

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΚ

ΠΑΛΑΙΩΝ & ΝΕΩΤΕΡΩΝ

Συνερανιθέντων

ΥΠΟ ΤΟΥ ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ

ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ

ΠΡΩΗΝ ΑΣΤΡΑΧΑΝΙΟΥ

ΚΥΡΙΟΥ ΝΙΚΗΦΟΡΟΥ,

Φιλοτίμῳ δὲ δαπάνῃ ἐκδοθέντων,

Ὅπως δωρεὰν διανέμονται τοῖς ἐν τοῖς

Ἑλληνομυσείοις φοιτῶσιν,

ΥΠΟ ΤΩΝ ΤΙΜΙΩΤΑΤΩΝ & ΦΙΛΟΓΕΝΩΝ

ΑΥΤΑΔΕΛΦΩΝ

Ζ Ω Σ Ι Μ Α

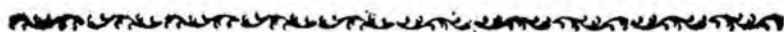
Τ Ο Μ Ο Σ Π Ρ Ω Τ Ο Σ,

περιέχων

ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

καὶ

ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΝ.



ΕΝ ΜΟΣΧΑΙ

Ἐν τῷ τῆς Κοιότητος Τυπογραφείῳ παρὰ

Ρήδη γέρῳ & Κλαυδίῳ.

Ἔτει 1798.

ΑΚΟΥΣΟΝ ΜΟΥ, ΤΕΚΝΟΝ, ΚΑΙ ΜΑΘΕ ΕΠΙΣΤΗ-
ΜΗΝ, ΚΑΙ ΕΠΙ ΤΩΝ ΛΟΓΩΝ ΜΟΥ ΠΡΟΣΕΧΕ
ΤΗ, ΚΑΡΔΙΑ, ΣΟΥ. Σειρ. 16. 24

Съ дозволенія Московской Цензуры.



μιν, ὦ Πιερίδων καὶ Ἑλικωνι-
 άδων Μουσῶν δάματα· ὑμῖν
 γὰρ ἄς ἐμψύχοις καὶ λογι-
 κοῖς προσφωνεῖν συνωθεῖ ἡ-
 μας

μᾶς τὸ τῷ γένει Φίλτρον τιμὴν, ἔπαινον,
 εὐχαριστίαν προσοφάλλουσιν ἅπαντες οἱ τῶν
 Ἑλλήνων ἀπόγονοι. Ὑμᾶς γὰρ μετὰ τὸν
 παντελεῖαν σχεδὸν τῷ γένει κατακλυσμὸν, ὃ
 μόνον τῆς τῶν προγόνων ἡμῶν περιπύσεως δια-
 λέντες, καὶ τῆς ἐγκυκλίου καλεμένης μαθη-
 σεως, ἀλλὰ καὶ διαφορῶν ἐπιστημῶν τὰ ζώ-
 πυμα θαυμασίως, καὶ ὡς ἔτι εἶπω, ὑπερ-
 φυῶς διεσώσατε. Ὑμᾶς ἔν κοινὸς ἀμαγρά-
 Φοντες εὐεργέτας, εὐγνωμόνως τῆς τῶν ἀρ-
 χαίων Ἑλλήνων εὐκλείας ἀειδηλότατα
 προσαγορεύομεν ὑπομνήματα· καὶ Φῶτα δὲ
 τῷ τῆς ἀμαθείας σιότητος ἀπαλλάττοντα,
 καὶ σάλπιγγας τὸν τῆς παιδείας ἔρωτα ἐν
 ταῖς τῶν ὁμογενῶν καρδίαις προσεπεξεργα-
 ρήσας, καὶ πατέρας καλῶς προπαιδαγωγή-
 σαντας τῶς καὶ μετὰ τὴν πτώσει κατὰ δι-
 αφορὰς καιρῶς ἐπὶ σοφίᾳ διαπρέψαντας, καὶ
 τὸ Ἑλληνικὸν γένος κατευκλείσαντας, ὃ μὲν
 ἀλλὰ καὶ πηγὰς τῶν ἀγαθῶν χορηγῶς ἅπαν-
 των, εἶπερ δὴ σὺν τῇ σοφίᾳ πάντα ἐπέρ-
 χονται τὰ ἀγαθὰ, ὡς ὁ τῶν ἀνθρώπων ἁ-
 πάντων σοφώτερος ἀπεφάνητο. Χάρις τοῖς
 Φιλογενέσιν ἐκείνοις, ὧν ὁ ζῆλος ὑπερβάς τὰ

κωλύματα, ὑμᾶς συνεκρότησε. Χάρις τοῖς
 καθηγητήρσι τοῖς ἐν ὑμῖν ἐμμελῶς τε καὶ ἐπι-
 πόνως τὰ ζωηρὰ τῆς σοφίας προχέασίτε
 καὶ προχέσσι νόματα. Ὑμῶς γὰρ τὰς ἐκ τῆς
 πτάματος συμφορὰς, ὅσον οἰόντε, ἐσήσατε,
 τὸ τῆς ἀπαιδευσια ἀκόλυστον ἄραντες ὄναδος,
 καὶ τὸν νῦν μὴ ἐάσαντες τοῖς ἀγενέσι καὶ ἀ-
 νελευθέροις δι' ὅλα προσήκεσθαι, ἀλλὰ τὰ
 γενναῖα καὶ σπουδαίους πρέποντα φρονεῖν πα-
 ροτρύναντες· καὶ αὐτὴν δὲ τὴν τῶν θείων
 Δογμάτων ὁρθότητα ἀκραιφνῆ διατηρή-
 σαντες καὶ πάντα ἀπαρχάρακτον, ὅπερ
 δὴ πάντων τῶν καλῶν, ὡς τῶν αἰωνίων ἀγα-
 θῶν πρόξενον, κάλλισόν τε τυγχάνει καὶ
 ὑπέρτερον. Ἴτι ἔν ὑμῖν ἀνταποδώσομεν, ὡ
 πανωφελῇ παιδείας Γυμνασίῃς, περὶ πάν-
 των ὧν ἡμῖν ἀνταπεδώκατε, καὶ ἀμὴν ἔτι
 ἀνταποδοῦτε, ἐγὼ οἶδαμεν δὲ, ὅτι καὶ ἀντα-
 ποδώσετε; ὁ μὲν τιμῆς σέφανον, ὁ δὲ δόξης
 ἐπαίνους· ὁ μὲν ἀργύριον, ὁ δὲ ἐπιστάσιαν· ὁ
 τοῦ ὑπεράσπῃσιν, ἐκείνος ἄλλα εἶδος προ-
 σοδοι συστατικὰ βοηθήματα. ἡμῶς δὲ πρὸς
 τοῖς ἄλλοις καὶ τὴν δε τὴν βίβλον ὑμῖν προσ-
 φέροντες ἀνατιθέμεθα, ἀμιαθὶ τοῖς ἐν ὑμῖν
 ταῖς

τας μαθηματικάς εκπαιδευομένοις ἐπισή-
 μας διανεμηθησομένην. καὶ γὰρ τὸ σκα-
 πῶν ὁ ταύτην συνταξάμενος, αἰτησαμέ-
 νοις ἡμῖν ἐδωρήσατο. Τῶν μαθηματικῶν
 σοιχείων περιεκτικὴ ἐστὶν ἡ βίβλος, καὶ τῶν
 ἀρχαρίων χειραγωγὸς πρὸς αὐτὴν τὴν τῆς
 μαθηματικῆς ἐπισήμης ἀκρόειαν, λείαν
 αὐτοῖς τὴν ὁδὸν κατασκευάζουσα, καὶ τὴν
 τῶν ποίων προσλευάνουσα τραχύτητα τῇ
 τῷ πρακτικῷ μέρει σποράδην καὶ τῷ θεω-
 ρητικῷ ἐπιμιξία, καὶ τὸν πόθον τῆς εἰς τὸν
 κολοφῶνα ἐπάρσεως περιθάλλουσα. Ἀλ-
 λά γὰρ ἐξ αὐτῆς, πῶς νῦν ἐν τῇ Ἑλλάδι οἱ τῶν
 Μαθηματικῶν μαθητὰ καὶ διδάσκαλοι ;
 Ἐν Ἰωαννίνοις ἐξόχως, τῷ ἡμετέρῳ δῆθεν
 Φίλῳ ἐδάφα. ἐξόχως γὰρ ὁ αἰοίδημος ἐκείνος
 τῶν Μαθηματικῶν διδάσκαλος, ὁ Μεθό-
 διος, ὥσπερ ναῦς τις μεγαλέμπορος ἀπὸ
 τῆς δυτικῆς ἐπιστρέψας χώρας, τὰς Ἑυ-
 κλάδας καὶ Ἀρχιμήδους καὶ Ἀπολλωνίους καὶ
 Διοφάντους ἐπὶ τὴν Ἑλλάδα ἐπαναγαγὰν,
 εἰς τὴν τῶν Ἰωαννίνων Σχολὴν εἰσήγαγεν,
 ἄχρει αὐτῶν τῶν καθ' ἡμᾶς ἡμερῶν, ἐδὲ
 διδάσκαλοι μαθητεύοντες, ἐδὲ μαθητὰ
 τὰ

τὰ Μαθηματικά διδασκόμενοι ἐκείθεν ἐξέ-
 λαπον. τὸν μὲν γὰρ Μεθόδιον ὁ τέττα ἀκ-
 ροατῆς, ὁ Μπαλάνος ὁ ἀέμνητος διεδέξα-
 το, πολλῶ πλείονα ἤπερ ἐκείνος τὴν ἐπί-
 δοσιν ἐπιδάξας, ὡς τὰ ἑαυτῶ τύποις ἐκδο-
 θέντα ἐπμαρτυροῦσι μαθηματικὰ Φιλοπο-
 νήματα. τῷτον δὲ ὁ τέττα υἱόστε καὶ μαθη-
 τῆς ὁ ἐλλογιμώτατος Κοσμᾶς, ὁ ἄχρι
 τῆς σήμερον ἐν τῷ αὐτῷ Γυμνασίῳ, τῷ δ'
 πρὸ πολλῶ ἐπὶ πολλῶ κρέττονι, ἐν πᾶσι
 μὲν τοῖς ἄλλοις καὶ τῇ τῆς καλῆς Βιβλιο-
 θήκης κτήσει, προβάντι κατασάσει, χο-
 λαρχῶν πανευκλῶς, καὶ τὰς ἐκεῖ Φοιτῶν-
 τας τὰ Μαθηματικὰ ἐκπαιδεύων. Ἐὰν δὲ
 τὸν νῦν ἐπισήσης ἐπὶ τῷ πρὸς πάσας τὰς
 μαθήσεις ζέοντι πόθῳ, καὶ πὶ τῇ τῶν ὁμογενῶν
 νέων εὐφυΐᾳ, θᾶττον κατιδεῖν ἔχεις, ὅτι
 τῆς ἐν τῇ Ἑλλάδι σπανιότητος τῶν μαθημα-
 τικῶν παραδόσεων παρχύτιον καὶ ἡ ἑλκεψίς-
 ἐσι καὶ τὸ δυσπόριον τῶν μαθηματικῶν
 βιβλίων. Πάρεσιν δ' ἐν ἀπὸ τῶ νῦν εὐθαρ-
 σῶς ἐλπίζειν, ὅτι τῶ ἐμποδῶν ἐκ μέσθ ἀρ-
 θέντος, ὁ πολυπλασιασμός καὶ ἡ αὐξήσις
 τῶν τῷ ὄντι ἐπισημονικῶν προκύψει μαθή-
 σεων.

σεων. ἰδὲ γὰρ ἄνευ ἀργυρίᾳ καὶ τιμῆς οἱ ἐν ταῖς τῶν Ἑλλήνων Σχολαῖς θαμίζοντες προ-
κειμένην εὐρίσκουσι τὴν δὲ τὴν ἐν αὐταῖς κα-
θιερωθεῖσαν βίβλον.

Οἱ ἐκ τῆς ΖΩΣΙΜΑ ΑΥΓΑΔΕΛΦΟΙ, Α. Ν. Ζ. Μ.





ΤΟΙΣ ΑΝΑΓΙΝΩΣΚΟΥΣΙ.



αὐτὴν ἄραγε ὁ μὲν Πλάτων ταῖς
τῆς Ἀκαδημίας θύραις ἐπεγράψα-
το τὸ, Οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος
εἰσίτω· ὁ δὲ Ξενοκράτης, παντὶ

ἀγεωμετρῆτῳ, τῷ χάριν παιδείας αὐτῷ προσιόντι, Πο-
ρέυε, ἔλεγε, λαβὰς γὰρ ἐκ ἔχεις Φιλοσοφί-
ας; Οὐ μὲν ἔν φαίναν ἂν ἔγωγε, ἀλλὰ καὶ μάλα ἐκό-
τῳστε καὶ εὐσόχως, εἴπερ δὴ Φιλοσοφίαν νοήσεις τὴν
περὶ τῶν θεανίων καὶ ἐπιγείων σωμάτων θεωρίαντε καὶ ἐπι-
σημν. Σχήματος γὰρ σῶμα ἄμοιρον ἔδεν· ἔδδ' δὴ ἐνετί-
ποτε κινέμενον, μὴ γεαμμένην τινα καταγράφειν, ἢ χεδιά-
ζειν χῆμα. ἐνθεντοί πάνυ εὐφυῶς εἴρηται, τὰ σσιχεῖαι τῇ
τῆς φύσεως βιβλίῳ μὴ εἶναι Γράμματα, ἀλλὰ Τρί-
γωνα, καὶ Παραλληλόγραμμα, καὶ Κύκλους, καὶ Παρα-
βολὰς, καὶ Ὑπερβολὰς, καὶ Ἐλλείψεις, καὶ Σπεί-
ρας, καὶ Πυραμίδας, καὶ Κώνους, καὶ Κύβους, καὶ
Κυλίνδρους, καὶ Σφαίρας, καὶ τὰ λοιπά. Πῶς ἔν ἂν
τις τὴν τῆς φύσεως ἀναγνῶναι δυνήσθῃ βιβλίον, τα
σσιχεῖαι δὲ ὧν γέγραπται μὴ εἰδῶς; πῶς ὁ τῆς γνῶ-
σεως τῶν ιδιοτήτων τῶν χημάτων, τῶν ἐπ' αὐτῆς ἐπι-
κειμένων τῆς τῶν σωμάτων ἐπιφανείας, καὶ τῶν πα-
θῶν τῶν διὰ τῆς τέτων κινήσεως καταγεγραφομένων γεαμ-
μῶν, ὧν ἡ μόνη Γεωμετρία διδάσκαλος, μὴ μετέχων,
τα

τὰ ἐν αὐτοῖς ιδιώματα, καὶ πάθη, καὶ ἀποτελεσ-
ματα, καὶ τὰς πρὸς ἀλλήλα χέσεις καὶ ἀποσάσεις
καὶ ἀναλογίας, καὶ ἀμοιβαίας ἐνεργείας τε καὶ ἀντε-
νεργείας κατανοήσκειν; ἢ πῶς ἐλπίζει ποτε αὐτὴν ἐπι-
γνῶναι τὴν τῶν σωμάτων φύσιν τε καὶ εἶσιν, ὃ μὴδὲ τὰ
ἐν αὐτοῖς ὁρώμενα καὶ ψηλαφώμενα γινώσκων; ἴσασι πάν-
τες οἱ περὶ τὴν τῆς φύσεως καὶ τέχνης θεωρίαν ἐναχο-
λέμενοι πόσον ἀναγκαῖα ἡ γεωμετρικὴ ἐξίς πρὸς κα-
τάληψιν τῶν Ἀστρονομικῶν καὶ Μηχανικῶν καὶ Ἀρχιτε-
κτονικῶν καὶ Ὀπτικῶν καὶ Ὑδραυλικῶν καὶ Ναυτικῶν,
ἐμὴν ἀλλὰ καὶ τῶν περὶ τὸ πῦρ καὶ τὸν Ἀέρα καὶ τὸ
ὕδωρ καὶ τὴν Γῆν, καὶ ἵνα συνελόντι εἶπω, πάντων
τῶν περὶ τὰ ὁρώμενα θεωρημάτων τε καὶ προβλημάτων
ὁμολογεῖσθε συμφώνως, ὅτι ταύτης ἀνευ μικρᾶς τι-
νας καὶ ὀλίγας, καὶ ταύτας ἐπιπολαίας καὶ ἀμφιβό-
λος, καὶ ὡς ἂν εἰποι τις χυδαίας, κτήσαθ' αὐτὴν πε-
ρὶ τέτων δύναται γνώσεις, καὶ νύκτωρ τε καὶ μεθ' ἡμέ-
ραν ἀγρύττες καταβάλλη πόνους. δι' αὐτῆς δὲ βραδίως
καὶ, ὅσον τῇ ἀνθρώπινῃ δέδοται φύσει, ἐντελῶς, ἔ-
μουν τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων εὐρεθέντα κατανοῆσαι ἔχο-
μεν, ἀλλὰ καὶ ἀφ' ἑαυτῶν εὐρεῖν τὰ ἄχρι τῆς νῦν
ἄδηλα καὶ ζητούμενα.

Γεωμετρίαν δὲ λέγοντες, ἔμουν τὰ τῆς Εὐκλείδους
νοῦμεν σοιχεῖα ταῦτα γὰρ ἢ κλεῖς μόνον ἐστὶ τῆς τῶν
ὑψηλοτέρων μαθηματικῶν ἐπισημῶν θύρας· ἀλλὰ καὶ
Ἀριθμητικὴν, καὶ Τριγωνομετρίαν, καὶ Ἀρχιμήδεια θεωρή-
ματα, καὶ Κῶν τομαίς, καὶ Ἀνάλυσιν, τὴν καὶ Ἀλ-
γεβραν καλεσμένην. ἐν τέτοις γὰρ ὅσον ἂν τις μᾶλλον
ἐσπίχεται, τοσούτον εὐχερῶς ἐπὶ τὴν κατανόησιν καὶ
εὐρεσιν τῶν τῆς φύσεως ιδιωμάτων εὐδοκίμῃ καὶ προά-
γεται. τῆ δὲ διὰ τέτων ἀκριβῶς ἐξασκηθέντος ὁ νῦν,
ἔμουν τῶν περὶ τὴν Φυσιολογίαν, ἀλλὰ καὶ τῶν πε-
ρι

ἐν παντός ἄλλε μαθήματος νοημάτων, ἀντιληπτικὸς καθίσταται καὶ διακριτικὸς καὶ πάνυ ἐπίβολος. τοσῶτον γὰρ τῇ τῶν μαθηματικῶν ἀποδείξεων ἰσχύει τε καὶ ἀκριβείᾳ ἢ τέττε διακριτικῇ ἐπιρρῶννυται καὶ ὀξύνεται δύναμις, ὥστε ἐπικρίνειν δύνασθαι τὰ περὶ πάσης ὕλης καὶ ὑποθέσεως, ἥς γνωσθῇ αὐτῷ αἱ μόνα ἀναγκασαί περιτάσεις, βέλτιον καὶ αὐτῶν τῶν καθ' αὐτὸ πολυχρονίῳ μὲν ἀσκήσει ἐν αὐτῇ γυμναζέντων, παιδείας ὅμως γεωμετρικῆς μὴ μεταχόντων. καὶ τῷτο δὴ κέρδος ἄλλο τῷ πρώτῳ ἔχ' ἦτον, μᾶλλον δὲ καὶ ὑπερτερσον, ἅτε δὴ γενικώτερον, ἢ Γεωμετρία προσεπιδαψιλεύεται.

Καὶ τὰ μὲν περὶ τῆς εὐρέσεως, καὶ αὐξήσεως, καὶ χρονολογικῆς προσόδου, καὶ τῶν εὐρετῶν τῆς Γεωμετρίας, καὶ τῶν περὶ αὐτῆς συγγραψάντων ἡμεῖς καταλιμπάνομεν, οἱ δὲ ταῦτα εἰδέναι ἐφιέμενοι, τὰς περὶ τέτων διαλαβόντας (*) μετίτασαν. τῷτο δὲ μόνον ἐ παρασιωπητέον, ἀμέλειται τὸ, πάντῃ ἀόδηλον εἶναι τὸ κοινῶς φερόμενον, εἶτεν τὸ τὰς Ἀραβας πρώτῃς τῆς Ἀλγεβρας. εὐρετάς γενέσθαι. καὶ γὰρ τινες τὸν τῷ Μωσέως υἱὸν Μωάμεθ καὶ ἕτερον δὲ Μωάμεθ τὸν Βαγδαδινὸν καὶ τὸν Γήβεριν πατέρας αὐτῆς ἔφασαν, ἀναπόδεικτον ὅμως τῷτο καὶ ἀβέβαιον, καὶ ἔδὲ καὶ τῷτο δῆλον, τὸ πότερον τῇ Ἀλγεβρᾷ εἶται, ἢ τῇ Ἀστρονομίᾳ τὰς ἰδίας καθιέρωσαν μελέτας. ὅπως δ' αὖν εἴη τῷτο, παιδανὸν ἔοικε, τέττες τὸ αὐτὸ πεποιηκέναι, παλαιῶν μαθηματικῶν ἀνδρῶν συγγράμμασιν ὠμίλη-

κό-

(*) Ὅρα τὸν Πρόλογ. τῆς τῷ Τακίτῃ Γεωμετρ. τῆς ἐν Νιαπόλ. ἔτ. 1744 ἐκδοθ. ὁμοίως καὶ τὸν τῆς Ἀλγεβρ. Βικιντίᾳ τῷ Ῥιπάτῃ, τῆς ἐν ἔτ. 1765. ἐν Βονων. ἐκδοθ. Ἐξόχως δὲ τὸ Ἐγκυκλιωπιδ. Λεξ. πρὸς τὴν Γεωμετρ.

κότας, ὅπερ ὁ Ἀβερόης καὶ ὁ Ἀβικένας καὶ ἄλλοι Ἀραβες τοῖς τῷ Ἀριστοτέλει ἐντυχόντες.

Τῷ καλῶμένῳ Ἀλγορυθμῷ, ὃς καὶ εἰδικὴ Ἀριθμητικὴ πρῶταγορεύεται, ἴχνη τινὰ ὁρῶνται ἐν τῇ τῷ Διοφάντῳ βίβλῳ. ἀμφιβάλλει δὲ ἕδῃς περὶ τῷ ὅτι πολλὰ τῶν ἀρχαίων βιβλίων μυριάδες ἐν τῇ κατὰ τὴν Ἀλεξάνδρειαν τῶν Πτολεμαίων βιβλιοθήκῃ, σκαιότητι καὶ ἀλογίᾳ τῶν ταύτης κατακρατησάντων βασιβάρων περὶ ἐπιτάδους κατηναλώθησαν. ἐκ τῶν ὅμως ἐκ ἀντισυλόγου ἐπαγαγὴν ἔχη, τὰς ἀρχαίας Ἑλλήνας ἐφετάς ἐναι πάντων τῶν ἐν ταῖς κατ' ἡμᾶς ἡμέραις ἀναγινωσκομένων ἐν ταῖς ὑπὸ τῶν νεωτέρων συγγραφέσιν τῆς Ἀναλύσεως πραγματείαις. τῷτο δὲ μόνον εἰκίτως συνάγεται, τὸ τὰς νεωτέρας δηλονότι ἐκ τῶν διατωθέντων συγγραμμάτων τῶν παλαιοτέρων τὰς ἀφορμαῖς λαβόντας, καὶ ὑπ' αὐτῶν χειραγωγηθέντας, πολλὰ μὲν εὐρεῖν τὰ ταῖς ἄλλαις ἀνήκοντα μαθηματικαῖς ἐπιστήμῃς πλεῖστα δὲ, ἢ βέλτιον φάναι, σχεδὸν πάντας τὰ τῇ Ἀναλύσει, συντόμῳ αὐτῇ καὶ εὐλήπτῳ τάξει ἐκφράσαντας καὶ μεθόδῳ.

Ἀλλὰ γὰρ καὶ τὰ περὶ τῆςδε τῆς βίβλου χρεῶν δῆλα ποιησάσθαι. τί γὰρ βέλεται αὕτη, ἔρξαι τις, ἐνώπιον τῶν Ἑλλήνων μετὰ τὸν Εὐκλείδην καὶ τὸν Εὐδοξον καὶ τὸν Γεμῖνον καὶ τὸν Μαρίνον καὶ τὸν Ἀρχιμήδην καὶ τὸν Ἀπολλώνιον καὶ τὸν Πτολεμαῖον καὶ τὸν Πάππον καὶ τὸν Διόφαντον, καὶ τὴν λοιπὴν τῶν μαθηματικῶν Ἑλλήνων χορῶν; Τῶν συγγραμμάτων αὐτῶν τὰ μὲν ἐξελαιπτε, τὰ δὲ μάλα δυσεύρετα καὶ δυσπόριστα. καὶν δὲ ραδίᾳ ὑπῆρχεν ἡ τέτων κτήσις, τοσῶτον ὅμως ἐπίπονος, διὰ τὸ μακροσκελὲς τῶν ἐν αὐτοῖς ἀποδείξεων, ἢ τέτων καταλήψεως, ὥστε καὶ χρόνος δαὶν πολλὸς καὶ πόνος μακρὸς πρὸς τὴν ἐγκρατεῖς τέτων γενέσθαι. τὴναντίον δ' ἐνε-

σιν ἐν τοῖς νεωτέροις Συντάγμασιν, ἀμέλειτοι τὸ σύν-
τομον ἄμχ δὲ καὶ τὸ σαφές καὶ εὐληπτον. πρὸς τῆ-
ταις τὰ τῶν νεωτέρων ἔ μόνον τὰ ἐκπαλαι, ἀλλὰ καὶ
τὰ ἀρτίως ἐυρεθέντα περιέχουσιν, ἐξόχως τὰ περὶ τῆς
ἀναλύσεως, ὧν τὰ σωζόμενα τῶν παλαιῶν βιβλία
ἴμοιρα.

Ταῦτα ἔν ἀνέπεισαν ἡμᾶς, ὅτε τὰ Μηθηματι-
κὰ τοῖς ἐν τῷ τότε τῆς πατρίδος ἡμῶν προσφοιτᾷσι
Μισσῶ παρεδίδομεν, συλλογὴν τινα μαθηματικῶν συγ-
κροτήσασθαι σοιχείων ἔκτε τῶν ἀρχαίων καὶ τῶν μετ' αὐ-
τὰ συγγραμμάτων συνερανιθῆσαν. Ἐν τῇ σοιχειῶδες
δὲ Γεωμετρίᾳ ἢ ἐν ταῖς τῆ Κώνε τομαῖς τῇ τῆ Ἐυ-
κλείδου καὶ Ἀπολλωνίᾳ τάξει (ἐξ ὧν τὰ ταῖς λοιπαῖς
ἐπισήμας ἀναγκαῖα συνελέξαμεν) ἀκολοθήσαντες, τι-
νάς μὲν τῶν ἐν αὐτοῖς ἀποδείξεων συντομωτέρας, ἐπι-
αχῶ δὲ καὶ ἄλλας αὐτ' ἐκείνων, ἥτοι ἰδίᾳ μελέτῃ ἐυ-
ρεθείσας, ἢ ἐκ τῶν ἤδη ἐκδοθέντων νεωτέρων βιβλίων
ἐκληφθείσας, ἐπεξεργασάμεθα. ἐν δὲ ταῖς λοιπαῖς τῶν
Μαθηματικῶν πραγματείαις πάντα συνετάξαμεν ἥτοι
ἐκ τῆς τῶν περιφήμων Ἰταλῶν ἡμῶν διδασκάλων Φω-
νῆς παραλαβόντες, ἢ ἐκ τῶν νεωτέρων συναγαγόντες
βιβλίων.

Ἐδόκει δὲ τότε τὸ ἔτω συναπαρτιθὲν σοιχειῶδες
τῶν μαθηματικῶν σύστημα τερπνὸν τοῖς μαθητιῶσι ἢ
εὐληπτον, ἐτι δὲ καὶ τοσῶτον Φωτιστικόν, μάλιστα τοῖς
εὐφροέροις, ὥτε τὰς τέττε ἐγκρατεῖς γεγονότας, ἐπί-
τε τὰς πλατύτερον περὶ τῶν μαθηματικῶν διαλαμ-
βανέσας πραγματείας, καὶ ἐπὶ τὰς τέτων συννάες
εὐχερῶς πρᾶγεσθαι ἐπισήμας. διὸ ἔκτοτε ἄχει τῆ
νῦν τινὲς τῶν τέτο εἰδόντων, ἐμὴν ἀλλὰ καὶ ἐνιοι τῶν
τὰ περὶ τέττε ἀκυσάντων, ἐκ ἐπαύσαντο, τύποις ἐκ-
δῶναι αὐτὸ προτρέποντες, ὡς ἀναγκαῖον τῇ ἐν τοῖς
ἐλλῃ-



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Σ

ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Σημεῖόν ἐστιν ὃ μέρος ἐδέν.

Β'. Γραμμὴ ἐστὶ μῆκος, ὃ πλάτος καὶ βάθος ἐδέν.
Γραμμῆς δὲ Πέρατα σημεῖα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Ἐντεῦθεν δῆλον, ὅτι ἡ γραμμὴ εἰς γραμμαῖς μόνον διαίρεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὡς περ ἵχνος, ἢ ῥοήν τινα σημεῖα φερομένα νοητέον τὴν γραμμὴν. καὶ εἰάν μὲν τὸ φερόμενον σημεῖον τὴν ἐπ' εὐθείας φορὰν διατηρῇ, ἢ ἐξ αὐτῆ γραμμὴ εὐθεΐα ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΒ. (πίν. α. γ. 1.) Ἐάν δὲ συνεχῶς τὴν φορὰν αὐτῆ μεταβάλλῃ, Καμπύλη, ὡς ἡ ΓΔ. (γ. 2.) Διάφορα δὲ τὰ τῆς καμπυλότητος εἶδη, κατὰ τὰς διαφορὰς τῶ φερομένων σημεῖων τροπᾶς.

Γ'. Εὐθεΐα δὲ γραμμὴ ἐστὶ κατὰ μὲν Ἀρχιμήδην, ἡ τῶν ἐχουσῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐλαχίστη κατὰ δὲ Πλάτωνα, ἥς τὰ ἄκρα ἐπιπροσθεῖ παῖσι τοῖς μέσοις κατὰ δὲ Εὐκλείδην, ἥτις ἐξίστα τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημεῖοις καίται.

Α

Δ'.

Δ'. Γωνία ἐπίπεδος ἐστὶ τᾶσις, ἡ κλίσις γραμμῆς ἐπὶ γραμμῇ, ὡς τῆς ΒΑ ἐπὶ τὴν ΑΙ. χ . 3.

Ε'. Κορυφὴ μὲν γωνίας τὸ τῆς συμπτύξεως τῶν γραμμῶν σημεῖον, ὡς τὸ Α' (χ . 3, 4, 5.) Πλευρὰ δὲ αἱ τὴν γωνίαν περιέχουσαι γραμμαί, ὡς αἱ ΒΑ, ΓΑ, ἢ ΔΑ, ΓΑ, ἢ ΕΑ, ΓΑ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐμφαίνομεν τὴν γωνίαν, ἡ διὰ τῆς ἐν τῇ κορυφῇ αὐτῆς σοιχείας, λέγοντες· ἡ γωνία Α, ἡ διὰ τριῶν τῶν ἐν τῇ κορυφῇ καὶ τῶν ἐν ταῖς πλευραῖς, ὡς ἡ γωνία ΒΑΓ, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, τὸ ἐν τῇ κορυφῇ σοιχείον ἐν τῷ μέσῳ γράφοντες καὶ προσφέροντες.

Ζ'. Τῶν ἐπίπεδων γωνιῶν εὐθύγραμμος μὲν, ἡ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, ὡς ἡ ΒΑΓ (χ . 3.) Καμπυλόγραμμος δὲ, ἡ ὑπὸ καμπύλων, ὡς ἡ ΔΑΓ (χ . 4.) Μικτόγραμμος δὲ, ἡ ὑπὸ εὐθείας καὶ καμπύλης, ὡς ἡ ΕΑΓ (χ . 5.) Τῶν δὲ εὐθυγράμμων γωνιῶν, ἡ μὲν, Ὀρθή ἡ δὲ, Ἀμβλεία ἡ δὲ, Ὀξεῖα.

Ζ'. Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας σταθῇ, ὡς ἡ ΓΔ ἐπὶ τῆς ΑΒ, (χ . 6.) τὰς ἐφεξῆς γωνίας ΓΔΒ, ΓΔΑ, ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὁρθὴ ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ἴσων γωνιῶν ἡ δὲ ἐφεσηκῦς εὐθεῖα ΓΔ, Κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκε, τὴν ΑΒ. Ἀμβλεία δὲ γωνία ἡ μείζων ὁρθῆς, ὡς ἡ ΔΒΓ (χ . 7.) Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὁρθῆς, ὡς ἡ ΔΒΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ἐκ τῶν εἰρημένων κατιδεῖν πάντῳ ῥηδίων, ὥς ἐκ ἐκ τῶν πλευρῶν μεγέθους τὸ τῆς γωνίας γίνεται μέγε-

γεθος. καὶ γὰρ ἐπ' ἀπειρον αὐταὶ ἐκβληθῶσιν, ἔδε-
μίαν ἢ γωνία λαμβάνει ἀλλοίωσιν.

Η'. Ἐυθεῖαι παράλληλοι εἰσιν αἱ ἴσοις ἀπ' ἀλλή-
λων ἀφιστάμεναι τοῖς ἀποστήμασιν, οἷον αἱ ΑΒ, ΓΔ.

(χ. 8.) Ἀποστήματα δὲ, αἱ ἀπὸ τῶν σημείων
τῆς ἐτέρας ἐπὶ τὴν ἐτέραν ἀγόμεναι κάθετοι, οἷον
αἱ ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἐντεῦθεν δῆλον, ὅτι αἱ παράλληλοι ἐπὶ μηδέτερα
τὰ μέρη συμπίπτουσι, καὶ ἐπ' ἀπειρον ἐκβάλλονται.

Θ'. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν ἡ ὑπὸ ευθειῶν περ-
ταμένη. ἣν δὴ καὶ ἐπίπεδον καλεῖν εἰάθασιν. χ. 9.

ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'.

Γίνεται ἡ ἐπιφάνεια, ευθείας σὺν τοῖς ἑαυτοῖς πέρα-
σιν ἐπὶ τὰ ἄνω, ἢ τὰ κάτω, ἢ τὰ δεξιὰ, ἢ τὰ ἀριστερά
φερομένης. διὸ δῆλον, ὡς μήκος μὲν καὶ πλάτος, ἔ μὴν
δὲ καὶ βάθος ἔχει ἡ ἐπιφάνεια.

Ι'. Ἐθύγραμμα χήματά εἰσι τὰ ὑπὸ ευθειῶν περι-
εχόμενα, πλειόνων ἢ δύο. Τρίπλευρα μὲν, τὰ
ὑπὸ τριῶν Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων
Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσά-
ρων. χ. 10, 11, καὶ 12.

ΙΑ'. Τῶν τριπλεύρων σχημάτων, Ἰσόπλευρον μὲν
τρίγωνόν ἐστι τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς. Ἰσο-
σκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευ-
ράς. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσας ἔχον.

ἐν τῶν τριπλεύρων χημάτων, Ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν· Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν· Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς τρεῖς γωνίας ὀξείας ἔχον. χ. 13, 14, 15, 16, 17 καὶ 18.

ΙΒ΄. Τῶν τετραπλεύρων χημάτων, Τετράγωνον μὲν ἐστίν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ὀρθογώνιον· Ἐτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, ἐκ ἰσόπλευρον δὲ· Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, ἐκ ὀρθογώνιον δὲ· Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ ἢτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, ἢτε ὀρθογώνιον· Ταῦτα δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, Τραπεζίαι καλεῖνται. χ. 19, 20, 21, 22, καὶ 23.

ΙΓ΄. Κύκλος ἐστὶ χῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾷς καμπύλης περιεχόμενον, πρὸς ἣν, ἀφ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τῆς χήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Γίνεται δὲ ὁ κύκλος εὐθείας τινὸς, οἷον τῆς ΚΑ, (χ. 24.) περιεγεχθείσης ἕως ὅτε ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἐνὸς τῶν περάτων αὐτῆς, οἷον τῆς Κ, ἀκινήτου μένοντος. καὶ τὸ μὲν Κ, Κέντρον τῆς κύκλου καλεῖται· ἡ δὲ ΑΒΓΔ καμπύλη, ἡ ὑπὸ τῆς σημείου Α γινομένη, Περιφέρεια· ἡ δὲ ΚΑ, ἡ περιεγεχθεῖσα, Ἡμιδιάμετρος, ὡσαύτως καὶ πᾶσαι εὐθεῖαι, ἡ ἀπὸ τῆς κέντρος πρὸς τὴν περιφέρειαν προσπίπτουσαι· ἡ δὲ διὰ τῆς κέντρος ἡγμένη, καὶ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ.

ὑπὸ τῆς τῆ κύκλου περιφερείας περατωμένη, ὡς ἡ ΑΓ,
Διάμετρος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.

Πᾶσαι μὲν αἱ ἡμιδιάμετροι ἴσαι ἀλλήλαις· ἐκάστη γὰρ αὐτῶν αὐτὴ ἡ περιεγεγενησά ἐστι τῆς δὲ ἡμιδιαμέτρου ἡ διάμετρος διπλασία· ἥτις δὴ καὶ δίχα τὸν κύκλον τέμνει.

ΙΔ΄. Κύκλοι παρὰλληλοὶ εἰσιν οἱ τὸ αὐτὸ μὲν ἔχοντες κέντρον, (χ. 25.) ὃ μὴν καὶ τὰς διαμέτρους ἴσας.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

Α΄. Ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν τημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν ὃ δὴ καὶ εὐθεῖαν ἐπιβεῦξαι λέγεται.

Β΄. Πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπ’ εὐθείας ἐκβάλλειν.

Γ. Παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

Η ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

Α΄. Τὰ τῶ αὐτῶ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα.

Β΄. Ἐὰν ἴσοις ἴσα προσεθῇ, τὰ ὅλα εἰσὶν ἴσα.

Γ΄. Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά εἰσιν ἴσα.

Δ΄. Ἐὰν ἀνίσαις ἴσα προσεθῇ, τὰ ὅλα εἰσὶν ἀνισα.

Ε΄. Τὰ τῶ αὐτῶ, ἢ τῶν ἴσων διπλασία, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

Ζ΄. Τὰ τῶ αὐτῶ, ἢ τῶν ἴσων ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

Ζ΄. Τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ’ ἀλλήλα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

Η΄. Τὸ ὅλον τῶ μέρους μείζον ἐστὶ.

Θ΄. Πάντα τὰ μέρη ἴσα τῶ ὅλῳ εἰσὶ.

Ι΄. Δύω εὐθεῖαι χωρίον ὃ περιέχουσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης,
τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ. πίν. β.
χ. 26.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γε-
γραμμένος ὁ ΒΓΔ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστή-
ματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγραμμένος ὁ ΑΓΕ. (α) καὶ
ἀπὸ τῶν Γ σημείων, καθ' ὃν τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι,
ἐπὶ τὰ Α καὶ Β σημεία ἐπεξεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ,
ΓΒ. (β) λέγω δὴ, ὅτι τὸ ΑΓΒ τρίγωνον τὸ ζητούμενόν ἐστι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΒΓ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΑ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΓ ἴση τῇ
ΒΑ. (γ) ἡ ΒΓ ἄρα ἴση τῇ ΑΓ. (δ) ἰσόπλευρον ἄρα τὸ
ΑΓΒ τρίγωνον, καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης ΑΒ συνέσταται. ὃ
εἶναι ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐ-
θείᾳ ἴσω εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον, τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐ-
θεῖα, ἡ ΒΓ. χ. 27.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθω ἀπὸ τῶν Α σημείων ἐπὶ τὸ Β ἡ ΑΒ. (ε)
καὶ συνεχίστω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΔΒ.
(ς) καὶ ἀντιβλήθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΑ κατὰ τὸ συνεχές.
(η) καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκ-
λος

(α) Κατὰ τὸ γ. Αἴτ. (β) Κατὰ τὸ α. Αἴτ. (γ) Κατὰ τὸ δ.
Πόρις. (δ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (ε) Κατὰ τὸ α. Αἴτ. (ς) Κα-
τὰ τὴν α. πρότ. (η) Κατὰ τὸ Α Αἴτ.

λος γεγραφθῶ ὁ ΓΗΘ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διατήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γεγραφθῶ ὁ ΗΚΛ. (θ) λέγω δὴ, ὅτι ἡ ΑΛ ἴση ἐστὶ τῇ δοθείσῃ ΒΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΛ ἴση ἐστὶ τῇ ΔΗ. (ι) ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΑ ἴση τῇ ΔΒ. (κ) ἄρα ἡ ΑΛ ἴση τῇ ΒΗ. (λ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΓ ἴση τῇ ΒΗ. (μ) ἄρα ἡ ΑΛ ἴση τῇ ΒΓ. (ν) πρὸς τῷ δοθέντι ἄρα σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κτίται ἡ ΑΛ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄.

Δύο δοθεῖσων εὐθεῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσῳ εὐθεῖαν ἀφελᾶν.

Ἐπὸς αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἀνισαὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἐν μείζον ἡ ΑΒ. ς. 28.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Καίθῳ πρὸς τῷ Α σημείῳ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΓΔ. (ξ) καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διατήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγραφθῶ ὁ ΔΕΖ. (ο) λέγω δὴ ὅτι ἡ ΑΕ ἴση τῇ ΓΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΕ ἴση τῇ ΑΔ. (π) ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΔ ἴση τῇ ΑΔ. (ρ) ἄρα ἡ ΑΕ ἴση τῇ ΓΔ. (σ) ἀφίηται ἄρα ἀπὸ τῆς μείζονος ΑΒ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἴση τῇ ἐλάσσονι ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἐκατέραν ἐκα-

(θ) Κατὰ τὸ γ. αἶτ. (ι) Κατὰ τὸ δ. πόρ. (κ) Κατὰ τὴν α. πρότ. (λ) Κατὰ τὸ γ. αἶξ. (μ) Κατὰ τὸ ἀρῆμ πόρ. (ν) Κατὰ τὸ α. αἶξ. (ξ) Κατὰ τὴν β. πρότ. (ο) Κατὰ τὸ γ. αἶτ. (π) Κατὰ τὸ δ. πόρ. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (σ) Κατὰ τὸ α. αἶξ.

τέρα, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχει,
 τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων ἐυθειῶν περιεχομένην,
 καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσιν ἔξει· καὶ τὸ
 τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοι-
 παὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσον-
 ται ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, ὅθεν αἱ ἴσαι
 πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα (χ. 29.) τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα
 τὴν μὲν ΑΒ ἴσην τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ γωνίαν
 τὴν ΒΑΓ ἴσην τῇ ΕΔΖ. λέγω ὅτι καὶ βάσεις ἡ ΒΓ βάσει
 τῇ ΕΖ ἴση ἔσται, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώ-
 νῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἑκατέ-
 ρωθεν ἑκατέρωθεν, ὅθεν αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ
 μὲν ΑΒΓ τῇ ΔΕΖ, ἡ δὲ ΑΓΒ τῇ ΔΖΕ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐφαρμόσω τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ τὸ ΔΕΖ, καὶ τε-
 θεῖδω τὸ μὲν Α σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ, ἡ δὲ ΑΒ ἐυθεῖα
 ἐπὶ τὴν ΔΕ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐφαρμόσει ἄρα καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε. (τ)
 ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ
 ἡ ΑΓ ἐπὶ τὴν ΔΖ. (υ) καὶ τὸ Γ ἄρα σημεῖον ἐφαρ-
 μόσει ἐπὶ τὸ Ζ. (φ) ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφήρ-
 μοσαι. καὶ ἡ βάσις ἄρα ΒΓ, ἐπὶ τὴν βάσιν ΕΖ ἐφαρ-
 μόσει, (χ) καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. (ψ) καὶ ὅλον τὸ τρί-
 γωνον ΑΒΓ ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐ-
 τῷ

(τ) Ἰση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. (υ) Ἰση γὰρ ἡ Α γωνία τῇ Δ.
 (φ) Ἰση γὰρ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ. (χ) Ἀλλως γὰρ δύο ἐυθεῖαι χω-
 ρίον περιέχουσιν. ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὸ ι. Ἀξ. (ψ) Κατὰ τὸ ζ. αξ.

τῶ ἕξαι. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ ταῖς λοιπαῖς γωνίας ἐφαρμόσῃσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ΑΒΓ τῇ ΔΕΖ, ἡ δὲ ΑΙΒ τῇ ΔΖΕ. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. καὶ προσεμβληθεῖσιν τῶν ἴσων ἑυθαιῶν, αἱ ὑπὸ τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ, καὶ προσεμβεβλημένας τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἐπὶ τὰ Δ καὶ Ε σημεῖα. λέγω Α΄. ὅτι αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΓΒ. Β΄. ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ τὴν βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις, ἡ ΔΒΓ τῇ ΕΓΒ. χ. 30.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἐπέξευχθω ἡ ΖΓ. (ω) καὶ εἰλήφθω ἡ ΑΗ ἴση τῇ ΑΖ. (α) καὶ ἐπέξεύχθω ἡ ΗΒ. (β)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΖΓΑ, ΗΒΑ, ἡ μὲν ΑΓ ἴση τῇ ΑΒ, (γ) ἡ δὲ ΑΖ τῇ ΑΗ, (δ) ἡ δὲ Α γωνία κοινή. καὶ βάσεις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση, καὶ ἡ γωνία ΖΓΑ τῇ ΗΒΑ, καὶ ἡ ΓΖΑ τῇ ΒΗΑ. (ε) πάλιν ἐν τοῖς τριγώνοις ΖΒΓ, ΗΓΒ, ἡ μὲν ΖΓ ἴση τῇ ΗΒ, (ς) ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΗΓ, (ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ΑΖ ἴση τῇ ΑΗ, (η) ἡ δὲ ΑΒ ἴση τῇ ΑΓ. (θ) καὶ λοιπὴ ἄρα

Α 5

ἡ

(ω) Κατὰ τὸ α. Αἴτ. (α) Κατὰ τὴν β. πρότ. (β) Κατὰ τὸ α. Αἴτ. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ε) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (ς) Ἐκ τῆς δῆξ. (η) Ἐκ τῆς κατασκ. (θ) Ἐξ ὑποθ.

ἡ ΖΒ ἴση τῇ ΗΓ. (ι) καὶ γωνία ἡ ΒΖΓ τῇ ΒΗΓ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΖΓΒ ἴση τῇ ΗΒΓ. (κ) δίδονται δὲ τὴ ΖΓΑ ἴση τῇ ΗΒΑ. εἰν ἄρα ἀπὸ μὲν τῆς ΖΓΑ ἀφαιρεθῇ ἡ ΖΓΒ, ἀπὸ δὲ τῆς ΗΒΑ ἡ ΗΒΓ, ἔσεται ἡ λοιπὴ ΒΓΑ ἴση τῇ λοιπῇ ΓΒΑ. ἴσαι ἄρα αἱ πρὸς τῇ βάσει τῷ ΒΑΓ τριγώνου γωνίαι, ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΓΒ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΖΒΓ, ΗΓΒ, ἡ μὲν ΖΓ ἴση τῇ ΗΒ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΗΓ, καὶ γωνία ἡ ΒΖΓ τῇ ΒΗΓ, ὡς ἔρηται. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΖΒΓ ἔστιν ΔΒΓ ἴση τῇ ΗΓΒ, ἥτοι τῇ ΕΓΒ. καὶ αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν ἄρα τῷ ἰσοσκελεῶς τριγώνου γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Τὸ ἄρα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἰσογώνιον ἐστὶ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτάσσεται πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒΓ γωνίαν τῇ ΑΓΒ. λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρὰ τῇ ΑΓ εἶν ἴση. εἰ γὰρ μὴ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ. χ. 31.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἡ ΒΔ ἴση τῇ ΑΓ (λ) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ. (μ)

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΓ, ΔΒΓ ἡ μὲν ΑΓ ἴση τῇ ΔΒ, (ν) ἡ δὲ ΒΓ κοινὴ, ἡ δὲ ΑΓΒ γωνία ἴση τῇ ΔΒΓ. (ξ)
ἄρα

(ι) Κατὰ τὸ γ. Αξ. (κ) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (λ) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (μ) Κατὰ τὸ α. Αἰτ. (ν) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ξ) Ἐξ ὑποθ.

ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον τῷ ΔΕΓ. (ο) τὸ ὅλον τῷ μέρει, ὅπερ ἄτοπον. Ἐκ ἄρα ἀντις ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ. ἴση ἄρα. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Τὸ ἄρα ἰσογώνιον τρίγωνον, ἰσόπλευρόν ἐστι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Μόνῃ τῇ τῆς ὀγδόης προτάσεως δείξει συντάξει ἥτις γε δὴ ταύτης ἀνευ δειχθήσεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἐκατέραν ἐκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσῳ, καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἔξῃ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν ὑποτετινομένας. καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα τὴν μὲν ΑΒ ἴσην τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν ΒΓ βάσιν τῇ ΕΖ βάσει. λέγω ὅτι καὶ ἡ ΒΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ΕΔΖ, καὶ ἡ ΑΓΒ τῇ ΔΖΕ, καὶ ἡ ΑΒΓ τῇ ΔΕΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τῷ τριγώνῳ ΔΕΖ. κ. 32.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐφησκόθω ἡ ΕΖ ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ πιπτέτω τὸ σημεῖον Δ ἐπὶ τὸ Η ἔστω, ὥστε τὸ ΗΒΓ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι τὸ ΔΕΖ. καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΗ. (π)

ΔΕΙ-

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΒΑ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΗ. (ρ) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΒΑΗ ἴση τῇ ΒΗΑ. (σ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΑΗ γωνία ἴση τῇ ΓΗΑ. Ἐλη ἄρα ἡ ΒΑΓ ἴση ἔλη τῇ ΒΗΓ, (τ) ἔτθεν τῇ ΕΔΖ. ἡ γὰρ ΒΗΓ αὐτὴ ἐστὶν ἡ ΕΔΖ. δύο ἄρα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, δύο πλευρὰς ἀπὸ πλευρῶν ἴσας ἔχει ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνία ἴσην, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων ἐυθεῶν περιεχομένην, τὴν ΒΑΓ τῇ ΕΔΖ. καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα γωνίας ἴσας ἔχει, τὴν ΑΓΒ τῇ ΔΖΕ, καὶ τὴν ΑΖΓ τῇ ΔΕΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΒΑΓ ἴσον τῷ ΕΔΖ. (υ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ἐυθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα ἐυθύγραμμος γωνία ἡ ΒΑΓ. χ 33.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἡ ΑΕ ἴση τῇ ΑΔ, (φ) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΔΕ. (χ) καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσοπλευρον τὸ ΔΖΕ, (ψ) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΖ. λέγω ὅτι ἡ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΔΖ, ΑΕΖ, ἡ μὲν ΑΔ ἴση τῇ ΑΕ, (ω) ἡ δὲ ΔΖ ἴση τῇ ΕΖ, (α) ἡ δὲ ΑΖ κοινὴ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΔΑΖ ἴση τῇ ΕΑΖ. (β) δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΔΑΕ, ἔτθεν ἡ ΒΑΓ ὑπὸ τῆς ΑΖ.

ΠΡΟ-

(ρ) Ἐξ ὑποθ. ἡ γὰρ ΒΗ αὐτὴ ἐστὶν ἡ ΑΕ. (σ) Κατὰ τὴν ε. πρότ. (τ) Κατὰ τὸ β. Ἀξ. (υ) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (φ) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (χ) Κατὰ τὸ α. αἰτ. (ψ) Κατὰ τὴν α. πρότ. (ω) Ἐκ τῆς κατασκευ. (α) Ὡσαύτως. (β) Κατὰ τὴν η. πρότ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένῃ εὐθείᾳ δίχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ. χ. 34.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω ἐπὶ τῆς ΑΒ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΓΒ.
(γ) καὶ τετμήθω δίχα ἡ ΑΓΒ γωνία τῇ ΓΔ εὐθείᾳ.
(δ) λέγω ὅτι ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΓΔ κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΓΔ, ΔΙΒ, ἡ μὲν ΑΓ ἴση τῇ ΒΓ, (ε) ἡ δὲ ΓΔ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΑΓΔ ἴση τῇ ΒΓΔ.
(ς) ἄρα καὶ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΔΒ. (η) τέτμηται ἄρα δίχα ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Δ ὑπὸ τῆς ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τῆς πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ. χ. 35.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείθω τῇ ΔΓ ἴση ἡ ΓΕ, (θ) καὶ συνεσάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΖΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ. Λέγω ὅτι ἡ ΖΓ κάθετός ἐστι τῇ ΑΒ.

ΔΕΙ-

(γ) Κατὰ τὴν α. πρότ. (δ) Κατὰ τὴν θ. πρότ. (ε) Ἐκ τῆς κατασκ. (ς) Ὁσαύτως. (η) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (θ) Κατὰ τὴν γ. πρότ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΔΖΓ, ΓΖΕ, ἡ μὲν ΔΖ ἴση τῇ ΖΕ, ἡ δὲ ΔΓ κοινὴ τῇ ΓΕ, (ι) ἡ δὲ ΓΖ κοινή. ἄρα ἡ γωνία ἡ ΔΓΕ ἴση τῇ ΕΓΖ. (κ) ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστι τῇ ΑΓ. (λ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄπαρον, ἀπὸ τῆς δοθέντος σημείας, ὅμη ἐστὶν ἐπ’ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγαίν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἄπαρος εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ. χ. 36.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήξθω ἐπὶ τὰ ἔτε α μέση τῆς ΑΒ εὐθείας τυχόν σημεῖον τὸ Δ. ἢ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ κύκλος γεγραψθῶ ὁ ΔΕΖΗ, (μ) ἢ τετμήθω ἡ ΗΕ δ’χα κατὰ τὸ Θ, (ν) ἢ ἀπὸ τῆς Γ ἐπὶ τὸ Θ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΘ. λέγου ὅτι ἡ ΓΘ κάθετός ἐστι τῇ ΑΒ. ἐπεζεύχθωσαν γάρ αἱ ΓΕ, ΓΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΗΓΘ, ΘΓΕ, ἡ μὲν ΗΓ ἴση τῇ ΓΕ, (ξ) ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΘΕ, (ο) ἡ δὲ ΓΘ κοινή. ἢ γωνία ἄρα ἡ ΗΘΓ ἴση τῇ ΕΘΓ. (π) ἡ ΓΘ ἄρα κάθετός ἐστι τῇ ΑΒ. (ρ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ’ εὐθείας σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ, ἥτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ.

Ἐν.

(ι) Ἐκ τῆς κατασκ. (κ) Κατὰ τὴν η. πρότ. (λ) Κατὰ τὸν ζ. ὁρίτ. (μ) Κατὰ τὸ γ. αἰτ. (ν) Κατὰ τὴν ι. πρότ. (ξ) Κατὰ τὸ δ. πρότ. (ο) Ἐκ τῆς κατασκ. (π) Κατὰ τὴν η. πρότ. (ρ) Κατὰ τὸν ζ. ὁρίτ.

Ευθεία τις ἡ AB ἐπ' ευθείαν τὴν ΓΔ σαθῆσα, γωνίας ποιέτω τὰς ΓΒΑ, ΑΒΔ. λέγω ὅτι αἱ ῥηθῆσαι γωνίαι ἦτοι δύο ὀρθαί εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. (πίν. γ. ζ. 37.) εἰ μὲν ἔν ἡ AB πρὸς ὀρθάς ἐστὶ τῇ ΔΓ, ὁλον ὅτι αἱ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. (σ) εἰ δ' ἄλ-

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἦχθῶ ἡ BE πρὸς ὀρθάς τῇ ΔΓ. (τ)

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ γωνίαι ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσὶ ταῖς ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ. (υ) ἀλλὰ καὶ αἱ γωνίαι ΕΒΓ, ΕΒΔ ἴσαι ταῖς ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ. (φ) ἄρα αἱ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι ταῖς ΕΒΓ, ΕΒΔ. (χ) ἀλλ' αὐταί εἰσιν ὀρθαί. (ψ) αἱ ἄρα ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α. Καὶ πολλαὶ δὲ ευθεῖαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς ευθείας σαθῆσαι, καὶ κατὰ τὸ αὐτὸ συμπεσῆσαι σημεῖον, ἴσας δυσὶν ὀρθαῖς γωνίας ποιῶσι.

Β. Δύο ευθεῖαι τέμνεσαι ἀλλήλας, γωνίας τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσι.

Γ. Καὶ πᾶσαι αἱ περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ΄.

Ἐὰν πρὸς τινὶ ευθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο ευθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας

(σ) Κατὰ τὸν ζ. ὅρισ. (τ) Κατὰ τὸν ια. πρότ. (υ) Κατὰ τὸ θ. ἀξ. (φ) Κατὰ τὸ αὐτό. (χ) Κατὰ τὸ α. ἀξ. (ψ) Κατὰ τὸν ζ. ὅρισ.

ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλή-
λαις αἱ εὐθεῖαι.

Πεὺς τῇ ΑΒ εὐθεῖα καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ΑΒΓ, ΑΒΔ γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποι-
εῖωσαν. Λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἢ ΒΔ. χ. 38.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἔσω ἢ ΒΕ ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΒ. αἱ ἄρα ΑΒΕ, ΑΒΓ γωνίαι ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (ω) ἀλλὰ καὶ αἱ ΑΒΓ, ΑΒΔ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (α) αἱ ἄρα ΑΒΕ, ΑΒΓ, ἴσαι ταῖς ΑΒΓ, ΑΒΔ. (β) κοινὴ ἀφηρέθω ἡ ΑΒΓ. λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒΕ ἴση λοιπῇ τῇ ΑΒΔ. (γ) τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον. ἐν ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ. ἡ ΒΔ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποι-
ήσῃσι.

Δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνίτωσαν ἀλλήλας κα-
τὰ τὸ Ε σημείον. Λέγω ὅτι αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἡ μὲν ΒΕΔ τῇ ΓΕΑ, ἡ δὲ ΒΕΓ τῇ ΑΕΔ. χ. 39.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ γωνίαι ΒΕΔ, ΒΕΓ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. (δ) ἀλλὰ καὶ αἱ ΒΕΓ, ΓΕΑ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (ε) ἄρα αἱ ΒΕΔ, ΒΕΓ ἴσαι ταῖς ΒΕΓ, ΓΕΑ. (ζ) ἀφηρέθω ἡ κοινὴ ΒΕΓ.
ἢ

(ω) Κατὰ τὸν ζ. ὁρίσμ. (α) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (γ) Κατὰ τὸ γ. Ἀξ. (δ) Κατὰ τὴν ιγ. πρότ. (ε) Κατὰ τὴν αὐτήν. (ζ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ.

ἡ ἄρα ΒΕΔ ἴση τῇ ΓΕΔ. (η) πάλιν, ἡ ΒΕΓ σὺν τῇ ΒΕΔ δὲ σὺν ἐξομαῖς ἴσαι. ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΕΔ σὺν τῇ ΑΕΔ ἴσαι δὲ σὺν ἐξομαῖς. ἄρα ἡ ΒΕΓ σὺν τῇ ΒΕΔ ἴσαι τῇ ΒΕΔ σὺν τῇ ΑΕΔ. κεινὴ ἀφηγήθω ἡ ΒΕΔ. λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕΓ ἴση λοιπῇ τῇ ΑΕΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβεβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἐκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐκβεβληθήθω αὐτῷ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Λ. λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΓΔ μείζων ἐστὶν ἐκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῶν ΓΑΒ, ΑΒΓ. χ. 40.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήθω δίχα ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Ε. (θ) καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ (ι) ἐκβεβληθήθω ἐπὶ τὸ Ζ. (κ) καὶ κείθω ἡ ΒΕ ἴση τῇ ΕΖ. (λ) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΖΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΖΕΓ, ΑΕΒ, ἡ μὲν ΓΕ ἴση τῇ ΕΛ, (μ) ἡ δὲ ΖΕ τῇ ΕΒ, (ν) καὶ γωνία ἡ ΖΕΓ τῇ ΑΕΒ. (ξ) ἄρα καὶ ἡ ΕΓΖ, ὅτεν ἡ ΑΓΖ γωνία ἴση τῇ ΕΑΒ, ἥτοι τῇ ΓΑΒ. (ο) ἀλλ' ἡ ΑΓΔ μείζων τῆς ΑΓΖ. (π) μείζων ἄρα καὶ τῆς ΓΑΒ. ὁμοίως δὲ τῆς ΒΓ διατμηθείσης, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΕ, καὶ ἐκβεβληθείσης ἐπὶ τὸ Ζ, ὥστε τὴν ΕΖ ἴσην εἶναι τῇ ΑΕ, καὶ

Β

τῆς

(η) Κατὰ τὸ γ. Ἀξ. (θ) Κατὰ τὴν ι. πρότ. (ι) Κατὰ τὸ α. Αξ. (κ) Κατὰ τὸ β. Αξ. (λ) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (μ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ν) Ἐκ τῆς κατασκ. (ξ) Κατὰ τὴν ιε. πρότ. (ο) Ἐκ τῆς δ. πρότ. (π) Κατὰ τὸ η. Ἀξ.

τῆς ΖΓ δὲ ἐπιζευχθείσης, καὶ ἐμβληθείσης, δειχθή-
σεται ἡ ΑΓΔ μείζων τῆς ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν
ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Διὰ τὴν ἡ πρότασιν αὕτη ἐκ τῶν τῆς ΔΒ' προτάσε-
ως. συνεπειῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μεί-
ζονα γωνίαν ὑποταίνει.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευ-
ρὴν τῆς ΑΒ. λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ΑΒΓ μείζων
ἐστὶ τῆς ΒΓΑ. χ. 41.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΒ. (ρ) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΑΔ, (σ) καὶ γωνία ἄρα ἡ
ΑΒΔ ἴση τῇ ΑΔΒ. (τ) ἀλλ' ἡ ΑΒΓ μείζων τῆς ΑΒΔ.
(υ) ἄρα μείζων καὶ τῆς ΑΔΒ. ἀλλ' ἡ ΑΔΒ μείζων τῆς
ΒΓΑ. (φ) πολλῶ μᾶλλον ἄρα ἡ ΑΒΓ μείζων τῆς ΒΓΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν,
ἡ μείζων πλευρὰ ὑποταίνει.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν Β γωνίαν
τῆς Γ. λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ, πλευρᾶς τῆς
ΑΒ μείζων ἐστὶ. χ. 42.

ΔΕΙΞΙΣ.

α. Ἐπὶ τὴν γ. πρότ. (σ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (τ) Κατὰ τὴν β'
(υ) Κατὰ τὸ η. Αξ. (φ) Κατὰ τὴν ιε. πρότ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ἐλάσσων καὶ ἴση μὲν ἐκ ἑστίν. ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ ἡ Β πρὸς τῇ Γ. (χ) ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. ἐδὲ ἡν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ ἡ Β γωνία τῆς Γ. (ψ) ὅπερ ὁμοίως τῇ ὑποθέσει ὑπάρχειται. ἐπεὶ ἔν ἐδὲ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἐδὲ ἐλάσσων, μείζων ἄρα ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ΄.

Ταυτὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι, πάντα μεταλαμβάνόμενα.

Ὑποθέσωμεν τὸ ΑΒΓ. λέγω ὅτι αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι, πάντα μεταλαμβάνόμενα, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ, τῆς ΒΓ· αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ, τῆς ΑΓ. αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ, τῆς ΑΒ. χ. 43

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημείον. καὶ κείθω ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ. (ω) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ. (α) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΔΓ ἴση τῇ ΑΓΔ. (β) ἀλλ' ἡ ΒΓΔ μείζων τῆς ΑΓΔ· (γ) μείζων ἄρα καὶ τῆς ΑΔΓ, εἴτεν τῆς ΒΔΓ. μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΔ τῆς ΒΓ. (δ) ἀλλ' ἡ ΒΔ ἴση ταῖς ΒΑ, ΑΔ. μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ ΑΔ τῆς ΒΓ. ἀλλ' ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ. (ε) αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ μείζονες τῆς ΒΓ. ὁμοίως δὲ δείζομεν, ὅτι καὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ. μείζονες τῆς ΑΓ καὶ αἱ ΒΓ, ΓΑ μείζονες τῆς ΑΒ.

Β 2

ΠΡΟ-

- (χ) Κατὰ τὴν ε. πρότ. (ψ) Κατὰ τὴν ιη. πρότ. (ω) Κατὰ τὴν ν. πρότ. (α) Ἐκ τῆς κατασκευ. (β) Κατὰ τὴν ε. πρότ. (γ) Κατὰ τὸ η. Αξ. (δ) Κατὰ τὴν ιδ. πρότ. (ε) Ἐκ τῆς κατασκευ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ΄.

Εὰν τριγώνῃς ἐπὶ μιᾷς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων ἰδύω εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τῶν τριγώνῃς δύω πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξῃσι.

Τριγώνῃς τῶν ΑΒΓ ἐπὶ μιᾷς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ, δύω εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ. λέγω Α΄, ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΕ τῶν λοιπῶν τῶν τριγώνῃς δύω πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονές εἰσι Β΄. ὅτι μείζονα γωνίαν περιέχῃσι τὴν ΒΔΓ. κ. 44.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐκβεβλήθω ἡ ΒΔ, καὶ συμπιπτέτω ἐπὶ τὸ Ε.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Αἱ ΒΑ, ΑΕ μείζονες εἰσι τῆς ΒΗ. (ζ) κοινὴ προσκείμεναι ἡ ΕΓ. Αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ μείζονες τῶν ΒΕ, ΕΓ. (η) πάλιν αἱ ΔΕ, ΕΓ μείζονες τῆς ΔΓ. (θ) κοινὴ προσκείμεναι ἡ ΒΔ. αἱ ἄρα ΒΕ, ΕΓ μείζονες τῶν ΒΔ, ΔΓ. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες εἰδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ. αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ πολλῶν μείζονες τῶν ΒΔ, ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Η΄ ΒΕΓ γωνία μείζων τῆς ΒΑΕ, εἶτα τῆς ΒΑΓ. (ι) ἀλλ’ ἡ ΒΔΓ μείζων τῆς ΔΕΓ, ἥτοι τῆς ΒΕΓ. (κ) πολλῶν ἄρα ἡ ΒΔΓ μείζων τῆς ΒΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ΄.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι.

Δεῖ

(ζ) Κατὰ τὴν κ. πρότ. (η) Κατὰ τὸ δ. ἀξ. (θ) Κατὰ τὴν κ. πρότ. (ι) Κατὰ τὴν ιε, πρότ. (κ) Κατὰ τὴν αὐτήν.

Δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντα μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντα μεταλαμβανομένας.

Ἐξωσαν αἱ δοθεῖσαι, αἱ Α, Β, Γ. χ. 45.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκείθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ. καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν ΔΖ ἴση τῇ Α, ἡ δὲ ΖΗ τῇ Β, ἡ δὲ ΗΘ τῇ Γ. (λ) καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ. (μ) καὶ ἀπὸ τῆς κοινῆς διατομῆς τῶν κύκλων Κ ἐπὶ τὰ κέντρα Ζ, Η ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ. (ν, λέγω, ὅτι τὸ ΚΗΖ τρίγωνον ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ Α ἴση τῇ ΖΔ. (ξ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΖ ἴση τῇ ΖΔ. (ο) ἄρα ἡ Α ἴση τῇ ΖΚ. (π) πάλιν ἡ Γ ἴση τῇ ΗΘ. (ρ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΗΚ ἴση τῇ ΗΘ. (σ) ἄρα ἡ Γ ἴση τῇ ΗΚ. (τ) ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΗΖ ἴση τῇ Β. (υ) τὸ ΚΗΖ ἄρα τρίγωνον ἐστὶ τὸ ζητούμενον. ἐκ τριῶν γὰρ συνέση εὐθειῶν αἱ ἴσες εἰσὶ τρισὶ ταῖς δοθεῖσαις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Β 3

Ἐξω

-
- (λ) Κατὰ τὴν γ. πρόγ. (μ) Κατὰ τὸ γ. Αἴτ. (ν) Κατὰ τὸ α. Αἴτ. (ξ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ο) Κατὰ τὸ δ. πόρ. (π) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκ. (σ) Κατὰ τὸ αὐτὸ πόρ. (τ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (υ) Ἐκ τῆς κατασκ.

Ἐστω ἡ μὲν δευτέρα εὐθεία, ἡ ΑΒ· τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον, τὸ Α' ἡ δὲ δευτέρα γωνία ἡ ΔΓΕ. χ. 46.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ. (φ) καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δευτέραις ΓΔ, ΓΕ, ΕΔ τρίγωνον συντάττω τὸ ΑΗΖ. (χ) ὥστε εἶναι τὴν μὲν ΑΗ ἴσην τῇ ΓΕ, τὴν δὲ ΑΖ τῇ ΓΔ, τὴν δὲ ΗΖ τῇ ΕΔ. λέγω ὅτι ἡ ΗΑΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ΔΓΕ.

ΔΕΙΞΙΣ. ι

Ἐν τοῖς τρίγωνοις ΑΗΖ, ΓΕΔ, ἡ μὲν ΑΗ ἴση τῇ ΓΕ, ἡ δὲ ΑΖ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΗΖ τῇ ΕΔ. (ψ) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΗΑΖ ἴση τῇ ΔΓΕ. (ω)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένῳ, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξῃ.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ. γωνία δὲ ἡ ΒΑΓ γωνίας τῆς ΕΔΖ μείζων ἔστω. λέγω, ὅτι καὶ βάση ἡ ΒΓ, βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστὶ. χ. 47.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Πρὸς τῇ ΕΔ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ Δ συντάττω ἡ ΕΔΗ γωνία ἴση τῇ ΒΑΓ. (α) καὶ εἰλήφθω

(φ) Κατὰ τὸ α. Αἰγ. (χ) Κατὰ τὴν κβ. πρότ. (ψ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ω) Κατὰ τὴν η. πρότ. (α) Κατὰ τὴν κγ. πρότ.

Ἐὰν ἡ ΔH ἴση ὑποτέρᾳ τῶν $\text{A}\Gamma$, ΔZ . (β) καὶ ἐπε-
ξεύχθωσαν αἱ ZH , EH .

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις $\text{BA}\Gamma$, $\text{E}\Delta\text{H}$, ἡ μὲν AB ἴση τῇ ΔE , (γ) ἡ δὲ $\text{A}\Gamma$ τῇ ΔH , (δ) καὶ γωνία ἡ $\text{BA}\Gamma$ τῇ $\text{E}\Delta\text{H}$. (ε) καὶ ἡ $\text{B}\Gamma$ ἄρα ἴση τῇ EH . (ζ) ἐπεὶ δὲ ἡ ΔZ ἴση τῇ ΔH . (η) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΔZH ἴση τῇ ΔHZ . (θ) ἀλλ' ἡ EZH μείζων τῆς ΔZH . (ι) μείζων ἄρα καὶ τῆς ΔHZ . πολλῷ ἄρα μείζων ἡ EZH τῆς EHZ . ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔHZ μείζων τῆς EHZ . ἐπεὶ ὅν τῃ τριγώνῳ EZH ἡ EZH γωνία μείζων δέδεικται τῆς EHZ . καὶ ἡ EH ἄρα μείζων τῆς EZ . ἀλλὰ τῇ EH ἴση δέδεικται ἡ $\text{B}\Gamma$. μείζων ἄρα καὶ ἡ $\text{B}\Gamma$ τῆς EZ .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς
δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχη ἑκατέραν ἑκατέ-
ρα, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα,
καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει τὴν
ὑπὸ τῶν ἴσων ἐυθειῶν περιεχομένην.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $\text{AB}\Gamma$, $\Delta\text{E}\text{Z}$, τὰς δύο πλευ-
ρας τὰς AB , $\text{A}\Gamma$, ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς ΔE , ΔZ
ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν AB , τῇ ΔE ,
τὴν δὲ $\text{A}\Gamma$, τῇ ΔZ . Βάσις δὲ ἡ $\text{B}\Gamma$, βάσεως τῆς EZ
μείζων ἔστω. λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ $\text{BA}\Gamma$ γωνίας τῆς
 $\text{E}\Delta\text{Z}$ μείζων ἐστί. πίν. δ. χ. 48.

(β) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (γ) Ἐξ ὑποθέσε. (δ) Ἐκ τῆς κατασκευ.
(ε) Ὁμοσυνταξί. (ζ) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (η) Ἐκ τῆς κατασκευ.
(θ) Κατὰ τὴν ε. πρότ. (ι) Κατὰ τὸ η. Ἀξ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ ἐλάττων. καὶ εἰ μὲν ἴση, καὶ ἡ ΒΓ ἴση τῇ ΕΖ ἔσται. (κ) ὅπερ τῇ ὑποθέσει ἀντίκειται· εἰ δὲ ἐλάττων, καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ ἐλάττων, ἔσται. (λ) καὶ τὸτο δὲ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. ἐκ ἑστὶν ἄρα εἰδὲ ἴση, εἰδὲ ἐλάττων. μείζων ἄρα ἐστὶν. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἐκατέραν ἐκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσιν, ἦτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσας γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει ἐκατέραν ἐκατέρα, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἐξωσαν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἔχοντα τὴν μὲν Β γωνίαν ἴσην τῇ Ε, τὴν δὲ ΑΓΒ τῇ Ζ. ἐχέτω δὲ πρότερον τὰς ΒΓ, ΕΖ, τὰς πρὸς ταῖς ἴσας γωνίαις, ἴσας. λέγω ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ ἴσα ἔξοσι τὰ τρίγωνα. σχ. 49.

Εἰ γὰρ ἄνιστος ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἔσται. ὅσω δὴ μείζων ἡ ΑΒ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἡ ΒΗ ἴση τῇ ΔΕ, (μ) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΓΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΗΒΓ, ΔΕΖ, ἡ μὲν ΒΗ ἴση τῇ ΔΕ, (ν) ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, (ξ) ἡ δὲ Β γωνία τῇ Ε.
(ο)

(κ) Κατὰ τὴν η. πρότ. (λ) Κατὰ τὴν κδ. πρότ. (μ) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (ν) Ἐκ τῆς κατασκ. (ξ) Ἐκ τῆς ὑποθ.

(ο) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΗΓΒ ἴση τῇ Ζ. (π) ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΓΒ ἴση τῇ Ζ. (ρ) καὶ ἡ ΗΓΒ ἄρα ἴση τῇ ΑΓΒ. (σ) τὸ μέρος τῶ ὅλῳ. ὅπερ ἀδύνατον. ἔκ ἄρα ἡ ΑΒ ἄνιστος τῇ ΔΕ. ἄρα ἴση. ἐπεὶ ἔν ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἡ μὲν ΑΒ ἴση τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ γωνία ἡ Β ἴση τῇ Ε. καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τῶν τριγώνων ἴσα. (τ)

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνεσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. λέγω πάλιν, ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ τῶν τριγώνων ἴσα ἔσονται.

Εἰ γὰρ ἄνιστός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν ἔσται μείζων. ἔσω δὴ μείζων ἡ ΒΓ.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Εἰλήϑω ἡ ΒΘ ἴση τῇ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. χ. 50.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΘ, ΔΕΖ, ἡ μὲν ΑΒ ἴση τῇ ΔΕ, (υ) ἡ δὲ ΒΘ ἴση τῇ ΕΖ, (φ) ἡ δὲ γωνία Β ἴση τῇ Ε. (χ) ἄρα καὶ ἡ ΑΘΒ γωνία ἴση τῇ Ζ. (ψ) ἀλλὰ καὶ ἡ Γ ἴση τῇ Ζ. (ω) ἄρα καὶ ἡ ΑΘΒ ἴση τῇ Γ. ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ὅπερ ἀδύνατον. (α) ἔκ ἄρα ἄνιστος ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ. ἄρα ἴση. καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τῶν ΕΑΓ, ΔΕΖ τριγώνων ἴσα. (β)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλας ποιῇ, παρὰλληλοι ἔσονται ἀλλήλας αἱ εὐθεῖαι.

B 5

Εἰς

- (ο) Ὡσαύτως. (π) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (ρ) Ἐκ τῆς ὑποθ. (σ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (τ) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (υ) Ἐξ ὑποθ. (φ) Ἐκ τῆς κατασκ. (χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (ω) Ἐξ ὑποθ. (α) Κατὰ τὴν ιε. πρότ. (β) Κατὰ τὴν δ. πρότ.

Εἰς δύο εὐθείας τὰς AB , $\Gamma\Delta$ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΘK τὰς ἐντὸς γωνίας, AEZ , $EZ\Delta$ ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖτω. λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$. χ . 51.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐμβαλλόμεναι συμπεσύνται ἥτοι ἐπὶ τὰ B , Δ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ A , Γ .

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήδωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ B , Δ μέρη, κατὰ τὸ H .

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τὸ $E\Gamma HZ$ τρίγωνόν ἐστιν, ἡ ἐκτὸς ἄρα AEZ γωνία μείζων τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον EZH . (γ) ἀλλὰ καὶ ἴση. (δ) ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ ἄρα αἱ AB , $\Gamma\Delta$ ἐμβαλλόμεναι συμπεσύνται ἐπὶ τὰ B , Δ μέρη. ὁμοίως δὴ διαχθήσεται, ὅτι ἐδὲ ἐπὶ τὰ A , Γ . αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερος τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσι. (ε) παράλληλος ἄρα ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ΄.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, πλὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσιν ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὁρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλων αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς δύο εὐθείας τὰς AB , $\Gamma\Delta$ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ EZ , τὴν ἐκτὸς γωνίαν ENB τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῇ $HO\Delta$ ἴσην ποιεῖτω. λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$. χ . 52.

ΔΕΙ-

(γ) Κατὰ τὴν κ, πρότ. (δ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὸ γ. πόρισ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΕΗΒ γωνία ἴση τῇ ΑΗΘ. (ζ) ἀλλὰ τῇ ΕΗΒ ἴση ἡ ΗΘΔ. (η) ἄρα ἡ ΑΗΘ ἴση τῇ ΗΘΔ. (θ) καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ. ἡ ΑΒ ἄρα παραλλήλος τῇ ΓΔ. (ι)

Ποιεῖται δὲ ἡ ΕΖ εἰς τὰς ΑΒ, ΓΔ ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας τὰς ΒΗΘ, ΔΘΗ ἴσας δυσὶν ὁρθαῖς· λέγω πάλιν ὅτι ἡ ΑΒ παραλλήλος τῇ ΓΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ γωνίαι ΒΗΘ, ΔΘΗ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὁρθαῖς. (κ) ἀλλὰ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι καὶ αἱ ΒΗΕ, ΒΗΘ. (λ) αἱ ἄρα ΒΗΘ, ΔΘΗ ἴσαι ταῖς ΒΗΕ, ΒΗΘ. (μ) κοινὴ ἀφηρεῖσθαι ἡ ΕΗΘ. ἄρα ἡ ΒΗΕ ἴση τῇ ΗΘΔ. (ν) ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς. παραλλήλος ἄρα τῇ ΓΔ ἡ ΑΒ. (ξ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ΄.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τάςτε ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὁρθαῖς ἴσας.

Εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτει ἡ ΕΖ. λέγω Α΄. ὅτι τὰς ἐναλλάξ γωνίας ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ. Β΄. ὅτι καὶ τὴν ἐκτὸς ΕΗΒ ἴσην τῇ ἐντὸς ΗΘΔ. Γ΄. ὅτι καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ΒΗΘ, ΔΘΗ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσας. Χ. 53.

Εἰ

(ζ) Κατὰ τὴν ιι. πρότ. (η) Ἐξ ὑποθ. (θ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (ι) Κατὰ τὴν κζ. πρότ. (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὴν ιδ. πρότ. (μ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (ν) Κατὰ τὸ γ. Ἀξ. (ξ) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῆς δε. τῆς πρότ.

Εἰ γὰρ μὴ ἡ $\Lambda\Theta$ γωνία ἴση τῇ ἐναλλάξ $\text{H}\Theta\Delta$,
ἡ ἑτέρα αὐτῶν ἔσται μείζων. ἔστω δὴ μείζων ἡ $\Lambda\Theta$ τῇς
 $\text{H}\Theta\Delta$.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεξάτω ἡ $\text{K}\Theta$ γωνία ἴση τῇ $\text{H}\Theta\Delta$. (ο) καὶ ἀπο-
τῶν H καὶ Λ σημείων τῆς AB ἤχθωσαν πρὸς ὀρθαῖς
τῇ $\Gamma\Delta$ αἱ HI , ΛM . (π)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Α΄.

Ἐπεὶ ἡ $\text{K}\Theta$ γωνία ἴση τῇ $\text{H}\Theta\Delta$ · (ρ) αἱ δὲ εἰσιν
ἐναλλάξ. ἡ KH ἄρα παράλληλος τῇ $\Gamma\Delta$. (σ) ἄρα τὰ
μεταξὺ αὐτῶν ἀποσήματα ἴσα ἀλλήλοις, τὰ HI , NM .
(τ) ἀλλὰ τῶ HI ἴσον καὶ τῶ ΛM . (υ) παράλληλος
γὰρ ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$. (φ) ἄρα καὶ ἡ ΛM ἴση τῇ NM .
(χ) τὸ ὅλον τῶ μέρει. ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ ἄρα ἡ $\text{K}\Theta$
γωνία ἴση τῇ $\text{H}\Theta\Delta$. ὁμοίως δὴ δεχθήσεται ὅτι ἐδὲ
ἄλλη τις μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς $\Lambda\Theta$ ἴση ἐστὶ τῇ $\text{H}\Theta\Delta$.
ἡ ἄρα $\Lambda\Theta$ ἴση τῇ $\text{H}\Theta\Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Β΄.

Ἡ γωνία EHB ἴση τῇ $\Delta\Theta\text{H}$. (ψ) ἀλλὰ τῇ $\Lambda\Theta$ ἴση
ἡ $\text{H}\Theta\Delta$. (ω) καὶ ἡ EHB ἄρα ἴση τῇ $\text{H}\Theta\Delta$. (α) χ . 54.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Γ΄.

Ἡ γωνία EHB ἴση τῇ $\Delta\Theta\text{H}$. (β) κοινὴ προσκείμεθα
ἡ $\text{BH}\Theta$. ἄρα αἱ EHB , $\text{BH}\Theta$ ἴσαι ταῖς $\Delta\Theta\text{H}$, $\text{BH}\Theta$.
(δ) ἀλλ' αἱ EHB , $\text{BH}\Theta$ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. (ε) ἄρα
καὶ αἱ $\text{BH}\Theta$, $\Delta\Theta\text{H}$ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς.

ΠΡΟ-

-
- (ο) Κατὰ τὴν κγ. πρότ. (π) Κατὰ τὴν ιβ. πρότ. (ρ) Ἐκ τῆς
κατασκ. (σ) Κατὰ τὴν κζ. πρότ. (τ) Κατὰ τὸν η. ὀρισ.
(υ) Κατὰ τὸν αὐτὸν ὀρισ. (φ) Κατὰ τὴν ὑποθ. (χ) Κατὰ
τὸ α. Ἄξ. (ψ) Κατὰ τὴν ιε. πρότ. (ω) Δίδασκαται ἐν τῷ α. μέρ.
(α) Κατὰ τὸ α. Ἄξ. (β) Κατὰ τὸ β. μέρ. (δ) Κατὰ τὸ β. αἶξ.
(ε) Κατὰ τὴν ιγ. πρότ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Αἰ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλή-
λων ἐσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρω τῶν ΑΒ, ΓΔ ἡ ΕΖ παράλληλος. λέ-
γω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ παράλληλος. κ. 55.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐμπίπτω εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΑΜ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία ΑΗΒ ἴση τῇ ΗΘΖ. (ζ) ἀλλὰ τῇ ΗΘΖ
ἴση ἡ ΘΚΔ. (η) ἄρα ἡ ΑΗΒ ἴση τῇ ΘΚΔ, (θ) ἔστιν
τῇ ΑΚΔ. ἄρα ἡ ΑΒ παράλληλος τῇ ΓΔ. (ι)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΑ΄.

Αὐτὸ τῷ δοθέντος σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ
παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α· ἡ δὲ δοθεῖσα εὐ-
θεῖα, ἡ ΒΓ. κ. 56.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ. καὶ ἐπε-
ξεύχθω ἡ ΑΔ. καὶ συνεξάτω ἡ ΕΑΔ γωνία ἴση τῇ
ΑΔΓ. (κ) καὶ ἐκβεθλήθω ἡ ΕΑ ἐπὶ τὸ Ζ. λέγω,
ὅτι ἡ ΕΖ παράλληλος ἐστὶ τῇ ΒΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΕΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ΑΔΓ. (λ) αἱ δὲ εἰσιν
ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ. (μ)

ΠΡΟ-

(ζ) Κατὰ τὸ β. μέρ. τῆς κθ. προτ. (η) Κατὰ τὸ αὐτό. (θ) Κατὰ
τὸ α. ἀξ. (ι) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῆς κη. προτ. (κ) Κατὰ τὴν
κγ. προτ. (λ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (μ) Κατὰ τὴν κδ. προτ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΒ΄.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβεβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ, καὶ αἱ ἐντὸς τῶ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι.

Ἔστω τριγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήτω αὐτῷ μία πλευρά ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. λέγω Α΄. ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ΑΓΔ, ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς Α καὶ Β. Β΄. ὅτι αἱ ἐντὸς τῶ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ Α, Β, καὶ ΑΓΒ δυσὶν ὁρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. κ. 57.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω διὰ τῷ Γ σημείῳ ἡ ΓΕ τῇ ΑΒ παράλληλος. (ν)

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἡ μὲν γωνία ΕΓΔ ἴση τῇ Β, (ξ) ἡ δὲ ΑΓΕ τῇ Α. (ο) ἅλη ἄρα ἡ ΑΓΔ ἴση ταῖς Β, καὶ Α.

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἡ ΑΓΔ γωνία ἴση ταῖς Α καὶ Β. (π) κοινὴ προσκείσθω ἡ ΑΓΕ. αἱ ἄρα ΑΓΔ, ΑΓΒ ἴσαι ταῖς Α, Β καὶ ΑΓΒ. (ρ) ἀλλ’ αἱ ΑΓΔ, ΑΓΒ ἴσαι δυσὶν ὁρθαῖς. (σ) ἄρα καὶ αἱ Α, Β καὶ ΑΓΒ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι. (τ)

ΣΥΝΕΠΕΙΛΑΙ.

Α΄. Αἱ δύο γωνίαι παντὸς εὐθυγράμμου τριγώνου δύο ὁρθῶν αὐτὴν ἐλάσσονες. αἱ τρεῖς γὰρ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι.

Β΄. Τὸ τῶν γωνιῶν ἀθροισμα παντὸς τριγώνου, ἴσόν ἐστὶ τῷ ἀθροίσματι τῶν γωνιῶν παντὸς ἑτέρου.

Γ΄.

(ν) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (ξ) Κατὰ τὸ τῆς κθ. πρότ. β. μέρ. (ο) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῆς αὐτ. (π) Διδόσεται ἡ δὴ. (ρ) Κατὰ τὸ β. Ἀξ. (σ) Κατὰ τὴν ιγ. πρότ. (τ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ.

- Γ'. Εάν τριγώνον μία γωνία ἦτοι ὀρθή, ἢ ἀμβλύα ἢ, ἑκατέρα τῶν λοιπῶν ὀξεία εἶσι.
- Δ'. Εάν ὀρθή μὲν ἢ μία τριγώνον γωνία, τὸ τῶν δύο λοιπῶν ἀθροισμα μιᾷ ὀρθῇ ἴσον· εάν δὲ ἀμβλύα, μιᾷ ὀξεία.
- Ε'. Εάν μία τριγώνον γωνία ἴση ἢ τῷ τῶν δύο λοιπῶν ἀθροίσματι, ὀρθή εἶνι ἐκείνη.
- Ζ'. Μιᾶς μὲν τριγώνον γωνίας γνωστῆς ἔσης, καὶ τὸ τῶν δύο λοιπῶν ἀθροισμα γνωστὸν εἶσι· δύο δὲ γνωστῶν, καὶ ἡ τρίτη δῆλη.
- Ζ'. Εάν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἦτοι ἀμφοτέρως ἀμφοτέρω, ἢ ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ λοιπὴ τῇ λοιπῇ ἴση εἶσι.
- Η'. Εάν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, καὶ αἱ λοιπὴ δύο ταῖς λοιπαῖς δυοῖν ἴσαι εἰσιν, ἦτοι ἀμφοτέρω ἀμφοτέρω, ἢ ἑκατέρω ἑκατέρω.
- Θ'. Εάν αἱ τὴν ὀρθὴν γωνίαν τῷ ὀρθογώνῳ τριγώνῳ περιέχουσιν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὥσιν, ἑκατέρω τῶν πρὸς τῇ βάσει ἴσων ἡμίσει ὀρθῆς εἶνι ἴση.
- Ι'. Ἐκάστη τῶν τῷ ἰσοπλευρῷ τριγώνῳ γωνιῶν ἴση τριτημορίῳ δύο ὀρθῶν, εἶτεν δυοῖν τριτημορίοις μιᾷ ὀρθῇς.
- ΙΑ'. Ἐκ τέττε τὴν δοθεῖσαν ὀρθὴν γωνίαν εἰς τρία τεμῆν ἴσα μέρη καταμαθεῖν βούδιν. ἔστω γὰρ ὀρθὴ γωνία ἡ ΒΑΔ. καὶ συνεχάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσοπλευρον τὸ ΑΓΔ. (υ) καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑΔ ἴση δυοῖν τριτημορίοις μιᾷ ὀρθῇς (φ) ἢ ἄρα ΕΑΓ ἴση τριτημορίῳ ὀρθῆς. τετμήθω δὲ δίχα ἡ ΓΑΔ (χ) διὰ τῆς ΑΕ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑΕ, ΔΑΕ ἴση τριτημορίῳ ὀρθῆς. ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΑΓ ἴση δίδεκεται τριτημορίῳ ὀρθῆς ἴσαι ἄρα ἀλλήλαις αἱ τρεῖς γωνίαι ΒΑΓ

(υ) Κατὰ τὴν α. πρότ. (φ) Κατὰ τὴν ι. συνίπ. (χ) Κατὰ τὴν θ. πρότ.

ΒΑΓ, ΓΑΕ, ΔΑΕ. εἰς τρία ἄρα ἴσα μέρη τέτμηται ἡ δοθεῖσα ὀρθή γωνία ΕΑΔ. χ . 58.

ΙΒ'. Πασῶν τῶν ἀπὸ τυχόντος τινὸς σημείου ἐπὶ τὴν ὀρθάν ἐν ἑαυτῇ ἀγομένων εὐθειῶν ἐλάσσων ἢ κάθετος. Ἦχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῆς Α σημείου εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΒ. ὣν ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒΓ γωνία ὀρθή, ἡ ἄρα ΑΓΒ ὀξυῖα. (ψ) ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΓ ἐλάσσων. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΑΒ καὶ ἐκάστης τῶν λοιπῶν ἐλάσσων. χ . 59.

ΙΓ'. Ἀπὸ τῆς αὐτῆς σημείου μία μόνον κάθετος τῇ δοθείσῃ ἀχθήσεται εὐθεία. Ἦχθωσαν γὰρ, εἰ δυνατόν, τῇ ΒΓ δύο κάθετοι, αἱ ΑΒ, ΑΖ. αἱ ἄρα γωνίαι τῆς ΑΒΖ τριγώνου δύο ὀρθῶν μείζονες. ὅπερ ἀδύνατον. (α) χ . 59.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τῆς εὐπορωτάτης ταύτης προτάσεως, ἥς ἐν πάσαις ταῖς μαθηματικαῖς ἐπισήμαις ἢ χρῆσις μεγίστη, εὑρετὴν γεγονέναι, φασί, (Εὐδῆμ. ὁ ἀρχαῖος Γεωμέτρ.) τὸν Πυθαγόραν. πολλάκις δ' αὐτῆς ὁ Ἀριστοτέλης μνησθῆναι, ἀκριβεῶς ἀποδείξεως προτιθεὶς αὐτὴν ὑπόδειγμα. ὥστερ δὲ δι' αὐτῆς γνωστὸν καθέστηκεν ὅποσαι ὀρθαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐντὸς τῶν τριπλεύρων γωνίαι· ἔτω δὴ καὶ αἱ ἐντὸς καὶ ἐκτὸς πᾶντὸς εὐθυγράμμου σχήματος.

ΙΔ'. Πᾶσαι αἱ ἐντὸς γωνίαι εὐθυγράμμου σχήματος ἴσαι εἰσὶ δις τοσαύταις ὀρθαῖς, ὅσαι αἱ ἐν τῷ σχήματι πλευραί, πλὴν τεσσάρων. Ἐστω εὐθύγραμμο τυχόντα, τό, τε τετράπλευρον ΑΒΓΔ, καὶ τὸ ἐξάπλευρον ΑΒΓΔΕΖ. (πίν. ε. χ . 60, 61.) καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς μιᾶς

(ψ) Κατὰ τὴν γ. συνίπ. (ω) Κατὰ τὴν ιδ. πρότ. (α) Κατὰ τὴν λβ, πρότ.

μίας ὁποιασὲν γωνίας ἐπὶ τὰς τῶν λοιπῶν εὐθεΐαι ἐπεξεύχθωσαν. οἷον ἐν μὲν τῷ τετραπλεύρῳ ἡ ΒΔ, ἐν δὲ τῷ ἑξαπλεύρῳ αἱ ΓΑ, ΓΖ, ΓΕ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρωθεν χήματος αἱ γωνίαι αὐταὶ εἰσιν αἱ τῶν ἐν αὐτοῖς τριγώνων γωνία· τσαύταις ἄρα ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν χήματος αἱ γωνίαι, ὅσαις καὶ τῶν ἐν αὐτοῖς τριγώνων. καὶ ἐπεὶ ἐν μὲν τῷ τετραπλεύρῳ δύο εἰσὶ τρίγωνα, ἐν δὲ τῷ ἑξαπλεύρῳ τέσσαρα· δῆλον ἄρα, ὅτι αἱ μὲν τῶν πρώτων γωνία ἴσαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς· αἱ δὲ τῶν δευτέρων ἑκτώ. ἐστὶ δὲ τὸ μὲν τέσσαρα ὁ διπλάσιος ἀριθμὸς τῶν τῶν τετραπλεύρων πλευρῶν, πλὴν τεσσάρων· ὁ δὲ ἑκτὼ ὁ τῶν τῶν ἑξαπλεύρων διπλάσιος, πλὴν τεσσάρων. ἴσαι ἄρα πᾶσαι αἱ ἐντὸς γωνίαι παντὸς εὐθυγράμμου χήματος δις τσαύταις ὀρθαῖς, ὅσαι αἱ ἐν τῷ χήματι πλευραί, πλὴν τεσσάρων.

Α Λ Λ Ω Σ.

Α' πό τινος σημείου τῶν ἐντὸς τῶν χήματος, οἷον τῶν Η, (χ. 62.) ἐφ' ἑκάστην τῶν γωνιῶν κορυφὴν εὐθεΐαι ἐπεξεύχθωσαν, οἷον αἱ ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ, ΗΔ, ΗΕ, ΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἕξ εἰσὶ τὰ συσπέννυται τρίγωνα, δώδεκα ἄρα ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν αἱ τέτων γωνία. ἀλλ' αἱ περὶ τὸ Η γωνία, αἱ μὴ ἴσαι γωνία τῶν ἑξαπλεύρων, τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. (β) αἱ λοιπαὶ ἄρα, αἱ τῶν ἑξαπλεύρων, ἴσαι ὀκτώ ὀρθαῖς, ὅπερ ἐστὶ τῷ διπλασίῳ τῶν πλευρῶν ἀριθμῷ, πλὴν τεσσάρων.

ΙΕ'. Πᾶσαι αἱ ἐκτὸς γωνία παντὸς εὐθυγράμμου χήματος τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι. Ἐσὼ γὰρ τυχὸν εὐθύγραμμον τὸ Χ. (χ. 63.) καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ τέττε πλευραί. καὶ ἐπεὶ καὶ Α συν τῇ Β ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς,

Γ

ω.

ὡσαύτως ἡ Γ σὺν τῇ Δ, καὶ ἡ Ε σὺν τῇ Ζ, καὶ ἡ Η σὺν τῇ Θ, καὶ ἡ Ι σὺν τῇ Κ (γ.) πᾶσαι ἄρα ἐμὲ ληφθεῖσαι δέκα ὀρθαῖς ἴσαι. ἀλλ' αἱ ἐντὸς τῶ ἡμιματος ἐξ ὀρθαῖς ἴσαι. (δ) αἱ ἐκτὸς ἄρα τέσσαρες ὀρθαῖς ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΓ'.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγύσσαι ἐυθεῖαι, καὶ αὐτὰ ἴσαι τε καὶ παραλλήλοί εἰσιν.

Ἔσταν ἴσαι τε καὶ παραλλήλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγύσταν αὐταῖς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐυθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ. λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παραλλήλοι εἰσιν. χ. 64.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξέχθω ἡ ΒΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΓ, ΔΒΓ, ἡ μὲν ΑΒ ἴση τῇ ΓΔ, (ε) ἡ δὲ ΒΓ κοινὴ καὶ γωνία ἡ ΓΒΑ ἴση τῇ ΒΓΔ. (ζ) καὶ ἡ ΑΓ ἄρα ἴση τῇ ΒΔ, καὶ γωνία ἡ ΒΓΑ ἴση τῇ ΓΒΔ. (η) αἱ δὲ εἰσιν ἐναλλάξ. αἱ ἄρα ΑΓ, ΒΔ παραλλήλοι. (θ) ἀλλὰ δέδεικται ὅτι καὶ ἴσαι. ἴσαι τε ἄρα καὶ παραλλήλοι εἰσιν. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΔ'.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλοις εἰσὶ. καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω

(γ) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (δ) Κατὰ τὴν προλ. συνέπ. (ε) Ἐξ ὑποθ. (ζ) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῆς κθ. πρότ. (η) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (θ) Κατὰ τὴν κζ. πρότ.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΔΒ, διαμέτρος δ' αὐ-
τῷ ἡ ΒΓ. λέγω Α΄, ὅτι αἱ ἀπεναντίας αὐτῷ πλευραί-
τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ Β΄. ὅτι ἡ ΒΓ διάμε-
τρος διχα αὐτὸ τέμνει. χ. τὸ αὐτ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐν ταῖς τριγώνοις ΔΒΓ, ΑΒΓ, ἡ μὲν ΒΓΔ γωνία
ἴση τῇ ΓΒΑ, ἡ δὲ ΓΒΔ τῇ ΒΓΑ, (ι) ἡ δὲ ΒΓ κοινή.
ἄρα ἡ μὲν ΔΓ ἴση τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΔΒ τῇ ΓΑ. καὶ γωνία
ἡ ΓΔΒ ἴση τῇ ΓΑΒ. (κ) καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΒΓΔ ἴση τῇ
ΓΒΑ, ἡ δὲ ΓΒΔ τῇ ΒΓΑ. ὅλη ἄρα ἡ ΔΓΑ ἴση ὅλῃ
τῇ ΔΒΑ. (λ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπεὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΑΓ τριγώνῳ. (μ)
ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος διχα τέμνει τὸ ΑΓΔΒ παραλλη-
λόγραμμον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ΄.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς
βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλή-
λοις, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς
αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλή-
λοις, ταῖς ΑΖ, ΒΓ, λέγω ὅτι ἴσόν εἰσι τὸ ΒΔ παραλλή-
λόγραμμον τῷ ΒΖ παραλληλογράμμῳ. χ. 65.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΓ. (ν) ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΖ ἴση τῇ
ΒΓ. (ξ) ἄρα καὶ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΕΖ. (ο) κοινὴ προσ-
κεισθῶ

2

(ι) Κατὰ τὸ ἄρημ. κ. μέρ. (κ) Κατὰ τὴν κς. πρότ. (λ)
Κατὰ τὸ β. Ἀξ. (μ) Κατὰ τὴν κς. πρότ. (ν) Κατὰ τὴν λδ.
πρότ. (ξ) Κατὰ τὴν αὐτ. (ο) Κατὰ τὸ α. Ἀξ.

κείδω ἡ ΔΕ. ἄρα ἡ ΑΕ ἴση τῇ ΔΖ. (π) ἐκέν ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΑΕ, ΓΔΖ, ἡ μὲν ΑΕ ἴση τῇ ΔΖ, (ρ) ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΓΖ. (σ) τὸ ἄρα ΒΑΕ τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΔΖ τριγώνῳ. (τ) κοινὸν ἀφ' ἡρῆδω τὸ ΔΗΕ τρίγωνον. τὸ τραπέζιον ἄρα ΑΒΗΔ ἴσον τῷ ΓΗΕΖ τραπέζίῳ. (υ) κοινὸν προσκείδω τὸ ΒΗΓ τρίγωνον. τὸ ἄρα ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ. (φ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ'.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐσὶν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΒΔ, ΖΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων, τῶν ΒΓ, ΖΗ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ταῖς ΑΘ, ΒΗ. λέγω, ὅτι τὸ ΒΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ ἴσόν ἐστι. χ. 66.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΓΘ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΒΓ ἴση τῇ ΖΗ, (χ) τῇ δὲ ΖΗ ἴση ἡ ΕΘ. (ψ) καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἴση τῇ ΕΘ. (ω) εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι. (α) καὶ αἱ ΒΕ, ΓΘ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοι. (β) παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΕΘΓ. ἐστὶ δὲ ἴσον ἑκατέρῳ τῶν ΒΔ, ΖΘ παραλληλογράμμων. (γ) καὶ τὸ ΒΔ ἄρα ἴσον τῷ ΖΘ. (δ) ὃ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟ-

- (π) Κατὰ τὸ β. αἶξ. (ρ) Διδακτὰ. (σ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (τ) Κατὰ τὴν η. πρότ. (υ) Κατὰ τὸ γ. Ἀξ. (φ) Κατὰ τὸ β. αἶξ. (χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (ω) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (α) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὴν λγ. πρότ. (γ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (δ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΖ΄.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄν-
τα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα
ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς
ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΔ, ΒΓ. λέγω,
ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ. χ. 67.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθω ἡ ΑΔ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ
Ε, Ζ σημῆα. καὶ διὰ μὲν τῆ Β ἤχθω ἡ ΒΕ παραλ-
ληλος τῇ ΓΑ, διὰ δὲ τῆ Γ, (ε) ἡ ΓΖ τῇ ΒΔ. ...

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ ΓΕ, ΒΖ παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.
(ζ) ἄλλα τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον τὸ ἥμισυ ἐστὶ τῆ ΓΕ
παραλληλογράμμου· τὸ δὲ ΔΒΓ, τὸ τῆ ΒΖ ἥμισυ. (η)
τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον. (θ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΗ΄.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα,
καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλή-
λοις εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν
ΒΓ, ΓΖ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ,
ΔΑ. λέγω, ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ
τριγώνῳ. χ. 68.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθω ἡ ΑΔ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η,
Θ σημῆα. καὶ διὰ μὲν τῆ Β ἤχθω ἡ ΒΗ παραλ-
ληλος τῇ ΑΓ· διὰ δὲ τῆ Ζ, ἡ ΖΘ τῇ ΓΔ. (ι).

Γ 3

ΔΕΙ-

(ε) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (ζ) Κατὰ τὴν λε. πρότ. (η) Κατὰ
τὴν λδ. πρότ. (θ) Κατὰ τὸ σ. Ἀξ. (ι) Κατὰ τὴν λα. πρότ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ παραλληλόγραμμα ΓΗ, ΓΘ ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.
(κ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον τὸ ἥμισυ ἐστὶ τῷ παραλληλογράμῳ ΓΗ, τὸ δὲ ΔΓΖ τῷ ΓΘ. (λ) τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον ἴσον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ. (μ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΘ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνα ἴσα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ (χ. 69.) ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, τῆς ΒΓ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ, Α, Δ. λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσίν· ὅπερ εἶναι, ὅτι ἡ τὰς κορυφῶν αὐτῶν ἐπιξευγνύσα ΑΔ, παράλληλός ἐστι τῇ βάσει ΒΓ. εἰ γὰρ μὴ,

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἡ' χθω ἡ ΑΕ παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΕΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τριγώνῳ ΕΒΓ. (ν) ἀλλὰ καὶ τῷ ΒΔΓ ἴσον τῷ ΑΒΓ. (ξ) τὸ ἄρα ΕΒΓ ἴσον τῷ ΔΒΓ. (ο) τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα ἡ ΑΕ παράλληλος τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἐδὲ ἄλλη τις, πλὴν τῆς ΑΔ. ἡ ΑΔ ἄρα παράλληλος τῇ ΒΓ. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, (καὶ ἐπ' εὐθείας ἔχοντα τὰς βάσεις) καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσίν.

Ἔστω

(κ) Κατὰ τὴν λς. πρότ. (λ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (μ) Κατὰ τὸ σ. 'Αξ. (ν) Κατὰ τὴν λς. πρότ. (ξ) 'Εξ ὑποθ. (ο) Κατὰ τὸ νδ α. 'Αξ

Ἐξω τρίγωνα ἴσα τὰ $\Lambda\Gamma$, $\Delta\Gamma$, (σχ. 70) ἐπὶ ἴσων βάσεων, τῶν $\beta\Gamma$, $\Gamma\epsilon$, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ $\Lambda\Delta$, καὶ ἐπ' εὐθείας ἔχοντα τὰς βάσεις $\beta\Gamma$, $\Gamma\epsilon$. λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις, ὅταν ὅτι ἡ $\Lambda\Delta$ παράλληλος τῇ $\beta\epsilon$. εἰ γὰρ μὴ,

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐ'χθω ἡ $\Lambda\Delta$ παράλληλος τῇ $\beta\epsilon$, (π) καὶ ἐπεξέχθω ἡ $\epsilon\zeta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ $\Lambda\beta\Gamma$ τρίγωνον ἴσον τῷ $\Delta\Gamma\epsilon$ τριγώνῳ. (ρ) ἀλλὰ καὶ τὸ $\Delta\Gamma\epsilon$ ἴσον τῷ $\Lambda\beta\Gamma$. (σ) τὸ ἄρα $\Delta\Gamma\epsilon$ ἴσον τῷ $\Delta\Gamma\epsilon$. (τ) τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα ἡ $\Lambda\Delta$ παράλληλος τῇ $\beta\epsilon$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ διαχθήσεται, ὅτι ὅδε ἄλλη τις, πλὴν τῆς $\Lambda\Delta$. ἡ ἄρα $\Lambda\Delta$ παράλληλος τῇ $\beta\epsilon$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΑ΄.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχη τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾗ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τῷ τριγώνῳ.

Παραλληλόγραμμον τὸ $\Lambda\Gamma$ τριγώνῳ τῷ $\epsilon\beta\Gamma$ βάσιν ἔχέτω τὴν αὐτὴν $\beta\Gamma$, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστω παραλλήλοις ταῖς $\beta\Gamma$, $\Lambda\epsilon$. λέγω, ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ $\Lambda\Gamma$ παραλληλόγραμμον τῷ $\beta\epsilon\Gamma$ τριγώνῳ. πίν. 5. χ. 71.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ $\Lambda\Gamma$.

Γ 4

ΔΕΙ-

(π) Κατὰ τὴν λα. πρότ., (ρ) Κατὰ τὴν λη. πρότ. (α) Ἐξ ὑποθ. (τ) Κατὰ τὸ α, Ἄξ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΔΓ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. (υ) ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσόν ἐστι τῷ ΒΕΓ τριγώνῳ. (Φ) τὸ ΔΓ ἄρα παραλληλόγραμμον διπλάσιον καὶ τῷ ΒΕΓ τριγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΒ΄.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγραμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Δ. ς. 72.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήθω δίχα ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Ε, (χ) καὶ ἐπέξωχθω ἡ ΕΑ, καὶ συνεστιάτω ἡ ΓΕΖ γωνία ἴση τῇ Δ. (ψ) καὶ διὰ μὲν τῷ Α ἤχθω ἡ ΑΗ παράλληλος τῇ ΒΓ, διὰ δὲ τῷ Γ, ἡ ΓΗ τῇ ΖΕ. (ω) λέγω, ὅτι τὸ ΕΗ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΒΕ τρίγωνον ἴσόν ἐστι τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ. (α) τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ὃν τοῖς ΑΒΕ, ΑΕΓ, διπλάσιόν ἐστι τῷ ΑΕΓ. ἀλλὰ καὶ τὸ ΕΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τῷ αὐτῷ ΑΕΓ τριγώνῳ. (β) τὸ ἄρα ΕΗ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, (γ) καὶ ἔχει τὴν ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ Δ. τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστὶ.

ΠΡΟ.

-
- (υ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (Φ) Κατὰ τὴν λς. πρότ. (χ) Κατὰ τὴν ι. πρότ. (ψ) Κατὰ τὴν κγ. πρότ. (ω) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (α) Κατὰ τὴν λη. πρότ. (β) Κατὰ τὴν μα. πρότ. (γ) Κατὰ τὸ ε. ἀξ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΓ΄.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἔσιν.

Ἴσω παραλληλόγραμμον τὸ ΒΔ, διάμετρος δ' αὐτῆς ἡ ΑΓ. περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμοι μὲν ἔσω τὰ ΒΘ, ΗΖ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ. λέγω, ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ ΒΚ τῷ ΚΔ. Ϟ. 73.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΚΗΓ τῷ ΚΖΓ, τῷ δὲ ΑΕΚ τὸ ΑΘΚ. (δ) ἀφηρήθω ἀπὸ μὲν τῆς ΑΒΓ τὰ ΚΗΓ, ΑΕΚ· ἀπὸ δὲ τῆς ΑΔΓ τὰ ΚΖΓ, ΑΘΚ. καὶ λοιπὰ ἄρα τὰ ΒΚ, ΚΔ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. (ε)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΔ΄.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεΐαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλὼν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμω.

Ἴσω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεΐα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον, τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Δ. Ϟ. 74.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεξάτω παραλληλόγραμμον τὸ ΕΓ ἴσον τῷ τριγώνῳ Γ, καὶ ἐν τῇ γωνίᾳ ΕΒΗ ἴση τῇ δοθείσῃ Δ. (ς) καὶ κείτω ἡ δοθεῖσα ΑΒ ἐπ' εὐθείας τῇ ΗΒ. καὶ ἀπὸ τῆς Α σημεῖς ἤχθω ἡ ΑΚ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΓΗ, ΕΒ. (η) καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΓΕ συμπίπτει τῇ ΑΚ κατὰ τὸ Κ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ

Γ 5

ἡ

(δ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (ε) Κατὰ τὸ γ. Αξ. (ς) Κατὰ τὴν μβ. πρότ. (η) Κατὰ τὴν λμ. πρότ.

ἡ ΚΒ, καὶ ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ συνεχές, καὶ συμ-
πιπτέτω τῇ ΓΓ ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ Θ. καὶ ἀπὸ τοῦ
Θ ἄρξω ἡ ΘΑ παραλλήλος ἐπιστρέφα τῶν ΗΑ, ΓΚ.
καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΕΒ, ΚΑ, καὶ συμπιπτέτωσαν τῇ
ΘΑ κατὰ τὰ Μ καὶ Λ σημεία. Λέγω, ὅτι τὸ ΒΑ
ἐστὶ τὸ ζητούμενον παραλλήλογράμμον.

ΛΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΒΑ παραλλήλογράμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΒ. (θ) ἄλ-
λὰ καὶ τὸ Γ τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΒ. (ι) τὸ ΒΑ ἄρα
παραλλήλογράμμον ἴσον τῷ δοθέντι τριγώνῳ Γ. (κ) καὶ
παραβιβλήται μὲν παρὰ τὴν δεδομένην ΑΒ, ἔχει δὲ
καὶ γωνίαν τὴν ΜΒΑ ἴσην τῇ δεδομένῳ Δ. (ἡ μὲν γὰρ
ΜΒΑ ἴση τῇ ΕΒΗ, (λ) τῇ δὲ ΕΒΗ ἴση ἡ Δ.) (μ)
τὸ ΒΑ ἄρα παραλλήλογράμμον ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΕ΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλλη-
λόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυ-
γράμμῳ γωνίᾳ.

Ἦσω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ
δοθεῖσα γωνία ἡ Ε. σχ. 75.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ συνεχάτω τὸ ΚΗ παραλ-
ληλόγραμμον ἴσον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, περιέχον καὶ γω-
νίαν τὴν ΖΚΘ ἴσην τῇ δεδομένῳ Ε. (ν) παρὰ δὲ τὴν
ΗΘ παραβιβλήθω παραλλήλογράμμον τὸ ΘΛ ἴσον τῷ
ΓΔΒ τριγώνῳ, περιέχον καὶ γωνίαν τὴν ΛΗΘ ἴσην τῇ
ΗΘΚ

(θ) Κατὰ τὴν μγ. πρότ. (ι) Ἐκ τῆς κατασκ. (κ) Κατὰ
τὸ α. Λξ. (λ) Κατὰ τὴν ιι. πρότ. (μ) Ἐκ τῆς κατασκ.
(ν) Κατὰ τὴν μβ. πρότ.

ΗΘΚ. (ξ) λέγω, ὅτι τὸ ΚΛ ἐστὶ τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΚΗ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΘΛ τῷ ΓΔΒ. (ο) ἔλον ἄρα τὸ ΚΛ ἴσον ἑλόν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ΑΒΓΔ. ἔχει δὲ καὶ γωνίαν τὴν ΖΚΜ ἴσην τῇ δοθείσῃ Ε. (π) τὸ ΚΛ ἄρα τὸ ζητούμενον ἔστιν

Ὅτι δὲ αἱ ΖΗ, ΚΘ ἐπ' εὐθείας κείνται ταῖς ΗΛ, ΘΜ, δείξας ἔτως· Αἱ γωνίαι ΖΗΘ, ΗΘΚ ἴσαι εἰσὶ δὲσιν ὀρθαῖς. (ρ) ἀλλ' ἡ ΛΗΘ ἴση τῇ ΗΘΚ. (σ) ἄρα καὶ αἱ ΖΗΘ, ΛΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἡ ΖΗ, τῇ ΗΛ. (τ) πάλιν αἱ ΛΗΘ ΜΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. (υ) ἀλλ' ἡ ΛΗΘ ἴση τῇ ΗΘΚ. (φ) ἄρα καὶ αἱ ΜΘΗ, ΗΘΚ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. καὶ ἡ ΚΘ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΘΜ. (χ).

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Ἐντεῦθεν δῆλον, ὡς καὶ δυσὶ, καὶ πλείοσιν εὐθυγράμμοις ἴσον ἔνεστι παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν, καὶ τὴ διαφορὰν εὐρεῖν τὴν μεταξὺ τῶν δοθέντων εὐθυγράμμων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΖ΄.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ. κ. 76.

ΚΑ-

-
- (ξ) Κατὰ τὴν μδ. πρότ. (ο) Ἐκ τῆς κατασκ. (π) Ὡσαντας.
 (ρ) Κατὰ τὴν κδ. πρότ. (σ) Ἐκ τῆς κατασκ. (τ) Κατὰ τὴν ιδ. πρότ. (υ) Κατὰ τὴν κδ. πρότ. (φ) Ἐκ τῆς κατασκ.
 (χ) Κατὰ τὴν ιδ. πρότ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

"Ηχθω ἀπὸ τῆς Α ἢ ΛΑ ἴση τε (ψ) καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ. (ω) καὶ ἀπὸ μὲν τῆς Α ἢχθω ἡ ΔΕ παραλλήλος τῇ ΑΒ, ἀπὸ δὲ τῆς Β ἢ ΒΕ παραλλήλος τῇ ΛΑ. (α) λέγω, ὅτι τὸ ΑΕ τὸ ζητούμενον τετράγωνόν ἐστι.

ΛΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμόν ἐστιν. (β) ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΒΕ. (γ) αἷμα ἡ ΑΛ ἴση τῇ ΑΒ. (δ) αἱ τέσσαρες ἄρα ΑΒ, ΛΑ, ΔΕ, ΕΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ πλευρὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ δὲ αἱ Α, Β γωνίαι δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι. (ε) ἐστὶ δὲ ἡ Α ὀρθή. (ζ) καὶ ἡ Β ἄρα ὀρθή ἐστιν. αἷμα ἡ μὲν Α ἴση τῇ Ε, ἡ δὲ Β τῇ Δ. (η) ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν Ε, Δ. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον. εἰδείχθη δὲ καὶ ὑπὸ πλευρὸν, τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον. τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστὶ. (θ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΖ΄.

Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποταίνουσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

"Εσω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ΕΑΓ γωνίαν. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. χ. 77.

ΚΑ.

(ψ) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (ω) Κατὰ τὴν ια. πρότ. (α) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (β) Ἐκ τῆς κατασκ. (γ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (δ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ε) Κατὰ τὴν κδ. πρότ. (ζ) Ἐκ τῆς κατασκ. (η) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (θ) Κατὰ τὸν ιβ. ὅρισ.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τὸ ΒΕ τετράγωνον, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΛ, ΛΓ, τὰ ΗΒ, ΘΓ. (ι) καὶ διὰ τῶ Λ ἵποτέρα τῶν ΒΔ, ΓΕ ἤχθω παραλλήλος ἡ ΛΔ. (κ) καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΔ, ΓΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΔΕΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ΓΒΔ. (λ) κοινὴ προσκείθω ἡ ΑΒΓ. ἡ ἄρα ΖΒΓ ἴση τῇ ΑΒΔ. (μ) ἐν τοῖς τρίγωνοις ἐν ΖΒΓ, ΑΒΔ, ἡ μὲν ΖΒ ἴση τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΒΔ, (ν) καὶ γωνία ἡ ΖΒΓ τῇ ΑΒΔ. τὸ τρίγωνον ἄρα ΖΒΓ ἴσον τῷ ΑΒΔ. (ξ) καὶ ἐστὶ τῶ μὲν ΖΒΓ τριγώνῳ διπλάσιον τὸ ΒΗ παραλλήλογράμμον· (ο) βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ· τῶ δὲ ΑΒΔ τριγώνῳ διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλλήλογράμμον· βάσιν τε γὰρ ἔχουσι τὴν αὐτὴν, τὴν ΒΔ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις, ταῖς ΒΔ, ΑΛ. ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΗ τῷ ΒΛ. (π) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπιζευχθεσῶν τῶν ΒΚ, ΑΕ, δευχθήσεται τὸ ΓΘ ἴσον τῷ ΓΛ. ὅλον ἄρα τὸ ΒΕ ἴσον τοῖς ΒΗ, ΓΘ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΕ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον, τὸ δὲ ΒΗ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΛ, τὸ δὲ ΓΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΛ, ΛΓ τετραγώνοις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΗ΄.

Ἐὰν τριγώνῳ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ἢ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τῶ τριγώνῳ δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περι-

(ι) Κατὰ τὴν μτ. πρότ. (κ) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (λ) Ἐκ τῆς κατασκ. (μ) Κατὰ τὸ β. αξ. (ν) Ἐκ τῆς κατασκ. (ξ) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (ο) Κατὰ τὴν μα. πρότ. (π) Κατὰ τὸ σ, αξ.

περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τῷ τρι-
γώνῳ δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστίν.

Τετράγωνος τῷ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τε-
τράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τε-
τράγωνοις. λέγω ὅτι ὀρθή ἐστὶν ἡ ΒΑΓ γωνία. χ. 78.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἦρχθω ἡ ΑΔ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΑΓ, (ρ) καὶ ἴση τῇ
ΑΒ. (σ) καὶ ἐπεξέσχεθω ἡ ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ.
(τ) καὶ ἐπεξέσχεθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ. τὰ ἄρα ἀπὸ
τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΑΓ.
(υ) ἂν καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ἴσον τῷ ἀπὸ
τῆς ΒΓ· (φ) τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΑΓ, τῷ ἀπὸ τῆς
ΔΓ. (χ) τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον τῷ
ἀπὸ τῆς ΓΑ τετράγωνῳ. καὶ ἡ ΒΓ ἂν ἴση τῇ ΔΓ.
ἐν τοῖς τριγώνοις ἐν ΓΑΒ, ΓΑΔ, ἡ μὲν ΒΑ ἴση τῇ
ΑΔ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΓΑ κοινή. καὶ γωνίαι ἄρα
ἡ ΒΑΓ ἴση τῇ ΔΑΓ. (ψ) ἂν καὶ ἡ ΔΑΓ ὀρθή. (ω) καὶ
ἡ ΒΑΓ ἄρα ὀρθή ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΒΙΒΛΙΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, ὃ καὶ ὀρθογώ-
νιον καλεῖν εἰώθασιν, οἷον τὸ ΑΓΕΖ, περιέχεσθαι
λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν
εὐθει-

(ρ) Κατὰ τὴν ια. πρότ. (σ) Κατὰ τὴν γ. πρότ. (τ) Ἰση γὰρ ἡ
ΒΑ τῇ ΑΔ. (υ) Κατὰ τὸ β. αἰ. (φ) Ἐξ ὑποθ. (χ) Κατὰ
τὴν μζ. πρότ. (ψ) Κατὰ τὴν η. πρότ. (ω) Ἐκ τῆς κατασκευῆς.

εὐθεῖαν, οἷον τῶν ΓΑ, ΑΖ. τέτων ἢ μὲν τὸ ὕψος, ἢ δὲ τὴν βάσιν· ἢ, ἢ μὲν τὸ μῆκος, ἢ δὲ τὸ πλάτος τῷ ὀρθογώνιῳ ἐμφαίνει. πίν. ζ'. χ. 1.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Γίνεται τὸ ὀρθογώνιον ἥτοι τῷ ὕψος ΑΓ ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΖ, ἢ τῷ μπαλιν τῆς βάσεως ΑΖ ἐπὶ τὸ ὕψος φερομένης. εἰδέντοι ὡς ἐκ τῷ πολλαπλασιασμῷ τῷ ὕψος καὶ τῆς βάσεως τὸ τῷ ὀρθογώνιῳ χωρίον ἐννοῶμεν γίνεσθαι. εἰάν γὰρ τό τε ὕψος (σχ 2.) ΑΓ, καὶ τὴν βάσιν ΑΖ εἰς μέρη ὅποιαι ἐν ἀλλήλοις ἴσα διέλῃς· οἷον τὸ μὲν εἰς 4, τὴν δὲ εἰς 8· τοσαῦτα ἔσονται τὰ τετράγωνα τὰ ἐν τῷ ὀρθογώνιῳ ΑΓΕΖ περιεχόμενα, εἴτεν ἐκ τεσσάρων τετραγώνων σύγκειται ἢ τῷ ὀρθογώνιῳ ΑΓΕΖ ἐπιφάνεια, ὅσαι μονάδες ἐν τῷ γινόμενῳ ἐκ τῷ 4 καὶ τῷ 8. ὅπερ ἐστὶ 16. σημαίνομεν δὲ τὸ ὀρθογώνιον, λέγοντες, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΖ, (χ. 1.) ἢ τὸ ἐκ τῶν ΑΓ, ΑΖ, (εἰζόντες δηλαδὴ ἐν τῷ μεταξύ τῶν ΑΓ, ΑΖ, ὅπερ τὸν πολλαπλασιασμόν ἐμφαίνει.) ἢ τὸ ΑΓΕΖ, ἢ τὸ ΑΕ, ἢ τὸ ΓΖ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Διὰ τῶν Α, Β, Γ καὶ τῶν ἐξῆς σοιχείων πᾶν ὅτι ἐν ἐμφαίνεται πρᾶγμα. καὶ δύο μὲν παράλληλοι εὐθεῖαι μεταξύ αὐτῶν σημαίνουσιν ἰσότητα οἷον $A = B$, σημαίνει, ὅτι τὸ Α ἴσον ἐστὶ τῷ Β· τὸ δὲ $A + B$, τὸ Α σὺν τῷ Β, εἴτεν τὸ κεφάλαιον τῶν Α καὶ Β. τὸ δὲ $A - B$, τὸ Α ἀφαιρεθέντος τῷ Β, τρεῖς τὴν διαφορὰν τὴν μεταξύ τῷ Α καὶ Β· τὸ δὲ $A \cdot B$, ἢ $A \times B$, τὸ γινόμενον ἐκ τῷ πολλαπλασιασμῷ τῷ Α διὰ τῷ Β. λέγεται δὲ τὸ μὲν $+$, μᾶλλον, ἢ πλεον· τὸ δὲ $-$, ἥττον, ἢ μείον. τὸ δὲ $A \cdot B$, ἢ $A \times B$, Α ἐν Β. τὸ δὲ A^2 , ἢ $A \Gamma^2$, τὸ τετράγωνον ἐμφαίνει τὸ ἀπὸ τῷ Α, ἢ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ εὐθείας. συντομίας δὲ χάριν τέτοις χρώμεθα τοῖς σημείοις.

Β'.

- Β'. Παντὸς παραλληλογράμμου χωρεῖς τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ἐν παραλληλόγραμμον ὁποιονδήποτε συν τοῖς δυοῖν παραπληρώμασι. Γνώμων καλεῖται· εἴτεν τὸ παραλληλογράμμου ΑΒ ἐν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΕ, συν τοῖς δυοῖν παραπληρώμασι ΘΔ, ΔΖ γνώμων καλεῖται. καταγγέλλεται δὲ διὰ τῆς τῆς κύκλου περιφερείας ΚΛΜ. σχ. 3.
- Γ. Ὑψος παντὸς σχήματος ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη κάθετος.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Α'.

Εἰ ἂν ὥσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτὲν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθεῶν ἴσόν ἐσι τοῖς ὑπὸ τῆς ἀλμῆς καὶ ἐκάσθ τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἐξωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τετμήσθῃ ἡ ΒΓ ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ Δ, Ε σημεία. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσόν ἐσι τῷ ὑπὸ τε τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΓ. σχ. 4.

Κ Α Τ Α Σ Κ Ε Ξ Η.

Ἦχθω. ἀπὸ τῆς Β σημείω τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθᾶς ἡ ΒΖ. (α) καὶ κείτω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΒΗ. (β) καὶ διὰ μὲν τῆς Η, ἤχθω ἡ ΗΘ παράλληλος τῇ ΒΓ· διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ, ἀΐ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ τῇ ΒΗ παράλληλος. (γ).

ΔΕΙ-

- (α) Κατὰ τὴν ια. πρὸτ. τῆς α. β. (β) Κατὰ τὴν γ. τῆς α. β.
(γ) Κατὰ τὴν λα. τῆς α. β.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΒΘ ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ ὀρθογωνίοις. (δ) ἀλλὰ τὸ ΒΘ ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· (ἴση γὰρ ἢ ΑΒ τῇ ΒΗ.) (ε) τὰ δὲ ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, καὶ ΑΒ, ΔΕ· (ἴση γὰρ ἢ ΔΚ τῇ ΒΗ, εἶπεν τῇ ΑΒ) καὶ ΑΒ, ΕΓ (ἴση γὰρ ἢ ΕΛ τῇ ΒΗ, τετέστι τῇ ΑΒ.) περιέχεται. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐκατέρω τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Ἐυθεῖα ἢ ΑΒ τετμήθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ. Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΒ τετραγώνῳ. χ. 5.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΕΔ. (ζ) καὶ ἤχθω διὰ τῷ Γ ὁποτέρω τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἢ ΓΖ. (η)

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τετράγωνον ΑΕ = ΓΕ + ΑΖ. (θ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΕ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΒ τετράγωνον· τὸ δὲ ΓΕ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· (ἴση γὰρ ἢ

Δ

ἢ

(δ) Κατὰ τὸ θ. 'Αξ. (ε) Ἐκ τῆς κατασκ. (ζ) Κατὰ τὴν μετ. τῷ α. (η) Κατὰ τὴν λα. τῷ α. (θ) Κατὰ τὸ θ. αξ.

ἢ ΕΒ τῇ ΑΒ) τὸ δὲ ΑΖ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΒ τετραγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ ὥς ἔτυχε τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῶ προειρημένῃ τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα ἡ ΑΒ τετμήθω ὥς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὀρθογωνίῳ μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ. σχ. 6.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνον τὸ ΓΔΕΒ. (ι) καὶ ἐκβεβλήθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ διὰ τῆς Α ἤχθω ἡ ΑΖ παράλληλος ὁποτέρῃ τῶν ΙΔ, ΒΕ. (κ)

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΕ = ΑΔ + ΓΕ, ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΕ ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον (ἴση γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ, (λ) ἔστιν τῇ ΕΓ.) (μ) τὸ δὲ ΑΔ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὸ δὲ ΓΕ, τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνον. (ν) τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

ΠΡΟ.

(ι) Κατὰ τὴν μς. τῆς α. βιβλ. (κ) Κατὰ τὴν λα. τῆς αὐτ. (λ) Κατὰ τὴν λδ. τῆς αὐτ. (μ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ν) Ἐκ τῆς κατασκ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνων ἴσον ἔσαι τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἐθεῖα γραμμὴ ἡ ΑΒ τετμήθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνων ἴσον ἔστι τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις, καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Χ. 7.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνων τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ. καὶ διὰ μὲν τῆς Γ ἡχθῶ ἡ ΓΖ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ· διὰ δὲ τῆς Η, ἡ ΘΚ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΕ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΒ = ΑΔ. (ξ) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΑΒΔ = ΑΔΒ. (ο) ἀλλ' ἡ ΔΑΒ ὀρθή ἐστιν. (π) ἑκατέρᾳ ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΒ ἡμίσεια ὀρθῆς. (ρ) καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΓΗ = ΒΑΘ· (σ) ὀρθή δὲ ἡ ΒΑΘ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΒΓΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΒΗ ἡμίσεια ὀρθῆς, ὡς δέδεικται, καὶ ἡ ΓΗΒ ἄρα ἡμίσεια ὀρθῆς. (τ) ἄρα καὶ ἡ ΓΒ = ΓΗ. (υ) ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ = ΗΚ, ἡ δὲ ΓΗ = ΒΚ. τὸ ἄρα ΓΚ ἰσόπλευρόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρᾳ τῶν ΗΓΒ, ΓΒΚ, καὶ τῇ μὲν ΗΓΒ = ΗΚΒ, τῇ δὲ ΓΒΚ = ΓΗΚ. (φ) ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ΓΚ. ἀλλὰ δέδεικται καὶ ἰσό-

Δ 2

πλευ-

- (ξ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ο) Κατὰ τὴν α. τῆς α. (π) Ἐκ τῆς κατασκ. (ρ) Κατὰ τὴν δ. συνέπ. τῆς λβ. τῆς α. (σ) Κατὰ τὴν κθ. τῆς α. (τ) Κατὰ τὴν αὐτ. συνέπ. (υ) Κατὰ τὴν β. τῆς α. (φ) Κατὰ τὴν λδ. τῆς α.

πλευρὲν τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὀρθογώνιον (ἴση γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΓΒ, ὡς δέδεικται.) ὁ καὶ ἴσον τῷ ΗΕ. τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ $AE = \Theta Z + \Gamma K + AH + HE$. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις, καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὰ περὶ τὴν διάμετρον τῆ τετραγώνου παραλληλόγραμμα, τετράγωνά εἰσιν, ὡς ἐκ τῶν δειχθέντων δῆλον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἀνίστα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἀνίστα κατὰ τὸ Δ. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. χ. 8.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΒ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΕ. καὶ διὰ μὲν τῷ Δ ἤχθω ἡ ΔΗ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΒΖ· διὰ δὲ τῷ Θ, ἡ ΚΜ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ· διὰ δὲ τῷ Α ἡ ΑΚ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΒΜ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ $\Gamma\Theta = \Theta Z$. (χ) κοινὸν προσκείδω τὸ ΔΜ. τὸ
 ἄρα $\Gamma M = \Delta Z$. (ψ) ἀλλὰ καὶ τὸ $\Lambda\Lambda = \Gamma M$. (ω)
 τὸ ἄρα $\Lambda\Lambda = \Delta Z$. (α) κοινὸν προσκείδω τὸ $\Gamma\Theta$. τὸ
 ἄρα $\Lambda\Theta$ ἴσον τῷ γνώμονι IPN. (β) κοινὸν προσκείδω
 τὸ ΛΗ. ἄρα $\Lambda\Theta + \Lambda H = \Gamma Z$. ἀλλὰ τὸ $\Lambda\Theta$ τὸ ὀρ-
 θογώνιον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $\Lambda\Delta$, ΔB (ἴση γὰρ ἡ $\Delta\Theta$ τῇ
 $\Delta\Lambda$) (γ) τὸ δὲ ΛΗ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνον ἐστὶ,
 (δ) τὸ δὲ ΓZ, τὸ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνον. τὸ ἄρα
 ὑπὸ τῶν $\Lambda\Delta$, ΔB περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῷ
 ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓB τε-
 τραγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἡμηθῇ δίχα, προσεθῇ
 δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς
 ὅλης σὺν τῇ προσκειμένη, καὶ τῆς προσκειμένης
 περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς
 ἡμισείας τετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγ-
 κειμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμέ-
 νης, ὥς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα ἡ AB τετμήθω δίχα κατὰ τὸ Γ, προσ-
 κείδω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ. λέγω,
 ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $\Lambda\Delta$, ΔB περιεχόμενον ὀρθογώνιον με-
 τὰ τῷ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς
 ΓΔ τετραγώνῳ. χ. 9,

Δ 3

ΚΑ-

(χ) Κατὰ τὴν μυ. τῷ α. (ψ) Κατὰ τὸ β. Ἀξ. (ω) Κατὰ τὴν
 λς. τῷ α. (α) Κατὰ τὸ α. αξ. (β) Κατὰ τὸ β. αξ. (γ) Κα-
 τὰ τὴν προλβ. σημείωσ. (δ) Κατὰ τὴν αὐτήν.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ. καὶ διὰ μὲν τῆ Β ἤχθω ἡ ΒΗ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΔΖ, ΓΕ· διὰ δὲ τῆ Θ, ἡ ΜΚ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΖ· διὰ δὲ τῆ Α, ἡ ΑΚ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΔΜ παράλληλος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ $\Gamma\Theta = \Theta Z$. (ε) ἀλλὰ καὶ τὸ $\Lambda\Lambda = \Gamma\Theta$. (ζ) τὸ ἄρα $\Theta Z = \Lambda\Lambda$. (η) κοινὸν προσκείθω τὸ $\Gamma\Theta$. τὰ ἄρα $\Theta Z + \Gamma\Theta = \Lambda\Theta$. (θ) κοινὸν προσκείθω τὸ ΒΜ. ὁ ἄρα γῶμων $\text{IPN} = \text{AM}$. κοινὸν προσκείθω τὸ ΛΗ. ἄρα $\text{AM} + \text{ΛΗ} = \text{ΓΖ}$. (ι) ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΜ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· (ῖση γὰρ ἡ ΔΜ τῇ ΒΔ.) (κ) τὸ δὲ ΛΗ, τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἐστὶ τετράγωνον. (λ) τὸ δὲ ΓΖ, τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. (μ) τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῆ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ’ ἐνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆ εἰρημένῃ τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆ λοιπῆς τμήματος τετραγώνῳ.

Ἐν.

(ε) Κατὰ τὴν μγ. τῆ α. (ζ) Κατὰ τὴν λς. τῆ α. (η) Κατὰ τὸ α. ἀξ. (θ) Κατὰ τὸ β. ἀξ. (ι) Κατὰ τὸ αὐτό. (κ) Κατὰ τὴν ἀρ. σημάσειν. (λ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (μ) Ἐκ τῆ κατασκευῆς.

Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ ΑΒ τετμήθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ. Λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ. Χ. ΙΟ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀναγεγράφθω τετράγωνα ἀπο μὲν τῆς ΑΒ, τὸ ΑΔ, ἀπὸ δὲ τῆς ΑΓ, τὸ ΑΛ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ. καὶ ἐκβεβλήθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Ζ. καὶ διὰ τῆς Θ ἤχθω ἡ ΜΗ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΕΔ, ΑΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μὲν ΗΑ = ΓΒ· (ἴση γὰρ τῇ ΘΓ, ἴση ἔσθι τῇ ΓΒ·)
(ν) ἡ δὲ ΑΚ = ΑΓ. (ξ) ὅλη ἄρα ἡ ΗΚ = ΑΒ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΗΘ = ΑΓ. τὸ ἄρα ΗΛ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἐστὶ. πάλιν ἐπεὶ ἡ μὲν ΗΜ = ΑΒ, ἡ δὲ ΕΗ = ΑΓ. ἴση γὰρ τῇ ΗΘ, ἔστιν τῇ ΑΓ. καὶ τὸ ΗΔ ἄρα ὀρθογώνιον ἐστὶν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ περιεχόμενον. τὸ ἄρα ΗΛ σὺν τῷ ΗΔ τὸ δις ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ περιεχόμενον· ἐστὶ δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΜ, τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον· (ο) τὸ δὲ ΑΔ, τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ. καὶ ἐπεὶ τὰ ΑΔ + ΑΛ = ΗΛ + ΗΔ + ΓΜ· (π) δηλον ἄρα ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Εἰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῷ ἀπὸ

Δ 4

ἀπὸ

(ν) Κατὰ τὴν σημ. τὴν μετὰ τὴν δ. πρὸτ. τῇ δὲ τῇ βιβλ. (ξ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ο) Κατὰ τὴν ἀρ. σημ. (π) Κατὰ τὸ θ. Αξ.

ἀπὸ τῶ λοιπῶ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τῶ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐυθεία γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ. λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῶ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. Χ. ΙΙ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΒ εὐθεία ἡ ΒΔ, καὶ κείθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΒΔ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνον τὸ ΔΟ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΛ. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν Β καὶ Γ σημείων ἤχθωσαν αἱ ΒΙ, ΓΖ παράλληλοι ὁποτέρῃ τῶν ΑΟ, ΔΛ. ἀπὸ δὲ τῶν Ρ, Σ, αἱ ΤΝ, ΜΗ παράλληλοι ὁποτέρῃ τῶν ΔΑ, ΛΟ

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΔΣ = ΣΟ. παραπληρώματα γὰρ εἰσι τῶ παραλληλογράμμου ΔΟ. (ρ) ἀλλὰ καὶ τὸ ΒΣ = ΣΝ. παραπληρώματα γὰρ τῶ ΒΝ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΠ ἴσον λοιπῷ τῷ ΚΟ. (σ) ἀλλὰ τὰ ΔΠ, ΒΣ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. (τ) τὰ τέσσαρα ἄρα ΔΠ, ΒΣ, ΣΝ, ΚΟ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. πάλιν τὸ ΜΡ = ΡΖ. παραπληρώματα γὰρ τῶ παραλληλογράμμου ΜΖ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΜΡ = ΠΚ, τῷ δὲ ΡΖ = ΤΙ. (υ) τὰ τέσσαρα ἄρα ΜΡ, ΠΚ, ΡΖ, ΤΙ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. προσκεῖσθω τῷ μὲν ΚΟ τὸ ΡΖ, τῷ δὲ ΔΠ τὸ ΜΡ, τῷ δὲ ΒΣ τὸ ΠΚ, τῷ δὲ ΣΝ τὸ ΤΙ. τὰ τέσσαρα ἄρα ΝΙ, ΔΡ,

(ρ) Κατὰ τὴν μγ. τῶ α. (σ) Κατὰ τὸ γ. αἶ. (τ) Κατὰ τὴν λσ, τῶ α. (υ) Κατὰ τὴν αὐτήν.

ΔΡ, ΒΚ, καὶ ΣΝ — ΤΙ ἴσα ἀλλήλοις ἐσίν. (Φ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΝΙ ὀρθογώνιον ἐστὶ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἴση γὰρ ἢ μὲν ΙΟ τῇ ΑΒ· (Χ) ἢ δὲ ΡΙ τῇ ΙΑ, (Ψ) τετέστι τῇ ΔΒ, (ω) εἶπεν τῇ ΒΓ. (α) τὰ ἄρα ΝΙ, ΔΡ, ΕΚ, ΣΝ — ΤΙ τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἐσίν. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΗ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνον· (β) τὸ δὲ ΔΟ, τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέν τετραγώνον. (γ) καὶ ἐπεὶ τὸ ΔΟ = ΝΙ — ΔΡ — ΒΚ — ΣΝ — ΤΙ — ΓΗ. (δ) τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα ἢ ἀνίσαι, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῷ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνῳ.

Ἐυθεῖα ἢ ΑΒ τετμήθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἀνίσαι κατὰ τὸ Δ, λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Χ. 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῷ Γ ἢ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ, (ε) καὶ ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ. (ζ) καὶ ἐπεξέυχθωσαν

Δ 5

σαν

(Φ) Κατὰ τὸ β. αἷ. (Χ) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. (Ψ) Κατὰ τὴν ἀρημ. σημ. (ω) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. (α) Ἐκ τῆς κατασκ. (β) Κατὰ τὴν ἀρημ. σημ. (γ) Ἐκ τῆς κατασκ. (δ) Κατὰ τὸ θ. αἷ. (ε) Κατὰ τὴν ια. τῷ α. (ζ) Κατὰ τὴν γ. τῷ α.

σαν αἱ ΕΑ, ΕΒ. καὶ διὰ μὲν τῷ Δ ἡ ΧΘω ἡ ΔΖ πα-
ράλληλος τῇ ΓΕ· διὰ δὲ τῷ Ζ, ἡ ΖΗ παράλληλος
τῇ ΑΒ. (η) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Η' ΑΓ = ΓΕ. (θ) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΓΑΕ = ΓΕΑ.
(ι) ἀλλ' ἡ ΑΓΕ ὀρθή. (κ) ἑκατέρω αἶρα τῶν ΓΑΕ,
ΓΕΑ ἡμίσεια ὀρθῆς. (λ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκα-
τέρω τῶν ΓΒΕ, ΓΕΒ ἡμίσεια ὀρθῆς. ὅλη αἶρα ἡ ΑΕΖ
ὀρθή ἐστ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΔΒΖ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστίν,
ἡ δὲ ΖΔΒ ὀρθή· ἴση γὰρ τῇ ΕΓΒ· (μ) καὶ ἡ ΔΖΒ
αἶρα ἡμίσεια ὀρθῆς. (ν) ἴση αἶρα ἡ ΔΒΖ τῇ ΔΖΒ.
αἶρα καὶ ἡ ΔΒ = ΔΖ. (ξ) πάλιν ἐπεὶ ἡ ΗΖΕ = ΓΒΖ.
(ο) καὶ ἡ ΗΖΕ αἶρα ἡμίσεια ὀρθῆς. ἀλλὰ καὶ ἡ ΗΕΖ
ἡμίσεια ὀρθῆς δίδεικται. ἡ αἶρα ΗΖΕ = ΗΕΖ. αἶρα καὶ
ΗΖ = ΗΕ. (π) καὶ ἐπεὶ $\overline{ΑΕ}^2 = \overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΕ}^2$. (ρ) ἐστὶ
δὲ ἡ ΑΓ = ΓΕ. (σ) τὸ αἶρα $\overline{ΑΕ}^2$ διπλάσιον τῷ $\overline{ΑΓ}^2$.
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ $\overline{ΕΖ}^2$ διπλάσιον τῷ $\overline{ΗΖ}^2$, ἔστιν τῷ
 $\overline{ΓΔ}^2$. ἴση γὰρ ἡ ΗΖ τῇ ΓΔ. αἶρα $\overline{ΑΕ}^2 + \overline{ΕΖ}^2$ διπλά-
σιά ἐστι τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ἀλλὰ $\overline{ΑΕ}^2 + \overline{ΕΖ}^2 = \overline{ΑΖ}^2$. (τ)
τὸ αἶρα $\overline{ΑΖ}^2$ διπλάσιον τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ἀλλ' $\overline{ΑΖ}^2 =$
 $\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΔΖ}^2$. (υ) τὰ αἶρα $\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΔΖ}^2$ διπλάσιά ἐστι
τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ἀλλὰ $\overline{ΔΖ} = \overline{ΔΒ}$ ὡς δίδεικται. τὰ
αἶρα $\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΔΒ}^2$ διπλάσια τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ὅπερ ἔδει
δείξαι.

ΠΡΟ-

- (η) Κατὰ τὴν λα. τῇ α. (θ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ι) Κατὰ τὴν ε.
τῇ α. (κ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (λ) Κατὰ τὴν θ. συνέπ. τῆς λβ.
τῇ α. (μ) Κατὰ τὴν κθ. τῇ α. (ν) Κατὰ τὴν αὐτὴν συνέπ.
(ξ) Κατὰ τὴν σ. τῇ α. (ο) Κατὰ τὴν κθ. τῇ α. (π) Κατὰ
τὴν ε. τῇ α. (ρ) Κατὰ τὴν μζ. τῇ α. (σ) Ἐκ τῆς κατασκευ.
(τ) Κατὰ τὴν μζ. τῇ α. (υ) Κατὰ τὴν αὐτὴν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προσεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφοτέρα τετράγωνα, διπλάσιά ἐσι τῷ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἐκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Εὐθεῖα ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ. λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐσι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. πίν. Η. κ. 13.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῷ Γ σημείῳ ἡ ΓΕ πρὸς ὀρθᾶς τῇ ΑΒ, (φ) καὶ ἴση ἐκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ. (χ) καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ. καὶ διὰ μὲν τῷ Ε ἤχθω ἡ ΕΖ παράλληλος τῇ ΑΔ, διὰ δὲ τῷ Δ, ἡ ΔΖ παράλληλος τῇ ΓΕ. (ψ) καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΕΒ, ΖΔ, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δειχθήσεται ὡς καὶ ἐν τῇ προλαβέσῃ προτάσει, ὅτι ἡ μὲν ΑΕΒ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ΕΒΓ ἡμίσεια ὀρθῆς. ἐπεὶ δὲ ἡ ΔΒΗ = ΕΒΓ. (ω) καὶ ἡ ΔΒΗ ἄρα ἡμίσεια ὀρθῆς. ἀλλ' ἡ ΒΔΗ ὀρθή· ἴση γὰρ τῇ ΔΓΕ.
(α)

(φ) Κατὰ τὴν ια. τῷ α. (χ) Κατὰ τὴν γ. τῷ α. (ψ) Κατὰ τὴν λα. τῷ α. (ω) Κατὰ τὴν ἑ, τῷ α.

(α) ἄρα καὶ ἡ ΒΗΔ ἡμίσεια ὀρθῆς. (β) ἡ ἄρα ΔΒΗ = ΔΗΒ. ἄρα καὶ ΔΒ = ΔΗ. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΕΗΖ ἡμίσεια ὀρθῆς, ἡ δὲ ΕΖΗ ὀρθή· ἴση γὰρ τῇ ΕΓΔ. (γ) καὶ ἡ ΖΕΗ ἄρα ἡμίσεια ὀρθῆς. ἡ ἄρα ΕΗΖ = ΖΕΗ. ἄρα καὶ ΖΗ = ΖΕ. (δ) καὶ ἐπεὶ $\overline{ΑΕ}^2 = \overline{ΕΓ}^2 + \overline{ΑΓ}^2$. (ε) ἔστι δὲ $\overline{ΕΓ}^2 = \overline{ΑΓ}^2$. ἡ γὰρ ΕΓ = ΑΓ. (ζ) τὸ ἄρα $\overline{ΑΕ}^2$ διπλάσιον τῷ $\overline{ΑΓ}^2$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ $\overline{ΕΗ}^2$ διπλάσιον τῷ $\overline{ΕΖ}^2$, ἔστιν τῷ $\overline{ΓΔ}^2$. ἡ γὰρ ΕΖ = ΓΔ. τὰ ἄρα $\overline{ΑΕ}^2 + \overline{ΕΗ}^2$ διπλάσια τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ἀλλὰ τὰ $\overline{ΑΕ}^2 + \overline{ΕΗ}^2 = \overline{ΑΗ}^2$. (η) τὸ ἄρα $\overline{ΑΗ}^2$ διπλάσιον τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ἀλλ' $\overline{ΑΗ}^2 = \overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΔΗ}^2$. (θ) τὰ ἄρα $\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΔΗ}^2$ διπλάσια τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ἀλλὰ $\overline{ΔΗ}^2 = \overline{ΒΔ}^2$. δέδεικται γὰρ ἡ ΔΗ = ΒΔ. τὰ ἄρα $\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΔΒ}^2$ διπλάσια τῶν $\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. ὃ ἐδεῖ δεῖξαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΑ'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τῶν ἑτέρων τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῶν λοιπῶν τμήματος τετραγώνῳ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ. χ. 14.

Κ Α Τ Α Σ Κ Ε Τ Η.

Ἀπὸ τῶν Α σημείων ἤχθω ἡ ΑΔ πρὸς ὀρθάς τε καὶ ἴση τῇ ΑΒ. καὶ τετμήσω διχα ἡ ΑΔ κατὰ τὸ Ε, καὶ

ἐπε-

- (α) Κατὰ τὴν χθ. τῶν α. (β) Κατὰ τὴν θ. συνίπ. τῆς λβ. τῶν α.
 (γ) Κατὰ τὴν λδ. τῶν α. (δ) Κατὰ τὴν ε. τῶν α. (ε) Κατὰ τὴν μζ. τῶν α. (ζ) Ἐκ τῆς κατὰσκη. (η) Κατὰ τὴν μζ. τῶν α. (θ) Κατὰ τὴν συνίπ.

ἐπεξεύχθω ἡ ΕΒ. καὶ διήχθω ἡ ΔΑ ἐπὶ τὸ Ζ· καὶ
κείθω ἡ ΕΖ ἴση τῇ ΕΒ. εἰλήφθω δὲ ἡ ΑΗ ἴση τῇ
ΑΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Η, ὥστε τὸ
ὑπὸ τῆς ὅλης ΑΒ καὶ τῆς ἑτέρας τῶν τμημάτων ΗΒ
περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς λοιπῆς
τμήματος ΑΗ τετραγώνῳ. ἀναγεγάφθω γὰρ τετρά-
γωνον ἀπὸ μὲν τῆς ΑΒ, τὸ ΑΓ· ἀπὸ δὲ τῆς ΑΗ,
τὸ ΑΘ.

ΛΕΙΣΙΣ.

ΔΖ. $ΖΑ + ΕΑ^2 = ΕΖ^2$. (ι) αἰλλ' $ΕΖ^2 = ΕΒ^2$. (κ)
ἄρα $ΔΖ. ΖΑ + ΕΑ^2 = ΕΒ^2$. (λ) αἰλλ' $ΕΒ^2 = ΕΑ^2 + ΑΒ^2$. (μ) ἄρα $ΔΖ. ΖΑ + ΕΑ^2 = ΕΑ^2 + ΑΒ^2$. (ν) κοι-
νὸν ἀφηρήθω τὸ $ΕΑ^2$. ἄρα $ΔΖ. ΖΑ = ΑΒ^2$. (ξ) ἰσὺς
ἀλλὰ τὸ $ΔΖ. ΖΑ$ τὸ ὀρθογώνιον ΔΘ εἶναι. ἴση γὰρ ἡ ΖΑ
τῇ ΖΘ. τὸ δὲ $ΑΒ^2$, τὸ ΑΓ τετράγωνόν ἐστιν. τὸ ἄρα
ΔΘ = ΑΓ κοινὸν ἀφηρήθω τὸ ΔΗ. τὸ ἄρα ΗΓ =
ΑΘ. (ο) αἰλλὰ τὸ μὲν ΗΓ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΗΒ
περιεχόμενον ὀρθογώνιον· τὸ δὲ ΑΘ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ
τετράγωνον. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΗ περιεχόμενον ὀρ-
θογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετραγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς
τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς
τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμ-
βλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων,
τῷ

(ι) Κατὰ τὴν σ. τῆ β. (κ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (λ) Κατὰ τὸ α. αἰ. (μ) Κατὰ τὴν μζ. τῆ α. (ν) Κατὰ τὸ α. Αξ. (ξ) Κατὰ
τὸ γ. Αξ. (ο) Κατὰ τὸ αὐτ. Αξ.

τῷ περιεχομένῳ δις ὑπότε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτης πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνία.

Ἐξω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ΒΑΓ γωνίαν. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείον ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνον μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἐστὶν, ὅτι $B\Gamma^2 = BA^2 + AG^2 + 2GA \cdot AD$. 15.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ $B\Gamma^2 = GA^2 + BD^2$. (θ) ἀλλὰ $GA^2 = GA^2 + AD^2 + 2GA \cdot AD$. (ι) τὸ ἄρα $B\Gamma^2 = GA^2 + AD^2 + BD^2 + 2GA \cdot AD$. (κ) ἀλλὰ $AD^2 + BD^2 = AB^2$. (ρ) ἄρα $B\Gamma^2 = GA^2 + BA^2 + 2GA \cdot AD$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τρίγωνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετραγώνον ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς

(θ) Κατὰ τὴν μζ. τδ α. (ι) Κατὰ τὴν δ. τδ β. (κ) Κατὰ τὸ α. αζ. (ρ) Κατὰ τὴν μζ. τδ α.

τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς κα-
θέτης πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ

Ἐξω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ὀξείαν ἔχον τὴν
πρὸς τῷ Β γωνίαν. καὶ ἤχθω ἀπὸ τῆς Α σημείω ἐπὶ
τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τε-
τραγώνου ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων
τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, τστέστιν
ὅτι $\overline{ΑΓ}^2 + 2\overline{ΓΒ} \cdot \overline{ΒΔ} = \overline{ΓΒ}^2 + \overline{ΒΑ}^2$. χ. 16.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ $\overline{ΒΓ}^2 + \overline{ΒΔ}^2 = 2\overline{ΓΒ} \cdot \overline{ΒΔ} + \overline{ΓΔ}^2$. (σ) κοινὸν προσ-
κείδω τὸ $\overline{ΑΔ}^2$. ἄρα $\overline{ΒΓ}^2 + \overline{ΒΔ}^2 + \overline{ΑΔ}^2 = 2\overline{ΓΒ} \cdot \overline{ΒΔ} + \overline{ΓΔ}^2 + \overline{ΑΔ}^2$. (τ) ἀλλὰ τὰ μὲν $\overline{ΒΔ}^2 + \overline{ΑΔ}^2 = \overline{ΑΒ}^2$. τὰ δὲ $\overline{ΓΔ}^2 + \overline{ΑΔ}^2 = \overline{ΑΓ}^2$. (υ) ἄρα καὶ $\overline{ΑΓ}^2 + 2\overline{ΓΒ} \cdot \overline{ΒΔ} = \overline{ΒΓ}^2 + \overline{ΑΒ}^2$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐάν δὲ ἡ κάθετος ΑΔ ἐκτὸς τῆς τριγώνου πίπτῃ,
(ὡς ἐν τῷ 17 χ.) δεχθήσεται ἔτω· τὸ $\overline{ΑΒ}^2 = \overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΒΔ}^2$. (φ) ἀλλὰ τὸ $\overline{ΒΔ}^2 = 2\overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΒΓ} + \overline{ΓΒ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$.
(χ) ἄρα $\overline{ΑΒ}^2 = 2\overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΒΓ} + \overline{ΓΒ}^2 + \overline{ΓΔ}^2 + \overline{ΑΔ}^2$. (ψ)
ἀλλὰ $\overline{ΓΔ}^2 + \overline{ΑΔ}^2 = \overline{ΑΓ}^2$. (ω) ἄρα $\overline{ΑΒ}^2 = 2\overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΒΓ} + \overline{ΓΒ}^2 + \overline{ΑΓ}^2$. κοινὸν προσκείδω τὸ $\overline{ΒΓ}^2$. ἄρα $\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΕΓ}^2 = 2\overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΒΓ} + 2\overline{ΓΒ}^2 + \overline{ΑΓ}^2$. (α) ἀλλὰ $\overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΒΓ} + \overline{ΒΓ}^2 = \overline{ΔΒ} \cdot \overline{ΒΓ}$. (β) ἐνθεντοί καὶ $2\overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΒΓ} + 2\overline{ΒΓ}^2 = 2\overline{ΔΒ} \cdot \overline{ΒΓ}$. (γ) ἄρα $\overline{ΑΓ}^2 + 2\overline{ΔΒ} \cdot \overline{ΒΓ} = \overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΒΓ}^2$.

ΠΡΟ.

- (υ) Κατὰ τὴν ζ. τῆ β. (τ) Κατὰ τὸ β. αζ. (υ) Κατὰ τὴν
μζ. τῆ α. (φ) Κατὰ τὴν αὐτὴν. (χ) Κατὰ τὴν δ. τῆ β.
(ψ) Κατὰ τὸ α. Αζ. (ω) Κατὰ τὴν μζ. τῆ α. (α) Κατὰ
τὸ β. αζ. (β) Κατὰ τὴν γ. τῆ β. (γ) Κατὰ τὸ δ. Αζ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Ἔσω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον Α. χ. 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Συνεσάτω τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ. (δ) εἰ μὲν ἔν ἴση ἐσὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δ' ἑ, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μείζων ἐσὶν. ἔσω δὴ μείζων ἡ ΒΕ· καὶ ἐκβεβλήθω ἐπὶ τὸ Ζ. καὶ κείθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ. (ε) καὶ τετμήθω ἡ ΒΖ δίχα κατὰ τὸ Η. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γεγράθω τὸ ΒΘΖ. καὶ ἐκβεβλήθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφόμενον τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ Α. ἐπέζεύχθω γὰρ ἡ ΗΘ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ ΒΕ. ΕΖ + ΗΕ² = ΗΖ². (ζ) ἀλλ' ΗΖ² = ΗΘ². ἴση γὰρ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ. (η) τὰ ἄρα ΒΕ. ΕΖ + ΗΕ² = ΗΘ². (θ) ἀλλ' ΗΘ² = ΗΕ² + ΕΘ². (ι) τὰ ἄρα ΒΕ. ΕΖ + ΗΕ² = ΗΕ² + ΕΘ². (κ) κοινὸν ἀφηρεῖθω τὸ ΗΕ². τὸ ἄρα ΒΕ. ΕΖ = ΕΘ². ἀλλὰ τὸ ΒΕ. ΕΖ ἐστὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔ. ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΔ. (λ) τὸ ἄρα ΒΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ τὸ εὐθύγραμμον Α ἴσον τῷ ΒΔ. (μ) τὸ ἄρα εὐθύγραμμον Α ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. (ν).

Περὶ

- (δ) Κατὰ τὴν μ. τῷ α. (ε) Κατὰ τὴν γ. τῷ α. (ζ) Κατὰ τὴν ε. τῷ β. (η) Κατὰ τὸ δ. πόρις. (θ) Κατὰ τὸ α. αἶ. (ι) Κατὰ τὴν μζ. τῷ α. (κ) Κατὰ τὸ αὐτὸ αἶ. (λ) Ἐκ τῆς κατασκ. (μ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ν) Κατὰ τὸ αὐτὸ αἶ.

Περὶ καταμετρήσεως τῶν ἐυθυ- γραμμῶν χημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Τὸ δοθέντος ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ τὸ ἐμβαδὸν, εἴτεν τὸ
ὑπ' αὐτῷ περιεχόμενον χωρίον, καταμετρήσαι. Χ. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τῷ αὐτῷ μέτρῳ καταμετρηθήτω τό, τε ὕψος ΑΒ
τῷ ὀρθογωνίῳ καὶ ἡ βάσις ΒΓ. καὶ ἔσῳ τὸ μὲν ἴσον
πρὸς 5, ἡ δὲ, 6. καὶ πολλαπλασιασθήτω τὸ ὕψος
ΑΒ διὰ τῆς βάσεως ΒΓ, εἴτεν ὁ 5 διὰ τῷ 6. λέγω,
ὅτι τὸ γινόμενον 30, ὅπερ τριάκοντα ἐμφαίνει ποδιαῖα
τετράγωνα, ἴσον ἐστὶ τῷ τῷ ὀρθογωνίῳ ἐμβαδῷ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐάν ἡ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΒΓ φέξηται, ἐπὶ μὲν τὸ Ε ἀφι-
κεμένη, πέντε καταγράψει τετράγωνα· ἐπὶ δὲ τὸ Ζ,
ἔτι πέντε, καὶ ἐφ' ἑκάστων δὲ τῶν ἐξῆς σημείων Η, Θ, Ι, Γ
ἐμπίπτει ἀπὸ πέντε. ἐπὶ τὸ Γ ἄρα σημῆον καταστήσασα
30 καταγράψει. ὥστε δῆλον, ὅτι ἴσα εἰσὶ τῷ τῷ ὀρ-
θωγωνίῳ ἐμβαδῷ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Τὸ δοθέντος παραλληλογράμμου ΑΓΔΒ τὸ ἐμβαδὸν
καταμετρήσαι. Χ. 20.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΓΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ΑΒ, τὸ τῷ
παραλληλογράμμῳ ὕψος ἐμφαίνουσα. καὶ κοινῶ κατα-
μετρηθήτω μέτρῳ τό, τε ὕψος ΓΖ καὶ ἡ βάσις ΑΒ. καὶ ἔσῳ
τὸ μὲν ΓΖ = 3· ἡ δὲ ΑΒ = 4 πρὸς. λέγω ὅτι τὸ
γινόμενον ἐκ τῷ ὕψους καὶ τῆς βάσεως, ἦτοι τὸ 12
ἴσον ἐστὶ τῷ τῷ παραλληλογράμμῳ ἐμβαδῷ. ἐκβεβλήσ-
θω

Θω γὰρ ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Η· καὶ ἤχθω ἀπὸ τῆ Δ ἡ ΔΗ
πρὸς ὅσθας τῇ ΑΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΖΓΔΗ ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΓΔΒ παραλλη-
λογράμμῳ (ξ) ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ βάσις ἴση τῇ ΑΒ·
(ο) ἑκατέρω γὰρ ἴση τῇ ΓΔ· (π) τὸ δὲ τῆ ὀρθογωνί-
ᾱ ἐμβαδὸν ἴσον τῷ γινομένῳ ἐκ τῆ ὕψους καὶ τῆς βά-
σεως, εἶπεν τῷ 12. (ρ) καὶ τὸ τῆ παραλληλογράμ-
μου ἄρα ἐμβαδὸν ἴσον τῷ ἐκ τῆ ὕψους καὶ τῆς βάσεως
γινομένῳ 12, τετάρτῃ δώδεκα ποδιαίοις τετραγώνοις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

Τῆ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ τὸ ἐμβαδὸν καταμετρήσας.
Χ. 21.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΒΔ κάθετος τῇ ΑΓ, τὸ τῆ τριγώνου ὕψος
ἐμφαίνουσα. καὶ καταμετρήσθω τό τε ΒΔ, καὶ ἡ ΑΓ.
καὶ ἔστω τὸ μὲν ἴσον δακτύλοις (σ) 7· ἡ δὲ, 8. λέ-
γω, ὅτι τὸ ἡμισυ τῆ γινομένης ἐκ τῆ ὕψους καὶ τῆς
βάσεως, ἦτοι τὸ 28 ἴσον ἐστὶ τῷ τῆ τριγώνου ἐμβα-
δῶ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆ Β ἡ ΒΕ παράλληλος τῇ
ΑΓ· ἀπὸ δὲ τῆ Γ, ἡ ΓΕ παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ συμ-
πιπτέτωσαν αἱ ΒΕ, ΓΕ κατὰ τὸ Ε.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τῆ ΑΕ παραλληλογράμμου ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γι-
νομένῳ ἐκ τῆ ὕψους ΒΔ, καὶ τῆς βάσεως ΑΓ, εἶπεν τῷ 56.
(τ) ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ἡμισυ ἐστὶ τῆ ΑΕ παραλ-
ληλογράμμου. (υ) τὸ ἄρα τῆ τριγώνου ἐμβαδὸν ἴσον τῷ
ἡμισί

(ξ) Κατὰ τὴν λε. τῆ κ. (ο) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (π) Κατὰ τὴν
λδ. τῆ α. (ρ) Κατὰ τὸ α. πρόβλ. (σ) Ὅπως αἱ 12 διαίρεται
μῆρη, δακτύλοις καλεῖται· ὁ δὲ δάκτυλος, ὅς ἐστι γραμμῆς 12.
(τ) Κατὰ τὸ β. πρόβλ. (υ) Κατὰ τὴν λδ. τῆ κ.

ἡμίσει τῷ γινομένῳ ἐκ τῷ ὕψους καὶ τῆς βάσεως, ἥτοι
28 δακτυλιαίοις τετραγώνοις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Παντὸς δοθέντος εὐθυγράμμου, οἷον τῷ ΑΒΓΔΕ, τὸ
ἐμβαδὸν καταμετρήσαι. Χ. 22.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ μιᾶς τῷ χήματος γωνίας, οἷον τῆς Α, ἐπὶ
ταῖς λοιπαῖς εὐθειῶν ἐπιζευχθεῖσιν τῶν ΑΓ, ΑΔ, εἰς
τρίγωνα μεριθῆτω τὸ σχῆμα. καὶ ἤχθω ἐφ' ἐκάστην
τῶν τριγῶνων βάση καθετος. οἷον, ἐπὶ μὲν τὴν ΑΓ,
ἢ ΒΘ· ἐπὶ δὲ τὴν ΓΔ, ἢ ΑΖ· ἐπὶ δὲ τὴν ΑΔ, ἢ ΕΗ.
καταμετρηθῆτω δὲ ἐκάστη τέτων, καὶ ἑκάστον ὕψος. καὶ
ἔσω δὴ τὸ μὲν ΒΘ = 3, ἢ δὲ ΑΓ = 6· τὸ δὲ ΑΖ =
5, ἢ δὲ ΓΔ = 4· τὸ δὲ ΕΗ = 2, ἢ δὲ ΑΔ = 8,
δακτύλοις. λέγω, ὅτι τὸ τῷ χήματος ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ
τῷ ἡμίσει τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων ἐξ ἐκάστης
ὕψους καὶ βάσεως, ἥτοι ἴσον (Φ) $\frac{3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 8}{2} = \frac{18 + 20 + 16}{2} =$
 $\frac{54}{2} = 27$ δακτυλιαίοις τετραγώνοις.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ εὐθύγραμμον ΑΒΓΔΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς τριγώνοις ΑΒΓ,
ΑΓΔ, ΑΔΕ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΑΒΓ τὸ ἐμβαδὸν = $\frac{3 \cdot 6}{2}$, τῷ
δὲ ΑΓΔ ἴσον $\frac{5 \cdot 4}{2}$, τῷ δὲ ΑΔΕ ἴσον $\frac{2 \cdot 8}{2}$. πάντων ἄρα
ὁμῶς τῶν τριγῶνων, εἴτεν τῷ εὐθυγράμμῳ τὸ ἐμβαδὸν
ἴσον $\frac{3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 8}{2} = 27$.

2

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον, ὅτι εἰσὶ τινὰ μεγέθη ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶ
καινῶ μὴ καταμετρεόμενα μέτρῳ. εἰάν ᾖν τὸ τῷ δοθέν-
τος εὐθυγράμμου ὕψος καὶ ἡ βάση τοιαῦτα ᾖ, δια-
μετρετέ-

Ε 2

μετέ-

(Φ) Ὅρα τὴν ἐν τοῖς ὅρισμοις τῷ β. βιβλ. σημ.

ρετέον αὐτὰ εἰς τὰ ἐλάχιστα τῶν ἐν χρήσει μέτρων, οἷον εἰς γραμμαῖς, σκεπτέον δὲ τὸ ἀσύμμετρον μέρος ὁποῖω τῷ μέτρῳ μέρει ἐγγύτερον, ἥμισι, ἢ τριτημορίῳ, ἢ δεκατημορίῳ, ἢ ἄλλῳ τῷ τυχόντι. πολλαπλασιαστέον δὲ πρῶτον τὸ ὕψος διὰ τῷ μέρος τῆς βάσεως τῆς καταμετρηθείσης· εἰδ' ὅτω μεριζέον τὸ ὕψος εἰς μέρη ἴσα τῷ καταλειφθέντι ἀσύμμετρῳ μέρει τῆς βάσεως, καὶ ὅτως αὐτὸ διὰ τέτε πολλαπλασιαστέον. οἷον, κείδω ἀσύμμετρον εἶναι τὸ AB, ὕψος, (χ. 23) καὶ τὴν BΔ βάσιν τῷ ὀρθογωνίῳ AΔ. καταμετρηθήτω δὲ ἐκάτερον τέτων γραμμαῖς. καὶ ἔσω τὸ μὲν AB = 3, ἢ δὲ BB = 2, τὸ δὲ ἐναπολειφθὲν τῆς BΔ ἀσύμμετρον μέρος BΔ ἴσον ἔσω ὡς ἐγγίσα ἥμισι γραμμῆς. πολλαπλασιασθήτω δὴ ἐν πρῶτον τὸ AB ὕψος διὰ τῆς καταμετρηθείσης BB βάσεως, εἴτεν τὸ 3 διὰ τῷ 2. τὸ ἐν γινόμενον 6. ἴσον τῷ τῷ AABB ὀρθογωνίῳ ἐμβαδῷ. καὶ ἐπεὶ τὸ καταλειφθὲν ἀσύμμετρον BΔ ὡς ἥμισυ γραμμῆς ἐκλαμβάνεται. τὸ ἄρα ὕψος AB 6 τοιαῦτα μέρη περιέχει. διὸ τὸ ἐκ τῷ AB καὶ BΔ, εἴτεν τὸ ἐκ τῷ 6, καὶ 1 γινόμενον, τετραγωνίδια 6 ἐμφαίνει, ἀπὸ ἡμισείας γραμμῆς, οἷον τῆς BΔ, ἀναγεγραμμένα, ὧν ἕκασον τεταρτημόριον τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης ἀναγεγραμμένῃ γραμμῇ τετραγώνῳ. εἰσὶ δὲ τὰ 6 τεταρτημόρια ἴσα $1 + \frac{1}{2}$ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης ἀναγεγραμμένῃ γραμμῇ τετραγώνῳ. ἴσον ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῷ AΒΔΓ $1 + \frac{1}{2}$ γραμμικῷ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ AABB ἴσον 6 γραμμικοῖς τετραγώνοις. ὅλον ἄρα τὸ AΒΔΓ ἴσον περιέπε 7 $+ \frac{1}{2}$ γραμμικοῖς τετραγώνοις.

ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΡΙΤΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

- Α'. Ἰσοὶ κύκλοι εἰσὶν οἱ Ζ, Ζ ὧν αἱ διαμέτροι ΑΒ, ΓΔ, ἢ αἱ ἡμιδιαμέτροι ΚΒ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ. πρ. θ. χ. 1.
- Β'. Ἐυθεία ἡ ΑΒ κύκλῳ τῷ Χ ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἀκτομένη τῷ κύκλῳ καὶ ἐκβαλλομένη, δὲ τέμνει τὸν κύκλον. χ. 2.
- Γ'. Κύκλοι, οἱ Τ, Τ. ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, εἴτενες ἀπτόμενοι ἀλλήλων, δὲ τέμνουσιν ἀλλήλους. χ. 3.
- Δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχουσιν τῷ κέντρῳ Κ εὐθεῖαι αἱ ΕΔ, ΗΖ, λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τῷ κέντρῳ ἐπ' αὐτάς κἀθετοὶ ἀγόμεναι, οἷον αἱ ΚΒ, ΚΓ ἴσαι ᾧσι. (χ. 4.) μᾶλλον δὲ ἀπέχουσιν λέγεται ἡ ΓΘ, ἐφ' ἡ μείζων κἀθετος ΚΔ πίπτει. χ. 5.
- Ε'. Τμήμα κύκλῳ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον χῆμα ὑπὸ τε τῆς ΑΓ εὐθείας, καὶ κύκλῳ περιφερείας τῆς ΑΒΓ. χ. 6.
- Σ'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε εὐθείας, τῆς ΑΒ, καὶ κύκλῳ περιφερείας τῆς ΑΒ. χ. 7.
- Ζ'. Ἐν τμήματι γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας ΑΔΓΕΒ τῷ τμήματος ληφθῇ τὶ σημεῖον, οἷον τὸ Γ, καὶ ἀπ' αὐτῷ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ΑΒ, ἥτις ἐστὶ βάσις τῷ τμήματος, ἐπεξευχθῶσιν εὐθεῖαι, αἱ ΓΑ, ΓΒ, ἡ περιεχομένη γωνία ΑΓΒ ὑπὸ τῶν ἐπιξευχθεισῶν εὐθειῶν. χ. 8.
- Η'. Ὅταν αἱ περιέχουσιν τὴν γωνίαν ΑΒΓ εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ ἀπολαμβάνωσιν τινὰ περιφέρειαν, οἷον τὴν ΑΓ, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία. χ. 9.
- Θ'. Τομεὺς δὲ κύκλῳ ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ Κ αὐτῷ τῷ κύκλῳ σαθῇ ἡ γωνία, οἷον ἡ ΑΚΓ, τὸ περιεχόμενον χῆμα ΚΑΓ ὑπὸ τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν ΑΚ, ΚΓ, καὶ τῆς ἀπολαμβάνουμένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας ΑΓ. χ. 10.

Ι'. Ὅμοια τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ ΒΑΓ, ΔΕΖ, τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, τὰς ΒΑΓ, ΔΕΖ. *κ.* 11.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Τῷ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὐρεῖν.

Ἐξω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ. *κ.* 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω τις εἰς αὐτὸν, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήθω δίχα κατὰ τὸ Δ. καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἵχθω ἡ ΔΓ κάθετος τῇ ΑΒ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε. καὶ τετμήθω ἡ ΙΕ δίχα κατὰ τὸ Κ. λέγω, ὅτι τὸ Κ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΓΒ κύκλου. μὴ γάρ· ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔξω τὸ Η. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΔ, ΗΑ, ΗΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις, ΗΔΒ, ΗΔΑ ἡ μὲν ΗΒ = ΗΑ. (α) ἡ δὲ ΑΔ = ΔΒ, (β) ἡ δὲ ΗΔ κοινή. ἄρα καὶ ἡ γωνία ΗΔΒ = ΗΔΑ. (γ) ἡ ΗΔ ἄρα κάθετός ἐστι τῇ ΑΒ. (δ) ἡ ΗΔΒ γωνία ἄρα ὀρθή. ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΔΒ ὀρθή. (ε) ἡ ἄρα ΚΔΒ = ΗΔΒ, τὸ ὅλον τῶ μέρει, ὅπερ ἄτοπον. ἔκ ἄρα τὸ Η κέντρον τοῦ ΑΓΒ κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι ἐδὲ ἄλλο τί, πλὴν τοῦ Κ. τὸ Κ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΓΒ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσῇται τοῦ κύκλου.

Ἐξω

(α) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῆ α. β. (β) Ἐκ τῆς κατασκευ. (γ) Κατὰ τὴν η. τῆ α. (δ) Κατὰ τὸν ζ. ὁρίσ. τῆ α. β. (ε) Ἐκ τῆς κατασκευ.

Ἐὼ κύκλος ὁ ΑΕΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτῆς εἰληφθῶ τυχόντα δύο σημεῖα τὰ Α, Β. λέγω, ὅτι ἢ ἀπὸ τῆς Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς περικταται τῷ κύκλῳ. **Χ. 13.**

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Εἰληφθῶ ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχόν σημεῖον τὸ Ε. καὶ ἀπὸ τῆς κέντρος Κ ἐπὶ τὰ Α, Ε, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΕ, ΚΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΚΒ=ΚΑ. (ζ) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΚΒΑ=ΚΑΒ. (η) ἂν καὶ ἡ ΚΕΒ μείζων τῆς ΚΑΕ. (θ) μείζων ἄρα καὶ τῆς ΚΒΕ. καὶ ἡ ΚΒ ἄρα μείζων τῆς ΚΕ. (ι) ἐπὶ δὲ τὸ τῆς ΚΒ πέρας, ὅπερ ἐστὶ τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐστὶ, τὸ τῆς ΚΕ, εἴτεν τὸ Ε, ἐντὸς τῷ κύκλῳ ἐστὶ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται ὅτι καὶ πάντα τὰ λοιπὰ σημεῖα τῆς ΑΒ, πλὴν τῶν Α, καὶ Β, ἐντὸς τῷ κύκλῳ εἰσὶ. δὴλον ἄρα, ὅτι ἡ ΑΒ ἐντὸς περικταται τῷ κύκλῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις διὰ τῆς κέντρος, εὐθεῖαν τινὰ μὴ διὰ τῆς κέντρος δίχα τέμνη, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ καὶ εἰάν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνη, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΓΒ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖα τις διὰ τῆς κέντρος Κ ἢ ΚΖ, εὐθεῖαν τινὰ μὴ διὰ τῆς κέντρος τὴν ΑΒ δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ. λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. **Χ. 14.**

Ε 4

ΚΑ-

(ζ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῆς α. β. (η) Κατὰ τὴν ι. τῆς α. (θ) Κατὰ τὴν ις. τῆς α. (ι) Κατὰ τὸν ιθ. τῆς α.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΚΑΖ, ΚΒΖ, ἡ μὲν ΚΑ = ΚΒ, (κ) ἡ δὲ ΑΖ = ΖΒ, (λ) ἡ δὲ ΚΖ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΚΖΑ = ΚΖΒ. (μ) ἡ ἄρα ΚΖ πρὸς ὁμοίας τέμνει τὴν ΑΒ. (ν)

Τερνέτω δὲ ἡ ΚΖ πρὸς ὁμοίας τὴν ΑΒ. λέγω ὅτι καὶ διχα αὐτὴν τέμνει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΚΑ = ΚΒ. (ξ) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΚΑΒ = ΚΒΑ. (ο) ἐν τοῖς τριγώνοις ἐν ΑΚΖ, ΒΚΖ, ἡ μὲν γωνία ΚΑΖ = ΚΒΖ, ὡς δεικνύται, ἡ δὲ ΚΖΑ = ΚΖΒ, (π) ἡ δὲ ΚΑ = ΚΒ. ἄρα καὶ ΑΖ = ΖΒ. (ρ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τῶ κέντρου ἔσται, ὃ τέμνωσιν ἀλλήλας διχα.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε, μὴ διὰ τῶ κέντρου Κ ἔσται. λέγω, ὅτι ὃ τέμνωσιν ἀλλήλας διχα. εἰ γὰρ δυνατὸν τεμνέτωσαν ἀλλήλας διχα, ὥστε ἴσῃν εἶναι τὴν μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὴν δὲ ΔΕ τῇ ΕΒ. κ. 15.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΚΕ.

ΔΕΙ-

(κ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῷ α. β. (λ) Ἐξ ὑποθ. (μ) Κατὰ τὴν η. τῷ α. (ν) Κατὰ τὸν ζ. ὅρισ. τῷ α. β. (ξ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. (ο) Κατὰ τὴν ε. τῷ α. (π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Κατὰ τὴν κζ. τῷ κ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Η' ΚΕΓ' ὁρθή ἐστιν. (σ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΕΔ ὁρθή. (τ) ἄρα ΚΕΓ = ΚΕΔ. τὸ ὅλον τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα αἱ ΔΓ, ΒΔ διχα ἀλλήλας τέμνουσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Ἐάν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, ἐκ ἑσῶν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο κύκλοι αἱ ΔΕΓ, ΓΔΗ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Β, Γ σημῖα. λέγω, ὅτι ἐκ ἑσῶν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. εἰ γὰρ μὴ, ἔσῳ τὸ Κ. χ. 16.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΚΓ, καὶ διήχθω ἡ ΚΖΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΚΖ = ΚΓ. (υ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΗ = ΚΓ. (φ) ἄρα καὶ ἡ ΚΗ = ΚΖ. (χ) τὸ ὅλον τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα τὸ Κ σημῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΒΗ κύκλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ'.

Ἐάν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντὸς, ἐκ ἑσῶν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτίδωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ Γ σημῖον. λέγω, ὅτι ἐκ ἑσῶν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔσῳ τὸ Κ. χ. 17.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΚΓ. καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ΚΕΒ.

Ε 5

ΔΕΙ.

(σ) Κατὰ τὴν προλαβ. (τ) Κατὰ τὴν αὐτ. (υ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῶ α, β. (φ) Κατὰ τὸ αὐτ. (χ) Κατὰ τὸ α. αἶ.

ΔΕΙΞΙΣ,

Η' ΚΕ = ΚΓ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΒ = ΚΓ. (ψ) ἄρα ἡ ΚΒ = ΚΕ. (ω) τὸ ἕλον τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα τὸ Κ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Ἐὰν κύκλος ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τὶ σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τῶ κύκλου, ἀπὸ δὲ τῶ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαι τινες πρὸς τὸν κύκλον, μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή. τῶν δ' ἄλλων αἰεὶ ἡ ἐγγιον τῆς διὰ τῶ κέντρον τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί. δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τῶ αὐτῶ σημείου προσπεσῶνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἐκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΓΔΛ, διάμετρος δ' αὐτῶ ἡ ΑΔ. καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰληφθῶ τὶ σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τῶ κύκλου· κέντρον δὲ τῶ κύκλου ἔστω τὸ Κ. καὶ ἀπὸ τῶ Ζ πρὸς τὸν ΑΓΔΛ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαι τινες, αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ. λέγω Α'· ὅτι μεγίστη ἐστὶν ἡ ΖΑ, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον. Β'. ὅτι τῶν ἄλλων ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ. Γ'. ὅτι ἐλαχίστη ἡ ΖΔ. Δ'. ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου δύο μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσῶνται πρὸς τὸν ΑΒΔΛ κύκλον ἐφ' ἐκάτερα τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. ς. 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΗ. καὶ συνεσάτω ἡ ΖΚΘ γωνία ἴση τῇ ΖΚΗ. καὶ ἤχθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ.

ΔΕΙ-

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Α'.

Αἱ ΖΚ, ΚΒ μείζονες εἰσι τῆς ΒΖ. (α) ἀλλ' ἡ ΚΒ =
(Α. (β) ἄρα αἱ ΖΚ, ΚΑ, ἥτοι ἡ ΖΑ μείζων τῆς ΖΒ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Β'.

Ἐν τοῖς γωνίαις ΕΚΖ, ΓΚΖ, ἡ μὲν ΕΚ = ΓΚ, ἡ
δὲ ΚΖ κοινή, καὶ γωνία ἡ ΕΚΖ μείζων τῆς ΙΚΖ. καὶ
ἡ ΖΒ ἄρα μείζων τῆς ΖΓ. (γ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΖΓ
μείζων τῆς ΖΗ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Γ'.

Αἱ ΗΖ, ΖΚ μείζονες τῆς ΚΗ. (δ) ἀλλ' ἡ ΚΗ = ΚΔ.
αἱ ὥστε ΗΖ, ΖΚ μείζονες τῆς ΚΔ. κοινὴ ἀφωρήθω ἡ
ΖΚ. ἡ ἄρα ΗΖ μείζων τῆς ΖΔ. (ε)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Δ'.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΖΚΗ, ΖΚΘ, ἡ μὲν ΚΗ = ΚΘ,
ἡ δὲ ΚΖ κοινή, καὶ γωνία ἡ ΗΚΖ = ΖΚΘ. ἄρα καὶ
ΗΖ = ΖΘ. (ς) ἄλλη δὲ ἴση τῇ ΖΗ εἰ προσπεσῇται
πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τῶν Ζ σημείων. εἰ γὰρ δυνατόν
προσπιπτέτω. καὶ εἰ μὲν ἔγγιον τῆς διὰ τῶν κέντρων ἡ-
περ ἡ ΖΘ, καθάπερ ἡ ΖΑ, μείζων ἔσται τῆς ΖΘ, (η)
εἴτεν τῆς ΖΗ. ἴση γὰρ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ, ὡς δέδεικται·
εἰ δὲ ἀπώτερον, ὡς ἡ ΖΕ, ἐλάσσων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Ἐὰν κύκλῳ ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ
δὲ τῶν σημείων πρὸς τὸν κύκλον διαθῶσιν ευ-
θεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τῶν κέντρων, αἱ δὲ
λοιπαὶ ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην
περι-

(α) Κατὰ τὴν κ. τῶν α. (β) Κατὰ τὸ αὐτὸ δ. πόρ. (γ) Κατὰ τὴν κδ.
τῶν α. (δ) Κατὰ τὴν κ. τῶν α. (ε) Κατὰ τὸ γ. Ἀξ. (ς) Κατὰ
τὴν δ. τῶν α. (η) Κατὰ τὸ β. μέρος τῆς δε τῆς πρώτ.

περιφέρειαν προσιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μὲν ἢ διὰ τῶν κέντρων, τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἢ ἑγγιον τῆς διὰ τῶν κέντρων, τῆς ἀπώτερον μέζων ἔσται. τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἡ μεταξὺ τῶν σημείων καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἢ ἑγγιον τῆς ἐλαχίστης, τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττω· δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσεσθύνται ἀπὸ τῶν σημείων πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἀλήρω τι σημεῖον ἐκ τῶν τὸ Δ. καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες πρὸς τὸν κύκλον, αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ. ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τῶν κέντρων Κ. λέγω Α'. ὅτι τῶν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τῶν κέντρων ΔΑ. Β'. ὅτι ἡ ἑγγιον τῆς διὰ τῶν κέντρων μέζων τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ. Γ'. ὅτι τῶν πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τῶν σημείων Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΔΗ· τῶν δὲ ἄλλων ἢ ἑγγιον τῆς ἐλαχίστης ΔΗ τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττω, ἡ μὲν ΔΜ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ. Δ'. ὅτι δύο μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τῶν σημείων Δ προσεσθύνται ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης ἐπὶ τε τὴν κυρτὴν, καὶ τὴν κοίλην περιφέρειαν. πίν 1. 9. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν ΚΜ, ΚΛ, ΚΘ, ΚΓ, ΚΖ, ΚΕ. καὶ συνεσθῶ ἡ ΔΚΒ γωνία ἴση τῇ ΔΒΜ. καὶ ἐπεξεύχθω

ἡ ΔΒ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπίπτει τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Ι. καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΚΙ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Α'.

Αἱ ΚΕ, ΚΔ μείζονες εἰσι τῆς ΕΔ. (θ) ἀλλ' ἡ ΚΕ = ΚΛ. (ι) ἄρα ΑΚ + ΚΔ, ἔστιν ΑΔ μείζων τῆς ΕΔ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Β'.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΕΚΔ, ΖΚΔ, ἡ μὲν ΕΚ = ΖΚ, ἡ δὲ ΚΔ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΕΚΔ μείζων τῆς ΖΚΔ. ἡ ἄρα ΔΕ μείζων τῆς ΔΖ. (κ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΖ μείζων τῆς ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Γ'.

Αἱ ΚΜ, ΜΔ μείζονες εἰσι τῆς ΚΔ. (λ) ἀλλ' ἡ ΚΜ = ΚΗ. λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΜ λοιπῆς τῆς ΔΗ μείζων. καὶ ἐπεὶ αἱ ΚΜ, ΜΔ ἐλάσσονες εἰσι τῶν ΚΛ, ΛΔ, ἴση δὲ ἡ ΚΜ τῇ ΚΛ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΜ ἐλάσσων τῆς ΔΛ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΔΛ ἐλάσσων τῆς ΔΘ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Δ'.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΚΕΔ, ΚΜΔ, ἡ μὲν ΚΒ = ΚΜ, ἡ δὲ ΚΔ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΔΚΒ = ΔΚΜ. (μ) καὶ ἡ ΔΒ ἄρα ἴση τῇ ΔΜ. καὶ γωνία δὲ ἡ ΚΔΒ = ΚΔΜ, καὶ ἡ ΚΒΔ = ΚΜΔ. (ν) καὶ ἐπεὶ αἱ ΚΒΔ, ΚΒΙ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (ξ) ἴσαι δὲ δυσὶν ὀρθαῖς καὶ αἱ ΚΜΔ, ΚΜΕ. ἄρα ΚΒΔ + ΚΒΙ = ΚΜΔ + ΚΜΕ. (ο) καὶ ἀφαιρεθεῖσων τῶν ἴσων ΚΒΔ, ΚΜΔ, ἔσται ΚΒΙ = ΚΜΕ. (π) ἀλλ' ἡ μὲν ΚΒΙ = ΚΙΒ, ἡ δὲ ΚΜΕ = ΚΕΜ. (ρ) ἄρα καὶ ἡ

(θ) Κατὰ τὴν κ. τῆ α. (ι) Κατὰ τὸ δ. τὸ ρ. τῆ α. (κ) Κατὰ τὴν κδ. τῆ α. (λ) Κατὰ τὴν κ. τῆ α. (μ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ν) Κατὰ τὴν δ. τῆ α. (ξ) Κατὰ τὴν ιγ. τῆ α. (ο) Κατὰ τὸ α. Ἄξ. (π) Κατὰ τὸ γ. ἄξ. (ρ) Κατὰ τὴν δ. τῆ α.

ἢ $KIB = KEM$. ἔτι ἐν τοῖς τριγώνοις $ΙΔΚ$, $ΕΔΚ$, ἢ μὲν γωνία $ΔΙΚ = ΔΕΚ$, ἢ δὲ $ΚΔΙ = ΚΔΕ$, ὡς δὲ δακτύλῳ, ἢ δὲ $ΚΔ$ κοινή. ἄρα ἢ $ΔΙ = ΔΕ$. (σ) ὅτι δὲ τῇ $ΔΙ$ ἑυθείᾳ, ἔσταν τῇ $ΔΕ$ ἄλλη ἴση ὁ προσπεσέτω πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τῆς $Δ$ σημείῳ δῆλον. αὕτη μὲν γὰρ ἦτοι ἑγγιον ἔσται τῆς διὰ τῶν κέντρων, ἢ ἀπώτερον, ἢ περὶ ἢ $ΔΙ$. καὶ εἰ μὲν ἑγγιον, μείζων εἰ δ' ἀπώτερον, ἐλάσσων. (τ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Ἐὰν κύκλος ληφθῇ τὶ σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν κύκλου.

Ἐστω κύκλος ὁ $ΑΒΓ$, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ $Κ$, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαι ἴσαι, αἱ $ΚΓ$, $ΚΒ$, $ΚΑ$. λέγω, ὅτι τὸ $Κ$ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τῶν $ΑΒΓ$ κύκλου. χ . 20.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$, καὶ τετμήθωσαν διήκῃ κατὰ τὰ $Ε$, $Ζ$ σημεία. καὶ ἐπιβευχθῆσαι αἱ $ΚΕ$, $ΚΖ$, διήκθωσαν ἐπὶ τὰ $Η$, $Δ$, $Θ$, $Ι$ σημεία.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις $ΑΚΕ$, $ΒΚΕ$, ἢ μὲν $ΑΚ = ΒΚ$, (υ) ἢ δὲ $ΑΕ = ΒΕ$, (φ) ἢ δὲ $ΕΚ$ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἢ $ΚΕΑ = ΚΕΒ$. (χ) ἢ $ΔΗ$ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστὶ τῇ $ΒΑ$. (ω) ἀλλὰ καὶ διήκῃ αὐτὴν τέμνει. (α) ἐπ' αὐτῇ

(σ) Κατὰ τὴν κς. τῆς α. (τ) Κατὰ τὸ β. μέρ. (υ) Ἐξ ὑποθέσεως. (φ) Ἐκ τῆς κατασκευῆς. (χ) Κατὰ τὴν η. τῆς α. (ω) Κατὰ τὸν ζ. ἔρισ. τῆς α. (α) Ἐκ τῆς κατασκευῆς.

τῆς ἄρα ἐστὶ τὸ τῷ κύκλῳ κέντρον. (β) διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δι' ἐκείνην, ὅτι καὶ ἐπὶ τῆς ΘΙ ἐστὶ τὸ κέντρον καὶ εἶναι ἕτερον αἰ' ΗΔ, ΘΙ ἔχουσι κοινὸν σημεῖον ἢ τὸ Κ. τὸ Κ ἄρα σημεῖον κεντρὸν ἐστὶ τῷ ΑΒΓ κύκλῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Κύκλος ὃ τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατόν κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλῳ τὸν ΔΕΖ κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο τεμνέτω, τὰ Β, Η, Ζ Θ. Ζ. 21.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῷ κέντρῳ Κ τῷ ΑΒΓ κύκλῳ ἐπὶ τὰ Β, Η, Ζ σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν αἰ' ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἰ' ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν ἐν τῷ ΔΕΖ κύκλῳ. (γ) τὸ Κ ἄρα κέντρον ἐστὶ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ. (δ) ἐστὶ δὲ τὸ αὐτὸ Κ κέντρον καὶ τῷ κύκλῳ ΑΒΓ. (ε) δύο ἄρα κύκλων ἀλλήλους τεμνόντων τὸ αὐτὸ ἐστὶ κέντρον. ὅπερ ἀδύνατον. (ζ) ἔκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο

(β) Ἐκ τῆς α. τῷ γ. δῆλον. (γ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῷ α. β.
(δ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (ε) Ἐκ τῆς κατασκ. (ζ) Κατὰ τὴν ε. πρότ. τῷ δ. τῷ β.

Δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἀπτεῖσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τῷ μὲν ΑΒΓ κύκλῳ κέντρον τὸ Κ, τῷ δὲ ΑΔΕ, τὸ Η. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῷ Κ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὸ Α σημεῖον πεσῶται. μὴ γάρ· ἀλλ' εἰ δυνατόν πιπτέτω ἐπὶ τὸ Β, ὡς ἡ ΚΗΒ. ρ. 22.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΑΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ ΚΗ, ΗΑ μείζονες εἰσι τῆς ΚΑ. (η) ἀλλ' ἡ ΚΑ ἴση τῇ ΚΗΒ. (θ) ἄρα αἱ ΚΗ, ΗΑ μείζονες τῆς ΚΗΒ. καὶ ἀφηρέθω ἡ ΚΗ. ἡ ἄρα ΗΑ μείζων τῆς ΗΒ. (ι) ἀλλ' ἡ ΗΑ = ΗΔ. (κ) ἡ ἄρα ΗΔ μείζων τῆς ΗΒ. τὸ μέρος μείζον τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον. ἔκ ἄρα ἡ ἀπὸ τῷ Κ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ Α συναφῆς πεσῶται. ἐπ' αὐτὴν ἄρα.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΒ'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἀπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἑφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον. καὶ εἰλήφθω τῷ μὲν ΑΒΓ κύκλῳ κέντρον τὸ Η, τῷ δὲ ΑΔΕ τὸ Ζ. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῷ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς ἐλεύσεται. μὴ γάρ· ἀλλ' εἰ δυνατόν διερχέσθω διὰ τῶν Λ, Κ σημείων, ὡς ἡ ΗΛΚΖ. ρ. 23.

ΚΑ.

(η) Κατὰ τὴν π. τῷ α. (θ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῷ α. β. (ι) Κατὰ τὸ γ. Ἄξ. (κ) Κατὰ τὸ δ. πόρ.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΛΗ, ΑΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ ΛΗ, ΑΖ μείζονες εἰσι τῆς ΗΛΚΖ. (λ) ἀλλ' ἡ μὲν ΛΗ = ΗΛ, ἡ δὲ ΑΖ = ΖΚ. ἄρα αἱ ΗΛ, ΖΚ μείζονες τῆς ΗΛΚΖ. τὰ μέρη τῶν ὅλων μείζονα, ὥστε ἀδύνατον. ἐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τῶν Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη δι' ἄλλων σημείων ἐλεύσεται, ἢ διὰ τῆς ἐπαφῆς Α.

ΠΡΤΑΣΙΣ ΙΙ'.

Κύκλος κύκλῳ ἐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεία, ἢ καὶ ἓν, εἴαν τε ἐντὸς, εἴαν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

Εἰ γὰρ δυνατόν κύκλος ὁ ΒΓΔ κύκλῳ τῷ ΒΕΖ ἀπέθεω πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἓν, τὰ Β, Δ. χ. 24.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Εἰλήφθω τῶν μὲν ΒΓΔ κύκλῳ κέντρον τὸ Κ, τῶν δὲ ΒΕΖ, τὸ Θ. καὶ ἐπιζευχθῶσα ἡ ΚΘ, ἐκβεβλήθω, καὶ πιπτέτω κατὰ τὸ Β. (μ) καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΚΔ, ΘΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ ΚΘ, ΘΔ μείζονες εἰσὶ τῆς ΚΔ. (ν) ἀλλ' ἡ ΚΔ = ΚΒ. ἄρα αἱ ΚΘ, ΘΔ μείζονες τῆς ΚΒ. ἀλλ' ἡ μὲν ΚΘ κοινὴ, ἡ δὲ ΘΔ = ΘΒ. αἱ ἄρα ΚΘ, ΘΔ ἢ μείζονες καὶ ἴσαι τῇ ΚΒ. ὥστε ἀδύνατον. ἐκ ἄρα κύκλος κύκλῳ ἐντὸς ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεία, ἢ ἓν. Ἀλλ' εἰ δυνατόν ἐφάπτεθω ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεία, ἢ ἓν, τὰ Α, Γ. χ. 25.

Ζ

ΚΑ..

(λ) Κατὰ τὴν κ. τῶν α. (μ) Κατὰ τὴν ια. τῶν γ. (ν) Κατὰ τὴν κ. τῶν α.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῶ κέντρων Κ ἐπὶ τὸ Θ κέντρον ἐπεξεύχθω ἡ ΚΘ. ἣτις διὰ τῆς ἐπαφῆς διελεύσεται. ἐπεξεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΚΓ, ΘΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μὲν ΚΑ = ΚΓ, ἡ δὲ ΘΑ = ΘΓ. αἱ ἄρα ΚΓ, ΘΓ ἴσαι τῇ ΚΘ. ἔπερ ἀδύνατον. (ξ) ἔκ ἄρα κύκλος κύκλῳ ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ ἓν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ εὐθεῖα κύκλῳ ἐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεία, ἢ ἓν. ἐφαπτέσθω γάρ, εἰ δυνατόν, ἡ ΗΘ τῷ ΒΕΖ κύκλῳ κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἓν, τὰ Δ, Γ. καὶ εὐκρίθω μεταξὺ αὐτῶν τρίτον τὸ Β. καὶ ἀπὸ τῶ κέντρων Κ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΚΔ, ΚΒ, ΚΓ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΔ = ΚΓ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΚΔΓ = ΚΓΔ. (ο) ἀλλ' ἡ ΚΒΓ μείζων τῆς ΚΔΓ. (π) μείζων ἄρα καὶ τῆς ΚΓΒ. ἡ ΚΓ ἄρα μείζων τῆς ΚΒ. (ρ) ἀλλὰ καὶ ἴση, (σ) ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα εὐθεῖα κύκλῳ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεία, ἢ ἓν. χ. 26.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῶ κέντρων. καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῶ κέντρων ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΔΓ, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔσωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ. λέγω, ὅτι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῶ κέντρων. χ. 27.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθωσαν ἀπὸ τῶ Κ κέντρων αἱ ΚΖ, ΚΗ κάθετοι ἐπὶ ταῖς ΑΒ, ΓΔ. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

(ξ) Κατὰ τὴν κ. τῆ α. (ο) Κατὰ τὴν ε. τῆ α. (π) Κατὰ τὴν ις. τῆ α. (ρ) Κατὰ τὴν ιθ. τῆ α. (σ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῆ α. β.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ $AB = \Gamma\Delta$. (τ) ἀλλ' ἡ μὲν AZ ἡμίσεια τῆς AB ,
 ἡ δὲ ΓH τῆς $\Gamma\Delta$. (υ) καὶ ἡ AZ ἄρα ἴση τῇ ΓH . (φ)
 ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{AK}^2 = \overline{AZ}^2 + \overline{ZK}^2$, τὸ δὲ $\overline{\Gamma K}^2 = \overline{\Gamma H}^2 +$
 $\overline{HK}^2$. (χ) ἔστι δὲ τὸ $\overline{AK}^2 = \overline{\Gamma K}^2$. ἴση γὰρ ἡ AK
 τῇ ΓK . ἄρα καὶ $\overline{AZ}^2 + \overline{ZK}^2 = \overline{\Gamma H}^2 + \overline{HK}^2$. (ψ) ἀφ' ἡρέσθω
 τὰ ἴσα $\overline{AZ}^2$, καὶ $\overline{\Gamma H}^2$. ἄρα $\overline{ZK}^2 = \overline{HK}^2$. (ω) ἄρα καὶ $ZK =$
 HK . αἱ ἄρα AB , $\Gamma\Delta$ ἴσον ἀπέχουσι τῶν κέντρων. (α)

Ἀλλὰ δὴ αἱ AB , $\Gamma\Delta$ ἴσον ἀπεχέτωσαν τῶν κέντρων
 K , τετέστιν ἴση ἔστω ἡ KZ τῇ KH . λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶ
 καὶ ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν $\overline{AK}^2 = \overline{AZ}^2 + \overline{KZ}^2$, τὸ δὲ $\overline{\Gamma K}^2 = \overline{\Gamma H}^2 + \overline{KH}^2$.
 (β) ἀλλ' $\overline{AK}^2 = \overline{\Gamma K}^2$. ἄρα $\overline{AZ}^2 + \overline{KZ}^2 = \overline{\Gamma H}^2 + \overline{KH}^2$.
 (γ) ἀλλὰ $\overline{KZ}^2 = \overline{KH}^2$. (δ) ἄρα τῶν ἴσων ἀφαιρέθεν-
 των, καὶ $\overline{AZ}^2 = \overline{\Gamma H}^2$. (ε) καὶ ἡ AZ ἔσται ἄρα ἴση τῇ ΓH .
 ἀλλ' ἡ μὲν AZ ἡμίσεια ἐστὶ τῆς AB , ἡ δὲ ΓH τῆς $\Gamma\Delta$.
 (ς) καὶ ἡ AB ἄρα ἴση τῇ $\Gamma\Delta$. (η)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος, τῶν
 δὲ ἄλλων αἰεὶ ἡ ἑγγιον τῆς διὰ τῶν κέντρων,
 τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

Ζ 2

Ἐξω

(τ) Ἐξ ὑποθ. (υ) Κατὰ τὴν γ. τῶν γ. (φ) Κατὰ τὸ σ. αἰ. (χ) Κα-
 τὰ τὴν μζ. τῶν α. (ψ) Κατὰ τὸ α. αἰ. (ω) Κατὰ τὸ γ. αἰ.
 (α) Κατὰ τὸν δ. ὁρίσ. τῶν γ. (β) Κατὰ τὴν μζ. τῶν κ. (γ) Κα-
 τὰ τὸ α. αἰ. : (δ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὸ γ. αἰ. (ς) Κα-
 τὰ τὴν γ. τῶν γ. (η) Κατὰ τὸ σ. αἰ.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΘΔ, διάμετρος δ' αὐτοῦ ἡ ΑΔ. καὶ ἔγγιον μὲν τῆς ΑΔ ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ. λέγω, ὅτι μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.
 χ. 28.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ αἱ ΚΕ, ΚΛ πρὸς ὁρθὰς ταῖς ΒΓ, ΖΗ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ ΚΒ, ΚΓ μείζονες εἰσι τῆς ΒΓ. (θ) ἀλλ' αἱ ΚΒ, ΚΓ ἴσαι τῇ ΑΔ. ἡ ΑΔ ἄρα μείζων τῆς ΒΓ. ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν $\overline{KB}^2 = \overline{KE}^2 + \overline{EB}^2$, τὸ δὲ $\overline{KZ}^2 = \overline{KL}^2 + \overline{LZ}^2$. (ι) ἐστὶ δὲ $\overline{KB}^2 = \overline{KZ}^2$. ἄρα καὶ $\overline{KE}^2 + \overline{EB}^2 = \overline{KL}^2 + \overline{LZ}^2$. (κ) ἀλλὰ ὅτι $\overline{KE}^2$ ἐλάττων τοῦ $\overline{KL}^2$. (λ) τοῦ ἄρα $\overline{EB}^2$ μείζον τοῦ $\overline{LZ}^2$. καὶ ἡ ΕΒ ἄρα μείζων τῆς ΛΖ. ἀλλ' ἡ μὲν ΕΒ ἡμίσεια τῆς ΒΓ, ἡ δὲ ΛΖ τῆς ΖΗ. (μ) καὶ ἡ ΒΓ ἄρα μείζων τῆς ΖΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὁρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα εἰ παρεμπεσεῖται. καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἀπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ, ἐλάττων.

Ἐστω

(θ) Κατὰ τὴν κ. τῇ α. (ι) Κατὰ τὴν μζ. τῇ α. (κ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (λ) Ἐξ ὑποθ. (μ) Κατὰ τὴν γ. τῇ γ.

Ἐὼς κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ τὸ Κ κέντρον, καὶ διά-
μετρον τὴν ΑΒ. λέγω Α΄. ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς Α τῇ ΑΒ πρὸς
ἐξῆς ἀπ' αἰκρας ἀγομένη ΑΕ, ἐκτὸς πεσῆται τῷ κύκ-
λῳ. Β΄. ὅτι εἰς τὸν μεταξύ τόπον τῆς τε εὐθείας ΑΕ
καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα δ' παρεμπε-
σῆται. Γ΄. ὅτι ἡ μὲν μικτόγραμμος τῇ ἡμικυκλίᾳ γω-
νία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς
ΓΘΑ περιφερείας, ἀπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμ-
μῳ μείζων ἐστίν. ἡ δὲ λοιπὴ μικτόγραμμος, ἡ περιεχομένη
ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας, καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας ἀπά-
σης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμῳ ἐλάττω ἐστίν. ς. 29.

Εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ἡ ΑΕ ἐντὸς, ὡς ἡ ΑΓ.
καὶ πάλιν εἰ δυνατόν παρεμπιπτέτω μεταξύ τῆς ΑΕ εὐ-
θείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἡ ΑΔ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΚΓ, καὶ ἤχθω ἡ ΚΗ πρὸς ὀρθαίς
τῇ ΑΔ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἡ ΚΑ=ΚΓ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΚΑΓ=ΚΓΑ. ὁρ-
θὴ δὲ ἡ ΚΑΓ. (ν) ὁρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΚΓΑ. αἱ ἄρα
ΚΑΓ ΚΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. (ξ) Ἐκ
ἄρα ἡ ἀπὸ τῆς Α σημείῃ τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθαῖς ἀγομένη ἐν-
τὸς πεσῆται τῷ κύκλῳ. ὁμοίως δὲ δείζομεν, ὅτι ἐδ'
ἐπὶ τῆς περιφερείας. ἐκτὸς ἄρα πίπτει, ὡς ἡ ΑΕ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπεὶ ἡ γωνία ΚΗΑ ὁρθὴ ἐστίν, (ο) ἡ ἄρα ΚΗ
ἐλάσσων ὁρθῆς. (π) ἡ ἄρα ΚΑ μείζων τῆς ΚΗ. (ρ)
Z 3 αἱ

(*) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Κατὰ τὴν λβ. τῷ α. (ο) Ἐκ τῆς κατασκευ.
(π) Κατὰ τὴν γ. συνέπ. τῆς λβ. τῷ α. (ρ.) Κατὰ τὴν ιδ.

αλλ' ἡ $ΚΑ = ΚΘ$. ἄρα καὶ ἡ $ΚΘ$ μείζων τῆς $ΚΗ$. τὸ μέρος μᾶζον τῷ ὅλῳ. ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξύ τόπον τῆς τε $ΑΕ$ ἐυθείας καὶ τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας ἐτέρα εὐθεῖα παρεμπεσῖται.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Γ΄.

Εἰ γὰρ ἐσὶ τις γωνία ἐυθύγραμμος, μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $ΒΑ$ ἐυθείας καὶ τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας, ἐλάττω δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας καὶ τῆς $ΑΕ$ ἐυθείας, παρεμπεσῖται εὐθεῖα ἥτις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $ΒΑ$ ἐυθείας καὶ τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας, ὑπὸ ἐυθειῶν περιεχομένην, ἐλάττωνα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας καὶ τῆς $ΑΕ$ ἐυθείας. ἔπαρεμπίπτει δὲ, ὡς δίδικται. ἐκ ἄρα, κτ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τῷ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ $Α$, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ $ΒΓΔ$, ἔκέντρον τὸ $Κ$. πίν. ια΄. χ. 30.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τοῦ $Κ$ ἐπὶ τὸ $Α$ ἐπεζεύχθω ἡ $ΚΑ$. καὶ κέντρον μὲν τῷ $Κ$, διαστήματι δὲ τῷ $ΚΑ$ κύκλος γεγράφθω ὁ $ΑΖΗ$. καὶ ἀπὸ τοῦ $Δ$ ἤχθω ἡ $ΔΖ$ πρὸς ὁρθὰς τῇ $ΑΚ$. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΚΖ$. καὶ ἀπὸ τοῦ $Α$ ἐπὶ τὸ $Β$ ἐπεζεύχθω ἡ $ΑΒ$. λέγω, ὅτι ἡ $ΑΒ$ ἤκται ἐφαπτομένη τῷ $ΒΓΔ$ κύκλῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις $ΚΖΔ$, $ΚΑΒ$, ἡ μὲν $ΚΔ = ΚΒ$, ἡ δὲ $ΚΖ = ΚΑ$. καὶ γωνία ἡ $Κ$ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ $ΚΔΖ = ΚΒΑ$. (σ) αλλ' ἡ $ΚΔΖ$ ὀρθή ἐστ. (τ) καὶ ἡ $ΚΒΑ$

(σ) Κιντὰ τὴν δ. τῇ α. (τ) Ἐκ τῆς κατασκευῆς.

ΚΒΑ ἄρα ὀρθή ἐσιν. ἐφάπτεται ἄρα ἡ ΑΒ τῷ κύκλῳ. (υ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Ἐὰν κύκλος ἐφάπτηταί τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τῷ κέντρῳ ἐπὶ τὴν ἀφ' ὧ ἐπιζευχθῇ τις εὐθεΐα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τῷ ἀπτομένῳ.

Κύκλος τῷ ΑΒΓ ἀπτόμενος τις εὐθεΐα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημῆον. καὶ ἀπὸ τῷ κέντρῳ Κ ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζευχθῶ ἡ ΚΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΚΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. εἰ γὰρ μὴ, χ. 31.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΚΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΕ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΚΗΓ γωνία ὀρθή ἐστιν. (φ) ἡ ἄρα ΚΓΗ ἐλάσσων ὀρθῆς. (χ) μείζων ἄρα ἡ ΚΓ τῆς ΚΗ. (ψ) ἀλλ' ἡ ΚΓ = ΚΒ. καὶ ἡ ΚΒ ἄρα μείζων τῆς ΚΗ. τὸ μέρος μᾶλλον τῷ ὅλῳ. ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ ἄρα ἡ ΚΗ κάθετος τῇ ΕΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δείξομεν, ὅτι ἐδὲ ἀλλή τις, πλὴν τῆς ΚΓ. ἡ ΚΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

Ἐὰν κύκλος ἐφάπτηταί τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφ' ἧς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεΐα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τῷ κύκλῳ.

Ζ 4

Κύκλος

(υ) Κατὰ τὴν προλαβ. (φ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (χ) Κατὰ τὴν γ. συνέπ. τῆς λαβ. τῷ κ. (ψ) Κατὰ τὴν Δ. τῷ κ.

Κύκλος τῷ ΑΒΓ ἀπτεῖται τις εὐθεῖα ἢ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημῶν, καὶ ἀπὸ τῷ Γ πρὸς ὁρθᾶς τῇ ΔΕ ἤχθω ἢ ΓΑ. λέγω, ὅτι ἐπὶ τῆς ΓΑ ἐστὶ τὸ κέντρον τῷ κύκλῳ, μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔσω τὸ Ζ. χ. 32.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξέχθω ἢ ΖΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΓΔ γωνία ὁρθή ἐστιν. (ω) ἀλλὰ καὶ ἢ ΖΓΔ ὁρθή. (α) ἢ ἄρα ΑΓΔ = ΖΓΔ. τὸ ὅλον τῶ μέρεϊ. ὅπερ ἀδύνατον. ἔκ ἄρα τὸ Ζ κέντρον. ὁμοίως δὲ δείζομεν, ὅτι ἐδὲ ἄλλο τι, πλὴν τὸ ἐπὶ τῆς ΓΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

Ἐν κύκλῳ ἢ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίῳν ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τινὶ αὐτῷ περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Ἐσω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ Κ γωνία ἔσω ἢ ΒΚΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ ἢ ΒΑΓ. ἔχενωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν ΒΓ. λέγω, ὅτι διπλασίῳν ἐστὶν ἢ ΒΚΓ τῆς ΒΑΓ. ἔσω προῶτον ἢ ἑτέρα τῶν πλευρῶν τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας, ἢ ΒΚ, ἐπ' εὐθείας τῇ ἑτέρᾳ τῇ πρὸς τῇ περιφερείᾳ τῇ ΚΑ. χ. 33.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΚΑ = ΚΓ. ἄρα καὶ γωνία ἢ ΚΑΓ = ΚΓΑ. (β) ἀλλ' ἢ ΒΚΓ = ΚΑΓ + ΚΓΑ. (γ) ἢ ἄρα ΒΚΓ διπλασίῳν τῆς ΒΑΓ.

Ἐσωσαν δὲ αἱ ΒΚ, ΚΓ πλευραὶ τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας ΒΚΓ ἐντὸς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας ΒΑΓ. χ. 34.

ΚΑ'

(ω) Ἐξ ὑποθ. (α) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (β) Κατὰ τὴν α. τῷ α. (γ) Κατὰ τὴν λβ. τῷ α.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΚ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἦ' ΚΑ=ΚΒ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΚΑΒ=ΚΒΔ. (δ)
 ἔσ' ἡ ΒΚΕ=ΚΑΒ+ΚΒΑ. (ε) ἡ ἄρα ΒΚΕ διπλασία
 τῆς ΚΑΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἡ ΓΚΕ διπλασία τῆς ΚΑΓ.
 Ἰλη ἄρα ἡ ΒΚΓ διπλασίον ὅλης τῆς ΒΑΓ.

Πάλιν τεμνέω ἡ ἑτέρας τῶν πλευρῶν, ἡ ΚΓ, τῆς
 πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας ὑπὸ τῆς ἑτέρας, τῆς ΒΑ, τῆς
 πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας. χ. 35.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὀμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι ἡ μὲν ΓΚΕ διπλῇ τῆς
 ΓΑΕ, ἡ δὲ ΒΚΕ τῆς ΒΑΕ. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΚΒ
 διπλασίον ἐστὶ τῆς λοιπῆς ΓΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι
 ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν.

Ἔσω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ
 γωνίαι ἔσωσαν αἱ ΒΑΔ, ΒΕΔ. λέγω, ὅτι ἴσαι ἀλλήλαις
 εἰσὶ. χ. 36.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῆς κέντρος Κ ἐπὶ τὰ Β, Δ σημεῖα ἐπεζεύχ-
 θωσαν αἱ ΚΒ, ΚΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἦ' ΒΚΔ γωνία διπλασίον ἐστὶ τῆς τε ΒΑΔ, καὶ τῆς
 ΒΕΔ. (ζ) ἡ ἄρα ΒΑΔ=ΒΕΔ. (η)

Ζ. 5

ΠΡΟ-

(δ) Κατὰ τὴν ε. τῆ α. (ε) Κατὰ τὴν λβ. τῆ α. (ζ) Κατὰ
 τὴν προλ. πρότ. (η) Κατὰ τὸ ε. αξ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον τὸ ΑΒΓΔ. λέγω, ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτῷ γωνίαι ΔΓΒ, ΒΑΔ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὡσαύτως αἱ ΑΔΓ, ΓΒΑ. κ. 37.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ γωνίαι ΔΓΒ, ΓΔΒ, ΓΒΔ τῷ ΒΔΓ τριγώνῳ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσίν. (θ) ἀλλ' ἡ μὲν ΓΔΒ = ΓΑΒ, ἡ δὲ ΓΕΔ = ΓΑΔ. (ι) αἱ ἄρα ΔΓΒ, ΓΑΒ, ΓΑΔ, εἴτεν αἱ ΔΓΒ, ΒΑΔ δυσὶν ὁρθαῖς εἰσίν ἴσαι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ ΑΔΓ, ΓΒΑ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα εἰς συζαθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεσάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ. κ. 38.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω ἡ ΑΓΔ. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὸ ΑΓΒ τμήμα τῷ ΑΔΒ τμήματι ὁμοίον ἐστίν, (κ) ἡ γωνία ἄρα ΑΓΒ = ΑΔΒ. (λ) ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. εἰ ἄρα, κτ.

ΠΡΟ-

(θ) Κατὰ τὴν λβ. τῷ κ. (ι) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὸν ε. ὁρίσ. σὲ γ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἐξωσαν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων, τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ. λέγω, ὅτι ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. χ. 39.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐφαρμοζομένε τῷ ΑΕΒ τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ, καὶ τιθεμένε τῷ μὲν Α σημείε ἐπὶ τὸ Γ, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημῖον ἐπὶ τὸ Δ σημῖον διὰ τὸ ἴσων εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΓΔ· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμήμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ. εἰ γὰρ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ ΑΕΒ τμήμα μὴ ἐφαρμόσῃ, ἀλλὰ παραλλάξῃ, ὡς τὸ ΓΗΔ· κύκλος ὁ ΓΗΔ, κύκλον τὸν ΓΖΔ κατὰ πλείονα σημῖα ἢ δύο, τὰ Γ, Η, Δ τέμνει. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. (μ) ἐφαρμοσάσης ἄρα τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, καὶ τὸ ΑΕΒ τμήμα τῷ ΑΖΔ ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Κύκλος τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον, ὅπερ ἐστὶ τμήμα.

Ἐξω τὸ δοθέν τῷ κύκλῳ τμήμα τὸ ΑΒΓ. χ. 40.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήθω δίχως ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Δ. καὶ ἤχθω ἡ ΔΒ κάθετος τῇ ΑΓ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΒ. ἡ ἄρα ΑΒΔ γωνία τῆς ΔΑΒ ἢ μείζων ἐστὶν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάσσων. ἔσω πρῶτον μείζων. συνεσάτω ἡ ΒΑΕ = ΔΒΑ. καὶ δι-
ήχθω

(μ) Κατὰ τὴν ι. τῷ γ.

ἤχθω ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. λέγω, ὅτι τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τῆς κύκλου, ἔτινος τμήμα τὸ ΑΒΓ. ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ ΕΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΕΔΑ, ΕΔΓ, ἡ μὲν ΑΔ = ΓΔ. (ν) ἡ δὲ ΔΕ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΑΔΕ = ΓΔΕ. (ξ) ἄρα καὶ ΑΕ = ΕΓ. (ο) ἀλλ' ΑΕ = ΕΒ. (π) ἔστι γὰρ ἡ γωνία ΕΑΒ = ΕΒΑ. (ρ) αἱ τρεῖς ἄρα ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις. (σ) τὸ Ε ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς κύκλου, ἔτινος τμήμα τὸ ΑΒΓ. (τ) καὶ δῆλον ὡς τὸ ΑΒΓ τμήμα ἐλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου διὰ τὸ τὸ Ε κέντρον αὐτῶ ἐκτὸς τυγχάνειν.

Ἀλλ' ἔσω ἡ ΑΒΔ = ΔΑΒ. λέγω, ὅτι τὸ Δ κέντρον ἐστὶ τῆς κύκλου, ἔπερ τμήμα τὸ ΑΒΓ. χ. 41.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ γωνία ἡ ΑΒΔ = ΔΑΒ, ἄρα καὶ ΔΒ = ΔΑ. (υ) ἀλλὰ ΑΔ = ΔΓ. (φ) αἱ τρεῖς ἄρα ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις. τὸ Δ ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς περιγεγραμμένης κύκλου. δῆλον δὲ, ὅτι τὸ ΑΒΓ ἡμικυκλίον ἐστίν.

Ἐσω δὲ πάλιν ἡ ΑΒΔ ἐλάστων τῆς ΔΑΒ. λέγω, ὅτι γινομένης τῇ ΑΒΔ ἴσης τῆς ΒΑΕ, τὸ Ε ἔσται κέντρον τῆς κύκλου, ἔτ τμήμα τὸ ΑΒΓ. χ. 42.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δειχθήσεται καθάπερ καὶ πρότερον, ὅτι αἱ τρεῖς ΕΒ, ΕΑ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις. τὸ ἄρα Ε κέντρον ἐστὶ τῆς περιγεγραμμένης κύκλου. καὶ δῆλον, ὅτι τὸ ΑΒΓ μείζον ἡμικυκλίου.

ΠΡΟ.

- (ν) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ξ) Ὅρθαι γὰρ ἐκ τῆς κατασκευ. (ο) Κατὰ τὴν δ. τῆ α. (π) Κατὰ τὴν ε. τῆ α. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (σ) Κατὰ τὸ α. αξ. (τ) Κατὰ τὴν θ. τῆ γ. (υ) Κατὰ τὴν ζ. τῆ α. (φ) Ἐκ τῆς κατασκευ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, εἴαν τε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴαν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὥσι βεβηκῶσι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ΕΚΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ. Χ. 43.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΕΓ, ΔΕΖ κύκλοι, (Χ) ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ΒΚ, ΚΓ, ταῖς ΕΘ, ΘΖ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Κ γωνία τῇ πρὸς τῷ Θ ἴση. (Ψ) καὶ ἡ ΕΓ ἄρα ἴση τῇ ΕΖ. (ω) καὶ ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ, ὅμοια ἄρα τὰ ΒΑΓ, ΕΔΖ τμήματα· (α) καὶ εἰσὶν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, ὡς δέδεικται. ἴσα ἄρα ἀλλήλοις εἰσὶν. (β) ἐστὶ δὲ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκῶσαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, εἴαντε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴαν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὥσι βεβηκῶσι.

Ἐν

(Χ) Ἐξ ὑποθ. (Ψ) Ἐξ ὑποθ. (ω) Κατὰ τὴν δ. τῆ μ. (α) Κατὰ τὸν ι. ὅρ. τῆ γ. (β) Κατὰ τὴν κδ. τῆ γ.

Ἐν ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ πρὸς μὲν τοῖς Κ, Θ κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ΒΚΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ. λέγω, ὅτι ἡ μὲν ΒΚΓ = ΕΘΖ, ἡ δὲ ΒΑΓ = ΕΔΖ. χ, 44.

Εἰ μὲν ἡ ΒΚΓ = ΕΘΖ, φανερόν ὅτι καὶ ἡ ΒΑΓ = ΕΔΖ. (γ) εἰ δ' ὅ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔγωγε μείζων ἡ ΒΚΓ,

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω ἡ ΒΚΗ = ΕΘΖ. (δ)

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία ΒΚΗ = ΕΘΖ. (ε) ἄρα καὶ ἡ ΒΗ περιφέρειᾳ, τῇ ΕΖ περιφερείᾳ ἴση. (ς) ἄλλα καὶ ἡ ΒΓ = ΕΖ. (η) ἄρα ἡ ΒΓ = ΒΗ. (θ) τὸ ὅλον τῷ μέρει, ὁπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα ἀνίσος ἐστίν ἡ ΒΚΓ τῇ ΕΘΖ. ἄρα ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν πρὸς τῷ Α ἡμίσεια τῆς πρὸς τῷ Κ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Δ ἡμίσεια τῆς πρὸς τῷ Θ. (ι) καὶ ἡ πρὸς τῷ Α ἄρα ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ (κ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι ἐυθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

Ἐτίωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι ἐυθεῖαι αἱ ΒΓ, ΕΖ, τὰς μὲν ΒΑΓ, ΕΔΖ περιφερείας μείζονας ἀφαιρῶσαι, τὰς δὲ ΒΗΓ, ΕΘΖ ἐλάττονας. λέγω ὅτι ἡ μὲν ΒΑΓ = ΕΔΖ, ἡ δὲ ΒΗΓ = ΕΘΖ. χ. 45.

ΚΑ.

(γ) Κατὰ τὴν κ. τῷ γ. (δ) Κατὰ τὴν κγ. τῷ α. (ε) Ἐκ τῆς κατασκευῆς. (ς) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (η) Ἐξ ὑποθ. (θ) Κατὰ τὸ α. αἴτ. (ι) Κατὰ τὴν κ. τῷ γ. (κ) Κατὰ τὸ ε. Ἀξ.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Α'πὸ τῶν κέντρων Κ, Λ ἐπὶ τὰ Β, Γ, Ε, Ζ σημεῖα ἀπέκτείνωσαν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΛΕ, ΛΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΚΓ, ΕΛΖ, ἡ μὲν ΒΚ = ΕΛ, ἡ δὲ ΚΓ = ΛΖ· ἴσοι γὰρ οἱ κύκλοι (λ) ἡ δὲ ΕΛ = ΚΓ (μ) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΒΚΓ = ΕΛΖ. (ν) ἄρα καὶ περιφέρειαι ΒΗΓ = ΕΘΖ. (ξ) ἀλλ' ὅλη ἡ ΑΒΗΓ περιφέρειαι ἴση ὅλη τῇ ΔΕΘΖ. (ο) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔΓ ἴση λοιπῇ τῇ ΕΔΖ. (π)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφέρειας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἔσωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπέκτείνωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ. καὶ ἀπέκτείνωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι. λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ = ΕΖ. κ. 45.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Α'πὸ τῶν Κ, Λ κέντρων ἀπέκτείνωσαν ἐπὶ τὰ Β, Γ, Ε, Ζ σημεῖα αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΛΕ, ΕΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΚΓ, ΕΛΖ, ἡ μὲν ΒΚ = ΕΛ, ἡ δὲ ΚΓ = ΛΖ, (ρ) καὶ γωνία ἡ ΒΚΓ = ΕΛΖ. (σ) ἄρα καὶ ΒΓ = ΕΖ. (τ).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ'.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἔσω

(λ) Ἐξ ὑποθ. (μ) Ἐξ ὑποθ. (ν) Κατὰ τὴν η. τῇ α. (ξ) Κατὰ τὴν κ. τῇ γ. (ο) Ἐξ ὑποθ. (π) Κατὰ τὸ γ. αἱ. (ρ) Ἐξ ὑποθ. (σ) Κατὰ τὴν κ. τῇ γ. (τ) Κατὰ τὴν δ. τῇ α.

Ἐῶν ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ ΑΔΒ. χ. 46.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήθω διχα κατὰ τὸ Γ. καὶ ἡχθω ἡ ΓΔ κάθετος τῇ ΑΒ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΔΒ περιφέρεια διχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΔ, ΒΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΓΔΒ, ΓΔΑ, ἡ μὲν ΑΓ=ΓΒ, (υ) ἡ δὲ ΓΔ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΔΓΒ=ΔΓΑ. (φ) ἄρα καὶ ΔΒ=ΔΑ. (χ) ἄρα καὶ ἡ ΔΕΒ περιφέρεια τῇ ΔΖΑ ἴση. (ψ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΑ'.

Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστίν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι, μείζων ὀρθῆς. καὶ ἔτι ἡ μὲν τῷ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστίν ὀρθῆς, ἡ δὲ τῷ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστίν ὀρθῆς.

Ἐῶν κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτῷ ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Κ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς περιφερείας δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α καὶ Δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ. λέγω πρῶτον, ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ΒΑΓ ὀρθή ἐστίν. Β'. ὅτι ἡ ΑΓΒ ἡ ἐν τῷ μείζονι τῷ ἡμικυκλίῳ τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς. Γ'. ὅτι ἡ ΑΔΓ, ἡ ἐν τῷ ἐλάττονι τῷ ἡμικυκλίῳ τμήματι μείζων ὀρθῆς. Δ'. ὅτι ἡ μὲν τῷ μείζονος τμήματος μικτόγραμμος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφ.

(υ) Ἐκ τῆς κατασκ. (φ) Ὁμοίως. (χ) Κατὰ τὴν δ. τῇ α.
(ψ) Κατὰ τὴν κη. τῇ γ.

ριφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας μείζων ὀρθῆς. Ε'. ὅτι ἡ τῷ ἐλάττωτος τμήματος μικτόγραμμος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ΑΔΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. χ. 47.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΚΑ, καὶ ἐκβεβλήθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἡ ΚΑ = ΚΒ. (ω) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΚΑΒ = ΚΒΑ. (α) ἀλλ' ἡ ΑΚΓ = ΚΑΒ + ΚΒΑ. (β) ἡ ἄρα ΑΚΓ διπλασία τῆς ΚΑΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΚΒ διπλασία τῆς ΚΑΓ. αἱ ἄρα ΑΚΒ, ΑΚΓ διπλασίονες τῶν ΚΑΓ, ΚΑΒ. ἀλλ' αἱ ΑΚΒ, ΑΚΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. (γ) αἱ ἄρα ΚΑΓ, ΚΑΒ, εἴτεν ἡ ΒΑΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴση.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐπεὶ τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ μία γωνία ἡ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν, ὡς δέδεικται, ἑκατέρω ἄρα τῶν λοιπῶν ἐλάσσων ὀρθῆς. (δ) ἡ ἄρα ΑΒΓ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Γ'.

Αἱ τῷ τετραπλεύρῳ ΑΔΓΒ ἀπεναντίον γωνίαι ΑΔΓ, ΑΒΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. (ε) ἀλλὰ δέδεικται ἡ ΑΒΓ ἐλάσσων ὀρθῆς. ἄρα ἡ ΑΔΓ μείζων ὀρθῆς.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Δ'.

Ἡ ΒΑΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὡς δέδεικται. ἀλλ' ἡ μικτόγραμμος ΓΑΒ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας μείζων ἐστὶ τῆς εὐθυγράμμου γωνίας ΒΑΓ. ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

Η

ΔΕΙ-

(α) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῷ α. (α) Κατὰ τὴν ε. τῷ κ. (β) Κατὰ τὴν λβ. τῷ α. (γ) Κατὰ ιγ. τῷ κ. (δ) Κατὰ τὴν γ. συνίπ. τῆς λβ. τῷ α. (ε) Κατὰ τὴν κβ. τῷ γ.

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Ε'.

Αἱ ΒΑΓ, ΓΑΖ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. (ζ) ἀλλ' ἡ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν, ὡς δίδεικται. ὀρθή ἄρα καὶ ἡ ΓΑΖ. ἀλλ' ἡ μικτόγραμμος ΔΑΓ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς ΓΔΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς εὐ. θυγράμμου γωνίας ΓΑΖ. ἐλάσσων ἄρα ὀρθῆς ἐστὶ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΒ'.

Ἐὰν κύκλος ἐφάπτηται τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεΐα τέμνουσα τὸν κύκλον, ὥς ποιῇ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναῖλλαξ τῶ κύκλῳ τμήμασι γωνίαις.

Κύκλος τῶ ΔΓΒ ἐφαπτέσθω τὴς εὐθεΐας ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ τεμνέτω αὐτὸν ἡ ΒΔ. λέγω, ὅτι ὥς ποιῇ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τμήμασι τῶ κύκλῳ γωνίαις, τετέστιν ὅτι ἡ μὲν ΖΒΔ ἴση τῇ ἐν τῷ ΔΑΒ τμήματι συνεξαπομένη· ἡ δὲ ΕΒΔ ἴση τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι. χ. 48.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΒΑ κάθετος τῇ ΖΕ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΒΑ πρὸς ὀρθάς ἐστὶ τῇ ἐφαπτομένῃ ΖΕ, ἐπ' αὐτῆς ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον. (η) τὸ ἄρα ΒΔΑ ἡμικύκλιόν ἐστιν. ἄρα ἡ ΒΔΑ γωνία ὀρθή ἐστιν. (θ) αἱ ἄρα
ΔΑΒ

(ζ) Κατὰ τὴν ιγ τῆ α. (η) Κατὰ τὴν ιθ. τῆ γ. (θ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ.

ΔΑΒ, ΔΒΑ, αἱ λοιπαὶ τῷ τριγώνῳ ΔΑΒ γωνίαι, μιᾷ ὁρθῇ εἰσὶν ἴσαι. (ι) ἀλλὰ καὶ αἱ ΖΒΔ, ΔΒΑ μιᾷ ὁρθῇ ἴσαι εἰσὶν ὅλη γὰρ ἡ ΖΒΑ ὁρθή ἐστιν. (κ) αἱ ἄρα ΔΑΒ, ΔΒΑ ἴσαι ταῖς ΖΒΔ, ΔΒΑ. (λ) κοινὴ ἀφηρέθω ἡ ΔΒΑ. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΑΒ, ἡ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι, ἴση λοιπῇ τῇ ΖΒΔ. (μ) πάλιν ἐπεὶ αἱ Γ καὶ Α γωνίαι δυσὶν ὁρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. (ν) δυσὶ δὲ ὁρθαῖς ἴσαι καὶ αἱ ΖΒΔ, ΕΒΔ. (ξ) ἄρα $\Gamma + \Lambda = \text{ΖΒΔ} + \text{ΕΒΔ}$. (ο) ἀλλ' ἡ $\Lambda = \text{ΖΒΔ}$, ὡς δέδοικται. ἄρα καὶ ἡ Γ, εἴτεν $\Delta\Gamma\text{Β} = \text{ΕΒΔ}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΓ'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμήμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμω.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ. ἥτις ἡ ὀξυαία ἐστίν, ἡ ὁρθή, ἡ ἀμβλυαία. ἔστω δὲ πρότερον ὀξυαία. χ. 49.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω ἡ ΓΑΒ γωνία ἴση τῇ δοθείσῃ Γ. (π) καὶ ἤχθω ἡ ΑΖ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΓΔ. (ρ) καὶ συνεσάτω ἡ γωνία ΑΕΚ = ΒΑΚ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ὅσπερ τῶν ΚΑ, ΚΒ· ἴση γὰρ ἡ ΚΑ τῇ ΚΒ· (σ) κύκλος γεγραφθῶ ὁ ΑΒΖΗ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΗ ἐστὶ τὸ ζητούμενον κύκλος τμήμα. ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ ΒΖ.

Η 2

ΔΕΙ-

- (ι) Κατὰ τὴν δ. συνίπ. τῆς λβ. τῷ α. (κ) Ἐκ τῆς κατασκ.
 (λ) Κατὰ τὸ α. ἀξ. (μ) Κατὰ τὸ γ. ἀξ. (ν) Κατὰ τὴν
 κγ. τῷ γ. (ξ) Κατὰ τὴν ιγ. τῷ α. (ο) Κατὰ τὸ α. ἀξ.
 (π) Κατὰ τὴν κγ. τῷ α. (ρ) Κατὰ τὴν ια. τῷ α. (σ) Κατὰ
 τὴν ε. τῷ α.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία ΓΑΒ ἴση τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι ΑΖΒ. (τ) ἀλλὰ τῇ ΓΑΒ ἴση ἡ πρὸς τῷ Γ. (υ) καὶ ἡ ΑΖΒ ἄρα ἴση τῇ πρὸς τῷ Γ. (φ) γέγραπται ἄρα ἐπὶ τῆς δοθείσης ΑΒ τμήμα κύκλου τὸ ΑΒΖΗ περιέχον γωνίαν τὴν ΑΖΒ ἴσην τῇ δοθείσῃ Γ. Ἀλλὰ δὴ ὁρῶν ἐξω ἡ πρὸς τῷ Γ δοθεῖσα γωνία.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήθω διχα ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Κ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διατμήσῃ δὲ ὁποτέρῳ τῶν ΚΑ, ΚΒ ἡμικύκλιον γυγιάθω τὸ ΑΛΒ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΛΒ ἐστὶ τὸ ζητούμενον τμήμα. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΛ, ΑΒ. χ. 50.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΛΒ γωνία ὁρῶν ἐστίν. (χ) ἀλλὰ καὶ ἡ Γ ὁρῶν. ἴση ἄρα ἡ ΑΛΒ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλύσα ἐξω.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεπάτω ἡ ΒΑΔ γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ Γ. καὶ τὰ λοιπὰ κατασκευάθω, καθόπως καὶ ὅτε ὁξεία ἦν ἡ δοθεῖσα γωνία. λέγω δὴ, ὅτι τὸ ΑΛΒ τμήμα ἐστὶ τὸ ζητούμενον. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΑ, ΑΛ. χ. 51.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι ΑΛΒ. (ψ) ἀλλ' ἡ ΒΑΔ = Γ. (ω) καὶ ἡ ΑΛΒ ἄρα ἴση τῇ πρὸς τῷ Γ. (α)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΔ'.

Ἀπὸ τῆς δοθέντος κύκλου τμήμα ἀφελεῖν δεχόμενον γαίην ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἐξω

(τ) Κατὰ τὴν προλ. πρῆτ. (υ) Ἐκ τῆς κατασκ. (φ) Κατὰ τὸ α. αζ. (χ) Κατὰ τὴν λα. τῆ γ. (ψ) Κατὰ τὴν προλ. πρῆτ. (ω) Ἐκ τῆς κατασκ. (α) Κατὰ τὸ α. αζ.

Ἔστω ὁ μὲν δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ. *κ.* 52.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω τῷ ΑΒΓ κύκλῳ ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β. καὶ συνεστιάτω τῇ πρὸς τῷ Δ γωνία ἴση ἡ ΖΕΓ. λέγω, ὅτι τὸ ΒΑΓ ἐστὶ τὸ ζητούμενον τμήμα. ληψόντες γὰρ τυχόντος σημείου τῷ Α ἐπὶ τῆς περιφερείας ΒΑΓ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΖΕΓ γωνία ἴση τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι ΓΑΓ. (β) ἀλλὰ τῇ ΖΒΓ ἴση ἡ πρὸς τῷ Δ. (γ) ἡ ἄρα ΒΑΓ = Δ. (δ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΕ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μίας τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἐτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον. λέγω ὅτι τὸ ΑΕ. ΕΓ = ΔΕ. ΕΒ. *κ.* 53.

Εἰ μὲν αἱ ΑΓ, ΒΔ διὰ τῶν κέντρων διέρχωνται, φανερόν ὅτι ἴσων ἔσῳν τῶν ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ΑΕ. ΕΓ = ΔΕ. ΕΒ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ μὲν ΑΓ διὰ τῶν κέντρων Κ, ἡ δὲ ΔΒ μὴ διὰ τῶν κέντρων διερχέσθω. τεμνέτωσαν δὲ πρῶτον ἀλλήλας πρὸς ὀρθᾶς κατὰ τὸ Ε. *κ.* 54.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΚΒ.

(β) Κατὰ τὴν λβ. τῷ γ. (γ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (δ) Κατὰ τὸ κ. αζ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ ΑΓ. ΕΓ $\perp$ ΚΕ² = ΚΓ². (ε) ἔστι δὲ ΚΓ² = ΚΒ². ἢ γὰρ ΓΚ = ΚΒ. (ζ) ἄρα ΑΓ. ΕΓ $\perp$ ΚΕ² = ΚΒ². (η) ἀλλὰ ΚΒ² = ΚΕ² + ΕΒ². (θ) ἄρα ΑΓ. ΕΓ $\perp$ ΚΕ² = ΚΕ² + ΕΒ². (ι) κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΚΕ². ἄρα ΑΓ. ΕΓ = ΕΒ². (κ) ἀλλ' ΕΒ² = ΔΕ. ΕΒ· ἢ γὰρ ΔΕ = ΕΒ· (λ) ἄρα ΑΓ. ΕΓ = ΔΕ. ΕΒ.

Τεμνέτωσαν δι' ἀλλήλας μὴ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΓ, ΔΒ. χ. 55.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Πέχθω ἀπὸ τῆς κέντρος Κ ἢ ΚΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ ΑΓ. ΕΓ $\perp$ ΚΕ² = ΚΓ². (μ) ἔστι δὲ ΚΓ² = ΚΔ². ἄρα ΑΓ. ΕΓ $\perp$ ΚΕ² = ΚΔ². ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΕ² = ΚΗ² + ΕΗ². τὸ δὲ ΚΔ² = ΚΗ² + ΔΗ². (ν) ἄρα ΑΓ. ΕΓ $\perp$ ΚΗ² + ΕΗ² = ΚΗ² + ΔΗ². κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΚΗ². ἄρα ΑΓ. ΕΓ + ΕΗ² = ΔΗ². ἀλλὰ ΔΗ² = ΔΕ. ΕΒ + ΕΗ². (ξ) ἄρα ΑΓ. ΕΓ + ΕΗ² = ΔΕ. ΕΒ + ΕΗ². κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΕΗ². ἄρα ΑΓ. ΕΓ = ΔΕ. ΕΒ.

Ἀλλὰ δὴ μὴδὲ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτωσαν ἀλλήλας, μὴδὲ διὰ τῆς κέντρος Κ διερχέσθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΒ. χ. 56.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΚΕ, καὶ ἐκβεβλήθω ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ σημεῖα.

ΔΕΙ-

- (ι) Κατὰ τὴν α. τῆς β. (ζ) Κατὰ τὸ δ. πορ. τῆς α. (η) Κατὰ τὸ α. αἱ. (θ) Κατὰ τὴν μζ. τῆς α. (ι) Κατὰ τὸ αὐτὸ αἱ. (κ) Κατὰ τὸ γ. αἱ. (λ) Κατὰ τὴν γ. τῆς γ. (μ) Κατὰ τὴν ε. τῆς β. (ν) Κατὰ τὴν μζ. τῆς α. (ξ) Κατὰ τὴν ε. τῆς β.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΕ. ΕΓ = ΘΕ. ΕΗ. ἀλλὰ καὶ τὸ ΔΕ. ΕΒ = ΘΕ.
ΕΗ. (ο) ἄρα καὶ ΑΕ. ΕΓ = ΔΕ. ΕΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ'.

Ἐάν κύκλος ληφθῇ τὶ σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσαι τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνύσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῶν σημείων καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλος τῷ ΑΒΓ εἰλήφθω τὶ σημεῖον ἐκτὸς, τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ προσπιπτέτωσαν πρὸς τὸν κύκλον δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ. καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω, ἡ δὲ ΔΒ ἐφαπτέτω τῷ κύκλῳ. λέγω, ὅτι ΔΑ. ΔΓ = ΔΒ².
χ. 57.

Ἡ τὸν κύκλον τέμνουσα ΔΓΑ ἥτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστίν, ἡ δὲ ἑξω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου Κ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΚΒ,

ΔΕΙΞΙΣ,

Ἐπεὶ ΑΔ. ΔΓ + ΚΓ² = ΚΔ². (π) καὶ ΚΔ² = ΚΒ² + ΒΔ². (ρ) ἄρα ΑΔ. ΔΓ + ΚΓ² = ΚΒ² + ΒΔ². ἀλλὰ ΚΒ² = ΚΓ². ἄρα ἀφαιρεθέντων τῶν ἴσων, ἔσαι ΑΔ. ΔΓ = ΒΔ².
Η 4 Ἀλλὰ

(ο) Κατὰ τὰ προλαβόντα σχήματα. (π) Κατὰ τὴν γ. τῆ β. (ρ) Κατὰ τὴν μζ. τῆ α.

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ μὴ ἔσω διὰ τῆς κέντρος Κ. χ. 58.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἦχθω ἡ ΚΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΑ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ΑΔ, ΔΓ + ΖΓ² = ΖΔ². (σ) κοινὸν προσκείσθω τὸ ΖΚ². ἄρα ΑΔ, ΔΓ + ΖΓ² + ΖΚ² = ΖΔ² + ΖΚ². (τ) ἀλλὰ τὰ μὲν ΖΓ² + ΖΚ² = ΚΓ². τὰ δὲ ΖΔ² + ΖΚ² = ΚΔ². (υ) ἄρα ΑΔ, ΔΓ + ΚΓ² = ΚΔ². ἀλλὰ ΚΔ² = ΚΒ² + ΒΔ². (φ) ἄρα ΑΔ, ΔΓ + ΚΓ² = ΚΒ² + ΒΔ². ἀλλὰ ΚΓ² = ΚΒ². τῶν ἴσων ἄρα ἀφαιρέσεντων, ἔσται ΑΔ, ΔΓ = ΒΔ².

ΣΥΝΕΠΕΛΑΙ.

Α. Ἐὰν ἀπὸ τῆς αὐτῆς σημείας Δ (χ. 59.) ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ὅσαιδηποτὲν τὸν κύκλον τέμνουν, ἴσονται πάντα τὰ ὑπὸ τῶν ἑλῶν καὶ τῶν ἐκτὸς ἀπολαμβάνομένων μεταξὺ τῆς σημείας Δ καὶ τῆς περιφερείας περιχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἀλλήλοις· εἴτεν ΑΔ, ΔΓ = ΕΔ, Δγ = ΖΔ, Δγ. ἕκαστον γὰρ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΘ τετραγώνῳ.

Β. Αἱ ἀπὸ τῆς αὐτῆς σημείας Δ ἀχθείσθαι τῆς κύκλου ἐφαπτόμεναι ΔΘ, ΔΒ ἴσαι ἀλλήλοις εἰσίν. ἕκατέρα γὰρ ἴση τῷ ὀρθογώνιῳ ΑΔ, ΔΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΖ'.

Ἐὰν κύκλος ληφθῇ τὶ σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τῆς σημείας προσπ.πτῶσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν
αὐ-

(σ) Κατὰ τὴν σ'. τῷ β. (τ) Κατὰ τὸ β. αξ. (υ) Κατὰ τῆς μζ. τῷ α. (φ) Κατὰ τὴν αὐτήν.

αὐτῶν τέμνη τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ,
ἡ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνύσης καὶ τῆς ἐκτὸς
ἀπολαμβάνομένης μεταξὺ τῶν σημείων καὶ
τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσ-
πιπτόσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάπτεται τῆς
κύκλου.

Κύκλος τῷ ΑΒΓ εἰλήφθω τὸ σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ,
καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπιπτόμενη δύο
εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ. καὶ ἡ μὲν τεμνέτω τὸν κύκλον,
ἡ δὲ προσπιπτόμενη. ἔστω δὲ ΑΔ. ΔΓ = ΔΒ². λέγω, ὅτι
ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τῆς κύκλου. χ. 60.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΔΕ ἐφαπτομένη τῆς κύκλου. (χ) καὶ ἀπὸ
τῆς κέντρος Κ ἐπὶ τὰ Ε, Δ, Β σημεῖα ἐπεξέχθωσαν
αἱ ΚΕ, ΚΔ, ΚΒ.

ΛΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΔ. ΔΓ = ΔΕ². (ψ) ἀλλὰ ΑΔ. ΔΓ = ΔΒ².
(ω) ἄρα ΔΕ² = ΔΒ². ἄρα ΔΕ = ΔΒ. Ἐν τοῖς τριγώνοις
ἐν ΔΚΕ, ΔΚΒ, ἡ μὲν ΚΕ = ΚΒ, ἡ δὲ ΔΕ = ΔΒ,
ἡ δὲ ΔΚ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΔΕΚ = ΔΒΚ. (α)
ἀλλ' ἡ ΔΕΚ ὀρθή. (β) καὶ ἡ ΔΒΚ ἄρα ὀρθή ἐστιν.
ἐφάπτεται ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΑΒΓ κύκλου. (γ)

Η 5

ΒΙΒ-

- (χ) Κατὰ τὴν ιζ. τῆς γ. (ψ) Κατὰ τὴν προλ. πρόγ. (ω) Ἐξ
ὑποθ. (α) Κατὰ τὴν η. τῆς α. (β) Κατὰ τὴν ιη. τῆς γ.
(γ) Κατὰ τὴν ις. τῆς γ.

ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

- Α'. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς χῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεισθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη τῶν τῷ ἐγγραφομένῳ σχήματος ΑΒΙΔγωνίων ἐκάστης πλευρᾶς τῆς εἰς ὃ ἐγγράφεται ΕΖΗΘ ἄπτηται. πίν. γ'. χ. 1.
- Β'. Σχῆμα δὲ περὶ χῆμα περιγράφεισθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τῆς περιγραφομένης ΕΖΗΘ, ἐκάστης γωνίας τῆς περὶ ὃ περιγράφεται ΑΒΓΔ ἄπτηται. χ. 1.
- Γ'. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεισθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη γωνία τῆς ἐγγραφομένης ΑΒΓΔΕ ἄπτηται τῆς τῷ κύκλῳ ΑΖΗ περιφερείας. χ. 2.
- Δ'. Σχῆμα περὶ κύκλον περιγράφεισθαι λέγεται, ὅταν τῆς τῷ κύκλῳ ΑΘΗ περιφερείας ἐκάστη πλευρὰ τῆς περιγραφομένης ΑΒΓΔΕΖ, ἄπτηται. χ. 3.
- Ε'. Κύκλος εἰς χῆμα ἐγγράφεισθαι λέγεται, ὅταν ἡ τῷ κύκλῳ ΑΗΘ περιφέρεια ἐκάστης πλευρᾶς τῆς εἰς ὃ ἐγγράφεται ΑΒΓΔΕΖ ἄπτηται. χ. 3.
- Σ'. Κύκλος περὶ χῆμα περιγράφεισθαι λέγεται, ὅταν ἡ τῷ κύκλῳ ΑΖΗ περιφέρεια ἐκάστης γωνίας τῆς περὶ ὃ περιγράφεται ΑΒΓΔΕ ἄπτηται. χ. 2.
- Ζ'. Εὐθεῖα ἢ ἸΓ εἰς κύκλον τὸν ΑΔΕΓ ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ τῷ κύκλῳ. χ. 4.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μάζονι ὅσῃ τῆς τῷ κύκλῳ διαμέτρου ἴσω εὐθείαν ἐναρμόσαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ Δ. χ. 5.

ΚΑ-

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

*Ηχθω τῷ ΑΒΓ κύκλῳ διάμετρος ἡ ΒΓ. εἰ μὲν ἔν
ση εἰσὶν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγενὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν.
εἰ δ' ὅ, μείζων εἰσὶν ἡ ΒΓ τῆς Δ, κείωω τῇ Δ ἴση ἡ
ΓΕ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκ-
λος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ. λέγω,
ὅτι ἡ ΓΖ εἰσὶν ἡ ζητούμενη.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΓΕ = ΓΖ. (δ) ἀλλὰ τῇ ΓΕ = Δ. (ε) ἄρα καὶ ἡ
ΓΖ = Δ. (ζ) εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ΑΒΓ τῇ δο-
θείσῃ Δ ἴση ἐνέσθωαι ἡ ΓΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώ-
νῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

*Εἶω ὁ μὲν δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρι-
γωνον τὸ ΔΕΖ. χ. δ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

*Ηχθω ἡ ΗΑΘ ἐφαπτομένη τῷ ΑΒΓ κύκλῳ. (η)
καὶ συνεστιάτω ἡ μὲν γωνία ΗΑΒ = Ε, ἡ δὲ ΘΑΓ =
Ζ. (θ) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ. λέγω, ὅτι τὸ ΒΑΓ τρι-
γώνον εἴσι τὸ ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία ΗΑΒ = ΑΓΒ. (ι) ἀλλὰ τῇ ΗΑΒ = Ε.
(κ) ἄρα καὶ ἡ ΑΓΒ = Ε. (λ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ
ἡ ΑΒΓ = Ζ. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΑΓ ἴση λοιπῇ τῇ Δ.
(μ)

(δ) Κατὰ τὸ δ. πορ. τῷ α. (ε) Ἐκ τῆς κατασκ. (ζ) Κατὰ τὸ
α. αζ. (η) Κατὰ τὴν ιζ. τῷ γ. (θ) Κατὰ τὴν κη. τῷ α.
(ι) Κατὰ τὴν λβ. τῷ γ. (κ) Ἐκ τῆς κατασκ. (λ) Κατὰ τὸ
α. αζ.

(μ) ἰσογώνιον ἔσται τὸ ΒΑΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ· καὶ ἰσχυ-
γραπταὶ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τρι-
γώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ μὲν δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρι-
γώνον τὸ ΔΕΖ. χ. 7.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθω ἐφ' ἑκάστην τὰ μέρη ἢ ΕΖ ἐπὶ τὰ Θ,
Γ σημεία. καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων Κ ἢ Χ θωσὶν ἑτοχεν ἢ
ΚΒ. καὶ συνεκτένωσαν γωνίας ἢ μὲν ΓΚΒ = ΔΓΙ, ἢ δὲ
ΑΚΒ = ΔΖΘ. (ν) καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων
ἤχθωσαν ὑφαπτόμεναι τῷ ΑΒΓ κύκλῳ αἱ ΑΜ, ΜΗ,
ΗΛ. Ἀπόγω, ὅτι τὸ ΑΜΗ τρίγωνον εἰς τὸ ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Διὰ τῆς ΗΚΒ τετραπλευρῆς γωνίας ἴσαι εἰσὶ τέσσαρες
συν. ὁρθαῖς. (ξ) ἀλλ' ἢ ΚΓΗ ὁρθή ἐστιν, ὁμοίαν καὶ ἢ
ΚΒΗ. (ο) αἱ ἄρα ΓΚΒ, ΓΗΒ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι. ἀλλὰ
καὶ αἱ ΔΕΙ, ΔΕΖ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι. (π) ἄρα ΓΚΒ +
ΓΗΒ = ΔΕΙ + ΔΕΖ. (ρ) ἀλλ' ἢ ΓΚΒ = ΔΓΙ. (σ) ἄρα
καὶ ἢ ΓΗΒ, ἴσων ἢ ΑΗΜ = ΔΕΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ
δεχόμεθα, ὅτι καὶ ἢ ΑΜΗ = ΔΕΖ. καὶ λοιπὴ ἄρα
ἢ ΜΑΗ = ΕΑΖ. (τ) ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΜΑΗ τρίγω-
νον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν
ΑΒΓ κύκλον.

"(ο)τι

(μ) Κατὰ τὴν ζ'. συνία τῆς δβ. πρώτ. τῆς α. (ν) Κατὰ τὴν ηγ.
τῆς α. (ξ) Κατὰ τὴν ιδ'. συνία τῆς δβ. τῆς α. (ο) Κατὰ
τὴν ιη. τῆς γ. (π) Κατὰ τὴν ιγ. τῆς α. (ρ) Κατὰ τὸ α.
αξ. (σ) Ἐκ τῆς αητησθ. (τ) Κατὰ τὴν ζ'. συνία τῆς δβ.
τῆς α.

"Οτι δὲ αἱ ἐφεπτόμεναι ΜΑ, ΗΑ, ΜΗ ἀλλήλαις
 ἰσχυρίζονται, δευτέρως ἢ ΑΚ ἢ Εἰς τὴν
 ἴσιν τῇ ΚΙ. ἐπὶ γὰρ εἰ δυνατόν, αἱ ἄρα ΕΚΤ, ΕΚΑ
 γινώσκοντες ἐξ αὐτῆς ἴσιν. (υ) ἢ ἐπὶ αἱ ΔΖΘ, ΔΖΕ,
 ΑΠΙ, ΑΠΖ ἴσιν ἰσοκατασκευάζονται, (φ) αἱ δὲ ΔΖΕ,
 ΑΠΖ ἰσοκατασκευάζονται ἐξ αὐτῶν. (χ) αἱ ἄρα ΔΖΘ, ΑΠΙ
 γινώσκοντες ἀπὸ ἐξ αὐτῶν. αἱ δὲ ΕΚΑ =
 ΔΖΘ. (ψ) αἱ ἄρα ΕΚΙ, ΕΚΑ γινώσκοντες ἀπὸ ἐξ αὐτῶν. αἱ
 καὶ ἴσιν ἰσχυρίζονται ἐξ αὐτῶν ἰσοκατασκευάζονται. ἢ
 ἄρα ἢ ΑΚ ἐκ τῶνδε τῶν ΚΤ, ΕΠΕΞΟΥΧΩΝ ἢ ἢ ΑΠ.
 καὶ ἴσιν αἱ ΚΙΑ, ΚΑΑ ἐξ αὐτῶν (ω) αἱ δὲ ΑΠΑ,
 ΙΑΑ ἰσοκατασκευάζονται τῶν ΚΙΑ, ΚΑΑ. αἱ ἄρα ΑΠΑ, ΙΑΑ
 ἰσοκατασκευάζονται ἐξ αὐτῶν. ἢ ἄρα ἢ ΙΙΑ ἰσοκατασκευάζονται τῇ
 ΜΑ. αἱ γὰρ ἰσοκατασκευάζονται, αἱ γινώσκοντες ΑΠΑ, ΙΑΑ ἴσιν
 ἰσχυρίζονται, αἱ αἱ καὶ ἰσοκατασκευάζονται ἐξ αὐτῶν. ἢ
 ἄρα ἢ ΙΙΑ ἰσοκατασκευάζονται τῇ ΜΑ, ἰσοκατασκευάζονται ἄρα ἢ ΙΙΑ
 τῇ ΜΑ. διὰ τὴν αὐτὴν δὴ δευτέρως, ἐπὶ ἢ αἱ ΗΑ,
 ΑΠ ἰσοκατασκευάζονται τῇ ΙΙΜ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Τ Ε Δ.

Ἐὰς τὸ δεῖν τεγύγων κυκλῶν ἐγγράφου.
 Ἐὰς τὸ δεῖν τεγύγων τὸ ΑΒΓ Χ. Η.

Κ Α Τ Α Σ Κ Ε Τ Η.

Τετάρτησαν δὲ ΧΑ αἱ ΑΒΓ, ΑΠΒ γινώσκοντες ΕΚ,
 ΙΚ ἰσοκατασκευάζονται, (α) αἱ ἰσοκατασκευάζονται ἀλλήλαις κατὰ τὸ
 Κ. καὶ αὐτὸ τῷ Κ ἰσοκατασκευάζονται αἱ ΚΖ, ΚΗ, ΚΕ
 ἴσιν ἐξ αὐτῶν ΕΠ, ΙΑ, ΑΒ. (β) Αβγ, ἐπὶ ὃ γὰρ
 ἐπὶ τῶν Κ, διακρίνεται δὲ τῶν ΚΖ, ἢ ΚΗ ἢ ΚΕ
 ἰσοκατασκευάζονται ἐπὶ ὃ ἐπιγινώσκοντες.

ΑΠΙ.

(υ) Κατὰ τὴν γ. τ. α. (φ) Κατὰ τὴν δ. τ. α. (χ) Κατὰ τὴν
 α. τ. α. (ψ) Κατὰ τὴν ε. τ. α. (ω) Κατὰ
 τὴν ι. τ. α. (η) Κατὰ τὴν θ. τ. α. (θ) Κατὰ τὴν ιθ. τ. α.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΚΖ, ΒΚΕ, ἡ μὲν γωνία ΚΒΖ = ΚΒΕ, (γ) ἡ δὲ ΚΖΒ = ΚΕΒ, (δ) ἡ δὲ ΒΚ κοινή, καὶ ἡ ΚΖ, ἄρα ἴση τῇ ΚΕ. (ε) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΚΖ = ΚΗ. αἱ ἄρα ΚΖ, ΚΕ, ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΖ, ἡ ΚΕ, ἡ ΚΗ κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφαρτάται τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εὐθειῶν. (ς)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Περὶ τὸ δοθέν τρίγωνον κύκλον περιγεράψαι.

Ἐστω δοθέν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ. καὶ 9.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ δίχα κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα. (η) καὶ ἀπὸ τῶν Δ, Ε σημείων ταῖς ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔΚ, ΕΚ. συμπεσόνται δὲ ἡται ἐντὸς τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ἡ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας ἡ ἐντὸς τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. συμπιπτέτωσαν πρῶτον ἡ πρὸς κατὰ τὸ Κ. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΚΒ, ΚΑ. λέγω ὅτι ὁ κέντρον μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ, ἡ ΚΒ, ἡ ΚΑ γραφόμενος κύκλος ἐστὶν ὁ ζητούμενος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΚΕ, ΓΚΕ, ἡ μὲν ΑΕ = ΕΓ, (θ) ἡ δὲ ΚΕ κοινή, καὶ γωνία ἡ ΚΕΑ = ΚΕΓ. ὀρθαὶ γάρ, καὶ ἡ ΚΑ ἄρα ἴση τῇ ΚΓ. (ι) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΚΑ = ΚΒ. αἱ τρεῖς ἄρα ΚΑ, ΚΓ, ΚΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ μιᾷ τῶν ΚΑ, ΚΓ, ΚΒ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν

(γ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (δ) Ὁσαύτως. (ε) Κατὰ τὴν κγ. τῆ. β. (ς) Κατὰ τὴν ις τῆ γ. (η) Κατὰ τὴν ι. τῆ α. (θ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ι) Κατὰ τὴν δι. τῆ α.

λοιπῶν σημείων, ἣ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΚ, ΕΚ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τῆς ΒΓ ἐυθείας κατὰ τὸ Κ. (χ. 10.) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ. ὁμοίως δὴ δίδωμεν, ὅτι τὸ Κ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῷ περὶ τὸ ΑΒΓ περιγεγραμμένῳ κύκλῳ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΚ, ΕΚ συμπιπτέτωσαν ἐκτὸς τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΙ, ΚΕ. ἢ ὁμοίως δείξωμεν, ὅτι τὸ Κ κέντρον ἐστὶ τῷ ζητούμενῳ κύκλῳ. χ. 11.

ΣΤΗΝΕΙΕΙΑ.

Ὅτε μὲν ἐντὸς τῷ τριγώνῳ πίπτει τὸ κέντρον τῷ κύκλῳ, ἡ ΒΑΓ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς ΒΓ, ὀρθὴ ἔσται· ὅταν δὲ ἐκτὸς τῷ τριγώνῳ, μείζων. ὡς καὶ ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ ΒΑΓ γωνία ἐντὸς τῷ τριγώνῳ συμπεσένται αἱ ΔΚ, ΕΚ· ἔσται δὲ ὀρθή, ἐπὶ τῆς ΒΓ· ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐκτός.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγραψαί.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ. χ. 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθωσαν τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλων αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔ ἐστὶ τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΑΚ, ΔΑΚ, ἡ μὲν ΒΚ = ΚΔ, ἡ δὲ ΚΑ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΑΚΒ = ΑΚΔ. (κ) ἄρα καὶ ΑΒ = ΑΔ. (λ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρω τῶν ΒΓ, ΓΔ, ἑκατέρω

(κ) Ἐκ τῆς κατὰ κ. (λ) Κατὰ τὴν δ. τῷ α.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ ΑΘ, ΕΓ, ΑΚ, ΖΘ, ΕΗ, ΚΓ παραλληλόγραμμά εἰσιν. αἱ ἄρα ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. (α) καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΔ, ΑΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν (β) ἔστι δὲ ἡ μὲν ΑΕ ἡμίσεια τῆς ΑΔ, ἡ δὲ ΑΖ τῆς ΑΒ· ἄρα $ΑΕ = ΑΖ$. ἀλλ' ἡ μὲν $ΑΕ = ΖΚ$, ἡ δὲ $ΑΖ = ΕΚ$. (γ) ἄρα καὶ ἡ $ΖΚ = ΕΚ$. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρω τῶν ΚΘ, ΚΗ ἴση ἑκατέρω τῶν ΖΚ, ΚΕ. αἱ τέσσαρες ἄρα ΕΚ, ΖΚ, ΚΘ, ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἐν αὐτῶν γραφόμενος κύκλος διὰ τῶν Ε, Ζ, Θ, Η σημείων ἦξει, καὶ ἐγγεγραμμένος ἔσται εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐξω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ. χ. 16.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Κ. λέγω, ὅτι ὁ κέντρον μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΚΑ, ΚΔ, ΚΓ, ΚΒ, γραφόμενος κύκλος ἐστὶν ὁ ζητούμενος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΔΑΒ, ΔΓΒ, ἡ μὲν $ΔΑ = ΔΓ$, ἡ δὲ $ΑΒ = ΒΓ$, ἡ δὲ ΔΒ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ $ΑΔΒ = ΓΔΒ$, καὶ ἡ $ΑΒΔ = ΓΒΔ$. (δ) ἑκατέρω ἄρα τῶν ΑΔΓ, ΑΒΓ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΔΒ, ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρω τῶν ΔΑΒ, ΔΓΒ, δίχα

(α) Κατὰ τὴν λδ. τῆς κ. (β) Ἐξ ὑποθ. (γ) Κατὰ τὴν λδ. τῆς κ. (δ) Κατὰ τὴν η. τῆς κ.

διχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ ἐν τοῖς ΑΔΚ, ΓΔΚ τριγώνοις, ἡ μὲν ΑΔ = ΔΓ, ἡ δὲ ΔΚ, κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΑΔΚ = ΓΔΚ, ὡς δέονται, ἄρα καὶ ἡ ΑΚ = ΚΓ. (ε) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΚ, ΚΒ ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΚ, ΚΓ. αἱ τέσσαρες ἄρα ΑΚ, ΚΓ, ΔΚ, ΚΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἐν αὐτῶν γραφόμενος κύκλος ἔξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ περιγεγραμμένος ἔσται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκεῖθω τίς ευθεία ἡ ΑΒ, καὶ τετμήθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ. (ζ) καὶ κέντρον μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγραφθῶ ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμόθω εἰς αὐτὸν ἡ ΒΔ ἴση τῇ ΑΓ, (η) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΔΒ τρίγωνον ἐστὶ τὸ ζητούμενον. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΓ, καὶ περιγεγραφθῶ περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΔΓΑΕ. ς. 17.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΒ = ΑΔ. ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ ΑΔΒ τρίγωνον. καὶ ἐπεὶ ΑΒ, ΒΓ = ΑΓ². (θ) ἐστὶ δὲ ΑΓ² = ΔΒ². ἡ γὰρ ΑΓ = ΔΒ. (ι) ἄρα καὶ ΑΒ, ΒΓ = ΔΒ². (κ) ἐφαπτομένη ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῷ ΔΓΑΕ κύκλῳ. (λ) ἡ γωνία ἄρα ΒΔΓ = ΔΑΓ. (μ) κοινὴ προσκείσθω ἡ ΑΔΓ. ἄρα ΑΔΓ

⊙ 2

ΑΔΓ

(ι) Κατὰ τὴν δ. τῆ α. (ζ) Κατὰ τὴν ια. τῆ β. (η) Κατὰ τὴν α. τῆ δ. (θ) Ἐκ τῆς κατασλ. (ι) Ὁτανύτωι. (κ) Κατὰ τὸ α. αζ. (λ) Κατὰ τὴν λζ. τῆ γ. (μ) Κατὰ τὴν λβ. τῆ γ.

$\Lambda\Delta\Gamma \dashv \text{ΒΔΓ}$, ἤτοι $\Lambda\Delta\text{Β} = \Lambda\Delta\Gamma \dashv \Delta\Lambda\Gamma$. (ν) ἀλλ' ἢ $\Delta\Gamma\text{Β} = \Lambda\Delta\Gamma \dashv \Delta\Lambda\Gamma$. (ξ) ἄρα καὶ ἢ $\Lambda\Delta\text{Β} = \Delta\Gamma\text{Β}$. (ο) ἀλλ' ἢ $\Lambda\Delta\text{Β} = \Lambda\text{Β}\Delta$. (π) ἄρα καὶ ἢ $\Lambda\text{Β}\Delta = \Delta\Gamma\text{Β}$. ἄρα καὶ $\Delta\text{Β} = \Delta\Gamma$. (ρ) ἀλλὰ $\Delta\text{Β} = \Lambda\Gamma$. ἄρα καὶ ἢ $\Lambda\Gamma = \Delta\Gamma$. ἄρα καὶ γωνία ἢ $\Gamma\Lambda\Delta = \Gamma\Delta\Lambda$. (σ) ἢ ἄρα $\Delta\Gamma\text{Β}$ διπλασίων ἐστὶ τῆς $\Delta\Lambda\text{Β}$. ἀλλὰ τῇ $\Delta\Gamma\text{Β}$ ἴση δεῖκται ἢ $\Lambda\text{Β}\Delta$. καὶ ἢ $\Lambda\text{Β}\Delta$ ἄρα διπλασίων τῆς $\Delta\Lambda\text{Β}$. ἀλλὰ τῇ $\Lambda\text{Β}\Delta$ ἴση ἢ $\Lambda\Delta\text{Β}$. (τ) καὶ ἢ $\Lambda\Delta\text{Β}$ ἄρα διπλασίων τῆς $\Delta\Lambda\text{Β}$. ἰσοσκελὲς ἄρα συνέστη τρίγωνον τὸ $\Lambda\Delta\text{Β}$ ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ $\Delta\text{Β}$ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $\Lambda\text{ΒΓΔΕ}$. κ. 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκείθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ , διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει ΗΘ γωνιῶν τῆς λοιπῆς τῆς πρὸς τῷ Ζ . (υ) καὶ ἐγγεγράψω εἰς τὸν $\Lambda\text{ΒΓΔΕ}$ κύκλον τρίγωνον τὸ $\Lambda\Gamma\Delta$ ἰσογώνιον τὸ ΖΗΘ . (φ) καὶ τετμήσω δίχα ἑκατέρω τῶν $\Lambda\Gamma\Delta$, $\Lambda\Delta\Gamma$ γωνιῶν ὑπὸ τῶν $\Gamma\text{Ε}$, $\Delta\text{Β}$. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\Gamma\text{Β}$, ΒΑ , $\Lambda\text{Ε}$, ΕΔ . λέγω, ὅτι τὸ $\Lambda\text{ΒΓΔΕ}$ ἐστὶ τὸ ζητούμενον πεντάγωνον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἑκατέρω τῶν $\Lambda\Gamma\Delta$, $\Lambda\Delta\Gamma$ γωνιῶν διπλασίονα ἐστὶ τῆς $\Gamma\Lambda\Delta$, καὶ τετμημέναι εἰςί δίχα ὑπὸ τῶν $\Gamma\text{Ε}$, $\Delta\text{Β}$

(ν) Κατὰ τὸ β. ἀξ. (ξ) Κατὰ τὴν λβ. τῷ α. (ο) Κατὰ τὸ α. ἀξ. (π) Κατὰ τὴν ε. τῷ α. (ρ) Κατὰ τὴν σ. τῷ α. (σ) Κατὰ τὴν ε. τῷ α. (τ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (υ) Κατὰ τὴν περιλ. πρὸν. (φ) Κατὰ τὴν β. τῷ δ.

ΑΒ ἑυθειῶν· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι ΓΑΔ, ΒΔΓ, ΒΔΑ, ΑΓΕ, ΕΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. καὶ αἱ περιφέρειαι ἄρα ΓΔ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις. (χ) ἄρα καὶ αἱ πέντε ἑυθεῖαι ΓΔ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις. (ψ) ἰσόπλευρον ἄρα τὸ πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ περιφέρεια ἴση τῇ ΑΕ, ἐστὶ δὲ ἡ μὲν ΑΒΓΔ περιφέρεια τριπλασία τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΑΕΔΓ τριπλασία τῆς ΑΕ, ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ἴση τῇ ΑΕΔΓ περιφέρειᾳ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΕΔ = ΑΒΓ. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάστη τῶν ΒΓΔ, ΓΔΕ, ΒΑΕ γωνιῶν ἴση ἐκατέρᾳ τῶν ΑΕΔ, ΑΒΓ. ἰσογώνιον ἄρα τὸ πεντάγωνον, εἰδέχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ εἰν ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστὶ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ΑΒΓΔΕ. χ. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Νενοήθω τῷ ἐγγεγραμμένῳ πενταγώνῳ τῶν γωνιῶν σημῖαι τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε. καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τῷ κύκλῳ αἱ ΗΘ, ΘΖ, ΖΛ, ΛΜ, ΜΗ. Λέγω, ὅτι τὸ ΗΘΖΛΜ ἐστὶ τὸ ζητούμενον πεντάγωνον. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν κέντρων Κ ἐπὶ τὰ Β, Ζ, Γ, Δ, Ε σημῖαι αἱ ΚΒ, ΚΖ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΕ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Διὰ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ, σημείοις γωνίαι ὀρθαὶ εἰσιν.

(α) ἄρα $\overline{ΖΚ}^2 = \overline{ΚΒ}^2 + \overline{ΒΖ}^2$. ἀλλὰ $\overline{ΖΚ}^2 = \overline{ΚΓ}^2 + \overline{ΓΖ}^2$.

Θ 3

(β)

(χ) Κατὰ τὴν κβ. τῇ γ. (ψ) Κατὰ τὴν κθ. τῇ γ. (ω) Κατὰ τὴν κζ. τῇ γ. (α) Κατὰ τὴν ιη. τῇ γ.

(β) ἄρα $\overline{KB}^2 + \overline{BZ}^2 = \overline{K\Gamma}^2 + \overline{\Gamma Z}^2$. (γ) ἀλλὰ $\overline{KB}^2 = \overline{K\Gamma}^2$, καὶ γὰρ ἡ $KB = K\Gamma$. ἄρα καὶ $\overline{BZ}^2 = \overline{\Gamma Z}^2$. (δ) ἄρα καὶ $BZ = \Gamma Z$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $IA = \Delta\Delta$, ἐν τοῖς τριγώνοις ἐν ZBK , $Z\Gamma K$, ἡ μὲν $KB = K\Gamma$, ἡ δὲ $BZ = \Gamma Z$, ἡ δὲ ZK κοινή, καὶ γωνία ἄρα ἡ $BKZ = ZK\Gamma$. (ε) ἡ ἄρα BKI διπλασία τῆς $ZK\Gamma$. ὁμοίως δὲ ἔχομεν, ὅτι ἡ $\Delta K\Gamma$ διπλασία ἐστὶ τῆς $\Lambda K\Gamma$. ἀλλ' ἡ $BKI = \Delta K\Gamma$. (ς) ἄρα καὶ ἡ $ZK\Gamma = \Lambda K\Gamma$. καὶ ἐν τοῖς τριγώνοις ἐν $KZ\Gamma$, $K\Lambda\Gamma$, ἡ μὲν γωνία $ZK\Gamma = \Lambda K\Gamma$, ἡ δὲ $K\Gamma Z = K\Gamma\Lambda$, ἡ δὲ $K\Gamma$ κοινή. ἄρα καὶ ἡ γωνία $KZ\Gamma = K\Lambda\Gamma$, καὶ ἡ $Z\Gamma = \Gamma\Lambda$. (η) ἡ ἄρα $Z\Lambda$ διπλασία τῆς $Z\Gamma$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $Z\Theta$ διπλασία τῆς ZB . καὶ ἐπεὶ δὲ δεικνύται ἡ $BZ = \Gamma Z$, καὶ ἡ ΘZ ἄρα ἴση τῇ $Z\Lambda$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἐκάστη τῶν ΛM , $M\Gamma$, $H\Theta$ ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΘZ , $Z\Lambda$. αἱ πέντε ἄρα ΛZ , $Z\Theta$, ΘH , $H M$, $M\Lambda$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσόπλευρον ἄρα τὸ πεντάγωνον. ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς τριγώνοις ZBK , $Z\Gamma K$, ἡ μὲν $BK = \Gamma K$, ἡ δὲ $BZ = \Gamma Z$, ἡ δὲ ZK κοινή, καὶ γωνία ἄρα ἡ $KZB = KZ\Gamma$. (θ) ἡ ἄρα $BZ\Gamma$ διπλασία τῆς $KZ\Gamma$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $\Delta\Lambda\Gamma$ διπλασία τῆς $K\Lambda\Gamma$. ἀλλ' ἡ $KZ\Gamma = K\Lambda\Gamma$, ὡς δὲ δεικνύται. ἄρα καὶ ἡ $BZ\Gamma = \Delta\Lambda\Gamma$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἐκάστη τῶν $\Lambda M H$, $M H \Theta$, $H \Theta Z$ ἴση ἑκατέρᾳ τῶν $\Theta Z \Lambda$, $Z \Lambda M$. ἄρα αἱ πέντε γωνίαι H , Θ , Z , Λ , M τῶν πεντεγώνων ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσογώνιον ἄρα τὸ πεντάγωνον. εἰδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστὶ πεντάγωνον.

ΠΡΟ.

(β) Κατὰ τὴν μζ. τῇ α. (γ) Κατὰ τὸ α. αζ. (δ) Κατὰ τὸ γ. αζ. (ε) Κατὰ τὴν η. τῇ α. (ς) Κατὰ τὴν κς. τῇ γ. (η) Κατὰ τὴν κς. τῇ α. (θ), Κατὰ τὴν η. τῇ α.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευ-
ρόν τε καὶ ἰσογώνιον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἴδω τὸ δοθὲν πεντάγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ. κ. 20.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήθω ἑκατέρω τῶν ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑφ' ἑκατέρας τῶν ΓΚ, ΔΚ. καὶ ἀπὸ τῆς Κ σημείω, καθ' ὅ συμ-
βάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΚ, ΔΚ ἐνθεῖαι ἥχθωσαν ταῖς
ΓΔ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΕ, ΕΔ κάθετοι αἱ ΚΖ, ΚΘ, ΚΗ, ΚΜ,
ΚΛ. λέγω, ὅτι ὁ κέντρον μὲν τῶ Κ, διαστήματι δὲ ἐνὶ
τέττων γραφόμενος κύκλος ἐστὶν ὁ ζητούμενος. ἐπεξεύχ-
θωσαν γὰρ αἱ ΚΒ, ΚΑ, ΚΕ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΚΒΓ, ΚΔΓ, ἡ μὲν ΒΓ = ΓΔ, (ι)
ἡ δὲ ΓΚ κοινή, καὶ γωνία ἡ ΚΓΒ = ΚΓΔ. (κ) ἄρα
καὶ ἡ γωνία ΚΒΓ = ΚΔΓ. (λ) ἀλλ' ἡ ΓΔΕ διπλασία
τῆς ΚΔΓ. (μ) διπλασία ἄρα καὶ τῆς ΚΒΓ. ἀλλ' ἡ
ΓΒΑ = ΓΔΕ, (ν) ἄρα καὶ ἡ ΓΒΑ διπλασία τῆς ΚΒΓ.
ἡ ἄρα ΚΒ δίχα τέμνει τὴν ΓΒΑ γωνίαν. διὰ τὰ αὐ-
τὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκατέραν τῶν ΒΑΕ, ΑΕΔ
δίχα τέμνει ἑκατέρω τῶν ΚΑ, ΚΕ. ἐν τοῖς τριγώνοις
ἐν ΚΓΖ, ΚΓΘ, ἡ μὲν γωνία ΚΖΓ = ΚΘΓ, (ξ) ἡ δὲ
ΚΓΖ = ΚΓΘ, ἡ δὲ ΚΓ κοινή. ἄρα καὶ ἡ ΚΖ = ΚΘ.
(ο) ὁμοίως δὴ δευχθήσεται τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἡ ΚΗ,
τῇ δὲ ΚΗ ἡ ΚΜ, τῇ δὲ ΚΜ ἡ ΚΛ. αἱ πέντε ἄρα
ΚΖ, ΚΘ, ΚΗ, ΚΜ, ΚΛ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ
ἄρα κέντρον μὲν τῶ Κ διαστήματι δὲ ἐνὶ τέττων γρα-

Θ 4

Φό.

- (ι) Ἐξ ὑποθ. (κ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (λ) Κατὰ τὴν δ. τῆς α
(μ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Ἐκ τῆς κατασκευ.
(ο) Κατὰ τὴν κτ. τῆς α.

Φόρμενος κύκλος ἐγγεγραμμένος ἔσται τῷ δοθέντι ΑΒΓΔΕ πενταγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ. χ. 21.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήθω ἑκατέρη τῶν ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΚ, ΔΚ. καὶ ἀπὸ τῆς Κ σημείω, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεία ἐπεξέχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΚΒ, ΚΑ, ΚΕ. λέγω ὅτι ὁ κέντρον μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τέτων γραφόμενος κύκλος ἐστὶν ὁ ζητούμενος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὀμοίως τῷ πρὸ τέττε δεχθήσεται, ὅτι ἐκάστη τῶν ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἐκάστης τῶν ΚΒ, ΚΑ, ΚΕ εὐθειῶν. ἐπεὶ ἔν ἡ γωνία ΒΓΔ = ΓΔΕ, (π) καὶ τῆς μὲν ΒΓΔ ἡμίση αἱ ΚΓΔ, τῆς δὲ ΓΔΕ ἡ ΚΔΓ, (ρ) ἄρα καὶ ἡ ΚΓΔ = ΚΔΓ. ἄρα καὶ ἡ ΚΓ = ΚΔ. (σ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάστη τῶν ΚΒ, ΚΑ, ΚΕ ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΚΓ, ΚΔ. αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι ΚΓ, ΚΔ, ΚΕ, ΚΑ, ΚΒ ἴσαι ἀλλήλαις. ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τέτων γραφόμενος κύκλος ἔξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ δοθὲν ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω

(π) Ὅτι ὑπεθ. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (σ) Κατὰ τὴν ε. τῆς α'.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ. χ. 22.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω τῷ ΑΒΓΔΕΖ κύκλῳ διάμετρος ἡ ΑΔ. καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῷ κύκλῳ τὸ Κ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΚ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΚΓΘ. καὶ ἐπιζευχθῆσθαι ἀπὸ τῶν τομῶν Ε, Γ ἐπὶ τὸ κέντρον αἱ ΕΚ, ΓΚ, διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐστὶ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Η' ΔΚ = ΔΕ. ἀλλὰ τῇ ΚΔ = ΚΕ. (τ) ἄρα καὶ ἡ ΚΕ = ΔΕ. (υ) ἰσοπλευρον ἄρα τὸ ΚΕΔ τρίγωνον. ἄρα καὶ ἰσογώνιον. (φ) ἡ ἄρα ΕΚΔ γωνία ἴση τριτημορίῳ δύο ὀρθῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΚΓ ἴση τριτημορίῳ δύο ὀρθῶν. (χ) ἀλλ' αἱ τρεῖς ΕΚΔ, ΔΚΓ, ΓΚΒ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (ψ) ἄρα καὶ ἡ ΓΚΒ ἴση τριτημορίῳ δύο ὀρθῶν. αἱ ἄρα ΕΚΔ, ΔΚΓ, ΓΚΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν ἄρα ΒΚΑ, ΑΚΖ, ΖΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις. (ω) καὶ αἱ περιφέρειαι ἄρα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. (α) καὶ αἱ αὐτὰς ὑποτείνεσθαι ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. (β) ἰσοπλευρον ἄρα τὸ ἑξάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ περιφέρειαι ἴση τῇ ΑΖ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΑΒ τετραπλασία ἡ ΑΒΓΔΕ, τῆς δὲ ΑΖ ἡ ΑΖΕΔΓ. ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓΔΕ = ΑΖΕΔΓ. (γ) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΖΕ = ΑΒΓ. (δ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθῆσεται, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν λοιπῶν τῷ ἑξαγώνῳ γωνιῶν ἴση ἐκατέρᾳ τῶν ΑΖΕ, ΑΒΓ. ἰσογώ-

Θ 5

γώ-

- (τ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τῷ α. (υ) Κατὰ τὸ α. ἀξ. (φ) Κατὰ τὴν συνίπ. τῆς θ. τῷ α. (χ) Κατὰ τὴν ι. συνίπ. τῆς λβ. τῷ α. (ψ) Κατὰ τὴν ιγ. τῷ α. (ω) Κατὰ τὴν ιε. τῷ α. (α) Κατὰ τὴν κς. τῷ γ. (β) Κατὰ τὴν κθ. τῷ γ. (γ) Κατὰ τὸ ι. ἀξ. (δ) Κατὰ τὴν κς. τῷ γ.

γώνιον ἄρα τὸ ἐξάγωνον, δέδεικται δὲ ὅτι καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἐγγεγραπταὶ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστὶ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐκείτη ἐξαγώνος γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ τρίτημορίοις δύο ὀρθῶν. ἐκείτη γὰρ ἴση δυσὶ γωνίαις ἰσοπλεύρων τριγώνων.

Β'. Ἡ τῷ ἐξαγώνος πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ κύκλου.

Γ'. Ἐὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγεγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τῷ πενταγώνῳ εἰρημένοις. καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τῷ πενταγώνῳ εἰρημένοις εἰς τὸ δοθὲν ἐξάγωνον κύκλον ἐγγράφομεν τε καὶ περιγράφομεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐξω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ. χ. 23.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐγγράφω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνον μὲν ἰσοπλεύρου εἰς αὐτὸν ἐγγεγραφομένον πλευρὰ, ἡ ΑΓ, πενταγώνον δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ. καὶ τετμήσω ἡ ΒΓ περιφέρειαν διχα κατὰ τὸ Ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ. καὶ ἐναρμολήτωσαν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἴσας αὐταῖς εὐθείαι κατὰ τὸ συνεχές. λέγω, ὅτι ἐγγεγραμμένον ἔσται τὸ ζητούμενον πεντεκαδεκάγωνον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Οἷον ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια, τρίτον ἔσται τῷ κύκλῳ

κύκλῳ, ἔσαι πέντε· ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια, πέμπτον ἔσαι τῷ κύκλῳ, ἐστὶ τριῶν. λοιπὴ ἄρα τῶν ἴσων, δύο. ἑκατέρᾳ ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ πεντεκαίδεκαγώνων πλευρά.



ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ πρὸς ἀλλήλα πιαὶ χέσις.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Διττὴ ἡ ποιαὶ χέσις, κατὰ πληλιότητα, εἶπεν περιοχὴν, καὶ κατ' ὑπεροχὴν. καὶ ἡ μὲν, Γεωμετρικὸς, ἡ δὲ, Ἀριθμητικὸς, καλεῖται λόγος. οἷον, ἐμφαινόντων τῶν Α, Β τὰ ὅποια ἂν ὁμογενῇ μεγέθη, εἴαν τις θεωρῇ ποσάκις τὸ Α περιέχει ἢ περιέχεται ὑπὸ τῷ Β, τὸν Γεωμετρικὸν πολυπραγμονεῖ λόγον· εἴαν δὲ, πόσον ὑπερέχει ἢ ὑπερέχεται τὸ Α ὑπὸ τῷ Β, τὸν Ἀριθμητικόν. καὶ τὸ μὲν Α ἡγούμενον, τὸ δαὲ Β Ε'πόμενον τῷ λόγῳ λέγεται.

Β'. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον τὸ Α, πρὸς δεύτερον τὸ Β, καὶ τρίτον τὸ Γ, πρὸς τέταρτον τὸ Δ, εἴαν τὸ Α ποσάκις περιέχει ἢ περιέχεται ὑπὸ τῷ Β, ὁσάκις καὶ τὸ Γ ὑπὸ τῷ Δ. καὶ τὰ μὲν τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, Ἀνάλογον καλεῖσθαι οἱ δὲ λόγοι, ἴσοι.

Γ'. Μὴ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη εἶναι λέγεται, ὅταν πρῶτον τὸ Α ἢ ποσάκις περιέχει ἢ περιέχεται ὑπὸ δευτέρου τῷ Β, ὁσάκις καὶ τρίτον τὸ Γ ὑπὸ τετάρτου

τε τῷ Δ. καὶ εἰάν μὲν πρῶτον, τὸ Α πλεονάκεις περιέχει ἢ ἐλαττονάκεις περιέχεται ὑπὸ δευτέρου, τῷ Β, ἢ τρίτον, τὸ Γ ὑπὸ τετάρτου τῷ Δ, τὸ πρῶτον, το Α, πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ τρίτον τὸ Γ, πρὸς τέταρτον τὸ Δ. καὶ τὰ μὲν μὴ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη, μὴ Ἀνάλογα καλεῖσθαι οἱ δὲ λόγοι, ἀνισοί.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α.

Ἐπειδὴ τὸ περιέχειν, ἢ περιέχεσθαι λόγος διαφορὰν ἐκτείνει, διὰ τῆς ἐν τοῖς ἐξῆς ἥτοι μόνον τῷ περιέχειν, ἢ μόνον τῷ περιέχεσθαι χρώμεθα.

Δ'. Ἀναλογία ἐστὶν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης ἢ ἰσότης, ἥτις ἐν τρισὶν ὅροις τελέχιστον ἐστὶ. καὶ ὅταν μὲν τὸ ἐπόμενον τῷ ἐνὸς λόγῳ, ἡγούμενον τῷ ἄλλῳ τῷ ἐγγύς τυγχανῇ, Συνεχῆς ἢ Ἀναλογία καλεῖται, καὶ τὰ μεγέθη Συνεχῶς ἀνάλογα, ἢ ἐν Συνεχεῖ λόγῳ· ὅταν δὲ ἄλλως ἔχῃ, Κεχωρισμένη ἢ Διακεκριμένη, καὶ τὰ μεγέθη, Διακεκριμένως ἀνάλογα, ἢ ἐν Διακεκριμένῳ λόγῳ.

Ε'. Ἐάν τὸ ἡγούμενον μείζον ἢ τῷ ἐπομένῳ, Μείζονος Ἀνισότητος ὁ λόγος λέγεται· εἰάν δὲ ἐλαττον, Ἐλάσσονος.

Ζ'. Ἐκθέτης λόγος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς ὁ ποσάκεις μεγέθος τι ὑπὸ τῷ ὁμογενῆς μεγέθους περιέχεται ἐμφαίνων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δὴλον, ὡς οἱ τῶν ἴσων λόγων ἐκθέται ἴσοι ἀπὸ ἀλλήλοις εἰσὶ. καὶ ὧν λόγων οἱ ἐκθέται ἴσοι εἰσὶν, ἴσοι καὶ αὐτοὶ.

ΣΗ-

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β.

Γίνεται ὅτι τὸ πηλίκον ταυτὸν τῷ ἐκθέτῃ ὅσις δὴ προκύπτει, τῷ ἐπομένῃ διὰ τῷ ἡγεμένῃ διαιρεθέντος, ἢ τὸ ἀνάπαλιν.

Ζ'. Τὸ γινόμενον ἐκ τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν ἡγεμένων ὁποιωνῶν λόγων, πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν ἐπομένων αὐτῶν, λόγον ἔχειν λέγεται **Συγκείμενον** ἐκ τῶν λόγων ἕς πρὸς ἄλληλα ἔχει τὰ μεγέθη, ταῦτά τε τὰ ἡγέμενα, πρὸς τὰ ἐπόμενα· ἕκαστος δὲ τῶν ἐξ ὧν ὁ συγκείμενος σύγκειται, **Ἀπλῶς**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

· Ἐὰν Α πρὸς Β, καὶ Γ πρὸς Δ, καὶ Ε πρὸς Ζ λόγους τῶν ὁποιουσὶν πρὸς ἄλληλα ἔχη, τὸ γινόμενον ἐκ τῶν Α, Γ, Ε, πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν Β, Δ, Ζ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων ἐν ἔχει Α πρὸς Β, καὶ Γ πρὸς Δ, καὶ Ε πρὸς Ζ. ὁ λόγος δὲ ὅν ἔχει Α πρὸς Β, ἢ Γ πρὸς Δ, ἢ Ε πρὸς Ζ ἀπλῶς ἐστὶ τῷ συγκειμένῳ λόγῳ παρατιθέμενος. ἔστω $A=2$, $B=4$, $\Gamma=3$, $\Delta=9$, $E=1$, $Z=8$. τὸ ἄρα γινόμενον ἐκ τῶν Α, Γ, Ε, ἴσον ὁ· τὸ δὲ ἐκ τῶν Β, Δ, Ζ ἴσον 288. ὁ ἔν 6 πρὸς τὸν 288 λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν ὅν ἔχει 2 πρὸς 4, 3 πρὸς 9, καὶ 1 πρὸς 8. ἔχει γὰρ ὁ 6 πρὸς τὸν 288 λόγον ὅν 1 πρὸς 48· εἴταν ὁ 288 ἐστὶ τεσσαρακονταοκταπλασίσις τῷ 6. εἰάν δὲ τῶν λόγων ἐκθέτας πολλαπλασιάσῃς, ἦτοι τὸν τῷ 2 πρὸς 4, καὶ τὸν τῷ 3 πρὸς 9, καὶ τὸν τῷ 1 πρὸς 8, προκύψει ὁ 48. ἀπλῶς δὲ ὁ λόγος τῷ 2 πρὸς 4, ἢ τῷ 3 πρὸς 9, ἢ τῷ 1 πρὸς 8, τῷ λόγῳ ὅν ἔχει ὁ 6 πρὸς τὸν 288 παρατιθέμενος.

Η'. Εάν μὲν οἱ ἐξ ὧν ὁ συγκείμενος λόγος δύο ᾖσι, καὶ ἴσοι, ὁ μὲν συγκείμενος διπλασίῳ λέγεται ἑκάτερος τῶν ἐξ ὧν σύγκειται· ἑκάτερος δὲ αὐτῶν, ὑποδιπλασίῳ· εἰ δὲ τρεῖς, καὶ ἴσοι, ὁ μὲν συγκείμενος τριπλασίῳ, ἑκάτος δὲ τῶν ἐξ ὧν σύγκειται ὑποτριπλασίῳ· εἰ δὲ τέτταρες, καὶ ἴσοι, τετραπλασίῳ, καὶ ἑκάτος τῶν ἐξ ὧν σύγκειται, ὑποτετραπλασίῳ, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

Τετράγωνος ἀριθμός ἐστι τὸ γινόμενον ἐξ ἀριθμοῦ τινὸς ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαθέντος· ὁ δὲ δι' 8, **Ῥίζα** τετραγωνικῇ ἀκέραι. οἷον ὁ μὲν 36, τετράγωνος τῷ 6, ὡς ἐξ αὐτοῦ πολλαπλασιαζόμενος γινόμενος· ὁ δὲ 6, ρίζα τετραγωνικῇ τῷ 36.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'.

Κύβος ἀριθμός ἐστι τὸ γινόμενον ἐξ ἀριθμοῦ τινὸς ἐπὶ τὸ ἑαυτοῦ τετράγωνον πολλαπλασιαθέντος. ὁ δὲ πρῶτον ληφθεὶς ἀριθμός κυβικῇ **Ῥίζα**. οἷον, ὁ μὲν 216, κύβος τῷ 6· ὁ δὲ 6, κυβικῇ ρίζα τῷ 216.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ε'.

Οὐδ' ὁ διπλασίῳ λόγος τὸν διπλάσιον ἐμφαίνει, εἰδ' ὁ τριπλασίῳ τὸν τριπλάσιον. ὁ μὲν γὰρ διπλασίῳ ὑπὸ τῷ τετραγώνῳ τῷ λόγῳ ἐμφαίνεται· ὁ δὲ τριπλασίῳ, ὑπὸ τῷ κύβῳ. ἐχέτω μὲν γὰρ ἴσους λόγους 2 πρὸς 1, καὶ 8 πρὸς 4. ὁπλὸν ἄρα ὅτι τὸ 16, τὸ ἐκ τῶν ἡγμένων γινόμενον, πρὸς τὸ 4, τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἐπομένων, ἐκ ἔχει λόγον διπλάσιον, ἀλλὰ τετραπλάσιον, εἶπεν λόγον ἔχει, ὃν ἐμφαίνει τὸ τῷ ἐκδέτε 2 τετράγωνον

γωνον, ἀμέλειται τὸ 4. ἔσωσαν πάλιν λόγοι τρεῖς ἴσοι, ὃν ἔχει 2 πρὸς 1, καὶ 8 πρὸς 4, καὶ 6 πρὸς 3. καὶ δηλον, ὅτι τὸ 96, τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἡγεμένων, πρὸς τὸ 12, τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἐπομένων, ἐκ ἔχει λόγον τριπλάσιον, ἀλλ' ὀκταπλάσιον, τὸν ἐμφαινόμενον δηλαδὴ ὑπὸ τῷ κύβῳ τῷ ἐκθέτῳ 2, εἴτεν τῷ 8. λέγοντες ἔν' ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ἐννοῶμεν τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχειν ἐν τῷ τετράγωνον τῷ Γ πρὸς τὸ τετράγωνον τῷ Δ. ὁμοίως ταῦτέν ἐστιν εἰπεῖν Α πρὸς Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ Ε πρὸς Ζ, τῷ εἰπεῖν Α πρὸς Β λόγον ἔχει ἐν ὁ κύβῳ τῷ Ε πρὸς τὸν κύβον τῷ Ζ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ 5.

Σύγκειται πολλάκις ὁ λόγος ἐξ ἀπλῶν, ἀλλὰ καὶ ἐκ διπλασιῶν καὶ τριπλασιῶν καὶ ὑποδιπλασιῶν καὶ υποτριπλασιῶν, καὶ ἄλλων ὁποσωνῶν καὶ ὁποιωνῶν λόγων.

Θ'. **Εναλλάξ λόγος** ἐστὶ λήψις τῷ ἡγεμένῳ πρὸς τὸ ἡγέμενον, καὶ τῷ ἐπομένῳ πρὸς τὸ ἐπόμενον. οἷον εἰάν τὸ Α ἡγέμενον ἢ τῷ Β, καὶ τὸ Γ τῷ Δ, καὶ ληφθῇ τὸ μὲν Α ἡγέμενον τῷ Γ, τὸ δὲ Β τῷ Δ.

Ι'. **Ανάπαλιν λόγος** ἐστὶ λήψις τῷ ἐπομένῳ ὡς ἡγεμένῳ, πρὸς τὸ ἡγέμενον ὡς ἐπόμενον. οἷον, εἰάν τὸ Α ἡγέμενον ἢ τῷ Β, καὶ τὸ Γ τῷ Δ, καὶ ληφθῇ τὸ μὲν Β ἡγέμενον τῷ Α, τὸ δὲ Δ τῷ Γ.

ΙΑ'. **Σύνθεσις λόγος** ἐστὶ λήψις τῷ ἡγεμένῳ μετὰ τῷ ἐπομένῳ ὡς ἐνός, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον. οἷον εἰάν τὸ Α ἡγέμενον ἢ τῷ Β, καὶ ληφθῇ Α + Β ἡγέμενον τῷ Β.

ΙΒ'. **Διαίρεσις λόγος** ἐστὶ λήψις τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ὑπερέχει τὸ ἡγέμενον τῷ ἐπομένῳ, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον. οἷον εἰάν τὸ Α ἡγέμενον ἢ τῷ Ε, καὶ ληφθῇ Α - Β ἡγέμενον τῷ Β.

ΙΓ'.

ΙΓ'. **Αναστροφὴ λόγου** ἐστὶ λήψις τῆ ἡγούμενης πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἢ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τῆ ἐπομένης. οἷον, εἰάν τὸ Α ἡγούμενον ἢ τῆ Β, καὶ ληφθῇ Α πρὸς Α - Β.

ΙΔ'. **Δι' ἴσων λόγος** ἐστὶ, πλείονων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυνά λαμβανόμενων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὅταν ἢ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις, μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἑκατον, ἔστω ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἑκατον. οἷον ὄντων μεγεθῶν τῶν Α, Β, Γ, καὶ τῶν Δ, Ε, Ζ· καὶ Α πρὸς Β τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντος ὡς καὶ Δ πρὸς Ε, καὶ Β πρὸς Γ ὡς Ε πρὸς Ζ· ὅταν ἢ καὶ Α πρὸς Γ, ἔστω Δ πρὸς Ζ. τῆτο δὲ αὐτὸ καὶ **τεταγμένη ἀναλογία** καλεῖται.

ΙΕ'. **Τεταραγμένη ἀναλογία** ἐστίν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνηται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, ἔστω ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι, ἔστω ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον. οἷον τριῶν ὄντων μεγεθῶν τῶν Α, Β, Γ, καὶ ἄλλων ἴσων τὸ πλῆθος τῶν Δ, Ε, Ζ, ὅταν ἢ Α πρὸς Β ἔστω Δ πρὸς Ε, καὶ Β πρὸς Γ, ἔστω Ζ πρὸς Δ.

ΙΣ'. **Ομόλογα** μεγέθη λέγεται τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγούμενοις, τὰ δὲ ἐπόμενα τοῖς ἐπομένοις.

ΙΖ'. **Ὅμοια** μέρη εἰσὶ τὰ ὑπὸ τῶν ὅλων ἰσάκεις περιεχόμενα.

ΙΗ'. **Πολλαπλάσιόν** ἐστὶ τὸ μείζον τῆ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρηθῇ ὑπὸ τῆ ἐλάσσονος.

ΛΕΙΩΜΑΤΑ.

- Α. Τὰ ἴσα ὑπὸ τῷ αὐτῷ ἰσάκεις περιέχονται καὶ τὸ αὐτὸ, ἰσάκεις ὑπὸ τῶν ἴσων.
- Β'. Τὰ ὑπὸ τῷ αὐτῷ ἰσάκεις περιεχόμενα ἴσα ἀλλήλοις ὡσαύτως ἴσα καὶ τὰ τὸ αὐτὸ ἰσάκεις περιέχονται.
- Γ'. Τὸ μᾶλλον ὑπὸ τῷ αὐτῷ ἐλαττονάκεις περιέχεται, ἢ περὶ τὸ ἐλαττον καὶ τὸ αὐτὸ πλεονάκεις ὑπὸ τῷ μείζονος ἢ περὶ ὑπὸ τῷ ἐλάσσονος.
- Δ'. Τὸ πλεονάκεις περιέχον τὸ αὐτὸ, μᾶλλον τῷ ἐλαττονάκεις περιέχοντος ὡσαύτως τὸ ἐλαττονάκεις ὑπὸ τῷ αὐτῷ περιεχόμενον μᾶλλον τῷ πλεονάκεις περιεχομένου.
- Ε'. Τὰ ὑπὸ τῆς μονάδος πολλαπλασιαζόμενα ἢ διαιρεζόμενα τὰ αὐτὰ εἰσι τοῖς καὶ πρὸ τῷ πολλαπλασιασμῷ καὶ τῆς διαιρέσεως.
- Σ'. Τῶν ἴσων καὶ τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια ἴσα, καὶ ὡς τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια ἴσα, καὶ κείνα ἴσα.
- Ζ'. Τῷ αὐτῷ, ἢ δι' ἴσων διαιρεζόμενος μονὰς τὸ πηλίκον.
- Η'. Τῶν ἴσων δι' ἴσων διαιρεζόμενων ἴσα τὰ πηλικά, καὶ ὡς δι' ἴσων διαιρεζόμενων ἴσα τὰ πηλικά, καὶ κείνα ἴσα.

Ἑρμηνεία τῶν σημείων, εἰς τὰ ἐν τοῖς μεγέθεσι, τοῖς διὰ τῶν στοιχείων δηλαμένοις, πάθῃ ἐμφαίνεται.

Τὸ μὲν Α. Β, ἢ ΑΧΒ τὸ γινόμενον δηλοῖ τὸ ἐκ τῷ πολλαπλασιασμῷ τῷ Α ἐπὶ τὸ Β ἀπαγγέλλεται δὲ ὅτως Α ἐν τῷ Β· τὸ δὲ Α. Β + Γ + Δ ἐμφαίνει, ὅτι τὸ Α

κοινὸς πολλαπλασιασῆς ἐστὶ πάντων τῶν ὑπὸ τὴν εὐθεΐαν
 μεγεθῶν ἀπαγγέλλομεν δὲ A ἐν τῷ B καὶ Γ καὶ Δ τὸ
 δὲ $\frac{A}{B}$, τὸ πηλίκον τὸ περὶκύπτον ἀπὸ τῆς διαιρέσεως τῆς
 A διὰ τῆς B . ὃ καὶ ἐκθέτης λέγεται ἀπαγγέλλον δ' ἔτως
 A διαιρεθὲν διὰ τῆς B . τὰ δὲ $A : B :: \Gamma : \Delta$ ἢ $A :$
 $B = \Gamma : \Delta$ ἐμφαίνει, ὅτι ἐν λόγον ἔχει τὸ A πρὸς τὸ
 B , τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ ἐκφωνεῖται
 δὲ ἔτως ὡς A πρὸς B , ἔτω Γ πρὸς Δ . τὰ δὲ $A :$
 $B \supset \Gamma : \Delta$, ὅτι τὸ A πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει,
 ἢ περ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ . τὰ δὲ $A : B \subset \Gamma : \Delta$, ὅτι τὸ
 A πρὸς τὸ B ἐλάττωνα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ Γ πρὸς
 τὸ Δ . καὶ τὸ μὲν $A \supset B$, ὅτι τὸ A μείζον τῆς B τὸ
 δὲ $B \subset A$, ὅτι τὸ B ἐλάττω τῆς A .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄. καὶ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥΣ Ζ΄.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον
 καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἐσὼ μεγέθη ἴσα τὰ A καὶ B , ἄλλο δὲ ὁ ἔτυχε
 μέγεθος τὸ Z . λέγω Α΄. ὅτι $A : Z :: B : Z$. Β΄. ὅτι
 καὶ $Z : A :: Z : B$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐπειδὴ $A = B$, (α) ἐκάτερον ἄρα ἰσάκως περιέχει
 τὰ ὑπὸ τῆς αὐτῆς Z . (β) ἄρα $A : Z :: B : Z$. (γ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπειδὴ $A = B$, (δ) τὸ Z ἄρα ἰσάκως περιέχει
 ἐκάτερον τῶν A καὶ B . (ε) ἄρα $Z : A :: Z : B$. (ς)

ΠΡΟ.

(α) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὴν α. ἀξ. τῆς 1. (γ) Κατὰ τὸν β. δρισμ.
 (δ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὴν α. ἀξ. (ς) Κατὰ τὸν β.
 δρισμ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄. καὶ Θ΄

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον
ἴσα ἀλλήλοις ἐσὶ καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐ-
τὸν ἔχει λόγον, καὶ ἀνα ἴσα ἀλλήλοις ἐσὶν.

Ἐστω $A : Z :: B : Z$. λέγω, ὅτι $A = B$. ἔστω δὲ καὶ
 $Z : A :: Z : B$. λέγω πάλιν, ὅτι $A = B$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥΤΟΥ Α΄.

Ἐπειδὴ $A : Z :: B : Z$, (η) τὸ A ἄρα τοσάκις
ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ Z περιέχεται, ὡσάκις καὶ τὸ B . (θ) ἄρα
 $A = B$. (ι)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥΤΟΥ Β΄.

Ἐπειδὴ $Z : A :: Z : B$, (κ) ἐκάτερον ἄρα τῶν A ,
καὶ B ἰσάκις περιέχεται ὑπὸ τοῦ Z . (λ) ἄρα $A = B$. (μ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄, καὶ Η΄.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μᾶλλον πρὸς τὸ αὐ-
τὸ μᾶλλον λόγον ἔχει, ἢ περὶ τὸ ἐλάττω καὶ
τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἐλάττω μᾶλλον λόγον ἔ-
χει, ἢ περὶ πρὸς τὸ μᾶλλον.

Ἐστω $A > B$, καὶ ἄλλο ὃ ἔτυχεν τὸ Z . λέγω A . ὅτι
 $A : Z > B : Z$. ἔστω δὲ καὶ $Z : B > Z : A$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥΤΟΥ Α΄.

Ἐπειδὴ $A > B$, (ν) τὸ A ἄρα ὑπὸ τοῦ Z ἐλατ-
τοσάκις περιέχεται, ἢ περὶ τὸ B . (ξ) ἄρα $A : Z > B :$
 Z . (ο)

I 2

ΔΕΙ-

(η) Ἐξ ὑποθ. (θ) Κατὰ τὸν β. ὁρισμ. (ι) Κατὰ τὸ β. αἴ-
τιον. (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὸν β. ὁρισμ. (μ) Κατὰ τὸ
β. αἴτιον. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Κατὰ τὸ γ. αἴτιον. (ο) Κατὰ τὸν γ.
ὁρισμ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπειδὴ $A \supset B$, (π) τὸ Z ἄρα πλεονάκεις ὑπὸ τῷ A , ἥπερ ὑπὸ τῷ B περιέχεται. (ρ) τὸ Z ἄρα πρὸς τὸ A ἐλάττωνα λόγον ἔχει, ἥπερ πρὸς τὸ B . (σ) ὅπερ ἐστίν, ὅτι τὸ Z πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ πρὸς τὸ A , ἤτοι $Z : B \supset Z : A$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄, καὶ Γ΄.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκείνο μείζον ἐστίν. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἐλαττόν ἐστίν.

Ἐχέτω $A : Z \supset B : Z$. λέγω, ὅτι $A \supset B$. ἐχέτω δὲ καὶ $Z : B \supset Z : A$. πάλιν ἔσται $A \supset B$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐπειδὴ $A : Z \supset B : Z$, (τ) τὸ A ἄρα πλεονάκεις ἥπερ τὸ B περιέχει τὸ Z . (υ) ἄρα $A \supset B$. (φ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπειδὴ $Z : B \supset Z : A$, τὸ Z ἄρα περιέχεται ὑπὸ τῷ B ἐλαττοναίως, ἥπερ ὑπὸ τῷ A . (χ) τὸ B ἄρα ἐλαττόν τῷ A , ὅπερ ἐστίν $A \supset B$. (ψ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄, καὶ ΙΑ΄.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἔστω $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $\Gamma : \Delta :: E : Z$. λέγω, ὅτι καὶ $A : B :: E : Z$.

ΔΕΙ.

(π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Κατὰ τὸ γ. ἀξ. (σ) Κατὰ τὸν γ. ὅρισ. (τ) Ἐξ ὑποθ. (υ) Κατὰ τὸν γ. ὅρισ. (φ) Κατὰ τὸ δ. ἀξ. (χ) Κατὰ τὸν γ. ὅρισ. (ψ) Κατὰ τὸ αὐτ. ἀξ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $A : B :: \Gamma : \Delta$, (ω) τοσάκις ἄρα τὸ A περιέχεται ὑπὸ τῷ B , ὁσάκις καὶ τὸ Γ ὑπὸ τῷ Δ . (α) ἀλλ' ὁσάκις τὸ Γ περιέχεται ὑπὸ τῷ Δ , τοσάκις καὶ τὸ E ὑπὸ τῷ Z : ἔστι γὰρ $\Gamma : \Delta :: E : Z$ καὶ τὸ A ἄρα τοσάκις περιέχεται ὑπὸ τῷ B , ὁσάκις τὸ E ὑπὸ Z . ἄρα $A : B :: E : Z$. (β)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5', καὶ 15'. τῷ 5'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἔσιν τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾗ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, τὰ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ἔσται.

Ἐπὼ $A : B :: \Gamma : \Delta$. λέγω, ὅτι $A \cdot \Delta = B \cdot \Gamma$. ἔστω δὲ καὶ $A \cdot \Delta = B \cdot \Gamma$. λέγω, ὅτι $A : B :: \Gamma : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐπειδὴ $A : B :: \Gamma : \Delta$, (γ) ὁ λόγος ἄρα ὃν ἔχει τὸ A πρὸς τὸ B ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Δ . (δ) καὶ οἱ αὐτῶν ἄρα ἐκθέται ἴσοι. (ε) ἤτοι $\frac{B}{A} = \frac{\Delta}{\Gamma}$. (ς) καὶ ἐκατέρω διατῷ αὐτῷ $A \cdot \Gamma$, εἴτεν διατῷ γινόμενον ἐκ τῶν ἡγεμένων πολλαπλασιασθέντος, ἔσται $\frac{A \cdot \Gamma \cdot B}{A} = \frac{A \cdot \Gamma \cdot \Delta}{\Gamma}$. (η) ἀλλ' $\frac{A}{A} = 1$. ὡσαύτως καὶ $\frac{\Gamma}{\Gamma} = 1$. (θ) ἄρα $\Gamma \cdot B = A \cdot \Delta$. (ι)

I 3

ΔΕΙ-

(ω) Ἐξ ὑποθ. (α) Κατὰ τὸν β. ὅρισ. (β) Κατὰ τὸν αὐτ. ὅρισμ.

(γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὸν β. ὅρισμ. (ε) Κατὰ τὸ πρότ. τὸ μετὰ τὸν γ. ὅρισμ. (ς) Κατὰ τὴν β. σημ. τὸν μετὰ τὸ πρότ.

(η) Κατὰ τὸ γ. ἀξ. (θ) Κατὰ τὸ ζ. ἀξ. (ι) Κατὰ τὸ ε. ἀξ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπεὶ $\Gamma. B = A. \Delta$, (κ) ἄρα διὰ τῶν αὐτῶν μεγέθους
 $A. \Gamma$ ἐκατέρωθι διαιρεθέντας, ἔσται $\frac{\Gamma. B}{A. \Gamma} = \frac{A. \Delta}{A. \Gamma}$. (λ) ἄλλὰ
 $\frac{\Gamma}{\Gamma} = 1$, ὡσαύτως καὶ $\frac{A}{A} = 1$. (μ) ἄρα $\frac{B}{A} = \frac{\Delta}{\Gamma}$. (ν) ἄρα
 καὶ $A : B :: \Gamma : \Delta$. (ξ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄. καὶ Ις΄.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ
 ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἐξω $A : B :: \Gamma : \Delta$. λέγω, ὅτι καὶ $A : \Gamma :: B : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰ γὰρ μὴ $A : \Gamma :: B : \Delta$, εἰλήφθω ἕτερον μέ-
 γεθος τὸ Ε ἥτοι μᾶλλον ἢ ἐλαττον τῷ Δ, ὥστε ἵνα
 $A : \Gamma :: \Delta : E$. ἄρα $A. E = B. \Gamma$. (ο) ἄλλὰ καὶ $A.$
 $\Delta = B. \Gamma$. (π) ἔστι γὰρ $A : B :: \Gamma : \Delta$. ἄρα $A. E =$
 $A. \Delta$. (ρ) ἄλλ' $A = A$. ἄρα καὶ $E = \Delta$. (σ) ἄλλὰ
 καὶ μᾶλλον ἢ ἐλαττον τὸ Ε τῷ Δ· ὅπερ ἀδύνατον. ἔκ
 ἄρα $A : \Gamma :: \Delta : E$. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔδει $A : \Gamma ::$
 B πρὸς ἄλλο τι, πλην τῷ Δ. ὡς ἄρα $A : \Gamma :: \Delta : \Delta$.

Α Λ Λ Ω Σ.

Ἐπεὶ $A : B :: \Gamma : \Delta$. ἄρα $A. \Delta = B. \Gamma$. (τ) ἄρα
 καὶ $A : \Gamma :: B : \Delta$. (υ)

ΣΤ.

-
- (κ) Ἰ. ξ. ὑποθ. (λ) Κατὰ τὸ η. α. ξ. (μ) Κατὰ τὸ ζ. α. ξ.
 (ν) Κατὰ τὸ ι. α. ξ. (ξ) Κατὰ τὸ πόρ. τὸ μετὰ τὸν σ. ὀρισμ.
 (ι) Κατὰ τὴν προλ. πρῶτ. (π) Ὁσαύτως. (ρ) Κατὰ τὸ α.
 α. ξ. τ. α. (σ) Κατὰ τὸ σ. α. ξ. (τ) Κατὰ τὴν προλ. πρῶτ.
 (υ) Κατὰ τὴν αὐτ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ (Φ).

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ δείξομεν, ὅτι εἰάν $A : B :: Γ : Δ$,
ἔσται καὶ ἀνάπαλιν $B : A :: Δ : Γ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄, καὶ ΙΕ΄.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν
αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Ἐξω ἰσάνεις πολλαπλάσια τὸ μὲν A τῷ B , τὸ δὲ
 $Γ$ τῷ $Δ$. λέγω, ὅτι $A : Γ :: B : Δ$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὰ A καὶ $Γ$ ἰσάνεις πολλαπλάσια τῶν B καὶ
 $Δ$, τὰ ἄρα B καὶ $Δ$ ὅμοια μέρη εἰσὶ τῶν A καὶ $Γ$. το-
σάνεις ἄρα τὸ B περιέχεται ὑπὸ τῷ A , ὡσάνεις καὶ
τὸ $Δ$ ὑπὸ τῷ $Γ$. (χ) ὡς ἄρα $B : A :: Δ : Γ$. (ψ)
καὶ ἐναλλάξ ὡς $B : Δ :: A : Γ$. (ω)

ΠΟΡΙΣΜΑ. Α΄.

Ἐὰν τρία ὁποιαῦν μεγέθη ἢ τὰ A , B , $Γ$ τῶς ὁ-
ποισθῇ λόγους ἔχοντα, τὸ πρῶτον A , πρὸς τὸ τρί-
τον $Γ$ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει
πρῶτον A , πρὸς δεύτερον B , καὶ ἐκ τῷ ὃν ἔχει δέυ-
τερον B , πρὸς τρίτον $Γ$. τὸ γὰρ γινόμενον ἐκ τῶν ἡ-
γούμενων, τὸ A , B , πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἐπομέ-
νων, τὸ B , $Γ$, λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τε τῷ λόγῳ
ὃν ἔχει A πρὸς B , καὶ ἐκ τῷ ὃν ἔχει B πρὸς $Γ$. (†)
ἀλλ' $A : B :: B : Γ$. τὰ γάρ A , B καὶ B , $Γ$
ἰσάνεις πολλαπλάσια τῶν A καὶ $Γ$. ἄρα τὸ πρῶτον A ,
πρὸς τὸ τρίτον $Γ$ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τε τῷ ὃν
πρῶτον A , πρὸς δεύτερον B , καὶ ἐκ τῷ ὃν ἔχει δέυ-

(Φ) Μιτὰ τὴν δ. πρότ. ὁ Ἐυκλείδης τίθεισιν αὐτήν. (χ) Κατὰ τὸν εἰς.
ὅρισμ. (ψ) Κατὰ τὸν β. ὅρισμ. (ω) Κατὰ τὴν προλ. πρότ.
(†) Κατὰ τὸν ζ. ὅρισμ.

τερον Β πρὸς τρίτον Γ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ εἶν τέσσαρα, ἢ πέντε, ἢ ὅσαδήποτε ἢ μεγέθη ἢ. τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἕχαστον λόγον ἔχει συγκαίμενον, ἐκ τῶν λόγων ὧν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα τὰ μεταξὺ μεγέθη, καὶ ἐξ ὧν ἔχουσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ τὸ πρὸ τῶν ἕχαστου πρὸς τὸ ἕχαστον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

Τριῶν μὲν ὄντων τῶν τῆς συνεχῆς ἀναλογίας μεγεθῶν, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ τὸ δεύτερον πρὸς τὸ τρίτον. τεττάρων δὲ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα, καὶ ὅτως ἐφεξῆς. ἐξ ἴσων γὰρ εἰ συγκαίμεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ΄, καὶ Α΄, ἡ αὐτὴ δὲ καὶ ΙΒ΄.

Εἴαν ἢ ὅποσα ἂν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἐν τῶν ἡγχομένων, πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, ὅτως ἅπαντα τὰ ἡγχόμενα, πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα.

Ἐπεὶ $A : B :: \Gamma : \Delta :: E : Z :: H : \Theta$. λέγω, ὅτι ὡς $A : B :: A + \Gamma + E + H : B + \Delta + Z + \Theta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ $A : B :: \Gamma : \Delta$, ἄρα $A, \Delta = B, \Gamma$. (α), ὡσαύτως ἐπειδὴ $A : B :: E : Z$. (β) ἄρα $A, Z = B, E$. (γ) καὶ διὰ τὰ αὐτὰ $A, \Theta = B, H$. προσκείσθω τῶ μὲν A, Δ τό, τε A, Z καὶ τῶ A, Θ . τῶ δὲ B, Γ , τό, τε B, E καὶ τὸ B, H . ἄρα $A, \Delta + A, Z + A, \Theta = B, \Gamma + B, E + B, H$. κοινὸν προσκείσθω τὸ $A,$

(α) Κατὰ τὴν σ. τῶ ε. (β) Κατὰ τὴν σ. τῶ ε. (γ) Κατὰ τὴν σ. τῶ ε.

Α. Β. ἄρα Α. Β + Α. Δ + Α. Ζ + Α. Θ = Β. Α +
 Ε. Γ + Β. Ε + Β. Η, εἴτεν Α. Ε + Δ + Ζ + Θ = Β.
 Α + Γ + Ε + Η. ἄρα Α : Β :: Α + Γ + Ε + Η :
 Β + Δ + Ζ + Θ. (δ).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ' καὶ ΙΗ'.

Ἐὰν μεγέθη ὅποια ἂν ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντε-
 θέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω Α : Β :: Γ : Δ. λέγω, ὅτι καὶ Α + Β : Β ::
 Γ + Δ : Δ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ Α : Β :: Γ : Δ. ἄρα Α. Δ = Β. Γ. (ε)
 κοινὸν προσκείδω τὸ Β. Δ. ἄρα Α. Δ + Β. Δ = Β.
 Γ. + Β. Δ, ἥτοι Α + Β. Δ = Γ + Δ. Β. ἄρα Α + Β :
 Β :: Γ + Δ : Δ. (ζ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ' καὶ ΙΖ'.

Ἐὰν ὅποια ἂν μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαι-
 ρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω Α : Β :: Γ : Δ. λέγω ὅτι καὶ Α - Β : Β ::
 Γ - Δ : Δ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ Α : Β :: Γ : Δ, ἄρα Α. Δ = Β. Γ. (η)
 ἀφελήσθω κοινὸν τὸ Β. Δ. ἄρα Α. Δ - Β. Δ = Β. Γ - Β. Δ,
 ἥτοι Α - Β. Δ = Γ - Δ. Β. ἄρα Α - Β : Β :: Γ - Δ : Δ. (θ)

ΣΥΝΕΠΕΙΑ. (ι)

Ἐὰν Α : Β :: Γ : Δ, ἔσται καὶ κατ'ἀνατροπὴν λόγος,
 Α : Α - Β :: Γ : Γ - Δ. ἐπεὶ γὰρ Α : Β :: Γ : Δ, (κ)

1 5

ἄρα

(δ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (ε) Κατὰ τὴν αὐτ. (ζ) Κατὰ τὴν αὐ-
 τήν. (η) Κατὰ τὴν αὐτ. (θ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (ι) Μετὰ
 τὰ τὴν ιβ. πρότ. παρὰ τῷ Ἐυκλείδῃ. (κ) Ἐξ ὑποθ.

ἄρα $A. \Delta = B. \Gamma.$ (λ) τέτων ἐκάτερον ἀφηρήδω ἀπὸ τῶ
 αὐτῶ $A. \Gamma$ μεγέθους. καὶ ἔσται τὸ $A. \Gamma - A. \Delta = A. \Gamma - B. \Gamma$, ἥτις
 $A. \Gamma - \Delta = \Gamma. A - B.$ ἄρα $A : A - B :: \Gamma : \Gamma -$
 $\Delta.$ (μ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄, καὶ ΚΒ΄.

Εἰάν ἡ ὅποσα ἔν μεγέθῃ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα
 τὸ πληθὺς σύνδυνω λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐ-
 τῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσος ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστω ὅποσα ἔν μεγέθῃ, τὰ A, B, Γ , καὶ ἄλλα
 αὐτοῖς ἴσα τὸ πληθὺς, τὰ Δ, E, Z , σύνδυνω λαμ-
 βανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὥς $A : B :: \Delta : E$, καὶ
 $B : \Gamma :: E : Z$. λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσος ἐν τῷ αὐτῷ λό-
 γῳ ἔσται, ὥς $A : \Gamma :: \Delta : Z$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὥς $A : B :: \Delta : E$, (ν) καὶ ἐναλλαξ ἄρα ὥς
 $A : \Delta :: B : E$. (ξ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὥς $B : E :: \Gamma : Z$.
 ἄρα καὶ $A : \Delta :: \Gamma : Z$. (ο) καὶ ἐναλλαξ ἄρα ὥς
 $A : \Gamma :: \Delta : Z$. ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄, καὶ ΚΓ΄.

Εἰάν ἡ τρεῖς μεγέθῃ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ
 πληθὺς σύνδυνω λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ
 λόγῳ, ἡ δὲ τετραγαγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλο-
 γία, καὶ δι' ἴσος τετραγαγμένως ἐν τῷ αὐτῷ
 λόγῳ ἔσται.

Ἔστω τρεῖς μεγέθῃ, τὰ A, B, Γ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς
 ἴσα τὸ πληθὺς σύνδυνω λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ,
 τὰ

(λ) Κατὰ τὴν σ. τῆ ε. (μ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (ν) Ἐξ ἐπει-
 (ξ) Κατὰ τὴν ζ. τῆ ε. (ο) Κατὰ τὴν σ. τῆ ε.

τὰ Δ, Ε, Ζ. ἔσω δὲ τετραγαμμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία,
ὡς μὲν Α: Β:: Ε: Ζ, ὡς δὲ Β: Γ:: Δ: Ε. λέγω,
ὅτι καὶ Α: Γ:: Δ: Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ Α: Β:: Ε: Ζ, (π) ἄρα Α. Ζ = Β. Ε. (ρ)
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ Β. Ε = Γ. Δ. ἄρα Α. Ζ = Γ. Δ.
(σ) ἄρα Α: Γ:: Δ: Ζ. (τ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ΄, καὶ Β΄.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάνεις ἢ πολλαπλασί-
σιον, καὶ τρίτον τετάρτου· ἢ δὲ καὶ πέμπτον
δευτέρου ἰσάνεις πολλαπλασίον, καὶ ἕκτον τε-
τάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον,
δευτέρου ἰσάνεις ἔσται πολλαπλασίον, καὶ τρί-
τον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Ἐσω πρῶτον τὸ Α δευτέρου τῷ Β ἰσάνεις πολλαπλασίον,
καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τῷ Δ, εἴτεν ἔσω ὡς Α: Β:: Γ:
Δ. ἔσω δὲ καὶ πέμπτον τὸ Ε δευτέρου τῷ Β ἰσάνεις πολλαπλα-
σίον, καὶ ἕκτον τὸ Ζ τετάρτου τῷ Δ, ἥτοι ἔσω ὡς Ε: Β:: Ζ:
Δ. λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον Α+Ε δευτέρου
τῷ Β ἰσάνεις ἔσται πολλαπλασίον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ Γ+
Ζ τετάρτου τῷ Δ, εἴτεν ἔσται καὶ Α+Ε: Β:: Γ+Ζ: Δ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς Α: Β:: Γ: Δ, (υ) ἄρα Α. Δ = Β. Γ. (φ)
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ Ε. Δ = Β. Ζ. προσκείδω τῷ μὲν
Α. Δ τὸ Ε. Δ, τῷ δὲ Β. Γ τὸ Β. Ζ. ἄρα Α. Δ+
Ε.

(π) Ἐκ ὑποθ. (ρ) Κατὰ τὴν σ. τῇ ε. (σ) Κατὰ τὸ α. ἀξ. τῇ α.
(τ) Κατὰ τὴν σ. τῇ ε. (υ) Ἐξ ὑποθ. (φ) Κατὰ τὴν σ.
τῇ ε.

F. $\Delta = B. \Gamma + B. \varsigma$, ἥτοι $\overline{A + E. \Delta = B. \Gamma + \varsigma.}$
 ἄρα $A + E : B :: \Gamma + \varsigma : \Delta$. (X) ὁ εἶδει δ᾿αἷμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄, καὶ Γ.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρῃ ἰσάνῃς ἢ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτῃ, ληφθῇ δὲ ἰσάνῃς πολλαπλάσια τῷ πρώτῃ καὶ τρίτῃ, καὶ δι' ἴσιν τῶν ληφθέντων ἐκάτερον ἐκατέρῃ ἰσάνῃς ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τῷ δευτέρῃ, τὸ δὲ τῷ τετάρτῃ.

Ἔστω πρῶτον Α δευτέρῃ τῷ Β ἰσάνῃς πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτῃ τῷ Δ, εἴτεν ἔστω $A : B :: \Gamma : \Delta$. καὶ ληφθῇτω ἰσάνῃς πολλαπλάσια τῷ μὲν Α τὸ Ε, τῷ δὲ Γ τὸ Ζ. λέγω, ὅτι καὶ $E : B :: Z : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ τὰ Ε, Ζ ἰσάνῃς πολλαπλάσιά εἰσι τῶν Α, Γ. τοσάνῃς ἄρα τὸ Α περιέχεται ὑπὸ τῷ Ε, ὡσάνῃς καὶ τὸ Γ ὑπὸ τῷ Ζ. (ψ) ἄρα ὡς $A : E :: \Gamma : Z$. ἄρα καὶ ἀνάπαλιν ὡς $E : A :: Z : \Gamma$. (ω) ἀλλὰ καὶ $A : B :: \Gamma : \Delta$. (α) ἄρα δι' ἴσιν, ὡς $E : B :: Z : \Delta$. (β)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ΄, καὶ Δ΄.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάνῃς πολλαπλάσια τῷ τε πρώτῃ καὶ τῷ τρίτῃ, πρὸς τὰ ἰσάνῃς πολλαπλάσια τῷ δευτέρῃ
 τέ-

(X) Κατὰ τὴν αὐτὴν. (ψ) Κατὰ τὸν 13. ὅρισ. (ω) Κατὰ τὴν 7ης ζ. τῆς ε. συνίπ. (α) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὴν 18. τῆς β.

τέρη καὶ τετάρτη καὶ ὅποιονδ' ἐν πολλα-
πλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ληφθέν-
τα κατὰλληλα.

Ἔστω ὡς $A : B :: \Gamma : \Delta$. καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν A, Γ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ E, Z , τῶν δὲ B, Δ , τὰ H, Θ . λέγω, ὅτι ὡς $E : Z :: H : \Theta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὰ E, Z ἰσάνεις πολλαπλάσιά εἰσι τῶν A, Γ . ἄρα ὡς $A : E :: \Gamma : Z$. (γ) καὶ διὰ τὰ αὐτὰ, ὡς $B : H :: \Delta : \Theta$. καὶ ἐπεὶ ὡς $A : E :: \Gamma : Z$. ἔσται καὶ ἀνάπαλιν, ὡς $E : A :: Z : \Gamma$. (δ) ἀλλὰ καὶ ὡς $A : B :: \Gamma : \Delta$. (ε) ἄρα δι' ἴσιν, καὶ ὡς $E : B :: Z : \Delta$. (ς) ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς $E : Z :: B : \Delta$. (η) καὶ ἐπεὶ ὡς $B : H :: \Delta : \Theta$, ἔσται καὶ ἐναλλάξ ὡς $B : \Delta :: H : \Theta$. ἄρα καὶ ὡς $E : Z :: H : \Theta$. (θ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17', καὶ 18', ἡ αὐτὴ δὲ καὶ Ε΄.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, ἔστω ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἔστω ὡς $AB : \Gamma\Delta :: AE : \Gamma Z$. λέγω, ὅτι καὶ ὡς $AB : \Gamma\Delta :: EB : Z\Delta$. πίν. ιε'. χ. 2.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς $AB : \Gamma\Delta :: AE : \Gamma Z$, ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς $AB : AE :: \Gamma\Delta : \Gamma Z$. (ι) ἄρα καὶ διαιρεθέντα ἔσται, ὡς $AB - AE : AE :: \Gamma\Delta - \Gamma Z : \Gamma Z$. (κ) ἀλλ' $AB - AE = EB$, καὶ $\Gamma\Delta - \Gamma Z = Z\Delta$. ἄρα ὡς $EB : AE ::$

(γ) Κατὰ τὸν ιζ. ὀρίσ. (δ) Κατὰ τὴν αἰρημ. συνίπ. (ε) Ἐξ ὑποθ. (ς) Κατὰ τὴν ιβ. τῷ ε. (η) Κατὰ τὴν ζ. τῷ ε. (θ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (ι) Κατὰ τὴν ζ. τῷ ε. (κ) Κατὰ τὴν ια. τῷ ε.

$AE :: Z\Delta : \Gamma Z$. ἄρα καὶ ἀνὰ πάλιν, ὡς $AE : EB ::$
 $\Gamma Z : Z\Delta$. (λ) ἄρα καὶ συντεθέντα ἔσται, ὡς $AE +$
 $EB : EB :: \Gamma Z + Z\Delta : Z\Delta$. (μ) ἀλλ' $AE + EB = AB$,
καὶ $\Gamma Z + Z\Delta = \Gamma\Delta$. ἄρα ὡς $AB : EB :: \Gamma\Delta : Z\Delta$. ἄρα
καὶ ἐναλλάξ, ὡς $AB : \Gamma\Delta :: EB : Z\Delta$. c. e. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ', καὶ Σ'.

Εἴαν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάνεις ἢ
πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν
αὐτῶν ἰσάνεις ἢ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοι-
πὰ τοῖς αὐτοῖς, ἤτοι ἴσα ἔσιν, ἢ ἰσάνεις αὐ-
τῶν πολλαπλάσια.

Ἐστω ὡς $AB : E :: \Gamma\Delta : Z$. καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ
 AH , $\Gamma\Theta$, ἔστω $AH : E :: \Gamma\Theta : Z$. λέγω, ὅτι καὶ ὡς
 $HB : E :: \Theta\Delta : Z$. χ. 2.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $AB : E :: \Gamma\Delta : Z$, ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς $AB :$
 $\Gamma\Delta :: E : Z$. (ν) ὁμοίως ἐπεὶ $AH : E :: \Gamma\Theta : Z$,
ἔσται καὶ ὡς $AH : \Gamma\Theta :: E : Z$. ἄρα καὶ ὡς $AB : \Gamma\Delta ::$
 $AH : \Gamma\Theta$. (ξ) καὶ ἐναλλάξ, ὡς $AB : AH :: \Gamma\Delta :$
 $\Gamma\Theta$. ἄρα καὶ διαιρεθέντα ἔσται ὡς $AB - AH : AH ::$
 $\Gamma\Delta - \Gamma\Theta : \Gamma\Theta$, (ς) εἴτεν ὡς $HB : AH :: \Theta\Delta : \Gamma\Theta$. ἄρα
καὶ ἐναλλάξ, ὡς $HB : \Theta\Delta :: AH : \Gamma\Theta$. ἀλλὰ καὶ
 $AH : \Gamma\Theta :: E : Z$, ὡς δέδεικται. ἄρα $HB : \Theta\Delta ::$
 $E : Z$. (π) ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς $HB : E :: \Theta\Delta : Z$.
δῆλον δὲ, ὅτι εἴαν τὸ $HB = E$, καὶ τὸ $\Theta\Delta = Z$. εἰ
δὲ μὴ, τὰ HB , $\Theta\Delta$ ἰσάνεις πολλαπλάσια τῶν E καὶ Z .

ΠΡΟ.

(λ) Κατὰ τὴν τῆς ζ. τῆ ε. συνίπ. (μ) Κατὰ τὴν ι. τῆ ε. (ν) Κατὰ
τὰ τὴν ζ. τῆ ε. (ξ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (ς) Κατὰ τὴν ια. τῆ ε.
(π) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ', καὶ ΙΓ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔξει, ἥπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Ἔστω ὡς $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $\Gamma : \Delta \supset E : \Sigma$. λέγω, ὅτι καὶ $A : B \supset E : \Sigma$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $\Gamma : \Delta \supset E : \Sigma$. τὸ Γ ἄρα περιέχεται ὑπὸ τῷ Δ ἐλαττονάκως ἢ περ τὸ E ὑπὸ τῷ Σ . (ρ) ἀλλ' ὁμοίως τὸ Γ περιέχεται ὑπὸ τῷ Δ , τοσάκως καὶ τὸ A ὑπὸ τῷ B . ἔστι γὰρ ἐξ ὑποθέσεως ὡς $A : B :: \Gamma : \Delta$. καὶ τὸ A ἄρα περιέχεται ὑπὸ τῷ B ἐλαττονάκως ἢ περ τὸ E ὑπὸ τῷ Σ . ἄρα $A : B \supset E : \Sigma$. (σ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ', καὶ ΙΔ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· τὸ δὲ πρῶτον τῷ τρίτῳ μείζον ἢ, καὶ τὸ δεύτερον τῷ τετάρτῳ μείζον ἔσται, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἔστω $A : B :: \Gamma : \Delta$. λέγω, ὅτι εἰάν $A \supset \Gamma$, καὶ $B \supset \Delta$. καὶν $A = \Gamma$, καὶ $B = \Delta$. καὶν $A \prec \Gamma$, καὶ $B \prec \Delta$.

ΔΕΙ-

(ρ) Κατὰ τὸν γ. ὅρισμ. (σ) Κατὰ τὸν αὐτ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $A : B :: \Gamma : \Delta$, ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς $A : \Gamma :: B : \Delta$. ἐξ ὧ δὲ ὅλον τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ΄, καὶ Κ΄.

Ἐὰν ἡ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυνω λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσας δὲ τὸ πρῶτον τῶ τρίτῳ μᾶζον ἢ, καὶ τὸ τέταρτον τῶ ἕκτῳ μᾶζον ἔσται καὶ ἴσον, ἴσον καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐξω τρία μεγέθη, τὰ A, B, Γ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Δ, E, Σ . καὶ ἔξω ὡς $A : B :: \Delta : E$, καὶ ὡς $B : \Gamma :: E : \Sigma$. λέγω, ὅτι εἰάν $A \geq \Gamma$, καὶ $\Delta \geq \Sigma$ καὶ ἢ $A = \Gamma$, καὶ $\Delta = \Sigma$ καὶ ἢ $A \leq \Gamma$, καὶ $\Delta \leq \Sigma$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς $A : B :: \Delta : E$, καὶ ὡς $B : \Gamma :: E : \Sigma$. ἄρα καὶ δι' ἴσας, ὡς $A : \Gamma : \Delta : \Sigma$ (τ) ἐξ ὧ δὲ ὅλοι τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ΄, καὶ ΚΑ΄.

Ἐὰν ἡ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυνω λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσας δὲ τὸ πρῶτον τῶ τρίτῳ μᾶζον ἢ, καὶ τὸ τέταρτον τῶ ἕκτῳ μᾶζον ἔσται καὶ ἴσον, ἴσον καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐξω

Εἶπω τε'ν μεγέθη, τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς
ἴσα τὸ πληθὺς, τὰ Δ, Ε, Ζ. καὶ ἔγω, ὡς Α: Β::
Ε: Ζ, καὶ ὡς Β: Γ:: Δ: Ε. λέγω, ὅτι εἰάν Α > Γ,
καὶ Δ > Ζ· καὶ Α=Γ, καὶ Δ=Ζ· καὶ Α < Γ, καὶ
Δ < Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς Α: Β:: Ε: Ζ, καὶ ὡς Β: Γ::
Δ: Ε, ἄρα καὶ δι' ἴσος τετραγαγμένως ὡς Α: Γ: Δ:
Ζ. (υ) ἔθεν φανερόν τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ', καὶ ΚΔ'.

Εἰάν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη
λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον ἔχη δὲ καὶ
πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ
ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθέν πρῶτον καὶ
πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον
καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Ἐῶ ὡς Α: Β:: Γ: Δ, καὶ ὡς Ε: Β:: Ζ: Δ.
λέγω, ὅτι ὡς Α+Ε: Β:: Γ+Ζ: Δ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς Α: Β:: Γ: Δ, ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς Α:
Γ:: Β: Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς Ε: Ζ:: Β: Δ.
ἄρα καὶ ὡς Α: Γ:: Ε: Ζ. (φ) ἄρα καὶ ἐναλλάξ
ὡς Α: Ε:: Γ: Ζ. ἄρα καὶ συντεθέντα ὡς Α+Ε:
Ε:: Γ+Ζ: Ζ. (χ) ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς Ε: Β:: Ζ:
Δ, (ψ) ἄρα καὶ δι' ἴσος, ὡς Α+Ε: Β:: Γ+Ζ: Δ.
(ω) ὃ ἔδει δεῖξαι.

Κ

ΠΡΟ.

(υ) Κατὰ τὴν ιγ. τῆ β. (φ) Κατὰ τὴν ε. τῆ β. (χ) Κατὰ
τὴν ι. τῆ β. (ψ) Ἐξ ὑποθ. (ω) Κατὰ τὴν ιβ. τῆ β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ', καὶ ΚΕ'.

Ἐάν τεσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ μέγιστον αὐτῶν καὶ τὸ ἐλάχιστον, δύο τῶν λοιπῶν μείζονα ἔσται.

Ἔστω ὡς $AB : ΓΔ :: E : Z$. καὶ μέγιστον μὲν αὐτῶν ἔστω τὸ AB , ἐλάχιστον δὲ τὸ Z . λέγω, ὅτι τὸ $AB + Z \supset ΓΔ + E$. χ . 3.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εὐλήφθω τὸ μὲν $AH = E$, τὸ δὲ $ΓΘ = Z$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς $AB : ΓΔ :: E : Z$ ἔστι δὲ τὸ μὲν $E = AH$, τὸ δὲ $Z = ΓΘ$ ἄρα καὶ ὡς $AB : ΓΔ :: AH : ΓΘ$. ἄρα καὶ ὡς $AB : ΓΔ :: BH : ΔΘ$. (α) ἄλλα τὸ $AB \supset ΓΔ$. ἄρα καὶ $BH \supset ΔΘ$. ἐπεὶ δὲ $AH = E$, καὶ $ΓΘ = Z$ ἔαν ἄρα τῷ μὲν AH προσεθῇ τὸ Z , τῷ δὲ $ΓΘ$ τὸ E , ἔσται $AH + Z = ΓΘ + E$. προσκείτω τοῖς μὲν $AH + Z$ τὸ HB , τοῖς δὲ $ΓΘ + E$, τὸ $ΔΘ$, καὶ ἔσται $AH + Z + BH \supset ΓΘ + E + ΔΘ$. διδάσκειται γὰρ τὸ $BH \supset ΔΘ$. ἔτεν $AB + Z \supset ΓΔ + E$. ὃ ὅδει δεῖξαι.

Τὰ ἑξῆς Θεωρήματα, πλὴν τῶν ἐσχάτων, ἐκ τῶν τῶν Πάππου αἰσὶ τῶν Ἀλεξανδρέως.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Α'.

Ἐάν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἢ περ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ ἐκ τῶν ἁκρῶν γινόμενον μείζον τῶν ἐκ τῶν μέσων ἔσται καὶ

ἔκ τινος ἀκέρων μέζον τῆ ἐκ τῶν μέ-
 ζων, το πῦρον πρὸς το δεύτερον μέζονα λο-
 γον ἔχει, ἥπερ τὸ ἐξ του πρὸς τὸ τέτατον.
 ἵχτω $A : B \geq I : A$, ἢ γὰρ, ὅτι $A \Delta B$. I.
 καὶ $A \Delta B$, I, $A : B \geq I : A$.
 ΑΓΕΙΝ ΤΟΥ Α.
 Ἐὰν $A : B \geq I : A$, τὸ Α ἀγα πρὸς Ι πρὸ
 το Β ἀκέρων ἥπερ τὸ Ι πρὸ το Α. (β) εἰσφῶ
 ἡ γὰρ τὸ Ε ἀκέρων τῆ Α, το αὐτὸν πρὸ το Β πρὸς Ι
 ἥπερ, ὅτι καὶ τὸ Ι πρὸ το Α. καὶ ἀγα ὡς Ε :
 $B : I : A$. (γ) ἀγα Ε. $A = B$. I. (δ) ἀλλ' Α. $A \Delta B$.
 Δ. ἔκ τινος γὰρ τὸ Ε τῆ Α. ἀγα Α. $A \Delta B$. I.
 ΑΓΕΙΝ ΤΟΥ Β.
 Ἐὰν Α. $A \Delta B$, I, εἰσφῶ ἡ γὰρ τὸ Ε ἀκέρων
 τῆ Α, ὅτι καὶ Ε. Α — Β. I. ἀγα ὡς Ε : B :
 I : A. (ε) ὅτι τὸ Ε το αὐτὸν πρὸς Ι πρὸ το Β,
 ὅτι καὶ τὸ Ι πρὸ το Α. ἀλλ' Α. $A \Delta B$. I, τὸ Α
 ἀγα πρὸ το Β ἀκέρων ἥπερ Ι πρὸ Ι πρὸ
 το Α. ἀγα Α : B $\geq I : A$. ο. ε. δ.

ΣΤΗΝΕΙΑ.

Ἐκ τῆς φανερῆ, ὅτι εἰαν Α : B $\geq I : A$, ἢ
 ἀλλ' Α : I $\geq B : A$, ἢ τῆς γὰρ κενῆς, τὸ Β
 ἀκέρων γινώσκον, ἔστιν τὸ Α. Ἀκέρων τῆ ἐκ τῶν μέζων
 ἔστι τῆ Β. I. ἀναπαύειν δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Α ἀκέρων
 ἔχει, ἥπερ τὸ Α πρὸς τὸ Ι, ἔστιν Β : A $\leq I : A$.
 ἔστι δὲ ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Ι μέζονα λόγον ἔχει, ἥπερ
 τὸ Β πρὸς τὸ Α, ἢτοι Α : I $\geq B : A$. τῆς γὰρ κενῆς,
 καὶ Α. $A \Delta B$. I.

Κ 2

ΘΕΩ.

(8) Κατὰ τὸν γ. ὁρίσμ. τῆ ε. (γ) Κατὰ τὸν β. ὁρίσμ. τῆ ε.
 (δ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (ε) Κατὰ τὴν ἀντίφ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Β'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἥπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ δεύτερον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔξῃ, ἥπερ τρίτον καὶ τέταρτον πρὸς τέταρτον.

Ἐχέτω $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$. λέγω, ὅτι καὶ $A + B : B \supseteq \Gamma + \Delta : \Delta$.
ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$, ἄρα $A \cdot \Delta \supseteq B \cdot \Gamma$. (ζ) κοινὸν προσκείσω τὸ $B \cdot \Delta$. ἄρα $A \cdot \Delta + B \cdot \Delta \supseteq B \cdot \Gamma + B \cdot \Delta$, τετέστιν $A + B : \Delta \supseteq B : \Gamma + \Delta$. ἄρα $A + B : B \supseteq \Gamma + \Delta : \Delta$. (η)

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Γ'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἥπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ διαμερέντα μείζονα λόγον ἔξῃ.

Ἐχέτω $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$. λέγω, ὅτι καὶ $A - B : B \supseteq \Gamma - \Delta : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$, ἄρα $A \cdot \Delta \supseteq B \cdot \Gamma$. (ζ) κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ $B \cdot \Delta$. ἄρα $A \cdot \Delta - B \cdot \Delta \supseteq B \cdot \Gamma - B \cdot \Delta$, τετέστιν $A - B : \Delta \supseteq B : \Gamma - \Delta$. ἄρα $A - B : B \supseteq \Gamma - \Delta : \Delta$. (ι)

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Δ'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἥπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, κατὰ ἀναστροφὴν λόγος ἐλάττονα λόγον ἔξῃ.

ΔΕΙ-

(ζ) Κατὰ τὸ κ. Θιώρ. (η) Κατὰ τὸ αὐτὸ Θιώρ. (θ) Κατὰ τὸ αὐτ. Θιώρ. (ι) Κατὰ τὸ αὐτ. Θιώρ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$, ἄρα $A : \Delta \supseteq B : \Gamma$. τῶν ἐκάτερον ἀφαιρήσω ἀπὸ τοῦ $A : \Gamma$. ἄρα $A : \Gamma - A : \Delta \leq A : \Gamma - B : \Gamma$, ἦτοι $A : \Gamma - \Delta \leq \Gamma : A - \Gamma$, ὅπερ ἐστὶν $A - B : \Gamma \supseteq A : \Gamma - \Delta$. ἄρα $A - B : A \supseteq \Gamma - \Delta : \Gamma$.
 (κ) ἄρα ἀνάπαλιν. $A : A - B \leq \Gamma : \Gamma - \Delta$. (λ)

ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχη, ἥπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ δεύτερον πρὸς πέμπτον μείζονα ἥπερ τέταρτον πρὸς ἕκτον, δι' ἴσιν καὶ πρῶτον πρὸς πέμπτον μείζονα λόγον ἔξει, ἥπερ τρίτον πρὸς ἕκτον.

Ἐχέτω $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$, καὶ $B : E \supseteq \Delta : \zeta$. λέγω, ὅτι καὶ $A : E \supseteq \Gamma : \zeta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$, καὶ ἐναλλάξ ἄρα $A : \Gamma \supseteq B : \Delta$. ὡσάντως ἐπεὶ $B : E \supseteq \Delta : \zeta$, καὶ ἐναλλάξ $B : \Delta \supseteq E : \zeta$. ὁ λόγος ἄρα ὃν ἔχει τὸ B πρὸς τὸ Δ μείζων τοῦ ὃν ἔχει τὸ E πρὸς πρὸς τὸ ζ. ἀλλὰ τὸ λόγος ὃν ἔχει τὸ B πρὸς τὸ Δ μείζων ὁ λόγος ὃν ἔχει τὸ A πρὸς τὸ Γ· καὶ γὰρ δίδεσθαι $A : \Gamma \supseteq B : \Delta$. ἄρα ὁ λόγος ὃν ἔχει τὸ A πρὸς τὸ Γ πολλῷ μείζων τοῦ ὃν ἔχει τὸ E πρὸς τὸ ζ. ἄρα $A : \Gamma \supseteq E : \zeta$. ἄρα καὶ ἐναλλάξ, $A : E \supseteq \Gamma : \zeta$.

(*) Κατὰ τὸ α. Σιῦρ. (λ) Κατὰ τὴν μετὰ τὸ α. Σιῦρ. συνίπ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχη, ἥπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ δεύτερον πρὸς πέμπτον μείζονα ἥπερ ἕκτον πρὸς τρίτον, καὶ δι' ἴσιν τετραγαμμένως πρῶτοι πρὸς πέμπτον μείζονα λόγον ἔξαι, ἥπερ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Ἐχέτω $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$, καὶ $B : E \supseteq \Sigma : \Gamma$. λέγω, ὅτι καὶ $A : E \supseteq \Sigma : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ $A : B \supseteq \Gamma : \Delta$, ἄρα $A : \Delta \supseteq B : \Gamma$. (μ) ἀλλὰ $B : \Gamma \supseteq E : \Sigma$. ἔχει γὰρ $B : E \supseteq \Sigma : \Gamma$. ἄρα πολλῷ μᾶλλον $A : \Delta \supseteq E : \Sigma$. ἄρα $A : E \supseteq \Sigma : \Delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7'.

Ὡν διπλασιόνων λόγον οἱ ὑποδιπλασίονες ἴσοι, καὶ κεινοὶ εἰσιν ἴσοι καὶ ἂν ὑποδιπλασιόνων οἱ διπλασίονες ἴσοι, καὶ κεινοὶ εἰσιν ἴσοι.

Ἔστω ὡς $A : B :: B : \Gamma$, καὶ ὡς $E : Z :: Z : O$. ἔσωσαν δὲ οἱ ὑποδιπλασίονες ἴσοι, (ν) ἔστω ὡς $A : B :: E : Z$. λέγω, ὅτι καὶ οἱ διπλασίονες αὐτῶν ἴσοι, ἥτοι ὡς $A : \Gamma :: E : O$. καὶ εἰάν ὡς $A : \Gamma :: E : O$, ἔσται καὶ ὡς $A : B :: E : Z$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἐπεὶ ὡς $A : B :: B : \Gamma$, ἔστι δὲ καὶ ὡς $A : B :: E : Z$, (ξ) ἄρα καὶ ὡς $B : \Gamma :: E : Z$. (ο) ἀλλ' ὡς $E : Z :: Z : O$. (π) ἄρα καὶ ὡς $B : \Gamma :: Z : O$. (ρ) ἀλλὰ καὶ ὡς $A : B :: E : Z$. ἄρα δι' ἴσιν καὶ ὡς $A : \Gamma :: E : O$ (σ)

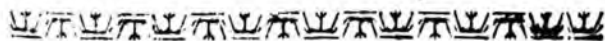
ΔΕΙ.

(μ) Κατὰ τὸ α. θιέρ. (ν) Ὅρα τὸ β. πρὸς τὸ μετὰ τὴν η. τῷ ι. (ξ) Ἐξ ὑποθ. (ο) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτ. ε. (σ) Κατὰ τὴν ιβ. τῷ ε.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β.

Εἰ γὰρ μὴ ὡς $A : B :: E : Z$, εἰλώφθω ἄλλο τι ἢ τι μᾶλλον ἢ ἐλάττω τῷ Z , οἷον τὸ Ξ , ὥστε εἶναι, ὡς $A : B :: E : \Xi$, καὶ γεγενέτω ὡς $E : \Xi :: \Xi : X$. καὶ ἐπεὶ καὶ ὡς $A : B :: B : \Gamma$ (τ) ἔστι δὲ καὶ ὡς $A : B :: E : \Xi$, (υ) εἴτεν οἱ ὑποδιπλασίονος ἴσοι, καὶ οἱ τετάν διπλασίονες ἄρα ἴσοι, τετέστιν ὡς $A : \Gamma :: E : X$. (ο) ἀλλ' ὡς $A : \Gamma :: E : O$. (χ) ἄρα καὶ ὡς $E : X :: E : O$. (ψ) ἄρα $X = O$. (ω) ἄρα καὶ ὡς $E : \Xi :: \Xi : O$. ἄρα $E, O = \Xi, \Xi$. (α) ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $E : Z :: Z : O$, (β) ἄρα $E, O = Z, Z$. ἄρα $Z, Z = \Xi, \Xi$. ἄρα καὶ $Z = \Xi$. τὸ Ξ ἄρα καὶ ἴσον, καὶ ἐλάττω ἢ μᾶλλον τῷ Z , ὅπερ ἀδύνατον. εἰ ἄρα ὡς $A : B :: E : \Xi$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἐδὲ πρὸς ἄλλο τι τὸ E πλὴν ἢ πρὸς τὸ Z ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ A πρὸς τὸ B . ἄρα ὡς $A : B :: E : Z$. ὃ ἐδοκεῖ δεῖξαι.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δευχθήσεται, ὅτι ἂν λόγων οἱ ὑποτριπλασίονες εἰσιν ἴσοι, καὶ οἱ τετραπλασίονες, ἢ τετραπλασίονες αὐτῶν εἰσιν ἴσοι, καὶ τὸ ἀνάπαλιν.



ΒΙΒΛΙΟΥ ΕΚΤΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Ὅμοια χήματα εὐθύγραμμά ἐσιν ὅσα τὰς τεγωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσαςγωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

Β. Ἀντιπεπονθότα χήματα ἐσιν, ὅταν ἐν ἑκατέρῳ τῶν χημάτων ἡγέμενοί τε καὶ ἐπόμενοι λόγοι ᾧσιν.

Κ 4

Γ'.

(τ) Ἐξ ὑποθ. (υ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (φ) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῷ δὲ τῷ διωρήμ. (χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (ω) Κατὰ τὴν β. τῷ ε. (α) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (β) Ἐξ ὑποθ.

Γ'. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθὶα τετμήθαι λέγεται, ὅταν ἢ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μᾶζον τμήμα, ἔτω τὸ μᾶζον πρὸς τὸ ἐλαττον.

Δ'. Ὑψος πάντες χήματός ἐστιν ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν καθέτος ἀγομένη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλλήλογράμματα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστὼ τρίγωνα καὶ τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ ὕψη ἔχοντα ἴσα, τὰς ἀπὸ τῶν Β, Ζ ἀγομένας καθέτους ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΕΗ, ἦται τὰς ΒΔ, ΖΘ. λέγω, ὅτι ὡς ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς ΕΖΗ τρίγωνον, ἔτως ἡ ΑΓ βᾶσις πρὸς τὴν ΕΗ βάσιν. πίν. ις. χ. ι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΓ = ΒΔ. ΑΓ, τὸ δὲ ΕΖΗ =

ΖΘ. ΕΗ. (γ) ἄρα ὡς ΑΒΓ : ΕΖΗ :: ΒΔ. ΑΓ : ΖΘ. ΕΗ.

ἄλλ' ὡς ΒΔ. ΑΓ : ΖΘ. ΕΗ :: ΒΔ. ΑΓ : ΖΘ. ΕΗ. (δ) ἄρα

ὡς ΑΒΓ : ΕΖΗ :: ΒΔ. ΑΓ : ΖΘ. ΕΗ. (ε) ἄλλ' ὡς ΒΔ. ΑΓ :

ΖΘ. ΕΗ :: ΑΓ : ΕΗ. (ζ) τὸ γὰρ ΒΔ = ΖΘ. (η) ἄρα ὡς ΑΒΓ : ΕΖΗ :: ΑΓ : ΕΗ. (θ)

ΣΤΗΝΕΠΕΙΔ.

Ἐπεὶ δὲ τὰ παραλλήλογράμματα διπλάσια ἐστὶ τῶν τριγώνων τῶν τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχόντων καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν,

(γ) Κατὰ τὸ γ. πρόβλ. τὸ μετὰ τὴν ιδ. τῷ β. (δ) Κατὰ τὴν η. τῷ ε. (ε) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (ζ) Κατὰ τὴν η. τῷ ε. (η) Ἐξ ὑπὸθ. (θ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε.

σιν. (ι) καὶ τὰ παραλληλόγραμμα ἄρα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἀλλήλας εἰσιν ὡς αἱ βάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

Ἐὰν τριγώνῃσιν παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεΐα παράλληλος, ἀνάλογον τεμῇ τὰς τῶν τριγώνων πλευράς. καὶ ἐὰν αἱ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεΐα, παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τῶν τριγώνων πλευρὰν παράλληλος.

Ἔστω τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ, καὶ ἤχθω μιᾷ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΔΕ. λέγω, ὅτι ἔσιν ὡς ΒΔ: ΔΑ: ΓΕ: ΕΑ. Ἐὰν δὲ αἱ τῶν ΑΒΓ τριγώνων πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ὥστε εἶναι ὡς ΒΔ: ΔΑ:: ΓΕ: ΕΑ, λέγω, ὅτι παράλληλος ἔστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. κ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΔΓ, ΕΒ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Τὸ τρίγωνον ΒΕΔ = ΓΕΔ. (κ) ἄρα ὡς ΒΕΔ: ΔΕΑ:: ΓΕΔ: ΔΕΑ. (λ) ἀλλ' ὡς ΒΕΔ: ΔΕΑ:: ΒΔ: ΔΑ. (μ) ἄρα ὡς ΒΔ: ΔΑ:: ΓΕΔ: ΔΕΑ. (ν) ἀλλ' ὡς ΓΔΕ: ΕΔΑ:: ΓΕ: ΕΑ. (ξ) ὡς ἄρα ΒΔ: ΔΑ:: ΓΕ: ΕΑ. (ο)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ὡς ΒΔ: ΔΑ:: ΓΕ: ΕΑ. (π) ἀλλ' ὡς ΒΕΔ: ΔΕΑ:: ΕΔ: ΔΑ. (ρ) ἄρα καὶ ὡς ΒΕΔ: ΔΕΑ:: ΓΕ: ΕΑ.

Κ 5

(σ)

- (ι) Κατὰ τὴν μ. τῷ α. (κ) Κατὰ τὴν λζ. τῇ α. (λ) Κατὰ τὴν α. τῇ ε. (μ) Κατὰ τὴν α. τῇ σ. (ν) Κατὰ τὴν ε. τῇ ε. (ξ) Κατὰ τὴν α. τῇ σ. (ο) Κατὰ τὴν ε. τῇ ε. (π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Κατὰ τὴν α. τῇ σ.

(σ) ἀλλ' ὡς ΓΔΕ : ΕΔΑ :: ΓΕ : ΕΑ. (τ) ἄρα καὶ ὡς ΒΕΔ : ΔΕΑ :: ΓΔΕ : ΕΔΑ. (υ) ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΕΔ = ΓΔΕ. (φ) εἰσὶ δὲ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἄρα εἰσὶ παραλλήλαις. (χ) ἡ ἄρα ΔΕ παράλληλος τῇ ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄.

Εὰν τριγώνῳ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμναι καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔξῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τῷ τριγώνῳ πλευραῖς. καὶ εἰάν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τῷ τριγώνῳ πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐκτεταγμένη εὐθεῖα δίχα τέμναι τὴν τριγώνῳ γωνίαν.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήθω δίχα ἡ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας. λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ΒΔ : ΔΓ :: ΛΑ : ΑΓ. Ἐάν δὲ ᾗ ὡς ΒΔ : ΔΓ :: ΒΑ : ΑΓ· λέγω, ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας. κ. 3.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἡ ΓΕ παράλληλος τῇ ΑΔ, (ψ) καὶ διαχθῶσα ἡ ΕΑ, συμπίπτει τὴν αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.

ΔΕΙ.

(σ) Κατὰ τὴν ι. τῇ ι. (τ) Κατὰ τὴν α. τῇ ς. (υ) Κατὰ τὴν
(φ) Κατὰ τὴν β. τῇ ι. (χ) Κατὰ τὴν λθ. τῇ α. (ψ) Κατὰ
τὴν λθ. τῇ ιι.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἦ' μὲν γωνία $\text{ΒΑΔ} = \text{ΒΕΓ}$, ἢ δὲ $\text{ΔΑΓ} = \text{ΑΓΕ}$. (ω) ἀλλ' ἢ $\text{ΒΑΔ} = \text{ΔΑΓ}$. (α) ἄρα καὶ ἢ ΕΕΓ , ἔτεν $\text{ΑΕΓ} = \text{ΑΓΕ}$. ἄρα καὶ ἢ $\text{ΑΕ} = \text{ΑΓ}$. (β) ἀλλ' ὡς $\text{ΓΔ} : \text{ΔΓ} :: \text{ΒΔ} : \text{ΑΓ}$. (γ) ἄρα καὶ ὡς $\text{ΒΔ} : \text{ΔΓ} :: \text{ΒΑ} : \text{ΑΓ}$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ὡς $\text{ΒΔ} : \text{ΔΓ} :: \text{ΕΔ} : \text{ΑΓ}$. (δ) ἀλλ' ὡς $\text{ΒΔ} : \text{ΔΓ} :: \text{ΕΔ} : \text{ΑΕ}$. (ε) ἄρα ὡς $\text{ΕΔ} : \text{ΑΓ} :: \text{ΒΔ} : \text{ΑΕ}$. (ζ) ἄρα $\text{ΑΕ} = \text{ΑΓ}$. (η) καὶ γωνία ἄρα ἢ $\text{ΑΓΕ} = \text{ΑΓΕ}$. (θ) ἀλλ' ἢ μὲν $\text{ΑΕΓ} = \text{ΒΑΔ}$, ἢ δὲ $\text{ΑΓΕ} = \text{ΔΑΓ}$. (ι) ἄρα καὶ ἢ $\text{ΒΑΔ} = \text{ΔΑΓ}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Τῶν ἰσογώνιων τριγώνων ἀνάλογον εἰσὶν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμολογοὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποταίνεσθαι πλευραί.

Ἰσώταν ἰσογώνια τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ , ΔΕΖ ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν γωνίαν Γ τῇ Ζ , τὴν δὲ Β τῇ Ε , τὴν δὲ Α τῇ Δ . λέγω, ὅτι ὡς $\text{ΑΒ} : \text{ΑΓ} :: \text{ΔΕ} : \text{ΔΖ}$, καὶ ὡς $\text{ΑΓ} : \text{ΒΓ} :: \text{ΔΖ} : \text{ΖΕ}$ · καὶ ὡς $\text{ΑΒ} : \text{ΒΓ} :: \text{ΔΕ} : \text{ΕΖ}$. χ. 4.

Εάν μὲν τὰ τρίγωνα ἰσόπλευρα ᾖ, δῆλον τὸ προτε-
θέν· εἰ δὲ μή·

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

ἘΦημέρω τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐπὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ τιθίω τὸ μὲν Δ σημεῖον ἐπὶ τὸ Α , ἢ δὲ ΔΖ
ἐν-

(ω) Κατὰ τὴν κθ. τῆ α. (α) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὴν σ. τῆ α. (γ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (δ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (ζ) Κατὰ τὴν σ. τῆ σ. (η) Κατὰ τὴν ρ. τῆ σ. (θ) Κατὰ τὴν σ. τῆ φ. (ι) Κατὰ τὴν κθ. τῆ α.

ἐνθεῖα ἐπὶ τὴν ΑΓ. ἐφαρμόσται δὲ καὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὴν ΑΒ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν Δ γωνίαν τῇ Α. ἡ δὲ ΕΖ ἐντός περικταί τῷ ΑΒΓ τρίγωνι, καὶ ἔσται ἡ μὲν ΔΕ = ΔΕ, ἡ δὲ ΔΖ = ΔΖ, ἡ δὲ ΕΖ αὐτὴ ἡ ΕΖ. καὶ ἡ μὲν ΔΕΖ γωνία αὐτὴ ἡ Ε, ἡ δὲ ΔΖΕ αὐτὴ ἡ Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΑΕΖ = Ε, (κ) ἡ δὲ Ε = Β, (λ) ἄρα ἡ ΑΕΖ = Β. ἡ ἄρα ΕΖ παράλληλος τῇ ΒΓ. ὡς ἄρα ΒΕ : ΕΑ :: ΓΖ : ΖΑ. (μ) ἄρα καὶ ὡς ΒΕ + ΕΑ : ΕΑ :: ΓΖ + ΖΑ : ΖΑ, (ν) ἔσται ΒΑ : ΕΑ :: ΓΑ : ΖΑ. καὶ ἐναλλάξ ὡς ΒΑ : ΓΑ :: ΕΑ : ΖΑ. (ξ) ἀλλ' ἡ μὲν ΕΑ = ΔΕ, ἡ δὲ ΖΑ = ΔΖ. ἄρα ὡς ΕΑ : ΓΑ :: ΔΕ : ΔΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, τῷ μὲν Ζ σημείω ἐπὶ τὸ Γ ἐφαρμόθεις, διειχθήσεται, ὅτι ὡς ΓΑ : ΓΒ :: ΔΖ : ΖΕ. τῷ δὲ Ε ἐπὶ τὸ Β, ὅτι ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξαι τὰς γωνίας, ὑφ' αἷς αἱ ὁμόλογαι πλευραὶ ὑποταίνουσιν.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ, ὡς δὲ ΒΓ : ΓΑ :: ΕΖ : ΖΔ, καὶ ἔτι ὡς ΒΑ : ΑΓ :: ΕΔ : ΔΖ. λέγω ὅτι ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξαι τὰς γωνίας, ὑφ' αἷς αἱ ὁμόλογαι πλευραὶ ὑποταίνουσιν, τὴν μὲν ΑΒΓ τῇ ΔΕΖ, τὴν δὲ ΒΓΑ τῇ ΕΖΔ, καὶ ἔτι τὴν ΒΑΓ τῇ ΕΔΖ. χ. 5.

ΚΑ.

(κ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (λ) Ἐξ ὑποθ. (μ) Κατὰ τὴν β. τῷ ε.
(ν) Κατὰ τὴν α. τῷ ε. (ξ) Κατὰ τὴν ζ. τῷ ε.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Συνεσάτω τῇ μὲν γωνίᾳ $\Lambda\text{Β}\Gamma = \text{ΖΗ}\text{Η}$, τῇ δὲ $\Lambda\Gamma\text{Β} = \text{ΕΖΗ}$. (ο) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ $\text{Β}\Lambda\Gamma$ ἴση λοιπῇ τῇ $\text{ΕΗ}\text{Ζ}$. (π)

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ $\text{ΕΗ}\text{Ζ}$, $\Lambda\text{Β}\Gamma$ τρίγωνα ἰσογώνια εἰσιν. ὡς ἄρα $\Lambda\text{Β} : \text{Β}\Gamma :: \text{ΕΗ} : \text{ΕΖ}$. (ρ) ἀλλ' ὡς $\Lambda\text{Β} : \text{Β}\Gamma :: \Delta\text{Ε} : \text{ΕΖ}$. (σ) ἄρα καὶ ὡς $\Delta\text{Ε} : \text{ΕΖ} :: \text{ΕΗ} : \text{ΕΖ}$. (τ) ἡ ἄρα $\Delta\text{Ε} = \text{ΕΗ}$. (υ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $\Delta\text{Ζ} = \text{ΖΗ}$. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΖ κοινὴ. καὶ γωνία ἄρα ἡ μὲν $\Delta\text{ΖΕ} = \text{ΕΖΗ}$, ἡ δὲ $\Lambda\text{Ε}\text{Ζ} = \text{ΖΕΗ}$, καὶ ἡ $\text{Ε}\Delta\text{Ζ} = \text{ΕΗ}\text{Ζ}$. (φ) ἀλλ' ἡ μὲν $\text{ΕΖΗ} = \Lambda\Gamma\text{Β}$, ἡ δὲ $\text{ΖΕΗ} = \Lambda\text{Β}\Gamma$. (χ) ἡ δὲ $\text{ΕΗ}\text{Ζ} = \text{Β}\Lambda\Gamma$. (ψ) ἄρα ἡ μὲν $\Delta\text{ΖΕ} = \Lambda\Gamma\text{Β}$, ἡ δὲ $\Lambda\text{Ε}\text{Ζ} = \Lambda\text{Β}\Gamma$, ἡ δὲ $\text{Ε}\Delta\text{Ζ} = \text{Ρ}\Lambda\Gamma$. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Lambda\text{Β}\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta\text{Ε}\text{Ζ}$ τριγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Σ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσιν τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὑφ' αἷς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἦναι δύο τρίγωνα τὰ $\Lambda\text{Β}\Gamma$, $\Delta\text{Ε}\text{Ζ}$, μίαν γωνίαν τὴν $\text{Β}\Lambda\Gamma$, μιᾷ γωνίᾳ τῇ $\text{Ε}\Delta\text{Ζ}$ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, εἴπην ὡς $\text{Β}\Lambda : \Lambda\Gamma :: \text{Ε}\Delta : \Delta\text{Ζ}$. λέγω, ὅτι ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $\Lambda\text{Β}\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta\text{Ε}\text{Ζ}$ τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἔξει τὴν μὲν $\Lambda\text{Β}\Gamma$ γωνίαν τῇ $\Delta\text{Ε}\text{Ζ}$, τὴν δὲ $\Lambda\Gamma\text{Β}$ τῇ $\Delta\text{ΖΕ}$. χ. δ.

ΚΑ-

- (ο) Κατὰ τὴν ηγ. τῇ α. (π) Κατὰ τὴν ζ. συνίπ. τῆς λβ. τῇ α.
(ρ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (σ) Ἐξ ὑποθ. (τ) Κατὰ τὴν ο. τῇ ο.
(υ) Κατὰ τὴν β. τῇ ο. (φ) Κατὰ τὴν η. τῇ α.
(χ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ψ) Κατὰ τὴν ρηθ. συνίπ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεπάρω ἡ μὲν $\angle \Delta \text{Η}$, γωνία ἴση ἐποτέρᾳ τῶν $\angle \text{ΒΑΓ}$, $\angle \text{ΕΔΖ}$, ἡ δὲ $\angle \text{ΔΖΗ}$ τῇ $\angle \text{ΑΓΒ}$. (ω) λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση (α)

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ $\triangle \text{ΑΒΓ}$ τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ $\triangle \text{ΗΖ}$, ὡς ἄρα $\text{ΑΒ} : \text{ΑΓ} :: \text{ΔΗ} : \text{ΔΖ}$. (β) ἁλ' ὡς $\text{ΑΒ} : \text{ΑΓ} :: \text{ΕΔ} : \text{ΔΖ}$. (γ) ὡς ἄρα $\text{ΕΔ} : \text{ΔΖ} :: \text{ΔΗ} : \text{ΔΖ}$. (δ) ἄρα ἡ $\text{ΕΔ} = \text{ΔΗ}$. (ε) ἐν τοῖς τρίγωνοις ἐν $\triangle \text{ΕΖ}$, $\triangle \text{ΖΗ}$, ἡ μὲν $\angle \text{Ε} = \angle \text{Η}$, ἡ δὲ $\angle \text{Ζ}$ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ $\angle \text{ΕΖ} = \angle \text{ΖΗ}$. (ζ) ἄρα καὶ γωνία ἡ $\angle \text{ΑΖΕ} = \angle \text{ΖΗ}$, καὶ ἡ $\angle \text{ΕΖ} = \angle \text{ΗΖ}$. (η) ἁλ' ἡ μὲν $\angle \text{ΖΗ} = \angle \text{ΓΒ}$, (θ) ἡ δὲ $\angle \text{ΗΖ} = \angle \text{Γ}$, (ι) ἄρα ἡ μὲν $\angle \text{ΓΒ} = \angle \text{ΖΕ}$, ἡ δὲ $\angle \text{ΑΒΓ} = \angle \text{ΕΖ}$, ἰσογώνιον ἄρα τὸ $\triangle \text{ΑΒΓ}$ τρίγωνον τῷ $\triangle \text{ΕΖ}$ τρίγωνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἦτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὁρθῆς, ἰσογώνια ἔσονται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξαι τὰς γωνίας, περὶ αἷς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ $\triangle \text{ΑΒΓ}$, $\triangle \text{ΕΖ}$ ἴσην ἔχοντα τὴν $\angle \text{ΒΑΓ}$ γωνίαν τῇ $\angle \text{ΕΔΖ}$, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας, τὰς $\angle \text{ΑΒΓ}$,

(ω) Κατὰ τὴν κγ. τῇ α. (α) Κατὰ τὴν ζ. συνίπ. τῆς λβ. τῇ α. (β) Κατὰ τὴν δ. τῇ ε. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὴν ι. τῇ ε. (ε) Κατὰ τὴν β. τῇ ε. (ζ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (η) Κατὰ τὴν δ. τῇ β. (θ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ι) Κατὰ τὴν ιη. συνίπ.

ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἔστω ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ. τῶν δὲ λοιπῶν γωνιῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ σημείοις ἐκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς. λέγω, ὅτι ἰσογώνιον ἔσται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τρίγωνῳ. καὶ ἴση ἔσται ἡ ΑΒΓ γωνία τῇ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση. πίν. ΙΖ. Χ. 7.

Εἰ γὰρ ἄνιστος εἴναι ἡ ΑΒΓ γωνία τῇ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων εἴναι. ἔστω μείζων ἡ ΑΒΓ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω ἡ ΑΒΗ γωνία ἴση τῇ ΔΕΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τρίγωνοις ΑΒΗ, ΔΕΖ ἡ μὲν γωνία Α = Δ, (κ) ἡ δὲ ΑΒΗ = ΔΕΖ. (λ) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗΒ ἴση λοιπῇ τῇ ΔΖΕ. ἰσογώνια ἔρα τὰ ΑΒΗ, ΔΕΖ τρίγωνα. ἔρα ὡς ΑΒ : ΒΗ :: ΔΕ : ΕΖ. (μ) ἀλλ' ὡς ΔΕ : ΕΖ :: ΑΒ : ΒΓ. (ν) ὡς ἔρα ΑΒ : ΒΗ :: ΑΒ : ΒΓ. (ξ) ἡ ἔρα ΒΗ = ΒΓ. (ο) καὶ γωνία ἔρα ἡ ΒΗΓ = ΒΗΗ. (π) εἰάν ἔν ἐκατέρᾳ τῶν Γ, Ζ γωνιῶν ἐλάσσων ὀρθῆς, καὶ ἡ ΒΗΓ ἔσαι ἐλάσσων ὀρθῆς καὶ γὰρ ἡ Γ = ΒΗΓ, ὡς δέδεται. ἀλλ' αἱ ΒΗΓ, ΒΗΔ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (ρ) ἡ ἔρα ΒΗΔ, ἔστω ΑΗΒ μείζων ὀρθῆς, καὶ ἡ Ζ ἔρα μείζων ὀρθῆς δέδεται γὰρ ἡ ΑΗΒ = Ζ. ἡ ἔρα Ζ γωνία καὶ μείζων καὶ ἐλάττων ὀρθῆς, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐάν δὲ ἐκατέρᾳ τῶν Γ, Ζ μείζων ὀρθῆς, ἔπει ἡ ΒΗΓ = ΒΗΗ, ὡς δέδεται. αἱ δὲ δύο ἔρα γωνίαι ΒΗΓ, ΒΗΗ τῷ τρίγωνῳ ΗΒΓ μείζονες δύο ὀρθῶν, ὅπερ ἀδύνατον. ἔκ ἔρα ἡ ΑΒΓ ἄνιστος τῇ

(κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Ἐκ τῆς κατασκ. (μ) Κατὰ τὴν δ. τῆ ε.

(ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (ο) Κατὰ τὴν β. τῆ ε.

(π) Κατὰ τὴν ε. τῆ α. (ρ) Κατὰ τὴν γ. τῆ α.

τῇ ΔΕΖ. ἄρα ἴση. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ' λοιπὴ
τῇ πρὸς τῷ Ζ' ἴση. ἰσογώνια ἄρα τὰ ΑΒΓ', ΔΕΖ' τρι-
γωνα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Ἐὰν ἐν ὀρθογώνιῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς
γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κἀθέτως ἀχθῇ, τὰ
πρὸς τῇ κἀθέτῳ τριγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε
ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἦντω τριγώνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ', ὀρθὴν ἔχον τὴν
ΒΑΓ' γωνίαν. καὶ ἤχθῳ ἀπὸ τῆς Α' ἐπὶ τὴν ΒΓ' κἀ-
θέτως ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι ὅμοιον ἐστὶν ἐκάτερον τῶν ΑΒΔ',
ΑΔΓ' τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ', καὶ ἔτι ἀλλήλοις. χ. θ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΓ', ΑΒΔ', ἡ μὲν γωνία ΒΑΓ' =
ΒΑΔ', (σ) ἡ δὲ πρὸς τῷ Β κοινὴ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ
πρὸς τῷ Γ', λοιπὴ τῇ ΒΑΔ' ἴση. (τ) ἰσογώνιον ἄρα
τὸ ΑΒΓ' τριγώνον τῷ ΑΒΔ' τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἰσο-
γώνια τριγωνα ἀνάλογον ἔχει τὰς πλευρὰς τὰς πρὸς
τὰς ἴσας γωνίας, (υ) ὅμοιον ἄρα τὸ ΑΒΓ' τριγώ-
νον τῷ ΑΒΔ' τριγώνῳ. (φ) ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι τὸ
ΑΒΓ' τριγώνον ὅμοιον ἐστὶ τῷ ΑΔΓ' τριγώνῳ. ἐκάτερον
ἄρα τῶν ΑΒΔ', ΑΔΓ' τριγώνων, ὅλῳ τῷ ΑΒΓ' τριγώ-
νῳ ὅμοιον ἐστὶ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν γωνία ΒΑΔ' = ΑΔΓ',
(χ) ἡ δὲ ΒΑΔ' = Γ', οὕς δέδεικται, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ
πρὸς τῷ Β, λοιπὴ τῇ ΑΔΓ' ἴση. ἰσογώνιον ἄρα καὶ
τῷ ΑΒΔ' τριγώνον τῷ ΑΔΓ' τριγώνῳ. ἄρα ὅμοιον. (ψ)

ΣΤ.

(σ) Ἦε ὑποθ. (τ) Κατὰ τὴν ε', συνίστη. τῆς λβ. τῆς α. (υ) Κα-
τὰ τὴν δ. τῆς ε. (φ) Κατὰ τὸν α. ὁρίσμ. τῆς ε. (χ) Ἦε
ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὴν δ. καὶ τὸν α. ὁρίσμ. τῆς ε.

ΣΤΗΚΗΚΙΑΙ.

Α'. Εἴη δὴ τὸν Φανερὸν, ὅτι ἐάν ἐν ὀρθογώνῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθῃτος ἄχθῃ, ἡ ἄχθουσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μίση ἀνάλογόν ἐστιν. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΒΑΓ, ΑΔΓ ὡς ΒΔ : ΔΓ :: ΔΓ : ΔΑ. καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἐνὸς ὑποτερουῖν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μίση ἀνάλογός ἐστι. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΓ, ὡς ΒΑ : ΑΓ :: ΑΓ : ΑΔ. ὡσαύτως διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΒΓ, ὁμοιότητα, ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΒΓ : ΒΔ.

Β'. Πι ἀπὸ τῆς τυχόντος σημείου Γ τῆς περιφερείας τῆς κόκκου ΑΓΒ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ΑΒ ἀγομένη ΓΔ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν τῆς διαμέτρου τμημάτων ΑΔ, ΔΒ, εἴτην ἐστὶν ὡς ΑΔ : ΔΓ :: ΔΓ : ΔΒ. ἢ ΑΓ² = ΑΔ. ΔΒ. (ω) ἐπιχειρημασιῶν γὰρ τῶν ΑΓ, ΓΒ εὐθειῶν, ἡ γωνία ΑΓΒ ὀρθή ἐστι. (α) τὸ ἄρα ΑΓΒ τρίγωνον ὀρθογώνιον ἐστίν. ἐξ ἧς δὴλον τὸ προκείμενον.

Γ'. Ἐάν τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἢ τινὶ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τὸ ἀπὸ τῶν τμημάτων ΑΔ, ΔΒ τῆς ΑΒ ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ, εἴτην ἐάν ἢ ΓΔ² = ΑΔ. ΔΒ, ἐπιχειρημασιῶν τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἔσεται ἡ ΑΓΒ γωνία ὀρθή. ἐπεὶ γὰρ ΓΔ² = ΑΔ. ΔΒ, (β) ὡς ἄρα ΑΔ : ΓΔ :: ΓΔ : ΔΒ. τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΔΓ, ΒΔΓ ἀνάλογον ἔχει τὰς πλευράς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας ΓΔΑ, ΓΔΒ. ἡ ἄρα γωνία ΓΑΔ = ΒΓΔ. (γ) ἀλλ' ἡ ΓΑΔ σὺν τῇ ΑΓΔ ἴση μὲν ὀρθῇ. (δ) ἄρα καὶ ἡ ΒΓΔ σὺν τῇ ΑΓΔ ἴση μὲν ὀρθῇ. ἡ ἄρα ΑΓΒ ὀρθή ἐστιν.

Α

Δ'.

(ω) Κατὰ τὴν σ. τῆ σ. (α) Κατὰ τὴν λ. α. τῆ γ. (β) Ἐξ ὁμοθ.
(γ) Κατὰ τὴν σ. τῆ σ. (δ) Κατὰ τὴν δ. συνίπ. τῆς λβ. τῆ α.

Δ'. Ἐὰν διαμέτρῳ τῇ τὴν ἐξοχὴν γωνίαν ΑΓΒ ὑποτενέσῃ πλευρῶν ΑΒ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ κύκλος γραφῇ, διὰ τῷ Γ ἤξει. εἰ γὰρ μὴ, ἦται ὑπερθεῖν, ἢ ἐνερθεῖν τῷ Γ ἤξει. ἡμεῖς δὲ ὑπερθεῖν. (χ. 10.) καὶ ἐκβληθῶσα ἡ ΕΓ, συμπιπτέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Ζ. καὶ ἐπεξέχθω ἡ ΑΖ. ἡ ᾠσα ΑΖΒ γωνία ἐξοχή. (ε) ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΙΒ ἐξοχή. (ζ) ἡ ᾠσα ΑΖΒ = ΑΓΒ, ὅπερ ἀδυνατον. (η) διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἐδὲ ἐνερθεῖν τῷ Γ (χ. 11.) ὁ κύκλος ἤξει. ἔσται γὰρ πάλιν ἡ ΑΖΒ ἴση τῇ ΑΙΒ, ὅπερ ἀδυνατον. (θ) ἤξει ᾠσα ὁ κύκλος διὰ τῷ Γ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Τῆς δοθείσης ἐυθείας τὸ προσαχθὲν μέρος ἀφελείν.

Ἔστω ἡ δεδοῦσα ἐυθεῖα ἡ ΑΒ. καὶ ἐπιτετάχθω ἀφελὲν ἀπ' αὐτῆς μέρος τὸ τρίτον. χ. 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω τὴς ἐυθεῖας ἀπὸ τῷ Α ἡ ΑΓ, γωνίαν περὶ ἔχουσα μετὰ τῆς ΑΒ τυχούσαν. καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημῶν ἐπὶ τῆς ΑΓ, τὸ Δ. καὶ κείσθωσαν τῇ ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ, καὶ ἐπεξέχθω ἡ ΙΓ, καὶ διὰ τῷ Δ παράλληλος ἔχθω τῇ ΒΓ ἡ ΔΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΖ τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς ΑΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΖΔ παράλληλος τῇ ΒΓ, ὡς ᾠσα ΓΔ: ΔΑ:: ΒΖ: ΖΑ. (ι) ἀλλ' ἡ ΓΔ διπλασία τῆς ΑΔ, διπλασία ᾠσα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ. τριπλασία ᾠσα ἡ ΒΑ τῆς ΖΑ τρίτον ᾠσα μέρος τῆς ΒΑ ἡ ΖΑ.

ΠΡΟ.

(ι) Κατὰ τὴν λ. α. τῇ γ. (ζ) Ἐξ ἐποθ. (η) Κατὰ τὴν ιγ. τῇ α.
(θ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (ι) Κατὰ τὴν β. τῇ ε.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἀτμητὸν τῇ δοθείσῃ
εὐθείᾳ τετμημένη ὁμοίως τεμεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἀτμητος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ
τετμημένη κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, ἡ ΑΓ, Ζ. 13.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Καίθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ, ὥστε γωνίαν τυχεῖσαν περι-
έχων. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ. καὶ διὰ τῶν Δ, Ε ση-
μείων τῇ ΒΓ παράλληλῃ ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΗ. λέγω,
ὅτι ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται κα-
τὰ τὰ Ζ, Η σημεῖα. ἤχθω γὰρ ἡ ΔΚ παράλληλος
τῇ ΑΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἐν τῷ τριγώνῳ ΔΚΓ ἡ ΘΕ παράλληλος τῇ
ΚΓ, ὡς ἄρα ΓΕ : ΕΔ :: ΚΘ : ΘΔ. (κ) ἀλλ' ἡ μὲν
ΚΘ = ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ = ΗΖ. (λ) ὡς ἄρα ΓΕ : ΕΔ ::
ΒΗ : ΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΗΕ ἡ ΖΔ τῇ ΗΕ
παράλληλος, ἄρα ὡς ΕΔ : ΔΑ :: ΗΖ : ΖΑ. ἡ ἄρα
ἀτμητος ΑΒ τῇ τετμημένῃ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι πάντα ῥαδίον τὴν δοθεῖ-
σαν εὐθεῖαν ΑΒ ἐν τοσούτοις ἴσοις τεμεῖν μέρεσιν, ὅσοις
ἂν τις ἐπιτάξῃ. διήχθω γὰρ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀόρι-
στον ἡ ΑΓ γωνίαν τυχεῖσαν περιέχουσα μετὰ τῆς ΑΒ.
καὶ εἰλήθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχόν σημεῖον τὸ Ζ. καὶ καί-
θωσαν ἴσαι τῇ ΑΖ αἱ ΖΕ, ΕΔ, ΔΓ, καὶ ἐφεξῆς ἄλλαι
ὅσαι ἂν δεῖσι πρὸς ἀπαρτισμὸν τῆ ἀριθμῆ τῶν μερῶν
εἰς ἃ διελθεῖν ἐπετάχθῃμεν τὴν ΑΒ. καὶ ἐπιζευχθείσης
τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν σημείων Ζ, Ε, Δ, ἤχθωσαν τῇ ΒΓ

Λ 2

παράλ-

(κ) Κατὰ τὴν β. τῇ σ. (λ) Κατὰ τὴν λδ. τῇ α.

παράλληλοι αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΔΚ. λέγω δὴ, ὅτι ἡ ΑΒ δι' αὐτῶν εἰς τὰ ἐπιταχθέντα τέτταται μέρη. ὅπερ διὰ τῶν αὐτῶν δευχθήσεται, δι' ὧν καὶ ἡ πρότασις. *χ. 14.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Δύω δοθαισῶν ἐυθαιῶν, τρίτην ἀνάλογον προσσευρίν.

Ἐψωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἐυθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ. *χ. 15.*

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κείθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ γωνίαν περιέχουσαι τυχήσαν, καὶ ἐκβεβλήθωσαν ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα. καὶ κείθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεξέχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τῆ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΕ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΕ τρίτη ἀνάλογός ἐστι τῶν ΑΒ, ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΔΕ ἡ ΔΕ παράλληλος τῇ ΒΓ, ὡς ἄρα ΑΒ : ΒΔ :: ΑΓ : ΓΕ. (μ) αἰτλ' ἡ ΒΔ = ΑΓ. (ν) ὡς ἄρα ΑΒ : ΑΓ :: ΑΓ : ΓΕ. τρίτη ἄρα ἀνάλογος τῶν ΑΒ, ΑΓ ἡ ΓΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Τριῶν δοθαισῶν ἐυθαιῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσσευρίν.

Ἐψωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς ἐυθεῖαι, αἱ Α, Β, Γ. *χ. 16.*

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκείθωσαν δύο ἐυθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ γωνίαν περιέχουσαι τυχήσαν, τὴν ΕΔΖ. καὶ κείθω τῇ μὲν Δ = ΔΗ, τῇ δὲ Β = ΗΕ, τῇ δὲ Γ = ΔΘ. καὶ ἐπιέχθω τῆς ΗΘ, παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τῆ Ε η

ἢ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΘΖ τῶν Α, Β, Γ τετάρτη ἐστὶν ἀνάλογον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἐν τῷ τριγώνῳ ΔΓΖ ἡ ΗΘ τῇ ΕΖ παρὰ ἀλλήλους, ὡς ἄρα ΔΗ : ΗΕ :: ΔΘ : ΘΖ. (ξ) ἀλλ' ἡ μὲν ΔΗ = Α, ἡ δὲ ΗΕ = Β, ἡ δὲ ΔΘ = Γ. (ο) ὡς ἄρα Α : Β :: Γ : ΘΖ. τῶν ἄρα Α, Β, Γ τετάρτη ἀνάλογον προσκείμεται ἡ ΘΖ.

ΣΤΗΝΕΒΕΙΑ.

Ἐντεῦθεν καὶ τὸν δευτέραν λόγον τῆς μείζονος ἀνισότητος, ὃν ἔχει εὐθεία ἡ ΑΒ, πρὸς εὐθείαν τὴν ΒΓ ἐκ' ἀπειρον προσεγγεῖν, καὶ τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ἀπειρῶν ὅρων προσευρεῖν μενδίανομεν καὶ ἔτι, ὅτι ἡ διχοφρεσὶς τῶν πρώτης ὅρων καὶ τῶν δευτέρας, αὐτὸς τῶν ὁ πρώτου ὅρων, καὶ πάντων τῶν ἀπειρῶν ὅρων κεφάλαιον συνελθὼν εἰσὶν ἀνάλογα. χ. 17.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκ' εὐθείας καθεῖται ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ μὲν τῆ Α ἡ ΑΔ ἴση τε καὶ κάθετος τῇ ΑΒ, ἀπὸ δὲ τῆ Β, ἡ ΒΟ ἴση τε καὶ κάθετος τῇ ΒΓ. καὶ ἐπιτεταχθεῖσα ἡ ΑΟ, ἐκβληθήτω, καὶ συμπίπτειτω τῇ ΑΓ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ζ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τῆ Γ ἡ ΓΚ κάθετος τῇ ΑΖ, καὶ εἰλήφθω ἡ ΓΕ ἴση τῇ ΓΚ. καὶ ἀπὸ τῆ Ε ἤχθω ἡ ΕΡ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΑΖ, καὶ εἰλήφθω ἡ ΕΔ ἴση τῇ ΕΡ. καὶ ἀπὸ τῆ Δ ἤχθω ἡ ΔΣ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΑΖ, καὶ εἰλήφθω ἡ ΔΙ ἴση τῇ ΔΣ, καὶ τὰ αὐτὰ δὴ ἐκ' ἀπειρον γινέσθω. λέγω Α', ὅτι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΕ, ΕΔ, ΔΙ, καὶ ἐφεξῆς αἱ λοιπαὶ ἐκ' ἀπειρον συνελθὼν ἀνάλογόν εἰσι. λέγω δὲ Β', ὅτι ἡ ΑΖ ἴση τῷ κεφαλαίῳ τῶν ἀπειρῶν ὅρων.

Α 3

ΔΕΙ-

(δ) Κατὰ τὴν θ. τὴ σ. (ο) Ἐκ τῆς κατασκευ.

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὰ τρίγωνα $Z\Lambda\Lambda$, $Z\Lambda\Theta$ ἰσογώνια εἰσιν, ὡς ἄρα $Z\Lambda_1$
 $\Lambda\Lambda :: Z\Lambda : \Lambda\Theta$. (π) ἀλλ' ἡ μὲν $\Lambda\Lambda = \Lambda\Theta$, ἡ δὲ $\Lambda\Theta =$
 $\Lambda\Gamma$. (ρ) ἄρα ὡς $Z\Lambda : \Lambda\Theta :: Z\Lambda : \Lambda\Gamma$. ἄρα καὶ κατ'
ἀνατροπὴν λόγῳ ὡς $Z\Lambda : Z\Lambda - \Lambda\Theta :: Z\Lambda : Z\Lambda - \Lambda\Gamma$,
(σ) ἦτοι ὡς $Z\Lambda : Z\Gamma :: Z\Lambda : Z\Gamma$. καὶ ἐπεὶ ὡς $Z\Lambda :$
 $\Lambda\Theta :: Z\Lambda : \Lambda\Gamma$, ὡς δὲ δεικται, καὶ ἐναλλάξ δὲ, ὡς $Z\Lambda :$
 $Z\Lambda :: \Lambda\Theta : \Lambda\Gamma$, (τ) ἄρα καὶ ὡς $\Lambda\Theta : \Lambda\Gamma :: Z\Lambda : Z\Gamma$.
(υ) καὶ ἐπεὶ ἰσογώνια εἰσι τὰ $Z\Theta\Theta$, $Z\Gamma\Theta$ τρίγωνα,
εἰσιν ἄρα καὶ ὡς $Z\Lambda : \Theta\Theta :: Z\Gamma : \Gamma\Theta$. (φ) ἄρα καὶ
ἐναλλάξ ὡς $Z\Lambda : Z\Gamma :: \Theta\Theta : \Gamma\Theta$. (χ) ἄρα καὶ ὡς $\Lambda\Theta :$
 $\Lambda\Gamma :: \Theta\Theta : \Gamma\Theta$. (ψ) ἀλλ' ἡ μὲν $\Theta\Theta = \Lambda\Gamma$, ἡ δὲ $\Gamma\Theta =$
 $\Gamma\Lambda$. ὡς ἄρα $\Lambda\Theta : \Lambda\Gamma :: \Gamma\Theta : \Gamma\Lambda$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ
δειχθήσεσθαι ὅτι, ὡς $\Lambda\Gamma : \Gamma\Theta :: \Gamma\Theta : \Gamma\Lambda$, καὶ ὡς $\Gamma\Theta :$
 $\Gamma\Lambda :: \Gamma\Lambda : \Delta\Gamma$, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως ἐπ' ἀπειρον. αἱ ἄρα
 $\Lambda\Theta$, $\Lambda\Gamma$, $\Gamma\Theta$, $\Gamma\Lambda$, $\Delta\Gamma$, καὶ αἱ ἐφεξῆς ἐπ' ἀπειρον
συνεχῶς ἀνάλογόν εἰσιν.

Ὅτι δὲ ἐπ' ἀπειρον τὰς ὁρὰς προαγαγεῖν δυνατόν,
δείξαις ἔγωγ' ἢ $\chi\theta\omega$ ἢ Π κάθετος τῇ $\Lambda\Gamma$. καὶ ἐπὶ
ἰσογώνια τὰ $Z\Lambda\Lambda$, $Z\Gamma\Gamma$ τρίγωνα, ὡς ἄρα $Z\Lambda : \Lambda\Lambda ::$
 $Z\Gamma : \Gamma\Gamma$. ἀλλ' ἡ $Z\Lambda \supset \Lambda\Lambda$. ἐστὶ γὰρ ἡ $Z\Lambda \supset \Lambda\Gamma$, ἡ δὲ $\Lambda\Gamma =$
 $\Lambda\Lambda$. ἄρα καὶ ἡ $Z\Gamma \supset \Gamma\Gamma$. δυνατόν ἄρα ἀπὸ τῆς $Z\Gamma$ μί-
κρος λαβεῖν ἴσον τῇ $\Gamma\Gamma$, καὶ ἐφεξῆς πάλιν ἄλλο, καὶ
ἕως ἐπ' ἀπειρον. δὴλον ἄρα, ὅτι ἐπ' ἀπειρον προαγα-
γεῖν δυνατόν τὰς τοιαύτας ὁρὰς.

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ὁ ἕκαστος τῆς τοιαύτης συνεχῆς σειρᾶς ὁρῶς ἢ ἐν
τοῖς τῷ Z πίπτει, ἢ ἐκτός, ἢ ἐπ' αὐτῷ τῷ Z . ἀλλὰ
μὴν

- (π) Κατὰ τὴν δ. τῷ ε. (ρ) Ἐκ τῆς κατὰ. (σ) Κατὰ τὴν
συνίπ. τῆς ια. τῷ ο. (τ) Κατὰ τὴν ζ. τῷ ο. (υ) Κατὰ τὴν ο.
τῷ ο. (φ) Κατὰ τὴν δ. τῷ ε. (χ) Κατὰ τὴν ζ. τῷ ο.
(ψ) Κατὰ τὴν ο. τῷ ο.

μὴν ἔτε ἐντὸς πίπτει· καὶ γὰρ εἰ ἐντὸς πεσῆται, ἐκ
ἔσται ὁ ἐχάτος· ἐνέσι γὰρ ἢ ἄλλον μετ' αὐτὸν λαβὼν
ἔτε ἐκτός· ἐγὼ μὲν γὰρ ἀν εἴη ἡ ΖΙ ἐλάττω τῆς
III· ὅπερ ἀδύνατον. δεδικται γὰρ ἡ ΖΙ $\searrow$ III. ἄρα
ἐπ' αὐτῆς τῆς Ι πεσῆται ὁ ἐχάτος ὅρος. ἴση ἀρα ἡ ΔΖ
τῷ κεφαλαιῷ πάντων τῶν ὅρων.

Μὴ ξαναζήτωτε δ', εἰ ἡ ΔΖ πεπερασμένη ἔσται,
ἀπὸρα περιέχει μεγέθη. πάντα γὰρ μέρη αὐτῆς εἰσὶν,
ἀπὸρα μὲν τῷ ἀριθμῷ, ἑμὴν δὲ καὶ τῷ μεγέθει. προ-
ϊόντα γὰρ ἐλαττωῖται.

Ἔτι δ' λέγω, ὅτι ἡ διαφορὰ τῆς πρώτης ὅρας καὶ
τῆς δευτέρας, αὐτὴς τε ὁ πρῶτος ὅρος, καὶ πάντων τῶν
τῶν ἀπὸρα ὅρων κεφάλαιον συνεχῶς εἰσὶν ἀνάλογον.
ἤλθω γὰρ ἡ ΟΧ παρὰ μὴλως τῇ ΔΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ γὰρ τὰ ΔΧΟ, ΔΔΖ τρίγωνα ἰσογώνια εἰσι,
ὡς ἄρα ΔΧ: ΧΟ:: ΔΔ: ΔΖ. (ω) αἴτω ἡ μὲν ΔΧ ἡ
διαφορὰ ἐπὶ τῶν ΔΔ, ΒΟ, εἴτεν τῶν ΑΒ, ΒΓ, (α)
ὅτι τῆς τῆς πρώτης καὶ δευτέρας ὅρας, ἡ δὲ ΧΟ = ΔΓ.
(β) ἡ δὲ ΔΔ = ΑΒ. ἄρα ΔΧ: ΑΒ:: ΑΒ: ΔΖ. ὅπερ
ἦν τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Δύω δοθαισὺν εὐθαισὺν, μέστω ἀνάλογον
προσσευαῖν.

Ἐποταν αἱ δύο δεθῶσαι εὐθαῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ. χ. 18.

Λ 4

ΚΑ-

(α) Κατὰ τὴν δ. τῆς σ. (α) Ἐκ τῆς κατασκευ. (β) Κατὰ τὴν
λδ. τῆς α.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Καίθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΑΒ, ΒΓ. καὶ γεγράφη
ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ
Β ἡ ΒΔ κάθετος τῇ ΑΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΒΔ ἐστὶν ἡ
ζητεμένη. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΔ, ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΔΓ γωνία ἐξθῆ ἐστὶ. (γ) τὸ ἄρα ΑΔΓ τρίγωνον
ἐξθωγώνιον ἐστὶν. ἡ ἄρα ΔΒ κάθετος μίση ἀνάλο-
γός ἐστι τῶν ΑΒ, ΒΓ. (δ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Τῶν ἴσων τε καὶ μίαν μίαν ἴσιν ἔχόντων γωνίαν
παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὡν
παραλληλογράμμων μίαν μίαν ἴσιν ἔχόν-
των γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ
περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκάστα.

Ἔστω ἴσα παραλληλόγραμμα, τὰ ΑΒ, ΒΓ, ἴσας
ἔχοντα τὰς πρὸς τοῦ Β γωνίας. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς
 $ΔΒ : ΒΕ :: ΗΒ : ΒΖ$. καὶ ἐὰν $ΔΕ : ΒΕ :: ΗΒ : ΕΖ$,
λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τοῦ ΒΓ
παραλληλογράμμου. γ. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Καίθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΓ, καὶ δῆλον ὅτι
ἐπ' εὐθείας ἔσονται καὶ αἱ ΖΕ, ΒΗ. (ε) ἐκβληθασῶν δὲ
τῶν ΑΖ, ΓΕ, καὶ συμβαλεσῶν αἰσθηταὶς κατὰ τὸ Θ,
συμπεπληρώσω τὸ Ξ παραλληλόγραμμον.

ΔΕΙ-

(γ) Κατὰ τὴν λκ. τῆ γ. (δ) Κατὰ τὴν α. συίπ. τῆς η. τῆ ε.
(ε) Ἐκ τῆς ιι. πῆ α. δῆλον.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Α'.

Ως X: Ξ:: ΔΒ: ΒΕ. (ζ) ὡσαύτως ὡς P: Ξ::
 ΗΒ: ΒΖ. (η) ἀλλὰ P=X. (θ) ἄρα καὶ ὡς X: Ξ:
 ΗΒ: ΒΖ. ἄρα ὡς ΔΒ: ΒΕ:: ΗΒ: ΒΖ. (ι)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Β'.

Ως ΔΒ: ΒΕ:: ΗΒ: ΒΖ. (κ) ἀλλ' ὡς ΔΒ: ΒΕ::
 X: Ξ. ἄρα ὡς X: Ξ:: ΗΒ: ΒΖ. (λ) ἀλλ' ὡς ΗΒ:
 ΒΖ:: P: Ξ. (μ) ἄρα καὶ ὡς X: Ξ:: P: Ξ. (ν) ἄρα
 X=P. (ξ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ ἴσῳ ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσῳ ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐσὶν ἐκείνα.

Ἐξω ἴσα τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ, ΑΔΖ ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Α γωνίας. λέγω, ὅτι ἐσὶν ὡς ΓΑ: ΑΔ:: ΕΑ: ΑΒ. καὶ ἐὰν ὡς ΓΑ: ΑΔ:: ΕΑ: ΑΒ, ἔσται τὸ τρίγωνον Ξ=X. χ. 20.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κεῖσθαι, ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΑ τῇ ΑΔ. καὶ δῆλον ὅτι ἐπ' εὐθείας ἔσται καὶ ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ. (ο) καὶ ἐπεξεύχθαι ἡ ΒΔ.

Α 5

ΔΕΙ-

- (ζ) Κατὰ τὴν α. τᾷ σ. (η) Κατὰ τὴν αὐτήν. (θ) Ἐξ ὑποθ.
 (ι) Κατὰ τὴν ε. τᾷ ε. (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὴν ε.
 τᾷ ε. (μ) Κατὰ τὴν α. τᾷ σ. (ν) Κατὰ τὴν ε. τᾷ ε. (ξ) Κα-
 τὰ τὴν β. τᾷ ε. (ο) Ἐκ τῆς ιι. τᾷ α.

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ω': Ζ: Ρ:: ΓΑ: ΛΔ. (π) ὡσαύτως ὡς Χ: Ρ::
 ΕΑ: ΑΒ. (ρ) ἀλλὰ $X = Z$. (σ) ἄρα ὡς Ζ: Ρ::
 ΕΑ: ΑΒ. ἄρα ὡς ΓΑ: ΛΔ:: ΕΑ: ΔΕ. (τ)

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ω': ΓΑ: ΛΔ:: ΕΑ: ΑΒ. (υ) ἀλλ' ὡς Ζ: Ρ:: ΓΑ:
 ΛΔ. (φ) ἄρα ὡς Ζ: Ρ:: ΕΑ: ΑΒ. (χ) ἀλλὰ καὶ
 ὡς Χ: Ρ:: ΕΑ: ΑΒ. (ψ) ἄρα ὡς Ζ: Ρ:: Χ: Ρ.
 (ω) ἄρα $Z = X$. (α)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾶσι, τὸ
 ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον
 ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.
 καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον
 ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περι-
 εχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι
 ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐσῶταν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε', Ζ. ἀνά-
 λογον, ὡς ΑΒ: ΓΔ:: Ε': Ζ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν
 ΑΒ, Ζ. περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν
 ΓΔ, Ε' περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἐὰν δὲ ΑΒ. Ζ. = ΓΔ.
 Ε', ἔσται ὡς ΑΒ: ΓΔ:: Ε': Ζ. πίν. III. χ. 21.

Ἡ πρότασις αὕτη πρὸτεθη τε καὶ δεδεικται ἐν τῷ
 πέμπτῳ βιβλίῳ. (β) ἀλλὰ δὴ καὶ ἄλλως δειχθήσεται.
 ΚΑ.

(α) Κατὰ τὴν α. τῆ σ. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (σ) Ἐξ ὑποθ.
 (τ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (υ) Ἐξ ὑποθ. (φ) Κατὰ τὴν α.
 τῆ σ. (χ) Κατὰ τὴν ε. τῆ σ. (ψ) Κατὰ τὴν α. τῆ σ. (ω) Κα-
 τὰ τὴν ε. τῆ ε. (α) Κατὰ τὴν β. τῆ ε. (β) Ἡ ἕκτῃ τῆ ε. καὶ

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἦχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ταῖς ΑΒ, ΓΔ διότι πρὸς ὅρθας αἱ ΑΗ, ΓΘ. καὶ κείθω τῇ μὲν Ζ ἴση ἢ ΑΗ, τῇ δὲ Ε ἴση ἢ ΓΘ. καὶ συμπεπληρώσω τὰ Χ, Ρ παραλληλόγραμμα.

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ὡς ΑΒ : ΓΔ :: Ε : Ζ. (γ) ἀλλ' ἢ μὲν Ε = ΓΘ, ἢ δὲ Ζ = ΑΗ. (δ) ἄρα ὡς ΑΒ : ΓΔ :: ΓΘ : ΑΗ. ἀντιπεκίδασιν ἄρα τῶν Χ, Ρ παραλληλογράμμων αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραί. ἄρα ἴσα εἰσὶ τὰ Χ, Ρ παραλληλόγραμμα. (ε)

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐπεὶ Χ = Ρ ἄρα ἀντιπεκίδασιν αὐτῶν αἱ πλευραί, ἔσεν ἴση ὡς ΑΒ : ΓΔ :: ΓΘ : ΑΗ. (ζ) ἀλλ' ἢ μὲν ΓΘ = Ε, ἢ δὲ ΑΗ = Ζ. (η) ὡς ἄρα ΑΒ : ΓΔ :: Ε : Ζ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐφ' ὅθεν δῆλος ὁ τῆς τῶν τριῶν Μεθόδων, τῆς καὶ γευσῆς Μεθόδου καθεμένης, λόγος. ὅτι γὰρ ὁ τέταρτος τῆς ἀναλογίας ὅρος ἴσος τῷ πληκτῷ τῷ περικύπτοντι ἐκ τῆς γνωμένου ἐκ τῶν μέσων διὰ τῆς πρώτης διαιρεθίντος, δίκνυται ἕτως. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΑΒ : ΓΔ :: Ε : Ζ. ἄρα ΑΒ. Ζ = ΓΔ. Ε. ἐκατέρω δὲ τέταν τῶν ἴσων διὰ τῆς αὐτῆς ΑΒ διαιρεθίντος, ἔσται ΑΒ. Ζ = ΓΔ. Ε. (θ) ἀλλ' ΑΒ = 1. (ι) ἄρα Ζ = ΓΔ. Ε.

$\frac{ΑΒ}{ΑΒ} \quad \frac{ΑΒ}{ΑΒ} \quad \frac{ΑΒ}{ΑΒ}$

ὁ ἄρα τέταρτος ὅρος ὁ Ζ ἴσος τῷ πληκτῷ τῷ περικύπτοντι.

ΠΤΟΝ.

(γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ε) Κατὰ τὴν ιδ. τῆς ε.
 (ζ) Κατὰ τὴν αὐτήν (η) Ἐκ τῆς κατασκευ. (θ) Κατὰ τὴν
 η αξ. (ι) Κατὰ τὸ ζ. αξ. τῆς ι.

πτοντι, διαιρεθέντες τῷ γινομένῳ ἐκ τῶν μέσων ΓΔ. Ε.
διὰ τῷ πρώτῳ ΑΒ.

Ἐκ τῆς προτάσεως δὲ ταύτης καὶ τὸ ἐξῆς τῷ Πτο-
λεμαίῳ θεώρημα δίδνεται.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Παντὸς τετραπλεύρου ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμ-
μένῳ τὸ ἐκ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ὀρθογώνιον,
ΑΙ. ΒΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς δυσὶν ὀρθογωνίοις τοῖς
ἐκ τῶν ἀντικαμμένων τῷ τετραπλεύρῳ πλευ-
ρῶν, ἥτοι τοῖς ΑΒ. ΔΓ + ΑΔ. ΒΓ χ. 22.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰ ἐκ ἔσιν ἡ ΒΔΓ γωνία ἴση τῇ ΓΑΔ, συνεστάτω
ἡ ΒΑΖ ἴση τῇ ΓΑΔ.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΖ, ΑΓΔ, ἡ μὲν γωνία ΑΒΖ =
ΑΓΔ, (κ) ἡ δὲ ΒΑΖ = ΓΑΔ. (λ) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ
ΑΖΒ, ἴση λοιπῇ τῇ ΑΔΓ. (μ) ὡς ἄρα ΑΒ : ΒΖ ::
ΑΓ : ΓΔ. (ν) ἄρα ΑΒ. ΓΔ = ΒΖ. ΑΓ. (ξ) ἐπεὶ δὲ
ἡ γωνία ΒΑΖ = ΕΑΔ, (ο) ἀφαιρεθείσης ἄρα κοινῆς
τῆς ΕΑΖ, ἔσεται ἡ ΒΑΕ, ἔστω ἡ ΒΔΓ = ΖΑΔ. ἐν
τοῖς τριγώνοις ἐν ΑΖΔ, ΑΒΓ, ἡ μὲν γωνία ΑΓΒ =
ΑΔΖ, (π) ἡ δὲ ΖΑΔ = ΒΑΓ, ὡς δίδεικται. καὶ λοι-
πὴ ἄρα ἡ ΑΖΔ ἴση λοιπῇ τῇ ΑΒΓ. (ρ) ὡς ἄρα ΑΔ :
ΔΖ :: ΑΓ : ΓΒ. (σ) ἄρα ΑΔ. ΓΒ = ΔΖ. ΑΓ. προσ-
κείσθω τῷ μὲν ΑΒ. ΓΔ τὸ ΑΔ. ΓΒ, τῷ δὲ ΒΖ. ΑΓ
τὸ ΔΖ. ΑΓ. ἔσεται ἄρα ΑΒ. ΓΔ + ΑΔ. ΓΒ = ΒΖ.
ΑΓ

(κ) Κατὰ τὴν κκ. τῆ γ. (λ) Ἐκ τῆς κατασκ. (μ) Κατὰ τὴν
ζ. συνίπ. τῆς λβ. τῆ κ. (ν) Κατὰ τὴν δ. τῆ σ. (ξ) Κα-
τὰ τὴν τ. τῆ ε. (ο) Ἐκ τῆς κατασκ. (π) Κατὰ τὴν κκ.
τῆ γ. (ρ) Κατὰ τὴν ρθ. συνίπ. (σ) Κατὰ τὴν δ. τῆ ε.

$\Lambda\Gamma + \Delta Z$. $\Lambda\Gamma$. ἀλλὰ BZ . $\Lambda\Gamma + \Delta Z$. $\Lambda\Gamma = BZ + Z\Delta$.
 $\Lambda\Gamma = B\Delta$. $\Lambda\Gamma$. ἄρα $B\Delta$. $\Lambda\Gamma = \Lambda B$. $\Delta\Gamma + \Lambda\Delta$. $B\Gamma$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθείαι ἀνάλογον ᾶσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ. καὶ αἱ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἐσονται.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ , ὡς $A : B :: B : \Gamma$. λέγω ὅτι $A, \Gamma = B, B$. καὶ ἐὰν $A, \Gamma = B, B$, ἔσται ὡς $A : B :: B : \Gamma$. χ . 23.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκείθω τὴν εὐθεῖαν ἢ Δ ἴση τῇ B .

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ' Α'.

Ὡς $A : B :: B : \Gamma$. (τ) ἀλλὰ $B = \Delta$. (υ) ἄρα ὡς $A : B :: \Delta : \Gamma$. ἄρα $A, \Gamma = B, \Delta$. (φ) καὶ ἐπεὶ $B = \Delta$, ἄρα καὶ $A, \Gamma = B, B$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ' Β'.

Ἐπεὶ $A, \Gamma = B, B$, ἔστι δὲ $B = \Delta$. ἄρα $A, \Gamma = B, \Delta$. ἄρα ὡς $A : B :: \Delta : \Gamma$. (χ) ἀλλὰ $B = \Delta$. ἄρα καὶ ὡς $A : B :: B : \Gamma$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἔστω

(τ) Ἐξ ὑποθ. (υ) Ἐκ τῆς κατσκευ. (φ) Κατὰ τὴν σ. τῆ ε.
 (χ) Κατὰ τὴν αὐτήν.

K A T A L O G

513137

313513WH3

•OIII

(ψ) Ex the κατὰ (ω) Ex the κατὰ (α) Ex the κατὰ (β) κατὰ τὴν δ. τὴν ε. (γ) κατὰ τὴν ιβ. τὴν ι. (δ) κατὰ τὴν κ. οὐδὲν ε.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα καὶ ἀνίστα πρὸς ἀλλήλα
ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐς τῶν ὁμολόγων πλευ-
ρῶν.

Ἔστω ὅμοια καὶ ἀνίστα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσην
ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε, ὡς δὲ
ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς
τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΓ
πρὸς τὴν ΕΖ. χ . 25.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εκλήψθω τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΗ, ὥστε
εἶναι ὡς ΒΓ : ΕΖ :: ΕΖ : ΒΗ. καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΗΑ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ, (ε) ἄρα καὶ ἐναλ-
λάξ, ὡς ΑΒ : ΔΕ :: ΒΓ : ΕΖ. (ζ) ἀλλ' ὡς ΒΓ : ΕΖ ::
ΕΖ : ΒΗ. (η) ἄρα καὶ ὡς ΑΒ : ΔΕ :: ΕΖ : ΒΗ. (θ)
τὸ ἄρα ΑΒΗ τρίγωνον ἴσον τῷ ΔΕΖ. (ι) καὶ ἐπεὶ ὡς
ΒΓ : ΕΖ :: ΕΖ : ΒΗ. (κ) ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ
διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΖ. (λ)
ἀλλ' ὡς ΒΓ πρὸς ΒΗ, ἔτως ΑΒΓ τρίγωνον, πρὸς ΑΒΗ
τρίγωνον. ἄρα καὶ ΑΒΓ τρίγωνον, πρὸς ΑΒΗ τρίγωνον
διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλ-
λά τὸ ΑΒΗ = ΔΕΖ, ὡς δίδεται. τὸ ἄρα ΑΒΓ τρί-
γωνον, πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει,
ἥπερ ἡ ΒΓ, πρὸς τὴν ΕΖ. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟ.

- (ι) Ἐξ ὑποθ. (ζ) Κατὰ τὴν ζ. τῆ ε. (η) Ἐκ τῆς κατασκευῆς.
(θ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (ι) Κατὰ τὴν ι. τῆ σ. (κ) Ἐκ τῆς
κατασκευῆς. (λ) Κατὰ τὸ ε. πόρ. τὸ μιτὰ τὴν η. τῆ ε.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμολογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν.

Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ. λέγω Α', ὅτι ἐπιζευχθεῖσάν τῶν ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ, διαιρεῖνται εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα, τὰ Ρ, Σ, καὶ Ξ, Τ, καὶ Ψ, Φ ἴσα τὸ πλῆθος Β', ὅτι ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. Γ', ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον, πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμολογος πλευρὰ ΔΕ, πρὸς τὴν ὁμόλογον ΖΗ. ρ. 26.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ = ΖΗΘ, καὶ ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΖΗ : ΗΘ. (μ) τὸ ἄρα Ρ τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ Σ. (ν) ἄρα καὶ ὁμοιον. (ξ) ἡ ἄρα γωνία ΒΓΔ = ΗΘΚ. ἀλλ' ὅλη ἡ ΒΓΔ = ΗΘΚ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΔ λοιπὴ τῇ ΖΘΚ ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ Ψ τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ Φ τριγώνῳ, καὶ ἐπομένως ὁμοιον. καὶ γωνία ἡ ΑΔΕ = ΖΚΛ. ἀλλ' ὅλη ἡ ΓΔΕ ἴση ὅλη τῇ ΘΚΛ. (ο) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΔΑ ἴση λοιπὴ τῇ ΘΚΖ. ἐπεὶ ἔν τῶν Ξ, Τ τριγώνων ἡ μὲν γωνία ΑΓΔ = ΖΘΚ, ἡ δὲ ΓΔΑ = ΘΚΖ, ὡς δεικνύται, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΑΔ λοιπὴ τῇ ΘΖΚ ἴση.

ἴσο-

(μ) Κατὰ τὸν α. ὁρισ. τῆ σ. (ν) Κατὰ τὴν σ. τῆ σ. (ξ) Κατὰ τὴν δ. τῆ σ. (ο) Κατὰ τὸν ἀρ. ὁρισ.

ἰσογώνιον ἄρα τῷ Ξ τρίγωνον τῷ T τριγώνῳ. ἄρα καὶ ὅμοιον. ἔκθ' τὸ μὲν P τρίγωνον ὅμοιον τῷ Σ , τὸ δὲ Ξ τῷ T , τὸ δὲ Ψ τῷ Φ . τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα $ABΓΔΕ$, $ΖΗΘΚΛ$ εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διήρηται, καὶ ἴσα τὸ πλῆθος.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ P τρίγωνον πρὸς τὸ Σ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $ΑΓ$, πρὸς τὴν $ΖΘ$. ἀλλὰ καὶ τὸ Ξ πρὸς τὸ T διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $ΑΓ$, πρὸς τὴν $ΖΘ$. (π) ἄρα ὡς $P : \Sigma :: \Xi : T$. (ρ) καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς $\Xi : T :: \Psi : \Phi$. ἄρα ὡς $P : \Sigma :: \Xi : T :: \Psi : \Phi$. ἄρα καὶ ὡς $P + \Xi + \Psi : \Sigma + T + \Phi :: P : \Sigma$. (σ) ἀλλὰ τὸ μὲν $P + \Xi + \Psi$ ἴσταν τῷ $ABΓΔΕ$ πολυγώνῳ, τὸ δὲ $\Sigma + T + \Phi$ ἴσταν τῷ $ΖΗΘΚΛ$ πολυγώνῳ. ὡς ἄρα $ABΓΔΕ : ΖΗΘΚΛ :: P : \Sigma$.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Γ'.

Τὸ P τρίγωνον πρὸς τὸ Σ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $ΑΒ$, πρὸς τὴν $ΖΗ$. (τ) ἀλλ' ὡς $P : \Sigma :: ABΓΔΕ : ΖΗΘΚΛ$. (υ) ἄρα καὶ τὸ $ABΓΔΕ$ πολύγωνον, πρὸς τὸ $ΖΗΘΚΛ$ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $ΑΒ$, πρὸς τὴν $ΖΗ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Ἔστω ἐκάτερον τῶν A, B εὐθυγράμμων τῷ Γ ὅμοιον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ A ὁμοίον ἐστὶ τῷ B . χ . 27.

M

/

ΔΕΙ-

(π) Κατὰ τὴν $\iota\delta$. $\tau\alpha$ ϵ . (ρ) Κατὰ τὸ ζ . $\theta\epsilon\omega\rho$. τὸ μετὰ τὸ α βιβλ. (σ) Κατὰ τὴν θ . $\tau\eta$ α . (τ) Κατὰ τὴν $\iota\delta$. $\tau\alpha$ ϵ . (υ) Κατὰ τὸ β . $\mu\acute{\iota}\rho$. τῆς δὲ τῆς προτ.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ εἶναι ὅμοιον τὸ Λ τῷ Γ , ἰσογώνιον τε εἶναι αὐτῶν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιον εἶναι τὸ B τῷ Γ , ἰσογώνιον τε εἶναι αὐτῶν καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ἐκότερον ἄρα τῶν Λ , B τῷ Γ ἰσογώνιον τε εἶναι, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ἄρα καὶ τὸ Λ τῷ B ἰσογώνιον τε εἶναι, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα εἶναι τὸ Λ τῷ B .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ΄.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὣσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται. καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἦ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$, ὡς $AB : \Gamma\Delta :: EZ : H\Theta$. καὶ ἀναγεγράφωσαν ἀπὸ μὲν τῶν AB , $\Gamma\Delta$ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ P , Σ ἀπὸ δὲ τῶν EZ , $H\Theta$ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ T , Υ . λέγω, ὅτι εἶναι, ὡς $P : \Sigma :: T : \Upsilon$. εἰάν δὲ ὡς $P : \Sigma :: T : \Upsilon$, ὅσαι καὶ ὡς $AB : \Gamma\Delta :: EZ : H\Theta$. χ . 28.

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐπεὶ τὸ P ὅμοιον εἶναι τῷ Σ , ἄρα τὸ P πρὸς τὸ Σ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ ἢ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. (ψ) διὰ τὰ αὐτὰ δὲ τὸ T πρὸς τὸ Υ διπλασίονα λόγον

λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. ἀλλ' ὡς ΑΒ:
ΓΔ:: ΕΖ: ΗΘ. (χ) ἄρα καὶ ὡς Ρ: Σ:: Τ: Υ. (ψ)

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Β'.

Τὸ Ρ πρὸς τὸ Σ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ
ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, (ω) ὡσαύτως καὶ τὸ Τ πρὸς τὸ Υ
διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. ἀλλ'
ὡς Ρ: Σ:: Τ: Υ. (α) ἄρα καὶ ὡς ΑΒ: ΓΔ:: ΕΖ:
ΗΘ. (β)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἀλ-
ληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν
πλευρῶν.

Ἰσὼ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ Χ, Ρ ἴσῃ ἔχοι-
τα τὴν ΕΓΔ γωνίαν τῇ ΕΓΗ. λέγω, ὅτι τὸ Χ πρὸς
τὸ Ρ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν ὄν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν
ΓΗ, καὶ τῶν ὄν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. χ. 29.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Καίθω, ὥστε ἐπ' ἐυθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ. ἐπ'
ἐυθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ, τῇ ΓΕ. (γ) καὶ συμπε-
πληρώσω τὸ παραλληλόγραμμον Ψ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὰ Χ, Ψ, Ρ τρία εἰσὶ μεγέθη, τὸ πρῶτον ἄρα
Χ πρὸς τὸ τρίτον Ρ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν ὄν ἔχει
πρῶτον Χ πρὸς δεύτερον Ψ, καὶ ἐκ τῶν ὄν ἔχει δεύτερον Ψ
πρὸς τρίτον Ρ. (δ) ἀλλ' ὡς Χ: Ψ:: ΕΓ: ΓΗ, καὶ ὡς Ψ:
Ρ:: ΔΓ: ΓΕ. (ε) ἄρα τὸ Χ πρὸς τὸ Ρ λόγον ἔχει συγ-

Μ 2

καί.

(χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὸ ζ. διαρ. τὸ μετὰ τὸ ε. βιβλ.
(ω) Κατὰ τὴν η. καὶ σ. (α) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὸ ἀρῆμα
διαρ. (γ) Ἐκ τῆς ιε. τῇ α. δῆλον (δ) Κατὰ τὸ κ. πόρ.
τὸ μετὰ τὴν η. καὶ ε. (ε) Κατὰ τὴν α. τῇ ε.

κείμενον ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΒΓ : ΓΗ, καὶ ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΔΓ : ΓΕ.
ὃ εἶδει δι᾿ ἑαυτοῦ.

ΣΤ Ν Ε Π Ε Ι Α.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρέπω, ἐπ' εὐθείας καίμενων τῶν ΔΓ, ΓΒ
πλευρῶν τῶν Χ, Ρ τριγώνων, τῶν τὰς περὶ τὸ Γ γωνίας
ἴσας ἔχόντων, καὶ ἐπιβεβηθείσης τῆς ΔΕ, διαχθήσεται,
ὅτι τὸ Χ τρίγωνον πρὸς τὸ Ρ τρίγωνον λόγον ἔχει συγκέ-
μενον ἐκ τῆς ὅν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, καὶ ἐκ τῆς ὅν ἔχει
ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. χ. 30.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Τὰ παραλληλόγραμμα καὶ τρίγωνα τὰ
ἀνίστα ἔχοντα τὰ ὕψη καὶ τὰς βάσεις ἐν λό-
γῳ συγκαίμενῳ εἰσὶν ἐκ τε τῆς λόγου ὅν ἔχει
ὕψος πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ τῆς ὅν ἔχει βάσις
πρὸς βάσιν.

Ἐξω παραλληλόγραμμα τὰ Χ, Ρ ἀνίστα ἔχοντα
ὕψη, τὰ ΒΙ, ΖΚ, καὶ βάσεις τὰς ΑΔ, ΕΘ. λέγω,
ὅτι τὸ Χ πρὸς τὸ Ρ λόγον ἔχει συγκαίμενον ἐκ τῆς ὅν
ἔχει ΒΙ : ΖΚ, καὶ ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΑΔ : ΕΘ. χ. 31.

Δ Κ Ι Ξ Ι Σ.

Τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἡγεμένων, εἴτεν ΒΙ. ΑΔ, πρὸς
τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἐπομένων, ἥτοι ΖΚ. ΕΘ, λόγον ἔχει
συγκαίμενον ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΒΙ : ΖΚ, καὶ ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΑΔ :
ΕΘ. (ζ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΙ. ΑΔ = Χ, τὸ δὲ ΖΚ. ΕΘ =
Ρ. (η) καὶ Χ ἄρα πρὸς Ρ λόγον ἔχει συγκαίμενον ἐκ
τῆς ὅν ἔχει ΒΙ : ΖΚ, καὶ ἐκ τῆς ὅν ἔχει ΑΔ : ΕΘ.
ὅπερ εἰς, ὅτι Χ : Ρ :: ΒΙ. ΑΔ : ΖΚ. ΕΘ.

καὶ

(ζ) Κατὰ τὸν ζ. ὅρισμ. τῆς α. (η) Ὅρα τὸ χῆλ. τὸ μετὰ τῇ
ζ. ὅρισμ. τῆς α.

Καὶ Φανερὸν, ὅτι εἰάν τὰ τε ὕψη καὶ αἱ βάσεις ἴσαι ᾖ, ἴσαι καὶ τὰ παραλληλόγραμμα. εἰάν δὲ τὰ ὕψη ἴσαι ᾖ, τὰ παραλληλόγραμμα ἀνάλογον εἰσὶ ταῖς βάσεσιν, εἶπεν ὡς $X : P :: \Lambda\Delta : \Gamma\Theta$. εἰάν δὲ αἱ βάσεις ἴσαι, ἀνάλογον τοῖς ὕψεσι, τετέστιν ὡς $X : P :: \text{BI} : \text{ZK}$.

Ἐπεὶ δὲ τὰ τρίγωνα ἡμίσεά εἰσι τῶν παραλληλογράμμων τῶν τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τὰς αὐτὰς βάσεις ἔχόντων, (θ) καὶ τὰ τρίγωνα ἄρα τὰ ἀνίστα ἔχοντα τὰ ὕψη καὶ τὰς βάσεις ἐν λόγῳ συγκοιμένῳ εἰσὶ τῶν ὕψων καὶ τῶν βάσεων. εἰάν δὲ τὰ ὕψη ἴσα ἔχη, ἀνάλογόν ἐστι ταῖς βάσεσιν· εἰάν δὲ τὰς βάσεις ἴσας, ἀνάλογον τοῖς ὕψεσιν· εἰάν δὲ τὰ τε ὕψη καὶ τὰς βάσεις ἴσας, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ τὰ τρίγωνα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὁμοιά ἐστι τῶν τε ὅλων καὶ ἀλλήλοις.

Ἐξω παραλληλόγραμμον τὸ $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ $\Lambda\Gamma$, περὶ δὲ τὴν $\Lambda\Gamma$ παραλληλόγραμμα τὰ EH , ΘK . λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν EH , ΘK ὁμοίον ἐστι τῷ ὅλῳ $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$, καὶ ἀλλήλοις. χ . 32.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς παραλληλογράμμοις ΘK , $\text{B}\Delta$, ἡ μὲν γωνία $\text{Z}\Theta\text{I} = \Lambda\text{B}\Gamma$, ἡ δὲ $\text{ZK}\Gamma = \Lambda\Delta\Gamma$, (ι) ἡ δὲ πρὸς τῷ Γ κοινὴ. καὶ ἡ $\text{KZ}\Theta$ ἄρα ἴση τῇ $\Delta\Lambda\text{B}$. (κ) ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΘK τῷ $\text{B}\Delta$. καὶ ἐπεὶ τὰ τρίγωνα ΓKZ , $\Gamma\Delta\Lambda$ ἰσογώνιά εἰσιν, ὡς ἄρα $\Gamma\text{K} : \text{KZ} :: \Gamma\Delta : \Delta\Lambda$. (λ) τῶν

M 3

ἀρα

(θ) Κατὰ τὴν μα. τῇ α. (ι) Κατὰ τὴν κθ. τῇ α. (κ) Ὅρα τὴν ιδ. συνίπ. τὴν μετὰ τὴν λβ. τῇ α. (λ) Κατὰ τὴν δ. τῇ ε.

ἄρα ΘΚ, ΒΔ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραί. ὅμοιον ἄρα τὸ ΘΚ τῷ ΒΔ. (μ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΗ ὅμοιον ἔστι τῷ ΒΔ. τὰ ἄρα ΘΚ, ΕΗ καὶ ἀκμήλαι εἰσὶν ὅμοιαι. (ν)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Τῷ δοθέντι ἐυθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐυθυγράμμου, ὃ δὴ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ· ὃ δὲ ἴσον, τὸ Δ. πρὸς τοῦ. ζ. 33.

ΚΑΤΑΚΕΥΤΗ.

Παραβεβλήθω παρὰ μὲν τὴν ΓΓ, τῷ ΑΒΓ ἐυθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν ΓΕ, τὸ ΓΜ ἴσον τῷ Δ ἐν γωνίᾳ τῇ ΖΓΕ ἴσον τῇ ΓΕΔ. (ξ) καὶ δηλοῖ, ὅτι ἐκ ἐκείνης εἰσὶν ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΑΕ τῇ ΕΜ. (σ) καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μίσση ἀνάλογον ἡ ΗΘ. (π) καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τὸ ΗΚΘ ἐυθυγράμμου ὅμοιον τῷ ΑΒΓ. (ρ) λέγω, ὅτι τὸ ΗΚΘ ἴσον τῷ δοθέντι Δ.

ΛΕΙΠΕΙΣ.

Ὡς ΖΓ: ΗΘ :: ΗΘ: ΓΒ. (σ) ἡ ἄρα ΖΓ πρὸς τὴν ΓΒ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΒ. (τ) ἀλλὰ καὶ τὸ ΗΚΘ πρὸς τὸ ΓΑΒ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΒ. (υ) ὡς ἄρα ΗΚΘ: ΓΑΒ :: ΖΓ: ΓΒ. (φ) ἀλλ' ὡς ΖΓ: ΓΒ :: ΓΜ: ΒΕ. (χ) ἄρα καὶ ὡς ΗΚΘ: ΓΑΒ :: ΓΜ: ΒΕ. (ψ) ἀλλὰ τὸ

ΓΑΒ

- (μ) Κατὰ τὸν α. ὁρισμ. τῆς γ. (ν) Κατὰ τὴν κμ. τῆς γ. (ξ) Κατὰ τὴν μι. τῆς α. (ο) Ἐκ τῆς ιδ. τῆς α. (π) Κατὰ τὴν ιγ. τῆς γ. (ρ) Κατὰ τὴν ιη. τῆς γ. (σ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (τ) Κατὰ τὸ β. πρὸς τὸ μετὰ τὴν δ. τῆς α. (υ) Κατὰ τὴν ι. ἢ κ. τῆς α. (φ) Κατὰ τὸ ζ. διωρ. τὸ μετὰ τὸ α. βιβ. (χ) Κατὰ τὴν ι. τῆς α. (ψ) Κατὰ τὴν α. τῆς α.

$\Gamma\Lambda\text{B} = \text{RE}$ (ω) ἄρα καὶ τὸ $\text{HK}\Theta = \Gamma\text{M}$. ἀλλὰ τὸ $\Gamma\text{M} = \Delta$. (α) ἄρα καὶ τὸ $\text{HK}\Theta = \Delta$. ἀλλὰ τὸ $\text{HK}\Theta$ ὅμοιον τῷ $\Lambda\text{B}\Gamma$. (β) τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστὶ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΣ'.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαρεθῇ ὁμοίον τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐστὶ τῷ ὅλῳ.

Ἀπὸ παραλληλογράμμου τῷ $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον ἀφαρεθῶ τὸ EZ ὁμοίον τῷ $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, τὴν $\Lambda\text{B}\Gamma$. λέγω, ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐστὶ τὸ $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$ τῷ EZ . μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, εἶπω τῷ μὲν EZ διάμετρος ἢ BH , τῷ δὲ $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$ ἢ $\text{E}\Theta\Delta$. χ . 34.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ἡ HIZ παρὰλληλὸς ἐστὶ τῇ $\Delta\Gamma$, ἰσογώνιά ἐστι τὰ $\text{B}\Gamma\Delta$, $\text{E}\text{Z}\Theta$ τρίγωνα. ὡς ἄρα $\text{B}\Gamma : \Gamma\Delta :: \text{B}\text{Z} : \text{Z}\Theta$. (γ) ἀλλ' ὡς $\text{B}\Gamma : \Gamma\Delta :: \text{E}\text{Z} : \text{Z}\text{H}$, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν παραλληλογράμμων $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$, EZ . ὡς ἄρα $\text{B}\text{Z} : \text{Z}\Theta :: \text{B}\text{Z} : \text{Z}\text{H}$. (δ) ἢ ἄρα $\text{Z}\Theta = \text{Z}\text{H}$. (ϵ) τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον. ἔκ ἄρα περὶ ἄλλην διάμετρον ἐστὶ τὸ $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$. ἄρα περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐστὶ τῷ EZ .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν ἐυθείαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἑλλει-

Μ 4

πόν-

(ω) Ἐκ τῆς κατὰσκ. (κ) Ἐκ τῆς κατὰσκ. (β) Ὁμοίως. (γ) Κατὰ τὴν δ, τῷ σ. (δ) Κατὰ τὴν ε, τῷ ι. (ε) Κατὰ τὴν β, τῷ ι.

πόντων ἴδουσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως καμμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῃ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὃν τῷ ἐλλείματι.

Ἔγω ἰσθῆαι ἢ ΑΒ, καὶ τετμήθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβιβλήθω παρὰ τὴν ΑΒ ἰσθῆαι τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον, ἰλλῆπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΔΒ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως καμμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφέντι τῆς ΑΒ, τιτῆσι τῆς ΓΒ. λέγω, ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἰλλαιπόντων εἶδουσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως καμμένοις τῷ ΔΒ, μέγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. κ. 35.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Παραβιβλήθω παρὰ τὴν ΑΒ ἰσθῆαι τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, ἰλλῆπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΖΒ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως καμμένῳ τῷ ΔΒ, καὶ ἔχέτω πρῶτον τὸ ΑΖ τὴν ΑΚ βάσιν μείζονα τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, αἵταν τῆς ΑΓ. λέγω, ὅτι μείζον ἐστι τὸ ΑΔ τῷ ΑΖ, ἐκβιβλήθω γὰρ ἢ ΚΖ, καὶ συμπίπτειτω τῷ ΔΕ κατὰ τὸ Ι.

ΛΕΙΨΙΣ.

Τὰ ΔΒ, ΖΒ παραλληλόγραμμοι παρὰ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετρον τὴν ΔΒ. (ζ) τὸ ἄρα ΓΖ = ΖΕ. (η) κοινὸν προσείθω τὸ ΖΒ, τὸ ἄρα ΓΘ = ΚΕ. ἀλλὰ τὸ ΓΘ = ΓΗ. (θ) ἄρα ΓΗ = ΚΕ. κοινὸν προσείθω τὸ ΓΖ, τὸ ἄρα ΑΖ ἴσον τῷ γνώμονι ΑΜΝ. ἀλλὰ τὸ ΒΔ > ΑΜΝ. ἄρα τὸ ΒΔ > ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΒΔ = ΑΔ. (ι) τὸ ἄρα ΑΔ > ΑΖ.
Ἄλλα

(ζ) Ἐν τῇ κατασκευῇ. (η) Κατὰ τὴν μγ. τῷ α. (θ) Κατὰ τὴν λγ. τῷ α. (ι) Κατὰ τὴν αὐτὴν.

ΛΕΙΠΕΙΝ.

"Εστω ἡ μὲν δοθῆσα ἰσοϋσα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν ἰσογόμεμον, ὡς δὲ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβιβάζειν, τὸ Γ, μὴ μῖζον ὅν τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβιβάζομεν, ὁμοίαν ὄνταν τῶν ἐκτεταμέτων ὡς δὲ δὲ ὁμοίον ἰσχύειν, τὸ Δ. γ. 37.

Κ Α Τ Α Ξ Κ Ε Υ Η.

Τετμήθω ἡ ΑΒ διχῶς κατὰ τὸ Γ. καὶ ἀνεγχεσθῶ θω ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΑΖ, παρακτινόμενον ὁμοίον καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ δοθέντι Δ. (μ) καὶ συμπληρώσω θω τὸ ΑΘ παρακτινόμενον, τὸ δὲ ΑΖ, ἥτοι ἴσον ἔστω

Μ 5

(η) Κατὰ τὴν αὐτήν. (λ) Κατὰ τὴν μγ. τῷ κ. (μ) Κατὰ τὴν ιη. τῷ ε.

Ἀλλὰ δὴ εἴπω το ἈΖ. Βέβαιον τὴν ΔΚ λατρεῖν
 πρὸς ΔΓ. ἢ πρὸς τὸ ΔΘ $\equiv$ ΔΗ, (κ) ἢ πρὸς τὸ ΔΗ $\supset$
 ΜΗ, ἢ πρὸς τὸ ΔΘ $\supset$ ΜΗ. ἀλλὰ τὸ ΔΘ $\equiv$ ΔΚ.
 (λ) ἢ πρὸς κ, τὸ ΔΚ $\supset$ ΜΗ. καὶ πρὸς τὸ ΜΑ
 εἴπω τὸ ΔΔ $\supset$ ΑΖ. ἢ πρὸς τὸν δαξίον. κ. 36.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΗ΄.

Περὶ τὴν δοξασάν ἐνθεῖσαν τῷ δοθέντι ἐν-
 τυγνύμεν ἴσον παραλλήλογραμμον πα-
 ραβαλεῖν, εἰδικόνον τοῦ παραλλήλογράμ-
 μου ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι. δεῖ δὴ τὸ διόκει-
 νον ἐντυγνύμενον, ὃ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν,
 μὴ μεῖζον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παρα-
 βαλλομένῳ, ὁμοίῳ ὄντων τῶν εἰδικημάτων,
 τὰ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, ἢ ὃ δα ὁμοίον ἐλ-

ἐστὶ τῷ Γ, ἢ μᾶλλον αὐτῷ, διὰ τὸν ὀρισμόν. εἰ μὲν ἔν
 ἴσον, γεγενηὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθεῖν. παραβέβληται γάρ
 παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυ-
 γράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΖ, ἑλλεί-
 πον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΕΘ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.
 εἰ δ' ἐκ ἴσον, μᾶλλον ἐστὶ τὸ ΑΖ τῷ Γ. εὐρεθήτω ἔν ἡ ὑπερ-
 χῇ, καὶ ἦν τὸ ΑΖ ὑπερέχει τὸ Γ. (ν) καὶ αὐτῇ μὲν
 τῇ ὑπερχῇ ἴσον, τῷ δὲ ΕΘ ὁμοίον ἀναγεγραφθῶ παρα-
 λληλόγραμμον τὸ ΚΛ, κοινὴν ἔχον τὴν ΕΛΘ γωνίαν τῷ
 ΕΘ. (ξ) καὶ διήχθω ἡ μὲν ΚΙ ἐπὶ τὰ Μ, Ν σημεῖα,
 ἡ δὲ ΛΙ ἐπὶ τὸ Ο. λέγω, ὅτι τὸ ΑΙ παραλληλόγραμ-
 μον ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ

Τὰ ΚΛ, ΕΘ παραλληλόγραμμα περὶ τὴν αὐτὴν
 εἰσὶ διάμετρον τὴν ΖΙΒ. (ο) τὸ ἄρα ΕΙ = ΙΘ. (π) κοινὴν
 προσκείσθω τὸ ΟΝ. ἄρα τὸ ΕΝ = ΟΘ. ἀλλὰ τὸ ΕΝ = ΕΜ.
 (ρ) τὸ ἄρα ΕΜ = ΟΘ. κοινὴν προσκείσθω τὸ ΕΙ. τὸ ἄρα
 ΑΙ ἴσον τῷ ΡΤΣ γινώμενι. ἀλλ' ὁ ΡΤΣ = Γ. ὑπερέχει γὰρ
 τὸ ΕΘ τὸ Γ κατὰ τὸ ΚΛ, εἰ δ' ΡΤΣ ἐλλείπει τῷ ἴσῳ
 εἶναι τῷ ΕΘ, κατὰ τὸ ΚΛ τὸ ἄρα ΑΙ = Γ. ἐπὶ δὲ
 τὸ ΟΝ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τὸ δὲ ΕΘ τῷ Δ, τὸ ἄρα
 ΟΝ ὁμοίον τῷ Δ. (σ) τὸ ἄρα ΑΙ παρὰ τὴν δοθεῖσαν
 εὐθεῖαν ΑΒ παραβέβληται, ἴσον τῷ δοθέντι εὐθυγράμ-
 μῳ Γ, καὶ ἐλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΟΝ,
 ὁμοίῳ τῷ δοθέντι Δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ΄.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐ-
 θυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παρα-
 βα-

(ν) Κατὰ τὴν συνίπ. τὴν μετὰ τὴν με. τῷ α. (ξ) Κατὰ τὴν
 με. τῷ ε. (ο) Ἐκ τῆς κατασκ. (π) Κατὰ τὴν μυ. τῷ α.
 (ρ) Κατὰ τὴν λ.γ. τῷ α. (σ) Κατὰ τὴν κα. τῷ ε.

βαλεῖν, ὑπερβάλλον εἶδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἔστω ἡ μὲν δεδοῖσα εὐθεῖα, ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐ-
 γράμμον, ἃ δὲ ἴσον παραβαλεῖν, τὸ Γ· ὧ δὲ δεῖ
 ἔμειν ὑπερβαλεῖν, τὸ Δ. χ. 38.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε. καὶ ἀναγεγράφ-
 θω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πα-
 ραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ, καὶ συναμφοτέροις μὲν τοῖς
 ΒΖ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ
 αὐτὸ συνεσάτω, τὸ ΚΜ, κοινὴν ἔχον τῷ ΒΖ τὴν πρὸς
 τὸ Ζ γωνίαν. καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΒ ἐπὶ τὰ Η,
 Θ τμήσας. καὶ συμπληρώσθω τὸ ΑΘ παραλληλόγραμ-
 μον. λέγω, ὅτι τὸ ΑΝ ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὰ ΕΛ, ΚΜ περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετ-
 ρον τὴν ΖΝ, τὸ ἄρα ΚΒ = ΒΜ. (τ) ἀλλὰ τὸ ΚΒ =
 ΚΑ. (υ) τὸ ἄρα ΚΑ = ΒΜ. κοινὴν προσκείσθω τὸ ΚΒ.
 τὸ ἄρα ΑΘ = ΚΒ + ΒΜ. κοινὴν προσκείσθω τὸ ΘΗ.
 τὸ ἄρα ΑΝ = ΡΣΤ γινώμενι. ἐπεὶ δὲ τὸ ΚΜ = ΒΖ +
 Γ, (Φ) κοινὸν ἄρα ἀφαιρεθέντος τῷ ΒΖ, ἔσται ὁ ΡΣΤ = Γ.
 ἄρα καὶ τὸ ΑΝ = Γ. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΘΗ ὁμοίον ἐστὶ
 τῷ ΚΜ, τὸ δὲ ΚΜ τῷ Δ, (χ) καὶ τὸ ΘΗ ἄρα ὅμοιον
 τῷ Δ. παρὰ τὴν δεδοῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ
 δοθέντι εὐθυγράμμῳ, τῷ Γ, ἴσον παραλληλόγραμμον
 παραβέβληται τὸ ΑΝ, ὑπερβάλλον εἶδει παραλληλο-
 γράμμῳ, τῷ ΘΗ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι Δ.

ΠΡΟ-

(τ) Κατὰ τὴν μυ. τῇ α. (υ) Κατὰ τὴν λγ. τῇ α. (Φ) Ὡς
 τῆς κατασκευ. (χ) Ἐκ τῆς κατασκευ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένῳ ἄκρῳ καὶ μέσῳ λόγον τεμεῖν.

Ἐξω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη, ἡ ΑΒ. χ. 39.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης ΑΒ καὶ τῆς ἐτέρᾳ τῶν τμημάτων ΒΕ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τμήματος ΑΕ τετραγώνου. (ψ) λέγω, ὅτι γέγονε τὸ ἐπιταχθέν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὸ ΑΒ. ΒΕ = ΑΕ. ΑΕ, (ω) ὡς ἄρα ΑΒ : ΑΕ :: ΑΕ : ΒΕ. (α) ἡ δοθεῖσα ἄρα ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται. (β)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΑ'.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τιῶ ὀρθιῶ γωνίαν ὑποτεινέσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τιῶ ὀρθιῶ γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἵδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις.

Ἐξω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ΒΑΓ γωνίαν. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἵδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις, τετίξιν ὅτι $\Gamma = \Xi + \chi$. χ. 40.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἡχθω ἡ ΑΔ πρὸς ὀρθᾶς τῇ ΒΓ.

ΔΕΙ.

(ψ) Κατὰ τὴν ια. τῇ β. (ω) Ἐκ τῆς κατασκευ. (α) Κατὰ τὴν ε. τῇ ι. (β) Κατὰ τὴν γ. ὁρισμ. τῇ ε.

ΔΕΙΞΙΣ,

Ὡς ΓΒ : ΒΑ :: ΒΑ : ΒΔ. (γ) ἢ ἄρα ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. (δ) ἀλλὰ καὶ τὸ Ρ πρὸς τὸ Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. (ε) ὡς ἄρα Ρ : Ξ :: ΓΒ : ΒΑ. (ζ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς Ρ : Χ :: ΓΒ : ΓΔ. ἄρα καὶ ὡς Ρ : Ξ + Χ :: ΓΒ : ΒΔ + ΓΔ. (η) ἀλλὰ ἢ ΓΒ = ΒΔ + ΓΔ. ἄρα καὶ τὸ Ρ = Ξ + Χ. ἔπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΒ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥς τε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπὰ τῶν τριγάνων πλευρὰ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ταῖς ΔΓ, ΔΕ, ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς ΑΒ : ΑΓ :: ΔΓ : ΔΕ. καὶ συντεθίντα κατὰ μίαν γωνίαν, τὴν πρὸς τῷ Γ, ἐχέτωσαν τὴν μὲν ΑΒ παραλλήλον τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ. λέγω, ὅτι ἐπ' εὐθείας εἰσὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. *χ. 41.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία Α = Χ. (θ) ἀλλὰ καὶ ἡ Δ = Χ. (ι) ἄρα ἡ Α = Δ. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΒΑ : ΑΓ :: ΔΓ : ΔΕ. (κ)
ισο-

(γ) Κατὰ τὴν α συνίπ. τὴν μετὰ τὴν η. τῇ σ. (δ) Κατὰ τὸ β. πρὸς τὸ μετὰ τὴν η. τῇ σ. (ε) Κατὰ τὴν κ. τῇ σ. (ζ) Κατὰ τὸ ζ. διωρ. τὸ μετὰ τὸ σ. βιβλ. (η) Κατὰ τὴν κγ. τῇ σ. (θ) Κατὰ τὴν κδ. τῇ α. (ι) Κατὰ τὴν αὐτὴν. (κ) Ἐξ ὑποθ.

ισογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ. (λ) ἄρα καὶ γωνία ἢ Β = ω. αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι $\omega + \chi + \nu = \text{Β} + \text{Α} + \nu$. ἀλλὰ αἱ Β + Α + ν δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. (μ) ἄρα ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς καὶ αἱ $\omega + \chi + \nu$. ἢ ἄρα ΒΓ ἐπ' ὀρθῆς ἐστὶ τῇ ΓΕ. (ν) ο. ε. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΓ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, εἴαν τε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴαν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὥσι βεβηκυῖαι. ἐπὶ δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν Κ, Λ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ΑΚΓ, ΔΛΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ. λέγω, Α'. ὅτι ὡς ἡ ΑΓ περιφέρεια, πρὸς τὴν ΔΖ περιφέρειαν, ἔτως ἡ ΑΚΓ γωνία, πρὸς τὴν ΔΛΖ γωνίαν, καὶ ἡ ΑΒΓ πρὸς τὴν ΔΕΖ. Β'. ὅτι ὁ ΑΚΓ τομεὺς, πρὸς τὸν ΔΛΖ τομεῖα, ἔτως ἡ ΑΓ περιφέρεια, πρὸς τὴν ΔΖ περιφέρειαν. χ. 42.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διηρήθω ἡ ΑΓ εἰς ὅποσαδὴποτε ἴσα μέρη, τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΙ, ΙΓ, ὁμοίως καὶ ἡ ΔΖ, εἰς τὰ ΔΜ, ΜΖ. (ξ) καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΗ, ΚΘ, ΚΙ, ΛΜ.

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἐπεὶ αἱ γωνίαι ΑΚΗ, ΗΚΘ, ΘΚΙ, ΙΚΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, (ο) τσαύτας ἄρα ἴσας γωνίας περιέχει ἡ ΑΚΓ

(λ) Κατὰ τὴν δ. τῷ ε. (μ) Κατὰ τὴν λβ. τῷ α. (ν) Κατὰ τὴν ιδ. τῷ κ. (ξ) Κατὰ τὴν λ. τῷ γ. (ο) Κατὰ τὴν κζ. τῷ γ.

ΑΚΓ' γωνία, ὅσα ἴσα μέρη τῆς ὅλης περιφερείας περιέχει τὸ ΛΓ τόξον. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοσαύτας ἴσας γωνίας περιέχει ἡ ΔΛΖ γωνία, ὅσα ἴσα μέρη τῆς ὅλης περιφερείας τὸ ΔΖ τόξον. ὡς ἄρα ΑΓ : ΑΚΓ :: ΔΖ : ΔΛΖ. ἄρα καὶ ἐναλλάξ ὡς ΑΓ : ΔΖ :: ΑΚΓ : ΔΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΚΓ διπλασία ἐστὶ τῆς ΑΒΓ, ἡ δὲ ΔΛΖ τῆς ΔΕΖ, (π) ἔστιν ἄρα ὡς ΑΚΓ : ΑΒΓ :: ΔΛΖ : ΔΕΖ. (ρ) ἄρα καὶ ἐναλλάξ ὡς ΑΚΓ : ΔΛΖ :: ΑΒΓ : ΔΕΖ. ἄρα καὶ ὡς ΑΓ : ΔΖ :: ΑΒΓ : ΔΕΖ. (σ)

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΤ Β'.

Οἱ τομῆς ΑΚΗ, ΗΚΘ, ΘΚΙ, ΙΚΓ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσιν, ὡς ὀφείλου. τοσούτους ἄρα ἴσους τομῆς περιέχει ὁ ΑΚΓ τομεὺς, ὅσα ἴσα μέρη τῆς ὅλης περιφερείας τὸ ΛΓ τόξον. ὡσαύτως τοσούτους ἴσους τομῆς περιέχει ὁ ΔΛΖ τομεὺς, ὅσα ἴσα μέρη τῆς ὅλης περιφερείας τὸ ΔΖ τόξον. ὡς ἄρα τομεὺς ΑΚΓ, πρὸς ΛΓ τόξον, ἔστω ΔΛΖ τομεὺς, πρὸς ΔΖ τόξον. καὶ ἐναλλάξ ὡς ΑΚΓ : ΔΛΖ :: ΑΓ : ΔΖ.

ΒΙΒΛΙΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ.

- Α'. Στερεόν ἐστὶ, τὸ μῆκος, καὶ πλάτος, καὶ βάθος ἔχον.
Β'. Στερεῶν πέρας, ἐπιφάνεια.
Γ'. Εὐθεΐα, ἡ ΑΒ πρὸς ἐπίπεδον τὸ ΖΔ ὁρθή ἐστίν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἀποτομένας αὐτῇ εὐθείας, τὰς

(π) Κατὰ τὴν κ. τῷ γ. (ρ) Κατὰ τὴν η. τῷ ε. (σ) Κατὰ τὴν θ. τῷ ι.

τας $Z\Delta$, ΓE , καὶ ἕσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τῷ $Z\Delta$, ὁρθὰς ποιῇ γωνίας, οἷον τὰς $AB\Gamma$, ABE , $AB\Delta$, ABZ . πίν. K. χ . 1.

Δ'. Ἐπίπεδον, τὸ EH , πρὸς ἐπίπεδον, τὸ AG , ὁρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τῶν ἐπιπέδων τομῇ, τῇ EZ , πρὸς ὁρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι, αἱ OK , HE , ἐν τῶν ἐπιπέδων, τῷ EH , τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ, τῷ AG πρὸς ὁρθὰς ᾖσιν. χ . 2.

Ε'. Εὐθείας, τῆς AB , πρὸς ἐπίπεδον, τὸ DE , κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τῆ μετεώρου πέρατος, τῆς A , τῆς εὐθείας AB ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον DE κάθετος ἀχθῇ, ἡ AG , καὶ ἀπὸ τῆ γινομένης σημείου Γ , καὶ ἀπὸ τῆ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος B τῆς εὐθείας, εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ ἡ EG , ἡ περιεχόμενη ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἑξῆα γωνία, ἡ $AB\Gamma$. χ . 3.

Σ'. Ἐπίπεδον, τῆς EK , πρὸς ἐπίπεδον, τὸ AG κλίσις ἐστίν ἡ ἑξῆα γωνία ΘZE , ἡ περιεχόμενη ὑπὸ τῶν ΘZ , EZ τῶν πρὸς ὁρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ BD ἀγόμενων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ Z ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων. χ . 4.

Ζ'. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλιῖται λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνία ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσι.

Η'. Παράλληλα ἐπίπεδα ἐστὶ τὰ ἀσύμπτωτα.

Θ'. Ὅμοια στερεὰ χήματα ἐστὶ τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τὸ πλῆθος.

Ι'. Ἰσα δὲ καὶ ὁμοια στερεὰ χήματα ἐστὶ, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

ΙΑ'. Στερεὰ γωνία ἐστίν ἡ B , ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν, οἷον τῶν $AB\Gamma$, $\Gamma B\Delta$, $\Delta B A$, περιεχόμενη, μὴ ἔσῳν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνισταμένων, τῷ B . χ . 5.

ΙΒ'.

ΙΒ΄. Στερεαὶ γωνίαι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ἴσων καὶ ἰσχυρίθ-
μεν ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχόμεναι.

ΙΓ΄. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεόν, οἷον τὸ ΑΒΓΗΕΖ, ἢ τὸ
ΑΛΘΠΗΚΖΑΜ, ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο
τὰ ἀπεναντίον, οἷον τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ, ἢ τὰ ΑΛΒΘΙΓ,
ΗΚΖΑΜ ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα.
Χ. 6. καὶ 7.

ΙΔ΄. Παραλληλεπίπεδον ἐστὶ σχῆμα στερεόν ὑπὸ ἧς τε-
τραπλευρῶν περιεχόμενον, ὧν τὰ ἀπ' ἐναντίον πα-
ράλληλα. Χ. 8.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι ἐκ ἔστιν ἐν
τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ
μετεώρῳ.

Εἰ δυνατόν εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒ μέρος μέν τι
τὸ ΑΒ ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΖ, μέρος δέ τι
τὸ ΒΓ ἐν μετεώρῳ. Χ. 9.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῆς ἄρα ΑΒΓ εὐθείας τὰ ἄκρα ἐκ ἐπιπροσῶς τοῖς
μέσοις, ἐπεὶ δὴ αὐτὴ ἡ ΑΒΓ εὐθεῖα ἐξ ἴσων τοῖς ἐφ' ἑαυ-
τῆς σημείοις καὶται, ἐπεὶ ἡ ἐλαχίστη ἐστὶ τῶν τὰ αὐ-
τὰ ἔχουσιν πέρατα Α, καὶ Γ. Ἐκ ἄρα εὐθεῖα ἡ ΑΒΓ.
(α) ἐκ ἄρα εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑπο-
κειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

Εὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἐνὶ
εἰσὶν ἐπιπέδῳ. καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν
ἐπιπέδῳ.

N

Δύο

(α) Κατὰ τὸν γ. ὀρίσμ. τὰ α.

Δύω ευθείαι, α' ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε. σημεῖον. λέγω, ὅτι α' ΑΒ, ΓΔ ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. *χ. ια.*

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ α' ΑΒ, ΓΔ τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε, εἰ ἐν τῷ αὐτῷ ἐκ εἰσὶν ἐπιπέδῳ, μέρος μὲν τι αὐτῶν ἔσται ἐν τῷ ὑποκειμένῳ, μέρος δὲ τι ἐν ἄλλῳ, ὅπερ ἀδύνατον. (β) α' ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ. ἔξ ὧ δὴλον, ὅτι καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνη ἀλλήλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ευθεία ἐστὶ.

Δύω ἐπίπεδα τὰ ΑΓ, ΗΘ τεμνέτωσαν ἀλλήλα· κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΒ γραμμὴ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ γραμμὴ, ευθεία ἐστὶν. εἰ γὰρ μη, ἐπεξεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐν μὲν τῷ ΑΓ ἐπιπέδῳ, ευθεία ἡ ΔΕΒ, ἐν δὲ τῷ ΗΘ, ἡ ΔΖΒ. *ξ. ιι.*

ΛΕΙΞΙΣ.

Λεὶ ΔΕΒ, ΔΖΒ ἄρα ευθεῖαι καὶ ἐν περιέχουσιν, ὅπερ ἀπορροῦν. καὶ ἄρα α' ΔΕΒ, ΔΖΒ ευθεῖαι εἰσιν, ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἄλλη τις ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐπιβεύγνυται ευθεία ἔσται, πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς. ἡ ΔΒ ἄρα γραμμὴ, ευθεία ἐστὶ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Ἐὰν ευθεῖα δυσὶν ευθείαις τεμνέσταις ἀλλήλας πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθὰς ἔσται. *Ευθεῖα*

Ἐνθαῦτα τις ἡ ΕΖ δύο ἐυθείαις, ταῖς ΑΒ, ΓΔ, τεμνόμεναι ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον πρὸς ὁρθὰς ἐφασκεῖται. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθὰς ἐστὶ. ὧ. 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπειρήθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλή-
λαις. καὶ διήχθω διὰ τοῦ Ε, ὡς ἐτύχεν, ἡ ΗΕΘ. καὶ
ἐπεξέχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΒ. καὶ ἀπὸ τυχέντος τῆς ΖΕ
σχεῖν τοῦ Ζ ἐπεξέχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ,
ΖΘ, ΖΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΕΑΔ, ΕΓΒ, ἡ μὲν ΕΔ = ΕΓ,
ἡ δὲ ΕΑ = ΕΒ, (γ) καὶ γωνία ἡ ΑΕΔ = ΓΕΒ. (δ)
ἄρα καὶ ἡ ΑΔ = ΓΒ, καὶ γωνία ἡ μὲν ΔΑΕ = ΓΒΕ,
ἡ δὲ ΔΑΕ = ΒΓΕ. (ε) Ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΑΕΗ,
ΒΕΘ, ἡ μὲν γωνία ΗΑΕ = ΕΒΘ, ὡς δέδεικται, ἡ δὲ
ΑΕΗ = ΒΕΘ, (ζ) ἡ δὲ ΑΕ = ΕΒ. (η) ἄρα καὶ ἡ ΑΗ =
ΒΘ, καὶ ἡ ΕΗ = ΕΘ. (θ) ἵπεί δὲ ἐν τοῖς τριγώνοις
ΖΓΕ, ΖΔΕ, ἡ μὲν ΕΓ = ΕΔ, ἡ δὲ ΕΖ κοινή, καὶ
γωνία ἡ ΖΕΓ = ΖΕΔ, (ι) ἄρα καὶ ἡ ΖΓ = ΖΔ. (κ)
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΑ = ΖΒ. ἔκθ' ἐν τοῖς τρι-
γώνοις ΖΓΒ, ΖΑΔ, ἡ μὲν ΖΓ = ΖΔ, ἡ δὲ ΖΒ = ΖΑ,
ἡ δὲ ΓΒ = ΑΔ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΖΒΓ = ΖΑΔ. ἐν
τοῖς τριγώνοις ἄρα ΖΑΗ, ΖΒΘ, ἡ μὲν ΑΗ = ΒΘ, ἡ
δὲ ΑΖ = ΖΒ, καὶ γωνία ἡ ΖΑΗ = ΖΒΘ. ἄρα καὶ
ἡ ΖΗ = ΖΘ. ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΖΗΕ, ΖΘΕ, ἡ μὲν
ΖΗ = ΖΘ, ἡ δὲ ΗΕ = ΘΕ, ἡ δὲ ΕΖ κοινή. καὶ γων-
ία ἄρα ἡ ΖΗΕ = ΖΕΘ. (λ) ὁρθὴ ἄρα ἐκαστέρα τῶν
Ν α ΖΕΗ,

(γ) Ἐκ τῆς κατασκευῆς. (δ) Κατὰ τὴν 10. τῆς α. (ε) Κατὰ τὴν
1. τῆς α. (ζ) Κατὰ τὴν 10. τῆς α. (η) Ἐκ τῆς κατασκευῆς. (θ) Κα-
τὰ τὴν 10. τῆς α. (ι) Ἐξ ὁμοθ. (κ) Κατὰ τὴν 1. τῆς α.
(λ) Κατὰ τὴν 9. τῆς α.

ΖΦΗ, ΖΓΘ. ἡ ἄρα ΖΕ κἀθετός ἐστι τῇ ΗΘ. ἐμοίως δὴ δέξμεν, ὅτι ἡ ΖΕ πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένους αὐτῇ εὐθείας, καὶ ὅσας ἐν τῷ ὑπκεκμητῷ ἐπιπέδῳ ἐρ-
 θᾶς πύκτες γωνίας. ἡ ἄρα ΖΕ τῷ ὑπκεκμητῷ ἐπιπέ-
 δῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. (μ) ἀλλὰ τὸ ὑπκεκμητὸν ἐπιπέ-
 δον ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ εὐθεῶν. ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς
 ὀρθὰς ἐστὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἀπτομέναις ἀλ-
 λήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῇ κοινῇ τορμῇ ἐπι-
 σταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἐνί αἴσιν ἐπιπέδῳ.

Εὐθεῖαί τις ἡ ΑΒ τρισὶν εὐθείαις, ταῖς ΓΓ, ΒΔ,
 ΒΕ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῇ κατὰ τὸ Β ἀφ' ἧς ἐφεστώ-
 λεγούσῃ ἐστὶ αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἐνί αἴσιν ἐπιπέδῳ τῷ
 ΘΚ. χ. 13.

ΛΕΙΞΙΣ.

Μὴ γάρ, ἀλλ' αἱ δυνατόν, ἐτύσαν αἱ μὲν ΒΔ, ΒΕ
 ἐν τῷ ὑπκεκμητῷ ἐπιπέδῳ τῷ ΘΚ, ἡ δὲ ΒΓ ἐν μετε-
 ώρῳ τῷ ΑΖ. καὶ ἐπὶ ἡ ΑΒ κἀθετός ἐστι ταῖς ΒΔ,
 ΒΕ, (ν) κἀθετός ἐστὶ καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ, (ξ)
 εἴτεν τῷ ΘΚ. κἀθετός ἄρα ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΒΖ. (ο) ἡ
 ἄρα γωνία ΑΒΖ ὀρθή ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒΓ ὀρθή.
 (π) ἡ ἄρα ΑΒΖ = ΑΒΓ. τὸ ὅλον τῷ μέρει, ὅπερ ἀ-
 δύνατον. ἐκ ἄρα ἡ ΒΓ ἐν μετεώρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. αἱ
 τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι, αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, ἐν ἐνί αἴσιν
 ἐπιπέδῳ.

ΠΡΟ.

(μ) Κατὰ τὸν γ. ὅρισμ. τῇ ια. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Κατὰ τῇ
 δ τῇ ια. (ο) Κατὰ τὸν γ. ὅρισμ. τῇ ια. (π) Ἐξ ὑποθ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Ἐάν δύο ευθείαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ ευθείαι.

Δύο ευθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τῷ ΕΖ, πρὸς ὁρθὰς ἕωσαν. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. χ. 14.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Α'πὸ τῶ σημείῳ Β, καθ' ὃ ἡ ΑΒ τῷ ἐπιπέδῳ ΕΖ συμβάλλει, ἐπὶ τὸ Δ, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ΓΔ, ἐπεξέχθω ἡ ΒΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ γωνίαι ΑΒΔ, ΓΔΒ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. (ρ)
ἡ ἄρα ΑΒ παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ. (σ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7'.

Ἐάν ὦσι δύο ευθείαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη ευθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Ἑστωσαν δύο ευθεῖαι παράλληλοι, αἱ ΑΒ, ΓΔ. καὶ εἰληφθῶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Ζ. λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη ευθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. πίν. ΚΑ. χ. 15.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἕτω ἐν τῷ μετεώρῳ, ὡς ἡ ΕΗΖ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω ἐν τῷ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδῳ ἡ ΕΖ.

Ν 3

ΔΕΙ-

(ρ) Ἐξ ὑποθ. (σ) Κατὰ τὴν κη. τῆ α.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δίω ἄρα ευθείαι αἱ ΕΗΖ, ΕΖ χωρίον περιέξουσιν. ὅπερ ἄτρεπον. ἢ ἀπὸ τῆ Ε ἄρα ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη ἐκ εἶν ἐν μετεώρῳ ἐπιπέδῳ. ἄρα ἐν τῷ τῶν παραλλήλων, ΑΒ, ΓΔ εἶν ἐπιπέδῳ.

Ἴσον δ', ὅτι ἀληθὴς ἡ πρότασις, καὶ μὴ αἱ ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι ὡσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Ἐὰν ὡσι δύο ευθείαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ἦ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Ἔσταν δύο ευθείαι παράλληλοι, αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΘΖ πρὸς ὀρθὰς ἔστω. λέγω, ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ, ἡ ΓΔ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΘΖ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. χ. 16.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ. καὶ ἦχθω τῇ ΒΔ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΘΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ. καὶ κείθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΔ, ΒΔΕ, ἡ μὲν ΑΒ = ΔΕ, (τ) ἡ δὲ ΒΔ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΑΒΔ = ΒΔΕ· ἵκατέρα γὰρ ὀρθή· ἄρα καὶ ἡ ΑΔ = ΒΕ. (υ) ἐκδὲν ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΕ, ΑΔΕ, ἡ μὲν ΑΒ = ΔΕ, ἡ δὲ ΒΕ = ΑΔ, ἡ δὲ ΑΕ κοινὴ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΒΕ = ΑΔΕ. (φ) ἀλλ' ἡ ΑΒΕ ὀρθή. (χ) ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΔΕ. ἡ ΕΔ ἄρα κάθετός ἐστι ταῖς ΑΔ, ΔΒ. καὶ τὸ ἐπιπέδῳ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΑΔ, ΔΒ, κάθετός ἐστιν ἡ ΕΔ

(τ) Ἐν τῇ κατασκευῇ. (υ) Κατὰ τὴν δ. τῆ α. (φ) Κατὰ τὴν β. τῆ α. (χ) Ἐξ ὁμοθ.

ΕΔ. (ψ) ἔστι δὲ ἡ ΓΔ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΛΔ, ΔΒ. (ω) ἡ ΕΔ ἄρα κάθετός ἐστι καὶ τῇ ΓΔ. (α) ἡ γωνία αἱ ΓΔΕ ὀρθή ἐστιν ὀρθή δὲ καὶ ἡ ΓΔΒ. (ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒΔ, ΓΔΒ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (β) καὶ ἡ ΑΒΔ ὀρθή. γ) ὀρθή ἄρα καὶ ἡ ΓΔΒ.) ἡ ἄρα ΓΔ πρὸς αἷταις ΔΒ, ΔΕ. ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι καὶ τῇ ΔΒ, ΔΕ ἐπιπέδῳ. (δ) ἔστι δὲ τὸ διὰ τῶν ΔΒ, ΔΕ ἐπιπέδον τὸ ΘΖ. ἡ ἄρα ΓΔ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ἐπιπέδῳ ΘΖ. ο. ε. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ΄.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ μὴ ἔσται αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλους εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρω τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος τῇ ΕΖ, μὴ εἰς αἷταις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. λέγω, ὅτι παράλληλος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. ρ. 17.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Γιγνήσθω ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ ἐπ’ αὐτῇ τῇ ΕΖ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν ΕΖ, ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἦχθω ἡ ΗΘ ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΕΖ, ΓΔ ἦχθω πρὸς ὀρθάς ἡ ΗΚ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΕΖ κάθετός ἐστι τῷ ἐπιπέδῳ ΘΗΚ. (ρ) ἁπ’ ἑκατέρω τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος τῇ ΕΖ. (ζ) ἑκατέρω ἄρα αὐτῶν κάθετος τῷ ΗΘΚ ἐπιπέδῳ. (η) αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι. (θ) ὃ ἐδοξεί δι᾽ εἰς αἱ.

N 4

ΠΡΟ-

- (ψ) Κατὰ τὴν δ. τῇ ια. (ω) Κατὰ τὴν β. τῇ ια. (α) Κατὰ τὸν γ. ὀρισμ. τῇ ια. (β) Κατὰ τὴν κθ. τῇ ια. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὴν δ. τῇ ια. (ε) Κατὰ τὴν δ. τῇ ια. (ζ) Ἐξ ὑποθ. (η) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (θ) Κατὰ τὴν σ. τῇ ια.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

Εάν δύο ευθείαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων, δυσὶν ευθείαις ἀπτομέναις ἀλλήλων παράλληλοι ᾗσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν.

Δύο ευθείαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων, αἱ AB , BC , δυσὶν ευθείαις ταῖς DE , EZ ἀπτομέναις ἀλλήλων, παράλληλοι εἴσονται, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. λέγω, ὅτι ἴση εἶναι ἡ ΔBG γωνία τῇ ΔEZ . σ . 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπεικόνισθω ἡ μὲν $EF = EZ$, ἡ δὲ $EA = ED$. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AD , DE , EZ , AG , DZ .

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ BC ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ EZ . (ι) ἄρα καὶ ἡ EZ ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ BC . (κ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τῇ BE ἴση τε καὶ παράλληλος ἡ AD . καὶ αἱ EZ , AD ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοι. (λ) καὶ ἡ AG ἄρα ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ DZ . (μ) ἐκὼν ἐν ταῖς τριγώνοις BAG , EZD , ἡ μὲν $EF = ED$, ἡ δὲ $BA = ED$, ἡ δὲ $AG = DZ$. ἄρα καὶ γωνία ἡ $ABG = \Delta EZ$. (ν) σ . ϵ . δ .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄.

Ἀπο τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον ευθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω

(ι) Ἐκ τῆς κατασκευ. καὶ ἐξ ὑποθ. (κ) Κατὰ τὴν λγ. τῇ α. (λ) Κατὰ τὸ α. ἄξ. τῇ α. καὶ τὴν προλ. πρότ. (μ) Κατὰ τὴν λγ. τῇ α. (ν) Κατὰ τὴν η. τῇ α.

Ἔστω τὸ μὲν δοθέν σημείον μετέωρον τὸ Α. τὸ δὲ δοθέν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ ΕΜ. χ. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω ἐν τῷ ὑποκείμενῳ ἐπιπέδῳ ΕΜ εὐθεΐα, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΒΓ. καὶ ἡχθω ἀπὸ τῆς Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. (ξ) εἰ μὲν ἔν η ΑΔ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονός ἂν εἴη τὸ ἐπιπαχθὲν εἰ δ' ἔ, ἡχθω τῇ ΒΔ κάθετος ἡ ΔΖ. καὶ ἀπὸ τῆς Α ἐπὶ τὴν ΔΖ ἡχθω κάθετος ἡ ΑΗ. (ο) ἄρα, ἔστι ἡ ΑΗ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ΕΜ. ἡχθω γὰρ τῇ ΒΔ παράλληλος ἡ ΗΘ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΒΔ κάθετός ἐστι ταῖς ΑΔ, ΔΖ. (π) ἄρα κάθετός ἐστι καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ. (ρ) καὶ ἡ ΘΗ ἀπὸ παραλλήλων ἔσται τῇ ΒΔ, (σ) κάθετός ἐστι τῷ διὰ τῶν ΑΔ, ΔΖ, ἐπιπέδῳ. (τ) κάθετος ἄρα ἡ ΘΗ καὶ τῇ ΑΗ τῇ ἔσθι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τὰ διὰ τῶν ΑΔ, ΔΖ. (υ) καὶ ἄρα ΑΗ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΗΘ, ἐστὶ δὲ πρὸς ὀρθάς καὶ τῇ ΗΖ, (φ) πρὸς ὀρθάς ἄρα ἐστὶ καὶ τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΖ. (χ) ἀλλὰ τὸ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΖ ἐπίπεδον, ἐστὶ τὸ ὑποκείμενον ΕΜ. ἡ ἄρα ΑΗ κάθετός ἐστι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ΕΜ ἐπίπεδον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τῆς πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεΐαν γραμμὴν ἀνασῆσαι.

Ν 5

Ἔστω

- (ξ) Κατὰ τὴν ιβ. τῆς α. (ο) Κατὰ τὴν αὐτήν. (π) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ρ) Κατὰ τὴν δ. τῆς ια. (σ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (τ) Κατὰ τὴν η. τῆς ια. (υ) Κατὰ τὸν γ. ὁρισμ. τῆς ια. (φ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (χ) Κατὰ τὴν δ. τῆς ια.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον, τὸ ΕΜ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον, τὸ Α. χ. 20.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Νευρήθω τὶ σημεῖον μετέωρον, τὸ Β. καὶ ἀπὸ τῆς Β ἐπὶ τὸ ὑποκαμμένον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ ΒΓ. καὶ διὰ τῆς Α σημείω ἤχθω ἡ ΑΔ παράλληλος τῇ ΒΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΔ κάθετός ἐστι τῷ ὑποκαμμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΜ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΒΓ κάθετός ἐστι τῷ ὑποκαμμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΜ. (ψ) ἀλλὰ τῇ ΓΓ παράλληλος ἡ ΑΔ. (ω) καὶ ἡ ΑΔ ἄρα κάθετός ἐστι τῷ ὑποκαμμένῳ ΕΜ ἐπιπέδῳ. (α)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων Δ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΕΖ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΘ, ΔΗ πρὸς ὀρθὰς ἀναστήσωνται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Θ, Η. χ. 21.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω τὸ διὰ τῶν ΔΘ, ΔΗ ἐπίπεδον, τὸ ΘΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΘΔΚ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἡ ΗΔΚ ὀρθή. ἡ ἄρα ΘΔΚ = ΗΔΚ. τὸ ὅλον τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων τὰ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Οὔτε μὲν ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων μετεώρου, τῆς Β, δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀχθήσονται. ἤχθω.

(ψ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ω) Ἐκ τῆς κατασκευ. (α) Κατὰ τὴν τὰ α.

ἤχθωσαν γὰρ εἰ δυνατόν αἱ ΒΑ, ΒΓ. (χ. τὸ αὐτ.)
 καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΓ. ἔκθιν αἱ τῷ ΒΑΓ τριγώνου γωνίαι
 μέζονες δύο ὀρθῶν. ὅπερ ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι,
 παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα τις ἡ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ, ΕΖ ἐπι-
 πέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω. λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ
 ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα. χ. 22.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τῷ τυχόντος σημείου Θ τῇ ΑΒ παράλ-
 ληλος ἡ ΘΗ. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΒΗ, ΔΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΘΗ παράλληλος τῇ ΑΒ· (β) ἔστι δὲ ἡ ΑΒ
 πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ ΓΔ· (γ) καὶ ἡ ΘΗ ἄρα πρὸς
 ὀρθὰς ἐστὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΓΔ. (δ) ὀρθὴ ἄρα ἡ Θ
 γωνία. ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΑΘΗ, ΑΒΗ, ἡ μὲν γωνία
 $\Theta = Β$, ἡ δὲ $\Delta Η \Theta = Η Α Β$, (ε) ἡ δὲ ΑΗ κοινή. ἄρα
 καὶ ἡ $\Theta Η = Α Β$. (ζ) ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι πᾶσαι
 αἱ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων παράλληλοι τῇ ΑΒ, πρὸς τε
 ὀρθὰς εἰσι τοῖς ἐπιπέδοις, καὶ ἀλλήλαις ἴσαι. τὰ ἄρα
 ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα ἀσύμπτωτά εἰσιν. ἄρα παράλληλα. (η)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Εὰν δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων περὶ
 δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων παράλ-
 λη-

(β) Ἐκ τῆς κατασκευ. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὴν η. τῷ ια.

(ε) Κατὰ τὴν κθ. τῷ α. (ζ) Κατὰ τὴν κς. τῷ α. (η) Κατὰ
 τὸν η. ὁρισμ. τῷ ια.

ληλοι ὡσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσσαι,
παράλληλά ἐσι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων, εἰ AB, BG, περὶ
δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ, ΕΖ, ἔσσαι
παράλληλοι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσσαι. λέγω, ὅτι
τὰ διὰ τῶν AB, BG, καὶ ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδα παρά-
λληλά εἰσι. χ. 23.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διὰ μὲν τῶν AB, BG, ἤχθω τὸ ἐπίπεδον ΑΓ, διὰ
δὲ τῶν ΔΕ, ΕΖ, ἤχθω τὸ ΔΖ. καὶ ἀπὸ τῆς Β ἤχθω
ἡ ΒΗ κάθετος τῷ ΔΖ. καὶ διὰ τῆς Η ἤχθω ἡ μὲν
ΗΚ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΕΔ παράλληλος ἐν τῷ ΔΖ
ἐπιπέδῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ ΗΚ, ΗΘ παράλληλοι εἰσι ταῖς ΕΖ, ΕΔ. (θ) ἀλλὰ ταῖς ΕΖ, ΕΔ παράλληλοι αἱ ΒΓ, ΒΑ. (ι) αἱ
ἄρα ΗΚ, ΗΘ παράλληλοι ταῖς ΒΓ, ΒΑ. (κ) ἄρα ἡ
μὲν γωνία ΒΗΚ = ΗΒΓ, ἡ δὲ ΒΗΘ = ΗΒΑ. (λ) ἀλλ'
ἐκατέρα τῶν ΒΗΚ, ΒΗΘ ὀρθή. (μ) καὶ τῶν ΗΒΓ,
ΗΒΑ ἄρα ἐκατέρα ὀρθή. ἄρα ἡ ΗΒ κάθετος ἐστὶ ταῖς
ΒΓ, ΒΑ. καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπιπέδῳ τῷ ΑΓ κάθε-
τος ἡ ΗΒ. (ν) τὰ ἄρα ΑΓ, ΔΖ ἐπίπεδα παράλληλά-
εἰσι. (*)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ'.

Εὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέ-
δῳ τινὸς τέμνηται, αἱ κοινὰ αὐτῶν τομὰὶ
παράλληλοι εἰσι.

Δύο

(θ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ι) Ἐξ ὑποθ. (κ) Κατὰ τὴν θ. τῇ ιβ.
(λ) Κατὰ τὴν κθ. τῇ α. (μ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ν) Κα-
τὰ τὴν θ. τῇ ια. (*) Κατὰ τὴν προλ.

Δύο ἐπιπέδα παράλληλα, τὰ AB , $ΓΔ$, ὑπὸ ἐπιπέδῳ $ΕΖΘΗ$ τεμνέσθω. κοινὰ δὲ τεμάχια αὐτῶν ἔσωσαν αἱ $ΕΖ$, $ΗΘ$. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ $ΕΖ$ τῇ $ΗΘ$. χ . 24.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐμβαλλόμεναι συμπεσένται αἱ $ΕΖ$, $ΗΘ$, ἦτοι ἐπὶ τὰ $Ζ$, $Θ$ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ $Ε$, $Η$. ἐμβιβλήσθωσαν πάλιν ὡς ἐπὶ τὰ $Ζ$, $Θ$ μέρη, καὶ συμπίπτειν κατὰ τὸ K .

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ $ΕΖΚ$ ἐν τῷ AB ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς $ΕΖΚ$ σημεῖα ἐν τῷ AB ἐπιπέδῳ εἰσὶν. ἐν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς $ΕΖΚ$ εὐθείας σημεῖον ἐστὶ τὸ K . τὸ K ἄρα ἐν τῷ AB ἐστὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ K ἐν τῷ $ΓΔ$ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. τὰ AB , $ΓΔ$ ἄρα ἐπιπέδα ἐμβαλλόμενα συμπεσένται· ὁ συμπίπτει δὲ διὰ τὸ παράλληλα ὑποκείμεναι. ὅκ ἄρα αἱ $ΕΖ$, $ΗΘ$ εὐθεῖαι ἐμβαλλόμεναι συμπεσένται ἐπὶ τὰ $Ζ$, $Θ$ μέρη. ὁμοίως δὲ δείξμεν, ὅτι ἔδῃ ἐπὶ τὰ $Ε$, $Η$ μέρη ἐμβαλλόμεναι συμπεσένται. ἄρα παράλληλαί εἰσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, αἱ τὴν αὐτὴν λόγον τμηθῇσονται.

Δύο εὐθεῖαι, αἱ $ΑΔ$, $ΓΒ$ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τῶν $ΗΘ$, $ΚΛ$, $ΜΝ$ τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ $Α$, $Ζ$, $Δ$, $Γ$, $Ε$, $Β$ σημεῖα. λέγω, ὅτι εἰσιν ὡς $ΑΖ$: $ΖΔ$:: $ΙΕ$: $ΕΒ$. χ . 25.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξέχθωσαν αἱ $ΑΙ$, $ΔΒ$, $ΓΔ$. καὶ συμβαλέτω ἡ $ΙΔ$ τῷ $ΚΛ$ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ $Ξ$ σημεῖον. καὶ ἐπεξέχθωσαν αἱ $ΕΞ$, $ΞΖ$.

ΔΕΙ-

ARITH.

Ἐὰν τὰ παραλλήλα ἐκτετακται ἡΘ, ΚΑ, ὡς ἐκ τῆς
πρὸς τὰ ΑΖ, ἐκτετακται, ἡ ΕΖ παραλλήλος ἐστὶ τῇ
ΑΙ. (εἰ) ὡς ἀγα ΑΖ : ΑΕ : ΕΙ. (ο) διὰ τὸ
ἀνὰ δι' αὐτῶν ἡΘ : ΕΙ : ΑΖ : ΕΙ. ὡς ἀγα ΑΖ :
ΖΑ : ΗΕ : ΕΙ. (η) ἀγα ἡ ἀνέκνηται ὡς ΖΑ : ΑΖ ::
ΗΙ : ΗΕ. (θ) ο. ε. δ.

ΗΡΟΤΑΞΙΣ ΗΓ.

Ἐὰν ἐκτετακται ἐκτετακτοὶ τινὲς πρὸς ὁμοίας ἦ, ἡ
πρότερα τὰ δ' αὐτῆς ἐκτετακτα, τὸ αὐτὸ ἐστὶ
μετὰ πρὸς ὁμοίας ἐσται.

Ἐκτετακται τὰ, ἡ ΑΒ τὸ ἐκτετακτοὶ ΚΑ πρὸς ὁμοίας
ἐσται. Αγα, ὡς ἐκτετακται τὰ δ' αὐτῆς ἐκτετακτα τὰ
ΚΑ ἐκτετακτοὶ πρὸς ὁμοίας ἐσται. χ. αθ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

"ΙΙΧθω δὴ τὴν ΑΒ ἐκτετακτοὶ τὸ ΑΕ. ἡ ἑστὸς κενὴ
τομὴ τὸν ΔΕ, ΚΑ ἐκτετακτοὶ ἡ ΕΕ. καὶ ἐκτετακτοὶ ἐστὶ
τὴν ΕΕ. τοῦτον ἀνέκνηται τὸ Ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΕΕ
πρὸς ὁμοίας ἡΧθω ἐν τῇ ΔΕ. ἐκτετακτοὶ ἡ ΖΗ.

ΑΡΙΘΜΙΣ.

Ἐκτετακται τὸν ΑΒΖ, ΗΖΗ γωνίαν ὁμοίαν ἐσται. (α)
παραλλήλους ἀγα ἐκ ΑΒ, ΗΖ. (τ) ἀλλ' ἡ ΑΒ πρὸς
ὁμοίας ἐστὶ τῷ ΚΑ ἐκτετακτοί. (υ) καὶ ἡ ΗΖ ἀγα καὶ
ΖΗτος ἐστὶ τῷ ΚΑ ἐκτετακτοί. (φ) ἐκτετακτοὶ δὲ πρὸς τῇ
μετὰ ὁμοίας ἐσται, ὅταν αὖ τῇ κενῇ τομῇ τὸν ἐκτετακτοὶ
δὴν πρὸς ὁμοίας ἀνέκνηται ἐκτετακτοὶ ἐν αὐτῇ τῷ ἐκτετακτοί
τῷ

(ε) Κατὰ τὴν ἀρχ. ἀντ. (ο) Κατὰ τὴν Α. τὰ ε. (η) ἴση
τὰ τὴν ε. τὰ ε. (θ) Κατὰ τὴν ἀντ. τὴν ε. τὰ ε. (ε) ἴση
ἐστὶ καὶ ἐν τῇ ἀντ. (τ) Κατὰ τὴν ἀντ. τὰ α. (υ) ἴση
ἐστὶ. (φ) Κατὰ τὴν Α. τὰ α.

τῶ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι. τὸ αἶρα ΔΕ ἐπὶ πέντε τοῦ διὰ τῆς ΑΒ πρὸς ὀρθὰς εἰσι τοῖς ὑποκειμένοις ΚΑ ἐπιπέδῳ. ὁμοίως δὲ δευχθήσεται ἡ πέντα γὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπιπέδα ὀρθὰς τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

Ἐάν δύο ἐπιπέδα τέμνοντα ἀλλήλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῶ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾖ.

Λύω ἐπιπέδα τὰ ΑΒ, ΓΔ τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ᾖτω. κοινὴ δ' αὐτῶν τομὴ εἴτω ἡ ΗΘ. λέγω, ὅτι ἡ ΗΘ τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς εἴη. μὴ γὰρ. πίν. ΚΒ. χ. 27.

ΚΑΤΑΞΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῆ Η σημεῖν ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῇ ΑΔ ἑνθείᾳ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΜ· ἐν δὲ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ τῇ ΚΑ ἑνθείᾳ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΚ.

ΛΕΞΙΣ.

Ἐπὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδα πρὸς ὀρθὰς εἰσι τῶ ἐπιπέδῳ ΕΖ, (χ) καὶ αἱ ΗΜ, ΗΚ αἶρα πρὸς ὀρθὰς εἰσι τῶ αὐτῷ ΕΖ ἐπιπέδῳ. (ψ) ἀπὸ μεταβολῆς αἶρα σημεῖν τῇ Η δύο καθέτοις τῶ ὑποκειμένῳ ἤχθησκον ἐπιπέδῳ. ἔπερ αἰτοπον. (ω) ἡκ αἶρα τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΖ ἀπὸ τῆ Η σημεῖν πρὸς ὀρθὰς ἀχθήσεται ἄλλη τις, πλὴν τῆς ΗΘ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδων. ἡ αἶρα ΗΘ καθέτος εἴη τῷ ΕΖ ἐπιπέδῳ.

ΠΡΟ-

(χ) Ἐξ ὑπ.θ. (ψ) Κατὰ τὸν δ. ὁρισμ. τῶ ιη. (ω) Κατὰ τὴν συνθ. τῆς ιγ. τῶ ιη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

Ἐὰν τερεὰ γωνία ὑπὸ τρεῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται, δύο ὅποιας τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι, πάντα μεταλαμβάνονται.

Στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τὸ Α ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, τῶν ΒΑΓ, ΒΑΔ, ΔΑΓ περιεχέσθω. λέγω, ὅτι δύο ὅποιας αὐτῶν μείζονες εἰσι τῆς λοιπῆς, πάντα μεταλαμβάνονται. *χ.* 28.

Εἰ μὲν αἱ ΒΑΓ, ΒΑΔ, ΔΑΓ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσι, φανερόν ὅτι δύο ὅποιας τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι, πάντα μεταλαμβάνονται. εἰ δ' ἔστω μείζων ἡ ΒΑΓ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεξάτω ἡ ΒΑΕ γωνία ἴση τῇ ΒΑΔ. καὶ εἰλήφθω ἡ ΑΕ = ΑΔ. καὶ διὰ τῆ Ε σημείω διαχθῆσα ἡ ΒΕΓ, τεμνέτω τὰς ΑΒ, ΑΓ, κατὰ τὰ Β, Γ σημεία. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΑΕ, ΒΑΔ, ἡ μὲν ΑΕ = ΑΔ, (α) ἡ δὲ ΑΒ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΒΑΕ = ΒΑΔ. (β) ἄρα καὶ ἡ ΒΕ = ΒΔ. (γ) αἱ δὲ αἱ δύο ΔΒ, ΔΓ μείζονες τῆς λοιπῆς τῆς ΕΓ. (δ) ἡ δὲ ΒΔ δίδεται ἴση τῇ ΒΕ. ἡ ἄρα ΔΓ μείζων τῆς ΕΓ. ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΑΕΓ, ΑΓΔ, ἡ μὲν ΑΕ = ΑΔ, ἡ δὲ ΑΓ κοινὴ, ἡ δὲ ΕΓ ἐλάττω τῆς ΔΓ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΕΑΓ ἐλάττω τῆς ΔΑΓ. (ε) ἐστὶ δὲ ἡ ΒΑΔ ἴση τῇ ΒΑΕ. αἱ ἄρα ΒΑΔ, ΔΑΓ μείζονες εἰσι τῆς ΒΑΓ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ συνδυοὶ λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι.

ΠΡΟ.

(α) Ἐν τῇ καταστάσει. (β) Ἐν τῇ καταστάσει. (γ) Κατὰ τὴν δὲ τῇ κ. (δ) Κατὰ τὴν κ. τῇ κ. (ε) Κατὰ τὴν κ. τῇ κ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ΄.

Ἄπαντα τετραγώνια ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἐποὶ τετραγώνια ἢ πρὸς τῷ Α, περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν Γ, Γ, Α, Ρ, Σ. λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι Γ, Γ, Α, Ρ, Σ ἐλάσσονές εἰσι τεσσάρων ὀρθῶν. κ. α9.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεκτείνωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ μὲν Η, Θ, γωνίαι μείζονές εἰσι τῆς ΓΖΒ, αἱ δὲ Γ, Κ τῆς ΖΒΓ, αἱ δὲ Μ, Α τῆς ΒΓΔ, αἱ δὲ Ν, Ξ τῆς ΓΔΕ, αἱ δὲ Ο, Η τῆς ΔΕΖ. (ξ) ἄλλ' αἱ ΓΖΒ, ΖΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ, ΔΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἕξ ὀρθαῖς. (η) αἱ ἄρα Η, Θ, Γ, Κ, Μ, Α, Ν, Ξ, Ο, Η μείζονες ἕξ ὀρθῶν. ἀλλ' αἱ γωνίαι Η, Θ, Γ, Κ, Μ, Α, Ν, Ξ, Ο, Η μετὰ τῶν Γ, Γ, Α, Ρ, Σ, ἴσαι ὑπὸ δύνει ὀρθαῖς. (θ) αἱ ἄρα Γ, Γ, Α, Ρ, Σ ἐλάσσονές εἰσι τεσσάρων ὀρθῶν. ο. ε. δ.

ΣΤΗΝΚΗΕΙΑ.

Τῶν ἐπιπέδων σχημάτων τῶν ἰσογωνίων τε καὶ ἰσοπλευρῶν, τῶν ἢ Κανονικῶν λεγομένων, τρεῖς μόνον, τρίγωνον, τετράγωνον, ἢ πεντάγωνον, σῶμα συγκροτῆσι Κανονικὸν καλούμενον. Εἰσὶ δὲ σώματα κανονικὰ μόνον πέντε. Πυραμὶς, ὑπὸ τεσσάρων Ὀκτάεδρον, ὑπὸ ὀκτώ. Εἰκοσάεδρον, ὑπὸ εἴκοσι ἰσοπλευρῶν τε

Σ

καὶ

(ξ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (η) Κατὰ τὴν ιδ. συν. τὴν μετὰ τὴν λβ. τῷ η. (θ) Κατὰ τὴν λβ. τῷ η.

καὶ ἴσαν ἀλλήλους τριγώνων περιεχόμενον Κύβος, ὑπὸ ἑξ ἴσων τετραγώνων καὶ Δωδεκάεδρον, ὑπὸ δάδεκα κανονικῶν καὶ ἴσων ἀλλήλους πενταγώνων. ἐπεὶ γὰρ πᾶσα σφραῖ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων, ἢ τεσσάρων ἑξ ἑαὶν ἐπιπέδων γωνιῶν περιέχεται, φανερόν ἐστι τὸ κεφαλαιον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν τὴν σφραῖν περιχέστων, ἑλαττον εἶναι τεσσάρων ἐπιπέδων ἑξ ἑαὶν. ἐπεὶ ἔν η μὲν τῆς πυραμίδος σφραῖ γωνία ὑπὸ τριῶν περιέχεται ἐπιπέδων τριγωνικῶν γωνιῶν, ὧν τὸ κεφαλαιον ἴσων δυτὶν ἑξ ἑαὶν (ι) ἢ δὲ τῷ Οκταέδρῳ, ὑπὸ τεσσάρων, αἱ εἰσιν ἴσαι δυτὶν ἑξ ἑαὶς καὶ τριτημερίῳ δύο ἑξ ἑαὶν αἱ δὲ τῷ Εἰκταέδρῳ, ὑπὸ πέντε, ὧν τὸ ἀθροισμα ἴσαι δυτὶν ἑξ ἑαὶς, καὶ δυτὶ τριτημερίῳ δύο ἑξ ἑαὶν ἢ δὲ τῷ Κύβῳ, ὑπὸ τριῶν ἑξ ἑαὶν ἢ δὲ τῷ Δωδεκάέδρῳ ὑπὸ τριῶν πενταγωνικῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ὧν τὸ κεφαλαιον ἴσων τριτὶν ἑξ ἑαὶς, καὶ τριτὶ πεμπτημερίῳ μιᾷ ἑξ ἑαὶς (ἢ γὰρ τῷ πενταγώνῳ γωνία ἴση μιᾷ ἑξ ἑαὶς, καὶ πεμπτημερίῳ ἑξ ἑαὶς.) (κ) συσάδῃται ἀρα ὑπὸ τῶν ἐκτετακένων ἐπιπέδων σχημάτων σφραῖ γωνία. ἑξ ἔδηλον, ὅτι καὶ τὰ προειρηφθέντα πέντε κανονικὰ σώματα ἑξ αὐτῶν εἶναι τε συσάδῃται.

Ὅτι δὲ εἴδ' ὑπὸ τῶν ἐκτετακένων ἐπιπέδων σχημάτων εἴδ' ἐκ αὐτῶν τῶν, κανονικὰ συνίσταται σώματα, πλητὸν τῶν πέντε λεχθέντων, καταμαθεῖν πάλιν βούλομαι. διὰ μὲν γὰρ, ἰσοπλευρὰ τρίγωνα σφραῖν εἰσιν ἑαὶν, διὰ τὸ ὑπὸ πλείονων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν τὴν σφραῖν περιέχεται γωνία. εἴδ' μὲν ἑξ, διὰ τὸ τὰς ἑξ τριγωνικὰς γωνίας, ἑξ ἂν τὴν σφραῖν συσάδῃται εἶναι, ἴσας εἶναι τέσσαρσιν ἑξ ἑαὶς. ἑξ ἔδηλον, ὡς εἴδ' πλείονα, ἢ ἑξ. εἴδ' δὲ ἑξάγωνον, διὰ τὸ τὰς τρεῖς ἑξαγωνικὰς γωνίας

(ι) Ὅτι τὴν ἑξ ἑαὶν. (κ) Κατὰ τὸν αὐτὸν σχη.

γωνίας ἴσας εἶναι τέσσαρσιν ὀρθαῖς· (ἴση ἡ ἐξαγωνικὴ γωνία ὀρθῇ καὶ τριτημορίῳ ὀρθῆς.) εἰδὲ δὴ ἄλλα κανονικά χήματα ἐπίπεδα, διὰ τῶν αὐτῶν λόγων περιέχσιν Κανονικόν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

Ἐὰν ὥσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσας εὐθείαι, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυσθῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐξωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔξωσαν, πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι. καὶ ἔξωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εὐθεῖαι. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυσθῶν τὰς ἴσας εὐθείας, εἶπεν ἐκ τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΚΗ τρίγωνον συστήσασθαι. χ . 30.

Εἰ μὲν αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΚΘΗ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσιν, καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. (λ) εἴδεν δὴλον ὅτι ἐξ αὐτῶν συσταθήσεται τρίγωνον. ἔξωται δὴ αἱ ἐνηθῆσαι γωνίαι ἀνισαί.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω ἡ ΑΘΚ γωνία ἴση τῇ Ε. καὶ κείσθω ἡ ΘΛ = ΕΖ. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΛΚ, ΛΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν ταῖς τριγώνοις ΔΕΖ, ΑΘΚ, ἡ μὲν ΕΖ = ΑΘ, (μ) ἡ δὲ ΕΔ = ΘΚ, (ν) καὶ γωνία ἡ ΔΕΖ = ΑΘΚ. (ξ) ἄρα καὶ ἡ ΔΖ = ΑΚ. (ο) καὶ ἐπεὶ αἱ γωνίαι ΔΕΖ, ΚΘΗ Ξ 2 μεί-

(λ) Κατὰ τὴν δ. τῆ α. (μ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Ἐκ τῆς κατασκευ. (ο) Κατὰ τὴν δ. τῆ α.

μείζονα ὅτι τῆς ΔΕΓ· (π) ἔστι δὲ ἡ ΑΘΚ ἴση τῇ ΔΕΓ·
 (ρ) ἄρα καὶ ΑΘΚ, ΚΘΗ, ἄρα ἡ ΑΘΗ μείζων τῆς ΑΒΓ,
 ἐν τοῖς τριγώνοις ἐν ΑΘΗ, ΑΒΓ, ἡ μὲν ΑΘ = ΒΓ· ἴση
 γὰρ ἡ ΑΘ τῇ ΕΖ, (σ) ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΒΓ· (τ) ἡ δὲ
 ΘΗ τῇ ΒΔ, καὶ γωνία ἡ ΑΘΗ μείζων τῆς ΑΒΓ· ἄρα
 καὶ ἡ ΑΗ μείζων τῆς ΑΓ· (υ) ἄρα καὶ ΑΚ, ΚΗ μεί-
 ζοντες τῆς ΑΗ, (φ) πομπῶς ἄρα μείζοντες τῆς ΑΓ· δι-
 δακται δὲ ἡ ΑΚ ἴση τῇ ΑΖ· αἱ ἄρα ΑΖ, ΚΗ μεί-
 ζοντες τῆς λοιπῆς ΑΓ· ἐμμενὸς δὲ δείξομεν, ὅτι αἱ ΑΓ, ΔΓ
 μείζοντες τῆς ΚΗ, καὶ αἱ ΑΓ, ΚΗ μείζοντες τῆς ΔΖ.
 τὰς τριῶν ἄρα ΑΓ, ΑΖ, ΚΗ αἱ δύο μείζοντες εἰσι τῇ
 λοιπῇ, πάντα μεταλαμβανόμενοι· δῆλον ἄρα, ὅτι ἐξ αὐ-
 τῶν συσταθήσεται τρίγωνον. (χ)

Α Η Μ Μ Α Α΄.

Ἐὰν τρεῖς γωνίαι, αἱ Β, Ε, Θ (χ. 31.) ἐλάσ-
 σοντες μὲν ὥσι τεσσάρων ὀρθῶν, δύο δὲ τῆς
 λοιπῆς μείζοντες, πάντα μεταλαμβανόμενοι·
 περιέχοντο δὲ ὑπὸ ἰσῶν εὐθειῶν, τῶν ΑΒ, ΒΓ,
 ΕΑ, ΕΖ, ΘΚ, ΘΗ καὶ συσταθῇ μὲν ὑπὸ τῶν αὐ-
 τὰς ἐπιζευγνυσῶν τρίγωνον ὅποιονδὲν, εἴη
 τὸ ΑΜΝ, (χ. 32.) περὶ ὃ κύκλος περιγραφ-
 θῇ· ἐφαρμοσθῇ δὲ, ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΘΚ
 τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΘΗ τῇ ΑΒ, ὥστε ὑπὸ τῶν ἐπιπί-
 δαν γωνιῶν Β, Ε, Θ σφραγὴν γωνίαν συσταθῇ.

νμ

(π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Ἐκ τῆς παρυσκ. (σ) Ἰσοσυν. (τ) Ἐξ
 ὑποθ. (υ) Κατὰ τὴν κδ. τῇ α. (φ) Κατὰ τὴν η. τῇ β.
 (χ) Κατὰ τὴν λβ. τῇ α.

καὶ τὴν (Ο) λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς Ο σημεῖς ἀγομένη τοῦ κύκλου κάθετος ΟΚ ἐπὶ τὸ κέντρον αὐτῆς πεσεῖται.

Ἐξω πρῶτον ἐξυγώνιον τὸ ΔΜΝ τρίγωνον.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεκτείνωσαν αἱ ΚΑ, ΚΝ, ΚΜ.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΟΚΑ γωνία ὀρθή ἐστι, (Ψ) τὸ ἄρα $ΑΟ^2 = ΟΚ^2 + ΚΑ^2$. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ $ΟΝ^2 = ΟΚ^2 + ΚΝ^2$. ἀλλ' ἡ ΑΟ = ΟΝ. (α) καὶ $ΑΟ^2$ ἄρα ἴσον $ΟΝ^2$. ἄρα καὶ $ΟΚ^2 + ΚΑ^2 = ΟΚ^2 + ΚΝ^2$. κινὼν ἀφαιρεθῶν τὸ $ΟΚ^2$, τὸ ἄρα $ΚΑ^2 = ΚΝ^2$. ἄρα καὶ ΚΑ = ΚΝ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΚΜ = ΚΝ. αἱ τρεῖς ἄρα ΚΑ, ΚΝ, ΚΜ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. τὸ σημεῖον ἄρα Κ τὸ κέντρον τῆς κύκλου εἶναι. (β) ἡ ἄρα κάθετος ΟΚ ἐπὶ τὸ τῆς κύκλου κέντρον πίπτει.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ διαχθήσεται, ὅτι ἡ ΟΚ ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς κύκλου πίπτει, καὶ τὴν ὀρθογώνιον ἢ τὸ ΔΜΝ τρίγωνον, (χ. 33.) καὶ ἀμβλυγώνιον. χ. 34.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ.

Ἡ πλευρὰ ἄρα τῶν τριέτων ἰσοσκελῶν τριγώνων, ὅτι ἡ ΟΝ μίξων τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΝ τῆς κύκλου, τῆ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον, τὸ ἐκ τῶν βάσεων τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων συνιστάμενον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΟΚΝ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ΚΟΝ ἕξαι. (γ) ἡ ἄρα ΟΝ μίξων τῆς ΚΝ.

Ξ 3

ΛΗΜ-

(ψ) Ἐξ ὑποθ. (ω) Κατὰ τὴν μὲν τῆς α. (α) ἴσαι γὰρ αἱ ΑΟ, ΟΝ ταῖς ΒΓ, ΕΖ. (β) Κατὰ τὴν θ. τῆς γ. (γ) Κατὰ τὴν γ. συνίσταται τὴν μετὰ τὴν ΑΒ, τῆς α.

ΛΗΜΜΑ Β΄.

Δύο δοθεισών ευθειών, τῶν ΑΒ, ΑΓ, τρίτη
 ευρεθήσεται ἡ ΒΓ, ἥς τὸ τετράγωνον σὺν τῷ
 ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ΑΓ τετραγώνῳ ἴσα
 ἔσονται τ. ἀπὸ τῆς μείζονος ΑΒ τετραγώνῳ,
 εἰ ἐπὶ τῆς μείζονος ΑΒ ἡμικύκλιον γραφ-
 θῇ τὸ ΑΓΒ, καὶ αἱ αὐτὸ ἐναρμοσθῇ ἡ ἐλάσ-
 σων ΑΓ, καὶ ἀπὸ τῆς Γ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευχθῇ
 ἡ ΓΒ. ἐπὶ γὰρ ἡ ΑΓΒ γωνία ὀρθή ἐστι, (δ)
 τὸ ἄρα $AB^2 = AG^2 + GB^2$. (ε) χ. 35.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΙ΄.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς
 λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανό-
 μεναι, σφραγὴν γωνίαν συστήσασθαι. οἷον δὴ δὲ
 τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶ-
 ναι.

Ἐξωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ΑΒΓ,
 ΔΕΖ, ΗΘΚ, χ. 36. 37.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπειλήφθησαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ,
 ΘΚ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ. καὶ συν-
 σάτω τὸ ΑΜΝ τρίγωνον, ὥστε ἴσῃ εἶναι τὴν μὲν ΑΓ
 τῇ ΑΜ, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ΑΝ, τὴν δὲ ΗΚ τῇ ΜΝ. καὶ
 περιγεγράφω περὶ τὸ ΑΜΝ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΜΝ.
 καὶ ἀπὸ τῆς κέντρους Κ ἐπὶ τὸ Α ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ. ἡ
 ἐπὶ

(δ) Κατὰ τὴν λη. τῷ γ. (ε) Κατὰ τὴν μζ. τῷ α.

κ ἢ $OM \equiv B'$, ἐκείν ἐν τοῖς τρίγωνοις ΔOM , $\Delta B'$,
 ἢ μὲν $\Delta O \equiv \Delta B$, ἢ δὲ $OM \equiv B'$, ἐστὶ δὲ κ ἢ $\Delta M \equiv$
 ΔB . (λ) καὶ γωνία ἀγὰ ἡ $\Delta OM \equiv \Delta B'$. (μ) ἐπομένως
 δὴ διακρίνεται, ὅτι ἡ μὲν $\Delta ON \equiv \Delta E'Z$, ἢ δὲ $NOM \equiv$
 HEK . συνέστη ἀγὰ σφαιρὰ γωνία ἡ O ὑπὲρ ἐπιπέδων γωνι-
 ῶν, αἱ ἴσαι τῶν δοθέντων.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΑ'.

Ἐάν σφαιρὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων πε-
 ριέχεται, τὰ ἀπεναντίον αὐτῶ ἐπιπέδα ἴσα
 τε καὶ παραλλήλογράμμια εἴσι.

Ξ 4

Σ ΤΤ-

- (δ) Κατὰ τὴν συνίστησιν. τῶν α. λήγας. (η) Κατὰ τὸ β. λήγας. (θ) Ἐκ
 τῆς κατὰστροφῆς. (ι) Κατὰ τὴν μετὰ. τῶν α. (κ) Ἐκ τῆς κατὰστροφῆς
 ἢ γὰρ $HE \equiv OK$. (λ) Ἐκ τῆς κατὰστροφῆς. (μ) Κατὰ τὴν ἡ
 τῶν α.

ἴσῃ ἡ ΛB , ἡ τῶ ἰσοσκελῆς $\Lambda\text{B}\Gamma$ τριγώνου πλευρὰ μέ-
 ζου τῆς ἡμιδιαμέτρου $\text{K}\Lambda$, (ξ) ἔσται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς
 ΛB τετραγώνων μέζον τῶ ἀπὸ τῆς $\text{K}\Lambda$ τετραγώνου.
 καὶ οὕτως ἐκείναις τις ἡ $\text{I}\Pi$, ἥς τὸ τετραγώνων συν τῶ
 ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου $\text{K}\Lambda$ τετραγώνου ἴσα ἔσωσαν τῶ
 ἀπὸ τῆς ΛB τετραγώνου. (η) καὶ ἀπὸ τῶ κέντρου K
 αὐτάσταιω ἡ KO πρὸς ὀρθὰς τῶ κύκλῳ $\Lambda\text{M}\text{N}$, καὶ ἴση
 τῇ $\text{I}\Pi$. καὶ ἐκκενύχθωσαν αἱ $\text{O}\Lambda$, ON , OM . ἀγώ-
 γῃ, ὅτι γέγονε τὸ ἐκκενύχθαι. ἐκκενύχθωσαν γὰρ αἱ
 KN , KM .

Α Ε Ι Ξ Ι Ζ'.

Ἐπεὶ ἡ $\text{O}\text{K}\Lambda$ γωνία ἐξείη ἐστὶ, (θ) τὸ αἶμα $\overline{\Lambda\text{O}}^2 =$
 $\overline{\text{O}\text{K}}^2 + \overline{\text{K}\Lambda}^2$. (ι) ἐστὶ δὲ καὶ $\overline{\Lambda\text{B}}^2 = \overline{\text{O}\text{K}}^2 + \overline{\text{K}\Lambda}^2$. (κ) αἶμα
 $\overline{\Lambda\text{O}}^2 = \overline{\Lambda\text{B}}^2$. ὥστε καὶ ἡ $\overline{\Lambda\text{O}} = \overline{\Lambda\text{B}}$. διὰ ταῦτα αὐτὰ δὴ

Στερεὸν τὸ ΑΒΓΔΕΖΘΗ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιχέσθω, τῶν ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΖΒ, ΔΕ. λέγα Α', ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτῷ ἐπίπεδα παραλληλόγραμμά εἰσι Β', ὅτι καὶ ἴσα. §. 38.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπιτεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΔΖ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα, τὰ ΒΗ, ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδῳ τῷ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ ΑΒ, ΓΔ παράλληλοί εἰσι. (γ) πάλιν ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΕΖ, ΔΕ ὑπὸ ἐπιπέδῳ τῷ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ ΑΔ, ΕΓ παράλληλοί εἰσι. παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ ΑΓ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΒ, ΕΖ, ΔΕ, παραλληλόγραμμον ἔστι.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΓΘ παράλληλοί εἰσι ταῖς ΔΓ, ΕΖ, (ξ) ἡ ἄρα γωνία ΑΒΘ = ΔΓΖ. (ο) ἐνθ' ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΘ, ΔΓΖ, ἡ μὲν ΑΒ = ΔΓ, ἡ δὲ ΒΘ = ΕΖ, (π) καὶ γωνία ἡ ΑΒΘ = ΔΓΖ. καὶ τὸ ΑΒΘ ἄρα τρίγωνον ἴσον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ. (ρ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τῷ ΑΒΘ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΔΖ τῷ ΔΓΖ. (σ) τὸ ἄρα ΒΗ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΔΖ παραλληλογράμμῳ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν παραλληλόγραμμον ΑΓ = ΗΖ, τὸ δὲ ΖΒ = ΔΕ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον δὲ ὅτι τὰ ἀπεναντίον παραλληλόγραμμα καὶ ὁμοία εἰσιν. ἔχειτι γὰρ ἴσας τὰς γωνίας, καὶ ἀναλόγως τὰς πλευράς. ΔΗΜ.

(γ) Κατὰ τὴν ιγ. τῆ ια. (ξ) Ἐξ ὑποθ. (ο) Κατὰ τὴν ι. τῆ ια. (π) Κατὰ τὴν λδ. τῆ α. (ρ) Κατὰ τὴν δ. τῆ α. (σ) Κατὰ τὴν μκ. τῆ α.

ΛΗΜΜΑ Γ'.

Πάν παραλληλεπίπεδον ἐμφαίνεται ὑπὸ τῷ
 γνωμένῳ ἐν τῷ ὕψος αὐτῷ καὶ τῆς βάσεως.

Ἐστὶ παραλληλεπίπεδον τὸ ΘΓ, ὃ αἱ ΛΘ, ΒΗ εὐ-
 θεῖαι κἀθεταὶ ἐπὶ τῆς βάσεως ΘΖ. πίν. ΚΓ. χ. 39.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διαμεθίσταται αἱ τῆς βάσεως πλευραὶ ΘΗ, ΗΖ,
 καὶ τὸ ΓΗ ὕψος εἰς ἴσα ὀποσαῦν μέρη. οἷον ἡ μὲν ΘΗ,
 αἰς τέσσαρα, τὰ ΗΙ, ΙΚ, ΚΛ, ΛΘ· ἡ δὲ ΗΖ, εἰς
 δέκα, τὰ ΗΠ, ΠΨ, καὶ τὸ δὲ ΒΗ, εἰς ὀκτώ, τὰ
 ΒΦ, ΦΩ, καὶ ἡ ΧΘ διὰ μὲν τῷ Ι ἢ ΙΞ παραλ-
 ληλος τῇ ΗΖ· διὰ δὲ τῶν Ι, Ξ σημεῖων, ἐπίπεδον τὸ
 ΙΜΝΞ παράλληλον τῷ ΗΓ ὀρθογωνίῳ. διὰ δὲ τῷ Π,
 ἡ ΠΟ παράλληλος τῇ ΗΙ· διὰ δὲ τῶν σημείων Ο, Π,
 τὸ ΟΣΡΗ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΙΒ· διὰ δὲ τῷ Φ,
 ἡ ΦΧ παράλληλος τῇ ΗΙ· διὰ δὲ τῶν σημείων Χ, Φ,
 τὸ ΧΦΙΥ ἐπίπεδον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΙΖ ὀρθογώνιον τεταρτημόριον ἐστὶ τῷ ΘΖ ὀρ-
 θογωνίῳ· τὸ δὲ ΙΓ παραλληλεπίπεδον τῷ ΘΓ παραλ-
 ληλεπίπεδον· τὸ γὰρ ὅλον ΘΓ εἰς τέσσαρα διαμεριδύ-
 σεται παραλληλεπίπεδα τῷ ΙΓ ἴσα, ὅτε δὴ ὑπὸ ἴσων
 ἐπιπέδων περιεχόμενα. πάλιν τὸ μὲν ΠΙ ὀρθογώνιον
 δεκατημόριον μὲν ἐστὶ τῷ ΙΖ ὀρθογωνίῳ, τεσσαρακοση-
 μόριον δὲ τῷ ΘΖ. ὁμοίως τὸ ΙΡ παραλληλεπίπεδον δεκα-
 τημόριον μὲν ἐστὶ τῷ ΠΓ παραλληλεπίπεδον· ὅτε δὴ διαι-
 ρεθῆναι ἔχοντος εἰς δέκα παραλληλεπίπεδα ἴσα τῷ ΙΡ·
 τεσσαρακοσημόριον δὲ τῷ ΘΓ, διὰ τὸ εἰς τεσσαράκον-
 τα τοιαῦτα τὸ ὅλον ΘΓ μερίζεσθαι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ,
 κύβος ΙΓ ἔγδοον μὲν μέρος τῷ ΙΡ παραλληλεπίπεδον
 ἐστὶ, ἐγδοηκοσὸν δὲ τῷ ΠΓ, καὶ τριακοσιοσεκοσημόριον τῷ

ΘΓ. ὅλον ἄρα τὸ ΘΓ παραλληλεπίπεδον ἴσον 320 κύβους τῷ Π ἴσοις. ἐστὶ δὲ τὸ 320 τὸ γινόμενον ἐκ τῆ ὕψους ΒΗ, καὶ τῆς βάσεως ΘΖ. τὴν μὲν γὰρ βάση ἐμφαίνει ὁ 4ος ἀριθμὸς, τὸ δὲ ὕψος ὁ 8' ὧν τὸ γινόμενον 320. τὸ ἄρα ΘΓ παραλληλ-επίπεδον ἐμφαίνεται ὑπὸ τῆ ΒΗ. ΘΖ, ἴσων ὑπὸ τῆ γινόμενε ἐκ τῆ ὕψους καὶ τῆς βάσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ΄.

Εἰάν σερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπ' ἐναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάση, ὅτω τὸ σερεὸν πρὸς τὸ σερεὸν.

Σερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΗΖ ἐπιπέδῳ τῷ ΚΔ τετμηθῶ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπ' ἐναντίον ἐπιπέδοις ΗΒ, ΜΛ. λέγω ὅτι ἔσται ὡς ἡ ΒΓ βάση, πρὸς τὴν ΔΕ βάση, ὅτω τὸ ΗΔ σερεὸν, πρὸς τὸ ΚΖ σερεὸν. χ. 40.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὸ ΗΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ ΑΖ, (τ) τὸ αὐτὸ ἄρα ὕψος ἔχει τὰ παραλληλεπίπεδα ΗΔ, ΚΖ. ἐμφανέτωσαν ἐν ταῖς τέτῳ ὕψει αἱ ἴσαι ευθῆαι ΗΑ, ΜΕ. ὅθεν ἔσται τὸ μὲν παραλληλεπίπεδον ΗΔ = ΗΑ. ΒΓ, τὸ δὲ ΚΖ = ΜΕ. ΔΕ. (υ) ὡς ἄρα ΗΑ. ΒΓ : ΜΕ. ΔΕ :: ΗΔ : ΚΖ. ἀλλ' ὡς ΗΑ. ΒΓ : ΜΕ. ΔΕ :: ΒΓ : ΔΕ. ἔστι γὰρ ἡ ΗΑ = ΜΕ. (φ) ὡς ἄρα ΒΓ : ΔΕ :: ΗΔ : ΚΖ. (χ)

ΠΡΟ.

(τ) Κατὰ τὸν ιδ. ὁρίσ. τῆ ικ. (υ) Κατὰ τὸ γ. λημ. (φ) Κατὰ τὴν η. τῆ ε. (χ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΣ΄.

Προς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ σφραγῶ γωνία, ἴσῳ σφραγῶ γωνίαν συστήσασθαι.

Ἐξω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημείον, τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα σφραγῶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΓΔΗ, ΓΔΖ, ΖΔΗ ἐπιπέδων γωνιῶν. Χ. 41.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Εἰληφθῶ ἐπὶ τῆς ΔΖ τυχὸν σημείον τὸ Ζ. καὶ ἤχθῳ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΓΔ, ΔΗ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΖΘ. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΓΘ, ΘΔ, ΘΗ, ΗΖ, ΖΓ. καὶ ἀπειλήφθῳ ἡ ΑΚ ἴση τῇ ΔΓ. καὶ συνεστάτω ἡ μὲν ΚΑΝ γωνία ἴση τῇ ΓΔΗ, ἡ δὲ ΚΑΛ τῇ ΚΔΘ. καὶ κείσθῳ ἡ μὲν ΑΛ = ΔΘ, ἡ δὲ ΑΝ = ΔΗ. καὶ ἀπὸ τοῦ Α σημείον ἀνετάσθῳ ἡ ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΛ ἐπίπεδον. καὶ κείσθῳ ἡ ΑΕ = ΘΖ. καὶ ἐπεξεύχθῳ ἡ ΑΕ. λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ Α σφραγῶ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΚΑΝ, ΚΑΕ, ΕΑΝ ἴση ἐστὶ τῇ δοθείσῃ Δ. ἐπεξεύχθωσαν γάρ αἱ ΚΔ, ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΚΑΛ, ΓΔΘ, ἡ μὲν ΑΚ = ΔΓ, ἡ δὲ ΑΛ = ΔΘ, καὶ γωνία ἡ ΚΑΛ = ΓΔΘ. (ψ) ἄρα καὶ ἡ ΚΛ = ΓΘ. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΝ = ΘΗ. Ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΚΑΕ, ΓΘΖ ἡ μὲν ΚΛ = ΓΘ, ὡς δέδεικται, ἡ δὲ ΑΕ = ΘΖ, (α) καὶ γωνία ἡ ΚΑΕ = ΓΘΖ. (β) ἄρα καὶ ἡ ΚΕ = ΓΖ. (γ) διὰ τὰ

(ψ) Ἐκ τῆς κατὰ. (ω) Κατὰ τὴν δ. τῇ α. (α) Ἐκ τῆς κατὰ. (β) Κατὰ τὸν γ. ὁρίτ. τῇ α. (γ) Κατὰ τὴν δ. τῇ α.

τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $NE = HZ$. πάλιν ἐν τοῖς τριγ-
 γοῖς $\Lambda\Lambda\Theta$, $\Delta\Theta Z$, ἡ μὲν $\Lambda\Delta = \Delta\Theta$, ἡ δὲ $\Lambda E = \Theta Z$,
 καὶ γωνία ἡ $\Lambda\Lambda E = \Delta\Theta Z$. (δ) ἄρα καὶ ἡ $\Lambda E = \Delta Z$.
 ἐν τοῖς τριγῶνις $\Xi K\Lambda E$, $\Gamma\Delta Z$, ἡ μὲν $\Lambda K = \Delta\Gamma$, ἡ
 δὲ $\Lambda E = \Delta Z$, ἡ δὲ $KE = IZ$. καὶ γωνία ἄρα ἡ $K\Lambda E =$
 $\Gamma\Delta Z$. (ε) Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $E\Lambda N = Z\Delta H$. ἐ-
 στί καὶ ἡ $K\Lambda N = \Gamma\Delta H$, (ς) ἡ ἄρα πρὸς τῷ Λ γωνία
 ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'.

Ἀπο τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι σε-
 ρεῖ παραλληλεπίπεδον, ὁμοίον τε καὶ ὁμοί-
 ως κείμενον σερεὸν παραλληλεπιπεδον ἀνα-
 γράψαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν σε-
 ρεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ $\Delta\Gamma$. χ . 42.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συντάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ τῇ πρὸς τὸ Γ σε-
 ρεῖ γωνία ἴση ἡ πρὸς τῷ A , ὥστε ἴσιν εἶναι τὴν μὲν
 $\Delta\Lambda\Theta$ γωνίαν τῇ $\Gamma\Gamma Z$, τὴν δὲ $\Theta\Lambda K$ τῇ ZIH , καὶ εἴ-
 τὴν $K\Lambda B$ τῇ HTE . καὶ γεγενέτω ὡς $EG : \Gamma H :: BA :$
 ΛK , καὶ ὡς $H\Gamma : IZ :: KA : \Lambda\Theta$. καὶ ἔσαι καὶ ὡς
 $E\Gamma : IZ :: BA : \Lambda\Theta$. (η) καὶ συμπληρώσω τὸ $\Theta\Lambda$
 παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ $\Lambda\Lambda$ σερεόν. λέγω, ὅτι τὸ
 $\Lambda\Lambda$ ὁμοίον ἐστὶ καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ δοθέντι $\Gamma\Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς $E\Gamma : \Gamma H :: BA : \Lambda K$, καὶ γωνία ἡ $E\Gamma H =$
 $\Delta\Lambda K$, (θ) ὁμοίον ἄρα τὸ ΓH παραλληλόγραμμον τῷ
 BK παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ μὲν HZ
 ὁμοίον

(δ) Κατὰ τὸν γ. ὀρίσμ. τῷ ια. (ε) Κατὰ τὴν η τῷ α. (ς) Ἐκ
 τῆς κατασκ. (η) Κατὰ τὴν ιβ. τῷ ε. (θ) Ἐκ τῆς κατασκ.

ὅμοιον τῷ ΚΘ, τὸ δὲ ΕΖ τῷ ΒΘ. τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τῶ ΙΑ σερεῖ τρίτῃ παραλληλογράμμοις τῶ ΛΑ σερεῖ ὅμοιά εἶναι. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρίτῃ τοῖς ἀπεναντίων ἴσα τε εἰσι καὶ ὅμοια. (ι) ὅλοι ἄρα τὸ ΓΑ σερεῖν ὅλον τῷ ΛΑ ὅμοιον εἶναι. (κ) ὅτι δὲ καὶ ὁμοίως κείμενον, ὁῦλον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ'.

Ἐὰν σερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίων ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ σερεὸν ὑπὸ τῶ ἐπιπέδου.

Στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τετμήθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίων ἐπιπέδων, τὰς ΓΔ, ΔΕ. λέγω, ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ ΑΒ ὑπὸ τῶ ΓΔΕΖ. §. 43.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον ἴσον εἰσι τῷ ΓΒΖ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΛΔΕ τῷ ΔΘΕ. (λ) εἰσι δὲ καὶ τὸ μὲν ΙΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΕ παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΗΕ τῷ ΙΘ, (μ) τὸ δὲ ΓΔΙ Ζ κοινὸν ἐκατέρῳ τῶν πρισματῶν ΓΗΖΕΛΔ, ΓΒΖΕΘΛ. ἴσον ἄρα τὸ ΓΗΖΙ ΛΑ τῷ ΓΒΖΕΘΛ. (ν) ὥστε ὅλον τὸ ΑΒ σερεὸν δίχα τέμνεται ὑπὸ τῶ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα σερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος,
ὦν

(ι) Κατὰ τὴν κδ. τῷ ια. καὶ τὴν μετ' αὐτὴν σημ. (κ) Κατὰ τὸν θ. ὅρισμ. τῷ ια. (λ) Κατὰ τὴν λη. τῷ ια. (μ) Κατὰ τὴν κδ. τῷ ια. (ν) Κατὰ τὸν ι. ὅρισμ. τῷ ια.

ὧν αἱ ἐφεξῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσὶν εὐθαιῶν,
ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔσω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, τῆς AB παραλληλε-
πίπεδα, τὰ ΑΓΔΖΜΘΒΑ, ΑΓΕΗΝΚΒΑ ὑπὸ τὸ αὐ-
τὸ ὕψος ὄντα, ὧν αἱ ἐφεξῶσαι, αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΑΜ,
ΑΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθαιῶν ἴσω-
σαν τῶν ΖΝ, ΔΚ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΓΔΖΜΘΒΑ
τῷ ΑΓΕΗΝΚΒΑ. ρ. 44.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Ἐπεὶ παραλληλόγραμμον εἰσιν ἐκάτερον τῶν ΓΘ, ΓΚ
ἴση εἰσὶν ἢ ΓΒ ἐκάτερά τῶν ΔΘ, ΕΚ. (ξ) ὥστε καὶ ἡ
 $\Delta\Theta = ΕΚ$. κοινὴ ἀφηρέθω ἡ ΕΘ. λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ,
λοιπὴ τῇ ΘΚ ἴση. ἐν ταῖς τριγώνοις ἐν ΓΔΕ, ΒΘΚ,
ἡ μὲν ΔΕ = ΘΚ, ἡ δὲ ΓΔ = ΒΘ, ἡ δὲ ΓΕ = ΕΚ. (ο) τὸ
ἄρα ΓΔΕ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΘΚ τριγώνῳ. (π) διὰ τὰ αὐ-
τὰ δὴ καὶ τὸ ΑΖΗ = ΑΜΝ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ μὲν ΔΗ παραλ-
ληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΝ παραλληλόγραμμῳ, τὸ δὲ ΓΖ
τῷ ΒΜ, τῷ δὲ ΓΗ τῷ ΒΝ. τὸ πρίσμα ἄρα ΓΔΕΗΖΑ
ἴσον τῷ ΒΘΚΝΜΑ πρίσματι. (ρ) κοινὸν προσκείθω τὸ
σερεῖν ΑΓΕΗΜΘΒΑ. τὸ ἄρα ΑΓΔΖΜΘΒΑ παραλληλε-
πίπεδον ἴσον τῷ ΑΓΕΗΝΚΒΑ παραλληλεπίπεδῳ. ο. ε. δ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Α'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα σερεῖα πα-
ραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν
αἱ ὑφεξῶσαι εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθαιῶν,
ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔσω.

(ξ) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. (ο) Κατὰ τὴν αὐτήν. (π) Κατὰ τὴν
θ. τῷ α. (ρ) Κατὰ τὸν ε. ὅρισμ. τῷ ια.

"Εἶσαν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βλασῆος, τῆς ΑΒ παλαι-
 μνησμένης, τὰ ΑΙΝΑΒΙΕΚ, ΑΑΜΖΔΘΒΙ ὑπὸ τὸ
 αὐτὸ ὕψος, ἀνὰ ὑψέσσας, αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΑΜ, ΑΝ,
 ΓΔ, ΓΕ, ΕΘ, ΕΚ, ἐκ γοῖν ἐπὶ ταῖς αὐτῆς εὐθείαις. Αἱ-
 γὰρ, ὅτι ἴσων εἰσι τὸ ΑΗΝΑΒΙΕΚ τὸ ΑΑΜΖΔΘΒΙ. §. 45.

KATAΣΚΕΤΗ.

Εἰς βλάστησαν αἱ ΚΕ, ΖΑ, καὶ συμπληρώσαν
 ἀλλήλους κατὰ τὸ Η. ὡσαύτως ἐκβεβλήσθω ἡ ΝΗ
 συμπληρώσα τῇ ΖΗ κατὰ τὸ Ξ, ἡ δὲ ΜΘ τῇ ΚΕ κα-
 τὰ τὸ Ρ. καὶ ἐπὶ τούτων αἱ ΑΟ, ΑΕ, ΒΡ, ΓΗ.

ΑΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΕΚΚΝΑΟ πρὶς ἡμᾶς ἴσων εἰσι τὸ ΓΗΗΑΞ πρὸς-
 ἡμᾶς. (7) καὶ ὡς ὑποκείμενον τὸ εἶναι βολιθῆΑ. τὸ
 αἶμα ΑΗΝΑΒΙΕΚ παλαιμνησμένης ἴσων τὸ ΑΑΟΞ.
 ἡμῖν παλαιμνησμένης. ἀλλὰ τὸ ΑΑΟΞ ἡμῖν ἴσων
 εἰσι τὸ ΑΑΜΖΔΘΒΙ. (7) αἶμα τὸ ΑΗΝΑΒΙΕΚ ἴσων
 εἰσι τὸ ΑΑΜΖΔΘΒΙ. ο. ε. δ.

Η Ρ Ο Τ Α Ξ Ι Σ ΑΑ.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βλασῆων ὅντα ἑξῆς παλαιμνη-
 λειπόμενα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσα ἀλ-
 λήλοις εἰσιν.

Ἔσων ἐπὶ ἴσων βλασῆων τῶν ΑΒ, ΓΔ παλαιμνησ-
 μένων τὰ ΑΕ, ΓΖ, ὡς τὰ ὑψῆ ΕΒ, ΖΔ ἴσα. Αἶμα,
 ὅτι τὸ ΑΕ = ΓΖ. πιν. ΚΔ. §. 46.

ΑΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΑΕ = ΕΒ. ΑΒ, τὸ δὲ ΓΖ = ΖΑ. ΓΔ. (υ) ἀλλ'
 ΕΒ. ΑΒ = ΖΑ. ΓΔ. εἰσι γὰρ ἡ μὲν ΑΒ = ΓΔ, τὸ δὲ
 ΕΒ = ΖΔ. (φ) αἶμα καὶ ΑΕ = ΓΖ.

ΗΡΟ-

(σ) Διευκρινιστὴν καὶ ἀκριβὲς καὶ ἐν τῇ προλ. πορίῃ (τ) κατὰ τὴν
 πορίαν πορίῃ. (υ) κατὰ τὸ γ. ἡμῶν. (φ) εἰς ὑψος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΒ΄.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα σερεὰ παραλληλεπίδα πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐσῶταν παραλληλεπίπεδα, τὰ ΑΒ, ΓΔ ἴσα ὕψη ἔχοντα, τὰ ΒΕ, ΔΖ. λέγω, ὅτι ὡς ΑΒ : ΓΔ :: ΑΕ : ΓΖ. χ. 47.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν παραλληλεπίπεδον ΑΒ=ΒΕ. ΑΕ, τὸ δὲ ΓΔ=ΔΖ. ΓΖ, (χ) ὡς ἄρα ΑΒ : ΓΔ :: ΒΕ. ΑΕ :: ΔΖ. ΓΖ. ἀλλ' ὡς ΒΕ. ΑΕ : ΔΖ. ΓΖ :: ΑΕ : ΓΖ. (ψ) ἐστὶ γὰρ τὸ ΒΕ=ΔΖ. ὡς ἄρα ΑΒ : ΓΔ :: ΑΕ : ΓΖ. (ω)

ΣΗΝΗΕΙΑ.

Ἐάν μὲν αἱ τῶν παραλληλεπίπεδων βάσεις ἴσαι ᾖσι, τὰ δὲ ὕψη αὐτὰ, ἔσονται τὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ὕψη. ἐπεὶ γὰρ ΑΒ : ΓΔ :: ΒΕ. ΑΕ : ΔΖ. ΓΖ. ἐστὶ δὲ π ΑΕ=ΓΖ. ὡς ἄρα ΑΒ : ΓΔ :: ΒΕ : ΔΖ. ἐάν δι' αἱ βάσεις αὐτῶν καὶ τὰ ὕψη αὐτὰ ᾖσι, ἔσται τὰ παραλληλεπίπεδα ἐν λόγῳ συγκείμενα ἐκ τῶν ὅν ἔχει ὕψος πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ τῶν ὅν ἔχει βάσις πρὸς βάσιν. ἐλέγω γὰρ ΒΕ : ΔΖ τὸν ὁποιονδήποτε λόγον ὡσαύτως καὶ ΑΕ : ΓΖ. τὸ ἄρα γινόμενον ἐκ τῶν ἡγμένων, πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἐπομένων, ἔστιν ΒΕ. ΑΕ : ΔΖ. ΓΖ : λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν ὅν ἔχει ΒΕ : ΔΖ, καὶ ἐκ τῶν ὅν ἔχει ΑΕ : ΓΖ. (α) ἀλλ' ὡς ΑΒ : ΓΔ :: ΒΕ. ΑΕ : ΔΖ. ΓΖ : ἄρα καὶ ΑΒ πρὸς ΓΔ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν ὅν ἔχει ΒΕ : ΔΖ, καὶ ἐκ τῶν ὅν ἔχει ΑΕ : ΓΖ.

ΠΡΟ-

(χ) Κατὰ τὸ γ. λήμ. (ψ) Κατὰ τὴν η τῆ ε. (ω) Κατὰ τὴν ε τῆ ε. (α) Κατὰ τὸν ζ. ἔρισμ. τῆ ε.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Α Γ.

Τὰ ὅμοια εἶρετα παγαλῆλεπιδεα πρὸς ἀλλήλα ἐν τριπλάσιον λόγῳ εἰσι τῶν ὁμο-
 λόγων πλευσῶν.

Εἴσω ὅμοια παγαλῆλεπιδεα τὰ ΑΒ, ΓΑ, εἴσω
 λόγῳ δὲ εἴσω ἢ ΑΘ, τῇ ΘΚ. λέγω ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς
 τὸ ΓΑ τριπλάσιον λόγον ἔχει, ἥπερ ἢ ΑΘ πρὸς τῇ

ΘΑ. % 48.

Κ Α Τ Α Σ Κ Ε Τ Η.

Καὶ τὰ ΑΒ, ΓΑ παγαλῆλεπιδεα, ὡς τὰς
 ΑΘ, ΘΚ ἐν εὐθείᾳ τῶν, πρὸς τὰς δὲ εἰσὶν αἱ
 αἱ ΗΘ, ΘΑ, ὅμοιαι γὰρ οὖσαν τῶν παγαλῆλεπιδεα-
 ναι ΑΗ, ΑΚ, (β) ἴσαι εἰσὶν αἱ γωνίαι ΑΘΗ, ΚΟΑ.
 καὶ ἐκβληθῶσαν αἱ ΙΒ, ΖΞ, ΦΗ, ΑΘ, καὶ πρὸς
 τὰς εἴσω τὸ ΘΞ παγαλῆλεπιδεα, ὡς τὰς εἴσω
 εἴσω τῶν ΟΑ, ΝΑ, πεπληρωθῶ τὸ ΑΡ παγαλῆ-
 λεπιδεα.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Ὅτι τὸ ΑΒ παγαλῆλεπιδεα, πρὸς τὸ ΘΞ παγαλῆ-
 λεπιδεα, ὡς ἢ ΑΗ βλάσις, πρὸς τῇ ΘΤ βλάσις.
 (γ) αἱ ὡς ΑΗ : ΘΤ :: ΑΘ : ΘΚ. (δ) ὡς αἱ ΑΒ :
 ΘΞ :: ΑΘ : ΘΚ. (ε) αἱ ὡς ΑΘ : ΘΚ : ΗΘ : ΘΑ
 (ς) αἱ ΑΒ : ΘΞ :: ΗΘ, ΘΑ. (η) αἱ ὡς ΗΘ :
 ΘΑ :: ΕΘ : ΣΑ. (θ) ὡς αἱ ΑΒ : ΘΞ :: ΒΘ : ΣΑ.
 (ι) αἱ ὡς ΕΘ : ΣΑ :: ΘΞ : ΑΡ. (κ) ὡς αἱ ΑΒ :
 ΘΞ :: ΘΞ : ΑΡ. (λ) εἴπω δὲ ὡς ΘΞ : ΑΡ :: ΕΘ :

Ο

ΣΑ.

(β) Καὶ τὸν 9 ὁρίσας. τῇ αἱ. (γ) Καὶ τὴν πρὸς. (δ) Κα-
 τὰ τὴν α. τῇ ε. (ε) Καὶ τὴν α. τῇ ε. (ς) Καὶ τὴν α. τῇ ε. (η) Καὶ
 τὴν α. τῇ ε. (η) Καὶ τὴν α. τῇ ε. (θ) Καὶ τὴν α. τῇ ε. (ι) Καὶ
 τὴν α. τῇ ε. (κ) Καὶ τὴν α. τῇ ε. (λ) Καὶ τὴν α. τῇ ε.

ΣΑ, (μ) καὶ ὡς ΒΘ: ΣΑ:: ΗΘ: ΘΑ. (ν) ἄρα καὶ ὡς
ΘΞ: ΑΡ:: ΗΘ: ΘΑ. (ξ) ἀλλ' ὡς ΗΘ: ΘΑ:: ΣΘ:
ΘΓ. (ς) ἄρα καὶ ὡς ΘΞ: ΑΡ:: ΣΘ: ΘΓ. (π) ἀλλ'
ὡς ΣΘ: ΘΓ:: ΣΑ: ΑΓ, (ρ) καὶ ὡς ΣΑ: ΑΓ:
ΑΡ: ΓΔ. (σ) ἄρα ΘΞ: ΑΡ:: ΑΡ: ΓΔ. (τ) ἀλλ'
ὡς ΑΒ: ΘΞ:: ΘΞ: ΑΡ, ὡς δίδονται. ὡς ἄρα ΑΒ:
ΘΞ:: ΘΞ: ΑΡ:: ΑΡ: ΓΔ τὰ τέσσαρα ἄρα παραλλη-
λεπίπυδα ΑΒ, ΘΞ, ΑΡ, ΓΔ συνεχόμενα εἰσὶν. γὰρ τὸ
ἄρα πρῶτον ΑΒ, πρὸς τὸ τέταρτον ΓΔ τριπλασίονα
λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ πρῶτον ΑΒ πρὸς τὸ δεύτερον ΘΞ.
(υ) ἀλλ' ὡς ΑΒ: ΘΞ:: ΑΘ: ΘΚ, ὡς δίδονται. τὸ
ἄρα ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ
ΑΘ πρὸς τὴν ΘΚ. ε. ε. δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Τι δὴ τῆς φανερόν, ὅτι εἰν τέσσαρες εὐθεταί-
να ἄλγουν ὧσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην,
ἔτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης σκερὲν παραλληλεπίπυδον,
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὕμειον καὶ ὁμοίως ἀ-
ναγκαζόμενον. ἐπειδήπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τε-
τάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν δι-
τίαν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΛ΄.

Τῶν ἰσῶν σκερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντι-
πεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν σκε-
ρεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ
βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐσὶν ἐκείνα.

ἔσται

(μ) Κατὰ τὴν προλ. πρόγ. (ν) Κατὰ τὴν α. τῆ σ. (ξ) Κατὰ
τὴν α. τῆ σ. (ς) Ἐξ ὑποθ. (π) Κατὰ τὴν α. τῆ σ. (ρ) Κατὰ
τὴν α. τῆ σ. (σ) Κατὰ τὴν α. τῆ σ. (τ) Κατὰ τὴν α. τῆ
σ. (υ) Κατὰ τὸ β. πρὸς τὸ μετὰ τὴν η. τῆ σ.

Ἔστω ἴσα τετραεῖ παραλληλεπίπεδα, τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὡς ὕψη αἱ ΒΚ, ΔΖ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΚ βῆσις πρὸς τὴν ΓΖ βῆσιν, ἔστω τὸ ΔΖ ὕψος, πρὸς τὸ ΒΚ ὕψος. καὶ ἴαν ὡς ΑΚ : ΓΖ :: ΔΖ : ΓΚ, λέγω, ὅτι τὰ ΑΒ, ΓΔ παραλληλεπίπεδα ἴσα ἀλλήλοις. χ. 49.

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Τὸ μὲν ΑΒ = ΓΚ. ΑΚ, τὸ δὲ ΓΔ = ΔΖ. ΓΖ. (φ)
αἰσ. τὸ ΑΒ = ΓΔ. ἄρα καὶ τὸ ΒΚ. ΑΚ = ΔΖ. ΓΖ.
ὡς ἄρα ΑΚ : ΓΖ :: ΔΖ : ΒΚ. (χ)

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπὶ αἱ ΑΚ : ΓΖ :: ΔΖ : ΒΚ. ἄρα τὸ ΑΚ. ΓΚ =
ΓΖ. ΔΖ. (ψ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΚ. ΒΚ ἐστὶ τὸ ΑΒ πα-
ραλληλεπίπεδον, τὸ δὲ ΓΖ. ΔΖ ἐστὶ τὸ ΓΔ. (ω) τὸ ἄρα
ΑΒ = ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΕ΄.

Τῇ διὰ μόνῃ συντάμναι τῆς ἐξῆς προτάσεως,
ἦτις ἐξ ἀνευ αὐτῆς διαχθήσεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΣ΄.

Ἐὰν τρεῖς εὐθυαὶ ἀνάλογον ὡσι, τὸ ἐκ τῶν
τρεῶν τερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ
ἀπὸ τῆς μέσης τερεῖ παραλληλεπιπέδῳ,
ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθυαὶ ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς
Α : Β :: Β : Γ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ πα-
ραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἰσοπλεύρῳ μὲν,
ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. χ. 50.

Ο 2

ΚΑ.

(φ) Κατὰ τὸ γ. λῆμ. (χ) Κατὰ τὴν σ. τῷ α. (ψ) Κατὰ
τὸν αὐτ. (ω) Κατὰ τὸ γ. λῆμ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκείδω σρεα γωνία, ἡ πρὸς τῷ Ε, περιεχμένη
 ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων ἐξῶν τῶν ΔΕΗ, ΗΕΖ,
 ΖΕΔ. καὶ κείδω τῇ Β ἴση ἐκάστη τῶν ΔΕ, ΕΗ, ΕΖ
 καὶ συμπεπληρώσω τὸ ΚΕ παραλληλεπίπεδον. καὶ ἐκ-
 κείδω ἡ ΑΜ ἴση τῇ Α. καὶ συνεχίστω πρὸς τὰ Α
 σρεα γωνία, περιεχμένη ὑπὸ τῶν ἐξῶν ἐπιπέδων
 γωνιῶν ΝΛΞ, ΜΛΞ, ΜΑΝ. καὶ ἐκείδω ἡ μὲν ΑΝ=
 Β, ἡ δὲ ΑΞ=Γ. καὶ συμπληρώσω τὸ ΘΛ πα-
 ραλληλεπίπεδον.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς Α : Β :: Ε : Γ, (α) ἔτι δὲ ἡ μὲν ΑΜ=
 Α, ἡ δὲ ΑΞ=Γ, ἐκτέτα δὲ τῶν ΖΕ, ΕΗ ἴση τῇ
 Β, (β) ὡς ἄρα ΑΜ : ΖΕ :: ΕΗ : ΑΞ. ἄρα ΜΑ. ΑΞ=
 ΖΕ. ΕΗ. (γ) αἱ ἄρα βάσεις ΜΞ, ΖΗ τῶν ΘΛ, ΚΕ
 παραλληλεπίπεδων ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ τὰ ὕψη δὲ
 αὐτῶν ΝΑ, ΔΕ ἴσα ἀλλήλαις. ἐκότερον γὰρ ἴσον τῇ
 Β. (δ) τὸ ἄρα ΘΛ παραλληλεπίπεδον ἴσον τῷ ΚΕ. (ε)
 καὶ ἐπὶ τὸ μὲν ΘΛ, τὸ ἐκ τῶν τριῶν Α, Β, Γ, τὸ δὲ
 ΚΕ τὸ ἀπὸ τῆς μέσης Β. τὸ ἄρα ἐκ τῶν τριῶν, κτ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΖ΄.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, καὶ
 τὰ ἀπ’ αὐτῶν παραλληλεπίπεδα, ὁμοιά-
 τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα, ἀνάλογον ἔσαι.
 καὶ εἰάν τὰ ἀπ’ αὐτῶν σρεα παραλληλε-
 πίπεδα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα
 ἀνάλογον ᾧ, καὶ αὐτὰ αἰ εὐθεῖαι ἀνάλογον
 ἔσονται. ἔστω

(α) Ἐξ ὑποθ. (β) Ἐκ τῆς κατσκευ. (γ) Κατὰ τὸν ισ. τῷ β

(δ) Ἐκ τῆς κατσκευ. (ε) Κατὰ τὸν λμ. τῷ ικ.

Ἐξῆς: τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον, ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ΑΒ: ΓΔ:: ΕΖ: ΗΘ. λέγω, ὅτι καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὁμοῖά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα παραλληλεπίπεδα, τὰ ΚΑ, ΛΓ, ΜΕ, ΝΗ ἀνάλογον ἔσται, ὅταν ὡς ΚΑ: ΛΓ:: ΜΕ: ΝΗ. εἰ δὲ ὡς ΚΑ: ΛΓ:: ΜΕ: ΝΗ, ἔσται καὶ ὡς ΑΒ: ΓΔ:: ΕΖ: ΗΘ. χ. 51.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. (ζ) ἀλλ' ὡς ΑΒ: ΓΔ:: ΕΖ: ΗΘ. (η) ἄρα καὶ ὡς ΚΑ: ΛΓ:: ΜΕ: ΝΗ. (θ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπεὶ τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. (ι) εἰ δὲ ὡς ΚΑ: ΛΓ:: ΜΕ: ΝΗ, (κ) ἄρα καὶ ὡς ΑΒ: ΓΔ:: ΕΖ: ΗΘ. (λ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΔΗ΄.

Ἐὰν ἐπιπέδον πρὸς ἐπιπέδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπὸ τινος σημείου τῶν ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων καθεύτου ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσῇται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη καθεύτος.

Ἐπιπέδον τὸ ΓΔ ἐπιπέδον τῷ ΑΒ πρὸς ὀρθῶς ἔστω κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΑΔ. καὶ εἰληφθῶ ἐπὶ τῇ ΓΔ ἐπιπέδῳ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ

Ο 3

τῷ

(ζ) Κατὰ τὴν λγ. τῷ ικ. (η) Ἐξ ὑποθ. (θ) Κατὰ τὸ ζ. διώρ. τὸ μετὰ τὸ ε. βιβλ. (ι) Κατὰ τὴν λγ. τῷ ικ. (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὸ αὐτὸ διώρ.

τῇ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπιπέδον κἀθύστερ ἀγομένη, ἐπὶ τῆς ΔΑ περὶ τὰς. *χ.* 52.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' αἱ δυνατὸν ποιήσω ἐκτός, ὡς ἡ ΕΖ.

ΚΑΤΑΣΚΕΙΗ.

Ἀπὸ τῆ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΑ ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κἀθύ-
 του ἤχθω ἡ ΖΗ· ἤτοι καὶ τῷ ΓΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὅ-
 θας τὰς. (μ) καὶ ἐπιβύχθω ἡ ΓΗ.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία ΓΖΗ ὀρθή ἐστ. (ν) ἔστι δὲ ὀρθή καὶ ἡ
 ΓΗΖ. (ξ) τὴν γωνίαν ἄρα τῇ ΓΖΗ αἱ δύο γωνίαι δυσὶν
 ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἄγετον, ἐκ ἄρα ἡ αἰὸ τῇ Ε
 ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπιπέδον κἀθύστερ ἀγομένη ἐκτός περὶ τὰς
 τῆς ΔΑ ἐπὶ τὴν ΔΑ ἄρα περὶ τὰς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΘ'.

Ἐὰν τερεῖς παραλληλεπίπεδα τῶν ἀπεναν-
 τίων ἐπιπέδων ἐν πλευρᾷ δίχῳ τμηθῶσι, διὰ
 δὲ τῶν τομῶν ἐπιπέδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ το-
 μὴ τῶν ἐπιπέδων, καὶ ἡ τῶ τερεῖς παραλληλε-
 πίπεδα διάμετρος δίχῳ τέμνυσιν ἀλλήλας.

Παραλληλεπίπεδα τῷ ΑΖ τῶν ἀπεναντίων ἐπιπέδων
 τῶν ΓΖ, ΑΦ αἱ πλευραὶ δίχῳ τὴν τμηθῶσιν κατὰ τὰ
 Κ, Λ, Ο, Μ· Ξ, Θ, Ρ, Η σημῶσα, διὰ δὲ τῶν
 τομῶν ἐπιπέδα ἐκβληθῶσιν τὰ ΚΟ, ΞΡ. κοινὴ δὲ τῶν
 ἐπιπέδων τερμὴ ἔστω ἡ ΝΞ, τῇ δὲ ΑΖ παραλληλεπίπε-
 δα διαγώνιος ἡ ΔΗ. λέγω, ὅτι αἱ ΝΞ, ΔΗ δίχῳ τέμ-
 νυσιν ἀλλήλας. *χ.* 53.

ΚΑ.

(μ) Κατὰ τὸν δ. ὀρίσμ. τὰ ια. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Ἐν τῷ
 παλαιῷ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεφύχθωσαν αἱ ΔΝ, ΝΕ, ΒΣ, ΣΗ.

ΛΕΙΨΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΝΔΞ, ΝΘΕ, ἡ μὲν ΝΘ = ΝΞ, ἡ μὲν γὰρ ΝΘ = ΕΛ, ἡ δὲ ΝΞ = ΛΓ· (ο) ἔτι δὲ ἡ ΓΛ = ΛΓ· (π) ἡ δὲ ΘΕ = ΔΞ, καὶ γωνία ἡ ΝΘΕ = ΝΕΔ. (ρ) καὶ γωνία αἶρα ἡ ΘΝΕ = ΞΝΔ. (σ) διὰ δὲ τῆτο εὐθυαῖ ἐστὶν ἡ ΔΝΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθυαῖ ἐστὶ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΛ ἴση τῇ καὶ παραλλήλου τῇ ΔΒ, ἐστὶ δὲ ἡ ΓΛ καὶ τῇ ΕΗ ἴση τε καὶ παραλλήλου, αἱ αἶραι ΔΒ, ΕΗ ἴσαι τε καὶ παραλλήλοι. (τ) ἴσαι τε αἶραι καὶ παραλλήλοι καὶ αἱ ΕΔ, ΗΒ. Ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΗΤΣ, ΔΤΝ, ἡ μὲν γωνία ΤΗΣ = ΤΔΝ, ἡ δὲ ΤΣΗ = ΤΝΔ. (υ) καὶ ἡ ΗΣ = ΔΝ. ἡμίσηται γὰρ αἰσι τῶν ΒΗ, ΔΕ. αἶραι ἡ μὲν ΗΤ = ΤΔ, ἡ δὲ ΣΤ = ΤΝ (φ) ο. ε. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ'.

Ἐὰν ἡ δύο πρίσματα ἰσοῦψῃ, καὶ τὸ μὲν ἔχα βάσιν παραλλήλογράμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἢ τὸ παραλλήλογράμμον τῷ τριγώνῳ, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω πρίσματα ἰσοῦψῃ τὰ ΑΒΕΖΔΓ, ΗΘΚΝΟΜ. καὶ τὸ μὲν ἔχέτω βάσιν τὸ ΑΖ παραλλήλογράμμον, τὸ δὲ, τὸ ΗΘΚ τρίγωνον. διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ΑΖ τῇ ΗΘΚ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΕΖΔΓ πρίσμα τῷ ΗΘΚΝΟΜ πρίσματι. Χ. 54.

Ο 4

ΚΑ-

(ο) Κατὰ τὴν λγ. τῇ α. α, τὴν κατὰ. (π) ἢ ἐπὶ. (ρ) Κατὰ τὴν κδ. τῇ α. (σ) Κατὰ τὴν δ. τῇ α. (ξ) Κατὰ τὴν λ. τῇ α. (υ) Κατὰ τὴν κδ. τῇ α. (φ) Κατὰ τὴν κν. τῇ α.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συμπληρώθω τὰ ΛΞ, ΚΜ παραλληλεπίπεδα.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ ΛΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΘΚ τετράγωνῳ, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τῷ ΗΘΚ τετράγωνῳ, (χ) ἴσον ἄρα τὸ ΛΖ τῷ ΘΚ. τὰ ἄρα παραλληλεπίπεδα ΛΞ, ΚΜ ἐπὶ ἴσων βάσεων καὶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν. ἄρα τὸ ΛΞ = ΚΜ. (ψ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΛΞ ἥμισυ ἐστὶ τὸ ΑΒΕΖΔΓ πρίσμα, τὸ δὲ ΚΜ, τὸ ΗΘΚΝΟΜ. (ω) τὰ ἄρα ΑΒΕΖΔΓ, ΗΘΚΝΟΜ πρίσματα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.



ΒΙΒΛΙΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Πυραμὶς ἐστὶ χῆμα τετρεὺς, ἐπιπέδοις τριγωνικαῖς, οἷον, τοῖς ΖΑΒ, ΖΒΓ, ΖΓΔ, ΖΔΑ περιεχόμενον, ἀπὸ ἑνὸς ὁποιοδήποτε ἐπιπέδου, οἷον τῷ ΑΓΓΔ, πρὸς εἰς σημεῖω τῷ Ζ συνεστὸς. καὶ τὸ μὲν ΑΒΓΔ ἐπίπεδον Βάσις, τὸ δὲ Ζ σημεῖον Κορυφὴ τῆς πυραμίδος ἐστὶ πίν. ΚΕ'. χ. ι.

Σχηματίζεται δὲ ἡ Πυραμὶς, εἰάν, ληφθῶντες τυχόντος ἐπιπέδου, οἷον τῷ ΑΒΓΔ, ἀπὸ τίνος μετῴρου σημεῖου, τῷ Ζ, ἐπὶ πάσας τὰς κορυφὰς τῶν τῷ ἐπιπέδου γωνιῶν ἐκθῶται ἐπιτευχθῶσιν, οἷον αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ. β'.

(χ) Κατὰ τὴν μα. τῷ κ. (ψ) Κατὰ τὴν λα. τῷ ικ. (ω) Ἐκ τῆς κη. τῷ ιθ. ὁρίζεται.

Β'. Ἐάν ἀπό τινος τῶν ἐν μετρώρῳ σημείῳ, τῷ Α, ἐπὶ τὴν τῷ κύκλῳ ΓΑΔ περιφέρουσαν ἐφαπτομένη ἀχθῇ ἡ ΑΓ· καὶ μένοντος τῷ Α σημείῳ, περιενεχθῇ περὶ τὴν περιφέρειαν, καὶ εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ μὲν ἐπιφάνεια ἡ παρὰ τῆς ἐκδοῦσας καταγεγραφεμένη, **Κωνικὴ** λέγεται· τὸ δὲ περὶ τὸ ὑπὸ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ τῷ κύκλῳ περιεχόμενοι, **Κῶνος**· καὶ ἡ μὲν ἐκδοῦσα ΑΓ, **πλευρὰ** τῷ Κῶνι· τὸ δὲ σημεῖον Α, **Κορυφή**· ὁ δὲ κύκλος ΓΑΔ, **Βάσις**· ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ κέντρον τῷ κύκλῳ ἐκτεταγμένη, ἡ ΑΚ, **Ἄξων**. καὶ εἴαν μὲν ὁ Ἄξων πρὸς ἐξοῦς ἢ τῇ βάσει, ὀρθὸς ὁ Κῶνος καλεῖσθαι (χ. 2.) εἴαν δὲ μὴ, **Πλάγιος** 3.

Γίνεται δὲ ὁ Κῶνος, καὶ ὅταν ὀρθογωνίᾳ τριγώνῳ μετέσσης πλευρᾷ, τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθῇ τὸ τρίγωνον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι.

Γ'. Ἐάν ἐκδοῦσαι τις, ἡ ΓΖ, δύο κύκλων ἴσωντε καὶ παραλλήλων καὶ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ὄντων ἐπιπέδῳ, τῶν ΓΓ, ΖΖ, ἐφαπτήται, καὶ περιενεχθῶσα, ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ μὲν ὑπὸ αὐτῆς καταγεγραφεμένη ἐπιφάνεια, **Κυλινδρική** λέγεται· τὸ δὲ ὑπὸ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ τῶν δύο κύκλων περιληφθὲν σκεδόν, **Κύλινδρος**· καὶ ἡ μὲν ἐκδοῦσα ἡ ΓΖ, **πλευρὰ** τῷ κυλίνδρῳ· οἱ δὲ ΓΓ, ΖΖ,

κύκλοι, Βάσεις· ἡ δὲ τὰ κέντρα τῶν κύκλων ἐπι-
 ζευγνύσασα ΒΑ, Ἄξων καὶ εἰάν μὲν ὁ ἄξων πρὸς
 ὁρθὰς ἢ ἐκατέρᾳ τῶν βάσεων, ὁρθὸς ὁ Κύλιν-
 δρος (χ. 4) εἰάν δὲ μὴ, Πλάγιος. χ. 5.

Γίνεται δὲ ὁ Κύλινδρος, καὶ ὅταν ὁρθογωνίᾳ παραλ-
 ληλογράμμῳ μενέσῃ μιᾷ πλευρᾷ, περιεχθὲν τὸ
 παραλληλόγραμμον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν
 ἤρξατο φέρεσθαι,

Δ'. Ὅμοιοι Κῶναι καὶ Κύλινδροι εἰσὶν, ὧν εἴτε ἄξωνι
 καὶ αἱ διαμέτροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἴσας
 περιέχουσι γωνίας.

Ε'. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίᾳ τῇ ΑΓΒ μενέσῃ
 τῆς διαμέτρου ΑΒ, περιεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον, εἰς τὸ
 αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι,
 τὸ περιληφθὲν σφαιρὸν. καὶ Ἐπιφάνεια μὲν τῆς
 σφαίρας, ἡ ὑπὸ τῆς περιφερείας τῇ ἡμικυκλίᾳ κατα-
 γραφομένη· Κέντρον δὲ τὸ αὐτὸ Κ, ὃ καὶ τῇ ἡμι-
 κυκλίᾳ Ἄξων δὲ εἶναι ἡ μέγιστα εὐθεΐα ΑΒ, περὶ
 ἣν τὸ ἡμικύκλιον σφέρεται· Διάμετρος δὲ τῆς
 σφαίρας, εὐθεΐα τις διὰ τῆς κέντρου ἡγμένη, καὶ
 περὶ τεμένην ἐφ' ἐκατέρᾳ τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφα-
 νείας τῆς σφαίρας. χ. 6.

Ζ'. Σχήμα εἰς χῆμα, ἐπίπεδον εἰς ἐπίπεδον, ἢ σφαιρὸν
 εἰς σφαιρὸν ἀπολήγειν, ἢ χερσὶ ταυτίζεσθαι, λέγεται,
 ὅταν ἡ αὐτῶν διαφορὰ ἐλάσσων ἢ πάσης δοθείσης
 ποσότητος.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἀλλήλα ἐσὶν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετραγώνων.

Ἐξώσαν κύκλοι αἱ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα, τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔξωσαν αἱ ΑΔ, ΗΛ. λέγω, ὅτι ἐσὶν ὡς ΑΒΓΔΕΖ πολύγωνον, πρὸς ΗΘΚΛΜΝ πολύγωνον, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΛ τετραγώνον. *χ. 7.*

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΒΔ, ΒΖ, καὶ αἱ ΘΛ, ΘΝ.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΑΖ, ΘΗΝ, ἡ μὲν ΒΑΖ γωνία ἴση τῇ ΘΗΝ· ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ΒΑ : ΑΖ :: ΘΗ : ΗΝ· (α) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΖΒ = ΗΝΘ. (β) ἀλλ' ἡ μὲν ΑΖΒ = ΒΔΛ, ἡ δὲ ΗΝΘ = ΘΛΗ. (γ) ἄρα καὶ ἡ ΒΔΛ = ΘΛΗ. ἐν τοῖς τριγώνοις ἔν ΑΒΔ, ΗΘΛ, ἡ μὲν γωνία ΑΒΔ = ΗΘΛ, (δ) ἡ δὲ ΒΔΛ = ΘΛΗ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΒΑΔ λοιπῇ τῇ ΘΗΛ ἴση. ὡς ἄρα ΒΑ : ΑΔ :: ΘΗ : ΗΛ. (ε) καὶ ἐναλλάξ ὡς ΒΑ : ΘΗ :: ΑΔ : ΗΛ. (ς) ἀλλὰ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ, πρὸς πολύγωνον ΗΘΚΛΜΝ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΘΗ. (η) ἄρα πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ πρὸς πολύγωνον ΗΘΚΛΜΝ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΗΛ. εἴτεν ὡς πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ, πρὸς πολύγωνον ΗΘΚΛΜΝ, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΛ τετραγώνον. (θ) ο. ε. δ.

ΣΥ-

(α) Κατὰ τὸν α. ὁρισμ. τῆ σ. (β) Κατὰ τὴν σ. τῆ σ. (γ) Κατὰ τὴν κα. τῆ γ. (δ) Κατὰ τὴν λα. τῆ γ. (ε) Κατὰ τὴν δ. τῆ σ. (ς) Κατὰ τὴν ζ. τῆ σ. (η) Κατὰ τὴν κ. τῆ σ. (θ) ὅτι τὴν σ. σημ. τὴν ἐν τοῖς ὁρίσμοις. τῶ ι. βιβλ.

ΣΥΝΕΠΕΙΛΑ.

Εν τῷ τέττα Φανερόν, ὅτι καὶ αἱ περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων τῶν εἰς τὴν αὐτὴν κύκλῳ ἐγγεγραμμένων ἀνάλογον εἰσι ταῖς διαμέτροις τῶν κύκλων, ὅταν ὡς $AB + BE + ED + DE + EZ + ZA : HO + OK + KA + AM + MN + NH :: AD : HA$. ἐπεὶ γὰρ ὡς $AE : HO :: AD : HA$, ὡς δέδοικται καὶ εἰσιν, ὡς $AE : HO :: AB + BE + ED + DE + EZ + ZA : HO + OK + KA + AM + MN + NH$. (ι) ἄρα καὶ $AE + BE + ED + DE + EZ + ZA : HO + OK + KA + AM + MN + NH :: AD : HA$. (κ)

Α Η Μ Μ Α Α'.

Ἡ περίμετρος τῶν πολυγώνων τῶν εἰς τὸν κύκλον περιγεγραμμένων τε καὶ ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν αὐτὴν κύκλῳ περιφέρειαν ἀπολήγει αὐτὰ δὲ τὰ πολύγωνα εἰς τὸν κύκλον.

Ἐξω περὶ τὸν κύκλον $ZHOAM$ περιγεγραμμένον πολύγωνον, τὸ $ABΓΔΕ$, καὶ ἐπιχειρῶσάν ἀπὸ τῆς κέντρως K ἐπὶ τὰ A, O, E σημεῖα τῶν KA, KO, KE , ἐγγεγραψάμενον ὁμοίον πολύγωνον τὸ $ZHOAM$. λέγω, A' , ὅτι ἡ περίμετρος τῶν περιγεγραμμένων, ὁμοίως καὶ ἡ τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων εἰς τὴν αὐτὴν κύκλῳ περιφέρειαν ἀπολήγει B . ὅτι καὶ αὐτὰ τὰ πολύγωνα ἀπολήγει εἰς τὸν κύκλον. καὶ δ.

ΛΕΙΠΕΙΣ. ΤΟΤ Α'.

Ἡ KZA δίχα τέμνει τὴν τε BAE καὶ τὴν HZM γωνίαν. (λ) ἐστὶ δὲ ἡ $BAE = HZM$, διὰ τὴν τῶν πολυγώνων ὁμοιότητα. ἄρα καὶ ἡ BAK γωνία ἴση τῇ HZK . διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $AEK = ZHK$. τὰ τρίγωνα ἄρα $KAB,$

(ι) Κατὰ τὴν η' τῆς ι'. (κ) Κατὰ τὴν ι' τῆς ι'. (λ) Ὅμοιόν τῶν δὲ τῆς ιβ'. πρὸς τῆς δ. βιβλ.

ΕΑΒ, ΚΖΗ ἰσογώνια εἰσιν. ὡς ἄρα $BA : AK :: HZ : ZK$. (μ) καὶ ἐναλλάξ ὡς $BA : HZ :: AK : ZK$. (ν) αὖτ' ὡς $BA : HZ$ ἔτ' ὡς ἡ περίμετρος τῆς περιγεγραμμένης, πρὸς τὴν περίμετρον τῆς ἐγγεγραμμένης πολυγώνου. (ξ) ἡ ἄρα τῆς περιγεγραμμένης πολυγώνου περίμετρος, πρὸς τὴν τῆς ἐγγεγραμμένης λόγον ἔχει ἐν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΖΚ. αὖτ' ὁ λόγος ἐν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΖΚ παντὸς δοθέντος λόγου ἐλάσσων γενήσεται, εἰάν ἀπειροσώμα πολύγωνα περὶ τὸν κύκλον περιγραφῇ ἢ ἐγγραφῇ. ὁ ὁ λόγος ἄρα ἐν ἔχει ἡ περίμετρος τῆς περιγεγραμμένης πολυγώνου, πρὸς τὴν τῆς ἐγγεγραμμένης ἐλάσσων εἶναι παντὸς δοθέντος λόγου. ὅπερ εἶναι, ὅτι ἡ ὑπεροχὴ καθ' ἣν ἡ περίμετρος τῆς περιγεγραμμένης ὑπερέχει τὴν τῆς ἐγγεγραμμένης ἐλάσσων εἶναι πάσης δοθείσης πλάτους. ἡ ἄρα περίμετρος τῆς περιγεγραμμένης ἀπολήξει εἰς τὴν τῆς ἐγγεγραμμένης περίμετρον. (ο) πολλὸν μᾶλλον ἢ α ἰσότης α τῶν ἐξημένων περιμέτρων εἰς τὴν τῆς κύκλου περιφέρειαν ἀπολήξει, τὴν μεταξὺ ἐκείνης καμένην.

ΛΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ΖΗΘΛΜ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἡ ΛΑ πρὸς τὴν ΗΖ. (π) αὖτ' ὡς $BA : HZ :: AK : ZK$, ὡς δέδοικται. τὸ ἄρα ΑΒΓΔΕ πρὸς τὸ ΖΗΘΛΜ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΖΚ. ὅπερ εἶναι, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ περιγεγραμμένον πολύγωνον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ΖΗΘΛΜ λόγον ἔχει ἐν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ τετραγώνου, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ τετραγώνου. αὖτ' ὁ λόγος ἐν ἔχει $AK^2 : ZK^2$ ἐλάσσων παντὸς δοθέντος λόγου.

(μ) Κατὰ τὴν δ. τῇ σ. (ν) Κατὰ τὴν ζ. τῇ ε. (ξ) Κατὰ τὴν προλ. συνίπ. (ο) Κατὰ τὸν σ. ὅρισμ. τῇ ιβ. (π) Κατὰ τὴν κ. τῇ σ.

γὰρ ἔστι, εἴαν ἀπειροσώδημα πολύγωνον περιγεγραφῇ καὶ ἐγγεγραφῇ εἰς τὸν κύκλον. καὶ ὁ λόγος ἄρα ὅν ἔχει τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἐλάττω ἐστὶ πάντος διδόντος λόγου, τετέστιν ἡ ὑπεροχὴ καὶ ἢ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ὑπερέχει τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάττω ἐστὶ πάσης δοθείσης ποσότητος. τὸ περιγεγραμμένον ἄρα πολύγωνον εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον ἀπολήξει, ὥστε πολλὸ μᾶλλον ἐκείτηρον τέταται εἰς τὸν κύκλον ἀπολήξει, τὸν μεταξὺ ἐκατέρω κείμενον.

Λ Η Μ Μ Λ Ε'.

Εἴαν τὰ περιγεγραμμένα ἢ ἐγγεγραμμένα σχήματα ἀπολήγῃ εἰς ἃ περιγέγραπται, ἢ ἐγγέγραπται, ὃν λόγον ἔχει τὰ περιγεγραμμένα ἢ ἐγγεγραμμένα πρὸς αἴθεα τινα, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὰ περὶ ἃ περιγέγραπται, ἢ ἐγγέγραπται.

Νεωρήτω σχήματα, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ καλούμενα. καὶ περὶ τὰ Α, Β περιγεγραμμένα ἔσω τὰ Γ, Δ, ὡς ἃ καὶ ἀποληγέται. ἔσω δὲ ὡς Γ : Δ :: Ε : Ζ. λέγω, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς Α : Β :: Ε : Ζ. εἰ γὰρ μὴ, τὸ Α πρὸς τὸ Β ἦτοι μείζονα λόγον ἔξει, ἢ περὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἢ ἐλάττωνα. ἐχέτω δὴ Α : Β > Ε : Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ Α : Β > Ε : Ζ, ἄρα Β : Α < Ζ : Ε. (ρ) καὶ ὁθω, ὡς Θ : Α :: Ζ : Ε. καὶ δῆλον ὅτι τὸ Θ μείζον ἐστὶ τῷ Β. (σ) ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς Γ : Δ :: Ε : Ζ. (τ) ἄρα καὶ

(ρ) Κατὰ τὴν συνίτ. τῇ α. διώρ. τῇ μετὰ τὸ ε. βιβλ. (σ) ὅτι ὅτι δ. τῇ ε. δῆλον. (τ) Ἐξ ὑπεθ.

καὶ ἀνάπαλιν ὡς $\Delta : \Gamma :: Z : E$. (υ) ὥτε καὶ ὡς $\Theta : \Lambda :: \Delta : \Gamma$. (φ) ἀλλὰ τὸ Θ μᾶλλον ἐν τῷ B, μᾶλλον ἐστὶ καὶ τῷ Δ. (τὸ μὲν γὰρ Θ ὑπερέχει τὸ B κατὰ τινὰ ὀρίσμενὴν ποσότητα, τὸ δὲ Δ τὸ B ποσότητι πάσης δοθείσης ἐλάσσονι) καὶ τὸ A ἄρα μᾶλλον τῷ Γ, (χ) ἔστιν τὸ Γ ἐλαττον τῷ Λ. τὸ περιγεγραμμένον ἐλαττον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. ὅπερ ἄντιπεν. ἐκ ἄρα τὸ A πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ τὸ E πρὸς τὸ Z.

Ἐχέτω δὴ $A : B \leq E : Z$. καὶ κείτω πάλιν ὡς $\Theta : B :: E : Z$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $\Gamma : \Delta :: E : Z$, (ψ) ἔστι καὶ ὡς $\Theta : B :: \Gamma : \Delta$. (ω) ἀλλὰ τὸ Θ μᾶλλον ἐν τῷ A, μᾶλλον ἐστὶ καὶ τῷ Γ διὰ τὰς ἤδη ρηθέντας λόγους. ἄρα καὶ τὸ B μᾶλλον τῷ Δ, (α) ὅπερ ἐστὶ τὸ Δ ἐλαττον τῷ B. τὸ περιγεγραμμένον ἐλαττον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. ὅπερ ἄντιπεν. ἐκ ἄρα A πρὸς B ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ E πρὸς Z, δίδασκται δὲ, ὅτι ἐδὲ μείζονα λόγον ἔχει. ὡς ἄρα $A : B :: E : Z$. ο. ε. δ.

Ἔτω δὲ τὰ Γ, Δ ἐγγεγραμμένα εἰς τὰ A, B, εἰς α' καὶ ἀποληγέτω. ἔτω δὲ ὡς $\Gamma : \Delta :: E : Z$. λέγω, ὅτι καὶ ὡς $A : B :: E : Z$. εἰ γὰρ μὴ, τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B ἢτοι μείζονα ἢ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ τὸ E πρὸς τὸ Z. ἐχέτω δὴ $A : B \geq E : Z$. καὶ κείτω ὡς $\Theta : B :: E : Z$. καὶ δῆλον ὅτι τὸ Θ ἐλαττέον ἐστὶ τῷ Λ. (β) ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $E : Z :: \Gamma : \Delta$, (γ) ἔστι καὶ ὡς $\Theta : B :: \Gamma : \Delta$. ἀλλὰ τὸ Θ ἐλαττον ἐν τῷ A, ἐλαττέον ἐστὶ καὶ τῷ Γ. ἄρα καὶ B ἐλαττον τῷ Δ. (δ)

τὸ

(υ) Κατὰ τὴν συνίπ. τῆς ζ. τῷ ε. (φ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (χ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (ψ) Ἐξ ὑποθ. (ω) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (α) Κατὰ τὴν κ. τῷ ε. (β) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω. δῆλον. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὴν κ. τῷ ε.

τὸ περιγεγραμμένον ἔλαττον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. ἔπει
ἀποπν. διὰ α. α. $A : B \supset E : Z$.

Ἐκείτῃ δὲ $A : B \supset E : Z$. ἄρα $B : A \supset Z : \Gamma$. (ε)
καὶ ὅτι α. α. $A : Z : \Gamma$. καὶ ὅθεν, ὅτι τὸ Θ ἔλατ-
τον τῷ Β. (ζ) καὶ ὅτι ὡς $\Gamma : \Delta :: E : Z$, ἔσται καὶ ὡς
 $\Delta : \Gamma :: Z : E$. (η) ἄρα καὶ ὡς $\Theta : A :: \Delta : \Gamma$. (θ)
ἀλλὰ τὸ Θ ἔλαττον ἐν τῷ Β, ἔλαττόν ἐστι καὶ τῷ Δ.
καὶ τὸ Α ἄρα ἔλαττον τῷ Γ. (ι) τὸ περιγεγραμ-
μένον ἔλαττον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. ἔπει ἀποπν. διὰ α. α.
 $A : B \supset E : Z$. ἀλλὰ δοθένταί, ὅτι ὅδε $A : B \supset E : Z$. ἄρα ὡς $A : B :: E : Z$. ε. ε. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ
τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

ΛΕΙΞΙΣ.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα τὰ εἰς τὰς κύκλους ἐγγεγραμ-
μένα, ἀπλήγῃ εἰς τὰς κύκλους. (κ) ἀλλὰ τὰ ὅμοια
πολύγωνα τὰ εἰς τὰς κύκλους ἐγγεγραμμένα εἰσὶν ὡς
τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. (λ) ἄρα καὶ οἱ κύ-
κλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τε-
τράγωνα. (μ)

ΣΥΝΕΠΙΑ.

Αἱ δὲ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν,
ὡς αἱ διαμέτραι. ἐπεὶ γὰρ αἱ περιμέτραι τῶν πολυ-
γώνων τῶν εἰς τὰς κύκλους ἐγγεγραμμένων, εἰς τὰς περι-
φέρειας αὐτῶν ἀπολήγουσιν, (ν) αἱ δὲ περιμέτραι πρὸς
ἄλλη-

(ε) Κατὰ τὴν συνίπ. τῷ α. διωρ. τῷ μετὰ τὸ ε. βιβλ. (ζ) Ἐκ
τῆς δ. τῷ ε. (η) Κατὰ τὴν συνίπ. τῆς ζ. τῷ ε. (θ) Κατὰ
τὴν ε. τῷ ε. (ι) Κατὰ τὴν κ. τῷ ε. (κ) Κατὰ τὸ α. λῆμ.
(λ) Κατὰ τὴν α. τῷ β. (μ) Κατὰ τὸ β. λῆμ. (ν) Κατὰ
τὸ α. λῆμ.

ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ διάμετροι. (ξ) καὶ αἱ τῶν κύκλων ἄρα περιφέρειαί πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ τῶν κύκλων διαμέτροι. (ο)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ', καὶ Δ'.

Εἰσὶν ἐπιμήκσοι καὶ μόνω δαλεύουσι τῇ τῆς πέμπτης προτάσεως δίξις. ἥτις καὶ ἄνευ αὐτῶν δαχθήσεται.

ΛΗΜΜΑ Γ'.

Τὰ εἰς τὰς πυραμίδας, τὰς τριγώνους βάσεις ἔχοντας, ἐγγεγραμμένα τε καὶ περιγεγραμμένα πρίσματα, εἰς αὐτὰς ἀπολήγαι.

Ἔστω πυραμὶς ἡ ΖΑΒΣ, καὶ τῆς πλευρῆς αὐτῆς εἰς ἴσα μέρη διαιρέσεως, τὰ ΖΛ, ΛΗ, ΗΣ, περιγεγραμμένα μὲν περὶ αὐτὴν νενοήθω πρίσματα, τὰ ΖΨΩΟΠΛ, ΛΜΤΚΧΗ, ΗΑΦΒΑΣ· ἐγγεγραμμένα δὲ τὰ ΛΠΟΘΡΗ, ΗΧΚΦΙΣ, ἐκβληθείσων δὴθεν τῶν μὲν ΨΗ, ΩΟ ἐπὶ τὰ Ρ, Θ σημεῖα, τῶν δὲ ΜΧ, ΤΚ ἐπὶ τὰ Γ, Φ, καὶ ἐκβεβληθείσων τῶν ΡΘ, ΓΦ. χ. ϑ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΨΡ, ΩΘ ἐπὶ τὰ Ξ, Ν σημεῖα. καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΞΝ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ πρίσμα ΖΨΩΟΠΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΠΟΘΡΗ πρίσματι. (π) ἔτι δὲ τὸ ΛΠΟΘΡΗ ἴσον τῷ ΗΡΘΝΞΣ, (ρ) ἄρα καὶ τὸ ΖΨΩΟΠΛ ἴσον τῷ ΗΡΘΝΞΣ. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν
 Π πρίσ-

(ξ) Κατὰ τὴν συνίπ. τὴν μετὰ τὴν α. τῇ ιβ (ο) Κατὰ τὸ β. λήμ. (π) Κατὰ τὴν λα. τῇ ια. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτὴν.

πρίσμα ΑΜΤΚΧΗ ἴσεν τῷ ΗΧΚΦΙΣ, τὸ δ' ΑΠΟΘΡΗ ἴσεν τῷ ΗΡΘΝΕΣ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΟΗΜΤΚΧΡΘ ἴσεν λοιπῷ τῷ ΘΡΧΚΦΙΞΝ. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον πρίσμα ΗΔΒΒΑΣ ἴσεν τοῖς ΖΨΩΟΗΑ, ΟΗΜΤΚΧΙΘ, καὶ τῷ ΚΧΔΕΒΑΓΦ. ἀλλ' ἡ ὑπερβολή, καθ' ἣν πάντα τὰ περιγεγραμμένα πρίσματα ὑπερέχει τὰ ἐγγεγραμμένα ἴση ἐστὶ τοῖς ΖΨΩΟΗΑ, ΟΗΜΤΚΧΡΘ, ΚΧΔΙΒΑΓΦ. αὕτη ἄρα ἡ ὑπερβολή ἴση τῷ περιγεγραμμένῳ πρίσματι ΗΔΒΒΑΣ. ἀλλὰ τὸ πρίσμα τέτοιο ἐλαττον πάσης δεξιότητος ποσότητος γινέσεται, εἴαν εἰς ἀπὸρα τὸν ἀριθμὸν μέση τῆς ΖΣ πλευρᾶς διαιρέσῃτο, ἀπαιρεσάμενα πρίσματα περὶ τὴν πυραμίδα περιγεγραμμένα τε καὶ ἐγγεγραμμένα νοηθῇ. ἡ ὑπερβολή ἄρα καθ' ἣν τὰ περιγεγραμμένα πρίσματα ὑπερέχει τὰ ἐγγεγραμμένα ἐλάττωσαν εἶναι πάσης δεξιότητος ποσότητος. τὰ ἄρα περὶ τὴν πυραμίδα περιγεγραμμένα πρίσματα εἰς τὰ ἐγγεγραμμένα ἀπολήξαι. (σ) πολλῷ μάλλον ἄρα τὰ τε περιγεγραμμένα περὶ τὴν πυραμίδα πρίσματα καὶ τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς αὐτὴν, μεταξύ αὐτῶν καμμένην, ἀπολήξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔσται πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσιν βάσεις, πρὸς ἀλλήλας ἴσας ὡς αἱ βάσεις.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ πρίσματα τὰ εἰς τὰς πυραμίδας, τὰς τριγώνους βάσεις ἔχοντας, ἐγγεγραμμένα τε καὶ περιγεγραμμένα ἀπολήξαι εἰς τὰς πυραμίδας. (τ) ἀλλὰ τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πρίσματα πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

(σ) Κατὰ τὸν σ. ὁρισμ. τῶ αβ. (τ) Κατὰ τὸ προλ. λήμ.

τας. (υ) ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔσαι πυραμίδες, καὶ τυχόντες ἔχουσι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔσαι πυραμίδες, καὶ πολυγώνους ἔχουσι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἦσαν οὖν τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες αἱ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ, πολυγώνους ἔχουσι βάσεις τὰς ΒΓΔΕ, ΗΘΙΚ, κερφαὶ δὲ τὰ Α, Ζ σημεῖα. λέγο, ὅτι ὡς ΑΒΓΔΕ : ΖΗΘΙΚ :: ΒΓΔΕ : ΗΘΙΚ. γ. το.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διηγήσω ἡ μὲν ΒΓΔΕ βάσις εἰς τὰ Χ, Φ τρίγωνον ἡ δὲ ΗΘΙΚ, εἰς τὰ Ρ, Τ. καὶ νενοήσωσαν ἐφ' ἑκάστης τυχόντος πυραμίδος ἰσοῦψους, ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι, αἱ ΑΒΓΕ, ΑΓΔΕ, ΖΗΘΚ, ΖΘΙΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ΑΒΓΕ : ΖΗΘΚ :: Χ : Ρ. (Φ) ὡσαύτως καὶ ὡς ΑΒΓΕ : ΖΘΙΚ : Χ : Τ. ἄρα καὶ ὡς ΑΒΓΕ : ΖΗΘΚ + ΖΘΙΚ :: Χ : Ρ + Τ. (Χ) ἄρα ὡς ΑΒΓΕ : ΑΓΔΕ :: Χ : Φ. (Ψ) ἄρα καὶ ὡς ΖΗΘΚ + ΖΘΙΚ : ΑΓΔΕ :: Ρ + Τ : Φ. (ω) εἴτεν ὡς ΖΗΘΙΚ : ΑΓΔΕ :: ΗΘΙΚ : Φ. ἄρα καὶ ὡς ΑΓΔΕ : ΖΗΘΙΚ :: Φ : ΗΘΙΚ. (α) ἔτι δὲ καὶ ὡς ΑΒΓΕ : ΖΗΘΙΚ :: Χ : Ρ + Τ, ὡς δὲ διηγομαι. ἄρα καὶ ὡς (β) ΑΒΓΕ : ΑΓΔΕ : ΖΗΘΙΚ :: Χ + Φ : ΗΘΙΚ, εἴτεν ὡς ΑΒΓΔΕ : ΖΗΘΙΚ :: ΒΓΔΕ : ΗΘΙΚ. ο. ε. δ.

(υ) Κατὰ τὴν λβ'. τῷ ια. (φ) Κατὰ τὴν ι. τῷ ιβ. (χ) Κατὰ τὴν κγ. τῷ ε. (ψ) Κατὰ τὴν ι. τῷ ιβ. (ω) Κατὰ τὴν ιβ. τῷ ε. (α) Κατὰ τὴν συνία. τῇς ζ'. τῷ ε. (β) Κατὰ τὴν κγ. τῷ ε.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι αἱ μὲν ἴσας τὰς βάσεις ἔχουσαι πυραμίδες καὶ αἰῶσα τὰ ὕψη, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη· αἱ δὲ αἰῶσα τὰ τε ὕψη καὶ τὰς βάσεις, ἐν λόγῳ συγκυρμῶν ἐκτε τῷ ἐν ἔχει ὕψος, πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ τῷ ἐν ἔχει βάσεις πρὸς βάσιν αἱ δὲ ἴσα τὰ τε ὕψη καὶ τὰς βάσεις, ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. καὶ γὰρ τὰ πρίσματα τὰ ἐγγεγραμμένα τε καὶ περιγεγραμμένα εἰς τὸς τριγώνους ἔχουσας βάσεις πυραμίδας, εἰς αὐτὰς ἀπολήγει· αἱ δὲ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πυραμίδας, εἰς πυραμίδας τριγώνους ἔχουσας βάσεις διαίρεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαίρεται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἔχουσας.

Ἔστω πρίσμα, ἔστω μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίας δὲ τὸ ΔΕΖ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΖΔΕ πρίσμα διαίρεται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἔχουσας. χ. ιι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΕΔ, ΕΓ, ΓΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΒΔ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΔΒ τρίγῳν. (γ) καὶ ἡ πυραμὶς ἅρα, ἥς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν τῷ ΕΔΒ τρίγῳν, κορυφὴ δὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ. (δ) ἀλλ’ ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν τὸ ΕΔΒ τρίγωνον,

γον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημῆεν, ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημῆεν ὑπὸ τῆς τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημῆεν ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι ἥς βάσις μὲν τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημῆεν. ἐπεὶ δὲ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ, (ε) καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Α σημῆεν ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημῆεν. ἡ δὲ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημῆεν ἴση ἐδείχθη τῇ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημῆεν. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημῆεν, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημῆεν. διήρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΖΔΕ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνως βάσις ἐχέσας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Ἐκ δὴ τέττα φανερόν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τῷ πρίσματι, τῷ τὴν βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντι αὐτῇ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπειδὴ περ καὶ ἕτερόν τι χῆμα ἑυθύγραμμον ἔχει ἢ βάσις τῷ πρίσματι, καὶ τὸ αὐτῆς ἀπεναντίον, διαιρεῖται εἰς πρίσματα τριγώνως βάσις ἔχοντα, ὁμοίως καὶ τὰ αὐτῶν ἀπεναντίον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ἐκ τέττα καὶ τὴν πυραμίδα καταμετρεῖν μανθάνομεν. ἐπεὶ γὰρ καταμετρεῖται τὸ παραλληλεπίπεδον, πολλαπλασιαζομένη τῷ ὕψει αὐτοῦ διὰ τῆς βάσεως (ζ) πᾶν δὲ παραλληλεπίπεδον εἰς δύο ἴσα διαιρεῖται

(ε) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. (ζ) Κατὰ τὸ λῆμ. τὸ μετὰ τὴν κδ. τῷ ια.

ἀλλὰ τὰ μὲν τρία, ΒΜ, ΒΝ, ΒΚ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοια· τὰ δὲ τρία, τὰ ΕΠ, ΕΡ, ΕΞ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοια. (κ) ὅμοια ἄρα τὸ ΒΛ σφραγὸν τοῦ ΕΟ σφραγῶ. (λ) τὸ ἄρα ΒΛ πρὸς τὸ ΕΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. (μ) ὡς δὲ ΒΛ πρὸς ΕΟ ἔτως ἡ ΗΑΒΓ πυραμὶς, πρὸς τὴν ΘΔΕΖ πυραμίδα. ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἔκτον μέρος ἐστὶ τῷ σφραγῶ, διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα τρίτου ὂν τῷ σφραγῶ παραλληλεπιπέδου, (ν) τριπλασίονα ὂν τῆς πυραμίδος. ἢ ἡ ΗΑΒΓ ἄρα πυραμὶς, πρὸς τὴν ΘΔΕΖ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΒΓ, πρὸς τὴν ΕΖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ αἱ πολυγώνους ἄρα ἔχουσι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδος πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ αἰσὶ τῶν ὑψώνων πλεονούν. εἰς πυραμίδας γὰρ διαιρῶνται τριγώνους ἔχοντας βάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τῶν ἴσων πυραμίδων, καὶ τριγώνους βάσεις ἔχουσιν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ τῶν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἔχουσιν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσῃ αἰσὶν ἐκείνῃ.

Ἦσαν ἴσαι πυραμίδες, αἱ ΗΑΒΓ, ΘΔΕΖ, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφαὶς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα. λέγω, ὅτι ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις, πρὸς τὴν

Π 4

ΔΕΖ

(κ) Κατὰ τὴν κδ. τῇ ια. καὶ τὴν μετ' αὐτὴν σημ. (λ) Κατὰ τὸν 3. ὁρισμ. τῇ ικ. (μ) Κατὰ τὴν λγ. τῇ ιβ. (ν) Κατὰ τὴν 2η. τῇ ιθ.

ΔΕΖ βάσιν, ἔτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς ΗΑΒΓ πυραμίδος ὕψος. εἰάν δὲ ἢ ὡς ΑΒΓ : ΔΕΖ, ἔτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς ΗΑΒΓ πυραμίδος ὕψος, ἔσται ἡ ΗΑΒΓ = ΘΔΕΖ. ρ. 13.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συμπεπληρώσω τὰ ΒΛ, ΕΟ παραλληλεπίπεδα.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΑΒΓ πυραμὶς τῇ ΘΔΕΖ πυραμίδι, (ξ) καὶ ἐπὶ τῆς μὲν ΗΑΒΓ πυραμίδος ἐξαπλάσιον τὸ ΒΛ περιεχόν, τῆς δὲ ΘΔΕΖ τὸ ΕΟ, ἴσον ἄρα τὸ ΕΛ τῷ ΕΟ. ὡς ἄρα ἡ ΕΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, ἔτω τῷ ΕΟ περιεχόν τὸ ὕψος, πρὸς τὸ τῷ ΒΛ περιεχόν ὕψος. (ο) ἀλλ' ὡς ΒΜ : ΕΠ :: ΑΒΓ : ΔΕΖ, (π) ὡς ἄρα ΑΒΓ : ΔΕΖ, ἔτω τὸ τῷ ΕΟ ὕψος, πρὸς τὸ τῷ ΕΛ ὕψος. (ρ) ἀλλὰ τὸ μὲν τῷ ΕΟ ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τῷ ΒΛ τῷ τῆς ΗΑΒΓ. ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις, πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, ἔτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς ΗΑΒΓ πυραμίδος ὕψος.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐπεὶ ὡς ΑΒΓ : ΔΕΖ, ἔτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς ΗΑΒΓ πυραμίδος ὕψος. (σ) ἐστὶ δὲ ὡς ΑΒΓ : ΔΕΖ :: ΒΜ : ΕΠ. (τ) καὶ τὰ τῶν πυραμίδων δὲ ὕψη τὰ αὐτὰ εἰσι τοῖς τῶν παραλληλεπιπέδων ἄρα ὡς ΒΜ : ΕΠ, ἔτω τὸ τῷ ΕΟ ὕψος, πρὸς τὸ τῷ ΒΛ. (υ) ἴσον ἄρα τὸ ΒΛ τῷ ΕΟ. (φ) καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα ΗΑΒΓ = ΘΔΕΖ. ἔκτεν γὰρ μέρος τῶν παραλληλεπιπέδων εἰσὶν αἱ πυραμίδες.

ΠΟ.

(ξ) Ἰ.ξ. ὑποθ. (ο) Κατὰ τὴν λδ. τῷ εα. (π) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. καὶ τὴν η. τῷ ε. (ρ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (σ) Ἐξ ὑποθ. (τ) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. καὶ τὴν ε. τῷ ε. (υ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (φ) Κατὰ τὸ λδ. τῷ εα.

Π Ρ Ι Σ Μ Α.

Δῆλον δὲ, ὅτι τὰ αὐτὰ καὶ ταῖς πολυγώνους ἔχουσας βάσεις πυραμίσιν ἀνήκει.

Λ Η Μ Μ Α Δ'.

Τῶν πρίσμάτων τῶν πολυγώνους ἔχόντων βάσεις, καὶ ἐγγεγραμμένων ἢ περιγεγραμμένων περὶ τὰς κυλινδρῶν αἱ μὲν ἐπιφάνειαι εἰς τὰς τῶν κυλινδρῶν ἐπιφανείας ἀπολήγῃσι, αὐτὰ δὲ τὰ πρίσματα εἰς τὰς κυλινδρῶν τῶν πυραμίδων, τῶν πολυγώνους βάσεις ἔχουσιν, καὶ ἐγγεγραμμένων ἢ περιγεγραμμένων περὶ τὰς κώνους, αἱ μὲν ἐπιφάνειαι εἰς τὰς τῶν κώνων ἐπιφανείας, αὐτὰ δὲ αἱ πυραμίδες εἰς τὰς κώνους ἀπολήγῃσι.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Ἡ μὲν τῶ πρίσματος βάση, πολύγωνος ἔσται, εἰς τὴν τῶ κυλινδρῶν βάση, κύκλον ἔσται, ἀπολήγει· τὸ δὲ ἀπ' ἐναντίον τῆς βάσεως τῶ πρίσματος πολύγωνον, εἰς τὸν ἀπεναντίον τῆς βάσεως τῶ κυλινδρῶν κύκλον. (χ) καὶ αἱ πλευραὶ ἅραι τῶ πρίσματος εἰς τὰς τῶ κυλινδρῶν πλευρὰς ἀπολήγῃσι, καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια εἰς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ αὐτὸ τὸ πρίσμα εἰς τὸν κύλινδρον.

Ἡ μὲν τῆς πυραμίδος βάση, πολύγωνος ἔσται, εἰς τὴν τῶ κώνου βάση, κύκλον ἔσται, ἀπολήγει· (ψ) ἡ δὲ κορυφή αὐτῆς τῇ κορυφῇ τῶ κώνου ταυτίζεται, καὶ αἱ τῆς πυραμίδος ἅραι πλευραὶ εἰς τὰς τῶ κώνου ἀπολήγῃσι, καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια εἰς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ αὐτὴ ἡ πυραμὶς εἰς τὸν κώνον.

Π 5

ΠΟ-

(χ) Κατὰ τὸ α. λήμ. τὸ μετὰ τὴν α. πρὶν. τῶ ιβ. (ψ) Κατὰ τὸ αὐτὸ λήμ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τῆς φανερῆς τοῦ τρόπου ὅ, τε κύλινδρος καὶ ὁ κῶνος καταμετρηθήσεται. ὁ μὲν δὴθεν, πολλαπλασιασθέντος τῆ ὕψους αὐτοῦ διὰ τῆς βάσεως (ω) ὁ δὲ, τῆς τριτημορίου τῆ ὕψους διὰ τῆς βάσεως πολλαπλασιασθέντος, ἢ τὸ ἀνέπαλιν, ἢ τῆ ὕψους διὰ τῆς βάσεως πολλαπλασιασθέντος, καὶ τῆς τριτημορίου ἀπὸ τῆ γινομένης ληφθέντος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τῆ τῆ αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτοῦ, καὶ ὕψους ἴσον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς πρίσματος, τῆ τῆν βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος αὐτῇ, καὶ ὕψους ἴση (α) ἀλλ' ἢ πυραμὶς ἢ εἰς τὸν κῶνον ἐγγεγραμμένη, ἢ περιγεγραμμένη, εἰς αὐτὴν ἀπελήγει. (β) καὶ ὁ κῶνος αὐτὸν τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς πρίσματος τῆ τῆν βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος αὐτοῦ, καὶ ὕψους ἴσον. ἀλλὰ τὸ πρίσμα τὸ ἐκ τῆς αὐτῆς κυλίνδρου ἐγγεγραμμένον ἢ περιγεγραμμένον, εἰς αὐτὸν ἀπελήγει. (γ) καὶ ὁ κῶνος αὐτὸν τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς κυλίνδρου τῆ τῆν βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος αὐτοῦ, καὶ ὕψους ἴσον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις.

ΔΕΙ-

- (•) Ἡ ἐκείνη κύλινδ. ἐστὶ τίνι δὲ τρόπῳ καταμετρητῶν ὁ κύλινδρος ὁ συντετακτομένης, ἢ μετὰ τὸ δ. διὰ τῆς Ἀρχιμήδ. (α) Κατὰ τὸ α. πρίσ. τὸ μετὰ τὴν β. πρὸς τῆ β. ἀπὸ (β) Κατὰ τὸ πρὸς λῆρ. (γ) Κατὰ τὸ αὐτὸ λῆρ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ μὲν πυραμίδες, οἷα τὲς κώνες, τὰ δὲ πρίσματα, οἷα τὲς κυλίνδρους ἀπελήγυσιν. (δ) αἱ αὖτε αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, καὶ τὰ πρίσματα εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. (ε) αἱ αὖτε καὶ οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κυλίνδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΑ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ διχθήσεται, ὅτι οἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες κῶνοι καὶ κυλίνδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. ἰσὺν δὲ τὰ τε ὕψη καὶ αἱ βάσεις τῶν κώνων καὶ κυλίνδρων αὐτὰ ὡσιν, ἴσεται κῶνος πρὸς κῶνον, καὶ κυλίνδρος πρὸς κυλίνδρον ἐν λόγῳ συγκεκριμένῳ ἐκ τοῦ τῷ λόγῳ, ἔνθα ὕψος πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ τῷ ὅν ἔχει βάσις πρὸς βάσιν. ἐπεὶ δὲ αἱ τῶν κώνων καὶ κυλίνδρων βάσεις κύκλοι εἰσὶν αἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχουσιν, ἢ περ αἱ αὐτῶν διαμέτρους (ζ) καὶ κῶνος αἷα πρὸς κῶνον, καὶ κυλίνδρος πρὸς κυλίνδρον λόγον ἔχει συγκεκριμένον ἐκ τοῦ λόγου, ὅν ἔχει ὕψος πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ τῷ διπλατίονος τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κυλίνδροι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἐξωσαν ὅμοιοι κῶνοι, οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ. λέγω, ὅτι ὁ ΑΒΓ κῶνος πρὸς τὸν ΔΕΖ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔξωσαν δὲ πρῶτον οἱ κῶνοι ὀρθοί. (χ. 14.) ὧν ἄξονες, οἱ ΑΗ, ΔΘ.

ΔΕΙΞ.

(δ) Κατὰ τὸ αὐτὸ λῆμ. (ε) Κατὰ τὴν σ. τῷ ιβ. καὶ τὴν λβ. τῷ ια. (ζ) Κατὰ τὴν β. τῷ ιβ.

ΔΕΙΞΙΣ

Ὁ κῶνος ΑΒΓ πρὸς τὸν κῶνον ΔΕΖ λόγον ἔχει συγ-
κείμενον ἐκ τῆς λόγου ὃν ἔχει ὕψος πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ
τῆς διπλασίονος τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων. (η) ἀλλὰ
τὰ τῶν ὀρθῶν κῶνων ὕψη εἰσὶν οἱ αὐτῶν ἄξονες. ὁ κῶ-
νος ἄρα ΒΑΓ πρὸς τὸν κῶνον ΔΕΖ λόγον ἔχει συγ-
κείμενον ἐκ τῆς λόγου, ἐν ἔχει ΑΗ : ΔΘ, καὶ ἐκ τῆς ἐν
ἔχει ΒΓ² : ΕΖ². (θ) ἀλλὰ ὡς ΑΗ : ΔΘ :: ΒΓ : ΕΖ, διὰ
τὴν τῶν κῶνων ὁμοιότητα. (ι) οἱ λόγοι ἄρα, ἐξ ὧν ὁ
συγκείμενος τρεῖς καὶ ἴσοι. ὁ ἄρα συγκείμενος τριπλα-
σίων ἐνὲς ἐκάστου τῶν ἐξ ὧν σύγκειται. (κ) ὁ κῶνος ἄρα
ΑΒΓ πρὸς τὸν κῶνον ΔΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ
ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται,
ὅτι καὶ οἱ ἑμμοιοὶ κύλινδροι, οἱ ὀρθοὶ, ἐν τριπλασίᾳ
λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἐψωσαν δὴ οἱ ὅμοιοι κῶνοι ΒΑΓ, ΗΘΚ πλάγι-
(κ. 15.) καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΑΓ, ΘΚ διάμετροι
τῶν βάσεων αὐτῶν. καὶ ἀπὸ τῶν Β, Η κορυφῶν τῶν
κῶνων ἤχθωσαν αἱ ΒΙ, ΗΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΙ, ΘΠ,
καὶ δὴλον, ὅτι αἱ ΒΙ, ΗΠ τὰ τῶν κῶνων ὕψη εἰσὶ. καὶ
ἐπεὶ ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΙΔ ΒΠΛ, ἡ μὲν γωνία ΒΙΔ =
ΗΠΛ, (λ) ἡ δὲ ΒΔΙ = ΗΛΠ, (μ) λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΒΙ
ἴση λοιπῇ τῇ ΛΗΠ. ὡς ἄρα ΒΔ : ΗΛ :: ΒΙ : ΗΠ. (ν)
ἀλλὰ ὡς ΒΔ : ΗΛ :: ΑΓ : ΘΚ. (ξ) ἄρα ὡς ΒΙ : ΗΠ ::
ΑΓ : ΘΚ. (ο) ἐπεὶ δὲ ὁ κῶνος ΒΑΓ, πρὸς τὸν κῶνον
ΗΘΚ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῆς ὃν ἔχει ὕψος, τὸ
ΒΙ, πρὸς ὕψος, τὸ ΗΠ, καὶ ἐκ τῆς διπλασίονος, ἐν
ἔχει

(η) Κατὰ τὴν προλ. συνίπ. (θ) Ὅρα τὴν ε. σημ. τὴν ἐν ταῖς
ὁρίσμ. τῇ ε. βιβλ. (ι) Κατὰ τὸν δ. ὁρίσμ. τῇ ιβ. (κ) Κατὰ τὸν
η. ὁρίσμ. τῇ ε. (λ) Ὁρθὰς γὰρ. (μ) Κατὰ τὸν δ. ὁρίσμ.
τῇ ιβ. (ν) Κατὰ τὴν δ. τῇ ε. (ξ) Κατὰ τὸν δ. ὁρίσμ. τῇ ιβ.
(ο) Κατὰ τὴν ε. τῇ ε.

ἔχει $\Lambda\Gamma : \Theta\mathbf{K}$, ὅτεν ἐκ τῶ ἐν ἔχει $\overline{\Lambda\Gamma}^2 : \overline{\Theta\mathbf{K}}^2$. (π) ἔστι δὲ ὡς $\mathbf{B}\mathbf{H} : \mathbf{H}\mathbf{H} :: \Lambda\Gamma : \mathbf{K}$, τετέστιν ἴσοι οἱ τριῶν λόγοι ἐξ ὧν ὁ συγκεῖμενος. ἄρα ὁ κῶνος $\mathbf{E}\Lambda\Gamma$, πρὸς τὸν κῶνον $\mathbf{H}\Theta\mathbf{K}$ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $\Lambda\Gamma$ πρὸς τὴν $\Theta\mathbf{K}$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ διαχθίσεται, ὅτι καὶ οἱ ἄλλοι κύλινδροι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ; παραλλήλων ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος, πρὸς τὸν κύλινδρον, ὅτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος ὁ $\Lambda\mathbf{Z}$ ἐπιπέδῳ τῷ $\mathbf{H}\Theta$ τιτμήθω, παραλλήλων ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, $\Lambda\mathbf{B}$, $\Gamma\mathbf{Z}$, καὶ συμβαλέτω τῷ $\mathbf{E}\mathbf{Z}$ ἄξονι κατὰ τὸ $\mathbf{K}$ σημεῖον. λέγω, ὅτι ὡς ὁ $\mathbf{B}\mathbf{H}$ κύλινδρος, πρὸς τὸν $\mathbf{H}\mathbf{Z}$ κύλινδρον, ὅτως ὁ $\mathbf{E}\mathbf{K}$ ἄξων, πρὸς τὸν $\mathbf{K}\Delta$ ἄξονα. ς. 16.

Ἐστω ὁρθὸς ὁ κύλινδρος $\Lambda\mathbf{Z}$, καὶ ὡς δύο ἀπ' ἀλλήλων κεχωρισμένοι γεννήθωσαν οἱ $\mathbf{E}\mathbf{H}$, $\mathbf{H}\mathbf{Z}$ κύλινδροι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ οἱ κύλινδροι $\mathbf{B}\mathbf{H}$, $\mathbf{H}\mathbf{Z}$ ἴσας βάσεις ἔχουσι τὰς $\Lambda\mathbf{B}$, $\Gamma\mathbf{Z}$, πρὸς ἀλλήλους ἄρα εἰσὶν ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη. (ρ) ἄρα ὁ $\mathbf{B}\mathbf{H}$ κύλινδρος, πρὸς τὸν $\mathbf{H}\mathbf{Z}$ κύλινδρον, ὅτως τὸ $\mathbf{E}\mathbf{K}$ ὕψος, πρὸς τὸ $\mathbf{K}\Delta$ ὕψος. ἀλλὰ τὰ $\mathbf{E}\mathbf{K}$, $\mathbf{K}\Delta$ εἰσὶν οἱ ἄξονες. ἄρα ὁ $\mathbf{B}\mathbf{H}$ κύλινδρος, πρὸς τὸν $\mathbf{H}\mathbf{Z}$ κύλινδρον, ὅτως ὁ $\mathbf{E}\mathbf{K}$ ἄξων, πρὸς τὸν $\mathbf{K}\Delta$ ἄξονα.

Ἄλλ' ἔστω πλαγίος ὁ $\Lambda\mathbf{Z}$ κύλινδρος, καὶ ἀπὸ τῶν $\mathbf{E}$ καὶ $\mathbf{K}$ σημείων ἤχθωσαν αἱ $\mathbf{E}\Lambda$, $\mathbf{K}\mathbf{M}$ πρὸς ὁρθὰς ταῖς $\mathbf{H}\Theta$,

(α) Κατὰ τὴν συνίπ. τὴν μετὰ τὴν ια. τῷ ιβ. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτὴν συνίπ.

ΗΘ, ΓΖ βάσεις, καὶ ἐπὶ τῶν κυλίνδρων ΡΗ, ΗΖ ἴσαι αἰσὶν αἱ βάσεις ΗΘ, ΓΖ. ἔσιν ἄρα ὡς ΒΗ κύλινδρος πρὸς ΗΖ κύλινδρον, ἔσιν ΕΛ ὕψος, πρὸς ΚΜ ὕψος. (σ) ἀλλ' ὡς ΕΛ : ΚΜ :: ΓΚ : ΚΔ. (τ) ἰσογώνια γὰρ τὰ τετράγωνα ΕΑΚ, ΚΜΛ. ὡς ἄρα ΒΗ κύλινδρος, πρὸς ΗΖ κύλινδρον, ἔσιν ΓΚ ἄξον, πρὸς ΚΔ ἄξονα. (υ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους αἰσὶν, ὡς τὰ ὕψη.

Ἐκ τῆς συνειπίας τῆς ἐνδεκάτης προτάσεως αὕτη δῆλη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Τῶν ἴσων κῶνον καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὡν κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι αἰσὶν ἐκῆνοι.

ΛΕΙΞΙΣ.

Οἱ μὲν κῶνοι εἰς τὰς πυραμίδας, εἰ δὲ κύλινδροι εἰς τὰ πρισματά ἀπολήγασιν. (φ) ἀλλὰ τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ πρισμάτων ἀντιπεπένθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν καὶ ὡν πυραμίδων καὶ πρισμάτων ἀντιπεπένθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα εἰσὶν ἐκῆνα. (χ) ἄρα καὶ τῶν ἴσων κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπένθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὡν κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπένθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι αἰσὶν ἐκῆνοι.

ΠΡΟ.

(σ) Κατὰ τὴν αὐτ. συνειπ. (τ) Κατὰ τὴν δ τῆ σ. (υ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (φ) Κατὰ τὸ πρὸ τῆς ε. τῆ ιβ. λήμ. (χ) Κατὰ τὴν δ. τῆ ιβ. καὶ τῆ α.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15', καὶ 12'.

Μόνον τῇ δύξαι τῆς ἐξῆς προτάσεως χρῆσι-
μοι, ἥτις διὰ τὸ ἐπεμένει λήμματος ἐπιχ-
θήσεται.

ΛΗΜΜΑ Γ'.

Οἱ εἰς τὸ ἡμισφαίριον ὑγγεγραμμένοι τε καὶ
περιγεγραμμένοι κύλινδροι, εἰς αὐτὸ ἀπο-
λήγουν.

Ἦτοι ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ. Χ. 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ κάθετος τῇ διαμέτρῳ ΑΓ
ἡ ΚΒ, καὶ τετμήθω εἰς ὀποσαῦν ἴσα μέρη, τὰ ΚΦ,
ΦΗ, ΗΒ. καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Φ, Η, Β ἤχθωσαν
τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΡΟ, ΙΑ, ΔΕ. καὶ πεπληρώσω
τά τε περὶ τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΓ περιγεγραμμένα ὀρθο-
γώνια ΡΓ, ΙΞ, ΔΖ, καὶ τὰ εἰς αὐτὸ ὑγγεγραμμένα
ΗΓ, ΘΝ. καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΔΜ, ΕΝ ἐπὶ τὰ Χ,
Ω σημῖα.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν τὰ περιγεγραμμένα ὀρ-
θώγνια ὑπερέχει τὰ ὑγγεγραμμένα ἴση ἐστὶ τοῖς ὀρ-
θωγνίοις ΔΖ, ΙΜ, ΖΞ, ΡΣ, ΞΓ. ἔστι δὲ τὸ μὲν ΔΖ =
ΜΩ, τὸ δὲ ΙΜ = ΠΧ, τὸ δὲ ΖΞ = ΝΤ, οἷς προσ-
θεμένων καὶ τῶν ΡΣ, ΞΓ, ἴσα τῷ ΡΓ. ἡ ὑπεροχή αἴτια,
καθ' ἣν τὰ περιγεγραμμένα ὀρθώγνια ὑπερέχει τὰ
ὑγγεγραμμένα ἴση ἐστὶ τῷ ὀρθωγνίῳ ΡΓ. ἀλλὰ τὸ ΡΓ
ἔλαττον πάσης δευτέρας ποσότητος γινήσεται, ἵνα, τῆς
ΚΒ εἰς ἀπικοαζήματα διαιρηθείσης μέρη, ἀπείρα τὸν
ἀριθμὸν εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΓ ὑγγεγραφῇ τε καὶ περι-
γεγραφῇ ὀρθώγνια. τὰ αἶσα εἰς τὸ ἡμικύκλιον ὑγγεγραμ-
μένα

μῖνα ὀρθογώνια, εἰς τὰ περιγεγραμμένα ἀπολήγει.
 (ψ) ἄρα πολλῶν μαῖλαν τὰ τε ἐγγεγραμμένα καὶ περι-
 γεγραμμένα περὶ τὸ ἡμικύκλιον ὀρθογώνια εἰς αὐτὸ
 ἀπολήγει, τὸ μεταξύ αὐτῶν κείμενον. περιενεχθήτω
 δὴ περὶ τὴν ΚΒ ἡμιδιάμετρον τὸ ΔΒΓ ἡμικύκλιον συν-
 τος περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένους τε καὶ ἐγγεγραμμέ-
 νους ὀρθογωνίους, ἕως ἃ ἀποκατασταῖ ὅθεν ἤξωτο
 φέρεσθαι. ἐκ μὲν ἓν τῷ ἡμικυκλίῳ, ἡμισφαίριον ἐκ δὲ
 τῶν ὀρθογωνίων, κύλινδροι περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένοι
 τε καὶ ἐγγεγραμμένοι γίνονται. ἐπεὶ δὲ τὰ ὀρθογώνια
 εἰς τὸ ἡμικύκλιον ἀπολήγει, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν ἄρα γι-
 νόμενοι κύλινδροι εἰς τὸ ἐκ τῷ ἡμικυκλίῳ γινόμενον ἀπο-
 λήξουσιν ἡμισφαίριον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίῳ
 λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

*Ἐσὼ ἡμικύκλια, τὰ ΝΓΙ, ΟΒΠ, ὧν περιενεχθή-
 των αἱ σφαῖραι γίνονται. λέγω, ὅτι ἡ ἐκ τῷ ΝΓΙ γι-
 νομένη σφαῖρα, πρὸς τὴν ἐκ τῷ ΟΒΠ γινομένην σφαῖ-
 ραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΔΓ διάμετρος
 πρὸς τὴν ΗΒ διάμετρον. ρ. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Προσαναγεγραψθῶσαν οἱ κύκλοι ΑΝΓΙ, ΗΟΒΠ. (ω)
 καὶ τετμήσθω ἡ ΚΙ ἡμιδιάμετρος εἰς ὅποσα ἔν ἴσα μέρ-
 ρη, ὡσαύτως καὶ ἡ ἡμιδιάμετρος ΘΒ εἰς ἴσα τὸ πλῆ-
 θος τοῖς προλαβούσι. καὶ τῶν αὐτῶν κατασκευασθέν-
 των, τῶν ἐν τῷ προλαβόντι καταγράμματι, ἐπεξεί-
 χθωσαν αἱ ΓΖ, ΖΑ, ΕΜ, ΜΗ.

ΔΕΙ.

(ψ) Κατὰ τὸν ε. ὅρισμ. τῷ ιβ. (ω) Κατὰ τὴν κ. τῷ γ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΑΖΙ γινώσκει ὅτι ἐστὶν, (α) ὡς ἀγα ΑΒ:
ΕΖ.: ΕΖ.: ΕΖ.: ΕΖ. (β) ἡ ἀγα ΑΒ πρὸς τὴν ΕΙ διαβα-
σιναι λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΤ. (γ) διὰ
ταῦτα ὅτι καὶ ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΒ διαβάσιναι λο-
γὸν ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΜ πρὸς τὴν ΕΒ. ἀλλ' ὡς ΑΒ: ΕΤ.:
ΗΕ: ΕΒ. (δ) ὁμοίᾳ γὰρ λόγῳ ὡς ΕΙ, ΕΔ τῶν ΑΒ,
ΗΕ. ἀγα καὶ ὡς ΕΖ: ΕΖ.: ΕΜ: ΕΒ. (ε) ἀλλ' ἡ
μὲν ΕΙ=ΕΡ, ἡ δὲ ΕΒ=ΕΖ. (ς) ἀγα καὶ ὡς ΕΖ.:
ΕΡ.: ΕΜ: ΕΖ. οἱ κυλινδροὶ ὡς οἱ ἐκ τῶν ὁμοίων-
των ΑΒ, ΑΕ γινώσκοντες ὅμοιοι εἶναι. (η) οἱ κυλινδροὶ
ἀγα οἱ ἐκ τῆς ΑΕ, πρὸς τὸν κυλινδρὸν τοῦ ἐκ τῆς ΑΕ
ἐπιβάσιναι λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΕΡ πρὸς τὴν ΕΖ.
(θ) ἀλλ' ὡς ΕΡ: ΕΖ.: ΑΤ: ΗΒ. (ι) ἀγα οἱ ἐκ τῆς
ΔΕ κυλινδροὶ, πρὸς τὸν ἐκ τῆς ΑΕ κυλινδρὸν ἐπιβα-
σιναι λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΑΤ πρὸς τὴν ΗΒ. διὰ τα-
ύτα ὅτι δι' ἐκείνην, ὅτι ἐκαστος τῶν κυλινδρῶν, τῶν
γινόμενων ἐκ τῶν ὁμοίων, τῶν ἐκ τοῦ ηἰκονομαίου
ΝΤΙ ἐγγεγραμμένων, πρὸς ἑκάστον τῶν κυλινδρῶν, τῶν
ἐκ τῶν ὁμοίων, τῶν ἐκ τοῦ ηἰκονομαίου ΟΥΠ ἐγ-
γεγραμμένων, ἐπιβάσιναι λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ΑΤ
πρὸς τὴν ΗΒ. ἀγα καὶ πάντες οἱ κυλινδροὶ, οἱ ἐκ τῶν
ὁμοίων, γινόμενοι, πρὸς πάντας τὰς κυλινδρῶν, τὰς ἐκ
τῶν ὁμοίων, τῶν ἐκ τοῦ ΟΥΠ ἐγγεγραμμένων, τὰς
ἐκαστοῖνα λόγον ἔχουσιν, ἥπερ ἡ ΑΤ πρὸς τὴν ΗΒ.

(κ)

(α) Κατὰ τὴν λ. τ. γ. (β) Κατὰ τὴν α. δυνάμ. τὴν αὐτὴν κατὰ τὴν
η. τ. γ. (γ) Κατὰ τὸ β. πορ. τὸ αὐτὴν τὴν η. τ. γ. (δ) Κατὰ τὴν
η. τ. γ. (ε) Κατὰ τὸ ζ. σὺν. τῶν αὐτῶν τὸ α. β. γ. (ς) Εἰς
τὴν κατὰ τὴν η. τ. γ. (η) Κατὰ τὸν δ. ὁμοίᾳ. τ. γ. (θ) Κατὰ τὴν
η. τ. γ. (ι) Κατὰ τὴν η. τ. γ. (κ) Κατὰ τὴν η. τ. γ.

(κ) ἀλλ' ἐκταίνει μὲν εἰ κύλινδρον εἰς τὸ ἡμισφαίριον ἀπὸ λήγεσι, τὸ ἐκ τῆς ἡμικυκλίου ΝΓΙ γινόμενον ἔσται δὲ, εἰς τὸ ἐκ τῆς ΟΒΗ ἡμισφαίριον. (λ) ἄρα καὶ τὸ ἡμισφαίριον, τὸ ἐκ τῆς ΝΓΙ, πρὸς τὸ ἡμισφαίριον, τὸ ἐκ τῆς ΟΒΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ ἢ ΑΓ πρὸς τὴν ΗΒ (μ) ἀλλ' ὡς τὸ ἐκ τῆς ΝΓΙ ἡμισφαίριον, πρὸς τὸ ἐκ τῆς ΟΒΗ ἡμισφαίριον, ἔσται ἢ ἐκ τῆς ΝΓΙ σφαῖρα, πρὸς τὴν ἐκ τῆς ΟΒΗ σφαῖραν. (ν) ἄρα καὶ ἢ ἐκ τῆς ΝΓΙ σφαῖρα, πρὸς τὴν ἐκ τῆς ΟΒΗ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ ἢ ΑΓ, πρὸς τὴν ΗΒ. ἐπεὶ οὖν δὲξαι.

(κ) Κατὰ τὴν ι. κ. θ. τὰ ι. (λ) Κατὰ τὸ προλ. λήμ. (μ) Κατὰ τὸ β. λήμ. τὸ μετὰ τὴν α. τὰ ιβ. (ν) Κατὰ τὴν η. τὰ ιβ.

Τ Ε Λ Ο Σ

ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ





ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α. *Αριθμητική* ἐστὶν ἡ τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς λόγων-
τε καὶ παθόν ἐπισημή· θεωρητικὴ μὲν, ὡς τὰς αὐ-
τῶν ἐπιθεωρεῖσα λόγους καὶ τὰ πάθη· πρακτικὴ δὲ,
ὡς τὸ ἔπος δὲ τέτοις χρηῖσθαι εἰσηγμένη.

Β. *Αριθμός* ἐστὶν ἡ κατ' ἀφαίρεσιν ἔννοια ἢ τὴν ἐνά-
δα, ἢ τὸ πλῆθος, ἢ τὰ μέρη δηλῶσα τῶν πραγ-
μάτων. ἀριθμοὶ δὲ λέγονται καὶ τινὰ σημεῖα, ἢ χα-
ρακτῆρες τῷ αὐτῷ ἐμφαίνοντες. οἷον οἱ 1, 2, 3,
4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. ὧν ὁ μὲν πρῶτος μονὰς
λέγεται, καὶ δηλοῖ ἓν· ὁ δὲ δεύτερος, *δυάς*, ἢ *δύω*
ὁ δὲ τρίτος, *τριας*, ἢ *τρία*· ὁ δὲ τέταρτος, *τε-
τρας*, ἢ *τέτταρα*· ὁ δὲ πέμπτος, *πεντάς*, ἢ
πέντε· ὁ δὲ ἕκτος, *ἑξάς*, ἢ *ἕξ*· ὁ δὲ ἑβδομος, *ἐβ-
δομάς*, ἢ *ἐπτάς*, ἢ *ἐπτά*· ὁ δὲ ὀγδόος, *ὀγ-
δοάς*, ἢ *ὀκτώ*· ὁ δὲ ἑννατος, *ἐννεάς*, ἢ *ἐννέα*·
ὁ δὲ δέκατος, *δέκον*, ἢ *χαρακτὴρ τῷ μηδενὸς δηλω-
τικός*.

[illegible]

δα τριλλιονίς ἐμφαίνει, ἐὰν δὲ καὶ ἄλλο, δεκάδα τριλλιο-
νίς, καὶ ἐφεξῆς ἕτως ἄχρι τῆς περατώσεως τῆς τρί-
της ἐξάδος. μετὰ δὲ ταύτην καὶ ἄλλε ἰμοίως προτε-
θέντος, ὁ 1 μονάδα τετραλλιονίς δηλοῖ, εἰ δὲ καὶ ἄλλο,
δεκάδα τετραλλιονίς, καὶ ἐφεξῆς ἕτω.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

Ὁ τόπος ἄρα δεκαπλασίαν αὐξησιν τῷ χαρακτή-
ρι ἐκ συνθήκης δίδωσι, τετέστιν ὁ αὐτὸς χαρακτήρ το-
σαύτας δεκάδας ἐμφαίνει ἐν τῷ δευτέρῳ τόπῳ κείμε-
νος, (ἄρχονται δὲ οἱ τόποι ἀπὸ τῶν δεξιῶν ἐπὶ τὰ
ἀριστερά προΐοντες.) ὅσας μονάδας μόνος ὢν, καὶ ἐν τῷ
πρώτῳ ἐπὶ τὰ δεξιά κείμενος τόπῳ· τοσαύτας δὲ ἑκατον-
τάδας ἐν τῷ τρίτῳ, ὅσας μονάδας ἐν τῷ πρώτῳ, ἢ δεκά-
δας ἐν τῷ δευτέρῳ· τοσαύτας δὲ χιλιάδας ἐν τῷ τετάρτῳ,
ἕσας ἢ μονάδας ἐν τῷ πρώτῳ, ἢ ἑκατάδας ἐν τῷ δευτέρῳ,
ἢ ἑκατοντάδας ἐν τῷ τρίτῳ, καὶ ἕτως ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

Ἔστιν ἄρα τὸ μὲν μιλλίονιον, δεκάκισ ἑκατὸν χιλιά-
δες μονάδων· τὸ δὲ διλλιονιον, δεκάκισ ἑκατὸν χιλιάδες
μιλλιονίων· τὸ δὲ τριλλιονιον, δεκάκισ ἑκατὸν χιλιάδες
διλλιονίων· τὸ δὲ τετραλλιονιον, δεκάκισ ἑκατὸν χιλιάδες
τριλλιονίων, καὶ ἐφεξῆς ἕτως. ὃν λόγον ἄρα ἔχει τὸ
μιλλιονιον πρὸς τὸ διλλιονιον, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὸ
τριλλιονιον πρὸς τὸ τετραλλιονιον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

Ἐκ τῶν εἰρημένων καταμαθεῖν ἔνεστι τῷ τρόπῳ ρα-
δίως ἂν πάντα τὸν προκείμενον ἀναγνοίης ἀριθμόν. ἐν
ἐκᾷθῃ δὴθεν σημείων τριάδι, ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ δεξιά
πρώτης ἐπαριθμεῖν ἀρχάμενος, ὑποδιαπολὴν γράψον. καὶ
ἐπάνω μὲν τῆς ἐβδόμης, ἔστω τῆς πρώτης τῆς δευτέρας
ἐξάδος γραμμὴν μίαν, τὸ μιλλίονιον ἐμφαίνουσαν· ἐπά-
νω δὲ τῆς δεκάτης τρίτης, ἦτοι τῆς πρώτης τῆς τρίτης
ἐξά-

ἑξάδος γραμμαῖς δύο, τὸ διλλιόνιον δηλῶσας· τρεῖς δὲ ἐπὶ τῷ δεκάτῃ ἐνάτῃ, τετέσι τῷ πρώτῃ τῆς πέμπτης, τὸ τετραλλιόνιον σημαίνοντας, ἢ ἕτως ἐφεξῆς· οἷον τὸ προκείμενον 987453218674123590468 ἀριθμὸν ὑποδιάτελλον μὲν ἕτω· 987^{'''}, 453^{''}, 218['], 674[·], 123[·], 590[·], 468[·]· ἀνάριθοι δὲ ἕτως· ἐννεακίσια ἐγδοήκοντα ἐπὶ τριλλιόνια, τετρακίσια πεντήκοντα τρεῖς χιλιάδες, διακίσια δέκα καὶ ἑκτὼ διλλιόνια, ἑξακίσια ἑβδωμήκοντα τέσσαρες χιλιάδες, ἑκατὸν εἰκοσι καὶ τρία μιλίονια, πεντακίσια ἐννείηκοντα χιλιάδες, τετρακίσια ἑξήκοντα καὶ ἑκτὼ· ὡσαύτως καὶ τὸν ἐξῆς 745^{'''}, 890^{''}, 431['], 678[·], 321[·], 345[·], 712[·], 804[·], 953[·], 128[·], 305[·]· αἰατηνάσκομεν ἕτω· ἑπτακίσια τεσσαράκοντα πέντε πενταλλιόνια, ἑκτακίσια ἐννείηκοντα χιλιάδες, τετρακίσια τριάκοντα καὶ ἑνὶ τετραλλιόνιον, ἑξακίσια ἑβδωμήκοντα ἑκτὼ χιλιάδες, τριακίσια εἰκοσι καὶ ἑνὶ τριλλιόνιον, τριακίσια τεσσαράκοντα πέντε χιλιάδες, ἑπτακίσια δώδεκα διλλιόνια, ἑκτακίσια καὶ τέσσαρες χιλιάδες, ἐννεακίσια πεντήκοντα τρία μιλιόνια, ἑκατὸν εἰκοσι καὶ ἑκτὼ χιλιάδες, τριακίσια καὶ πέντε.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Διὰ τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν τὴν τε ἐνάδα καὶ τὸ πλῆθος τῶν πραγμάτων ἐμφαίνομεν· πῶς δὲ διὰ τῶν αὐτῶν καὶ τὰ ὁποιαῦν δηλεῖται τῶν πραγμάτων μέγεθος ἐν τῷ δευτέρῳ ἐρῶμεν βιβλίῳ.

Λ Η Μ Μ Α.

Τέσσαρσιν ἅπαντες οἱ ἀριθμοὶ ὑπόκεινται πάθεσι, τῇ προσθέσει, τῇ ἀφαιρέσει, τῷ πολλαπλασιασμῷ, καὶ τῇ διαιρέσει.

Γ'. Αριθμὸν δοθέντα ἀριθμῷ δοθέντι προθεῖναι, ἐστὶ τὸ ἄλλον τοῖς δοθεῖσι προσευρεῖν ἴσον. καλεῖσθαι δὲ ὁ εὐρεθεὶς Ἄθροισμα, ἢ Κεφάλαιον.

Δ'. Αριθμὸν δοθέντα ἀπὸ ἀριθμοῦ δοθέντος ἀφελεῖν, ἐστὶν ἄλλον εὐρεῖν ἴσον τῇ ὑπερσχηῇ, ἣ ὁ ἕτερος τῶν δοθέντων τὸν ἕτερον ὑπερέχει. καλεῖσθαι δὲ ἡ εὐρεθεῖσα ὑπερσχηὴ Διαφορά.

Ε'. Αριθμὸν δοθέντα δι' ἀριθμοῦ δοθέντος πολλαπλασιάσαι, ἐστὶν ἄλλον εὐρεῖν, τοσάκις τὸν ἕτερον τῶν δοθέντων περιέχοντα, ὡσάκις τὴν μονάδα ὁ ἕτερος. καλεῖσθαι δὲ ὁ μὲν τῶν δοθέντων, Πολλαπλασιαστέος· ὁ δὲ, Πολλαπλασιαστής· ὁ δὲ ἐκ τῶν πολλαπλασιασμάτων προκύπτων, Γινόμενον. Ἡ καὶ ἄλλως πολλαπλασιασμὸς ἀριθμῶν ἐστὶ τὸ τοσάκις λαβεῖν τῶν δοθέντων τὸν ἕτερον, ὡσάκις τὴν μονάδα περιέχει ὁ ἕτερος.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ Α΄.

Ὡς ἄρα μονὰς πρὸς Πολλαπλασιασὴν, ἔτω Πολλαπλασιαστέος πρὸς τὸ Γινόμενον.

Ζ'. Αριθμὸν δοθέντα δι' ἀριθμοῦ δοθέντος διελθεῖν, ἐστὶν ἄλλον εὐρεῖν δηλῶντα ποσάκις ὁ εἰς τῶν δοθέντων τὸν ἕτερον περιέχει. καλεῖσθαι δὲ ὁ μὲν τῶν δοθέντων, Διααιρετέος· ὁ δὲ, Διαυρέτης· ὁ δὲ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτων, Πηλίκον, ἢ Ἐκθέτης.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ Β΄.

Ἡ μονὰς ἄρα πρὸς τὸν Διαυρέτην λόγον ἔχει, ὃν τὸ Πηλίκον πρὸς τὸν Διαυρετέον.

Ζ. Οἱ μὲν ἐπὶ τὴν αὐτὴν μονάδα ἀναφερόμενοι ἀριθμοί, Ὁμογενεῖς, ἢ Ὁμοταγεῖς· οἱ δὲ μὴ, Ἑτερογενεῖς, ἢ Ἑτεροταγεῖς εἰσὶν. οἷον ὁμογενεῖς ὁ 24 καὶ ὁ 48, ἑκατέρω αὐτῶν ὥρας δηλῶντος· ἑτερογενεῖς δὲ, εἰ τὸ μὲν ὥρας ἐμφαίνοντος, ὁ ἕτερος λεπτὰ τῆς ὥρας δηλοῖ.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Α΄.

Τὰς δοθέντας ὁμογενεῖς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ, Δ, Ε προσιδέναί, εἴτεν ἀριθμὸν εὐρεῖν ἴσον τοῖς δοθεῖσι. (Α) 3845 (Β) 267 (Γ) 473 (Δ) 89 (Ε) 5321.

Π Ρ Α Κ Τ Η Α

Τετάρχθωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἔτως, ὥς Α 3845
 τὰς μὲν μονάδας ὑπὸ ταῖς μονάδας, τὰς δὲ δεκάδας ὑπὸ τὰς δεκάδας, τὰς δὲ ἑκατοντάδας ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας, καὶ ἐφεξῆς ἔτω κατὰ σήλην κεισθαί. καὶ εὐθείας ὑποκάτω αὐτῶν ἀχθείσης, (ὥν ὁ ζητούμενος ὑπ' αὐτὴν γράφεται, καὶ μὴ τοῖς δοθεῖσι συγχέεται.) ἡ τῆς ἀθροίσεως ἀρχὴ ἀπὸ τῶν μονάδων γινέσθω ἔτως· ἐν συν ἑννέα συνισῶσι δέκα, καὶ τριῶν προσιδεμένων, δεκατρία ἀναφύει, ἔτι δὲ ἑπτὰ προσαθροισομένων, εἴκοσι γίνονται, καὶ πέντε προσκειμένων, εἴκοσιπέντε καθίστανται. ἐπεὶ δὲ ὁ 25 ἐκ δύο σύγκαιται χαρακτῆρων, ὧν ὁ μὲν, ὁ 5, μονάδας δηλοῖ ὁ δὲ, ὁ 2, δεκάδας· ὁ μὲν 5 ἐν τῷ πρώτῳ δεξιόθεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ ὑπ' αὐτὰς τὰς τῶν δοθέντων ἀριθμῶν μονάδας γεγράφθω τόπων· ὁ δὲ 2 προσιδέσθω τῇ ἐγγύς τῶν δοθέντων ἀριθμῶν σήλῃ τῶν δεκάδων. καὶ ἐπειδὴ αὐταὶ προσαθροισόμεναι, ὧν ἤδη εἴρηται τρεῖς, 27 γίνονται, προσιδεμένων δὲ καὶ τῶν 2 εἰρημένων, 29 ἀναφύουσιν, εἴτεν 2 ἑκατοντάδες καὶ 9 δεκάδες, καὶ μὴ

μὲν ἔν 9 δεκάδες ἐν τῷ δευτέρῳ τόπῳ ἐγγύς τῇ 5 γε-
γραφέωσαν· αἱ δὲ 2 ἑκατοντάδες, τῇ ἐγγύς τῶν δο-
θέντων ἀριθμῶν σήλη τῶν ἑκατοντάδων προσιδέωσαν.
καὶ ἐπεὶ 17 εἰσὶν αὐταί, τῶν 2 προσκειμένων, 19
καθίστανται, ἧτοι χιλιάς 1 καὶ 9 ἑκατοντάδες. ἐκὼν αἱ
μὲν 9 ἑκατοντάδες ἐν τῷ τρίτῳ γεγραφέωσαν τόπῳ· ἡ δὲ
1 χιλιάς, τῇ ἐγγύς τῶν χιλιάδων σήλη προσκείδω,
καὶ αἱ περικύπτουσαι 9 χιλιάδες ἐν τῷ τετάρτῳ γραφ-
θήτωσαν τόπῳ. λέγω ἔν τὸν ἐυρεθέντα ἀριθμὸν Ζ εἶναι
τὸν ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Οἱ ἐυρεθεῖς Ζ ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατον-
τάδων, καὶ χιλιάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν σύγκειται, ὡς
ἐκ τῆς πράξεως δῆλον. ἴσος ἄρα τοῖς δοθεῖσιν ὁ Ζ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Τὴς δοθέντας ὁμογενεῖς τε καὶ ἑτερογενεῖς ἀ-
ριθμὸς προσαθροίσαι, εἶπεν ἀριθμὸν ἐυρεῖν
ἴσον πᾶσι τοῖς δοθεῖσι.

Δεῖ δὲ δεδομένον εἶναι, τῶντινι γνωστὸν τὸ, ἐπὶ πᾶσι
τῶν ἐλασσόνων ἀριθμῶν μονάδες, μίαν τῶν μεζόνων συ-
νίσσει μονάδα.

Ἐτάσαν ἔν οι δοθέντες οἱ Α, Β, (Α) 8 (Β) 13 (Γ) 21
Γ, Δ, καὶ οἱ Ε, Ζ, Η, Θ, (Δ) 5 (Ε) 17 (Ζ) 20
καὶ οἱ Ι, Κ, Λ, Μ. καὶ 60 μὲν (Η) 19. (Θ) 18 (Ι) 48
μονάδες τῶν Ι, Κ, Λ, Μ, μί- (Κ) 16 (Λ) 30 (Μ) 38
αν τῶν Ε, Ζ, Η, Θ συνιστά-
τωσαν 24 δὲ τῶν αὐτῶν Ε, Ζ, ἡμέρας ὥρας λεπτά
Η, Θ, μίαν τῶν Α, Β, Γ, Δ, 8 17 48
εἶπεν οἱ μὲν ἡμέρας, οἱ δὲ ὥρας, 13 20 16
εἰ δὲ λεπτά ἐμφαινέτωσαν, 21 19 30
5 18 38

(Ν) 50 4 12

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Γεγραφθασαν αἱ ὁμογενεῖς ὑπὸ τὰς ἑαυτῶν ὁμογε-
νεῖς ἢ ἐν τῷ προλαβόντι προβλήματι εἴρηται τάξι.
ἢ εὐρεθῇ τὸ τῶν ἐλαχιστοτέρων Κεφάλαιον, ὑπ' αὐ-
τῶν τῆς ἀρχῆς τῆς ἀξιοσεως γενεμένης. ἐπεὶ ἐν τῷτο
ἴσον 132, ἦτοι δὲ ἐξήκοντα σὺν 12, δὲ δὲ 60 λεπ-
τὰ, 2 ὥραι εἰσὶ, τὰ μὲν 12 ὑπὸ τὰ λεπτὰ γε-
γραφθῶ ὁ δὲ 2 ταῖς ὥραις προσκείθω. συναθροισθ-
σὼν δὲ ἢ τῶν ὥρῶν, ἐπειδὴ τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν ἴσον
το, ἦτοι τῷ τρεῖς 24 καὶ ἐτι 4· ὁ μὲν 4 ὑπὸ ταῖς
ὥραις κείθω· ὁ δὲ 3, ταῖς ἡμέραις προσιδέθω. καὶ τῶν
ἡμερῶν ἐν προαθροισθῆσων, καὶ τῶ Κεφαλαίῳ αὐτῶν
50 ὑπ' αὐτὰ γραφέντος, ὁ ἀριθμὸς N ὁ ζητῆμενος ἔσται.

Ἡ δὲ οὕτως ἔκτε τῆς πράξεως καὶ ἐκ τῶ προλαβόν-
τος προβλήματος δῆλη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

Αριθμῶν δύο δοθέντων ὁμογενῶν, τῶν Α
καὶ Β, τὸν ἐλάσσονα ἀπὸ τῶ μείζονος ἀφε-
λεῖν. ὃ ταυτόν ἐστι, τὴν τῶν διαφορὰν εὐ-
ρεῖν.

(A) 9313 (B) 38506

Γεγραφθῶ ὑπὸ τὸν μείζονα Β ὁ (B) 38506
ἐλάσσων Α ἢ ἐν τῷ πρώτῳ προβλή- (A) 9313
ματι εἴρηται τάξι. καὶ ἀρχῆς ἀπὸ (Γ) 29193
τῶν μονάδων γενεμένης, ἀφηρέθωσαν αἱ 3 μονάδες τῶ
ἐλάσσονος ἀπὸ τῶν 6 τῶ μείζονος, καὶ λοιπαὶ αἱ 3 ὑπὸ
τὴν τῶν μονάδων σήλην γεγραφθῶσαν. ὡσαύτως καὶ
ἡ μία δεκάς ἀπὸ τῶν δεκάδων. καὶ ἐπεὶ εἰς δεμίαν δε-
κάδα ὁ μείζων ἔχει, (τὸ μηδενικὸν γὰρ σημεῖον ἐν τῷ
τῶν δεκάδων αὐτῶ τόπῳ κείται.) εἰλήφθω μία μονάς
ἀπὸ τῶ ἐγγύς χαρακτηρῶς, τῶ 5, ἦτις μονάς ἑκατον-
τάδος

τάδες ἔσα, δέκα δεκάσιν ἴση ἐσί. τῆτο δὲ πειντέον
 ρσάκισ ἀπὸ τῆ ἥττονος χαρακτῆρος τὸν μείζονα δέοι
 ἀφελῆν. ἀφρηθήθω ἔν ἡ μία δεκάς ἀπὸ τῶν 10, καὶ
 ἡ διαφορὰ 9 ἐν τῷ τῶν δεκάδων γεγραφθῶ τόπω.
 ὁμοίως αἱ 3 εκατοντάδες ἀπὸ τῶν 4, (ἐχὶ ἀπὸ τῶν
 5, ἐπειδὴ ἐλήπται ἡδὴ ἀπ' αὐτῶν μία, ὡς δέκα ἐπι-
 λογιθῆσα δεκάδες.) καὶ λοιπὴ ἡ μία ἐπὶ τὸν τῶν εκα-
 τοντάδων γεγραφθῶ τόπον. πάλιν ἐπειδὴ ὁ χιλιάδων
 χαρακτήρ, ὁ 8, ἥτταν τῆ 9, εἰλήφθω ἐκ τῆ ἐγγύς
 3 μονάς, ἥτις δεκάδας χιλιάδων ἐμφαίνεσα, δέκα
 χιλιάσιν ἴση ἐσί. ταύτης δὲ ταῦς 8 προσεθείσης, ἀπὸ
 τῶν ἀναφυσμένων 18 ἀφρηθήθωσαν αἱ 9, καὶ αἱ λοιπαὶ
 9 ἐν τῷ τῶν χιλιάδων γεγραφθῶσαν τόπῳ. ἐπεὶ δὲ
 ἐιλάσσων Α δεκάδας χιλιάδων 8 περιέχει, γεγραφ-
 θήσαν ἐν τῷ τῶν δεκάδων τῶν χιλιάδων τόπῳ αἱ ἐνα-
 πληφθεῖσαι 2, αἱ ἐν τῷ Β. λέγω ἔν τὸν Γ εἶναι τὸν
 ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ Γ τὰς ὑπεροχὰς περιέχει τῶν μονάδων, δεκά-
 δων, καὶ τὰς τῶν ἐξῆς χαρακτῆρων τῆ Α καὶ Β,
 ὡς ἐκ τῆς πράξεως δῆλον. ὁ Γ ἄρα ἡ διαφορὰ ἐστὶ
 τῶν Α καὶ Β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἦττονος ὄντος τῆ χαρακτῆρος, ἀφ' ἧς δέοι τὸν μεί-
 ζονα ἀφελῆν, εἰάθασι μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν, τὸν μὲν
 ἢ ἡ μονάς ἐλήφθη μὴ ἀπομεμειωμένον μονάδος ἐπιλο-
 γίζεσθαι, τὴν δὲ ἀπ' αὐτῆς ληφθεῖσαν μονάδα τῷ ὑπ'
 αὐτὸν προσιδέειν, καὶ ἔτις αὐτὸν ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρεῖν.
 οἶον τὸν 5 ἐχ' ὡς 4, ἀλλ' ὡς 5 ἐπιλογιζόμενοι, τὴν
 μονάδα σὺν τῇ 3, ἔτεν τὸν 4 ἀπὸ τῆς 5 ἀφαιρέ-
 σι προνοητικῶς τῆτο παιῖντες, ὅπως ἂν μὴ ἐπιλά-
 θαιντο ποτε, ὀρῶντες τὸν 5, τῆς ἀπ' αὐτῆς ληφθεί-
 σης

И П О Б А Н М А Δ

• 1. 1000000 1000000

(A) 14 6 15 (B) 7 22 52

ИРАКТЕА.

(A) 14 6 15
 (B) 7 22 52
 (C) 6 7 23

[illegible]

ἡ ἀπὸ τῆ 13, ἡ τῆ 8 ἀπὸ τῆ 14, καὶ τῆ λοιπῆ 6
ὑπὸ τὰς τῶν ἡμερῶν μονάδας γραφέντος, ὁ Γ ἔσται
ἡ ζήτῆμενος.

Ἡ δεξις ἐκ τε τῆς πράξεως καὶ τῶν προειρημένων δήλη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

Πυθαγορικὸν κατασκευάσαι πίνακα.

ΣΧ. Ι.

Ἀναγραφέντος τῆ ὁποιοῦ
ἐν τετραγώνῳ, (Χ. Ι.) τετ-
ραγωνίῳ εἰς ἐννέα ἴσα μέ-
ρη δύο τῶν συμπίπτουσιν
αὐτῇ πλευρῶν. καὶ ἀπὸ τῶν
τῶν ἐκατέρᾳ τῶν λοιπῶν
πλευρῶν παραλλήλων ἀχ-
θεσῶν, ὀγδοήκοντα καὶ ἐν
τετραγωνίῳ προσκύψουσιν.
ἐν τοῖς ἐννέα τέτων τοῖς
ἀνωτάτοις, ὡσαύτως καὶ ἐν

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

τοῖς τῇ ἀριστερᾷ τῶν τῆ τετραγώνῳ πλευρῶν προσκει-
μένοις οἱ μοναδικοὶ γεγράφθωσαν χαρακτῆρες. καὶ προ-
σεδήτω τῷ 2 ὁ 2, καὶ τὸ Κεφάλαιον 4 ἐν τῷ τετρα-
γωνίῳ τῷ ὑπὸ τὸν 2 γεγράφθω. πάλιν τῷ 2 προσ-
κείσθω ὁ 4, καὶ τὸ Κεφάλαιον 6 ἐν τῷ ὑπὸ τὸν 4
τετραγωνίῳ γεγράφθω. καὶ ἔτις ἐφεξῆς τῷ 2 τὸ
προκύπτον προσιδέτω Κεφάλαιον ἕως 8 ὅλη ἡ δευτέ-
ρα τῶν τετραγωνιδίων πληρωθῇ σῆλη. ὁμοίως ὁ 3 τῶ 3
συναπτεῖτω, καὶ τὸ Κεφάλαιον 6 ὑπὸ τὸ τετραγωνί-
διον τὸ ὑπὸ τὸν 3 γεγράφθω. καὶ πάλιν ὁ 3 τῷ 6
προσιδέτω, καὶ τὸ Κεφάλαιον 9 ὑπὸ τὸν 6 γεγράφ-
θω. τὸ αὐτὸ δὲ γινέτω ἕως 8 καὶ ἡ τρίτη τῶν τετρα-
γωνιδίων πληρωθῇ σῆλη, καὶ ἡ τετάρτη, καὶ ἐφεξῆς
καὶ λοιπαὶ πᾶσαι.

Οἱ ἔτω κατεσκευασμένοι πίναξ πάντα περιέχει τὰ γινόμενα ἐξ ἑκάστη τῶν μοναδικῶν χαρακτηριστῶν δι' ἑκάστη πολλαπλασιασθέντος. οἷον, ἡ μὲν δευτέρα στήλη πάντα τὰ ἐκ τῆ 2 διὰ τῆ 1, 2, 3, 4, καὶ τῶν ἐξῆς ἀχρηστῶν 9 πολλαπλασιασθέντος· ὡσαύτως ἡ τρίτη, τὰ ἐκ τῆ 3, καὶ ἡ τετάρτη τὰ ἐκ τῆ 4, καὶ ἐφεξῆς αἱ λοιπὴ τὰ ἐκ τῶν ἐφεξῆς διὰ τῶν αὐτῶν περιέχουσι. ἔνθεντοι καὶ διὰ μνήμης τῶτον ἔχον πάντοτε ἐπωφελεῖς. ἄλλως μὲν γὰρ ὁσάκις ἀντὶς δοθέντας ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσαι βεβλώμεθα, πρὸ ὀφθαλμῶν δεῖ αὐτὸν τιθέναι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5΄.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν A διὰ τῆ δοθέντος B πολλαπλασιάσαι.

(A) 3604 (B) 273:

ΠΡΑΚΤΕΑ.

1. Γεγραφθῶ ὁ πολλαπλασιαστὴς B ὑπὸ (A) 3604
τὸν πολλαπλασιαστέον A ἔτως, ὥστε (B) 273
ταῖς μὲν μονάδας ὑπὸ ταῖς μονά- (Γ) 10812
δας, ταῖς δὲ δεκάδας ὑπὸ ταῖς δε (Δ) 25228
κάδας κειθαι, καὶ ἐφεξῆς ἔτως. (Ε) 7208
(Ζ) 983592
2. Ἐυθείας ἀχθείσης, πρῶτον διὰ τῆ χαρακτηριστῆρος
τῶν μονάδων, ἔτα διὰ τῆ τῶν δεκάδων, καὶ ἐφεξῆς
διὰ τῶν λοιπῶν ἀπάντων τῆ πολλαπλασιαστῆς χα-
ρακτητῆρων ἕνα ἕκαστον τῆ πολλαπλασιαστῆς πολλα-
πλασιάσον. καὶ ἐπεὶ ὁ 4 διὰ τῆ 3 πολλαπλασιασθεὶς
ταυτόν ἐστιν εἰπεῖν ὁ 4 τρεῖς ληφθεὶς, τὸν 12 παρὰ-
γεῖ, τὸν μὲν 2 ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν, ὑπ' αὐτὴν δὲ θέ-
τὴν τῶν μονάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν στήλην γρα-
ψον.

ψον, τῷ δὲ 1 τῷ δεκάδῳ ἐμφαίνοντος μνημόνευε, ἵνα τῷ ἐκ τῶν δεκάδων Γινόμενῳ αὐτὴν προσῃς. ἐπεὶ δὲ τὸ ἑξὲν διὰ τῷ 3 πολλαπλασιασθέν, ἑξὲν ἀποδίδωσι, τὴν προζήτηθεσαν μίαν δεκάδα ἐν τῷ τῶν δεκάδων γράψον τόπῳ. καὶ τὸν 6 δὲ διὰ τῷ 3 πολλαπλασιασας, τῷ Γινόμενῳ 18, τῷ 18 ἑκατοντάδας ἐμφαίνοντες, εἶπεν 8 ἑκατοντάδας καὶ μίαν χιλιάδα, τὸν μὲν 9 ἐν τῷ τῶν ἑκατοντάδων τόπῳ γράψον, τῆς δὲ μιᾶς χιλιάδος μνημόνευε, ὅπως ἂν τῷ ἐκ τῶν χιλιάδων Γινόμενῳ προσῃς. ὡσαύτως καὶ τῷ 3 διὰ τῷ 3 πολλαπλασιασθέντες, καὶ τῷ Γινόμενῳ 9, χιλιάδας ἐμφαίνοντι, τῆς μιᾶς προσεθείσης, τὰς 10 χιλιάδας ἐν τῷ ἰδίῳ γράψον τόπῳ.

3. Τῷ αὐτῷ δὴ τρέπῳ πολλαπλασίασεν τὸν 7, τὸν τὰς δεκάδας τῷ πολλαπλασιαστῷ παριστάντα δι' ἐνὸς ἐκάστου τῶν τῷ Α χαρακτήρων. ἰστέον δὲ ἔτι τὸ Γινόμενον ἐκ τῶν 4 καὶ 7 δεκάδας 28 ἐμφαίνει, εἶπεν 8 δεκάδας καὶ 2 ἑκατοντάδας. τὸν μὲν ἔν 8 ἐν τῷ τῶν δεκάδων τόπῳ γραπτέον, τὸν δὲ 2 ταῖς ἑκατοντάσιν ἐπαθροίσεν. ὡσαύτως καὶ τῷ 2 διὰ πάντων πολλαπλασιασθέντος, τὸ πρῶτον Γινόμενον, εἶπεν τὸ ἐκ τῶν 2 καὶ 4 ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας τακτέον, τὰ δὲ ἑξῆς γινόμενα ἐν τοῖς ἰδίαις τόποις.
4. Ἐπαθροίσον (κατὰ τὸ 1. πρόβλ.) πάντας τὰς ἐκ τῶν πολλαπλασιασμάτων παραχθέντας ἀριθμὸς, ἧται τὰς Γ, Δ, Ε. λέγω δὴ ὅτι τὸ τέτων Κεφάλαιον, τετέστιν ὁ Ζ ἔσεται τὸ ζητούμενον Γινόμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ μὲν Γ πάντα τὰ Γινόμενα περιέχει τῶν τῷ Α χαρακτήρων διὰ τῶν τῷ Β μονάδων πολλαπλασιασθέντων ὁ δὲ Δ, πάντα τὰ διὰ τῶν δεκάδων ὁ δὲ Ε, πάντα τὰ διὰ τῶν ἑκατοντάδων. (ἐκ τῆς 2 καὶ 3. πράξ. δὴ-

δηλον.) οἱ Γ, Δ, Ε ἀγα πάντα τα ἱνομένα περιέχεται των τῶ Α καὶ Β χαράκηντων. ἀλλὰ τοῖς Γ, Δ, Ε ἱος οὗ Ζ. (κατὰ τοῖς 1. προβλ.) οὗ Ζ. ἀγα τοῖς ἱνομένων ἐστὶ των Α καὶ Β. ὅτερον τὸ ἱνομένων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εἰ τῶν εἰρημένων ῥαδιον κατὰ τὸν, ὅτι τὸ πάλαι παλαιάζειν, προσδίδειν ἐστὶ διὰ συντομωτέρας μεθοδῆς εἰν γὰρ τὸν παλαιάσασθαι Α τοσαύτης, ἢ ἐν τῶ α. προβλ. ἐκρηται ταύτης, ὅσαυτης ἢ μινας πο. τῶ παλαιάσας ἀγρίως ἐπαθροίσης, τὸ πρὸκυπτὸν Κεφαλαίων ἱαν ἐστὶν τῶ ἱνομένων Ζ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Εἰν οἱ παλαιάσασθαι ἱνομένων ἢ ἐρετάως περιέχωνται, τῶς ἐκρημένους διὰ τῶν ἐκρημένων παλαιάσας, ἢ τὰ ἱνομένα κατ' ἰδίαν ῥαδιον, τῶ αὐτῶν ἱαν, ὅς τῶς πάντῃ ἀπ' ἀλλήλων διακρίνεται πολυαπαλαιάζει.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ.

Τὸν δοθέντα ἀγρίον Α διὰ τῶ δοθέντος Β διέλαιν, ἕτερον ἀγρίον εὐρεῖν εἰσφαινοντα πῶσαυς οὗ Διαγέρτος Α τὸν Διαγέρτην Β περιέχει.

Ἐστω πρῶτον οὗ Διαγέρτης Β (Α) 3804 (Β) 5 ἐκ ὅπου τῶν μοναδικῶν χα. (Α) 3804 (Β) 5

35 (Γ) 76014

ΠΑΡΑΚΤΕΑ

=30

30

1. 4

1. Δὺς εὐθεῶν ἀγρίων, τὴν τυχεύσαν περιέχοντων ῥαδιον, ἐν αὐτῇ κελῶ οὗ Διαγέρτης Β. ἢ ἐκ μιν οὗ τοῖς

ἀγα

ἀριστεροῖς πρῶτος τῷ Διαμετέτῃ χαρακτῆρ ἴσος, ἢ μείζων ἢ τῷ Διαμετέτῃ, σκέπτῃ ποσάκις αὐτὸν περιέχει· εἰ δ' ἐλάσσων, ποσάκις αὐτός τε ὁ πρῶτος καὶ ὁ ἑγγύς δεύτερος αὐτὸν περιέχουσιν ἢ τὸν τῷτο ἐμφαίνοντα ἀριθμὸν ὑπὸ τὴν ἑτέραν τῶν εὐθεῶν τὴν ὀριζήντιον σημείωσον, οἷον ἐπὶ τῶν προκειμένων ἀριθμῶν ἔπει ὁ 3 τῷ 5 ἐλάσσων, ὁ δὲ 38 ἢ πλέων ἢ 7 τὸν 5 περιέχει, τὸν 7 ὡς τῷ Πηλίκῃ μέρεσιν ὑπὸ τὴν εὐθεῶν θέσ.

2. Διὰ τῷ εὐρεθέντος 7 τὸν Διαμετέτην πολλαπλασιάσας, καὶ τὸ Γινόμενον 35 ὑπὸ τὸ 38 τάξας, καὶ ἀφελὼν αὐτὸ ἀπ' αὐτοῦ, τὸ λοιπὸν 3 σημείωσον.

3. Καταγαγὼν τὸν ἑγγύς τῷ παρ' ὃ ἡ ἀφαίρεσις ἐγένετο χαρακτῆρα, εἴτεν τὸ μηδενικὸν σημείον, ἢ πλησίον τῷ λοιπῷ 3 γράψας, ὅσα ὁ 1. ἢ 2. εἰσηγέται ἀριθμ. ποιεῖ ἢ ταῦτα, ἕως ἂν πάντας τὰς τῷ διαιρετέσιν καταγάγῃς χαρακτῆρας. ἔπει δὲ ὁ ἔχατος 4 ἔθ' ἀπαξ τὸν 5 περιέχει, τὸ μηδενικὸν ὡς τέτε δηλατὴκὸν ἐν τῷ πηλίκῳ γράψον.

4. Ὅταν, τῆς διαιρέσεως ἔτω περαιωθείσης, ἐναπολειφθῶσι τινες τῷ Διαμετέτῃ χαρακτῆρες, μηκέτι τὸν Διαμετέτην περιλαμβάνοντες, ὡς ὁ 4, τὸν δὲ γράφονταί ἔτοι τὸν τρόπον, $\frac{4}{5}$ κλάσματα καλούμενοι, περὶ ὧν ἐν τῷ ἐξῆς ἐρῶμεν ⁵ βιβλίῳ, καὶ τῷ πηλίκῳ ὡς ἐν τῷ Γ ἰδεῖν ἐς προσίθενται.

Ἀλλὰ δὴ συγκείμενος ἔσω	(Δ)	46327	(Ε)	832
ἐν πολλῶν ὁ Διαμετέτης μοναδικῶν χαρακτήρων, οἷον ὁ		4160	(Ζ)	55†507
Ε, Διαμετέτης δὲ ἔσω ὁ Δ.		4727		832
		4160		
		567		

5. Εἰ μὲν εἰ ἐν τοῖς ἀριστεροῖς τῷ Διαμετέτῃ χαρακτῆρεσιν ὁ, τε πρῶτος ἢ ὁ δεύτερος ἴσοι, ἢ μείζονες ὦσι τῶν

τῶν δύο τῆ Διακρίσεως τῶν ἐν τοῖς ἀριστεροῖς, τὴν πρώτην δὴθ' ἐν καὶ τῆ δευτέρας, τοσούτους ἐπαριθμῶν χαρακτῆρας τῆ Διακρίσεως ἀπὸ τῆ ἐν τοῖς ἀριστεροῖς πρώτης ἐναρξιάμενος, ὅσους ἀν' ἑτυχεὶν ἔχων ὁ Διακρίτης. καὶ ἐλάσω τὴν ἑκάστη τῶν ἀριθμηθέντων σελίδα, τὰ ἐν τῷ 1. καὶ 2. τῶν Λ' ριθ. ἀριθμῶν ἐκτέλεσον, τὸ ἐκτεθὲν τῆ Πηλίκης μέρος 5 διὰ πάντων τῶν τῆ Διακρίσεως χαρακτῆρων πολλαπλασιάσας, ἀπὸ τῶν αὐτῆς μονάδων ἐναρξιάμενος, καὶ τὸ ἰκνήμενον ὑπὸ τὸν Διακριτὴν ἔγω γράψας, ὥστε τὸ μὲν ἐκ τῶν μονάδων Γινόμενον ὑπὸ τὸν σελιθ' ἵσταται κατωθί, τὰ δὲ ἐκ τῶν ἐφεξῆς ὑπὸ τῆς ἐφεξῆς λοιπῆς τῆ Διακρίσεως χαρακτῆρας. καὶ δὲ οἱ ἀριθμοὶ δύο τῆ Διακρίσεως χαρακτῆρας ἐλάττωσι τῶν τῆ Διακρίσεως ὥσι, τοσούτους τῆ Διακρίσεως ἐπαριθμῶσαι καὶ χαρακτῆρας, ὅσους ὁ Διακριτὴς ἔχει, καὶ ἐπὶ ἑνα, καὶ ἐπὶ αὐτὸν σελιθ', ὡς ἐπὶ τῆ προκείμενης παραδείγματος, τὴν δὲ λοιπὴν ἐπεξεργασίαν, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται ποιητέον.

Ἰστέον ἔγω γυγνόντων, ὁ Γ, καὶ ὁ Ζ ἔσονται τὰ ζητούμενα Πηλικά.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἰστέον τῶν τῆ Γ χαρακτῆρων παρίσθαι ποσάκις ἐν τῇ Α, ἢ ἴσας δὴθ' ἐν, ἢ καὶ ἀνά δύο ὁμῶς χαρακτῆρας (καὶ ἀνά τρεῖς δὲ, ἢ ἀνά τέσσαρες, καὶ ἐφεξῆς ὅταν ὁ Διακριτὴς ἐκ πολλῶν συγκένηται χαρακτῆρων ὡς ἐν τοῖς Δ, καὶ Ε.) τὸν Β περιέχουσιν. ὅλος ἄρα ὁ Γ ἰσφαίνει πᾶσις ὅλος ὁ Α τὸν Β περιέχει. ὁ Γ ἄρα τὸ ζητούμενον ἐστὶ Πηλίκον. τὰ αὐτὰ δὲ καὶ περὶ τῆ Ζ εἴρηται.

ΣΧΟΛΙΟΝ

Τὸ ἐκτεθὲν τῆ Πηλίκης μέρος, οἷον τὸν 5 δι' ὅλην τῆ Διακρίσεως πολλαπλασιάζοντες, τὸ Γινόμενον, ἔστιν τὸ 4100 ἀπὸ τῆ Διακρίσεως ὡς εἴρηται τρόπῳ (ἐν τῷ 5. ἀριθμῷ)

•V 313813 W113

28 515519 WHS

1970 1 6 14 100

63

δὲ ἀφαιρῶμαι, μειωτὶον τὸ ὀριζὸν τῷ Πηλίκῳ μέρῳ μονάδων, ἢ δυάδων, ἢ ὅτε ἀπαρτῶ ὁ λόγος. ἵνα δὲ μὴ αὐτὸ τε καὶ τὸ ἱνόμενον γραφῆται, καὶ πάλιν ἐκκαλεῖται, πικρατὶον πρῶτον ἀπὸ μηνῆος, εἰ ἄρα τὸ ἐκ τῷ μέρῳ τῷ Πηλίκῳ καὶ τῷ Διακρίτῳ ἱνόμενον ἀπὸ τῶν τῷ Διακρίτῳ ἀφαιρῶμαι χαρακτηριστῶν, καὶ ὅτε αὐτὸ γραπτὸν. ὃ δὲ ἢ τῇ πράξει αὐτῇ καταβῆται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

Ὅτε οἱ τῷ Διακρίτῳ χαρακτηριστῶν εἰς μονάδας ἀναλύονται δυνάμει ἐκλάσσονται, τότε οἱ ἐκπολεμίζονται καὶ μετὰ τὸ ὑπὸ τῷ Διακρίτῳ διακρίνεται πολλαπλασιάζονται διὰ τῷ ἀριζμῷ, εἰς ὃν αἱ μονάδες ἀναλύονται. καὶ τὸ ἱνόμενον διὰ τῷ Διακρίτῳ τὸν αὐτὸν πάλιν διακρίνεται τρόπον, τὸ Πηλίκον κατ' ἰδίαν ὑπὸ τὸν Διακρίτην σημαῖται οἷοι, ἵαν ὁ Α ἡμέρας (Δ) 46327 (Ε) 532

ἐμφάνη, καὶ ἐκείνη τῶν	4160	(Ζ) 55. 16
αὐτῇ μονάδων εἰς ὥρας	4727	
ἀναλύεται 24, τῷ ἵνα-	4160	
πολεμίζοντος 567 διὰ	567	
τῷ 24 πολλαπλασιασ-	24	
θόντος, καὶ τῷ Γινο-	2468	
μένει Η διὰ τῷ αὐτῷ	1134	
Διακρίτῳ Ε διακρίνεται (Η) 13608		
τος, τὸ Πηλίκον 16	532	
ὑπὸ τὸν Διακρίτην ση-	5288	
μαῖται, συγκρίνει προ-	4992	
οντοθίσης, ὡς ἐν τῷ	296	

Ζ ὁράται. καὶ ὅτε τὸ Πηλίκον Ζ ἡμέρας μὲν 55. ὥρας δὲ 16 δηλοῖ. ἀλλὰ γὰρ πάλιν τῷ ἵναπολεμίζοντος χαρακτηριστῶν 296 διὰ τῷ 60 ἐνὸν πολλαπλασιασθήσεται.

καὶ τὸ Γινόμενον ὁμοίως διπλαῖν, ἐκτείν το τὸ Πηλίκον
 λοιπὰ ἀμφότερον, καὶ αὐτὰς τὰς ἑκατομυφθέντας, καὶ ἔτι
 ἐφθέγγε ἵνα ἀντὶ τῶν ἀπολειφθέντων μονάδων ἐλά-
 χισαι γένηται. καὶ τότε δὴ δι' ἐκίνων κλάσμα συνί-
 στας, καὶ ὅν ἔρηται (ἐν τῷ 4. Ἀριθ. τῷ 7. προβλ.)
 τρόπον.

Περὶ τῶν ἀσφαλῶν καὶ ἐπισφαλῶν βασιάνων.

Ἐν τῷ τῷ ἀριθμῷ ἐκτελεῖν τέσσαρας πράξεις,
 ἔξ ἀπαιτήσεως ἢ παραδρομῆς παραλογίζεσθαι συμβαί-
 νει, καὶ τὰς ἐκτείνοντας ἀριθμοὺς ἐσφαλμένους εἶναι. διὰ-
 ταί τῆς βάσανοι τινος, εἴτεν μέθοδος, νονόνται, δι' ὧν
 κατεῖναι τὸ πότερον ἀπταιστοὶ εἰσιν οἱ ἐκτείνοντες, ἢ ὅ-
 τέων αἱ μὲν ἀσφαλῆς, αἱ δὲ ἐπισφαλῆς τυγχάνουσι.

Βάσανος ἀσφαλῆς τῆς προθέσεως.

Ἀπὸ τῆ Γ Ἀδροίσματος τῶν Α καὶ Β (Α) 34567
 ἀφελὼ τὸν ἑτερον, οἷον τὸν Β. εἰάν δὲ τὸ (Β) 24098
 λοιπὸν ἴσον ᾗ τῷ ἑτέρῳ, τῷ Α, ἀπταιστος (Γ) 58665
 ἔσται ὁ Γ. ἐπειδὴ γὰρ ὁ Γ ἴσος τοῖς Α καὶ
 Β, (κατὰ τὸν γ. ὁρισμ.) τῷ ἑτέρῳ ἀρα
 αὐτῶν ἀπὸ τῆ Γ ἀφαιρεθέντος, τὸ
 λοιπὸν ἴσον ἔσται τῷ ἑτέρῳ.

Βάσανος ἀσφαλῆς τῆς ἀφαιρέσεως.

Τῷ ἐκτείνῃ τῶν Α καὶ Β Διαφορᾷ Γ (Α) 34567
 πρόσθετον τὸν ἀφαιρεθέντα Β. εἰάν δὲ (Β) 24098
 ὁ Α προκύψῃ, ἔδδν ἔχει ὁ Γ ἐλάτ- (Γ) 10469
 τωμα. αἱ γὰρ ὁ Γ ἢ ἀληθῆς ὑπε-
 ρεχθὴ εἶναι ἢ ὁ Α ὑπερέχει τὸν Β, προσκαμίνε αὐτὰ
 τῷ Β, ἴσος ἔσται τῷ Α.

Βάσανος ἀσφαλῆς τῆ πολλοπλάσιασμῆ.

Διέλε το Γινόμενον Γ διὰ τῆ ἑτέρε (Α) 34567
 τῶν πολλαπλασιαζόντων, ἔτεν διὰ τῆ (Β) 24098
 Α, ἢ τῆ Β, εἰάν δὲ Πηλίκον προκύψῃτον (Γ) 832995566
 τῆ ἑτέρε, παρὰ ἑκάστα ἐκ εἰν ἐν τῷ Γ, ἐπειδὴ γὰρ ὁ Γ,
 τὸ ἐκ τῶν Α καὶ Β Γινόμενόν ἐστιν, ἄρα ὡς 1 : Α :: Β :
 Γ. (κατὰ τὴν τῆ ε. ὁρισμ. συνέπ.) ἀλλὰ τῆ Γ διὰ
 τῆ Α διαιρεμένης, ἐστὶν ὡς 1 : Α ἔτω τὸ Πηλίκον, πρὸς τὸν
 Γ. (κατὰ τὴν τῆ ε. ὁρισμ. συνέπ.) τὸ Πηλίκον αἶσα
 ἴσον τῷ Β. τῆ Γ ἄρα διαιρεθέντος διὰ τῆ Α, προ-
 κύψει ὁ Β. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τῆ Γ διὰ τῆ Β ἀρε-
 θέντος, ὁ Α παραχθήσεται.

Βάσανος ἀσφαλῆς τῆς διαιρέσεως.

(1) 832995500 (Β) | 24098

Πολλαπλασιάσον τὸν (Α) 34567
 Διαιρέτην α διὰ τῆ Πηλίκου Α. εἰάν δὲ τὸ ἐξ αὐτῶν Γι-
 νόμενον ἴσον ἢ τῷ Διαιρετέω Γ, τέλειον ἔσται τὸ Πηλί-
 κον Α, ἐπειδὴ γὰρ ὁ Α τὸ Πηλίκον ἐστὶ τῶν Γ καὶ Β,
 ὡς ἄρα 1 : Β :: Α : Γ. (κατὰ τὴν τῆ ε. ὁρισμ. συ-
 νέπ.) ἀλλὰ τῆ Β διὰ τῆ Α πολλαπλασιαζομένης, ἐστὶν
 ὡς 1 : Β, ἔτως Α πρὸς τὸ Γινόμενον. κατὰ τὴν τῆ ε
 ὁρισμ. συνέπ.) τὸ ἐκ τῶν Α καὶ Β ἄρα παραγόμενον
 ἴσον τῷ Διαιρετέω Γ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐάν τῆς διαιρέσεως περαιωθείσης, ἐγκαταλειφθῶσι
 τινες χαρακτηριστῆρες, προθετέον αὐτοὺς τῷ Γινόμενῳ ἐκ τῆ
 Πηλίκου καὶ τῆ Διαιρέτου, ἵν' ὁ Διαιρετέος προκύψῃ.

Αἱ ἐπισφαλεῖς βάσανοι.

Ἡ τῆς προθέσεως.

Ἀπὸ τῶν Α καὶ Β, ἐξ ὧν τὸ (Α) 34567 3|
 κεφάλαιον Γ σύγκεται, ὁ 9 τόν- (Β) 24098 3|
 ἡ ἀφαιρέσῃ τὸν τρέπον 3 σὺν (Γ) 58065
 4 καὶ 5 εἰσὶ 12· ἀπ' αὐτῶν δὲ
 τῷ 9 ἀφαιρεθέντος, τὸ λοιπὸν ἔστιν ὁ 3· ὃ τῷ 6 προ-
 ειθεμένῃ, ὁ 9 ἀναφύει ἔμῃ λογιζέντος, τὸ λοιπὸν ἔδεν-
 ἔστιν. ὁ 7 δὲ σὺν τῷ 2 ἴσα εἰσὶ τῷ 9, ἔμῃ λογιζέντος, κα-
 λιν τὸ λοιπὸν ἔδεν. ὁ 4 δὲ σὺν τῷ 8 (παρορῶνται τέ, το
 ο καὶ ὁ 9 ὅπως ἀν' τύχῃσιν.) εἰσὶ 12, τῷ δὲ 9 ἀφαι-
 ρέντος, ὁ 3 ἐγκαταλείπεται. εἰάν ἔν τῷ 9 τῷ αὐ-
 τῷ τρέπῳ ἀπὸ τῷ Γ Κεφαλαίῳ ἀφαιρεθέντος, τὸ λοι-
 πὸν ἴσων ἢ τῷ λοιπῷ τῶν Α καὶ Β, ἐξ ὧν ὁ Γ, εἴτεν
 τῷ 3, ἀνελαίπες ἔσται τὸ Γ Κεφάλαιον.

Ἡ τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἀφελὲ ἀπὸ μὲν τῷ Α ὃ ἦδη (Α) 34567 4|
 εἴρηται τρέπῳ, τὸν 9, ὡσαύτως (Β) 24096 4|
 καὶ ἀπὸ τῷ Β. ἀπὸ δὲ τῷ 7 τῷ (Γ) 10471
 ἐναπολειφθέντος ἀπὸ τῷ Α, τὸν
 3 τὸν ἐναπολειφθέντα ἀπὸ τῷ Β, καὶ εἰάν τῷ λοιπῷ
 4 ἴσων ἢ τὸ ἐναπολειπόμενον ἀπὸ τῆς Διαφορᾶς Γ,
 τῷ 9 ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρεθέντος, ἐντελὴς ἔσται ἡ Διαφορὰ Γ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Εἰάν δὲ τῷ 9 ἀφέντος, τὸ λοι- (Α) 972631 7|
 πὸν 4 τὸ ἐναπολειφθὲν ἀπὸ τῷ Ε (Ε) 45283 7|
 μῖζον ἢ τῷ 1 τῷ ἐναπολειφ- (Ζ) 927348
 θέντος ἀπὸ τῷ Δ, ἀφ' ἧς ὁ Ε
 ἀφῆρηται. δεκάδος ληφθείσης, καὶ τῷ λοιπῷ ἐλάσσου-
 νι 1 προστεθείσης, τὸ λοιπὸν 4 ἀπ' αὐτῆς ἀφηρηθῶ.
 Σ 4 καὶ

καὶ εἰν τῷ λοιπῷ 7 ἴσον ἢ τὸ ἐναπολειφθὲν ἀπὸ τῆς Διαφορᾶς Ζ, τῆς ληφθείσης ἤδη δεκάδος αὐτῇ προσειθείσης, ἔδδεν ἐν τῇ Γ Διαφορᾷ παράπτωμα.

Ἡ τῆς πολλαπλασιασμῶ.

Τὸ ἐναπολειφθὲν 7 ἀπὸ τῆς πολλαπλασιαστέας Α διὰ τῆς 5 τῆς ἐναπολειφθέντος ἀπὸ τῆς πολλαπλασιαστέας Β, τῆς 9 ἀφ' ἑκατέρης ἀρθέντος, πολλαπλασιάσας, ἀπὸ τῆς Γινόμενης 35 τὴν 9 ἀφ' ἑλ. καὶ εἰν τῷ λοιπῷ 8 ἴσον ἢ τὸ ἐναπολειφόμενον ἀπὸ τῆς Γ, τῆς ἐκ τῶν Α καὶ Β Γινόμενης, παραρμα ἐν τῇ Γ ἔκ. ἔσιν.

Ἡ τῆς Διαμέσεως.

Τὸ ἐναπολειφθὲν (Γ) 832995566 (Β) $\overline{24098} \frac{5}{8}$
5 ἀπὸ τῆς Διαμέσεως (Α) 34507 $\frac{7}{8}$
Β διὰ τῆς 7 τῆς ἐναπολειφθέντος ἀπὸ τῆς Πηλίκης Α, ἀφ' ἑκατέρης τῆς 9 ἀρθέντος, πολλαπλασιάσας. καὶ εἰν ἀπὸ τῆς ἐξ αὐτῶν Γινόμενης 35 τὸ ἐναπολειφθὲν 8 ἴσον ἢ τῷ ἐναπολειφθέντι ἀπὸ τῆς Διαμέσεως Γ, ἀφ' ἑκατέρης αὐτῶν τῆς 9 ἀρθέντος, ἀπταῖσον ἔσται τὸ Πηλίκον Α.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐάν δὲ, τῆς διαμέσεως (Δ) 7856 (Ε) $\overline{32} \frac{5}{8}$
παραιωθείσης, ἐναπολειφ. 64 (Ζ) $\overline{245} \frac{2}{8}$
δῶσί τινες χαρακτῆρες, ὡς 145
ἐν τῷ Δ εἰ 16, προδιτέεν 128
τέτρε τῷ ἐκ τῶν ἐναπολειφθέντων ἀπὸ τῆς Διαμέσεως 170
καὶ τῆς Πηλίκης Γινόμενω, ἔσται 160
16

τα 10. εἴθ' ἔτιωσ ἀπ' αὐτῶ, ἥτοι ἀπὸ τῆ 26 ἀφαιρετεον τὸν 9. καὶ εἰν τὸ λοιπὸν 8 ἴσον ἢ τῷ λοιπῷ τῷ Διαμετέει, τέλειον ἔσται τὸ Πηλίκον Ζ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅτι δὲ αἱ τοιαῦται βάσαναι εἰς ἀσφαλεῖς, ἐπιγινώσκαι ῥᾶδιον. εἰν γὰρ τὸν Ζ λαθὼν, ἔτω γράψῃς 244, ἢ μὴν βάσανος ἀπταυσον αὐτὸν ἐμφαίνει· ὁ δὲ, τῷ ἀληθὲς τρεῖτον διέστηκεν, ἔσον ὁ 45 τῷ 54. αὐτοῖς δὲ μικρῶν δὲν ἀπαντες χρῶνται, ἐπειδὴ τῶν ἀσφαλῶν ἦττον ἐργώδεις τε καὶ ἐπίπικον, τοιαῦτα δὲ παραπτώματα σπανιώτατα τοῖς ἀριθμητικαῖς ἐμπίπτει πράξεσι.



ΒΙΒΛΙΟΥ Β.

Περὶ Κλάσμάτων καὶ τῶν καλεσμένων
Δεκαδικῶν

ΟΡΙΣΜΟΙ.

- Α'. Κλάσμα ἐστὶ τὸ ἐκ δύο ἀριθμῶν ευθείᾳ ὀρίζοντιω διακεχωρισμένων συγκροτούμενον, ἢ μονάδος μέρη, ἢ μόνας μονάδας, ἢ μέρη ὁμῶς ἢ μονάδας ἐμφαίνον.
- Β'. Παρανομασίης Κλάσματος, οἷον τῷ Α, $(\frac{A}{3})$ ἐστὶν ὁ ὑπὸ τὴν ευθείαν κείμενος ἀριθμὸς, εἰς ὅσα μέρη ἢ μονὰς διήρηται σημαίνων. οἷον, ὁ 3, ὅς εἰς τρία τὴν μονάδα μεριδιῶσαν ἐμφαίνει μέρη.
- Γ'. Αριθμητῆς Κλάσματός ἐστιν ὁ ἐπὶ τῆς ευθείας ὦν ἀριθμὸς, οἷον ὁ 2, ὅσα μέρη τῆς εἰς τρία διαιρεθείσης μονάδος ἐληπται εἰς τὴν τῷ Α Κλάσματος σύστασιν θηλῶν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἀπειροσκόπων δὲ τὰ Κλάσ- $\frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{8}{10} \frac{7}{11} \frac{3}{90} \frac{5}{100}$
ματα πρῶτον τὸν ἐπάνω τῆς
ἐνδοῦς ἀριθμὸν ἐξαγγέλλον.

τρεῖς, αἷ ἔτω τὸν ὑπακῶν, τὸν δὲ τὸν τρόπον δύο
τρίτα, ἢ δύο τριτημόρια τέσσαρα πέμπτα, ἢ τρία
σάρα πεμπτημόρια ἑκτὼ δέκατα, ἢ ὀκτὼ δεκατημέ-
ρια ἑπτὰ ἑνδεκάτα, ἢ ἑπτὰ ἑνδεκατημόρια τρία ἐν-
νεηκοῦς, ἢ τρία ἐννεηκοστημόρια πέντε ἑκατοσά, ἢ
πέντε ἑκατοστημόρια.

Δ'. Τῶν Κλασμάτων, Ἰνῆσιον μὲν, τὸ ἔλαττον μο-
νάδες, ἢ τὸ Ἀριθμητὴν ἐλάττονα (Β) $\frac{31}{51}$
ἔχεν τῇ παρνομασῇ, οἷον τὸ Β.

Νόθον δὲ, τὸ ἴσον ἢ μῖζον μο- (Γ) $\frac{3}{3}$
νάδες, ἢ ἔτινος ὁ ἀριθμητὴς ἴσος

ἢ μῖζων τῇ παρνομασῇ, ὡς τὰ Γ, (Δ) $\frac{7}{7}$ (Ε) $\frac{3}{3}$
Δ. Νόθον δὲ γίνεται ἢ πᾶς ἀριθ-

μὸς ἐλόκληρος, τῆς μονάδος αὐ-
τῇ ὑπεργραφίσσης. οἷον, τὸ Ε.

Ε'. Δεκαδικὰ εἰσιν Ἀριθμηταὶ Κλασμάτων, ὧν οἱ
μὲν Παρνομασαὶ λόγον δεκαπλάσιον πρὸς ἀλλήλους
ἔχουσιν οἱ δὲ Ἀριθμηταὶ μοναδικοὶ εἰσι χαρακτῆρες
τοιαῦτά εἰσι τὰ προ- $\frac{3}{10} \frac{2}{100} \frac{4}{1000} \frac{7}{10000} \frac{5}{100000}$
κείμενα Κλάσματα.

ὧν οἱ Ἀριθμηταὶ γρα-

φόμενοι ἔτω, ο. 32475, Δεκαδικὰ σημεῖα, ἢ Δεκα-
δικοὶ Χαρακτῆρες λέγονται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὸ μὲν πρὸ τῆς σιγμῆς μηδενικὸν σημεῖον, μηδενίαν
παρῶναι ἐλόκληρον μονάδα ἐμφαίνει ὁ δὲ 3, τριῶν δε-
κάδων.

κατημόρια· οὐ 2, δύο ἑκατοσημόρια· ὁ δὲ 4, τέσσαρα χιλιοσημόρια· ὁ δὲ 7, ἑπτὰ δεκαχιλιοσημόρια· ὁ δὲ 5, πέντε ἑκατονχιλιοσημόρια. ἀλλὰ γὰρ πρὸ τῆς συγμῆς καὶ ἀριθμοὶ κινῶνται, ὡς ἐν τῷ Α, (Α) 35. 139. ἐλεκληῆς δὴλόντες. οἷον, ὁ μὲν 35 τὸ αὐτὸ δηλοῖ ὁ καὶ ἀνευ τῶν 139, ἔσται τριάκοντα πέντε· ὁ δὲ 1, ἐν δεκατημέριον· ὁ δὲ 3, τρία ἑκατοσημόρια· ὁ δὲ 9, ἑννία χιλιοσημόρια. ὡσαύτως καὶ ἐν τῷ Β, (Β) 20. 005. ὁ μὲν 20, εἰκοσι ὀλεκληῆς δηλοῖ ἀριθμὸς· τὰ δὲ, 00, εἶναι περιῆναι δεκατημέριον, ἐδὲ ἑκατοσημόριον· ὁ δὲ 5, πέντε χιλιοσημόρια.

ΣΤ Ν Ε Η Ε Ι Α.

(Ι) μὲν πρῶτος ἄρα μετὰ τὴν συγμὴν τόπος, τῶν δεκατημερίων ἐστίν· ὁ δὲ δεύτερος, τῶν ἑκατοσημερίων· ὁ δὲ τρίτος, τῶν χιλιοσημερίων, καὶ ἐφεξῆς ἔτω. τῶν δεκαδικῶν ἄρα σημείων μεῖνται μὲν ἡ δύναμις ἐν δεκαπλασίῳ λόγῳ ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ προϊῶσα, αὖτις δὲ ἀπὸ τῶν δεξιῶν ἐπὶ τὰ ἀριστερά. ὅπερ δὴ καὶ ἐπὶ τῶν ἐλεκληῶν συμβαίνει.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Α΄.

Τὸ δοθέν Κλάσμα Α εἰς ἐλαχίστους (Α) $\frac{4}{8}$ ἀγαγὰν ὅρως· ὁ ἐστὶ Κλάσμα εὐρεῖν ἴσον μὲν τῷ δοθέντι, ὑπὸ δὲ ὅσον ἔνεστιν ἐλαχιστοτέρων ἀριθμῶν ἐμφαινόμενον.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Α.

Διὰ τῶ αὐτῶ ἀριθμῶ, τῶ πάντων ὧν ἔνεστι μείζονος διαιρηθῆτω ὁ, τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρανομαστὴς τῶ δοθέντος Κλάσματος, οἷον διὰ τῶ 4. καὶ τὸ μὲν ἐκ τῶ Ἀριθμητῶ προῖον Πηλίκον, 1, τὸν Ἀριθμητὴν τὸ δὲ ἐκ τῶ Παρανομαστῶ, 2, τὸν Παρανομαστὴν συνιστάτω τῶ ζητεμένῃ Κλάσματος Β. λέγω δὴ, ὅτι

ὅτι τὸ Β τὸ ἔτω συγκροτούμενον, τὸ ζητούμε- (B) $\frac{1}{2}$
νον Κλάσμα ἐστὶ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν Α εἰς 8 τὴν μονάδα διηρημένην σημαίνει μι-
ρη, ἀφ' ὧν τὰ 4, εἴτεν τὸ ἡμισυ εἴληπται. τὸ δὲ Β
εἰς 2, ἀφ' ὧν τὸ 1 ἐλήφθη (κατὰ τὸν Β', καὶ Γ' ὅρισ.)
ὅ ἐστι τὸ τῆς αὐτῆς μονάδος ἡμισυ. ἴσον ἄρα τῷ Α τὸ
Β. συγκεκρότητα δὲ καὶ ἐκ τῶν ὧν ἐνεστὶν ἐλαχιστὴ
ἀριθμῶν. τὸ Β ἄρα ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Χρήσιμος ἡ τῇ δευτέρῃ προβλήματος λύσις πρὸς σαφεσίαν
ὧν τὸ Κλάσμα ἐμφαίνει γινώσκιν. οἷον (Γ) $\frac{9}{243} = (\Delta) \frac{1}{27}$
τὸ μὲν ὑπὸ τῇ Γ ἐμφαινόμενον, δύσ-
ληπτον τὸ δὲ ὑπὸ τῇ ἴσῃ αὐτῷ Δ, (Ε) $\frac{192}{448} = (Ζ) \frac{3}{7}$
εὐληπτον· ὡσαύτως τὸ μὲν ὑπὸ τῇ
Ε, δυσνόητον τὸ δὲ ὑπὸ τῇ ἴσῃ αὐ-
τῷ Ζ, εὐνόητον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Τὰ δοθέντα Κλάσματα Α καὶ (Α) $\frac{2}{3}$ (Β) $\frac{5}{7}$
Β, ὧν οἱ Παρονομασταὶ διάφοροι,
ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀγαγεῖν Παρο- (Γ) $\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7}$ (Δ) $\frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 7}$
νομασάς· εἴτεν κλάσματα εὐ-
ραῖν ἴσα τοῖς δοθεῖσι, καὶ τῆς (Ε) $\frac{14}{21}$ (Ζ) $\frac{15}{21}$
αὐτῆς παρονομασάς ἔχοντα.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἐκατέρῃ τῶν Κλασμάτων τὸν τε Ἀριθμητὴν καὶ
Παρονομαστὴν διὰ τῇ Παρονομαστῇ τῇ ἐτέρῃ πολλαπλα-
σίασον· οἷον, διὰ τῇ 7 τῇ Παρονομαστῇ τῇ Β τὸν τε
ἀριθμητὴν 2, καὶ τὸν Παρονομαστὴν 3 τῇ Α, ὥστε γί-
νεται

γίνῃαι τὸ Γ ἢ τὸ Ε' ὁμοίως διὰ τῶ Παρονομαστῆ τε
 Α, ἥτοι τῶ 3, τὸν τε Ἀριθμητὴν 5, καὶ τὸν Παρο-
 νομαστὴν 7 τῶ Β, ὥστε γενέσθαι τὸ Δ ἢ τὸ Ζ. καὶ ἔσται
 τὰ Ε καὶ Ζ τὰ ζητούμενα Κλάσματα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ὅτε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς τῶ κλάσ-
 ματος διὰ τῶ αὐτῶ ἀριθμῶ πολλαπλασιάζεται καὶ διαι-
 ρᾶται, ὁπλὸν ἄρα ὅτι τὸ προκύψαν Κλάσμα Ε ἰσο-
 δύναμν τῶ Α, ὡσαύτως καὶ τὸ Ζ τῶ Β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐὰν δὲ τὰ δοθέντα	(Α) $\frac{2}{3}$	(Β) $\frac{5}{7}$	(Γ) $\frac{3}{5}$	(Δ) $\frac{2}{9}$
κλάσματα πλείονα ἢ				
δύω ἢ, οἷον τὰ Α, Β,	(Α) $\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7}$	(Β) $\frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 7}$	(Γ) $\frac{3}{5}$	
Γ, Δ, ἄγε πρῶτον τὰ Α				
καὶ Β εἰς τὸς αὐτὸς Πα-	(Α) $\frac{2 \cdot 7 \cdot 5}{3 \cdot 7 \cdot 5}$	(Β) $\frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 7 \cdot 5}$		
ρονομαστὰς, ὡς εἴρηται.				
εἰς τὸν αὐτὸν δὲ Παρο-	(Γ) $\frac{3 \cdot 7 \cdot 3}{3 \cdot 7 \cdot 5}$	(Δ) $\frac{2}{9}$		
νομαστὴν τῶν Α καὶ Β ἤχ-				
θω καὶ τὸ τρίτον Γ. καὶ				
πάλιν εἰς τὸν παρονομα-	(Α) $\frac{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9}{3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9}$	(Β) $\frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9}{3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9}$		
στὴν τῶν τριῶν Α, Β, Γ				
ἤχθω καὶ τὸ τέταρτον	(Γ) $\frac{3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9}{3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9}$	(Δ) $\frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5}{3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9}$		
Δ, καὶ ὅτως ἐφεξῆς				
ποιεῖ, εἰάν ἄλλα δοθέν-				
τα ὥσι κλάσματα.				

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τέτων ὁπλὸν, ὅτι εἰς τὸς αὐτὸς Παρονομαστὰς
 ἀχθῆσονται πολλὰ ὄντα τὰ δοθέντα Κλάσματα, εἰάν
 ὅ, τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς ἐνὸς ἐκάστῃ διὰ
 πάντων τῶν Παρονομαστῶν τῶν λοιπῶν Κλασμάτων πολ-
 λαπλασιασθῇ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Τὰ δοθέντα ὁμο- $(A) \frac{1}{9} + (B) \frac{5}{9} + (Γ) \frac{2}{9} = (Δ) \frac{8}{9}$
γενῇ κλάσματα
Α, Β, Γ συνάψαι, $(E) \frac{1}{2} + (Z) \frac{2}{3} + (H) \frac{4}{5}$
ἔστω κλάσμα ἐυ-
ρεῖν ἴσον τοῖς δο-
θεῖσι. $(Θ) \frac{15}{30} + (I) \frac{20}{30} + (K) \frac{24}{30} = (Λ) \frac{59}{30} = (M) \frac{1+29}{30}$

ΠΡΑΚΤΕΑ

Ἐάν μὲν τὰ δοθέντα κλάσματα τῆς αὐτῆς ἔχῃ
Παρονομασίας, ὡς τὰ Α, Β, Γ, πάντων τῆς Ἀριθ-
μητᾶς συνάψας, τὸν κοινὸν Παρονομαστὴν ὃ ὑπὸ τὸ κε-
φάλαιον 8 γράψον· καὶ ἔστω τὸ ἔτω συγκροτούμενον κλάσ-
μα Δ τὸ ζητούμενον. Ἐάν δὲ οἱ τῶν Παρονομαστῶν διά-
φοροι ὡς οἱ τῶν Ε, Ζ, Η, εἰς τῆς αὐτῆς μὲν Παρε-
νομασίας τὰ κλάσματα ἀνάγαγε, ὥστε γενέσθαι τὰ Θ,
Ι, Κ· τὰ δὲ λοιπὰ, ὡς εἴρηται, ποιήσον. ἔτω μὲν ἐν
προκύψει τὸ ζητούμενον κλάσμα Λ, ὅπερ ἴσον τῷ Μ.

Ἡ δὲ οὕτως ἐκτε τῆς πράξεως, καὶ τῶ α. προβλ. τῶ α.
βιβλ. δόλη.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τῶν συναπτομένων κλασμάτων τὸ κεφάλαιον ἐνίοτε
μὲν κλάσμα γνήσιόν ἐστιν· ἐνίοτε δὲ, νόθον· ἐνίοτε δὲ, με-
νᾶς, ἢ μονάδες ὁλόκληροι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ.

Δύο κλασμάτων ὁ- $(A) \frac{5}{7} - (B) \frac{2}{7} = (Γ) \frac{3}{7}$
μογενῶν δοθέντων τῶν
Α ἢ Β ἀπὸ τῶ μείζονος $(Δ) \frac{3}{5} - (E) \frac{7}{15}$
Α τὸν ἐλάσσονα Β ἀ- $(Z) \frac{45}{75} - (H) \frac{35}{75} = (Θ) \frac{10}{75}$
φελῆν.

ΠΡΑΚ-

ΠΡΑΚΤΕΑ

Ἐάν μὲν τὰς αὐτὰς Παρανομασίας τὰ Κλάσματα ἔχη, ὡς τὰ Α, καὶ Β, ἀπὸ τῆς Ἀριθμητῆς 5 τῆς μείζουσας, τὸν 2 τὸν τῆς ἐλάσσονος Β ἀφελὼν, ὑπὸ τὸ λοιπὸν 3 τὸν κοινὸν Παρανομασίην 7 γράψον καὶ ἔσαι τὸ πρὸκύψαν Κλάσμα Γ ἢ τῶν δοθέντων Α καὶ Β Διαφορὰ. Ἐάν δὲ διαφορὰς, ὡς τὰ Δ, Ε, εἰς τὰς αὐτὰς μὲν ἀνάγαγε Παρανομασίας, ὥστε γενέσθαι τὰ Ζ, Η, τὰ δὲ λοιπὰ ὡς εἴρηται ποίησον. καὶ ἔσαι τὸ Θ τὸ ζητούμενον Κλάσμα.

Ἢ διῆξιν ἐκ τε τῆς πράξεως, καὶ ἐκ τῆς γ' προβλ. τῆς 1. βιβλ. δῆλη.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Ἐάν τὰ ἀπὸ τῆς δο- (1) $\frac{7}{5}$ (Κ) -- $\frac{1}{3}$ (Λ) -- $\frac{2}{5}$ (Μ) -- $\frac{3}{7}$
θέντος Κλάσματος 1
ἐφαρμολησόμενα πολ- (Κ) -- $\frac{1}{3}$ (Λ) -- $\frac{2}{5}$ (Μ) -- $\frac{3}{7}$ = (Ν) -- $\frac{122}{105}$
λά ἢ, οἷον τὰ Κ, Λ,
Μ, ταῦτα πάντα
συνάψας (κατὰ τὸ γ' (1) $\frac{7}{5}$ · (Ν) $\frac{122}{105}$ = (Ξ) $\frac{125}{525}$
προβλ.) τὸ κεφα-
λαιον Ν. ἀπὸ τῆς 1 ἀφελὲς τὸ δὲ λοιπὸν Ξ ἔσαι ἡ ζη-
τούμενη Διαφορὰ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Ἐάν μὲν τὰ δοθέντα Κλάσματα Γνήσια ἢ, ἢ τῶν Διαφορὰ Γνήσιον Κλάσμα ἔσαι· ἐάν δὲ Νόθα, ὅτε μὲν Νόθεν, ὅτε δὲ μονάς, ἢ μονάδες ὁλόκληραι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

Τὸ δοθὲν Κλάσμα (Α) $\frac{1}{2}$ · (Β) $\frac{1}{3}$ = (Γ) $\frac{1}{6}$
Α διὰ τῆς δοθέντος Β
πολλαπλασιάσαι.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τὸν Ἀριθμητὴν τῷ Πολλαπλασιαστῇ Α διὰ τῷ Ἀριθ. μητῷ τῷ Πολλαπλασιαστῇ Β πολλαπλασιάσας, ὡσαύτως καὶ τὸν Παρενομαστὴν διὰ τῷ Παρενομαστῇ, καὶ ὁμοιοῦσιν αἱ Παρενομασταὶ ὡσιν, ὑπὸ τὸ Γινόμενον τῶν Ἀριθμητῶν 1, τὸ τῶν Παρενομαστῶν ὁ γεγράφον. ἔσται δὲ τὸ ἔτω περικόπτον Κλάσμα Γ τὸ Γινόμενον ἐκ τῶν δεδιόντων Α καὶ Β Κλασμάτων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μοιὰς πρὸς τὸν Πολλαπλασιαστὴν λόγον ἔχει, ἐν ὃ Πολλαπλασιαστῇ πρὸς τὸ Γινόμενον. (κατὰ τὴν συν. τῷ εἰς ὁρισμ. τῷ α. βιβλ.) εἰάν ἄρα ὁ Γ τὸ Γινόμενον ἢ τῶν Α καὶ Β, ἔσται ὡς $1 : 1 :: \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$. ἀλλὰ τῷτο ἀληθὲς ὡς δῆλον. ὁ Γ ἄρα 2 3 ὁ τὸ Γινόμενον ἐστὶ τῶν Α καὶ Β.

Α Λ Α Ω Σ.

Ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τσαῖκας λαμβάνεται ὁ πολλαπλασιαστὴς ὡσαῖκας ἢ μονὰς ἐν τῷ Πολλαπλασιαστῇ. (κατὰ τὸν εἰς ὁρισμ. τῷ α. βιβλ.) ἐστὶ δὲ ἐν τῷ Πολλαπλασιαστῇ Β ἐν τριτημόριον τῆς μονάδος. ἐν ἄρα τριτημόριον τῷ Πολλαπλασιαστῇ Α, ἔσται τῷ ἡμίσεος τῆς μονάδος, ἐστὶ τὸ Γινόμενον τῶν Α καὶ Β. ἀλλ' ὁ Γ, ἦτοι ἐν ἑκτημόριον τῆς ὅλης μονάδος, ἐν τριτημόριον ἐστὶ τῷ Α, τετέστι τῷ τῆς μονάδος ἡμίσεος. ὁ Γ ἄρα ἐστὶν ὁ ζητέμενος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

Ἐάν τὰ δεδιόντα (Α) $\frac{1}{2}$. (Β) $\frac{2}{3}$. (Γ) $\frac{3}{5}$. (Δ) $\frac{5}{7}$
 Κλάσματα πλείονα
 ἢ δύο ἢ εἰς τὰ Α, (Α) $\frac{1}{2}$. (Β) $\frac{2}{3}$ = (Ε) $\frac{2}{6}$. (Γ) $\frac{3}{5}$ =
 Β, Γ, Δ, τὸ ἐκ τῶν
 δύο Α καὶ Β Γινό- (Ζ) $\frac{6}{30}$. (Δ) $\frac{5}{7}$ = (Η) $\frac{30}{210}$ = $\frac{1}{7}$
 μενον Ε διὰ τῷ τρι-
 τῷ Γ πολλαπλασία-

σον, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον Ζ διὰ τῆ τετάρτης Δ, καὶ ἔτις ἐφεξῆς. καὶ ἔσται τὸ Η τὸ ἐκ πάντων παραχθέν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Τῶν Κλασμάτων Γνησίων μὲν ὄντων, τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον Γνήσιόν τε Κλάσμα ἐστὶ καὶ ἐκάς τε τῶν πολλαπλασιαζομένων ἑλαττον· Νόθων δὲ τινων, καὶ τινων γνησίων, ὅτε μὲν νόθον, ὅτε δὲ γνήσιον, ἐνίοτε δὲ καὶ μονάς, ἢ μονάδες ὀλόκληροι· καὶ ὅτε μὲν μείζον, ὅτε δὲ ἑλαττον ἐκάς τε τῶν πολλαπλασιαζομένων· Νόθων δὲ μόνον, νόθον αἰ, ἐνίοτε δὲ μονάς, ἢ μονάδες ὀλόκληροι, ἐκάς τε δὲ τῶν πολλαπλασιαζομένων μείζον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5'.

Τὸ δοθὲν Κλάσμα (Α) $\frac{1}{2}$: (Β) $\frac{1}{3}$
 Α διὰ τῆ δοθέντος (Α) $\frac{1}{2}$ · (Γ) $\frac{3}{1}$ = (Δ) $\frac{3}{2}$
 Β διελεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τὸν Διαρέτην Β ἀναποδίσας, ὥς τε τὸν μὲν Ἀριθμητὴν, Παρανομαστὴν γενέσθαι· τὸν δὲ Παρανομαστὴν, Ἀριθμητὴν, τὸ ἔτιω περὶ κύψαν Κλάσμα Γ διὰ τῆ Διαρετέος Α πολλαπλασιάσον. καὶ ἔσται τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον Δ, τὸ ἐκ τῶν Α καὶ Β προϊόν Πηλίκον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μονάς πρὸς τὸ Πηλίκον, ἔτις ὁ Διαρέτης πρὸς τὸν Διαρετέον. (κατὰ τὴν συνέπ. τὴν μετὰ τὸν 5. ὀρισμ. τῆ α. βιβλ.) ἐὰν ἄρα τὸ Δ, τὸ Πηλίκον ᾖ, ἔσται ὡς $1 : \frac{3}{2} :: \frac{1}{2} : 1$. ἀλλὰ τῆτο ἀληθές. ὁ Δ ἄρα τὸ Πηλίκον $\frac{3}{2}$ ἐστίν.

ἵνα δὲ εὐδηλον ᾖ, ὅτι $1 : \frac{3}{2} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$, γεγονότεν
 ἐναλλάξ ὡς $1 : \frac{1}{3} :: \frac{3}{2} : \frac{1}{2}$. καὶ ἐπεὶ $1 : \frac{1}{3} :: 3 : 1$,
 καὶ $\frac{3}{2} : \frac{1}{2} :: 3 : 1$. ἔστι δὲ ὡς $3 : 1 :: 3 : 1$. ἄρα καὶ
 $1 : \frac{1}{3} :: \frac{3}{2} : \frac{1}{2}$, (κατὰ τὴν ἐπὶ πρότ. τῆς βιβλ. τῆς
 Γεωμ.) ἔστιν $1 : \frac{3}{2} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$.

Α Λ Λ Ω Σ.

Τὸ Πηλίκον ἐμφαίνει ποσάκισ τὸν Διαιρέτην ὁ Διαι-
 ρετέος περιέχει. (κατὰ τὸν 5' ὅρισ. τῆς α'. βιβλ.)
 ἀλλὰ τὸ Πηλίκον $\frac{3}{2}$ ἦτοι $1 + \frac{1}{2}$ δηλοῖ ποσάκισ ὁ Διαι-
 ρετέος $\frac{1}{2}$ τὸν Διαιρέτην $\frac{1}{3}$ περιέχει. δηλὸν γὰρ, ὡς ἅπαρ
 καὶ τὸ ἡμισυ αὐτῆς $\frac{3}{2}$ περιέχει. τὸ $\frac{3}{2}$ ἄρα τὸ ζητού-
 μεν Πηλίκον ἐστίν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τῶν Κλασμάτων ἔτε Γνησίων ὄντων ἑκατέρων, ἔτε
 Νόθων, ἢ τῶ μὲν, Νόθε, τῶ δὲ, Γνησίῳ, τὸ Πηλίκον
 Νόθον ἔσται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

Τὸ δοθέν κλάσμα Α

$$(A) \frac{2}{5} \quad (B) \frac{3}{5}$$

τῷ δοθέντι ὁλοκλή-

$$(A) \frac{2}{5} + (B) \frac{3}{5}$$

ρω Ε συντιθέναμ, ἢ

ἀπ' αὐτῶ ἀφελεῖν,

$$(A) \frac{2}{5} + (B) \frac{3}{5} = (Γ) \frac{17}{5}$$

ἢ δι' αὐτῶ πολλα-

$$(B) \frac{3}{5} - (A) \frac{2}{5} = (Δ) \frac{13}{5}$$

πλασιάσαι, ἢ διελεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

$$(A) \frac{2}{5} \quad (B) \frac{3}{5} = (Ε) \frac{6}{5}$$

Γεγραφέω ἡ μονὰς ὑπὸ

τὸν ὁλόκληρον Β. ἔτω μὲν

$$(A) \frac{2}{5} \quad (B) \frac{1}{3} = (Ζ) \frac{2}{15}$$

γὰρ ὁ ὁλόκληρος εἰς Νόθον

κλάσ.

κλάσμα μεταποιηθήσεται. (κατὰ τὸν δ. ὅρισμ. τῷ δὲ τῷ βιβλ.) εἰ μὲν ἔν ἐπισυνάψαι δεήσει τῷ ὁλοκλήρῳ B τὸ κλάσμα A, τὰ ἐν τῷ γ. προβλήματι τῷ δὲ τῷ βιβλ. ποιήσων; καὶ ἔσται τὸ κεφάλαιον τέτων τὸ Γ· εἰ δ' ἀφελεῖν, τὰ ἐν τῷ δ. ἢ δὲ Διαφορὰ ἔσται τὸ Δ· εἰ δὲ πολλαπλασιάσῃ, τὰ ἐν τῷ ε. καὶ τὸ Γινόμενον ἔσται τὸ Ε· εἰ δὲ διελῶν, τὰ ἐν τῷ σ. καὶ τὸ Πηλίκον ἔσται τὸ Ζ. δείξεις δὲ τὰ ἐνδεχόμενα εἶναι τὰ ζητούμενα, ὡς καὶ ἐν τοῖς εἰρημένοις προβλήμασι δέδεικται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η.

Τὸς δοθέντας ἀριθ- (A) 25. 4670 (B) 8. 569
 μὲς A καὶ B, τὸς ἐξ (A) 25. 4670
 ὁλοκληρῶν καὶ Δεκα- (B) 8. 569
 διαίων συγκατεμένων, ἐ-
 πισυνάψαμ. ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τετάρχθωσαν οἱ δοθέντες A καὶ B, ὡς τὸς χα-
 ρακτηρας ὑπὸ τῶν αὐτοῖς ἰσοδυναμίας καὶ ὡς τῶν
 ἐν τῷ α. προβλήματι τῷ α. βιβλ. γενομένων, ὁ Γ ἔσται
 τὸ ζητούμενον κεφάλαιον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὅτι ὁ Γ τὸ ζητούμενον κεφάλαιον ἔστι, δηλον ἐκ
 τῶν ἐν τῷ προδιαληφθέντι προβλήματι εἰρημένων. δέ-
 κα γὰρ μονάδες τῶν ἐλασσόνων μιᾷ τῶν μειζόνων ἴσαι,
 κατὰ τὴν μετὰ τῶν ὁρισμῶν τῷ δὲ τῷ βιβλ. συνέπεσαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

Δύο ἀριθμῶν τῶν (A) 58. 2745 (B) 36. 985
 A καὶ B δοθέντων, (A) 58. 2745
 τῶν ὁλοκληρῶν καὶ (B) 36. 985
 (Γ) 21. 2895

δεκαδικὰ περιεχόντων, ἀπὸ τῆς μείζονος Α
τὸν ἐλάσσονα Β ἀφελῶν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τετάρχθωσαν οἱ δεθέντες Α καὶ Β καθάπερ καὶ ἐν
τῷ προλαβόντι προβλήματι. καὶ τῶν ἐν τῷ β. προ-
βλήματι τῆς α'. βιβλίᾳ γεγονότων, ἔσται, ὡς δῆλον, ὅτι
ὁ ζητούμενη Διαφορά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν Α (Α) 2. 32. (Β) 3. 5
διὰ τῆς δοθέντος Β πολλα- (Α) 232
πλασιάσαι, ἐκατέρω ὁλο- (Β) 35.
κλήρης καὶ δεκαδικὰ περι- (Γ) 8. 120.
εχοντος.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τετάρχθωσαν οἱ πολλαπλασιαστέμενοι Α καὶ Β, ὡς
ἐτάχθωσαν αὐτοί, εἰ μόνως ὁλοκλήρων δηλωτικῶς περι-
χον χαρακτῆρας. καὶ γενομένων τῶν ἐν τῷ γ', προβλή-
ματι τῆς α'. βιβλίᾳ ἐπιταχθέντων, ἀπὸ τῶν χαρακ-
τήρων τῆς Γ γινόμενης Γ εἰληφθώσαν δεξιόθεν χαρακτῆρες
ὕπὲρ τῶν δεκαδικῶν τοσῶτοι, ὅσοι εἰσὶν οἱ τῆς δεκαδικῆς
δηλῶντες ἐν τοῖς πολλαπλασιασμοῖς Α καὶ Β, εἴτην τῆς.
καὶ ἔσται ὁ ἔτω συχθεὶς Γ τὸ ζητούμενον Γινόμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐάν γὰρ τῆς πολλαπλασι- (Α) $\overline{2 + 3 + 2.}$ (Β) $\overline{3 + 5}$
αθισσομένης Α καὶ Β κατὰ τὸν $\frac{10}{100}$ $\frac{10}{100}$
προκείμενον γράψας τρόπον,
ὡς ἐν τῷ ε' καὶ ζ'. προβλήματι εἴρηται πολλαπλασιάσθαι
τὸ αὐτὸ Γινόμενον Γ παραχθήσεται.

ΠΡΟ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ΄.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων (Α) 1. 44 : (Β) 1. 2
 τῶν Α καὶ Β, τῶν ἐξ ὅλο- (Α) 144 (Β) $\frac{12}{1}$
 κλήρων καὶ δεκαδικῶν συγ- (Γ) 1. 2
 καμέναν, τὸν μίζονα Α διὰ τῷ ἐλάσσονος Β
 διελκύν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Γεγραφθῶσαν οἱ διαιρεθῆσόμενοι Α καὶ Β, ὡς ἐγρά-
 φησαν ἂν, εἰ μόνον ὁλοκλήρων δηλωτικῶς περιῖχον
 χαρακτήρας. καὶ γενομένων τῶν ἐν τῷ δ΄. προβλήματι
 τῷ α΄. βιβλίῳ ἐπιταχθέντων, ἀπὸ τῶν χαρακτήρων
 τῷ Πηλίκῳ Γ σσημειώθῶσαν δεξιόθεν τοσῶτοι χαρακ-
 τήρες ὑπὲρ τῶν δεκαδικῶν, ὅσοι τὴν Διαφορὰν ἐμφαί-
 νουσι τῶν δεκαδικῶν χαρακτήρων τῷ τε Διαρετῷ Α καὶ
 τῷ Διαρίτῳ Β. οἷον, ἐπὶ δύο χαρακτήρες τῶν δεκα-
 δικῶν δηλωτικοὶ ἐν τῷ Διαρετῷ Α, καὶ εἰς ἐν τῷ Β,
 καὶ ἡ Διαφορὰ εἰς, ἐν τῷ Πηλίκῳ Γ εἰς ὑπὲρ τῶν δε-
 καδικῶν σσημειώθω. καὶ ἔσται τὸ ὕτως ἐτιγμένον Πη-
 λίκον Γ, τὸ ζητούμενον.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐάν γάρ τὸν Α καὶ Β ὡς (Α) $\frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000}$: (Β) $\frac{1}{10} + \frac{2}{100}$
 ὥδε πρόκειται γράψας,
 ὡς ἐν τῷ ε΄ καὶ ζ΄ προβλήματι ἔρηται διέλγε, τὸ προῖον
 Πηλίκον ἴσον τῷ Γ ἔσται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὰ ἐν τῷ Ι καὶ ΙΑ΄ προβλήματι πραττέμενα τὴν ἐυ-
 χέριαν σκοπῶσι καὶ συντομίαν. καὶ γὰρ λίαν ἐπίμοχθον τὰς
 ὁλοκλήρας καὶ δεκαδικὰ περιέχοντας ἀριθμοὺς, ὡς ἐν ταῖς
 δειξέσι τῶν προβλημάτων ἔρηται γράφειν, εἰδ' ὅτε
 πολλαπλασιάζον, ἢ διαρεῖν.

ΒΙΒΛΙΟΥ Γ'

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Ἐξ Ἀριθμοῦ τινὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος ὁ γινόμενος, **Τετράγωνος** λέγεται· ὁ δὲ ληφθεὶς ἀριθμὸς, **Πλευρὰ**, ἢ **Ῥίζα τετραγωνική**. οἷον τῷ 5 τετράγωνος ὁ 25· τῷ δὲ 25 ῥίζα τετραγωνική ὁ 5. ὡσαύτως τῷ 36 τετράγωνος ὁ 1296· τῷ δὲ 1296 ῥίζα τετραγωνική ὁ 36, καὶ τῷ $\frac{8}{9}$ τετράγωνος ὁ $\frac{64}{81}$ · τῷ δὲ $\frac{64}{81}$ τετραγωνική ῥίζα ὁ $\frac{8}{9}$.

Β'. Ἐκ Τετραγώνου ἐπὶ τῆς ἑαυτοῦ ῥίζης πολλαπλασιασθέντος ὁ γινόμενος, **Κύβος** καλεῖται τῷ ἀπ' ἀρχῆς ληφθέντος· ὁ δ' ἀπ' ἀρχῆς ληφθεὶς, **Κυβική ῥίζα**. οἷον τῷ 5 Κύβος ὁ 125· τῷ δὲ 125 κυβική ῥίζα ὁ 5· ὁμοίως τῷ 36 Κύβος ὁ 46656· τῷ δὲ 46656 κυβική ῥίζα ὁ 36. καὶ τῷ $\frac{8}{9}$ Κύβος ὁ $\frac{512}{729}$ · τῷ δὲ $\frac{512}{729}$ κυβική ῥίζα ὁ $\frac{8}{9}$.

Γ'. Ἐκ Κύβου ἐπὶ τῆς ἑαυτοῦ ῥίζης πολλαπλασιασθέντος ὁ γινόμενος, **τετάρτη Δύναμις** λέγεται τῷ ἀπ' ἀρχῆς ληφθέντος, εἴτεν τῆς ῥίζης· αὕτη δὲ **τετάρτης Δυνάμεως ῥίζα**· γενικῶς δὲ **Δυνάμεις** καλεῖνται τὰ ἐξ ἴσων ἀριθμῶν γινόμενα. Δευτέρα μὲν δύναμις, εἰ δις ὁ παράγων ληφθεῖν· Τρίτη δὲ, εἰ τρίς· Τετάρτη δὲ, εἰ τετράκις, καὶ ὕτως ἐφεξῆς. οἷον τῷ ἀριθμῷ 2 δευτέρα μὲν δύναμις ἐστὶ 2, 2 ἢ 4· τρίτη, 2, 2, 2, εἴτεν 8· τετάρτη, 2, 2, 2, 2 ἢ 16.

εἰς 16· πέμπτη, 2. 2. 2. 2. 2, ὃ ἐστὶ 32, καὶ ἔτι εἰς 64. αὐτὸς δὲ ὁ 2 πρὸς μὲν τὴν δευτέραν τῶν δυνάμεων ἀναφερόμενος, ρίζα δευτέρα λέγεται, πρὸς δὲ τὴν τρίτην, τρίτη, καὶ ἔτι εἰς 128.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Τὸν ἐκ τετραγώνου ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόντος γινόμενον, οἷον τὸν 16, τὸν ἐκ τῆς 4. 4 οἱ πάλαι (Διδόσκοντες ἐν τῷ 1. καὶ 2. ὅρισμ. τῆς 1. βιβλ.) Δυναμόδυναμιν ἐκάλεον καὶ γὰρ καὶ ὁ τετράγωνος Δύναμις παρ' αὐτῶν ἐλέγετο· τὸν δὲ ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς κύβον πολλαπλασιαζόντος, οἷον τὸν 32, τὸν ἐκ τῆς 4. 8, Δυναμόκυβον· τὸν δὲ ἐκ Κύβου ἑαυτὸν πολλαπλασιάζοντος, Κυβόκυβον· τὸν δὲ μηδὲν τῶν ιδιωμάτων τέτων κτησάμενον, ἔχοντα δὲ ἐν αὐτῷ πλῆθος μονάδων, ἀριθμὸν Ἄλογον.

ΣΤΗΝΕΪΑ. Α'.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δὴλον, ὅτι παντὶς δοθέντος ἀριθμοῦ τὸν τέττε τετράγωνον, ἢ τὸν κύβον, ἢ τὴν τετάρτην Δύναμιν, καὶ τὰς εἰς αὐτὸν Δυνάμεις εὐρεῖν πάνυ ῥᾶδion· ἔχ' ἔτι δ' εὐχερὲς καὶ ἡ ἀπὸ τῶν Δυνάμεων ἐπὶ τὰς ρίζας ἐπάνοδος. διὸ καὶ ἐπόμενα περὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τῆς τετραγώνου ρίζης σημειωτέον.

Α'. Ὁ ἐκ τῆς μεγίστης τῶν μοναδικῶν χαρακτῆρος τετράγωνος ἐκ δύο μόνον σύγκειται χαρακτῆρων. οἷον ὁ ἐκ τῆς 9, ἔκτε τῆς 3 καὶ 1. ἔστι γὰρ ὁ 81.

Β'. Τὸν ὅποιον δόθέντα ἀριθμὸν εἰς δύο ἀναλύειν ἔστι, καὶ δυσὶν ἴσον ὑπολαμβάνειν. οἷον τὸν $34 = 30 + 4$, ὡσαύτως τὸν $235 = 230 + 5$, καὶ τὸν $355 = 300 + 55$.

Γ'. Ἐπειδὴ τὸ ἀπὸ τῆς αὐτῆς ἔτυχε τμηθείσης ὅλης ευθείας τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ἐκατέρων τῶν μερῶν τετραγώνοις σὺν τῷ δις ὑπὸ τῶν αὐτῶν μερῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ (κατὰ τὴν δ. πρότ. τῆ β. βιβλ. τῆς Γ' αὐτῆς.) τέμνεται δὲ εἰς δύο ὡς ἔτυχε καὶ πᾶς δοθεὶς ἀριθμὸς (κατὰ τὴν προλαβ. σημείωσ.) καὶ παντὸς ἄρα ἀριθμοῦ ὁ τετραγώνος ἴσος τοῖς ἐξ ἐκατέρων τῶν μερῶν αὐτῆς τετραγώνοις σὺν τῷ δις ὑπὸ τῶν αὐτῶν μερῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

ΣΧ. 2.

Ἐστω ἡ μὲν $AB = \Gamma$, ἡ δὲ $AG = \alpha$, $A \quad \Gamma \quad B$
 ἡ δὲ $GB = \beta$. ἄρα $\Gamma = \alpha + \beta$.

ἔάν ἄρα τό, ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθῇ, ὡσαύτως καὶ τὸ $\alpha + \beta$, ἔσται $\Gamma^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2$, ἥτοι $\Gamma^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. ἔστω τὸ μὲν $\Gamma = 37$, τὸ δὲ $\alpha = 30$, τὸ δὲ $\beta = 7$. ἄρα $\alpha + \beta = 30 + 7$. ἄρα $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 7 + 7^2 = 900 + 420 + 49 = 1369$. Ἀριθμὸς ἄρα παντὸς εἰς δύο ὡς ἔτυχε διαιρεθέντος, καὶ τῶν τετραγώνων αὐτῶν συσάντος, ὁ μὲν ἐν τῷ πρώτῳ δεξιῷ τόπῳ καίμενος χαρακτὴρ, οἷον ὁ 9, τῶν τετραγώνων ἐστὶ τῶν ἐτέρων τῶν τῆς εἰζης αὐτῶν μερῶν τῶν ἐν τοῖς δεξιοῖς καίμενος, οἷον τῶν 7. ὁ δὲ ἐγγύς δεύτερος, ἥτοι ὁ 0, τῶν δις ὀρθογωνίων τῶν ἐξ ἐκατέρων τῶν αὐτῶν μερῶν γινομένων, ἦγεν τῶν 30 καὶ τῶν 7, περιέχει χαρακτῆρας ἐν δὲ τῷ ἐγγύς τρίτῳ, ἢ καὶ τετάρτῳ, εἰς παρῇ, ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων παραδείγματος, οἱ τῶν τετραγώνων χαρακτῆρες τῶν ἐτέρων τῆς εἰζης μέρος, τῶν τῶν 30.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐάν τῶν δοθέντων ἀριθμῶν Γ τῆς χαρακτῆ- (Τ) 1369
 ρας εἰζης ἀπὸ τῶν πρώτων δεξιόθεν ἀρξάμε-

τες, καὶ τὸν ἐγγὺς τῷ σιχθέντος ἄσικτον καταλιπὼν,
τὸν δὲ ἑξῆς τρίτον πάλιν σίξας, ἢ αὖ τὸν πέμπτον, ἴαν
ῆ, ἢ ἔως ἑφεξῆς πεῖς, ἕνα μὲν ἴξον, ἕνα δ' ἄσικτον κα-
καλιμπάνων, τοσῶτοι ἔσονται οἱ μοναδικοὶ χαρακτῆρες
αἱ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῷ δεθέντος ἐμφαίνοντες,
ἔσα τὰ ἐγχαραχθέντα σύγματα-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Τῷ δεθέντος τετρα-	(T)	55225	(P)	235
γάνθ ἀριθμῷ Γ τὴν		4	Α	
τετραγωνικὴν ἑξα-	4)	15		
γαγῖν ῥίζαν.		529 . . .	Β	
	46)	232		
		55225 . .	Γ	
		0.000		

ΠΡΑΚΤΕΑ

1. Στίξον τὸν δεθέντα Τ, ὡς ἐν τῷ περίσματι εἰρη-
ται. καὶ τὸν μέγιστον τῶν τετραγώνων, τὸν ὑπὸ τῷ
πρώτῳ ἐν τοῖς ἀριστεροῖς χαρακτῆρος, (ἢ τῶν δύο
πρώτων, ἴαν δύο ᾴσι) εἶπεν τῷ 5, περιεχόμενον,
τετέσι τὸν 4 λαβὼν, τῷτον μὲν ἀπὸ τῷ 5 (ἢ ἀπὸ
τῶν δύο χαρακτῆρων, ἴαν ᾴσιν.) ἀφέλε, τὴν δὲ
ῥίζαν αὐτῇ 2 ὁμότιχον τῷ Ρ γράψον, πρῶτον ἔσαν
τῆς ζητεμένης τῷ Τ ῥίζης χαρακτῆρα.
2. Ὑπὸ τὸν 4 εὐθεῖαν ἀγαγὼν, τὸ ἀπὸ τῆς ἀφαι-
ρίσεως λοιπὸν, εἶπεν τὸ 1, ὑπὸ τὴν γραμμὴν γράψον,
καὶ τὸν ἐγγὺς τῷ 5 ἄσικτον χαρακτῆρα, εἶπεν τὸν
5 καταγαγὼν, τὸ συμπληρούμενον 15 διὰ τῷ δι-
πλασίῃ τῷ εὐρεθέντος τῆς ῥίζης χαρακτῆρος, εἶπεν
διὰ τῷ 4 διέλε. καὶ ἔσαι τὸ προῖον πηλίκον 3 ὁ
δεύτερος τῆς ζητεμένης ῥίζης χαρακτήρ.

3. Τὸν ἐκ τῶν εὐρεθόντων χαρακτηριστῶν 23 τετραγώνων, τῷ 529 ἀπὸ τῶν τῷ δοθέντος Τ χαρακτηριστῶν, ἦτοι τῶν 552 ἀφελῶν, ἢ τὸν ἐγγὺς 2 καταγαγὼν, τὸν προκύψαντα 232 διὰ τῆ διπλασίως τῷ εὐρεθόντος 23 διέλε. ἢ ἔσχι τὸ πηλίκον 5 ὁ τῆς ζητεμένης ρίζης τρίτος χαρακτηριστῆρ.
4. Τὸν ἐκ τῶν εὐρεθόντων 235 χαρακτηριστῶν τετραγώνων, ἦτοι τὸν 5525 ἀπὸ τῷ δοθέντος Τ ἀφελῶν. (ἐὰν ἔτι πλείους αἱ τῷ δοθέντος εὐρισθῇ τετραγῶναι ὡς χαρακτηριστῆρες, αἱ ἐν τῷ 2 ἢ 3. ἀριθ. εἰρηται ποία ἕως ἐ πάντας τῆς τῆς ρίζης ἑσθῆς χαρακτηριστῆρας.) Φημὶ δὲ τὸν ἕταυ εὐρεθόντα ἀριθμὸν Ρ τὴν ζητεμένην εἶναι τετραγωνικὴν ρίζαν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ δὲ γὰρ τῷ Ρ τετραγῶναι, εἶπεν τῷ Γ, ἀπὸ τῷ δοθέντος τετραγῶναι Τ ἀφαιρεθόντος, τὸ λοιπὸν ἔσθῃ εἶναι ἴσος ἄρα ὁ Γ τῷ Τ. ἀλλ' ἢ τῷ Γ τετραγωνικὴ ρίζα ὁ Ρ. ἄρα ὁ Ρ εἶναι ἢ τῷ Τ ζητεμένη τετραγωνικὴ ρίζα.

Α Λ Λ Ω Σ

Μετὰ τὸ διελθὲν διὰ τῷ (Τ) 55225 (Ρ) 235

4	----- Α
4)	152
12	 Β
9	... Γ
2325	
46)	230... Δ
25	... Ε
0000	

4 τῷ διπλασίως τῷ πρώτῳ τῆς ρίζης χαρακτηριστῆρος, ἦτοι τῷ 2, τὸν 15, ἢ καταγαγὼν τὸν 2, τὸν ἐκ τῷ Τ τετραγῶναι, τὸ γινόμενον ἐκ τῷ πηλίκῳ 3 καὶ τῷ διαιρέτῳ 46) 230... Δ 4, ἦτοι τὸν 12 σὺν τῷ ἐκ τῷ αὐτῷ Πηλίκῳ τετραγῶναι, τῷ 9 γράψας ὡς τὰ ἐν τῷ Β καὶ Γ ἐσθῆται, τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν ἀπὸ τῷ 152 ἀφελῶν. Πάλιν τὸν ἐγγὺς χαρακτηριστῆρα 2 τῷ

τετράγωνον Γ καταγαγών, ἢ τῷ λοιπῷ 23 προσγράψας, ὥστε γενέσθαι τὸν 232, διέλεα αὐτὸν διὰ τῆ διπλασίης τῶν τῆς ρίζης χαρακτῆρων, τετέστι διὰ τῆ 46. καὶ τὸν ἐγγὺς τῆ τετραγώνου Γ χαρακτῆρα 5 καταγαγών, τὸ ἐν τῇ Πηλίκῃ 5 ἢ τῇ Διαίρετι 46 γινόμενον σὺν τῇ τῇ αὐτῇ Πηλίκῃ 5 τετραγώνῳ, ἦτοι τῷ 25, ὡς τὰ ἐν τῷ Δ ἢ E ἐρᾶται, γράψας, ἀπὸ τῆ 2325 ἄφαιρε. εἰάν δὲ καὶ ἄλλοι ἐν τῷ δοθέντι τετραγώνῳ ὥσι χαρακτῆρες, τὰ αὐτὰ ποιεῖ ἕως ἔ πάντας τὰς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἑυρεῖς χαρακτῆρας.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

Ἰστέον, ὅτι τὸ διὰ τῶν ἐν τῷ 2. ἀριθμῷ εἰρημένων εὐρισκόμενον Πηλίκον μᾶζόν ἐστιν ἐνίστε τῇ τῆς ζητημένης ρίζης χαρακτῆρος. ὃ δὴ δῆλον γίνεται ἐκ τῆ μὴ ἀφαιρέσασθαι τὸν ἐξ αὐτῆ τε καὶ τῶν ἄλλων τῆς ρίζης χαρακτῆρων γινόμενον τετράγωνον ἀριθμὸν ἀπὸ τῆ τετραγώνου, ἔτινος ζητᾶται ἡ ρίζα. τότε δὲ τοσάκις ἀπὸ τῆ διαληφθέντος Πηλίκου τὴν μονάδα ἀφαιρετέον, ὡσάκις ἂν ἀπαιτῇ ὁ λόγος, εἴτεν ἕως ἔ ὁ ἐξ αὐτῆ τε καὶ τῶν ἄλλων τῆς ρίζης χαρακτῆρων γινόμενος τετράγωνος, ἀπὸ τῆ τετραγώνου ἀφαιρεθῇ, ἔτινος ζητᾶται ἡ ρίζα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

Τῷ δοθέντος κλάσματις ἀριθμῷ τετραγώνου A τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν εὐρεῖν. δεῖ δὴ δὲ τὸν τε ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρωνομητὴν τῷ κλάσματος τετραγώνου (A) $\frac{144}{576}$ (B) $\frac{12}{24}$ εἶναι.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἐυρεθήτω κατὰ τὸ α'. πρέβλ. ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῷ ἀριθμῷ, ἣτις εἰν ὁ 12· ὁσαύτως καὶ ἡ τῷ παρωνομασῷ, ἣτις εἰν ὁ 24. ἔσεται ἔν τὸ κλάσμα Β ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῷ Α.

ΛΕΙΞΙΣ.

Τῷ Β δι' ἑαυτῷ πολλαπλασιασθέντος, τὸ Α προκύπτει. τὸ Β ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἐστὶ τῷ Α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Δ τῷ Γ, καὶ τὸ Ζ τῷ Ε.

(Γ)	15129	(Δ)	123
	44100		210
(Ε)	36	(Ζ)	6
	81		9

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Τῷ δοθέντος τετραγώνου Τ, τῷ ἐξ ὁλοκλήρων καὶ δεκαδικῶν συγκαμένου, τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν εὑρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ζίξον τὸν δοθέντα (Τ) 149.5669 (Ρ) 12.33
Κατὰ τὸ α' πρέβλ.

ὥστερ ἂν εἰ ἐξ ὁλοκλήρων μόνον ἦν συγκαίμενος. καὶ τὴν τέττε τετραγωνικὴν ρίζαν, τὴν ἐν τῷ Ρ εὑρών, διὰ τῶν ἐν τῷ α' πρέβλῃ. εἰρημένων, τοσούτους χαρακτῆρας ἐξ αὐτῆς διαχώρισον ὑπὲρ τῶν ἐν τῷ τετραγώνῳ ὁλοκλήρων, ὅσαι αἱ ἐπ' αὐτῶν σιγμαί. ὅσαι γὰρ αἱ σιγμαί, τοσούτοι καὶ οἱ τῆς ρίζης χαρακτῆρες. (κατὰ τὸ προλ. πείρισ. τῷ δε τῷ βιβλ.) ἐπεὶ ἔν δύο εἰσὶν αὐταὶ ἐπὶ τῶν ἐν τῷ τετραγώνῳ Τ ὁλοκλήρων, δύο ἔσονται ἐν τῇ ρίζῃ Ρ οἱ ὁλόκληροι χαρακτῆρες, οἱ δὲ λοιποὶ δεκαδικοί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Τῷ δοθέντος τετραγώνου ἀριθμοῦ Τ, τῷ ἐκ δεκαδικῶν μόνον συγκαμένου χαρακτῆρων, τὴν τετραγωνικὴν εὑρεῖν ρίζαν.

ΠΡΑ.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ὅσα ἀν' ἐποίεις, χαρα- (Τ) 0. 17424 (Ρ) 0. 132
κτῆρων μόνων ὄντων ἀριθ-
μῶν ὁλοκλήρων, τὰ αὐτὰ πράξον ἅπαντα. ἔξεις δὲ τὴν
Ρ ρίζαν τῆς Τ δεκαδικῆς μόνον ἐμφαίνεσαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

Τῆς δοθέντος ἀριθμοῦ Τ, τῆς μὴ τετραγώνου,
τὴν ὡς ἐγγίσα τετραγωνικὴν ρίζαν εὐρεῖν
ἔστιν ἀριθμὸν εὐρεῖν, ὅς δι' ἑαυτῆς πολλα-
πλασιασθεὶς ποιήσῃ τινὰ ὅτι ἐγγίσα τῷ δο-
θέντι Τ ἴσον.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

1. Εὐρεθήτω ἡ	(Τ) 129. 00,00,00	(Ρ) 11.357
τῆς Τ τετραγω-	1 Α	
νικῆς ρίζας ὡς τρέ-	2) 2	
πω εὐρίσκειτ'	121 Β	
ἀν, ἅπερ ὁ Τ	22) 8. 0	
τετραγώνος ἦν.	12769 Γ	
ἵσαίδη ἐν ἡ ἐγγ-	226) 1.310	
γιον ὁ ἐν τῷ Ρ	1288225 . . Δ	
ἀριθμὸς 11. 2270)	0. 17750	
	128881449 . . Ε	
2. Προσκειῖθω-	0. 118551	
σαν ὁμόσηχοι		

τῷ Τ δύο μηδενικοὶ χαρακτῆρες ἐν τῷ τῶν δεκαδικῶν
κλασματῶν τόπῳ. καὶ ὡς ἐνὸς τετραγώνου τῆς 129. 00
λογισθέντος, καὶ τῆς αὐτῆς πράξεως διαπερανθείσης,
τὸν

τὸν προκύπτοντα τῇ ῥίζῃ χαρακτῆρα 3 ἐν τῷ δεκάδικῳ χώρῳ ὁμότιχον τοῖς ἐν τῷ Γ τάξιν.

3. Πάλιν δύο μηδενικῶν χαρακτῆρων τῷ Γ ὁμοίως περιδίντων, καὶ αὐτῶν, καὶ ἰφρξῆς ἕτως, ἵφ' ὅσῳ ἂν βέλη, τὰ αὐτὰ πέραινε.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ Β'.

Ὅσῳ ἂν πλείονα τῷ δεδέντι ἀριθμῷ προθῇς μηδενικά σημεῖα, τὴν αὐτὴν ἐπαναλαμβανῶν προῖξιν, τοσούτω ἀκριβετέραν ἐνρήσεις τὴν ῥίζαν. ὁ μὲν γὰρ ἀπὸ τῆς 11 τετραγώνου, εἶπεν ὁ Β διήσῃ τῇ 129 μονάδι 8. ὁ δὲ ἀπὸ τῆς 11. 3, ἦτοι ὁ Γ, μόνον μίαν μονάδα 3 δεκατημόρια καὶ 1 ἑκατοτημόριον· αὐτὸ δὲ ἀπὸ τῆς 11. 35, εἶπεν ὁ Δ, μονάδι μὲν ἑδμήαν, ἐν δὲ δεκατημόριον, 7 χιλιοσημόρια, καὶ 5 δεκατοχιλιοσημόρια· ὁ δὲ ἀπὸ τῆς 11. 357, ἦγαν ὁ Ε, ἐν δεκατημόριον, 7 ἑκατοτημόριον, καὶ ἰφρξῆς τὰ ὑπὸ τὸν Ε δεκαδικά.

ΣΧΟΛΙΟΝ

Τῇ δεδέντος ἀριθμῷ μὴ ὄντος τετραγώνῃ, ἀμήχανον τὴν ἐπ' ἀκριβὲς τετραγωνικὴν ῥίζαν προσνυρεῖν. ὁ γὰρ μὴ ὢν τετραγώνος, ἐκ ἑστὶ γινόμενον ἔξ ἀριθμῷ δι' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος. ἔκ αὖν ἐνρῆθῃ ἀρχὴ ἀριθμὸν, ὅς δι' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῶν τὸν μὴ τετραγώνον ποιῇσι. ὁ γὰρ δι' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος τετραγώνον ποιεῖ. καὶ τὰ τὸν α. ὄρισμ. τῆδε τῇ βιβλ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ καὶ τε κεκλασμένοις ἢ ὁ μὴ ὢν τετραγώνος, καὶ τε ἔξ ὀλοκληρῶν καὶ δεκαδικῶν, καὶ ἐκ δεκαδικῶν μόνων συγκείμενος, ἢ τέτῃ πλησιεστάτῃ ἐνρίσκειται τετραγωνικὴ ῥίζα.

Περὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης.

Ω Ε Ω Ρ Η Μ Λ.

Παντός ἀριθμοῦ τῷ ἐν δύο μερῶν συγκειμένῳ ὁ κύβος περιέχει τὸν τῷ πρώτῳ μέρος κύβον, τὸ τριπλάσιον τῷ γνωμένῳ ἐκ τε τῷ δευτέρῳ μέρος καὶ τῷ τετραγώνῳ τῷ πρώτῳ, τὸ τριπλάσιον τῷ γνωμένῳ ἐκ τε τῷ πρώτῳ μέρος καὶ τῷ τετραγώνῳ τῷ δευτέρῳ, καὶ τὸν κύβον τῷ δευτέρῳ μέρος.

Λ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Τὸν τὸ τετράγωνον τὸ ἐκ τῷ $\alpha | \beta$, εἴτην $\alpha^2 | 2\alpha\beta | \beta^2$ διὰ τῆς ἐκείνῃ ῥίξης $\alpha | \beta$ πελ- (Α) $\alpha^2 | 2\alpha\beta | \beta^2$ λισπασιάσθην, ὡς ἐν τοῦ Α καὶ (Β) $\alpha | \beta$ β εἰσέται, περικόψει ὁ Γ κύβος, πάντα περιέχων τὰ εἰρημένα.

$$\begin{array}{r} \alpha^2 | 2\alpha\beta | \beta^2 \\ | \alpha^2\beta | 2\alpha\beta^2 | \beta^3 \end{array}$$

$$(Γ) \alpha^3 | 3\alpha^2\beta | 3\alpha\beta^2 | \beta^3$$

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐστω $\alpha = 30$, καὶ $\beta = 7$. ἄρα $\alpha + \beta = 30 + 7$, καὶ $\alpha^2 = 27000$, καὶ $3\alpha^2\beta = 18900$, καὶ $3\alpha\beta^2 = 4410$, καὶ $\beta^3 = 343$. ἄρα $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = 27000 + 18900 + 4410 + 343 = 50653$. ὁ κύβος ἄρα τῷ $30 + 7$, εἴτην τῷ 37 ἴσος 50653. ὃ δὴ ἐκλήσκει, καὶ τὸν ἐκ τῷ 37 κύβον ἄλλων συνθίμηναι, τετάρτῃ τὸ εἶς αὐτῇ τῷ 37 τετράγωνον 1369 δι' αὐτῇ τῷ 37 πολλαπλασιάσκει.

Σ Η Μ Ε Ι Ψ Ε Ι Σ.

Α'. Τῶν τῷ κύβῳ μερῶν, τῷ ἐκ τῷ ἀριθμοῦ 30 | 7 συντεταμένη, ὡς ἐν τῷ Α ταχθέντων, καὶ τῷ ἀθροίσματος γνωμένη, ὡς ἐν τῷ Β, εἰ μὴν χαρακτηῖται τῷ

$$\begin{array}{r} (Α) \quad 27000 = \alpha^3 \\ 18900 = 3\alpha^2\beta \\ 4410 = 3\alpha\beta^2 \\ 343 = \beta^3 \\ \hline (Β) \quad 50653 \end{array}$$

τὴν πρώτην μέτρην ἐν τοῖς πρώτοις τοῖς ἐν τοῖς ἁγίοις
 τῶν ἀποστόλων, ἔστιν ἡ κύβητος β, κινεῖται. οἱ δὲ τὴν
 κύβητον τὴν δευτέραν μέτρην, ἐν τοῖς πρώτοις τοῖς δευτέροις
 τοῖς ἀποστόλοις ἐκινήσαντες, ἐν τοῖς μεταγενέτεροις
 β. ὁ ἐκ τῆς πρώτης τῶν μοναδικῶν χαρτακτῆρων κύβητος
 729, ὁ ἐκ τῆς 9, ἐκ τῶν χαρτακτῆρων συγκεκταται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Τὰν ἀγῶν ὁποῖον κύβητος ἀγίτης τῆς χαρτακτῆρας
 ἀνὰ τοὺς διόλους, ἀπὸ τῆς πρώτης τῆς ἐν τοῖς δευτέροις
 τοῖς ἀποστόλοις, τοσοῦτοι εἰσὶν οἱ μοναδικοὶ χαρα-
 κτήρες, ἐξ ὧν ἡ κύβητος τῆς ἐκινήσεως ἀγίτης συ-
 κινεῖται, ὅσα καὶ τυπωθεῖσαι εἰσὶν καὶ τῆς β, δμ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.

Τὴν δευτέραν κύβητον (K) 1953125 (P) 125
 A . . . 1
 (E) 3 09 . . . Δ
 B . . . 1728
 (H) 432 2251 . . Z
 Γ . . . 1953125
 0000000

ΠΡΑΚΤΕΑ.

1. Τὴν δευτέραν ἀγίτην K, ὡς ἐν τῶν πορίσματι ἐκ-
 ταί εἶπον. καὶ εὐρών τὴν μετὰ τὴν κύβητον τὸν πορί-
 σματι καὶ τῶν τριῶν, ἡ δμ, ἡ εὐς, ὡς ἐν τῶν
 δευτέρις K, χαρτακτῆρων τῶν ὑπὸ τῆς ἐκνήσεως ἐκ-
 κινήσεως ἐν τοῖς ἁγίοις ἀγίτων, τῆς μετὰ τὴν
 δευτέρας, ἀντιτίχον τῶν ἁγίων δὲ τὴν κύβητον, ἔστιν ὁ
 1, ὑπὸ τῆς ἐκνήσεως χαρτακτῆρας γράφων. ὁ δὲ
 καὶ αὐτῶν ἀφῶν, συνεπικινεῖται γράφων τῇ ἐκνήσε-
 σι ἀφῶν διαφωρᾶ, ἐστὶς δὲ τῆς ἐκνήσεως ἀφῶν.

τῷ προκειμένῳ ὑποδείγματι ἐδεμία.) τὸν ἐγγὺς τῆς εἰρημένης πρώτης σιγμῆς ἀριθμὸν, τὰτέτι τὸν 9.

2. Ἰστέον τὸν 9 ἀριθμὸν διελθεὶ διὰ τῆς τριπλασίως τῆς τετραγώνως τῆς ἐκ τῆς πρώτης μέρους τῆς ἤδη εὐρεθείσης ῥίξης, ἦτοι διὰ τῆς 1, καὶ τὸ Πηλίκον 3 ὡς δεύτερον ἀναλογίζετο τῆς ῥίξης μέρους.

3. Ἰεν ἀπὸ τῆς 13 κύβον, ἀμέλει τὸν 2197 ἄφελε ἀπὸ τῶν τῆς K χαρακτηριστῶν, ἦτοι τῶν 1953. καὶ ἐπεὶ ὁ 2197 μείζων τῆς 1953, ὁρῶν ὅτι τὸ ἐναποτεθεὶν τῆς ῥίξης δεύτερον μέρος μείζων τῆς δευτέρας ἐστίν. ὁ δὲ καὶ ἐν τῇ τῆς τετραγωνικῆς ῥίξης εὐρέσει συμβαίνειν σημειώται. ἀφαιρετέον ἄρα ἀπὸ τῆς διαληφθέντος δευτέρου μέρους τὴν μονάδα τοσάκις, ὅσάκις ἀνδρα, ἔπεν ἕως ἀνὸν προκύπτων κύβος ἐλάττωσιν ἢ τῶν εἰρημένων τῆς K χαρακτηριστῶν. τῆς 2 ἐν αὐτῇ τῆς 3 ἐν τῷ P τεθέντος, καὶ τῆς ἐκ τῆς 12 κύβου 1728, ἀφ' ὧν ἄρρηται ἀφαιρεθέντος χαρακτηριστῶν, τῷ λοιπῷ 225 συνεπικαταγραφήτω τὸ 1, τὸ ἐγγὺς τῆς προτέρας σιγμῆς. πάλιν τὸν προκύψαντα 2251 διὰ τῆς τριπλασίως τῆς ἐκ τῆς 12 τετραγώνως 144, τὰτέτι τῆς 432 διελών, καὶ τὸ Πηλίκον 5 ἀντὶ τρίτου ἐναποθέμενος τῆς ῥίξης μέρους, τὸν ἐκ τῆς 125 κύβον 1953125 ἀπὸ τῆς δοθέντος K ὁμοίως ἄφελε. τὰ αὐτὰ δὲ ποιεῖ ἕως ἔτι πάντα τὰ τῆς ζητεμένης ῥίξης εὐρους μέρη. ὁ ἔτω δὲ προκύψας ἀριθμὸς P ἐστίν ἡ ζητεμένη ῥίζα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκ τῆς P κύβος ἴσος τῷ δοθέντι ἀριθμῷ K, ὁρῶν ἄρα ὅτι ὁ P ἡ κυβική ἐστὶ τῆς K ῥίζα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐκάστης τῶν εἰρημένων πράξεων ὁ λόγος ἐκ τῶν πρὸ αὐτῶν σημειώσεων δηλός. διαχωρίζονται γὰρ ἀνὰ τρεῖς

οἱ χαρακτηριστῆρες διὰ τὸ ἐκ τριῶν συγκοῦσθαι τὸν κύβον τὸν ἐκ τῆ μονάδος μοναδικῆς χαρακτηριστος, ὡς ἐν τῇ Β' ἐξηγήσῃ σημαίεται. ζητοῦται δ' ὁ μέγιστος κύβος ἐν ταῖς πρώταις χαρακτηρισταῖς τοῖς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς καρίαις, διὰ τὸ ἐν αὐτοῖς κοῦσθαι τὸν κύβον τὸν ἐκ τῆ πρώτης τῆς ρίζης μέρος, κατὰ τὴν Α' σημαίαν. ἢ ἐπεὶ ὅμως τὸ κύβος τέττε τὸ ἰσχυρόν ἐστιν ἐκ τῆ τριπλασίως τῆ τετραπλάσιως τῆ πρώτης τῆς ρίζης μέρος καὶ τῆ δευτέρας, οὐκ τέτοιο διακρινόμενος αὐτῇ τῇ ἰσχυρῇ διὰ τῆ τριπλασίως τῆ τετραπλάσιως τῆ ἰσχυρῆς πρώτης τῆς ρίζης μέρος, τὸ περὶ ἵκτον Πηλίκον τὸ ἔτερον τῆς ρίζης μέρος. ἐπὶ πολλοκλασμάζεται δὲ ἡ αὐτὴ πράξις, τῇ ἡδὴ ἰσχυρῇ τῆς ρίζης μερῶν ἀπάντων, ἀνδ' ἵκτον, τῆ πρώτης, ἐκλαμβάνομένων, καὶ τῆ δευτέρας πάλιν ἐκλαμβάνει. οἷον ἐπὶ τῇ 125, ἰσχυρῇ τῶν δύο τῆς ρίζης μερῶν, ἵκτον τῶν 12, καὶ ἀνδ' ἵκτον ἐκλαμβάνομένων, τῆ πρώτης, ζητοῦται τὸ δεύτερον, τὸ 5. καὶ γὰρ τὸ 125 (ὡσαύτως καὶ ἄλλος ὁποῖοσθ' ἀριθμός.) ὡς δύο ἀναλύεται, τέττεσις εἰς τὸν 120 καὶ εἰς τὸν 5.

Τὸ αὐτὸ ἄλλως.

Γενομένων τῶν	(K) 1953125	(P) 125
ἐν ταῖς προδιαλη-	1	Λ
φθεῖσαι πράξιν.	<u>0953</u>	
σι, πρώτης καὶ 1, 3. 2.	6	Β
δευτέρας, συνεπι-	1. 2. 4 12 . . , . .	Γ
καταγραφῆται.	2. 2. 2 8 . . , . .	Δ
σαν τῶ 9 αἱ ἑξῆς	<u>225125</u>	
δύο χαρακτηριστῆρες,	3, 144. 5 2160	Ε
οἱ ὑπὸ τῆς δευτέ-	3. 12. 25 900 . . .	Ζ
ρας συγμῆς ὀρισ-	5. 5. 5 125 . .	Η
θετες, εἴτεν 53.	<u>000000</u>	
καὶ τὸ Γινόμενον		ΙΗ

ριθμητὴν καὶ τὸν παρωνομαστὴν τῷ κλάσμα-
τος ἀριθμὸς ἀναγκύβας.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

(K) 2197 (P) 13

12167 23

Τῆς κυβικῆς τῷ ἀριθμητῷ ρίζης διὰ τῆς ἐν τῷ 5
πρεβλήματι μεθόδου εὐρεθίτης, ὡσαύτως καὶ τῆς τῷ
παρωνομαστῷ, συνετάτω ἐξ αὐτῶν κλάσμα τὸ P. τῆτι
δὴ εἶσαι ἡ ζητεμένη τῷ K κυβικῇ ρίζα.

ΛΕΙΞΙΣ.

Τῷ K τῷ P τετραγώνου διὰ τῷ P πολλαπλασιασ-
τος, ὁ K περὶκύβει. ὁ P ἄρα ἡ κυβικὴ εἶσαι τῷ K ρίζα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ II'.

Τῷ δοθέντος κύβου K, τῷ ἐξ ὀλοκληρῶν καὶ
δεκαδικῶν συγκειμένου, τὴν κυβικὴν ἐξαγα-
γαῖν ἐξῆσαν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Εὐρεθήτω ἡ τῷ K ρίζα (K) i. 771561 (P) 1. 21
κατὰ τὸ 5 πρεβλ. ὡς περ
ἀν εἰ ἐκ μόνων ὀλοκληρῶν ὁ K συνέκειτο. τοσῆτοι δὲ
χαρακτῆρες ἐκ τῆς ρίζης P εἰλήφθωσαν ὑπὲρ τῶν ὀ-
λοκληρῶν, ὅσαι αἰ ἐπὶ τῶν ὀλοκληρῶν σιγμαὶ τῶν ἐν τῷ
K. ὅσαι γὰρ αἱ σιγμαὶ, τοσαῦται καὶ αἱ ρίζαι. οἱ δὲ
ἐν τῷ P λοιποὶ χαρακτῆρες τὰ δεκαδικὰ τῆς ρίζης ἐμ-
φαίνεσι.

ΛΕΙΞΙΣ.

Δευχθήσεται δὲ ὁ P κυβικὴ τῷ K ρίζα, καθάπερ
καὶ ἐν τῷ προλαβόντι προβλήματι.

ΠΡΟ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

Τὸ δοθέντος κύβου Κ, τὸ ἐν δεκαδικῶν μόνον
συγκείμενον, τὴν κυβικὴν εὐρεῖν ρίζαν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

(Κ) 0. 7 365425 (Ρ) 0. 203

Ἀπερ' αὖ ἐποίησεν, ἔγχε ἐκ μένων ὀλοκλήρων ὁ Κ συ-
γκείμενον, τὰ αὐτὰ ποιήσας, τὴν κυβικὴν αὐτῷ ρίζαν
Ρ εὐρήσας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'.

Τὸ δοθέντος ἀριθμοῦ Κ, τὸ ἐξ ὀλοκλήρων
συγκείμενον, καὶ μὴ ὄντος κύβου, τὴν ὡς ἔγ-
γιστα κυβικὴν εὐρεῖν ρίζαν.

(Κ) 93. 2. 000000 (Ρ) 21, 03

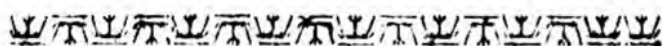
ΠΡΑΚΤΕΑ

Πάνθ' ὅσα ἐν τῷ 5. ἐντίταλται προβλήματι ποιή-
σας, καὶ κυβικὴν ρίζαν δι' ὀλοκλήρων ἐμφαινομένην εὐ-
ρῶν τὴν 21, ὁμότιχα τοῖς ἐν τῷ Κ ὀλοκλήρεσι τρία
μηδενικὰ χάψον σημεῖα. τὴν αὐτὴν δὲ ἐκαναλαμβά-
ναν πράξιν, ἀπὸ μὲν τῶν δεκαδικῶν τῆς ρίζης χαρακ-
τήρων, τὸ 0 εὐρήσας· ἀντὶ δὲ τῶν ἑκατοσίων, τριῶν
μηδενικῶν προσεθέντων, τὸν 3. εἰ δὲ ἔτι ἀκριβεστεῖραν
εἶναι θέλων τὴν ρίζαν, ἔτι τρία, καὶ αὐτρία πράξας,
καὶ ἑφεξῆς ἕτως. ὅσα γὰρ αὖ τὴν τοιαύτην δεκάπλα-
σάξιν πράξιν, τοσέτω ἡ ζητεμένη ρίζα ἀκριβεστεῖρα
προκύψει. τὴν τελείαν γὰρ ἀληθεῖ εὐρεῖν ἀμήχανον,
τὸ δοθέντος ἀριθμοῦ μὴ ὄντος κύβου, καθάπερ δὴ ἐδὲ
τὸ ἀριθμὸν τὸ μὴ ὄντος τετραγώνου, ὡς ἐν τῷ προλα-
βοῦντι εἴρηται χωλίω.

Τὰ αὐτὰ δὲ γινώσκω, εἴτε κεκλασμένους ἢ ὁ δὲ
θ' ἰσ' ἀριθμὸς, ὁ μὴ ἐν κύβου, εἴτε ἐξ ὁλοκληρῶν καὶ
δεκαδικῶν, εἴτε ἐκ δεκαδικῶν μόνον συγκείμενος ἢ χα-
ρακτηρῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τρία μηδενικά προθέσθαι σημαῖα, διὰ τὸ ἐκ τριῶν
συνκείσθαι τὸν ἐκ τῶ μεγίστη τῶν μοναδικῶν χαρακτη-
ρῶν κύβον, ὡς ἐν τῇ προλαβέσθῃ β' εἴρηται σημαῖα.



ΒΙΒΛΙΟΥ Δ'.

Περὶ ἰσοδιαφερόντων καὶ Λογαρίθμων

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Λόγος ἀριθμητικός ἐστὶν ἡ καθ' ὑπεροχὴν τοιαύ-
τη τις χῆσις, ὥσπερ δὴ γεωμετρικός, ἡ κατὰ περιοχὴν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅσον γὰρ ἕτερον ἕτερον ὑπερέχει μέγεθος, ἢ ἕτε-
ρον ἕτερον διαφέρει, θεωρεῖ ὁ Ἀριθμητικός, ὥσπερ πο-
σάκις ἕτερον περιέχει τὸ ἕτερον ὁ Γεωμέτρης. οἷον ὁ μὲν
θεωρεῖ, ὅτι ὁ 8 ὑπερέχει τὸν 2 κατὰ τὸν 6. ὁ δὲ
ὅτι ὁ 8 περιέχει τὸν 2 τετράκις. ὥσπερ δὲ ὄροι ἀσκή-
σι καὶ ἡγόμενα, καὶ ἐπόμενα, καὶ λόγων ἰσότητες, καὶ
ἀνισότητες, καὶ ἀναλογίαι ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ, ἔτω καὶ
τῇ Ἀριθμητικῇ ἐν ἐκάστη μὲν, τῆς περιοχῆς ἐν ταύ-
τῃ δὲ, τῆς ὑπεροχῆς θεωρουμένης.

Β'. Ἀναλογία ἀριθμητικὴ, δύο ἀριθμητικῶν λόγων πα-
ράθεσις ἐστὶ καὶ ἡ μὲν συνεχὴς, ἡ δὲ διηρημέ-
νη, ἡ διακεκριμένη λέγεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐπεὶ δὲ δῆλον, ὅτι ἐξ ἐλαττόνων ἢ τριῶν ὄρων ἔκ-
αν συστάει ἀναλογία ἀριθμητική, καθάπερ δὴ εἶδε Γε-
ωμετρική.

Γ'. Μεγέθη ἀριθμητικῶς ἀνάλογον, ἢ ἐν ἀριθ-
μητικῷ λόγῳ εἶναι λέγεται, εἰάν ἡ διαφορὰ τῆ
πρώτης καὶ τῆ δευτέρας ἴση ᾗ τῇ διαφορᾷ τῆ δευ-
τέρας καὶ τῆ τρίτης, ἢ τῇ τῆ τρίτης καὶ τῆ τετάρ-
της. οἷον, 2, 5, 8 ἢ 3, 7, 11, 15.

Δ'. Ἐν συνεχῇ ἀριθμητικῷ λόγῳ, ἢ συνεχῶς κατὰ
ἀριθμητικὸν λόγον μεγέθη ἀνάλογον εἶναι λέγεται,
εἰάν πρῶτον διαφέρει δευτέρα, ὅσον καὶ δευτέρον τρί-
τη. οἷον, 2, 5, 8.

Ε'. Ἐν διακεκριμένῳ δὲ ἀριθμητικῷ λόγῳ, ἢ κατὰ δια-
κεκριμένον ἀριθμητικὸν λόγον ἀνάλογον, εἰάν πρῶτον
διαφέρει δευτέρα, ὅσον καὶ τρίτον τετάρτη. οἷον, 3,
7, 11, 15.

Σ'. Αἱ ἐκ πολλῶν ὄρων συνιστάμεναι ἀριθμητικαὶ ἀνα-
λογίαι, Σειραὶ, ἢ Πρόοδοι λέγονται ἀριθμητικαί· ἐν
αἷς ἢ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, κτ, σειρά Φυ-
σικὴ ἀριθμητικὴ καλεῖται ὁμοίως καὶ αἱ ἐκ πολλῶν
Γεωμετρικῶν ὄρων, Γεωμετρικαί.

Ζ'. Εἰάν μὲν οἱ τῆς ἀναλογίας ὅροι προϊόντες αὐξῶσιν,
οἷον οἱ 3, 5, 7, 9, 11, κτ, ἀναλογία, ἢ σειρά
Αὐξουσα καλεῖται· εἰάν δὲ μειῶνται, οἷον, οἱ 18,
15, 12, 9, 6, κτ, Μειωμένη.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Λ'.

Εἰάν μὲν ἡ σειρά τῶν ἐν συνεχῇ ἀριθμητι-
κῷ λόγῳ ὄντων μεγεθῶν αὐξουσα ᾗ, οἷον,

3, 6, 9, ὁ μὲν δεύτερος ὅρος ἐκ τῶ πρώτου καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν ὁρῶν σύγκειται· ὁ δὲ τρίτος, ἐκ τῶ δευτέρου καὶ τῆς διαφορᾶς· ἐὰν δὲ μισθύνῃ, οἷον, 12, 9, 6, ὁ μὲν πρῶτος, ἐκ τῶ δευτέρου καὶ τῆς διαφορᾶς· ὁ δὲ δεύτερος, ἐκ τῶ τρίτου καὶ τῆς διαφορᾶς.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐκ μὲν γὰρ ἡ διαφορὰ τῶ πρώτου καὶ τῶ δευτέρου ἴση τῇ τῷ τρίτῳ καὶ τῷ τετάρτῳ, (κατὰ τὸν δ' ὅρισ.) ἐν μὲν τῇ αὐξήσει ἄρα σειρά τῷ μὲν πρώτῳ προδιμένῃ τῆς διαφορᾶς, προκύπτει ὁ δεύτερος· τῷ δὲ δεύτερῳ, ὁ τρίτος. ἐν δὲ τῇ μειυμένῃ τῷ μὲν τρίτῳ προσκαρδιῶσα ἡ διαφορὰ, ποιεῖ τὸν δεύτερον· τῷ δὲ δεύτερῳ, ποιεῖ τὸν πρῶτον. δῆλον ἄρα τὸ προκείμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὲ τύτῃ φανερόν, ὅτι δοθέντος τῆτε πρώτου ὁρος καὶ τῆς τῶν ὁρῶν διαφορᾶς, λαβὼν ἐπ' ἀπειρον τὴν σειράν προάγειν ἔντιν. οἷον, ἐὰν ὁ μὲν πρῶτος τῆς σειράς ὅρος ἴσος ᾖ τῷ 2, ἡ δὲ τῶν ὁρῶν διαφορὰ τῷ 3, προδιμένῃς τῷ 3 τῷ 2, προκύπτει ὁ δεύτερος 5, καὶ τῷ 5 πάλιν προσκαρμένῃς τῷ 3, ὁ τρίτος 8, καὶ τῷ 8 αὖ τῷ 3, ὁ τέταρτος 11, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Β'.

Ἐὰν μὲν ἡ σειρά τῶν ἐν διακεκριμένῳ ἀριθμητικῷ λόγῳ μεγεθῶν αὐξήσῃ ἢ, οἷον 3, 6, 7, 10, ὁ μὲν δεύτερος ὅρος ἐκ τῶ πρώτου καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν ὁρῶν σύγκειται, ὁ δὲ
τέ-

τετάρτος ἐκ τῶ τρίτου καὶ τῆς διαφορᾶς·
 εἰν δὲ μεινόμενῃ, οἷον, 24, 20, 16, 12, ὁ μὲν
 πρῶτος ἐκ τῶ δευτέρου καὶ τῆς διαφορᾶς, ὁ
 δὲ τρίτος ἐκ τῶ τετάρτου καὶ τῆς διαφορᾶς.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἰκανὴ γὰρ ἡ διαφορὰ τῶ πρώτου καὶ τῶ δευτέρου
 ἴση τῇ τῶ τρίτου καὶ τῶ τετάρτου, (κατὰ τὸν ε. ὅρισ.)
 τῇ μὲν αὐξήσῃς ἄρα σειράς, ὁ δεύτερος ὅρος ὁ πρῶ-
 τος ἐκ τῶν τῆ διαφορᾶς, ὡσαύτως ὁ τέταρτος ἡ δια-
 φορὰ ἐκ τῶν τῶ τρίτου τῆς δὲ μεινόμενης ὁ μὲν πρῶ-
 τος αὐτῆς ὁ δεύτερος ἐστὶ καὶ ἡ διαφορὰ ὁ δὲ τρίτος,
 ἡ διαφορὰ σὺν τῶ τετάρτῳ. ἐκ τούτων ἔν ὁῦλον τὸ
 προκείμενον.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Γ'.

Εἰν τρεῖς μεγέθη συνεχῶς κατὰ ἀριθμη-
 τικὸν λόγον ἀνάλογον ἤ, τὸ τῶ πρώτου καὶ
 τῶ τρίτου ἄθροισμα διπλάσιον ἔστι τῶ δευ-
 τέρου ὅρου.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐστω πρῶτον ἡ ἀναλογία αὐξήσῃς, οἷον 4, 7, 10.
 καὶ ἐπὶ ὁ τρίτος ὅρος 10 ἐκ τῶ δευτέρου 7 καὶ τῆς
 διαφορᾶς 3 σύγκειται, ἔστιν ἐκ τῶ πρώτου 4 καὶ τῶ
 διπλασίῃ τῆς διαφορᾶς, τετέστιν 6· ὁ γὰρ δεύτερος,
 ὁ πρῶτος ἐστὶν σὺν τῇ διαφορᾶς. (κατὰ τὸ α. θεωρ.)
 τὸ ἄρα τῶ πρώτου καὶ τῶ τρίτου ἄθροισμα, ἔστιν τὸ
 $4 + 10 = 4 + 4 + 6$, δις τόντε πρῶτον καὶ τὴν
 διαφορὰν περιέχει, ἥτοι ἐκ τῶ διπλασίῃ τῆς πρώτου
 καὶ τῆς διαφορᾶς σύγκειται. ἀλλ' ὁ δεύτερος ἴσος τῶ
 πρώ-

πρώτῳ σὺν τῇ διαφορᾷ, ὡς ἄρρηται. τὸ τῷ πρώτῳ ἄρα καὶ τῷ τρίτῳ ἄθροισμα διπλάσιον τῷ δευτέρῳ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Δ.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη κατὰ διηρημένον ἀριθμητικὸν λόγον ἀνάλογον ᾖ, τὸ τῷ πρώτῳ καὶ τῷ τετάρτῳ ἄθροισμα τῷ τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ τρίτῳ ἴσον ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐστω ἡ ἀναλογία αὐξέουσα, οἷον, 2, 7, 12, 17. καὶ ἐπὶ ὁ τέταρτος 17 ἐκ τῷ τρίτῳ καὶ τῆς διαφορᾶς συγκρίνεται, (κατὰ τὸ β'. θεωρ.) τὸ ἄρα ἄθροισμα τῷ πρώτῳ καὶ τῷ τετάρτῳ $2 + 17$ ὁ πρώτος ἐστὶ καὶ ὁ τρίτος καὶ ἡ διαφορά, ὅτεν $2 + 12 + 5$. πάλιν ἐπὶ ὁ δεύτερος 7 ὁ πρώτος ἐστὶ καὶ ἡ διαφορά, τὸ ἄρα τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ τρίτῳ ἄθροισμα, ὅτεν τὸ $7 + 12 = 2 + 5 + 12$, ὁ πρώτος ἐστὶ σὺν τῇ διαφορᾷ καὶ τῷ τρίτῳ. ἀλλὰ τετο αὐτό ἐστὶ καὶ τὸ τῷ πρώτῳ καὶ τετάρτῳ ἄθροισμα, ὡς δίδεινται. τὸ ἄρα τῷ πρώτῳ καὶ τῷ τετάρτῳ ἄθροισμα ἴσον τῷ τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ τρίτῳ. ὁ ἴδιος διὰ τῆς.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ τὸ προκειμενον καὶ ἐπὶ τῆς μεινένης διαχθήσεται ἀναλογίαις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

Δύω ἀριθμῶν δοθέντων, οἷον, τῶν 9 καὶ 13, μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον εὑρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Συναψὼν τὰς δύο δοθέντας, καὶ τὸ αὐτῶν ἄθροισμα, τὸν 22 δίχα διελὼν, εὐρήσεις τὸν ζητούμενον μέσον, ὅς ἐστιν ὁ 11.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τῷ πρώτῳ καὶ τῷ τρίτῳ ἄθροισμα διπλάσιόν ἐστι τοῦ δευτέρου, τετάρτῳ τῷ μίσθ. (κατὰ τὸ γ' θεώρ.) ἀλλ' αἰδοῦνται ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος εἰσι. ἢ γὰρ ὁ μίσθος ἔσται τοῦ αὐτῶν ἅρα ἄθροισμα τὸ 22. τὸ διπλάσιον τῷ μίσθῳ ἐστὶ. τὸ ἥμισυ ἅρα τέττα, εἴτην τὸ 11, ἢ ζητούμενος μίσθος ἐστὶ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, οἷον, τῷ 8, 5, 9, τέταρτον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον εὕρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ

Τὸν δευτέρον καὶ τρίτον, εἴτην τὸν 5 καὶ 9, συνάψας, καὶ ἀπὸ τῶν ἄθροισματος αὐτῶν τῷ 14 τὸν πρῶτον τὸν 8 ἀφελὼν, τὸν ζητούμενον τέταρτον εὕρηται· ἐν ἐστὶ τὸ λοιπὸν τὸ ἐκ τῆς τοιαύτης δε περικυπτὸν ἀφαιρέσας, εἴτην ὁ 6.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τῷ πρώτῳ καὶ τετάρτῳ ἄθροισμα ἴσον ἐστὶ τῷ τῷ δευτέρῳ καὶ τρίτῳ. (κατὰ τὸ δ'. θεώρ.) εἰάν ἅρα εἴταρτος ὀνομασθῇ χ , ἔσται $8 + \chi = 14$. ἐκατέρωθεν δὲ τῷ 8 ἀφαιρεθέντος, ἔσται $\chi = 6$, τετέστιν ὁ τέταρτος ἴσος τῇ διαφορᾷ τῷ πρώτῳ καὶ τῷ ἄθροισματος τῷ δευτέρῳ καὶ τρίτῳ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄

Εἰάν ὦσι τέσσαρα μεγέθη, οἷον τὰ 3, 7, 5, 9 ἀριθμητικῶς ἀνάλογα, καὶ ἐναλλάξ, εἴτην 3, 5, 7, 9, καὶ ἀνάπαλιν, ἦτοι 7, 3, 9, 5 ἀνάλογον ἔσται. πάλιν εἰάν τεταγμένη ἢ ἀνα-

ἀναλογία ἥ, ὅρα τὸν ἰδ'. ὁρισμ. τῆ ε. βιβλ.
 τῆς Γεωμετρ. οἶον 1, 2, 3, 4, καὶ 2, 4, 4,
 11, ἔσεται καὶ δι' ἴσθ 1, 2, 3, 11. ὡσαύτως
 εἰάν τετραγμένη ἡ ἀναλογία ἥ, ἦται 3, 7,
 5, 9, καὶ 7, 10, 2, 5, ἔσεται καὶ δι' ἴσθ τε-
 τραγμένως 3, 10, 2, 5. δηλὸς δὲ ὁ λόγος.
 ἡ γὰρ μεταξὺ αἰλλήλων διαφορά ἡ αὐτή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ.

Δύω ἀριθμῶν δοθέντων, οἶον τῶν 1 καὶ 9
 μέσον γεωμετρικῶς ἀνάλογον εὐρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ

Τῆ ἐκ τῶν δύο δοθέντων 1 καὶ 9 Γινόμενη 1.9
 τὴν τετραγωνικὴν ἐξάγαγε ρίζαν. αὕτη δὴ ἔσται ὁ ζη-
 τήμενος μέσος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω μὲν γὰρ X ὁ ζητούμενος μέσος. ἄρα ὡς 1 : X ::
 X : 9. τὸ ἐκ τῶν ἀκρῶν ἄρα ἴσον τῷ ἐκ τῆ μίσθ.
 (κατὰ τὴν 7. πρότ. τῆ ε. βιβλ. τῆς Γεωμετρ.) ἔσται
 $1 \cdot 9 = X^2$. τῆς ἄρα τετραγωνικῆς ρίζης ἰκατέρωθεν
 ἐξαχθῶσης, ἔσται $X = 3$. ὁ ὕδα δὲ ἔσται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, οἶον τῶν 2, 7, 12,
 τέταρτον γεωμετρικῶς ἀνάλογον προσευ-
 ρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τὸ ἐκ τῶν μέσων 7 καὶ 12 Γινόμενον διὰ τῆ πρώτῃ
 2 διελθ. ἔσται δὲ ἔν τὸ Πηλίκον 42 ὁ ζητούμενος τέταρτος.
 ΔΕΙ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω X ὁ ζητούμενος. ἔστω ὡς $2 : 7 :: 12 : X$. τὸ ἐκ τῶν ἀκρῶν ἔστω ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων, (κατὰ τὴν εἰς τὴν εἰ.) αἴττω $2 \cdot X = 7 \cdot 12$. διπλαστέον ἑκάτερον τούτων τῶν ἴσων διὰ τῆς 2. ἔσται ἔν τε τῷ τρίτῳ Πηλίκῳ ἴσα, αἴττω $\frac{2 \cdot 2}{2} = \frac{7 \cdot 12}{2}$, ὅπερ ἐστὶ, $X = 42$

ΟΡΙΣΜΟΣ Η'.

Λογάρισθμος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς ὁ τῆς διπλασίου, ἡ τριπλασίου, ἡ τετραπλασίου, ἡ ὁπωσὺν πολλαπλασίου λόγῳ ἐμφαντικός.

ΣΧΟΛΙΟΝ

Ἐάν ὑπὸ τὴν γεωμετρικὴν συνεχῇ σειράν, οἷον τὴν, 3, 6, 12, 24, 48, 96, κτ. ἀριθμητικὴν γράψῃς, οἷον τὴν, 2, 3, 4, 5, 6, κτ. ἀρίστωτοι ὄρον ἀριθμητικὸν ὑπὸ ὄρον γεωμετρικόν, οἱ ἀριθμητικοὶ ὄροι Λογάρισθμοι ἴσονται τῶν γεωμετρικῶν ὁ μὲν 2 Λογάρισθμος τῆς λόγῳ ὃν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 12, ὅστις διπλασίον ἐστίν, ἥπερ ὁ λόγος ὃν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 6. ὁ δὲ 3, τῆς λόγῳ ὃν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 24, ὅς ἐστι τριπλασίον, ἥπερ ὃν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 6· ὁ δὲ 4, τῆς λόγῳ ὃν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 48, τετραπλασίονα ὄντα, ἥπερ ὃν ἔχει ὁ αὐτὸς 3 πρὸς τὸν 6, καὶ ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὁμοίως.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΛΙ.

Α'. οἱ ἔν ὄροι (Α) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, κτ. τῆς Ἀριθ. (Β) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, κτ. μητικῆς σει-

ρᾶς Β, οἱ ὑπὸ τῆς τῆς Γεωμετρικῆς Α γραφόμενοι, οἱ τούτων Λογάρισθμοί εἰσι.

Β'. Ἐὰν ἡ Περσὶς ἢ ὑπὸ τὴν Γεωμετρικὴν, ἢ Φυσικὴν Σειρὰ τῶν ἀριθμῶν ἢ, τὸ οὐ πρῶτον ἔχουσα εἶναι, ὡς ἐν τῷ προκειμένῳ ὑπολόγηματι, οἱ Λογάρισμοι τὰ ὑπὸ τῆς μονάδος ἀποστήματα τῶν γεωμετρικῶς ἀναλόγων ἀριθμῶν ἐμφαίνουσιν. εἶναι τὸ μὲν 1, τὸ ἐν τῇ Β' σειρᾷ ὀφθαί, ὅτι τὸ τῷ 2, τῷ ἐν τῇ γεωμετρικῇ σειρᾷ Α' ἀπόστημα ἀπὸ τῆς μονάδος ἐν ἑστῇ ὁ δὲ ἐξῆς 2' ὁ ἀριθμητικὸς, ὅτι δύο τὰ ἀπὸ τῆς μονάδος ἀποστήματα τῷ γεωμετρικῷ 4' ὁ δὲ ἐξῆς 3, ὅτι τρία τὰ τῷ 8 ἀποστήματα, καὶ ἕτως ἐν τοῖς ἐφεξῆς.

Γ'. Ἐπεὶ οἱ τῆς Γεωμετρικῆς Περσὶς ἀριθμοί, τῆς πρῶτον ἔχουσης εἶναι τὴν μονάδα, Διατάσσονται οἷα, Φυσικὴν προεῖσαι τάξιν, ἐὰν ἢ ὑπὸ αὐτὴν Ἀριθμητικὴ, ἢ Φυσικὴ ἢ, ἀπὸ τῷ 0 ἐκτεταμένη, οἱ Λογάρισμοι οἱ ἐκθέται οἷα τῶν Διατάκτων. εἶναι, τὸ μὲν 1, ἐκθέτης τῷ 2' πρώτῳ γὰρ ὁ 2 Δύναμις ὁ δὲ 2, τῷ 4' δευτέρῳ γὰρ ὁ 4 Δύναμις, ἔτιθεν τετραγώνους ὁ δὲ 3, τῷ 8, ὅς ἐστι τρίτη Δύναμις, ἦτοι κύβους καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α 5'.

Ἐὰν ἡ μονὰς τὸ οὐ λογάριθμον ἔχη, ὁ λογάριθμος παντὸς γινομένου, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαριθμῶν, τῷ πολλαπλασιασῶ, καὶ τῷ πολλαπλασιασῶ. οἷον ὁ λογάριθμος τῷ 8, τῷ γινομένῳ ἐκ τῷ πολλαπλασιασῶ τῷ 2 ἐπὶ τὸν 4, ἐστὶ τὸ ἀθροίσμα τῶν λογαριθμῶν τῷ 2 καὶ τῷ 4, εἶπεν ὁ 3.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς μονάς, πρὸς Πολλαπλασιασὴν, ἔτω πολλαπλασιαστὴς πρὸς Γινόμενον, (κατὰ τὴν α. συνέπ. τῆ ἰ. ὁρίσ. τῆ α. τῆς Ἀριθμ. βιβλ.) εἴπεν ὡς 1 : 2 :: 4 : 8, ὁ τῷ Γινόμενῳ ἄρα 8 Λογάρριθμος, ὁ τέταρτος τῶν ἰσοδιαφερόντων 0, 1, 2, εἶπιν, ἦτοι ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς τῷ Λογαρίθμῳ τῆς μονάδος, τῷ πολλαπλασιαστῷ, ἢ τῷ πολλαπλασιαστῷ. ἀλλ' ὁ τέταρτος τῶν ἰσοδιαφερόντων ἴσος τῇ διαφορᾷ τῷ ἀθροίσματος τῶν μέσων ἢ τῷ πρώτῳ. (ὅρα τὸ β'. πρὸ βλ. τῷ δὲ τῷ βιβλ.) ἔστι δὲ ὁ πρῶτος 0 ἔξ ὑποθέσεως. ὁ Λογάρριθμος ἄρα τῷ Γινόμενῳ 8 ἴσος τῷ Ἀθροίσματι 3 τῶν Λογαρίθμων τῷ πολλαπλασιαστῷ ἢ τῷ πολλαπλασιαστῷ. ὁ εἶπε δεῦξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

Τὸ ἄθροισμα ἄρα δύο ἰσικονῶν Λογαρίθμων, ὁ Λογάρριθμός ἐστι τῷ Γινόμενῳ ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν, ὧν οἱ Λογάρριθμοι τὸ διαλελυθὲν συνεκρότησαν Ἀθροισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ὁ μὲν τῷ τετραγώνῳ Λογάρριθμος διπλάσιός ἐστι τῷ τῆς ἑαυτοῦ τετραγωνικῆς ρίζης· ὁ δὲ τῷ κύβῳ, τῆς κυβικῆς τριπλάσιος, καὶ ἔτις ἰφεξῆς. τῷ μὲν γὰρ τετραγώνῳ ὁ Λογάρριθμος τὸ Ἀθροισμὰ ἐστι δύο ἴσων Λογαρίθμων, τῷ πολλαπλασιαστῷ δηλαδὴ καὶ τῷ πολλαπλασιαστῷ· τῷ δὲ κύβῳ, τριῶν, ἢ ἔτις ἰφεξῆς. οἷον ὁ μὲν 2 ὁ Λογάρριθμος τῷ τετραγώνῳ 4, διπλάσιός ἐστι τῷ Λογαρίθμῳ 1 τῆς τετραγωνικῆς ρίζης 2. ὁ δὲ 3 ὁ Λογάρριθμος τῷ κύβῳ 8, τριπλάσιός ἐστι τῷ Λογαρίθμῳ 1 τῆς κυβικῆς ρίζης 2.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'.

Εἰάν ὁ τῆς μονάδος Λογάρριθμος τὸ 0 ἦ, ὁ τῷ Πηλίκῳ Λογάρριθμος ἴσος ἔσται τῇ δια-
Φο-

Φορὰ τῶν λογαρίθμων τῷ Διαρέτῃ ἢ Διαρετέῃ· οἷον ὁ 2, διαφορά ὧν τῷ 7, Λογαριθμὸς τῷ 128, ἢ τῷ 7, Λογαριθμὸς τῷ 32, ὁ Λογάριθμός ἐστι τῷ Πηλίκῳ 4, τῷ προκύπτοντος ἐκ τῆς διαιρέσεως τῷ 128 διὰ τῷ 32.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ὡς Διαρέτης, πρὸς Διαρετέον, ἔγω μόνος, πρὸς Πηλίκον. (ὄρα τὴν Β. συνέπ. τῷ α. τῆς Λ' (εὐμ. βιβλ.) ὁ τῷ Πηλίκῳ ἄρα Λογάριθμος ὁ τῶν ἰσοδιαφερόντων τέταρτος ἐστίν, εἴτεν ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς ὅρος τῶν Λογαρίθμων τῷ Διαρέτῃ, τῷ Διαρετέῃ, καὶ τῆς μονάδος. ἀλλ' ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς ἴσος τῇ διαφoρᾷ τῷ κεφαλαιῷ τῶν μέσων ἢ τῷ πρώτῃ. (ὄρα τὸ β'. πρόβλ. τῇ δὲ τῷ βιβλ.) ὁ τῷ Πηλίκῳ ἄρα Λογάριθμος ἴσος τῷ τῶν Λογαρίθμων, τῷ Διαρετέῃ δηλαδή ἢ τῆς μονάδος, ἀξιώματι. τῷ Λογαρίθμῳ τῷ Διαρέτῃ ἀφαιρέδεντος. ἀλλ' ὁ τῆς μονάδος Λογάριθμος ἴσος ὁ ἐξ ὑποθέσεως. ὁ τῷ Πηλίκῳ ἄρα Λογάριθμος ἴσος τῇ διαφoρᾷ τῶν Λογαρίθμων τῷ Διαρέτῃ ἢ Διαρετέῃ. ο, ε, δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἡ διαφορά δὴν ὁποιονδήποτε Λογαρίθμων, ὁ Λογάριθμός ἐστι τῷ Πηλίκῳ τῷ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτοντος τῶν ἀριθμῶν, ὧν οἱ Λογάριθμοι τὴν διαληφθεῖσαν μεταξὺ ἀλλήλων ἔχουσι διαφοράν. οἷον ὁ 6 ἢ διαφορά τῶν Λογαρίθμων 2 καὶ 8, ὁ Λογάριθμός ἐστι τῷ Πηλίκῳ 4, τῷ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτοντος τῶν 4 καὶ 256.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Τῶν Λογαριθμῶν, οἷς οἱ Μαθηματικοὶ χρῶνται, τὸν ῥῶνον Ὁρφέγγιος (α) τῇ τῇ πρώτῃ αὐτῶν εὐρετῇ Νεπέρῃ ὁπρὶν πρῶτος συνετάξατο ἐκ τῆδε τῆς γεωμετρικῆς αὐτῆς λαβὼν προσόδα 1, 10, 100, 1000, 10000. εἰσι δὲ οἱ παρ' αὐτῇ εὐρεθέντες, καὶ κανόνι ἢ πίνακι συντεταγμένους τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν τῶν ἀπὸ μονάδος ἀρχομένων Λογαριθμοὶ τὸν ἀριθμὸν, 10000. τοιούτῳ δὲ τῷδε εὐρε μεθόδῳ, ἐρῶμεν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Οἱ τῶν ἀριθμῶν 1, 10, 100, 1000, 10000, τῶν γεωμετρικῆς σειράς ὄρων ὄντων, Λογαριθμοὶ ἀπό τας εὐρενται, οἱ γὰρ ὑπ' αὐτῆς γραφάντες τῆς ἀριθμητικῆς προσόδα ὄροι, 0, 1, 2, 3, 4, οἱ αὐτῶν εἰσι Λογαριθμοὶ, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

Μεταξὺ τῶν γεωμετρικῶν ὄρων, 1 καὶ 10, (ὡσαύτως καὶ μεταξὺ τῶν ἄλλων) ἐπ' ἀκρίβειᾳ γεωμετρικὸν ἀνάλογον εὐρεῖν ἀμύχανον. ὁ γὰρ μεταξὺ αὐτῶν γεωμετρικὸς ἀνάλογος ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἐπὶ τῇ Γνωμένῳ ὑπὸ τῇ 1 καὶ 10, (κατὰ τὸ γ'. περίβλ. τῇ δ'. βιβλ. τῆς Ἀριθμητ.) τῇδε δὲ μὴ ὄντος τετραγώνου, τὴν ἐπ' ἀκρίβειᾳ τετραγωνικὴν αὐτῇ ρίζαν εὐρεῖν ἀδύνατον. (κατὰ τὴν γ'. σημ. τῇ γ'. βιβλ. τῆς Ἀριθμητ.) καὶ ὅτι ἀδύνατον τὸν ἀκριβῆτε εὐρεῖν καὶ ἐντελῆ μέσον ἀνάλογον, εὐρίσκεται ὃ ἔν ὅμως ὁ ἐγγύτατος, καὶ τῷ ἐντελεῖ διαφέρειν κατὰ τινὰ μόνον δεκαδικῶν μέρη τῆς μονάδος εἰς ἓν διαιεθείσης μιλλιένιον, εἰς ἑξαγομένης τῆς τῇ 1. 10 τετραγωνικῆς ρίζης, προσεθῇ σημαίας μηδενικῆς ἑπτά ἀντὶ τῶν δεκαδικῶν. ἐκ τούτου

Φ

ὑπε-

(α) Τῇ Γεωμετρικῇ ἦν διδάσκαλος ἐν τῇ κατὰ τὴν Ὀβολοὺς Ἀνατομικῇ. ἔφη τὸ 248 παρὰ γρ. τῇ τῇ Ὀβολοῦ. Ἀριθμ.

ἔπεται, καὶ αὐτὲς τὰς Λογαρίθμους τῶν τοιούτων ἀριθμῶν μὴ ἐξηκριβωμένους εἶναι εἰς τὸ παντελές. οἷον τῷ ἀριθμῷ 9 Λογαρίθμος λαμβάνεται ὁ 0. 95424251. ἕτος δὲ εἰς τῷ 9, ἀλλὰ τῷ 9. 0000000 Λογαρίθμός ἐστι, τστέσι Λογαρίθμοις ἐστὶν ἀριθμῷ μὴ διαφέρειντες τῷ 9 εἰμὴ κατὰ τινὰ δεκαδικὰ τῶν μερῶν τῆς εἰς μυλίωνιον διαιρεθείσης μονάδος. παραβλεπτία δὲ ἐν τῇ πρακτικῇ χρήσει ἡ τσιαύτη διαφορὰ, ὡς μηδεμιᾶς αἰσθητῆς ἀλλοιώσεως πρόξενος.

Ἡ τῷ εὐρίσκῃν τὰς Λογαρίθμους μέθοδος.

Καίτω δεῖν εὐρεῖν τὸν τῷ 9 Λογαρίθμον. προσγεγύφω τοῖς τε γεωμετρικοῖς ἔργοις 1, καὶ 10, ἐμοίως καὶ τοῖς ἀριθμητικοῖς 0 καὶ 1 σημεῖα μηδενικά ἐπτά. (πρὸς τὴν τῶν δεκαδικῶν ταῦτα προσγράφεται δηλαστον.) καὶ λεγέτω ὁ μὲν τῶν γεωμετρικῶν ὄρων, ὁ 1. 0000000, Α' ὁ δὲ, ὁ 10. 0000000, Β. καὶ εὐρεθήτω μεταξύ μὲν τῶν Α καὶ Β μέσος γεωμετρικὸς ἔργος ὁ Γ, ἥτοι ὁ 3. 1622777. (κατὰ τὸ γ. τῷ δε τῷ βιβλ. πρόβλ.) μεταξύ δὲ τῶν 0. 0000000, καὶ 1. 0000000, μέσος ἀριθμητικὸς, ὁ 0. 50000000, (κατὰ τὸ α'. τῷ δε τῷ βιβλ. πρόβλ.) ὅσις δὴ ὁ Λογαρίθμος τῷ Γ ἔσται. πάλιν μεταξύ τῷ Γ καὶ τῷ Β μέσος γεωμετρικὸς ὁ Δ, καὶ μεταξύ τῷ 1. 0000000, καὶ τῷ 0. 50000000 μέσος ἀριθμητικὸς ὁ 75000000 εὐρεθήτω, ὡς ἐν τῷ περὶ τὸν τύπῳ (ὄρα πίν. ΚΖ'.) πάρεστιν ἰδῆν. καὶ ἐφεξῆς ἐμοίως τὰ αὐτὰ ἐπιτελείω, ἄχρις ἧς ὁ εὐρεθισόμενος μέσος γεωμετρικὸς ε, τῷ 9 μηδὲν διαφέρει, εἰμὴ κατὰ τινὰ δεκαδικὰ τῶν δεκατομυλίωνιστημορίων ἐλάσσονα, εἴτην ἴσος ἢ 9. 0000000. ἔσται δὴ ἐν ὁ Λογαρίθμος αὐτῷ, ὁ ἑκατος πάντων τῶν τῷ διαληφθέντι τρόπῳ εὐρεθέντων ἀριθμητικῶν μέσων ὄρων, εἴτην ὁ 0. 95424251. τῷ δε γὰρ τῷ τρόπῳ ἑκάστον τῶν Λογαρίθμων

γαριθμῶν εὐρεῖν ἔνεστιν. ἀλλ' ἴσμεν, ὅτι ἐκ τινων εὐρεθέντων, καὶ ἄλλας εὐρεῖν πάνυ ῥαδίον. οἷον, τὸν τῷ 9 εὐρεθέντα Λογάρισμον εἶναι μὲν δίχα διέλκῃς, τὸν τῷ 3 ἑξῆς· εἶναι δὲ διπλασιάσας, τὸν τῷ 81. (ὄρα τὸ β'. τῷδε τῷ βιβλ. πέρ.) πάλιν εἶναι τὸν τῷ 3 Λογάρισμον τῷ τῷ 9 συνάψας, ὁ τῷ 27 προκίψει. (κατὰ τὸ γ'. πέρ. τῷ αὐτ. βιβλ.) τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ ἐκ τέτων τῶν εὐρεθέντων καὶ ἄλλας εὐρήσεις.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ.

Ὁ ἐν τοῖς Λογαρίθμοις τῶν ἐλοκλήρων μονάδων ἀριθμὸς τεσσαύτας περιέχει μονάδας, ὅσαι εἰσὶ τὰ μηδενικὰ σημεῖα ἐν τῷ ἀριθμῷ ᾧ προσανήκει. οἷον, τὸ μὲν 1 Λογάρισμός ἐστι τῷ 10, τῷ ἐν μηδενικὸν περιέχοντες σημεῖον· ὁ δὲ 2, τῷ 100, τῷ δύο μηδενικὰ περιέχοντες σημεῖα· ὁ δὲ 3, τῷ 1000· ὁ δὲ 4, τῷ 10000· εἶδενται τὸν ἐν τοῖς Λογαρίθμοις τῶν ἐλοχερῶν μονάδων ἀριθμὸν, τὸ τῷ Λογαρίθμῳ χαρακτηριστικὸν καλεῖν εἰώθασιν.

ΣΤΗΝΕΠΕΪΑ Δ'.

Ἐκ τῶν εἰρημένων κατιδεῖν ῥαδίον, ὅτι τῶν μὲν μετὰ τῷ 1 καὶ 10 ἀριθμῶν οἱ Λογάρισμοι μονάδας ἐλάσσονες· τῶν δὲ μετὰ τῷ 10 καὶ 100, μείζονες μὲν μονάδας, ἐλάσσονες δὲ δυάδας· τῶν δὲ μετὰ τῷ 100, καὶ 1000, μείζονες μὲν δυάδας, ἐλάσσονες δὲ τριάδας· τῶν δὲ μετὰ τῷ 1000 καὶ τῷ 10000, μείζονες μὲν τριάδας, ἐλάσσονες δὲ τετράδας· τοῖς δὲ ἐλάττωσι τῆς μονάδος ἀριθμοῖς ἀποφατικοὶ ἐπανήκεισι Λογάρισμοι. ἐπεὶ μὲν γὰρ ὁ τῆς μονάδος Λογάρισμος ἴσος ὁ ἐξ ὑποθέσεως, τῷ τῆς μονάδος ἄρα ἐλάχιστον ἀριθμῷ, ἐλάσσων τῷ ὁ ἐπανήκει Λογάρισμος, ἄτην ἀποφατικός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

Τῷ δοθέντος νόθου κλάσματος $\frac{2}{5}$ τὸν Λογαριθμὸν εὐρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἀπὸ τοῦ Λογαρίθμου 0.9542425 τοῦ Ἀριθμητοῦ 9 τὸν τὸ Παρωνομαστὴ 5, εἶπεν τὸν 0.6989700 ἄφελε. καὶ ἔσται δὴ ἡ τέτων διαφορὰ 0.2552725 ὁ Λογαριθμὸς τοῦ νόθου κλάσματος $\frac{2}{5}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πηλίκον ἐμφαίνει πᾶν κλάσμα προκύπτον ἐκ Διαιρετέων μὲν τοῦ Ἀριθμητοῦ, Διαιρέτεω δὲ τοῦ Παρωνομαστῆ. οἷον τὸ $\frac{2}{5}$ ἐμφαίνει τὸν 9 Διαιρετέον καὶ τὸν 5 Διαιρέτην. ἀλλὰ παντὸς Πηλίκου ὁ Λογαριθμὸς ἴσος τῇ διαφορᾷ τοῦ Διαιρετέου καὶ Διαιρέτου. (κατὰ τὸ γ. πέρ. τῷδε τῷ βιβλ.) ἡ ἄρα διαφορὰ τῶν Λογαρίθμων τοῦ Ἀριθμητοῦ καὶ Παρωνομαστῆ τοῦ κλάσματος, ὁ Λογαριθμὸς αὐτοῦ ἐστίν. ο. ε. δ.

Εἰάν δὲ τὸ κλάσμα γνήσιον ᾗ, οἷον τὸ $\frac{3}{7}$, ἄφελε τὸν τοῦ Ἀριθμητοῦ 3 Λογαρίθμον 0.4771213 ἀπὸ τοῦ Λογαρίθμου 0.8450980 τοῦ Παρωνομαστῆ 7. καὶ ἔσται δὴ ἡ τέτων ἀποφατικὴ διαφορὰ — 0.3679767 ὁ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{7}$ Λογαριθμὸς. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\frac{3}{7}$ τῆς μονάδος ἐλάττον, ὁ δὲ τῆς μονάδος Λογαριθμὸς τὸ 0 ἐστίν ἐξ ὑποθέσεως, ὁ τοῦ $\frac{3}{7}$ ἄρα Λογαριθμὸς ἐλάσσων τοῦ 0, ὃ διὰ τοῦ ἀποφατικῆ δηλεῖται σημαίει.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Σ'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων τῶν 4, 68, 3, τέταρτον γεωμετρικῶς ἀνάλογον διὰ τῶν Λογαρίθμων εὐρεῖν.

ΠΡΑΚ-

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τὲς τῶν μέσων Λογαρίθμοις, ἔτυν τὸν 1. 8325089
τῷ 68 Λογαρίθμον, τῷ 0. 4771213 τῷ 3 Λογαρίθ-
μῳ σύναψεν. καὶ ἀπὸ τῷ Ἀθροίσματος 2. 3096302
τὸν τῷ πρῶτῳ 4 Λογαρίθμον 0. 6020600 ἄφελε. ἔσται
δὴ ἔν ἡ τέτων διαφορὰ 1. 70757. 2 ὁ τῷ ζητημένῳ
τετάρτῳ Λογαρίθμος· ὃ προσεπανήκει ἀριθμὸς ὁ 51,
ἐν τοῖς Πίναξι τῷ Λογαρίθμῳ σύσειχος κείμενος

Ἡ δεξις, ἔγγε τῷ Β΄. προβλήματος καὶ ἐκ τῆς α΄.
συνεπείας τῷ δε τῷ βιβλίῳ, ἐπίδηλος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

Ἐυχρηστοὶ δὲ μάλιστα οἱ Λογαρίθμοι ἐν τοῖς τριγω-
νομετρικοῖς καὶ ἀστρονομικοῖς ἀναλογισμοῖς, ἐν οἷς ἐκ πολ-
λῶν σύγκεινται οἱ ἀριθμοὶ χαρακτηρῶν. ἀντὶ γὰρ τῷ
πολλαπλασιάσαι συνάπτομεν, καὶ ἀντὶ τῷ διελθῆν ἀφαι-
ρῶμεν, τετέστιν ἀντὶ τῷ πολλαπλασιάσαι δύο ἀριθμούς,
τὲς τέτων Λογαρίθμοις ἐν τοῖς Πίναξιν εὐρόντες, συ-
νάπτομεν. ὁ δὲ ἐν τοῖς αὐτοῖς Πίναξι τῷ εὐρεθέντι
Ἀθροίσματι σύσειχος ἀριθμὸς, τὸ Γινόμενον ἐστὶ τῶν
δύω εἰρημένων ἀριθμῶν. ἀντὶ δὲ τῷ θάτερον διὰ τῷ
ἑτέρῳ διελθῆν ἀριθμῷ, τὲς τέτων Λογαρίθμοις εὐρόν-
τες, τὸν ἕτερον ἀπὸ τῷ ἑτέρῳ ἀφαιρῶμεν. ὁ δὲ τῷ εὐ-
ρεθείσῃ διαφορᾷ σύσειχος ἐν τοῖς Λογαρίθμων Πίναξι
κείμενος ἀριθμὸς, τὸ Πηλίκον ἐστὶ τῶν δύο εἰρημένων
ἀριθμῶν. ἀλλὰ καὶ τῷ τῶν Ἀλγεβρικῶν προβλημάτων
λύσει χρήσιμοι οἱ Λογαρίθμοι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

Τῶν τὲς Λογαρίθμοις, καὶ τὲς ἐπανήκοντας αὐτοῖς
ἀριθμοῖς περιεχόντων Πινάκων οἱ ὑπὸ τῷ Οὐλάκ ἐκ-
δοθέντες τῶν ἄλλων προτιμώτεροι.

ΒΙΒΛΙΟΥ Ε΄.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Περὶ διαφόρων μεθόδων, ἃ μόνον ταῖς ἐπισήμαις, ἀλλὰ καὶ τοῖς τὴν ἐμπορίαν μετιῶσιν πάνυ χρησίμων.

Περὶ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου.

Α'. Μέθοδος τῶν τριῶν ἐστὶν ὁ Κανὼν, δι' ἧς τριῶν διδόντων ἔσται, τὴν ὁποιανδήποτε ἐμφαινόντων ποσότητα, ὁ τέταρτος ὁ γεωμετρικῶς ἀνάλογος εὐρίσκεται.

Β' Ὀμοειδῆς μὲν ἔσται εἰπὶν οἱ Ἀριθμοὶ, οἱ τὴν αὐτὴν Ἑτεροειδῆς δὲ, οἱ μὴ τὴν αὐτὴν ἐμφαινόντες ποσότητα.

Γ'. Ἐπ' Εὐθείας οἱ ἔσται τετάχθαι λέγονται, ὅταν οἱ ὁμόλογοι, (ἔσται τὸν ἐξ. ὀρισμ. τῆς βιβλ. τῆς Γεωμ.) ὁμοειδῆς, Ἀντιπεπονθότως δὲ, ὅταν ἑτεροειδῆς ᾖσι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐκέρδησέ τις χρυσᾶ νομίσματα 350, μέτρα σίτου 600 πωλήσας, ζητεῖ δὲ εἶδεναι πόσα τῶν αὐτῶν κερδήσει νομισμάτων, 7000 πωλήσας. τῶν ἐν τῶν τριῶν ἔσται διδόντων τῇ τῶν τριῶν μεθόδῳ εὐρίσκεται ὁ ζητούμενος τέταρτος. καὶ ὁμοειδῆς μὲν ἔσται εἰπὶν, ὅ,τε 600 καὶ 7000, αἵτε οὐ ἐκώτερες αὐτῶν τὸ αὐτὸ ἐμφαινόντων, ὅπερ ἐστὶ μέτρα σίτου ἑτεροειδῆς δὲ, ὅ,τε 350 καὶ 600. τῶν γὰρ ὁ μὲν 350 νομίσματα, ὁ δὲ 600 σίτου μέτρα ἐμφαίνει. εἰς ἓν, κληθέντες τῶν ζητούμενων, καὶ ταχ. 9ῃ

ἵππιν οἱ ὄροι ἔτω· 600 : 350 :: 7000 : χ, ἐπ' ἐυ-
 ευθείας τετάχθαι λέγοντας· εἰάν δὲ ἔτω· 600 : 350 ::
 χ : 7000, ἀντιπεπονθότως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ὅταν ἔν τοιόν δὲ τι Πρόβλημα προτεθῇ, σκεπτέον
 πρῶτον ἀκριβῶς τίνι τρόπῳ τακτέον τὰς ὀρες, ἐπ' ἐυ-
 θείας, ἢ ἀντιποπονθότως. ἐκ τούτου γὰρ ἡ ἀληθὴς τῷ
 Προβλήματος ἡρητηγαι λύσις. εἰάν γὰρ ἔχῃ ὡς δὲ τὰς
 ὀρες τάξεως, εὐδέποτε τὸ ἀληθὲς ζητούμενον εὐρήσεις. πε-
 ρὶ τούτου δὲ ἵππον, ὅτι ὅταν μὲν τῶν τριῶν δοθέντων
 ὀρων ὅσον μείζων ἢ ἐλάσσων ἢ ὁ ἕτερος τῶν ὁμοειδῶν,
 εἴπῃν ὁ 600, τῷ ἑταροειδῶς αὐτῷ, οἷον τῷ 350, το-
 σῆτον ἀναλόγως καὶ ὁ ἕτερος τῶν ὁμοειδῶν, οἷον ὁ 7000
 τῷ ζητῶμεν, τότε ἐπ' ἐυθείας τακτέον τὰς ὀρες. ὅταν
 δὲ ὅσον μείζων ἢ ἐλάσσων ἢ ὁ ἕτερος τῶν ὁμοειδῶν
 τῷ ὁμοειδῶς αὐτῷ, τοσῆτον ἀναλόγως καὶ ὁ ζητούμενος
 τῷ ἑτέρῳ τῷ ὁμοειδῶς αὐτῷ, τότε ἀντιπεπονθότως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

Πωλήσας τις μέτρα κριθῆς 50, ἐκτήσατο
 νομίσματα 350, ζητεῖ δὲ πόσα νομίσματα
 κτήσεται, μέτρα κριθῆς πωλήσας 460.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Κάλεσον τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν χ. καὶ ἐπεὶ ὅσον
 ἐλάσσων ὁ τῶν μέτρων τῆς κριθῆς ἀριθμὸς 50 τῷ ἀ-
 ριθμῷ τῶν ποριδιέντων ἤδη νομισμάτων 350, τοσῆτον
 ἀναλόγως ἐλάσσων ἐστὶ καὶ ὁ τῶν πωληθησομένων μέ-
 τρων τῆς κριθῆς ἀριθμὸς 460 τῷ ἀριθμῷ τῶν ποριδι-
 σομένων νομισμάτων, εἴπῃν τῷ ζητῶμεν ἀριθμῷ χ,
 τάξον ἐπ' ἐυθείας τὰς ὀρες ἔτω· 50 : 350 :: 460 : χ.

πολλαπλασιάσας δὲ τὰς δύο μέσας, τετίσι τὸν 350 ἐπὶ τὸν 460, τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον 161000 διὰ τῆς πρώτης 50 διέλε. λέγω ὅτι τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτει Πηλίκον εἶναι ὁ ζητούμενος, ὥστεν ὁ $\chi = \frac{161000}{50} = 3220$.

ΔΒΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς 50 : 350 :: 460 : χ . τὸ ἄρα ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων, (κατὰ τὴν 5. τῆς βιβλ. τῆς Γεωμ.) τετίσι 350. 460 = 50. χ . ἑκάτερος δὲ τῶν διὰ τῆς 50 διαιρεθέντος, ἔσται $\chi = 3220$, ὅπερ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἴσος τῷ Πηλίκῳ τῆς Γινόμενης ἐκ τῶν μέσων, διὰ τῆς πρώτης διαιρεθέντος.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ δοθέντων τῶν κτηθέντων χρημάτων 350, καὶ 3220, καὶ τῆς ἐτέρας τῶν μέτρων ἀριθμοῦ 50, εὐρεθήσεται ὁ ἕτερος τῶν μέτρων ἀριθμὸς χ , ταχθείσης δηλονότι τῆς ἀναλογίας ἔτω 350 : 50 :: 3220 : χ . ἔσται γὰρ 350. $\chi = 50$. 3220. ἥτις $\chi = \frac{50 \cdot 3220}{350} = 460$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

Γμάτιόν τις ἔχων ἐξ 8 συγκείμενον πηχῶν, ὧν ἑκάστη τὸ πλάτος $\frac{3}{4}$ πήχεως, ὑποσεγάσῃ ἐν αὐτῷ βέλεται ὀθόνην, πλάτος ἔχουσαν ἴσον πήχει, ζητεῖ ἂν πόσοι πήχαις ὀθόνης εἴσιν ἀναγκαῖοι.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Καλεῖθω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς. καὶ ἐπεὶ ὅσον ἔλασεν τῶν δοθέντων πήχεων τὸ πλάτος $\frac{3}{4}$ τῆς ὀθόνης πλάτους 1, τοσούτον ἀναλόγως καὶ ὁ $\frac{4}{3}$ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν τῆς ὀθόνης πήχεων χ τῶν δοθέντων 8

πή.

πήχεων, συνεξάτω ἀναλογία ἀντιπεπονθότας ἔχουσας
 τὰς ὀρεσ, ἢ ἐξῆς ὡς $\frac{3}{4} : 1 :: \chi : 8$. ἔσται δὲ καὶ ἀνά-
 παλιν ὡς $1 : \frac{3}{4} :: 8 : \chi$ (κατὰ τὴν συνέπ. τῆς ζ'. τῆ
 ε'. βιβλ. τῆς ⁴ Γεωμ.) διὸ $1 \cdot \chi = \frac{3}{4} \cdot 8$. λέγω δὴ ἔν,
 ὅτι τὸ χ , εἴτεν ὁ δ ἐστὶν ὁ ζητούμενος ⁴ ἀριθμὸς τῶν τῆς
 ἰδούης Πηχῶν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἴπει γὰρ τό, τε ἰμάτιον καὶ ἡ ὑπ' αὐτὸ φραφθησο-
 μένη ὁδὸν ἴσα ἀλλήλαις εἰσιν, ἐμφαινέτωσαν αὐτὰ δυο
 ἴσα ὀρθογώνια, τὰ ΑΓ, ΕΗ. (πὶν Κς. χ. 20.) καὶ
 ἡ μὲν ΒΓ ἴση ἔστω $\frac{3}{4}$, ἡ δὲ ΑΒ = 8, ἡ δὲ ΕΖ = 1, ἡ
 δὲ ΖΗ = χ . καὶ ἐπεὶ ⁴ ἴσα τὰ ΑΓ, ΕΗ ὀρθογώνια, ἀντι-
 πεπόνθασιν ἄρα αἱ τέτων πλευραί. (κατὰ τὴν ιδ'. τῆ
 ε'. τῆς Γεωμ. βιβ.) ὡς ἄρα ΒΓ : ΕΖ :: ΖΗ : ΑΒ, εἴτεν ὡς
 $\frac{3}{4} : 1 :: \chi : 8$. καὶ ἀνάπαλιν ὡς $1 : \frac{3}{4} :: 8 : \chi$. ἐξ ὧ
 δῆλον τὸ προκείμενον.

Τῶ αὐτῶ δὴ τρόπῳ δοθέντος τῆ ἀριθμῶ τῶν γεωρ-
 γῶν τῶν σκαψάντων ἀμπελῶνά τινα ἐν ἀριθμῶ ἡμερῶν
 δοθέντι, εὐρεθήσεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἐν αἷς
 γεωργοί, ὧν ὁ ἀριθμὸς δέδοται, τὸν αὐτὸν σκάψουσιν
 ἀμπελῶνα. ὡσαύτως ὀρθειῶν τῶν τιμῶν τῶν ἀνισο-
 τίκων νομισμάτων, καὶ τῶ ἀριθμῶ τῶ ἐμφαίνοντος τὸ
 ἕτερον τῶν νομισμάτων εἶδος, εὐρήσεις τὸν ἀριθμὸν τῶ
 ἑτέρου εἶδος τῶν νομισμάτων. καὶ ἄλλων δὲ τοιούτων Προ-
 βλημάτων τὰς λύσεις εὐρεῖν διὰ τῆς μεθόδου ταύτης
 φάδιον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστίον δὲ, ὅτι τῶν τριῶν ἡ μέθοδος, ἡ βάσις ἐστὶ τῶν
 λοιπῶν μεθόδων, ὡς ἐκ τῶν ἐξῆς δῆλον.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῆς Ἑτερείας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Ἐτερείαν ἐμπορικὴν τινᾶν ποιησάντων, ὁ μὲν κατέβαλε νομίσματα 1600, ὁ δὲ 1450, ὁ δὲ 1500, ἐκέρδησαν δὲ 2460. Ζητεῖται δὲ πόσον δ᾽ ἑκάστων τῶν τριῶν τῷ κέρδει λαβεῖν μέρος.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Καλέτας τὸ μὲν ζητούμενον τῷ πρώτῳ μέρος Χ, τὸ δὲ τῷ δευτέρῳ Υ, τὸ δὲ τῷ τρίτῳ Ζ, συναψόντες καταβληθέντας τῶν νομισμάτων ἀριθμούς. καὶ γεγνησὶ ὡς τὸ ἐπιφέρειαι τῶν νομισμάτων, πρὸς τὸ ὅλον κέρδος, ἔστω τὸ μέρος τὸ ὑπὸ ἑκάστῃ καταβληθὲν πρὸς τὸ ζητούμενον ἑπαινῆκον αὐτῷ μέρος, εἴηεν ὡς 4550: 2460:: 1600: Χ. καὶ ὡς 4550: 2460:: 1450: Υ καὶ ὡς 4550: 2460:: 1500: Ζ. καὶ ἐυριθιῶσαν αἰτῶνται αἰτάλογον Χ, Υ, Ζ ὡς ἐν τοῖς πολλαβῶσι Περιβλήμασιν. ἔσαι ἔν ὁ μὲν Χ = 865 + $\frac{5}{91}$ τὸ μέρος τὸ αἰτῶν τῷ πρώτῳ ὁ δὲ Υ = 783 + $\frac{87}{91}$ τὸ τῷ δευτέρῳ ὁ δὲ Ζ = 810 + $\frac{90}{91}$ τὸ τῷ τρίτῳ.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἢ δ᾽ ἔξει ἐξ αὐτῆς τῆς πράξεως δῆλη. ὃν γὰρ λόγον ἔχει τὸ κεφάλαιον τῶν νομισμάτων, πρὸς τὸ ὅλον κέρδος, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἑκάστων τῶν καταβληθέντων ἀριθμῶν, πρὸς τὸ ἑπαινῆκον αὐτῷ τῷ κέρδει μέρος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

Τὰ αὐτὰ ποιητίον, καὶ πλείονες τῶν τριῶν ὧσιν οἱ τὴν ἐτερείαν ποιήσαντες, τοσούτων δηλαδὴ ἀναλογιῶν συγχευθησῶν, ὅσαι εἰσὶν οἱ ζητέμενοι ἀριθμοί.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Ἐάν συναψῇς πάντας τῆς θυρεθόνας, οἶον τὸν 865 + $\frac{5}{91}$ ἢ τὸν 783 + $\frac{87}{91}$ καὶ τὸν 810 + $\frac{90}{91}$, προκύψει δὲ ἐκ τῆς θυροστάτης τὸ κέρδος, ὅπερ εἶναι ὁ 2460, ἔθ' ἐν παρρησίᾳ φέρεται.

Περὶ τῆς τῶν πέντε Μεθόδου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Οἰκοδόμοι 4 ἐν ἡμέραις 7 ταίχος ὠκοδόμησαν ποδῶν 252. Ζηταται ἔν πόσας πείρας ταίχης οἰκοδομήσασιν οἰκοδόμοι 10 ἐν ἡμέραις 13.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τὴς ἀριθμοὺς τῶν οἰκοδόμων διὰ τῶν ἡμερῶν ἐν αἷς ἐργάζονται πολλαπλασιάσας, εἴηεν τὸν 4 διὰ τῆς 7, καὶ τὸν 10 διὰ τῆς 13, ἐκ τῶν ἰσσοῦρων ἔρων δύο συγκρότησεν. καὶ τῆς ζητούμενης κληθόντος χ, συντεταίω ἐκ τῶν ἰσσοῦρων 4.7 καὶ 10.13, καὶ τῆς μεθόδου ἀριθμοῦ 252 τῶν ποδῶν τῆς οἰκοδομηθέντος ταίχης, καὶ τῆς ζητούμενης χ ἢ ἔξῃς ἀναλόγῃς, ὡς 4.7 : 10.13 :: 252 : χ. ἔσται δὲ ἔν ὁ χ, ἰσούσιν ὁ 1170 ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

ΛΕΙΞΙΣ

Ὁ γὰρ ἐργάζονται ἔργον οἰκοδόμοι 4 ἐν ἡμέραις 7, τὸ αὐτὸ ποιεῖ ἓξ οἰκοδόμοι ἐν ἡμέραις 28, ἢ 28 οἰκοδόμοι ἐν ἡμέραις μιᾷ. ὁμοίως ὅπερ οἱ δέκα οἰκοδόμοι ποιοῦσιν ἐν ἡμέραις 13, τὸ αὐτὸ εἶναι ἐν ἡμέραις 130, ἢ 130 οἰκοδόμοι ἐν ἡμέραις μιᾷ. ἔκ τῆς ἔν δὲ ἔκτον, ὅτι πολλαπλα-

λαπλασιαζομένων τῶν ἀριθμῶν τῶν οἰκοδόμων διὰ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἡμερῶν, ἐν αἷς οἰκοδομῶσι, καὶ ἐκ τῶν Γηνομένων συγκριζόμενης ἀναλογίας, ὡς εἰρηται, ὁ ζητούμενος εὐρίσκεται.

Ἀλλὰ δὴ καὶ ἄλλως τὸ ζητούμενον χ εὐρεθήσεται. ἐπεὶ γάρ, εἰ μὴ αἱ τῆς ἐργασίας ἡμέραι ἴσαι ἀλλήλαις ᾗσι, τὰ οἰκοδομηθησόμενα τείχη ἀνάλογά εἰσι τοῖς τῶν οἰκοδόμων ἀριθμοῖς· εἰ δὲ οἱ οἰκοδόμοι ἰσάριθμοι, τὰ τείχη ἀνάλογά εἰσι τῇς ἡμέρας· καὶ ὁ πρῶτος ἴσας εἶναι τῆς ἐργασίας ἡμέρας, εἴη ἰσαριθμοὺς εἶναι τῶς οἰκοδόμου. ἔκον ἔσαι κατὰ μὲν τὴν πρῶτην ὑπόθεσιν $4 : 10 :: 252 : \chi$. (κληθέντος χ τῆς οἰκοδομήματος τῶν δύναι οἰκοδόμων.) κατὰ δὲ τὴν δευτέραν, ὡς $7 : 13 :: \chi : \chi$. ἐκ τῆς πρώτης ἄρα ἀναλογίας ἔσαι $4 \cdot \chi = 10 \cdot 252$. ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, $13 \cdot \chi = 7 \cdot \chi$. (κατὰ τὴν ϵ' . τῆς Γεωμ.) πολλαπλασιασθέντω τὰ ἴσα $4 \cdot \chi$ καὶ $10 \cdot 252$ διὰ τῶν ἴσων $13 \cdot \chi$ καὶ $7 \cdot \chi$. ἔκον ἔσαι $4 \cdot \chi \cdot 7 \cdot \chi = 10 \cdot 252 \cdot 13 \cdot \chi$. καὶ τῶν τῶν ἴσων διὰ τῆς αὐτῆς διαφερέτων, ἔσεται $4 \cdot 7 \cdot \chi = 10 \cdot 252 \cdot 13$, ὅπερ ἐστὶν $28 \cdot \chi = 130 \cdot 252$. ὡς ἄρα $28 : 130 :: 252 : \chi$. (κατὰ τὸ β. μέρ. τῆς αὐτ. προτ.) τὸ ἄρα $\chi = \frac{130 \cdot 252}{28}$ εἴτεν $\chi = 1170$.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῆς ψευδῆς ὑποθέσεως.

Διὰ τῆς Μεθόδου ταύτης τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς ὅσατε καὶ πηλίκᾳ ἐπιτάξειεν ἂν τις μέρη διαφεῖν. ψευδῆς δὲ ὑποθέσεως ἡ Μέθοδος προσηγόρευται, διὰ τὸ ἐξ ὑποθετικῶν, καὶ ἀναλόγων μὲν τοῖς ζητούμενοις, μὴ αὐτῶν δὲ τῶν ζητούμενων ἀριθμῶν τὴν τῶν Πρεβλημάτων πορίζεσθαι ἐπίλυσιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Κατέλειπέ τις τοῖς τρισὶν υἱοῖς καὶ κληρονόμοις αὐτῷ χρυσῶν χιλιάδας ἑπτὰ, ἔντα-
λάμενος τὸν μὲν πρῶτον τῶν υἱῶν αὐτῷ λα-
βεῖν τριπλάσιον τῷ δευτέρῳ, τὸν δὲ δεύτε-
ρον διπλάσιον τῷ τρίτῳ. ζητᾶται ἔν πόσον
ἕκαστον δεῖ λαβεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Κεῖθω τὸν μὲν πρῶτον τῶν ἀδελφῶν δεῖν λαβεῖν 6.
τάττα ἐν κεμένῃ, δηλον, ὅτι ὁ μὲν δεύτερος 2, ὁ δὲ
τρίτος 1 λήψεται. τὰς τρεῖς τέττες ὑποθετικὰς ἀριθ-
μὸς σύναψον, καὶ κληθείσης τῆς μὲν μερίδος τῷ πρῶ-
τῳ, Χ· τῆς δὲ τῷ δευτέρῳ, Υ· τῆς δὲ τῷ τρίτῳ, Ζ, γε-
γονέτω, ὡς 9: 6 :: 7000: Χ, καὶ ὡς 9: 2 :: 7000:
Υ, καὶ ὡς 9: 1 :: 7000: Ζ. λέγω δὴ ὅτι οἱ Χ, Υ, Ζ
εἰσὶν οἱ ζητούμενοι. καὶ ἔστιν ὁ μὲν $\chi = 4666 + \frac{2}{9}$, ὁ
δὲ $\Upsilon = 1555 + \frac{5}{9}$, ὁ δὲ $Z = \Upsilon 777 + \frac{7}{9}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δηλον ἐκ τῆς ὑποθέσεως, ὅτι ὃν λόγον ἔχει τὸ ἄ-
ρτισμα τῶν ἐξ ὑποθέσεως ληφθέντων ἀριθμῶν, ἔτεν
ὁ 9, πρὸς ἣν μερίδα ὑποθετικῶς λαμβάνει ὁ πρῶτος,
ἔτεν πρὸς τὸν 6, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἕλος ὁ τῶν
χρυσῶν ἀριθμὸς, ἔτεν ὁ 7000, πρὸς τὴν μερίδα, ἣν
ἀληθῶς λαβεῖν δεῖ τὸν πρῶτον, ἱεῖται πρὸς τὸ Χ. διὰ
τὸν αὐτὸν λόγον ἀληθῆς καὶ ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη
ἀναλογία. ἐξ ἧς δηλον τὸ προκείμενον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α.

Εάν πλείονα ᾧσι τὰ ζητούμενα, ἰσαριθμοῦς τοῖς ζητούμενοις τῷ εἰρημένῳ ἱερόπῳ συστήσας τὰς ἀναλογίας, ἐνρήσεις τὰ ζητούμενα.

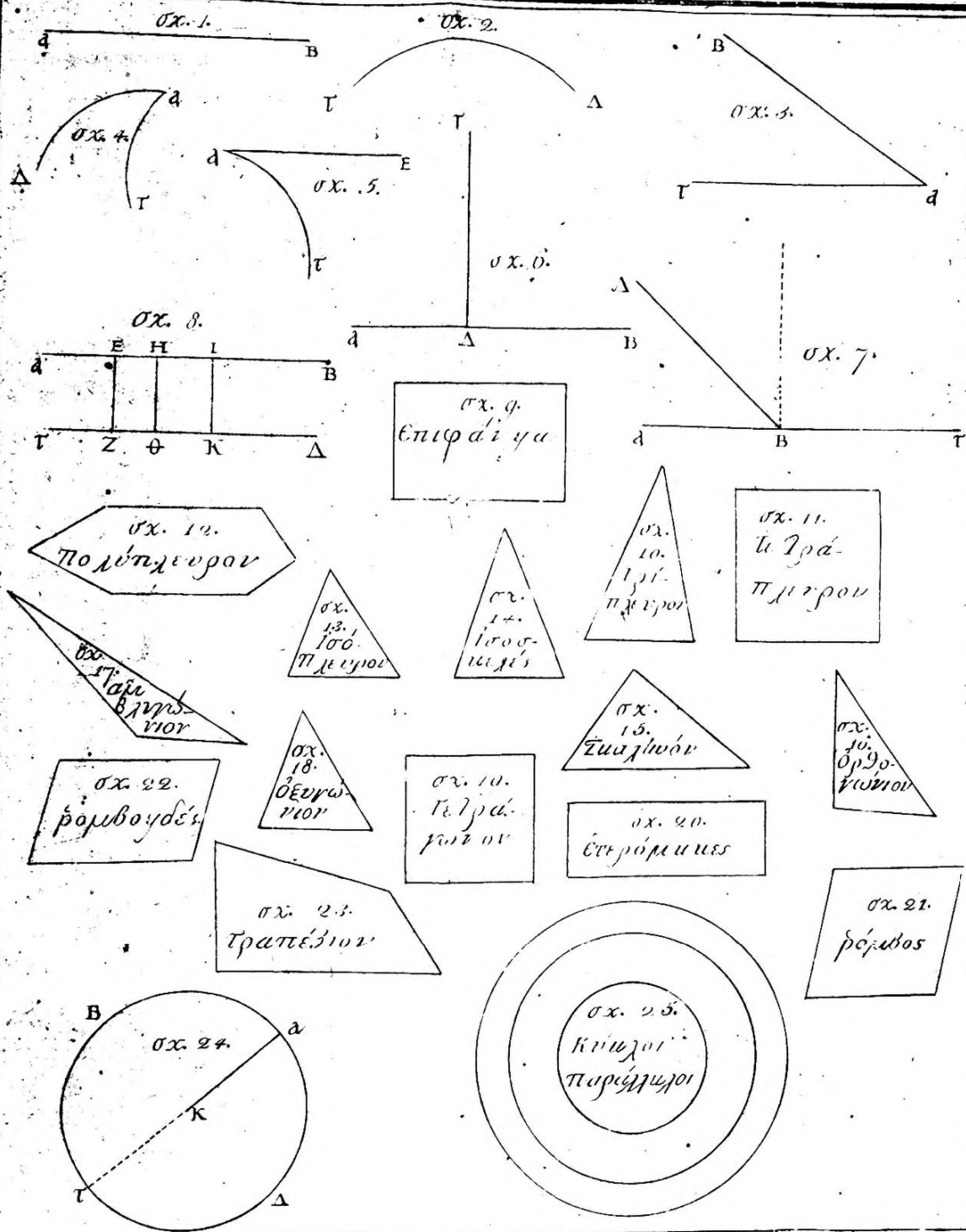
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β.

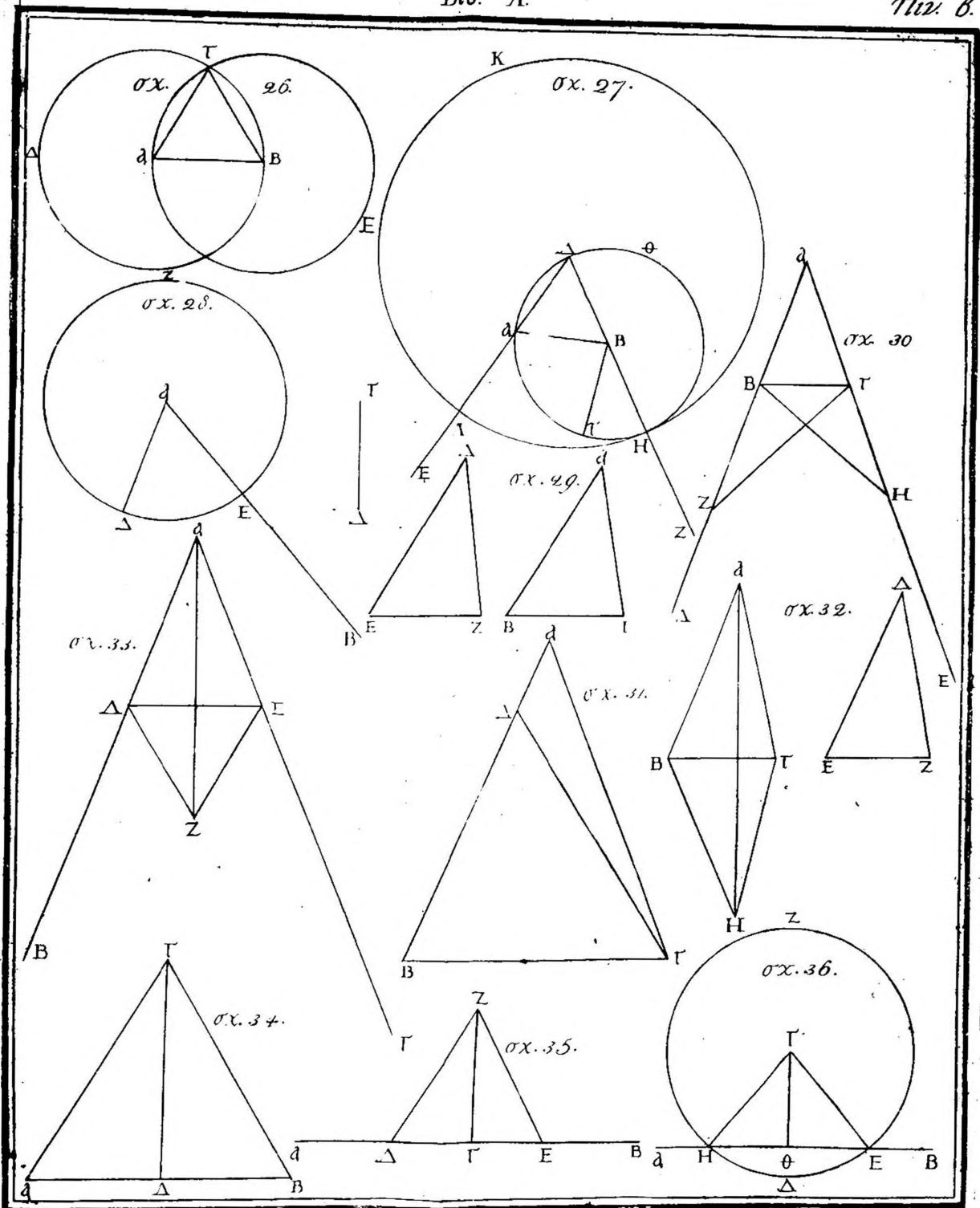
Εάν ἴδῃς εὐρεθέντας ἀριθμοὺς, οἷον τὸν $4666 + \frac{2}{3}$ καὶ τὸν $1555 + \frac{5}{9}$, καὶ τὸν $777 + \frac{7}{9}$ συνάψας, εὐρήσῃς τὸ ἱερὸν ἀθροισμα ἴσον τῷ διαιρεθέντι ἀριθμῷ, εἴηεν τὰ 7000, ἀληθεὺς ἔσονται οἱ εὐρεθέντες. ὡσάυτως ἀληθεὺς ἔσονται, εἰάν ὡς $4666 + \frac{2}{3} : 1555 + \frac{5}{9} :: 6 : 2$ καὶ $4666 + \frac{2}{3} : 777 + \frac{7}{9} :: 6 : 1$. καὶ $1555 + \frac{5}{9} : 777 + \frac{7}{9} :: 2 : 1$.

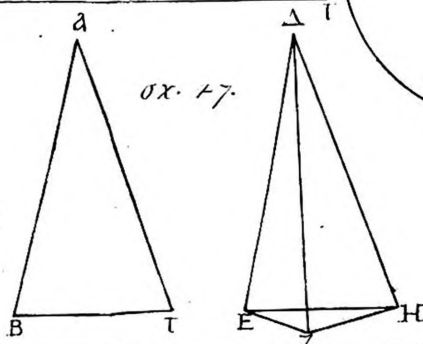
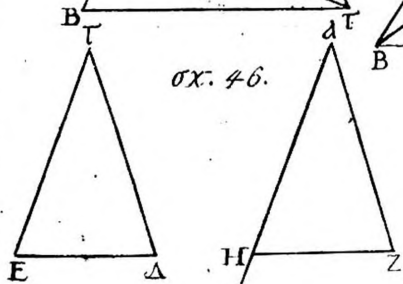
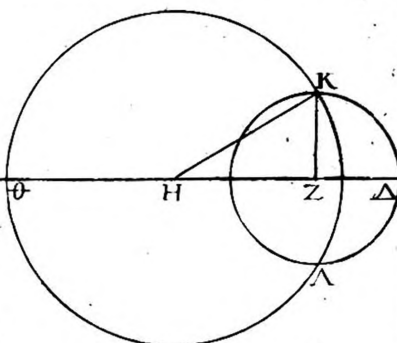
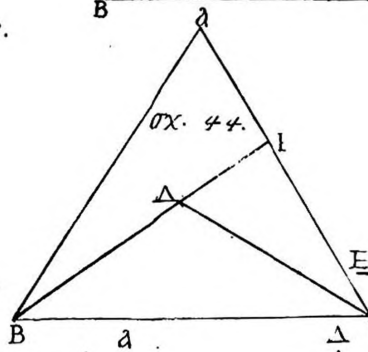
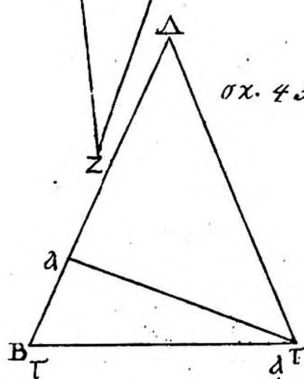
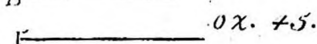
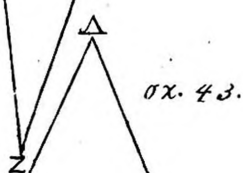
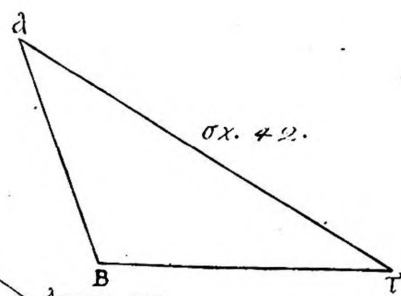
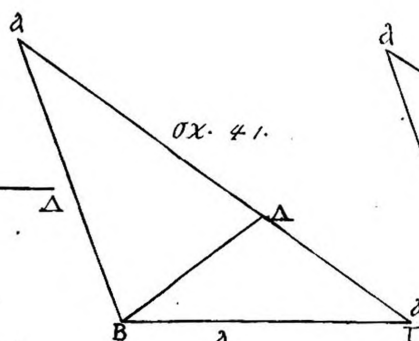
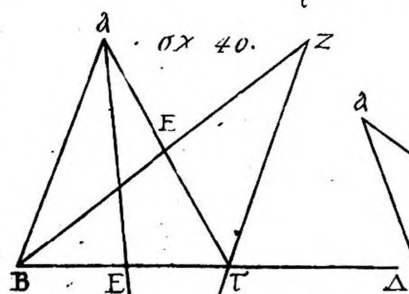
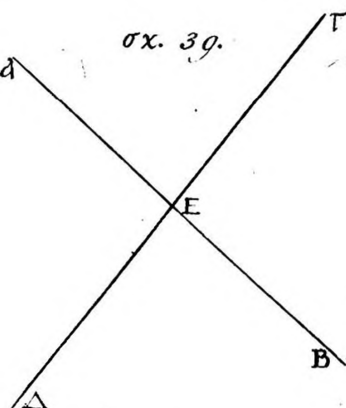
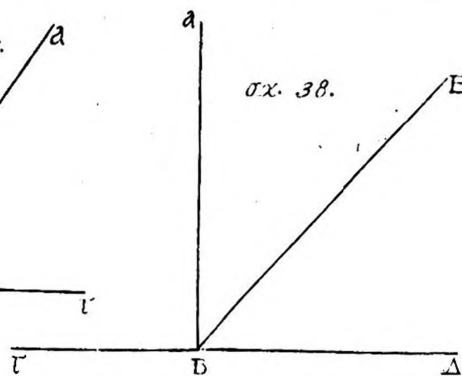
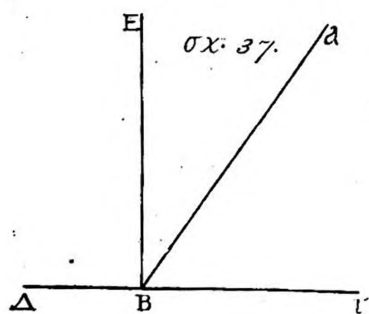
Τ Ε Λ Ο Σ

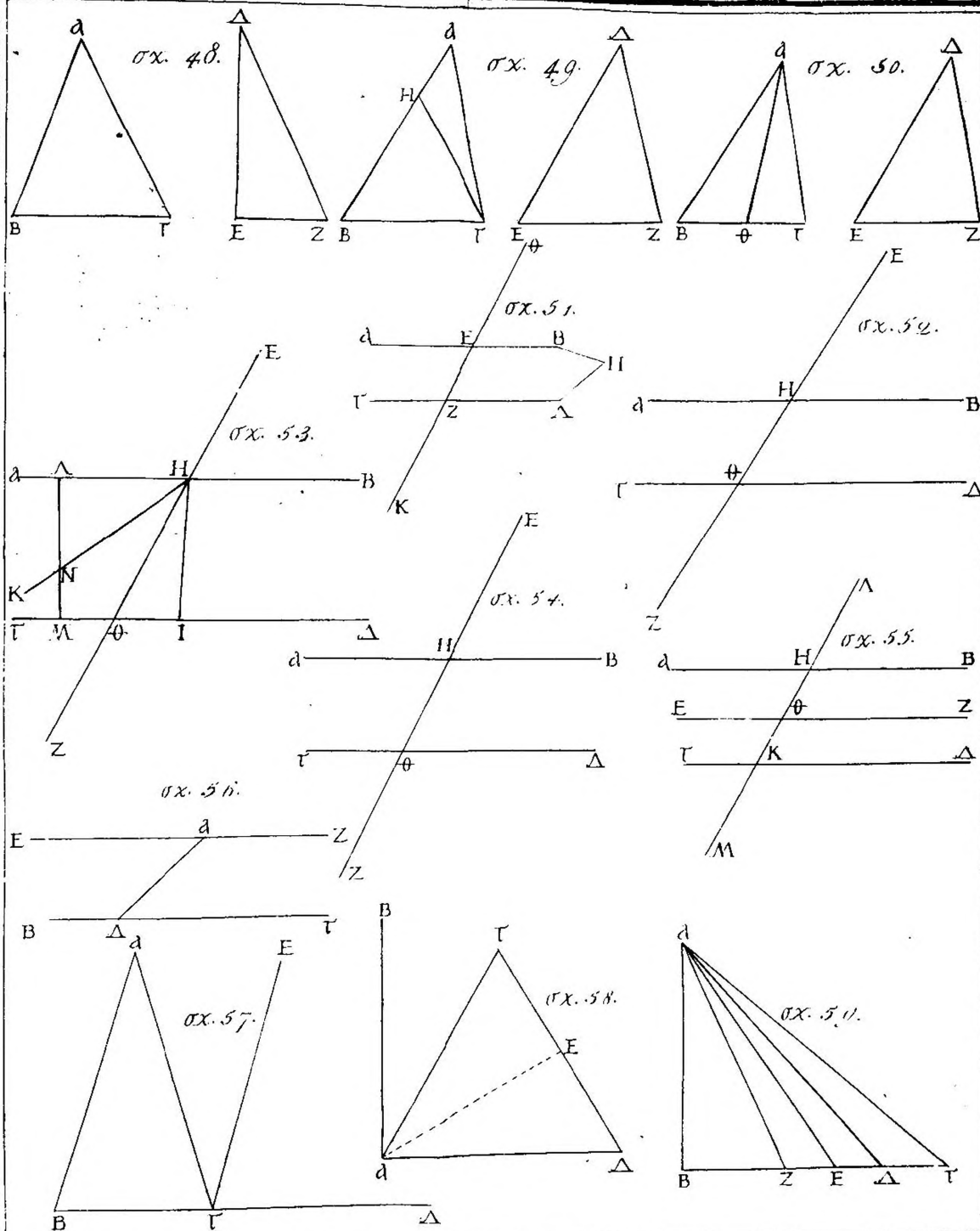
ΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.



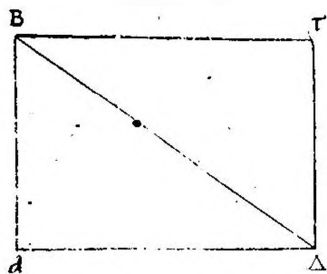




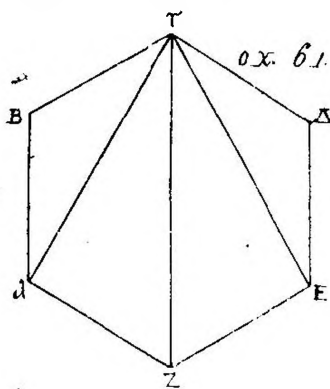




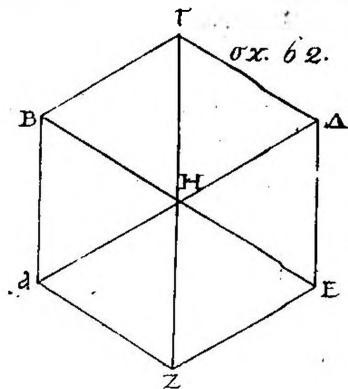
σx. 60.



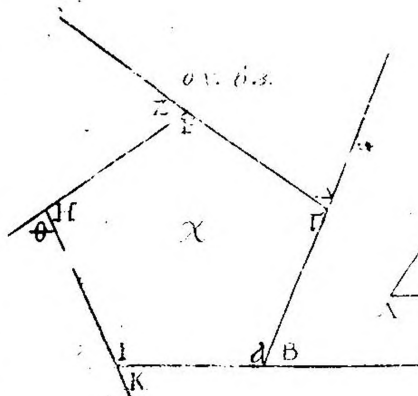
σx. 61.



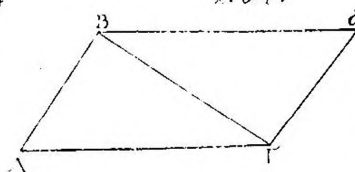
σx. 62.



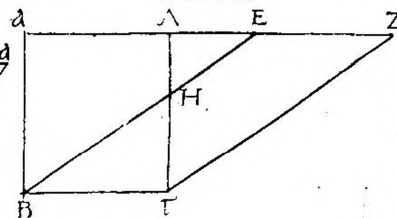
σx. 63.



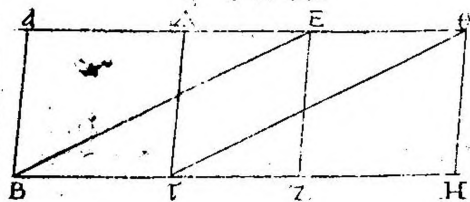
σx. 64.



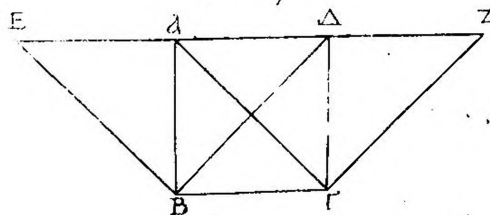
σx. 65.



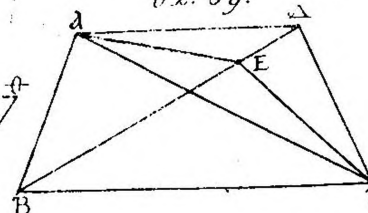
σx. 66.



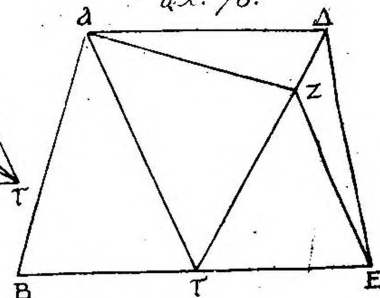
σx. 67.



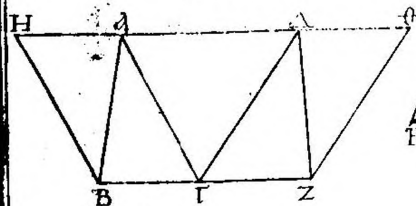
σx. 69.



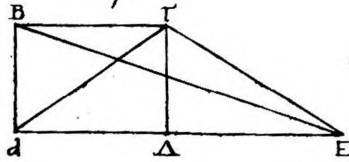
σx. 70.



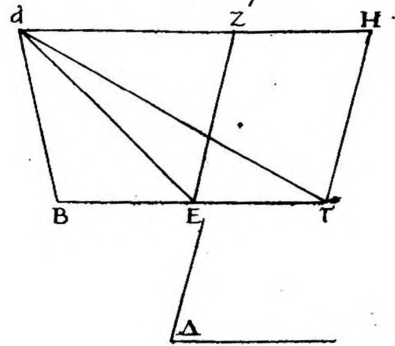
σx. 68.



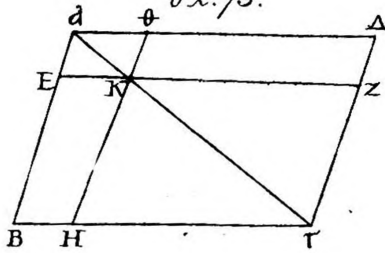
σx. 71.



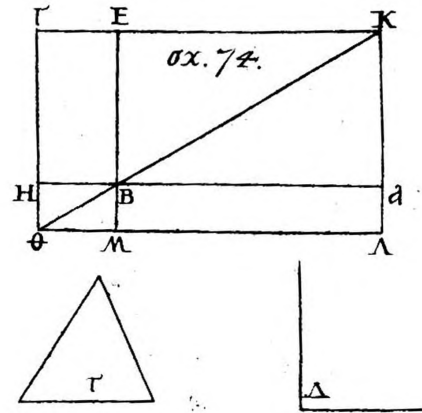
σx. 72.



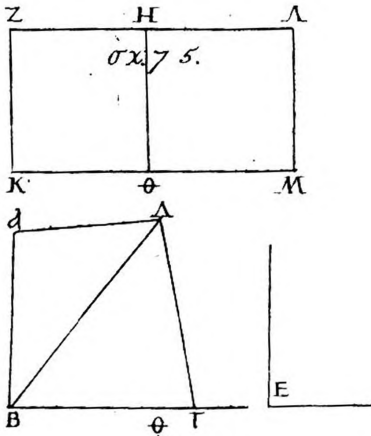
σx. 73.



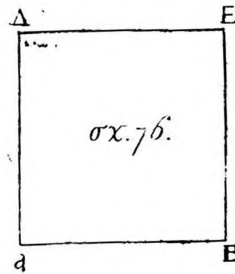
σx. 74.



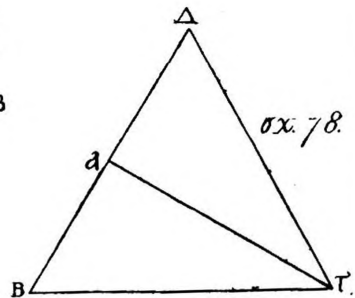
σx. 75.



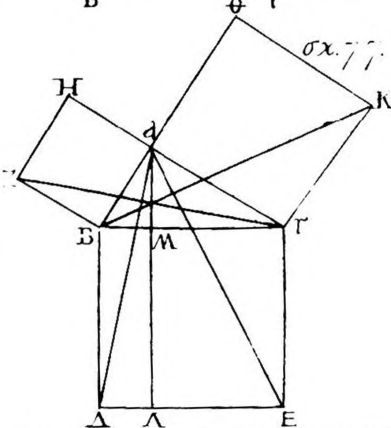
σx. 76.

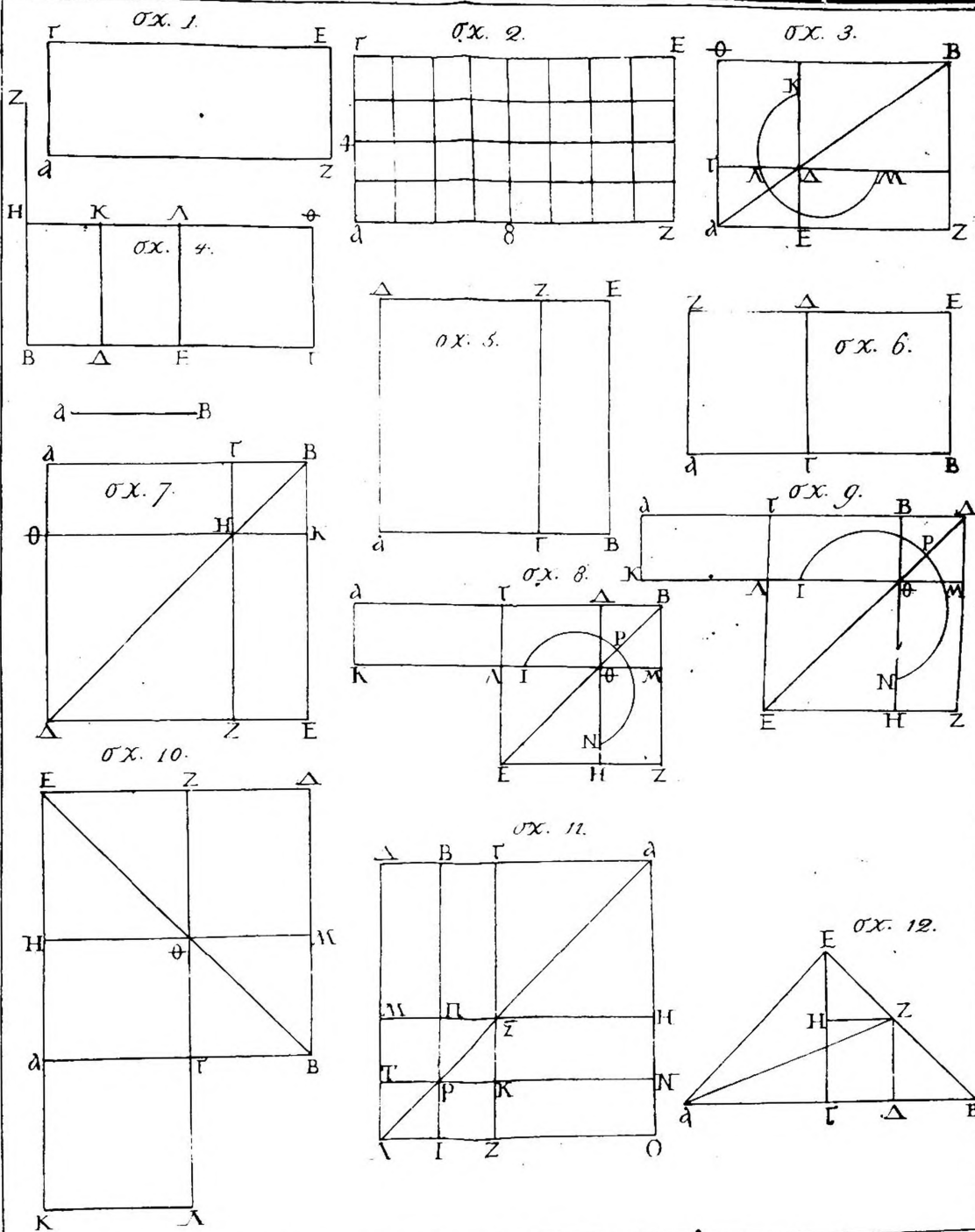


σx. 78.

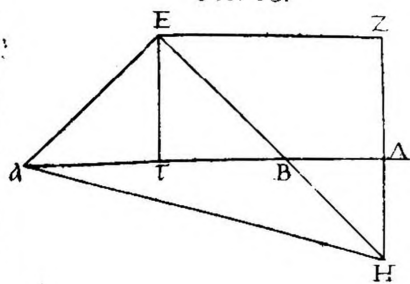


σx. 77.

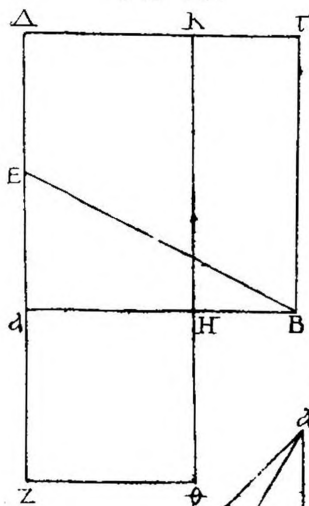




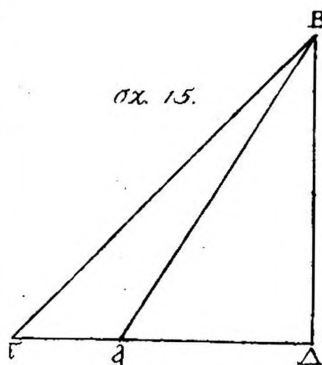
σχ. 13.



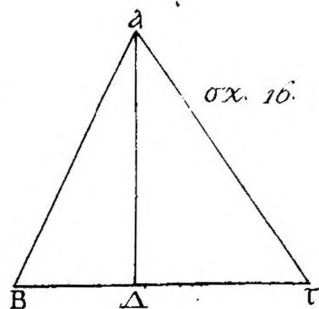
σχ. 14.



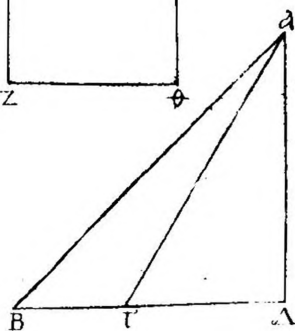
σχ. 15.



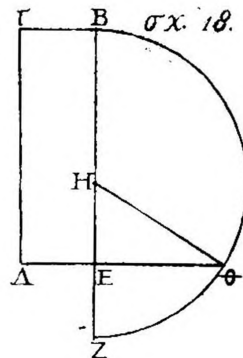
σχ. 16.



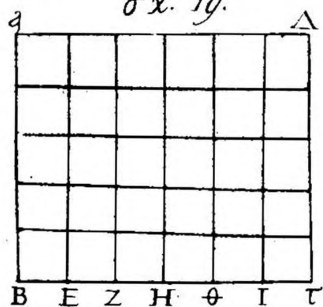
σχ. 17.



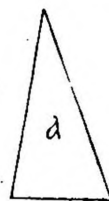
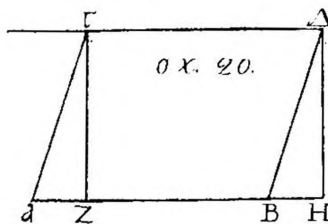
σχ. 18.



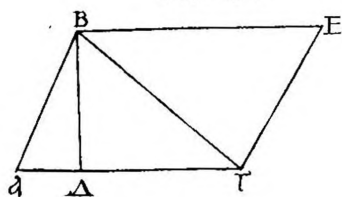
σχ. 19.



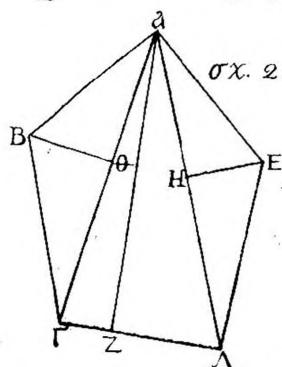
σχ. 20.



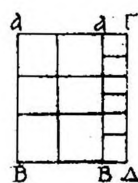
σχ. 21.



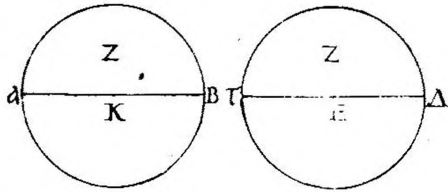
σχ. 22.



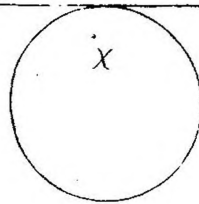
σχ. 23.



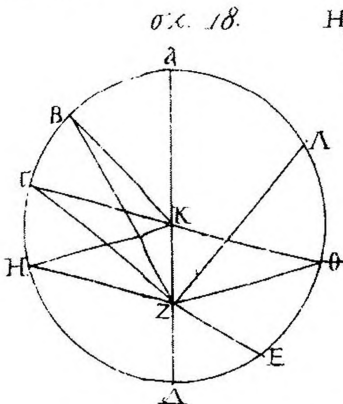
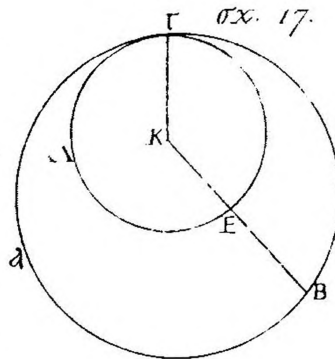
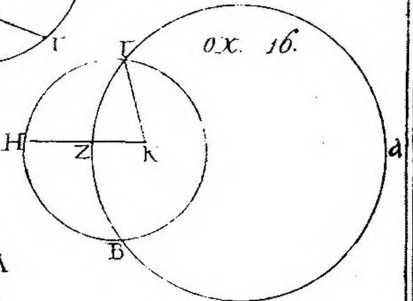
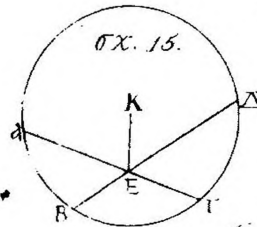
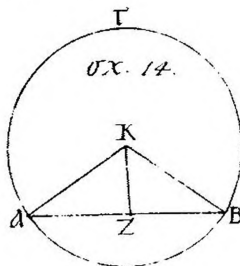
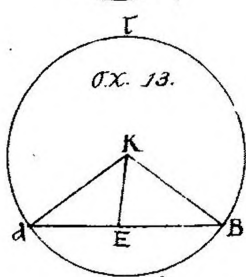
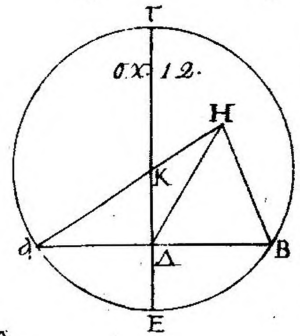
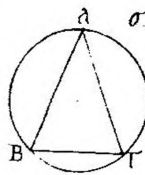
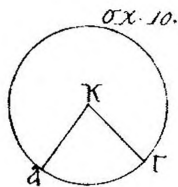
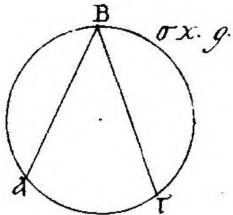
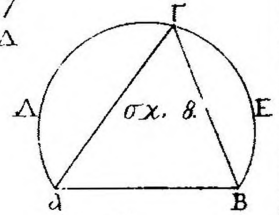
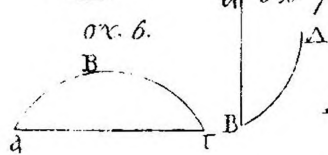
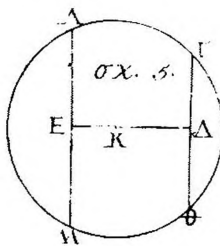
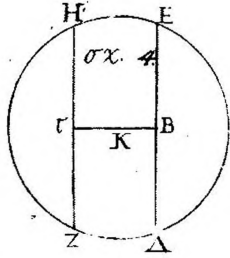
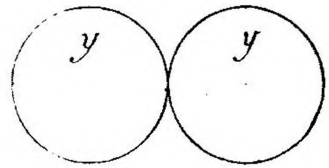
σχ. 1.

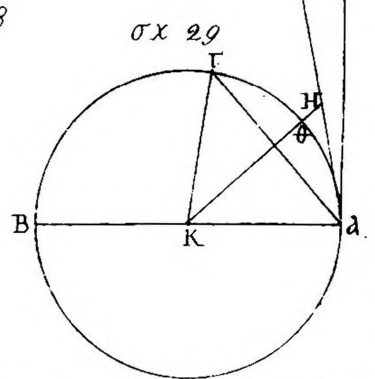
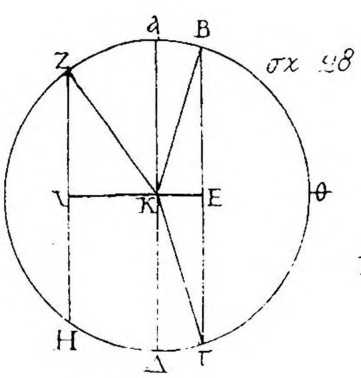
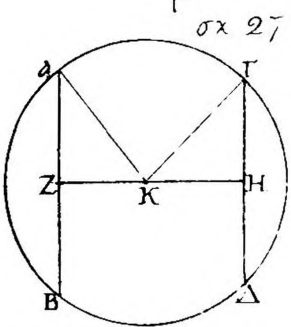
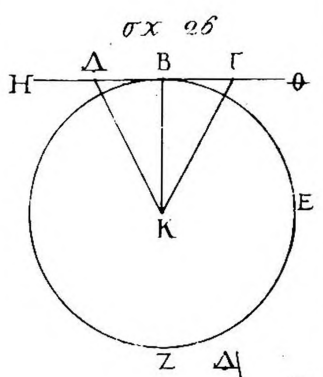
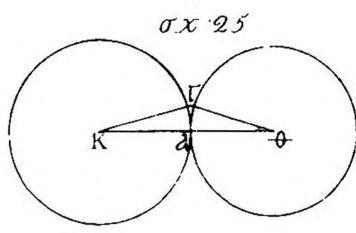
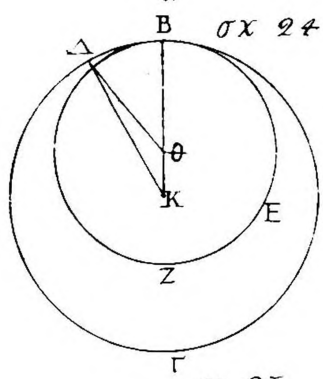
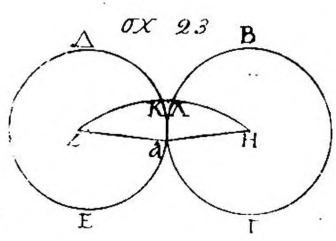
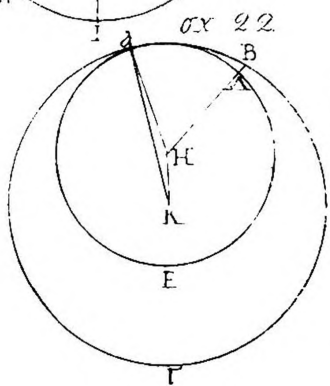
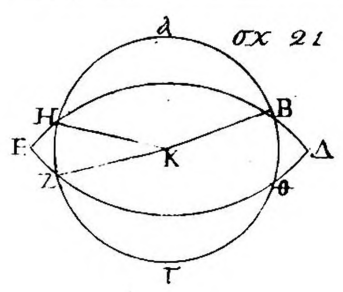
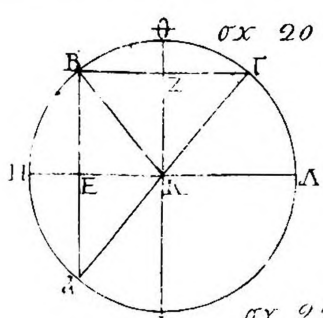
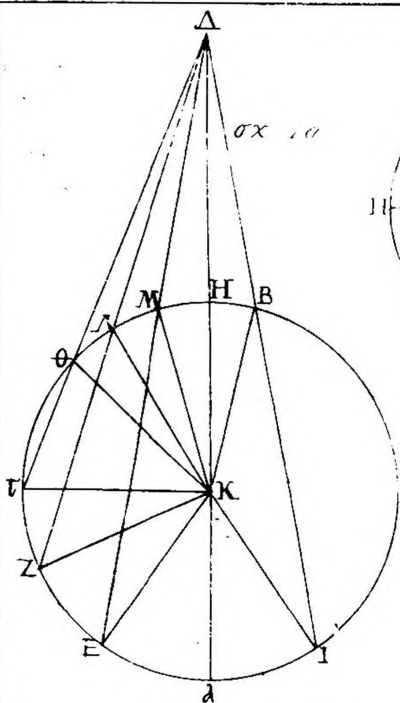


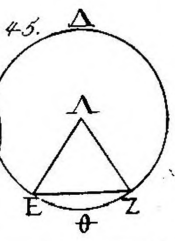
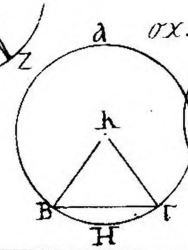
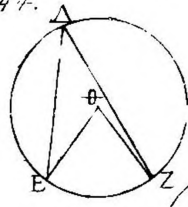
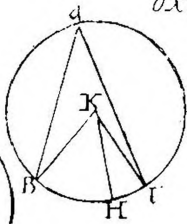
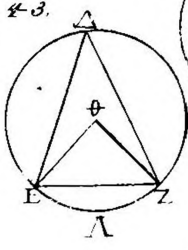
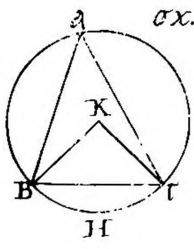
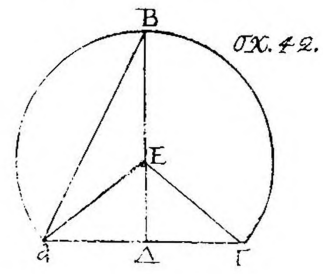
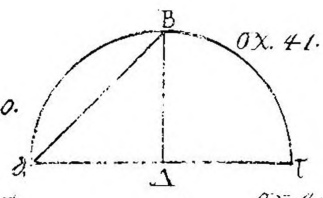
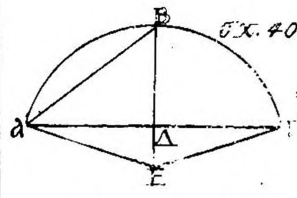
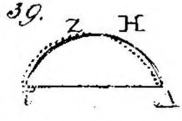
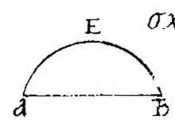
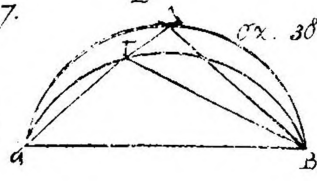
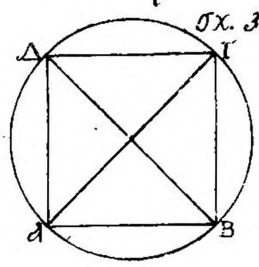
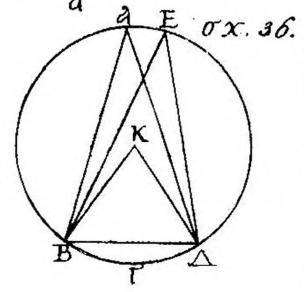
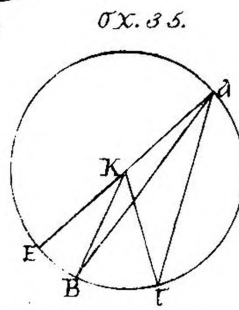
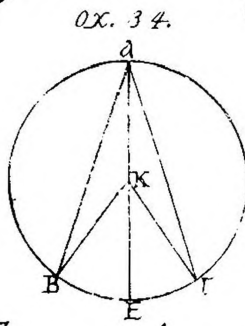
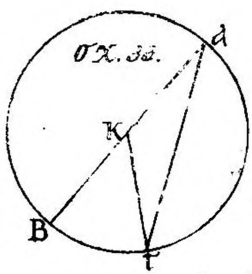
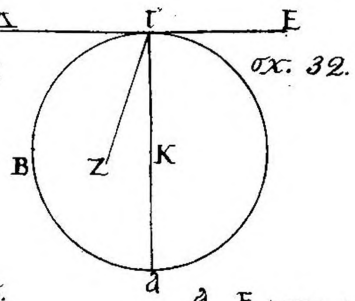
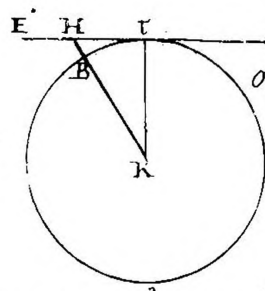
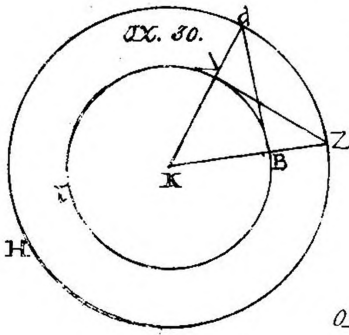
σχ. 2.

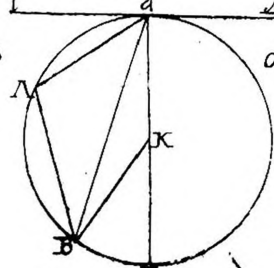
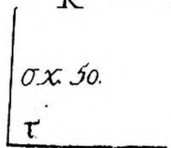
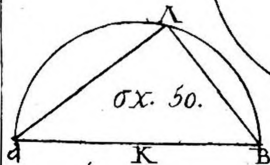
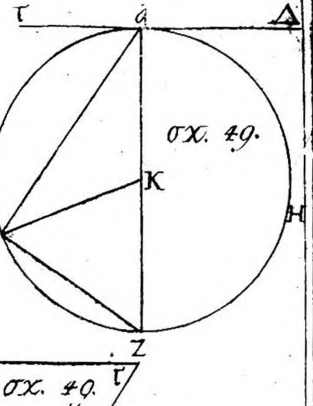
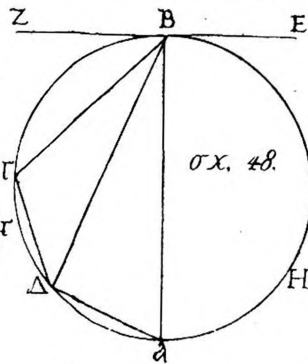
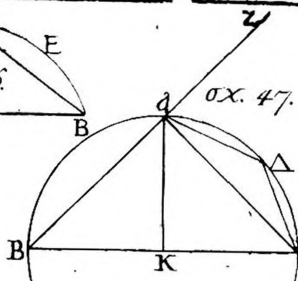
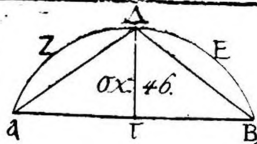


σχ. 3.

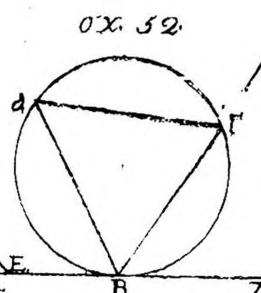




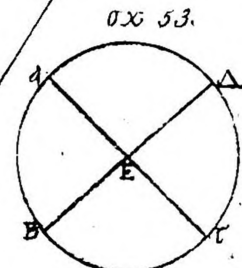




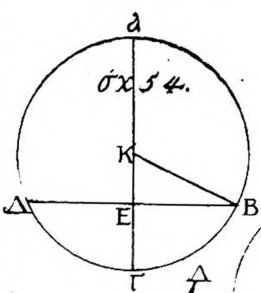
σx. 51.



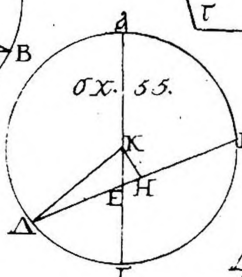
σx. 52.



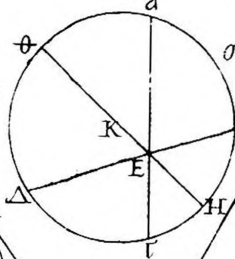
σx. 53.



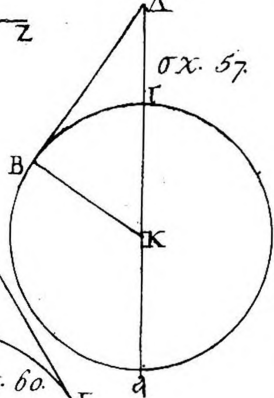
σx. 54.



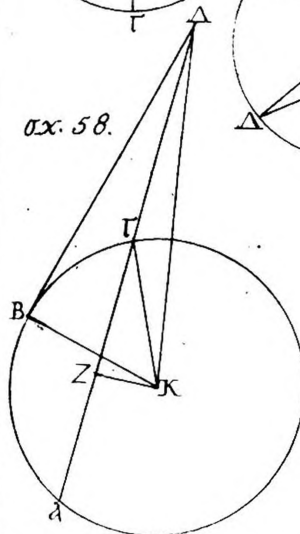
σx. 55.



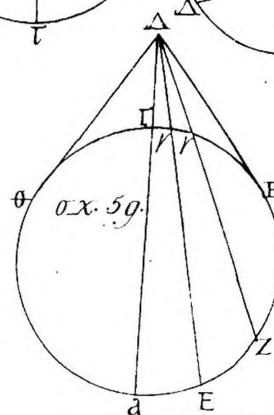
σx. 56.



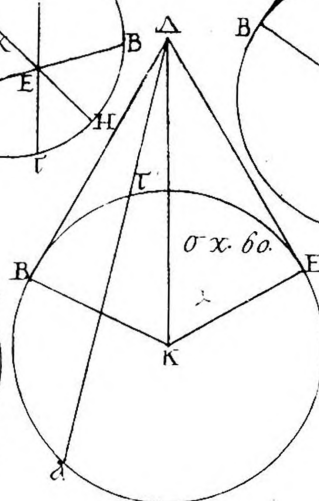
σx. 57.



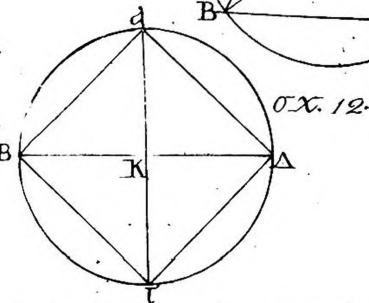
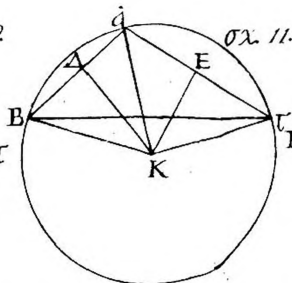
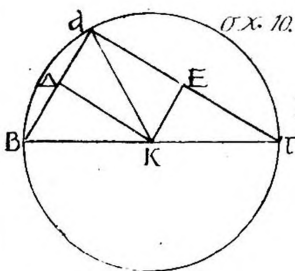
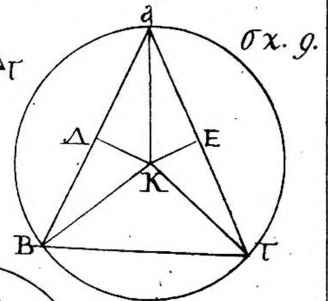
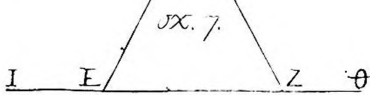
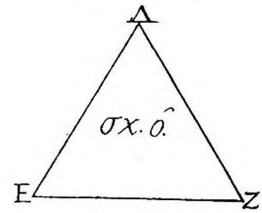
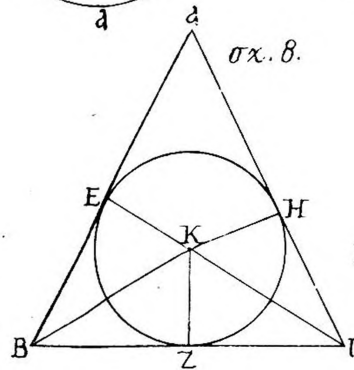
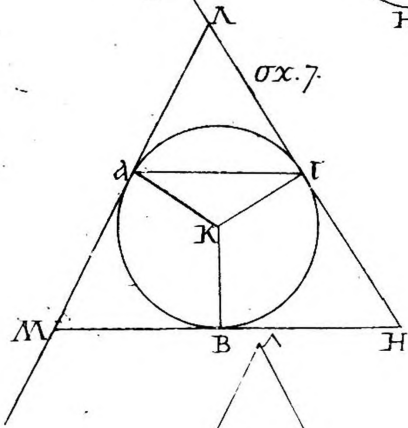
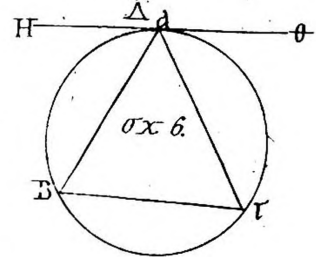
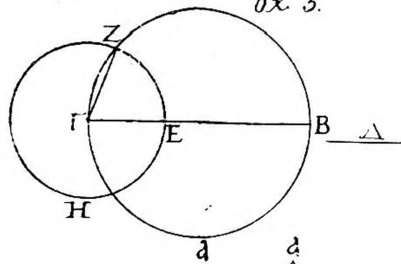
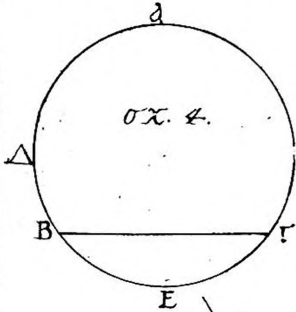
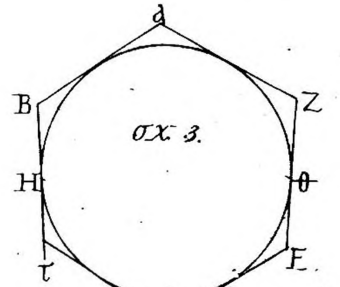
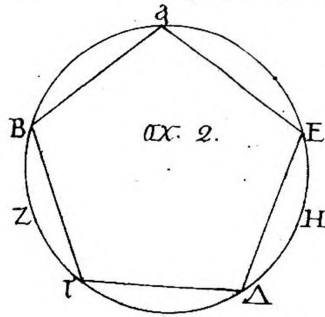
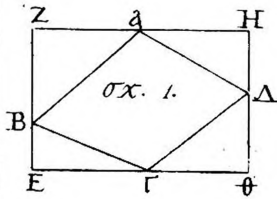
σx. 58.

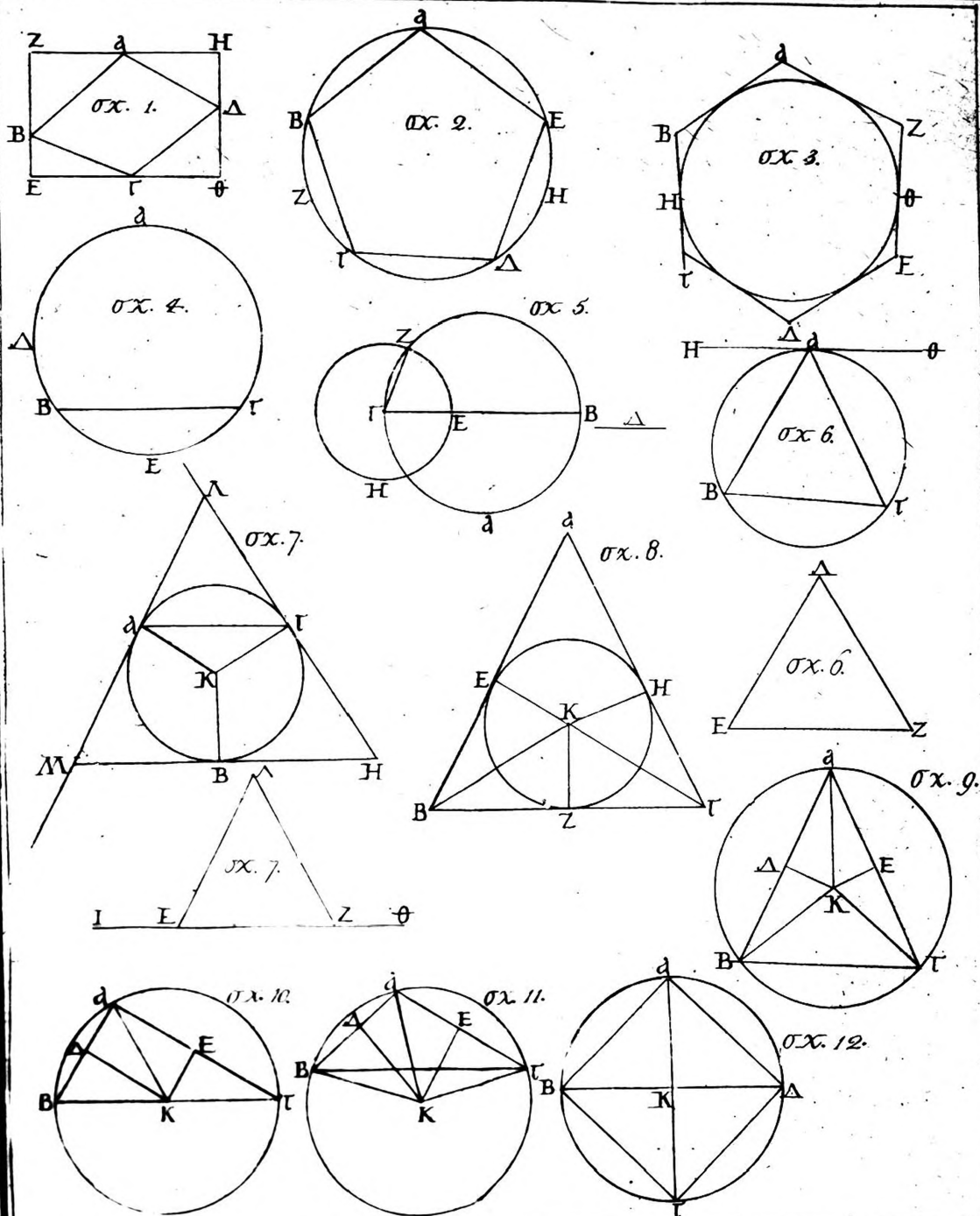


σx. 59.

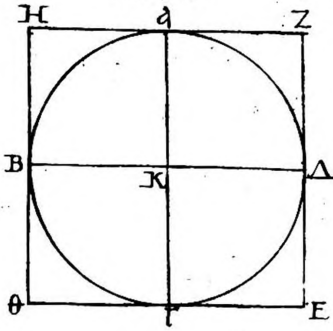


σx. 60.

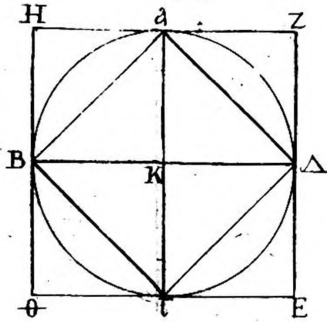




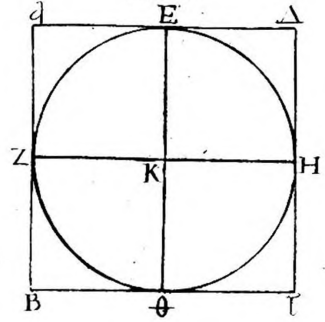
σχ. 13.



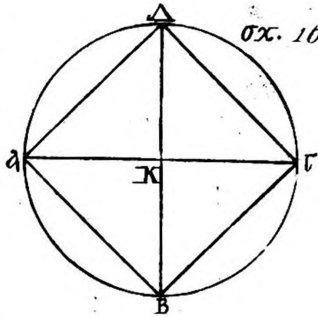
σχ. 14.



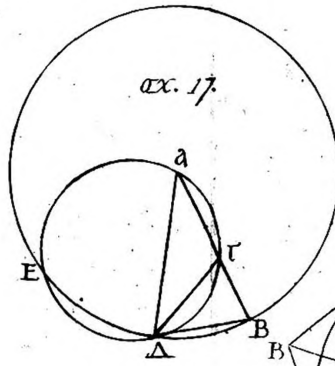
σχ. 15.



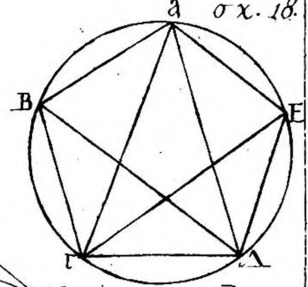
σχ. 16.



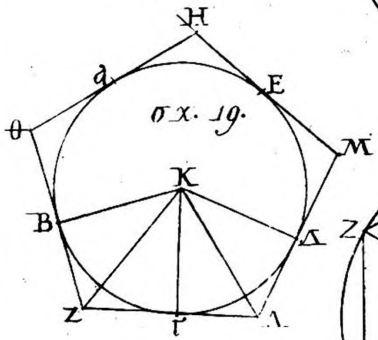
σχ. 17.



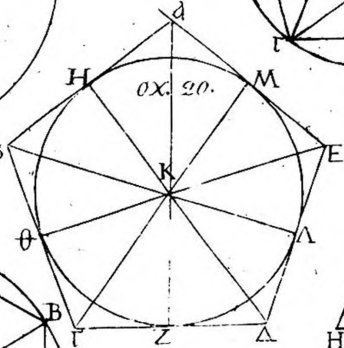
σχ. 18.



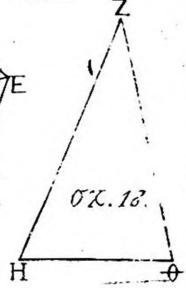
σχ. 19.



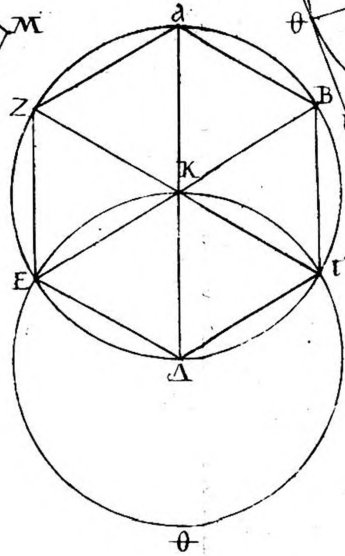
σχ. 20.



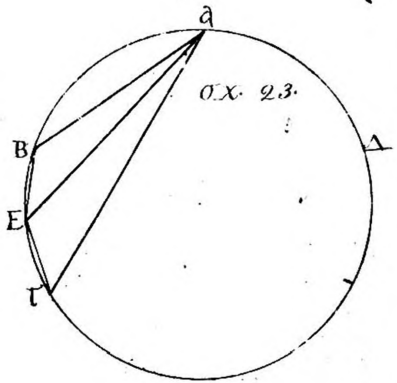
σχ. 21.

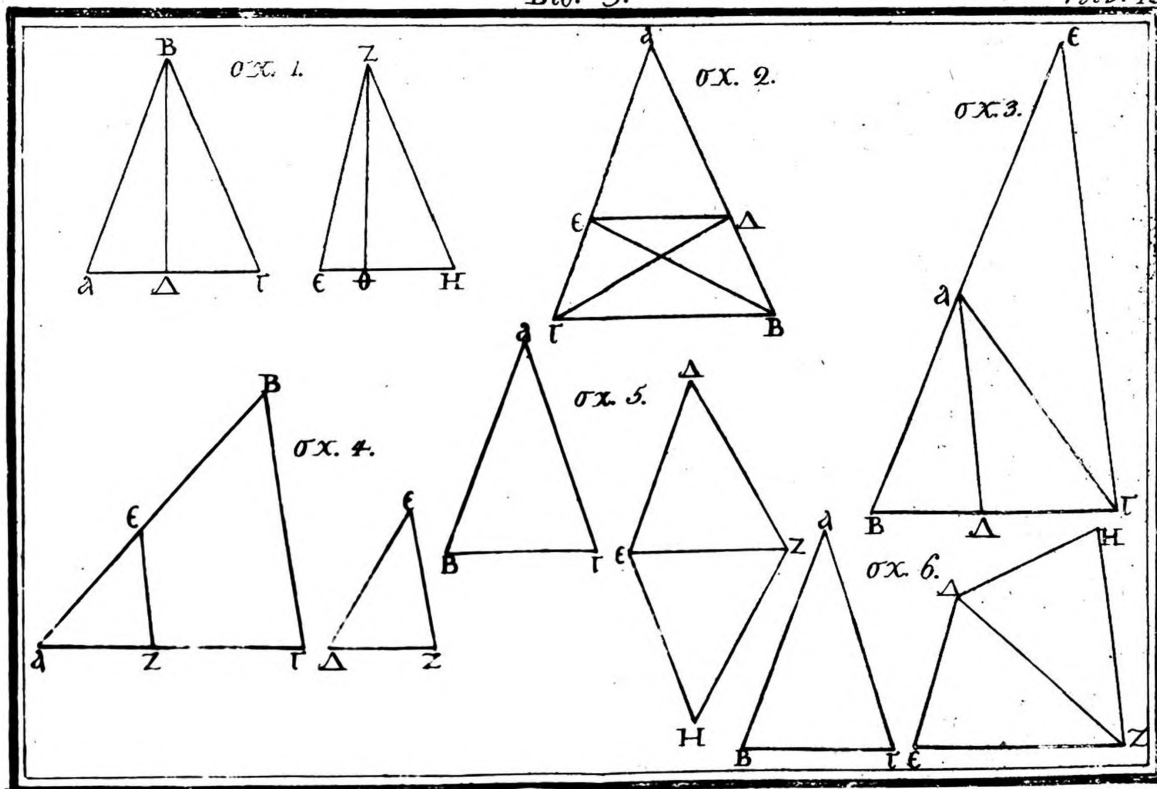
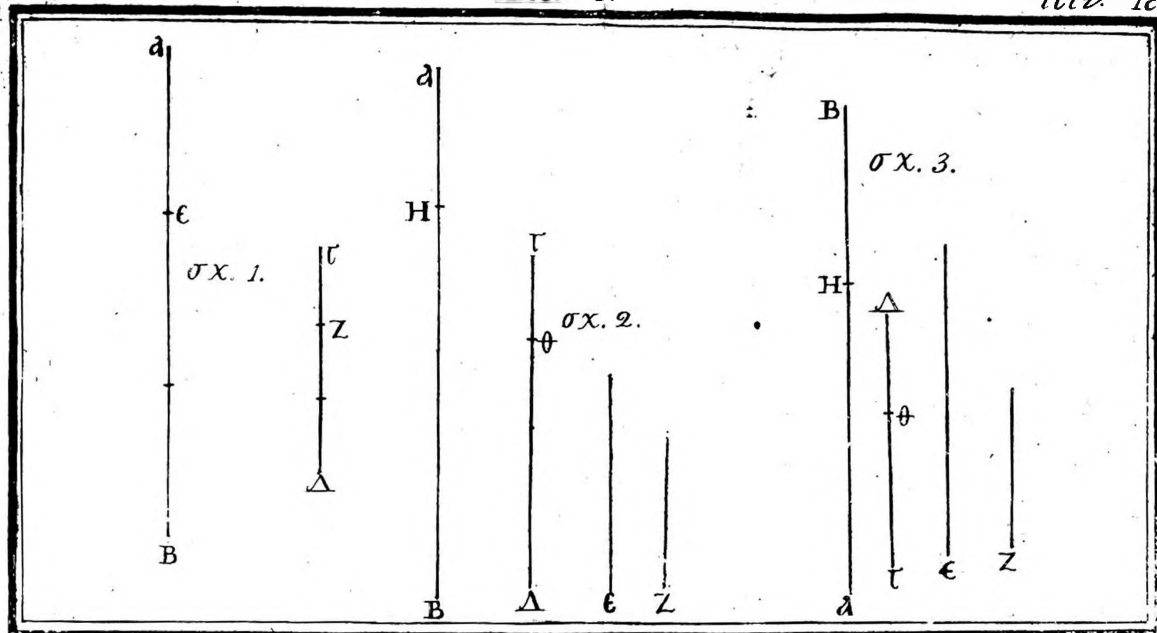


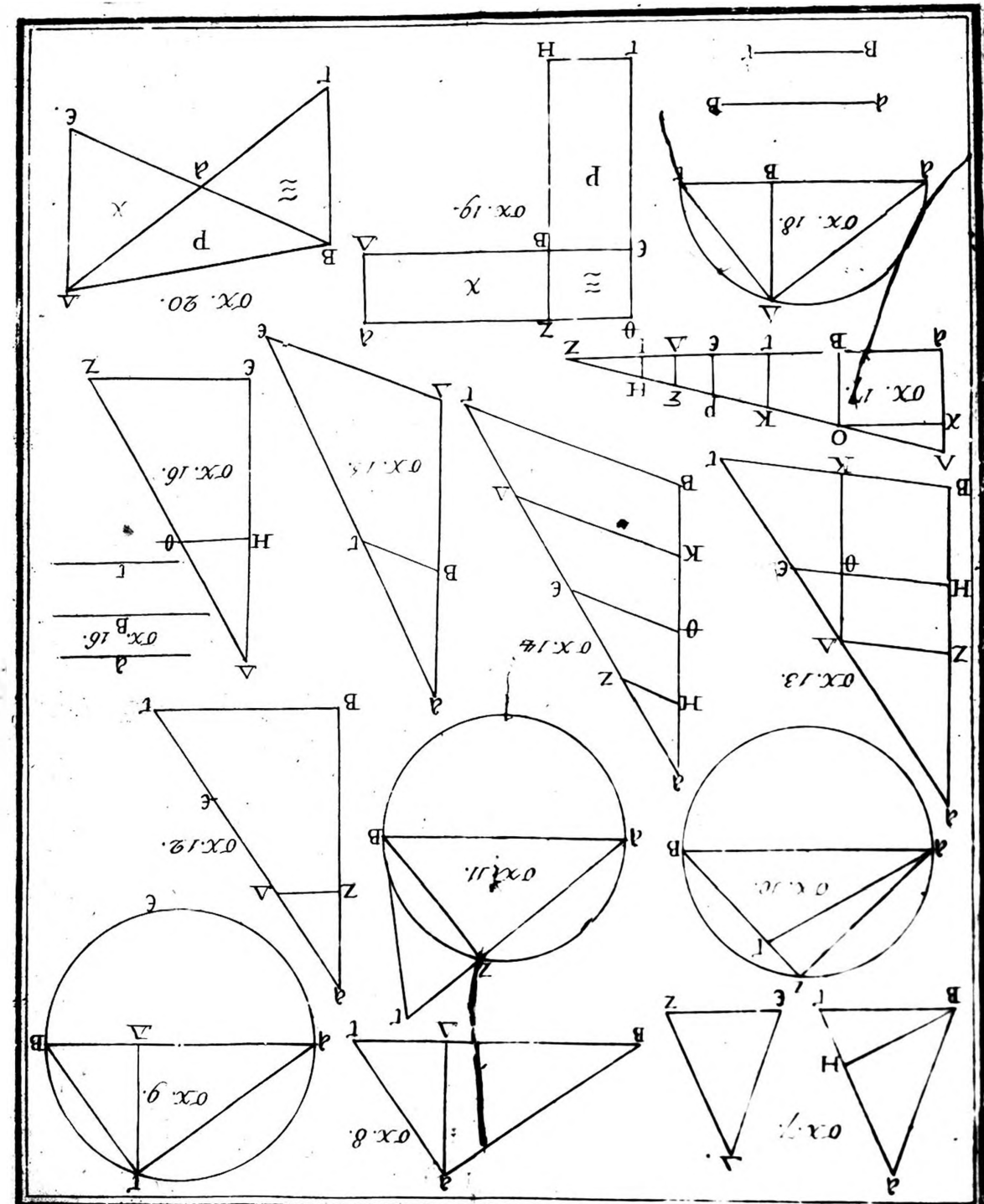
σχ. 22.

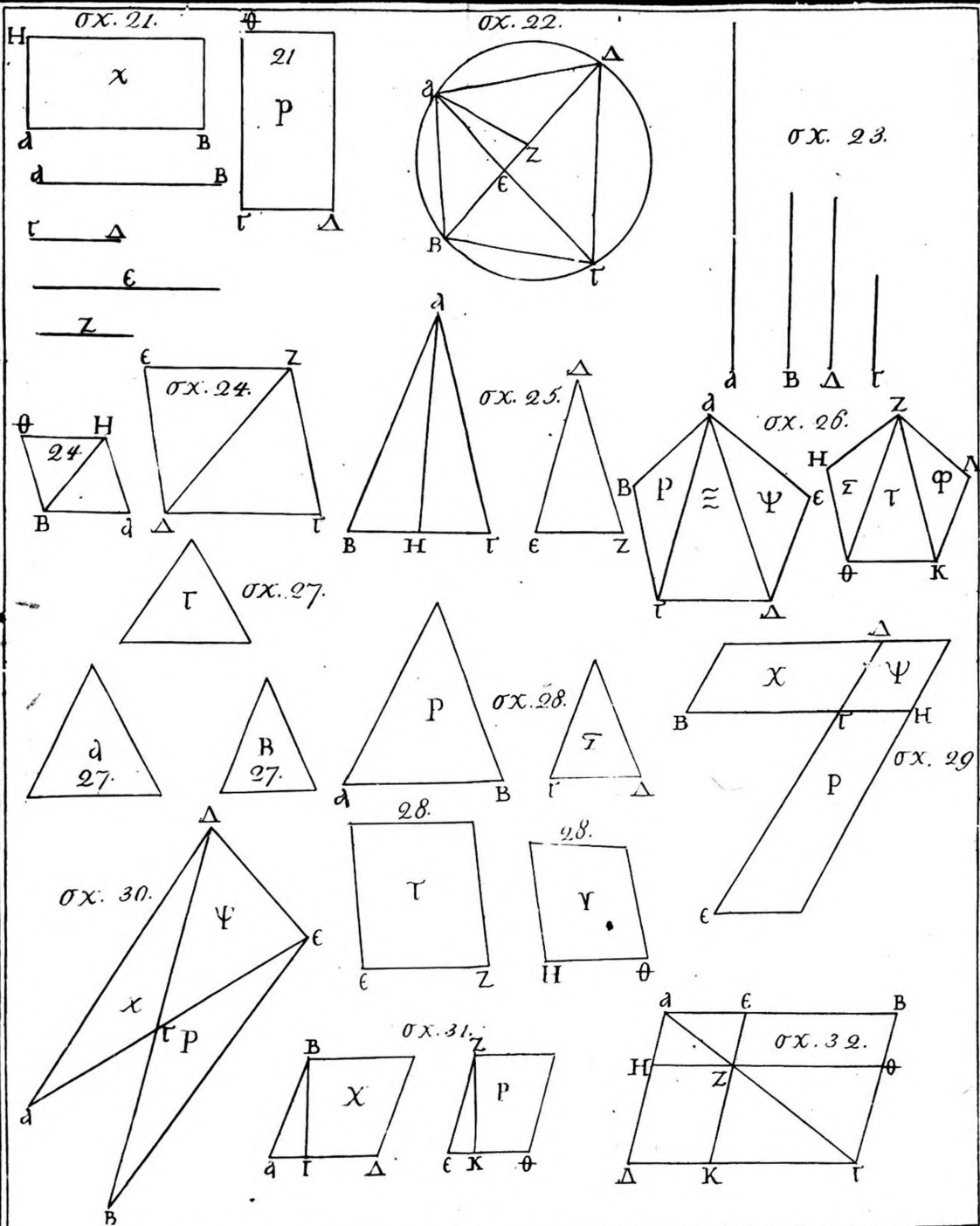


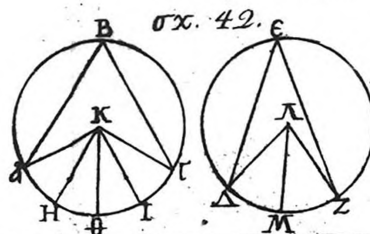
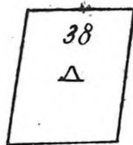
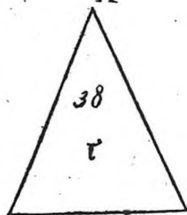
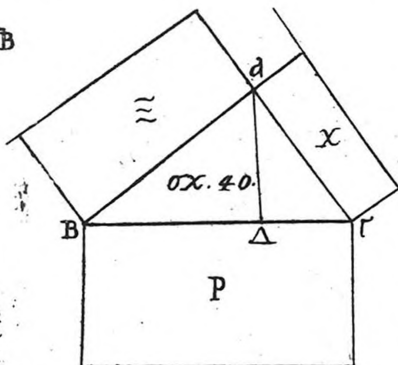
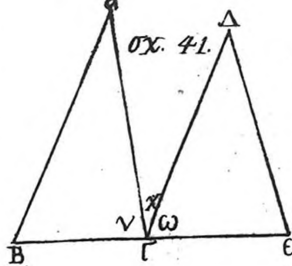
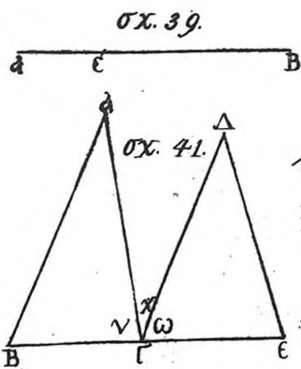
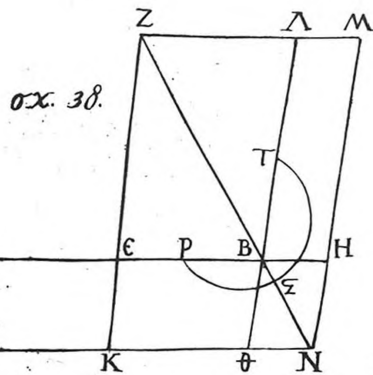
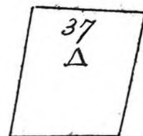
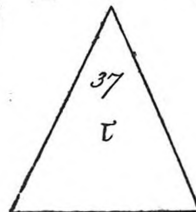
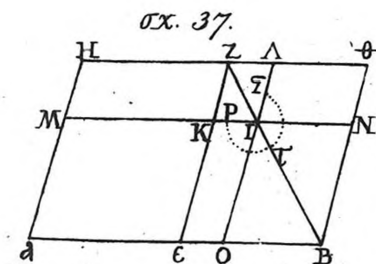
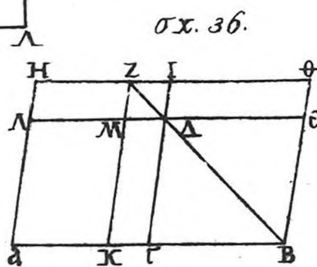
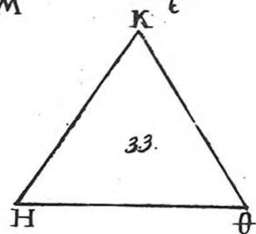
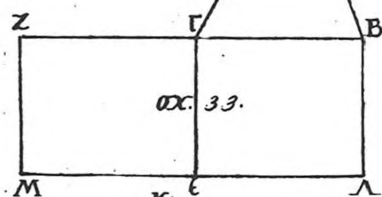
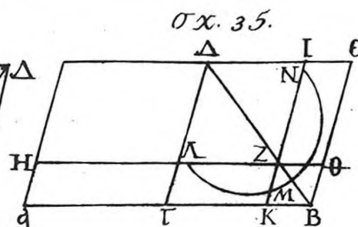
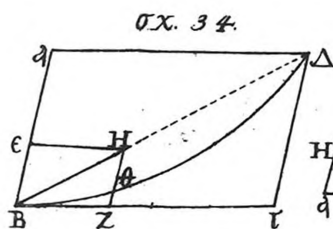
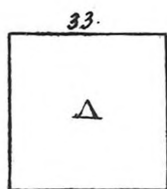
σχ. 23.

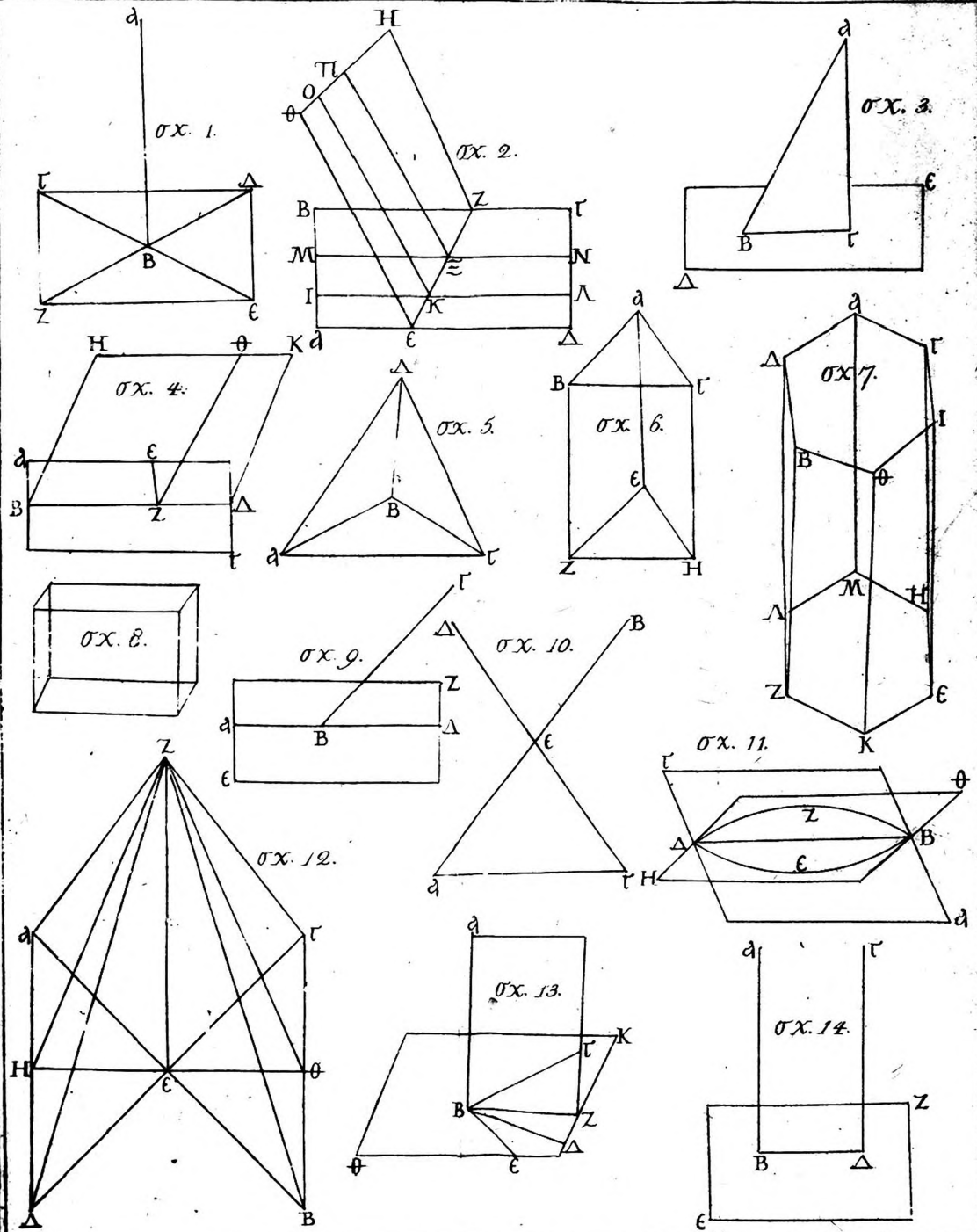


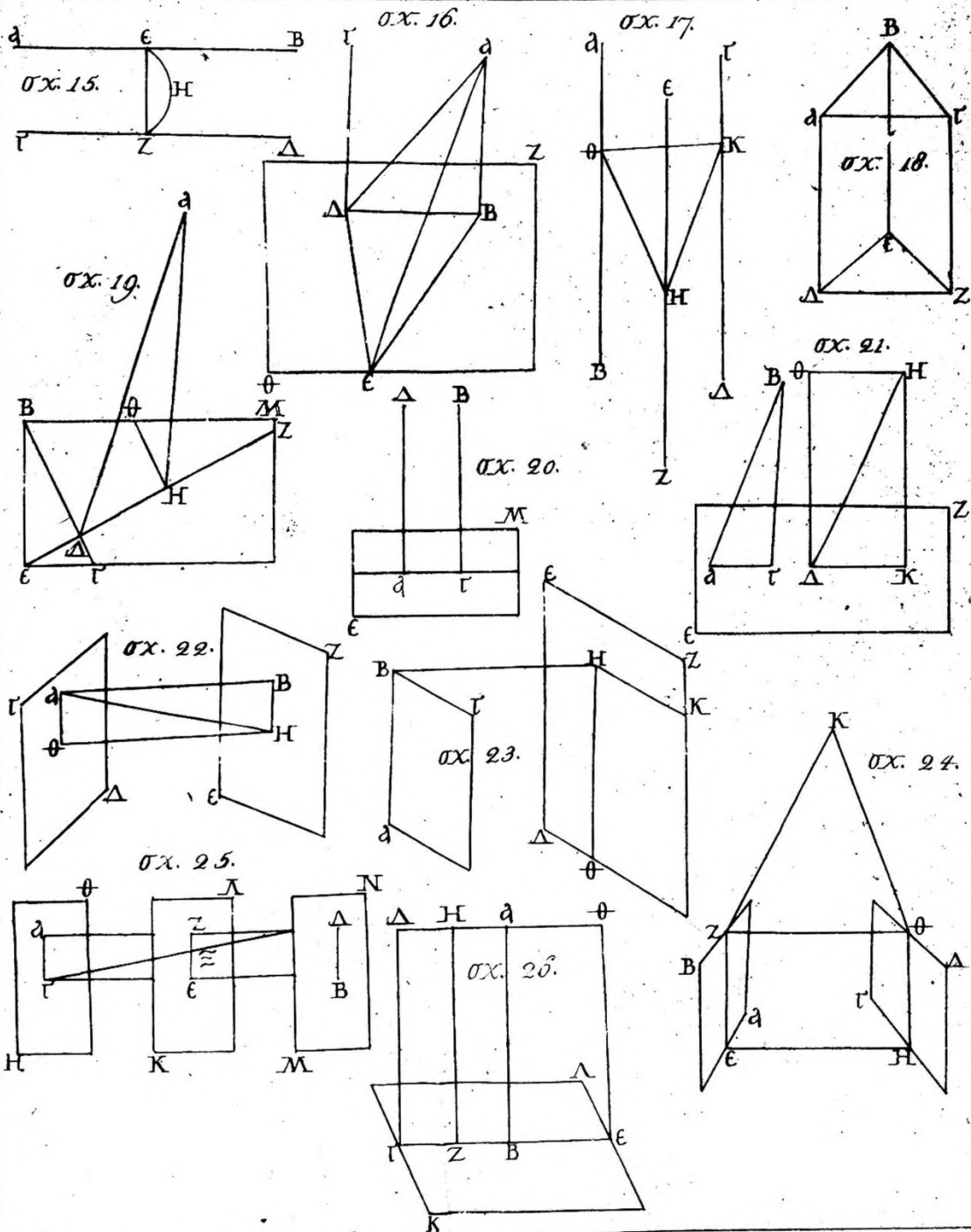


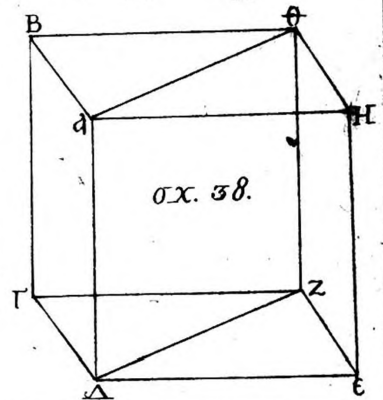
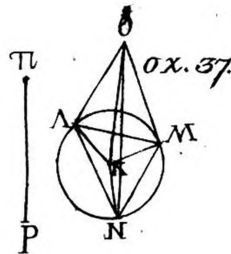
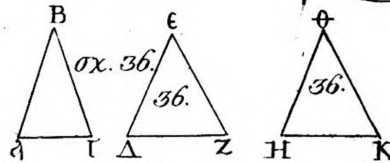
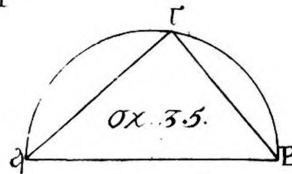
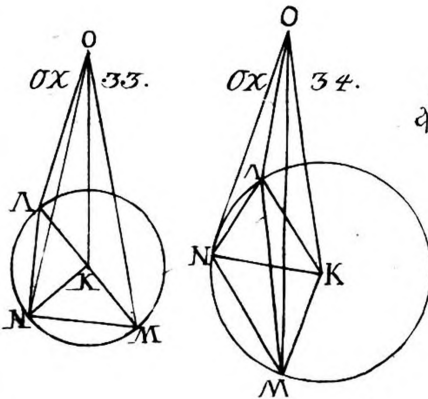
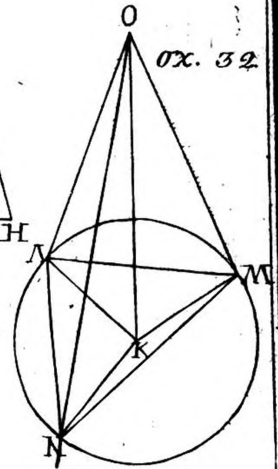
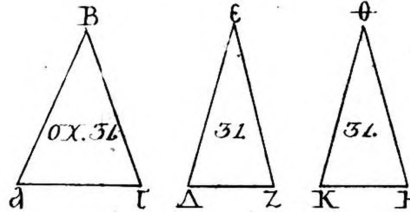
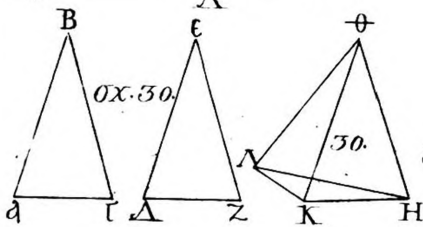
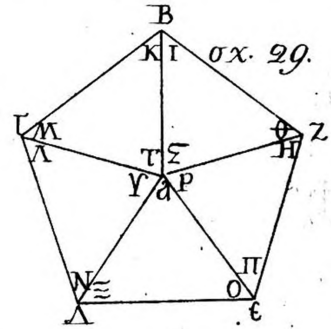
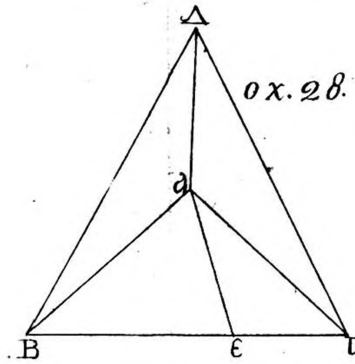
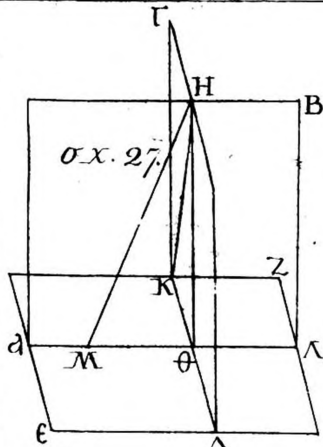


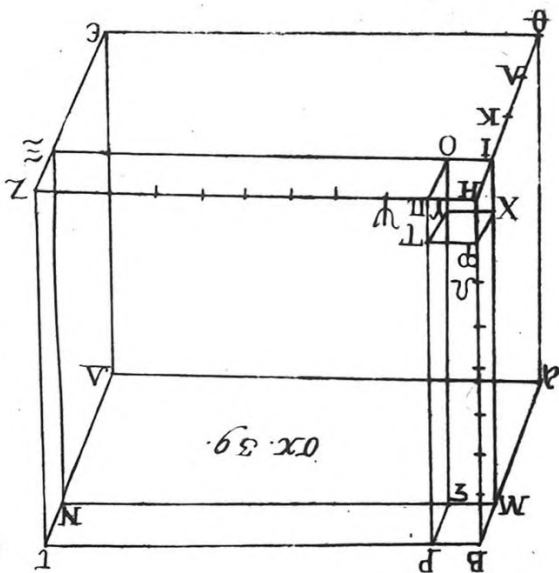
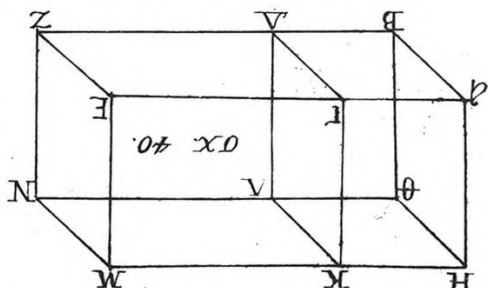
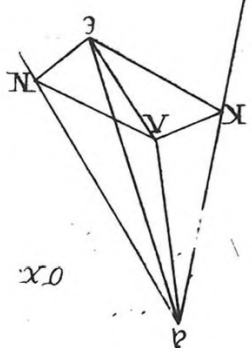
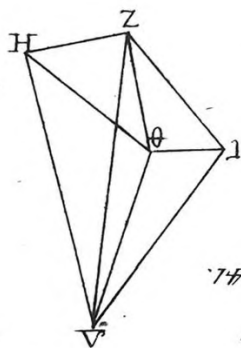
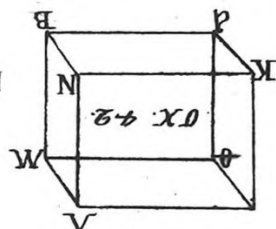
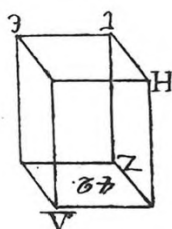
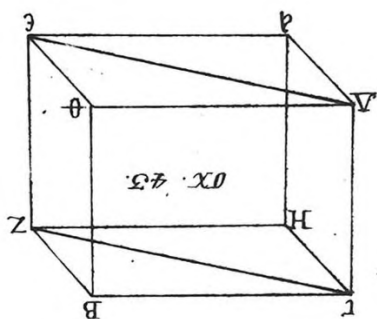
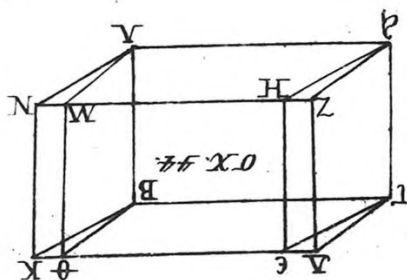
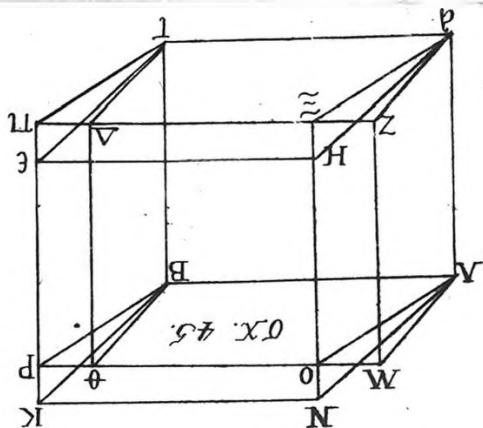


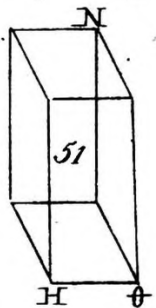
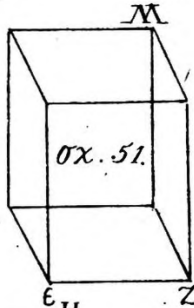
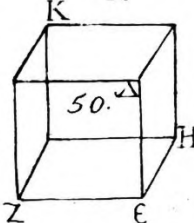
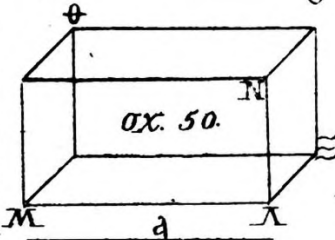
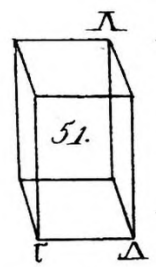
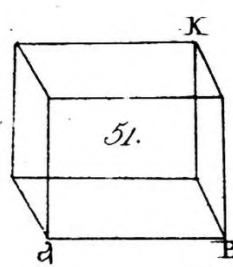
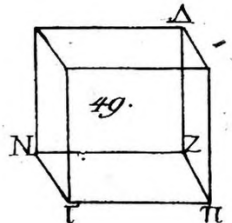
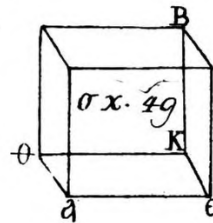
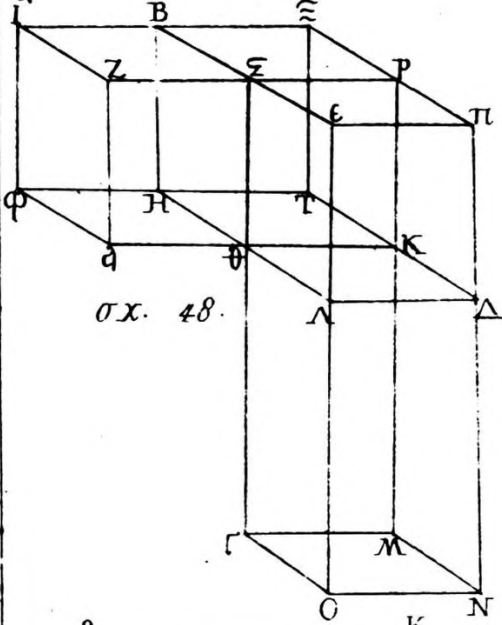
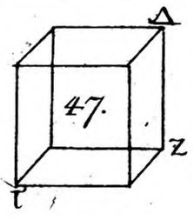
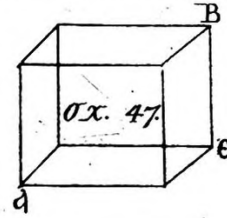
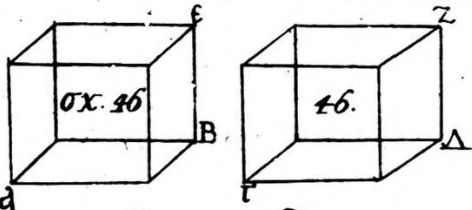




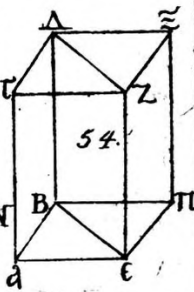
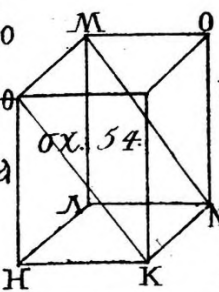
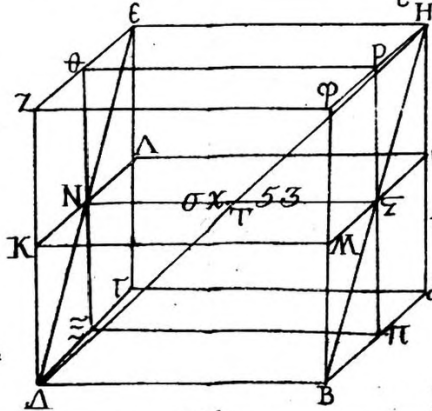
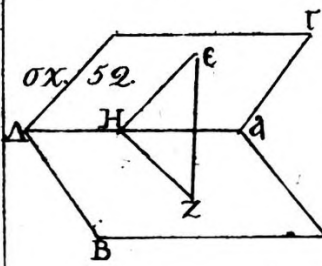


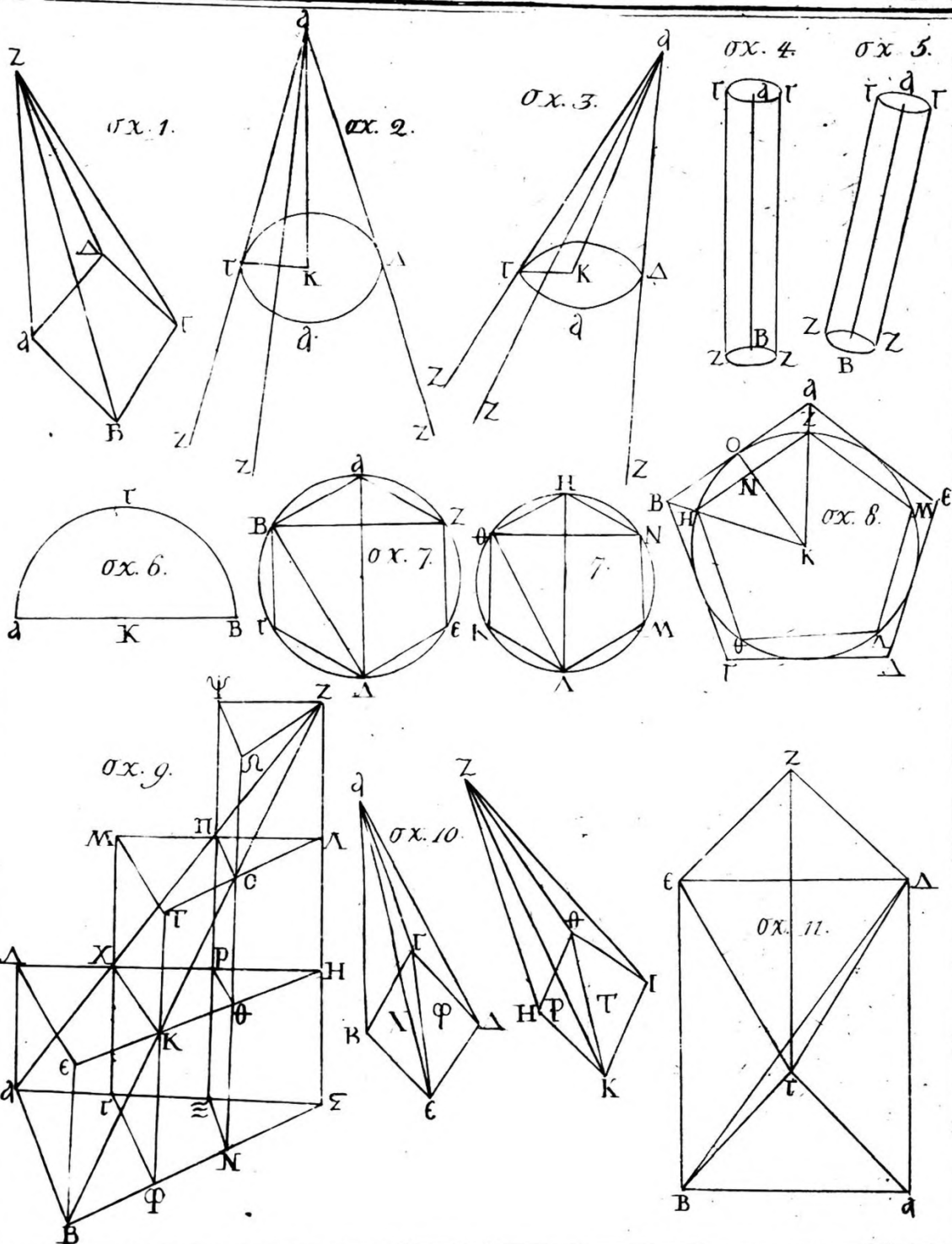


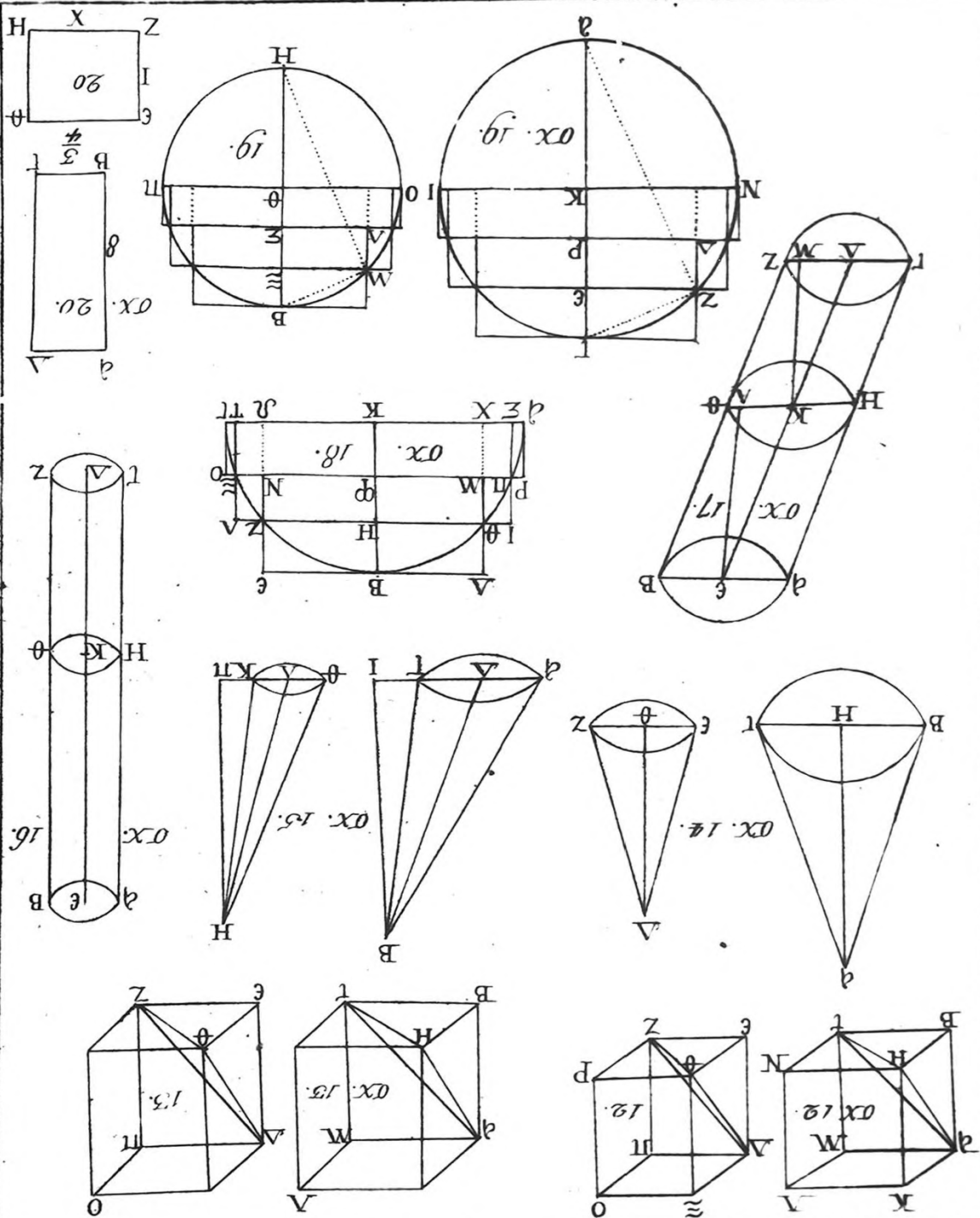




$\frac{B}{\Gamma}$
50.







Ο ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΥΠΟΣ.

Ἀριθμ. Γεωμ. Ἀσυκρίθμιοι Ἀριθμ. Γεωμ. Λογάρισμοι.
ανάλ. ανάλ.

Α	1. 00000000	Ο	0. 00000000	Ο	9. 0021388	ο	95434570
Γ	3. 1622777	Ο	50000000	Ξ	9. 0008737	ο	95428467
Β	10. 0000000	Ι	00000000	Π	8. 9996088	ο	95422363
Β	10. 0000000	Ι	00000000	Ξ	9. 0008737	ο	95428467
Δ	5. 6234132	Ο	75000000	Ρ	9. 0002412	ο	95425415
Γ	3. 1622777	Ο	50000000	Π	8. 9996088	ο	95422363
Β	10. 0000000	Ι	00000000	Ρ	9. 0002412	ο	95425415
Ε	7. 4989421	Ο	87500000	Σ	8. 9999250	ο	95421889
Δ	5. 6234132	Ο	75000000	Π	8. 9996088	ο	95422363
Β	10. 0000000	Ι	00000000	Ρ	9. 0002412	ο	95425415
Ζ	8. 6596432	Ο	93750000	Τ	9. 0000831	ο	95424652
Ε	7. 4989421	Ο	87500000	Σ	8. 9999250	ο	95421889
Β	10. 0000000	Ι	00000000	Τ	9. 0000831	ο	95424652
Η	9. 3057204	Ο	96875000	Τ	9. 0000041	ο	95424271
Ζ	8. 6596432	Ο	93750000	Σ	8. 9999250	ο	95421889
Η	9. 3057204	Ο	97875000	Τ	9. 0000041	ο	95424271
Θ	8. 9768713	Ο	95312500	Χ	8. 9999650	ο	95424271
Ζ	8. 6596432	Ο	93750000	Σ	8. 9999250	ο	95421889
Η	9. 3057204	Ο	97875000	Τ	9. 0000041	ο	95424271
Ι	9. 1398170	Ο	96093750	Υ	8. 9999845	ο	95424217
Θ	8. 9768713	Ο	95312500	Χ	8. 9999650	ο	95424080
Ι	9. 1398170	Ο	96093750	Τ	9. 0000041	ο	95424271
Κ	9. 0579777	Ο	95703125	Φ	8. 9999943	ο	95424223
Θ	8. 9768713	Ο	95312500	Υ	8. 9999845	ο	95424217
Κ	9. 0579777	Ο	95703125	Τ	9. 0000041	ο	95424271
Λ	9. 0173333	Ο	95507812	α	8. 9999992	ο	95424247
Θ	8. 9768713	Ο	95312500	Φ	8. 9999943	ο	95424223
Λ	9. 0173333	Ο	95507812	Τ	9. 0000041	ο	95424271
Μ	8. 9970796	Ο	95410156	β	9. 0000016	ο	95424259
Θ	8. 9768713	Ο	95312500	α	8. 9999992	ο	95424247
Λ	9. 0173333	Ο	95507812	β	9. 0000016	ο	95424259
Ν	9. 0072008	Ο	95458984	γ	9. 0000004	ο	95424253
Μ	8. 9970796	Ο	95410156	α	8. 9999992	ο	95424247
Ν	9. 0072008	Ο	95458984	γ	9. 0000004	ο	95424253
Ο	9. 0021388	Ο	95434570	δ	8. 9999998	ο	95424250
Μ	8. 9970796	Ο	95410156	α	8. 9999992	ο	95424247
Ο	9. 0021388	Ο	95434570	γ	9. 0000004	ο	95424253
Π	8. 9996088	Ο	95422363	ε	9. 0000000	ο	95424251
Μ	8. 9970796	Ο	95410156	δ	8. 9999998	ο	95424250