ΠΡΑΚΤΙΚΗ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Περιέχουσα τὰ τέσσαρα Εἴδη τῆς Ἀριθμητικῆς ἔντε Ἀκεραίοις καὶ Κλασματικοῖς Ἀριθμοῖς μετὰ Κανόνων καὶ Ἐξηγήσεων· ἀκολούθως τὴν Ἄλυσον, καὶ ἑτέρους διαφόρους τοῦ ἐμπορίου Λογαριασμούς.

Ἐρανισθεῖσα καὶ πλουτισθεῖσα

ὑπὸ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Μ. ΔΟΥΚΑ

τοῦ ἐκ Σιατίςης τῆς Μακεδονίας.

Πρὸς κοινὴν χρῆσιν

τῆς,τε Νεολαίας, καὶ τῶν εἰς τὸ ἐμπορικὸν Σύςημα ἐνασχολουμένων.

Νῦν τὸ πρῶτον Τύποις ἐκδοθεῖσα διὰ Δαπάνης τοῦ Ἐκδότου,

εἰς Τόμους δύω.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ, ΤΗΣ ΑΟΥΣΤΡΙΑΣ.

ἐκ τῆς Ἑλληνικῆς Τυπογραφίας τοῦ Ἰωάννου Σνεῖρερ.

1820.

ΤΩ, ΕΝΤΙΜΟΤΑΤΩ,
ΚΑΙ ΦΙΛΟΓΕΝΕΙ

ΚΥΡΙΩ, ΚΥΡΙΩ,

ΑΝΑΣΤΑΣΙΩ, Δ. ΔΟΥΔΟΥΜΗ,

Τῆς Φιλογενείας, καὶ τοῦ πρὸς Αὔξησιν τοῦ Καλοῦ πολλαχῶς δεικνυομένου Ζήλου αὐτοῦ ἕνεκεν ἀντιτίθησιν εὐλαβῶς τε καὶ εὐγνωμόνως τὸ παρὸν αὐτοῦ Πόνημα ὁ Ἐκδότης

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Μ. ΔΟΥΚΑ.

ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΦΙΛΟΓΕΝΕΙΣ ΑΓΑΠΗΤΟΥΣ ΜΟΙ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΚΑΛΟΥΣ!

Εἰς τὴν νῦν διὰ τὴν προσφιλῆ ἡμῶν Πατρίδα παραμυθίας τε καὶ χαρᾶς πρόξενον κοινὴν Α῞μιλλαν τῶν ἀγαπητῶν της Τέκνων ὑπὲρ τοῦ Καλοῦ αὐτῆς, δὲν ἐδυνήθην νὰ μείνω ἀδιάφορος Θεατὴς μόνον, χωρὶς νὰ συνεισφέρω κἀγὼ τὸ κατὰ δύναμίν μου πρὸς Εὐκολίαν τινα τῆς τὸ Καλὸν προθύμως σπουδαζούσης Νεολαίας. Εὔελπις οὖν, ὅτι τοῦτο τὸ ἐκ τοῦ Ἀριθμητικοῦ τριτόμου Συγγράμματος τοῦ ἐν Πράγα σχολαρχοῦντος Διδασκάλου τῆς Μαθηματικῆς κυρίου Σ. Γκούντζ, ἐπιμελῶς ἐρανισθὲν, καὶ μὲ πλεῖςας ἄλλας διαφόρους Προσθήκας πλουτισθὲν Πονημάτιόν μου, θέλει εἶναι ὠφέλιμον εἰς καθένα τῶν Συναδελφῶν μου, ἐξαιρέτως δὲ εἰς τοὺς μὲ τὸ ἐμπορικὸν Ἐπάγγελμα ἐνασχολουμένους, καὶ ἐμψυχούμενος ἀπὸ τὰς παρακινήσεις διαφόρων μου Φίλων καὶ φιλογενῶν Ἀνδρῶν, ἀπεφάσισα τὴν διὰ τοῦ τύπου αὐτοῦ ἔκδοσιν.

Δέξασθε οὖν καὶ αὐτὸ, ἀγαπητοὶ καὶ φιλογενέςατοι Συναδελφοὶ, μὲ τὴν συνήθησας Εὐμένειαν καὶ Γενναιότητα, καὶ ἐὰν δὲν ἤθελεν ἀπαντήσῃ καθ' ὅλα ἑνὸς ἑκάςου τὴν ἀρέσκειαν, παρακαλῶ νὰ μοὶ ἀξιώσητε τῆς Συγγνώμης σας.

Ὁ Ἐκδότης.

Π Ι Ν Α Ξ

τοῦ πρώτου Τόμου.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῶν Κλασμάτων.

Παροράματα.

Σελ. 215. ἀντὶ ΚΕΦ. Γ΄. Διορθ. ΚΕΦ. Η΄.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

ΚΕΦ. Α΄.

Σύντομος Παράςασις τῶν Ἀριθμῶν, καὶ τοῦ ἀριθμεῖν ἐν γένει.

§. 1.

Ὑπὸ τὴν λέξιν Ἀριθμὸς ἐννοοῦμεν μίαν Ποσότητα, ἤτοι ἓν Πλῆθος ἀφ' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ Πράγματος. Ὁ τρόπος οὖν τοῦ διορίζειν πόσον εἶναι αὐτὸ τὸ πλῆθος, ὅ ἐςί, πόσα εἰσὶ τὰ ὑπάρχοντα μέρη, λέγεται Ἀριθμεῖν, ἤτοι Μετρᾷν. Τὸ ἀριθμεῖν προϋποθέτει ἑπομένως, α΄. ἕνα Ἀντικείμενον, τὸ ὁποῖον μετρεῖται· β΄. ὅτι αὐτὸ ὑπάρχει πλέον ἢ ἅπαξ.

§. 2.

Ἕως οὗ λοιπὸν ἓν ὁποιονδήποτε Πρᾶγμα δὲν ὑπάρχει πλέον ἀλλ' ἅπαξ, λέγεται Μονὰς, ἥτις λαμβανομένη πολλάκις, ἀποτελεῖ ἔπειτα ἕνα Ἀριθμὸν, ἤτοι Ποσότητα. Οἱ Ἀρχάριοι λαμβάνουσιν ὀρθὴν πληροφορίαν περὶ τῆς Μονάδος, ἐὰν ὑπὸ τὸ ἁπλοῦν ὄνομα ἑνὸς Πράγματος, φαντασθῶσι τὴν Μονάδα αὐτοῦ· ἐπειδὴ ἓν Πρᾶγμα πρέπει νὰ ὑπάρχῃ τοὐλάχιςον ἅπαξ, ἢ πρέπει νὰ τὸ φαντασθῶμεν ὡς ὑπάρχον, διὰ νὰ δοθῇ αὐτῷ καὶ ἡ ὀνομασία· ἄρα ὑπὸ τὴν ἁπλὴν ὀνομασίαν ἑνὸς Πράγματος, ἐφανερώθη ἡ Μονὰς αὐτοῦ.

§. 3.

Εἰμὲν οὖν ἓν Πρᾶγμα, δι' ὁποιασδήποτε μεταβολῆς, λάβει ἑτέραν ὀνομασίαν παρ' ἣν εἶχε πρότερον, τότε γίνεται Μονὰς αὐτῆς τῆς νέας ὀνομασίας, ἔςω καὶ συνθεμένον ἐκ περισσοτέρων μονάδων ἑτέρων ὀνομασιῶν. Οὕτω, φέρ' εἰπεῖν, ϛαίνουσι τεσσαράκοντα παράδες μόνον ἓν Γρόσι, ὅ ἐςὶ, μίαν Μονάδα ὑπὸ τὴν ὀνομασίαν Γρόσι, καίτοι αὕτη ἡ μονὰς, ἤγουν τὸ Γρόσι, συνίςαται ἐξ ἑτέρων τεσσαράκοντα μονάδων ὑπὸ τὴν ὀνομασίαν παράδες· διότι ἄνευ ὅλων ὁμοῦ τῶν τεσσαράκοντα παράδων, δὲν ἤθελε προκύψει ἡ ὀνομασία Γρόσι, καὶ ἐπομένως οὔτε ὡς Γρόσι ἤθελεν ὑπάρχει. Ὡσαύτως ϛαίνουσιν ἑξήκοντα Λεπτὰ μόνον μίαν Μονάδα ὑπὸ τὴν ὀνομασίαν Ὥρα, καίτοι συνιςαμένη ἀπὸ ἑξήκοντα μονάδων, ὑπὸ τὴν ὀνομασίαν λεπτὰ, καθὼς καὶ δώδεκα μῆνες, μόνον μίαν Μονάδα ὑπὸ τὴν ὀνομασίαν Χρόνος, κτλ.

§. 4.

Τὸ ἴδιον νόημα ἀκολουθοῦντες, θεωροῦμεν καὶ αὐτοὺς τοὺς ἰδίους Ἀριθμοὺς, κατὰ τὴν διαφορὰν τοῦ μεγέθους των, ὡς διαφορετικὰς Μονάδας. Παραδ. χ. ὁ Ἀριθμὸς δέκα δὲν δεικνύει ἁπλῶς, ὅτι τὰ Πράγματα, ἅτινα μετροῦμεν, εἰσὶ δέκα, ἀλλὰ φανερώνει ἐν ταὐτῷ, ὅτι οὔτε περισσότερα, ἀλλ' οὔτε ὀλιγώτερα εἰσὶ τῶν δέκα, τοῦτ' ἔςι, μόνον ἅπαξ δέκα· ἄρα ἓν πλῆθος ἀπὸ δέκα, εἶναι μία Μονὰς ὑπὸ τὴν ὀνομασίαν Δέκα, κτλ.

§. 5.

Δι' ὃ λέγομεν, ὅτι ἡ ἰδέα ἑκάςου Ἀριθμοῦ θεμελιοῦται εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς Μονάδος· λοιπὸν ἐπειδὴ ὁ Ἀριθμὸς ἄρχεται ἐκ τῆς Μονάδος, καὶ διὰ τῆς προσθέσεως περισσοτέρων τοιούτων τελειοποιεῖται, διὰ τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον, πρὶν ἢ ὁρισθῇ τί ἔςιν Ἀριθμὸς, νὰ σαφηνισθῇ πρῶτον τί ἐςὶ Μονάς.

§. 6.

Κυρίως λέγεται, καὶ ὀνομάζεται Μονὰς ἐκεῖνο τὸ Πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει, καὶ θεωρεῖται αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ Ἓν καὶ ἀδιαίρετον· φέρ' εἰπεῖν, εἷς Ἄνθρωπος, εἷς Λέων, ἓν Κάςρον, καὶ τὰ τούτοις ὅμοια.

§. 7.

Αἱ μονάδες εἰσὶν Ὁμοειδεῖς, καὶ Ἑτεροειδεῖς. Ὁμοειδεῖς μὲν εἰσὶν ἐκεῖναι, αἵτινες δηλοῦσι Πράγματα, ἅπερ ἔχουσιν ὄνομα ταυτόν. Ἤγουν τρία Δένδρα. Ἑτεροειδεῖς δὲ εἰσὶν ἐκεῖναι, αἵτινες φανερώνουσι πράγματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ὄνομα διαφορετικόν. Οἷον Γρόσια, παράδες, ἄσπρα, κ.τ.λ.

§. 8.

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων δηλοῦται σαφῶς, ὅτι τεθείσης Μονάδος ἐπὶ Ὁμοειδεῖ Μονάδι προκύπτει Ἀριθμός· ἄρα ὁ Ἀριθμὸς εἶναι Σωρὸς, ἤτοι Πλῆθος Ὁμοειδῶν Μονάδων, ἀλλ' οὐχ Ἑτεροειδῶν· διότι εἷς Λέων, καὶ εἷς Κύων δὲν δύνανται ν' ἀποτελέσωσιν Ἀριθμὸν, ἐπειδὴ καὶ διαφέρουσι κατάτε φύσιν καὶ ὀνομασίαν, δι' ἣν αἰτίαν ἐν τῷ ἀθροίζειν ὁμοίους Ἀριθμοὺς, δὲν δύνανται νὰ συναφθῶσιν εἰς Ἕν.

§. 9.

Οἱ Ἀριθμοὶ διαιροῦνται εἰς Ἀκεραίους, καὶ εἰς Κλασματικούς. Ἀκέραιος μὲν Ἀριθμὸς καλεῖται ἐκεῖνος, ὅς τις εἶναι συνθεμένος ἀπὸ μονάδων, αἵτινες παριςάνουσιν Ἀκέραιόν τι. Φέρ' εἰπεῖν, ἑπτὰ Γρόσια συνίςανται ἀπὸ ἑπτὰ μονάδων, ἐξ ὧν ἑκάςη διῃρημένως λαμβανομένη δηλοῖ ἀκέραιον Γρόσι. Κλασματικὸς δὲ λέγεται ἐκεῖνος, ὅς τις εἶναι συνθεμένος ἀπὸ μονάδων, αἵτινες δὲν φανερώνουσί τι Ἀκέραιον. Οἷον πέντε ὄγδοα τοῦ Γροσίου εἶναι Κλασματικὸς Ἀριθμός· διότι ἑκάςη μονὰς δὲν φανερώνει ἀκέραιον Γρόσι, ἀλλὰ τὸ ὄγδοον μέρος τοῦ Γροσίου.

§. 10.

Οἱ Ἀριθμοὶ διαιροῦνται προσέτι εἰς Ὁμογενεῖς, καὶ Ἑτερογενεῖς. Ὁμογενεῖς μὲν Ἀριθμοὶ λέγονται ἐκεῖνοι, οἵτινες ἀναφέρονται εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα. Παραδ. χ. πέντε λεπτὰ, ἢ ἐννέα ὧραι. Ἑτερογενεῖς δὲ ὀνομάζονται ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι δὲν ἀναφέρονται εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα. Οἷον ἓξ Ἄνθρωποι, καὶ τρία Πρόβατα.

§. 11.

Ἐξ ἁπάντων οὖν τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων διετάχθη ὁ τρόπος τοῦ ἀριθμεῖν. Μετροῦμεν δηλαδὴ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέχρι τῶν ἐννέα, ἀφ' οὗ δὲ προσεθῇ ἐπ' αὐτοῖς εἰσέτι ἕν, θεωροῦμεν ὅλα τὰ νῦν Δέκα, ὡς μίαν καὶ μόνην Μονάδα ὑπὸ τὴν τοῦ ἀριθμοῦ ὀνομασίαν Δέκα (ὡς §. 4.). Αὐτὴν τὴν μονάδα ἀνὰ Δέκα μετροῦμεν ἑπομένως· δέκα καὶ ἓν ἤτοι ἕνδεκα, δώδεκα, δεκατρία καὶ ἐφεξῆς· εἶτα ἀντὶ δὶς δέκα, λέγομεν Εἴκοσι, Τριάκοντα κτλ., παραλαμβάνοντες πάλιν τὴν μονάδα, ἄχρις οὗ ἔξομεν δέκα μονάδας ἀνὰ δέκα, αἱ ὁποῖαι λαμβανόμεναι ὁμοῦ θεωροῦνται ὡς μία Μονὰς ὑπὸ τὴν ὀνομασίαν Ἑκατόν. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον μετροῦμεν καὶ ταύτην τὴν μονάδα· Ἑκατὸν ἕν, Διακόσια καὶ ἐφεξῆς ἕως τῶν δέκα ἑκατοντάδων, αἵτινες αὖθις ὅλαι ὁμοῦ θεωροῦνται ὡς μία Μονὰς ὑπὸ τὴν ὀνομασίαν Χίλια. Μετὰ ταῦτα μετροῦμεν πάλιν· χίλια ἕν, μέχρι τῶν δέκα χιλιάδων, ἑκατὸν χιλιάδων, καὶ χιλίων χιλιάδων, αἱ ὁποῖαι χίλιαι χιλιάδες ὁμοῦ, θεωροῦνται ὡς μία μόνη Μονὰς ὑπὸ τὴν ὀνομασίαν Μιλλιόνιον, τὸ ὁποῖον μετρεῖται ἀκολούθως ἐπ' ἄπειρον.

§. 12.

Σημείωσις. Πρὸς ἀποφυγὴν τῆς συγχύσεως, ἥτις προξενεῖται ἐκ τῆς ἐπαναλήψεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἐφευρέθησαν ἰδιαίτεραι ὀνομασίαι· δηλονότι ἀντὶ νὰ εἰπῶμεν δὶς δέκα, λέγομεν Εἴκοσι· ἀντὶ τρεῖς δέκα, Τριάκοντα· ἀντὶ τετράκις δέκα, Τεσσαράκοντα· ἀντὶ πεντάκις δέκα, Πεντήκοντα. ἀντὶ ἑξάκις δέκα, Ἑξήκοντα· ἀντὶ ἑπτάκις δέκα, Ἑβδομήκοντα· ἀντὶ ὀκτάκις δέκα, Ὀγδοήκοντα· ἀντὶ ἐννεάκις δέκα, Ἐννενήκοντα· καὶ ἀντὶ δεκάκις δέκα, Ἑκατόν. Ἔπειτα ἀντὶ δὶς ἑκατὸν, Διακόσια· ἀντὶ τρεῖς ἑκατὸν, Τριακόσια· ἀντὶ τετράκις ἑκατὸν, Τετρακόσια· ἀντὶ πεντάκις ἑκατὸν, Πεντακόσια· ἀντὶ ἑξάκις ἑκατὸν, Ἑξακόσια· ἀντὶ ἑπτάκις ἑκατὸν, Ἑπτακόσια· ἀντὶ ὀκτάκις ἑκατὸν, Ὀκτακόσια· ἀντὶ ἐννεάκις ἑκατὸν, Ἐννεακόσια· καὶ ἀντὶ δεκάκις ἑκατὸν, Χίλια. Μετὰ ταῦτα ἀντὶ χιλίας χιλιάδας, Μιλλιόνιον· ἀντὶ χιλίας χιλιάδας μιλλιόνια, Διλλιόνιον· εἶτα Τριλλιόνιον καὶ ἐφεξῆς.

ΚΕΦ. Β΄.

Περὶ Ἀριθμήσεως.

Ἤτοι πῶς γράφονται, καὶ προφέρονται οἱ Ἀριθμοὶ μὲ τὰ λεγόμενα Ψηφία.

§. 13.

Η ἀρίθμησις διδάσκει τὸν τρόπον, καθ᾽ ὃν διὰ λόγου δυνάμεθα ἐκφράζειν τὴν τιμὴν τοῦ διὰ ψηφίων παρισταμένου ἀριθμοῦ· ἢ προφερόμενον ἀριθμὸν νὰ τὸν ἐκθέσωμεν διὰ χαρακτήρων.

Ὅθεν ὅταν γράφωμεν, μάλιστα δὲ ὅταν λογαριάζωμεν, δὲν προφέρομεν τοὺς ἀριθμοὺς μὲ λέξεις, ἀλλὰ μὲ κάποια Σημεῖα, τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται Ψηφία. Τὸ σχῆμα, καὶ ἡ ὀνομασία αὐτῶν εἰσὶ ταῦτα· 1, ἕν· 2, δύο· 3, τρία· 4, τέσσαρα.

5, πέντε· 6, ἓξ· 7, ἑπτὰ· 8, ὀκτὼ· 9, ἐννέα. Τούτοις προςίθεται εἰσέτι καὶ τὸ Μηδενικὸν (καὶ κοινῶς ὀνομαζόμενον Νοῦλλα)· σημεῖον 0 (α), τὸ ὁποῖον αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ δὲν σημαίνει οὐδὲν ἀριθμοῦ ποσὸν, ἀλλὰ χρησιμεύει μόνον εἰς τὸ, νὰ φανερώνῃ ἐνίοτε την κυρίαν τιμὴν τῶν προλεχθέντων Ψηφίων, δι' ἣν αἰτιαν τὸ 0. εἶναι ἓν ἀσήμαντον Ψηφίον, ὅ ἐςί, δεν σημαίνει κάμμίαν ἰδιαιτέραν τιμὴν· τὰ λοιπὰ Ψηφία ὅμως εἰσὶ καὶ ὀνομάζονται ποσότητος σημαντικά.

§. 14.

Μὲ τὰ ἀνωτέρω 9 Ψηφία, σὺν τῷ 0, δυνάμεθα νὰ φανερώσωμεν ἕκαςον προκείμενον Ἀριθμὸν, διότι κατὰ τὸν ἡμέτερον τρόπον τοῦ ἀριθμεῖν, δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ κάμμία μονὰς τὰ 9, ἐπειδὴ δεκάκις 1, θεωροῦνται ὡς ἅπαξ δέκα, ἤτοι μία Δεκὰς· δέκα δεκάδες, ὡς ἅπαξ Ἑκατὸν· δέκα ἑκατοντάδες, ὡς ἅπαξ Χίλια (ὡς §. 11.)· ὅθεν ἕκαςον ποσὸν αὐτῶν τῶν μονάδων φανερώνομεν μόνον ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τῶν 9.

§. 15.

Σημείωσις. Τἀνωτέρω Ψηφία ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τῶν 9 λέγονται ἁπλῶς Μονάδες· οἱ ἑξῆς Ἀριθμοὶ ὅμως ἀπὸ τῶν δέκα ἕως τῶν ἑκατὸν ὀνομάζονται Δεκάδες· ἀπὸ τῶν ἑκατὸν μέχρι τῶν χιλίων Ἑκατοντάδες· ἀπὸ τῶν χιλίων ἄχρι τῶν μιλλιονίων Χιλιάδες, καὶ ἐφεξῆς.

§. 16.

Διὰ νὰ γινώσκωμεν ὅμως, ὁποίας μονάδας φανερώνει ἓν ὁποιονδήποτε Ψηφίον, ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, τὸ ψηφίον 5 παριςάνῃ πεντάκις ἓν, ἢ 5 δεκάδας, ἢ 5 ἑκατοντάδας καὶ ἐφεξῆς, πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν τὴν τοποθεσίαν τοῦ ἀριθμοῦ ἐκ τοῦ

(α) Τἀνωτέρω Ψηφία μεταχειρίζονται σχεδὸν ὅλα τὰ ἔθνη, καλοῦνται δὲ ἀραβικά, ἐπειδὴ εἰς τοὺς ἄραβας ἀποδίδεται ἡ εὕρεσις αὐτῶν.

δεξιοῦ πρὸς τὸ ἀριστερὸν μέρος τοιουτοτρόπως, ὥστε νὰ προηγῶνται ἐν ἑκάστῃ τάξει ἀριστερῶς τοιαῦται μονάδες, αἵτινες εἰσὶ συνθεμέναι ἐκ δεκάκις ὑψηλοτέρας τιμῆς τῶν δεξιῶς παρελθόντων μονάδων. Λοιπὸν ἐὰν ἓν μόνον Ψηφίον, παραδ. χ. 4, ἢ 5, ἢ ὁποιονδήποτε ἄλλο, ἵσταται μοναχὸν, τότε θεωρεῖται τῆς πρώτης τάξεως Ψηφίον, καὶ δεικνύει ἁπλῶς Μονάδας, ἤγουν τέσσαρα, πέντε κτλ. Ἐὰν ἵστανται ὅμως δύο Ψηφία συνάμα, τότε φανερώνει τὸ δεύτερον ἀριστερῶς Δεκάδας, θετέον 86· ἐνταῦθα τὸ μὲν 8 τιμᾶται ὀκτάκις δέκα, ἤτοι Ὀγδοήκοντα, τὸ δὲ 6, ὡς τῆς πρώτης τάξεως Ψηφίον, τιμᾶται μόνον ἑξάκις ἕν, ὁμοῦ δὲ Ὀγδοήκοντα ἕξ. Ὅθεν εἰς μίαν σειρὰν Ψηφίων, φέρ' εἰπεῖν 6754, δεικνύει τὸ πρῶτον Ψηφίον δεξιῶς 4, τετράκις ἕν· τὸ 5, ὡς Ψηφίον τῆς δευτέρας τάξεως, πεντάκις δέκα, ἤτοι Πεντήκοντα· τὸ 7, ὡς προηγούμενον, καὶ ἱστάμενον ἐν τῇ τρίτῃ τάξει ἀριστερῶς, φανερώνει πάλιν δεκάκις μεγαλήτερον ἀριθμὸν ὡς πρὸς τὸν πλησίον 5, ἤγουν ἑπτὰ ἑκατοντάδας, τουτ' ἔστιν Ἑπτακοσία· τελευταῖον δὲ τὸ 6, ὡς προηγούμενον, καὶ ἱστάμενον ἐν τῇ τετάρτῃ τάξει, δηλοῖ αὖθις δεκάκις μεγαλήτερον ποσὸν ὡς πρὸς τὸν 7, ἤτοι ἓξ Χιλιάδας· ἄρα, μετὰ τὴν μονάδα, προχωρούντων πρὸς τὸ ἀριστερὸν, δεκαπλασιάζεται ἕκαστον ψηφίον κατὰ τὸ ποσὸν ὡς πρὸς τὰ παρελθόντα τοῦ δεξιοῦ μέρους. Διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι αἱ Μονάδες τίθενται εἰς τὴν πρώτην τάξιν· αἱ Δεκάδες εἰς τὴν δευτέραν ἀριστερῶς· αἱ Ἑκατοντάδες εἰς τὴν τρίτην· αἱ Χιλιάδες εἰς τὴν τετάρτην, καὶ ἐφεξῆς.

§. 17.

Πλὴν ἔστω πρὸς σημείωσιν, ὅτι αἱ ἀνωτέρω τάξεις δὲν ἔχουσιν ἰδιαίτερον γνωστὸν Σημεῖον, ἀλλ' ὀνομάζονται διὰ τοῦτο οὕτως, ἡ δευτέρα, ἡ τρίτη τάξις καὶ ἐφεξῆς, ἐπειδὴ καὶ ἵσταται ἐν σειρᾷ τὸ δεύτερον ἤτοι τὸ τρίτον ψηφίον. Παραδ.

χ. εἰς τὸν ἀριθμὸν 56, τὸ 5 εἶναι τῆς δευτέρας τάξεως ψηφίου, ἐπειδὴ προηγεῖται αὐτοῦ δεξιῶς τὸ ψηφίον 6· ἐὰν ὅμως δὲν προηγεῖτο αὐτοῦ κἀνὲν ψηφίον, τότε δὲν ὠνομάζετο ψηφίον τῆς δευτέρας, ἀλλὰ τῆς πρώτης τάξεως, καὶ ἑπομένως δὲν ἤθελε φανερώνει πεντάκις δέκα, ἤτοι Πεντήκοντα, ἀλλὰ 5 μονάδας, ἤτοι ἁπλῶς Πέντε. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ οὔτε δευτέρα τάξις χωρὶς δύο ψηφίων· ἀλλ' οὔτε τρίτη ἄνευ τριῶν, καὶ ἐφεξῆς· ἄρα οὔτε δύναται κἀνὲν ψηφίον νὰ λάβῃ τὸν τόπον τῆς δευτέρας τάξεως καὶ νὰ φανερώνῃ Δεκάδας, ἐὰν δὲν εἶναι ἐν ταὐτῷ ἓν ψηφίον καὶ ἐν τῇ τάξει τῶν μονάδων· ὡσαύτως δὲν δύναται κἀνὲν ψηφίον νὰ λάβῃ τὸν τόπον τῆς τρίτης τάξεως, καὶ νὰ δεικνύῃ Ἑκατοντάδας, ἐὰν δὲν εἶναι ἐν ταὐτῷ αἱ παρελθοῦσαι δύο τάξεις, δηλονότι ἡ τῶν Δεκάδων, καὶ Μονάδων τάξις, πεπληρωμέναι μὲ ψηφία· ἐν γένει δὲν δυνάμεθα νὰ φανερώσωμεν οὐδεμιᾶς ὑψηλοτέρας τάξεως τὸ ποσὸν δι' ἑνὸς ψηφίου, ἐὰν ἅπασαι αἱ παρελθοῦσαι κατώτεραι τάξεις δὲν εἶναι πεπληρωμέναι μὲ ψηφία.

§. 18.

Λοιπὸν διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν Δεκάδας χωρὶς μονάδων, Ἑκατοντάδας ἄνευ δεκάδων καὶ μονάδων καὶ ἐφεξῆς, ἦτον ἀναγκαῖον νὰ ἔχωμεν καὶ ἓν Σημεῖον, τὸ ὁποῖον, μηδὲν σημαῖνον, νὰ ἀναπληρῇ τὰς τάξεις, εἰς τὰς ὁποίας δὲν δίδονται σημαντικὰ ψηφία. Αὐτὸ τὸ Σημεῖον εἶναι τὸ 0, τὸ ὁποῖον, ὡς ἐλέχθη, οὐδὲν σημαίνει, ἀλλὰ τίθεται ἁπλῶς εἰς τὰς τάξεις, ἵνα λάβωσι τόν τε οἰκεῖον τόπον καὶ τὴν τιμὴν τὰ προηγούμενα αὐτοῦ σημαντικὰ ψηφία. Ὅθεν τὰ Δέκα, Εἴκοσι, Τριάκοντα κτλ. προφέρομεν μὲ 10, 20, 30, ἐπειδὴ τὸ 1, 2, 3, ἵστανται ἐν τῇ δευτέρᾳ τάξει, καὶ παριστάνουσιν ἅπαξ Δέκα, δὶς Δέκα, τρεῖς Δέκα καὶ ἐφεξῆς· οὐχὶ ὅμως περισσότερα τῶν Δέκα, Εἴκοσι, Τριάκοντα καὶ καθεξῆς· διότι εἰς τὴν τάξιν τῶν Μονάδων δὲν εὑρίσκεται οὐδὲν σημαντικὸν ψηφίον. Ἐξ ἐναντίας προφέρομεν 11, 22, 33 καὶ ἐφεξῆς, ἕνδεκα, εἴκοσι δύο, τριάκοντα τρία, ἐπειδὴ μετὰ τῶν Δεκάδων συνευρίσκονται καὶ εἰς τὴν τάξιν τῶν Μονάδων τὰ σημαντικὰ ψηφία 1, 2, καὶ 3. Οὕτω προφέρομεν 400, Τετρακόσια, ἐπειδὴ ἐν τῇ τρίτῃ τάξει ἵςαται τὸ σημαντικὸν ψηφίον 4· καθὼς καὶ 6000, ἕξ Χιλιάδας, καὶ οὐχὶ περισσότερα διότι τὸ 6 ἵςαται ἐν τῇ τετάρτῃ τάξει, καὶ αἱ πρῶται τρεῖς τάξεις εἰσὶ πεπληρωμέναι μὲ 0, τὰ ὁποῖα μηδὲν σημαίνουσιν.

§. 19.

Ὅθεν, ὅπου προηγοῦνται Ψηφία τοῦ 0 ἀριςερῶς, εἶναι τὸ 0 ἀναγκαιότατον, καὶ δὲν πρέπει, ὡς ἀσήμαντον, νὰ ἀφεθῇ· διότι ὅλα τὰ ἀκόλουθα Ψηφία προχωροῦσι μίαν τάξιν πλησιέςερον δεξιῶς, ὅ ἐςὶ, τίθενται ἐν κατωτέρᾳ τάξει, καὶ ἐπομένως ἐλαττοῦται ἡ τιμὴ αὐτῶν. Θετέον, ὁ ἀριθμὸς 760 (ἑπτακόσια ἑξήκοντα) ἄνευ τοῦ 0, ἤθελε φανερώσῃ μόνον 76 (ἑβδομήκοντα ἕξ), ἐπειδὴ τὸ Ψηφίον 7, τὸ ὁποῖον πρότερον ἵςατο ἐν τῇ τρίτῃ τάξει, ἤδη τεθήσεται ἐν τῇ δευτέρᾳ, καθὼς καὶ τὸ 6, τὸ ὁποῖον ὡς ἕξ δεκάδες ἔπρεπε νὰ τεθῇ ἐν τῇ δευτέρᾳ τάξει, τεθήσεται ἤδη, ἄνευ τοῦ 0, ἐν τῇ πρώτῃ, καὶ ἐπομένως δὲν θέλει φανερώνει πλέον ἑξάκις δέκα, ἀλλὰ μόνον ἑξάκις ἕν· ὡσαύτως καὶ τὸ 7, ἀντὶ ἑπτάκις ἑκατὸν, μόνον ἑπτάκις δέκα. Ἐξ ἐναντίας εἶναι ἄχρηςον τὸ 0, ὅταν πρὸ αὐτοῦ ἀριςερῶς δὲν εὑρίσκονται σημαντικὰ ψηφία, ἐπειδὴ πρὸς τὰ πλησίον αὐτοῦ δεξιῶς ἱςάμενα σημαντικὰ Ψηφία, δὲν ἔχει οὐδεμίαν ἰσχύν. Οὕτω φέρ' εἰπεῖν εἰς 02,002 κτλ. μένει τὸ Ψηφίον 2, τῆς πρώτης τάξεως Ψηφίον, ἔσω καὶ νὰ προσθέσωμεν πρὸ αὐτοῦ ἀριςερῶς ὅσα 0 θελήσωμεν. Παραδ. χ. 00200 μένουσι πάντοτε Διακόσια, ἐπειδὴ τὸ Ψηφίον 2 ἵςαται ἐν τῇ τρίτῃ τάξει· ὅτι ὅμως τιμῶνται Διακόσια, πρέπει νὰ ὁμολογῶσι χάριτας τοῖς δεξιῶς 0· τὰ γὰρ ἀριστερῶς κείμενα 0 οὐδὲν ὠφελοῦσι τὰ 2.

§. 20.

Ἡ ἀνάγνωσις τῶν κατὰ σειρὰν διὰ ψηφίων γεγραμμένων Ἀριθμῶν ἄρχεται, κατὰ τὴν συνήθειαν τῆς προφορᾶς, ἀπὸ τῆς ἀνωτάτης τάξεως ἀριστερῶθεν, δηλονότι ἀπὸ τοῦ ἀριστερῶς κειμένου πρώτου Ψηφίου, προφερόμενον ἀκολούθως ἕκαστον πρὸς τὸ δεξιὸν μέρος ἑπόμενον Ψηφίον, κατὰ τὴν τοπικήν του σημασίαν. Οἷον τὰς 5861 προφέρομεν· πέντε Χιλιάδες Ὀκτακόσια Ἑξήκοντα ἕν· καὶ τὰς 2005, δύο Χιλιάδες πέντε, Ἐπειδὴ εἰς τὸν τόπον τῶν τε Ἑκατοντάδων καὶ Δεκάδων δὲν εὑρίσκονται σημαντικὰ Ψηφία.

Ἐν γένει προφέρομεν ἕκαστον Ψηφίον κατὰ τὴν σημασίαν τῆς τοποθεσίας του, χωρὶς νὰ ἀποβλέψωμεν ποσῶς εἰς τὰ ἐν τῇ σειρᾷ εὑρισκόμενα λοιπὰ Ψηφία, καὶ 0. Οὕτω, φέρ' εἰπεῖν τὸ Ψηφίον 9, ἐπέχει τὸν τρίτον τόπον εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ἑπομένους δύο Ἀριθμοὺς 8932, καὶ 5975, ἤγουν Ἐννεακόσια, καίτοι τὰ προηγούμενα, καὶ ἑπόμενα Ψηφία ἀμφοτέρων τῶν Ἀριθμῶν εἰσὶ διαφορετικά· διὰ τοῦτο δὲν πρέπει νὰ μᾶς συγχίσωσι καὶ τὰ 0, τὰ ὁποῖα ἐμφανίζονται πολλάκις μεταξὺ τῶν σημαντικῶν Ψηφίων, ἀλλ' ὡς προελέχθη, προφέρομεν ἕκαστον Ψηφίον κατὰ τὴν σημασίαν τῆς τοποθεσίας του, χωρὶς νὰ προφέρωμεν τὰς λοιπὰς τάξεις, αἵτινες εἰσὶ πεπληρωμέναι μὲ 0, ὡς.

5070 προφέρομεν, πέντε Χιλιάδες Ἑβδομήκοντα.
600 . Ἑξακόσια.
803 . Ὀκτακόσια τρία.

	520	Πεντακόσια εἴκοσι.
	333	Τριακόσια τριάκοντα τρία.
	9705	ἐννέα Χιλιάδες Ἑπτακόσια πέντε.
	6004	ἓξ Χιλιάδες τέσσαρα.
(α)	081	ὀγδοήκοντα ἕν.
	009	ἐννέα.
	060	ἑξήκοντα.

§. 21.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἐν τῇ τετάρτῃ τάξει κείμενον Ψηφίον δεικνύει Χιλιάδας, ἐπομένως δὲ, προχωρούντων ἀριστερῶς, δεκαπλασιάζεται ἡ τιμήτου (ὡς §. 16.)· ἄρα ἐν τῇ πέμπτῃ τάξει φανερώνει Δεκάδας χιλιάδος· ἐν τῇ ἕκτῃ Ἑκατοντάδας χιλιάδος· ἐν τῇ ἑβδόμῃ Μονάδας μιλλιονίου· ἐν τῇ ὀγδόῃ Δεκάδας μιλλιονίου καὶ ἐφεξῆς· ὅθεν τούτων οὕτως ἐχόντων, δι' ὧν μᾶς ἔγινε γνωστὴ ἡ κυρία τοποθεσία καὶ σημασία τῶν ψηφίων, εἴμεθα ἤδη ἱκανοί, ἄνευ περαιτέρω ὁδηγίας, ἵνα προφέρωμεν ὀρθῶς ἕκαστον διὰ ψηφίων γεγραμμένον Ἀριθμὸν, συνιστάμενον ἀφ' ὅσων δήποτε ψηφίων. Πλὴν διὰ νὰ μὴν εἴμεθα βεβιασμένοι νὰ ἐνθυμώμεθα εἰς τὴν ἀνάγνωσιν τὴν τοπικὴν σημασίαν ἑνὸς ἑκάστου ψηφίου, καὶ διὰ νὰ δυνάμεθα ἐπομένως μὲ τὴν δυνατωτάτην ταχύτητα νὰ προφέρωμεν ἀμέσως ἕκαστον προτεθέντα Ἀριθμὸν, πράττομεν ὡς ἀκολούθως. Διαιροῦμεν δηλαδὴ τὸν πρὸς ἀνάγνωσιν δοθέντα Ἀριθμὸν ἀνὰ τρία ψηφία διὰ στιγμῶν καὶ γραμμῶν, κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. Μετροῦμεν ἀπὸ τῆς Μονάδος πρὸς τὸ ἀρι-

(α) Ἐν τῇ παραδόσει δὲν πρέπει νὰ παραβλέπηται ἡ ἀνωτέρω παράστασις τῶν 081,009,060, ἀλλὰ πρέπει νὰ δίδηται ἄκρα προσοχὴ ἐπ' αὐτήν· διότι ὅσον φαίνεται ἄχρηστος, τόσον εἶναι ἀναγκαία ἀκολούθως, ἐπειδὴ δύναται νὰ προξενήσῃ εἰς τοὺς Ἀρχαρίους διάφορα σφάλματα εἰς τὴν ἀνάγνωσιν τῶν σημαντικῶν ψηφίων.

ςερὸν μέρος τρία ψηφία (α), καὶ βάλλομεν εἰς τὸν Πρόποδα τοῦ τετάρτου ψηφίου μίαν ςιγμὴν (.)· ἐντεῦθεν τρία ψηφία πορρωτέρω, εἰς τὸν Πρόποδα τοῦ ἑβδόμου ψηφίου, θέττομεν μίαν ὄρθιον γραμμὴν (,)· εἶτα μετὰ τρία ψηφία, αὖθις μίαν ςιγμήν· ἔπειτα μετὰ τρία ψηφία πορρωτέρω, πάλιν δύο γραμμὰς, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἀλληλοδιαδόχως, ὥςε αἱ γραμμαὶ νὰ αὐξάνωσι πάντοτε μὲ μίαν, δηλαδὴ μετὰ τὴν πρώτην ςιγμὴν, μίαν γραμμήν· μετὰ τὴν δευτέραν ςιγμὴν, δύω γραμμάς· μετὰ τὴν τρίτην ςιγμὴν, τρεῖς γραμμὰς, καὶ ἐφεξῆς, ἄχρις οὗ δὲν μείνουσι τρία ψηφία νὰ διαιρεθῶσιν, ὡς φαίνεται εἰς τοὺς ἑπομένους ἀριθμούς. 6,389.721 | 1.053,408.209 | 78,,100.092,050.080.

§. 22.

Ἡ μὲν ςιγμὴν παριςάνει τὴν λέξιν Χίλια, ἡ δὲ γραμμὴ τὴν λέξιν Μιλλιόνιον· τοῦτ' ἔςιν, ὅποιον ψηφίον ἔχει εἰς τὸν Πρόποδα αὐτοῦ μίαν ςιγμὴν προφέρεται Χιλιὰς, καὶ ὅποιον ἔχει μίαν γραμμὴν, προφέρεται Μιλλιόνιον, ὡς· 7. | 53. | 604· ἑπτὰ Χιλιάδες· 53 Χιλιάδες· 604 Χιλιάδες· καθὼς καὶ 5, | 30, | 203, ὡς 5 Μιλλιόνια· 30 Μιλλιόνια· 203 Μιλλιόνια, καὶ ἐφεξῆς. Ἐν γένει ὁ Ἀριθμὸς τῶν γραμμῶν παριςάνει τὸ, ὅπερ παριςάνουσιν αἱ διὰ λόγου συλλαβαὶ Δι, Τρι, κτλ. δη-

---

(α) Ὅλαι αἱ σειραὶ τῶν ψηφίων, τοῦτ' ἔςιν, ὅλοι οἱ Ἀριθμοὶ, διαιροῦνται εἰς τάξεις, ἐξ ὧν ἑκάςη περιέχει τρία ψηφία. Ἡ πρώτη (ἀρχομένη ἀπὸ τῆς μονάδος δεξιώθεν) περιέχει τὰς Μονάδας, Δεκάδας καὶ Ἑκατοντάδας· ἡ δευτέρα τὰς Μονάδας, Δεκάδας καὶ Ἑκατοντάδας τῶν χιλιάδων· ἡ τρίτη τὰς Μονάδας, Δεκάδας καὶ Ἑκατοντάδας τῶν μιλλιονίων· ἡ τετάρτη τὰς Μονάδας, Δεκάδας καὶ Ἑκατοντάδας τῶν χιλιάδων μιλλιονίων· ἡ πέμπτη τὰς Μονάδας, Δεκάδας καὶ Ἑκατοντάδας τῶν διλλιονίων· ἡ ἕκτη τὰς Μονάδας, Δεκάδας καὶ Ἑκατοντάδας τῶν χιλιάδων διλλιονίων, καὶ ἐφεξῆς ἐπ' ἄπειρον.

λονότι | 2,, | δύο Διλλιόνια· | 5,,, | πέντε Τριλλιόνια, καὶ ἐφεξῆς.

§. 23.

Ὅταν πρόκηται ὅμως ἕνας Ἀριθμὸς συνιςάμενος ἐκ περισσοτέρων ψηφίων, τότε διαιροῦμεν αὐτὸν κατὰ τὸν προλεχθέντα τρόπον, ἔπειτα ἀρχίζωμεν τὴν ἀνάγνωσιν ἐκ τῆς τελευταίας τάξεως ἀριςερῶς, ἐκφωνοῦντες τὰ ἐν αὐτῇ εὑρισκόμενα ψηφία τοιουτοτρόπως ὁμοῦ, ὡς νὰ ἦσαν αὐτὰ μόνον παρόντα, μὲ τὴν προσθήκην ἐκείνης τῆς τιμῆς, τὴν ὁποίαν φανερώνει τὸ ἐκεῖ εὑρισκόμενον Σημεῖον. Παραδ. χ. μᾶς ἐδόθη νὰ προφέρωμεν τὸν ἀριθμὸν 20081611, ὅστις διαιρεθεὶς, παρίςαται 20,081.611. Λοιπὸν ἐπειδὴ εἰς τὴν πρώτην τάξιν εὑρίσκεται παρὰ τοῖς 20 τὸ τοῦ μιλλιονίου σημεῖον, διὰ τοῦτο ἀναγινώσκομεν 20 Μιλλιόνια· εἰς τὴν δευτέραν περιέχονται τρία ψηφία 081, τοῦτ' ἔςιν, 81 (ὡς §. 20.) ὁμοῦ μὲ τὸ σημεῖον τῆς χιλιάδος, τὰ ὁποῖα προφέρομεν 81 Χιλιάδες· εἰς δὲ τὴν τελευταίον μὴν εὑρισκόμενον οὐδὲν σημεῖον, ἐκφωνοῦμεν μόνον ἑξακόσια ἕνδεκα. Ὅθεν ὁ Ἀριθμὸς 20,081.611 προφέρεται, εἴκοσι Μιλλιόνια, ὀγδοήκοντα μία Χιλιάδες, καὶ ἑξακόσια ἕνδεκα.

§. 24.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον προφέρομεν ἕκαςον Ἀριθμὸν, συνιςάμενον ἀφ' ὅσων δήποτε ψηφίων, πολλὰ εὐκόλως, ταχέως, καὶ ἄνευ λάθους. Πλὴν ἐν ᾧ προφέρωμεν μίαν τάξιν δὲν πρέπει, ὡς προελέχθη, νὰ δώσωμεν οὐδεμίαν προσοχὴν εἰς τὰ τῶν λοιπῶν τάξεων ψηφία, οὔτε νὰ ἀναγνώσωμεν περισσότερα, ἢ ὀλιγώτερα ψηφία, ἀφ' ὅσα εὑρίσκονται εἰς τὴν αὐτὴν τάξιν, ἀλλ' οὔτε νὰ συναριθμήσωμεν ποτὲ ἕν, ἢ περισσότερα ψηφία ἐκ τῶν προηγουμένων, ἢ ἑπομένων τάξεων· ἐφ' ᾧ πρέπει νὰ προσέχωμεν καλῶς, καὶ μάλιςα ὅταν εἰς μίαν τάξιν τύχωσι μερικὰ, ἢ ἁπλῶς 0, ὡς τὰ πρὸς ἄσκησιν ἑπόμενα ὑποδείγματα δεικνύουσιν.

Πρόβλημα. Πῶς προφέρονται 7000050; Ἀπόκρισις. 7 Μιλλιόνια, καὶ Πεντήκοντα.

Ἐξήγησις. Διαιρούμενος ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς, παρίςαται 7,000.050. Ἐνταῦθα εἰς τὴν πρώτην τάξιν ἀριςερῶς, ὅπου ἄρχεται ἡ ἀνάγνωσις, εὑρίσκεται μόνον τὸ ψηφίον 7, ὁμοῦ μὲ τὸ σημεῖον τοῦ μιλλιονίου, διὰ τοῦτο προφέρομεν 7 Μιλλιόνια· εἰς τὴν δευτέραν ἐπειδὴ εὑρίσκονται ἁπλῶς 0, δὲν προφέρομεν μηδὲν, διότι τίποτε δὲν σημαίνουσιν· εἰς δὲ τὴν τελευταίαν ἄνευ σημείου, εὑρίσκονται 050, τὰ ὁποῖα ὅμως εἰσὶν ὡς 50 (ὡς §. 20.), διὰ τοῦτο προφέρομεν ἁπλῶς μόνον 50. Ὅθεν ὅλος ὁ ἀνωτέρω Ἀριθμὸς ἐκφωνεῖται. 7 Μιλλιόνια καὶ 50.

Πρόβλημα. Πῶς ἐκφωνεῖται ὁ Ἀριθμὸς 25608001;

Λύσις. Διαιρεθεὶς παρίςαται 25,608,001· ἀναγινώσκεται δὲ 25 Μιλλιόνια, ἑξακόσιαι ὀκτὼ Χιλιάδες, καὶ ἕν.

Πρόβλημα. Πῶς προφέρεται ὁ ἀριθμὸς 90350026417;

Λύσις. Διαιρούμενος παρίςαται 90.350,026.417, ὅ ἐςιν, 90 Χιλιάδες καὶ 350 Μιλλιόνια, 26 Χιλιάδες, καὶ 417.

Ἐξήγησις. Ἐὰν ὁ τελευταῖος Ἀριθμὸς διαιρεθῇ, ἄνευ τῶν προσηκόντων σημείων, εἰς τάξεις ἀνὰ τρία ψηφία, καὶ ἐκφωνηθῇ ἁπλῶς ἑκάςη τάξις, δηλοῦσιν· ἐννενήκοντα· τριακόσια πεντήκοντα· εἴκοσι ἕξ, καὶ τετρακόσια δέκα ἑπτά· ὅταν ὅμως προςεθῶσιν εἰς ἑκάςην τάξιν τὰ ἀνήκοντα σημεῖα, καὶ ἐκφωνηθῇ μετ᾽ αὐτῶν, ὡς προερέθη, τότε παριςάνει, 90 Χιλιάδες καὶ 350 Μιλλιόνια, 26 Χιλιάδες, καὶ 417.

§. 25.

α΄. Σχόλιον. Καίτοι τὰ ἐν τῷ μεταξὺ τῶν σημαντικῶν ψηφίων ἱςάμενα 0 δὲν προφέρονται, ὡς ἀσήμαντα, ὁλοτελῶς, μ᾽ ὅλον τοῦτο (κατὰ τοὺς §. 19 καὶ 20.) πρέπει νὰ τεθῶσι· διότι ἄνευ τούτων τῶν 0, δὲν ἤθελον λάβει τὸν οἰκεῖον τόπον τῆς τιμῆς τὰ πρὸ αὐτῶν ἀριςερῶς ἑπόμενα Ψηφία, ἐπειδὴ ἤθελον προχωρήσει τόσας τάξεις πλησιέςερον δεξιῶς, ὅσα μηδενικὰ δὲν ἤθελον τεθῶσιν.

§. 26.

β.' Σχόλιον. Ὅτι ἡ ςιγμὴ δὲν παριςάνει πάντοτε τὰς αὐτὰς Χιλιάδας, τοῦτο ἕκαςος τὸ ἐννοεῖ. Διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι ἡ μετὰ τὸ σημεῖον (,) τῶν Μιλλιονίων ςιγμή, δεικνύει Χιλιάδας Μιλλιονίων· ἡ μετὰ τὸ σημεῖον (,,) τῶν διλλιονίων, φανερώνει Χιλιάδες Διλλιονίων καὶ ἐφεξῆς.

§. 27.

Διὰ τοὺς Ἀρχαρίους εἶναι μικρὰ δυσκολία, ὅταν θέλωσι νὰ Γράψωσι μὲ ψηφία ἕνα μεγαλήτερον Ἀριθμόν, ἐπειδὴ δὲν δύνανται νὰ ἐννοήσωσιν εὐθέως πόσα ψηφία χρειάζονται, καὶ ἐν ποίᾳ τάξει πρέπει νὰ τεθῶσι. Φέρ' εἰπεῖν· εἰς 35 Διλλιόνια θέλουσι δυσκολευθῆ οἱ Ἀρχάριοι, ἵνα εἴπωσι μὲ βεβαιότητα εὐθέως, καὶ χωρὶς νὰ ἐμποδισθῶσι πόσα 0 πρέπει νὰ προςεθῶσιν εἰς τὸν Ἀριθμὸν 35. Ἐνταῦθα μεταχειριζόμεθα ὁμοίως τὰς ςιγμὰς καὶ γραμμάς, κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. Δηλαδὴ γράφομεν τὸν δοθέντα Ἀριθμόν, καθὼς λεχθῆ, ὁμοῦ μὲ τὸ σημεῖόν του, ἔπειτα γεμίζομεν ἑκάςην τάξιν μὲ τρία ψηφία. Παραδ. χ. μᾶς ἐδόθη νὰ καταγράψωμεν 35 Διλλιόνια· λοιπὸν γράφομεν πρῶτον 35,, πλὴν ἠξεύρομεν, ὅτι εἰς μίαν τῷ ὄντι σειρὰν ψηφίων, δὲν δύναται νὰ προηγηθῆ κἀνὲν σημεῖον μιᾶς ἀνωτέρας τάξεως, ἐὰν δὲν προτεθῶσιν ὅλα τὰ σημεῖα τῶν κατωτέρων τάξεων· διατοῦτο ἀρχίζομεν τὴν διαίρεσιν ἐκ τῶν 35,, πρὸς τὰ ὀπίσω, καὶ οὕτω προκύπτει 35,, . , . προσθέττοντες εἰς ἑκάςην τάξιν τρία ψηφία· εἰς τὸ ἐδικόν μας Πρόβλημα, ὅπου, ἐκτὸς τῶν 35, δὲν μᾶς ἐδόθη ἕτερον σημαντικὸν ψηφίον, θέττομεν εἰς ἑκάςην τάξιν τρία 0, καὶ οὕτω προκύπτει ὁ ζητηθεὶς ἀριθμὸς 35,,000.000,000.000

Πρόβλημα. Γραφθήτωσαν μὲ ψηφία· ὀγδοήκοντα τρία Διλλιόνια πέντε χιλιάδες καὶ τριάκοντα δύο Μιλλιόνια, ἑπτακόσιαι τεσσαράκοντα ἐννέα Χιλιάδες, καὶ τρία.

Λύσις, καὶ Ἐξήγησις.

Ἂς τεθῶσιν εὐθὺς διὰ τὰ ὀγδοήκοντα τρία Διλλιόνια, τὰ ψηφία 83 ὁμοῦ μὲ τὸ σημεῖον τοῦ Διλλιονίου (,,), ἔπειτα ἂς γένῃ ἡ διαίρεσις πρὸς τὰ ὀπίσω· ὡς ὧδε. 83,, . , . (αἱ γραμμαί, καὶ ςιγμαὶ ἐτέθησαν διὰ τοῦτο τόσον μακρὰν κεχωρισμένως, διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν εἰς ἑκάςην τάξιν τρία ψηφία)· εἶτα ἂς τεθῶσι τὰ λοιπὰ ψηφία τοῦ δοθέντος Ἀριθμοῦ εἰς τὰς οἰκείας διαιρέσεις· ἤγουν διὰ τὰς 5 Χιλιάδας Μιλλιόνια, ἂς τεθῇ τὸ ψηφίον 5 εἰς τὸν τόπον τῶν μονάδων, τοῦτ' ἔςιν, ἐν τῇ τάξει τῶν Χιλιάδων Μιλλιονίων· ἔπειτα τὰ ψηφία 32 εἰς τὸν τόπον τῶν μονάδων, καὶ δεκάδων, ἐν τῇ τάξει τῶν Μιλλιονίων· μετέπειτα διὰ τὰς ἑπτακοσίας τεσσαράκοντα ἐννέα Χιλιάδας τὰ ψηφία 749 ἐν τῇ τάξει τῶν Χιλιάδων· καὶ τελευταῖον τὸ ψηφίον 3 εἰς τὸν τόπον τῶν Μονάδων τῆς ἐσχάτης τάξεως· λοιπὸν, 83,, 5. 32,749. 3, τελευταῖον ἂς γεμισθῶσιν αἱ ἐλλειπεῖς τάξεις μὲ 0, διὰ τὰ ἐλλείποντα ψηφία (ἐπειδὴ ἑκάςη τάξις πρέπει νὰ περιέχῃ τρία ψηφία), δηλαδὴ ἐν τῇ τάξει τῶν Χιλιάδων Μιλλιονίων, ἂς τεθῶσι δύο 0, ἐν τῇ τῶν Μιλλιονίων ἓν 0, καὶ ἐν τῇ ἐσχάτῃ δύο 0, καὶ οὕτω προκύπτει ἐν τάξει ὁ δοθεὶς Ἀριθμὸς· 83,,005.032,749.003.

§. 28.

Πλέον ταχύτερον γίνεται μία τοιαύτη κατάςρωσις, ἐὰν πρότερον γραφθῶσιν αἱ διαιρέσεις ὡς κατωτέρω· εἶτα ἀφ' οὗ γεμισθῇ ἑκάςη τάξις μὲ τρία ψηφία, ἔπειτα γράφονται κατὰ σειράν. Φέρ' εἰπεῖν· μᾶς ἐδόθησαν νὰ καταγράψωμεν 8 Χιλιάδας καὶ 5 Διλλιόνια, 3 Μιλλιόνια, καὶ 25· λοιπὸν γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς, ὁμοῦ μὲ τὰ σημεῖά των, καθὼς λεχθῶσιν, ἤτοι· 8.

5,,

.

3,

.

25

μετέπειτα διὰ τὰ ἐλλείποντα ψηφία, γεμίζομεν ἑκάστην διαίρεσιν μὲ 0, μετὰ ταῦτα θέττομεν κατὰ σειρὰν αὐτὰς τὰς διαιρέσεις, καὶ δίδουσι τὸν προβληθέντα Ἀριθμόν. 8.005,,000.003,000.025.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τῶν τεσσάρων Εἰδῶν τῆς Ἀριθμητικῆς.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

§. 29.

Ὑπὸ τὴν λέξιν λογαριάζειν ἐννοοῦμεν τὸν τρόπον τοῦ συλλογίζεσθαι, δηλονότι πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πόσον μεγάλος, ἢ μικρὸς γενήσεται εἷς δοθεὶς, ἢ γνωςὸς Ἀριθμὸς, ἐὰν εἷς ἕτερος ὁποιοσδήποτε Ἀριθμὸς προςεθῇ ἐπ' αὐτῷ, ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ. Θετέον· ἔχομεν δύο Σωροὺς χρημάτων, καὶ μᾶς εἶναι γνωςὸν, ὅτι ὁ εἷς περιέχει 96, ὁ δ' ἕτερος 67 Γρόσια, τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ συνάψωμεν, διὰ νὰ πληροφορηθῶμεν πόσα ςαίνουσιν ὁμοῦ αὐτοὶ οἱ δύο Σωροὶ χρημάτων. Πρὸς τὴν τούτου ἐκτέλεσιν, πρέπει ἢ νὰ μετρήσωμεν τὰ 67 ἀνὰ ἓν, λέγοντες· 68, 69 καὶ ἐφεξῆς, ἄχρις οὗ νὰ μετρηθῶσιν ὅλα τὰ 67 Γρόσια ἐπὶ τοῖς 96, ἢ πρέπει νὰ ἐξεύρωμεν ἄλλον τρόπον, ἢ ἐπιςήμην, διὰ νὰ φανερώσωμεν εὐθὺς τὸν Ἀριθμὸν, τὸν ὁποῖον φέρουσιν, ἀφ' οὗ ἑνωθῶσιν οἱ ῥηθέντες δύο Ἀριθμοὶ ὁμοῦ. Ὁ μὲν πρῶτος τρόπος ἤθελεν ὀνομασθῇ μετρᾶν, ὁ δὲ δεύτερος λογαριάζειν· ὅθεν λέγομεν, ὅτι τὸ λογαριάζειν, δι' οὗ δύναται νὰ ἐνεργηθῇ ὁ τελευταῖος τρόπος, λέγεται Ἀριθμητικὴ, ἤτοι τέχνη τοῦ λογαριάζειν.

§. 30.

Τὸ λογαριάζειν, ἤτοι ἡ Ἀριθμητικὴ ἐπιςήμη, εἶναι κατὰ πάντα τρόπον ἀναγκαιοτάτη, ἐπειδὴ τὰ Πράγματα (τὰ Εἴδη), ἤτοι αἱ Μονάδες, μὲ τοὺς Ἀριθμοὺς τῶν ὁποίων μετέρχονται οἱ Ἄνθρωποι τὰς ἐπιχειρίσεις των, δὲν δύναται νὰ μετρηθῶσιν ἀνὰ ἕν, ὅταν μάλιςα δὲν ὑπάρχουσι παρόντα. Παραδ. χ. Πραγματευτής τις ἠγόρασεν, ἢ ἐπώλησε πραγματείας ἐν διαφόροις καιροῖς, διὰ Γρόσια 586, Γρόσια 452, 5 παράδες, καὶ Γρόσια 831, 19 παράδες, καὶ θέλει νὰ ἠξεύρη πόσα ςαίνουσιν ὁμοῦ, τοῦτ' ἔςι, νὰ φανερωθῇ ἡ ὁλόκληρος Ποσότης των μὲ ἕνα μόνον Ἀριθμόν. Τοῦτο δὲν δύναται δι' οὐδενὸς ἑτέρου τρόπου νὰ σαφηνισθῇ, εἰμὴ διὰ τῆς Ἀριθμητικῆς ἐπιςήμης· διότι τὰ Χρήματα οὐκ εἰσὶ παρόντα ἵνα μετρηθῶσιν.

Ταυτὸν ἐννοητέον, ὅταν ἀφ' Ἑνὸς ἀφαιρεθῇ τι, καὶ πρέπει νὰ διορισθῇ τὸ Ὑπόλοιπον. Παραδ. χ. Εἷς χρεωςεῖ Γρόσια 870, 23 παράδες· δι' αὐτὸ τὸ χρέος του ἐπλήρωσε Γρόσια 635, 10 παράδες· ἆρα πόσα μένει ἔτι χρεώςης; Καὶ ἐνταῦθα μὴν ὄντα τὰ Χρήματα παρόντα ἵνα μετρηθῶσι, δὲν δυνάμεθα ἄλλως νὰ φανερώσωμεν τὸ Ὑπόλοιπον τοῦ χρέους, εἰμὴ διὰ τῆς Ἀριθμητικῆς τέχνης.

Ὅθεν διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ λογαριάζωμεν, πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν· α'. νὰ συνάπτωμεν περισσοτέρους Ἀριθμοὺς ὁμοῦ, καὶ νὰ φανερώνωμεν τὴν Ποσότητα αὐτῶν μὲ μόνον ἕνα Ἀριθμόν· β'. νὰ δυνάμεθα νὰ ἀφαιρῶμεν ἕνα Ἀριθμὸν ἀφ' ἑνὸς ἑτέρου, καὶ νὰ φανερώνωμεν τὸ Ὑπόλοιπον. Τὸ πρῶτον λέγεται Ἀθροισμὸς, καὶ τὸ δεύτερον Ὑφειλμὸς, (ἢ Πρόσθεσις, καὶ Ἀφαίρεσις.)

§. 31.

Οἱ Ἀριθμοὶ, τοὺς ὁποίους συνάπτομεν ὁμοῦ, ἢ ἀφαιροῦμεν ἀφ' ἑτέρων, δύνανται εἶναι ὅμοιοι, ἢ ἀνόμοιοι κατὰ τὸ μέγεθος. Εἰς τὸ Ἄθροισμα γίνεται Αὔξησις ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ Ἀριθμοῦ· εἰς τὴν Ἀφαίρεσιν ὅμως γίνεται Διαίρεσις εἰς ὅμοια μέρη· διότι ἕνας Ἀριθμὸς, ἐξ οὗ ἀφαιροῦνται ἰσομεγέθη μέρη, ἐλαττοῦται εἰς ὅσα ὅμοια μέρη διαιρέθη. Ἐντεῦθεν πηγάζουσι λοιπὸν ἔτι δύο Εἴδη τῆς Ἀριθμητικῆς· α'. ὁ Πολλαπλασιασμός· β'. ἡ Διαίρεσις, ὅ ἐςὶ τὸ, διαιρεῖν ἕνα ὁποιονδήποτε Ἀριθμὸν εἰς ὁποσαδήποτε ὅμοια μέρη, καὶ διορίζειν, πόσον ἐςὶ τὸ ποσὸν ἑκάςου μέρους.

§. 32.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν δηλοῦται, ὅτι ὑπάρχουσι τέσσαρα Εἴδη τῆς Ἀριθμητικῆς· α'. ὁ Ἀθροισμός· β'. ἡ Ἀφαίρεσις· γ'. ὁ Πολλαπλασιασμός· καὶ δ'. ἡ Διαίρεσις· τὰ ὁποῖα διὰ τοῦτο ὀνομάζονται τὰ τέσσαρα Εἴδη τῆς Ἀριθμητικῆς, ἐπειδὴ διὰ τῆς ἐργασίας ἑνὸς, ἢ περισσοτέρων αὐτῶν τῶν τεσσάρων Εἰδῶν ἐπιλύονται πάντα τὰ Προβλήματα· αὐτὰ λοιπὸν εἰσὶ τὰ οὐσιώδη μέρη, ἐξ ὧν συνετέθη ἡ Ἀριθμητική.

ΚΕΦ. Α'.

Περὶ Ἀθροισμοῦ ἐν ἀνωνύμοις ἀκεραίοις Ἀριθμοῖς.

§. 33.

Ὅταν μετρῶμεν περισσοτέρους Ἀριθμοὺς, διὰ νὰ φανερώσωμεν τὴν ποσότητα αὐτῶν μόνον μὲ ἕνα Ἀριθμὸν, αὐτὸ λέγεται ἀθροίζειν. Παραδ. χ. ἀθροίζομεν τοὺς μοναδικοὺς Ἀριθμοὺς 2, 5, 7, 9, λέγοντες· 2 καὶ 5 φέρουσιν 7, καὶ 7 ποιοῦσι 14, καὶ 9 ϛαίνουσιν ὁμοῦ 23· λοιπὸν ὁ Ἀριθμὸς 23 εἶναι ἡ Ποσότης ὅλων τῶν ῥηθέντων Ἀριθμῶν ὁμοῦ. Τίνι δὲ τρόπῳ πρέπει νὰ ἐνεργήσωμεν αὐτὸ τὸ Ἄθροισμα μὲ ὅλους τοὺς Ἀριθμοὺς, συνιϛαμένους ἀφ' ὅσων δήποτε ψηφίων, αὕτη ἐϛὶν ἡ ὑπόθεσις τοῦ Ἀθροισμοῦ.

Ὁ Ἀθροισμὸς λοιπὸν εἶναι μία ὁδηγία ἀριθμητικὴ, ἥτις μᾶς διδάσκει τὸν τρόπον, πῶς νὰ ἐκφωνῶμεν τὴν ὁλόκληρον Ποσότητα περισσοτέρων Ἀριθμῶν (οἵτινες ὀνομάζονται Ἀθροισμοῦ Προσθετέοι) μόνον μὲ ἕνα Ἀριθμὸν, ὅστις Κεφάλαιον λεχθήσεται ἑξῆς.

§. 34.

Ἐντεῦθεν δῆλον ἐϛὶν, ὅτι μόνον Ἀριθμοὶ ὁμοειδῶν μονάδων δύνανται νὰ ἀθροισθῶσιν ὁμοῦ, ὅ ἐϛὶν, οἱ Ἀριθμοὶ, οἵτινες μέλλει νὰ ἀθροισθῶσιν εἰς ἕνα καὶ μόνον Ἀριθμὸν, πρέπει νὰ εἶναι ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ Πράγματος, καὶ τῆς αὐτῆς Ὀνομασίας. Οὕτω παραδ. χ. 5 καὶ 4 δὲν δύνανται ὑπὸ τοῦ ὁλοκλήρου Ἀριθμοῦ 9 νὰ ἐκφωνηθῶσιν, ἐὰν τὰ 5 εἰσὶ 5 Πῆχαι, τὰ δὲ 4 εἰσὶ 4 Ὀκάδες· διότι 5 Πῆχαι καὶ 4 Ὀκάδες, δὲν δίδουσιν οὔτε 9 Πήχας, ἀλλ' οὔτε 9 Ὀκάδας. Ἐκ ταύτης τῆς ἰδίας αἰτίας δὲν δύνανται νὰ ἀθροισθῶσιν ὁμοῦ μήτε αὐτοὶ οἱ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ Πράγματος Ἀριθμοὶ, ἐὰν εἷς ἐξ αὐτῶν συνίϛαται ἐξ ἁπλῶν μονάδων, οἱ ἕτεροι ὅμως ἐκ δεκάδων ἢ ἑκατοντάδων κ. τ. λ. Φέρ' εἰπεῖν· 5 μονάδες καὶ 3 δεκάδες δὲν δύνανται νὰ ἀθροισθῶσιν ὁμοῦ καὶ νὰ ἐκφωνηθῶσι διὰ τοῦ Ἀριθμοῦ 8, ἐπειδὴ 5 μονάδες, καὶ 3 δεκάδες δὲν δίδουσιν οὔτε 8 μονάδας, ἀλλ' οὔτε 8 δεκάδας· ἄρα τὰ 8 δὲν εἶναι ὁ Ἀριθμὸς, ὅστις φέρει τόσα, ὅσα φέρουσιν οἱ Προσθετέοι ἀθροιζόμενοι ὁμοῦ.

Διὰ τοῦτο λοιπὸν δυνάμεθα ἀθροίζειν μόνον Πράδες μὲ Παράδες, Γρόσια μὲ Γρόσια, Ὀκάδες μὲ Ὀκάδες, Πήχαις μὲ Πήχαις (ἐὰν ὦσιν ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ μήκους), καὶ ἑνὶ λόγῳ, μόνον Μονάδας μὲ Μονάδας, Δεκάδας μὲ Δεκάδας, Ἑκατοντάδας μὲ Ἑκατοντάδας, κ.τ.λ., ὡς προσρέθη.

§. 35.

Ὅθεν, ἐὰν οἱ πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντες Ἀριθμοὶ συνίςανται ἐκ περισσοτέρων ψηφίων, τότε ἀθροίζονται ὅλαι αἱ Μονάδες, ὅλαι αἱ Δεκάδες, ὅλαι αἱ Ἑκατοντάδες καὶ ἐφεξῆς· ὧν τὸ Ἄθροισμα δίδει τὴν ὁλόκληρον Ποσότητα, ἤτοι τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν. Παραδ. χ. μᾶς ἐδόθησαν νὰ ἀθροίσωμεν 111,123,321· λοιπὸν ἀθροίζομεν πρῶτον τὰς Μονάδας, οἵτινες φέρουσι 5· ἔπειτα τὰς Δεκάδας, αἱ ὁποῖαι ποιοῦσιν ὁμοίως 5· καὶ τελευταῖον ὅλας τὰς Ἑκατοντάδας, αἵτινες ςαίνουσιν ὡσαύτως 5· ὅθεν αὐτοὶ οἱ τοῦ Ἀθροισμοῦ Προσθετέοι συμποσοῦνται, 5 Ἑκατοντάδες, 5 Δεκάδες, καὶ 5 Μονάδες, ἤτοι διὰ χαρακτήρων 555· τὸ ὁποῖον, ἄνευ περαιτέρω ἐξηγήσεως, εἶναι φανερόν.

§. 36.

Διὰ νὰ ἐκτελῆται ὅμως ὁ τοιοῦτος Ἀθροισμὸς εὐκόλως καὶ ἐν τάξει, καὶ διὰ νὰ μὴ τύχῃ ἐκ λάθους καὶ ἀθροίσωμεν ὁμοῦ ἑτεροειδεῖς Μονάδας, ἔςω βάσις ὁ ἑπόμενος Κανὼν, ὅςτις πηγάζει ἐκ τῶν προλεχθέντων.

Γενικὸς Κανὼν τοῦ Ἀθροισμοῦ.

Γραφθήτωσαν οἱ πρὸς Ἄθροισιν δοθέντες Ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἄνω πρὸς νὰ κάτω ὑπ᾽ ἀλλήλους, ὥςε αἱ Μονάδες νὰ ἵςανται ὑπὸ Μονάδας· αἱ Δεκάδες ὑπὸ Δεκάδας· αἱ Ἑκατοντάδες ὑπὸ Ἑκατοντάδας· ἐν γένει οἱ ὁμώνυμοι ὑπὸ τοὺς ὁμωνύμους Ἀριθμούς· ὑποκάτω δὲ πάντων, ἂς ὑποςρωθῇ μία εὐθεῖα γραμμή· ἔπειτα ἀρχίζομεν τὴν ἄθροισιν ἐκ τῶν Μονάδων, ὧν τὸ Ἄθροισμα θέττομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν, κατ' εὐθεῖαν ὑπὸ τὰς Μονάδας· μετέπειτα ἀθροίζομεν τὰς Δεκάδας, καὶ βάλλομεν τὴν Ποσότητα αὐτῶν ὑπὸ τὴν γραμμὴν, τοῦτ' ἔςιν, ὑπὸ τὰς Δεκάδας· μετὰ ταῦτα τὰς Ἑκατοντάδας καὶ ἐφεξῆς. Τέλος πάντων ὁ δι' αὐτοῦ τοῦ τρόπου ὑπὸ τὴν γραμμὴν προκύψας Ἀριθμὸς, εἶναι ἡ ζητηθεῖσα Ποσότης, ὅ ἐςι, τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν πρὸς Ἀνθροισμὸν δοθέντων Ἀριθμῶν.

Πρόβλημα. Ἐὰν ἀθροισθῶσιν ὁμοῦ οἱ Ἀριθμοὶ 523, 232, 311, καὶ 413, ἄρα πόσον ἔςαι τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν;

Λύσις.	523
	232
	311
	413
Κεφ.	1479

Ἑρμηνεία. Ἐπειδὴ ἐτέθησαν οἱ Προσθετέοι ὑπ' ἀλλήλους τακτικῶς, καὶ ὑπεςρώθη ἡ εὐθεῖα γραμμὴ κατὰ τὸν Κανόνα, ἀρχίζομεν τὸν Ἀθροισμὸν ἐκ τῶν Μονάδων, λέγοντες· 3 καὶ 1 ποιοῦσι 4, καὶ 2 ποιοῦσιν 6, καὶ 3 ποιοῦσιν ὁμοῦ 9· τὰ ὁποῖα, ὡς ὁλόκληρος Ποσότης ὅλων τῶν Μονάδων, τίθενται κατ' εὐθεῖαν ὑπ' αὐτὰς κάτω τῆς γραμμῆς, ὡς ἀνωτέρω· ταὐτὸν πράττομεν καὶ μὲ τὰς Δεκάδας, λέγοντες· 1 καὶ 1 ποιοῦσι 2, καὶ 3 ποιοῦσι 5, καὶ 2 ποιοῦσιν ὁμοῦ 7, ἅτινα τίθενται ὑπὸ τὰς Δεκάδας, ἐπειδὴ καὶ εἶναι ἡ ὁλόκληρος Ποσότης αὐτῶν· ὡσαύτως ἀθροίζομεν καὶ τὰς Ἑκατοντάδας, λέγοντες· 4 καὶ 3 ποιοῦσιν 7, καὶ 2 ποιοῦσιν 9, καὶ 5 ποιοῦσι 14, τὰ ὁποῖα τίθενται ὡσαύτως ὑπὸ τὴν γραμμὴν, καὶ δίδουσι τὸ ζητηθὲν Κεφάλαιον 1479.

§. 37.

Σημείωσις. Ὅτι εἶναι ταὐτὸν κἂν ἀθροίσωμεν κάτωθεν, ἢ ἄνωθεν, τοῦτο ἕκαςος τὸ ἐννοεῖ· μ' ὅλον τοῦτο, εἰμὲν, διὰ περισσοτέραν ἀσφάλειαν, θελήσωμεν νὰ ἀθροίσωμεν δὶς, τότε ἀθροίζομεν πρότερον κάτωθεν, καὶ ἔπειτα ἄνωθεν.

§. 38.

Ὅταν τύχῃ, ὡς πολλάκις συμβαίνει, καὶ ὑπερβῇ τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων, τῶν δεκάδων, καὶ ἐφεξῆς, τὸν ἀριθμὸν 9, καὶ περιέχει ἐν ἑαυτῷ μίαν, ἢ καὶ περισσοτέρας δεκάδας, τότε τίθεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν ὁ κάτω τῶν δέκα ἀριθμὸς μόνον, αἱ δὲ δεκάδες ἀθροίζονται μὲ τὰς ἀριςερῶς πλησίον ἑπομένας μονάδας, δι' ἣν αἰτίαν ἄρχεται ὁ ἀνθροισμὸς ἐκ τῶν μικροτάτων εἰδῶν· ὡς τὸ ἑπόμενον ὑπόδειγμα δεικνύει. Παραδ. χ. μᾶς ἐδόθησαν νὰ ἀθροίσωμεν τοὺς ἑπομένους ἀριθμούς.

	391
	485
	276
	564
Κεφ.	1716

Ἑρμηνεία. Τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων ςαίνει 16· δηλονότι, 4 καὶ 6 ποιοῦσι 10, καὶ 5 ποιοῦσι 15, καὶ 1 ποιοῦσιν ὁμοῦ 16· αὐτὰ δίδουσιν 1 δεκάδα, καὶ 6 μονάδας· λοιπὸν θέττομεν τὰ 6 ὑπὸ τὰς μονάδας, τὸ δὲ 1 ἀθροίζομεν εἰς τὰς ἑπομένας δεκάδας, λέγοντες· 1 (ὃ κατέλειπον αἱ μονάδες) καὶ 6 ποιοῦσιν 7, καὶ 7 ποιοῦσι 14, καὶ 8 ποιοῦσιν 22, καὶ 9 ποιοῦσιν ὁμοῦ 31, ὅ ἐςὶ 3 δεκάδας, καὶ 1 μονάδα· διὰ τοῦτο θέττομεν 1 ὑπὸ τὰς δεκάδας τὰ δὲ 3 ἀθροίζομεν εἰς τὰς ἑπομένας μονάδας, λέγοντες· 3 (ἃ κατέλειπον αἱ δεκάδες) καὶ 5 ποιοῦσιν 8, καὶ 2 ποιοῦσι 10, καὶ 4 ποιοῦσι 14, καὶ 3 ποιοῦσιν ὁμοῦ 17· αὐτὰ τίθενται ὁλόκληρα, ἐπειδὴ δὲν ἔμειναν ἕτερα ψηφία διὰ νὰ ἀθροισθῶσιν.

Ἡ αἰτία, δι' ἣν ἀθροίζομεν τὸ περίσσευμα τῶν μονάδων εἰς τὰς δεκάδας, ἐκεῖνο τῶν δεκάδων εἰς τὰς ἑκατοντάδας, καὶ ἐφεξῆς, πηγάζει ἐκ τῶν, ὧν εἴπομεν εἰς τὸν §. 16. δηλαδὴ, ὅτι ἑκάστη μονὰς μιᾶς ἀριστερῶς ἑπομένης τάξεως, συνίσταται ἀπὸ 10 μονάδων τῆς δεξιῶς παρελθούσης τάξεως· ὅθεν 10 μονάδες τῶν μονάδων, σταίνουσι μίαν μονάδα τῶν δεκάδων, 10 μονάδες τῶν δεκάδων, σταίνουσι μίαν μονάδα τῶν ἑκατοντάδων, καὶ ἐφεξῆς· διὰ τοῦτο ἑκάστη ἀριστερῶς ἑπομένη τάξις. θεωρεῖται πάντοτε, ὡς πρὸς τὴν δεξιῶς παρελθοῦσαν, ὡς δεκὰς πρὸς μονάδα.

§. 39.

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων, δεκάδων καὶ ἐφεξῆς, περιέχῃ ἁπλῶς δεκάδας, μονάδας δ' οὐχὶ, φέρ' εἰπεῖν· 10, 30, 40 κ. τ. λ., τότε θέττομεν μόνον τὸ 0 ὑπὸ τὴν γραμμὴν, τὰς δὲ δεκάδας ἀθροίζομεν, ὡς πρότερον, εἰς τὰς ἑπομένας τάξεις, ὡς.

	754
	842
	791
	613
Κεφ.	3000

Εἰς τὸ ἀπέναντι ὑπόδειγμα συνάγεται τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων 10, διὰ τοῦτο θέττομεν ὑπὸ τὰς μονάδας 0, καὶ βαστῶμεν 1 διὰ τὰς ἑπομένας δεκάδας· αὗται, ὁμοῦ μὲ τὸ 1, ποιοῦσιν 20, δι' ἣν αἰτίαν θέττομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας αὖθις 0, καὶ βαστῶμεν 2· τελευταῖον ἡ ἐσχάτη τάξις, ὁμοῦ μὲ τὰ 2, ποιοῦσι 30· αὐτὰ θέττονται ὁλόκληρα ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ἐπειδὴ δὲν ἔμεινον ἄλλοι ἀριθμοὶ διὰ νὰ ἀθροισθῶσι. Τὰ μηδενικὰ πρέπει ἀφεύκτως νὰ τεθῶσι, καίτοι μηδὲν ἄλλο δηλοῦσιν, εἰμὴ, ὅτι εἰς τὸ κεφάλαιον δὲν ὑπάρχουσι μήτε μονάδες, οὔτε δεκάδες, ἀλλ' οὔτε ἑκατοντάδες· ἄνευ γὰρ τούτων τῶν μηδενικῶν, τὸ ψηφίον 3, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ φανερώσῃ χιλιάδας, δὲν ἤθελε λάβῃ τὴν εἰς τὴν τιμήν του ἀνήκουσαν τετάρτην τάξιν.

§. 40.

Ὅθεν, ἐὰν αἱ τῶν πρὸς Ἄθροισιν δοθέντων ἀριθμῶν Μονάδες, Δεκάδες καὶ ἐφεξῆς, συνίστανται ἅπασαι ἁπλῶς ἐκ μηδενικῶν, τότε φανερώνομεν καὶ τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν διὰ τοῦ 0. Θετέον· 340, καὶ 900

	340	900
	560	800
	210	700
Κεφ.	1110 Κεφ.	2400

Διότι τὸ 0 δηλοῖ εἰς ἑκάστην ποσότητα τὴν ἔλλειψιν τῶν Μονάδων, τῶν Δεκάδων κ. τ. λ. ἄρα καὶ τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν τῶν ποσοτήτων δὲν δύναται νὰ περιέχῃ ὁλοτελῶς μονάδας, δεκάδας κ. τ. λ. μ' ὅλον τοῦτο, ὡς ἐλέχθη, πρέπει αὕτη ἡ ἔλλειψις νὰ φανερωθῇ καὶ εἰς τὸ Κεφάλαιον διὰ τοῦ 0, ὅπως τὰ ἑπόμενα σημαντικὰ ψηφία λάβωσι τὴν οἰκείαν τάξιν. Ὁμοίως πράττομεν, ὅταν μεταξὺ τῶν ἀθροιζομένων ψηφίων εὑρίσκονται καὶ 0· ὅ ἐστιν, ἀθροΐζομεν μόνον τὰ ψηφία, χωρὶς νὰ δώσωμεν οὐδεμίαν προσοχὴν εἰς τὰ μηδενικά. Οἷον·

	20305
	6109
	32010
	8534
	40950
	300
Κεφ.	108208

λέγοντες· (ἀρχίζοντες ἐκ τῶν μονάδων) 4 καὶ 9 ποιοῦσι 13, καὶ 5 ποιοῦσιν ὁμοῦ 18, θέττομεν 8, καὶ βαστῶμεν 1· ἔπειτα, 1 καὶ 5 ποιοῦσιν 6, καὶ 3 ποιοῦσιν 9, καὶ 1 ποιοῦσιν ὁμοῦ 10, θέττομεν 0, καὶ βαστῶμεν 1· μετέπειτα, 1 καὶ 3 ποιοῦσι 4, καὶ 9 ποιοῦσι 13, καὶ 5 ποιοῦσι 18, καὶ 1 ποιοῦσι 19, καὶ 3 ποιοῦσιν ὁμοῦ 22, θέττομεν 2, καὶ βαστῶμεν 2· μετὰ ταῦτα, 2 καὶ 8 ποιοῦσι 10, καὶ 2 ποιοῦσι 12, καὶ 6 ποιοῦσιν ὁμοῦ 18, θέττομεν 8, καὶ βαστῶμεν 1· τελευταῖον, 1 καὶ 4 ποιοῦσι 5, καὶ 3 ποιοῦσιν 8, καὶ 2 ποιοῦσιν ὁμοῦ 10, τὰ ὁποῖα τίθενται ὁλόκληρα ὑπὸ τὴν γραμμήν.

§. 41.

Εἰμὲν ἐπληροφορήθημεν καλῶς τὰ μέχρι τοῦδε, δὲν δύναται τὰ μᾶς συγχίσῃ ἡ περίςασις, ἐὰν τὸ ὁλόκληρον Ἄθροισμα μιᾶς ὁποιασδήποτε τάξεως, ὡς τῶν μονάδων, τῶν δεκάδων κτλ., φθάσῃ, ἢ ὑπερβῇ τὰ Ἑκατόν· διότι μόνον αἱ τοῦ ὁλοκλήρου Ἀθροίσματος Μονάδες τίθενται ὑπὸ τὴν γραμμὴν, τὸ δὲ περίσσευμα, δηλονότι· ὅσαι Δεκάδες προκύψωσιν ἐκ τοῦ ὁλοκλήρου ἀθροίσματος τῶν μονάδων, ἀθροίζονται εἰς τὴν ὑψηλοτέραν τάξιν, τοῦτ' ἔςιν, εἰς τὰς Δεκάδας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Παραδ. χ. ἐὰν ἀθροίσωμεν τὰς Μονάδας, δεκάδας κτλ. περισσοτέρων ἀριθμῶν, καὶ προκύψῃ τὸ ὁλόκληρον Ἄνθροισμα αὐτῶν 105, ἢ 118, ἢ 324 κτλ., θέττομεν 5, καὶ βαςῶμεν 10· ἢ 8, καὶ βαςῶμεν 11· ἢ 4, καὶ βαςῶμεν, 32, καὶ ἐφεξῆς, ὅ ἐςί· 5 Μονάδες τίθενται ὑπὸ τὴν γραμμὴν, καὶ 10 Δεκάδες ἀθροίζονται εἰς τὰς Δεκάδας (ἐνταῦθα ὑποθέτομεν τὰ 105 Ἄθροισμα Μονάδων), ἢ 8 Μονάδες ὑπὸ τὴν γραμμὴν, καὶ 11 Ἑκατοντάδες (ὑποθέτοντες τὰ 118 Ἄθροισμα Δεκάδων) εἰς τὰς Ἑκατοντάδας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Τὸ ἑπόμενον Ὑπόδειγμα ἂς χρησιμεύσῃ τόσον περὶ ὧν ἐλέχθη, ὅσον καὶ περὶ τῆς καταςρώσεως τῶν Ἀριθμῶν κατὰ τὸν Κανόνα, ἵνα τίθενται πάντοτε αἱ ὁμοειδεῖς Μονάδες κατ' εὐθεῖαν ὑπ' ἀλλήλας, ὡς·

198 76 267 84 99 576 6379 96 798 2179 988 6 899 67 Κεφ. 12712	Ἐνταῦθα προκύπτει τὸ ὁλόκληρον Ἄθροισμα τῶν Μονάδων 102· λοιπὸν θέττομεν 2, καὶ βαςῶμεν 10· τὸ Ἄθροισμα τῶν Δεκάδων, ὁμοῦ μὲ τὰ βαςαχθέντα 10, ποιεῖ 111· ὅθεν θέττομεν 1, καὶ βαςῶμεν 11, τὰ ὁποῖα ἀθροίζομεν εἰς τὴν ἑπομένην τάξιν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 42.

Σημείωσις. Οἱ τοιοῦτοι Ἀθροισμοί, καὶ ἔτι διεξοδικώτεροι, ἐκτελοῦνται ἀσφαλέςερον, ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς Προσθετέους ἀνὰ πέντε, ἢ ἀνὰ ὅσους θέλει ἕκαςος, διὰ ςιγμῶν, ἢ εὐθειῶν γραμμῶν, καὶ ἀθροίσωμεν αὐτὰς τὰς διαιρέσεις κατὰ μέρος· εἶτα ἀθροίσωμεν τὰ κατὰ μέρος τῶν διαιρέσεων Κεφάλαια, τὰ ὁποῖα δίδουσιν ἔπειτα τὸ ὁλόκληρον Κεφάλαιον ὅλων τῶν Προσθετέων.

Περὶ ὀνοματικῶν καὶ μικτῶν Ἀριθμῶν.

§. 43.

Μέχρι τοῦδε δὲν ἐδόθη κἀμμία ὀνομασία εἰς τοὺς Ἀριθμούς, ἤγουν, δὲν ἐλέχθη, ἐὰν ἦσαν Γρόσια, ἢ Πῆχαι, ἢ ὅ,τι ἕτερον Πρᾶγμα, ἐπειδὴ ὁ τρόπος τοῦ ἀθροίζειν μένει πάντοτε ὁ αὐτός. Ὅθεν, ἄχρις οὗ δὲν διορισθεῖ ῥητῶς εἰς τοὺς Ἀριθμοὺς τὸ, τὶ παριςάνουσι, λέγονται ἀνώνυμοι Ἀριθμοί· ἐὰν ὅμως προςεθῇ τὸ ἀντικείμενον αὐτῶν ῥητῶς, φέρ' εἰπεῖν Γρόσια 53· Ὀκάδες 68 κτλ., τότε καλοῦνται ὀνοματικοὶ Ἀριθμοί.

§. 44.

Ἐν τούτῳ λοιπὸν ἅπασαι σχεδὸν αἱ ὀνοματικαὶ Μονάδες, κατ' ἐξοχὴν ἐκεῖναι τῶν Χρημάτων, τῶν Μέτρων, τοῦ Καιροῦ, τοῦ Ζυγίου, κτλ., εἰσὶν ἐκ κατωτέρων διαιρέσεων τοιουτοτρόπως συνθεμέναι (μ' ὅλον ὁποῦ διαφέρουσι σχεδὸν εἰς ἑκάςην Ἐπαρχίαν), ὥςε ἕνας διορισμένος Ἀριθμὸς τῶν μικροτέρων εἰδῶν συνιςᾷ μίαν μονάδα τοῦ Μεγαλητέρου Εἴδους. Οὕτω συνίςαται 1 Γρόσι ἐκ 40 Παράδων· 1 Παρὰς ἐκ 3 Ἄσπρων· 1 Χρόνος ἐκ 12 Μηνῶν· 1 Μὴν ἐκ 30 Ἡμερῶν· 1 Ἡμέρα ἀπὸ 24 Ὡρῶν· 1 Ὥρα ἀπὸ 60 Λεπτῶν· 1 Καντάρι ἀπὸ 44 Ὀκάδων· 1 Ὀκᾶ ἐκ 4 Λιτρῶν· 1 Λίτρα ἀπὸ 100 Δραμίων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὅταν λοιπὸν, ὁμοῦ μὲ τὰ τοιαῦτα μεγαλήτερα εἴδη, δοθῇ δὲ ἀριθμοῦ καὶ ἓν μέρος τοῦ μικροτέρου αὐτῶν εἴδους, φέρ' εἰπεῖν, Γρόσια 8 ,, 13 παράδες· (τὸ τοῦ δεσμοῦ σημεῖον (,,) δηλοῖ τὸ, καί), ἤτοι Γρόσια 9 ,, 5 παράδες ,, 2 ἄσπρα, τότε λέγεται ὁ τοιοῦτος Ἀριθμὸς ὀνοματικὸς μικτὸς Ἀριθμός· διότι σύγκειται ἐκ μεγαλητέρων καὶ μικροτέρων εἰδῶν τοῦ ὀνοματικοῦ αὐτοῦ Ἀντικειμένου, ὡς εἰπεῖν, εἶναι μεμιγμένος ἐκ περισσοτέρων εἰδῶν.

§. 45.

Εἰς τὴν Ἄθροισιν τῶν τοιούτων Ἀριθμῶν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἠξεύρωμεν μόνον, πόσαι μονάδες τοῦ κατωτέρου εἴδους συνιςῶσι μίαν μονάδα τοῦ μεγαλητέρου εἴδος, ἡ δὲ κατάςρωσις καὶ ἄθροισις ἐκτελοῦνται ἀπαραλλάκτως ὡς καὶ εἰς τὸν Ἀθροισμὸν τῶν ἀνωνύμων Ἀριθμῶν, τοῦτ' ἔςι, θέττομεν τὰς ὁμοειδεῖς μονάδας ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω ὑπ' ἀλλήλας, καὶ ἀρχίζομεν τὸν Ἀθροισμὸν ἐκ τοῦ κατωτέρου εἴδους, ἵνα τὰς εἰς τὸ Κεφάλαιον αὐτοῦ τυχὸν περιεχομένας μονάδας τοῦ πλησίον μεγαλητέρου εἴδους δυνηθῶμεν νὰ τὰς συνάψωμεν ὁμοῦ εἰς τὸ ἑπόμενον εἶδος· ὡς τὸ ἀκόλουθον Ὑπόδειγμα δεικνύει, ἤτοι.

Ἀθροισθήτωσαν.	Γροσ.	51	,,	23	παραδ.	,,	2	ἄσπρα
	—	8	,,	12	—	,,	1	—
	—	392	,,	15	—	,,	2	—
	—	86	,,	39	—	,,	—	—
Κεφ.	Γροσ.	539	,,	10	παραδ.	,,	2	ἄσπρα

Ἑρμηνεία. Ἐπειδὴ ἐνταῦθα πρέπει νὰ γίνωσι τὰ Ἄσπρα Παράδες, οἱ δὲ Παράδες Γρόσια, διὰ τοῦτο ἀρχίζομεν τὴν Ἄθροισιν ἐκ τῶν ἄσπρων, ὡς μέρη τοῦ μικροτάτου εἴδους· τὸ Ἄθροισμα αὐτῶν σαίνει 5 ἄσπρα· 3 ἄσπρα ὅμως ποιοῦσιν 1 παρὰν, ὅθεν τὰ 5 ἄσπρα σαίνουσιν 1 παρὰν, καὶ 2 ἄσπρα· λοιπὸν θέττομεν τὰ 2 ἄσπρα ὑπὸ τὰ ἄσπρα, τὸν δὲ 1 παρὰν ἀθροίζομεν εἰς τοὺς ἑπομένους παράδες, λέγοντες· 1 (ὃ κατέλειπον τὰ ἄσπρα) καὶ 9 ποιοῦσι 10, καὶ 5 ποιοῦσι 15, καὶ 2 ποιοῦσι 17, καὶ 3 ποιοῦσιν ὁμοῦ 20, διὸ θέττομεν ὑπὸ τὰς μονάδας τῶν παράδων τὸ 0 (διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν παράδων, ἐξ ὧν συνίςαται ἓν Γρόσι, εἰσὶν ὁλόκληραι δεκάδες, ἤτοι 40), καὶ βαρῶμεν 2, τὰ ὁποῖα ἀθροίζομεν ἑπομένως, λέγοντες· 2 καὶ 3 ποιοῦσι 5, καὶ 1 ποιοῦσιν 6, καὶ 1 ποιοῦσιν 7, καὶ 2 ποιοῦσιν ὁμοῦ 9, δηλονότι (ὁμοῦ μὲ τὸ ἀνωτέρω προτεθὲν 0) 90· ἐπειδὴ δὲ 4 δεκάδες, τοῦτ' ἔςι 40, σαίνουσιν ἓν Γρόσι· ἄρα ὁ Ἀριθμὸς 90 περιέχει 2 Γρόσια, καὶ 10 παράδες, διὰ τοῦτο θέττομεν ἀριςερῶς, πλησίον τοῦ 0 (ὅ ἐςιν, ἐν τῇ τάξει τῶν δεκάδων), 1, καὶ βαςῶμεν 2· ἔπειτα λέγομεν· 2 (ἃ κατέλειπον οἱ παράδες

2 Γρόσια), καὶ 6 ποιοῦσιν 8, καὶ 2 ποιοῦσι 10, καὶ 8 ποιοῦσι 18, καὶ 1 ποιοῦσιν ὁμοῦ 19· λοιπὸν θέττομεν ὑπὸ τὰς μονάδας τῶν Γροσίων 9, καὶ βαςῶμεν 1· εἶτα λέγομεν· 1 καὶ 8 ποιοῦσιν 9, καὶ 9 ποιοῦσι 18, καὶ 5 ποιοῦσιν ὁμοῦ 23· ὅθεν θέττομεν 3, καὶ βαςῶμεν 2· τελευταῖον λέγομεν· 2 καὶ 3 ποιοῦσι 5, ἐπειδὴ δὲ δὲν ἔμειναν ἄλλα ψηφία νὰ ἀθροίσωμεν, διὰ τοῦτο θέττομεν αὐτὰ τὰ 5 ἐν τῇ τάξει τῶν Ἑκατοντάδων, καὶ οὕτω τελειώνει ὁ Ἀθροισμὸς τοῦ δοθέντος Ὑποδείγματος.

Πρὸς ἄσκησιν ἰδοὺ καὶ ἕτερα Ὑποδείγματα.

Α΄.	Γροσ.	158	„	13	παραδ.	„	2	ἄσπρα.
	—	20	„	2	—	„	—	—
	—	5	„	27	—	„	1	—
Κεφ.	Γροσ.	184	„	3	παραδ.	„	—	—
Β΄.	Γροσ.	244	„	35	παραδ.	„	1	ἄσπρον.
	—	529	„	11	—	„	2	—
	—	621	„	33	—	„	1	—
Κεφ.	Γροσ.	1386	„	—	—	„	1	ἄσπρον.
Γ΄.	Γροσ.	2059	„	37	παραδ.	„	2	ἄσπρα.
	—	120	„	19	—	„	1	—
	—	512	„	25	—	„	2	—
Κεφ.	Γροσ.	2693	„	2	παραδ.	„	2	ἄσπρα.
Δ΄.	Γροσ.	891	„	34	παραδ.	„	—	ἄσπρα.
	—	235	„	22	—	„	1	—
	—	920	„	23	—	„	2	—
Κεφ.	Γροσ.	2048	„	—	—	„	—	—

Εἰς τὸ α΄. συνάγεται τὸ Ἄθροισμα τῶν ἄσπρων 3, καὶ ἐπειδὴ 1 Παρὰς συνίςαται ἐκ 3 ἄσπρων, διὰ τοῦτο δὲν ἐθέσαμεν οὐδὲν ὑπὸ τὰ ἄσπρα, ἀλλ' ἀθροίσαμεν τὸν 1 Παρὰν εἰς τοὺς ἑπομένους Παράδες, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Εἰς τὸ β'. συνάγεται τὸ ἄθροισμα τῶν Ἄσπρων 4, διὸ καὶ ἐθέσαμεν 1. ὑπὸ τὰ Ἄσπρα, τὸν δὲ 1 Παρὰν ἀθροίσαμεν εἰς τοὺς Παράδες· οἱ ὁποῖοι ἔφερον 2 σῶα Γρόσια, δι' ἣν αἰτίαν δὲν ἐθέσαμεν ὑπὸ τοὺς Παράδας οὐδέν, ἀλλ' ἀθροίσαμεν τὰ 2 Γρόσια εἰς τὰ ἑπόμενα Γρόσια ὁμοῦ.

Εἰς τὸ γ'. συνάγεται τὸ Ἄθροισμα τῶν Ἄσπρων 5, διὰ τοῦτο ἐθέσαμεν 2 ὑπὸ τὰ Ἄσπρα, τὸ δὲ 1 ἀθροίσαμεν μὲ τοὺς παράδες, οἱ ὁποῖοι ἔφερον 2 Γρόσια, καὶ 2 παράδες, διὸ ἐθέσαμεν 2 ὑπὸ τὰς μονάδας τῶν παράδων, τὰ δὲ 2 Γρόσια ἀθροίσαμεν μὲ τὰ Γρόσια.

Εἰς τὸ δ'. συνάγεται τὸ Ἄθροισμα τῶν Ἄσπρων 1. σῶος Παρὰς, καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Παράδων 2 σῶα Γρόσια· διὰ τοῦτο δὲν προέκυψαν εἰς τὸ Κεφάλαιον οὔτε παράδες, ἀλλ' οὔτε ἄσπρα.

§. 46.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον λοιπὸν ἀθροίζονται ὅλα τὰ εἴδη ὁποιωνδήποτε ὀνοματικῶν μικτῶν Ἀριθμῶν· πλὴν μὲ ταύτην τὴν διαφορὰν ὅτι εἰς ἐκείνους τοὺς Ἀριθμοὺς, οἵτινες δὲν σύγκειν-ται ἐξ ἁπλῶν δεκάδων, ἀλλ' ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων (φέρ' εἰπεῖν τὸ καισσαροβασιλικὸν Φοῦντι, ὅ ἐςὶ μέτρον ζυγίου, καὶ συνίςαται ἐκ 32 λοτίων, δηλονότι ἐκ 3. δεκάδων καὶ 2. μονάδων), δεν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ Ἄθροισμα τῶν μονάδων, πρὶν ἢ ἀθροίσωμεν ὁμοῦ καὶ τὰς δεκάδας· διότι ἐκ τοῦ ὁλοκλήρου Ἀθροίσματος τῶν τε μονάδων καὶ δεκάδων φανεῖται πόσαι μονάδες, ὅ ἐςὶν Ἀκέραια, τοῦ πλησίον μεγαλητέρου εἴδους περιέχονται ἐν αὐτῷ, ὡς τὸ ἑπόμενον Ὑπόδειγμα δεικνύει.

Ἀθροισθήτωσαν φούντια 15 „ 3 λότια (α) 40

Ἐνταῦθα ὄντων — 10 „ 18

τῶν λοτίων τὸ μι- — 9 „ 19

κρότατον εἶδος, ἀρ- Κεφ. φούντια 35 „ 8 λότια

χίζομεν τὴν Ἄθροισιν, ὡς συνήθως, ἐξ αὐτῶν, λέγοντες· 9 καὶ 8 ποιοῦσι 17, καὶ 3 ποιοῦσιν ὁμοῦ 20· λοιπὸν βαςῶμεν 2· τὸ 0 ὅμως δὲν δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τῶν λοτίων· διότι ἡ πλησίον ὑψηλοτέρα μονὰς, δηλαδὴ τὸ Φοῦντι, δὲν δύναται νὰ ληφθῇ ἁπλῶς ἐκ τῶν δεκάδων τῶν λοτίων (καθὼς συμβαίνει τοῦτο εἰς τὰ γρόσια καὶ παράδες), ἀλλ' ἐκ τοῦ ὁλοκλήρου Ἀθροίσματος τῶν τε μονάδων, καὶ δεκάδων, ἐπειδὴ ἐκ τούτων σύγκειται, ὡς ἐῤῥέθη ἀνωτέρω. Ὅθεν θέττομεν πρὸς τὸ παρὸν κατὰ μέρος τὸ 0 (ὡς ἀνωτέρω πλησίον τοῦ (α)), καὶ ἀθροίζομεν ἑπομένως καὶ τὰς δεκάδας, λέγοντες· 2 (τἀνωτέρω βαςαχθέντα), καὶ 1. ποιοῦσι 3, καὶ 1. ποιοῦσιν ὁμοῦ 4, τὰ ὁποῖα θέττομεν ἀρεςερῶς πλησίον τοῦ 0 παρὰ τῷ (α), καὶ οὕτω φαίνει τὸ Ἄθροισμα ὅλων τῶν Λοτίων 40· ἐπειδὴ ὅμως 32. Λότια ποιοῦσιν 1. Φοῦντι, ἄρα τὰ 40 Λότια ποιοῦσιν 1 Φοῦντι καὶ 8 Λότια· λοιπὸν θέττομεν 8. ὑπὸ τὰ Λότια, καὶ βαςῶμεν 1 Φοῦντι διὰ τὰ Φούντια, λέγοντες· 1 (ὃ ἐβαςάξαμεν), καὶ 9 ποιοῦσι 10, καὶ 5 ποιοῦσιν ὁμοῦ 15, λοιπὸν θέττομεν 5, ὡς ἀνωτέρω, ὑπὸ τὰ Φούντια, καὶ βαςῶμεν 1· εἶτα 1 (ὃ ἤδη ἐβαςάξαμεν), καὶ 1 ποιοῦσι 2, καὶ 1 ποιοῦσιν ὁμοῦ 3, τὰ ὁποῖα ἐτέθησαν παρὰ τοῖς 5, καὶ οὕτω προέκυψε τὸ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Προσθετέων Φούντια 35„ 8 Λότια.

§. 47.

α΄. Σχόλιον. Οἱ τοιοῦτοι μικτοὶ ἀριθμοὶ ἀθροίζονται εὐχερέςερον καὶ πάνυ ὠφελίμως, ἐὰν ἀθροίσωμεν μόνον τόσα ἐκ τοῦ κατωτέρου εἴδους, ὅσα ἐπιζητοῦνται διὰ μίαν μονάδα, ὃ ἐςὶν Ἀκέραιον, τοῦ πλησίον ἀνωτέρου εἴδους. Παραδ. χ. εἰς τὰ Λότια· ἀθροίζομεν ἕως τῶν 32, καὶ ὁσάκις φθάσομεν εἰς τὰ 32, θέττομεν ἓν σημεῖον, καὶ ἀθροίζομεν περαιτέρω πάλιν ἕως τῶν 32, καὶ ἐφεξῆς, ἄχρις οὗ νὰ ἀθροισθῶσιν ὅλα τὰ Λότια· λοιπὸν ὁσάκις ἀθροίσωμεν ἕως τῶν 32, τόσα Φούντια περιέχονται εἰς τὰ Λότια, τὰ ὁποῖα ἀθροίζομεν μὲ τὰ Φούντια ὁμοῦ. Θετέον, ὅτι μᾶς ἐδόθησαν νὰ ἀθροίσωμεν τὰ κατωτέρω· ἀθροίζομεν λοιπὸν τὰ Λότια ἕως τῶν 32 (μονάδας καὶ δεκάδας ἐν ταυτῷ), δηλονότι· 31 καὶ 1 (ἐκ τῶν ἑπομένων 28) ποιοῦσι 32, τοῦτ' ἔςιν 1 Φοῦντι· τὸ Φοῦντι χαρακτηρίζεται οὑτωσὶ ℔), διὰ τοῦτο θέττομεν παρὰ τοῖς 28 μίαν ςιγμὴν διὰ σημεῖον, ὅτι ἀθροίσαμεν ἤδη ἓν Φοῦντι, καὶ ἀθροίζομεν τὸ περίσσευμα περαιτέρω, πάλιν ἕως τῶν 32, ἤγουν 27 (τὰ περισσεύσαντα ἐκ τῶν 28) καὶ 5 (ἐκ τῶν 9) ποιοῦσι 32, λοιπὸν θέττομεν καὶ παρὰ τοῖς 9 μίαν ςιγμὴν διὰ σημεῖον, ὅτι ἕως ἐκεῖ ἀθροίσαμεν αὖθις 1 Φοῦντι, τὰ δὲ περισσεύσαντα 4 θέττομεν ὑπὸ τῶν Λοτίων. Ὅθεν ἐπειδὴ εἰς τὰ Λότια εὑρίσκονται δύο ςιγμαί, ἤτοι σημεῖα, δῆλον ἐςίν, ὅτι περιέχουσι 2 Φούντια, τὰ ὁποῖα ἀθροίζομεν μὲ τὰ Φούντια ὡς συνήθως.

	℔	32 ,,	9	λότια.
	—	13 ,,	28	—
	—	51 ,,	31	—
Κεφ.	℔	98 ,,	4	λότια.

Ἰδοὺ καὶ ἕτερον ὑπόδειγμα εἰς Τάλληρα· τὸ Τάλληρον πρὸς 24 γροσίκια, καὶ τὸ γροσίκι πρὸς 12 φένιγ.

	Τάλληρα	135 ,,	18	γροσίκια	9	φένιγ.
	—	98 ,,	19	—	10	—
	—	76 ,,	23	—	11	—
Κεφ.	Τάλληρα	211 ,,	14	γροσίκια	6	φένιγ.

§. 48.

β΄. Σχόλιον. Κατὰ τὰ περισσότερα ἀριθμητικὰ Βιβλία φαίνεται, ὅτι ἔκπαλαι ἐπεκράτησε συνήθεια κοινὴ, ἵνα παραδίδωνται τὰ τέσσαρα Εἴδη τῆς Ἀριθμητικῆς πρότερον ἐν ἀνωνύμοις, καὶ ἔπειτα ἐν ὀνοματικοῖς ἀριθμοῖς, ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι ὄντες οἱ πλεῖςοι τῶν ὀνοματικῶν Ἀριθμῶν τοιουτοτρόπως συνθεμένοι, δὲν δύνανται οἱ Ἀρχάριοι νὰ ἐννοήσωσι, χωρὶς τὴν βοήθειαν τῆς Διαιρέσεως, πόσαι μονάδες, ὅ ἐςιν Ἀκέραια, τοῦ πλησίον μεγαλητέρου Εἴδους περιέχονται εἰς μίαν, ἔςω καὶ μετρίαν Ποσότητα τοῦ μικροτέρου αὐτῶν Εἴδους· δι' ἣν αἰτίαν, ὅπερ εἶναι πιθανὸν, παραδίδονται τὰ τέσσαρα Εἴδη πρότερον ἐν ἀνωνύμοις, εἶτα δὲ ἐν ὀνοματικοῖς Ἀριθμοῖς, ἵνα δύνανται οἱ Ἀρχάριοι, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς Διαιρέσεως, νὰ ἀθροίζωσιν ἐν εὐκολίᾳ τοὺς τοιούτους μικτοὺς Ἀριθμούς. Πλὴν ἡ πεῖρα ἀπέδειξεν, ὅτι ἑκάςη παράδοσις ἀντιλαμβάνεται πλέον εὐαρέςως καὶ εὐκόλως, ὅταν τὶς κατανοήσῃ ἐν ταὐτῷ τὴν χρῆσιν καὶ ὄφελος αὐτῆς. Διὰ τοῦτο λοιπὸν εἶναι πολλὰ ὠφελιμώτερον νὰ διδάσκηται ἕκαςον Εἶδος τῆς Ἀριθμητικῆς ἐν ταὐτῷ καὶ μὲ ὀνοματικοὺς μικτοὺς Ἀριθμούς· διότι δι' αὐτοῦ τοῦ τρόπου ἐρεθίζεται ἡ περιέργια τῶν Ἀρχαρίων, καὶ γίνονται ἐπιμελέςεροι, ἐπειδὴ μετέρχονται εἰς τὸν ἴδιον καιρὸν καὶ νεώτερόν τι· ἐν τούτῳ ὅμως πρέπει νὰ προσέχωμεν, καὶ νὰ ἐκλέγωμεν τοιαῦτα μικρὰ καὶ εὔκολα Προβλήματα, τὰ ὁποῖα, χωρὶς τὴν χρῆσιν τῆς Διαιρέσεως, δύνανται νὰ ἐπιτυχηθῶσι διὰ τοῦ νοός. Τοιαῦτα Προβλήματα εἰσὶν ἱκανὰ πρὸς πληροφορίαν καὶ κατάληψιν τῆς βάσεως αὐτῶν· μεγαλήτερα δὲ καὶ διεξοδικώτερα, πρὸς ἀπόλαυσιν περισσοτέρας ἑτοιμότητος, προβάλλονται μετὰ τὴν ἐντελῆ παράδοσιν τῆς Διαιρέσεως. Πρὸς τούτοις δὲν πρέπει νὰ ἐπιφορτίζωνται οἱ Ἀρχάριοι μὲ τοιούτους ὀνοματικοὺς μικτοὺς Ἀριθμοὺς, ὧν ἡ σύνθεσις εἶναι ἄγνωςος εἰς αὐτούς· διότι τὰ τοιαῦτα πρὸς ἄσκησιν ἀνάρμοςα μέσα, ζημειοῦσι τὴν ἑτοιμότητα, τὴν ὁποίαν ςοχαζόμεθα ν᾽ ἀπολαύσωμεν ἐκ τούτου, ἐπειδὴ οἱ Διδασκόμενοι δίδουσι περισσοτέραν προσοχὴν εἰς τὸ, νὰ βαςῶσιν εἰς τὴν ἐνθύμησίν των τὰ εἰς αὐτοὺς ἄγνωςα Εἴδη, καὶ τὴν σύνθεσιν ἑκάςης Μονάδος τῶν αὐτῶν Εἰδῶν, παρὰ εἰς αὐτὸν τὸν ἴδιον Ἀθροισμὸν, ὅς τις εἶναι ἡ παροῦσα κυρία ὑπόθεσίς μας. Ἱκανὸν εἶναι πρὸς τὸ παρὸν ἐὰν μεταχειρισθῶμεν τοιούτους ὀνοματικοὺς μικτοὺς Ἀριθμοὺς, οἵτινες εἰσὶ κοινῶς γνωςοὶ ἐκεῖ, ὅπου παραδίδεται ἡ Ἀριθμητικὴ, φέρ᾽ εἰπεῖν· τὸ Ζύγι, τὸ Μέτρον διαφόρων Εἰδῶν κτλ. ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις αὐτῶν τῶν Μονάδων εἶναι κοινῶς γνωςὴ, καὶ ἐρεθίζεται ὁ Ἀρχάριος εἰς τὴν πρᾶξιν τῶν τοιούτων λογαριασμῶν.

ΚΕΦ. Β΄.

Περὶ Ἀφαιρέσεως.

§. 49.

Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι Τρόπος ἀριθμητικὸς, ὅς τις διδάσκει, πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν Διαφορὰν ἑνὸς μικροῦ ἀριθμοῦ πρὸς ἕνα μεγαλήτερον· ὅ ἐςὶ, πόσον μεγαλήτερος εἶναι ὁ εἷς τοῦ ἑτέρου.

§. 50.

Ἡ λέξις ἀφαιρεῖν δεικνύει, ὅτι μέλλει ν᾽ ἀφαιρέσωμεν ἕνα Ἀριθμὸν ἀφ᾽ ἑνὸς ἑτέρου, ἐξ οὗ ἐννοοῦμεν, ὅτι ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, ἐξ οὗ ἕτερος μέλλει ν᾽ ἀφαιρεθῇ, πρέπει πάντοτε νὰ εἶναι μεγαλήτερος. Παραδ. χ. ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸν Ἀριθμὸν 4 ἐκ τοῦ Ἀριθμοῦ 7, μένουσι 3· ἄρα 3 εἶναι ἡ Διαφορὰ μεταξὺ τῶν Ἀριθμῶν 4 καὶ 7, τὴν ὁποίαν εὕρομεν διὰ τῆς Ἀφαιρέσεως τοῦ μικροτέρου ἐκ τοῦ μεγαλητέρου Ἀριθμοῦ.

§. 51.

Ἐντεῦθεν δηλοῦται πρῶτον, ὅτι εἰς τὴν Ἀφαίρεσιν ἐπιζητοῦνται κυρίως δύο Ἀριθμοί· ὁ μὲν, ἐξ οὗ μέλλει νὰ γένῃ ἡ ἀφαίρεσις, ὀνομάζεται Ἀφαιρούμενος, ὁ δὲ, ὅστις ἀφαιρεῖται, λέγεται Ἀφαιρετέος· ἐξ ὧν προκύπτει καὶ τρίτος Ἀριθμὸς, ὅστις Διαφορὰ, ἢ Ὑπόλοιπον καλεῖται. Δεύτερον, ὅτι οἱ πρὸς ἀφαίρεσιν διδόμενοι Ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι Ὁμοειδεῖς καὶ Ὁμώνυμοι, ἐπειδὴ ἄλλως δὲν δυνάμεθα νὰ τοὺς ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀλλήλων. Φέρ' εἰπεῖν· ἐὰν ὁ Ἀριθμὸς 9, δεικνύῃ 9 Δεκάδας, ὁ δὲ 6, ὅστις ἐξ αὐτοῦ μέλλει ν' ἀφαιρεθῇ, 6 Μονάδας, τότε δὲν δυνάμεθα εἰπεῖν, 6 ἐκ τῶν 9 μένουσι 3, ἐπειδὴ ἀφαιρουμένων 6 Μονάδων ἀπὸ 9 Δεκάδων, δὲν καταλιμπάνουσιν οὔτε 3 Μονάδας, ἀλλ' οὔτε 3 Δεκάδας· ἄρα τὰ 3. δὲν εἶναι ἡ καθ' αὐτὸ Διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύω ῥηθέντων Ἀριθμῶν. Ἑπομένως· ὅτι δὲν δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν Πήχας ἐξ Ὀκάδων, Μέτρα ἐκ Χρημάτων, κτλ., τὸ δίδει ὁ ὀρθὸς λόγος· διότι τὸ, ὅ,τι μέλλει ν' ἀφαιρεθῇ ἐξ ἑνὸς Εἴδους, πρέπει νὰ εἶναι μέρος τοῦ αὐτοῦ Εἴδους, ἀλλ' οὐχ' ἑτεροειδές· ὅθεν ὅ,τι ἐλέχθη περὶ τῶν Ὁμοειδῶν καὶ Ὁμωνύμων Ἀριθμῶν εἰς τὸν Ἀθροισμὸν, ταὐτὸν ἐννοητέον καὶ εἰς τὴν Ἀφαίρεσιν· ἐξ οὗ ἕπεται, ὅτι τὸ Ὑπόλοιπον σύγκειται πάντοτε ὡσαύτως ἐκ τοιούτων Εἰδῶν, ἐξ ὧν συνίστανται καὶ οἱ Ἀριθμοὶ, οἵτινες ἀφαιρέθησαν ἀπ' ἀλλήλων.

§. 52.

Διὰ τοῦτο ἡ κατάστρωσις τῶν πρὸς ἀφαίρεσιν διδομένων Ἀριθμῶν μένει ἡ αὐτὴ, ὡς καὶ εἰς τὸν Ἀθροισμὸν, πλὴν ἀντὶ νὰ εἴπωμεν 3 καὶ 5 ποιοῦσιν 8, λέγομεν· 3 ἐκ τῶν 5 μένουσι 2.

Δηλονότι· γράφομεν τὰς ὁμοειδεῖς καὶ ὁμωνύμους Μονάδας κατ' εὐθεῖαν ὑπ' ἀλλήλας, καὶ ϛρώνομεν ὑποκάτω αὐτῶν μίαν γραμμήν· ἔπειτα ἀρχίζομεν ἐκ τῶν Μονάδων, ὡς τῆς μικροτάτης τάξεως, καὶ ἀφαιροῦμεν πάντοτε τὸ κάτω Ψηφίον ἐκ τοῦ κατ' εὐθεῖαν ἄνω ἱϛαμένου, θέττοντες τὸ Ὑπόλοιπον, τουτ' ἔϛιν, ὅ,τι καταλείψει τὸ ἐπάνω Ψηφίον, κατ' εὐθεῖαν κάτω, ὑπὸ τὴν γραμμήν. ὡς·

ἐκ	4787
ἀφαιρεθήτωσαν	3256
ὑπόλοιπον	1531

Ἑρμηνεία. Ἀρχόμενοι ἐκ τῶν Μονάδων, λέγομεν· 6 (Μονάδες) ἐξ 7 (Μονάδων), μένει 1 (Μονάς)· εἶτα, 5 (Δεκάδες) ἐξ 8 (Δεκάδων), μένουσι 3 (Δεκάδες)· ἔπειτα, 2 (Ἑκατοντάδες) ἐξ 7 (Ἑκατοντάδων), μένουσι 5 (Ἑκατοντάδες)· τελευταῖον, 3 (Χιλιάδες) ἐκ 4 (Χιλιάδων), μένει 1 (Χιλιάς)· λοιπὸν μένουσιν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω Ἀριθμοῦ, 1 Χιλιάς, 5 Ἑκατοντάδες, 3 Δεκάδες, καὶ 1 Μονὰς Ὑπόλοιπον.

§. 53.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀφαιροῦμεν καὶ τοὺς ὀνοματικοὺς μικτοὺς Ἀριθμούς. Θὲς ὅτι μᾶς ἐδόθησαν ν' ἀφαιρέσωμεν Γροσ. 24,,37 παράδες 1 ἄσπρον ἐκ Γροσ. 35,,39 παράδ. 2 ἄσπρων· λοιπὸν θέττομεν τοὺς ὁμωνύμους Ἀριθμοὺς ὑπ' ἀλλήλους, δηλονότι Γρόσια ὑπὸ Γροσίων, Παράδες ὑπὸ Παράδων, Ἄσπρα ὑπὸ Ἄσπρων, καὶ ἀφαιροῦμεν (κατὰ τὸν §. 52.), ὡς ἑπομένως.

ἐκ	Γροσ. 35 ,,	39 παράδ.	,,	2 ἄσπρων
ἀφαιρεθήτωσαν	— 24 ,,	37 —	,,	1 —
ὑπόλοιπον	Γροσ. 11 ,,	2 παράδ.	,,	1 ἄσπρον.

λέγοντες· 1 (ἄσπρον) ἐκ 2 (ἄσπρων) μένει 1 (ἄσπρον)· 7 (παράδες) ἐξ 9 (παράδων), μένουσι 2 (παράδες)· 3 ἐκ 3 μηδέν· (ἐνταῦθα δὲν τίθεται 0, ἐπειδὴ εἰς τοὺς παράδες δὲν ἕπονται ἕτερα ψηφία)· τελευταῖον ἀφαιροῦμεν καὶ τὰ Γρόσια ἀπ' ἀλλήλων, λέγοντες· 4 ἐκ 5, μένει 1· εἶτα 2 ἐκ 3, μένει 1· ὅθεν μένει Ὑπόλοιπον Γροσ. 11 „ 2 παράδ. „ 1 ἄσπρον.

§. 54.

Πολλάκις συμβαίνει νὰ εἶναι ἓν, ἢ περισσότερα ψηφία τοῦ Ἀφαιρετέου μεγαλήτερα, ἀπ' ἐκεῖνα τοῦ Ἀφαιρουμένου. Παραδ. χ. ὁ Ἀριθμὸς 476 εἶναι κυρίως μικρότερος παρὰ ὁ 564, λοιπὸν ἀναμφιβόλως δύναται ἐξ αὐτοῦ ν' ἀφαιρεθῇ· ἀφ' οὗ ὅμως τεθῶσιν αὐτοὶ οἱ Ἀριθμοὶ κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως ὑπ' ἀλλήλους, τότε προκύπτουσι διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν 6 ἐκ 4, καὶ 7 ἀπὸ 6, ὅπερ οὐκ ἔςι δυνατόν. Εἰς ταύτην τὴν περίςασιν ἐκλαμβάνομεν τὸ τοῦ ἀνωτέρω Ἀριθμοῦ Ψηφίον (ἤγουν τοῦ Ἀφαιρουμένου) διὰ 10 περισσότερον, ὅ ἐςί, δανειζόμεθα ἐκ τοῦ ἐγγὺς αὐτοῦ ἀριςερῶς κειμένου Ψηφίου μίαν Μονάδα, ἥτις ἀναλυθεῖσα εἰς τὰ μέρη τοῦ Ψηφίου, ἐξ οὗ μέλλει νὰ γένῃ ἡ Ἀφαίρεσις, ποιεῖ 10 (πρόδηλον ἐςίν, ὅτι ἕκαςον ψηφίον, ἐκ τῆς δεκάδος ἀριςερῶς προχωρούντων, θεωρεῖται, ὡς πρὸς τὸ πλησίον αὐτοῦ δεξιῶς κείμενον, ὡς Δεκὰς πρὸς Μονάδα, ἄρα ἡ Δεκὰς δύναται νὰ δανείσῃ τῇ Μονάδι)· λοιπὸν ἐκ τοῦ Ἀθροίσματος αὐτῶν τῶν 10 καὶ τοῦ προϋπάρχοντος Ψηφίου ἀφαιροῦμεν τὸ κάτω Ψηφίον, δηλονότι τοῦ Ἀφαιρετέου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Πλὴν σημειωτέον, ὅτι ἕκαςον Ψηφίον, ἐξ οὗ δανειζόμεθα, ἐλαττοῦται διὰ τὴν μονάδα, τὴν ὁποίαν δανείζει τῷ ἐγγὺς αὐτοῦ δεξιῶς κειμένῳ Ψηφίῳ, δι' ἣν αἰτίαν τὸ τελευταῖον θεωρεῖται διὰ 10 περισσότερον, καὶ τὸ πρῶτον δὲ 1 ὀλιγώτερον. Οἷον.

ἐκ	564
ἀφαιρεθήτωσαν	476
ὑπόλοιπον.	88

Ἐνταῦθα λέγομεν· (ἐπειδὴ 6 δὲν ἀφαιροῦνται ἐκ 4) 6 ἐκ 14 (προςιθεμένων τῶν 10, τοῦτ' ἔςιν, ἡ ἐκ τοῦ Ψηφίου 6 δανεισθεῖσα μονὰς, ἥτις ἀνελύθη εἰς τὰ μέρη τοῦ

Ψηφίου 4), μένουσιν 8· εἶτα 7 ἐκ τῶν 15 (ἐπειδὴ τὰ 6, διὰ τὸ πρὸ μικροῦ ἐξ αὐτῶν ληφθὲν δάνειον, ἠλαττώθησαν μὲ 1, ἄρα ἔμεινον μόνον 5, ἐξ ὧν μὴ δυναμένων τῶν 7 ἀφαιρεθῆναι, δανειζόμεθα αὖθις ἐκ τῶν προηγουμένων 5 μίαν μονάδα, ἥτις ἀναλυθεῖσα, ποιεῖ 10 μέρη τοῦ ἀφαιρουμένου Ψηφίου, καὶ οὕτω λέγομεν· 7 ἐκ τῶν 15), μένουσιν 8· ἔπειτα 4 ἐκ 4 (τὰ γὰρ 5 δανείσαντα κἀυτὰ τοῖς 6 μίαν μονάδα, ἔμεινον μόνον 4) ἐξισοῦνται, ἄρα μένει μηδέν.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον γίνεται πάντοτε ἡ Ἀφαίρεσις· διότι τὸ μέγιςον Ψηφίον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ προκύψῃ μεταξὺ τῶν ψηφίων τοῦ Ἀφαιρετέου, εἶναι μόνον 9. Ἐκ τούτου πηγάζει καὶ ἡ αἰτία, δι' ἣν ἄρχεται ἡ Ἀφαίρεσις ἐκ τῶν ἐλαχίςων Εἰδῶν, ἵνα ὅταν τύχωσι μικρὰ τὰ ψηφία, ἐξ ὧν μέλλει νὰ γένῃ ἡ Ἀφαίρεσις, νὰ δυνάμεθα νὰ τὰ αὐξήσωμεν, δανειζόμενοι μίαν Μονάδα ἐκ τῶν ἐγγὺς αὐτῶν ἀριςερῶς κειμένων ψηφίων.

§. 55.

Πολλοὶ συνεθίζουσι νὰ ὀνομάζωσι τὴν ἀνωτέρω πρᾶξιν Δάνειον, ἐπειδὴ δανείζονται μίαν μονάδα ἐκ τοῦ ἐγγὺς προηγουμένου ψηφίου. Ὁμοίως συνεθίζουσι, πρὸς ἐνθύμησιν, νὰ σημειώνωσιν αὐτὸ τὸ Δάνειον μὲ μίαν ςιγμὴν, πλησίον τοῦ ψηφίου ἐξ οὗ δανείζονται, διὰ νὰ μὴν ἐκλάβωσιν αὐτὸ ἐκ παραδρομῆς ὡς σῶον· ἀλλ' ἐπειδὴ αὕτη ἡ σημείωσις εἶναι ἁπλῶς προφύλαξις, καὶ οὐδὲν τὶ ουσιῶδες, διὰ τοῦτο εἶναι προτιμώτερον νὰ μὴ συνηθίσῃ τις αὐτὸ ὁλοτελῶς.

§. 56.

Σχόλιον. Εἰσὶ τινὲς, οἵτινες ἐκλαμβάνουσι τὸ Ψηφίον, ἐξ οὗ δανείζονται, ὡς σῶον, καὶ λαμβάνουσιν ἀντ' αὐτοῦ τὸ μέλλον ἀφαιρεθῆναι δὲ 1 περισσότερον, σημειοῦντες αὐτὸ μὲ μίαν ςιγμὴν, ὡς.

λέγοντες· 8 ἐκ 17, μένουσιν 9· εἶτα, 6 ἐκ 14 (ἀντὶ 5 ἐκ 13), μένουσιν 8· ἔπειτα, 8 ἐκ 16 (ἀντὶ 7 ἐκ 15), μένουσιν 8· τελευταῖον, 5 ἐκ 5 (ἀντὶ 4 ἐκ 4), μένει μηδέν.

ἐκ	5647
ἀφαιρεθήτωσαν	4.7.5.8
ὑπόλοιπον	889

Καίτοι κυρίως εἶναι ταὐτὸν κἂν εἴπωμεν 6 ἐκ 14, ἢ 5 ἐκ 13 καὶ ἐφεξῆς, μ' ὅλον τοῦτο τὰ τοιαῦτα τεχνάσματα εἰσὶν ἀνωφελῆ, καὶ μάλιςα διὰ τοῦτο, ἐπειδὴ ἀντίκεινται εἰς τὴν κυρίαν ἔννοιαν τῆς Ἀφαιρέσεως· διότι τὸ Δάνειον δὲν αὐξάνει τὸ μέλλον ἀφαιρεθῆναι Ψηφίον, ἀλλὰ σμικρύνει τὸ κατ' εὐθεῖαν ἐπ' αὐτοῦ κείμενον Ψηφίον.

§. 57.

Μηδενικὸν ἐκ σημαντικοῦ ψηφίου ἀφαιρεῖν δηλοῖ, ὅτι οὐδὲν πρόκειται τοῦ ἀφαιρέσαι· ἄρα τὸ ἐπὶ τοῦ μηδενικοῦ κατ' εὐθεῖαν ἄνω κείμενον Ψηφίον μένει ἀμετάβλητον, ὡς.

ἐκ	50632
ἀφαιρεθήτωσαν	30500
ὑπόλοιπον	20132

Ἐνταῦθα λέγομεν· 0 ἐκ 2, μένουσι 2· εἶτα, 0 ἐκ 3, μένουσι 3· ἔπειτα, 5 ἐκ τῶν 6, μένει 1· μετέπειτα, 0 ἐκ 0, μένει οὐδὲν (τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ σημειωθῇ μὲ ἓν 0, ἐπειδὴ μετ' αὐτὸ ἕπεται σημαντικὸν ψηφίον· δι' ἣν αἰτίαν εἰς τοιαύτας περιςάσεις συνεθίζεται τὸ, 0 ἐκ 0, μένει 0)· τελευταῖον, 3 ἐκ 5, μένουσι 2.

§. 58.

Ἐὰν ὅμως τὸ Ψηφίον, ἐξ οὗ μέλλει ν' ἀφαιρέσωμεν, εἶναι ἁπλῶς 0, θεωρεῖται ὡς μικρότερον σημαντικὸν ψηφίον παρὰ τὸ τοῦ Ἀφαιρετέου, ὅπερ ζητεῖται ἀφαιρεθῆναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ 0, τὸ ὁποῖον ἐκλαμβάνομεν διὰ 10 περισσότερον, τὸ δὲ ἐγγὺς αὐτοῦ προηγούμενον Ψηφίον δι' 1 ὀλιγώτερον. Αὕτη ἡ αἰτία πηγάζει ἐκ τοῦ §. 54. Παραδ. χ.

	ἐκ 75030
ἀφαιρεθήτωσαν	46708
Ὑπόλοιπον	28322

Ἐδῶ λέγομεν· 8 ἐκ 10, μένουσι 2· εἶτα, 0 ἐκ 2, μένουσι 2· ἔπειτα, 7 ἐκ 10, μένουσι 3· μετὰ ταῦτα, 6 ἐκ 14, μένουσιν 8· τελευταῖον, 4 ἐκ τῶν 6 μένουσι 2.

§. 59.

Εἰμὲν τὸ ἴδιον Ψηφίον, ἐξ οὗ ἐδανείσθημεν, εἶναι 0 ἐκλαμβάνεται ἔπειτα ὡς 9, τὸ δὲ μετὰ τὸ 0 ἐγγὺς προηγούμενον σημαντικὸν Ψηφίον δὲ 1 ὀλιγώτερον, ὡς τὰ ἑπόμενα Ὑποδείγματα δεικνύουσιν.

α΄.		β΄.	
ἐξ	804	ἐξ	701
ἀφαιρεθήτωσαν	768	ἀφαιρεθήτωσαν	694
Ὑπόλοιπον	36	Ὑπόλοιπον	7

Ἐν τῷ α΄. λέγομεν· 8 ἐκ 14, μένουσιν 6· εἶτα, 6 ἐξ 9, (ἐπειδὴ ἐδόθη 1 δάνειον τοῖς 4) μένουσι 3· ἔπειτα, 7 ἐξ 7 (διότι τὰ 8, ὡς ἐγγὺς προηγούμενον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ 0, τιμᾶται δὲ 1 ὀλιγώτερον), μένει οὐδέν.

Ἐν τῷ β΄. λέγομεν ὁμοίως· 4 ἐξ 11, μένουσιν 7· εἶτα, 9 ἐξ 9, μένει οὐδὲν· ἔπειτα, 6 ἐκ τῶν 6, μένει αὖθις μηδέν.

§. 60.

Ἡ αἰτία πηγάζει ἐκ τῶν, ὧν εἴπομεν περὶ Δανείου μὲ σημαντικὰ ψηφία· διότι τὸ μηδενικὸν μηδὲν ἀφ' ἑαυτοῦ σημαῖνον, πρέπει νὰ δανεισθῇ μίαν Μονάδα ἐκ τοῦ ἐγγὺς αὐτοῦ προηγουμένου σημαντικοῦ Ψηφίου, δι' οὗ τὸ μὲν σημαντικὸν Ψηφίον ἐλαττοῦται μὲ 1, τὸ δὲ 0 γίνεται 10, ἐξ αὐτῶν δὲ δανεισθὲν 1, μένουσιν 9.

§. 61.

Διὰ τοῦτο λοιπὸν, ὅταν εἰς τὸν ἄνω Ἀριθμὸν συνέπονται μηδενικὰ ἓν μετὰ τὸ ἄλλον, τότε τὸ μὲν πρῶτον (ἐξ οὗ δανειζόμεθα) θεωρεῖται διὰ 10, τὰ δὲ λοιπὰ μέχρι τοῦ ἐγγὺς σημαντικοῦ ψηφίου, θεωροῦνται μόνον δὶ 9, τὸ δὲ σημαντικὸν Ψηφίον δὶ 1 ὀλιγώτερον. Οἷον.

	α'.		β'.
ἐξ	60006	ἐξ	9000
ἀφαιρεθήτωσαν	47528	ἀφαιρεθήτωσαν	3891
Ὑπόλοιπον	12478	Ὑπόλοιπον	5109

Ἐν τῷ α'. λέγομεν· 8 ἐκ 16, μένουσιν 8· εἶτα, 2 ἐξ 9, μένουσιν 7· ἔπειτα, 5 ἐξ 9, μένουσι 4· μετὰ ταῦτα, 7 ἐξ 9, μένουσι 2· τελευταῖον, 4 ἐκ 5 (ἐπειδὴ τὰ 6 ὡς τὸ πρῶτον σημαντικὸν Ψηφίον μετὰ τὰ μηδενικὰ ἐκλαμβάνεται δὶ 1 ὀλιγώτερον, ἤγουν μόνον διὰ 5), μένει 1.

Ἐν τῷ β'. λέγομεν· 1 ἐκ 10, μένουσιν 9· εἶτα, 9 ἐξ 9 μηδὲν, ἄρα 0· ἔπειτα, 8 ἐξ 9, μένει 1· τελευταῖον, 3 ἐξ 8, μένουσι 5.

Περὶ Δανείων ἐν ὀνοματικοῖς μικτοῖς Ἀριθμοῖς.

§. 62.

Ἐνταῦθα οὐδὲν ἄλλο παρατηρητέον, ἀλλ' ὅτι ἡ δανειζομένη Μονὰς πρέπει νὰ ἀναλυθῇ εἰς τοιαύτας Μονάδας, οἷαι εἰσὶν ἐκεῖναι, αἵτινες μέλλουσιν ἀφαιρεθῆναι, ἐπειδὴ, ὡς γνωστὸν, μόνον Ὁμοειδεῖς καὶ Ὁμώνυμαι Μονάδες δύνανται ἀφαιρεθῆναι ἀπ' ἀλλήλων. Τοῦ λοιποῦ μένει ἡ πρᾶξις ἀπαράλλακτος ὡς ἡ μέχρι τοῦδε ἐν ἀνωνύμοις Ἀριθμοῖς. Οἷον.

ἐκ παράδων	2 —
ἀφαιρεθήτωσαν	— 2 ἄσπρα

Ἑρμηνεία. Ἐπειδὴ εἰς τὸν ἐπάνω Ἀριθμὸν δὲν ὑπάρχουσιν ἄσπρα, διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν ἐξ αὐτῶν τὰ κάτω κείμενα, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ δανεισθῶμεν μίαν Μονάδα ἐκ τῶν 2 παράδων, νὰ τὴν ἀναλύσωμεν εἰς ἄσπρα, καὶ ν' ἀφαιρέσωμεν ἐξ αὐτῶν τὰ 2 ἄσπρα· διότι οἱ 2 παράδες δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς 1 παρὰς καὶ 3 ἄσπρα· ὅθεν ἀφαιρουμένων τῶν 2 ἄσπρων ἐκ τῶν 3 ἄσπρων, μένει 1 ἄσπρον.

§. 63.

Ἀνωτέρω ἐδώκαμεν τὸ Ὑπόδειγμα χωρὶς Ἀριθμὸν τοῦ ἐλαχίσου Εἴδους εἰς τὸ ἐπάνω μέρος, ἵνα δείξωμεν σαφέσερον ἐπομένως τὸ ὠφελιμώτερον καὶ εὐκολώτερον τοῦ τρόπου, καθ' ὃν ἀφαιρεῖται ὁ κάτω Ἀριθμὸς, ὅταν δανειζώμεθα Μονάδα ἐκ τοῦ πλησίον μεγαλητέρου Εἴδους τοῦ ἐπάνω μέρους. Λοιπὸν, ὅταν εἰς τὸ ἐπάνω μέρος δὲν εὑρίσκηται Ὁμοειδὴς Ἀριθμὸς τοῦ μέλλοντος ἀφαιρεθῆναι, γίνεται ἡ Ἀφαίρεσις πάντοτε ὡς ἀνωτέρω· εἰδὲ καὶ πρόκειται μικρότερος τοῦ Ἀφαιρετέου, δανειζόμεθα μίαν Μονάδα ἐκ τοῦ ἐγγὺς μεγαλητέρου Εἴδους, καὶ ἀφαιροῦμεν ἀμέσως ἐξ αὐτῆς τὸν κάτω Ἀριθμὸν, εἶτα ἀθροίζομεν εἰς τὸ Ὑπόλοιπον αὐτῆς τὸν ἐπάνω Ἀριθμὸν, ἐπειδὴ δὲν ἀφαιρεῖται ἐξ αὐτοῦ μηδὲν, δι' ἣν αἰτίαν μένει καὶ αὐτὸς Ὑπόλοιπον. Ὡς.

Ἑρμηνεία.

	ἐκ παράδων	5	,, 1	ἄσπρου
	ἀφαιρεθήτωσαν —	3	,, 2	—
	ὑπόλοιπον παρὰς	1	,, 2	ἄσπρα

Ἐνταῦθα δὲν δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν τὰ 2 ἄσπρα ἐκ τοῦ 1 ἄσπρου, λοιπὸν δανειζόμεθα 1 παρὰν, τὸν θεωροῦμεν ὡς 3 ἄσπρα, καὶ ἀφαιροῦμεν ἐξ αὐτῶν τὰ 2 ἄσπρα, λέγοντες· 2 ἐκ 3, μένει 1 ἄσπρον, καὶ 1 (ὅεσὶ, τὸ 1 ἄσπρον, ἐξ οὗ οὐδὲν ἀφαιρέθη) ὁμοῦ, μένουσι 2 ἄσπρα, τὰ ὁποῖα τίθενται ὑπὸ τὰ ἄσπρα· περαιτέρω, 3 ἐκ 4 (ἐπειδὴ ἤδη ἐλήφθη ἐκ τῶν 5 ἕνας παρὰς πρὸς ἀφαίρεσιν τῶν ἄσπρων), μένει 1 παρὰς· σύμπαντα ὡς 1 παρὰς καὶ 2 ἄσπρα Ὑπόλοιπον.

§. 64.

Σχόλιον. Ἀντὶ νὰ γένῃ ἡ Ἀφαίρεσις ἀμέσως ἐκ τῆς δανεισθείσης Μονάδος, καὶ ἔπειτα ν' ἀθροισθῇ εἰς τὸ Ὑπόλοιπον αὐτῆς ὁ ἐπάνω Ἀριθμὸς, ὡς ἐπράξαμεν ἀνωτέρω· συνεθίζουσι σχεδὸν κοινῶς, πρότερον ν' ἀθροίζωσι τὴν ἀναλυθεῖσαν Μονάδα εἰς τὸν ἐπάνω Ἀριθμὸν, καὶ εἶτα ν' ἀφαιρῶσιν ἐκ τούτου τοῦ Ἀθροίσματος τὸν κάτω Ἀριθμόν. Εἰς τὸ παρελθὸν Ὑπόδειγμα, ὅπου ἐκ 5 παράδων 1 ἄσπρου ἔμελλον ν' ἀφαιρεθῶσι 3 παράδες 2 ἄσπρα, συνεθίζουσι λέγειν· 2 ἄσπρα ἐξ 1 ἄσπρου δὲν δύνανται ν' ἀφαιρεθῶσι, λοιπὸν δανειζόμεθα 1 παρὰν, ὅς τις ςαίνει 3 ἄσπρα, καὶ τὸ ἐπάνω 1 ἄσπρον, ποιοῦσιν ὁμοῦ 4 ἄσπρα, ἐξ ὧν ἀφαιρουμένων τῶν 2 ἄσπρων, μένουσι 2 ἄσπρα, καὶ ἐφεξῆς.

Καίτοι αὐτὸς ὁ τρόπος εἶναι κυρίως ὀρθὸς, μ' ὅλον τοῦτο προτιμᾶται ὁ προλεχθεὶς ἕνεκα τούτου, ἐπειδὴ εἰς τοιαύτας Μονάδας, αἵτινες σύγκεινται ἐκ Μονάδων καὶ Δεκάδων, φέρ' εἰπεῖν τὰ Φούντια καὶ τὰ τούτοις ὅμοια, εἶναι ἀσυγκρίτως ὠφελιμώτερος, ὡς τὸ ἑπόμενον Ὑπόδειγμα δεικνύει. Οἷον.

ἐκ φουντίων	4	,,	18 λοτίων
ἀφαιρεθήτωσαν	- 2	,,	29 —

Ἐνταῦθα ἐὰν θελήσωμεν ν' ἀφαιρέσωμεν κατὰ τὸν κοινὸν συνήθη τρόπον, πρέπει νὰ εἴπωμεν 29 λότια ἐκ 18 λοτίων δὲν ἀφαιροῦνται, λοιπὸν δανειζόμεθα ἐπ' αὐτοῖς 1 ℔, τὸ ὁποῖον ςαίνει 32 λότια, καὶ τὰ 18 λότια ποιοῦσιν ὁμοῦ 50 λότια, ἐξ ὧν ἀφαιρουμένων 29 λοτίων, μένουσιν 21 λότια, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὅτι αὐτὸς ὁ τρόπος εἶναι δύσκολος διὰ τοὺς ἀρχαρίους, καὶ διεξοδικὸς δι' ἕκαςον ἐν γένει, παριςάνεται ἐκ τῆς ἰδίας ἐργασίας· διότι πρότερον πρέπει νὰ ἀθροισθῶσι τὰ 18 καὶ τὰ 32 εἰς ἕνα Ἀριθμὸν, καὶ ἔπειτα ἐκ τούτου τοῦ ὁλοκλήρου Ἀθροίσματος ν' ἀφαιρέσωμεν τὰ 29. Τὸ νὰ γένῃ τοῦτο διὰ τοῦ νοὸς εἶναι φορτικὸν (πολλῷ μᾶλλον εἰς διεξοδικωτέρας πτώσεις), καὶ τὸ νὰ καταστρωθῶσιν οἱ Ἀριθμοὶ εἰς χάρτην εἶναι πάλιν βαρετὸν καὶ ἐκτεταμένον· ἐξ ἐναντίας (ὡς εἰς §. 63.) λέγομεν εὐθύς· 29 ἐκ 32 (δηλονότι τοῦ δανεισθέντος Φουντίου), μένουσι 3, καὶ τὰ 18 ποιοῦσιν ὁμοῦ 21, τὸ ὁποῖον εἶναι εὐκολώτερον καὶ ταχύτερον, ἐπειδὴ εἰσὶ πρὸ ὀφθαλμῶν ὅλοι οἱ δοθέντες Ἀριθμοί, καὶ δὲν προκύπτει ποτὲ μεγαλήτερος Ἀριθμὸς ἐξ οὗ μέλλει νὰ γένῃ ἡ Ἀφαίρεσις, εἰμὴ τόσαι Μονάδες τοῦ μικροτέρου Εἴδους, ὅσαι περιέχονται εἰς τὴν δανεισθεῖσαν Μονάδα τοῦ μεγαλητέρου Εἴδους.

§. 65.

Ὑποδείγματα πρὸς ἄσκησιν.

α.

Γροσ.	56 ,,	15	παράδ. ,,	1	ἄσπρον.	
—	33 ,,	26	— ,,	2	—	
Γροσ.	22 ,,	28	παράδ. ,,	2	ἄσπρα.	

β.

Βιέννης Φιορίνια	108 ,,	24	κραϊτζάρια ,,	—	
— —	98 ,,	45	— ,,	3	φένιγ.
Φιορ.	9 ,,	38	κραϊτζάρια ,,	1	φένιγ.

γ.

Σαξωνίας Τάλληρα	115 ,,	—	,,	—	
— —	89 ,,	19	γροσίκια ,,	9	φένιγ.
Τάλληρα	25 ,,	4	γροσίκια ,,	3	φενιγ.

Ἑρμηνεία. Εἰς το α. λέγομεν. (ἐπειδὴ 2 ἐξ 1 δὲν ἀφαιροῦνται) 2 ἐκ 3, μένει 1, καὶ 1 (ἐξ οὗ οὐδὲν ἀφαιρέθη) ποιοῦσιν ὁμοῦ 2 ἄσπρα· ἔπειτα 6 ἐκ 14 (διότι ἐκ τῶν 15 παράδων ἐλήφθη 1 παρὰς), μένουσιν 8· ἤδη μένει ν' ἀφαιρέσωμεν 2 δεκάδας παράδων, πλὴν ἐπειδὴ ἀνωτέρω δὲν ἔμεινον πλέον παράδες, πρέπει νὰ δανεισθῶμεν 1 Γρόσι, καὶ νὰ τὸ ἀναλύσωμεν εἰς δεκάδας παράδων (ἐπειδὴ δεκάδας παράδων μέλλει ν' ἀφαιρέσωμεν), τὸ 1 Γρόσι σύγκειται ἐκ 4 δεκάδων, ὅθεν λέγομεν. 2 (δεκάδες) ἐκ 4, μένουσι 2 δεκάδες· τελευταῖον, 3 Γρόσια ἐκ 5 Γροσίων (ἐπειδὴ ἐκ τῶν 6 ἐλήφθη ἤδη ἕν), μένουσι 2· καὶ 3 ἐκ τῶν 5, μένουσι 2.

Εἰς τὸ β'. λέγομεν ὁμοίως· 3 ἐκ 4 (ἑνὸς δανεισθέντος Κραϊτζαρίου) μένει 1· εἶτα, 5 ἐκ 13 (ἐπειδὴ ἐκ τῶν 4 ἐδανείσθημεν ἤδη ἕν), μένουσιν 8· ἔπειτα, 4 ἐκ τῶν 6 (ἑνὸς δανεισθέντος Φιορινίου ἤτοι 6 δεκάδων, ἐπειδὴ εἰς τὸν ἐπάνω Ἀριθμὸν ἔμεινε μόνον 1 δεκὰς, ἐξ ἧς δὲν δύνανται ν' ἀφαιρεθῶσι 4 δεκάδες), μένουσι 2 καὶ ἔτι 1 δεκὰς ἡ ἀνωτέρω, ποιοῦσιν ὁμοῦ 3 δεκάδας κραϊτζαρίων, αἵτινες τίθενται ἐν τῇ τάξει τῶν δεκάδων κραϊτζαρίων· μετέπειτα, 8 ἐκ 17 (ἐπειδὴ ἐκ τῶν 8 ἐλήφθη ἤδη 1 φιορίνι), μένουσιν 9. καὶ 9 ἐξ 9 (ὡς εἰς §. 59.), μένει μηδέν.

Εἰς τὸ γ'. δὲν ὑπάρχουσιν εἰς τὸν ἐπάνω Ἀριθμὸν οὔτε Γροσίκια, ἀλλ' οὔτε Φένιγ, διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν ἐξ αὐτῶν τὰ τοῦ κάτω ἀριθμοῦ Γροσίκια καὶ Φένιγ. λοιπὸν δανειζόμεθα ἓν Τάλληρον, τὸ θεωροῦμεν ὡς 24 Γροσίκια, καὶ 12 Φένιγ, καὶ ἀφαιροῦμεν ἐξ αὐτῶν τὰ Γροσίκια καὶ Φένιγ.

§. 66.

Καὶ ἕτερα Ζυγίου.

Τὸ Καντάρι τῆς τουρκίας πρὸς 44 Ὀκάδες· ἡ Ὀκᾶ πρὸς 4 Λίτρας, καὶ ἡ Λίτρα πρὸς 100 Δράμια. Τὸ Καντάρι τῆς ἀουςρίας πρὸς 100 ℔, καὶ τὸ ℔ πρὸς 32 Λότια.

α'.

Καντάρια	50,,	30 'Οκάδες,,	2 Λίτραις,,	51 Δράμια.
— —	35,,	43 —,,	3 —,,	96 —
Ὑπόλ. Καντ.	11,,	30 'Οκάδες,,	2 Λίτραις,,	55 Δράμια.

β'.

Καντάρια	93,,	27 ℔,,	15 Λότια.
— —	75,,	85 —,,	28 —
Ὑπόλοιπον· Καντάρ.	17,,	41 ℔,,	19 Λότια.

Εἰς τὸ α'. λέγομεν· 96 ἐκ τῶν 100 (μιᾶς δανεισθείσης λίτρας), μένουσι 4, καὶ τἄνω 51 (τὰ ὁποῖα μένουσιν ὡσαύτως Ὑπόλοιπον) ποιοῦσιν ὁμοῦ 55 δράμια· εἶτα, 3 ἐκ 4 λιτρῶν (μιᾶς δανεισθείσης ὀκάδος), μένει 1, καὶ 1 (ἐπειδὴ ἐκ τῶν 2 λιτρῶν ἐλήφθη 1) ποιοῦσιν ὁμοῦ 2 λίτρας· ἔπειτα, 43 ἐκ 44 ὀκάδων (ἑνὸς δανεισθέντος Κανταρίου), μένει 1, καὶ 29 (ἐπειδὴ ἐκ τῶν 30 ἐλήφθη 1) ποιοῦσιν ὁμοῦ 30· μετέπειτα, 5 ἐξ 9 (ἐπειδὴ ἐκ τῶν 50 ἐλήφθη 1, δι' ἣν αἰτίαν τὸ 0 θεωρεῖται ὡς 9), μένουσι 4. καὶ 3 ἐκ 4 (ἐπειδὴ τὰ 5, ὡς τὸ ἐγγὺς προηγούμενον ψηφίον, τιμᾶται ἤδη διὰ 4), μένει 1.

Εἰς τὸ β'. λέγομεν· 28 ἐκ 32 (ἑνὸς δανεισθέντος Φουντίου), μένουσι 4, καὶ 15 (τὰ ὁποῖα μένουσιν ὁμοίως Ὑπόλοιπον) ποιοῦσιν ὁμοῦ 19 λότια· εἶτα, 85 ἐξ 100 ℔ (ἑνὸς δανεισθέντος Κανταρίου), μένουσι 15, καὶ 26 (ἐπειδὴ ἐκ τῶν 27 ἐλήφθη 1) ποιοῦσιν ὁμοῦ 41 ℔· ἔπειτα, 5 ἐκ τῶν 12 (ἐπειδὴ ἐκ τῶν 3 ἐλήφθη 1), μένουσιν 7· τελευταίου, 7 ἐκ τῶν 8, (ἐπειδὴ τὰ 9, ὡς τὸ πλησίον προηγούμενον ψηφίον ἐκλαμβάνεται δὲ 1 ὀλιγώτερον), μένει 1, σύμπαν δὲ Ὑπόλοιπον 17 Καντάρ. 41 ℔ 19 Λότια.

§. 67.

Σχόλιον. Εἰς τὸν §. 48. εἴπομεν, ὅτι ἡ διὰ ζώσης φωνῆς παράδοσις δὲν πρέπει νὰ γίνηται εἰς ξένα Χρήματα, Ζύγια κτλ., ἀλλ' εἰς τὰ τοῦ τόπου, ὧν ἡ σύνθεσις εἶναι γνωςὴ εἰς τοὺς Διδασκομένους· ἐν τῇ διὰ γραμμάτων παραδόσει ὅμως ἐκρίθη εὔλογον, ἵνα τεθῶσι διάφορα Ὑποδείγματα πρὸς πληροφορίαν περισσοτέρων.

§. 68.

Πρόβλημα. Ἄνθρωπός τις χρεωςεῖ διὰ ληφθέντα δάνεια Γρόσ. 7105,, 18 παράδ.,, 1 ἄσπρον, διὰ τὰ ὁποῖα ἐπλήρωσε κατὰ καιροὺς Γρόσ. 3055 , 30 παράδ.,, 2 ἄσπρα, Γρόσ. 1901,, 39 παράδ., καὶ Γρόσ. 520,, 8 παράδ. ἄρα πόσα μένει χρεώςης ἔτι;

Λύσις καὶ Ἑρμηνεία.

Πρῶτον ἀθροίζομεν τὰ πληρωθέντα χρήματα ὁμοῦ, ἵνα ἴδωμεν πόσα ςαίνει ἡ Ποσότης αὐτῶν, εἶτα ἀφαιροῦμεν αὐτὴν ἐκ τῆς ὁλοκλήρου Ποσότητος τῶν δανείων, καὶ οὕτω προκύπτει τὸ Ζητούμενον. Οἷον.

ἐπληρώθησαν	Γρόσ.	3055 ,,	30	παράδ. ,,	2	ἄσπρα.
	—	1901 ,,	39	—	—	—
	—	520 ,,	8	—	—	—
ὁμοῦ	Γρόσ.	5477 ,,	37	παραδ. ,,	2	ἄσπρα.

τὰ δάνεια	Γρόσ.	7105,,18	παράδ.	1	ἄσπρον
τὰ πληρωθέντα	—	5477,,37	—	2	— ὡς ὄπισθεν
ἔτι χρέος.	Γρόσ.	1627,,20	παράδ.	2	ἄσπρα.

ΚΕΦ. Γ′.

Περὶ Δοκιμῆς τοῦτε Ἀθροισμοῦ, καὶ Ἀφαιρέσεως.

§. 69.

Ἡ ἔρευνα, ἥτις γίνεται ἵνα ἴδωμεν, ἐὰν δὲν ἐσφάλαμεν εἰς τὸν Ἀθροισμὸν, καὶ εἰς τὴν Ἀφαίρεσιν, λέγεται Δοκιμή. Αὕτη γίνεται ἐπάνω εἰς τὸν Ἀθροισμὸν διὰ τῆς Ἀφαιρέσεως, καὶ ἐπάνω εἰς τὴν Ἀφαίρεσιν διὰ τοῦ Ἀθροισμοῦ· ἐντεῦθεν οὖν δῆλον, ὅτι αὐτοὶ οἱ δύο ἀριθμητικοὶ Τρόποι χρησιμεύουσιν ἀλλήλοις πρὸς Δοκιμήν.

Περὶ Δοκιμῆς τοῦ Ἀθροισμοῦ.

§. 70.

Περὶ τῆς ὀρθότητος τοῦ Ἀθροισμοῦ βεβαιούμεθα, ἐὰν ἐκ δευτέρου ἀθροίσωμεν ὅλους τοὺς Προσθετέους, πλὴν ἑνὸς, καὶ ἀφαιραίσωμεν αὐτὸ τὸ δεύτερον Ἄθροισμα ἐκ τοῦ πρώτου· εἰμὲν οὖν ὁ Ἀθροισμὸς ἔγινεν ὀρθῶς, πρέπει νὰ εἶναι ἰσάριθμον τὸ Ὑπόλοιπον μὲ τὸν καταληφθέντα Προσθετέον. Οἷον.

	Γρ. 53 ,, 10 παρ. ,, 2 ἄσπρα.	πρῶτ. Ἀθρ. ὅλων τῶν Προσ.	
δεύτερος Ἀθρ. μὲ τὴν ἄφετ. τοῦ πρώτ. Προσθετέου.	— 359 ,, 20 παρ. ,, 1 ἄσπρον.		
	— 22 ,, 9. παρ. ,, 1 ἄσπρον.		
	— 131 ,, 39 παρ. ,, — —		
ἐκ τῆς ποσότητος	Γρ. 566 ,, 39 παρ. ,, 1 ἄσπρον.	ὅλων τῶν Προσθετέων.	
ἀφαιρεθήτω ἡ ποσότης. . . .	— 513 ,, 28 — ,, 2 —	ὅλων τῶν Προσθ. πλὴν ἑνός.	
Ὑπόλοιπον.	Γρ. 53 ,, 10 παρ. ,, 2 ἄσπρον.	ἰσάριθμον τοῦ ἀφεθ. Προσθ.	

Ἡ ἀνομοιότης ἀμφοτέρων τῶν Ποσοτήτων προέρχεται ἐκ τούτου, ἐπειδὴ ἡ πρώτη περιέχει περισσότερον ἕνα Προσθετέον, παρὰ ἡ δευτέρα· διὰ τοῦτο εἰμὲν γίνῃ ὁ Ἀθροισμὸς ὀρθῶς, πρέπει νὰ εἶναι ἡ Διαφορὰ αὐτὸς ὁ Προσθετέος.

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι εἶναι ταὐτὸν ὅποιον ἀφήσωμεν ἐκ τῶν Προσθετέων· διὰ τὴν εὐκολίαν εἶναι συνήθεια νὰ ἐκλέγηται ὁ πρῶτος, ἐπειδὴ χωρίζεται εὐκολώτερον διὰ τῆς γραμμῆς.

§. 71.

Σχόλιον. Εἰσὶ καὶ ἕτεραι τετεχνευμέναι συντομώτεραι Δοκιμαὶ, τὰς ὁποίας ὅμως παρατρέχομεν ἐν σιωπῇ, ἐπειδὴ ὑπόκεινται ἅπασαι εἰς λάθη, δι' ἣν αἰτίαν εἰσὶ καὶ περιτταί. Ἡ ὠφελιμώτερος καὶ συνήθης Δοκιμὴ τοῦ Ἀθροισμοῦ εἶναι, ἵνα ἀθροίζωμεν δὶς, ὅ ἐςὶν, ἅπαξ κάτωθεν, καὶ ἅπαξ ἄνωθεν, καὶ εἰμὲν προκύψῃ τὸ αὐτὸ Κεφάλαιον, ὀρθῶς ἔγινεν ὁ Ἀθροισμός.

Περὶ Δοκιμῆς τῆς Ἀφαιρέσεως.

§. 72.

Ἐὰν, μετὰ τὴν πρᾶξιν τῆς Ἀφαιρέσεως, ἀθροίσωμεν τὸ Ὑπόλοιπον καὶ τὸν Ἀφαιρετέον ὁμοῦ, καὶ προκύψῃ Κεφάλαιον ἴσον τοῦ Ἀφαιρουμένου, ὀρθῶς πέπρακται ἡ Ἀφαίρεσις, ἢ ἀφαιρέσωμεν τὸ Ὑπόλοιπον ἐκ τοῦ Ἀφαιρουμένου, καὶ προκύψῃ ὁ Ἀφαιρετέος. Οἷον·

ἐξ . . .	ὀκδ.	135 ,,	218	δράμ.
ἀφαιρεθήτωσαν	—	67 ,,	309	—
Ὑπόλοιπον .	Ὀκδ.	67 ,,	309	Δρ'.
φέρουσιν αὖθις	Οκδ.	135 ,,	218	Δρ'. τὸν Ἀφαιρούμενον.

ἐκ τοῦ Ἀφαιρουμένου .	135	„	218
ἀφαιρεθήτω τὸ ὑπόλοιπον	67	„	309
ὁ Ἀφαιρετέος . . .	67	„	309

Ἡ βάσις αὐτῆς τῆς Δοκιμῆς κεῖται ἐν τῇ ἰδίᾳ Ἀφαιρέσει· διότι τὸ διὰ τῆς Ἀφαιρέσεως εὑρεθὲν Ὑπόλοιπον, εἶναι τὸ, ὅσον κυρίως διαφέρει ὁ μεγαλήτερος ἀριθμὸς ἀπὸ τὸν μικρότερον· δοθείσης δὲ ταύτης τῆς Διαφορᾶς τῷ μικροτέρῳ, γίνεται ὅμοιος μὲ τὸν μεγαλήτερον, ἢ ἀφαιρεθέντος τοῦ Ὑπολοίπου ἐκ τοῦ Ἀφαιρουμένου, γίνεται ὁ Ἀφαιρούμενος ὅμοιος μὲ τὸν Ἀφαιρετέον.

ΚΕΦ. Δ'.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ ἐν ἀκεραίοις Ἀριθμοῖς.

§. 73.

Ἕνα ἀριθμὸν πλεονάκις λαμβάνειν, λέγεται πολλαπλασιάζειν αὐτόν. Τίνι οὖν τρόπῳ μέλλει νὰ εὕρωμεν τὸ πολλαπλασιασθὲν, εἶναι τὸ ἀντικείμενον τῆς τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ Ὑφηγήσεως, εἴτουν ὁ Π ο λ λ α π λ α σ ι α σ μ ό ς.

§. 74.

Ἕκαςος ἐννοεῖ καλῶς ἀφ' ἑαυτοῦ, ὅτι εἰς τὴν πρᾶξιν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ ἐπιζητοῦνται κυρίως δύο Ἀριθμοί· εἷς, ὅστις πρέπει νὰ ληφθῇ πλεονάκις, καὶ ἕτερος, ὅστις δεικνύει, ποσάκις ληφθήσεται ὁ πρῶτος. Φέρ' εἰπεῖν· δοθέντος τοῦ Ἀριθμοῦ 5 ἵνα αὐξηνθῇ τετράκις, ἢ, κατὰ τὴν κοινὴν συνήθειαν, 5 νὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ 4, λέγομεν· ὅτι τὰ 5 εἶναι ὁ Ἀριθμὸς, ὅστις μέλλει νὰ ληφθῇ πλεονάκις, τὰ δὲ 4 εἶναι ὁ Ἀριθμὸς, ὅστις δεικνύει, ποσάκις αὐξηνθήσεται ὁ 5, τοῦτ' ἔςι, τετράκις.

§. 75.

Ὅθεν ὁ μέλλων πολλαπλασιασθῆναι Ἀριθμὸς, ὀνομάζεται Πολλαπλασιαςέος· ὁ δὲ Ἀριθμὸς, μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν, τοῦτ' ἔςιν ἐκεῖνος, ὅστις διορίζει, ποσάκις ληφθήσεται ὁ Πολλαπλασιαςέος, λέγεται Πολλαπλασιαςής· τελευταῖον τὸ ὅ,τι προκύψει ἐξ αὐτοῦ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, καλεῖται Παραγόμενον. Παραδ. χ. πολλαπλασιαζόμενος ὁ ἀριθμὸς 5 μὲ 4, δίδει 20, λοιπὸν τὰ 5 εἶναι ὁ Πολλαπλασιαςέος· τὰ 4 ὁ Πολλαπλασιαςής· καὶ τὰ 20 τὸ Παραγόμενον.

§. 76.

Πλὴν ἔςω πρὸς σημείωσιν, ὅτι πολλαπλασιαζόμενοι δύω Ἀριθμοὶ, προκύπτει πάντοτε τὸ αὐτὸ κεφάλαιον, κἂν λάβωμεν τὸν ἕνα, εἴτε τὸν ἕτερον διὰ Πολλαπλασιαςήν. Φέρ' εἰπεῖν· 5 νὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ 4, ἢ 4 μὲ 5, δίδουσι πάντοτε 20· περὶ οὗ πληροφορούμεθα ὀφθαλμοφανῶς, ἐὰν θέσωμεν πέντε o τετράκις ὑπ' ἄλληλα, ὡς κατωτέρω,

00000 00000 00000 00000	ὅπου ἐμφανίζονται 20 μηδενικὰ, κἂν θέσωμεν 4 σειρὰς ἀνὰ 5 μηδενικὰ, εἴτε 5 σειρὰς ἀνὰ 4 μηδενικά.

§. 77.

Πρὶν ἢ προχωρήσωμεν ὅμως εἰς τὴν ἑρμηνείαν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἠξεύρωμεν ἐκ ςήθους ὅλα τὰ Παραγόμενα, τὰ ὁποῖα φέρουσιν οἱ μοναδικοὶ Ἀριθμοὶ πολλαπλασιαζόμενοι μετ' ἀλλήλων.

Εἰς τὸν ἑπόμενον Πίνακα, ὅστις καλεῖται Πυθαγορικὸς, κοινῶς δὲ Μία ἡ Μία, περιέχονται ὅλα τὰ Παραγόμενα ἐκ τῶν 2 μέχρι τῶν 9 (διότι ἕνας Ἀριθμὸς ἅπαξ λαμβανόμενος δὲν πολλαπλασιάζεται, ἀλλὰ μένει ἀμετάβλητος), τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἀποστηθήσωμεν καλῶς. (α)

ἅπαξ		1	ποιεῖ	1	4	—	7	—	28
2	(δὶς)	2	ποιοῦσι	4	4	—	8	—	32
2	—	3	—	6	4	—	9	—	36
2	—	4	—	8	5	(πεντάκις)	5	ποιοῦσιν	25
2	—	5	—	10	5	—	6	—	30
2	—	6	—	12	5	—	7	—	35
2	—	7	—	14	5	—	8	—	40
2	—	8	—	16	5	—	9	—	45
2	—	9	—	18	6	(ἑξάκις)	6	ποιοῦσι	36
3	(τρὶς)	3	ποιοῦσιν	9	6	—	7	—	42
3	—	4	—	12	6	—	8	—	48
3	—	5	—	15	6	—	9	—	54
3	—	6	—	18	7	(ἑπτάκις)	7	ποιοῦσι	49
3	—	7	—	21	7	—	8	—	56
3	—	8	—	24	7	—	9	—	63
3	—	9	—	27	8	(ὀκτάκις)	8	ποιοῦσιν	64
4	(τετράκις)	4	ποιοῦσι	16	8	—	9	—	72
4	—	5	—	20	9	(ἐννεάκις)	9	ποιοῦσιν	81
4	—	6	—	24					

Σημείωσις. Χάριν εὐχερεστέρας καταλήψεως, κατεστρώθη ὁ προκείμενος Πίναξ κατὰ τὸν τρόπον, καθ' ὃν πολλαπλασιάζονται μετ' ἀλλήλων δύω μοναδικοὶ ἀριθμοί· διότι προκύπτουσιν ἐν τῇ ἰδίᾳ εὐθείᾳ γραμμῇ, οἵτε δύω Ἀριθμοὶ καὶ

(α) Εἰς τὴν διὰ ζώσης φωνῆς παράδοσιν, εἶναι ὠφέλιμον, ἀμέσως ἐν ἀρχῇ τοῦ Ἀθροισμοῦ, ν' ἀρχίζωσιν οἱ Διδασκόμενοι τὸ ἀποστηθίζειν τὸν ἀνωτέρω Πίνακα, ὥστε φθάνοντες εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν, νὰ μὴ δυσκολεύωνται ὁλοτελῶς.

τὸ Παραγόμενον αὐτῶν, διὰ τοῦ ὁποίου τρόπου δύνανται οἱ Ἀρχάριοι ν' ἀποστηθίσωσι τὸν Πίνακα ἐν ταχύτητι καὶ εὐκολίᾳ.

§. 78.

Ὅταν λοιπὸν ἕνας ἐκ περισσοτέρων ψηφίων συνιστάμενος Ἀριθμὸς, φέρ' εἰπεῖν 4852 πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ ἕνα μοναδικὸν Ἀριθμὸν, παραδ. χ. μὲ 7, τότε θέττομεν τὸν Πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν Πολλαπλασιαστέον, καὶ πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ψηφίον του, κατὰ τὸν Πίνακα, ὡς ἑπομένως.

Πολλαπλασιασθήτωσαν	4852
μὲ	7
Παραγόμενον. . .	33964

λέγοντες· (ἀρχίζοντες ἐκ τῆς Μονάδος) 7 φοραῖς 2, ἤτοι 2 φοραῖς 7 ποιοῦσι 14, λοιπὸν θέττομεν 4, καὶ βαστῶμεν 1· εἶτα, 5 φοραῖς 7 ποιοῦσι 35, καὶ 1 (τὸ ἐκ τῶν μονάδων βασταχθὲν) ποιοῦσι 36, διὸ θέττομεν 6, καὶ βαστῶμεν 3· ἔπειτα, 7 φοραῖς 8 ποιοῦσι 56, καὶ 3 τὰ βασταχθέντα, ποιοῦσιν ὁμοῦ 59, ὅθεν θέττομεν 9, καὶ βαστῶμεν 5· τελευταῖον, 4 φοραῖς 7 ποιοῦσιν 28, καὶ 5 τὰ βασταχθέντα, ποιοῦσιν ὁμοῦ 33, τὰ ὁποῖα τίθενται ὁλόκληρα ὑπὸ τὴν Γραμμὴν, ἐπειδὴ οὐδὲν πρόκειται πλέον διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ.

Ἡ βάσις τῆς ἀνωτέρω πράξεως εἶναι φανερά· διότι ὁ Ἀριθμὸς 4852 περιέχει ἐν ἑαυτῷ 4 Χιλιάδας, 8 Ἑκατοντάδας, 5 Δεκάδας, καὶ 2 Μονάδας· ἄρα διὰ νὰ προκύψῃ ὁ ὁλόκληρος Ἀριθμὸς ἑπτάκις, εἶναι ἑπόμενον νὰ λάβωμεν 7 φοραῖς 2 Μονάδας, 7 φοραῖς 5 Δεκάδας, 7 φοραῖς 8 Ἑκατοντάδας, καὶ 7 φοραῖς 4 Χιλιάδας. Λοιπὸν 7 φοραῖς 2 Μονάδες, ποιοῦσι 14 Μονάδας, ὅ ἐστι, 4 Μονάδας καὶ 1 Δεκάδα, διὰ τοῦτο θέττομεν 4 ὑπὸ τὴν τάξιν τῶν Μονάδων, τὴν δὲ 1 Μονάδα προσθέττομεν (ὡς εἰς τὸν Ἀθροισμὸν) εἰς τὸ Κεφάλαιον τῶν Δεκάδων, ἤγουν· 7 φοραῖς 5 Δεκάδες, καὶ 1 Δεκὰς, ἣν ἐβαστάξαμεν ἐκ τοῦ κεφαλαίου τῶν Μονάδων, ποιοῦσιν ὁμοῦ 36, λοιπὸν θέττομεν πάλιν μόνον 6 ὑπὸ τὴν τάξιν τῶν Δεκάδων, καὶ βαςῶμεν τὰς 3 Ἑκατοντάδας διὰ τὸ Κεφάλαιον τῶν Ἑκατοντάδων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· δι' ἣν αἰτίαν ὁ Πολλαπλασιασμὸς ἄρχεται ἐκ τῆς κατωτάτης τάξεως, ἵνα τὰς εἰς τὸ Κεφάλαιον τῆς κατωτέρας τάξεως περιεχομένας Μονάδας τῆς πλησίον ἀνωτέρας τάξεως, δυνηθῶμεν νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὸ Κεφάλαιον τῆς ἐγγὺς προηγουμένης τάξεως, καθὼς πράττομεν καὶ εἰς τὸν Ἀθροισμόν (α).

§. 79.

Σχόλιον. Εἰς τὸν §. 76. ἐλέχθη, ὅτι πολλαπλασιαζόμενοι δύο Ἀριθμοί, προκύπτει πάντοτε τὸ αὐτὸ Κεφάλαιον, κἂν πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν μεγαλήτερον τὸν μικρότερον, εἴτε μὲ τὸν μικρότερον τὸν μεγαλήτερον Ἀριθμόν· μ' ὅλον τοῦτο ἐν τῷ πολλαπλασιάζειν μεγάλον Ἀριθμὸν διὰ μοναδικοῦ, εἶναι ὠφελιμώτερον νὰ πολλαπλασιάζωμεν πάντοτε μὲ τὸν μοναδικόν, ἐπειδὴ ἐκτελεῖται ὁ Πολλαπλασιασμὸς ἐν εὐκολίᾳ, ἥτις πηγάζει ἐκ τοῦ προδοθέντος Πίνακος.

§. 80.

Ὅταν σύγκηται καὶ ὁ Πολλαπλασιαςὴς ἐκ περισσοτέρων ψηφίων, τότε πολλαπλασιάζομεν μὲ ἕκαςον ψηφίον του κατὰ τὸν παρελθόντα τρόπον, τὰ δὲ προκύπτοντα Παραγόμενα τίθενται τοιουτρόπως ὑπ' ἄλληλα, ὥςε ἕκαςον αὐτῶν νὰ λαμβάνῃ τὴν ἀρχὴν ἐκ τῆς ἰδίας τάξεώς του, ἐξ ἧς προκύπτει· εἶτα ἀθροίζονται ὅλα αὐτὰ τὰ Παραγόμενα ὁμοῦ, καὶ δίδουσι τὸ Ζητούμενον.

(α) Τὸ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ σημεῖον δύο Ἀριθμῶν, ἔςω εἰς τὸ ἑξῆς τοῦτο (×)· τὸ δὲ διὰ τὸ Παραγόμενον δύο πολλαπλασιασθέντων μοναδικῶν Ἀριθμῶν τόδε (—). οἷον· ἀντὶ νὰ εἴπωμεν, παραδ. χ. 4 φοραῖς 5 ποιοῦσιν 20, λέγομεν, διὰ τῶν δοθέντων σημείων· $4 \times 5 — 20$.

Οἷον· πολλαπλασιασθήτωσαν . 689
με . . . 425

3445	Παραγόμενον τῶν 5 μονάδων.
1378	Παραγόμενον τῶν 2 δεκάδων.
2756	Παραγόμενον τῶν 4 ἑκατοντάδων.
κεφαλαιῶδες 292825	Παραγόμενον.

Ἑρμηνεία. Ὁ Πολλαπλασιαςὴς 425 τίθεται κατ' εὐθεῖαν ὑπὸ τὸν Πολλαπλασιαςέον 689, εἶτα ςρώνομεν μίαν εὐθεῖαν Γραμμὴν, ἵνα τεθῶσιν ὑπ' αὐτῆς τὰ Παραγόμενα, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὰ 689 μὲ τὰς 5 μονάδας, λέγοντες· 5 × 9 — 45, λοιπὸν θέττομεν 5, καὶ βαςῶμεν 4· καὶ ἐφεξῆς. Ὁμοίως πολλαπλασιάζομεν τὰ 689 μὲ τὰς 2 δεκάδας, πλὴν ἐπειδὴ τὰ 2 εἶναι ψηφίον τῆς δευτέρας τάξεως, διὰ τοῦτο τὸ Παραγόμενον αὐτοῦ ἄρχεται ἐκ τῆς δευτέρας τάξεως· ὡσαύτως πολλαπλασιάζομεν τὰ 689 καὶ μὲ τὰς 4 ἑκατοντάδας, ὧν τὸ Παραγόμενον ἄρχεται ἐκ τῆς τρίτης τάξεως, διότι τὰ 4 ἵςανται ἐν τῇ τρίτῃ τάξει· εἶτα ἀθροίζομεν ὅλα αὐτὰ τὰ Παραγόμενα ὡς ἵςανται, καὶ δίδουσι τὸ Παραγόμενον τῶν 689 διὰ 425 πολλαπλασιασθέντων.

Ἡ πρὸς τὰ ἀριςερὰ προχώρησις τῶν μετὰ τὴν μονάδα προηγουμένων ψηφίων τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ γίνεται διὰ τοῦτο, ἵνα τεθῶσι τὰ Παραγόμενα τοιουτοτρόπως, ὥςε νὰ δυνάμεθα διὰ νὰ τὰ ἀθροίσωμεν ὀρθῶς· διότι εἶναι προφανὲς, ὅτι ἕνας Ἀριθμὸς λαμβανόμενος δεκάκις, μεγαλύνεται δεκάκις, παρ' ὅταν μόνον ἅπαξ ληφθῇ· διὰ τοῦτο τὸ ἐκ τοῦ ψηφίου τῆς δευτέρας τάξεως Παραγόμενον πρέπει νὰ εἶναι δεκάκις μεγαλήτερον, παρὰ τὸ ἐκ τοῦ ψηφίου τῆς πρώτης τάξεως, ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι τὸ Παραγόμενον ἑκάςου ψηφίου (μετὰ τὴν μονάδα), πρέπει, ὡς δεκάκις μεγαλήτερον, νὰ προηγηθῇ ἀριςερῶς μίαν τάξιν, ἵνα τεθῶσι τὰ ὁμώνυμα ψηφία ὑπ' ἄλληλα, καὶ ἀθροισθῶσιν ἔπειτα ὀρθῶς.

§. 81.

Ὅταν μεταξὺ τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ τύχωσι καὶ μηδενικὰ, τότε πολλαπλασιάζομεν μόνον μὲ τὰ ψηφία, ὧν τὰ Παραγόμενα θέττομεν ὡς πρότερον ἐν ἐκείνῃ τῇ τάξει, ἐν ᾗ ἀνήκουσι τὰ ψηφία, μὲ τὰ ὁποῖα πολλαπλασιάζομεν, ὡς ἑπομένως.

Γνωςὸν ἐςὶν, ὅτι τὰ μηδενικὰ οὐδὲν σημαίνουσιν, ἄρα ἕκαςον Παραγόμενον ἐξ αὐτῶν δηλοῖ ὡσαύτως μηδέν. διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν μόνον τὸν Πολλαπλασιαςέον μὲ τὰ σημαντικὰ ψηφία

πολλαπλασιασθήτωσαν	53812
μὲ	6094
	215248
	484308
	322872
Παραγόμενον	327930328

4, 9, 6, ὧν τὰ Παραγόμενα λαμβάνουσι τὴν ἀρχὴν, ὡς προελέχθη, ἕκαςον ἐκ τῆς ἰδίας τάξεώς του, ἐξ ἧς προκύπτει· τὸ ψηφίον 6 ἵςαται ἐν τῇ τετάρτῃ τάξει, ἄρα ὀρθῶς ἄρχεται· καὶ τὸ παραγόμενον αὐτοῦ ἐξ αὐτῆς τῆς ἰδίας.

§. 82.

Καίτοι δύω Ἀριθμοὶ (κατὰ τὸν §. 76.) φέρουσι τὸ αὐτὸ Κεφάλαιον, κἂν λάβωμεν τὸν ἕνα, εἴτε τὸν ἕτερον ἐξ αὐτῶν διὰ Πολλαπλασιαςὴν, μ' ὅλον τοῦτο χάριν συντομίας εἶναι ὠφελιμώτερον, νὰ ἐκλέγωμεν πάντοτε τὸν μικρότερον ἐξ αὐτῶν διὰ Πολλαπλασιαςὴν. Θετέον· ἐδόθησαν 584 ἵνα πολλαπλασιαθῶσι μὲ 8675, ὅπου ἔδει νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ 5, 7, 6 καὶ 8· ἐν τούτῳ πολλαπλασιάζονται εὐκολώτερα 8675 μὲ 548, ἐπειδὴ μέλλει νὰ πολλαπλασιάσωμεν μόνον μὲ 4, 8 5, καὶ προκύπτει τὸ ἴδιον Κεφάλαιον, ὡς φαίνεται κατωτέρω.

α'.	β'.
584	8675
8675	584
2920	34700
4088	69400
3504	43375
4672	5066200
5066200	

§. 83.

Ἡ αὐτὴ συντομία προκύπτει, ὅταν εἷς τῶν Παραγόντων (Παράγοντες λέγονται ὅ,τε Πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ Πολλαπλασιαστὴς) ἔχῃ περισσότερα μηδενικὰ, παρὰ ὁ ἕτερος, ἢ ὁ εἷς ἔχει, ὁ δ' ἕτερος οὐχί. Παραδ. χ. ἐδόθη ὁ Ἀριθμὸς 50603 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 60548, καὶ ὁ 50007 μὲ 96854· ἐνταῦθα εἶναι ὠφελιμώτερον νὰ ληφθῶσι διὰ Πολλαπλασιαστὰς ὁ 50603, καὶ ὁ 50007· διότι εἰς ἀμφοτέρας τὰς πράξεις πολλαπλασιάζομεν μόνον μὲ 3,6,5, καὶ μὲ 7 καὶ 5, ὡς τὰ ἑπόμενα Ὑποδείγματα δεικνύουσιν.

Α'.	Β'.
50603	60548
60548	50603
404824	181644
202412	363288
253015	302740
303618	3063910444
3063910444	

```
Γʹ.     50007
        96854
   ------------
       200028
      250035
     400056
    300042
   450063
   ------------
   4843377978
```

```
Δʹ.     96854
        50007
   ------------
       677978
   484270
   ------------
   4843377978
```

§. 84.

Ἐὰν οἱ Παράγοντες ἔχωσι μηδενικὰ ἐν τῷ τέλει, πολλαπλασιάζομεν ὁμοίως μόνον τὰ σημαντικὰ Ψηφία, ὧν τὰ Παραγόμενα θέττομεν τοιουτοτρόπως ὑπ' ἄλληλα, ὡς νὰ μὴν ἦσαν παντελῶς μηδενικὰ παρόντα· εἶτα, ἀφ' οὗ ἀθροίσωμεν τὰ μοναδικὰ Παραγόμενα, προσθέττομεν εἰς τὸ κεφαλαιῶδες Παραγομένου τόσα μηδενικά, ὅσα εὑρίσκονται εἰς ἀμφοτέρους τοὺς Παράγοντας.

Ἰδοὺ ὑποδείγματα τοιαῦτα.

```
Αʹ.     453
        670
   ----------
       3171
      2718
   ----------
      303510
```

```
Βʹ.     85600
           74
   ----------
        3424
       5992
   ----------
      6334400
```

```
Γʹ.     9700
         460
   ----------
         582
        388
   ----------
      4462000
```

```
Δʹ.     58700
         6200
   ----------
         1174
        3522
   ----------
     363940000
```

Ὁ ἄνωθεν τρόπος προξενεῖ διπλοῦν ὄφελος· διότι πρῶτον μᾶς ἀνακουφίζει τὰς περιττὰς θέσεις τῶν μηδενικῶν, καὶ δεύτερον δὲν μᾶς ἀφίνει νὰ πράξωμεν εἰς τὴν ἀριςερῶς προχώρησιν κἀνὲν λάθος, τὸ ὁποῖον οἱ Ἀρχάριοι δύνανται νὰ πράξωσι πολλὰ εὐκόλως. Ἡ ὀρθότης καὶ ἡ αἰτία ἐλέχθησαν ἐν τῷ §. 81.

§. 85.

Ὅθεν, ὅταν ὁ Πολλαπλασιαςὴς συνίςαται ἁπλῶς ἐκ τοῦ ψηφίου 1 καὶ μηδενικῶν, τοῦτ' ἔςιν, ὅταν μέλλῃ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ 10, 100, 1000 κτλ., τότε οὐδὲν ἔχομεν ποιῆσαι περαιτέρω, εἰμὴ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν Πολλαπλασιαςέον μόνον τὰ μηδενικά. Παράδ. χ. ἐδόθη ὁ ἀριθμὸς 6952 διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 10, μὲ 100, μὲ 1000 κτλ., λοιπὸν προσθέττομεν εἰς τὸν Ἀριθμὸν τὰ μηδενικὰ, καὶ προκύπτουσι τὰ Κεφάλαια 69520, 695200, 6952000, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 86.

Σχόλιον. Ἐκ τῶν προλεχθέντων, καὶ ἐκ τοῦ ἀνωτέρου §. ἔγνωμεν, ὅτι πολλαπλασιάζομεν μόνον μὲ τὰ σημαντικὰ Ψηφία, τὰ δὲ μηδενικὰ προςίθενται· πλὴν ἐπειδὴ τὸ ἀνωτέρω σημαντικὸν ψηφίον εἶναι 1 (τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον μὲ ὁποιονδήποτε Ἀριθμὸν, προκύπτει πάλιν ὁ αὐτὸς Ἀριθμὸς, φέρ' εἰπεῖν ὁ Ἀριθμὸς 5, ἔςω καὶ ἕτερος ὁποιοςδήποτε, νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 1, λέγομεν· 1×5 ποιοῦσιν αὖθις 5· ὅ ἐςὶν, ἕκαςος Ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος διὰ τοῦ 1, μένει ἀμετάβλητος), διὰ τοῦτο δὲν ἐπολλαπλασιάσαμεν, ἀλλ' ἐπροσθέσαμεν εἰς τὸν δοθέντα Ἀριθμὸν 6952 μόνον τὰ μηδενικά. Πλέον σαφεςέρως πληροφορούμεθα περὶ τούτου, ἀφ' οὗ ςοχασθῶμεν, ὅτι μέλλοντες νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ 10, 100, 1000 κτλ., πρέπει νὰ αὐξηνθῇ ὁ Πολλαπλασιαςέος 10, 100, 1000 φοραῖς καὶ ἐφεξῆς· ἡ ὁποία αὔξησις γίνεται, ἐὰν ὁ Πολλαπλασιαςέος προχωρήσῃ πρὸς τὸ ἀριστερὸν μέρος μίαν, δύο, τρεῖς τάξεις καὶ ἐφεξῆς, ὅπερ ἐκτελέσθη διὰ τῆς προσθήκης τῶν μηδενικῶν· διότι μέλλων ὁ Ἀριθμὸς 6952 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 10, προσετέθη αὐτῷ ἓν 0, δι' οὗ ἐπροχώρησε μίαν τάξιν πρὸς τὸ ἀριστερὸν μέρος· ἄρα ηὐξήνθη δεκάκις, ἐπειδὴ πρότερον ἐτιμᾶτο δι' 6952, ἤδη δὲ δι' 69520, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 87.

Ταὐτὸν πράττομεν καὶ ὅταν ὁ Πολλαπλασιαστέος σύγκηται ἁπλῶς ἐκ τοῦ ψηφίου 1 καὶ μηδενικῶν, ὁ δὲ Πολλαπλασιαστὴς ἐκ σημαντικῶν ψηφίων· διότι κατὰ τὸν §. 76. πολλαπλησιαζόμενοι δύω Ἀριθμοὶ προκύπτει πάντοτε τὸ αὐτὸ Κεφάλαιον κἂν λάβωμεν τὸν ἕνα, εἴτε τὸν ἕτερον διὰ Πολλαπλασιαστήν. Ὅθεν δοθέντος ἑνὸς Ἀριθμοῦ, φέρ' εἰπεῖν 10000 διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 25, προσθέττομεν εἰς τὰ 25 τὰ μηδενικὰ τοῦ Πολλαπλασιαστοῦ, καὶ προκύπτει Κεφάλαιον 250000, καὶ οὕτως ἐφεξῆς,

§. 88.

Ἐκ τῶν §. §. 85 καὶ 86 ἔγνωμεν, ὅτι προκειμένου Ἀριθμοῦ ἵνα πολλαπλασιασθῇ μὲ 10, προστίθεται αὐτῷ ἓν 0, καὶ οὕτω μεγαλύνει δεκάκις, ἐπειδὴ προχωρεῖ μίαν τάξιν πρὸς τὸ ἀριστερὸν μέρος· πολλαπλασιαζόμενος δὲ μὲ 1, μένει ἀμετάβλητος. Ὅθεν δοθέντος ἑνὸς Ἀριθμοῦ ἵνα πολλαπλασιασθῇ μὲ 11, δὲν πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ποσῶς, ἀλλὰ προσθέττομεν ὑπ' αὐτοῦ τὸν ἴδιον Ἀριθμὸν, ἀρχίζοντες τὴν προσθήκην ἐκ τῆς δεκάδος πρὸς τὸ ἀριστερὸν μέρος, δι' οὗ αὐξάνει ὁ προστεθεὶς Ἀριθμὸς δεκάκις, διὰ δὲ τὸ ὑπόλοιπον 1, ἴσταται ἀνωτέρω ὁ ἀμετάβλητος ἀριθμὸς, καὶ οὕτως ἐκτελέσθη ὁ Πολλαπλασιασμὸς μὲ 11. Οἷον.

πολλαπλασιασθήτωσαν 532 μὲ 11.		ἤτοι	532
(α) προσθήκη	532	μὲ	11
	5852		532
			532
			5852

Δεῖξις.

532	νὰ πολλαπλασιασθῶσι	μὲ 10,	
	προςίθεται τὸ 0, καὶ προκύπτουσι		5320
532	ὁμοίως	μὲ 1,	
	μένει ἀμετάβλητος ὁ Ἀριθμὸς		532
			5852
καὶ ἀνάπ. 532	ὡσαύτως	μὲ 1,	
	προκύπτει ὁ αὐτὸς Ἀριθμὸς		532
532	ὁμοίως	μὲ 10,	
	μεγαλύνουσι δεκάκις διὰ τοῦ 0.		5520
			5852

§. 89.

Ὡσαύτως πολλαπλασιάζομεν εὐκόλως καὶ τοὺς μικτοὺς Ἀριθμοὺς μόνον μὲ ἕνα ἁπλοῦν Ἀριθμόν. Παράδ. χ. Γρόσ. 25 ,, 36 ,, παράδ. 2 ἄσπρα νὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ 7, δηλοῖ νὰ αὐξηνθῶσι τὰ 2 ἄσπρα, οἱ 36 παράδ., καὶ τὰ 25 γροσ. 7 φοραῖς, ὅθεν θέττομεν.

(α) Τὸ 0 δὲν ἐτέθη εἰς τὴν Προσθήκην διὰ τοῦτο, ἐπειδὴ προχωρήσας ὁ δεύτερος Ἀριθμὸς ἐκ τῆς δεκάδος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ ἀριστερὸν μέρος, ηὐξήνθη δὲ αὐτῆς τῆς προχωρήσεως δεκάκις· διότι τὸ ψηφίον 2 ἐτέθη ἐν τῇ τάξει τῶν δεκάδων, τὸ 3 ἐν τῇ τῶν ἑκατοντάδων, καὶ τὸ 5 ἐν τῇ τῶν χιλιάδων, καὶ ἤδη τιμᾶται αὐτὸς ὁ Ἀριθμὸς διὰ 5320, ἐν ᾧ πρότερον ἐτιμᾶτο μόνον διὰ 532, ἄρα τὸ μηδενικὸν, ὡς ἀσήμαντον, εἶναι ἐνταῦθα πάντη περιττὸν, ὡς φαίνεται καὶ ἐν τῇ ἀνωτέρω Δείξει.

Γροσ. 25 ,, 36 παράδ. ,, 2 ἄσπρα.

με 7

Γροσ. 181 ,, 15 παράδ. ,, 2 ἄσπρα·

ἤτοι 2 × 7 — 14 ἄσπρα, ὅ ἐςὶ 3 παράδ. καὶ 2 ἄσπρα, λοιπὸν θέττομεν 2 ἄσπρα, καὶ βαςῶμεν 3 παραδ. ἔπειτα, 6 × 7 — 42 καὶ 3 τὰ βαςαχθέντα ποιοῦσιν ὁμοῦ 45 παράδ. διὰ τοῦτο θέττομεν 5, καὶ βαςῶμεν 4· μετέπειτα, 3 × 7 — 21, καὶ 4 τὰ βαςαχθέντα ποιοῦσιν ὁμοῦ 25 δεκάδες, αἵτινες (ἐπειδὴ 4 δεκάδες ποιοῦσιν 1 Γρόσι) ςαίνουσιν 6 Γρόσια καὶ 1 δεκάδα, ὅθεν θέττομεν τὴν 1 δεκάδα, καὶ βαςῶμεν 6 Γρόσια· μετὰ ταῦτα, 5 × 7 — 35 καὶ 6 τὰ βαςαχθέντα Γρόσια, ποιοῦσιν ὁμοῦ 41, διὸ θέττομεν 1, καὶ βαςῶμεν 4· τελευταῖον, 2 × 7 — 14, καὶ τὰ βαςαχθέντα 4 ποιοῦσιν ὁμοῦ 18 ὡς ἀνωτέρω.

Τὸ ἄνωθεν Ὑπόδειγμα δύναται νὰ θεωρηθῇ οὕτως. Ἕνας χρειάζεται 9 πήχαις μεταξωτὸν· τοῦ ὁποίου ἡ πήχη τιμᾶται Γροσ. 19 ,, 15 παράδ. 2 ἄσπρα· ἄρα πόσα μέλλει νὰ πληρώσῃ διὰ τὰς 9 πήχας;

Γροσ. 19 ,, 15 παράδ. ,, 2 ἄσπρα.

με 9

Γροσ. 174 ,, 21 παράδ. — —

Ἕκαςος ἐννοεῖ ἀφ' ἑαυτοῦ, ὅτι 9 πῆχαι τιμῶνται ἐννεάκις τόσον, ὅσον τιμᾶται μία πήχη· ὅθεν διὰ νὰ προκύψῃ ἡ ὁλόκληρος τίμησις τῶν 9 πηχῶν, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἡ ἀξία τῆς μιᾶς πήχης με 9.

Ἕνας χρεωςεῖ Γρόσια 200 ,, —, διὰ τὰ ὁποῖα ἔδωκε τῷ Δανειςῇ του 9 πήχαις ῥοῦχον, πρὸς Γροσ. 16 ,, 12 παράδ. 1 ἄσπρον ἑκάςην πήχην, ἄρα πόσα μέλλει νὰ μετρήσῃ ἔτι πρὸς ἀποπλήρωσιν τῶν Γροσίων 200;

Λύσις καὶ Ἑρμηνεία.

Πρότερον λογαριάζομεν πόσα ςαίνουσιν αἱ 9 πῆχαι, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὡς καὶ μέχρι τοῦδε. Οἷον.

Γροσ. 16 ,, 12 παράδ. 1 ἄσπρον.
μὲ 9

Γροσ. 146 ,, 31 παράδ. — —

Αὐτὰ ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν Γροσίων 200 ,, —, πρέπει νὰ πληρώσῃ πρὸς ἀποπλήρωσιν Γροσ. 53 ,, 9 παράδ.

§. 90.

Σχόλιον. Καίτοι οἱ παρελθόντες πολλαπλασιασμοὶ τῶν μικτῶν Ἀριθμῶν γίνονται μόνον μὲ ἕνα ἁπλοῦν Ἀριθμὸν, μ' ὅλον τοῦτο προξενοῦσιν εἰς τοὺς Ἀρχαρίους μεγάλον ὄφελος. Αὐτοὶ διδάσκουσι τὴν συνήθειαν καὶ τὴν χρῆσιν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, εἰσὶν ἐν ταυτῷ καὶ ὠφέλιμος προπαρασκευὴ εἰς τὴν Διαίρεσιν, ἐπειδὴ ἐκ τούτου διδασκόμεθα τὸν τρόπον τοῦ νὰ καταλάβωμεν, ἐὰν, καὶ ποσάκις τοῦτος ἢ ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, μερικῶς λαμβανόμενος, εἶναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος, παρὰ εἷς ὁποιοσδήποτε ἄλλος.

Τοῦ λοιποῦ δὲ πῶς πολλαπλασιάζονται εὐκόλως καὶ συντόμως οἱ μικτοὶ Αιρθμοὶ μὲ ἕνα ἕκαςον Ἀριθμὸν συνιςάμενον ἐκ περισσοτέρων, παρὰ ἀφ' ἑνὸς ψηφίου, καὶ περὶ διαφόρων χρησίμων ὠφελειῶν, αἵτινες προκύπτουσιν ἐν τῷ λογαριάζειν, ῥηθήσεται μετὰ τὴν Διαίρεσιν εἰς χωριςὸν Κεφάλαιον.

ΚΕΦ. Ε΄.

Περὶ Διαιρέσεως ἐν ἀκεραίοις Ἀριθμοῖς.

§. 91.

Ἡ Διαίρεσις μᾶς διδάσκει νὰ διαιρῶμεν ἕκαστον Ἀριθμὸν εἰς ὁποσαδήποτε ὅμοια μέρη, καὶ νὰ φανερόνωμεν τὸ Ποσὸν ἑνὸς μέρους, τοῦτ' ἔστιν, ὁσάκις εἷς Ἀριθμὸς, ἀφαιρούμενος ἀφ' ἑτέρου, ἐμπεριείχετο ἐκείνῳ.

§. 92.

Εἰς τὴν Διαίρεσιν οὖν ἐπιζητοῦνται κυρίως δύο Ἀριθμοί· ὁ πρῶτος ὀνομάζεται Διαιρέτης, ἢ Μεριστής· ὁ δεύτερος Διαιρετέος, ἢ Μεριζόμενος, καὶ Διαιρέτης μὲν καλεῖται ὁ Ἀφαιρούμενος, ἤτοι ὁ δεικνύων εἰς πόσα ἴσα μέρη μέλλει νὰ διαιρεθῇ εἷς Ἀριθμὸς· Διαιρετέος δὲ, ὅς τις μέλλει νὰ διαιρεθῇ, ἤτοι ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, ἀφ' οὗ ἡ ἀφαίρεσις γίνεται. Ἐκ τούτων τῶν δύο προκύπτει καὶ τρίτος Ἀριθμὸς· ὅς τις λέγεται Πηλίκον, τὸ ὁποῖον φανερόνει, ποσάκις ὁ Διαιρέτης ἀφῃρέθη τοῦ Διαιρετέου, εἴτουν ὁσάκις ἐμπεριείχετο εἰς ἐκεῖνον. Παραδ. χάριν ὁ Ἀριθμὸς 48 διαιρούμενος εἰς 6 ὅμοια μέρη, δίδει εἰς ἕκαστον μέρος 8· λοιπὸν ὁ 48 ἐνταῦθα εἶναι Διαιρετέος· ὁ 6 Διαιρέτης· καὶ ὁ 8 Πηλίκον. Ἴδε εἰς τὸν §. 75.

§. 93.

Διὰ νὰ βάλλωμεν λοιπὸν εἰς πρᾶξιν ταύτην τὴν Διαίρεσιν, ζητοῦμεν μόνον ἵνα μάθωμεν ποσάκις ἐμπεριέχεται ὁ δοθεὶς Διαιρέτης εἰς τὸν δεθέντα Διαιρετέον· ὁ δὲ προκύψας Ἀριθμὸς εἶναι τὸ, ὅπερ λαμβάνει ἕκαστον μέρος. Φέρ' εἰπεῖν, μᾶς ἐδόθησαν νὰ διαιρέσωμεν 48 μὲ 6· ἐνταῦθα ζητοῦμεν μόνον, ποσάκις ἐμπεριέχονται τὰ 6 εἰς τὰ 48· καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ 6 εἰς τὰ 48· ἐμπεριέχονται ὀκτάκις, ἄρα λαμβάνει ἕκαςον μέρος 8, καὶ οὕτως ἐλύθη τὸ Πρόβλημα.

Δεῖξις.

Διότι διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς ἕκαςον μέρος 1, ἐπιζητεῖται τοσάκις 1, ὅσα εἰσὶ τὰ διαιροῦντα μέρη· εἰς τὸ ἐδικόνμας Ὑπόδειγμα, ὅπου πρέπει νὰ γίνωσιν 6 ὅμοια μέρη, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἔχωμεν πάντοτε 6, διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς ἕκαςον μέρος 1, ἄρα ἐκ τῶν 48 λαμβάνει ἕκαςον μέρος τοσάκις 1, ὁσάκις ἐμπεριέχονται τὰ 6 εἰς τὰ αὐτὰ 48.

§. 94.

Ἡ Βάσις οὖν τῆς Διαιρέσεως θεμελιοῦται κυρίως εἰς τὸ, πῶς δεῖ ἐρευνᾷν, ἵνα ἴδωμεν, ποσάκις εἷς Ἀριθμὸς ἐμπεριέχεται εἰς ἕτερον, ἐπειδὴ, ὡς προΐδομεν, διὰ μέσου τούτου ἀποτελεῖται ἡ ζητηθεῖσα μοιρασία.

§. 95.

Πρὶν ὅμως νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὸν ἴδιον περὶ τούτου προσδιωρισμένον Κανόνα, ἂς προειπῶμεν πρὸς θεμελιώδη κατάληψιν αὐτοῦ τὰς ἐννοίας, ἐξ ὧν ἐπήγασεν ὁ αὐτὸς Κανών.

Ὁσάκις εἷς Ἀριθμὸς ἐμπεριέχεται εἰς ἕτερον, τοσάκις δεῖ ἀφαιρεθῆναι ὁμοίως ἐξ αὐτοῦ. Ἐὰν εἶναι ἀληθὲς, ὅτι τὰ 8 ἐμπεριέχονται εἰς τὰ 45 πεντάκις, εἶναι ἑπόμενον, ὅτι αὐτὰ τὸ πεντάκις 8, ἤτοι 40, δύνανται ν' ἀφαιρεθῶσιν ὡσαύτως ἐκ τῶν 45· ἄλλως δὲν ἐμπεριείχοντο τὰ 8 εἰς 45 πεντάκις. Δεδόσθω, ὅτι ἐξελάβομεν τὰ 8 ὡς περιεχόμενα εἰς τὰ 45 ἑξάκις, ἀλλ' ὅμως τὸ σφάλμα φανεροῦται εὐθὺς· διότι ἑξάκις 8, ἤτοι 48, δὲν δύνανται ν' ἀφαιρεθῶσιν ἐκ τῶν 45, ἄρα τὰ 8 δὲν ἐμπεριέχονται ἑξάκις εἰς τὰ 45.

§. 96.

Ἐν τούτῳ ἔχομεν ἤδη ἀσφαλῆ δοκιμὴν, ἂν ὁ προβληθεὶς Ἀριθμὸς, ὃ ἐςὶ, ποσάκις ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης εἰς τὸν Διαιρετέον, δὲν εἶναι πάνυ μεγάλος· δηλονότι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν προβληθέντα Ἀριθμὸν μετὰ τοῦ Διαιρέτου, ἵνα ἴδωμεν, ἂν τὸ Παραγόμενον αὐτῶν δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ Διαιρετέου ἢ οὐχί.

§. 97.

Πλὴν διὰ μέσου τούτου μόνον οὐκ ἐσμὲν εἰσέτι πληροφορημένοι, ἂν ὁ προβληθεὶς Ἀριθμὸς, τοῦτ' ἔςι, ποσάκις ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης εἰς τὸν Διαιρετέον, δὲν εἶναι πάνυ μικρός· διότι δεδόσθω, ὅτι εἴπομεν· 8 εἰς τὰ 57 ἐμπεριέχονται πεντάκις, τὸ ὁποῖον, κατὰ τὴν ἀνωτέρω Δοκιμὴν, ἤθελεν εἶναι ἀναντιῤῥήτως ἀληθὲς, ἐπειδὴ πεντάκις 8, ἤτοι 40, δύνανται ν' ἀφαιρεθῶσιν ἐκ τῶν 57· μ' ὅλον τοῦτο ὅμως αὐτὸς ὁ προβληθεὶς Ἀριθμὸς ἤθελεν εἶναι ψευδὴς, καὶ πάνυ μικρός· ἐπειδὴ τὰ 8 εἰς τὰ 57 ἐμπεριέχονται ἑπτάκις. Ἀλλὰ καὶ τοῦτο τὸ λάθος βλέπομεν εὐθύς· διότι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ Γινόμενον καὶ τὸν Διαιρέτην ἐκ τῶν 57 θέλει μείνει τόσον μεγάλον Ὑπόλοιπον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης ἔτι ἅπαξ, ἢ καὶ πλεονάκις, ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι ὁ προβληθεὶς ἀριθμὸς εἶναι πάνυ μικρός. Ἐὰν λοιπὸν εἴπωμεν· 8 εἰς τὰ 57 ἐμπεριέχονται πεντάκις, καὶ ἀφαιρέσωμεν πεντάκις 8, ἤτοι 40, ἐκ τῶν 57, μένει ὑπόλοιπον 17, εἰς τὰ ὁποῖα ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης ἔτι δὶς, ἄρα ὁ προβληθεὶς ἀριθμὸς εἶναι πάνυ μικρός.

§. 98.

Ὅθεν διὰ νὰ εἴμεθα κατὰ πάντα πληροφορημένοι, ὅτι ὁ προβληθεὶς Ἀριθμὸς (δηλαδὴ ποσάκις ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης εἰς τὸν Διαιρετέον), δὲν ἐλήφθη οὔτε πάνυ μεγάλος, οὔτε πάνυ μικρὸς, ἀλλὰ ὀρθῶς, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν προβληθέντα Ἀριθμὸν μετὰ τοῦ Διαιρέτου, ἵνα ἴδωμεν ἂν τὸ Γινόμενον αὐτῶν δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ Διαιρετέου. εἶτα πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν αὐτὸ τὸ Γινόμενον τῷ ὄντι, ἵνα ἴδωμεν, ἂν τὸ Ὑπόλοιπον (ἐὰν ἤθελε μείνῃ) εἶναι μικρότερον τοῦ Διαιρέτου, καὶ ἐπομένως δὲν περιέχεται πλέον ἐν αὐτῷ (α).

§. 99.

Ποσάκις ὅμως ἓν μοναδικὸν ψηφίον ἐμπεριέχεται εἰς ἕν, ἢ τὸ πλεῖστον εἰς δύο ψηφία, φέρ' εἰπεῖν, 8 εἰς τὰ 75, 6 εἰς τὰ 26 κτλ., ἐπιτυχαίνομεν ἄνευ δυσκολίας διὰ τοῦ Πίνακος, ἐξ οὗ μᾶς εἶναι γνωστὰ τὰ παραγόμενα ἐξ ὀκτάκις 9, τετράκις 6, τὰ ὁποῖα παριστάνονται εὐθὺς πρὸ ὀφθαλμῶν. Διὸ βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι τὰ 8 εἰς τὰ 75 ἐμπεριέχονται ἐννεάκις, ἐπειδὴ ηὑξεύρομεν, ὅτι ὀκτάκις 9 ποιοῦσι μόνον 72· πλέον ταχύτερον ἐπιτυχαίνομεν, ὅτι τὰ 6 εἰς τὰ 26 ἐμπεριέχονται τετράκις, διότι παριστάνεται εὐθέως εἰς τὸν νοῦν μας, ὅτι τετράκις 6 ποιοῦσι μόνον 24, τὰ ὁποῖα δύνανται ν' ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ 26· δὲν δυνάμεθα ὅμως νὰ φαντασθῶμεν, καὶ νὰ διορίσωμεν 6 εἰς 26 πεντάκις, ἐπειδὴ ἐκ τοῦ πίνακος μᾶς εἶναι γνωστὸν, ὅτι πεντάκις 6 ποιοῦσι 30, τὰ ὁποῖα δὲν ἐμπεριέχονται εἰς τὰ 26. Ταῦτα μὲν περὶ τούτων ἱκανά· ἐπομένως δὲ ἂς δείξωμεν, πῶς διαιροῦνται μεγαλήτεροι Ἀριθμοί.

§. 100.

Γενικὸς Κανὼν τῆς Διαιρέσεως.

Ἡ Διαίρεσις ἄρχεται πάντοτε ἐκ τῆς ἀνωτάτης τάξεως ἀριστερῶς, λαμβάνομεν δὲ ἐκ τοῦ Διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅ-

---

(α) Ἐνταῦθα δύναται ὁ Διδάσκαλος, πρὶν νὰ προχωρήσῃ περαιτέρω, νὰ προβάλλῃ ὠφελίμους, ἐρωτήσεις, δι' ὧν οἱ διδασκόμενοι λαμβάνουσιν ἑτοιμότητα, καὶ εὐκολίαν ἐν τῇ Διαιρέσει. Ἐρωτησάτω, φέρ' εἰπεῖν· εἶναι ὁ προβληθεὶς ἀριθμὸς 28 εἰς 150 ὡς πεντάκις σα εἰσὶν ἀναγκαῖα ἵνα ἐμπεριέχηται ἐν αὐτοῖς ὁ Διαιρέτης, εἶτα ἀναζητῶμεν διὰ τοῦ πυθαγορικοῦ Πίνακος, ποσάκις ἐμπεριέχεται ἐν αὐτοῖς ὁ Διαιρέτης· δοκιμάζομεν ὅμως (κατὰ τὸν §. 98.) διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς Ἀφαιρέσεως, ἂν ὁ προβληθεὶς Ἀριθμὸς δὲν ἐλήφθη οὔτε πάνυ μεγάλος, ἀλλ' οὔτε πάνυ μικρός. Εἰς τὸ Ὑπόλοιπον, ὅπερ προκύπτει ἐκ τῆς Ἀφαιρέσεως (ἢ εἶναι 0, ἢ σημαντικὸν ψηφίον), κατεβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον ἐκ τοῦ Διαιρετέου, καὶ διαιροῦμεν πάλιν ὡς πρότερον. Τοιουτοτρόπως ἐξακολουθοῦμεν τὴν Διαίρεσιν κατεβάζοντες ὀλίγον κατ' ὀλίγον ὅλα τὰ ψηφία τοῦ Διαιρετέου, ὅπου σημειωτέον, ὅτι καθὼς προχωρεῖ ἡ Διαίρεσις δεξιῶς, οὕτω νὰ τίθενται πρὸς τὸ δεξιὸν καὶ τὰ προκύπτοντα Παραγόμενα, διὰ τὰς αἰτίας, τὰς ὁποίας θέλομεν σαφηνίσει, ἀφ' οὗ δι' ἑνὸς Παραδείγματος ἐξηγήσωμεν πρότερον τὴν κατάστρωσιν καὶ ἐκτέλεσιν τοῦ ἤδη δοθέντος Κανόνος.

§. 101.

Περὶ ἁπλῆς Διαιρέσεως.

Ἁπλῆ διαίρεσις ὀνομάζεται, ὅταν ὁ Διαιρέτης ἔχῃ μόνον ἕνα Χαρακτῆρα (ψηφίον), σύνθετος δὲ, ὅταν ἔχῃ δύο, ἢ καὶ περισσοτέρους. Ὅθεν, ὅταν ὁ Διαιρέτης σύγκηται ἐξ ἑνὸς ψηφίου, διαιροῦμεν ἐν εὐκολίᾳ κατὰ τὸν ἑπόμενον τρόπον.

Πρόβλημα. Ποσάκις ἐμπεριέχεται ὁ Ἀριθμὸς 7 εἰς τὸν Ἀριθμὸν 8596;

περιεχόμενος πάνυ μεγάλος, ἢ πάνυ μικρός; πόθεν διαγινώσκεται τοῦτο; διατί οὕτως; Εἶναι ἑξάκις μεγάλος; καὶ πῶς; Εἶναι τετράκις μικρός; πόθεν διαγινώσκεται τοῦτο; κτλ.

Λύσις.

```
Μεριστής.  7 | 8596 Μεριζόμενος. | 1228 Πηλίκον.
             | 7
             | --
             | 15
             | 14
             | --
                19
                14
                --
                 56
                 56
                 --
                  0
```

Ἑρμηνεία. Δεξιῶς καὶ ἀριστερῶς τοῦ Διαιρετέου συνεθίζεται διὰ νὰ σείρηται μία ὄρθιος γραμμή· ἀριστερῶς τίθεται ὁ Διαιρέτης, δεξιῶς δὲ τὰ προκύπτοντα Παραγόμενα (ἤτοι τὸ Πηλίκον)· εἶτα ἀρχίζομεν νὰ διαιρῶμεν ἀριστερῶς ἐν τῇ ἀνωτάτῃ τάξει, λέγοντες· τὰ 7 νὰ διαιρέσωσι τὰ 8 λαμβάνουσιν ἀνὰ 1, τὸ ὁποῖον 1 τίθεται πρόσω τῆς γραμμῆς δεξιῶς, καὶ πολλαπλασιάζεται μετὰ τοῦ Διαιρέτου 7, δηλονότι· 1 × 7 — 7, τὰ ὁποῖα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 8 (δι' ἣν αἰτίαν ἐτέθεσαν ἀνωτέρω τὰ 7 ὑπὸ τῶν 8) μένει 1. Δεξιῶς αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου 1, κατεβάζομεν τὰ ἑπόμενα 5, καὶ οὕτω προκύπτουσιν ἵνα διαιρέσωμεν 15, τὰ ὁποῖα διαιροῦμεν ὡς πρότερον, λέγοντες· 7 εἰς τὰ 15 ἐμπεριέχονται 2, τὰ ὁποῖα 2 τίθενται δεξιῶς πλησίον τοῦ ἤδη προκύψαντος 1, τοῦτ' ἔστι 2 × 7 — 14, ἅτινα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 15, μένει 1. Δεξιῶς αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου 1, κατεβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον 9 ἐκ τοῦ Διαιρετέου, καὶ προκύπτουσιν ἵνα διαιρέσωμεν 19, τὰ ὁποῖα διαιροῦμεν ὡς πρότερον, λέγοντες· 7 νὰ διαιρέσωσι τὰ 19 λαμβάνουσιν ἀνὰ 2, ἅτινα τίθενται δεξιῶς πλησίον τῶν ἤδη προκυψάντων 2, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιάζομεν μετὰ τοῦ Διαιρέτου 7, καὶ ποιοῦσι 14, ἃ ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 19, μένουσι 5· μετὰ ταῦτα κατεβάζομεν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 6, καὶ προκύπτουσι 56, ἅτινα διαιροῦμεν πάλιν, λέγοντες· 9 νὰ διαιρέσωσι τὰ 56, λαμβάνουσιν ἀνὰ 8, τὰ ὁποῖα τίθενται δεξιῶς πλησίον τῶν ἤδη προκυψάντων 2, εἶτα πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ μετὰ τοῦ Διαιρέτου 7, καὶ ποιοῦσι 56, ἅτινα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 56, μένει μηδὲν, καὶ οὕτω τελειόνει ἡ διαίρεσις, ἐπειδὴ δὲν ἔμεινε νὰ κατεβάσωμεν ἕτερον ψηφίον ἐκ τοῦ Διαιρετέου.

Δεῦξις.

Ἡ αἰτία δι᾽ ἣν ἄρχεται ἡ Διαίρεσις ἐκ τῆς ἀνωτάτης τάξεως, καὶ δι᾽ ἣν κατεβάζομεν τὰ ψηφία εἶναι ἡ ἀκόλουθος.

Διὰ νὰ μείνωμεν εἰς τὸ ἰδικόν μας ὑπόδειγμα (ἐπειδὴ ὅ,τι ἀποδείξομεν περὶ τούτου ταὐτὸν ἐννοεῖται τοῦ λοιποῦ καὶ εἰς ὁποιονδήποτε ἄλλον Ἀριθμὸν), λέγομεν· τοῦ προκειμένου τοῦ Ἀριθμοῦ 8696 ἵνα διαιρεθῇ διὰ τῶν 9, δηλοῖ, ὅτι αἱ 8 χιλιάδες, 6 ἑκατοντάδες, 9 δεκάδες καὶ 6 μονάδες, μέλλει νὰ διαιρεθῶσιν εἰς 7 ὅμοια μέρη. Λοιπὸν ἕπεται ἵνα ἴδωμεν πόσας χιλιάδας, πόσας ἑκατοντάδας, πόσας δεκάδας, καὶ πόσας μονάδας λαμβάνει ἕκαστον μέρος, ὅ ἐστι, ποσάκις ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης (ἐνταῦθα ὁ 9) εἰς ἑκάστην αὐτῶν τῶν τάξεων. Ὅθεν διαιροῦμεν πρῶτον τὴν ἀνωτάτην τάξιν (εἰς τὸ ἰδικόν μας ὑπόδειγμα τὰς χιλιάδας), ἐξ ἧς προκύπτει παραγόμενον 1· διότι τὰ 7 εἰς τὰ 8 ἐμπεριέχονται μόνον ἅπαξ, ἄρα μένει ὑπόλοιπον 1 χιλιὰς, ἡ ὁποία ὡς χιλιὰς δὲν διαιρεῖται πλέον εἰς 7 ὅμοια μέρη (ὡς §. 93. Δεῖξις.), δι᾽ ἣν αἰτίαν ἀναλύομεν αὐτὴν εἰς ἑκατοντάδας, εἰς τὰς ὁποίας προστιθέντων καὶ τῶν ἑπομένων πρὸς διαίρεσιν δοθέντων 5 ἑκατοντάδων (ἐπειδὴ ἑκατοντάδας μέλλει νὰ διαιρέσωμεν), προκύπτουσι πρὸς διαίρεσιν 15 ἑκατοντάδες ἵνα διαιρεθῶσιν εἰς 7 ὅμοια μέρη· λοιπὸν τὰ 7 διαιροῦντα τὰ 15 λαμβάνουσιν ἀνὰ 2, ἄρα λαμβάνει ἕκαςον μέρος καὶ 2 ἑκατοντάδας· 2×7 ὅμως ποιοῦσι 14 ἑκατοντάδας, αἵτινες ἀφαιρούμεναι ἐκ τῶν 15 ἑκατοντάδων, μένει ὑπόλοιπον ἔτι 1 ἑκατοντὰς, ἡ ὁποία ὡς ἑκατοντὰς δὲν διαιρεῖται εἰς 7 ὅμοια μέρη, διὰ τοῦτο ἀναλύομεν αὐτὴν εἰς τὴν πλησίον αὐτῆς κατωτέραν τάξιν, εἴτουν εἰς δεκάδας, καὶ οὕτω προκύπτουσι, μετὰ τῶν 9 δεκάδων (ἐπειδὴ δεκάδας μέλλει νὰ διαιρέσωμεν), 19 δεκάδες ἵνα διαιρεθῶσιν εἰς 7 ὅμοια μέρη, καὶ ἐπειδὴ τὰ 7 εἰς τὰ 19 ἐμπεριέχονται 2, διὰ τοῦτο λαμβάνει ἕκαςον μέρος καὶ 2 δεκάδας· 2×7 ὅμως ποιοῦσι 14 δεκάδας, αἵτινες ἀφαιρούμεναι ἐκ τῶν 19 δεκάδων, μένει ὑπόλοιπον ἔτι 5 δεκάδες, αἵτινες ὡς δεκάδες δὲν διαιροῦνται εἰς 7 ὅμοια μέρη, διὸ ἀναλύομεν αὐτὰς εἰς τὴν ἐσχάτην πλησίον αὐτῶν τάξιν, τοῦτ' ἔςιν, εἰς μονάδας, καὶ οὕτω προκύπτουσι, μετὰ τῶν δοθέντων 6 μονάδων (ἐπειδὴ μονάδας μέλλει νὰ διαιρέσωμεν), 56 μονάδες ἵνα μερισθῶσιν εἰς 7 ὅμοια μέρη, αἵτινες διαιρούμεναι μὲ 7, λαμβάνουσι καὶ ἀνὰ 8 μονάδας, ἐπειδὴ τὰ 7 εἰς τὰ 56 ἐμπεριέχονται ὀκτάκις ἐξ ἴσου. Ἄρα λαμβάνει ἕκαςον μέρος 1 χιλιάδα, 2 ἑκατοντάδας, 2 δεκάδας, καὶ 8 μονάδας, ἤτοι διὰ χαρακτήρων 1228.

Δι' αὐτὸ τοῦτο λοιπὸν ἄρχεται ἡ Διαίρεσις ἐκ τῆς ἀριςερῶς ἀνωτάτης τάξεως, καὶ προχωρεῖ δεξιῶς, διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν τὸ ἀμέριςον ὑπόλοιπον τῆς ἀνωτέρας τάξεως εἰς τὰ μέρη τῆς πλησίον αὐτῆς κατωτέρας τάξεως, καὶ ὡς τοιαῦτα νὰ δυνάμεθα ἔπειτα νὰ τὰ διαιρέσωμεν ἐξῆς. Αὕτη ἡ ἀνάλυσις ὅμως ἐνεργεῖται ἁπλῶς μὲ τὸ κατέβασμα τοῦ πλησίον ἐπομένου ψηφίου, ἐπειδὴ διὰ μέσου τούτου τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀνωτέρας τάξεως γίνεται ψηφίον τῆς κατωτέρας τάξεως (ὡς §. 17.), ἄρα ἀπὸ μονάδων τῆς ἀνωτέρας τάξεως, γίνονται δεκάδες τῆς πλησίον κατωτέρας τάξεως. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἑπόμενον παραγόμενον εἶναι πάντοτε τὸ παραγόμενον τῆς κατωτέρας τάξεως, διὰ τοῦτο ἕκαςον ἑπόμενον παραγόμενον πρέπει νὰ τεθῇ εἰς μίαν πρόσω τάξιν δεξιῶς, δηλαδὴ τοιουτοτρόπως, καθὼς προχωρεῖ ἡ Διαίρεσις ἀπὸ τὸ ἀριςερὸν πρὸς τὸ δεξιὸν μέρος.

§. 102.

Ἐκ τούτου δηλοῦται ἐν ταὐτῷ, ὅτι κἀνὲν ἁπλοῦν Παραγόμενον δὲν δύναται νὰ ληφθῇ ὑπὲρ τὰ 9· διότι ἕκαςον ἁπλοῦν Παραγόμενον δεικνύει, πόσα ληφθήσονται ἐξ ἑκάςης τάξεως δι' ἕκαςον μέρος· κἀμμία τάξις ὅμως δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν ἀριθμὸν 9 (ὡς §. 14.).

§. 103.

Σχόλιον. Πάνυ ὠφέλιμον καὶ ἀναγκαῖον εἶναι νὰ συνεθίσῃ τις εὐθὺς ἀπ' ἀρχῆς ἵνα διαιρῇ διὰ τοῦ νοὸς μὲ ἓν ψηφίον, ὅ ἐςί, νὰ μὴ γράφῃ ὑπὸ τοῦ Διαιρετέου τὸ ἐκ τοῦ παραγομένου καὶ Διαιρέτου πρὸς ἀφαίρεσιν προκύπτον Κεφάλαιον, ἀλλὰ νὰ τὸ ἀφαιρῇ διὰ τοῦ νοὸς εὐθὺς, τὸ ὁποῖον εἶναι πολλὰ εὔκολον. Διότι διὰ νὰ εἶναι τὸ Παραγόμενον πάντοτε μόνον μοναδικὸν ψηφίον (τὸ ὁποῖον, κατὰ τὸν ἀνωτέρω §, δύναται νὰ εἶναι μόνον 9), διὰ τοῦτο (ὅταν καὶ ὁ Διαιρέτης εἶναι μοναδικὸν ψηφίον) προκύπτουσι πάντοτε ἵνα πολλαπλασιάσωμεν μόνον μὲ δύο μοναδικὰ ψηφία, ὧν τὸ ὕψιςον Κεφάλαιον δύναται νὰ εἶναι μόνον 81, τὸ ὁποῖον δύναται ν' ἀφαιρεθῇ εὐκόλως διὰ τοῦ νοὸς ἐκ τοῦ μεγίςου Διαιρέτου, ὅς τις εἰς τοιαύτην περίςασιν δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλήτερος τῶν 89. Πρὸς τούτοις δὲν πρέπει εἰς τοιαύτας περιςάσεις νὰ ὑποτεθῇ οὔτε τὸ ὑπόλοιπον, ἀλλ' οὔτε τὰ ἑπόμενα ψηφία. Τὸ ἑπόμενον Ὑπόδειγμα θέλει σαφηνίσει τὰ λεχθέντα. Παράδ. χ. τὰ 9 νὰ διαιρέσωσι τὰ 78876, ἤτοι,

9 εἰς 78876
8764 Πηλίκον.

Δηλαδὴ· τὰ 9 νὰ διαιρέσωσι τὰ 78, λαμβάνουσιν ἀνὰ 8, λοιπὸν $8 \times 9 — 72$, ἐκ τῶν 78 μένουσιν 6· (ταῦτα πάντα ὅμως διὰ τοῦ νοὸς, χωρὶς νὰ τεθῶσι τὰ 72 ὑπὸ τῶν 78). Πλησίον αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου 6 (τὸ ὁποῖον βαςῶμεν εἰς τὸν νοῦν), ςοχαζόμεθα, ὅτι ἵςανται δεξιῶς τὰ ἑπόμενα 8, καὶ οὕτω ποιοῦσιν ὁμοῦ 68· λοιπὸν τὰ 9 νὰ διαιρέσωσι τὰ 68, λαμβάνουσιν ἀνὰ 7 (τὰ ὁποῖα 7 θέττομεν εὐθὺς ὑπὸ τὴν γραμμὴν πλησίον τῶν 8 δεξιῶς), εἶτα λέγομεν· 7×9 63, ἐκ τῶν 68 μένουσι 5, τὰ ὁποῖα βαςῶμεν ὡσαύτως εἰς τὸν νοῦν, ςοχαζόμενοι τὸ ἑπόμενον ψηφίον ὡς πλησίον ἱςάμενον, καὶ οὕτω λέγομεν· 9 εἰς τὰ 57 ἐμπεριέχονται ἐξάκις, ἤτοι $6 \times 9 — 54$, ἐκ τῶν 57 μένουσιν 3· τελευταῖον· 9 εἰς τὰ 36 (ςοχαζόμενοι, ὅτι τὸ ψηφίον 6 ἵςαται πλησίον τῶν 3), ἐμπεριέχεται τετράκις, ἤτοι $4 \times 9 — 36$, ἐκ τῶν 36 μένει μηδὲν, καὶ οὕτω λαμβάνει τέλος.

Αὐτὰ τὰ γυμνάσματα εἰσὶ πολλὰ εὔκολα· πλὴν μ' ὅλον τοῦτο δὲν πρέπει νὰ παρατρεχθῶσιν, ἐπειδὴ αἱ ἑπόμεναι συντομίαι, καὶ ἐν γένει αἱ τοῦ λογαριάζειν ὠφέλειαι, κρέμανται ἐκ ταύτης τῆς ἑτοιμότητος. Εἰς τὸ Θ΄. Κεφάλαιον τοῦ παρόντος Μέρους, τὸ ὁποῖον πραγματεύεται περὶ τῶν ὠφελειῶν ἐν τῷ πολλαπλασιάζειν καὶ διαιρεῖν, θέλει εἰπῶμεν περὶ τούτου περισσότερα.

§. 104.

Ἐὰν συμβῇ, ὡς ἀκολουθεῖ πολλάκις, καὶ τότε δηλαδὴ ἀφ' οὗ κατεβάσωμεν καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον πλησίον τοῦ ὑπολοίπου, νὰ μὴν ἐμπεριέχηται μ' ὅλον τοῦτο ὁ Διαιρέτης εἰς αὐτὸν τὸν Ἀριθμὸν, ὅστις σύγκειται ἐκ τοῦ ὑπολοίπου καὶ τοῦ κατεβασθέντος ψηφίου, τότε, πρὶν νὰ κατεβάσωμεν ἑτερου ψηφίου, πρέπει νὰ βάλλωμεν εἰς τὸ Πηλίκον ἓν 0. Ἐν γένει εἶναι ἀπηγορευμένον τὸ, νὰ κατεβάζωμεν διὰ μιᾶς δύο ψηφία, ἀλλ' ἑκάστην φορὰν μόνον ἕν, καὶ ἐὰν δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν, θέττομεν εἰς τὸ Πηλίκον ἓν 0, εἶτα κατεβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον, καὶ διαιροῦμεν ἑξῆς· ἐὰν δὲ, ἀφ' οὗ τεθῇ τὸ 0, ἔπειτα κατεβασθῇ καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον, καὶ μ' ὅλον τοῦτο δὲν ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης εἰς τὸν προκείμενον ἀριθμὸν, πρέπει νὰ βάλλωμεν εἰς τὸ πηλίκον πάλιν ἓν 0, καὶ μετέπειτα νὰ κατεβάσωμεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἄχρις οὗ νὰ δυνηθῶμεν νὰ διαιρέσωμεν. Θετέον· 8 νὰ διαιρέσωσιν 856 λέγομεν· 8 εἰς τὰ 8 ἐμπεριέχονται ἅπαξ, ἤτοι $1 \times 8 = 8$, ἐκ τῶν 8 μένει μηδὲν, λοιπὸν κατεβάζομεν τὰ ἑπόμενα 5 καὶ λέγομεν· 8 εἰς τὰ 5 δὲν ἐμπεριέχονται, πλὴν μ' ὅλον τοῦτο δὲν δυνάμεθα νὰ κατεβάσωμεν εὐθὺς τὸ ἑπόμενον ψηφίον 6, καὶ νὰ εἰπῶμεν 8 εἰς τὰ 56, ἀλλὰ πρότερον λέγομεν· 8 εἰς τὰ 5 δὲν ἐμπεριέχονται οὐδ' ἅπαξ, διὰ τοῦτο θέττομεν εἰς τὸ Πηλίκον τὸ 0, ὡς νὰ ἦτον ἓν σημαντικὸν ψηφίον, ἔπειτα κατεβάζομεν τὰ 6 καὶ λέγομεν· 8 εἰς τὰ 56 (διότι τὰ 5, ἐξ ὧν μηδὲν λαμβάνεται, μένουσιν ὑπόλοιπον) ἐμπεριέχονται ἑπτάκις ἴσα· ὅθεν προκύπτει Πηλίκον 107.

Δεῖξις. Ἡ αἰτία, δι' ἣν θέττομεν 0 ὅταν δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν, πηγάζει πληρέστατα ἐκ τοῦ §. 102., ὅπου ἐλέχθη, ὅτι ἕκαστον ψηφίον ἐν τῷ Πηλίκῳ δεικνύει, πόσα λαμβάνονται ἐξ ἑκάστης τάξεως δι' ἕκαστον μέρος· διὰ τοῦτο ἐν ἑκάστῃ τάξει τοῦ ἐπακολουθοῦντος πηλίκου πρέπει νὰ τεθῇ ἓν ψηφίον ἢ ἓν μηδενικὸν, ἵνα τὸ προηγούμενον πηλίκον λάβῃ τὴν οἰκείαν τάξιν. Εἰς τὸ ἐδικόν μας ὑπόδειγμα πρέπει νὰ διαιρέσωμεν 856 διὰ τῶν 8, τοῦτ' ἔστιν, 8 ἑκατοντάδες, 5 δεκάδες, καὶ 6 μονάδες νὰ διαιρεθῶσιν εἰς 8 ὅμοια μέρη, καὶ νὰ φανερωθῆ πόσαι ἑκατοντάδες, δεκάδες, καὶ μονάδες ληφθήσονται ἐξ ἑκάςης τάξεως δι᾽ ἕκαςον μέρος· λοιπὸν, 8 νὰ διαιρέσωσι τὰς 8 ἑκατοντάδας, λαμβάνουσιν 1, ὅ ἐςὶν, ἕκαςον μέρος λαμβάνει μίαν ἑκατοντάδα· εἶτα, 8 εἰς τὰς 5 δεκάδας δὲν ἐμπεριέχονται, ἄρα οὐκ ἔχομεν δεκάδας διαιρέσαι, ἀλλὰ αἱ 5 δεκάδες καὶ αἱ 6 μονάδες διαιρούμεναι ὡς 56 μονάδες εἰς 8 μέρη, προκύπτει δὲ ἕκαςον μέρος 7 μονάδες· ἄρα ἕκαςον μέρος λαμβάνει 1 ἑκατοντάδα καὶ 7 μονάδας. Εἰμὲν οὖν ἐσημειοῦντο ἐν τῷ Πηλίκῳ μόνον τὰ ψηφία 1 καὶ 7, ἤθελε φανερόνει δέκα ἑπτὰ, οὐχὶ ὅμως ἑκατὸν ἑπτά· διὰ τοῦτο πρέπει νὰ τεθῆ εἰς τὸ πηλίκον 1 ἑκατοντὰς, 0 δεκάδες, καὶ 7 μονάδες· διὰ χαρακτήρων 107.

§. 105.

Ἐκ ταύτης τῆς ἰδίας αἰτίας πρέπει νὰ κατεβάζωμεν ἐκ τοῦ Διαιρετέου ὅλα τὰ ψηφία ἀνὰ ἓν, καὶ νὰ βάλλωμεν εἰς τὸ Πηλίκον τὰ Παραγόμενα αὐτῶν, ἕσω καὶ νὰ μὴ πρόκηται μηδὲν νὰ κατεβάσωμεν, εἰμὴ ἁπλᾶ μηδενικά. Φέρ᾽ εἰπεῖν, 7 νὰ διαιρέσωσι τὰς 42000, λέγομεν· τὰ 7 εἰς τὰ 42 ἐμπεριέχονται ἑξάκις ἴσα. Πλὴν καίτοι ἐνταῦθα δὲν ὑπάρχουσι πλέον ψηφία ἵνα διαιρέσωμεν, μ᾽ ὅλον τοῦτο ὅμως δὲν πάυει εἰσέτι ἡ διαίρεσις, ἀλλὰ δι᾽ ἕκαςον ἐν τῷ Διαιρετέῳ εὑρισκόμενον μηδενικὸν, πρέπει νὰ τεθῆ εἰς τὸ Πηλίκον ὡσαύτως ἓν μηδενικὸν, ἵνα τὸ Πηλίκον (τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ φανερώσῃ χιλιάδας) τεθῆ ἐν τῇ τάξει τῶν χιλιάδων, ὡς.

7 εἰς 42000
φέρουσιν 6000

λέγοντες· 7 εἰς τὰ 42 ἐμπεριέχονται ἑξάκις, ἤτοι· $6 \times 7 — 42$, ἐκ τῶν 42 μένει μηδέν· εἶτα 7 εἰς τὸ 0 δὲν ἐμπεριέχονται ὁλοτελῶς· διότι, ὡς γνωςὸν, τὸ 0 μηδὲν σημαίνει, διὰ τοῦτο θέττομεν τὸ 0 καὶ ἐφεξῆς· ὅ ἐςὶν, ἕκαςον μέρος λαμβάνει ἐπ' εὐθὺ 6 χιλιάδας· ἑκατοντάδα, δεκάδα, καὶ μονάδα ὅμως οὐδεμίαν, ἐπειδὴ εἰς τὰς ἐν τῷ Διαιρετέῳ τάξεις τῶν τε ἑκατοντάδων, δεκάδων, καὶ μονάδων εὑρίσκονται ἁπλῶς μηδενικά.

§. 106.

Περὶ συνθέτου Διαιρέσεως.

Ἀπαραλλάκτως (ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ §. 101.) ἐπιτελεῖται ἡ Διαίρεσις, ὅταν ὁ Διαιρέτης σύγκηται ἐκ περισσοτέρων ψηφίων· πλὴν ἐπειδὴ ἐνταῦθα δὲν προκύπτει εὐθὺς πρὸ ὀφθαλμῶν, ποσάκις ἐμπεριέχεται ἅπας ὁ Διαιρέτης εἰς τὸν ἑκάςην φορὰν προκύπτοντα Διαιρετέον, διὰ τοῦτο διαιροῦμεν μόνον μὲ τὸ ἀριςερῶς πρῶτον ψηφίον τοῦ Διαιρετέου, ὡς νὰ ὑπῆρχεν αὐτὸ μόνον παρὼν, καὶ πολλαπλασιάζομεν πρὸς τὸ παρὸν μὲ τὸν προβληθέντα ἀριθμὸν ὅλον τὸν Διαιρέτην, ἵνα δοκιμάσωμεν κατὰ τὴν παράδοσιν, ἐὰν ἀπιτύχωμεν τὸ καθ' αὐτὸ Πηλίκον, ἢ ἐξελάβομεν αὐτὸ πάνυ μικρὸν, τὸ ὁποῖον ἢ οὕτως ἢ ἄλλως δυνάμεθα εὐκόλως διορθῶσαι, ὡς.

```
43 εἰς 927166 | Πηλίκον 21562.
      86      |
      ──
       67
       43
       ──
       241
       215
       ───
        266
        258
        ───
          86
          86
          ──
           0
```

Ἑρμηνεία. Ἐν πρώτοις λαμβάνομεν ἐκ τοῦ Διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα εἰσὶν ἀναγκαῖα ἵνα ἐμπεριέχηται ἐν αὐτοῖς ὁ Διαιρέτης 43, δηλαδὴ 92· δὲν λέγομεν ὅμως, τὰ 43 νὰ διαιρέσωσι τὰ 92, ἀλλ' ἁπλῶς, 4 εἰς τὰ 9, καὶ ἐπειδὴ τὰ 4 εἰς τὰ 9 ἐμπεριέχονται δὶς, διὰ τοῦτο θέττομεν εἰς τὸ πηλίκον 2, ἐπ' ἐλπίδι, ὅτι καὶ τὰ 43 εἰς τὰ 92 ἐμπεριέχονται ὡσαύτως δὶς, καὶ πολλαπλασιάζομεν πρὸς τὸ παρὸν διὰ τοῦ 2 ὅλον τὸν Διαιρέτην 43, λέγοντες· 2 × 3 — 6 (ὑπὸ τῶν 2 ὡς ἀνωτέρω)· εἶτα, 2 × 4 — 8 (ὑπὸ τῶν 9)· ἐπειδὴ λοιπὸν δὶς 43, ποιοῦσιν 86, ἅτινα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 92 μένει ὑπόλοιπον μόνον 6, διὰ τοῦτο ὁ προβληθεὶς ἀριθμὸς 2 ἐλήφθη ὀρθῶς. Πλησίον τοῦ ὑπολοίπου 6, κατεβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον 7, καὶ προκύπτουσιν 67, ὅπου πάλιν δὲν λέγομεν 43 εἰς 67, ἀλλὰ 4 εἰς 6, καὶ ἐπειδὴ τὰ 4 εἰς τὰ 6 ἐμπεριέχονται ἅπαξ, διὰ τοῦτο θέττομεν 1 διὰ τὸ πηλίκον τῶν 4 εἰς 6 (δηλαδὴ ὅτι τὰ 4 εἰς τὰ 6 ἐμπεριέχονται ἅπαξ), καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ 1 μὲ τὰ 43, λέγοντες· 1 × 3 — 3 (ὑπὸ τῶν 7), καὶ 1 × 4 — 4 (ὑπὸ τῶν 6), ποιοῦσι 43, τὰ ὁποῖα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 67, μένει ὑπόλοιπον 24, εἰς τὰ ὁποῖα προςιθέντος τοῦ ἑπομένου ψηφίου 1, προκύπτουσιν ἵνα διαιρέσωμεν 241 μὲ 43, διὸ λέγομεν· 4 εἰς τὰ 24 ἐμπεριέχονται πεντάκις (α), ἤτοι, 3 × 5 — 15, λοιπὸν θέττομεν 5 (ὑπὸ τοῦ 1), καὶ βαςῶμεν 1· εἶτα, 4 × 5 — 20, καὶ τὸ βαςαχθὲν 1, ποιοῦσιν ὁμοῦ 21· λοιπὸν πεντάκις 43, ποιοῦσιν ὁμοῦ 215, τὰ ὁποῖα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 241, μέ-

---

(α) Ἐὰν ἐκλάβωμεν ἐνταῦθα, ὅτι τὰ 4 εἰς τὰ 24 ἐμπεριέχονται ἑξάκις, τοῦτ' ἔςι, τὰ 43 εἰς τὰ 241 ἑξάκις, βλέπομεν εὐθὺς, ὅτι ὁ προβληθεὶς ἀριθμὸς 6 εἶναι πάνυ μεγάλος· διότι ἑξάκις 43, ποιοῦσι 258, τὰ ὁποῖα δὲν ἐμπεριέχονται εἰς τὰ 241.

νει ὑπόλοιπον 26. Εἰς αὐτὰ κατεβάζομεν τὰ ἑπόμενα 6, καὶ προκύπτει Διαιρετέος 266, εἶτα λέγομεν· 4 εἰς 26 ἐμπεριέχονται ἑξάκις, ἤτοι 3 × 6 — 18, 8 (ὑπὸ τῶν 6), καὶ βαςῶμεν 1· ἔπειτα, 4 × 6 — 24, καὶ 1 ποιοῦσιν 25, δηλονότι, ἑξάκις 43, ποιοῦσιν ὁμοῦ 258, τὰ ὁποῖα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 266, μένει ὑπόλοιπον 8, εἰς τὰ ὁποῖα προςτεθέντος τοῦ τελευταίου ψηφίου 6, προκύπτουσιν 86, καὶ οὕτω λέγομεν. 4 εἰς τὰ 8 ἐμπεριέχονται δὶς, ἤτοι, 2 × 3 — 6, καὶ 2 × 4 — 8, ποιοῦσιν 86, ἅτινα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν ἀνωτέρω 86, μένει μηδέν. Ὅθεν τὰ 43 εἰς τὰ 927166 ἐμπεριέχονται 21562 φοραῖς, δηλονότι, ὅπερ ταὐτὸν ἐςί, τὰ 927166 διαιρούμενα εἰς 43 ὅμοια μέρη, λαμβάνει ἕκαςον μέρος ἀνὰ 21562.

§. 107.

Ὡσαύτως πράττομεν, ὅταν ὁ Διαιρέτης συνίςαται ἐκ τριῶν, τεσσάρων, πέντε ψηφίων, καὶ ἐφεξῆς, ὡς.

```
           507  εἰς  247923
Πηλίκον    489       2028
                     ----
                      4512
                      4056
                      ----
                       4563
                       4563
                       ----
                          0
```

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα τὰ 507 δὲν ἐμπεριέχονται εἰς τὰ 247, διὰ τοῦτο λαμβάνομεν εὐθὺς ἐκ τοῦ Διαιρετέου 2479, καὶ λέγομεν· 5 εἰς 24 ἐμπεριέχονται τετράκις, μὲ τὰ ὁποῖα 4 πολλαπλασιάζομεν ὅλον τὸν Διαιρέτην, λέγοντες· 4 × 7 — 28, θέττομεν 8 (ὑπὸ τῶν 9 ἐν τῇ τετάρτῃ τάξει), καὶ βαςῶμεν 2· εἶτα, 4 × 0 — 0, καὶ 2, ποιοῦσι 2 (ὑπὸ τῶν 7 ἐν τῇ τρίτῃ τάξει)· ἔπειτα 4 × 5 — 20 (ὑπὸ τῶν 24), λοιπὸν ἀφαιρούμενα 2028 ἐκ τῶν 2479, μένει ὑπόλοιπον 451· μετέπειτα κατεβάζομεν τὰ ἑπόμενα 2, καὶ προκύπτει Διαιρετέος 4512, καὶ λέγομεν· 5 εἰς 45 ἐμπεριέχονται ὀκτάκις (ἐὰν ἐλάβομεν 9 ἤθελεν εἶναι μεγάλος ὁ ἀριθμὸς· διότι ἐννεάκις 507, ποιοῦσι 4563, τὰ ὁποῖα δὲν δύνανται ἀφαιρεθῆναι ἐκ τῶν 4512)· αὐτὰ τὰ 8 τίθενται δεξιῶς πλησίον τοῦ προτεθέντος πηλίκου 4, καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν μὲ 8 ὅλον τὸν Διαιρέτην 507, θέττοντες τὸ Παραγόμενον ὑπὸ τοῦ Διαιρετέου 4512, ἀφαιρέσεως δὲ γενομένης, μένει ὑπόλοιπον 456· πλησίον αὐτῶν κατεβάζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον 3, καὶ διαιροῦμεν πάλιν, λέγοντες· 5 εἰς 45 ἐμπεριέχονται ἐννεάκις, ἐννεάκις δὲ 507, ποιοῦσι 4563, ἅτινα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 4563, μένει μηδέν.

Προβλήματα.

Α′.			Β′.		
6283	εἰς	25163415	54	εἰς	378000
Πηλ. 4005.		25132	Πηλ. 7000.		378
		31415			0000
		31415			
		0			

Καίτοι εἰς τὸ Α′. κατεβάσαμεν πλησίον τοῦ ὑπολοίπου 31 τὸ ἑπόμενον ψηφίον 4, μ᾽ ὅλον τοῦτο δὲν ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης εἰς τὰ 314, διὰ τοῦτο ἐθέσαμεν εἰς τὸ πηλίκον 0. εἶτα ἀφ᾽ οὗ κατεβάσαμεν καὶ τὸ ἕτερον ἑπόμενον ψηφίον 1, δὲν ἐμπεριείχετο πάλιν ὁ Διαιρέτης 6283 εἰς 3141, διὸ, πρὶν ἢ κατεβιβάσαμεν τὰ ἑπόμενα 5, ἐθέσαμεν εἰς τὸ πηλίκον καὶ ἕτερον 0 (ὡς §. 104.)· εἶτα κατεβάσαντες τὸ τελευταῖον ψηφίου 5, προέκυψε Διαιρετέος 31415, εἰς τὰ ὁποῖα ἐμπεριέχονται τὰ 6283· λοιπὸν εἴπομεν· 6 εἰς 31 ἐμπεριέχονται πεντάκις, ἤτοι $3 \times 5 = 15$, διὸ ἐθέσαμεν 5, καὶ ἐβιβάσαμεν 1, καὶ ἐφεξῆς, καὶ οὕτω προέκυψαν 31415, τῶν ὁποίων ἀφαιρεθέντων ἐκ τῶν 31415, ἔμεινε μηδέν. Εἰς τὸ Β'. δὲ ἕκαστον κατεβιβασθὲν 0, ἐθέσαμεν εἰς τὸ πηλίκον ὡσαύτως ἓν 0 (ὡς §. 103.).

§. 108.

Σχόλιον. Οἱ Ἀρχάριοι ἐπιθυμοῦσιν ἕνα διωρισμένον καὶ ἀσφαλῆ Κανόνα, δι' οὗ νὰ ἐπιτυγχάνωσιν ἀμέσως (εἰς ὁποιανδήποτε Διαίρεσιν) τὸ ὀρθὸν Πηλίκον· περὶ τούτου ὅμως δὲν ὑπάρχει γενικὸς Κανών, ἀλλ' ἡ ἄσκησις πρέπει νὰ τελειοποιήσῃ τὸ πᾶν. Κοινῶς δοκιμάζωμεν μὲ τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου, σπανίως δὲ καὶ μὲ τὸ τρίτον, ἵνα ἴδωμεν, ἐὰν τὸ Παραγόμενον αὐτῶν προσεθὲν εἰς τὸ τοῦ πρώτου ψηφίου παραγόμενον, δύναται τὸ ὅλον αὐτὸ ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ προκειμένου Διαιρετέου. Φέρ' εἰπεῖν, μᾶς ἐδόθησαν νὰ διαιρέσωμεν 534 διὰ τῶν 68· ἐνταῦθα βλέπομεν ἐκ τοῦ δευτέρου ψηφίου 8, ὅτι τὰ 6 εἰς τὰ 53 δὲν ἐμπεριέχονται ὀκτάκις· διότι ὑπὸ ὀκτάκις 8, προσέθεντα 6 εἰς τὰ ἑξάκις 8, καὶ ποιοῦσιν ὁμοῦ 54, τὰ ὁποῖα δὲν ἀφαιροῦνται ἐκ τῶν 53· ἐὰν ὅμως τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ Διαιρέτου εἶναι 0, τότε λαμβάνομεν, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, τὸν πλέον μεγαλήτερον ἀριθμὸν διὰ πηλίκον. Θετέον· 307 εἰς 1245, ἤτοι 3 εἰς 12 ἀναμφιβόλως ἐμπεριέχονται τετράκις, ἐπειδὴ 4×7 (τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ Διαιρέτου), ποιοῦσιν 28, τὰ ὁποῖα ἀφαιροῦνται ἐκ τῶν τοῦ Διαιρετέου 45· πλὴν καὶ τοῦτο δὲν ἐπιτυγχάνεται πάντοτε Παράδειγμα. 307 εἰς 1227, ἤτοι 3 εἰς 12 δὲν ἐμπεριέχονται τετράκις· διότι $4 \times 7 = 28$, δὲν ἀφαιροῦνται ἐκ τῶν

27, ἄρα πρέπει νὰ δανεισθῶμεν ἐκ τῶν 12 ἕν, καὶ οὕτω μένουσι μόνον 11, εἰς τὰ ὁποῖα τὰ 3 δὲν ἐμπεριέχονται τετράκις. Ἐντεῦθεν οὖν δῆλον, ὅτι οὐχ' ἄλλως, ἀλλὰ μόνον διὰ τῆς γυμνάσεως ἀποκτᾶται ἡ τοιαύτη γρήγορος ἑτοιμότης.

§. 109.

Ἀφ' οὗ κατεβάσωμεν καὶ διαιρέσωμεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ Διαιρετέου, καὶ μένει ἐν τῷ τέλει ὑπόλοιπόν τι, τότε δηλοῖ, ὅτι δὲν γίνεται ἡ διαίρεσις ἐξ ἴσου, ἀλλὰ μένει τοσαύτη ποσότης (ὅση δηλονότι παριστάνεται διὰ τοῦ ὑπολοίπου), ἥτις δὲν δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς τόσα ὅμοια μέρη, εἰς ὅσα δεικνύει ὁ Διαιρέτης. Ἰδοὺ τοιοῦτον ὑπόδειγμα.

325 εἰς 79758

Πηλίκον 245.

650

1475

1300

1758

1625

133 μένουσιν ὑπόλοιπα, τὰ ὁποῖα δὲν διαιροῦνται εἰς 325 ὅμοια μέρη, ὥστε νὰ λάβῃ ἕκαστον μέρος ἓν Ἀκέραιον. (ὡς §. 93. Δεῖξις).

§. 110.

Ἐὰν ἐν τῷ τέλει τοῦ Διαιρέτου δεξιῶς εὑρίσκωνται μηδενικά, διαιροῦμεν ἁπλῶς διὰ τῶν σημαντικῶν ψηφίων, ἀφίνοντες ἐκ τοῦ Διαιρετέου τόσα ψηφία δεξιῶς, ὅσα μηδενικὰ εὑρίσκονται εἰς τὸν Διαιρέτην, τὰ ὁποῖα δὲν κατεβάζομεν ποσῶς ἐν τῇ διαιρέσει, ὡς τὰ ἑπόμενα ὑποδείγματα δεικνύουσιν.

Α'. 23(0 εἰς 2146(8
Πηλίκον 93. 207
76
69
7 Ὑπόλοιπον τῶν διαιρεθέντων ἀριθμῶν· τούτῳ προςίθενται τὰ διὰ τὸ 0 ἀποτμηθέντα 8, καὶ οὕτω μένει Ὑπόλοιπον 78.

Ἐνταῦθα διαιροῦμεν ἁπλῶς διὰ τῶν 23, ἀφίνοντες διὰ τὸ 0 τὸ τοῦ Διαιρετέου τελευταῖον ψηφίον 8, δι' ἣν αἰτίαν χωρίζεται ὡς ἀνωτέρω.

Β'. 35(00 εἰς 3581(52
Πηλίκον 102. 35
,, 81
70
11 Ὑπόλοιπον τῶν διαιρεθέντων ἀριθμῶν· αὐτῷ προςίθενται καὶ τὰ τμηθέντα 52, καὶ μένει Ὑπόλοιπον 1152.

Ἐνταῦθα διὰ τὰ δύο μηδενικὰ, κόπτομεν καὶ τὰ τελευταῖα δύο ψηφία τοῦ Διαιρετέου, εἴτουν τὰ 52, τὰ ὁποῖα δὲν κατεβάζομεν ἐν τῇ διαιρέσει, καὶ διαιροῦμεν μόνον διὰ τῶν 35 τὰ 3581·

Γ'. 695(000 εἰς 2591655(438
Πηλίκον 3729. 2085
5066
4865
2015
1390
6255
6255
0 λοιπὸν μένουσιν ὑπόλοιπον τὰ τμηθέντα 438.

Δ'. 42|00 εἰς 12981|00

Πηλίκον 309. 126

381

378

ὑπόλοιπον 3

Πλησίον τοῦ ἀνωτέρω Ὑπολοίπου 3, τίθενται τὰ ἀφεθέντα δύο μηδενικὰ, καὶ προκύπτει Ὑπόλοιπον 300.

Ἐνταῦθα ἀφίνομεν καὶ τὰ μηδενικὰ τοῦ Διαιρετέου, καὶ διαιροῦμεν μόνον μὲ 42 τὰς 12981· πλὴν ἐπειδὴ τὸ Ὑπόλοιπον 3 ἀνήκει ἐν τῇ τρίτῃ τάξει, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ τῷ προστεθῶσι πάλιν τὰ δύο μηδενικὰ, διὰ νὰ λάβῃ τὸν οἰκεῖον τόπον ἐν τῇ τρίτῃ τάξει.

§. 111.

Σχόλιον. Τὰ μηδενικὰ, ὡς γνωστὸν, οὐκ εἰσὶν ἀριθμοὶ δι' ὧν ἐπιτελεῖται ἡ πρᾶξις τῶν λογαριασμῶν, ἀλλὰ χρησιμεύουσιν ὡς ἁπλᾶ δεικτικὰ Σημεῖα, δι' ὧν γνωρίζομεν ποίας τάξεως εἰσὶ τὰ σημαντικὰ Ψηφία, μὲ τὰ ὁποῖα κυρίως λογαριάζομεν· ὅθεν εἰς τοὺς Διαιρέτας 230, 3500, 695000, κτλ. δεικνύουσι τὰ μηδενικὰ μόνον, ὅτι μέλλει νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 23 δεκάδων, διὰ τῶν 35 ἑκατοντάδων, διὰ τῶν 695 χιλιάδων, καὶ ἐφεξῆς. Ἐν τοσούτῳ ὅμως εἰς τὸν μέγιστον Ἀριθμὸν τῶν μονάδων, ὅστις δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλήτερος τῶν 9, δὲν ἐμπεριέχεται κἀμμία Δεκὰς· εἰς τὸν μέγιστον Ἀριθμὸν τῶν μονάδων καὶ δεκάδων, ὅστις δὲν εἶναι μεγαλήτερος τῶν 99, δὲν ἐμπεριέχεται κἀμμία Ἑκατοντάς· εἰς τὸν μέγιστον Ἀριθμὸν τῶν μονάδων καὶ δεκάδων, καὶ ἑκατοντάδων, ὅστις δὲν εἶναι μεγαλήτερος τῶν 999, δὲν ἐμπεριέχεται κἀμμία Χιλιὰς, (ὡς εἰς τὴν Ἀρίθμησιν ἐλέχθη περὶ τούτου)· ὅθεν ἀφ' ἑνὸς Διαιρέτου ἐξ ἁπλῶν δεκάδων, μένει ὑπόλοιπον Δεκάδες· ἀφ' ἑνὸς Διαιρέτου ἐξ ἁπλῶν ἑκατοντάδων, μένει

Ὑπόλοιπον Μονάδες καὶ Δεκάδες· ἀφ' ἑνὸς Διαιρέτου, ἐξ ἁπλῶν χιλιάδων, μένει Ὑπόλοιπον Μονάδες, Δεκάδες, καὶ Ἑκατοντάδες. διὰ τούτου λοιπὸν, πρὶν τῆς διαιρέσεως, δυνάμεθα ἐν γένει, δι' ὅσα μηδενικὰ ὑπάρχουσιν ἐν τῷ Διαιρέτῃ ν' ἀφήσωμεν ἐκ τοῦ Διαιρετέου τόσα ψηφία δεξιῶς, καὶ νὰ τὰ σοχασθῶμεν ἐν τῷ μεταξὺ ὡς Ὑπόλοιπον.

§. 112.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ὠφέλεια, ὅταν ὁ Διαιρέτης συνίσαται ἁπλῶς ἐκ τοῦ ψηφίου 1 καὶ μηδενικῶν, ὡς 10, 100, 1000, καὶ ἐφεξῆς· διότι δὲν διαιροῦμεν παντελῶς, ἀλλὰ δι' ὅσα μηδενικὰ εὑρίσκονται ἐν τῷ Διαιρέτῃ, τόσα Ψηφία κόπτομεν ἀπὸ τὸν Διαιρετέον δεξιῶς, καὶ οὕτω τὰ μὲν ἀριστερῶς τῆς τομῆς Ψηφία δίδουσι τὸ Πηλίκον, τὰ δὲ δεξιῶς τῆς τομῆς μένουσιν Ὑπόλοιπον. Θὲς· ὅτι μᾶς ἐδόθηταν ἵνα διαιρέσωμεν 64573 μὲ 10, μὲ 100, 1000, καὶ ἐφεξῆς· αὕτη ἡ διαίρεσις γίνεται ὡς ἑπομένως.

Πηλίκον	Ὑπόλοιπον.	Πηλίκον	Ὑπόλ.	Πηλ.	Ὑπόλ.
6457	3.	645	73.	64	573.

Δεῖξις.

Ἡ αἰτία τῆς ἀνωτέρω διαιρέσεως φανεροῦται μὲν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω §, ἐπειδὴ τὸ σημαντικὸν ψηφίον 1 δὲν διαιρεῖ, ὅ ἐςίν, ἀφίνει ἀμετάβλητα τὰ δεξιῶς τῆς τομῆς μέλλοντα διαιρεθῆναι ψηφία· ἐν τοσούτῳ ὅμως δυνάμεθα σαφέςερον πληροφορηθῆναι περὶ τούτου ἀφ' οὗ σοχασθῶμεν, ὅτι ἕνας Ἀριθμὸς σμικρύνεται 10, 100, 1000 φοραῖς καὶ ἐφεξῆς, ἐὰν τὰ ψηφία του προχωρήσωσι μίαν τάξιν πρὸς τὰ δεξιὰ (ὡς §. 16.), τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖται διὰ τῆς τομῆς τῶν ψηφίων, ἐπειδὴ διὰ μέσου τούτου ὅλα τὰ ἀριςερῶς τῆς τομῆς ψηφία προχωροῦσι τόσας τάξεις πρὸς τὰ ὀπίσω, ὅσα ψηφία τοῖς ἀφαιρέθησαν δέξιῶς. (ὡς §. 17).

§. 113.

Ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως ἐπιτελεῖται πλέον συντόμως, ἐὰν ἐν τῷ διαιρεῖν δὲν βάλλομεν ὑπὸ τοῦ Διαιρετέου τὸ ἐκ τοῦ παραγομένου καὶ Διαιρετέου προκύπτον κεφάλαιον, ἀλλ' ἀφαιρέσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ νοὸς ἀμέσως, καὶ θέσωμεν μόνον τὸ Ὑπόλοιπον, ὡς.

	356	εἰς	301532
Πηλίκον	847.		,,1673
			,,2492
			....

δηλαδή· 6×8 — 48, ἐκ τῶν 55, μένουσιν 7 (ὑπὸ τῶν 5), καὶ βαςῶμεν 5· εἶτα, 5×8 —40, καὶ 5 τὰ βαςαχθέντα, ποιοῦσι 45, ἐκ τῶν 51, μένουσιν 6, καὶ βαςῶμεν 5· ἔπειτα, 3×8 —24, καὶ 5, ποιοῦσιν 29, ἐκ τῶν 30, μένει 1, ὁμοῦ ὑπόλοιπον 167, κατεβάζοντες δὲ τὰ ἑπόμενα 3, γίνονται ὁμοῦ 1673, ὅθεν λέγομεν· 4×6 — 24, ἐκ τῶν 33, μένουσιν 9, καὶ βαςῶμεν 3· μετέπειτα, 4×5 — 20, καὶ 3, ποιοῦσιν 23, ἐκ τῶν 27, μένουσι 4, βαςῶμεν 2· εἶτα, 3×4 —12, καὶ 2, ποιοῦσι 14, ἐκ τῶν 16, μένουσι, 2· ὁμοῦ ὑπόλοιπον 249, ἐν οἷς προςιθέμενα καὶ τὰ τελευταῖα 2, ποιοῦσιν ὁμοῦ 2492· ἔπειτα, 6×7 — 42, ἐκ τῶν 42, μένει μηδὲν, βαςῶμεν 4, μετέπειτα, 5×7—35, καὶ 4, ποιοῦσι 39, πάλιν μηδὲν, βαςῶμεν 3· μετὰ ταῦτα 3×7 —21, καὶ 3 ποιοῦσιν 24, ἐκ τῶν 24, αὖθις μηδέν.

Περὶ ὀνοματικῶν μικτῶν Ἀριθμῶν.

§. 144.

Ἀπαραλλάκτως διαιροῦμεν καὶ τοὺς ὀνοματικοὺς μικτοὺς Ἀριθμοὺς, ἐκτὸς μόνον, ὅτι τὸ Ὑπόλοιπον τῆς μεγαλητέρας τάξεως πρέπει νὰ ἀναλυθῇ εἰς τὰ μέρη τῆς πλησίον αὐτῆς μικροτέρας τάξεως. Παρ. χάριν· μᾶς ἐδόθησαν νὰ διαιρέτωμεν Γρόσια 6977 ,, 24 παράδ., φέρ' εἰπεῖν, διὰ τῶν 56· ἐνταῦθα διαιροῦμεν πρότερον τὰ Γρόσια ὡς συνήθως, τὸ δὲ Ὑπόλοιπον αὐτῶν ἀναλύομεν εἰς παράδες, ἀθροίζοντες ὁμοῦ καὶ τοὺς ἀνωτέρω δοθέντας 24 παράδ., εἶτα διαιροῦμεν πάλιν διὰ τῶν 56, καὶ οὕτω προκύπτει τὸ Ζητούμενον, πόσα Γρόσια καὶ Παράδες λαμβάνει ἕκαςον μέρος, ὡς.

```
                          56  εἰς  Γρ. 6977 ,, 24 παρ.
Πηλίκον Γρ. 124 ,, 24 παρ.            137
                                      -257
                                       -33 Γρ. Ὑπολοι.
                                        40
                      56  εἰς        1344
                                      -224
                                       ...
```

Ἐπειδὴ τὸ ἄνωθεν ὑπόλοιπον ὡς Γρόσια δὲν διαιρεῖται εἰς 56 ὅμοια μέρη· διὰ τοῦτο ἀναλύεται εἰς Παράδες, ὅ ἐςι, πολλαπλασιάζεται μὲ 40, προςίθενται καὶ οἱ 24 παράδες, καὶ ςαίνουσιν ὁμοῦ 1344 παράδ. οἱ ὁποῖοι διαιρεθέντες πάλιν διὰ τῶν 56, ἔλαβεν ἕκαςον μέρος καὶ ἀνὰ 24 παράδ., ἤτοι ἀνὰ Γρόσ. 124 ,, 24 παράδ.

Τὸ ἄνωθεν Ὑπόδειγμα δυνάμεθα νὰ τὸ πληροφορηθῶμεν σαφέςερον κατὰ τὸν φυσικὸν λόγον, ἀφ' οὗ ςοχασθῶμεν ὅηλαβὴ, ὅτι μία Ποσότης Γροσίων καὶ Παράδων μέλλει νὰ διαμοιρασθῇ εἰς 56 Ἀνθρώπους, κτλ. Εἰς τοιαύτην περίςασιν δίδομεν ἑκάςῳ πρῶτον ὅσα Γρόσια δυνάμεθα, καὶ ἐὰν μείνωσι μερικὰ Γρόσια, τὰ ὁποῖα οὐκ εἰσὶν ἱκανὰ διὰ νὰ δώσωμεν ἑκάςῳ ἕν, τὰ ἀλλάζομεν, καὶ λαμβάνομεν δι' ἕκαςον Γρόσι 40 Παράδες, τοὺς ὁποίους, ὁμοῦ καὶ τοὺς 24 παράδ. οὓς ἔχομεν, διαμοιράζομεν πάλιν εἰς αὐτοὺς, καὶ δίδομεν ἑκάςῳ τόσους Παράδες, ὅσους συγχωρεῖ ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν, ὡς ἐλογαριάσαμεν ἀνωτέρω.

§. 115.

Ἐὰν μείνῃ Ὑπόλοιπον καὶ ἐκ τῶν Παράδων, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 3, ἵνα ἴδωμεν, πόσα ἄσπρα ςαίνει, τὰ ὁποῖα, ὁμοῦ μὲ τὰ δοθέντα ἄσπρα, διαιροῦμεν πάλιν ὅσον δυνάμεθα, ὡς ἐπομένως.

34 εἰς Γρ. 3369,, 4 πρ'.,, 2 ἄσπ. | Πηλ. Γρ. 99 ,, 3 πρ'. 2 ἄσπ.
: ,,309
: 3 Γρ. Ὑπόλοιπον
: μὲ 40 πολλαπλασιαζ'., καὶ ἀθροιζόμενοι καὶ οἱ 4
:.. .. .. 124 πρ.) παράδ., προκύπτουσιν 124 παράδ.
: ,,22 παράδ. Ὑπόλοιπον
: μὲ 3 πολλαπλασιαζόμενοι, ἀναλύονται εἰς ἄσπρα,
:.. .. .. 68 ἄσπ.) ἀθροιζόμενα δὲ καὶ τὰ 2 ἄσπρα,
. . προκύπτουσιν 68 ἄσπρα.

λοιπὸν λαμβάνει ἕκαςον μέρος ἀνὰ Γρόσ. 99 ,, 3 παράδ. ,, 2 ἄσπρα, ὡς ἀνωτέρω.

Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ ἀναλύσωμεν ἕκαςον Ὑπόλοιπον τῆς μεγαλητέρας τάξεως εἰς τὰ μέρη τῆς πλησίον αὐτῆς μικροτέρας τάξεως, καὶ νὰ διαιρέσωμεν ἐπομένως ὅσον δυνηθῶμεν· τὸ τελευταῖον ὅμως Ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον δὲν ἀναλύεται περαιτέρω, θεωρεῖται ἐξῆς ὡς ἀμέριςον Ὑπόλοιπον.

§. 116.

Ἐὰν ὅμως ἐκ τῆς ἀνωτέρας τάξεως δὲν μείνει Ὑπόλοιπον διὰ νὰ ἀναλυθῇ εἰς τὰ μέρη τῆς πλησίον αὐτοῦ μικροτέρας τάξεως, τότε προχωρεῖ ἡ διαίρεσις εἰς τὸν Ἀριθμὸν τῆς μικροτέρας τάξεως, καὶ ἐὰν δὲν διαιρῆται αὐτὸς ὁ Ἀριθμὸς, τὸν ἀναλύομεν εἰς τὰ μέρη τῆς πλησίον αὐτοῦ μικροτέρας τάξεως καὶ ἐφεξῆς, ἕως οὗ φθάσωμεν εἰς τὰ ἀμέριστα μέρη τῆς μικροτέρας τάξεως, τὰ ὁποῖα μένουσιν ἔπειτα Ὑπόλοιπον. Κατωτέρω ἔπονται Ὑποδείγματα τοιαῦτα.

Α΄.

16 εἰς Γρ. 384 ,, 37 πρ. 1 ἄσπρ. | Πλ. Γρ. 24 ,, 2 πρ. ,, 1 ἄσπρ.
,,64,, 5 - ὑπόλοιπ.
μὲ 3 καὶ 1 ἄσπρον τὸ ἀνωτέρω
διδουσι 16 ἄσπρα

Β΄.

14 εἰς Γρ. 448 ,, 4 πρ. ,, 2 ἄσπρ. | Πλ. Γρ. 32 ,, - παρ. ,, 1 ἄσπ.
,,28 . 3
14 ἄσπρα.

Ἑρμηνεία. Εἰς τὸ α΄. διαιρέθησαν τὰ Γρόσια ἐξ ἴσου· λοιπὸν ἐξηκολουθήσαμεν τὴν διαίρεσιν τῶν 37 παράδ., οἱ ὁποῖοι διαιρεθέντες διὰ τῶν 16, ἔμεινεν Ὑπόλοιπον 5, αὐτὸ δὲ ἀναλυθὲν μὲ 3 εἰς ἄσπρα, ληφθὲν καὶ τὸ 1 ἄσπρον, προέκυψαν 16 ἄσπρα, ἅτινα διαιρεθέντα διὰ τῶν 16, ἔλαβεν ἕκαστον μέρος 1 ἄσπρον, σύμπαντα δὲ Γρόσ. 24 ,, 2 παράδ. ,, 1 ἄσπρον.

Εἰς τὸ β΄. διαιρέθησαν τὰ Γρόσια ὡσαύτως ἐξ ἴσου· ὅθεν ἐξηκολουθήσαμεν τὴν διαίρεσιν τῶν παράδων· ὅμως ἐπειδὴ οἱ δοθέντες παράδες εἰσὶ μόνον 4, οἱ ὁποῖοι δὲν διαιροῦνται εἰς 14 ὅμοια μέρη, διὰ τοῦτο τοὺς ἀνελύσαμεν μὲ 3 εἰς ἄσπρα, λαβόντες ὁμοῦ καὶ τὰ 2 δοθέντα ἄσπρα, καὶ οὕτω προέκυψαν 14 ἄσπρα, τὰ ὁποῖα διαιρέσαντες διὰ τῶν 14, ἔλαβεν ἕκαςον μέρος καὶ ἀνὰ 1 ἄσπρον, ὁμοῦ δὲ ἀνὰ Γρόσ. 32 ,, — παράδ. ,, 1 ἄσπρον ὡς ἀνωτέρω.

Πρόβλημα. Διαιρουμένων Ὀκάδων 2629079 ,, 390 δραμίων, μὲ 37490, πόσα λαμβάνει ἕκαςον μέρος;

3749(0 εἰς 262907(9 ,, 390 | Πηλίκ. Ὀκ. 70 ,, 51 δράμια.
: 4779 ὀκ. ὑπ.
: μὲ 400 εἰς δράμια, καὶ τὰ 390 δρ. ὁμοῦ.
:.. .. .. 191199(0
-3749
....

Ἑρμηνεία. Ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσαμεν μὲ τὰ 7 τὸν Διαιρέτην, καὶ ἀφ' οὗ ἐθέσαμεν εἰς τὸ πηλίκον καὶ τὸ 0, ἔμεινεν Ὑπόλοιπον 477, εἰς τὰ ὁποῖα ἐπροσθέσαμεν, διὰ τὸ ἀφεθὲν 0 τοῦ Διαιρέτου, τὰ τμηθέντα 9 τοῦ Διαιρετέου, καὶ οὕτω προέκυψεν Ὑπόλοιπον 4779 ὀκάδ., τὰς ὁποίας ἀναλύσαντες εἰς δράμια μὲ 400, προσθέσαντες καὶ τὰ δοθέντα 390 δράμια, προέκυψαν 1911990 δρ'., ἅτινα διαιρέσαντες διὰ τῶν 37490, ἔλαβεν ἕκαςον μέρος ἀνὰ δράμια 51, Ὑπόλοιπον δὲ ἔμεινε μόνον τὸ 0, ὅ ἐςι, μηδέν.

§. 117.

Ὁμοίως πράττομεν καὶ μὲ τὸ Ὑπόλοιπον, ὅταν διαιρῶμεν διὰ τῶν 10, 100, 1000, καὶ ἐφεξῆς (ὡς §. 112).

Κατωτέρω ἕπονται Ὑποδείγματα τοιαῦτα.

Α'. Πόσον Πηλίκον γενήσεται ἐκ Γρόσ. 5877 ,, 20 παράδ. διαιρουμένων διὰ τῶν 100;

Λύσις.

Πηλίκον	Γρόσ. 58	77 ,, 20 παράδ.
		40
	παράδ. 31	00

Ἑρμηνεία. Κατὰ τὸν §. 112. κόπτομεν δύο ψηφία δεξιῶς, καὶ προκύπτει Πηλίκον Γρόσια 58, Ὑπόλοιπον δὲ Γρόσια 77· αὐτὰ πολλαπλασιαζόμενα μὲ 40, καὶ προςιθέμενοι καὶ οἱ δοθέντες 20 παράδ. προκύπτουσι παράδ. 3100, ἐξ ὧν κόπτομεν πάλιν δύο ψηφία δεξιῶς, καὶ προκύπτει Πηλίκον καὶ παράδ. 31· ἐπειδὴ δὲ διὰ τὰ τοῦ Διαιρέτου δύο μηδενικὰ ἐτμήθησαν δύο ψηφία καὶ ἀπὸ τὸν Διαιρετέον, ἅτινα εἰσὶν ὡσαύτως μηδενικὰ, διὰ τοῦτο δὲν ἔμεινεν Ὑπόλοιπον μηδέν.

Β'. Ἐὰν διαιρεθῶσι Γρόσ. 560,, 6 παράδ.,, 2 ἄσπρα μὲ 10, πόσα λαμβάνει ἕκαςον μέρος;

Λύσις.

Πηλίκον	Γροσ. 56	0 ,, 6 παράδ. ,, 2 ἄσπρα.
		3
		ἄσπ. 2(0

Ἑρμηνεία. Ἀφ' οὗ διαιρεθῶσι τὰ γρόσια διὰ τῶν 10 (δηλονότι τμηθέντος τοῦ 0), δὲν μένει Ὑπόλοιπον μηδέν· ἐπειδὴ δὲ οἱ 6 παράδ. δὲν διαιροῦνται εἰς 10 ὅμοια μέρη, διὰ τοῦτο ἀνελύσαμεν αὐτοὺς εἰς ἄσπρα μὲ 3, ἐν οἷς ἐμπροσθέσαμεν καὶ τὰ 2 δοθέντα ἄσπρα, καὶ ἔςησαν ὁμοῦ ἄσπρα 20, ἅτινα ἀφ' οὗ διαιρεθῶσι διὰ τῶν 10, λαμβάνει ἕκαςον μέρος καὶ 2 ἄσπρα, ὅ ἐςὶν ἀνὰ Γρόσ. 56,,—παράδ.,, 2 ἄσπρα, ὡς ἀνωτέρω.

§. 118.

Καὶ οἱ μικτοὶ Ἀριθμοὶ διαιροῦνται εὐκόλως διὰ τοῦ νοὸς δι' ἑνὸς ἁπλοῦ ψηφίου, ἤτοι Διαιρέτου· δηλονότι, ὅταν κατὰ τὸν §. 103. δὲν ἀναλύσωμεν τὸ τῶν Γροσίων Ὑπόλοιπον μὲ 40 εἰς παράδες. ἀλλὰ πρότερον μὲ 4 εἰς δεκάδας, καὶ ἔπειτα τὸ τῶν δεκάδων Ὑπόλοιπον εἰς παράδες, καὶ εἰς ἄσπρα, ὡς.

7 εἰς Γρόσ. 251 ,, 33 παράδ.

Πηλίκον Γρόσ. 35 ,, 39 παράδ.

λέγοντες· 7 εἰς 25 ἐμπεριέχονται 3 (τὰ ὁποῖα θέττομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν), ἤτοι· 3 × 7 — 21, ἐκ τῶν 25, μένουσι 4· εἶτα, 7 εἰς 41 (τὸ τελευταῖον 1 Γρόσι προςίθεται εἰς τὸ Ὑπόλοιπον 4, καὶ ποιοῦσι 41), 5, οἷον 5 × 7 — 35, ἐκ τῶν 41, μένουσιν Ὑπόλοιπον Γρόσια 6· αὐτὰ γαίνουσιν 24 δεκάδας (ἐπειδὴ ἕκαστον Γρόσι ἐμπεριέχει 4 δεκάδας), καὶ 3 δεκάδες (ἐκ τῶν 33 παράδων), ποιοῦσιν ὁμοῦ 27 δεκάδας· λοιπὸν 7 εἰς 27, 3· ἢ 3 × 7 — 21, ἐκ τῶν 27, μένουσιν 6 δεκάδες, ἤτοι 60 παράδ., καὶ 3 παράδ. (διότι ἐκ τῶν 33 παράδ. διαιρέσαμεν μόνον τὰς δεκάδας), ποιοῦσιν ὁμοῦ 63 παράδ., οἵτινες μένουσιν ἔτι νὰ διαιρεθῶσι διὰ τῶν 7· ὅθεν 7 εἰς 63, 9 ἐξ ἴσου, ὡς ἀνωτέρω.

Ὁμοίως· 8 εἰς Γρόσ. 5919 ,, 34 παράδ. ,, 2 ἄσπρα.

Πηλίκον Γρόσ. 739 ,, 39 παράδ. ,, 1 ἄσπρον.

λέγοντες· 8 εἰς 59, 7, ἤτοι 7 × 8 — 56, ἐκ τῶν 59, μένουσι 3. εἶτα 8 εἰς 31, 3, ἤτοι 3 × 8 — 24 ἐκ τῶν 31, μένουσιν 7, ἔπειτα 8 εἰς 79, 9, ἤτοι 8 × 9 — 72, ἐκ τῶν 79, μένουσιν Ὑπόλοιπον Γρόσια 7 (τὰ ὁποῖα βαςῶμεν εἰς τὸν νοῦν, καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ μὲ 4 διὰ νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς δεκάδας) λέγοντες· 4 × 7 — 28 δεκάδες, καὶ 3 δεκάδες (ἐκ τῶν 34 παράδ.), ποιοῦσιν ὁμοῦ 31 δεκάδας· λοιπὸν 8 εἰς 31, 3, ἤτοι 3 × 8 — 24, ἐκ τῶν 31, μένουσιν 7 δεκάδες, ἤτοι 70 παράδ., καὶ 4 παράδ. (διότι ἐκ τῶν 34 παράδ. ἐδιαιρέσαμεν μόνον τὰς δεκάδας), ποιοῦσιν ὁμοῦ 74 παράδ., ὅθεν 8 εἰς 74, 9 ἤτοι 8 × 9 — 72, ἐκ τῶν 74, μένουσι 2 παράδ., οἱ ὁποῖοι ἀναλυθέντες μὲ 3 εἰς ἄσπρα, ποιοῦσιν 6 ἄσπρα, καὶ τὰ δοθέντα 2 ἄσπρα, ποιοῦσιν ὁμοῦ 8 ἄσπρα· λοιπὸν 8 εἰς 8 ἀνὰ 1 ἄσπρον, ὡς ἐλογαριάσαμεν.

Ὡσαύτως. 9 εἰς Ὀκάδ. 473 ,, 1 λίτραν ,, 78 δράμια.

Πηλίκον Ὀκάδ. 52 ,, — λίτρας ,, 42 δράμια.

λέγοντες· 9 εἰς 47, 5, ἤτοι 5 × 9 — 45, ἐκ τῶν 47, μένουσι 2· εἶτα 9 εἰς 23, 2, ἤτοι 2 × 9 — 18, ἐκ τῶν 23, μένουσιν ὀκάδ. 5 αἱ ὁποῖαι ἀνὰ 4 λίτρας, ποιοῦσιν 20 λίτρας, καὶ ἡ δοθεῖσα 1 λίτρα, ποιοῦσιν ὁμοῦ 21 λίτρας· λοιπὸν 9 εἰς 21, 2, ἤτοι 2 × 9 — 18, ἐκ τῶν 21, μένουσι 3 λίτραις, ἑκάςη ἀνὰ δράμια 100, ποιοῦσι δράμια 300, καὶ τὰ δοθέντα 78 δράμια, ποιοῦσιν ὁμοῦ δράμια 378· ὅθεν 9 εἰς 37, 4, ἤτοι 4 × 9 — 36, ἐκ τῶν 37, μένει 1, εἶτα 9 εἰς 18 ἀνὰ 2 δράμια ἐξ ἴσου.

§. 119.

Σχόλιον. Τἀνωτέρω γυμνάσματα εἰσὶν ὠφελιμώτατα· διότι ἐπ' αὐτοῖς θεμελιοῦται τὸ, συντόμως καὶ εὐκόλως λογαριάζειν εἰς ὅλα τὰ Εἴδη τῆς Ἀριθμητικῆς· διὰ τοῦτο οἱ Ἀρχάριοι ἂς ἐκλέγωσιν ἰδιαίτερα Παραδείγματα, καὶ ἂς γυμνάζωνται ἐπὶ τοσοῦτον τὸν ῥηθέντα τρόπον τῆς Διαιρέσεως μὲ ὅλους τοὺς μοναδικοὺς Ἀριθμοὺς ἐκ τῶν 2 μέχρι τῶν 9, ἕως ὅτου νὰ φθάσωσι τὴν ἀνωτάτην ἑτοιμότητα, ἣν εὐκόλως θέλουσιν ἀπολαύσει.

Ἕτερα Παραδείγματα πρὸς ἄσκησιν.

Α'. Πόσον Πηλίκον δίδουσι Γρόσ. 257082 διαιρούμενα διὰ τῶν 4572;

Ἀπόκρισις· Γρόσ. 60 ,, 6 παράδ. ,, 2 ἄσπρα.

Β'. Διαιρούμενα Φιορίνια 372724354,, 4 κραϊτζάρια διὰ τῶν 6008, πόσον ἔσαι τὸ Πηλίκον;

'Απόκρισις· Φιορίνια 62038,,— κραϊτζάρια,, 2 φένιγ.

Γ'. Διαιρούμενα Φλωρία 5239112,, 6 Γρόσ.,, 5 παράδ. 1 ἄσπρον (τὸ Φλωρίον ἀνὰ Γρόσ. 12), διὰ τῶν 5236, πόσα λαμβάνει ἕκασον μέρος;

'Απόκρισις· ἀνὰ Φλωρία 1000,, 7 Γρ.,, 5 πρ.,, 1 ἄσπ.

Δ. Διαιρούμενοι Χρόνοι 824397, Μῆνες 9, 'Ημέραις 6, Ὥραις 7, Λεπτὰ 15 διὰ τῶν 825, πόσον ἔσαι τὸ Πηλίκον.

'Απόκρισις· Χρόνοι 999, Μῆνες 3, 'Ημέραις 7, Ὥραις 4, Λεπτὰ 59.

§. 121.

Σχόλιον. Προσέτι μένει ἵνα δείξωμεν, τίνι τρόπῳ διαιροῦμεν, ὅταν καὶ ὁ Διαιρέτης σύγκηται ἐξ ὀνοματικῶν μικτῶν 'Αριθμῶν, ἤτοι ἐκ Γροσίων 5,, 25 παράδ. ἢ ἐκ Φιορινίων 21,, 19 κραϊτζαρίων,, 2 φένιγ, ἢ ἐξ 'Οκάδ. 9,, 3 λιτρῶν,, 60 δραμίων, κτλ. ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα ἐνταῦθα νὰ ἐννοήσωμεν εἰσέτι καλῶς, πῶς δύναται νὰ ὑπάρξῃ, κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς Διαιρέσεως, ὁ τοιοῦτος Διαιρέτης, διὰ τοῦτο κρίνομεν εὔλογον ἵνα ὁμιλήσωμεν περὶ τοιούτων 'Υποδειγμάτων τότε, δηλαδὴ, ὅταν προκύψωσι τῷ ὄντι.

ΚΕΦ. ΣΤ'.

Περὶ Δοκιμῆς τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ καὶ Διαιρέσεως.

§. 122.

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε ἐπληροφορήθημεν σαφῶς, ὅτι τὸ διαιρεῖν εἶναι ἡ Ἐπάνοδος ἐκ τοῦ πολλαπλασιάζειν, καὶ τὸ πολλαπλασιάζειν εἶναι ἡ ἐκ τοῦ διαιρεῖν· ὅθεν αὐτοὶ οἱ δύο ἀριθμητικοὶ τρόποι χρησιμεύουσιν ἀλλήλοις πρὸς Δοκιμήν. Διότι, ἂν πεντάκις 7, ποιοῦσι 35, πρέπει νὰ ἐμπεριέχωνται ὁμοίως τὰ 7 εἰς τὰ 35 πεντάκις, καὶ τὰ 5 εἰς τὰ 35 ἑπτάκις. Ὡσαύτως καὶ ἀνάπαλιν· ἐὰν εἶναι ἀληθὲς, ὅτι τὰ 5 εἰς τὰ 35 ἐμπεριέχονται ἑπτάκις, πρέπει νὰ φαίνωσι πεντάκις 7 ὁμοίως 35.

§. 123.

Περὶ τῆς ὀρθότητος οὖν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ πληροφορούμεθα διὰ τῆς Διαιρέσεως, δηλαδὴ, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ Κεφάλαιον δι' ἑνὸς τῶν Παραγόντων αὐτοῦ (ἢ διὰ τοῦ Πολλαπλασιαστέου, ἢ διὰ τοῦ Πολλαπλασιαστοῦ), καὶ ἂν ὁ Πολλαπλασιασμὸς εἶναι ὀρθὸς, πρέπει νὰ προκύψῃ ὁ ἕτερος Παράγων. Φέρ' εἰπεῖν, 534 ἐπολλαπλασιάσθησαν μὲ 286, καὶ προέκυψε Κεφάλαιον 152724· ἡ ἐπὶ τούτου Δοκιμὴ εἶναι νὰ διαιρέσωμεν τὰς 152724 διὰ τῶν 534, ἢ διὰ τῶν 286, ὅπου ἐν μὲν τῇ πρώτῃ διαιρέσει πρέπει νὰ προκύψῃ Πηλίκον 286, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ 534, ὡς κατωτέρω φαίνεται.

534 εἰς 152724 | 286.	ἤτοι 286 εἰς 152724 | 534.
,,4592	,,972
,,3204	1144
....	....

Περὶ τῆς ἀνωτέρω βάσεως ἐλέχθη ἤδη εἰς τὸν ὄπισθεν §. διότι ἐὰν εἶναι ἀληθὲς, ὅτι 286 φοραῖς 534, ποιοῦσιν 152724, πρέπει νὰ ἐμπεριέχωνται ὁμοίως τὰ 534, εἰς τὰς 152724, 286 φοραῖς, καθὼς καὶ τὰ 286 εἰς τὰς 152724, 534 φοραῖς.

§. 124.

Ὁμοίως πληροφορούμεθα καὶ περὶ τῆς ὀρθότητος τῆς Διαιρέσεως διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ. δηλαδὴ, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ Πηλίκον μὲ τὸν Διαιρέτην, καὶ προκύψῃ ὁ Διαιρετέος.

Διαίρεσις, ὁμοῦ καὶ Δοκιμή.

653 εἰς 240304 |		Πηλίκον 368
Πηλ. 368 ,,4440	πολλαπλασιάζ. μὲ	653 τὸν Διαιρ.
,,5224		1104
....		1840
		2208
		240304 ὁ Διαιρετ.

Ἡ ἀνωτέρω Βάσις εἶναι ἡ αὐτή· διότι ἐὰν τὰ 653 ἐμπεριέχωνται εἰς τὰς 240304 ἐξ ἴσου 368 φοραῖς, ἀναγκαίως πρέπει νὰ φέρωσι 368 φοραῖς 653 πάλιν 240304. Ἐν ἑνὶ λόγῳ, καθὼς πληροφορούμεθα διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ περὶ τῆς ὀρθότητος ἑκάστου μοναδικοῦ Παραγομένου, ὡσαύτως πληροφορούμεθα καὶ περὶ τῆς ὀρθότητος τοῦ ὁλοκλήρου Πηλίκου· διὰ τοῦτο καὶ τὸ ἐκ τοῦ Διαιρέτου καὶ Πηλίκου Κεφάλαιον, πρέπει νὰ εἶναι ὅμοιον τοῦ κυρίως διαιρεθέντος Ἀριθμοῦ. Ὅθεν, ἐὰν μετὰ τὴν διαίρεσιν μείνῃ Ὑπόλοιπόν τι, ἐν ᾧ δὲν ἐμπεριέχεται πλέον ὁ Διαιρέτης, τότε διὰ νὰ προκύψῃ ὁ ὁλόκληρος Διαιρετέος, πρέπει νὰ προστεθῇ τὸ Ὑπόλοιπον εἰς τὸ Κεφάλαιον καὶ νὰ ἀθροισθῇ, ὡς κατωτέρω.

Διαίρεσις εξ ἧς μένει Ὑπόλοιπον, ὁμοῦ καὶ Δοκιμή.

856 εἰς 795482		Διαιρέτης	856
Πηλ. 929.	,,2508	πολλαπλασίασον μὲ	929 τὸ πηλίκ.
	,,7962		7704
	,,258 ὑπόλοιπον.		1712
			7704
	καὶ το ὑπόλοιπον.		.258 ὁμοῦ
		δίδουσιν	795482, ὁλ. τὸν Δ.

§. 125.

Α΄. Σχόλιον. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον γίνονται καὶ αἱ Δοκιμαὶ τῶν ὀνοματικῶν μικτῶν Ἀριθμῶν, ὧν τὰ ὑποδείγματα δοθήσονται τότε, ὅταν δείξωμεν τίνι τρόπῳ πολλαπλασιάζονται καὶ διαιροῦνται οἱ τοιοῦτοι Ἀριθμοί.

§. 126.

Β΄. Σχόλιον. Ὅταν μέλλῃ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν Διαιρέτην μετὰ τοῦ Πηλίκου, ἐσμὲν ἐλεύθεροι νὰ ἐκλέξωμεν διὰ Πολλαπλασιαςὴν ὁποῖον Ἀριθμὸν θέλομεν ἐκ τῶν δύο (ὡς §. 76)· διὸ, εἰ μὲν ἐπιτύχωμεν τὴν ἐκλογὴν ὀρθῶς, προξενεῖ εἰς πολλὰς πτώσεις μεγάλην συντομίαν, ὅπερ ἀποδειχθήσεται ἑπομένως.

ΚΕΦ. Ζ΄.

Περὶ Ἀναλύσεως.

§. 127.

Ὑπὸ τῆς Ἀναλύσεως ἐν τῷ λογαριάζειν ἐννοοῦμεν τὸ ἀναλύειν τὰς Μονάδας τῆς μεγαλητέρας τάξεως, εἰς μονάδας τῶν αὐτῆς μικροτέρων τάξεων. Παραδ. χάριν· πόσους παράδες, ἢ ἄσπρα φαίνει μία ὁποιαδήποτε Ποσότης Γροσίων· πόσας λίτρας, ἢ δράμια μία Ποσότης Ὀκάδων, καὶ ἐφεξῆς.

§. 128.

Ἡ Ἀνάλυσις, ὡς προεῖδωμεν, ἐνεργεῖται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, ὅ ἐςί, πολλαπλασιάζομεν τὸ δοθὲν ἀναλυθῆναι Πρᾶγμα μὲ ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμὸν, ὅς τις δεικνύει, ἀπὸ πόσων μονάδων τοῦ μικροτέρου εἴδους συνίςαται ἑκάςη μονὰς τοῦ πλησίον αὐτοῦ μεγαλητέρου εἴδους. Φέρ' εἰπεῖν· ἕκαςον Γρόσι σύγκειται ἀπὸ 40 παράδων, ἄρα ὅσα Γρόσια δοθῶσι, τοσάκις πρόκειται 40 παράδες· ὅθεν διὰ νὰ προκύψῃ ἡ Ποσότης τῶν παράδων, πολλαπλασιάζομεν τὸν Ἀριθμὸν τῶν Γροσίων μὲ 40. Ὁμοίως ἀναλύονται καὶ αἱ ὀκάδες εἰς δράμια, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν Ποσότητα αὐτῶν μὲ 400, ἐπειδὴ ἑκάςη Ὀκᾶ σύγκειται ἐκ 400 δραμίων, καὶ ἐφεξῆς.

§. 129.

Λοιπὸν ὁ Ἀριθμὸς, δι' οὗ γίνεται ἡ Ἀνάλυσις, εἴτουν ἐκεῖνος, ὅς τις δεικνύει ποσάκις ἐμπεριέχεται τὸ μικρότερον Εἶδος εἰς τὸ πλησίον αὐτοῦ μεγαλήτερον Εἶδος, ὀνομάζεται Ἀναλυτικός. Θετέον· ὁ Ἀριθμὸς 40, ὅς τις φανερώνει, ὅτι ὁ Παρᾶς ἐμπεριέχεται εἰς τὸ Γρόσι τεσσαρακοντάκις, εἶναι Ἀναλυτικὸς τῶν γροσίων εἰς παράδες. Ὡσαύτως ὁ Ἀριθμὸς

400, ὅς τις δηλοῖ, ὅτι τὸ δράμι ἐμπεριέχεται εἰς τὴν Ὀκᾶν τετρακόσιαις φοραῖς, εἶναι Ἀναλυτικὸς τῶν Ὀκάδων εἰς δράμια, καὶ ἐφεξῆς.

§. 130.

Ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ἀναλύεται τὸ μεγαλήτερον Εἶδος εἰς τὸ μικρότερον, γίνεται ὡς ἑπομένως. Πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὸν Ἀριθμὸν τοῦ μεγαλητέρου Εἴδους εἰς τὰς μονάδας τοῦ πλησίον αὐτοῦ μικροτέρου Εἴδους, καὶ ἂν τὸ ἐντεῦθεν Παραγόμενον παριστάνῃ μεγαλήτερον Εἶδος ἀπὸ τοῦ ζητουμένου, πολλαπλασιάζομεν πάλιν αὐτὸ τὸ Παραγόμενον μὲ τὰς μονάδας τοῦ πλησίον αὐτοῦ μικροτέρου Εἴδους, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἕως ὅτου νὰ προκύψῃ τὸ Παραγόμενον τοῦ ζητουμένου Εἴδους. Φέρ' εἰπεῖν· μᾶς ἐδόθησαν νὰ ἀναλύσωμεν Γρόσ. 93 εἰς ἄσπρα· ἐνταῦθα πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰ Γρόσια 93 μὲ 40 καὶ προκύπτουσι Παράδες, ὧν τὸ κεφάλαιον πολλαπλασιάζομεν πάλιν μὲ 3, καὶ προκύπτουσιν Ἄσπρα, ὡς.

Γρόσ.	93	
μὲ . .	40	εἰς παράδες.
Παράδ.	3720	
μὲ . .	3	εἰς ἄσπρα.
Ἄσπρα.	11160.	

§. 131.

Ὅταν δοθῶσι περισσότεροι Ἀριθμοὶ διαφόρων Εἰδῶν διὰ νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς τὸ μικρότατον Εἶδος, τότε πρέπει νὰ γένῃ ἡ πρᾶξις τῆς Ἀναλύσεως ὡς ἀκολούθως.

Πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὸν Ἀριθμὸν τοῦ μεγαλωτάτου Εἴδους, ὡς πρότερον, μὲ τὰς μονάδας τοῦ πλησίον αὐτοῦ μικροτέρου Εἴδους.

Δεύτερον προσθέττομεν εἰς τὸ ἐκ τούτου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύψαν Παραγόμενον τὸν ἑπόμενον Ἀριθμὸν, ὅς τις δεικνύει τὸ αὐτὸ Εἶδος, εἰς ὃ ἀνελύθη ὁ πρὸ αὐτοῦ, καὶ πολλαπλασιάζομεν πάλιν μὲ τὰς μονάδας τοῦ ἑπομένου μικροτέρου Εἴδους τὸ ἤδη προκύψαν Κεφάλαιον, εἶτα προσθέττομεν εἰς αὐτὸ καὶ τὸν ἀκόλουθον Ἀριθμὸν, ὅς τις φανερώνει τὸ αὐτὸ Εἶδος, εἰς ὃ ἀνελύθη τὸ δεύτερον Παραγόμενον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἄχρις οὗ νὰ προκύψῃ τὸ Παραγόμενον τοῦ μικροτάτου ζητουμένου Εἴδους. Παραδ. χάριν. μᾶς ἐδόθησαν νὰ ἀναλύσωμεν Γρόσ. 825,, 35 παράδ.,, 3 ἄσπα, εἰς ἄσπρα.

Γρόσ. 825
μὲ 40 συναριθμ. καὶ τῶν δοθέντων 35 παρ.
Παράδ. 33035
μὲ 3 συναριθμ. καὶ τῶν δοθέντων 2 ἄσπρων.
γαίνουσ. ἄσπ. 99107.

Καὶ ἕτερον. Ἀναλυθήτωσαν Χρόνοι 15, Μῆνες 9, Ἡμέραι 25 Ὧραι 20, καὶ 50 Λεπτὰ, εἰς Λεπτά.

Χρόνοι 15
μὲ . 12 συναριθμ. καὶ τῶν δοθέντων 9 μηνῶν.
Μῆνες . 189
μὲ . 30 συναριθμ. καὶ τῶν δοθέντων 25 ἡμερ.
Ἡμέραι 5695
μὲ 24 συναριθμ. καὶ τῶν δοθέντων 20 ὡρῶν.
Ὧραι. 136700
μὲ 60 συναριθμ. καὶ τῶν δοθέντων 50 λεπτ.
Λεπτὰ 8202050 τὸ ζητηθὲν εἶδος.

Ἐνταῦθα, ὡς καὶ ἀνωτέρω, ἀναλύσαντες τοὺς Χρόνους εἰς Μῆνας, ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν τοὺς 9 μῆνας, ἐλάβομεν αὐτοὺς ἀ.έσως ἐν τῷ πολλαπλασιάζειν καὶ οὕτως ἐφεξῆς, τὸ ὁποῖον εἶναι συντομώτερον.

ΚΕΦ. Η'.

Περὶ Ἐπαναγωγῆς.

§. 132.

Ὑπὸ τῆς Ἐπαναγωγῆς ἐννοοῦμεν τὸ, μεταφέρειν τὰς Μονάδας τῶν μικροτέρων τάξεων εἰς Μονάδας τῆς μεγαλητέρας τάξεως αὐτῶν. Φερ᾽ εἰπεῖν· πόσα Γρόσια ςαίνει μία Ποσότης Παράδων· πόσας Ὀκάδας μία Ποσότης Δραμίων κτλ.

§. 133.

Ἡ Ἐπαναγωγὴ ἐνεργεῖται διὰ τῆς Διαιρέσεως, ὅ ἐςὶ, διαιροῦμεν τὴν προκειμένην Ποσότητα τοῦ μικροτέρου Εἴδους μὲ ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμὸν, ὅς τις δεικνύει ἀπὸ πόσων Μονάδων τοῦ μικροτέρου Εἴδους συνίςαται μία Μονὰς τοῦ πλησίον αὐτοῦ μεγαλητέρου Εἴδους. Θὲς· μᾶς ἐδόθη νὰ λογαριάσωμεν πόσα Γρόσια φέρει μία ὁποιαδήποτε Ποσότης Παράδων· ἐνταῦθα διαιροῦμεν ταύτην τὴν Ποσότητα διὰ τῶν 40, ἐπειδὴ ἕκαςον Γρόσι σύγκειται ἀπὸ 40 Παράδων, καὶ οὕτω προκύπτει ὁ Ἀριθμὸς τῶν Γροσίων. Ὁμοίως μεταφέρονται καὶ τὰ Λότια εἰς Φούντια, ἐὰν ἡ Ποσότης τῶν Λοτίων διαιρεθῇ διὰ τῶν 32, καὶ ἐφεξῆς.

§. 134.

Καθὼς ἡ Ἀνάλυσις μεταφέρει τὰ μεγαλήτερα Εἴδη εἰς τὰ μικρότερα, οὕτω καὶ ἡ Ἐπαναγωγὴ μετάγει τὰ μικρότερα Εἴδη εἰς τὰ μεγαλήτερα. Ὅθεν ὅταν δοθῇ Ἀριθμός τις μικροτέρου Εἴδους ἵνα μεταφέρωμεν αὐτὸν εἰς τοὺς Ἀριθμοὺς τῶν βαθμηδὸν αὐτοῦ μεγαλητέρων Εἰδῶν, τότε διαιροῦμεν τὸν δοθέντα Ἀριθμὸν τοῦ μικροτέρου Εἴδους μὲ τὸ Κεφάλαιον τῶν μονάδων, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ μίαν Μονάδα τοῦ πλησίον αὐτοῦ μεγαλητέρου Εἴδους, ἔπειτα αὐτὸ τὸ προκύψαν Παραγόμενον διαιροῦμεν πάλιν μὲ τὸ τῶν μονάδων Κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ μίαν Μονάδα τοῦ ἐγγὺς αὐτοῦ μεγαλητέρου Εἴδους, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἕως ὅτου νὰ προκύψη τὸ Πηλίκον τοῦ ζητουμένου μεγαλητέρου Εἴδους· καὶ ἐὰν μείνη Ὑπόλοιπόν τι ἐκ τοῦ Εἴδους, τὸ ὁποῖον μεταφέρεται, τὸ μὲν Πηλίκον φανερώνει τὸ ζητούμενον Εἶδος, τὸ δὲ Ὑπόλοιπον φυλάττει τὴν προτέραν ὀνομασίαντου. Φερ' εἰπεῖν· πόσα γρόσια ποιοῦσι 233685 παράδες;

4(0 εἰ. 23368(5 παράδ.

Πηλίκον Γρόσ. 5542,,5 παράδ.

δηλαδὴ, διαιροῦμεν διὰ τῶν 40, ὅ ἐςὶ, κόπτομεν διὰ τὸ 0, τὸ ψηφίον 5 (ὡς §. 110.), εἶτα διαιροῦμεν διὰ τῶν 4 (ὡς §. 103.), ὅπου γίνεται ἡ διαίρεσις ἐξ ἴσου, καὶ οὕτω μένουσιν Ὑπόλοιπον ἁπλῶς οἱ χωρισθέντες 5 παράδ.

§. 135.

Καθὼς ὁ Πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ Διαίρεσις χρησιμεύουσιν ἀλλήλοις πρὸς Δοκιμὴν, οὕτω καὶ ἡ Ἀνάλυσις καὶ ἡ Ἐπαναγωγή.

Ὅθεν ἂς κάμωμεν τὴν Δοκιμὴν ἐπάνω εἰς τὸ τελευταῖον ὑπόδειγμα τοῦ §. 131.

Πόσους Χρόνους, Μῆνας, Ἡμέρας, Ὥρας καὶ Λεπτὰ ποιοῦσιν 8202050 Λεπτά;

Ἀπόκρισις· Χρόνους 15, Μῆνας 9, Ἡμέρας 25, Ὥρας 20, καὶ Λεπτὰ 50.

Ἡ ὥρα πρὸς 60 λεπτὰ, ἡ Ἡμέρα πρὸς 24 ὥρας, ὁ Μὴν πρὸς 30 ἡμέρας, καὶ ὁ Χρόνος πρὸς 12 μῆνας.

60 εἰς 8202050	Λεπτά.	ὑπόλοιπον	50	Λεπτά.
24 εἰς 136700	Ὥρας.	„	20	Ὧραι.
30 εἰς 5695	Ἡμέραι.	„	25	Ἡμέραι.
12 εἰς 189	Μῆνες.	„	9	Μῆνες.
Χρόνοι 15				

Ἑρμηνεία. Πρῶτον ἐδιαιρέσαμεν τὰ 8202050 λεπτὰ διὰ τῶν 60, καὶ προέκυψαν 136700 ὧραι, καὶ ὑπόλοιπον 50 λεπτά· εἶτα ἐδιαιρέσαμεν τὰς ὥρας διὰ τῶν 24, καὶ προέκυψαν 5695 ἡμέραι, καὶ ὑπόλοιπον 20 ὧραι· ἔπειτα ἐδιαιρέσαμεν τὰς ἡμέρας διὰ τῶν 30, καὶ προέκυψαν 189 μῆνες, καὶ ὑπόλοιπον 25 ἡμέραι· τελευταῖον ἐδιαιρέσαμεν τοὺς μῆνας διὰ τῶν 12, καὶ προέκυψαν οἱ ζητηθέντες χρόνοι, ἤτοι 15 χρόνοι, καὶ ὑπόλοιπον 9 μῆνες, ἤγουν Χρόνοι 15, Μῆνες, 9, Ἡμέραι 25, Ὧραι 20 καὶ Λεπτὰ 50, ὡς ἀνωτέρω.

§. 136.

Διὰ μέσου τῆς Ἀναλύσεως καὶ Ἐπαναγωγῆς ἐσμὲν ἤδη ἱκανοί, ἄνευ ἄλλης ὁδηγίας, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ὀνοματικὸν μικτὸν Ἀριθμὸν μὲ ἕτερον Ἀριθμόν, συνιςάμενον ἀφ᾽ ὁσωνδήποτε ψηφίων. Παρ. χάριν· μᾶς ἐδόθησαν διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν Γρόσ. 825„35 παράδ.„ 2 ἄσπρα (τὸ πρῶτον ὑπόδειγμα τοῦ §. 131.) μὲ 332· ἐνταῦθα ἐδύναντο νὰ ἀναλυθῶσι τὰ Γρόσια, οἱ Παράδες, καὶ τὰ Ἄσπρα, εἰς Ἄσπρα, ὧν ἡ ποσότης νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 332· εἶτα ἡ ἐκ τούτου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύψασα ποσότης τῶν ἄσπρων, νὰ μεταφερθῇ πάλιν εἰς Παράδες καὶ Γρόσια καὶ οὕτω νὰ προκύψῃ τὸ Ζητούμενον. Φέρ᾽ εἰπεῖν· πόσα Γρόσ. Παράδες καὶ Ἄσπρα δίδουσι τὰ Γρόσ. 825„35 παράδ. 2 ἄσπρα πολλαπλασιαζόμενα μὲ 332;

Λύσις.

Γρόσ. 825 ,, 35 παράδ. ,, 2 ἄσπρα.

Πρῶτον πολλα. τὰ Γρόσ. μὲ 40, λαμβάν. ὁμοῦ καὶ τοὺς 35 πρ.

καὶ δίδουσι Παράδ. 33035, αὐτοὺς

πολλαπλασιάζομεν μὲ . 3 ꝁ ἀναλ'. εἰς ἄσπ., ꝁ τὰ 2 ἄσπ. ὁμ.

δίδουσιν Ἄσπρα 99107, τὰ ὁποῖα

πολλαπλασιάζομεν μὲ . 332

καὶ φέρουσι 32903524 Ἄσπ., ἅτινα διὰ τῶν 3 διαιρεθέντα, καὶ εἰς παράδ. ἐπαναχ.

δίδουσιν 10967841 Πρ., ꝁ 1 ἄσπρ· εἶτα μὲ 40 εἰς γρό.

γίνουσι 274196 Γρ. ,, 1 παρὰν, ὁμοῦ δὲ

ποιοῦσι Γρόσια 274196 ,, 1 παρὰν ,, 1 ἄσπρον.

Δοκιμή.

Διὰ νὰ πληροφορηθῶμεν περὶ τῆς ὀρθότητος τοῦ ἀνωτέρω λογαριασμοῦ, διαιροῦμεν τὸ Παραγόμενον Γρόσ. 274196 ,, 1 παρὰν ,, 1 ἄσπρον πάλιν διὰ τῶν 332 (ὡς §. 115.), καὶ εἰμὲν ἡ πρᾶξις ἔγινεν ὀρθῶς, πρέπει νὰ προκύψωσι Γρόσ. 825 ,, 35 παράδ.,, 2 ἄσπρα (ὡς §. 123.), ὡς ἀκολούθως·

332 εἰς Γρ. 274196 ,, 1 παρ.,, 1 ἄσπ. | Πη. Γρ. 825 ,, 35 πρ.
: ,,859 ,, 2 ἄσπρα.
: 1956
: ,,296 Γρόσ. ὑπόλοιπον, ἅτινα
: μὲ . . 40 εἰς πρ. ἀναλυθ'., καὶ ὁ 1 παρὰς ὁμοῦ,
:. δίδουσιν 11841 Παράδ.
: ,,1881
: ,,221 παράδες ὑπόλοιπον, οἵτινες
: μὲ . . 3 εἰς ἄσπρα ἀναλυθ'., καὶ τὸ 1 ἄσπ. ὁμοῦ,
:. δίδουσιν 664 Ἄσπρα

. . .

§. 137.

Πλὴν αὐτὸς ὁ τρόπος τοῦ πολλαπλασιάζειν μικτοὺς Ἀριθμοὺς εἶναι διεξοδικὸς, καὶ ὄχι τόσον χρήσιμος εἰς τὸν ἀποβλέποντα σκοπόν μας, διὰ τοῦτο παραιτοῦμεν αὐτὸν, καὶ προχωροῦμεν εἰς ἄλλον συντομώτερον, καθ' ὃν ἤδη λογαριάζουσι κοινῶς.

ΚΕΦ. Θ΄.

Συντομίαι ὠφέλιμαι ἐν τῷ πολλαπλασιάζειν καὶ διαιρεῖν.

§. 138.

Ταυτὸν ἐςὶ, κἂν πολλαπλασιάσωμεν, ἢ διαιρέσωμεν ὀλίγον κατ' ὀλίγον μὲ περισσοτέρους ἀριθμοὺς, ἢ μὲ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν. Παρ. χάριν· ἐὰν πολλαπλασιασθῇ, ἢ διαιρεθῇ ἕνας ὁποιοσδήποτε Ἀριθμὸς μὲ 6, ἔπειτα τὸ Παραγόμενον αὐτῶν μὲ 8 (ἢ μὲ ὁποιουσδήποτε ἄλλους ἁπλοῦς Ἀριθμοὺς), προκύπτει τὸ ἴδιον Πηλίκον, ὡς νὰ ἐπολλαπλασιάζετο, ἢ ἐδιαιρεῖτο, διὰ μιᾶς μὲ τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν 48, ὡς εἰς τὸ α΄. καὶ β΄. φαίνεται κατωτέρω.

Α΄.	672	Β΄.	602
πρῶτον μὲ	6 πολλαπλασιαζόμενα	μὲ	48
δίδουσι	4042		5376
εἶτα μὲ	. 8 ὡσαύτως		2688
ποιοῦσι	32256.	ὁμοίως	32256 ὡς ἀπεν.

Ἡ βάσις τῆς ἀνωτέρω πράξεως ἐννοεῖται εὐκόλως· διότι λαμβανόμενος ἕνας Ἀριθμὸς πρῶτον ἑξάκις, εἶτα αὐτὸ τὸ ἑξάκις Παραγόμενον, ἔτι ὀκτάκις, προκύπτει ἀναμφιβόλλως τόσον, ὅσον ἤθελε προκύψει λαμβανόμενος διὰ μιᾶς 48 φοραῖς.

Τὸ ἴδιον ἐννοεῖται καὶ εἰς τὴν Διαίρεσιν· διότι διαιρούμενος ἕνας Ἀριθμὸς εἰς 6 μέρη, καὶ ἕκαστον αὐτῶν τῶν μερῶν πάλιν εἰς 8 μέρη, προκύπτουσιν ἀναμφιβόλλως ἑξάκις 8 ὅμοια μέρη, τὸ ὁποῖον προκύπτει ὡσαύτως, ἐὰν ὁ δοθεὶς Ἀριθμὸς διαιρεθῇ εὐθὺς εἰς 48 μέρη, ὅ ἐστὶ, διαιρεθῇ διὰ τῶν 48.

§. 139.

Ὅθεν, εἰμὲν ὁ Πολλαπλασιαστὴς, ἢ ὁ Διαιρέτης εἰσὶ σύνθετοι Ἀριθμοί (σύντεθος Ἀριθμὸς εἶναι καὶ λέγεται ἐκεῖνος, ὅστις παράγεται ἐξ ἁπλῶν Ἀριθμῶν· φέρ' εἰπεῖν, τα 14 παράγονται ἀπὸ 2 καὶ 7, διότι 2 $\times$ 7 ποιοῦσι 14· ὡσαύτως παράγονται καὶ τὰ 15 ἐκ 3 καὶ 5, διότι 3 $\times$ 5 ποιοῦσι 15 κτλ. Ὅθεν τὰ 14 καὶ 15 ὀνομάζονται σύνθετοι (Παραγόμενοι) Ἀριθμοὶ, τὰ δὲ 2, 7, 3 καὶ 5 Παράγοντες (Ποιηταὶ) καλοῦνται, ἐπειδὴ αὐτοὶ πολλαπλασιαζόμενοι ἀλλήλοις, παράγουσι (φέρουσι) τὰ 14 καὶ 15 ὡς ἀνωτέρω, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.), τότε διαιροῦμεν αὐτοὺς εἰς τοὺς Ποιητὰς αὐτῶν, ἐπειδὴ διὰ μέσου τούτου πολλαπλασιάζομεν, ἢ διαιροῦμεν μὲ ἁπλοῦς (μοναδικοὺς) Ἀριθμοὺς, δι' ὧν ἐκτελεῖται εὐκόλως καὶ ταχέως ἕκαστος λογαριασμὸς, καὶ μάλιστα ἐκεῖνοι μὲ μικτοὺς Ἀριθμοὺς. Π. χ. μᾶς ἐδόθησαν νὰ πολλαπλασιάσωμεν Γρόσ. 35,, 21 παράδ.,, 2 ἄσπρα μὲ 35· ἐνταῦθα διαιροῦμεν τὰ 35 εἰς 5 καὶ 7 (διότι· 5 $\times$ 7 ποιοῦσι 35), καὶ πράττομεν κατὰ τὸν ὄπισθεν §. ὡς.

Γρ 53,, 21 πρ.,, 2 ἄσπ. νὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ 35

Γρ. 267,, 28 πρ.,, 1 ἄσπρον 5

Γρ. 1873,, 38 πρ.,, 1 ἄσπρον 7

Πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὰ Γρόσ. 53,,21 παράδ.,, 2 ἄσπρα μὲ 5 (κατὰ τὸν §. 89.) λέγοντες· 2 X 5 — 10 ἄσπρα, θέττομεν 1 ἄσπρον, καὶ βαςῶμεν 3 παράδ., εἶτα 1 X 5 — 5, καὶ 3 τὰ βαςαχθέντα, ποιοῦσιν 8 παράδ., θέττομεν 8· ἔπειτα 2 X 5 — 10 δεκάδες, ἤτοι 2 Γρόσια, καὶ 2 δεκάδες, λοιπὸν θέττομεν 2, καὶ βαςῶμεν 2· μετέπειτα 3 X 5 — 15, καὶ 2 τὰ βαςαχθέντα, ποιοῦσι 17, θέττομεν 7, καὶ βαςῶμεν 1· τελευταῖον 5 X 5 — 25, καὶ 1 τὸ βαςαχθὲν 26, τὰ ὁποῖα τίθενται, ἐπειδὴ δὲν ἔμεινεν ἄλλο ψηφίον νὰ πολλαπλασιασθῇ. Τὸ Παραγόμενον Γρόσ. 267,,28 παράδ.,, 1 ἄσπρον πολλαπλασιάζομεν ἀκολούθως μὲ τὸν ἕτερον Παράγοντα 7, λέγοντες· 1 X 7 — 7 ἄσπρα, θέττομεν 1 ἄσπρον, καὶ βαςῶμεν 2 παράδ., ἔπειτα 7 X 8 — 56, καὶ 2 τὰ βαςαχθέντα 58 παράδ., θέττομεν 8, καὶ βαςῶμεν 5· εἶτα 2 X 7 — 14, καὶ 5 τὰ βαςαχθέντα, 19 δεκάδες, ποιοῦσι Γρόσια 4, καὶ 3 δεκάδας, θέττομεν 3, καὶ βαςῶμεν 4· μετέπειτα 7 X 7 — 49, καὶ 4 τὰ βαςαχθέντα, ποιοῦσι Γρόσια, 53, θέττομεν 3, καὶ βαςῶμεν 5 καὶ ἐφεξῆς, ὥςε διʼ αὐτοῦ τοῦ τρόπου προκύπτει τὸ Ζητούμενον ἐν ταχύτητι καὶ εὐκολίᾳ.

Δοκιμή.

35 εἰς Γρ'. 1873,,38 παράδες,,1 ἄσπρον.

5 .. .. Γρ'. 374,,31 παράδες,,2 ἄσπρα.

3 .. .. Γρ'. 53,,21 παράδες,,2 ἄσπρα.

δηλαδή, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν μὲ τὸ κεφάλαιον 35 διὰ μιᾶς, διαιροῦμεν ὀλίγον κατʼ ὀλίγον μὲ τοὺς Παράγοντας αὐτοῦ, εἴτουν διὰ τῶν 5 καὶ 7 (ὡς §. 138.), λέγοντες· 5 εἰς 18, 3· εἶτα 5 εἰς 37. 7, μένουσι 2· ἔπειτα 5 εἰς 23, 4, μενουσι 3 Γρόσια, ἤτοι 12 δεκάδες, καὶ 3 δεκάδες (ἐκ τῶν 38 παράδ.), ποιοῦσι 15 δεκάδες· λοιπὸν 5 εἰς 15, 3· μετέπειτα 5 εἰς 8 (οἱ μείναντες 8 παράδ.), 1, μένουσι 3 παράδ., ἤτοι 9 ἄσπρα, καὶ τὸ 1 ἄσπρον, ποιοῦσιν ὁμοῦ 10. ὅθεν 5 εἰς 10, 2. Ὁμοίως διαιροῦμεν καὶ τὸ Παραγόμενον Γρόσ. 374 „ 31 παράδ. „ 2 ἄσπρα διὰ τοῦ 7, καὶ οὕτω προκύπτει ὁ εἰς τὸ παλλαπλασιασθῆναι δοθεὶς Ἀριθμὸς Γρόσ. 53 „ 21 παράδ. „ 2 ἄσπρα, ἐξ οὗ δηλοῦται, ὅτι ὁ Πολλαπλασιασμὸς ἔγινεν ὀρθῶς.

§. 140.

Σχόλιον. Τοῦ λοιποῦ ταὐτὸν ἐςί, μὲ ὁποῖον ἐκ τῶν δύο Παραγόντων πολλαπλασιάσωμεν, ἢ διαιρέσωμεν πρῶτον· διότι εἶναι πρόδηλον, ὅτι πολλαπλασιαζόμενοι δύο Ἀριθμοὶ φέρουσι πάντοτε ὅμοιον Κεφάλαιον, κἂν λάβωμεν τὸν ἕνα, ἢ τὸν ἕτερον διὰ Πολλαπλασιαςὴν (ὡς §. 76.)· μ᾽ ὅλον τοῦτο ἡ ὀρθὴ ἐκλογὴ, μὲ ποῖον ἐκ τῶν Ποιητῶν πρέπει νὰ γένῃ ἡ ἀρχή. δύναται ἐνίοτε νὰ εὐκολύνῃ τὴν πρᾶξιν τοῦ λογαριασμοῦ. Φέρ᾽ εἰπεῖν· μᾶς ἐδόθησαν νὰ πολλαπλασιάσωμεν Γρόσ. 48 „ 27 παράδ. „ 2 ἄσπρα μὲ 72, ἢ διῃρηθέντα, μὲ 8 καὶ 9, ὅπου ἐσμὲν ἐλεύθεροι, χωρὶς βλάβην τῆς ὀρθότητος, πρότερον νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ 8, καὶ ἔπειτα μὲ 9, ἢ πρότερον μὲ 9, καὶ μετὰ ταῦτα μὲ 8· ἐνταῦθα ὅμως εἶναι ὠφελιμώτερον πρότερον μὲ 9, διότι· 2 × 9 ποιοῦσι 18 ἄσπρα, ἤτοι 6 σωςοὺς παράδες, καὶ οὕτω δὲν μένουσιν ἄσπρα διὰ νὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ τὸν ἕτερον ποιητὴν 8, τὸ ὁποῖον προξενεῖ εὐκολίαν.

§. 141.

Καὶ ἕτερα Παραδείγματα πρὸς ἄσκησιν.

Ἐὰν ἡ πήχη ὑφάσματός τινος τιμᾶται Γρόσ, 9,,36 παράδ. 2 ἄσπρα, πόσα ἄρα αἱ 63 πῆχαι;

Λύσις.

Ἐπειδὴ αἱ 63 πῆχαι τιμῶνται 63 φοραῖς τόσα, ὅσα τιμᾶται μία πήχη, εἶναι ἑπόμενον νὰ προκύψῃ ἡ ζητουμένη ποσότης 63 φοραῖς Γρόσ. 9,,36 παράδ. ,, 2 ἄσπρα· λοιπόν.

Γρόσ. 9,,36 παράδ.,,2 ἄσπρα, πολλαπλασ. μὲ 63

Γρόσ. 89,,10 παράδ.,,— — 9

ςαίνουσ.Γρ.624,,30 παράδ.,,— — 7

Δοκιμή.

Ἐὰν δὲ 63 πήχας ἐπληρώθησαν Γρόσ, 624,, 30 παράδ., ἄρα πόσα τιμᾶται μία πήχη;

Λύσις.

Ἐνταῦθα πρέπει κυρίως νὰ διαιρεθῇ ἡ ποσότης τῶν πηχῶν εἰς 63 ὅμοια μέρη, ὅ ἐςί, νὰ διαιρεθῇ διὰ τῶν 63. Οἷον.

63 εἰς Γρος. 624,,30 παράδ.

7 .. Γρος. 89,,10 παράδ.

9 .. Γρόσ. 9,,36 παράδ. 2 ἄσπρα.

Πρόβλημα. Ἐὰν 1 Ὀκᾶ ἑνὸς Πράγματος τιμᾶται Γρόσ. 15,, 18 παράδ.,, 2 ἄσπρα, ἄρα πόσα αἱ 72 Ὀκάδες,

Λύσις.

Γρόσ. 15,, 18 παράδ. 2 ἄσπρα μὲ 72.

Γρόσ. 139,, 8 παράδ. 9

ςαίνουσ. Γρόσ. 1113,, 24 παράδ. 8

Δοκιμή.

72 εἰς Γρόσ. 1113,, 24 παράδες.

8 .. .. Γρόσ. 139,, 8 παράδ.

9 .. .. Γρόσ. 15,, 18 παράδ.,, 2 ἄσπρα.

§. 142.

Σχόλιον. Ἡ διαίρεσις τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς αὐτῶν Παράγοντας ἀποβλέπει ἁπλῶς εἰς τὸ, ν' ἀπολαύσωμεν μοναδικοὺς (ἁπλοῦς) Πολλαπλασιαςὰς, ἢ Διαιρέτας, ὡς τ' ἀνωτέρω Ὑποδείγματα δεικνύουσι· πλὴν ὅπου δὲν δυνάμεθα ν' ἀπολαύσωμεν τὸν ἄνωθεν σκοπόν μας, ἡ διαίρεσις εἶναι πάντη ἀνωφελὴς καὶ περιττή. Π. χ. ἐὰν τὰ 39 διαιρεθῶσιν εἰς 3 καὶ 13, δὲν ὠφελούμεθα ποσῶς ἐκ τούτου· διότι ὁ Ἀριθμὸς 13 σύγκειται ὡσαύτως ἐκ δύο ψηφίων, ὡς καὶ ὁ 39. Ὁμοίως εἶναι περιττὸν· νὰ διαιρεθῇ ἕνας μοναδικὸς Ἀριθμὸς, ὅστις προέκυψεν ἐξ ἑνὸς συνθέτου Ἀριθμοῦ. Φέρ εἰπεῖν· ὁ ἀριθμὸς 54 διαιρεῖται εἰς 6 καὶ 9. ἑπομένως διαιρεῖται ὁ 6 εἰς 2, καὶ 3, ὁ δὲ 9 εἰς 3 καὶ 3· αὐτὸ ὅμως εἶναι περιττὸν καὶ διεξοδικὸν διὰ τὸν προκείμενον σκοπόν μας· διότι τὰ 6 καὶ 9 εἰσὶν ἤδη μοναδικοὶ Ἀριθμοί; περὶ ὧν ἐςὶν ὁ λόγος.

§. 143.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ μὲ τοιούτους Ἀριθμοὺς, οἵτινες οὐκ εἰσὶ συνθεμένοι ἀπὸ μοναδικοὺς Ἀριθμοὺς, ὡς μὲ 11, 13, 17, 19, 23, καὶ μὲ τοὺς ἐφεξῆς. Εἰς τοιαύτας πτώσεις λαμβάνομεν ἀντ' αὐτῶν τῶν Ἀριθμῶν τὸν πλησιέςερον μεγαλήτερον, ἢ μικρότερον Ἀριθμὸν, ὅς τις διαιρεῖται εἰς μοναδικοὺς Ἀριθμοὺς, τὸ δὲ περισσότερον, ἢ ὀλιγώτερον ληφθὲν, διορθώνομεν διὰ τῆς ἀφαιρέσεως, ἢ προσθέσεως Π. χ. μᾶς ἐδόθησαν Γρόσ. 21 ,, 25 παράδ. ,, 2 ἄσπρα νὰ τὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ 17· ἐνταῦθα ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ 17, λαμβάνομεν ἀντ' αὐτῶν τὰ 18, τὰ ὁποῖα διαιροῦνται εἰς 3 καὶ 6, καὶ ἀφαιροῦμεν ἐκ τῆς ποσότητος τῶν 18 τὰ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἅπαξ ληφθέντα περισσότερα Γρόσ. 21 ,, 25 παράδ. 2 ἄσπρα, ὡς ἀκολούθως.

	Γρ. 21 ,, 25 πρ. ,, 2 ἄσπ. μὲ	18
	Γρ. 64 ,, 37 πρ.	3
Ποσότης τῶν 18.	Γρ. 389 ,, 22 πρ.	6
ἀφαιρ. τὰ ἅπ. περισ.	ληφ. 21 ,, 25 πρ. ,, 2 ἄσπρα	
	Γρ. 367 ,, 36 πρ. ,, 1 ἄσπ. Κεφάλαιον τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ 17.	

Ἕτερον. Μᾶς ἐδόθησαν Γρόσ. 12 ,, 8 παράδ. 1 ἄσπρον νὰ τὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ 26, ἤτοι μὲ 5 καὶ 5, λοιπὸν διὰ τὰ 25 πολλαπλασιάζομεν μὲ 5 καὶ 5, καὶ διὰ τὸ 1 ἀθροίζομεν εἰς τὸ κεφάλαιον ἅπαξ Γρόσ. 12 ,, 8 παράδ. ,, 1 ἄσπρον, ὡς.

Γρ'. 12,, 8 πρ'.,, 1 ἄσπ. μὲ 26

Γρ'. 61,, 1 πρ'.,, 2 ἄσπα 5

Κεφάλ. τῶν 24. Γρ'. 305,, 8 πρ'.,, 1 ἄσπρου .. .. 5 ἢ 1 πρ.
ἕως 26, ἀπ. προσ.— 12,, 8 πρ'.,, 1 ἄσπρον.

Γρ'. 317,, 16 πρ'.,, 2 ἄσπ. Κεφάλ. τῶν 26.

§. 144.

Σχόλιον. Ἡ μέχρι τοῦδε εἰς Παράγοντας διαίρεσις, χρησιμεύει μόνον εἰς μικροτέρους Ἀριθμοὺς, δηλονότι ἕως τῶν 100, ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις αὐτῶν γίνεται διὰ τοῦ πυθαγορικοῦ Πίνακος εὐκόλως· εἰς μεγαλητέρους Ἀριθμοὺς ὅμως, ὅπου πρέπει νὰ δοκιμάσωμεν πρότερον ἂν διαιρῶνται οἱ τοιοῦτοι Ἀριθμοὶ, καὶ ποῖοι εἰσὶν οἱ Παράγοντες αὐτῶν, ἀντὶ νὰ εὐκολυνθῇ ἡ πρᾶξις τοῦ λογαριασμοῦ, θέλει δυσκολευθῇ μᾶλλον.

Ὅθεν διὰ ν' ἀποφύγωμεν αὐτὰς τὰς δυσκολίας, μεταχειριζόμεθα τὴν ἀναλυτικὴν Μέθοδον, ὅ ἐςὶν, ἀναλύομεν τὸ μικρὸν Εἶδος τοῦ μικτοῦ Ἀριθμοῦ εἰς μέρη τοῦ μεγαλητέρου αὐτοῦ Εἴδους, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν ὀλίγον κατ' ὀλίγον ἐκ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, ὡς σαφεςέρως λεχθήσεται περὶ τούτων ἑπομένως.

§. 145.

Ἐξ ὧν εἴπομεν εἰς τὴν Ἐπαναγωγὴν (ὡς §. 134.) μᾶς εἶναι γνωςὸν, ὅτι διὰ νὰ μεταφέρωμεν μίαν Ποσότητα μικροτέρου Εἴδους εἰς Μονάδας τοῦ πλησίον αὐτοῦ μεγαλητέρου Εἴδους, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν Ποσότητα τοῦ μικροτέρου Εἴδους μὲ ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει ἀφ' ὅσων μονάδων σύγκειται τὸ πλησίον αὐτοῦ μεγαλήτερον Εἶδος. Φέρ' εἰπεῖν· διὰ νὰ μεταφέρωμεν Παράδες εἰς Γρόσια; πρέπει νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 40, ἐπειδὴ 40 Παράδες ςαίνουσιν ἓν

Γρόσι· λοιπὸν διὰ νὰ μεταφέρωμεν εἰς Γρόσια μίαν Ποσότητα Μονάδων, ἑκάστην ἀνὰ 20 παράδες, (ἐξ ὧν 2 Μονάδες ἀποτελοῦσιν ἓν Γρόσι), πρέπει νὰ τὴν διαιρέσωμεν διὰ τῶν 2· μίαν Ποσότητα ἀνὰ 10 παράδ. (ἐξ ὧν 4 Μονάδες ποιοῦσιν ἓν Γρόσι), διὰ τῶν 4· μίαν Ποσότητα ἀνὰ 8 παράδ. (ἐξ ὧν 5 Μονάδες ϛαίνουσιν ἓν Γρόσι), διὰ τῶν 5· καὶ μίαν Ποσότητα ἀνὰ 4 παράδ. (ἐξ ὧν 10 Μονάδες ἀποτελοῦσιν ἓν Γρόσι), διὰ τῶν 10. Ὁμοίως διαιροῦμεν καὶ μίαν Ποσότητα Μονάδων ἀνὰ 200 δράμια διὰ νὰ τὴν μεταφέρωμεν εἰς ὀκάδας, διὰ τῶν 2, ἐπειδὴ 2 τοιαῦται Μονάδες ποιοῦσι 400 δράμια, ἤτοι μίαν Ὀκᾶν· ὡσαύτως καὶ μίαν Ποσότητα ἀνὰ 80 δράμια διὰ τῶν 5, διότι 5 τοιαῦται Μονάδες ϛαίνουσι μίαν Ὀκᾶν, καὶ ἑφεξῆς. Τὰ τοιαῦτα εἰσὶ τοσοῦτον φανερὰ, ὥϛε κάθε ἄλλη ἐξήγησις εἶναι πάντη περιττή.

§. 146.

Ὑπόδειγμα. Δεδόσθω, ὅτι θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσα Γρόσια ϛαίνει ἡ Ποσότης 1384 ἀνὰ 10 παράδας· ἐνταῦθα ἦτον περιττὸν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ 1384 πρότερον μὲ 10, ἵνα ἴδωμεν πόσους παράδας φέρουσι, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν αὐτοὺς τοὺς προκύψαντας παράδας 13840 διὰ τῶν 40, διὰ νὰ πληροφορηθῶμεν πόσα Γρόσια ἐμπεριέχονται ἐν αὐτοῖς, ἐπειδὴ μᾶς εἶναι γνωϛὸν, ὅτι ἡ Ποσότης 1384 ἐμπεριέχει Μονάδας ἑκάστην ἀνὰ 10 παράδας, ἐξ ὧν 4 Μονάδες ποιοῦσιν ἓν Γρόσι· ὅθεν διὰ νὰ προκύψωσι τὰ ζητούμενα Γρόσια, διαιροῦμεν τὴν ποσότητα 1384 μόνον διὰ τῶν 4, καὶ οὕτω προκύπτει ἀμέσως τὸ Ζητούμενον Γρόσ. 346,, —, ὅ ἐϛι, τὸ τέταρτον μέρος ἐκ τῆς Ποσότητος 1384, ὡς τὰ ἑπόμενα Ὑποδείγματα δεικνύουσιν.

§. 147.

Ἐὰν 1 Ὀκᾶ, ἑνὸς ὁποιουδήποτε Πράγματος, τιμᾶται διὰ 20 παράδ., ἄρα πόσου αἱ 86 Ὀκάδες;

Λύσις.

2 εἰς 86
ϛαίνουν Γρόσ. 43,, —

Ἑρμηνεία. Ἐπειδὴ ἑκάϛη ὀκᾶ τιμᾶται δὲ 20 παράδ., ἄρα αἱ 86 ὀκάδες τιμῶνται 86 φοραῖς ἀνὰ 20 παράδ., ἤτοι 86 ἥμισυ Γρόσια, ἐξ ὧν 2 ποιοῦσιν ἓν Γρόσι· διὰ τοῦτο λοιπὸν διαιροῦμεν τὰ 86 μόνον διὰ τῶν 2, καὶ προκύπτει τὸ Ζητούμενον.

Β'. Πόσα Γρόσια πληρωθήσονται διὰ 1315 πήχας, ἐξ ὧν 1 πήχη τιμᾶται δὲ 8 παράδ.;

Λύσις.

5 εἰς 1315
ϛαίνουσι Γρόσ. 263,, —

Ἑρμηνεία. 1315 πῆχαι τιμῶνται 1315 φοραῖς ἀνὰ 5 παράδ., 5 φοραῖς δὲ ἀνὰ 8 παράδ. ποιοῦσιν ἓν Γρόσι· ἄρα 1315 φοραῖς ἀνὰ 8 παράδ. ἐμπεριέχουσι τόσα Γρόσια, ὁσάκις ἐμπεριέχονται τὰ 5 εἰς τὰ 1315.

Γ'. Πόσας ὀκάδας ϛαίνουσιν 815 φοραῖς ἀνὰ 80 δράμια;

Λύσις.

5 εἰς 815
ϛαίνουσι ὀκάδ. 163

Ἑρμηνεία. Ἐπειδὴ ἑκάϛη Μονὰς ἐκ τῶν 815 ἐμπεριέχει 80 δράμια, 5 φοραῖς δὲ ἀνὰ 80 δράμια ποιοῦσι μίαν Ὀκᾶν, διὰ τοῦτο διαιροῦμεν τὰ 815 μόνον διὰ τῶν 5, καὶ προκύπτει τὸ Ζητούμενον.

Δ'. Ἐὰν 1 πῆχυ τιμᾶται διὰ 4 παράδ., ἄρα πόσα Γρόσια πληρωθήσονται διὰ 1205 πήχας;

Λύσις.

ςαίνουσι	Γρόσ. 120	5
		40
	παράδ. 20	

Ἑρμηνεία. 1205 Μονάδες ἑκάστη ἀνὰ 4 παράδ. (ἐξ ὧν 10 Μονάδες ποιοῦσιν ἓν Γρόσι) διαιροῦνται διὰ τῶν 10, καὶ μεταφέρονται εἰς Γρόσια· αὕτη ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται ἁπλῶς διὰ τῆς τομῆς ἑνὸς ψηφίου δεξιῶς. (ὡς §. 112).

§. 148.

Ἐφ' ὅσον λοιπὸν τὸ μικρότερον Εἶδος εἶναι τοιοῦτος Ἀριθμὸς, ὅστις, λαμβανόμενος ὁσάκις δεῖ, ἀποτελεῖ μίαν ὁλόκληρον Μονάδα τοῦ μεγαλητέρου αὐτοῦ Εἴδους, ὡς 5 παράδ. (οἵτινες λαμβανόμενοι ὀκτάκις ἀποτελοῦσιν ἓν σῶον Γρόσι), ἐκτελεῖται ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἄνευ δυσκολίας κατὰ τὸν παρελθόντα τρόπον (οἱ τοιοῦτοι Ἀριθμοὶ εἰσὶ καὶ λέγονται ὅμοια μέρη τοῦ πλησίον αὐτῶν μεγαλητέρου Εἴδους, καθὼς φαίνονται ἔμπροσθεν εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν 39 παράδ. τοῦ Γροσίου, σημειωμένοι μὲ † (ὡς §. 151.). Ταὐτὸν ἐννοητέον καὶ δι' ὅλους τοὺς ἄλλους ὁμοίους ἀριθμοὺς τῶν ἑτεροειδῶν Χρημάτων, Ζυγίων, καὶ λοιπῶν· ὅταν ὅμως πρόκηται νὰ πολλαπλασιασθῇ μία Ποσότης μικροτέρων Μονάδων, ἐξ ὧν, ὅσαι καὶ ἂν ληφθῶσι δὲν ἀποτελοῦσι μίαν ὁλόκληρον Μονάδα τοῦ πλησίον αὐτῶν μεγαλητέρου Εἴδους, φέρ' εἰπεῖν, 12, 14, 16 παράδ. καὶ ἐφεξῆς, τότε μεταχειριζόμεθα τὴν ἀναλυτικὴν Μέθοδον, καὶ διαιροῦμεν αὐτὰς εἰς τοιαῦτα μέρη, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ληφθῶσιν εὐκόλως ἐκ τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ. Π. χ. μᾶς ἐδόθησαν νὰ λογαριάσωμεν πόσα Γρόσια φέρουσι 495 φοραῖς ἀνὰ 16 παράδ., ἐνταῦθα διαιροῦμεν τοὺς 16 παράδ. εἰς 8 παράδ. καὶ 8 παράδ., ὅ,τι δὲ προκύψει ἐκ τῶν 495 ἀνὰ 8 παράδ., τὸ λαμβάνομεν δὶς, καὶ δίδουσι τὴν ζητουμένην Ποσότητα τῶν 495 ἀνὰ 16 παράδας, ὡς ἀκολούθως.

8 παράδ. εἰσὶν ὅμοιον μέρος τοῦ Γροσίου, ὅ ἐςὶ, πέμπτον ἐκ τῶν 40 παράδ., ἄρα 5 εἰς 495

ςαίνουσι Γρ΄. 99,,—

καὶ διὰ τοὺς ἑτέρους 8 παράδ. ἄλλα τόσα — 99,,—

φέρουσιν ὁμοῦ Γρ΄. 198,,—

§. 149.

Οἱ 16 παράδ., ἐδύναντο νὰ διαιρεθῶσι τοιουτοτρόπως, ὥςε τὰ διαιρεθέντα μέρη νὰ ληφθῶσιν ἓν ἐκ τοῦ ἑτέρου, φέρ' εἰπεῖν, εἰς 10, 5, καὶ 1· καὶ διὰ μὲν τοὺς 10 παράδ. νὰ διαιρέσωμεν τὸν Πολλαπλασιαςέον διὰ 4, διὰ δὲ τοὺς 5 παράδ. νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ ἀφ' ὅσων φέρουσιν οἱ 10 παράδ. (διότι· τὰ 5 εἰσὶ τὸ ἥμισυ μέρος ἐκ τῶν 10 παράδ.), καὶ διὰ τὸν 1 παρὰν νὰ λάβωμεν τὸ πέμπτον, ἀφ' ὅσων φέρουσιν οἱ 5 παράδ., ἐπειδὴ τὸ 1 εἶναι πέμπτον μέρος ἐκ τῶν 5 παράδ., καὶ οὕτω προκύπτει ἡ ζητουμένη Ποσότης τῶν 16 παράδ., εἶον.

16 παράδ.	. . . . .	εἰς 495	
διαιρ. εἰς 10 παρ΄.,	καὶ διαιρ. διὰ 4 τὰ·	Γρ΄. 123,,30 παρ΄.	
» » 5 παρ΄.,	» » 2 τὰ·	61,,35 —	
» » 1 παρὰν,	» » 5 τὰ·	12,,15 —	
		ςαίνουσι Γρ΄. 198,,—	ὡς ἀνωτέρω.

Ἐπειδὴ οἱ 16 παράδ. οὐκ εἰσὶν ὅμοιον μέρος τοῦ Γροσίου, ὥςε νὰ ληφθῶσιν, ὅσα τοιαῦτα μέρη δεῖ, καὶ ν' ἀποτελέσωσιν ἓν σῶον Γρόσι, διὰ τοῦτο διῃρέσαμεν αὐτοὺς εἰς 10 παράδ., εἰς 5 παράδ., καὶ εἰς 1 παρὰν, οἱ ὁποῖοι ὄντες ἤδη ὅμοια μέρη τοῦ Γροσίου, δύνανται νὰ ληφθῶσιν ὅλοι ἐκ τοῦ Πολλαπλασιαςέου, τὸ ὁποῖον, εἰ μὲν πράξωμεν, πρέπει διὰ μὲν τοὺς 5 παράδ. νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 8, ἐπειδὴ τὰ 8 εἶναι τὸ ὄγδοον μέρος ἐκ τῶν 40 παράδ., διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 40, διότι τὰ 40 εἶναι τὸ τεσσαρακοςὸν μέρος ἐκ τῶν 40 παράδ., καὶ οὕτω προκύπτουσι τόσον διὰ τοὺς 5 παράδ., ὅσον καὶ διὰ τὸν 1 παρὰν πάλιν τὰ ἴδια Κεφάλαια, ὡς ἀνωτέρω.

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὴν τοιαύτην διαίρεσιν προκύπτουσι μεγάλοι Διαιρέται, ὅ ἐςὶ, διὰ τοὺς 5 παράδ. 8, καὶ διὰ τὸν 1 παρὰν 40, ὡς ἐῤῥέθη, ὁ δὲ ἐδικός μας σκοπὸς ἀποβλέπει, ἵνα πρὸς εὐκολίαν προκύπτωσι πάντοτε μικροὶ Διαιρέται, διὰ τοῦτο ἐλάβομεν τοὺς 5 παράδ. ἐκ τῶν 10 παράδ., καὶ τὸν 1 παρὰν ἐκ τῶν 5 παράδ., καὶ οὕτω προέκυψαν ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω Διαιρέτεων 8 καὶ 40, μόνον 2 καὶ 5. Ὅθεν διὰ τοὺς 10 παράδ. ἐδιαιρέσαμεν τὰ 495 διὰ τῶν, 4 (ἐπειδὴ τετράκις 10 παράδ. ἀποτελοῦσιν ἓν σῶον Γρόσι), καὶ προέκυψαν Γρόσ. 123 ,, 30 παράδ., ὅ ἐςὶ, τὸ τέταρτον μέρος ἐκ τῶν 495· εἶτα διὰ τοὺς 5 παράδ. ἐδιαιρέσαμεν τὴν ποσότητα τῶν 10 παράδ., ἤτοι τὰ Γρόσ. 123 ,, 30 παράδ. διὰ τῶν 2 (κατὰ τὸν §. 118.) εἰπόντες· 2 εἰς 12 ἀνὰ 6 ἐξ ἴσου, ἔπειτα 2 εἰς 3 ἀνὰ 1, ἔμεινεν 1 Γρόσι, ἤτοι 4 δεκάδες, καὶ 3 δεκάδες (ἐκ τῶν 30 παράδ.), ποιοῦσιν ὁμοῦ 7 δεκάδας· λοιπὸν 2 εἰς 7 ἀνὰ 3, μένει 1, ἤτοι 10 μονάδες, ὅθεν 2 εἰς 10 ἀνὰ 5 ἐξ ἴσου, ὅ ἐςὶν, ἐλάβομεν τὴν ἥμισυ ποσότητα ἐκ τῆς ποσότητος τῶν 10 παράδ., ἤγουν ἐκ τῶν Γροσ. 123 ,, 30 παράδ., μετὰ ταῦτα διὰ τὸν 1 παρὰν ἐλάβομεν τὸ πέμπτον μέρος ἐκ τῆς ποσότητος τῶν 5 παράδ., ἤτοι ἐκ τῶν Γροσ. 61 ,, 35 παράδ., τὰ ὁποῖα διαιρέσαντες διὰ τῶν 5, εἴπομεν· 5 εἰς

6 ἀνὰ 1, ἔμεινεν 1· εἶτα 5 εἰς 11 ἀνὰ 2, ἔμεινεν 1 Γρόσι, ἤτοι 4 δεκάδες, καὶ 3 δεκάδες (ἐκ τῶν 35 παράδ.), ποιοῦσιν ὁμοῦ 7 δεκάδας· λοιπὸν 5 εἰς 7 ἀνὰ 1, ἔμειναν 2 δεκάδες, ἤτοι 20 μονάδες, καὶ 5 μονάδες (ἐκ τῶν 35 παράδ., ἐξ ὧν ἐδιαιρέσαμεν μόνον τὰς δεκάδας), ποιοῦσιν ὁμοῦ 25 μονάδας, ὅθεν 5 εἰς 25 ἀνὰ 5 ἐξ ἴσου. Λοιπὸν 495 φοραῖς ἀνὰ 10 παράδ. ἔφερον. Γρόσ. 123,,30 παράδ., 495 φοραῖς ἀνὰ 5 παράδ. Γρόσ. 61,,35 παράδ., 495 φοραῖς ἀνὰ 1 παρὰν Γρόσ. 12,,15 παράδ., ὁμοῦ δὲ Γρόσ. 198,, —.

§. 150.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον λοιπὸν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἑκάστην Ποσότητα τῶν μικροτέρων Εἰδῶν τοιουτοτρόπως, ὥστε νὰ προκύπτωσι πάντοτε μοναδικοὶ Διαιρέται, ὅπου ἐσμὲν ἐλεύθεροι νὰ λάβωμεν ὅλα τὰ διαιρεθέντα μέρη ἐκ τοῦ Πολλαπλασιαστέου (ὡς §. 148.), ἢ τὰ διαιροῦμεν τοιουτοτρόπως, ὥστε τὸ μὲν πρῶτον μέρος νὰ λάβωμεν ἐκ τοῦ Πολλαπλασιαστέου, τὰ δὲ λοιπὰ τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἑτέρου· ἐν ἑνὶ λόγῳ ποιοῦμεν τοιαύτην διαίρεσιν, ἥτις ὁδηγεῖ εἰς τὸν σκοπὸν ἐν ταχύτητι καὶ εὐκολίᾳ. Ἐν γένει ἐκλέγεται ὁ δεύτερος τρόπος, ἐπειδὴ δι' αὐτοῦ σμικρύνονται πάντοτε τόσον οἱ Διαιρέται, ὅσον καὶ ὁ Διαιρετέος. Πρὸς περισσοτέραν σαφήνειαν καὶ ἄσκησιν ἕπονται Παραδείγματα αὐτοῦ τοῦ τρόπου.

Πρόβλημα. Ἐὰν ἡ πῆχυ ὑφάσματός τινος τιμᾶται 12 παράδ. πόσα πληρωθήσονται διὰ 245 πήχας;

Λύσις.

παράδ. 12 εἰς 245

8. Γρ. 49,, —

4. — 24,,20 παράδ.

ςαίνουσι Γρ. 73,,20 παράδ.

Ἑρμηνεία. Ἐνταῦθα διαιροῦμεν τοὺς 12 παράδ. τοιουτοτρόπως, ὥςε τὸ πρῶτον μέρος νὰ εἶναι ὅμοιον μέρος τοῦ Γροσίου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον νὰ λάβωμεν εὐκόλως ἐξ αὐτοῦ, δηλαδὴ, εἰς 8 καὶ 4· καὶ διὰ μὲν τοὺς 8 παράδ. διαιροῦμεν τὰ 245 διὰ τῶν 5 (διότι 5 × 8 ποιοῦσι 40 παράδ., ἤτοι ἓν Γρόσι), καὶ φέρουσι Γρόσ. 49,,—, διὰ δὲ τοὺς 4 παράδ., ὡς τὸ ἥμισυ μέρος τῶν 8 παράδ., διαιροῦμεν τὰ Γρόσ. 49,,—διὰ τῶν 2, καὶ δίδουσι Γρόσ. 24,,20 παράδ., ὁμοῦ δὲ Γρόσ. 73,,20 παράδ.

Σημείωσις. Οἱ 4 παράδ. ἐδύναντο νὰ ληφθῶσιν ἐκ τοῦ Πολλαπλασιαςέου, καὶ νὰ διαιρεθῶσι τὰ 245 διὰ τῶν 10 (διότι δεκάκις 4 ςαίνουσιν ἓν Γρόσι), ὅπου προέκυπτον ὡσαύτως Γρόσ. 24,,20 παράδ., πλὴν ἐπειδὴ ὁ Διαιρέτης καὶ ὁ Διαιρετέος εἰσὶ μεγάλοι Ἀριθμοὶ, διὰ τοῦτο εἶναι προτιμώτερον νὰ λάβωμεν τὰ ἥμισυ ἐκ τῶν Γροσ. 49,,—, ὅπου ὅτε Διαιρέτης καὶ Διαιρετέος εἰσὶ μικρότεροι Ἀριθμοί.

Πρόβλημα. Πόσα Γρόσια πληρωθήσονται διὰ ὀκάδας 849, ἐὰν 1 ὀκᾶ τιμᾶται 15 παράδ.;

Λύσις.

παράδ. 15	εἰς 849	
10.	Γρ. 212,,10	παράδ.
5.	— 106,, 5	—
ςαίνουσι	Γρ. 318,,15	παράδ.

Ἑρμηνεία. Οἱ 15 παράδ. διαιρέθησαν εἰς 10 καὶ 5, ἐπειδὴ δὲ τετράκις 10 παράδ. ποιοῦσιν ἓν Γρόσι, διὰ τοῦτο διαιρέσαμεν τὰ 849 διὰ τῶν 4 (ὅ ἐςὶ, ἐλάβομεν τὸ τέταρτον μέρος ἐκ τῶν 849), καὶ ἔδωκαν Γρόσ. 212,,10 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 5 παράδ., ὡς τὸ ἥμισυ μέρος τῶν 10 παράδ., ἐλάβομεν τὸ ἥμισυ ἐκ τῶν Γροσ. 212,,10 παράδ., καὶ ἔδωκαν Γρόσ. 106,,5 παράδ., ὁμοῦ δὲ Γρόσ. 318,,15 παράδ.

Σημείωσις. Τοὺς 15 παράδ. ἐδυνάμεθα νὰ τοὺς διαιρέσωμεν καὶ εἰς 8, 4, 2 καὶ 1, καὶ διὰ μὲν τοὺς 8 παράδ. νὰ λάβωμεν τὸ πέμπτον μέρος ἐκ τῶν 849, διὰ δὲ τοὺς 4 παράδ., ὡς τὸ ἥμισυ μέρος τῶν 8 παράδ., νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς ποσότητος τῶν 8 παράδ., διὰ τοὺς 2 παράδ., ὡς τὸ ἥμισυ μέρος τῶν 4 παράδ., νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ ἐκ τῶν 4 παράδ, καὶ διὰ τὸν 1 παρὰν, ὡς τὸ ἥμισυ μέρος τῶν 2 παράδ., νὰ λάμβωμεν τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς ποσότητος τῶν 2 παράδ. πλὴν καίτοι καὶ αὐτὸς ὁ τρόπος φαίνεται εὔκολος, μ' ὅλον τοῦτο εἶναι εὐκολώτερος καὶ ταχύτερος ὁ ἀνωτέρω.

§. 151.

Ἐν γένει ἡ Διαίρεσις τῶν μικροτέρων Εἰδῶν κρέμαται ἐκ τῆς θελήσεως ἑνὸς ἑκάστου, φθάνει μόνον νὰ μὴ γίνῃ ἐπισφαλὴς ἡ ὀρθότης τοῦ ὅλου. Ἐν τοσούτῳ λοιπὸν πρὶν ἢ δώσωμεν περισσότερα Παραδείγματα αὐτοῦ τοῦ τρόπου, ἂς κάμωμεν, πρὸς εὐκολίαν τῶν Ἀρχαρίων, τὴν Διαίρεσιν τῶν Παράδων μέχρι τῶν 39, καὶ τοῦ καισσαροβασιλικοῦ Φουντίου (τὸ ὁποῖον σύγκειται ἐκ 32 λοτίων) ἕως τῶν 31, (α) τοῦτ' ἔςι, πῶς διαιροῦνται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖςον εὐκολώτερα, καθ' ὃν τρόπον δύναταί τις νὰ διαιρέσῃ ὅλα τὰ μικρὰ Εἴδη τῶν λοιπῶν Χρημάτων, Ζυγίων κτλ. χωρὶς ὅμως νὰ προσδιορίσωμεν ταύτην τὴν Διαίρεσιν ὡς Κανόνα· διότι ἕκαςος δύναται ἀνεμποδίςως νὰ κάμῃ τὴν Διαίρεσιν καθ' ἕνα, ἢ κατ' ἄλλον τρόπον, ὃ ἐςὶ, καθὼς τῷ φανήσεται ὠφελιμωτέρα.

(α) Τὸ φοῦντι ἂς ὑποτεθῇ ἐνταῦθα ὡς μία ὀκᾶ, ἡ ὁποία ἔχει μόνον 32 δράμια, διὰ τὴν κατάληψιν τῶν εἰς φούντια δοθέντων παραδειγμάτων.

Διαίρεσις τῶν Παράδων ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τῶν 39 Παράδων.

1. Παράς· εἶναι τὸ τεσσαρακοςὸν μέρος τοῦ Γροσίου, διὰ τοῦτο δὲν διαιρεῖται εἰς μικρότερον μέρος Γροσίου· λοιπὸν διὰ νὰ προκύψωσι Γρόσια πρέπει νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 40.

† 2. » εἶναι ὅμοιον μέρος τοῦ Γροσίου, ὅ ἐςὶν, εἰκοςὸν· λοιπὸν διαιροῦμεν διὰ τῶν 20 τὸν Πολλαπλασιαςέον, τὸ ὁποῖον γίνεται τόσον εὐκόλως ὡς μὲ ἕνα μοναδικὸν ἀριθμὸν· διότι ὡς γνωςὸν, διαιροῦμεν μόνον διὰ τῶν 2, τὸ δὲ 0 ἀφαιρεῖται.

3. » διαιροῦνται εἰς 2 καὶ 1, καὶ διὰ μὲν τοὺς 2 παράδ. διαιροῦμεν διὰ τῶν 20 ὡς ἀνωτέρω, διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τῆς Ποσότητος, ἣν ἔφερον οἱ 2 παράδ.

† 4. » ὅμοιον, ὅ ἐςὶ, δέκατον τοῦ Γροσίου· διὰ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τῶν 10 (ὡς §. 147. Δ'. Ὑπόδειγμα).

† 5. » ὅμοιον, εἴτουν ὄγδοον τοῦ Γροσίου· λοιπὸν διαιροῦμεν διὰ τῶν 8 (ὡς §. 149).

6. » διαιροῦνται εἰς 4 καὶ 2, καὶ διὰ μὲν τοὺς 4 παράδ. διαιροῦμεν διὰ τῶν 10, ὡς ἀνωτέρω, διὰ δὲ τοὺς 2 παράδ. λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 4 παράδων.

7. » διαιροῦνται εἰς 4, 2 καὶ 1, καὶ διὰ μὲν τοὺς 4 καὶ 2 διαιροῦμεν κατὰ τὸν τρόπον τῶν 6 παράδων, διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν λαμβάνομεν ½ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 2 παράδων.

† 8. Παράδες. ὅμοιον, ἤτοι πέμπτον τοῦ Γροσίου· διὰ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τῶν 5 (ὡς §. 147. Β΄. Ὑπόδειγμα).

9. » διαιροῦνται εἰς 8 καὶ 1, καὶ διὰ μὲν τοὺς 8 παράδες διαιροῦμεν διὰ τῶν 5, ὡς ἀνωτέρω, διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν λαμβάνομεν τὸ ὄγδοον ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 8 παράδων, ὅ ἐστί, διαιροῦμεν διὰ τῶν 8· διότι 1 παρὰς εἶναι τὸ ὄγδοον ἐκ τῶν 8 παράδων.

† 10. » ὅμοιον, ἤγουν τέταρτον τοῦ Γροσίου· διὸ διαιροῦμεν διὰ τῶν 4.

11. » διαιροῦνται εἰ 10 καὶ 1, καὶ διὰ μὲν τοὺς 10 παράδ. διαιροῦμεν διὰ τῶν 4, ὡς ἀνωτέρω, διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν λαμβάνομεν τὸ δέκατον ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 10 παράδ., ὅ ἐστί, διαιροῦμεν διὰ τῶν 10.

12. » διαιροῦνται εἰς 8 καὶ 4, καὶ διὰ μὲν τοὺς 8 παράδ. διαιροῦμεν ὡς εἴρηται διὰ τῶν 5, διὰ δὲ τοὺς 4 παράδ. λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 8 παράδων.

13. » διαιροῦνται εἰς 8, 4 καὶ 1, καὶ διὰ μὲν τοὺς 8 καὶ 4 παράδ. διαιροῦμεν κατὰ τὸν τρόπον τῶν 12 παράδ., διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν λαμβάνομεν τὸ τέταρτον ἐκ τῶν 4 παράδων.

14 » διαιροῦνται εἰς 8, 4 καὶ 2, καὶ διὰ μὲν τοὺς διαιροῦνται εἰς 8, 4 καὶ 2, καὶ διὰ μὲν τοὺς 8 καὶ 4 διαιροῦμεν κατὰ τὸν τρόπον τῶν 12 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 2 παράδ. λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 4 παράδων.

15. » διαιροῦνται εἰς 10 καὶ 5, καὶ διὰ μὲν τοὺς 10

παράδ. διαιροῦμεν διὰ τῶν 4, διὰ δὲ τοὺς 5 παράδ. λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 10 παράδων.

16. Παράδες. διαιροῦνται εἰς 8 καὶ 8, καὶ διαιροῦμεν (ὡς §. 148).

17. » διαιροῦνται εἰς 8, 8 καὶ 1, καὶ διὰ τοὺς δὶς 8 παράδ. ὡς ἀνωτέρω, διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν λαμβάνομεν τὸ ὄγδοον ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 8 παράδων.

18. » διαιροῦνται εἰς 8, 8 καὶ 2, καὶ διὰ μὲν τοὺς δὶς 8 διαιροῦμεν ὡς εἴρηται, διὰ δὲ τοὺς 2 παράδ. λαμβάνομεν τὸ τέταρτον ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 8 παράδων.

19. » διαιροῦνται εἰς 8, 8, 2 καὶ 1, καὶ διὰ μὲν τοὺς 8, 8 καὶ 2 παράδ. γίνεται ἡ διαίρεσις ὡς ἡ τῶν 18 παράδ., διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 2 παράδων.

† 20. » ὅμοιον, ἤτοι ἥμισυ Γρόσι· ὅθεν διαιροῦμεν διὰ τῶν 2.

21. » διαιροῦνται εἰς 20 καὶ 1· ἡ μὲν διαίρεσις τῶν 20 ὡς ἡ τῶν 20 παράδ., τὸν δὲ 1 παρὰν λαμβάνομεν ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 20 παράδ. ὡς εἰκοστὸν, διαιροῦντες διὰ τῶν 20.

22. » διαιροῦνται εἰς 20 καὶ 2, τῶν 20 παράδ. ἡ διαίρεσις ὡς ἀνωτέρω, τοὺς δὲ 2 παράδ. ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 20 παράδ. ὡς δέκατον.

23. » διαιροῦνται εἰς 20, 2 καὶ 1· τῶν 22 ἡ διαίρεσις ὡς ἀνωτέρω, διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 2 παράδ.

24 Παράδες. διαιροῦνται εἰς 20 καὶ 4· ἡ μὲν διαίρεσις τῶν 20 παράδ. ὡς εἴρηται, οἱ δὲ 4 παράδ. εἰσὶ τὸ πέμπτον ἐκ τῶν 20 παράδων.

25 » διαιροῦνται εἰς 20 καὶ 5· ἡ μὲν διαίρεσις τῶν 20 παράδ. ὡς εἴρηται, οἱ δὲ 5 παράδ, εἰσὶ τὸ τέταρτον ἐκ τῶν 20 παράδων.

26. » διαιροῦνται εἰς 20, 4 καὶ 2· ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 24 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 2 παράδ. τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 4 παράδων.

27. » διαιροῦνται εἰς 20, 4, 2 καὶ 1. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 26 παράδ., διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 2 παράδων.

28. » διαιροῦνται εἰς 20, 4 καὶ 4. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 24 παράδ., διὰ δὲ τοὺς ἑτέρους 4 παράδ. προσθέττομεν τὴν ἰδίαν Ποσότητα, ἣν ἔφερον οἱ πρῶτοι 4 παράδ., ἢ εἰς 20 καὶ 8, διαιροῦντες τὸν Πολλαπλασιαςέον, διὰ τοὺς 8 παράδ., μὲ 5.

29. » διαιροῦνται ὡς οἱ 28 παράδ. τὸν δὲ 1 παρὰν λαμβάνομεν ἢ ὡς τέταρτον ἐκ τῶν 4 παράδ., ἢ ὡς ὄγδοον ἐκ τῶν 8 παράδων.

30. » διαιροῦνται εἰς 20 καὶ 10. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 20 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 10 παράδ. τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 20 παράδ.

31. » διαιροῦνται εἰς 20, 10 καὶ 1, ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 30 παράδων, διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν τὸ δέκατον ἐκ τῶν 10 παράδων.

32. » διαιροῦνται εἰς 20, 10 καὶ 2, ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 30 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 2 παράδ. τὸ πέμπτον ἐκ τῶν 10 παράδων.

33. Παράδες. διαιροῦνται εἰς 20, 10, 2 καὶ 1. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 32 παράδ. διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν τὸ ἥμισυ ἐκ τῶν 2 παράδων.

34. » διαιροῦνται εἰς 20, 10 καὶ 4· ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 30 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 4 παράδ. τὸ πέμπτον ἐκ τῶν 20 παράδων.

35. » διαιροῦνται εἰς 20, 10 καὶ 5. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 30 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 5 παράδ. τὸ τέταρτον ἐκ τῶν 20 παράδων.

36. » διαιροῦνται εἰς 20, 10, 5 καὶ 1. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 35 παράδ., διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν τὸ πέμπτον ἐκ τῶν 5 παράδων.

37. » διαιροῦνται εἰς 20, 10, 5 καὶ 2. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 35 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 2 παράδ. τὸ πέμπτον ἐκ τῶν 10 παράδων.

38. » διαιροῦνται εἰς 20, 10, 5, 2 καὶ 1. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 37 παράδ. διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν τὸ ἥμισυ ἐκ τῶν 2 παράδων.

39. » διαιροῦνται εἰς 20, 10, 5 καὶ 4. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 35 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 4 παράδ. τὸ πέμπτον ἐκ τῶν 20 παράδων.

Ὠφελιμώτερον εἶναι, ἐὰν θεωρήσωμεν τοὺς 39 παράδ. ὡς ἀκέραιον Γρόσι, πλὴν ἑνὸς παρὰ, καὶ ἐκλάβωμεν τὸν Πολλαπλασιαστέον διὰ τόσους παράδας ὀλιγώτερον.

§. 152.

Διαίρεσις τῶν Λοτίων ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τῶν 31 Λοτίων.

1. Λότι, εἶναι τὸ τριακοστὸν δεύτερον μέρος τοῦ Φουντίου, καὶ ἀνεπίδεκτον διαιρέσεως· διὰ τοῦτο

διαιροῦμεν τὸν Πολλαπλασιαςέον διὰ τῶν 32 καὶ προκύπτουσι Φοῦντια.

2. Λότια· εἰσὶ τὸ δέκατον ἕκτον μέρος τοῦ Φουντίου· διὸ καὶ ἀνεπίδεκτα διαιρέσεως.

3. » διαιροῦνται εἰς 2 καὶ 1.

† 4. » ὅμοιον, ἤτοι τὸ ὄγδοον τοῦ Φουντίου, καὶ διαιροῦμεν διὰ τῶν 8.

5. » διαιροῦνται εἰς 4 καὶ 1.

6. » διαιροῦνται εἰς 4 καὶ 2.

7. » διαιροῦνται εἰς 4. 2 καὶ 1.

8. » ὅμοιον, ἤγουν τέταρτον τοῦ Φουντίου, καὶ διαιροῦμεν μὲ 4.

9. » διαιροῦνται εἰς 8 καὶ 1.

10. » » » 8 καὶ 2.

11. » » » 8, 2 καὶ 1.

12. » » » 8 καὶ 4.

13. » » » 8, 4 καὶ 1.

14. » » » 8, 4 καὶ 2.

15. » » » 8, 4, 2 καὶ 1.

† 16. » ὅμοιον, ἤτοι ἥμισυ Φοῦντι· ὅθεν διαι. μὲ 2.

17. » διαιροῦνται εἰς 8, 8 καὶ 1.

18. » » » 16 καὶ 2.

19. » » » 16, 2 καὶ 1.

20. » » » 16 καὶ 4.

21. » » » 16, 4 καὶ 1.

22. » » » 16, 4 καὶ 2.

23. » » » 16, 4, 2 καὶ 1.

24. » » » 16 καὶ 8.

25. » » » 16, 8 καὶ 1.

26. » » » 16, 8 καὶ 2.

27.	Λότια·	διαιροῦνται	εἰς	16, 8, 2 καὶ 1.
28.	»	»	»	16, 8 καὶ 4.
29.	»	»	»	16, 8, 4 καὶ 1.
30.	»	»	»	16, 8, 4 καὶ 2.
31.	»	»	»	16, 8, 4, 2 καὶ 1.

Τῆς Διαιρέσεως Ὑποδείγματά τινα.

§. 153.

Πρόβλημα. Πολλαπλασιαζόμενα 525 μὲ 23 λότια, πόσα Φούντια ἔχομεν;

Λύσις.

	23 λότια	× 525.
διαιροῦνται εἰς	16	℔ 262,, 16 λότια
	4	65,, 20 —
	2	32,, 26 —
	1	16,, 13 —
	ςαίνουσι	℔ 377,, 11 λότια.

Ἑρμηνεία. Ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ 525 μὲ 23 λότια, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν διὰ τῶν 23, διὰ νὰ προκύψωσι τὰ ζητούμενα Φούντια, διηρέσαμεν τὰ 23 λότια εἰς 16, 4, 2 καὶ 1, καὶ διὰ μὲν τὰ 16 λότια (τὰ ὁποῖα ποιοῦσιν ἥμισυ Φοῦντι), ἐδιαιρέσαμεν τὰ 525 διὰ τῶν 2, καὶ προέκυψαν ℔ 262,, 16 λότια· διὰ δὲ τὰ 4 λότια, ἐλάβομεν τὸ τέταρτον ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 16 λοτίων, ὅ ἐςὶν, ἐκ τῶν ℔ 262,, 16 λοτίων, διὰ δὲ τὰ 2 λότια, ἐλάβομεν τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 4 λοτίων, ἤτοι ἐκ τῶν ℔ 65,, 20 λοτίων, καὶ διὰ τὸ 1 λότι, ἐλάβομεν ὁμοίως τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 2 λοτίων, ἤγουν ἐκ τῶν ℔ 32,, 26 λοτίων, καὶ οὕτως ἔφερον ὁμοῦ ℔ 377,, 11 λότια.

Πρόβλημα. Ἐὰν 1 πήχη ὑφάσματός τινος τιμᾶται 27 παράδες, πόσα Γρόσια πληρωθήσονται διὰ πήχας 638;

Λύσις.

27	× 638	
20	Γρόσ. 319,, —	
4 —	63,, 32	παράδες
2	31,, 36	—
1	15,, 38	—
ςαίνουσι Γροσ.	430,, 26	παράδες.

Ἑρμηνεία. Διαιροῦμεν τοὺς 27 παράδες εἰς 20, 4, 2 καὶ 1, καὶ διὰ μὲν τοὺς 20 παράδες, ὡς ἥμισυ γρόσι, διαιροῦμεν τὰ 638 διὰ τῶν 2, καὶ προκύπτουσι Γρόσ. 319,, —, διὰ δὲ τοὺς 4 παράδες, ὡς πέμπτον μέρος τῶν 20 παράδων, διαιροῦμεν τὴν ποσότητα αὐτῶν, ἤγουν τὰ Γρόσ. 319,, —, διὰ τῶν 5, καὶ προκύπτουσι Γρόσια 63,, 32 παράδες, διὰ τοὺς 2 παράδες, ὡς ἥμισυ μέρος τῶν 4 παράδων, διαιροῦμεν τὴν ποσότητα αὐτῶν, ἤτοι τὰ Γρόσια 63,, 32 παράδες, διὰ τῶν 2, καὶ προκύπτουσι Γρόσια 31,, 36 παράδες, καὶ διὰ τὸν 1 παρὰν, ὡς ἥμισυ μέρος τῶν 2 παράδων, διαιροῦμεν ὡσαύτως τὴν ποσότητα αὐτῶν, τοῦτ' ἔςι, τὰ Γρόσια 31,, 36 παράδες, διὰ τῶν 2, καὶ προκύπτουσι Γρόσια 15,,38 παράδες, τὰ ὁποῖα ἀθροιζόμενα μετὰ τῶν λοιπῶν, δίδουσι τὸ Ζητούμενον, ὡς ἀνωτέρω.

§. 154.

Ὁμοίως πράττομεν καὶ ὅταν δοθῶσιν ἔτι μικρότερα Εἴδη, φέρ' εἰπεῖν, παράδες καὶ ἄσπρα, καὶ ἕτερα τοιαῦτα, ὡς ἐπομένως.

Πρόβλημα. Ἐὰν 1 ὀκᾶ ἑνὸς Πράγματος τιμᾶται διὰ 17 παράδες καὶ 1 ἄσπρον, πόσα Γρόσια πληρωθήσονται δι' ὀκάδας 625;

Λύσις.

παράδες 17,, 1 ἄσπρον	× 625			
8	Γρόσ.	125,, —		
8	—	125,, —		
1	—	15,, 25	παράδες	
1 ἄσπρον		5,, 8	—	,, 1 ἄσπρον.
ςαίνουσι	Γρόσια	270,, 33	παράδ.	,, 1 ἄσπρον.

Ἑρμηνεία. Οἱ 17 παράδες διῃρέθησαν εἰς 8, 8, καὶ 1 παρὰν, διὰ τοὺς ὁποίους ἐδιαιρέσαμεν ὡς σύνηθες· διὰ δὲ τὸ 1 ἄσπρον, ἐλάβομεν τὸ τρίτον μέρος ἐκ τῆς Ποσότητος τοῦ 1 παρᾶ, καὶ οὕτω προέκυψε τὸ Ζητούμενον.

§. 155.

Πρόβλημα. Ἐὰν 1 πήχη τιμᾶται διὰ παράδες 39, πόσα πληρωθήσονται διὰ 39 πήχας;

Λύσις.

	Γρόσια	39,, —
ἀφαιροῦνται	— . .	,, 39 παράδες
ςαίνουσι	Γρόσια	38,, 1 παρὰν.

Ἑρμηνεία. 39 πῆχαι, ἑκάςη ἀνὰ 39 παράδας, ςαίνουσι Γρόσια 39,, —, πλὴν 39 παράδων· λοιπὸν ἀφαιροῦμεν ἐκ τῶν 39 Γροσίων ἁπλῶς 39 παράδες (ὡς §. 151. παρὰ τοῖς παράδοις 39.)

§. 156.

Ἐὰν μετὰ τῶν μικροτέρων Εἰδῶν δοθῇ καὶ τὸ μέγιςον

Εἶδος (ἐφ' ᾧ κυρίως τὸ Γινόμενον ζητεῖται), τότε πολλαπλασιάζομεν πρότερον μὲ τὸ μέγιςον Εἶδος ὡς συνήθως, εἶτα διαιροῦμεν τὰ μικρότερα εἴδη, καὶ πράττομεν ὡς καὶ μέχρι τοῦδε. Παραδ. χ. μᾶς ἐδόθησαν νὰ πολλαπλασιάσωμεν Γρόσ. 32 ,, 32 παράδ. ,, 2 ἄσπρα μὲ 256, ἐνταῦθα πράττομεν ὡς ἑπομένως.

Γρόσ. 32 ,, 32 παράδ. 2 ἄσπρα ×		256
	20	32
	10	512
	2	768
	ἄσπρα 2	128 ,, —
		64 ,, —
		15 ,, 32 παράδ.
		4 ,, 10 — ,, 2 ἄσπρα.
	ςαίνουσι Γρόσ.	8401 ,, παράδ. ,, 2 ἄσπρα.

Ἑρμηνεία. Πρότερον πολλαπλασιάζομεν τὰ 256 μὲ τὰ γρόσια 32 (ὧν τὰ Παραγόμενα δὲν τὰ ἀθροίζομεν ἕως ὅτου νὰ προςεθῶσι καὶ τὰ τῶν παράδων), ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς 32 παράδ. εἰς 20, 10 καὶ 2, καὶ διαιροῦμεν ὡς μέχρι τοῦδε· διὰ δὲ τὰ 2 ἄσπρα, λαμβάνομεν τὸ τρίτον μέρος ἐκ τῆς ποσότητος τῶν 2 παράδ., διότι 2 παράδ. ποιοῦσιν 6 ἄσπρα, τὰ δὲ 2 ἄσπρα, εἰσὶ τὸ τρίτον μέρος τῶν 6 ἄσπρων.

§. 157.

Ἐὰν δοθῶσι, φέρ' εἰπεῖν, μόνον Γρόσια καὶ ἄσπρα, παράδες δὲ οὐχὶ, ἐξ ὧν ἐδύναντο νὰ ληφθῶσι τὰ ἄσπρα, τὰ ὁποῖα, ἐὰν ληφθῶσιν, ὡς μέρη Γροσίου, προκύπτει μεγάλος Διαιρέτης, τότε γίνεται ἡ λύσις εὐκολώτερον κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Πρόβλημα. Ἐὰν 1 Καντάρι τιμᾶται διὰ Γρόσ. 25 ,, — 1 ἄσπρου, πόσα πληρωθήσονται διὰ Καντάρια 253;

Λύσις.

Γρόσ. 25 „ — 1 ἄσπρον ×	253	
	25	
	1165	
	506	
		2 Γρόσ. 4 παρ. 1 ἄσπ.
ςαίνουσι Γρόσ.	6227 „ 4 παρ. „ 1 ἄσπ.	

÷. 3 εἰς 253

4'ο εἰς 8(4 παράδ. 1 ἄσπρον.

ςαίνουσι Γρόσ. 2 „ 4 παράδ. „ 1 ἄσπρον.

Ἑρμηνεία. Πρῶτον πολλαπλασιάζομεν, ὡς σύνηθες, τὰ 253 μὲ τὰ Γρόσια 25, ἔπειτα, διὰ τὸ 1 ἄσπρον, μεταφέρομεν τὰ 253 εἰς παράδες, τοὺς δὲ παράδες εἰς Γρόσια, ὡς ἀνωτέρω ÷., καὶ προκύπτουσι Γρόσ. 2 „ 4 παράδ. „ 1 ἄσπρον, τὰ ὁποῖα ἀθροίζομεν ὁμοῦ μὲ τὰ παραγόμενα τῶν 25 Γροσίων, ὡς ἀνωτέρω. Ἡ πρᾶξις τοῦ 1 ἄσπρου ἐννοεῖται οὕτω· 253 Καντάρια ἀνὰ 1 ἄσπρον, ποιοῦσι 253 ἄσπρα, τὰ ὁποῖα διὰ τῆς Ἐπαναγωγῆς μεταφέραμεν εἰς τὰ μεγαλήτερα αὐτῶν Εἴδη. Ἐὰν τὸ 1 ἄσπρον ἐλαμβάνετο ὡς μέρος Γροσίου, ἔπρεπε νὰ διαιρέσωμεν τὰ 253 διὰ τῶν 120, ἐπειδὴ ἓν Γρόσι συνίςαται ἀπὸ 120 ἄσπρων, καὶ ἤθελον προκύψει Γρόσ. 2 „ — 13 ἄσπρα, ὅ ἐςί, 4 παράδ καὶ 1 ἄσπρον, ὡς ἀνωτέρω.

§. 158.

Ἐὰν ὅτε Πολλαπλασιαςὴς καὶ ὁ Πολλαπλασιαςέος εἰσὶ μικτοὶ Ἀριθμοὶ, φέρ' εἰπεῖν, νὰ πολλαπλασιασθῶσι καισσαροβασιλικὰ φιορίνια 5 καὶ 24 κραϊτζάρια μὲ ℔ 22 „ 12 λότια κτλ., τότε γίνεται ἡ ἐργασία εὐκολώτερον, ὡς τὰ ἑπόμενα Παραδείγματα δεικνύουσιν.

Πρόβλημα. Ἐὰν 1 ℔ Πράγματός τινος τιμᾶται διὰ Φιορ΄. 5 ,, 24 κραϊζάρια, πόσα πληρωθήσονται διὰ ℔ 22 ,, 12 λότια;

Λύσις.

Φιορ΄. 5 ,, 24 κραϊτζ. × ℔ 22 ,, 12 λότ.

ἐκ τῶν 22 ℔ {12 / 12 Φιορ΄. 5 / 110 ,, — 8 / 4 } ἐκ τῶν φιορ. 5 ,, 24 κραϊτζ.

4 ,, 24 κραϊτζάρια.
4 ,, 24 — —
{1 ,, 21 — —
{— ,, 40 — — ,, 2 φένιγ.

ςαινουσι Φιορ΄. 120 ,, 49 κραϊτζ. ,, 2 φένιγ.

Ἑρμηνεία. Πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὰ ℔ 22 μὲ 5 φιορ΄., ὥσπερ νὰ μὴ ἦσαν τὰ 12 λότ. παρόντα, καὶ φέρουσι Φιορίνια. 110 ,, —, ἔπειτα διαιροῦμεν τὰ 24 κραϊτζάρια εἰς 12 καὶ 12 (12 κραϊτζάρια εἰσὶ τὸ πέμπτον μέρος τοῦ Φιορινίου, τὸ ὁποῖον σύγκειται ἀπὸ 60 κραϊτζαρίων) (α), καὶ διὰ μὲν τὰ δὶς 12 κραϊτζάρια διαιροῦμεν τὰ 22 ℔ διὰ τῶν 5, καὶ προκύπτουσι δὶς Φιορίνια 4 ,, 24 κραϊτζάρια. Τελευταῖον διαιροῦμεν καὶ τὰ 12 λότ. εἰς 8 καὶ 4, καὶ λαμβάνομεν αὐτὰ ἐκ τῶν Φιορινίων 5 ,, 24 κραϊτζαρίων, ὅ ἐςι, διὰ τὰ 8 λότ., τὰ ὁποῖα εἰσὶ τὸ τέταρτον τοῦ Φουντίου, διαιροῦμεν τὰ φιορίνια 5 ,, 24 κραϊτζ. διὰ τῶν 4, καὶ προκύπτουσι Φιορίνια 1 ,, 21 κραϊτζ., διὰ δὲ τὰ 4 λότ., ὄντα τὸ ἥμισυ μέρος τῶν 8 λοτίων, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος αὐτῶν, τοῦτ᾽ ἔςι, διαιροῦμεν τὰ Φιορίνια 1 ,, 21 κραϊτζ. διὰ τῶν 2, καὶ προκύπτουσι 40 κραϊτζ. καὶ 2 φένιγ, ὡς ἀνωτέρω.

§. 159.

Σχόλιον. Τὰ 12 λότ. δὲν πρέπει νὰ μᾶς συγχύσωσι

(α) Τὸ φιορίνι ἂς ὑποτεθῇ ἐνταῦθα ὡς ἓν γρόσι, τὸ ὁποῖον ἔχει 60 παράδες, διὰ τὴν κατάληψιν τῶν εἰς φιορίνια δοθέντων ὑποδειγμάτων.

ποσῶς· ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐδόθησαν μόνον ℔ 22 διὰ νὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ Φιορίνια 5 ,, 24 κραϊτζ., τὰ ὁποῖα, πολλαπλασιαζόμενα ὡς συνήθως, φέρουσι τἀνωτέρω παραγέμενα Φιορίνια 110 ,, —, Φιορίνια 4 ,, 24 κραϊτζ., καὶ Φιορίνια 4 ,, 24 κραϊτζ., καὶ οὕτω λαμβάνει τέλος αὐτὸς ὁ λογαριασμός. Ἐπομένως ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐδόθησαν 12 λότ. ἵνα πολλαπλασιασθῶσι μὲ Φιορίνια 5 ,, 24 κραϊτζ., τὰ ὁποῖα, ὡς ἰδιαίτερον Παράδειγμα, πολλαπλασιαζόμενα ὡς σύνηθες, φέρουσι Φιορίνια. 2 ,, 1 κραϊτζ. 2 φένιγ· ἄρα τὰ 12 λότ. ὀρθῶς ἐλήφθησαν ἐκ τῶν Φιορινίων 5 ,, 24 κραϊτζ., ὧν ἡ λύσις ἕπεται κατωτέρω.

12 λότ. × Φιορίνια 5 ,, 24 κραϊτζ.
8 Φιορίνια 1 ,, 21 κραϊτζ.
4 — — ,, 40 — 2 φένιγ.
Φιορίνια 2 ,, 1 κραϊτζ. ,, 2 φένιγ.

§. 160.

Διὰ νὰ δείξωμεν δὲ εἰσέτι σαφεςέρως, ὅτι ὁ διὰ μιᾶς πολλαπλασιασμὸς τῶν μικτῶν Ἀριθμῶν ἔγινεν ὀρθῶς, ἰδοὺ πολλαπλασιάζομεν ἀκολούθως δύο ἀνὰ δύο Ἀριθμοὺς, ὥσπερ νὰ ἐδόθῃ ἕκαςον Παράδειγμα ἰδιαιτέρως, καὶ ἔπειτα ἀθροίζομεν τὰ Κεφάλαια αὐτῶν.

Φιορ. 5 × 22 ℔.
5
Φιορ. 110 ,, —

24 κρ. × 22 ℔.
12 Φιορ. 4 ,, 24 κρ.
12 — 4 ,, 24
Φιορ. 8 ,, 48

12 λότ. × 5 φιορ.
8 Φιορ. 1 ,, 15 κρ.
4 — — ,, 37 — ,, 2 φενιγ.
Φιορ. 1 ,, 52 κρ. ,, 2 φένιγ.

λότ. 12 × 24 κρ.
8 6 κρ.
4 3 —.
κρ. 9.

Ἄθροισις.

Φ. 110 ,, —
8 ,, 48 κ.
— — 1 ,, 52 — 2 φ.
— — ,, 9 — —

Φ. 120 ,, 49 κ. 2 φ.

§. 161.

Πρόβλημα. Πολλαπλασιαζομένων Γροσίων 9 ,, 20 παράδ. μὲ Γρόσ. 6 ,, 16 παράδ. ,, 2 ἄσπρα, πόσον ἔσεται τὸ Παραγόμενον;

Λύσις.

Γρ΄. 9 ,, 20 πρ΄. X Γρ΄. 6 ,, 16 πρ΄. ,, 2 ἄσπρα.

πρῶτον μὲ . . . . . . 9 (κατὰ τὸν §. 89.)
διὰ τὰς 20 πρ΄. τὰ ½ ἐκ τῶν Γρ. 6 ,, 16 πρ΄. 2 ἄσπρων. — γαίνουσι Γρ΄. 57 ,, 30 πρ΄.
— 3 ,, 8 — ,, 1 ἄσπρ.
ὁμοῦ Γρ΄. 60 ,, 38 πρ΄. ,, 1 ἄσπρ.

Ἑρμηνεία. Διὰ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀνωτέρω Ἀριθμοὶ, δηλοῖ, νὰ αὐξηνθῶσι τὰ Γρόσ. 6 ,, 16 παράδ. ,, 2 ἄσπρα ἐννεάκις καὶ ἥμισυ, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ πρῶτον μὲ 9, καὶ δίδουσι Γρόσ. 57 ,, 30 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 20 παράδ., ὄντες τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ Γροσίου, διαιροῦμεν τὰ Γρόσ. 6 ,, 16 παράδ. ,, 2 ἄσπρα, διὰ τῶν 2, καὶ δίδουσι Γρόσ. 3 ,, 8 παράδ. ,, 1 ἄσπρον, τὰ ὁποῖα ἀθροιζόμενα μετὰ τῶν ἀνωτέρω, προκύπτει τὸ ὁλόκληρον Κεφάλαιον.

Πρόβλημα. Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι Γρόσ. 18 ,, 25 παράδες μὲ Γρόσ. 35 ,, 24 παράδες, πόσον ἔςαι τὸ Παραγόμενον;

Λύσις.

Γρόσ. 18 ,, 25 παράδ. × Γρόσ. 35 ,, 24 παράδ.

3.	20	3
6.	5	Γρόσ. 106 ,, 32 παράδες
		6
		Γρόσ. 640 ,, 32 παράδες
		17 ,, 32 —
		4 ,, 18 —
		ὁμοῦ Γρόσ. 663 ,, 2 παράδες

Ἑρμηνεία. Διὰ νὰ γένῃ ἡ ἐργασία κατὰ τὸν ἀπέναντι §, δηλονότι, πρῶτον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ Γρόσ. 35 ,, 24 παράδες μὲ Γρόσ. 18 ,, —, καὶ ἔπειτα μὲ παράδες 25, διαιροῦμεν τὰ 18 εἰς 3 καὶ 6, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὰ Γρόσ. 35 ,, 24 παράδες πρῶτον μὲ 3, μετέπειτα τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν, ἤτοι τὰ Γρόσ. 106 ,, 32 παράδες μὲ 6, καὶ προκύπτουσι Γρόσ. 640 ,, 32 παράδες· μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν τοὺς 25 παράδες εἰς 20 καὶ 5, καὶ λαμβάνομεν αὐτοὺς ἐκ τῶν Γροσίων 35 ,, 24 παράδων, ὡς συνήθως.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ μέγιςον Εἶδος τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ εἶναι σύνθετος Ἀριθμὸς, διαιροῦμεν αὐτὸν εἰς τοὺς συνθέτους Ἀριθμούς του, καὶ πολλαπλασιάζομεν εὐκολώτερον, ὡς ἀνωτέρω.

Πρόβλημα. Πολλαπλασιαζομένων Γροσίων 23 ,, 12 παράδων μὲ Γρόσια 39 ,, 30 παράδες, πόσον ἔσεται τὸ Παραγόμενον;

Λύσις.

Γρ. 23,, 12 πρ. × Γρ. 39,, πρ. 30

ἐκ τῶν Γρ. 39,, — { 8, 4	23	20, 10 } ἐκ τῶν Γρ. 23,, 12 παράδ.	
	117		
	78		
Γρόσ.	897,, —		
—	7,, 32	παράδες	
—	3,, 36	—	
—	11,, 26	—	
—	5,, 33	—	
γίνουσι Γρόσια	926,,	7 παράδες.	

Ἑρμηνεία. Πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὰ Γρόσ. 23,, 12 παράδες μὲ 39 (ὥσπερ νὰ μὴ ἦσαν παρόντες οἱ 30 παράδες, καὶ μάλιστα διὰ τοῦτο, ἐπειδὴ τὰ Γρόσ. 23,, - δὲν διαιροῦνται εἰς μοναδικοὺς Ἀριθμούς), ὅ ἐστι, πρότερον μὲ 23 Γρόσια, ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς 12 παράδες εἰς 8 καὶ 4, καὶ λαμβάνομεν αὐτοὺς ἐκ τῶν 39 Γρ. μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὰ Γρόσια 23,, 12 παράδες μὲ τοὺς 30 παράδες, τοῦτ' ἔστι, διαιροῦμεν τοὺς 30 παράδες εἰς 20 καὶ 10, καὶ λαμβάνομεν αὐτοὺς ἐκ τῶν Γροσίων 23,, 12 παράδων.

§. 162.

Ἡ Δοκιμὴ τῶν τοιούτων Πολλαπλασιασμῶν γίνεται, ὡς καὶ ἡ τῶν κοινῶν Πολλαπλασιασμῶν, διὰ τῆς Διαιρέσεως, ὅ ἐστι, διαιροῦμεν τὸ Κεφάλαιον μὲ ἕνα τῶν Πολλαπλασιαστῶν. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον προκύπτει ὁ Διαιρέτης ἐξ ὀνομασμένων μικτῶν Ἀριθμῶν, περὶ οὗ ἐρρέθη εἰς τὸν §. 121. Διὰ νὰ προκύψῃ λοιπὸν ὁ τοιοῦτος Διαιρέτης, πρέπει νὰ ἀναλυθῶσιν ὅλοι οἱ δοθέντες Ἀριθμοὶ εἰς τὴν ὀνομασίαν τοῦ παρευρισκομένου μικροτάτου Εἴδους, ἵνα ἔξωμεν Ἀριθμὸν ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ Εἴδους· διότι μὲ μικτοὺς Ἀριθμοὺς δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν. Θετέον· μᾶς ἐδόθη νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν Γροσίων 8,, 7 παράδων, ἐνταῦθα πρέπει νὰ ἀναλυθῶσιν ὅλα εἰς παράδες, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν μὲ τοὺς προκύψαντας 327 παράδας, ἐπειδὴ καὶ εἶναι ἀδύνατον διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἐν ταὐτῷ μὲ γρόσια καὶ παράδες, διότι, ὡς γνωςὸν, μόνον ὅμοιον εἰς ὅμοιον ἐμπεριέχεται· διὰ τοῦτο· εἰς τοιαύτας πτώσεις, πρέπει νὰ ἀναλυθῇ καὶ ὁ Διαιρετέος εἰς τὰς αὐτὰς ἰδίας Μονάδας, ἐξ ὧν σύγκειται καὶ ὁ Διαιρέτης, ὅ ἐςί, πρέπει νὰ φέρωμεν τοῦτε Διαιρέτην καὶ τὸν Διαιρετέον ὑπὸ ὁμοίαν Ὀνομασίαν.

Εἰς τὸ ἀπέναντι Παράδειγμα, ὅπου ἐπολλαπλασιάσαμεν τὰ Γρόσια 23,, 12 παράδες μὲ Γρόσια 39,, 30 παράδες, καὶ προέκυψε Κεφάλαιον Γρόσια 926,, 7 παράδες, γίνεται ἡ Δοκιμὴ, ὡς ἐπομένως.

Γρ΄. 23,, 12 πρ΄. εἰς Γρ΄. 926,, 7 πρ΄.

40	40	
932 εἰς . . .	37047	Γρ΄. 39,, 30 πρ΄.
	,,9087	
	,,699	
	40	
	27960	
	. . . .	
	0	

Ἑρμηνεία. Ἐπειδὴ ὁ ἐνταῦθα Διαιρέτης σύγκειται καὶ ἐκ παράδων, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσι τὰ Γρόσια μὲ 40, καὶ νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς παράδες, καὶ οὕτως ἀντὶ τοῦ Διαιρέτου ἐκ Γροσίων 23,, 12 παράδων, προκύπτει ἕτερος ἐξ 932 παράδων, ἐπειδὴ δὲ μόνον παράδες εἰς παράδες ἐμπεριέχονται, διὰ τοῦτο εἶναι ἑπόμενον νὰ ἀναλυθῇ καὶ ὁ ἐκ Γροσίων 926,, 7 παράδων συνιςάμενος Διαιρετέος ὡσαύτως εἰς παράδες.

§. 163.

Σχόλιον. Διατὶ εἰς τοιαύτας πτώσεις, καθὼς εἰς τὴν Δοκιμὴν τοῦ ὄπισθεν §., προκύπτουσι Γρόσια εἰς τὸ Παραγόμενον, καὶ διατὶ ἐφεξῆς ἀναλύεται τὸ Ὑπόλοιπον 699 παράδ. μὲ 40 εἰς παράδες, καίτοι παράδες ὄντες, τοῦτο λεχθήσεται ἐπομένως εἰς τὴν ἑρμηνείαν τῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν, ὅταν δηλαδὴ ὁ μεσαῖος ὅρος εἶναι Γρόσια· μ' ὅλον τοῦτο ἂς ὑποθέσωμεν καὶ ἐνταῦθα, ὅτι μᾶς ἐδόθησαν νὰ λογαριάσωμεν, φέρ' εἰπεῖν, πόσον κέρδος φέρουσι τὰ Γρόσ. 926,, 7 παράδ., ἐὰν Γρόσ. 23,, 12 παράδ. ἐκέρδεσαν 1 Γρόσι, ἡ ὁποία πρᾶξις ἔπρεπε νὰ γένῃ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, καὶ νὰ προκύψῃ Παραγόμενον Γρόσ. 39,, 30 παράδ. Πλὴν μὴ οὖσα αὕτη ἡ ἑρμηνεία ἐνεστῶσα, ἀλλὰ μέλλουσα, διὰ τοῦτο παραιτοῦμεν αὐτήν· ἐπειδὴ ὁ σκοπός μας ἀποβλέπει ἤδη, ἵνα δείξωμεν, πῶς δύναταί τις νὰ διαιρέσῃ μὲ ὠνομασμένους μικτοὺς Ἀριθμοὺς, διὰ νὰ δυνάμεθα ἐν τῷ δέοντι καιρῷ νὰ πράττωμεν ταύτην τὴν πρακτικὴν Χρῆσιν.

Ἐν γένει οὕτως ἐννοητέον τὸ, πολλαπλασιάζειν καὶ διαιρεῖν μὲ ἕνα ὠνομασμένον Ἀριθμὸν, ὅτι μέλλει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ νὰ διαιρέσωμεν μὲ ἐκεῖνον τὸν (κυρίως ἀνώνυμον) Ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει, ποσάκις πρόκειται τοῦτο ἢ ἐκεῖνο τὸ ὠνομασμένον Ἀντικείμενον· χωρὶς ὅμως νὰ ἔχῃ τινὰ ὀνομασίαν καὶ ὁ Ἀριθμὸς, μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν, ἢ διαιροῦμεν. Παρ. χ. ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν πόσα πληρωθήσονται διὰ 36 πήχας, ἐὰν ἑκάστη πήχη τιμᾶται διὰ Γρόσ. 6,, —· ἐνταῦθα μᾶς διδάσκει ὁ ὀρθὸς λόγος, ὅτι ἔχομεν τὸ Ζητούμενον ἐκ 36 κις ἀνὰ Γρόσ. 6,, —, διὸ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 36 πήχας μὲ Γρόσ. 6,, —, ὅ ἐστι, τὸν Ἀριθμὸν τῶν Γροσίων μὲ τὸν Ἀριθμὸν τῶν Πηχῶν· οὐδαμῶς ὅμως γίνεται οὕτω, καθὼς ἐπιπολαίως θεωρούμενον φαίνεται, ὅτι πολλαπλασιάζομεν Γρόσια μὲ Πήχας· ἐπειδὴ διὰ ν' αὐξηνθῇ μία ὀνομασία διὰ μιᾶς ἑτέρας ὀνομασίας εἶναι τοσοῦτον ἀκατάληπτον, ὅσον εἶναι μηδὲν τοῦ νὰ διαιρεθῇ μία ὀνομασία διὰ μιᾶς ἑτέρας, τὸ ὁποῖον γίνεται, ὅταν δοθῇ καὶ ἡ ποσότης τοῦ Ἀντικειμένου. Ὅθεν ὅταν εἰπῶμεν, μένοντες ἤδη εἰς τὸ ἀπέναντι Παράδειγμα, ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 36 πήχας μὲ Γρόσ. 6,, — δηλοῖ, ὅτι τὰ Γρόσ. 6,, — μέλλει ν' αὐξηνθῶσι 36 κις, διότι αἱ Πῆχαι, ὧν τὴν ποσότητα εἰς Γρόσια ζητοῦμεν, εἰσὶ 36· λοιπὸν πολλαπλασιάζομεν, ὡς ἐῤῥέθη, μὲ ἐκεῖνον τὸν ἀδιόριστον Ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει, ποσάκις πρόκειται τὸ ὠνομασμένον Ἀντικείμενον, τοῦ ὁποίου τὴν τίμησιν ζητοῦμεν. Ὁμοίως πράττομεν καὶ εἰς τὸν ἀνάπαλιν τρόπον, ὅταν εἶναι ὁ λόγος περὶ διαιρεῖν μὲ ἕνα ὠνομασμένον Ἀριθμόν· φέρ' εἰπεῖν, μᾶς εἶναι γνωστὸν, ὅτι δὶ 7. πήχας ἐπληρώθησαν Γρόσ. 42,, —, καὶ θέλομεν νὰ ἠξεύρωμεν πόσα τιμᾶται μία πήχη ἐξ αὐτῶν, τότε μᾶς διδάσκει ὁ ὀρθὸς λόγος, ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν Ποσότητα τῶν Χρημάτων εἰς 7 ὅμοια μέρη, ὅ ἐστι, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 7, δηλαδὴ, δὶ ἐκείνου τοῦ ἀριθμοῦ (ἄνευ ὀνομασίας), ὅστις δεικνύει, ποσάκις πρόκειται τὸ ὠνομασμένον Ἀντικείμενον, ὅπερ ἐνταῦθα εἰσὶν αἱ Πῆχαι.

Ἐν γένει ταὐτὸν ἐννοητέον καὶ εἰς τοὺς ὠνομασμένους μικτοὺς Ἀριθμοὺς, ὅτι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν, ἢ νὰ διαιρέσωμεν, φέρ' εἰπεῖν, μὲ Γρόσ. 4,, 15 παράδ., μὲ ὀκάδ. 5,, 12 δράμια, ἢ μὲ ἄλλους ὁποιουσδήποτε μικτοὺς Ἀριθμοὺς, μηδὲν ἄλλο δηλοῖ, ἀλλ' ὅτι πολλαπλασιάζομεν ἢ διαιροῦμεν μὲ ἕνα τοιοῦτον Ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει, πόσα Γρόσια ἢ Ὀκάδες πρόκεινται, ἐφ' ὅσον οἱ παρευρισκόμενοι Παράδες θεωροῦνται ὡς μέρη Γροσίου, καὶ τὰ παρευρισκόμενα Δράμια ὡς μέρη Ὀκάδος· ἢ πόσοι παράδες, ἢ δράμια πρόκεινται, ἐφ' ὅσον θεωροῦνται καὶ τὰ Γρόσια ὡς μία Ποσότης Παράδων, καὶ αἱ Ὀκάδες ὡς μία Ποσότης Δραμίων, χωρὶς ὁ Πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ Διαιρέτης νὰ ἔχῃ δι' ἑαυτὸν Γροσίων, Παράδων, Ὀκάδων, Δραμίων, ἢ ἄλλην ὁποιανδήποτε Ὀνομασίαν.

§. 164.

Πρὸς περισσοτέραν σαφήνειαν, ἰδοὺ καὶ τοιαῦτα Παραδείγματα.

Α'.

Τὰ Γρ'.6,,16 πρ'.,,2 ἄσπ., νὰ διαιρ'. τὰ Γρ'.60,,38 πρ'.,,1 ἄσπ.

```
   40 . .   :                    40 . .     :
  ------                        -------
  256       :                   2438        :
    3 . . . . :                    3 . . . . :
  ------                        -------
  7768 . . . . . . . . . . . .  7315 | Γρ'. 9,,20 πρ'.
                                ,,385
                                   40
                                -------
                                15400
                                . . .
                                    0
```

Β'.

Τὰ Γρ'. 15,,-2 ἄσπρα, νὰ διαιρ'. τὰ Γρ'. 14416,,-

```
      40   :                       40
  ---------                   ---------
     600   :                   576640
       3 . . :                      3
  ---------                   ---------
    1802 εἰς . . . . . . .  1729920 | 960 Παλ.
                             ,,10812
                              . . . . .
                                     0
```

Ἐπειδὴ εἰς τὸν ἀπέναντι Διαιρέτην εὑρίσκονται καὶ ἄσπρα, διὰ τοῦτο πρέπει ὅλος ὁ Διαιρέτης νὰ ἀναλυθῇ εἰς Ἄσπρα, ὡσαύτως καὶ ὁ Διαιρετέος, καίτοι συνιςάμενος μόνον ἐκ Γροσίων.

Σημείωσις. Τὸ Πηλίκον 960 δηλοῖ, ὅτι ὁ Διαιρέτης ἐμπεριέχεται εἰς τὸν Διαιρετέον 960 φοραῖς· τί παριςάνουσιν ὅμως τὰ 960, κρέμαται ἐκ τῆς ἐρωτήσεως τοῦ Προβλήματος, ἂν αὐτὰ μέλλωσι νὰ θεωρηθῶσι διὰ Πήχας, Ὀκάδας, Γρόσια, ἢ ὅ,τι ἄλλο, καὶ οὕτω νὰ ἀναλυθῇ τὸ τυχὸν Ὑπόλοιπον μὲ 40 εἰς παράδες, ἢ μὲ 400 εἰς δράμια κτλ. Ταῦτα πάντα θέλει πληροφορηθῶμεν ἔπειτα, ὅπου μέλλουσι νὰ ἐξεργασθῶσι τοιαῦτα Παραδείγματα.

§. 165.

Σχόλιον. Ὅλοι οἱ τοιοῦτοι Πολλαπλασιασμοὶ καὶ Διαιρέσεις, μάλιςα δὲ ἡ τελευταία, ἐκτελοῦνται πολλάκις ἔτι κατὰ διαφόρους εὐκολωτέρους καὶ συντομωτέρους τρόπους, περὶ ὧν ῥηθήσεται τότε, ἀφ' οὗ πρότερον εἰπῶμεν τὰ ἀναγκαῖα περὶ τῶν κλασμάτων. Περὶ τοῦ πόσου τιμᾶται ὅμως, καὶ πῶς ἐκφωνεῖται τὸ Ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται πλέον νὰ ἀναλυθῇ, ἂς ἴδωσιν οἱ Ἀναγνῶςαι εἰς τὸ ἑπόμενον Μέρος, ὅπου πραγματεύονται τὰ τοιαῦτα.

ΚΕΦ. Γ΄.

Περὶ λογαριασμῶν χρημάτων κατὰ τοὺς τρόπους τοῦ προτέρου Κεφαλαίου.

§. 166.

Πρόβλημα. Πόσα Γρόσια ςαίνουσι 577 καισσαροβασιλικὰ Τάλληρα (χαραγρόσια) πρὸς Γρόσ. 5,,20 παράδ. τὸ ἕν;

Λύσις κατὰ τὸν συνήθη τρόπον.

577 × 5 Γρ΄. 20 πρ.

πολλαπλασιασθήτωσαν πρῶτον μὲ . . . 5

Γρ΄. 2885

καὶ διὰ τὰ 20 πρ΄. τὰ ½ ἐκ τῶν 577. — 288,, 20 παράδ.

ςαίνουσι Γρ΄. 3173,, 20 παράδ.

Πλέον εὐκόλως καὶ συντόμως λογαριάζεται μία Ποσότης Ταλλήρων ἀνὰ Γρόσ. 5,,20 παράδ., ὡς ἀκολούθως· ἤγουν, πολλαπλασιάζομεν τὰ δοθέντα Τάλληρα μὲ 11 (ὡς §. 88.), καὶ διαιροῦμεν τὸ Παραγόμενον διὰ τῶν 2, ὡς.

577

11

2 εἰς 6347

ςαίνουσι Γρ΄. 3173,, 20 παράδες, ὡς ἀνωτέρω.

Δεῖξις. Ἐπειδὴ ἕκαςον Τάλληρον τιμᾶται 5 καὶ ἥμισυ Γρόσια, ἤτοι 11 ἥμισυ Γρόσια, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὰ Τάλληρα μὲ 11, καὶ ἀναλύομεν αὐτὰ εἰς ἥμισυ Γρόσια, τὰ ὁποῖα διαιροῦμεν ἔπειτα διὰ τῶν 2, ἐπειδὴ τὰ 6347 εἰσὶ τόσα ἥμισυ Γρόσια, καὶ οὕτω προκύπτουσιν ἀκέραια Γρόσια.

Δοκιμή.

Η' ἐπὶ τούτου Δοκιμὴ (εἴτουν ἡ ἀντίςροφος Πτῶσις, ὃ ἐςί, πῶς νὰ μεταφέρωμεν μίαν ὁποιανδήποτε Ποσότητα Γροσίων εἰς Τάλληρα ἀνὰ Γρόσ. 5,, 20 παράδ.) γίνεται, ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν τὰ Γρόσια μὲ 2, καὶ διαιρέσωμεν τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν διὰ τῶν 11, ὅπερ πηγάζει ἐκ τῆς ἀνωτέρω αἰτίας· διότι πολλαπλασιαζόμενα τὰ Γρόσια μὲ 2, ἀναλύονται εἰς ἥμισυ Γρόσια, ἐξ ὧν 11 ποιοῦσιν ἓν Τάλληρον· ἂς προσέξωμεν ὅμως, ἵνα εἰς τὸ Κεφάλαιον τῶν 2 ληφθῇ τὸ ἥμισυ Γρόσι, τὸ ὁποῖον τυχὸν νὰ ἐμπεριέχωσιν οἱ παρευρισκόμενοι Παράδες. Τὰ πρὸ ὀλίγου προκύψαντα Γρόσ. 3173,, 20 παράδ. μεταφέρονται λοιπὸν εἰς Τάλληρα, ὡς ἑπομένως.

Γρόσ. 3173,, 20 παράδες
2
11 εἰς 6347 | σαίνουσι Τάλληρα 577.
,,84
,,77
..

§. 167.

Τὰ Φλωρία μετροῦνται ἀνὰ 5 εἰς τὴν πληρωμήν, ἔπειτα πολλαπλασιάζονται τά, ὁσάκις ἐμετρήθησαν ἀνὰ 5 (ἤγουν τὰ συνήθως λεγόμενα Χέρια) μὲ 5, καὶ προκύπτει ἡ Ποσότης τῶν Φλωρίων, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιάζονται ὕςερον μὲ τὴν τρέχουσαν τιμήντων, καὶ προκύπτει τὸ Πηλίκον εἰς ὁποιανδήποτε Μονέδα λογαριασθῶσιν. Ε'νταῦθα ὑποθέτομεν, ὅτι εἰς τὴν Τουρκίαν τιμᾶται τὸ καισσατοβασιλικὸν Φλωρίον διὰ Γρόσια 12,, —· ἄρα ἓν μέτρον 5 Φλωρίων σαίνει Γρόσια 60,, —· ὅθεν χωρὶς νὰ ἀναλυθῶσι τὰ μέτρα εἰς Φλωρία, καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιασθῇ ἡ Ποσότης τῶν Φλωρίων μὲ 12 Γρόσια, ἂς πολλαπλασιασθῶσι τὰ μέτρα ἀμέσως μὲ 60, καὶ προκύπτουσι τὰ ζητούμενα Γρόσια. Φὲρ εἰπεῖν, ἐμετρήθησαν 77 μέτρα ἀνὰ 5 Φλωρία, καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν πόσα Γρόσια ςαίνουσι, λοιπόν.

77 μέτρα.
μὲ . . 60

ςαίνουσι Γρόσ 4620 ,, —

Κατὰ τὸν κοινὸν τρόπον.

77 μέτρα
μὲ . . 5

φέρουσι Φλωρ΄. 385
μὲ . . 12

770
385

ςαίνουσι Γρόσ. 4620 ,, —

Δοκιμή.

Ἐὰν ἡ πρᾶξις ἔγινεν ὀρθῶς, διαίρεσεν τὰ Γρόσ. 4620 ,, — διὰ τῶν 60, καὶ πρέπει νὰ προκύψωσι 77, μέτρα ἢ διὰ τῶν 12, καὶ νὰ προκύψωσι Φλωρία 385, ὡς.

6(0 εἰς Γρ΄. 462(0 ,,42 ..	77 Μέτρα.	12 εἰς Γρ΄. 4620 102 ,,60 ..	385 Φλωρία.

§. 168.

Σουφερίνια νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς Φιορίνια.

Τὸ Σουφερίνι (μαλαγματένιον Νόμισμα) τιμᾶται διὰ καισσαροβασιλικὰ Φιορ΄. 13 ,, 20 κρ., λοιπὸν χωρὶς τινὲς προοδηγίας, δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν ἑκάστην Ποσότητα Σουφερινίων εἰς Φιορίνια, ὅ ἐστι, πολλαπλασιάζομεν τὴν δοθεῖσαν Ποσότητα μὲ 13, ἔπειτα διὰ τὰ 20 κραϊτζάρια λαμβάνομεν τὸ τρίτον ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν Σουφερινίων, καὶ προκύπτει τὸ Ζητούμενον· αὕτη ἡ πρᾶξις ὅμως γίνεται συντομωτέρως κατὰ τὸν ἀκόλουθον Κανόνα.

Προσθέττομεν ἐν τῷ τέλει τῆς Ποσότητος τῶν δοθέντων Σουφερινίων ἓν μηδενικὸν δεξιῶς, καὶ λαμβάνομεν τὸ τρίτον ἐκ ταύτης τῆς Ποσότητος. Οἷον· 87 Σουφερίνια νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς Φιορίνια, προσκολλοῦμεν εἰς τὰ 87 ἓν 0, καὶ προκύπτουσιν 870, ἐξ ὧν τὸ τρίτον στάνει 290, ὁμοῦ δὲ Φιορ. 1160,,—, ὡς.

870
290
————

Ἑρμηνεία. Δοθείσης μιᾶς Ποσότητος Σουφερίνιων, ἵνα ἀναστάνωσι φιορ. 1160,,— λυθῇ εἰς Φοιρίνια, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ Φιορ. 13,,20 κρ., προσκολλοῦμεν τῇ Ποσότητι ἓν 0, ὅπερ δηλοῖ, ὅτι ἐπολλαπλασιάσθησαν μὲ 10 Φιορίνια (ὡς §· 85 καὶ 86.), διὰ δὲ τὰ ὑπόλοιπα Φιορίνια 3,,20 κρ. (ἅτινα εἰσὶ τὸ τρίτον ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 10 Φιορινίων· διότι Φιορ. 3,,20 κρ. ποιοῦσι 10 Εἰκοσάρια· 10 Φιορ. ὅμως ποιοῦσι 30 Εἰκοσάρια.) λαμβάνομεν τὸ τρίτον ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 10 Φιορινίων, ὅ ἐστι, διαιροῦμεν τὰ 870 διὰ τῶν 3, καὶ οὕτω προκύπτουσι τὰ ζητούμενα Φιορίνια.

Δοκιμή.

Ἡ ἐπὶ τούτου Δοκιμὴ (ὅ ἐστι, πῶς νὰ μεταφέρωμεν τὰ Φιορίνια εἰς Σουφερίνια) γίνεται, ἀφ' οὗ ἀναλύσωμεν τὰ Φιορίνια εἰς Εἰκοσάρια μὲ 3, καὶ διαιρέσωμεν τὸ κεφάλαιον διὰ τῶν 40· διότι 40 Εἰκοσάρια ποιοῦσιν ἓν Σουφερίνι. Ἰδοὺ ἡ δοκιμὴ τοῦ ὄπισθεν Ὑποδείγματος.

Φιορ'. 1160,, —
3
4(0 εἰς 348(0 Εἰκοσάρια.
ςαίνουσιν. . 87 Σουφερίνια.

§. 169.

Κανὼν τοῦ ἀναλύειν ἥμισυ Σουφερίνια εἰς Φιορίνια.

Οὗτος ὁ Κανὼν διαφέρει ἐκ τοῦ τῶν ἀκεραίων Σουφερινίων μόνον κατὰ τοῦτο, ἐπειδὴ εἰς τὰ ἥμισυ Σουφερίνια ἀφαιροῦμεν τὸ τρίτον, τὸ ὁποῖον ἀθροίζομεν εἰς τὰ Ἀκέραια. Παρ. χ. νὰ ἀναλυθῶσιν 87 Ἡμισουφερίνια εἰς Φιορίνια, προσκολλοῦμεν τοῖς 87 ἓν 0, καὶ

φέρουσιν. . . 870, ἐξ ὧν ἀφαιροῦμεν τὸ τρίτον,
ἤτοι . . . 290, καὶ
ςαίνουσι Φιορ'. 580,, —

Ἑρμηνεία. Κυρίως ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ Φιορ'. 6,, 40 κρ., ἅτινα εἰσὶν ἡ καθ' αὐτὸ τιμὴ ἑνὸς Ἡμισουφερινίου· προσθέσαντες ὅμως ἓν μηδενικὸν, ἄρα ἐπολλαπλασιάσθησαν μὲ 10 Φιορ'., ὅ ἐςὶ μὲ Φιορ'. 3,, 20 κρ. περισσότερον· ὅθεν ὄντα τὰ Φιορ'. 3,, 20 κρ. τὸ τρίτον μέρος τῶν 10 Φιορινίων, διὰ τοῦτο ἀφαιροῦμεν αὐτὰ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 10 Φιορινίων, καὶ προκύπτει τὸ ζητούμενον.

Δοκιμή.

Ἡ Δοκιμὴ τῶν Ἡμισουφερινίων γίνεται, ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων Σουφερινίων· πλὴν ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 40, διαιροῦμεν μόνον διὰ τῶν 20, διότι 20 Εἰκοσάρια, ςαίνουσι Φιορίνια 6 „ 40 κραϊτζάρια, ὡς.

Φιορ. 580 „ —

3

2|0 εἰς 164|0 Εἰκοσάρια.

ςαίνουσιν. 87 Ἡμισουφερίνια.

§. 170.

Σχόλιον. Περιττὸν εἶναι πάντη ἵνα εἴπωμεν, ὅτι οἱ τοιοῦτοι Κανόνες καὶ συντομίαι εἰσὶν ἐπὶ τοσοῦτον εὐμεταχείριςοι καὶ ἀμετάβλητοι, ἐφ' ὅσον ἡ τιμὴ τῶν Νομισμάτων μένει ἡ αὐτὴ, ὡς εἰς τὰ προτεθέντα Ὑποδείγματα ἐδείχθη· διότι ἐὰν μεταβληθῇ ἡ τιμὴ, ὡς συμβαίνει πολλάκις, τότε μένουσιν ἄκυροι καὶ οἱ δοθέντες Κανόνες, καὶ ἑπομένως πρέπει ἢ νὰ μεταχειρισθῶμεν τὴν κοινὴν ἀναλυτικὴν Μέθοδον, ἢ νὰ ἐφεύρωμεν ἑτέρας Συντομίας, τὸ ὁποῖον διὰ τῆς βοηθείας τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων, δὲν εἶναι δύσκολον ποσῶς. Θετέον, ὅτι ἡ Σπέτζια (ἀσιμένιον Νόμισμα) τῆς Σαξωνίας, ἐτιμᾶτο εἰς τὴν Τουρκίαν διὰ Γρόσσια 5 „ —, ἔπειτα ἠλαττώθη εἰς τὰ Γρόσια 4 „ 32 παράδες. Ἐνταῦθα ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς 32 παράδ. εἰς μέρη Γροσίου, καὶ νὰ λάβωμεν αὐτὰ ἐκ τῆς δοθείσης Ποσότητος ὡς σύνηθες, λαμβάνομεν τὸ πέμπτον μέρος ἐκ τῆς προκυψάσης Ποσότητος τῶν 4 Γροσίων, ἐπειδὴ οἱ 32 παράδ. ςαίνουσιν ἐξ ἴσου τὸ πέμπτον μέρος ἐκ τῶν 4 Γρ. ὅ ἐςὶν, ἐκ τῶν 160 παράδων. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δύναταί τις νὰ ἐφεύρῃ τὸν γενικὸν Κανόνα σχεδὸν δι' ἕκαςον Νόμισμα ἐπάνω εἰς τὴν διορισθεῖσαν τιμήν του· διὰ τοῦτο λοιπὸν παρετρέξαμεν καὶ ἑτέρων Νομισμάτων τὰς Συντομίας, ἐπειδὴ, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, οἱ τοιοῦτοι Κανόνες εἰσὶν ἐπὶ τοσοῦτον πρὸς χρῆσιν, ἐφ' ὅσον διαρκοῦσιν αἱ διορισθεῖσαι τιμαὶ τῶν Νομισμάτων.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῆς ἐν γένει δηλώσεως καὶ φύσεως τῶν Κλασμάτων.

ΚΕΦ. Α'.

ΤΙ ΕΣΤΙ ΚΛΑΣΜΑ.

§. 171.

Ὑπὸ τὴν λέξιν Κλάσμα ἐννοοῦμεν ἕν, ἢ περισσότερα μέρη ἀφ' ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀκεραίου Πράγματος, τὸ ὁποῖον διηρέθη εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη, ἄρα Κλάσμα δὲν ὑπάρχει καθ' αὐτὸ, ἀλλὰ παράγεται ἐξ ἀκεραίου Ἀριθμοῦ. Ἀκέραιος δ' ἀριθμὸς λέγεται ἐκεῖνος, ὅστις ἅπαξ, ἢ πλεονάκις ἐμπεριέχει τὴν μονάδα· φέρ' εἰπεῖν, 6 Γρόσια εἶναι ἀκέραιος Ἀριθμὸς, περὶ οὗ εἴρηται ἐν ἀρχῇ τοῦ Α'. Μέρους.

Εἰ μὲν οὖν ἓν ὁποιονδήποτε Πρᾶγμα διαιρεθῇ εἰς ὁσαδήποτε μέρη, τότε αὐτὰ τὰ μέρη εἰσὶ μόνον Κλασματικὰ μέρη τοῦ Ἀκεραίου των· διὰ τοῦτο λοιπὸν ἐκεῖνοι οἱ Ἀριθμοὶ, δι' ὧν ἐκφωνοῦμεν αὐτὰ τὰ μέρη, Κλασματικοὶ Ἀριθμοὶ, ἢ καταχρηστικῶς, Κλάσματα καλοῦνται.

§. 172.

Ἕκαςος ἐννοεῖ, ὅτι ἐξ ἑνὸς διαιρεθέντος Πράγματος δὲν προκύπτουσι περισσότερα μέρη, παρὰ τὰ, εἰς ὅσα διῃρέθη. Γςέον, ὅτι ἕνας Ἀριθμὸς διῃρέθη εἰς 2, 5, 7 καὶ εἰς ἐφεξῆς ὅμοια μέρη· ἄρα αὐτὸς ὁ διαιρεθεὶς Ἀριθμὸς δὲν ἐμπεριέχει περισσότερα τοιαῦτα μέρη, εἰμὴ 2, 5, ἢ 7, τὰ ὁποῖα ἀθροιζόμενα ὁμοῦ, δίδουσιν αὖθις τὸν διαιρεθέντα Ἀριθμὸν, ἤτοι τὸ Ἀκέραιον, ὅπερ καὶ ἐκ τῶν πρώτων ἰδιῶν τῆς Διαιρέσεως φανερὸν ἐςω.

§. 173.

Ἐὰν λοιπὸν ἐξ ἑνὸς Πράγματος, τὸ ὁποῖον διῃρέθη εἰς 2 μέρη, ληφθῇ ἐξ αὐτων τὸ ἓν μέρος, εἶναι καὶ λέγεται τὸ ἥμισυ, εἰς 3 μέρη, τὸ τρίτον, εἰς 4 μέρη, τὸ τέταρτον, καὶ ἐφεξῆς· ἄρα ἕπεται ἐκ τῶν προλεχθέντων, ὅτι ἐξ οὐδενὸς διῃρεθέντος Πράγματος δὲν δύνανται νὰ προκύψωσι περισσότερα μέρη, εἰμὴ 2 ἥμισυ, 3 τρίτα, 4 τέταρτα, καὶ ἐφεξῆς· διότι αἱ λέξεις ἥμισυ, τρίτον, τέταρτον κτλ. δηλοῦσι κυρίως, ἓν ἥμισυ μέρος, ἓν τρίτον μέρος, ἓν τέταρτον μέρος ἑνὸς Πράγματος, τὸ ὁποῖον διῃρέθη εἰς 2, 3, 4 καὶ εἰς ἐφεξῆς ὅμοια μέρη.

§. 174.

Ὅθεν ἐκ τῶν μερῶν ἑνὸς διῃρεθέντος Πράγματος δυνάμεθα λαβεῖν ἓν, ἢ περισσότερα μέρη, δι' ἣν αἰτίαν, πρὸς δήλωσιν τῶν Κλασμάτων, ἐπιζητοῦνται δύο Ἀριθμοί· ὁ μὲν διὰ τὴν Ποσότητα τῶν μερῶν τοῦ Κλάσματος, ὁ δὲ διὰ τὴν Ποσότητα τῶν μερῶν τοῦ διαιρεθέντος Ἀκεραίου, οἵτινες χωρίζονται διὰ μιᾶς μεσολαβούσης γραμμῆς οὕτω· $\frac{3}{5}$. $\frac{7}{8}$ κτλ. Ἐπάνω τῆς γραμμῆς τίθεται ὁ Ἀριθμὸς, ἢ οἱ Ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους ἐλάβομεν ἐξ ἑνὸς διαιρεθέντος Πράγματος, ὑποκάτω δὲ τῆς γραμμῆς τίθενται οἱ Ἀριθμοί, εἰς οὓς διῃρέθη τὸ Ἀκέραιον. Ὁ ἐπὶ τῆς γραμμῆς Ἀριθμὸς ὀνομάζεται Ἀριθμητής, ἐπειδὴ ἐπαριθμεῖ πόσα μέρη ἐλήφθησαν ἐκ τοῦ Ἀκεραίου· ὁ δὲ ὑπὸ τῆς γραμμῆς, καλεῖται Παρονομαςὴς, ἐπειδὴ φανερώνει εἰς πόσα ἴσα μέρη διῃρέθη τὸ Ἀκέραιον. Αἱ Παραφράσεις λοιπὸν $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ κτλ. δηλοῦσιν, ὅτι 3 μέρη, ἐξ ὧν 5 συνιςῶσι τὸ Ἀκέραιον αὐτῶν· 5 μέρη, ἐξ ὧν 6, 7 μέρη, ἐξ ὧν 8 συνιςῶσιν ὡσαύτως τὸ Ἀκέραιον αὐτῶν, καὶ ἐφεξῆς.

§. 175.

Κυρίως αἱ Παραφράσεις $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$ καὶ ἐφεξῆς, εἰσὶ διαιρέσεως σημεῖα, δηλοῦσι δὲ, 2 διαιρεθήτωσαν διὰ 3· 4 διὰ 5· 7 δὶ 8 κτλ. ἐπειδὴ ὅμως τὰ 2 διαιρούμενα διὰ 3 πρέπει νὰ προκύψωσι 2 τρίτα· (διότι διαιρεθέντος 1 εἰς 3 μέρη, δίδει εἰς ἕκαςον μέρος 1 τρίτον, διαιρούμενα δὲ τὰ 2 εἰς 3 μέρη, δίδουσι 2 τρίτα), διὰ τοῦτο ἡ Παράφρασις $\frac{2}{3}$, ἥτις δηλοῖ, 2 διαιρεθήτωσαν διὰ 3, πρέπει ἀναγκαίως νὰ φανερώνῃ δύο τρίτα. Ὅθεν ἅπασαι αἱ Παραφράσεις τῶν Κλασμάτων, φέρ' εἰπεῖν $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, τὰ ὁποῖα ἐκφωνοῦμεν 5 ἕκτα, 3 ἕβδομα, δηλοῦσιν ἐξηκριβωμένως, 5 διαιρεθήτωσαν δὶ 6· 3 δὶ 7, καὶ ἐφεξῆς, ἐξ οὗ προκύπτει ἡ ἀντίςροφος πτῶσις, ὅτι τὸ Πηλίκον τῶν 6 εἰς 5, τῶν 7 εἰς 3, εἶναι $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, καὶ ἐφεξῆς.

§. 176.

Γενικῶς ὁμιλοῦντες λέγομεν, ὅτι καὶ τὸ Πηλίκον, τὸ ὁποῖον προκύπτῃ ἀπὸ ἀκεραίων Ἀριθμῶν, θεωρεῖται ὡς Κλάσμα τοῦ διαιρεθέντος Ἀριθμοῦ, ἐξ οὗ προέκυψε, διότι ἑκάςη διαίρεσις διαχωρίζει τὸν Διαιρετέον· ἄρα τὸ ἐξ αὐτοῦ προκύπτον Πηλίκον εἶναι Κλάσμα. Παρ. χ. διαιρούμενα 10 διὰ τῶν 5, δίδουσι μὲν 2 Ἀκέραια διὰ Πηλίκον, τὰ ὁποῖα μ' ὅλον τοῦτο παραβαλλόμενα ὡς πρὸς τὴν ποσότητα τοῦ διαιρεθέντος Ἀριθμοῦ, ὅ ἐςὶ τὰ 10, εἰσὶν ἓν Κλασματικὸν μέρος τῶν αὐτῶν. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς ταύτην τὴν πτῶσιν διαχωρίζεται μόνον ἡ ποσότης, καὶ οὐχὶ τὸ ἴδιον Πρᾶγμα, καὶ ἑπομένως δύναται νὰ ἐκφωνηθῇ τὸ Πηλίκον δι' ἀκεραίου Ἀριθμοῦ, διὰ τοῦτο λέγεται Κλάσματος μορφὴ $\frac{10}{8}$, φὲρ' εἰπεῖν νόθον Κλάσμα.

§. 177.

Πᾶν Κλάσμα ἔχει τὴν αὐτὴν φύσιν καὶ ὀνομασίαν, ἣν ἔχει τὸ Ἀκέραιον, ἐξ οὗ παρήχθη, καὶ δὲν δηλοῖ ἄλλο, εἰμὴ ἕν, ἢ περισσότερα μέρη τοῦ Ἀκεραίου, τὸ ὁποῖον διηρέθη εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη. Θὲς, ὅτι ἓν Γρόσι διηρέθη εἰς δέκα ἴσα μέρη, ἐξ ὧν ἐλήφθησαν ἑπτά· αὐτὰ ὡς πρὸς τὸ ὅλον Γρόσι εἶναι Κλάσμα, καὶ ἔχει τὴν αὐτὴν φύσιν καὶ ὀνομασίαν τοῦ Γροσίου, ἐπειδὴ παρ' αὐτοῦ ἔλαβε τὴν ὕπαρξιν. Ἡ φύσις τοῦ Ἑνὸς εἶναι τὸ Νόμισμα, ἡ δ' ὀνομασία τὸ Γρόσι. ἄρα καὶ τὰ ἐξ αὐτοῦ ληφθέντα ἑπτὰ μέρη ἔχουσι τὴν αὐτὴν φύσιν καὶ ὀνομασίαν, εἴτουν $\frac{7}{10}$ ἑπτὰ δέκατα Γροσίου.

§. 178.

Ἡ τῶν κλασμάτων ἀνάγνωσις ἄρχεται ἐκ τοῦ Ἀριθμητοῦ, ἐπειδὴ αὐτὸς εἶναι ὁ καθ' αὐτὸ Ἀριθμὸς τοῦ Κλάσματος, ὕςερον δὲ ἕπεται καὶ ἡ τοῦ Παρονομαςοῦ, ὅςτις δεικνύει τὴν ὀνομασίαν τοῦ διαιρεθέντος Ἀκεραίου. Οἷον $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ κτλ., ἤτοι τρία τέταρτα, πέντε ἕκτα, ἑπτὰ ὄγδοα, ὅ ἐςὶ, 3 μέρη, ἐξ ὧν 4 ποιοῦσι τὸ Ἀκέραιον αὐτῶν· 5 μέρη, ἐξ ὧν 6. 7 μέρη, ἐξ ὧν 8 ςαίνουσι τὸ Ὅλον, καὶ ἐφεξῆς.

ΚΕΦ. Β'.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

§. 179.

Τὰ Κλάσματα διαροῦνται εἰς τρεῖς τάξεις, τοῦτ' ἔςιν, εἰς Κύρια, Νόθα, καὶ Μικτά.

Κύρια Κλάσματα εἰσὶ καὶ λέγονται ἐκεῖνα, ὧν οἱ Παρονομαςαὶ εἰσὶ μεγαλήτεροι τῶν Ἀριθμητῶν· οἷον $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{12}{13}$, καὶ τὰ τούτοις ὅμοια, ἐπειδὴ ἡ μοιρασία δὲν δύναται νὰ γίνῃ ἄλλως, εἰμὴ διὰ τῆς διαιρέσεως αὐτῆς τῆς ἰδίας Μονάδος, ὅθεν τὸ Πηλίκον εἶναι καθ' αὐτὸ Κλάσμα.

Νόθα Κλάσματα ὀνομάζονται ἐκεῖνα, ὧν οἱ Παρονομαςαὶ ἐμπεριέχονται εἰς τοὺς Ἀριθμητὰς αὐτῶν ἅπαξ ἢ πλεονάκις ἄνευ ὑπολοίπου, ὡς. $\frac{8}{4}$, $\frac{20}{5}$, $\frac{48}{8}$, καὶ τὰ τούτοις ὅμοια, διότι, ὡς ἐρρέθη, μόνον ἡ ποσότης διαιρεῖται, ἀλλ' οὐχ' ἡ ἰδία Μονάς.

Μικτὰ Κλάσματα εἰσὶ τελευταῖον ἐκεῖνα, ὧν οἱ Παρονομαςαὶ διαιροῦσι μὲν τοὺς Ἀριθμητὰς αὐτῶν, ἀλλ' οὐκ ἐξ ἴσου· ἄρα εἰσὶ συνθεμένα ἐξ Ἀκεραίου, καὶ διῃρημένου Ἀριθμοῦ, ὡς. $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{15}{7}$ κτλ. ἅτινα, ἐὰν διαιρεθῶσι διὰ τῶν Παρανομαςῶν αὐτῶν, δίδουσι πηλίκον $1\frac{1}{8}$, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{7}$, ὅ ἐςί, μέρος Ἀκέραια, καὶ μέρος Κλάσμα.

§. 180.

Α'. Σχόλιον. Τὸ νόθον κλάσμα ἢ καθαρὸν εἶναι ἢ μικτὸν, ἐμφανίζεται μόνον πρὸς τὸ παρὸν, καὶ ἄχρις ὀλίγου διά τινα ὠφέλειαν ἐν τῷ λογαριάζειν· ἅμα δὲ τοῦ σκοποῦ ἐκτελεσθέντος, δι' ὃν ἐτέθη, πρέπει τῷ ὄντι νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ, ἵνα προκύψωσι τὰ ἐν αὐτῷ περιεχόμενα Ἀκέραια· διότι καίπερ ἐννοοῦμεν διὰ τοῦ νοὸς, ὅτι διαιρούμενον τὸ πηλίκον, φερ' εἰπεῖν, 25 διὰ τῶν 5, διὰ τῶν 6, κτλ. δίδουσιν $\frac{25}{5}$, $\frac{25}{6}$, μ' ὅλον τοῦτο πληροφορούμεθα σαφέστερον, ἐὰν τῷ ὄντι διαιρέσωμεν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ, καὶ ἐκφωνήσωμεν τὰ $\frac{25}{5}$ μὲ 5, τὰ $\frac{25}{6}$ μὲ $4\frac{1}{6}$ Ἀκέραια, καὶ ἐφεξῆς.

§. 181.

Β'. Σχόλιον. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ῥηθέντων δηλοῦται σαφῶς, ὅτι ἐὰν ὅ,τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς τοῦ Κλάσματος εἶσιν ὅμοιοι κατὰ τοὺς Ἀριθμοὺς, ἐμπεριέχει τὸ Κλάσμα ἓν Ἀκέραιον, ἐπειδὴ τὸ τοιοῦτον Κλάσμα δεικνύει, ὅτι ὅλα τὰ μέρη, εἰς ἃ διαιρέθη τὸ Ἀκέραιον, ὑπάρχουσιν ὁμοῦ. Ὅθεν $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$ κτλ. ἐμπεριέχει ἕκαστον 1 Ἀκέραιον, καὶ εἰσὶν ὅμοια ἀλλήλοις· τοῦτο δ' ἐννοεῖται, ἐὰν τὰ Κλάσματα εἶσιν ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ Ἀντικειμένου.

ΚΕΦ. Γ'.

Περὶ Μεταφορᾶς τῶν Κλασμάτων.

§. 182.

Τὰ Κλάσματα μεταφέρονται πολλάκις, χωρὶς μεταβολὴν τῆς τιμῆς των, εἰς μικροτέρους Ἀριθμοὺς, παρ' ὡς ἐμφανίζονται ἐξ ἀρχῆς, ἡ ὁποία ἐλάττωσις προξενεῖ διπλῆν ὠφέλειαν. Πρῶτον μὲν προκύπτουσι μικρότεροι Ἀριθμοὶ, οἵτινες εὐκολύνουσι τὴν ἐργασίαν ἑκάστου λογαριασμοῦ· δεύτερον δὲ, προκείμενοι μικρότεροι Ἀριθμοὶ, ἐννοοῦμεν σαφέστερον τὴν τοῦ Κλάσματος δύναμιν, εἴτουν τὴν τιμήν. Παρ. χ. τὰ Κλάσματα $\frac{1}{3}$, καὶ $\frac{8}{24}$ ἔχουσιν ὁμοίαν τιμήν· διότι 8 μέρη ἀφ' ἑνὸς

Πράγματος, τὸ ὁποῖον σύγκειται ἀπὸ 24 τοιούτων μερῶν, εἰσὶν ὡσαύτως τὸ τρίτον αὐτοῦ τοῦ Πράγματος, καθὼς καὶ 1 μέρος, ἐὰν τὸ ἴδιον Πρᾶγμα σύγκηται ἐκ 3 μερῶν· μ' ὅλον τοῦτο ὅμως πληροφορούμεθα σαφέςερον τὴν τοῦ Κλάσματος τιμὴν ὑπὸ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ $\frac{1}{3}$, ἐπειδὴ εἶναι πλέον εὐκατάληπτος, παρ' ὅταν ἐκφωνηθῇ διὰ τῶν $\frac{8}{24}$. Διὰ τοῦτο λοιπὸν ὑπερμαχοῦμεν, ὅπου εἶναι δυνατὸν, διὰ νὰ μεταφέρωμεν τὸ Κλάσμα εἰς τοὺς πλέον ἐλαχίςους Ἀριθμοὺς, τὸ ὁποῖον λέγεται σμικρύνειν τὸ Κλάσμα.

§. 183.

Τὸ κλάσμα δυνάμεθα νὰ τὸ σμικρύνωμεν τότε, ὅταν ὅτε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς αὐτοῦ ἔχωσι κοινὸν Διαιρέτην, ὅ ἐςὶν, ἐὰν ἀμφότεροι διαιροῦνται, ἄνευ ὑπολοίπου, δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ Ἀριθμοῦ, ὥςε διαιρεθέντες ὅτε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν Διαιρέτου, προκύπτει τὸ ἐλαττωθὲν Κλάσμα. Φέρ' εἰπεῖν· $\frac{18}{30}$ διαιροῦνται ὅτε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς διὰ τοῦ Ἀριθμοῦ 6 ἐξ ἴσου, καὶ προκύπτουσιν ἀντὶ 18, μόνον 3, καὶ ἀντὶ 30, μόνον 5, καὶ οὕτω παρίςαται τὸ ἐλαττωθὲν Κλάσμα $\frac{3}{5}$, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ, ἤτοι ἰσοτιμεῖται μὲ τὸ $\frac{18}{30}$· διότι ἐὰν 30 τριακοςὰ ποιοῦσιν ἓν Ἀκέραιον (ὡς §. 181.), 6 τριακοςὰ πρέπει ἀναγκαίως νὰ δώσωσι τὸ 5τον, καὶ 3×6, ἤτοι 18, τρία πέμπτα, ἐν ψηφίοις $\frac{3}{5}$.

§. 184.

Διὰ νὰ δυνάμεθα λοιπὸν νὰ μεταχειριζώμεθα ὀρθῶς αὐτὸν τὸν ἐπωφελῆ τρόπον τοῦ σμικρύνειν, ἐφ' οὗ θεμελιοῦνται σχεδὸν ἅπασαι αἱ πρακτικαὶ συντομίαι ἐν τῷ λογαριάζειν, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ πληροφορηθῶμεν καλῶς, ὅτι πολλαπλασιαζόμενοι, ἢ διαιρούμενοι ὅ,τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς τοῦ Κλάσματος δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ Ἀριθμοῦ, μένει ἀμετάβλητος ἡ τοῦ Κλάσματος τιμή· διὸ ἕπεται ἡ περὶ τούτου Ἑρμηνεία, ἐφ' ἧς ὁ Διδασκόμενος ἂς δώσῃ ἄκραν προσοχήν.

Πάνυ εὐκόλως ἐννοοῦμεν, ὅτι μεταξὺ Κλασμάτων ἐξ ὁμοίων Παρονομαςῶν, ἐκεῖνο ἔχει ὑψηλοτέραν τιμὴν, τοῦ ὁποίου ὁ Ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλήτερος. Φέρ' εἰπεῖν· τὸ Κλάσμα $\frac{7}{8}$ Γροσίου ἔχει ἀναντιῤῥήτως ὑψηλοτέραν τιμὴν, παρὰ τὸ $\frac{5}{8}$ Γροσίου· ἐπειδὴ τοῦτο ἐμπεριέχει μόνον 5, τὸ δὲ πρῶτον 7 μέρη ἀφ' ὁμοίου μεγέθους.

Ὅταν λοιπὸν θέλωμεν νὰ μεταβάλωμεν ὁποιονδήποτε Κλάσμα ἅπαξ, δὶς, ἢ πλεονάκις εἰς ὑψηλοτέραν, ἢ ἐλαττωτέραν τιμὴν, λαμβάνομεν μόνον ἅπαξ, δὶς, ἢ πλεονάκις μεγαλήτερον, ἢ μικρότερον τὸν Ἀριθμητὴν, ἀφίνοντες ἀμετάβλητον τὸν Παρονομαςήν. Παρ. χ. θέλομεν ἀντὶ $\frac{8}{11}$ νὰ προκύψῃ μεγαλήτερον Κλάσμα τετραπλασίας τιμῆς· λοιπὸν πολλαπλασιάζομεν ἁπλῶς τὸν Ἀριθμητὴν 8 μὲ 4, καὶ προκύπτει Κλάσμα $\frac{32}{11}$, τὸ ὁποῖον ἀναντιῤῥήτως τιμᾶται τετράκις μᾶλλον, ἢ τὸ $\frac{8}{11}$, ἐπειδὴ ἐμπεριέχει τετράκις περισσότερα ἑνδέκατα. Ἐὰν θέλωμεν ὅμως νὰ προκύψῃ Κλάσμα τετραπλασίας τιμῆς μικρότερον τοῦ $\frac{8}{11}$, διαιροῦμεν μόνον τὸν Ἀριθμητὴν 8 μὲ 4, ἀφίνοντες ἀμετάβλητον τὸν Παρονομαςὴν, καὶ προκύπτει Κλάσμα $\frac{2}{11}$, τὸ ὁποῖον ἀναμφιβόλως ἔχει ἐλαττοτέραν τιμὴν τοῦ $\frac{8}{11}$, ἐπειδὴ ἐμπεριέχει τετράκις ὀλιγώτερα ἑνδέκατα.

Ἐντεῦθεν δῆλον ἐςὶν, ὅτι ἓν Κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ Παρονομαςὴς μένει ἀμετάβλητος, ἐμπεριέχει τοσάκις ὑψηλοτέραν ἢ ἐλαττοτέραν τιμὴν, ὁσάκις μᾶλλον, ἢ ἧττον ληφθῇ ὁ Ἀριθμητὴς αὐτοῦ.

§. 185.

Συνέχεια. Ὅλον τὸ ἀνάπαλιν συμβαίνει εἰς τὴν αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν τοῦ Παρονομαςοῦ, ἐὰν ὁ Ἀριθμητὴς μείνῃ ἀμετάβλητος· διότι εἰς ὅσα περισσότερα μέρη διαιρεθῇ τὸ Ἀκέραιον, τοσοῦτον σμικρύνεται ἕκαςον μέρος τοῦ Παρονομαςοῦ, ἐξ οὗ ἕπεται, ὅτι ὅσον μεγαλήτερος εἶναι ὁ Παρονομαςὴς (ὅστις, ὡς γνωςὸν, δεικνύει τὰ ἐκ τοῦ Διαιρετέου μέλλοντα γενέσθαι μέρη), τόσον μικρότερα εἶναι τὰ μέρη, καὶ ὅσον μικρότερος εἶναι ὁ Παρονομαςὴς, τόσον μεγαλήτερα εἶναι τὰ μέρη. Διὰ τοῦτο ὅταν θέλωμεν νὰ δώσωμεν εἰς ὁποιονδήποτε Κλάσμα ἅπαξ, δὶς, ἢ πλεονάκις ἐλαττοτέραν, ἢ ὑψηλοτέραν τιμὴν, ἁπλῶς διὰ τῆς μεταβολῆς τοῦ Παρονομαςοῦ, λαμβάνομεν ἅπαξ, δὶς, ἢ πλεονάκις μικρότερον ἢ μεγαλήτερον τὸν Παρονομαςὴν, ἀφίνοντες ἀμετάβλητον τὸν Ἀριθμητήν. Φέρ' εἰπεῖν· ἀντὶ $\frac{1}{4}$, θέλομεν νὰ προκύψῃ Κλάσμα ἡμίσεως τοιαύτης τιμῆς, λοιπὸν πολλαπλασιάζομεν τὸν Παρονομαςὴν 4 μὲ 2, ἀφίνοντες ἀμετάβλητον τὸν Ἀριθμητὴν, καὶ προκύπτει $\frac{1}{8}$, τὸ ὁποῖον Κλάσμα ἀναντιῤῥήτως ἔχει μόνον τὴν ἥμισυ τιμὴν τοῦ $\frac{1}{4}$· διότι ἓν μέρος, ἐξ ὧν 8 ποιοῦσιν ἓν Ἀκέραιον, εἶναι τὸ ἥμισυ ἑνὸς μέρους, ἐξ ὧν 4 ποιοῦσιν ὡσαύτως ἓν Ἀκέραιον. Ἐὰν πάλιν θελήσωμεν νὰ προκύψῃ ἐκ τοῦ $\frac{1}{4}$ ἕτερον Κλάσμα δὶς ὑψηλοτέρας τοιαύτης τιμῆς, διαιροῦμεν τὸν Παρονομαςὴν 4 διὰ τῶν 2, καὶ προκύπτει τὸ νέον Κλάσμα $\frac{1}{2}$, τὸ ὁποῖον ἀναντιῤῥήτως τιμᾶται δὶς μᾶλλον τοῦ $\frac{1}{4}$· διότι ἓν μέρος, ἐξ ὧν 2 ποιοῦσιν ἓν Ἀκέραιον, εἶναι δὶς μεγαλήτερον ἀφ' ἑνὸς μέρους, ἐξ ὧν 4 ποιοῦσιν ὁμοίως ἓν Ἀκέραιον.

Ἐντεῦθεν λοιπὸν ἕπεται κοινῶς, ὅτι ἕκαςον Κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ Ἀριθμητὴς μένει ἀμετάβλητος, μεταβάλλεται εἰς τοσάκις μικροτέραν ἢ ὑψηλοτέραν τιμὴν, ὁσάκις ληφθῇ μεγαλήτερος ἢ μικρότερος ὁ Παρονομαςής του.

§. 186.

Λῆξις. Φανερὸν οὖν, ὅτι λαμβανόμενος ἐν ταὐτῷ ὁσάκις μᾶλλον, ἢ ἧττον ὅ,τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς, πρέπει νὰ μείνῃ ἀμετάβλητος ἡ τοῦ Κλάσματος τιμὴ, ἐπειδὴ ὁσάκις αὐξάνει ἡ τιμὴ διὰ τῆς αὐξήσεως τοῦ Ἀριθμητοῦ, τοσάκις ἐλαττοῦται πάλιν διὰ τῆς αὐξήσεως τοῦ Παρονομαςοῦ, καὶ ὁσάκις σμικρύνεται ἡ τιμὴ διὰ τῆς ἐλαττώσεως τοῦ Ἀριθμητοῦ, τοσάκις αὐξάνει αὖθις διὰ τῆς ἐλαττώσεως τοῦ Παρονομαςοῦ· ἄρα ἑκάτερα ἰσοδυναμοῦσι, καὶ οὕτω μένει ἀμετάβλητος ἡ τοῦ Κλάσματος τιμή. Οἷον· διαιρουμένων τοῦτε Ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ Παρονομαςοῦ τοῦ Κλάσματος $\frac{18}{30}$ διὰ τῶν 6, προκύπτει αὐτ' αὐτοῦ $\frac{3}{5}$, τὸ ὁποῖον τιμᾶται τόσον, ὅσον τὸ $\frac{18}{30}$· διότι διαιρεθέντος τοῦ Ἀριθμητοῦ μὲ 6, ἠλαττώθη ἡ τιμὴ τοῦ Κλάσματος ἑξάκις (ὡς §. 184.), τοῦ δὲ Παρονομαςοῦ ὡσαύτως διὰ τῶν 6 διαιρεθέντος, ηὐξήνθη ἡ τιμὴ πάλιν ἑξάκις (ὡς §. 185.), λοιπὸν μένει ἀμετάβλητος ἡ τοῦ Κλάσματος τιμὴ, περὶ ἧς ἐςὶν ὁ λόγος.

§. 187.

Ἐὰν ὅμως ὅτε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς δὲν ἔχουσι κοινὸν Διαιρέτην, ὅ ἐςὶ, δὲν διαιροῦνται δὲ ἑνὸς καὶ τοῦ ἰδίου Ἀριθμοῦ ἐξ ἴσου, δῆλον ἐςὶν, ὅτι δὲν σμικρύνεται τὸ Κλάσμα, καὶ πρέπει νὰ μείνῃ ἀμετάβλητον εἰς τοὺς ἐξ ἀρχῆς ἀριθμούς του. Παρ. χ. τὸ Κλάσμα $\frac{22}{27}$ δὲν μεταφέρεται εἰς μικροτέρους Ἀριθμοὺς, ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει κανένας Ἀριθμὸς, ὅστις δύναται νὰ διαιρέσῃ ἐξ ἴσου τόντε Ἀριθμητὴν καὶ τὸν Παρονομαςήν. Διότι· ἐὰν ἕκαςος Ἀριθμὸς διαιρῆται ἐξ ἴσου δὲ ὁποιουδήποτε Ἀριθμοῦ ἰδιαιτέρως (καθὼς ἐνταῦθα ὁ Ἀριθμητὴς 22 διαιρεῖται διὰ τοῦ 2 καὶ 11, καὶ ὁ Παρονομαςὴς 27 διὰ τοῦ 3 καὶ 9), δὲν ὠφελεῖ ποσῶς, ἐπειδὴ, ὡς ἀπεδείχθη, διὰ νὰ μείνῃ ἀμετάβλητος ἡ τοῦ Κλάσματος τιμὴ, εἶναι ἑπόμενον νὰ διαιρεθῶσιν ὅ,τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς δὲ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ Ἀριθμοῦ ἐπίσης. Ὅθεν λέγομεν, ὅτι τὰ τοιαῦτα Κλάσματα δὲν ἐλαττοῦνται, καὶ πρέπει νὰ μείνωσιν εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἀριθμοὺς αὐτῶν.

§. 188.

Διὰ νὰ δυνάμεθα λοιπὸν νὰ μεταβάλωμεν ἕκαςον Κλάσμα εἰς τοὺς πλέον ἐλαχίςους Ἀριθμοὺς, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἠξεύρωμεν, ἂν, καὶ διὰ ποίου Ἀριθμοῦ ἐλαττοῦται, ὅ ἐςὶ, πρέπει νὰ γινώσκωμεν εἰς τὸ, νὰ διακρίνωμεν, ἂν ὁ Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς ἔχωσι κοινὸν Διαιρέτην, καὶ τίς ἐςὶν αὐτὸς ὁ Ἀριθμός· περὶ οὗ εἰς τὸ ἑπόμενον Κεφάλαιον ἕπεται ἡ ἀναγκαία Ἑρμηνεία.

ΚΕΦ. Δ΄.

Περὶ τοῦ κοινοῦ Διαιρέτου δύο Ἀριθμῶν, εἴτουν τοῦ Κλάσματος ἐν γένει.

§. 189.

Ὁ Ἀριθμὸς, δι' οὗ δύο ἢ καὶ περισσότεροι ἄλλοι Ἀριθμοὶ δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν ἐξ ἴσου ἐπ' ἀκριβὲς, ὀνομάζεται, μέγιςος καὶ κοινὸς αὐτῶν Διαιρέτης. Τοῦτον εὑρίσκομεν, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖςον, διὰ τῶν ἑπομένων ἰδιαιτέρων Σημείων ἑκάςου Διαιρέτου.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 2.

Ἐὰν ὅ,τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς τελειώνωσιν εἰς ἀρτίους, ἤγουν διπλοῦς Ἀριθμούς· ὅ ἐςιν, εἰς 2, 4, 6, 8 ἢ 0, διαιροῦνται ἐπίσης διὰ τοῦ 2· διότι, ἐπειδὴ ἑκάςη δεκὰς σύγκειται ἐκ δὶς 5· ἑκάςη ἑκατοντὰς ἐκ δὶς 50· ἑκάςη χιλιὰς ἐκ δὶς 500 καὶ ἐφεξῆς, τοῦτ' ἐςιν, ὅλαι αἱ τάξεις ἐκ τῶν δεκάδων καὶ ἑξῆς σύγκειντται ἐν γένει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν 2, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ διαιρῶνται ἐξ ἴσου ὡσαύτως διὰ τοῦ 2. ὅθεν ἐὰν ἡ Μονὰς (ἐφ' ἧς ἀποβλέπειν δεῖ) διαιρῆται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 2, ἐσμὲν βέβαιοι, ὅτι ὅ,τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς διαιροῦνται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 2. Φέρ' εἰπεῖν· μᾶς ἐδόθη νὰ σμικρύνωμεν τὸ Κλάσμα $\frac{14}{16}$, ἐνταῦθα βλέπομεν ἐκ τοῦ προδοθέντος σημείου, ὅτι τόσον ὁ Ἀριθμητὴς 14, ὅσον καὶ ὁ Παρονομαςὴς 16 διαιροῦνται ἐπίσης διὰ τοῦ 2, ἄρα τὸ ῥηθὲν Κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, καὶ δίδει $\frac{7}{8}$. (α)

§. 190.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 3.

Διὰ τοῦ 3 διαιρεῖται ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, ἐὰν τὸ Κεφάλαιον τῶν ψηφίων, ἐξ ὧν σύγκειται, διαιρῆται διὰ τοῦ 3. Οἷον ὁ Ἀριθμὸς 513 διαιρεῖται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 3, ἐπειδὴ τὰ ψηφία 5, 1 καὶ 3 ἀθροιζόμενα ὁμοῦ, ποιοῦσιν 9, ἅτινα διαιροῦνται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 3. Ἐξ ἐναντίας ὁ Ἀριθμὸς 314 δὲν διαιρεῖται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 3, ἐπειδὴ 3, 1 καὶ 4, ποιοῦσιν ὁμοῦ 8, τὰ ὁποῖα δὲν διαιροῦνται ἐπίσης διὰ τοῦ 3.

(α) Αὐτὸν τὸν ἴδιον τρόπον μεταχειριζόμεθα εἰς ὅλους τοὺς τοιούτους ἑπομένους Κανόνας.

Δεῖξις. Ἐκ τοῦ ἀξιώματος τῆς Ἀριθμήσεως εἶναι φανερὸν, ὅτι διαιρουμένη μία Δεκὰς (συνιςαμένη ἐκ τρεῖς 3, ἤτοι 9 καὶ 1), ἑπομένως καὶ μία Ἑκατοντὰς, Χιλιὰς καὶ ἐφεξῆς διὰ τοῦ 3, πρέπει νὰ μείνῃ ὑπόλοιπον 1, ὅπερ οὐχ' ἁπλῶς ὡς ἓν, ἀλλ' ὡς ἁπλῆ Μονὰς ἐννοεῖται. Λοιπὸν ὅσαι Μονάδες, Δεκάδες, Ἑκατοντάδες καὶ ἐφεξῆς διαιρεθῶσι διὰ τοῦ 3, τόσα ὑπόλοιπα προκύπτουσιν ἀνὰ 1· ὅθεν ἐπὶ τοῦτο ἀποβλέπειν δεῖ ἁπλῶς, ἐὰν καὶ τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν τῶν ὑπολοίπων (ἀφ' οὗ ἀθροισθῶσιν ὡς ἁπλαῖ μονάδες), διαιρῆται ἐπίσης διὰ τοῦ 3, τοῦ ὁποίου γενομένου, πρέπει ἀναγκαίως καὶ ὁ ὁλόκληρος Ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 3. Παρ. χ. 3685 κτλ. διαιρεθήτωσαν διὰ τοῦ 3, δηλοῖ, 3 Χιλιάδες, 6 Ἑκατοντάδες, 8 Δεκάδες καὶ 5 Μονάδες νὰ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ 3· ἐπειδὴ λοιπὸν, ὡς εἴρηται, 1 Χιλιὰς, 1 Ἑκατοντὰς, 1 Δεκὰς, 1 Μονὰς διαιρούμεναι διὰ τοῦ 3, προκύπτει ἐξ ἑκάςης ὑπόλοιπον, διὰ τοῦτο ἐκ 3 Χιλιάδων, μένουσι τρεῖς ἓν· ἀπὸ 6 Ἑκατοντάδων, ἑξάκις ἓν· ἀπὸ 8 Δεκάδων, ὀκτάκις ἓν· καὶ ἀπὸ 5 Μονάδων, πεντάκις ἓν, ὅθεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ προκειμένου Ἀριθμοῦ, ὅστις μέλλει νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 3., θεωροῦνται ἁπλῶς ὡς μοναδικὰ ὑπόλοιπα, διὸ καὶ τὰ ἀθροίζομεν ὡς ἁπλᾶς μονάδας, ἵνα ἴδωμεν, ἐὰν ποιῶσιν ὁμοῦ τοιοῦτον Ἀριθμὸν, ὅς τις διαιρεῖται ἐπίσης διὰ τοῦ 3.

§. 191.

Σχόλιον. Ἐὰν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων, ὡς ἀνωτέρω, προκύψῃ τόσον μεγάλος Ἀριθμὸς, ὥςε νὰ μὴ διακρίνηται εὐθὺς, ἐὰν διαιρῆται ἐπίσης διὰ τοῦ 3, τότε μεταχειριζόμεθα καὶ εἰς αὐτὸν τὸν Ἀριθμὸν τὴν δοθεῖσαν δοκιμὴν ἐπὶ τοσοῦτον, ἕως ὅτου νὰ προκύψῃ ὁ ἴδιος Διαιρέτης 3, ἢ ἕτερος Ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα εὐκόλως διακρίνειν, ἐὰν διαρῆται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 3. Οἷον· ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων ἑνὸς ὁποιουδήποτε Ἀριθμοῦ, προέκυψε Κεφάλαιον 84, καὶ δὲν δυνάμεθα ἀμέσως διακρίνειν, ἐὰν 84 διαιρῶνται ἐπίσης διὰ τοῦ 3, λοιπὸν ἀθροΐζομεν πάλιν 8 καὶ 4 ποιοῦσι 12, εἶτα 2 καὶ 1 ποιοῦσι 3· ἄρα διαιρεῖται καὶ ὁ ἀρχαῖος Ἀριθμὸς διὰ τοῦ 3. Προσέτι· ἐξ ἑτέρου ἀθροίσματος, προέκυψε Κεφάλαιον 78· καὶ ἐνταῦθα λέγομεν· 7 καὶ 8 ποιοῦσι 15, ἔπειτα, 5 καὶ 1 ποιοῦσιν 6, ἅτινα, ἐπειδὴ διαιροῦνται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 3, ἄρα διαιρεῖται καὶ ὁ ἀρχαῖος Ἀριθμὸς ἐπίσης διὰ τοῦ 3.

§. 192.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου. 4.

Ἐὰν τὰ τελευταῖα δύο Ψηφία τοῦ προκειμένου Ἀριθμοῦ (ἤγουν αἱ Μονάδες καὶ Δεκάδες), διαιρῶνται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 4, διαιρεῖται ἐπίσης καὶ ὅλος ὁ Ἀριθμὸς διὰ τοῦ 4. Φέρ' εἰπεῖν· ὁ Ἀριθμὸς 42916 διαιρεῖται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 4, ἐπειδὴ αἱ Μονάδες, καὶ Δεκάδες αὐτοῦ, δηλονότι 16, διαιροῦνται ἐπίσης διὰ τοῦ 4.

Δεῖξις. Ἐπειδὴ ἑκάστη 100 σύγκειται ἐκ τετράκις 25, διὰ τοῦτο αἱ 100 τάδες, ἑπομένως καὶ αἱ 1000 άδες, καὶ αἱ ἐφεξῆς ὑψηλότεραι τοιαῦται τάξεις, διαιροῦνται ἀναντιῤῥήτως ἐπίσης διὰ τοῦ 4, ὅθεν δοκιμάζομεν μόνον, ἐὰν αἱ Δεκάδες καὶ Μονάδες τοῦ προκειμένου Ἀριθμοῦ ὁμοῦ, διαιρῶνται ὡσαύτως ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 4.

§. 193.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 5.

Ἐὰν τὸ τελευταῖον Ψηφίον τοῦ προκειμένου Ἀριθμοῦ δεξιῶς, εἶναι 5 ἤτοι 0, διαιρεῖται ὁ ὁλόκληρος Ἀριθμὸς ἐξ ἴσου διὰ τῶν 5. Οἷον· 425, 530 κτλ. διαιρούμενα διὰ τῶν 5 δὲν μένει ὑπόλοιπον.

Δεῖξις. Ἐπειδὴ αἱ Δεκάδες σύγκεινται ἐκ δὶς 5, διαιροῦνται ἀναντιῤῥήτως ἐξ ἴσου διὰ τῶν 5, ἄρα καὶ αἱ Ἑκατοντάδες, Χιλιάδες καὶ αἱ ἐφεξῆς ὑψηλότεραι τάξεις διαιροῦνται ὡσαύτως ἐπίσης διὰ τῶν 5, τὸ ὁποῖον ὅμως γίνεται τότε, ἐὰν ὁ Ἀριθμὸς σύγκηται ἐκ τῶν ψηφίων 5 ἢ 0 (ὅπερ δεικνύει τὴν παντελῆ ἔλλειψιν τῶν Μονάδων), ἐπειδὴ ἐξ ὅλων τῶν ψηφίων μέχρι τῶν 9, μόνον τὸ 5 διὰ τοῦ 5 ἐπίσης διαιρεῖται.

§. 194.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 6.

Ἐπειδὴ ὁ Ἀριθμὸς 6 σύγκειται ἐκ δὶς 3, διὰ τοῦτο διαιρεῖται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 6 ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, ὅστις διαιρεῖται ἐπίσης διὰ τοῦ 2, ὡσαύτως καὶ διὰ τοῦ 3, ὧν τὰ Σημεῖα προελέχθησαν. Παρ. χ. ὁ Ἀριθμὸς 81342, ἔχων διπλῆν τὴν Μονάδα, διαιρεῖται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 2, ὡσαύτως καὶ διὰ τοῦ 3· διότι 8, 1, 3, 4 καὶ 2, ποιοῦσιν ὁμοῦ 18, τὰ ὁποῖα διαιροῦνται ἐπίσης διὰ τοῦ 3, ἄρα διαιρεῖται καὶ ὁ ὁλόκληρος Ἀριθμὸς διὰ τοῦ 6, ἐπειδὴ δὶς 3 ποιοῦσιν 6.

Δεῖξις. Ταυτὸν ἐςὶν, ὡς πολλάκις ἐλέχθη, κἂν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἐν μιᾷ μὲ ἕνα Ἀριθμὸν, ἢ κατ' ἰδίαν μὲ τοὺς Παράγοντας αὐτοῦ (ὡς §. 138.), ὅθεν ἕκαςος Ἀριθμὸς, ὅστις διὰ τοῦ 2, ὡσαύτως καὶ διὰ τοῦ 3 διαιρεῖται ἄνευ ὑπολοίπου, πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁμοίως καὶ διὰ τοῦ Κεφαλαίου ἐκ δὶς 3, ἤγουν διὰ τοῦ 6, ἄνευ ὑπολοίπου.

§. 195.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 8.

Ἐὰν τὰ τελευταῖα τρία Ψηφία τοῦ προκειμένου Ἀριθμοῦ (εἴτουν αἱ Ἑκατοντάδες, αἱ δεκάδες καὶ Μονάδες), διαιρῶνται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 8, διαιρεῖται ἐπίσης καὶ ὁ ὁλόκληρος Ἀριθμὸς διὰ τοῦ 8. Θές· ὁ ἀριθμὸς 964360 διαιρεῖται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 8, ἐπειδὴ τὰ τελευταῖα τρία ψηφία, τοῦτ' ἔςι 360, διαιροῦνται ἐπίσης διὰ τοῦ 8.

Δεῖξις. Ἐπειδὴ ἡ Χιλιὰς σύγκειται ἐξ ὀκτάκις 125, διὰ τοῦτο αἱ Χιλιάδες, καὶ ἐπομένως ὅλαι αἱ ὑψηλότεραι τάξεις, διαιροῦνται ἐπίσης διὰ τοῦ 8· ὅθεν μένει νὰ δοκιμάσωμεν, ἐὰν ἡ Ποσότης τῶν Ἑκατοντάδων, Δεκάδων καὶ Μονάδων διαιρῶνται ὡσαύτως διὰ τοῦ 8 ἐξ ἴσου.

§. 196.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 9.

Τὸ σημεῖον τοῦ 9 εἶναι ὡς ἐκεῖνο τοῦ 3. Δηλαδὴ ἀθροίζομεν τὰ Ψηφία τοῦ πρὸς δοκιμὴν δοθέντος Ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν διαιρῆται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 9, διαιρεῖται καὶ ὁ ἴδιος Ἀριθμός.

Ἡ Δεῖξις εἶναι ἡ αὐτή, ὡς ἡ τοῦ ἀριθμοῦ 3· διότι ἑκάςη Δεκὰς, Ἑκατοντὰς καὶ ἐφεξῆς, διαιρούμεναι διὰ τοῦ 9, μένει ἐξ ἑκάςης ὑπόλοιπον 1, ὡς εἰς τὸν §. 190. ἐκταντικῶς ἐλέχθη.

Σημείωσις. Δὲν εἶναι τόσον ἀναγκαῖον νὰ ἀθροίσωμεν ὅλα τὰ Ψηφία διὰ νὰ ἰδῶμεν, ἐὰν τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν διαιρῆται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 9, ἀλλ' ἀθροίζοντες ἕως τῶν 9, ἀποβάλλομεν αὐτὰ ὁσάκις προκύψουσι, καὶ ἐὰν ἐν τῷ τέλει προκύψωσιν 9, χωρὶς νὰ μείνῃ κἀνὲν ὑπόλοιπον, εἶναι φανερὸν, ὅτι ὁ Ἀριθμὸς διαιρεῖται ἐπίσης διὰ τοῦ 9. Παρ. χ. διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἐὰν ὁ Ἀριθμὸς 745263 διαιρῆται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 9, λέγομεν· 3 καὶ 6, ποιοῦσιν 9· εἶτα 2 καὶ 5 ποιοῦσιν 7, καὶ 4 ποιοῦσιν 11, μένουσι 2 (ὑπὲρ τῶν 9), καὶ 7, ποιοῦσιν 9, ἄνευ ὑπολοίπου· ὁ δοθεὶς λοιπὸν Ἀριθμὸς διαιρεῖται ἐπίσης διὰ τοῦ 9.

§. 197.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 10.

Διὰ τῶν 10 διαιρεῖται ἐπίσης κάθε Ἀριθμὸς, ὅστις ἐν τῷ τέλει (δεξιῶς) ἔχει ἓν 0· διὰ τῶν 100, ἐὰν ἔχῃ δύο· διὰ τῶν 1000, ἐὰν ἔχῃ τρία μηδενικὰ, καὶ ἐφεξῆς, ἡ δὲ διαίρεσις γίνεται (ὡς §. 112.)

Δεῖξις. Ἡ αἰτία παρίσαται ἀμέσως πρὸ ὀφθαλμῶν· διότι ἓν 0 δεικνύει, ὅτι ἐν τῷ προκειμένῳ Ἀριθμῷ δὲν ὑπάρχουσι μονάδες, ἀλλ' ἁπλῶς δεκάδες, διὸ καὶ διαιρεῖται διὰ τῶν 10. Ὁμοίως δεικνύουσι δύο 0, ὅτι ὁ δοθεὶς Ἀριθμὸς σύγκειται ἁπλῶς ἀπὸ Ἑκατοντάδων· τρία μηδενικὰ, ἁπλῶς ἐκ Χιλιάδων, καὶ ἐφεξῆς, ὅθεν πρέπει νὰ διαιρεθῇ διὰ τῶν 100, διὰ τῶν 1000 ἐπίσης, καὶ οὕτω καθεξῆς.

§. 198.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 11.

Διὰ νὰ πληροφορηθῶμεν, ἐὰν ὁ προκείμενος Ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ τῶν 11 ἐξ ἴσου ἢ οὐχὶ, ἀφαιροῦμεν τὴν Μονάδα ἐκ τῆς Δεκάδος, τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς ἐκ τῆς Ἑκατοντάδος, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τέλους ὅλων τῶν ψηφίων, καὶ ἐὰν μετὰ ταῦτα δὲν μείνει ὑπόλοιπον, διαιρεῖται ὁ ὁλόκληρος ἀριθμὸς διὰ τῶν 11 ἐπίσης. Φέρ' εἰπεῖν· νὰ δοκιμάσωμεν, ἐὰν 58652 διαιρῶνται διὰ τῶν 11, ἀρχόμεθα ἐκ τῆς Μονάδος, λέγοντες· 2 ἐκ τῶν 5, μένουσι 3, εἶτα 3 ἐκ τῶν 6, μένουσι 3, ἔπειτα 3 ἐκ τῶν 8, μένουσι 5, τελευταῖον 5 ἐκ τῶν 5, μένει μηδέν· ὁ δοθεὶς λοιπὸν Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τῶν 11 ἐπίσης.

Δεῖξις. Ἡ αἰτία, δι' ἣν ἀφαιροῦμεν τὴν Μονάδα ἐκ τῆς Δεκάδος καὶ ἐφεξῆς, προέρχεται ἐκ τούτου, ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον τῶν 11 συνίσταται πάντοτε ἐκ τῶν Μονάδων, ἔπειτα ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν Μονάδων καὶ Δεκάδων, ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν Δεκάδων καὶ Ἑκατοντάδων καὶ τῶν ἐφεξῆς, ἑνὸς πολλαπλασιασθέντος Ἀριθμοῦ (ὡς §. 88.), αἱ ὁποῖαι διὰ τῆς ἀφαιρέσεως πρέπει πάλιν νὰ διαλυθῶσιν, ἐὰν τὸ κεφάλαιον τοῦ πρὸς δοκιμὴν δοθέντος ἀριθμοῦ σύγκηται ἐξ 11, καὶ τὸ ὁποῖον δύναται νὰ διαιρεθῇ διὰ τῶν 11 ἐπίσης.

Καὶ οἱ ἀριθμοὶ 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, ὄντες πολλαπλοῖ τῶν 11, διαιροῦνται δι' αὐτῶν ἅπαντες ἐξ ἴσου, τὸ ὁποῖον μᾶς δεικνύει ἡ ἀφαίρεσις· διότι ἀφαιροῦντες 2 ἐκ 2· 3 ἐκ 3 καὶ ἐφεξῆς, μένει μηδέν. Τοὺς ἐπέκεινα τῶν 100 πολλαπλοῦς Ἀριθμοὺς τῶν 11 ὅμως, μὴ δυνάμενοι νὰ τοὺς διακρίνωμεν εὐθὺς, ἐὰν διαιρῶνται διὰ τῶν 11 ἐπίσης, μεταχειριζόμεθα εἰς αὐτοὺς τὴν ἀφαίρεσιν, ὡς ἀνωτέρω.

§. 199.

Σχόλιον. Ὅτι ἡ ῥηθεῖσα ἀφαίρεσις γίνεται μὲ ὀρθὸν λόγον, δυνάμεθα σαφέστερον πληροφορηθῆναι, ἐὰν καταστρώσωμεν ἐν τάξει τὰ ὑπόλοιπα τοῦ ἀριθμοῦ 58652 (ὡς §. 198.), καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰ μὲ 11, ὅπου θέλει προκύψῃ Πηλίκον ὁ ἴδιος Ἀριθμὸς 58652. Οἷον· τὸ πρῶτον ψηφίον αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ δεξιῶς, εἶναι 2, ὅ ἐστι, 2 Μονάδες· τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον 3, ἤτοι 3 Δεκάδες· τὸ τρίτον ὑπόλοιπον 3, ἤτοι 3 Ἑκατοντάδες· καὶ τὸ τέταρτον ὑπόλοιπον 5, ἤτοι 5

Χιλιάδες· ὁμοῦ δὲ 5332, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιαζόμενα μὲ 11, προκύπτει ὁ δοθεὶς Ἀριθμὸς 58652.

§. 200.

Σημεῖα τῶν Διαιρέτων 12, 14, 15, 16 καὶ τῶν ἐφεξῆς.

Δι' ὅλους τοὺς τοιούτους Ἀριθμοὺς, οἵτινες εἰσὶ Κεφάλαια μοναδικῶν ψηφίων, δὲν εἶναι ἀναγκαῖοι ἕτεροι χωριςοὶ Κανόνες· διότι ἅπας Ἀριθμὸς, ὅστις διὰ 3 καὶ διὰ 4 ἐξ ἴσου διαιρεῖται (τὸ ὁποῖον διακρίνομεν ἐκ τῶν προδοθέντων Σημείων τῶν αὐτῶν), διαιρεῖται καὶ διὰ τῶν 12 ἐπίσης, ὡς τὸ Παραγόμενον ἐκ 3 $\times$ 4. Ὁμοίως παράγονται τὰ 16 ἐκ 2 $\times$ 8 καὶ ἐφεξῆς· ὅθεν ὅλοι οἱ Ἀριθμοὶ, οἵτινες διαιροῦνται ἐξ ἴσου διὰ τῶν 2 καὶ διὰ τῶν 8, διαιροῦνται ὡσαύτως καὶ διὰ τοῦ Παραγομένου αὐτῶν, εἴτουν διὰ τῶν 16 ἐπίσης, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἐν γένει δὲν εἶναι ἀναγκαῖον, ἵνα σμικρύνωμεν διὰ μιᾶς διὰ τοῦ μεγίςου Διαιρέτου, ἀλλ' ὀλίγον κατ' ὀλίγον, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖται εὐκολώτερον καὶ ταχύτερον. Φέρ' εἰπεῖν· τὸ κλάσμα $\frac{75}{90}$ σμικρύνεται ἐν μιᾷ διὰ τῶν 15. πλὴν ἐπειδὴ δὲν διακρίνομεν αὐτὸ εὐθὺς, ὡς τὸ Σημεῖον τῶν 5 καὶ 3, διὰ τοῦτο διαιροῦμεν πρότερον μὲ 5, καὶ προκύπτουσι $\frac{15}{18}$, καὶ ἰδοὺ βλέπομεν, ὅτι αὐτὸ τὸ νέον Κλάσμα διαιρεῖται ἐπομένως μὲ 3, καὶ προκύπτει τὸ μικρότατον $\frac{5}{6}$.

§. 201.

Σημείωσις. Διὰ τοὺς λοιποὺς ἀριθμοὺς ὑπὲρ 11, οἵτινες δὲν παράγονται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μοναδικῶν ψηφίων, ἀλλ' εἰσὶν Αὐτοπαράγοντες, καὶ ἐπομένως δὲν ἔχουσι Παράγοντας, ὡς· 13, 17, 19, 23, 29 καὶ ἐφεξῆς (μεταξὺ αὐτῶν δυνάμεθα συναριθμῆσαι καὶ τὰ 7, ἐπειδὴ ἡ εὕρεσις τοῦ Σημείου των ἐμποδίζει περισσότερον, παρ' ὅσον ὠφελεῖ, διὰ τοῦτο ἂς γίνηται ἡ δοκιμὴ ἀμέσως διὰ τῶν 7, ἐὰν ὁ προκείμενος Ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρεθῇ δι' αὐτοῦ ἐπίσης), δὲν ὑπάρχουσιν ἕτερα Σημεῖα, εἰμὴ ὁ ἑπόμενος γενικὸς Κανὼν, τὸν ὁποῖον μεταχειριζόμεθα εἰς τοὺς διὰ τῶν μέχρι τοῦδε δοθέντων Σημείων ἀδιαιρέτους Ἀριθμούς.

§. 202.

Γενικὸς Κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ Διαιρέτου, ὅπου δὲν ἐξαρκοῦσι καὶ αὐτοὶ οἱ δοθέντες Κανόνες.

Πάμπολλοι Ἀριθμοὶ ὑπάρχουσιν, οἵτινες ἐξ ἴσου διαιροῦνται, χωρὶς νὰ ἐρευνήσωμεν διὰ τῶν μέχρι τοῦδε δοθέντων Κανόνων, τίς ἐςιν ὁ Διαιρέτης αὐτῶν. Ὅθεν διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ εἰπῶμεν μὲ βεβαιότητα εἰς κάθε πτῶσιν, ἐὰν δύο ὁποιοιδήποτε προκείμενοι Ἀριθμοὶ ἔχωσι κοινὸν Διαιρέτην, μεταχειριζόμεθα τὸν ἑπόμενον Κανόνα.

α΄. Διαιροῦμεν τὸν μεγαλήτερον Ἀριθμὸν διὰ τοῦ μικροτέρου, καὶ ἐὰν γένῃ ἡ διαίρεσις ἐπίσης, ἔσεται ὁ μικρότερος κοινὸς Διαιρέτης· β΄. ἐὰν ὅμως ἐν τῇ διαιρέσει μείνῃ ὑπόλοιπον, διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου τὸν Διαιρέτην, καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, διαιροῦντες πάντοτε διὰ τοῦ ἑκάςην φορὰν προκύπτοντος ὑπολοίπου τὸν Διαιρέτην, ἐξ οὗ προέκυψεν αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπον, ἄχρις οὗ νὰ γένῃ ἡ διαίρεσις ἐξ ἴσου· ὁ τελευταῖος οὖν Διαιρέτης, δι' οὗ ἡ διαίρεσις ἔγινεν ἐπίσης, ἔσεται ὁ κοινὸς Διαιρέτης ἀμφοτέρων τῶν Ἀριθμῶν. Ἐὰν δὲ ὁ τελευταῖος Διαιρέτης εἶναι 1, δῆλον, ὅτι καὶ οἱ Ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσιν ἕτερον κοινὸν Διαιρέτην, εἰμὴ τὸ 1, ὅ ἐςιν, οὐδ' ἕνα· διότι τὸ 1 εἶναι κοινὸν ἑκάςου Ἀριθμοῦ, καὶ ὡς ἦν γνωςὸν, οὔτε αὐξάνει, ἀλλ' οὔτε σμικρύνει κἀνένα Ἀριθμόν. Τὰ ἑπόμενα Ὑποδείγματα θέλει σαφηνίσουσιν αὐτὸν τὸν Κανόνα.

Α'. Ὅπου ἡ πρώτη Διαίρεσις γίνεται ἐπίσης.

Θετέον· μᾶς ἐδόθη νὰ δοκιμάσωμεν, ἄν, καὶ διὰ τίνος Ἀριθμοῦ σμικρύνηται τὸ κλάσμα $\frac{79}{474}$· λοιπὸν διαιροῦμεν, κατὰ τὸν Κανόνα, διὰ τοῦ μικροτέρου Ἀριθμοῦ 79 τὸν μεγαλήτερον 474, καὶ ἐπειδὴ ὁ 79 ἐμπεριέχεται ἐπίσης εἰς τὸν 474 ἑξάκις, ἄρα 79 εἶναι ὁ Ἀριθμὸς, δἰ οὗ σμικρύνονται ὅτε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς· διότι ἕκαςος Ἀριθμὸς ἐμπεριέχεται ἐν ἑαυτῷ ἅπαξ, λοιπὸν καὶ ὁ 79 εἰς τὸν 79 ἐμπεριέχεται ἅπαξ· εἰς τὸν 474 ὅμως ἐμπεριέχεται ἑξάκις (ὡς ἡ διαίρεσις δεικνύει), ὅθεν τὸ ἐλαττωθὲν Κλάσμα εἶναι. $\frac{1}{6}$.

Β'. Ὅπου ἡ πρώτη Διαίρεσις δὲν γίνεται ἐπίσης.

Φέρ' εἰπεῖν· θέλομεν νὰ δοκιμάσωμεν, ἄν, καὶ διὰ τίνος Ἀριθμοῦ ἐλαττοῦται τὸ Κλάσμα $\frac{391}{552}$· λοιπὸν διαιροῦμεν, κατὰ τὸν Κανόνα, ὡς ἑπομένως.

α'. Διαιρ'. 391 εἰς 552 | 1. Παραγ'. α'.
391
β'. Διαιρ'. 161 Ὑπόλ., εἰς 391 | 2 Παραγ'. β'.
322
γ'. Διαιρ'. 69 Ὑπόλ. εἰς 161 | 2 Παραγ'. γ'.
138
δ'. Διαιρ'. 23 Ὑπ'. εἰς 69 | 3 Πα. δ'.
69
0

Δεῖξις. Πρῶτον διαιροῦμεν, ὡς εἰς τὸ Α΄. Ὑπόδειγμα, διὰ τοῦ Ἀριθμοῦ 391 τὸν 552, καὶ μένει ὑπόλοιπον 161· δι' αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου διαιροῦμεν πάλιν τὸν Διαιρέτην 391 (ἐξ οὗ προέκυψε τὸ ὑπόλοιπον 161), καὶ μένει ὑπόλοιπον 69· δι' αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου διαιροῦμεν αὖθις τ' ἄνωθεν 161, καὶ μένει ὑπόλοιπον 23· δι' αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου διαιροῦμεν πάλιν τ' ἄνωθεν 69, καὶ μένει ὑπόλειπον μηδέν· ἐπειδὴ λοιπὸν διὰ τῶν 23 ἔγινεν ὁμοία διαίρεσις, ἐσμὲν βέβαιοι, ὅτι ὁ 23 Ἀριθμὸς εἶναι ὁ κοινὸς Διαιρέτης, δι' οὗ ὅ, τε Ἀριθμητὴς 391 καὶ ὁ Παρονομαςὴς 552 ἐπίσης διαιροῦνται· ἐπειδὴ δὲ τὰ 23 εἰς τὰ 391 ἐμπεριέχονται 17 φοραῖς· εἰς τὰ 552 ὅμως 24 φοραῖς, προκύπτει τὸ εἰς τοὺς πλέον ἐλαχίςους Ἀριθμοὺς σμικρυνθὲν Κλάσμα $\frac{17}{24}$.

Γ. Ὅπου προκύπτει ὁ τελευταῖος Διαιρέτης 1.

Πρόβλημα. Ἆρα ἐλαττοῦται τὸ κλάσμα $\frac{83}{173}$, καὶ τίς ἐςὶν ὁ Διαιρέτης αὐτοῦ; Οὐχί· διότι αὐτοὶ οἱ δύο Ἀριθμοὶ ἔχουσι διὰ κοινὸν Διαιρέτην μόνον τὸν ἀριθμὸν 1, ὡς δεικνύει ἡ ἑπομένη Λύσις, ὅτι ὁ τελευταῖος Διαιρέτης, δι' οὗ ἡ διαίρεσις γίνεται ἐπίσης, ὁ 1 ἐςίν, ὅστις, ὡς γνωςὸν, εἶναι κοινὸς ἑκάςου Ἀριθμοῦ, καὶ ἑπομένως δὲν δύναται οὔτε νὰ αὐξήσῃ, ἀλλ' οὔτε νὰ σμικρύνῃ κἀνένα Ἀριθμὸν, ὡς.

α′. 83 εἰς 173 | 2
146
β′. 27 εἰς 83 | 2
54
γ′. 19 εἰς 27 | 1
19
δ′. 8 εἰς 19 | 2
16
ε′. 3 εἰς 8 | 2
6
ϛ′. 2 εἰς 3 | 1
2
ζ′. 1 εἰς 2 | 2
2
0

ΚΕΦ. Ε′.

Περὶ Ἀθροισμοῦ τῶν Κλασμάτων.

§. 203.

Ὁ Ἀθροισμὸς τῶν Κλασμάτων διδάσκει, τίνι τρόπῳ δυνάμεθα ἀθροίζειν περισσότερα Κλάσματα ὁμοῦ, τὸ δὲ Κεφάλαιον αὐτῶν (ἔστω Ἀκέραιον ἢ Κλασματικὸν), νὰ προφέρωμεν δι᾽ ἑνὸς καὶ μόνου Ἀριθμοῦ. Ἐπειδὴ δὲ, ὡς γνωστὸν, μόνον ὁμοειδεῖς Ἀριθμοὶ, ὅ ἐστι, τῆς αὐτῆς φύσεως καὶ ὀνομασίας, δύνανται νὰ συναφθῶσιν εἰς Ἕν (ὡς §. 34.), διὰ τοῦτο ἐννοεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ, ὅτι καὶ τὰ πρὸς Ἀθροισμὸν διδόμενα Κλάσματα, πρέπει νὰ εἶναι οὐχὶ μόνον μέρη ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ Πράγματος, ἀλλὰ νὰ ἔχωσι καὶ ὁμοίους Παρονομαςάς. Οὕτω, φέρ' εἰπεῖν· $\frac{2}{5}$ Γροσίου, καὶ $\frac{2}{3}$ Πήχης δὲν δύνανται κατ' οὐδένα τρόπον νὰ ἀθροισθῶσιν εἰς Ἕν, ἐπειδὴ εἰσὶ μέρη ἑτεροειδῶν Μονάδων. Ὡσαύτως δὲν δυνάμεθα νὰ συνάψωμεν ὁμοῦ $\frac{1}{5}$ Ὀκάδος καὶ $\frac{3}{10}$ τῆς ἰδίας Ὀκάδος, καίτοι ἀμφότερα τὰ μέρη εἰσὶ τῆς αὐτῆς Ὀκάδος, ἐπειδὴ δὲν ἔχουσιν ὁμοίαν ὀνομασίαν· ἐκτὸς ἐὰν προφέρωμεν τὸ $\frac{1}{5}$ διὰ $\frac{2}{10}$, δι' οὗ ἀμφότερα τὰ Κλάσματα, χωρὶς μεταβολὴν τῆς τιμῆς των, μεταφέρονται εἰς ὁμοίαν ὀνομασίαν· ὅπερ ἐςὶν ἡ Ἑρμηνεία τοῦ Ἀθροισμοῦ.

§. 204.

Ὅθεν, ἐὰν τὰ πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντα Κλάσματα ἔχωσιν ὁμοίους Παρονομαςὰς, τότε, χωρὶς νὰ ἐξετάσωμεν περαιτέρω, ἀθροίζομεν τοὺς Ἀριθμητὰς, καὶ διαιροῦμεν τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ, ὅςτις εἶναι κοινὸς ὅλων. Ἡ κατάςρωσις γίνεται τοῦ λοιποῦ ὡς ἡ τοῦ συνειθισμένου Ἀθροισμοῦ, ὥσπερ τὰ ἑπόμενα Ὑποδείγματα δεικνύουσιν.

α'.	β'.	γ'.
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{8}$
$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{3}{8}$
$\frac{6}{9}$	$\frac{5}{13}$	
9 εἰς 18 (τῶν 9.	13 εἰς 15 (τῶν 13	Κεφ. $\frac{7}{8}$.
Κεφ. 2	Κεφ. $1\frac{2}{13}$.	

Εἰς τὸ α΄. ἀθροισθέντες ὅλοι οἱ Ἀριθμηταί, ἔδωκαν Κεφάλαιον 18, τὰ ὁποῖα διαιρεθέντα διὰ τοῦ κοινοῦ Παρονομαστοῦ 9, ἀπέδωκαν 2 Ἀκέραια.

Εἰς τὸ β΄. προέκυψε Κεφάλαιον τῶν Ἀριθμητῶν 15, ἅτινα διαιρεθέντα διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ αὐτῶν 13, ἀπέδωκαν 1 Ἀκέραιον, καὶ προσέτι $\frac{2}{13}$.

Εἰς τὸ γ΄. ἐσυνάχθη τὸ Κεφάλαιον τῶν Ἀριθμητῶν μόνον 7, τὰ ὁποῖα διαιρεθέντα διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ αὐτῶν 8, ἀπέδωκαν τὸ Κλάσμα $\frac{7}{8}$ (ὡς §. 176.)

§. 205.

Σχόλιον. Πρόδηλον ἐστί, δι' ἣν αἰτίαν ἐν τῷ ἀθροίζειν δὲν ἀναφέρομεν τὴν ὀνομασίαν τῶν Πραγμάτων, ἐπειδὴ μηδέποτε δυνάμεθα συναριθμῆσαι τὸ ὄνομα, ἢ τὴν ὀνομασίαν τῶν Πραγμάτων, ἀλλὰ μόνον τὰ μέρη αὐτῶν, καὶ καθὼς, φέρ' εἰπεῖν, τῶν Γροσίων 2. Γροσ΄. 8. Γροσ΄. 5. κτλ. δὲν ἀριθμοῦμεν τὴν ὀνομασίαν Γρόσια, ἀλλὰ μόνον τοὺς Ἀριθμοὺς αὐτῶν 2, 8, 5, καὶ προφέρομεν αὐτοὺς δι' ἑνὸς Ἀριθμοῦ Γρ΄. 15,,— κτλ., ὡσαύτως ἀθροίζομεν παρ. χ. καὶ τῶν 1 ὀγδόου, 2 ὀγδόων, 3 ὀγδόων, 1 ὀγδόου κτλ. οὐχὶ τὴν ὀνομασίαν ὄγδοα, ἀλλὰ τοὺς Ἀριθμοὺς αὐτῶν 1, 2, 3, 1, ὧν τὸ Ἄθροισμα φέρει ὁμοῦ 7 ὄγδοα, κανονικῶς δὲ $\frac{7}{8}$.

§. 206.

Ἐὰν ὅμως τὰ πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντα Κλάσματα δὲν ἔχωσιν ὁμοίους Παρονομαστὰς, θετέον $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ κτλ. (προϋποθέτοντες, ὅτι εἰσὶ Κλάσματα ἑνὸς Πράγματος), τότε πρέπει νὰ μεταβληθῶσιν εἰς Κλάσματα ὁμοίας ὀνομασίας, διὰ νὰ γένωσιν ἐπιδεκτικὰ πρὸς Ἀθροισμὸν, ὅπου πράττομεν κατὰ τὸν ἑπόμενον Κανόνα.

Κανών. Πρῶτον ζητοῦμεν ἕνα Κεφαλαιώδη, ἤτοι γενικὸν Παρονομαστὴν, ὅ ἐστιν, ἕνα Ἀριθμὸν, εἰς ὃν νὰ περιέχωνται ἐπίσης ὅλοι οἱ Παρονομασταὶ τῶν πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντων Κλασμάτων (α). Αὐτὸν τὸν γενικὸν Παρονομαστὴν διαιροῦμεν ἔπειτα διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ ἑκάστου Κλάσματος, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ Παραγόμενον μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ αὐτοῦ Κλάσματος· εἶτα ἀθροίζομεν ὅλους αὐτοὺς τοὺς νεοφανέντας Ἀριθμητὰς, ὧν τὸ Κεφάλαιον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γενικοῦ Παρονομαστοῦ καὶ προκύπτει τὸ Ζητούμενον. Παρ. χ. τ' ἀπέναντι Κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$ τίθενται ὑπ' ἄλληλα (ὡς §. 204.), καὶ ἀθροίζονται ὡς ἑπομένως.

	30 γενικ. Παρον.		νέοι Ἀριθμηταί.	
$\frac{2}{3}$	10 Παραγ. × 2	—	20	
$\frac{3}{5}$	6 ὅμοιον × 3	—	18	ἀθροιζόμενοι.
$\frac{5}{6}$	5 ὅμοιον × 5	—	25	

ὁλοκλ. Ποσ. 2 $\frac{1}{10}$. σταίνουσι $\frac{63}{30}$, εἴτ. 2 $\frac{3}{30}$, ἢ 2 $\frac{1}{10}$.

Ἑρμηνεία. Μετὰ τὴν τακτικὴν κατάστρωσιν τῶν Κλασμάτων, ζητοῦμεν, ὡς ἐῤῥέθη, τὸν γενικὸν Παρονομαστὴν, ὅ ἐστιν, ἕνα Ἀριθμὸν, εἰς ὃν νὰ ἐμπεριέχωνται ὅλοι οἱ τῶν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομασταὶ ἄνευ Ὑπολοίπου, ὅστις εἰς τὸ προκείμενον Ὑπόδειγμα εἶναι ὁ 30, ἐπειδὴ εἰς ἄλλον μικρότερον Ἀριθμὸν δὲν ἐμπεριέχονται ἐπίσης οἱ Παρονομασταὶ 3, 5 καὶ 6. Λοιπὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 3 τὰ 30, καὶ προκύπτει Παραγόμενον, 10 τὰ ὁποῖα πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν 2 (ὅστις ἀνήκει εἰς τὸν

(α) Περὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ γενικοῦ Παρονομαστοῦ θέλει εἴπωμεν τὰ ἀναγκαῖα εἰς τὸν πρόσω §. 210 καὶ ἑξῆς.

Παρονομαςὴν 3), καὶ προκύπτει ὁ νέος Ἀριθμητὴς 20, ἅτινα τίθενται ἀπέναντι τοῦ Κλάσματος $\frac{2}{3}$ δεξιῶς, ὡς ὄπισθεν, Ἀπαραλλάκτως πράττομεν καὶ μὲ τὸ ἑπόμενον Κλάσμα $\frac{3}{5}$, διαιροῦμεν δηλαδὴ διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ 5 τὰ 30, καὶ προκύπτει Παραγόμενον 6, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιαζόμενα μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ αὐτοῦ Κλάσματος 3, προκύπτει ὁ νέος Ἀριθμητὴς 18. Τελευταῖον διαιροῦμεν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ 6 (ὅς τις ἀνήκει τοῦ τελευταίου Κλάσματος) τὰ 30, καὶ προκύπτει Παραγόμενον 5, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ ἰδίου Κλάσματος 5, καὶ προκύπτει ὁ νέος Ἀριθμητὴς 25. Αὐτοὺς τοὺς νέους Ἀριθμητὰς 20, 18 καὶ 25 ἀθροίζομεν, καὶ δίδουσιν ὁμοῦ 63, ἅτινα διαιρούμενα διὰ τοῦ γενικοῦ Παρονομαςοῦ 30, προκύπτει Κεφάλαιον $2\frac{1}{10}$, ὅ ἐςὶν, ἡ ὁλόκληρος Ποσότης ὅλων τῶν πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντων Κλασμάτων.

§. 207.

Σχόλιον. Ὅλος ὁ σκοπὸς τοῦ ἀνωτέρω τρόπου ἀποβλέπει ἁπλῶς εἰς τὸ, νὰ μεταβάλλῃ τὰ πρὸς Ἀθροισμὸν διδόμενα Κλάσματα, χωρὶς μεταβολὴν τῆς τιμῆς των, εἰς ἕτερα Κλάσματα ὁμοίας ὀνομασίας.

Γνωςὸν ἐςὶν (ὡς §. 186.), ὅτι πολλαπλασιαζόμενος ὅ,τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς μὲ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν Ἀριθμὸν, μένει ἀμετάβλητος ἡ τοῦ Κλάσματος τιμή· ἄρα ἐσμὲν ἐλεύθεροι διὰ νὰ λάβωμεν, ὁσάκις θέλομεν, μεγαλήτερον τὸν τοῦ Κλάσματος Παρονομαςὴν, φθάνει μόνον νὰ λάβωμεν τοσάκις μεγαλήτερον καὶ τὸν τοῦ αὐτοῦ Κλάσματος Ἀριθμητήν.

Ὅθεν δοθέντων Κλασμάτων ἐκ διαφορετικῶν Παρονομαςῶν πρὸς Ἀθροισμὸν, διαιροῦμεν τὸ Ἀκέραιον εἰς, ὅσα θέλομεν, ὅμοια μέρη· διότι συναπτόμενα ὅλα τὰ μέρη ὁμοῦ, ἢ πολλὰ εἰσὶν, ἢ ὀλίγα, προκύπτει πάντοτε τὸ Ἀκέραιον (ὡς

§. 172.) ὅταν λοιπὸν δοθῶσι διάφορα μέρη νὰ ἀθροίσωμεν, διαιροῦμεν τὸ Ἀκέραιον (ἐξ οὗ μέλλουσι ληφθῆναι αὐτὰ τὰ μέρη) εἰς τόσα ὅμοια μέρη, ὥςε νὰ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐξ αὐτῶν ἀκριβῶς τὰ πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντα Κλασματικὰ μέρη. Εἰς τὸ προτεθὲν Ὑπόδειγμα ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν, πόσα ςαίνουσιν ὁμοῦ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, καὶ $\frac{5}{6}$ ἑνὸς ὁποιουδήποτε Πράγματος· αὐτὸ τὸ Πρᾶγμα λοιπὸν διαιροῦμεν εἰς 30 ὅμοια μέρη, δηλαδὴ εἰς $\frac{30}{30}$ (ἐπειδὴ 30 εἶναι ὁ μικρότατος Ἀριθμὸς, ἐξ οὗ δυνάμεθα λαβεῖν ἀκριβῶς τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{5}{6}$), καὶ δοκιμάζομεν ἑπομένως, πόσα ληφθήσονται ἐξ αὐτῶν διὰ τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{5}{6}$.

Διὰ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ 3 τὰ 30, ἵνα ἴδωμεν, πόσα προκύπτουσι δι' 1 τρίτον, διὰ νὰ λάβωμεν διὰ τὰ $\frac{2}{3}$ δὶς τόσα, καὶ ἐπειδὴ βλέπομεν, ὅτι τὰ 3 εἰς τὰ 30 ἐμπεριέχονται 10 φοραῖς, ὅ ἐςὶν, ἐξ αὐτῶν τῶν τριακοςῶν προκύπτουσι 10 δι' 1 τρίτον, ἄρα τὰ $\frac{2}{3}$, ποιοῦσι δίς 10, ἤτοι $\frac{20}{30}$ (α). Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πληροφορούμεθα διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν ἑτέρων Παρονομαςῶν 5 καὶ 6, ὅτι δι' $\frac{1}{5}$ προκύπτουσιν 6, καὶ δι' $\frac{1}{6}$ προκύπτουσι 5 ἐκ τῶν ἰδίων τριακοςῶν, καὶ ἑπομένως ποιοῦσι $\frac{3}{5}$ τρίς 6, ἤτοι $\frac{18}{30}$, καὶ $\frac{5}{6}$ πεντάκις 5, ἤτοι $\frac{25}{30}$· ὅθεν, ἀντὶ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, προκύπτουσι πρὸς Ἀθροισμὸν τὰ ὁμώνυμα Κλάσματα 20, 18 καὶ 25 τριακοςὰ, ἅτινα ποιοῦσιν ὁμοῦ 63 τριακοςὰ, διὰ χαρακτήρων δὲ $\frac{63}{30}$, ἤτοι 2 $\frac{1}{10}$.

(α) Διὰ τῆς ἀνωτέρω διαιρέσεως 3 εἰς 30, προέκυψαν 10, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιασθέντα μὲ τον Ἀριθμητὴν καὶ τον Παρονομαςὴν τοῦ Κλάσματος $\frac{2}{3}$, ηὐξήνθη δεκάκις τὸ Κλάσμα, καὶ οὕτως, ἀντὶ $\frac{2}{3}$, προέκυψαν $\frac{20}{30}$, ἅτινα ποιοῦσι τόσα, ὅσα ποιοῦσι καὶ τὰ $\frac{2}{3}$· διότι διαιρούμενα τὰ $\frac{20}{30}$ διὰ τῶν 10 (ὡς §. 197.), προκύπτουσι πάλιν $\frac{2}{3}$· ἄρα ἔμεινεν ἀμετάβλητος ἡ τοῦ Κλάσματος τιμὴ (ὡς §. 156.).

Διὰ νὰ γίνηται λοιπὸν ἡ διαίρεσις πάντοτε ἐπίσης, πρέπει εἰς κάθε Πρόβλημα νὰ ἐκλέγωμεν ἕνα τοιοῦτον Ἀριθμὸν (οἷον· ὅσον δυνάμεθα μικρότατον), εἰς ὃν νὰ ἐμπεριέχωνται ἐξ ἴσου ἅπαντες οἱ τῶν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομασαί.

§. 208.

Σημείωσις. Ἐν ᾧ διαιροῦμεν διὰ τῶν Παρονομασῶν, δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ παραθέττωμεν πάντοτε τὰ Παραγόμενα· τοῦτο γίνεται ἁπλῶς διὰ νὰ πολλαπλασιάζωνται εὐκολώτερον οἱ Ἀριθμηταὶ μὲ αὐτὰ, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα ν' ἀποφύγωμεν, ὅπου ὁ πολλαπλασιασμὸς γίνεται διὰ τοῦ νοὸς εὐκόλως. Εἰς τὸ προτεθὲν Ὑπόδειγμα, ὅπου 3 εἰς 30 ἐμπεριέχονται 10 φοραῖς, λέγωμεν ἀμέσως· 2 × 10 ποιοῦσιν 20, χωρὶς πρότερον νὰ γράψωμεν ἐκεῖ τὸν Ἀριθμὸν 10. Ἐν γένει ἀπαιτεῖ ἡ συντομία, εἰς κάθε λογαριασμὸν, ν' ἀποφεύγωμεν ὅσα ψηφία δυνηθῶμεν.

§. 209.

Ἐὰν οἱ τῶν πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομασαὶ περιέχωνται εἰς ἕνα ἐξ αὐτῶν ἐπίσης, τότε δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ζητήσωμεν γενικὸν Παρονομαστὴν, ἐπειδὴ ἔχομεν ἐκεῖνον, εἰς ὃν ἐμπεριέχονται ἐξ ἴσου ὅλοι οἱ λοιποὶ Παρονομασαί. Παρ. χ. μᾶς ἐδόθησαν νὰ ἀθροίσωμεν $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{9}{16}$· ἐνταῦθα βλέπομεν, ὅτι οἱ Παρονομασαὶ 2, 4 καὶ 8 ἐμπεριέχονται ἐπίσης εἰς τὸν Παρονομαστὴν 16, λοιπὸν εἶναι πάντῃ περιττὸν νὰ ζητήσωμεν ἕτερον Ἀριθμὸν, εἰς ὃν νὰ ἐμπεριέχωνται ἐξ ἴσου ὅλοι οἱ τῶν ἀνωτέρω κλασμάτων Παρονομασαί· διότι ἐὰν ζητήσωμεν, εὑρίσομεν πολλοὺς, ὧν ὁ μικρότερος (μετὰ τὸν 16), εἶναι ὁ 32, εἰς ὃν περιέχονται ὅλοι οἱ τῶν Κλασμάτων Παρονομασαὶ 2, 4, 8 καὶ 16 ἐπίσης, Πλὴν ἐπειδὴ ἐῤῥέθη, ὅτι πρέπει, ὅσον δυνάμεθα, νὰ συντέμνωμεν τὴν ἐργασίαν τῶν λογαριασμῶν, διὰ τοῦτο, ἀντὶ τοῦ Ἀριθμοῦ 32, λαμβάνομεν τὸν 16 διὰ γενικὸν Παρονομαςὴν, δι' οὗ γίνεται εὐκολώτερον, καὶ συντομώτερον ἡ ἐργασία, ὡς.

16 γενικὸς Παρονομαςής.		12 γενικὸς Παρονομ.	
$\frac{1}{2}$	8	$\frac{2}{3}$	8
$\frac{3}{4}$	12	$\frac{1}{4}$	3
$\frac{7}{8}$	14	$\frac{5}{6}$	10
$\frac{9}{16}$	9	$\frac{7}{12}$	7
Ποσ´. $2\frac{11}{16}$.	$\frac{43}{16}$ ςαίν. $2\frac{11}{16}$.	Ποσ´. $2\frac{1}{3}$.	$\frac{28}{12}$ ςαίν. $2\frac{4}{12}$ ἢ $2\frac{1}{3}$.

Ἀπαραλλάκτως πράττομεν πάντοτε, ὅταν οἱ τῶν πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομαςαὶ ἐμπεριέχονται εἰς ἕνα ἐξ αὐτῶν ἐπίσης.

§. 210.

Ἡ βάσις τοῦ τῶν Κλασμάτων Ἀθροισμοῦ, θεμελιοῦται κατ' ἐξοχὴν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἑκάςοτε ἀπαιτουμένου γενικοῦ Παρονομαςοῦ, τοῦτ' ἔςι, νὰ ἠξεύρωμεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν Ἀριθμὸν, εἰς ὃν νὰ ἐμπεριέχωνται ὅλοι οἱ τῶν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομαςαὶ ἐπίσης. Ὁ τοιοῦτος Ἀριθμὸς ἤθελε προκύψει πάντοτε, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν μετ' ἀλλήλων τοὺς τῶν Κλασμάτων Παρονομαςάς· διότι ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, ὅστις παρήχθη διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν Παρονομαςῶν, πρέπει νὰ διαιρεθῇ πάλιν δι' αὐτῶν ἐξ ἴσου, (ὡς §. 123.)· πλὴν πολλάκις δυνάμεθα νὰ λάβωμεν, ἀντὶ τοῦ Κεφαλαίου τῶν Παρονομαςῶν, ἄλλον πολλὰ μικρότερον Ἀριθμὸν, τὸ ὁποῖον εὐκολύνει καὶ συντέμνει τὸν Ἀθροισμὸν. Φέρ' εἰπεῖν· οἱ Παρονομαςαὶ τῶν Κλασμάτων $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, ἤτοι 3, 4 καὶ 6 πολλαπλασιαζόμενοι μετ' ἀλλήλων, ἀποδίδουσι Κεφάλαιον, ὅ ἐςὶ, γενικὸν Παρονοςὴν, τὸν Ἀριθμὸν 72, δηλαδὴ 3×4 ποιοῦσι 12, καὶ 6×12 ποιοῦσιν 72· ἀντ' αὐτοῦ ὅμως χρησιμεύει ὡσαύτως ὁ πολλὰ μικρότερος Ἀριθμὸς 12, εἰς ὃν περιέχονται οἱ τῶν Κλασμάτων Παρονομασαὶ 3, 4 καὶ 6 ἐπίσης.

§. 211

Διὰ νὰ προκύπτῃ λοιπὸν πάντοτε ὁ μικρότατος γενικὸς Παρονομαςὴς, δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ πολλαπλασιάζωμεν τοὺς ἰδίους Παρονομαςὰς, ἀλλὰ τοὺς ἀναγκαίους Παράγοντας, οἵτινες παράγουσιν αὐτοὺς τοὺς ἰδίους Παρονομαςὰς, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν προκύπτον Κεφάλαιον, εἶναι ὁ μικρότατος Ἀριθμὸς, εἰς ὃν ὅλοι οἱ Παρονομασαὶ ἐξ ἴσου περιέχονται.

Π. χ. τὰ 4. 6. 8. καὶ 12 ἔχουσι Παράγοντας τοὺς ἀριθμοὺς 2. 3. καὶ 4. διότι τὰ 12 σύγκεινται ἐκ τρὶς 4, τὰ 8 ἐκ δὶς 4, καὶ τὰ 6 ἐκ δὶς 3., ὅθεν οἱ ἀριθμοὶ 4. 6. 8. καὶ 12, πρέπει νὰ περιέχωνται ἐπίσης εἰς ἐκεῖνον τὸν ἀριθμὸν, ὅστις διὰ τῶν Παραγόντων 2. 3. καὶ 4 δύναται νὰ διαιρεθῇ ἐξ ἴσου, ἐπειδὴ ἕκαςος Ἀριθμὸς, ὅστις διὰ τοῦ 2, καὶ διὰ τοῦ 3 ἐπίσης διαιρεῖται, διαιρεῖται καὶ διὰ τῶν δὶς 3, εἴτουν διὰ τῶν 6 ἐξ ἴσου· καὶ πάλιν ἕκαςος Ἀριθμὸς, ὅστις διὰ 3, καὶ διὰ 4 ἐπίσης διαιρεῖται, διαιρεῖται καὶ διὰ τῶν τρὶς 4, εἴτουν διὰ τῶν 12 ἐξ ἴσου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, (ὡς §. §. 194 καὶ 200.). Τὸ Κεφάλαιον λοιπὸν ἐκ δὶς 3, καὶ τρὶς 4. δηλ. 24 (ἐπειδὴ δὶς 3 ποιοῦσιν 6, καὶ τετράκις 6 ποιοῦσιν 24), εἶναι ὁ Ἀριθμὸς, ἐν ᾧ ἐξ ἴσου τὰ 4. 6. 8 καὶ 12 περιέχονται.

§. 212.

Διὰ τοῦτο εἰς κάθε Ἀθροισμὸν, ὅπου ζητεῖται ὁ γενικὸς Παρονομαςὴς, πράττομεν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον· πρότερον διαιροῦμεν τὸν Παρονομαςὴν τοῦ πρώτου Κλάσματος εἰς τοὺς αὐτοῦ Παράγοντας (τὸ ὁποῖον διὰ τῶν ἤδη δοθέντων Σημείων εἶναι πολλὰ εὔκολον), καὶ θέττομεν αὐτοὺς κατὰ μέρος, εἶτα διαιροῦμεν ὁμοίως καὶ τὸν τοῦ δευτέρου Κλάσματος Παρονομαςὴν εἰς τοὺς αὐτοῦ Παράγοντας, καὶ θέττομεν ἐξ αὐτῶν εἰς τοὺς προτέρους ἐκεῖνον, ὅστις δὲν ὑπάρχει ἐκεῖ, ἐκεῖνον δὲ, ὅστις εὑρίσκεται εἰς τοὺς προτέρους, ἀφίνομεν. Ἀπαραλλάκτως διαιροῦμεν καὶ τοὺς Παρονομαςὰς ὅλων τῶν ἄλλων Κλασμάτων, καὶ θέττομεν ἐκ τῶν Παραγόντων αὐτῶν εἰς τοὺς προτέρους ἐκείνους, οἵτινες δὲν ὑπάρχουσιν ἐκεῖ, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς τοὺς κατὰ μέρος τεθέντας Παράγοντας μετ' ἀλλήλων, καὶ οὕτω προκύπτει ὁ κατὰ πάντα ἐλάχιςος γενικὸς Παρονομαςής.

Θετεόν· μᾶς ἐδόθησαν νὰ ἀθροίσωμεν $\frac{5}{6}$. $\frac{7}{10}$. $\frac{3}{7}$. καὶ $\frac{9}{14}$· αὐτὰ ἀθροίζομεν ὡς κατωτέρω.

Παράγοντες. 210. ὁ γενικὸς Παρονομαςής.

† 2	$\frac{5}{6}$	35	—	175
3	$\frac{7}{10}$	21	—	147
5	$\frac{3}{7}$	30	—	90
7	$\frac{9}{14}$	15	—	135
				$\frac{547}{210}$ φέρουσιν Ἀκέραια $2\frac{127}{210}$.

Ἑρμηνεία. Τὸν γενικὸν Παρονομαςὴν ζητοῦμεν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. Πρῶτον διαιροῦμεν τὸν τοῦ πρώτου Κλάσματος Παρονομαςὴν 6 εἰς τοὺς αὐτοῦ Παράγοντας 2. 3., καὶ βάλλομεν αὐτοὺς πλησίον τοῦ κατὰ μέρους †, ὡς ἀνωτέρω. Τοῦ δευτέρου Κλάσματος ὁ Παρονομαςὴς σύγκειται ἐκ 2×5, πλὴν ἐπειδὴ ὁ Παράγων 2 προέκυψεν ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου Παρονομαςοῦ, διὰ τοῦτο πρὸς ἀναπλήρωσιν τοῦ Ἀριθμοῦ 10, εἶναι ἀναγκαῖος ἔτι ὁ Παράγων 5, ὅστις ὑπὸ τῶν προτέρων Παραγόντων 2. 3. ἐτέθη. Ὁ Παρονομαςὴς τοῦ τρίτου Κλάσματος 7 δὲν ἔχει Παράγοντας, ἐπειδὴ εἶναι αὐτὸς Αὐτοπαράγων, ὅθεν καὶ ἐτέθη ὁλόκληρος ὑπὸ τῶν ῥηθέντων Παραγόντων. Τελευταῖον ὁ τοῦ τετάρτου Κλάσματος Παρονομαςὴς 14. σύγκειται ἐκ 2×7, ἀλλ' ἐπειδὴ τόσον ὁ Παράγων 7, ὅσον καὶ ὁ 2 προέκυψαν ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν προτέρων Παρονομαςῶν, διὰ τοῦτο δὲν ἐτέθη μηδὲν διὰ τὰ 14 ὑπὸ τῶν προτέρων Παραγόντων. Ὅθεν ὁ Ἀριθμὸς, εἰς ὃν περιέχονται ἐξ ἴσου οἱ τῶν λεχθέντων Κλασμάτων Παρονομαςαὶ 6. 10. 7 καὶ 14, προκύπτει ἁπλῶς ἐκ τῶν κατὰ μέρους Παραγόντων 2. 3. 5 καὶ 7, οἵτινες πολλαπλασιαζόμενοι μετ' ἀλλήλων, προκύπτει ὁ Ἀριθμὸς 210 (δηλονότι· 2×3, ποιοῦσιν 6, εἶτα 5×6, ποιοῦσι 30, καὶ 7×30, ποιοῦσι 210). Ὅθεν ὁ γενικὸς Παρονομαςὴς τῶν δοθέντων Κλασμάτων, εἶναι ὁ 210, καὶ οὕτω πράττομεν τὴν ἐργασίαν κατὰ τὸν §. 206., δηλονότι· διαιροῦμεν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ 6 τὸν γενικὸν Παρονομαςὴν 210, καὶ προκύπτουσι 35, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν 5, καὶ προκύπτουσιν 175, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ὥςε προκύπτει τὸ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Κλασμάτων $\frac{547}{210}$, ἤτοι $2\frac{127}{210}$, ὡς ὄπισθεν.

§. 213.

Ἐκτὸς τῆς ἀνωτέρω συντομίας, τὴν ὁποίαν προξενεῖ ἡ διαίρεσις τῶν Παρονομαςῶν εἰς τοὺς αὐτῶν Παράγοντας, προκύπτει καὶ ἑτέρα ὠφέλεια εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν Διαίρεσιν, ἐπειδὴ ἀνακουφίζει παντάπασι καὶ αὐτὴν τὴν διὰ τῶν Παρονομαςῶν διαίρεσιν· εὑρίσκομεν καὶ τὰ Παραγόμενα αὐτῶν, πολλαπλασιάζοντες ἁπλῶς τοὺς Παράγοντας μετ' ἀλλήλων, τὸ ὁποῖον εἰς μεγάλους καὶ γενικοὺς Παρονομαςὰς, ὅπου ἡ διαίρεσις εἶναι ὁπωσοῦν ἐπίπονος, προξενεῖ μεγάλην εὐκολίαν καὶ συντομίαν, ὡς ἑπομένως.

Ἀθροισθήτωσαν $\frac{7}{12}$. $\frac{11}{18}$. $\frac{13}{24}$ καὶ $\frac{17}{36}$.

Παράγοντες		432. ὁ γενικὸς Παρονομαςής.
3	$\frac{7}{12}$	36
4	$\frac{11}{18}$	24
6	$\frac{13}{24}$	18
6	$\frac{17}{36}$	12

Ἑρμηνεία. Ἀφ' οὗ διὰ τῶν Παραγόντων εὑρήκαμεν τὸν γενικὸν Παρονομαςὴν 432, ἔπρεπε, κατὰ τὸν κοινὸν τρόπον, νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν Παρονομαςῶν 12. 18. 24 καὶ 36, ἡ ὁποία διαίρεσις, ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ διὰ δύο ἀριθμῶν, εἶναι διεξοδικὴ, καὶ μάλιςα εἰς μεγαλητέρους Ἀριθμοὺς ἔσεται καὶ φορτική. Ὅθεν διὰ ν' ἀποφύγωμεν αὐτὸν τὸν κόπον, πράττομεν οὕτω· δηλαδὴ, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ 12 τὸν γενικὸν Παρονομαςὴν 432, πολλαπλασιάζομεν τοὺς Παράγοντας τοῦ γενικοῦ Παρονοςοῦ μετ' ἀλλήλων, ἀφίνοντες τοὺς τὰ 12 Παράγοντας 3 × 4, καὶ λέγομεν· 6 × 6 ποιοῦσι 36, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ ἴδιος Ἀριθμὸς, ὅστις προκύπτει, ἐὰν διὰ τῶν 12 διαιρέσωμεν τὰ 432. Ὡσαύτως· ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 18, ἀφίνοντες τοὺς Παράγοντας αὐτῶν 3 × 6, πολλαπλασιάζομεν μόνον 4 × 6 ποιοῦσιν 24, τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ Παραγόμενον τῶν 18 ἐκ τῶν 432. Εἶτα· ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 24, ἀφίνοντες τοὺς Παράγοντας αὐτῶν 4 × 6, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἑτέρους 3 × 6 ποιοῦσι 18, τὰ ὁποῖα εἶναι ὡσαύτως τὸ Παραγόμεμενον τῶν 24 ἐκ τῶν 432. Τελευταῖον δέ· ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 36, ἀφίνοντες τοὺς αὐτῶν Παράγοντας 6 × 6, πολλαπλασιάζομεν μόνον 3 μὲ 4, καὶ προκύπτουσι 12 διὰ τὸ Παραγόμενον τῶν 36 ἐκ τῶν 432, ὥςε τοιουτοτρόπως, χωρὶς ποσῶς νὰ διαιρέσωμεν, προκύπτουσι τὰ τῶν Κλασμάτων Παραγόμενα ἐν εὐκολίᾳ καὶ συντομίᾳ, καὶ τοῦτο τόσον συντομώτερον, ὅσον εἰσὶ μεγαλήτεροι οἱ Παρονομαςαί.

Δεῖξις. Ἡ βάσις αὐτοῦ τοῦ τρόπου εἶναι αὕτη. Ἐπειδὴ ὁ γενικὸς Παρανομαςὴς εἶναι τὸ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Παραγόντων, διὰ τοῦτο διαιρούμενος αὐτὸς πάλιν διὰ μερικῶν αὐτῶν τῶν Παραγόντων, ἤτοι διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ, ὅστις εἶναι τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν τῶν Παραγόντων, προκύπτει μόνον τὸ Κεφάλαιον τῶν ὑπολοίπων Παραγόντων.

§. 214.

Σχόλιον. Τὸν ῥηθέντα τρόπον τοῦ πολλαπλασιάζειν τοὺς Παράγοντας μεταχειριζόμεθα, ὅπου προξενεῖ τῷ ὄντι εὐκολίαν καὶ συντομίαν· ὅπου ὅμως ἐκτελοῦνται εὐκόλως καὶ ταχέως αἱ διαιρέσεις, καθὼς αἱ τῶν διὰ τῶν μοναδικῶν Παρονομαςῶν, ἐπιμένομεν εἰς τὸν συνήθη τρόπον. Κυρίως ὁ Λογαριάζων πρέπει νὰ ἐκλέγῃ, ποῖος τρόπος μεταξὺ τῶν περισσοτέρων εἶναι ὠφελιμώτερος διὰ τὸ προκείμενον Ὑπόδειγμα.

§. 215.

Ἐὰν οἱ τῶν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομαςαὶ δὲν ἔχωσι Παράγοντας, ἀλλ' οὔτε περιέχονται ἐξ ἴσου εἰς οὐδένα ἐξωτερικὸν Ἀριθμὸν, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ὅλοι μετ' ἀλλήλων, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν προκύπτον Κεφάλαιον, ἔςαι ὁ γενικὸς Παρονομαςὴς ὅλων τῶν πρὸς Ἄθροισιν δοθέντων Κλασμάτων, εἶτα πράττομεν ὡς καὶ εἰς τὰ προτεθέντα Ὑποδείγματα. Φέρ' εἰπεῖν· πρόκειται ν' ἀθροίσωμεν $\frac{5}{7}$. $\frac{4}{9}$. $\frac{9}{13}$. ἐνταῦθα δῆλον ἐςὶν, ὅτι οἱ προκείμενοι Παρονομαςαὶ δὲν ἔχουσιν οὔτε Παράγοντας, ἄλλ' οὔτε περιέχεταί τις εἰς ἕτερον αὐτῶν, μήτε εἰς κἀνένα ἐξωτερικὸν Ἀριθμὸν ἅπαντες ἐξ ἴσου, ἀλλ' ἕκαςος ἐν ἑαυτῷ ἅπαξ, τοῦτ' ἔςιν, εἰσὶν Αὐτοπαράγοντες· διὰ τοῦτο λοιπὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσι μετ' ἀλλήλων, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν προκύπτον Κεφάλαιον, ἔσεται ὁ γενικὸς Παρονομαςής. Οἷον.

Πολλαπλ. τῶν Παραγ'.		819. ὁ γενικὸς Παρονομαςής.
7	$\frac{5}{7}$	117 — 585
9		
63	$\frac{4}{9}$	91 — 364
13		
189	$\frac{9}{13}$	63 — 567
63		
γεν. Παρον. 819.		1516
		819 φέρουσιν $1\frac{697}{819}$.

§. 216.

Ἐὰν σὺν τοῖς Κλάσμασι δοθῶσι καὶ ἀκέραιοι Ἀριθμοὶ πρὸς Ἄθροισιν, αὐτὸ οὐδεμίαν προξενεῖ εἰς τὸν Ἀθροισμὸν μεταβολὴν, ἀλλ' ἀθροίζομεν, ὡς συνήθως, πρότερον τὰ Κλάσματα, καὶ λαμβάνομεν τὰ εἰς τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν, ἂν τύχωσιν, Ἀκέραια, καὶ τὰ ἀθροίζομεν μὲ τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμούς. Θὲς, ὅτι μᾶς ἐδόθησαν ν' ἀθροίσωμεν.

	24. ὁ γεν. Παρ.	Παράγ.
Γρ. 5,,33 Π. $2\frac{1}{8}$ Ἄσπρ.	20	2
— 8,,24 — $1\frac{7}{8}$ —	21	3
— -,,29 — $2\frac{7}{12}$ —	14	4
— -,,38 — $2\frac{3}{4}$ —	18	
Ποιοῦσ. Γρ. 16,,7 Π. $1\frac{1}{24}$ ἄσπρ.	$\frac{73}{24}$ ποιοῦσι $3\frac{1}{24}$ ἄσπρ.	

Ἐνταῦθα, χωρὶς ν' ἀποβλέψωμεν εἰς τὰ Ἀκέραια, ἀρχόμεθα τὴν Ἄθροισιν ἐκ τῶν Κλασμάτων, ἐπειδὴ αὐτὴ εἶναι ἡ κατωτέρα τάξις τοῦ προκειμένου Ὑποδείγματος (ἀπαραλλάκτως κατὰ τὸν Κανόνα τῶν ἁπλῶν Κλασμάτων), ὧν ἡ ὁλικὴ Ποσότης φέρει $3\frac{1}{24}$ ἄσπρα., λοιπὸν θέττομεν τὸ $\frac{1}{24}$ ὑπὸ τῶν Κλασμάτων, τὰ δ' Ἀκέραια 3 ἄσπρα ἀθροίζομεν μετὰ τῶν λοιπῶν, λέγοντες· 3 καὶ 2 ποιοῦσι 5, καὶ 2 ποιοῦσιν 7, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἄχρις οὗ ν' ἀθροισθῶσι τότε ἄσπρα, Παράδες, καὶ τὰ Γρόσια.

ΚΕΦ. ΣΤ·

Περὶ Ἀφαιρέως τῶν Κλασμάτων.

§. 217.

Ὁ μὲν Ἄθροισμὸς τῶν Κλασμάτων συνάπτει τοὺς Ἀριθμητὰς αὐτῶν εἰς Ἕν, ἡ δὲ Ἀφαίρεσις ἀφαιρεῖ αὐτοὺς ἀπ' ἀλλήλων. Διὰ τοῦτο λοιπὸν, καθὼς οἱ πρὸς Ἀφαίρεσιν διδόμενοι ἀκέραιοι Ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς καὶ ὁμώνυμοι (ὡς §. 51.), οὕτω δεῖ ἵνα ὦσι καὶ τὰ πρὸς Ἀφαίρεσιν διδόμενα Κλάσματα μέρη ὁμοειδῶν καὶ ὁμωνύμων Μονάδων, πρὸς τούτοις δὲ νὰ ἔχωσι καὶ ὁμοίους Παρονομαςὰς, ἵνα δύνανται ἀφαιρεθῆναι ἀπ' ἀλλήλων.

§. 218.

Ὅθεν ὅταν εἰσὶν ὅμοιοι οἱ τῶν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομαςαὶ, ἀφαιροῦμεν τοὺς Ἀριθμητὰς αὐτῶν ἀπ' ἀλλήλων, τοὐναντίον, πρέπει νὰ μεταβληθῶσιν εἰς Κλάσματα ὁμοίων Παρονομαςῶν, καθ' ὃν τρόπον ἐλέχθη ἐν τῷ Ἀθροισμῷ, καὶ μετὰ ταῦτα ἀφαιροῦμεν, ὡς ἀκολούθως.

Ἀπὸ $\frac{7}{12}$

ἀφαιρεθήτωσαν $\frac{5}{12}$

Ὑπόλοιπον $\frac{2}{12}$, ὃ διὰ τῶν 2 ἐλατ., ποιεῖ $\frac{1}{6}$.

Ἑρμηνεία. Ἐνταῦθα εἰσὶν ὅμοιοι οἱ Παρονομαςαὶ, λοιπὸν ἀφαιροῦμεν εὐθὺς τὸν Ἀριθμητὴν 5 ἐκ τοῦ Ἀριθμητοῦ 7, καὶ μένουσι $\frac{2}{12}$ δωδέκατα, ἤτοι $\frac{1}{6}$. Ἡ περὶ τούτου ἀπόδειξις εἶναι ἀφ' ἑαυτῆς φανερά· διότι καθὼς Π. χ. λέγομεν, 5 Γρόσια ἐξ 7 Γροσίων, μένουσι 2 Γρόσια, οὕτω λέγομεν καὶ ἐνταῦθα, 5 δωδέκατα ἐξ 7 δωδεκάτων, μένουσι 2 δωδέκατα, καθὼς ἐλέχθη εἰς τὸν Ἀθροισμὸν ἐν τῷ §. 203. Διότι· καθὼς ἐκεῖ δὲν ἀθροίζομεν τὴν ὀνομασίαν τοῦ Πράγματος, ἀλλὰ τὰ μέρη αὐτοῦ, οὕτω καὶ ἐνταῦθα δὲν ἀφαιροῦμεν τὴν ὀνομασίαν τοῦ Πράγματος, ἀλλὰ τὰ μέρη αὐτοῦ ἀπ' ἀλλήλων.

Ἰδοὺ καὶ Ὑποδείγματα μὴ ἔχοντα ὁμοίους Παρονομαστάς.

Πρόβλημα. Μᾶς ἐδόθησαν	28. ὁ γενικὸς Παρονομ.
ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ . . . . $\frac{6}{7}$	4 — 24
$\frac{3}{4}$	7 — 21
Ὑπόλοιπον $\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$.

Ἑρμηνεία. Εἰς τὸ προκείμενον Ὑπόδειγμα δὲν εἶναι ὅμοιοι οἱ Παρονομασταί, ἄρα πρέπει, καθὼς καὶ εἰς τὸν Ἀθροισμόν, νὰ μεταβληθῶσι τὰ Κλάσματα, δι' ἑνὸς γενικοῦ Παρονομαστοῦ, εἰς ὁμοίαν ὀνομασίαν, καὶ ἔπειτα νὰ γένῃ ἡ Ἀφαίρεσις. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ Παρονομασταὶ οὐδένα ἔχουσι κοινὸν Παράγοντα, ὅστις ἐδύνατο ν' ἀφεθῇ, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι μετ' ἀλλήλων, τὸ δ' ἐξ αὐτῶν προκύπτον Κεφάλαιον, ἔσται ὁ γενικὸς Παρονομαστὴς (ὡς §. 215.)· ὅθεν λέγομεν, καθὼς καὶ εἰς τὸν Ἀθροισμόν, 7 εἰς τὰ 28, τετράκις, τετράκις δὲ 6, ποιοῦσιν 24· εἶτα 4 εἰς τὰ 28, ἑπτάκις, 3 δὲ 7, ποιοῦσιν 21, ἅτινα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 24 (δηλ. $\frac{21}{28}$ ἐκ τῶν $\frac{24}{28}$), μένει Ὑπόλοιπον $\frac{3}{28}$.

Πρόβλημα. Ἕνας ἐδανείσθει παρ' ἑτέρου $\frac{3}{4}$ Γροσίου, καὶ ἐπλήρωσε $\frac{3}{10}$, ἄρα πόσα χρεωστεῖ εἰσέτι;

Λύσις.

Παράγοντες			40
2	ἀπὸ	$\frac{3}{8}$	15
4	ἀφαιρεθήτωσαν	$\frac{3}{10}$	12
5	Ὑπόλοιπον	$\frac{3}{40}$	

§. 219.

Ἐὰν σὺν τοῖς Κλάσμασι δοθῶσι καὶ ἀκέραιοι Ἀριθμοὶ, καθὼς ἐν τῷ §. 216. τοῦ Ἀθροισμοῦ ἐῤῥέθη, ἀφαιροῦμεν, ὡς συνήθως, πρότερον τὰ Κλάσματα, καὶ ἔπειτα τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς, ὡς.

		12. ὁ γεν. Παρον.
ἀπὸ	$4\frac{2}{3}$	8
ἀφαιρεθ.	$3\frac{1}{4}$	3
Ὑπόλ.	$1\frac{5}{12}$	

Εἴτουν· μεταβληθέντα τὰ Κλάσματα εἰς δωδέκατα, προέκυψαν διὰ τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{12}$, καὶ διὰ τὸ $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{12}$· ὅθεν 3 ἐκ τῶν 8, μένουσι $\frac{5}{12}$, καὶ 3 Ἀκέραια ἐκ τῶν 4 Ἀκεραίων, μένει 1, ὁμοῦ δὲ $1\frac{5}{12}$.

§. 220.

Ἐὰν τὸ κάτωθεν Κλάσμα εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἄνωθεν, ἐξ οὗ μέλλει ν' ἀφαιρεθῇ (ὅτι εἰς τοιαύτας πτώσεις πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ Ἀφαιρούμενος καὶ Ἀκέραια, τοῦτο ἐννοεῖται, ἐπειδὴ ἄλλως δὲν δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν), τότε δανειζόμεθα ἓν Ἀκέραιον, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τοιαῦτα μέρη, οἷα εἰσὶ τὰ μέλλοντα ἀφαιρεθῆναι, καὶ οὕτως ἀφαιροῦμεν ὡς §. 62, καὶ ἐφεξῆς. Οἷον.

		12. ὁ γενικὸς Παρονομαστής.
ἀπὸ	$5\frac{2}{3}$	8
ἀφαιρεθήτωσαν	$3\frac{3}{4}$	9
Ὑπόλοιπον	$1\frac{11}{12}$	

Ἑ ρ μ η ν ε ί α. Μεταβληθέντων τῶν Κλασμάτων εἰς ὁμοίαν ὀνομασίαν, προέκυψαν διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν 9 δωδέκατα ἀπὸ 8 δωδεκάτων, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, διὰ τοῦτο λοιπὸν δανειζόμεθα ἐκ τῶν 5 ἓν Ἀκέραιον, διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς δωδέκατα, καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἐξ αὐτῶν τὰ 9 δωδέκατα, λέγοντες· 9 ἐκ τῶν 12, μένουσι 3, καὶ 8 (ἐξ ὧν μηδὲν ἀφῃρέθη), μένουσιν $\frac{11}{12}$. εἶτα 3 ἐκ 4 (διότι ἐκ τῶν 5 ἐδανείσθημεν ἤδη ἕν), μένει 1, ὁμοῦ δὲ $1\frac{11}{12}$.

Π ρ ό β λ η μ α. Εἷς χρεωστεῖ Γρόσια 6, ἐπλήρωσεν ὅμως Γρόσ. $5\frac{3}{4}$, πόσα χρεωστεῖ εἰσέτι;

$$\begin{array}{lr} \text{ἐξ Ἀκεραίων} & 6 \\ \text{ἀφαιρεθήτωσαν} & 5\frac{3}{4} \\ \hline \text{Ὑπόλοιπον} & \frac{1}{4}. \end{array}$$

Ἐνταῦθα δὲν ὑπάρχει Κλάσμα εἰς τὸν ἐπάνω Ἀριθμὸν, διὰ τοῦτο δανειζόμεθα ἐκ τῶν 6 ἓν Ἀκέραιον, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τέταρτα (ἐπειδὴ τέταρτα μέλλομεν ν' ἀφαιρέσωμεν), τὸ ὁποῖον (ὡς §. 173.) περιέχει $\frac{4}{4}$, εἶτα λέγομεν· 3 ἐκ τῶν 4, μένει $\frac{1}{4}$, καὶ 5 ἐκ τῶν 5, μένει μηδέν.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Εἰς τοιαύτας πτώσεις, ὅπου ἐπάνω δὲν ὑπάρχει Κλάσμα, ἀφαιροῦμεν τὸν Ἀριθμητὴν ἐκ τοῦ Παρονομαστοῦ, ὁ δ' ἐπάνω Ἀριθμὸς θεωρεῖται δὲ ἓν μικρότερος. Εἰς τὸ προκείμενον Ὑπόδειγμα λέγομεν ἀμέσως· 3 ἐκ τῶν 4, μένει $\frac{1}{4}$, καὶ 5 ἐκ τῶν 5, μηδὲν, τὸ ὁποῖον εἶναι εὐκατάληπτον· διότι, ὅταν πρόκηνται ν' ἀφαιρέσωμεν ἁπλῶς Ἀκέραια ἀπὸ Ἀκεραίων καὶ Κλασμάτων, τὸ ἐπάνω Κλάσμα μένει ἀμετάβλητον Ὑπόλοιπον.

§. 221.

Ἰδοὺ καί τινα Ὑποδείγματα πρὸς ἄσκησιν.

ἀπὸ Παράδ.	$2\frac{1}{3}$	ἀπὸ Παράδ.	4,, $\frac{1}{3}$ ἄσπ.
ἀφαιρεθήτω —	1	ἀφαιρεθ'. —	2,, $1\frac{2}{3}$,,
Ὑπόλοιπον Παράδ.	$1\frac{1}{3}$.	Ὑπόλ. Παράδ.	1,, $1\frac{2}{3}$ ἄσπ.

ἀπὸ Παράδ.	8,, $1\frac{1}{3}$ ἄσπρ.	ἀπὸ Ἄσπρα	2.
ἀφαιρεθήτ —	5,, $2\frac{2}{3}$ —	ἀφαιρεθήτω .	,, $\frac{1}{3}$ ἄσπρου
Ὑπόλ. Παράδ.	2,, $1\frac{2}{3}$ ἄσπρ.	Ὑπόλ. Ἄσπρ.	1,, $\frac{2}{3}$ ἄσπρου

ἀπὸ Παράδ.	5,, —	ἀπὸ Παράδ.	7,, —
ἀφαιρεθ'. —	3,, $2\frac{2}{3}$ ἄσπρ.	ἀφαιρεθ'. —	4,, $\frac{1}{3}$ ἄσπρ.
Ὑπόλ. Παράδ.	1,, $\frac{1}{3}$ ἄσπρ.	Ὑπόλ. Παράδ.	2,, $\frac{2}{3}$ ἄσπρ.

			15.
ἀπὸ Παράδες	6,,	$\frac{1}{3}$ ἄσπρ.	5
ἀφαιρεθήτωσαν —	3,,	$1\frac{2}{5}$ —	6
Ὑπόλοιπον Παράδες	2,,	$1\frac{14}{15}$ ἄσπρ.	$\frac{14}{15}$

Εἰς τὰ ἀνωτέρω Ὑποδείγματα εἶναι περιττὴ κάθε ἄλλη ὁδηγία· διότι ἐκ τῶν Ἑρμηνειῶν τῶν προτέρων Παραδειγμάτων δύναται ἕκαςος νὰ πράξῃ ἐν εὐκολίᾳ τὴν Ἀφαίρεσιν.

Περὶ Δοκιμῆς τοῦ Ἀθροισμοῦ καὶ τῆς Ἀφαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

§. 222.

Καθὼς εἰς τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς ὁ Ἀθροισμὸς καὶ ἡ

Ἀφαίρεσις χρησιμεύουσιν ἀλλήλοις πρὸς Δοκιμὴν, οὕτω καὶ εἰς τὰ Κλάσματα· διότι ἡ βάσις τοῦτε Ἀθροισμοῦ καὶ τῆς Ἀφαιρέσεως μένει πάντοτε ἡ αὐτὴ, κἂν ὦσιν οἱ ἀριθμοὶ Ἀκέραιοι ἢ Κλασματικοί. Ἰδοὺ Ὑποδείγματά τινα.

Ἀθροισμὸς μετὰ Δοκιμῆς.

Παράγοντες.		24. ὁ γενικὸς Παρον.			
2	$\frac{5}{6}$	4 — 20			
3	$\frac{2}{3}$	8 — 16		$\frac{2}{3}$	8 — 16
4	$\frac{3}{8}$	3 — 9		$\frac{3}{8}$	3 — 9
	$\frac{5}{12}$	2 — 10		$\frac{5}{12}$	2 — 10
Ὁλικὸν Κεφ. τῶν Κλασ.	$2\frac{7}{24}$		$\frac{55}{24}$	$1\frac{11}{24}$	$\frac{35}{24}$
Ὅμ., ὡς ἀπεν. πλὴν τοῦ πρώτ.	$1\frac{11}{24}$				
Ὑπόλοιπον	$\frac{20}{24}$	$\frac{5}{6}$ τὸ ἀφεθὲν Κλάσμα.			

Ἐξήγησις. Πρῶτον ἠθροίσαμεν ὅλα τὰ Κλάσματα, καὶ προέκυψαν $2\frac{7}{24}$, εἶτα ἀφήσαντες τὸ πρῶτον, ἠθροίσαμεν τὰ λοιπὰ, καὶ προέκυψαν $1\frac{11}{24}$, τὰ ὁποῖα ἀφαιρέσαμεν ἐκ τῶν $2\frac{7}{24}$· ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ Ἀριθμητὴς 11 δὲν ἐδύνατο ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ ἑτέρου Ἀριθμητοῦ 7, διὰ τοῦτο ἐδανείσθημεν ἐκ τῶν 2 ἓν Ἀκέραιον, τὸ ὁποῖον διαιρέσαντες εἰς εἰκοσὰ τέταρτα (διότι ὅλα τὰ Κλάσματα εἰσὶν ἤδη εἰκοσὰ τέταρτα), ἀφαιρέσαμεν ἐξ αὐτῶν τὰ 11, καὶ ἔμεινον 13, καὶ 7, ἅτινα ποιοῦσιν ὁμοῦ $\frac{20}{24}$, τούτων δὲ διὰ τῶν 4 ἐλαττωθέντων, προέκυψε τὸ πρῶτον ἀφεθὲν Κλάσμα $\frac{5}{6}$, τὸ ὁποῖον δεικνύει, ὅτι ὁ Ἀθροισμὸς ἔγινεν ὀρθῶς.

Ἀφαιρέσεως Ὑποδείγματα μετὰ Δοκιμῆς.

§. 223.

Πρόβλημα.

		30 ὁ γενικὸς Παρονομαςής
ἀπὸ	$5\frac{5}{6}$	25
ἀφαιρεθήτωσαν	$4\frac{3}{5}$	18
Ὑπόλοιπον	$1\frac{7}{30}$	

Δοκιμή.

$$\left.\begin{array}{r} 4\frac{18}{30} \\ 1\frac{7}{30} \end{array}\right\} \text{ἀθροιζόμενα}$$

Ποιοῦσι $5\frac{5}{6}$.

Πρόβλημα.

		9. ὁ γενικὸς Παρονομα.
ἀπὸ Παράδ.	5 ,, $1\frac{1}{3}$ ἄσπρ.	3
ἀφαιρεθήτωσαν —	3 ,, $2\frac{7}{9}$ —	7
Ὑπόλοιπον Παράδ.	1 ,, $1\frac{5}{9}$ ἄσπρ.	

Δοκιμή.

Παράδες 3 ,, $2\frac{7}{9}$ ἄσπρ.
— 1 ,, $1\frac{5}{9}$ — } ἀθροιζόμενα

Ποιοῦσι Παράδες 5 ,, $1\frac{1}{3}$ ἄσπρ.

ΚΕΦ. Ζ'.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Κλασμάτων.

§. 224.

Κυρίως ὅ,τι Πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ Διαίρεσις τῶν Κλασμάτων δὲν ἔπρεπε νὰ καταταχθῶσιν ὡς ἰδιαίτεραι Μέθοδοι· διότι ἑκάστη πτῶσις αὐτῶν ἐπιλύεται κατὰ τὸν Κανόνα τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου, καθὼς ἀποδειχθήσεται ὕστερον. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐκ τῶν ἰδιαιτέρων Ἑρμηνειῶν καὶ Ἐξηγήσεων αὐτῶν τῶν δύο Μεθόδων, πηγάζουσι πολλαπλάσιαι πρακτικαὶ Συντομίαι, καὶ τελευταῖον, ἐπειδὴ, ὅπερ τὸ κύριον ἐστὶν, ἡ τῶν Κλασμάτων Ἀνάλυσις καὶ Ἐπαναγωγὴ, αἵτινες εἰς τὴν ἀλληλένδετον Μέθοδον, εἴτουν Ἄλυσον, εἰσὶν ἀναγκαῖαι, θεμελιοῦνται εἰς τὰς Ἑρμηνείας τοῦτε Πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς Διαιρέσεως, διὰ τοῦτο εἶναι χρήσιμον, ἵνα πραγματευθῶμεν ἰδιαιτέρως περὶ αὐτῶν τῶν δύο τῆς ἀριθμητικῆς Εἰδῶν.

§. 225.

Καθὼς Ἀριθμός τις ἢ Ἀκέραιος εἶναι ἢ Κλασματικὸς, δύναται νὰ ληφθῇ ἅπαξ, ἢ πολλάκις, οὕτω δύναται νὰ ληφθῇ καὶ μέρος τι, ὡς $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$. κ. τ. λ., ὅπερ δηλοῖ, κλασματικῶς τὸν Ἀριθμὸν λαμβάνειν, εἴτουν πολλαπλασιάζειν μὲ τὸ Κλάσμα. Π. χ. $\frac{2}{3}$ ἐκ τῶν 45 δηλοῖ, ὅτι ὁ Ἀριθμὸς 45, νὰ μὴ ληφθῇ ὁλόκληρος, ἀλλὰ μόνον $\frac{2}{3}$ μέρη ἐξ αὐτοῦ. Ταὐτὸν δηλοῖ καὶ $\frac{3}{5}$, ἐκ τῶν $\frac{5}{6}$ νὰ μὴ ληφθῶσιν ὁλόκληρα, ἀλλὰ μόνον $\frac{3}{5}$ μέρη ἐξ αὐτῶν, τοῦτ' ἔστι, νὰ φανερώσωμεν, πόσα φέρουσι τὰ $\frac{3}{5}$ ἐκ τῶν $\frac{5}{6}$. Ὅθεν ὁ τρόπος, δι' οὗ ἐκτελοῦνται οἱ τοιοῦτοι πολλαπλασιασμοὶ, εἶναι τὸ ἀντικείμενον τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Κλασμάτων.

§. 226.

Σχόλιον. Ἐκ τῆς ὄπισθεν ἐκθέσεως τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Κλασμάτων ἕκαστος εὐκόλως ἐννοεῖ, ὅτι πολλαπλασιάζοντες μὲ Κλάσμα, πρέπει πάντοτε νὰ προκύψῃ μικρότερος Ἀριθμὸς τοῦ Πολλαπλασιαστέου, ἐπειδὴ δὲν λαμβάνεται ὁλόκληρος, ἀλλὰ μέρος τι, ὅ ἐστι, κλασματικῶς. Π. χ. $\frac{3}{5}$ ἐκ τῶν 30 δηλοῖ, πόσα φέρουσι $\frac{3}{5}$ ἐκ τῶν 30, ὡς εἰς τὸν πρωτέρω ἐῤῥέθη §.

Πτῶσις Α΄. Πῶς πολλαπλασιάζεται τὸ Κλάσμα μὲ ἀκέραιον Ἀριθμὸν, ἢ ὁ ἀκέραιος Ἀριθμὸς (ὅπερ ταὐτὸν ἐστὶ) με Κλάσμα.

§. 227.

Προκειμένου Κλάσματος καὶ ἀκεραίου Ἀριθμοῦ ἵνα πολλαπλασιασθῶσι μετ' ἀλλήλων, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ Κλάσματος, τὸ δὲ Παραγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ, ὅστις μένει ἀμετάτρεπτος. Π. χ. $\frac{2}{3}$ ἐκ τῶν 8, λέγομεν· 2×8 ποιοῦσιν 16, εἶτα 3 εἰς τὰ 16, περιέχονται $5\frac{1}{3}$. Ὁμοίως $\frac{3}{4}$ ἐκ τῶν 13, ἢ (ὅπερ ταὐτὸν ἐστὶν ὡς §. 76.) 13 κις $\frac{3}{4}$, δίδουσι τρὶς 13, εἴτουν 39 τέταρτα, ἐν ψηφίοις $\frac{39}{4}$, ποιοῦσι $9\frac{3}{4}$.

Δεῖξις. Ἡ αἰτία ἐσαφηνίσθη ἐν τῷ §. 184, ὅπου καὶ ἀπεδείχθη, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ Κλάσματος μεγαλύνεται διὰ τῆς αὐξήσεως τοῦ ἰδίου του Ἀριθμητοῦ. Ὅθεν, ὅταν Κλάσματι, φέρ' εἰπεῖν, $\frac{3}{4}$ μέλλῃ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 13, ὅ ἐστι, νὰ μεγαλύνῃ 13 κις, πρέπει ἀναγκαίως νὰ περιέχῃ 13 κις τρία τέταρτα, εἴτουν $\frac{39}{4}$, δηλονότι, νὰ πολλαπλασιασθῇ, κατὰ τὸν Κανόνα, ὁ Ἀριθμητὴς, ὁ δὲ Παρονομαστὴς νὰ μείνῃ ἀμετάβλητος. Ταύτην τὴν ἔννοιαν πληροφορούμεθα σαφέστερον ἀφ' οὗ στοχασθῶμεν, ὅτι ἑκάστη αὔξησις, ἢ ἐλάττωσις ἑνὸς Πράγματος, μεταβάλλει μόνον τὰ μέρη αὐτοῦ, οὐχὶ ὅμως καὶ τὴν ὀνομασίαυτου. Διότι· καθὼς, φέρ' εἰπεῖν, 5 ὀκάδες πολλαπλασιαζόμεναι μὲ 12, δίδουσι 12 κις 5 ὀκάδας, ἤτοι 60 ὀκάδας, ὅ ἐςὶν, αὐξάνεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων, ἡ δὲ ὀνομασία ὀκάδες μένει πάντοτε ἡ αὐτή· οὕτω καὶ τὰ 13 κις $\frac{3}{4}$ δίδουσι μεγαλήτερον ἀριθμὸν τετάρτων, εἴτουν 3 $\times$ 13 ποιοῦσι $\frac{39}{4}$· τοῦτ' ἔςι, πολλαπλασιάζεται, κατὰ τὸν Κανόνα, ἡ τῶν μερῶν ποσότης (ὁ Ἀριθμητὴς), ἡ δὲ ὀνομασία (ὁ Παρονομαςὴς), μένει ἀμετάβλητος.

§. 228.

Σχόλιον. Ὁ Κανὼν τοῦ πολλαπλασιάζειν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν καὶ διαιρεῖν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ, ἐδιορίσθη μόνον δι' αὐτοὺς τοὺς Ἀριθμοὺς, οὐχὶ ὅμως καὶ διὰ τὴν Τάξιν, διὰ τοῦτο καὶ δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν εἰς τὴν πρᾶξιν τὰς γνωςὰς Συντομίας ἀνεμποδίςως, δηλονότι· πρότερον νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ, καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ Παραγόμενον μὲ τὸν Ἀριθμητήν. Π. χ. $\frac{3}{5}$ ἐκ τῶν 30, εἶναι ταὐτὸν, κἂν εἴπωμεν, τρὶς 30 ποιοῦσιν 90, καὶ $\frac{1}{5}$ ἐκ τῶν 90 δίδουσι 18, ἢ ἂν πρότερον διαιρέσωμεν διὰ τῶν 5 τὰ 30, καὶ προκύψωσιν 6, ἅτινα πολλαπλασιαζόμενα, μὲ 3, δίδουσιν ὡσαύτως 18. Διότι 30 κις $\frac{3}{5}$ δηλοῖ, νὰ πληροφορηθῶμεν, πόσα φέρουσι $\frac{3}{5}$ ἐκ τῶν 30 (ὡς §. 226.), ὅ ἐςὶ, νὰ λάβωμεν τρὶς τὸ πέμπτον ἐκ τῶν 30.

Ὅθεν ὅπου ὁ Παρονομαςὴς τοῦ Κλάσματος ἐμπεριέχεται ἐπίσης εἰς τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιασθήσεται τὸ Κλάσμα, εἶναι πολὺ εὐκολώτερον καὶ συντομώτερον, πρότερον νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ, καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ Παραγόμενον μὲ τὸν Ἀριθμητὴν, ἐπειδὴ δι' αὐτοῦ τοῦ τρόπου προκύπτουσιν ἔντε τῷ πολλαπλασιάζειν καὶ διαιρεῖν μικρότεροι Ἀριθμοί· εἰς ἐκείνας τὰς πτώσεις ὅμως, ὅπου ὁ τοῦ Κλάσματος Παρονομαςὴς δὲν ἐμπεριέχεται ἐξ ἴσου εἰς τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, εἶναι ὠφελιμώτερος ὁ κοινὸς τρόπος, τοῦτ᾽ ἔςι, πρότερον νὰ πολλαπλασιάζωμεν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρῶμεν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ, ἐπειδὴ ἄλλως προκύπτουσι Κλάσματα εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν, τὰ ὁποῖα προξενοῦσι δυσκολίας.

Πρακτικαὶ Συντομίαι.

§. 229.

Ἐπειδὴ, ὡς πρόδηλον, τὸ 1 μηδὲν πολλαπλασιάζει (διότι ἕκαςος Ἀριθμὸς, ὁποιουδήποτε Εἴδους, ἅπαξ λαμβανόμενος, εἴτουν μὲ τὸ 1 πολλαπλασιαζόμενος, προκύπτει εἰς τὸ Παραγόμενον αὖθις ὁ αὐτὸς Ἀριθμὸς, τοῦτ᾽ ἔςι, μένει ἀμετάβλητος)· διὰ τοῦτο, ὅταν ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ Κλάσματος εἶναι 1, δὲν πολλαπλασιάζομεν ποσῶς, ἀλλὰ διαιροῦμεν ἁπλῶς διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ. Π. χ. πρόκειται ἵνα πολλαπλασιάσωμεν $\frac{1}{3}$ μὲ 19· ἐνταῦθα λέγομεν ἀμέσως, 3 ἐκ τῶν 19 (ἐπειδὴ ἅπαξ 19 ποιοῦσιν αὖθις 19), δίδουσιν $6\frac{1}{3}$, καθὼς καὶ $\frac{1}{6}$ ἐκ τῶν 23 δίδουσιν $\frac{23}{6}$, διὸ λέγομεν εὐθὺς, 6 εἰς 23 ἐμπεριέχονται $3\frac{5}{6}$, καὶ ἐφεξῆς.

Πλὴν διὰ νὰ μὴ πολλαπλασιάζωμεν εἰς ἑκάςην πτῶσιν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν (ἔςω καὶ μεγαλήτερος τοῦ 1), διαιροῦμεν τὸ Κλάσμα, μὲ τὸ ὁποῖον μέλλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν, ὅσον τὸ δυνατὸν εἰς ἄλλα τοιαῦτα Κλάσματα, ὧν οἱ Ἀριθμηταὶ νὰ ἔχωσι πάντοτε 1, διὰ τοῦ ὁποίου τρόπου προκύπτουσι μικρότεροι διαιρέσεως Παρονομαςαὶ, δι᾽ ὧν ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις εὐκόλως. Καθὼς, φέρ᾽ εἰπεῖν, $\frac{7}{8}$ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς $\frac{4}{8}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{8}$, ἐξ ὧν τὸ πρῶτον εἶναι $\frac{1}{2}$, τὸ δεύτερον τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἡμίσεως, καὶ τὸ τρίτον τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ δευτέρου ἡμίσεως. Ὅθεν, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ 7, καὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 8, λαμβάνομεν ἐκ τοῦ Πολλαπλασιαςέου τὰ ἥμισυ, εἶτα ἐξ αὐτῶν τὰ ἥμισυ, καὶ τελευταῖον αὖθις τὰ ἥμισυ ἐκ τῶν δευτέρων ἡμίσεων, τὰ ὁποῖα ἀθροίζομεν ὁμοῦ, ὥςε δὲ αὐτοῦ τοῦ τρόπου, ἐξαιρέτως εἰς τοὺς ὀνοματικοὺς μικτοὺς Ἀριθμοὺς, συντέμνεται καὶ εὐκολύνεται πολὺ ἡ πρᾶξις. Π. χ. μᾶς ἐδόθη νὰ λογαριάσωμεν πόσα πληρωθήσονται διὰ $\frac{7}{8}$ ὀκάδος Πράγματός τινος, ἐὰν μία ὀκᾶ τιμᾶται διὰ Γρόσ. 35, 36 παράδ. αὕτη ἡ πρᾶξις ἐκτελεῖται ἐν εὐκολίᾳ, ὡς ἀκολούθως.

			Γρ'. 35,,36 πρ'. πολλαπλ. μὲ		$\frac{7}{8}$
					4
4 ποιοῦσιν ½ γρ., ὅθεν ½ ἐκ τῶν	Γρ. 35,,36 πρ'.		Γρ. 17,,38 πρ'.		2
2 ,, ½ τῶν 4 ,, ¼ ,,	17,,38 — —		8,,39 —		1
1 ,, ½ ,, 2 ,, ⅛ ,,	8,,39 — —		4,,19½ ἤτοι 1½ ἄσπρ.		
Ποιοῦσιν ὁμοῦ	Γρ'. 31,,16½ πρ. ἤτοι 1½ ἄσπ.				

Ἑρμηνεία. Ἀνωτέρω πρόκεινται νὰ ληφθῶσιν $\frac{7}{8}$ ἐκ τῆς Ποσότητος τῆς Ὀκάδος, τοῦτ᾽ ἔςιν, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{8}$, διὰ τοῦτο λοιπὸν διὰ τὴν ἥμισυ ὀκᾶν, ἐλάβομεν τὰ $\frac{1}{2}$ ἐκ τῶν Γροσίων. 35 ,, 36 παράδ., καὶ ἔφερον Γρόσ. 17, 38 παράδ., εἶτα διὰ τὸ $\frac{1}{4}$, τὰ ἥμισυ ἐκ τῶν Γροσίων. 17 ,, 38 παράδ., καὶ ἔφερον Γρόσ. 8 ,, 39 παράδ., τελευταῖον διὰ τὸ $\frac{1}{8}$, τὰ ἥμισυ ἐκ τῶν Γροσίων 8 ,, 39 παράδ., καὶ ἔφερον Γρόσ 4,, 19$\frac{1}{2}$ παράδ., ὁμοῦ δὲ Γρόσ. 31 ,, 16$\frac{1}{2}$ παράδ. ὡς ἀνωτέρω.

Σημείωσις Α΄. Ἡ πρᾶξις τοῦ ἀνωτέρω Προβλήματος ἐδύνατο νὰ γίνῃ καὶ οὕτω, δηλαδὴ, ἀντὶ νὰ λάβωμεν τὰ ἥμισυ ἐκ τῶν Γροσίων 17,,38 παράδ., ἐδυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ τέταρτον μέρος ἐκ τῶν Γροσίων. 35,, 36 παράδ., τὸ ὁποῖον φέρει ὡσαύτως Γρόσ. 8,,39 παράδ., καθὼς καὶ τὸ ὄγδοον μέρος ἐκ τῶν Γροσίων 35,,36 παράδ. φέρει ὁμοίως Γρόσ. 4,,19$\frac{1}{2}$ παράδ., μ᾽ ὅλον τοῦτο ὁ πρῶτος τρόπος εἶναι εὐκολώτερος.

Σημείωσις. Β΄. Προσέτι δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ ἐργασία τοῦ ῥηθέντος Ὑποδείγματος καὶ κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον, ὅπου ἡ Ποσότης τῶν $\frac{7}{8}$ ἐκ τῶν Γροσ΄. 35 ,, 36 παράδ. προκύπτει εὐθὺς, ἐὰν ἐξ αὐτῶν ἀφαιρέσωμεν τὸ $\frac{1}{8}$ ὡ. ἐμπροσθεν. Διότι ἂν μία Ὀκᾶ τιμᾶται διὰ Γρόσ. 35,,36 παράδ., τὰ $\frac{7}{8}$ τιμῶνται δὶ $\frac{1}{8}$ ὀλιγώτερον τῆς αὐτῆς τιμῆς. Εἰς τοιαύτας, καὶ ἑτέρας παρομοίας Συντομίας, πρέπει νὰ ἐκλέγῃ ὁ Λογαριάζων, ὡς προελέχθη, ἐκείνην, ἥτις εὐκολύνει καὶ συντέμνει τὴν πρᾶξιν ἑκάστου προκειμένου Προβλήματος, ὡς.

Γρόσ. 35,,36 παράδ.
ἀφαιρεθέντ. ἐξ αὐτῶν $\frac{1}{8}$ — 4,,19$\frac{1}{2}$ —
Ποιοῦσι Γρόσ. 31,,16$\frac{1}{2}$ παράδ. ἤτοι 1$\frac{1}{2}$ ἄσπ. ὡς ὄπισθ.

§. 230.

Ἡ διαίρεσις τοῦ Ἀριθμητοῦ γίνεται τοῦ λοιποῦ ἀπαραλλάκτως, καθὼς ἡ διαίρεσις τῶν Παράδων, Λοτίων κ. τ. λ. δηλονότι· λαμβάνομεν ἐξ αὐτοῦ τόσα μέρη, ὅσα ἐπιζητοῦνται δὶ ἥμισυ, τρίτον, τέταρτον κ. τ. λ., εἶτα διαιροῦμεν τὰ ἐναπολειφθέντα μέρη τοιουτοτρόπως, ὥςε νὰ δύναται νὰ ληφθῇ τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἑτέρου. Τὰ ἑπόμενα Ὑποδείγματα σαφηνίζουσι τὰ λεχθέντα.

Πρόβλημα. Πόσα φέρουσιν $\frac{9}{16}$. ἐκ τῶν Γροσίων 78,,36 παράδ;

Λύσις.

Γρόσ. 78,,36 παράδ. × $\frac{9}{16}$ διαιροῦνται εἰς 8 καὶ 1.
Γρόσ. 39,,18 παράδ.
— 4,,37$\frac{1}{2}$ —
Ποιοῦσι Γρόσ. 44,,15$\frac{1}{2}$ παράδ. ἤτοι 1$\frac{1}{2}$ ἄσπρον.

Ἑρμηνεία. Ἀντὶ, κατὰ τὸν συνήθη Κανόνα, νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν 9, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ 16, διῃρέσαμεν τὰ 9 δέκατα ἕκτα εἰς $\frac{8}{16}$ καὶ $\frac{1}{16}$, ἐξ ὧν τὰ $\frac{8}{16}$ ποιοῦσιν $\frac{1}{2}$, διὰ τὸ ὁποῖον ἐλάβομεν τὰ ἥμισυ ἐκ τῶν Γροσ. 78,,36 παράδων, καὶ ἔφερον Γρόσ. 39,,18 παράδ., τὸ δὲ $\frac{1}{16}$, εἶναι τὸ ὄγδοον μερος ἐκ τῶν $\frac{8}{16}$, διὸ καὶ ἐλάβομεν τὸ ὄγδοον μέρος ἀπὸ ὅσα προέκυψαν ἐκ τῶν $\frac{8}{16}$, εἴτουν ἐκ τῶν Γροσ. 39,, 18 παράδ., καὶ ἔφερον Γρόσ. 4,, 37$\frac{1}{2}$ παράδ., ὁμοῦ δὲ Γρόσ. 44,, 15$\frac{1}{2}$ παράδ. ἥτις ἐςὶν ἡ Ποσότης τῶν $\frac{9}{16}$ ἐκ τῶν Γροσ. 78,, 36 παράδ.

Πρόβλημα. Πολλαπλασιαζόμενα Γρόσ. 19,, 68 ἄσπρα μὲ $\frac{23}{32}$, πόσα ἔσεται τὸ Πηλίκον;

Λύσις.

Γρόσ.	19,,68 ἄσπρα		×	$\frac{23}{32}$
Γρόσ.	9,,94 ἄσπρα.			16
—	2,,83	—	$\frac{1}{2}$ ἄσπ.	4
—	1,,41	—	$\frac{3}{4}$	2
—	—,,80		$\frac{7}{8}$	1
Ποιοῦσι Γρόσ.	14,,60 ἄσπρα		$\frac{1}{8}$ ἄσπρου	

Ἑρμηνεία. Τὰ $\frac{23}{32}$ διηρέθησαν εἰς 16. 4. 2 καὶ 1, ἐξ ὧν τὰ $\frac{16}{32}$ εἰσὶν $\frac{1}{2}$, διὸ καὶ ἐλήφθησαν τὰ ἥμισυ ἐκ τῶν Γροσ. 19,,68 ἄσπρ., καὶ ἔφερον Γρόσ. 9,,94 ἄσπρα. τὰ $\frac{4}{32}$ εἰσὶν $\frac{1}{4}$ τῶν $\frac{16}{32}$, διὰ τοῦτο ἐλήφθη τὸ τέταρτον μέρος ἐκ τῶν Γροσ. 9,,94 ἄσπρ., τὰ ὁποῖα εἶναι ἡ ποσότης τοῦ $\frac{1}{2}$, καὶ ἔφερον Γρόσ. 2,,83$\frac{1}{2}$ ἄσπρ. (τὰ $\frac{4}{32}$ ἐδύναντο νὰ ληφθῶσιν ὡς $\frac{1}{8}$ τῶν 32 ἐκ τῶν Γροσ. 19,,68 ἄσπρ. ὅπου προέκυπτον ὡσαύτως Γρόσ. 2,,83$\frac{1}{2}$ ἄσπρα)· τὰ $\frac{2}{32}$ εἰσὶν $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{4}{32}$, διὸ καὶ ἐλήφθησαν τὰ ἥμισι ἐκ τῶν Γροσ. 2,,83$\frac{1}{2}$ ἄσπρ. καὶ ἔφερον Γρόσι 1,,41$\frac{3}{4}$ ἄσπρα, τελευταῖον τὸ $\frac{1}{32}$ εἶναι $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{2}{32}$, ὅθεν καὶ ἐλήφθησαν τὰ ἥμισυ ἐκ τοῦ Γροσίου 1,,41$\frac{3}{4}$ ἄσπρα, καὶ ἔφερον 80$\frac{7}{8}$ ἄσπρ., σύμπαντα δὲ τὰ $\frac{23}{32}$, ἔφερον Γρόσ. 14,,60$\frac{1}{8}$ ἄσπρ, ὡς ἀνωτέρω.

Σημείωσις. Ὅτι ὁ ἄνωθεν τρόπος εἶναι προτιμότερος τοῦ συνήθους, τὸ δεικνύει ἡ πρᾶξις τοῦ ἀνωτέρω Ὑποδείγματος, ἐπειδὴ ἐὰν ἡ ἐργασία ἐγίνετο κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιασθῶσι τὰ Γρόσ. 19,,68 ἄσπρα μὲ τὸν Ἀριθμητὴν 23, καὶ νὰ διαιρεθῇ τὸ κεφάλαιον διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ 32, τὸ ὁποῖον εἶναι διεξοδικὸν καὶ κοπιαςικόν.

§. 231.

Προκειμένου Κλάσματος παρὰ τῷ Πολλαπλασιαςέῳ, ἐπιτελεῖται ἡ ἐργασία ὡς ἡ τοῦ τελευταίου Ὑποδείγματος. Π. χ. πρόκειται ἵνα πολλαπλασιασθῶσι Γρόσ. 21,,32 παράδ. 2 $\frac{2}{3}$ ἄσπρα μὲ 15.

Λύσις.

Γρ΄. 21,,32πρ. 2$\frac{2}{3}$ ἄσπ., πολλαπλασιασθ΄. μὲ 15

20			21	
10		Γρόσια	315	
2	$\frac{1}{2}$ ἐκ τῶν 15, φέρουσι	—	7,,20	παράδες
	$\frac{1}{2}$ ἐκ τῶν Γ.	7,,20πρ. —	3,,30	—
	$\frac{1}{5}$ ἐκ τῶν —	3,,30 — —	-,,30	—
2 ἄσπρα.	$\frac{1}{3}$ ἐκ τῶν — —	,,30 — —	-,,10	—
$\frac{2}{3}$ —	$\frac{1}{3}$ ἐκ τῶν — —	,,10 — —	-,, 3$\frac{1}{3}$	—
		Ποιοῦσι	Γρ΄. 327,,13$\frac{1}{3}$	πρ΄.

Ἑρμηνεία. Πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὰ Γρόσια μὲ τὰ 15, ὡς συνήθως, ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς 32 παράδ. εἰς μέρη Γροσίου, εἴτουν εἰς 20. 10 καὶ 2, καὶ λαμβάνομεν αὐτοὺς κλασματικῶς, ὡς ἀνωτέρω· τὰ 2 ἄσπρα εἰσὶ τὸ τρίτον μέρος ἐκ τῶν 2 παράδ., διὰ τοῦτο ἐλήφθη $\frac{1}{3}$ ἐκ τῆς Ποσότητος αὐτῶν, τὰ δὲ $\frac{2}{3}$ ἄσπρου εἰσὶ τὸ τρίτον μέρος ἐκ τῶν 2 ἄσπρων· διότι 2 ἄσπρα, ποιοῦσιν 6 τρίτα, ἄρα $\frac{2}{3}$ ἄσπρου, ποιοῦσιν $\frac{1}{3}$ ἐκ τῶν 6, ὅθεν καὶ ἐλήφθη $\frac{1}{3}$ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 2 ἄσπρων.

Ἀντὶ τῶν 32 παράδ. $2\frac{2}{3}$ ἄσπρων, ἐδύναντο νὰ ληφθῶσι παράδ. 33, καὶ ἔπειτα ν' ἀφαιρεθῶσιν ἐκ τῆς ὁλοκλήρου ποσότητος $\frac{1}{3}{}^{5}$ ἄσπρου, εἴτουν 5 παράδ. οἵτινες ἐλήφθησαν περισσότερον.

§. 232.

Ἡ πρᾶξις τῶν τοιούτων Πολλαπλασιασμῶν ἐπιτελεῖται πλέον εὐκόλως καὶ ταχέως, ἐὰν ὁ Πολλαπλασιαςὴς εἶναι μοναδικὸς Ἀριθμὸς, ἢ δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς μοναδικοὺς Ἀριθμοὺς, ἐπειδὴ μὲ μοναδικοὺς Ἀριθμοὺς πολλαπλασιάζεται εὐκολώτερον ὁ τοῦ κλάσματος Ἀριθμητὴς, χωρὶς ν' ἀναγκασθῶμεν νὰ διαιρέσωμεν αὐτόν. Π. χ. μᾶς ἐδόθη νὰ πολλαπλασιάσωμεν Γρόσ. 25,,35 παράδ. $1\frac{3}{4}$ ἄσπρα μὲ 7, αὐτὴ ἡ λύσις γίνεται, ὡς κατωτέρω.

$$\begin{array}{l} \text{Γρόσια}\quad 25\,,,\,35\ \text{παράδες}\ 1\frac{3}{4}\ \text{ἄσπρα} \times 7 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 7 \\ \hline \text{Ποιοῦσι Γρόσια}\ 181\,,,\ 9\ \text{παράδες}\ \frac{1}{4}\ \text{ἄσπρου.} \end{array}$$

λέγοντες (ἀρχόμενοι ἐκ τοῦ Ἀριθμητοῦ τοῦ Κλάσματος $\frac{3}{4}$) 3 × 7 — 21 (τέταρτα), ἅτινα, διὰ τοῦ νοὸς, διὰ τῶν 4 διαιρεθέντα, δίδουσι $5\frac{1}{4}$ ἄσπρα, θέττομεν λοιπὸν τὸ $\frac{1}{4}$, καὶ βαςῶμεν 5 ἄσπρα, εἶτα 1 × 7 — 7, καὶ 5 τὰ βαςαχθέντα, ποιοῦσι 12 ἄσπρα, τὰ ὁποῖα διὰ τῶν 3 διαιρεθέντα, φέρουσι 4 παράδες, ἔπειτα 5 × 7 — 35, καὶ 4 τὰ βαςαχθέντα, ποιοῦσι 39 παράδ., διὸ θέττομεν 9, καὶ βαςῶμεν 3, μετέπειτα 3 × 7 — 21, καὶ 3 τὰ βαςαχθέντα, ποιοῦσιν 24 δεκάδας, ἤτοι Γρόσ. 6, τὰ ὁποῖα καὶ βαςῶμεν, μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὰ Γρόσια 25 μὲ τὰ 7, καὶ προσθέττομεν καὶ τὰ Γρόσ. 6, ἃ ἐβαςάξαμεν, ὡς ἀνωτέρω.

Πρόβλημα. Πολλαπλασιαζόμενα Γρόσ. 45,,9 παράδ. $2\frac{5}{8}$ ἄσπρα μὲ 32, πόσον ἔσεται τὸ Πηλίκον;

Λύσις.

Γρόσια	45,,	9 παράδες	$2\frac{5}{8}$ ἄσπρα	× 32
			8	8
Γρόσια	361,,	39 παράδες		4
		4		
Πηλίκον Γρόσια	1447,,	36 παράδες.		

Ἀφ' οὗ διηρέσαμεν τὰ 32 εἰς τοὺς Παράγοντας αὐτῶν 8 καὶ 4, εἴπομεν· 8 κις $\frac{5}{8}$, ποιοῦσι 5 ἄσπρα (δηλ. 5 × 8 — 40, ἅτινα διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 8 διαιρεθέντα, δίδουσι 5 ἄσπρα), εἶτα 2 × 8 — 16 ἄσπρα, καὶ 5 τὰ ἐκ τοῦ Κλάσματος προκύψαντα, ποιοῦσιν 21 ἄσπρα, εἴτουν 7 παράδες, ἔπειτα 8 × 9 — 72 παράδ., καὶ οἱ ῥηθέντες 7, ποιοῦσιν 79 παράδ., οἵτινες διὰ τῶν 40 διαιρεθέντες, ἔδωκαν Γρόσι 1 καὶ 39 παράδ., διὰ τοῦτο καὶ ἐθέσαμεν 39 παράδ., μετέπειτα 5 × 8 — 40 Γρόσ., καὶ τὸ ἀνωτέρω 1, ποιοῦσι 41, διὸ ἐθέσαμεν 1, καὶ ἐβαστάξαμεν 4, μετὰ ταῦτα 4 × 8 — 32, καὶ 4 τὰ βασταχθέντα ποιοῦσι 36, ὁμοῦ δὲ Γρόσ. 361,, 39 παράδ., τὰ ὁποῖα πολλαπλασιασθέντα καὶ μὲ τὸν ἕτερον Παράγοντα 4, προέκυψε τὸ Πηλίκον, ὡς ἀνωτέρω.

§. 233.

Πρὸς τούτοις προκύπτουσι Κλάσματα, ὡς 7μα, 11τα, 13τα, 17μα, καὶ ἕτερα ὅμοια, τὰ ὁποῖα δὲν διαιροῦνται, ἔξω καὶ νὰ ληφθῶσιν, ὁσαδήποτε μέρη ἐκ τῶν Ἀριθμητῶν αὐτῶν, δὲν προκύπτει μ' ὅλον τοῦτο $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ κ.τ.λ. ἐπειδὴ οἱ Παρονομασταὶ τῶν τοιούτων Κλασμάτων δὲν εἶναι ἄρτιοι. Ὅθεν ὁ Πολλαπλασιασμὸς τῶν τοιούτων Κλασμάτων δὲν ἐπιτελεῖται κατ' ἄλλον συντομώτερον τρόπον, εἰμὴ κατὰ τὸν κοινὸν (ὡς §. 227.), τοῦτ' ἔστι, πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν, καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ. Π. χ. πρόκειται Γρόσ. 27 ,, 17 παράδ. 2 ἄσπρα ἵνα πολλαπλασιασθῶσι μὲ $\frac{13}{17}$. ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ Παρονομαςὴς 17 δὲν εἶναι διπλοῦς, διὰ τοῦτο ὁ Ἀριθμητὴς 13 δὲν δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς μικρότερα Κλασματικὰ μέρη, ἀλλὰ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσι τὰ Γρόσ. 27 ,, 17 παράδ. 2 ἄσπρα μὲ 13, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρεθῇ τὸ Παραγόμενον διὰ τῶν 17, ὁ ὁποῖος Πολλαπλασιασμὸς ἐκτελεῖται ἢ διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν παράδων καὶ ἄσπρων εἰς Κλασματικὰ μέρη, ἢ κατὰ τὸν §. 143.

Διὰ τῆς Διαιρέσεως.

Γρ. 27,,17 π. 2 ἄσπρα .	× 13	
πρ. 10, ἢ $\frac{1}{4}$ γροσίου	27	
— 5, - $\frac{1}{2}$ τῶν 10 π.	351 ,, —	
— 2, - $\frac{1}{5}$ — —	3 ,, 10 π.	($\frac{1}{4}$ ἐκ τῶν 13)
	1 ,, 25 -	($\frac{1}{2}$ — γρ. 3,,10 π)
	- ,, 26 -	($\frac{1}{5}$ — — —)
	- ,, 8 π. 2 ἄσ.	($\frac{1}{3}$ ἐκ τῶν 26 π. διὰ τὰ 2 ἄσ.)
διὰ τοῦ παρονομαςοῦ 17	Γρ. 356,,29 π. 2 ἄσ.	
Ποιοῦσι	Γρ. 20,,39 π. 1 $\frac{1}{17}$ ἄσ.	

Κατὰ τὸν §. 143

Γρόσια 27 ,, 17 πρ. 2 ἄσπρα.	× 13	
Γρόσια 82 ,, 13 πρ.	3	
Γρόσια 329 ,, 12 πρ.	4	
27 ,, 17 — 2 ἄσπρα	1	
διὰ τοῦ παρονομ. 17 Γρόσια 356 ,, 29 πρ. 2 ἄσπρα		
Φέρουσι Γρόσια 20 ,, 39 πρ. 1 $\frac{9}{17}$ ἄσπρα.		

Πτῶσις Β'. Ὅταν ὁ Πολλαπλασιαςὴς σύγκηται ἐξ ἀκεραίου Ἀριθμοῦ καὶ Κλάσματος.

§. 234.

Κατὰ δύο τρόπους δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ ἀκέραιον Ἀριθμὸν καὶ Κλάσμα, φέρ' εἰπεῖν, μὲ $5\frac{7}{8}$, μὲ $7\frac{3}{4}$ κ. τ. λτ. Ἐνταῦθα ἢ πολλαπλασιάζομεν πρότερον μὲ τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, ὡς συνήθως, καὶ ἔπειτα μὲ τὸ Κλάσμα, ὡς ἐῤῥέθη, ἢ μεταβάλλομεν τὸν μικτὸν Ἀριθμὸν εἰς νόθον Κλάσμα (δηλ. πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν μὲ τὸν Παρονομαστὴν, ἀθροίζοντες ὁμοῦ καὶ τὸν Ἀριθμητὴν), μὲ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν ὡς μὲ κύριον Κλάσμα, καθὼς τὰ ἑπόμενα Ὑποδείγματα δεικνύουσιν.

Α΄. Τρόπος.

Πολλαπλασιασθ΄. Γρ. 35 „ 36 π. μὲ $9\frac{7}{8}$

		9	4 ἢ $\frac{1}{2}$
		Γρ΄. 323 „ 4 π.	2 - $\frac{1}{2}$ τῶν 4
$\frac{1}{2}$ ἐκ τῶν Γρ΄.	35 „ 36 π. —	17 „ 38 -	1 - $\frac{1}{2}$ - 2
$\frac{1}{2}$ — — —	17 „ 38 — —	8 „ 39 -	
$\frac{1}{2}$ — — —	8 „ 39 — —	4 „ $19\frac{1}{2}$ -	
	Ποιοῦσι. Γρ΄.	354 „ $20\frac{1}{2}$ παράδες	

Β΄. Τρόπος.

Πολλαπλασιασθ΄. Γρ΄. 35 „ καὶ πρ΄. 36 μὲ $9\frac{7}{8}$

		79 „	20	79
		Γρ΄. 2765 „	10	8
20 π. $\frac{1}{2}$ ἐκ τῶν 79	. —	39 „ 20 π.	5	
10 - $\frac{1}{2}$ — —	Γρ. 39 „ 20 π. —	19 „ 30 -	1	
5 - $\frac{1}{2}$ — — —	19 „ 30 - —	9 „ 35 -		
1 $\frac{1}{2}$ — — —	9 „ 35 - —	1 „ 39 -		
διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 8	Γρ΄.	2836 „ 4 παράδες		
	Ποιοῦσι Γρ΄.	354 „ $20\frac{1}{2}$ παράδες		

Ἑρμηνεία. Κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον πολλαπλασιάσαμεν τὰ Γρόσ. 35,,36 παράδ. μὲ 9, καὶ προέκυψαν Γρόσ. 329,,4 παράδ., εἶτα διαιρέσαμεν τὰ $\frac{7}{8}$ εἰς 4, 2, καὶ 1 ὄγδοον, καὶ ἐλάβομεν αὐτὰ ἓν ἐκ τοῦ ἑτέρου.

Κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον μετεβάλλομεν τὸν μικτὸν Ἀριθμὸν εἰς νόθον Κλάσμα, εἰπόντες· $8 \times 9 = 72$ (ὄγδοα), καὶ τὰ 7 ὄγδοα ὁμοῦ, ποιοῦσιν $\frac{79}{8}$, καὶ ἀντὶ μὲ $9\frac{7}{8}$, πολλαπλασιάσαμεν μὲ τὸ Κλάσμα $\frac{79}{8}$, εἴτουν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν 79, εἶτα ἐλάβομεν κλασματικῶς τοὺς 36 παράδ. ἐκ τῶν 79, καὶ διαιρέσαντες τὰ προκύψαντα Γρόσ. 2839,,4 παράδ. διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 8, προέκυψαν Γρόσ. 354,,20$\frac{1}{2}$ παράδ. ὡς ἀπέναντι.

§. 235.

Σχόλιον. Α΄. Ἐν τάχει ἐκτελεῖται ἡ πρᾶξις τῶν τοιούτων Προβλημάτων, ἐὰν ἀντὶ μὲ $9\frac{7}{8}$, $9\frac{3}{4}$, $9\frac{3}{4}$ καὶ μὲ τὰ τούτοις ὅμοια, πολλαπλασιάσωμεν μὲ 10, καὶ ἀφαιρέσωμεν ἐκ τοῦ Παραγομένου $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, κ. τ. λ. Ἐν τῷ ῥηθέντι Ὑποδείγματι πρόκεινται, ἵνα πολλαπλασιασθῶσι Γρόσ. 35,,36 παράδ. μὲ $9\frac{7}{8}$, ὅπερ δηλοῖ, νὰ ληφθῶσι 10 ὄγδοα ὀλιγώτερον τῶν 10· πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τὰ Γρόσ. 35,,36 παράδ. μὲ 10, καὶ προκύπτουσι Γρόσ. 359,,—· διότι δεκάκις 36 παράδ. ποιοῦσι 36 δεκάδας, ἤτοι Γρόσ. 9,,—, δεκάκις δὲ Γρόσ. 35,,—, ποιοῦσι Γρόσ. 350, καὶ τ' ἀνωτέρω Γρόσ. 9, δίδουσιν ὁμοῦ Γρόσ. 359,,—, ἐξ ὧν ἀφαιρεθέντος 1 ὀγδόου, δηλ. ἐκ τῶν Γρόσ. 35,,36 παράδ., ἤτοι Γρόσ. 4,,19$\frac{1}{2}$ παράδ. (τὰ περισσότερα ληφθέντα), μένουσι Γρόσ. 354,,20$\frac{1}{2}$ παράδ., ὡς ἀπέναντι.

§. 236.

Σχόλιον. Β΄. Ἀμφότεροι οἱ τρόποι τοῦ §. 234. ἔχουσιν ἰδιαιτέρας συντομίας, οἵτινες, κατὰ τὰς περιστάσεις τοῦ

Προβλήματος, προξενοῦσι ποτὲ μὲν ὁ εἷς, ποτὲ δὲ ὁ ἕτερος συντομίαν. Πλὴν ὁ τρόπος, δι' οὗ μεταβάλλεται ὁ σὺν κλάσματι μικτὸς Ἀριθμὸς εἰς νόθον Κλάσμα, πρέπει νὰ διαφυλαχθῇ εἰς ὅλας σχεδὸν τὰς Καταςρώσεις περισσοτέρων Θέσεων, ὡς σαφηνισθήσονται ἐν τῷ οἰκείῳ τόπῳ· εἰς ἑτέρας πτώσεις ὅμως εἶναι ὠφελιμώτερον, πρότερον νὰ πολλαπλασιάζωμεν μὲ τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, καὶ ἔπειτα μὲ τὸ Κλάσμα, καθὼς ἀπεδείχθη ἐν τῷ §. 234. Περὶ τῶν τοιούτων Πτώσεων ἕπονται Ὑποδείγματα, τὰ ὁποῖα ὁδηγήσουσι τὸν μετερχόμενον τὴν Ἀριθμητικὴν, διὰ νὰ ἐκλέγῃ μόνος τὸν ὠφελιμώτερον τρόπον εἰς ἕκαςον Ὑπόδειγμα.

Πτῶσις. Γ΄. Πῶς πολλαπλασιάζεται τὸ Κλάσμα μὲ ἕτερον Κλάσμα.

§. 237.

Προκειμένου Κλάσματος ἵνα πολλαπλασιασθῇ μὲ ἕτερον Κλάσμα, φέρ' εἰπεῖν, $\frac{2}{3}$ μὲ $\frac{4}{5}$ κ. τ. λ. πολλαπλασιάζεται Ἀριθμητὴς μὲ Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαςὴς μὲ Παρονομαςὴν, εἶτα διαιρεῖται ἢ τῷ ὄντι, ἢ κλασματικῶς, τὸ Κεφάλαιον τῶν Ἀριθμητῶν διὰ τοῦ Κεφαλαίου τῶν Παρονομαςῶν. Ἰδοὺ Ὑποδείγματα τοιαῦτα.

α΄. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$	β΄. $\frac{1}{2} \times \frac{5}{8}$	γ΄. $\frac{4}{5} \times \frac{5}{8}$
Ποιοῦσιν $\frac{8}{15}$.	Ποιοῦσιν $\frac{5}{16}$.	Ποιοῦσιν $\frac{20}{40}$. ἐλατ. $\frac{1}{2}$.

Ἑρμηνεία. Εἰς τὸ α΄. προέκυψε τὸ τῶν Ἀριθμητῶν Κεφάλαιον $2 \times 4 — 8$, καὶ τὸ τῶν Παρονομαςῶν $3 \times 5 — 15$, διαιρούμενα λοιπὸν τὰ 8 διὰ τῶν 15, δίδουσιν (ὡς §. 176.) $\frac{8}{15}$.

Εἰς τὸ β΄. προέκυψε τὸ τῶν Ἀριθμητῶν Κεφάλαιον 5, καὶ τὸ τῶν Παρονομαςῶν 16, ὅθεν διαιρουμένων τῶν 5 διὰ τῶν 16, δίδουσι $\frac{5}{16}$.

Εἰς τὸ γ΄. λέγομεν ὡσαύτως, $4 \times 5 — 20$, καὶ $5 \times 8 — 40$, ποιοῦσιν $\frac{20}{40}$, ἅτινα διὰ τῶν 2 ἐλαττωθέντα, δίδουσιν $\frac{1}{2}$.

Δεῖξις. Ἡ βάσις τοῦ ἀπέναντι τρόπου πηγάζει ἐκ τῶν §. 184 καὶ 185, ὅπου ἐλέχθη, ὅτι ἡ τοῦ Κλάσματος τιμὴ μεγαλύνεται διὰ τῆς αὐξήσεως τοῦ Ἀριθμητοῦ, καὶ ἐλαττοῦται διὰ τῆς αὐξήσεως τοῦ Παρονομαςοῦ.

Τὰ Κλάσματα λοιπὸν πολλαπλασιάζονται ἀλλήλοις τοιουτοτρόπως· ὁ Πολλαπλασιαςέος πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ, εἶτα διαιρεῖται διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ (ὡς §. 222.). Ὅθεν ὅταν ὁ Πολλαπλασιαςέος εἶναι Κλάσμα, φέρ' εἰπεῖν $\frac{4}{5}$, καὶ μέλλῃ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ $\frac{2}{3}$, τότε πολλαπλασιάζεται ὁ Πολλαπλασιαςέος $\frac{4}{5}$ μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ 2, καὶ διαιρεῖται διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ 3, τοῦτ' ἐςι, τὰ $\frac{4}{5}$ πρέπει νὰ ληφθῶσι δὶς περισσότερον, καὶ ἔπειτα πάλιν τρὶς ὀλιγώτερον· εἴτουν ὁ Ἀ-Α'ριθμητὴς 4 πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν ἕτερον Ἀριθμητὴν 2 (ὡς §. 184), καὶ ὁ Παρονομαςὴς 5 μὲ τὸν ἄλλον Παρονομαςὴν 3 (ὡς §. 185.), ὅ ἐςὶν ἀπόδειξις, ὅτι κατὰ τὸν Κανόνα, πολλαπλασιάζεται Ἀριθμητὴς μὲ Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαςὴς μὲ Παρονομαςήν.

§. 238.

Ἂν σὺν τοῖς Κλάσμασι πρόκηνται καὶ ἀκέραιοι Ἀριθμοί, εἶναι, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖςον, ὠφελιμώτερον νὰ μεταβληθῶσιν οἱ μικτοὶ Ἀριθμοὶ εἰς νόθα Κλάσματα, διότι τότε ἐπιτελεῖται ἡ πρᾶξις ὡς μὲ κύρια Κλάσματα. Π. χ. πρόκεινται ἵνα πολλαπλασιασθῶσιν $6\frac{3}{5}$ μὲ $8\frac{2}{3}$· μεταβάλλομεν λοιπὸν τόσον τὰ $6\frac{3}{5}$, ὅσον καὶ τὰ $8\frac{2}{3}$ εἰς νόθα Κλάσματα, καὶ οὕτω προκύπτουσι πρὸς Πολλαπλασιασμὸν $\frac{33}{5}$, καὶ $\frac{26}{3}$, ὧν οἱ Ἀριθμηταὶ πολλαπλασιασθέντες μετ' ἀλλήλων, γίνεται ἔπειτα ἡ διαίρεσις (ὡς §. 237.)

$$6\tfrac{3}{5} \times 8\tfrac{2}{3}$$

$$\begin{array}{rr}
\underline{} & \underline{} \\
33 & 26 \\
 & \underline{33} \\
 & 78 \\
 & \underline{78} \\
15 \text{ εἰς } & 858
\end{array}$$

παριέχονται $57\tfrac{3}{15}$ ἤτοι $\tfrac{1}{5}$.

Ἑρμηνεία. Ἀμφότεροι οἱ μικτοὶ Ἀριθμοὶ μετεβλήθησαν εἰς τὰ παρευρισκόμενα Κλασματικάτων μέρη, δηλονότι· $5 \times 6 — 30$ (πέμπτα), καὶ 3 (πέμπτα), ποιοῦσιν ὁμοῦ 33 πέμπτα· εἶτα $3 \times 8 — 24$ (τρίτα), καὶ 2, ποιοῦσιν ὁμοῦ 26 τρίτα, ἔπειτα πολλαπλασιασθέντες οἱ Ἀριθμηταὶ 33 καὶ 26 μετ' ἀλλήλων, προέκυψαν 858, ἅτινα διὰ τοῦ Κεφαλαίου τῶν Παρονμαςῶν τρὶς 5, εἴτουν 15 διαιρεθέντα, πρόκυψε τὸ Ζητούμενον $57\tfrac{1}{5}$.

Ἐὰν μόνον εἷς τῶν δοθέντων Ἀριθμῶν ἦ μικτὸς, μεταβάλλεται αὐτὸς μόνον· φέρ' εἰπεῖν, πρόκεινται ἵνα πολλαπλασιασθῶσι $\tfrac{4}{5}$ μὲ $3\tfrac{5}{6}$, ματαβάλομεν λοιπὸν μόνον τὰ $3\tfrac{5}{6}$ εἰς νόθον Κλάσμα, τὰ γὰρ $\tfrac{4}{5}$ εἰσὶ Κλάσμα, διὸ καὶ μένει, ὡς ἕπεται.

$$\tfrac{4}{5} \times 3\tfrac{5}{6}$$

23 (ἕκτα)

μὲ . . 4 (πέμτα)

30 εἰς 92

Ποιοῦσι $3\tfrac{2}{30}$ ἤτοι $\tfrac{1}{15}$

Πρόβλημα. Ἐὰν μία πῆχη Πράγματός τινος τιμᾶται διὰ Γρόσια $5\tfrac{1}{5}$, πόσα πληρωθήσονται διὰ $\tfrac{1}{2}$ πῆχην;

Λ ύ σ ι ς.

Ἐπειδὴ 1 ἀκέραια πήχη τιμᾶται διὰ Γρόσια $5\frac{1}{5}$, ἄρα ἡ $\frac{1}{2}$ πήχη τιμᾶται μόνον τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν Γροσίων $5\frac{1}{5}$,

$$\frac{\text{ὅθεν τὸ } \frac{1}{2} \text{ τῶν } \frac{26}{5}}{\text{δίδει } \frac{13}{5}\text{, ἤτοι Γρ'. } 2\frac{3}{5}}$$

Ἤτοι πλέον εὐκολώτερον· ἐὰν, ἀντὶ Γρόσια $5\frac{1}{5}$, θέσωμεν Γρόσια 5 ,, 8 παράδες, καὶ λάβωμεν ἐξ αὐτῶν τὰ ἥμισυ, φέρουσι Γρόσια 2 ,, 24 παράδες, τὰ ὁποῖα ποιοῦσιν ὡσαύτως Γρόσια $2\frac{3}{5}$, ὡς ἀνωτέρω· ἐνταῦθα ὅμως ἐγίνετο διὰ τοῦτο ἡ πρώτη λύσις, ἵνα δείξωμεν μόνον, τίνι τρόπῳ πολλαπλασιάζεται κοινῶς τὸ Κλάσμα μὲ ἕτερον Κλάσμα, καὶ ἀκέραιον Ἀριθμόν.

§. 240.

Σ υ ν τ ο μ ί α ι.

Μεταξὺ τῶν τοιούτων Πολλαπλασιασμῶν προκύπτουσι πολλάκις καὶ διάφοραι Συντομίαι, ἐξ ὧν ἡ ὠφελιμωτέρα καὶ προτιμοτέρα εἶναι αὕτη, ἵνα σμικρύνωμεν, ὅσον δυνάμεθα, τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ ἑνὸς Κλάσματος πρὸς τὸν Παρονομαστὴν τοῦ ἑτέρου, ἢ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτὸν ὁλοτελῶς, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττώσεως εὐκολύνεται τὸ πολλαπλασιάζειν καὶ διαιρεῖν, ἐνίοτε δὲ συμβαίνει καὶ ἐκλείπουσιν ἀμφότερα, καὶ προκύπτει ἀμέσως τὸ Ζητούμενον. Π.χ. πρόκειται ἵνα πολλαπλασιασθῶσιν $\frac{6}{7}$ μὲ $\frac{7}{10}$· ἐνταῦθα ὄντες ὅ,τε Ἀριθμητὴς 7 τοῦ ἑνὸς Κλάσματος, καὶ ὁ Παρονομαστὴς 7 τοῦ ἑτέρου ὅμοιοι, ἐκλείπουσι δι' ὅλου, ὁ δ' Ἀριθμητὴς 6 τοῦ ἄλλου Κλάσματος πρὸς τὸν Παρονομαστὴν 10 τοῦ ἑτέρου, σμικρύνονται ἐπίσης διὰ τῶν 2, καὶ οὕτω προκύπτουσι πρὸς Πολλαπλασιασμὸν μόνον $\frac{1}{5}$ μὲ 3, τὰ ὁποῖα δίδουσιν ἀμέσως $\frac{3}{5}$. Ἰδοὺ τοιαῦτα Ὑποδείγματα.

Α′.

$$\frac{2.\cancel{14}}{5.\cancel{15}} \times \frac{\cancel{18}.6}{\cancel{35}.5}$$

Ποιοῦσι $\frac{12}{25}$.

Β′.

$$5\tfrac{3}{5} \times 8\tfrac{3}{4}$$

$$\frac{7.\cancel{28}}{\cancel{5}} \quad \frac{\cancel{35}\ 7.}{\cancel{4}}$$

Φέρουσι 49

Γ′.

$$\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \times 5\tfrac{5}{6}$$

$$\frac{\cancel{35}\ 5.}{\cancel{6}}$$

Δίδουσι 5.

Εἰς τὸ Α′. σμικρύνονται ὅ,τε Ἀριθμητὴς 14, καὶ ὁ Παρονομαςὴς 35 διὰ τοῦ 7, λοιπὸν 7 εἰς τὰ 14 ἐμπεριέχονται 2 φοραῖς, καὶ 7 εἰς τὰ 35· 5, διὰ τοῦτο ἐξαλείφομεν τὰ 14 καὶ 35, καὶ θέττομεν ἀντ' αὐτῶν τοὺς σμικρυνθέντας Ἀριθμούς των 2 καὶ 5. Ἀκολούθως ὁ Παρονομαςὴς 15, καὶ ὁ Ἀριθμητὴς 18 σμικρύνονται διὰ τοῦ 3, εἴτουν, 3 εἰς τὰ 15, 5, καὶ 3 εἰς τὰ 18, 6, λοιπὸν ἐξαλείφομεν τὰ 15 καὶ 18, καὶ θέττομεν ἀντ' αὐτῶν 5 καὶ 6. Μὲ αὐτοὺς τοὺς ἐλαττωθέντας ἀριθμοὺς πράττομεν ἀκολούθως κατὰ τὸν κανόνα, καθὼς ἔπρεπε νὰ πράξωμεν μὲ τοὺς μὴ ἐλαττωμένους ἀριθμούς, δηλονότι· πολλαπλασιάζομεν τὸν Ἀριθμητὴν 2 μὲ τὸν ἕτερον Ἀριθμητὴν 6, καὶ τὸν Παρονομαςὴν 5 μὲ τὸν ἄλλον Παρονομαςὴν 5, καὶ οὕτω προκύπτουσι $\frac{12}{25}$, ἐξ οὗ δεικνύεται σαφῶς ἡ ὠφέλεια τῆς ἐλαττώσεως· διότι ἐὰν δὲν ἐσμικρύναμεν, ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ 14 μὲ 18, καὶ τὰ 15 μὲ τὰ 35, ἐκτὸς δὲ τούτου τοῦ διεξοδικοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἤθελε προκύψῃ καὶ τὸ ἀσυγκρίτως μεγαλήτερον καὶ ἀσαφὲς Κλάσμα $\frac{252}{525}$.

Εἰς τὸ Β′. ἀφ' οὗ μετεβάλλωμεν τοὺς μικτοὺς Ἀριθμούς, προέκυψαν τὰ νόθα Κλάσματα $\frac{28}{5}$ καὶ $\frac{35}{4}$, ἐξ ὧν ὁ Παρονομαςὴς 4 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 28, καὶ ὁ Παρονομαςὴς 5 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 35 ἐξέλιπον ὁλοτελῶς, δηλονότι, 4 εἰς τὰ 28, 7, καὶ 5 εἰς τὰ 35, 7, λοιπὸν ἐξαλείφομεν τὰ 4, καὶ ἀντὶ τῶν 28, θέττομεν 7, ὡσαύτως ἐξαλείφομεν τὰ 5, καὶ ἀντὶ τῶν 35, θέττομεν 7· ὅθεν ἐπειδὴ ἐξέλιπον, καὶ δὲν ὑπάρχουσι πλέον Παρονομαςαὶ, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζονται ἁπλῶς οἱ δύο Ἀριθμηταὶ 7 × 7 μετ' ἀλλήλων, καὶ τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν 49 δίδει τὸ Ζητούμενον.

Εἰς τὸ Γ'. ἀφ' οὗ μεταβάλλωμεν τὰ $5\frac{5}{6}$ εἰς $\frac{35}{6}$, ὁ Παρονομαςὴς 6 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 6 ἐξέλιπον ὁλοτελῶς, ὁ δὲ Παρονομαςὴς 7 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 35 ἐξέλιπεν ὡσαύτως, καὶ ἔμεινε μόνον ὁ Ἀριθμητὴς 5, ὅςτις, ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ἕτερος ἀριθμὸς διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ, δίδει τὸ Ζητούμενον.

Δεῖξις. Ὅτι ἡ ἀνωτέρω βάσις τῆς ἐξαλείψεως καὶ ἐλαττώσεως ἐνεργεῖται χωρίς τινος βλάβης τῆς τοῦ λογαριασμοῦ ὀρθότητος, δύναταί τις εὐθέως νὰ τὸ ἐννοήσῃ, ἀρκεῖ μόνον νὰ ςοχασθῇ, ὅτι οἱ Ἀριθμηταὶ τῶν Κλασμάτων εἰσὶ, καὶ θεωροῦνται ὡς Παράγοντες τοῦ ἐσομένου Ἀριθμητοῦ, καὶ οἱ Παρονομαςαὶ ὡς Παράγοντες τοῦ ἐσομένου Παρονομαςοῦ, καὶ ἐπειδὴ ὁ ἐσόμενος Ἀριθμητὴς δύναται νὰ σμικρυνθῇ εἰς τὸν ἐσόμενον Παρονομαςὴν, καθὼς ἀπεδείχθη εἰς τὴν Μεταφορὰν τῶν Κλασμάτων, ἄρα δύνανται νὰ σμικρυνθῶσι καὶ οἱ Παράγοντες αὐτῶν, ἐπειδὴ διὰ ταύτης τῆς ἐλαττώσεως σμικρύνεται τοσάκις ὁ ἐσόμενος Ἀριθμητὴς, ὁσάκις καὶ ὁ ἐσόμενος Παρονομαςὴς, καὶ οὕτω, κατὰ τὸν §. 186., μένει ἀμετάβλητος ἡ τοῦ Κλάσματος Τιμή.

§. 241.

Σχόλιον. Πλὴν ἂς σημειώσωμεν καλῶς, ὅτι πρὶν μεταβληθῶσιν οἱ μικτοὶ Ἀριθμοὶ εἰς νόθα Κλάσματα, δὲν δυνάμεθα νὰ σμικρύνωμεν τοὺς Ἀριθμητὰς καὶ Παρονομαςὰς αὐτῶν. Φέρ' εἰπεῖν· πρόκειται ἵνα πολλαπλασιασθῶσιν $8\frac{7}{10}$ μὲ $\frac{5}{7}$· ἐνταῦθα δὲν δυνάμεθα νὰ σμικρύνωμεν πρότερον οὔτε τὸν Ἀριθμητὴν 5 πρὸς τὸν Παρονομαςὴν 10, οὔτε τὸν Παρονομαςὴν 7 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 7, ἀλλ' ἀφ' οὗ μεταβληθῶσι τὰ $8\frac{7}{10}$ εἰς τὸ νόθον Κλάσμα $\frac{87}{10}$· διότι, ἐὰν πρὸ τῆς μεταφορᾶς τῶν $8\frac{7}{10}$ σμικρύνωμεν τὸν Παρονομαςὴν 10 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 5 τοῦ ἑτέρου Κλάσματος, καὶ ἐξαλείψωμεν ἔπειτα καὶ τὸν Ἀριθμητὴν 7 πρὸς τὸν τοῦ ἄλλου Κλάσματος Παρονομαςὴν 7, προκύπτουσι πρὸς Πολλαπλασιασμὸν διὰ μὲν τὰ $8\frac{7}{10}$, μόνον $8\frac{1}{2}$, ἤτοι ἀναλυθέντα $\frac{17}{2}$, διὰ δὲ τὰ $\frac{5}{7}$ μόνον $\frac{1}{1}$, τοῦτ᾽ ἔςι, μηδὲν, ἐν ᾧ κατὰ τὸν Κανόνα, διὰ μὲν τὰ $8\frac{7}{10}$ (δηλ. ἀφ᾽ οὗ μεταβληθῶσιν εἰς τὸ νόθον Κλάσμα λέγοντες· $8 \times 10 = 80$, καὶ 7 ποιοῦσιν $\frac{87}{10}$, καὶ σμικρυνθῇ ὁ Παρονομαςὴς 10, ὡσαύτως καὶ τοῦ ἑτέρου Κλάσματος ὁ Ἀριθμητὴς 5.) πρέπει νὰ προκύψωσιν $\frac{87}{2}$, διὰ δὲ τὰ $\frac{5}{7}$ προκύπτει $\frac{1}{7}$, εἴτουν $\frac{87}{2}$ νὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ $\frac{1}{7}$, οὐχὶ δὲ $\frac{17}{2}$ μὲ $\frac{1}{1}$, ὡς ἀνωτέρω, τὰ ὁποῖα δύο τελευταῖα Κλάσματα δεικνύουσι σαφῶς, ὅτι ἐὰν πρὸ τῆς μεταφορᾶς τοῦ μικτοῦ Ἀριθμοῦ $8\frac{7}{10}$ σμικρύνωμεν, προκύπτουσι Κλάσματα ψευδῆ, καὶ ἑπομένως ψευδὲς Πηλίκον. Ὅθεν προσεκτέον, ὅτι ἕκαςος μικτὸς Ἀριθμὸς πρέπει πρότερον νὰ μεταβληθῇ εἰς τὸ ἀνῆκον αὐτοῦ νόθον Κλάσμα, καὶ ἔπειτα νὰ σμικρυνθῇ ὁ Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς αὐτοῦ.

§. 242.

Ἀπαραλλάκτως πολλαπλασιάζονται καὶ περισσότερα Κλάσματα μετ᾽ ἀλλήλων. Π. χ. $\frac{3}{5}$ μὲ $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{9}$ μὲ $\frac{1}{4}$ καὶ ἐφεξῆς, πολλαπλασιάζονται ὅλοι οἱ Ἀριθμηταὶ 3, 5 καὶ 8 (τὸ γὰρ 1 μηδὲν πολλαπλασιάζει), καὶ ὅλοι οἱ Παρονομαςαὶ 5, 8, 9, καὶ 4 μετ᾽ ἀλλήλων· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ Κεφαλαίου τῶν Ἀριθμητῶν προκύπτει ὁ Ἀριθμητὴς, καὶ ἐκ τοῦ Κεφαλαίου τῶν Παρονομαςῶν προκύπτει ὁ Παρονομαςὴς τοῦ ἐσομένου Κλάσματος, καθὼς ἐν τῇ Δείξει τοῦ §. 240. ἀπεδείχθη, διὰ τοῦτο οἱ ῥηθέντες Ἀριθμηταὶ καὶ Παρονομαςαὶ δύνανται καὶ πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ νὰ ἐλαττωθῶσιν, ἢ παντάπασι νὰ ἐξαλειφθῶσιν. Οἷον· $\frac{3}{5}$ μὲ $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{9}$ μὲ $\frac{1}{4}$ ποιοῦσιν

$\frac{1}{12}$· διότι ὁ Παρονομαςὴς 5 τοῦ πρώτου Κλάσματος πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 5 τοῦ δευτέρου Κλάσματος, καὶ ὁ Ἀριθμητὴς 8 τοῦ τρίτου πρὸς τὸν Παρονομαςὴν 8 τοῦ δευτέρου, ὄντες ὅμοιοι ἐκλείπουσιν ὁλοτελῶς, ὁ δ' Ἀριθμητὴς 3 τοῦ πρώτου πρὸς τὸν Παρονομαςὴν 9 τοῦ τρίτου σμικρύνονται διὰ τοῦ 3, καὶ μένει διὰ τὸν Ἀρίθμητὴν τοῦ ἐσομένου Κλάσματος, μόνον ὁ Ἀριθμὸς 1, καὶ διὰ τὸν Παρονομαςὴν αὐτοῦ 3 καὶ 4, ἅτινα πολλαπλασιαζόμενα, διδουσιν $\frac{1}{12}$ Πηλίκον.

Δεῖξις. Τὴν ἀνωτέρω Βάσιν πληροφορούμεθα ἀμέσως, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ σειρὰν τὸ ἓν Κλάσμα μετὰ τοῦ ἑτέρου· δηλ. $\frac{3}{5}$ μὲ $\frac{5}{8}$, ὧν οἱ Ἀριθμηταὶ 3 καὶ 5, καὶ οἱ Παρονομαςαὶ 5 καὶ 8 πολλαπλασιαζόμενοι ἰδιαιτέρως μετ' ἀλλήλων, προκύπτει Κλάσμα $\frac{15}{40}$, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον μὲ τὸ ἄλλον Κλάσμα $\frac{8}{9}$, προκύπτει ἕτερον $\frac{120}{360}$, αὐτὸ δὲ πολλαπλασιαζόμενον μὲ τὸ τελευταῖον $\frac{1}{4}$, προκύπτει τὸ ὁλόκληρον νόθον Κλάσμα $\frac{120}{1440}$, ὅπερ διαιρούμενον διὰ τῶν 120, προκύπτει $\frac{1}{12}$, ὡς ἀνωτέρω. Ὅθεν δῆλον, ὅτι ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ ἐσομέμου Κλάσματος εἶναι τὸ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Ἀριθμητῶν, καὶ ὁ Παρονομαςὴς αὐτοῦ τὸ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Παρονομαςῶν τῶν δοθέντων Κλασμάτων, ἂν καὶ δοθῶσιν ὁσαδήποτε.

§. 243.

Πρόβλημα. Θετέον, ὅτι ἐρώτησέ τις, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι $\frac{4}{5}$ μὲ $\frac{9}{10}$, εἶτα μὲ $7\frac{1}{2}$, καὶ τελευταῖον μὲ $3\frac{1}{3}$, ἄρα πόσον ἔσεται τὸ Παραγόμενον αὐτῶν;

Λύσις καὶ Ἑρμηνεία.

Πρότερον μεταβάλλονται οἱ μικτοὶ Ἀριθμοὶ $7\frac{1}{2}$ καὶ $3\frac{1}{3}$ εἰς νόθα Κλάσματα, ἐξ ὧν τὸ πρῶτον δίδει $\frac{15}{2}$, καὶ τὸ δευτερον $\frac{10}{3}$, λοιπὸν πρόκειται ἤδη ἵνα πολλαπλασιασθῶσι $\frac{2}{5}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{15}{2}$ καὶ $\frac{10}{3}$ μετ' ἀλλήλων, ὧν οἱ Ἀριθμηταὶ 2 καὶ 10 πρὸς τοὺς Παρονομαστὰς αὐτῶν 2 καὶ 10, καθὼς ὁ Παρονομαστὴς 5 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 15, καὶ ὁ Παρονομαστὴς 3 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 9 ὄντας ὅμοιοι ἐκλείπουσιν ὁλοτελῶς, καὶ μένουσι διὰ τὸ Ζητούμενον μόνον 3 καὶ 3, τὰ ὁποῖα αὐτὰ πολλαπλασιαζόμενα, δίδουσιν 9, ὡς κατωτέρω.

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{9}.\ 3}{\cancel{10}} \quad \frac{\cancel{15}.\ 3}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{10}}{\cancel{3}}$$

Ποιοῦσιν 9.

§. 244.

Σχόλιον. Εἰς ὅλας τὰς Πτώσεις τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ ἐξαρκοῦσε κυρίως μόνος ὁ Κανὼν, εἴτουν, νὰ πολλαπλασιάζηται Ἀριθμητὴς μὲ Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαστὴς μὲ Παρονομαστὴν, ἐν ᾧ καὶ αὐτὸς ὁ ἀκέραιος Ἀριθμὸς, (οὗ ὁ Παρονομαστὴς τὸ 1 ἐστὶ) θεωρεῖται ὡς Κλάσμα. Π. χ. 5, 7, 9 καὶ ἐφεξῆς, ὡς $\frac{5}{1}$, $\frac{7}{1}$, $\frac{2}{1}$ (διότι τὸ 1 μηδὲν διαιρεῖ), ὥστε εἰς κάθε πτῶσιν προέκυπτεν, ἵνα πολλαπλασιασθῇ μόνον Κλάσμα μὲ Κλάσμα, οἷον 6κις $\frac{2}{3}$, ὡς $\frac{6}{1} \times \frac{2}{3}$, 5κις $2\frac{3}{5}$, ὡς $\frac{5}{1} \times \frac{13}{5}$, καὶ τὰ τούτοις ὅμοια. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐδύνατο νὰ περιορισθῇ ἁρμοδίως ὁ Πολλαπλασιασμὸς εἰς μερικοὺς §. §., ἐὰν δὲν ἀπέβλεπεν ὁ σκοπὸς διὰ τὴν πρακτικὴν χρῆσιν (ὡς §. 229), ἥτις εἰς τὸ μέλλον, μάλιστα δὲ εἰς τοὺς λογαριασμοὺς τῶν Τόκων κ. τ. λ. προξενεῖ μεγάλην ὠφέλειαν. Δι' αὐτὸ τοῦτο λοιπὸν ἐκτάνθη τὸ Κεφάλαιον τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ· ἄλλως γὰρ δὲν ἠθέλαμεν πραγματευθῆ οὔτε τὸν Πολλαπλασιασμὸν, ἀλλ' οὔτε τὴν Διαίρεσιν τῶν Κλασμάτων ὡς ἰδιαιτέρας Μεθόδους, καθὼς ἐν τῷ §. 224. ἐλέχθη περὶ τούτων, ἐπειδὴ ὅλοι, ὁποιοιδήποτε, λογαριασμοὶ αὐτοῦ

τοῦ τρόπου, ἀνήκουσιν εἰς τὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν, δι᾽ ἧς καὶ ἐπιλύονται, ὡς ἀποδειχθήσεται ἐν τῷ δέοντι τόπῳ.

ΚΕΦ. Γ΄.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

§. 245.

Ἡ Διαίρεσις τῶν Κλασμάτων διδάσκει τίνι τρόπῳ δυνάμεθα διαιρεῖν δι᾽ ἀκεραίου Ἀριθμοῦ τὸ Κλάσμα, καθὼς δι᾽ ἀκεραίου Ἀριθμοῦ ἕτερον Ἀκέραιον σὺν Κλάσματι· ἔτι δὲ διὰ Κλάσματος ἀκέραιον Ἀριθμὸν σὺν Κλάσματι, καὶ τελευταῖον διὰ Κλάσματος ἕτερον Κλάσμα κ. τ. λ., ὅπου προκύπτουσιν ὁμοίως αἱ διάφοραι πτώσεις, καθὼς καὶ εἰς τὸν Πολλαπλασιασμόν.

§. 246.

Σχόλιον. Τὰ περισσότερα ἀριθμητικὰ βιβλία διδάσκουσι τὴν Διαίρεσιν τῶν Κλασμάτων ὡς ἄλλον Πολλαπλασιασμόν, βάλλοντα Βάσιν εἰς τὸ, νὰ ἀνατρέπωμεν ἁπλῶς τὸν Διαιρέτην, ὥςε ὁ Ἀριθμητὴς νὰ ἐπέχῃ τὸν τόπον τοῦ Παρονομαςοῦ, ὁ δὲ Παρονομαςὴς τὸν τόπον τοῦ Ἀριθμητοῦ, εἶτα νὰ μετερχώμεθα ἀπαραλλάκτως τὴν πρᾶξιν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ. Π. χ. πρόκειται ἵνα διαιρέσωμεν Κλάσμα τι, ἢ ἀκέραιον Ἀριθμὸν (ὅςτις θεωρεῖται ὡς Κλάσμα ὑποτιθέμενον τὸ 1, ὡς §. 244.) δι᾽ $\frac{1}{4}$, ἢ διὰ $\frac{3}{5}$, ἢ διὰ 3, διὸ ἀντὶ $\frac{1}{4}$, θέττομεν $\frac{4}{1}$, ἀντὶ $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{3}$, ἀντὶ $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{3}$, καὶ ἐφεξῆς. Διότι, διὰ νὰ διαιρέσωμεν διὰ 3 δηλοῖ, νὰ λάβωμεν τὸ τρίτον μέρος ἐξ ἑνὸς Πράγματος· ὡσαύτως διὰ τοῦ $\frac{1}{2}$ διαιρεῖν δηλοῖ τὸ, νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ $\frac{2}{1}$, εἴτουν, μὲ 2, ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{2}$ περιέχεται δὶς εἰς ἑκάστην μονάδα τοῦ διαιρετέου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μὲ ὅλα τὰ Κλάσματα καὶ ἀκεραίους Ἀριθμούς.

Ἀλλ' ὅμως καίτοι φαίνεται αὐτὴ ἡ Ἑρμηνεία καθ' ἑαυτὴν, τόσον ὀρθὴ, μ' ὅλον τοῦτο, διὰ πολλὰ αἴτια, δὲν εἶναι εὔχρηστος διὰ τὸν πρακτικὸν Ἀριθμητικὸν, ἐπειδὴ συγχέει τὴν πρᾶξιν τῶν λογαριασμῶν, καὶ ἐπάγει ἕκαστον πάνυ εὐκόλως εἰς οὐκ ὀλίγα σφάλματα. Προσέτι εἰς πολλὰς πτώσεις εἶναι μάλιστα διεξοδικὴ, καὶ δὲν εἶναι ὅλως ἱκανὴ, διὰ νὰ προξενήσῃ ἐν τῷ λογαριάζειν ἐκείνην τὴν εὐκολείαν, ἥτις χρησιμεύει κοινῶς, καὶ εἶναι ἀναγκαία διαπαντὸς εἰς τοὺς πρακτικοὺς λογαριασμούς. Δι' αὐτὸ τοῦτο λοιπὸν, καθὼς καὶ διὰ τὸ, νὰ μὴ διδαχθῇ ὁ Ἀναγινώσκων ἁπλῶς τὴν Διαίρεσιν τῶν Κλασμάτων, ἀλλὰ καὶ τὴν πρακτικὴν χρῆσιν αὐτῆς, καὶ ἑπομένως νὰ γένῃ ἱκανὸς τοῦ ἐφευρίσκειν μόνος τὰ συμφέροντα ἐν τῷ λογαριάζειν, διὰ τοῦτο κατετάχθη ἐνταῦθα ἡ τῶν Κλασμάτων Διαίρεσις κατὰ τοὺς ἰδίους αὐτῆς Κανόνας, τοὺς ὁποίους μεταχειρίζονται καὶ εἰς τοὺς ἐμπορικοὺς πρακτικοὺς λογαριασμούς.

Πτῶσις Α'. Πῶς διαιρεῖται τὸ Κλάσμα δι' ἀκεραίου Ἀριθμοῦ.

§. 247.

Προκειμένου Κλάσματος, ἵνα διαιρεθῇ δι' ἀκεραίου Ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν ἁπλῶς ἢ τὸν Ἀριθμητὴν, ἀφίνοντες ἀμετάβλητον τὸν Παρονομαστὴν, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν Παρονομαστὴν, ἀφίνοντες ἀμετάβλητον τὸν Ἀριθμητήν. Π. χ. πρόκειται ἵνα διαιρεθῶσι $\frac{4}{5}$ διὰ τῶν 2· αὕτη ἡ διαίρεσις γίνεται κατὰ δύο τρόπους, ἢ διαιροῦμεν τὸν Ἀριθμητὴν διὰ τῶν 2, ἀφίνοντες ἀμετάβλητον τὸν Παρονομαστὴν, λέγοντες· 2 ἐκ τῶν 4, ἀνὰ 2, καὶ προκύπτει Πηλίκον $\frac{2}{5}$, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν Παρονομαστὴν 5 μὲ 2, ἀφίνοντες ἀμετάβλητον τὸν Ἀριθμητὴν, καὶ προκύπτουσι $\frac{4}{10}$, τὸ ὁποῖον Κλάσμα διαιρούμενον διὰ τῶν 2, προκύπτουσιν αὖθις $\frac{2}{5}$, ὡς ἀπέναντι.

Δεῖξις. Διὰ νὰ διαιρεθῇ τὸ Κλάσμα δι' ἀκεραίου Ἀριθμοῦ, ὡς εἰς τὸ προτεθὲν Ὑπόδειγμα, διὰ τῶν 2, δηλοῖ, νὰ λάβωμεν τὸ δεύτερον μέρος αὐτοῦ, εἴτουν, νὰ προκύψῃ Κλάσμα δὶς μικρότερον κατὰ τὴν τιμὴν, τὸ ὁποῖον ἀναντιῤῥήτως εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ περιέχει δὶς ὀλιγώτερα μέρη, εἴτε, ἐὰν μείνῃ τὸ Ποσὸν τῶν μερῶν, περιέχει δὶς μικρότερα μέρη. Τὸ πρῶτον κατορθοῦται διαιρεθέντος τοῦ Ἀριθμητοῦ (ὡς §. 184.), καὶ τὸ δεύτερον πολλαπλασιασθέντος τοῦ Παρονομαστοῦ (ὡς §. 185.)

§. 248.

Ὅθεν, ὅπου διαιρεῖται ὁ Ἀριθμητὴς ἄνευ ὑπολοίπου, διαιροῦμεν αὐτὸν, ἀφίνοντες ἀμετάβλητον τὸν Παρονομαστὴν, ὅπου ὅμως δὲν διαιρεῖται ἐπίσης, πολλαπλασιάζομεν τὸν Παρονομαστὴν, ἀφίνοντες ἀμετάβλητον τὸν Ἀριθμητήν. Π. χ. πρόκειται ἵνα διαιρέσωμεν τὸ Κλάσμα $\frac{18}{19}$ διὰ τῶν 6, καὶ ἐπειδὴ ὁ Διαιρέτης 6 διαιρεῖ ἐπίσης τὸν τοῦ Κλάσματος Ἀριθμητὴν 18, διὰ τοῦτο λέγομεν· 6 ἐκ τῶν 18, ἀνὰ 3, καὶ οὕτω προκύπτει τὸ Ζητούμενον $\frac{3}{19}$· ἐὰν ὅμως μᾶς δοθῶσιν, ἵνα διαιρέσωμεν, φέρ' εἰπεῖν, $\frac{5}{7}$ διὰ τῶν 6, ὅπου ὁ Διαιρέτης 6 δὲν διαιρεῖ ἐξ ἴσου τὸν τοῦ Κλάσματος Ἀριθμητὴν 5, ἀφίνομεν ἀμετάβλητον τὸν Ἀριθμητὴν, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν Παρονομαστὴν 7 μὲ 6, καὶ προκύπτουσι $\frac{5}{42}$, τὸ ὁποῖον Κλάσμα τιμᾶται ἀναντιῤῥήτως ἑξάκις ὀλιγώτερον ὡς πρὸς τὸ $\frac{5}{7}$· διότι 5 μέρη, ἐξ ὧν 42 ποιοῦσιν ἓν Ἀκέραιον, πρέπει νὰ εἶναι ἑξάκις μικρότερα τῶν 5 μερῶν, ἐξ ὧν 7 συνιστῶσιν ὡσαύτως ἓν Ἀκέραιον.

Ἰδοὺ πρὸς ἄσκησιν καί τινα Ὑποδείγματα τοιαῦτα.

Α΄.	Β΄.	Γ΄.	Δ΄.
2 ἐκ τῶν $\frac{3}{4}$	5 ἐκ τῶν $\frac{15}{17}$	6 ἐκ τοῦ $\frac{1}{5}$	7 ἐκ τῶν $\frac{14}{15}$.
Ποιοῦσι $\frac{3}{8}$.	Ποιοῦσι $\frac{3}{17}$.	Ποιοῦσιν $\frac{1}{30}$.	Ποιοῦσι $\frac{2}{15}$.

Ἑρμηνεία. Εἰς τὸ Α΄. ὁ Διαιρέτης 2 δὲν διαιρεῖ ἐπίσης τὸν τοῦ Κλάσματος Ἀριθμητὴν 3, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸν Παρονομαςὴν 4 μὲ 2, καὶ προκύπτουσι $\frac{3}{8}$.

Εἰς τὸ Β΄. ὁ Διαιρέτης 5 διαιρεῖ ἐξ ἴσου τὸν τοῦ Κλάσματος Ἀριθμητὴν 15, ὅθεν τὸ 5τον ἐκ τῶν $\frac{15}{17}$, ποιεῖ $\frac{3}{17}$.

Εἰς τὸ Γ΄. ὁ τοῦ Κλάσματος Ἀριθμητὴς 1, ὡς γνωςὸν, εἶναι ἀμέριςος, διὸ λέγομεν ἀμέσως· 5 × 6 — 30, καὶ προκύπτει $\frac{1}{30}$.

Εἰς τὸ Δ΄. ὁ Διαιρέτης 7 διαιρεῖ ἐπίσης τὸν Ἀριθμητὴν 14, καὶ προκύπτουσι $\frac{2}{15}$.

Σημείωσις. Τ᾽ ἀνωτέρω Ὑποδείγματα εἰσὶ πάνυ ὠφέλιμα ἐν τῇ πρακτικῇ Χρήσει, διὸ καὶ ἄξια προσοχῆς τῶν Διδασκομένων.

§. 249.

Ἐὰν ὁ ἀκέραιος Ἀριθμὸς δὲν διαιρεῖ ἐπίσης τὸν τοῦ Κλάσματος Ἀριθμητὴν, ὡς ἀνωτέρω, οὔτε ὁ Ἀριθμητὴς διαιρεῖ ἐξ ἴσου τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, ἀλλ᾽ ἔχωσιν ἀμφότεροι κοινὸν Διαιρέτην, ἂς διαιρεθῶσι δι᾽ αὐτοῦ, ἵνα προκύψωσι μικρότεροι Ἀριθμοί, ἐπειδὴ δι᾽ αὐτῶν εὐκολύνεται ἡ τοῦ λογαριασμοῦ ἐργασία. Π. χ. μᾶς ἐδόθησαν νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 15 τὸ Κλάσμα $\frac{18}{23}$, ὅπου οὔτε ὁ Διαιρέτης 15 διαιρεῖ ἐξ ἴσου τὸν τοῦ Κλάσματος Ἀριθμητὴν 18, οὔτε αὐτὸς διαιρεῖ τὸν Διαιρέτην ἐπίσης, ἀλλ᾽ ἔξωθεν διαιροῦνται ἀμφότεροι ἐπίσης διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν Διαιρέτου 3, καὶ οὕτω προκύπτουσιν, ἵνα διαιρέσωμεν διὰ τῶν 5 τὰ $\frac{6}{23}$. Ὅθεν, ἀντὶ νὰ εἰπῶμεν 15κις 23, λέγομεν 5 κις 23, τὸ ὁποῖον εὐκολύνει τὴν πρᾶξιν τοῦ λογαριασμοῦ· διότι ταὐτὸν ἐςί, ἢ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 15, ἢ διὰ τῶν 3 καὶ 5, ἐπειδὴ αὐτοὶ οἱ δύο Ἀριθμοὶ εἰσὶν οἱ Παράγοντες τῶν 15 (ὡς §. 200.), διὰ τοῦτο λοιπὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ κοινοῦ Διαιρέτου 3 τὰ 15, καὶ μένουσι 5, εἶτα καὶ τὰ $\frac{18}{23}$, καὶ μένουσιν $\frac{6}{23}$, καὶ οὕτω προκύπτουσιν, ἵνα διαιρέσωμεν διὰ τῶν 5 τὰ $\frac{6}{23}$, ἐξ οὗ φαίνεται σαφῶς ἡ Βάσις τῆς ῥηθείσης ἐλαττώσεως.

Ἰδοὺ καί τινα Ὑποδείγματα.

Α΄.	Β΄.	Γ΄.
4. $\cancel{16}$ ἐκ τῶν $\frac{\cancel{12}.\ 3.}{25}$	3. $\cancel{24}$ ἐκ τῶν $\frac{8.\ 1.}{15}$	$\cancel{11}$ ἐκ τῶν $\frac{\cancel{11}.\ 1.}{16}$
Ποιοῦσι $\frac{3}{100}$.	Ποιοῦσιν $\frac{1}{45}$.	Ποιοῦσιν $\frac{1}{16}$.

Ἑρμηνεία. Εἰς τὸ Α΄. ὁ διαιρέτης 16 καὶ ὁ Ἀριθμητὴς 12 διαιροῦνται διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν Διαιρέτου 4, διὸ λέγομεν· 4 ἐκ τῶν 16, ἀνὰ 4, καὶ 4 ἐκ τῶν 12, ἀνὰ 3, ὅθεν ἐξαλείφομεν τοὺς ἀριθμοὺς 16 καὶ 12, καὶ θέτομεν ἀντ᾽ αὐτῶν 4 καὶ 3, εἶτα ἐπειδὴ αὐτὰ δὲν διαιροῦνται ἐπίσης πλέον, διὰ τοῦτο λέγομεν· 4 $\times$ 25 — 100, καὶ οὕτω προκύπτει Κλάσμα $\frac{3}{100}$, ὡς ἀνωτέρω.

Εἰς τὸ Β΄. ὁ Ἀριθμητὴς 8 πρὸς τὸν Διαιρέτην 24 ἐκλείπει δι᾽ ὅλου, λοιπὸν 8 ἐκ τῶν 24, ἀνὰ 3 (τὰ 24 ἐξαλείφονται, καὶ θέττονται ἀντ᾽ αὐτῶν 3), εἶτα 8 ἐκ τῶν 8, ἀνὰ 1 (τὰ 8 ἐξαλείφονται, καὶ θέττεται ἀντ᾽ αὐτῶν 1), τὰ ὁποῖα 3 καὶ 1 μὴ διαιρούμενα ἐπίσης περισσότερον, πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν μείναντα Διαιρέτην 3 τὸν Παρονομαςὴν τοῦ Κλάσματος 15, καὶ προκύπτει $\frac{1}{45}$.

Εἰς τὸ Γ'. ἐκλείπει ὁ Διαιρέτης 11 πρὸς τὸν τοῦ Κλάσματος Ἀριθμητὴν 11 ὁλοτελῶς, διὸ ἐξαλείφονται ἀμφότεροι, καὶ προκύπτει ἀμέσως $\frac{1}{16}$.

§. 250.

Σχόλιον. Πλησίον ἑκάστου Ἀριθμοῦ, ὅστις ἐξαλείφεται δι' ὅλου, ἔπρεπε κυρίως νὰ τίθηται ἀντ' αὐτοῦ 1· διότι ἕκαστος Ἀριθμὸς περιέχεται ἐν ἑαυτῷ ἅπαξ· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ 1, ὡς ἦν γνωστὸν, οὔτε πολλαπλασιάζει, ἀλλ' οὔτε διαιρεῖ, διὰ τοῦτο παρ' ἐκείνῳ τῷ Ἀριθμῷ, δι' οὗ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν, ἢ νὰ διαιρέσωμεν, δὲν θέττομεν μηδὲν, καθὼς εἰς τὸ Γ'. ὄπισθεν, παρὰ τῷ Διαιρέτῃ 11, δὲν ἐθέσαμεν μηδὲν, παρὰ τῷ Ἀριθμητῇ 11 ὅμως ἐτέθη τὸ 1, ἐπειδὴ αὐτὸ τὸ 1 δεικνύει τὴν Ποσότητα τῶν μερῶν τοῦ προκειμένου Κλάσματος. Ὁμοίως καὶ εἰς τὸ Β'., ὅπου ὁ Ἀριθμητὴς 8 ἐξέλιπε δι' ὅλου, ἐτέθη τὸ 1, πλὴν οὔτε πολλαπλασιάζει, ἀλλ' οὔτε διαιρεῖ.

Πτῶσις Β'. Πῶς διαιρεῖται ὁ σὺν κλάσματι Ἀριθμὸς δι' ἀκεραίου Ἀριθμοῦ.

§. 251.

Προκειμένου ἀκεραίου Ἀριθμοῦ σὺν Κλάσματι, ἵνα διαιρεθῇ δι' ἀκεραίου Ἀριθμοῦ, φέρ' εἰπεῖν, $4\frac{2}{3}\frac{4}{5}$ κ. τ. λ., μεταβάλλομεν πρότερον τὸν μικτὸν Ἀριθμὸν εἰς νόθον Κλάσμα, εἶτα ἀκολουθοῦμεν τὴν ἐργασίαν ὡς καὶ εἰς τὰ μέχρι τοῦδε Ὑποδείγματα. Π. χ. μᾶς ἐδόθησαν νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 9 τὰ $5\frac{2}{5}$, ἅτινα μεταβληθέντα, προκύπτουσιν 9 ἐκ τῶν $\frac{27}{5}$, ὅθεν 9 διαιροῦντα τὸν Ἀριθμητὴν 27, λαμβάνουσιν ἀνὰ 3, καὶ προκύπτει τὸ Ζητούμενον $\frac{3}{5}$.

Ἰδοὺ καὶ Ὑποδείγματα.

Α'.

6 ἐκ τῶν $2\frac{3}{4}$ | $\frac{11}{4}$

Ποιοῦσι $\frac{11}{24}$.

Β'.

5. 25 ἐκ τῶν $6\frac{2}{3}$ $\left|\frac{20.\ 4}{3}\right.$

Ποιοῦσι $\frac{4}{15}$

Γ'.

8 ἐκ τῶν $4\frac{4}{5}$ $\left|\frac{24.\ 3}{5}\right.$

Ποιοῦσι $\frac{3}{5}$.

Ἑρμηνεία. Εἰς τὸ Α'. μετεβάλλομεν τὰ $2\frac{3}{4}$ εἰς τέταρτα, εἰπόντες· 2 × 4 — 8, καὶ 3 ποιοῦσιν $\frac{11}{4}$, λοιπὸν 6 ἐκ τῶν $\frac{11}{4}$· ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ 6 δὲν περιέχονται εἰς τὰ 11 ἐπίσης, ἀλλ' οὔτε σμικρύνονται μὴ ἔχοντες ἀμφότεροι οἱ Ἀριθμοὶ κοινὸν Διαιρέτην, διὰ τοῦτο εἴπομεν ἀμέσως 4 × 6 — 24, καὶ προέκυψαν $\frac{11}{24}$.

Εἰς τὸ Β'. ἀφ' οὗ μετεβάλλομεν τὰ $6\frac{2}{3}$, προέκυψαν 25 ἐκ τῶν $\frac{20}{3}$, ἐπειδὴ δὲ τὰ 25 καὶ 20 σμικρύνονται διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν Διαιρέτου 5, διὰ τοῦτο προέκυψαν 5 ἐκ τῶν $\frac{4}{3}$, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιάσαντες 3 × 5 — 15, προέκυψε τὸ Κλάσμα $\frac{4}{15}$.

Εἰς τὸ Γ'. μεταβληθέντων τῶν $4\frac{4}{5}$ εἰς $\frac{24}{5}$, προέκυψαν 8 ἐκ τῶν $\frac{24}{5}$, ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ Διαιρέτης 8 διαιρεῖ τὸν Ἀριθμητὴν 24 ἐπίσης, διὰ τοῦτο τὰ μὲν 8 ἐξέλειπον δι' ὅλου, καὶ ἀντὶ τῶν 24 ἔμεινον 3, καὶ προέκυψαν $\frac{3}{5}$.

§. 252·

Εἰς τὰς τοιαύτας Πτώσεις ἃς παρατηρηθῇ ἡ ἑπομένη Θέσις, ἧς τὸ ὠφέλιμον πληροφορηθησόμεθα ταχύ. Τεθήτω ὁ Διαιρέτης ὑπὸ τοῦ Διαιρετέου κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. Π. χ. πρόκεινται, ἵνα διαιρεθῶσι διὰ τῶν 5 τὰ $4\frac{1}{3}$, λοιπὸν θέττομεν

$\frac{4\frac{1}{3}}{5}$, ὅπερ κυρίως δηλοῖ, $4\frac{1}{3}$ πέμπτα· διότι 5 ἐκ τῶν 4, δίδουσι 4 πέμπτα, ἄρα 5 ἐκ τῶν $4\frac{1}{3}$, δίδουσι $4\frac{1}{3}$ πέμπτα, ὅθεν πολλαπλασιάζομεν τόσον τὸν Ἀριθμητὴν $4\frac{1}{3}$, ὅσον καὶ τὸν Παρονομαςὴν 5 μὲ 3 (ἐπειδὴ τὸ παρὰ τῷ Ἀριθμητῇ Κλάσμα πρέπει νὰ ἐκλείψῃ), καὶ θέττομεν τὸ, ὅ,τι προκύψει ἐκ τοῦ Ἀριθμητοῦ δεξιῶς τῆς κεχωρισμένης Γραμμῆς, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ θεωρεῖται ὁ τοῦ μέλλοντος Κλάσματος Ἀριθμητής· ὡσαύτως θέττομεν καὶ τὸ ἐκ τοῦ Παρονομαςοῦ προκύψαν, ὅπερ ἐςὶν ὁ τοῦ μέλλοντος Κλάσματος Παρονομαςής, καὶ οὕτω προκύπτει εὐθέως τὸ Ζητούμενον πρόσω τῆς Γραμμῆς, ὡς.

$$\begin{array}{c|c} 4\frac{1}{3} & 13 \\ \hline 5 & 15 \end{array}$$

οἷον· $3 \times 4 = 12$, καὶ 1 ποιοῦσι 13 (πρόσω τῆς Γραμμῆς) διὰ τὸν Ἀριθμητήν· εἶτα $3 \times 5 = 15$ διὰ τὸν μέλλοντα Παρονομαςήν, καὶ οὕτω προκύπτουσι $\frac{13}{15}$.

Ἰδοὺ καὶ Ὑποδείγματα.

ἀντὶ 3 ἐκ τοῦ $1\frac{1}{4}$, θέττομεν $\begin{array}{c|c} 1\frac{1}{4} & 5 \\ \hline 3 & 12 \end{array}$·

ἀντὶ 6 ἐκ τῶν $2\frac{1}{5}$, τίθενται $\begin{array}{c|c} 2\frac{1}{5} & 11 \\ \hline 6 & 30 \end{array}$·

ἀντὶ 8 ἐκ τῶν $4\frac{1}{2}$, βάλλομεν $\begin{array}{c|c} 4\frac{1}{2} & 9 \\ \hline 8 & 16 \end{array}$·

Δεῖξις. Ἡ Βάσις τοῦ ἀνωτέρω τρόπου κυρίως μηδὲν ἄλλο δηλοῖ, ἀλλ' ὅ,τι διωρίσθη εἰς τὸν πρότερον §. διότι ἐνταῦθα δὲν πράττομεν περισσότερόν τι, εἰμὴ μεταβάλλομεν μόνον τὸν Διαιρετέον, καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν Διαιρέτην μὲ τὸν Παρονομαςήν, διὰ νὰ μείνῃ ἀμετάβλητος ἡ τοῦ Κλάσματος τιμή· διότι εἰς τ' ἀπέναντι Ὑποδείγματα ἀντὶ τοῦ πρώτου Ἀριθμητοῦ $1\frac{1}{4}$, προέκυψεν ὁ τετράκις μεγαλήτερος 5, καὶ ἀντὶ τοῦ δευτέρου $2\frac{1}{5}$, ὁ πεντάκις μεγαλήτερος 11, καὶ ἀντὶ τοῦ τρίτου $4\frac{1}{2}$, ὁ δὶς μεγαλήτερος 9, ἄρα πρέπει ν' αὐξήσωσι καὶ οἱ Παρονομασταὶ τετράκις, πεντάκις καὶ δίς.

§. 253.

Περὶ τῆς ἐξαλείψεως καὶ ἐλαττώσεως τοῦ μεταβαλλομένου Ἀριθμητοῦ πρὸς τὸν ἀμετάβλητον Παρονομαστὴν χρησιμεύουσι τὰ αὐτὰ, ὅσα ἐν τῷ §. 249. ἐλέχθησαν περὶ αὐτῶν. Π. χ. 16 ἐκ τῶν $4\frac{4}{5}$, θέττομεν.

$$\begin{array}{r|r} 4\frac{4}{5} & \cancel{24}.\ 3 \\ \hline \cancel{16}.2 & 10 \end{array}$$

ἐνταῦθα ὁ μεταβληθεὶς Ἀριθμητὴς 24, καὶ ὁ ἀμετάβλητος Παρονομαστὴς 16 σμικρύνονται διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν Διαιρέτου 8, εἴτουν, 8 τὰ 24, ἀνὰ 3, καὶ 8 τὰ 16, ἀνὰ 2, καὶ μένουσι διὰ τὸν Παρονομαστὴν μόνον 2, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιαζόμενα μὲ τὰ 5, προκύπτουσι διὰ τὸν τοῦ μέλλοντος Κλάσματος Παρονομαστὴν 10, καὶ ὁ ἄνωθεν ἐκ τῶν 24 προκύψας νέος Ἀριθμητὴς 3, ποιοῦσι τὸ Κλάσμα $\frac{3}{10}$·

Ἰδοὺ καὶ ἕτερα Ὑποδείγματα πρὸς ἄσκησιν.

$$\begin{array}{r|r} 7\frac{1}{5} & \cancel{36}.\ 3 \\ \hline \cancel{24}.2 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 5\frac{1}{3} & \cancel{16}.\ 1 \\ \hline \cancel{16}. & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 2\frac{5}{7} & \cancel{17}.\ 1 \\ \hline \cancel{17}. & 6\cdot \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r} 4\frac{4}{5} & \cancel{24}.\ 4 \\ \hline \cancel{18}.3 & 15 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 3\frac{3}{4} & \cancel{15}.\ 1 \\ \hline \cancel{30}.2 & 8\cdot \end{array}$$

§. 254.

Ὅταν ὁ Διαιρετέος σύγκηται ἐκ περισσοτέρων ἀκεραίων Ἀριθμῶν, φέρ' εἰπεῖν, τὰ 5 νὰ διαιρέσωσι τὰ $253\frac{1}{5}$, τότε διαιροῦμεν ἕως οὗ δυνάμεθα τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς, εἶτα διαιροῦμεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον Κλάσμα καθάπερ μέχρι τοῦδε, οἷον· 5 ἐκ τῶν $253\frac{1}{3}$ λέγοντες· 5 ἐκ τῶν 25, ἀνὰ 5, εἶτα

Ποιοῦσι $50\frac{2}{3}$. 5 ἐκ τῶν 3 μηδὲν, ὅθεν θέττομεν 0,

καὶ μένει ὑπόλοιπον $\frac{3\frac{1}{3}}{5}$, τὸ ὁποῖον μεταβληθὲν καὶ σμικρυνθὲν, ὡς ἐπράξαμεν πρὸ ὀλίγου, προκύπτουσι $\frac{2}{3}$, ὁμοῦ δὲ $50\frac{2}{3}$.

§. 255.

Ὅταν καὶ ὁ Διαιρέτης σύγκηται ἐκ περισσοτέρων Ἀριθμῶν, καὶ εἶναι σύνθετος, διαιροῦμεν κατὰ τοὺς §§. 139 καὶ 140, ὡς κατωτέρω, τοὐναντίον δὲ, διαιροῦμεν διὰ μιᾶς, εἶτα καὶ τὸ ὑπόλοιπον, καθὼς τὸ ἀνωτέρω.

Πρόβλημα. Διαιροῦντες οἱ 45 τὰ $585\frac{1}{2}$, πόσα λαμβάνει ἕκαστος;

45 τὰ $585\frac{1}{2}$

5. $117\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{10}$ (5)

9. $13\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{90}$ (9) ἤτοι $13\frac{1}{90}$.

καὶ διὰ μιᾶς

45 τὰ $585\frac{1}{2}$

$\frac{13\frac{1}{2}}{45}$ | $\frac{1}{90}$

Πρόβλημα. Διαιρεθέντων τῶν $225\frac{1}{4}$ διὰ 17, πόσα λαμβάνει ἕκαστος;

17 τὰ $225\frac{1}{4}$

ἀνὰ $13\frac{4\frac{1}{4}}{17}$ | $\frac{17.1}{4}$ εἴτουν $13\frac{1}{4}$.

§. 256.

Τὸ ὠφέλιμον αὐτοῦ τοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται κατ' ἐξοχὴν εἰς τοὺς μικτοὺς Ἀριθμούς. Π. χ. πρόκειται ἵνα διαιρέσωμεν διὰ 4 τὰ Γρόσια 25,, 35 παρ'. $2\frac{2}{3}$ ἄσπρα, αὕτη ἡ διαίρεσις γίνεται, ὡς ἀκολούθως.

4 τὰ Γρ'. 25 ,, 25 παρ. $2\frac{3}{4}$ ἄσπρα.

Ποιοῦσι Γρ'. 6 ,, 18 πρ. $2\frac{15}{16}$ ἄσ.

δηλονότι· 4 τὰ 25, ἀνὰ 6 Γρόσια, καὶ μένει 1 Γρόσι, ποιοῦν 4 Δεκάδας, καὶ 3 (ἐκ τῶν 35 παρ'.), ποιοῦσιν 7 Δεκάδας, λοιπὸν 4 τὰ 7, ἅπαξ, καὶ μένουσι 3· εἶτα 4 τοὺς 35 παρ'., ἀνὰ 8, εἴτουν 18 παρ'., καὶ μένουσι 3 παρ'., ποιοῦσι 9 ἄσπρα, καὶ 2 ἄσπρα, ποιοῦσιν ὁμοῦ 11 ἄσπρα, λοιπὸν 4 τὰ 11, ἀνὰ 2 ἄσπρα, καὶ μένουσι $3\frac{3}{4}$ ἄσπρα ὑπόλοιπον, ἤτοι $\frac{3\frac{3}{4}}{4}$, ὅθεν $3 \times 4 — 12$, καὶ 3 ποιοῦσι 15, εἴτουν τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ μέλλοντος Κλάσματος, ἔπειτα $4 \times 4 — 16$ ποιοῦσι τὸν Παρονομαστὴν τοῦ αὐτοῦ Κλάσματος, ἤτοι τὸ ὁλόκληρον νέον Κλάσμα $\frac{15}{16}$ ἄσπρου.

Ἰδοὺ καὶ ἕτερον. Ἐὰν μὲ Γρόσ. 18 ἠγοράσθησαν Ὀκάδες 54 ,, 3 λίτραις $61\frac{1}{5}$ δρ'., πόσαι Ὀκάδες ἀγορασθήσονται διὲ ἓν Γρόσι;

Λ ύ σ ι ς.

Διὰ τῶν 18 διαιρεθήτωσαν Ὀκάδες 54 ,, 3 λ'. $61\frac{1}{5}$ δρ'.

3 . . . . 18 ,, 1 ,, $20\frac{2}{5}$

6 . . . Ποιοῦσιν Ὀκδ. 3 ,, — $20\frac{1}{15}$ δρ'.

Ἑρμηνεία. Ἐπειδὴ ὁ Διαιρέτης 18 παράγεται ἐκ 3 καὶ 6, εἴτουν $3 \times 6 — 18$, διὰ τοῦτο γίνεται ἡ διαίρεσις εὐκολώτερα, ὡς ἀνωτέρω· ὅθεν διαιροῦμεν (ὡς §. 140.) πρῶτον μὲ 3 λέγοντες· 3 τὰς Ὀκάδας 54, ἀνὰ 18, εἶτα 3 τὰς 3 λίτρας, ἀνὰ 1, καὶ 3 τὰ δρ'. $61\frac{1}{5}$, ἀνὰ 20, καὶ μένει $1\frac{1}{5}$, ἤτοι $\frac{1\frac{1}{5}}{3}$, δίδει $\frac{2}{5}$. Μετὰ ταῦτα 6 τὰς Ὀκάδας 18, ἀνὰ 3, εἶτα 6 τὴν 1 λίτραν οὐ διαιροῦσι, λοιπὸν 1 λίτρα ποιεῖ δρ.

100, καὶ $20\frac{2}{5}$, ποιοῦσιν ὁμοῦ δρ΄. $120\frac{2}{5}$, ὅθεν 6 τὰ δρ΄. $120\frac{2}{5}$ ἀνὰ 20, καὶ μένει νὰ διαιρεθῶσι μόνον $\frac{2}{5}$ δρ΄. διὰ τῶν 6· ἐπειδὴ ὅμως ὁ Ἀριθμητὴς 2, καὶ ὁ Διαιρέτης 6 διαιροῦνται διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν Διαιρέτου 2, μένει νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 3 τὸ $\frac{1}{5}$, τουτ᾽ ἔςι, πολλαπλασιάζομεν τὸν Παρονομαςὴν 5 μὲ 3, ἀφίνοντες ἀμετάβλητον τὸν Ἀριθμητὴν, ὡς §. 248.

Πτῶσις Γ΄. Πῶς διαιρεῖται ὁ ἀκέραιος Ἀριθμὸς διὰ τοῦ Κλάσματος.

§. 257.

Ἐὰν ὁ Διαιρέτης εἶναι ἁπλῶς Κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν Διαιρετέον μὲ τὸν Παρονομαςὴν τοῦ Κλάσματος. καὶ διαιροῦμεν τὸ προκύπτον Κεφάλαιον διὰ τοῦ Ἀριθμητοῦ, Π. χ. πρόκειται ἵνα διαιρέσωμεν διὰ $\frac{3}{5}$ τὰ 7, ἐνταῦθα λέγομεν· $5 \times 7 = 35$ (πέμπτα), εἶτα 3 ἐκ τῶν 35, ἀνὰ $11\frac{2}{3}$, ὅ ἐςι, $\frac{3}{5}$ εἰς τὰ 7 περιέχονται $11\frac{2}{3}$. Ὁμοίως καὶ $\frac{5}{6}$ εἰς 12 λέγομεν· $6 \times 12 = 72$, ἅτινα διαιρούμενα διὰ τοῦ Ἀριθμητοῦ 5, δίδουσι $14\frac{2}{5}$.

Δεῖξις. Γνωςὸν ἐςὶν, ὅτι τόσον ὁ Διαιρέτης, ὅσον καὶ ὁ Διαιρετέος πρέπει ἵνα ὦσι τῆς αὐτῆς φύσεως καὶ ὀνομασίας· διότι μόνον ὅμοιον εἰς ὅμοιον δύναται χωρῆσαι, δηλονότι Γρόσια εἰς Γρόσια, Παράδες εἰς Παράδες, τέταρτα εἰς τέταρτα, ἕκτα εἰς ἕκτα, κ. τ. λ. Ὅθεν ὅταν πρόκηται, ἵνα διαιρέσωμεν διὰ τετάρτων, δι᾽ ἕκτων, ἢ δι᾽ ὁποιωνδήποτε ἑτέρων Κλασματικῶν μερῶν, πρέπει νὰ ἀναλυθῇ καὶ ὁ Διαιρετέος εἰς τὰ αὐτὰ μέρη, εἴτουν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν μὲ τὸν τοῦ Κλάσματος Παρονομαςὴν, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ Ἀριθμητοῦ. Εἰς τὸ ἀνωτέρω προκείμενον Ὑπόδειγμα, πρόκειται ἵνα διαιρέσωμεν διὰ $\frac{3}{5}$ τὰ 7, ἄρα τὰ 7 πρέπει νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς πέμπτα, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ μὲ

5, καὶ δίδουσι 35 πέμπτα, ὅπερ δηλοῖ, 3 πέμπτα εἰς 35 πέμπτα ἐμπεριέχονται $11\frac{2}{3}$ (α).

§. 258.

Ὅταν ὁ Διαιρέτης σύγκηται ἀπὸ ἀκεραίου Ἀριθμοῦ καὶ Κλάσματος, ἀφ' οὗ μεταβάλλωμεν αὐτὸν εἰς νόθον Κλάσμα, μεταχειριζόμεθα τὸ ἐξαλείφειν καὶ σμικρύνειν, ἐπειδὴ προξενοῦσι συντομίαν.

Ἰδοὺ τοιαῦτα Ὑποδείγματα.

Α'. $2\frac{2}{3}$ τὰ 20
8 5
2 . . 3 ὁ Παρονομαστής.
15
Ποιοῦσιν $7\frac{1}{2}$.

Β'. $7\frac{1}{5}$ τὰ 27
36 3
4 . . 5
15
Ποιοῦσι $3\frac{3}{4}$.

Γ'. $6\frac{6}{7}$ τὰ 816
48 102
6 17
7
Ποιοῦσιν 119.

Ἑρμηνεία. Εἰς τὸ Α'. μεταβληθέντων τῶν $2\frac{2}{3}$ εἰς νόθον Κλάσμα, ὁ Διαιρέτης 8, καὶ ὁ Διαιρετέος 20 διαι-

(α) Δὲν πρέπει νὰ μᾶς φανῇ παντάπασι παράδοξον, ὅτι διαιροῦντες διὰ τοῦ Κλάσματος ἀκέραιον Ἀριθμὸν, προκύπτει μεγαλήτερον Πηλίκον, ἀφ' ὅσος εἶναι ὁ Διαιρετέος, ἐπειδὴ εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν τὴν αἰτίαν, ἀφ' οὗ ςοχασθῶμεν δηλαδὴ, ὅτι ὅσον μικρότερος εἶναι ὁ Διαιρέτης, τοσοῦτον πλεονάκις ἐμπεριέχεται εἰς τὸν Διαιρετέον. Φέρ' εἰπεῖν, ἐὰν ὁ Διαιρέτης εἶναι 1, τότε προκύπτει διὰ Πηλίκον ὁλόκληρος ὁ Διαιρετέος· ἐὰν ὅμως ὁ Διαιρέτης εἶναι ἁπλῶς Κλάσμα (τὸ ὁποῖον εἶναι ὀλιγώτερον τοῦ 1), εἶναι ἑπόμενον νὰ προκύψῃ μεγαλήτερον Πηλίκον παρ' ὅσος εἶναι ὁ Διαιρετέος.

ροῦνται διὰ τοῦ κοινοῦ Διαιρέτου 4, καὶ μένουσι διὰ τὸν Διαιρέτην 2, καὶ διὰ τὸν Διαιρετέον 5, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιαζόμενα μὲ τὸν Παρονομαςὴν τοῦ Κλάσματος 3, δίδουσι 15, ἅτινα διαιρεθέντα διὰ τοῦ Διαιρέτου 2, προκύπτει Πηλίκον $7\frac{1}{2}$.

Εἰς τὸ Β'. ὁ Διαιρέτης 36, καὶ ὁ Διαιρέος 27 διαιροῦνται διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν Διαιρέτου 9, καὶ μένει Διαιρέτης 4, τὰ δὲ τοῦ Διαιρετέου μείναντα 3, πολλαπλασιάζονται μὲ τὸν τοῦ Κλάσματος Παρονομαςὴν 5, και διαιρεῖται τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν διὰ τῶν 4, καὶ οὕτω προκύπτει τὸ Ζητούμενον $3\frac{3}{4}$.

Εἰς τὸ Γ'. ὁ Διαιρέτης 48, καὶ ὁ Διαιρετέος 816 διαιροῦνται διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν Διαιρέτου 8, καὶ μένει Διαιρέτης 6, καὶ Διαιρετέος 102· ἀλλ' ἐπειδὴ ἀμφότεροι διαιροῦνται διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν Διαιρέτου 6, διὰ τοῦτο ἐκλείπει ὁλοτελῶς ὁ Διαιρέτης, καὶ μένουσιν εἰς τὸν Διαιρετέον 17, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιαζόμενα μὲ τὸν τοῦ Κλάσματος Παρονομαςὴν 7, προκύπτει, ἄνευ διαιρέσεως, τὸ Πηλίκον 119.

§. 259.

Ἀπαραλλάκτως γίνεται καὶ ἡ ἐργασία τῶν μικτῶν ὀνοματικῶν Ἀριθμῶν, ὡς ἑπομένως.

$12\frac{2}{3}$	τὰ Γρόσια	56,,38 Παράδες	2 ἄσπρα.
			3
38	τὰ Γρόσια	170,,36 Παράδες	
Ποιοῦσι	Γρόσια	4,,19 Παράδες	$2\frac{14}{19}$ ἄσπρα.

δηλονότι, μεταβάλλομεν πρότερον τὰ $12\frac{2}{3}$ εἰς νόθον Κλάσμα 38, τοῦτ' ἔςιν, ηὐξήσαμεν τὸν Διαιρέτην τρὶς, ἄρα πρέπει ν' αὐξήσωμεν καὶ τὸν Διαιρετέον ὡσαύτως τρὶς, δι' ἣν αἰτίαν ἐπολλαπλασιάσαμεν αὐτὸν μὲ 3, ὡς ἀνωτέρω, καὶ ἔπειτα διαιρέσαμεν διὰ τῶν 38.

Καὶ ἕτερον. Μᾶς ἐδόθη νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν $13\frac{1}{5}$ τὰ Γρόσια 25,, 18 Παράδες $2\frac{2}{3}$ ἄσπρα, πόσον ἔχομεν Πηλίκον;

Λ ύ σ ι ς.

$13\frac{1}{5}$ τὰ Γρ'. 25,, 18 πρ'. $2\frac{2}{3}$ ἄσ.
5

66 τὰ Γρ'. 127,, 14 πρ'. $1\frac{1}{3}$ ἄσ. | Πηλ. Γρ'. 1,,37 πρ'. $\frac{56}{99}$ ἄσ.
-61
40

2454
-474
-12
3

$37\frac{1}{3}$, ἤτοι $\frac{37\frac{1}{3}}{66} \Big| \frac{112}{198} \Big| \frac{56}{99}$ (2)

Σημείωσις. Ὅταν τὸ ὑπόλοιπον Κλάσμα ὑπερβαίνῃ τὸ $\frac{1}{2}$, ὡς τ' ἀνωτέρω $\frac{56}{99}$, δύναται νὰ ληφθῇ δι' ἓν Ἀκέραιον.

Πτῶσις Δ'. Πῶς διαιρεῖται τὸ Κλάσμα δι' ἑτέρου Κλάσματος.

§. 260.

Προκειμένου Κλάσματος τοῦ διαιρεθῆναι δι' ἑτέρου Κλάσματος, πρέπει ἵνα ὦσιν ἀμφότερα τῆς αὐτῆς φύσεως καὶ ὀνομασίας, καὶ οὕτω διαιροῦμεν διὰ τοῦ Ἀριθμητοῦ τοῦ Διαιρέτου τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ Διαιρετέου, τοὐναντίον δὲ πρέπει πρότερον να μεταβληθῶσιν εἰς ὁμοίαν ὀνομασίαν, εἰς ἣν μεταφέρονται πολλαπλασιαζόμενος ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ ἑνὸς Κλάσματος μὲ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ ἑτέρου. Π. χ. $\frac{2}{5}$ τὰ $\frac{4}{5}$, ἀνὰ 2· διότι ἐνταῦθα ὄντα τὰ Κλάσματα τῆς αὐτῆς ὀνομασίας, διαιροῦμεν ἀμέσως διὰ τοῦ Ἀριθμητοῦ 2 τὸν Ἀριθμητὴν 4, καὶ προκύπτει τὸ Ζητούμενον 2.

Τοῦτο ἐννοεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ· διότι καθὼς Λέγομεν, φέρ' εἰπεῖν, Γρόσια 2 νὰ διαιρέσωσι Γρόσια 4 λαμβάνουσιν ἀνὰ 2, οὕτω λέγομεν καὶ 2 πέμπτα ἐκ 4 πέμπτων λαμβάνουσιν ἀνὰ 2, ἐπειδὴ μόνον τοὺς Ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν, οὐχὶ ὅμως καὶ τὴν ὀνομασίαν αὐτῶν, ἥτις διαπαντὸς μένει ἀμετάβλητος. Πλὴν μ' ὅλον τοῦτο, ὡς γνωστὸν, πρέπει αὐτοὶ οἱ Ἀριθμοὶ νὰ ἔχωσιν ὁμοίαν ὀνομασίαν, καθὼς ἡ Δεῖξις τοῦ §. 257 διαλαμβάνει.

§. 261.

Ἐὰν ὅμως τὰ δοθέντα Κλάσματα δὲν ἔχωσιν ὁμοίους Παρονομαστὰς, ὡς $\frac{2}{3}$ τὰ $\frac{5}{8}$ κ. τ. λ., πρέπει, πρὸ τῆς διαιρέσεως, νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ Ἀριθμηταὶ μὲ τοὺς ἀντικειμένους Παρονομαστὰς αὐτῶν, δι' οὗ μεταβάλλονται εἰς ὁμοίαν ὀνομασίαν. Οἷον· $\frac{2}{3}$ τὰ $\frac{5}{8}$ λέγομεν· $2 \times 8 - 16$ (τὰ ὁποῖα τίθενται ὑπὸ τὰ $\frac{2}{3}$), καὶ $3 \times 5 - 15$ (ἃ τίθενται ὑπὸ τὰ $\frac{5}{8}$), εἶτα 16 νὰ διαιρέσωσι τὰ 15, δίδουσι $\frac{15}{16}$.

Ἰδοὺ καὶ ἡ κατάστρωσις.

$\frac{2}{3}$ τὰ $\frac{5}{8}$

16 τὰ 15

Ποιοῦσι $\frac{15}{16}$

Δεῖξις. Ἡ βάσις τῆς ἀνωτέρω πράξεως εἶναι εὐκατάληπτος, ἐπειδὴ διὰ νὰ δυνηθῶμεν νὰ διαιρέσωμεν μὲ 2 τρίτα, πρέπει καὶ ὁ Διαιρετέος $\frac{5}{8}$ νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁμοίως μὲ 3, τοῦτ' ἔστι, νὰ μεταβληθῇ εἰς τρίτα· ἀλλ' ὅμως πολλαπλασιαζόμενα τὰ $\frac{5}{8}$ μὲ 3, δίδουσι $\frac{15}{8}$ (ὡς §. 227.), λοιπὸν πρόκειται ἤδη νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 2 τὰ $\frac{15}{8}$, τὸ ὁποῖον ἐπιτελεῖται πολλαπλασιάζοντες τὸν Παρονομαστὴν 8 μὲ 2 (ὡς §. 248), καὶ οὕτω προκύπτουσι $\frac{15}{16}$, ὅ ἐστι, πολλαπλασιάζομεν, κατὰ τὸν Κανόνα, τοὺς Ἀριθμητὰς μὲ τοὺς ἀντικειμένους Παρονομαστὰς πλαγίως, εἴτουν σταυροειδῶς, εἶτα διαιροῦμεν, καὶ προκύπτει τὸ Ζητούμενον.

§. 262.

Σχόλιον. Διὰ νὰ πληροφορηθῶμεν σαφέςερον, ὅτι πολλαπλασιαζόμενα τὰ ἀπὸ ἀνομοίων Παρονομαςῶν συνιςάμενα Κλάσματα ςαυροειδῶς, μεταβάλλονται εἰς ὁμοίαν ὀνομασίαν, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκεινται τὰ αὐτὰ νὰ ἀθροισθῶσιν, ἢ ν' ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' ἀλλήλων, ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν ἔχουσιν ὁμοίους Παρονομαςὰς, πρέπει πρότερον νὰ μεταβληθῶσιν εἰς ὁμοίαν ὀνομασίαν. Θὲς λοιπὸν, ὅτι πρόκειται ἵν' ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' ἀλλήλων τ' ἀπέναντι δύο Κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{5}{8}$, ὧν οἱ Παρονομαςαὶ μὴ περιεχόμενοι ὁ εἷς εἰς τὸν ἕτερον, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσι μετ' ἀλλήλων, ἵνα προκύψῃ ὁ γενικὸς αὐτῶν Παρονομαςής· διὸ θέττομεν, 24 ὁ γενικὸς Παρονομαςής.

$$\begin{array}{c|l} \frac{5}{8} & 15 \\ \frac{2}{3} & 16 \end{array}$$

Ιδοὺ λοιπὸν μετεβλήθησαν εἰς ὁμοίαν ὀνομασίαν, εἴτουν, διὰ μὲν τὸν Διαιρέτην $\frac{2}{3}$, προέκυψαν $\frac{16}{24}$, διὰ δὲ τὸν Διαιρετέον $\frac{5}{8}$, προέκυψαν $\frac{15}{24}$, ὅθεν ὄντες ἤδη οἱ Παρονομαςαὶ αὐτῶν τῶν δύο Κλασμάτων ὅμοιοι, εἴτουν, εἰκοςὰ τέταρτα, διὰ τοῦτο διαιροῦμεν ἀδιςάκτως διὰ τοῦ Ἀριθμητοῦ 16 τὸν ἕτερον Ἀριθμητὴν 15, καὶ προκύπτουσι $\frac{15}{16}$. (ὡς §. 260.).

§. 263.

Ἐὰν πρὸ τοῦ ςαυροειδῶς πολλαπλασιασμοῦ ἐξαλείφωνται ἢ σμικρύνωνται οἱ Ἀριθμηταὶ, ἢ οἱ Παρονομαςαὶ πρὸς ἀλλήλους, ἢ διὰ κοινοῦ Διαιρέτου, ἐπιτελεῖται ἡ πρᾶξις εὐκολώτερα καὶ συντομώτερα. Οἷον.

$$\frac{\frac{6}{7} \text{ τὰ } \frac{12}{21}}{\text{Ποιοῦσι } \frac{2}{3}.}$$

Εἰς τὸ ἄνωθεν Ὑπόδειγμα ἐξαλείφονται οἱ Ἀριθμηταὶ καὶ Παρονομαςαὶ πρὸς ἀλλήλους, εἴτουν, 6 τὰ 12, ἀνὰ 2, καὶ 7 τὰ 21. ἀνὰ 3, λοιπὸν μένουσιν ἁπλῶς $\frac{2}{3}$.

Ὅθεν ἐξ ὧν εἴδομεν καὶ εἴπομεν μέχρι τοῦδε, καθὼς καὶ ἐκ τῶν ὄπισθεν ἐπληροφορήθημεν σαφῶς, ὅτι ἡ τῶν κλασμάτων Διαίρεσις πολλαπλασιάζουσα ϛαυροειδῶς, μεταφέρει τὰ Κλάσματα εἰς ὁμοίαν ὀνομασίαν, διὸ καὶ σμικρύνει, ἢ ἐξαλείφει κατ' εὐθεῖαν, δηλονότι Ἀριθμητὴν πρὸς Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαςὴν πρὸς Παρονομαςὴν, ἐν ᾧ ὁ τῶν κλασμάτων Πολλαπλασιασμὸς ἐπιζητεῖ ἀντίϛροφον πρᾶξιν, τοῦτ' ἔϛι, πολλαπλασιάζει κατ' εὐθεῖαν, καὶ σμικρύνει, ἢ ἐξαλείφει πλαγίως· μ' ὅλον τοῦτο ἀμφότεροι οἱ τρόποι ἔχουσιν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ θεμέλιον, ἐπειδὴ αἰέποτε σμικρύνονται, ἢ ἐξαλείφονται μόνον οἱ Παράγοντες τοῦ ἐσομένου Ἀριθμητοῦ πρὸς τοὺς Παράγοντας τοῦ ἐσομένου Παρονομαςοῦ· διότι εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν οἱ Παράγοντες τοῦ Διαιρέτου εἰσὶν οἱ Παρονομαςαὶ, καὶ οἱ τοῦ Διαιρετέου εἰσὶν οἱ Ἀριθμηταί. Ἀλλ' εἰς τὴν Διαίρεσιν, ὅπου ἕκαϛος Ἀριθμητὴς πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ μετὰ τοῦ ἀντικειμένου Παρονομαςοῦ, ἐξαλείφονται μόνον Ἀριθμηταὶ πρὸς Ἀριθμητὰς, καὶ Παρονομαςαὶ πρὸς Παρονομαςὰς, ἐπειδὴ διὰ τοῦ ϛαυροειδῶς Πολλαπλασιασμοῦ γίνονται ἀμοιβαῖοι Παράγοντες τοῦ ἐσομένου Διαιρέτου καὶ Διαιρετέου.

§. 264.

Ἐὰν σὺν τοῖς Κλάσμασι δοθῶσι καὶ ἀκέραιοι Ἀριθμοὶ, μεταβάλλομεν αὐτοὺς εἰς νόθα Κλάσματα, καὶ μετὰ ταῦτα γίνεται ἡ ἐργασία ὥσπερ μὲ κύρια Κλάσματα. Π. χ. $\frac{2}{3}$ τὰ $3\frac{5}{9}$, ἐξ ὧν τὸ τελευταῖον μεταβληθὲν, προκύπτουσι $\frac{2}{3}$ τὰ $\frac{32}{9}$, τὰ 2 δὲ πρὸς τὰ 32 ἐξαλειφθέντα, καὶ τὰ 3 πρὸς τὰ 9, μένουσι $\frac{16}{3}$, ἤτοι $5\frac{1}{3}$.

Ἰδοὺ πρὸς ἄσκησιν καὶ ἕτερα διάφορα Ὑποδείγματα.

3 τὰ $2\frac{1}{2}$, ἤτοι $\dfrac{2\frac{1}{2} \mid 5}{3 \mid 6}$. (§. 252.)

2 τὸ $1\frac{1}{5}$, ἤτοι $\dfrac{1\frac{1}{5} \mid 6 . 3}{2 \mid 5}$. (§. 253.)

4 τὸ $\frac{1}{4}$, ἤτοι $\dfrac{\frac{1}{4} \mid 1}{4 \mid 16}$. (§. 255.)

3 τὰ $4\frac{1}{6}$, ἤτοι $\dfrac{4\frac{1}{6} \mid 25}{3 \mid 18}$. ποιεῖ $1\frac{7}{18}$.

$5\frac{1}{3}$ τὸ $\frac{1}{3}$,

16 . 1

$\frac{1}{16}$.

$6\frac{1}{2}$ τὰ $7\frac{4}{5}$

13 39 . 3

5 2

5 τὰ 6

1^{1}.

$\frac{2}{3}$ τὸ 1

δίδουσιν $1\frac{1}{2}$. Τὸ ἄνωθεν 1 πολλαπλασιασθὲν μὲ τὸν Παρονομαστὴν 3, προέκυψαν 3 (τρίτα), διὸ λέγομεν· 2 (τρίτα) τὰ 3 (τρίτα), ἀνὰ $1\frac{1}{2}$.

Γρ'. 2 „ 15 παρ'. $2\frac{4}{5}$ ἄσπρα τὰ Γρ'. 35 „ 39 παρ'.

40	40
95	1439
3	3
$287\frac{4}{5}$ ἄσπρα	4317 ἄσπρα
	5
1439 πέμπτα. . . τὰ .	21585 πέμπτα.

Ποιοῦσι 15.

Δηλονότι, ἐὰν μὲ Γρόσια 2 „ 15 παράδες $2\frac{4}{5}$ ἄσπρα ἠγόρασες 1 ὀκᾶν, πόσας Ὀκάδας διὰ Γρόσια 35 „ 39 παράδες;

Περὶ Δοκιμῆς τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς Διαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

§. 265.

Καθάπερ εἰς τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς χρησιμεύουσιν αὐτὰ τὰ δύο ἀριθμητικὰ Εἴδη πρὸς ἀμοιβαίαν Δοκιμὴν, οὕτω καὶ ἐνταῦθα, ἐπειδὴ, καθὼς ἐκεῖ ἐλέχθη, τὸ ἓν εἶναι πάντοτε ἐπάνοδος τοῦ ἑτέρου, ὅθεν πρὸς ἄσκησιν ἰδοὺ Ὑποδείγματά τινα.

Πολλαπλασιασμοὶ καὶ Δοκιμαὶ αὐτῶν.

Πολλαπλασ. $\frac{5}{6}$ μὲ $\frac{7}{10}$

Ποιοῦσιν $\frac{7}{12}$.

Δοκιμή.

Διαίρεσον διὰ $\frac{5}{6}$ τὰ $\frac{7}{12.2}$

10 τὰ 7

Ποιοῦσιν $\frac{7}{10}$.

Πολλαπλασ. $5\frac{5}{6}$ μὲ $\frac{7}{15}$

$\frac{7.35}{6}$ $\frac{7}{15.3}$

Ποιοῦσι $\frac{49}{18}$ ἤτοι $2\frac{13}{18}$

Δοκιμή.

Διαίρεσον διὰ $5\frac{5}{6}$ τὰ $2\frac{13}{18}$

$\frac{5.35}{3}$ 49.7

Ποιοῦσιν $\frac{7}{15}$.

Πολλαπλασίασον Παρ'. 24 „ $\frac{1}{4}$ ἄσπρου μὲ $3\frac{1}{5}$.

Γρ'. 2 „ 16 παρ'. 1 ἄσπρον. 16 πέμπτα.

5. τὰ . Γρ'. 9 „ 25 παρ'. 1 ἄσπρον. 4

Ποιοῦσι Γρ'. 1 „ 37 παρ. $\frac{1}{2}$ ἄσπρου. 4

Ἤτοι. Παράδ. 24 „		$\frac{1}{4}$ ἄσπρου μὲ $3\frac{1}{5}$	
		3	
Γρόσι 1 „ 32 παράδ.		$\frac{1}{4}$ ἄσπρου.	
— „ 4 παράδ.		$2\frac{9}{20}$ ἄσπρ.	
Ποιοῦσι Γρ. 1 „ 37 παράδ.		$\frac{1}{5}$ ἄσπρου.	

Εἰς τὸ τελευταῖον Ὑπόδειγμα μετεβλήθησαν πρῶτον τὰ $3\frac{1}{5}$ εἰς $\frac{16}{5}$, καὶ ἐπολλαπλασιάσθησαν οἱ Παράδ. 24 „ $\frac{1}{4}$ ἄσπρου μὲ τὸν Ἀριθμητὴν 16, εἴτουν, μὲ τετράκις 4, καὶ οὕτω προέκυψαν Γρόσ. 9 „ 25 παράδ. 1 ἄσπρον, τὰ ὁποῖα διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 5 διαιρεθέντα, προέκυψε τὸ Ζητούμενον.

Δεύτερον, ἐπολλαπλασιάσαμεν τοὺς Παράδ. 24 „ $\frac{1}{4}$ ἄσπρου πρότερον μὲ 3, δηλ. $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ καὶ ἐφεξῆς, εἶτα ἐπολλαπλασιάσαμεν ὁμοίως τοὺς Παράδ. 24 „ $\frac{1}{4}$ ἄσπρου μὲ $\frac{1}{5}$, εἴτουν, διηρέσαμεν αὐτοὺς διὰ τῶν 5 εἰπόντες· 5 τοὺς Παράδ. 24, ἀνὰ Παράδ. 4, ἔμεινον Παράδ. 4, ἤτοι ἄσπρα 12, ὅθεν 5 τὰ 12, ἀνὰ ἄσπρα 2, καὶ ἔμεινον $\frac{2\frac{1}{4}}{5}$, ἤτοι $\frac{9}{20}$, τὰ ὁποῖα μετὰ τῶν ἀνωτέρω ἀθροισθέντα, ἀπέδωκαν τὸ Ζητούμενον.

Δοκιμή.

$3\frac{1}{5}$	τὸ Γρ. 1 „ 37 παράδ.	$\frac{1}{5}$ ἄσπρου.
16		5
4 . .	Γρ. 9 „ 25 παράδ.	1 ἄσπρον.
4 . .	Γρ. 2 „ 16 παράδ.	1 ἄσπρον.
	Ποιοῦσι Παράδ. 24 „	$\frac{1}{4}$ ἄσπρου.

§. 266.

Διαιρέσεως Ὑποδείγματα καὶ Δοκιμαί.

Δοκιμή.

Διαίρει διὰ $\frac{1}{5}$ τὰ $\frac{5}{6}$

6 τὰ 25

Ποιοῦσι $4\frac{1}{6}$.

$\frac{1}{5} \times 4\frac{1}{6}$, ἤτοι $\frac{4\frac{1}{6} \mid 25 \mid 5}{5 \mid 30 \mid 6}$.

Διαίρεσον διὰ $3\frac{1}{2}$ τὰ Γρ΄. 8 „ 30 πρ΄. $2\frac{1}{2}$ ἄσπρα.

2

7. τὰ Γρ΄. 17 „ 21 πρ΄. 2 ἄσπρα.

Ποιοῦσι Γρ΄. 2 „ 20 πρ. $\frac{5}{7}$ ἄσπρου.

Δοκιμή.

Γρ΄. 2 „ 20 πρ΄. $\frac{5}{7}$ ἄσπρου $\times$ $3\frac{1}{2}$

7 7

2. τὰ. Γρ΄. 17 „ 21 πρ΄. 2 ἄσπρα.

Ποιοῦσι Γρ΄. 8 „ 30 πρ΄. $2\frac{1}{2}$ ἄσπρα.

ΚΕΦ. Θ΄.

Περὶ Ἀναλύσεως τῶν Κλασμάτων.

§. 267.

Ἐν τῷ §. 127. καὶ ἐφεξῆς ἐλέχθη τί ἐννοεῖται ὑπὸ τῆς Ἀναλύσεως ἐν τῷ λογαριάζειν, τοῦτ᾽ ἔστιν, αὐτὴ ἀναλύει τὰς Μονάδας τῶν μεγαλητέρων Εἰδῶν εἰς τὰς τῶν πλησίον αὐτῶν μικροτέρων. Ὅθεν προκειμένου Κλάσματός τινος μεγαλητέρου Εἴδους, ἵνα ἀναλυθῇ εἰς Μονάδας τοῦ πλησίον αὐτοῦ μικροτέρου Εἴδους, φέρ' εἰπεῖν, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ Γροσίου εἰς Παράδες, ἢ $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ Ὀκάδος εἰς Δράμια κ. τ. λ., τοῦτο λέγεται Ἀνάλυσις Κλασμάτων.

Καθὼς λοιπὸν ἐνεργεῖται ἡ πρᾶξις τῆς Ἀναλύσεως ἐν ἀκεραίοις Ἀριθμοῖς, ἀπαραλλάκτως ἐπιτελεῖται καὶ ἐν Κλάσμασιν, ἐκτὸς μόνον, ὅτι ἐνταῦθα πρέπει νὰ προσέχωμεν εἰς τὴν πρᾶξιν τοῦ Λογαριασμοῦ, ἐπειδὴ ἐκτελεῖται διὰ Κλασμάτων. Ὅθεν δοθέντος Κλάσματός τινος ἵνα ἀναλυθῇ, πολλαπλασιάζεται ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ Κλάσματος μὲ ἐκείνην τὴν ποσότητα, ἐξ ἧς σύγκειται τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ Εἶδος. Π. χ. μᾶς ἐδόθη νὰ ἀναλύσωμεν $\frac{7}{15}$ Γροσίου εἰς Παράδες· ἐνταῦθα πολλαπλασιάζομεν τὸν Ἀριθμητὴν 7 μὲ 40 (διότι 40 Παράδες ποιοῦσιν 1 Γρόσι), καὶ διαιροῦμεν τὸ προκύπτον Κεφάλαιον 280 διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 15 (ὡς §. 127.), καὶ οὕτω προκύπτει τὸ Ζητούμενον Παράδ. $18\frac{2}{3}$.

Πλέον εὐκατάληπτος παριστάνεται ἡ πρᾶξις ἀφ' οὗ στοχασθῶμεν, ὅτι $\frac{7}{15}$ Γροσίου κυρίως δηλοῖ, 7 Γρόσια διαιρεθήτωσαν διὰ τῶν 15 (ὡς §. 175.), εἴτουν 7 κις 40 Παράδ. νὰ διαιρεθῶσι, κατὰ τὸν Κανόνα, διὰ τῶν 15.

§. 268.

Σημείωσις. Ὅσα περὶ ἐξαλείψεως καὶ ἐλαττώσεως ἐλέχθησαν εἴς τε τὸν Πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν Διαίρεσιν τῶν Κλασμάτων, ταυτὰ ἐννοητέον καὶ ἐνταῦθα. Εἰς τὸ ἄνωθεν Ὑπόδειγμα ὁ Διαιρέτης 15, καὶ ὁ Πολλαπλασιαστέος 40 σμικρύνονται διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν Διαιρέτου 5, καὶ μένουσιν ἵνα πολλαπλασιασθῶσιν 7 μὲ 8, καὶ νὰ διαιρεθῇ τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν διὰ 3, καὶ οὕτω προκύπτουσι Παράδ. $18\frac{2}{3}$.

Πρόβλημα. Πόσους Παράδας δίδουσιν $\frac{9}{16}$ Γροσίου;

Ἀνάλυσις.

$$\frac{9}{2 \cdot 16} \times \frac{40 \cdot 5}{9}$$

2 . τὰ 45

Ποιοῦσι Παράδ. $22\frac{1}{2}$.

Ἑρμηνεία. $\frac{9}{16}$ δηλοῖ, τὰ 9 Γρόσια νὰ διαιρεθῶσι διὰ τῶν 16 (ὡς §. 175.), εἴτουν, 9 κὶς 40 Παράδ. διαιρεθήτωσαν διὰ τῶν 16, διαιρουμένους ὅμως ὅ,τε Διαιρέτης 16 καὶ ὁ Πολλαπλασιαςέος 40 διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν Διαιρέτου 8, πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, μένουσιν 9 κὶς 5, ἤτοι 45 ἵνα διαιρεθῶσι διὰ τῶν 2.

Καὶ ἕτερον. Πόσα Φορίνια, κραϊτζάρια καὶ φένιγ ποιοῦσι $\frac{5}{8}$ ἑνὸς καισσαροβασιλικοῦ Φλωρίου;

$\frac{5}{8} \times 4$,, 30 (ἡ τιμὴ τοῦ φλωρίου.)

: 5

Φιορ'. : 22 ,, 30 κραϊτζ. Πηλίκον Φιορ'. 2 ,,48 κραϊτζ. 3 φένιγ.

: 6

: 60

: .390 κραϊτζ.

: -70

: -6

: 4

: .24 φένιγ

ΚΕΦ. Γ'.

Περὶ Ἐπαναγωγῆς τῶν Κλασμάτων.

§. 269.

Ἡ Ἐπαναγωγὴ μεταφέρει τὰς Μονάδας τῶν μικροτέρων Εἰδῶν εἰς Ἓν τῶν πλησίον αὐτῶν μεγαλητέρων (ὡς §. 132. καὶ ἐφεξῆς). Φὲρ' εἰπεῖν, 15 Παράδ. νὰ ἐπαναχθῶσιν εἰς

Κλάσμα Γροσίου· ἐνταῦθα διαιροῦμεν τοὺς 15 Παρὰδ. διὰ τῶν 40 (διότι 40 Παρὰδ. ποιοῦσιν 1 Γρόσι), καὶ προκύπτουσι $\frac{15}{40}$ (ὡς §. 175.), τὸ ὁποῖον Κλάσμα διὰ τοῦ κοινοῦ Διαιρέτου 5 ἐλαττωθὲν, προκύπτουσι $\frac{3}{8}$ Γροσίου, ἄρα 15 Παρὰδ. ποιοῦσι $\frac{3}{8}$ Γροσίου. Ταύτην τὴν πρᾶξιν πληροφορούμεθα σαφέςερον ἀφ' οὗ ςοχασθῶμεν, ὅτι 1 Παρὰς εἶναι τὸ 40 ςὸν μέρος ἑνὸς Γροσίου, ἄρα ὅσοι Παράδες δοθῶσι, τόσα 40 ςὰ Γροσίου πρόκεινται. Ὅθεν 2 Παρὰδ. ποιοῦσι $\frac{2}{40}$ Γροσίου, 4 Παράδες $\frac{4}{40}$ Γροσίου, 12 Παράδες $\frac{12}{40}$ Γροσίου καὶ ἐφεξῆς. Ὁμοίως εἶναι καὶ 1 δράμι τὸ 400ςὸν μέρος τῆς Ὀκάδος; ὅθεν τοσαῦτα πρόκεινται 400ςὰ, ὅσα δράμια δοθῶσι, διὰ 5, 8, 10 δράμια, ποιοῦσι $\frac{5}{400}$, $\frac{8}{400}$, $\frac{10}{400}$ Ὀκάδος κ.τ.λ.

Πρόβλημα. Ποῖον Κλάσμα Φιορινίου δίδουσι Κραΐτζάρια $12\frac{1}{2}$;

Λύσις.

$$\frac{12\frac{1}{2} \mid 25 . \ 5}{12 . 60 \mid \ . \ 12} . \text{ Φιορ.}$$

Ἑρμηνεία. Τὰ κραΐτζ. $12\frac{1}{2}$ διαιρούμενα διὰ τῶν 60, δίδουσι Κλάσμα $\frac{12\frac{1}{2}}{60}$, εἶτα πολλαπλασιαζόμενος ὁ Ἀριθμητὴς $12\frac{1}{2}$ μὲ 2, προκύπτουσιν 25, τὰ ὁποῖα, καθὼς καὶ ὁ Παρονομαςὴς 60, διαιροῦνται διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν Διαιρέτου 5, καὶ μένουσιν ἀντὶ 25, μόνον 5, καὶ ἀντὶ 60, μόνον 12, ἅτινα πολλαπλασιαζόμενα μὲ 2, ἀποδίδουσι τὸ Ζητούμενον $\frac{5}{12}$, ὡς ἀνωτέρω.

Καὶ ἕτερον. Ποῖον Κλάσμα Γροσίου δίδουσι Παρὰδ. $16\frac{2}{3}$;

Λύσις.

$$\frac{16\frac{2}{3} \mid 50 . \ 5}{4 . 40 \mid \ 12} . \text{ Γροσίου.}$$

§. 270.

Δοθέντων περισσοτέρων Μονάδων μακροτέρων Εἰδῶν, ἵνα ἐπαναχθῶσιν εἰς τὸ μέγιςον αὐτῶν Εἶδος, φὲρ εἰπεῖν, Παράδες καὶ ἄσπρα, λίτραις καὶ δράμια κ. τ. λ., μεταφέρομεν πρῶτον, καθὼς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς, τὰ μικρότερα Εἴδη εἰς τὰ πλησίον αὐτῶν μεγαλήτερα, ἄχρις οὗ βαθμηδὸν νὰ φθάσωμεν εἰς ἐκεῖνο τὸ Εἶδος, εἰς τὸ ὁποῖον ζητοῦμεν νὰ προκύψῃ τὸ Κλάσμα Π. χ. πρόκειται ἵνα ἐπαναχθῶσι παράδ. 6 καὶ ἄσπρα 2 εἰς Κλάσμα Γροσίου, ὅπου πρῶτον μεταφέρονται τὰ ἄσπρα εἰς παράδες, εἶτα οἱ παράδες εἰς Γρόσια. Ἐνταῦθα ποιοῦσι 2 ἄσπρα $\frac{2}{3}$ τοῦ παρὰ, ὅθεν ἀντὶ παράδ. 6 καὶ ἄσπρα 2, προκύπτουσι Παράδ. $6\frac{2}{3}$, οἵτινες ἐπαναγόμενοι εἰς Κλάσμα Γροσίου, δίδουσιν $\frac{6\frac{2}{3}}{40}$, ἤτοι $\frac{20}{120}$, ὅπερ διὰ τῶν 20 ἐλαττωθὲν, ςαίνει $\frac{1}{6}$ Γροσίου.

Πρόβλημα. Ποῖον μέρος τοῦ Χρόνου δίδουσι $5\frac{2}{5}$ Μῆνες;

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ Χρόνος σύγκειται ἐκ 12 Μηνῶν, διὰ τοῦτο διαιροῦνται οἱ Μῆνες διὰ τῶν 12, καὶ ἐπανάγονται εἰς Κλάσμα Χρόνου, ὅθεν $5\frac{2}{5}$ Μῆνες διαιρούμενοι διὰ τῶν 12, προκύπτουσι

$$\frac{5\frac{2}{5} \mid \cancel{27}}{4 \cdot \cancel{12} \mid} \cdot \frac{9}{20} \cdot \text{Χρόνου.}$$

Καὶ ἕτερον. Ποῖον Κλάσμα Κανταρίου δίδουσι Ὀκδ. 36, λίτραις 2, καὶ δρ. $66\frac{2}{3}$;

Λύσις.

$$\frac{66\frac{2}{3} \mid 200 \mid 2}{100 \mid 300 \mid 3} \text{ λίτρας}$$

$$\frac{2\frac{2}{3} \mid 8 \mid 2}{4 \mid 12 \mid 3} \text{ ὀκάδος}$$

$$\frac{36\frac{2}{3} \mid \overset{22}{\smile}\, 110 \mid 5}{44 \mid 132 \mid 6} \text{ Κανταρίου.}$$

Ἑρμηνεία. Πρῶτον μεταφέρομεν τὰ $66\frac{2}{3}$ δράμια διὰ τῶν 100 εἰς Κλάσμα Λίτρας, καὶ δίδουσιν $\frac{66\frac{2}{3}}{100}$, εἶτα πολλαπλασιάζομεν τοῦτε Ἀριθμητὴν καὶ Παρονομαστὴν μὲ 3, καὶ προκύπτουσι $\frac{200}{300}$, ἅτινα διὰ τῶν 100 ἐλαττωθέντα, ποιοῦσι $\frac{2}{3}$ λίτρας, εἴτουν, ἀντὶ λίτραις 2 καὶ δρ. $66\frac{2}{3}$, προκύπτουσι $2\frac{2}{3}$ λίτραις, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Περὶ Δοκιμῆς τῆς Ἀναλύσεως καὶ Ἐπαναγωγῆς τῶν Κλασμάτων.

§. 271.

Καθὼς ὁ Πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ Διαίρεσις τῶν Κλασμάτων χρησιμεύουσιν ἀλλήλοις πρὸς Δοκιμὴν, οὕτω καὶ ἡ Ἀνάλυσις καὶ Ἐπαναγωγὴ· ὅθεν πρὸς ἄσκησιν, ἰδοὺ τὸ τελευταῖον Ὑπόδειγμα τῆς Ἀναλύσεως.

Ποῖον Κλάσμα τοῦ καισσαροβασιλικοῦ Φλωρίου δίδουσι Φιορ. 2 ,, 48 κραιτζ. καὶ 3 φενιγ;

Πρῶτον. $\frac{48\frac{3}{4}}{60} \,\Big|\, \frac{195}{240} \,\Big|^{5}\, \frac{39}{48}$ Φιορινίου.

Δεύτερον. $\frac{2\frac{39}{48}}{4\frac{1}{2}}$, ἤτοι $4\frac{1}{2}$ τὰ $2\frac{39}{48}$

$$\begin{array}{rr} 9 & 135 \\ \hline 2 & 48 \\ \hline 432. & \text{τὰ } 270. \end{array} \quad \text{δίδουσι } \frac{270}{432} \,\Big|^{54}\, \frac{5}{8} \text{ Φλωρίου.}$$

Καὶ ἄλλως. Τὰ Φιορ. 2 ,, 48 κρ. 3 φ. ποιοῦσι κραιτζ. $168\frac{3}{4}$, καὶ ἓν Φλωρίον 270 κραιτζ., ὅθεν δίδουσιν

135

$$\frac{168\frac{3}{4} \mid 675 \mid 5}{270 \mid 1080 \mid 8}$$ Φλωρίου.

Καὶ ἕτερον. Πόσους Μῆνας, Ἡμέρας, Ὥρας καὶ Λεπτὰ φέρουσι $\frac{3}{7}$ Χρόνου;

Διὰ τῆς Ἀναλύσεως.

$$\frac{3 \mid 12 .\ 36.}{7 \mid \quad \frac{1}{7}}$$ 5. Μῆνας.

$$\frac{1 \mid 30.}{7 \mid \frac{2}{7}}$$ 4. Ἡμέρας.

$$\frac{2 \mid 24 .\ 48.}{7 \mid \quad \frac{6}{7}}$$ 6. Ὥρας

$$\frac{6 \mid 60 .\ 360}{7 \mid}$$ $51\frac{3}{7}$. Λεπτά.

Δοκιμή. Ποῖον Κλάσμα Χρόνου δίδουσι 5 Μῆνες, 4 Ἡμέραις, 6 Ὥραις, καὶ $51\frac{3}{7}$ Λεπτά;

Διὰ τῆς Ἐπαναγωγῆς.

$$\frac{51\frac{3}{7} \mid 360 .\ 6}{1 .60 \mid \quad 7}$$ Ὥρας

$$\frac{6\frac{6}{7} \mid 48 .\ 2}{1 .24 \mid \quad 7}$$ Ἡμέρας

$$\frac{4\frac{2}{7} \mid 30 .\ 1}{1 .30 \mid \quad 7}$$ Μηνός.

$$\frac{5\frac{1}{7} \mid 36 .\ 3}{1 .12 \mid \quad 7}$$ Χρόνου.

§. 272.

Σχόλιον. Τὸ ἀπέναντι Ὑπόδειγμα δεικνύει ἐξαιρέτως τὴν ὠφέλειαν, τὴν ὁποίαν προξενεῖ ἡ Ἐπαναγωγὴ τῶν Κλασμάτων· διότι τοῦ νὰ πολλαπλασιάσῃ, ἢ νὰ διαιρέσῃ τις μὲ $\frac{3}{7}$ εἶναι ἀσυγκρίτως εὐκολώτερον καὶ συντομώτερον, παρὰ μὲ 5 μῆνας, 4 ἡμέρας, 6 ὥρας, καὶ $51\frac{3}{7}$ λεπτὰ, καθὼς φέρ' εἰπεῖν, νὰ λογαριάσωμεν πόσον τόκον φέρουσι Γρόσια 1000,,- εἰς 5 μῆνας, 4 ἡμέρας, 6 ὥρας, καὶ $51\frac{3}{7}$ λεπτὰ πρὸς 6 τὰ 100 τὸν χρόνον. Αὕτη ἡ πρᾶξις χωρὶς τῆς Ἐπαναγωγῆς γενήσεται πολὺ διεξοδικὴ, ἐὰν δ' ἐπαναχθῶσιν οἱ 5 μῆνες, 4 ἡμέραις, 6 ὥραις, καὶ $51\frac{3}{7}$ λεπτὰ εἰς $\frac{3}{7}$ χρόνου, τότε ἐπιτελεῖται ἡ ἐργασία ἀσυγκρίτως ταχύτερον.

Τέλος τοῦ πρώτου Τόμου.