τῆς Δευτεραίας Διαμέτρου.

Ἐςω Παραβολὴ ἡ ΑΜ, ἥς Ἀξων μὲν ἡ ΤΚ, ἑφαπτομένη δὲ ἡ ΜΤ, Δευτεραία δὲ Διάμετρος ἡ ΜΡ. καὶ εἰλήφθω ἡ ΑΦ ἴση τεταρτημορίῳ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς. Λέγω, ὅτι τὸ τετραπλάσιον τῆς ΦΤ ἴσον ἐστὶ τῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ τῆς Δευτεραίας Διαμέτρου ΜΡ. πίν. Ε. Χ. 1.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ κατὰ κορυφὴν ἑφαπτομένη ΑΓ, καὶ ἀπὸ μὲν τῆς Α τεταγμένως κατήχθω ἐπὶ τὴν ΜΡ, ἡ ΑΡ, ἀπὸ δὲ τῆς Μ ἐπὶ τὴν ΤΚ ἡ ΜΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΦΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΤΠ διπλασία ἐστὶ τῆς ΑΠ, (χ) εἴτεν τῆς ΑΤ, ἀλλ' ὡς ΤΠ: ΤΑ:: ΤΜ: ΤΓ. ὡσαύτως καὶ ὡς ΤΠ: ΤΑ:: ΠΜ:: ΑΓ. (ψ) ἄρα ἡ μὲν ΤΜ διπλασία τῆς ΤΓ, ἡ δὲ ΠΜ τῆς ΑΓ. ἔκβιν καὶ τὸ $\overline{ΠΜ}^2$ τετραπλάσιον τῇ $\overline{ΑΓ}^2$. ἐπεὶ δὲ ἡ ΑΦ τεταρτημόριόν ἐστι τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, (ω) ἡ ἄρα 4ΑΦ ἴση τῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ. ἐστὶ δὲ τὸ $\overline{ΠΜ}^2 = ΑΠ \cdot 4ΑΦ$. (α) τὸ ἄρα $\overline{ΠΜ}^2$ τετραπλάσιόν ἐστι τῷ ΑΠ. ΑΦ, εἴτεν τῷ ΑΤ. ΑΦ. ἀλλὰ τὸ αὐτὸ $\overline{ΠΜ}^2$ τετραπλάσιον δίδανται καὶ τῷ $\overline{ΑΓ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΑΓ}^2 = ΤΑ \cdot ΑΦ$. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαί. (β) ἡ ἄρα ΤΓΦ γωνία ὀρθή. (γ) ὡς ἄρα ΑΤ: ΤΓ:: ΤΓ: ΤΦ. (δ) τὸ ἄρα $\overline{ΤΓ}^2 = ΑΤ \cdot ΤΦ$. (ε) ἐστὶ δὲ ἡ ΑΤ = ΜΡ, (ζ) τὸ ἄρα $\overline{ΤΓ}^2 = ΜΡ \cdot ΤΦ$. ἀλλὰ τὸ $\overline{ΤΜ}^2$ τετραπλάσιον τῷ $\overline{ΤΓ}^2$. τὸ $\overline{ΤΜ}^2$ ἄρα τετραπλάσιον καὶ τῷ ΜΡ. ΤΦ, εἴτεν τὸ $\overline{ΤΜ}^2 = ΜΡ \cdot 4ΤΦ$. ἀλλὰ ἡ ΤΜ = ΑΡ. (η) τὸ ἄρα $\overline{ΑΡ}^2 = ΜΡ \cdot 4ΤΦ$. ἐπεὶ ἔν ἡ μὲν ΑΡ τεταγμένης κατήχθη ἐπὶ τὴν ΜΡ, ἡ δὲ ΜΡ ἡ ἀποτετμημένη ἐστίν, ἡ ἄρα 4ΤΦ ἴση ἐστὶ τῇ ὀρθίᾳ τῆς Δευτεραίᾳς Διαμέτρου ΜΡ. (θ).

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀπὸ τῷ Φ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθείσης εὐθείας ΦΜ ἴσον ἔσεται τῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ τῆς Δευτεραίᾳς Διαμέτρου ΜΡ. ἐπεὶ γὰρ τῶν τριγώνων ΜΦΓ, ΤΦΓ, ἡ μὲν ΓΜ = ΓΤ, ἡ

- (χ) Κατὰ τὸ Πέρισσ. τὸ μετὰ τὴν δ'. (ψ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'.
 (ω) Ἐξ ὑποθ. (α) Κατὰ τὴν β'. (β) Κατὰ τὸν ἡ. ὅρισμ. καὶ τὴν δ'. προτ. (γ) Κατὰ τὴν β'. Συνίσκ. τὴν μετὰ τὴν ἡ. τῷ ε'. (δ) Κατὰ τὴν α'. Συνισκ. τῆς ἡ. τῷ ε'. (ε) Κατὰ τὴν στ'. τῷ ε'. (ζ) Κατὰ τὴν λδ'. τῷ α'. (η) Κατὰ τὴν αὐτὴν (θ) Κατὰ τὴν β'. Συνίσκ. τῆς ε'.

δὲ ΓΦ κοινὴ, ἔστι δὲ καὶ γωνία ἡ ΦΓΜ = ΦΓΤ·

(ι) ἑκατέρω γὰρ ὀρθή· ἄρα καὶ ἡ ΦΜ = ΦΤ· (κ)

ἀλλ' ἡ 4ΦΤ ἴση τῇ τῆς ΜΡ ὀρθίᾳ. ἄρα καὶ ἡ 4ΦΜ ἴση τῇ αὐτῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ.

Β'. Εἰάν ἐκτὸς τῆς Παραβολῆς πρὸς τῇ κορυφῇ Α ληφθῇ μέρες τῷ Α' ξενος, τὸ ΑΒ ἴσον τῇ ΑΦ, ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τῆ Β τῇ τεταγμένη ΜΠ παράλληλος ἡ ΒΔ, συμπίπτουσα τῇ ἐκβληθείσῃ Δευτεραίᾳ Διατέτρῳ κατὰ τὸ Δ, ἔσται τὸ τῆς ΔΜ τετραπλάσιον ἴσον τῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ τῆς ΜΡ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΤΦ = ΤΑ + ΑΦ, ἔστι δὲ ἡ μὲν ΤΑ = ΑΠ, (λ) ἡ δὲ ΑΦ = ΑΒ, (μ) ἡ ἄρα ΤΦ = ΑΠ + ΑΒ = ΒΠ = ΔΜ. ἔστι δὲ ἡ 4 ΤΦ ἴση τῇ ὀρθίᾳ τῆς ΜΡ, ἄρα καὶ ἡ 4 ΕΠ, ἡ ἡ 4 ΔΜ ἴση τῇ αὐτῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ.

Γ'. Καὶ ἡ ΦΜ ἴση ἔστι τῇ ΒΠ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΦΜ = ΦΤ, (ν) ἡ δὲ ΦΤ = ΒΠ, (ξ) ἄρα καὶ ἡ ΦΜ = ΒΠ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθήσεται, ὅτι καὶ ἄλλη ὀπιαῦν ἡ ἀπὸ τῆ Φ ἐπὶ τὸ τυχόν τῆς τομῆς σημειῶν ἐπιζευχθεῖσα Φμ ἴση ἔστι τῇ Βπ, τῇ μεταξὺ τῆ σημείῳ Β καὶ τῆς ἀπὸ τῆ μ ἀχθείσης τεταγμένης ἐπὶ τὸν Ἀξονα ΤΚ.

Δ'. Εἰκ τέτε δὴλον, ὅτι δοθείσης τῆς ὀρθίᾳς πλευρᾶς ἐνεστὶ πορίσασθαι συνεχῇ σημεία, δι' ὧν γραφῆσεται ἡ Παραβολή. ἐκκείδω γὰρ τις εὐθεῖα, ἡ ΤΚ, καὶ εἰλήφθω ἀπ' αὐτῆς ἑκατέρω τῶν ΑΦ, ΑΒ ἴση τεταρτημορίῳ τῆς δοθείσης ὀρθίᾳς πλευρᾶς· ἀπὸ δὲ τῆς ΦΚ τυχόντα συνεχῇ σημεία τὰ Π, π, καὶ

(ι) Ὅρα τὴν δαξ. τῆς προκ. προτ. (κ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ α'.

(λ) Ὅρα τὸ Πόρις. τὸ μετὰ τὴν δ'. (μ) Εἰς ὑποθ. (ν) Κατὰ τὴν προλ. α. Συνίπ. (ξ) Κατὰ τὴν προλ. Συνίπ.

καὶ ἄλλαι ἐφεξῆς. καὶ ἤχθω ἡ μὲν $\Phi\text{Μ} = \text{ΒΠ}$, ἡ δὲ $\Phi\text{μ} = \text{Βπ}$, καὶ ἐφεξῆς ἄλλαι ὁμοίως. ἔσται δὲ ἐν ταῖς σημείοις Μ, μ ἐπὶ τῆς τομῆς. ὡσεύτως καὶ ἄλλων συνεχῶν ἐυξεθέντων σημείων, γραφθήσεται ἡ Παραβολή.

Ε'. Γραφήσεται δὲ ἡ Παραβολή καὶ διὰ Κανόνος καὶ Γνώμονος τῆς ὀρθίας αὐτῆς πλευρᾶς δεθείσης. ἔστω γὰρ Κανὼν ὁ ΔΖ, (χ. 2.) ὑυλακισμένος μὲν ἐπὶ τὰ τὰ Β, Ε μέρη, τῷ δὲ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ δὲ τὴν Παραβολὴν γράψαι ἐξηκισμένος, καὶ πρὸς ὀρθᾶς τήμων ἐυθεΐαν τὴν ΒΡ, τὸν Ἀξῶνα τῆς γραφθεϊσμένης ἐμφαινέσαν Παραβολῆς. ἔστω δὲ εἰσῆχθω εἰς τὴν τῷ Κανόνος ΔΖ αὐλακὰ τὸ πέρας ΖΕ τῷ ΖΕΓ Γνώμονος, ὥστε ἐφηρμοσμένον μένοντα τῇ αὐλακῇ, ἐξῆναι φέρεσθαι ἐπὶ τὰ Ζ μέρη. καὶ εἰλήφθω ἑκατέρω μὲν τῶν ΑΦ, ΑΒ ἴση τεταρτημορίῳ τῆς δεθείσης ὀρθίας πλευρᾶς, ἡ δὲ ΒΡ, καὶ νῆμα τὸ ΦΜΓ ἴσον τῷ τῷ Γνώμονος μήκει ΕΓ. καὶ τὸ μὲν τῶν περὶ τῶν νήματος τῷ τῷ Γνώμονος πέρατι Γ περὶ δεδέσθω, τὸ δὲ, ἐπὶ τὸ Φ ἐξηρίχθω. τῷ Γνωμονὶ δὲ ΖΕΓ ἐγγύτατα τῆς ΒΡ σταθέντι ἥλος ὁ ΗΜ συμπαρεντεθεὶς ἔστω συμφερέσθω παραλλήλως τῇ ΒΡ φερομένῳ ἐπὶ τὰ Ζ μέρη, ὥστε τὸ μὲν τῷ νήματος μέρος ΦΜ, τὸ ἐκ τῷ Γνώμονος ἐκχωριζόμενον, ἐν τεταμένον διαπαντὸς διαμένειν, τὸ δὲ λοιπὸν, τὸ ΜΓ, τῷ Γνωμονὶ ἐφηρμοσμένον. λέγω δὲ, ὅτι τῇ τειχῇδε Φορᾷ Παραβολὴν καταγράψει ὁ ἥλος ΗΜ, τὴν ΑΜΨ, ἧς κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, Ἀξῶνα δὲ ἡ ΒΡ. κατήχθωσαν γὰρ τεταγμένως ἀπὸ τῶν Μ καὶ Γ σημείων αἱ ΜΠ, ΨΓΡ. καὶ ἐπεὶ τὸ νῆμα $\Phi\text{ΜΓ} = \text{ΒΡ}$, ἔστι δὲ τὸ μέρος $\text{ΜΓ} = \text{ΠΡ}$ καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ $\Phi\text{Μ} = \text{ΠΒ}$. ἔκβιν τὸ σημεῖον Μ ἐν Παραβολῇ εἶναι, ἧς ἡ

κερυφή Α, καὶ Ἀξων ἢ ΒΡ. (ο) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ
 διαχθήσεται, ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ σημεῖα τῆς ΑΜΨ
 γραμμῆς, Παραβολῆς εἰσὶ σημεῖα. ἢ ἄρα ΑΜΨ
 Παραβολή ἐστὶ. χ. 1.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὸ μὲν σημεῖον Φ, (χ. 1.) Ἑξίαν, ἢ Ὀμφα-
 λὸν τῆς Παραβολῆς καλεῖν εἰώθασι, τίνος δὲ χάριν,
 κατωτέρω εἰρήσεται· τὴν δὲ ΦΜ, τὴν ἀπὸ τῆς Ἑξίας
 ἐπὶ τὸ τυχὲν τῆς τομῆς σημεῖον ἐπιζευχθεῖσαν, Κε-
 κλιμένην· τὴν δὲ ΒΔ, τὴν ἀπὸ τῆς Β ταῖς τεταγ-
 μέναις ἀχθεῖσαν παράλληλον, καὶ τὰς ΜΔ, μδ', τὰς
 ἴσας ταῖς ΠΒ, πβ περατέδσαν, Ἐυθεῖαν Μετε-
 ωρισμῶ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Ἐὰν ἀπὸ Ἑξίας Παραβολῆς ἐπὶ τὸ τῆς ἑ-
 παφῆς σημεῖον ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ
 τῆς αὐτῆς σημεῖος ἀχθῇ ἢ Δευτεραία Διά-
 μετρος, αἱ ὑπὸ αὐτῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης
 περιεχόμεναι γωνίαὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐξω Παραβολή, ἥς Ἑξία μὲν, τὸ Φ· Ἐφαπτο-
 μένη δὲ, ἢ ΜΤ· Δευτεραία δὲ Διάμετρος, ἢ ΜΡ, καὶ
 Ἐπαφή, τὸ Μ. καὶ ἀπὸ τῆς Φ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθῶ
 ἢ ΦΜ. λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΦΜΤ ἴση ἐστὶ τῇ ΡΜΨ.

ΔΕΙ-

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ $\Phi\text{M}=\Phi\text{T}$, (π) καὶ γωνία ἄρα ἡ $\Phi\text{MT}=\Phi\text{TM}$. (ρ) ἄλλ' ἡ $\Phi\text{TM}=\text{PM}\Psi$. (σ) ἄρα καὶ ἡ $\Phi\text{MT}=\text{PM}\Psi$.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐὰν εὐθεῖαί τρεῖς, αἱ $\text{H}\Pi$, ΔM , (χ. 3.) πρὸς τὸ κυρτὸν τῆς Παραβελῆς ἔτω προσπίπτωσιν, ὥστε ἐκβληθεῖσας κατὰ τὴν Ἑξίαν Φ συμβάλλειν ἀπὸ δὲ τῶν τῆς πτώσεως σημείων Π , M ἐφαπτόμεναι μὲν τῆς Παραβελῆς ἀχθῶσιν αἱ $\text{I}\Pi\text{T}$, ΥMT , παρὰλληλοι δὲ τῷ Ἀξονι $\text{A}\Gamma$ αἱ $\text{Z}\Pi\Psi$, ΛMP , ἔσονται αἱ ὑπὸ τῶν προσπιπτέσων καὶ τῶν Ἐφαπτομένων περιεχόμεναι γωνίαι ἴσαι ταῖς ὑπὸ τῶν παραλλήλων καὶ τῶν ἐφαπτομένων, εἴτεν ἡ μὲν $\text{H}\Pi\text{T}$ τῇ $\text{Z}\Pi\text{T}$, ἡ δὲ ΔMT τῇ ΛMT . ἡ μὲν γὰρ γωνία $\Phi\text{PT}=\Psi\text{PI}$, (τ) ἔστι δὲ ἡ μὲν $\Phi\text{PT}=\text{H}\Pi\text{T}$, ἡ δὲ $\Psi\text{PI}=\text{Z}\Pi\text{T}$. (υ) ἄρα καὶ ἡ $\text{H}\Pi\text{T}=\text{Z}\Pi\text{T}$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $\Delta\text{MT}=\Lambda\text{MT}$.

Β'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς Ἑξίας Φ (χ. 4.) τεταγμένως ἐπὶ τὸν Ἀξονα $\Gamma\Delta$ ἀναχθῇ ἡ ΦM , καὶ ἀπὸ τῆς M ἀπτομένη ἀχθῇ ἡ ZMT , τῇ μὲν κατὰ κερυφὴν ἐφαπτομένη κατὰ τὸ B , τῷ δὲ Ἀξονι κατὰ τὸ T συμβάλλουσα, ἔσεται ἡ μὲν ΦM ἴση τῇ AN , τῇ ἡμισείᾳ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς AT . ἡ δὲ AB , τεταρτημορίῳ τῆς αὐτῆς· αἱ δὲ TA , AB , $\text{A}\Phi$ ἴσαι ἀλλήλαις. ἐπεὶ γὰρ ἡ $\text{T}\Phi$ διπλασία τῆς $\text{A}\Phi$, (φ) ἡ δὲ $\text{A}\Phi$ ἴση τεταρτημορίῳ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς AT , (χ) ἡ ἄρα $\text{T}\Phi=\text{AN}$. ἄλλ' ἡ $\text{T}\Phi=\Phi\text{M}$, (ψ) ἄρα καὶ

(π) Ἐκ τῆς α. Συνεκ. τῆς ε'. ὁῦλον. (ρ) Κατὰ τὴν ε. τῆς α'.
(σ) Κατὰ τὴν κδ'. τῆς α'. (τ) Κατὰ τὴν προκαμ. πρῶτ.
(υ) Κατὰ τὴν ιε. τῆς α'. (φ) Κατὰ τὸ Πόρις. τὸ μετὰ τῇ δ.
(χ) Κατὰ τὴν ε'. (ψ) Κατὰ τὴν α. Συνεκ. τῆς ε'.

καὶ ἡ ΦΜ ἴση τῇ τῆς ὀρθίας ΑΥ ἡμισείᾳ ΑΝ.
ἐπεὶ δὲ ὡς ΤΦ: ΤΑ :: ΦΜ: ΑΒ, (ω) καὶ ἡ ΦΤ
διπλασία τῆς ΤΑ, ἄρα καὶ ἡ ΦΜ τῆς ΑΒ. ἡ ἄρα
ΑΒ τεταρτημόριον τῆς ὀρθίας ΑΥ. αἱ δὲ ΤΑ, ΑΒ,
ΑΦ ἴσαι ἀλλήλαις.

Γ'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς Ἑξίας Φ ἐπεὶ τὸ τυχὲν τῆς Πα-
ραβολῆς σημεῖον Π ἐπιζευχθῇ ἡ ΦΠ, ἀπὸ δὲ τῆς
Π τεταγμένης ἐπὶ τὸν Ἀξονα καταχθῇ ἡ ΖΠΔ,
τῇ Ἐφαπτομένῃ συμβάλλουσα κατὰ τὸ Ζ, ἴσεται ἡ
Κεκλιμένη ΦΠ ἴση τῇ ΖΠΔ. ἔστι γὰρ ὡς ΤΦ: ΦΜ ::
ΤΔ: ΔΖ. (α) ἀλλ' ἡ ΤΦ=ΦΜ, ἄρα καὶ ἡ ΤΔ=
ΔΖ. ἀλλ' ἡ ΤΔ=ΦΠ, (β) ἄρα καὶ ἡ ΦΠ=ΔΖ.

Δ'. Ἐνεστὶν ἄρα, δοθείσης τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, συνε-
χῇ πορίσασθαι σημεῖα, δι' ὧν ἡ Παραβολὴ γραφή-
σεται. συνεχάτω γὰρ τρίγωνον ἰσοσκελές τε καὶ ὀρθο-
γώνιον τὸ ΤΦΜ ἴσας ἔχον τὰς περὶ τὴν ὀρθὴν γω-
νίαν πλευρὰς ΤΦ, ΦΜ ἀλλήλαις, καὶ ἑκατέραν ἴσην
τῷ ἡμίσει τῆς δοθείσης ὀρθίας πλευρᾶς. καὶ ἐκβλη-
θεῖσων κατὰ τὸ συνεχές τῶν ΤΦ, ΤΜ, καὶ ἀχ-
θεῖσων ἀπὸ ληφθέντων σημείων τῶν Δ, δ, καὶ ἄλλων
ἐφεξῆς, τῶν ΔΖ, δζ, καὶ ἐφεξῆς ἄλλων παραλλήλων
τῇ ΦΜ, ἀπὸ τῆς Φ ἐφηρμόδωσαν εὐθεῖαι αἱ ΦΠ,
Φπ ἴσαι ταῖς ΔΖ, δζ. δῆλον ἄρα ὅτι τὰ Π, π, ση-
μεῖα τῆς Παραβολῆς ἐστὶν, ἥς κορυφὴ μὲν τὸ Α,
τὸ μέσον τῆς ΦΤ, Ἑξία δὲ τὸ Φ, ἐφαπτομένη δὲ
ἡ ΤΜ, καὶ ὀρθία πλευρὰ τὸ διπλάσιον ὀποτέρας
τῶν ΤΦ, ΦΜ.

Ε'. Ἐὰν ἀπὸ μὲν τῆς ἐπαφῆς Μ (πίν. ε'. χ. ι.)
κάθετος ἀχθῇ τῇ ἐφαπτομένῃ ΖΜΟ, ἡ ΜΥ, τῇ
τῆς

Θ

(α) Κατὰ τὴν δ'. τῇ ε'. (α) Κατὰ τὴν αὐτήν. (β) Κατὰ τὴν
γ'. Συνίσ. τῆς ε'.

τῆς Παραβολῆς Ἀξονι συμπίπτεσα κατὰ τὸ Τ, ἀπὸ
 δὲ τῆς Τ τῇ Κεκλιμένῃ ΦΜ κάθετος ἡ ΤΕ, τὸ
 ἀπ' αὐτῆς καὶ τῆς ἐπαφῆς ἀπολαμβάνομενον τῆς
 Κεκλιμένης μέρος τὸ ΜΕ ἴσον ἔσται τῷ τῆς ὀρθίας
 πλευρᾶς ἡμίσει. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῆς Μ ἡ ΜΣ τῷ
 Ἀξονι ΑΥ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ ἡ γωνία ΣΜΖ=
 ΦΜΔ, (γ) ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΥΜΖ ἴση ὅλῃ τῇ
 ΥΜΔ· (δ) ἑκατέρα γὰρ ὀρθή· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΥΜΣ
 ἴση λοιπῇ τῇ ΥΜΕ. ἔστι δὲ ἡ ΥΜΣ = ΜΥΚ, (ε)
 ἄρα καὶ ἡ ΥΜΕ = ΜΥΚ. ἔστι δὲ τῶν τριγώνων ΕΜΥ,
 ΚΜΥ καὶ γωνία ἡ ΥΕΜ = ΥΚΜ· (ς) ἑκατέρα γὰρ
 ὀρθή· καὶ ἡ ΥΜ πλευρὰ κοινὴ, ἄρα καὶ ἡ ΕΜ =
 ΚΥ. (η) ἀλλ' ἡ ΚΥ ὑποκάθετος ἔσται, ἴση ἐστὶ τῷ
 τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ἡμίσει, (θ) καὶ ἡ ΕΜ ἄρα
 ἴση τῷ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ἡμίσει.

Σ'. Εἰάν ἀπὸ δύο τυχόντων τῆς Παραβολῆς σημείων,
 τῶν Π, Μ ἐπιζευχθῶσι μὲν ἐπὶ τὴν Ἐσίαν Φ αἱ
 ΠΦ, ΜΦ, ἀχθῶσι δὲ ἐφαπτόμεναι αἱ ΠΤΓ, ΜΓΟ,
 τῷ μὲν Ἀξονι κατὰ τὰ Τ καὶ Ο σημεία, ἀλλή-
 λαις δὲ κατὰ τὸ Γ συμβάλλουσαι, ἔσεται ἡ ὑπὸ τῶν
 ἐπιζευχθεῖσων περιεχομένη γωνία ΠΦΜ διπλασία τῆς
 ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχομένης ΠΓΜ. ἐπεὶ γὰρ
 ἡ ΠΦ = ΦΤ. (ι) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΦΠΤ = ΦΤΠ.
 (κ) ἀλλ' ἡ γωνία ΠΦΥ = ΦΠΤ + ΦΤΠ. (λ) ἡ ἄρα
 ΠΦΥ διπλασία τῆς ΦΤΠ, εἴτεν τῆς ΟΤΓ. (μ) διὰ
 τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται καὶ ἡ ΜΦΥ διπλασίον
 τῆς

(γ) Κατὰ τὴν ζ'. (δ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὴν κδ'. τῆ α'.
 (ς) Ἐξ ὑποθ. (η) Κατὰ τὴν κς'. τῆ α'. (θ) Κατὰ τὴν
 Πόρις. τὸ μετὰ τὴν δ. (ι) Κατὰ τὴν α'. Συνίσ. τῆς ε'.
 (κ) Κατὰ τὴν ε'. τῆ α'. (λ) Κατὰ τὴν λδ'. τῆ α'. (μ) Κα-
 τὰ τὴν α'. τῆ α'.

τῆς ΤΟΓ. αἱ ἄρα ΠΦΥ+ΜΦΥ, εἴτεν ἡ ΠΦΜ διπλασία τῆς ΟΤΓ+ΤΟΓ. ἀλλ' ἡ ΟΤΓ+ΤΟΓ=ΠΓΜ. (ν) ἡ ἄρα ΠΦΜ διπλασία τῆς ΠΓΜ.

Ζ'. Εἰάν ἄρα ἀπὸ τῆς Ε΄ τῆς Φ διαχθῇ τις εὐθεῖα ἡ ΨΜ τῇ Παραβολῇ κατὰ τὰ Ψ, Μ σημῆα συμβάλλουσα, ἀπὸ δὲ τῶν Ψ Μ ἐφαπτόμεναι ἀχθῶσιν αἱ ΨΔ, ΜΔ, κατὰ τὸ Δ συμπίπτουσαι, ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενη γωνία ΨΔΜ ὀρθὴ ἔσται. αἱ γὰρ ΨΦΥ, ΜΦΥ διπλασίαί εἰσιν τῆς ΨΔΜ, (ξ) ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. (ο)

Η'. Ἡ αὐτὴ ΨΜ εἰάν παράλληλος ᾗ τῇ ΛΧ τῇ κατὰ τὸ Λ τῆς Παραβολῆς ἐφαπτομένη, (χ. 2.) ἴση ἔσται τῇ ὀρθῇ πλευρᾷ τῆς Δευτερείας Διαμέτρου ΔΛΓ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΨΝ=ΝΜ, (π) ἡ δὲ γωνία ΨΔΜ ὀρθή, (ρ) ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ Ν, διασηματι δὲ ὁποτέρᾳ τῶν ΝΨ, ΝΜ γραφόμενος κύκλος διὰ τῶ Δ ἦξει. (σ) αἱ ἄρα ΨΝ, ΝΔ, ΝΜ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν. ἀλλ' ἡ ΝΔ ὕψατομένη ἔσται, διπλασία ἐστὶ τῆς Ἀποτετμημένης ΛΝ. (τ) ἄρα ἡ ΨΜ διπλασία ἔσται τῆς ΝΔ, τετραπλασία ἐστὶ τῆς ΛΝ. ἀλλὰ τῇ ΛΝ ἴση ἡ ΦΧ. (υ) ἡ ἄρα ΨΜ τετραπλασία τῆς ΦΧ, εἴτεν ἴση τῇ ὀρθῇ πλευρᾷ τῆς Δευτερείας Διαμέτρου ΔΛΓ. (φ)

Θ'. Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἡ ἀπὸ τῶ Φ ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευχθῆσα ΦΔ, πρὸς ὀρθάς ἐστὶ τῇ ΨΜ, καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν τμημάτων 2 μά-

(ο) Κατὰ τὴν λθ'. τῶ α'. (ξ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (ο) Κατὰ τὴν ιγ. τῶ α'. (π) Κατὰ τὴν ι'. (ρ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (σ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν η'. τῶ ε'. (τ) Κατὰ τὸ Πόρις. τὸ μετὰ τὴν δ'. (υ) Κατὰ τὴν λθ'. τῶ α'. (φ) Κατὰ τὴν ε'.

μάτων τῆς ΨΜ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, εἶπεν τὸ $\Phi\Delta^2 = \Psi\Phi \cdot \Phi\text{Μ.}$ ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ $\Phi\Delta$, ἴση ἔσται τῇ $\Phi\chi$. (χ) ἀλλ' ἡ $\Phi\chi = \text{ΝΛ}$, (ψ) ἡ δὲ $\text{ΝΛ} = \Delta\Delta$. (ω) αἱ τρεῖς ἄρα ΝΛ , $\Lambda\Phi$, $\Delta\Delta$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ Λ , διαστήματι δὲ μιᾷ τῶν εἰρημένων ἴσων ἐυθειῶν γραφόμενος κύκλος διὰ τῆς Φ ἤξει. ἔκκεν ἡ γωνία $\Delta\Phi\text{Ν}$ ὀρθή-εστιν. (α) ἡ ἄρα $\Phi\Delta$ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΨΜ. ἐπεὶ δὲ καὶ γωνία ἡ $\Psi\Delta\text{Μ}$ ὀρθή ἐστι, (β) τὸ ἄρα $\Phi\Delta^2 = \Psi\Phi \cdot \Phi\text{Μ.}$ (γ)

Ι'. Ἡ τῆς ὀρθῆς γωνίας $\Psi\Delta\text{Μ}$ κορυφή ἐν τῇ τῆς Μετεωρισμῶ ἐυθείᾳ ΒΥ καίται. ἐστὶ γὰρ ἡ μὲν $\Phi\Delta = \Delta\Delta$, ἡ δὲ $\Phi\Lambda = \Lambda\text{Β.}$ (δ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Τὸ ὑπὸ τῆς τομῆς καὶ τῆς ὁποιασὲν τεταγμένης καὶ τῆς ὑπ' αὐτῆς ἀποτεμνομένης περιεχόμενον παραβολικὸν χωρίον ἴσον ἐστὶ δυσὶ τριτημορίοις τῆς ὀρθογωνίας τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς τεταγμένης, καὶ τῆς ὑπ' αὐτῆς ἀποτεμνομένης περιεχομένης.

Ἐξω Παραβολὴ ἡ $\Lambda\text{ΖΓ}$, ἥς Διάμετρος μὲν ἡ $\Lambda\text{Π}$, τεταγμένη δὲ ἐπ' αὐτὴν ἡ $\Gamma\text{Π}$, καὶ ἡ ὑπ' αὐτῆς ἀποτεμνομένη ἡ $\Lambda\text{Π}$. ἔξω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma\text{Π}$, $\Lambda\text{Π}$ ὀρθογωνίον τὸ ΠΒ . λέγω, ὅτι τὸ παραβολικὸν χωρίον $\Lambda\text{ΖΓΠ}$ ἴσον ἐστὶ δυσὶ τριτημορίοις τῆς ΠΒ ὀρθογωνίας, εἶπεν τὸ $\Lambda\text{ΖΓΠ}$, πρὸς τὸ ΠΒ λόγον ἔχει, ὅν ὁ 2 : 3. ἤ. 3.

ΚΑ.

(χ) Ὅρα τὴν α. Συνέπ. τῆς ε'. (ψ) Κατὰ τὴν λδ. τῆς α. (ω) Ἐκ τῆς α. Συνέπ. τῆς ε. δῆλον. (α) Κατὰ τὴν λδ. τῆς ε'. (β) Κατὰ τὴν προλ ζ. Συνέπ. (γ) Κατὰ τὴν α. Συνέπ. τῆς η. τῆς ε'. (δ) Ὅρα τὴν β. Συνέπ. τῆς ζ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπιζευχθείσης ἀπὸ τῆς Α ἐπὶ τὸ Γ τῆς τὴν τομὴν ὑποτεταμένης ΑΓ, ἀνήχθω ἀπὸ τῆς τυχόντες τῆς ἀποτετμημένης σημείῳ Μ τετεγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον ἢ ΜΖ, ἥτις ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν ΒΓ κατὰ τὸ Ψ. καὶ ἀπὸ τῆς Ζ ἤχθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΠ, ΒΓ παράλληλος ἢ ΔΖΦ. περιενεχθήτω δὲ τὸ ΠΒ ὀρθογωνιον συν τῷ τριγώνῳ ΑΓΒ περὶ τὴν ΑΒ ἕως εἰς ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι. ἔκθ᾽ ἀπὸ μὲν τῆς ὀρθογωνίας ΠΒ Κύλινδρος, ἀπὸ δὲ τῆς τριγώνου ΑΓΒ Κώνος γίνεται. (ε)

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς $\overline{ΓΠ}^2 : \overline{ΖΜ}^2 :: ΑΠ : ΑΜ$. (ζ) ἀλλ' ἡ μὲν $\overline{ΓΠ} = ΑΒ$, ἡ δὲ $\overline{ΖΜ} = ΑΔ$, ἡ δὲ $ΑΠ = ΔΦ$, ἡ δὲ $ΑΜ = ΔΖ$. (η) ὡς ἄρα $\overline{ΑΒ}^2 : \overline{ΑΔ}^2 :: ΔΦ : ΔΖ$. ἔστι δὲ ὡς $\overline{ΑΒ}^2 : \overline{ΑΔ}^2 :: \overline{ΒΓ}^2 : \overline{ΔΕ}^2$. (θ) ἔστι γὰρ ὡς $ΑΒ : ΑΔ :: ΒΓ : ΔΕ$. (ι) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΒΓ}^2 : \overline{ΔΕ}^2 :: ΔΦ : ΔΖ$, (κ) ἔστι τὴν ὡς $\overline{ΔΦ}^2 : \overline{ΔΕ}^2 :: ΔΦ : ΔΖ$. ἔστι δὲ αἷς $\overline{ΔΦ}^2 : \overline{ΔΕ}^2$ ἕτως ὁ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ κύκλος, εἰ ἡμιδιάμετρος ἢ ΔΦ, πρὸς τὸν ἐν τῷ Κώνῳ κύκλον, εἰ ἡμιδιάμετρος ἢ ΔΕ. (λ) ὡς ἄρα ὁ ῥηθείς ἐν τῷ Κυλίνδρῳ κύκλος, πρὸς τὸν ῥηθέντα ἐν τῷ Κώνῳ κύκλον, ἕτως ἢ $ΔΦ : ΔΖ$, εἰτεν ἕτως ὅλη ἢ εὐθεία, ἢ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ΠΒ, πρὸς τὸ μέρος αὐτῆς τὸ ἐν τῷ μικτογραμμῷ τριγράμμῳ ΑΖΓΒ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ πᾶς κύκλος ὁ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ, πρὸς πάντας κύκλον τὸν ἐν τῷ Κώνῳ λόγον ἔχει, ὃν ὅλη ἢ εὐθεία ἢ ἐν τῷ ὀρθο-

Θ 3

90.

- (ε) Κατὰ τὸν β', καὶ γ'. Ὅρισμ. τῆς ιβ'. (ζ) Κατὰ τὴν α'.
 (η) Κατὰ τὴν λδ'. τῆς α'. (θ) Κατὰ τὴν ζ'. Θεώρ. τῶν μετα-
 τὰ ε'. βιβλ. (ι) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (κ) Κατὰ τὴν ε'.
 καὶ δ'. (λ) Κατὰ τὴν β'. τῆς ιβ'.

Θεγωνίῳ, ἡ καὶ διάμετρος τῆς ἐν τῷ Κυλινδρῷ κύκλου, πρὸς τὸ μέρος τῆς αὐτῆς εὐθείας τὸ ἐν τῷ εἰρημένῳ τριγράμμῳ. ἄρα καὶ πάντες οἱ ἐν τῷ Κυλινδρῷ κύκλοι, πρὸς πάντας τὰς ἐν τῷ Κῶνῳ κύκλους, ἔτω πάσῃ αἰ εὐθεῖα αἰ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ΠΒ, πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἐν τῷ τριγράμμῳ ΑΖΓΒ, εἴτεν ὡς ὁ Κύλινδρος, πρὸς τὸν Κῶνον, ἔτω τὸ ΠΒ, πρὸς τὸ ΑΖΓΒ. ἀλλ' ὡς ὁ Κύλινδρος, πρὸς τὸν Κῶνον, ἔτω 3 : 1. (μ) ἄρα καὶ ὡς ΠΒ : ΑΖΓΒ :: 3 : 1. (ν) καὶ κατὰ ἀνατροπὴν λόγῳ ὡς ΠΒ : ΠΒ — ΑΖΓΒ :: 3 : 3 — 1. εἴτεν ὡς ὀρθογών. ΠΒ, πρὸς τὸ παραβολικὸν χωρίον ΑΖΓΠ :: 3 : 2. καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΑΖΓΠ : ΠΒ :: 2 : 3.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΔΙ.

Α'. Τὸ παραβολικὸν χωρίον ΑΖΓΠ, πρὸς τὸ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον τρίγωνον ΑΓΠ λόγον ἔχει ὃν 4 : 3. ὡς γὰρ ΑΖΓΠ : ΒΠ : 4 : 6. (ξ) ὡς δὲ ΠΒ : ΑΓΠ : 6 : 3. (ο) ὡς ἄρα ΑΖΓΠ : ΑΓΠ : 4 : 3. (π)

Β'. Τὰ παραβολικὰ χωρία ΑΖΓΠ, ΑΝΖΜ λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα, ὃν οἱ ἀπὸ τῶν τετγμένων ΓΠ, ΖΜ κύβοι, εἴτεν εἰν ὡς ΑΖΓΠ : ΑΝΖΜ : ΓΠ³ : ΖΜ³. ἐπεὶ γὰρ ὡς μὲν ΑΖΓΠ : ΠΒ :: 2 : 3, ὡς δὲ ΑΝΖΜ : ΜΔ :: 2, 3. (ρ) ἄρα καὶ ὡς ΑΖΓΠ : ΠΒ :: ΑΝΖΜ : ΜΔ. (σ) καὶ ἐναλλάξ ὡς ΑΖΓΠ : ΑΝΖΜ :: ΠΒ : ΜΔ. ἀλλὰ ΠΒ : ΜΔ λόγον ἔχει συγκαίμενον ἔκτε τῆς λόγῳ ὃν ἔχει ΓΠ : ΖΜ, καὶ ΑΠ : ΑΜ, (τ)

(μ) Κατὰ τὴν εἰ. πρὸς εἰ. (ν) Κατὰ τὴν εἰ. τῆς εἰ. (ξ) Κατὰ τὴν προκ. πρὸς (ο) Κατὰ τὴν μ. τῆς εἰ. (π) Κατὰ τὴν εἰ. τῆς εἰ. (ρ) Κατὰ τὴν προκ. πρὸς. (σ) Κατὰ τὴν εἰ. τῆς εἰ.

(τ) ἔστι δὲ ὡς $ΑΠ: ΑΜ:: ΓΠ^2: ΜΖ^2$. (υ) τὸ ἄρα
 $ΠΒ: ΜΔ$ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῶν λόγων ὃν
 $ἔχει ΓΠ: ΖΜ$ καὶ $ΓΠ^2: ΖΜ^2$, εἴτεν ὡς $ΠΒ: ΜΔ::$
 $ΓΠ^3: ΖΜ^3$. (φ) ἄρα καὶ ὡς $ΑΖΓΠ: ΑΝΖΜ::$
 $ΓΠ^3: ΖΜ^3$. (χ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Ἐὰν περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον δύο γρα-
 φῶσι Παραβολαί, ἐυρεθῇ δὲ μέση ἀνάλο-
 γον τῶν ὀρθιῶν αὐτῶν πλευρῶν, τὰ παρα-
 βολικὰ χωρία, τὰ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενα
 λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα ὃν τῆς ἐτέρας ἢ
 ὀρθία πλευρὰ, πρὸς τὴν ῥηθεῖσαν μέσην
 ἀνάλογον.

Ἔσωσαν Παραβολαί περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον $ΑΠ$,
 ἢ $ΑΔΜ$, ἥς ὀρθία πλευρὰ ἢ $ΑΖ$, καὶ ἢ $ΑΒΕ$, ἥς
 ὀρθία ἢ $ΑΓ$, μέση δὲ ἀνάλογον τῶν $ΑΖ$, $ΑΓ$, ἢ
 $ΑΝ$. καὶ τετάχθω ἀπὸ τῆς $Μ$ ἐπὶ τὴν Διάμετρον
 $ΠΑ$ ἢ $ΜΕΠ$. λέγω ὅτι ὡς $ΑΜΠ: ΑΕΠ:: ΑΖ: ΑΝ$.
 πίν. Γ. χ. 4.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν $ΜΠ^2 = ΑΠ \cdot ΑΖ$, τὸ δὲ $ΕΠ^2 = ΑΠ \cdot ΑΓ$. (ψ)
 ὡς ἄρα $ΜΠ^2: ΕΠ^2:: ΑΠ \cdot ΑΖ: ΑΠ \cdot ΑΓ$. ἢ ὡς $ΑΠ \cdot ΑΖ:$
 $ΑΠ \cdot ΑΓ:: ΑΖ: ΑΓ$. (ω) ὡς ἄρα $ΜΠ^2: ΕΠ^2:: ΑΖ:$
 $ΑΓ$. (α) ἐπεὶ δὲ ὡς $ΑΖ: ΑΝ: ΑΝ: ΑΓ$, (β) ἔστιν ἄρα
 καὶ

© 4

(τ) Κατὰ τὴν κγ. τῆς ε'. (υ) Κατὰ τὴν α. (φ) Κατὰ τὸν ζ.
 ὀρίσμ. τῆς ι. καὶ τὴν μετὰ τὸν η. τρίτ. Συνίπ. (χ) Κατὰ
 τὴν ι. τῆς ι. (ψ) Κατὰ τὴν β. (ω) Κατὰ τὴν α. τῆς ε'.
 (α) Κατὰ τὴν ι. τῆς ι. (β) Ἐξ ὁμοθ.

καὶ ὡς $AZ : AG :: \overline{AZ}^2 : \overline{AN}^2$. (γ) ὡς ἄρα $\overline{MP}^2 : \overline{EP}^2 :: \overline{AZ}^2 : \overline{AN}^2$. (δ) ἔκιν καὶ ὡς $MP : EP :: AZ : AN$. (ε) διὰ τὰ αὐτὰ ἐν δ. ἐκτιθέσθαι, ὅτι καὶ πᾶσα τεταγμένη ἐν τῷ AMP χωρίῳ, πρὸς πᾶσαν τὴν ἐν τῷ AEP καὶ μέρος αὐτῆς ἔσται λόγον ἔχει, ὃν ἡ $AZ : AN$. δ. καὶ πᾶσαι αἱ τεταγμέναι αἱ ἐν τῷ AMP , πρὸς πάσας τὰς ἐν τῷ AEP καὶ μέρη αὐτῶν ἔσται, λόγον ἔχουσιν, ἐν ἡ $AZ : AN$. καὶ τὸ παραβολικὸν ἄρα χωρίον AMP , πρὸς τὸ AEP λόγον ἔχει ὃν $AZ : AN$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Δοθέντες τῷ λόγῳ ἐν ἔχει πρὸς ἄλληλα δύο παραβολικὰ χωρία, καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς τῆς ἐτέρας τῶν Παραβολῶν, εὐρεθήσεται καὶ τῆς ἐτέρας ἡ ὀρθία πλευρά, δι' ἧς γραφήσεται. ἔσω γὰρ ὁ λόγος ὃν ἔχει τὸ AMP , πρὸς τὸ AEP ὁ αὐτὸς ὡς ἔχει ἡ ὀρθία AZ τῆς Παραβολῆς AM , πρὸς τινὰ εὐθεταν τὴν AN . καὶ εὐρεθήτω τῶν AZ , AN τρίτη ἀνάλογον, ἡ AG . ἔκιν ἡ AG ἡ ὀρθία ἐστὶ, δι' ἧς γραφήσεται ἡ Παραβολή, ἧς τὸ χωρίον AEP , πρὸς τὸ AMP λόγον ἔχει ὃν $AN : AZ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Ἐὰν Παραβολὴ σὺν τῷ περὶ αὐτὴν ὀρθογωνίῳ περὶ τὸν ἐαυτῆς Ἀΐξονα περιενεχθῇ ἕως ὅτε ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο Φέρεσθαι, ἡ ἀπὸ τῆς Παραβολῆς γενομένη Κωνοὶς ἡμίσηται ἔσται τῷ ἀπὸ τῷ ὀρθογωνίῳ γενομένῳ Κυλίνδρῳ.

Ἐσθ

(γ) Κατὰ τὸ β. περίσ. τῷ ε. (δ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (ε) Κατὰ τὸ ζ. τῶν Θιαρ. τῶν μετὰ τὸ ε βιβλ.

Ἐς τὴν Παραβολὴν ἡ ΑΖΓ, καὶ περὶ αὐτὴν ὀρθογώνιον τὸ ΠΒ, καὶ σὺν αὐτῷ περιενεχθήτω περὶ τὸν ἑαυτῆς Ἄξονα ΑΠ, καὶ ἀποκατασταθήτω ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς Παραβολῆς ΑΖΓ Κωνοῖς ἡμίσειά ἐστι τῆ ἀπὸ τῆς ὀρθογωνίας ΠΒ Κυλινδρ. Πίν. 5. κ. 3.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ὁ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ κύκλος, ὃ ἡμιδιάμετρος ἡ ΜΨ, πρὸς τὸν ἐν τῇ Κωνοίδι κύκλον, ὃ ἡμιδιάμετρος ἡ ΜΖ, ἔτω $\overline{ΜΨ}^2 : \overline{ΜΖ}^2$, (ζ) ἔτιαν ἔτω $\overline{ΠΓ}^2 : \overline{ΥΖ}^2$. ἐστὶ δὲ ὡς $\overline{ΠΓ}^2 : \overline{ΜΖ}^2 :: ΑΠ : ΑΜ$, (η) καὶ ὡς ΑΠ : ΑΜ :: ΠΓ : ΜΟ, (θ) ἤτοι ἔτω ΜΨ : ΜΟ. ὡς ἄρα ὁ ῥηθεὶς ἐν τῷ Κυλίνδρῳ κύκλος, πρὸς τὸν ῥηθέντα ἐν τῇ Κωνοίδι κύκλον, ἔτω ΜΨ : ΜΟ, ἤτοι ἔτως ἡ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ΠΒ εὐθεΐα, πρὸς τὸ μέρος αὐτῆς, τὸ ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΠΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι καὶ πᾶς κύκλος ὁ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ, πρὸς πάντας κύκλον τὸν ἐν τῇ Κωνοίδι λόγον ἔχει, ὃν ἡ εὐθεΐα ἡ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ΠΒ, ἡ καὶ ἡμιδιάμετρος τῆ ἐν τῷ κυλίνδρῳ κύκλου, πρὸς τὴν εὐθεΐαν τὴν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΠΓ, τὴν καὶ μέρος αὐτῆς ἔσαν, καὶ ἡμιδιάμετρον τῆ ἐν τῇ Κωνοίδι κύκλου. διὸ καὶ πάντες οἱ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ κύκλοι, πρὸς πάντας τὰς ἐν τῇ Κωνοίδι λόγον ἔχουσιν, ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεΐαι αἱ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ΠΒ, πρὸς πᾶσας τὰς εὐθείας τὰς ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΠΓ. καὶ ὁ Κύλινδρος ἄρα ὁ ἀπὸ τῆς ΠΒ, πρὸς τὴν Κωνοίδα τὴν ἀπὸ τῆς ΑΖΓ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὀρθογώνιον ΠΒ, πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΠΓ. ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΠΑΓ τὸ ἥμισυ ἐστὶ τῆς ΠΒ ὀρθογωνίας. καὶ ἡ Κωνοὶς ἄρα ἡ ἀπὸ τῆς ΑΖΓ Παραβολῆς, ἡμίσειά ἐστι τῆς Κυλινδρ. τῆς ἀπὸ τῆς ΠΒ ὀρθογωνίας.

(ζ) Κατὰ τὴν β' τῆς ιβ'. (η) Κατὰ τὴν α'. (θ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'.

Περὶ τῆς χρησέως τῆς Παραβολῆς.

Α'. Τὰ τῇ ἰδίᾳ βαρύτητι ἐπὶ τὰ κάτω φερόμενα σώματα, διαστήματα διήσιν, ὡς ἡ πῆρα δεικνυσί, τοῖς ἀπὸ τῶν ταχυτήτων, ἅς κτῶνται, ἢ τοῖς ἀπὸ τῶν καταναλισκόμενων ἐν τῇ Φορᾷ χρόνων τετραγώνοις ἀνάλογα. τῷ σώματος ἐν τῷ διατῆς ΑΠ ἐπὶ τὰ κάτω φερόμενον, τὰς ταχυτήτας καὶ τὰς καταναλωθέντας χρόνους ἐμφαίνουσιν αἱ τῆς γραφείας Παραβολῆς ΑΜ τεταγμέναι ΔΦ, πμ, ΠΜ. ἐστὶ γὰρ ὡς ΑΔ : Απ :: ΔΦ² : πμ². (1) ὅπερ ἐστὶ τὰ διαστήματα ΑΔ, Απ, τοῖς ἀπὸ τῶν ταχυτήτων, ἢ τῶν χρόνων τετραγώνοις ἀνάλογον. εἰν ἔν ἡ μὲν ΑΔ = 1, ἡ δὲ Απ = 3, ἡ δὲ ΑΠ = 5, τὸ ἐπὶ τὰ κάτω φερόμενον σῶμα ἐπὶ μὲν τὸ Δ ἤξαν, ταχυτῆτα ἔχα 1, καὶ ὁ καταναλωθεὶς δὲ χρόνος ἐν τῇ Φορᾷ, 1 ἐστίν· ἐπὶ δὲ τὸ π, 9· ἐπὶ δὲ τὸ Π καταντῆσαι, 25. πίν. Γ. χ. 3.

Β'. Πᾶν σῶμα εἴτε παραλλήλῳ, εἴτε πλαγίᾳ τῷ ὀρίζοντι ῥιπτόμενον Φορᾷ, καμπύλην καταγάφει κνέμενον, οἷον τὸ τῇ ΑΡ ῥιπτόμενον Φορᾷ, ἐδὲ διατῆς ΑΡ, ἐδὲ διατῆς ΑΠ φέρεται εὐθείας, ἀλλὰ διατῆς ΑΜ καμπύλης. ἥτις δὴ ἡ Παραβολή ἐστὶ καὶ γὰρ ἐν τοῖς περὶ κινήσεως τῶν σωμάτων θεωρήμασι δεικνύται, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετραγώνων τῶν ἐν τῇ καμπύλῃ τῇ ὑπὸ τῷ ῥιπτομένῳ σώματος γραφομένη, λόγον ἔχει πρὸς ἀλλήλα, ὅν αἱ ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνόμεναι. τῷτο δὲ τῆς Παραβολῆς σύμπτωμεν, ὡς δῆλον.

ΣΗ.

(1) Κατὰ τὴν α'. πρότ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον, ὅτι ἐπὶ τούτῳ καὶ ἄλλοις τῆς Παραβολῆς ιδιώμασι πάντες ἴδρυνται οἱ κανόνες τῆς καλεσμένης Σφαιρικῆς, ἔσται τῆς τέχνης τὸ ἐπὶ τὸν σκοπὸν εὐδυνεῖν τὰς ἐκ τῶν πυροβόλων ὅπλων ἐξωθούμενας σφαίρας.

Γ'. Αἱ ταχυτῆτες τῆ ἀπότινος σκέυης ἐκβλύζοντες ῥευσῶν ὑποδιπλασίονα λόγον ἔχουσι, κατὰ τὰς ὑγροστατικὰς καύοντας, ἢ περὶ τὰ τῶ ῥευσῶ ὕψη. οἷον, εἰάν ἐκ τῆς ὀπῆς Α (πίν. 5. χ. 4) τῶ σκέυης ΒΑΔ ῥευσὸν ἐκτρέῃ, ἢ ταχυτῆς αὐτῆς, ὅτε ὕψος ἔχει τὸ ΑΠ, πρὸς τὴν ταχυτῆτα αὐτῆς, ὕψος ἔχοντος τὸ Απ λόγον ἔχει ὑποδιπλασίονα ἢ περὶ ΑΠ: Απ, ἔσται ἐστὶν ὡς $\sqrt{ΑΠ} : \sqrt{Απ}$. γραφείσης ἔν τῆς ΑΜ Παραβολῆς, κορυφὴν μὲν ἔχέσης τὸ Α, Διάμετρον δὲ, τὸ τῶ ῥευσῶ μέγιστον ὕψος ΑΠ, αἱ τεταγμένα ΠΜ, πμ τὰς τῶ ῥευσῶ ταχυτῆτας δηλώσουσιν. ἔστι γὰρ ὡς ΠΜ: πμ :: $\sqrt{ΑΠ} : \sqrt{Απ}$. (κ)

Δ'. Εἰάν κάτοπτρα μεταλλικά, κτελάτε καὶ παραβολικά ἀπέναντι τῶ Η' λίσ τεθῇ, ὅσαι τῶν ἀκτίνων αὐτῶ παραλλήλοι τῶ τῆς Παραβολῆς Ἀξονι ΑΚ (πίν. Ε. χ. 1.) προσπίπτουσιν, οἷον αἱ ΡΜ, ρμ, ΖΗ, ζη ἀνακλασθεῖσαι, κατὰ τὸ τῶ Ἀξονος σημεῖον Φ ἀλλήλαις συμβάλλουσι, τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀπέχον, ἀποστήματι τῶ ΦΑ ἴσῳ τεταρτημερίῳ τῆς ὁρθῆς πλευρᾶς, ὡς αἱ ΜΦ, μφ, ΗΦ, ηφ. ἐπεὶ γὰρ ἡ λεγομένη τῆς πτώσεως γωνία, τῶτέστιν ἡ ΡΜΨ, ἡ ὑπὸ τῆς προσπίπτουσης ἀκτίνος ΡΜ καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΤΨ περιεχομένη, ἴση τῇ τῆς ἀνακλάσεως, ἦτοι

(κ) Κατὰ τὴν α'. Συνέκ. τῆς α'. σελ.

ἤτοι τῇ ὑπὸ τῆς ἀνακλαθείσης ΜΦ καὶ τῆς αὐ-
τῆς ἐφαπτομένης ΤΨ περιεχομένην ΤΜΦ, αἱ ἐν τοῖς
ὀπτικοῖς διὰ πείρας δείκνυται· ἴση δὲ ἡ ΡΜΨ τῇ
ΤΜΦ γίνεται, εἰάν ἡ ΦΜ ἀνακλαθεῖσα κατὰ τὸ
Φ τῷ Ἀξονι συμβάλλῃ (λ) ἡ ἄρα ΡΜ ἀνακλα-
θεῖσα κατὰ τὸ Φ συμπίπτει. τὸ αὐτὸ δὲ ῥητέον
καὶ περὶ πάσης ἀκτίνος πρὸς τὸ κατόπτρον προσ-
πίπτουσας πλεονάλλῃ τῷ Ἀξονι. δῆλον ἄρα ὅτι πᾶ-
σαι αἱ τῷ Ἡλίῳ ἀκτῖνες αἱ τῷ παραβολικῷ κατόπ-
τρῳ προσπίπτουσαι παράλληλοι τῷ Ἀξονι, κατὰ τὸ
Φ ἀλλήλαις συμβάλλουσι μετὰ τὴν ἀνάκλασιν. ἐ-
πεὶ δὲ ἡ ἐπὶ τὸ Φ τῶν ἀκτίνων σύμπτωσις τοσού-
τον τὴν τῆς θερμότητος ἐπιτείνει δύναμιν, ὥστε τὰ
ἐν αὐτῷ τιθέμενα σώματα φλέγεσθαι καὶ κατα-
πύμπρασθαι, διὰ τούτου τὸ σημεῖον Φ ἐςίᾳ ἐκλήθη.

Ε'. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, εἰάν ἐν τῇ Εἰσία Φ λαμ-
πὰς τεθῇ, αἱ ἐξ αὐτῆς ἐκπεμπόμεναι, καὶ τῷ
παραβολικῷ κατόπτρῳ προσπίπτουσαι τῷ Φωτὸς ἀκ-
τῖνες, οἷον αἱ ΦΜ, Φμ, ΦΗ, Φη, ἀνακλαθεῖσαι,
παράλληλοι τῷ ΑΚ Ἀξονι γίνονται, ὡς αἱ ΜΡ,
μρ, ΗΖ, ηζ. ὣτως ἔν ἐνεσι τὸ τῆς λαμπρόδος Φῶς
ἀπαραμείωτον ἐπιμηκίσει παρτεῖναι διαστήμασιν.
ἐπεὶ γὰρ αἱ φωτιστικαὶ ἀκτῖνες μετὰ τὴν ἀνάκλα-
σιν ἐκ ἀπ' ἀλλήλων ἀφιστάμεναι, ἀλλὰ παράλληλοι
τῷ Ἀξονι καὶ ἀλλήλαις φερόμεναι ἐπεκτείνονται,
τὴν αὐτὴν πυκνότητα πανταχῶς διατηρεῖσαι, ἔδε-
μίαν τῆς ἐαυτῶν πάχους δυνάμεως μείωσιν.

Ζ'. Οὐ μόνον δὲ τὸ Φῶς, ἀλλὰ καὶ ἡ καυσικὴ δύνα-
μις διὰ τῶν παραβολικῶν ἐπεκτείνεται κατόπτρων.
εἰάν γὰρ δύο παραβολικὰς σίφωνας, Α καὶ Β,
(πίν.

(πίν. ζ'. χ. 5.) ὧν ὁ Α πολλῶ μείζων τῷ Β, ἔτω κερμάσης, ὥστε ἐκτὸς αὐτῶν τὰς αὐτῶν πίπτειν Ἑσίας, τάξης δὲ αὐτῆς, ὥστε τὲς μὲν Ἀξονας ἐπ' εὐθείας κείσθαι, τὰς δὲ Ἑσίας αὐτῶν συμβάλλειν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ, αἱ πρὸς τὸν μείζονα τὸν Α προσπίπτουσαι ἡλιακαὶ ἀκτίνες Η, Η παράλληλοι τῷ Ἀξονι ΑΔ, ἀνακλαθεῖσαι συμβαλῶσι μὲν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ, ἐκείθεν δὲ ὡς ἐκ λαμπάδες προϊῶσαι, καὶ ἐντὲς τῷ Β σίφωνος προσπεσῶσαι, παράλληλοί τε μετὰ τὴν ἀνάκλασιν τῷ Ἀξονι αὐτῷ ΔΒ γεόμεναί, ἐπὶ τὰ Ε, Ε μέρη ἐνεχθήσονται. διὰ δὲ τὸ πάνυ πεπυκνωμέναις εἰς τὸν Β σίφωνα εἰσίναι, καὶ μὴ ἀπ' ἀλλήλων ἀφισαμέναις, ἀλλὰ παραλλήλαις ἐξίεναι, τὴν φλεκτικὴν ἔχουσι δύναμιν.

Ζ'. Ἐὰν δὲ ἡ τῷ τόπῳ θίσις, ἐν ᾧ τὸ καυθησόμενον κῆται σῶμα, τὸ ἐπ' εὐθείας τὲς τῶν παραβολικῶν σίφωνων Ἀξονας κείσθαι ἀπείργῃ, μικρὸν παραβολικὸν κυρτὸν κάτοπτρον, τὸ ΔΒ ἔτω τάξον μεταξὺ τῷ παραβολικῷ σίφωνος Α (πίν. Ζ. χ. 1.) καὶ τῆς Ἑσίας αὐτῆς, ὥστε ταυτίζεσθαι μὲν τὰς ἐκατέρων Ἑσίας, περιάγεσθαι δὲ περὶ τὴν κοινὴν Ἑσίαν, ἀνάγεσθαι τε καὶ κατὰγεσθαι. ἔτω γάρ ὅπως ἂν βέλη τὴν πυρώδη διευθυνεῖς δύναμιν. ἔσω μὲν γὰρ ὁ τόπος ἐν ᾧ τὸ καταφλεχθησόμενον σῶμα ὁ Π, καὶ περιενεχθήτω τὸ ΔΒ κάτοπτρον, ἕως ἧς ὁ Ἀξων αὐτῷ ἐπ' εὐθείας ἢ τῷ Π. ἔκθῃ αἱ ἡλιακαὶ ἀκτίνες αἱ πρὸς τὸ κοῖλον τῷ παραβολικῷ σίφωνος Α προσπεσῶσαι τῷ ἑαυτῷ Ἀξονι παράλληλοι, ἐπὶ τὴν κοινὴν Ἑσίαν μετὰ τὴν ἀνάκλασιν συμπεσεῖν σπένδουσι πίπτουσι δ' ἐν ὁμῳ πρὶν ἢ ἀλλήλαις συμβαλεῖν ἐπὶ τὸ κυρτὸν τῷ μεταξὺ κατόπτρῳ ΔΒ. διὸ ἀνακλαθεῖσαι, καὶ παράλληλοι τῷ τῷ ΔΒ κατόπτρῳ Ἀξο-

*Αἴονι γεινόμεναι, (μ) ἐπὶ τὸ Π πεπυκνωμέναι φέρονται καὶ κυνικαί.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Περὶ θανόν ἔν ἔοικεν τὸ παρὰ τινων (*) καθιζομένην ἀξιοπίστων ἀμείλαιοι τὸν μὲν Ἀρχιμήδην τὰς τῶν Ῥωμαίων ναῦς ἐγγύς τῆς Συρακῆς, τὸν δὲ Περικλὸν τὸν τῷ Οὐιταλινῷ σχολὸν πλησίον τῷ Βυζαντίῳ κατακαῦσαι. καὶ γὰρ ἐν τῇ Ἑσίᾳ, ἡ ἀλλήλαις συμβάλλουσιν αἰάντινες, τὴν μεγίστην ἔχουσι καταφλεκτικὴν δύναμιν, καὶ ἐν ταῖς μετὰ τὴν ἀνάκλασιν μέντοιγε παραλλήλοις τηλικαύτῃ ἐνυπάρχει ἰχὺς, ὥστε καταφλέγειν μὲν τὰ ἐμψυχα, ἀναλύειν δὲ τὰ ἀψυχα, καὶ τῶν σφερῶν ἐκβαλεῖν, ὧν τὰ μίση εἰς σφύδρα ἐγκρατῶς συνέχοντα.

Η'. Καὶ σάλπιγγας δὲ παραβολικὰς κατασκευάζουσι, στεντορίους (**) καλεσμένας, δι' ὧν λίαν παρεκτείνεταί ὁ ἦχος. τιθεμένων γὰρ τῷ σώματος ἐν τῇ Ἑσίᾳ Γ (χ. 2.) τῆς ΝΜΚΛ παραβολικῆς σάλπιγγος, αἱ φωνητικαὶ αἰτῆρες (εἶπεν τὰ ὑπὸ τῷ σώματος κινούμενά τε καὶ κυματιζόμενα τῷ αἴερι μύρια) ΓΚ, ΓΑ, ΓΜ, ΓΝ, αἱ πρὸς τὰς τῆς σάλπιγγος πλευρὰς προσπίπτουσαι, παράλληλοι μετὰ τὴν ἀνάκλασιν τῷ Ἀίονι ΓΒ φέρονται, οἷον αἱ ΚΟ, ΛΠ, ΜΡ, ΝΣ, εἰσέρχονται καὶ μὴ ἀπ' ἀλλήλων ἀφιστάμεναι, μηδὲ διασκεδασζόμεναι, ἀλλὰ ἐγγύς ἀλλήλων καὶ πεπυκνωμένα προϊῶσαι, μεγάλῳ παραπίμπτουσι τὴν τῆς φωνῆς τάσιν ἀποσήμετι.

Θ'.

(μ) Ὅρα τὴν α. Συνίπ. τῆς ζ.

(*) Ὅρα τὴν τῷ Οὐολφ. Ὀπτικ. (**) Ἀπὸ τῆς Στίλτορος τῆς χὼν τῇ αἰ τὸν τῆς Τρωάδος πόλεμον ἀφικομένη, καὶ τοσούτων βεβηῶτος ὅσον ὁμῶς ἀνδρῶν παντήκοιτα. περὶ δ' ὅρα τὸν Ὀμαρ.

Θ'. Τῆμπαλιν δὲ συμβαίνει, εἰάν τὸ μὲν ἔς ἐν τῇ Ἑσίᾳ Γ τεθῇ, ὁ δὲ βοῶν ἀπεναντίας ᾗ τῆς σάλπιγγος. αἱ γὰρ Φωνητικαὶ αὐτῇ ἀκτῖνες αἱ εἰς τὴν σάλπιγγα παράλληλοι τῷ Ἀξονι εἰσιῶσαι, καὶ πρὸς τὰς πλευράς αὐτῆς προσπίπτουσαι, οἷον αἱ ΠΛ, ΟΚ, ΣΝ, ΡΜ μετὰ τὴν ἀνάκλασιν κατὰ τὸ Γ συμπίπτουσαι, γεγονωτέραν τὴν Φωνὴν καθιζῶσιν. ὅθεν ἔμῳ τῷ πόρῳ βοῶντος, ἀλλὰ καὶ τῷ λαλῶντος τῶν Φωνῶν ἀκχεῖν ἔνεστιν.

Ι'. Ὡσπερ ἐν τοῖς μύψι τε καὶ πρεσβύψι καὶ γενηράκοσι χρήσιμα τὰ κατασκευαζόμενα Διοπτήρια, ἔτω δὴ καὶ τοῖς ὑποκώφοις τὰ Ἀκρτισήρια· οἷός ἐστιν ὁ κερατοειδὴς παραβολικὸς σίφων ΔΑΔ, (χ. 3.) ὁ πλατύτερος μὲν κατὰ τὰ ΑΑ, ἥπερ κατὰ τὰ ΔΔ μέρη, ὃ ἡ Ἑσία ἐν τῷ Γ. ἐφαρμόζεται δὲ τέτω τὸ κεκρυτωμένον σιφώνιον ΒΔΔ πολλῷ αὐτῷ σενώτερον, καὶ ὁπὴν μικροτάτην ἔχον ἐπὶ τῷ Β. τὸ γὰρ τῷ σιφωνίῳ πέρας Β ἐν τῷ τῆς ἀκοῆς πόρῳ, ὁ δὲ σίφων ἀπέναντι τῷ λαλῶντος τίθεται. καὶ ἐπεὶ αἱ Φωνητικαὶ αὐτῇ ἀκτῖνες, αἱ παράλληλοι τῷ Ἀξονι ταῖς τῷ σίφωνος ἔσω πλευραῖς προσπίπτουσαι, κατὰ τὴν Ἑσίαν Γ μετὰ τὴν ἀνάκλασιν ἀλλήλας συμβάλλουσιν, ἐκῆθεν τε πεπυκνωμέναι διὰ τῷ σιφωνίῳ ΔΔΒ διιῶσαι εἰς τὸν τῆς ἀκοῆς εἰσόδου πόρον, καθάρωτερον ὁ ὑπόκωφος τῆς τῷ λαλῶντος Φωνῆς ἀκχεῖ.



ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τῶν τῆς Ὑπερβολῆς συμπτωμάτων.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'. (*)

Ἐάν ἐν Ὑπερβολῇ εὐθείᾳ ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον, ἔσονται αὐτῶν τετράγωνα ὡς τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας πλευρᾶς τῆς Ὑπερβολῆς.

Ἐστω Ὑπερβολὴ ἡ ZNM, ἥς πλαγία πλευρὰ ἡ ΓΝ, καὶ τεταχθῶσαν ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΝΦ εὐθεῖαι ΖΦ, ΕΠ. λέγω ὅτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα εἰσὶν ὡς τὰ ὀρθογώνια ΝΦ. ΦΓ, ΝΠ. ΠΓ. εἴτεν ὅτι εἰσὶν ὡς $Z\Phi^2 : EP^2 :: N\Phi. \Phi\Gamma : N\Gamma. \Pi\Gamma$. πίν. Β. χ. 4.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῆς Π, καθ' ὃ ἡ τεταγμένη τὴν Διάμετρον τέμνει εὐθεῖα ἡ ΡΠΗ τῇ τῆς βάσεως τῆς Κωνίδιου Διαμέτρῳ ΔΒ παράλληλος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ μὲν ΡΗ παράλληλος ἐστὶ τῇ ΔΒ, (α) ἡ δὲ ΕΙ τῇ ΖΜ, (β) καὶ τὸ ἐπίπεδον ἄρα, τὸ διὰ τῶν ΡΗ,

(*) Τὸ β. μέρος ἐστὶ τῆς κα. τῆς α. βιβλ. τῆς Ἀποδων.

(α) Ἐκ τῆς κατασκευ. (β) Κατὰ τὸν γ. ὁρισμ.

ΡΗ, ΕΙ παράλληλόν ἐστὶ τῷ διὰ τῶν ΔΒ, ΖΜ, εἴτεν
τῇ τῷ Κῶνθ βῆσαι ΔΖΕΜ. (γ) τὸ ἄρα διὰ τῶν ΡΗ,
ΕΙ ἐπίπεδον, κύκλος ἐστίν, ὃ Διάμετρος ἡ ΡΗ. (δ)
ἐπεὶ δὲ ἡ ΕΙ διχα τέτμηται κατὰ τὸ Π, (ε) πρὸς ὁρ-
θὰς ἄρα ἐστὶ τῇ ΡΗ. (ζ) ἔκθ' τὸ μὲν $\overline{ΖΦ}^2 = \Delta\Phi$.
 $\Phi\psi$, τὸ δὲ $\overline{ΕΠ}^2 = \overline{ΡΕ} \cdot \overline{ΠΗ}$. (η) ὡς ἄρα $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2 ::$
 $\Delta\Phi : \Phi\psi : \overline{ΡΕ} \cdot \overline{ΠΗ}$. (θ) ἀλλὰ τὸ $\Delta\Phi : \Phi\psi : \overline{ΡΕ} \cdot \overline{ΠΗ}$
λόγον ἔχει συγχείμενον (ι) ἔκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει $\Delta\Phi :$
 $\overline{ΡΕ} \cdot \overline{ΠΗ}$, ἥτοι $\overline{ΝΦ} : \overline{ΝΠ}$, (κ) καὶ ἐκ τῷ ὃν ἔχει $\Phi\psi :$
 $\overline{ΠΗ}$, εἴτεν $\overline{ΦΓ} : \overline{ΠΓ}$. (λ) ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2$ λό-
γον ἔχει συγχείμενον ἔντε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει $\overline{ΝΦ} : \overline{ΝΠ}$,
καὶ $\overline{ΦΓ} : \overline{ΠΓ}$. ὡς ἄρα $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2 :: \overline{ΝΦ} \cdot \overline{ΦΓ} : \overline{ΝΠ} \cdot$
 $\overline{ΠΓ}$. (μ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἐν
τῇ ἀντικειμένη τομῇ ΧΓΥ, ἐστὶν ὡς $\overline{ΥΟ}^2 : \overline{ΘΗ}^2 :: \overline{ΓΟ} \cdot$
 $\overline{ΟΝ} : \overline{ΓΠ} \cdot \overline{ΠΗ}$.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ. (ν)

Ἐὰν ὁρθία τῆς Ὑπερβολῆς πλευρὰ ἡ ἡ ΝΣ, εἴτεν
ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῷ ὁρθογωνίῳ $\overline{ΝΦ} \cdot \overline{ΦΓ}$, τῷ τε-
τραγώνῳ $\overline{ΖΦ}^2$, καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς $\overline{ΓΝ}$, (ξ)
ἔσεται καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ὁρθογώνιον, εἶεν τὸ $\overline{ΝΠ} \cdot$
 $\overline{ΠΓ}$, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Τετραγμένης $\overline{ΕΠ}$ τετραγώνον,
ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ $\overline{ΓΝ}$, πρὸς τὴν ὁρθίαν ΝΣ. ἐπεὶ
γάρ ὡς $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2 :: \overline{ΝΦ} \cdot \overline{ΦΓ} : \overline{ΝΠ} \cdot \overline{ΠΓ}$, εἴτεν ὡς $\overline{ΝΦ} \cdot$
 $\overline{ΦΓ} : \overline{ΝΠ} \cdot \overline{ΠΓ} :: \overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2$, ἄρα καὶ ἐναλλαξ ὡς $\overline{ΝΦ} \cdot$
 $\overline{ΦΓ} : \overline{ΖΦ}^2 :: \overline{ΝΠ} \cdot \overline{ΠΓ} : \overline{ΕΠ}^2$. ἀλλ' ὡς $\overline{ΝΦ} \cdot \overline{ΦΓ} : \overline{ΖΦ}^2 ::$
I ΓΝ:

- (γ) Κατὰ τὴν α'. τῷ ια'. (δ) Κατὰ τὸν ις'. ὅρισμ. (ε) Κατὰ
τὸν ζ'. ὅρισμ. (ζ) Κατὰ τὴν γ'. τῷ γ'. (η) Κατὰ τὴν β'.
Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν ἡ. τῷ ε'. (θ) Κατὰ τὴν α'. τῷ ε'.
(ι) Κατὰ τὸ Θιῶρ τὸ μετὰ τὴν κγ'. τῷ ε'. (κ) Κατὰ τὴν
θ'. τῷ ε'. (λ) Κατὰ τὴν αὐτ. (μ) Κατὰ τὸν ζ'. ὅρισμ.
τῷ ε'. (ν) Τὸ α'. μέρ. ἐστὶ τῆς κα. τῷ α'. θ'. τῷ Ἀπολλων.
(ξ) Ὅρα τὸν κα. ὅρισμ.

ΓΝ: ΝΣ. (ο) ἄρα καὶ ὡς ΝΠ. ΠΓ: ΕΠ²: ΓΝ: ΝΣ.
(π)

Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ διαχθήσεται, ὅτι καὶ ἐν τῇ ἀντικειμένη
τομῇ ἔστιν ὡς ΓΟ. ΝΟ: ΤΟ²: ΓΝ: ΝΣ, καὶ ὡς ΓΠ.
ΠΝ: ΘΠ²: ΓΝ: ΝΣ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α

Ἐστω δὴ ἐν ἄρα καὶ ὡς ΝΦ. ΦΓ: ΖΦ²: ΓΟ. ΟΝ: ΤΟ².
Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ.

Ἐὰν ἡ πλαγία πλευρὰ ΝΓ ἴση ᾖ τῇ ὀρθίᾳ ΝΣ,
Ἰσοσκελὴς ἡ Ὑπερβολὴ καλεῖται· ἔστι δὲ ἐν αὐτῇ
τὸ μὲν ΝΦ. ΦΓ=ΖΦ², τὸ δὲ ΝΠ. ΠΓ=ΕΠ², ὁμοίως
καὶ τὸ ΓΟ. ΟΝ=ΤΟ², καὶ τὸ ΓΠ. ΠΝ=ΘΠ². εἰ δὲ
δὲ ἀνισος, Σκαληνὴ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Β'.

Ἐν Ὑπερβολῇ τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης τε-
τράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ περιε-
χομένῳ ὑπὸ τῆς ὑπ' αὐτῆς ἀποτεμνομένης,
καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγῃ τῆς πλαγίας
πλευρᾶς, τῆς ὀρθίας, καὶ τῆς συγκαμένης.
ἔκτε τῆς πλαγίας καὶ τῆς ἀποτετμημένης.

Ἐστω Ὑπερβολὴ ἡ ΥΝΜ, (πίν. 7. χ. 4.) ἥς πλα-
γία μὲν πλευρὰ ἡ ΨΝ, ὀρθία δὲ ἡ ΝΑ, Τεταγμέ-
νη δὲ ἐπὶ τὴν Διάμετρον ἡ ΜΚ. λέγω, ὅτι τὸ ΜΚ²
ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἐκ τῆς ἀποτεμνομένης ΝΚ,
καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγῃ, τῶν ΨΝ, ΝΑ, ΨΚ.

Κ Α Τ Α Σ Κ Ε Τ Η.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΨΑ, καὶ ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ συ-
νεχές, καὶ ἤχθω ἀπὸ τῆς Κ ἡ ΚΓ τῇ ΝΑ παράλλη-
λος. ΔΕΙ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς τὸ ΝΚ. ΚΨ: $\overline{ΜΚ}^2$:: ΨΝ: ΝΑ. (ρ) ἀλλ' ὡς ΨΝ: ΝΑ:: ΨΚ: ΚΓ. (σ) ὡς δὲ ΨΚ: ΚΓ:: ΨΚ. ΝΚ: ΚΓ. ΝΚ. (τ) ὡς ἄρα ΝΚ. ΚΨ: $\overline{ΜΚ}^2$:: ΨΚ. ΝΚ: ΚΓ. ΝΚ. (υ) ἀλλὰ τὸ ΝΚ. ΚΨ=ΨΚ. ΚΝ. ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΜΚ}^2$ =ΚΓ. ΚΝ. (φ) ἔστι δὲ ἡ ΚΓ τετάρτη ἀνάλογος τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, τῆς ὀρθίας ΝΑ, καὶ τῆς συγκεκλιμένης ἔκτε τῆς πλαγίας καὶ τῆς Ἀποτετμημένης, εἶτεν τῆς ΨΚ. ἔστι γὰρ ὡς ΨΝ: ΝΑ:: ΨΚ: ΚΓ. (χ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $\overline{ΜΙ}^2$ =ΝΠ. ΠΒ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Τὸ ἀπὸ τῆς ὁποιασθὲν Τετραγμένης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ σὺν τῷ ὑπὸ τῆς αὐτῆς Ἀποτετμημένης καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγου τῆς πλαγίας πλευρᾶς, τῆς ὀρθίας, καὶ τῆς αὐτῆς Ἀποτετμημένης. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Β, Γ σημείων αἱ ΑΗ, ΒΔ, ΓΖ τῇ Διαμέτρῳ ΨΚ παράλληλοι, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΝΑ συμβαλέτω αὐταῖς. ἐπεὶ ἔν τὸ $\overline{ΜΚ}^2$ =ΝΚ. ΚΓ, ἔστι δὲ τὸ ΝΚ. ΚΓ=ΚΑ+ΗΖ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΚΑ τὸ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΝΚ καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΑ, τὸ δὲ ΗΖ, τὸ ὑπὸ τῆς ΗΑ, εἶτεν τῆς αὐτῆς ΝΚ, καὶ τῆς ΑΖ, τῆς τετάρτης ἀναλόγου τῶν ΨΝ, ΝΑ, ΖΓ, ἥτοι ΝΚ. (ἔστι γὰρ ὡς ΨΝ: ΝΑ:: ΖΓ: ΑΖ.) τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς τετραγμένης τετράγωνον $\overline{ΜΚ}^2$ ἴσον τῷ ΚΑ, τῷ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΝΚ, καὶ τῆς ὀρθίας ΝΑ σὺν τῷ ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτετμημένης ΝΚ, καὶ τῆς ἐκβλήσεως τετάρτης ἀναλόγου ΑΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $\overline{ΠΙ}^2$ =ΠΑ+ΦΔ.

I 2

B'.

(ρ) Κατὰ τὴν Συνίπ. τῆς προλ. ποστ. (σ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (τ) Κατὰ τὴν α'. τῆς ε'. (υ) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (φ) Κατὰ τὴν α'. τῆς ε'. (χ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'.

Β'. Ἀχθείσης ἀπὸ τῆς Ψ τῆς $\Psi\Lambda$ παραλλήλου τῇ $\Lambda\Delta$, καὶ ἐκβληθείσης ἕως δ' συμπέσῃ τῇ ἐκβληθείσῃ $\Delta\Lambda$, ὅπῃ δὲ ὅτι τὰ ὀρθογώνια KZ , $\Pi\Delta$, τὰ ἴσα τοῖς τετραγώνοις $\overline{MK}^2$, $\overline{\Pi\Pi}^2$ ὑπερέχουσι τὰ ὀρθογώνια $K\Lambda$, $\Pi\Lambda$ τὰ ὑπὸ τῶν Ἀποτετμημένων NK , $N\Pi$ καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς $\Lambda\Delta$ τοῖς ὀρθογωνίοις HZ , $\Phi\Delta$, τοῖς ἐμοίσις ἀλλήλοις τε καὶ τῷ ὀρθογωνίῳ $\Lambda\Delta$, τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨN , καὶ τῆς ὀρθίας $\Lambda\Delta$ περιεχόμενῳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Μήτι γὰρ δὲ ἐκ τέττε ἡ τομὴ Ὑπερβολὴ ἐκλήθη τέττεσιν ἐκ τῆς τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετραγώνων ὑπερέχουσι τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς περιεχόμενα.

Γ'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς κερυφῆς N ἐπὶ τὰ τῶν ἐκτετμημένων τετραγώνων ἀναλόμεναι $K\Gamma$, ΠB σημεῖα Γ , B ἐπιζευχθῶσιν αἱ $N\Gamma$, NB , ἔσεται τὸ μὲν $\overline{NK}^2$ διπλάσιον τῷ $NK\Gamma$ τριγώνῳ, τὸ δὲ $\overline{\Pi\Pi}^2$, τῷ ΠNB . τὸ μὲν γὰρ $\overline{MK}^2 = KZ$, τὸ δὲ $\overline{\Pi\Pi}^2 = \Pi\Delta$. ἀλλὰ τὸ μὲν KZ διπλάσιον τῷ $NK\Gamma$, τὸ δὲ $\Pi\Delta$ τῷ ΠNB . (ψ) ἄρα καὶ τὸ $\overline{MK}^2$ διπλάσιον τῷ $NK\Gamma$, ὡσαύτως καὶ τὸ $\overline{\Pi\Pi}^2$ τῷ ΠNB .

Δ'. Δεθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨN , καὶ τῆς ὀρθίας $\Lambda\Delta$, γραφήσεται ἡ Ὑπερβολὴ συνεχῶν ὀριζώντων σημείων. (χ. 5.) κείδω γὰρ πρὸς ὀρθίας τῇ ΨN ἢ $\Lambda\Delta$. καὶ ἐπιζευχθῶσιν αἱ $\Psi\Lambda$, ἐκβληθῶσιν κατὰ τὰ συνεχῆς, ὡσαύτως καὶ ἡ ΨN . εἰλήφθω δὲ τινα σημεῖα ἀπὸ τῆς $\Psi\Phi$ τὰ Δ , Φ . καὶ ἡχθῶσιν αἱ ΔM , $\Phi\Theta$ τῇ $\Lambda\Delta$ παραλλήλοι. καὶ ἀπὸ μὲν τῆς $B M$ εἰλήφθω ἡ $B\Gamma = B N$. ἀπὸ δὲ τῆς $\Phi\Theta$, ἡ $Z\Lambda = Z N$. καὶ ἐπὶ τῶν $\Delta\Gamma$, $\Phi\Lambda$ ἡμικύκλια ἀνα-

ἀναγεγράφω τὰ ΔΚΓ, ΦΙΛ. καὶ εἰλήφω ἡ μὲν $BE = LK$, ἡ δὲ $ZH = ZI$. λέγω ὅτι, ἡ Ὑπερβολὴ διὰ τῶν Ε, Η σημείων ἦξει, καὶ διὰ τῶν ἐξῆς ὁμοίως περιζομένων. ἐπεὶ γὰρ τὸ $BK^2 = \Delta B \cdot B\Gamma$, (ω) εἰλήφθη δὲ ἡ μὲν $BE = BK$, ἡ δὲ $B\Gamma = BN$, τὸ ἄρα $BE^2 = \Delta B \cdot BN$, εἴτην τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ τεταγμένης τετράγωνον ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΝΒ, καὶ τῆς ΒΔ, τῆς τετάρτης ἀναλόγου τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, τῆς ὀρθίας ΝΑ, καὶ τῆς ΨΒ τῆς συγκεκριμένης ἔκτε τῆς πλαγίας καὶ τῆς Ἀποτετμημένης. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ $IZ^2 = NZ \cdot Z\Phi$. δῆλον ὅν, ὅτι διὰ τῶν Ε, Η σημείων ἡ Ὑπερβολὴ ἦξει.

Ε'. Ἐστὶ δὲ καὶ διὰ κινήσεως κανόνων τινῶν τὰ αὐτὰ περισσάσθαι τῆς Ὑπερβολῆς σημεῖα. ἐφημερόσασαν γὰρ ἐπὶ τὰ τῆς πλαγίας πλευρᾶς πέρατα Ψ, Ν εἰ ΨΩ, ΝΧ (χ. 6.) Κανόνες περὶ αὐτὰ κινητοί. καὶ ἀχθείσης ἀπὸ τῆς ὀρθίας πέρατος Α τῆς ΑΗ παραλλήλης τῇ ΨΚ, ἔτω κινείσθωσαν οἱ Κανόνες, ὥστε τὸ ΝΑ μέρος τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, τὸ ὑπὸ τῆς ΨΩ Κανόνος ἀποτεμνόμενον ἴσον εἶναι τῷ ΑΥ, τῷ ὑπὸ τῆς ΝΧ ἀποτεμνόμενῳ. λέγω δὲ ὅτι διὰ τῶν σημείων, καθ' αὐτὰς ἀλλήλους τέμνουσιν οἱ Κανόνες ἔτω κινέμενοι, ἡ Ὑπερβολὴ ἦξει. ἤχθω γὰρ αὐτῷ ἐνὸς τοιούτου σημείου τῆς Μ, ἡ ΜΚ παράλληλος τῇ ΝΑ. καὶ ἐπεὶ τὸ MK^2 , πρὸς τὸ ΨΚ. ΚΝ λόγον ἔχει συγκεκριμένον ἔκτε τῆς λόγου ὃν ἔχει $MK : KN$, καὶ ἐκ τῆς ὃν ἔχει $MK : \Psi K$. (α) ἔστι δὲ ὡς μὲν $MK : KN :: NA : AY$, (β) ὡς δὲ $MK : \Psi K :: NA :$

(*) Κατὰ τὴν β. Συνέπ. τῆς ἡ. τῆς ε'. (α) Κατὰ τὸ Θιέρ. τὸ μίτκ τὴν καὶ. τῆς ε'. (β) Κατὰ τὴν δ. τῆς ε'.

ΝΑ : ΝΨ· (γ) τὸ ἄρα $\overline{MK}^2$ πρὸς τὸ ΨΚ. ΚΝ λό-
 γον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῶ λόγῳ ὃν ἔχει ΝΑ :
 ΑΥ, εἴτεν ΝΑ : ΝΑ, (ἢ γὰρ ΑΥ = ΝΑ. (δ)) ἢ
 ἐκ τῶ ὃν ἔχει ΝΑ : ΝΨ. εἴτεν ὡς $\overline{MK}^2$: ΨΚ. ΚΝ ::
 ΝΑ. ΝΑ : ΝΑ. ΝΨ. (ε) ἀλλ' ὡς ΝΑ. ΝΑ : ΝΑ.
 ΝΨ :: ΝΑ : ΝΨ. (ζ) ὡς ἄρα $\overline{MK}^2$: ΨΚ. ΚΝ ::
 ΗΑ : ΝΨ. ὅπερ εἶναι, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης
 ΜΚ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἐξ ὁρίωνιν τὸ ὑπὸ τῆς
 Ἀποτετμημένης ΝΚ καὶ τῆς ΨΚ τῆς συγκείμενης
 ἐκ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς Ἀποτετμημένης
 λόγον ἔχει ἐν ἡ ὁρθία πλευρᾷ ΝΑ, πρὸς τὴν πλα-
 γίαν ΝΨ. δῆλον ἄρα, ὅτι διὰ τῶ Μ ἡ Ὑπερβο-
 λὴ ἦξει. (η) ὡσαύτως δὴ δεχθήσεται, ὅτι καὶ διὰ
 πάντων τῶν σημείων τῶν ὁμοίως τῶ Μ πορισθέντων
 ἡ Ὑπερβολὴ διελεύσεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Τῶν αὐτῶν καμένων, εἰ ἢτε πλαγία πλευ-
 ρὰ καὶ ἡ ὁρθία δίχα τμηθῶσι, διαχθῇ δέ-
 τις εὐθεία διὰ τῶν διχοτομιῶν, Τεταγμέ-
 νην τέμνουσα, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς τμηθείσης
 Τεταγμένης τετράγωνον διπλάσιον τῶ τε-
 τραπλεύρου τῶ περαττεμένου ὑπὸ τῆς ἐλθέ-
 σης εὐθείας, τῶ ἡμίσεος τῆς ὁρθίας πλευ-
 ρᾶς, τῶ τμήματος τῆς Τεταγμένης, καὶ τῆς
 ὑπ' αὐτῆς Ἀποτεμνομένης.

Τετμή-

(γ) Κατὰ τὴν αὐτ. (δ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ε) Κατὰ τὸν ζ.
 ὁρισμ. τῶ ι. (ζ) Κατὰ τὴν α. τῶ ε'. (η) Ὁρα τὴν Σύνθε-
 σιν μετὰ τὴν α. τῶ ε' τῶ τμήμα.

Τετμήθω δίχα ἥτε πλαγία πλευρὰ ΨΝ, καὶ ἡ ὀρθία ΝΑ, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΓΕ. εὐθεῖα διὰ τῶν Γ καὶ Ε διχοτομιῶν, τεμνέτω τὴν ΚΒ τεταγμένην κατὰ τὸ Δ. λέγω, ὅτι τὸ ΒΚ² διπλάσιόν ἐστι τῷ ΔΕΝΚ τετραπλεύρῳ. πίν. Η. Χ. Ι.

Δ Β Ι Ξ Σ.

Ἐπεὶ ὡς ΝΓ : ΓΨ :: ΝΕ : ΕΑ, (θ) ἡ ἄρα ΔΓ παράλληλος τῇ ΨΡ. (ι) ὡς ἄρα ΝΓ : ΓΨ :: ΝΦ : ΦΡ. (κ) ἀλλ' ἡ ΝΓ = ΓΨ, (λ) καὶ ἡ ΝΦ ἄρα ἴση τῇ ΦΡ. (μ) ἔχουσι δὲ τὰ τρίγωνα ΦΕΝ, ΦΡΔ καὶ τὰς πρὸς τῷ Φ γωνίας ἴσας, (ν) καὶ τὰς λοιπὰς, (ξ) ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἴσα ἄρα εἰσὶ. (ο) κοινὸν αὐτοῖς προσκείθω τὸ ΝΦΔΚ τετράπλευρον, τὸ ἄρα ΝΕΔΚ τετράπλευρον ἴσον τῷ ΝΡΚ τριγώνῳ. ἀλλὰ τῷ ΒΚ² διπλάσιόν ἐστι τῷ ΝΡΚ τριγώνῳ, (π) διπλάσιον ἄρα ἐστὶ καὶ τῷ ΝΕΔΚ τετραπλεύρῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΠΑ² διπλάσιον τῷ ΝΕΤΑ.

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ.

Ἡ μὲν ΨΑ ἡ τὸ πέρας τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ καὶ τὸ τῆς ὀρθίας ΝΑ ἐπιζευγνύσα, Διευθετῆσα καλεῖται ἡ δὲ ΓΕ, ἡ διὰ τῶν διχοτομιῶν αὐτῶν διηγμένη, Ὑποδιευθετῆσα.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Δ'. (ρ)

Ἀπὸ τῷ δοθέντος σημείου τῆς δοθείσης Ὑπερβολῆς εὐθεῖαν ἀπτομένην ἀγαγεῖν.

Ι +

Ἐξω

- (9) Ἐκ τῆς ὑποθ. φήλον. (ι) Κατὰ τὴν β'. τῷ ε'. (κ) Κατὰ τὴν αὐτ. (λ) Ἐξ ὑποθ. (μ) Κατὰ τὴν η'. τῷ ε'. (ν) Κατὰ τὴν ιε'. τῷ α'. (ξ) Κατὰ τὴν κθ'. τῷ α'. (ο) Κατὰ τὴν κς'. τῷ α'. (π) Κατὰ τὴν γ'. Συνέπ. τῆς προλαβ. προτ. (ρ) Ἡ λβ', καὶ λδ', ἐστὶ τῷ α'. βιβλ. τῷ Ἀπολλων.

Ἐξω πρώτον δεθὲν σημεῖον τῆς ΑΜ Ὑπερβολῆς τὸ κατὰ κορυφὴν Α. χ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῆ Α ἢ ΑΩ παραάλληλός τινι τῶν τεταγμένων, οἷον τῇ εη. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΑΩ ἐκτὸς τῆς τομῆς πίπτει. δευθῆσεται δὲ τὸτο καθάπερ καὶ ἐν τῇ Παραβολῇ δέδεικται. (σ)

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔξω ἐπὶ τῆς κορυφῆς τὸ δεθὲν σημεῖον, οἷον ἐστὶ τὸ Μ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῆ Μ τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΨΥ ἢ ΜΠ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπίπτειτω τῇ Ὑποδιευθετῶσι ΓΘ κατὰ τὸ Ζ. καὶ τρίτῃ ἀναλόγῳ τῶν ΖΠ, ΠΜ εὐρεθείσῃ ἴση εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ΠΨ ἢ ΠΤ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΤΜ. λέγω, ὅτι ἡ ΤΜ καθ' ἐν μόνον σημεῖον ἐφαπτεται τῆς τομῆς. ἐφαπτέσθω γάρ, εἰ δυνατόν, καὶ κατὰ τὸ Δ. ἐπεζεύχθω δὲ ἡ ΤΖ, καὶ ἀπὸ τῆ Δ ἤχθω ἡ ΔΗΦ παραάλληλος τῇ ΜΠ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΖΠ:ΠΜ::ΠΜ:ΠΤ, (τ) τὸ ἄρα $\overline{ΠΜ}^2 = ΖΠ \cdot ΠΤ$. (φ) ἀλλὰ τὸ ΖΠ. ΠΤ διπλάσιόν ἐστι τῆ ΖΠΤ τριγώνου. (χ) καὶ τὸ $\overline{ΠΜ}^2$ ἄρα διπλάσιόν ἐστι τῆ ΖΠΤ. ἀλλὰ τὸ $\overline{ΠΜ}^2$ καὶ τῆ ΑΡΖΠ τετραπλεύρου διπλάσιόν ἐστι. (ψ) τὸ ἄρα ΖΠΤ = ΑΡΖΠ. ἀφηρήθω ἀπὸ μὲν τῆ ΖΠΤ τὸ ΖΛΗΠ τετράπλευρον, ἀπὸ δὲ τῆ ΑΡΖΠ τὸ ΖΦΗΠ, τὸ μείζον τῆ ΖΛΗΠ. λοιπὸν ἔρα τρίγωνον τὸ ΛΤΗ μείζον λοιπῆς τετραπλεύρου τῆ ΑΡΦΗ.

(σ) Ὅρα τὴν δ. πρώτ. τῆ α. τμήμ. (τ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (φ) Κατὰ τὴν ιζ. τῆ ε'. (χ) Κατὰ τὴν μα. τῆ α'. (ψ) Κατὰ τὴν προλαβ. πρώτ.

ΑΡΦΗ. ἐπεὶ δὲ ὡς $ΠΤΜ : ΗΤΔ :: \overline{ΠΤ}^2 : \overline{ΗΤ}^2$, ὡσαύ-
 τως, ὡς $ΠΤΖ : ΗΤΛ :: \overline{ΠΤ}^2 : \overline{ΗΤ}^2$, (ω) ἄρα καὶ ὡς
 $ΠΤΜ : ΗΤΔ :: ΠΤΖ : ΗΤΛ$. (α) ἄλλ' ὡς $ΠΤΜ :$
 $ΗΤΔ :: \overline{ΠΜ}^2 : \overline{ΗΔ}^2$. (β) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΠΜ}^2 : \overline{ΗΔ}^2 ::$
 $ΠΤΖ : ΗΤΛ$. (γ) ἀλλὰ τὸ $\overline{ΠΜ}^2$ διπλάσιον δέδεικται
 τῷ $ΠΤΖ$. ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΗΔ}^2$ διπλάσιόν ἐστι τῷ $ΗΤΛ$. ἀλλὰ
 τὸ $ΗΤΛ$ μᾶλλον τῷ ΑΡΦΗ, ὡς δέδεικται, τὸ ἄρα $\overline{ΗΔ}^2$
 μᾶλλον τῷ διπλασίῳ τῷ ΑΡΦΗ. ἀλλὰ τὸ αὐτὸ $\overline{ΗΔ}^2$ καὶ
 ἴσον ἐστὶ τῷ διπλασίῳ τῷ ΑΡΦΗ. (δ) μᾶλλον ἄρα καὶ
 ἴσον, ὅπερ αὐτόματον. καὶ ἄρα ἡ $ΤΜ$ ἐφάπτεται τῆς
 τομῆς κατὰ τὸ Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθήσεται, ὅτι
 καὶ κατὰ ἄλλο σημεῖον ἐφάπτεται, πλὴν τῷ Μ.

ΣΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐντεῦθεν πολλάι περίζονται μέθοδοι τῷ ἐφαπτο-
 μένῳ ἄγαν ἀπὸ τῷ δοθέντος τῆς Ὑπερβολῆς ση-
 μέω. εἰάν γὰρ ἀπὸ τῷ Ἀξονος $ΨΥ$ ληφθῇ ἡ $ΠΥ$
 ἴση τῇ $ΠΖ$, ἔσεται καὶ ὡς $ΥΠ : ΠΜ :: ΠΜ : ΠΤ$.
 εἰδὲν ἡ $ΥΜΤ$ γωνία ὀρθή ἐστι. (ε) ἀχθήσεται ἄρα
 ἐφαπτεμένη τῆς Ὑπερβολῆς, εἰάν ἀπὸ τῷ δοθέν-
 τος σημείου Μ ταχθεῖσα ἐπὶ τὸν Ἀξονα ἡ $ΜΠ$,
 ἐμβληθεῖσα συμπίσῃ τῇ Ὑποδιευθετῶσιν κατὰ τὸ
 Ζ· ληφθῇ δὲ τῇ $ΖΠ$ ἴση ἡ $ΠΥ$, καὶ τῇ ἐπιζευ-
 χθεῖσιν $ΥΜ$ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ εὐθεῖα ἡ $ΜΤ$. αὕτη
 γὰρ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Β'. Συμπεσέσης τῆς $ΜΖ$ τῇ Διευθετῶσιν $ΨΝ$ ἐμβληθεί-
 σιν, κατὰ τὸ Ο, ἔσεται τὸ $\overline{ΜΠ}^2 = ΑΠ \cdot ΠΟ$. (ζ)
 ἀλλὰ τὸ $\overline{ΜΠ}^2 = ΖΠ \cdot ΠΤ$. (η) ἄρα καὶ τὸ ΑΠ.
 ΠΟ

I 5

(α) Κατὰ τὴν ιθ'. τῷ ε'. (α) Κατὰ τὴν ι'. τῷ ι'. (β) Κα-
 τὰ τὴν ιθ'. τῷ ε'. (γ) Κατὰ τὴν ἀρχμ. ι'. (δ) Κατὰ τὴν
 προλαβ. πρότ. (ε) Κατὰ τὴν γ'. Συνέπ. τῆς ἡ τῷ ε'. (ζ) Κα-
 τὰ τὴν β'. τῷ ε' τῷ τμήμ. (η) Ἐκ τῆς κατασκευ.

ΠΟ = ΖΠ. ΠΤ. ὡς ἄρα ΖΠ :: ΠΟ :: ΑΗ : ΠΤ.
 (θ) ἄρα ἡ ἀξία τῆς τομῆς ἐφαπτομένην, εἰν ἀπὸ τῆ
 δοθέντος σημείου Μ, ἀγαγὼν τεταγμένην τὴν ΜΠ,
 καὶ ἐκβαλὼν αὐτὴν κατὰ τὸ συνεχές, καὶ εὐρῶν
 τετάρτην ἀνάλογον τῶν ΖΠ, ΠΟ, τῶν μεταξὺ τῆς
 Ὑποδιευθετήσεως καὶ Διευθετήσεως καὶ Διαμέτρου, καὶ
 τῆς Ἀποτετμημένης ΑΠ, ἴσην αὐτῇ τῇ εὐρεθείᾳ
 λάβης τὴν ΠΤ, καὶ ἀπὸ τῆς Γ ἐπὶ τὸ δοθὲν ση-
 μεῖον Μ ἐπιζευξῇ τὴν ΜΤ. καὶ γὰρ ἡ ΜΤ ἔσεται
 ἡ ἐφαπτομένη.

Γ'. Ἐπεὶ δὲ ὡς ΖΠ : ΠΟ :: ΑΗ : ΠΤ, ἄρα καὶ ἀνά-
 παλιν ὡς ΠΟ : ΖΠ :: ΠΤ : ΑΗ, καὶ διαιρεθέντα
 ὡς ΖΟ : ΖΠ :: ΤΑ : ΑΗ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΖΠ :
 ΖΟ :: ΑΗ : ΤΑ. εἰν ἄρα τῆς εἰρημένης ΖΠ, καὶ
 τῆς ἡμίσεως τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΖΟ, (ἡ ΖΟ =
 ΝΡ. (ι)) καὶ τῆς Ἀποτετμημένης ΑΠ τετάρτη
 ἀνάλογος εὐρεθῇ, καὶ ληφθῇ αὐτῇ ἴση ἡ ΑΤ, ἡ
 ἀπὸ τῆς Γ ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπιζευγνυμένη
 εὐθεῖα ΤΜ ἐφάψεται τῇ εὐθείᾳ.

Δ'. Ἐπεὶ ἡ ΖΟ = ΝΡ = ΡΑ, εἰν ἄρα ὡς ΖΠ : ΡΑ ::
 ΑΠ : ΑΤ. ἄλλ' ὡς ΖΠ : ΡΑ :: ΓΠ : ΓΑ, (κ) ἄρα
 καὶ ὡς ΓΠ : ΓΑ :: ΑΠ : ΑΤ. (λ) καὶ ἐναλλάξ
 ὡς ΓΠ : ΑΠ :: ΓΑ : ΑΤ. καὶ κατὰ ἀνατροπὴν λό-
 γου, ὡς ΓΠ : ΓΑ :: ΓΑ : ΓΤ. τὸ ἄρα $\Gamma\Lambda^2 = \Pi\Gamma$.
 ΓΤ. (μ) εἰν ἔν εὐρεθῇ τρίτη ἀνάλογος τῆς ΠΓ, τῆς
 ἐκ τῆς ἡμίσεως ΓΑ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς
 Ἀποτετμημένης ΑΠ συγκαμένης, καὶ αὐτῇ τῇ ἡμί-
 σεως ΓΑ τῆς πλαγίας ΨΑ, καὶ ἴση τῇ εὐρεθείᾳ
 ληφ.

(θ) Κατὰ τὴν ιγ'. τῇ ε'. (ι) Κατὰ τὴν λδ'. τῇ α'. (κ) Κατὰ
 τὴν δ'. τῇ ε'. (λ) Κατὰ τὴν ε' τῇ ε'. (μ) Κατὰ τὴν ιζ'.
 τῇ ε'.

ληφθῇ ἡ ΓΤ, ἡ ἀπὸ τῆς Τ ἐπὶ τὸ δευτὲρ σημεῖον Μ ἐπιζευγνυμένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Ε'. Τὸ $\Gamma\Lambda^2 = \Pi\Gamma \cdot \Gamma\Gamma$. (ν) εἰν ὃν τῶν ἐκότερον ἀπὸ τῆς ΓΠ² ἀφέλῃς, τὰ λοιπὰ ἴσα ἔσονται, εἴτεν τὸ ΨΠ· ΠΑ = ΓΠ· ΠΤ. (ξ) ὡς ἄρα ΓΠ : ΨΠ :: ΠΑ : ΠΤ. ἔκῃν εἰν τετάρτη ἀνάλογος εὐρεθῇ τῆς ΓΠ, τῆς ἐκ τῆς τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἡμίσεως ΓΑ καὶ τῆς Ἀποτετμημένης ΑΠ συγκεκλιμένης, καὶ τῆς ΨΠ τῆς ἐκ τῆς πλαγίας ΨΑ καὶ τῆς αὐτῆς Ἀποτετμημένης συγκεκλιμένης, καὶ τῆς ΑΠ Ἀποτετμημένης, καὶ ἴση τῇ εὐρεθείσῃ ληφθῇ ἡ ΠΤ, ἡ ἀπὸ τῆς Τ ἐπὶ τὸ δευτὲρ σημεῖον Μ ἐπιζευγνυμένη, τῆς Ὑπερβολῆς ἐφάπτεται.

Ζ'. Ὁ λόγος εἰν ἔχει ἡ ΠΤ πρὸς τὴν ΤΑ σύγκειται ἐκ τῆς λόγῃ ὃν ἔχει ἡ ΠΨ : ΨΑ, καὶ ἐκ τῆς διπλασίῃς, εἴτεν ἐκ τῆς ὃν ἔχει ὁ 2 : 1. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΠΟ : ΠΖ :: ΠΤ : ΠΑ, (ο) ἄρα καὶ κατὰ ἀνατροπὴν λόγῃς ὡς ΠΟ : ΖΟ :: ΠΤ : ΤΑ, ἥτοι ὡς ΠΟ : ΡΑ :: ΠΤ : ΤΑ. ἀλλ' ἡ ΠΟ πρὸς τὴν ΡΑ λόγον ἔχει συγκεκλιμένον ἔκτε τῆς λόγῃς ὃν ἔχει ΠΟ : ΑΝ, καὶ ΑΝ : ΡΑ. (π) ἔστι δὲ ὡς μὲν ΠΟ : ΑΝ :: ΠΨ : ΨΑ, (ρ) ὡς δὲ ΑΝ : ΡΑ :: 2 : 1. ἄρα καὶ ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ ΠΤ : ΤΑ σύγκειται ἐκ τῆς λόγῃς ὃν ἔχει ἡ ΠΨ : ΨΑ, καὶ τῆς ὃν ἔχει ὁ 2 : 1. εἴτεν ὡς ΠΤ : ΤΑ :: 2ΠΨ : ΤΑ. (σ)

Ζ'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α τῆς Ὑπερβολῆς ἐφαπτομένη ἀχθῇ ἡ ΑΧΩ, ἀπὸ δὲ τῆς σημείας τῆς ἀφῆς Μ

(ν) Κατὰ τὴν προλ. Συνίπ. (ξ) Ἐκ τῆς ε', καὶ β'. τῆς β'. δηλον. (ο) Ὅρα τὴν προλ. γ'. Συνίπ. (π) Κατὰ τὸ α'. πόρισ. τὸ μετὰ τὴν ἡ. τῆς ε'. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (σ) Κατὰ τὴν ζ'. πόρισ. τῆς ε'.

Μ ἐπὶ τὸ πέρας Ψ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἐπιζευχθῇ ἡ ΜΨ, τὸ ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβανόμενον μέρος ΑΩ τῆς κατὰ κορυφὴν ἀπτομένης δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Χ ὑπὸ τῆς μὴ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης ΜΤ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΠΜ: ΑΧ :: ΠΤ: ΤΑ· (τ) ἡ δὲ ΠΤ: ΤΑ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῶ λόγον ὃν ἔχει ἡ ΠΨ: ΨΑ, καὶ ἐκ τῶ 2: 1· (υ) ἄρα καὶ ἡ ΠΜ: ΑΧ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῶ ὃν ἔχει ἡ ΠΨ: ΨΑ, καὶ ἐκ τῶ 2: 1. ἀλλ' ἡ ΠΜ: ΑΧ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶ ὃν ἔχει ἡ ΠΜ: ΑΩ, καὶ ἡ ΑΩ: ΑΧ. (φ) ἔστι δὲ ὁ εἰς τῶν συντιθέντων λόγων ἴσος τῶ ἐν: ἔστι γὰρ ὡς ΠΨ: ΨΑ :: ΠΜ: ΑΩ· (χ) καὶ ὁ ἕτερος ἄρα ἴσος τῶ ἑτέρῳ, ἔστιν ὡς ΑΩ: ΑΧ :: 2: 1. ἔκθ' ἡ ΑΩ διπλασία τῆς ΑΧ. ἡ ἄρα ΑΩ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Χ ὑπὸ τῆς ΜΤ. ἄξας ἔν ἐφαπτομένην ἀπὸ τῶ δοθέντος σημείου Μ, εἰάν ἀπ' αὐτῆς ἐπὶ τὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς πέρας Ψ ἐπιζεύξας τὴν ΨΜ, δίχα τέμῃς τὸ ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβανόμενον τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης μέρος ΑΩ κατὰ τὸ Χ, καὶ ἀπὸ τῶ Χ ἐπὶ τὰ Μ ἐπιζεύξας τὴν ΧΜ.

Η'. Τὸ σημεῖον Τ, καθ' ὃ ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ τὴν πλαγίαν πλευρὰν ΨΑ τέμνει, μεταξὺ κεῖται τῶ κέντρῳ Γ, καὶ τῆς Α κορυφῆς. ἐμβεβλήδω γὰρ ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ, καὶ συμπίπτει κατὰ τὸ Β τῇ ΨΚ, τῇ ἀπὸ τῶ Ψ ἀχθείσῃ τῇ ΑΩ παραλλήλῳ. καὶ καὶ ἐπεὶ ὡς ΨΤ: ΤΑ :: ΨΒ: ΑΧ, (ψ) ἔστι δὲ ἡ

ΑΧ

(τ) Κατὰ τὴν δ'. τῶ ε'. (υ) Κατὰ τὴν προλ. Συναί. (φ) Κατὰ τὸ ἀπομ. πόρισ. (χ) Κατὰ τὴν δ'. τῶ ε'. (ψ) Κατὰ τὴν δ'. τῶ ε'.

$\Lambda\chi = \chi\Omega$. ἔκδεν καὶ ὡς $\Psi\tau : \tau\alpha :: \Psi\beta : \chi\Omega$.
 ἀλλ' ὡς μὲν $\Psi\beta : \chi\Omega :: \Psi\mu : \mu\Omega$, ὡς δὲ $\Psi\mu : \mu\Omega :: \Psi\pi : \pi\alpha$. (ω) ἄρα καὶ ὡς $\Psi\tau : \tau\alpha :: \Psi\pi : \pi\alpha$. (α) ἀλλ' ἢ $\Psi\pi$ μείζων τῆς $\pi\alpha$, ἄρα καὶ ἢ $\Psi\tau$ μείζων τῆς $\tau\alpha$. τὸ ἄρα τ σημεῖον μεταξὺ τῶ κέντρων Γ καὶ τῆς κορυφῆς Λ κείται.

Θ'. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς $\Psi\beta : \Lambda\chi :: \Psi\pi : \pi\alpha$. ἐπεὶ γάρ ὡς $\Psi\tau : \tau\alpha :: \Psi\beta : \Lambda\chi$, καὶ ὡς $\Psi\tau : \tau\alpha :: \Psi\pi : \pi\alpha$, (β) ἄρα καὶ ὡς $\Psi\beta : \Lambda\chi :: \Psi\pi : \pi\alpha$. (γ)

Ι'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς M ἐπὶ τῆς κορυφῆς Λ ἐπιζευχθῇ ἡ MA , καὶ ἐκβληθεῖσα συμπίσῃ τῇ ΨK , τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένη τῆς ἀντικειμένης τομῆς, (ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τῶ Ψ ἤχθῃ ἡ ΨK παράλληλος τῇ $\Lambda\Omega$, (δ) ἔσθιν αὖτε ταῖς τεταγμέναις MI , EN , ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ ΨK κατὰ κορυφὴν τῆς ἀντικειμένης τομῆς. (ε) τὸ ἀπολαμβάνεμενον ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς ΨK μέρος διχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης MT κατὰ τὸ B . ἐπεὶ γὰρ ὡς $B\Psi : \chi\Omega :: \epsilon M : M\chi$, (ζ) καὶ ὡς $\epsilon M : M\chi :: KB : \Lambda\chi$, (η) ἄρα καὶ ὡς $B\Psi : \chi\Omega :: KB : \Lambda\chi$. (θ) ἀλλ' ἢ $\chi\Omega = \Lambda\chi$. (ι) ἄρα καὶ ἢ $B\Psi = KB$. (κ) ἢ ἄρα $K\Psi$ διχα τέτμηται κατὰ τὸ B .

ΙΑ'. Τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὑπὸ τῶν κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένων ΨK , $\Lambda\Omega$ ἴσον ἐστὶ τῶ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς $\Psi\Lambda$, καὶ τῆς ὀρθίας ΛN περιχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἔσθιν τὸ ΨK . $\Lambda\Omega = \Psi\Lambda$. ΛN . ἐπεὶ γὰρ ὡς

ΟΠ:

(α) Κατὰ τὴν αὐτ. (α) Κατὰ τὴν εἰ τῶ εἰ. (β) Ὅρα τὴν προλ. Συνίπ. (γ) Κατὰ τὴν ἀρῆμ. εἰ. (δ) Ὅρα τὴν προλ. εἰ. Συνίπ. (ε) Ὅρα τὸ α. μέρ. τῆς προκαμ. προτ. (ζ) Κατὰ τὴν δ. τῶ εἰ. (η) Κατὰ τὴν αὐτ. (θ) Κατὰ τὴν ἀρῆμ. εἰ. (ι) Κατὰ τὴν προλ. ζ. Συνίπ. (κ) Κατὰ τὴν κ. τῶ εἰ.

ΟΠ: ΠΜ:: ΠΜ: ΑΠ, (λ) ἔστι δὲ ὡς μὲν ΟΠ:
ΠΜ:: ΑΝ: ΑΩ, ὡς δὲ ΠΜ: ΑΠ:: ΚΨ: ΨΑ,
(μ) ἄρα καὶ ὡς ΨΚ: ΨΑ:: ΑΝ: ΑΩ. (ν) τὸ
ἄρα ΨΚ. ΑΩ = ΨΑ. ΑΝ. (ξ) δῆλον δὲ ἐκ τούτου
ὅτι τὸ ΨΒ. ΑΧ, αἶθεν τὸ ὑπὸ τῶν ἡμίσεων τῶν
κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένων τῶν ἀντικειμένων το-
μῶν ἴσον ἐστὶ τεταρτημορίῳ τῆς ὑπὸ τῆς πλαγίας
ΨΑ, καὶ τῆς ὀρθίας ΑΝ περιεχομένῃς ὀρθογωνίῃς.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α. (ο)

Εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς Ὑπερβολῆς, ἢ
τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης αὐτῆς ἐτέ-
ρα εὐθεῖα εἰς περιεμπεσῆται.

Ἐφαπτέσθω ἡ ΑΓ τῆς ΗΑΙ Ὑπερβολῆς κατὰ κο-
ρυφὴν. λέγω, ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐ-
θείας καὶ τῆς τμῆς ΗΑ ἐτέρα εὐθεῖα εἰς παρεμπε-
σῆται. παρεμπιπτέτω γάρ, εἰ δυνατόν, ἡ ΑΔ. Χ. 3.

Κ Α Τ Α Σ Κ Ε Τ Η.

Ἀπὸ τῆς τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΑΒ πέρατος Β ἐπὶ τὸ
τῆς ὀρθίας Ζ, τῆς παραλλήλου ταῖς τεταγμέναις κα-
μένης, ἐπεζεύχθω ἡ ΒΖ, καὶ ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ
συνεχές. καὶ ἀπότινες σημεῖα Δ τῆς ΑΔ τεταγμένως
ἐπὶ τὴν Διάμετρον ἀταχθεῖσα ἡ ΔΕ, ὁμοίως ἐκβε-
βλήθω. καὶ τρίτη ἀναλόγῳ τῶν ΑΕ, ΔΕ ἐυρεθείσθ
εἰλήθω ἴση ἡ ΕΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΝ τὴν ΒΖ
τέμνεσα κατὰ τὸ Ξ. καὶ ἀπὸ τῆς Ξ ἤχθω ἡ ΞΘΚ
παράλληλος τῇ ΑΖ.

ΔΕΙ.

(λ) Κατὰ τὴν β'. τῇ δὲ τῇ τμήμ. (μ) Κατὰ τὴν δ'. τῇ ε'.
(ν) Κατὰ τὴν ἀρ.μ. ε'. (ξ) Κατὰ τὴν ιε'. τῇ ε'. (ο) Μι-
σος ἐστὶ τῆς λβ'. πρὸς τῇ ι. βιβλ. τῇ Ἀπολλων.

ΠΕΡΙ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς $NE : ΔΕ :: ΔΕ : ΑΕ$, (π) ἄρα
 $NE : ΑΕ :: ΔΕ^2 : ΑΕ^2$. (ρ) ἀλλ' ὡς $NE : ΑΕ :: \hat{\iota}$
(σ) ὡς ἄρα $\Xi\Theta : Α\Theta :: ΔΕ^2 : ΑΕ^2$. (τ) ἔπει
ὡς $ΔΕ : ΑΕ :: Κ\Theta : Α\Theta$, (υ) ἔστιν ἄρα καὶ
 $ΔΕ^2 :: Κ\Theta^2 : Α\Theta^2$. (φ) διὸ δὴ καὶ ὡς $\Xi\Theta$
 $Κ\Theta^2 : Α\Theta^2$. (χ) ὡς ἄρα $\Xi\Theta : Κ\Theta :: Κ\Theta :$
 $\Xi\Theta$. (ω) ἀλλὰ καὶ $\Xi\Theta : Α\Theta :: Α\Theta :$
 $\Xi\Theta$. (α) τὸ ἄρα $Κ\Theta^2 = Α\Theta^2$. ἔπερ ἂ
ἄρα εἰς τὸν μεταξύ τύπον τῆς $ΔΓ$ εὐθείας
 $ΑΗ$ Ὑπερβόλης εὐθεῖά τις παρεμπεσέται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον ὅτι καμπύλην μὲν γραμμὴν εἰδὲν αὐτὴ
πίπτειν μεταξύ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τομῆς
θῶαν δὲ, ἀμήχανον. τεμνὴ γὰρ αὐτὴ τὴν τομὴν.
ἐκ ἐφάπτεται. τῆτο δὲ καὶ περὶ τῆς Παραβολῆς
τῆς Ἐλλείψεως, ὅ μὴν ἀλλὰ καὶ περὶ τῆς κύκλου ρητέ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'. (β)

Εὰν ἐν Ἀντικειμέναις εὐθεῖα ἀχθῇ ἐφ' ἐκά-
τερα τῶ κέντρων συμπίπτουσα τῇ τομῇ, δι-
χα τμηθήσεται κατὰ τὸ κέντρον αἱ δὲ ἀ-
πὸ τῶν συμπτώσεων ἀχθῶσαι ἐφαπτόμε-
ναι τῆς τομῆς, καὶ τῇ Διαμέτρῳ συμπίπτου-
σαι

(π) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ρ) Κατὰ τὸ β'. πόρισ. τὸ μετὰ τὴν ἡ. τῇ
ἰ. (σ) Κατὰ τὴν δ' τῇ ε'. (τ) Κατὰ τὴν ἰ. τῇ ε'. (υ) Κατὰ
τὴν δ'. τῇ ε'. (φ) Κατὰ τὸ ζ'. Θεώρημ. τῶν μετὰ τὸ ἰ. (χ) Κατὰ
τὴν ἀρῆμ. ἰ. (ψ) Ἐκ τῆς ἀρῆμ. πόρισ. ὁμῶς. (ω) Κατὰ τὴν
ἰ. τῇ ε'. (α) Κατὰ τὴν β'. τῇδε τῇ τμητ. (β). Τὸ α.
μῆρ. τῆς λ'. πρότ. ἐστὶ τῇ α'. βιβλ. τῇ Ἀπολ.

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

τε ἄλληλους καὶ παράλληλοι ἔσονται

σαν Ἀντικείμενα Ἰπερβολαὶ αἱ ΑΜ, ΨΝ, καὶ ἡ ΜΝ ἐφ' ἐκάτερα τῶν κέντρων Γ, συμπιπτέτω ὡς κατὰ τὰ Μ καὶ Ν σημεία. ἤχθωσαν δὲ ἀπὸ τῶν σημείων ἐφαπτόμενα αἱ ΜΤ, ΝΗ, τῇ Διαπύπτεισσι κατὰ τὰ Τ καὶ Η σημεία. λέγω ὅτι ἡ ΓΜ = ΓΝ. Β'. ὅτι ἡ ΜΤ ἴση τε καὶ ὡς τῇ ΝΗ. πίν. Θ. χ. ι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

τῶν Μ καὶ Ν σημείων ἤχθωσαν τεταγμένως Διάμετρον αἱ ΜΠ, ΝΦ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ' Α'.

ὡς ΨΠ. ΠΑ : ΜΠ² :: ΑΦ. ΦΨ : ΝΦ². (γ) καὶ
ἀλλ' ὡς ΨΠ. ΠΑ : ΑΦ. ΦΨ :: ΜΠ² : ΝΦ². ἀλλ'
ὡς ΜΠ² : ΝΦ² :: ΠΓ² : ΦΓ². (δ) ἔστι γὰρ ὡς ΜΠ :
ΝΦ :: ΠΓ : ΦΓ. (ε) ὡς ἄρα ΨΠ. ΠΑ : ΑΦ. ΦΨ ::
ΠΓ² : ΦΓ². (ζ) καὶ ἐναλλάξ ὡς ΨΠ. ΠΑ : ΠΓ² :: ΑΦ.
ΦΨ : ΦΓ². καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΠΓ² : ΨΠ. ΠΑ :: ΦΓ² :
ΑΦ. ΦΨ. καὶ κατ' ἀναξροφὴν λόγῳ ὡς ΠΓ² : ΠΓ² -
ΨΠ. ΠΑ :: ΦΓ² : ΦΓ² - ΑΦ. ΦΨ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΠΓ² -
ΨΠ. ΠΑ = ΓΛ², τὸ δὲ ΦΓ² - ΑΦ. ΦΨ = ΓΨ². (η)
ὡς ἄρα ΠΓ² : ΓΛ² :: ΦΓ² : ΓΨ². ἀλλὰ τὸ ΓΛ² = ΓΨ².
ἄρα καὶ τὸ ΠΓ² = ΦΓ². (θ) διὸ καὶ ἡ ΠΓ = ΦΓ.
ἐπεὶ δὲ καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἔχουσιν τὰ ΜΓΠ, ΝΓΦ
τρί.

(γ) Κατὰ τὸ Πόριον. τὸ μετὰ τὴν α'. τῶν τε τμήμα. (δ) Κατὰ τὸ
ζ'. τῶν μετὰ τὸ ε'. Θεωρημ. (ε) Κατὰ τὴν δ'. τῶν ε'. (ζ) Κατὰ
τὴν ε'. τῶν ε'. (η) Κατὰ τὴν ε'. τῶν β'. (θ) Κατὰ τὴν κ'. τῶν ε'.

τρίγωνα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔστιν ἄρα καὶ ἡ $ΓΜ = ΓΝ$. (ι)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Β'.

Τὸ μὲν $ΠΓ.ΙΤ. = ΓΑ^2$, τὸ δὲ $ΦΓ.ΓΗ = ΓΨ^2$.
(κ) ἀλλὰ τὸ $ΓΑ^2 = ΓΨ^2$. ἄρα καὶ τὸ $ΠΓ.ΙΤ. = ΦΓ.ΓΗ$. ἔστι δὲ ἡ $ΠΓ = ΦΓ$. ἄρα καὶ ἡ $ΙΤ = ΓΗ$. τῶν τριγώνων ἔνι $ΙΜΤ$, $ΓΝΗ$ αἱ μὲν $ΓΜ$, $ΙΤ$ ἴσαι ταῖς $ΓΝ$, $ΓΗ$ ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, αἱ δὲ πρὸς τῷ $Γ$ γωνίαι ἴσαι. ἄρα καὶ ἡ $ΜΤ = ΝΗ$, καὶ γωνία ἡ $ΝΜΤ = ΜΝΗ$. (λ) ἡ ἄρα $ΜΤ$ ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ $ΝΗ$.

ΣΤΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Ἐὰν ἀχθῇσα ἡ δευτέρα Διάμετρος $ΒΔ$, ἐκβλήσῃ ἐφ' ἑκάτερα, δίχα τεμῇ τὰς $ΖΜ$, $ΟΙ$, τὰς ἐπιζευγνύσας τὰς ἐν ταῖς ἀντικειμέναις τομαῖς ἴσας τεταγμένας $ΜΠ$, $ΖΦ$, $ΙΣ$, $ΟΞ$. ἐπεὶ γὰρ αἱ $ΜΠ$, $ΖΦ$ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι, καὶ ἡ $ΜΖ$ ἄρα ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ $ΠΦ$. (μ) ἐκὲν παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ $ΜΦ$. ἔστι δὲ καὶ ἡ $ΒΔ$ ἑκατέρᾳ τῶν $ΜΘ$, $ΖΝ$ παράλληλος, (ν) παραλληλόγραμμα ἄρα εἰσὶ τὰ $ΜΓ$, $ΕΦ$. διὸ ἡ μὲν $ΜΕ = ΠΓ$, ἡ δὲ $ΕΖ = ΓΦ$. (ξ) ἀλλ' ἡ $ΓΠ = ΓΦ$, (ο) ἄρα καὶ ἡ $ΜΕ = ΕΖ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ $ΙΡ = ΡΟ$, καὶ ἡ $Θδ = δΝ$.

Β'. Αἱ ἄρα $ΖΜ$, $ΟΙ$, $ΝΘ$ τεταγμένα εἰσὶν ἐκτὸς τῶν ἀντικειμένων τομῶν, δίχα τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς Δευτέρας Διαμέτρου $ΒΔ$, τῆς καὶ τὰ παραλληλόγραμμα $ΜΦ$, $ΙΞ$, $ΠΝ$ δίχα τεμνέσθης.

Κ

Γ'.

(ι) Κατὰ τὴν κς'. τῆ α'. (κ) Κατὰ τὴν δ'. Συμπ. τῆς προλαβ. προτ. (λ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ α'. (μ) Κατὰ τὴν λγ'. τῆ α'. (ν) Κατὰ τὴν κδ'. ὁρισμ. (ξ) Κατὰ τὴν λδ'. τῆ α'. (ο) Κατὰ τὸ α' μέρ. τῆς προκασμ. προτ.

Γ'. Ἡ τρίτη ἀνάλογος τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΒΔ, καὶ τῆς πλαγίας ΨΑ, οἷον ἡ ΒΛ, ὀρθία πλευρὰ ἐστὶν ὡς πρὸς τὴν ΒΔ. ὥστερ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου τετράγωνον ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ καὶ τῆς ὀρθίας αὐτῆς ΑΥ, εἶπεν τὸ $ΒΔ^2 = ΨΑ \cdot ΑΥ$, (π) ἔτω δὴ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΒΔ καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς αὐτῆς ΒΛ, ἥτοι τὸ $ΨΑ^2 = ΒΔ \cdot ΒΛ$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Αἱ πλαγία μὲν πλευρὰ τῇ ΒΔ, ὀρθία δὲ τῇ ΒΛ γραφόμεναι δύο Ὑπερβολαί, αἱ ΚΒΧ, ΩΔΖ, Συζυγαῖς Ἀντικείμεναι, ἡ κατὰ Συζυγίαν Ἀντικείμεναι καλεῖνται, τῶν ΙΑΘ, ΟΨΦ· τῶν παλιν δὲ, αὐταὶ Συζυγαῖς Ἀντικείμεναι ἐκείνων, ἡ δὲ πλαγία αὐτῶν πλευρὰ ΨΑ δευτέρα Διάμετρος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Τὰ τετράγωνα, τὰ ἀπὸ τῶν ἐκτὸς τῶν ἀντικειμένων τομῶν Τεταγμένων λόγον ἔχουσι πρὸς αἰχληλα, ὅν τὰ ἀπὸ τῶν ὑπ' αὐτῶν καὶ τῶν κέντρων ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν τετράγωνα, προσκειμένα αὐτοῖς καὶ τὰ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας Διαμέτρου τετράγωνα.

* Εἰς α.

(π) Ἐκ τῆς πδ'. ὁρισμ. δῆλον.

Ἐξωσαν Ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ ΑΙ, ΨΟ, ἐκτὸς δὲ ἐπὶ τὴν δευτέραν Διάμετρον τεταγμέναι αἱ ΜΕ, ΙΡ, ὑπ' αὐτῶν δὲ ἀποτεμνόμεναι ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου πρὸς τῷ κέντρῳ Γ ἑυθείαι, αἱ ΓΕ, ΓΡ. λέγω δὴ ὅτι ὡς $\overline{ΜΕ}^2 : \overline{ΙΡ}^2 :: \overline{ΓΕ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 : \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΒ}^2$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ΨΠ. ΠΑ : $\overline{ΜΠ}^2 :: \Psi\Lambda : \Lambda\Upsilon$. (ρ) ἀλλ' ὡς $\Psi\Lambda : \Lambda\Upsilon :: \overline{\Psi\Lambda}^2 : \overline{ΒΔ}^2$, (σ) ὡς δὲ $\overline{\Psi\Lambda}^2 : \overline{ΒΔ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$. (τ) ὡς ἄρα ΨΠ. ΠΑ : $\overline{ΜΠ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$. (υ) διὸ καὶ ὡς ΨΠ. ΠΑ + $\overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΜΠ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$. (φ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΨΠ. ΠΑ + $\overline{ΓΑ}^2 = \overline{ΓΠ}^2$, (χ) εἴτεν $\overline{ΜΕ}^2$. (ψ) τὸ δὲ $\overline{ΜΠ}^2 = \overline{ΓΕ}^2$. (ω) ὡς ἄρα $\overline{ΜΕ}^2 : \overline{ΓΕ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς $\overline{ΙΡ}^2 : \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$. ἔσται δὴ ἔν καὶ ὡς $\overline{ΜΕ}^2 : \overline{ΓΕ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 :: \overline{ΙΡ}^2 : \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΒ}^2$, (α) καὶ ἐναλλάξ ὡς $\overline{ΜΕ}^2 : \overline{ΙΡ}^2 :: \overline{ΓΕ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 : \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΒ}^2$.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΙΡ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΓΡ προσκειμένον αὐτῷ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμετέρας ΓΒ τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΒΔ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ὀρθία πλευρὰ ΒΛ, πρὸς τὴν δευτέραν Διάμετρον ΒΔ. εἴτεν ἐστὶν ὡς $\overline{ΙΡ}^2 : \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 :: ΒΛ : ΒΔ$. ἐπεὶ γάρ ὡς $ΒΔ : ΑΨ :: ΑΨ : ΒΛ$, (β) ὡς ἄρα $\overline{ΒΔ}^2 : \overline{ΑΨ}^2 :: ΒΔ : ΒΛ$, (γ) καὶ ἀνάπαλιν ὡς $\overline{ΑΨ}^2 : \overline{ΒΔ}^2 :: ΒΛ : ΒΔ$. ἀλλ' ὡς

Κ α

 $\overline{ΑΨ}^2 :$

- (ρ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α. τῷ δὲ τῷ τμήμα. (σ) Ἐκ τῷ κδ. ὁρωμ. δῆλον. (τ) Κατὰ τὴν η. τῷ ε. (υ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (φ) Κατὰ τὴν ζ. τῷ ε. (χ) Κατὰ τὴν ε. τῷ β. (ψ) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. (ω) Ἐκ τῆς αὐτ. δῆλον. (α) Κατὰ τὴν ἀρημ. ε. (β) Κατὰ τὴν προλ. γ. Συνέπ. (γ) Κατὰ τὸ β. Πόρις. τὸ μετὰ τὴν η. τῷ ε.

$\overline{ΑΨ}^2 : \overline{ΒΔ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$. (δ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2 ::$
 $ΒΛ : ΒΔ$. (ε) ἔστι δὲ ὡς $\overline{ΙΡ}^2 : \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$,
 (ς) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΙΡ}^2 : \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 :: ΒΛ : ΒΔ$. (η)

Β'. Ἐὰν γραφῶσιν αἱ κατὰ Συζυγίαν Ἀντικείμεναι το-
 μῇ ΚΒΧ, ΩΔΖ, τὰς ἐκτὸς τῶν Ἀντικείμενων το-
 μῶν τεταγμένως τέμνωσιν, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν τμη-
 μάτων, ΙΚ, ΚΟ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ δις
 τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ΓΑ τῆς πλα-
 γίας πλευρᾶς ΨΑ, εἴτεν ἔσεται τὸ ΙΚ. ΚΟ $= 2\overline{ΓΑ}^2$.
 ἐπεὶ γὰρ ὡς $\overline{ΚΡ}^2 : \Delta P.PB :: ΒΛ : ΒΔ$. (θ) ὡς δὲ
 $ΒΛ : ΒΔ :: \overline{ΙΡ}^2 : \overline{ΓΡ} + \overline{ΓΒ}^2$. (ι) ὡς ἄρα $\overline{ΙΡ}^2 : \overline{ΓΡ}^2 +$
 $\overline{ΓΒ}^2 :: \overline{ΚΡ}^2 : \Delta P.PB$, (κ) καὶ ἐναλλάξ ὡς $\overline{ΙΡ}^2 : \overline{ΚΡ}^2 ::$
 $\overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΒ}^2 : \Delta P.PB$, καὶ διαιρεθέντα ὡς $\overline{ΙΡ}^2 - \overline{ΚΡ}^2 :$
 $\overline{ΚΡ}^2 :: \overline{ΓΒ}^2 + \overline{ΓΡ}^2 - \Delta P.PB : \Delta P.PB$. ἀλλὰ τὸ μὲν
 $\overline{ΙΡ}^2 - \overline{ΚΡ}^2 = ΙΚ. ΚΟ$, τὸ δὲ $\overline{ΓΡ}^2 - \Delta P.PB =$
 $\overline{ΓΒ}^2$. (λ) ὡς ἄρα ΙΚ. ΚΟ : $\overline{ΚΡ}^2 :: 2\overline{ΓΒ}^2 : \Delta P.PB$.
 καὶ ἐναλλάξ, ὡς ΙΚ. ΚΟ : $2\overline{ΓΒ}^2 :: \overline{ΚΡ}^2 : \Delta P.PB$,
 ἀλλ' ὡς $\overline{ΚΡ}^2 : \Delta P.PB :: ΒΛ : ΒΔ$, (μ) ὡς δὲ ΒΛ :
 $ΒΔ :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΒ}^2$, (ν) ἄρα καὶ ὡς ΒΛ : ΒΔ :: $2\overline{ΓΑ}^2 :$
 $2\overline{ΓΒ}^2$. (ξ) ἄρα καὶ ὡς ΙΚ. ΚΟ : $2\overline{ΓΒ}^2 :: 2\overline{ΓΑ}^2 :$
 $2\overline{ΓΒ}^2$. (ο) τὸ ἄρα ΙΚ. ΚΟ $= 2\overline{ΓΑ}^2$. (π)

Γ'. Τῆς ΙΟ ἐπὶ τὰ Β μέρη φερομένης, καὶ παραλ-
 λήλης τῇ ΨΑ διαμενέσσης, καὶ ἐπὶ τὸ Β ἡκίσσης, τὸ
 ΙΚ. ΚΟ ὀρθογώνιον εἰς τετράγωνον μεταβάλλεται,
 τὸ

(δ) Κατὰ τὴν η. τῷ ε. (ε) Κατὰ τὴν ἀρημ. ε. (ς) Ὅρα τὴν
 δαξ. τῆς προκ. προτ. (η) Κατὰ τὴν ἀρημ. ε. (θ) Κατὰ
 τὴν Συμπ. τῆς α. τῷ ζε τῷ τμήτ. (ι) Κατὰ τὴν προλ. Συ-
 νίπ. (κ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (λ) Κατὰ τὴν ε. τῷ β.
 (μ) Κατὰ τὴν ἀρημ. τῆς α. Συνίπ. (ν) Ὅρα τὴν προλ. Συ-
 νίπ. (ξ) Κατὰ τὴν η. τῷ ε. (ο) Κατὰ τὴν ἀρημ. ε. (π) Κα-
 τὰ τὴν β. τῷ ε.

τὸ ἀπὸ ὁποτέρως δῆθεν τῶν IP, PO , καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ $2\Gamma A^2$, ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν $IP=PO$, (ρ) ἡ δὲ $KP=PX$, (σ) καὶ ἡ IK ἄρα ἴση τῇ XO . καὶ ἐπεὶ φε-
ρομένης μὲν τῆς IO ἐπὶ τὰ B μέρη, ἡ KX συνε-
χῶς ἐλαττῆται, ἡζάσης δὲ ἐπὶ τὸ B , καὶ ἐφαπ-
τομένης κατὰ κορυφὴν γεγονύας, τὰ μὲν σημεῖα
 K, X ταυτίζεται, ἡ δὲ IK ἴση τῇ IP γίνεται, ὁμοί-
ως ἡ OX τῇ OP , ὁπλὸν ἄρα ὅτι τὸ $IK \cdot KO$ εἰς τὸ
 IP^2 , ἡ εἰς τὸ PO^2 μεταβάλλεται. ἴσα δὲ ὄντος τῆ
 $IK \cdot KO$ τῷ $2\Gamma A^2$, ἴσον ἔσεται καὶ τὸ IP^2 , ἢ τὸ
 PO^2 τῷ αὐτῷ $2\Gamma A^2$.

Λ Η Μ Μ Α. (τ)

Ἐὰν Ὑπερβολῆς τῆς AE εὐθεῖα ἐπιψάυσ-
σα ἡ MT συμπίπτῃ τῇ ἀρχικῇ Διαμέτρῳ
 ΨN κατὰ τὸ T , καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς M κα-
ταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμε-
τρον ἡ MP , καὶ ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς πα-
ράλληλος ἀχθῇ ἡ AD συμπίπτουσα τῇ μὲν
 MT τῇ διὰ τῆς ἀφῆς κατὰ τὸ O , τῇ δὲ διὰ
τῆς κέντρων Γ καὶ τῆς ἀφῆς M ἡγμένη GM
κατὰ τὸ Δ , ληφθέντος δὲ τινος σημείου ἐπὶ
τῆς τομῆς, οἷον τῆς Φ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι,
αἱ $\Phi H, \Phi \Gamma$, ἡ μὲν τῇ ἐφαπτομένη MT πα-
ράλληλος, ἡ δὲ ἐπὶ τὴν Διάμετρον τεταγ-
μέ-

K 3

μέ-

(ρ) Κατὰ τὴν α'. Συνίπ. τῆς προλ. προτ. (σ) Κατὰ τὴν ζ'. ὁρισμ.
(τ) Ἡ μὲν. προτ. ἰσὶ τῇ α'. βιβλ. Ἀπολλων.

μένη, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τριγώνων ΦΗΥ
ἴσον ἔσται τῷ τετραπλεύρῳ ΒΔΑΥ, τῷ ὑπὸ
τῆς διὰ τῶ κέντρων καὶ τῆς ἀφῆς ΓΜΒ ἀπο-
τεμνομένῳ. χ. 2.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς τρίγων. ΜΓΠ : τρίγων. ΔΓΑ :: $\overline{ΓΠ}^2$: $\overline{ΓΑ}^2$,
(υ) ἀλλ' ὡς $\overline{ΓΠ}^2$: $\overline{ΓΑ}^2$:: ΓΠ : ΓΤ. (φ) ἔστι γὰρ ὡς
ΓΠ : ΓΑ :: ΓΑ : ΓΤ. (χ) καὶ ὡς ΓΠ : ΓΤ :: τρίγων. ΜΓΠ :
τρίγων. ΜΓΤ. (ψ) ὡς ἄρα ΜΓΠ : ΔΓΑ : ΜΓΠ :
ΜΓΤ. (ω) τὸ ἄρα ΔΓΑ = ΜΓΤ. (α) τῶν ἐκείνου
ἀφαιρεθῶ ἀπὸ τῶ ΜΓΠ τριγώνων. ἔκβν τὸ ΜΠ
τρίγωνον ἴσον τῷ τετραπλεύρῳ ΜΔΑΠ. ἐπεὶ δὲ ὡς
 $\overline{ΦΥ}^2$: $\overline{ΜΠ}^2$: ΨΥ. ΥΑ : ΨΠ. ΠΑ. (β) ἔστι δὲ τὸ μὲν
ΨΥ. ΥΑ = $\overline{ΓΤ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$, τὸ δὲ ΨΠ. ΠΑ = $\overline{ΓΠ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$.
(γ) ὡς ἄρα $\overline{ΦΤ}^2$: $\overline{ΜΠ}^2$:: $\overline{ΓΤ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$: $\overline{ΓΠ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$.
ἀλλ' ὡς $\overline{ΦΤ}^2$: $\overline{ΜΠ}^2$:: τρίγ. ΦΗΥ : τρίγ. ΜΠΠ, (δ)
ὡς ἄρα ΦΗΥ : ΜΠΠ :: $\overline{ΓΤ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$: $\overline{ΓΠ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$. (ε)
ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{ΓΤ}^2$: $\overline{ΓΑ}^2$:: τρίγ. ΓΒΥ : τρίγ. ΓΔΑ, (ς)
καὶ διαμεθύντα $\overline{ΓΤ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$: $\overline{ΓΑ}^2$:: ΓΒΥ - ΓΔΑ : ΓΔΑ,
ἔστιν $\overline{ΓΤ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$: $\overline{ΓΑ}^2$:: ΒΔΑΥ : ΓΔΑ, καὶ ἐναλ-
λάξ ὡς $\overline{ΓΤ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$: ΒΔΑΥ :: $\overline{ΓΑ}^2$: ΓΔΑ. καὶ διὰ τὰ
αὐτὰ δὴ ἔστι καὶ ὡς $\overline{ΓΠ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$: ΜΔΑΠ :: $\overline{ΓΑ}^2$: ΓΔΑ.
ἔσται δὴ ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΓΤ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$: ΒΔΑΥ :: $\overline{ΓΠ}^2 -$
 $\overline{ΓΑ}^2$: ΜΔΑΠ. (η) καὶ ἐναλλάξ ὡς $\overline{ΓΤ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$: $\overline{ΓΠ}^2$: -
 $\overline{ΓΑ}^2$

- (υ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῶ σ'. (φ) Κατὰ τὸ β'. Πόρις. τὸ μετὰ
τὴν η. τῶ σ'. (χ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς δ'. τῶ δὲ τῶ τμήμ.
(ψ) Κατὰ τὴν α. τῶ σ'. (ω) Κατὰ τὴν ι. τῶ δ'. (α) Κατὰ
τὴν β. τῶ ι. (β) Κατὰ τὴν α'. τῶ δὲ τῶ τμήμ. (γ) Κατὰ τὴν
σ. τῶ β. (δ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῶ σ'. (ε) Κατὰ τὴν ἀρῆμ. ι.
(ς) Κατὰ τὴν αὐτ. ιθ'. (η) Κατὰ τὴν ἀρῆμ. ι.

$\overline{\Gamma\Lambda}^2 :: \text{ΒΔΑΥ} : \text{ΜΔΑΠ.}$ ἄρα καὶ ὡς $\Phi\text{ΗΥ} : \text{ΜΤΠ} ::$
 $\text{ΒΔΑΥ} : \text{ΜΔΑΠ.}$ (θ) ἀλλὰ τὸ $\text{ΜΤΠ} = \text{ΜΔΑΠ.}$, ὡς
 δέδεικται. ἄρα καὶ τὸ $\Phi\text{ΗΥ} = \text{ΒΔΑΥ.}$ (ι)

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Ἀχθείσης ἀπὸ τῆς Κ σημείον, τῆς μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς ἐπαφῆς, τῆς τεταγμένης ΚΙ, συμπίπτει τῇ διὰ τῆς κέντρος καὶ τῆς ἀφῆς ΓΜ κατὰ τὸ Ρ, ἔσται τὸ τρίγωνον ΔΓΑ, ὃ ἀποτεμένει ἢ διὰ τῆς κέντρος καὶ τῆς ἀφῆς ΓΜ, ἴσον τῷ τετραπλεύρῳ ΡΓΗΚ τῷ ὑπὸ τῆς αὐτῆς ΓΜ ἀποτεμνομένῳ. ἐπεὶ γάρ τὸ ΚΗΙ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΡΔΑΙ τετραπλεύρῳ, (κ) ἑκατέρω τῶν ἀφαιρεθέντων ἀπὸ τῆς ΡΓΙ τριγώνου, τὰ λοιπὰ ἴσα ἔσονται, εἴτεν τὸ ΡΓΗΚ τετράπλευρον τῷ ΔΓΑ τριγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'. (λ)

Ἐὰν μίας τῶν Ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψάυσῃ συμπίπτῃ τῇ Διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς κέντρος εὐθεῖα ἐκβληθεῖσα τεμῇ τὴν ἑτέραν τομὴν, ἥτις ἂν ἀχθῇ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐκβληθείσης· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ἔτω διχοτομηθέντων τετράγωνα ἔσονται πρὸς ἀλλήλα ὡς τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν

Κ 4

τῶν

(θ) Κατὰ τὴν αὐτ. (ι) Κατὰ τὴν κ'. τῆς β'. (κ) Κατὰ τὸ Δῆμ.
 (λ) Τὸ μὲν α. μέρ. ἢ μή. ἐστὶ, τὸ δὲ β'. ὁμοίον τῇ γ'. τῆς α'.
 βιβλ. 5^η Ἀπολλων.

τῶν εὐθυαῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς ἐκβλη-
θείσης.

Ἐξωσαν Ἀντικείμενα αἱ ΑΕ, ΨΕ, ὧν Διάμετρος
μὲν ἡ ΘΝ, κέντρον δὲ τὸ Γ. καὶ ἐφαπτέσθω τῆς ΑΕ
τομῆς ἡ ΜΤ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Γ συμπίπτουσα,
καὶ διὰ τῆς ἀφῆς Μ καὶ τῆς κέντρος Γ εὐθεῖα ἡ ΓΜ
ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν ἑτέραν τομὴν κατὰ τὸ Σ. καὶ
ἀπὸ τῶν Φ καὶ Ε σημείων τῆς τομῆς ἡχθῶσαν αἱ ΦΛΚ,
ΕΩΑ τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ παράλληλοι. λέγω δὴ Α'. ὅτι
ἡ μὲν ΦΛ=ΚΛ, ἡ δὲ ΕΩ=ΑΩ. β'. ὅτι ὡς $\overline{ΚΛ}^2$:
 $\overline{ΑΩ}^2 :: \zeta\Lambda. \Delta\Lambda : \zeta\Omega. \Omega\Lambda$.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῶν Φ καὶ Ε σημείων τετάχθωσαν αἱ ΦΥ, ΕΝ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ μὲν τρίγ. ΦΗΥ=τετραπ. ΒΔΑΥ, τὸ δὲ ΚΗΙ=
ΡΔΑΙ. (μ) ἀφηρήθω ἀπὸ μὲν τῆς ΦΗΥ τὸ ΚΗΙ,
ἀπὸ δὲ τῆς ΒΔΑΥ τὸ ΡΔΑΙ. ἔκδεν τὸ ΦΚΙΥ=ΕΡΙΥ.
ἀφηρήθω κοινὸν τὸ τραπέζιον ΒΑΚΙΥ. τὸ ἄρα ΦΛΒ=
ΚΛΡ. ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{ΦΛ}^2 : \overline{ΚΛ}^2 :: \Phi\Lambda\Β : ΚΛΡ$, (ν) ἔστιν
ἄρα τὸ $\overline{ΦΛ}^2 = \overline{ΚΛ}^2$. διὸ καὶ ἡ ΦΛ=ΚΛ, ἐπεὶ δὲ τὰ
ΕΑΝ=ΞΔΑΝ, (ξ) κοινὸν ἀφαιρεθέντος τῆς τετρα-
πλεύρου ΞΩΑΝ, ἔσεται τὸ ΞΩΕ=ΩΑΔ. ἔστι δὲ ὡς
ΞΩΕ : ΩΑΔ : ΕΩ² : ΑΩ². διὸ τὸ ΕΩ²=ΑΩ². ἔκδεν
καὶ ἡ ΕΩ=ΑΩ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ ΓΔΑ=ΓΜΤ. (ο) τέτων ἐκάτερον ἀφηρήθω
ἀπὸ τῆς ΩΓΑ. ἔκδεν τὸ ΩΔΑ=ΩΜΤΑ. πάλιν τὰ
ΓΜΤ ἴσον ὃν τῷ ΓΔΑ, ἴσον ἐστὶ καὶ τῷ ΡΓΗΚ. (π)
ἀφη-

(μ) Κατὰ τὸ Αῆμ. (ν) Κατὰ τὴν εἰδ. τῆς ε'. (ξ) Κατὰ τὸ Αῆμ.

(ο) Ὅρα τὴν δειξ. τῆς Αῆμ. (π) Κατὰ τὴν Συνίπ. τῆς Αῆμ.

ἀφ' ἑκτέρου ἀπὸ τῆς ΛΓΗ τριγώνου, τὸ ἄρα $\Lambda\Gamma\text{Κ} = \Lambda\text{ΜΤΗ}$. ὡς ἄρα $\Omega\Delta\Lambda : \Lambda\Gamma\text{Κ} :: \Omega\text{ΜΤΑ} : \Lambda\text{ΜΤΗ}$. ἀλλὰ τὸ μὲν $\Omega\text{ΜΤΑ} = \Omega\Gamma\Lambda - \text{ΜΓΤ}$, τὸ δὲ $\Lambda\text{ΜΤΗ} = \Lambda\Gamma\text{Η} - \text{ΜΓΤ}$. ὡς ἄρα $\Omega\Delta\Lambda : \Lambda\Gamma\text{Κ} :: \Omega\Gamma\Lambda - \text{ΜΓΤ} : \Lambda\Gamma\text{Η} - \text{ΜΓΤ}$. ἔστι δὲ ὡς $\Omega\Gamma\Lambda : \text{ΜΓΤ} :: \Omega\Gamma^2 : \text{ΜΓ}^2$, (ρ) καὶ διακρεθέντα ὡς $\Omega\Gamma\Lambda - \text{ΜΓΤ} : \text{ΜΓΤ} :: \Omega\Gamma^2 - \text{ΜΓ}^2 : \text{ΜΓ}^2$, καὶ ἐναλλάξ ὡς $\Omega\Gamma\Lambda - \text{ΜΓΤ} : \Omega\Gamma^2 - \text{ΜΓ}^2 :: \text{ΜΓΤ} : \text{ΜΓ}^2$. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ὡς $\Lambda\Gamma\text{Η} - \text{ΜΓΤ} : \Lambda\Gamma^2 - \text{ΜΓ}^2 :: \text{ΜΓΤ} : \text{ΜΓ}^2$. διὸ δὴ καὶ ὡς $\Omega\Gamma\Lambda - \text{ΜΓΤ} : \Omega\Gamma^2 - \text{ΜΓ}^2 :: \Lambda\Gamma\text{Η} - \text{ΜΓΤ} : \Lambda\Gamma^2 - \text{ΜΓ}^2$, (σ) καὶ ἐναλλάξ ὡς $\Omega\Gamma\Lambda - \text{ΜΓΤ} : \Lambda\Gamma\text{Η} - \text{ΜΓΤ} :: \Omega\Gamma^2 - \text{ΜΓ}^2 : \Lambda\Gamma^2 - \text{ΜΓ}^2$. ἄρα καὶ ὡς $\Omega\Delta\Lambda : \Lambda\Gamma\text{Κ} :: \Omega\Gamma^2 - \text{ΜΓ}^2 : \Lambda\Gamma^2 - \text{ΜΓ}^2$. (τ) ἀλλὰ τὸ μὲν $\Omega\Gamma^2 - \text{ΜΓ}^2 = \zeta\Omega \cdot \Omega\text{Μ}$, τὸ δὲ $\Lambda\Gamma^2 - \text{ΜΓ}^2 = \zeta\Lambda \cdot \Lambda\text{Μ}$. (υ) (εἰς ἴσα γὰρ τέτμηται ἡ $\zeta\text{Μ}$ κατὰ τὸ Γ). (φ) ἔστι δὲ καὶ ὡς $\Omega\Delta\Lambda : \Lambda\Gamma\text{Κ} :: \Lambda\Omega^2 : \text{ΚΛ}^2$. (χ) ὡς ἄρα $\Lambda\Omega^2 : \text{ΚΛ}^2 :: \zeta\Omega \cdot \Omega\text{Μ} : \zeta\Lambda \cdot \Lambda\text{Μ}$. καὶ ἐνάπαλιν, ὡς $\text{ΚΛ}^2 : \Lambda\Omega^2 :: \zeta\Lambda \cdot \Lambda\text{Μ} : \zeta\Omega \cdot \Omega\text{Μ}$.

ΣΤ Ν Ε Π Ε Ι Α Ι.

Α'. Αἱ εὐθεῖαι $\Gamma\Omega$, $\Gamma\text{Μ}$, $\Gamma\Delta$ συνεχῶς ἀνάλογόν εἰσιν, ἐπεὶ γὰρ ὡς $\Pi\Gamma : \Gamma\Lambda :: \Gamma\Lambda : \Gamma\Gamma$, (ψ) ἔστι δὲ ὡς μὲν $\Pi\Gamma : \Gamma\Lambda :: \Gamma\text{Μ} : \Gamma\Delta$, ὡς δὲ $\Gamma\Lambda : \Gamma\Gamma :: \Gamma\Omega : \Gamma\text{Μ}$, (ω) ἄρα καὶ ὡς $\Gamma\Omega : \Gamma\text{Μ} :: \Gamma\text{Μ} : \Gamma\Delta$. (α) τὸ ἄρα $\Gamma\text{Μ}^2 = \Gamma\Omega \cdot \Gamma\Delta$. (β)

Β'. Ἐὰν ἐκβληθῇται ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ τῇ ἀπὸ τῆς ζ ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευθείσῃ συμπέσῃ κατὰ τὸ Χ , τὸ ἀπολαμβανόμενον μέρος ΜΧ τῆς ἐφαπτομένης διχῶς

Κ 5

τμη-

(ρ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῇ ε'. (σ) Κατὰ τὴν ι. τῇ ε'. (τ) Κατὰ τὴν αὐτ. (υ) Κατὰ τὴν ε'. τῇ β'. (φ) Ἐκ τῆς ε'. τῇ δὲ τῇ τμήμ. δῆλον. (χ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῇ ε'. (ψ) Κατὰ τὴν δ' Συνεπ. τῆς δ'. τῇ δὲ τῇ τμήμ. (ω) Κατὰ τὴν δ', τῇ ε'. (α) Κατὰ τὴν ι. τῇ ε'. (β) Κατὰ τὴν ιθ'. τῇ ε'.

τμηθήσεται κατὰ τὸ Ο ὑπὸ τῆς κατὰ κορυφὴν ἀπτομένης ΑΔ. ἡ γὰρ ΔΩ : ΔΜ λόγον ἔχει συγκείμενον ἕκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ἡ ΣΩ : ΣΜ, καὶ ἐκ τῷ ὃν ἔχει ὁ 2 : 1. (γ) ἔστι δὲ ὡς ΔΩ : ΔΜ :: ΩΑ : ΜΟ. (δ) ἄρα καὶ ἡ ΩΑ : ΜΟ λόγον ἔχει συγκείμενον ἕκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ἡ ΣΩ : ΣΜ, καὶ ὁ 2 : 1. ἀλλ' ἡ αὐτὴ ΩΑ : ΜΟ λόγον ἔχει συγκείμενον ἕκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ΩΑ : ΜΧ καὶ ΜΧ : ΜΟ. (ε) ἔστι δὲ ὡς ΩΑ : ΜΧ :: ΣΩ : ΣΜ. (ς) ἄρα καὶ ὡς ΜΧ : ΜΟ :: 2 : 1. ἡ ἄρα ΜΧ διπλασία τῆς ΜΟ. διχα ἄρα τέτμηται ἡ ΜΧ κατὰ τὸ Ο.

Γ. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἐήλον, ὅτι ἡ Δευτεραία Διάμετρος ΣΜΩ (η) ὁ μόνον διχα τέμνει τὰς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένας ΚΦ, ΑΕ, τὰς τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ παραλλήλους, ἀλλ' ἔστι καὶ ὡς ΚΑ² : ΑΩ² :: ΣΑ. ΛΜ : ΣΩ. ΩΜ. καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν δὲ ἀπτομένη αὐτὴν μὲν ἔτῳ τέμνει, ὥς τε τὰς ΙΩ, ΓΜ, ΓΔ συνεχῶς ἀνάλογον εἶναι, τὴν δὲ ἐφαπτομένην ΜΧ διχα. καὶ πάντα δὲ τὰ συμπτώμετα τὰ ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς Διαμέτρου δειχθέντα, καὶ ἐπὶ τῆς Δευτεραίας δειχθήσεται ἐκβληθείσης ἐπὶ τὴν ΨΣ Ἀντικειμένην ταμὴν. διὸ δὴ ὀριδιθήσεται καὶ ἡ τῆς Δευτεραίας ΣΜ ὀρθία πλευρά, εἰάν τῶν ΣΩ. ΩΜ, ΑΩ², καὶ ΣΜ τετάρτη ἀνάλογος εὐρεθῇ. ὡσαύτως καὶ ἡ Δευτέρα αὐτῆς, εἴτεν ἡ μέση ἀνάλογος τῆς τε Δευτεραίας ΣΜ καὶ τῆς εὐρεθείσης αὐτῆς ὀρθίας, καὶ παραλλήλος τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΧ καὶ διχα κατὰ τὸ Γ κέντρον τεμνομένη, οἷον ἡ σμ. (θ)

Δ'.

(γ) Κατὰ τὴν ε'. Συνίπ. τῆς δ. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (δ) Κατὰ τὴν δ. τῷ ε'. (ε) Κατὰ τὸ α'. Πίρις. τὸ μετὰ τὴν ἡ. τῷ ε'. (ς) Κατὰ τὴν δ. τῷ ε'. (η) Ὅσα τὴν κ. ὀρισμ. (θ) Ὅσα τὴν κ. ὀρισμ.

Δ'. εἰάν ἀπὸ σημείου Ω, καθ' ὃ ἡ τεταγμένη ΑΕ
τὴν δευτεραίαν τέμνει διάμετρον ΣΩ, ἀχθῇ εὐθὺς
ἡ ΩΖ τῇ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν
διάμετρον ΨΝ τεταγμένη ΜΠ παράλληλος, τῇ αὐ-
τῇ διαμέτρῳ συμπίπτουσα κατὰ τὸ Ζ, ἔσονται ἥτε
ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβάνομένη πρὸς τῷ κέντρῳ Γ, εἴτεν
ἡ ΖΓ, καὶ ἡ ὑπὸ τῆς ἐπαφῆς τεταγμένως ἀχθῇ-
σα ΜΠ ἀπολαμβάνομένη ΓΠ, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς
πλαγίας πλευρᾶς ΓΑ συνεχῶς ἀνάλογον, εἴτεν ἔσε-
ται ὡς ΓΖ : ΓΠ :: ΓΠ : ΓΑ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΑΕ : ΑΩ ::
ΕΝ : ΩΖ, καὶ ὡς ΑΕ : ΑΩ :: ΑΝ : ΑΖ, (ι) ἔστι
δὲ τῆς ΑΩ διπλασία ἡ ΑΕ, (κ) ἄρα καὶ ἡ ΕΝ
διπλασία τῆς ΩΖ, καὶ ἡ ΑΝ τῆς ΑΖ. προσκείθω
τῇ μὲν ΑΝ ἡ ΨΑ, τῇ δὲ ΑΖ ἡ ΓΑ. ἡ ἄρα ΨΝ
διπλασία τῆς ΓΖ. διὸ τὸ ΨΝ. ΝΑ τετραπλάσιον
τῷ ΓΖ. ΖΑ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΝ² τετραπλάσιον τῷ
ΩΖ². ὡς ἄρα ΩΖ² : ΕΝ² :: ΓΖ. ΖΑ : ΨΝ. ΝΑ. ἔστι
δὲ καὶ ὡς ΕΝ² : ΜΠ² :: ΨΝ. ΝΑ : ΨΠ. ΠΑ. (λ)
ἄρα καὶ δι' ἴσον ὡς ΩΖ² : ΜΠ² :: ΓΖ. ΖΑ : ΨΠ.
ΠΑ. ἀλλ' ὡς ΩΖ² : ΜΠ² :: ΓΖ² : ΓΠ². (μ) ἔστι γὰρ
ὡς ΩΖ : ΜΠ :: ΓΖ : ΓΠ. (ν) ἄρα καὶ ὡς ΓΖ² :
ΓΠ² :: ΓΖ. ΖΑ : ΨΠ. ΠΑ. (ξ) καὶ ἐναλλάξ ὡς ΓΖ² :
ΓΖ. ΖΑ :: ΓΠ² : ΨΠ. ΠΑ. καὶ κατ' ἀνατροπὴν ὡς
ΓΖ² : ΓΖ² - ΓΖ. ΖΑ :: ΓΠ² : ΓΠ² - ΨΠ. ΠΑ. ἀλλὰ τὸ
μὲν ΓΖ² - ΓΖ. ΖΑ = ΓΖ. ΓΑ, (ο) τὸ δὲ ΓΠ² - ΨΠ.
ΠΑ = ΓΑ². (π) ὡς ἄρα ΓΖ² : ΓΖ. ΓΑ :: ΓΠ² : ΓΑ²,
καὶ ἐναλλάξ, ὡς ΓΖ² : ΓΠ² :: ΓΖ. ΓΑ : ΓΑ². ἀλλ' ὡς
ΓΖ.

(ι) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (κ) Ἐκ τῆς προκ. προτ. δηλον.
(λ) Κατὰ τὴν α'. τῷ δε τῷ τιμήμ. (μ) Κατὰ τὸ ζ'. Οἰώρ.
τῶν μετὰ τὸ ε'. (ν) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (ξ) Κατὰ τὴν ε'.
τῷ α'. (ο) Κατὰ τὴν β'. τῷ β'. (π) Κατὰ τὴν ε'. τῷ β'.

ΓΖ. ΓΑ: ΓΑ²: :: ΓΖ: ΓΑ. (ρ) ὡς ἄρα ΓΖ²: ΓΠ²: ::
 ΓΖ: ΓΑ, εἴτεν ἡ ΓΖ: ΓΑ διπλασίονα λόγον ἔχει
 ἢ περ ἡ ΓΖ: ΓΠ, (σ) ἦτοι ὡς ΓΖ: ΓΠ :: ΓΠ:
 ΓΑ. ἔσαι δὴ ἐν καὶ τὸ ΓΠ² = ΓΖ. ΓΑ. (τ)

Ε'. Τὰ τρίγωνα τὰ ὑπὸ τῆς Δευτεραίας Διαμέτρου
 ἀποτεμνόμενα, εἴτεν τὰ ΩΓΑ, ΜΓΠ ἴσα ἀλλήλοις
 εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΩΓ: ΜΓ :: ΖΓ: ΠΓ, (υ) ἔστι
 δὲ ὡς ΖΓ: ΠΓ :: ΠΓ: ΓΑ, (φ) ἄρα καὶ ὡς ΩΓ:
 ΜΓ :: ΠΓ: ΓΑ, (χ) τὸ ἄρα ΩΓΑ = ΜΓΠ. (ψ)

Ζ'. Ἐὰν δύο ἀχθῶσι δευτερά Διαμέτροι ἦτε ψα τῆς
 ἀρχικῆς καὶ πρώτης ΨΑ, καὶ ἡ σμ τῆς Δευτεραίας
 ΣΜ, λόγον ἔξωσι πρὸς ἀλλήλας ὅν αὖ τεταγμένα ἐπι-
 τετὴν πρώτην καὶ Δευτεραίαν Διαμέτρων, εἴτεν ἴσεται
 ὡς ψα: σμ :: ΜΠ: ΑΩ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΩΓ: ΜΓ ::
 ΠΓ: ΑΓ, (ω) καὶ κατ' ἀνατροφὴν, ὡς ΩΓ: ΩΜ ::
 ΠΓ: ΠΑ, καὶ διαιρεθέντα ὡς ΜΓ: ΩΜ :: ΑΓ:
 ΠΑ, ἄρα καὶ ὡς ΣΜ: ΩΜ :: ΨΑ: ΠΑ, (α) καὶ ἀνάπα-
 λιν ὡς ΩΜ: ΣΜ :: ΠΑ: ΨΑ, καὶ συντεθέντα ὡς
 ΣΩ: ΣΜ :: ΨΠ: ΨΑ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΣΜ: ΣΩ ::
 ΨΑ: ΨΠ. ἔστι δὲ ὡς μὲν ΣΜ: ΩΜ :: ΨΑ: ΠΑ,
 καθάπερ δέδεικται. ἄρα καὶ ὡς ΣΜ²: ΣΩ. ΩΜ ::
 ΨΑ²: ΨΠ. ΠΑ. (β) ἀλλ' ὡς ΨΠ. ΠΑ: ΜΠ²: ::
 ΨΑ

(ρ) Κατὰ τὴν α. τῆ ε'. (σ) Ὅρα τὴν δ. Σημ. τὴν ἐν τοῖς ὀρίσμοις
 τῆ ε. (τ) Κατὰ τὴν ιζ. τῆ ε'. (υ) Κατὰ τὴν δ. τῆ ε'.
 (φ) Κατὰ τὴν προλ. Σύνεπ. (χ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (ψ) Καί
 τὰ τὴν ι. τῆ ε'. (ω) Ὅρα τὴν προλ. Σύνεπ. (α) Κατὰ τὴν
 ιε. τῆ ε. (β) Κατὰ τὴν ἀντ.

ψA , πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευρὰν, οἷον τὴν AS , (γ) ὡς δὲ
 $\Psi A : \Lambda S :: \overline{\Psi A}^2 : \overline{\psi a}^2$. (δ) ἔστι γὰρ ὡς $\Psi A : \psi a ::$
 $\psi a : AS$. (ε) ὡς ἄρα $\Psi\Pi$. $\Pi A : \overline{M\Pi}^2 :: \overline{\Psi A}^2 :$
 $\overline{\psi a}^2$. (ζ) καὶ ἐναλλάξ ὡς $\overline{\Psi A}^2 : \psi\Pi$. $\Pi A :: \overline{\psi a}^2$
 $M\Pi^2$. ἀλλὰ δέδεικται καὶ ὡς $\zeta M^2 : \zeta\Omega$. $\Omega M :: \overline{\Psi A}^2 :$
 $\psi\Pi$. ΠA . ἄρα καὶ ὡς $\zeta\Pi^2 : \zeta\Omega$. $\Omega M :: \overline{\psi a}^2 : \overline{M\Pi}^2$.
 διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δεῖχθῆσεται ὡς $\zeta M^2 : \zeta\Omega$. $\Omega M ::$
 $\overline{\psi a}^2 : \overline{\Lambda\Omega}^2$. ἐπεὶ δὲ ἀνωτέρω δέδεικται ὡς $\zeta M^2 :$
 $\zeta\Omega$. $\Omega M :: \overline{\Psi A}^2 : \Psi\Pi$. ΠA , ἔστι δὴ ἄρα καὶ ὡς
 $\overline{\psi a}^2 : \overline{M\Pi}^2 :: \overline{\psi a}^2 : \overline{\Lambda\Omega}^2$. (η) ἄρα καὶ ὡς $\psi a : M\Pi ::$
 $\zeta\mu : \Lambda\Omega$, (θ) καὶ ἐναλλάξ ὡς $\psi a : \zeta\mu :: M\Pi :$
 $\Lambda\Omega$. ὅθεν δὲ ὅτι καὶ ὡς $\psi\Gamma : \mu\gamma :: M\Pi : \Lambda\Omega$.

Ζ'. Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἔσονται τὰ πέρατα μ , ς
 (πίν. I. κ. 1.) τῆς δευτέρας διαμέτρου $\mu\varsigma$ ἐν ταῖς γρα-
 φέσαις συζυγέσι τομαῖς $B\mu$, $\Delta\varsigma$. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῆς
 πέρατος ς ἡ μὲν ζE παράλληλος τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ
 ΨA , ἡ δὲ ζZ τῇ Δευτεραίᾳ Διαμέτρῳ ζM , συμ-
 πίπτεσαι τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ $B\Delta$ κατὰ E καὶ Z
 σημεῖα. ἔσω δὲ κατὰ κορυφὴν μὲν ἀπτομένη ἡ AH ,
 τεταγμένα δὲ αἱ $M\Pi$, $A\Gamma$. καὶ ἐπεὶ ἡ $\Gamma Z : \Gamma\Delta$ λό-
 γον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῶν λίγων ὃν ἔχει $\Gamma Z : \Gamma\varsigma$
 καὶ $\Gamma\varsigma : \Gamma\Delta$. (ι) ἔστι δὲ ὡς μὲν $\Gamma Z : \Gamma\varsigma :: AH : A\Gamma$. (κ)
 (ομοία γὰρ τὰ $\Gamma Z\varsigma$, AHI τρίγωνα. ἔστι γὰρ ἡ μὲν
 γωνία $\Gamma Z\varsigma = B\Gamma H$, ἔπτεν τῇ AHI , ἡ δὲ $\Gamma\varsigma Z = \zeta\Gamma I$,
 ἦτοι τῇ ΠA . (λ)) ὡς δὲ $\Gamma\varsigma : \Gamma\Delta :: A\Gamma : M\Pi$. (μ) ἡ
 ἄρα

(γ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α'. τῆ δὲ τῇ τομῇ. (δ) Κατὰ τὸ β'
 Πόρ. τὸ μετὰ τὴν ἡ. τῆ ε'. (ε) Κατὰ τὸν κδ'. ὁρισμ. (ζ) Κα-
 τὰ τὴν ε'. τῆ ε'. (η) Κατὰ τὴν αὐτ. (θ) Κατὰ τὸ ζ' τῶν με-
 τὰ τὸ ε'. Θεώρημ. (ι) Κατὰ τὸ α'. Πόρ. τὸ μετὰ τὴν ἡ τῆ
 ε'. (κ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (λ) Κατὰ τὴν κδ'. τῆ α'. (μ) Κα-
 τὰ τὴν προλ. Συνέπ.

ἄρα ΓΖ: ΓΔ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῶ λδ.
 γβ ὃν ἔχει ΑΗ: ΑΙ, καὶ ΑΙ: ΜΠ, εἴτην ἐστὶν ὡς
 ΓΖ: ΓΔ:: ΑΗ: ΑΙ: ΜΠ. (ν) ἀλλ' ὡς ΑΗ: ΑΙ:
 ΑΙ: ΜΠ:: ΑΗ: ΜΠ, (ξ) ὡς δὲ ΑΗ: ΜΠ::
 ΓΑ: ΓΠ, (ο) καὶ ὡς ΓΑ: ΓΠ:: ΓΜ: ΓΙ, (π)
 ὡς δὲ ΓΜ: ΓΙ:: ΜΤ: ΙΑ. (ρ) ἄρα καὶ ὡς ΓΖ:
 ΓΔ:: ΜΤ: ΙΑ. (σ) ἀλλ' ἢ ΜΤ: ΙΑ λόγον ἔχει
 συγκείμενον ἔκτε τῶ λόγῳ ὃν ἔχει ΜΤ: ΜΠ, καὶ
 ΜΠ: ΙΑ. (τ) ἐστὶ δὲ ὡς μὲν ΜΤ: ΜΠ:: Γς:
 ΓΕ, (υ) ὅμοια γὰρ τὰ ΜΤΠ, ΕΓΕ τρίγωνα. (ἐστὶ
 γὰρ ἢ μὲν γωνία ἢ πρὸς τῷ Π ἴση τῇ πρὸς τῷ
 Ε, ἢ δὲ ΠΤΜ = ΠΓς, ἥτοι τῇ ΓςΕ.) (φ) ὡς
 δὲ ΜΠ: ΙΑ:: ΓΔ: Γς. (χ) ἄρα καὶ ἢ ΓΖ: ΓΔ
 λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶ ὃν ἔχει Γς: ΓΕ,
 καὶ ΓΔ: Γς, εἴτην ἐστὶν ὡς ΓΖ: ΓΔ:: Γς: ΓΔ:
 ΓΕ. Γς. (ψ) ἀλλ' ὡς Γς: ΓΔ: ΓΕ. Γς:: ΓΔ: ΓΕ.
 (ω) ἄρα καὶ ὡς ΓΖ: ΓΔ:: ΓΔ: ΓΕ. (α) τὸ
 ἄρα $\overline{ΓΔ}^2 = \overline{ΓΖ} \cdot \overline{ΓΕ}$. (β) τετῶν ἐκότερον ἀφηρήδω
 ἀπὸ τῶ $\overline{ΓΕ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΒΕ} \cdot \overline{ΕΔ} = \overline{ΓΕ} \cdot \overline{ΕΖ}$. (γ) ἐ-
 πεί δὲ καὶ τὸ ΨΠ. ΠΑ = ΤΠ. ΠΓ, (δ) ἔκῃν ἐστὶν
 ὡς ΤΠ. ΠΓ: $\overline{ΜΠ}^2:: \Psi\P. ΠΑ: \overline{ΜΠ}^2$. (ε) ἀλλ' ὡς
 ΨΠ. ΠΑ: $\overline{ΠΜ}^2:: \PsiΑ: ΑΣ$, (ζ) καὶ ὡς ΨΑ: ΑΣ::
 $\overline{ΨΑ}^2: \overline{ΒΔ}^2$. (η) ὡς ἄρα ΤΠ. ΠΓ: $\overline{ΜΠ}^2:: \overline{ΨΑ}^2:$
 $\overline{ΒΔ}^2$

- (ν) Κατὰ τὸν ζ. ὁρισμ. τῶ ε'. (ξ) Κατὰ τὴν α'. τῶ ε'. (ο) Κα-
 τὰ τὴν δ'. τῶ ε'. (π) Ὅρα τὴν προλ. ε'. Συνίπ. (ρ) Κα-
 τὰ τὴν δ'. τῶ ε'. (σ) Κατὰ τὴν ε'. τῶ ε'. (τ) Κατὰ τὸ ἄρημ.
 Πόρις. (υ) Κατὰ τὴν δ'. τῶ ε'. (φ) Κατὰ τὴν κδ'. τῶ ε'.
 (χ) Κατὰ τὴν προλ. Συνίπ. (ψ) Κατὰ τὸν ζ. ὁρισμ. τῶ ε'.
 (ω) Κατὰ τὴν α'. τῶ ε'. (α) Κατὰ τὴν ε'. τῶ ε'. (β) Κα-
 τὰ τὴν ιζ'. τῶ ε'. (γ) Κατὰ τὴν ε', καὶ β'. τῶ β'. (δ) Κα-
 τὰ τὴν ε'. Συνίπ. τῆς δ'. προτ. τῶ δὲ τῶ τμήμ. (ε) Κατὰ
 τὴν α'. τῶ ε'. (ζ) Κατὰ τὴν Συνίπ. τῆς α'. τῶ δὲ τμήμ. (η) Ἐκ
 τῶ δ'. ὁρισμ. δῆλον.

$\overline{BD}^2$. ἀλλὰ τὸ ΤΠ. ΠΓ: $\overline{MP}^2$ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῶν ὅν ἔχει ΤΠ: ΜΠ, καὶ ΠΓ: ΜΠ. (θ) ἔστι δὲ ὡς μὲν ΤΠ: ΜΠ:: $\overline{CE}$: ΓΕ, ὡς δὲ ΠΓ: ΜΠ:: $\overline{CE}$: ΖΕ. (ι) ὡς ἄρα $\overline{PA}^2$: $\overline{BD}^2$:: $\overline{CE}^2$: ΓΕ. ΖΕ. ἀλλὰ τὸ ΓΕ. ΖΕ=ΒΕ. ΕΔ, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. ὡς ἄρα $\overline{PA}^2$: $\overline{BD}^2$:: $\overline{CE}^2$: ΒΕ. ΕΔ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΒΕ. ΕΔ: $\overline{CE}^2$:: $\overline{BD}^2$: $\overline{PA}^2$. καμίνε δὲ τὴν ΒΛ ὀρθίαν πλευράν εἶναι τῆς ΒΔ, ἔστιν ὡς $\overline{BD}^2$: $\overline{PA}^2$:: ΒΔ: ΒΛ. (κ) ὡς ἄρα ΒΕ. ΕΔ: $\overline{CE}^2$:: ΒΔ: ΒΛ. τὸ σημεῖον ἄρα ϵ ἐπὶ τῆς Δς τομῆς κεῖται. (λ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ μ ἐπὶ τῆς Βμ τομῆς ἐστὶ.

ΛΗΜΜΑ.

Εὰν ἐν ταῖς Ἀντικειμέναις τομαῖς ὁ ΤΚ Α'-
ξων ἔτω τμηθῇ πρὸς ταῖς κορυφαῖς, Ψ, Α,
ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΤ, ἢ ΨΦ καὶ ἑκατέρω
τῶν τμημάτων ΨΤ, ἢ ΑΦ περιεχόμενον ὀρθο-
γώνιον ἴσον εἶναι τεταρτιμορίῳ τῶν ὑπὸ τῆς
πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ καὶ τῆς ὀρθίας ΑΛ πε-
ριεχομένων ὀρθογωνίων, εἴτεν εἰς ἢ ΑΤ. $\Psi\Gamma =$
 $\frac{\Psi\Lambda \cdot \Lambda\Lambda}{4}$, ἢ $\Psi\Phi \cdot \Lambda\Phi = \frac{\Psi\Lambda \cdot \Lambda\Lambda}{4}$. ἀπὸ δὲ τῶν Τ καὶ
Φ σημείων ἐπὶ τὰ Β καὶ Χ, καθ' ἃ ἡ ἐφαπτο-
μένη ΜΒ τὰς κατὰ κορυφὴν ἀπτομένας
ΑΧ, ΨΒ τέμνει, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ
ΤΒ,

(θ) Κατὰ τὴν κγ'. τῶν ε'. (ι) Κατὰ τὴν δ'. τῶν ε'. (κ) Ἐκ
τῆς γ'. Συνισ. τῆς ε'. πρὸν. τῶν δὲ τῶν τμημάτων. δῆλον (λ)
Ἐκ τῆς Συνισ. τῆς α'. πρὸν. τῶν δὲ τῶν τμημάτων. δῆλον.

ΤΒ, ΤΧ, καὶ αἱ ΦΧ, ΦΒ, λέγω Α'. ὅτι αἱ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενα γωνία, αἱ μὲν πρὸς τοῖς Τ καὶ Φ σημείοις, εἴτεν αἱ ΒΤΧ, ΒΦΧ, ὁρθαῖ- εῖσιν· αἱ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΦΧ ὑποτεινόμενα ἴσων ἀλλήλαις, τετέστιν ἢ μὲν ΒΧΤ = ΒΦΤ, ἢ δὲ ΦΓΧ = ΦΒΧ. Β'. ὅτι εἰάν δύο ἐκ τῶν ἐπιζευχθεῶν εὐθειῶν αἱ ΤΧ, ΒΦ ἐκβληθεῖ- σαι συμπέσωσιν, ἢ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν Η ἐπὶ τῆς ἐπαφῆς Μ ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα ΗΜ τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΒ πρὸς ὁρθὰς ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Α'.

Τὸ ΒΨ. ΑΧ = $\frac{\Psi\Lambda \cdot \Lambda\Lambda}{\Psi\Lambda \cdot \Lambda\Lambda}$ (μ) ἀλλὰ καὶ τὸ ΑΥ. ΨΥ = $\frac{\Psi\Lambda \cdot \Lambda\Lambda}{\Psi\Lambda \cdot \Lambda\Lambda}$ (ν) τὸ ἄρα ΒΨ. ΑΧ = ΑΥ. ΨΥ. ὡς ἄρα ΒΨ: ΨΥ :: ΑΥ: ΑΧ. (ξ) ἔστι δὲ καὶ γωνία ἡ ΒΨΥ = ΤΑΧ, ἴσων γωνία ἄρα εἰσὶ τὰ ΒΨΥ, ΤΑΧ τρίγωνα, καὶ γωνία ἡ ΤΒΨ = ΑΤΧ. (π) κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΥΨ, ἢ ἄρα ΤΒΨ + ΒΥΨ = ΑΤΧ + ΒΥΨ. ἀλλ' ἡ ΤΒΨ + ΒΥΨ μιᾶ ὁρθῇ ἴση. (ρ) ἄρα καὶ ἡ ΑΤΧ + ΒΥΨ, εἴτεν ἡ ΒΥΧ ἴση μιᾶ ὁρθῇ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ΒΦΧ ὁρθῇ ἔστιν. ὁ ἔν διαμέτρῳ τῇ ΒΧ γραφο- μένος κύκλος διὰ τῶν Β, Γ, Χ, Φ σημείων ἦξει. (σ)

(μ) Κατὰ τὴν αἰ. Συνέπ. τῆς δ. τῷ δὲ τῷ ταύμ. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Κατὰ τὴν ις'. τῷ ε'. (ο) Ὁρθὴ γὰρ ἐκνότερα διὰ τὸν ΤΚ Ἀξονα. (π) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν δ. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν δ. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν λβ'. τῷ αἰ. (σ) Κατὰ τὴν δ. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν η'. τῷ ε'.

αἱ ἄρα ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ κύκλῳ γωνία ΒΧΥ,
ΒΦΥ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὡσαύτως αἱ ΦΥΧ, ΦΒΧ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β.

Εἰ γὰρ μὴ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΜΒ ἢ ΗΜ, ἢ ΧΘ αὐ-
τὸ τῷ Η ἢ ΗΙ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΜΒ. καὶ ταχθείσης
ἀπὸ τῷ Μ ἐπὶ τῷ Α' ἕκτος ΥΚ τῆς ΜΚ, ἐπεξεύχθω
ἢ ΚΙ. καὶ ἐπεὶ τῶν τριγώνων ΒΨΥ, ΒΙΗ ἢ μὲν γω-
νία ΒΨΥ = ΒΙΗ· (ἐκατέρω γὰρ ὁρθή.) ἢ δὲ ΥΒΨ =
ΙΒΗ· ἐκατέρω γὰρ ἴση δέδεικται τῇ ΦΥΧ· ὡς ἄρα ΙΒ :
ΒΨ :: ΒΗ : ΒΥ. (τ) ὡλλ' ὡς ΒΗ : ΒΥ : ΗΧ : ΧΦ,
(υ) ὡς δὲ ΗΧ : ΧΦ :: ΙΧ : ΑΧ· ὁμοία γὰρ τὰ ΗΧΙ,
ΦΧΑ τρίγωνα· (ἢ μὲν γὰρ γωνία ΗΙΧ = ΦΑΧ· ἐκα-
τέρω γὰρ ὁρθή· ἢ δὲ ΗΧΙ = ΑΧΦ· ἐκατέρω γὰρ ἴση
τῇ ΒΦΥ· ἢ γὰρ ΗΧΙ = ΒΧΥ, (φ) ἢ δὲ ΒΧΥ = ΒΦΥ.
(χ) ὥσπερ δὲ δέδεικται ἢ ΥΒΨ = ΑΥΧ, ἔτω δειχθή-
σεται καὶ ἢ ΑΧΦ = ΒΦΥ.) ὡς ἄρα ΙΒ : ΒΨ :: ΙΧ :
ΑΧ, (ψ) καὶ ἢ ΑΧΦ :: ΙΒ : ΙΧ :: ΒΨ : ΑΧ. ἔστι δὲ
ὡς ΒΨ ΑΧ :: ΨΚ : ΚΑ. (ω) ὡς ἄρα ΙΒ : ΙΧ :: ΨΚ :
ΚΑ, (α) καὶ διαμερόμεντα, ὡς ΒΧ : ΙΧ :: ΨΑ : ΚΑ·
ὡλλ' ὡς ΨΑ : ΚΑ :: ΠΧ : ΧΡ. (ἔστι γὰρ ὡς ΥΚ : ΥΨ ::
ΥΡ : ΥΠ, (β) καὶ κατὰ ἀνατροφήν, ὡς ΥΚ : ΨΚ ::
ΥΡ : ΠΡ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΨΚ : ΥΚ :: ΠΡ : ΥΡ. καὶ
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐστὶν ὡς ΥΚ : ΚΑ :: ΥΡ : ΧΡ. διὸ καὶ
δι' ἴσιν ὡς ΨΚ : ΚΑ :: ΠΡ : ΧΡ, καὶ διαμερόμεντα, ὡς
ΨΑ : ΚΑ :: ΠΧ : ΧΡ.) καὶ ὡς ΠΧ : ΧΡ :: ΒΧ : ΧΜ.
(γ) ὡς ἄρα ΒΧ : ΙΧ :: ΒΧ : ΧΜ. (δ) ἢ ἄρα ΧΜ =
ΙΧ.

Λ

- (τ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (υ) Κατὰ τὴν αὐτ. (φ) Κατὰ τὴν
ιθ. τῷ α'. (χ) Κατὰ τὸ προλ. μέρος (ψ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'.
(ω) Κατὰ τὴν θ'. Συνέπ. τῆς δ'. τῷ δὲ τῷ τμήματι. (α) Κατὰ
τὴν ἐκδοσιν ι'. (β) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (γ) Κατὰ τὴν
αὐτ. (δ) Κατὰ τὴν ἀρχήν. ε'.

ΙΧ. (ε) τὸ ἔλκεν ἴσον τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ αἴτιας ἢ ΗΙ κἀθευτες τῇ ΒΜ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθῆσεται, ὅτι ἐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΗΜ. ἢ αἴτια ΗΜ τῇ ΒΜ πρὸς ἐξῆς ἐστίν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Τῶν αὐτῶν καμμένων, εἰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων τῷ Α΄ξονος σημείων ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, αἱ ὑπὸ αὐτῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιεχόμεναι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἀπὸ τῶν εἰρημένων τῷ Α΄ξονος σημείων Υ, Φ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπεζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΥΜ, ΦΜ. λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ αὐτῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΜΒ περιεχόμεναι γωνίαι αἱ ΥΜΒ, ΦΜΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρω τῶν ΒΜΗ, ΒΥΗ γωνιῶν ἐξῆς ἐστίν, (ζ) ὁ αἴτια διαμέτρω τῇ ΒΗ γραφόμενος κύκλος διὰ τῶν Η, Μ, Υ, Β σημείων ἔξει. ὡσαύτως ἐπὶ ἑκατέρω τῶν ΧΜΗ, ΧΦΗ ὅςθι, ὁ διαμέτρω τῇ ΧΗ γραφόμενος κύκλος διὰ τῶν Χ, Μ, Η, Φ ἔξει σημείων. (η) ἔκκεν ἢ μὲν ΕΗΥ γωνία ἴση τῇ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι ΥΜΒ, ἢ δὲ ΦΜΧ ἴση τῇ αὐτῇ ΒΗΥ, ὅτεν τῇ ΦΗΧ. (θ) ἢ αἴτια ΥΜΒ = ΦΜΧ.

ΣΤ.

(ε) Κατὰ τὴν β. τῷ ε. (ζ) Κατὰ τὸ προλ. Λημ. (η) Κατὰ τὴν δ. Σύντα. τὴν μετὰ τὴν η. τῷ ε. (θ) Κατὰ τὴν α. τῷ γ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Τα εἰρημένα Γ , Φ σημεία ὀριζήσονται, εἰάν ἀπὸ τῶ κέντρων Γ πρὸς ὁρθὰς τῷ $\Upsilon\text{Κ}$ Ἀΐξονι ἀχθῇ ἢ ἸΝ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς δευτέρας Διαμέτρου, καὶ τῇ ἐπιζευχθεῖσιν $\Psi\text{Ν}$ ἴση ληφθῇ ἐκατέρω τῶν $\Gamma\text{Υ}$, $\Gamma\Phi$. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\text{ΑΥ} \cdot \Upsilon\Psi + \overline{\Gamma\Psi}^2 = \overline{\Gamma\Upsilon}^2$, (ι) ἔστι δὲ ἢ $\Gamma\Upsilon = \Psi\text{Ν}$, (κ) τὸ ἄρα $\text{ΑΥ} \cdot \Upsilon\Psi + \overline{\Gamma\Psi}^2 = \overline{\Psi\text{Ν}}^2$. ἀλλὰ τὸ $\overline{\Psi\text{Ν}}^2 = \overline{\Gamma\Psi}^2 + \overline{\Gamma\text{Ν}}^2$. (λ) τὸ ἄρα $\text{ΑΥ} \cdot \Upsilon\Psi + \overline{\Gamma\Psi}^2 = \overline{\Gamma\Psi}^2 + \overline{\Gamma\text{Ν}}^2$. ἀφ' ἡρέθω κοινὸν τὸ $\overline{\Gamma\Psi}^2$. τὸ ἄρα $\text{ΑΥ} \cdot \Upsilon\Psi = \overline{\Gamma\text{Ν}}^2$. ἀλλὰ τὸ $\overline{\Gamma\text{Ν}}^2 = \Psi\text{Α} \cdot \text{ΑΛ}$. (ἔστι γὰρ ἡ $\Gamma\text{Ν}$ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς δευτέρας διαμέτρου + τῆς μέσης ἀναλόγου τῶν $\Psi\text{Α}$, ΑΛ .) ἄρα καὶ τὸ $\text{ΑΥ} \cdot \Upsilon\Psi = \Psi\text{Α} \cdot \text{ΑΛ}$. Τὸ ἄρα Υ σημεῖον τὸ ἕτερον τῶν προειρημένων + ἐστὶ. (μ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπιζευχθεῖσιν τῆς ΑΝ , δευχθήσεται ὅτι τὸ Φ τὸ ἕτερον τῶν σημείων ἐστίν.

Β. Εκ τῆς δὲ καὶ ἐφαπτομένην ἀπὸ τῶ δοθέντος σημείου Μ τῆς δοθείσης Ὑπερβολῆς ῥαδίως ἐστὶν ἀγαγεῖν. εἰάν γὰρ ἀπὸ τῶν εὐρεθέντων σημείων Υ , Φ ἐπιζευχθῶσιν εὐθείαι αἱ $\Upsilon\text{Μ}$, $\Phi\text{Μ}$, καὶ ἀχθῇ ἢ ΜΒ δίχα τέμνυσθαι τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν $\Upsilon\text{ΜΒ}$, ἢ ΜΒ ἐφαπτομένη ἔσθαι τῆς Ὑπερβολῆς κατὰ τὸ Μ .

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὰ Υ καὶ Φ σημεία, Ἐστίαὶ ἢ ὀμφαλοὶ τῆς Ὑπερβολῆς καλεῖνται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Εἰάν ἀπὸ τυχόντος τῆς Ὑπερβολῆς σημείου ἐπὶ τὰς Ἐστίας εὐθεῖαι ἐπιζευχθῶσιν, ἡ ὑ-

Λ 2

ΠΕ-

(ι) Κατὰ τὴν ε'. τὸ β'. (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὴν μζ'. νδ α'. (μ) Κατὰ τὸ προλ. Αἴμ.

περοχή αὐτῶν ἴση ἐσεται τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ.

Ἀπὸ τῆς τυχόντος τῆς Ὑπερβελῆς σημείῳ Μ ἐπὶ τὰς Ἐξίας Υ, Φ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΜΥ, ΜΦ. λέγω ὅτι ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ ΨΑ, ὅταν εἴη $ΥΜ - ΦΜ = ΨΑ$. πίν. ΙΑ'. χ. 1.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ μὲν τῆς Μ ἢ ΜΤ, ἀπὸ δὲ τῶν Α καὶ Ψ αἱ ΑΧ, ΨΒ ἐφαπτόμεναι τῆς τεμῆς. καὶ ἀπὸ τῆς Γ κέντρος καὶ τῆς ἐτέρας τῶν Ἐξίων Υ αἱ ΤΓΝ, ΥΠ παράλληλοι τῇ ΦΜ. καὶ ἀπὸ μὲν τῆς Τ, καθ' ὃ ἡ διὰ τῆς κέντρος τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΠ συμπίπτει ἐπὶ τὰ Υ, Ψ, Α σημεία ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΤΥ, ΤΨ, ΤΑ· ἀπὸ δὲ τῆς Υ, ἐπὶ τὰ Β, Χ, καθ' αὐτὴν αὐτὴν ΜΠ αἱ καὶ τὰ κορυφὴν ἀπτόμεναι τέμνουσιν, αἱ ΥΒ, ΥΧ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία $ΥΜΠ = ΦΜΠ$. (ν) ἀλλ' ἡ $ΦΜΠ = ΜΠΥ$, (ξ) ἄρα καὶ ἡ $ΥΜΠ = ΜΠΥ$. ἡ ἄρα $ΥΜ = ΥΠ$. (ο) ἐπεὶ δὲ ὡς $ΠΤ : ΤΜ :: ΥΝ : ΝΜ$, (π) καὶ ὡς $ΥΝ : ΝΜ :: ΥΓ : ΓΦ$, (ρ) ἄρα καὶ ὡς $ΠΤ : ΤΜ :: ΥΓ : ΓΦ$. (σ) ἀλλ' ἡ $ΥΓ = ΓΦ$. (τ) ἄρα καὶ ἡ $ΠΤ = ΤΜ$. ἐπεὶ ἔν τῶν ΠΤΤ, ΜΥΤ τριγώνων ἡ μὲν $ΥΠ = ΥΜ$, ἡ δὲ $ΠΤ = ΤΜ$, ἡ δὲ ΥΤ κοινὴ, καὶ γωνία ἄρα ἡ $ΥΤΠ = ΥΤΜ$. (υ) ὁρθὴ ἄρα ἑκατέρω αὐτῶν (φ) ἐστὶ δὲ ὁρθὴ καὶ ἡ ΒΨΥ. (χ) ὁ ἄρα διαμέτρου τῆς

(ν) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (ξ) Κατὰ τὴν κθ'. τῆς α'. (ο) Κατὰ τὴν ε'. τῆς α'. (π) Κατὰ τὴν β'. τῆς ε'. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτ. (σ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (τ) Ἐκ τῆς προλ. Λήμ. ὁρθον (υ) Κατὰ τὴν η'. τῆς α'. (φ) Κατὰ τὴν ιγ'. τῆς α'. (χ) Ἀξίον γάρ ὅτι ΤΒ.

τῇ ΓΒ γραφόμενος κύκλος, διὰ τῶν Β, Τ, Ψ, Υ σημείων ἤξει. (ψ) ἔσονται δὲ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ΓΒΨ, ΥΤΨ ἴσαι ἀλλήλαις. (ω) ὡσαύτως ἐπειδὴ ὁρθὴ ἑκατέρω τῶν ΥΤΧ, ΓΑΧ, ὁ διαμέτρω τῇ ΥΧ γραφόμενος κύκλος, διὰ τῶν Υ, Τ, Α, Χ σημείων ἤξει. καὶ αἱ γωνίαι ΑΥΧ, ΑΤΧ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ἔτι δὲ ἡ ΑΥΧ=ΓΒΨ, (α) ἄρα καὶ ἡ ΥΤΨ=ΑΤΧ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΨΤΧ. ἡ ἄρα ΥΤΧ=ΨΤΑ. ὡς ἡ ΥΤΧ ὁρθὴ ἐστίν, ὡς δέδεικται, ὁρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΨΤΑ. ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ ὁποτέρω τῶν ΓΨ, ΓΑ γραφόμενος κύκλος, διὰ τῆς Τ ἤξει. ἕκῃν αἱ ΓΨ, ΓΤ, ΓΑ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. καὶ ἐπεὶ ὡς ΜΠ : ΜΤ :: ΠΥ : ΤΝ· (β) ἔτι δὲ ἡ ΜΠ διπλασία τῆς ΜΤ· ἄρα καὶ ἡ ΠΥ, εἴτην ἡ ΥΜ διπλασία τῆς ΤΝ. ὡσαύτως ἐπεὶ ὡς ΥΦ : ΥΓ :: ΦΜ : ΓΝ, (γ) ἡ δὲ ΥΦ διπλασία τῆς ΥΓ, καὶ ἡ ΦΜ ἄρα διπλασία τῆς ΓΝ. ἄρα ἡ ΥΜ — ΦΜ διπλασία τῆς ΤΝ—ΓΝ, ἥτοι τῆς ΤΓ, ἢ τῆς ΓΑ. ὡς δὲ καὶ ἡ ΨΑ διπλασία τῆς ΓΑ. ἡ ἄρα ΥΜ—ΦΜ=ΨΑ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐσιν ἄρα συνεχῇ πορίσασθαι σημεία, δι' ὧν, δοθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΒΑ (χ. 2.) καὶ τῶν Ἐσίων ἀποστήματος ΥΦ, ἡ Ὑπερβολὴ γραφῆσεται. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῆς Υ εὐθεΐα ἡ ΥΜ τῆς ΒΑ μείζων. καὶ ληφθείσης τῆς ΥΔ ἴσης τῇ ΒΑ, κέντρον μὲν τῷ Υ, διαστήματι δὲ τῷ ΥΕ μείζονι τῆς ΥΔ τόξον γεγράφθω τὸ ΘΕΟ, κέντρον δὲ τῷ Φ, διαστήματι δὲ τῷ ΕΔ τόξον γεγράφθω τὸ ΗΠ, τέ-

Λ 3

μὲν

(ψ) Κατὰ τὴν δ'. Συσπ. τὴν μετὰ τὴν η'. τῆς ε'. (ω) Κατὰ τὴν κα', τῆς γ'. (α) Ὅρα τὴν δαζ. τῆς α. μέρ. τῆς προλ. Λήμ. (β) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (γ) Κατὰ τὴν αὐτ.

μιν τὸ ἥδη γραφὲν κατὰ τὸ Ζ. ὡσαύτως κέντρον μὲν τῷ Υ, διαστήματι δὲ τῷ ΥΓ μείζονι τῆς ΥΕ τὸ ζῶν γεγραφθῶ τὸ ΚΓΛ, κέντρον δὲ τῷ Φ, καὶ διαστήματι τῷ ΔΓ τὸ ζῶν γεγραφθῶ τὸ ΝΡ τέμνον τὸ ΚΛ κατὰ τὸ Ι. λέγω ἐπὶ εἶναι διὰ τῶν σημείων Ζ, Ι, καὶ τῶν ἐφεξῆς ἐμείως ἐκτιζομένων ἡ Ὑπερβολὴ ἥξει ἐπεξευχθῶσα· γὰρ αἱ ΥΖ, ΥΙ. καὶ ἔπει ἡ μὲν ΥΖ = ΥΕ, ἡ δὲ ΦΖ = ΕΔ. ἡ ἄρα ΥΖ - ΦΖ = ΥΕ - ΕΔ. αἱ δὲ ἡ ΥΕ - ΕΔ, εἴτεν ἡ ΥΔ = ΒΑ ἡ ἄρα ΥΖ - ΦΖ = ΒΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΙ - ΦΙ = ΒΑ. δῆλον ἄρα ὅτι τὰ Ζ, Ι σημῶν ἐν τῇ Ὑπερβολῇ εἰσὶ.

Β'. Τῶν αὐτῶν δοθέντων, γραφθήσεται καὶ διὰ κινήσεως κανόνος ἡ Ὑπερβολή. ἐξω γὰρ πλαγία μὲν πλευρὰ ἡ ΒΑ, (χ. 3.) ἀπέστημα δὲ τῶν Ἐπιῶν ἡ ΥΦ. ἦλθε δὲ ἐν τοῖς Φ καὶ Υ σημείοις πῆζον, τὰς ΔΦ, ΚΥ. καὶ τῷ μὲν ΔΦ σύμπηζον τὸ πέρας Φ τῷ νήματος ΦΜΓ τῷ ἐν τῷ κανόνι ΥΓ ἐνηρμοσμένον· ὁ δὲ ΚΥ διὰ τῆς ὁπῆς τῷ περὶ αὐτῷ κινήτῳ κανόνος ΥΓ διερχέσθω. κείσθω δὲ τὴν τῷ μήκους τῷ κανόνος ΥΓ καὶ τῷ νήματος ΦΜΓ ὑπεροχὴν ἴσην εἶναι τῇ ΒΑ. καὶ τῷ ἑτέρῳ πέρατος Γ τῷ νήματος τῷ τῷ κανόνος πέρατι ἐφαρμοδέντος, ἦλος ὁ ΗΜ μεταξὺ αὐτῶν τε καὶ τῆς εὐθείας ΥΦ ἐντεθείας, ἔγω τῷ κανόνι ΥΓ συμφερέσθω, ὥστε τὸ μὲν ΦΜ μέρος τῷ νήματος ἐντεταμένον διαμένειν, τὸ δὲ λοιπὸν τῷ κανόνι ἐφηρμοσμένον. λέγω δὴ, ὅτι ὁ ΗΜ ἦλος τῇ τριῶδε κινήσει τὴν ΑΜ Ὑπερβολὴν γράψει, ὅπερ γὰρ εἴη ὁ κανὼν ΥΓ, ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν τε καὶ τῷ νήματος ΦΜΓ ἴση ἔσεται τῇ ΒΑ. ὅσον γὰρ μέρος τῷ νήματος ἀπὸ τῷ κανόνος ἀποχωριζόμενον ἀφαιρεῖται, τοσούτον τῷ ΦΜ προσίθεται. διὸ ἡ ΥΜ - ΦΜ = ΒΑ. ἐξ ὧν δῆλον, ὅτι ἡ ΑΜ Ὑπερβολὴ εἴναι.

Γ. Ἐὰν ἀπὸ τῆς Ἑξίας Φ (χ. ι.) πρὸς ὁρθὰς τῇ ἑφαπτομένῃ ΜΠ ἀχθῇ ἡ ΦΚ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπίσῃ τῇ ἀπὸ τῆς ἐτέρας Ἑξίας Υ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπιζευχθεῖσιν ΥΜ κατὰ τὸ Ι, τὸ ἀπολαμβανόμενον ἀπ' αὐτῆς μέρος ΥΙ ἴσον ἔσεται τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ ΨΑ. ἐπεὶ γὰρ τῶν τριγώνων ΜΦΚ, ΜΙΚ αἱ μὲν πρὸς τῷ Κ γωνίαι ἴσαι, ἡ δὲ ΦΜΚ = ΙΜΚ, (δ) ἡ δὲ ΜΚ κοινὴ, καὶ ἡ ΦΜ ἄρα ἴση τῇ ΜΙ. (ε) ἐστὶ δὲ ΥΜ - ΦΜ = ΨΑ, (ζ) ἄρα καὶ ΥΜ - ΙΜ, εἴτεν ΥΙ = ΨΑ. δῆλον δὲ ὅτι ἡ ΥΙ ἡ ὑπερχή ἐστὶ τῶν ΥΜ, ΦΜ, τῶν ἀπὸ τῶν Ἑξιῶν Υ, Φ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπιζευχθεῖσιν.

Δ. Ἐὰν ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ πρὸς ὁρθὰς ἀχθῇ τῇ ἑφαπτομένῃ ΜΠ ἡ ΜΙΕ τῷ Ἀξονι κατὰ τὸ Ε συμπίπτουσα, ἔσεται ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΨΑ, πρὸς τὸ τῶν Ἑξιῶν ἀπόστημα ΥΦ, ὅπως ἡ ΥΜ, πρὸς τὸ μέρος ΥΕ τῷ Ἀξονι, τὸ μεταξὺ τῆς Ἑξίας Υ καὶ τῆς καθέτης ΜΕ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΥΙ : ΥΦ :: ΥΜ : ΥΕ, (η) ἐστὶ δὲ ἡ ΥΙ = ΨΑ, (θ) ἄρα καὶ ὡς ΨΑ : ΥΦ :: ΥΜ : ΥΕ.

Ε. Ἡ ΦΜ, (πίν. ΙΒ'. χ. ι.) ἡ ἀπὸ τῆς Ἑξίας Φ τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΒΗ ἀναχθεῖσα ἴση ἐστὶ τῷ ἡμίσει τῆς ὁρθίας πλευρᾷ ΨΑ. ἐστὶ μὲν γὰρ ὡς ΒΦ. ΦΑ : ΜΦ² :: ΒΑ : ΑΨ. (ι) ἀλλ' ὡς ΒΑ : ΑΨ :: ΒΑ. ΑΨ : ΑΨ². (κ) ὡς ἄρα ΒΦ. ΦΑ : ΜΦ² :: ΒΑ. ΑΨ : ΑΨ². (λ) ὡλλὰ τὸ ΒΦ. ΦΑ ἴσον τεταρτημορίῳ τῷ ΒΑ. ΑΨ. (μ) ἄρα καὶ τὸ ΜΦ² ἴσον

Λ 4

(δ) Κατὰ τὴν η'. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (ε) Κατὰ τὴν κς'. τῷ α'. (ζ) κατὰ τὴν προκ. πρὸτ. η) Κατὰ τὴν δ' τῷ ε'. (θ) Κατὰ τὴν προλ. Συνίπ. (ι) Κατὰ τὴν Σηνίπ. τῆς α' τῷ δὲ τῷ τμήμ. (κ) Κατὰ τὴν α'. τῷ ε'. (λ) Κατὰ τὴν ε', τῷ ε'. (μ) ὅρα τὸ προλ. Λήμ.

ἴσον τεταρτημορίῳ τῷ $\overline{A\Psi^2}$. ἡ ἄρα ΦΜ ἡμίσειά ἐστι τῆς ΨΑ.

Σ'. Τὸ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης ΑΛ μέρος ΑΙ, τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΜΤ ἀπολαμβάνόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ τῆς Ἑξιάς Φ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἀποσήματι ΑΦ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΒΦ. $\Phi A = BA$. $A\Psi$. (ν) ἐστὶ δὲ τὸ μὲν ΒΦ. $\Phi A = \Gamma\Phi$. ΦΤ, (ξ) τὸ δὲ ΒΑ $A\Psi = \Gamma A$. ΦΜ. (ἡ μὲν γὰρ ΓΑ ἡμίσεια τῆς ΒΑ, ⁴ ἡ δὲ ΦΜ τῆς ΑΨ. (ο)) τὸ ἄρα ΓΦ. ΦΤ = ΓΑ. ΦΜ. ὡς ἄρα $\Gamma\Phi : \Gamma A :: \Phi M : \Phi T$. (π) ἐπεὶ δὲ ὡς $\Gamma\Phi : \Gamma A :: \Gamma A : \Gamma T$, (ρ) καὶ διαμεθεντα ὡς $A\Phi : \Gamma A :: A\Gamma : \Gamma T$, καὶ ἐναλλάξ ὡς $A\Phi : A\Gamma :: \Gamma A : \Gamma T$ ἐστὶ δὲ ὡς $\Gamma A : \Gamma T :: \Gamma\Phi : \Gamma A$. (σ) ὡς ἄρα $A\Phi : A\Gamma :: \Gamma\Phi : \Gamma A$. (τ) διὸ δὴ καὶ ὡς $A\Phi : A\Gamma :: \Phi M : \Phi T$. (υ) δεδιγται γὰρ ὡς $\Gamma\Phi : \Gamma A :: \Phi M : \Phi T$. ἀλλ' ὡς $\Phi M : \Phi T :: AI : AT$. (φ) ὡς ἄρα $A\Phi : AT :: AI : AT$. (χ) ἡ ἄρα $AI = A\Phi$. (ψ)

Ζ'. Τῷ ΤΦΜ τριγώνῳ ἡ ΦΜ πλευρὰ μείζων τῆς ΦΤ, ἐστὶ γὰρ ὡς $A\Phi : AT :: \Phi B : BT$. (ω) ἀλλ' ἡ $AI = A\Phi$. (α) ὡς ἄρα $AI : AT :: \Phi B : BT$. ἀλλ' ὡς $AI : AT :: \Phi M : \Phi T$. (β) ὡς ἄρα $\Phi B : BT :: \Phi M : \Phi T$. (γ) ἀλλ' ἡ ΦΒ μείζων τῆς ΒΤ. ἄρα καὶ ἡ ΦΜ μείζων τῆς ΦΤ.

Η'.

(ν) Ὅρα τὸ αὐτό. (ξ) Κατὰ τὴν ε. Συνέπ. τῆς δ. τῷ δὲ τῇ τμήμ. (ο) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (π) Κατὰ τὴν ις τῷ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν δ. Συνέπ. τῆς δ' τῷ δὲ τῇ τμήμ. (σ) Κατὰ τὴν αὐτ. Συνέπ. (τ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (υ) Κατὰ τὴν αὐτ. (φ) Κατὰ τὴν δ. τῷ ε'. (χ) Κατὰ τὴν αὐτ. ε. (ψ) Κατὰ τὴν β' τῷ ε. (ω) Ὅρα τὴν η. Συνέπ. τῆς δ'. τῷ δὲ τῇ τμήμ. (α) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (β) Κατὰ τὴν δ. τῷ ε'. (γ) Κατὰ τὴν ἀρῆμ. ε.

Η'. Ἐὰν ἀπὸ τῷ τυχόντος τῷ Ἀξονος σημείῳ Η τεταγμένως ἀναχθῇ ἡ ΗΕ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπέσῃ τῇ ἐφαπτομένῃ ΤΜ κατὰ τὸ Δ, ἡ ἀπὸ τῆς Ἑσίας Φ ἐπὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς Ε ἐπιζευχθεῖσα ΦΕ ἴση ἔσται τῇ ΗΔ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῷ Ε ἡ ΕΝ παράλληλος τῇ ΤΔ. καὶ ἀπὸ τῷ κέντρῳ Γ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΜ, ἐκβεβλήθω κατὰ συνεχές· ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΛΙ ἐκβεβλήθω. τοῦ ἐν ΦΤΜ=ΦΑΛΜ. (δ) κοινὸν ἀφηρέθω τὸ ΦΑΙΜ. τὸ ἄρα ΑΤΙ=ΙΑΜ. κοινὸν προσκείθω τὸ ΗΑΙΜΟ. τὸ ἄρα ΗΤΜΟ=ΗΑΛΟ. ἀλλὰ τὸ ΗΑΛΟ=ΗΝΕ. (ε) τὸ ἄρα ΗΤΜΟ=ΗΝΕ. κοινὸν ἀφηρέθω τὸ ΗΝΠΟ. τὸ ἄρα ΝΤΜΠ=ΟΠΕ. κοινὸν προσκείθω τὸ ΕΠΜΔ. τὸ ἄρα ΝΤΔΕ=ΟΜΔ. ἀλλὰ τὸ ΝΤΔΕ=ΤΗΔ-ΝΗΕ. τὸ ἄρα ΟΜΔ=ΤΗΔ-ΝΗΕ. ἐπεὶ δὲ ὡς ΤΗΔ : ΝΗΕ :: $\overline{ΗΔ}^2$: $\overline{ΗΕ}^2$, (ζ) καὶ διαιρεθέντα, ΤΗΔ-ΝΗΕ : ΝΗΕ :: $\overline{ΗΔ}^2 - \overline{ΗΕ}^2$: $\overline{ΗΕ}^2$, ὡς ἄρα ΟΜΔ : ΝΗΕ :: $\overline{ΗΔ}^2 - \overline{ΗΕ}^2$: $\overline{ΗΕ}^2$. ἀλλὰ τῆς ΕΗ ἐπὶ τὸ Κ ἐκβληθείσης, ἐστὶ τὸ $\overline{ΗΔ}^2 - \overline{ΗΕ}^2 =$ ΚΔ. ΔΕ. (η) ὡς ἄρα ΟΜΔ : ΝΗΕ :: ΚΔ. ΔΕ : $\overline{ΗΕ}^2$. ἀλλὰ καὶ ὡς ΝΗΕ : ΑΤΙ :: $\overline{ΗΕ}^2$: $\overline{ΑΙ}^2$. (θ) ἄρα καὶ οὕτως ὡς ΚΔ. ΔΕ : $\overline{ΑΙ}^2$:: ΟΜΔ : ΑΤΙ, ἔσται ΙΑΜ. ἀλλ' ὡς ΟΜΔ : ΙΑΜ :: $\overline{ΟΜ}^2$: $\overline{ΜΑ}^2$, (ι) καὶ ὡς $\overline{ΟΜ}^2$: $\overline{ΜΑ}^2$:: $\overline{ΗΦ}^2$: $\overline{ΦΑ}^2$. (κ) ἔστι γὰρ ὡς ΟΜ : ΜΑ :: ΗΦ : ΦΑ. (λ) ὡς ἄρα ΚΔ. ΔΕ : $\overline{ΑΙ}^2$:: $\overline{ΗΦ}^2$: $\overline{ΦΑ}^2$. (μ) ἀλλὰ τὸ $\overline{ΦΑ}^2 = \overline{ΑΙ}^2$. (ν) ἄρα καὶ τὸ ΚΔ. ΔΕ = $\overline{ΗΦ}^2$.

Λ 5

κοι-

(δ) Κατὰ τὸ Αἴμ. τὸ πρὸ τῆς ζ. τῶδε τῇ γμῖμ. (ε) Κατὰ τὸ κυκ. Αἴμ. (ζ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῇ ε'. (η) Κατὰ τὴν ε'. τῇ ε'. (θ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῇ ε'. (ι) Κατὰ τὴν αὐτ. (κ) Κατὰ τὸ ζ. τῶν μετὰ τὴν ι. Θίωσιμ. (λ) Ἐκ τῆς β'. ε'. δῆλ. (μ) Κατὰ τὴν ι. τῇ ε'. (ν) Ἐκ τῆς προλ. ε'. Σύντακ. δῆλον.

κινὸν προσκείδω τὸ $\overline{HE}^2$. τὸ ἄρα $\overline{KL} \cdot \overline{ΔΓ} + \overline{HE}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{HE}^2$. ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{KL} \cdot \overline{ΔΕ} + \overline{HE}^2 = \overline{HD}^2$, (ξ) τὸ δὲ $\overline{HP}^2 + \overline{HE}^2 = \overline{ΦΕ}^2$. (ο) τὸ ἄρα $\overline{HD}^2 = \overline{ΦΕ}^2$. ἢ ἄρα $\overline{HD} = \overline{ΦΕ}$.

Θ'. Ἐνεστὶν ἄρα συνεχῇ πορίσασθαι σημεῖα δι' ὧν ἡ Ὑπερβολὴ ἦξει. εἰάν γάρ τριγώνον συσταθῇ ὀρθογώνιον τὸ $\overline{ΤΦΜ}$, ὥσθην μὲν ἔχεν τὴν $\overline{ΤΦΜ}$ γωνίαν, τὴν δὲ ἑτέραν τῶν τὴν ὀρθὴν περιεχουσῶν πλευρῶν, τὴν $\overline{ΦΜ}$ μείζονα τῆς ἑτέρας $\overline{ΤΦ}$, ἐκβληθῶσι δὲ κατὰ τὸ συνεχὲς ἥτε ἐλάσσων $\overline{ΤΦ}$ καὶ ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα $\overline{ΤΜ}$, καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῆς $\overline{ΤΗ}$ τινῶν σημείων τῶν η , η , ἀχθῶσιν αἱ $\eta\delta$, $\eta\Delta$ παράλληλοι τῇ $\overline{ΦΜ}$. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Φ , διαστήματι δὲ τῷ $\eta\delta$, ὡσαύτως κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ τῷ $\eta\Delta$ τόξα γραφῇ τέμνοντα τὰς $\eta\delta$, $\eta\Delta$ κατὰ τὰ ϵ , ϵ σημεῖα, ἦξει δὲ αὐτῶν Ὑπερβολή. ἐπιζευχθεῖσιν γάρ τῶν $\overline{Φ\epsilon}$, $\overline{Φ\epsilon}$, ἴσεται ἡ μὲν $\eta\delta = \overline{Φ\epsilon}$, ἡ δὲ $\eta\Delta = \overline{Φ\epsilon}$. ἐξ ὧν ὁρῶν τὸ προκείμενον.

Ι'. Εἰάν ἀπὸ μὲν τῆς ἐπαφῆς P (πίν. ΙΓ'. χ. 1.) κάθετος τῇ ἐφαπτομένῃ $\overline{PH}$ ἀχθῇ ἡ $\overline{P\Pi}$, τῷ Ἀξονι συμπίπτουσα κατὰ τὸ Π , ἀπὸ δὲ τῆς Π ἡ $\overline{ΠΕ}$ τῇ $\overline{ΦP}$, τῇ ἀπὸ τῆς Ἐξίας Φ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν P ἐπιζευχθείσῃ, ἡ ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβανομένη $\overline{EP}$ ἴση ἴσεται τῷ ἡμίτει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς $\overline{N\Theta}$. ἦχθωσαν γὰρ ἀπὸ τε ἑκατέρως τῶν Ἐσιῶν Υ , Φ , καὶ τῶν κέντρων Γ ἐκδοῖσιν αἱ $\Upsilon\eta$, $\Phi\Omega$, $\Gamma\mu$ πρὸς ὀρθὰς τῇ ἐφαπτομένῃ $\overline{PH}$. καὶ ἀπὸ τῶν Υ , Φ ἐπὶ τὰ P , η σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥP , $\Phi\eta$. ἐκβεβλήθωσαν δὲ αἱ $\Phi\Omega$, $\Gamma\mu$, καὶ συμπίπτέτωσαν κατὰ τὰ Δ , ς σημεῖα. καὶ διήχθω ἡ δευτέρα Διάμετρος $\overline{BK}$.

καὶ ἀπὸ τῆς Ρ τετάχθωσαν ἐφ' ἐκάτερον τῶν Ἀξόνων
 ΥΠ, ΚΧ αἱ ΡΟ, ΡΧ. καὶ ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΩΦΡ ὅμοιον
 τῷ ΥΡΗ, (π) (ἡ μὲν γὰρ γωνία ΦΩΡ = ΥΗΡ,
 (ρ) ἡ δὲ ΦΡΩ = ΥΡΗ. (σ)) τὸ δὲ ΩΦΡ ὅμοιον τῷ
 ΕΙΡ, (ἡ μὲν γὰρ γωνία ΦΩΡ = ΠΕΡ, ἡ δὲ ΡΦΩ =
 ΕΡΗ, ὡς ἐναλλάξ.) τὸ ἄρα ΥΡΗ ὅμοιον τῷ ΠΕΡ.
 (τ) ὡς ἄρα ΡΥ : ΥΗ :: ΠΡ : ΡΕ, καὶ ὡς ΦΡ :
 ΦΩ :: ΠΡ : ΡΕ. (υ) τὸ ἄρα ΡΥ. ΡΕ = ΥΗ. ΠΡ,
 καὶ τὸ ΦΡ. ΡΕ = ΦΩ. ΠΡ. (φ) ἀφηγήσθω ἀπὸ μὲν
 τῆς ΡΥ. ΡΕ τὸ ΦΡ. ΡΕ, ἀπὸ δὲ τῆς ΥΗ. ΠΡ τὸ ΦΩ.
 ΠΡ. τὸ ἄρα ΡΥ. ΡΕ — ΦΡ. ΡΕ = ΥΗ. ΠΡ — ΦΩ. ΠΡ,
 εἴτεν τὸ ΡΥ — ΦΡ. ΡΕ = ΥΗ — ΦΩ. ΠΡ. ἀλλ' ἡ ΡΥ —
 ΦΡ = ΨΝ, (χ) τὸ ἄρα ΨΝ. ΡΕ = ΥΗ — ΦΩ. ΠΡ.
 ἐπεὶ δὲ ὡς ΦΥ : ΦΓ :: ΥΗ : ΓΣ, (ψ) ἔστι δὲ ἡ
 ΦΥ διπλασία τῆς ΦΓ, ἄρα καὶ ἡ ΥΗ διπλασία
 τῆς ΓΣ. πάλιν ἐπεὶ ὡς ΦΥ : ΦΓ :: ΦΗ : ΦΣ, καὶ
 ὡς ΦΗ : ΦΣ :: ΦΩ : ΣΜ, καὶ ἡ ΦΩ ἄρα διπλα-
 σία τῆς ΣΜ. ἔκθ' ἡ ΥΗ — ΦΩ διπλασία τῆς ΓΣ —
 ΣΜ, εἴτεν τῆς ΓΜ. διὸ τὸ ΨΝ. ΡΕ = 2ΓΜ. ΠΡ.
 καὶ ἐπεὶ ἡ γωνία ΖΡΟ = ΟΠΡ, (ω) ἔστι δὲ ἡ ΖΡΟ =
 ΖΙΓ, ὡς ἐναλλάξ, ἄρα καὶ ἡ ΟΠΡ = ΖΙΓ. ἔστι δὲ καὶ
 ἡ ΠΟΡ = ΙΓΖ. ὅμοια ἄρα εἰσὶ τὰ ΠΡΟ, ΜΙΓ τρί-
 γωνα. ὡς ἄρα ΠΡ : ΡΟ :: ΓΙ : ΓΜ. ἀλλ' ἡ ΡΟ =
 ΙΧ. ἄρα ὡς ΠΡ : ΙΧ :: ΓΙ : ΓΜ. τὸ ἄρα ΠΡ.
 ΓΜ = ΙΧ. ΓΙ. (α) ἐπεὶ δὲ ὡς ΨΟ. ΟΝ : ΟΡ² ::
 ΨΝ : ΝΘ, (β) καὶ ὡς ΨΝ : ΝΘ :: ΨΝ² : ΒΚ².
 (γ)

(π) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (σ) Κατὰ τὴν
 ἡ. τῆς δ' καὶ τῆς τμήμ. (τ) Κατὰ τὴν κα. τῆς ε'. (υ) Κατὰ τὴν
 γ'. τῆς ε'. (φ) Κατὰ τὴν ιε'. τῆς ε'. (χ) Κατὰ τὴν προκαρ.
 Πρὸτ. (ψ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (ω) Ὅρα τὴν ἡ. τῆς ε'. (α) Κατὰ
 τὴν ιε'. τῆς ε'. (β) Κατὰ τὴν Συναρ. τῆς α. τῆς δ' καὶ τῆς τμήμ.

(γ) ἔστι γὰρ ὡς $\Psi\mathbf{N} : \mathbf{BK} :: \mathbf{BK} : \mathbf{N}\Theta$. (δ) ἄρα ὡς $\Psi\mathbf{O} . \mathbf{ON} : \overline{\mathbf{OP}}^2 :: \overline{\Psi\mathbf{N}}^2 : \overline{\mathbf{BK}}^2$, (ε) εἴτεν ὡς $\Psi\mathbf{O} . \mathbf{CN} : \overline{\Gamma\mathbf{X}}^2 :: \overline{\Gamma\mathbf{N}}^2 : \overline{\Gamma\mathbf{K}}^2$. ἀλλὰ τὸ μὲν $\Psi\mathbf{O} . \mathbf{ON} = \mathbf{OG} . \mathbf{OZ}$, (ζ) τὸ δὲ $\overline{\Gamma\mathbf{N}}^2 = \mathbf{OG} . \mathbf{GZ}$. (η) ὡς ἄρα $\mathbf{OG} . \mathbf{OZ} : \overline{\Gamma\mathbf{X}}^2 :: \mathbf{OG} . \mathbf{GZ} : \overline{\Gamma\mathbf{K}}^2$, καὶ ἐναλλάξ ὡς $\mathbf{OG} . \mathbf{OZ} : \mathbf{OG} . \mathbf{GZ} :: \overline{\Gamma\mathbf{X}}^2 : \overline{\Gamma\mathbf{K}}^2$. ἀλλ' ὡς $\mathbf{OG} . \mathbf{OZ} : \mathbf{OG} . \mathbf{GZ} :: \mathbf{OZ} : \mathbf{GZ}$. (θ) ὡς ἄρα $\mathbf{OZ} : \mathbf{GZ} :: \overline{\Gamma\mathbf{X}}^2 : \overline{\Gamma\mathbf{K}}^2$. ἀλλ' ὡς $\mathbf{OZ} : \mathbf{GZ} :: \mathbf{OP} ,$ εἴτεν $\mathbf{GX} : \mathbf{IG}$. (ι) ὡς ἄρα $\mathbf{GX} : \mathbf{IG} :: \overline{\Gamma\mathbf{X}}^2 : \overline{\Gamma\mathbf{K}}^2$, καὶ ἐναλλάξ ὡς $\mathbf{GX} : \overline{\Gamma\mathbf{X}}^2 :: \mathbf{IG} : \overline{\Gamma\mathbf{K}}^2$. ἔστι δὲ ὡς $\mathbf{GX} : \overline{\Gamma\mathbf{X}}^2 :: \mathbf{I} : \mathbf{GX}$. (κ) ὡς ἄρα $\mathbf{I} : \mathbf{GX} :: \mathbf{IG} : \overline{\Gamma\mathbf{K}}^2$. τὸ ἄρα $\mathbf{GX} . \mathbf{IG} = \overline{\Gamma\mathbf{K}}^2$. (λ) ἀλλὰ τὸ $\mathbf{GX} . \mathbf{GI} = \mathbf{PR} . \mathbf{GM}$, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. τὸ ἄρα $\mathbf{PR} . \mathbf{GM} = \overline{\Gamma\mathbf{K}}^2$. διὸ καὶ τὸ $2\mathbf{GM} . \mathbf{PR} = 2\overline{\Gamma\mathbf{K}}^2$. δέδεικται δὲ ἀνωτέρω $2\mathbf{GM} . \mathbf{IP} = \Psi\mathbf{N} . \mathbf{PE}$. τὸ ἄρα $\Psi\mathbf{N} . \mathbf{PE} = 2\overline{\Gamma\mathbf{K}}^2$. ἐπεὶ δὲ ὡς $\Psi\mathbf{N} : \mathbf{BK} :: \mathbf{BK} : \mathbf{N}\Theta$, ὡς εἴρηται, τὸ ἄρα $\Psi\mathbf{N} . \mathbf{N}\Theta = \overline{\mathbf{BK}}^2$. ἔκθεν τὸ $\Psi\mathbf{N} . \mathbf{H}\Theta$ τετραπλάσιον τῷ $\overline{\Gamma\mathbf{K}}^2$, εἴτεν διπλάσιον τῷ $2\overline{\Gamma\mathbf{K}}^2$. ἄρα καὶ τῷ $\Psi\mathbf{N} . \mathbf{PE}$ διπλάσιον τὸ $\Psi\mathbf{N} . \mathbf{N}\Theta$. ἢ ἄρα $\mathbf{N}\Theta$ διπλασία τῆς $\mathbf{PE}$, ὅπερ ἔστιν ἢ $\mathbf{PE}$ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς $\mathbf{N}\Theta$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον, ὅτι ἐν συνεχεῖ μὲν ἀρμονικῷ λόγῳ μεγέθη εἶναι λέγεται, ὅταν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον λόγον ἔχῃ, ὃν ἢ ὑπεροχὴ τῷ πρώτῳ καὶ τῷ δευτέρῳ, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ τρίτῳ ἐν διακεκριμένῳ δὲ, ὅταν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον λόγον ἔχῃ.

(γ) Κατὰ τὸ β'. Πορ. τὸ μὲν τὴν ἡ. τῷ ε'. (δ) Κατὰ τοῦ πδ'. ὁρίτμ. (ε) Κατὰ τὴν ε' τῷ ε'. (ζ) Ὅρα τὴν ε'. Σύνκ. τῆς δ. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (η) Ὅρα τὴν δ. τῆς αὐτ. πρῶτ. (θ) Κατὰ τὴν α' τῷ ε'. (ι) Κατὰ τὴν δ. τῷ ε'. (κ) Κατὰ τὴν α. τῷ ε'. (λ) Κατὰ τὴν εζ. τῷ ε'.

ἐν ἡ ὑπεροχὴ τῆ πρώτῃ καὶ τῆ δευτέρῃ, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῆ τρίτῃ καὶ τῆ τετάρτῃ.

ΙΑ'. Αἱ ΠΦ, ΠΖ, ΠΥ συνεχῇ ἀρμονικὸν λόγον πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν, εἴτεν εἰν ὡς ΠΦ: ΠΥ:: ΦΖ: ΖΥ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΦΩ: ΥΗ:: ΩΡ: ΗΡ· ἔστι δὲ ὡς μὲν ΦΩ: ΥΗ:: ΦΖ: ΖΥ, ὡς δὲ ΩΡ: ΗΡ:: ΡΔ: ΡΥ, (μ) καὶ ὡς ΡΔ: ΡΥ:: ΠΦ: ΠΥ· (ν) ἄρα καὶ ὡς ΠΦ: ΠΥ:: ΦΖ: ΖΥ. (ξ)

ΙΒ'. Ἐάν ἀπὸ δύο τυχόντων τῆς Ὑπερβολῆς σημείων τῶν Ρ, καὶ Η (πίν. ΙΔ'. ζ. ι.) ἐπιζευχθῶσιν ἐπὶ τὰς Ἐξίας Φ, Υ εὐθεῖαι αἱ ΡΦ, ΗΦ, καὶ ΡΥ, ΗΥ, ἔσονται αἱ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμεναι γωνία ΡΦΗ, ΡΥΗ διπλάσιαι τῆς ΡΝΗ, τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ΡΝ, ΗΝ τῶν ἀχθειῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων Ρ, Η. ἐπεὶ γὰρ ἡ γωνία ΡΦΠ=ΦΥΡ+ΥΡΦ, (ο) κοινῆς προσκειμένης τῆς ΦΥΡ, ἔσεται ἡ ΡΦΠ+ΦΥΡ=2ΦΥΡ+ΥΡΦ ἀλλ' ἡ ΥΡΦ=ΥΡΖ+ΖΡΦ, ἔστι δὲ ἡ ΥΡΖ=ΖΡΦ, (π) ἡ ἄρα ΡΦΠ+ΦΥΡ=2ΦΥΡ+2ΥΡΖ. ἀλλ' ἡ 2ΦΥΡ, εἴτεν ἡ 2ΖΥΡ+2ΥΡΖ=2ΡΖΦ, (ρ) ἡ ἄρα ΡΦΠ+ΦΥΡ=2ΡΖΦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθήσεται, ὅτι ἡ ΗΦΠ+ΦΥΗ=2ΗΤΦ=2ΖΤΝ. ἡ ἄρα ΡΦΠ+ΦΥΡ+ΗΦΠ+ΦΥΗ=2ΡΖΦ+2ΖΤΝ, εἴτεν ἡ ΡΦΗ+ΡΥΗ=2ΡΖΦ+2ΖΤΝ. ἀλλ' ἡ 2ΡΖΦ+2ΖΤΝ=2ΡΝΗ. (σ) ἡ ἄρα ΡΦΗ+ΡΥΗ=2ΡΝΗ.

ΙΓ'. Ἐάν ἄρα ἀπὸ τῆ Φ διαχθῇ εὐθεῖα ἡ ΕΦΗ, ἡ γωνία ΕΛΗ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ΕΛ,

(μ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (ν) Κατὰ τὴν θ'. τῆ ε'. (ξ) Κατὰ τὴν ι'. τῆ ι'. (ο) Κατὰ τὴν λβ'. τῆ α'. (π) Κατὰ τὴν η'. τῆ δὲ τῆ τμήμ. (ρ) Ἐν τῆς λβ'. τῆ α'. δῆλον. (σ) Κατὰ τὴν αγγ.

ΕΛ, ΗΛ, τῶν ἐπὶ τῶν σημείων Ε, Η ἀχθείσων ἀμβλεῖα ἔσται. ἢ γὰρ ΕΛΗ ἴση ἐστὶ τῷ ἡμίσει τῶν ΕΦΠ, ΕΦΠ, ΡΥΗ. (τ) τὸ δὲ τέτων ἡμισυ μείζον ὀρθῆς. διὸ δὴ καὶ ἡ ΕΛΗ μείζων ὀρθῆς, εἴτεν ἀμβλεῖά ἐστι.

ΙΔ'. Τὸ τῶν Εἰσιῶν ἀπέστημα ΥΦ (χ. 2.) μέση ἀνάλογον ἐστὶ τῆς τε πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ καὶ τῆς ΨΖ, τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς πλαγίας ΨΑ καὶ τῆς ὀρθῆς πλευρᾶς ΑΖ. ἐστὶ γὰρ τὸ ΨΦ. ΦΑ = ΨΑ. ΑΖ. (υ) καὶ δὲ προσκειμένους τῷ ΓΑ², ἔσεται τὸ ΨΦ. 4 ΦΑ + ΓΑ², (φ) ἦται τὸ ΓΦ² = ΨΑ. ΑΖ + ΓΑ². ἀλλὰ τῷ μὲν ΓΦ² τετραπλάσιον τὸ 4·ΥΦ². τῷ δὲ ΨΑ. ΑΖ + ΓΑ², τὸ ΨΑ. ΑΖ + ΨΑ². τὸ ἄρα ΓΦ² = ΨΑ. 4·ΑΖ + ΨΑ². ἀλλὰ τὸ ΨΑ. ΑΖ + ΨΑ² = ΑΨ. ΨΖ. (χ) τὸ ἄρα ΓΦ² = ΑΨ. ΨΖ. ὡς ἄρα ΨΑ: ΥΦ:: ΥΦ: ΨΖ. (ψ)

ΙΕ'. Ἐὰν ἀπὸ τῶν Εἰσιῶν Φ, Υ (χ. 3.) ἐπὶ τὸ τυχὸν τῆς Υπερβολῆς σημεῖον Μ ἐπιζευχθῶσιν ἐνθεῖται αἱ ΦΜ, ΥΜ, τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετραγώνῳ, τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΤΗ τῆς Δευτεραί-ας ΣΜ, εἴτεν τὸ ΦΜ. ΥΜ = ΓΗ². ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῷ Μ ἡ ἐφαπτομένη ΜΝ, τὴν μὲν ἀρχικὴν Διάμετρον κατὰ τὸ Ζ, τὴν δὲ δευτέραν κατὰ τὸ Κ τέμνουσα. καὶ ἀπὸ μὲν τῷ κέντρῳ Γ ἤχθω ἡ ΓΝ τῇ ΥΜ παράλληλος. καὶ τῇ ἐφαπτομένη κατὰ τὸ Ν συμπίπτουσα. ἀπὸ δὲ τῆς Εἰσίας Φ ἐπὶ τὰ Ν καὶ Κ σημεία ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΦΝ, ΦΚ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρω τῶν ΦΝΚ, ΦΓΚ γωνιῶν ὀρθαὶ εἰσιν, (ω) ὁ ἄρα διάμετρον τῇ ΦΚ γραφόμενος κύκλος διὰ τῶν

(τ) Κατὰ τὴν προλ. Συνίπ. (υ) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ (φ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ β'. (χ) Κατὰ τὴν γ'. τῷ β'. (ψ) Κατὰ τὴν ιζ. τῷ ε'. (ω) Ὁρμὴν τὴν δαξ. τῆς θ'. τῷ δὲ τῷ τμήματι.

τῶν Φ, Ν, Κ, Γ σημείων ἤξει. (α) διὸ τὸ ΦΖ.
 $ZΓ = NZ$. ΖΚ. (β) ὥς ἄρα $ΦΖ : ΖΚ :: ΝΖ : ΖΓ$.
 (γ) ἀλλ' ὥς $NZ : ΖΓ :: ΖΜ : ΖΥ$. (δ) ὥς ἄρα $ΦΖ :$
 $ZΚ :: ΖΜ : ΖΥ$. (ε) εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ
 γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις. (ς) ὁμοία ἄρα εἰσὶ τὰ ΦΖΚ,
 ΥΖΜ τρίγωνα, (η) καὶ ἡ γωνία $ΦΚΖ = ΖΥΜ$. ἔστι
 δὲ καὶ ἡ $ΚΜΦ = ΖΜΥ$, (θ) ὥς ἄρα $ΦΜ : ΜΚ ::$
 $ZM : ΜΥ$. (ι) τὸ ἄρα $ΦΜ. ΜΥ = ΖΜ. ΜΚ$. (κ)
 τέτων κεμένων, γεγραφθῶσαν συνεζευγμέναι τεμαί
 αἱ ΒΥ, ΠΗ, (πίν. ΙΕ. χ. ι.) αἷς συμβαλλέτω
 κατὰ τὰ Υ, Η σημεῖα ἡ ΗΥ ἡ δευτέρα Διάμε-
 τρος τῆς Δευτεραίας ΣΜ. καὶ ἀπὸ τῆς Η ἤχθω ἥτε
 ἐφαπτομένη ΗΥ, τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ ΒΟ κατὰ
 τὸ Τ συμβάλλεσθαι, καὶ αἱ τεταγμέναι ΗΕ, ΗΟ ἐπὶ
 τὴν ἀρχικὴν ΑΝ, καὶ ἐπὶ τὴν δευτέραν ΒΟ Διά-
 μετρον. καὶ ἀπὸ μὲν τῆς κορυφῆς Π τετάχθωσαν
 αἱ ΠΩ, ΠΡ, ἐπὶ τε τὴν Δευτεραίαν ΣΜ, καὶ ἐπὶ
 τὴν δευτέραν αὐτῆς ΥΡ. ἀπὸ δὲ τῆς ἐπαφῆς Μ
 τετάχθωσαν αἱ ΜΝ, ΜΙ, ἐπὶ τε τὴν ἀρχικὴν καὶ
 τὴν δευτέραν αὐτῆς Διάμετρον. καὶ ἐπεὶ ὥς $ΓΗ :$
 $ΓΡ :: ΙΤ : ΓΠ$, (λ) ἔστι δὲ ὥς $ΓΤ : ΓΠ :: ΓΠ :$
 $ΓΟ$, (μ) ἄρα καὶ ὥς $ΓΗ : ΓΡ :: ΓΠ : ΓΟ$. (ν)
 τὸ ἄρα τρίγωνον $ΓΡΠ = ΓΗΟ$. (ξ) ἀλλὰ τὸ μὲν
 $ΓΡΠ = ΓΠΩ$, τὸ δὲ $ΓΗΟ = ΓΕΗ$. (ο) τὸ ἄρα
 ΓΠΩ

(α) Ἐκ τῆς δ. Συνίπ. τῆς μετὰ τὴν ἡ τῆς ε'. δὴλ. (β) Κατὰ
 ἃ Συνίπ. τὴν μετὰ τὴν λς. τῆς γ'. (γ) Κατὰ τὴν ις. τῆς
 ε'. (δ) Κατὰ τὴν δ. τῆς ε'. (ε) Κατὰ τὴν ι. τῆς ι'. (ς) Κα-
 τὰ τὴν ιι. τῆς α'. (η) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (θ) Κατὰ τὴν
 ἡ. τῆς δ. τῆς τμήμ. (ι) Κατὰ τὴν δ. τῆς ε'. (κ) Κατὰ τὴν
 σ'. τῆς ε'. (λ) Κατὰ τὴν δ. τῆς ε'. (μ) Κατὰ τὴν δ. Συνίπ.
 τῆς δ. τῆς δ. τῆς τμήμ. (ν) Κατὰ τὴν ι. τῆς ι'. (ξ) Κατὰ τὴν
 α. τῆς ε'. (ο) Κατὰ τὴν λδ. τῆς α'.

$\Gamma\Omega = \Gamma\epsilon\eta$. πάλιν ἐπεὶ ὡς $\text{ΜΓ} : \Gamma\Omega :: \text{ΚΓ} : \Gamma\Omega$, (π) ὡς δὲ $\text{ΚΓ} : \Gamma\Omega :: \Gamma\Omega : \Gamma\Omega$, $(\epsilon\sigma\iota \gamma\alpha\rho \text{ ὡς } \text{ΑΝ. ΝΨ} : \overline{\text{ΝΜ}}^2 :: \overline{\Psi\Lambda}^2 : \overline{\text{ΒΗ}}^2, (\rho) \text{ ἔστι δὲ τὸ } \text{ΝΓ. ΝΖ} = \text{ΑΝ. ΝΨ}, (\sigma) \text{ τὸ δὲ } \overline{\text{ΝΜ}}^2 = \overline{\Gamma\Omega}^2, \kappa\upsilon \text{ ὡς } \overline{\Psi\Lambda}^2 : \overline{\text{ΒΗ}}^2 :: \overline{\Gamma\Psi}^2 : \overline{\Gamma\Omega}^2, \alpha\rho\alpha \kappa\alpha\iota \text{ ὡς } \text{ΝΓ. ΝΖ} : \overline{\Gamma\Omega}^2 :: \overline{\Gamma\Psi}^2 : \overline{\Gamma\Omega}^2. \text{ ἔστι δὲ τὸ } \overline{\Gamma\Psi}^2 = \text{ΝΓ. ΓΖ}, (\tau) \kappa\alpha\iota \text{ ἐναλλαξ ἄρα ἔσται ὡς } \text{ΝΓ. ΝΖ} : \text{ΝΓ. ΓΖ}, \epsilon\iota\tau\epsilon\nu \text{ (ὡς } \text{ΝΖ} : \Gamma\Omega :: \overline{\Gamma\Omega}^2 : \overline{\Gamma\Omega}^2. \text{ ἔστι δὲ ὡς } \text{ΝΖ} : \text{ΖΓ} :: \text{ΝΜ} : \text{ΚΓ}. (\phi) \text{ διὸ δὴ } \kappa\upsilon \text{ ὡς } \text{ΝΜ}, \eta\tau\omicron\iota \text{ } \overline{\Gamma\Omega} : \text{ΚΓ} :: \overline{\Gamma\Omega}^2 : \overline{\Gamma\Omega}^2. \kappa\alpha\iota \text{ ἀνάπαλιν ὡς } \text{ΚΓ} : \Gamma\Omega :: \overline{\Gamma\Omega}^2 : \overline{\Gamma\Omega}^2. \text{ ἔκθ' ὡς } \text{ΚΓ} : \Gamma\Omega :: \Gamma\Omega : \Gamma\Omega. (\chi) \text{ ὡς ἄρα } \text{ΜΓ} : \Gamma\Omega :: \Gamma\Omega : \Gamma\Omega. (\psi) \text{ ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς } \text{ΜΠ}, \epsilon\sigma\iota\nu \text{ ὡς μὲν } \text{ΜΓ} : \Gamma\Omega :: \text{ΜΠΓ} : \Gamma\Omega, \text{ ὡς δὲ } \Gamma\Omega : \Gamma\Omega :: \text{ΜΠΓ} : \text{ΓΜΙ}. (\omega) \text{ ὡς ἄρα } \text{ΜΠΓ} : \Gamma\Omega :: \text{ΜΠΓ} : \text{ΓΜΙ}. (\alpha) \text{ τὸ ἄρα } \Gamma\Omega = \text{ΓΜΙ}. (\beta) \text{ ἀλλὰ δέδεικται τὸ μὲν } \Gamma\Omega = \text{ΓΕΗ}, \text{ τὸ δὲ } \text{ΓΜΙ} = \text{ΓΝΜ}. \tau\alpha \text{ ἄρα } \Gamma\Omega, \text{ ΓΝΜ}, \text{ ΓΕΗ ἴσα ἀλλήλοισι. ἐπεὶ δὲ ὡς } \text{ΓΜΝ} : \text{ΖΜΝ} :: \text{ΓΝ} : \text{ΖΝ}, (\gamma) \text{ ἔστι δὲ ὡς } \text{ΓΝ} : \text{ΖΝ} :: \text{ΚΙ} : \Gamma\Omega. (\gamma) \text{ (} \kappa\upsilon \text{ γὰρ ὡς } \text{ΓΖ} : \text{ΖΝ} :: \text{ΚΖ} : \text{ΖΜ}, (\delta) \kappa\upsilon \text{ συντεθείτα ὡς } \text{ΓΝ} : \text{ΖΝ} :: \text{ΚΜ} : \text{ΖΜ}. \kappa\alpha\iota \text{ ὡς } \text{ΚΜ} : \text{ΖΜ} :: \text{ΚΙ} : \Gamma\Omega. (\epsilon) \text{ ὡς ἄρα } \text{ΓΜΝ} : \text{ΖΜΝ} :: \text{ΚΙ} : \Gamma\Omega. (\zeta) \text{ ἔστι δὲ ὡς } \text{ΚΙ} : \Gamma\Omega :: \text{ΚΜΙ} : \text{ΓΜΙ}, (\eta) \text{ ἄρα καὶ ὡς } \text{ΓΜΝ} : \text{ΖΜΝ} ::$

- (α) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν α'. τῆ δὲ τῆ τμήμ. καὶ τὴν δ'. ὅριον. καὶ τὸ β'. Πόρις. τὸ μετὰ τὴν η'. τῆ ε' (σ) Ὁρα τὴν ε'. Συνίπ. τῆς δ'. τῆ δὲ τῆ τμήμ. (τ) Κατὰ τὴν δ'. Συνίπ. τῆς αὐτ. (υ) Κατὰ τὴν α'. τῆ ε'. (ϕ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (χ) Κατὰ τὸ β'. Πόρις. τὸ μετὰ τὴν η'. τῆ ε'. (ψ) Κατὰ τὴν ε'. τῆ ε'. (ω) Κατὰ τὴν α'. τῆ ε'. (α) Κατὰ τὴν ε'. (β) Κατὰ τὴν β'. τῆ ε'. (γ) Κατὰ τὴν α'. τῆ ε'. (δ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (ϵ) Ἐκ τῆς β'. τῆ ε'. ὁρῶν. (ζ) Κατὰ τὴν ε'. τῆ ε'. (η) Κατὰ τὴν α'. τῆ ε'.

$ZMN :: KMI : ΓMI$, (θ) καὶ ἀνάπαλιν ὡς $ZMN : ΓMN :: ΓMI : KMI$. ἀλλ' ἐκότερον τῶν $ΓMN, ΓMI$ ἴσον δέδεικται τῷ $ΓΕΗ$. ἄρα ὡς $ZMN : ΓΕΗ :: ΓΕΗ : KMI$. ἔκθεν καὶ ὡς $\overline{ZM}^2 : \overline{ΓH}^2 :: \overline{ΓH}^2 : \overline{MK}^2$. (ι) διὸ δὴ καὶ ὡς $ZM : ΓH :: ΓH : MK$. (κ) τὸ ἄρα $ZM \cdot MK = \overline{ΓH}^2$. (λ) ἀλλὰ τὸ $ZM \cdot MK = YM \cdot FM$, ὡς προδεδεικται. τὸ ἄρα $YM \cdot FM = \overline{ΓH}^2$.

15. Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἡ ὑπεροχὴ τῆς τετραγώνου, τῆς ἀπὸ τῆς ἡμισείας $ΓP$ (πίν. ΙΔ. χ. 2.) τῆς δευτερείας Διαμέτρου, καὶ τῆς ὀρθογωνίης $ΥP$. $PΦ$, τῆς ἀπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐπεξευγμένων ἀπὸ τῶν Ἐσιῶν $Υ, Φ$ ἐπὶ τῆς ἐπαφῆς P , ἴση ἐστὶ τῇ ὑπεροχῇ, καὶ ἦν τὸ ἡμισυ τῆς ἀπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς $ΨA$ τετραγώνου, εἴτεν τὸ $2\overline{ΓA}^2$ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς ἀποσήμετος τῆς κέντρου $Γ$ καὶ τῆς ἐτέρας τῶν Ἐσιῶν $Φ$ τετραγώνου, εἴτεν τὸ $\overline{ΓΦ}^2$, τετέσι τὸ $\overline{ΓP}^2 - ΥP \cdot PΦ = 2\overline{ΓA}^2 - \overline{ΓΦ}^2$. κείδω γάρ τις εὐθεΐα ἡ $ΥP = ΥP + PΦ$. καὶ ἀπὸ τῆς P ἤχθω ἡ PA πρὸς ὀρθὰς τῇ $ΥZ$. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{ΥP}^2 + \overline{PΦ}^2 = 2ΥP \cdot PΦ + \overline{ΓΦ}^2$, (μ) κοινῶς ἀφαιρεθέντος τῆς $2ΥP \cdot PΦ$, ἔσεται τὸ $\overline{ΥP}^2 + \overline{PΦ}^2 - 2ΥP \cdot PΦ = \overline{ΓΦ}^2$. ἀλλ' ἡ $ΥΦ = ΨA$. ἐστὶ γάρ $ΥP - PΦ = ΨA$, (ν) καὶ $ΥP - PΦ = ΥΦ$. τὸ ἄρα $\overline{ΥP}^2 + \overline{PΦ}^2 - 2ΥP \cdot PΦ = \overline{ΨA}^2$. ἐστὶ δὲ τὸ μὲν $\overline{ΥP}^2 = \overline{ΥΓ}^2 + \overline{PΓ}^2 + 2ΥΓ \cdot ΓA$, (ξ) τὸ δὲ $\overline{PΦ}^2 = \overline{PΓ}^2 + \overline{ΓΦ}^2 - 2ΓA \cdot ΓΦ$, (ο) εἴτεν τὸ $\overline{PΦ}^2 = \overline{PΓ}^2 + \overline{ΥΓ}^2 - 2ΓA \cdot ΥΓ$. διὸ τὸ $\overline{ΥP}^2 + \overline{PΦ}^2 =$

M
 $2\overline{PΓ}^2$

(θ) Κατὰ τὴν ὀρθήμ. ε. (ι) Κατὰ τὴν ιθ'. τῆς ε'. (κ) Κατὰ τὸ ζ'. Θεώρημ. τῶν μετὰ τὸ ε. (λ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῆς ε'. (μ) Κατὰ τὴν ζ'. τῆς β'. (ν) Κατὰ τὴν θ'. τῆς δε. τῆς τμήμ. (ξ) Κατὰ τὴν ιβ'. τῆς β'. (ο) Κατὰ τὴν ιγ'. τῆς ε'.

$2\overline{P\Gamma}^2 + 2\overline{T\Gamma}^2$. τὸ ἄρα $2\overline{P\Gamma}^2 + 2\overline{T\Gamma}^2 = 2\Upsilon\overline{P} \cdot \overline{P\Phi} = \Psi\overline{A}^2$. ἐκδὼν τὸ $\overline{P\Gamma}^2 + \overline{T\Gamma}^2 = \Upsilon\overline{P} \cdot \overline{P\Phi} = 2\overline{\Gamma A}^2$, καὶ καθὼς ἀφαιρεθέντες τῷ $\overline{T\Gamma}^2$, ὅτεν τῷ $\overline{P\Gamma}^2$, εἴσεται τὸ $\overline{P\Gamma}^2 - \Upsilon\overline{P} \cdot \overline{P\Phi} = \overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma\Phi}^2$.

ΙΖ. Ἡ ὑπερβολὴ τῶν τετραγώνων τῶν τε ἀπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨA , καὶ τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΔE ἴσον ἐστὶ τῇ ὑπερβολῇ, καθ' ἣν τὸ τετράγωνον τῆς δευτεραίης Διαμέτρου $E P$ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας αὐτῆς ΘH τετραγώνον, ὅτεν τὸ $\Psi\overline{A}^2 - \Delta\overline{E}^2 = \overline{E P}^2 - \Theta\overline{H}^2$. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{P\Gamma}^2 - \Upsilon\overline{P} \cdot \overline{P\Phi} = 2\overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma\Phi}^2$, (π) ἐστὶ δὲ τὸ μὲν $\Upsilon\overline{P} \cdot \overline{P\Phi} = \overline{\Gamma H}^2$, (ρ) τὸ δὲ $\overline{\Gamma A}^2 = \overline{\Gamma\Phi}^2 - \Psi\overline{\Phi} \cdot \overline{\Phi A}$, (σ) τὸ ἄρα $\overline{P\Gamma}^2 - \overline{\Gamma H}^2 = \overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma\Phi}^2 - \Psi\overline{\Phi} \cdot \overline{\Phi A} - \overline{\Gamma\Phi}^2$, ἥτοι τὸ $\overline{P\Gamma}^2 - \overline{\Gamma H}^2 = \overline{\Gamma A}^2 - \Psi\overline{\Phi} \cdot \overline{\Phi A}$. ἀλλὰ τὸ $\Psi\overline{\Phi} \cdot \overline{\Phi A} = \overline{\Gamma E}^2$. (ἐστὶ γὰρ τὸ, τε $\Psi\overline{\Phi} \cdot \overline{\Phi A}$ τεταρτημέριον τῶν ὀρθογωνίων τῶν ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨA , καὶ τῆς ὀρθίας περιεχομένων, (τ) τεταρτημερίῳ δὲ τῶν αὐτῶν ὀρθογωνίων ἴσον καὶ τὸ $\overline{\Gamma E}^2$. (υ)) τὸ ἄρα $\overline{P\Gamma}^2 - \overline{\Gamma H}^2 = \overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma E}^2$. διὸ δὴ καὶ τὸ $\overline{E P}^2 - \Theta\overline{H}^2 = \Psi\overline{A}^2 - \Delta\overline{E}^2$.

ΙΗ. Ἐὰν ἔν ἡ ὑπερβολὴ ἰσόπλευρος ᾖ, τὴν πλαγίαν πλευράν δὴθεν ἴσην ἔχουσα τῇ ὀρθίᾳ, καὶ αἱ λοιπαὶ αὐτῆς Διαμέτρους ἴσαι εἴσονται. ὁδὲμία γὰρ ἡ αὐτῶν διαφορὰ. (Φ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'. (χ)

Ἐὰν ὑπερβολῆς κατὰ κορυφὴν εὐθείᾳ ἐφάπτηται, καὶ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη αὐτῆς
ληφ.

(π) Κατὰ τὴν προλ. Σύνεπ. (ρ) Κατὰ τὴν προλ. αἰ. Σύνεπ.
(σ) Ἐκ τῆς ε'. τῶν β'. δὴλ. (τ) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ.
(υ) Ἐκ τῶν ὁρισ. δὴλ. (Φ) Ἐκ τῆς προλ. Σύνεπ. δὴλ. (χ) Ἡ αἰ. εἰς τῶν β'. βιβλ. τῶν Ἀπολ.

ληφθῶσιν ἑυθείαι ἴσαι ἀλλήλαις, ὥστε τὴν ὅλην ἴσην εἶναι τῇ δευτέρᾳ συνεζευγμένη Διαμέτρῳ, ὡς ἀπὸ τῶ κέντρου τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ληφθέντα πέρατα τῆς ἐφαπτομένης ἀγόμεναι ἑυθείαι ἔσυνυπεννύοντα τῇ τομῇ.

Ἔστω Ὑπερβολή, ἥς Διαμέτρος μὲν ἀρχικὴ ἡ ΨΚ, κέντρον δὲ τὸ Γ. καὶ ἐφαπτέσθω αὐτῆς κατὰ τὸ Α ἢ ΔΕ, ἴσαι δὲ εἰληφθῶσαν αἱ ΑΕ, ΔΕ ἀλλήλαις, ὅλη δὲ ἡ ΔΕ ἴση τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ ΒΗ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΓΔ, ΓΕ, ἐκβεβλήθωσαν. λέγω δὴ, ὅτι ἔσυνυπεννύοντα τῇ τομῇ. πίν. 15. κ. 1.

Εἰ γὰρ δυνατόν συμπίπτετω ἡ ΓΕ ἐκβληθεῖσα τῇ τομῇ κατὰ τὸ Λ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετάρχθω ἀπὸ τῶ σημείου Λ ἡ ΔΚ ἐπὶ τὴν Ψκ Διαμέτρον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΨΚ. ΚΑ : ΚΛ² :: ΨΑ, πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευράν, (ψ) ἔστι δὲ ὡς ΨΑ, πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευράν, ἔστω ΨΑ² : ΒΗ², (ω) ἢ ΨΑ² : ΔΕ² · ἡ γὰρ ΔΕ = ΒΗ. (α) ὡς ἄρα ΨΚ. ΚΑ : ΚΛ² :: ΨΑ² : ΔΕ². (β) ἀλλ' ὡς ΨΑ² : ΔΕ² :: ΓΑ² : ΑΕ², καὶ ὡς ΓΑ² : ΑΕ² :: ΓΚ² : ΚΛ². (γ) ἑυθεῖα γὰρ ἡ ΓΕΛ. (δ) ὡς ἄρα ΨΚ. ΚΑ : ΚΛ² :: ΓΚ² : ΚΛ². (ε) τὸ ἄρα ΨΚ. ΚΑ = ΓΚ².
M 2 (ζ)

- (ψ) Κατὰ τὴν Συνίπ. τῆς α. τῶ δὲ τῶ τμήμ. (ω) Ἐν τῶ δ'. ὀρίσμ. καὶ τῶ β. Περίσμ. τῶ μετὰ τὴν ἡ. δῆλον. (κ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὴν ε. τῶ ε. (γ) Κατὰ τὴν δ'. τῶ ε', καὶ τὸ ἀρημ. Πόρις. (δ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὴν ἀρημ. αἱ

(ζ) ἄλλὰ τὸ $\Psi\text{Κ. ΚΑ} + \overline{\Gamma\text{Α}}^2 = \overline{\Gamma\text{Κ}}^2$. (η) τὸ ἄρα $\Psi\text{Κ. ΚΑ}$ ἴσον τῷ $\overline{\Gamma\text{Κ}}^2$ καὶ ἑλάττων, ὅπερ ἀδύνατον. ἔκ ἄρα ἡ $\Gamma\text{Ε}$ ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τομῇ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι ἐδὲ ἡ $\Gamma\text{Δ}$ ἐκβαλλομένη συμπίπτει. αἱ ἄρα $\Gamma\text{Ε}$, $\Gamma\text{Δ}$ Ἀσύμπτωτοι εἰσι καὶ λέγονται.

ΣΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. (θ) Αἱ Ἀσύμπτωτοι $\Gamma\text{Δ}$, $\Gamma\text{Ε}$ καὶ ἡ τομὴ ἰαλ εἰς ἅπασιν ἐκβαλλόμεναι ἐγγιόντες προσάγουσιν ἑαυτάς, καὶ παντὸς δοθέντος διαστήματος εἰς ἑλάττων ἀφικνῶνται διάστημα, καὶν ἐδέποτε συμπίπτωσιν. ἐκβεβλήθω γὰρ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἡ $\Delta\text{Κ}$, καὶ συμβαλλέτω τῇ μὲν τομῇ κατὰ τὸ Ι , ταῖς δὲ Ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ Η , Μ σημεία. καὶ ἐπεὶ ὡς $\Psi\text{Κ. ΚΑ} : \overline{\text{ΚΛ}}^2 : \overline{\Gamma\text{Α}}^2 : \overline{\text{ΑΕ}}^2$, (ι) ἔστι δὲ ὡς $\overline{\Gamma\text{Α}}^2 : \overline{\text{ΑΕ}}^2 :: \overline{\Gamma\text{Κ}}^2 : \overline{\text{ΚΜ}}^2$, (κ) ὡς ἄρα $\overline{\Gamma\text{Κ}}^2 : \overline{\text{ΚΜ}}^2 :: \Psi\text{Κ. ΚΑ} : \overline{\text{ΚΛ}}^2$, (λ) καὶ ἐναλλάξ ὡς $\overline{\Gamma\text{Κ}}^2 : \Psi\text{Κ. ΚΑ} :: \overline{\text{ΚΜ}}^2 : \overline{\text{ΚΛ}}^2$, καὶ διαρεθέντα ὡς $\overline{\Gamma\text{Κ}}^2 - \Psi\text{Κ. ΚΑ} : \Psi\text{Κ. ΚΑ} :: \overline{\text{ΚΜ}}^2 - \overline{\text{ΚΛ}}^2 : \overline{\text{ΚΛ}}^2$. ἔστι δὲ τὸ μὲν $\overline{\Gamma\text{Κ}}^2 - \Psi\text{Κ. ΚΑ} = \overline{\Gamma\text{Α}}^2$, τὸ δὲ $\overline{\text{ΚΜ}}^2 - \overline{\text{ΚΛ}}^2 = \text{ΗΛ. ΛΜ.}$ (μ) ὡς ἄρα $\overline{\Gamma\text{Α}}^2 : \Psi\text{Κ. ΚΑ} :: \text{ΗΛ. ΛΜ.} : \overline{\text{ΚΛ}}^2$, καὶ ἐναλλάξ ὡς $\overline{\Gamma\text{Α}}^2 : \text{ΗΛ. ΛΜ.} :: \Psi\text{Κ. ΚΑ} : \overline{\text{ΚΛ}}^2$. ἀλλ' ὡς μὲν $\Psi\text{Κ. ΚΑ} : \overline{\text{ΚΛ}}^2 :: \overline{\Gamma\text{Κ}}^2 : \overline{\text{ΚΜ}}^2$, ὡς δὲ $\overline{\Gamma\text{Κ}}^2 : \overline{\text{ΚΜ}}^2 : \overline{\Gamma\text{Α}}^2 : \overline{\text{ΑΕ}}^2$, καθάπερ δέδεικται. ἄρα καὶ ὡς $\overline{\Gamma\text{Α}}^2 : \text{ΗΛ. ΛΜ.} :: \overline{\Gamma\text{Α}}^2 : \overline{\text{ΑΕ}}^2$. (ν) τὸ ἄρα $\overline{\text{ΑΕ}}^2 = \text{ΗΛ. ΛΜ.}$ (ξ) ἔκιν τὸ ΗΛ. ΛΜ. ἴσον ὃν τῷ $\overline{\text{ΑΕ}}^2$, ὠρισμένη ποσό-

της

(ζ) Κατὰ τὴν β'. τῷ ε'. (η) Κατὰ τὴν ε'. τῷ β'. (θ) Ἡ δ'. ἐπὶ τῷ β'. βιβλ. τῷ Ἀπολλων. (ι) Ὅρα τὴν δ' αὖ τῆς προσημ. (κ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. καὶ τὸ β'. Πόρισμα. τὸ μετὰ τὴν η'. τῷ αὐτ. (λ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (μ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ β'. (ν) Κατὰ τὴν ἀρχήν. τῷ ε'. (ξ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'.

της ἐστίν. ἐπεὶ δὲ ὅσον ἡ ΗΜ τῆς κορυφῆς Α ἀφίσταται, τσοῦτον ἡ ΙΑ αὖξει, ἐξ ὧ καὶ ἡ ΗΛ, ἀνάγκη ἄρα αὐξανομένης τῆς ΗΛ, ἐλαττωθῇ τὴν ΛΜ. ἐκ τούτου ἔν δὴλον ὅτι ἦτε ΓΕ καὶ ἡ τομὴ ἐπ' ἀπειρον ἐκβαλλόμεναί ἐγγιον ἑαυτάς προσάγῃσι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη ἐγγιον ἑαυτὴν προσάγει.

Β'. Αἱ ΓΔ, ΓΕ Ἀσύμπτωτοι ἐπὶ τὰ ἑτέρα μέρη ἐκβληθεῖσαι, τὴν κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένην ΦΟ τῆς ἀντικειμένης τομῆς ἔτω τέμνουσιν, ὥστε τὰ μεταξύ αὐτῶν καὶ τῆς πλαγίας πλευραῖς μέρη ΨΦ, ΨΟ ἴσα ἀλλήλοις εἶναι, ὅλην δὲ τὴν ΦΟ ἴσην τῇ ΔΕ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΓΑ : ΑΔ :: ΓΨ : ΨΟ, (ο) ἐστὶ δὲ ἡ ΓΑ = ΓΨ, ἄρα καὶ ἡ ΑΔ = ΨΟ. (π) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΕ = ΨΦ. ἐστὶ δὲ ἡ ΑΔ = ΑΕ. (ρ) ἄρα καὶ ἡ ΨΦ = ΨΟ. διὸ δὴ καὶ ἡ ΦΟ = ΔΕ.

Γ'. (σ) Ἐτέρα Ἀσύμπτωτος ἐκ ἑσῶν τέμνουσα τὴν ὑπὸ τῶν Ἀσυμπτῶτων περιεχομένην γωνίαν ΔΓΕ. ἢ χθ' γὰρ ἀπὸ τῆ Γ ἢ ΓΙ. καὶ ἀπὸ τῆ τυχόντος τῆς ΓΑ σημεῖς Θ ἢ χθ' ἡ ΘΞ τῇ ΓΔ Ἀσυμπτῶτι παράλληλος. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΙ τῇ ΘΞ συμπίπτει ἐκβληθεῖσα, μετὰ δὲ τὴν σύμπτωσιν ὅσον ἐκβάλλεται τσοῦτον ἀπ' αὐτῆς καὶ τῆς ΓΔ ἀφίσταται, ἡ δὲ τομὴ ΑΙ ἐκβαλλομένη ἐγγιον τῇ ΓΔ προσπελάζει, συμπεσεῖται ἄρα τῇ τομῇ ἡ ΓΙ, καὶ Ἀσύμπτωτος ἐκ ἑσῶν.

Δ'. Τὰ ἐκατέρωθεν τῆς ἐκβληθείσης Τεταγμένης ΛΙ μέρη ΛΜ, ΙΗ τὰ μεταξύ τῆς τομῆς καὶ τῶν Ἀσυμπτῶτων ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν, ἐπεὶ γὰρ ὡς ΓΚ : ΓΛ ::

Μ 3

ΚΗ :

(ο) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (π) Κατὰ τὴν κ'. τῆ ε'. (ρ) Ἐξ ὑποθ.

(σ) Ἡ θ'. πρότ. ἐστὶ τῆ θ'. διβλ. τῆ Ἀπολλων.

ΚΗ: ΑΔ, καὶ ὡς ΓΚ: ΓΑ :: ΚΜ: ΑΕ, (τ) ἄρα καὶ ὡς ΚΗ: ΑΔ :: ΚΜ: ΑΕ. (υ) ἀλλ' ἡ ΑΔ = ΑΕ. ἄρα καὶ ἡ ΚΗ = ΚΜ. (φ) ἀφ' ἡμετέρου ἀπὸ μὲν τῆς ΚΜ ἡ ΚΛ, ἀπὸ δὲ τῆς ΚΗ ἡ ΙΚ. ἔκθ' ἡ ΑΜ = ΙΗ. καὶ γὰρ ἡ ΚΛ = ΙΚ. (χ)

Ε'. Καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΗΛ. ΑΜ = ΜΙ. ΙΗ. κοινὴ γὰρ προσκείθω ἑκατέρω τῶν ΗΙ, ΜΑ ἡ ΙΑ. ἔκθ' ἡ ΗΛ = ΜΙ, ἔτι δὲ καὶ ἡ ΑΜ = ΙΗ, (ψ) τὸ ἄρα ΗΛ. ΑΜ = ΜΙ. ΙΗ.

Σ'. Ἀπαντα τὰ τοιαῦτα ὀρθογώνια, εἴτεν ΗΛ. ΑΜ, ΜΙ. ΙΗ, ἢ λ. λμ, μι. ιη ἀλλήλοις τε ἴσα ἔσονται καὶ τῷ τεταρτημορίῳ τῷ ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΒΠ τετραγώνῳ. ἕκαστον γὰρ ἴσεν τῷ $\overline{ΑΕ}^2$, (ω) τὰ ἴσῳ ὄντι τῷ $\overline{ΠΙ}^2$. (α)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'. (β)

Ἐὰν εὐθεΐά τις τέμνῃσα τὴν τομὴν συμπίπτῃ ἐκατέρω τῶν Ἀσυμπτώτων, τὰ περιεχόμενα ὀρθογώνια ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανόμενων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ' αὐτῆς τῆς εὐθείας ὑπὸ τῆς τομῆς πρὸς ταῖς Ἀσυμπτώτοις ἴσαι ἔσονται.

Τεμ.

(τ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (υ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (φ) Κατὰ τὴν κ'. τῷ ε'. (χ) Κατὰ τὸν θ'. ὁρισμ. (ψ) Κατὰ τὴν προλ. Συνίπ. (ω) Ὁρα τὴν προλ. α'. Συνίπ. (α) Ἐκ τῆς ὑποθ. δὲ λ. (β) Τὸ μὲν α'. μίρεν ἡ ε'. εἰς τὸ δὲ β'. ἡ γ'. τῷ β'. βιβλ. τῷ Ἀπολλων.

Τερνέτω εὐθεῖα ἡ ΧΩ τὴν Ὑπερβολὴν ΙΑΛ κατὰ τὰ Ι, Α σημεία, καὶ συμπιπτεύω ἐκατέρω τῶν Ἀσυμπτῶτων ΓΔ, ΓΕ κατὰ τὰ Χ, Ω σημεία. λέγω Α'. ὅτι τὸ ΩΑ. ΑΧ = Χι. Ω. Β'. ὅτι ἡ ΩΑ = Χι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθωσαν διὰ τοῦν Α καὶ Ι σημείων τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένη ΔΕ παράλληλοι αἱ ΗΑΜ, ηλμ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ ΗΑ. ΑΜ πρὸς τὸ ηι. ιμ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ΗΑ: ηι, καὶ ἐκ τῷ ὃν ἔχει ΑΜ: ιμ (γ) ἀλλ' ὡς μὲν ΗΑ: ηι :: ΑΧ: Χι, ὡς δὲ ΑΜ: ιμ :: ΩΑ: Ω. (δ) τὸ ἄρα ΗΑ. ΑΜ, πρὸς τὸ ηι. ιμ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ΑΧ: Χι, καὶ τῷ ὃν ἔχει ΩΑ: Ω. εἴτεν ὡς ΗΑ. ΑΜ: ηι. ιμ :: ΩΑ. ΑΧ: Χι. Ω. (ε) ἀλλὰ τὸ ΗΑ. ΑΜ = ηι. ιμ, (ζ) ἄρα καὶ τὸ ΩΑ. ΑΧ = Χι. Ω.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐπεὶ τὸ ΩΑ. ΑΧ = Χι. Ω, ἄρα ὡς ΑΧ: Χι :: Ω: ΩΑ, (η) καὶ διαιρεθέντα, ὡς Α: Χι :: Α: ΩΑ. ἢ ἄρα ΩΑ = Χι. (θ)

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Γὰρ εὐθεῖα ἡ ΤΥ τῆς Ὑπερβολῆς ἐφαπτήται κατὰ τὸ Ι, ἐκατέρω τῶν Ἀσυμπτῶτων συμβάλλουσα κατὰ τὰ Υ, Τ σημεία, ἴσα εἶσονται τὰ μέρη αὐτῆς ΙΥ, ΙΤ τὰ μεταξὺ τῆς ἐπαφῆς Ι καὶ τῶν Ἀσυμπτῶτων. διήχθω γὰρ ἀπὸ τῷ τυχόντος σημείῳ Α ἡ ΩΑΧ τῇ ἐφαπτομένη ΤΥ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ

M 4

η

(γ) Κατὰ τὴν κγ'. τῷ ε'. (δ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (ε) Κατὰ τὸν ζ'. ὅρισμ. τῷ ε'. (ζ) Κατὰ τὴν τῆς προλ. προτ. ε'. Συνίπ. (η) Κατὰ τὴν ιε'. τῷ ε'. (θ) Κατὰ τὴν β'. τῷ ε'.

ἡ $\Omega\Lambda = \chi\iota$ (ι) καὶ φερεμένης μὲν τῆς $\Omega\chi$ ἐπὶ τὰ Γ μέρη, τὰ μὲν Λ , ι σημεία ἀλλήλοις προσελάττωσιν, ἡκέσθης δὲ ἐπὶ τὸ Γ , ἀλλήλοις συμπίπτουσι, καὶ αἱ $\Omega\Lambda$, $\chi\iota$ ταῖς $\Gamma\Upsilon$, $\Gamma\Gamma$ ταυτίζονται, ὅθεν ἄρα ὅτι αἱ $\Gamma\Upsilon$, $\Gamma\Gamma$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

Β'. (κ) Δύο δοθεῶν εὐθειῶν τῶν $\Gamma\Upsilon$, $\Gamma\Omega$ (πίν. 12'. χ. 1.) γωνίαν τυχεῶσαν περιχέουσιν, τὴν $\Upsilon\Gamma\Omega$, καὶ σημεία τῶν Λ ἐντὸς τῆς γωνίας, ἐνεσι σημεία συνεχῇ πορίσασθαι, δι' ὧν Ὑπερβολὴ γραφίσεται, διὰ τῶν Λ ἥξουσα. διήχθω γὰρ εὐθεῖα τις διὰ τῶν Λ ἡ $\mathcal{M}\Lambda\Omega$, ταῖς Ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ $\mathcal{M}$ καὶ Ω συμβάλλουσα σημεία, καὶ δίχα κατὰ τὸ Λ τεμνομένη. καὶ διήχθωσαν διὰ τῶν Λ εὐθεῖαι αἱ $\mathcal{N}\mathcal{K}$, $\mathcal{P}\mathcal{I}$, $\Psi\mathcal{H}$, καὶ ἄλλαι ἐφεξῆς ὁμοίως. καὶ εἰλήφθω ἀπὸ μὲν τῆς $\mathcal{N}\mathcal{K}$, ἡ $\mathcal{N}\mathcal{P} = \mathcal{K}\mathcal{L}$, ἀπὸ δὲ τῆς $\mathcal{P}\mathcal{I}$ ἡ $\mathcal{P}\mathcal{Z} = \mathcal{L}\mathcal{I}$, ἀπὸ δὲ τῆς $\Psi\mathcal{H}$, ἡ $\Psi\Phi = \mathcal{L}\mathcal{H}$. ἔκθεν διὰ τῶν $\mathcal{P}$, $\mathcal{Z}$, Φ σημείων Ὑπερβολὴ ἥξει, ἥς ἡ $\mathcal{M}\Omega$ κατὰ τὸ Λ ἐφάπτεται.

Γ'. Ἐάν διὰ τῶν κέντρων Γ καὶ τῆς ἐπαφῆς $\mathcal{I}$ (πίν. 15'. χ. 1.) διαχθῇ δευτέρα Διάμετρος ἡ $\mathcal{I}\mathcal{P}$, ἔσεται ἡ ἐφαπτομένη $\mathcal{T}\mathcal{T}$ ἡ δευτέρα συνεζευγμένη αὐτῇ Διάμετρος. εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι μείζων ἔσται ἡ $\mathcal{T}\mathcal{T}$, ἢ ἐλάσσων. ἔστι δὲ τῶν ἐκείνων ἀδύνατον, (καὶν τε γὰρ ἐντὸς τῆς $\Delta\Gamma\mathcal{E}$ γωνίας, καὶν τε ἐκτὸς ὥσι τὰ τῆς $\mathcal{T}\mathcal{T}$ πέρατα, αἱ ἀπὸ τῶν κέντρων Γ ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι, Ἀσύμπτωτοι ἔσονται, (λ) ὅπερ ἀδύνατον. (μ)) ἴση ἄρα ἡ $\mathcal{T}\mathcal{T}$ τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ τῆς Δευτεράας $\mathcal{I}\mathcal{P}$.

Δ'

(ι) Κατὰ τὸ β'. μέρ. τῆς προκμ. προτ. (κ) Ἡ δ'. προτ. ἐστὶ τὰ β'. βιβλ. τῶν Ἀπολλων. (λ) Κατὰ τὴν προλ. προτ. καὶ τὴν προλ. Συνέπ. (μ) Κατὰ τὴν γ'. Συνέπ. τῆς αὐτ.

Δ'. Δηλον δὲ, ὅτι καὶ ἐκάτερον τῷ ΩΛ. ΑΧ, Χι. ΙΩ ἴσιν τεταρτημορίῳ τῷ ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου τῆς Δευτεραίας ΓΡ τετραγώνῃ, εἶπεν τῷ ΤΙ². (ν) ἢ ὅτι πλὴν δύο Ἀσυμπτότων, Ἀσύμπτωτοι ἄλλα εἰ συζαθήσονται. (ξ)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον, ὅτι τὰς τῶν Ὑπερβολῶν καὶ τῶν ἄλλων καμπύλων Ἀσυμπτότας, ὡς ἐφαπτομένας ἐκλαμβάνουσιν οἱ Γεωμέτραι κατὰ σημεῖα ἀπείροις ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀφεστηκότα ἀποσήμασιν. ὅτι δὲ εἰ πόρῳ τῆς ἀληθείας ἀπέχει ἡ ἐννοια, δεικνύουσιν ὅτως· ἐφαπτέσθω τῆς Ὑπερβολῆς ἡ μὲν ΜΤ (πίν. Η'. χ. 2.) κατὰ τὸ Μ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Γ συμβάλλουσα, ἡ δὲ ΑΩ κατὰ κορυφὴν. καὶ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ τετάχθω μὲν ἡ ΜΠ, ἐπεξεύχθω δὲ ἐπὶ τὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς πέρας Ψ ἡ ΜΨ, καὶ ἤχθω ἥτε ὀρθία πλευρὰ ΝΑ, καὶ ἡ δευτέρα Διάμετρος ΞΣ. ἐκὼν ὡς ΓΠ:: ΓΑ:: ΓΑ: ΓΤ. (ο) διὸ δὴ τῷ Μ σημεῖον ἐπ' ἀπείρον τῆς κορυφῆς Α ἀφισαμένον, ἐπ' ἀπείρόν τε αὐξομένης τῆς ΓΠ, διὰ τὴν ἀναλογίαν ἐξ ἀνάγκης ἡ ΙΤ ἐπ' ἀπείρον ἐλαττεύεται, καὶ τὸ σημεῖον Γ μικρὸν δὲ τῷ Γ ταυτίζεται. τὴν ἄρα ΤΜ ὡς ἀπὸ τῷ Γ διηγμένην ἐκλαμβάνειν ἐξεσιν. ἐπεὶ δὲ ὡς ΨΠ. ΠΑ: ΜΠ²:: ΨΑ: ΝΑ, (π) καὶ ὡς ΨΑ: ΝΑ:: ΨΑ²: ΞΣ², (ρ) εἰ γὰρ ὡς ΨΑ: ΞΣ:: ΞΣ: ΝΑ, (σ) ὡς ἄρα ΨΠ. ΠΑ: ΜΠ²:: ΨΑ²: ΞΣ², εἶπεν ὡς ΨΠ. ΠΑ: ΜΠ²:: Μ 5 ΓΑ²:

(ν) Ἐκ τῶν ἀρημ. ἐν τῇ προλ. α'. Συνέπ. (ξ) Ὅροι τὴν γ'. Συνέπ. τῆς προλ. προτ. (ο) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς δ'. προτ. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (π) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α'. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (ρ) Κατὰ τὸ β'. Πρόρ. τὸ μετὰ τὴν η'. τῷ ε'. (σ) Κατὰ τὸ κδ'. ὅρισ.

$\overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΞ}^2$. τῷ δὲ M ἐπ' ἀπείρου τῆς A κερυφῆς ἀφαιρούμεν, ἢ $ΨΑ$ ἀπειράκις ἐλάττωσιν τῆς $ΠΑ$ γίνεται, διό δὴ τὸ $ΨΠ$. $ΠΑ$, ὡς ἴσον τῷ $\overline{ΠΠ}^2$ ἐκλαμβάνεται. ἔκθ' ἔσται ὡς $\overline{ΠΠ}^2 : \overline{ΜΠ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΓΞ}^2$. ἐπεὶ δὲ ὡς ἐκ τῷ $Γ$ διηγμένη ἢ $ΤΜ$ ἐκλαμβάνεται, ἔσιν ἄρα ὡς $\overline{ΠΠ}^2 : \overline{ΜΠ}^2 :: \overline{ΓΑ}^2 : \overline{ΑΧ}^2$. (τ) ἢ ἄρα $ΑΧ = ΓΞ$. ἐπεὶ δὲ ἢ $ΤΜ$ ὡς ἐκ τῷ $Γ$ διηγμένη ἐκλαμβάνεται, ἢ ἢ $ΑΧ$ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς Δευτέρας Διαμέτρου $ΣΞ$, ἔσθ' ἐν τῇ $ΓΞ$ γίνεται, δῆλον ἄρα ὅτι τὴν $ΤΜ$, ὡς Ἀσύμπτωτον ἐκλαμβάνειν ἔξεσι. (υ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'. (Φ)

Ἐὰν ἐν Ἀντικειμέναις ἀχθῇ τις εὐθεΐα, τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῶν περιεχουσῶν τὰς τομὰς, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθεϊῶν μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν καὶ τῆς τομῆς ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τῷ ἀπὸ τῆς ἡγμένης Διαμέτρου παρὰ τὴν τέμνουσαν εὐθεΐαν καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν τομῶν πρὸς ταῖς Ἀσύμπτωτοις ἴσαι ἔσονται.

Ἐξωσαν Ἀντικείμεναι αἱ $ΑΛ$, $ΨΝ$, (πίν. ΙΖ'. χ. Ι.) ὧν κέντρον μὲν τὸ $Γ$, Ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ $ΓΕ$, $ΓΔ$. καὶ ἤχθω τις εὐθεΐα ἢ $ΝΛ$, τέμνουσα ἑκατέραν τῶν $ΕΓ$, $ΓΖ$ τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν $ΕΓΖ$ τῶν $ΔΓΕ$, $ΖΓΦ$.

(τ) Κατὰ τὸ τὴν δ'. τῷ ε', καὶ τὸ ζ'. Θιῶρ. τῶν μετὰ τὸ ε'.

(υ) Ἐκ τῆς ε'. τῷ δὲ τῷ τμήμ. δῆλον. (Φ) Τὸ μὲν α. μίση καὶ κ'. ἐστὶ τὸ δὲ β'. ἢ ιε'. τῷ β'. βιβλ. τῷ Ἀπολλων.

ΖΓΦ γωνίαν, τὸν περιεχουσὴν τὰς τομὰς ΛΛ, ΨΝ.
 καὶ ἡχθῶ διὰ τῆς ΓΨ ἢ ΨΛ Διάμετρος παράλληλος τῇ
 ΝΛ. λέγω Α', ὅτι τὸ ΖΛ. ΛΣ = ΓΑ², Β', ὅτι ἡ ΝΖ =
 ΛΣ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω κατὰ κορυφὴν Α' ἐφαπτομένη ἡ ΔΑΕ, καὶ
 παράλληλος αὐτῇ ἀπὸ τῆς Α' ἡ ΗΑΜ, ταύτας ἄσυνμ-
 πτώτως συμπίπτουσαι κατὰ τὰ Δ, Ε, Η, Μ σημεία.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ ΖΛ. ΛΣ πρὸς τὸ ΗΛ. ΑΜ λόγον ἔχει συγκεί-
 μενον ἔκτε τῆς λόγου ὃν ἔχει ἡ ΖΛ : ΗΛ, καὶ ἐκ τῆς
 ὃν ἔχει ἡ ΛΣ : ΑΜ. (χ) ἀλλ' ὡς μὲν ΖΛ : ΗΛ ::
 ΓΑ : ΑΔ, ὅθεν ἔτῳ ΓΑ : ΑΕ, (ἢ γὰρ ΑΔ = ΑΕ.
 (ψ)) ὡς δὲ ΛΣ : ΑΜ :: ΓΑ : ΑΕ. (ω) ὡς ἄρα ΖΛ.
 ΛΣ : ΗΛ. ΑΜ :: ΓΑ² : ΑΕ². (α) ἀλλὰ τὸ ΗΛ.
 ΑΜ = ΑΕ². (β) ἄρα καὶ τὸ ΖΛ. ΛΣ = ΓΑ². (γ) διὰ
 τὰ αὐτὰ δὲ δευχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ΣΝ. ΝΖ = ΓΑ².

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ ΖΛ. ΛΣ = ΣΝ. ΝΖ· ἐκάτερον γὰρ ἴσον τῷ ΓΑ².
 (δ) ὡς ἄρα ΖΛ : ΝΖ :: ΣΝ : ΛΣ, (ε) καὶ συντεθέν-
 τα, ὡς ΑΝ : ΝΖ :: ΑΝ : ΛΣ. ἢ ἄρα ΝΖ = ΛΣ. (ς)

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐάν τις ἐνθεῖα ἡ νλ παράλληλος ἀχθῇ τῇ ΝΛ,
 ἔσονται καὶ τὰ ὀρθογωνία ζλ. λς, σν. νς, ἴσα ἀπλή-
 λοις. ἐκάτερον γὰρ τῷ ΓΑ² ἴσον δευχθήσεται. (η)
 Β'.

(χ) Κατὰ τὴν κγ'. τῆς ε'. (ψ) Κατὰ τὴν ι'. τῆς δὲ τῆς τμήμ.
 (ω) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (α) Κατὰ τὸν ζ'. ὁρισμ. τῆς ε'.
 (β) Ὅρα τὴν α'. Συνέπ. τῆς ι'. τῆς δὲ τῆς τμήμ. (γ) Κατὰ
 τὴν κ'. τῆς ι'. (δ) Κατὰ τὸ α'. μέρ. (ε) Κατὰ τὴν ις'. τῆς
 ε'. (ς) Κατὰ τὴν β'. τῆς ι'. (η) Ὅρα τὴν δαξ. τῆς ὁροκαμ.
 πρῶτ.

Β'. Καὶ τὰ ὀρθογώνια δὲ ΝΣ. ΣΛ, ΛΖ. ΖΝ, vs. σλ, λζ, ζν ἴσα ἀλλήλοις εἰσονται. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΝΖ=ΛΣ, κοινῆς προσκειμένης τῆς ΖΣ, ἔσεται ἡ ΝΣ=ΖΛ. διὰ δὲ καὶ ΝΣ. ΣΛ=ΖΛ. ΛΣ. ἀλλὰ τὸ ΖΛ. ΛΣ= $\Gamma\Lambda^2$, (9) ἄρα καὶ τὸ ΝΣ. ΣΛ= $\Gamma\Lambda^2$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δευχθήσεται καὶ ἐκάτερον τῶν vs. σλ, λζ. ζν ἴσον τῷ $\Gamma\Lambda^2$. ὁπλὸν ἄρα τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'. (1)

Ἐὰν ἐπὶ τὰς Ἀσύμπτωτας ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς δύο εὐθεΐαι ἀχθῶσιν ἐν τυχάσαις γωνίαις, καὶ ταύταις παράλληλοι ἀχθῶσιν ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς, τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔσται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν αἰς αἱ παράλληλοι ἤχθησαν.

Ἔστω Ὑπερβολή, ἥς Ἀσύμπτωται αἱ ΓΔ, ΓΖ. καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς, τὸ Λ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰς ΓΔ, ΓΖ κατήχθωσαν αἱ ΛΦ, ΛΒ. εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἕτερον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ρ, καὶ διὰ τοῦ Ρ ταῖς ΛΦ, ΛΒ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΡΕ, ΡΚ. λέγω, ὅτι τὸ ΛΦ. ΛΒ=ΡΕ. ΡΚ. πίν. ΙΖ'. χ. α.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΛΡ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμβαλεῖται ταῖς Ἀσύμπτωταις κατὰ τὰ Ζ, Δ σημεία.

ΔΕΙ-

(9) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῆς προκσμ. προτ. (1) Ὡς ἰβ'. ἰσι τὸ β. βιβλ. τῷ Ἀπολλων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Η' ΔΡ = ΖΛ. (κ) κοινή προσκείθω ἡ ΡΑ. ἡ ἄρα ΔΛ = ΖΡ. ὡς ἄρα ΖΡ : ΖΛ :: ΔΛ : ΔΡ. (λ) ἀλλ' ὡς μὲν ΖΡ : ΖΛ :: ΡΚ : ΛΒ, ὡς δὲ ΔΛ : ΔΡ :: ΛΦ : ΡΕ. (μ) ὡς ἄρα ΡΚ : ΛΒ :: ΛΦ : ΡΕ. (ν) τὸ ἄρα ΛΦ. ΛΒ = ΡΕ. ΡΚ. (ξ)

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

- Α'. Εἴαν τῶν εἰρημένων σημείων τὸ ἕτερον, οἷον τὸ ι, ἐπὶ τῆς ἀντικειμένης ληφθῇ τομῆς, ἀχθῶσι δὲ ἀπ' αὐτῶν ταῖς ΡΕ, ΡΚ παράλληλοι αἱ ιΦ, ιΒ, ἔσεται καὶ τὸ ιΦ. ιΒ = ΡΕ. ΡΚ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ιζ = Ρδ, (ο) κοινῆς προσκειμένης τῆς ζδ, ἔσεται ιδ' = Ρζ. διὸ ὡς ιδ' : Ρδ :: Ρζ. ιζ. (π) ἀλλ' ὡς μὲν ιδ' : Ρδ :: ιΦ : ΕΡ, ὡς δὲ Ρζ : ιζ :: ΡΚ : ιβ. (ρ) ἄρα καὶ ὡς ιΦ : ΕΡ :: ΡΚ : ιβ. (σ) τὸ ἄρα ιΦ. ιβ = ΕΡ. ΡΚ. (τ)
- Β'. Εἴαν δὲ αἱ ἀπὸ τῶν σημείων Λ, Ρ (χ. 3.) ἀχθῶσιν ΛΦ, ΛΒ ἢ μόνον ταῖς ΡΕ, ΡΚ ὡς παράλληλοι, ἀλλὰ καὶ ταῖς Α' συμπτώτοις ΓΒ, ΓΕ, ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται τὰ ΛΦΓΒ, ΡΕΓΚ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενα παραλληλόγραμμα. ἔστι γὰρ ὡς ΛΒ : ΡΚ :: ΡΕ : ΛΦ, (υ) εἴτεν ὡς ΓΦ : ΓΕ :: ΓΚ : ΓΒ. τὸ ἄρα ΛΦΓΒ = ΡΕΓΚ. (φ)
- Γ'. Εἴαν ἄρα ἀπὸ τῶν κέντρων Γ ἐπὶ τὰ σημεία Λ, Ρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΓΛ, ΓΡ, τὰ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενα

(κ) Κατὰ τὴν ια'. τῶ δὲ τῶ τμήμ. (λ) Κατὰ τὴν β' τῶ ι'.
 (μ) Κατὰ τὴν δ'. τῶ ε'. (ν) Κατὰ τὴν ι'. τῶ ι'. (ξ) Κατὰ τὴν ιε'. τῶ ε'. (ο) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (π) Κατὰ τὴν β'. τῶ ι'. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. τῶ ε'. (σ) Κατὰ τὴν ἀρημ. ι'.
 (τ) Κατὰ τὴν ιε'. τῶ ε'. (υ) Κατὰ τὴν προκ. πρότ.
 (φ) Κατὰ τὴν ιδ'. τῶ ε'.

μενα τρίγωνα ΓΑΦ, ΓΕΛ, ΓΡΚ, ΓΡΕ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. (χ)

Δ'. Ἐάν ᾧ αἱ ἀπὸ τῶν Α καὶ Ρ ἀχθῶσαι πρὸς ὁρθεῖς εἰσι ταῖς Ἀσυμπτώταις, λόγον ἔξωσι πρὸς ἀλλήλους τὸν ἀντιπεπονηθέντα τῶν ἐαυτῶν ἀπὸ τῆς κέντρης Γ ἀποστημάτων. ἐπεὶ γὰρ ὡς $AB:PK::PE:ΛΦ$, ἔτεν ὡς $AB:PK::IK:ΓΒ$ · ἐστὶ δὲ ἡ μὲν IK τὸ τῆς KP ἀπὸ τῆς κέντρης Γ ἀπόστημα, ἡ δὲ $ΓΒ$ τὸ τῆς $ΒΑ$ (ψ) αἱ ἄρα AB, IK ἐν ἀντιπεπονηθέντι λόγῳ εἰσι τῶν ἐαυτῶν ἀπὸ τῆς κέντρης Γ ἀποστημάτων. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ, ὡς $PE:ΛΦ::IF:IE$.

Ε'. Ἐάν ἀπὸ τῶν Α καὶ Ρ σημεῖον ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς ἀχθῶσιν αἱ NM , $ΠΨ$ ταῖς Ἀσυμπτώταις συμβάλλεσθαι, τὰ ὑπ' αὐτῶν τε καὶ τῶν Ἀσυμπτῶτων γινόμενα τρίγωνα NIM , $ΠΠΨ$ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. ἐπεὶ γὰρ ὡς $NA:AM::NB:BF$, (ω) ἐστὶ δὲ ἡ $NA=AM$, (α) ἄρα καὶ ἡ $NB=BF$. τὸ ἄρα NAB τρίγωνον ἴσον τῷ $ΓAB$. (β) ἀλλὰ τὸ $ΓAB=ΓΑΦ$. (γ) τὰ τρία ἄρα τρίγωνα $NAB, ΓAB, ΓΑΦ$ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $NM:NA::MI:AB$, (δ) ἐστὶ δὲ ἡ NM διπλασία τῆς NA , (ε) ἄρα καὶ ἡ MI διπλασία τῆς AB , ἔτεν τῆς $ΓΦ$ · ἔκθεν τὸ $ΓΑΦ=ΜΑΦ$. τὰ ἄρα $NAB, ΓAB, ΓΑΦ, ΜΑΦ$ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. τὸ ἄρα NIM τετραπλάσιον τῆς $ΓΑΦ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται τὸ $ΠΠΨ$ τε-

(χ) Ἐκ τῆς λδ'. τῆς α'. δηλον. (ψ) Ὅσα τὸν ἡ. ὁρισμ. τῆς α'. (ω) Κατὰ τὴν β'. τῆς ε'. (α) Κατὰ τὴν α'. Συνίπ. τῆς αὐτῆς δὲ τῆς τμήμ. (β) Κατὰ τὴν λη' τῆς α'. (γ) Κατὰ τῆς λδ'. τῆς α'. (δ) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε' (ε) Ἐκ τῆς ἀρημ. Συνίπ. δηλ.

τετραπλάσιον τῆ ΓΡΚ. ἔστι δὲ τὸ ΓΛΦ = ΓΡΚ. (ζ)
διὸ καὶ τὸ ΝΙΜ = ΗΓΨ.

Λ Η Μ Μ Λ. (η)

Τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμενων κοινά-
εἰσιν αἱ Ἀσύμπτωτοι

Ἦσαν συζυγεῖς ἀντικείμεναι αἱ ΛΡ, ΨΛ, ΒΖ,
ΔΗ, ὧν Διμέτρες συζυγεῖς αἱ ΨΛ, ΒΔ, κέντρον δὲ
τὸ Γ. λέγω, ὅτι κοιναὶ αὐτῶν εἰσὶν αἱ Ἀσύμπτωτοι.
πίν. ΙΗ. χ. 1.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθασαν ἐφαπτόμεναι τῶν τεμῶν διὰ τῶν Λ, Ψ,
Β, Δ σημείων ἀλλήλαις συμπιπτεσθαι κατὰ τὰ Ι, Κ,
Ο, Μ σημεία καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὸ κέντρον Γ ἐ-
πεζεύχθασαν αἱ ΙΓ, ΟΓ, ΚΓ, ΜΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΙΚΟΜ παραλληλόγραμμόν ἐστιν. (θ) ἐπεὶ δὲ ἡ
μὲν ΕΔ παράλληλος τῇ ΚΙ, (ι) ἡ δὲ ΨΛ ἐκατέρω-
τῶν ΟΚ, ΜΙ, (κ) ἄρα ἡ μὲν ΛΓ = ΚΒ, ἡ δὲ ΓΨ
τῇ ΜΔ. ἀλλ' ἡ ΛΓ = ΓΨ. ἄρα καὶ ἡ ΚΒ = ΜΔ. τῶν
τετραγώνων ἔν ΚΒΓ, ΜΓΔ ἡ μὲν πλευρὰ ΓΒ = ΓΔ,
ἡ δὲ ΒΚ = ΜΔ, καὶ γωνία ἡ ΓΒΚ = ΓΔΜ. (λ) καὶ
γωνία ἄρα ἡ ΒΓΚ = ΜΓΔ. (μ) ἀλλ' ἡ ΒΓΚ σὺν τῇ
ΚΓΔ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. (ν) ἄρα καὶ ἡ ΜΓΔ σὺν
τῇ ΚΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. αἱ ἄρα ΚΓ, ΜΓ ἐκ' ἐν-
θείας εἰσὶ. (ξ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ
ἡ

(ζ) Κατὰ τὴν προλ. γ'. Σύνιπ. (η) Ἦ ιζ'. ἰεὶ τῆ β'. βιβλ. τῆ
Ἀπολλων. (θ) Ἐκ τῆς δ'. τῆ δὲ τῆ τμήμ. δὴλ. (ι) Κατὰ τὸν κδ'.
ὄρισμ. (κ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ δὲ τμήμ. (λ) Κατὰ τὴν κδ'.
τῆ α'. (μ) Κατὰ τὴν δ'. τῆ α'. (ν) Κατὰ τὴν ιγ'. τῆ α'. (ξ) Κα-
τὰ ιδ'. τῆ α'.

ἡ ΙΓ ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΟΓ. ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρω τῶν ΚΙ, ΟΜ, ἴση τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ ΒΔ, (ο) αἱ ἄρα ΜΓΚ, ΟΓΙ Ἀσύμπτωτοι εἰσι τῶν ΑΡ, ΨΛ τομῶν. διὰ τα αὐτὰ δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῶν ΒΖ, ΔΗ τομῶν αἱ αὐταὶ εἰσιν Ἀσύμπτωτοι. κοιναὶ ἄρα τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων τομῶν εἰσὶν Ἀσύμπτωτοι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δὴ φανερόν, ὅτι εἰάν διὰ τῶν περάτων Λ, Ρ, Η, Ζ δύο ἐτέρων συζυγῶν Διαμέτρων, τῶν ΑΡ, ΗΖ ἐφαπτόμενα ἀχθῶσι τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων τομῶν αἱ ΠΣ, ΦΝ, ΝΠ, ΣΦ, ἐπὶ ταῖς Ἀσυμπτώταις ἀλλήλαις συμπεσῶνται. εἰ γὰρ μὴ, αἱ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν ἐπὶ τὸ κέντρον Γ ἐπιζευχθεῖσαι εὐθεῖαι Ἀσύμπτωτοι ἔσονται, ὅπερ ἀδύνατον. (π)

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΔ'.

Τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων τομῶν, τῶν ἀπὸ τῶν περάτων τῶν συζυγῶν Διαμέτρων ἀχθαισῶν γινόμενα παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, φημὶ ὅτι τὸ ΜΟΚΙ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΠΝΦ παραλληλογράμμῳ.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Τὸ μὲν ΜΓΙ τρίγωνον ἴσον τῷ ΠΓΣ τριγώνῳ, το δὲ ΙΓΚ=ΓΠΝ. (ρ) ἄρα καὶ τὸ ΜΙΚ=ΝΠΣ. διὸ δὴ καὶ τὸ ΜΟΚΙ=ΣΠΝΦ. (σ)

ΣΤ.

(ο) Κατὰ τὴν λδ'. τῇ α'. (π) Κατὰ τε τὸ προκείμεν. Λημ., καὶ τὴν γ'. Συνέπ. τῆς ι'. τῇ δὲ τῇ τμήμ. (ρ) Κατὰ τὴν ε'. Συνέπ. τῆς προλ. προτ. (σ) Ἐκ τῆς λδ'. τῇ α'. δὴλ.

ΣΤ Ν Ε Π Ε Ι Α Ι.

Α'. Αἱ τὰ πέρατα Ψ , B , A , Δ , καὶ Λ , Z , P , H τῶν συζυγῶν διαμέτρων ἐπιζευγνύσασιν εὐθεΐαι ΨB , $\Lambda \Delta$, ΛZ , $P H$ παράλληλοι εἰσι τῇ ἐτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτῶτων MK . ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν $M\Psi = \Psi O$, ἡ δὲ $KB = BO$, (τ) ὡς ἄρα $M\Psi : \Psi O :: KB : BO$. παράλληλος ἄρα τῇ MK ἡ ΨB . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν $\Lambda \Delta$, ΛZ , $P H$ τῇ MK παράλληλος.

Β'. Ἐὰν ἄρα πάντα τὰ τῶν εἰρημένων Διαμέτρων πέρατα δι' εὐθειῶν ἐπιζευχθῶσι, τὰ ὑπ' αὐτῶν γινόμενα παραλληλόγραμμα $\Psi B \Lambda \Delta$, $\Lambda Z P H$ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. καὶ γὰρ τὰ ἡμίση εἰσὶ τῶν ἴσων $MOKI$, $\Sigma \Pi \Phi$.

Γ'. Αἱ τῶν παραλληλογράμμων $\Psi O B \Gamma$, $\Lambda \Sigma Z \Gamma$ διαγώνιοι $B\Psi$, ΓA δίχα τέμνονται ὑπὸ τῆς Ἀσυμπτῶτος $\Gamma \Sigma$, ἡ μὲν κατὰ τὸ Υ , ἡ δὲ κατὰ τὸ Θ . ἐπεὶ γὰρ αἱ μὲν $B\Psi$, ΓO διαγώνιοι εἰσι τῷ $\Gamma \Psi O B$ παραλληλογράμμῳ, αἱ δὲ $Z\Lambda$, $\Gamma \Sigma$ τῷ $\Gamma \Lambda \Sigma Z$, ὁῦλον ἄρα ὅτι δίχα τέμνονται κατὰ τὰ Υ , Θ σημεία.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Ε'.

Ἐὰν τῇ αὐτῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ δύο γράφωσιν Ὑπερβολὰς, ὧν ἡ ὀρθία ἔχῃ ἡ αὐτὴ, τὰ ὑπ' αὐτῶν, τῆς τεταγμένης, καὶ τῆς Διαμέτρως περιεχόμενα χωρία λόγον ἔχουσι πρὸς αἴλληλα, ὅν ἡ ὀρθία τῆς ἐτέρας πρὸς τὴν μέσσην ἀνάλογον τῶν δύο ὀρθιῶν πλευρῶν.

Πλαγία μὲν πλευρᾷ τῇ ΨN , ὀρθία δὲ τῇ NA γεγράφθω Ὑπερβολὴ ἡ NZ . πλαγία δὲ τῇ αὐτῇ καὶ
 N
ὀρθία

(τ) Κατὰ τὴν α. Συνέπ. τῆς ια. τῷ δὲ τῷ τμήμ.

ὀρθία τῇ NE, γεγραρθῶ ἡ NO. καὶ ἀπὸ τινος τῆς τομῆς σημεία Z τετραγμίνως ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΨΚ κατῆχθῶ ἡ ZK, μέση δὲ ἀνάλογον τῶν NA, NE ἔσω ἡ NX. λ'γω δὴ ὅτι τὸ χωρίον NZK, πρὸς τὸ χωρίον NOK λόγον ἔχει ὃν ἡ NA: MX. πίν. Η'. χ. ι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς $\overline{ZK}^2 \cdot \Psi K \cdot KN :: NA : N\Psi$. καὶ ὡς $\Psi K \cdot KN : \overline{OK}^2 :: N\Psi : NE$. (υ) ἄρα καὶ δι' ἴσιν, ὡς $\overline{ZK}^2 \cdot \overline{OK}^2 :: NA : NE$. ἔτι δὲ ὡς $NA : NE :: \overline{NA}^2 : \overline{NX}^2$. (φ) καὶ γὰρ ὡς $NA : NX :: NX : NE$. (χ) ὡς ἄρα $\overline{ZK}^2 : \overline{OK}^2 :: \overline{NA}^2 : \overline{NX}^2$. (ψ) διὸ δὴ καὶ ὡς $ZK : OK :: NA : NX$. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς $ΠΛ : ΣΛ$, καὶ ὡς πᾶσα τοιαύτη εὐθεΐα ἐν τῷ NZK χωρίῳ ἔσα, πρὸς πᾶσαν τὴν ἐν τῷ NOK λόγον ἔχει ὃν $NA : NX$. καὶ τὸ χωρίον ἄρα NZK, πρὸς τὸ χωρίον NOK λόγον ἔχει, ὃν ἡ $NA : NX$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι δοθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨN, καὶ τῆς ὀρθίας NA, καὶ τῆς λόγου, ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν δύο τῶν εἰρημένων χωρίων, γραφήσεται Ὑπερβολή, ἥτις πλαγία μὲν πλευρὰ ἡ αὐτὴ ΨN, ὀρθία δὲ ἑτέρα. ἔσω γὰρ ὁ λόγος, ὃν ἔχει τὸ NZK: NOK ἴσος ᾧ ἔχει ἡ NA: NX. καὶ γεγονότω ὡς $NA : NX :: NX : NE$. ἡ ἐν πλαγίᾳ μὲν πλευρᾷ τῇ ΨN, ὀρθία δὲ τῇ NE γραφομένη Ὑπερβολὴ NΣO, (α) ἡ ζητούμενη ἔσται.

ΠΡΟ-

(υ) Κατὰ τὴν Σ. ι. κ. τῆς α' τῆς δὲ τῆς τμήμ. (φ) Κατὰ τὸ β'. Πόρ. τὸ μετὰ τὴν η'. τῆς ε'. (χ) Ἐξ ἰσοθ. (ψ) Κατὰ τὴν ε'. τῆς ε'. (ω) Κατὰ τὸ ζ'. τῶν μετὰ τὸ ε'. Θιουρ. (α) Ὅμοιον τὸν δ'. Σινίε. τῆς β'. τῆς δὲ τῆς τμήμ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ'.

Ἐὰν ἀπὸ ὁποτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτῶτων ληφθῶσι πρὸς τῷ κέντρῳ εὐθεῖαι συνεχῶς ἀνάλογον, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῶν τῇ ἑτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτῶτων ἀχθῶσι παράλληλοι, τὰ ὑπ' αὐτῶν τε καὶ τῆς τομῆς ἀπολαμβανόμενα ἐκτὸς χωρία ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται.

Ἐσῶσαν αἱ ΓΔ, ΓΛ Ἀσύμπτωτοι τῆς ΜΚΗ Ὑπερβολῆς, ἧς κέντρον τὸ Γ. καὶ εἰλήφθωσαν ἀπὸ ὁποτέρᾳ ἓν, οἷον τῆς ΓΔ εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ, ΓΔ συνεχῶς ἀνάλογον. καὶ ἀπὸ τῶν περάτων Α, Β, Δ ἤχθωσαν τῇ ἑτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτῶτων ΓΛ παράλληλοι αἱ ΑΜ, ΒΚ, ΔΗ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΜΚΒ χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ΒΚΗΔ. πίν. ΙΗ. ς. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἀπὸ τῶν Η, Κ, Μ σημείων ἤχθωσαν τῇ ἑτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτῶτων ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΕ, ΚΙ, ΜΛ τῇ ἑτέρᾳ Ἀσυμπτῶτι ΓΛ συμβάλλουσαι. καὶ πληρωθέντος τοῦ ΓΑΝΔ παραλληλογράμμου, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΦ, ΦΚ, ΚΝ, ΓΜ, ΓΗ, ΜΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ παράλληλόγραμμα ΓΑΜΑ, ΓΙΚΒ ἴσα ἀλλήλοις εἶσι, (β) καὶ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν Γ. ὡς ἄρα ΓΑ: ΓΙ:: ΓΒ: ΓΑ. (γ) ἔστι δὲ ὡς ΓΒ: ΓΑ:: ΓΔ: ΓΒ, (δ) ἄρα καὶ ὡς ΓΑ: ΓΙ:: ΓΔ: ΓΒ. (ε) τὰ ἄρα παραλλ-

N 2

(β) Κατὰ τὴν β. Σύντ. τῆς γ. τὰ δὲ τὰ τμήμ. (γ) Κατὰ τὴν δ. τὰ ε'. (δ) Ἐκ τῆς ὑποθ. δηλ. (ε) Κατὰ τὴν ε'.

παραλληλόγραμμα ΓΑΝΔ, ΓΙΚΒ περὶ τὴν αὐτὴν εἰς διάμετρον, τὴν ΓΚΝ. πάλιν ἐπειδὴ τὰ ΓΑΜΑ, ΓΕΝΔ παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, (ζ) καὶ κοινὴν ἔχει γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Γ, εἰν ἄρα ὡς ΓΑ : ΓΕ :: ΓΔ : ΓΑ. τὰ ἄρα ΓΑΝΔ, ΓΕΦΑ παραλληλόγραμμα περὶ τὴν αὐτὴν εἰς διάμετρον, τὴν ΓΦΝ. ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ΓΦ, ΦΚ, ΚΝ. ἡ ἄρα ΜΗ καὶ πᾶσαι αἱ παράλληλοι αὐτῇ εὐθείᾳ, αἱ ὑπὸ τῆς τομῆς ΜΚΗ περατόμεναι, δίχα τέμνοντα ὑπὸ τῆς ΓΝ. (η) ἔκων τὸ μὲν τρίγωνον ΜΓΠ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΗΓΠ, τὸ δὲ μικτόγραμμον ΜΚΠ ἴσον τῷ μικτογράμμῳ ΗΚΠ. ἀφ' ἡμῶν ἀπὸ μὲν τῆς ΜΓΠ τὸ ΜΚΠ, ἀπὸ δὲ τῆς ΗΓΠ τὸ ΗΚΠ. καὶ λοιπὸν ἄρα μικτόγραμμον τὸ ΓΚΜ ἴσον λοιπῷ τῷ ΓΚΗ. ἐπεὶ δὲ καὶ τρίγωνον τὸ ΓΚΒ ἴσον τριγώνῳ τῷ ΓΗΔ, κοινῶς ἀφαιρεθέντος τῆς ΓΟΒ τριγώνου, ἔσεται τὸ ΓΚΟ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΟΗΔ τετραπλευρῷ. κοινὸν προσκείτω τὸ μικτόγραμμον ΚΟΗ, τὸ ἄρα ΓΚΗ μικτόγραμμον ἴσον τῷ ΒΚΗΔ χωρίῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται καὶ τὸ ΓΚΜ μικτόγραμμον ἴσον τῷ ΑΜΚΒ χωρίῳ. ἐπεὶ δὲ τὸ ΓΚΗ = ΓΚΜ, ὡς δὲ δεικται, καὶ τὸ χωρίον ἄρα ΑΜΚΒ ἴσον τῷ ΒΚΗΔ χωρίῳ.

ΣΤ Ν Ε Π Ε Ι Α Ι.

Α'. Τῆς δοθέντος ὑπερβολικῆς χωρίᾳ ΙΑΒΜ (πίν. ΙΖ. χ. 4.) τὸ ἀπειροπλάσιον εὐρεῖν ἐξέσι. κείτω γὰρ δεῖν εὐρεῖν τὸ τέττε τετραπλάσιον. προαχθήτω δὴ ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΒ κατὰ τὸ συνεχές διὰ τριῶν ἑρῶν, τῶν ΓΔ, ΓΕ, ΓΗ, ὥστε εἶναι ὡς ΓΑ : ΓΒ :: ΓΒ : ΓΔ :: ΓΔ : ΓΕ :: ΓΕ : ΓΗ. καὶ

(ζ) Κατὰ τὴν β. Συναρ. τῆς ιγ'. τῆς δὲ τῆς τμήμ. (η) Κατὰ τὴν λδ'. τῆς α'.

καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Λ, Δ, Η σημείων τῇ Ἀσυμπτῳτῳ ΓΕ παράλληλοι, αἱ ΔΚ, ΔΝ, ΗΟ, καὶ ἐπὶ τὰ ΙΑΒΜ, ΜΒΔΚ, ΚΛΔΝ, ΝΔΗΟ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, (θ) δὴλον ἐστὶ τὸ ΙΑΗΟ τετραπλάσιον εἶναι τῷ ΙΑΒΜ. ἐπεὶ δὲ ὁ λόγος τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΓΒ ἐπ' ἀπειρον προαχθῆναι δύναται, ἡ δὲ ΓΥ καὶ ἡ τομὴ ΚΟ ἐπ' ἀπειρον ἐκβυζιζόμενα, ἔσονται συμπίπτουσαι, δὴλον ἄρα ὅτι καὶ τὸ ἀπειροπλάσιον τῷ ΙΑΒΜ χωρὶς εὐρεθῆσεται μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς Ἀσυμπτῳτῳ.

Β'. Ἐὰν τῇ ἑτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτῳτῳ ΓΥ ληφθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ, ΓΔ, ΓΗ διακεκριμένον ἔχουσαι λόγον, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΑΙ, ΒΜ, ΔΝ, ΗΟ τῇ ΓΕ παράλληλοι, τὰ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενα ὑπερβολικὰ χωρία ΙΑΒΜ, ΝΔΗΟ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. γεγονέντω γὰρ ὡς ΓΒ: ΓΛ:: ΓΛ: ΓΔ. ἔκθεν τὸ $\overline{ΓΛ}^2 = ΓΒ. ΓΔ.$ (ι) ἀλλὰ τὸ $ΓΒ. ΓΔ = ΓΑ. ΓΗ.$ (κ) τὸ ἄρα $\overline{ΓΛ}^2 = ΓΑ. ΓΗ.$ ὡς ἄρα $ΓΑ: ΓΛ:: ΓΛ: ΓΗ.$ (λ) ἔκθεν τὸ μὲν $ΙΑΔΚ = ΚΔΗΟ,$ τὸ δὲ $ΜΒΔΚ = ΚΛΔΝ.$ (μ) ἄρα καὶ τὸ $ΙΑΒΜ = ΝΔΗΟ.$

Γ'. Τὸ ἔν δοθέν ὑπερβολικὸν μικτόγραμμον χωρίον, οἷον τὸ ΙΑΗΟ διὰ μὲν μιᾶς μέσης ἀναλόγῃ τῶν ΓΑ, ΓΗ, οἷον τῆς ΓΛ, εἰς δύο ἴσα μέρη τέμνεται διὰ δὲ δύο, εἰς τρία· διὰ δὲ τριῶν, εἰς τέσσαρα· διὰ δὲ τεσσάρων, εἰς πέντε, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

Δ'. Ἐπιζευχθεσῶν ἀπὸ τῶ κέντρων Γ ἐπὶ τὰ σημεία Ι, Μ, Κ, Ν, Ο τῶν ΓΙ, ΓΜ, ΓΚ, ΓΝ, ΓΟ, τὰ αὐτὰ ἔξουσιν ἰδιώματα τοῖς εἰρημένοις ὑπερβολικοῖς χωρίοις

Ν 3

καὶ

(θ) Κατὰ τὴν προκ. πρότ. (ι) Κατὰ τὴν ιζ'. τῇ ε'. (κ) Ἐν τῇ ὑποθ. δὴλ. (λ) Κατὰ τὴν αὐτ. ιζ'. (μ) Κατὰ τὴν προκ. πρότ.

καὶ οἱ ὑπερβολικοὶ τομεῖς ΙΓΜ, ΜΓΚ, ΚΓΝ, ΝΓΘ
ἴσοι γὰρ εἰσιν ἐκείνοις. (ν)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἄγνωστον τοῖς Ἀρχαίοις τὸτο τῆς Ὑπερβολῆς τὸ
ιδίωμα. (ξ) ἐξ αὐτῆς δὲ δῆλον, ὅτι ἡ Ὑπερβολή, περὶ
ἧς διαλαμβάνει ὁ Ἀπολλώνιος, ἡ καλεσμένη Λογα-
ριθμική ἐστίν, ἐν ᾗ δῆθεν ἦτε συνεχῆς Γεωμετρική
Σειρὰ συνίσταται καὶ ἡ Ἀριθμητική. εἰάν γὰρ ἐν τῇ
Ἀσυμπτώτῳ ΓΥ εὐθεῖαι ληφθῶσιν αἱ ΓΑ, ΓΒ, ΓΛ,
ΓΔ, καὶ ἄλλαι ἐφεξῆς λόγον συνεχῆ ἐλάσσενος ἀνισό-
τητος ἔχουσαι, τὰ ὑπ' αὐτῶν τεμνόμενα ὑπερβολικὰ
χωρία ΙΑΒΜ, ΙΑΛΚ, ΙΑΔΝ, καὶ τὰ ἐξῆς λόγον ἀριθ-
μητικὸν ἔξουσι πρὸς ἀλλήλα. οἶον, τῆς ΓΑ ὡς μονάδος
ληφθείσης, τῶν δὲ ΓΒ, ΓΛ, ΓΔ, ΓΗ, καὶ ἐξῆς ἄλλων
ἀριθμοὺς ἐμφαινουσῶν τέσδε· 10, 100, 1000, 10000,
καὶ ἐφεξῆς ἄλλων κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἔσεται τῷ
μὲν 10 λογαριθμὸς τὸ ΙΑΒΜ χωρίον, εἴταν τὸ 1·
τῷ δὲ 100, τὸ ΙΑΛΚ, ἦτοι τὸ 2· τῷ δὲ 1000, τὸ
ΙΑΔΝ, τέτρετι τὸ 3· τῷ δὲ 10000, τὸ ΙΑΗΟ, δι-
λονότι τὸ 4, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως. τῆς δὲ μονάδος ὁ λο-
γαριθμὸς ἐστὶ τὸ 0. καὶ γὰρ εὐδὲν χωρίον ὑπὸ τῆς ΓΑ
τέμνεται, τῆς ὡς μονάδος ληφθείσης. ὥστε εἰάν τὸ ΙΑΒΜ
χωρίον ἐπικληθῇ μ, ἔσεται ἡ Σειρὰ τῶν Λογαριθμῶν
τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν, ἡδε 0, μ, 2μ, 3μ, 4μ, καὶ
ἐφεξῆς ὁμοίως.

ΠΡΟ.

(ο) Ὅρα τὴν τῆς πρὸς αμ, ποστ. δαξ. (ξ) Ἐυκλείδης τὰτα ὁ
Ἰησαΐτης Γρηγόριος. διαλαμβάνει δὲ περὶ αὐτῶ ἐν τῷ αὐτῷ ἀν-
τιμήματι τῇ καλεσμένῃ, opus Geometricum quadraturae cir-
culi, et sectionum Coni, καὶ ἰνδοδίδναι ἐν Ἀντιστοφ. ἔτη
1647.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Ἐὰν Ὑπερβολῆς ἡ πλαγία πλευρὰ τετραπλασία ἢ τῆς ὀρθίας, καὶ πρὸς τῇ κορυφῇ καὶ τῷ Ἀξονι αὐτῆς Παραβολὴ γεγραφῇ, ἥς ἡ ὀρθία ἴση τῷ ἡμίσει τῆς ἐξημένης πλαγίας· ἀπὸ δὲ τῶν κέντρων πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἀνασηθῇ τις εὐθεΐα, καὶ ἀπὸ τῶν τυχόντος αὐτῆς σημεῖα αὐτῇ τῇ πλαγίᾳ παράλληλος ἀχθῇ τῇτε Ὑπερβολῇ καὶ τῇ Παραβολῇ συμβαλέσασα, τὸ ὑπ' αὐτῆς τεμνόμεον ὑπερβολικὸν χωρίον ἶσον ἔσται ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς τῆς Παραβολῆς καὶ εὐθείας ἴσης τῇ Παραβολῇ, τῇ ὑπὸ τῆς ἐξημένης παραλλήλῃ πρὸς τῇ κορυφῇ ἀπολαμβάνομένη περιεχομένῳ.

Ἐστω Ὑπερβολὴ ἡ ΝΜ, ἥς ἡ πλαγία πλευρὰ ΨΝ τετραπλασία τῆς ὀρθῆς ΨΛ. (πίν. ΙΘ' χ. ι.) καὶ πρὸς τῇ κορυφῇ Ν καὶ τῷ Ἀξονι ΨΠ Παραβολὴ γεγραφθῇ ἡ ΝΒ, ἥς ἡ ὀρθία πλευρὰ ἡμίσεια τῆς ΨΝ, εἴταν ἴση τῇ ΓΝ. καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων Γ καὶ Χθῶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΨΝ ἡ ΓΤ. καὶ ἀπὸ τῶν τυχόντος αὐτῆς σημεῖα Δ καὶ Χθῶ ἡ ΔΒ τῇ ΨΝ παράλληλος, τῇ μὲν Ὑπερβολῇ κατὰ τὸ Μ, τῇ δὲ Παραβολῇ κατὰ τὸ Β συμβαλέσασα. λέγω, ὅτι τὸ ὑπερβολικὸν χωρίον ΓΔΜΝ ἶσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ΓΝ καὶ εὐθείας ἴσης τῇ Παραβολῇ ΝΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

ΚΑ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετάρχθωσαν ἀπὸ τῶν Μ καὶ Β σημείων ἐπὶ τὸν ΨΠ Ἄξονα αἱ ΜΧ, ΒΑ. καὶ ἀχθείσθης ἀπὸ τῆς Β τῆς ἐφαπτομένης ΒΖ τῆς Παραβολῆς ΝΒ, ἥχθω αὐτῇ πρὸς ὁρθῆς ἡ ΒΠ, ἥτις κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβεβλήσθω. καὶ ληφθείσης τῆς ΠΚ ἴσης τῇ ΕΠ, ἥχθω ἀπὸ τῆς Κ ἡ ΚΡ παράλληλος τῇ ΨΠ, τῇ ΒΑ ἐκβεβλήσθω κατὰ τὴν Ρ συμβάλλουσα. καὶ εἰληφθῶ μέρος τῆς Παραβολῆς τὸ ΒΙ πάσης δοθείσης καμπύλης ἐλάττω, καὶ ἀπὸ τῆς Ι ἥχθω ἡ ΕΙΘ τῇ ΔΒ παράλληλος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ΒΚ : ΒΠ :: ΒΡ : ΒΑ, καὶ ὡς ΒΚ : ΒΠ :: ΚΡ : ΠΑ (ο) ἔστι δὲ ἡ ΒΚ διπλασία τῆς ΒΠ, (π) ἄρα καὶ ἡ ΕΡ διπλασία τῆς ΒΑ, καὶ ἡ ΚΡ τῆς ΠΑ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὀρθὴ πλευρὰ τῆς Παραβολῆς, εἴτεν ἡ ΓΝ διπλασία τῆς ΠΑ. (ρ) ἄρα ἡ ΚΡ = ΓΝ. ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{ΒΚ}^2 = \overline{ΒΡ}^2 + \overline{ΚΡ}^2$, (σ) ἔστιν ἄρα τὸ $\overline{ΒΚ}^2 = 4\overline{ΒΑ}^2 + \overline{ΓΝ}^2$, εἴτεν τὸ $\overline{ΒΚ}^2 = 4\overline{ΜΧ}^2 + \overline{ΓΝ}^2$. καὶ ἐπεὶ ὡς ΨΧ. ΧΝ : ΜΧ² :: ΨΝ : ΨΛ, (τ) ἔστι δὲ ἡ ΨΝ τετραπλασία τῆς ΨΛ, (υ) ἄρα καὶ τὸ ΨΧ. ΧΝ τετραπλασιάζει τὸ ΜΧ². τὸ ἄρα $\overline{ΒΚ}^2 = \Psi\chi. \chi\Nu + \overline{ΓΝ}^2$. ἀλλὰ τὸ $\Psi\chi. \chi\Nu + \overline{ΓΝ}^2 = \overline{ΓΧ}^2$. (φ) τὸ ἄρα $\overline{ΒΚ}^2 = \overline{ΓΧ}^2$. ἐπεὶ δὲ ἡ ΒΚ = ΓΧ, εἴτεν ἡ ΒΚ = ΔΜ. ἔστι δὲ ὡς ΒΚ : ΚΡ :: ΒΙ : ΒΗ, (χ) (ὅμοιον γὰρ τὸ ΒΙΗ τῷ ΒΗΘ, (ψ) τὸ δὲ ΒΗΘ τῷ ΒΡΚ.) διὸ δὴ καὶ ὡς ΔΜ : ΓΝ ::

(ο) Κατὰ τὴν δ. τῆς ε'. (π) Εἰς τῆς Κατασκ. (ρ) Κατὰ τὴν δ. Σύντ. τῆς δ. προτ. τῆς α. τμήμ. (σ) Κατὰ τὴν μζ' τῆς α. (τ) Κατὰ τὴν Σύντ. τῆς α. τῆς δὲ τῆς τμήμ. (υ) Ἐξ ὑπερ. (φ) Κατὰ τὴν ε'. τῆς β'. (χ) Κατὰ τὴν δ. τῆς ε'. (ψ) Κατὰ τὴν η'. τῆς ε'. ἡ γὰρ ΒΙ καμπύλη πάσης δοθείσης ἐλάττωσεν, ὡς εὐθὺς ἐκλαμβάνοντα. πᾶσα γὰρ καμπύλη οἷον πολυγωνοειδὴς, ἀπάραι μὲν τῷ ἀριθμῷ, ἐλαχίστας δὲ τῷ μεγέθει πλευρὰς ἔχον· ὡς ἐκείνη ἐκβεβλήσθω, ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης γίνεταί.

ΓΝ:: ΒΙ: ΒΗ, ἤτοι ὡς ΔΜ: ΓΝ:: ΒΙ: ΜΙ. τὸ
 α α ΔΜ. ΜΙ = ΓΝ. ΒΙ. ἐστὶ δὲ τὸ ΔΜ. ΜΙ τὸ ὀρ-
 θογωνίον ΔΜΗ, ὅπερ ὡς ἴσον τῷ ΔΜμΕ χωρίῳ ἐκ-
 λαμβάνεται, ὀλιγοῦσμένον τῷ ΜμΙ τριγωνιδίῳ διὰ τὴν
 σμικρότητα. τῆς γὰρ ΒΙ ἐλάσσονος ἔσης πάσης διθεί-
 σης καμπύλης, τὰ Μ, μ, Ι σημεῖα ἐγγύτατά εἰσιν ἀλ-
 λήλων. ἔκον τὸ ΔΜμΕ ὑπερβολικὸν χωρίον ἴσον τῷ
 ὀρθογωνίῳ ΓΝ. ΒΙ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δευχθήσεται, ἔτι
 ἔκον τοῦτον ὑπερβολικὸν χωρίον τῶν ὑπὸ τῷ ΔΜ-
 ΝΓ χωρίῳ περιεχομένων ἴσον εἶναι ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ
 τῆς ΓΝ καὶ μέρους τῆς Παραβολῆς ΝΒ ὁμοίᾳ τῷ ΒΙ.
 καὶ ὅλον ἄρα τὸ ὑπερβολικὸν χωρίον ΓΔΜΝ ἴσον ὀρ-
 θογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ΓΝ, εἴτεν τῆς ὀρθίας πλευρᾶς
 τῆς Παραβολῆς, καὶ εὐθείας ἴσης τῇ ΝΒ Παραβολῇ πε-
 ριχομένῳ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

- Α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἔκ εὐθυνθήσεται ἡ Παραβο-
 λή, εἴτεν ἔκ ευρεθήσεται εὐθεῖα ἴση αὐτῇ, εἰάν
 μὴ τετραγωνιθῇ τὸ εἰρημένον ὑπερβολικὸν χωρίον.
- Β'. Ἐάν ἡ Ὑπερβολὴ ἰσόπλευρος ᾖ, ἤτοι εἰάν ἡ ΨΝ =
 ΨΛ, καὶ τῇ αὐτῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ ΨΛ, ἡ ΨΝ γρα-
 φῇ ἡ Παραβολὴ ΝΒ, ἔσεται τὸ ὑπερβολικὸν χω-
 ρίον ΓΔΜΝ ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῷ ἡμίσεως
 τῆς ὀρθίας, εἴτεν τῆς ΓΝ, καὶ εὐθείας ἴσης τῇ
 Παραβολῇ ΝΒ περιχομένῳ. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{ΒΠ}^2 =$
 $\overline{ΒΛ}^2 + \overline{ΛΠ}^2$, (ω) ἐστὶ δὲ τὸ $\overline{ΒΛ}^2 = \overline{ΜΧ}^2$, τὸ δὲ
 $\overline{ΜΧ}^2 = \overline{ΨΧ} \cdot \overline{ΧΝ}$, (α) τὸ δὲ $\overline{ΛΠ}^2 = \overline{ΓΝ}^2$, (β) τὸ
 ἄρα $\overline{ΒΠ}^2 = \overline{ΨΧ} \cdot \overline{ΧΝ} + \overline{ΓΝ}^2 = \overline{ΓΧ}^2 = \overline{ΔΜ}^2$. διὸ
 Ν 5 δὴ

(η) Κατὰ τὴν μζ'. τῷ α. (α) Ἐκ τῆς Συνεκ. τῆς α. τῷ δὲ τῷ
 τμήμ. δῆλον. (β) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς ε', τῷ α. τμήμ.

δὴ ἢ $ΒΠ = ΔΜ$. ἐπεὶ δὲ ὡς $ΒΠ : ΠΑ :: ΒΙ : ΒΗ$,
 (γ) ἔσται δὴ καὶ ὡς $ΔΜ : ΙΝ :: ΒΙ : ΜΙ$. ἔκον τὸ
 $ΔΜ$. $ΜΙ = ΓΝ$. $ΒΙ$. δῆλον ἄρα ἐκ τῶν εἰρημένων,
 (ε) ὅτι τὸ ὑπερβολικὸν χωρίον $ΓΔΜΝ$ ἴσον ἐστὶ τῷ
 ὑπὸ τῆς ἡμίσεως τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, αἴτεν τῆς
 $ΓΝ$, καὶ εὐθείας ἰσης τῇ $ΝΒ$ ἱσραβολῇ περιεχο-
 μένω ὀρθογωνίῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Ἐὰν Ὑπερβολῆς ἢ κατὰ κορυφὴν ἀπτομέ-
 νη τῇ Ἀσυμπτάτῃ συμπίπτῃ, ἀπὸ δὲ τῆς
 συμπτώσεως εὐθεῖα ἀχθῇ τῇ Ἰξονι πα-
 ράλληλος, ταχθῇ δέ τις εὐθεῖα τήν τε ἀχ-
 θῆσαν παράλληλον καὶ τὴν Ὑπερβολὴν καὶ
 τὴν Ἀσύμπτωτον τέμνουσα, καὶ περιενεχθῇ
 περὶ τὸν Ἀξονα τὸ ὑπὸ τῆς Ἀσυμπτώτης
 περατᾶμενον τετράπλευρον σὺν τῇ τριγώνῳ
 καὶ τῇ Ὑπερβολῇ καὶ τῇ ὀρθογωνίῳ, τοῖς ὑπὸ
 αὐτῶν περιεχομένοις, ἕως ὃ ἀποκατασταθῇ
 ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἢ μὲν ἐκ τῆς Ὑπερ-
 βολῆς γινομένη Κανοῖς ἴση ἔσται τῇ δακτυ-
 λιδίῳ τῇ ἐκ τῆς τριγώνου γινομένῳ τὸ δὲ τε-
 ρεὸν τὸ ἐκ τῆς χωρίου τῆς μεταξὺ τῆς Ὑπερ-
 βολῆς καὶ τῆς Ἀσυμπτώτης ἴσον τῇ ἐκ τῆς
 ὀρθογωνίου κυλίνδρῳ.

Εἴσατ.

Εφαπτεύω τῆς Ὑπερβολῆς ΑΡ ἢ ΑΔ, (χ. 2.) καὶ συμβαλλέτω αὐτῇ κατὰ Τὸ Δ ἢ ΔΙ Ἀσύμπτωτος. καὶ ἀπὸ τῆς Δ ἢ ΧΘω τῷ Ἀζονι ΔΙ παράλληλος ἢ ΔΗ. καὶ τετάχθω τὶς εὐθεία ἢ ΙΠΙ τέμνεσαι τήν τε ΔΗ καὶ τὴν ΑΡ καὶ τὴν ΔΙ. καὶ περιενεχθήτω τὸ τετράπλευρον ΑΠΙΔ περὶ τὸν ΑΠ Ἀξονα σὺν τῷ ΔΗΙ τριγώνῳ καὶ τῇ ΑΡ Ὑπερβολῇ καὶ τῷ ΑΠΗΔ ὀρθογώνιῳ. λέγω Α, ὅτι ἡ ἐκ τῆς ΑΡ Ὑπερβολῆς γινομένη Κωνοὶς ἴση ἐστὶ τῷ Δακτυλιδίῳ τῷ ἐκ τῆς ΔΗΙ τριγώνου. Β', ὅτι τὸ σφαιρὸν τὸ ἐκ τῆς μικτογράμμου χωρὶς ΑΔΙΡ ἴσον τῷ ἐκ τῆς ὀρθογωνίης ΑΠΗΔ Κυλίνδρῳ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθω ἡ ΙΠΙ ἐπὶ τὰ ἕτερα τῆς Ὑπερβολῆς μέρη.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ $\overline{ΠΙ}^2 = \overline{ΠΡ}^2 + \Phi\Gamma \cdot \GammaΡ$. (δ) ἀλλὰ τὸ $\Phi\Gamma \cdot \GammaΡ = \overline{ΑΔ}^2$, (ε) τὸ δὲ $\overline{ΑΔ}^2 = \overline{ΠΗ}^2$. (ς) τὸ ἄρα $\overline{ΠΙ}^2 = \overline{ΠΡ}^2 + \overline{ΠΗ}^2$. ἀφηρήθω κοινὸν τὸ $\overline{ΠΗ}^2$. ἔκθεν τὸ $\overline{ΠΙ}^2 - \overline{ΠΗ}^2 = \overline{ΠΡ}^2$. καὶ ὁ κύκλος ἄρα ἔῃ ἡμιδιάμετρος ἡ ΠΙ, ἀφαιρεθέντος ἀπ' αὐτῆς τῆς κύκλου, τῆς ἡμιδιάμετρον ἔχοντος τὴν ΠΗ, εἴταν τὸ βραχιόνιον τὸ ἐκ τῆς ΗΙ εὐθείας γινόμενον, ἴσον τῷ κύκλῳ ἔῃ ἡμιδιάμετρος ἡ ΠΡ. (η) ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι πᾶς κύκλος ὁ ἐν τῇ Κωνοίδι τῇ ἐκ τῆς ΑΡ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐπ' εὐθείας αὐτῷ βραχιονίῳ τῷ ἐν τῷ Δακτυλιδίῳ, τῷ ἐκ τῆς ΔΗΙ τριγώνου. διὸ δὴ καὶ ἡ Κωνοὶς ἡ ἐκ τῆς ΑΡ ἴση τῷ ἐκ τῆς ΔΗΙ Δακτυλιδίῳ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ σφαιρὸν τὸ ἐκ τῆς τετραπλεύρου ΑΠΙΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τῆς ΑΡ Κωνοίδι καὶ τῷ σφαιρῷ τῷ ἐκ τῆς μικτογράμ-

μυ

(δ) Κατὰ τὴν ε'. τῆ β'. (ε) Ὅρα τὴν α'. Συνέπ. τῆς ε'. τῆς δ. τῆς σμῆμ. (ς) Ἐκ τῆς λδ. τῆ α. δὴλ. (η) Ἐκ τῆς εδ. τῆς α.

μα ΑΔΙΡ. ἔστι δὲ τὸ αὐτὸ φερεὶν τὸ ἐκ τῆς τετραπλεύρου ἴσον τῷ τε Κυλίνδρῳ τῷ ἐκ τῆς ΑΠΗΔ ὀρθογωνίᾳ, καὶ τῷ δακτυλίδιῳ τῷ ἐκ τῆς ΔΗΙ τριγώνῳ. ἡ ἄρα ἐκ τῆς ΑΡ Κωνοῖς σὺν τῷ ἐκ τῆς μικτογράμμου φερεῖν ἴσα εἰς τὸν Κυλίνδρῳ καὶ τῷ Δακτυλίδιῳ. δέδεικται δὲ ἡ Κωνοῖς ἴση τῷ Δακτυλίδιῳ, καὶ τὸ φερεῖν ἄρα τὸ ἐκ τῆς μικτογράμμου ΑΔΙΡ ἴσον τῷ ἐκ τῆς ὀρθογωνίᾳ ΑΠΗΔ Κυλίνδρῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'

Τῶν αὐτῶν κειμένων, εὐθείας τινὸς ἀχθείσης τῷ τῆς Ὑπερβολῆς Ἀΐξονι παραλλήλῃ, τὴν δευτέραν διάμετρον, καὶ τὴν ἰσύμπτωτον, καὶ τὴν κατὰ κορυφὴν ἀπτομένην, καὶ τὴν Ὑπερβολὴν τεμνύσης, καὶ τῆς ὑπ' αὐτῆς τεμνομένης μικτογράμμου τετραπλεύρου σὺν τοῖς ὑπ' αὐτῆς περιεχομένοις χήμασι περὶ τὴν δευτέραν περιεχθέντος διαμέτρον, τὸ μὲν φερεῖν τὸ ἐκ τῆς μικτογράμμου ἴσον ἔσται τῷ ἐκ τῆς ὀρθογωνίᾳ Κυλίνδρῳ, τὸ δὲ ἐκ τῆς μικτογράμμου τριγράμμου Δακτυλίδιον ἴσον τῷ ἐκ τῆς τριγώνῳ Κώνῳ.

Διήχθω τῷ τῆς Ὑπερβολῆς Ἀΐξονι παράλληλος ἡ ΠΡ, (χ. 3.) τὴν δευτέραν διάμετρον ΓΠ, καὶ τὴν ἰσύμπτωτον ΓΙ, καὶ τὴν κατὰ κορυφὴν ἀπτομένην ΑΕ, καὶ τὴν Ὑπερβολὴν ΑΡ τέμνῃσα, καὶ περιεχθῇτω περὶ τὴν ΓΠ τὸ μικτόγραμμον τετράπλευρον ΓΠΡΑ σὺν τοῖς ὑπ' αὐτῆς περιεχομένοις χήμασιν, ἕως ἃ ἀποκατασταθῇσαν ἡ ἔξω φέρεσθαι. λέγω Α', ὅτι τὸ φερεῖν, τὸ

τὸ ἐκ τῆ ΓΙΡΑ μικτογραμμῆ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τῆ ὀρθογωνίᾳ ΓΠΕΑ Κυλίνδρῳ Β', ὅτι τὸ ἐκ τῆ μικτογραμμῆ τριγρῆμμη ΑΕΡ Δακτυλίδιον ἴσον τῷ ἐκ τῆ ΓΠΙ τριγώνῳ Κώνῳ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβληθῆσα ἡ ΡΠ, συμπίπτει τῇ Ἀντικειμένῃ Ὑπερβολῇ κατὰ τὸ Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ $\overline{ΠΡ}^2 = ΖΙ \cdot ΙΡ + \overline{ΠΙ}^2$. (θ) ἀλλὰ τὸ $ΖΙ \cdot ΙΡ = \overline{ΓΑ}^2$,
(ι) τὸ ἄρα $\overline{ΠΡ}^2 = \overline{ΓΑ}^2 + \overline{ΠΙ}^2$. κινεῖν ἀφηρήθω τὸ $\overline{ΠΙ}^2$. ἔκιν τὸ $\overline{ΠΡ}^2 - \overline{ΠΙ}^2 = \overline{ΓΑ}^2$, ἔτεν $\overline{ΠΕ}^2$. καὶ ὁ κύκλος ἄρα ἔσθ' ἡμιδιάμετρος ἡ ΠΡ ἀφαιρεθέντος ἀπ' αὐτῆς τῆ κύκλῳ ἔσθ' ἡμιδιάμετρος ἡ ΠΙ, ἥτοι τὸ βραχιόνιον τὸ ἐκ τῆς ΙΡ ἴσον τῷ κύκλῳ, τῷ ἡμιδιάμετρον ἔχοντι τὴν ΠΕ.
(κ) ὁμοίως δὴ δεῖχθήσεται, ὅτι πᾶν βραχιόνιον τῷ ἐν τῷ σφερῷ, τῷ ἐκ τῆ ΓΙΡΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐπ' εὐθείας αὐτῷ κύκλῳ, τῷ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ, τῷ ἐκ τῆ ΓΠΕΑ ὀρθογωνίᾳ. ἔκιν καὶ τὸ σφερόν, τὸ ἐκ τῆ τετραπλεύρου ΓΙΡΑ ἴσον τῷ ἐκ τῆ ὀρθογωνίᾳ ΓΠΕΑ Κυλίνδρῳ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ ἐκ τῆ ΓΠΡΑ σφερόν ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἐκ τῆ ΓΙΡΑ σφερῷ, καὶ τῷ ἐκ τῆ ΓΠΙ Κώνῳ. ἀλλὰ τὰ αὐτῷ σφερῷ τῷ ἐκ τῆ ΓΠΡΑ ἴσος ὁ ἐκ τῆ ΓΠΕΑ Κυλίνδρος σὺν τῷ ἐκ τῆ ΑΕΡ Δακτυλιδίῳ. τὸ ἄρα ἐκ τῆ ΓΙΡΑ σφερόν σὺν τῷ ἐκ τῆ ΓΠΙ Κώνῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τῆ ΓΠΕΑ Κυλίνδρῳ σὺν τῷ ἐκ τῆ ΑΕΡ Δακτυλιδίῳ. δεδεικται δὲ τὸ ἐκ τῆ ΓΙΡΑ σφερόν ἴσον τῷ Κυλίνδρῳ. ἄρα καὶ τὸ ἐκ τῆ ΑΕΡ Δακτυλιδίου ἴσον τῷ ἐκ τῆ ΓΠΙ Κώνῳ.

ΠΡΟ.

(θ) Κατὰ τὴν ι. τῆ β'. (ι) Κατὰ τὴν α. Συνέπ. τῆς ιβ'. τοῦ αὐτοῦ τμήμ. (κ) Ὡς τῆς β'. τῆ ιβ'. δῆλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

Εὰν ἀπότινος σημεία ἰσοπλεύρα Ὑπερβολῆς
 εὐθεῖα ἀχθῇ, τῇ μὲν ἑτέρα τῶν Ἀσυμπτώ-
 των παράλληλος, τῇ δὲ ἑτέρα συμβάλλου-
 σα· ὁμοίως δὲ καὶ ἑτέρα ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων
 ἀχθῇ εὐθεῖα, καὶ περιενεχθῇ τὸ ὑπὸ αὐτῶν-
 τε καὶ τῶν Ἀσυμππτῶτων περιεχόμενον ὀρθο-
 γώνιον σὺν τῇ Ὑπερβολῇ περὶ ὁποτέραν τῶν
 Ἀσυμππτῶτων ἕως ὅτε ἀποκατασταθῇ ὅθεν
 ἤρξατο Φέρεσθαι, τὸ ἐκ τῶν ἀπειρομήκους χω-
 ρίς, τὸ μεταξὺ τῆς Ἀσυμππτῶτος καὶ τῆς
 Ὑπερβολῆς γινόμενον ἀπειρόμηκες σφερόν ἴ-
 σον ἔσται τῷ ἐκ τῶν ἐρημένων ὀρθογωνίῳ Κυ-
 λίνδρῳ.

Ἐξω ἰσοπλευροῦ (λ) Ὑπερβολῆς ἢ ΠΓ, (πίν. Κ. χ. ι.)
 καὶ ἀπίτινος αὐτῆς σημείων Γ ἢ ΧΘ ἢ ΓΔ, τῇ μὲν ΑΖ Ἀ-
 συμππτῶτι παράλληλος, τῇ δὲ ΑΨ συμβάλλουσα. ὁμοί-
 ως δὲ ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων Γ ἢ ΧΘ ἢ ΓΕ. καὶ πε-
 ριενεχθῇτω περὶ τὴν ΨΑ τὸ ΓΔΑΕ ὀρθογώνιον σὺν τῇ
 Ὑπερβολῇ ΓΠ ἕως ὅτε ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο Φέ-
 ρεσθαι. λέγω ὅτι τὸ ἀπειρόμηκες σφερόν τὸ γινόμενον ἐκ
 τῶν

(λ) Ἰσοπλευρον δὲ ἔσται τὴν Ὑπερβολὴν, ἵνα ὀρθῇ ἢ καὶ ἡ ὑπὸ
 τῶν Ἀσυμππτῶτων περιεχομένη γωνία ΨΑΖ. τῆς γὰρ ἰσοπλευροῦ
 ἴση ἔσται ἡ πλάγια πλευρὰ τῇ ὀρθῇ, ἴση ἑκατέρω αὐτῶν ἐστὶ
 καὶ ἡ δευτέρα Διάμετρος. διὸ δὴ καὶ ἡ ΔΕ (Ὅρα χ. ι. τὴν
 ΙΖ. πίν.) ἴση τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ Βπ, ἴση ἐστὶ καὶ τῇ ΨΑ.
 ἡ δὲ ΨΑ τῇ ΕΟ. ἐξ ἧς δὲ ἔστι δῆλον ὅτι τὸ ΦΔΕΟ τετραγώνον ἐστὶ
 καὶ ἑκατέρω τῶν ΕΓΟ, ΕΙΔ γωνίων ὀρθῶν.

τῷ ἀπειρομήκῃς χωρίῃ ΨΔΙΠ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τῷ ὀρθογωνίῃ ΓΔΑΕ Κυλίνδρῳ.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἀπὸ τῷ ἐπιεικῇ σημείῳ Β τῆς ΓΠ ὑπερβολῆς ἤχθωσαν αἱ ΓΡ, ΒΛ ταῖς ΓΔ, ΓΕ παράλληλοι. καὶ ἐπεξεύχθω ἡ διαγώνιος ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ΒΛ: ΓΕ:: ΑΕ: ΑΛ. (μ) ἄλλ' ὥς ΑΕ: ΑΛ ὅπως ἡ περιφέρεια τῷ κύκλῳ, ὃ ἡμιδιάμετρος ἡ ΑΕ, (ἥτις καλεῖσθαι χ) τρὸς τὴν περιφέρειαν τῷ κύκλῳ, ὃ ἡμιδιάμετρος ἡ ΑΛ. (καλεῖσθαι δὲ αὕτη γ) (ν) ὥς ἄρα ΒΛ: ΓΕ:: χ: γ. τὸ ἄρα ΒΛ. γ = ΓΕ. χ. (ξ) ἐστὶ δὲ τὸ μὲν ΒΛ. γ ἡ ἐπιφάνεια τῷ Κυλίνδρῳ, τῷ ἐκ τῷ ὀρθογωνίῃ ΡΛ· τὸ δὲ ΓΕ. χ ἡ ἐπιφάνεια τῷ ἐκ τῷ ΔΕ. ὁμοίως καὶ τὸ ΙΛ. γ ἡ ἐπιφάνεια τῷ ἐκ τῷ ΔΛ Κυλίνδρῳ. (ο) ὥς ἄρα ΒΛ. γ: ΙΛ. γ:: ΓΕ. χ: ΙΛ. γ. (π) ἄλλ' ὥς μὲν ΓΕ. χ: ΙΛ. γ:: χ: γ, (ρ) ὥς δὲ χ: γ: ΑΕ: ΑΛ, (σ) καὶ ὥς ΑΕ: ΑΛ:: ΓΕ: ΛΟ, ἥτοι ΙΛ: ΛΟ. ὥς ἄρα ΒΛ. γ: ΙΛ. γ:: ΙΛ: ΛΟ. ἐπεὶ δὲ τῷ αὐτῷ δεικνύται ὅτι περὶ ἀνληφθῆ τὸ τῆς ὑπερβολῆς σημεῖον Β, πᾶσαι ἄρα αἱ ἐπιφάνειαι αἱ ἐν τῷ σφαιρῷ, τῷ ἐκ τῷ χωρίῃ ΨΑΓΓΠ, πρὸς πάσας τὰς ἐπιφανείας τὰς ἐν τῷ Κυλίνδρῳ, τῷ ἐκ τῷ ὀρθογωνίῃ ΔΕ λόγον ἔχουσιν ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐν τῷ αὐτῷ ὀρθογωνίῳ ΔΕ, πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΓΕ, ἥτοι ὃν 2: 1. καὶ τὸ σφαιρὸν ἄρα τὸ ἐκ τῷ χωρίῃ ΨΑΓΓΠ, πρὸς τὸν Κύλινδρον τὸν ἐκ τῷ ΔΕ:: 2: 1.

καὶ

(μ) Κατὰ τῆς γ. Σύνκ. τῆς γ'. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (ν) Κατὰ τὴν Σύνκ. τὴν μετὰ τὴν β. τῷ ββ'. (ξ) Κατὰ τὴν ιε'. τῷ ε'. (ο) Κατὰ τὸ γ'. Λημ. τὸ ἐν ταῖς τῷ Ἀρχιμ. Σφαιρ. (π) Κατὰ τὴν α'. τῷ ι'. (ρ) Κατὰ τὴν α', τῷ ε'. (σ) Κατὰ τὴν Σύνκ. τὴν μετὰ τὴν β. τῷ ββ'.

καὶ διαιρεθῆντα, ὡς τὸ σφαιρὸν, τὸ ἐκ τῷ ΨΔΓΠ χωρίῳ, πρὸς τὸν ἐκ τῷ ΔΕ ὀρθογωνίῳ Κυλίνδρῳ, ἕτως 1:1, ὅπερ εἶναι, ὅτι τὸ ἐκ τῷ ΨΔΓΠ χωρίῳ σφαιρὸν ἴσον τῷ ἐκ τῷ ΔΕ ὀρθογωνίῳ Κυλίνδρῳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ὅντως θαυμαστὸν τῷτο τῆς Ὑπερβολῆς τὸ ἰδίωμα, (τ) εἶχ' ἥττον ἥτινα τῶν τῷ κύκλῳ συμπτωμάτων οἶν, τὸ ὅλην τὴν ἀπὸ τῷ κέντρῳ περιφέρειαν, τῷ εἰσὶν αὐτῆς πέρατος, τῷ ἐν τῷ κέντρῳ ἡγεμένῳ τὸ τὴν αὐτὴν γραμμὴν, εἶπεν τὴν περιφέρειαν καὶ κυρτὴν καὶ καμπύλην εἶναι· τὸ ὑπὸ μηδεμιᾶς εὐθείας τὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ τῆς περιφερείας καὶ τῆς ἀπτεμένης περιεχομένην τέμνεσθαι. καὶ ἀναγκάζει μὲν ἡ δεξιὰ πείθεσθαι, ἐναντίον δ' ἐν ὅμῳ δοκεῖ τῷ λόγῳ, τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπειρόμηκες σφαιρὸν τῷ πεπερασμένῳ Κυλίνδρῳ. εἰ μόνον δὲ τὴν Ὑπερβολὴν, ἀλλὰ καὶ ἄλλας, διὰ τῷ καλεμένῳ τῆς Ὑλοκληρίας λογισμῷ, εὗρον οἱ Γεωμέτραι καμπύλας, ἐν αἷς τὸ μεταξὺ αὐτῶν τε καὶ τῶν Ἀσυμπτῶτων περιεχόμενον ἐπ' ἀπειρον ἐκτενόμενον χωρίον, ἴσον εἶναι Χαρίῳ πεπερασμένῳ, καὶ τὸ ἐκ τῷ τριῶν ἀπείρων σφαιρὸν ἴσον σφαιρῷ πεπερασμένῳ. κἀντεῦθεν δὲ ἐξελέγχοντα οἱ ἄπιοι, οἱ τῶν θείων τῆς πίστεως Μυστηρίων ὀλιγοῦντες, διὰ τὸ δοκεῖν ἐναντιῶσθαι τῷ λόγῳ, διὰ τὸν ὑπὲρ κατάληψιν αὐτῶν λόγον. ἰδὲ γὰρ εἶναι, ἐναντία μὲν δοκῶντα τῷ λόγῳ, διὰ δὲ τῆς ἀπταΐσε ἀποδεικνύμενα γεωμετρικῆς ἐπιστήμης.

Περὶ

(τ) Τῷτο ἐνερῆς ὁ ἐκ Φαίλῃς Τορκίλλιος, ὁ τῷ Γαλιλαίῳ ἀσφαιρῆς, ὁ κατὰ τὸ 1647. ἕτος τὸν βίον ἐκμήρησας.

Περὶ τῆς ἐν τοῖς Ὀπτικοῖς χρήσεως
τῆς Ὑπερβολῆς.

Α' Κάτοπτρα ἐν μετάλλῳ Ὑπερβολῆς ἔχοντα εἶδες κα-
τασκευάζουσιν, ἐν οἷς πᾶσαι αἱ ἐκ λαμπάδος, ἐπὶ
τῆς ἐτέρας τῶν Ἐσιῶν τεθείσης, ἐκπεμπόμεναι ἀκ-
τῖνες, καὶ τῷ κυρτῷ τῆς Ὑπερβολῆς προσπίπτου-
σαι, ὥτως ἀνακλῶνται, ὥστε μετὰ τὴν ἀνάκλασιν
ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένας, ἐπὶ τῆς ἐτέρας
τῶν Ἐσιῶν ἀλλήλαις συμβάλλειν. οἷον ἡ παρὰ τῆς
ἐν τῇ Υ Ἐσίᾳ (πίν. 1. χ. 2.) λαμπάδος πεμπο-
μένη ἀκτὶς ΥΜ, καὶ τῷ κυρτῷ τῆς Ὑπερβολῆς ΑΜ
προσπίπτουσα, ὥτως ἀνακλᾶται τὴν ΜΩ φερομένη
φορὰν, ὥστε ἐκβληθεῖσαν τὴν ΜΩ ἐπὶ τὰ ἕτερα
μέρη κατὰ τὴν ἐτέραν τῶν Ἐσιῶν Φ συμπίπτειν.
ἐπεὶ γὰρ ἡ γωνία τῆς πτώσεως ΥΜΒ ἴση ἐστὶ τῇ
τῆς ἀνακλάσεως ΩΜΣ, ὥς ἡ πείρα δεικνύσι· γί-
νονται δὲ αὗται ἀλλήλαις ἴσαι, εἰάν ἡ ΩΜ ἐπὶ τῷ
ἕτερον ἐκβληθεῖσα μέρος, κατὰ τὸ Φ συμπέσῃ ἴσης
γὰρ ὅσης τῆς ΦΜΒ ἑκατέρω τῶν ΥΜΒ, (υ) ΩΜΣ,
(φ) ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΥΜΒ τῇ ΩΜΣ· ἡ ἄρα ἀνὰ κλά-
θεισα ΜΩ ἐκβαλλομένη, διὰ τῆς Φ ἵκει. διὰ τὸν
αὐτὸν λόγον εἰάν ἡ λαμπὰς ἐπὶ τῆς Φ τεθῇ, πᾶ-
σαι αἱ τῷ κοίλῳ τῆς ὑπερβολοειδὸς κατόπτρου προσ-
πίπτουσαι, μετὰ τὴν ἀνάκλασιν ἐπὶ τὰ ἕτερα μέ-
ρη ἐκβληθεῖσαι, κατὰ τὴν ἐτέραν τῶν Ἐσιῶν Υ ἀλλή-
λαις συμπίπτουσιν. οἷον ἡ ΦΜ μετὰ τὴν ἀνάκλα-
σιν τὴν ΜΖ φορὰν φέρεται· ἥτις ἐπὶ τὰ ἕτερα ἐκ-
βληθεῖσα μέρη, διὰ τῆς Υ ἵκει. ἔτω μὲν γὰρ ἡ κα-
τὰ πῶσιν γωνία ΦΜΒ τῇ κατὰ ἀνάκλασιν ΖΜΣ

Ξ

ἴση

(*) Κατὰ τὴν γ'. τῆς β'. τμήμ. (Φ) Κατὰ τὴν ιβ'. τῆς α'.

ἴση γίνεται. ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΥΜΒ = ΦΜΒ$, ἡ αὐτὴ δὲ $ΥΜΒ = ΖΜΣ$, καὶ ἡ $ΦΜΒ$ ἄρα ἴση τῇ $ΖΜΣ$. εἰάν ᾖ ἐπὶ θατέρως τῶν $Εῖσιων$ λαμπρὰς τεθῇ, ἐπὶ τῇ ἐτέρῳ τὸ ἐαυτῆς ὀφθῆσεται εἰδῶλον.

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ.

Γίνεον, ὅτι αἱ τισαῦται $Εῖσιαι$, **Φαντασικαὶ** ἐν λόγῳ καλεῦνται. εὐδὲ γὰρ πραγματικῶς εἰς τὰ ἕτερα μέρη εἰσάσιν αἱ ἀνακλαθεῖσαι φωτισικαὶ ἀκτῖνες, εὐδὲ ἀλλήλαις πραγματικῶς συμβάλλουσι κατασκευάζονται δὲ ὑέλινα φακαὶ ὑπερβολῆς εἶδος ἔχουσαι, πᾶσαι δὲ αἱ πρὸς αὐτὰς προσπίπτουσαι τῷ φωτὶ ἀκτῖνες παράλληλοι τῇ Διαμέτρῳ, δι' αὐτῶν διέξουσαι, ἀληθῶς τε καὶ πραγματικῶς κατὰ τὴν ἐτέραν τῶν $Εῖσιων$ συμβάλλουσι ἀλλήλαις. ὥπως δὲ αἱ τισαῦται φιλοτεχνῶνται φακαὶ, καὶ δι' αὐτῶν αἱ ἀκτῖνες διέξουσαι ἀλλήλαις συμπιπτουσι, ῥητέον.

Β. Ἐάν μὲν ἡ ἀπὸ θατέρου εἰς ἕτερον σῶμα εἰσὶδῶσαι ἀκτὶς, οἷον ἡ ἀπὸ τῆς ὑέλης εἰς τὸν αἶρα, ἡ τῇ πάλιν, πρὸς ἐξῆς προσβάλλῃ τῇ τῷ σώματος ἐπιφανείᾳ, ὥσπερ ἡ $ΛΜ$ τῇ $ΑΜ$, (πίν. $ΙΑ'$. $χ$. $ι$.) ἀδελφῶς διήσιν τὴν ἐπ' ἐυθείας φερομένη φεραν, καθάπερ ἡ $ΛΜΟ$. εἰάν δὲ πλαγίως, θλάται ἐν τῇ διένει, ἐτέραν φερομένη φεραν, οἷον τὴν $ΜΥ$.

Γ. Ἐάν ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας σημεῖον $Μ$, καθ' ὃ ἢ μὴ πρὸς ἐξῆς $ΛΜ$ ἀκτὶς προσβάλλῃ, ἀχθῇ ἡ $ΕΜΡ$ καθέτως ἥτοι τῇ ἐπιφανείᾳ $ΑΜ$, εἰάν ἐπὶ πρὸς αὐτὴν ᾖ, ἢ τῇ ἐφαπτομένη αὐτῆς $ΜΖ$, εἰάν καμπυλῇ, ἢ μὲν $ΛΜΕ$, ἢ περιεχομένη ὑπὸ τῆς προσπίπτουσης $ΛΜ$, καὶ τῆς καθέτου $ΕΜΡ$, **Γωνία πτώσεως** λέγεται· ἢ δὲ $ΥΜΡ$ ἢ ὑπὸ τῆς θλάσεως $ΥΜ$, καὶ τῆς αὐτῆς καθέτου $ΜΡ$ περιεχομένη, **Γωνία θλάσεως**. Δ'

Δ'. Ο λόγος ὃν ἔχει τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς πτώσεως, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς θλάσεως ὁ αὐτὸς ἐστίν, καὶ ἐπικρατεῖ ἢ ἡ τῆς ἀκτίνος πτώσεως, ἢ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ. ἐστὶ δὲ ὁ λόγος ἕκτος, τῆς μὲν ἀπὸ τῆς ἀέρος εἰς τὴν ὑέλων εἰσσερχομένης ἀκτίνος, ὁ λόγος ὃν ἔχει ὁ 3 : 2, εἶπεν $\frac{3}{2}$: 1 τῆς δὲ ἀπὸ τῆς ὑέλης εἰς τὸν αἶρα, ὁ λόγος ὃν ἔχει ὁ 2 : 3, ἢτοι $\frac{2}{3}$: 1. τῶν δὲ πάντων ἡ πείρα διδάσκαλος.

Ε'. Ἐὰν ἡ προσπεσθεῖσα αὐτὴς ΑΜ συμβαλέῃ μετὰ τὴν θλάσιν τῇ τῆς Ὑπερβολῆς Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Υ, ὡς ἡ ΜΥ, ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τῆς πτώσεως Μ ἡ ΜΕ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΜ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Ε συμπίπτουσα, τὸ ἡμίτονον τῆς πτώσεως ΑΜΕ, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς θλάσεως ΥΜΡ λόγον ἔχει, ὃν ἡ θλασθεῖσα ΥΜ, πρὸς τὴν ΥΕ τὴν ἀπελαμβανομένην ἀπὸ τῆς καθέτης πρὸς τῷ Υ σημείῳ. ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ΑΜΕ = ΜΕΥ, (χ) ἡ δὲ ΥΜΡ τὸ αὐτὸ ἔχει ἡμίτονον, ὅπερ καὶ ἡ ΥΜΕ, (ψ) τὸ αἶρα ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς πτώσεως ΕΜΛ, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς θλάσεως ΥΜΡ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας ΜΕΥ, πρὸς τὸ τῆς ΥΜΕ. ἀλλὰ τὸ τῆς ΜΕΥ ἡμίτονον, πρὸς τὸ τῆς ΥΜΕ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΥΜ πρὸς τὴν ΥΕ. (ω) τὸ αἶρα ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς πτώσεως ΑΜΕ, πρὸς τὸ τῆς θλάσεως ΥΜΡ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΥΜ : ΥΕ. εἰάν ὦν ἡ ΑΜ ἀκτὶς ἀπὸ τῆς ὑέλης εἰς τὸν αἶρα εἰσέλθῃ, ἔσται ὡς ΥΜ : ΥΕ :: 2 : 3. (α)

Ξ 2.

5.

(χ) Κατὰ τὴν κθ'. τῆς α'. (ψ) Κατὰ τὸν β'. ὁρισμ. τῆς Τριγωνομετρ. (ω) Κατὰ τὸ δ'. Θεώρ. τῆς Τριγωνομετρ. (α) Ἐκ τῶν ἀνωτέρ. ἁρμ. δηλ.

5'. Ἐὰν ἄρα Ὑπερβολὴ γραφῇ, ἥς ἡ πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν λόγον ἔχει, ὅν ὁ $2 : 2 + \frac{1}{2}$, ἀπὸ δὲ τυχόντος σημείου, τῷ Μ τεταγμένως ἀχθῇ² ἐπὶ τὴν Διάμετρον ἢ ΜΗ, καὶ περισνεχθῇ περὶ τὴν ΑΗ, ἕως ὃ ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ ΛΜΗ χωρίον, ἢ καθ' ὁμοίωσιν τῷ ἐξ αὐτῷ γινόμενον σφαιρογνευθεῖσα ὑελίνη Φακὴ, ἢ ζητεμένη ἔσται πρὸς ἣν δῆθεν πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι ἀκτῖνες τῷ Ἄξονι παράλληλοι, μετὰ τὴν ἐν τῷ αἰερί θλασί, κατὰ τι σημεῖον τὸ Υ, ἀλλήλαις συμπεσόνται. κείσθω γὰρ τὸ Φ τὴν ἐτέραν εἶναι τῶν Ἑσιῶν. καὶ ἐπεὶ ὡς $\Psi\Lambda : \Upsilon\Phi :: \Upsilon\Phi$ πρὸς τὴν συγκεκριμένην ἐκ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς ὀρθίας, (β) ἔσται δὴ ὡς $2 : \Upsilon\Phi :: \Upsilon\Phi : 4 + \frac{1}{2}$. τὸ ἄρα $\Upsilon\Phi^2 = 9$. (γ) ἢ ἄρα $\Upsilon\Phi = 3$. ἔκδυν ὡς² $\Psi\Lambda : \Upsilon\Phi :: 2 : 3$. ἀλλ' ὡς $\Psi\Lambda : \Upsilon\Phi :: \Upsilon\Lambda : \Upsilon\Gamma$. (δ) ὡς ἄρα $\Upsilon\Lambda : \Upsilon\Gamma :: 2 : 3$. ἐξ ὃ δῆλον τὸ προκείμενον.

ΤΜΗ.

(β) Κατὰ τῆς ιδ. Συνέπ. τῆς 3'. τῷ β'. τμήμ. (γ) Κατὰ τὴν εζ. τῷ ε'. (δ) Κατὰ τὴν δ. Συνέπ. τῆς 3'. τῷ β'. τμήμ.



ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ

Περὶ τῶν τῆς Ἑλλείψεως συμπτω-
μάτων.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'. (α)

Ἐάν ἐν Ἑλλείψει εὐθῆαι ἀχ-
θῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὴν
Διάμετρον, ἔσονται ἀπ' αὐ-
τῶν τετράγωνα ὡς τὰ ὀρ-
θογώνια τὰ ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων
ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας
πλευρᾶς.

Ἐσὼ Ἑλλειψις ἡ ΖΝΜΨ, καὶ τετάχθωσιν ἐπὶ τὴν
ΝΨ Διάμετρον αἱ ΖΦ, ΕΠ. λέγω, ὅτι τὰ ἀπ' αὐτῶν
τετράγωνα εἰσιν ὡς τὰ ὀρθογώνια ΝΦ. ΦΨ, ΝΠ. ΠΨ,
εἴτεν ὅτι ἐσὶν, ὡς $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2 :: ΝΦ. ΦΨ : ΝΠ. ΠΨ.$
πίν. Β. 9. 5.

Ὅρα τὴν τῆς πρώτης προτάσεως τῇ προλαβόντος
τμήματος δεῖξιν. εἰπὼν δὲ ἕκ τε τῇ λόγῳ ὃν ἔχει, πρόσ-
θεσ τὰδε ἀντὶ τῶν ἐκῆ ἐξῆς· ἡ ΔΦ : ΠΗ, ἥτοι ἡ
ΝΦ : ΝΠ, καὶ ἐκ τῇ ὃν ἔχει ἡ ΦΒ : ΡΗ, εἴτεν ἡ
ΨΦ : ΨΠ. ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2$ λόγον ἔχει συγ-
κεῖ-

Ξ 3

(α) Μίρος ἐν τῇ καὶ τῇ α'. βιβλ. τῇ Ἀπολλων.

καίμενον ἔκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ἡ ΝΦ : ΝΠ, καὶ ἐν τῷ ὃν ἔχει ἡ ΦΨ : ΠΨ. ὡς ἄρα $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2 :: ΝΦ. ΦΨ : ΝΠ. ΠΨ.$ (β)

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐὰν ὀρθία τῆς Ἐλλείψεως πλευρὰ ἢ ἡ ΝΡ, εἴταν ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῷ ΝΦ. ΦΨ, τῷ $\overline{ΖΦ}^2$, καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΝΨ, (γ) ἔσεται καὶ πᾶν ἕτερον ὀρθογώνιον, οἷον τὸ ΝΠ. ΠΨ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης ΕΠ τετράγωνον, ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΨΝ, πρὸς τὴν ὀρθίαν ΝΡ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΝΦ. ΦΨ : ΝΠ. ΠΨ : $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2$, καὶ ἐναλλάξ ὡς ΝΦ. ΦΨ : $\overline{ΖΦ}^2 :: ΝΠ. ΠΨ : \overline{ΕΠ}^2$, ἔστι δὲ ὡς ΝΦ. ΦΨ : $\overline{ΖΦ}^2 :: ΝΨ : ΝΡ$, ἄρα ΝΠ. ΠΨ : $\overline{ΕΠ}^2 :: ΝΨ : ΝΡ$.

Β'. Τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΡ ἴσης τῇ πλαγίᾳ ΨΝ ἕσης, ἡ Ἐλλείψις εἰς κύκλον μεταβάλλεται. τὸ γὰρ $\overline{ΖΦ}^2$ ἴσον ἔσεται τῷ ΝΦ. ΦΨ. διὸ ἡ ΨΖΝΜ κύκλος ἐστὶ (δ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Ἐν Ἐλλείψει τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ὑπ' αὐτῆς ἀποτεμνομένης καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγῃ τῆς πλαγίας πλευρᾶς, τῆς ὀρθίας, καὶ τῷ λοιπῷ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τμήματος, περιεχομένῳ.

Ἐστω

- (β) Μεγίστην ἔχει τὰ τῆς Ὑπερβολῆς πάντα τοῖς τῆς Ἐλλείψεως τὴν ὁμοιότητα. διὸ δὴ καὶ ὁ Ἀπολλώνιος συνημμένως προτίθει τὰς τε προτάσεις καὶ τὰς ἀποδείξεις. σαφηνείας δὲ χάριν αἱ μὴ προτάσεις διήρονται, τὰς δὲ δειξας ζητητέον ἐν τοῖς περὶ τῆς Ὑπερβολῆς, μικρόν τι ἐνίοτε τῶν ἀποδείξεων μεταβαλλομένων.
(γ) Ὅρα τὸν καὶ ὅρισμ. (δ) Ἐκ τῆς γ', καὶ δ'. Συνημ. τῇ π. σ. ε. δῆλον.

Ἐξω Ἐλλειψις ἡ ΥΝΜΨ, ἥς Διάμετρος μὲν ἡ ΨΝ, τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμένη ἡ ΜΚ, Ἀποτετμημένη δὲ ἡ ΝΚ, λοιπὸν δὲ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τμήμα ἡ ΨΚ, ὀρθία δὲ ἡ ΝΑ. λέγω, ὅτι τὸ $\overline{ΜΚ}^2$ ἴσον ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ΝΚ, καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγου τῶν ΨΝ, ΝΑ, ΨΚ περιεχομένῳ. πίν. Κ. χ. 2.

Ἐχεις τὴν δεξιὴν ἐν τῇ δευτέρᾳ τῇ προλαβόντος τμήματος προτάσει.

ΣΤ Ν Ε Η Ε Ι Α Ι.

Α'. Τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΜΚ τετράγωνον ἔλαττον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΝΚ καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΑ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτετμημένης ΝΚ καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγου τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, τῆς ὀρθίας ΝΑ, καὶ τῆς ῥηθείσης Ἀποτετμημένης ΝΚ. πρὸς ὀρθίαν γὰρ ἔσω τῇ ΨΝ ἡ ΝΑ, καὶ κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβληθείσης τῆς ΚΓ, ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α καὶ Γ σημείων αἱ ΑΛ, ΓΖ τῇ ΨΝ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ ὡς ΨΝ : ΝΑ :: ΖΓ : ΖΑ, (ε) εἶπεν ὡς ΨΝ : ΝΑ :: ΝΚ : ΖΑ, ἡ ἄρα ΖΑ τετάρτη ἀναλόγος ἐστὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς, τῆς ὀρθίας, καὶ τῆς ἀποτετμημένης ΝΚ. ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{ΜΚ}^2 = ΝΚ \cdot ΚΓ$, (ζ) ἦται τῷ ΝΓ· τὸ δὲ ΝΓ = ΝΗ - ΖΗ· τὸ ἄρα $\overline{ΜΚ}^2 = ΝΗ - ΖΗ$, τετέστι τὸ $\overline{ΜΚ}^2 = ΝΚ \cdot ΝΑ - ΝΚ \cdot ΖΑ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $\overline{ΙΠ}^2 = ΝΠ \cdot ΝΑ - ΝΠ \cdot ΔΑ$.

Β'. Τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἄρα ΜΚ, ΙΠ τετράγωνα ἴσα εἰσὶν ὀρθογωνίοις τοῖς ΝΓ, ΝΒ, παρὰ τὴν ὀρθίαν πλευρὰν ΝΑ παραβεβλημένοις, καὶ ἑλλείπουσιν ὀρθογωνίοις τοῖς ΖΗ, ΔΦ ὁμοίοις καὶ ὁμοίως κειμένους τῷ ΝΑ τῷ ὑπὸ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΑ

Ξ 4

καὶ

(ε) Κατὰ τὴν δ'. τῇ ε'. (ζ) Κατὰ τὴν προκσμ. πρῶτ.

ἢ τῆς πλαγίας περιεχομένῳ. κακτέτε τυχόν τὴν
προσπηγορίαν εἰληφε τὸ χῆμα.

Γ'. Ἐπιζευχθεσῶν τῶν ΝΙ', ΝΒ, ἔσεται τὸ μὲν $\overline{MK}^2$
διπλάσιον τῷ ΝΚΓ τριγώνῳ, τὸ δὲ $\overline{III}^2$ τῷ ΝΠΒ.

Δ'. Δοθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, (πίν. Κ'.
χ. 3.) ἢ τῆς ὀρθίας ΝΑ, ἐνεσι συνεχῇ πορίσασθαι
σημεῖα, δι' ὧν γραφήσεται ἡ Ἐλλειψις. ἔσω γὰρ ἡ
ΝΑ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΨΝ, ἢ εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ἐπι-
ζευχθείσης ΨΑ σημεῖά τινα τὰ Δ, Φ, καὶ ἄλλα
ἐφεξῆς. καὶ ἡχθωσαν ἀπ' αὐτῶν αἱ ΔΜ, ΦΟ, τῇ
ΑΝ παράλληλοι. καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν ΒΓ=ΒΝ, ἡ
δὲ ΖΗ=ΖΝ. καὶ ἀναγεγράφθω ἐπὶ τῶν ΔΓ, ΦΗ
ἡμικύκλια τὴν ΨΝ κατὰ τὰ Κ, Ι σημεῖα τέμνον-
τα. εἰλήφθω δὲ ἡ μὲν ΒΕ=ΒΚ, ἡ δὲ ΖΛ=ΖΙ.
λέγω, ὅτι διὰ τῶν σημείων Ε, Λ, καὶ τῶν ἐφεξῆς
ὁμοίως ποριδέντων Ἐλλειψις ἦξει, ἥς πλαγία μὲν
πλευρὰ ἡ ΨΝ, ὀρθία δὲ ἡ ΝΑ. Ὅρα τὴν δεξιὰν
τῆς Δ'. Συνεπ. τῆς Β. προτ. τῷ προλαβ. Τμήμ.
ἀντὶ δὲ τῷ, τῆς ΨΒ τῆς συγκεκλιμένης, κτ. ἀπὲ,
τῆς ΨΒ τῆς Ἀποτετμημένης.

Ε'. Ἐνεσι δὲ καὶ διὰ κινήσεως Κανόνων τὰ αὐτὰ τῆς
Ἐλλείψεως πορίσασθαι σημεῖα. (χ. 4.) Ὅρα τὰ ἐν
τῇ Ε'. Συνεπ. τῆς προειρημ. προτ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Ἐὰν ᾗτε πλαγία πλευρὰ τῆς Ἐλλείψεως
καὶ ἡ ὀρθία δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν δι-
χοτομιῶν διαχθῇ τις εὐθεῖα Τεταγμένην τε
νὰ τέμνεσθαι, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμέ-
νης τετράγωνον διπλάσιον τῷ τετραπλεύ-

ρα τῶ ὑπ' αὐτῆς τε καὶ τῆς διαχθείσης πε-
ρατῶμεν.

Τετμήσω διχα ἥτε πλαγία πλευρὰ ΨΝ, καὶ ἡ
ὀρθία ΝΑ κατὰ Γ, Ε σημεῖα, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΓΕ,
τεμνέτω τὴν ἐκβληθεῖσαν Τεταγμένην ΒΚ κατὰ τὸ Δ.
λέγω, ὅτι τὸ ΒΚ² διπλάσιόν ἐστι τῶ ΕΝΚΔ τετρα-
πλεύρου. χ. 5.

Ἐπίξυζον τὰς ΨΑ, ΝΡ, καὶ ὄρα τὴν δεῖξιν τῆς Γ.
προτ. τῶ προλαβ. Τμήμ. καὶ τὴν μετ' αὐτὴν Σημεί-
ωσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'. (η)

Ἀπὸ τῶ δοθέντος σημείου τῆς δοθείσης Ἐλ-
λάψεως εὐθεῖαν ἀπτομένην ἀγαγεῖν.

Ὅρα τὰ ἐν τῇ Δ'. προτ. τῶ προλαβ. τμήμ. εἰρημένα.
ἀντὶ δὲ τῶ εἰπεῖν, ἐν τῇ κατασκευῇ, εἰλήφθω ἀπὸ
τῆς ΠΨ (πίν. ΚΑ'. χ. 1.) εἰπεῖ, εἰλήφθω ἀπὸ τῆς
ΨΠ ἐκβληθείσης. ὅτι δὲ ἡ εὐρεθεῖσα τρίτη ἀνάλογος
τῶν ΖΠ, ΠΜ, εἴτεν ἡ ΠΤ μείζων ἐστὶ τῶ λοιπῶ τῆς
πλαγίας πλευρᾶς τμήματος ΠΑ, δείξετε ὅτως· εἰ γὰρ
μὴ μείζων, ἔσω ἐλάσσων, ὡς ἡ ΠΤ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ
ΖΤ. καὶ ἐπεὶ ὡς ΖΠ : ΠΜ :: ΠΜ : ΠΤ, τὸ ἄρα $\overline{ΠΜ}^2 =$
ΖΠ. ΠΤ. (θ) ἐστὶ δὲ τὸ ΖΠ. ΠΤ διπλάσιον τῶ ΖΠΤ
τριγώνου, (ι) καὶ τὸ $\overline{ΠΜ}^2$ ἄρα διπλάσιον τῶ ΖΠΤ.
ἀλλὰ τὸ $\overline{ΠΜ}^2$ διπλάσιον καὶ τῶ τετραπλεύρου ΖΠΑΡ.
(κ) τὸ ἄρα ΖΠΤ = ΖΠΑΡ, τὸ μέρος τῶ ὅλου, ὅπερ
ἀδύνατον. ἐκ ἄρα ἡ ΠΤ ἐλάσσων τῆς ΠΑ.

Ξ 5

ΣΥ.

(η) Ἡ λβ. ἐστὶ τῶ α'. βιβλ. τῶ Ἀπολλων. (θ) Κατὰ τὴν ιγ'.
τῶ ε'. (ι) Κατὰ τὴν μμ'. τῶ α'. (κ) Κατὰ τὴν προλ.
πρίν.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Εντεῦθεν πολλάς περιζέμεθα μεθόδους τῷ ἱθαπτομένῳ ἀγιν ἀπὸ τῷ δοθέντος τῆς Ἐκλείψως σημείων. ἔχουσ δὲ αὐτάς ἐν ταῖς Συναπταῖς τῆς εἰρημένης Δ'. πρῶτ. ὧν ἡ Α' ἐξομιάς προσθήκης χιζήζει, ἡ ἀφαιρέσεως.

Ἐν δὲ τῇ Β'. ἀντὶ τῷ εἰπεῖν τῇ Διευθετῶσιν ΨΝ ἐκβληθεῖσα, εἰπὲ τῇ Διευθετῶσιν ΨΝ ἐπιζευχθεῖσα.

Η' δὲ Γ'. ἀναλλοίωτος διαμενέτω.

Ἐν δὲ τῇ Δ. εἰπὼν, ὡς ΗΓ : ΠΑ :: ΓΑ : ΑΤ, πρόωδες, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΠΑ : ΗΓ :: ΑΤ : ΓΑ, καὶ συντεθέντα, ὡς ΓΑ : ΗΓ :: ΓΤ : ΓΑ. τὸ ἄρα $\overline{ΓΑ}^2 = ΗΓ \cdot ΓΤ$. ἀντὶ δὲ τῷ εἰπεῖν, τῆς ΗΓ τῆς ἐκ τῷ ἡμίσεως ΓΑ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς ἀποτετμημένης ΑΠ συγαμένης, εἰπὲ τῆς τετμημένης ΗΓ τῆς ἀπολαμβάνομένης ἀπὸ τῷ κέντρῳ Γ καὶ τῆς τεταγμένης ΜΠ.

Ἐν δὲ τῇ Ε'. ἀντὶ τῷ εἰπεῖν, εἰάν ἄρα ἐκάτερον τέτωρ εἰπὲ, εἰάν ἀπὸ τέτωι κοινὸν ἀφέλῃς τὸ $\overline{ΓΠ}^2$, καί.

Η' δὲ Ζ'. μεταβολῆς εἰ δαῖται.

Ἐν δὲ τῇ Ζ'. μετὰ τὸ εἰπεῖν, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΜΨ, πρόωδες, ἥτις ἐκβληθεῖσα, συμπέσῃ τῇ ΑΩ κατὰ τὸ Ω.

Ἐν δὲ τῇ Η'. προκείδω δαῖζαι, ὅτι ὡς ΨΤ : ΤΑ :: ΨΠ : ΠΑ. μετὰ δὲ τὴν ἐκεῖ τέττε δαῖξιν πρόωδες καὶ ταῦτα Ὅσον μὲν ἡ ΗΜ τῷ κέντρῳ Γ προσπελάζει, τοσούτῳ ἡ ΓΠ ἐλαττῶται· ἐπειδὴν δ' ἐγγίσει ἐγγίσῃ, πάσης δεθείσης ποσότητος ἐλάσσων γίνεται. διὸ ὡς ἐδὲν ἐκλαμβάνεται τῇ ΓΑ παραβαλλομένη. καὶ ἐπεὶ ὡς ΗΠ : ΓΑ ::

ΓΑ::ΓΑ: ΓΤ, (λ) ἢ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΤ συγκρινομένη, ὡς ἔδεν λογίζεται. ἐπεὶ δὲ ἡ ΓΑ μέγεθος ἐστὶν ὠρισμένον, ἄπειρον ἄρα ἡ ΓΤ. διὸ δὴ παράλληλος αὐτῇ γίνεται ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ. ἢ ἐπεὶ τὸ $\overline{ΓΑ}^2 = ΓΠ \cdot ΓΤ$, ἔσται ἡ $ΓΤ = \frac{\overline{ΓΑ}^2}{ΓΠ}$. (μ) εἰάν ἐν ἡ $ΓΠ = 0$, ἔσται ἡ $ΓΤ = \frac{\overline{ΓΑ}^2}{0}$. ἐν τούτοις δὴλον, ὅτι πᾶν ὠρισμένον μέγεθος διὰ τῶ μηδενικῆ σημείῳ διαιρέμενον, ἄπειρον ἐμφαίνει μέγεθος· ἢ ὅτι τὸ 0 πρὸς τι ὠρισμένον μέγεθος λόγον ἔχει, ὃν τὸ αὐτὸ ὠρισμένον μέγεθος πρὸς τι ἄπειρον. τὸ δὲ μηδὲν ἐκ ἀπολύτως νοητέον, ἀλλὰ χετικῶς, ὡς πρὸς τι μέγεθος ἀναφερόμενον.

Τὴν δὲ Θ'. ἐν ἣ πρόκειται δεῖξαι, ὅτι ὡς $ΨΒ: ΑΧ:: ΨΠ: ΠΑ$, δείξεις ἔτι ὡς $ΨΤ: ΤΑ:: ΨΒ: ΑΧ$. (ν) ἀλλ' ἡ $ΑΧ = ΧΩ$. (ξ) ὡς ἄρα $ΨΤ: ΤΑ:: ΨΒ: ΧΩ$. ἀλλ' ὡς $ΨΒ: ΧΩ:: ΨΜ: ΜΩ$, καὶ ὡς $ΨΜ: ΜΩ:: ΨΠ: ΠΑ$, ἄρα ὡς $ΨΒ: ΑΧ:: ΨΠ: ΠΑ$. (ο)

Ἐν δὲ τῇ Γ'. ἐπὶ πᾶν, συμπέτη τῇ ΨΚ, πρὸς ὧς, τῇ ἀπὸ τῶ πέρατος Ψ ἀχθείσῃ ταῖς Τεταγμέναις παραλλήλῳ.

Ἡ δὲ ΙΑ', ὡς ἔχει, ἔτι ἀναγνωθήτω.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α. (π)

Εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς Ἐλλείψεως ΗΑΒ καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης αὐτῆς ΓΑ, ἑτέρα εὐθεῖα εἰ παρεμπεσῆται. χ. 2.
ἔχεις

(λ) Κατὰ τὴν προλ. δ'. Συνέπ. (μ) Κατὰ τὸ η'. ἀξίωμ. τῆ ε'. βιβλ. (ν) Κατὰ τὴν δ'. τῆ ε'. (ξ) Κατὰ τὴν προλ. ζ'. Συνέπ. (ο) Κατὰ τὴν ε' τῆ ε'. (π) Μέγος. ἐπὶ τῆς λβ'. τῆ α'. βιβλ. τῆ Ἀπολλων.

Ἦχεις τὴν δεξιὴν ἐν τῷ Θεωρήματι τῷ μετὰ τὴν
προδιαληφθεῖσαν Δ'. πρῶτ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'. (ρ)

Ἐὰν ἐν Ἐλλείψει εὐθεῖα ἀχθῇ, ἐφ' ἐκότε-
ρα τῶ κέντρῳ συμπύπτουσα τῇ τομῇ, δίχα
τμηθῇσεται κατὰ τὸ κέντρον αἱ δὲ ἀπὸ τῶν
σημείων τῆς συμπτώσεως ἀχθεῖσθαι ἐφαπ-
τόμεναι τῆς τομῆς, καὶ τῇ Διαμέτρῳ συμ-
πύπτουσαι ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ παράλλη-
λοι ἔσονται.

Ἡ δεξις ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ τῆς Ε'. πρῶτ. τῷ προλαβ.
τμήμ. κ. 3.

ΣΥΝΕΠΒΙΑΙ.

Α'. Ἡ διὰ τῶ κέντρῳ Γ ταῖς Τεταγμέναις ΖΝ, ΜΘ
ἀγόμενη παράλληλος ΒΔ δίχα τέμνει πάσας τὰς
τῇ ἀρχικῇ Διαμέτρῳ ΗΤ ἀγόμενας παραλλήλους
ΖΜ, ΟΙ ἐντὸς τῆς τομῆς. ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμ-
μά εἰσι τὰ ΠΕ, ΓΖ, ἔστιν ἄρα ἡ μὲν ΓΠ=ΕΜ,
ἡ δὲ ΓΦ=ΕΖ. (σ) ἀλλ' ἡ ΓΠ=ΓΦ. (τ) ἄρα καὶ
ἡ ΜΕ=ΕΖ. ἡ ἄρα ΖΜ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ
Ε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ΟΙ καὶ
πᾶσα παράλληλος τῇ ΗΤ ἐντὸς τῆς τομῆς ὑπὸ τῆς
ΒΔ δίχα τέμνεται.

Β'. Ἡ εἰρημένη ΒΔ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τε πλεγμα-
πλευρᾶς ΨΑ, καὶ τῆς ὀρθίας ΑΥ. ἔστι μὲν γὰρ ὡς
ΨΓ.

(ρ) Τὸ α'. μέρ. ἢ λ'. ἐστὶ τῷ αὐτ. βιβλ. (σ) Κατὰ τὴν λθ'.
τῷ α'. (τ) Ὅρα τὴν δεξ. τῆς Προκαμ. πρῶτ.

$\Psi\Gamma.\Gamma\Lambda : \overline{\Gamma\Lambda^2} :: \Psi\Lambda : \Lambda\Upsilon$, (υ) εἶπεν ὡς $\overline{\Gamma\Lambda^2} : \overline{\Gamma\Lambda^2} ::$
 $\Psi\Lambda : \Lambda\Upsilon$. ἐστὶ γὰρ $\Psi\Gamma.\Gamma\Lambda = \overline{\Gamma\Lambda^2}$. καὶ ὡς μὲν $\overline{\Gamma\Lambda^2} :$
 $\overline{\Gamma\Lambda^2} :: \overline{\Psi\Lambda^2} : \overline{B\Delta^2}$, ὡς δὲ $\Psi\Lambda : \Lambda\Upsilon :: \overline{\Psi\Lambda^2} : \Psi\Lambda.\Lambda\Upsilon$,
 (φ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{\Psi\Lambda^2} : \overline{B\Delta^2} :: \overline{\Psi\Lambda^2} : \Psi\Lambda.\Lambda\Upsilon$. (χ)
 τὸ ἄρα $\overline{B\Delta^2} = \Psi\Lambda.\Lambda\Upsilon$. (ψ) ἔκθ' ὡς $\Psi\Lambda : B\Delta ::$
 $B\Lambda : \Lambda\Upsilon$. (ω) ἐπεὶ ἔν η' $B\Delta$ μέση ἀνάλογόν ἐστι
 τῆς πλαγίας πλευρᾶς $\Psi\Lambda$ καὶ τῆς ὀρθίας $\Lambda\Upsilon$ ὡς
 δέδεικται, διχα τε τέμνεται κατὰ τὸ Γ , (α) καὶ
 παράλληλός ἐστι ταῖς ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν Διάμετρον τε-
 ταγμέναις, (β) δευτέρα ἄρα Διάμετρος ἐστὶ, (γ)
 διχα τέμνεται τὰς ὑπ' αὐτὴν Τεταγμένας ZM , OI .

Γ'. Η' $B\Lambda$ ἡ τρίτη ἀνάλογος τῆς δευτέρας Διαμέτρου
 $B\Delta$ καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς $\Psi\Lambda$ ἡ ὀρθία πλευ-
 ρά ἐστιν ὡς πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. καὶ ὥσπερ τὸ $\Psi\Lambda.\Lambda\Upsilon =$
 $\overline{B\Delta^2}$, ἔτω καὶ τὸ $B\Delta.B\Lambda = \overline{\Psi\Lambda^2}$.

Δ'. Τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἐπὶ τὴν $B\Delta$ τετεγμέ-
 νων λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα, ὅν τε ὀρθογώνια τὰ
 ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι
 τῆς $B\Delta$, εἶπεν ἐστὶν ὡς $\overline{Z\Xi^2} : \overline{O\varsigma^2} :: BE.E\Delta : B\varsigma.\varsigma\Delta$. ἐστὶ
 μὲν γὰρ ὡς $\overline{B\Gamma^2} : \overline{Z\Phi^2} :: \Lambda\Gamma.\Gamma\Psi : \Lambda\Phi.\Phi\Psi$, (δ)
 ἦτοι ὡς $\overline{B\Gamma^2} : \overline{E\Gamma^2} :: \overline{\Psi\Gamma^2} : \Lambda\Phi.\Phi\Psi$. καὶ κατὰ ἀνατρο-
 φήν, ὡς $\overline{B\Gamma^2} : \overline{B\Gamma^2} - \overline{E\Gamma^2} :: \overline{\Psi\Gamma^2} : \overline{\Psi\Gamma^2} - \Lambda\Phi.\Phi\Psi$. ἀλλὰ
 τὸ μὲν $\overline{B\Gamma^2} - \overline{E\Gamma^2} = BE.E\Delta$, τὸ δὲ $\overline{\Psi\Gamma^2} - \Lambda\Phi.$
 $\Phi\Psi = \overline{\Gamma\Phi^2} = \overline{Z\Xi^2}$. (ε) ὡς ἄρα $\overline{B\Gamma^2} : BE.E\Delta :: \overline{\Psi\Gamma^2} :$
 $\overline{Z\Xi^2}$. καὶ ἐναλλάξ, ὡς $\overline{\Psi\Gamma^2} : \overline{B\Gamma^2} :: \overline{Z\Xi^2} : BE.E\Delta$.
 δια

- (υ) Κατὰ τὴν κ'. Συνέπ. τῆς α'. τῷ δὲ τμήμ. (φ) Κατὰ τὴν
 α'. τῷ ε'. (χ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (ψ) Κατὰ τὴν κ'. τῷ ε'.
 (ω) Κατὰ τὴν ιζ'. τῷ ε'. (κ) Κατὰ τὸν ζ'. ὀρίσμ. (β) Ὅρθω
 τὴν προλ. Συνέπ. (γ) Κατὰ τὸν κδ'. ὀρίσμ. (δ) Κατὰ τὴν κ'.
 τῷ δὲ τῷ τμήμ. (ε) Κατὰ τὴν ε'. τῷ β', καὶ τὴν λδ'. τῷ α'.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς $\overline{\Psi\Gamma^2} :$
 $\overline{B\Gamma^2} :: \overline{O\varsigma^2} : B\varsigma. \varsigma\Delta.$ διὸ δὴ καὶ ὡς $\overline{Z\epsilon^2} : BE. E\Delta :: \overline{O\varsigma^2} :$
 $B\varsigma. \varsigma\Delta. (\zeta)$ καὶ εἰσάλλὰξ ὡς $\overline{Z\epsilon^2} : \overline{O\varsigma^2} :: BE. E\Delta : B\varsigma. \varsigma\Delta.$

Ε'. Τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης ΖΕ τετραγώνον πρὸς τὸ
 BE. EΔ λόγον ἔχει, ἐν ᾧ ὅςθ' ἴα ΒΛ πρὸς τὴν δυν.
 τέραν Διάμετρον ΒΔ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΒΔ : ΑΨ :: ΑΨ :
 ΒΛ, (η) ἄρα καὶ ὡς $\overline{E\Delta^2} : \overline{A\Psi^2} :: B\Delta : B\Lambda. (\theta)$
 ἔστι δὲ ὡς $\overline{B\Delta^2} : \overline{A\Psi^2} :: \overline{B\Gamma^2} : \overline{\Gamma\Psi^2}.$ ἐκ δὲ καὶ ὡς
 $\overline{B\Gamma^2} : \overline{\Gamma\Psi^2} :: B\Delta : B\Lambda,$ καὶ ἀνὰ πάλιν ὡς $\overline{\Gamma\Psi^2} : \overline{B\Gamma^2} ::$
 $B\Lambda : B\Delta. \alpha\lambda'$ ὡς $\overline{\Gamma\Psi^2} : \overline{B\Gamma^2} :: \overline{Z\epsilon^2} : BE. E\Delta. (i)$
 $\alpha\lambda'$ καὶ ὡς $\overline{Z\epsilon^2} : BE. E\Delta :: B\Lambda : B\Delta. (κ)$

Λ Η Μ Μ Λ. (λ)

Ἐὰν Ἐλλείψεως τῆς ΨΓΑΣ εὐθεία ἐπιψάν-
 ῃσα ἡ ΜΤ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Τ συμ-
 πίπτῃ, καὶ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ καταχθῇ
 εὐθεῖα ἡ ΜΠ τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετ-
 ρον, τῇ δὲ ΜΠ διὰ τῆς κορυφῆς παράλλη-
 λος ἀχθῇ ἡ ΛΔ, τῇ μὲν ἐφαπτομένη ΜΤ
 κατὰ τὸ (), τῇ δὲ ΣΜ τῇ διὰ τῶ κέντρους Γ
 καὶ τῆς ἀφῆς Μ κατὰ τὸ Δ συμβάλλουσα
 ληφθέντος δὲ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς,
 οἷον τῶ Φ, δύο ἀχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΦΗ, ΦΤ,
 ἡ μὲν τῇ ἐφαπτομένη ΜΤ, ἡ δὲ τῇ Τεταγ-
 μένῃ

(ζ) Κατὰ τὴν ε' τῶ ε' (η) Κατὰ τὴν προλ. γ'. Συνέπ. (θ) Κατὰ
 τὸ β'. Πόρις. τὸ μετὰ τὴν η'. τῶ ε'. (ι) Ὅρα τὴν προλ. Συνέπ.
 (κ) Κατὰ τὴν ε' τῶ ε'. (λ) Ἡ μὲν. πρότ. ἐστὶ τῶ α'. βιβλ.
 τῶ Ἀπολλων.

μένη ΜΠ παράλληλος, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐ-
τῶν τριγῶνων ΦΗΥ ἴσον ἔσται τῷ τετραπ-
λεύρῳ ΒΔΑΥ τῷ ὑπὸ τῆς ΣΜ, τῆς διὰ τῆς
κέντρος καὶ τῆς ἀφῆς ἀποτεμνομένῳ. χ. 4.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς τριγ. ΜΠ : τριγ. ΔΓΑ :: $\overline{\Gamma\P}^2 : \overline{\Gamma\Lambda}^2$. (μ)
ἐπεὶ δὲ ὡς $\Gamma\P : \Gamma\Lambda :: \Gamma\Lambda : \Gamma\Upsilon$, (ν) ἔσται καὶ ὡς
 $\overline{\Gamma\P}^2 : \overline{\Gamma\Lambda}^2 :: \overline{\Gamma\P} : \overline{\Gamma\Upsilon}$. (ξ) ἔστι δὲ ὡς $\Gamma\P : \Gamma\Upsilon ::$
 $\text{ΜΠ} : \text{ΜΓΤ}$. (ο) ὡς ἄρα $\text{ΜΠ} : \Delta\Gamma\Lambda :: \text{ΜΠ} : \text{ΜΓΤ}$.
(π) τὸ ἄρα $\Delta\Gamma\Lambda = \text{ΜΓΤ}$. (ρ) κοινὸν ἀφηρήθω τὸ
ΜΠ, τὸ ἄρα ΜΠ τριγῶνον ἴσον τῷ ΜΔΑΠ τετρα-
πλεύρῳ. ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{\Phi\Upsilon}^2 : \overline{\text{ΜΠ}}^2 :: \text{ΑΥ} \cdot \Upsilon\P \cdot \text{ΑΠ} \cdot \text{Π\P}$.
(σ) ἔστι δὲ τὸ μὲν $\text{ΑΥ} \cdot \Upsilon\P = \overline{\Gamma\Lambda}^2 - \overline{\Gamma\Upsilon}^2$, τὸ δὲ ΑΠ.
 $\text{Π\P} = \overline{\Gamma\Lambda}^2 - \overline{\Gamma\P}^2$. (τ) ὡς ἄρα $\overline{\Phi\Upsilon}^2 : \overline{\text{ΜΠ}}^2 :: \overline{\Gamma\Lambda}^2 -$
 $\overline{\Gamma\Upsilon}^2 : \overline{\Gamma\Lambda}^2 - \overline{\Gamma\P}^2$. ἀλλ' ὡς $\overline{\Phi\Upsilon}^2 : \overline{\text{ΜΠ}}^2 :: \Phi\text{ΗΥ} : \text{ΜΤΠ}$.
(υ) ὡς ἄρα $\Phi\text{ΗΥ} : \text{ΜΤΠ} :: \overline{\Gamma\Lambda}^2 - \overline{\Gamma\Upsilon}^2 : \overline{\Gamma\Lambda}^2 - \overline{\Gamma\P}^2$.
(φ) καὶ ἐπεὶ ὡς $\overline{\Gamma\Lambda}^2 : \overline{\Gamma\Upsilon}^2 :: \Gamma\Delta\Lambda : \Gamma\text{ΒΥ}$, (χ) καὶ
διαρεθέντα ὡς $\overline{\Gamma\Lambda}^2 - \overline{\Gamma\Upsilon}^2 : \overline{\Gamma\Upsilon}^2 :: \Gamma\Delta\Lambda - \Gamma\text{ΒΥ} : \Gamma\text{ΒΥ}$,
ἄρα καὶ ἐναλλάξ ἔσται ὡς $\overline{\Gamma\Lambda}^2 - \overline{\Gamma\Upsilon}^2 : \Gamma\Delta\Lambda - \Gamma\text{ΒΥ} ::$
 $\overline{\Gamma\Upsilon}^2 : \Gamma\text{ΒΥ}$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἔστι, καὶ ὡς $\overline{\Gamma\Lambda}^2 - \overline{\Gamma\P}^2 :$
 $\Gamma\Delta\Lambda - \Gamma\text{ΜΠ} :: \overline{\Gamma\P}^2 : \Gamma\text{ΜΠ}$. ἔστι δὲ ὡς $\overline{\Gamma\P}^2 : \Gamma\text{ΜΠ} ::$
 $\overline{\Gamma\Upsilon}^2 : \Gamma\text{ΕΥ}$, (ψ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{\Gamma\Lambda}^2 - \overline{\Gamma\Upsilon}^2 : \Gamma\Delta\Lambda - \Gamma\text{ΒΥ} ::$
 $\overline{\Gamma\Lambda}^2 - \overline{\Gamma\P}^2 : \Gamma\Delta\Lambda - \Gamma\text{ΜΠ}$, (ω) καὶ ἐναλλάξ ὡς $\overline{\Gamma\Lambda}^2 -$
 $\overline{\Gamma\Upsilon}^2 : \overline{\Gamma\Lambda}^2 - \overline{\Gamma\P}^2 :: \Gamma\Delta\Lambda - \Gamma\text{ΒΥ} : \Gamma\Delta\Lambda - \Gamma\text{ΜΠ}$. ἄρα
καὶ

- (μ) Κατὰ τὴν εἰς. τῆς εἰς. (ν) Κατὰ τὴν δ. Σύνπ. τῆς δ. τῆς δὲ τῆς
τμήμ. (ξ) Κατὰ τὸ β'. Πόρ. τὸ μετὰ τὴν η'. τῆς εἰς. (ο) Κα-
τὰ τὴν α'. τῆς εἰς. (π) Κατὰ τὴν εἰς. τῆς εἰς. (ρ) Κατὰ τὴν
β'. τῆς εἰς. (σ) Κατὰ τὴν α'. τῆς δὲ τῆς τμήμ. (τ) Ἐκ τῆς
εἰς. τῆς β'. δηλ. (υ) Κατὰ τὴν εἰς. τῆς εἰς. (φ) Κατὰ τὴν ἀρῆμ. εἰς.
(χ) Κατὰ τὴν εἰς. τῆς τῆς εἰς. (ψ) Κατὰ τὴν ἀντ. (ω) Κα-
τὰ τὴν ἀρῆμ. εἰς.

καὶ ὡς $\Phi\eta\Upsilon : \text{MT}\Pi :: \Gamma\Delta\Lambda - \Gamma\text{B}\Upsilon :: \Gamma\Delta\Lambda - \Gamma\text{M}\Pi$.
 (α) ἀλλὰ τὸ μὲν $\Gamma\Delta\Lambda - \Gamma\text{B}\Upsilon = \text{B}\Delta\Lambda\Upsilon$, τὸ δὲ $\Gamma\Delta\Lambda - \Gamma\text{M}\Pi = \text{M}\Delta\Lambda\Pi$. ὡς ἄρα $\Phi\eta\Upsilon : \text{MT}\Pi :: \text{B}\Delta\Lambda\Upsilon : \text{M}\Delta\Lambda\Pi$. ἀλλὰ τὸ $\text{MT}\Pi$ ἴσον δέδεικται τῷ $\text{M}\Delta\Lambda\Pi$. ἄρα καὶ τὸ $\Phi\eta\Upsilon = \text{B}\Delta\Lambda\Upsilon$. (β)

ΣΗΝΗΠΕΙΑ.

Ἐὰν μεταξὺ τῶν M καὶ Λ σημείων ληφθῇ τι ἐπὶ τῆς τομῆς σημῆεν τὸ K , καὶ ἀπ' αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσιν αἱ IP , ΦH , ἡ μὲν τῇ Τεταγμένη $\text{M}\Pi$, ἡ δὲ τῇ Ἐφαπτομένη MT παράλληλος, ἔσεται τὸ ὑπ' αὐτῶν περατέμενον τετράπλευρον $\text{PKH}\Gamma$ ἴσον τῷ ΓMT τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\text{KH}\text{I} = \Lambda\text{IP}\Delta$, (γ) προσκείσθω ἐκάτερον τῷ ΓPI τριγώνῳ, ἔκβν ἔσεται τὸ $\Delta\Gamma\Lambda = \text{PKH}\Gamma$. ἀλλὰ τὸ $\Delta\Gamma\Lambda = \Gamma\text{MT}$. ἄρα καὶ τὸ $\text{PKH}\Gamma = \Gamma\text{MT}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. (δ)

Ἐὰν Ἐλλείψεως εὐθεῖα ἐπιψάυσσα συμπίπτῃ τῇ Διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τῶν κέντρων εὐθεῖα ἀχθῇ ἐπὶ ταῦτα τῆς τομῆς, δίχα τεμεῖται τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν Ἐφαπτομένην· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν διχοτομημένων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔξουσιν πρὸς ἀλλήλα, ὃν τὰ ὀρθογώνια τὰ ὑπὸ τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τοῖς πέρασι τῆς διὰ τῶν κέντρων καὶ τῆς ἀφῆς ἀχθείσης.

Ἐπι

(α) Κατὰ τὴν αὐτ. (β) Κατὰ τὴν β'. τῶν ε'. (γ) Κατὰ τὸ αὐτ. καὶ μ. Αἰμ. (δ) Τὸ μὲν α'. μέρ. ἢ μζ' ἐστὶ τῶν α'. βιβλ. τὸ Ἀπολλων. τὸ δὲ β'. ὁμοίον τῇ ν'. τῶν αὐτῶν.

Ἐπιφανύτω Ἐλλείψεως τῆς ΑΦΨΣ ἢ ΜΤ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Τ συμπίπτουσα, καὶ διὰ τῆς ἑπαφῆς Μ καὶ τῶ κέντρου Γ διήχθω ἡ ΜΓΣ. καὶ ἀπὸ τῶν Φ καὶ Ε σημείων ἡχθώσιν αἱ ΦΗ, ΕΑ τῇ ἑφαπτομένῃ ΜΤ παράλληλοι. λέγω Α'. ὅτι ἡ μὲν ΦΑ = ΑΚ, ἡ δὲ ΕΩ = ΩΑ. Β'. ὅτι ὡς $\overline{ΚΑ}^2 : \overline{ΑΩ}^2 :: ΣΑ. ΑΜ : ΣΩ. ΩΜ$.

Ἡ μὲν τῶ Α'. μέρεος δείξεις ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ τῶ Α'. μέρ. τῆς Ζ'. προτ. τῶ προλαβ. τμήμ. ἀντὶ δὲ τῶ εἰπόν, κοινῶ ἀφαιρεθέντος τῶ τετραπλεύρου ΞΩΔΝ, εἴπε, τῶ τριγώνου ΩΑΓ. Τὸ δὲ Β'. μέρος δείξεις ἔγω.

Τὸ ΔΓΑ = ΓΜΤ. (ε) κοινὸν ἀφαιρεθῶ τὸ ΩΓΑ. τὸ ἄρα ΩΔΑ = ΩΜΓΑ. πάλιν τὸ ΓΜΤ = ΓΚΗΓ. (ζ) ἀφαιρεθῶ κοινὸν τὸ ΛΗΓ. τὸ ἄρα ΑΡΚ = ΑΜΓΗ. ὡς ἄρα ΩΔΑ : ΑΡΚ :: ΩΜΓΑ : ΑΜΓΗ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΩΜΓΑ = ΓΜΤ - ΓΩΑ, τὸ δὲ ΑΜΓΗ = ΓΜΤ - ΓΑΗ. ὡς ἄρα ΩΔΑ : ΑΡΚ :: ΓΜΤ - ΓΩΑ : ΓΜΤ - ΓΑΗ. ἐπεὶ δὲ ὡς ΓΜΤ : ΓΩΑ :: $\overline{ΜΓ}^2 : \overline{ΩΓ}^2$, (η) καὶ διαρεθέντα ὡς ΓΜΤ - ΓΩΑ : ΓΩΑ :: $\overline{ΜΓ}^2 - \overline{ΩΓ}^2 : \overline{ΩΓ}^2$, καὶ ἐναλλάξ ὡς ΓΜΤ - ΓΩΑ : $\overline{ΜΓ}^2 - \overline{ΩΓ}^2 :: \overline{ΓΩΑ} : \overline{ΩΓ}^2$. ἐστὶ δὲ ὡς $\overline{ΓΩΑ} : \overline{ΩΓ}^2 :: \overline{ΓΑΗ} : \overline{ΓΑ}^2$. (θ) ἄρα καὶ ὡς ΓΜΤ - ΓΩΑ : $\overline{ΜΓ}^2 - \overline{ΩΓ}^2 :: \overline{ΓΑΗ} : \overline{ΓΑ}^2$. (ι) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ διαθήσεται, ὅτι καὶ ὡς ΓΜΤ - ΓΑΗ : $\overline{ΓΜ}^2 - \overline{ΓΑ}^2 :: \overline{ΓΑΗ} : \overline{ΓΑ}^2$. διὸ δὴ καὶ ὡς ΓΜΤ - ΓΩΑ : $\overline{ΜΓ}^2 - \overline{ΩΓ}^2 :: \overline{ΓΜΤ} - \overline{ΓΑΗ} : \overline{ΓΜ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$. (κ) καὶ ἐναλλάξ ὡς ΓΜΤ - ΓΩΑ : ΓΜΤ - ΓΑΗ :: $\overline{ΓΜ}^2 - \overline{ΩΓ}^2 : \overline{ΓΜ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$. ἔκθ' καὶ ὡς ΩΔΑ : ΑΡΚ :: $\overline{ΜΓ}^2 - \overline{ΩΓ}^2 : \overline{ΓΜ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$. (λ) ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{ΜΓ}^2 - \overline{ΩΓ}^2 = ΣΩ. ΩΜ$, τὸ δὲ $\overline{ΓΜ}^2 - \overline{ΓΑ}^2 =$

Ο

ΓΑ² =

(ι) Ὅρα τῶ Α' μ. τὴν δειξίν. (ζ) Κατὰ τὴν προλαβ. Σ' ν' π.
(η) Κατὰ τὴν ε' δ'. τῶ ε'. (θ) Κατὰ τὴν αὐτ. (ι) Κατὰ τὴν ε. τῶ ε'. (κ) Κατὰ τὴν αὐτ. (λ) Κατὰ τὴν αὐτ.

$\Gamma\Lambda^2 = \varsigma\Lambda \cdot \Lambda\text{M}$, (μ) ἔστι δὲ καὶ ὡς $\Omega\Delta\Lambda : \Lambda\text{PK} ::$
 $\overline{\Lambda\Omega}^2 : \overline{\text{K}\Lambda}^2$, (ν) ὡς ἄρα $\overline{\Lambda\Omega}^2 : \overline{\text{K}\Lambda}^2 :: \varsigma\Omega \cdot \Omega\text{M} : \varsigma\Lambda \cdot$
 ΛM , καὶ ἀνάπαλιν, ὡς $\overline{\text{K}\Lambda}^2 : \overline{\Lambda\Omega}^2 :: \varsigma\Lambda \cdot \Lambda\text{M} : \varsigma\Omega \cdot$
 ΩM .

ΣΤΑΝΕΠΕΙΛΑΙ.

Α'. Αἱ $\Gamma\Omega$, ΓM , $\Gamma\Delta$ συνεχῶς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ τὸ
 $\overline{\Gamma\text{M}}^2 = \Gamma\Omega \cdot \Gamma\Delta$. ἔχεις τὴν δεῖξιν ἐν τῇ Α'. Συνεπ.
 τῆς εἰρημ. Ζ'. προτ.

Β'. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ πέρας ς ἐπὶ τῆς κορυφῆς Λ ἐπιζευ-
 χθῇ ἡ $\varsigma\Lambda$, καὶ ἐκβληθῇσα συμπέσῃ τῇ ἐφαπτο-
 μένῃ MT κατὰ τὸ X , τὸ ἀπολαμβάνόμενον αὐτῆς
 μέρος MX δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ O ὑπὸ τῆς
 κατὰ κορυφὴν ἀπτομένης $\Lambda\Delta$. ὅρα τὴν δεῖξ. τῆς
 Β'. Συνεπ. τῆς αὐτ. προτ.

Γ'. Ἡ ἄρα $\varsigma\text{M}\Delta$ Δευτεραία Διάμετρος ἐστὶ. καὶ γὰρ δι-
 χα τέμνει τὰς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένας $\text{K}\Phi$, ΛE καὶ
 ἔστιν ὡς $\overline{\text{K}\Lambda}^2 : \overline{\Lambda\Omega}^2 :: \varsigma\Lambda \cdot \Lambda\text{M} : \varsigma\Omega \cdot \Omega\text{M}$. καὶ ἡ κα-
 τὰ κορυφὴν δὲ ἀπτομένη $\Lambda\Delta$ αὐτὴν μὲν ἔτω τέμ-
 νει, ὥστε τὰς $\Gamma\Omega$, ΓM , $\Gamma\Delta$ συνεχῶς ἀνάλογον εἶναι,
 τὸ δὲ τῆς ἐφαπτομένης μέρος MX δίχα κατὰ τὸ
 O καὶ τοῖς λοιποῖς δὲ συμπτώμασι τῆς ἀρχικῆς Δια-
 μέτρως ὑπόκειται. διὸ δὴ καὶ ἡ ὀρθία αὐτῆς πλευ-
 ρὰ ἢ τετάρτη ἀνάλογός ἐστι τῶν $\varsigma\Omega$, ΩM , $\overline{\Lambda\Omega}^2$,
 καὶ ςM .

Δ'. Ἡ διὰ τοῦ κέντρου Γ τῇ Τεταγμένῃ $\text{E}\Omega$ διαχθῆ-
 σα παράλληλος ςM , ἡ δευτέρα Διάμετρος ἐστὶ τῆς
 Δευτεραίας ςM . κείθω γὰρ τὴν τῆς ςM ὀρθίαν
 πλευρὰν εἶναι τὴν PM . καὶ ἐπεὶ ὡς $\varsigma\Gamma \cdot \Gamma\text{M} : \overline{\varsigma\Gamma}^2 ::$
 $\varsigma\text{M} : \text{PM}$, (ξ) ἔτεν ὡς $\overline{\varsigma\Gamma}^2 : \overline{\text{E}\Gamma}^2 :: \varsigma\text{M} : \text{PM}$.
 ἐστὶ

(μ) Ἐκ τῆς ε'. τῇ β'. δὴλ. (ν) Κατὰ τὴν εβ'. τῇ ε'. (ξ) Ὅμοι-
 ούται. Συνεπ.

ἔστι δὲ ὡς μὲν $\overline{ST}^2 : \overline{ST}^2 :: \overline{SM}^2 : \overline{SM}^2$, καὶ ὡς $SM : PM ::$
 $\overline{SM}^2 : SM \cdot PM$, (ο) ἄρα καὶ ὡς $\overline{SM}^2 : \overline{SM}^2 :: \overline{SM}^2 :$
 $SM \cdot PM$. (π) τὸ ἄρα $\overline{SM}^2 = SM \cdot PM$. (ρ) ὡς ἄρα
 $SM : SM :: SM : PM$. (σ) ἢ ἄρα SM παράλληλός-
 ἐστι ταῖς Τεταγμέναις, (τ) καὶ δίχα κατὰ τὸ Γ
 τεμνομένη, (υ) καὶ μέσον λόγον ἔχουσα τῆς τε SM
 καὶ τῆς PM . διὸ δὴ δῆλον, ὅτι δευτέρα Διάμετρος-
 ἐστι τῆς SM . (φ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Εὰν ἀπὸ τῶν περάτων τῶν συζυγῶν Δια-
 μέτρων ἑφαπτόμενοι τῆς Ἑλλείψεως ἀχ-
 ρῶσι, τὰ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενα παραλλη-
 λόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται.

Ἐξωσαν συζυγεῖς Διάμετροι τῆς $ΙΑΚΨ$ Ἑλλείψεως
 αἱ $ΙΚ$, $ΛΨ$, καὶ $ΣΞ$, $ΔΗ$. καὶ ἀπὸ τῶν περάτων αὐ-
 τῶν ἤχθωσαν ἑφαπτόμενοι τῆς τομῆς αἱ $ΖΠ$, $ΕΩ$, $ΩΠ$,
 $ΕΖ$, $ΧΟ$, $ΦΒ$, $ΧΦ$, $ΟΒ$. λέγω, ὅτι τὸ $ΠΩΕΖ$ παραλλη-
 λόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ $ΧΟΒΦ$ παραλληλογράμμῳ.
 πίν. $ΚΒ'$. $Χ$. 1.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ $ΣΑ$. καὶ ἀπὸ μὲν τῆς $Σ$ ἐπὶ τὴν $ΙΚ$
 τετάχθω ἡ $ΥΣΛ$, ἀπὸ δὲ τῆς $Α$ ἐπὶ τὴν $ΔΗ$ ἡ $ΝΑΜ$.
 καὶ ἐκβληθεῖσαι αἱ $ΚΙ$, $ΦΧ$, $ΔΗ$ συμβαλλέτωσαν κα-
 τὰ τὰς $Θ$, $Ω$ σημεῖαι.

Ο 2

ΔΕΙ.

- (ι) Κατὰ τὴν $α'$. τῆς $ε'$. (κ) Κατὰ τὴν $ι$. τῆς $ι'$. (ρ) Κατὰ
 τὴν $β'$. τῆς $ι'$. (σ) Κατὰ τὴν $ιζ'$. τῆς $ε'$. (τ) Ἐξ ὑποθ.
 (υ) Κατὰ τὸν $ζ'$. ὅρισμ. (φ) Ἐκ τῆς $κδ'$. ὅρισμ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΓΩ : ΓΗ :: ΓΗ : ΓΜ, (χ) καὶ ὡς μὲν
 ΓΩ : ΓΗ :: ΓΩΤΡ : ΓΗΘΣ, ὡς δὲ ΓΗ : ΓΜ :: ΓΗΘΣ :
 ΓΜΝΣ, (ψ) ὡς ἄρα ΓΩΤΡ : ΓΗΘΣ :: ΓΗΘΣ : ΓΜΝΣ.
 (ω) τὸ ἄρα ΓΩΤΡ, πρὸς τὸ ΓΜΝΣ διπλασίονα λό-
 γον ἔχει, ἢ περ τὸ ΓΩΤΡ, πρὸς τὸ ΓΗΘΣ. (α) διὰ
 τὰ αὐτὰ δὴ, ἔπει ὡς ΓΡ : ΓΙ :: ΓΙ : ΓΑ, καὶ τὸ
 ΓΩΤΡ πρὸς τὸ ΓΑΥΑ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ
 τὸ ΓΩΤΡ, πρὸς τὸ ΓΗΙΑ· ἐστὶ δὲ ὡς ΓΩΤΡ : ΓΜΝΣ ::
 ΓΩΤΡ : ΓΑΥΑ· (β) ἐστὶ γὰρ τὸ ΓΜΝΣ = ΓΑΥΑ·
 ἐκότερον γὰρ διπλασίον τῷ αὐτῷ ΓΑ τριγώνῳ· (γ)
 ἄρα καὶ ὡς ΓΩΤΡ : ΓΗΘΣ :: ΓΩΤΡ : ΓΗΙΑ. (δ)
 ἕκον τὸ ΓΗΘΣ = ΓΗΙΑ. (ε) ἀλλὰ τὸ μὲν ΓΗΘΣ
 τετραστημόριον ἐστὶ τῷ ΧΟΒΦ, τὸ δὲ ΓΗΙΑ τῷ ΗΩΕΖ.
 τὸ ἄρα ΗΩΕΖ = ΧΟΒΦ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δὴ δήλον, ὅτι καὶ αἱ τὰ πέρατα τῶν
 συζυγῶν Διαμέτρων ΙΚ, ΑΨ, καὶ ΣΞ, ΔΗ ἐπιζευγνύ-
 σαι εὐθεῖαι ἴσα συνιστῶσι παραλληλόγραμμα τὰ ΙΑΚΨ,
 ΣΗΞΔ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει σύμπτωμα καὶ ταῖς συνεζευγ-
 μέναις Ὑπερβολαῖς, ταῖς ἐν ταῖς Ἀσυμπτώτοις, ὡς
 δήλον ἐκ τῆς ΙΔ'. προτ. τῷ προλ. τμήμ.

ΔΗΜ.

(χ) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τῆς προλ. προτ. (ψ) Κατὰ τὴν α'.
 τῷ ζ'. (ω) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε'. (α) Κατὰ τὸ β'. Πέρ. τῷ
 μετὰ τὸ ε'. (β) Κατὰ τὴν α'. τῷ ε'. (γ) Κατὰ τὴν α'.
 τῷ α'. (δ) Κατὰ τὸ ζ'. τῶν ὁμοσημ. τῶν μετὰ τὸ ε'. (ε) Κα-
 τὰ τὴν β'. τῷ ε'.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς $\Psi\Lambda'$ Ἀξονος τῆς ΨNAM (χ. 2.)
 ἡ ἑλλείψεως μέρη ληφθῇ πρὸς ταῖς κορυ-
 φαῖς Ψ, Λ , τὰ $\Psi\Gamma, \Lambda\Phi$, ὥστε τὸ ὑπὸ ἑκατέ-
 ρου καὶ τῆς λοιπῆς τῆς πλαγίας πλευρᾶς τμή-
 ματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τε-
 τάρτημορίῳ τῆς ἐκ τῆς πλαγίας πλευρᾶς
 $\Psi\Lambda$ καὶ τῆς ὀρθῆς $\Lambda\Lambda$ γινομένης ὀρθογωνίᾳ,
 ἔστιν ἐὰν ᾖ τὸ $\Psi\Gamma, \Gamma\Lambda = \frac{\Psi\Lambda \cdot \Lambda\Lambda}{2}$, καὶ τὸ $\Lambda\Phi, \Phi\Psi =$
 $\frac{\Psi\Lambda \cdot \Lambda\Lambda}{2}$. ἀπὸ δὲ τῶν σημείων Γ, Φ ἐπὶ τὰ B, X ,
 καθ' ἃ ἡ ἐφαπτομένη BMX ταῖς κατὰ κο-
 ρυφὴν ἐφαπτομέναις $\Psi\text{B}, \Lambda\text{X}$ συμβάλλει,
 εὐθείαι ἐπιζευχθῶσιν αἱ $\Gamma\text{B}, \Gamma\text{X}, \Phi\text{X}, \Phi\text{B}$.
 λέγω ὅτι αἱ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμεναι γω-
 νίαι, αἱ μὲν πρὸς τοῖς Γ, Φ σημείοις, ἔστιν αἱ
 $\Gamma\Gamma\text{X}, \text{B}\Gamma\text{X}$ ὀρθαί εἰσιν, αἱ δὲ ὑπὸ τῶν $\text{B}\Gamma, \Phi\text{X}$
 ὑποτεινόμεναι ἴσαι ἀλλήλαις, ἔστιν ἡ μὲν
 $\Gamma\text{X}\Gamma$ τῇ $\Gamma\Phi\Gamma$, ἡ δὲ $\Phi\Gamma\text{X}$ τῇ $\Phi\text{B}\text{X}$. ὅτι ἡ
 ἀπὸ τῆς συμπτώσεως Π ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν M
 ἐπιζευχθῆσα HM πρὸς ὀρθάς ἐστὶ τῇ ἐφαπ-
 τομένη BMX .

Ἡ δὲ $\xi\omega$ τῆς Λ' μέρος ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ τῆς Λ' μέρ. τῆς
 Λήμματος τῆς πρὸς τῆς H' πρὸς τῆς πρὸς λ. τμήμ. εἰπὼν
 δὲ, ἄρα καὶ ἡ $\Lambda\Gamma\text{X} + \text{B}\Gamma\text{X}$, πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἴση μὲν
 ὅ, ὅτι.

ὁρθῇ. ἐκέν κ' ἡ ΒΤΧ ἴση μιᾷ ὁρθῇ. (ζ) διὰ τὰ αὐ-
τά, κτ. Ἐν δὲ τῇ τῷ Β'. μέρες ἀποδείξει μετὰ τὸ
εἰπῶν, ὡς ἄρα IB: IX:: ΨΚ: ΚΑ, εἰπὲ, κ' συντε-
θέντα, ὡς ΒΧ: ΧΙ:: ΨΑ: ΚΑ. ἔστι δὲ ὡς ΨΑ: ΚΑ::
ΨΧ: ΔΧ, καὶ ὡς ΨΧ: ΔΧ:: ΒΧ: ΜΧ. (η) ἄρα
καὶ ὡς ΒΧ: ΧΙ:: ΒΧ: ΜΧ. ἢ ἄρα ΧΙ = ΜΧ. τὸ
ἔλον τῶ μέρες, κτ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Τῶν αὐτῶν καμμένων, εἰάν ἀπὸ τῶν ληφθέν-
των τῷ Ἀξονος σημείων ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν ἐπι-
ζευχθῶσι δύο εὐθεῖαι, αἱ ὑπ' αὐτῶν κ' τῆς
ἐφαπτομένης περιεχόμεναι γωνία ἴσαι ἀλ-
λήλαις ἔσονται.

Ἔσω τὰ ληφθέντα τῷ Ἀξονος σημῆα τὰ Υ, Φ,
καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπεζεύχθωσαν αἱ
ΥΜ, ΦΜ. λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΒΜΥ ἴση ἐστὶ τῇ ΧΙΨ.

Ὅρα τὴν ὁξὺν τῆς Η'. προτ. τῷ προλ. τμήμ. αὐ-
τά δὲ τὸ εἰπῶν, ἡ δὲ ΦΜΧ, πρόσθε, ἴση τῇ ΦΙΧ.
ἔστι δὲ ἡ ΦΗΧ = ΒΗΥ. ἄρα καὶ ἡ ΒΜΥ = ΧΜΨ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Ὁρισθήσονται τὰ Υ κ' Φ σημῆα, εἰάν πρὸς ὁρ-
θὰς τῷ Ἀξονι διαχθῇ ἡ δευτέρα Διάμετρος ΓΝ,
καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ν, διαστήματι δὲ ἴσῳ τῇ ΓΨ
κύκλος γραφῇ, διαιρέμων τὴν ΨΑ κατὰ τὰ Υ κ'
Φ σημῆα. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΝΥ. κ' ἐπεὶ τὸ $\overline{ΝΥ}^2 =$
 $\overline{ΝΓ}^2 + \overline{ΓΥ}^2$, (θ) ἔστι δὲ τὸ $\overline{ΝΥ}^2 = \overline{ΓΨ}^2$, τὸ ἄρα
 $\overline{ΓΨ}^2 = \overline{ΝΓ}^2 + \overline{ΓΥ}^2$. ἀλλὰ τὸ $\overline{ΓΨ}^2 = \overline{ΓΥ}^2 + \overline{ΥΨ}^2$.

(ζ) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν γγ'. τῇ α'. (η) Ἐκ τῇ
β'. τῇ ε'. ὅγλ. (θ) Κατὰ τὴν μζ'. τῇ α'.

ΥΨ. (ι) τὸ ἄρα $\overline{NG}^2 + \overline{GY}^2 = \overline{GY}^2 + \Lambda\Upsilon. \Upsilon\Psi.$
 κοινὸν ἀφαιρήσω τὸ $\overline{GY}^2$. τὸ ἄρα $\overline{NG}^2 = \Lambda\Upsilon. \Upsilon\Psi.$
 διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπιζευχθείσης τῆς ΝΦ, δευχθή-
 σεται τὸ $\overline{NG}^2 = \Psi\Phi. \Phi\Lambda.$ ἔστι δὲ τὸ $\overline{NG}^2$ ἴσον τε-
 ταρτημορίῳ τῷ ΨΑ. ΑΛ, (κ) ἐκάτερον ἄρα τῶν
 ΛΥ. ΥΨ, ΨΦ. ΦΑ ἴσον τεταρτημορίῳ τῷ ΨΑ. ΑΛ.
 τὰ ἄρα Φ, Υ σημεία εἰσι τὰ ζητούμενα. (λ)

Β'. Ἀχθήσεται δὲ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἀπὸ τῷ δο-
 θέντος ἐν αὐτῇ σημείῳ Μ, εἰάν ἐπὶ τὰ Υ, Φ ἐπι-
 ζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΜΥ, ΜΦ. τῆς δὲ ἐτέρας αὐ-
 τῶν ἐπὶ τὸ Ζ ἐκβληθείσης, ἡ ΦΜΖ γωνία δίχα
 τμηθῇ ὑπὸ τινος εὐθείας, οἷον τῆς ΧΜΒ. αὕτη μὲν
 γὰρ ἐφάπτεται τῆς τομῆς. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΧΜΖ = ΧΜΦ,
 τῇ δὲ ΧΜΖ = ΒΜΥ. ἄρα καὶ ἡ ΧΜΦ = ΒΜΥ. ἡ
 ἄρα ΧΜΒ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὰ Υ, Φ σημεία Ἑξία, ἢ Ὀμφαλοὶ τῆς Ἑλ-
 λείψεως λέγονται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Αἱ ἀπὸ τῷ τυχόντος τῆς Ἑλλείψεως σημείῳ
 ἐπὶ τὰς Ἑξίας ἐπιζευγνύμεναι δύο εὐθεῖαι
 ἴσαι εἰσὶ τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ.

Ἐστω τυχὸν μὲν σημεῖον τῆς Ἑλλείψεως τὸ Μ, Ἑξίαι
 δὲ αἱ Υ, Φ. καὶ ἐπεζευχθῶσαν αἱ ΥΜ, ΦΜ. λέγω, ὅτι
 ἡ ΥΜ + ΦΜ = ΨΑ. χ. 3.

Ἡ δειξις ἡ αὐτὴ ἔστι τῇ τῆς Θ'. προτ. τῷ προλ.
 τμήμ. ἀρχόμενος δὲ αὐτῆς εἰπὲ, ἐπεὶ ἡ ΥΜΠ = ΦΜΧ,

Ο 4

ἢ

(ι) Κατὰ τὴν δ. τῷ β'. (κ) Ἐκ τῷ κδ'. ὁρισμ. δῆλ. (λ) Ἐκ
 τῆς προλ. ζ'. προτ. δῆλ.

ἡ δὲ ΦΜΧ = ΜΠΥ, ἡ ἄρα κτ. ἀντὶ δὲ τῷ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΨΙΧ, λέγε, ἡ ΥΤΛ. καὶ κατωτέρω δὲ, ἀντὶ τῷ, ἄρα ἡ ΥΜ — ΦΜ, ὅπῃ, ἡ ΥΜ + ΦΜ διπλασία τῆς ΤΝ + ΝΓ, ἔσται τῆς ΓΓ. διπλασία δὲ τῆς ΓΓ καὶ ἡ ΨΑ. ἄρα ἡ ΥΜ + ΦΜ = ΨΑ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐντεῦθεν πορίζεται μέθοδος τῷ γραφεῖν τὴν Ἑλληψιν, δευτέρας τῆς πλαγίας αὐτῆς πλευρᾶς καὶ τῷ ἑστῶν ἀποσήμετος. Ἐστω μὲν γάρ πλαγία πλευρὰ τῆς γραφομενῆς Ἑλλείψεως ἡ ΕΑ, (χ. 4.) ἀπόστημα δὲ τῶν ἑστῶν ἡ ΦΥ. καὶ τῷ νήματος ΦΜΥ, ἴσθ τῇ ΒΑ, τὸ μὲν τῶν περάτων ἐπὶ τὸ Φ, τὸ δὲ ἐπὶ τὸ Υ πεπήχθω. ἥλος δὲ ὁ ΜΔ ἐν δευτέρῳ τῷ νήμα τείνον, ἐκθὸς πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον περιγίγθω. λέγω δὴ ὅτι ὁ ἥλος ΜΔ τὴν Ἑλληψιν καταγράφει. ἐν παντὶ γὰρ σημείω τῷ ὑπ' αὐτῷ γραφομένῳ ἡ ΦΜ + ΜΥ = ΨΑ. ἐξ ὧν δὴλον τὸ προκείμενον.

Β'. Τῶν αὐτῶν δευτέρων καὶ συνεχῇ ἔξει πορίσασθαι σημῶνα, δι' ὧν ἡ Ἑλλειψις ἔξει. τμηθείσης γάρ ὡς ἔτυχε τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΒΑ κατὰ τὸ Π, κέντρῳ μὲν θατέρῳ τῶν ἑστῶν, ἔσται τῷ Φ, διαστήματι δὲ τῷ ἐτέρῳ τῶν τμημάτων τῷ ΒΠ κύκλος γεγράφθω ὡσαύτως κέντρῳ μὲν τῇ ἐτέρᾳ τῶν ἑστῶν Υ, διαστήματι δὲ τῷ λοιπῷ μέρει ΠΑ ἕτερος γεγράφθω κύκλος, τὸν πρῶτον διατεμένον κατὰ τι σημῶνα, ὅσον τὸ Μ. λέγω δὴ, ὅτι διὰ τῷ Μ ἡ Ἑλλειψις ἔξει. ἐπεξεύχωσαν γὰρ αἱ ΥΜ, ΦΜ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΦΜ = ΒΠ, ἡ δὲ ΥΜ = ΑΠ. ἡ ἄρα ΦΜ + ΥΜ = ΒΠ + ΠΑ = ΨΑ. ἐκδὲν τὸ Μ Ἑλλείψεως σημῶνα ἐστὶ. τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ καὶ ἄλλα τοιαῦτα περιζήτουνται σημῶνα.

Γ'.

Γ'. Εάν ἀπὸ τῆς ἐτέρας τῶν Ἐξίων Φ (χ. 3.) κα-
θῆται τῇ ἑφαπτομένη ΧΙΙ ἀχθῇ ἡ ΦΙ, τῇ ἀπὸ
τῆς ἐτέρας Ἐξίας Υ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπεξευ-
γμένη καὶ ἐκβεβλημένη ΥΙ κατὰ τὸ Ι συμβάλλου-
σα, ἔσται ἡ ΥΙ ἡ ἀπὸ τῆς καθέτε ἀπικαμβαν-
ομένη ἴση τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ ΨΑ. ἤτοι τῇ δεί-
ξει τῆς Γ'. Συνεπ. τῆς εἰρημ. Θ'. προτ. ἀντὶ δὲ
τῆς, ἀλλὰ ἡ ΥΜ ΦΜ, εἰπέ, ἀλλ' ἡ ΥΜ+ΦΜ=
ΨΑ. ἄρα ἡ ΥΜ+ΜΙ, ἔτεν ἡ ΥΙ=ΨΑ.

Δ'. Ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ Δ'. τῆς εἰρημ. Θ'.

Ε'. Εάν διὰ τῆς κέντρων Γ (πὶν ΚΙ'. χ. 1.) εὐθείᾳ
ἀχθῇ ἡ ΣΗ τῇ μὲν ἑφαπτομένη ΓΚ παρὰλληλος,
τῇ δὲ ἀπὸ τῆς Ἐξίας Φ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπε-
ξευγμένη ΦΜ κατὰ τὸ Τ συμβάλλουσα, ἔσται τὸ
ὕπ' αὐτῆς ἀπικαμβανόμενον μέρος ΜΓ ἴσον τῷ τῆς
πλαγίᾳ πλευρᾷς ἡμίσει ΓΑ. ἀπὸ γὰρ τῆς ἐτέ-
ρας Ἐξίας Υ ἐπεξεύχθω μὲν ἡ ΥΜ, ἤχθω δὲ ἡ
ΥΗ ὁποῖα τῶν ΓΚ, ΣΗ παρὰλληλος. καὶ ἐπεὶ ἡ
γωνία ΥΜΚ=ΦΜΡ, (μ) ἐστὶ δὲ ἡ μὲν ΥΜΚ=
ΗΥΜ, ἡ δὲ ΦΜΡ=ΜΗΥ, (ν) ἄρα καὶ ἡ ΗΥΜ=
ΜΗΥ. οὖν καὶ ἡ ΜΥ=ΜΗ. (ξ) ἐπεὶ δὲ ὡς ΦΥ:
ΦΓ::ΦΗ:ΦΓ, (ο) ἐστὶ δὲ ἡ ΦΥ διπλασία τῆς ΦΓ,
ἄρα καὶ ἡ ΦΗ διπλασία τῆς ΦΓ, ἔτεν τῆς ΤΗ. ἐστὶ δὲ ἡ
ΦΜ+ΜΥ=ΦΗ+ΗΜ+ΜΥ=ΦΗ+2 ΗΜ.
ἡ ἄρα ΦΜ+ΜΥ διπλασία τῆς ΤΗ+ΗΜ, ἥτοι τῆς
ΤΜ. ἀλλ' ἡ ΦΜ+ΜΥ=ΨΑ. (π) ἄρα καὶ ἡ ΨΑ δι-
πλασία τῆς ΜΤ. ἀλλ' ἡ ΨΑ διπλασία καὶ τῆς ΓΑ, ἡ
ἄρα ΜΤ=ΓΑ.

Ἡ μὲν Σ'. ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ Ε'. τῆς εἰρημ. Θ'. προτ.

Ἡ δὲ Ζ'. ἡ αὐτὴ τῇ Σ'. τῆς αὐτῆς. ἀντὶ δὲ τῆς καὶ
διαρρεθίντα, εἰπέ, καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ΓΑ:ΓΦ::

Ο 5

ΓΤ:

(μ) Κατὰ τὴν ἡ. τῆς δὲ τῆς τμήμ. (ν) Κατὰ τὴν κθ'. τ. ἡ.
(ξ) Κατὰ τὴν ε'. τῆς α'. (ο) Κατὰ τὴν δ'. τῆς ε'. (π) Κατὰ
τὴν προκ. προτ.

ΓΤ: ΓΑ, κατὰ ἀνατροφὴν λόγῳ ὡς ΓΑ: ΑΦ::
 ΓΤ: ΛΙ. καὶ ἐναλλάξ ὡς ΓΑ: ΓΤ:: ΑΦ: ΑΤ,
 ἔστι δὲ κτ. χ. 2.

Η'. Τῷ ΤΜΦ τριγώνῳ ἢ ΤΦ πλευρὰ μείζων ἐστὶ τῆς
 ΦΜ. ἐπεὶ μὲν γὰρ ὡς ΦΑ: ΑΤ:: ΒΦ: ΒΤ, (ρ)
 ἔστι δὲ ἢ ΦΑ=ΑΙ, (σ) ὡς ἄρα ΑΙ: ΑΤ:: ΒΦ:
 ΒΤ. ἄλλ' ἢ ΒΤ > ΒΦ. ἄρα καὶ ἢ ΑΤ μείζων τῆς
 ΑΙ. ἔστι δὲ ὡς ΑΤ: ΑΙ:: ΤΦ: ΦΜ. (τ) ἄρα καὶ
 ἢ ΤΦ μείζων τῆς ΦΜ.

Ἡ μὲν Θ'. ἢ αὐτὴ ἐστὶ τῇ Η'. τῆς Θ'. προτ. τῷ
 προλ. τμήμ.

Ἡ δὲ Ι'. τῇ Θ'. τῆς αὐτῆς, ἀντὶ δὲ τῷ εἰπεῖν, τὴν ΦΜ
 μείζονα τῆς ΤΦ, λέγε τὴν ΤΦ μείζονα τῆς ΦΜ.
 καὶ πάλιν ἀντὶ τῷ, ἥτε ἐλάσσων ΤΦ, εἰπὲ, ἥτε
 μείζων ΤΦ.

Ἡ δὲ ΙΑ'. τῇ Ι'. τῆς αὐτῆς. ἀντὶ δὲ τῷ, ἐκβεβλή-
 θωσαν αἱ ΦΩ, ΓΜ, (χ. 3.) εἰπὲ αἱ ΦΩ, ΥΡ, καὶ
 συμβαλλέτωσαν κατὰ τὸ Δ. μετὰ δὲ τὸ εἰπεῖν, καὶ
 ΦΡ. ΡΕ=ΦΩ. ΠΡ, εἰπὲ, προσκείθω τῷ μὲν ΡΥ. ΡΕ
 τὸ ΦΡ. ΡΕ, τῷ δὲ ΥΗ. ΠΡ τὸ ΦΩ. ΠΡ. ἔκθεν τὸ ΡΥ.
 ΡΕ+ΦΡ. ΡΕ=ΥΗ. ΠΡ+ΦΩ. ΠΡ, εἴτεν τὸ ΡΥ+ΦΡ.
 ΡΕ=ΥΗ+ΦΩ. ΠΡ. ἄλλὰ ΡΥ+ΦΡ=ΨΝ. (υ) τὸ ἄρα
 ΨΝ. ΡΕ=ΥΗ+ΦΩ. ΠΡ. ἐπεὶ δὲ, κτ. ἀντὶ δὲ τῷ
 ἔκθεν ἢ ΥΗ-ΦΩ, λέγε, ἢ ΥΗ+ΦΩ διπλασία
 τῆς ΓΣ+ΣΜ, εἴτεν κτ. καὶ ἀντὶ τῷ ὡς ἐναλλάξ,
 εἰπὲ ὡς ἐκτὸς τῇ ἐντός. ἀντὶ δὲ τῷ ἔστι δὲ ἢ ΠΟΡ=
 ΙΓΖ, εἰπὲ, ἔστι δὲ ἢ ΠΟΡ=ΙΜΓ.

ΙΒ'.

(ρ) Κατὰ τὴν ἡ. Συνέπ. τῆς δ'. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (σ) Κατὰ τὴν
 προλ. ε'. Συνέπ. (τ) Κατὰ τὴν δ'. τῷ ε'. (υ) Κατὰ τὴν
 προκ. προτ.

ΙΒ'. Αἱ ΖΦ, ΖΗ, ΖΥ συνεχῆ ἁρμονικὸν λόγον πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν, εἴτεν ἐστίν, ὡς ΠΦ : ΠΥ :: ΖΦ : ΖΥ. ἔχεις τὴν δεξιὴν ἐν τῇ ΙΑ' : Συνεπ. τῆς εἰρημ. Θ'. προτ.

ΙΓ'. Ἐὰν ἀπὸ δύο τῆς ΨΡΗ ἑλλείψεως σημείων τῶν Ρ, Η ἐπὶ τὰς Ἐσίας Υ, Φ (πίν. ΚΔ'. χ. 1.) εὐθῶσι ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΡΦ, ΡΥ, καὶ ΗΦ, ΗΥ, ἀχθῶσι δὲ δι' αὐτῶν καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΡΝ, ΗΤ, ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ν συμβάλλουσαι, ἡ ὑπεροχὴ τῶν ὑπὸ τῶν εἰρημένων εὐθειῶν περιεχομένων γωνιῶν ΡΦΗ, ΡΥΗ διπλασία ἔσεται τῆς ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχομένης ΡΝΗ γωνίας. εἴτεν ἔσται ἡ ΡΦΗ-ΡΥΗ = 2ΡΝΗ. ἐπεὶ γὰρ ἡ γωνία ΥΡΚ = ΡΥΖ + ΡΖΥ, (φ) ἔστι δὲ ἡ ΥΡΚ = ΦΡΖ, (χ) ἡ ἄρα ΦΡΖ = ΡΥΖ + ΡΖΥ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΡΖΥ. ἔκβεν ἡ ΦΡΖ + ΡΖΥ = ΡΥΖ + 2ΡΖΥ. ἀλλ' ἡ μὲν ΦΡΖ + ΡΖΥ = ΡΦΥ, (ψ) ἡ δὲ ΡΖΥ = ΤΖΝ. (ω) ἡ ἄρα ΡΦΥ = ΡΥΖ + 2ΤΖΝ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ΗΦΥ = ΗΥΦ + 2ΤΖΝ. ἡ ἄρα ΡΦΥ + ΗΦΥ, ἥτοι ἡ ΡΦΗ = ΡΥΖ + ΗΥΦ + 2ΤΖΝ + 2ΤΖΝ. ἀλλ' ἡ μὲν ΡΥΖ + ΗΥΦ = ΡΥΗ, ἡ δὲ 2ΤΖΝ + 2ΤΖΝ = 2ΡΝΗ. (α) ἡ ἄρα ΡΦΗ = ΡΥΗ + 2ΡΝΗ. κοινὴ ἀφηρεήσθω ἡ ΡΥΗ. ἡ ἄρα ΡΦΗ-ΡΥΗ = 2ΡΝΗ.

ΙΔ'. Ἐὰν ἄρα διὰ τῆς Ἐσίας Φ διαχθῇ τις εὐθεῖα ἡ ΕΗ, τῇ ἑλλείψει κατὰ τὰ Ε καὶ Η σημεῖα συμβάλλουσα, ἀφ' ἑκατέρου δὲ αὐτῶν ἐφαπτομένη ἀχθῇ ἥτε ΕΛ καὶ ἡ ΗΛ, ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία ΕΛΗ ὀξεία ἔσται. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΕΦΥ, ΗΦΥ ἴσαι δι-

σιν

(φ) Κατὰ τὴν λβ'. τῆ α'. (χ) Κατὰ τὴν η'. τῆ δὲ τῆ τμήμ.
(ψ) Κατὰ τὴν εἰρημ. λβ'. (ω) Κατὰ τὴν ιε'. τῆ α'. (α) Κατὰ τὴν λβ'. τῆ α'.

εἰν ὁρθῶς, (β) ἀφαιρεθείσης ἀπ' αὐτῶν τῆς ΕΥΗ, τὸ λοιπὸν ἐλαττον εἶναι τοῦ ὁρθῶν. διὸ καὶ τὸ τῷ λοιπῷ ἡμισυ ἐλαττον ὁρθῆς. ἀλλὰ τῷ τῷ λοιπῷ ἡμισυ, ὅπερ ἐστὶ τῇ ὑπεροχῇ, ἴση ἡ ΕΛΗ. (γ) ἡ ἄρα ΕΛΗ ἐλάττων ὁρθῆς, ὥστεν ὁρθῶς.

ΙΕ'. Τὸ τῶν Ἐσιῶν ἀποσῆμα ΦΥ (πίν. ΚΙ'. χ. 4.) μέσον λόγον ἔχει τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ, καὶ τῆς ὑπεροχῆς ΨΖ, καθ' ἣν ἡ πλαγία ΨΑ τὴν ὁρθίαν ΑΖ ὑπερέχει, ὅτεν εἶναι ὡς ΨΑ : ΦΥ :: ΦΥ : ΨΖ, ἐπεὶ γὰρ τὸ ΨΦ. ΦΑ = ΨΑ. ΑΖ, (δ) ἐκατέρω ἀφαιρεθέντες ἀπὸ τῆς ΓΑ², ἔσεται + ΓΑ² — ΨΦ. ΦΑ = ΓΑ² — ΨΑ. ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΓΑ² — ΨΦ. ΦΑ = ΓΦ². (ε) τοῦ ἄρα + ΓΦ² = ΓΑ² — ΨΑ. ΑΖ. διὸ δὴ καὶ τὸ ΓΦ² = ΨΑ² — ΨΑ. ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΨΑ² + — ΨΑ. ΑΖ = ΑΨ. ΨΖ. (ζ) τὸ ἄρα ΓΦ² = ΨΑ. ΨΖ. ὡς ἄρα ΨΑ : ΥΦ :: ΥΦ : ΨΖ. (η)

ΙΣ'. Τὸ ἀπὸ τῆς ἀποσῆματος τῶν Ἐσιῶν τετραγώνου, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου λόγον ἔχει, ἐν ἡ ὁρθῶσα ὑπεροχῇ ΨΖ, πρὸς τὴν ὁρθίαν πλευρὰ ΑΖ. ὅτεν εἶναι ὡς ΓΦ² : ΕΒ² :: ΨΖ : ΑΖ. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ΓΦ² = ΨΑ. ΨΖ, (θ) τὸ δὲ ΕΒ² = ΨΑ. ΑΖ, (ι) εἶναι ἄρα ὡς ΓΦ² : ΕΒ² :: ΨΑ. ΨΖ : ΨΑ. ΑΖ. ἀλλ' ὡς ΨΑ. ΨΖ : ΨΑ. ΑΖ :: ΨΖ : ΑΖ. (κ) ὡς ἄρα ΓΦ² : ΕΒ² :: ΨΖ : ΑΖ.

ΙΖ'. Ἐάν ἀπὸ τῶν Ἐσιῶν Φ, Υ (πίν. ΚΔ'. χ. 2.) ἐπὶ τὸ τυχόν τῆς Ἐλλείψεως σημεῖον Μ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΦΜ, ΥΜ, τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὁρθῶς.

(β) Κατὰ τὴν γ'. τῷ α'. (γ) Ἐκ τῆς προλ. Συνεκ. δὴλ. (δ) Κατὰ τὸ Λημ. τὸ πρὸ τῆς ἡ. τῷ δὲ τῷ τμήμ. (ε) Ἐκ τῆς ε'. τῷ β'. δὴλ. (ζ) Ἐκ τῆς β'. τῷ β'. δὴλ. (η) Κατὰ τὴν ιζ'. τῷ ε'. (θ) Κατὰ τὴν προλ. Συνεκ. (ι) Κατὰ τὸν κδ. ὅρισμ. (κ) Κατὰ τὴν α'. τῷ ε'.

(A) Κατα την δ. τζ ε. (H) "Οσον την δ. Ευφρο. της ε. τζ.
δε τη τιμήν. (V) Κατα την δ. Ευφρο. της δ. τζ δε τη τιμήν.
(Z) Κατα την ε. τζ ε. (O) Κατα την λδ. τζ α. (N) Κα-
τα α. τζ ε. (G) Κατα την θ. τζ ε. (Q) Κατα την α.
τζ ε. (T) Κατα την ε. τζ ε. (U) Κατα την κα. τζ ε.

ὡς ἄρα $ZMO : ΓΗ :: \overline{ZM}^2 : \overline{ΓΗ}^2$, καὶ ὡς $ΓΗ : ΕΜΚ :: \overline{ΓΗ}^2 : \overline{ΜΚ}^2$. (φ) ἔκθ' καὶ ὡς $\overline{ZM}^2 : \overline{ΓΗ}^2 :: \overline{ΓΗ}^2 : \overline{ΜΚ}^2$. (χ) ἄρα καὶ ὡς $ZM : ΓΗ :: ΓΗ : ΜΚ$. (ψ) Τὸ ἄρα $ZM \cdot ΜΚ = \overline{ΓΗ}^2$. (ω) ἀλλὰ τὸ $ZM \cdot ΜΚ = ΦΜ \cdot ΥΜ$, ὡς δέδεικται. τὸ ἄρα $ΦΜ \cdot ΥΜ = \overline{ΓΗ}^2$.

ΙΗ'. Τὸ ὑπὸ τῶν ΥΡ, ΡΦ, τῶν ἀπὸ τῶν Ἐσιῶν Υ, Φ (πίν. ΚΓ'. χ. 4.) ἐπὶ τὸ τυχὸν σημεῖον Ρ ἐπε-
 ζευγμένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον σὺν τῷ τετρα-
 γώνῳ $\overline{ΓΡ}^2$, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτεράίας
 Διαμέτρου ΡΘ, τῆς ἀπὸ τῆς Ρ διὰ τῆς κέντρος Γ
 ἀχθείσης, ἴσον ἐστὶ τῇ ὑπεροχῇ καθ' ἣν τὸ διπλά-
 σιον τῆς τετραγώνου, τῆς ἀπὸ τῆς ΓΑ, τῆς ἡμισείας
 τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ, ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς
 ἡμίσεως τῆς ἀποσήμεatos ΥΦ τῶν Ἐσιῶν τετραγώ-
 νου. εἴπεν τὸ $ΥΡ \cdot ΡΦ + \overline{ΓΡ}^2 = 2\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΤΓ}^2$. ἐπεὶ
 γὰρ $ΥΡ + ΡΦ = ΨΑ$, (α) τῶν ΥΡ, ΡΦ ἐπ' εὐθείας
 κειμένων, ἔσεται τὸ $\overline{ΥΡ}^2 + \overline{ΡΦ}^2 + 2ΥΡ \cdot ΡΦ = \overline{ΨΑ}^2$.
 (β) ἀχθείσης δὲ ἀπὸ τῆς Ρ τῆς ΡΚ πρὸς ὀρθὰς
 τῇ ΨΑ, τὸ μὲν $\overline{ΥΡ}^2 = \overline{ΤΓ}^2 + \overline{ΓΡ}^2 + 2ΥΓ \cdot ΓΚ$,
 (γ) τὸ δὲ $\overline{ΡΦ}^2 = \overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΓΦ}^2 - 2ΓΦ \cdot ΓΚ$. (δ) τὸ
 ἄρα $\overline{ΥΡ}^2 + \overline{ΡΦ}^2 = 2\overline{ΓΡ}^2 + 2\overline{ΤΓ}^2$. ἔκθ' τὸ $2\overline{ΓΡ}^2 +$
 $2\overline{ΤΓ}^2 + 2ΥΡ \cdot ΡΦ = \overline{ΨΑ}^2$. διὸ καὶ τὸ $\overline{ΓΡ}^2 + \overline{ΤΓ}^2 +$
 $ΥΡ \cdot ΡΦ = 2\overline{ΓΑ}^2$. καὶ κοινῶς ἀφαιρεθέντος τῆς $\overline{ΤΓ}^2$,
 ἔσεται τὸ $ΥΡ \cdot ΡΦ + \overline{ΓΡ}^2 = 2\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΤΓ}^2$.

ΙΘ'. Ταῦ τετράγωνα τὰ ἀπὸ δύο συζυγῶν Διαμέτρων
 ὁμῶς ληφθέντα ἴσα εἰσὶ τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ
 δύο συζυγῶν Διαμέτρων ὁμῶς ληφθεῖσιν, εἴπεν τὸ
 $\overline{ΨΑ}^2 +$

(φ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῆς ε'. (χ) Κατὰ τὴν ιηθ. ε'. (ψ) Κατὰ τὸ
 ζ. τῶν τῆς ε'. θεωρ. (ω) Κατὰ τῆς ιζ'. τῆς ε'. (α) Κατὰ τῆς
 δ'. τῆς δε τῆς τμήμ. (β) Κατὰ τὴν δ'. τῆς β'. (γ) Κατὰ τὴν
 ιβ'. τῆς β'. (δ) Κατὰ τὴν ιγ'. τῆς β'.

$\overline{\Psi\Lambda}^2 + \overline{\epsilon\beta}^2 = \overline{\rho\theta}^2 + \overline{\eta\Delta}^2$. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{\Gamma\rho}^2 + \overline{\Upsilon\rho}$. $\overline{\rho\Phi} = 2\overline{\Gamma\Lambda}^2 - \overline{\tau\Gamma}^2$, (ε) ἔστι δὲ τὸ μὲν $\overline{\Upsilon\rho}$. $\overline{\rho\Phi} = \overline{\Gamma\eta}^2$, (ζ) τὸ δὲ $\overline{\Gamma\Lambda}^2 = \overline{\Gamma\phi}^2 + \overline{\Psi\Phi}$. $\overline{\Phi\Lambda}$, (η) τὸ ἄρα $\overline{\Gamma\rho}^2 + \overline{\Gamma\eta}^2 = \overline{\Gamma\Lambda}^2 + \overline{\Gamma\phi}^2 + \overline{\Psi\Phi}$. $\overline{\Phi\Lambda} - \overline{\Upsilon\Gamma}^2$. ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{\Gamma\phi}^2 = \overline{\tau\Gamma}^2$, τὸ δὲ $\overline{\Psi\Phi}$. $\overline{\Phi\Lambda} = \overline{\Gamma\epsilon}^2$. (θ) τὸ ἄρα $\overline{\Gamma\rho}^2 + \overline{\Gamma\eta}^2 = \overline{\Gamma\Lambda}^2 + \overline{\Gamma\epsilon}^2$. διὸ δὴ καὶ τὸ $\overline{\Psi\Lambda}^2 + \overline{\epsilon\beta}^2 = \overline{\rho\theta}^2 + \overline{\eta\Delta}^2$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

Ἐὰν τῇ αὐτῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ δύο γρα-
 φῶσιν Ἑλλείψεις, ὧν ἕξ ἡ αὐτὴ ὀρθία, Ἑλ-
 λειψις, πρὸς Ἑλλειψιν λόγον ἔχει, ὃν ἡ ὀρ-
 θία πλευρὰ τῆς ἐτέρας, πρὸς τὴν μέσσην
 ἀνάλογον τῶν δύο ὀρθιῶν.

Πλαγία μὲν πλευρᾷ τῇ $\Psi\mathbf{N}$, ὀρθία δὲ τῇ $\mathbf{NE}$
 Ἑλλειψις γεγράφθω ἡ $\mathbf{N\Pi\Psi}$. πλαγία δὲ τῇ αὐτῇ,
 καὶ ὀρθία τῇ $\mathbf{NA}$, ἡ $\mathbf{NB\Psi}$. καὶ κείδω ὡς $\mathbf{NE} : \mathbf{PK} ::$
 $\mathbf{PK} : \mathbf{NA}$. λέγω, ὅτι ὡς Ἑλλειψ. $\mathbf{N\Pi\Psi}$, πρὸς Ἑλλειψ.
 $\mathbf{NB\Psi}$, ὅτω $\mathbf{NE} : \mathbf{PK}$ πίν. $\mathbf{K'}$. χ . 5.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον $\Psi\mathbf{N}$ καταχθείσης
 τῆς $\mathbf{B\mathbf{Z}K}$, ἔσεται ὡς $\overline{\mathbf{ZK}}^2 : \overline{\Psi\mathbf{K}} \cdot \mathbf{KN} :: \mathbf{HE} : \Psi\mathbf{N}$. ἔστι
 δὲ καὶ ὡς $\overline{\Psi\mathbf{K}} \cdot \mathbf{KN} : \overline{\mathbf{BK}}^2 :: \Psi\mathbf{N} : \mathbf{NA}$. (ι) ἄρα καὶ δι-
 ἴση, ὡς $\overline{\mathbf{ZK}}^2 : \overline{\mathbf{BK}}^2 :: \mathbf{NE} : \mathbf{NA}$. ἀλλ' ὡς $\mathbf{NE} : \mathbf{NA} :: \overline{\mathbf{NE}}^2 :$
 $\overline{\mathbf{PK}}^2$. (κ) ἔστι γὰρ ὡς $\mathbf{NE} : \mathbf{PK} :: \mathbf{PK} : \mathbf{NA}$. (λ) ὡς ἄρα
 $\overline{\mathbf{ZK}}^2 :$

(ι) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (ζ) Κατὰ τὴν προλ. ιζ. Συνέπ.
 (η) Κατὰ τὴν ε'. τῆς β'. (θ) Ἐκ τῆς Λήμ. τῆς πρὸ τῆς η'.
 Πρὸτ. τῆς δὲ τῆς τμήμ. καὶ τῆς κδ'. ὅρισ. δηλ. (ι) Κατὰ τὴν
 α'. Συνέπ. τῆς α' τῆς δὲ τῆς τμήμ. (κ) Κατὰ τὸ β'. πρὸτ.
 σε ε'. (λ) Ἐξ ἐκείν.

$\overline{ZK}^2 : \overline{BK}^2 :: \overline{NE}^2 : \overline{PK}^2$. (μ) διὸ δὴ καὶ ὡς $ZK : BK :: NE : PK$. (ν) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι πᾶσα τεταγμένη ἢ ἐν τῇ Ἐλλείψει $ΝΠΨ$, πρὸς πᾶσαν τεταγμένην ἐν τῇ $ΝΒΨ$, καὶ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ καμένην, λόγον ἔχει, ὅν ἡ $NE : PK$. καὶ ἡ Ἐλλείψις αἶσα $ΝΠΨ$, πρὸς τὴν Ἐλλείψιν $ΝΒΨ :: NE : PK$.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι τὸ ἐλλειπτικὸν τμήμα $ΝΥΛ$, πρὸς τὸ $ΝΠΛ$ λόγον ἔχει, ὅν ἡ $ΛΥ : ΛΠ$.

Β'. Ἐὰν ἡ $ΝΒΨ$ τμήμα κύκλου ἢ, ἡ Ἐλλείψις $ΝΠΨ$, πρὸς τὸν κύκλον $ΝΒΨ$ λόγον ἔχει, ὅν ἡ δευτέρα διάμετρος $ΘΜ$, πρὸς τὴν πλαγίαν $ΨΝ$. ἔστι γὰρ ὡς $\overline{ZK}^2 : \overline{MG}^2 :: \overline{ΨΚ} : \overline{ΚΝ} : \overline{ΨΓ} : \overline{ΓΝ}$. (ξ) ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{ΨΚ} : \overline{ΚΝ} = \overline{BK}^2$, τὸ δὲ $\overline{ΨΓ} : \overline{ΓΝ} = \overline{HG}^2$. (ο) ὡς αἶσα $\overline{ZK}^2 : \overline{MG}^2 :: \overline{BK}^2 : \overline{HG}^2$. (π) διὸ δὴ καὶ ὡς $ZK : MG :: BK : HG$, (ρ) καὶ ἐναλλάξ ὡς $ZK : BK :: MG : HG$, ἔστι δὲ ὡς $MG : HG :: ΘΜ : ΨΝ$. διὸ καὶ ὡς $ZK : BK :: ΘΜ : ΨΝ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι πᾶσα τεταγμένη ἐν τῇ Ἐλλείψει $ΝΠΨ$, πρὸς πᾶσαν τεταγμένην τὴν ἐν τῷ κύκλῳ $ΝΒΨ$, καὶ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ καμένην λόγον ἔχει, ὅν ἡ $ΘΜ : ΨΝ$. αἶσα καὶ ὡς Ἐλλ. $ΝΠΨ : \text{Κύκλ. } ΝΒΨ :: ΘΜ : ΨΝ$.

Γ'. Ἐὰν ἀπὸ τῶν κέντρων $Γ$ ἐπὶ τὰ $Π$, $Υ$ σημεῖα ἐπιζευχθῶσιν αἱ $ΓΠ$, $ΓΥ$, ἔσται ὁ ἐλλειπτικὸς τομεὺς $ΓΝΠ$, πρὸς τὸν κυκλικὸν τομεῖα $ΓΝΥ$, ὅτι $ΓΜ : ΓΗ$. ἐπεὶ γὰρ ὡς $ΛΝΠ : ΛΝΥ :: ΛΠ : ΛΥ$, (σ) καὶ

(μ) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε' (ν) Κατὰ τὸ ζ'. τῶν τῷ ε'. Οἰκισμὸς (ξ) Κατὰ τὴν α'. τῷ τῷ ε' τῷ τμήμα. (ο) Κατὰ τὴν β'. Σύνθεσις τῆς ἡ. τῷ ε'. (π) Κατὰ τὴν ε'. τῷ ε' (ρ) Κατὰ τὸ ζ'. τῶν τῷ ε'. Σωφ. (σ) Κατὰ τὴν προηλ. α'. Σύνθεσις.

καὶ ὡς ΓΑΠ: ΓΑΥ:: ΛΠ: ΛΥ. (τ) ἄρα καὶ ὡς ΛΝΠ+
ΓΑΠ: ΛΝΥ+ΓΑΥ:: ΛΠ: ΛΥ, (υ) εἴτερον ὡς ΓΝΠ:
ΓΝΥ:: ΛΠ: ΛΥ. ἀλλ' ὡς ΛΠ: ΛΥ:: ΓΜ: ΓΗ. (δειχ-
θήσεται τὸτο καθάπερ δίδεικται ἐν τῇ προλ. συνεπ.
ὅτι ὡς ΖΚ: ΒΚ:: ΜΓ: ΗΓ.) ἄρα καὶ ὡς ΓΝΠ:
ΓΝΥ:: ΓΜ: ΓΗ. (Φ)

Δ'. Ἐάν τό, τε ἡμικύκλιον ΝΗΨ καὶ ἡ ἡμιέλλειψις ΝΜΨ
περὶ τὸν Ἀξονα ΨΝ περιενεχθῇ, ἕως ὅτε ἀποκα-
τασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ σφαιροειδὲς τὸ
ἐκ τῆς ἡμιελλείψεως, πρὸς τὴν σφαῖραν τὴν ἐκ τῆς
ἡμικυκλίας γινομένην λόγον ἔχει, ὅν τὸ τετράγωνον
τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΘΜ, πρὸς τὸ ἀπὸ
τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ τετράγωνον. ἐπεὶ γὰρ
ὡς ΘΜ: ΨΝ:: ΖΚ: ΒΚ, (χ) ἔσεται καὶ ὡς $\overline{\Theta\text{M}}^2$:
 $\overline{\Psi\text{N}}^2$:: $\overline{\text{ZK}}^2$: $\overline{\text{BK}}^2$. (ψ) ἀλλ' ὡς $\overline{\text{ZK}}^2$: $\overline{\text{BK}}^2$, ἔτω κύκ-
λος, ὃ ἡμιδιάμετρος ἡ ΖΚ, πρὸς κύκλον, ὃ ἡμιδιά-
μετρος ἡ ΒΚ. ἄρα καὶ $\overline{\Theta\text{M}}^2$: $\overline{\Psi\text{N}}^2$, ἔτω κύκλος ὃ
ἔχων ἡμιδιάμετρον τὴν ΖΚ, πρὸς κύκλον τὸν ἡμιδι-
άμετρον ἔχοντα τὴν ΒΚ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθή-
σεται, ὅτι πᾶς κύκλος ὃ ἐν τῷ σφαιροειδεῖ, τῷ
ἐκ τῆς ἡμιελλείψεως, πρὸς πᾶν κύκλον τὸν ἐν
τῇ σφαίρᾳ, τῇ ἐκ τῆς ἡμικυκλίας, καὶ ἐπ' εὐθείας
αὐτῷ κείμενον, λόγον ἔχει, ὅν $\overline{\Theta\text{M}}^2$: $\overline{\Psi\text{N}}^2$. καὶ τὸ
σφαιροειδὲς ἄρα τὸ ἐκ τῆς ἡμιελλείψεως, πρὸς τὴν
σφαῖραν τὴν ἐκ τῆς ἡμικυκλίας λόγον ἔχει, ὅν τ' $\overline{\Theta\text{M}}^2$:
 $\overline{\Psi\text{N}}^2$, ἢ ὅν τὸ $\overline{\text{M}\Gamma}^2$: $\overline{\text{H}\Gamma}^2$.

Ε'. Αἱ Ἐλλείψεις λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὅν τὰ
ὀρθογώνια τὰ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς
Π δευ-

(τ) Κατὰ τὴν α'. τῆ ε'. (υ) Ἐκ τῆς ιδ'. τῆ ε'. δῶλον. (Φ) Κα-
τὰ τὴν ἀρῆμ. ε'. (χ) Ὅρα τὴν προλμβ. β'. Συνέπ. (ψ) Κα-
τὰ τὸ ἀρῆμ. ζ'. Θίμρ.

δευτέρας Διαμέτρου περιεχόμενα. ἔστωσαν γάρ Ἑλλάψαι αἱ ΑΒΨ, αβψ, (πίν. ΚΔ'. χ. 3, 4.) ὧν πλαγίαι μὲν πλευραί αἱ ΑΨ, αψ, δευτέραι δὲ Διαμέτροι αἱ ΔΒ, δβ. λέγω, ὅτι ὡς ΑΒΨ : αβψ :: ΑΨ : ΔΒ : αψ. δβ. γεγραφθώσαν γὰρ ἐπὶ τῶν ΑΨ, αψ, ἡμικύκλια τὰ ΑΚΨ, ακψ. καὶ ἐκβληθῶσαι αἱ ΔΒ, δβ, συμβαλέτωσαν ταῖς περιφερείαις κατὰ τὰ Κ, κ σημεῖα. καὶ ἐπὶ ὡς ΑΒΨ : ΑΚΨ :: ΔΒ : ΑΨ, (ω) καὶ ὡς ΔΒ : ΑΨ :: ΔΒ. ΑΨ : ΑΨ², (α) ἄρα ΑΒΨ : ΑΚΨ :: ΔΒ. ΑΨ : ΑΨ², (β) καὶ ἐναλλάξ ὡς ΑΒΨ : ΔΒ. ΑΨ :: ΑΚΨ : ΑΨ². διὰ τὰ αὐτὰ δὲ διαχθήσεται, ὅτι ὡς αβψ : δβ. αψ :: ακψ : αψ². ἄλλ' ὡς ΑΚΨ : ΑΨ² :: ακψ : αψ². (γ) ἄρα καὶ ὡς ΑΒΨ : ΔΒ. ΑΨ :: αβψ : δβ. αψ, (δ) καὶ ἐναλλάξ, ὡς ΑΒΨ : αβψ :: ΔΒ. ΑΨ : δβ. αψ.

Περὶ τῆς ἐν τοῖς ὀπτικοῖς χρήσεως τῶν τῆς Ἑλλάψεως συμπτωμάτων.

Α'. Ἐὰν ἐκ μετάλλου κατασκευασθῇ σφαιρὸν ἐξ Ἑλλάψεως γινόμενον, καὶ μέρος μὲν αὐτοῦ ἀποτομήντος, τὸ λοιπὸν γλυφέν, κοῖλον γένηται, αἱ τῷ φωτὸς ἀκτῖνες τῷ ἐπὶ τῆς ἐτέρας τῶν Ἑσιῶν Τ (πίν. ΚΒ'. χ. 2.) τεθέντος, αἱ τῇ κοίλῃ ἐλλειπτικῇ ἐπιφανείᾳ προσπίπτουσαι, μετὰ τὴν ἀνάκλασιν τῇ ἐτέρᾳ τῶν Ἑσιῶν Φ συμβαλέσας συλλεχθήσονται. προσπίπτέτω γὰρ ἀπὸ τῷ ἐν τῷ Τ φωτὸς πρὸς τὴν ἐλλειπτικὴν κοίλην ἐπιφάνειαν ΔΜ ἡ ἀκτίς ΤΜ. καὶ ἡχθῶ

(ω) Κατὰ τὴν προλ. α'. Συνίπ. (α) Κατὰ τὴν α'. τῆ ε' (β) Κατὰ τὴν ε'. τῆ ε'. (γ) Κατὰ τὴν ε'. τῆ εβ'. (δ) Κατὰ τὴν εβ'. ε.

ἡ ἱφαπτομένη ΒΜΧ. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς πτώσεως γωνία ἴση τῇ τῆς ἀνακλάσεως, ὡς ἐκ τῆς πείρας δῆλον· ἔστι δὲ γωνία τῆς πτώσεως ἡ ΥΜΒ, ἴση δὲ αὐτῇ ἡ τῆς ἀνακλάσεως ΦΜΧ, (ε) ἡ ἄρα ΥΜ ἀνακλαδιῶσα, τὴν τῆς ΜΦ Φορὰν φερομένην ἐπὶ τὸ Φ πίπτει. αἱ γὰρ ἀλλοθίπτε πύση, ἡ τῆς πτώσεως γωνία ΥΜΒ, ἐκ ἀν ἴση γένοιτο τῇ τῆς ἀνακλάσεως ΦΜΧ. ὁμοίως δὲ δευχθήσεται, ὅτι παῖσαι αἱ ἀκτῖνες, αἱ ἀπὸ τῆ ἐν τῷ Υ φωτὸς τῇ κοίλῃ ἐλλειπτικῇ ἐπιφανείᾳ προσπίπτουσαι, κατὰ τὸ Φ μετὰ τὴν ἀνάκλασιν συμπεσόνται. τέμπαλιν δὲ, εἰὰν τὸ φῶς ἐπὶ τὸ Φ τεθῇ, αἱ προσπεσούσαι καὶ ἀνακλαδιῶσαι ἀκτῖνες ἐν τῷ Υ συλλεχθήσονται. ἐκ τέτων δὲ δῆλον, ὅτι ἐν τοῖς Φ, καὶ Υ σημείοις μεγίστη τῆς τῆ φωτὸς δυνάμεως ἡ ἐπίτασις.

Ἐὰν δὲ τὸ ἐξ Ἑλλάψεως γινόμενον σφαιρὸν ὑέλινον ᾗ, ὅσαι τῆ φωτὸς ἀκτῖνες τῇ κυρτῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ ἔτω προσπίπτουσιν, ὥστε μετὰ τὴν ἀνάκλασιν Φορὰν φέρεσθαι τὴν ἐπὶ τὴν ἐτέραν τῶν Ἑσίων Φ, διὰ τῆς ἐλλειπτικῆς ὑέλε διῖσσαι, κατὰ τὴν ἐτέραν Ἑσίαν Υ ἀλλήλαις συμπίπτειν. προσπίπτέτω γὰρ τῷ ἐλλειπτικῷ κυρτῷ ἡ ΖΜ ἔτως, ὥστε μετὰ τὴν ἀνάκλασιν τὴν ΣΜΦ Φορὰν φέρεσθαι. λέγω δὲ, ὅτι ἡ ΖΜ διὰ τῆς ὑέλε διῖσσαι, ἐπὶ τὸ Υ πίπτει. ἐπεὶ γὰρ δεῖ τὴν κατὰ πῶσιν γωνίαν ΖΜΧ τῇ κατὰ ἀνάκλασιν ΣΜΒ ἴσην εἶναι· ἴση δὲ γίνεται, εἰὰν ἡ ΖΜ ἐκβληθῇσιν ἐπὶ τὸ Υ πέσῃ (ἐπεὶ γὰρ ἡ ΦΜΧ = ΥΜΒ, ἔστι δὲ ἡ μὲν ΦΜΧ = ΣΜΒ, ἡ δὲ ΥΜΒ = ΖΜΧ, ἄρα καὶ ἡ ΖΜΧ = ΣΜΒ) ἡ ἄρα ΖΜ διὰ τῆς ὑέλε διελθῶσα ἐπὶ τὸ Υ πίπτει. τὸ αὐτὸ δὲ

Π 2

ρή.

(ε) Κατὰ τὴν γ'. τῆ δὲ τῆ τμήμ.

ρητέον καὶ περὶ τῶν ἄλλων ἀκτίνων τῶν ὁμοίως τῇ
ΛΜ τῷ ἐλλειπτικῷ περισσιπτέσων κυρτῷ.

Γ'. Ἐάν η̅ περισσιπτέσῃ ἀκτὶς ΛΜ (χ. 3.) παράλλη-
λος ἢ τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ ΨΑ τῆς ἐλλειπτικῆς ὑελίνης
Φακῆς, ἔνθεν δὲ εἰσιῶσα μετὰ τὴν Θλαῖσιν ἐπὶ τὴν
ἐτέραν τῷ Ἐσιῶν Υ̅ πέσῃ, ὡς ἡ ΜΥ, καὶ ἀχθῇ
ἀπὸ τῆς Μ ἢ ΡΜΕ πρὸς ὁρθὰς μὲν τῇ ΛΜ, συμ-
βάλλουσα δὲ τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ κατὰ τὸ Ε, τὸ
ἡμίτονον τῆς κατὰ πτωσιν γωνίας ΡΜΑ, πρὸς τὸ
ἡμίτονον τῆς κατὰ Θλαῖσιν ΥΜΕ λόγον ἔχει ὅν ἡ
ΥΜ, πρὸς τὴν ΥΕ, εἴτεν ὅν ἡ Θλαδεῖσα ἀκτὶς,
πρὸς τὸ ἀπολαμβάνομενον ἀπὸ τῆς καθ' ἑτέρας
τῆς ΨΑ πρὸς τῇ Ἐσίᾳ Υ̅. ἐστὶ μὲν γάρ ἡ μὲν ΡΜΑ =
ΡΕΑ. (ζ) ἑκατέρω δὲ τῶν ΡΕΑ, ΡΕΥ τὸ αὐτὸ ἔχει
ἡμίτονον. (η) τὸ δὲ ἡμίτονον τῆς ΜΕΥ, πρὸς τὸ
ἡμίτονον τῆς ΥΜΕ λόγον ἔχει ὅν ΥΜ : ΥΕ. (θ)
οὗ δὴ τὸ ἡμίτονον τῆς κατὰ πτωσιν γωνίας, πρὸς
τὸ ἡμίτονον τῆς κατὰ Θλαῖσιν λόγον ἔχει, ὅν ΥΜ :
ΥΕ

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὸ ἡμίτονον τῆς κατὰ πτωσιν γωνίας, πρὸς τὸ ἡ-
μίτονον τῆς κατὰ Θλαῖσιν τῆς ἀκτίνος τῆς ἀπὸ τῆς
ἀέρος εἰς τὴν ὑελὸν εἰσιῶσης λόγον ἔχει, ὅν ὁ 3 :
2, ὡς ἡ πᾶσα δεικνύσι. διὸ ὑελίνης ἔσης τῆς ἐλλει-
πτικῆς Φακῆς, καὶ τῆς ἀκτίνος ἀπὸ τῆς ἀέρος εἰς
αὐτὴν εἰσιῶσης, ἐστὶν ὡς ΥΜ : ΥΕ :: 3 : 2. ἐπεὶ δὲ ὡς
ΥΜ : ΥΕ, ὅτως ἡ πλαγία πλευρὰ ΨΑ, πρὸς τὸ
τῶν Ἐσιῶν ἀπόστημα ΥΦ, (ι) ἔσται καὶ ὡς ΨΑ : ΥΦ ::
3 : 2. Δ.

(ζ) Κατὰ τὴν κθ'. π. 4. (η) Κατὰ τὴν β'. ὁρισ. τῆς Τριγωνομ.

(θ) Κατὰ τὸ δ'. Θεώρ. τῆς αὐτ. Τριγωνομ. (ι) Κατὰ τὴν
δ'. Συνέπ. τῆς δ'. τῇ δὲ τῇ τμήμα.

ΠΕΡΙ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ.

Δ'. Διθέντες τὴν λόγος ὃν ἔχει ἡ πλαγία πλευρὰ ἔλλειψως πρὸς τὸ τῶν Ἑσίων αὐτῆς ἀπόστημα, καὶ κειμένε τὴν λόγος τέττε εἶναι ὡς 3: 2, κατασκευάζεται ἑλλειπτική ὑελίνη φακὴ, πρὸς ἣν πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι τῷ φωτὸς ἀκτῖνες παράλληλοι τῷ Ἀξονι αὐτῆς, ἐπὶ τὴν ἑτέραν τῶν Ἑσίων μετὰ τὴν ἐνδὸν θλασιν συμπεσόνται. ἵπαι γὰρ ὡς $\Psi A: \Upsilon \Phi :: 3: 2$, ἔστι δὲ ὡς $\Psi A: \Upsilon \Phi :: \Upsilon \Phi$, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, καὶ ἣν ἡ πλαγία πλευρὰ ΨA τὴν ὀρθίαν ὑπερέχει, (κ) ἔσεται ἄρα ἡ ῥηθῆσα ὑπεροχὴ ἴση $\frac{4}{3}$. ἔκδεν κειμένε τὴν $\Psi A = 3$, ἔσεται ἡ ὀρθία πλευρὰ ἴση $3 - \frac{4}{3}$, ἔστιν ἴση $\frac{5}{3}$. εἰν ἔν πλαγία μὲν πλευρᾷ τῇ $\Psi A = 3$, ὀρθία δὲ ἴση $\frac{5}{3}$, Ἐλλειψις γραφῇ ἡ $\Psi M A$, περὶ δὲ τὸν ΨA Ἀξονα περιεγεγῆσα, ἕως ὅτε ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, σερεὸν ποιήσῃ, ἡ ὁμοία καὶ ἴση αὐτῷ κατασκευασθῆσα ὑελίνη φακὴ ἔσται ἡ ζητούμενη.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον ὅτι, εἰν αἱ τῷ φωτὸς ἀκτῖνες μετὰ τὴν ἐν τῷ M θλασιν τῆς ὑέλως ἐξέλθωσιν, ἐκέτι ἐπὶ τὴν Ἑσίαν Υ φέρονται. θλαῶνται γὰρ πάλιν ἀπὸ τῆς ὑέλως εἰς τὸν ἀέρα εἰσιδσαι. ἵνα ἔν μὴ αὐθις θλασθῶσι, σφαιρικόκοilon ὑελινον σερεὸν ὑπὸ τὸ κυρτὸν $M A$ τῆς ἑλλειπτι.

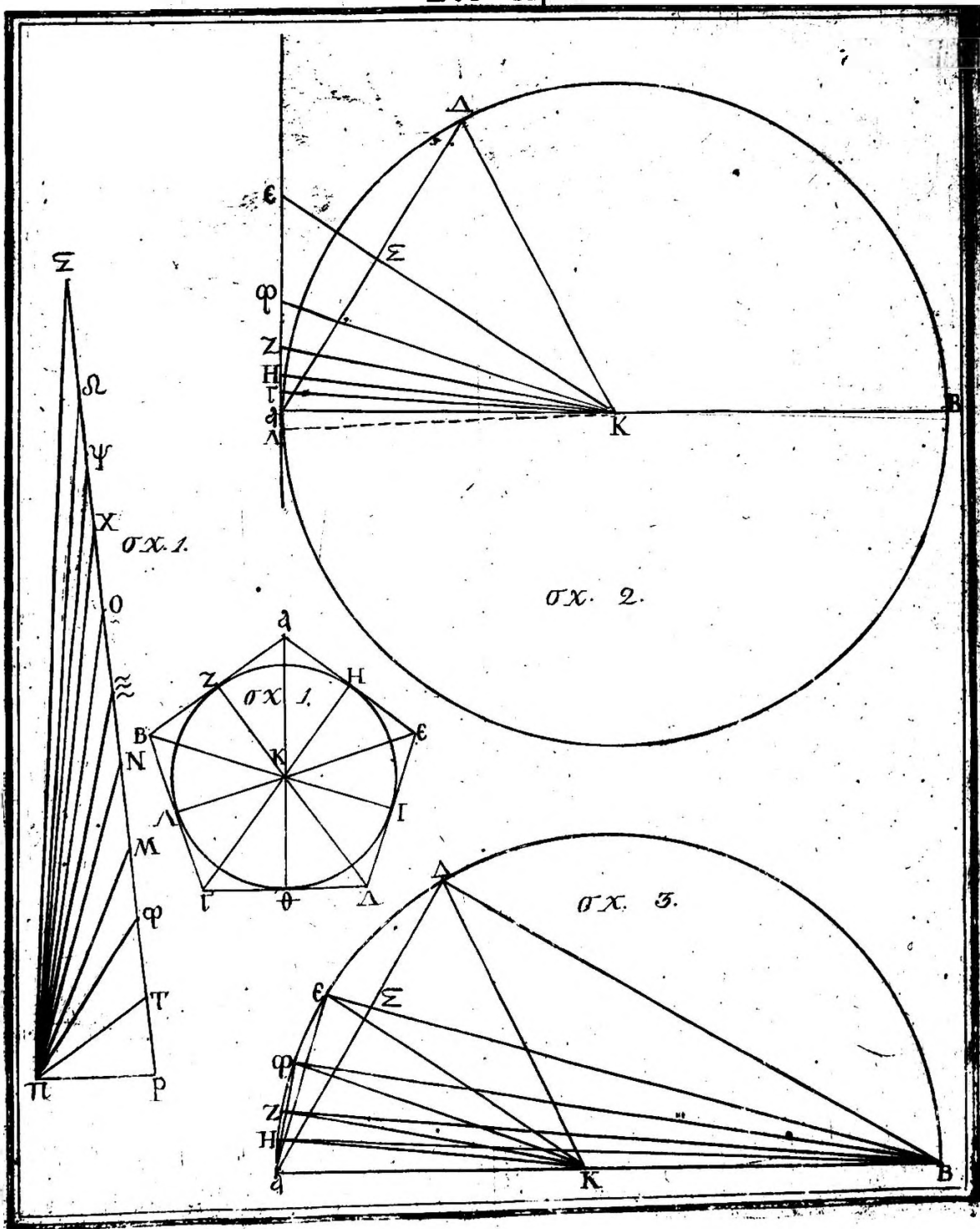
(κ) Κατὰ τὴν 11. Συνίπ. τῆς αὐτ.

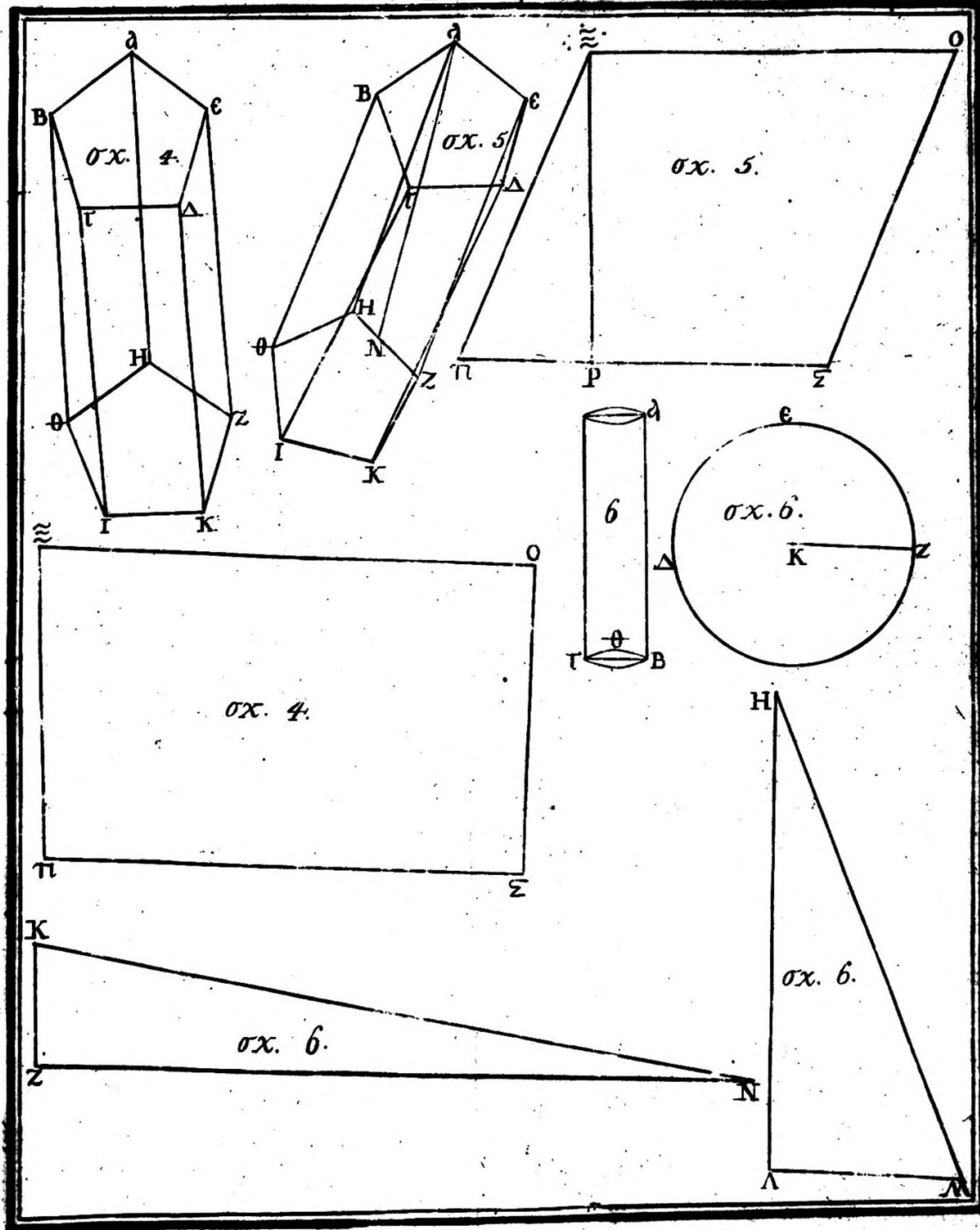
ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ ΠΕΡΙ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ.

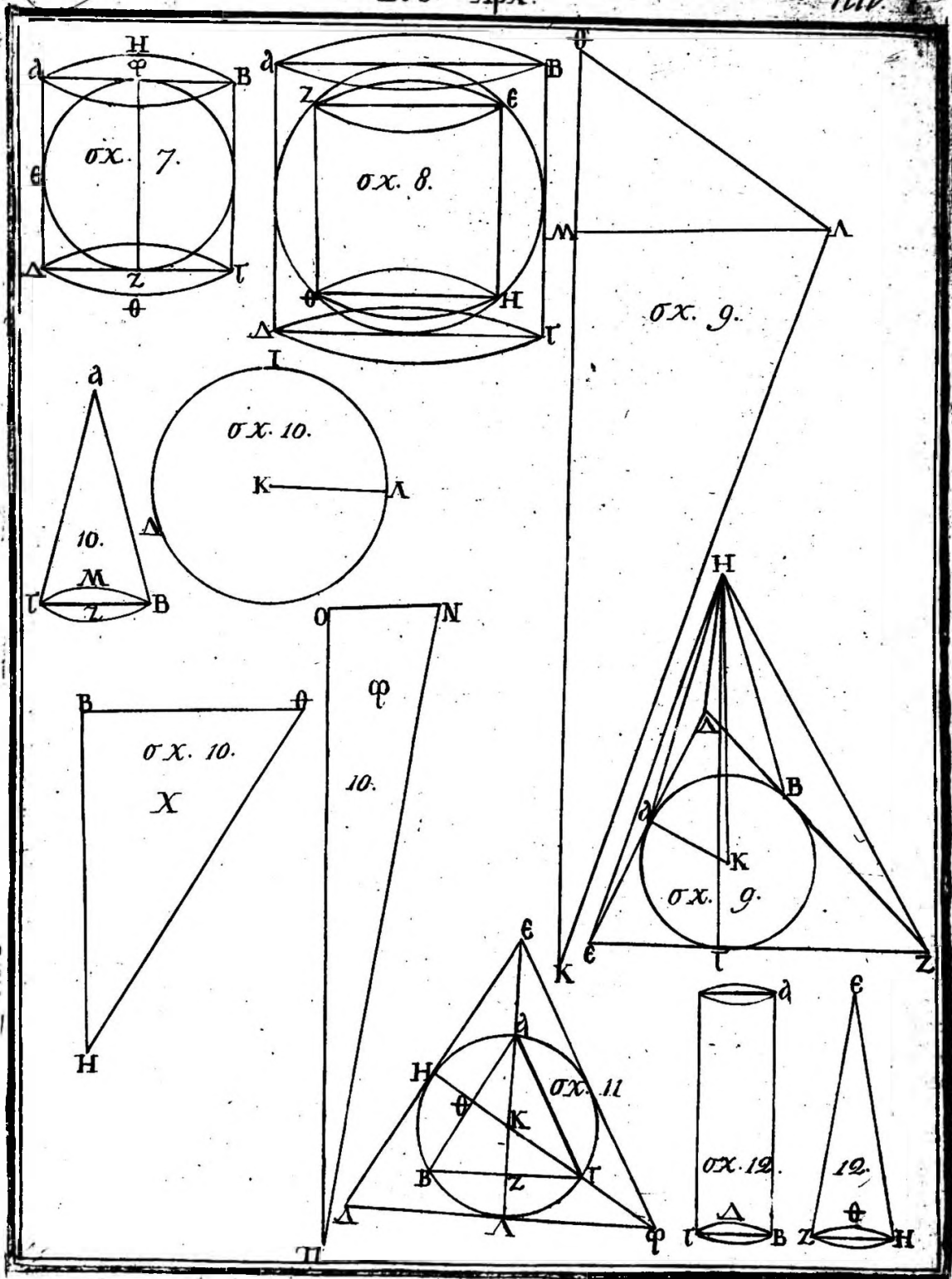
πτικῆς φακῆς ἐφαρμόζουσι, κέντρον ἔχον αὐτὸ τὸ Υ.
ἔτω μὲν γὰρ αἱ μετὰ τὴν ἐν τῷ Μ θλαῖσιν αὐτῆς
ἐπὶ τὸ Υ φερόμεναι, πρὸς ὁρθὰς τῇ σφαιρικοκλίᾳ
ἐμφανείᾳ προσβάλλουσαι, ἑδεμίαν πᾶνθου θλαῖσιν.

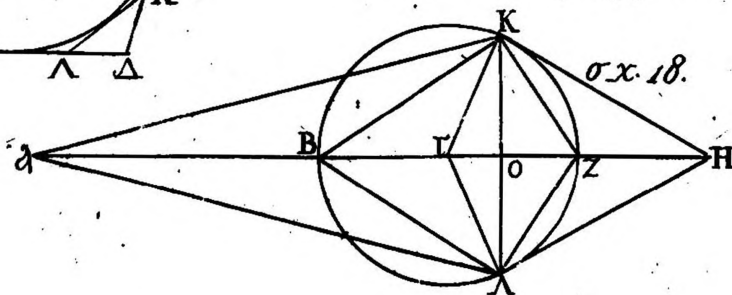
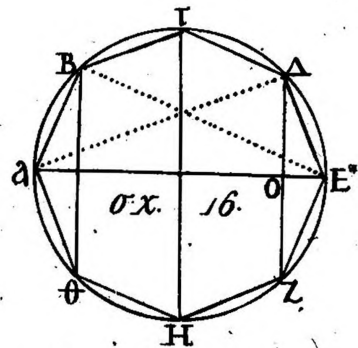
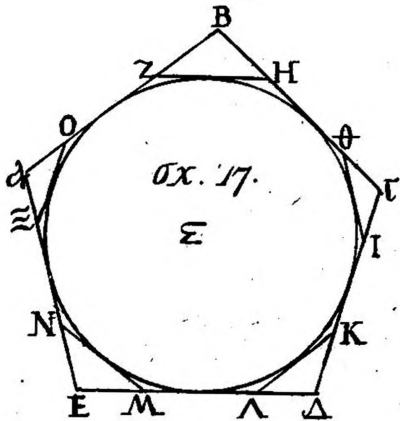
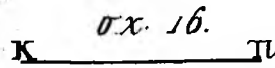
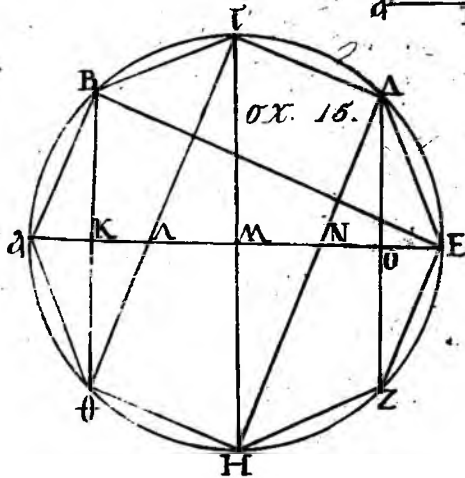
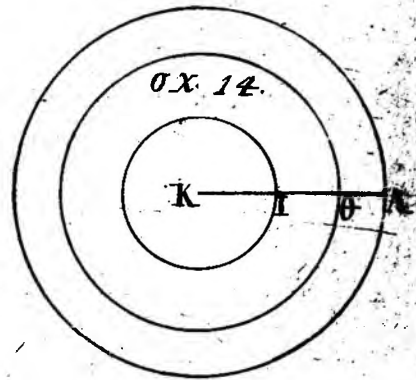
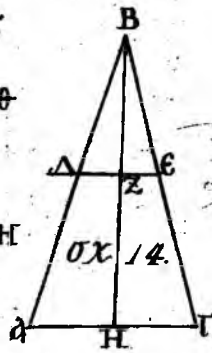
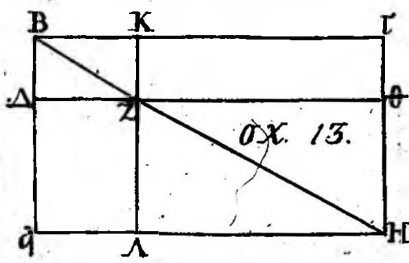
Τ Ε Λ Ο Σ.

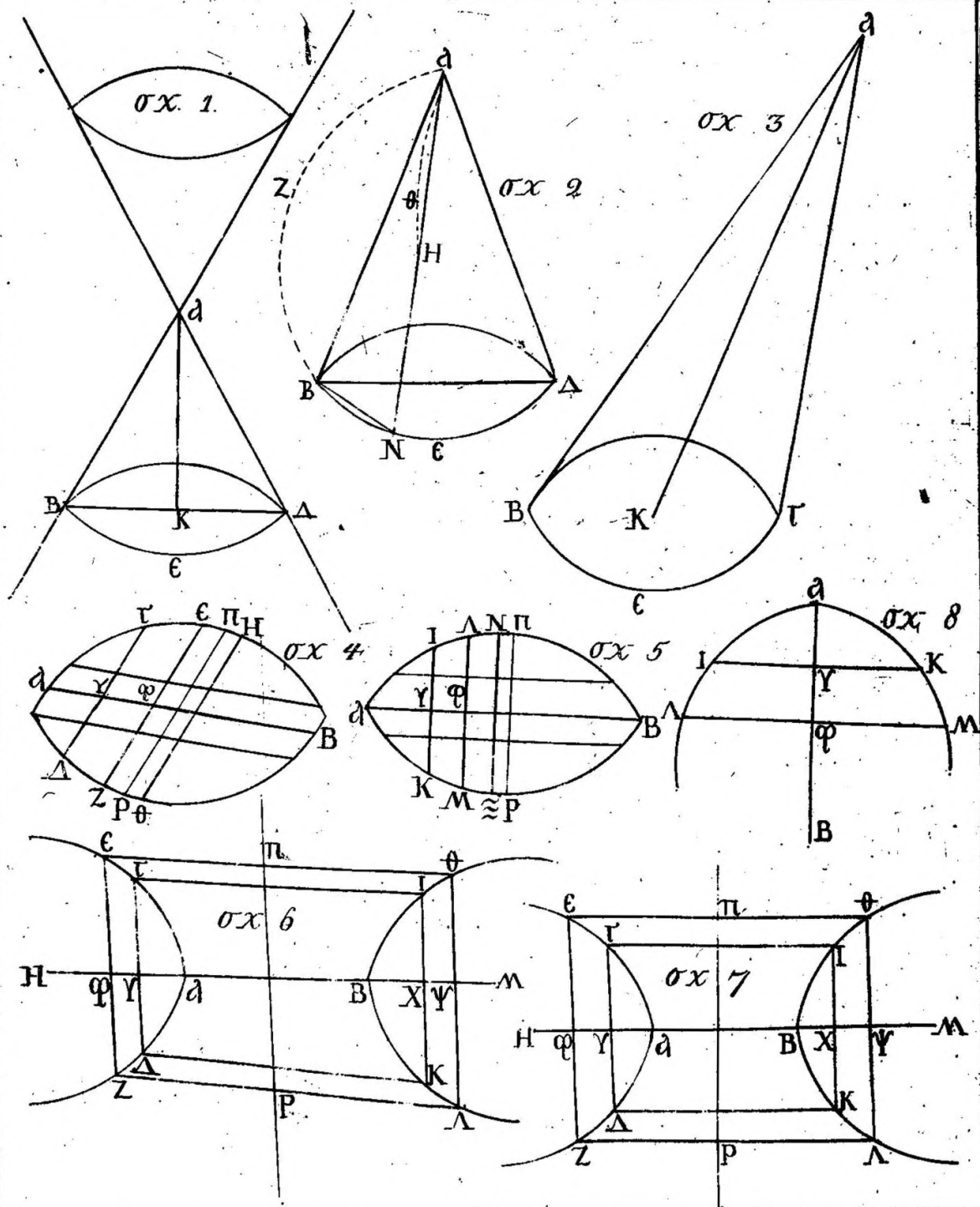


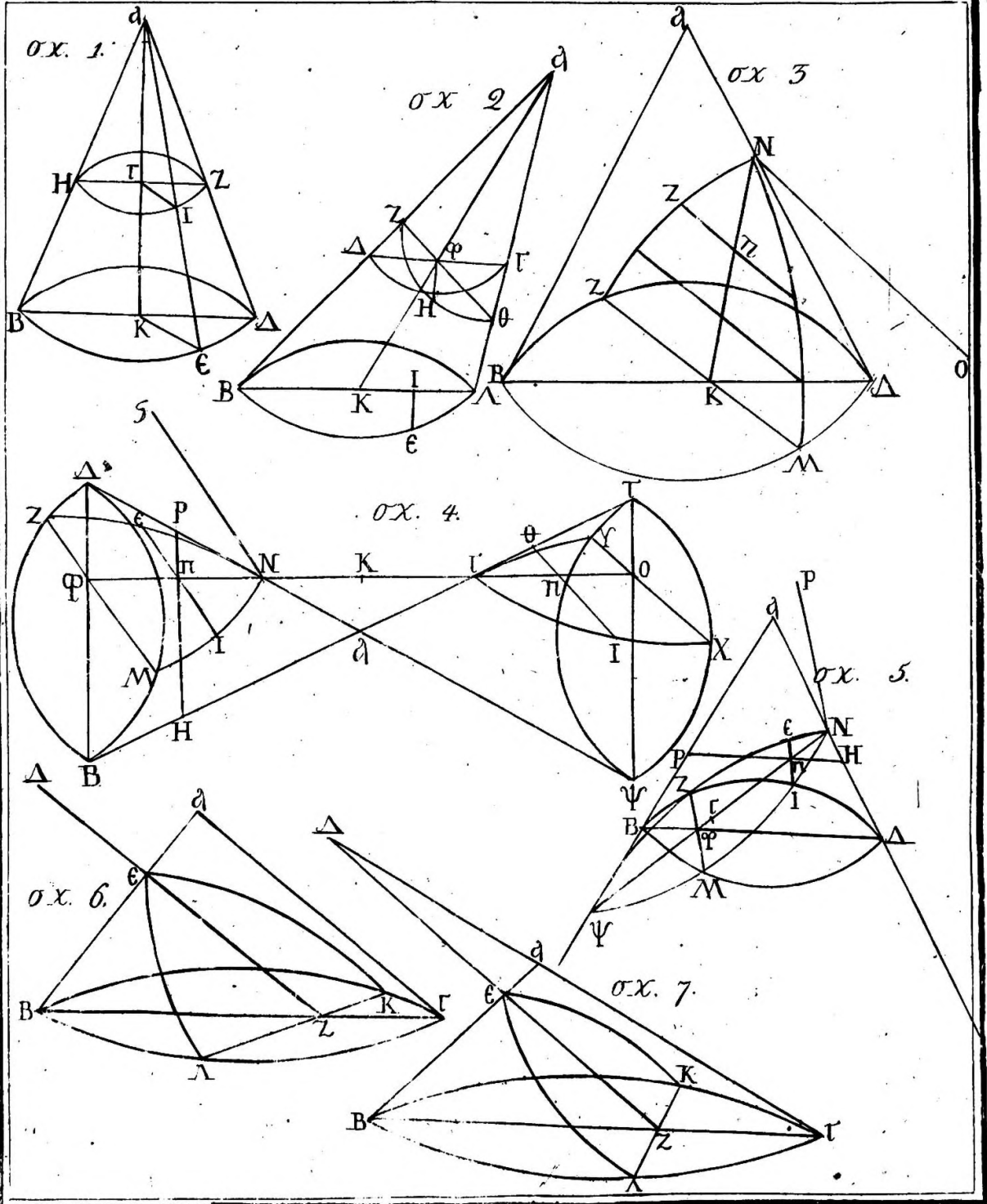


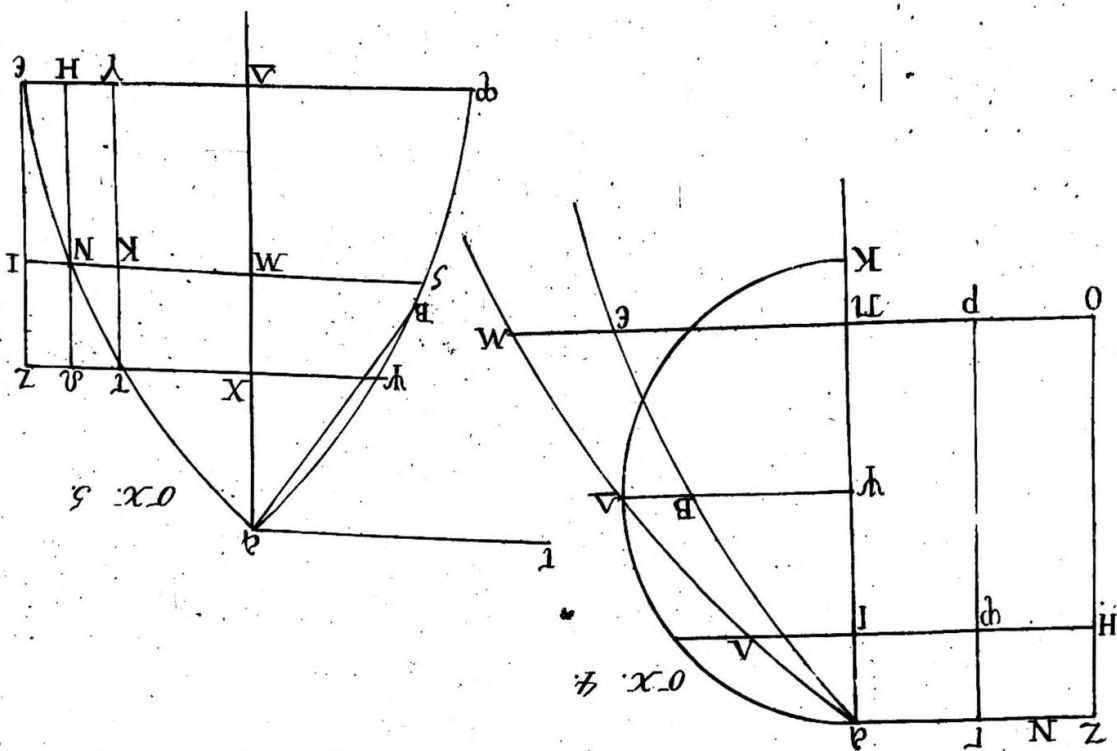
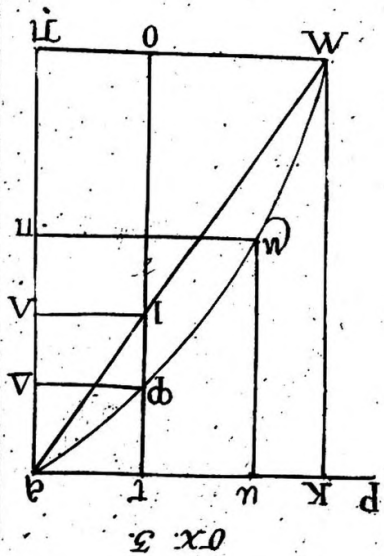
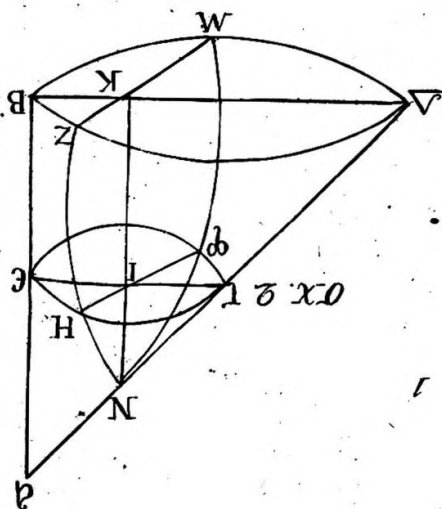
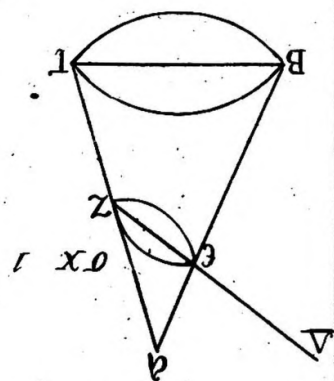


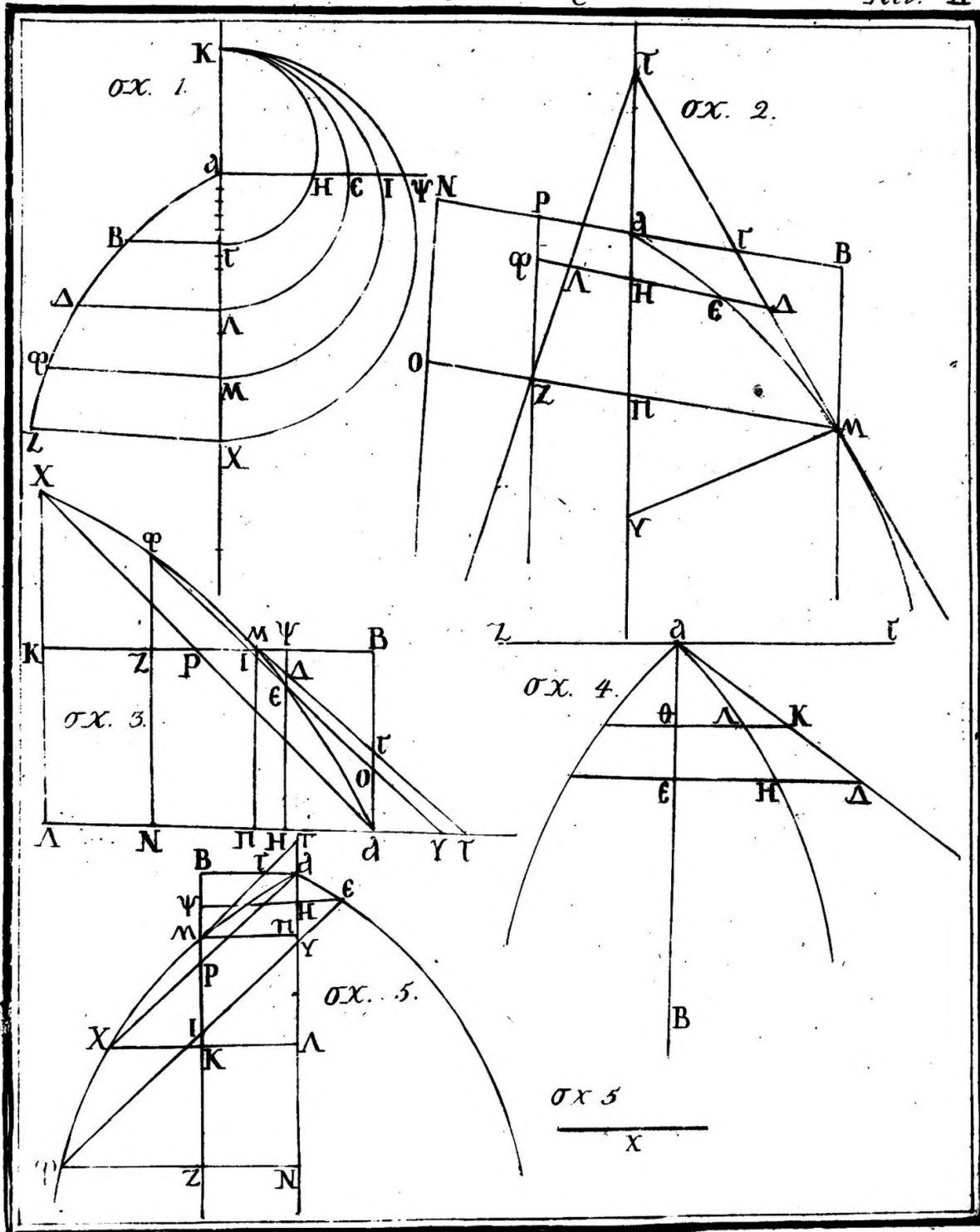


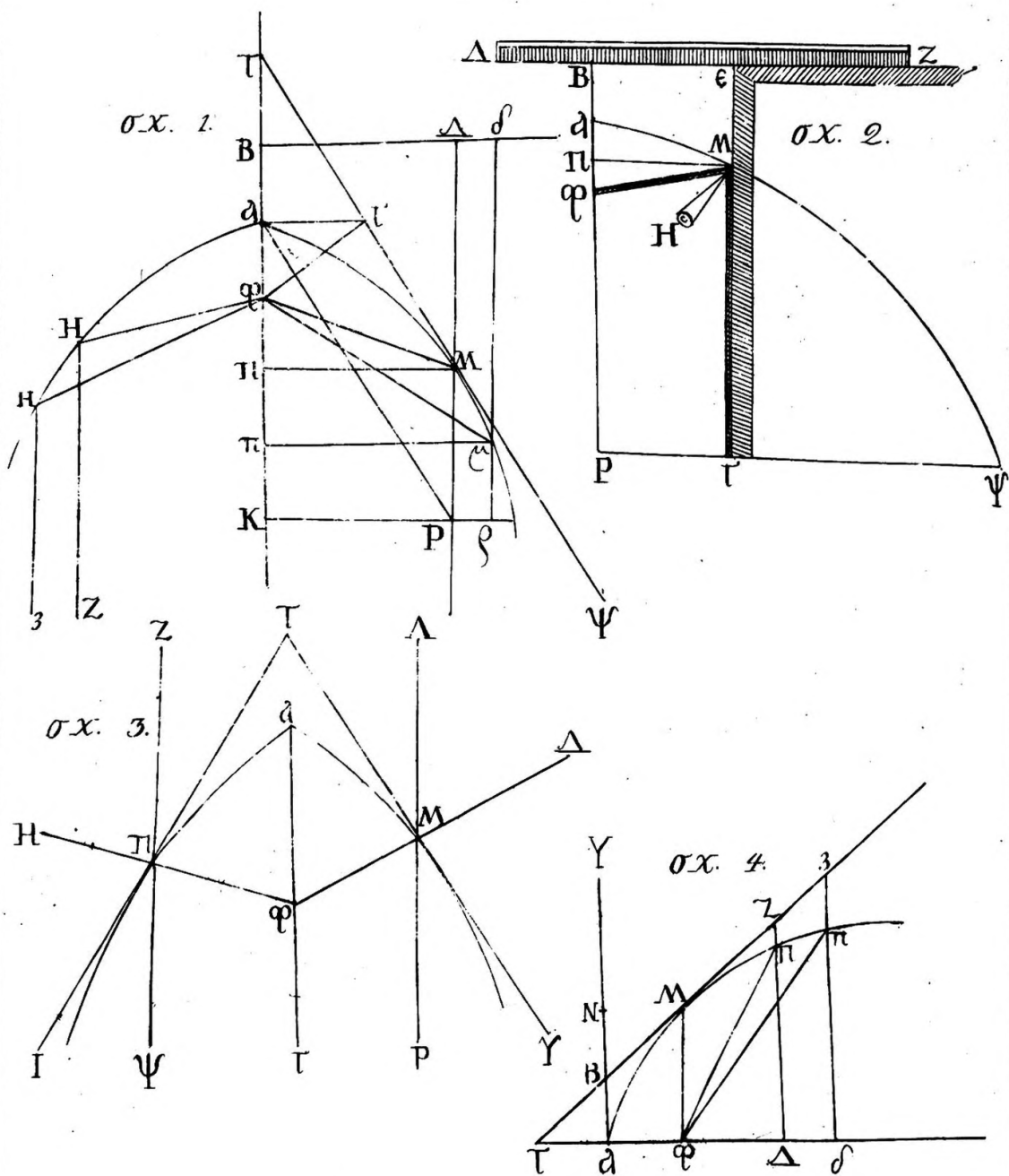


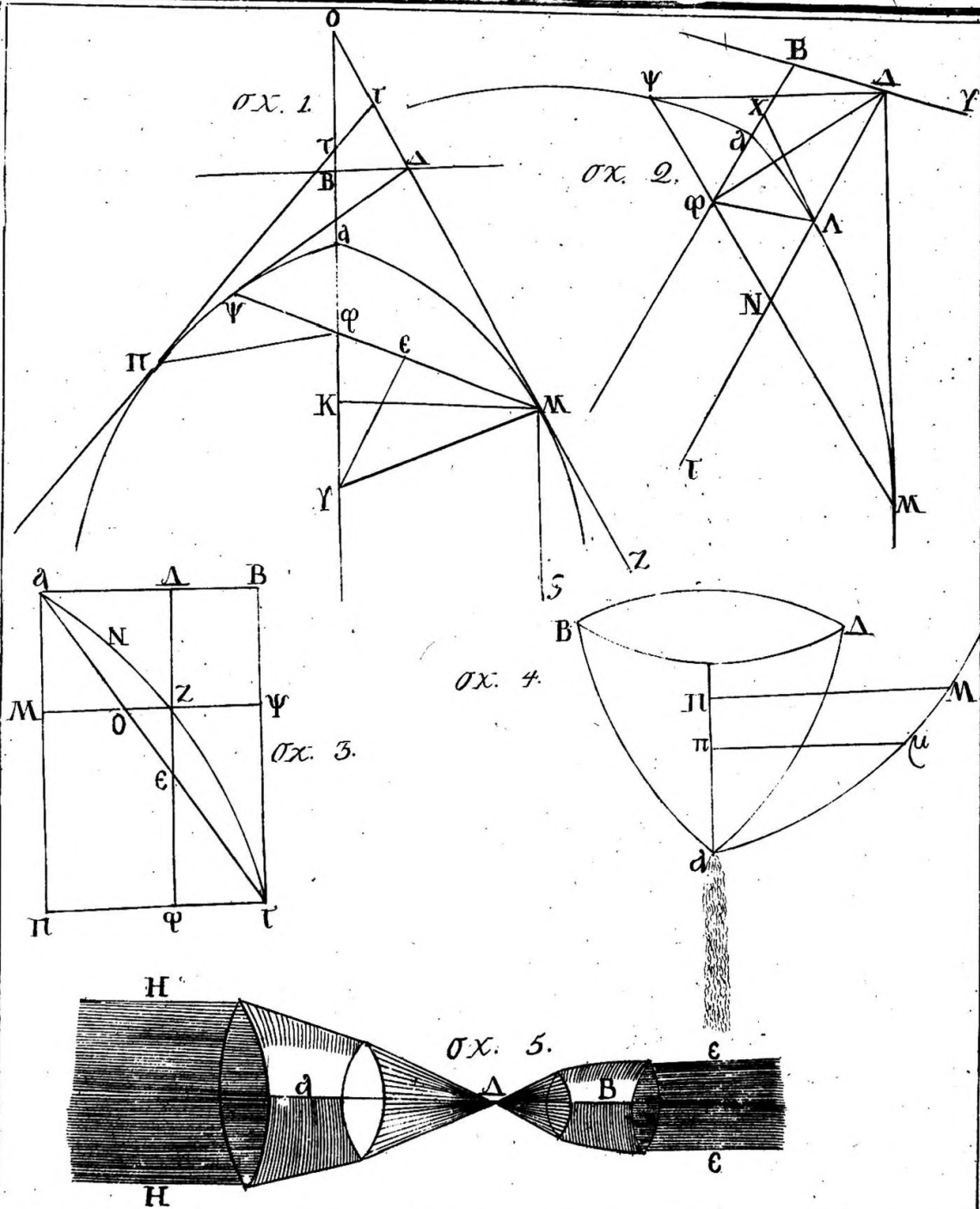




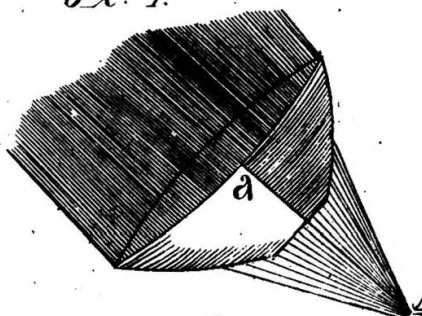




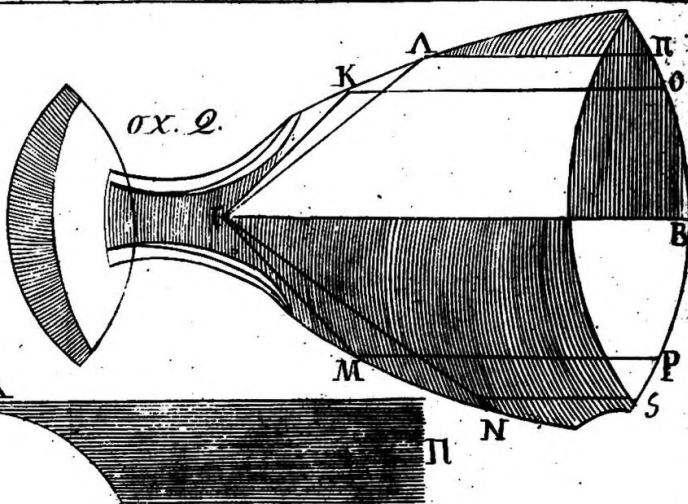




σχ. 1.



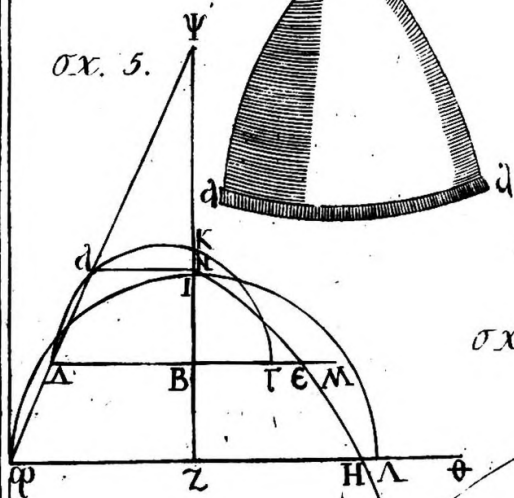
σχ. 2.



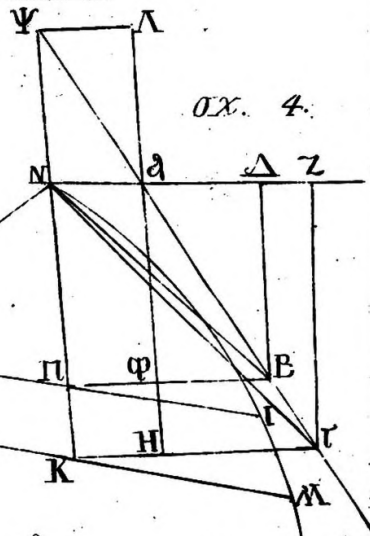
σχ. 3.



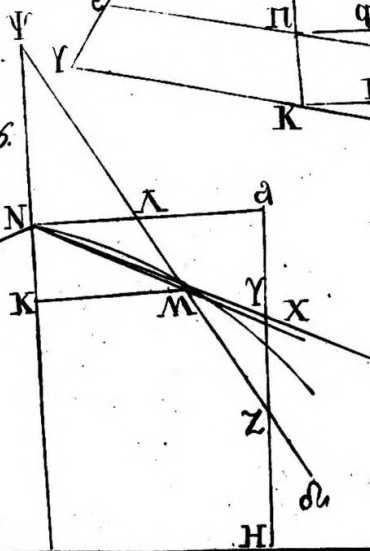
σχ. 5.

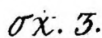
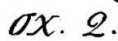
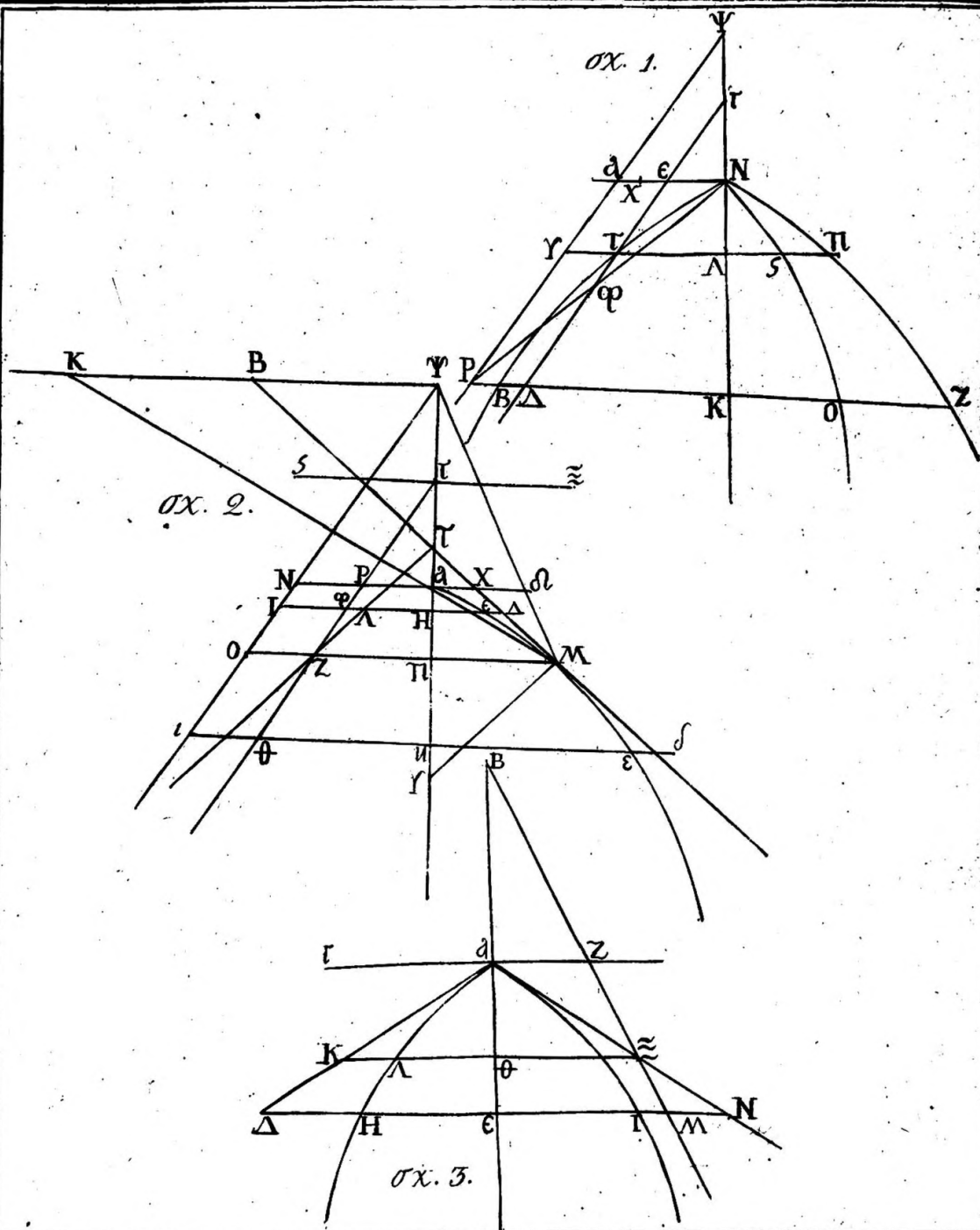


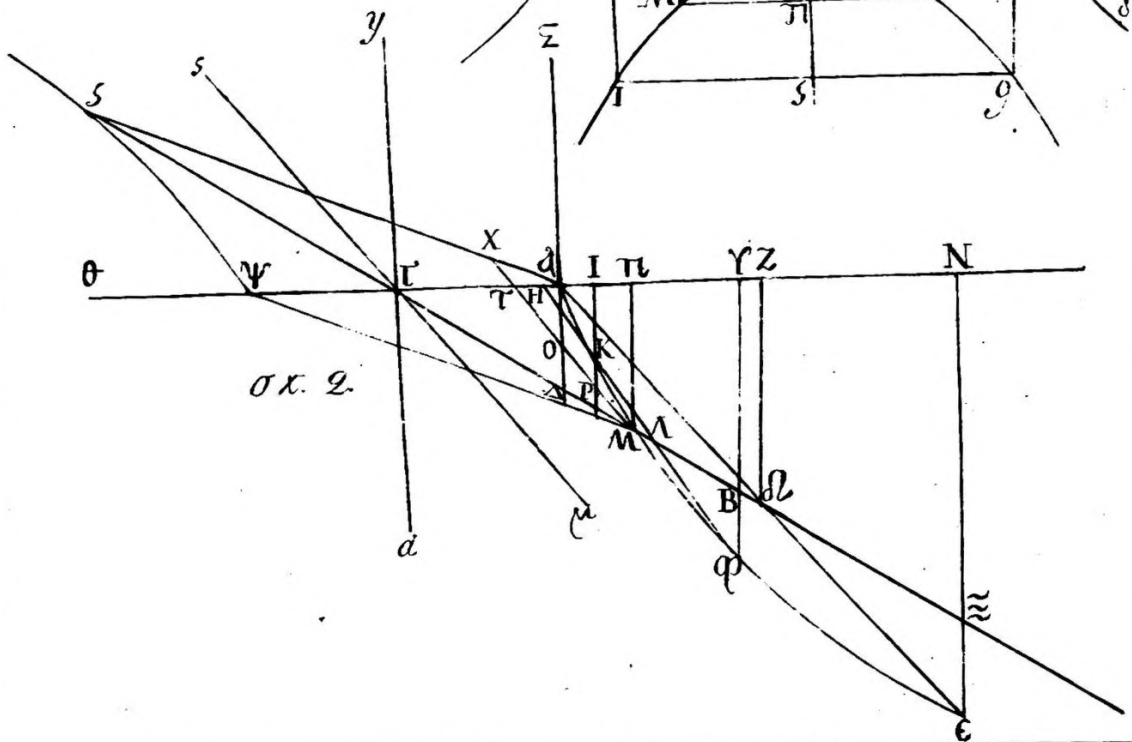
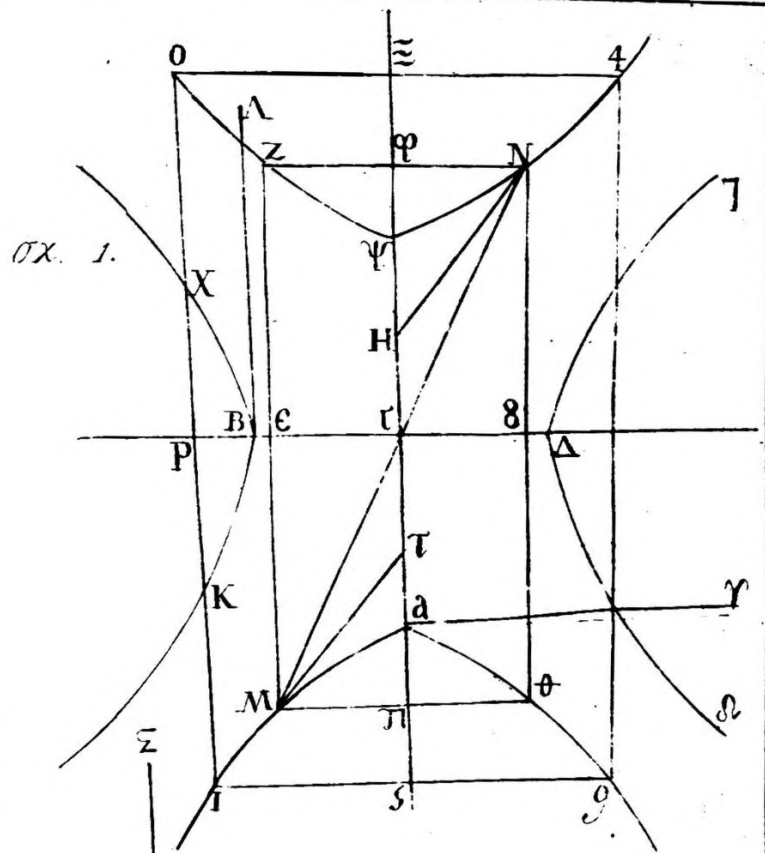
σχ. 4.

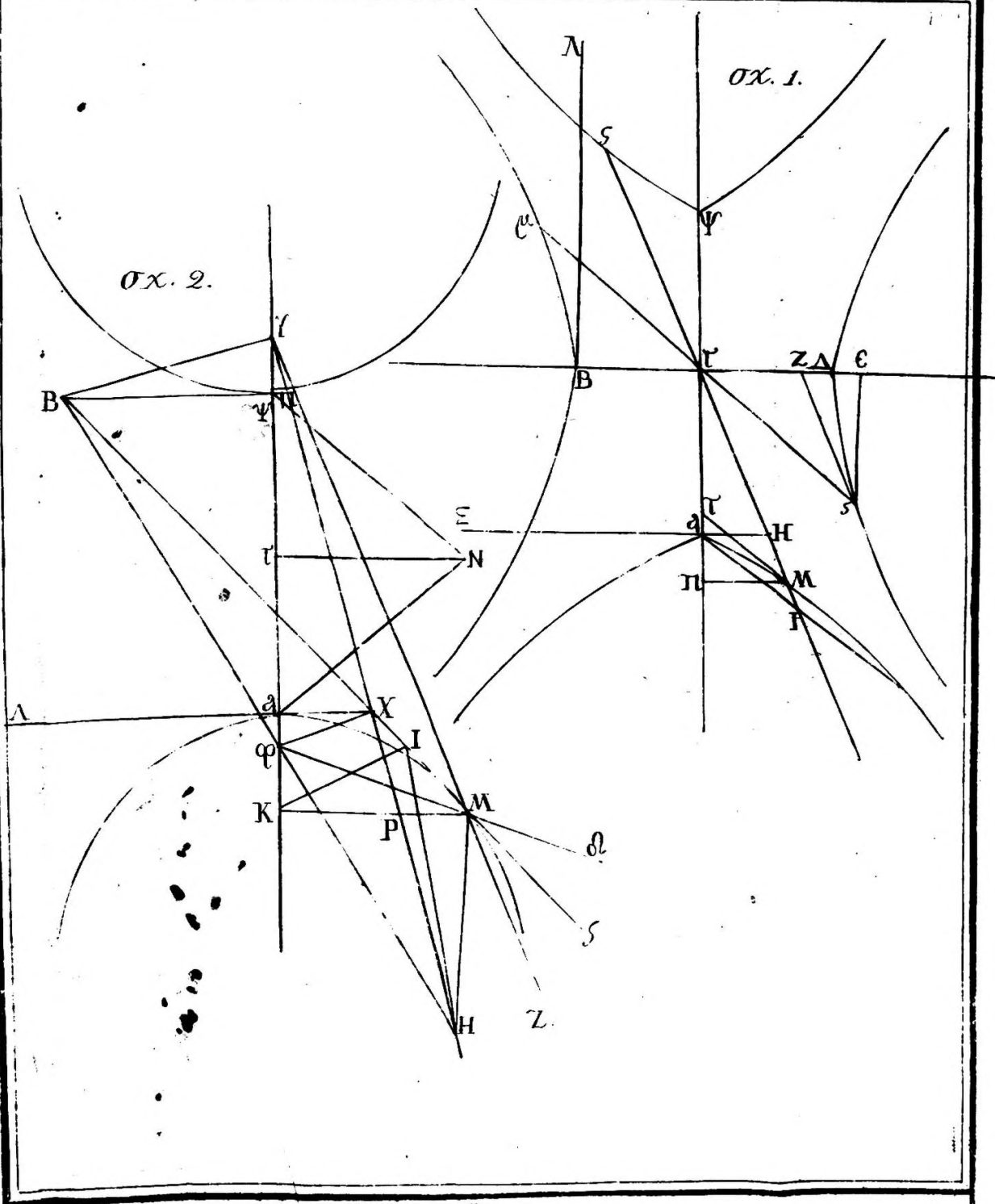


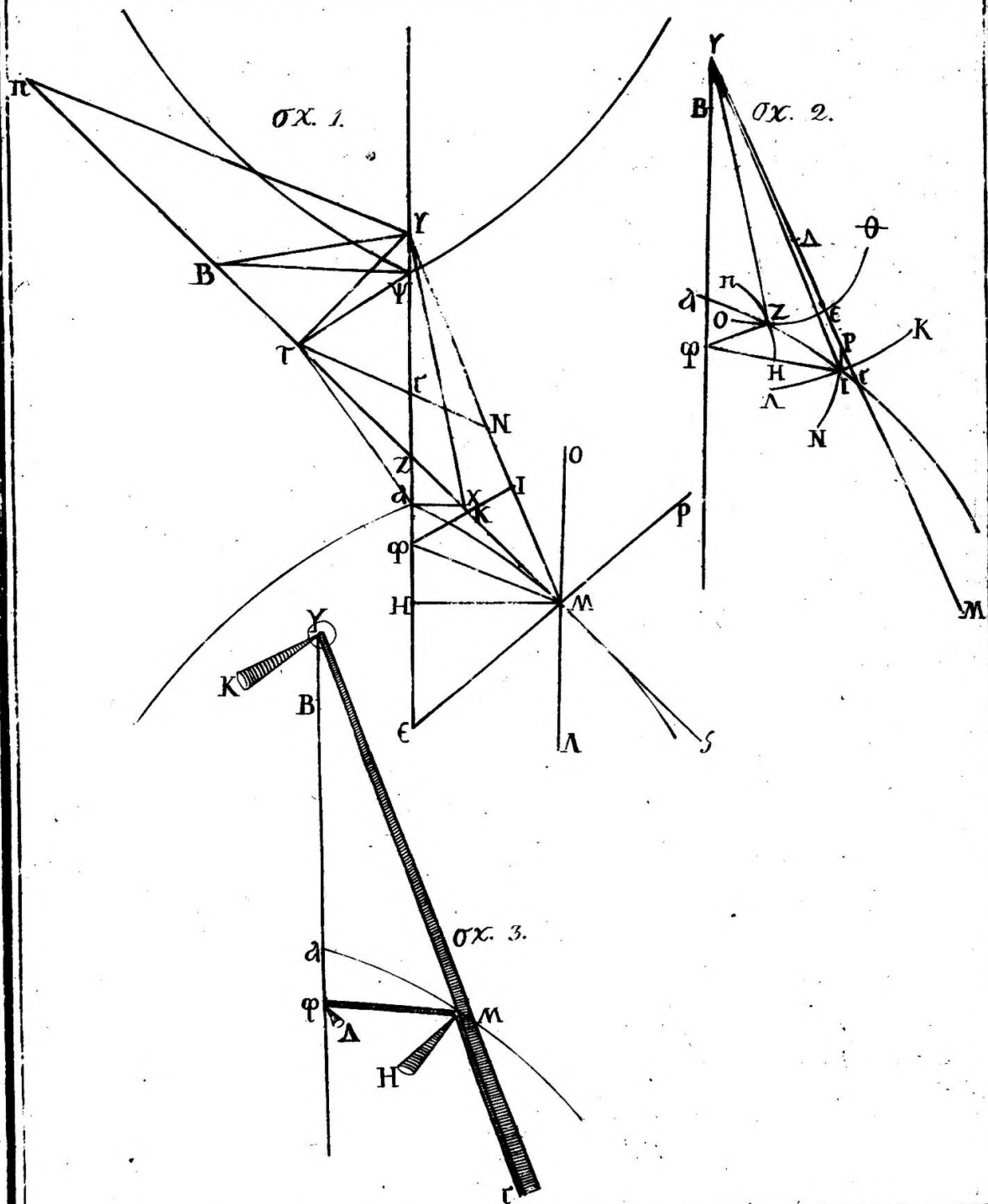
σχ. 6.

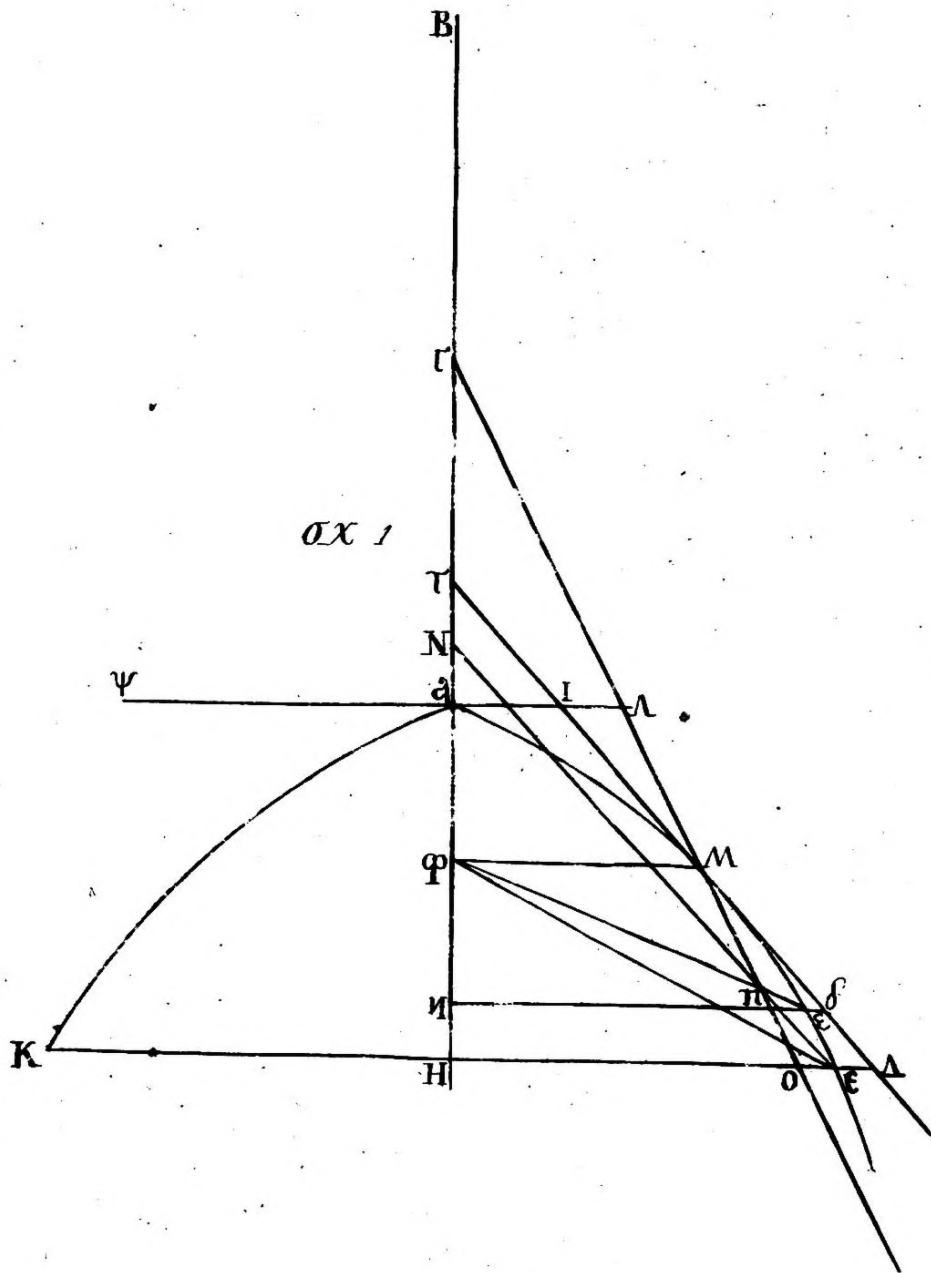


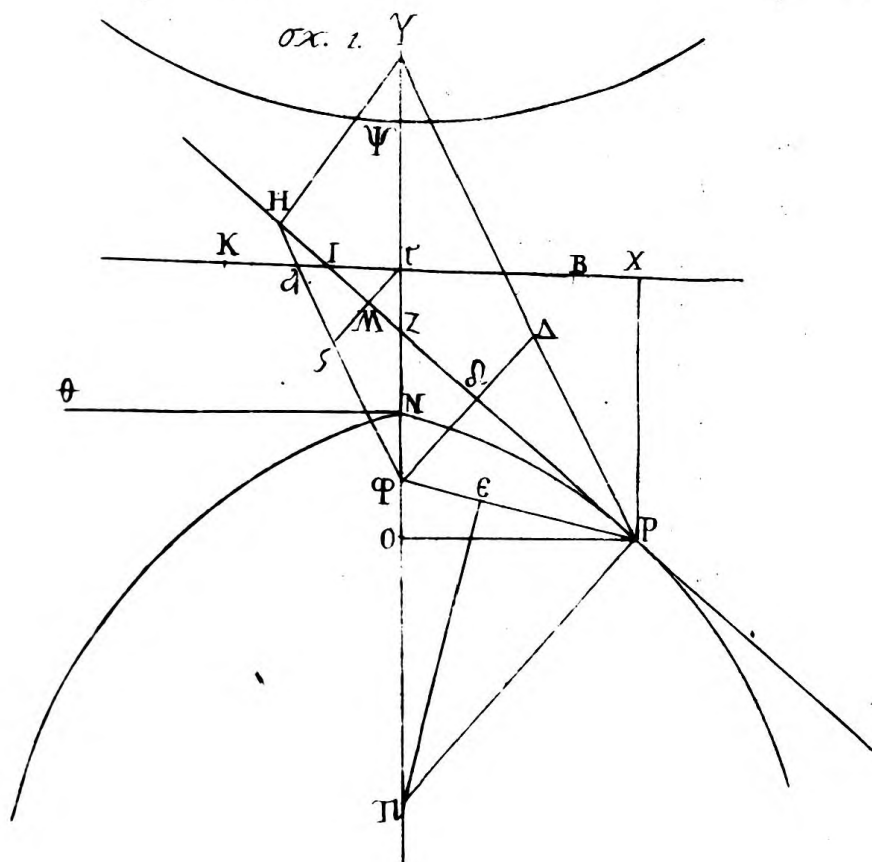


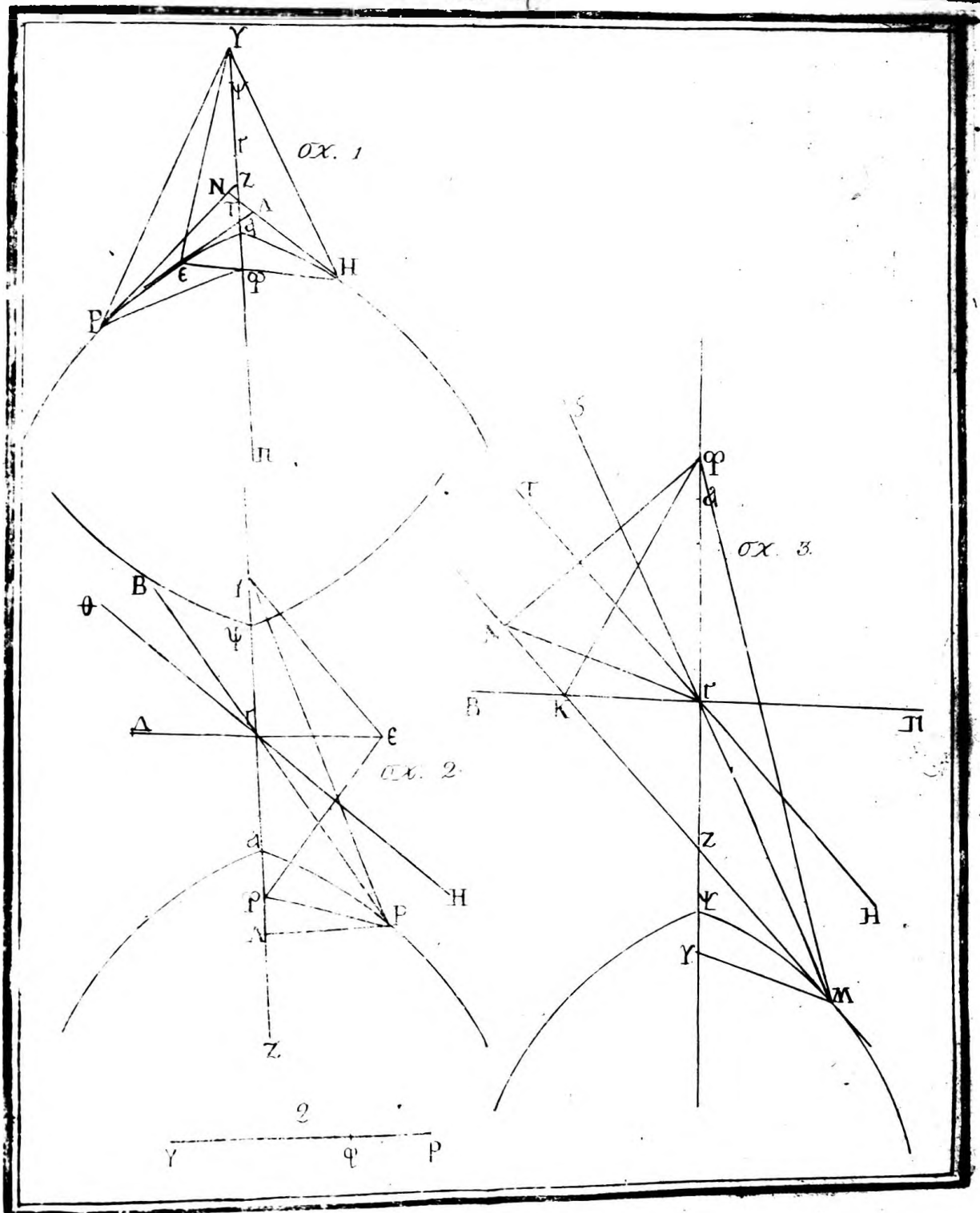


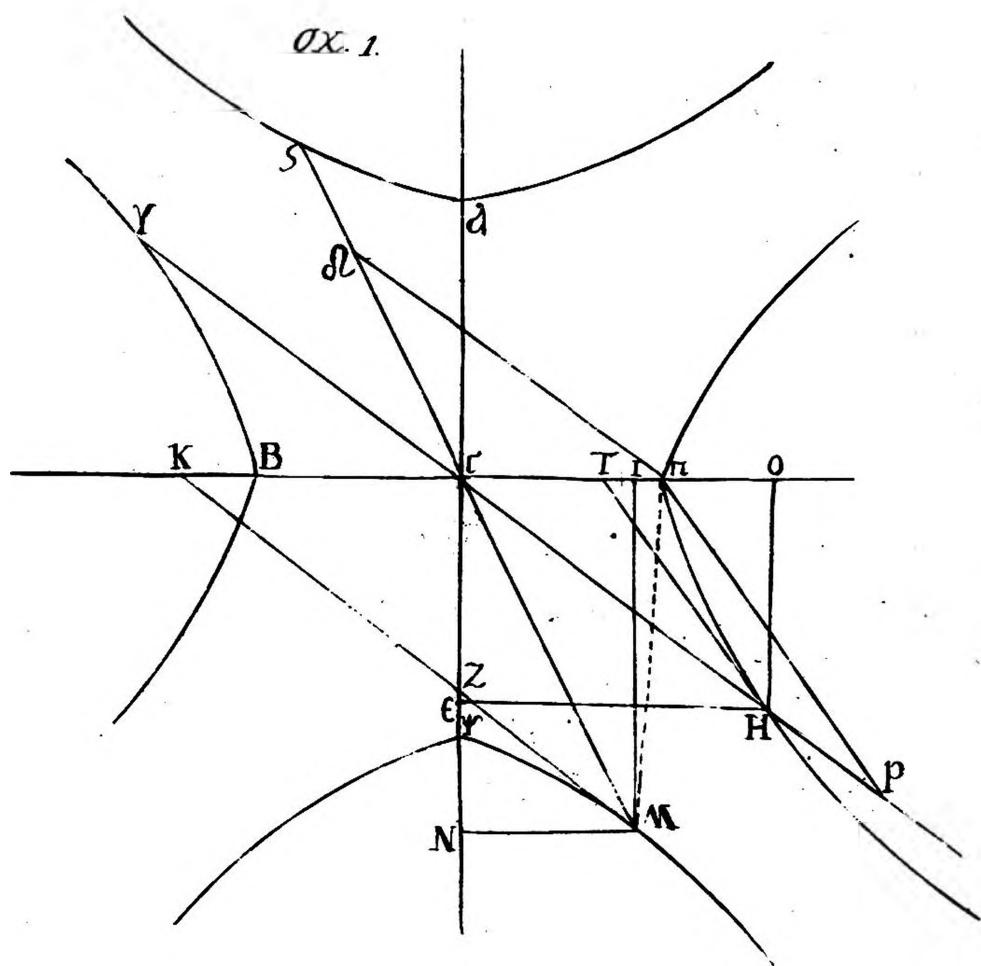


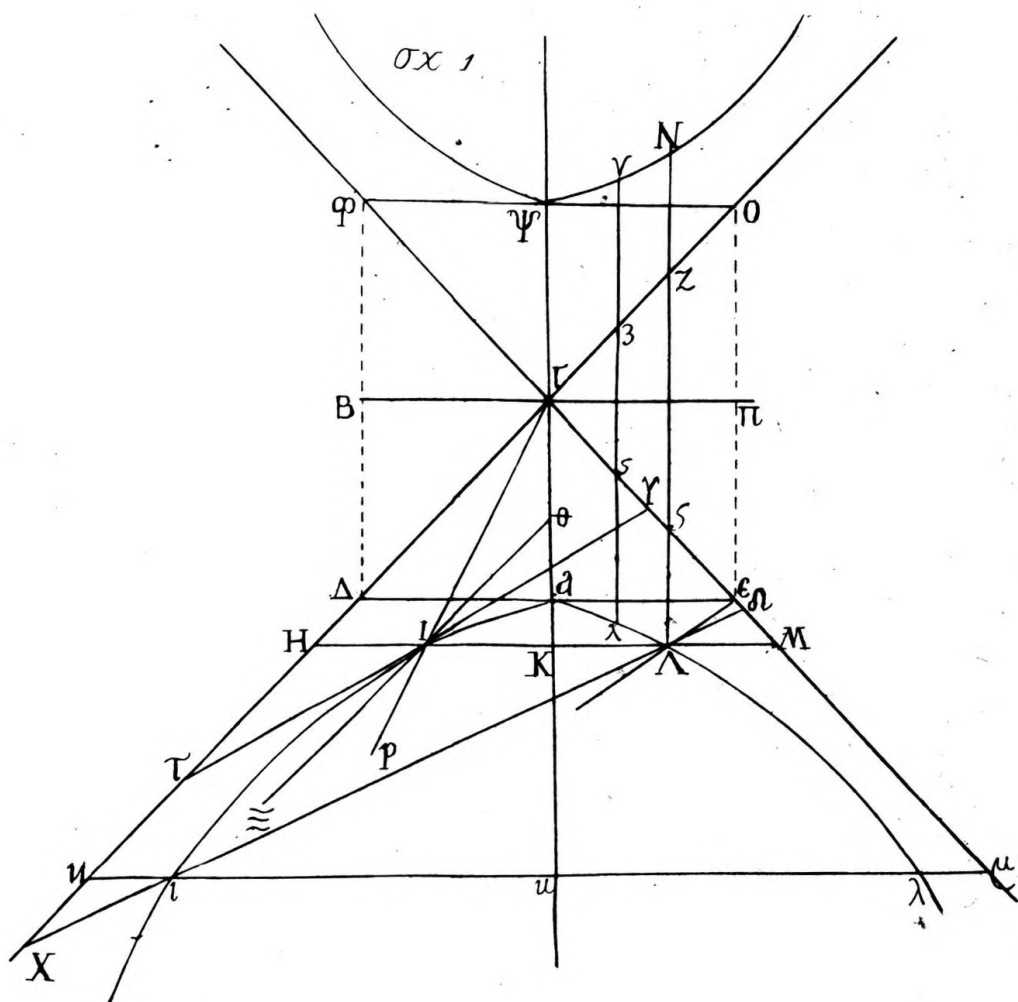


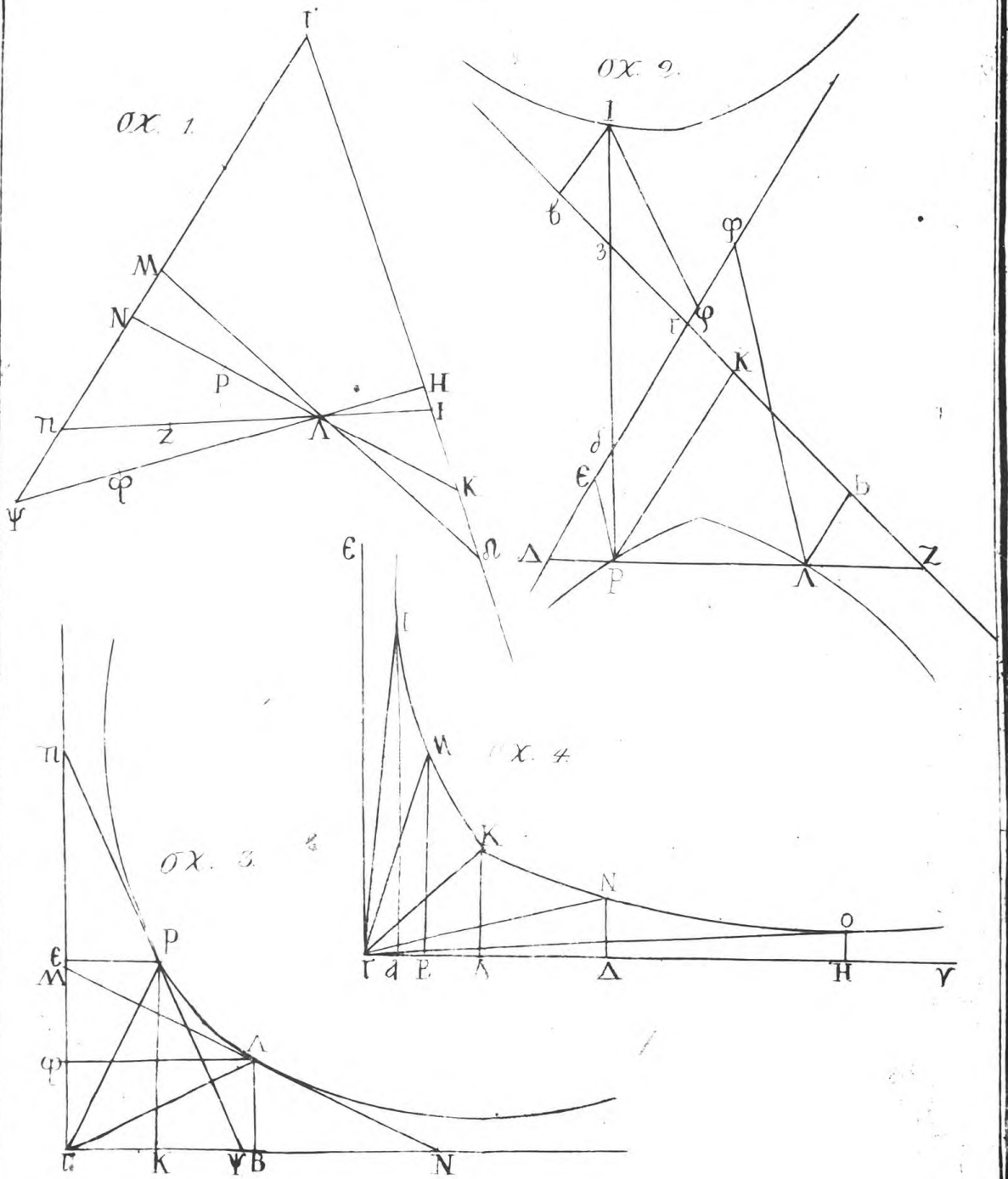


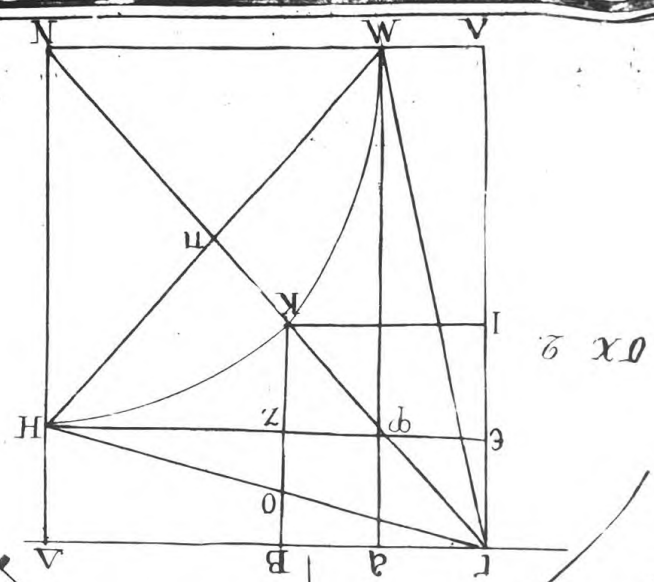
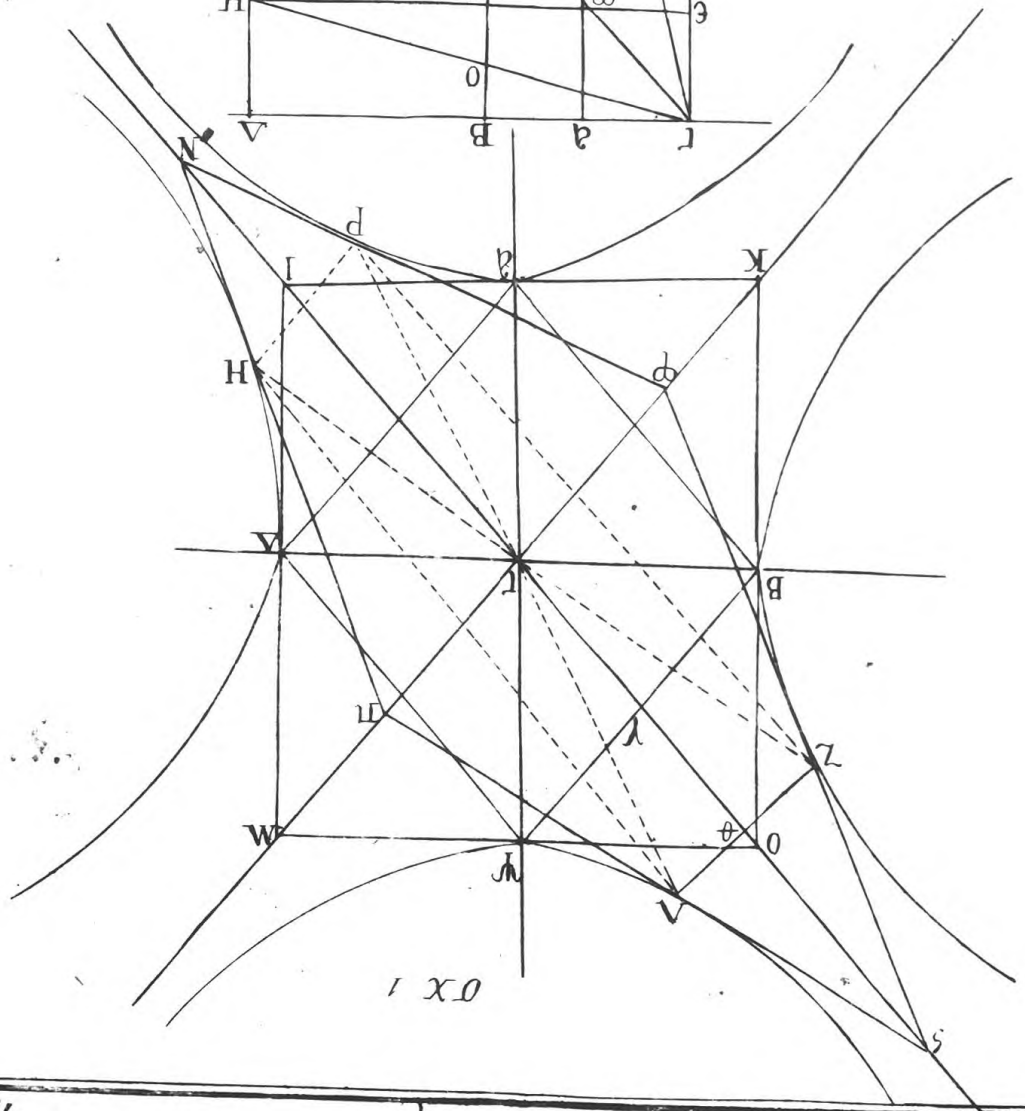






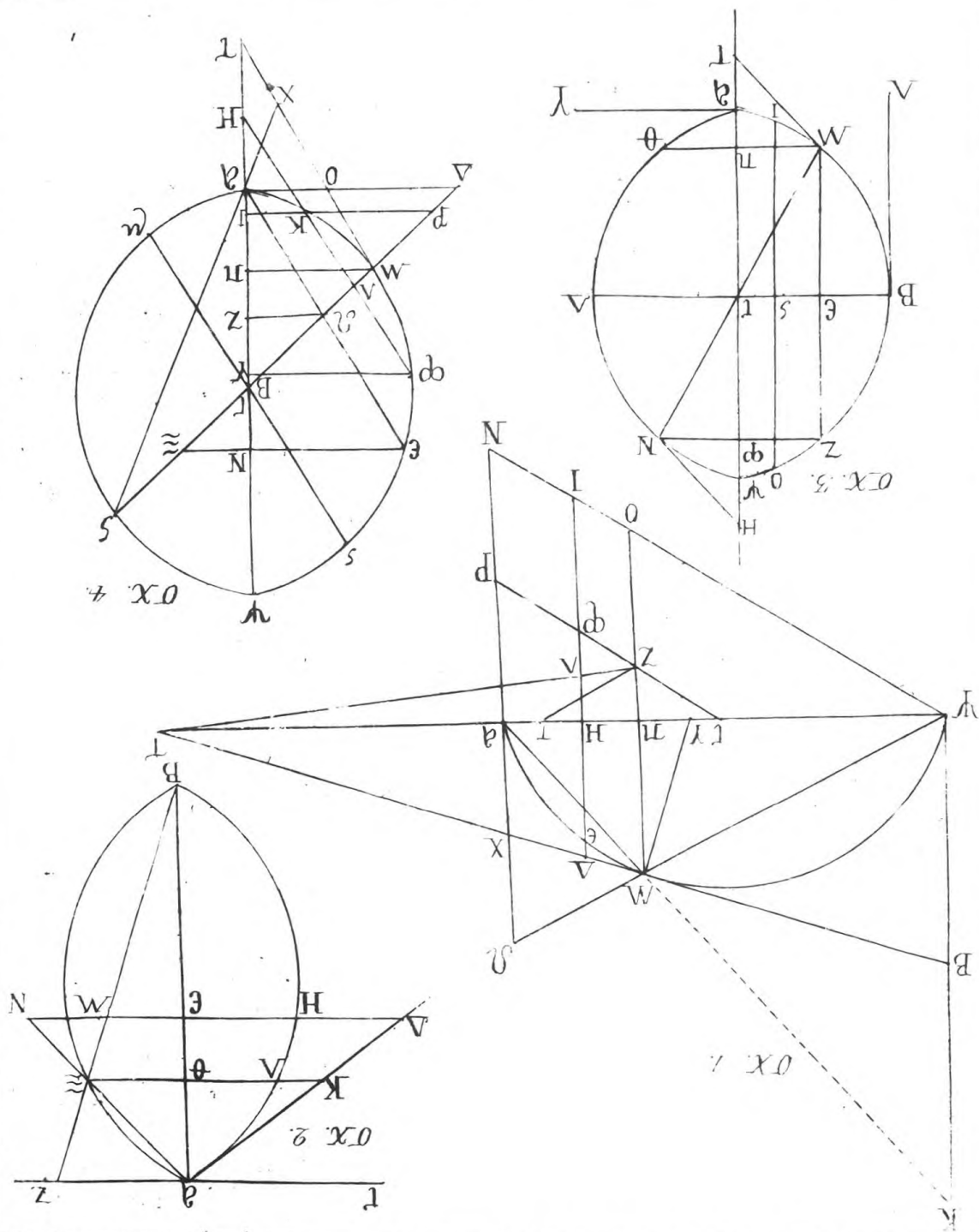




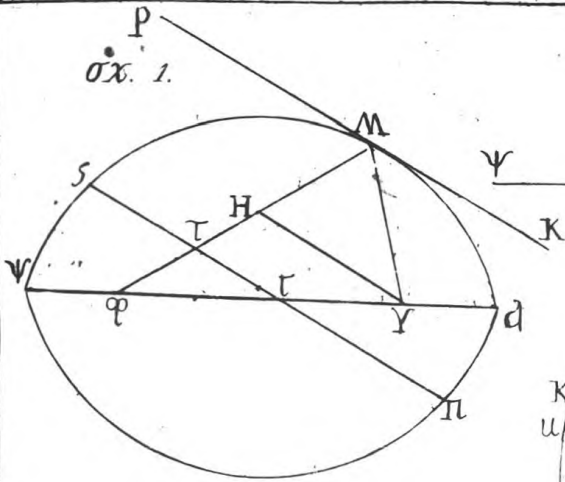


1111 11

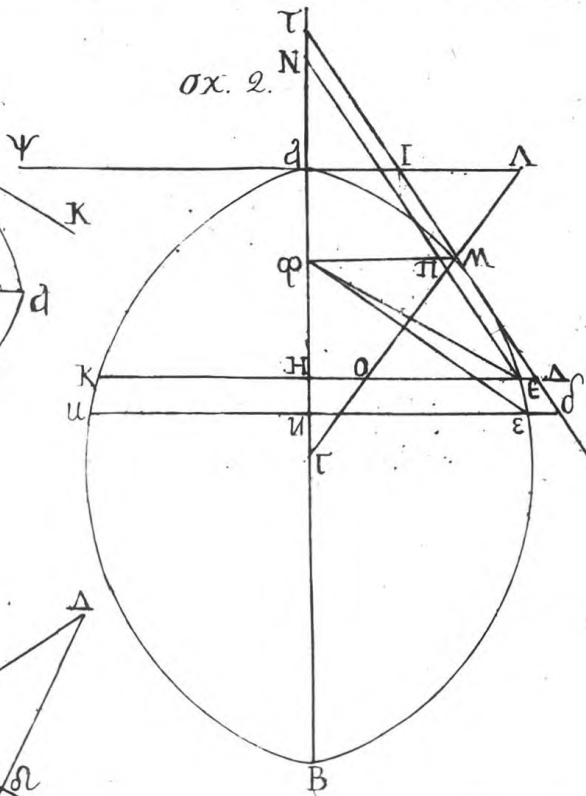
Bib kor tom



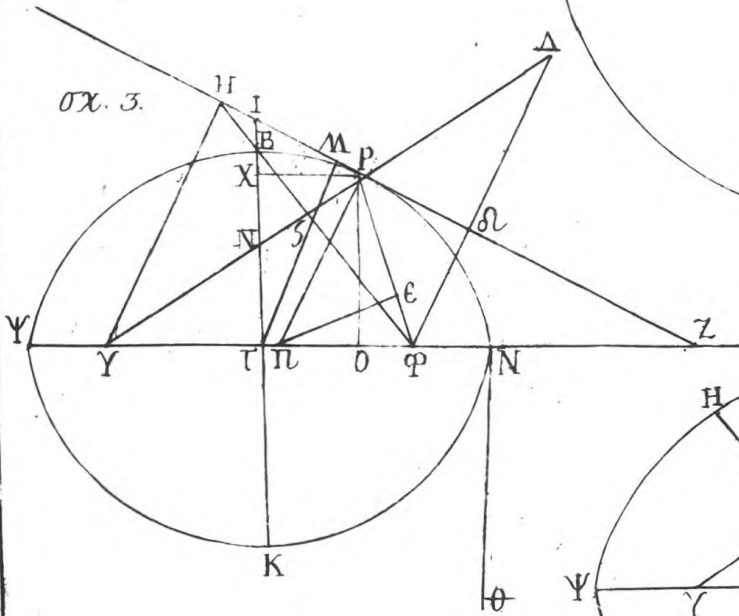
σχ. 1.



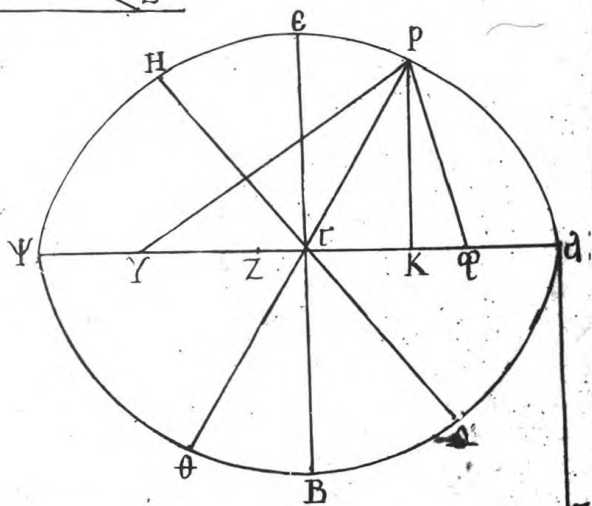
σχ. 2.



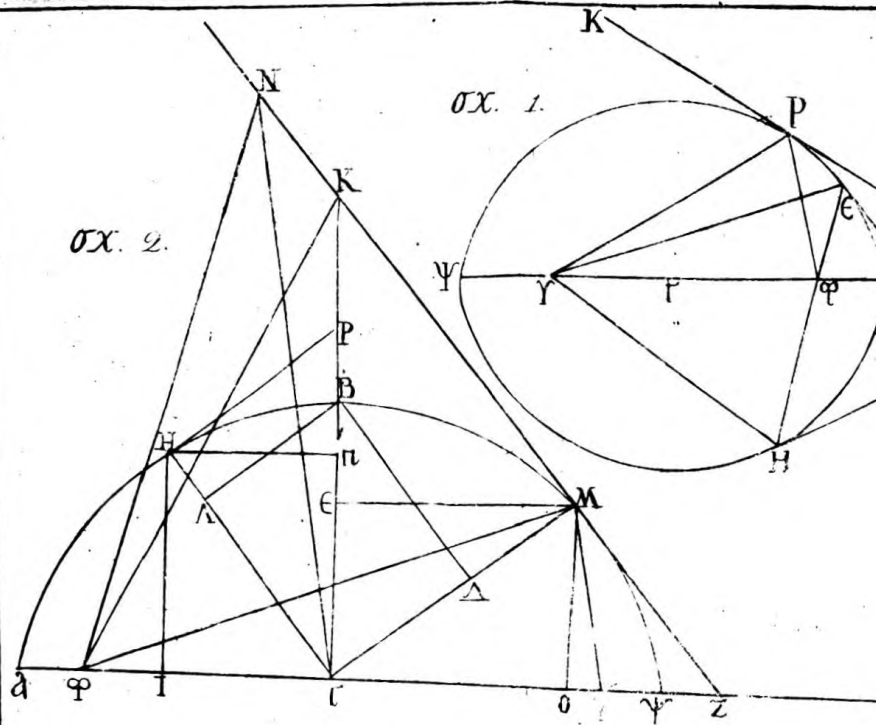
σχ. 3.



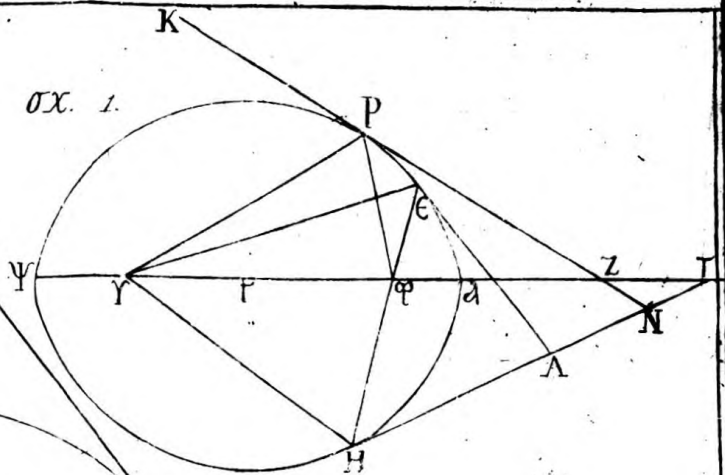
σχ. 4.



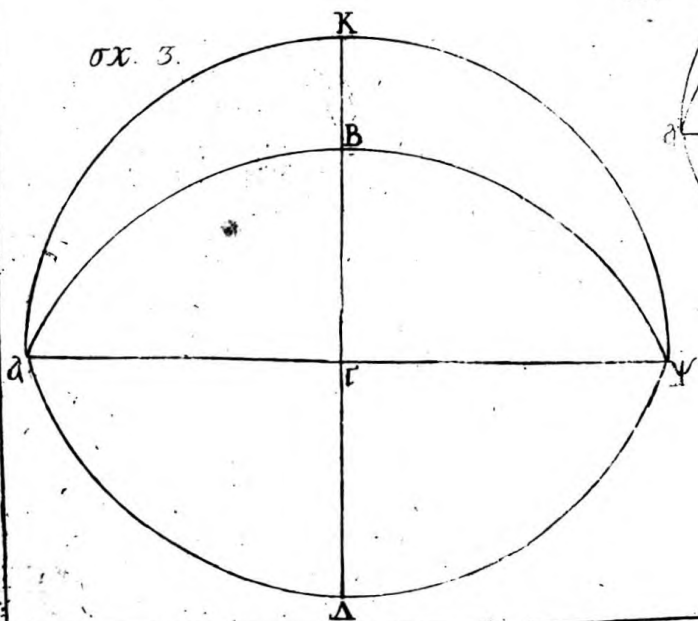
σχ. 2.



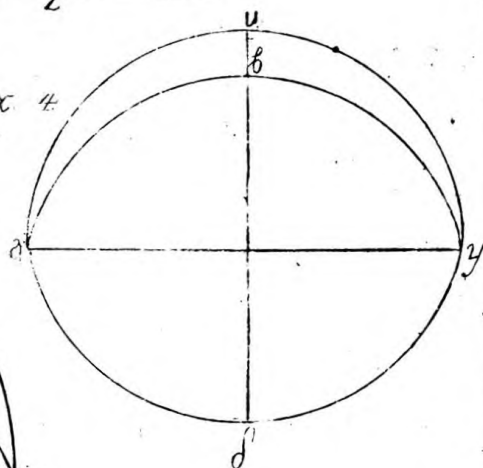
σχ. 1.



σχ. 3.



σχ. 4.



σχ. 1.

