ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ
ΑΛΓΕΒΡΗΣ

Ἐκδοθέντα

ὑπὸ

ΣΤΕΦΑΝΟΥ

Ἱεροδιακόνου τοῦ Θετταλοῦ.

ΤΟΜΟΣ Γ'. καὶ Δ'.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ ΤΗΣ ΑΟΥΣΤΡΙΑΣ

Ἐκ τῆς Τυπογραφίας τοῦ Ἰωάν. Βαρθ. Τζβεκίου.

1816.

Κ.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

Περὶ Λόγου καὶ τῶν ποικίλων αὐτοῦ σχέσεων.

§. 453. Λόγον ἐνταῦθα καλοῦμεν, ὅταν ἀριθμοὺς αὐτοὺς καθ' ἑαυτοὺς παραβάλλωμεν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀναφορὰν, ἣν πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι· δηλ: ὅτι λογιζόμεθα τὸν α ἀριθμὸν πρὸς τὸν β διαφόρως, κατὰ τὸ μεῖζον καὶ ἔλαττον, ἐὰν μείζων ἐκεῖνος τούτου, ἢ ἐλάττων, καὶ ἀνάπαλιν οὗτος πρὸς ἐκεῖνον παραβαλλόμενος· πολλαπλάσιος, ἢ ὑποπολλαπλάσιος ἕτερος ἑτέρου, ἢ ὁποία δύναμις ἑτέρου πρὸς ἕτερον, καὶ ὁποία ῥίζα κτ. καὶ νὰ εἴπωμεν σαφέστερον: Λόγος εἶναι ἡ σκέψις ἡ μεταξὺ δύο ἀριθμῶν γινομένη, ἐν οἷς γινώσκεται σχέσις τις, ἣν πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν· ἡ ὑπεροχὴ φέρε 3 τοῦ 7 πρὸς τὸν 4, ἢ ἀνάπαλιν ἡ διαφορὰ τοῦ $7-4=3$, ἀλλὰ καὶ τὸ τριπλάσιον τοῦ 5 πρὸς τὸν 5 εἶναι ὁ λόγος, ὃν ἔχει ὁ 15 πρὸς τὸν 5· πλὴν τοιαύτας παραβολὰς, καὶ ἀναφορὰς διηνεκῶς εἴχομεν καὶ εἰς τὸ Α' βιβλίον· ὡς ὅτε ἐλέγομεν, ἡ διαφορὰ τοῦ 10 πρὸς τὸν 5 εἶναι 5· καὶ ὁ 20 τετραπλοῦς τοῦ 5 κτ. πρὸς τί ταῦτα ἐλέγοντο, ἢ ὅτι ἐκεῖ μὲν ἀριθμοὺς αὐτοὺς καθ' ἑαυτοὺς παραβάλλοντες, εὑρίσκομεν αὐτοὺς τοὺς λόγους, ἢ τὰς ἀναφορὰς εἰς συμπέρασμα· καὶ ἐκ τῶν μερῶν τὸ κεφάλαιον εἰς τὴν σύναψιν, καὶ ἐκ τοῦ ὅλου καὶ τοῦ μέρους τὴν διαφορὰν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, οὕτω καὶ τὸ παραγόμενον ἐκ τῶν παραγόντων, καὶ τὸ πηλίκον κτ. ἐνταῦθα δὲ αὐτοὺς τοὺς λόγους, ἢ τὰς ἀναφορὰς, καὶ ἤδη εὑρημένας διαφόρως παραβάλλομεν, ἵν' ἕτερόν τι ἀνώτερον, ἢ ἐκεῖ, παραγάγωμεν. Καὶ οὕτως εἰς τὸ παρὸν βιβλίον ἡ σκέψις μεταβαίνει εἰς βαθμὸν ἀνώτερον, καὶ συνθετώτερον. Διὸ καὶ ὅσα ἐκεῖ εἴπομεν, ἐνταῦθα ὡς ὁμολογούμενα λαμβάνονται· διότι ἐκείνων χωρὶς, οὐδεὶς τολμήσει νὰ προχωρήσῃ εἰς τὸ παρὸν, ἐπειδὴ καὶ τὰ αὐτὰ ἐκεῖνα ἐνταῦθα διαφόρως ὑπολογιζόμεθα.

§. 454. Οἱ λόγοι οὗτοι διχῶς θεωροῦνται, δῆλ: πρὸς ἀλλήλους παραβάλλονται, ἵνα μάθωμεν ἂν ἕτερος ἑτέρῳ ὑπάρχῃ ἴσος, ἢ ἄνισος, πολλαπλοῦς, ἢ ὑποπολλαπλοῦς κτ. ἢ δεύτερον θεωροῦνται διὰ νὰ μάθωμέν τινα τάξιν καὶ ἀκολουθίαν, ἣν πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν· ὅθεν καὶ τὸ παρὸν βιβλίον εἰς δύο τμήματα διαιρεῖται, εἰς τὴν τῶν λόγων παραβολὴν, καὶ εἰς τὴν τῶν λόγων ἀκολουθίαν καὶ συναρμογήν.

ΤΜΗΜΑ Α'.

Περὶ τῆς τῶν Λόγων παραβολῆς.

§. 455. Ἐπειδὴ τὸ παρὸν τμῆμα καταγίνεται οὐ μόνον νὰ παραβάλλῃ τοὺς λόγους πρὸς ἀλλήλους, πρὸς γνῶσιν τῆς ἧς ἀναφορᾶς πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν, ἀλλὰ καὶ τοῦ καρποῦ, ὁποῦ ἀπ' αὐτῶν ἀπολαμβάνομεν· εἰς δύο διαιρεῖται καὶ τοῦτο τὸ τμῆμα μέρη ἰδιαίτερα, εἰς τὴν ἰδιαιτεραν τῶν λόγων παραβολὴν, ἣν Ἀναλογίαν καλοῦσι, καὶ εἰς τὰς καλουμένας Μεθόδους· πλὴν πρῶτον τὸν Λόγον αὐτὸν ἐξετάσωμεν.

Περὶ Λόγου ἁπλῶς.

§. 456. Ἔςιν ὁ λόγος ἐνταῦθα ἡ ἀναφορὰ, ἣν ἔχουσι δύο ὁμογενεῖς ποσότητες οἱαιδηποτοῦν, ὅταν παραβάλλωνται κατὰ τὸ μεῖζον καὶ ἔλαττον, ἢ κατὰ τὸ πολλαπλοῦν καὶ ὑποπολλαπλοῦν, μηδόλως προσλαμβανομένου τρίτου ὁμογενοῦς. Καὶ ἡ μὲν παραβολὴ ἡ κατὰ τὸ μεῖζον καὶ ἔλαττον γίνεται πάντως διὰ τῶν δύο ἐκείνων ἐργασιῶν, τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, ὡς ὅτε παραβάλλομεν τὸν 10 πρὸς τὸν 7 λέγομεν, μείζων ὁ 10 τοῦ 7, καθότι ἔχει τὸν 7 ὅλον καὶ ἔτι τὸν 3, ἤτοι $7+3$. καὶ ἔτι ὁ 7 ἐλάττων τοῦ 10, καθότι ἐλλείπει τοῦ 10 πρὸς τὸν 7 ὁ 3. καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ 7 πρὸς τὸν 10 ὁ 3. Αὐτὴν τὴν παραβολὴν, ἤτοι τὸν λόγον, ὃν ἡμεῖς διὰ τῆς προσθέσεως, καὶ ἀφαιρέσεως μανθάνομεν, Ἀριθμητικὸν καλοῦσιν οἱ Μαθηματικοί· καὶ ἀριθμητικὸς λόγος δὲν εἶναι ἄλλος, εἰμὴ ὅταν παραβάλλωμεν δύο ποσὰ, νὰ μάθωμεν πόσον ἕτερον ἑτέρου ἐλλείπει, ἢ ὑπερέχει· ἡ δὲ παραβολὴ δύο ἀριθμῶν κατὰ τὸ πολλαπλάσιον, καὶ ὑποπολλαπλάσιον γίνεται πάντως διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ διαιρέσεως, ὡς ὅτε εὑρίσκομεν τὸν 8 πρὸς τὸν 4 διπλάσιον, διότι $2.\ 4=8$. καὶ τὸν 4 πρὸς τὸν 8 ὑποδιπλάσιον, διότι $\frac{8}{2}=4$. πλὴν ἐνταῦθα ὁ λόγος τοῦ 8 πρὸς τὸν 4 εἶναι ὁ 2. διότι ὁ 2 πολλαπλασιάζων τὸν ἕνα ἀποτελεῖ τὸν ἕτερον, ἢ διαιρῶν τοῦτον, ἀποτελεῖ ἐκεῖνον. Τοῦτο τὸ εἶδος Λόγου καλοῦσιν οἱ Μαθηματικοὶ Γεωμετρικόν· καὶ δὲν εἶναι ἄλλο ὁ λόγος ὁ γεωμετρικὸς, εἰμὴ ὅταν παραβάλλωμεν πασάκις ὁ ἕτερος εἰς τὸν ἕτερον περιέχεται. Καὶ ἐπειδὴ ὁ μὲν ἀριθμητικὸς λόγος εἰς τὰς ἐργασίας τὰς ἐξωτερικὰς εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν ἀφορᾷ, δυνάμεθα ἡμεῖς αὐτὸν καὶ Λόγον ἐξωτερικὸν καλεῖν· ὁ δὲ γεωμετρικὸς εἰς τὰς ἐργασίας τὰς ἐσωτερικὰς, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν, δυνάμεθα καὶ αὐτὸν Λόγον ἐσωτερικὸν εἰπεῖν.

§. 457. Ἐκ τῶν εἰρημένων μανθάνομεν, ὅτι ὁ λόγος κἄν τε ἀριθμητικὸς ᾖ, κἄν τε γεωμετρικὸς προαπαιτεῖ τὴν παραβολήν· ἡ δὲ γίνεται ἀεὶ εἰς δύο τοὐλάχιστον (§. 32). ἄρα λόγος ἄνευ δύο ποσοτήτων ἀσύστατος, ὡς ἀνωτέρω: ὁ 10 πρὸς τὸν 7, καὶ ὁ 8 πρὸς τὸν 4. καὶ μανθάνομεν δεύτερον, ὅτι Λόγος ἐν γένει εἶναι εἰς τὸ παρὸν ἡ παραβολὴ δύο ἀριθμῶν, οὗτοι δὲ Πέρατα, καὶ Ὅροι τοῦ λόγου λέγονται. Ὁ δ' ἀριθμὸς ἐκεῖνος, ὅστις ἢ προστιθέμενος, ἢ ἀφαιρούμενος, ἢ πολλαπλασιάζων, ἢ διαιρῶν τὸν ἕνα ἀριθμὸν τῆς παραβολῆς ἀποτελεῖ τὸν ἕτερον· εἰς μὲν τὸν ἀριθμητικὸν λόγον, καλεῖται Ὄνομα τοῦ λόγου, καὶ διαφορά· εἰς δὲ τὸν γεωμετρικὸν, Ἐκθέτης τοῦ λόγου, ἢ παρακμῶν, ἢ ἑρμηνεύς.

§. 458. Ἐπειδὴ ὁ λόγος, ὅ, τε ἀριθμητικὸς καὶ γεωμετρικὸς γίνεται ἀεὶ εἰς δύο ποσότητας, οἱασδήποτε μερικὰς καὶ καθόλου· αἱ δύο ποσότητες αὗται γράφονται, ἐὰν ὁ λόγος ἀριθμητικὸς $a \div b$ ἢ $11 \div 8$· ἐὰν δὲ ὁ λόγος γεωμετρικὸς $a : b$ ἢ $8 : 4$· ἐκφράζεται δὲ ἐκεῖνος ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸ β, ἢ ὁ λόγος τοῦ 11 πρὸς τὸν 8, ἢ καὶ οὕτω τὸ α ἔχει λόγον πρὸς τὸ β, ἢ ὁ 11 ἔχει λόγον πρὸς τὸν 8, ἢ ὁ 8 ἔχει λόγον πρὸς τὸν 4· συντομώτερον δὲ ἐκφράζουσι ταῦτα α πρὸς τὸ 6· ἢ 8 πρὸς 4. καλοῦνται δὲ αἱ δύο ποσότητες αὗται τοῦ λόγου πρὸς τῷ γενικῷ ὀνόματι Ὅροι τοῦ λόγου, καὶ ἰδιαιτέρως ὁ μὲν πρῶτος ὅρος, Ὅρος ἡγούμενος, ὁ δὲ Ὅρος ἑπόμενος, οὕτως εἰς τὸν λόγου 10 πρὸς 8, ὁ μὲν 10 ὅρος ἡγούμενος, ὁ δὲ 8 ὅρος ἑπόμενος. Εὑρίσκομεν δὲ καὶ τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου, ἐὰν ἀφέλωμεν τὸν ἑπόμενον ὅρον ἀπὸ τοῦ ἡγουμένου $11-8=3$· τὸ δὲ πηλίκον τοῦ γεωμετρικοῦ λόγου, ἤτοι τὸν ἐκθέτην, ἐὰν διὰ τοῦ ἑπομένου διέλωμεν τὸν ἡγούμενον ἤτοι $36:6=6$· τὸ δὲ ὄνομα τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου καλεῖται κυρίως Διαφορὰ, καὶ γράφεται καὶ ἐπὶ τὸ πλεῖστον $11-8$.

§. 459. Ἐὰν ἡ ὁ δεύτερος ὅρος, ἤτοι ὁ ἑπόμενος ἑνὸς λόγου μείζων, ἢ ὁ πρῶτος, ἤτοι ὁ ἡγούμενος, καλεῖται ὁ λόγος αὐξανόμενος, ὡς $3\div7$· καὶ $2\div5$· $3:9$· ἐὰν δὲ ὁ ἡγούμενος ὅρος μείζων, καλεῖται μειούμενος, ὡς $7\div3$. $5\div2$: $9:3$· καὶ εἰς μὲν τὸν αὐξανόμενον λόγον ἡ διαφορὰ εὑρίσκεται, ἐὰν τὸν ἡγούμενον ὅρον ἀπὸ τοῦ ἑπομένου ἀφέλωμεν· τὸ δὲ πηλίκον, ἐὰν τὸν δεύτερον ὅρον διὰ τοῦ πρώτου διέλωμεν· εἰς δὲ τὸν μειούμενον λόγον εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν ἀνάπαλιν, ἐὰν τὸν ἑπόμενον ὅρον ἀπὸ τοῦ πρώτου ἀφέλωμεν· καὶ τὸ πηλίκον, ἐὰν τὸν ἡγούμενον διὰ τοῦ ἑπομένου διέλωμεν· πλὴν συγχωρεῖται ἀεὶ διὰ τοῦ πρώτου ὅρου νὰ διαιρεθῇ ὁ δεύτερος εἰς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου, καὶ νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ πρῶτος ἀπὸ τοῦ δευτέρου εἰς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς, ὡς $36\div42$· $51\div44$· $20\div12$ ἡ διαφορὰ $-6, -7, -8$, καὶ ἔτι $12:36$ καὶ $14:21$, $18:8$· τὸ πηλίκον $3, \frac{3}{2}, \frac{4}{9}$ κτ.

§. 460. Καὶ εἰς τοὺς λόγους αὐτοὺς θεωρεῖται τὸ ἴσον καὶ ἄνισον. Ἴσοι λόγοι λέγονται ἐκεῖνοι, ὅσοι ἔχουσιν ἴσην διαφορὰν, ἐὰν ὦσιν ἀριθμητικοί· καὶ τὸ αὐτὸ πηλίκον, ἐὰν ὦσι γεωμετρικοί. Οὕτως οἱ ἀριθμητικοὶ οὗτοι λόγοι $8 \div 3$ καὶ $15 \div 10$· καὶ $30 \div 25$· ἴσοι, ὅτι ἡ διαφορὰ εἰς ὅλους $=5$· οὗτοι δὲ $18 \div 12$· καὶ $3 \div 2$ ἄνισοι· διότι τοῦ μὲν ἡ διαφορὰ 6, τοῦ δὲ 1· Ἴσοι δὲ καὶ οἱ γεωμετρικοὶ λόγοι οὗτοι $5:1$ καὶ $15:3$· $60:12$· διότι τὸ πηλίκον ὅλων τούτων $=5$· ἄνισοι δὲ οἱ $3:5$ καὶ $4:6$ διότι τὸ πηλίκον ἐκείνου $\frac{3}{5}$, τούτου δὲ $\frac{2}{3}$· καὶ ἐκ τούτων φανερὸν, ὅτι ἐὰν καὶ οἱ ὅροι τοῦ λόγου διαφέρωσι, δύνανται μέντοι οἱ λόγοι ἴσοι εἶναι, καὶ ἔτι ὁ λόγος δὲν εἶναι μήτε ὁ ἡγούμενος μήτε ὁ ἑπόμενος ὅρος, μήτε οἱ δύο ὁμοῦ, ἀλλ' ἡ μεταξὺ τούτων παραβολὴ (§. 457), ἧς ἡ παράστασις τῆς διαφορᾶς εἰς τὸν ἀριθμητικὸν, καὶ τοῦ πηλίκου εἰς τὸν γεωμετρικόν. Καὶ περιττὸν ἂν εἴη νὰ εἴπωμεν, ὅτι δύο λόγοι, ὅταν εἶναι μὲ ἕνα ἕτερον λόγον ἴσοι, καὶ ἀλλήλοις ἴσοι ἔσονται. Μείζων δὲ ὁ λόγος λέγεται, ὅςις ἔχει μείζονα τὴν διαφορὰν, ἢ τὸ πηλίκον, ἀνάπαλιν δὲ Ἐλάττων ὁ λόγος λέγεται.

§. 461. Ὁ Ἀριθμητικὸς λόγος ἐκφράζεται ἀεὶ διὰ δύο ὅρων, ὧν ὁ δεύτερος συνίςαται ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τῆς διαφορᾶς, οὕτω $a \div (a+\delta)$· ἐὰν a τὸν πρῶτον ὅρον καλέσωμεν, καὶ δ τὴν διαφοράν. Ὁμοίως καὶ εἰς ἀριθμοὺς $3 \div (3+5)$· ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς λόγους δύναται εἶναι καταφατικὴ καὶ ἀποφατική· ταύτην δ' εὑρίσκομεν, ἐὰν τὸν ἡγούμενον ὅρον ἀπὸ τοῦ ἑπομένου ἀφέλωμεν (§. 459.)· ἄρα ὁ μὲν ἡγούμενος ἀφαιρετέος, ὁ δ' ἑπόμενος μειωτέος (§. 53.)· ἀλλ' ὁ μειωτέος συνίςαται ἐκ τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς. Ὅθεν ὁ δεύτερος ὅρος ἐκφράζεται ἀεὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ τῆς διαφορᾶς, οὕτω α $\div(α+δ)$· καὶ φανερὸν ἐντεῦθεν, ὅτι ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος γνωσθῇ δηλ: 5 καὶ ἡ διαφορὰ 8 ὁ λόγος ἀπαρτίζεται, $5\div(5+8)$· ἐὰν δὲ ὁ πρῶτος 12 καὶ ἡ διαφορὰ —3, ἔςαι ὁ λόγος $12\div(12-3)$.

§. 462. Ἐκφράζεται καὶ ὁ γεωμετρικὸς λόγος, ἐὰν ὁ α' ὅρος α κληθῇ, καὶ τὸ πηλίκον π οὕτω, α: απ. διότι τὸ πηλίκον εὑρίσκεται, ἐὰν διὰ τοῦ πρώτου τὸν δεύτερον ὅρον διέλωμεν (§. 459). ἄρα ὁ δεύτερος διαιρετέος, καὶ αὐτὸς συνίςαται ἐκ τοῦ πηλίκου, καὶ τοῦ διαιρέτου. Λοιπὸν ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος γνωσθῇ καὶ τὸ πηλίκον, εὑρίσκομεν καὶ τὸν δεύτερον ὅρον, α: απ. ἢ ἐὰν ὁ πρῶτος 5 καὶ τὸ πηλίκον 6, ἔςαι ὁ λόγος 5: 5. 6. ἐὰν δὲ ἐκεῖνος 6 καὶ τὸ πηλίκον $\frac{1}{3}$, ἔςαι ὁ λόγος 6: $6.\frac{1}{3}$ ἤτοι 6: 2.

§. 463. Ἐπειδὴ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν δέδεικται, ὅτι ἡ διαφορὰ ἐξέρχεται ἡ αὐτή, ἐὰν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἀφέλωμεν ἀπό τε τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ μειωτέου, ἢ ἐὰν τὸν αὐτὸν καὶ εἰς τὸν μειωτέον, καὶ ἀφαιρετέον προσθῶμεν (§. 58). ἄρα ὁ λόγος ὁ ἀριθμητικὸς δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν προσθῶμεν, ἢ ἀφέλωμεν ἀπό τε τοῦ ἡγουμένου ὅρου, ἅμα καὶ τοῦ ἑπομένου. Ἔςω ὁ λόγος $12\div20$. οὗ ἡ διαφορὰ 8. ἄρα καὶ τοῦ $12+8\div20+8$ ἡ διαφορὰ 8. καὶ τοῦ $12-8\div20-8$ ἡ διαφορὰ 8. καὶ γενικῶς $α\div(α+δ)$. ὁ αὐτὸς καὶ $α+β\div(α+δ+β)$ καὶ $α-β\div(α+δ-β)$

§. 464. Καὶ ὁ γεωμετρικὸς λόγος μένει ἀμετάβλητος, ἐὰν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιάσωμεν τόν τε ὅρον τὸν ἡγούμενον, καὶ ἑπόμενον, ὁμοίως μένει ἀμετάβλητος, ἐὰν διέλωμεν ἄμφω τοὺς ὅρους τοῦ λόγου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ἔςι γὰρ ὁ λόγος 50: 5. ὁ αὐτὸς τῷ 100: 10, καὶ $\frac{50}{5}:\frac{5}{5}$, ἤτοι 10: 1 ἐπειδὴ καὶ ὁ λόγος ἐκφράζεται καὶ κλασματικῶς $\frac{50}{5}$ ὡς 50: 5. ἀλλαμὴν τὸ κλάσμα μένει ἀμετάβλητον, ἐὰν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἄνω καὶ κάτω εἴτε διέλωμεν, εἴτε πολλαπλασιάσωμεν, ἄρα καὶ ὁ λόγος μένει ἀμετάβλητος· ὅθεν $α: απ = αγ: απγ$. καὶ $\frac{α}{ν}:\frac{απ}{ν}$· ἐξ ὧν ἕπεται.

α'. Ἐπειδὴ ὁ γεωμετρικὸς λόγος καὶ κλάσμα παρίςαται, ἔχει καὶ ὁ λόγος ὅλα τὰ τῶν κλασμάτων ἰδιώματα.

β'. Φέρομεν ἕκαςον λόγον εἰς ὅρους ἐλαχίςους, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρῶνται, ὡς περὶ τοῦ μεγίςου κοινοῦ μέτρου ἐδιδάχθημεν. οὕτω 64: 8=8: 1 καὶ 15: 25=3: 5.

γ'. Ἐὰν οἱ λόγοι ἔχωσι τοὺς ὅρους κλασματικούς, εὐκόλως εἰς ἀκεραίους μεταφέρονται, χωρὶς νὰ μετατραπῶσι διὰ νὰ εἶναι εὐκρινέςεροι ὡς $\frac{3}{5}: 6$ γίνεται ὁ αὐτὸς 3: 30 εἶτα 1: 10. διότι $\frac{3}{5}: 6=3: 30=1: 10$.

καὶ ἔτι $\frac{7}{9}: \frac{3}{7}=7.\ 7: 3.\ 9=49.\ 27$·

καὶ ἔτι $\frac{2α}{3}: \frac{2}{3β}=6αβ: 6=αβ: 1$ κτ.

§. 465. Καὶ ὁ λόγος, οὗ ἡ διαφορὰ ἢ τὸ πηλίκον παρίσαται ἐπ' ἀκριβὲς λέγεται Ῥητὸς, ἢ Λογικὸς, ὡς $5 : 2$ καὶ $7 : 3\frac{1}{2}$. καὶ ἔτι $5 : 10$ καὶ $8 : 17\frac{1}{2}$ κτ. Ἄλογος δὲ ἢ Ἄρρητος λέγεται ἐκεῖνος, οὗ ἡ διαφορὰ ἢ ὁ ἐκθέτης ἐπ' ἀκριβὲς οὐ παρίσαται· ὡς $2 : \sqrt{5}$ καὶ $5 : \sqrt{3}$. ἢ $\sqrt{8} : 4$. ἢ ἄμφω $\sqrt{3} : \sqrt{5}$. ἀλλὰ τοῦτο $3 : 5$. $2 : \sqrt{5}$. ἢ $= \frac{2}{\sqrt{5}}$ ἢ $= \frac{10}{5} = 10 : 5$.

§. 466. Σύνθετος λόγος καλεῖται, ὅτε πολλῶν, ἢ δύο λόγων τὸ παραγόμενον ἐκ τῶν ἡγουμένων ὅρων αὐτῶν παραβάλλομεν πρὸς τὸ παραγόμενον ἐκ τῶν ἑπομένων ὅρων τῶν αὐτῶν. Ἔστωσαν, ἐπὶ παραδείγματος οἱ λόγοι $3 : 4$ καὶ $5 : 8$. ἄρα ὁ λόγος $3.\ 5 : 4.\ 8$. σύνθετος τῶν δύο ἐκείνων ἀκούει. Οὕτω καὶ ἐὰν ἐκ τριῶν ὅρων συντίθεται, ὡς $3 : 1$ καὶ $5 : 2$ καὶ $10 : 8$. τούτων ὁ σύνθετος $3.\ 5.\ 10 : 1.\ 2.\ 8$. ἤτοι $150 : 16$. καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ ἐκθέτης τοῦ συνθέτου λόγου συνίσταται ἀπὸ τῶν παραγόντων τῶν ἐκθέτων τῶν ἁπλῶν λόγων. ὡς $3 : 6$ καὶ $2 : 8$ καὶ $3 : 9$, ὧν οἱ ἐκθέται $2.\ 4.\ 3 = 24$, ἄρα ὁ σύνθετος $3.\ 2.\ 3 : 6.\ 8.\ 9, = 18 : 432$. οὗ ὁ ἐκθέτης $\frac{432}{18} = 24$. καὶ ἐν γένει

$$\begin{array}{l} a : a\pi \\ b : b\rho \\ \gamma : \gamma\sigma \\ \delta : \delta\tau \\ \hline \end{array}$$

$a b \gamma \delta : a\pi b\rho \gamma\sigma \delta\tau$ καὶ $\frac{a b \pi \gamma \delta \sigma \rho \tau}{a b \gamma \delta} = \pi\rho\sigma\tau$.

καὶ ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ἕκαςος λόγος, οὗ οἱ ὅροι εἰς παράγοντας λύονται, λαμβάνεται ὡς σύνθετος ἐκ τῶν λόγων ὧν οἱ παράγοντες ἀποτελοῦσιν, ὡς 36: 64. γίνεται 6. 6: 4. 16 ἄρα $36:64 = \begin{matrix}(6: & 16)\\ (6: & 4)\end{matrix}$ καὶ ἔτι 2. 3. 6: 4. 2. 8 ἄρα

$$36:\ 64 = \begin{matrix}(2 : 4)\\(3 : 2)\\(6 : 8)\end{matrix}$$

καὶ γενικῶς αϐγ : δεζ=

$$\begin{matrix}(\alpha : \delta) & (\beta : \delta) & (\gamma : \delta)\\ (\beta : \varepsilon) = & (\alpha : \zeta) = & (\alpha : \varepsilon)\\ (\gamma : \zeta) & (\gamma : \varepsilon) & (\beta : \zeta).\end{matrix}$$

Ὁ σύνθετος λόγος καὶ Πολλαπλασίων λέγεται· καὶ ἐὰν εἰδικῶς ἀπὸ δύο λόγων σύγκειται Διπλασίων· ἀπὸ τριῶν Τριπλασίων· καὶ ἀπὸ ν λόγων ν πλασίων.

§. 467. Ἐὰν δὲ οἱ ἁπλοῖ λόγοι ὦσιν ἴσοι, ἤτοι ἔχωσιν ἴσους ἐκθέτας, εἶναι ὁ ἐκθέτης τοῦ συνθέτου λόγου ἀεὶ μία δύναμις ἑνὸς ἐκθέτου τῶν ἁπλῶν· ὥςε ἐὰν οἱ λόγοι δύο, ὁ ἐκθέτης τοῦ συνθέτου τετράγωνον, ἐὰν τρεῖς ὁ ἐκθέτης κύϐος· καὶ ἐὰν οἱ λόγοι ν, ὁ ἐκθέτης τοῦ συνθέτου λόγου εἰς τὴν δύναμιν ν· ἐπὶ παραδείγματος.

$$\begin{array}{ccc} 2 : 4 & \quad & \alpha : \alpha\pi \\ 6 : 12 & & \beta : \beta\pi \\ 3 : 6 & & \gamma : \gamma\pi \\ 4 : 8 & & \delta : \delta\pi \\ \hline 144 : 2304. & & \alpha\beta\gamma\delta : \alpha\beta\gamma\delta\,\pi^4 = 1 : \pi^4 \end{array}$$

ὁ ἐκθέτης $=16=2^4$.

„Ὅθεν ὁ λόγος ὁ σύνθετος δηλ: ὁ 144: 2304 ἀπὸ πολλῶν λόγων ἴσων, εἶναι ἴσος ἑνὶ τῶν ἁπλῶν λόγων δηλ: ὡς ὁ 2: 4 ἄνω, ἐὰν ἑκάτερον ὅρον αὐτοῦ ὑψώσωμεν δηλ:

καὶ τοῦ 2 καὶ 4 εἰς δύναμιν ἐκθέτου τοιούτου, ὅπου νὰ ἔχῃ τόσας μονάδας, ὅσοι εἶναι οἱ ἁπλοῖ λόγοι· οὕτως ὁ ἄνω $144 : 2304 = 2^4 : 4^4 = 16 : 256$. οὗ ἐκθέτης $\frac{256}{16} = 16$. ὁμοίως καὶ $\frac{1024}{64} = 16$. ὁμοίως καὶ $\frac{6^4}{3^4}$ καὶ $\frac{8^4}{4^4}$· οὕτω καὶ εἰς τὰ γράμματα $\alpha\beta\gamma\delta$: $\alpha\beta\gamma\delta\pi^4 = \alpha^4 : \alpha^4\pi^4$ κτ.

„Ὅθεν καὶ καλοῦσι τὸν σύνθετον λόγον ἀπὸ 2, 3, 4 κτ. ὁμολόγως Λόγον τετραγωνικὸν, κυβικὸν, διτετράγωνον κτ. Καὶ περὶ μὲν Λόγων ἱκανά· πῶς ὅμως ἀπὸ λόγων ἡ ἀναλογία γίνεται τὸ ἑξῆς διδάξει ἡμᾶς.

ΜΕ'ΡΟΣ Α'.

Περὶ παραβολῆς Λόγων, ἤτοι Ἀναλογίας.

§. 468. Τί λόγος, καὶ ὅ,τι ἀριθμητικὸς καὶ γεωμετρικὸς (§. 456.) εἴπομεν· εἴπομεν ἔτι καὶ ὅτι οἱ λόγοι εἶναι ἴσοι, καὶ ἄνισοι, ὡς $3 \div$ καὶ $10 \div 13$ καὶ ἔτι $3 : 6$ καὶ $5 : 10$. λόγοι ἴσοι (§. 460). ὅσοι δηλ: ἔχουσι τὴν διαφορὰν, ἢ τὸ πηλίκον ἴσον. Ἐκφράζονται οἱ ἴσοι λόγοι κἂν τε ἀριθμητικοὶ καὶ γεωμετρικοὶ διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος· οἱ μὲν ἀριθμητικοὶ ἴσοι ὅροι οὕτω $3 \div 6 = 10 \div 13$. ἢ $20 \div 10 = 15 \div 5$. ὁ δὲ γεωμετρικὸς $5 : 20 = 4 : 16$ καὶ $12 : 4 = 36 : 12$. καὶ τὴν ἰσότητα δὲ δύο λόγων ἀριθμητικῶν, ἢ γεωμετρικῶν Ἀναλογίαν καλοῦσιν οἱ Μαθηματικοί· καὶ εἰ μὲν οἱ λόγοι ἀριθμητικοί, Ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν· εἴδε γεωμετρικοί, Ἀναλογίαν γεωμετρικὴν, ἢ Ἀναλογίαν ἁπλῶς. Ἐκφράζεται δὲ ἑκάςη ἀναλογία οὕτως, ὡς οἱ 5: 20=4: 16. ὃν λόγον ἔχει ὁ 5 πρὸς τὸν 20, τὸν αὐτὸν καὶ ὁ 4 πρὸς τὸν 16. ἢ ὁ 5 ἀναλογεῖ τῷ 20, ὡς ὁ 4 τῷ 16. ἢ συντομώτερον ὡς ὁ 5 πρὸς 20. οὕτως ὁ 4 πρὸς τὸν 16. τοῦ αὐτοῦ τοῦ τρόπου εἶναι καὶ αἱ ἀναλογίαι αἱ γενικαὶ α: β=γ: δ. ἤτοι α πρὸς β, ὡς γ πρὸς δ. καὶ ἔτι $(\alpha+\frac{\beta}{\gamma}):\delta=\frac{\varepsilon}{\beta}:(\zeta-\frac{\delta}{\varepsilon})$. καὶ φανερὸν ὅτι ἑκάςη ἀναλογία ἀπὸ δύο λόγων τοὐλάχιςον γίνεται, καὶ ἀπὸ ὅρων τεσσάρων· εἰς δὲ τὴν ἀναλογίαν οἱ 4 ὅροι λέγονται Ὅροι ἀναλογικοί. Καὶ ὁ μὲν πρῶτος ὅρος καὶ τέταρτος Ἄκρα τῆς ἀναλογίας καλοῦνται, ὁ δὲ τρίτος καὶ δεύτερος Μέσοι ὅροι τῆς ἀναλογίας, ὡς εἰς τὴν δε 5÷2=7÷4 ἄκρα αὐτῆς ὁ 5 καί, 4 μέσοι δὲ ὁ 2 καὶ 7· καὶ εἰς τὴν δε 5: 15=6. 18. ὁ μὲν 5 καὶ 18 ἄκρα, ὁ δὲ 15 καὶ 6 μέσοι. Ἐὰν δὲ μιᾶς ἀναλογίας οἱ δύο μέσοι ὅροι ἴσοι, καλεῖται ἡ ἀναλογία Συνεχής. ὡς 13÷10=10÷7. καὶ 5: 10=10: 20. Πρέπει ὅμως νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἔνιοι συγγραφεῖς ἐκφράζουσι τὴν μὲν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν 3. 7∸11. 15, ἢ οὕτω 3—7=11—15. τὴν δὲ γεωμετρικὴν 4 : 20 : : 3 : 15· ἢ οὕτω 4. 12∸7. 21. τὴν δὲ συνεχῆ ἀριθμητικὴν ∸ 4. 7. 10· καὶ τὴν συνεχῆ γεωμετρικὴν : : 5. 15. 45· καὶ οὕτω 5. : 15 : 45· ἡμεῖς μέντοι τὴν ἀνωτέρω τάξιν τηρήσωμεν. Εἰσὶν ὅμως καὶ ἄλλαι ἀναλογίαι, αἵτινες ἀφ' ἑνὸς λόγου οἱουδήποτε γίνονται, ἐὰν μεταξὺ τῶν ὅρων, ὡς ἄκρα τῆς ἀναλογίας λαμβανομένων, δύο μέσους κατά τινα τρόπον παρευρίσκομεν, ὡς εἰς τὸν λόγον αὐτὸν 3 : 24· ἐὰν εὕρωμεν δύο ὅρους ἔτι β καὶ γ τοιούτους, ὥςε ἡ διαφορὰ τοῦ 3 καὶ β νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν 7, ὡς ἔχει καὶ ὁ 3 πρὸς τὸν 24 καλεῖται Ἀναλογία ἁρμονική. Ταύτας λοιπὸν ὅλας φέρε καὶ ἡμεῖς κατὰ μέρος διδάξωμεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Περὶ Ἀναλογίας ἀριθμητικῆς.

§. 469. Ἐπειδὴ ἡ ἀριθμητικὴ Ἀναλογία ἀπὸ δύο λόγους ἀριθμητικοὺς συνίσταται (§. 461). παρίσταται ἄρα καὶ διὰ τῆς γενικῆς ταύτης ἐκφράσεως $\alpha \div (\alpha+\delta)=\beta \div (\beta+\delta)$ (§. 461). ἐπειδὴ καὶ ἑκάστη ἀναλογία ἐκ δύο λόγων, ὧν ἡ διαφορὰ ἴση. Ἀλλὰ μὴν ἐν τοῖς δυσὶ λόγοις ἡ διαφορὰ $=\delta$. ἄρα διὰ τοῦ αὐτοῦ τοῦδε ἀσφαλῶς ἐκφρασθήσεται καὶ ἡ συνεχὴς ἀριθμητικὴ ἀναλογία οὕτω $\alpha \div (\alpha+\delta)=(\alpha+\delta) \div (\alpha+2\delta)$ διότι ἐν αὐτῇ ἀπαιτοῦνται οἱ μέσοι ὅροι ἴσοι εἶναι· ὅθεν ἐὰν τὴν διαφορὰν τῷ τρίτῳ προσθῶμεν οὕτως $\alpha+2\delta$, ὁ τέταρτος ὅρος γίνεται.

§. 470. Εἰς κάθε ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων ἴσον τῷ κεφαλαίῳ τῶν μέσων· διότι κατὰ τὰς ἐξισώσεις εἰς τὴν γενικὴν ἀναλογίαν $\alpha \div (\alpha+\delta)=\beta \div (\beta+\delta)$ ἔσται $\alpha+(5+\delta)=\beta+(\alpha+\delta)$. καὶ εἰς τὰς μερικὰς αὐτὰς $3 \div 7=11 \div 15$. ἔσται $3+15=7+11$, καὶ ἔτι εἰς τήνδε $5 \div 2=18 \div 15$. $5+15=18+2$. οὕτω καὶ εἰς τὰς συνεχεῖς $7 \div 10=10 \div 13$· $7+13=10+10$· ὅθεν ἕπεται ὅταν δύο κεφάλαια ὦσιν ἴσα, τὰ μέρη αὐτὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀριθμητικῶς ἀνάλογα, ὡς, ἐπειδὴ $13+7=2+18$ εἶναι καὶ $13 \div 18=2 \div 7$· καὶ ἔτι $7 \div 18=2 \div 13$ καὶ $7 \div 2=18 \div 13$. Ἀντιστροφὴν λόγων καλοῦμεν, ὡς ὅταν ἓν μέρος τοῦ πρώτου κεφαλαίου παραβάλλωμεν πρὸς ἓν μέρος τοῦ δευτέρου κεφαλαίου, καὶ ἔπειτα τὸ ἕτερον μέρος οὐχὶ τοῦ πρώτου, ἀλλὰ τοῦ δευτέρου κεφαλαίου παραβάλλωμεν πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ πρώτου κεφαλαίου. Ἐν δὲ τῇ συνεχεῖ ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον τῷ διπλῷ μέσῳ ὅρῳ· $3 \div 7 = 7 \div 11$ ἄρα $3+11=2.\ 7=14$. καὶ γενικῶς τὸ αὐτὸ ἐξέρχεται $\alpha \div (\alpha+\delta)=(\alpha+\delta) \div (\alpha+2\delta)$· $\alpha+(\alpha+2\delta)=(\alpha+\delta)+(\alpha+\delta)=2(\alpha+\delta)$.

§. 471. Ἐκ τοῦ ἰδιώματος τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας, νὰ εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων ἴσον τῷ κεφαλαίῳ τῶν μέσων, γίνεται δῆλον.

α΄. Ὅτι ἐὰν μεταθῶμεν τοὺς ὅρους τῶν λόγων τὸν α΄. εἰς β΄. καὶ τὸν β΄. εἰς α΄. ὁμοίως καὶ τὸν γ΄. εἰς δ΄. καὶ ἀνάπαλιν, ἡ ἀναλογία δὲν χαλᾷ, ὡς εἰς αὐτὴν $\alpha \div (\alpha+\delta)=\beta \div (\beta+\delta)$ γίνεται, καὶ $(\alpha+\delta) \div \alpha=(\beta+\delta) \div \beta$. διότι ὀρθῶς ἔχει $(\alpha+\delta)+\beta=\alpha+(\beta+\delta)$. καὶ ἔτι $8-3=10-5$ γίνεται, καὶ $3 \div 8=5 \div 10$. διότι $3+10=8+5$. Ἀνάπαλιν ἡ ἀναλογία λέγεται, ὅταν λαμβάνωμεν τὸν ἑπόμενον ὅρον ἀντὶ ἡγουμένου, καὶ ἡγούμενον ἀντὶ ἑπομένου.

β΄. Καὶ ἐναλλὰξ δὲ χαλᾷ ἡ ἀναλογία, ἤτοι ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν τρίτον, καὶ ὁ δεύτερος πρὸς τὸν τέταρτον, διότι αὕτη $\alpha \div (\alpha+\delta)=\beta \div (\beta+\delta)$ μεταβαίνει εἰς τὴν $\alpha \div \beta=(\alpha+\delta) \div (\beta+\delta)$. ἔστι γὰρ $\alpha+(\beta+\delta)=\beta+(\alpha+\delta)$. καὶ αὕτη πάλιν $5 \div 15=3 \div 13$. εἰς αὐτὴν $5 \div 3=15 \div 13$. διότι $5+13=3+15$. Ἐναλλαγὴ δὲ λόγων ἀκούει, ὅταν ἡγούμενον πρὸς ἡγούμενον, καὶ ἑπόμενον πρὸς ἑπόμενον παραβάλλωμεν.

γ΄. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἰδιώματος ἐξέρχεται καὶ ἐὰν οἱ τρεῖς ὅροι μόνον δοθῶσιν, ὁ τέταρτος εὑρίσκεται. Δεδόσθω τὸν τέταρτον εἶναι χ ἄγνωστον οὕτω $\alpha \div (\alpha+\delta) = \beta \div \chi$· ἄρα $\alpha+\chi = \beta+\alpha+\delta$· καὶ ἐπομένως $\chi = \beta+\delta+\alpha-\alpha = \beta+\delta$· καὶ ἔσται ἡ ἀναλογία $\alpha \div (\alpha+\delta) = \beta \div (\beta+\delta)$ δηλ: ἐὰν ὁ τέταρτος ζητῆται, συνάπτομεν τοὺς μέσους, καὶ ἀπὸ τὸ κεφάλαιον αὐτὸ ἀφαιροῦμεν τὸ δοθὲν ἄκρον, ὡς $5 \div 18 = 20 \div \chi$ ἔσται $\chi = 18+20-5 = 33$. Ἐὰν δὲ ἓν τῶν μέσων ἦ ἄγνωστον, εὑρίσκεται, ἐὰν συνάψωμεν τὰ ἄκρα, καὶ ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τὸ δοθὲν μέσον ἀφέλωμεν $50 \div 40 = \chi \div 20$· ἔσται $\chi = 50+20-40 = 30$· καὶ ἡ ἀναλογία $50 \div 40 = 30 \div 20$· Δεδόσθωσαν καὶ οἱ τρεῖς ὅροι οὗτοι $7 \div 14\frac{3}{5} = 9\frac{2}{3} \div \chi$· ἔσται

$$\chi = 14\frac{3}{5} + 9\frac{2}{3} - 7 = \frac{73}{5} + \frac{29}{3} - 7 = \frac{219}{15} + \frac{145}{15} - \frac{105}{15} = \frac{259}{15} =$$

$17\frac{4}{15}$ καὶ ἡ ἀναλογία $7 \div 14\frac{3}{5} = 9\frac{2}{3} \div 17\frac{4}{15}$.

δ'. Εἰς δὲ τὰς συνεχεῖς ἀναλογίας, ἐπειδὴ τρεῖς ὅροι μόνον εὑρίσκονται, ὧν οἱ μὲν δύω Ἄκροι λέγονται, ὁ δὲ Μέσος· ἐὰν δοθῶσιν οἱ δύω, καὶ ζητεῖται ὁ τρίτος, ὁ εἷς τῶν ἄκρων, διπλασιάζωμεν τὸν μέσον, καὶ ἀπὸ τούτου ἀφαιροῦμεν τὰ δοθέντα, καὶ τὸ λείψανον εἶναι ὁ ζητούμενος ἄκρος. Ζητεῖται εἰς αὐτὴν τὴν ἀναλογίαν $5 \div 8 = 8 \div \chi$· ἔσται $\chi = 2.\ 8-5 = 11$· ἄρα $5 \div 8 = 8 \div 11$, ἐὰν δὲ δοθῶσι 10, καὶ 22· ἔσται $\chi = 44-10 = 34$, ἄρα $10 \div 22 = 22 \div 34$. Ἐὰν δὲ τὰ ἄκρα δοθῶσι, καὶ ζητῆται ὁ μέσος ὅρος, συνάπτομεν τὰ ἄκρα, καὶ διαιροῦμεν τοῦτο τὸ κεφάλαιον διὰ 2· καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ὁ μέσος ὅρος· διότι

$5 \div \chi = \chi \div 41$· ἄρα $2\chi = 5+41$ (§. 98). $\chi = \frac{5+41}{2} = 23$ καὶ ἶςαι ἡ ἀναλογία $5 \div 23 = 23 \div 41$· ἐὰν δὲ ὁ μέσος τῶν 3 καὶ 8 ζητῆται, εὑρίσκομεν αὐτὸν $\frac{3+8}{2} = 5\frac{1}{2}$· καὶ ἶςαι $3 \div 5\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} \div 8$· ἐὰν δὲ ὁ μέσος τῶν 13 καὶ 31, ἶςαι $\frac{31+13}{2} = 22$· ἡ δ' ἀναλογία $13 \div 22 = 22 \div 31$.

ε'. Οὗτος ὁ τρόπος νὰ εὑρίσκωμεν τὸν μέσον ὅρον εἶναι χρήσιμος εἰς πολλὰ μέρη τῶν ἐπιςημῶν, καὶ ἑπομένως εἰς αὐτὸ τὸ πρακτικὸν, καὶ εἰς τὴν κοινὴν ζωήν. Παραδείγματος χάριν· ἐάν τις ἵππος πωλῆται, καὶ ὁ μὲν ζητεῖ 250· γρ. ὁ δὲ δίδει 212, πόσα εἶναι τὸ μέσον, ὥςε καὶ ὁ εἷς νὰ ἀναβῇ εἰς τὴν τιμὴν, καὶ ὁ ἕτερος νὰ καταβῇ· συνάπτομεν τὰς δύω τιμὰς, καὶ τὸ ἥμισυ κεφάλαιον εἶναι τὸ ζητούμενον· οὕτω $\frac{250+212}{2} = \frac{462}{2} = 231$· διότι εἶναι $212 \div 231 = 231 \div 250$. Ἐὰν δέ τις λέγῃ ὅτι εἰς τὸν πόλεμον τὸν δεῖνα ἐχάθησαν 3500 ςρατιῶται, ἕτερος δὲ 1600, ἶςαι ὁ μέσος ἀριθμὸς $\frac{3500+1600}{2} = \frac{5100}{2} = 2550$.

„Εἰς δὲ τὰς πείρας συμβαίνει τοῦτο συνεχῶς, ἔνθα οὐδεὶς λόγος τῆς ὀρθότητος παρών· διότι τότε συνάπτουσιν ἀπὸ πολλὰς πείρας τὰ ἀποτελέσματα, καὶ τὸ κεφάλαιον διαιροῦσι μὲ τὸν ἀριθμὸν, ὁσάκις αἱ πεῖραι ἔγιναν· τὸ δὲ πηλίκον δώσει τὸν μέσον ἀριθμόν· δηλ: ὁ μὲν ἐμέτρησε τὸ διάρμα ἀπὸ γῆς μέχρι σελήνης ποδῶν $= \alpha$, ὁ δὲ ποδῶν $= 6$, ὁ δὲ ποδῶν $= \gamma$, ὁ δὲ $= \delta$, καὶ ἕτερος ποδῶν $= \varepsilon$. ἄρα ὁ μέσος τούτων ἀριθμὸς $= \frac{\alpha+6+\gamma+\delta+\varepsilon}{5}$. ἕτερος δοκιμάζίου ἓν κανόνιου μὲ τὴν αὐτὴν ἐνθήκην, εὗρεν εἰς τὴν πρώτην βολὴν νὰ διηύυσεν ἡ σφαῖρα ὀργειὰς 2260· εἰς δὲ τὴν δευτέραν 2575. εἰς τὴν τρίτην 2365. εἰς τὴν τετάρτην 2475, καὶ εἰς τὴν πέμπτην 2398. ζητεῖ τὸν μέσον ὅρου τούτων οὕτω $\frac{2260+2575+2365+2475+2398}{5}=\frac{12073}{5}$

$=2414\frac{3}{5}$ καὶ αὕτη εἶναι ἡ χρῆσις τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας, ἤτοι ἡ εὕρεσις τοῦ μέσου ὅρου, ἣν ἡμεῖς καὶ εἰς τοὺς Λογαρίθμους ἀναλάβομεν. Τὰ δὲ λοιπὰ αὐτῆς ἄχρηςα εἰς τὰς ἐπιςήμας· καὶ ἄν τινες πλείονά τινα εἶπον, εὐκόλως οἱ ἀκροαταί μας ἐκ τῶν εἰρημένων εὑρίσκουσι, καὶ μάταιον εἰς αὐτὰ νὰ χρονοτριβῶμεν, εἰ μὴ εἰς τὴν Ἀναλογίαν τὴν γεωμετρικήν.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ Ἀναλογίας γεωμετρικῆς.

§. 472. Ὅτι ἀναλογία γεωμετρικὴ εἶναι ἡ ἰσότης δύω λόγων γεωμετρικῶν, ἀνωτέρω ἐμνήσθημεν (468). καὶ ἑπομένως ἐκ τεσσάρων ὅρων συνίςαται, ὧν ὁ πρῶτος καὶ τέταρτος Ἄκρα λέγονται, οἱ δὲ λοιποὶ Μέσοι ὅροι, ἐπειδὴ ἑκάςη ἀναλογία ἐκ δύω λόγων συνίςαται, ὁ δ' λόγος ἐκ δύω ὅρων, ὧν ὁ μὲν ἡγούμενος, ὁ δὲ ἑπόμενος· εἰς ἑκάςην ἀναλογίαν οἱ ἡγούμενοι ὅροι τῶν λόγων, καὶ οἱ ἑπόμενοι καλοῦνται Ὁμόλογοι· ὅθεν εἰς αὐτὴν τὴν ἀναλογίαν 2: 4= 6: 12. ὁ 2. καὶ 6 ὁμόλογοι· καὶ ὁ 4 καὶ 12 ὁμόλογοι· τὰ αὐτὰ λεγέσθω καὶ ἐπὶ τῆς ἀναλογίας τῆς ἀριθμητικῆς· καὶ τέλος, ἐκφράζεται α: απ = β: βπ. ἐπειδὴ καὶ ὁ πρῶτος λόγος $\frac{\alpha\pi}{\alpha} = \pi$ ἔχει τὸ αὐτὸ πηλίκον π, καὶ ὁ δεύτερος $\frac{\beta\pi}{\beta} = \pi$ ἄλλως ἀναλογία δὲν ἐγίνετο. Ἐαν δὲ εἰς αὐτὴν τὴν ἀναλογίαν α: απ = β: βπ θῶμεν β = απ, ἔςαι καὶ βπ = απ. π = απ². παρίςαται ἄρα καὶ ἡ συνεχὴς γεωμετρικὴ ἀναλογία διὰ τοῦ δε τοῦ τύπου, α: απ = απ: απ². καὶ ἐὰν μόνον ὁ πρῶτος ὅρος καὶ τὸ πηλίκον δοθῇ, ὅλη ἡ συνεχὴς ἀναλογία ἀπαρτίζεται· δηλ: ἔςω ὁ πρῶτος ὅρος 5, καὶ τὸ πηλίκον 3. ἡ ἀναλογία γίνεται 5: 15 = 15: 45. ἐὰν δ' ὁ πρῶτος 20 καὶ τὸ πηλίκον $\frac{1}{4}$ ἔςαι $20: 20\frac{1}{4} = 20\frac{1}{4}: 20\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$: ἤτοι 20: 5 = 5: $\frac{5}{4}$· ἐπειδὴ ὅμως παρ' ὅλων τῶν Μαθηματικῶν ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία ψυχὴ καλεῖται τῆς μαθηματικῆς, καὶ τῷ ὄντι ἄνευ αὐτῆς νεκρὰ ὂν ἦν ἡ Μαθηματική. Φέρε καὶ ἡμεῖς εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον ὅλους τοὺς τρόπους αὐτῆς καὶ τὰς μεταβολὰς ἐξετάσωμεν, διὰ νὰ βαδίσωμεν ἑτοίμως εἰς ὅλας τὰς λοιπὰς μεθόδους αὐτῆς.

§. 473. Ἑκάςη ἀναλογία ὡς ὁ α: απ = β: βπ δύναται καὶ οὕτως ἐκφρασθῆναι $\frac{\alpha}{\alpha\pi} = \frac{\beta}{\beta\pi}$. ἐὰν δ' ἀπαλλαχθῶμεν ἀπὸ τοὺς παρονομαςὰς, ἔςαι ἡ ἐξίσωσις αβπ = απβ. ὁμοίως. καὶ αὕτη 5: 10 = 3: 6 γίνεται $\frac{5}{10} = \frac{3}{6}$. καὶ 6. 5 = 10. 3. καὶ ἐκ τούτων ὁ γενικώτατος κανών. Ἑκάςης γεωμετρικῆς ἀναλογίας τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἄκρων, ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων· ἐὰν δὲ συνεχὴς ἡ ἀναλογία, τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ τετραγώνῳ τοῦ μέσου ὅρου. Ἐπειδὴ $α: απ = απ: απ^2$. ἄρα $ααπ^2 = ααπ^2$. καὶ ἔτι $2: 6 = 6: 18$. ἄρα $2. 18 = 36 = 6^2$.

§. 474. Ἐὰν ὦσι δύω παραγόμενα ἴσα οἱ παράγοντες αὐτῶν εἶναι ἀντιςρόφως (440), ἡ ἀντιπεπονθὼς ἀνάλογοι· ἐπειδὴ ἑκάςη ἀναλογία μεταφέρεται εἰς δύω ἴσα παραγόμενα, ἄρα καὶ ἀνάπαλιν δύω ἴσα παραγόμενα εἰς ἀναλογιαν μεταβάλλονται ὡς $4. 7 = 2. 14$. ταῦτα εἰσὶν ὅλα ἀντιςρόφως ἀνάλογα $4: 2 = 14: 7$ καὶ $4: 14 = 2: 7$. καὶ $7: 2 = 14: 4$. καὶ ἔτι $7: 14 = 2: 4$· καὶ ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι κάθε ἐξίσωσις, ἧς τοὐλάχιςον τὸ ἓν σκέλος εἰς παράγοντας λύεται, εἰς ἀναλογίαν μεταβάλλεται ἀντιςρόφως τῶν παραγόντων. Διότι ταὶ τὸ ἕτερον σκέλος εἰς μονάδα λύεται ὡς $1. 14 = 2. 7$. ἄρα καὶ $1: 2 = 7: 14$ καὶ ἔτι $7: 1 = 14: 2$ λτ. ἄρα καὶ ὁ νόμος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὅτι ἡ μονὰς ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἕνα τῶν παραγόντων, ὡς ὁ ἕτερος πρὸς τὸ παραγόμενον (72)· διότι $4. 5 = 20$. ἤτοι $4. 5 = 20. 1$. ἄρα $1: 4 = 5: 20$. καὶ $1: 5 = 4: 20$. καὶ ἔτι τὸ παραγόμενον ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἕνα τῶν παραγόντων, ὡς ὁ ἕτερος πρὸς τὴν μονάδα, δηλ: $20: 5 = 4: 1$, καὶ $20: 4 = 5: 1$. $αχ = βγψ$. δηλ: $α: βγ = ψ: χ$. καὶ $αβγ = χ^2$. δηλ: $αβ: χ = χ. γ$. $α = ψχ$ δηλ: $α: ψ = χ: 1$. $α + αβ = αχ - χ^2$ δηλ: $α: χ = (α - χ): (1 + β)$.

§. 475. Ἐὰν δύω κλάσματα ἴσα, οἱ ἀριθμηταὶ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσιν οἱ παρονομαςαὶ ὡς $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$· ἄρα καὶ $3: 12 = 4: 16$· διότι $3. 16 = 4. 12$·

καὶ ἔτι $\frac{5}{1}=\frac{15}{3}$· ἄρα 3. 5=3. 15. ἤτοι 1: 3=5: 15· καὶ 1: 5=3: 15· καὶ ἐκ τούτου ὁ νόμος τῆς διαιρέσεως, ὅτι ὃν λόγον ἔχει ἡ μονὰς πρὸς τὸ πηλίκον, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ὁ διαιρέτης πρὸς τὸν διαιρετέον· καὶ ὃν λόγον ἔχει ἡ μονὰς πρὸς τὸν διαιρέτην, τὸν αὐτὸν καὶ τὸ πηλίκον πρὸς τὸν διαιρετέον· (88; 89.).

§. 476. Ἐπειδὴ δὲ εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸν τέταρτον ὅρον, ἐὰν μόνον οἱ τρεῖς δοθῶσι. Δεδόσθωσαν οἱ τρεῖς ὅροι α, β, γ, καὶ ζητεῖται ὁ τέταρτος χ· ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὴν ἀναλογίαν $\alpha: \beta=\gamma: \chi$, εἶναι $\alpha\chi=\beta\gamma$ (§. 473.) ἄρα $\chi=\frac{\beta\gamma}{\alpha}$· ἐὰν δ' ὁ τρίτος γ ζητῆται εἰς αὐτὴν τὴν ἀναλογίαν $\alpha: \beta=\chi: \delta$ ἔσται $\alpha\delta=\beta\chi$ καὶ $\frac{\alpha\delta}{\beta}=\chi$· ἐὰν δ' ὁ δεύτερος ζητῆται εἰς αὐτὴν $\alpha: \chi=\gamma: \delta$, ἔσται $\alpha\delta=\gamma\chi$ καὶ $\frac{\alpha\delta}{\gamma}=\chi$· ἐὰν δ' ὁ πρῶτος ζητῆται εἰς αὐτὴν $\chi: \beta=\gamma: \delta$, ἔσται $\chi\delta=\beta\gamma$ καὶ $\chi=\frac{\beta\gamma}{\delta}$· ἄρα εὑρίσκομεν ἕκαστον ὅρον οἱασδήποτε ἀναλογίας, ἐὰν οἱ τρεῖς ὅροι δοθῶσι τοῦτον τὸν τρόπον. Ἐὰν εἷς ὅρος τῶν ἄκρων ζητῆται, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύω μέσους, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ δοθέντος ἄκρου· ἐὰν δ' εἷς ζητῆται τῶν μέσων, πολλαπλασιάζομεν τὰ ἄκρα, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ δοθέντος μέσου· Παράδειγμα.

$5:18=12:\chi$ ἔςαι $\chi=\frac{8.\ 12}{5}=19\frac{1}{5}$. ἔτι

$4:12=\chi:24$, καὶ $\chi=\frac{4.\ 24}{12}=8$. ἔτι

$4:\chi=8:24$ καὶ $\chi=\frac{4.\ 24}{8}=12$. καὶ ἔτι

$\chi:12=8:24$. ὅθεν $\chi=\frac{12.\ 8}{24}=4$. Καὶ τούτου τὸν τρόπου λύεται ἡ πολυθρήλλυτος μέθοδος τῶν Τριῶν, περὶ ἧς ὕςερον. Ἐὰν δὲ ἡ ἀναλογία συνεχὴς ὡς $\alpha:\beta=\beta:\gamma$, λύεται τὸν αὐτὸν τρόπον, ἐὰν μόνον δύω ὅροι δοθῶσι δηλ: ἐὰν δοθῇ ἓν τῶν ἄκρων, καὶ ὁ μέσος ὅρος, τετραγωνίζομεν τὸν μέσον ὅρον, καὶ διὰ τοῦ δοθέντος ἄκρου διαιροῦμεν, ὡς α, β, χ. ἔςαι $\chi=\frac{\beta^2}{\alpha}$. ἄρα $\alpha:\beta=\beta:\frac{\beta^2}{\alpha}$. καὶ ἑπομένως $\frac{\alpha\beta^2}{\alpha}=\beta^2$. καὶ ἔτι $\chi:\beta=\beta:\gamma$ ἄρα $\chi=\frac{\beta^2}{\gamma}$. ἐὰν δὲ οἱ δύω ἄκροι δοθῶσι, καὶ ζητῆται ὁ μέσος πολλαπλασιάζομεν τὰ ἄκρα, καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι ὁ ζητούμενος μέσος· διότι ἔςαι $\alpha:\chi=\chi:\gamma$. ἄρα $\chi^2=\alpha\gamma$ καὶ $\chi=\sqrt{\alpha\gamma}$. ἐὰν δηλ: δοθῇ ἓν ἄκρον 4, καὶ ὁ μέσος 6, καὶ ζητῆται τὸ ἕτερον ἄκρον, ἔςαι $\frac{6^2}{4}=9$. ἄρα $4:6=6:9$. ἐὰν δ' ὁ μέσος ζητῆται τῶν 4 καὶ 16, ἔςαι $\sqrt{4.\ 16}=8$. ἄρα $4:8=8:16$.

§. 474. Ἐκ πάντων τούτων δύω σημεῖα ἔχομεν τῆς ὀρθότητος ἑκάςης ἀναλογίας.

α΄. Τὴν ἰσότητα τῶν λόγων, ἤτοι τὰ ἴσα πηλίκα.

β'. Τὴν ἰσότητα τῶν δύω γινομένων ἐκ τῶν ἄκρων, καὶ ἐκ τῶν μέσων (§. 473.)· ἐὰν ἐν τούτων εἰς ὅρους τέσσαρας φωραθῇ, εἶναι ἡ ἀναλογία ὀρθή.

§. 478. Ἑκάστη ἀναλογία λαμβάνει πολλὰς μεταβολὰς, καὶ εἰς τούτων παραδείγματα εἰλήφθωσαν αὗται αἱ δύω.

$$α: απ = β: βπ$$

καὶ ἐν ἀριθμοῖς· $4: 8 = 10: 20$

α'. Ἑκάστη ἀναλογία μεταβάλλει καὶ ἀνάπαλιν· τοῦτο δὲ γίνεται ὅτε παραβάλλομεν ἑπόμενον τῶν λόγων πρὸς ἡγούμενον. οὕτως ἡ ἀναλογία (§. 471.).

$$α: απ = β: βπ$$

ἀνάπαλιν· $απ: α = βπ: β$

$$4: 8 = 10: 20$$

ἀνάπαλιν· $8: 4 = 20: 10$

Διότι $απβ = αβπ$· καὶ $8. 10 = 4. 20$ (§. 477.)

§. 479. β'. Μεταβάλλει καὶ ἐναλλὰξ, ἤτοι ἡγούμενον πρὸς ἡγούμενον, καὶ ἑπόμενον πρὸς ἑπόμενον· (αὐτόθι)

$$α: απ = β: βπ$$

ἐναλλάξ: $α: β = απ: βπ$

καὶ $4: 8 = 10: 20$

$$4: 10 = 8: 20$$

διότι $αβπ = βαπ$· καὶ $4. 20 = 10. 8$ (§. 477.).

Σημείωσις.

Διὰ τῶν δύω τούτων μεταβολῶν (α'. καὶ β'.) ἠμποροῦμεν ἕκαστον ὅρον τῆς ἀναλογίας νὰ φέρωμεν εἰς τόπον οἱονδήποτε χωρὶς νὰ βλαβῇ ἡ ἀναλογία. Θέλω δηλ: νὰ φέρω τὸν πρῶτον ὅρον εἰς τὸν τέταρτον τόπον $α: β = γ: δ$· καὶ $γ: δ = α: β$· καὶ ἀνάπαλιν $δ: γ = β: α$· ἐὰν δὲ εἰς τὸν τρίτου θέλω νὰ φέρω ἀπ' αὐτῆς τῆς ἀναλογίας τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, καὶ ἀνάπαλιν $\beta : \alpha = \delta : \gamma$, καὶ ἐναλλὰξ $\beta : \delta = \alpha : \gamma$ κτ.

§. 480. γ'. Μεταβάλλεται ἡ ἀναλογία, καὶ δὲν χαλᾶ, καὶ ὅταν συνάπτωμεν εἰς ἓν κεφάλαιον τοὺς δύω ὅρους ἑκάςου λόγου τῆς ἀναλογίας, τὸ δὲ κεφάλαιον παραβάλλωμεν, ἢ πρὸς τὸν ἡγούμενον ὅρον, ἢ πρὸς τὸν ἑπόμενον· καὶ ἢ γίνεται ὅρος ἡγούμενος, ἢ ὅρος ἑπόμενος· καὶ καλεῖται αὕτη ἡ μεταβολὴ Ἐν συνθέσει· Ἔςω ἡ ἀναλογία.

$$\alpha : \alpha\pi = \beta : \beta\pi$$

$$\text{ἐν συνθέσει}\left\{\begin{array}{l}(\alpha + \alpha\pi) : \alpha\pi = (\beta + \beta\pi) : \beta\pi \\ (\alpha + \alpha\pi) : \alpha = (\beta + \beta\pi) : \beta \\ \alpha : (\alpha + \alpha\pi) = \beta : (\beta + \beta\pi) \\ \alpha\pi : (\alpha + \alpha\pi) = \beta\pi : (\beta + \beta\pi)\end{array}\right.$$

καὶ $4 : 8 = 10 : 20$

$$\left\{\begin{array}{l}12 : 8 = 30 . 20 \\ 12 : 4 = 30 : 10 \\ 4 : 12 = 10 : 30 \\ 8 : 12 = 20 : 30,\end{array}\right.$$

διότι εἰς ὅλας αὐτὰς τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς.

Διὰ τῆς ἐν συνθέσει μεταβολῆς ἠμποροῦμεν εἰς κάθε ἀναλογίαν, ὅταν ὦσι δύω ὅροι ἄγνωςοι, καὶ μόνον τὸ κεφάλαιον αὐτῶν ἡ γνωςὸν, νὰ εὕρωμεν καὶ τοὺς δύω ἀγνώςους· οἱ δὲ δοθέντες ἄγνωςοι πρέπει νὰ εἶναι ἢ ὁμόλογοι, ἢ δύω ἑνὸς λόγου.. Δεδόσθω εἰς αὐτὴν τὴν ἀναλογίαν $\chi : 10 = \upsilon : 15$. ζητοῦνται οἱ ἄγνωςοι χ καὶ υ, ὧν μόνον τὸ κεφάλαιον γνωςὸν $15 = \chi + \upsilon$. λοιπόν.

$$\chi : 10 = \psi : 15$$

καὶ ἐναλλὰξ $\chi : \psi = 10 : 15$

καὶ ἐν συνθέσει $\chi : (\chi + \psi) = 10 : (10 + 15)$,

ἤτοι $\chi : 15 = 10 : 25$.

ἤδη εὑρίσκεται $\chi = \frac{15 \cdot 10}{25} = 6$ (§. 476) εὑρίσκομεν ἔτι καὶ $\psi = 15 - 6 = 9$. καὶ ἔςαι ἡ ἀναλογία $6 : 10 = 9 : 15$.

Ἔτι καὶ εἰς τὴν ἀναλογίαν $5 : 25 + \chi : \psi$. ζητοῦνται οἱ ἄγνωςοι χ καὶ ψ, ὧν τὸ κεφάλαιον μόνον γνωςὸν $= 60$ ὅθεν·

$$5 : 25 = \chi : \psi$$

καὶ ἐν συνθέσει $30 : 5 = (\chi + \psi) : \chi$,

ἤτοι $30 : 5 = 60 : \chi$

ἄρα $\chi = \frac{5 \cdot 60}{30} = 10$, καὶ $\psi = 60 - 10 = 50$· ἡ δ' ἀναλογία $5 : 25 = 10 : 50$.

§. 481. δ'. Μεταβάλλεται δὲ ἡ ἀναλογία χωρὶς νὰ βλαβῇ καὶ ἐν ἀφαιρέσει, ὅταν ἀφαιρῆται ὁ εἷς ὅρος ἑνὸς λόγου ἀπὸ τοῦ ἑτέρου, καὶ ἡ διαφορὰ αὕτη παραβάλλεται ἢ πρὸς τὸν ἡγούμενον, ἢ πρὸς τὸν ἑπόμενον.

δηλ $\alpha : \alpha\pi = 6 : 6\pi$

ἐν ἀφαιρέσει. $\left\{\begin{array}{l} \alpha - \alpha\pi : \alpha = 6 - 6\pi : 6 \\ \alpha - \alpha\pi : \alpha\pi = 6 - 6\pi : 6\pi \\ \alpha\pi - \alpha : \alpha = 6\pi - 6 : 6 \\ \alpha\pi - \alpha : \alpha\pi = 6\pi - 6 : 6\pi \end{array}\right.$

καὶ $4 : 8 = 10 : 20$

ἐν ἀφαιρέσει. $\left\{\begin{array}{l} 4 - 8 : 4 = 10 - 20 : 10 \\ 4 - 8 : 8 = 10 - 20 : 20 \\ 8 - 4 : 4 = 20 - 10 : 10 \\ 8 - 4 : 8 = 20 - 10 : 20 \end{array}\right.$

Ὅτι δὲ ταῦτα τὰ εἴδη ὀρθὰ, εἶναι φανερόν· διότι εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς ἀναλογίας τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων. (§. 472.).

Σημείωσις.

Τοῦτο τὸ εἶδος τῆς μεταβολῆς μεταχειριζόμεθα, ὅταν μιᾶς ἀναλογίας δύω ζητῶνται ἄγνωστα, ὧν μόνον ἡ διαφορὰ εἶναι γνωστή. Εἰς τὴν ἀναλογίαν 6: ψ=9: χ ζητοῦνται οἱ δύω ἄγνωστοι ψ καὶ χ, ὧν ἡ διαφορὰ χ—ψ=5· ἄρα

$$6:\ \psi = 9:\ \chi,$$

καὶ ἐναλλάξ. $6:\ 9 = \psi:\ \chi,$

καὶ ἐν ἀφαιρέσει· $9-6:\ 9 = \chi-\psi:\ \chi,$

ἤτοι $3:\ 9 = 5:\ \chi$·

ἄρα καὶ $\chi = \frac{5.\ 9}{3} = 15$· καὶ $\psi = 15-5 = 10$· ὅθεν ἡ ἀναλογία 6: 9=10: 15.

§. 482. ε΄. Ὅταν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθῇ ἓν τῶν ἄκρων, καὶ ἅμα ἓν τῶν μέσων, ἡ ἀναλογία μένει ἀμετάβλητος· καλοῦμεν καὶ τοῦτο Ἐν πολλαπλασιασμῷ.

$$\text{διὰ τοῦ } \mu \left\{\begin{array}{l} \alpha:\ \alpha\pi = 6:\ 6\pi \\ \alpha\mu:\ \alpha\pi\mu = 6:\ 6\pi \\ \alpha\mu:\ \alpha\pi = 6\mu:\ 6\pi \\ \alpha:\ \alpha\pi\mu = 6:\ 6\pi\mu. \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l}\text{καὶ ἔτι} \\ \text{διὰ τοῦ } \beta\end{array} \left\{\begin{array}{l} 4:\ 2 = 10:\ 20 \\ 4.\ 5:\ 8.\ 5 = 10:\ 20 \\ 4:\ 8.\ 5 = 10:\ 20.\ 5 \\ 4.\ 5:\ 8 = 10.\ 5:\ 20. \end{array}\right.$$

διότι εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς ἀναλογίας τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἄκρων, ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων.

Σημείωσις.

Ἐκ τοῦ δὲ τοῦ ἰδιώματος δυνάμεθα εἰς κάθε ἀναλογίαν, ὁποῦ ἔχει ἕνα, ἢ πολλοὺς ὅρους κλασματικοὺς, νὰ ἀπαλλαχθῶμεν ἀπὸ τοὺς παρονομαστὰς, καὶ νὰ γένωσιν ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ἀκέραιοι χωρὶς νὰ χαλάσῃ ἡ ἀναλογία, ἐὰν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ τοῦ ὅρου, ὅταν εἶναι εἷς τῶν μέσων, πολλαπλασιάσωμεν ἕνα τῶν ἄκρων· ὅταν δ' εἶναι εἷς τῶν ἄκρων, νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα τῶν μέσων. $8 : 13\frac{1}{3} = 3 : 5$ διότι αὐτὴ γίνεται $8 : \frac{40}{3} = 3 : 5$. ἄρα $24 : 40 = 3 : 5$, καὶ $8 : 40 = 3 : 15$. ἔτι $4 : \frac{40}{3} = \frac{3}{2} : 5$ γίνεται $12 : 40 = 3 : 10$. καὶ ἔτι $8 : 40 = 3 : 15$. καὶ ἐὰν ὅλοι οἱ ὅροι κλασματικοὶ $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\gamma}{2} = \frac{\delta}{\varepsilon} : \frac{5}{3}$ πρῶτον $\alpha\beta : 3\gamma = \alpha\delta : 10$. δεύτερον $2\beta : \alpha\gamma = 3\delta : 5\varepsilon$.

§. 483. ς΄. Ἐὰν δ' εἷς τῶν ἄκρων, καὶ ἅμα εἷς τῶν μέσων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρεθῇ, ἡ ἀναλογία δὲν χαλᾷ· τοῦτο δὲ καλείσθω Ἐν διαιρέσει. Οἱ ἀρχαῖοι ἐκάλουν τὴν Ἐν ἀφαιρέσει μεταβολὴν, Ἐν διαιρέσει· διότι

$$\alpha : \alpha\pi = \beta : \beta\pi,$$

ἄρα διὰ τοῦ μ $\quad \alpha : \frac{\alpha\pi}{\mu} = \beta : \frac{\beta\pi}{\mu}$

$$\frac{\alpha}{\mu} : \alpha\pi = \frac{\beta}{\mu} : \beta\pi$$

καὶ $\quad \frac{\alpha}{\mu} : \frac{\alpha\pi}{\rho} = \frac{\beta}{\mu} : \frac{\beta\pi}{\rho}$

καὶ ἐν ἀριθμοῖς $8:\ 12=6:\ 9$

διὰ τοῦ 2 καὶ $4:\ 12=3:\ 9$

$$8:\ 6=3:\ 4\frac{1}{2}$$

καὶ $\frac{8}{2}:\ \frac{12}{3}=\frac{6}{2}:\ \frac{9}{3}$

ἤτοι $4:\ 4=3:\ 3$· καὶ εἰς αὐτὰς τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἶσον τῷ ἐκ τῶν μέσων.

Σημείωσις.

Ἐκ τοῦδε τοῦ ἰδιώματος δυνάμεθα εἰς κάθε ἀναλογίαν φέρειν τοὺς ὅρους αὐτῆς εἰς ἐλαχίςους ὅρους, ὅταν ἓν ἄκρον καὶ ἓν μέσον διαιρῆται ἐπ' ἀκριβὲς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· διότι ἡ ἀναλογία δὲν χαλᾷ· ἐπειδὴ ἑκάςη ἀναλογία $\alpha:\ \alpha\pi=\beta:\ \beta\pi$ κλασματικῶς ἐκφράζεται $\frac{\alpha\pi}{\alpha}=\frac{\beta\pi}{\beta}$, καὶ κάθε κλάσμα εἰς ἐλαχίςους φέρεται ὅρους ἄνευ μεταβολῆς τοῦ κλάσματος· $15:\ 30+45:\ 90$ ἄρα καὶ $1:\ 2=45:\ 90$, καὶ $1:\ 30=3:\ 90$· καὶ $15:\ 1=45:\ 3$. κ. τ. λ.

§. 484. ζ. Ἐὰν δ' ὅλους τοὺς ὅρους εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν ὑψώσωμεν ἑκάςης ἀναλογίας, ἢ ἀπὸ ὅλους ῥίζαν ὁμοβάθμιον ἐξαγάγωμεν, ἡ ἀναλογία δὲν χαλᾷ· τοῦτο τὸ εἶδος τῆς μεταβολῆς καλείσθω Ἐν ἐξάρματι· καὶ τὸ ἕτερον Ἐν ἐξαγωγῇ.

$$\alpha:\ \alpha\pi=\beta:\ \beta\pi$$

καὶ $\alpha^2:\ \alpha^2\pi^2=\beta^2:\ \beta^2\pi^2$

καὶ $\alpha^\mu:\ \alpha^\mu\pi^\mu=\beta^\mu:\ \beta^\mu\pi^\mu$

καὶ ἔτι $3:\ 4=15:\ 20$

$$3^2:\ 4^2=15^2:\ 20^2$$

$$9:\ 16=225:\ 400$$

καὶ δι' ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν. $α: απ = β: βπ$

$$\sqrt{α}: \sqrt{απ} = \sqrt{β}: \sqrt{βπ}$$

$$\sqrt[ν]{α}: \sqrt[ν]{απ} = \sqrt[ν]{β}: \sqrt[ν]{βπ}$$

$$4: 16 = 9: 36$$

$$\sqrt{4}: \sqrt{16} = \sqrt{9}: \sqrt{36} = 2:4 = 3:6.$$

τούτων ὅλων τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων.

Σημείωσις.

Διὰ τοῦδε τοῦ ἰδιώματος ἀπαλλαττόμεθα ἀφ' ἑνὸς ὅρου ῥιζικοῦ, ἐὰν τοὺς λοιποὺς ὅρους εἰς τὴν δύναμιν τοῦ ἐκθέτου τοῦ ῥιζικοῦ ὑψώσωμεν. ὡς

$$α: \sqrt{β} = δ: γ^2$$

$α^2: β = δ^2: γ^2$ κ. τ. λ. καὶ τοσαῦται αἱ μεταβολαὶ ἐπὶ μιᾶς μόνης ἀναλογίας· ἐὰν δὲ δύω ἀναλογίαι παραβάλλωνται, ἢ πλείονες ὁμοῦ, ἕπονται αἱ ἑξῆς ἰδιότητες.

§. 485. η'. Ἐὰν δύω, ἢ πλείονες ἀναλογίαι ὦσι, καὶ οἱ ὁμόλογοι ὅροι μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθῶσι, τὰ τούτων γινόμενα πάλιν ἀναλογίαν σύνθετον ἀποτελοῦσιν.

$$α: απ = β: βπ$$

$$\underline{γ: γρ = δ: δρ}$$

ἄρα καὶ $αγ: αγπρ = βδ: βδπρ$

καὶ ἔτι $\left\{\begin{array}{l} α: β = γ: δ \\ α: απ = γ: γπ \\ δ: ε = ζ: η \\ κ: λ = μ: ν \end{array}\right.$

$$\overline{αακ: βαπελ = γγζμ: δγπην}$$

$$\begin{array}{l} 5:\ 8 = 10:\ 16 \\ \underline{3:\ 9 = 4:\ 12} \\ 15:\ 72 = 40:\ 192 \end{array}$$

καὶ ἔτι
$$\left\{\begin{array}{l} 1:\ 4 = 3:\ 12 \\ 8:\ 2 = 12:\ 3 \\ 5:\ 10 = 4:\ 8 \\ 7:\ 14 = 9:\ 18 \end{array}\right.$$

$$1.8.5.7 : 4.2.10.14 = 3.12.4.9 : 12.3.8.18$$

καὶ οὕτως ἐὰν ἔχωμεν πολλὰς ἀναλογίας μεταποιοῦμεν ὅλας αὐτὰς εἰς μίαν· πλὴν πῶς οἱ παράγοντες συντομεύονται, ὕςερον. Τοῦτο καλεῖται Πολλαπλασιῶν.

§. 486. θ΄. Ἐὰν εἰς δύω ἀναλογίας ἔχῃ ὁ εἷς λόγος τοὺς αὐτοὺς ὅρους καὶ εἰς τὰς δύω ἀναλογίας, ἔσονται καὶ οἱ δύω λοιποὶ λόγοι ἶσοι, καὶ οἱ ὅροι αὐτῶν ἀνάλογοι.

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha:\ \beta = \gamma:\ \delta \\ \alpha:\ \beta = \varepsilon:\ \zeta \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 3:\ 8 = 6:\ 16 \\ 3:\ 8 = 9:\ 24 \end{array}\right.$$

ἄρα καὶ $\gamma:\ \delta = \varepsilon:\ \zeta$ ἄρα καὶ $6:\ 16 = 9:\ 24$

Τοῦτο τὸ ἐκ δύω ἀναλογιῶν μίαν ἑτέραν συνάπτειν καλοῦμεν Ἴσον· καὶ ἐρείδεται εἰς τὸ ἀξίωμα τὸ,

„Τὰ τριτῷ τινὶ ἶσα, καὶ ἀλλήλοις ἴσα.

§. 487. ί. Ἐὰν εἰς δύω ἀναλογίας εἷς ἄκρος ὅρος τῆς μιᾶς γίνεται μέσος τῆς δευτέρας, καὶ εἷς μέσος γίνεται ἄκρος εἰς τὴν δευτέραν· οἱ λοιπὰ ὅροι εἰσὶν ἀνάλογοι.

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha:\ \beta = \gamma:\ \delta \\ \gamma:\ \delta = \varepsilon:\ \zeta \end{array}\right. \ \text{καὶ} \ \left\{\begin{array}{l} \alpha:\ \beta = \gamma:\ \delta \\ \beta:\ \varepsilon = \gamma:\ \zeta \end{array}\right. \ \text{καὶ} \ \left\{\begin{array}{l} \alpha:\ \beta = \gamma:\ \delta \\ \varepsilon:\ \alpha = \zeta:\ \gamma \end{array}\right.$$

ἄρα καὶ $\alpha:\ \beta = \varepsilon:\ \zeta$· ἄρα καὶ $\alpha:\ \varepsilon = \gamma:\ \zeta$· ἄρα καὶ $\varepsilon:\ \beta = \zeta:\ \delta$

$$\begin{cases} 3: 6 = 7: 14 \\ 7: 14 = 20: 40 \end{cases} \quad \begin{cases} 6: 9 = 4: 6 \\ 9: 15 = 6: 10 \end{cases} \quad \begin{matrix} 3: 6 = 7: 14 \\ 9: 3 = 21: 7 \end{matrix}$$

$$3: 6 = 20: 40 \qquad 6: 15 = 4: 10 \qquad 9: 6 = 21: 14$$

Ὅτι δ' ὀρθὸν τὸ εἶδος τοῦτο τῶν ἀναλογιῶν, πολλαπλασίασον τοὺς ὅρους τῶν ὁμολόγων, καὶ φέρε αὐτοὺς εἰς ἐλαχίστους ὅρους, καὶ αἱ ἀναλογίαι αὗται ἐξέρχονται· τοῦτο καλοῦσι, Δἰ ἴσου.

§. 488. ια΄. Ἐὰν δὲ δύω ἀναλογιῶν οἱ πρῶτοι καὶ οἱ τρίτοι ὅροι ἴσοι, ἢ οἱ δεύτεροι καὶ τέταρτοι, ἔσονται καὶ οἱ λοιποὶ ὅροι ἀνάλογοι.

$$\begin{cases} \alpha: \beta = \gamma: \delta \\ \alpha: \varepsilon = \gamma: \vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha: \beta = \gamma: \delta \\ \varepsilon: \beta = \vartheta: \delta \end{cases}$$

$$\beta: \varepsilon = \delta: \vartheta. \qquad \varepsilon: \alpha = \vartheta: \gamma.$$

$$\begin{cases} 3: 6 = 8: 16 \\ 3: 9 = 8: 24 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8: 12 = 6: 9. \\ 4: 12 = 3: 9 \end{cases}$$

$$6: 9 = 16: 24. \qquad 8: 4 = 6: 3.$$

Τοῦτο δὲ τὸ εἶδος δείκνυται, ἐὰν ἀνάπαλιν μίαν τῶν ἀναλογιῶν μεταβάλλωμεν, καὶ εἶτα πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰς εἰς μίαν ἀναλογίαν, καὶ εἰς ἐλαχίστους ὅρους φέρωμεν, τότε αἱ ἄνω ἀναλογίαι ἐπιφέρονται. Τοῦτο δὲ τὸ εἶδος τῶν ἀναλογιῶν καλεῖται, Δἰ ἴσου τεταγμένη.

§. 489. ιβ΄. Ἐὰν εἰς δύω ἀναλογίας πρῶτον οἱ δύω ἄκροι ὅροι ἴσοι ὦσι· δεύτερον ἐὰν οἱ δύω μέσοι· καὶ τρίτον ἐὰν οἱ δύω ἄκροι ὅροι ὦσιν ἴσοι τῆς μιᾶς ἀναλογίας τοῖς δυσὶ μέσοις ὅροις τῆς ἑτέρας, οἱ λοιποὶ ὅροι εἰσὶν ἀντιςρόφως ἀνάλογοι.

α΄.	$\begin{cases} \alpha : \beta = \gamma : \delta \\ \beta : \varepsilon = \zeta : \delta \end{cases}$		$\begin{cases} 3 : 6 = 5 : 10 \\ 3 : 2 = 15 : 10 \end{cases}$
	$\beta : \varepsilon = \zeta : \gamma.$		$6 : 2 = 15 : 5$
β΄.	$\begin{cases} \alpha : \beta = \gamma : \delta \\ \varepsilon : \beta = \gamma : \zeta \end{cases}$		$\begin{cases} 3 : 6 = 5 : 10 \\ 15 : 6 = 5 : 2 \end{cases}$
	$\alpha : \varepsilon = \zeta : \delta.$		$3 : 15 = 2 : 10$
γ΄.	$\begin{cases} \alpha : \beta = \gamma : \delta \\ \varepsilon : \alpha = \delta : \zeta \end{cases}$		$\begin{cases} 3 : 6 = 5 : 10 \\ 15 : 3 = 10 : 2 \end{cases}$
	$\varepsilon : \beta = \gamma : \zeta$		$15 : 6 = 5 : 2.$

Τοῦτο δὲ τὸ εἶδος ἀκούει, Δι' ἴσου τεταγμένως· δείκνυται δὲ, ἐὰν τὴν μίαν ἀναλογίαν ἀνάπαλιν μεταποιήσωμεν, καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ μίαν ἀναλογίαν κάμομεν, καὶ τοὺς ὅρους αὐτῆς εἰς ἐλαχίςους φέρομεν.

§. 490. ιγ΄. Ἐὰν ὁ τέταρτος ὅρος μιᾶς ἀναλογίας ἴσος ἦ τῷ τρίτῳ ὅρῳ τῆς ἑτέρας, τότε προκύπτει νέα ἀναλογία, ἐν ᾗ τὸ παραγόμενον ἐκ τῶν πρώτων ὅρων πρὸς τὸ παραγόμενον ἐκ τῶν δευτέρων, ὡς ὁ τρίτος ὅρος τῆς πρώτης πρὸς τὸν τέταρτον τῆς δευτέρας.

$\alpha : \beta = \gamma : \delta$	$3 : 6 = 5 : 10$
$\varepsilon : \zeta = \delta : \eta$	$4 : 8 = 10 : 20$
$\alpha\varepsilon : \beta\zeta = \gamma : \eta$	$12 : 48 = 5 : 20$

Ἡ δεῖξις τούτων σαφὴς, ἐὰν διὰ πολλαπλασιασμοῦ μίαν τῶν δύω ποιήσωμεν· τοῦτο τὸ εἶδος Μέθοδος τῶν πέντε ἀκούει εἰς τὴν κοινὴν ζωὴν, περὶ ἧς ἡμεῖς ἐροῦμεν ὕςερον.

§. 491. ιδ΄. Ἐὰν δὲ πολλαὶ ἀναλογίαι ὦσι τοιαῦται, ὥςε ὁ τέταρτος ὅρος τῆς μιᾶς νὰ γίνεται τρίτος τῆς ἑξῆς, καὶ ὁ τέταρτος ταύτης, τρίτος τῆς ἑπομένης κ. τ. λ.

ἐξέρχεται μία μόνη ἀναλογία, ἐν ᾗ τὸ παραγόμενον ὅλων τῶν πρώτων ὅρων πρὸς τὸ παραγόμενον ὅλων τῶν δευτέρων εἶναι, ὡς ὁ τρίτος ὅρος τῆς πρώτης ἀναλογίας πρὸς τὸν τέταρτον ὅρον τῆς ἐσχάτης ἀναλογίας.

$\alpha : \beta = \gamma : \delta$	$2 : 3 = 4 : 6$
$\varepsilon : \zeta = \vartheta : \eta$	$5 : 10 = 6 : 12$
$\vartheta : \iota = \eta : \kappa$	$4 : 2 = 12 : 6$
$\lambda : \mu = \kappa : \zeta$	$7 : 21 = 6 : 18$
$\alpha\varepsilon\vartheta\lambda : \beta.\zeta\mu = \gamma : \zeta$	$2.5.4.7 : 3.10.2.21 = 4 : 18.$

Καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ἀπαρτίζεται ἡ καλουμένη Ἅλυσος, ἣν ἡμεῖς ὕστερον διασαφήσωμεν.

§. 492. ιέ. Ἐὰν δὲ λόγοι πολλοὶ ὦσιν ἴσοι, τὸ κεφάλαιον τῶν ἡγουμένων ὅρων πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν ἑπομένων ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ὁ ἡγούμενος ὅρος ἑκάστου λόγου πρὸς τὸν ἑπόμενον τοῦ αὐτοῦ, ἤτοι ἐξέρχεται νέα ἀναλογία ἐκ τοῦ κεφαλαίου τῶν ἡγουμένων, καὶ τῶν ἑπομένων, καὶ ἑνὸς ἡγουμένου καὶ ἑνὸς ἑπομένου ἑκάστου τούτων τῶν λόγων.

$\alpha : \alpha\pi$	$3 : 9$
$\beta : \beta\pi$	$2 : 6$
$\gamma : \gamma\pi$	$4 : 12$
$\delta : \delta\pi$	$5 : 15$
$\varepsilon : \varepsilon\pi$	$14 : 42 = 3 : 9$ ἢ $2 : 6$ κ. τ. λ.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon : \alpha\pi+\beta\pi+\gamma\pi+\delta\pi+\varepsilon\pi = \alpha : \alpha\pi.$ ἢ $\beta : \beta\pi.$ ἢ $\gamma : \gamma\pi.$ κτ:

Διότι τὸ ἐκ τῶν ἄκρων κἀνταῦθα ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων, καλείσθω Διὰ συνάψεως, καὶ τοσαῦται αἱ μεταβολαὶ, καὶ μετατροπαὶ τῶν ἀναλογιῶν, ἃς ὁ Μαθηματικὸς πρέπει ἐξ ἀνάγκης νὰ προξεύρῃ, ἐὰν θέλῃ νὰ προχωρήσῃ εἰς τῆς Μαθηματικῆς τὰ ἐνδότερα· διότι ἡ ἀναλογία οὐ μόνον ψυχὴ εἶναι τῆς Μαθηματικῆς, ἀλλὰ καὶ λυχνία πολύφωτος. ἥ τις τὰ σκοτεινότατα, καὶ τὰ ἄποπτα μέρη αὐτῆς δαψιλῶς ἐπιφωτίζει, καὶ ὁρατὰ τοῖς ὀρθῶς αὐτῇ χρωμένοις ποιεῖ, ὡς ἡ πεῖρα, καὶ τὰ ἀκόλουθα πιςοποιήσουσι τὸ λεγόμενον.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ Ἁρμονικῆς Ἀναλογίας.

§. 493. Εἴρηται (§. 468). ὅτι ἡ ἁρμονικὴ Ἀναλογία συνίςαται καὶ αὕτη ὑπὸ ὅρων τεσσάρων, Α, Β, Γ, Δ, οἵτινες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους οὕτως, ὥςε ἡ διαφορὰ τῶν δύω πρώτων Α—Β πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύω δευτέρων Γ—Δ εἶναι ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν ἔσχατον τέταρτον, οὕτω Α—Β: Γ—Δ=Α: Δ. Ἐὰν λοιπὸν τέσσαρες ἀριθμοὶ οὕτως ἔχουσιν, ἐν ἁρμονικῇ ἀναλογίᾳ εἰσὶν, ὡς 6, 8, 12, 18. διότι 8—6: 18—12=6: 18. καὶ φανερὸν ὅτι μεταξὺ τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου λόγου 6: 18 οἱ δύω ὅροι οἱ λοιποὶ 8 καὶ 12 παρενείρονται, ἀλλὰ τοιοῦτοι, ὥςε ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τὸν ἡγούμενον ὅρον 6 ἀφέλωμεν, ἀπὸ δὲ τοῦ ἑτέρου τοῦ ἑπόμενον τὸν ἕτερον ἀφέλωμεν, νὰ ἔχωσι λόγον αὗται αἱ διαφοραὶ, ὡς ὁ λόγος ὁ προσληφθείς. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος οὗτος Γεωμετρικὸς (§. 456). ἄρα ἐν ἑκάςῳ γεωμετρικῷ λόγῳ, ἐὰν δύω ὅρους κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον παρενείρωμεν, Ἀναλογία συνίςαται ἁρμονική. Αὐτῇ τῇ ἁρμονικῇ ἀναλογίᾳ ἐχρῶντο οἱ ἀρχαιότεροι εἰς τὴν ἁρμονίαν τοῦ παντὸς, καὶ εἰς τὴν Μουσικὴν, ἀφ' ἧς ἐπινενόηται τὸ τετράχορδον, καὶ ἀφ' οὗ παρήχθη καὶ ἡ ἡμετέρα Μουσική, ὡς ἐν ταῖς θείαις ἡμῶν τελεταῖς ψάλλεται. Πῶς ὅμως ἐκεῖνοι αὐτῇ ἐχρῶντο, ἄλλοις μελέτω· ἡμεῖς ὅμως εἰς τὸ παρὸν μόνον τὴν ποικιλίαν αὐτῆς μαθηματικῶς ἐξετάσωμεν.

§. 494. Ἐὰν θῶμεν τῆς ἁρμονικῆς ἀναλογίας τοὺς τέσσαρας ὅρους Α, Β, Γ, Δ, ἄλλως ὅμως ἀναλογία οὐ δύναται, εἰ μὴ ἀπὸ δύω λόγων· δυνάμεθα καὶ εἰς αὐτὴν δύω λόγους νοῆσαι Α, β, καὶ Γ, δ, καὶ οἱ ἡγούμενοι ὁ Α καὶ Γ, ἑπόμενοι δὲ ὁ Β, καὶ Δ, καὶ ἔτι ὁμόλογοι οἱ Α καὶ Γ καὶ οἱ ΒΔ· λοιπὸν αἱ ζητούμεναι διαφοραὶ ἀπὸ τῶν ὅρων τῶν δύω λόγων εὑρίσκονται, ἢ ἐὰν οἱ ἡγούμενοι ἀπὸ τῶν ἑπομένων ἀφαιροῦνται, ὡς εἰς τὴν δε 6, 9, 18, 3: 9=6: 18· ἢ οἱ ἑπόμενοι ἀπὸ τῶν ἡγουμένων, ὡς εἰς τὴν δε 3, $\frac{1}{2}$, 44, 24 οὕτω $2\frac{1}{2}$: 20=3: 24· ἄρα καὶ εἰς τοὺς προσληφθέντας γενικοὺς ὅρους Α, Β, Γ, Δ ἀδιάφορον, ἢ οὕτω Α—Β: Γ—Δ=Α: Δ, ἢ οὕτω Β—Α· Δ—Γ=Α: Δ· διὰ νὰ διακρίνωμεν λοιπὸν αὐτὴν τὴν ἁρμονικὴν ἀναλογίαν ἀπὸ τῆς γεωμετρικῆς καὶ ἀριθμητικῆς, χαρακτηρίζομεν αὐτὴν οὕτω Α, Β, Γ, Δ καὶ Α: Δ ὁ λόγος ὁ γεωμετρικὸς νοεῖται ἀεί.

§. 495. Ἐπειδὴ εἰς κάθε ἀναλογίαν ἁρμονικὴν ὁ πρῶτος πρὸς τὸν ἔσχατον ὅρον εἶναι λόγος γεωμετρικὸς (§. 468), ἄρα ἐὰν λάβωμεν οἱονδήποτε λόγον γεωμετρικὸν, τῶν δύω ὅρων τούτων, καὶ παρευείρομεν δύω ἔτι ὅρους, ὡς εἴπομεν, ἀποτελεῖται ἡ ἁρμονικὴ ἀναλογία. Ἄρα ὁ πρῶτος, καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος δίδεται α: δ. διὰ νὰ εὑρίσκωμεν καὶ τοὺς λοιποὺς δύω Β, καὶ Γ, ληφθήτω ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία ἐξ αὐτῶν τῶν τεσσάρων α: δ=Γ: δ οὕτω α—Β: Γ—δ=α: δ· ἄρα καὶ (§. 470)

$$\alpha\delta-\delta B=\alpha\Gamma-\alpha\delta$$

$$2\alpha\delta=\alpha\Gamma+\delta B$$

$$2=\delta\Gamma+\frac{\delta}{\alpha}B$$

$$2\delta-\frac{\delta}{\alpha}B=\Gamma$$

$$\frac{2\alpha\delta-\delta B}{\alpha}=\Gamma\cdot$$

καὶ $$\frac{\delta(2\alpha-B)}{\alpha}=\Gamma\cdot$$

Καὶ αὕτη ἐςὶν ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῶν ἁρμονικῶν ἀναλόγιῶν. Εἰς αὐτὴν ἔτι βλέπομεν ὅτι δύω οἱ ἄγνωςοι ὁ B καὶ ὁ Γ, καὶ ὅταν ὁ εἷς διωρισθῇ, ὁ B, εὑρίσκεται καὶ ὁ Γ· ἐπειδὴ ὅμως ὁ B διαφόρως δύναται νὰ ληφθῇ, ἄρα εἰς ἕνα λόγον γεωμετρικὸν δυνάμεθα διαφόρους μέσους ὅρους παρευρίσκειν, καὶ πολλὰς ἁρμονικὰς ἀναλογίας εὑρίσκειν. Ἐξ αὐτῆς τῆς ἰσότητος μανθάνομεν δεύτερον, ὅτι ὁ B ὅρος $=2\alpha$ οὐδέποτε λαμβάνεται, διότι εὑρίσκομεν $\Gamma=0$· καὶ ἑπομένως τρίτος ὅρος οὐδείς. Μανθάνομεν τρίτον, ὅτι οὔτε $B=2\alpha$ λαμβάνομεν· διότι οἱ λόγοι εἶναι ἴσοι· καὶ ἐξ ἴσων ὅρων, καὶ λόγων ἁρμονία συνίςαται· ἐπειδὴ καὶ οἱ Μουσικοὶ τὸ ἴσον ἀντὶ 0 ἐκλαμβάνουσι. Μανθάνομεν τέταρτον ὅτι οὔτε μείζων ὁ B τοῦ 2α λαμβάνεται· διότι τότε εὑρίσκεται ὁ Γ ἀποφατικὸς, καὶ ἔςαι ὁ δεύτερος λόγος ἀπὸ ἀνομοιοειδῶν ὅρων, καὶ ἐναντιοῦται εἰς τὴν φύσιν τοῦ λόγου (§. 453.). Ὁ ταῦτα καλῶς παρατηρῶν, εὑρίσκει ἀναλογίας ἁρμονικὰς διαφόρους ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως

$\frac{\delta(2\alpha-B)}{\alpha}=\Gamma$· ἔςω ὁ Γεωμετρικὸς λόγος 4: 12=α: δ· ἄρα $\frac{12(8-B)}{4}=\Gamma$· ἐὰν δὲ Β=3 θῶμεν, ἔςαι Γ=15· καὶ ἡ ὁρμονικὴ ἀναλογία 4, 3, 15, 12· διότι 1: 3=4: 12· ἐὰν δὲ Β=5, ἔςαι Γ=9, καὶ ἡ ἀναλογία 4, 5 9, 12· ἐὰν δὲ Β=7· ἔςαι Γ=3· καὶ ἡ ἀναλογία 4, 7, 3, 12. ἐὰν δὲ $B=2\frac{1}{2}$ · ἔςαι $\Gamma=\frac{12(8-2\frac{1}{2})}{4}=3.5\frac{1}{2}=16\frac{1}{2}$, καὶ ἡ ἀναλογία 4, $2\frac{1}{2}$, $16\frac{1}{2}$, 12· καὶ ὅπως ἂν λάβῃς τὸν Β ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρων τρόπων, διάφορος ὁρμονικὴ ἀναλογία συνίςαται. Ἐὰν δὲ ἕτερον γεωμετρικὸν λόγον λάβωμεν 7: 28=α: δ, εὑρίσκομεν πάλιν διὰ τῆς ἐξισώσεως $\frac{28(2.\ 7-B)}{7}=\Gamma$· ἤτοι 4(2·7—Β)=Γ ἄλλας ἀναλογίας· δηλ: ἐὰν θῶμεν Β=3, ἔςαι Γ=44· καὶ ὁρμονικὴ ἀναλογία 7, 3, 44, 28· ὅτι 4: 16=7: 28· ἐὰν δὲ Β=5, ἔςαι Γ=36· ἄρα 5, 5 36. 28· ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

§. 496. Ἐκ τῆς γενικῆς αὐτῆς ἐξισώσεως $\frac{\delta(2\alpha-B)}{\alpha}$ =Γ εὐκόλως τὰ λοιπὰ εὑρίσκομεν.

α΄. Ἐὰν δοθῶσιν οἱ τρεῖς ὅροι Α, Β, Γ, ὁ τέταρτος Δ νὰ εὑρεθῇ· ἔςω Α=α· Β=β· Γ=γ, καὶ οὗτοι οἱ δοθέντες· θῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\delta(2\alpha-B)}{\alpha}=\Gamma$ τὰ ἴσα, καὶ ἔσαι $\frac{\Delta(2\alpha-\beta)}{\alpha}=\gamma$, καὶ $\Delta=\frac{\alpha\gamma}{2\alpha-\beta}$. Δοθήτωσαν οἱ τρεῖς $\alpha=7$. $\beta=3$. $\gamma=44$, καὶ εὑρίσκεται ὁ τέταρτος $B=\frac{308}{14-3}$ $=\frac{308}{11}=28$· ἐὰν δὲ δοθῶσιν $\beta=4$ $\beta=3$ $\Gamma=15$, ἔσαι $\Delta=$ $\frac{60}{8-3}=12$.

β΄. Ἐὰν οἱ λοιποὶ δοθῶσι καὶ ὁ Γ ζητῆται ἔσαι $\Gamma=\frac{\delta(2\alpha-\beta)}{\alpha}$.

γ΄. Ἐὰν δὲ ὁ Β ζητῆται, ἔσαι $\delta=\frac{\alpha\gamma}{2\alpha-B}$, ἢ $\alpha\gamma=2\alpha\delta$ $-\delta B$. ἤτοι $\delta=2\alpha\delta-\alpha\gamma$, καὶ $B=\frac{2\alpha\delta-\alpha\gamma}{\delta}$.

δ΄. Ἐὰν δ' ὁ Α ζητῆται, ἔσαι $\delta\beta=\frac{2A\delta-A\gamma}{\delta\beta=(2\delta-\gamma)A}$ καὶ $A=\frac{\delta\beta}{2\delta-\gamma}$.

Καὶ οὕτως ἀπὸ μιᾶς ἐξισώσεως $\frac{\delta(2\alpha-\beta)}{\alpha}=\gamma$ εὑρίσκεται ἕκασος ὅρος, ἐὰν δοθῶσιν οἱ τρεῖς.

§. 477. Ἐὰν δὲ εἰς αὐτὴν ἐξίσωσιν θῶμεν Β=Γ, ἔσαι ἡ ἐξίσωσις $\frac{\Delta(2A-\Gamma)}{A}=\Gamma$, καὶ $\frac{\Delta(2A-\Gamma)=A\Gamma}{2A\Delta=A\Gamma+\Gamma\Delta}$

$\frac{2A\Delta}{A=\Delta}=\Gamma$ ἐξίσωσις, ἐν ᾗ μόνον τρεῖς ὅροι εὑρίσκονται Α, Γ, Δ, ὡς 2, 3, 6, ἐὰν τοῦ λόγου 2: 6=Α: Δ ἐκλάβωμεν. Φαίνεται λοιπὸν ὅτι μεταξὺ ἑνὸς γεωμετρικοῦ λόγου παρενείρομεν ἕνα ὅρον τοιοῦτον, ὥςε ἡ διαφορὰ μεταξὺ αὐτοῦ, καὶ τοῦ ἡγουμένου ὅρου τοῦ Γεωμετρικοῦ πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτοῦ, καὶ τοῦ ἑπομένου ὅρου νὰ ἔχῃ οὕτως, ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν τρίτον· καὶ οἱ τοιαῦτοι ὅροι λέγονται Ἐν ἀναλογίᾳ ἁρμονικῇ συνεχεῖ· καὶ εἶναι ἡ αὐτὴ ἀναλογία ἡ ἀνωτέρω, εἰμὴ ὁ Β=Γ ἐλήφθη· διὰ τοῦτο ὁ αὐτὸς γίνεται καὶ ἑπόμενος καὶ ἡγούμενος· καὶ γίνεται ὁ αὐτὸς, καὶ μειωτέος, καὶ ἀφαιρετέος, καὶ λέγονται καὶ αὐτοῦ Α, Γ, Δ. οἱ μὲν Α καὶ Δ ἄκρα· ὁ δὲ Γ μέσος ἁρμονικῶς ἀνάλογος. Ὅθεν ὅταν δοθῶσι τὰ δύω ἄκρα, ὡς ὅροι λόγου Γεωμετρικοῦ, εὐκόλως ὁ τρίτος εὑρίσκεται κατὰ τὸν τύπον $\Gamma=\frac{2\,\Delta A}{A+\Delta}$. ἐὰν δ' ὁ λόγος 5: 12, ἔςαι $\Gamma=\frac{120}{17}=7\frac{1}{17}$. ἄρα ἡ ἀναλογία 5, $7\frac{1}{17}$, 12. ἐὰν δὲ 6: 60, ἔςαι $\Gamma=\frac{720}{66}=11\frac{17}{33}$. ἄρα 6, $11\frac{17}{33}$, 60. Ὁμοίως ἐὰν 10: 40, ἔςαι $\Gamma=\frac{2.\ 40.\ 10}{50}=16$. καὶ ἡ ἀναλογία 10, 16, 40.

Ἐὰν δ' ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ μέσος δοθῇ, καὶ ζητῆται ὁ Δ, εὑρίσκεται ἀπ' αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως $\Gamma=\frac{2\,A\Delta}{A+\Delta}$, οὕτως $\Gamma A+\Gamma\Delta=2A\Delta$. ἤτοι

$\Gamma\Lambda = 2\Lambda\Delta - \Gamma\Delta$

$\Gamma\Lambda = (2\Lambda - \Gamma)\Delta$

$\frac{\Gamma\Lambda}{2\Lambda-\Gamma} = \Delta$. ὁ δ' Α εὑρίσκεται $= 2\Lambda\Delta - \Gamma\Lambda$ καὶ $\Lambda = \frac{\Gamma\Delta}{2\Delta-\Gamma}$.

§. 498. Ἀπὸ δὲ τοῦ τύπου $\Delta = \frac{\Lambda\Gamma}{2\Lambda-\Gamma}$ δυνάμεθα καὶ ὅρους πολλοὺς Ἐν συνεχεῖ εὑρίσκειν ἀναλογίᾳ ἁρμονικῇ. Δεδόσθωσαν οἱ Α καὶ Γ, 10, καὶ 12, καὶ εὑθήτω ὁ $\Delta = \frac{120}{8} = 15$. ἔτι γενέσθω Α καὶ Γ ὁ 12, καὶ 15. καὶ εὑρίσκομεν $\Delta = \frac{180}{9} = 20$. Ἔςω τρίτον Α καὶ Γ 15. καὶ 20, καὶ εὑρίσκεται ὁ $\Delta = \frac{300}{10} = 30$. Ἔςω τέταρτον Α καὶ Γ 20, καὶ 30, καὶ εὑρίσκομεν τὸν $\Delta = \frac{600}{10} = 60$. Ἐὰν ἔτι γένωσιν ὁ Α καὶ Γ 30 καὶ 60, εὑρίσκεται $\Delta = \frac{1800}{30} = 60$. καὶ εἶναι ὁ προευρεθεὶς, καὶ οὕτω περαιτέρω ἡ πρόοδος δὲν προβαίνει. Ἄρα οἱ ὅροι 10: 12, 15, 20, 30, 60 εἰσὶν ὅροι ἀναλογικοὶ συνεχεῖς ἁρμονικοί.

§. 499. Εὑρίσκουσι καὶ ἕτερα μεγέθη τρία Α, Β, Γ ἐν ἀναλογίᾳ Ἀνθαρμονικῇ καλουμένῃ· καὶ αὕτη δὲν γίνεται ἀπὸ λόγου γεωμετρικοῦ, ἀλλὰ κατὰ λόγου ἀντίςροφου ἐκείνης· διότι ἐκεῖ ἐγίνετο ὁ ἡγούμενος ὅρος τοῦ γεωμετρικοῦ πρῶτον ἄκρον, καὶ ὁ ἑπόμενος ἔσχατον· ὅθεν ἀναλογία ἀνθαρμονικὴ εἶναι, ὅταν ἡ διαφορὰ τοῦ πρώτου ὅρου καὶ τοῦ δευτέρου, ἔχῃ πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, ὡς ὁ τρίτος πρὸς τὸν πρῶτον. Ἐὰν λοιπὸν θῶμεν τὸν τρίτον Γ καὶ τὸν πρῶτον Α, ἔςαι ὁ Γεωμετρικὸς λόγος Γ: Α. λοιπὸν πρέπει μεταξὺ αὐτῶν τῶν ὅρων νὰ παρενείρωμεν τοιοῦτον τρίτον ὅρον Β, ὥςε ἡ διαφορὰ αὐτοῦ καὶ τοῦ Α πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτοῦ καὶ τοῦ Γ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Α, ἤτοι $B-A: \Gamma-B=\Gamma: A$. καὶ τοιαύτη ἡ συνεχὴς ἀνθαρμονικὴ ἀναλογία· ἀλλ' ἔςαι (§. 470). καὶ $AB-AA=\Gamma\Gamma-B\Gamma$. ἤτοι $AB+B\Gamma=\Gamma^2+A^2$ καὶ $B=\frac{\Gamma^2+A^2}{\Gamma+A}$. καὶ γίνεται φανερὸν, ὅτι, ἐὰν διέλωμεν τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων τοῦ γεωμετρικοῦ λόγου διὸ τοῦ κεφαλαίου τῶν ῥιζῶν, ἤτοι τῶν ὅρων αὐτῶν, εὑρίσκομεν τὸν μέσον ὅρον τῆς ἀνθαρμονικῆς συνεχοῦς ἀναλογίας. Ἔςω ὁ γεωμετρικὸς ὅρος $\Gamma: A=6: 3$ ἄρα $B=\frac{36+9}{6+3}=5$, καὶ ἡ ἀναλογία 3, 5, 6. Ἔςω ἔτι ὁ λόγος 8: 6. ἄρα $B=\frac{64+36}{14}=\frac{100}{14}=7\frac{1}{7}$. καὶ ἡ ἀναλογία $6, 7\frac{1}{7}, 8$. διότι $1\frac{1}{7}: \frac{6}{7}=8: 6$, ἤτοι $\frac{8}{7}: \frac{6}{7}=8: 6$. ἄρα $8: 6=8: 6$· δηλ: ἐὰν ἠθέλομεν, νὰ μὴν ἐξέλθῃ ἡ ἀναλογία κλασματικὴ, ἔπρεπεν ἑπταπλάσιον τὸν λόγον 8: 6 νὰ λάβωμεν.

§. 500. Ἐὰν δὲ θέλωμεν τὸ ἓν ἄκρον νὰ εὕρωμεν, ὅταν δοθῇ ὁ μέσος, καὶ τὸ ἕτερον ἄκρον, εὐκόλως τοῦτο εὑρίσκομεν ἀπὸ τῆς ἄνω (§. 499.) ἐξισώσεως $AB-A^2=$

$\Gamma^2-B\Gamma$ ἐὰν δηλ: τὸ A ζητῆται ἔςαι $A^2-AB=B\Gamma-\Gamma^2$· καὶ λύεται αὕτη ἡ ἐξίσωσις κατὰ τὰς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ (§. 417.)· διότι ἔςαι

$$A^2-AB=B\Gamma-\Gamma^2 \quad \Big| +\frac{B^2}{4}$$

$$A^2-AB+\frac{B^2}{4}=B\Gamma-\Gamma^2+\frac{B^2}{4} \quad \Big| \sqrt{}$$

$$A-\frac{B}{2}=\pm\sqrt{\left(B\Gamma-\Gamma^2+\frac{B^2}{4}\right)}$$

καὶ $A=\frac{B}{2}\pm\sqrt{\left(B\Gamma-\Gamma+\frac{B^2}{4}\right)}$· οὕτως εὑρίσκομεν καὶ τὸν Γ καὶ τοσαῦτα περὶ τῆς συνεχοῦς.

§. 501. Δὲν εἶναι δύσκολον ἤδη καὶ τὴν διακεκριμένην ἀνθαρμονικὴν ἀναλογίαν μαθεῖν· διότι εἶναι τέσσαρες ὅροι, ὥςε ἡ διαφορὰ τῶν δύω πρώτων πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύω ἐσχάτων εἶναι, ὡς ὁ τέταρτος ὅρος πρὸς τὸν πρῶτον, ἤτοι $A-B : \Gamma-\Delta=\Delta : A$· ἐὰν δὲ καὶ ταύτην, ὡς ἀνωτέρω πολυπραγμονήσωμεν, εὑρίσκομεν ὅλους τοὺς ὅρους, καὶ τὰ λοιπά· ἀλλ' ἡμεῖς περαιτέρω περὶ τούτων σιωπῶμεν, ὅτι ὁ καρπὸς ἀπὸ τούτων πάνυ ἰσχυρός· πλὴν τοῦτο λέγομεν, ἐὰν ὁ λόγος ὁ γεωμετρικὸς διαφόρως μεταβληθῇ, καὶ οἱ ὅροι αὐτοῦ γένωσιν, ὁτὲ B ὅρος, ὁτὲ Γ, ὁτὲ ἀνάπαλιν, εὑρίσκονται ὅλα τὰ εἴδη τῶν ἁρμονικῶν ἀναλογιῶν, ἃς ὁ Κύριος Κλυγέλιος διαλαμβάνει ἐν τῷ ἑαυτοῦ λεξικῷ.

ΜΕ΄ΡΟΣ Β΄.

Περὶ Μεθόδων.

§. 502. Περὶ Μεθόδων ἐπιγράφομεν τοῦτο τὸ μέρος, ἐπειδὴ ἐφαρμόζοντες τὰς μέχρι τοῦδε εἰρημένας ἀναλογίας εἰς τὰ κατὰ μέρος πράγματα, μέθοδον τινὰ τηροῦμεν, πῶς ἡ ἀναλογία καταςρώνεται, καὶ ποῦ ὁ πρῶτος ὅρος, ποῦ ὁ Β΄, καὶ ὁ Γ΄, καὶ οἱ λοιποὶ τίθενται, καὶ ἅμα τὶς ὁ πολλαπλασιάζων, καὶ τὶς ὁ διαιρῶν, καὶ τίνα σχέσιν πρὸς τὰ πράγματα ἕκαςος τούτων ἔχουσι. Διὰ τὸ εἶναι ὅμως τὰς μεθόδους πλείονας, καλὸν καὶ περὶ τούτων ἰδίως νὰ διαλάβωμεν.

ΚΕΦΑ΄ΛΑΙΟΝ Α΄.

Περὶ τῆς μεθόδου τῶν Τριῶν.

§. 503. Ἐπειδὴ μέχρι τοῦ δε ὅλην τὴν φύσιν, καὶ τὸ σημαινόμενον, καὶ ἅμα τὰς ἰδιότητας τῆς ἀναλογίας ἐμάθομεν λείπεται ἤδη νὰ μάθωμεν, καὶ πῶς αὐτὴν μεταχειριζόμεθα· διότι εἰς τὴν πρᾶξιν ἑκάςη ἀναλογία ἁπλῆ κοινῶς Μέθοδος τῶν Τριῶν ὀνομάζεται καὶ εἶναι ταὐτὸν, ἢ ἀναλογίαν ἁπλῶς νὰ εἴπουμεν ἢ μέθοδον τῶν τριῶν. Μέθοδον προσεῖπον καὶ αὐτὴν, καθ᾽ ὅ, τι τάξιν τινὰ καὶ εἰς αὐτὴν τηροῦμεν πότε οὗτος ὁ ὅρος πρῶτος νὰ ληφθῇ, καὶ ὁ ἕτερος ὁ δεύτερος, καὶ ἐκεῖνος τρίτος κ. τ. λ. καὶ τίνες τούτων γίνονται παράγοντες, καὶ ποῖος διαιρέτης κ. τ. λ. Τῶν τριῶν δὲ, καθότι τρεῖς ὅροι μόνον τῆς ἀναλογίας δίδονται, καὶ ὁ τέταρτος εὑρίσκεται, ὡς ἀνωτέρω ἐμάθομεν (§. 476). Ἡ χρῆσις δ' αὐτῆς εἶναι πολυειδῶς ἐκτεταμένη εἰς τὰ πράγματα, καὶ εἰς τὴν κοινὴν ζωὴν, ὥςε ἄνευ αὐτῆς ἀδύνατον ἦτον νὰ τηρηθῇ ἡ καλλίςη ἁρμονία μεταξὺ τῶν κοινωνιῶν τῆς διοικήσεως, πολιτείας, οἰκονομικῆς, ἐμπορίου, τεχνῶν, καὶ ἐπιςημῶν κ. τ. λ. διὸ καὶ πολλοὶ Μέθοδον χρυσῆν εἰπεῖν οὐκ ὤκνησαν.

§. 504. Ἐν τῷ βίῳ τούτῳ, καὶ ἐν τῷ παντὶ τούτῳ τῷ αἰσθητῷ, καὶ ὁρωμένῳ, κανένα πρᾶγμα δὲν εὑρίσκομεν ἁπλῶς καὶ ἀπολελυμένως αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ ὑφεςὸς, χωρὶς νὰ ἔχῃ σχέσιν τινὰ πρὸς ἕτερον. Σχέσις δὲ τοὐλάχιςον πρὸς δύω γίνεται· καὶ τὴν τοιαύτην σχέσιν ἡμεῖς Λόγον ἀνωτέρω εἰρήκαμεν (§. 453). Ἐὰν δὲ εὑρεθῶσι λόγοι τοιοῦτοι ἴσοι τοὐλάχιςον δύω, Ἀναλογία γίνεται (§. 468). διότι ἡ Ἀνὰ πρόθεσις ἐνταῦθα ἰσότητα λόγων σημαίνει· ἄρα ὅπου σχέσις, καὶ λόγος, ἐκεῖ καὶ ἀναλογία ἀποτελεῖται· οὕτω μεταξὺ δύω τινῶν εἰς τὰ συναλλάγματα, ἐὰν αὐτὰ ἔχωσι λόγον τινὰ, καὶ αἱ τούτων τιμαὶ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον· ἐὰν δηλ: ἓν Κοιλὸν σίτου ἔχῃ λόγον πρὸς τὰ πέντε κοιλὰ ὑποπενταπλάσιον, τῷ ὄντι καὶ ἡ τιμὴ ἐκείνου πρὸς τὴν τιμὴν τούτων ὑποπενταπλάσιος· καὶ ἐπειδὴ δύω ἴσοι λόγοι εἶναι, ἀναλογία συνίςαται· διότι ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς εἶναι 2 γρ. καὶ τῶν πέντε χ, γίνεται ἡ ἀναλογια $1 : 5 = 2 : \chi$. καὶ εὑρίσκεται τὸ $\chi \frac{5.\ 2}{1} = 10$. Ἔτι ἐὰν δοῦλος εἰς ἕνα χρόνον λαμβάνῃ μισθὸν 60 γρ: εἰς 5 μῆνας ἄρα τὶ λαμβάνει; διότι καὶ αὐτοῦ ὁ χρόνος πρὸς τοὺς μῆνας ἔχει λόγον τινὰ ὡς 12: 5. ἀλλὰ καὶ ὁ μισθὸς 60 γρ. ἔχει λόγον πρὸς ἕνα μισθὸν χ. διότι ὅσῳ ὀλιγώτερον δουλεύει, τόσῳ ὀλιγώτερον λαμβάνει καὶ ὅσῳ περισσότερον, πάλιν περισσότερον. ὅθεν ἡ ἀναλογία 12 μὴν: 5 μὴν $=60: \chi$ καὶ $\chi=\frac{60.\ 5}{12}=25$ γρ. Οὕτω καὶ ἐὰν χρήματα δανεισθῶσι, τὰ περισσότερα δίδουσι καὶ τόκον πλείονα, τὰ δ' ὀλιγώτερα, ὀλιγώτερον ἀναλόγως· καὶ ἔτι πρὸς τὸν χρόνον· εἰς πλείονα χρόνον, πλέον καὶ ὁ τόκος· εἰς ὀλιγώτερον, ὀλιγώτερος. Καὶ εἰς τὸ διάστημα παμπληθεῖς ἀναλογίαι δίδονται· διότι εἰς εὐρυχωροτέραν ἐκκλησίαν ἀναλόγως εἰσχωροῦσιν ἄνθρωποι πλείονες· καὶ εἰς κῆπον μείζονα ἀναλόγως φυτὰ πλείονα φυτεύονται· καὶ πρὸς τὸ ποιὸν αὐτὸ ἀποβλέποντες ἀναλογίας, καὶ λόγους εὑρίσκομεν, ἐν ἴσῳ διαστήματι κήπων ὁ εὐφορώτερος πλείονα φέρει καρπὸν, καὶ σχεδὸν νὰ εἰπῶ μὲ ἕνα λόγον, ὅπου σύγκρισις γίνεται, καὶ λαμβάνει ὄνομα συγκριτικὸν, ἐκεῖ καὶ λόγος καὶ ἀναλογία· ἐπειδὴ σύγκρισις ἀεὶ μεταξὺ δύω τινῶν τοὐλάχιστον γίνεται, καὶ ταῦτα λόγον τῆς συγκρίσεως ἔχουσιν· ἄρα ὅλα τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀποτελέσματα, ἢ ἄλλα συμβεβηκότα τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν. Οὕτω σφῦραι δύω ἔχουσι λόγον μεταξὺ τῆς βαρύτητος, καὶ τὰ ἀποτελέσματα αὐτῶν, αἱ πληγαὶ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον· ἔτι κατὰ τὸν λόγον, ὃν ἔχουσι μεταξὺ δύω ὑφάσματα, κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν, καὶ οἱ τόποι, οὓς καλύπτουσι, καὶ τὸ βάρος, καὶ ἄλλαι χρήσεις αὐτῶν· καὶ ἔτι μείζων ἡ δύναμις ἑνὸς ἵππου, ἀναλόγως μεῖζον καὶ φορτίον σηκώνει· ἀναλόγως καὶ μείζονα τιμὴν ἔχει κ. τ. λ. ἔτι πλείονες οἱ δαιτυμόνες, πλείονα καὶ τροφὴν, καὶ πόσιν, καὶ τόπον κ. τ. λ. χρειάζονται· καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ, ὅπου μέτρον καὶ μετρητὸν, ἐκεῖ καὶ ἀναλογία χωρεῖ· μέτρα δὲ τὰ χρήματα, βάρη, τὸ διάστημα, χρόνος, χωρητικὰ ἀγγεῖα· κ. τ. λ.

§. 505. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ δύω λόγων ἡ ἀναλογία (§. 468), καὶ ὁ λόγος ἐκ τῆς παραβολῆς δύω ὅρων (§. 457). ἡ δὲ παραβολὴ εἰς ὁμοειδῆ γίνεται· ἄρα ἀναγκαίως ἑκάστη ἀναλογία ἔχει δύω ὅρους ὁμοειδεῖς· οἱ δὲ λοιποὶ δύω ἠμποροῦν νὰ εἶναι καὶ ὁμοειδεῖς μὲ τοὺς ἄλλους καὶ ἑτεροειδεῖς, μεταξὺ ὅμως αὐτῶν ὁμοειδεῖς. Οὕτω λέγομεν ἂν 5 ἄνθρωποι δαπανῶσι 5 γρ. τὴν ἑβδομάδα, οἱ 8 ἄρα ἀναλόγως δαπανῶσι πλείονα, κατὰ λόγον ὁποῦ ἔχουσιν οἱ 5: 8. καὶ ἂν διὰ τρεῖς ὀκάδες τυρὸν δίδω 100 παρ. διὰ 36, παράδες δίδω ἀναλόγως πλείονας κατὰ λόγον 3: 36. ἤτοι 1: 12. ἤτοι δωδεκαπλάσια πληρόνω εἰς 36 ὀκ: ἢ εἰς 3. ὁμοίως καὶ εἰς τὰ λοιπά. Αὐτοῦ φανερὸν, ὅτι οἱ δύω ὅροι ἄνθρωποι 5, καὶ ἄνθρωποι 8. ὀκ: 3, καὶ ὀκ: 36. ὁμοίως ἡ τροφὴ, καὶ οἱ παράδες· δὲν ἠμπορῶ ὅμως νὰ εἰπῶ, ἂν 2 πήχεις, τζόχα μᾶς δίδουσι 23 γρ. αἱ 5 ὀκ: κρασὶ τί μᾶς δίδουσι; διότι πήχεις, καὶ ὀκάδες ἀνομοειδεῖς, ἀγκαλὰ γρ. καὶ γρ. οἱ ὅροι οἱ λοιποί· ὅθεν πρώτη φροντὶς εἶναι, νὰ εὕρωμεν τοὺς ὁμοειδεῖς ὅρους τοὺς δύω, καὶ ἐκ τούτων ὁ εἷς λόγος τῆς ἀναλογίας ἀπαρτίζεται, καὶ ἔτι τοὺς δύω ἄλλους ὁμοειδεῖς, καὶ ἐξ αὐτῶν ὁ ἕτερος λόγος τῆς ἀναλογίας· ἐὰν δὲ μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον θῶμεν τῆς ἰσότητος, ἡ ἀναλογία ἀπαρτίζεται. Οὕτως ἄνω λέγεται τὸ πρόβλημα, οἱ 8 ἄνθρωποι πόσον δαπανῶσιν, ἐὰν οἱ 5 δαπανῶσι παρ: 100· ἢ καὶ οὕτω 5 ἄνθρωποι ἐδαπάνησαν παράδ. 100, οἱ 8 ὅμως πόσους; ἡμεῖς εἰς μὲν τὴν ἔκφρασιν των λέξεων ἀδιαφοροῦμεν, μόνον τοὺς ὅρους τοὺς ὁμοειδεῖς εὑρίσκομεν 5 καὶ 8· καὶ ἔσται ὁ πρώτος λόγος 5: 8· ἔτι ζητοῦμεν καὶ τοὺς δύω ἄλλους λόγους, καὶ εἶναι 100 παρ., καὶ ὁ ἕτερος ἄγνωςος, ἤτοι χ; καὶ ἐκ τούτων ὁ δεύτερος λόγος 100: χ· ὅθεν καὶ ἡ ἀναλογία 5: 8=100: χ· καὶ κατὰ τὰ ἄνω ὁ ἄγνωςος εὑρίσκεται $\frac{8.\ 100}{5}$=χ=160· καὶ τοῦτον τὸν τρόπον μεταχειρίζονται οἱ Μαθηματικοί· δηλ: ὁ λόγος ἕκαςος ἀπὸ δύω ὅρους ὁμοειδεῖς νὰ ἀπαρτίζεται.

§. 506. Ἐπειδὴ ὅμως ἑκάςη ἀναλογία α: β=γ: δ; καὶ ἐναλλὰξ δὲν χαλᾷ (§. 480.) α: γ: δ· ἢ οἱ ἀνωτέρω 5 ἄνθρωποι: 8 ἄνθρωποι =100 γρ: 160 γρ. γίνεται καὶ 5: 100=8: 160· εἰς τὴν κοινὴν ζωὴν μεταχειρίζονται τοῦτον τὸν τρόπον ὡς συνηθέςερον εἰς τὰ προβλήματα· δηλ: ἂν 5 ἄνθρωποι δαπανῶσιν 100, οἱ 8 πόσα; καὶ εἰς αὐτὸν τὸν τρόπον καταςρώνεται ἕκαςος λόγος ἀπὸ τὴν αἰτίαν, καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τὸ ἐδικόν του· εἰς αὐτὸν τὸν τὸν τρόπον οἱ ὁμόλογοι ὅροι εἶναι ὁμοειδεῖς, δηλ. ὁ πρῶτος, καὶ ὁ τρίτος, ὁμοίως ὁ δεύτερος, καὶ ὁ τέταρτος.

§. 507. Ἐις κάθε πρόβλημα, ὁποῦ λύεται διὰ τῆς μεθόδου τῶν Τριῶν, ἤτοι διὰ μιᾶς ἀναλογίας, πάντοτε τρεῖς ὅροι δίδονται, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ δύω εἶναι ὁμοειδεῖς· καὶ ὁ μὲν εἰς ὁμοειδεὶς ἔχει τὸ ἐδικόν του ἀποτέλεσμα γνωςὸν, ἤτοι τὸν σύζυγόν του ὅρον, ὁ δ' ἕτερος ἔχει τὸν σύζυγόν του ἄγνωςον, ἤτοι ζητούμενον· δηλ: ἂν 50 γρ: μᾶς δίδουσι 5 διάφορον, 100 δὲ πόσα; 50 καὶ 100 γρ: εἶναι ὁμοειδεῖς, καὶ ὁ μὲν 50 ἔχει τὸ ἀποτέλεσμα γνωςὸν; ὅςις διὰ τοῦ πόσα, ἤτοι χ ἐκφράζεται· ὁμοίως καὶ ἂν εἰς 3 ἡμέρας περιπατεῖ τις 18 μίλλια, εἰς 5 ἡμέρας πόσα;

μεσιδεῖς μὲν ὁ 3 καὶ 5 καὶ ἐκεῖνος ἔχει τὸ ἀποτέλεσμα 18 γνωςὸν, ὁ δὲ 5 ἄγνωςον. χ. ἄρα 3: 18=5: χ, καὶ χ=30 ὁμοίως καὶ εἰς τὰ λοιπά.

§. 508. Πρέπει ἔτι εἰς καθε τοιοῦτον πρόβλημα νὰ παρατηρήσωμεν εἰς τοὺς ὁμολόγους ὅρους, ἂν αὐξάνων ὁ ἕτερος αὐτῶν, ἢ βραχυνόμενος, νὰ αὐξάνῃ πρέπει καὶ τὸ ἀποτέλεσμα αὐτοῦ, ἢ νὰ βραχύνηται; δηλ: εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα βλέπομεν, ὅσῳ αὐξάνουσιν αἱ ἡμέραι, αὐξάνει καὶ τὸ ἀποτέλεσμα αὐτῶν τὰ μίλλια· καὶ εἰς τὴν δαπάνην τῆς τροφῆς, ὅσῳ αὐξύνει ὁ ἀριθμὸς τῶν αὐτῶν, πλείονος δέονται καὶ τροφῆς· ὅσῳ δ' ὀλιγοςεύει, ἐλάττονος· ὁμοίως καὶ τὰ πλείονα χρήματα πλείονα καὶ τὸν τόκον φέρουσι, τὰ δ' ὀλιγώτερα, ὀλιγώτερον κ. τ. λ. Εἶναι ὅμως ἄλλα προβλήματα, ὅπου δὲν φυλάττουσι τὴν αὐτὴν τάξιν· δηλ: ὅσῳ μείζων ἡ τιμὴ τοῦ σίτου, ὀλιγώτερος ἄρτος πωλεῖται εἰς ἕνα παρὰν, καὶ ὅσῳ ὀλιγωτέρα ἡ τιμὴ τοῦ σίτου, περισσότερος· καὶ ἔτι ὅσῳ πλείονες οἱ ἐργάται ὀλιγώτερον χρόνον ἀποτελοῦσιν ἓν ἔργον, ὅσῳ ὀλιγώτεροι δὲ, εἰς περισσότερον χρόνον· καὶ ἔτι ὅσῳ περισσότερον πρᾶγμα λαμβάνω μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν τῶν χρημάτων, τόσῳ ἀκριβώτερον κ. τ. λ. καὶ ἐξ αὐτῆς τῆς θεωρίας διαιρεῖται ἡ μέθοδος τῶν Τριῶν εἰς τὴν ὀρθὴν, καὶ ἀντίςροφον (ἀντεςραμμένην, ἀντιπεπονθότα κ. τ. λ.) Ὀρθὴ δὲ μέθοδος τῶν τριῶν γίνεται εἰς ἐκείνους τοὺς ὅρους τῶν λόγων, ὅπου ὀρθῶς ἐπιφέρομεν, μείζων ὁ ἡγούμενος ὅρος, μείζονα δεῖ καὶ τὸν ἑπόμενον εἶναι· ἐλάττων, ἐλάττονα καὶ τὸν ἑπόμενον· ἀντίςροφος δὲ γίνεται εἰς ἐκείνους τοὺς λόγους, ὧν ὁ μὲν ἡγούμενος ἐὰν αὔξῃ, ἐλαττοῦται ὁ ἑπόμενος· ἐὰν δ' ἐκεῖνος μειοῦται, οὗτος αὔξει· καὶ περὶ τούτων κατὰ μέρος ἐροῦμεν.

Περὶ τῆς ὀρθῆς Ἀναλογίας ἤτοι τῆς ὀρθῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν.

§. 509. Ὅτι εἰς κάθε ὀρθὴν ἀναλογίαν, ἤτοι μεθόδου τῶν τριῶν Τρεῖς ὅροι δίδονται, καὶ εἷς ἄγνωςος, καὶ ὅτι οἱ δύω ὁμόλογοι γνωςοί, οἱ δὲ δύω λοιποὶ ὁμόλογοι ἔχουσι τὸν ἕνα γνωςὸν, καὶ τὸν ἕτερον ἄγνωςον, ἔγινε φανερόν· πῶς ὅμως οὗτοι καταςρώνονται, τοῦτο ἤδη ἐξετάσωμεν.

α΄. Εἰς κάθε πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν Τριῶν πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν τοὺς δύω ὅρους τοῦ πρώτου λόγου, ἂν αὐξάνη καὶ ὁ δεύτερος, ὅταν ὁ πρῶτος αὐξάνη, ἢ ἐὰν μειοῦται, ὅταν ἐκεῖνος μειοῦται, διὰ νὰ μάθωμεν, ὅτι εἶναι ὀρθὴ μέθοδος τῶν Τριῶν. καὶ ἡ μὲν ἔκφρασις τοῦ προβλήματος γενέσθω, ὅπως ἂν γένη περιπλεγμένη· ἡμεῖς ὅμως μόνον τοὺς τρεῖς ὅρους νὰ λάβωμεν· ὡς ἂν 5 ὀκάδες γάλα τιμῶνται 40 παράδων, αἱ 25 πόσου; εἰς αὐτὸ τὸ πρόβλημα εὑρίσκομεν, ὅτι ὅσω πλείονες, ἢ ὀλιγώτεραι αἱ ὀκάδες, τόσω πλείονες, ἢ ὀλιγώτεροι οἱ παράδες; καὶ κρίνω ὅτι μέθοδος εἶναι τῶν τριῶν ὀρθή.

β΄. Πρέπει νὰ ςοχασθῶμεν εἰς ποῖον ὅρον γίνεται ἡ ἐρώτησις, καὶ οὗτος καλεῖται Ὅρος ἐρωτηματικὸς, καθὼς εἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα αἱ 25 ὀκάδες εἶναι ὁ ἐρωτηματικὸς, διότι δι' αὐτὸν ζητοῦμεν πόσων παράδων τιμᾶται· καὶ οὗτος τίθεται πάντοτε τρίτος ὅρος τῆς ἀναλογίας,

γ΄. Πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν ὁμόλογον αὐτοῦ τοῦ ἐρωτηματικοῦ ὅρου, ἤτοι τὸν ὁμοειδῆ, ὁποῦ εἶναι αἱ 5 ὀκάδες· καὶ οὗτος γίνεται πρῶτος ὅρος τῆς ἀναλογίας.

δ'. Ἐκ τῶν δοθέντων τριῶν μένει ἔτι εἷς ὅρος, καὶ οὗτος δεύτερος ὅρος γίνεται, ὡς οἱ 40 παρ. καὶ ἐὰν καὶ τέταρτον θῶμεν τὸν ζητούμενον χ ἡ ἀναλογία ἀπαρτίζεται· ὡς τὸ ἄνω πρόβλημα 5: 40=25: χ. ἔτι πόσα δίδομεν εἰς 11 πήχεις πανίον, ἐὰν εἰς 2 πήχεις 5 γρ. δῶμεν, αὐτοῦ ὁ ἐρωτηματικὸς ὅρος 11. καὶ ὁ ὁμόλογος αὐτοῦ δύω πήχεις, ἄρα ὁ λοιπὸς 5 γρ. καὶ ἡ ἀναλογία 2: 5=11: χ. καὶ ἔτι ἡ μέθοδος τῶν τριῶν ὀρθή· διότι πλείονες αἱ πήχεις, πλείονα καὶ τὰ χρήματα, καὶ ἀνάπαλιν.

ε'. Ὁ πρῶτος καὶ τρίτος ὅρος πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδὴς ἤτοι τῆς αὐτῆς φύσεως· ὅθεν ἐὰν ὁ εἷς τῶν δύω σημαίνει γρόσια, καὶ ὁ ἕτερος παράδες, πρέπει νὰ φερθῇ καὶ ἐκεῖνος εἰς παράδες, καὶ καθόλου ὅ, τι σημαίνει ὁ ἕτερος, εἰς τὸ αὐτὸ πρέπει νὰ φερθῇ καὶ ὁ ἕτερος· ἄλλως οὐ γίνεται.

ϛ'. Ὁ ἄγνωςος ἐξέρχεται τοιοῦτος, ὅ, τι εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος, ἤτοι παράδες, γρόσια, ὀκάδες, δράμια, λεπτὰ, κ. τ. λ.

ζ. Ὅταν οὕτω καταςρωθῇ ἡ ἀναλογία, εὑρίσκεται ὁ ζητούμενος ὅρος, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν δυνάμει τὸν δεύτερον, καὶ τρίτον ὅρον, καὶ διὰ τοῦ πρώτου δυνάμει διέλωμεν· δυνάμει λέγω διὰ νὰ ἀπαλείφωμεν πρῶτον τοὺς κοινοὺς, ἐὰν εἶναι, παράγοντας, καὶ εἶτα ἐνεργείᾳ πολλαπλασιάζομεν, καὶ διαιροῦμεν, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ὁ ἄγνωςος.

η'. Ἂν τινὲς τῶν δοθέντων ὅρων εἶναι κλασματικοὶ, ἢ καὶ ὅλοι, φέρομεν αὐτοὺς εἰς νόθα κλάσματα, ἐὰν ἔχωσι καὶ ἀκεραίους ὁμοῦ, καὶ εἶτα δυνάμει πολλαπλασιάζομεν, καὶ διαιροῦμεν, καὶ ἐὰν τοῦτο κλάσμα γένῃ μὴ κα-

νονικὸν (227). καὶ ἀφ' οὗ ἀπαλειφθῶσιν οἱ κοινοὶ παράγοντες, πολλαπλασιάζομεν, ὡς εἴπομεν· δηλ $3\frac{3}{4}: \frac{2}{5} = 8 : \chi =$
$\frac{15}{4} : \frac{2}{5} = 8 : \chi$. καὶ $\chi = \frac{\frac{2}{5} \cdot 8}{\frac{15}{4}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 8}{15 \cdot 5} = \frac{64}{75}$.

θ'. Ἐπειδὴ ὅμως πολλάκις περιπλέκουσι τὸ πρόβλημα μὲ φράσεις διαφόρους, καὶ ἀμφιβάλλεται ὁ ἐρωτηματικὸς ὅρος, ἢ πολλάκις αὐτὸς ὁ ἐρωτηματικὸς λόγος ζητεῖται, πρέπει καὶ οὕτω νὰ εὕρωμεν τὴν τάξιν τῶν ὅρων τῆς μεθόδου· νὰ ςοχασθῶμεν τί ζητεῖται, καὶ οὗτος νὰ γένῃ ὁ τέταρτος ὅρος, καὶ ὁ ὁμόλογος αὐτοῦ δεύτερος· ὁ δὲ σύζυγος τούτου πρῶτος, καὶ ὁ ὁμόλογος τούτου τρίτος. ἐπὶ

Παραδείγματος.

1 Ἂν εἰς $3\frac{1}{2}$ πήχεις πανίου δίδομεν 16 γρ, πόσου πανίου λαμβάνομεν μὲ 100 γρ; ὁ ζητούμενος εἶναι πόσας πήχεις πανιου εἶναι $= \chi$. ὁ ὁμόλογος αὐτοῦ $3\frac{1}{2}$ π. καὶ οὗτος ὁ δεύτερος· ὁ δὲ σύζυγος αὐτοῦ 16 γρ. ὁ ὁμόλογός τούτου ὁ 100 γρ. ὁ τρίτος ἄρα $16 : 3\frac{1}{2} = 100 : \chi$, καὶ $\chi = \frac{\frac{7}{2} \cdot 100}{16} = \frac{7 \cdot 25}{2 \cdot 4} = \frac{175}{8} = 21\frac{7}{8}$ ὅτι δ' ὀρθὴ ἡ μέθοδος, εἶναι φανερὸν, διότι εἰς περισσότεραις πήχεις, περισσότερα δίδομεν χρήματα. (α),

2. Πόσα δίδομεν εἰς $9\frac{1}{2}$ ὀκ: κρομμύδια, ἂν εἰς 5 ὀκ ἀ δ:

$1\frac{1}{2}$ γρ: δίδωμεν; ὁ μεν ἄγνωςος γρ: εἶναι ὁ δ'. ὁ δεύτερος ἄρα $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. καὶ ὁ πρῶτος 5. καὶ ὁ τριτος $9\frac{1}{3}=\frac{28}{3}$.

ὅθεν $5:\ \frac{3}{2}=\frac{28}{3}:\ \chi$ καὶ $\chi=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{28}{3}}{5}=\frac{3.\ 28}{2.\ 5.\ 3}=\frac{14}{5}=2\frac{4}{5}$.

3. Εἰς ἓν ἀρνιου ὀκ. 9 καὶ 80 δρ: ἐπλήρωσα γρ. 4 καὶ 25 παρ. πόσα πρέπει νὰ πληρώσω διὰ 5 ὀκ;

Ὁ μὲν ἄγνωςος χ παρ: ὁ Δ', ὁ σύζυγος αὐτοῦ 5 ὀκ: =2000 δρ. ὁ Γ', ὁ ὁμόλογος τοῦ ἀγνώςου 4 γρ: 25 παρ =185 παρ. ὁ Β', καὶ ὁ σύζυγος αὐτοῦ 9 ὀκ: 80 δρ =3680 δρ: ὁ Α'. ἄρα 3680: 185=2000: χ καὶ $\chi=$

$$\frac{185.\ 2000}{3680}=37000:\ 368=100\frac{200}{368}\ \text{παρ.}$$

4. Τί πληρώνω εἰς $3\frac{1}{2}$ μῆνας διὰ τὴν κατοικίαν, ὅταν εἰς ἕνα χρόνον 360 γρ συμφωνήσω; ὁ δ' χ γρ: ὁ σύζυγος αὐτοῦ $3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$ μῆν: ὁ Γ'. ὁ δ' ὁμόλογος 360 ὁ Β'. καὶ ὁ σύζυγος τουτου. 1 χρ: =12 μῆν: ὁ Α'. ἄρα. 12: 360 $=\frac{7}{2}:\ \chi$, καὶ $\chi=\frac{\frac{7}{2}\cdot 360}{12}=\frac{7\cdot 360}{2.\ 12}=$

$\frac{7\cdot 3.\ 4.\ 2.\ 16}{2.\ 3.\ 4}=105$ γρ. κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ὅλοι οἱ ὅροι τῆς μεθόδου τῶν τριῶν διορίζονται, καὶ ἑπομένως καὶ τὰ ἑξῆς ἐπιλύονται.

5. Πανδοχεὺς ζητεῖ, ἀπὸ πόσους ἀνθρόπους ἤθελε λάβῃ 400 γρ, ὅταν ἀπὸ 100 λαμβάνῃ μόνον 160;

$$160 : 100 = 400 : \chi \text{ καὶ } \chi = \frac{100.\ 400}{160} = \frac{100.\ 10}{4} = \frac{25.\ 10}{1} = 250.$$

6. Ἂν ὁ δοῦλος εἰς ἕνα χρόνον 160 γρ: λαμβάνῃ, πόσα ἄρα γε εἰς 8 μῆνας;

$$1 : 160 = \frac{8}{12} : \chi \text{ καὶ } \chi = \frac{160.\ 8}{12} = \frac{160.\ 2}{3} = \frac{320}{3} = 106\frac{2}{3}\cdot$$ ἀλλὰ τοῦτο ὡς χρονικὸν εἰσόδημα εὐκόλως λύεται, ὡς ἡμεῖς ἀμέσως διασαφήσομεν.

7. Ἂν 100 γρ. δίδουσι τόκον $7\frac{1}{2}$ γρ: χρονικὸν, πόσα δίδουσι 1000 γρ. τόκον χρονικόν;

$$100 : 7\frac{1}{2} = 1000 : \chi\cdot \text{ καὶ } \chi = \frac{\frac{15}{2}.\ 1000}{100} = \frac{15}{2}.\ 10 = \frac{150}{2} = 75\cdot$$

8. Μία βρύσις γεμίζει ἕνα ἀγγεῖον 140 μέτρων εἰς μίαν ὥραν, εἰς πόσας ὥρας πληρώσει ἡ αὐτὴ βρύσις μίαν δεξαμενὴν, ὁποῦ χωρεῖ 6000 μέτρα;

$$140 : 1 = 6000 : \chi\cdot \text{ καὶ } \chi = \frac{6000}{140} = \frac{300}{7} = 42\frac{6}{7}.$$

9. Διὰ 16 ἀνθρώπους ἀγοράζομεν 7 ὀκ: κρέας, διὰ δὲ 42 πόσον;

$$16 : 7 = 42.\ \chi\cdot \text{ καὶ } \chi = \frac{7.\ 42}{16} = \frac{7.\ 21}{8} = \frac{147}{8} = 18\frac{3}{8}.$$

ἡ αὐτὴ μέθοδος χρησιμεύει εἰς τοὺς πραγματευόντας, ὅταν ζητῶσι νὰ κερδήσωσιν ἓν κέρδος διωρισμένον εἰς τὰ 100· δηλ:

§. 510. Ἠγόρασέ τις χρεμέζι τὴν ὀκᾶν 120 γρ., καὶ ἐπειδὴ ζητεῖ νὰ κερδίσῃ 12 εἰς τὰ 100, πόσα πρέπει νὰ τὸ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν;

Εἰς αὐτὰ εἶναι ἡ ἐρώτησις τοιαύτη, ἂν τὰ 100 δίδουσι 12, τὰ 120 πόσα; ἄρα ἡ ἀναλογία 100: 12=120: χ

καὶ $\chi = \frac{12.\ 120}{100} = \frac{12.\ 12}{10} = 14$ γρ: $\frac{4}{10} = 14$ γρ. 16 παρ. λοιπὸν τοῦτο τὸ εὑρεθὲν προστίθεται εἰς τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς· 120+14+16 παρ. καὶ ἐὰν τόσα πωλήσῃ, κερδίζει 12 εἰς τὰ 100.

Τοῦτο ὅμως εἰς τὰς πραγματείας χρήσιμον, ἐάν τις γενικὸν ἀποτελέσῃ. Ἔςω ὅτι ἠγόρασέ τις ἕνα τι πρὸς α· καὶ ζητεῖ νὰ κερδίσῃ β εἰς τὰ 100· πόσα πρέπει νὰ πωληθῇ; καὶ τοῦτο χ καλείσθω· ὅρα κατὰ τὰ ἄνω 100: β=α: χ

καὶ $\chi = \frac{\beta\alpha}{100}$. τοῦτο ἤδη τὸ εὑρεθὲν, ἐὰν εἰς τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς προςεθῇ, τὸ κεφάλαιον $\alpha + \frac{\alpha\beta}{100}$ εἶναι ἡ τιμὴ, ὁποῦ πρέπει νὰ πωληθῇ, διὰ νὰ εὑρίσκῃ τις εὐκόλως πόσα πρέπει νὰ πωλήσῃ ἓν πρᾶγμα, διὰ νὰ κερδίσῃ εἰς τὰ 100, 7, ἢ 8, ἢ 5 κ. τ. λ. πρέπει μὲ τὴν τιμὴν τοῦ πράγματος νὰ πολλαπλασιάσῃ τὸ κέρδος εἰς τὰ 100, καὶ τὸ γινόμενον νὰ διέλῃ διὰ τοῦ 100· τὸ δὲ πηλίκον τοῦτο νὰ συνάψῃ μὲ τὴν τιμὴν τοῦ πράγματος, καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦτο εἶναι ἡ τιμὴ, ὁποῦ ζητεῖται.

α. Ἠγόρασέ τις σκουμπρια 28 γρ. τὴν χιλιάδα, καὶ ζητεῖ νὰ κερδίσῃ 8 τὰ 100, πόσα νὰ τὰ πωλήσῃ;

$28 + \frac{8.\ 28}{100} = 28 + 2,\ 24 = 30$ γρ - - - -

β'. Ἕτερος ἔχει ἕνα διαμαντικὸν 5000 γρ, καὶ ζητεῖ νὰ κερδίσῃ 22 γρ: εἰς τὰ 100, πόσα νὰ τὸ πωλήσῃ;

$$5000 + \frac{22.\ 5000}{100} = 1100 + 5000 = 6100.$$

γ'. Ἕτερος ἔχει τυρὸν ἀνὰ 42 παρ: τὴν ὀκᾶ, ζητεῖ δὲ κέρδος 6 εἰς τὰ 100, πόσα νὰ πωληθῇ;

$$42 + \frac{6.\ 42}{100} = 42 + 2,\ 52 = 44\frac{1}{2}\ \text{πάρ.}$$

Σημείωσις.

Ἐκ τούτων εἶναι φανερὸν, ὅτι ἕκαστος, ὁποῦ πραγματεύεται, καὶ θέλει νὰ διορίσῃ τὴν τιμὴν εἰς κάθε πραγματείαν, διὰ νὰ κερδίσῃ τόσα εἰς τὰ 100, πρέπει μόνον νὰ πολλαπλασιάσῃ αὐτὸ τὸ κέρδος τῶν 100 μὲ τὴν τιμὴν τοῦ πράγματος, καὶ νὰ κόψῃ δύω χαρακτῆρας εἰς τὰ δεξιὰ, καὶ ὅσα μένουσιν ἀριστερὰ, νὰ προστεθῶσιν εἰς τὴν τιμὴν τοῦ πράγματος· καὶ τοῦτο εἶναι τὸ κεφάλαιον πλὴν, α'. ὁ ἀριθμὸς, ὁποῦ κόπτεται, σημαίνει πάντοτε, ὅ, τι σημαίνει ἡ τιμὴ τοῦ πράγματος, ἢ φλωρία, ἢ γρόσια, ἢ παράδες, ἢ ἄσπρα. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ δεξιοὶ χαρακτῆρες οἱ κεκομμένοι εἶναι ἓν κλάσμα, αὐτοὺς πολλαπλασιάζομεν μὲ 4, ἂν εἶναι γρόσια, καὶ κόπτομεν ἕνα χαρακτῆρα, καὶ οἱ δεξιοὶ σημαίνουσι παράδες· ἂν δὲ εἶναι παράδες, τοῦτο πολλαπλασιάζομεν μὲ 3, καὶ κόπτομεν δύω χαρακτῆρας, καὶ ὁ ἀριστερὸς σημαίνει ἄσπρα· ὡς διὰ νὰ κερδίσωμεν 12 εἰς τὰ 100 ἀπὸ ἕνα πρᾶγμα ὁποῦ ἠγοράσθη 15 γρ. εὑρίσκομεν 16 γρ. καὶ 32 παρ. νὰ πωληθῇ.

§. 511. Εἰς τοὺς πραγματευόντας πολλάκις δίδεται μὲν ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως, ζητεῖται ὅμως νὰ μάθωσι πόσα, κερδίζουσι, εἰς τὰ 100. δηλ: ἠγόρασέ τις τὴν ὀκᾶν τὸ κρασί παρ: 8. καὶ πωλεῖ αὐτὸ 14 παρ: τί κερδίζει εἰς τὰ 100; αὐτοῦ ἡ ἀναλογία εἶναι ἡ ἀνωτέρα, πλὴν ὅτι ἐδῶ ὁ δεύτερος ὅρος ἐκείνης ζητεῖται, διότι ὁ τέταρτος εἶναι δεδομένος 14 παρ. θὲς τοίνυν τὴν ἄνω ἀναλογίαν, καὶ θὲς χ εἰς τὸν δεύτερον ὅρον, καὶ διὰ τοῦτον ὡς ἄνω (476) $100 : \chi = 8 : 6$. καὶ $\chi = \frac{100.\ 6}{8} = 75$. ἢ καὶ οὕτω λέγωμεν, ἂν τὰ 8 μᾶς φέρωσιν 6 κέρδος, τὰ 100 πόσα; ἄρα $8 : 6 = 100 : \chi = \frac{6.\ 100}{8} = 75$. καὶ ἔτι οὕτως, ἂν 8 γίνονται 14, 100 πόσα γίνονται; $8 : 14 = 100 : \chi = \frac{14.\ 100}{8} = 175$. καὶ εἰς τοῦτο, διὰ νὰ μὴ καταστρώνωμεν ἀναλογίας προχειρότατα εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον, ἐὰν γενικῶς τὸν τύπον εὕρωμεν. Ἔστω ἡ ἀγορὰ α, καὶ ἡ διαφορὰ ἡ μεταξὺ τοῦ α καὶ γ, ἤτοι $\gamma - \alpha = 6$, 100 δὲ ὁ ἀριθμὸς ὡς βάσις, καὶ χ τὸ ζητούμενον κέρδος πρὸς τὰ 100· ὅθεν ἡ ἀναλογία $\alpha : 6 = 100 : \chi$, καὶ $\chi = \frac{6.\ 200}{\alpha}$. ἐπειδὴ δὲ ὁ παράγων 100 ὡς περιοδικὸς ἀριθμὸς (§. 79.) πολλαπλασιάζει τὸν 6, ἐὰν δύω θῶμεν μηδενικά, ἄρα διὰ νὰ εὑρίσκωμεν τὸ κέρδος εἰς τὰ 100, πρέπει εἰς τὴν διαφορὰν τῆς πωλήσεως καὶ ἀγορᾶς νὰ προσγράφωμεν δύω μηδενικά, καὶ διὰ τῆς ἀγορᾶς νὰ διαιροῦμεν τοῦτο, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ ζητούμενον κέρδος πρὸς τὰ 100· δηλ:

α΄. Ηγόρασέ τις τὴν ὀκᾶν λάδι 38 παρ. καὶ τὸ πωλεῖ 40 παρ. τί κερδίζει εἰς τὰ 100;

$40-38=2$· ἄρα $\chi=200:38=5\frac{5}{19}$.

β΄. Ἠγόρασέ τις πανίου 26 γρ. τὸ κομμάτι, καὶ τὸ πωλεῖ πρὸς 30 γρ. τί κερδίζει εἰς τὰ 100;

$30-26=4$ καὶ $\chi=\frac{400}{26}=15\frac{5}{13}$· τὸ δὲ κλάσμα $\frac{5}{13}$ γρ $=$

$\frac{200}{13}$ παρ. $=15\frac{5}{13}$ παρ. $=15$ ἄσπ:

γ΄. Ἕτερος ἠγόρασε κρεμέζι 160 γρ., καὶ τὸ πωλεῖ 175, τί κερδίζει εἰς τὰ 100; $\chi=\frac{1500}{160}=9\frac{6}{160}$.

καὶ οὕτως εὐκόλως λύονται ὅλα εἰς τοὺς πραγματεύοντας, ὅταν ζητῶσι, τί κερδίζουσιν εἰς τὰ 100, ἐὰν οὕτως ἀγοράζωσι, καὶ οὕτω πωλῶσιν.

§. 512. Ἐις αὐτὴν τὴν ἰδίαν ἀναλογίαν ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς, ὅ,ταν εἶναι γνωςὸν, πόσα πωλεῖται τὸ πρᾶγμα, καὶ πόσα κερδίζει εἰς τὰ 100· δηλ: ἠξεύρομεν ὅτι εἰς τὴν Κωνςαντινούπολιν πωλεῖται τὸ λάδι 44 παρ: καὶ ζητοῦμεν νὰ κερδίσωμεν 12 εἰς τὰ 100, πόσα πρέπει νὰ τὸ ἀγοράσωμεν, νὰ γένῃ αὐτὸ τὸ κέρδος; αὐτοῦ εἶναι πάλιν ἡ ἄνω ἀναλογία, πλὴν ὁ τρίτος ὅρος ζητεῖται, καὶ ὁ τέταρτος δίδεται $100:112=\chi:44$, ἤτοι $\chi\frac{100.\ 44}{112}$ $=34\frac{32}{112}$· Τοῦτον τὸν τρόπον μεταχειρίζονται οἱ πραγματευταὶ, καὶ μάλιςα οἱ μεσῖται, ὅταν ἠξεύρουν τὴν πώλησιν, καὶ ἀγοράζουσι διὰ νὰ κερδίσωσιν εἰς τὰ 100 ἕνα ποσόν. Ἐὰν λοιπὸν τὸ κέρδος πρὸς τὰ 100 θῶμεν α, καὶ

β τὴν τιμὴν τῆς πωλήσεως, γίνεται ἡ ἀναλογία $100 : 100+\alpha = \chi : \beta$, καὶ $\chi = \frac{100.\ \beta}{100+\alpha}$. διὰ νὰ εὑρίσκωμεν λοιπὸν εὐκόλως τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς πρὸς κέρδος διωρισμένου εἰς τὰ 100, ὅταν εἶναι γνωςὴ ἡ πώλησις, διαιροῦμεν τὴν τιμὴν τῆς πωλήσεως, προσγράφοντες αὐτῇ δύω μηδενικὰ, μὲ διαιρέτην τὸ κεφάλαιον τῶν 100 καὶ τοῦ κέρδους τοῦ ζητουμένου.

α΄. Ζητεῖ τις παρά τινος νὰ τῷ ἀγοράσῃ γκερμισοῦτι ἀπὸ 102 παρ: τὴν πῆχην, αὐτὸς δὲ θέλει νὰ κερδίσῃ 10 εἰς τὰ 100, πόσα πρέπει νὰ τὸ ἀγοράσῃ;

$$\chi = \frac{10200}{110} = 92\frac{8}{11}.$$

β΄. Ἕτερος προςάζεται ἀπὸ ἄλλο μέρος νὰ ςείλῃ ἓν ζωνάρι διὰ 700 γρ., καὶ θέλει νὰ κερδίσῃ 16 εἰς τὰ 100, πόσα νὰ τὸ ἀγοράσῃ; $\chi = \frac{70000}{119} = 603$ γρ: 17 παρ: 2 ἄσπρ.

γ΄. 12 παρ: πωλεῖται ἡ ὀκᾶ τὸ ἀλεῦρι, θέλει δὲ νὰ κερδίσῃ 20 εἰς τὰ 100, πόσα νὰ τὸ ἀγοράσῃ; $\chi = \frac{1200}{120} = 10.$

Καὶ τοῦτο ἐπιτηδεύεται εἰς τοὺς πραγματευτὰς, καὶ μάλιςα εἰς τοὺς μεσίτας, ὅταν τις ζητῇ ἀπὸ αὐτοὺς νὰ εὕρωσι πρᾶγμα, διὰ νὰ ἀγοράσωσιν ἐκεῖνοι ἕνα ποσὸν μὲ διωρισμένην τιμήν. Ἐκεῖνοι θέλουν νὰ κερδίσωσιν εἰς ὅλον τὸ πρᾶγμα τόσα χρήματα, καὶ ἀποροῦσι πόσα πρέπει νὰ τὸ ἀγοράσωσιν.

Ἐπὶ Παραδείγματος.

α΄. Ζητεῖ τις ἀπὸ ἕνα μεσίτην (σαμσάρην) νὰ ἀγοράσῃ 50 ὀκάδες λουλάκι ἀπὸ 35 γρ: τὴν ὀκᾶ, αὐτὸς δὲ θέλει νὰ κερδίσῃ εἰς ὅλον αὐτὸ 120 γρ. πόσα πρέπει νὰ τὸ ἀγοράσῃ; τοῦτο καὶ ὅλα τὰ λοιπὰ ὅμοια παραδείγματα γίνονται. α΄. πολλαπλασιάζουσι τὸ πρᾶγμα ὅλον, μὲ τὴν τιμὴν, ὁποῦ δίδει ὁ ζητῶν τὸ πρᾶγμα, ὡς ἐνταῦθα 50. 35=1750. καὶ τόσα θέλει δώσει ἐκεῖνος, ὁποῦ ζητεῖ τὸ πρᾶγμα· ἀπὸ αὐτὰ δὲ ἀφαιρεῖται τὸ κέρδος, ὁποῦ ζητεῖ ὁ μεσίτης 1750—120=1630. καὶ μὲ τόσα θέλει ἀγοράσῃ ὁ μεσίτης ὅλον τὸ πρᾶγμα 50 ὀκ: Λοιπὸν ζητεῖται πόσα νὰ ἀγορασθῇ ἡ ὀκᾶ; καὶ εὑρίσκεται διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν· ἂν αἱ 50 ὀκ: ἀγοράζονται μὲ 1630 γρ, ἡ 1 μὲ πόσα; ἤτοι 50: 1630=1: χ καὶ $\chi = \frac{1630}{50} = 32\frac{3}{5}$

ἤτοι 32 γρ. 24 παρ. πρέπει νὰ δώσῃ εἰς τὴν ὀκᾶν, νὰ κερδίσῃ 120 γρ: εἰς ὅλον· ἐὰν δὲ θῶμεν καὶ ἐδῶ γενικῶς τὴν τιμὴν, ὁποῦ ὑπόσχεται ὁ πραγματευτὴς α, π, δὲ τὸ ποσὸν τοῦ πράγματος, καὶ ϐ τὸ ποσὸν τοῦ κέρδους, ὁποῦ θέλει ὁ ἀγοραστὴς νὰ κερδίσῃ, εὑρίσκεται ὁ τύπος κατὰ τὰ ἀνωτέρω απ—ϐ. καὶ ἡ ἀναλογία γίνεται π: απ—ϐ=1: χ. καὶ $\chi = \frac{\alpha\pi - \beta}{\pi} = \alpha - \frac{\beta}{\pi}$. ὅθεν εὐκόλως οὗτος ὁ τρόπος γίνεται, ἐὰν μὲ τὸ ποσὸν τῶν ὀκάδων, ἢ πραγματειῶν διαιρέσωμεν τὸ κέρδος τὸ ζητούμενον, καὶ τὸ πηλίκον τοῦτο ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν τιμὴν, ὁποῦ ὑπόσχεται ὁ ἀγοράζων, τὸ δὲ λείψανον εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ πράγματος, ὁποῦ θέλει ἀγορασθῆ· οὕτως εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα. $\alpha - \frac{\mathfrak{S}}{\pi} = 35 -$

$\frac{120}{50} = 35 - 2\frac{2}{5} = 32\frac{3}{5}$ γρ.

β΄. Ἕτερος ζητεῖ 40 σαμαλατζιάδες πρὸς 16 γρ ἀπὸ μεσίτην· καὶ αὐτὸς θέλει νὰ κερδίσῃ εἰς αὐτοὺς 50 γρ. πόσα νὰ ἀγοράσῃ ἕκαστον;

$16 - \frac{50}{40} = 16 - 1\frac{1}{4} = 14$ γρ. 30 παρ.

γ΄. Ἕτερος ζητεῖ 3000 ὀκ: κηρὶ ἀπὸ 5 γρ. τὴν ὀκᾶ καὶ ὁ μεσίτης θέλει νὰ κερδίσῃ εἰς αὐτὸ 350 γρ. πόσα πρέπει νὰ τὸ ἀγοράσῃ τὴν ὀκᾶ;

$5 - \frac{350}{3000} = 5 - \frac{7}{60} = 5 - \frac{28}{6} = 5$ γρ. $- 4$ παρ. 2 ἄσπ. $= 4$ γρ. 35 παρ. 1 ἄσπ.

§. 513. Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν ἐφαπλοῦται τὰ μάλιςα εἰς τὰ χρονικὰ εἰσοδήματα· τοιαῦτα εἶναι τὰ χρονικὰ ἐνοίκια, τὰ χρονικὰ εἰσοδήματα τῶν ὑποςατικῶν, τὰ χρονικὰ σιτηρέσια μιᾶς διοικήσεως, ὁποῦ δίδει εἰς τοὺς ἀξιωματικοὺς, οἱ χρονικοὶ μισθοὶ τῶν δούλων, τὰ χρονικὰ διάφορα τῶν χρημάτων, καὶ τὰ λοιπά. Διὰ νὰ λύωμεν ὅλα αὐτὰ εὐκόλως, πρέπει κατὰ τάξιν νὰ βαδίσωμεν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τοὺς τόκους· οἱ δὲ τόκοι πληρώνονται εἰς χρονικὸν διάςημα ἑνὸς ἔτους, ἢ ἑνὸς μηνὸς, ἢ ἡμερῶν τινων κατ᾽ ἀναλογίαν πρὸς τὰ 100, ἢ καθ᾽ ἡμᾶς πρὸς τὸ πουγγεῖον, ἤτοι 500 γρ. καὶ λοιπὸν ἐνταῦθα ζητεῖται ἂν τὰ 100, ἢ 500 γρ. δίδουσι τόκον α· τί δίδει ἕνα κεφάλαιον χρημάτων; καὶ αὐτοῦ εἶναι φανερὸν, ὅτι ἡ μέθοδος εἶναι ὀρθή.

Παράδειγμα.

α΄. Πόσον τόκον λαμβάνει εἰς ἓν ἔτος ἀπὸ 600 γρ. πρὸς 8 εἰς τὰ 100; $100 : 8 = 6000 : \chi = \frac{6000 . 8}{100} = 60 . 8 = 480$. ἐὰν δὲ πρὸς 40 τὸ πουγγεῖον· $500 : 6000 = 40 : \chi = \frac{6000 . 40}{500} = 480$. ἐὰν δὲ καὶ αὐτοῦ γενικῶς θῶμεν α τὸν τόκον τῶν 100, ἢ τῶν 500, καὶ β τὸ κεφάλαιον, ἔσται $100 : \alpha = \beta : \chi = \frac{\alpha\beta}{100}$. τὰ δὲ 100 διαιροῦσιν, ἐὰν δύω πρὸς τὰ δεξιὰ χωρήσωμεν χαρακτῆρας, ἄρα εὐκόλως εὑρίσκομεν τὸν τόκον ἑκάστου κεφαλαίου, ἐὰν αὐτὸ μὲ τὸν τόκον τῶν 100 πολλαπλασιάσωμεν, καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου δύω χαρακτῆρας πρὸς τὰ δεξιὰ κόψωμεν.

β΄. Πόσον διάφορον δίδουσι 780 γρ. πρὸς 6 εἰς τὰ 100; $780 . 6 = 4680 = 46, 80$ γρ: ἤτοι 46 γρ: 32 παρ.

γ΄. Πόσον διάφορον δίδουσι 3765 γρ πρὸς $7\frac{1}{2}$ τὰ 100;

$$3765 . 7\frac{1}{2} = 3765 . \frac{15}{2} = \frac{3765 . 15}{2} = \frac{56475}{2} = 28237\frac{1}{2}$$

$$= 282, \frac{37\frac{1}{2}}{100} = 282 + \frac{75}{200} = 282 \text{ γρ: } 15 \text{ παρ.}$$

II.

Πολλάκις τὸ κεφάλαιον ζητεῖται, ὅταν ὁ τόκος α εἶναι γνωστός· δηλ: λαμβάνει τις τόκον 562 γρ. πρὸς 10 τὰ 100, πόσον ἔχει κεφάλαιον; λέγομεν ἂν 10 ἔχωσι κεφάλαιον τὰ 100, 562 πόσον ἔχουσι;

$10 : 100 = 562 : \chi = \frac{562.\ 100}{10} = 5620$· αὐτοῦ δὲ γίνεται

ἂν οἱ τόκοι α καὶ β ληφθῶσιν οὕτω $\frac{\beta.\ 100}{\alpha}$· δηλ: προσθέτομεν δύο μηδενικὰ εἰς τὸν τόκον τῶν ζητουμένων χρημάτων, καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ τόκου τῶν 100 δηλ:

β΄. Λαμβάνει τις τόκον $638\frac{1}{2}$ πρὸς $7\frac{1}{2}$ τὰ 100, τί ἔχει κεφάλαιον; $638.\frac{1}{2} = \frac{1277}{2} : 7\frac{1}{2} = \frac{1277}{2} : \frac{15}{2} =$

$\frac{127700}{15} = 8513$ γρ. 13 παρ: 1 ἄσπ:

γ΄. Διὰ νὰ ἔχω εἰσόδημα χρονικὸν 2000 γρ., πόσον κεφάλαιον χρειάζομαι, νὰ δανείσω πρὸς 10 τὰ 100;

$\frac{2000.\ 100}{10} = 20000.$

δ΄. Ἓν ὑποστατικὸν ἔχει εἰσόδημα χρονικὸν 620 γρ., πόσα πρέπει νὰ τὸ ἀγοράσω διὰ νὰ πέρνω 7 εἰς τὰ 100;

$\frac{650.\ 100}{7} = 9285\frac{5}{7}.$

ε΄. Πληρώνω ἐνοίκιον εἰς τὴν κατοικίαν 700 γρ. μὲ τί κεφάλαιον νὰ ἀγοράσω ἓν ὀσπήτιον, ὅπου νὰ δίδῃ αὐτὸν τὸ ἐνοίκιον πρὸς 12 τὰ 100;

$\frac{700.\ 100}{12} = 5833\frac{1}{3}$ χρήσιμον τοῦτο εἰς τὴν κοινὴν ζωήν:

III.

Πολλάκις δίδεται ὁ ἐτήσιος τόκος, ἢ ἓν χρονικὸν εἰσόδημα, καὶ ζητεῖται πόσον πέρνομεν ἀπὸ αὐτὸν εἰς 2 ἢ 3 μῆνας, ἢ εἰς ἡμέρας τινάς· δηλ: τὸν χρόνον λαμβάνομεν τόκον, ἢ εἰσόδημα 600 γρ: τί λαμβάνομεν εἰς 5 μῆνας; ἢ εἰς 12 ἡμέρας κ. τ. λ; αὐτοῦ ὁ λόγος εἶναι φανερός· ἐπειδὴ εἰς τὸν ὁλόκληρον χρόνον λαμβάνομεν τὸν τόκον, ἢ τὸ εἰσόδημα ὁλόκληρον, ἄρα καὶ εἰς ἓν μέρος τοῦ χρόνου ἓν μέρος ἀνάλογον τοῦ τόκου, ἢ τοῦ εἰσοδήματος λαβεῖν θέλομεν. Λοιπὸν λέγομεν α΄. ἂν οἱ 12 μῆνές μᾶς φέρωσιν 600 γρ. οἱ 5 πόσα; $12 : 600 = 5 . \chi$· καὶ $\chi = \frac{600 . 5}{12} = 250$· Ἐὰν δ' ἡμέραι 12 ζητοῦνται, λέγομεν 365 ἡμ: 600 γρ. $=12$ ἡμ: χ καὶ $\chi = \frac{600 . 12}{365} = \frac{120 . 12}{73} \doteq$ 19 γρ: 9 παρ: σχεδόν.

Ἐὰν δὲ καὶ τοῦτο γενικῶς ἐκφρασθῇ, καὶ θῶμεν ἀντὶ τοῦ χρόνου ὁλοκλήρου α, καὶ τοῦ μερικοῦ, ὅ ἐστι μηνῶν, ἢ ἡμερῶν β, καὶ τὸ δοθὲν διάφορον γ. ἔσται $\alpha : \beta = \gamma : \chi$ καὶ $\chi = \frac{\gamma\beta}{\alpha}$. ἤτοι πολλαπλασιάζομεν τὸν μερικὸν χρόνον, καὶ διαιροῦμεν μὲ τὸν ὁλόκληρον χρόνον· πλὴν σημείωσαι, ὅτι, ἐπειδὴ οἱ ὁμόλογοι ὅροι πρέπει νὰ εἶναι ὁμοιειδεῖς· ἄρα ὅταν τὸ β μῆνας σημαίνῃ, πρέπει τὸ α 12 νὰ γράφεται μῆνας· ὅταν δ' ἐκεῖ 10 ἡμέρας, πρέπει καὶ τοῦτο 365 ἡμέρας, πρέπει καὶ τοῦτο 365 ἡμέρας ἔτος ὁλοκλήρου. ὅθεν.

Μισθὸν δίδω τῷ δούλῳ μου 180 γρ. τί λαμβάνει εἰς μῆνας τρεῖς;

$$\chi = \frac{180 . 3}{12} = 45 \text{ γρ.}$$

60 γρ: λαμβάνω τόκον τὸν χρόνον, τί λαμβάνω εἰς ἡμέρας 25;

$$\chi = \frac{60.\ 25}{360} = \frac{60.\ 5}{72} = \frac{30.\ 5}{30} = \frac{15.\ 5}{18} = \frac{5.\ 5}{6} = 4\frac{1}{6}\ \gamma\rho.$$

§. 514. Ἀπὸ τοῦ τύπου αὐτοῦ $\chi = \frac{\gamma\beta}{\alpha}$ ἐξερχόμεθα εἰς ἓν γενικώτατον, καὶ συντομώτερον θεώρημα, ὅπερ ὠφελεῖ τὰ μάλιςα εἰς τὴν κοινὴν ζωήν· καὶ εὐκολώτατα ἐν μιᾷ ςιγμῇ εὑρίσκομεν τὸ μέρος ἑνὸς ἑκάςου χρονικοῦ εἰσοδήματος, ὁποῦ ἀνήκει εἰς εἰς ἑναδήποτε μέρος τοῦ χρόνου, ὁποῦ θέλομεν· πρέπει ὅμως νὰ σημειώσωμεν πρῶτον, ὅτι τὸν χρόνον τὸν διαιροῦσιν ὀρθῶς εἰς μῆνας 12, καὶ ὅταν τὸ μηνιαῖον εἰσόδημα ζητῆται, εἶναι ἡ ἑξῆς μέθοδος ὀρθωτάτη ὡς ἡ ἀνωτέρω. Ὅταν ὅμως ἡμερῶν εἰσόδημα ζητῶσι, διαιροῦσι τὸν χρόνον εἰς ἡμέρας 360 καὶ ὁ ὀρθὸς χρόνος εἶναι εἰς τὴν κοινὴν ζωὴν 365, καὶ 366, ὅτε εἶναι βίσεκτος· ὅθεν εἰς τὴν ἑξῆς μέθοδον εἶναι ἀπάτη ὀλίγη, πλὴν ἁπλῶς οἱ κοινοὶ ἄνθρωποι ὡς ὀρθὴν τὴν ἐκλαμβάνουσι. Δεύτερον, πρέπει πάντοτε τὸ χρονικὸν εἰσόδημα νὰ εἶναι γρόσια· ὅθεν, ὅταν δοθῶσιν ἕτερα νομίσματα, ὡς φλωρία, ἑκατοςάρια, παράδες, φιορίνια, χαραγρόσια κ. τ. λ. πρέπει νὰ φερθῶσιν ἀεὶ εἰς τὴν τιμὴν τῶν γροσιῶν, καὶ τότε ἡ ἑξῆς μέθοδος γίνεται· Καὶ διὰ νὰ μάθωμεν αὐτὴν τὴν καλλίςην μέθοδον, ἂς λάβωμεν τὸν ἄνω τύπον $\chi = \frac{\gamma\beta}{\alpha}$· καὶ ἂς ζητήσωμεν εἰς ἕνα μῆνα $=\beta$· τί ἀνήκει εἰς ἓν εἰσόδημα χρονικὸν γ; λοιπὸν ὁ τύπος οὗτος γίνεται $\chi = \frac{\gamma.\ 1}{12} = \frac{\gamma}{12}$· ἐπειδὴ ὅμως τὸ γ σημαίνει γρόσια, γενέσθω παράδες, ἐὰν αὐτὸ μὲ 40 πολλαπλασιάσωμεν (§. 261.), οὕτω $\chi=\frac{\gamma.\ 40}{12}=\frac{\gamma.\ 10.\ 4}{3.\ 4}=\frac{\gamma.\ 10}{3}$. ὅθεν ἑνὸς μηνὸς εἰσόδημα εὑρίσκεται ἀμέσως, ἐὰν εἰς τὸ χρονικὸν ἓν μηδενικὸν προσγράψωμεν, καὶ διὰ 3 διέλωμεν; δίδεται τὸ μηνιαῖον εἰσόδημα εἰς παράδες· χ. λ.

α΄. 700 γρ: δίδω ἐνοίκιον τὸν χρόνον, τί δίδω εἰς ἕνα μῆνα;

$\frac{7000}{3}=2333\frac{1}{3}$ παρ. 58 γρ: 13 παρ: 1 ἄσπ.

β΄. 18 γρ: δίδω δόσιμον χρονικὸν, τί δίδω μηνιαῖον;

$\frac{160}{3}=60$ παρ.

γ΄. 50 γρ. λαμβάνω τόκον, πόσα λαμβάνω τὸν μῆνα;

$\frac{500}{3}=166$ παρ: 2 ἄπ:

δ΄. 5000 ἔχω εἰσόδημα, πόσα ἔχω τὸν μῆνα;

$\frac{50000}{3}=16666\frac{2}{3}$ παρ: 416 γρ: 16 παρ. 2 ἄσπ.

καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὸ μηνιαῖον ἑκάστου χρονικοῦ εἰσοδήματος. ἐὰν ὅμως ζητῆται διμηνιαῖον, τριμηνιαῖον, τετραμηνιαῖον, τὸ ποσὸν τὸ χρονικὸν πολλαπλασιάζομεν πρῶτον μὲ τοὺς μῆνας ὁποῦ ζητοῦνται, καὶ εἶτα ἀκολουθοῦμεν τὴν ἐργασίαν.

Παράδειγμα α΄.

Δίδω μισθὸν 180 γρ. τί δίδω εἰς 7 μῆνας;

$\frac{7.\ 1800}{3}=\frac{12600}{3}=4200$. παρ $=105$ γρ: πάρ: 6.

Τί κάμνει τὸ ἐνοίκιον εἰς 15 μῆνας, πρὸς 350 γρ: τὰ χρόνου; $\frac{15.\ 3500}{3} = 17500$ παρ: $= 437$ γρ: 20 παρ.

§. 515. Ὅταν δ' εἴμεθα εἰς τὴν Ἀουςρίαν, ἐπειδὴ ἐκεῖ, φιορὶν $=60$ κραϊτζάρια, δυνάμεθα τὸν ἄνω τύπον $\chi = \frac{\gamma\sigma}{\alpha}$ δι' ἓν μηνιαῖον οὕτω ποιῆσαι $\chi = \frac{\gamma}{12}$. καὶ τὰ φιορίνια εἰς κραϊτζάρια οὕτω $\chi = \frac{\gamma.\ 60}{12} = \frac{\gamma.\ 10}{2}$. καὶ ἑπομένως εἰς τὸ χρονικὸν εἰσόδημα προσγράφομεν ἓν μηδενικὸν, καὶ τὸ ἥμισυ τοῦτο εἶναι μηνιαῖον εἰς κραϊτζάρια· δηλ: λαμβάνω χρονικὸν οἱονδήποτε εἰσόδημα 5000 φιορ: καὶ ζητῶ τί λαμβάνω εἰς ἕνα μῆνα, εὑρίσκω $\frac{50000}{2} = 25000$ κραϊτζ: $=425.$ φιορ. εἰς αὐτὰ τὰ νομίσματα γίνεται κάλλιον, ἐὰν τὸ δοθὲν εἰσόδημα μὲ 5 πολλαπλασιασθῇ, καὶ τὸ γινόμενον εἶναι εἰς κραϊτζάρια μηνιαῖον εἰσόδημα· διότι $\chi = \frac{\gamma.\ 60}{12} = 5$ γρ:

Τί δίδω εἰς ἕνα μῆνα, ἐὰν τὸ χρόνου δίδω 750 φιορ; 750. 5=3750 κρ: =62 φιορ: 20 κρ: τὰ δὲ λοιπὰ εἰς 2, 3, 4 μῆνας κ. τ. λ. γίνεται ὡς ἀνωτέρω.

§. 516. Ἐὰν δ' ἐν τῇ Γαλλίᾳ διατρίβωμεν, ἐπειδὴ ἐκεῖ αἱ λίτραι $=20$ σολδία, καὶ δοθῇ χρονικὸν εἰσόδημα εἰς λίτρας, εὑρίσκεται ὁ τύπος $\chi = \frac{\gamma.\ 20}{12} = \frac{\gamma.\ 10.\ 2}{2.\ 6} = \frac{\gamma.\ 10}{6}$. δηλ: προσγράφομεν εἰς τὸ χρονικὸν εἰσόδημα τῶν λιτρῶν ἓν μηδενικὸν, καὶ διὰ τοῦ 6 διαιροῦμεν, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι σολδία μηνιαῖον εἰσόδημα. λ. χ.

Δίδω ἐκεῖ διὰ τὰ χρονικά μου ἔξοδα 1500 λίτρ: τί δίδω εἰς ἕνα μῆνα; $\frac{15000}{6}=200$ σολδ: $=125$ λιτ: εἰς δύω δὲ, τρεῖς, τέσσαρες. κ. λ. λ μῆνας γίνεται ὡς ἀνωτέρω.

§. 517. Ζητεῖται πολλάκις ἀπὸ ἓν χρονικὸν εἰσόδημα γροσιῶν, τί ἀνήκει εἰς μίαν ἡμέραν· ἐπειδὴ ὅμως ἕκαστος μὲν εἰς 30 ἡμέρας κοινῶς νομίζεται, καὶ ὁ τύπος εἰς ἡμᾶς ὁ μηνιαῖος εὕρηται $\chi=\frac{\gamma.\ 10}{3}$. ἐὰν αὐτὸν μὲ 30 διέλωμεν, εὑρίσκεται τὸ ἡμερούσιον εἰσόδημα εἰς παράδες οὕτω $\chi=\frac{\gamma.\ 10}{30.\ 3}=\frac{\gamma.\ 10}{3.\ 10.\ 3}=\frac{\gamma}{9}$. ἄρα διὰ νὰ εὑρίσκωμεν μιᾶς ἡμέρας εἰσόδημα, ὅταν ἠξεύρωμεν τὸ χρονικὸν εἰς γρόσια, πρέπει νὰ διέλωμεν αὐτὰ τὰ γρόσια μὲ τὸν γ, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι παράδες, ὁποῦ ἀνήκει ὡς εἰσόδημα μιᾶς ἡμέρας. π. χ.

Λαμβάνω τόκον τοῦ χρόνου. 653 γρ. τί λαμβάνω εἰς μίαν ἡμέραν;

$\frac{653}{9}=72\frac{5}{9}$ παρ: $=72$ παρ: $1\frac{1}{3}$ ἄσπι

Ἔχει τις εἰσόδημα 2000 γρ. καὶ ζητεῖ τὸ μιᾶς ἡμέρας.

$\frac{2000}{9}=222\frac{2}{9}$ παρ $=5$ γρ: 22 παρ: 1 ἄσπι σχεδόν.

Ἀλική τις δίδει εἰσόδημα τὸν χρόνον 4000 γρ: τί δίδει εἰς μίαν ἡμέραν;

$\frac{40000}{9} = 4444\frac{4}{9}$ παρ $=111$ γρ. 4 παρ: 1 ἄσπ:

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἡμερούσιος τύπος $\chi = \frac{\gamma}{9}$ παρ: σημαίνει· ἐὰν αὐτὸν διὰ 3 πολλαπλασιάσωμεν, γίνεται ἄσπρα οὕτω $\chi = \frac{\gamma \cdot 3}{9} = \frac{\gamma}{3}$. καὶ οὕτω κοινῶς εὑρίσκουσι τὸ ἡμερούσιον· ἤτοι διαιροῦσι τὸ χρονικὸν εἰσόδημα εἰς γρόσια διὰ 3. καὶ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ ἡμερούσιον εἰς ἄσπρα· ἐὰν τὸ χρονικὸν 560. τὸ ἡμερούσιον εἶναι $\frac{560}{3} = 186\frac{2}{3}$ ἄσπ: καὶ ἐπειδὴ οὕτως εὑρίσκουσι τὸ εἰσόδημα μιᾶς ἡμέρας, ἐὰν αὐτὸ διὰ 30 πολλαπλασιάσωσιν, εὑρίσκουσι καὶ τὸ μηνιαῖον εἰς ἄσπρα οὕτω $\frac{\gamma}{3}$. 30. ἐὰν ὅμως τοῦτο τὸ γινόμενον μὲ 3 διέλωσι, γίνονται τὰ ἄσπρα παράδες οὕτω $\frac{\gamma}{3}.\frac{30}{3} = \frac{\gamma}{3}$. 10. διὸ καὶ ἁπλῶς οἱ ἄνθρωποι, ὅταν δοθῇ ἓν χρονικὸν εἰσόδημα, διαιροῦσι πρῶτον τοῦτο μὲ 3: καὶ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ ἡμερούσιον εἰσόδημα εἰς ἄσπρα· εἶτα προσγράφουσιν ἓν μηδενικὸν εἰς τὸ ἡμερούσιον εἰσόδημα τῶν ἄσπρων, καὶ τοῦτο γίνεται μηνιαίουνεῖς παράδες· δηλόνοτι εἶναι ὁ μισθὸς 60 γρόσια μιᾶς ἡμέρας, ἄρα $\frac{60}{3} = 20$ ἄσπ: καὶ ἑνὸς μηνὸς 200 παρ $=5$ γρ. ἐὰν δ' ᾖ τὸ χρονικὸν εἰσόδημα 5000. εἶναι τὸ μὲν ἡμερούσιον $\frac{5000}{3} = 1666\frac{2}{3}$ ἄσπ: τὸ δὲ μηνιαῖον 16660 παρ. καὶ

$\frac{20}{3}$ παρ. ὁμοίως καὶ εἰς τὰ λοιπά· πλὴν τὸ μηνιαῖον εἶναι πάντοτε ὀρθὸν, διότι τῷ ὄντι ὁ χρόνος εἰς 12 διαιρεῖται μῆνας· καὶ κατὰ τὸν ἄνω τρόπον εὑρίσκεται πάντοτε $\chi = \frac{\gamma}{3} . 10 = \frac{10\,\gamma}{3}$ παρ: τὸ δ' ἡμερούσιον εἰσόδημα ἀεὶ μεῖζον εὑρίσκεται, καὶ εἰς μείζονας ποσότητας εἶναι μεγίςη ἡ ἀπάτη· διότι τῶν μηνῶν ὁ μὲν ἔχει 30 ἡμ: ὁ δὲ 31. ὁ δὲ 28. κτ: καὶ ἔτι ὁ χρόνος εἶναι 365 ἡμ. καὶ αὐτοῦ ὑποτίθεται 360, καὶ ὅταν ὁ παρονομαςὴς μικρότερος, αὔξει τὸ πηλίκον· διὰ νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἡμερούσιον ὀρθῶς, καὶ ἐπ' ἀκριβὲς; πρέπει νὰ διελῶμεν τὸ χρονικὸν εἰσόδημα μὲ 365. διότι ἂν οἱ 365 φέρουσιν ἓν εἰσόδημα, πρέπει νὰ ἰδῶμεν ἡ μία ἡμέρα τὶ φέρει· οὕτω. $365 : = 1 : \chi$ ἤτοι $\frac{\gamma}{365} = \chi$ ἐπειδὴ ὅμως τὸ γ γρόσια σημαίνει, μὲ 40 πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ, καὶ γίνεται παρ. $\frac{\gamma .\ 40}{365} = \frac{\gamma .\ 5 .\ 8}{7 .\ 3 .\ 5} = \frac{\gamma .\ 8}{7 .\ 3}$ καὶ $\chi = \frac{\gamma .\ 8}{73}$ παρ. λοιπὸν πολλαπλασιάζομεν τὰ γρόσια τοῦ χρονικοῦ ποσοῦ μὲ 8, καὶ τοῦτο διαιροῦμεν μὲ 73, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ ἡμερούσιον εἰσόδημα ἐπ' ἀκριβὲς εἰς παράδες. ὅθεν ἐὰν ὁ χρονικὸς τόκος 60 γρ. ὁ ἡμερούσιος $\frac{60 .\ 8}{73} = \frac{480}{72} = 6\frac{412}{73}$ παρ: $= 6$ παρ: 1 ἄσπ: $\frac{53}{73}$. ἐὰν δὲ τὸ εἰσόδημα $\frac{5000 .\ 8}{73} = \frac{40000}{73} = 547$ παρ: 2 ἄσπρ: $\frac{6}{73}$ ἀνωτέρω εὑρέθη $= 1866\frac{2}{3}$ ἄσπ: $= 555$ παρ. καὶ ἔτι πρὸς ὡς φανερὸν, δὲν λέγομεν ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ μηνιαίου εἰσοδήματος εὑρίσκομεν ἅμα τὸ ἡμερούσιον εἰς ἄσπρα, ἐὰν ἐκεῖνο εἶναι παράδες, ὅταν ἕνα μόνον χαρακτῆρα πρὸς τὰ δὲ διὰ κόψωμεν εἰς κλάσμα δεκαδικόν· δηλ: ἐὰν τὸ εἰσόδημα τοῦ μηνὸς εἶναι = παρ 500, τὸ ἡμερούσιον εἶναι = ἄσπρα 50. ἐὰν δ' ἐκεῖνο = παρ 556, τοῦτο = ἄσπρ 55, $\frac{6}{10}$. κτ.

§. 518. Ἔτι καὶ τοῦτο συμβαίνει εἰς τὴν κοινὴν ζωήν. δηλ: πολλοὶ εἰς τὰς ὁμολογίας μετὰ τοῦ κεφαλαίου γράφουσι καὶ τὸν τόκον ὁμοῦ, καὶ τὰ ἄγγραφα περὶ τόκου δὲν διαλαμβάνουσι λ. χ. Ἐδάνεισέ τις πρὸς 8 τὰ 100 εἰς ἕτερον ποσότητα χρημάτων, καὶ οὗτος συμπεριλαβὼν ὁμοῦ καὶ τὸν χρονικὸν τόκον, ἔλαβεν ὁμολογίαν ἄνευ τόκου διὰ 8820 γρ. ζητεῖται πόσον ἦτον τὸ καθαρὸν κεφάλαιον; αὐτοῦ εἶναι ὅμοιον ὡσὰν νὰ ἔγραφε τὰ 100 γρ: 108. ὅθεν ἡ ἀναλογία· ἂν τὰ 108 ἦτον 100, τὰ 8820 πόσα; δηλ:

$108 : 100 = 8820 : \chi$. καὶ $\chi = \frac{100.\ 8820}{108} = \frac{100.\ 2205}{27}$

$\frac{100.\ 245}{3} = \frac{24500}{3} = 8166\ \frac{2}{3}$ γρ: ἤτοι 26 παρ: καὶ 2 ἄσπρα.

Ἕτερος ἐπώλησε μίαν πραγματείαν διὰ 7860 γρ. λέγει δὲ ὅτι ἐκέρδησε 12 εἰς τὰ 100, πόσον ἦν τὸ κεφάλαιον;

$112 : 100 = 7860 : \chi = \frac{100.\ 7860}{112} = \frac{100.\ 3930}{56} =$

$\frac{100.\ 1965}{28} = \frac{196500}{28} = 7017\ \frac{6}{7}$:

Ἐὰν δὲ καὶ αὐτοῦ θῶμεν α τὸ κέρδος πρὸς τὰ 100, καὶ β τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων, ἔσαι $100+\alpha$: β: χ καὶ $\chi=\frac{100\,\beta}{100+\alpha}$ προσγράφομεν εἰς τὸ ποσὸν τῶν ἄσπρων δύω μηδενικὰ, καὶ διὰ τοῦ κεφαλαίου τοῦ 100, καὶ τοῦ τόκου, ἢ κέρδους πρὸς τὸ 100 διαιροῦμεν· δηλ: ἔλαβέ τις πρὸς 9 τὰ 100 γρόσια 3300, πόσον ἦν τὸ κεφάλαιον;

$$\chi=\frac{330000}{109}=3027\ \frac{43}{109}.$$

§. 519. Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν ἐφαπλοῦται μάλιςα εἰς τὰς μεταφορὰς τῶν νομισμάτων, ςαθμῶν, μέτρων κτ. ὅταν μεταφέρωνται ἀπὸ μέτρα μιᾶς πολιτείας εἰς μέτρα ἄλλης πολιτείας. εἰς αὐτὰ πρέπει ὅμως νὰ εἶναι γνωςὸς ὁ λόγος τοῦ ἑνὸς πρὸς τὸ ἄλλο, δηλ: νὰ ἠξεύρομεν τί λόγον ἔχει τὸ φιορίνι εἰς τὸ γρόσι, καὶ τὸ γρόσι εἰς τὸ φιορίνι· καὶ τί λόγον ἔχει ἡ γαλλικὴ λίτρα πρὸς τὰ ἐδικάμας χρήματα· καὶ ἔτι, τί λόγον ἔχει ἡ πήχη ἡ ἐδική μας πρὸς τὴν πήχην τῆς Γερμανίας, Γαλλίας, Πορτογαλλίας, Ἐγγλιτέρας κ. τ. λ. καὶ τί λόγον ἔχει τὸ βάρος πρὸς τὸ ἡμέτερον βάρος. κ. τ. λ. ταῦτα εὑρίσκονται εἰς πολλὰς βίβλους, ὁποῦ καθ' αὐτὸ περὶ τούτου ἔγραψαν, ὡς καὶ ἡμεῖς εἰς ἑτέραν βίβλον, ἣν Θεὸς δῷ, καταγράψομεν. Δεδόσθω, ἠξεύρομεν, ὅτι ἓν φιορίνι τιμᾶται ἐνταῦθα 32 παρ:, καὶ θέλομεν 500 γρόσια νὰ μάθωμεν πόσα φιορίνια γίνονται; γίνεται ἡ μέθοδος οὕτω 32. παρ: γίνονται 1 φιορίνι, 500 γρ: πόσα; ἤτοι 32: 1=500: χ. καὶ $\chi=\frac{1.\ 500}{32}$. ἐπειδὴ ὅμως οἱ ὁμόλογοι λόγοι 32, καὶ 500 πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς, γενέσθωσαν τὰ γρόσια παράδες οὕτω $\frac{1.500.40}{32}$

$=\frac{500.\ 5}{4}=$ 125. 5=625 φιορ. καὶ αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι

ὁ λόγος εἶναι γνωςὸς 32: 1 ἤτοι $\frac{1}{32}$ πολλαπλασιάζεται μὲ

τὸ ποσὸν τῶν ἄσπρων, ὁποῦ εἰς φιορίνια μεταβάλλονται.

$\frac{1}{32}$. 500. 40.

Ἔτι ζητεῖται πόσα φιορίνια γίνονται τὰ 1300 γρ, ἐὰν

τὸ φιορίνι =26 παρ; λέγομεν $\frac{1}{26}$. 1300. 40 $=\frac{1}{13}$.

$\frac{26000}{13}$=2000 φιορ. Ὅθεν ὅςις θέλει νὰ μεταβάλλῃ ἢ τὰ βάρη, ἢ τὰ μέτρα εἰς ἕτερα, πρέπει.

α΄. Νὰ εὕρῃ τὸν λόγον, ὃν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ἢ ἀπὸ πείρας, ἢ ἀπὸ ἕνα συγγραφέα.

β΄. Νὰ γράψῃ τὸν λόγον ἐν εἴδει κλάσματος, καὶ εἰς αὐτὸ νὰ βάλῃ ἀριθμητὴν τὸν ὅρον ἐκείνου τοῦ μέτρου, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ δοθὲν ποσὸν ἀπαιτεῖται νὰ μεταβληθῇ, καὶ παρονομαςὴν ἐκεῖνον τὸν ὅρον, ὁποῦ εἶναι ὁμογενὴς μὲ τὸ δοθὲν ποσόν.

γ΄. Τὸ δοθὲν ποσὸν νὰ τὸ φέρῃ εἰς μίαν παρονομασίαν μὲ τὸν παρονομαςήν.

δ΄. Μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν νὰ πολλαπλασιάσῃ τὸ κλάσμα, καὶ τὸ γινόμενον σημαίνει τὸ εἶδος τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ εἶναι τὸ ζητούμενον.

α΄. Ἐπειδὴ ἠξεύρομεν ὅτι 100 γρ. εἶναι 125 φιορ: ζητεῖται λοιπὸν 5000 γρ. πόσα φιορίνια γίνονται; κατὰ τὸ

α' καὶ β' $\frac{125 \text{ φιορ:}}{100 \text{ γρ.}} \cdot 5000 \text{ γρ.} \frac{625000}{100} = 6250$ φιορ,

β'. Ἂν 125 φιορίνια εἶναι 100 γρ. 6000 φιορίνια, πόσα γρ. γίνονται;

$\frac{100}{125} \cdot 6000 = \frac{600000}{125} = 4800$ γρ.

γ'. Ἓν τάληρον τῆς Λειψίας: ἔχει 110 παρ: 300 γρ. πόσα τάληρα γίνονται;

$\frac{1}{110} \cdot 300 \cdot 40 = \frac{1}{11} \cdot 300 \cdot 4 = \frac{1200}{11} = 109 \frac{1}{11}$ τάλ.

Ἐὰν δὲ τάληρα 704 ζητοῦνται πόσα γρόσια γίνονται, εἶναι

$\frac{110}{1} \cdot 704 = 77440$ παρ $= 1936$ γρ. διότι ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς παράδες εἶναι, καὶ τὸ γινόμενον παράδες ἐξέρχεται.

δ'. Ἐὰν εἶναι γνωςὸν, ὅτι μία λίτρα γαλλικὴ ἔχει 26 παρ, 630 γρ: πόσας λίτρας ἀποτελοῦσιν; $\frac{1}{26} = 630 \cdot 40 =$

$\frac{1}{13} \cdot 630 \cdot 20 = \frac{12600}{13} = 969 \frac{3}{13}$ γρ. ἀνάπαλιν δὲ 100

λίτ: πόσα γρόσια; $\frac{26}{1} \cdot 1000 = 26000$ παρ $= 650$ γρ.

ε'. 100 γρ. τῆς πόλεως γίνονται 106 τῆς Σμύρνης, 5000 γρ. τῆς πόλεως πόσα γίνονται τῆς Σμύρνης. $\frac{106}{100}$

$5000 = \frac{530000}{100} = 5300$. ἀνάπαλιν 4560 τῆς Σμύρνης, πόσα γίνονται τῆς πόλεως $\frac{100}{106} \cdot 4560 = \frac{456000}{106} = 4301$

γρ: 35 παρ. 1 ἄσπ: Τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ ἄλλα νομίσματα ἄλλων πολιτειῶν, ὅταν ἐξεύρομεν λ. χ. τὸν λόγον μεταξὺ τῶν ἡμετέρων χρημάτων, καὶ τῆς Ῥωσσίας, ἢ τῆς Ἐγγλιτέρας, ἢ τῆς Ἰσπανίας, Ἰταλίας, καὶ τῶν λοιπῶν. Πῶς ὅμως εὑρίσκομεν τὸν λόγον τῶν ἡμετέρων μέτρων πρὸς ἄλλα ξένα μέτρα, ὧν ὁ λόγος πρὸς μὲν τὰ ἡμέτερα μέτρα εἶναι ἄγνωςος, πρὸς δ' ἄλλα ξένα γνωςὸς, καὶ τούτων μόνον πρὸς τὰ ἡμέτερα γνωςὸς, ὕςερον ἐροῦμεν. Κατὰ τοὺς ἀνωτέρους τρόπους μεταφέρονται καὶ τὰ μέτρα τοῦ συνεχοῦς ποσοῦ, ὅταν τὸν λόγον μεταξὺ γινώσκομεν. λ. χ.

α΄. 15 μίλλια τῆς Γερμανίας εἶναι 25 λέγαι τῆς Γαλλίας, ζητεῖται λοιπὸν 150 μίλλια Γερμανικὰ, πόσαι λέγαι γίνονται, $\frac{25}{15} = \frac{5}{3} \cdot 150 = \frac{750}{3} = 250$ λέγαι· ἀνάπαλιν 560 λέγαι, πόσα μίλλια Γερμανικὰ $\frac{3}{5} \cdot 560 = \frac{1680}{2} =$ 336 μ. Γ.

β΄. Ἓν μίλλιον Γερμανικὸν εἶναι 5 μίλλια Τούρκικα· ἄρα 170 μίλ: Γερμανικὰ πόσα εἶναι Τούρκικα; $\frac{5}{1} \cdot 170 = 850$· ἀνάπαλιν 1225 μ: Τούρκικα πόσα γίνονται Γερμανικά; $\frac{1}{5} \cdot 1225 = 245$.

γ΄. 100 πήχες τῆς Κωνςαντινουπόλεως εἶναι 86 τῆς Ἀουςρίας, 45 πήχες τῆς Κωνςαντινουπόλεως πόσαι γίνονται τῆς Ἀουςρίας.

$\frac{86}{100} \cdot 45 = \frac{3870}{100} = 38\frac{7}{10}$· ἀνάπαλιν· 100 πῆχες τῆς Ἀουςρίας, πόσαι τῆς Κωνςαντινουπόλεως; $\frac{100}{86} \cdot 100 = \frac{10000}{86} = 116\frac{12}{43}$.

δ. 100 πῆχες Ἀγγλικαὶ ἀποτελοῦσιν $147\frac{1}{8}$ τῆς Βιέννης· 200 πῆχες τῆς Βιέννης, πόσαι γίνονται Ἀγγλικαί; πρῶτον ἀπαλλάξου ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ λόγου κατὰ (§. 464.) $100 : 147\frac{1}{8}$ οὕτω $800 : 1177$ εἶτα $\frac{800}{1177} \cdot 200 = \frac{160000}{1177} = 135\frac{1105}{1177}$· οὕτω μεταφέρονται καὶ τὰ μέτρα τῆς βαρύτητος, ὅταν τὸν λόγον μεταξὺ τῶν βαρυτήτων τῶν δύω πολιτειῶν ἐξεύρωμεν· λ. χ. σχεδὸν ὡς βέβαιον λαμβάνεται ὅτι $2\frac{1}{4}$ φούντια, ἤτοι λίτραις τῆς Βιένης, μίαν ὀκᾶν ἀποτελοῦσιν· ὅθεν ὁ λόγος $2\frac{1}{4}:$, γίνεται $9 : 4$· ἐὰν ἄρα ζητηθῇ 500 ὀκ: πόσαι λίτραι τῆς Βιέννης γίνονται $\frac{9}{4} \cdot 500 = \frac{4500}{4} = 1125$· λίτρ: ἀνάπαλιν 5000 φούντια, πόσαι ὀκάδες; $\frac{4}{9} \cdot 5000 = \frac{20000}{9} = 2222\frac{2}{9}$· καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μεταφέρονται, καὶ ἕτερα βάρη διαφόρων πολιτειῶν·

ὅταν ὁ λόγος εἶναι γνωςός· τὸν αὐτὸν τρόπον μεταβάλλομεν φλωρία εἰς ἄλλο νόμισμα, καὶ τοῦτο εἰς ἐκεῖνο· ὅταν κλασματικῶς ἐμπεριέχωνται· δηλ: ἐξεύρομεν ὅτι 8 ρουμπιέδες εἶναι 19 γρ: 3658 γρ: πόσα ρουμπιέδες γίνονται; $\frac{8}{19} \cdot 3658 = \frac{29264}{19} = 1544\frac{4}{19}$ ρουμ. ἀνάπαλιν 632 ρουμπιέδες πόσα γρόσια; $\frac{19}{8} \cdot 632 = \frac{12008}{8} = 1501$ γρ. Τοῦτο τὸ θεώρημα εἶναι πλούσιον εἰς τὴν κοινὴν ζωὴν, καὶ εἰς πλεῖςα ἐφαρμόζεται· ἐγὼ δὲ διὰ τὴν μακρολογίαν ἐῶ τὰ λοιπὰ εἰς τὴν εὐφυΐαν τῶν ἀκροατῶν μου.

§. 520. Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν χρήσιμος καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, ἣν ἡ καθομιλημένη διάλεκτος ἡμῶν κατέβασμα καλεῖ· καὶ οἱ ἑτερόγλωσσοι ραμπάτον· δηλ: ὅταν θέλωμεν νὰ ἀφέλωμεν μίαν ποσότητα ἀπό τινος ποσοῦ διά τινα μεσολλαβοῦσαν αἰτίαν. δηλ χρεωςεῖ τις 300 γρ, διὰ νὰ τὰ πληρώσῃ εἰς ἄλλον εἰς διωρίαν ἑνὸς χρόνου· ὁ δὲ ζητεῖ τὰ ἄσπρα τὴν αὐτὴν ἡμέραν, καὶ ἀφίνει τὸν τόκον ἑνὸς χρόνου πρὸς 8 τὰ 100. ἤδη ζητεῖ ὁ δανειςὴς πόσα νὰ πληρώσῃ, καὶ πόσα νὰ κατεβάσῃ· αὐτοῦ σφάλλεις ἐὰν κατεβάσῃ τρὶς $8 = 24$. καὶ ἡ ἀναλογία εἶναι ἐσφαλμένη· ἀλλὰ πρέπει ὁ τόκος τῶν 100 νὰ προςεθῇ τοῖς 100 οὕτω 108, καὶ νὰ γένῃ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἀναλογίας· δεύτερος δὲ αὐτὸς ὁ τόκος τῶν 100, καὶ τρίτος τὸ δοθὲν ποσὸν, καὶ ὁ εὑρεθεὶς τέταρτος νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ ποσὸν· καὶ τὸ λείψανον νὰ δοθῇ. δηλ: λέγομεν ἂν τὰ 108 ἔχουσι τόκον 8, τὰ 300 πόσα; $108 : 8 = 300 : x = \frac{8.\ 300}{108} = \frac{2.\ 300}{27} = \frac{2.\ 100}{9} = \frac{200}{9} = 22\frac{2}{9}$. ὅθεν

$300 - 22\frac{2}{9} = 277\frac{7}{9}$, διότι ἐὰν εἴπωμεν, ἂν τὰ 100 εἰς ἕνα χρόνον γίνονται 108, τὰ $277\frac{7}{9}$ πόσα; εὑρίσκομεν ὅτι γίνονται 300.

Ἕτερος ἠγόρασεν ἓν ὀσπίτιον 6000 γρ: μὲ συμφωνίαν νὰ τὰ πληρώσῃ εἰς διωρίαν τριῶν χρόνων· ὁ πωλητὴς ὅμως αἰτεῖ τὰ ἄσπρα ἀμέσως, καὶ ἀφίνει τόκον πρὸς 10 τὰ 100, πόσα πρέπει πληρώσῃ.

Πρέπει νὰ ἰξεύρωμεν, ὅτι τὰ 100 εἰς τρεῖς χρόνους γίνονται 130: ἄρα $130 : 30 = 6000 : \chi$ καὶ $\chi = \frac{30.\ 6000}{130}$

$= \frac{3.\ 6000}{130} = \frac{3.\ 6000}{13} = \frac{18000}{13} = 1384\ \frac{8}{13}$. ἄρα δίδει μόνον $6000 - 1384\frac{8}{31} = 4615\ \frac{5}{13}$.

Διὰ νὰ ἐργαζώμεθα καὶ αὐτὰ εὐκόλως, ἂς λάβωμεν τὸν τόκον πρὸς τὰ $100 = \alpha$, καὶ τὴν ποσότητα ὅλην β, καὶ ἔσται $100 + \alpha : \alpha = \beta : \chi$ καὶ $\chi = \frac{\alpha\beta}{100+\alpha}$. τοῦτο δ' ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ β, ἔσται $\beta - \frac{\alpha\beta}{100+\alpha} = \frac{100\beta + \alpha\beta - \alpha\beta}{100+\alpha}$

$= \frac{10\ \beta}{100+\alpha}$. καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ποσὸν, ὁποῦ μένει μετὰ τὸ κατέβασμα, δηλ: εἰς τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων προσγράφονται δύω μηδενικὰ, καὶ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ κεφαλαίου τοῦ 100, καὶ τοῦ τόκου πρὸς τὰ 100, καὶ ἀπαλλαττόμεθα ἀπὸ τὰς διπλᾶς ἐργασίας δηλ:

Ἠγόρασέ τις ἐν ὑποςατικὸν 20050 μὲ συμφωνίαν νὰ πληρώσῃ μετὰ ἕνα χρόνον· αὐτὸς δ' αἰτεῖ εὐθὺς τὰ χρήματα, καὶ ἀφίνει τὸν τόκον πρὸς 12 τὰ 100· πόσα λοιπὸν λαμβάνει; $\frac{2005000}{112} = 17901 \frac{11}{14}$.

Ἕτερος μέλλων νὰ ἀποτίσῃ 1200 εἰς $5\frac{1}{2}$ χρόνους, ἀπαιτεῖται ἀμέσως νὰ πληρώσῃ, καὶ νὰ κρατήσῃ 10 τὰ 100, πόσα ἀποτίσει; αὐτοῦ οἱ $5 \frac{1}{2}$ χρόνοι ἀποτελοῦσι 55. ἄρα $\frac{120000}{155} = \frac{24000}{31} = 774 \frac{6}{31}$.

Ἕτερος ἔμελλε νὰ πληρώσῃ 30000 γρ: εἰς 4 χρόνους· εἰς μὲν τὸν πρῶτον 10000, εἰς τὸν δεύτερον ἔτι 10000; εἰς τὸν τρίτον 7000, καὶ εἰς τὸν τέταρτον 3000. ἀπαιτεῖται ὅμως ἀμέσως νὰ τὰ δώσῃ, καὶ τοῦ ἀφίνεται ὁ τόκος 10 εἰς τὰ 100 αὐτοῦ κατὰ μέρος εὑρίσκονται οὕτω $\frac{1000000}{110} + \frac{1000000}{120} + \frac{300000}{130} + \frac{300000}{140} =$ 9090 γρ: 36 παρ: 1 ἄσπρ: + 8333 γρ: 13 παρ: 1 ἄσπρου + 5384 γρ: 34 παρ = 24951 γρ: 28 παρ:- Τοῦτο δὲ συμβάλλει μάλιςα εἰς τὰς πόλιτζας· διότι πολλάκις πέμπονται πόλιτζαι νὰ πληρωθῶσι μὲ διωρίαν ἡμερῶν, καὶ μηνῶν, καὶ δύνανται καὶ αὗται νὰ πληρωθῶσιν ἀμέσως, πλὴν ὁ τόκος καταβιβάζεται· ὅθεν καὶ εἰς αὐτὰς εὑρίσκεται πρῶτον, ὡσὰν νὰ ἦτον ἡ διορία εἰς ἕνα χρόνον μὲ ἕνα διάφορον κατὰ τοῦτον τὸν τύπον· εἶτα νομίζεται τὸ εὑρεθὲν ὡς χρονικὸν εἰσόδημα· καὶ κατὰ τοὺς τύπους, ὅπου εἰς τὸ χρονικὸν εἰσόδημα ἐδείξαμεν (§. 517) εὑρίσκεται τὸ ἡμερούσιον, ἢ τὸ μηνιαῖον τὸ ζητούμενον.

§. 521. Τὸ αὐτὸ θεώρημα ὠφελεῖ τὰ μάλιστα εἰς τὰς ἀποδεκατώσεις τῶν διοικήσεων, ὅπου γίνονται εἰς εἰσοδήματα, εἰς ὑποστατικὰ κ. τ. λ. δηλ: εἰς τὰ ὑποστατικὰ ὁ οἰκοκύρης λαμβάνει δέκα, καὶ ἓν ἡ διοίκησις ἀπὸ τοὺς καρπούς· ὄχι δηλ: ὅταν ἔχῃ 10, δίδει τὸ ἕν, διότι τότε λαμβάνει ἐκεῖνος 9, ἀλλ' ὅταν 11, λαμβάνει ἐκεῖνος 10, καὶ δίδει τὸ ἓν εἰς τὴν διοίκησιν· οὕτω καὶ ὅταν ἔχῃ 110, δίδει τὰ 10, καὶ λαμβάνει αὐτὸς τὰ 100. ὅθεν καὶ ἡ ἀναλογία ὡς ἄνω γίνεται· ἂν τὰ 110. δίδωσι 10, τὸ β ποσὸν τί δίδει;

$100+10:\ 10=\beta:\ \chi$ καὶ $\chi=\dfrac{10\,\beta}{100+10}$. ἐπειδὴ ὅμως αὐτοῦ δίδονται ἄλλοτε εἰς τὰ 10 ἕν, εἰς τὰ 7 ἕν, εἰς τὰ 15 δύω: εἰς τὰ 5 ἓν κ. τ. λ. θῶμεν ἀντὶ τῆς ποσότητος, εἰς τὴν ὁποίαν ἓν δίδεται ϑ, ἀντὶ δὲ τοῦ ἑνὸς, ἢ δύω, α, καὶ ἀντὶ ὅλης τῆς ποσότητος, β, καὶ ἔσαι $\vartheta+\alpha:\ \alpha=\beta:\ \chi$ καὶ $\chi=\dfrac{\alpha\beta}{\vartheta+\alpha}$. ἐὰν δὲ το $\alpha=1$ καθὼς ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον γίνεται ἔσαι $\chi=\dfrac{\beta}{\vartheta+1}$. δηλ: μονάδα προσθέτομεν εἰς τὸ ποσὸν, ὅπου τίθεται τὸ δόσιμον, καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦμεν ὅλον τὸ ποσόν.

α'. Ζευγίτης ἔλαβε 648 κοιλὰ σίτου, καὶ πρέπει νὰ πληρώσῃ εἰς τὰ 10 ἕν, πόσα δίδει; $\dfrac{648}{11}=58\dfrac{10}{11}$

β'. Ἕτερος δὲ πληρώνει εἰς τὸν οἰκοκύρην τοῦ ὑποστα-

τικοῦ εἰς τὰ 7 ἓν, ἔχει δὲ 1200 κοιλὰ κριθάρι, πόσα;
$\frac{1200}{8}=150$ κοιλά.

γ΄. Ὁ οἰκοκύρης μιᾶς λίμνης λαμβάνει ἀπὸ τοὺς ἀγρεύοντας τοὺς ἰχθύας εἰς τὰ 4 ἓν, οἱ ἀγρευταὶ δὲ ἔπιασαν 3000 ὀκάδες ψάρια, πόσα δίδουσιν; $\frac{3000}{5}=6000$ ὀκ:

δ΄. Γιουμπρούκιον πληρώνεται 5 τὰ 100, εἰς 5654 γρ: πόσα πληρώνω; $\chi=\frac{\alpha\beta}{\vartheta+\alpha}=\frac{5.\ 5654}{100+5}=\frac{5654}{20+1}=269\frac{5}{21}$.

ε΄. Δόσιμον ἐκδίδεται, νὰ πληρώσῃ ἕκαστος ἀπὸ τὸ χρονικόν του εἰσόδημα εἰς τὰ 20, τρία· πόσα δίδει ὁ ἔχων 5000 εἰσόδημα; $\frac{3.\ 5000}{20+3}=\frac{15000}{23}=652\frac{4}{23}$.

Εἶναι καὶ ἕτερον εἶδος ὑφαιρέσεως, ἤτοι ῥαμπάτου, καθ' ὃ ἀγοράζω τι, καὶ μοὶ ὑπόσχεται ὁ πωλητὴς, ἐὰν ἀγοράσω ἕως μίαν τινα ποσότητα, νὰ μοὶ ἀφίνῃ 2 εἰς τὰ 10, ἢ 4 εἰς τὰ 20, ἢ 5 εἰς τὰ 40, ἢ 7 εἰς τὰ 100· τοῦτο δὲ τὸ εἶδος γίνεται διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν· δηλ: ἀγοράζω βιβλία κατὰ τὴν γεγραμμένην τιμήν· ὁ βιβλιοπώλης μοὶ λέγει, ἐὰν ἀγοράσω ἐπέκεινα τῶν 24 γρ: νὰ μοὶ ἀφίσῃ 4 εἰς κάθε 24· ἠγόρασα λοιπὸν 200 γρ: βιβλία, πόσα πρέπει νὰ πληρώσω; λέγομεν ἂν τὰ 24 γίνονται 20 τὰ 200 πόσα γίνονται;

$$24:\ 20=200:\ \chi.\ \text{καὶ}\ \chi=\frac{20.\ 200}{24}=\frac{5.\ 200}{6}=\frac{5.\ 100}{3}=$$

$166\frac{2}{3}$ γρ:

Ἕτερος ἀγοράζει ἰατρικὰ ἀπὸ μίαν ἀποθήκην κατὰ τὴν διωρισμένην τιμὴν, ὁ δ' ἀποθηκάριος ὑπόσχεται νὰ τῷ ἀφήσῃ 3 παρ: εἰς τὸ γρόσι, ἐὰν ἐπέκεινα τῶν 50 γρ: ἀγοράσῃ· ὁ δ' ἀγοράζει διὰ 3000 γρ: πόσα νὰ πληρώσῃ;

$$40:\ 37=120000:\ \chi \text{ καὶ } \chi=\frac{37.\ 120000}{40}=37.\ 3000$$

$=111000$ παρ $=2775$ γρ: καὶ κατὰ ταῦτα ἔτι πλείονα ἀναπτύονται.

§: 522. Ἐφαπλοῦται ἔτι καὶ εἰς τὰς ἑταιρείας τῶν ἐμπόρων ἡ μέθοδος τῶν τριῶν· δηλ: ὅταν πολλοὶ συμφωνοῦν νὰ κάμωσιν ὁμοῦ μὲ ἓν κεφάλαιον μίαν πραγματείαν, καὶ ἕκαστος καταβάλλει πλείονα, ἢ περισσότερα χρήματα, καὶ εἰς τὸ τέλος θέλουσι νὰ μοιράσωσι τὸ κέρδος κατ' ἀναλογίαν τῶν χρημάτων, ὁποῦ κατέβαλον· χ. λ. Συνεφώνησαν τρεῖς, ἢ τέσσαρες, ἢ πέντε ἄνθρωποι νὰ συστήσωσι μίαν πραγματείαν, καὶ ὁ μὲν ἔθηκεν εἰς τὸ κοινὸν α χρήματα, ὁ δὲ β, ὁ δὲ γ, καὶ ὁ ἕτερος δ· εἰς δὲ τὸ τέλος τῆς πραγματείας ἐκέρδησαν φ χρήματα· ζητεῖται, τί νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ αὐτὸ τὸ κέρδος; φανερὸν αὐτοῦ, ὅτι ὅλον τὸ κεφάλαιον τῶν μερῶν, ὁποῦ ἕκαστος ἔθηκεν, ἔδωκεν αὐτὸ τὸ κέρδος φ· λοιπὸν τὸ κεφάλαιον εἶναι $\alpha+\beta+\gamma+\delta$· ἀναλόγως λοιπὸν πρέπει νὰ εἰπῶμεν, ἂν ὅλον αὐτὸ $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ ἔδωκεν κέρδος φ, τὸ ἓν μερίδιον μόνον α τί θέλει δώσῃ, καὶ εὑρίσκομεν τὸ κέρδος τοῦ α οὕτω

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta:\ \varphi=\alpha:\ \chi=\frac{\varphi}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\alpha\cdot$$

ὁμοίως καὶ διὰ τὸ β· $\alpha+\beta+\gamma+\delta:\ \varphi=\beta:\ \chi=\dfrac{\varphi}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\beta$

καὶ ἔτι διὰ τὸ γ· $\alpha+\beta+\gamma+\delta \cdot \varphi=\gamma : \chi=\frac{\varphi}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\gamma$.

καὶ τέλος διὰ τὸ δ· $\alpha+\beta+\gamma+\delta \cdot \varphi=\delta : \chi=\frac{\varphi}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\delta$.

α΄. Καὶ αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι ὅσα μέρη εἶναι τοῦ κεφαλαίου, τοσάκις ἡ μέθοδος τῶν τριῶν ἐπαναλαμβάνεται.

β΄. Ἐις ὅλας αὐτὰς τὰς ἐπαναλαμβανομένας ἀναλογίας, εὑρίσκεται ὁ πρῶτος λόγος ὁ αὐτός· καὶ σχεδὸν ἡγούμενος ὅρος εἶναι ὅλον τὸ κεφάλαιον $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ . . . . . καὶ ἑπόμενος αὐτὸ τὸ κέρδος φ· ὥρα $\alpha+\beta+\gamma+\delta : \varphi$ γίνεται, καὶ $\frac{\varphi}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ (§. 90.)

γ. Ἐὰν μὲ ἕκαςον μέρος τοῦ κεφαλαίου, ἤτοι τῶν κατὰ μέρος καταβληθέντων χρημάτων πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ τὸ κλάσμα, οὗ ὁ μὲν παρονομαςὴς αὐτὸ τὸ κεφάλαιον, ὁ δ᾽ ἀριθμητὴς τὸ κέρδος, εὑρίσκομεν τὸ ἀνάλογον κέρδος ἑκάςου, ὡς $\frac{\varphi}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\alpha$, $\frac{\varphi}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\beta$, $\frac{\varphi}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\gamma$, $\frac{\varphi}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\delta$· ὁμοίως καὶ ἐὰν εἶναι πλείονα μέρη· ὅθεν ἐὰν Κ τὸ κεφάλαιον καλέσωμεν, καὶ φ τὸ κέρδος, εἶναι τὸ ἐπιβάλλον μέρος ἑκάςῳ $\frac{\varphi}{K}\alpha$, $\frac{\varphi}{K}\beta$, $\frac{\varphi}{K}\gamma$, $\frac{\varphi}{K}\delta$· ἕπεται λοιπὸν ὅταν δοθῶσι τὰ μέρη μιᾶς ἑταιρείας, ἢ μίξεως, καὶ τὸ κέρδος, ἢ ἡ ζημία, καὶ ζητῆται τί ἕκαςος ἀναλόγως ἐκέρδησεν, ἢ ἐζημιώθη, συνάπτομεν τὰ μέρη εἰς ἓν κεφάλαιον, καὶ γίνεται παρονομαςὴς εἰς ἓν κλάσμα, ὁποῦ ἔχει ἀριθμητὴν τὸ κέρδος, ἢ τὴν ζημίαν· τοῦτο δὲ ῥέρομεν, εἰ δυνατὸν, εἰς ἐλαχίςους ὅρους, καὶ μὲ αὐτὸ πολλαπλασιάζομεν τὸ μέρος ἑκάςου χωριςὰ, τὰ δὲ γινόμενα εἶναι τὸ κέρδος, ἢ ἡ ζημία, ἣν ἕκαςος ἔλαβε· π. χ.

α΄. Τρεῖς ἐσυντρόφευσαν εἰς μίαν πραγματείαν, καὶ ὁ μὲν κατέβαλεν 6000, ὁ δὲ 2500, ὁ δὲ 140, καὶ ἐκέρδησαν 4500 γρ: τί λαμβάνει ἕκαςος; τὸ μὲν κεφάλαιον $6000+2500+140=8640$· τὸ δὲ κέρδος 4500 γρ: καὶ

τὸ κλάσμα $\frac{4500}{8640}=\frac{450}{864}=\frac{225}{432}$.

$$\text{ἄρα ὁ Α΄.}\ \frac{225}{432}\,6000 = \frac{225}{54}.\ 750 = 3125.$$

$$\text{ὁ Β΄.}\ \frac{225}{432}.\ 2500 = \frac{225}{108}.\ 625 = 1302\frac{36}{432}.$$

$$\text{καὶ ὁ Γ΄.}\ \frac{225}{432}.\ 140 = \frac{225}{216}.\ 70 = 72\frac{396}{432}.$$

$4500 =$ τῷ κέρδει.

β΄. Ἕτεροι ἐπραγματεύθησαν μὲ ἓν κεφάλαιον 100000 γρ: ἦσαν ὅλοι 7, ὧν ὁ μὲν 20000, ὁ δὲ 5000, ὁ δὲ 30000, ὁ δὲ 10000, ὁ δὲ 15000, ὁ δὲ 16000, καὶ ὁ ἔσχατος 4000 κατέβαλον· ἐκέρδησαν δὲ 60000 γρ: τί λαμβάνει ἕκαςος;

ὁ μὲν Α΄. $\frac{6}{10}$. 20000=6. 2000= 12000.

ὁ δὲ Β΄. $\frac{6}{10}$. 5000=6. 500 = 3000.

ὁ δὲ Γ΄. $\frac{6}{10}$. 30000=6. 3000= 18000.

ὁ δὲ Δ΄. $\frac{6}{10}$. 10000=6. 1000= 6000.

ὁ δὲ Ε΄. $\frac{6}{10}$. 15000=6. 1500= 9000.

ὁ δὲ Ϛ΄. $\frac{6}{10}$. 16001=6. 1600= 9600.

ὁ δὲ Ζ΄. $\frac{6}{10}$. 4000=6. 400= 2400.

60000= τῷ κέρδει.

γ. Ἕτεροι τρεῖς ἔθηκαν εἰς μίαν συντροφίαν, ὁ μὲν 6400. ὁ δὲ 5600, καὶ ὁ τρίτος 4000. εἰς τὸ τέλος δὲ ἔχασαν 2500 γρ: τί χάνει ἕκαστος; τὸ κεφάλαιον εἶναι 6400+5600+ καὶ ὁ τρίτος 4000=16000· ἡ δὲ ζημία 2500, καὶ τὸ κλάσμα $\frac{2500}{16000}=\frac{25}{160}$. ἄρα

τοῦ μὲν Α΄. ἡ ζημία $\frac{25}{160}$. 6400= 1000

τοῦ δὲ Β΄. $\frac{25}{160}$. 5600= 875

τοῦ δὲ Γ΄. $\frac{25}{160}$. 4000= 625

2500= τῇ ζημίᾳ.

δ'. 5000 γρ: ἐδόθησαν εἰς τρία ςρατεύματα νὰ λάϐωσιν ἀναλόγως· καὶ τὸ μὲν εἶχε 1500 ςρατιώτας, τὸ δὲ 800, καὶ τὸ τρίτον 600, πόσα λαμϐάνει ἕκαςον; τὸ μὲν κεφάλαιον· 1500+800+600=2900, τὸ δὲ κέρδος 5000.

ἄρα $\frac{5000}{2900}=\frac{50}{29}$. ὅθεν λαμϐάνει

τὸ μὲν Α'. $\frac{50}{29}$. $1500=$ $2586\frac{6}{29}$

τοῦ δὲ Β'. $\frac{50}{29}$. $800=$ $1379\frac{9}{29}$

καὶ τοῦ Γ'. $\frac{50}{29}$. $600=$ $1034\frac{14}{29}$

5000= τῷ κέρδει.

ε'. Μία ὁμολογία ἐχαρίσθη εἰς τρεῖς ἀνθρώπους γρ: 2700, ἐξ ὧν ὁ μὲν ἐδιωρίσθη νὰ λάϐῃ 670, ὁ δὲ 1230, καὶ ὁ τρίτος 800· εἶναι δὲ καὶ ὁ τόκος τῆς ὁμολογίας 135 γρ: καὶ πυνθάνονται πόσον τόκον ἕκαςος λαμϐάνει; τὸ κλάσμα εἶναι $\frac{135}{2700}=\frac{27}{540}$· ἄρα

ὁ μὲν $\frac{27}{540}$· 670 $=33\frac{27}{54}$

ὁ δὲ $\frac{27}{540}$· 1230 $=61\frac{24}{54}$

καὶ ὁ Γ' $\frac{27}{540}$· 800 $=40$

135= τῷ τόκῳ.

ϛ'. Καὶ εἰς τὰς μίξεις συμϐαίνει τὸ αὐτό. Εἰς καλὸν μπαροῦτι τιθέασι 16 μέρη νίτρου, 2 θείου, καὶ 3 κόνεως· διὰ νὰ κατασκευάσωσιν ὅμως 1000 ὀκ: μπαροῦτι, ἀπὸ πόσα λαμβάνεται ἀφ' ἑκάςου; αὐτοῦ τὸ μὲν κεφάλαιον $16+2+3=21$· τὸ δ' ἀποτέλεσμα ὡς κέρδος, ἢ ζημία 1000 ὀκ: ὅθεν τὸ κλάσμα $\frac{1000}{21}$· καὶ λαμβάνομεν

$$\text{ἀπὸ μὲν τοῦ νίτρου } \frac{1000}{21}.\,16 = 761\frac{19}{21} \text{ ὀκ:}$$

$$\text{ἀπὸ δὲ τοῦ θείου } \frac{1000}{21}.\,2 = 95\frac{5}{21}$$

$$\text{καὶ ἀπὸ τοῦ χαρβούνου } \frac{1000}{21}.\,3 = 142\frac{18}{21}$$

$$\overline{1000}$$

ζ'. Εἰς μίαν ῥετζέταν διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα εἶδος ἐμπλάςρου, λαμβάνεται κηρὸς 50 δρ: ἄλειμα χοιρινὸν 22 δρ: ἔλαιον 100 δρ: μήνιον 6 δρ: καὶ ὑδράργυρος 24 δρ: διὰ νὰ κατασκευάσωσιν ὕλην 20 ὀκ: $=8000$ δρ: πόσον νὰ λάβωμεν ἀπὸ κάθε ἕνα; τὸ μὲν κεφάλαιον $50+22+100+6+24=202$, καὶ τὸ ἀποτέλεσμα 8000. ἄρα $\frac{8000}{200}=\frac{4000}{101}$· ὅθεν

ἀπὸ τοῦ κηροῦ	$\frac{4000}{101} \cdot 50$	$= 1980\frac{20}{101}$
ἀπὸ τοῦ χοιρινοῦ	$\frac{4000}{101} \cdot 22$	$= 871\frac{29}{101}$
ἀπὸ τοῦ ἐλαίου	$\frac{4000}{101} \cdot 100$	$= 3960\frac{40}{101}$
ἀπὸ τοῦ μηνίου	$\frac{4000}{101} \cdot 6$	$= 237\frac{63}{101}$
καὶ ἀπὸ τοῦ ὑδραργύρου	$\frac{4000}{101} \cdot 24$	$= 950\frac{50}{101}$
		8000

§. 523. Κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὸ ἀνῆκον μέρος ἑνὸς κέρδος, ἢ ζημίας, ἢ ἄλλου ἀποτελέσματος, ὅταν καὶ χρόνος θεωρῆται, ἢ ἄλλη καμμία περίςασις· διότι τότε τὰ μέρη πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν χρόνον, ἢ μὲ ἐκείνην τὴν περίςασιν, καὶ τὰ γινόμενα γίνονται μέρη, καὶ τούτων τὸ κεφάλαιον γίνεται παρονομαςὴς τοῦ κλάσματος. δηλ: δύω ἔθηκαν, ὁ μὲν 1000 γρ: καὶ τὰ ἄφηκε 4 μῆνας, ὁ δὲ 600 γρ., καὶ ἄφηκεν αὐτὰ ἕνα χρόνον, ἤτοι 12 μῆνας· ἐκέρδησαν δὲ 300 γρ. τί ἀναλογεῖ ἑκάςῳ; εἰς αὐτὰ τὰ παραδείγματα φαίνεται καὶ ἔτι ἄλλη ἀναλογία· δηλ: πρέπει νὰ λάβῃ πρῶτον ἕκαςος κατὰ τὰ καταβαλλόμενα χρήματα· ὁ καταβάλλων πλείονα, καὶ κέρδος πλεῖον λαμβάνει· καὶ δεύτερον καὶ κατὰ τὸν χρόνον, ὅσῳ περισσότερον χρόνον δουλεύει, τόσῳ περισσότερον κέρδος λαμβάνει (αὕτη δ᾽ εἶναι σύνθετος, περὶ ἧς ὕςερον· ἐδῶ ὅμως ταῦτα εὐκόλως ἐπισυνάπτονται)· διότι εἰς δύω μῆνας διπλοῦν κέρδος λαμβάνει, ἢ εἰς ἕνα· ὅμοιον ώσὰν νὰ ἔδιδε διπλοῦν κεφάλαιον· εἰς τρεῖς δὲ τριπλοῦν, ώσὰν νὰ ἔδιδε τριπλοῦν κ. τ. λ. ὅθεν αὐτοῦ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον μέρος μὲ τὸν ἴδιόν του χρόνον, καὶ τὰ γινόμενα ταῦτα νὰ συνάπτωνται, καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦτο νὰ γίνεται παρονομαστὴς, τὸ δὲ κέρδος ἀριθμητής· καὶ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἀπαραλλάκτως μέθοδον. οὕτω τὰ ἄνω $4 . 1000 = 4000$, καὶ $600 . 12 = 7200$· ἄρα τὸ κεφάλαιον 11200, καὶ τὸ κλάσμα $\frac{300}{11200}$· ὅθεν

$$\text{ὁ α'.}\quad \frac{3}{112} \cdot 4000 = \frac{12000}{112} = \qquad 107\frac{16}{112}$$

$$\text{ὁ δὲ β'.}\quad \frac{3}{112} \cdot 7200 = \frac{21600}{112} = \qquad 192\frac{96}{112}$$

$$\overline{\qquad 300 \qquad}$$

β'. Ἕτεροι δὲ τρεῖς κατέβαλον, ὁ μὲν 1000 εἰς 8 μῆνας, ὁ δὲ 2000 εἰς 6 μῆνας, ὁ δὲ 5000 εἰς 3 μῆνας, καὶ ἐκέρδησαν 4000, πόσα λαμβάνει ἕκαστος

$1000 . 8 + 2000 . 6 + 5000 . 3 = 35000$. ἄρα $\frac{4000}{35000} = \frac{4}{35}$.

$$\text{ὁ μὲν Α'.}\quad \frac{4}{35} \cdot 8000 = \frac{32000}{35} \qquad = 914\frac{10}{35}$$

$$\text{ὁ δὲ Β'.}\quad \frac{4}{35} \cdot 12000 = \frac{48000}{35} \qquad = 1371\frac{15}{35}$$

$$\text{ὁ δὲ Γ'.}\quad \frac{4}{38} \cdot 15000 = \frac{60000}{35} \qquad = 1714\frac{10}{35}$$

$$\overline{\qquad 4000 \qquad}$$

Γ'. Τρεῖς ἄνθρωποι ἔμεινον εἰς ἓν ξενοδοχεῖον, καὶ ἐπλήρωσαν διὰ τὴν τροφὴν καὶ τὸ ἐνοίκιον 600 γρ: πλὴν ὁ μὲν α΄. ἐκάθισε μόνον 4 μῆνας, καὶ ἔφαγε 50 γεύματα, καὶ 80 δεῖπνα· ὁ δὲ β΄. ἐκάθισε 5 μῆνας, καὶ ἔφαγεν 60 γεύματα, καὶ 40 δεῖπνα· ὁ δὲ γ΄. ἐκάθισε μῆνας 6, καὶ ἔφαγεν 100 γεύματα, καὶ 90 δεῖπνα· καὶ ἡ πληρωμὴ δια τὸ γεῦμα ἦτον διπλῆ· πόσα πληρώνει ἕκαςος;

Αὐτοῦ τρεῖς ὑποθέσεις, ὅσον περισσότερον ἐκάθισε, περισσότερον πληρώνει, καὶ ὅσῳ περισσότερον ἔφαγε, περισσότερον πληρώνει, καὶ ὅσα περισσότερα γεύματα, περισσότερον πάλιν πληρώνει· πλὴν ἐπειδὴ ἕκαςον γεῦμα $=2$ δεῖπνα· ἂς γένουν τὰ γεύματα δεῖπνα, ὅταν διπλασιασθῶσι· ὅθεν τοῦ μὲν α΄. 50 γεύματα $+80$ δεῖπνα $=180$. δεῖπνα. τοῦ δὲ β΄: 60 γεύμ: $+40$ δεῖπ: $=160$ δεῖπ: καὶ τοῦ γ΄. 100 γεύμ: $+90$ δεῖπ: $=290$ δεῖπ: ἐὰν δὲ μὲ τὸν χρόνον ἕκαςου πολλαπλασιάσωμεν, εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον αὐτῶν. καὶ τὴν κατὰ μέρος πληρωμὴν ὡς ἄνω. $180.\ 4+160.\ 5+290.\ 6=3260$. καὶ τὸ κλάσμα $\frac{600}{3260}=\frac{60}{326}=\frac{30}{163}$. ὥρα.

ὁ Α΄. πληρώνει	$\frac{30}{163}.\ 720$		$=132\frac{84}{163}$
ὁ Β΄.	$\frac{30}{63}.\ 800$		$=147\frac{39}{163}$
ὁ Γ΄.	$\frac{30}{63}.\ 1740$		$=320\frac{40}{163}$
			600

§. 524. Δι' αὐτῆς τῆς μεθόδου εὑρίσκονται καὶ τὰ ἀνάλογα μέρη μιᾶς ἑταιρείας, ὅταν συμφωνοῦσιν, ὁ μὲν νὰ λάβη ἓν ἀκέραιον μερίδιον, ὁ δὲ μισὸν, ὁ δὲ ἓν τεταρτημόριον κ. τ. λ. δηλ: εἰς μίαν συντροφίαν ἀπὸ ὅλον τὸ κέρδας λαμβάνει, ὁ μὲν ἓν ἀκέραιον μερίδιον, ὁ δὲ $\frac{1}{3}$, ὁ δὲ $\frac{3}{4}$, καὶ ἕτερος $\frac{2}{3}$· ἔλαβον δὲ κέρδος 5000 γρ: τί λαμβάνει ἕκαςος; αὐτοῦ εἶναι ὁ παρονομαςὴς $1+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{12}{12}+\frac{9}{12}+\frac{8}{12}+\frac{4}{12}=\frac{33}{12}$· καὶ ὁ ἀριθμητὴς τὸ κέρδος $\frac{5000}{\frac{33}{12}}=\frac{5000.\ 12}{33}=\frac{5000.\ 4}{11}$· ὅθεν λαμβάνει ὁ μὲν

$$\text{Α}'.\ \frac{5000.\ 4}{11}.\ 1=\frac{20000}{11}= \qquad 1818\frac{2}{11}$$

$$\text{ὁ Β}'.\ \frac{5000.\ 4}{11}.\ \frac{1}{3}=\frac{20000}{33}= \qquad 606\frac{2}{33}$$

$$\text{ὁ Γ}'.\ \frac{5000.\ 4}{11}.\ \frac{3}{4}=\frac{15000}{11}= \qquad 1363\frac{7}{11}$$

$$\text{ὁ Δ}'.\ \frac{5000.\ 4}{11}.\ \frac{2}{3}=\frac{40000}{33}= \qquad 1212\frac{4}{33}$$

$$\overline{5000}$$

Διὰ νὰ μὴ κοπιάζωμεν κλασματικῶς, εὑρίσκομεν ἕνα ἀριθμὸν, ὃν ἕκαςος παρονομαςὴς διαιρεῖ ἐπ' ἀκριβὲς κατὰ τὸ (§. 198.)· καὶ τοῦτον τὸν ἀριθμὸν ἔχομεν ὡς ἀκέραιον μερίδιον· τὰ δὲ κλασματικὰ εὑρίσκομεν εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς, ἐὰν διὰ μὲν τοῦ παρονομαςοῦ τοῦ κλασματος διέλωμεν αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν, διὰ δὲ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦτο τὸ πηλίκον πολλαπλασιάσωμεν· καὶ εἶτα τὸ κεφάλαιον τούτων εἶναι ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος.

β'. Πέντε ἄνθρωποι ἐκέρδησαν 10000 γρ: ἀλλ' ὁ μὲν πρῶτος λαμβάνει ἓν μερίδιον ὁ Β'. $\frac{5}{6}$ ὁ Γ'. $\frac{1}{3}$ ὁ Δ'. $\frac{1}{4}$. ὁ Ε'. $\frac{2}{15}$. ὁ ἀριθμὸς, ὃν οἱ παρονομασταὶ διαιροῦσιν, εἶναι $4.15=60$. ἄρα ὁ μὲν Α'. 60. ὁ δὲ Β'. 50. ὁ Γ'. 20. ὁ Δ. 15. καὶ ὁ Ε. 8. ὅθεν $60+50+20+15+8=153$. καὶ τὸ κλάσμα $\frac{10000}{153}$. λοιπὸν ὁ μὲν Α'. λαμβάνει

$$\text{ὁ Α'. } \frac{10000}{153}.\ 60=\frac{200000}{51}= \quad 3921\frac{87}{153}$$

$$\text{ὁ Β'. } \frac{10000}{153}.\ 50=\frac{500000}{153}= \quad 3267\frac{149}{153}.\ \text{ὁ Β'.}$$

$$\text{ὁ Γ'. } \frac{10000}{153}.\ 20=\frac{20000}{153}= \quad 1307\frac{29}{153}\ \text{ὁ Γ'.}$$

$$\text{ὁ Δ'. } \frac{10000}{153}.\ 15=\frac{150000}{153}= \quad 980\frac{60}{153}.\ \text{ὁ Δ'.}$$

$$\text{ὁ Ε'. } \frac{10000}{153}.\ 8=\frac{80000}{153}= \quad 522\frac{134}{153}.\ \text{ὁ Ε'.}$$

$$\overline{\quad 10000 \quad}$$

γ'. Τινὲς δὲ εἰς τὰς ἑταιρείας λαμβάνουσι τὸν ἀριθμὸν 400, ὡς ἓν μερίδιον ὁλόκληρον, καὶ καλοῦσιν αὐτὸν δράμια· καὶ ἐκ τούτων ὁ μὲν 400 δρ: ὁ δὲ 300· ὁ δὲ 200· ὁ δὲ 120· ὁ δὲ 100· ὁ δὲ 80· ὁ δὲ 50· καὶ ὁ δὲ 40· καὶ ἕτερος 20 κ. τ. λ. δεδόσθω εἰς μίαν ἑταιρείαν τέσσαρες ἔχουσι μερίδιον ἀπὸ 400 δρ: καὶ δέκα ἀπὸ 200, καὶ ἓξ ἀπὸ 300 δρ: καὶ δώδεκα ἀπὸ 100 δρ: καὶ 20 ἀπὸ 50, καὶ 30 ἀπὸ 20 δρ: ἐκέρδησαν δὲ ἀπὸ 1200000 γρ: τὶ λαμβάνει ἕκαςος; αὐτοῦ οἱ ἄνθρωποι πολλαπλασιάζονται μὲ τὰ μερίδιά των οὕτω $4 \cdot 400 = 1600$· καὶ $10 . 200 = 2000$· καὶ $6 \cdot 300 = 1800$· καὶ $12 . 100 = 1200$· καὶ $20 . 50 = 1000$· καὶ $30 . 20 = 1600$· ἄρα τὸ κεφάλαιον ὁ παρονομαςὴς, $1600 + 2000 + 1800 + 1200 + 1000 + 600 = 8200$· ι καὶ τὸ κλάσμα $\frac{1200000}{8200} = \frac{12000}{82} = \frac{6000}{41}$· καὶ οἱ μὲν ἀπὸ 400 δρ: λαμβάνουσιν.

$$\frac{6000}{41} \cdot 1600 = \frac{9600000}{41} = 234146\frac{14}{41}$$

ὁ δ᾽ ἀπὸ 200· $\frac{6000}{41} \cdot 2000 = \frac{12000000}{41} = 292682\frac{38}{41}$

οἱ δ᾽ ἀπὸ 300· $\frac{6000}{41} \cdot 1800 = \frac{10800000}{41} = 263414\frac{26}{41}$

οἱ δ᾽ ἀπὸ 100· $\frac{6000}{41} \cdot 1200 = \frac{7200000}{41} = 175609\frac{31}{41}$

οἱ δ᾽ ἀπὸ 50· $\frac{6000}{41} \cdot 1000 = \frac{6000000}{41} = 146341\frac{19}{41}$

οἱ δ᾽ ἀπὸ 20· $\frac{6000}{41} \cdot 600 = \frac{3600000}{41} = 87804\frac{36}{41}$

$$\overline{1200000}$$

εὑρίσκει ἔπειτα καὶ ἕκαςος τὶ λαμβάνει· οἱ μὲν ἀπὸ 400 λαμβάνουσιν ἕκαςος $\frac{234146\frac{14}{41}}{4}$· ὁμοίως καὶ οἱ λοιποί· καὶ τοιαύτη ἡ ἑταιρεία τῶν τιμιωτάτων Ἀμπελακιοτῶν.

Δ΄. Ἑτέρα ἑταιρεία ἔλαβε 10 τὸ ὁλοσχερὲς μερίδιον ὅθεν 12 λαμβάνουν ἀπὸ 10, καὶ 26 ἀπὸ 8· καὶ 50 ἀπὸ 6· καὶ 32 ἀπὸ 3, ἐκέρδησαν δὲ 1810 γρ: τί λαμβάνουσιν οὗτοι; διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν παρονομαστὴν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς λαμβάνοντας μὲ τὸ ἀνάλογον αὐτῶν, καὶ εἰς ἓν συνάπτομεν·

$$\begin{aligned} 12.\ 10 &= 120 \\ 26.\ \ 8 &= 208 \\ 50.\ \ 6 &= 300 \\ 32.\ \ 3 &= \ \ 96 \\ \hline & \ \ 724 \end{aligned}$$

ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{1810}{724}=\frac{905}{362}$· ὅθεν οἱ μὲν ἀπὸ 10 λαμβάνουσιν ὅλοι

$$\frac{905}{362}.\ 120 = \frac{54300}{181} = 300$$

οἱ δ' ἀπὸ 8 $\frac{905}{362}.\ 208 = \frac{188240}{362} = 520$

οἱ δ' ἀπὸ 6 $\frac{905}{362}.\ 300 = \frac{27150}{362} = 750$

οἱ δ' ἀπὸ 3 $\frac{905}{332}.\ 96 = \frac{86880}{362} = 240$

$$\overline{1810}$$

λαμβάνει δὲ καὶ ἕκαστος $\frac{300}{12}=25.$ καὶ $\frac{520}{26}=20.$ καὶ $\frac{750}{50}=15.$ καὶ $\frac{240}{32}=7\frac{1}{2}$

Ε΄. Ἕτεροι τρεῖς ἐζημίωσαν 1000 γρ: πλὴν ὁ μὲν ζημιοῦται τούτων ἀναλόγως $\frac{1}{2}$, ὁ δὲ $\frac{2}{3}$, ὁ δὲ $\frac{3}{5}$. τί ζημιώνει ἕκαςος; ὁ ὅλος ἀριθμὸς 2. 3. 5=30. ὁ Α΄. ὥρα 15. ὁ Β΄. 20. ὁ Γ΄. 18. ὅθεν 15+20+18=53. καὶ τὸ κλάσμα $\frac{1000}{53}$. ἄρα ὁ μὲν Α΄.

$$\frac{1000}{53}.\ 15=\frac{15000}{53}=283\frac{1}{53}$$

$$\text{ὁ Β΄.}\ \frac{1000}{53}.\ 20=\frac{20000}{53}=377\frac{19}{53}$$

$$\text{ὁ Γ΄.}\ \frac{1000}{53}.\ 18=\frac{18000}{53}=339\frac{33}{53}$$

$$1000$$

ταύτην δὲ τὴν Μέθοδον καλοῦσιν οἱ πρακτικοὶ Μέθοδον ψευδῆ, διὰ τὸν ἀριθμὸν τοῦ ὅλου, ὁποῦ λαμβάνουσιν· μεθοδεύουσι δέ τινες καὶ διπλῆν ψευδῆ μέθοδον, ἀλλ' ἡμεῖς ταύτην διὰ τῶν ἐξισώσεων εὐκολώτερου λύομεν, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς διαφήσομεν.

§. 525. Καὶ εἰς τὰς συναλλαγὰς αὐτὴν τὴν μέθοδον μεταχειρίζονται· δηλ: ὅταν τις ἔχῃ νὰ ἀλλάξῃ μίαν πραγματείαν μὲ ἄλλην.

α΄. Ἀγαπᾷ τις νὰ ἀλλάξῃ νῆμα κόκκινον 200 ὀκ: πρὸς $9\frac{2}{3}$ γρ: τὴν ὀκᾶ μὲ ζάχαριν πρὸς $2\frac{4}{5}$ γρ: λοιπὸν ζητεῖ πόσαις ὀκάδες λαμβάνει ζάχαριν;

Ἐις αὐτὰς τὰς περιςάσεις εὑρίσκομεν πρῶτον ὅλον τὸ πράγματος, ὁποῦ ἀλλάζεται, πόση εἶναι ἡ τιμή· καὶ δι' αὐτῆς τῆς τιμῆς, ὡσὰν μὲ ἄσπρα μετρητὰ, ἀγοράζει τὸ πρᾶγμα ἐκεῖνο, ὁποῦ ἀλλάξει· δηλ: ἡ τιμὴ τοῦ νήματος ὅλη 200. $9\frac{2}{3}=\frac{5800}{3}=1933\frac{1}{3}$ γρ: λοιπὸν διὰ τῆς μεθόδου λέγομεν τῶν τριῶν· ἂν μὲ $2\frac{4}{5}$ γρ. ἀγοράζωμεν μίαν ὀκᾶν ζάχαριν, μὲ $1933\frac{1}{3}$ γρ., πόσαις ὀκάδες;

$$2\frac{4}{5}: 1 = 1933\frac{1}{3}: \chi \cdot \text{ καὶ } \chi = \frac{\frac{5800}{3}}{\frac{14}{5}} = \frac{5800.5}{14.3} = \frac{2900.5}{21}$$

$$= 690\frac{10}{21} \text{ ὀκ:}$$

β'. Ἕτερος δὲ ζητεῖ νὰ ἀλλάξῃ τζόχαν πρὸς 12 γρ: τὴν πῆχην, 768 πῆχες, καὶ νὰ λάβῃ σιτάρι πρὸς 4 γρ: τὸ κοιλόν· ζητεῖ ὅμως καὶ τὸ ἓν ἐκτημόριον νὰ λάβῃ μετρητὰ, καὶ αὐτοῦ εὑρίσκομεν ὅλην τὴν τιμὴν τῆς τζόχας $768.\ 12 = 9216$ γρ: τὸ δ' ἓν ἐκτημόριον $\frac{9216}{9} = 1536$, καὶ τόσα λαμβάνει μετρητά· ἀφαιροῦμεν αὐτὰ ἀπὸ ὅλης τῆς τιμῆς $9216 - 1536 = 7680$, καὶ μὲ αὐτὰ λαμβάνει σιτάρι ὡς ἄνω· ἂν 4 γρ: δίδουσιν ἓν κοιλὸν, 7680 γρ: πόσα κοιλά;

$$4; 1 = 7680: \chi \cdot \text{ καὶ } \chi = \frac{7680}{4} = 1920 \text{ κοιλ.}$$

Σημείωσις.

Εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς συναλλαγὰς ὁποία πραγματεία ὅλη ἀλλάζεται, καὶ δίδεται, καὶ τότε τὴν τιμὴν ὅλην αὐτῆς τῆς πραγματείας εὑρίσκομεν· καὶ ὡσὰν νὰ ἀγοράζωμεν μὲ αὐτὴν τὰ ἑτέραν πραγματείαν· ἐὰν δηλ: ὅλη ἡ τιμὴ τῆς ἀλλακτέας πραγματείας Τ λεχθῆ, τῆς δ' ἑτέρας ἑνὸς μέτρου ἡ τιμὴ τ. εὑρίσκομεν πόσα μέτρα ἀπ' αὐτῆς λαμβάνομεν $\chi=\frac{T}{\tau}$. ἔςω ἡ τιμὴ τῶν βαμβακίων 65600 γρ=Τ. καὶ ἡ τιμὴ μιᾶς ὀκᾶς κρόκου, ὁποῦ θέλομεν ἀλλάξῃ 20 γρ=τ. ἄρα λαμβάνομεν κρόκου $\frac{65600}{26}=3280$: ὀκ: ἐὰν δὲ καὶ μετρητὰ ζητῶνται, πρέπει πρῶτον νὰ εὑρεθῶσι τὰ μετρητὰ = Μ. καὶ ταῦτα νὰ ἀφέλωμεν ἀπὸ ὅλης τῆς τιμῆς Τ οὕτω Τ—Μ, καὶ εὑρίσκομεν πάλιν τὶ λαμβάνει εἰς ἀλλαγὴν $\chi=\frac{T-M}{\tau}$.

Ἔχει τις κερμέζι 4000 γρ: καὶ θέλει νὰ ἀλλάξῃ αὐτὸ μὲ κρασὶ πρὸς 5 γρ: τὸ μέτρον, καὶ νὰ λάβῃ εἰς μετρητὰ 1810 γρ: πόσον λαμβάνει κρασί;

$\frac{4000-1850}{5}=\frac{2150}{5}=430$ μετ:

Ἕτερος ἔχει 150 καντάρια κηρία πρὸς $80\frac{2}{5}$ γρ: τὸ καντάρι, θέλει δὲ νὰ λάβῃ ἐξ αὐτῶν δύω ἑκτημόρια εἰς μετρητὰ, ἓν δ' ἑκτημόριον καφὲν πρὸς 5 γρ: τὴν ὀκᾶν, ἓν ἑκτημόριον ζάχαριν πρὸς $2\frac{2}{7}$ γρ: τὴν ὀκᾶν, ἓν ἔτι ἑκτημόριον σῖτον πρὸς 3 γρ: τὸ κοιλὸν, καὶ ἓν, τέλος, ἑκτημόριον κρασὶ πρὸς 18 γρ: τὸ μέτρον· τὶ λαμβάνει ἀφ' ἑνὸς ἑκάςου;

Ὅλη ἡ τιμὴ τῶν κηρίων $150.\ 80\frac{2}{5}=\frac{150.\ 402}{5}=30$.

$402=12060$ γρ. εὑρεθήτω τὸ ἓν ἑκτημόριον $\frac{12060}{6}=$ 2010 γρ: ἄρα τὰ μετατὰ εἶναι $2.\ 2010=4020$. λαμβάνει δὲ καὶ καφὲν $\frac{2010}{5}=402$. λαμβάνει δὲ καὶ ζάχαριν $\frac{2010}{2\frac{2}{7}}=\frac{2010.\ 7}{16}=\frac{14070}{16}=879\ \frac{3}{8}$ ὀκ: λαμβάνει καὶ σῖτον $\frac{2010}{3}=670$ κοιλ: καὶ τέλος κρασὶ $\frac{2010}{18}=\frac{1005}{9}=111\ \frac{2}{3}$. μέτρ:

§. 526. Πολλάκις εἰς τὰς συναλλαγὰς ἀναβιβάζουσι τὴν τιμὴν τῶν πραγματων· καὶ αὐτοῦ παρατηρεῖ καὶ ὁ ἄλλος νὰ ἀναβιβάσῃ καὶ αὐτὸς τὸ πρᾶγμα του διὰ νὰ μὴν ἀδικηθῇ.

Θέλει τις νὰ ἀλλάξῃ 20 καντάρια βαμβάκι μὲ λουλάκι· καὶ τὸ μὲν βαμβάκι τρέχει πρὸς 120 γρ: τὸ καντάρι, ὅμως τὸ λογαριάζει πρὸς 136 γρ: τὸ δὲ λουλάκι ἔχει 50 γρ: ἡ ὀκᾶ· ζητεῖ οὗτος πόσαις ὀκάδες λουλάκι νὰ δώσῃ διὰ νὰ μὴ ζημιωθῇ; εἰς αὐτὰ πρέπει πρῶτον νὰ μάθωμεν πόσον νὰ ἀναβιβάσῃ καὶ αὐτὸς τὸ λουλάκι οὕτω, ἐὰν 120 γινονται 136, 50 πόσα;

$\frac{50.\ 136}{120}=\frac{5.\ 34}{3}=\frac{170}{3}=56\ \frac{2}{3}$. καὶ τόσα πρέπει καὶ αὐτὸς νὰ πωλήσῃ τὸ λουλάκι του. λοιπὸν κατὰ τὰ ἄνω $\frac{T}{\tau}$ εὑρίσκομεν πόσαις ὀκάδες λουλάκι δίδεται.

$T=20.\ 136=2720$· καὶ $\frac{2720}{56\frac{2}{3}}=\frac{2720.\ 3}{170}=\frac{272.\ 3}{17}=$

$\frac{816}{17}=48$ ὀκ:

Ἕτεροι δύω, ὁ μὲν ἔχων σῖτον πρὸς 5 γρ: τὸ κοιλὸν, καὶ ἀναβιβάζων αὐτὸν πρὸς 7 τὸ κοιλόν· ὁ δὲ μεταξωτὰ 20 πρὸς 86 γρ: τὸ κομμάτι, καὶ ἀναβιβάζων αὐτὰ πρὸς 100 τὸ κομμάτι, ποιοῦσιν ἀλλαγήν· ζητεῖται ὅμως ποῖος τῶν δύω ἐκέρδησε μὲ αὐτὸν τὸν ἀναβιβασμόν; εὑρεθήτω πρῶτον κατὰ τὰ ἄνω $\frac{T}{\tau}$ πόσα κοιλὰ λαμβάνει· οὕτω $T=20.\ 100=2000$ · καὶ $T=7$· ἄρα $\frac{2000}{7}=285\frac{5}{7}$ κοιλ: τοί-ρα πολλαπλασιασθήτωσαν τὰ κοιλὰ μὲ τὴν τιμὴν των $285\frac{5}{7}$· $5\frac{2000.\ 5}{7}=\frac{10000}{7}=1428\frac{4}{7}$, καὶ ἔτι τὰ μεταξωτὰ μὲ τὴν τιμὴν των $20.\ 86=1720$· ἄρα ὁ ἔχων τὰ μεταξωτὰ ἀπατᾶται. Πλεῖςα καὶ ἄλλα διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν ἐπιλύονται, ἃ ἡμεῖς εἰς τὴν ἐπιμέλειαν τῶν φιλομαθῶν ἡ-μῶν μαθητῶν ἀφίνομεν· διότι ὅ,τι ἂν ἕτερον εὑρεθῇ, κα-τὰ τοὺς εἰρημένους νόμους ἐπιλύεται.

II. Περὶ τῆς ἀντιςρόφου

Μεθόδου τῶν τριῶν.

§. 527. Εἴπομεν (§. 508.) ὅτι γινώσκομεν τὴν ἀν-τεςραμμένην μέθοδον ταύτην, ὅταν ςοχασθῶμεν, ὅτι ὅσῳ ὁ εἷς ὅρος τοῦ λόγου αὔξει, ὁ ἕτερος μειοῦται, καὶ ὅσῳ ἐκεῖνος μειοῦται, οὗτος αὔξει· καὶ αὕτη ἡ μέθοδος καταςρώνεται, καὶ ἀπαρτίζεται ἀπαραλλάκτως κατὰ τὴν ὀρθὴν (§. 509.)· πλὴν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀγνώςου ὅρου μόνου διαφέρει, καθότι πολλαπλασιάζομεν τὸν τρίτον ὅρον μὲ τὸν πρῶτον, καὶ διαιροῦμεν μὲ τὸν δεύτερον.

$\alpha:\ \beta=\gamma:\ \chi$· ἄρα ὁ $\chi=\frac{\alpha\gamma}{\beta}$· λοιπὸν ἐδῶ μόνον προβλήματα τινὰ νὰ λύσωμεν διὰ νὰ διασαφηνισθῶμεν, καὶ πλέον οὐδέν.

α΄. Ἄνθρωποι 5 γράφουσι εἰς 3 μῆνας ἓν βιβλίον, εἰς πόσον καιρὸν αὐτὸ γράφουσιν ἄνθρωποι 12· ἔςαι ἡ ἀναλογία ἡ ὀρθὴ, $5:\ 12=3:\ \chi$ ἢ $5:\ 3=12:\ \chi$· πλὴν ἐπειδὴ αὐτοῦ οἱ περισσότεροι ἄνθρωποι ὀλιγώτερον καιρὸν δαπανῶσιν εἶναι ἡ ἀναλογία ἀντεςραμμένη· καὶ ἐπομένως $\chi=\frac{5.\ 3}{12}=\frac{5}{4}$ χρόνου $=\frac{150}{4}$ ἡμ: $37\frac{1}{2}$ ἡμ:

Σημείωσις.

Ἐπειδὴ $\chi=\frac{5.\ 3}{12}$· ἔςαι καὶ $12\ \chi=5.\ 3$· ἤτοι τὸ γινόμενον ἀπὸ τῶν ὅρων τοῦ ἑνὸς λόγου ἴσον τῷ γινομένῳ ἀπὸ τῶν ὅρων τοῦ ἑτέρου λόγου, καὶ ἐκ τοῦδε τοῦ ἰδιώματος εὑρίσκομεν ἀεὶ τὸν τέταρτον ὅρον, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ δοθέντος λόγου, καὶ διὰ τοῦ δοθέντος ὅρου τοῦ ἑτέρου λόγου διέλωμεν αὐτὸ τὸ γινόμενον, ὡς $\alpha:\ \beta=\gamma:\ \chi$ καὶ $\chi=\frac{\alpha\beta}{\gamma}$· ἢ $\alpha:\ \chi=\gamma:\ \delta$, καὶ $\chi=\frac{\gamma\delta}{\alpha}$, καὶ $\chi:\ \beta=\gamma:\ \delta$. καὶ $\chi=\frac{\gamma\delta}{\beta}$ κ. τ. λ.

β΄. Ὅταν ἐπωλεῖτο τὸ σιτάρι $4\frac{1}{2}$ γρ: τὸ κοιλὸν, ἐπωλεῖτο τὸ ψωμίον 60 δρ: εἰς τὸν παρᾶν· ὅταν δὲ 9 γρ: πόσα;

ἐπειδὴ ὁ εἷς λόγος $4\frac{1}{2}$: 600 ἄρα $\frac{4\frac{1}{2}.\ 60}{9}=\frac{\frac{9}{2}.\ 60}{9}=\frac{9.\ 30}{9}$ $=30$ δράμια.

Ἀπὸ τοῦ Β΄.

γ΄. Ἔλαβεν ὁ Α δανειακὰ 1000 γρ: χωρὶς τόκου καὶ τὰ ἐκράτησεν 6 μῆνας· ἔλαβε δὲ καὶ ὁ Β΄ παρὰ τοῦ Α΄ 650 γρ: καὶ ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσους μῆνας νὰ τὰ κρατήσῃ, νὰ ἐξισωθῇ ὁ τόκος; αὐτοῦ ἡ μέθοδος ἀντεστραμμένη· διότι τὰ ὀλιγώτερα χρήματα εἰς πλείονα χρόνον δίδουσι τὸν αὐτὸν τόκον· ὅθεν ὁ λόγος εἶναι 1000: 6 καὶ $\chi=\frac{600}{65}=9\frac{15}{65}=9\frac{3}{13}$ μ.

δ΄. Εἰσὶ δύω εἴδη μεταξωτῶν, τὸ μὲν ἔχει πλάτος πῆχυν μίαν, τὸ δὲ $1\frac{1}{4}$ πήχεως· ἐὰν δὲ λάβωμεν ἀπὸ τὸ πρῶτον χρειαζόμεθα 2360 πήχεις εἰς μίαν ἀερουαυτικὴν, πόσον χρειαζόμεθα ἀπὸ τὸ δεύτερον διὰ τὴν αὐτήν· ἀντεστραμμένη μέθοδος, ὅσω πλατύτερον τὸ ὕφασμα, τόσω ὀλιγώτερον χρειάζεται· ἄρα ὁ δοθεὶς λόγος 1: 2360. καὶ $\frac{1.\ 2360}{1\frac{1}{4}}=\frac{2360.\ 4}{5}=472.\ 4=1888$ πήχ:

Ε΄. Εἰς ἓν φρούριον ἔχουσι ζωοτροφίαν διὰ δύω μῆνας, ὅταν λαμβάνῃ ἕκαςος λίτρας δύω ψωμοῦ· ἐὰν κρατήσῃ ἡ πολιορκία 3 μῆνας καὶ 10 ἡμ: ἀπὸ πόσου πρέπει νὰ λαμβάνωσι; καὶ αὐτοῦ ἀντεςραμμένη μέθοδος, ὅσον αὔξει ὁ χρόνος, ἐλαττοῦται τὸ σιτηρέσιον· ἄρα $\frac{2.\ 2}{3\frac{1}{3}}=\frac{4.\ 3}{10}=1\frac{1}{5}$ λίτρ:

ϛ'. Ἐὰν δαπανῶ εἰς μίαν ἡμέραν 3 γρ: μοὶ ἀρκοῦσι τὰ χρήματα $5\frac{1}{2}$ χρόνους· πόσους μὲ ἐξαρκοῦσι, ἐὰν $4\frac{2}{3}$ διαπανῶ 3: $5\frac{1}{2}$. ἤτοι $\frac{3.\ 5\frac{1}{2}}{4\frac{2}{3}}=\frac{3\ \frac{11}{2}}{\frac{14}{3}}=\frac{3.\ 3.\ 11}{14.\ 2}=\frac{99}{28}=3\frac{15}{28}$ χρ. καὶ τοσαῦτα περὶ τῆς ἀντεςραμμένης μεθόδου τῶν τριῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ τῶν συνθέτων Μεθόδων.

§. 528. Σύνθετον μέθοδον καλοῦμεν ἐνταῦθα· ὅταν δίδωνται εἰς ἓν πρόβλημα λόγοι πλείονες τῶν δύω, καὶ διὰ μιᾶς μεθόδου αὐτὰ λύομεν· δηλ: ἐὰν ἐρωτῶμεν 100 γρ. εἰς 12 μῆν: φέρουσι τόκον 8 γρ: 836 γρ: εἰς 18 μῆν: πόσον τόκον φέρουσιν; αὐτοῦ εἶναι τρεῖς λόγοι δηλ: κεφ: 100 γρ: κεφ: 836 γρ: καὶ 12 μῆν: 18: μῆν: καὶ ὅτι 8 γρ: τόκος: χ τόκου· καὶ λύεται τοῦτο τὸ πρόβλημα διὰ δύω ἀναλογιῶν· δηλ: κεφ 100 γρ: κεφ: 836 γρ = τόκ: 8: τόκ: χ.

12 μ: 18 μ = χ: ψ καὶ τὸ μὲν $\chi=\frac{836.\ 8}{100}$. τὸ δὲ ψ = 18·

$$\frac{18.\frac{836.8}{100}}{12}=\frac{3.\frac{836.8}{100}}{2}=3.\frac{836.\ 4}{100}=3.\frac{836}{25}=\frac{2508}{25}=100\frac{8}{25}$$

γρ:. καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον λύονται τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου, ὅταν λόγοι πολλοὶ δίδωνται· δηλ: εὑρίσκομεν πρῶτον μίαν ἀναλογίαν, ἥ τις ὀρθῶς ἔχει τὸν τέταρτον ὅρον ἄγνωςον· ὅταν δὲ τοῦτον εὕρωμεν, λαμβάνομεν ἔτι ἕνα λόγον, καὶ οὗτος ὁ εὑρεθεὶς τρίτος γίνεται· καὶ εἰς αὐτὴν τὴν ἀναλογίαν εὑρίσκεται ἕτερος ἄγνωςος, ὃν ἡμεῖς ψ ἐλάβομεν· ἐὰν δὲ καὶ ἕτερος λόγος, λαμβάνομεν τὸν ἤδη εὑρεθέντα δεύτερον ἄγνωςον, καὶ τίθεμεν εἰς τρίτον ὅρον αὐτοῦ τοῦ λόγου, καὶ εὑρίσκομεν τρίτον ἄγνωςον ω, καὶ ὄχι ἀλλέως, ἐὰν καὶ ἕτερος λόγος δοθῇ· ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος πάντῃ ἄχρηςος εἰς τὴν πρᾶξιν ὡς διεξοδικός· διότι εὐθὺς, ὅπου καταςρωθῶσιν αἱ ἀναλογίαι, πολλαπλασιάζουσι τοὺς ὁμολόγους ὅρους τῶν ἀναλογιῶν, καὶ ἀποτελοῦσι μίαν ἀναλογίαν· καὶ οὕτως ὡς ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν τὴν ἄγνωςον εὑρίσκουσιν, ὡς·

$$100:\ 836 = 8:\ \chi$$
$$\underline{12:\ 18 = \chi:\ \psi}$$
$$100.\ 12:\ 836.\ 18 = 8\chi:\ \chi\psi$$

διαιροῦντες δὲ τοὺς ὁμολόγους ὅρους διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, φέρομεν τοὺς ὅρους ἐλαχίςους 100. 6: 836. ~~18~~=4:

ψ, καὶ 100: 836. 3=4 ψ, καὶ 25: 836. 3=11 ψ καὶ $\psi=\frac{836.\ 3}{25}$. ὡς πρότερον εἰς τὴν κοινὴν ζωὴν ὅταν δοθῶσι λόγοι τρεῖς, καλεῖται Μέθοδος τῶν πέντε· διότι εἰς τοὺς τρεῖς λόγους, μόνον εἷς ὅρος ἄγνωςος, καὶ οἱ πέντε δεδομένοι· ὅταν δ' ὦσι ὅροι τέσσαρες, καλεῖται Μέθοδος τῶν ἑπτὰ, καὶ οὕτως εἰς τοὺς πέντε λόγους μέθοδος τῶν ἐννέα κ. τ. λ. ἡμεῖς ὅμως ἐνταῦθα ἀδιαφοροῦμεν, εἴτε τῶν πέντε, εἴτε τῶν ἑπτὰ, εἴτε τῶν Μ' μέθοδος εἶναι· μόνον τοῦτο θεωροῦμεν, ὅτι δίδονται ὅροι γνωςοὶ ἀεὶ περιττοὶ 3, 5, 7, 9, 11, κ. τ. λ. καὶ ζητεῖται εἷς ἄγνωςος, εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς μεθόδους κατὰ δύω τρόπους τοὺς ἑξῆς ἡ λύσις γίνεται.

§. 529. Ὁ μὲν πρῶτος εἶναι ἐκεῖνος, ὅπου εἰς τὰς μεταβολὰς τῶν ἀναλογιῶν εὕρομεν (§. 491). δηλ: ὁ δ'. τῆς α'. νὰ γίνηται γ'. τῆς β'. καὶ ὁ δ'. τῆς β', γ'. τῆς γ', καὶ ὁ δ'. τῆς γ'. γ'. τῆς δ'. κ. τ. λ. καὶ οὕτως εὑρεθέντων τῶν ἀναλογιῶν, εὑρίσκεται μόνον μία ἀναλογία σύνθετος ὅλων αὐτῶν τῶν ἀναλογιῶν, καὶ οὕτως ὁ ἄγνωςος εὐκόλως λύεται. π. χ.

$$\begin{array}{l} \alpha:\ \beta=\gamma:\ Z \\ \delta:\ \varepsilon=Z:\ H \\ \eta:\ \vartheta=H:\ \Theta \\ \varkappa:\ \lambda=\Theta:\ K \\ \mu:\ \nu=K:\ \chi.\ \varkappa.\ \tau.\ \lambda. \\ \hline \end{array}$$

ἄρα καὶ (§. 491). αδηκμ: βεθλν=γ: χ. καὶ $\chi=\frac{\beta\varepsilon\vartheta\lambda\nu\gamma}{\alpha\delta\eta\varkappa\mu}$. ἐὰν δ' ἐξετάσωμεν αὐτὰς τὰς ἀναλογίας, εὑρίσκομεν μόνου τὴν πρώτην ἀναλογίαν, ὅτι ἔχει τρεῖς ὅρους α, β, γ, καὶ ὁ τέταρτος εὑρίσκεται· ἕκαστος δὲ τῶν λοιπῶν ἀναλογιῶν συνίσταται ἀπὸ ἑνὸς μόνου λόγου, καὶ ὁ ἕτερος ἀπαρτίζεται ἀπὸ τοὺς εὑρεθέντας, πλὴν τῆς ἐσχάτης ἀναλογίας, ἐν ᾗ εὑρίσκεται εἷς λόγος, καὶ ὁ ἕτερος συνίσταται ἀφ' ἑνὸς ὅρου τῶν εὑρεθέντων καὶ τῆς ἀγνώστου χ. διὸ καὶ εἰς τὴν παραχθεῖσαν ἀναλογίαν οἱ εὑρεθέντες ὅροι ὡς κοινοὶ ἀπαλείφονται. Ὅθεν διὰ νὰ καταστρώσῃ τις ἓν πολυσύνθετον πρόβλημα, πρέπει τὰ ἑξῆς νὰ παρατηρήσῃ.

α'. Ἐπειδὴ δίδονται ὅροι περιττοί, καὶ μετὰ τοῦ ζητουμένου γίνονται ἄρτιοι, ἄρα τόσοι λόγοι εὑρίσκονται, ὅσα ζεύγη ὅρων εἰσίν· ὅθεν πρώτη φροντὶς εἶναι τοὺς λόγους νὰ διακρίνωμεν· οἱ λόγοι δὲ διακρίνονται ἀνὰ δύω ὅρους ὁμοειδεῖς, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα· ἂν 100 γρ: εἰς 12 μῆν: φέρωσι τόκον 10 γρ: 500 γρ: εἰς 5 μῆν: πόσον τόκον =χ; αὐτοῦ τρεῖς οἱ λόγοι 100 γρ: 500 γρ: καὶ 12 μ: 5 μ: καὶ 10 τ: χτ:

β'. Εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς ἀναλογίας μία εἶναι ἡ θεμελιώδης ἀναλογία ἡ πρώτη, καὶ ἐντελής· αὕτη δὲ ἀποτερματίζεται, ὅταν θῶμεν εἰς δεύτερον λόγον ἐκεῖνον, ὅπου ἔχει τὴν ἄγνωστον ποσότητα, καὶ εἰς πρῶτον λόγον ἕνα τῶν λοιπῶν λόγων οἱονδήποτε 100 γρ: 500 γρ=10 τόκ: χ. ἢ οὕτω 12 μ: 5 μ=10 τόκ: χ.

γ'. Ὅλους τοὺς λοιποὺς λόγους θέτομεν κατὰ τάξιν ὑπὸ τὸν πρῶτον λόγον ἕκαστον ὁμόλογον ὅρον ὑπὸ τὸν ὁμόλογον ὅρον, ἐὰν ὁ λόγος εἶναι ὀρθός, καὶ μὴ ἀντεστραμμένος, οὕτω 100: 500=10: χ. γινώσκομεν δὲ τὸν ὀρθὸν καὶ ἀντεστραμμένον λόγον, ἐὰν ἰξεύρωμεν, τί ζητεῖται εἰς τὸν ἄγνωστον ὅρον, ὡς ἐνταῦθα ὁ χ σημαίνει τόκον: ὅθεν ἐξετάζομεν τὸν λόγον 100 γρ: 500 γρ: ἂν ὅσῳ περισσότερα γρόσια, φέρουσι καὶ τόκον περισσότερον; καὶ ὅσῳ ὀλιγώτερα, καὶ τόκον ὀλιγώτερον; καὶ εἰ μὲν οὕτως ἔχει, κρίνομεν ὅτι ὁ λόγος ὀρθὸς, καὶ γράφεται ὁ λόγος κατὰ τάξιν· τοιοῦτος εἶναι καὶ ὁ ἕτερος λόγος, οἱ πλείονες μῆνες δίδουσι καὶ πλείονα τόκον, καὶ οἱ ὀλιγώτεροι, ὀλιγώτερον· καὶ οὗτος ὁ λόγος ὀρθὸς, καὶ γράφεται ἐπ' εὐθείας· ἂν ὅμως ὁ λόγος δὲν εὑρεθῇ τοιοῦτος, τότε γράφεται ὁ λόγος ἀνάπαλιν· ὁ ἡγούμενος ὅρος γίνεται ἑπόμενος, καὶ οὗτος ἡγούμενος. π. χ. ἂν 5 ἄνθρωποι εἰς 6 ἡμέρας 8 ὥρας τὴν ἡμέραν ἐργαζόμενοι, 600 ὀργυιὰς σκάπτουσι, πόσας σκάψουσιν ἄνθρωποι 150 εἰς ἡμέρας τρεῖς, 12 ὥρας τὴν ἡμέραν ἐργαζόμενοι; εἰς αὐτὸ τὸ πρόβλημα εἶναι ὅροι δεδομένοι ἑπτὰ, καὶ ὁ ἄγνωστος χ σημαίνει ὀργυιὰς, καὶ λέγεται κοινῶς Μέθοδος τῶν ἑπτά· οἱ δὲ λόγοι εἶναι 5 ἄνθ: 150 ἄν. καὶ 6 ἡμ: 3 ἡμ: καὶ 8 ὥρ: 12 ὥρ: καὶ 600 ὀργ: χ: ὀργ: καὶ αὐτοῦ οἱ ὅροι, καὶ οἱ λόγοι πρὸς τὰς ὀργυιὰς ὀρθοί· διότι ὅσῳ περισσότεροι ἄνθρωποι, ἢ ἡμέραι, ἢ ὧραι. κ. τ. λ. περισσοτέρας καὶ ὀργυιὰς σκάψουσιν. ἄρα

$$5:150=600:\chi$$
$$5:3$$
$$8:12$$

δ'. Πολλαπλασιάζομεν οὕτω τοὺς ὁμολόγους ὅρους, καὶ ἀποτελοῦμεν μίαν ἀναλογίαν, καὶ ὡς ἐδιδάχθημεν, εὑρίσκομεν τὴν ἄγνωστον ποσότητα χ.

ὡς $100:500=10:\chi$

$\quad 12:5:$

$$100.\ 12:500.\ 5=10:\chi \text{ καὶ } \chi=\frac{500.\ 5.\ 10}{100.\ 12}=\frac{5.\ 5.\ 5}{6}$$

$=20\frac{5}{6}$ τόκ. εἰς δὲ τὸ δεύτερον πρόβλημα. $5:150=600:\chi$

$$\begin{array}{l} 6:\ 3 \\ 8:\ 12 \\ \hline 5.\ 6.\ 8:\ 150.\ 3.\ 12=600:\ \chi \end{array}$$ καὶ

$$\chi=\frac{150.\ 3.\ 12.\ 600}{5.\ 8.\ 6}=\frac{30.\ 3.\ 600}{4}=30.\ 3.\ 150=13500$$

ὀργ: καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον λύονται ὅλα τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου μὲ ὅσους ὅρους ἂν προβληθῇ· ἔςω καὶ τὸ ἑξῆς παράδειγμα. 3 ἄνοῖ εἰς 12 ἡμέρας διαπανῶσι 36 γρόσια, εἰς πόσας ἡμέρας διαπανῶσιν 180 γρ: ἄνοῖ 9;

Αὐτοῦ οἱ λόγοι εἶναι ὁ μὲν 3 ἄνοῖ: 9 ἀνθρώπους ὁ δὲ 36 γρ: 180 γρ: ὁ δὲ 12 ἡμ: χ ἡμ: ἔπειτα βλέπομεν ὅτι ὁ λόγος 3 ἄνοῖ: 9 ἀνοῦς εἶναι ἀντίςροφος· διότι ὅσῳ περισσότεροι ἄνθρωποι εἰς ὀλιγώτερον καιρὸν διαπανῶσι τὰ αὐτὰ χρήματα· ὅθεν καὶ ἀνάπαλιν γράφεται 9: 3, καὶ ὄχι 3: 9. ὁ δὲ λόγος 36 γρ: 180 γρ: εἶναι ὀρθός· διότι τὰ περισσότερα χρήματα εἰς περισσότερον καιρὸν διαρκοῦσι καὶ λοιπὸν λύεται. $36:180=12:\chi$

$$\begin{array}{l} 9:\ 3 \\ \hline 36.\ 9:\ 180.\ 3=12:\ \chi \end{array}$$

καὶ $\chi=\frac{180.\ 3.\ 12}{36.\ 9}=20$ ἡμ:

§. 530. Ὁ δὲ δεύτερος τρόπος εἶναι σχεδὸν ὁ αὐτός· πλὴν κατὰ τοῦτο διαφέρει, καθότι ἡ ἐξίσωσις δὲν παρίςαται μὲ σκέλη δύω ὁριζοντικῶς, ἀλλὰ μόνον μὲ μίαν γραμμὴν κάθετον· καὶ διὰ νὰ μάθωμεν τὸν τρόπον αὐτὸν, ληφθήτω τὸ ἄνω παράδειγμα εἰς τὴν Μέθοδον τῶν ἑπτά.

5: 150=600: χ
6: 3
8: 12

5. 6. 8: 150. 3. 12=600: χ, καὶ $\chi = \dfrac{600.\ 150.\ 3.\ 12}{5.\ 6.\ 8}$

ἄρα ἡ ἐξίσωσις καὶ 5. 6. 8. χ=600. 150. 3. 12. Εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν βλέπομεν, ὅτι ἀπὸ ὅλων τῶν λόγων οἱ ἡγούμενοι ὅροι εὑρίσκονται παράγοντες εἰς τὸ ἀριςερὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως· ὅθεν ἐὰν τέσσαρες οἱ λόγοι, τέσσαρες οἱ παράγοντες τοῦ ἀριςεροῦ σκέλους, οἱ ἡγούμενοι τῶν λόγων, καὶ τέσσαρες οἱ παράγοντες τοῦ δεξιοῦ σκέλους οἱ ἑπόμενοι τῶν λόγων, τοῦ δὲ λόγου, ὅπου ἔχει τὴν ἄγνωςον χ, πάντοτε ὁ ἑπόμενος τίθεται παράγων εἰς τὸ ἀριςερὸν σκέλος, καὶ ὁ ἡγούμενος εἰς τὸ δεξιόν· οὕτω καὶ ἐὰν ἴδωμεν κατὰ τοὺς ἄνω τρόπους (529), ὅτι εἶναι τις λόγος ἀντίςροφος, τότε τὸν ἡγούμενον ὅρον θέτομεν εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως, καὶ τὸν ἑπόμενον εἰς τὸ ἀριςερὸν, ὡς εἰς τὸ τρίτον παράδειγμα 36: 180=12: χ.

9: 3

36. 9: 180. 3=12: χ. καὶ ἡ

ἐξίσωσις $\cancel{36}.\ \cancel{9}.\ \chi = \cancel{180}.\ \cancel{3}.\ \cancel{12}$

$\cancel{3}\ \ \cancel{3}\qquad \cancel{90}$

20 ἔνθα τὸ χ=20.

Ῥεέζιος δέ τις ἀντὶ τῆς ἐξισώσεως, ἔλαβε γραμμὴν κάθετον, καὶ τὸ ἓν σκέλος τῆς ἐξισώσεως ἔθηκεν ἀριςερόθεν τῆς γραμμῆς, τὸ δ᾽ ἕτερον δεξιὰ οὕτω.

$$\begin{array}{r|l} \chi & \cancel{12} \\ \cancel{3}\ \cancel{36} & \cancel{180}\ \ 20 \\ \cancel{9} & \cancel{3} \end{array}$$

καὶ διὰ τὸ ἀλληλένδετον τῶν ἀναλογιῶν, Ἄλυσσον αὐτὸ τὸ εἶδος ἐκάλεσεν· ἡμεῖς ὅμως ἔπρεπε νὰ λάβωμεν τὸ εἶδος τῆς ἐξισώσεως ὡς βάσιν καὶ θεμέλιον τῆς ἡμετέρας πραγματείας· διότι καὶ οὕτως ὀρθῶς ὅλα τὰ προβλήματα ἐπιλύομεν. Ἀλλ' ἐπειδὴ διὰ τῆς γραμμῆς τῆς καθέτου παρίστανται οἱ παράγοντες σαφέστεροι εἰς τὰς τροπὰς, καὶ ὀπαλείψεις αὐτῶν, λαμβάνομεν τὴν κάθετον γραμμήν· διότι ἡ γραμμὴ ἡ κάθετος παριστάνει τὴν ὁριζοντικὴν γραμμὴν ἑνὸς κλάσματος· καὶ ἔχει αὕτη ἡ κάθετος γραμμὴ ὅλα τὰ τῶν κλασμάτων ἰδιώματα· καὶ τέλος, νοήσωμεν, αὐτὴν τὴν γραμμὴν ὅτι διαστέλλει τὰ σκέλη τῆς ἐξισώσεως, καὶ εἶναι ταυτὸν, ἢ ἐξίσωσιν καταστρῶσαι, ἢ τὸ ἐντεῦθεν, καὶ ἐκεῖθεν μέρος τῆς γραμμῆς. Πῶς δὲ ταύτην καταστρώνομεν, τὰ ἑξῆς διδάξουσι.

α΄. Πρέπει εἰς κάθε ἀναλογικὸν πρόβλημα, εἴτε ἁπλοῦν, εἴτε σύνθετον, νὰ διακρίνωμεν δύω κῶλα. λ. χ. ἂν 100 γρ: φέρωσι τόκον 8. 6000 πόσα φέρουσι; Αὐτοῦ τὸ πρῶτον κῶλον 100, καὶ 8 τὸ δεύτερον 6000 καὶ χ.

β΄. Ὁμοίως ἂν εἰς ἕνα μῆνα περιπατῶντες 7 ὥρας τὴν ἡμέραν, διανύει διάστημα 360, εἰς $3\frac{1}{2}$ μῆνας περιπατῶν ὁ αὐτὸς 9 ὥρας τὴν ἡμέραν πόσον διανύει διάστημα; Εἰς αὐτὸ τὸ μὲν πρῶτον κῶλον εἶναι εἰς μὴν: 17 ὥρ: 360 μιλ. τὸ δὲ δεύτερον $3\frac{1}{2}$ μ: 9 ὥρ: χ.

γ΄. Εἰς ἕνα τοῖχον 6 ὀργ: μῆκος, 8 πόδας ὕψος, καὶ $1\frac{1}{2}$ ποδ: πάχος χρειαζόμεθα 5184 κεραμίδας, πόσας χρειαζόμεθα ἐξ αὐτῶν εἰς ἕνα τοῖχον $8\frac{1}{2}$ ὀργ: μῆκος, 2 πόδ: πάχος, καὶ 6 πόδ: ὕψος;

Αὐτοῦ τὸ μὲν πρῶτον κῶλον 6 ὀργ: 8 πόδ, $1\frac{1}{2}$ ποδ: 5184 κεραμ:, τὸ δὲ δεύτερον $8\frac{1}{2}$ ὀργ 2 πόδ: 6 πόδ· καὶ χ.

δ΄. Εἰς ἕνα κάστρον εὑρίσκεται τροφή, ὥστε 600 ἄνθρωποι εἰς 90 ἡμ:, ἂν λαμβάνωσι 2 λίτ: τὴν ἡμέραν ἄρτον, διαρκοῦσιν· ἐπειδὴ ὅμως 100 ἄνθρωποι ἀπεστάλησαν διὰ νὰ ζήσωσιν οἱ λοιποὶ 130 ἡμ: ἀπὸ πόσον ἄρτον νὰ λαμβάνωσιν; Καὶ αὐτοῦ τὸ πρῶτον κῶλον 6000 ἄνθρωποι, 90 ἡμ: 2 λίτ: τὸ δὲ δεύτερον 5000 ἄνθρωποι, 130 ἡμ: χ ἄρτον.

Β΄. Ἀφ' οὗ δὲ διακρίνομεν τὰ κῶλα, γράφομεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς διαστίζοντες τὰ κῶλα, καὶ ἐπάνω τούτων τὰ σημαινόμενα αὐτῶν ὅταν ἐξεύρωμεν τί σημαίνει τὸ χ.

α΄. Παράδειγμα.

γρ	τόκ	γρ	τόκ
100:	8	6006:	χ.

	μ	ωρ	μίλ	μ	ὧρ	μίλ
ϛ΄. παράδ:	1:	7:	360	$3\frac{1}{2}$:	9:	χ

	ὀργ:	πόδ:ὕψ:	πόδ παχ:	κεραμ:	κερ.	ὀργ.	π:παχ.	πόδ:ὕψ
γ΄. παράδ:	6,	8,	$1\frac{1}{2}$	5184	χ:	$8\frac{1}{2}$	2:	6

	ἄν:	ἡμ	λίτ	ἄν:	ἡμ:	λίτ:
δ΄. παράδ:	6000:	90:	2:	5000:	130	χ

Γ'. Ἄγομεν ἔπειτα ἢ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος, ἢ γραμμὴν κάθετον. Εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος αὐτῆς γράφομεν τὴν ἄγνωστον χ. εἰς δὲ τὸ δεξιὸν τὸν ὁμοειδῆ ἀριθμόν· ἔπειτα εὑρίσκομεν τοὺς ὁμοειδεῖς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ ἓν κῶλον καὶ ἀπὸ τὸ ἕτερον· καὶ τὸν μὲν ἀριστερὸν ἀριθμὸν γράφομεν εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τῆς γραμμῆς, τὸν δὲ δεξιὸν εἰς τὸ δεξιὸν ὡς παράγοντας ὅλους· ἐκτὸς μόνον ἐὰν ὁμοειδεῖς τινὲς εἶσιν ἐν λόγῳ ἀντιστρόφῳ παραβαλλόμενοι πρὸς τὴν ἄγνωστον χ. διότι τότε γράφεται ὁ μὲν ἀριστερὸς εἰς τὸ δεξιὸν μέρος τῆς γραμμῆς, ὁ δὲ δεξιὸς εἰς τὸ ἀριστερὸν, καὶ οὕτως ἀπαρτίζεται ἢ ἡ ἐξίσωσις ἐκ δύω σκελῶν, ἢ τὰ δύω μέρη τῆς γραμμῆς, καὶ ἕκαστον τούτων εἶναι μονομερὲς παραγόμενον.

α'. Παράδειγμα.

100. $\chi = 8.\ 6006$, ἢ διὰ τῆς γραμμῆς $\begin{array}{r|l} \chi & 8 \\ 100 & 6006 \end{array}$

Β'. 1. 7. $\chi = 360.\ 9.\ 3\frac{1}{2}$ ἢ - - - $\begin{array}{r|l} \chi & 360 \\ 7 & 9 \\ 1 & 3\frac{1}{2} \end{array}$

Γ'. 8. $1\frac{1}{2}$. 6. $\chi = 5184.\ 8\frac{1}{2}.\ 2.\ 6$ ἢ. . $\begin{array}{r|l} \chi & 5184 \\ 6 & 8\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} & \\ 2 & 2 \\ 8 & 6 \end{array}$

Δ'. 130. 5000. $\chi = 2.\ 6000.\ 90$, ἢ $\begin{array}{r|r} \chi & 2 \\ 5000 & 60000 \\ 130 & 90 \end{array}$

Λύσις.

Ἡ λύσις δὲ γίνεται, ὡς εἰς τὰς ἐξισώσεις, ὅταν τὸ χ μονόσωμεν· πλὴν πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν α΄. Ὅταν τις παράγων εἰς τὸ ἓν μέρος ἔχῃ μηδενικὰ, καὶ ἔχῃ καὶ ἕτερος εἰς τὸ ἕτερον μέρος, ἀπαλείφομεν ἴσα μηδενικὰ καὶ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς, καὶ ἑτέρου σκέλους. β΄. Ἐπειδὴ ἡ μονὰς δὲν πολλαπλασιάζει, ἀπαλείφεται, ὅταν ᾖ παράγων. γ΄. Ἐὰν ἴσοι παράγοντες ὦσι καὶ εἰς τὰ δύω μέρη τῆς γραμμῆς, ἀπαλείφονται. δ΄. Ἐάν τις ἀριθμὸς διαιρῇ ἐπ' ἀκριβὲς δύω παράγοντας, τὸν μὲν ἀφ' ἑνὸς μέρους τῆς γραμμῆς, τὸν δ' ἀπὸ τοῦ ἑτέρου, γράφομεν μόνον τὸ πηλίκον, καὶ οἱ παράγοντες ἀπαλείφονται. ε΄. ἐάν τις παράγων ᾖ κλασματικὸς, φέρομεν αὐτὸν εἰς νόθον κλάσμα, καὶ τὸν παρονομαστὴν μετακομίζομεν ὡς παράγοντα εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς γραμμῆς. ϛ΄. Ἐὰν δὲ πλέον ἄλλως ἡ ἐξίσωσις δὲν μεταβάλλεται, εὑρίσκομεν τὴν ἄγνωστον χ κατὰ τὸ εἶδος τῶν ἐξισώσεων· Οὕτω λύονται τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα.

α΄. $\frac{100}{25}$. $\chi = \frac{8}{2}$. 6006 - - - - - -

καὶ $\chi = \frac{2.\ 6006}{25} = 480\ \frac{12}{25}$ - -

- χ	8 2
100	6006
- 25	
	καὶ χ=

$\frac{2.\ 6006}{25} = 480\ \frac{12}{25}$.

β΄. 1. 7. χ=360. 9. 3 $\frac{1}{2}$

1 180 7

καὶ χ=9. 160

χ	360 7 180
7	9
1	
2	3 $\frac{1}{2}$ 7. καὶ χ=9. 180

$\gamma'. \cancel{8}. \cancel{1}\frac{\cancel{1}}{2}. \cancel{6}. \chi = \cancel{5}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{4}. \cancel{8}\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}. \cancel{1}. \cancel{6}$

$\cancel{4} \quad \cancel{3} \qquad \cancel{1}\cancel{2}\cancel{9}\cancel{6} \quad 17$

432

$\kappa\alpha\grave{\iota}\ \chi = 432.\ 17 = 7344$

$$\left\{\begin{array}{c|c} \chi & 5184.\cancel{1}\cancel{7}28.432 \\ \cancel{6} & 8\frac{\cancel{1}}{2} \quad 17 \\ \cancel{3}\,\cancel{1}\frac{1}{\cancel{8}} & \cancel{2} \quad \cancel{1}\cancel{2} \\ \cancel{4}.2.8 & \cancel{6} \end{array}\right.$$

$\kappa\alpha\grave{\iota}\ \chi = 432.\ 17 = 7344$

$\delta'. \cancel{1}\cancel{3}\cancel{0}. \cancel{5}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}. \chi = 2. \cancel{6}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}. \cancel{9}\cancel{0}$

$13 \quad 5 \qquad 6 \qquad 9$

$\kappa\alpha\grave{\iota}\ \chi = \frac{108}{65} = 1\frac{43}{63}$

$$\left\{\begin{array}{c|c} \chi & 2 \\ 5.\ \cancel{5}000 & \cancel{6}000\ 6 \\ 13.\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{0} & \cancel{7}0\ 9 \end{array}\right.$$

$\kappa\alpha\grave{\iota}\ \chi = \frac{2.\ 6.\ 9}{5.\ 13} = 1\frac{43}{65}.$

Λοιπὸν, ὅς τις ταῦτα πάντα καλῶς ἐννοήσει, εὐκόλως λύει καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα· ἐκ δὲ τῆς διπλῆς ταύτης ἐργασίας εἶναι φανερὸν, ὅτι ταὐτὸν εἶναι ἢ διὰ τῆς ἐξισώσεως ἢ διὰ τῆς γραμμῆς νὰ λύσωμεν τὰ τοιαῦτα προβλήματα· διότι ἡ Ῥεσζικὴ μέθοδος εἶναι τὸ κλάσμα τὸ ὁριζοντικὸν, νὰ μεταβληθῇ εἰς κλάσμα κατὰ κάθετον:

α'. Ἐάν τις πωλήσῃ 100 κομμάτια ὑφάσματα πρὸς 20 γρ, κερδίζει 30 γρ: ἐὰν ὅμως πωλήσῃ 800 ἀπ' αὐτῶν πρὸς 24 γρ: τί κερδίζει; ὅρα ἡ κατασκευὴ κατὰ τὰ ἄνω.

κομ: τιμὴ κέρδ: κομ: τιμ: κερ:

100, 20; 30, 800: 24, χ. ἄρα $\chi = 12.\ 24 = 288$

$$\left\{\begin{array}{c|c} \chi & \cancel{3}\cancel{0}\ 3 \\ \cancel{1}00 & \cancel{8}00\ \cancel{8}\ 4 \\ \cancel{2}\cancel{0} & 24 \end{array}\right.$$

β'. Ἐὰν 100 ἄνοι εἰς 5 ἡμ: σκάπτοντες τάφρον τινὰ 250 ὀργυιὰς διορύττουσι, πόσοι ἄνθρωποι χρειάζονται εἰς 2 ἡμ: 1000 ὀργ: νὰ σκάψωσιν.

ἄν αὐ: ἡμ: οργ: ἄν: ἡμ οργ:
100, 5, 250, . χ, 2, 1000

$$\begin{array}{r|l} \chi & 100 \\ 2 & 5 \\ \cancel{250} & \cancel{1000}.\cancel{4}.2 \end{array}$$

καὶ $\chi = 10000$ ἄνοις.

Αὐτοῦ ὁ λόγος 5: 2 εἶναι ἀντίστροφος· διότι εἰς περισσοτέραις ἡμέραις ὀλιγώτεροι ἄνθρωποι χρειάζονται· διὸ καὶ ὁ δεξιὸς ὅρος ἐγράφη εἰς τὸ ἀριστερὸν κῶλον.

γ'. Ἐὰν μὲ 50 $\frac{1}{4}$ γρ: κερδίζῃ τις εἰς $4\frac{\ }{3}$ μῆνας γρόσια 10, μὲ 6000 $\frac{1}{2}$ εἰς μῆνας 8 $\frac{2}{3}$ πόσα κερδίζει;

γρ ἡμ κερ: γρ ἡμ κερδ:
$50\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{3}$, 10, 6000 $\frac{1}{2}$, $8\frac{2}{3}$, χ

$$\begin{array}{r|l} \chi & 10 \\ 201\ \cancel{50}\frac{1}{4} & \cancel{6000}\frac{1}{\cancel{2}}.\ 12001.\ \cancel{4}.\ 2 \\ \cancel{4} & \\ \cancel{13}\ \cancel{4}\frac{\cancel{1}}{3} & 8\ \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}.\ \cancel{26}.\ 2 \\ \cancel{3} & \cancel{1} \end{array}$$

καὶ $\chi = \frac{10.\ 12001.\ 2.\ 2}{201} = 2388.$ γρ: 10 παρ: 1 ἄσπρ:

δ'. Ἄνθρωποι 8 εἰς 6 $\frac{2}{3}$ ἡμέρας δουλεύοντες $7\frac{1}{3}$ ὥρας τῆς ἡμέρας, κόπτουσι 35 ἀμάξια ξύλα. ἂν ὅμως 10 ἄνθρωποι δουλεύσωσι $9\frac{1}{3}$ ὥρ: τῆς ἡμέρας διὰ νὰ κόψωσιν 60 ἀμάξια ξύλα, πόσας ἡμέρας χρειάζονται.

ἄν: ἡμ: ὥρ: ἡμ: ἄν: ὥρ: ἡμ:

$8,\ 6\frac{2}{3},\ 7\frac{1}{3},\ 35,\ 10,\ 9\frac{1}{3},\ 60,\ \chi$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{3}\ \chi & \cancel{6}\frac{\cancel{2}}{3}.\ \cancel{10}.\ \cancel{4} \\ \cancel{10} & 8 \\ 7\cdot\ 3\cdot\ \cancel{18}\cdot\ \cancel{7}\frac{\cancel{1}}{3} & \cancel{7}\frac{\cancel{1}}{3}.\ 22.\ \cancel{3}. \\ \cancel{3}\ \cancel{18} & \cancel{80}.\ \cancel{8}.\ 2 \end{array}$$

καὶ $\chi = \frac{8.\ 22.\ 2}{7\cdot\ 7} = 7\frac{9}{49}$. αὐτοῦ εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ λόγοι 8: 10 καὶ $7\frac{1}{2}$: $9\frac{1}{3}$ εἶναι ἀντίστροφοι.

ε'. Ἐὰν 100 ἄνθρωποι εἰς 3 ἡμέρας ἐργαζόμενοι 6 ὥρ: τὴν ἡμέραν, σκάπτωσιν ἕνα χαυδάκι τὸ μῆκος 250 ὀργυιῶν, τὸ πλάτος 7 πόδας, καὶ τὸ βάθος 3 πόδας, εἰς πόσας ἡμέρας 300 ἄνθρ: σκάψουσιν ἕτερον χανδάκι τὸ μῆκος 600 ὀργυιῶν, τὸ πλάτος 8 πόδας, τὸ βάθος 4 πόδας, ἐργαζόμενοι 8 ὥρ τῆς ἡμέρας;

ἄν: ἡμ: ὥρ: μῆκ: πλ βάθ: ἡμ: ἄνθ: μῆκ: πλ: βάθ: ὥρ:
100, 3, 6, 250, 7, 3, χ, 300, 600, 8, 4, 8.

χ	$\cancel{8}$
3. $\cancel{300}$	$\cancel{100}$
8	$\cancel{6}$. 2
5. $\cancel{25}$. $\cancel{250}$	$\cancel{600}$. $\cancel{60}$. 12
7	8
$\cancel{3}$	4

καὶ $\chi=\frac{2.\ 12.\ 4}{5.\ 7}=\frac{96}{35}=2\frac{26}{35}$ ἡμ.

Καὶ αὐτοῦ οἱ ἀντίςροφοι ὅροι ἀνάπαλιν ἐλήφθησαν.

ϛʹ. Ἐὰν 20 ὑφανταὶ εἰς 8 ἑβδομάδας δουλεύοντες 5 ἡμέρας τὴν ἑβδομάδα, καὶ 10 ὥρ τὴν ἡμ: 100 κομμάτια πανίου κατασκευάζωσιν· ἕκαςον δὲ τούτων τὸ μὲν μῆκος 30 πηχῶν, τὸ δὲ πλάτος $1\frac{1}{4}$ πήχεως· πόσα κατασκευάσουσιν ἄνθρ. 80, εἰς 15 ἑβδομάδας δουλεύοντες 6 ἡμ: τὴν ἑβδομάδα, καὶ 12 ὥρας ἑκάςης ἡμέρας, ἐὰν τούτων ἕκαςον εἶναι 40 πήχεων μῆκος, καὶ 1 πήχ: πλάτος;

ὑφ: ἑβ: ἡμ: ὥρ: κομ: πλ: μῆκ: κομ: ὑφ: ἑβδ:
20, 8, 5, 10, 100, $1\frac{1}{4}$, 30, χ, 80, 15,

ὥρ: μῆκ: πλ: ἡμ:
12, 40, 1, 6.

χ	$\cancel{100}$. $\cancel{20}$ 5
$\cancel{20}$	$\cancel{80}$. $\cancel{10}$
8	$\cancel{15}$. 3
$\cancel{5}$	$\cancel{6}$. 3
$\cancel{10}$	$\cancel{12}$ 3
$\cancel{4}$. $\cancel{1}$	$\cancel{1\frac{1}{4}}$. 5
2 $\cancel{4}$. $\cancel{40}$	$\cancel{30}$. 3

καὶ $\chi=\frac{5.\ 3.\ 3.\ 3.\ 5.\ 3}{2}=1012\frac{1}{2}$

§. 531. Ἡ ἅλυσος χρησιμεύει, καὶ ὅταν ἓν μέτρον ἑτέρου γένους δὲν εἶναι γνωςὸν μὲ τὰ μέτρα τὰ ἐδικάμας, πλὴν τοῦτο εἶναι γνωςὸν πρὸς ἄλλα μέτρα ἑτέρων γενῶν, ὁποῦ ἔχουσι γνωςὴν τὴν ἀναφορὰν μὲ ἐκεῖνο, οὗ ἡ ἀναφορὰ πρὸς τὰ ἐδικάμας ἀγνοεῖται· λοιπὸν δι' αὐτῆς τῆς ἁλύσου εὑρίσκομεν καὶ τὴν ἀναφορὰν ἐκείνου πρὸς τὰ ἐδικάμας. π. χ.

Ζητεῖται νὰ μάθωμεν αἱ πῆχες τῆς Κωνςαντινουπόλεως τί ἀναλογίαν ἔχουσι μὲ τὰς πήχεις τῆς Βιέννας, ὅταν εἶναι γνωςὸν ὅτι $8\frac{1}{2}$ π. τῆς Κωνς: γίνονται 86 τοῦ Τριεςίου, καὶ $91\frac{1}{2}$ π. τοῦ Τριες: γίνονται $82\frac{1}{2}$ τοῦ Ἄμςερδὰμ, καὶ $72\frac{13}{16}$ τοῦ Ἄμςερδ: γίνονται $91\frac{1}{2}$ τῆς Λειψίας, καὶ 100 τῆς Λειψ: γίνονται $72\frac{13}{16}$ τῆς Βιέννας· καὶ εἰς αὐτὰ τὰ παραδείγματα συνειθίζουσι νὰ ἄγωσι γραμμὴν κάθετον ὡς εἰς τὸ παράδειγμα φαίνεται κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Ῥεεζίου, καὶ νὰ γράφωσι τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰς ὀνομασίας ὡς φαίνονται.

Βιέν:	Κωνς:
$82\frac{1}{2}$ Κωνς:	86: Τριες:
$91\frac{1}{2}$ Τριες:	$82\frac{1}{2}$ Ἄμςερδ:
$72\frac{13}{16}$ Ἄμςερ:	$91\frac{1}{2}$ Λείψ:
100, Λείψ:	$72\frac{13}{16}$ Βιέν:

ἐὰν τὰ ἴσα ἀπαλείψωμεν, εὑρίσκομεν 100: 86, ἤτοι 100 πήχεις τῆς Κωνς: εἶναι ἴσαι μὲ 86 τῆς Βιέν: διότι τοῦτο εἶναι ἐξίσωσις ὡς ἄνω (§. 5---) Βιέν: $82\frac{1}{2}$. $91\frac{1}{2}$. $72\frac{13}{16}$. 100= Κωνς: $82\frac{1}{2}$. $91\frac{1}{2}$. $72\frac{13}{16}$. 86. ἤτοι Βιέν: 100= Κωνς: 86. ἄρα κατὰ τὸ (§. 474), καὶ Κωνς: Βιέν =100: 86. διότι ἡ Κωνς: καὶ Βιέν: λαμβάνονται αὐτοῦ ὡς παράγοντες.

Β΄. Ζητεῖται τί ἀναλογίαν ἔχει ὁ ποῦς τῆς Βιέν: πρὸς τὸν πόδα τοῦ Βερολίν: ἐπειδὴ ἄλλως εἶναι γνωςὸν, ὅτι ὁ ποῦς τῆς Βιέννας πρὸς τὸν πόδα τοῦ Παρισίου εἶναι ὡς 1401: 1440, ὁ δὲ τοῦ Παρισίου πρὸς τὸν τοῦ Τουρουνίου ὡς 719: 1136, καὶ ὁ τοῦ Τουρουνίου πρὸς τὸν τῆς Λόνδρας ὡς 2277: 1353, καὶ ἅμα ὁ τῆς Λόνδρας πρὸς τὸν τῆς Βιέννας ὡς 6756: 6866. γενέσθω λοιπὸν

Βιέν:	Βερολ:
6866 Βερολ:	6756 Λόνδρ:
1351 Λόνδρ:	2277 Τουρουν:
1136 Τουρουν	719 Παρισ:
1440 Παρίσ:	1401 Βιέν:

ἐὰν δὲ καὶ ταῦτα ὡς ἀνωτέρω εἰς μίαν ἐξίσωσιν ἀγάγωμεν ἔςαι. Βιέν: 6866. 1351. 1136. 1440= Βερολ: 6756. 2277. 719. 1401. ἤτοι Βιέν: Βερολ =6756. 2277. 719. 1401: 6866. 1351. 1136. 1450.

Ἐὰν ὅμως τοὺς παράγοντας εἰς ἕνα παραγόμενον πολλαπλασιάσωμεν τοῦ ἑνὸς ὅρου τοῦ λόγου, καὶ τοῦ ἑτέρου λόγου ὁμοίως, καὶ κατὰ τὰ εἰρημένα (§. 270) φέρομεν τὸν λόγον εἰς ἐλαχίςους ὅρους, εὑρίσκομεν Βιέν: Βερ = 50: 49. Αὐτοῦ ὅταν θέλωμεν μόνον τὸν λόγον νὰ μάθωμεν, ὁποῦ ἔχει τὸ ἓν μέτρον ἑνὸς τόπου πρὸς τὸ ἕτερον γράφομεν δεξιὰ τῆς γραμμῆς τὸ ὄνομα τοῦ τόπου ἐκείνου τοῦ μέτρου, ὁποῦ ζητεῖται, καὶ ἀριστερὰ τὸ ὄνομα τοῦ τόπου, εἰς τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον ἡ ἀναφορὰ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ· ἔπειτα τὸν γνωστὸν λόγον αὐτοῦ τοῦ τόπου πρὸς τὸν ἕτερον γράφομεν ὑποκάτω οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ἀριστερὰ ὁ ὅρος αὐτοῦ τοῦ τόπου, καὶ δεξιὰ ὁ ὅρος τοῦ ἑτέρου· ἔπειτα γράφεται καὶ ὁ λόγος αὐτοῦ τοῦ ἑτέρου τόπου πρὸς ἕτερον· πλὴν ὁ ὅρος ἐκείνου γράφεται πάλιν ἀριστερὰ, καὶ δεξιὰ ὁ ὅρος τοῦ τρίτου τόπου· καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, ὥστε νὰ καταντήσωμεν εἰς τὸ τέλος δεξιὰ, νὰ ἔχωμεν ὅρον τοῦ τόπου ἐκείνου, οὗ τινος ὁ ὅρος ἐγράφη εἰς τὰς ἀρχὰς ἀριστερὰ, δηλ: ὁ αὐτὸς τόπος νὰ ἄρχηται ἀριστερὰ, καὶ νὰ τελειώνῃ ἔσχατος δεξιά· δηλ: ζητεῖται ὁ λόγος ἑνὸς μέτρου α τοῦ τόπου Α πρὸς τὸ μέτρον β ἑνὸς ἑτέρου τόπου Β. ἐπεὶ εἶναι γνωστὸς ὁ λόγος τοῦ μέτρου τοῦ τόπου Β=β πρὸς τὸν τοῦ Γ=γ ὡς β: γ καὶ ἔτι τοῦ Γ πρὸς τὸν τοῦ Δ ὡς γ: δ καὶ ἔτι ὁ τοῦ Δ πρὸς τὸν τοῦ Ε ὡς δ: ε, καὶ ἔτι ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸν τοῦ Ζ ὡς ε: ζ κ. τ. λ. εὑρίσκεται λοιπόν.

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \\ \gamma & \delta \\ \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \zeta \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$$

Πολλάκις ὅμως ζητεῖται ἄγνωστος ὁ ὅρος χ, καὶ τούτου τοῦ τρόπου μεταχειρίζονται εἰς τὰς ἐμπορίας οἱ πραγματευταὶ, ὅταν ἔχωσι διαφόρους ὑποθέσεις. Ἡμεῖς μέν τοι καὶ εἰς τοῦτο ἐκθέσωμεν τινα παραδείγματα διὰ νὰ ἠμπορῶσιν οἱ ἀναγνῶςαι μας καὶ ἄλλα πολλὰ νὰ λύωσιν. Ἔςω ὅτι ἓν κομμάτι τζόχας ἀπὸ 30 πήχεις τοῦ Βραμσάνδ τιμᾶται 260 φιορινίων τῆς Ὀλάνδας, ἓν δὲ φιορίνι Ὀλανδέζικον τιμᾶται 20 ςύβερ. 104 ςύβερ τιμᾶται ἑνὸς φλωρίου τῆς Ὀλάνδας· ἓν δὲ φλωρίον ὀλανδέζικον τιμᾶται 11 φιορ: 21 κραϊτζάρι τῆς Βιένας, ἤτοι $11\frac{21}{60}$ φιορ:, ἓν φιορ: τῆς Βιένας τιμᾶται 32 παρ: ἤτοι $\frac{32}{40}$ γρ:, 89 δὲ πήχες τῆς Βιέν: τιμῶνται 100 πήχ: τοῦ Βραμσάνδ: καὶ 100 τῆς Τουρκίας πήχες τιμῶνται $83\frac{11}{18}$ τῆς Βιέν: Ζητεῖται μία πήχη τῆς Τουρκ: ἀπὸ αὐτὴν τὴν τζόχαν πόσων τιμᾶται γροσίων;

χ γρ:	1 πήχ. Τουρ: 301
3. 6. 18 100 πήχ: Τουρ:	$83\frac{11}{18}$ Βιέν: 1505
89 ·Βιέν. πήχ:	100 πήχ: μπαρ
3. 6. 30 πήχ μπαρ:	260 φιορ ὀλ: 131. 18
1 φ: ὀλ:	20 ςυβερ ὀλ:
4. 26. 104 ςυβ: ὀλ:	1 φλωρ. ὀλ:
6. 60. 1 φλωρ:	$11\frac{21}{60}$ φιορ: Βιέν: 688. 227
1. 40. 1. φιορ: Βιέν:	$\frac{32}{40}$ γρ: Τουρ: 32. 8

$$\text{καὶ } \chi=\frac{301.\ 227}{3.\ 89.\ 5.6}=14\frac{1043}{4806}\ \text{γρ:}$$

Β'. Ἔστειλέ τις εἰς Βιένναν ἀπὸ Κωνσταντινουπόλεως διὰ τῆς Βλαχίας μετάξι πρὸς $27\frac{1}{3}$ γρ: τὴν ὀκᾶν· λογίζεται δὲ τὰ ἔξοδα ἀπὸ Κωνστ. ἕως Βλαχίας 5 γρ: εἰς τὰ 100, ἀπὸ δὲ Βλαχίαν ἕως εἰς τὴν Πέσταν 6 γρ: εἰς τὰ 100, ἀπὸ δὲ Πέστης ἕως εἰς Βιέναν εἰς τὰ 100 ἓν γρ: ἰξεύρει δὲ ὅτι καὶ 32 γρ, εἶναι ἴσα μὲ 40 φιορίνια, θέλει νὰ μάθῃ πόση γίνεται ἡ τιμὴ ἑνὸς φουντίου εἰς τὴν Βιέναν· ὅταν δῶμεν 9 φούντια ἴσα μὲ 4 όκ: τῆς τουρκίας;

χ φιορ:	$\cancel{1}$ φουντ:	
9 φουντι:	$\cancel{4}$ ὀκ. Τουρκ:	
$\cancel{3}$. $\cancel{1}$ ὀκ: Τουρκ:	$\cancel{27}\frac{1}{3}$ γρ:	$\cancel{82}$ 4,
10: $\cancel{100}$ γρόσ:	$\cancel{105}$ ἕως Βλαχ:	$\cancel{35}$ 7
2 $\cancel{4}$ 8 $\cancel{32}$ γρόσ:	$\cancel{40}$ φιορ	$\cancel{4}$.
5. $\cancel{25}$. $\cancel{100}$ φιορ:	$\cancel{106}$ φιορ: ἕως Πέστης	53
100 φιορ:	101 ἕως Βιέν:	

ἤτοι $90000\,\chi = \frac{41 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 101}{90000} = \chi = 17\frac{6311}{90000}$ φιορ:

Καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον λύονται ὅλα τὰ πολυσύνθετα προβλήματα, ὅταν πρῶτον γράφωμεν τὴν ἄγνωστον ποσότητα ἀριστερὰ, καὶ ἀμέσως τὸν ἐρωτηματικὸν ὅρον· εἶτα τὴν τιμὴν αὐτοῦ τοῦ ὅρου, καὶ δεξιὰ τὸν ἴσον αὐτοῦ ὅρον κατὰ συνέχειαν, ἕως νὰ καταντήσωμεν εἰς τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου ὅρου χ. καὶ διὰ τὴν ἀλληλένδετον ταύτην συνέχειαν ὠνομάσθη ἡ μέθοδος αὕτη Ἅλυσος.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Γ'

Περὶ προβλημάτων τοιούτων Ἐξισώσεων ὧν ἡ κατασκευὴ δι' ἀναλογίας γίνεται.

Πρόβλημα. α'.

§. 532. Ἔχει τις δύω εἴδη νομισμάτων πεντάρια, καὶ εἰκοσάρια· 48 δὲ κομμάτια τῶν πρώτων ἀποτελοῦσιν ἓν φλωρίον, 12 δὲ τῶν δευτέρων ἀποτελοῦσι τὸ αὐτό· αἰτεῖ δέ τις νὰ ἀλλάξῃ ἓν τοιοῦτον φλωρίον, καὶ νὰ λάβῃ μόνον 33 κομμάτια ἀπὸ αὐτὰ, πόσα πρέπει νὰ τῷ δώσῃ πεντάρια, καὶ πόσα εἰκοσάρια, ὥςε 33 κομμάτια ὁμοῦ νὰ εἶναι ἴσα ἑνὶ φλωρίῳ;

Λύσις.

Ἂς δώσῃ ἀπὸ μὲν τὰ πεντάρια χ κομμάτια, ἄρα θέλει νὰ δώσῃ εἰκοσάρια $33-\chi$ κομμάτια· τοῦτο δὲ ἄλλως δὲν διαλύεται, εἰμὴ ἐὰν εὕρωμεν διὰ τῆς ἀναλογίας τὸ χ οὕτω· ἂν 48 ποιοῦσιν ἓν φλ: τί ποιεῖ τὸ χ, $48 : 1 = \chi : \frac{\chi}{48}$. Ἔτι ἂν 12 εἰκοσάρια ποιοῦσιν ἓν φλ: $33-\chi$ τί ποιεῖ;

$12 : 1 = 33-\chi : \frac{33-\chi}{12}$ ἄρα ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\chi}{48}+\frac{33-\chi}{12}=1$$

$\times 12$

$$\frac{\chi}{4}+33-\chi=12$$

$\times 4$

$$\chi+132-4\chi=48$$

$$132-48=4\chi-\chi$$

$84=3\chi=\chi=28.$ ἄρα $33-28=5.$ ὅθεν ἂς δώσῃ 28 πεντάρια καὶ 5 εἰκοσάρια.

Γενικῶς δ' ἐκφράζεται, ἐὰν α τὸ ποσὸν ἑνὸς εἴδους νομίσματος, ὁποῦ ἀποτελεῖ ἓν νόμισμα, καλέσωμεν, καὶ β τὸ ποσὸν τοῦ ἑτέρου· αἰτεῖ δέ τις ἐκ τῶν δύω δι' αὐτὸ τὸ νόμισμα νὰ ἀλλάξῃ γ ποσὸν νομισμάτων. Δεδόσθω ἐκ μὲν τοῦ πρώτου χ, ἄρα ἐκ τοῦ δευτέρου $\gamma-\chi$. καὶ ὡς ἀνωτέρω $\alpha: 1=\chi: \frac{\chi}{\alpha}$. Καὶ $\beta: 1=\gamma-\chi: \frac{\gamma-\chi}{\beta}$ καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\gamma-\chi}{\beta}=1$$

καὶ $$\frac{\beta\chi}{\alpha}+\gamma-\chi=\beta$$

$\times \alpha$

$$\beta\chi+\alpha\gamma-\alpha\chi=\alpha\beta$$

$-\alpha\gamma$

$$\beta\chi-\alpha\chi=\alpha\beta-\alpha\gamma$$

$$\chi(\beta-\alpha)=\alpha\beta-\alpha\gamma \text{ καὶ } \chi=\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\beta-\alpha}.$$

Εἰς αὐτὸν τὸν τύπον ἐκλαμβάνεται ἡ α ἐλάττων, ἢ ἡ β, ὡς ἄνω τὰ πεντάρια α, καὶ β τὰ εἰκοσάρια· εὑρίσκομεν δὲ καὶ $\gamma-\chi=\beta-\frac{\beta\chi}{\alpha}$ ἐκ τῶν ἄνω· Θῶμεν ἤδη ἀντὶ χ

τὸ ἴσον $\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\beta-\alpha}$, ἔςαι $\gamma-\chi=\beta-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\beta-\alpha}=\beta-$

$$\frac{\beta\beta-\beta\gamma}{\beta-\alpha}=\frac{\beta\beta-\alpha\beta-\beta\beta+\beta\gamma}{\beta-\alpha}=\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Β'. Τρεῖς παίζοντες χαρτία ἐσηκώθησαν μὲ τοιαύτην ποσότητα ἕκαςος· τοῦ μὲν πρώτου τὰ χρήματα ἦτον πρὸς τὰ τοῦ δευτέρου ὡς $7:3$. τοῦ δὲ δευτέρου πρὸς τὰ τοῦ τρίτου ὡς $17:5$. Ἂν ὅμως πολλαπλασιάσωμεν τὰ χρήματα τοῦ πρώτου ἐπὶ τὰ τοῦ δευτέρου, καὶ τὰ τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὰ τοῦ τρίτου, καὶ τὰ τοῦ τρίτου ἐπὶ τὰ τοῦ πρώτου, τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν γινομένων ἴσον $3830\frac{2}{3}$. Ζητεῖται μὲ πόσα χρήματα ἕκαςος ἐσηκώθη;

Ὁ πρῶτος εἶχε χ, ἐπειδὴ ὅμως τὰ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ τοῦ δευτέρου ἦτον ὡς $7:3$, λέγομεν ἂν ὁ λόγος $7:3$. τίς ὁ λόγος τοῦ χ πρὸς ἕτερον;

$7:3=\chi\cdot\frac{3\chi}{7}$ καὶ τόσα χρήματα εἶχεν ὁ δεύτερος κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον εὑρίσκονται καὶ τὰ τοῦ τρίτου $17:5=\frac{3\chi}{7}:\frac{5.\ 3\chi}{17\cdot 7}$, καὶ ἔςαι τοῦ μὲν

$$A=\chi$$

τοῦ $B=\frac{3\chi}{7}$

τοῦ $\Gamma=\frac{5.\ 3\chi}{7\cdot 17}$

τὸ παραγόμενον ἐκ τῶν τοῦ Α΄, καὶ $Β΄=\frac{3\chi\chi}{7}$

ἐκ τῶν τοῦ Β΄, καὶ $Γ΄=\frac{5.\ 3.\ 3\chi\chi}{17.\ 7.\ 7}$

ἐκ τῶν τοῦ Γ΄, καὶ $Α΄=\frac{5.\ 3\ \chi\chi}{17.\ 7}$

καὶ τὸ κεφάλαιον τούτων ἡ ἰσότης $\frac{3\chi\chi}{7}+\frac{5.\ 3.\ 3\chi\chi}{17.\ 7.\ 7}+$

$\frac{5.\ 3\chi\chi}{17.\ 7}=3830\ \frac{2}{3}$

$$\frac{7.\ 17.\ 3\chi\chi+5.\ 3.\ 3\chi\chi+7.\ 5.\ 3\chi\chi}{17.\ 7.\ 7}=3830\ \frac{2}{3}$$

$$\frac{507}{833}\ \chi\chi=3830\ \frac{2}{3}$$

εἰς νόθον κλάσμα

$$\frac{507}{833}\ \chi\chi=\frac{11492}{3}$$

$1521\ \chi\chi=9572336$

$$\chi\chi=\frac{9572836}{1521}\quad \text{καὶ}\quad \chi=\frac{3094}{39}.\ \text{καὶ διὰ } 13$$

$$\chi=\frac{238}{3}=79\frac{1}{3}.$$

ἄρα ὁ Β΄. $\frac{3\chi}{7}=\frac{3.\ 79\ \frac{1}{3}}{7}=34$

καὶ ὁ Γ΄. $\frac{5.\ 3\chi}{17.\ 7}=\frac{5.\ 3.\ 79\ \frac{1}{3}}{17.\ 7}=10$

Γ΄. Δύω χωρικαῖς εἶχον ὁμοῦ 100 αὐγά, καὶ ἀφ' οὗ τὰ ἐπώλησαν ἔλαβεν ἑκατέρα ἴσους παράδες, πλὴν ἡ μία εἶχε περισσότερα, καὶ ἡ ἑτέρα ὀλιγώτερα· ἐρωτᾷ ἡ μία τὴν ἑτέραν πόσα εἶχεν αὐτή, καὶ εἶπεν ἡ πρώτη, ἐὰν εἶχον τὰ ἐδικά σου, ἤθελον λάβῃ 15 παράδες· εἶπε καὶ ἡ δευτέρα, ἐὰν εἶχον καὶ ἐγὼ τὰ ἐδικά σου, ἤθελον λάβῃ $6\frac{2}{3}$ παρ: πόσα λοιπὸν εἶχεν ἑκατέρα, καὶ πόσα τὰ ἐπώλησαν;

Ἡ μὲν πρώτη εἶχε χ αὐγά· ἄρα ἡ δευτέρα $100-\chi$. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ πρώτη ἐλάμβανε διὰ $100-\chi$ παράδες 15, εὑρίσκομεν τὸ χ διὰ τῆς ἀναλογίας $10-\chi : 15 = \chi : \frac{15\chi}{100-\chi}$ παρδ: Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ δευτέρα ἐλάμβανε διὰ χ παράδες $6\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$, εὑρίσκομεν καὶ διὰ τὰ $100-\chi$ οὕτω $\chi : \frac{20}{3} = 100-\chi : \frac{2000-20\chi}{3\chi}$ παρ: ἀλλ' αἱ τιμαὶ αὗται αἱ δύω ἴσαι· ἄρα καὶ

$$\frac{\frac{15\chi}{100-\chi}=\frac{2000-20\chi}{3\chi}}{}\ .\ 3\chi \text{ καὶ } 100-\chi$$

$$45\chi^2=200000-2000\chi-2000\chi+20\chi^2$$

$$25\chi^2=200000-4000\chi$$

$$25\chi^2+4000\chi=200000$$

$$\chi^2+160\chi=8000$$

$$\chi+80=\sqrt{(6400+8000)}=\sqrt{14400}=120$$

καὶ $\chi=120-80=40$ ἅπερ εἶχεν ἡ πρώτη· ἄρα ἡ δευτέρα $100-\chi=100-40=60$, ἅπερ εἶχεν ἡ Β΄. ἐπειδὴ δὲ ἡ πρώτη ἐλάμβανεν ἀπὸ τὰ αὐγὰ τῆς δευτέρας 15 παρ: τὰ ἐπώλει ἄρα $\frac{60}{15}=4$ εἰς τὸν παρᾶν· ἡ δὲ δευτέρα ἀπὸ τὰ τῆς πρώτης ἐλάμβανε $6\frac{2}{3}$ παρ: τὰ ἐπώλει ἄρα $\frac{40}{6\frac{2}{3}} = \frac{40}{\frac{20}{3}} = \frac{120}{20} = 6$ εἰς παρᾶν· διὰ τοῦτο καὶ $\frac{60}{6} = 10$ παρ: καὶ $\frac{40}{4} = 10$ παρ:

Δ΄. Δύω τοπτζῆδες ἔῤῥιπτον κανόνια διάφορα, καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔῤῥιψε 50 κανόνια, ἄχρις οὗ ὁ δεύτερος ἄρχησε νὰ ῥίπτῃ· καὶ ἔτι ὁ πρῶτος ῥίπτει ἑπτὰ κανόνια, ἐν ᾧ ὁ δεύτερος 5 ῥίπτει. ὁ δεύτερος ὅμως διαπανᾷ τὸ αὐτὸ μπαροῦτι εἰς δύο βολὰς, ὅπερ ὁ πρῶτος εἰς τρεῖς δαπανᾷ· πόσας βολὰς ποιήσει ὁ δεύτερος, ἕως οὗ νὰ δαπανήσῃ τὸ αὐτὸ μπαροῦτι, ὅπερ ὁ πρῶτος ἐδαπάνησεν;

Ἔςω ὁ ἀριθμὸς τῶν βολῶν τοῦ $B = \chi$. ἀλλ᾽ εἰς τὸν ἴδιον καιρὸν βάλλει καὶ ὁ πρῶτος· ἄρα εἰς αὐτὸν τὸν χρόνον ποιεῖ βολὰς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, ὡς $7 : 5$, ἤτοι $5 : 7 = \chi : \frac{7\chi}{5}$. καὶ ποιεῖ βολὰς ὁ πρῶτος εἰς αὐτὸν τὸν χρόνον $\frac{7\chi}{5}$. ὅλαι δὲ ὁμοῦ $50 + \frac{7\chi}{5}$. διαπανᾷ δ᾽ ὁ δεύτερος εἰς κάθε βολὴν μπαροῦτι $= \alpha$. ἄρα καὶ ὅλων τῶν πάντων βολῶν τοῦ $B = \alpha\chi$. ὁ δὲ πρῶτος δαπανᾷ εἰς κάθε βολὴν $3 : 2 = \alpha : \frac{2\alpha}{3}$. καὶ τὸ ὅλον μπαροῦτι ὅλων τῶν βολῶν τοῦ πρώτου $\left(50 + \frac{7\chi}{5}\right) \frac{2\alpha}{3}$, καὶ ἐπειδὴ ἡ δαπάνη τοῦ μπαρουτίου καὶ τῶν δύω ἴση· ἄρα $(50+\frac{7}{5}\chi)\frac{2\alpha}{3}=\alpha\chi$. ἤτοι $(50+\frac{7\chi}{5})2=3\chi$

$$100+\frac{14\chi}{5}=3\chi \quad .5$$

$$500+14\chi=15\chi$$

$500=\chi$ αἱ βολαὶ τοῦ Β′

αἱ δὲ βολαὶ τοῦ Α′. $50+\frac{7\chi}{5}=50+\frac{7.\ 50}{5}=50+700$ $=750$ καὶ τῷ ὄντι $2:3=500:750$.

Ε′. Δύω τομπτζῆδες ἐγέμισαν ὁμοῦ 1000 φυσέκια, καὶ καὶ ἕκαςος ἐδαπάνησεν ἴσον μπαροῦτι. Λέγει ὁ Α′. ἐὰν ἐγὼ ἐγέμιζον τόσα φυσέκια, ὅσα σὺ, ἤθελον δαπανήση 18 καντάρια μπαροῦτι· λέγει δὲ καὶ ὁ Β′. ἐὰν ἐγὼ πάλιν ἐγέμιζον, ὅσα σὺ; ἤθελον δαπανήση 8 καντάρια μπαροῦτι· πόσα ἕκαςος ἐγέμισεν;

Ὁ μὲν Α′ ἐγέμισε χ φυσέκια, καὶ ὁ δεύτερος ψ. καὶ τὸ μὲν μπαροῦτι, ὁποῦ ἐδαπάνησεν ὁ Α′, καθὼς ἔλεγεν, εἶναι ψ φυσέκια: 18 καντ: $=\chi$ φυσ: $\frac{18\ \chi}{\psi}$ καντ: τὸ δὲ μπαροῦτι, ὁποῦ ἐδαπάνησεν ὁ δεύτερος κατὰ τὸν λόγον του εἶχε χ φυσ: 8 καντ $=\psi$ φυσ: $\frac{8\ \psi}{\chi}$ καντ. ἀλλαμὴν μπαροῦτι ἴσον ἐδαπάνησαν· ἄρα Α′. καὶ $\frac{18\ \chi}{\psi}=\frac{8\ \psi}{\chi}$. Β′. $\chi+\psi=1000$. Καὶ ἀπὸ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\chi=\frac{2\ \psi}{3}$. καὶ ἀπὸ τῆς Β'. $\chi=1000-\psi$. Ἄρα καὶ $\frac{2\psi}{3}=1000-\psi$, $2\psi=3000-3\psi$, $5\psi=3000$, $\psi=600$. Τὰ φυσέκια λοιπὸν, ἅπερ ὁ Β'. ἐγέμισεν εἶναι 600 ἐκεῖνα δὲ, ἅπερ ὁ πρῶτος, $1000-600=400$. ἕκαςος δ' ἐδαπάνησε μπαρούτι $\frac{8\psi}{\chi}=\frac{8.\ 600}{400}=12$ καυτ:

ς'. Σωλῆνες τρεῖς ῥέοντες ὁ μὲν Α' εἰς 2 ὥρας, πληροῖ ἀγγεῖον 600 μέτρων, ὁ δὲ Β' εἰς 3 ὥρας ἀγγεῖον 500 μέτρων, καὶ ὁ Γ' εἰς 4 ὥρας, ἀγγεῖον 300 μέτρων· ζητεῖται, ἂν ὁμοῦ καὶ οἱ τρεῖς ἄρξωνται τοῦ ῥέειν, εἰς πόσας ὥρας πληρώσουσι δεξαμενὴν 13000 μέτρων, καὶ πόσα μέτρα ἕκαςος ῥεύσει;

Βέβαια εἰς ὥρας χ. εὑρίσκομεν δὲ διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν τί ἕκαςος ῥεύσει εἰς χ ὥρας οὕτω

$$2\text{ ὥρ}: 600\text{ μέτ}=\chi: \frac{600}{2}=300\,\chi \text{ τοῦ Α'.}$$

$$3\text{ ὥρ}: 500\text{ μέτ}=\chi: \frac{500\,\chi}{3} \text{ τοῦ Β'.}$$

καὶ $4\text{ ὥρ}: 300\text{ μέτ}=\chi\ \frac{300\,\chi}{4}=75\,\chi$ τοῦ Γ'. καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν κατὰ μέρος ἐκροῶν $=13000$ μέτ:

ἡ ἐξίσωσις $300\,\chi+\frac{500\,\chi}{3}+75\,\chi=13000$

$$900\,\chi+500\,\chi+225\,\chi=39000$$

$$1625\,\chi=39000$$

$$\chi=\frac{39000}{1625}=\text{ ὥρ}: 24.$$ καὶ ὁ μὲν ῥεύσει

$300\,\chi=300.\ 24=7200$ μέτ:

ὁ δὲ $\frac{500\ \chi}{3} = \frac{12000}{3} = 4000$

ὁ δὲ $7^5\ \chi = 7^5 \cdot 24 = 1800$

13000

Ζ΄. Δύω εἰς μίαν πραγματείαν ἐκέρδησαν $18\frac{3}{4}$ φλ: καὶ ὁ μὲν Α΄. κατέβαλε 30 φλ: εἰς 17 μῆν: ὁ δὲ Β΄ μετὰ 5 μῆν: κατέβαλε τὸ μέρος τοῦ μέρος του καὶ τοῦτο ἀγνοεῖται μαζῆ ὅμως μὲ τὸ ἀνάλογον κέρδος ἦτον 26 φλ: ζητεῖται τί κατέβαλεν ὁ Β΄. καὶ πόσα ἕκαςος εἰς κέρδος ἔλαβεν; κατέβαλεν ὁ Β΄. χ. καὶ ἐπειδὴ ἐκεῖνος εἶχε τὸ μέρος του 17 μῆν: οὗτος δὲ 12, πολλαπλασιάζομεν τὰ ἑκάςου μὲ τὸν ἀνάλογον καιρὸν 17. 30=510 τοῦ Α΄. καὶ 12 χ τοῦ Β΄. ἔπειτα κατὰ τὴν μέθοδον τῆς εταιρείας, εὑρεθήτω τὸ κέρδος τοῦ Β΄. $510+12\chi : 18\frac{3}{4} = 12\ \chi : \frac{12\ \chi.\ 18\frac{3}{4}}{510+12\chi} =$

$\frac{12\chi\ \frac{75}{4}}{510+12\chi} = \frac{225\ \chi}{510+12\chi}$. ἀλλὰ τοῦτο τὸ κέρδος μετὰ τοῦ μέρους τοῦ Β΄. χ ἦτον 26 ἄρα ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{225\ \chi}{510+12\chi} + \chi = 26$$

$$\overline{510+12\chi} \cdot 210+12\ \chi$$

$$225\chi + 510\chi + 12\chi^2 = 15260 = 312\chi$$

κέρδος οὗτος μὲν 6 φλωρία, ὁ δὲ πρῶτος $12\frac{3}{4}$ φλ:

ΜΕ'ΡΟΣ Β'.

Περὶ τάξεως καὶ ἀκολουθίας λόγων, ἤτοι Περὶ Σειρῶν.

§. 533. Τάξιν λόγων καλοῦμεν ἐνταῦθα, ὅταν πολλοὶ λόγοι ἴσοι οὕτω συναρμολογοῦνται, ὥστε ἕκαστος λόγος πρὸς ἕτερον ἔχει τὸν ἴδιον λόγον, ὡς εἰς τὴν ἅλυσον οἱ κρῖκοι συνέχονται· τοῦτο δ' ἄλλως δὲν γίνεται, εἰ-

$$12\chi^2+413\chi=13\,260$$

$$\chi^2+\frac{423}{12}\chi=\frac{13260}{12}$$

$$\chi^2+\frac{141}{4}\chi=\frac{4420}{4}$$

$$\chi+\frac{141}{4}=\sqrt{\left(\frac{4420}{4}+\frac{141^2}{8^2}\right)}$$

$\chi=-\frac{141}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{4420}{4}+\frac{141^2}{8^2}\right)}$. ἀλλὰ $\frac{141^2}{8^2}=\frac{19881}{64}$.

καὶ $\frac{4420\cdot 16}{4\cdot 16}=\frac{70\,720}{64}$, καὶ ἔτι $\frac{19881}{64}+\frac{70720}{64}=\frac{90601}{64}$ εἶναι δὲ καὶ $\sqrt{\left(\frac{90601}{64}\right)}=\frac{301}{8}$. ἄρα $\chi=-\frac{141}{8}+\frac{301}{8}=20$. ἄρα 20 φλωρία κατέβαλεν. Ἔλαβε δὲ μὴ ἐὰν οἱ λόγοι ἴσοι, καὶ δεύτερον ἐὰν ὁ ἑπόμενος ὅρος τοῦ ἑνὸς λόγου γίνεται ἡγούμενος τοῦ ἑτέρου, ὡς εἰς τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν εἴδομεν. π. χ. ἔςωσαν λόγοι ἴσοι 3—|÷5=5—|÷7=7÷9=9÷11=11÷13 κτ. ἢ οὕτω. 2: 4=4: 8=8: 16=16: 32 κ. τ. λ. ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἑπόμενος ἑνὸς λόγου γίνεται ἡγούμενος τοῦ ἑτέρου, δυνάμεθα τὸν αὐτὸν ἐννοεῖν πρὸς μὲν τὸν ἡγούμενον ὅρον ἑπόμενον, πρὸς δὲ τὸν ἑπόμενον αὐτῷ ἡγούμενον, χωρὶς νὰ γράφηται δίς· καὶ γίνεται ὁ ἄνω τύπος 3. 5. 7. 9. 11 κ. τ. λ. καὶ 2. 4. 8. 16. 32 κ. τ. λ. καὶ εἰς αὐτοὺς τοὺς τύπους βλέπομεν, ὅτι ἕκαςος ὅρος συνέχεται κατὰ τὴν φύσιν τοῦ λόγου, ἀπὸ μὲν τοῦ ἡγουμένου πρὸ αὐτοῦ ὡς ἑπόμενος, ἀπὸ δὲ τοῦ ἑπομένου μετ' αὐτὸν ὡς ἡγούμενος, ὡς καὶ οἱ κρίκοι ἐν τῇ ἁλύσῳ, ἐκτὸς μόνου τοῦ πρώτου ὅρου, ὅςις ἀεὶ εἶναι ἡγούμενος, καὶ τοῦ ἐσχάτου, ὅςις ἀεὶ εἶναι ἑπόμενος, καθὼς καὶ εἰς τὴν ἅλυσον. Αὐτὴν τὴν συνέχειαν τῶν τοιούτων ὅρων τῶν ἴσων λόγων οἱ Μαθηματικοὶ γενικῶς καλοῦσι Σειρὰν, ἣν ἔδει ὀρθώτερον ἅλυσον καλεῖν, ἐπειδὴ ἔχει ὅλην τῆς ἁλύσου τὴν ἰδιότητα.

§. 534. Σειρὰ λοιπὸν γενικῶς εἶναι ἔκφρασις ἐν ἀριθμοῖς, ἢ ἐν γράμμασιν ὑπὸ ὅρων πλέον, ἢ τριῶν, ἤτοι πεπερασμένων, ἢ ἀπείρων συνιςαμένη· οἱ δ' ὅροι κατά τινα νόμον καὶ λόγον γενικὸν ἀριθμητικὸν, ἢ γεωμετρικὸν συνεχίζονται. Εἰς τὰς τοιαύτας λοιπὸν σειρὰς τὸ παρὸν μέρος καταγίνεται. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ σειρὰ κατὰ λόγον τινὰ γίνεται, καὶ ὁ λόγος διττὸς εὕρηται, ἀριθμητικὸς, καὶ γεωμετρικός· ἄρα καὶ σειρὰ ἑκάςη ἢ γεωμετρικὴ εἶναι, ἢ ἀριθμητική. Ἀριθμητικὴ σειρὰ εἶναι ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν οἱ ὅροι συνεχίζονται, ἤτοι ἐπίσης αὐξανόμενοι 1. 4. 7. 10. 13 κ. τ. λ, ἢ ἐπίσης μειούμενοι, ὡς 45. 40. 35. 30. 25. κ. τ. λ. καὶ εἰ μὲν οἱ ὅροι ἀκολούθως ἐπίσης αὐξάνονται, καλεῖται ἡ σειρὰ αὐξανομένη· εἰ δ' ἐπίσης μειοῦνται, μειουμένη. Γεωμετρικὴ δὲ σειρὰ εἶναι ἐκείνη, ἐν ᾗ οἱ ὅροι οἱ ἑξῆς ἐπίσης μετά τινος ἀριθμοῦ, ἤτοι ἀκεραίου, ἢ κλασματικοῦ πολλαπλασιάζονται, ὡς 3. 9. 27. 81 · ἢ 64, 32, 16, 8, 4, 2· ἐκείνη μὲν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν 3, αὕτη ἐπὶ τὸν $\frac{1}{2}$· καὶ ἐκείνη καλεῖται αὖθις αὐξανομένη, ἢ αὔξουσα· αὕτη μειουμένη, ἢ φθίνουσα. Διαιρεῖται ἄρα τὸ παρὸν μέρος εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν, καὶ εἰς τὴν γεωμετρικὴν, καὶ τρίτον εἰς τὴν τῶν δύω τούτων σύμπνοιαν, ἀφ' ἧς οἱ λογάριθμοι ἐξέρχονται. Καὶ περὶ τῶν τριῶν τούτων τμημάτων κατὰ μέρος φέρε διαλεξώμεθα.

ΤΜΗΜΑ Α΄.

Περὶ Ἀριθμητικῆς Σειρᾶς.

§. 535. Ἀριθμητικὴ σειρὰ εἶναι ἐκείνη, ἐν ᾗ οἱ ὅροι κατὰ λόγον συνεχῆ ἀριθμητικὸν, ἤτοι αὐξάνουσιν, ἢ μειοῦνται, ὡς 1, 3, 5, 7 κ. τ. λ. ἢ 9. 7. 5. 3. 1. κ. τ. λ. εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς σειρὰς εὑρίσκομεν.

α΄. Ὅτι δύω εἶναι τὰ ἄκρα ὁ πρῶτος ὅρος, ὃν ἡμεῖς διὰ τοῦ α ἀεὶ σημαίνομεν, καὶ ὁ ἔσχατος, ὅςις καὶ καθόλου καὶ γενικὸς ὅρος καλεῖται, ὃν ἡμεῖς διὰ τοῦ τ ἐκφράζομεν.

β. Ότι οἱ ἑξῆς ὅροι ἐπίσης ὑπερέχουσι τῶν ἐγγὺς ἡγουμένων αὐτῶν· πλὴν ἡ ὑπεροχὴ αὕτη εἰς μὲν τὴν αὐξανομένην σειρὰν εἶναι ἀεὶ καταφατική, ὡς εἰς τὴν δε 5. 11. 17. 23. 29 κ. τ. λ. ἡ ὑπεροχὴ εἶναι +6· εἰς δὲ τὴν μειουμένην σειρὰν εἶναι ἀεὶ ἀποφατική, ὡς εἰς τὴν δε 40. 36. 32. 28, κ. τ. λ. ἡ ὑπεροχὴ εἶναι —4.

γ. Εὑρίσκομεν αὐτὴν τὴν ὑπεροχὴν, ἐὰν ἕνα ὅρον οἱονδήποτε ἀφέλωμεν ἀπὸ τὸν ἑξῆς ἑπόμενον, ὡς $11-5=6$· καὶ $29-23=6$, ἢ εἰς τὴν μειουμένην $36-40=-4$ καὶ $28-32=-4$· διὰ τοῦτο οἱ Μαθηματικοὶ αὐτὴν τὴν ὑπεροχὴν διαφορὰν καλοῦσι, καὶ ταύτην ἡμεῖς διὰ τοῦ δ ἐκφράζομεν· ὅθεν ἀρκεῖ εἰς μίαν σειρὰν ἀριθμητικὴν οἱ δύω μόνον ὅροι οἱοιδήποτε συνεχεῖς νὰ δοθῶσι, καὶ ἀμέσως τὴν διαφορὰν εὑρίσκομεν, ἐὰν τὸν ἡγούμενον ἀπὸ τοῦ ἑπομένου ἀφέλωμεν.

δ. Ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος μόνον δοθῇ α καὶ ἡ διαφορὰ δ, συνεχίζομεν ἑκάστην σειράν· διότι ὁ β. γίνεται, ἐὰν τὴν διαφορὰν εἰς τὸν πρῶτον προσθῶμεν, καὶ ὁ τρίτος σὺν τῷ δευτέρῳ, καὶ τῇ διαφορᾷ, ὁ δὲ τέταρτος σὺν τῷ τρίτῳ, καὶ τῇ διαφορᾷ, καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον· ἐὰν δεθῇ $α=3$ καὶ $δ=5$ ἔσται $α$, $α+δ$, $α+2δ$, $α+3δ$ κ. τ. λ. ἢ 3, $3+5$, $3+10$, $3+15$ κ. τ. λ. ἢ ἀποφατικὴ ἡ διαφορὰ $-δ=-5$· ἔσται $α$, $α-δ$, $α-2δ$, $α-3δ$ κ. τ. λ. καὶ 3, $3-5$, $3-10$, $3-15$, ὅ ἐστι 3, -2, -7, -12 κ. τ. λ. Καὶ ἐκ τούτων ἡ μὲν σειρὰ, ὅπου διὰ γραμμάτων ἐκφράζεται λέγεται ἀόριστος γενικὴ ἀλγεβραϊκὴ κ. τ. λ. ἡ δὲ διὰ χαρακτήρων ἀριθμητικῶν, λέγεται ὡρισμένη ἀριθμητική.

ε. Ἐπειδὴ μεταξὺ τοῦ μηδενικοῦ, καὶ ἑνὸς ἀριθμοῦ διαφορά τις ἐμφιλοχωρεῖ, ὡς ἡ διαφορὰ $0+4=4$, δύναται εἰς τὰς σειρὰς ἀνθ' ἑνὸς ὅρου νὰ εἶναι σημεῖον 0, ὡς 12, 9, 6, 3, 0, —3, —6, —9 κ. τ. λ. ἄρα ἑκάςη σειρὰ, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ, καὶ πρὸς τὰ ἀριςερὰ ἀπείρως συνεχίζεται, καὶ ἐκ τούτων αἱ σειραὶ, αἱ μὲν λέγονται ἄπειροι, ὧν οἱ ὅροι ἄνευ τέρματος ἐννοοῦνται, αἱ δὲ πεπερασμένοι, ὧν οἱ ὅροι περατοῦνται· διότι ἄπειρος αὕτη ἡ σειρὰ λέγεται. 2, 5, 8, 11, 14, 17 - - - ∞

Σημείωσις.

Σημείωσαι, ὅτι τὸ σημεῖον ∞ παριςάνει ἀριθμὸν ἀπείρως μέγιςον, ὑπὲρ ὃν μείζονα νοῆσαι οὐ δυνάμεθα. Αἱ δὲ ςιγμαὶ... εἰς τὴν σειρὰν νοοῦνται ἔτι πλεῖςοι ὅροι ἄπειροι τῆς σειρᾶς, ἄχρις οὗ καταντήσῃ ὁ ἔσχατος ὅρος ἄπειρος = ∞

§. 536. Εἰς τὸν ἀριθμητικὸν λόγον ἐμάθομεν, ὅτι ὁ λόγος δὲν χαλᾷ, ἐὰν προσθῶμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἢ ἀφέλωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἢ ἀφέλωμεν καὶ ἀπὸ τοὺς δύω ὅρους τοῦ λόγου· ἄρα καὶ εἰς τὴν σειρὰν τὴν ἀριθμητικὴν μένει ὁ αὐτὸς λόγος τῆς σειρᾶς, ἐάν τε προσθῶμεν εἰς ὅλους τοὺς ὅρους, ἐάν τε ἀφέλωμεν ἀφ' ὅλων τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ὡς

$$\begin{array}{l} 4,\ 7,\ 10,\ 13 \\ 2,\ 2,\ 2,\ 2, \\ \hline 6,\ 9,\ 12,\ 15 \end{array} \quad ἢ \quad \begin{array}{l} 4,\ 7,\ 10,\ 13 \\ -2-2-2-2 \\ \hline 2,\ 5,\ 8,\ 11 \end{array}$$

Ὅθεν δυνάμεθα ἑκάςης ἀριθμητικῆς σειρᾶς τὸν πρῶτον ὅρον μεταγαγεῖν καὶ εἰς μονάδα, καὶ εἰς τὸ μηδὲν, καὶ εἰς ἕτερον οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἴσον τῷ πρώτῳ ἑτέρας σειρᾶς ὅρῳ, καὶ νὰ ἔχῃ πάλιν τὴν αὐτὴν διαφοράν.

§. 536. Ἐπειδὴ ἡ σειρὰ ἐκφράζεται γενικῶς οὕτω α, $α+δ$, $α+2δ$, $α+3δ$, $α+4δ$ κ. τ. λ, ἢ οὕτω α, $α-δ$,

$\alpha-2\delta$, $\alpha-3\delta$, $\alpha-4\delta$. κ. τ. λ. εἰς τὰς ὁποίας ἦτε α ποσότης καὶ ἡ δ παριστάνει καὶ ἀριθμὸν ὁλόκληρον, καὶ ἀριθμὸν κεκλασμένον, καὶ λογικὸν, καὶ ἄλογον κ. τ. λ. ἂς σημειώσωμεν κατὰ τάξιν ἄνω τὰ μέρη τῆς σειρᾶς δι' ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4 κτ. οὕτω α^1, $\alpha^2+\delta$, $\alpha+2^3\delta$, $\alpha^4+3\delta$ - - - - - - - $\alpha+6^v\delta$ καὶ εἰς αὐτὴν τὴν σειρὰν τὰ ἑξῆς παρατηροῦμεν.

α'. Ὁ πρῶτος ὅρος παρίσταται ἄνευ διαφορᾶς, ὁ δὲ δεύτερος μετὰ τῆς ἁπλῆς διαφορᾶς, ὁ τρίτος μετὰ διπλῆς ὁ τέταρτος μετὰ τριπλῆς κ.τ.λ. δηλ: ἐὰν ἡ τάξις τοῦ ὅρου εἶναι υ, οὗτος παρίσταται μετὰ τῆς διαφορᾶς τοσάκις ἐπαναλαμβανομένης, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ υ πλὴν μιᾶς μονάδος οὕτω $\upsilon-1$.

β'. Τὰ αὐτὰ δείκνυται καὶ ἀπὸ τῶν ἄνω ἀριθμῶν, οὓς ἡμεῖς Δείκτας τῶν ὅρων καλοῦμεν· ἐκεῖ ὅπου ἐπιγράφεται, οὐδεμία διαφορὰ, ἐκεῖ δὲ ὅπου 2, 1 δ. ἐκεῖ ὅπου 3, 2 δ, καὶ ἐκεῖ ὅπου 4, 3 δ κ. τ. λ. ἤτοι ὁ ἀριθμὸς ὁ συνεργὸς τῆς διαφορᾶς δ εἶναι μονάδι ἔλαττων τοῦ ἄνω γεγραμμένου δείκτου.

γ'. Ἐὰν τὸν ἄνω δείκτην υ καλέσωμεν ἐκφράζονται αἱ ἄνω α^1, $\alpha+(\upsilon^2-1)\delta$, $\alpha+(\upsilon^3-1)\delta$, $\alpha+(\upsilon^4-1)\delta$ κ. τ. λ. καὶ α', $\alpha+(\upsilon^2-1)-\delta$, $\alpha+(\upsilon^3-1)-\delta$, $\alpha+(\upsilon^4-1)-\delta$. κ. τ. λ.

δ'. Λοιπὸν κάθε ὅρος, ἐὰν ληφθῇ $=\tau$ εὑρίσκεται $=\alpha+(\upsilon-1)\,\delta$, ἐὰν εἶναι ἡ σειρὰ αὐξανομένη, καὶ $\tau=\alpha+(\upsilon-1)-\delta$, ἐὰν εἶναι μειουμένη· ὅθεν ἐὰν μόνον ἐξεύρωμεν τοῦ πρώτου ὅρου τῆς σειρᾶς $=\alpha$, καὶ τὴν τάξιν τοῦ ὅρου $=\upsilon$, ἐὰν εἶναι πέμπτος, ὄγδοος κ. τ. λ. καὶ τὴν διαφορὰν $=\pm\delta$, εὑρίσκομεν οἱονδήποτε ὅρον ζητούμενον, ὅταν ὑφέλωμεν μίαν μονάδα ἀπὸ τὴν τάξιν τοῦ ὅρου, καὶ διὰ τῆς διαφορᾶς πολλαπλασιάσωμεν, καὶ εἰς τὸ γινόμενον τὸν πρῶτον ὅρον προσθῶμεν· ἔςω ἡ σειρὰ 5^1. 8^2. 11^3. 14^4. 17^5. 20^6. 23^7. 26^8. 29^9. καὶ ζητεῖται ὁ τέταρτος· ἐπεὶ δίδεται ὁ $α=5$ καὶ ἡ $δ=3$. καὶ $ν=4$. ἄρα $τ=α+(ν-1)\,δ=5+(4-1)3=5+9=14$.

Ἐὰν δ' εἰς αὐτὴν ζητῆται ὁ ὄγδοος ὅρος ἔςαι $τ=α+(ν-1)\,δ=5+(8-1)\,3.=5+21=26$. Ἐὰν δ' ἡ σειρὰ εἶναι μειουμένη ἔςαι $τ=α+(ν-1)-δ$, $α-(ν-1)\,δ$. δηλ τῆς σειρᾶς 33^1, 29^2, 25^3, 21^4, 17^5, 13^6. ζητεῖται ὁ τέταρτος ὅρος, ἄρα $ν=4$. $δ=4$, $α=33$ καὶ $τ=α-(ν-1)\,δ$, $33-(4-1)\,4=33-12=21$.

Παραδείγματα.

α'. Συνεφώνησέ τις δοῦλον νὰ τῷ δίδῃ μισθὸν τὸν μὲν πρῶτον χρόνον 100 γρ, εἰς δὲ τὸ ἑξῆς νὰ αὐξάνῃ ὁ μισθός του μὲ 33 γρ, τὸν δέκατον χρόνον τί μισθὸν λαμβάνει;

Αὐτοῦ εἶναι οἱ χρόνοι ὡς ἀριθμητικὴ ἀναλογία $α=100$. $δ=33$. καὶ $ν=10$. ἄρα $τ=100+(10-1)33=100+(9)\,33=100+227=397$ γρ. ὁ δέκατος χρόνος δίδει λοιπὸν 397 γρ.

β'. Κριτής τις διώρισεν εἰς ἕνα ὑπεύθυνον νὰ δαίρηται εἰς πολλὰς ἡμέρας τοῦτον τὸν τρόπον, τὴν μὲν πρώτην ἡμέραν νὰ λάβῃ 300 ῥαβδισμοὺς, εἰς τὰς ἑξῆς δὲ ἡμέρας καθ' ἑκάςην νὰ τῷ συγχωροῦνται 54. ζητεῖται τὴν πέμπτην ἡμέραν πόσους ῥαβδισμοὺς νὰ τῷ δώσωσι;

Καὶ αὐτοῦ ἀριθμητικὴ ἀναλογία μειουμένη, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος $α=300$, $δ=54$, $ν=5$ καὶ $τ=300-(5-1)54=300-216=84$.

§. 538. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν $τ=α+(ν-1)\,δ$

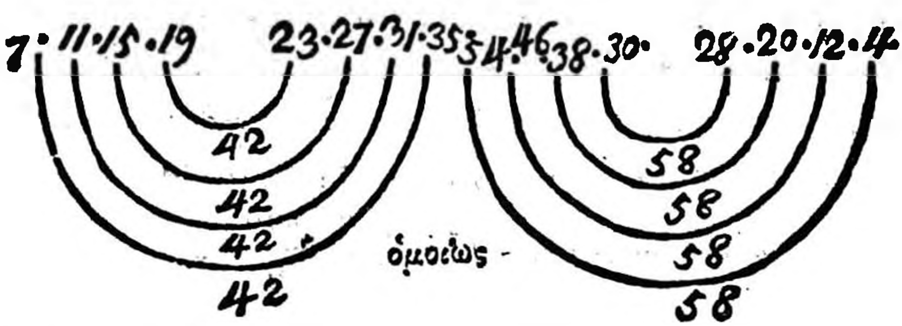
τέσσαρες ποσότητες εὑρίσκονται τ. α. ν. καὶ δ. εὐκόλως λοιπὸν, ὅταν αἱ τρεῖς δοθῶσιν, ὁ τέταρτος γινώσκεται· καὶ κατὰ τὸν τρόπον τῶν ἐξισώσεων μονόνομεν καθε ποσότητα κατὰ τοὺς τύπους τοὺς ἑξῆς.

διὰ τὴν αὐξανομένην.		διὰ τὴν μειουμένην	
$\tau=\alpha+(\nu-1)\delta$	I	$\tau=\alpha-(\nu-1)\delta$	I
$\alpha=\tau-(\nu-1)\delta$	II	$\alpha=\tau+(\nu-1)\delta$	II
$\delta=\dfrac{\tau-\alpha}{\nu-1}$	III	$\delta=\dfrac{\alpha-\tau}{\nu-1}$	III
$\nu=\dfrac{\tau-\alpha}{\delta}+1$	IV	$\nu=\dfrac{\alpha-\tau}{\delta}+1$	IV

διὰ νὰ παραδειγματίσωμὲν τοὺς τύπους αὐτοὺς ἔςω ὁ ἔσχατος ὅρος $\tau=28$· ἡ πληθὺς τῶν ὅρων $\nu=7$· ἡ διαφορὰ $\delta=4$, καὶ ζητεῖται ὁ πρῶτος $\alpha=28+(7-1)4=28+24=52$. δίδεται δ' ὁ ἔσχατος $\tau=2$ καὶ ἡ διαφορὰ $\delta=2$, καὶ οἱ ὅροι 16· ἄρα $\alpha=2+(16-1)2=2+30=32$· τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τοὺς λοιποὺς τύπους.

§. 539. Πολλάκις μᾶς δίδεται ὁ πρῶτος, καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος, καὶ ζητεῖται νὰ ἀναπληρώσωμεν τὴν σειράν· ἐπειδὴ ὅμως ὁ πρῶτος ὅρος ἐδόθη, ἐὰν εὕρωμεν καὶ τὴν διαφορὰν, εὐκόλως αὐτὴν ἀπαρτίζομεν (§. 535)· καὶ εἰς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς ὁ τύπος $\delta=\dfrac{\tau-\alpha}{\nu-1}$ ἱκανός. Ἔςω ὁ πρῶτος ὅρος $\alpha=8$, καὶ ὁ ἔσχατος $\tau=32$, καὶ ἡ σειρὰ νὰ γένη ἀπὸ 7 ὅρους, ἤτοι πέντε νὰ παρενείρωμεν εἰς τοὺς δύω· ἄρα $\delta=\dfrac{32-8}{7-1}=4$. ὅθεν ἡ σειρὰ οὕτως ἀπαρτίζεται 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32· Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ἐμπαρεῦσαι μεταξὺ δύω ὅρων ἄλλους ἀριθμητικοὺς ὅρους δυνάμεθα. Ζητεῖται πάλιν μεταξὺ τοῦ 8 καὶ 12 τρεῖς ὅρους ἀριθμητικοὺς ἐμπαραβύσαι· ἄρα $\delta=\frac{12-8}{5-1}=1$· ἄρα 8, 9, 10, 11, 12· ἐὰν δὲ μεταξὺ τοῦ 11 καὶ 12 ἔτι τέσσαρες ὅροι ἐμπαραβυσθῆναι ἀπαιτοῦνται, ἔσαι $\delta=\frac{12-11}{6-1}=\frac{1}{5}$· ἄρα 11, $11\frac{1}{5}$, $11\frac{2}{5}$, $11\frac{3}{5}$, $11\frac{4}{5}$, 12· τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ εἰς τὰς μειουμένας σειρὰς, πλὴν ὁ τύπος $\delta=\frac{\alpha-\tau}{\nu-1}$ ἐκλαμβάνεται εἰς αὐτὰς (§. 538.).

§. 540. Εἰς κάθε ἀριθμητικὴν σειρὰν τὸ κεφάλαιον δύω ὅρων τῆς σειρᾶς, ὁποῦ ἐπίσης ἀπέχουσιν, ὁμοῦ συναφθέντων ἀεὶ ἴσον εἶναι, ὡς



ὁμοίως καὶ γενικῶς, α, $\alpha+\delta$, $\alpha+2\delta$, $\alpha+3\delta$, $\alpha+4\delta$, $\alpha+5\delta$, κ. τ. λ. ἔσαι $\alpha+\alpha+5\delta=\alpha+\delta+\alpha+4\delta=\alpha+2\delta+\alpha+3\delta$ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν οὐκ ἄλλως. Λοιπὸν ἐὰν δύω ὅρους ἔχῃ ἡ σειρὰ, ἓν κεφάλαιον γίνεται, ἐὰν 4, δύω ἴσα κεφάλαια, ἐὰν 6, 3 ἴσα κεφάλαια, ἐὰν δ' 8, 4 ἴσα κεφάλαια κτ. καὶ ἐὰν ν ὅρους ἔχῃ, τὰ κεφάλαια $=\frac{\nu}{2}$· ἐὰν λοιποὺ ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων, $\frac{\nu}{2}$ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων κεφαλαίων ὅλης τῆς σειρᾶς.

§. 541. Ἐκ τούτου καλῶς ἐπιφέρομεν, ἐπειδὴ τὰ κεφάλαια ταῦτα ἴσα, ἐὰν μόνον ἓν κεφάλαιον δοθῇ μιᾶς σειρᾶς, ὡς ὁ πρῶτος καὶ ἔσχατος ὅρος $\alpha+\tau$, καὶ τοῦτο ἐὰν μὲ τὸν ἥμισυ ἀριθμὸν τῶν ὅρων πολλαπλασιάσωμεν $\frac{\nu}{2}$, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς οὕτω $(\alpha+\tau)\frac{\nu}{2}$, ἢ $\frac{\alpha\nu+\nu\tau}{2}$ . . . . . Α΄. Ἐὰν ὅμως τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον Κ καλέσωμεν, εἶναι ἀεὶ $K=(\alpha+\tau)\frac{\nu}{2}$· ὅθεν εἰς κάθε ἀριθμητικὴν σειρὰν, ἐὰν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος α καὶ ὁ ἔσχατος τ, καὶ ἅμα ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων, εὑρίσκεται εὐκόλως τὸ κεφάλαιον αὐτῆς. Ἔςω 5 8 11 14 17 20 23 καὶ ζητεῖται τὸ κεφάλαιον τούτων τῶν ὅρων, ὧν $\alpha=5$· $\tau=23$ καὶ $\nu=7$, εὑρίσκεται τὸ κεφάλαιον αὐτῆς $K=(\alpha+\tau)\frac{\nu}{2}=(5+23)\frac{7}{2}=\frac{196}{2}=98$· διότι $5+8+11+14+17+20+23=98$· οὕτω καὶ εἰς τὴν μειουμένην σειρὰν 56, 50, 44, 38, 32, 26, 14 $\alpha=56$ $\tau=14$ $\nu=6$· $K=(\alpha+\tau)\frac{\nu}{2}=(56+14)4=280$.

§. 542. Ἐπειδὴ εἰς αὐτὰς τὰς σειρὰς ὁ ἔσχατος ὅρος σπανίως δίδεται, καὶ ὁ τύπος οὗτος $K=(\alpha+\tau)\frac{\nu}{2}$ μένει ἄχρηςος, θῶμεν εἰς αὐτὸν τὸν τύπον ἀντὶ τ τὸ ἴσον αὐτῷ εὑρεθὲν $\alpha+(\nu-1)\delta$ (§. 537.) καὶ ἔσαι $K=[\alpha+\alpha+(\nu-1)\delta]\frac{\nu}{2}=[2\alpha+(\nu-1)\delta]\frac{\nu}{2}=\frac{2\alpha\nu+\nu(\nu-1)\delta}{2}=\alpha\nu+\frac{\nu(\nu-1)\delta}{2}$

. . . . , Β΄. καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον ἑκάσης σειρᾶς, ἐὰν μόνον ὁ πρῶτος ὅρος δοθῇ, καὶ ἡ διαφορὰ δ, καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ν· ἔσω ἐπὶ τῆς ἄνω σειρᾶς $\alpha=5$· $\delta=3$ καὶ $\nu=7$· ἄρα $K=\alpha\nu+\frac{\nu(\nu-1)\delta}{2}=5.\ 7+\frac{7(7-1)3}{2}=35+\frac{126}{2}=98$, ὡς εἰς τὸν ἄνω τύπον εὑρέθη· οὗτος ὁ τύπος χρήσιμος, καὶ ἐπὶ τῆς μειουμένης σειρᾶς, ἐὰν ληφθῇ ἡ διαφορὰ ἀποφατικῶς πλὴν διὰ νὰ λαμβάνωμεν ἀεὶ τὴν διαφορὰν καταφατικῶς, θῶμεν εἰς τὸν τόπον $K=(\tau+\alpha)\frac{\nu}{2}$· ἀντὶ τ τὸ ἴσον $\alpha-(\nu-1)\delta$ καὶ ἔσαι $K=[\alpha+\alpha-(\nu-1)\delta]\frac{\nu}{2}=\frac{2\alpha\nu-\nu(\nu-1)\delta}{2}=\alpha\nu-\frac{\nu(\nu-1)\delta}{2}$.

καὶ ἔσαι ὁ αὐτὸς τύπος $K=\alpha\nu\genfrac{}{}{0pt}{}{+}{-}\frac{\nu(\nu-1)\delta}{2}$· πλὴν τὸ μὲν σημεῖον + λαμβάνεται εἰς τὴν αὐξανομένην, τὸ δὲ — εἰς τὴν μειουμένην. Ζητεῖται τὸ κεφάλαιον αὐτῆς τῆς μειουμένης σειρᾶς 27, 25, 23, 21, 19, 17· ἄρα $K=\alpha\nu-\frac{\nu(\nu-1)\delta}{2}=27.\ 6-\frac{6.\ 5.\ 2}{2}=162-30=132$· καὶ οὕτω δι᾽ ἑνὸς καὶ μόνου τύπου εὑρίσκομεν ὅλας τὰς σειρὰς καὶ αὐξανομένας καὶ μειουμένας.

§. 543. Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ εἰσὶν ἐν ἀριθμητικῇ σειρᾷ. 1 2 3 4 5 6 κ. τ. λ, ἧς ὁ μὲν $\alpha=1$, ὁ δὲ $\delta=1$·

ἄρ' ὁ ἔσχατος ὅρος $\tau=\alpha+(\nu-1)\delta=1+(\nu-1)=1=1+\nu-1=\nu$. ἄρα ἕκαστος ὅρος τῆς φυσικῆς σειρᾶς εἶναι ἴσος τῇ πληθύϊ τῶν ὅρων· ἐὰν δὲ ταύτης τὸ κεφάλαιον ζητῆται, ἔσται $K=\alpha\nu+\frac{\nu(\nu-1)\delta}{2}=\nu+\frac{\nu^2-\nu}{2}=\frac{2\nu+\nu^2-\nu}{2}=\frac{\nu^2+\nu}{2}$. Ἐὰν δὲ τῆς φυσικῆς σειρᾶς τέσσαρας ὅρους συνάψαι θέλωμεν ἔσται $K=\frac{\nu^2+\nu}{2}=\frac{16+4}{2}=10$. ἐὰν δὲ δέκα, ἔσται $\frac{100-10}{2}=45$. Ἐὰν δ' ἡ φυσικὴ σειρὰ ἄρχεται ἀπὸ τοῦ μηδενὸς οὕτω 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. κ. τ. λ. ἔσται $K=\frac{\nu(\nu-1)}{2}$, ἤτοι τὸ ἥμισυ παραγόμενον, δύω παραγόντων, ὧν ὁ μὲν ἡ πλῆθυς τῶν ὅρων, ὁ δὲ ὁ αὐτὸς πλὴν μονάδος· ἤτοι ἐὰν τὸ ἥμισυ λάβωμεν τοῦ παραγομένου, ὅταν τὸν ἔσχατον ὅρον ἐνταῦθα $\tau=7$ πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν μετὰ μιᾶς μονάδος $7+1=8$. Ἑκάστης ἄρα φυσικῆς σειρᾶς ἐὰν καὶ ἀπὸ μονάδος ἄρχηται, τὸν ἔσχατον ὅρον πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν αὐτὸν σὺν μονάδι, καὶ τὸ ἥμισυ εἶναι τὸ κεφάλαιον. Τοῦτο δ' ἕτεροι λέγουσι, ὅτι τὸ κεφάλαιον μιᾶς φυσικῆς σειρᾶς ἀπὸ τοῦ μηδενὸς ἀρχομένης, εἶναι τὸ ἡμιάθροισμα μιᾶς ἑτέρας τακτικῶν ὅρων, ἥτις ἔχει ὅρους τὸν ἔσχατον τῆς φυσικῆς σειρᾶς καὶ ἴσους ἐκείνῃ ὅρους ὡς 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7. διότι τῆς μὲν φυσικῆς τὸ κεφάλαιον $=\frac{7.\ 8}{2}=28$. τῆς δὲ $=7.\ 8=\frac{56}{2}=28$.

§. 544. Εὑρίσκομεν καὶ τὸν γενικὸν ὅρον τῶν περιττῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5, 7, 9, 11. κ. τ. λ. διότι αὐτοῦ μὲν $\alpha=1$. $\delta=2$. ἄρα $\tau=1+(\nu-1)2=1+2\nu-2=2\nu-1$. καὶ δι' αὐτοῦ τοῦ τύπου εὑρίσκονται ὅλοι οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ, τὸ δὲ κεφάλαιον $K=\alpha\nu+\frac{\nu(\nu-1)\delta}{2}=\nu+\frac{(\nu^2-\nu)2}{2}=\nu+\nu^2-\nu=\nu^2$. ἤτοι ἐὰν ὅροι ὦσι, 16 εἶναι τὸ κεφάλαιον, ἐὰν 9, 81 κ. τ. λ. κατὰ τοῦτον τὸν τύπον κατασκευάζονται οἱ πίνακες τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν τῶν φυσικῶν· εὑρίσκουσι πρῶτον διὰ τοῦ τύπου $2\nu-1$ τοὺς περιττοὺς ἀριθμοὺς, καὶ εἶτα συνάπτοντες ἕνα ἕκαςον ἀποτελοῦσι τὰ τετράγωνα

1	2	3	4	5	6	7	8	
1	3	5	7	9	11	13	15	περιττοὶ
1	4	9	16	25	36	49	64	τετράγωνοι

§. 545. Ἔςι δὲ καὶ τῶν ἀρτίων, 0, 2, 4, 6, 8 κ. τ. λ. $\tau=0+(\nu-1)\delta=2\nu-2$, καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν $K=\alpha\nu+\frac{\nu(\nu-1)\delta}{2}=\frac{(\nu^2-\nu)2}{2}=\nu^2-\nu$. καὶ φανερὸν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τὴν ἰδίαν ῥίζαν ἀφέλωμεν, τὸ λείψανον ἀεὶ ἀριθμὸς ἄρτιος.

Προβλήματά τινα ἀνήκοντα.

α'. Παίζων τις χαρτία, ἔχασεν εἰς τὸ πρῶτον παιγνίδι 3 γρ: εἶτα 5, εἶτα 7, ἕως εἰς 30 παιγνίδια· ζητεῖται πόσα ἔχασεν εἰς τὸ τελευταῖον παιγνίδι, καὶ πόσα ὅλα ὁμοῦ;

Ἐνταῦθα εἶναι σειρὰ ἀριθμητικὴ, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος $\alpha=3$, καὶ ἡ διαφορὰ $\delta=2$, ν δὲ $=30$· ἄρα $\tau=\delta+(\nu-1)$

$\delta = 3 + (30 - 1)2 = 61$· τόσα ἔχασεν εἰς τὸ ἔσχατον παιγνίδι· ὅλα δ' ὁμοῦ $K = \alpha\nu + \frac{\nu(\nu-1)\delta}{2} = 3.\ 30 + \frac{30(29)2}{2}$

$= 90 + 870 = 960$· καὶ τόσα ὁμοῦ ὅλα ἔχασεν.

β'. Ἀπὸ πείρας εἶναι γνωςὸν, ὅτι κάθε σῶμα ἄνωθεν εἰς τὰ κάτω πίπτον, διανύει εἰς μὲν τὸ πρῶτον δεύτερον λεπτὸν πόδας 15, εἰς τὸ δεύτερον δὲ πόδας 45, εἰς τὸ τρίτον πόδας 75 κ. τ. λ. ἐὰν δὲ πέσῃ ἀπὸ πύργου ὑψηλὸν 960 ποδῶν, εἰς πόσα λεπτὰ κατέρχεται;

Καὶ αὐτοῦ σειρὰ ἀριθμητικὴ, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος $\alpha = 15$, διαφορὰ $\delta = 30$, καὶ ζητοῦνται πόσοι ὅροι εἶναι, ἢ τὸ ν ζητεῖται· ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον $K = \alpha\nu + \frac{\nu(\nu-1)\delta}{2}$ τὸ ν ἂς μονόσωμεν οὕτω.

$$2K = 2\alpha\nu + \delta\nu\nu - \delta\nu$$

$$\delta\nu\nu + 2\alpha\nu - \delta\nu = 2K \quad : \delta$$

$$\nu\nu + \frac{2\alpha}{\delta}\nu - \nu = \frac{2K}{\delta}$$

$$\nu\nu + \left(\frac{2\alpha}{\delta} - 1\right)\nu = \frac{2K}{\delta}$$

$\nu\nu + \left(\frac{2\alpha - \delta}{\delta}\right)\nu = \frac{2K}{\delta}$· ἐὰν δὲ $\nu\nu + \left(\frac{2\alpha-\delta}{\delta}\right)\nu = \frac{2K}{\delta}$· κατὰ τὰς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ λύσωμεν, εὑρίσκομεν οὕτω (§. 411.) οὕτω. $\nu + \frac{2\alpha-\delta}{2\delta} = \sqrt{\left(\frac{2K}{\delta} + \frac{(2\alpha-\delta)^2}{4\delta^2}\right)}$ καὶ $\nu = -\frac{2\alpha-\delta}{2\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{2K}{\delta} + \frac{(2\alpha-\delta)^2}{4\delta^2}\right)}$. ἄρα $\nu = -\frac{2.\ 15 - 30}{2.\ 30} \pm$

$\sqrt{(\frac{2.\ 960}{30}+\frac{(2.\ 15-30)^2}{4.\ 30^2})}$ ἤτοι $\nu=-0+\sqrt{\frac{2.\ 960}{30}}+$ 0, καὶ $\nu=8$ λεπτοῖς δευτέροις.

γ'. Ἐὰν δὲ ἕτερον εἰς 5 δεύτερα λεπτὰ ἔπεσε, πόσον ἦν τὸ ὕψος; αὐτοῦ τὸ κεφάλαιον ζητεῖται $K=a\nu+\frac{\nu(\nu-1)\delta}{2}=15.\ 5+\frac{5.\ 4.\ 30}{2}=75+300=375$ ποσί· καὶ τόσον ἦν τὸ ὕψος.

δ'. Ἐχάρισέ τις εἰς πέντε ἀνθρώπους, ὁποῦ ἐπήδησαν, 35 γρ: οὕτως, ὥςε νὰ λάβῃ ἐκεῖνος ὁποῦ ἐπήδησε μακρότερον 11 γρ: καὶ ὁ ἑξῆς ὀλιγώτερα, καὶ ἔτι ὁ ἑξῆς ὀλιγώτερα ἀναλόγως ἕως εἰς τὸν ἔσχατον· ζητεῖται λοιπὸν πόσα ἔλαβεν ὁ ἔσχατος, καὶ πόσα ἕκαςος ἐλάμβανεν ὀλιγώτερα;

Καὶ αὐτοῦ ἀριθμητικὴ σειρὰ, τῆς ὁποίας ὁ μὲν ἔσχατος ὅρος $\tau=11$, καὶ οἱ ὅροι $\nu=5$, καὶ τὸ κεφάλαιον $K=35$. ζητεῖται ὁ πρῶτος ὅρος a καὶ ἡ διαφορὰ δ, ἄς εὕρωμεν τὸν a ὅρον ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $K=(a+\tau)\frac{\nu}{2}$. $\frac{2K}{\nu}=a+\tau$,

$\frac{2K}{\nu}-\tau=a$ ἄρα $a=\frac{2.\ 35}{5}-11=14-11=3$ ἄρα τρία γρόσια ἔλαβεν ὁ ἔσχατος: ἔςι δὲ καὶ $\delta=\frac{\tau-a}{\nu-1}=\frac{11-3}{4}=2$. ἄρα κατὰ δύω γρ: ἕκαςος ἐλάμβανεν ὀλιγώτερα· ἡ δὲ σειρὰ ἦν 3, 5, 7, 9, 11 κ. τ. λ.

Ε'. Στρατηγός τις διένειμεν εἰς τοὺς ςρατιώτας, ὁποῦ μὲ εἰσβολὴν ἓν κάςρον ἐκυρίευσαν ποσότητά τινα χρημάτων τοῦτον τὸν τρόπον, ὥςε ὁ πρῶτος ὁποῦ ἀνῆλθεν εἰς τὰ άτρου, νὰ λάβῃ ἓν ποσὸν ἀπὸ τὰ χρήματα, ὁ δὲ δεύτερος νὰ λάβῃ ὀλιγώτερα, καὶ ὁ τρίτος ἀπὸ τὸν δεύτερον ἐπίσης ὀλιγώτερα, ὡς καὶ ὁ δεύτερος ἀπὸ τὸν πρῶτον, ὁμοίως καὶ ὁ τέταρτος ἐπίσης ὀλιγώτερα, καὶ οἱ λοιποὶ ἀναλόγως· ἐν ᾧ ὅμως τὰ χρήματα διενέμοντο, δύω πληγωμένοι δὲν ἦλθον, ἀλλὰ δύω συςρατιῶται αὐτοῖς ἔλαβον ἐκείνων τὸ ἀνάλογον, καὶ εἰς τὰ ἴδιά των πουγγεῖα ἥνωσαν ὁμοῦ μὲ τὰ ἴδια καὶ ἐκείνων τὰ χρήματα· ἐλθόντες δ' εἰς τὴν οἰκίαν δὲν ἐνθυμοῦντο πλέον πόσα ἦν τὰ ἑκάτων, καὶ τῶν συςρατιωτων τῶν πληγωμένων τὰ χρήματα, εἰμὴ τοῦτο ἐνθυμοῦντο, ὅτι ὁ ἕνας ἔλαβε διὰ τὸν ἑαυτόν του, καὶ διὰ τὸν συςρατιώτην του γρ: 92, καὶ ἦν αὐτὸς τῇ τάξει δεύτερος, καὶ ὁ συςρατιώτης του ἕβδομος, ὁ δ' ἕτερος ἐνθυμεῖτο, ὅτι ἔλαβεν ὁμοῦ τάτε ἴδια, καὶ τοῦ συςρατιώτου του γρ: 71, καὶ ὅτι αὐτὸς μὲν ἦν ὁ ἑνδέκατος, καὶ ὁ συςρατιώτης του ὁ τέταρτος. Ζητεῖται ἤδη τί ἀνήκει εἰς ἕκαςον τούτων τῶν τεσσάρων.

Καὶ ἐντεῦθεν μὲν κατὰ σειρὰν ἀριθμητικὴν διανέμονται τὰ χρήματα, πλὴν ἀγνοεῖται καὶ ὁ α' ὅρος καὶ ὁ ἔσχατος, καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὅρων, καὶ τὸ κεφάλαιον, καὶ ἡ διαφορὰ $=\psi$ ἄρα ἡ σειρὰ γίνεται χ^1, $\chi+^2\psi$, $\chi+^3 2\psi$, $\chi+^4 3\psi$, $\chi+^5 4\psi$, $\chi+^6 5\psi$, $\chi+^7 6\psi$; $\chi+^8 7\psi$, $\chi+^9 8\psi$, $\chi+^{10} 9\psi$, $\chi+^{11} 10\psi$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ δεύτερος καὶ ὁ ἕβδομος ὁμοῦ ἔλαβον γρ: 92, ἔςαι καὶ $\chi+\psi+\chi+6\psi=92$. ἔλαβον δὲ καὶ ὁ τέταρτος, καὶ ὁ ἑνδέκατος γρ: 71, ἔςαι καὶ $\chi+3\psi+\chi+10\psi=71$, ἐπειδὴ ἅμως δύω ἐξισώσεις καὶ δύω ἄγνωςα, εὑρίσκεται τὸ μὲν $\chi=68\frac{1}{4}$, τὸ δὲ $\psi=3\frac{1}{2}$, καὶ ἐπειδὴ ἡ σειρὰ εἶναι μειουμένη, ἔλαβεν ὁ μὲν δεύτερος $54\frac{3}{4}$ γρ. ὁ δὲ τέταρτος $47\frac{3}{4}$ ὁ δ' ἕβδομος $37\frac{1}{4}$, ὁ δ' ἑνδέκατος $23\frac{1}{4}$.

ζ'. Σκάπτει τις ἕν πηγάδι μὲ τοιαύτην συμφωνίαν εἰς μὲν τὴν πρώτην ὀργυιὰν νὰ λάβῃ 5 γρ. εἰς τὴν δευτέραν 11, εἰς τὴν τρίτην 17 καὶ καθ' ἑξῆς· οὗτος δὲ τὸ ἐτελείωσεν εἰς $2\frac{1}{2}$ ὀργυιαῖς, πόσα πρέπει νὰ λάβῃ;

Καὶ αὐτοῦ ἀριθμητικὴ σειρὰ, ἧς ὁ μὲν πρῶτος ὅρος $\alpha=5$ ἡ διαφορὰ $\delta=6$, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων $\nu=2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ τὸ κεφάλαιον ζητεῖται $K=\alpha\nu+\dfrac{\nu(\nu-1)\delta}{2}=5.\frac{5}{2}+\dfrac{\frac{5}{2}(\frac{5}{2}-1)6}{2}=$

$\frac{25}{2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}.\,3=\frac{25}{2}+\frac{45}{4}=\frac{95}{4}=23\frac{3}{4}$ γρ.

η'. Ἠρώτησέ τις, πόσα πωλεῖ ἄλλος τὸν ἵππον του, εἶπεν ἐκεῖνος, ὅτι ὁ ἵππος μου ἔχει 32 καρφία εἰς τὰ πέταλά του. Ὅθεν πρέπει νὰ πωληθῇ οὕτως ἐὰν εἰς τὸ πρῶτον καρφίον δώσῃ ἕν γρόσι, εἰς τὸ δεύτερον νὰ δώσῃ τρία, εἰς τὸ τρίτον 5 κ. τ. λ. πόσα ζητεῖ;

Καὶ αὐτοῦ ἀριθμητικὴ σειρὰ, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος $\alpha=1$, ἡ διαφορὰ $\delta=2$, καὶ οἱ ὅροι $\nu=32$· ἄρα $K=\alpha\nu+\dfrac{\nu(\nu-1)\delta}{2}$

$=, 1.32+32\cdot 31=1024$ γρ.

Σημειώσεις.

Ἐπειδὴ εἰς κάθε ἀριθμητικὴν σειρὰν πέντε ὅρους σημαντικοὺς ἔχομεν· τὸν πρῶτον ὅρον α, τὸν ἔσχατον τ, τὴν διαφορὰν δ, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ν, καὶ τὸ κεφάλαιον K. φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς τούτων δοθῶσι, οἱ δύω ἀμέσως εὑρίσκονται· ἄλλως δὲ τὸ πρόβλημα μένει ἀόριστον· ἐπειδὴ ὅμως ἕκαστος τῶν πέντε τούτων, ὅταν οἱ τρεῖς δοθῶσι, διαφόρως ἐκφράζεται, καὶ εὑρίσκεται· ἂς καταστρώσωμεν καὶ ἡμεῖς εἰς τὸ παρὸν ὅλους τοὺς δυνατοὺς τύπους, ὁποῦ ἐξέρχονται ἀπὸ τοὺς δύω ἐκείνους ςοιχειώδεις τύπους, ὅπου εὕρομεν· $\tau = \alpha + (\nu - 1)\delta$

$K = (\alpha + \tau)\frac{\nu}{2}$· διότι μόνον ἐκ τούτων τῶν δύω τύπων ἐξέρχονται οἱ ἑξῆς, ἐὰν τρία μόνον δοθῶσιν.

(Ὅρα τὸ ἄντικρυ διάγραμμα.)

Κατὰ τοῦτο λοιπὸν τὸ διάγραμμα λύονται ὅλα τὰ προβλήματα, ὅσα ἀνάγονται εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν, ἐὰν μάθωμεν πρῶτον, τίς ὅρος τῶν πέντε ζητεῖται, καὶ ἔπειτα τίνες οἱ τρεῖς ὅροι οἱ διδόμενοι· ὅπου δὲ ταῦτα εὕρομεν, ἐκεῖ τὸν ἀπέναντι τύπον λαμβάνομεν, καὶ ἀμέσως τὸ πρόβλημα λύομεν.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ τάξεων τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς.

§. 546. Πολλαὶ τάξεις καὶ βαθμοὶ τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς δίδονται· πρώτης τάξεως, δευτέρας, τρίτης, τετάρτης καὶ μ τάξεως· καὶ πρώτην τάξιν καλοῦσιν ἐκείνην, τῆς ὁποίας ἡ διαφορὰ τῶν ὅρων εἶναι ἀεὶ ἡ αὐτὴ ἀμετάβλητος· καὶ τοιαῦται σειραὶ τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἢ τάξεως εἶναι ἡ μέχρι τοῦδε ἀριθμητικὴ σειρὰ, ὅπου ἡμεῖς ἐπραγματεύθημεν· διότι εἰς αὐτὴν $5^3 8^3 11^3 14^3 17$. ἡ διαφορὰ 3 εἶναι ἀεὶ ἡ αὐτὴ, ὁμοίως καὶ εἰς τὰς λοιπάς· δευτέρα τάξις δ' ἀριθμητικῆς σειρᾶς εἶναι ἐκείνη, ἧς οἱ ὅροι ἔχουσι διαφορὰν μεταβλητὴν, ἤτοι σειρὰν ἀριθμητικὴν τοῦ πρώτου βαθμοῦ, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῆς τῆς διαφορᾶς εἶναι ἀμετάβλητος ὡς.

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. Σειρὰ τῆς Β'. τάξεως.
1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. διαφ: Α'. Σειρὰ τῆς Α'. τάξ.
2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. διαφ: Β'. ἀμετάβλητος.

καὶ βλέπομεν εἰς αὐτὴν τὴν τάξιν, ὅτι ἔχει δύω διαφορὰς, τὴν μὲν ἐν ἀριθμητικῇ σειρᾷ τῆς πρώτης τάξεως, τὴν δὲ ἀμετάβλητον· ἡ δὲ τρίτη ἴση τῷ 0. Τρίτην δὲ τάξιν ἀριθμητικῆς σειρᾶς καλοῦσιν ἐκείνην, ἥτις ἔχει τρεῖς διαφορὰς, τὴν μὲν ἐν ἀριθμητικῇ σειρᾷ τῆς β'. τάξεως, τὴν δὲ τῆς πρώτης τάξεως, καὶ τὴν τρίτην ἀμετάβλητον· ἡ γὰρ τετάρτη ἴση τῷ 0.

Σειρὰ τῆς γ'. τάξεως 1.6.18.40.75.126.196.288.
διαφ: α'. σειρὰ Β'. τάξεως 1.5.12.22.35.51. 70. 92.
διαφ: β'. σειρὰ Α', τάξεως 1.4.7.10.13.16.19.22.
διαφ: γ'. ἀμετάβλητος. 1.3.3.3.3. 3. 3. 3.

ὁμοίως καὶ ἡ ἀριθμητικὴ σειρὰ τῆς τετάρτης τάξεως ἔχει διαφορὰς τέσσαρας, τὴν μὲν ἐν ἀριθμητικῇ σειρᾷ τῆς γ' τάξεως, τὴν δὲ τῆς δευτέρας, τὴν δὲ τῆς πρώτης, καὶ τὴν τετάρτην ἀμετάβλητον, ὡς

σειρὰ δ'. τάξεως 1.5.15.35.70.121.200.315.465.
διαφ: α'. τῆς γ'. τάξεως 1.4.10.20.35.51. 79. 115. 150.
διαφ: β'. τῆς β'. τάξεως 1.3.6. 10. 15.21.28. 36. 45.
διαφ: γ'. τῆς α'. τάξεως 1.2.3 4. 5. 6. 7. 8. 9.
διαφ: δ'. ἀμετάβλητος. 1.1.1.1. 1. 1. 1. 1. 1.

Ὁμοίως καὶ ἡ πέμπτη τάξις ἔχει διαφορὰς πέντε τῆς δ'. γ'. β'. α'. τάξεως, καὶ μίαν ἀμετάβλητον· καὶ ἐν γένει ἡ μ τάξις ἔχει μ διαφορὰς τῶν τάξεων μ—1, μ—2, μ—3 . . . . . καὶ μ—μ. καὶ γενικῶς παριστάνουσι τὰς τάξεις διὰ τῶν δυνάμεων τῆς πρώτης τάξεως οὕτω·

$1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.$ κ. τ. λ. πρώτης τάξεως.

$1^{2}.\quad 2^{2}.\quad 3^{2}.\quad 4^{2}.\quad 5^{2}.$ κ. τ. λ. Β΄.

$1^{3}.\quad 2^{3}.\quad 3^{3}.\quad 4^{3}.\quad 5^{3}.$ κ. τ. λ. Γ΄.

$1^{4}.\quad 2^{4}.\quad 3^{4}.\quad 4^{4}.\quad 5^{4}.$ κ. τ. λ. Δ΄.

$1^{\mu}.\quad 2^{\mu}.\quad 3^{\mu}.\quad 4^{\mu}.\quad 5^{\mu}.$ κ. τ. λ. μ τάξεως

διότι εἰς οἵαν δύναμιν ὑψώσωμεν τοὺς ὅρους τῆς Α΄. τάξεως, ἐκείνη ἡ σειρὰ εἶναι ἡ αὐτὴ τάξις ἐκείνης τῆς δυνάμεως.

§. 547. Αὗται αἱ τάξεις εὐκόλως σχηματίζονται τοῦτον τὸν τρόπον· πῶς ὅμως ἡ πρώτη τάξις σχηματίζεται ἐμάθομεν, ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος δοθῇ καὶ ἡ διαφορὰ (§ 535). Ἡ δευτέρα ὅμως τάξις σχηματίζεται, ἐὰν δύω ὅροι δοθῶσιν ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος, ὡς λέγουσι, καὶ ὁ τρίτος ὁμοῦ· διότι ἄνευ τῶν τριῶν τούτων ἡ ἀμετάβλητος δὲν εὑρίσκεται· οὕτω δίδονται τρεῖς ὅροι τῆς δευτέρας τάξεως 4, 9, 16, καὶ ζητεῖται ἡ τῶν ὅρων συνέχεια, εὑρίσκομεν τὴν πρώτην διαφορὰν 5, 7 καὶ τὴν ἀμετάβλητον 2. καὶ οὕτω πρῶτον συνεχίζομεν τὴν πρώτην διαφορὰν, ὡς πρώτην τάξιν ἀριθμητικῆς σειρᾶς, οὕτω 5. 7. 9. 11. 13. 15. κτλ. εἶτα συνάπτομεν τὸν πρῶτον αὐτῆς, μὲ τὸν πρῶτον ἐκείνης, καὶ γίνεται ὁ δεύτερος ἐκείνης, καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν δευτέρων τῶν δύω γίνεται ὁ τρίτος· καὶ ἔτι τὸ κεφάλαιον τῶν τρίτων γίνεται ὁ τέταρτος, καὶ ἔτι τῶν τετάρτων ὁ πέμπτος, καὶ ἀκολούθως τὸ κεφάλαιον τῶν ἑξῆς ἡγουμένων ὁ ἑξῆς ἑπόμενος γίνεται τῆς δευτέρας τάξεως, ὡς·
4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. οὕτω καὶ αὕτη 3. 6. 10. ἧς ἡ διαφορὰ 3, 4 καὶ ἡ ἀμετάβλητος μονάς· ὅθεν

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. κ. τ. λ. Α΄. τάξεως.

3. 6. 10. 15. 21. 28. 36. Β΄. τάξεως.

τὸν αὐτὸν τρόπον συνεχίζεται καὶ ἡ σειρὰ τῆς γ΄. τάξεως, πλὴν ἐνταῦθα ἀπαιτοῦνται τέσσαρες ὅροι οἱ διδόμενοι, διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα, καὶ ἡ τρίτη ἀμετάτρεπτος διαφορὰ, ὡς 20. 35. 56. 84, ἧς ἡ πρώτη διαφορὰ 15. 21. 28, καὶ ἡ δευτέρα 6. 7 καὶ ἡ ἀμετάτρεπτος μονὰς συνεχίζεται α΄. ἡ πρώτη τάξις (§. 535)· δεύτερον ἀπ' αὐτῆς ἡ δευτέρα ὡς ἄνω· καὶ γ΄. ἀπὸ τῆς β΄. ἡ γ΄. οὕτω

6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13 . . . Α΄.

15. 21. 28. 36. 45. 55. 66. 78 . . . Β΄.

20. 35. 56. 84. 120. 165. 220. 286 . . . Γ΄.

δηλ: τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἀλλεπαλλήλων ὅρων γίνεται ὁ ἑξῆς ὅρος τῆς σειρᾶς κατ' ἀκολουθίαν, ὡς εἰς τὸ διάγραμμα φαίνεται. Τοῦτον τὸν τρόπον κατασκευάζεται καὶ ἡ τῆς τετάρτης τάξεως σειρὰ ἀριθμητικὴ, πλὴν ἐνταῦθα ἀπαιτοῦνται πέντε ὅροι, καὶ τῆς πέμπτης τάξεως, καὶ αὐτοῦ ἓξ ὅροι ἀπαιτοῦνται οἱ διδόμενοι. Σημείωσαι ὅμως ὅτι εἰς τὴν μαθηματικὴν μόνον ἡ πρώτη, δευτέρα, καὶ σπανίως ἡ τρίτη τάξις, εὑρίσκονται μὲ πρῶτον ὅρον διάφορον, καὶ ποικίλην διαφορὰν· διὸ καὶ εἰς αὐτὰς ἀπαιτοῦνται οἱ εὑρεθέντες τύποι τοῦ γενικοῦ ὅρου, καὶ τοῦ κεφαλαίου νὰ ἔχωσιν ἐν ἑαυτοῖς τὸν πρῶτον ὅρον, καὶ διαφορὰν μονάδα· διὸ καὶ εἰς τοὺς τύπους τούτων οὔτε πρῶτος ὅρος, οὔτε διαφορὰ εὑρίσκεται· διότι ἡ μονὰς οὔτε διαιρεῖ, οὔτε πολλαπλασιάζει· κατὰ ταῦτα λοιπὸν ἐνταῦθα καταστρώνομεν ὅλας τὰς τάξεις βαθμηδὸν, αἵτινες ἔχουσι πρῶτον ὅρον μονάδα, καὶ διαφορὰν κατὰ τὰ ἑξῆς.

O' 1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
A'. 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
B'. 1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.	55.
Γ'. 1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	120.	165.	220.
Δ'. 1.	5.	15.	35.	70.	126.	210.	330.	495.	715.
E'. 1.	6.	21.	56.	126.	252.	462.	792.	1287.	2002.
ΣΤ'. 1.	7.	28.	84.	210.	462.	924.	1716.	3003.	5005.
Z'. 1.	8.	36.	120.	330.	792.	1716.	3432.	6435.	11440.
H'. 1.	9.	45.	165.	495.	1287.	3003.	6435.	12870.	24310.
Θ'. 1.	10.	55.	220.	715.	2002.	5005.	11440.	15310.	39620.

εἰς αὐτὸ διάγραμμα εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ὅρων μιᾶς κατωτέρας τάξεως γίνεται ὁ ἑξῆς ὅρος τῆς ἐγγὺς ἀνωτέρας τάξεως, ὥςε ἕκαςος ὅρος τῆς ἀνωτέρας τάξεως εἶναι τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ὅρων ἀπ' αὐτοῦ τοῦ ὅρου πρὸς τ' ἀριςερὰ τῆς ἐγγὺς κατωτέρας τάξεως, δηλ: ὁ πέμπτος ὅρος τῆς Δ'. τάξεως 70 εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν πέντε ὅρων τῆς ἐγγὺς ἀνωτέρας· 1, 4, 10, 20, 35 τῆς τρίτης τάξεως· καὶ τοῦτο ἔςω ὡς ἀποδεδειγμένον, ὅτι ὁ τ ὅρος τῆς μιᾶς τάξεως εἶναι =K τῆς ἐγγὺς κατωτέρας κλάσεως· ἀλλὰ καὶ τοῦτο εἶναι φανερὸν εἰς αὐτὸ τὸ διάγραμμα ὅτι ἕκαςος ὅρος γίνεται, ἐὰν συνάξωμεν τὸν ἑξῆς αὐτοῦ ἡγούμενον μὲ ὅλον τὸν ςίχον τῶν ἀνωτέρω ὅρων τῶν κατωτέρω τάξεων, ὡς ὁ ἕκτος ὅρος τῆς Δ'. τάξεως $126=70+35+15+5+1$· ὁμοίως γίνονται καὶ οἱ ἑξῆς.

§. 548. Ἡμεῖς μαθόντες τὰς κλάσεις, μάθωμεν ἤδη καὶ πῶς ἑκάςης τὸν γενικὸν ὅρον καὶ τὸ κεφάλαιον εὑρίσκομεν εἰς τύπους γενικούς· διότι εἰς πολλὰ μέρη ἀπαιτοῦνται οὗτοι οἱ τύποι ἐν τῇ μαθηματικῇ· εἰς εὕρεσιν δὲ τούτων τῶν τύπων πολλοὶ διαφόρους τρόπους ἐπενόησαν, ὧν ἕκαςος ἔχει ἐν ἑαυτῷ τὴν ἑαυτοῦ δυσχέρειαν· διὸ καὶ ἡμεῖς τῷ σχέμματι ἀτενῶς ἐνορῶντες, ἐφεύρομεν τὴν ἑξῆς μέθοδον λίαν ἁπλῆν, καὶ εὔκολον· καὶ τοιαύτην οὖσαν αὐτὴν πρῶτον διασαφήσωμεν, καὶ εἶτα καὶ τὰς λοιπὰς, ἵνα μὴ ἄποροι ὦσιν οἱ ἀναγνῶςαι ἡμῶν καὶ ἐκείνων τῶν ἐφευρέσεων· πρὶν ὅμως τὴν ἰδίαν ἡμῶν μέθοδον ἀναπτύξωμεν, εἴπωμεν πρῶτον ὅτι ἡμεῖς ἄλλην ἀκολουθίαν τῶν τάξεων ἐκλαμβάνομεν· καὶ πρώτην τάξιν ἀριθμητικῆς σειρᾶς λέγομεν ἐκείνην, ἧς ἡ διαφορὰ =0 ὡς 3. 3. 3. κ. τ. λ. ἢ 35. 35. 35. κ. τ. λ. ἀλλ' ἐνταῦθα ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ὅρος ἀεὶ μονὰς λαμβάνεται, ἔςαι ἡ σειρὰ 1. 1. 1. 1. 1. 1· 1. κτ. πρώτης τάξεως, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῆς 1—1=0, ὡς καὶ εἰς τὸ διάγραμμα φαίνεται πρώτη τάξις ἡ τῶν μονάδων σειρὰ, δευτέρα δὲ, ἥτις γίνεται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῆς πρώτης 1. 2. 3. 4. 5. 6. κ. τ. λ. ἤτοι ἐκείνης, ἧς ἡ πρώτη διαφορὰ ἀμετάβλητος. Τρίτη δὲ τάξις ἐκείνη, ἥτις γίνεται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ὅρων τῆς δευτέρας τάξεως 1. 3. 6. 10. 15. κ. τ. λ. ἤτοι ἐκείνη, ἧς ἡ διαφορὰ ἡ δευτέρα ςερεά. Τετάρτη δὲ, ἥτις γίνεται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων τῆς τρίτης τάξεως, ὡς 1. 4. 10. 20. 35. κτλ. δηλ: μ τάξις, ἧς ἡ μ—1 διαφορὰ ἀμετάβλητος· καὶ οὕτως ἡ πρώτη παρ' ἐκείνοις δευτέρα ἡμῖν λέγεται, καὶ ἡ τρίτη, τετάρτη κ. τ. λ. ἡμεῖς καλῶς ἐξεύρομεν ὅτι ἡ παρ' ἡμῖν πρώτη τάξις δὲν ἔχει ὅλα τὰ ἰδιώματα τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς, ἀλλὰ τὸ κύριον ἰδίωμα τῶν σειρῶν, καὶ αὐτὴ πλουτεῖ· δηλ: τὸ νὰ εἶναι ἕκαςος ὅρος ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενον, καὶ ἑπόμενος πρὸς τὸν ἡγούμενον, καὶ ὃν λόγον ἔχει ὁ ἡγούμενος ὅρος πρὸς αὐτὸν, τὸν αὐτὸν καὶ ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν ἑπόμενον, καὶ μάλιςα εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν κεφαλαίων, καὶ ὅρων ἔχει τὴν μεγίστην εὐκολίαν, ἐὰν οὕτω τὰς τάξεις λάβωμεν.

§. 549. Ἐὰν τὴν πρώτην τάξιν παρατηρήσωμεν 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. κτ, εὑρίσκομεν ἕκαστον ὅρον ἴσον μονάδι· ἄρα ὁ γενικὸς ὅρος $\tau=1$. τὸ δὲ κεφάλαιον αὐτῆς εὑρίσκομεν ἀπὸ τοὺς ἀρχικοὺς ἐκείνους τύπους (§. 541. 542). 1, 11, $K=(\alpha+\tau)\frac{\nu}{2}=(1+1)\frac{\nu}{2}=2\frac{\nu}{2}=\frac{\nu}{1}$ ἀπὸ δὲ τοῦ 11. $K=\frac{2\alpha\nu+\nu(\nu-1)\delta}{2}$ ἐὰν $\alpha=1$ καὶ $\delta=0$ θῶμεν, εὑρίσκομεν $K=\frac{2\nu+\nu(\nu-1)0}{2}=\frac{2\nu+0}{2}=\frac{\nu+0}{1}$. Καὶ οὗτος ὁ τύπος φανερὰ δείκνυσιν, ὅτι εἶναι τῆς πρώτης τάξεως τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς· διότι ἐπειδὴ εἰς αὐτὸν τὸν τύπον εὑρίσκεται ἡ διαφορὰ δ μηδὲν, εἰς τὸ κλάσμα εὑρέθη μηδὲν οὕτως $\frac{\nu+0}{1}$. διὰ νὰ δείξῃ ὅτι αὐτὴ ἡ τάξις ἔχει διαφορὰν οὐδεμίαν, ἤτοι 0. εἰς δὲ τὸν παρονομαστὴν ἔχει μονάδα, διὰ νὰ δείξῃ ὅτι εἶναι τὸ κεφάλαιον τῆς πρώτης τάξεως, καθότι τὸ ν κεφάλαιον εἶναι αὐτῆς τῆς τάξεως, οὕτω $K=\frac{\nu+0}{1}=\nu$. καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν οἱ ὅροι 5, πέντε καὶ τὸ κεφάλαιον = ἐὰν $\nu=6$, ἓξ καὶ τὸ κεφάλαιον· ἄρα $K=\frac{\nu}{1}$. λέγω ὅμως, ὅταν εὑρεθῇ τοῦτο τὸ κλάσμα, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἀριθμητὴς τὸ πλῆθος τῶν ὅρων $=\nu$ καὶ ἅμα διὰ τοῦ + αἱ διαφοραί, ὅπου ἔχουσιν αἱ τάξεις· (δηλ: ἐὰν ἔχωσι 2 διαφοράς, τίθεμεν $\nu+2$· ἐὰν ἔχῃ 5 διαφοράς, τίθεμεν $\nu+5$· ἐὰν ἔχῃ μ διαφορὰς, τίθεμεν $\nu+\mu$), καὶ παρονομαςὴς ὁ ἀριθμὸς τῶν τάξεων; ἐὰν ἡ δευτέρα, 2, ἐὰν ἡ πέμπτη, 5. ἐὰν μ τάξις, μ. καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν ἔσχατον ὅρον τὸν γενικὸν τῆς αὐτῆς τάξεως τ, τὸ γενόμενον εἶναι τὸ κεφάλαιον· ἐπειδὴ ὅμως εἰς αὐτὴν τὴν τάξιν τ=1, ἔςαι $1\cdot\frac{\nu+0}{1}=\frac{\nu}{1}=K$. ὅθεν εἰς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου μιᾶς τάξεως ἀπαιτεῖται ὁ γενικὸς ὅρος τ. οὗτος ὅμως εἶναι τὸ κεφάλαιον τῆς ἐγγὺς κατωτέρας (§. 547).

§. 550. Ἐπεὶ δὲ τῆς δευτέρας τάξεως 1.2.3.4.5.6. κ. τ. λ. ὁ ἔσχατος ὅρος τ= εἶναι ἴσος τῷ κεφαλαίῳ τῆς ἐγγὺς ἡγουμένης τάξεως (§. 547), ἤτοι $\tau=\frac{\nu}{1}$. ἄρα τὸ κλάσμα εἰς αὐτὴν τὴν κλάσιν εἶναι $\frac{\nu+1}{2}$, δηλ: ν καὶ ἅμα μονὰς· διότι ἔχει μίαν διαφορὰν, καὶ παρονομαςὴν 2· διότι δευτέρα εἶναι ἡ τάξις· ἐὰν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ μὲ τὸν ἔσχατον ὅρον αὐτῆς $\tau=\frac{\nu}{1}$, εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον αὐτῆς τῆς κλάσεως $\frac{\nu}{1}.\frac{\nu+1}{2}=\frac{\nu(\nu+1)}{1.2}=K$. καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν ζητήσωμεν τὸ κεφάλαιον τῶν 8 ὅρων, ἔςαι $K=\frac{\nu(\nu+1)}{1.2}=\frac{8\cdot 9}{2}=36$, καὶ $1+2+3+4+5+6+7+8=36$· καὶ τοιοῦτον εὕρηται καὶ ἀνωτέρω· διότι ἦν ἐκεῖ (§. 545) $K=\frac{2a\nu+\nu(\nu-1)\delta}{2}$. ἐὰν θῶμεν $a=1$ καὶ $\delta=1$, ὡς ἀπαιτεῖ ἐνταῦθα ἡ σειρά, ἔςαι $K=\frac{2\nu+\nu\nu-\nu}{2}=\frac{\nu+\nu\nu}{2}=\frac{\nu(\nu+1)}{1\cdot 2}$.

§. 551. Ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῆς τρίτης τάξεως 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. κτ. τὸ μὲν τ ὁ γενικὸς ὅρος αὐτῆς, εἶναι ἴσος τῷ κεφαλαίῳ τῆς ἡγουμένης κλάσεως $\frac{\nu(\nu+1)}{1 \cdot 2}$, δηλ: ἐὰν ζητῆται ὁ πέμπτος ὅρος, ἔςαι $\tau = \frac{\nu(\nu+1)}{2} = \frac{5.\ 6}{2} = 15$· ἐὰν δ' ὁ ἕβδομος, ἔςαι $\frac{7.\ 8}{2} = 28$· τὸ κεφάλαιον ὅμως εὑρίσκομεν αὐτῆς τῆς κλάσεως, ἐὰν μὲ τὸν γενικὸν ὅρον αὐτῆς $\frac{\nu(\nu+1)}{1.\ 2}$ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{\nu+2}{3}$· διότι καὶ εἰς αὐτὸ τίθεται ἀριθμητὴς ν καὶ ἅμα 2, διὰ τὸ ἔχειν δύω διαφορὰς τὴν κλάσιν αὐτὴν, παρονομαςὴν δὲ 3, διὰ τὸ εἶναι τρίτης κλάσεως τὴν σειράν· ὅθεν $K = \frac{\nu(\nu+1)}{1.\ 2} \cdot \frac{\nu+2}{3} = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.\ 2.\ 3.}$. Λοιπὸν. ἐὰν ζητῆται τὸ κεφάλαιον πέντε ὅρων αὐτῆς καὶ κλάσεως, εὑρίσκομεν $K = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.\ 2.\ 3} = \frac{5.\ 6.\ 7.}{2.\ 3.} = 35$. διότι $1+3+6+10+15+=35$. ὁμοίως, καὶ ἐὰν τὸ κεφάλαιον δεκα, ἢ δεκαπέντε ὅρων κ. τ. λ.

§. 552. Ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῆς τετάρτης τάξεως· ὁ μὲν γενικὸς ὅρος εἶναι ἴσος τῷ κεφαλαίῳ τῆς ἐγγὺς ἡγουμένης τάξεως (§. 546)· $\tau = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.\ 2.\ 3}$· διότι ἐὰν γράψωμεν τὴν σειρὰν 1. 4. 10. 20. 35. 56 κ. τ. λ. διὰ τοῦ τύπου $\tau = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.\ 2.\ 3}$ εὑρίσκομεν οἱονδήποτε ὅρον, τὸν πέμπτον δηλ: ἄρα $\tau=\frac{5.\ 6.\ 7}{1.\ 2.\ 3}=35$. κ. τ. λ. διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῆς, εὕρωμεν πρῶτον τὸ κλάσμα $\frac{\upsilon+3}{4}$, οὗ ἀριθμητὴς υ, καὶ 3 διὰ τὰς τρεῖς διαφοράς· παρονομαστὴς δὲ 4· διότι τετάρτη ἡ τάξις· καὶ εἶτα τοῦτο ἐπὶ τὸν γενικὸν ὅρον πολλαπλασιάσωμεν $K=\frac{\upsilon(\upsilon+1)(\upsilon+2)}{1.\ 2.\ 3}$. $\frac{\upsilon+3}{4}=\frac{\upsilon(\upsilon+1)(\upsilon+2)(\upsilon+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$· ὅθεν ἐὰν ζητηθῇ τὸ κεφάλαιον τῶν ἓξ ὅρων, ἔσαι $K=\frac{\upsilon(\upsilon+1)(\upsilon+2)(\upsilon+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}=\frac{6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 2}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ $=126$· ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

§. 553. Ἡ ἡμετέρα μέθοδος ἔχει καὶ τοῦτο μάλιστα τὸ χρήσιμον, καθότι οἱασδήποτε τάξεως ἐπιταχθῶμεν νὰ εὕρωμεν τὸν γενικὸν ὅρον καὶ τὸ κεφάλαιον, ἐν ἀκαρεῖ αὐτὰ εὑρίσκομεν· διότι εἰς εὕρεσιν τοῦ γενικοῦ ὅρου τ, εὑρίσκομεν ἓν κλάσμα, καὶ παρονομαστὴν γράφομεν ἀριστερόθεν πρὸς τὰ δεξιὰ παράγοντας κατὰ σειρὰν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἄχρις οὗ καταντήσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τῆς τάξεως πλὴν μονάδος· ἀριθμητὴν δὲ γράφομεν πάλιν ἀριστερόθεν πρὸς τὰ δεξιὰ παράγοντας υ, $\upsilon+1$, $\upsilon+2$, $\upsilon+3$ κ. τ. λ. ἄχρις οὗ καταντήσωμεν εἰς τὸν ἔσχατον παράγοντα, ὅστις ἔχει τὸν υ καὶ ἕνα ἀριθμὸν ἴσον τῷ ἀριθμῷ τῆς τάξεως πλὴν δυάδος· οὕτω ζητεῖται ὁ γενικὸς ὅρος τῆς ἐννάτης τάξεως· ἄρα $=\tau\frac{\upsilon(\upsilon+1)(\upsilon+2)(\upsilon+3)(\upsilon+4)(\upsilon+5)(\upsilon+6)(\upsilon+7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}$. ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὸ κεφάλαιον, ἐὰν εἰς τὸν παρονομαστὴν καταντήσωμεν εἰς τὸν ἔσχατον παράγοντα, νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῆς τάξεως, καὶ εἰς τὸν ἀριθμητὴν ὁ ἔσχατος παράγων νὰ εἶναι ν σὺν τῷ ἀριθμῷ τῆς τάξεως πλὴν μονάδος·

$$K=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)(\nu+7)(\nu+8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}.$$

οὕτω καὶ ἐὰν τῆς μ τάξεως ζητηθῇ ὁ γενικὸς ὅρος.

$$\tau=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\ldots\ldots\ (\nu+\mu-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ldots\ \mu-1}\cdot \text{τὸ δὲ κεφάλαιον.}$$

$$K=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3\ \ldots\ldots\ \nu+\mu-1}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ldots\ \mu}.$$

§. 554. Ἔχει δὲ καὶ τοῦτο τὸ χρήσιμον ἡ ἡμετέρα μέθοδος· καθότι ἑκάστης τάξεως τοὺς ὅρους εὑρίσκομεν, ὅσους ἂν θέλωμεν, χωρὶς νὰ μᾶς δοθῇ κἀνένας ὅρος τῆς σειρᾶς, ἐὰν μόνον τὸν τύπον τοῦ γενικοῦ ὅρου εὕρωμεν, καὶ εἰς αὐτὸν ἀντὶ τοῦ πρώτου ὅρου $\nu=1$ θῶμεν, ἀντὶ τοῦ δευτέρου $\nu=2$, ἀντὶ τοῦ τρίτου $\nu=3$, ἀντὶ τοῦ δ'. $\nu=4$ καὶ ἀντὶ τοῦ μ $\nu=\mu$· λ. χ. ζητοῦνται οἱ ὅροι τῆς ἕκτης τάξεως· καὶ ὁ γενικὸς ὅρος αὐτῆς κατὰ τὰ ἄνω (§. 547.) εἶναι

$$\tau=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\cdot$$ ἄρα ὁ μὲν α'. ὅρος αὐτῆς.

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}=1.$$

ὁ δὲ Β'. $$\frac{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}{2.\ 3.\ 4.\ 5.}=6$$

ὁ δὲ Γ'. $$\frac{3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}{2.\ 3.\ 4.\ 5}=21$$

ὁ δὲ Δ'. $$\frac{4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}{2.\ 3.\ 4.\ 5}=56$$

ὁ δὲ Ε'. $$\frac{5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}=126.\ \text{κτλ.}$$

Ἄρα ἡ σειρὰ 1. 6. 21. 56. 126. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. Καὶ οὕτως εὐκόλως καὶ συντόμως λύεται ἀκριβῶς τὸ πολύπλοκον τοῦτο πρόβλημα. Ἡ δεῖξις ὅμως τούτων ἁπάντων ςηρίζεται εἰς τὴν ἀδύνατον ἀπαγωγήν· διότι ἐὰν ταῦτα μὴ ὀρθῶς εἶχον, ἔδει ταῦτα ἄλλως πως εἶναι ὀρθῶς· καὶ ἡ κατὰ μέρος ἐφαρμογὴ ἦν ἂν ψευδὴς καὶ ἀσύςατος· ἀλλὰ μὴν ἡ ὀρθότης τούτων εἰς ἅπαντα τὰ κατὰ μέρος φαίνεται· ἄρα ὀρθῶς καὶ ἀληθῶς ἔχουσι· διότι τὴν ἀδύνατον ἀπαγωγὴν συνεχῶς οἱ μαθηματικοὶ μεταχειρίζονται.

§. 555. Ἡ μὲν ἡμετέρα μέθοδος λίαν ἁπλῆ καὶ εὔκολος, ἐπισυναφθήτωσαν ὅμως καὶ αἱ ἑξῆς μέθοδοι πρὸς γύμνασιν τῶν ἀρχαρίων ἡμῶν ἀκροατῶν.

Α΄. Ἐὰν αἱ σειραὶ κατὰ τάξιν γραφῶσι τοῦ μὲν πρώτου κατ' ἐκείνους βαθμοῦ, δευτέρου δὲ καθ' ἡμᾶς, εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, τοῦ δευτέρου εἰς τὴν δευτέραν, τοῦ τρίτου εἰς τὴν τρίτην καὶ καθ' ἑξῆς, καὶ ἅμα ληφθῇ· ὅ,τε πρῶτος ὅρος, καὶ ἡ διαφορὰ ἴσα μονάδι, εἰσὶν αἱ σειραὶ οὕτω.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	κ. τ. λ.
1.	4.	9.	16.	25.	36.	κ. τ. λ.
1.	8.	27.	64.	125.	216.	κ. τ. λ.
1.	16.	81.	256.	625.	1296.	κ. τ. λ.

αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι ἕκαςος ὅρος τῆς πρώτης γίνεται εἰς μὲν τὴν δευτέραν τάξιν δύναμις δευτέρα, εἰς δὲ τὴν τρίτην, τρίτη, εἰς τὴν τετάρτην, τετάρτη, καὶ εἰς τὴν μ, μ δύναμις· ἄρα καὶ διὰ γραμμάτων οὕτω γράφονται.

α	β	γ	δ	ε	ζ	κ. τ. λ.	Α΄. τάξις
α^2	β^2	γ^2	δ^2	ε^2	ζ^2	κ. τ. λ.	Β΄. τάξις
α^3	β^3	γ^3	δ^3	ε^3	ζ^3	κ. τ. λ.	Γ΄. τάξις
α^4	β^4	γ^4	δ^4	ε^4	ζ^4	κ. τ. λ.	Δ΄. τάξις

ὁμοίως καὶ πέμπτη, καὶ ἕκτη καὶ ἑβδόμη κ. τ. λ.

Β'. Ἐὰν εἰς τὴν πρώτην τάξιν ἐνατενίσωμεν, εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος ὅρος εἶναι ἴσος τῷ ἐγγὺς ἡγουμένῳ μετὰ μιᾶς μονάδος, ὡς $6=5+1$ κ. τ. λ. ἄρα καὶ εἰς τὸ διάγραμμα $\zeta=\iota+1$, $\iota=\delta+1$, $\delta=\gamma+1$, $\gamma=\beta+1$, καὶ $\beta=\alpha+1$· ὅτι $\alpha=\alpha+0=\alpha=1$. ἄρα οἱ μὲν ὅροι τῆς Β'. τάξεως ἐὰν $\iota+1$, $\delta+1$, $\gamma+1$, $\beta+1$, $\alpha+1$, καὶ τετραγωνίσωμεν, καὶ τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων θῶμεν, ἔσονται

$$\zeta^2=\iota^2+2\iota+1$$
$$\iota^2=\delta^2+2\delta+1$$
$$\delta^2=\gamma^2+2\gamma+1$$
$$\gamma^2=\beta^2+2\beta+1$$
$$\beta^2=\alpha^2+2\alpha+1 \text{ καὶ}$$
$$\alpha^2=1$$

Ὁμοίως τῆς τρίτης τάξεως ἐὰν αὐτοὺς κυβώσωμεν.

$$\zeta^3=\iota^3+3\iota^2+3\iota+1$$
$$\iota^3=\delta^3+3\delta^2+3\delta+1$$
$$\delta^3=\gamma^3+3\gamma^2+3\gamma+1$$
$$\gamma^3=\beta^3+3\beta^2+3\beta+1$$
$$\beta^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$$
$$\alpha^3=1$$

Ὁμοίως τῆς δ'. ἐὰν εἰς τὴν τετάρτην ὑψώσωμεν δύναμιν.

$$\zeta^4=\iota^4+4\iota^3+6\iota^2+4\iota+1$$
$$\iota^4=\delta^4+4\delta^3+6\delta^2+4\delta+1$$
$$\delta^4=\gamma^4+4\gamma^3+6\gamma^2+4\gamma+1$$
$$\gamma^4=\beta^4+4\beta^3+6\beta^2+4\beta+1$$
$$\beta^4=\alpha^4+4\alpha^3+6\alpha^2+4\alpha+1 \text{ κ. τ. λ.}$$

Ἐὰν δ' εἰς τὴν δευτέραν τάξιν ἀντὶ τῶν $\iota^2,\delta^2,\gamma^2,\beta^2,\alpha^2$, τὰ ἴσα θῶμεν, εὑρίσκεται ὁ ἔσχατος ὅρος αὐτῆς ζ^2 οὕτω.

$$\zeta^2 = 2\varepsilon + 1$$
$$+ 2\delta + 1$$
$$+ 2\gamma + 1$$
$$+ 2\beta + 1$$
$$\alpha^2 + 2\alpha + 1$$

ὁ ἔσχατος τῆς τρίτης. $\zeta^3 = +3\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 1$
$$+3\delta^2 + 3\delta + 1$$
$$+3\gamma^2 + 3\gamma + 1$$
$$+3\beta^2 + 3\beta + 1$$
$$\alpha^3 \quad +3\alpha^2 + 3\alpha + 1$$

ὁ ἔσχατος τῆς τετάρτης $\zeta^4 \quad +4\varepsilon^3 + 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon = 1$
$$4\delta^3 + 6\delta^2 + 4\delta + 1$$
$$4\gamma^3 + 6\gamma^2 + 4\gamma + 1$$
$$4\beta^3 + 6\beta^2 + 4\beta + 1$$
$$\alpha^4 \quad +4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha + 1$$

Εἰς αὐτὰ εὑρίσκομεν εἰς μὲν τὴν δευτέραν τάξιν ὁ ἔσχατος ὅρος εἶναι ἴσος τῷ τετραγώνῳ τοῦ πρώτου ὅρου σὺν τῷ διπλῷ κεφαλαίῳ τῶν προηγουμένων ὅρων αὐτοῦ, καὶ σὺν τῷ ἀριθμῷ τῆς πληθύος τῶν προηγουμένων ὅρων

$$\zeta^2 = \alpha^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \quad . \quad . \quad . \quad \text{Α}'.$$

εἰς δὲ τὴν τρίτην ὁ ἔσχατος ζ^3 ἴσος τῷ κύβῳ τοῦ πρώτου ὅρου σὺν τῷ τριπλῷ κεφαλαίῳ τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν προηγουμένων ὅρων, καὶ ἅμα τῷ τριπλῷ κεφαλαίῳ τῶν ἁπλῶν ὅρων τῶν προηγουμένων, καὶ ἅμα τῷ πλήθει τῶν ὅρων πλὴν τῦ ἐσχάτου· δηλ: $\zeta^3 = \alpha^3 + 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2) + 3(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad \text{Β}'.$

Εἰς δὲ τὴν τετάρτην ὁ ἔσχατος ἴσος τῇ τετάρτῃ δυνάμει τοῦ πρώτου ὅρου σὺν τῷ τετραπλῷ κεφαλαίῳ τῶν κύβων τῶν προηγουμένων ὅρων, καὶ σὺν τῷ ἑξαπλῷ κεφαλαίῳ τῶν τε-

τραγώνων τῶν προηγουμένων ὅρων, καὶ σὺν τῷ τετραπλῷ κεφαλαίῳ τῶν ἁπλῶν ὅρων τῶν προηγουμένων. καὶ ἅμα τῇ πληθεῖ τῶν ὅρων τῶν προηγουμένων $\zeta^4=\alpha^4+$
$4(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\varepsilon^3)+6(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)+$
$4(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)+(1+1+1+1+1)$ . . . . . Γ.

Καλέσωμεν ἤδη α τὸν πρῶτον ὅρον οἱονδήποτε, τ τὸν ἔσχατον, ἤτοι $\tau=\zeta$, καὶ ν ἡ πλῆθος τῶν ὅρων· ἀλλ' ἐνταῦθα ἡ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι πλὴν τοῦ ἐσχάτου, ἤτοι ἡ πλῆθος τῶν προηγουμένων ὅρων τοῦ ζ. ἄρα ἡ πλῆθος ἐνταῦθα $\nu-1$. ἔστι δὲ καὶ $\alpha=1$, ἄρα ἡ πλῆθος τῶν ὅρων $\nu-\alpha$, καὶ τὰ κεφάλαια τῶν μονάδων εἰς τοὺς τύπους Α, Β, Γ, εἶναι ἴσα $\nu-\alpha$. Καλέσωμεν δὲ καὶ Κ τὸ κεφάλαιον τῆς σειρᾶς· ἄρα τὸ κεφάλαιον τῶν προηγουμένων ὅρων πλὴν τοῦ ἐσχάτου ἄνω εἰς τοὺς τύπους εἶναι $K-\tau=K\nu$. ὅτι $\tau=\zeta=\nu$ εἰς τὴν α΄. κλάσιν κτ. ἄρα καὶ τὸ κεφάλαιον τῆς δευτέρας τάξεως $K^2-\tau^2=K^2-\nu^2$. τῆς δὲ τρίτης $K^3-\tau^3=K^3-\nu^3$. τῆς δὲ τετάρτης $K^4-\tau^4$ κτλ. λοιπὸν εἰς τὸν Α τόπον $\zeta^2=\alpha^2+2(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)+(1+1+1+1+1)$ τὸ μὲν $\zeta^2=\tau^2$, τὸ δὲ $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=K-\tau$, καὶ $1+1+1+1+1=\nu-\alpha$, ἄρα $\tau^2=\alpha^2+2K-2\tau+\nu-\alpha$. ἤτοι $2K=\tau^2+2\tau-\alpha^2-\nu+\alpha+$ $\nu^2+2\nu-\alpha^2-\nu+\alpha=\nu^2+\nu-\alpha^2+\alpha$. ὅτι καὶ $\nu=\tau$. ἄρα $K=\frac{1}{2}\nu^2+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha$. ἐὰν δὲ θῶμεν $\alpha=0$, ἢ $\alpha=1$, μεταβαίνει οὗτος ὁ τύπος $K=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$, ὡς καὶ παρ' ἡμῖν εὕρηται.

Δ΄. Λάβωμεν ἤδη τὸν Β΄. τύπον $\zeta^3=\alpha^3+3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)$ $+3(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)+(1+1+1+1+1)$, καὶ θῶμεν $\zeta^3=\tau^3=\nu^3$ καὶ $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)=K^2-\nu^2$, καὶ $(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=$ $K-\nu=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}-\nu$, καὶ $(1+1+1+1+1)=\nu-\alpha$. ἔσται $\zeta^3=$

ἤτοι $\nu^3=\alpha^3+3K^2-3\nu^2+\frac{3\nu(\nu+1)}{2}-3\nu+\nu-\alpha$. καὶ ἑπομένως $3K^2=\nu^3+3\nu^2+3\nu-\frac{3\nu(\nu+1)}{2}+\alpha-\alpha^3$. ἐπειδὴ ὅμως $\alpha=1$ ἔςαι $K^2=\frac{\nu^3}{3}+\nu^2+\frac{2\nu}{3}-\frac{3\nu(\nu+1)}{6}=$

$$\frac{2\nu^3+6\nu^2+4\nu-3\nu^2-3\nu}{6}=\frac{2\nu^3+3\nu^2+\nu}{6}=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{1.\ 2.\ 3}.$$

Εὕρηται μὲν καὶ αὕτη ἡ ἀνωτέρω, ἣν ἡμεῖς εὕρομεν, πλὴν ἀνήκει μόνου τῇ τετραγωνικῇ σειρᾷ, καὶ ὄχι, ἣν ἡμεῖς εἰς τὸν τρίτον εὕρομεν βαθμόν· διότι ἐκεῖναι μᾶλλον χρήσιμαι εἰς τὰ ἑξῆς.

Ε. Λάϐωμεν ἤδη καὶ τὸν Γ. τύπον $\zeta^4=4(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\varepsilon^3)+6(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)+4(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)(1+1+1+1+1)$· ἔνθα τὸ μὲν $\zeta^4=\tau^4=\nu^4\cdot(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\varepsilon^3)=K^3-\nu^3.(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)=K^2-\nu^2=\frac{2\nu3+3\nu^2+\nu}{9}-\nu^2$.

$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=K-\nu=\frac{\nu\nu+\nu}{2}-\nu$· καὶ $(1+1+1+1+1)=\nu-\alpha$· ἄρα ἐὰν τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων θῶμεν, ἔςαι $\nu^4=4K^3-4\nu^3+\frac{6(2\nu^3+3\nu^2+\nu)}{6}-6\nu^2+\frac{4(\nu\nu+\nu)}{2}-4\nu+\nu-\alpha+\alpha^4$· ἤτοι $\nu^4=4K^3-4\nu^3+2\nu^3+3\nu^2+\nu-6\nu^2+2\nu^2+2\nu-4\nu+\nu-\alpha+\alpha^4$, $\nu^4=4K^3-2\nu^3-\nu^2-\alpha+\alpha^4$· ἐὰν δὲ $\alpha=1$, ἔςαι $4K^3=\nu^4+2\nu^3+\nu^2$, καὶ $K^3=\frac{\nu^4+2\nu^3+\nu^2}{4}=\frac{\nu\nu(\nu^2+2\nu+1)}{2.\ 2}$.

Καὶ τοῦτο τὸ κεφάλαιον μόνον τῶν κύϐων, καὶ οὐχὶ ἑτέρας σειρᾶς.

ΣΤ'. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὸ κεφάλαιον τῆς σειρᾶς τῆς τετάρτης δυνάμεως, ἐὰν θῶμεν ἀναλόγως $\upsilon^5=5(K^4-\upsilon^4)+10(K^3-\upsilon^3)+10(K^2-\upsilon^2)+5(K-\upsilon)+(1+1+1+1+1)$, καὶ ἀντὶ τοῦ $K^3-\upsilon^3$, καὶ $K^2-\upsilon^2$, καὶ $K-\upsilon$ τὰ ἤδη εὑρεθέντα κ. τ. λ. Ὁμοίως καὶ εἰς τὰς ἀνωτέρας δυνάμεις.

Σημείωσαι ὅμως ὅτι κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον οὐδὲ ποθ' εὑρίσκομεν τὴν ἑξῆς τάξιν, ἐὰν μὴ πρῶτον εὑρημένην τὴν προηγουμένην ἔχωμεν· ἔπειτα τὰς σειρὰς τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ δι' αὐτοῦ δὲν ἠμποροῦμεν νὰ τὰς εὕρωμεν, ὡς διὰ τῆς ἡμετέρας μεθόδου.

Ζ'. Εἰς αὐτὴν τὴν μέθοδον εὑρίσκομεν καὶ τὸν γενικὸν ὅρον τ, τ^2, τ^3 κ. τ. λ. ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\upsilon^2=\alpha^2+2K-2\upsilon+\upsilon-\alpha$ θῶμεν, ἀντὶ K τὸ εὑρεθὲν $\frac{\upsilon\upsilon+\upsilon}{2}$ καὶ $\upsilon^2=\tau^2$ καὶ $\alpha=1$, οὕτως εὑρίσκομεν $\tau^2=1+\frac{2(\upsilon\upsilon+\upsilon)}{2}-2\upsilon+\upsilon-1.\tau^2=\upsilon\upsilon+\upsilon-2\upsilon+\upsilon=\upsilon^2$· ὁμοίως καὶ εἰς τὴν σειρὰν τῶν κύβων· $\tau^3=\alpha^3+3K^2-3\upsilon^2+3K-3\upsilon+\upsilon-\alpha$· ἤτοι $\tau^3=\alpha^3+\frac{3(2\upsilon^3+3\upsilon^2+\upsilon)}{2.\ 3}-3\upsilon^2+\frac{3(\upsilon\upsilon+\upsilon)}{2}-3\upsilon+\upsilon-\alpha, \tau^3=\frac{2\upsilon^3+3\upsilon^2+\upsilon}{2}-3\upsilon^2+\frac{3\upsilon\upsilon+3\upsilon}{2}-2\upsilon$, $2\tau=2\upsilon^3+3\upsilon^2+\upsilon-6\upsilon^2+3\upsilon\upsilon+3\upsilon-4\upsilon=$ καὶ $\tau^3=\upsilon^3$· κ. τ. λ. δηλ: $\tau=$ τῷ υ εἰς τὴν δύναμιν ὑψούμενον, καθ' ἣν ἡ τάξις τῆς σειρᾶς δεικνύσι.

§. 556. Τὰ τοιαῦτα δυναμικὰ κεφάλαια εὑρίσκονται κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον· ἔστωσαν αἱ σειραὶ

Α'.	1,	1,	1,	1,	1	ὧν ἔσχατος ὅρος ν^0.
	1,	2,	3,	4,	5	. . . . . . ν^1.
	1,	4,	9,	16,	25	. . . . . ν^2.
	1,	8,	27,	64,	125	. . . . . ν^3.
	1,	16,	81,	256,	725	. . . . . . ν^4. κτ.

Αἱ αὐταὶ σειραί, αἵτινες ἔχουσιν ἕνα ὅρον περισσότερον τῶν ἄλλων.

Β.	1.	1.	1.	1.	1.	1 . . .	$(\nu+1)^0$.
	1.	2.	3.	4.	5.	6 . . .	$(\nu+1)^1$.
	1.	4.	9.	16.	25.	36 . .	$(\nu+1)^2$.
	1.	8.	27.	64.	125.	213 . .	$(\nu+1)^3$.
	8.	16.	81.	256.	725.	1296 . .	$(\nu+1)^4$.

α'. Βλέπομεν εἰς τὰς σειρὰς Α ὅτι ἔσχατος ὅρος εἶναι $\nu^0=1$. εἰς τὰς μονάδας· εἰς δὲ τὴν σειρὰν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ν^1 ἴσος ταῖς μονάσι τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· ἄρα εἰς τὴν σειρὰν τῶν τετραγώνων ἔσχατος ὁ ν^2· εἰς τὴν τῶν κύβων ν^3· καὶ καθ' ἑξῆς εἰς τὰς δυναμικὰς σειρὰς ν^4, ν^5, ν^6 κ τλ.

β'. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ σειραὶ τοῦ Β εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς σειρὰς τοῦ Α, πλὴν ὅτι αὗται ἕνα ὅρον ἔχουσι περισσότερον, ἄρα οἱ ἔσχατοι ὅροι αὐτοῦ μόνον μίαν μονάδα αὐξάνουσι ἀπὸ ἐκείνους τοῦ Α, καὶ εὑρίσκονται ὡς $(\nu+1)^0=1$, $(\nu+1)^1$, $(\nu+1)^2$, $(\nu+1)^3$ κ. τ. λ.

γ'. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον λοιπὸν ὅλοι οἱ ἔσχατοι δυναμικοὶ ὅροι εἶναι φανεροί, καὶ εὑρημένοι. Λείπεται ἤδη νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμόν, ὅςις πολλαπλασιάζων τὸν ἔσχατον ὅρον ἀποτελεῖ τὸ κεφάλαιον τῆς σειρᾶς· καὶ τοιοῦτος τῷ ὄντι εὑρίσκεται, ὅςις συνεργάζεται τὸν ἔσχατον εἰς τὸ ὁλικὸν τῆς σειρᾶς κεφαλαίου· ἐὰν δὲ τοῦτον Κ ὑποθῶμεν, ἔσονται τὰ δυναμικὰ κεφάλαια, τῶν μὲν σειρῶν κατὰ τὸ

A οὕτω $Kν^0$, $Kν^1$, $Kν^2$, $Kν^3$, $Kν^4$ κτ. Τῶν δὲ κατὰ τὸ B. $K(ν+1)^0$, $K(ν+1)^1$, $K(ν+1)^2$, $K(ν+1)^3$, $K(ν+1)^4$. κτλ. τὸ K σημαίνει ὅτι κεφαλαιοῦμεν τοὺς ἐσχάτους ὅρους, καὶ λέγεται τοῦτο $K(ν+1)$ τὸ κεφάλαιον τοῦ ὅρου $(ν+1)$ κ. τ. λ. ἤδη δὲ λαμβάνεται ἀόριστον, ἔπειτα ὅμως διορίζεται.

δʹ. Ἐὰν ὅμως ἀφέλωμεν μίαν σειρὰν ἑκάστην τῶν κατὰ τὸ A ἀπὸ ἑκάστην ταυτοδύναμον τῶν κατὰ τὸ B, μένει λείψανον ὁ ἔσχατος ὅρος ἑκάστης τῶν κατὰ τὸ B. $(ν+1)^0$, $(ν+1)^1$, $(ν+1)^2$, $(ν+1)^3$, κ. τ. λ. διότι τὸ κεφάλαιον ὅλον ἑκάστης σειρᾶς τῶν τοῦ A, ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ κεφάλαιον ὅλον τῶν τοῦ B, καὶ μένει λείψανον ὁ ἔσχατος ὅρος τῶν κατὰ τὸ B. διότι αἱ σειραὶ αὗται κατὰ ἕνα ὅρον πλεονάζουσιν ἀπὸ ἐκείνας τὰς εἰς A. ἄρα τὸ λείψανον τῶν μοναδικῶν σειρῶν, $K(ν+1)^0—Kν^0=(ν+1)^0=1$· τὸ λείψανον τῶν φυσικῶν, $K(ν+1)^1—Kν^1=(ν+1)^1=ν+1$· τὸ δὲ τῶν τετραγωνικῶν $K(ν+1)^2—Kν^2=(ν+1)^2=ν^2+2ν+1$· τὸ δὲ τῶν κυβικῶν, $K(ν+1)^3—Kν^3=(ν+1)^3=ν^3+3ν^2+3ν+1$· τὸ δὲ τῆς τετάρτης δυνάμεως $K(ν+1)^4—Kν^4=(ν+1)^4=ν^4+4ν^3+6ν^2+4ν+1$. ὁμοίως καὶ τῆς μ δυνάμεως (ὅρα §. 329.)

$$K(ν+1)^μ—Kν^μ=(ν+1)^μ=ν^μ+\frac{μ}{1}ν^{μ—1}+\frac{μ(μ—1)}{1.\ 2}ν^{μ—2}$$
$$\frac{μ(μ—1.)(μ—2)}{1.\ 2\ 3.}ν^{μ—3}$$ κ. τ. λ. ὅλα ταῦτα τὰ ἴσα αὐτὶ τῶν ἴσων τίθενται.

Eʹ. Ἐπειδὴ ἐκ του εσχατου ὅρου εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον ἐκείνης της σειρᾶς, ἧς ὁ ἔσχατος ὅρος, ὅταν αὐτὸν κεφαλαιῶμεν διὰ τοῦ K, ὁ δʹ ἔσχατος ὅρος τῶν τετραγωνικῶν σειρῶν $(ν+1)^2=ν^2+2ν+1$, κεφαλαιώσωμεν αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως ὅλα τὰ μέρη, τὸ μὲν $(ν+1)^2=K(ν+1)^2$, τὸ δὲ $\nu^2=K\nu^2$, ϗ $2\nu=2K\nu$, ϗ $1=\nu+1$· διότι τὸ κεφάλαιον τῶν μονάδων εἰς τὰς σειρὰς τῶν τοῦ B εἶναι $\nu+1$· λοιπὸν ἀντὶ $K1$ τίθεμεν τὸ ἴσον $(\nu+1)$, καὶ γίνεται αὕτη ἡ ἐξίσωσις $K(\nu+1)^2=K\nu^2+2K\nu+\nu+1$· ἤτοι $K(\nu+1)^2-K\nu^2=2K\nu+\nu+1$· ἀλλὰ τὸ λεῖψανον $K(\nu+1)^2-K\nu^2$ εὑρέθη (δ)$=(+1)^2=\nu^2+2\nu+1$, θῶμεν τοῦτο ἀντὶ $K(\nu+1)^2-K\nu^2$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν α, καὶ γίνεται $\nu^2+2\nu+1=2K\nu+\nu+1$· καὶ ἐπομένως $2K\nu=\nu^2+\nu$, ἤτοι $K\nu=\frac{\nu^2+\nu}{2}=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ τὸ κεφάλαιον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὡς καὶ ἀνωτέρω εὕρηται.

ϛ. Λάβωμεν ἤδη τὸν ἔσχατον ὅρον τῆς κυβικῆς σειρᾶς $(\nu+1)^3=\nu^3+3\nu^2+3\nu+1$, καὶ κεφαλαιώσωμεν αὐτὴν κατὰ τὰ ἄνω ὅλα τὰ μέρη τῆς ἐξισώσεως, οὕτω $K(\nu+1)^3=K\nu^3+3K\nu^2+3K\nu+\nu+1$· ἀντὶ δὲ τοῦ $K\nu$, θῶμεν τὸ εὑρεθὲν ἴσον $\frac{\nu\nu+\nu}{2}$· καὶ γίνεται ἡ ἐξίσωσις $K(\nu+1)^3-K\nu^3=3K\nu^2+\frac{3\nu\nu+3\nu}{2}+\nu+1$. Καὶ ἀντὶ τοῦ $K(\nu+1)^3-K\nu^3$ θῶμεν τὴν ἄνω εὑρεθεῖσαν διαφορὰν $(\nu+1)^3=\nu^3+3\nu^2+3\nu+1$· καὶ γίνεται ἡ ἐξίσωσις $\nu^3+3\nu^2+3\nu+1=3K\nu^2+\frac{3\nu\nu+3\nu}{2}+\nu+1$· ἄρα $2\nu^3+6\nu^2+6\nu+2=6K\nu^2+3\nu\nu+3\nu+2\nu+2$· καὶ $6K\nu^2=2\nu^3+3\nu^2+\nu$· καὶ ἐπομένως $K\nu^2=\frac{2\nu^3+3\nu^2+\nu}{6}$ τὸ κεφάλαιον τῆς τετραγωνικῆς σειρᾶς, ὡς καὶ πρότερον εὑρέθη.

ζ. Λάβωμεν ἔτι τὸν ἔσχατον ὅρον τῆς σειρᾶς τῆς τετάρτης δυνάμεως $(\nu+1)^4=\nu^4+4\nu^3+6\nu^2+4\nu+1$, καὶ ταύτης τῆς ἐξισώσεως ὅλα τὰ μέρη κεφαλαιώσωμεν $K(\nu+1)^4=K\nu^4+4K\nu^3+6K\nu^2+4K\nu+\nu+1$· θῶμεν δὲ ἀντὶ $K\nu^2$ καὶ $K\nu$ τὰ ἄνω εὑρεθέντα, καὶ ἔσται ἡ ἐξίσωσις $K(\nu+1)^4-K\nu^4=4K\nu^3+\frac{6(2\nu^3+3\nu^2+\nu)}{6}+\frac{4(\nu\nu+\nu)}{2}+\nu+1$· ἐὰν δὲ καὶ αὐτοῦ τὴν ἄνω εὑρεθεῖσαν διαφορὰν $K(\nu+1)^4-K\nu^4=(\nu+1)^4=\nu^4+4\nu^3+6\nu^2+4\nu+1$ θῶμεν, μεταβαίνει ἡ ἐξίσωσις εἰς τὴν ἑξῆς $\nu^4+4\nu^3+6\nu^2+\nu+1=4K\nu^3+2\nu^3+3\nu^2+\nu+2\nu^2+2\nu+\nu+1$· καὶ $4K\nu^3=\nu^4+2\nu^3+\nu^2$, καὶ $K\nu^3=\frac{\nu^4+2\nu^3+\nu^2+\nu}{4}$ τὸ κεφάλαιον τῆς κυβικῆς σειρᾶς· καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον εὑρίσκονται δυναμικὰ κεφάλαια ἀνωτέρων τάξεων.

§. 557. Τὸν ἀριθμὸν, ἢ τὴν ποσότητα τὴν ἀόριστον, ἥτις συνεργάζεται ἑτέραν ποσότητα εἰς ἓν ζητούμενον, ὡς ἄνω ἡ K, ἥτις τὴν ν συνεργάζεται εἰς κεφάλαιον, καλοῦμεν ἡμεῖς συνεργάτην, καὶ τὸ ἔργον, καθ' ὃ τὴν ν συνεργάζεται, συνεργασίαν Functio, ὡς περὶ τῶν συνεργασιῶν εἰς τὸ τρίτον ἐροῦμεν βιβλίον.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ σειρῶν τῆς δευτέρας τάξεως καθ' ἡμᾶς δὲ τρίτης

§. 558. Πρὶν ὅμως εἰς τὴν χρῆσιν καὶ ἔκφρασιν αὐτῶν ἔλθωμεν, εἴπομεν πρῶτον πῶς γενικῶς ἐκφράζονται αἱ τάξεις τῶν ἀριθμητικῶν σειρῶν, καὶ πῶς ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου καὶ γενικοῦ ὅρου τὸ κεφάλαιον εὑρίσκεται· εὕρωμεν τὸν ἔσχατον ὅρον τῆς πρώτης τάξεως $\alpha+\delta\upsilon-\delta$· ἐὰν δὲ $\alpha-\delta=\mathrm{B}$ θῶμεν καὶ $\delta=\mathrm{A}$, ἔςαι $\tau=\mathrm{A}\upsilon+\mathrm{B}$· καὶ εἰς αὐτὸν τὸν τύπον δύω μέρη εὑρίσκονται $\mathrm{A}\upsilon$ καὶ Β διὰ τὸ εἶναι δευτέραν τάξιν καθ' ἡμᾶς, τὸ δὲ πρῶτον μέρος ἔχει παράγοντας μόνον υ, διότι ἔχει διαφορὰν μίαν, ἀλλὰ τὸ Α καὶ Β ὡς ἀδιόριςοι ἀριθμοὶ διορίζονται ἀπὸ τῆς σειρᾶς α, $\alpha+\delta$, $\alpha+2\delta$ κ. τ. λ. διότι ἐὰν $\upsilon=1$ τὸ πρῶτον μέρος σημαίνῃ, ἔςαι $\mathrm{A}+\mathrm{A}=\alpha$· (I.) ἐὰν δὲ τὸ δεύτερον μέρος $\upsilon=2$, ἔςαι $2\,\mathrm{A}+\mathrm{B}=\alpha+\delta$ (II.) καὶ ἐκ τῶν δύω ἐξισώσεων εὑρίσκεται $\mathrm{A}=\alpha-\mathrm{B}$. καὶ $\mathrm{A}=\dfrac{\alpha+\delta-\mathrm{B}}{2}$· ἄρα

$$\text{ἄρα } \alpha-\mathrm{B}=\frac{\alpha+\delta-\mathrm{B}}{2}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\;.\,2$$

$$\underline{2\alpha-2\mathrm{B}=\alpha+\delta-\mathrm{B}}$$

$\alpha-\delta=\mathrm{B}$, καὶ $\mathrm{A}=\delta$· ἄρα $\mathrm{A}\upsilon+\mathrm{B}=\delta\upsilon+\alpha-\delta=\alpha+(\upsilon-1)\delta$ ὡς πρότερον.

§. 559. Ἀπὸ δὲ τοῦ ἐσχάτου ὅρου εὑρίσκουσι συνεχῶς τὸ κεφάλαιον, ἐὰν δι' ἑνὸς συνεργάτου αὐτὸ πολλαπλασιάσωσιν (§. 556), ὡς ἀνωτέρω εἰρήκαμεν· λοιπὸν τὸ κεφάλαιον $\mathrm{K}=(\alpha+(\upsilon-1)\delta)\sigma\upsilon$· καὶ αὐτοῦ τὸ μὲν σ ἄγνωςον, τὸ δὲ υ γνωςὸν ὡς πλῆθὺς τῶν ὅρων· ἐὰν ὅμως εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ σ, καὶ δι' αὐτῆς πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἔσχατον ὅρον μετὰ τοῦ υ, καὶ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον, δίδεται ἄρα τοιοῦτος ἀριθμὸς, ὅςις μετὰ τοῦ υ πολλαπλασιάζων τὸν ἔσχατον ὅρον, τὸ κεφάλαιον γίνεται τῆς σειρᾶς, ἐπειδὴ δὲ τὸ κεφάλαιον αὐτῆς τῆς σειρᾶς εὕρηται

$\mathrm{K}=(\alpha+\tau)\dfrac{\upsilon}{2}$ (§. 541)· ἔςαι καὶ $(\alpha+(\upsilon-1)\delta)\upsilon\sigma=(\alpha+\tau)\dfrac{\upsilon}{2}$.

$$\alpha\nu\sigma+\nu^2\delta\sigma-\sigma\delta\nu=\frac{\alpha\nu+\tau\nu}{2}$$

$$2\alpha\sigma\nu+2\delta\sigma\nu^2-2\delta\sigma\nu=\alpha\nu+\tau\nu$$

$$2\alpha\nu\sigma+2\delta\sigma\nu^2-2\delta\sigma\nu=\alpha\nu+\tau\nu \text{ καὶ}$$

$$2\alpha\sigma\nu+2\delta\sigma\nu^2-2\delta\sigma\nu-\alpha\nu=\tau\nu, \text{ καὶ}$$

$2\alpha\sigma+2\delta\sigma\nu-2\delta\sigma-\alpha=\tau$ ἦν δὲ $\tau=\alpha+\delta\nu-\delta$ (§. 537)·

ἄρα $2\alpha\sigma+2\delta\sigma\nu-2\delta\sigma-\alpha=\alpha+\delta\nu-\delta$ καὶ $\sigma=\dfrac{\alpha+\alpha+\delta\nu-\delta}{2(\alpha+\delta\nu-\delta)}=$

$\dfrac{\alpha}{2(\alpha+\delta\nu-\delta)}+\dfrac{\alpha+\delta\nu-\delta}{2(\alpha+\delta\nu-\delta)}=\dfrac{\alpha}{2(\alpha+\delta\nu-\delta)}+\frac{1}{2}$· καὶ αὕτη ἡ τιμὴ τοῦ σ· τοῦτο δὲ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ ν, καὶ ἅμα ἐπὶ τὸ $(\alpha+\delta\nu-\delta)$ ἔσαι $\dfrac{\alpha\nu}{2(\alpha+\delta\nu-\delta)}.(\alpha+\delta\nu-\delta)+\frac{1}{2}.\nu.(\alpha+\delta\nu-\delta)=$

$\dfrac{\alpha\nu}{2}+\frac{1}{2}.\nu(\alpha+\delta\nu-\delta)=\dfrac{\alpha\nu+\alpha\nu+\delta\nu^2-\sigma\nu}{2}=\alpha\nu+\dfrac{\nu(\nu-1)\alpha}{2}$, ὡς καὶ πρότερον (§. 552)· καὶ ἀληθῶς τοιοῦτος συνεργάτης εὑρίσκεται· ἐὰν δὲ καὶ τοῦτο τὸ κεφάλαιον· οὕτω γράψωμεν $(\alpha+(\nu-1)\delta)\nu\sigma=\alpha\nu\sigma+\delta\sigma\nu^2-\sigma\nu=\delta\sigma\nu^2+\alpha\sigma\nu-\sigma\nu=\delta\sigma\nu^2+(\alpha\sigma-\sigma)\nu$, καὶ θῶμεν $\sigma\delta=A$ καὶ $\alpha\sigma-\sigma=B$· ἔσαι τὸ κεφάλαιον $K=A\nu^2+B\nu$ τύπος τοῦ κεφαλαίου τῆς δευτέρας τάξεως, ὅπου A καὶ B ἀδιόρισοι ποσότητες· διορίζομεν καὶ τὸ A καὶ B οὕτως ἐὰν τὸ $\nu=1$ θῶμεν, $A+B$ εἶναι τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου ὅρου· ἐὰν δὲ $\nu=2$, $4A+2B$, εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ὅρων· ἀλλὰ πρῶτος ὅρος τῆς σειρᾶς α, $\alpha+\delta$, $\alpha+2\delta$ κ. τ. λ. εἶναι α καὶ οἱ δύω ὁμοῦ $2\alpha+\delta$· ἄρα $A+B=\alpha$· καὶ $A=\alpha-B$ ἔσαι δὲ καὶ $4A+2B=2\alpha+\delta$. καὶ $A=\dfrac{2\alpha+\delta-2B}{4}$ καὶ ἑπομένως.

$$\alpha - B = \frac{2\alpha + \delta - 2B}{4}$$

$$4\alpha - 4B = 2\alpha + \delta - 2B$$

$$4\alpha - 2\alpha - \delta = 2B$$

$\frac{2\alpha - \delta}{2} = B$ · ἄρα καὶ $A = \alpha - \frac{2\alpha - \delta}{2} = \frac{\delta}{2}$ · ὅθεν

$$A\nu^2 + B\nu = \frac{\delta}{2}\nu^2 + \frac{(2\alpha - \delta)}{2}\nu = \frac{2\alpha\nu + \delta\nu^2 - \delta\nu}{2} = \alpha\nu + \frac{\nu(\nu - 1)\delta}{2}$$

ὡς πρότερον.

§. 560. Διὰ δὲ τὴν δευτέραν τάξιν ἐξεύρομεν ὅτι γίνονται ἀπὸ τῆς πρώτης α', $\alpha^2 + \delta$, $\alpha^3 + 2\delta$, $\alpha^4 + 3\delta$ κ. τ. λ. ἐὰν δὲ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς δευτέρας τάξεως ζ θῶμεν·

α΄. ὅρος ζ

β΄. . . . . $\zeta + \alpha$

γ΄. . . . . $\zeta + \alpha + \alpha + \delta$

δ΄. . . . . $\zeta + \alpha + \alpha + \delta + \alpha + 2\delta$

ε΄. . . . . $\zeta + \alpha + \alpha + \delta + \alpha + 2\delta + \alpha + 3\delta$

ς΄. . . . . $\zeta + \alpha + \alpha + \delta + \alpha + 2\delta + \alpha + 3\delta + \alpha + 4\delta$ κ. τ. λ.

φανερὸν λοιπὸν ὅτι ἕκαςος ὅρος αὐτῆς τῆς δευτέρας τάξεως γίνεται ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου αὐτῆς, καὶ ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τῆς πρώτης τάξεως τοσούτων ὅρων πλὴν ἑνὸς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ν αὐτοῦ τοῦ ὅρου· δηλ: ὁ πέμπτος γίνεται ἀπὸ τοῦ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τεσσάρων ὅρων τῆς πρώτης, τὸν γενικὸν ἄρα ὅρον τ εὑρίσκομεν, ἐὰν εἰς τὸ κεφάλαιον τῆς πρώτης $\frac{2\alpha\nu + \delta\nu^2 - \delta\nu}{2}$ θῶμεν ἀντὶ ν, $\nu - 1$·

οὕτω $\frac{2\alpha(\nu - 1) + \delta(\nu - 1)^2 - \delta(\nu - 1)}{2} =$

$$\frac{2\alpha\nu-2\alpha+\delta\nu^2-2\delta\nu+\delta-\delta\nu+\delta}{2}=\frac{2\alpha\nu-2\alpha+\delta\nu^2-3\delta\nu+2\delta}{2}$$

ἐὰν δὲ καὶ ζ προσθῶμεν ἔςαι $\tau=\zeta+\frac{2\alpha\nu-2\alpha+\delta\nu^2-3\delta\nu+2\delta}{2}$

$$=\frac{2\zeta-2\alpha+2\alpha\nu-3\delta\nu+\delta\nu^2+2\delta}{2}=\zeta-\alpha+\delta+(\alpha-\tfrac{3}{2}\delta)\nu+\frac{\delta}{2}\nu^2.$$

ἐὰν ὅμως $\frac{\delta}{2}=A$, καὶ $\alpha-\frac{3}{2}\delta=B$. καὶ $\zeta-\alpha+\delta=\Gamma$ θῶμεν, ἔςαι $\tau=A\nu^2+B\nu+\Gamma$. Τρεῖς ποσότητες ἀδιόριςοι. καὶ νὰ διορισθῶσι τρεῖς ἐξισώσεις εἶναι ἀναγκαῖαι.

Δοθήτωσαν τρεῖς ὅροι αὐτῆς τῆς σειρᾶς α, β, γ καὶ θῶμεν $\nu=1$, $\nu=2$, $\nu=3$, καὶ εὑρίσκονται

$A+B+\Gamma=\alpha$ I

$4A+2B+\Gamma=\beta$ . . . . . II.

$9A+3B+\Gamma=\gamma$ . . . . . III. ἐὰν τὴν II ἀπὸ τῆς III ἀφέλωμεν, ἔςαι $5A+B=\gamma-\beta$ . . IV. καὶ τὴν I. ἀπὸ τῆς II. ὁμοίως οὕτω.

$3A+B=\beta-\alpha$ . . . . . V.

καὶ τὴν V. ἀπὸ τῆς IV.

$2A=\gamma-2\beta+\alpha$, καὶ $A=\frac{\alpha-2\beta+\gamma}{2}$. θῶμεν δὲ εἰς τὴν $3A+B=\beta-\alpha$ τὸ τριπλάσιον τοῦτο εὑρεθὲν ἀντὶ $3A$· οὕτω $\frac{3\alpha-6\beta+3\gamma}{2}+B=\beta-\alpha$· καὶ γίνεται $B=\beta-\alpha-$

$$\frac{(3\alpha-6\beta+3\gamma)}{2}=\frac{2\beta-2\alpha-3\alpha+6\beta-3\gamma}{2}=\frac{8\beta-5\alpha-3\gamma}{2}.$$

ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὴν $B+B+\Gamma=\alpha$ θῶμεν τὰς ἤδη εὑρεθείσας τιμὰς ἀντὶ Α καὶ Β, ἔςαι $\frac{\alpha-2\beta+\gamma}{2}+\frac{8\beta-5\alpha-3\gamma}{2}+\Gamma$ $=\alpha$· καὶ $\Gamma=\alpha-\left(\frac{\alpha-2\beta+\gamma}{2}\right)-\left(\frac{8\beta-5\alpha-3\gamma}{2}\right)=$ $\frac{2\alpha-\alpha+2\beta-\gamma-8\beta+5\alpha+3\gamma}{2}=\frac{6\alpha-6\beta+2\gamma}{2}$. ἄρα $\tau=$ $\frac{(\alpha-2\beta+\gamma)\nu^2+(8\beta-5\alpha-3\gamma)\nu+(6\alpha-6\beta+2\gamma)}{2}$ . . . Α.

§. 561. Ἐὰν δὲ καὶ τὸν ἔσχατον ὅρον $A\nu^2+B\nu+\Gamma$ μετὰ τοῦ συνεργάτου καὶ τοῦ ν πολλαπλασιάσωμεν, εὑρίσκομεν καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῆς $(A\nu^2+B\nu+\Gamma)\sigma\nu=A\sigma\nu^3+B\sigma\nu^2$ $+\Gamma\sigma\nu$· θῶμεν δὲ $A\sigma=Z$· $B\sigma=\Xi$· $\Gamma\sigma=\Pi$· καὶ ἔςαι $K^2=$ $Z\nu^3+\Xi\nu^2+\Pi\nu$· ὅπου τὸ Ζ, Ξ, Π ἀδιόριςα διορίζονται δὲ διὰ τριῶν ἐξισώσεων· τοὺς τρεῖς ὅρους τῆς σειρᾶς δεδομένους α,β,γ καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦ μὲν πρώτου$=\alpha$· τῶν δὲ δύω $=\alpha+\beta$ καὶ τῶν τριῶν $=\alpha+\beta+\gamma$· θῶμεν καὶ $\nu=1$, $=2$, $=3$, καὶ ἔσονται $Z+\Xi+\Pi=\alpha$. I

$8Z+4\Xi+2\Pi=\alpha+\beta$ II

$27Z+9\Xi+3\Pi=\alpha+\beta+\gamma$ III

διπλῆ ἡ I ἀφαιρείσθω ἀπὸ τῆς . . II

$6Z+2\Xi=\beta-\alpha$ IV

ὁμοίως ἡ αὐτὴ τριπλῆ ἀφαιρείσθω τῆς III

$24Z+6\Xi=\beta+\gamma-2\alpha$ . . . V. ἀπὸ δὲ τῆς τετραπλῆς IV ἀφαιρείσθω ἡ V

$2\Xi=3\beta-\gamma-2\alpha$. καὶ $\Xi=\frac{3\beta-\gamma-2\alpha}{2}$· θῶμεν τὸ διπλοῦν τοῦτο εἰς τὴν IV, καὶ εὑρίσκεται τὸ Ζ,

$6Z+\frac{6\beta-2\gamma-4\alpha}{2}=\beta-\alpha$

$12Z+6\beta-2\gamma-4\alpha=2\beta-2\alpha$

$$Z=\frac{2\beta-6\beta-2\alpha+4\alpha+2\gamma}{12}=\frac{2\alpha-4\beta+2\gamma}{12}=Z=\frac{\alpha-2\beta+\gamma}{6}$$

θῶμεν ἤδη τὰς εὑρεθείσας εἰς τὴν $Z+\Xi+\Pi=\alpha$, καὶ ἔςαι

$$\frac{\alpha-2\beta+\gamma}{6}+\frac{3\beta-\gamma-2\alpha}{2}+\Pi=\alpha.$$

$\alpha-2\beta+\gamma+9\beta-3\gamma-6\alpha+6\Pi=6\alpha$

καὶ $6\Pi=6\alpha-\alpha+2\beta-\gamma-9\beta+3\gamma+6\alpha$. $\Pi=\dfrac{11\alpha-7\beta+2\gamma}{6}$

ἄρα $K=\dfrac{(\alpha-2\beta+\gamma)\nu^3+(9\beta-3\gamma-6\alpha)\nu^2+(11\alpha-7\beta+2\gamma)}{6}$..

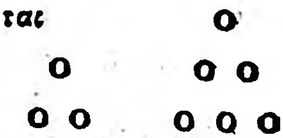
Β'. καὶ κατὰ τοὺς δύω τύπους Α καὶ Β Ἐκφρασθήσονται οἱ ἐσχηματισμένοι ἀριθμοί.

§. 562. Ἐὰν δ' ἀναλόγως καὶ τὰς λοιπὰς τάξεις ἐκφράσωμεν, ἔσονται.

τάξεις	$\tau=$	$K=$
1	$A\nu+B$	$\Xi\nu^2+O\nu$
2	$A\nu^2+B\nu+\Gamma$	$\Xi\nu^3+O\nu^2+\Pi\nu$
3	$A\nu^3+B\nu^2+\Gamma\nu+\Delta$	$\Xi\nu^4+O\nu^3+\Pi\nu^2+P\nu$
4	$A\nu^4+B\nu^3+\Gamma\nu^2+\Delta\nu+E$	$\Xi\nu^5+O\nu^4+\Pi\nu^3+P\nu^2+\Sigma\nu$
5	$A\nu^5+B\nu^4+\Gamma\nu^3+\Delta\nu^2+E\nu+Z$	$\Xi\nu^6+O\nu^5+\Pi\nu^4+P\nu^3+\Sigma\nu^2+T\nu$
μ	$A\nu^{\mu}+B\nu^{\mu-1}+\Gamma\nu^{\mu-2}\,..\,Z\nu+H$	$\Xi\nu^{\mu}+O\nu^{\mu-1}\,....\,T\nu$

καὶ φανερὸν ἑκάςη ἔκθεσις τοιαύτη, ἐν ᾗ συνεργάτης ἀόριςος ἀριθμὸς κατὰ τάξιν τῶν ἄνω ἐκθέσεων, σειρὰ εἶναι ἀριθμητικὴ, καὶ ὅταν ἢ ὁ ἔσχατος ὅρος ἄνευ αὐτοῦ τοῦ συνεργάτου, τὸν γενικὸν ὅρον παρίςησιν ὁ τύπος, καὶ ὁ μείζων ἐκθέτης τοῦ συνεργάτου δείκνυσι τὴν τάξιν τῆς σειρᾶς· ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὸν ἔσχατον ὅρον εἶναι ὁ συνεργάτης, τότε τὸ κεφάλαιον παρίςησιν ἡ ἔκθεσις, καὶ ὁ μέγιςος ἐκθέτης παρὰ μονάδα δείκνυσι τὴν τάξιν τῆς σειρᾶς.

§. 563. Οἱ μαθηματικοὶ καλοῦσιν ἐσχηματισμένους ἀριθμοὺς ἐκείνους, ὧν τινων αἱ μονάδες εἰς σχῆμα κανονικὸν παρίςανται, ὡς ὁ 3 καὶ 6 παρίςανται εἰς τρίγωνον, καθὼς εἰς τὸ σχῆμα φαίνεται· οὕτω καὶ εἰς τὰ τετράγωνα, πεντάγωνα κ.τ.λ. καὶ γενικῶς πολύγωνοι ἀριθμοὶ λέγονται, καθότι σχῆμα ἀποτελεῖ ἕκαςος τούτων ἀριθμός· διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τούτους, ληφθήτω ἡ σειρὰ ἡ γενική, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος μονὰς $1, 1+\delta, 1+2\delta, 1+3\delta, 1+\nu\delta$ κ.τ.λ. . . . I



Ἐὰν δὲ κατὰ τάξιν συνάψωμεν τοὺς ἡγουμένους ὅρους αὐτῆς, γίνεται σειρὰ δευτέρας τάξεως οὕτω.

$1, 2+\delta, 3+3\delta, 4+6\delta, 5+10\delta$ κ.τ.λ. . . . II

Ἐὰν δὲ εἰς τὸν τύπον A (§. 560)

$$\tau=\frac{(\alpha+\gamma-2\beta)\nu^2+(8\beta-5\alpha-3\gamma)\nu+(6\alpha+2\gamma-6\beta)}{2}$$

θῶμεν ἀντὶ α τὸν πρῶτον ὅρον τῆς II σειρᾶς 1, ἀντὶ β τὸν δεύτερον $2+\delta$, ἀντὶ γ τὸν τρίτον $3+3\delta$, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἔσχατον ὅρον αὐτῆς τῆς σειρᾶς οὕτω·

$$\tau=\frac{(1+((3+3\delta)-(4+2\delta))\nu^2+((16+8\delta)-5-(9+9\delta))\nu+}{2}$$

$$\frac{(6+6+6\delta)-(12+6\delta))}{2}=\frac{\delta\nu^2+(2-\delta)\nu}{2}$$ · καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τύπον εὑρίσκονται οἱ ἐσχηματισμένοι ὅλοι ἀριθμοί·

θῶμεν εἰς αὐτὸν τὸν τύπον $\delta=1$ καὶ γίνεται $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ ὁ τύπος, δι' οὗ εὑρίσκονται οἱ τρίγωνοι ἀριθμοί· ἐὰν ἀντὶ $\nu=1$,

$=2, =3, =4, =5$, κ. τ. λ. λάβωμεν, τότε οὕτω παρίςανται

1, 3, 6, 10, 15, 23, 28, 36 κ. τ. λ. . . . . . .
τρίγωνοι ἀριθμοί

Ἐὰν δὲ θῶμεν $\delta=2$, γίνεται ὁ τύπος $\tau=\nu^2$, δι' οὗ τετράγωνοι ἀριθμοὶ ἐξέρχονται, ἐὰν $\nu=1, =2$ κ. τ. λ. θῶμεν·

1, 4, 9 16, 25, 36, 49, 64 κτλ. . . . . τετράγωνοι.

Ἐὰν δὲ $\delta=3$ θῶμεν, γίνεται $\tau=\frac{3\nu^2-\nu}{2}=\frac{\nu(3\nu-1)}{2}$ ὁ τύπος, δι' οὗ οἱ πεντάγωνοι εὑρίσκονται, ἐὰν $\nu=1, =2, =3$ κτ. θῶμεν· ἡ δὲ σειρὰ οὕτω.

1, 5, 12, 22, 35, 51 κ. τ. λ. . . . . . πενταγωνοι.

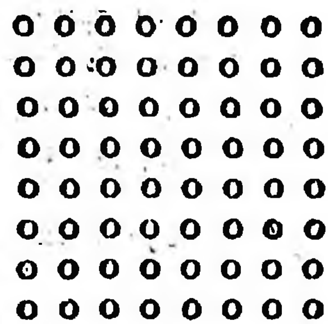
Ἐὰν δὲ $\delta=4$, ἔςαι $\tau=2\nu^2-\nu$, δι' οὗ οἱ ἑξάγωνοι εὑρίσκονται· ἐὰν $\nu=1, =2, =3$ κ. τ. λ. θῶμεν· οὕτω.

1, 6, 15, 28, 45, 66 κτ. . . . ἑξάγωνοι.

Ἐὰν δὲ καὶ $\delta=5$, εὑρίσκομεν $\tau=\frac{5\nu^2-3\nu}{2}$, δι' οὗ οἱ ἑπτάγωνοι εὑρίσκονται, ἐὰν $\nu=1, =2, =3$ κτ. θῶμεν· οὕτω,

1, 7, 18, 34 κ. τ. λ. . . . ἑπτάγωνοι καὶ οὕτως ἐκ τῶν τύπων τούτων $\frac{\nu^2+\nu}{2}$, ν^2, $\frac{3\nu^2-\nu}{2}$, $2\nu^2-\nu$, $\frac{5\nu^2-3\nu}{2}$ κ. τ. λ. ἢ καὶ οὕτω $\frac{\nu^2+\nu}{2}$, $\frac{2\nu^2-0}{2}$, $\frac{3\nu^2-\nu}{2}$, $\frac{4\nu^2-2\nu}{2}$, $\frac{5\nu^2-3\nu}{2}$ κ. τ. λ. εὑρίσκεται ἑτέρα ἀριθμητικὴ σειρὰ τῆς πρώτης τάξεως, καὶ ἕκαςος ὅρος αὐτῆς αὔξει εἰς τὸν ἀριθμητὴν μὲ τὴν διαφορὰν $\nu^2-\nu$, ἤτοι ὁ συνεργὸς τοῦ ν τοῦ πρώτου μέρους τοῦ ἀριθμητοῦ αὔξει μὲ μίαν μονάδα, τὸ δὲ δεύτερον μέρος ἐλαττοῦται κατὰ ν καὶ εὐκόλως εὑρίσκομεν ἕκαςον τύπον ἑνὸς ἐσχηματισμένου ἀριθμοῦ, εὑρόντες τὸν ὅρον αὐτῆς τῆς σειρᾶς, ὅςις ἔχει τάξιν παρὰ δύω μονάδας, ἢ ὁ ἐσχηματισμένος· ζητεῖται ἀριθμὸς, δηλ. ὁ δεκαγωνικὸς ἀριθμὸς ἔχει τύπον τὸν ὅρον, ὅςις ὄγδοος εἶναι αὐτῆς τῆς σειρᾶς· ὁ $\frac{8\nu^2-6\nu}{1}$. ὁ δὲ πεντηκοντάγωνος ἔχει τύπον $\frac{48\nu^2-46\nu}{2}$ κτλ.

Σημείωσις.



Παρίςανται οὗτοι οἱ ἐσχηματισμένοι ἀριθμοὶ εἰς ἐπίπεδα, ἢ διὰ μηδενικῶν σημείων γραφόμενοι, ἢ διὰ σφαιριδίων πυροβολικῶν, ἢ διὰ μήλων, ἢ δι᾽ ἄλλων σωμάτων σφαιρικῶν, ἡ δὲ πλευρὰ ἑκάςου τοιούτου σχήματος ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ὁ ν, ὁποῦ παριςάνει τὴν τάξιν τοῦ ὅρου, ὁποῦ εὑρίσκεται εἰς αὐτὴν τὴν σειράν· ἔςω ἡ τετραγωνικὴ σειρὰ, 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. καὶ ζητεῖται ὁ 64 νὰ παραςαθῇ· ἐπεὶ δὲ οὗτος ὁ ὅρος ὄγδοος, ἄρα ἡ πλευρὰ αὐτοῦ 8 ἔχει μονάδας.

§. 564. Εὑρίσκομεν δὲ καὶ τὰ κεφάλαια τῶν τοιούτων ἐσχηματισμένων ἀριθμῶν, ἐὰν αὖθις τὴν γενικὴν σειρὰν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ λάβωμεν 1, 2+δ, 3+3δ, 4+10δ κτ. καὶ εἰς τὸν εὑρεθέντα τύπον K (§. 561). K=

$$\frac{(\alpha+\gamma-2\beta)\nu^3+(9\beta-6\alpha-3\gamma)\nu^2+(11\alpha+2\gamma-7\beta)\nu}{6}$$ θῶμεν

ἀντὶ μὲν α, τὸ πρῶτον μέρος 1 τῆς σειρᾶς, ἀντὶ δὲ β, τὸ δεύτερον $2+\delta$, ἀντὶ δὲ γ, τὸ τρίτον $3+3\delta$· καὶ ὀρθῶς αὐτὰ εἰς τὸ ἁπλούστερον φέρομεν.

$$\frac{(1+(3+3\delta)-(4+2\delta)\nu^3+((18+9\delta)-6-(9+9\delta))\nu^2+((11+(6+6\delta)-(14+7\delta))\nu}{6}$$

καὶ $K=\dfrac{\delta\nu^3+3\nu^2+(3-\delta)\nu}{6}=\frac{1}{6}\delta\nu^3+\frac{1}{2}\nu^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\delta)\nu$· ἐὰν λοιπὸν $\delta=1$, γίνεται ὁ τύπος $\dfrac{\nu^3+3\nu^2+2\nu}{6}=\dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.\ 2.\ 3.}$ τὸ κεφάλαιον τῆς τριγωνικῆς σειρᾶς· καὶ ἐὰν K^3 K^4 K^5 κ. τ. λ. τὰ κεφάλαια τῶν ἐσχηματισμένων ἀριθμῶν φανερώνουσιν, δηλ: K^3 τὸ κεφάλαιον τῶν τριγώνων ἀριθμῶν. K^4 τὸ τῶν τετραγώνων. καὶ K^5 τὸ τῶν πενταγώνων καὶ K^μ τὸ τῶν μγώνων· ἔσται

$$K^3=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.\ 2.\ 3.}\quad .\ .\ .\ .\ .\quad \text{I.}$$

Θῶμεν ἔτι $\delta=2$, ἔσται $K^4=\dfrac{2\nu^3+3\nu^2+\nu}{6}=\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{2.\ 3.}$. II.

Ἐὰν δὲ $\delta=3$, ἔσται $K^5=\dfrac{3\nu^3+3\nu^2}{6}=\dfrac{\nu^3+\nu^2}{2}$ . . . . III.

Ἐὰν δὲ $\delta=4$, ἔσται $K^6=\dfrac{4\nu^3+3\nu^2-\nu}{6}=\dfrac{\nu(\nu+1)(4\nu-1)}{2.\ 3.}$ IV.

Ἐὰν δὲ $\delta=5$, ἔσται $K^7=\dfrac{5\nu^3+3\nu^2-2\nu}{6}$ V

Καὶ εἰς αὐτὰ εὑρίσκομεν ὅτι ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ παρίστανται ὅλα τὰ κεφάλαια, καὶ ἡ διαφορὰ εἶναι τούτων $\dfrac{\nu^3-\nu}{6}=\dfrac{\nu(\nu^2-1)}{6}$. καὶ πρῶτος ὅρος $\dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{2.\ 3.}$. αὐτῆς

τῆς σειρᾶς εἶναι, τὸ κεφάλαιον τῶν τριγωνικῶν ἀριθμῶν· ὅθεν οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς αὐτῆς ὁ μὲν πρῶτος εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν τριγώνων ἀριθμῶν, ὁ δὲ Β΄. τὸ τῶν 4 γώνων, ὁ δὲ Γ΄. τὸ τῶν 5 γώνων· καὶ καθόλου ἡ τάξις τοῦ ὅρου δείκνυσι τὸ κεφάλαιον τοῦ πολυγώνου ἀριθμοῦ παρὰ δύω μονάδας, ἣ ἀπαιτεῖ τὸ πολύγωνον τοῦ ἀριθμοῦ· ἄρα εὐκόλως εὑρίσκομεν ἕκαςον κεφάλαιον τῶν ἐσχηματισμένων ἀριθμῶν, ἐὰν τὸν ὅρον αὐτῆς τῆς σειρᾶς εὕρωμεν παρὰ δύω μονάδας, ἢ ὁ ἐσχηματισμένος ἀπαιτεῖ ἀριθμός· δηλ: ἐὰν ὁ πενταγωνικὸς ἀριθμὸς ζητῆται, ὁ τρίτος ὅρος εὑρίσκεται· ἐὰν δ' ὁ δεκάγωνος, ὁ ὄγδοος κτ. οὕτος δ' εὑρίσκεται, ἐὰν εἰς τὸν πρῶτον ὅρον $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3.\ 6}$ τοσαυταπλάσιον προσθῶμεν διαφορὰν $\frac{\nu-1}{6}$ παρὰ τρεῖς μονάδας, δηλ: ἐλάττονα, ἢ τὸ πολύγωνον ἀπαιτεῖ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅτι ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἄρχεται νὰ προςίθεται ἡ διαφορά· π. χ. ζητεῖται τὸ κεφάλαιον τῶν 8γώνων ἀριθμῶν· τοῦτο εἶναι $K^8 = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{2.\ 3.} + 5 . \frac{\nu^3-\nu}{6}$. ἐὰν δὲ τὸ κεφάλαιον τῆς σειρᾶς μγώνων ἀριθμῶν ζητῆται, ἔςαι $K^\mu = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{6} + \frac{(\alpha-3)(\nu^3-\nu)}{6} = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)+(\mu-3)(\nu^3-\nu)}{1.\ 2.\ 3.}$.

§. 565. Ταῦτα ὅλα τὰ κεφάλαια γίνονται ἀριθμητικὴ σειρὰ τῆς ἀνωτέρω τρίτης τάξεως, ἐὰν $\nu=1, =2, =3$ κτ. καὶ οὕτως ἀποτελοῦνται οἱ ὅροι τούτων ἀριθμοὶ ἐσχηματισμένοι, ςερεοὶ πυραμιδοειδεῖς καλούμενοι, εἰς τρεῖς διαςασεις μῆκος, πλάτος καὶ βάθος, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ κεφαλαίου τῶν τριγώνων ἀριθμῶν ἐξέρχονται οἱ πυραμιδοειδεῖς ἀριθμοί. οἵτινες ἔχουσι βάσιν τρίγωνον, ὡς εἰς τὸν τύπον $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{2.\ 3.}$. Ἐὰν θῶμεν $\nu=1$, $=2$, κ. τ. λ. ἐξέρχεται ἡ σειρὰ 1. 4. 10. 20. 35. 56. 84. κ. τ. λ. Τρίγωνοι πυραμοειδεῖς καλούμενοι· ἀπὸ δὲ ταύτης $\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{2.\ 3.}$ ἐξέρχονται, ἐὰν $\nu=1,=2,=3,=4$, κτ. 1. 5. 14. 30. 55 κ. τ. λ. Τετράγωνοι πυραμοειδεῖς καὶ ἐκ τῆς $\frac{\nu^3+\nu^2}{2}$ ἐξέρχονται.

1. 6. 18. 40. 75. 126. κ. τ. λ. Πεντάγωνοι πυραμοειδεῖς. καὶ ἐκ τῆς $\frac{\nu(\nu+1)(4\nu-1)}{2.\ 3.}$ ἐξέρχονται.

1. 7. 22. 50. 95. 161. ἑξάγωνοι πυραμοειδεῖς. καὶ οὕτω καὶ ἐκ τῶν λοιπῶν τύπων ἐξέρχονται 7γωνοι, 8γωνοι, 9γωνοι, πυραμοειδεῖς ἀριθμοὶ κ. τ. λ.

Ἕκαςου εἶδος τῶν πυραμίδων διορίζεται ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς σειρᾶς παρὰ μίαν μονάδα· δηλ: ἐὰν ὁ δεύτερος ὅρος εἶναι 4, τριγωνικαὶ πυραμίδες, καθ' ὅτι ἀπὸ βάσιν τρίγωνον γίνονται. Ἐὰν δὲ 5, τετραγωνικαὶ ἀπὸ βάσιν τετράγωνον, καὶ ἐὰν 7, ἑξάγωνοι, καὶ ἀπὸ βάσιν ἑξάγωνον· καλοῦνται δὲ σχήματα πυραμιδοειδῆ, καθ' ὅτι σχηματιζόμενα ἀπὸ οἱανδήποτε βάσιν, εἰς ὀξὺ λήγουσιν εἰς ἓν σφαιρίδιον, ἐὰν αὐτὰ κατασκευάσωμεν ἀπὸ σώματα οἱαδήποτε σφαιρικά· διὰ τοῦτο καὶ ὁ πρῶτος ὅρος ὅλων τῶν σειρῶν μονάς, ἔτι ὅσας μονάδας ἔχει μία πλευρὰ τῆς βάσεως τῶν τοιούτων πυραμίδων, ἀπὸ τόσας θέσεις ἀπαρτίζεται καὶ ὅλη ἡ πυραμίς· ἑκάστη δὲ πλευρὰ τῆς βάσεως συνίσταται ἀπὸ τοσούτων μονάδων, ὅσα ἔχει ἡ τάξις τοῦ ὅρου αὐτῆς τῆς σειρᾶς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

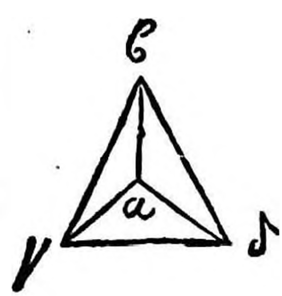
Περὶ προβλημάτων ἀνηκόντων τῇ Β΄. καὶ Γ΄. τάξει τῶν ἀριθμητικῶν σειρῶν.

§. 566. Εἰς τὰς πολεμικὰς ἀποθήκας συνηθίζουσιν οἱ ἐργάται νὰ ἐπισωρεύωσι τὰς σφαίρας τῶν κανονίων εἰς σχῆμα πυραμίδων, διὰ νὰ εὑρίσκωσι τὸ ποσὸν αὐτῶν ἐν εὐκολίᾳ· καὶ λαμβάνουσι βάσιν ὁτὲ τρίγωνον, ὁτὲ τετράγωνον, ὁτὲ παραλληλεπίπεδον, καὶ ἄλλοτε ἄλλως· πῶς ὅμως τὸ ποσὸν αὐτῶν εὑρίσκουσιν, ἡμεῖς ἐν εἴδει προβλημάτων τοῦτο διασαφήσομεν.

Πρόβλημα α΄.

Α΄. Δεδόσθω μία πυραμὶς σφαιρίων ἡ αβγδ, καὶ ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῆς τε βάσεως, καὶ ὅλης τῆς πυραμίδος.

Λύσις.



Αὕτη συνίσταται ἀπὸ θέσεις σφαιρῶν μίαν ἐπάνω τῆς ἄλλης, ἄχρι τῆς κορυφῆς, ὅπου μόνον ἡ ἐσχάτη θέσις ἔχει ἓν σφαιρίδιον ἡ ἄνω· ἄρα ἡ ἑξῆς δευτέρα ἔχει 3, καὶ ἡ ἑξῆς τρίτη 6, καὶ ἡ ἑξῆς τετάρτη 10, ἄρα αἱ θέσεις εἶναι 1. 3. 6. 10. κτλ.

κατὰ σειρὰν ἀριθμητικὴν τῆς δευτέρας τάξεως, ὅπου $\alpha = 1$, ν δ' ὁ ἀριθμὸς τῶν θέσεων, καὶ $\tau =$ τῇ ἐσχάτῃ βάσει· αὐτοῦ λοιπὸν εὑρίσκομεν τὴν βάσιν $= \tau = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$. καὶ τὸ κεφάλαιον, ἤτοι ὅλην τὴν πυραμίδα $= K = \frac{((\nu+1)(\nu+2)}{2.\ \ 3.}$.

ἐὰν λοιπὸν μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως γδ, ἢ μίαν κεφαλὴν τῆς πυραμίδος γα μετρήσωμεν, τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι τὸ ν εἰς τὸν τύπον, καὶ οὕτω τὰ πάντα εὑρίσκομεν· ἔςω ὅτι ἔχει ἡ κεφαλὴ μιᾶς τοιαύτης πυραμίδος 250 σφαίρας, ἄρα ἡ βάσις $= \tau = \frac{\nu(\nu+1)}{2} = \frac{250.\ 151}{2} = 125 \cdot 251 = 31375$· ἡ βάσις ὅλη μόνον· ὅλη δὲ ἡ πυραμὶς $K = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{2.\ \ 3.} = \frac{250.\ 251.\ 255}{2.\ \ 3.} = 125.\ 251.\ 84. = 2635500.$

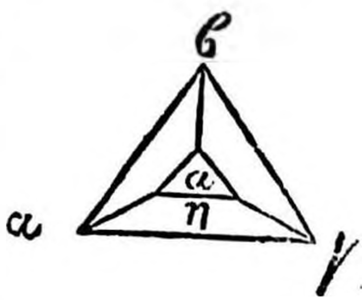
Σημείωσαι κεφαλὴν νοοῦμεν τὸ ἐκτὸς μέρος τῆς γωνίας.

Πρόβλημα β'.

Β'. Δεδόσθω ἔτι μία κολωβὴ πυραμὶς, καὶ ζητεῖται τὸ ἐν αὐτῇ πλῆθος τῶν σφαιρῶν.

Λύσις.

Πρῶτον εὑρίσκω αὐτὴν κατὰ τὸ α' πρόβλημα, ὡς σώαν πυραμίδα, καὶ εἶτα μετρῶ τὴν βάσιν τῆς ἐλλειποῦς πυραμίδος, καὶ τὸ κεφάλαιον τῆς ἐλλειποῦς ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τῆς ὅλης, τὸ δὲ μένον τὸ ζητού-

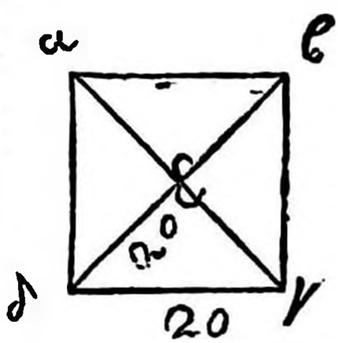


μενον ποσὸν ἐςί. Ἔςω τῆς κολωβῆς πυραμίδος ἡ πλευρὰ $αδ=30=ν$ τὸ δὲ $K=\frac{30.\ 31.\ 32}{2.\ 3}=310.\ 16=4960.$ ἔςω καὶ ἡ πλευρὰ ἡ ἄνω $η=7=ν$· ἄρα $K=\frac{7.\ 8.\ 9}{2.\ 3}=$ $7.\ 4.\ 3=84$· καὶ $4960-84=4876$ αἱ τῆς κολωβῆς πυραμίδος σφαῖραι.

Πρόβλημα γ'.

Γ'. Δεδόσθω πυραμὶς, ἧς ἡ βάσις τετράγωνος, καὶ ζητεῖται ἡ βάσις, καὶ ἡ ὅλη πυραμίς.

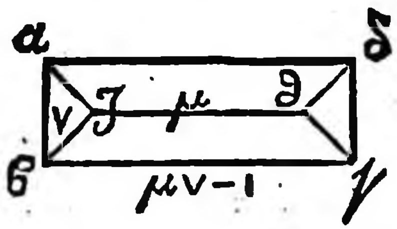
Λύσις.



Καὶ ἐν ταύτῃ τῇ πυραμίδι εὑρίσκονται θέσεις ἡ μία ἐπάνω τῆς ἄλλης σωρηδὸν, ἡ μὲν ἐπάνω εἰς τὴν κορυφὴν βάσις συνίςαται ὑπὸ μόνης μιᾶς σφαίρας, ἡ δ' ἑξῆς ὑπὸ τεσσάρων, καὶ ἡ ἑξῆς ὑπὸ ἐννέα κ. τ. λ. μέχρι τῆς βάσεως, ἥτις ἡ μεγίςη θέσις ὅλων τῶν θέσεων· αἱ δὲ βάσεις, 1, 4, 9 κ. τ. λ. ἀριθμητικὴ σειρὰ τῆς β'. τάξεως τῶν τετραγώνων ἐςί· καὶ ταύτης $α=1$. $τ=$ τῇ βάσει, καὶ $ν=$ τῇ πληθύϊ τῶν θέσεων· ἄρα ἐὰν μετρήσωμεν τὰς θέσεις, ἔχομεν τὸ $ν$, καὶ ἐπομένως τὴν βάσιν $=τ$, καὶ ὅλην $=K$. Ἔςι δὲ $τ=ν^2$ καὶ $K=\frac{ν(ν+1)(2ν+1)}{2.\ 3}$· εὑρίσκω δὲ καὶ τὸ $ν=20$. ἄρα τὸ μὲν $τ=20^2=400$· τὸ δὲ $K=\frac{20.\ 21.\ 41}{2.\ 3}=10.\ 7.\ 41=2870$, αἱ σφαῖραι ὅλης τῆς πυραμίδος· τὸ δὲ ν εὑρίσκω ἐὰν μετρήσω, ἢ τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως, ἢ τὴν κεφαλὴν τῆς πυραμίδος $=$ δε, ὡς ἄνω εὑρίσκεται καὶ ἡ κολωβὴ πυραμὶς ἡ τετραγωνική.

Πρόβλημα δ'.

Δ'. Συνειθίζουσι δὲ νὰ ἐπισωρεύωσι τὰς σφαίρας καὶ εἰς βάσιν παραλληλεπιπέδου, ὡς αβγδ, ἡ ὁποία πυραμὶς λήγει εἰς εὐθεῖαν γραμμὴν τὴν ζθ, τὴν ὁποίαν πλευρὰν τῆς πυραμίδος ὀνομάζουσι· εὑρίσκεται ὅμως οὕτω. Εὑρίσκονται εἰς τὴν πλευρὰν ζθ, μ σφαῖραι, μετὰ δὲ ταύτην τὴν γραμμὴν εὑρίσκεται ἡ θέσις ἀπὸ δύο γραμμῶν, ὅπου ἔχει κάθε μία $\mu+1$ σφαίρας, καὶ ἡ διπλῆ ὅλη ἡ θέσις $(2\mu+2)$. Ἡ δὲ τρίτη θέσις ἔχει τρεῖς γραμμὰς, μὲ μίαν περισσοτέραν σφαῖραν $\mu+2$. ἄρα ὅλη ἡ θέσις $=(3\mu+6)$. Ἡ δὲ τετάρτη θέσις ἀπὸ τεσσάρων γραμμῶν μὲ μίαν περισσοτέραν σφαῖραν· ὅλη ἡ θέσις $(4\mu+12)$ κ. τ. λ. ἄρα μ, $(2\mu^2+2)$, $(3\mu^3+6)$, $(4\mu^4+12)$, ἥτις σειρὰ ἀριθμητικὴ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ· ἐπεὶ δὲ ὁ τέταρτος ὅρος $(4\mu+12)=(4\mu+3.\ 4)=4(\mu+4-1)$, καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων $=\nu$, ἔσαι ὁ γενικὸς ἔσχατος ὅρος αὐτῆς τῆς σειρᾶς $=\nu(\mu+\nu-1)=$ τῇ βάσει τοῦδε τοῦ σκοποῦ. Ἔνθα τὸ μ εὑρίσκομεν, ἐὰν μετρήσωμεν τὴν ἄνω πλευρὰν τοῦ σωροῦ, τὸ δὲ ν ἐμφαῖνον τὰς θέσεις εὑρίσκεται, ἐὰν μίαν κόχην μετρήσωμεν· τὸ δὲ κεφάλαιον



αὐτῆς εὑρίσκεται, ἐὰν ἐν τῷ $K=(\frac{\alpha+\gamma-2\beta}{6})^3\nu+$

$(\frac{3\beta-6\alpha-3\gamma}{6})^2\nu+(\frac{11\alpha+2\gamma-7\beta}{6})\nu$ (§. 561.) ἀντὶ τοῦ α, τὸ μ τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς· ἀντὶ δὲ τοῦ β, τὸ $2\mu+2$ τὸν δεύτερον· ἀντὶ δὲ τοῦ γ τὸ $3\mu+6$, τὸν τρίτον ἀντικαταςήσωμεν· οὕτως εὑρίσκομεν $K=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+3\mu-2)}{2.\ 3}$.

Ἔςω τοιοῦτος τοίνυν παραλληλεπίπεδος σωρὸς, οὗ ἡ ἄνω πλευρὰ ζθ$=100=\mu$. ἡ δὲ κόχη $=10=\nu$· καὶ ζητεῖται ἡ βάσις, καὶ ὅλος ὁ σωρός.

Ἡ μὲν βάσις $=\tau=\nu(\mu+\nu-1)=10(100+10-1)=1090$. καὶ ὅλος ὁ σωρὸς $=K=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+3\mu-2)}{2.\ 3}=\frac{(10.\ 11)(20+300-2)}{2.\ 3}=\frac{(110)(18+300)}{2.\ 3}=110.\ 53=5830$.

Ἐὰν δὲ τὴν κάτω πλευρὰν $\beta\gamma$, π καλέσωμεν, ἔςαι $\pi=\mu+\nu-1$, καὶ $\mu=\pi+1-\nu$· ἀντικατάςησον ἐν τῷ $K=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+3\mu-2)}{2.\ 3}$ ἀντὶ μ τὸ ἴσον αὐτῷ $\pi+1-\nu$, εὑρίσκεις τὸ $K=\frac{\nu(\nu+1)(3\pi+1-\nu)}{2.\ 3.}$· ἔςι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν σφαιρῶν ἐν τῇ ἐλάττονι πλευρᾷ τοῦ παραλληλεπιπέδου, ὅσον ἐν τῇ κόχῃ ν· ἄρα εὑρίσκομεν τὸν σωρὸν, ἐὰν μόνον τὰς δύω πλευρὰς τοῦ παραλληλεπιπέδου μετρήσωμεν, τὴν μὲν μείζονα $=\pi$, τὴν δ' ἐλάττονα $=\nu$.

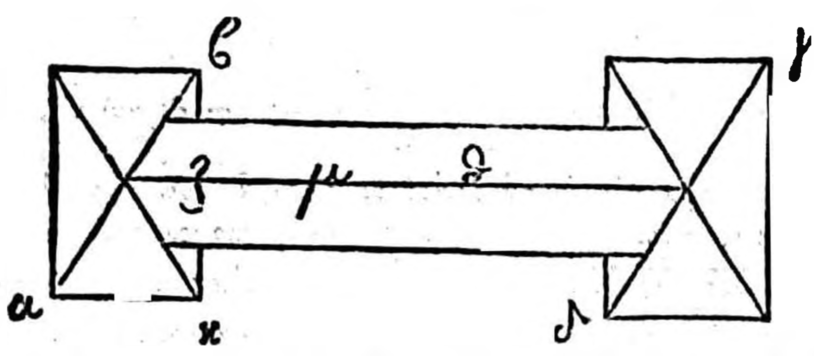
Ἔςω $\pi=109$, καὶ $\nu=10$. ἄρα $K=\frac{10.\ 11.\ (3.\ 109+1-10)}{2\ \ 3.}$ $=5830$ ὡς πρότερον.

Εὑρίσκομεν δὲ καὶ τὸν κολωβὸν σωρὸν γβ, ἐὰν εὕρωμεν αὐτὸν πρῶτον σῶον· ἔπειτα εὕρωμεν τὴν ἔλλειψιν αὐτοῦ· καὶ ταύτην ἀπὸ τοῦ ὅλου ἀφέλωμεν, τὸ λείψανον ἐςὶν ὁ ζητούμενος κολωβὸς σωρός.

Πρόβλημα ε'

Ε'. Ἐὰν δὲ ὁ σωρὸς κθ ζητηθῇ, ὅςτις εἰς τὰς δύω πυραμίδας αβ, καὶ δγ. ἐπακουμβᾷ, εὑρίσκεται τὸ εἶδος αὐτῆς οὕτω.

Ἔςω ἡ ἄνω πλευρὰ αὐτῆς $\zeta\theta = \mu$· ἡ ἑξῆς αὐτῆς κατωτέρα θέσις ἐκ δύω γραμμῶν σφαίρας ἐχουσῶν ἑκάςης $= \mu - 1$, καὶ ὅλη ἡ θέσις $= (2\mu - 2)$. ἡ τρίτη ἑξῆς θέσις ἐκ τριῶν σειρῶν ἑκάςης $= \mu - 2$· καὶ ὅλη $= (3\mu - 6)$· οὕτω καὶ ἡ τετάρτη $= (4\mu - 12)$, καὶ ἡ ν θέσις $= \nu(\mu - \nu + 1)$· καὶ ἡ σειρὰ οὕτω γίνεται μ, $(2\mu^2 - 2)$, $(3\mu^3 - 6)$ . . . . $\nu(\mu^\nu - \nu + 1)$· ἧς $\alpha = \mu$, $\beta = (2\mu - 2)$, $\gamma = (3\mu - 6)$ καὶ $\tau = \nu(\mu + 1 - \nu)$ τῇ βάσει· καὶ ἐκ τοῦ ἀνωτέρου τύπου (§. 561). εὑρίσκεται τὸ $K = \dfrac{\nu(\nu+1)(3\mu - 2\nu + 2)}{2 \cdot 3}$.



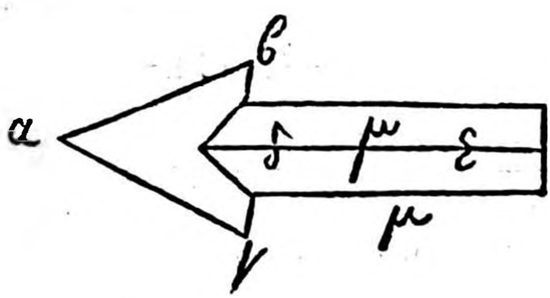
Ἐὰν τοίνυν μετρήσω τὴν ἄνω πλευρὰν $\mu = 30$ καὶ τὴν κόχην $\nu = 10$, εὑρίσκω $\tau = 210$ τὴν βάσιν αὐτοῦ, καὶ $K = 7920$ τοῦ ὅλου σωροῦ.

Ἐὰν θῶμεν καὶ ἐνταῦθα τὴν κάτω πλευρὰν $\pi = \mu - \nu + 1$, ἔςαι τὸ $\mu = \pi + \nu - 1$ καὶ τοῦ $\pi + \nu - 1$ ἀντὶ τοῦ μ ἀντικαθιςαμένου, εὑρίσκεται $K = \frac{\nu(\nu+1)(3\pi+\nu-4)}{2.\ 3}$· καὶ οὕτως ἐκ μόνων τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου εὑρίσκομεν τόντε ὅλου σωροῦ, καὶ τὸν κολωβόν.

Πρόβλημα ς'.

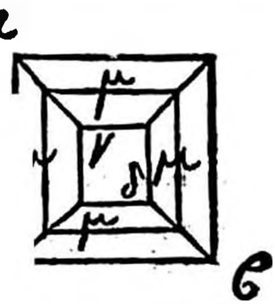
ς'. Ἐὰν δὲ ἐπακουμβίζῃ μόνον εἰς μίαν πυραμίδα τὴν αβγ ὁ παραλληλεπίπεδος σωρὸς, ἔςαι ἡ ἄνω πλευρὰ $=\mu$, καὶ ἡ ἑξῆς θέσις ἐκ δύω ὁμοίων $=2\mu$, καὶ ἡ τρίτη ἐκ τριῶν $=3\mu$ καὶ $\nu\mu$· καὶ ἡ σειρὰ γίνεται $\mu, 2\mu, 3\mu \ldots \nu\mu$ ἀριθμητικὴ τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἧς τὸ $K = \frac{2\alpha\nu + (\nu^2 - \nu)\delta}{2}$

$= \frac{2\mu\nu + \mu\nu^2 - \mu\nu}{2} = \frac{\mu\nu^2 + \mu\nu}{2} = \frac{\mu\nu(\nu+1)}{2}$· ἐὰν τοίνυν $\nu = 10$ καὶ $\mu = 100$, ἔςαι $\pi = \nu\mu = 10.100 = 1000$, καὶ $K = \frac{100.10(10+1)}{2} = 5500$.



Πρόβλημα ζ'.

Ζ'. Ἐπισωρεύουσιν ἔτι καὶ εἰς ἕτερον εἶδος πυραμίδος, ἧς ἡ βάσις τετράγωνος αδ, καὶ ἐν αὐτῇ ἑτέρα βάσις κενὴ τετράγωνος γδ· ὥςε ἐπισωρευομένου τοῦ σχήματος, μένει ἐν τῷ μέσῳ τόπος κενὸς, καὶ ἔσται αὐτῆς ἡ ἄνω πλευρὰ $=\mu$, ἡ δ' ἑξῆς θέσις συνίσταται ἀπὸ δύω σειρῶν τῆς μὲν ἐντὸς $=\mu-1$, τῆς δ' ἐκτὸς $=\mu+1$, καὶ ὅλη ἡ θέσις $=2\mu$· οὕτω καὶ ἡ τρίτη θέσις $=3\mu$· ἡ τετάρτη $=4\mu$ κ.τ.λ. καὶ ἔσται ἡ σειρὰ μ, 2μ, 3μ . . . . . $\nu\mu$, ὡς ἄνω τὸ μὲν $\tau =$ τῇ βάσει $=\nu\mu$, ἡ ὅλη δὲ $K=\frac{\mu\nu(\nu+1)}{2}$· καὶ οὕτω κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐπιλύονται τὰ διάφορα εἴδη τῶν πυραμίδων, καθ' ἃ οἱ πολεμικοὶ τὰς σφαίρας ἐπισωρεύουσι.



§. 567. Ἐὰν τὸ τρίγωνον αβγ καλῶς θεωρήσωμεν, εὑρίσκομεν αὐτὸ ὅτι συνίσταται ἀπὸ πολλῶν θέσεων 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 κ.τ.λ. ὧν ἡ πρώτη $=1$ καὶ ἡ δευτέρα $=2$ καὶ ἡ ἑξῆς $=3$ καὶ ἡ $\nu=\nu$· οὕτω 1, 2, 3, 4, 5, 6. . . ν ἀριθμητικὴ σειρὰ τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἧς $\alpha=1$, $\delta=1$ καὶ τὸ $\tau=\nu$ ἄρα τὸ $K= 2\alpha\nu+\frac{(\nu^2-\nu)\delta}{2}=\nu+\frac{\nu^2-\nu}{2}=\frac{2\nu+\nu^2-\nu}{2}=\frac{1}{2}\nu(\nu+1)=$ τῷ κεφαλαίῳ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἄρα εὑρίσκομεν πᾶν τρίγωνον ἰσόπλευρον, ἐὰν μόνον μίαν πλευρὰν ἔχωμεν.

α
o — 1
o o — 2
o o o — 3
o o o o — 4
o o o o o — 5
o o o o o o — 6
o o o o o o o — 7
β γ

Ἔστω ἡ πλευρὰ τριγώνου τινὸς $=\nu=10$ καὶ τὸ ὅλον $=55$· ἐπεὶ δὲ ἐν ὅλοις τοῖς εἴδεσι τῶν πυραμίδων τὸ εἴδος τοῦ τριγώνου $\frac{1}{2}\, \nu(\nu+1) = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ εὑρίσκεται, ἕπεται πρὸς εὕρεσιν αὐτῶν ὅλων ὁ ἑξῆς γενικὸς κανών.

§. 568. Ἐν ὅλοις τοῖς εἴδεσι τῶν πυραμιδοειδῶν σειρῶν τῇ ἄνω πλευρᾷ τοῦ σωροῦ συνάπτομεν τὰς δύω παραλλήλους πλευρὰς τῆς βάσεως, καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦτο πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸ κεφάλαιον τοῦ τριγώνου $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ διὰ τοῦ 3, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὸν σωρὸν, καὶ ἕκαστον εἶδος πυραμίδος. π. χ.

Α΄. Ἐπὶ τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, ἡ μὲν ἄνω πλευρὰ $\mu = 1$, ἡ δὲ πλευρὰ τῆς βάσεως $= \nu$, ἡ ἀπέναντι παράλληλος $= 1$· ἄρα $\frac{1+1+\nu}{3} = \frac{2+\nu}{3}$· τοῦτο δὲ ἐπὶ τὸ $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ τρίγωνον πολλαπλασιασθὲν, γίνεται $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$. $\frac{\nu+2}{3} = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{2.\ 3}$, ὡς ἄνω.

Β΄. Ἐπὶ τῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἡ ἄνω πλευρὰ $= \mu = 1$ ἡ τῆς βάσεως $= \nu$ καὶ ἡ παράλληλος αὐτῇ $= \nu$· ἄρα $\frac{2\nu+1}{3}$ ἐπὶ τὸ $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ γίνεται $= \frac{\nu(\nu+1)}{2} \cdot \left(\frac{2\nu+1}{3}\right)$, ὡς ἄνω.

Ἐπὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου σωροῦ ἡ ἄνω πλευρὰ $= \mu$, ἡ τῆς βάσεως $= \mu+\nu-1$, καὶ ἡ ἀπέναντι ὁμοίως $= \mu+\nu-1$· ἄρα $(\mu+\nu-1+\mu+\nu-1+\mu)\ \frac{1}{3} = \frac{3\mu-2\nu-2}{3}$· τοῦτο ἐπὶ τὸ $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ γίνεται $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

$\frac{3\mu+2\nu-2}{3} = \frac{\nu(\nu+1)(3\mu+2\nu-2)}{2.\ 3}$, ὡς ἄνω.

Δ'. Ἐπὶ τοῦ ἐπακουμβοῦντος εἰς δύο πυραμίδας σωροῦ, ἡ μὲν ἄνω πλευρὰ $=\mu$, αἱ δὲ δύο παράλληλοι τῆς βάσεως πλευραὶ $=2\mu-2\nu+2$, καὶ ὡς ἀνωτέρω $\frac{\mu+2\mu-2\nu+2}{3} \cdot \frac{\nu(\nu+1)}{2} = \frac{\nu(\nu+1)(3\mu-2\nu+2)}{2.\ 3}$, ὡς ἄνω· οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εἰδῶν, ἐὰν μόνον ὀρθῶς τὴν ἄνω πλευρὰν λάβῃς, καὶ τὴν μέσην τῆς βάσεως, καὶ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς· ἐὰν δὲ μὴ ἡ πλευρὰ ὡς εἰς τὴν τριγωνικὴν βάσιν, τὴν μονάδα λαμβάνομεν.

§. 309. Ἐὰν δὲ ἀνάπαλιν δοθῇ τὸ πλῆθος τῶν σφαιρῶν, καὶ ζητῆται ἐξ αὐτῶν πυραμίδα ἐπισωρευθῆναι, ἧς ἡ βάσις τρίγωνος, ἐκ πόσων σφαιρῶν ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως συσταθήσεται, ἵνα ἀπαρτηθῇ ἡ πυραμὶς ἔχουσα τὸ δοθὲν πλῆθος τῶν σφαιρῶν; τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν ἐκ τοῦ κεφαλαίου δοθέντος τὸ ν εὕρωμεν· ἦν γὰρ ἐκεῖ (Πρόβλ. α.) τὸ $K = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{2.\ 3} = \frac{\nu^3+3\nu^2+2\nu}{6}$· ἄρα $6K = \nu^3+3\nu^2+2\nu$ ἐξίσωσις τοῦ Γ' βαθμοῦ· ἀλλὰ ταύτην μήπω ἐπιλύειν μαθόντες, ὅπερ ἐν τοῖς ἑξῆς γενήσεται, ἐπὶ τὸν ἀκόλουθον τρόπον χωρήσωμεν· ἐπεὶ $6K = \nu^3+3\nu^2+2\nu$, ἔσται τὸ $6K > \nu^3$, ἐὰν τὸ $3\nu^2+2\nu$ ἀφέλωμεν· ἄρα καὶ $\sqrt[3]{6K} > \nu$· ἔτι ἐπεὶ $6K = \nu^3+3\nu^2+2\nu$· ἐὰν εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἐξισώσεως $\nu+1$ προσθῶμεν, οὕτω $6K = \nu^3+3\nu^2+3\nu+1$, ἔσται $6K < \nu^3+3\nu^2+3\nu+1$· ἀλλὰ $\sqrt[3]{(\nu^3+3\nu^2+3\nu+1)} = \nu+1$· ἄρα καὶ $\sqrt[3]{6K} < \nu+1$· ἦν δὲ καὶ ἄνω $\sqrt[3]{6K} > \nu$· ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς $=$ τῷ ν σὺν κλάσματι ἐλάττονι μονάδος· ἄρα ἡ διαφορὰ μεταξὺ μονάδος καὶ ἑνὸς κλάσματος· ἐπειδὴ ὅμως τὸν ζητούμενον τῆς πλευρᾶς ἀριθμὸν ἀκέραιον εἶναι δεῖ, διὰ τοῦτο ἐπὶ τὸν 6 πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν σφαιρῶν, καὶ ἡ κυβικὴ ῥίζα αὐτοῦ τοῦ γενομένου εἶναι ἡ ζητουμένη πλευρὰ $=\nu$· οὕτω $\sqrt[6]{6K}$· δεδόσθω ὁ ἀριθμὸς τῶν σφαιρῶν $=1140=K$, καὶ ἔςαι ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως $=\nu$, οὕτω $\sqrt[3]{(6.1140)}=18$· ἵνα δὲ μάθωμεν ἂν ὁ ἀριθμὸς 18 εἶναι πυραμιδοειδής, ἔςω $K=\frac{18.\,19.\,20}{2.\,3}=1140$, καὶ ὀρθῶς ἐδόθη τὸ ν· ἐὰν δὲ 7775 δοθῇ, καὶ ζητῆται τὸ ν, εὑρίσκεται $\nu=\sqrt[3]{6K}=\sqrt[3]{(6.7775)}=35$· ἀλλ' ἡ πυραμὶς αὕτη περιέχει σφαίρας $K=\frac{35.\,36.\,37}{2.\,3}=7770$, καὶ μένουσιν ἔτι 5 σφαῖραι, αἵτινες οὐ δύνανται ἐν τῇ πυραμίδι ἐπισωρευθῆναι· καὶ ἔςαι ὁ 7775 μὴ ἐπ' ἀκριβὲς πυραμιδαϊκὸς ἀριθμός. Δεδόσθωσαν αὖθις 4000, καὶ ζητεῖται ὁ ν· ἄρα $\nu=\sqrt[3]{(6.4000)}=28$· καὶ $K=\frac{28.\,29.\,30}{2.\,3}=4060$, καὶ συμπεραίνομεν ὅτι 27 λαμβάνεται, καὶ μένουσι 346 σφαῖραι.

§. 670. Ἐὰν δὲ ἀριθμὸς σφαιρῶν δοθῇ πρὸς ἐπισώρευσιν πυραμίδος τετράγωνον βάσιν ἐχούσης, καὶ ζητεῖται ἡ πλευρὰ αὐτῆς, οὕτω τεχνεύεται· ἔςι δὲ (Πρόβ. γ'.) τὸ $K=\frac{2\nu^3+3\nu^2+\nu}{6}$· καὶ $6K=2\nu^3+3\nu^2+\nu$· καὶ $3K=\nu^3+\frac{3}{2}\nu^2+\frac{1}{2}\nu$ ἄρα $3K>\nu^3$· καὶ $\sqrt[3]{3K}>\nu$· ἐὰν δ' εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$3K=\nu^3+\frac{3}{2}\nu^2+\frac{1}{2}\nu$ προσθῶμεν ἔτι $\frac{3}{2}\nu^2+\frac{5}{2}\nu+1$· εἰς τὸ ἕτερον μέρος ἔσται $K<\nu^3+3\nu^2+3\nu+1=(\nu+1)^3$· ἄρα

$3K<(\nu+1)^3$· καὶ $\sqrt[3]{3K}<\nu+1$· ἦν δ' ἀνωτέρω καὶ

$\sqrt[3]{3K}<\nu$. λοιπὸν $\sqrt[3]{3K}$ μεταξὺ τοῦ ν, καὶ κλάσματος ἐλάττονος μονάδος ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς $=$ τῷ ν καὶ ἑνὶ κλάσματι, ὅπερ μονάδος ἔλαττον· ἄρα εὑρίσκομεν τὸ ν εἰς τετραγωνικὴν πυραμίδα, ἐὰν ἐπὶ τὸν 3 πολλαπλασιάσωμεν τὸν δοθέντα τῶν σφαιρῶν ἀριθμὸν, καὶ ἐξ αὐτοῦ

τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἐξαγάγωμεν $\nu=\sqrt[3]{3K}$· δεδόσθω ὁ ἀριθμὸς τῶν σφαιρῶν 2870, καὶ οὗτος ζητεῖται νὰ ἐπισωρευθῇ εἰς τετραγωνικὴν πυραμίδα· λοιπὸν εὑρίσκομεν τὸ

$$\nu=\sqrt[3]{3.\,2870}=20\text{· ὅτι } K=\frac{20.\ 21.\ 41}{2.\ 3}=2870$$

(§. 566. γ'.)

„Ἐὰν τέλος δοθῇ ἀριθμὸς, ἵνα εἰς παραλληλεπίπεδον σωρὸν ἐπισωρευθῇ, καὶ ζητῆται ἡ πλευρὰ, οὕτω τὰ τοιαῦτα λύομεν, ἔσται $K=\dfrac{2\nu^3+3\mu\nu^2+3\mu\nu-2\nu}{2.\ 3}$ καὶ $6K$

$=2\nu^3+3\mu\nu^2+3\mu\nu-2\nu$· ἐνταῦθα ὅμως δύω ἀγνώστους ἔχομεν, τὸν μ καὶ ν, καὶ δὲν λύεται, ἐὰν μὴ κατ' ἀρέσκειαν τὸν ἕνα ὑποθῶμεν ἀριθμόν· κάλλιον ὅμως τὸν ν, ὄχι διότι τὸ ὕψος σημαίνει ὁ ν, ἀλλὰ καὶ τὴν κυβικὴν νὰ ἐκκλίνωμεν ἐξίσωσιν· ἄρα $\mu=\dfrac{6K+2\nu-2\nu^3}{3\nu^2+3\nu}=\dfrac{6K}{3\nu^2-3\nu}+$

$\dfrac{2\nu-2\nu^3}{3\nu^2+3\nu}=\dfrac{2K}{\nu(\nu+1)}-\frac{2}{3}(\nu-1)$ διὰ τῆς διαιρέσεως· διότι ἐὰν $2\nu-2\nu^3$ διὰ τοῦ $3\nu^2+3\nu$ διέλωμεν $-\frac{2}{3}(\nu-1)$ λαμβάνομεν· λοιπὸν οὕτως ὑποθέτομεν τὸν ἴσον ἀριθμῷ τῷ δοκοῦντι, καὶ εὑρίσκομεν τὸν μ, εἶτα δοθέντων μ καὶ ν εὑρίσκομεν καὶ Κ· καὶ ἐὰν ὁ δοθεὶς συμφωνεῖ, καλῶς, εἰ δ' οὔ, λαμβάνομεν τὸν ν ἢ μείζονα, ἢ ἐλάττονα, ἵνα δὲ μὴ πάντοτε τὸ εἶδος τόδε διαλύωσι, καὶ μάλιςα ἵνα καὶ ὁ τυχὼν τοῦτο ἐπεξεργάζηται, κατεσκευάσθη ὁ ἑξῆς πίναξ, ἔνθα ὁ ὑποθέτων τὸν ν, ἀμέσως ἔχει καὶ τὸν μ καὶ Κ, ἢ ἐὰν δοθῇ ὁ Κ ἀμέσως, ἔχει καὶ τὸν ν καὶ μ, ἢ ἐπ' ἀκριβὲς, ἢ τὸν ἐγγὺς ἐλάττονα·

πλάτος, ν= 1· 2· 3· 4· 5· 6· 7· 8· 9=μ κόχη.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
3	14	20	26	32	38	44	50	56	62
4	30	40	50	60	70	80	90	100	110
5	55	70	85	100	115	130	145	160	175
6	91	112	133	154	175	196	217	238	259
7	140	168	196	224	252	280	308	336	364
8	204	240	276	312	348	385	420	456	492
9	285	330	375	420	465	510	555	600	645
10	385	440	495	550	605	660	717	770	825
11	506	572	638	704	770	836	902	968	1034

τὸ μῆκος $\mu+\nu-1$ τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεως.

Κατασκευάζεται δὲ οὕτως. ἡ μὲν Α ςήλη κατὰ κάθετον σειρὰ τοῦ α βαθμοῦ ἐςιν, ἥτις μέχρι 30 ἢ 40 ὅρων ἀποτερματίζεται, καὶ ἄνω αὐτῆς τὸ ν ἐπιγράφεται· ἡ δὲ δευτέρα ςήλη κατὰ κάθετον μετ' ἐκείνην κατὰ τὸ εἶδος τόδε $\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{2.\ 3}$ ἀποτερματίζεται, λαμβανομένου τοῦ $\nu=2$, 3, 4 κ.τ.λ. καὶ ἐπάνω αὐτῆς 1 ἐπιγράφεται, ὅπερ σημαίνει, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς 5, ἔςαι τὸ μὲν $\nu=2$, καὶ τὸ $\mu=1$· ἡ δὲ πλευρὰ τῆς βάσεως $=\mu+\nu-1=2$· αἱ δ' ἑξῆς ὁριζοντικαὶ ςῆλαι εἰσὶ σειραὶ ἀριθμητικαὶ, ὧν ἡ διαφορὰ $= \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ ἥτις ἄρχεται ἀπὸ ἕκαστον ὅρον τῆς εὑρεθείσης α΄ στήλης τοῦ Β΄. βαθμοῦ· καὶ ἡ διαφορὰ εὑρίσκεται, ἐὰν τὸ ν θῶμεν ἴσον τῷ ἀριθμῷ τῷ ἀντικρύζοντι τῇ φυσικῇ σειρᾷ, καὶ οὕτως ἀποτερματίζεται οὗτος ὁ Πίναξ.

§. 571. Τῷ αὐτῷ πίνακι χρώμεθα καὶ εἰς εὕρεσιν τῶν τετραγωνικῶν πυραμίδων, ὅτε τὸ $\mu=1$. Τὸν αὐτὸν τρόπον κατασκευάζονται καὶ οἱ πίνακες τῶν ἐπὶ δύω μερῶν ἐπακουμβούντων παραλληλεπιπέδων πυραμίδων, ἐπειδὴ μετὰ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἡ μὲν α΄ στήλη κατὰ κάθετον κατασκευάζεται τούτῳ τῷ εἴδει $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{2.\ \ 3}$. αἱ δὲ λοιπαὶ κατὰ ἀριθμητικὴν σειρὰν ὁριζοντικῶς διὰ τοῦδε τοῦ τύπου $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ τῆς διαφορᾶς· τούτῳ δὲ τῷ εἴδει χρώμεθα καὶ εἰς εὕρεσιν τῶν τριγωνικῶν, ὅτε ἡ ἄνω πλευρὰ αὐτῶν $\mu=1$.

τὸ μῆκος τῆς ἄνω βάσεως $=\mu$

πλάτος $=\nu$

1	2	3	4	5	6	7	8
4	7	10	13	16	19	22	25
10	16	22	34	34	40	46	52
20	30	40	60	60	70	80	90
35	50	65	80	95	110	125	140
56	77	98	119	140	161	182	203

ἡ κόχη τοῦ σωροῦ $=\mu+1-\nu$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Περὶ συζεύξεων, καὶ μετατοπισμῶν.

§. 572. Συνεχῶς ἀπαντᾶ οὐ μόνον εἰς τοὺς μαθηματικοὺς ὑπολογισμοὺς, ἀλλὰ καὶ εἰς αὐτὴν τὴν κοινὴν ζωὴν, νὰ πολυπραγμονῶμεν τὰς δυνατὰς συζεύξεις, καὶ τοὺς διαφόρους τόπους, ὅπου μεταξὺ ποσότητές τινες λαβεῖν δύνανται, καὶ διὰ τούτων πολλάκις νὰ διορίζωμεν τὴν ἀναφορὰν, ἣν ἔχει τὸ πιθανὸν πρὸς τὸ ἀπίθανον· οὕτω ζητεῖται πολλάκις ἐπὶ παραδείγματος, α΄ δέκα τινὰ ἀνὰ δύω συζευγνύμενα, πόσας συζεύξεις παρέχουσιν; ἢ β΄. ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς καὶ γεωμετρικῆς σειρᾶς· διότι ἐκεῖ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν εἴδομεν ὅτι 5 ποσότητες προήρχοντο ἡ α, τ, δ, ν, καὶ Κ, ἀφ' ὧν αἱ τρεῖς ἐδίδοντο (§. 545) ἵνα ἡ τετάρτη εὑρεθῇ, καὶ ζητεῖ τις ποσάκις αἱ 5 ποσότητες συζεύγνυνται, ἵνα ὁμοῦ αἱ τέσσαρες ὦσι; τρίτον ἐπὶ τῶν συλλογισμῶν τῆς λογικῆς· ἐπεὶ ἐκεῖ τέσσαρες οἱ ὅροι· Α, Ε, Ι, Ο, ἐὰν ἀνὰ τρεῖς συζεύγνυνται, καὶ μετατοπίζωνται, πόσα τὰ εἴδη τῶν Συλλογισμῶν· ἢ τέταρτον ἐπὶ τῆς καλουμένης λοτταρίας, ἐὰν ἐν χύτρα τινὶ 90 κλῆροι τεθῶσι, καὶ ἐξ αὐτῶν μόνον 5 ἐξάγονται, σημειοῖ τις ὅμως ἐξ αὐτῶν 10, καὶ ἐπιθυμεῖ τρεῖς τούτων νὰ εὑρεθῶσιν εἰς ἐκείνους, ὅπου ἐξάγονται, τίς ἡ ἀναφορὰ τοῦ πιθανοῦ, καὶ μή; τούτων ἁπάντων τὴν λύσιν διδάξει ἡμᾶς τὸ παρὸν κεφάλαιον.

§. 573. Συζεύξεις ἐνταῦθα, ὅταν δοθῶσι ποσά τινα λ: χ: δέκα, καὶ λαμβάνομεν ἐξ αὐτῶν ἀνὰ δύω, δύω οὕτως, ὥςε ἑκάςη δυὰς νὰ μὴ συμφωνῇ μὲ τὴν ἄλλην, ὡς τριῶν γραμμάτων αβγ αἱ δυάδες αβ, αγ, βγ εἰσὶ μεταξὺ αὐτῶν διάφοροι, ἢ αἱ τριάδες τῶν αβγ, αβδ, αγδ, βγδ, κ. τ. λ. εἶναι ὅλαι διάφοροι· ὅθεν ὅταν αἱ συζεύξεις γίνονται ἀνὰ δύω, καλοῦμεν σύζευξιν δυαδικὴν, ὅταν ἀνὰ τρεῖς σύζευξιν τριαδικὴν, ὅταν ἀνὰ τέσσαρες σύζευξιν τετραδικὴν, καὶ πενταδικὴν, ἑξαδικὴν κ. τ. λ· Ἕτεροι εἶπον αὐτὰς συνδυασμὸν, συντριασμὸν, ἢ συντρίσσευσιν κ. τ. λ. ἕκαςος ὅμως ἂς ὀνομάσῃ αὐτὰς, ὅπως ἂν θέλῃ, ἐὰν μόνον τὸ νόημα τούτων καλῶς τηρῇ.

§. 574. Διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς νόμους τούτων τῶν συζεύξεων, πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἓν μόνον πρᾶγμα σύζευξιν οὐδεμίαν παρέχει, διότι ἀπὸ τῶν δύω καὶ ἑξῆς συζεύξεις γίνονται· ὅθεν καὶ ἀπὸ τῆς δυαδικῆς συζεύξεως πρῶτον ἂς ἀρχήσωμεν· ἀντὶ δὲ τῶν πραγμάτων, τὰ ςοιχεῖα τοῦ ἀλφαβήτου ἂς λάβωμεν· λοιπὸν δύω τινὰ μόνον μίαν δυαδικὴν δίδουσι σύζευξιν αβ, ἐὰν ὅμως καὶ τρίτον δοθῇ, τοῦτο συνάπτεται ἅπαξ μὲ τὸ α καὶ ἅπαξ μὲ τὸ β, καὶ ἔτι μία ἡ πρώτη αβ, καὶ αἱ δυναταὶ συζεύξεις αἱ δυαδικαὶ τριῶν τινῶν εἶναι $2+1=3$· ἐὰν ὅμως καὶ ἔτι τέταρτον δοθῇ, φανερὸν ὅτι τοῦτο συζευγνύμενον τοῖς τρισὶν ἀποτελεῖ τρεῖς συζεύξεις, καὶ τρεῖς αἱ πρῶται τῶν τριῶν γίνονται ὅλα $3+3=6$. ἐὰν δὲ καὶ πέμπτον δοθῇ, τοῦτο συζεύγνυται μὲν ὅλοις τοῖς προηγουμένοις τέσσαρσι, καὶ γίνονται 4 συζεύξεις· ἦτον δὲ καὶ 6 αἱ εἰς τὰ προηγούμενα 4, ἄρα αἱ δυαδικαὶ συζεύξεις τῶν πέντε $4+6=10$· ὁμοίως καὶ ἕκτον ἐὰν δοθῇ, αἱ συζεύξεις $5+10=15$, ὡς καὶ εἰς τὸ διάγραμμα παρίςανται.

1 | 0	0
2 | αβ	1
3 | αβ, αγ, βγ	3
4 | αβ, αγ, βγ, αδ, βδ, γδ	6
5 | αβ, αγ, βγ, αδ, βδ, γδ, αε, βε, γε, δε	10
6 | αβ, αγ, βγ, αδ, βδ, γδ, αε, βε, γε, δε, αζ, βζ, γζ, δζ, εζ . .	15

Ἐὰν ὅμως τὰς δυαδικὰς συζεύξεις ταύτας 0,1,3,6,10,15 καλῶς ἐξετάσωμεν, εὑρίσκομεν αὐτὰς νὰ παρίζανται ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ τῆς δευτέρας τάξεως (§. 546), ἧς ὁ πρῶτος ὅρος 0 καὶ οἱ ὅροι αὐτῆς τρίγωνοι· ἀλλ' ὁ ἔσχατος ὅρος αὐτῆς τῆς σειρᾶς εὕρηται $\frac{\nu(\nu+1)}{1.\ 2.}$ (§. 573)· ἐνταῦθα δ' ὁ πρῶτος ὅρος $=0$· ἑπομένως παρὰ μονάδα εἶναι οἱ ὅροι αὐτῆς· διὰ τοῦτο θῶμεν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν ἀντὶ ν, $\nu-1$, καὶ ἔςαι $\frac{(-1)\nu}{1.\ 2}=\frac{\nu(1-1)}{1.\ 2}$. καὶ οὗτος ὁ τύπος τῶν δυαδικῶν συζεύξεων, ἐν ᾧ τὸ μὲν ν σημαίνει τὸ δοθὲν πλῆθος τῶν ἀνὰ δύω συζευγνυμένων πραγμάτων, ὅλος δ' ὁ τύπος τὰς δυνατὰς ἀνὰ δύω συζεύξεις· δηλ: ἐὰν 10 τινὰ δοθῶσι, καὶ ζητῶνται αἱ ἀνὰ δύω συζεύξεις, εἰσὶ $\frac{10.\ 9}{1.\ 2}=45$· ἐὰν δὲ 45 δοθῶσιν αἱ συζεύξεις, εἰσὶ $\frac{45.\ 44}{1.\ 2}=45.\ 22=1045$ κ. τ. λ.

§. 575. Ἐὰν δὲ αἱ ἀνὰ τρία συζεύξεις ζητῶνται, ὅταν δοθῶσι τινὰ, ἤτοι αἱ τριαδικαὶ συζεύξεις, οὕτως αὐτὰς εὑρίσκομεν· διότι οὔτ' ἀφ' ἑνὸς, οὔτ' ἀπὸ δύω τριαδικὴ σύζευξις γίνεται· μία μόνον ἀπὸ τριῶν, αβγ· ἐὰν δὲ καὶ τέταρτον δοθῇ, φανερὸν, ὅτι τὰ τρία τρεῖς συζεύξεις δυαδικὰς παρέχουσι, καὶ ἑκάστη τούτων τὸ τέταρτον τοῦτο συζεύγνυται εἰς τριαδικὴν σύζευξιν· ἄρα τρεῖς τριαδικαὶ καὶ μία ἡ τῶν τριῶν, ὅλαι 4. ἐὰν δὲ καὶ πέμπτον δοθῇ, γίνονται αἱ τριαδικαὶ συζεύξεις 10. διότι εἰς τέσσαρα ἓξ αἱ δυαδικαὶ συζεύξεις, καὶ ἑκάστη μετὰ τούτου γίνεται τριαδική· ἄρα ἓξ αὗται καὶ τέσσαρες αἱ τῶν τεσσάρων, ὅλαι =10. ἐὰν δὲ καὶ ἕκτον δοθῇ, αἱ τριαδικαὶ συζεύξεις 20 γίνονται· διότι αἱ δυαδικαὶ τῶν 5 εἶναι 10, καὶ ἑκάστη μετὰ τούτου τριαδικὴ γίνεται, ἤτοι δὲ 10, αἱ τῶν 5 ὅλαι ὁμοῦ 20 γίνονται, ὡς καὶ εἰς τὸ διάγραμμα φαίνονται.

1	0	0
2	0	0
3	αβγ	1
4	αβγ, αβδ, αγδ, βγδ	4
5	αβγ, αβδ, βγδ, αβε, αγε, αδε, βγε, βδε, γδε . . .	10
6	αβγ, αβδ, βγδ, αβε, αγε, αδε, βγε, βδε, γδε, αβζ αγζ, αδζ, αεζ, βγζ, βδζ, βεζ, γδζ, γεζ, δεζ . .	20

Ἐὰν δὲ καὶ τούτων τοὺς ἀριθμοὺς 0, 0, 1, 4, 10, 20 παρατηρήσωμεν, εὑρίσκομεν αὐτοὺς ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ τρίτης τάξεως (§. 546). ὁ δ' ἔσχατος αὐτῆς ὅρος (§. 560. 561.) $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.\ 2.\ 3}$. ἀλλ' αὕτη ἔχει τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον ὅρον =0· ἄρα παρὰ δύω μονάδας αὐτῆς εἶναι οἱ ὅροι, ἤτοι $=\nu-2$· ἀνδ' εἰς αὐτὸν ἀντὶ ν, $\nu-2$ θῶμεν, ἔσται $\frac{(\nu-2)(\nu-1)\nu}{1.\ 2.\ 3}=\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.\ 2.\ 3}$. καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τύπον εὑρίσκονται αἱ τριαδικαὶ συζεύξεις τῶν δοθέντων πραγμάτων $=\nu$. δεδόσθωσαν 6 τινὰ, καὶ ζητοῦνται αἱ ἀνὰ τρία συζεύξεις $\frac{6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3} = 2.\ 5.\ 2 = 20$· ἐὰν δὲ 10 δοθῶσιν, αἱ συζεύξεις $\frac{10.\ 9.\ 8.}{1.\ 2.\ 3} = 5.\ 3.\ 8 = 120$. κ. τ. λ.

§. 576. Ἐὰν δὲ αἱ ἀνὰ τέσσαρα συζεύξεις πραγμάτων τινῶν ζητῶνται, εὑρίσκομεν, ὅτι οὔτε τὸ ἓν, οὔτε τὰ δύω, οὔτε τὰ τρία σύζευξιν δίδουσι τετραδικὴν, ἀλλὰ μίαν μόνην τὰ 4 αβγδ· ἐὰν δὲ καὶ πέμπτον δοθῇ, ἐπειδὴ τὰ 4 δίδουσι τέσσαρας ἀνὰ τρία συζεύξεις, καὶ ἑκάστη μετὰ τοῦδε τοῦ πέμπτου συζευγνυμένη, σύζευξις τετραδικὴ γίνεται, ἄρα τέσσαρες αὗται, καὶ μία ἡ πρώτη πέντε τετραδικαὶ συζεύξεις εἰς πέντε δοθέντα γίνονται· εἰς 6 δὲ δοθέντα, 15 γίνονται αἱ ἀνὰ 4 συζεύξεις, καὶ εἰς 7 δοθέντα 35 συζεύξεις· ἄρα αἱ συζεύξεις αὗται οὕτω παρίσανται, 0, 0, 0, 1, 5, 15, 35 κτλ. ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ τῆς τετάρτης τάξεως (§. 546) καὶ ὁ γενικὸς αὐτῆς ὅρος (§. 563) $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$. ἀλλὰ τῆς προτέρας ὁ πρῶτος ὅρος $=0$, καὶ ὁ Β'. καὶ ὁ Γ'. ἄρα οἱ ὅροι αὐτῆς παρὰ τρεῖς μονάδας, καὶ ἔσαι $\nu-3$· θῶμεν ἀντὶ ν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν $\nu-3$ καὶ ἔσαι $\frac{(\nu-3)(\nu-2)(\nu-1)\nu}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$ $= \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$. καὶ οὗτος ὁ τύπος, δι' οὗ εὑρίσκομεν τὰς ἀνὰ 4 συζεύξεις τῶν δοθέντων πραγμάτων $=\nu$, δηλ: ζητοῦνται αἱ ἀνὰ 4 συζεύξεις τῶν 8 ἄρα $\frac{8.\ 7.\ 6.\ 5.}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ $= 7.\ 2.\ 5 = 70$.

§. 577. Καὶ ἀναλόγως τῶν προηγουμένων $\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$ εἶναι ὁ τύπος τῶν ἀνὰ 5 συζεύξεων· καὶ $\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$ τῶν ἀνὰ 6 συζεύξεων· καὶ ἐν γένει $\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ \ldots\ (\nu-\mu+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ \mu}$ αἱ συζεύξεις αἱ ανα μ. δηλ: ἑκάστη σύζευξις ἀνὰ 3, ἢ 4, ἢ 5, κ. τ. λ. παρίσαται διʼ ἑνὸς κλάσματος, οὗ ὁ μὲν ἀριθμητὴς παρίσαται ὑπὸ παραγόντων τοσούτων, ὅσαι μονάδες εἰσχωροῦσιν εἰς αὐτὴν τὴν σύζευξιν, καὶ ὁ μὲν αʹ εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν τῶν δεδομένων εἰς σύζευξιν πραγμάτων, καὶ ὁ ἑξῆς παρὰ μονάδα τοῦ αʹ. καὶ ἔτι ὁ ἑξῆς παρὰ 2· καὶ ἀκολούθως ὁ ἑξῆς μονάδι τοῦ προτέρου ἐλάττων· ὁ δὲ παρονομαστὴς ἀπὸ τοσούτων παραγόντων, ὅσοι εἶναι καὶ οἱ τοῦ ἀριθμητοῦ, πλὴν ἄρχονται ἀπὸ μονάδος, καὶ καταυτῶσι κατὰ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς μέχρις ἐκείνου τοῦ ἀριθμοῦ, διʼ οὗ ἡ σύζευξις γίνεται· δηλ: ἐὰν δοθῶσι 13 τινά, καὶ ζητοῦνται αἱ ἀνὰ 7 συζεύξεις αὐτῶν, ἔσαι ὁ τύπος τούτων $\frac{13.\ 12.\ 11,\ 10.\ 9.\ 8.\ 7.}{1,\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6,\ 7.} = 13.\ 11.\ 12 = 1716.$

1. Ἐὰν δέκα δοθῶσιν, καὶ ζητῶνται αἱ ἀνὰ δύω συζυγίαι, εἰσὶ $\frac{10.\ 9.}{1.\ 2.} = 45$. ϗ οὕτω λύεται τὸ πρῶτον(§. 572).

2. Ἐὰν δὲ τὰ πέντε ἐκεῖνα δοθῶσιν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σειράν, καὶ ζητῶνται πόσαι ἐξισώσεις ἀνὰ 4 γίνονται, ἐπειδὴ τὰ τέσσαρα δίδονται, λέγομεν, $\frac{5.\ 4.\ 3.\ 2}{1.\ 2,\ 3.\ 4} = 5$, ἤτοι

πέντε ἐξισώσεις ἀνὰ 4. ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη ἔχει ὅρους τέσσαρας, καὶ οἱ τρεῖς δίδονται, οἱ δὲ τέσσαρες ζητοῦνται, πόσαι συζεύξεις εἰς ἑκάστην ἀνὰ τρεῖς ὅροι γίνονται; $\frac{4.\ 3.\ 2}{1.\ 2.\ 3}$ $=4$· ἤτοι ἑκάστη τετραχῶς μεταβάλλεται· ἄρα αἱ πέντε τετραπλασιάζονται οὕτω· $4.\ 5=20$· καὶ τῷ ὄντι 20 τύποι εἰς τὸ διάγραμμα εὑρέθησαν (§. 545), ἄρα ἐλύθη καὶ τὸ Β΄.

3. Ἐὰν δέ τις εἰς 90 κλήρους, ἀφ᾽ ὧν μόνον 5 ἐξάγονται, σημειοῖ μόνον 10 ἀπ᾽ αὐτῶν, καὶ θέλει τρεῖς ἐκ τῶν 10 νὰ εὑρεθῶσιν εἰς τοὺς ἐξαγομένους πέντε, εὑρίσκει τὸ πιθανὸν πρὸς τὸ ἀπίθανον, ἐὰν πρῶτον εὕρῃ εἰς τοὺς 90 κλήρους, πόσαι συζυγίαι ἀνὰ τρεῖς γίνονται, οὕτω $\frac{90.\ 89.\ 88}{1.\ 2.\ 3}=30.\ 89.\ 44=117480$· ἐὰν ἔπειτα εὕρῃ καὶ τὰς ἀνὰ τρεῖς συζυγίας τῶν 5, οὕτω $\frac{5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.\ 3}=10$, εἶτα δὲ παραβάλῃ τούτους οὕτω $10:117480$, ἤτοι $1:11748$· εὑρίσκει, ὅτι ἅπαξ ἐπιτυγχάνει, καὶ 11748κις οὐχί· ἐπειδὴ ὅμως 10 κλήρους σεσημείωκεν, ἂς εὑρεθῶσι καὶ αἱ ἀνὰ τρεῖς συζυγίαι τῶν 10 οὕτω $\frac{10.\ 9.\ 8}{1.\ 2.\ 3}=10.\ 3.\ 4=120.$ ὅθεν εἶναι τὸ πιθανὸν πρὸς τὸ ἀπίθανον ὡς $120:11748$· ἤτοι $10:979$, ἢ $1:97,9$· ὃ ἐστιν ἅπαξ τυχεῖν δύναται, καὶ ἐννενήκοντα σχεδὸν ὀκτὼ μὴ τυχεῖν, καὶ οὕτως ἐλύθη καὶ τὸ Γ΄.

4. Ἄλλος δέ τις λαμβάνει, πέντε ἀριθμούς, καὶ θέλει οὗτοι νὰ εὑρεθῶσιν εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῶν 5. ζητεῖ λοιπὸν

βέποσας συζυγίας ἀνὰ 5 νὰ καταβάλῃ, διὰ νὰ ἐξέλθωσι, βεβαίως, οὗτοι οἱ πέντε ἀριθμοί. λέγομεν $\frac{90.\ 89.\ 88.\ 87.\ 86}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$ $=6.\ 89.\ 11.\ 87.\ 86.=43949268$· καὶ τόσας συζυγίας ἂς λάβῃ· ἐὰν δὲ τῶν 5 ἐπιτύχῃ, ζητεῖ πόσαι συζυγίαι εἰς τοὺς 5 αἱ ἀνὰ 4. λέγομεν $\frac{5.\ 4.\ 3.\ 2}{1.\ 2.\ 3.\ 4}=5$ καὶ πόσαι ἔτι ἐν αὐτοῖς ἀνὰ τρεῖς συζυγίαι; λέγομεν $\frac{5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.\ 3}=10$ καὶ πόσαι ἀνὰ δύω $\frac{5.\ 4.}{1.\ 2.}=10$, ἐν ἑνὶ λόγῳ λύονται διὰ τῆς συζεύξεως ὅλα τὰ τῆς Λοτταρίας προβλήματα.

§. 578. Πολλάκις ἐπιζητεῖται νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ πλῆθος τῶν μετατοπισμῶν, δοθέντων τινων πραγμάτων, ἢ ἀνθρώπων, ἢ λέξεων, ἢ ὀνομάτων, ἀνθ' ὧν ἡμεῖς τοὺς χαρακτῆρας τῶν γραμμάτων λαμβάνομεν· δηλ: εἰς τὸ ῥητὸν τοῦτο.„ σοφίας οὐδέποτε κατισχύσει κακία, ποσάκις αἱ τέσσαρες αὐτοῦ λέξεις τοὺς τόπους αὐτῶν ἐναλλάξουσι· τοῦτο τὸ εἶδος μετάθεσιν, ἢ μετατοπισμὸν ἡμῖν καλεῖν ἔδοξε· πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν τοιούτων τὰ ἑξῆς προσέξομεν· δηλ. α' ἓν πρᾶγμα δὲν πάσχει ποτὲ κᾀμμίαν μετάθεσιν, ἀλλὰ μόνον μίαν θέσιν, ὅπου ἂν τεθῇ.

β'. Δύω δὲ πάσχουσι δύω μεταθέσεις, ὅτι τὸ ἀριστερὸν γίνεται δεξιὸν, καὶ τοῦτο ἀριστερὸν ὡς αβ καὶ βα· ἄρα αἱ μεταθέσεις τούτων 2. 1=2.

γ'. Ἐὰν τρία ὦσι· τοῦτο τὸ τρίτον εἰς τὴν μίαν μετάθεσιν γίνεται πρῶτον, μέσον, καὶ ἔσχατον οὕτω γαβ, αγβ, αβγ, ὁμοίως καὶ εἰς τὴν δευτέραν γβα, βγα, βαγ, καὶ ἰδοὺ ἓξ οἱ μετατοπισμοὶ τῶν τριῶν ἄρα οὗτος ὁ τύπος 3. 2. 1=6.

δ΄. Ἐὰν δὲ καὶ τέταρτον εὑρεθῇ· τοῦτο δύναται εἰς ἑκάστην τῶν ἓξ τούτων μεταθέσεων νὰ γένῃ πρῶτον, δεύτερον, τρίτον, τέταρτον οὕτω δγαβ, γδαβ, γαδβ, γαβδ εἰς μόνην τὴν γαβ, ἀλλὰ τοῦτο γίνεται καὶ εἰς ὅλας τὰς λοιπάς, αἱ δὲ εἰσὶν 6, καὶ εἰς ἑκάστην τετράκις μετατίθεται· ἄρα 4. 6=24 εἶναι οἱ δυνατοὶ μετατοπισμοὶ τῶν, 4, πλὴν ὁ τύπος τῶν 6 ἦν 3. 2. 1· ἄρα τῶν τεσσάρων 4. 3. 2. 1=24.

ε΄. Τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ πέντε εὑρίσκονται 5. 4. 3. 2. 1=120· διότι τοῦτο τὸ πέμπτον εἰς καθε τετραδικὴν μετάθεσιν γίνεται α΄, β΄, γ΄, δ΄, ε΄, αἱ δὲ τετραδικαὶ ἦτον 24, καὶ ἑκάστη τούτων πεντάκις ποικιλοῦται· ἄρα 5. 24 =5· 4· 3· 2· 1.

ς΄. Ἐὰν λοιπὸν καὶ τῶν 6 οἱ μετατοπισμοὶ ζητῶνται, κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκονται 6· 5· 4· 3· 2· 1 =720 κ. τ. λ. καὶ γενικῶς ὁ κανών, ὅταν πραγμάτων τινων ζητῶνται οἱ μετατοπισμοί, εὑρίσκονται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δοθέντων πραγμάτων ἀρξώμεθα νὰ γράψωμεν παράγοντας κατὰ συνέχειαν τὸν ἑξῆς παρὰ μονάδα ἐλάττονα, ἢ τὸν ἡγούμενον ἄχρις οὗ νὰ καταντήσωμεν εἰς τὴν μονάδα αὐτήν· δηλ: ἐὰν δέκα δοθῶσιν οἱ μετατοπισμοὶ αὐτῶν 10· 9· 8· 7· 6· 5· 4· 3· 2· 1. καὶ ἐν γένει, ἐὰν μ ὁ ἀριθμὸς τῶν πραγμάτων· οἱ μετατοπισμοὶ αὐτῶν. $\mu \cdot \mu-1 \cdot \mu-2 \cdot \mu-3 \ldots \mu-\mu+1$.

1. Οὕτως ἤδη λύεται τὸ ζήτημα, πόσοι οἱ μετατοπισμοὶ τοῦδε τοῦ χρυσοῦ ῥητοῦ, σοφίας οὐδέποτε κατισχύ-

σει κακία, οὗ αἱ λέξεις τέσσαρες· ἄρα $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$· καὶ εἰκοσιτέσσαρες φοραῖς τὸ αὐτὸ ῥητὸν ἐκφρασθήσεται.

2. Οὕτω τις ἐζήτησε, νὰ φιλευθῇ ἀπὸ ἕνα φίλον του μὲ 6 φαγητὰ τοσάκις, ὁσάκις ἡ μετάθεσις γένηται τῶν 6 φαγητῶν, ἀφ' οὗ τὸ α γένηται β'. γ'. δ'. ε'. ς'. ὁμοίως καὶ τὸ β' γένηται α'. γ'. δ'. κ. τ. λ. τοῦτο ποιῶν ὁ φίλος μόλις ἀπηλλάχθη ἐκείνου εἰς δύω σχεδὸν ἐνιαυτούς· διότι $6. 5. 4. 3. 2. 1 = 720$.

§. 579. Πολλάκις μεταξὺ τῶν δοθέντων εὑρίσκονται δύω τὰ αὐτὰ πράγματα, ἢ τρία, ἢ τέσσαρα κτ. καὶ ἐπειδὴ τὰ τοιαῦτα ὡς ἓν λογίζονται, ἄλλως εἰς αὐτὰ εὑρίσκομεν τοὺς μετατοπισμούς· διότι φανερὸν ἐὰν δοθῶσι δύω τὰ αὐτὰ πράγματα αα, βέβαια τὰ τοιαῦτα μετατοπισμὸν ἑτέρου δὲν λαμβάνουσιν, εἰ μὴ ἕνα μόνον, ἀλλ' ἐὰν ἦτον διάφορα αβ ἐδίδον δύω μεταθέσεις, ἄρα δύω ὅμοια τοὺς μισοὺς παρέχουσι μετατοπισμούς· ὁμοίως καὶ ταῦτα ααβ τρεῖς μόνον δίδουσι μετατοπισμούς, ααβ, καὶ βαα, καὶ αβα· πρότερον δ' ἐδίδον 6. διότι $3. 2. 1 = 6$ ἄρα τοὺς μισούς, ὅταν δύω ὦσι τὰ αὐτὰ οὕτω $\frac{3. \ 2. \ 1}{2. \ 1} = 3$. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐὰν τέσσαρα τὰ δοθέντα, καὶ δύω αὐτῶν τὰ αὐτὰ οὕτω ααβγ· οἱ μετατοπισμοὶ $\frac{4. \ 3. \ 2. \ 1}{1. \ 2} = 12$· ὅθεν ὅταν δοθῶσι πράγματά τινα, καὶ δύω ἐξ αὐτῶν τὰ αὐτά, τότε ὡς ἀνωτέρω (§. 578). γίνονται οἱ παράγοντες ἀριθμηταί· καὶ διαιρέτης 2. 1. οὕτω $\frac{\mu. \ \mu-1 \ . \ . \ . \ . \ \mu-\mu+1}{2. \ 1.}$

Ἐὰν ἔτι δὶς εὑρίσκονται ὅμοια διάφορα ὡς ααβγδδε, ὅπου 7 τὰ δοθέντα, καὶ δύω ὅμοια αα καὶ δδ· τότε ὁ παρονομαςῆς δὶς τίθεται 2. 1. ϗ 2. 1. οὕτω $\frac{7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{1.\ 2.\ 1.\ 2}$

Ἐὰν δὲ τρία ὅμοια, τρὶς ὁ παρονομαςὴς τίθεται 1. 2. κτλ.

§. 580. Ἐὰν δὲ μεταξὺ πολλῶν τρία δοθῶσι τὰ ὅμοια, τότε ὁ ἀριθμητὴς γίνεται ὡς ἄνω, ὁ δὲ παρονομαςὴς ὁ διαιρῶν 3. 2. 1. διότι ἐὰν τρία ὅμοια μία γίνεται ἡ θέσις· εἰγὰρ ἦν ἀνόμοια αβγ ἔδιδον 3. 2. 1 ἄρα $\frac{3.\ 2.\ 1}{3.\ 2.\ 1} = 1$· οὕτως αἱ μεταθέσεις τῶν αβββγ εἶναι $\frac{5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{1.\ 2.\ 3.} = 20$· ἄλλως αβγδε ἦν 5. 4. 3. 2. 1 = 120.

Ἐὰν δὲ τρία δοθῶσιν ὅμοια, καὶ δύω ἔτι ὅμοια οὕτω ααβγδδδε· πάλιν οἱ παρονομαςαὶ 2. 1 καὶ 3. 2. 1 οὕτω $\frac{8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{2.\ 1.\ 3.\ 2.\ 1}$. τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐὰν τέσσαρα τὰ ὅμοια οὕτω ααααβγ ὁ παρονομαςὴς 4. 3. 2. 1 οὕτω $\frac{6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{4.\ 3.\ 2.\ 1.} = 30$· καὶ ἑπομένως ἐὰν οὕτω δοθῶσι ααααβγγγδδ, ὁ τύπος ἐςὶ $\frac{10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{4.\ 3.\ 2.\ 1.\ 3.\ 2.\ 1.\ 2.\ 1}$

καὶ ἐν γένει κατὰ τὰ δοθέντα πράγματα γίνωνται οἱ παράγοντες τοῦ ἀριθμητοῦ (§. 578). κατὰ δὲ τὰ ὅμοια γίνονται οἱ παράγοντες τοῦ παρονομαςοῦ. π. χ.

α'. Τρία ἀνδρόγυνα ἀπαρτίζουσιν ἕνα χορὸν, ἤτοι ἄνθρωποι 6, ποσάκις οὗτοι μετατίθενται, ὥςε αἱ γυναῖκες παρὰ τοῖς ἰδίοις ἀνδράσιν εὑρίσκονται.

Ἐνταῦθα τρία τὰ ὅμοια τὰ ἀνδρόγυνα· ἄρα τρία τινὰ δίδονται 3. 2. 1 = 6.

§. 581. Εὑρίσκεται δὲ καὶ τρίτον εἶδος, ὅπερ ἡμεῖς μεταθετικὴν σύζευξιν καλοῦμεν· εἰς αὐτὸ αἱ συζεύξεις μὲν ἀνὰ δύω, ἀνὰ τρία κτ. ζητοῦνται· πλὴν ἅμα καὶ μετατοπισμοί, καὶ ἓν ἕκαστον αὐτὸ πολλάκις λαμβανόμενον σύζευξιν δυαδικὴν, τριαδικὴν νὰ ἀποτελῇ. Τοιοῦτον τι συμβαίνει καὶ εἰς τοὺς χαρακτῆρας τοὺς ἀριθμητικούς, οὗτοι ἐννέα ὄντες μεταξὺ τῶν 10· καὶ 100 ἀνὰ δύω συζεύγνυνται, καὶ ἅμα μετατοπίζονται, καὶ μεθ' ἑαυτῶν εἰς δυάδα συνέρχονται ὡς 23 καὶ 32, καὶ ἔτι 11, καὶ 22 κτ. τοῦτο δὲ τὸ εἶδος εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἑξῆς.

Ἐὰν μάθωμεν ά εἰς δύω δοθέντα μετατοπιζόμενα, καὶ ἑαυτοῖς συναπτόμενα πόσας συζυγίας δυαδικὰς ἀποτελοῦσι, εὑρίσκομεν τέσσαρας· διότι ἐὰν ὦσιν αβ οὕτω συζεύγνυνται αβ, βα, αα, ββ· ὅθεν εἰς δύω δοθέντα αἱ συζυγίαι ἀνὰ δύω $=2^2$. Ἐὰν δὲ τρία τὰ δοθέντα αβγ, αἱ ἀνὰ δύω συζυγίαι $=3^2$· διότι εὕρομεν μετατοπιζόμενα μόνον $3.2.1=6$· καὶ ἔτι τρεῖς, ὅταν αὐτὰ ἑαυτοῖς συνάπτωνται αα, ββ, γγ γίνονται $=9$· καὶ ἑπομένως ἐὰν 4 δοθῶσιν αἱ συζυγίαι $=4^2$. Ἐὰν δ' 9, αὗται 9^2 κ. τ. λ.

β'. Ὅταν δ' ἀνὰ τρία αὗται αἱ συζεύξεις ἀπαιτῶνται, γίνονται κατὰ τοὺς κύβους τῶν δοθέντων ποσῶν· δηλ: ἐὰν τρία δοθῶσιν αβγ, καὶ ζητῶνται πόσαι αἱ ἀνὰ τρία συζεύξεις, ἐὰν μετατίθωνται, καὶ ἅμα ἑαυτοῖς συμπλέκωνται, εὑρίσκομεν ααα, βββ, γγγ, αβγ, βαγ, βγα, γαβ, γβα, αγβ· ἄρα ἐὰν 4 τὰ δοθέντα, αἱ συζυγίαι $=4^3$· ἐὰν 5 αὗται $=5^3$ κ. τ. λ.

γ'. Ὅταν δὲ αἱ ἀνὰ 4 συζεύξεις ζητῶνται· καὶ αὗται ἄλλως δὲν εὑρίσκονται, εἰμὴ ἐὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς τετάρτην ὑψώσωμεν δύναμιν, δηλ: ἐὰν 5 τὰ δοθέντα, καὶ αἱ ἀνὰ 4 συζυγίαι ζητῶνται, εὑρίσκονται $=5^4$· καὶ ἐν γένει ὅταν δοθῇ πράγματά τινα μ, καὶ ζητῶνται τοιαῦτα ἀνὰ ν συζεύξεις, εὑρίσκονται κατὰ τὸν τύπον τοῦτον μ^ν, μ σημαίνει τὸ ποσὸν τῶν δοθέντων πραγμάτων, ν δὲ τὸ πλῆθος αὐτῶν, ἀφ' ὧν ἑκάςη συζυγία ἀπαρτίζεται.

Πρόβλημα α'.

Ζητεῖται μεταξὺ τοῦ 10 καὶ 100 πόσαι εἰσὶν αἱ ἀνὰ δύω συζεύξεις τῶν 9 ἀριθμητικῶν χαρακτήρων, ἤτοι πόσας συζεύξεις ἔχει ἡ δευτέρα περίοδος; Ἐπειδὴ 9 εἰσὶν οἱ χαρακτῆρες, καὶ ἀνὰ δύω συζεύγνυνται μετατιθέμενοι, καὶ ἑαυτοῖς συνδυαζόμενοι εἰσὶν $=9^2=81$· ἐπειδὴ ὅμως καὶ ἕκαςος τῶν 9 μετὰ τοῦ μηδενικοῦ συνδυάζεται 10, 20 κ. τ. λ. γίνονται ἔτι ἐννέα συζεύξεις· εἰσὶ δὲ 9 χαρακτῆρες καὶ τῆς πρώτης περιόδου· ἄρα αἱ πᾶσαι $81+9+9=99$· καὶ τοσοῦτοι οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος μέχρι τῶν 100.

Πρόβλημα β'.

Πόσαι εἰσὶν αἱ ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρες συζεύξεις τῶν 9 χαρακτήρων τῶν ἀριθμητικῶν ἀπὸ τῶν 100 μέχρι τῶν 1000;

Λέγομεν $=9^3=729$· ἀλλ' ἐπειδὴ ἑκάςη ἀνὰ δύω σύζευξις τῆς δευτέρας περιόδου συζεύγνυται εἰς τὸ τέλος μὲ ἓν μηδενικὸν οὕτω 330, 510, 530 κτ. ἐκεῖνα δὲ $=81$, ἄρα προςίθενται ἔτι 81 συζυγίαι τριαδικαί. ἀλλ' αἱ αὐταὶ καὶ ἐν τῷ τέλει συζεύγνυνται μὲ ἓν μηδενικὸν οὕτω· 506, 302, 101 κ. τ. λ. εἰσὶν ἄρα καὶ ἔτι 81 συζυγία τριαδική· ἀλλὰ καὶ ἔτι ἕκαςος τῶν 9 χαρακτήρων λαμβάνει δύω μηδευκὰ οὕτω 100, 200 κ. τ. λ. εἰσὶν ἄρα ἔτι καὶ 9 συζυγίαι τριαδικαὶ, καὶ αἱ πᾶσαι ὁμοῦ $729+81+81+9=900$· θῶμεν καὶ τῆς δευτέρας 99, καὶ γίνονται 999· καὶ τοσοῦτοι καὶ οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος μέχρι τῶν 1000.

Πρόβλημα γ΄.

Ζητεῖται εἰς τὴν λογικὴν ἀπὸ τεσσάρων εἰδῶν προτάσεων καθόλου καταφατικῆς, καθόλου ἀποφατικῆς, μερικῆς καταφατικῆς, μερικῆς ἀποφατικῆς, ἤτοι Α Ε Ο Ι πόσα τὰ εἴδη τῶν συλλογισμῶν, ὅταν τρεῖς μόνον ἐξ αὐτῶν συζεύγνυνται ἰδιαιτέρως, καὶ μεθ' ἑαυτῶν;

Λέγομεν $=4^3=64$· τὰ δὲ λοιπὰ, ὅσα ἀπὸ τῶν τριῶν εἰδῶν τούτων ἀλλήλοις παραβαλλομένων εἰς τὸ πιθανὸν, καὶ μὴ, εὑρίσκουσιν οἱ εἰς τὰ τοιαῦτα καταγινόμενοι φιλόπονοι ἀναγνῶσαι αὐτοὶ ἀφ' ἑαυτῶν.

ΜΕ΄ΡΟΣ Β΄.

Περὶ Γεωμετρικῆς Σειρᾶς.

ΚΕΦΑ΄ΛΑΙΟΝ Α΄.

Ἰδίως περὶ γεωμετρικῆς σειρᾶς.

§. 532. Σειρὰν γεωμετρικὴν καλοῦμεν ἀκολουθίαν ὅρων πλειόνων, ἢ τριῶν, ὧν ἕκαςος ὅρος ἔχει πρὸς τὸν ἑξῆς ἑπόμενον, ὡς ὁ ἑξῆς ἡγούμενος πρὸς αὐτὸν, ὡς ἡ σειρὰ αὕτη 3, 9, 27, 81, 243 κ. τ. λ. εἶναι σειρὰ γεωμετρική· διότι ἕκαςος ὅρος εἶναι πρὸς τὸν ἑξῆς ἑπόμενον, ὡς οὗτος ὁ ἑπόμενος πρὸς τὸν ἑξῆς ἑπόμενον· ἢ καὶ οὕτω σειρὰν γεωμετρικὴν καλοῦμεν ἐκείνην, ἧς οἱ ὅροι συνεχίζονται, ἐὰν τὸν ἡγούμενον ὅρον πολλαπλασιάσωμεν δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, καὶ ὁ ἑξῆς ἑπόμενος γίνεται, καὶ τοῦτον πάλιν διὰ τοῦ αὐτοῦ ὁ ἑξῆς ἑπόμενος, καὶ ἔτι τοῦτον διὰ τοῦ αὐτοῦ ὁ ἑξῆς ἑπόμενος κ. τ. λ. δηλ: ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος 5, καὶ 2 ὁ πολλαπλασιαςὴς, ἔςαι ὁ μὲν Β'. $5 \cdot 2 = 10$, ὁ δὲ Γ' $10 \cdot 2 = 20$, ὁ Δ' $20 \cdot 2 = 40$, καὶ ὁ Ε' $40 \cdot 2 = 80$. κ. τ. λ. καὶ ἡ σειρὰ εἶναι 5, 10, 20, 40, 80 κτ. ἐὰν ὅμως ὁ πολλαπλασιαςὴς οὗτος μείζων μονάδος, οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ μᾶλλον, καὶ μᾶλλον αὐξάνουσιν, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 3^2$, $2 \cdot 3^3$, $2 \cdot 3^4$. Ἐὰν δ' οὗτος ἐλάττων μονάδος, οἱ ἑξῆς ὅροι μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐλαττοῦνται ὡς $\frac{2}{3}$ ὁ πολλαπλασιαςὴς, καὶ 660 ὁ πρῶτος ὅρος, καὶ ἡ σειρὰ 660, $660 . \frac{2}{3}$, $660 . \frac{2^2}{3^2}$, $660 . \frac{2^3}{3^3}$ κ. τ. λ. ἤτοι 660. 440, $293\frac{1}{3}$ κ. τ. λ. καὶ λοιπὸν ἐὰν οἱ ἑξῆς ὅροι αὐξάνωσι, καλεῖται ἡ σειρὰ αὔξουσα, ἐὰν δὲ μειοῦνται, λέγεται μειουμένη, ἢ φθίνουσα· κ. τ. λ. (§. 534).

§. 583. Ἐὰν μόνον δύω συνεχεῖς ὅροι τῆς σειρᾶς δοθῶσιν, εὑρίσκομεν ἀμέσως τοῦτον τὸν πολλαπλασιαςὴν, ὅταν ὁ ἑξῆς ὅρος διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἐγγὺς ἀνωτέρου ὡς εἰς τήνδε τὴν σειρὰν 6, 18, 54, 162· καὶ $\frac{18}{6} = 3$ καὶ $\frac{54}{18} = 3$ καὶ $\frac{162}{54} = 3$. Ὅθεν ἐὰν μόνον ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ δεύτερος δοθῇ, εὑρίσκεται οὗτος ὁ πολλαπλασιαςὴς πηλίκον, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ δεύτερος διὰ τοῦ πρώτου· καὶ διὰ τοῦτο οὗτος ὁ πολλαπλασιαςὴς εἰς τὰς γεωμετρικὰς σειρὰς πηλίκον ὀνομάζεται, ὡς εἰς τὰς αριθμητικὰς, διαφορά. (§. 535.)

§. 584. Ἐὰν ἑκάςης σειρᾶς γεωμετρικῆς τὸν μὲν πρῶτον ὅρον α καλέσωμεν, τὸ δὲ πηλίκον π, καὶ τὸν ἔσχατον ὅρον γενικὸν τ, ἐκφράζεται ἡ σειρὰ γενικῶς α, $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^3$, $\alpha\pi^4$ . . . . τ· καὶ ἐν αὐτῇ τῇ γενικῇ σειρᾷ εἶναι φανερὸν, ὅτι ἑκάςη σειρὰ γεωμετρικὴ συνίςαται ἀπὸ ὅρων συνεχῶς ἀναλόγων ὡς $\alpha : \alpha\pi = \alpha\pi : \frac{\alpha\alpha\pi^2}{\alpha} = \alpha\pi^2$, ὡς καὶ ὁ τρίτος ὅρος· καὶ $\alpha\pi : \alpha\pi^2 = \alpha\pi^2 = \frac{\alpha\pi^2 : \alpha\pi^2}{\alpha\pi} = \alpha\pi^3$, ὡς ὁ τέταρτος· καὶ $\alpha\pi^2 : \alpha\pi^3 = \alpha\pi^3 : \frac{\alpha^2\pi^6}{\alpha\pi^2} = \alpha\pi^4$ ὁ πέμπτος κ. τ. λ. διότι ὁ α καὶ π ἀριθμὸς ἠμπορεῖ νὰ σημαίνῃ οἱουδήποτε ἀριθμὸν καταφατικὸν, ἀποφατικὸν, ἀκέραιον, κεκλασμένον, λογικὸν, καὶ ἄλογον, καὶ φανταςικὸν κ. τ. λ.

§. 584. Ἐὰν τὴν σειρὰν γενικῶς ἐκφράσωμεν τὴν γεωμετρικὴν, καὶ ἐπάνω αὐτῆς ἑτέραν ἀριθμητικὴν ὡς δείκτην τῶν ὅρων οὕτω, $\alpha^1, \alpha^2\pi^1, \alpha^3\pi^2, \alpha^4\pi^3, \alpha^5\pi^4, \alpha^6\pi^5, \alpha^7\pi^6.\ \tau^\nu$ εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν πρῶτον ὅρον τὸ πηλίκον δὲν εὑρίσκεται, εἰς τὸν δεύτερον εὑρίσκεται μὲ ἐκθέτην μονάδα, εἰς τὸν τρίτον μὲ ἐκθέτην δύω, εἰς τὸν τέταρτον μὲ ἐκθέτην τρία κ. τ. λ. δηλ: ὁ ἐκθέτης τοῦ πηλίκου εἶναι μονάδος ἐλάττων ἀπὸ τὸν ἐπάνω αὐτοῦ δείκτην, ἐὰν ὁ ἄνω δείκτης ν κληθῇ, ἔςαι ὁ ὑπ' αὐτοῦ ὅρος $\alpha\pi^{\nu-1}$· καὶ εὐκόλως εὑρίσκεται ὁ $\tau = \alpha\pi^{\nu-1}$· λοιπὸν ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος τῆς σειρᾶς δοθῇ, καὶ τὸ πηλίκον π, καὶ ἡ τάξις τοῦ ὅρου ν, εὑρίσκομεν ἕκαςον ἀριθμὸν τῆς σειρᾶς. Δεδόσθω ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς σειρᾶς 2 τὸ $\pi=3$· καὶ ζητεῖται ὁ πέμπτος ὅρος, ἤτοι

$τ=απ^{ν-1}=2.3^{5-1}=2.3^{4}=2.81=162$· διότι ἡ σειρὰ εἶναι ἡ $2^1, 6^2, 18^3, 54^4, 162^5, 486^6$ κ. τ. λ. ἢ ἐὰν $α=486$ καὶ $π=\frac{1}{3}$ καὶ ζητεῖται ὁ τέταρτος ὅρος τῆς σειρᾶς· ἔςαι $τ=απ^{4-1}=απ^3=486.\frac{1^3}{3^3}=486.\frac{1}{27}=18$· διότι $486^1, 162^2, 54^3, 18^4, 6^5$ κτ.

§. 586. Καὶ εἰς αὐτὰς, τὰς σειρὰς ὡς καὶ εἰς τὰς ἀριθμητικὰς, ἕκαςος ὅρος γίνεται, πρὸς μὲν τὸν ἡγούμενον, ἑπόμενος, πρὸς δὲ τὸν ἑπόμενον ἡγούμενος, ἐκτὸς μόνου τοῦ πρώτου, ὅς ἐςιν ἀεὶ ἡγούμενος, καὶ τοῦ ἐσχάτου, ὅς ἐςιν ἀεὶ ἑπόμενος, κατὰ τὰ τῆς Ἀλύσου ἰδιώματα.

§. 587. Καὶ αὖθις ἐὰν τὴν γεωμετρικὴν σειρὰν ἐκφράσωμεν γενικῶς, $α, απ^1, απ^2, απ^3, απ^4, απ^5$ κ. τ. λ.= ἐπειδὴ $π^0=1$· γίνεται καὶ οὕτω, $απ^0, απ^1, απ^2, απ^3, απ^4$ κτλ.

α΄. Εὑρίσκομεν εἰς κάθε σειρὰν τοὺς ἐκθέτας τοῦ πηλίκου π ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ οὕτω 0, 1, 2, 3, 4, κ. τ. λ, τοῦ $α=0$

β΄. Ἐπειδὴ α κοινὸς παράγων εἰς ὅλους τοὺς ὅρους, δυνάμεθα ἑκάςην σειρὰν διαιρεῖν διὰ τοῦ πρώτου ὅρου α, καὶ τὴν σειρὰν $απ^0, απ^1, απ^2, απ^3, απ^4$ κ. τ. λ. εἰς τήνδε μεταβαλεῖν $π^0, π^1, π^2, π^3, π^4$ κ. τ. λ. ἀλλὰ $π^0=1$ ἄρα ἡ σειρὰ $1, π, π^2, π^3, π^4$ κ. τ. λ.

γ΄. Ἄρα κάθε σειρὰ αὐξανομένη, ἐὰν ἔχῃ τὸν πρῶτον ὅρον μείζονα μονάδος, μεταβάλλομεν αὐτὴν εἰς ἑτέραν, χωρὶς νὰ χαλάσῃ ἡ ἀναφορὰ τῶν λόγων, ἥτις ἔχει τὸν πρῶτον ὅρον μονάδα, ὡς 5, 10, 20, 40, 80 κ. τ. λ. εἰς τήνδε 1, 2, 4, 8, 16 κ. τ. λ. καὶ γίνεται ἀεὶ, $α, απ, απ^2, απ^3$ κ. τ. λ.$=α\,(1, π, π^2, π^3)$· καὶ 5, 10, 20, 40, 80= (1, 2, 4, 8, 16)5· ἐὰν δὲ ἡ σειρὰ μειουμένη, διὰ τοῦ ἐσχάτου ὅρου αὐτὴν διαιροῦμεν, ὅταν ἦ ἀριθμὸς ὁλόκληρος, καὶ ποιοῦμεν τὸν ἔσχατον ὅρον πρῶτον, ἀνάπαλιν ὡς 81, 27, 9, 3 εἰς αὐτὴν 27, 9, 3, 1, καὶ τέλος 1, 3. 9, 27· ἐὰν τέλος ὁ ἔσχατος ὅρος τῆς μειουμένης σειρᾶς κλασματικὸς, πολλαπλασιάζομεν ὅλην τὴν σειρὰν διὰ τοῦ παρωνομαςοῦ τοῦ ἐσχάτου ὅρου, καὶ παλιν μεταβαίνει ἡ σειρὰ εἰς ετέραν, ἥτις ἔχει αὐτὸν τὸν ὅρον μονάδα, καὶ κλασμάτων χωρίς. ὡς 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ γίνεται 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

δ΄. Ἐὰν τοὺς ὅρους μιᾶς γεωμετρικῆς σειρᾶς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἴτε πολλαπλασιάσωμεν, εἴτε διέλωμεν, τὰ παραγόμενα, καὶ τὰ πηλίκα πάλιν ἐν γεωμετρικῇ γίνονται σειρᾷ.

ε΄. Ἐὰν τοὺς ὅρους μιᾶς γεωμετρικῆς σειρᾶς εἰς δύναμιν τινὰ ὑψώσωμεν, καὶ αἱ δυνάμεις αὗται τῶν ὅρων πάλιν εἰς γεωμετρικὴν σειρὰν παρίςανται· τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ ἐὰν ῥίζαν τινὰ ὁμοβάθμιον ἀπὸ ὅλους ἐξαγάγωμεν.

ς΄. Δυνάμεις οἱαιδήποτε, ὁποῦ ἔχουσι τοὺς ἐκθέτας ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ, εἰσὶ συνεχῶς γεωμετρικῶς ἀνάλογοι, καὶ παρίςανται εἰς σειρὰν γεωμετρικὴν $1, \pi, \pi^2, \pi^3$ κ. τ. λ. ἢ $1, \pi^3, \pi^7, \pi^{11}, \pi^{15}$ κ. τ. λ. ἢ $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4$ κτ. καὶ $1, 2^4, 2^8, 2^{12}$ κ. τ. λ. δηλ: 1, 3, 9, 27, 81, καὶ 1, 16, 256, 4096 κ. τ. λ.

§. 588. Ὁ μὲν ἔσχατος ὅρος εὑρίσκεται διὰ τῆς ἐξισώσεως $\tau = \alpha\pi^{\nu-1}$ . . . (§. 585) . . . . . I.
Οἱ δὲ λοιποὶ ἐξ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως περαίνονται· διότι εἰς αὐτὴν τέσσαρες ὅροι εὑρίσκονται· ὁ πρῶτος ὅρος $=\alpha$ ὁ ἔσχατος $=\tau$, τὸ πηλίκον $=\pi$, καὶ ὁ δείκτης τῶν ὅρων $=\nu$.

Ἐὰν τρεῖς τῶν τεσσάρων δοθῶσιν, οἱ λοιποὶ εὑρίσκονται· δεδόσθω ὁ ἔσχατος ὅρος τ, καὶ τὸ πηλίκον π, καὶ ὁ δείκτης ν, καὶ ζητείσθω ὁ πρῶτος α· ἐπειδὴ $τ=απ^{ν-1}$. ἄρα καὶ

$$\frac{τ}{π^{ν-1}}=α \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{II.}$$

ζητείσθω ἔτι ὁ π· ἐπεὶ δὲ $τ=απ^{ν-1}$· ἄρα $\frac{τ}{α}=π^{ν-1}$

$$\sqrt[ν-1]{\frac{τ}{α}}=π \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{III.}$$

Ἐὰν δ' ὁ δείκτης ν ζητῆται, οὗτος ἄλλως δὲν εὑρίσκεται, εἰμὴ διὰ τῶν λογαρίθμων· καὶ ἐπειδὴ ἡμεῖς οὔπω ἰδέαν λογαρίθμων ἔχομεν, τὰς τοιαύτας εὑρέσεις μετὰ τοὺς λογαρίθμους ἀφήσωμεν.

Σημειώσεις.

Σημείωσαι, ὅτι πλῆθος προβλημάτων μένουσιν ἀναπόδεικτα, καὶ ἄγνωςα εἰς ὅσους λογαρίθμους δὲν ἰξεύρουσι· δεδόσθω ὁ $τ=32$ καὶ $π=2$ ν δὲ$=5$ καὶ ζητεῖται ὁ $α=\frac{τ}{π^{ν-1}}=\frac{τ}{π^4}=\frac{32}{16}=2$· ἐὰν δὲ $τ=1875$, $π=5$, καὶ $ν=5$ ἔςαι $α=\frac{τ}{π^{ν-1}}=\frac{1875}{5^4}=\frac{1875}{625}=3$· Ἐὰν δὲ $τ=1$, $π=\frac{1}{3}$ καὶ $ν=5$ ἐπὶ μιᾶς μειουμένης σειρᾶς, ἔςαι $α=\frac{τ}{π^{ν-1}}=\frac{1}{\frac{1^4}{3^4}}=\frac{1}{\frac{1}{81}}=81$· ἐπειδὴ δὲ τὸ πηλίκον γνωςὸν $=\frac{1}{3}$· ἀποτερματίζομεν εὐκόλως τοὺς ὅρους τῆς σειρᾶς· (§. 582).

§. 589. Ἐν πάσῃ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ· α΄, τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἀμέσως ἑπομένων ὅρων, ἢ τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν κ. τ. λ. εὑρίσκεται πάλιν συνεχῶς ἀνάλογον, ἤτοι ἐν σειρᾷ γεωμετρικῇ ὡς ἐπὶ τῆς δε $\alpha, \alpha\pi^2, \alpha\pi^3, \alpha\pi^4$ κ. τ. λ. διότι ἐὰν διέλωμεν ἓν ἑπόμενον διὰ τοῦ ἐγγὺς ἡγουμένου, εὑρίσκομεν ἀεὶ πηλίκον $\pi = \frac{\alpha\pi+\alpha\pi^2}{\alpha+\alpha\pi} = \frac{\alpha\pi^2+\alpha\pi^3}{\alpha\pi+\alpha\pi^2}$ κ. τ. λ, καὶ τοιοῦτον τὸ ἰδίωμα τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς (§. 582). ὁμοίως $\alpha+\alpha\pi$, $\alpha\pi+\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^2+\alpha\pi^3$, $\alpha\pi^3+\alpha\pi^4$ κ. τ. λ. διότι ἐὰν διὰ τοῦ π τὸν ἡγούμενον ὅρον πολλαπλασιάσωμεν, ὁ ἑξῆς ἑπόμενος γίνεται.

β΄. Καὶ αἱ διαφοραὶ τῶν ἐφεξῆς ἑπομένων ὅρων παρίστανται ἐν γεωμετρικῇ σειρᾷ ὡς $\alpha\pi-\alpha$, $\alpha\pi^2-\alpha\pi$, $\alpha\pi^3-\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^4-\alpha\pi^3$ κ. τ. λ. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸν ἀνωτέρω.

γ΄. Καὶ τὰ παραγόμενα τῶν ἐφεξῆς ὅρων ἐν γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον παρίστανται· $\alpha\alpha\pi$, $\alpha^2\pi^3$, $\alpha^2\pi^5$, $\alpha^2\pi^7$ κ. τ. λ. ὅσαι γὰρ τὸ πηλίκον π^2.

§. 590. Ἐν ἁπάσῃ γεωμετρικῇ σειρᾷ τὰ παραγόμενα ἀπὸ δύω ὅρων ἐπίσης ἀφισταμένων ἴσα εἰσὶν, ὡς

$$\alpha,\ \alpha\pi,\ \alpha\pi^2,\ \alpha\pi^3,\ \alpha\pi^4,\ \alpha\pi^5$$

$$\alpha^2\pi^5$$

$$\alpha^2\pi^5$$

$$\alpha^2\pi^5$$

καὶ ἐν ἀριθμοῖς 3, 9, 27, 81, 243, 3. 243=9.81=237. 27. καὶ φανερὸν ὅπου οἱ ὅροι μιᾶς σειρᾶς περιττοὶ, τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου ὅρου εἶναι ἴσον τῷ παραγομένῳ ἀπὸ δύω ὅρων, ὅπου ἐπίσης ἀπ' αὐτοῦ ἀπέχουσιν, ὁ μὲν ὡς ἡγούμενος, ὁ δὲ ὡς ἑπόμενος, καθὼς καὶ εἰς τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου ἴσον τῷ παραγομένῳ τῶν ἄκρων· (§. 473).

§. 591. Εἰς κάθε σειρὰν γεωμετρικὴν, ἐὰν $\pi=2$, ἢ $=\frac{1}{2}$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ πρώτου ὅρου καὶ τοῦ ἐσχάτου εἶναι ἴση τῷ κεφαλαίῳ ὅλων τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς, ἐκτὸς μόνου τοῦ μεγίστου ὡς α, 2α, 4α, 8α, 16α κ. τ. λ. $16\alpha-\alpha=15\alpha$· καὶ $\alpha+2\alpha+4\alpha+8\alpha=15\alpha$ ἐὰν δὲ $\pi=\frac{1}{2}$, ἔσαι α, $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha$, $\frac{1}{8}\alpha$, $\frac{1}{16}\alpha$ κ. τ. λ. λοιπὸν $\alpha-\frac{1}{16}\alpha=\frac{15}{16}\alpha$· ἀλλὰ καὶ $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{8}\alpha+\frac{1}{16}\alpha=\frac{8}{16}\alpha+\frac{4}{16}\alpha+\frac{2}{16}\alpha+\frac{1}{16}\alpha=\frac{15}{16}\alpha$· Ἐὰν δὲ $\pi=3$ ἢ $=\frac{1}{3}$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ πρώτου ὅρου καὶ τοῦ ἐσχάτου εἶναι ἴση τῷ διπλῷ κεφαλαίῳ ὅλων τῶν ὅρων, πλὴν τοῦ μεγίσου ὅρου· διότι ἐὰν $\pi=3$, ἔσαι ἡ σειρὰ α, 3α, 9α, 27α, 81α, ἄρα $81\alpha-\alpha=80\alpha$ καὶ $2(\alpha+3\alpha+9\alpha+27\alpha)=40\alpha.\,2=80\alpha$. Ἐὰν δὲ $\pi=\frac{1}{3}$· ἔσαι α, $\frac{1}{3}\alpha$, $\frac{1}{9}\alpha$, $\frac{1}{27}\alpha$, $\frac{1}{81}\alpha$ καὶ $\alpha-\frac{1}{81}\alpha=\frac{80}{81}\alpha$· ἄρα καὶ $2(\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{9}\alpha+\frac{1}{27}\alpha+\frac{1}{81}\alpha)=2(\frac{27}{81}\alpha+\frac{9}{81}\alpha+\frac{3}{81}\alpha+\frac{1}{81}\alpha)=(\frac{40}{81}\alpha)\,2=\frac{80}{81}\alpha$.

Ἐὰν δὲ $\pi=4$· ἢ $=\frac{1}{4}$ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ πρώτου ὅρου, καὶ τοῦ ἐσχάτου εἶναι ἴση τῷ τριπλῷ κεφαλαίῳ τῶν ὅρων ἐκτὸς τοῦ μεγίσου ὅρου· διότι ἡ σειρὰ α, 4α, 16α, 64α κτ. καὶ $64\alpha-\alpha=63\alpha$ ἄρα καὶ $3(\alpha+4\alpha+16\alpha)=3.\,21\alpha=63\alpha$. Ὁμοίως καὶ ἐὰν $\pi=\frac{1}{4}$ κ. τ. λ.

Καὶ καθόλου νὰ εἰπῶμεν, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ μεγίσου ὅρου καὶ τοῦ ἐλαχίσου ἐὰν $\pi=\mu$, εἶναι ἴση τῷ κεφαλαίῳ ὅλων τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς πλὴν αὐτοῦ τοῦ ἐσχάτου, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸ π πλὴν μιᾶς μονάδος οὕτω $\pi-1$·

ἐὰν ἡ σειρὰ α, $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^3$, $\alpha\pi^4$ κ. τ. λ. $\alpha\pi^3 - \alpha = (\alpha + \alpha\pi + \alpha\pi^2 + \alpha\pi^3)(\pi - 1.)$

§. 592. Ἐὰν κατὰ τοῦτο τὸ θεώρημα θῶμεν τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς Κ, καὶ τὸν μέγιςον ὅρον τ, τὸν δ' ἐλάχιςον ὅρον α'. καὶ τὸ πηλίκον π. ἔςαι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ μεγίςου καὶ ἐλαχίςου $\tau - \alpha$ ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ὅρων πλὴν τοῦ μεγίςου $K - \tau$. ἐὰν τοῦτο πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\pi - 1$, ἔςαι.

$$(K - \tau)(\pi - 1) = \tau - \alpha$$

$$K\pi - \tau\pi - K + \tau = \tau - \alpha$$

$$K\pi - K = \tau\pi - \alpha$$

$$K(\pi - 1) = \tau\pi - \alpha, K = \frac{\tau\pi - \alpha}{\pi - 1}.$$

καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ κεφάλαιον κατ' αὐτὸν τὸν τύπον, ὅταν ἔχωμεν γνωςὰ τό,τε τ, α, καὶ π. ἔςω αὕτη ἡ σειρά· 3, 9, 27, 81, 243, 729, καὶ ζητεῖται τὸ κεφάλαιον αὐτῆς· ἄρα $\tau = 729$. $\alpha = 3$ καὶ $\pi = 3$· λοιπὸν $K = \frac{\tau\pi - \alpha}{\pi - 1} = \frac{729.\,3 - 3}{3 - 1} = \frac{2184}{2} = 1092$· ἐὰν δ' ἡ σειρὰ μειουμένη, θὲς τὸν πρῶτον $= \tau$· διότι ὁ μέγιςος ὅρος ὑπετέθη ἀντὶ τ· ἔςω ἡ σειρὰ 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$. ἄρα $\tau = 81$ καὶ $\alpha = \frac{1}{9}$ καὶ $\pi = 3$. λοιπὸν $K = \frac{\tau\pi - \alpha}{\pi - 1}$

$$\frac{81.\,3 - \frac{1}{9}}{3 - 1} = \frac{243 - \frac{1}{9}}{2} = \frac{\frac{2186}{9}}{2} = \frac{2186}{18} = 121\tfrac{4}{9}\cdot$$ ὁμοίως

καὶ εἰς τὰ λοιπά.

§. 593. Ἐὰν δὲ εἰς αὐτὸν τὸν τύπον ἀντὶ τ θῶμεν τὸ ἴσον εὑρεθὲν $\alpha\pi^{\nu-\tau}=\tau$. (§. 585). ἔςαι $K=\frac{\tau\pi-\alpha}{\pi-1}=$

$\frac{\alpha\pi\pi^{\nu-1}-\alpha}{\pi-1}=\frac{\alpha\pi^{\nu}-\alpha}{\pi-1}$. καὶ οὗτος ὁ τύπος μᾶλλον χρήσιμος, ἐὰν μόνον ὁ πρῶτος ὅρος, τὸ πηλίκον, καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὅρων ν δοθῶσιν· ἔςω ὁ πρῶτος ὅρος $=\alpha=3$ μιᾶς σειρᾶς, τὸ δὲ πηλίκον $\pi=5$, καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὅρων $\nu=6$· καὶ ζητεῖται τὸ κεφάλαιον τῆς σειρᾶς, ἄρα $K=\frac{3.5^{6}-3}{4}=$

$\frac{3.15625-3}{4}=\frac{46872}{4}=11718$· καὶ ἡ σειρὰ 3, 15, 75, 375, 1875, 9375.

§. 594. Εὑρίσκουσι δὲ τὸ κεφάλαιον τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς καὶ οὕτω· ἔςω τὸ κεφάλαιον ἴσον τῇ σειρᾷ οὕτω $K=\alpha+\alpha\pi+\alpha\pi^2+\alpha\pi^3+\alpha\pi^4 \ldots \alpha\pi^{\nu-1}$· πολλαπλασιάσθωσαν ἄμφω τὰ σκέλη τῆς ἐξισώσεως μὲ $\pi-1$ οὕτω·

$$(\pi-1)\,K=\alpha\pi+\alpha\pi^2+\alpha\pi^3+\alpha\pi^4 \ldots \alpha\pi^{\nu-1}+\alpha\pi^{\nu}$$
$$-\alpha-\alpha\pi-\alpha\pi^2-\alpha\pi^3-\alpha\pi^4 \ldots \alpha\pi^{\nu-1}$$

ταῦτα πάντα ἐὰν εἰς τὸ ἁπλούςερον ἐπαναγάγωμεν, εὑρίσκεται $(\pi-1)\,K=\alpha\pi^{\nu}-\alpha$, καὶ $K=\frac{\alpha\pi^{\nu}-\alpha}{\pi-1}$ ὡς καὶ ἀνωτέρω· ἐπειδὴ ὅμως $\alpha\pi^{\nu}=\alpha\pi^{\nu-1}\pi$, καὶ $\tau=\alpha\pi^{\nu-1}$, ἐὰν τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων θῶμεν, ἔςαι $K=\frac{\pi\tau-\alpha}{\pi-1}$ ὡς ἄνω.

§. 595. Ἡ Γεωμετρικὴ σειρὰ συνίςαται ἀπὸ λόγους ἴσους, καὶ ὁ αὐτὸς ὅρος εἶναι καὶ ἡγούμενος, καὶ ἑπόμενος, πλὴν τοῦ α΄ ἀεὶ ἡγουμένου, καὶ τοῦ ἐσχάτου ἀεὶ ἑπομένου, ἀλλ᾽ εἰς ἴσους λόγους τὸ κεφάλαιον τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν ἑπομένων, ὡς εἷς ὅρος ἡγούμενος πρὸς ἕνα ἑπόμενον (§. 485). τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν ἡγουμένων εἶναι $K-\tau$, καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ἑπομένων $K-\alpha$· ἐὰν $K=$ τῷ κεφαλαίῳ ὅλων τῶν ὅρων θῶμεν· λοιπὸν $K-\tau$: $K-\alpha=\alpha:\alpha\pi$, καὶ $\alpha\pi K-\alpha\pi\tau=\alpha K-\alpha^2$

$$\text{ἄρα } \pi K-\pi\tau=K-\alpha$$

$$\text{καὶ } \pi K-K=\pi\tau-\alpha$$

$$\text{καὶ} \quad K=\frac{\pi\tau-\alpha}{\pi-1}$$

καὶ οὕτως εὕρηται τὸ κεφάλαιον ὡς πρότερον.

§. 596. Εἰς καθε γεωμετρικὴν σειρὰν ὁ α΄. ὅρος πρὸς τὸν γ΄, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ α΄. πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ β΄. οὕτως $\alpha:\alpha\pi^2=\alpha^2:\alpha^2\pi^2$· διότι $\alpha\cdot\alpha^2\pi^2=\alpha\cdot\alpha^2\pi^2$.

Ἔτι ὁ α΄. ὅρος πρὸς τὸν δ΄, ὡς ὁ κύβος τοῦ α΄ πρὸς τὸν κύβον τοῦ β΄. $\alpha:\alpha\pi^3=\alpha^3:\alpha^3\pi^3$· διότι $\alpha^4\pi^3=\alpha^4\pi^3$.

Ἔτι ὁ α΄ ὅρος πρὸς τὸν ε΄, ὡς ἡ τετάρτη δύναμις τοῦ α΄ πρὸς τὴν αὐτὴν τοῦ β΄. $\alpha:\alpha\pi^4=\alpha^4:\alpha^4\pi^4$· καὶ ἐν γένει ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν ν ὅρον ὡς ἡ $\nu-1$ δύναμις τοῦ πρώτου πρὸς τὴν $\nu-1$ δύναμιν τοῦ δευτέρου· ἀλλ᾽ ὁ ν ὅρος $=\tau=\alpha\pi^{\nu-1}$· ἄρα $\alpha:\alpha\pi^{\nu-1}=\alpha^{\nu-1}:\alpha^{\nu-1}\pi^{\nu-1}$· διότι $\alpha^{\nu}\pi^{\nu-1}=\alpha^{\nu}\pi^{\nu-1}$.

§. 697. Παραβάλλεται δὲ καὶ ἕτερος οἱοσδήποτε ὅρος πρὸς ἕτερον οἱονδήποτε ὅρον, πλὴν πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν πόσον ἀπέχει οὗτος ἀπὸ ἐκείνου, δηλ: τὶ διάςημα εἶναι μεταξὺ τῶν δύω· τοῦτο εὑρίσκεται, ἐὰν ἀφέλωμεν τὸν μεκρότερον ἀπὸ τὸν μεγαλήτερον, δηλ: τὸ διάςημα μεταξὺ τοῦ τρίτου ὅρου καὶ τοῦ ὀγδόου εἶναι $8-3=5$· τοῦ δὲ τετάρτου καὶ δεκάτου πέμπτου εἶναι $15-4=11$. Ὅθεν εἶναι ὁ τυχὼν ὅρος πρὸς τὸν τυχόντα ὅρον, ὡς ἕτερος οἱοσδήποτε ὅρος, ὑψωθεὶς εἰς δύναμιν κατὰ τὸ διάςημα ἐκείνων τῶν δύω, πρὸς τὸν ἑξῆς αὐτῷ ἑπόμενον, ὑψωθέντα καὶ αὐτὸν εἰς αὐτὸ τὸ διάςημα. δηλ: ὁ τέταρτος ὅρος πρὸς τὸν δέκατον, ὡς ὁ τρίτος εἰς τὴν ἕκτην δύναμιν πρὸς τὸν τέταρτον εἰς τὴν ἕκτην δύναμιν· ἢ ἄλλος εἰς τὴν ἕκτην δύναμιν πρὸς τὸν ἑξῆς ἑπόμενον εἰς τὴν ἕκτην δύναμιν· δηλ: $\alpha\pi^3 : \alpha\pi^9 = (\alpha\pi^2)^6 : (\alpha\pi^3)^6 = (\alpha\pi^6)^6 : (\alpha\pi^7)^6 = \alpha^6 : (\alpha\pi)^6$ κ. τ. λ. διότι ἀεὶ τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων· (§. 473.) $\alpha\pi^3 . \alpha^6\pi^{18} = \alpha\pi^9 . \alpha^6\pi^{12}$ κ. τ. λ. καὶ ἐν γένει ἔςωσαν δύω ὅροι μιᾶς γεωμετρικῆς σειρᾶς $\alpha\pi^{\mu}$ καὶ $\alpha\pi^{\rho}$· ἄρα τὸ διάςημα αὐτῶν $\rho-\mu$· ἔςωσαν δὲ καὶ δύω ἕτεροι συνεχεῖς $\alpha\pi^{\nu}$ καὶ $\alpha\pi^{\nu+1}$· λοιπὸν $\alpha\pi^{\mu} : \alpha\pi^{\rho} = (\alpha\pi^{\nu})^{\rho-\mu} : (\alpha\pi^{\nu+1})^{\rho-\mu}$· διότι $\alpha\pi^{\mu}(\alpha\pi^{\nu+1})^{\rho-\mu} = \alpha\pi^{\rho}(\alpha\pi^{\nu})^{\rho-\mu}$, ἐὰν μ, ρ, ν δὶ ἀριθμῶν διορίσωμεν.

§. 598. Κατὰ τοῦτο τὸ Θεώρημα ἠμποροῦμεν νὰ ἐμπαραβύσωμεν εἰς μίαν γεωμετρικὴν σειρὰν ὅρους καινούς, ὅσους ἂν θέλωμεν· ἔςω ἥδε ἡ γεωμετρικὴ σειρά, 2, 8, 32, 128 κ. τ. λ. καὶ ζητεῖται νὰ ἐμπαραβύσωμεν ἕνα ὅρον μεταξύ, ὥςε νὰ γένωσιν οἱ ὅροι διπλοῖ, δηλ: ὁ 8 ὅρος νὰ γένῃ τρίτος, ὥςε τὸ διάςημα μεταξὺ τοῦ 8 καὶ 2 νὰ εἶναι 2· λοιπὸν (§. 597.) $2 : 8 = 2^2 : \chi^2$ καὶ $\chi^2 = \frac{4.\ 8}{2} = 16$ καὶ $\chi = 4$· καὶ οὗτος ὁ ζητούμενος μεταξὺ ὅρος ὁ δεύτερος· ἄρα τὸ πηλίκον $\frac{4}{2}=2$ καὶ γίνεται ἡ σειρὰ 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 (§. 582). Ζητεῖται δὲ μεταξὺ τῶν ὅρων αὐτῆς τῆς σειρᾶς 2, 16, 128, 1024 δύω ὅρους συνεχεῖς ἀναλόγους ἐμπαραβύσαι, ὥςε εἶναι τὸν δεύτερον ὅρον 16, τέταρτον· ἄρα τὸ διάςημα μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 16, εἶναι 3·

ὅθεν (§. 597.) $2:16=2^3:\chi^3$ καὶ $\chi^3=\frac{16.8}{2}=64$· καὶ

$\chi=4$· ἄρα ὁ δεύτερος ὅρος 4, καὶ τὸ πηλίκον $\frac{4}{2}=2$ καὶ ἀπαρτίζεται ἡ σειρὰ (αὐτόθι) 2, 4. 8. 16, 32, 64, 128, 256 κ. τ. λ.

Ἐὰν δὲ τρεῖς ἐμπαραβύσαι ζητῆται εἰς αὐτὴν τὴν σειρὰν 2, 32, 1024 κ. τ. λ. αὐτοὺς δὲ β, γ, δ θῶμεν, νὰ εἶναι ἡ σειρὰ 2, β, γ, δ, 32, τότε ὁ δεύτερος ὅρος 32 εἶναι πέμπτος, καὶ τὸ διάςημα αὐτῶν 4· ἄρα $2:32=2^4:\beta^4$

καὶ $\beta^4=\frac{32.\ 2^4}{2}=256$· ἄρα $\sqrt[2]{\beta^4}=\sqrt{256}=16=\beta^2$,

καὶ $\beta=2$.

Εὑρίσκομεν δε καί το γ οὕτω $4:32=4^3:\gamma^3$ καὶ $\gamma^3=32\cdot16=512$· ἄρα $\gamma=8$.

Εὑρίσκομεν δὲ καὶ τὸ δ οὕτω $8:32=8^2:\delta^2$, καὶ $\delta^2=32.8=256$· ἄρα $\delta=16$· καὶ ἔςαι ἡ σειρὰ 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 κ. τ. λ.

§. 599. Ἐπειδὴ πολλάκις πολλοὺς ὅρους παρενείρειν ἀπαιτούμεθα, ἔςω ἡ πλῆθὺς τῶν ζητουμένων ὅρων ν καὶ α ὁ πρῶτος, καὶ β ὁ δεύτερος, ἐν οἷς μεταξὺ ὁ ν ἀριθμὸς ἀπαιτεῖται τῶν ὅρων· ἄρα τὸ διάςημα θέλει εἶναι μεταξὺ α καὶ β, ν+1· ἐὰν δ' ὁ πρῶτος τῶν ζητουμένων

χ κληθῇ, ἔςαι $\alpha:\beta=\alpha^{\nu+1}:\chi^{\nu+1}$ καὶ $\chi^{\nu+1}=\frac{\beta\alpha^{\nu+1}}{\alpha}=\alpha^{\nu}\beta$ καὶ ἑπομένως $\chi=\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu}\beta}$· καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον εὑρίσκεται ὁ πρῶτος τῶν ζητουμένων· ἐὰν ἔπειτα καὶ τὸ πηλίκον $\frac{\chi}{\alpha}$ εὕρωμεν, συνεχίζομεν τὴν σειρὰν (§. 582.) καὶ οἱ λοιποὶ ζητούμενοι εὑρίσκονται· ζητεῖται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 243 τέσσαρες ὅροι νὰ ἐμπαραβυσθῶσιν· ἄρα $\chi=\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu}\beta}=\sqrt[5]{1^{4}.243}=3$, τὸ δὲ πηλίκον $\frac{3}{1}=3$, καὶ ἡ σειρὰ οὕτω γίνεται 1, 3, 9, 27, 81, 243.

§. 600. Ὅτι δὲ οἱ ὅροι κατά τινα νόμον εὑρίσκονται, ἤδη ἐξετάσωμεν· ἔςω μεταξὺ τοῦ α καὶ β ὅρους τέσσαρας παρενείρειν, οὕτω $\alpha, \varphi, \chi, \psi, \eta, \beta$, τὸ δὲ διάςημα 5· ὅθεν $\alpha:\beta=\alpha^5:\varphi^5$ καὶ $\varphi^5=\alpha^4\beta$· ἄρα $\varphi=\sqrt[5]{\alpha^4\beta}$· καὶ $\varphi:\beta=\varphi^4:\chi^4$, καὶ $\chi^4=\varphi^3\beta$· ἄρα $\chi=\sqrt[4]{\varphi^3\beta}$, καὶ $\chi:\beta=\chi^3:\psi^3$, καὶ $\psi^3=\chi^2\beta$· ἄρα $\psi=\sqrt[3]{\chi^2\beta}$, καὶ $\psi:\beta=\psi^2:\eta^2$ καὶ $\eta^2=\psi\beta$· ἄρα $\eta=\sqrt{\psi\beta}$· καὶ αὐτοῦ γίνεται φανερὸν, ὅτι τὸ ῥιζικὸν σημεῖον εἰς μὲν τὸν α΄ τῶν τεσσάρων ἔχει τὸ διάςημα 5 ἐκθέτην, καὶ εἰς τὸν δεύτερον 4, καὶ εἰς τὸν τρίτον 3, καὶ καθ' ἑξῆς κατὰ μονάδα ἐλλείπουσαν· οἱ δὲ μετὰ τὸ σημεῖον παράγοντες ὁ μὲν δοθεὶς δεύτερος ἀεὶ ὁ αὐτὸς, ὁ δ' ἕτερος ἀεὶ ὁ ἑξῆς ἡγούμενος εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην παρὰ μονάδα ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ σημείου τοῦ ῥιζικοῦ· ἐὰν ὅμως ἀντὶ τῶν φ, χ, ψ κ. τ. λ. εἰς τὰς ἀναλογίας θῶμεν τὰς ἤδη εὑρεθείσας τιμὰς, εὑρίσκομεν τὸν ἑξῆς νόμον· ἔςω πρῶτον $\alpha : \beta = \alpha^5 : \varphi^5 \cdot$ καὶ $\varphi^5 = \dfrac{\alpha^5\beta}{\alpha} = \alpha^4\beta \cdot$ καὶ $\varphi = \sqrt[5]{\alpha^4\beta}$ . . . . I.

Εἰς τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν θῶμεν ἀντὶ φ τὸ ἴσον $\sqrt[5]{\alpha^4\beta} : \beta = (\sqrt[5]{\alpha^4\beta})^4 : \chi^4 \cdot$ ἢ $\sqrt[5]{\alpha^4\beta} : \beta = \sqrt[5]{\alpha^{16}\beta^4} : \chi^4 \cdot$ ὑψώσωμεν ὅλους τοὺς ὅρους εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν, οὕτω $\alpha^4\beta : \beta^5 = \alpha^{16}\beta^4 : \chi^{20}$, καὶ $\chi^{20} = \dfrac{\alpha^{16}\cdot\beta^9}{\alpha^4\beta} = \alpha^{12}\beta^8$, καὶ $\chi = \sqrt[20]{\alpha^{12}\beta^8}$

$= \sqrt[5]{\alpha^3\beta^2}$ . . . . II.

Λάβωμεν καὶ εἰς τὴν τρίτην ἀναλογίαν ἀντὶ χ τὸ ἤδη εὑρεθὲν $\sqrt[5]{\alpha^3\beta^2}$, $\sqrt[5]{\alpha^3\beta^2} : \beta = (\sqrt[5]{\alpha^3\beta^2})^3 : \psi^3 \cdot$ ἀρθήτωσαν οἱ ὅροι εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν $\alpha^3\beta^2 : \beta^5 = \alpha^9\beta^6 : \psi^{15}$ καὶ $\psi^{15} = \dfrac{\alpha^9\beta^{11}}{\alpha^3\beta^2} = \alpha^6\beta^9$ καὶ $\psi = \sqrt[5]{\alpha^2\beta^3}$ . . . . . . III.

Λάβωμεν ἔτι ἀντὶ ψ τὸ ἴσον $\sqrt[5]{\alpha^2\beta^3}$, οὕτως $\sqrt[5]{\alpha^2\beta^3} : \beta = (\sqrt[5]{\alpha^2\beta^3})^2 : ϟ^2$ καὶ εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν οἱ ὅροι οὕτω $\alpha^2\beta^3 : \beta^5 = \alpha^4\beta^6 : ϟ^{10}$ καὶ $ϟ^{10} = \dfrac{\alpha^4\beta^{11}}{\alpha^2\beta^3} = \alpha^2\beta^8$ καὶ $ϟ =$

$\sqrt[5]{\alpha\beta^4}$ . . . . IV.

καὶ εὑρέθησαν οἱ ὅροι $\varphi = \sqrt[5]{\alpha^4\beta}$.

$$\chi = \sqrt[5]{\alpha^3\beta^2}.$$

$$\psi = \sqrt[5]{\alpha^2\beta^3}.$$

$$ϟ = \sqrt[5]{\alpha\beta^4}.$$

ἄρα $\beta = \sqrt[5]{\alpha^0\beta^5}$.

ὅθεν τὸ ῥιζικὸν σημεῖον ἔχει πάντοτε ἐκθέτην μονάδα πλέον ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν, καθ' ὃν οἱ ζητούμενοι ὅροι ἀπαιτοῦνται· ἐὰν 10 ἀπαιτοῦνται, τὸ ῥιζικὸν θέλει ἔχει 11 ἐκθέτην· οἱ δὲ παράγοντες μετὰ τὸ ῥιζικὸν εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ, ἐν οἷς οἱ ζητούμενοι ὅροι ἐμπαραδύονται, καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἄρχεται ἀπὸ δυνάμεως, ὁπου ἔχει ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν ζητουμένων μερῶν, καὶ κατὰ τάξιν μονάδα ἐλαττοῦται, ἄχρις οὗ καταντήσῃ $a^0=1$· ὁ δὲ δεύτερος ἄρχεται ἀπὸ τῆς πρώτης δυναμεως, καὶ αὔξει ὁ ἐκθέτης κατὰ μονάδα τῆς δυνάμεως, ἕως νὰ καταντήσῃ νὰ ἔχῃ ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν, καθ' ὃν οἱ ὅροι ἀπαιτοῦνται· καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον εὐκόλως εὑρίσκομεν, ὁποιον πρῶτον θέλομεν· δηλ: ἐὰν ἐπιταχθῶμεν νὰ εὕρωμεν ἀπὸ ἓξ ζητουμένους ἀριθμοὺς μόνον τὸν τέταρτον, εὐκόλως αὐτὸν οὕτως εὑρίσκομεν, ἐὰν ψ κληθῇ, α καὶ β οἱ δοθέντες ἀριθμοί· $\psi=\sqrt[7]{a^3\beta^4}$· καὶ οὕτω δι' αὐτοῦ τοῦ νόμου τοὺς πάντας εὑρίσκομεν· ἀλλ' ἐπειδὴ περὶ τοῦ πῶς ἐξάγομεν τὰς ῥίζας τῶν ἀνωτέρω δυνάμεων μήπω διδαχθέντες, ἐπαρκεσθῶμεν μόνον εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου κατὰ τὸ παρὸν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τὴν εὕρεσιν τοῦ πηλίκου, διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ τοὺς λοιπούς.

§. 601. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τοὺς ὅρους μιᾶς σειρᾶς γεωμετρικῆς, ἐὰν ὁ πρῶτος μόνον α, καὶ ὁ ἔσχατος τ δοθῇ, καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ν. διότι ὁ δεύτερος ἀεὶ $x=\sqrt[\nu+1]{a^\nu\tau}$, καὶ τὸ πηλίκον ἀεὶ $\frac{\sqrt[\nu+1]{a^\nu\tau}}{a}$ καὶ οὕτως ἀπαρτίζεται ἡ σειρά.

§. 602. Πολλάκις ὁ πρῶτος ὅρος, καὶ ὁ ἔσχατος οὐ δίδεται, ἀλλὰ τὸ παραγόμενον αὐτῶν $ατ=μ$, καὶ τὸ πηλίκον $π$, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων $ν$· ἡμεῖς ὅμως εὑρίσκομεν καὶ οὕτω τὸν πρῶτον καὶ ἔσχατον ὅρον, καὶ ἀπαρτίζομεν τὴν σειράν· δοθήτω τὸ παραγόμενον τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου $=μ$, καὶ ζητεῖται ὁ $α$ καὶ $τ$, ἐπειδὴ $π$ καὶ $ν$ δίδεται· λοιπὸν $ατ=μ$ καὶ $τ=\frac{μ}{α}$, εὕρηται ὅμως καὶ $τ=απ^{ν-1}$ (§. 596)· ἄρα $απ^{ν-1}=\frac{μ}{α}$, καὶ $ααπ^{ν-1}=μ$, δηλ: $αα=\frac{μ}{π^{ν-1}}$. καὶ ἐπομένως $α=\sqrt{\left(\frac{μ}{π^{ν-1}}\right)}$ τῷ πρώτῳ ὅρῳ, ὅπου ἦν ἄγνωστος· ἐπειδὴ ὅμως ἦτον καὶ $τ=\frac{μ}{α}$· εὑρίσκεται καὶ ὁ ἔσχατος, καὶ ἐπομένως καὶ ὅλη ἡ σειρά· π. χ. δεδόσθω τὸ παραγόμενον τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ ἐσχάτου $μ=49$ τὸ δὲ $π=2$, καὶ $ν=5$· ἄρα $α=\sqrt{\frac{μ}{π^{ν-1}}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2^4}}=\frac{7}{4}$· καὶ ὁ ἔσχατος $τ=\frac{μ}{α}\ \frac{49}{\frac{7}{4}}=\frac{196}{7}=28$· καὶ ἡ σειρὰ οὕτω $\frac{7}{4}, \frac{14}{4}, \frac{28}{4}, \frac{56}{4}, \frac{112}{4}, 1\frac{3}{4}, 3\frac{2}{4}, 7, 14, 28$· ἴσως εἶναι περιττὸν νὰ εἰπῶμεν, ὅτι καὶ ἕκαστον παραγόμενον δύω ἑτέρων ἐπίσης ἀφεστηκότων ὅρων ἐὰν δοθῇ, εὑρίσκομεν τὸν πρῶτον καὶ τὸν ἔσχατον· διότι τὰ τοιαῦτα παραγόμενα εἶναι πάντοτε ἴσα. (§. 590).

§. 603. Καὶ τοιαύτη ἡ φύσις τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς, πλὴν κἀνταῦθα πέντε εἶναι τὰ κύρια, ὁ πρῶτος ὅρος $α$, ὁ ἔσχατος $τ$, τὸ πηλίκον $π$, ὁ ἀριθμητὴς τῶν μελῶν $ν$ καὶ τὸ κεφάλαιον $Κ$, καὶ ἐὰν τρία μόνα τούτων δοθῶσι, τὰ ἑξῆς ἀμέσως εὑρίσκονται· καὶ εἰς αὐτὴν τὴν σειρὰν 20 τύπους εὑρίσκομεν, ὡς καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν (§. 571.), δι' ὧν ἐπιλύονται διάφορα προβλήματα, ἐὰν μόνον τοὺς δύω τύπους

$$\tau = \alpha\pi^{\nu-1}, \text{ καὶ } K = \frac{\tau\pi - \alpha}{\pi - 1}$$

ἔχωμεν· πλὴν ἐπειδὴ αὐτῶν τινὲς δέονται ὑψηλοτέρας ἀναλύσεως, καὶ τῆς τῶν λογαρίθμων γνώσεως, διὰ τοῦτο μετὰ τὴν γνῶσιν καὶ χρῆσιν τῶν λογαρίθμων, ἐροῦμεν καὶ τὴν εὕρεσιν αὐτῶν τῶν τύπων, καὶ τὴν χρῆσιν, καὶ ἅμα τὰ συνήθη προβλήματα· περὶ δὲ τῶν ἀπείρων σειρῶν εἰς τὸ τρίτον βιβλίον ἐροῦμεν.

ΚΟ'ΜΜΑ Β'.

Περὶ Λογαρίθμων.

§. 604. Λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος νοοῦμεν ἕνα ἀριθμὸν ὡς δείκτην, ὅςις δείκνυσι ποσαπλασίων λαμβάνεται ὁ λόγος, ὃν ἔχει ἡ μονὰς πρὸς ἕνα δοθέντα ἀριθμὸν, δηλ: α, διὰ νὰ ἀποτελέσῃ τὸν ἀριθμὸν, οὗ αὐτὸς λογάριθμος λέγεται· ἤτοι ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς γεωμετρικῆς σειρᾶς 1, καὶ α ὁ δεύτερος, ὁ λογάριθμος τοῦ χ δείκνυσι ποσάκις λαμβάνεται 1: α διὰ νὰ ἀποτελέσῃ τὸν λογάριθμον 1: χ· ἐὰν γὰρ τρεῖς λαμβάνεται ὁ 1: α καὶ γίνεται $1 : \chi^3$ οὕτω $(1 : \alpha)(1 : \alpha)(1 : \alpha) = 1 : \chi^3$· ὁ τρία εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ χ· ἐὰν δὲ πεντάκις ἐκλαμβάνεται ὁ 5 λογάριθμος τοῦ χ κ. τ. λ. εἰς πλείονα δὲ τούτου διασάφησιν, εἰλήφθω ἡ γεωμετρικὴ σειρὰ α, $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^3$, $\alpha\pi^4$, $\alpha\pi^5$ κ. τ. λ. ἐὰν δὲ ταύτην διὰ τοῦ α διέλωμεν, γίνεται τὸ πηλίκον 1, π, π^2, π^3, π^4, π^5, κ. τ. λ. καὶ εἰς αὐτὴν τὴν σειρὰν βλέπομεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς εἶναι μονὰς, οἱ δὲ ἑξῆς ἐκ τοῦ δευτέρου ὅρου ὑψουμένου κατὰ σειρὰν εἰς δυνάμεις, κατὰ σειρὰν ἀριθμητικὴν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος μηδενικὸν σημεῖον· 1^0, π^1, π^2, π^3, π^4 κτ. γράψωμεν ἤδη τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν, καὶ ἀντὶ π θῶμεν 2, 3, 4, 5 κτ. καὶ ἐξέρχονται αἱ σειραί.

	ἀριθμ.	0,	1,	2,	3,	4,	5 κτ.
$\pi=2$	Γεωμ:	1,	2,	4,	8,	16,	32 κτ.
$\pi=3$	Γεωμ:	1,	3,	9,	27,	81,	243 κτ.
$\pi=4$	Γεωμ:	1,	4,	16,	64,	256,	1024 κτ.
$\pi=5$	Γεωμ:	1,	5,	25,	125,	625,	3125 κτ.

§. 605. Ἐὰν δὲ τὴν γενικὴν σειρὰν, 1, π, π^2, π^3 κ. τ. λ. καὶ τὰς λοιπὰς ἐξετάσωμεν, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μονὰς πρὸς ἕνα ὅρον μιᾶς δυνάμεως, τοῦ π δηλ: πρὸς τὸν π^3, συνίσταται ἀπὸ τοῦ λόγου $1:\pi$, ἐὰν αὐτὸς καθ' ἑαυτὸν ὁ λόγος πολλαπλασιασθῇ τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ π, ἢ ὁ ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς, ὁποῦ ἐπάνω αὐτοῦ τοῦ ὅρου γράφεται, οὕτω $1:\pi^3=(1:\pi)(1:\pi)(1:\pi)$, καὶ $1:\pi^5=(1:\pi)(1:\pi)(1:\pi)(1:\pi)(1:\pi)$· καὶ γενικῶς $1:\pi^\mu=(1:\pi)^\mu=1^\mu:\pi^\mu=1:\pi^\mu$. τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς σειρὰς τῶν χαρακτήρων, ὁ λόγος $1:8=(1:2)(1:2)(1.2)=(1:2)^3$, ἤτοι τριπλασίων· διότι ὁ τρία τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς γίνεται ἐπάνω τοῦ 8, καὶ $1:243=(1:3)^5$, καὶ $1:625=(1:5)^4$, ὅ ἐςὶ $1:32 = 1:2$ $1:5$

$1:2$ καὶ $1:3125$ $1:5$

$1:2$ $1:5$

$1:2$ $1:5$

$1:2$ $1:5$

$1:2^5 = 1:32$ $1:5^5 = 1:3125$

διότι καὶ ὁ 32 καὶ ὁ 3125 ἐκθέτην τὸν 5 ἔχει ἐν τῇ ἀριθμητικῇ σειρᾷ· ὅθεν τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν, ἥτις ἐπάνω τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς γράφεται, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς O, λογαριθμικὸν σύςημα οἱ μαθηματικοὶ ὀνομάζουσιν, ἕκαςον δ' ὅρου αὐτῆς λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ ἐκείνου τοῦ ὅρου τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς, εἰς ὃν ἐπάνω γράφεται καὶ νοεῖται· ἡ δὲ γεωμετρικὴ σειρὰ $1, \pi, \pi^2, \pi^3, \pi^4$ κ. τ. λ. Ἐκφράζει σειρὰν ἑκάςην καὶ αὐξανομένην καὶ μειουμένην μὲ πηλίκον οἱονδήποτε.

§.606. Ἀλλ' ἡ μονὰς εἰς οἱανδήποτε δύναμιν ἐξαρθεῖσα, ἢ ἀνάπαλιν εἰς ῥίζαν καταβιβασθεῖσα, μένει καὶ αὖθις μονὰς (§. 297.) ἄρα μένει ὁ λόγος ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὅρου νὰ διορίζηται, ἐὰν οὗτος διορισθῇ· καθότι καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἄρχεται ἡ ἀριθμητικὴ σειρὰ, διὰ τοῦτο καὶ βάσιν τοῦ λογαριθμικοῦ συςήματος τὸν δεύτερον ὅρον ἐκάλεσαν· βάσιν δὲ τοῦτον τὸν ἀριθμὸν καλοῦσι, καθότι ἀπ' αὐτοῦ ἄρχονται αἱ δυνάμεις νὰ πλεονάζωσι τὸν ἀριθμόν· καὶ οὗτος ἀρχὴ, καὶ ῥίζα τῶν δυνάμεων ὅλων τῆς σειρᾶς· ὅθεν καὶ λογάριθμος δὲν εἶναι ἄλλο, εἰ μὴ ἐκθέτης δυνάμεώς τινος ἑκάςου ἀριθμοῦ, ὅςις ἔχει ἀρχὴν, ῥίζαν, καὶ βάσιν αὐτὸν τὸν δεύτερον μετὰ τὴν μονάδα ὅρου τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς, ὡς $1, \pi, \pi^2, \pi^3, \pi^4, \pi^5$ κτ. ὁ π βάσις αὐτῆς τῆς σειρᾶς· διὰ τοῦτο καὶ ὁ δεύτερος ὅρος οὗτος εἰς καθε λογαριθμικὸν δίδεται σύςημα· τούτου χάριν καὶ ἄνω εἰς τὴν ὑπογραφὴν τοῦ λογαρίθμου (§. 604.) ὁ λόγος τῆς μονάδος πρὸς δοθέντα εἴρηται ἀριθμόν.

§. 607. Ὅθεν ἐὰν ὁ δεύτερος ὅρος μετὰ τὴν μονάδα ἀρθῇ εἰς δυνάμεις κατά τινα σειρὰν ἀριθμητικήν, ὡς

$\alpha, \alpha^{2}, \alpha^{3}, \alpha^{4}, \alpha^{5}, \alpha^{6}$, κ. τ. λ.

$\alpha, \alpha^{3}, \alpha^{5}, \alpha^{7}, \alpha^{9}, \alpha^{11}$, κτ.

$\alpha, \alpha^{5}, \alpha^{9}, \alpha^{13}, \alpha^{17}, \alpha^{21}$· κτ. ἢ ἐν ἀριθμοῖς

2, 4, 8, 16, 32, κτ. ἢ καὶ μετὰ τοῦ δείκτου

$\overset{1}{2}, \overset{2}{4}, \overset{3}{8}, \overset{4}{16}, \overset{5}{32}, \overset{6}{64}, \overset{7}{128}, \overset{8}{256}, \overset{9}{512}, \overset{10}{1024},$

$\overset{11}{2048}, \overset{12}{4096}, \overset{13}{8192}, \overset{14}{16384}, \overset{15}{32768}$ κ. τ. λ.

ἢ $\overset{1}{2}, \overset{3}{8}, \overset{5}{64}, \overset{7}{256}, \overset{9}{1024}, \overset{11}{4096}, \overset{13}{16384}, \overset{15}{65536}$ κ. τ. λ.

ἢ $\overset{1}{2}, \overset{5}{64}, \overset{9}{1024}, \overset{13}{16384}$ κ. τ. λ. οἱ ἐκθέται ἐπάνω τοῦ α, ἢ ἐπάνω τινὸς ἀριθμοῦ λογάριθμος ἀκούει ἐκείνου τοῦ ἀριθμοῦ· δηλ: ἐὰν $\alpha^{\mu}=\beta$, $\alpha^{\nu}=\gamma$, $\alpha^{\rho}=\delta$· ὁ μ, ν, ρ ἀριθμὸς λογάριθμος λέγεται, ὁ μὲν τοῦ β, ὁ δὲ τοῦ γ, ὁ δὲ τοῦ δ· ὁμοίως $2^{3}=8$, $2^{5}=32$, $2^{10}=1024$· ὁ μὲν 3 λογάριθμος τοῦ 8, ὁ δὲ 5 λογάριθμος τοῦ 32, ὁ δὲ 10 λογάριθμος τοῦ 1024, οὔσης τῆς βάσεως 2· καὶ ἐν γένει $\alpha^{\mu}=\beta$· ὁ μ λογάριθμος τοῦ β· ἐπειδὴ καὶ δεικνυσι ποσάκις ὁ α νὰ ληφθῇ ὡς παράγων, καὶ πολλαπλασιαζόμενος καθ' ἑαυτὸν νὰ ἀποτελέσῃ τὸν β· συντομίας ὅμως χάριν γράφουσιν ἀντὶ λογάριθμος λογ. ἢ λ μόνον οὕτω 5= λογ: 32, ἢ λ 32· ὅ ἐςιν ὁ 5 ἴσος τῷ λογαρίθμῳ τοῦ

32, καὶ $9=$ λογ: 512 ἐπὶ βάσεως 2, καὶ ταυτὸν ἢ $2^9=512$ ἢ $9=$λ: 512.

§. 608. Ἀλλ' ἡ βάσις α διαφόρως ἐκφράζεται, ὅτι διάφοροι ἀριθμοὶ εἰς αὐτὴν ἐννοοῦνται, καὶ γίνεται καὶ $=2$, $=3$, $=4$ κ. τ. λ. καὶ $=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ κ. τ. λ. ἄρα καὶ συςήματα λογαριθμικὰ ἄπειρα νοηθῆναι δύνανται· ἔπειτα καὶ αἱ δυνάμεις ὑψώνωνται εἰς διάφορα εἴδη ἀριθμητικῶν σειρῶν, καὶ α, α^2, α^3. κ. τ. λ. καὶ ἔτι α, α^5, α^9 κ. τ. λ., καὶ $\alpha^{\frac{1}{3}}$, $\alpha^{\frac{1}{8}}$, $\alpha^{\frac{1}{9}}$, α· κτ. καὶ ἐκ τούτων συςήματα διάφορα λογαρίθμων κατασκευασθῆναι δύνανται.

§. 609. Ἔςω ἐπὶ βάσεως Α

$A^\nu=\beta$. καὶ $\nu=\lambda.\ \beta$. (§. 607.)
$A^\rho=\gamma$. $\quad \rho=\lambda.\ \gamma$.
$A^\sigma=\delta$. $\quad \sigma=\lambda.\ \delta$.
$A^\chi=\varepsilon$. $\quad \chi=\lambda.\ \varepsilon$.

ἐπὶ δὲ βάσεως α ἔςαι

$\alpha^\nu=\zeta$. καὶ $\nu=\lambda.\ \zeta$.
$\alpha^\rho=\eta$. $\quad \rho=\lambda.\ \eta$.
$\alpha^\sigma=\vartheta$. $\quad \sigma=\lambda.\ \vartheta$.
$\alpha^\chi=\kappa$. $\quad \chi=\lambda.\ \kappa$.

Ἐὰν ὅμως $A=\alpha$ εἶναι τοῦ αὐτοῦ συςήματος καὶ τότε καὶ $\beta=\zeta$, καὶ $\gamma=\eta$, καὶ $\delta=\vartheta$, καὶ $\varepsilon=\kappa$. Ἐὰν ὅμως ὁ Α διάφορος τοῦ α, τότε καὶ οἱ ἀριθμοὶ β, γ, δ, ε διάφοροι τοῦ ζ, η, ϑ, κ, ἐὰν δηλ. $A=2$ καὶ $\alpha=3$, ἔςαι ἐκεῖνο μὲν τὸ σύςημα.

0 1 2 3 4 3 4
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

τοῦτο δὲ τὸ σύςημα

1 2 3 4 5 6 7
1, 3, 9, 27, 81, 243, 729

ἐκείνως

$2^5 = 32$· καὶ $5 =$ λογ: 32

οὕτως

$3^5 = 81$· καὶ $5 =$ λογ: 81· ἄρα ἐν ὁμοίοις συςήμασιν ὡς ἴσοι ἀριθμοὶ ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς λογαρίθμους, καὶ ἴσοι λογάριθμοι, εἰσὶν ἴσων ἀριθμῶν λογάριθμοι, ἐπὶ δὲ ἀνομοίων συςημάτων ἴσοι λογάριθμοι εἰσὶν ἀνίσων ἀριθμῶν λογάριθμοι, καὶ ἴσοι ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἀνίσους λογαρίθμους.

§. 610. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται

α΄. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha^\mu = \beta$, ἐὰν $\mu = 0$ θῶμεν, ἔςαι $\alpha^0 = \beta$ ἤτοι $1 = \beta$ (§. 326.) δηλ: ὅπου ὁ ἐκθέτης ἔχει 0, τὸ ἑξῆς γράμμα $= 1$· ἄρα $\alpha^0 = 1$, καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω $0 =$ λ. 1· δηλ: εἰς κάθε σύςημα λογαριθμικὸν ἡ μονὰς ἔχει λογάριθμον τὸ μηδέν· ἐπειδὴ καὶ ἑκάςη γεωμετρικὴ σειρὰ ἔχει τὸν πρῶτον ὅρον μονάδα (§. 604.)· ἡ δ' ἀριθμητικὴ ἔχει μηδέν.

β΄. Ἐὰν $\alpha^\mu = \beta$, καὶ $\mu = 1$, ἔςαι καὶ $\alpha = \beta$, καὶ ἑπομένως $1 =$ λ: α. Ἐν παντὶ συςήματι λογαριθμικῷ ἡ βάσις ἔχει τὴν μονάδα λογάριθμον· διότι ἀπὸ τῆς βάσεως ἄρχονται οἱ Ἐκθέται· (§. 608).

§. 611. γ΄. Ἐὰν ἡ βάσις $\alpha > 1$ εἶναι καὶ $\beta > 1$, ὅταν μ εἶναι καταφατικόν· 2^1, 4^2, 8^3 κ. τ. λ. διότι $\alpha = 2 > 1$, καὶ $\mu = +1$· ἐὰν δὲ τὸ μ ἀποφατικόν, τότε $\beta < 1$· ὄγκαλα καὶ $\alpha > 1$· ὡς α^{-1}, α^{-2} κτ. ἤτοι $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,

$\frac{1}{8}$ κ. τ. λ. διότι $2^{-2}=\frac{1}{4}$ καὶ $2^{-3}=\frac{1}{8}$ κ. τ. λ. δηλ: εἰς κάθε λογαριθμικὸν σύςημα, ἐν ᾧ ἡ βάσις μείζων μονάδος· οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν ὁποῦ εἶναι μείζονες τῆς μονάδος εἶναι καταφατικοὶ, τῶν δὲ γνησίων κλασμάτων οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀποφατικοὶ διότι $\frac{1}{\alpha}=\alpha^{-1}$ καὶ $-1=$λ: α.

δ'. Ἐὰν ἀνάπαλιν $\alpha<1$, καὶ $\beta<1$· ἐὰν ὁ ἐκθέτης μ καταφατικὸς· διότι $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3}$. ἤτοι $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ κτ. ἐὰν δ' ὁ ἐκθέτης μ ἀποφατικὸς, τότε $\beta>1$ διότι $\frac{1}{\alpha^{-2}}=\alpha^2$ ἢ $\frac{1}{2^{-2}}=2^2=4$. δηλ: εἰς κάθε λογαριθμικὸν σύςημα, ἐν ᾧ ἡ βάσις ἐλάττων μονάδος, τὰ μὲν κλάσματα ἔχουσι λογαρίθμους καταφατικούς. οἱ δ' ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποφατικούς· ὅθεν κάλλιον εἶναι νὰ ληφθῇ ἡ βάσις μείζων μονάδος, καὶ ἅμα καταφατικῶς· καὶ ἐκ τούτου λαμβάνομεν διὰ μὲν τοὺς καταφατικοὺς ἀριθμοὺς λογαρίθμους ἐνεργείᾳ ἀριθμοὺς, διὰ δὲ τοὺς ἀποφατικοὺς ἀδυνάτους ἀριθμούς· καὶ μάλιςα ὅσῳ μείζων ὁ ἀριθμὸς, μείζων καὶ ὁ ἀνήκων αὐτῷ λογάριθμος· ἐπεὶ $\alpha^\mu=\beta$ ἀεὶ μείζων ὁ β, ὅσῳ μείζων ὁ μ ἐκλαμβάνεται.

§. 612. Ἐὰν $\alpha^\mu=\beta$, καὶ $\alpha^\rho=\gamma$, καὶ ἅμα τὰς δύω ἐξισώσεις πολλαπλασιάσωμεν· ἔςαι $\alpha^\mu \alpha^\rho=\beta\gamma$, ἤτοι $\alpha^{\mu+\rho}=\beta\gamma$ (§. 316). καὶ $\mu+\rho=$λ$(\beta\gamma)$ . . . Α'. εἶναι δὲ καὶ $\mu=$λ: β καὶ $\rho=$λ: γ. ἐὰν δὲ καὶ ταύτας τὰς δύω ἐξισώσεις συνάψωμεν $\mu+\rho=$λ: β$+$λ: γ. ἄρα καὶ $\mu+\rho=$λ:β$+$λ: γ. Β (ἔςι δὲ καὶ $\mu+\rho=$λ $(\beta\gamma)$· ἄρα λ$(\beta\gamma)=$λογ: β$+$λ: γ, καὶ $\mu+\rho=$

λ: β + λ: γ. δηλ: εἰς κάθε λογαριθμικὸν σύστημα ὁ λογάριθμος ἑνὸς παραγομένου εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν λογαρίθμων ἑκάστου παράγοντος· ὃ ἐστιν εὑρίσκομεν κατὰ μέρος τοὺς λογαρίθμους τῶν παραγόντων, καὶ τοὺς συνάπτομεν. καὶ ὁ ἀριθμὸς ὅπου ἀντικρύζει εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν λογαρίθμων τούτων εἶναι τὸ παραγόμενον· ἐπὶ τῆς σειρᾶς

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, κτ.

ζητεῖται τὸ παραγόμενον ἀπὸ 16 καὶ 64, ἄρα λ: 16 + λ: 64 = λ(16. 64.) ἀλλ' ὁ λογ: 16 = 4 καὶ λογ: 64 = 6 καὶ 6 + 4 = 10. ἄρα 16. 64 = 1024, ὅτι ὑπὸ τὸν, 10, ὁ 1024 εὑρίσκεται, καὶ οὕτω μεταβάλλεται ὁ πολλαπλασμὸς εἰς πρόσθεσιν διὰ τῶν λογαρίθμων· ὁμοίως καὶ εἰς τρεῖς παράγοντας 8. 4. 16 = λ: 8 + λ: 4 + λ: 16 ὁ δὲ λ: 8 = 3. τοῦ δὲ 4 = 2, καὶ τοῦ 16 = 4, ἀλλὰ 3 + 2 + 4 = 9, καὶ ὁ ὑπὸ τὸν 9 ἀριθμὸς ὁ 512 εἶναι ἄρα· 8. 4. 16 = 512. ὁμοίως καὶ ἐὰν πλείονες οἱ παράγοντες.

§. 613. Ἔστω ἔτι $\alpha^{\mu} = \beta$, καὶ $\alpha^{\rho} = \gamma$, δίελε τὴν μίαν ἐξίσωσιν διὰ τῆς ἑτέρας οὕτω $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\rho}} = \frac{\beta}{\gamma}$. ἤτοι $\alpha^{\mu-\rho} = \frac{\beta}{\gamma}$. καὶ $\mu - \rho = \text{λογ}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$. ἐπεὶ δὲ καὶ μ = λ: β καὶ ρ = λ: γ. ἐὰν αὐτὰς ἀφέλωμεν ἔσται $\mu - \rho$ = λ: β — λ: γ· καὶ ἑπομένως $\lambda\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$ = λ: β — λ: γ. λοιπὸν εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον, ἐὰν τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρετέου ἀφέλωμεν· διότι ὁ ἀριθμὸς, ὅπου ἀνήκει εἰς αὐτὸ τὸ λείψανον, εἶναι τὸ πηλίκον· ἔστω $\frac{1024}{256}$ = λ: 1024 — λ: 256·

ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ 1024=10, καὶ τοῦ 256=8. ἐπειδὴ ὅμως 10—8=2· καὶ εἰς αὐτὸν τὸν λογάριθμον εὑρίσκεται ὁ 4· ἄρα $\frac{1024}{256}=4$· καὶ πάλιν διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ διαίρεσις μεταβαίνει εἰς ἀφαίρεσιν.

§. 614. Ἐὰν ἔτι $\alpha^{\mu}=\beta$, καὶ $\mu=\lambda:\beta$, ἀλλὰ καὶ $\alpha^{\nu\mu}=\beta^{\nu}$, καὶ ὁμοίως $\nu\mu=\lambda\beta^{\nu}$· ἀλλὰ τὸ $\mu=\lambda\beta$· ἐὰν ἀντὶ μ τὸ ἴσον $\lambda\beta$ θῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\nu\mu=\lambda\beta^{\nu}$ γίνεται ν· λογ: $\beta=$ λογ: β^{ν} δηλ: ὁ λογ: μιᾶς δυνάμεως ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἴσος τῷ λογαρίθμῳ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως· δηλ: ἐὰν ζητῆται ὁ κύβος τοῦ 8 καὶ ὁ λ: τοῦ 8=3· ἄρα 3. 3=9, καὶ ὑπὸ τὸν 9 εἶναι 512· καὶ οὗτος ὁ κύβος τοῦ 8.

§. 615. Ἐὰν δὲ $\alpha^{\mu}=\beta$, ἔςαι καὶ $\sqrt{\alpha^{\mu}}=\sqrt{\beta}$· ἤτοι $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\beta^{\frac{1}{\nu}}$· ἄρα κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\frac{\mu}{\nu}=\lambda\beta^{\frac{1}{\nu}}$, τὸ δὲ $\mu=\lambda:\beta$· ἄρα $\frac{\lambda\beta}{\nu}=\lambda\sqrt[\nu]{\beta}$. δηλ: ἐὰν ζητῆται νὰ ἐξαγάγωμεν ῥίζαν τινὰ ἀπό τινος ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἐκθέτου τοῦ ῥιζικοῦ, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ὁ λογάριθμος τῆς ῥίζης, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς, ὅπου ἀνήκει εἰς αὐτὸ τὸ πηλίκον εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα· ἐπὶ τῆς ἄνω σειρᾶς ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 1024. ἀλλ' ὁ λ; 1024=10, καὶ $\frac{10}{2}=5$· καὶ ὑπὸ τὸν 5 ὁ ἀριθμὸς 32· ἄρα $\sqrt{1024}=32$. ἔτι ζητεῖται ἡ ῥίζα τῆς πέμπτης δυνάμεως ἀπ' αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ, ἀλλὰ $\frac{10}{5}=2$, καὶ 2=

λ: 4· ἄρα $\sqrt{1024}=4$, καὶ οὕτως ἐξάγομεν διὰ τῶν λογαρίθμων ἑκάστην ῥίζαν τῶν ἀνωτέρω δυνάμεων· καὶ τοσαῦτα τὰ κύρια θεωρήματα τῶν λογαρίθμων· δι' ὧν ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς εἰς πρόσθεσιν, ἡ δὲ διαίρεσις εἰς ἀφαίρεσιν, καὶ τὸ ὕψωμα τῶν λόγων εἰς πολλαπλασιασμὸν, καὶ ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν εἰς ἁπλῆν μεταβάλλεται διαίρεσιν.

§. 616. Ἐκ πάντων δὲ τούτων γίνεται φανερὸν, ὅτι εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν λογαρίθμων, μόνον οἱ πρῶτοι καθ' ἑαυτοὺς ἀπαιτοῦνται ἀριθμοὶ νὰ εὑρεθῶσιν, οἱ δὲ λοιποὶ διὰ μόνης προσθέσεως, ἢ ἀφαιρέσεως εὑρίσκονται· διότι ἐὰν ἔχωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 2 καὶ 10 εὑρίσκομεν τὸν λογ. τοῦ 5· διότι λ: 10—λ: 2=λ: 5· ἐὰν δὲ τὸν τοῦ 2 καὶ 3, εὑρίσκομεν καὶ τὸν λογάριθμον τοῦ 6· διότι λ2+λ3=λ: 6 κ. τ. λ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Περὶ εὑρέσεως τῶν λογαρίθμων, καὶ περὶ κατασκευῆς πινάκων.

§. 617. Ἡμεῖς, ἐμάθομεν, ὅτι λογάριθμος σχεδὸν, καὶ ἐκθέτης δυνάμεως εἶναι τὸ αὐτὸ, πλὴν διαφέρει ὁ λογ: τοῦ ἐκθέτου, καθότι ἐκεῖνος τοὺς λόγους μετρεῖ, καθ' οὓς ὁ λόγος τῆς μονάδος πρὸς τὸν δεύτερον ὅρον τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς ὑψοῦται εἰς αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν, ὅπου ἐκφράζει ὁ λογάριθμος (§. 601)· ὁ δ' ἐκθέτης τοὺς παράγοντας μετρεῖ, οἵτινες ἐκλαμβάνονται ἴσοι εἰς τοῦτο τὸ τῆς δυνάμεως παραγόμενον· ἐκεῖ λόγοι ἴσοι οἱ παράγοντες, καὶ ἐδῶ ἀριθμοὶ ἴσοι· διὸ καὶ ἡμεῖς ἐν τῷ περὶ λόγου βι-

6λίῳ τούτους ἐπισυνάψομεν. Ὅθεν ἡ εὕρεσις τῶν λογαρίθμων ἀπαιτεῖ μετὰ τὴν μονάδα τὸν πρῶτον ὅρον τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς, καὶ τὸν δεύτερον δεδομένον, διὰ νὰ εἶναι ὁ λόγος τῆς μονάδος πρὸς αὐτὸν σαφὴς, καὶ δεδομένος· ἀλλὰ τὸν δεύτερον ὅρον βάσιν ἐκάλεσαν (§. 608.), ἄρα ἡ βάσις εἰς εὕρεσιν τῶν λογαρίθμων πρέπει ἐξ ἀνάγκης νὰ διορισθῇ· ἐπειδὴ ὅμως πολλαχῶς ὁ δεύτερος ὅρος διορίζεται, ποικίλα καὶ τὰ λογαριθμικὰ συςήματα· διότι λογαριθμικοὶ πίνακες δὲν εἶναι ἄλλο, εἰ μὴ σύςημά τι ἀριθμῶν τεχνικῶν, οἵτινες ὡς ἐκθέται δυναμικοὶ εἰς ἕκαςον ἀριθμὸν κατὰ τάξιν φυσικὴν ἐπιγράφονται· ἐπειδὴ ὅμως κοινῶς εἰς χρῆσιν τῶν μαθηματικῶν τὸ βριγγιανικὸν σύςημα ἐκλαμβάνεται, φέρε καὶ ἡμεῖς κατὰ τοῦτο τοὺς λογαρίθμους τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εὕρομεν· οὐχ ὅτι Βρίγγος ἦν ὁ τῶν λογαρίθμων εὑρέτης, ἀλλ᾽ ὅτι οὗτος πρῶτος κανόνιον καὶ πίνακας λογαριθμικοὺς κατέςρωσεν ἀπὸ 1 μέχρι 20000, καὶ ἀπὸ 90000 μέχρι 100000· ἕτερος δέ τις Βλάκος ἀνεπλήρωσε τὸ κεχηνὸς ἀπὸ 20000 μέχρι τῶν 90000· τὴν δ᾽ ἀρχαιολογίαν τούτων ὁ φιλομαθὴς εἰς τὰς ἱςορίας τῆς μαθηματικῆς μετελθέτω.

§. 618. Ὅθεν εἰς τὸ βριγγιανικὸν σύςημα ὁ δεύτερος ὅρος μετὰ τὴν μονάδα τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς, ἤτοι ἡ βάσις $=10$ διορίζεται· λοιπὸν

$10^1 = 10.$ καὶ $1 =$ λ: 10.
$10^2 = 100.$ καὶ $2 =$ λ: 100.
$10^3 = 1000.$ καὶ $3 =$ λ: 1000.
$10^4 = 10000.$ καὶ $4 =$ λ: 10000.
$10^5 = 100000.$ καὶ $5 =$ λ: 100000.
$10^6 = 1000000.$ καὶ $6 =$ λ: 1000000.
$10^7 = 10000000.$ καὶ $7 =$ λ: 10000000.
$10^8 = 100000000.$ καὶ $8 =$ λ: 100000000.

ἄρα αἱ σειραὶ ἐν ἀριθμοῖς

Γεωμ: 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000, 100000000.
Ἀριθ: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

λογάριθμοι τῶν ἄνω.

εἰς αὐτὰς τὰς σειρὰς παρατηροῦμεν·

α΄. Ὅτι ἐν μὲν τῇ Γεωμετρικῇ σειρᾷ εἶναι ἀριθμοὶ περιοδικοὶ κατὰ τάξιν ἁπλῶς οἱ ὅροι, ἐν δὲ τῇ ἀριθμητικῇ εἶναι ἀριθμοὶ φυσικοὶ κατὰ τάξιν λογάριθμοι τῶν ὅρων τῆς Γεωμ:

β΄. Ὅτι ἡ μονὰς ἔχει λογάριθμον σημεῖον μηδενικόν· οἱ δὲ περιοδικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουσι λογαρίθμους ἀκεραίους κατὰ τὴν τάξιν τῶν περιόδων· ἡ μὲν πρώτη ἔχει μονάδα, ἡ δευτέρα 2, καὶ ἡ ἑβδόμη 7 κτ. Οὗτοι οἱ ἀριθμοί, οὓς οἱ περιοδικοὶ χαρακτῆρες λογαρίθμους ἔχουσι, καλοῦνται χαρακτηριστικοὶ τῶν λογαρίθμων· διατὶ δέ, ὕστερον.

γ΄. Ὅτι ὁ 10 ὢν μετὰ δύω χαρακτήρων, τὴν μονάδα ἔχει λογάριθμον, ὁ 100 μετὰ τριῶν τὸν 2, ὁ 1000 μετὰ τεσσάρων τὸν 3, ὁ 10000 μετὰ πέντε τὸν 4, καὶ καθόλου, ὅσους χαρακτῆρας ἔχει ὁ ἀριθμός, ἔχει καὶ λογάριθμου μὲ τόσας μονάδας παρὰ μίαν· ὅθεν εἰς ἀριθμὸν μὲ 12 χαρακτῆρας κρίνομεν, ὅτι 11 εἶναι ὁ λογάριθμος ὁ χαρακτηριστικός· διὰ τοῦτο καὶ εἰς τοὺς πίνακας οἱ χαρακτηριστικοὶ λογάριθμοι δὲν γράφονται, ἀλλ' ἔξωθεν ἐπινοοῦνται.

δ'. Ὅτι τῆς μὲν μονάδος ὁ λογάριθμος 0, τοῦ δὲ 10 ὁ λογ: 1· ἀλλὰ τῶν μεταξὺ ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 λογαρίθμους δὲν ἔχομεν· καὶ οἱ λογάριθμοι τούτων εὑρίσκονται βέβαια μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τῆς 1· ἄρα οἱ λογάριθμοι τούτων μείζονες μὲν τοῦ 0, ἐλάττονες δὲ τῆς 1, ἄρα εἶναι γνήσια κλάσματα· πῶς δὲ ταῦτα εὑρίσκομεν, ὕστερον. Ἔτι τοῦ μὲν 10 λογάριθμον ἔχομεν μονάδα, τοῦ δ' 100, 2, πλὴν τῶν μεταξὺ ἀριθμῶν δηλ: 11, 12 μέχρι τῶν 99 λογαρίθμους δὲν ἔχομεν, καὶ οἱ λογάριθμοι αὐτῶν μεταξὺ 1 καὶ 2· ἄρα μείζονες μὲν τῆς μονάδος, ἐλάττονες δὲ τοῦ 2· ἤτοι μονάδα μετὰ κλάσματος· καὶ τούτων ἡ εὕρεσις ἀπαιτεῖται. Ἔτι τοῦ μὲν 100 ὁ λογάριθμος 2, τοῦ δὲ 1000 ὁ λογ: 3· τῶν δὲ μεταξὺ 101, 102 μέχρι τῶν 999 λογ: οὐδείς· καὶ οἱ λογάριθμοι τούτων μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 3, ἤτοι μείζονες μὲν τοῦ 2, ἐλάττονες δὲ τοῦ 3· ἄρα καὶ οἱ λογάριθμοι τούτων 2 μετὰ κλάσματος ἀπαιτοῦνται. Ὁμοίως καὶ οἱ μεταξὺ τοῦ 1000, καὶ 10000 ἔχουσι λογαρίθμους 3 μετὰ κλάσματος· καὶ ἔτι οἱ μεταξὺ τοῦ 10000, καὶ 100000, 4 μετὰ κλάσματος κτ. καὶ τούτων τῶν κλασμάτων ἡ εὕρεσις ἐνταῦθα ἀπαιτεῖται εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον. Ὁ τρόπος ὅμως, καθ' ὃν οἱ πάλαι τοὺς τοιούτους εὗρον, εἶναι μὲν εὔκολος, πλὴν ἐργώδης, καὶ κοπιαστικὸς διὰ τὸ πλῆθος τῶν πολλῶν ἐξαγωγῶν τῶν ῥιζῶν, καὶ πολλαπλασιασμῶν, ὡς κατωτέρω πείρᾳ γνωρίσομεν· οἱ δὲ νεώτεροι πολλὰς εἰς τοῦτο εὐκολίας ἐφεῦρον, ἃς ἠγνόει ὁ Βρίγγιος, καὶ οἱ μετ' αὐτόν· ἡμεῖς ὅμως καὶ τοῦτον τὸν τρόπον εἰς τὸ τρίτον βιβλίον δείξομεν, ὅτι μήπω τὰ εἰς τοῦτον τείνοντα μεμαθήκαμεν· ἐνταῦθα δὲ μόνον τὸν πάλαι τρόπον διδάξομεν.

§. 619. Λάβωμεν δὲ καὶ οὕτω τὴν σειράν.

$$(10)^{5} : (10)^{4} : (10)^{3} : (10)^{2} : (10)^{1} : (10)^{0} : (10)^{-1} :$$
$$(10)^{-2} : (10)^{-3} : (10)^{-4} : (10)^{-5}$$

ἤτοι	100000 . . . . ὧν οἱ λογάριθμοι	5
	10000	4
	1000	3
	100	2
	10	1
	1	0
	0,1	—1
	0,01	—2
	0,001	—3
	0,0001	—4
	0,00001	—5

καὶ εἰς αὐτὴν τὴν σειρὰν γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ μονὰς μόνον ἔχει λογάριθμον μηδὲν (§. 610.)· οἱ δὲ ὑπὲρ τὴν μονάδα ἀριθμοί, ὅσοι μὲν εἶναι περιοδικοὶ ἀριθμοί, ἔχουσιν ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς λογάριθμον, ὡς λ 100000=5, καὶ λ 1000=3, καὶ ἅμα παρὰ μονάδα ἐλάττων, ἢ τὸ πλῆθος τῶν χαρακτήρων (§. 618. γ'.)· ὅσοι δὲ μὴ περιοδικοί, καὶ μεταξὺ δύω περιοδικῶν ἀφεύκτως παρεμπίπτοντες, ἔχουσι λογάριθμον τὸν τοῦ ἐγγὺς ἐλάττονος περιοδικοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ἅμα ἓν κλάσμα, ὃ ἡμεῖς Δ καλέσωμεν· δηλ: 5348 παρεμπίπτει μεταξὺ τοῦ 10000 καὶ 1000· ἄρα ὁ λογάριθμος αὐτοῦ ὁ τοῦ 1000, καὶ ἅμα ἓν κλάσμα οὕτω $\lambda 5348 = 3 + A$· ἐπειδὴ ὅμως τὸ A εὑρεθήσεται ὕϛερον 0,7281914, ἄρα $\lambda 5348 = 3 + 0{,}7281914 = 3{,}7281914$· τοῦτο γίνεται καὶ ἐὰν μεταξὺ ἄλλων παρεμπίπτωσιν, ὡς εἰς τοὺς 100 καὶ 10 ὁ 95· οὗ ὁ λογάριθμος $= 1 + A = 1 + 9777236 1$· ὅσοι δὲ τῆς μονάδος ἐλάττονες, ἔχουσιν ἀεὶ λογαρίθμους ἀποφατικοὺς (§. 611)· ἀλλ' ὅσοι εἶναι μονάδες δεκαδικαί, ἔχουσι μὲν ἀκεραίους λογαρίθμους πλὴν ἀποφατικοὺς ὡς $\lambda \frac{1}{10} = -1$, $\lambda \frac{1}{100} = -2$, $\lambda \frac{1}{1000} = -3$ ἤτοι ὁ λογ: ἑνὸς δεκατημορίου $= -1$, ἑνὸς δ' ἑκατοϛημορίου $= -2$, ἑνὸς δὲ χιλιοϛημορίου $= -3$ κτ. Ὅσοι δὲ μὴ τοιοῦτοι, καὶ παντως μεταξὺ τούτων δύω παρεμπίπτοντες, ἔχουσι τὸν λογ: τοῦ ἐγγὺς ἐλάττονος, καὶ ἅμα ἓν, ὡς ανωτέρω, κλάσμα A· οὗτος ὁ ἀριθμὸς 0,05348 παρεμπίπτει μεταξὺ τοῦ 0,1, καὶ 0,01· διότι μεῖζον αὐτοῦ τὸ $\frac{1}{10}$, καὶ ἔλαττον τὸ $\frac{1}{100}$· ἄρα $\lambda: 0{,}05348 = -2 + A = -2 + 0{,}7281914$· ὁμοίως καὶ ὁ ἀριθμὸς 0,00095 παρεμπίπτει μεταξὺ τοῦ 0,001 καὶ 0,0001 διότι οὗτος ἐλάττων μὲν τοῦ $\frac{1}{1000}$, μείζων δὲ τοῦ $\frac{1}{10000}$ ἄρα $\lambda: 0{,}00095 = -4 + A = -4{,}9777236 1$· καὶ γενικῶς, ἐὰν ὁ λογάριθμος χ παρεμπίπτῃ μεταξὺ τοῦ $(10)^{\pm\nu+1}$ καὶ $(10)^{\pm\nu}$, ἔϛαι $\chi = \pm\nu + A$.

Ἐκ τούτων μανθάνομεν α΄ ὅτι ὁ ν ἀριθμὸς εἶναι τὸ τῶν λογαρίθμων χαρακτηριϛικόν· β΄. ὅτι λαμβάνεται καὶ καταφατικὸς καὶ ἀποφατικός, καὶ $=$ τῷ μηδενί· γ΄. τὸ A κλάσμα ἀεὶ καταφατικόν· πῶς ὅμως μετατρέπεται. καὶ τοῦτο ἀποφατικὸν μετὰ τοῦ ἀποφατικοῦ χαρακτηριστικοῦ, ὕστερον σαφηνισθήσεται.

§. 620. Ἔστι δὲ $\sqrt{10}=10^{\frac{1}{2}}$, καὶ $\sqrt[3]{10}=10^{\frac{1}{3}}$, καὶ $\sqrt[4]{10}=10^{\frac{1}{4}}$, καὶ $\sqrt[\mu]{10}=10^{\frac{1}{\mu}}$· ἄρα (§. 607.) καὶ $\frac{1}{2}=$ $\lambda:\sqrt{10}$, καὶ $\frac{1}{3}=\lambda\sqrt[3]{10}$, καὶ $\frac{1}{4}=\lambda\sqrt[4]{10}$, καὶ $\frac{1}{\mu}=$ $\lambda\sqrt[\mu]{10}$· καὶ ἐκ τούτων φανερὸν, ὅτι οἱ λογάριθμοι μόνον τῶν δυνάμεων τῶν ἀλόγων εἶναι γνήσια κλάσματα· οἱ δὲ λοιποὶ λογάριθμοι τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν, πλὴν τῶν περιοδικῶν, μήτε λογικοὶ, μήτε ἄλογοι, ἀλλὰ διαβατικοὶ ὀνομάζονται, ὡς μηδέ ποτε ἐπ' ἀκριβὲς ἐκφραζόμενοι.

§. 621. Πρὸς εὕρεσιν δὲ τούτων πρέπει καλῶς νὰ ἀναπολήσωμεν α΄. πῶς εἰς τὴν συνεχῆ γεωμετρικὴν ἀναλογίαν, ἐὰν τὰ ἄκρα δοθῶσιν α καὶ β (§. 476.), ὁ μέσος ἀνάλογος εὑρίσκεται, χ· δηλ: $\chi=\sqrt{\alpha\beta}$·

β΄. καὶ πῶς εἰς τὴν συνεχῆ ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν (§. 470) ἐὰν τὰ ἄκρα α καὶ β δοθῶσιν, ὁ μέσος χ εὑρίσκεται, δηλ: $\lambda=\frac{\alpha+\beta}{2}$.

γ΄. πῶς μεταξὺ δύω ὅρων τῆς Γεωμετρικῆς σειρᾶς ἕτερον τρίτον παρενείρομεν, καὶ τοιοῦτον πάλιν μεταξὺ δύω ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς· δηλ: ἐὰν οὕτως εὕρωμεν τὸν μέσον ὅρον τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς, καὶ ἔτι τὸν μέσον τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς, ὁ εὑρεθεὶς ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς, εἶναι λογάριθμος τοῦ εὑρεθέντος ὅρου τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς· ἔστω λ. χ.

Ἀριθμ:	σειραὶ	1	2	ч	4	κ. τ. λ.
Γεωμ:		2	4	χ	16	κτ.

ὁ μὲν μέσος ὅρος τοῦ 4 καὶ 16 ὁ $\chi=\sqrt{4\cdot 16}=2\cdot 4=8$· ὁ δὲ μέσος τῆς ἀριθμητικῆς μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 4 ὁ ч $=\frac{2+4}{2}=3$· ἄρα ὁ 3 λογάριθμος τοῦ 8, καὶ αἱ σειραὶ οὕτω 2^1, 4^2, 8^3, 16^4· κτ.

§. 622. Ἐπειδὴ λοιπὸν μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ 10 οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 λογαρίθμους δὲν ἔχουσι, τούτων τοὺς λογαρίθμους εὑρεῖν ἀπαιτούμεθα, καὶ λοιπὸν ἀγωνισθῶμεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 9· τοῦτο δὲ γίνεται νὰ ἐμπαραβύσωμεν μεταξὺ καὶ 10 ἑτέρου μέσον γεωμετρικὸν ἀνάλογον τὸν χ οὕτω $\chi=\sqrt{1\cdot 10}$, καὶ ἔςαι ἡ σειρὰ 1, $\sqrt{1\cdot 10}$, 10· ἀλλ' ἐνταῦθα ἡ μὲν μονὰς ἔχει λογάριθμον 0, ὁ δὲ 10, μονάδα, ὁ δὲ $\sqrt{10}$ ἀγνοεῖται, καὶ αἱ σειραὶ οὕτω 1^0, $\sqrt{10}^{\text{ч}}$, 10^1, ἄρα τὸ ч ζητεῖται· καὶ τοῦτο εὑρίσκεται, ἐὰν μεταξὺ 0 καὶ 1 ἀριθμητικὸν μέσον ἀνάλογον ἐμπαραβύσωμεν οὕτω (§. 470). $\frac{1+0}{2}$ καὶ αἱ σειραὶ 1^0, $\sqrt{10}^{\frac{1+0}{2}}$, 10^1 γίνονται· ἐπειδὴ ὅμως τοῦτο $\sqrt{10}$ ἐπ' ἀκριβὲς δὲν εὑρίσκεται, προσγράφουσιν εἰς αὐτὸ εἰς μὲν τοὺς ἐντελεῖς πίνακας δέκα μηδενικὰ οὕτω $\sqrt{10{,}0000000000}$· εἰς δὲ τοὺς ἐν χρήσει γινομένους ἑπτὰ μόνον, καὶ τοσαῦτα τιθέασι καὶ εἰς τοὺς λογαρίθμους ὡς $\frac{1+0{,}0000000000}{2}$, καὶ εὑρίσκουσιν αὐτοὺς εἰς δεκαδικὰ κλάσματα, τὰ δὲ μένοντα παρορῶσιν ὡς ἀνεπαίσθητα· ὅθεν ἡ γεωμετρικὴ σειρὰ λαμβάνει αὐτὴν τὴν μορφήν.

Ἀριθ: 0,0000000, 1,0000000, 2,0000000, κτ.
Γεωμ: 1,0000000, 10,0000000, 100,0000000, κτ.

λοιπὸν ἐὰν τὸν μὲν πρῶτον ὅρον τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς Α καλέσωμεν, τὸν δὲ δεύτερον Β· καὶ τὸν πρῶτον τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς α, καὶ τὸν δεύτερον β, ἔσαι

$$\sqrt{AB} = 1,0000000 \times 10,0000000 = 3,1622777$$

καὶ $\frac{\alpha+\beta}{2} = 0,0000000 + 1,0000000 = 0,5000000$

κ γίνοντ. αἱ σειρ. Ἀριθμ. 0,0000000, 0,5000000, 1,0000000
Γεωμ. 1,0000000, 3,1622777, 10,0000000.

πλὴν ἡμεῖς ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 9, καὶ αὐτοῦ εὑρέθη ὁ λόγαριθμος τοῦ 3 μετὰ κλάσματος δεκαδικοῦ πολλῷ ἐλάττων τοῦ 9· διὰ τοῦτο εὕρωμεν πάλιν μεταξὺ τοῦ 3,1622777, καὶ τοῦ 10,0000000 ἕτερον μέσον γεωμετρικὸν ἀνάλογον, ἐὰν τὸν εὑρεθέντα Γ καλέσωμεν οὕτω

$$\sqrt{(B\Gamma)} = 10,0000000 \times 3,1622777 = 5,6234132,$$

καὶ ἔτι μεταξὺ τοῦ 1,0000000 καὶ 0,5000000 μέσον ἀριθμητικὸν ἀνάλογον, ἐὰν τὸν εὑρεθέντα γ καλέσωμεν οὕτω $\frac{\gamma+\beta}{2} = \frac{(0,5000000}{2} + \frac{1,0000000)}{2} = 0,7500000$·

καὶ ἔσαι ἡ σειρά.

Ἀριθ 0,0000000, 0,5000000, 0,7500000, 1,0000000
Γεωμ. 1,0000000, 3,1622777, 5,6234132, 10,0000000

Ἐὰν δὲ καὶ τὸν ἤδη εὑρεθέντα Γεωμετρικὸν Δ καλέσωμεν, καὶ τὸν ἀριθμητικὸν δ, βλέπομεν καὶ ὁ Δ πολὺ ἀπέχει τοῦ 9, ἐπειδὴ εἶναι 5 μετὰ κλάσματος δεκαδικοῦ, ὁμοίως καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ δ· ὅθεν εὑρεθήτω ἕτερος μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ Δ καὶ Β οὕτω $\sqrt{ΔΒ} = \sqrt{5{,}6234132 \times 10{,}000000} = 7{,}4989421$ καὶ μέσου μεταξὺ τοῦ δ καὶ ϐ οὕτω $\frac{δ+ϐ}{2} = (0{,}7500000 + 1{,}0000000)\frac{1}{2} = 0{,}87500000$, καὶ ἡ σειρὰ γίνεται οὕτω.

Ἀριθ: 0,0000000, 0,5000000, 0,7500000, 0,8750000, 1,0000000

Γεωμ: 1,0000000. 3,31622777. 5,6234132. 7,4389421, 10,0000000

Ἐὰν δ' οἱ εὑρεθέντες, ὁ μὲν Γεωμετρικὸς Ε, ὁ δ' ἀριθμητικὸς ε κληθῇ, βλέπομεν ὅτι ὁ Ε πλησιάζει μᾶλλον τῷ 9· πλὴν ἀπέχει πάλιν τοῦ 9, καὶ διὰ τοῦτο εὑρεθήτω πάλιν ἕτερος μεταξὺ τοῦ Ε καὶ Β οὕτω $\sqrt{ΕΒ} = 7{,}4989421 \times 10{,}0000000 = 8{,}6596432$· καὶ μεταξὺ τοῦ ε καὶ δ ὁ ἀριθμητικὸς $\frac{ε+δ}{2} = (0{,}8750000 \times 1{,}0000000)\frac{1}{2} = 0{,}93750000$· καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦντες μέσους νὰ εὑρίσκωμεν γεωμετρικοὺς καὶ ἀριθμητικοὺς, καταντῶμεν μετὰ 27 ἐργασίας, νὰ εὕρωμεν σχεδὸν πάνυ ἔγγιςα τὸν ἀριθμὸν, 9,0000000, καὶ τὸν λογάριθμον αὐτοῦ 0,9542925 1, ὅςτις ὡς ἐντελὴς λογάριθμος αὐτοῦ νομίζεται· διότι ἡ ἀπάτη εἶναι πάντῃ ἀνεπαίσθητος, ἐλάττων δηλ: τοῦ $\frac{1}{10000000}$, καὶ παροραται· χάριν δὲ τῶν πρωτοπείρων κείσθω καὶ τὸ σύνηθες διάγραμμα ὑπ' ὄψιν τὸ ἑξῆς.

Α	1,0000000	α	0,00000000
Γ	3,1622777	β	0,50000000
Β	10,0000000	γ	1,00000000
Β	10,0000000	β	1,00000000
Δ	5,6234132	δ	0,75000000
Γ	3,1622777	γ	0,50000000
Β	10,0000000	β	1,00000000
Ε	7,4989421	ε	0,87500000
Δ	5,6234132	δ	0,75000000
Β	10,0000000	β	1,00000000
Ζ	8,6596432	ζ	0,93750000
Ε	7,4989421	ε	0,83500000
Β	10,0000000	β	1,00000000
Η	9,3057204	η	0,96875000
Ζ	8,6596432	ζ	0,93750000
Η	9,3057204	η	0,96875000
Θ	8,9768713	ϑ	0,95312500
Ζ	8,6596432	ζ	0,93750000
Η	9,3057204	η	0,96875000
Ι	9,9398770	ι	0,96093750
Θ	8,9768713	ϑ	0,95312500
Ι	9,1398170	ι	0,96093750
Κ	9,0579777	κ	0,95703125
Θ	8,9768713	ϑ	0,95312500
Κ	9,0579777	κ	0,95703125
Λ	9,0173333	λ	0,95507812
Θ	8,9768713	ϑ	0,95312500
Λ	9,0173333	λ	0,95507812
Μ	8,9970796	μ	0,95410156
Θ	8,9768713	ϑ	0,95312500

	Λ	9,0173333	λ	0,95507812
	N	9,0072008	ν	0,95458984
	M	8,9970796	μ	0,95410156
	N	9,0072008	ν	0,95458984
	O	9,0021388	ο	0,95434570
	M	8,9970796	μ	0,95410156
	O	9,0021388	ο	0,95434570
	Π	8,9996088	π	0,95422363
	M	8,9970796	μ	0,95410156
	O	9,0021388	ο	0,95434570
Σ	T	9,0008737	ΣϬT	0,95428467
	Π	8,9996088	π	0,95422362
Σ	T	9,0008737	ΣT	0,95428467
	P	8,0002452	ρ	0,95435415
	Π	8,9996088	π	0,95422363
	P	9,0002412	ρ	0,95425415
	Σ	8,9999250	σ	0,95421889
	Π	8,9996088	π	0,95422363
	P	9,0002412	ρ	0,95425415
	T	9,000831	τ	0,95424652
	Σ	8,9999250	π	0,95423889
	T	9,0000831	τ	0,95424652
	Υ	9,0000041	υ	0,95424271
	Σ	8,9999250	σ	0,95423889
	Υ	9,0000041	ч	0,95424271
	X	8,9999650	χ	0,95424080
	Σ	8,9999250	σ	0,95423889
	Υ	9,0000041	ч	0,95424271
	Ψ	8,9999845	ψ	0,95424217
	X	8,9999850	χ	0,95424080

Υ	9,0000041	υ	0,95424271
Ω	8,9999943	ω	0,95424223
Ψ	8,9999845	ψ	0,95424217
Υ	9,0000041	υ	0,95424271
Ω	8,9999992	α΄	0,95424223
Α	8,9999943	ω΄	0,95424217
Υ	9,0000041	υ	0,95424271
Β	9,0000016	β΄	0,95424259
Α	8,9999992	α΄	0,95424247
Β	9,0000016	β΄	0,95424259
Γ	9,0000004	γ΄	0,95424253
Α	8,9999992	α΄	0,95424247
Γ	9,0000004	γ΄	0,95424253
Δ	8,9999998	δ΄	0,95424250
Α	8,9999992	α΄	0,95424247
Γ	9,0000004	γ΄	0,95424253
Ε	9,0000000	ε΄	0,95424251
Δ	8,9999998	δ΄	0,95424250

Εἰς αὐτὸ τὸ διάγραμμα εἶναι φανερὸν ὅτι ἀπὸ τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς τῶν χαρακτήρων ἀεὶ οἱ δύω ἄνω, καὶ κάτω πολλαπλασιάζονται, καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτῶν εἶναι ὁ μέσος ἀνάλογος ὡς ὁ $\Gamma=\sqrt{B A}$ καὶ ὁ $\Delta=\sqrt{B\Gamma}$, καὶ ὁ $E=\sqrt{B\Delta}$ κτ. ἀπὸ δὲ τοὺς δευτέρους τὸ ἥμισυ κεφάλαιον τοῦ ἄνω καὶ κάτω εἶναι ὁ μέσος ἀριθμὸς ἀνάλογος, καὶ ἀντικρύζει λογάριθμος τοῦ εὑρεθέντος μέσου Γεωμετρικοῦ ἀριθμοῦ ὁ $\gamma=\frac{\alpha+6}{2}$, καὶ ὁ $\delta=\frac{\gamma+6}{2}$ κτ. ἕως οὗ εὑρίσκεται ὁ λογάριθμος τοῦ $9{,}0000000=0{,}95424251$· ἐὰν ὅμως κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὕρωμεν μέσον γεωμετρικὸν ἀνάλογου μεταξὺ τοῦ Ε δηλ: 7, 4989421 καὶ τοῦ Ρ 8,0002432, καὶ ἔτι ἀριθμητικὸν μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τοῦ ε δηλ: 0, 87500000 καὶ τοῦ ρ, 0, 9543541 5, καὶ πάλιν ἑτέρους, μὲ ὀλίγας ἐργασίας καταντῶμεν ἕως εἰς μέσον Γεωμετρικὸν ἀνάλογον 8, 0000000, καὶ μέσον ἀριθμητικὸν ἀνάλογον 0, 9030900, ὅςις εἶναι λογάριθμος τοῦ 8. ἀπὸ δὲ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 8 εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τοῦ 2, (§. 615) ἐὰν αὐτὸν διὰ 3 διέλωμεν οὕτω $\frac{0,9030900}{3}$ = 0, 3010300 ὁ λογάριθμος τοῦ 2· διότι

$2^3=8$ καὶ $2=\sqrt[3]{8}=8^{\frac{1}{3}}$· ἄρα λ2= ... λογαρίθμου τῶν 9 εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τοῦ 3 ἐὰν αὐτὸν διὰ 2 διέλωμεν (αὐτόθι) $\frac{0,9542425}{2}$ = 0, 4771213 =λ: 3. εὑρίσκομεν δὲ καὶ τὸν λογάριθμον τοῦ 4, ἐὰν τὸν λογάριθμον τοῦ 2 διπλασιάσωμεν (§. 615). 2.(0, 3010300) =0, 6020600=λ: 4· ἀπὸ δὲ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 2 καὶ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 10 εὑρίσκομεν τὸν λογ; τοῦ 5· ἐπειδὴ $5=\frac{10}{2}$, καὶ λ5=λ 10—λ2=1, 0000000—0, 3010300 =0, 6989700· ἀπὸ δὲ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 2 καὶ 3 εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τοῦ 6. διότι 6=2. 3 καὶ λ6= λ2+λ3=0, 3010300+0, 4771213=0, 7781513. λείπεται λοιπὸν νὰ εὕρωμεν κατὰ τὴν ἄνω μέθοδον μὲ ἐξαγωγὰς τῶν ῥιζῶν τὸν λογάριθμον τοῦ 7. καὶ οὕτως ἔχομεν τοὺς λογαρίθμους ὅλης τῆς πρώτης περιόδου ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τοῦ 10· καὶ ἐκ τούτων εὑρίσκομεν καὶ πολλοὺς ἄλλους τῆς δευτέρας περιόδου, ὡς λ12=λ(2. 6, ἢ 3. 4.) =λ3+λ4· καὶ ἔτι λ14=λ (2. 7) =λ2+λ7· καὶ λ15=λ (3. 5)=

λ3+λ5· καὶ λ: 16=2 λογ 4. καὶ λογ: 18=λ (2.9.)= λ2+λ9 κ. τ. λ. ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω μέθοδον δι' ἐξαγωγῶν τῶν ῥιζῶν μόνον οἱ λογάριθμοι τῶν πρώτων καθ' ἑαυτοὺς ἀριθμῶν εὑρίσκονται ὡς 11, 13, 17, 19 κτ. οἱ δὲ λοιποὶ οἱ ἀπὸ παραγόντων σύνθετοι, εὐκόλως ἀπὸ τοὺς προηγουμένους εὑρεθέντας εὑρίσκονται μόνον διὰ προσθέσεως τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων, ἢ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ λογαρίθμου τῆς ῥίζης μιᾶς δυνάμεως, ὡς ὁ 32 εἶναι πέμπτη δύναμις τοῦ 2, ἄρα ὁ λογάριθμος τοῦ 2, ἐὰν ἐπὶ τὸν 5 πολλαπλασιασθῇ εἶναι ὁ λογ: τοῦ 32· ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

§. 623. Ἕκαςος ἀριθμὸς ὁποῦ πολλαπλασιάζεται μὲ ἀριθμὸν περιοδικὸν ὡς 10, 100, 1000 κτ. τὸ παραγόμενον αὐτῶν ὡς 20, 30, 40, κτ. ἢ 200, 300 κτ. ἢ 2000, 3000 κτ. ἔχει τὸν αὐτὸν λογάριθμον, ὁποῦ ἔχει πρὶν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἐκτὸς μόνον, ὅτι τὸ χαρακτηριςικὸν δηλ: ὁ ἀριθμὸς, πρὶν τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος λαμβάνει τόσας μονάδας πλέον, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ περιοδικὸς ἀριθμὸς μὲ τὸν ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσθη· διότι ὁ λ2=0, 3010300. ἄρα λ20=1, 3010300 καὶ λ200=2, 3010300, καὶ λ20000=4, 3010300. Ὁμοίως λ5=0, 6989700, ἔςαι καὶ λ50=1, 6989700, καὶ λ500000=6, 6989700. ἐπειδὴ καὶ 20=2. 10. ἄρα καὶ λ20=λογ 2+λογ 10=0, 3010300+1=1, 3010300 κ. τ. λ. καὶ ἐκ τούτων γίνεται φανερὸν, ὅτι τὸ χαρακτηριςικὸν ἀπὸ τοῦ πλήθους τῶν χαρακτήρων τοῦ ἀριθμοῦ εὑρίσκομεν· διότι ἔχει τόσας μονάδας, ὅσους χαρακτῆρας παρ' ἕνα ἔχει ὁ ἀριθμός· ἐπειδὴ λ10=1 λογ 100=2 λ1000=3 κτ. διὰ τοῦτο καὶ τὸ χαρακτηριστικὸν εἰς πολλοὺς πίνακας δὲν εὑρίσκεται· διότι ἀπὸ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ ἀριθμοῦ ἀμέσως διορίζεται.

§. 624. Ἔτι ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῆται μὲ περιοδικὸν ἀριθμὸν, τὸ πηλίκον ἔχει τὸν αὐτὸν λογάριθμον αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ μόνον ἀπὸ τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἀριθμοῦ τόσας μονάδας ἀφαιροῦμεν, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ περιοδικὸς διαιρέτης· ἔστω ὁ λογάριθμος τοῦ 499 ἀριθμοῦ $=2,6981005$. ἄρα καὶ ὁ λογ: τοῦ $\frac{499}{10}=49,9=1,6981005$. καὶ ὁ λογ: τοῦ $\frac{499}{100}=4,99=0,6981005$. καὶ ὁ λογ: τοῦ $\frac{499}{1000}=0,499=-1,6981005$, καὶ ἔτι ὁ λογ τοῦ $\frac{499}{1000000}=0,000499=-4,6981005$ κτ. καὶ ἔτι ὁ λογ: τοῦ $\frac{499}{100}=\lambda\,499-\lambda\,100=2,6981005-2=0,6981005$· καὶ ἔτι ὁ $\lambda\frac{499}{10000000}=\lambda 499-\lambda 10000000=2,6981005-7=-5,6981005$· καὶ κατ' αὐτὴν τὴν κοπιαστικὴν καὶ πολύπονον μέθοδον κατεσκευάσθησαν τὰ κανόνια, καὶ οἱ πίνακες ὅλων τῶν λογαρίθμων· ἡμεῖς ὅμως εἰς τὸ τρίτον Βιβλίον εὑρήσομεν ἑτέραν πολὺ εὔκολον μέθοδον. καθ' ἣν ἀμέσως τοὺς λογαρίθμους τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 9, κτ. εὑρίσκομεν.

Σημειώσεις.

Ἕτεροι δ' εὗρον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῆς βάσεως 10 οὕτω $\sqrt{10}=10^{\frac{1}{2}}$ εἰς χαρακτῆρας πολλῶν δεκαδικῶν, ἐπειτα καὶ ἐξ αὐτῆς τῆς ῥίζης $10^{\frac{1}{2}}$ ἔτι τὴν ῥίζαν τὴν τετραγωνικὴν $\sqrt{10^{\frac{1}{2}}} = 10^{\frac{1}{2^2}}$. καὶ ἔτι ἐξ αὐτῆς τὴν τρίτην ῥίζαν τὴν τετραγωνικὴν $\sqrt{10^{\frac{1}{2^3}}} = 10^{\frac{1}{2^5}}$, καὶ ἔτι τὴν τετάρτην $\sqrt{10^{\frac{1}{2^2}}} = 10^{\frac{1}{2^4}}$, ἕως εἰς τὴν ἑξηκοστὴν $10^{\frac{1}{2^{60}}}$, ἢ εἰς τὴν 120 οὕτω $10^{\frac{1}{2^{120}}}$, καὶ ταύτας εἰς πίνακα κατέστρωσαν· καὶ ἀπ' αὐτοῦ τοῦ πίνακος εὗρον τὸν ῥυθμὸν τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος, καὶ ἀπονωτέρου εὗρον τοὺς λογαρίθμους· ἕτεροι δὲ διὰ τῶν ἀναλογιῶν. Ἡμεῖς ὅμως εἰς τὸ παρὸν αὐτοὺς τοὺς τρόπους δὲν ἀναπτύομεν, εἰ μὴ εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας· καὶ ἀρκεῖ ἐνταῦθα ὁ κοινὸς οὗτος τρόπος, ὃν οἱ ἀριθμητικοὶ συνήθως εἰς τὰς βίβλους των γράφουσιν. Εἰς δὲ τὸ γ' βιβλίον σειρὰν λογαριθμικὴν θέλομεν εὕρῃ, καθ' ἣν ἀπόνως οἱ λογάριθμοι εὑρίσκονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ χρήσεως τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

§. 625. Πίνακες λογαριθμικοὶ δὲν εἶναι ἄλλο, εἰ μὴ ἔκθεσις μιᾶς γεωμετρικῆς σειρᾶς, ἥτις ἔχει τὸν πρῶτον ὅρον μονάδα καὶ οἱ ἑξῆς ὅροι αὔξονται κατὰ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ μονάδος μέχρι 200000, καὶ ἅμα ἔκθεσις ἑτέρας σειρᾶς ἀριθμητικῆς, ἥτις παριςάνει τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως, εἰς ἣν ἡ φυσικὴ ὑψοῦται σειρὰ

0 1 2 3 4

Γεωμετρικὴ κατὰ λόγον 1, 10, 10, 10, 10 κτ. καὶ καλεῖται ἡ σειρὰ 5 ἀριθμητικὴ λογαριθμικὸν σύςημα τῆς σειρᾶς τῆς γεωμετρικῆς, καὶ ἕκαςος ὅρος αὐτῆς λογάριθμος ἑκάςου ὅρου της γεωμετρικῆς σειρᾶς, ὅπου οὗτος ἀντιςοιχεῖ.

§. 626. Δύω εἴδη πινάκων εἰς τὸ μέσον φέρονται, τὸ μὲν περιέχει δύω ςήλας, καὶ εἰς μὲν τὴν πρώτην, ὅπου ἐπιγράφεται μὲ τὸν χαρακτῆρα N, γράφονται οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ κατὰ τάξιν ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ, ὅπου ἐπιγράφεται μὲ τὴν λέξιν logar A, καταγράφονται οἱ λογάριθμοι οἱ ἀντιςοιχοῦντες εἰς ἕκαςον ἀριθμὸν φυσικὸν τῆς πρώτης ςήλης·

0,3010300

καὶ οὗτοι εἶναι ὡς ἐκθέται τῶν δυνάμεων. π. χ. 2 ,

0,4771212 1,3617278

3 , 23 κ. τ. λ. εἶναι δὲ καὶ ἕτερον εἶδος πινάκων, εἰς τοὺς ὁποίους εὑρίσκονται καὶ αἱ διαφοραὶ τῶν λογαρίθμων κ. τ. λ. περὶ ὧν ὕςερον.

1 χρῆσις τοῦ α΄. εἴδους τῶν πινάκων.

§. 627 Εἰς αὐτοὺς τοὺς πίνακας εὑρίσκονται οἱ φυσικοὶ ἀπὸ μονάδος μέχρι 101000, καὶ ἐν ἄλλοις μέχρι 100000, ἐν ἄλλοις δὲ μέχρι 10000· οἱ δὲ λογάριθμοι τούτων παρίςανται; ἐν ἄλλοις μὲν μὲ 10 δεκαδικὰ κλάσματα, οἵτινες ἐντελέςεροι εἰσὶ καὶ μείζονες ὀνομάζονται· ἐν ἄλλοις δὲ μὲ 7 δεκαδικὰ, οἳ καὶ συνηθέςεροι καὶ πρόχειροι, καὶ μικροὶ πίνακες λέγονται· ἐκεῖνοι χρήσιμοι εἰς μείζονας ἐφόδους ὡς ἄπταιςοι· οὗτοι δ' ἐπιπολάζουσιν εἰς τὴν κοινὴν ζωὴν, εἰς τὰς τέχνας, ἀπὸ τοὺς ὁποίους καὶ ἡμεῖς τὰ παραδείγματα ἐποριςόμεθα.

§. 628. Εἰς αὐτοὺς τοὺς πίνακας πρῶτον ζητεῖται ὁ λογ: Α'. ἢ ἑνὸς ἀριθμοῦ καταφατικοῦ ἀκεραίου, ὅπου εἰς τοὺς πίνακας εὑρίσκεται, Β'. ἢ ἑνὸς ἀριθμοῦ καταφατικοῦ ἀκεραίου, ὅπου εἰς τοὺς πίνακας δὲν εὑρίσκεται, ἤτοι μείζων τοῦ ἀριθμοῦ, ὅπου ἔχουσιν οἱ πίνακες· Γ'. ἢ ἑνὸς κλάσματος οἱουδήποτε. Δεύτερον ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς, ἐὰν δοθῇ ὁ λογάριθμος, καὶ οὗτος ἢ Α'. εὑρίσκεται ἐν τοῖς πίναξιν, ἢ Β'. δὲν εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας, ἢ εἶναι μείζων οὗτος ὁ λογάριθμος ἀπὸ τῶν ἐν τοῖς πίναξι λογαρίθμων· καὶ καθόλου δύω τὰ προβλήματα, ἢ δοθέντι τῷ ἀριθμῷ εὑρεῖν τὸν ἀνήκοντα λογάριθμον διὰ τῶν πινάκων, ἢ δοθέντι τῷ λογαρίθμῳ εὑρεῖν τὸν ἀνήκοντα ἀριθμόν.

§. 629. Α'. Ἐὰν δοθῇ ὁ ἀριθμὸς βραχύτερος ἢ ὁ ἐν τοῖς πίναξιν (ὁ ἀριθμὸς τῶν πινάκων εὑρίσκεται ἐν τῷ τέλει τῆς ςήλης Ν.) εὑρίσκομεν αὐτὸν εἰς τοὺς πίνακας ἐνορῶντες εἰς τὴν ςήλην Ν, καὶ ἄντικρυ αὐτοῦ εὑρίσκομεν ἀμέσως τὸν λογάριθμον αὐτοῦ, ὡς ὁ λ: τοῦ 7010=3,8457180, καὶ λογ 5314=3, 7254216.

§. 630. Β'. Ἐὰν δοθῇ ὁ ἀριθμὸς μείζων τοῦ ἐν τοῖς πίναξιν ἀριθμοῦ, ἢ λύεται οὗτος εἰς παράγοντας, ἢ οὔ· ἐὰν δὲ λύεται εἰς παράγοντας, ἂς εὑρεθῶσιν οἱ λογάριθμοι κατὰ μέρος τῶν παραγόντων, καὶ οὗτοι ἂς συναφθῶσι, καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦτο εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ (§. 212). ζητεῖται δηλ: ὁ λογάριθμος τοῦ 183220. οὗτος δὲ λύεται εἰς τοὺς παράγοντας 5. 4. 9191, καὶ ὁ

λ: 5=	0,6989700.
λ 4=	0,6020600
λ 9161=	3,9619429
λ 183220=	5,2629729

καὶ αὕτη ἡ ἀσφαλεςάτη μέθοδος νὰ εὑρίσκωμεν τοὺς λογαρίθμους ἐκείνων τῶν ἀριθμῶν, ὅπου εἰς-παράγοντας λύονται. Ἐὰν δὲ μὴ εἰς παράγοντας λύεται ὡς 1814567, εὑρίσκομεν αὐτοῦ τὸν λογάριθμον, ἐὰν μάθωμεν κατὰ τίνα λόγον ἐξέρχονται αἱ τῶν λογαρίθμων διαφοραὶ ὅθεν εἰς τοῦτο ληφθήτωσαν οἱ λογάριθμοι ἑνὸς ἀριθμοῦ, πλὴν μονάδος, πλὴν δυάδος, πλὴν τριάδος κ. τ. λ. ἔςω ὁ

λογ: 9897= 3,9955036
λογ: 9896= 3,9954597

διαφορὰ ἀριθμητικὴ 1=0, . . 439=λογαριθμική.
ἔτι λογ. 9896= 3,9954597
λογ. 9895= 3,9954158

διαφορὰ ἀριθ: 1= 0, . . . 439=λογαρ:
ἔτι λογ. 9895= 3,9954158
λογ. 9894= 3,9953719

διαφορὸ ἀριθ: 1= 0,. . . 439=λογαρ:
καὶ ἔτι λογ. 9897= 3,9955036
λογ. 9894= 3,9953719

διαφ: ἀριθ: 3=0, 1317=λογαρ:

καὶ αὐτοῦ βλέπομεν ἡ μὲν διαφορὰ μεταξὺ τοῦ 9897 καὶ 9896 εἶναι =1· ἡ δὲ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν 439. Ὁμοίως καὶ ἡ διαφορὰ τῶν 9896, καὶ 9895=1· ἡ δὲ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν = 439· καὶ ἔτι ἡ τῶν ἀριθμῶν 9895, καὶ 9894=1· ἡ δὲ τῶν αὐτῶν λογαρίθμων =439. ἀλλὰ καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν 9897 καὶ 9894 =3, καὶ ἡ τῶν αὐτῶν λογαρίθμων=1317· καὶ εἶναι αἱ διαφοραὶ τῶν ἀριθμῶν πρὸς τὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων ἀνάλογοι, ὅταν αἱ διαφοραὶ τῶν ἀριθμῶν ὦσι μὴ πάνυ μεγάλαι· διότι ὡς 1 : 3=439 : 1317, καὶ ὡς 1: 439= 3: 1317· καὶ εἰς αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς τὸ ἕτερον εἶδος τῶν πινάκων χρησιμώτερον· διότι ἐν αὐτοῖς εὑρίσκονται καὶ αἱ διαφοραὶ, καὶ ὁ ὅρος ὁ ἀναλογικὸς, ὡς ὕςερον ὀψόμεθα καὶ οὕτως, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 5462389, ἐὰν δεξιὰ τέσσαρας χαρακτῆρας διαςείλωμεν, γίνεται 5462, 389, οὗτος δὲ 5462, 389 > 5462· ἄρα καὶ λ 5462, 389 > λ: 5462· εἶναι ὅμως καὶ 5462, 389 < 5463· καὶ ἐπομένως καὶ λ: 5462, 389 < λ: 5463· ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 5462 μονάδι διάφορος τοῦ 5463· λοιπὸν ὁ λογ: τοῦ 5462, 389 δεν διαφέρει ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 5462, εἰμὴ εἰς ἓν κλάσμα μονάδος ἔλαττον, ἤτοι λ. 5462, 389= λ 5462+χ. εὕρηται ὅμως ὅτι αἱ διαφοραὶ αἱ μοναδικαὶ τῶν ἀριθμῶν εἰσὶν ἀνάλογοι τῶν διαφορῶν τῶν λογαρίθμων, ἄρα (5463 — 5462):(5462, 389 — 5462)= (λ 5463 — λ 5462): χ. ἤτοι 1: 0, 389= (λ: 5463—λ5462): χ. ἢ 1000: 389=(λ5463—λ5462):χ καὶ τέλος $\chi=\dfrac{(\lambda{:}\ 5463-\lambda\ 5462)\,389}{1000}$ (§. 476)· καὶ εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸν λογάριθμον τοῦ 5462, 389= $\lambda{:}\ 5462+\dfrac{(\lambda\ 5463-\lambda\ 5462).389}{1000}$. ἔςω λοιπὸν

λ: 5463= 3, 7374312
λ: 5462= 3, 7373517

διαφορὰ 795
ἐπὶ τὸν 389

7155
6360
2385

309255

$\frac{309255}{1000} = 309.$

διὰ τοῦ,

ἄρα λ 5462, 389=7373517 + 309=7374826, καὶ ὅλος λ 5462389=6, 7374826.

§. 631. Ἐὰν τοίνυν δοθῇ μείζων ἀριθμὸς, ἢ ἐν τοῖς πίναξιν ὡς 1814567, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ κατὰ τὰ ἑξῆς.

α΄. Κόπτομεν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριστερὰ τόσους χαρακτῆρας, ὅσοι εἰς τοὺς πίνακας εὑρίσκονται, καὶ ἐπειδὴ οἱ μικροὶ πίνακες τέσσαρας χαρακτῆρας ἔχουσιν, οὕτως ὁ δοθεὶς κόπτεται 1814, 567, καὶ 567 μένει δεκαδικόν.

β΄. Λαμβάνομεν μονον τους 4 χαρακτηρας χωρὶς των δεκαδικῶν τὸν 1814, καὶ εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ εἰς τοὺς πίνακας ὡς λογ 1814=3, 2586373.

γ΄. Εὑρίσκομεν καὶ τὸν λογ: τοῦ αὐτοῦ μετὰ μιᾶς μονάδος μείζων, ὡς λογ: 1815=3, 2588766.

δ΄. Ἀφαιροῦμεν τὸν λογάριθμον τούτων τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τοῦ μείζονος ὡς λ: 1815= 3, 2588766
λ: 1814= 3, 2586373

διαφ: ἀριθμοῦ =1 0, 0001393 διαφ: ἀριθ:

ε΄. Τοῦτο τὸ λεῖψανον πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν ἀριθμὸν, ὁποῦ μετὰ τὸ κόμμα ἔμεινεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, οὕτω $1393 \times 567 = 789831$.

ς΄. Ἀπὸ τοῦ παραγομένου τούτου κόπτομεν τόσους χαρακτῆρας, ὅσους ἔχει ὁ μετὰ τὸ κόμμα δεξιὰ δοθεὶς ἀριθμὸς ὡς εἰς τὸ παράδειγμα τρεῖς, καὶ παραμελοῦνται οὕτω 789, 831· διότι τὸ παραγόμενον τοῦτο πρέπει νὰ διαιρεθῇ μὲ περιοδικὸν διαιρέτην τόσα μηδενικὰ ἔχοντα, ὅσοι οἱ κεκομμένοι χαρακτῆρες τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ (§. 630).

ζ΄. Οἱ ἀριστεροὶ χαρακτῆρες οὗδε προστίθενται εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δοθέντος τοῦ πρὸ τοῦ κόμματος πρὸς ἀριστερὰ κατὰ τάξιν ὡς εἰς ἀκέραιον ἀριθμὸν, οὕτω $3, 2586373 + 789 = 3, 2587162$ καὶ οὗτος εἶναι $\lambda\ 1814, 567 = 3, 2587162$.

η΄. Ἐπειδὴ ὅμως οὗτος εἶναι κεκλασμένος, ὁ δὲ ἄνω ἀκέραιος ἐδόθη 1814567, οὗτος δὲ εἶναι $1814567 = (1814, 567 . 1000)$· ἄρα ὁ λογ $1814567 = \lambda\ 1814, 567 + \lambda\ 1000 = 3, 2587162 + 3 = 6, 2586453$· καὶ οὗτος ὁ ζητούμενος λογάριθμος.

Ζητεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ 196668, ὁποῦ εἶναι μείζων τοῦ ἐν τοῖς πίναξιν, ἄρα κόπτεται 1966, 68, καὶ ἑπομένως,

$$\begin{array}{rl} \lambda.\ 1967 = & 3,2938044. \\ \lambda.\ 1966 = & \underline{3,2935835} \\ & 0,0002209 \end{array}$$

ἄρα $2209 . 68 = 150212$· ἐὰν δὲ δύω χαρακτῆρας κόψωμεν, μένει 1502. λοιπὸν

$$\begin{array}{rl} \text{λογ}\ 1966 = & 3,2935835 \\ \lambda\ \ 0,68 = & \underline{0,0001502} \\ \lambda.\ 196668 = & 5,2937337. \end{array}$$

Ζητεῖται ἔτι ὁ λογάριθμος τοῦ 89563591· ἄρα

λογ: 8957 = 3,9521626
λογ: 8956 = 3,9521141

διαφ. 485· τὸ δὲ παραγόμενον 485·
3591 = 1741635· ἤτοι 174· ἄρα
λ: 8956 = 3,9521141
174

λ: 8956,3591 = 3,9521315·
καὶ λ: 89563591 = 7,9521315·

§. 632. Ἐκ τουτου γίνεται φανερὸν, ὅτι ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἶναι ὁ αὐτὸς, ἐὰν μέρος αὐτοῦ διεςιγμένου ἔχῃ εἰς κλάσμα δεκαδικὸν, ἐὰν μόνον ἀπὸ τοῦ χαρακτηριςικοῦ τόσας μονάδας ἀφέλωμεν, ὅσους χαρακτῆρας εἰς δεκαδικὸν κλάσμα ςίξωμεν· ἐπειδὴ καὶ λ. 196668=5, 2937337, καὶ λογ. 19,6668=1, 2937337 καὶ λ. 19,6668=1, 2437337, καὶ 0, 196668=—1, 2937337.

§. 633. Ἐὰν δὲ ζητῆται ὁ λογάριθμος ἑνὸς κλάσματος, ἔςαι τὸ κλάσμα ἢ γνήσιον, ἢ νόθον, ἢ δεκαδικόν.

α΄. Ἐὰν γνήσιον τὸ κλάσμα, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ τὸν λογάριθμον τοῦ παρονομαςοῦ, καὶ τουτου ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμητοῦ (§. 613.), καὶ ἡ διαφορὰ εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ κλάσματος, οὕτως $\lambda\frac{5}{6}=\lambda 5-\lambda 6=0,6989700-0,7781512=-0,0791812$.

β΄. Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ ἐὰν ἦ νόθον· ἐὰν δ' ἀριθμὸς μετὰ κλάσματος, μεταποιοῦμεν αὐτὸ εἰς νόθον κλάσμα $3\frac{5}{6}=\frac{23}{6}$, καὶ ὡς γνήσιον αὐτὸ εὑρίσκομεν $\lambda\frac{23}{6}=\lambda 23-\lambda 6=1,3617278-0,7781512=0,5835766$.

Σημείωσαι, ὅτι ὁ λογάριθμος τῶν γνησίων κλασμάτων ἀεὶ ἀποφατικός· διότι, ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος $=0$, ἄρα τοῦ κλάσματος ἐλάττων τοῦ μηδενός, ἤτοι ἀποφατικός.

γ. Ἐὰν δὲ κλάσμα ᾖ δεκαδικὸν, καὶ ζητῆται ὁ τούτου λογάριθμος, ἢ δεκαδικοῦ ἀμίκτου ἔςαι, ἢ μεμιγμένου μετὰ ἀκεραίου ἀριθμοῦ· καὶ τῶν δύω εἰδῶν ὁ λογ: εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὥστε! ἦσαν ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, καὶ ἀπὸ τοῦ εὑρεθέντος λογαρίθμου μόνου ἀπὸ τοῦ χαρακτηριςικοῦ ἀφαιροῦμεν τόσας μονάδας, ὅσοι εἶναι οἱ χαρακτῆρες οἱ δεκαδικοί· οὕτως ὁ λογ: τοῦ δεκαδικοῦ $0,1675=3,2240148$· ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ δεκαδικοὶ χαρακτῆρες τέσσαρες, ἔςαι

$$\begin{array}{r} 3,2240148 \\ -4 \\ \hline -1,2240148 \end{array} = \lambda.0,1675$$

ὁμοίως καὶ λογ: $0,0031=$

$$\begin{array}{r} 1,4913617 \\ -4 \\ \hline -3,4913617 \end{array}$$

καὶ ἔτι λογ: $16,77=$

$$\begin{array}{r} 3,2245331 \\ -2 \\ \hline 1,2245331 \end{array}$$

καὶ λογ: $24,08=$

$$\begin{array}{r} 3,3816565 \\ -2 \\ \hline 1,3816565 \end{array}$$

διότι $0,00031=\frac{31}{10000}$ ἄρα λογ: $\frac{31}{10000}=$ λογ: $31-\lambda\,10000=1,4913617-4=-3,4913617$ καὶ κατ' αὐτοὺς τοὺς τρόπους εὑρίσκομεν ἕκαςον λογάριθμον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ δίδωνται.

§. 634. Ἐὰν δ' ἀνάπαλιν ὁ λογ: δίδεται, καὶ ζητηται ὁ τούτῳ ἀντιςοιχῶν ἀριθμὸς, ἢ εἶναι ὁ λογάριθμος οὗτος ἐλάττων τοῦ ἐν τοῖς πίναξι λογαρίθμου, ἢ μείζων, καὶ εἰ μὲν ἐλάττων, ἢ εὑρίσκεται ἐν τοῖς πίναξιν ὁ αὐτὸς· ἢ δὲν εὑρίσκεται, ἀλλ' ὁ ἐγγὺς αὐτοῦ ἐλάττων· ὅθεν τριχῶς τοῦτο λύεται.

α΄. Ἐὰν ὁ δοθεὶς λογάριθμος εὑρίσκεται ἐν τοῖς πίναξιν ὁ αὐτὸς, ὁ ἀριθμὸς τούτου τοῦ λογαρίθμου εἶναι ἐκεῖνος, ὅπου εἰς τὴν ςήλην N ἀντιςοιχεῖ αὐτῷ· οὕτω ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου 3,3872118, οὗτος δὲ εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας, ὁ δὲ ἀριθμὸς 2439 εἶναι, ὅπου αὐτῷ ἀντιςοιχεῖ· ἄρα οὗτος εἶναι ὁ ζητούμενος· ἐὰν δ' ὁ δοθεὶς λογάριθμος ἀποφατικὸς, εὑρίσκεται ὁμοίως ὁ αὐτῷ ἀντιςοιχῶν ἀριθμὸς, καὶ λαμβάνεται ὡς παρονομαςὴς ἑνὸς κλάσματος, οὗ ἀριθμητὴς ἡ μονάς· ἐὰν δ' οὕτω δοθῇ —3,3872118 ὁ ἀριθμὸς ὁ τούτῳ ἀντιςοιχῶν 2439· ἄρα ὁ ἀριθμὸς αὐτοῦ τοῦ λογαρίθμου $= \frac{1}{2439}$· διότι ὁ λογάριθμος (§. 607.) ἐκθέτης ἀριθμοῦ τινος, δηλ: τοῦ a· ἐὰν τὸν λογάριθμον ν καλέσωμεν, ἔςαι $a^{-\nu} = \frac{1}{a^{\nu}}$, ὁ δὲ λογ: $\frac{1}{a^{\nu}} = \lambda{:}\ 1 - \lambda a^{\nu} =$ λογ: $0 - \lambda a^{\nu}$ καὶ ἀεὶ ἀποφατικὸς· ἄρα ὁ λογάριθμος ὁ ἀποφατικὸς ἔχει πάντοτε ἀριθμὸν, ὅς ἐςιν ὁ παρονομαςὴς ἑνὸς κλάσματος, οὗ ἀριθμητὴς ἡ μονάς.

β΄. Ἐὰν ὁ δοθεὶς λογάριθμος δὲν εὑρίσκεται μετὰ τοῦ χαρακτηριςικοῦ εἰς τοὺς πίνακας, ἀμελοῦμεν τὸ χαρακτηριςικὸν, καὶ παρατηροῦμεν εἰς τοὺς πίνακας, ἂν εὑρίσκηται μετὰ ἑτέρου χαρακτηριςικοῦ, τότε λαμβάνομεν τὸν ἀντιςοιχοῦντα αὐτῷ ἀριθμὸν, καὶ εἰς αὐτὸν προσεπιγράφομεν τόσα μηδενικὰ, ὅσας μονάδας ἔχει πλέον τὸ χαρακτηριςικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, ἀπὸ τὸ χαρακτηριςικὸν τοῦ εὑρεθέντος λογαρίθμου· π. χ. ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου 5, 3972446, καὶ ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος 3972446 εὑρίσκεται μετὰ χαρακτηριςικοῦ 3 οὕτω 3, 3972446, καὶ ὁ ἀντιςοιχῶν αὐτῷ ἀριθμὸς 2496· ἄρα εἰς αὐτὸν προσεπιγράφομεν δύω μηδενικὰ, διότι 5—3=2, καὶ ἔςαι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς 249600=2496· 100 καὶ λ 249600= λ 2496 + λογ: 100=3, 3972446+2=5, 3972446.

Ἔτι ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τοῦ δοθέντος λογαρίθμου 8, 8127129, καὶ ὁ 8127129 εὑρίσκεται ἐν τοῖς πίναξι μετὰ 3 χαρακτηριςικοῦ, εἰς ὃν ἀντιςοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 6497, προσεπιγράφομεν εἰς αὐτὸν καὶ 5 μηδενικά· διότι 8—3=5· καὶ ἔςαι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς 649700000.

§. 635. Γ΄. Ἐὰν δὲ τέλος ὁ δοθεὶς λογάριθμος μήτε μετὰ τοῦ χαρακτηριςικοῦ, μήτε ἄνευ τοῦ χαρακτηριςικοῦ ἐν τοῖς πίναξιν εὑρίσκεται· ὁ ἀριθμὸς οὗτος εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἑξῆς.

α΄. Ἀμελοῦμεν τοῦ χαρακτηριςικοῦ, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἀναγκαίως οὗτος κεῖται μεταξὺ δύω λογαρίθμων ἐν τοῖς πίναξιν, ὧν ὁ μὲν μείζων αὐτοῦ, ὁ δ᾽ ἐλάττων· καὶ εὑρεθήτω τούτων τῶν δύω τῶν ἐν τοῖς πίναξιν ἡ διαφορὰ, ἥτις βέβαια τῇ μονάδι τῶν δύω ἀριθμῶν ἐκείνων ἀντιςοιχεῖ, καὶ σημειούσθωσαν οἱ ἀντιςοιχοῦντες αὐτοῖς τοῖς λογαρίθμοις ἀριθμοί, οἵτινες μόνον μονάδι διαφέρουσι.

β΄. Εἶτα εὑρεθήτω καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ αὐτοῦ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, καὶ τοῦ ἐγγὺς αὐτοῦ ἐλάττονος.

γ΄. Γενέσθω ὡς ἡ πρώτη διαφορὰ πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως ἡ μονὰς μὲ τόσα μηδενικὰ, ὅσους χαρακτῆρας ἔχει ἡ μείζων διαφορὰ πρὸς ἕτερον τινά.

δ'. Οὗτος ὁ εὑρεθεὶς τέταρτος ἀριθμὸς προσγράφεται τῷ ἀριθμῷ, ὁποῦ ἀντιςοιχεῖ τῷ ἐγγὺς ἐλάττονι λογαρίθμῳ ἀπὸ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου·

ε'. Ἄς ςιχθῇ οὗτος ὁ ἀριθμὸς πρὸς ἀριςερὰ τόσους χαρακτῆρας καὶ ἔτι ἕνα, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ χαρακτηριςικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, καὶ οἱ λοιποὶ χαρακτῆρες μενέτωσαν πρὸς τὰ δεξιὰ, ἐὰν ἔτι ὦσιν ὡς δεκαδικὰ κλάσματα.

ς'. Ἐὰν δ' οἱ χαρακτῆρες δὲν ἐξαρκῶσι τόσοι καὶ ἕνα πλέον, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ χαρακτηριςικὸν, πληροῦμεν αὐτοὺς μὲ μηδενικά· π. χ. δίδεται ὁ λ 5, 4325798, ὅςις ἄνευ τοῦ χαρακτηριςικοῦ 5 εἰς τοὺς πίνακας ἀκριβῶς δὲν εὑρίσκεται, εἰ μὴ ὁ μείζων αὐτοῦ

λογ: 2708=3,4326487

ὁ ἐλάττων αὐτοῦ λογ: 2707=3,4324882

πρώτη διαφορὰ 1605

Ἔτι ὁ δοθεὶς λογ: = 5,4325798

ὁ ἐγγὺς αὐτοῦ ἐλάττων λογ: 2707=3,4324882

δευτέρα διαφορὰ 916

ἄρα $1605 : 916 = 10000 : \frac{9160000}{1605} = 0,5707$· τούτου δὲ προσγράφομεν εἰς τὸν ἐγγὺς ἐλάττονα ἀριθμὸν 2707, οὕτω 27075707· καὶ ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριςικὸν τοῦ δοθέντος 5, 6 κόπτομεν πρὸς ἀριςερὰ χαρακτῆρας 270757,07, καὶ οὗτος ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου 5,4325798.

Ἔςω ἔτι ὁ λογ: 1, 3456789, καὶ ζητεῖται ὁ ἀνήκων αὐτῷ ἀριθμὸς, ἐπειδὴ δὲ καὶ οὗτος ἐν τοῖς πίναξιν ἄνευ τοῦ χαρακτηριστικοῦ δὲν εὑρίσκεται, εὑρίσκεται ὁ ἐγγὺς αὐτοῦ

μείζων λογ: $2217 = 3,3457657$

ὁ ἐγγὺς αὐτοῦ ἐλάττων λογ: $2216 = 3,3455698$

πρώτη διαφ: 1959

Ἔτι ὁ δοθεὶς λογ: $= 1,3456789$

ὁ ἐγγὺς αὐτοῦ ἐλάττων λογ: $2216 = 3,3455698$

δευτέρα διαφ. 1091

ἄρα $1959 : 1091 = 10000 : \dfrac{10910000}{1959} = 0,5569$· καὶ οὕτος προσαρτώμενος τῷ ἀριθμῷ 2216 τοῦ ἐγγὺς ἐλάττονος λογαρίθμου, ἔσται 22165569· ἐπειδὴ ὅμως τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος 1, ἄρα δύω πρὸς ἀριστερὰ σείζομεν χαρακτῆρας, καὶ ἔσται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τοῦ λογ: 1, 3456789 ὁ 22,165569· καὶ κατὰ ταῦτα ἐντελῶς ἠμποροῦμεν νὰ μεταχειρισθῶμεν τούτους τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας εἰς καθε πρόβλημα· πλὴν πολλῶν κόπων ἀπαλαττόμεθα, ἐὰν ἔχωμεν τὸ ἕτερον εἶδος τῶν λογαριθμικῶν πινάκων, καὶ διὰ τοῦτο ἀγωνισθῶμεν καὶ ἐκείνου τὴν χρῆσιν νὰ διασαφήσωμεν, ἐπειδὴ εἶναι μᾶλλον πολύπλοκον.

II. Χρῆσις τοῦ δευτέρου εἴδους τῶν πινάκων.

§. 636. Εἰς αὐτοὺς τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν τοὺς λογαρίθμους καὶ ἀριθμοὺς, χωρὶς ἐκείνας τὰς μεθόδους τὰς κοπιαστικὰς (§. 610. καὶ §. 635.)· διότι εἰς αὐτοὺς τοὺς πίνακας εὑρίσκονται ἅμα οἱ ἀριθμοὶ, οἱ λογαριθμοι, καὶ αἱ διαφοραὶ αὐτῶν, καὶ οἱ ὅροι οἱ ἀναλογικοὶ θαυμασιώτατα· διὸ καὶ ὅστις δεν ἔχει αὐτοὺς ὑπ' ὄψιν, εἰς αὐτὸν αὕτη ἡ διδασκαλία γριφώδης λογισθήσεται· διὰ τοῦτο καὶ εἰς τὴν δὲ τὴν διδασκαλίαν τοὺς πίνακας τοῦ κυρίου Bega τοῦ Γερμανοῦ προτίθεμεν, εἰς τοὺς ὁποίους ὁ ἀνὴρ ἄριστα πεφιλοτίμηται· ἀλλ' ὑπὲρ τούτους προτιμότεροι οἱ πίνακες τοῦ Γάλλου κυρίου Καλλεΐου, ἐν οἷς ὁμοίως εὑρίσκομεν μὲ τοὺς λογαρίθμους τοῦ Βριγγίου, καὶ τοὺς βαθμοὺς, ἢ ὥρας μὲ λεπτὰ πρῶτα, καὶ δεύτερα εἰς δεύτερα λεπτά· καὶ ἀνάπαλιν τὰ δεύτερα λεπτὰ εἰς ὥρας, καὶ βαθμοὺς, καὶ ἅμα τοὺς λογαρίθμους τῶν ἡμιτόνων καὶ ἐφαπτομένων θαυμασιώτατα· ἐν αὐτοῖς εὑρίσκονται καὶ ἕτεροι διάφοροι πίνακες πρὸς χρῆσιν τῶν μαθηματικῶν ὠφελιμώτατοι· ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὰ προβλήματα ἡ ἑρμηνεία τῆς χρήσεως αὐτῶν ἐσαφηνίσθη ἱκανῶς, καὶ ἡμεῖς περὶ τούτου οὐδὲν λέγομεν, εἰμὴ ὅτι οὗτοι ἐντελέστεροι, ἢ οἱ τοῦ κυρίου Βεγα τοῦ Γερμανοῦ.

§. 637. Οὗτοι οἱ πίνακες περιέχουσι τοὺς κοινοὺς Βριγγιανοὺς λογαρίθμους ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τῶν 101000 μὲ δεκαδικὰ ἑπτὰ, καὶ ἀπὸ μὲν τῆς 1 μέχρι τῶν 1000 εὑρίσκονται οἱ ἀριθμοὶ, καὶ οἱ λογάριθμοι ἀπαραλλάκτως, ὡς καὶ εἰς τὸ α'. εἶδος κεῖνται τῶν λογαρίθμων, δηλ: ἡ στήλη N, καὶ ἡ στήλη logarith. καὶ ἡ χρῆσις εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ ἐκείνους, ἀπὸ δὲ τῶν 1000 μέχρι τῶν 101000 ἄλλως πως ἐνταῦθα ἐκεῖνα εὑρίσκονται.

§. 638. Ἀπὸ δὲ τῶν 1000 καὶ εἰς τὰ ἑξῆς ἑκάστη σελὶς ἔχει τρεῖς στήλας περιεκτικὰς κατὰ κάθετον· καὶ ἡ πρώτη αὐτῶν ἐπὶ τῆς κορυφῆς καὶ βάσεως ἐπιγράφεται μὲ τὸ N, καὶ περιέχει τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τάξιν ἀπὸ τῶν 1000 μέχρι τῶν 100999, καὶ εἰς αὐτὴν ζητοῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν λογαρίθμων· ἡ δὲ δευτέρα στήλη αὐτῶν ὑποδιαιρεῖται εἰς δέκα στήλας κατὰ κάθετον μερικὰς, καὶ ἐπιγράφονται ὁριζοντικῶς ἄνω καὶ κάτω μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9· ἑκάστη δὲ τούτων στήλη περιέχει τοὺς λογαρίθμους τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1000 μέχρι τῶν 100999 χωρὶς τοῦ χαρακτηριστικοῦ· διότι τὸ χαρακτηριστικὸν γίνεται γνωστὸν ἀπὸ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ ἀριθμοῦ (§. 623.).

Σημείωσαι ὅμως τοὺς λογαρίθμους ἄνευ χαρακτηριστικοῦ, οἱ μὲν καλοῦσιν ἀριθμοὺς μαντικούς, οἱ δὲ τεχνικούς, οἱ δὲ δεκαδικούς· ἡμεῖς ὅμως μαντικοὺς εἰς τὸ ἑξῆς καλοῦμεν· ἡ πρώτη δὲ στήλη αὐτῶν τῶν δέκα ἔχει πρὸς ἀριστερὰ εἰς τοὺς μαντικοὺς ἀριθμοὺς τρεῖς χαρακτῆρας, οἵτινες ἐπινοοῦνται ὁριζοντικῶς εἰς ὅλας τὰς λοιπὰς ἐννέα στήλας· καὶ ἔτι κατὰ κάθετον ἐπινοεῖται ὁ ἀνώτερος εἰς τὸν κατώτερον μαντικὸν ἀριθμὸν, ὅπου δὲν ἔχει πρὸς ἀριστερὰ αὐτοὺς τοὺς τρεῖς χαρακτῆρας· διότι διὰ τὴν ἔλλειψιν τοῦ τόπου τῶν σελίδων, οὗτοι δὲν γράφονται εἰς τοὺς λοιποὺς μαντικοὺς, ὡσὰν ὅπου εἶναι οἱ αὐτοί· π. χ. εἰς αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν 1987 ἡ ἑξῆς στήλη ἔχει 2981979· ἄρα καὶ ἡ ἑξῆς νοεῖται, ὅτι ἔχει τοὺς τρεῖς 298 οὕτω 2982197, καὶ ἡ ἑξῆς 2982416· ὁμοίως καὶ εἰς τὰς ἑξῆς· ὁ δ' ἀριθμὸς 1988 ἔχει λογάριθμον εἰς τὴν ἑξῆς στήλην 4164, πλὴν νοοῦνται καὶ οἱ ἄνω τρεῖς χαρακτῆρες οὕτω 2984164· καὶ τοῦτο συμβαίνει καὶ εἰς τὰς ἑξῆς στήλας· εἰς αὐτὰς τὰς δέκα στήλας εὑρίσκομεν ἀριθμοὺ μὲ πέντε χαρακτῆρας τὸν λογάριθμον, ὡς ἀμέσως δείξομεν· Η' δὲ τρίτη περιεκτικὴ στήλη ἐπιγράφεται ἄνω μὲν μὲ p. p. καὶ κάτω diff. δηλ: partes proportionales differentiae· ἤτοι τῆς διαφορᾶς μέρη ἀναλογικά· καὶ εἰς αὐτὴν τὴν στήλην περιέχονται αἱ διαφοραὶ, καθ' ἃς διαφέρουσι δύω λογάριθμοι δύω ἀριθμῶν, οἵτινες κατὰ μονάδα εἰσὶ διάφοροι, καὶ ἅμα αἱ λογαριθμικαὶ ἀναλογίαι μετὰ τῶν μερῶν αὐτῆς εἰς εὕρεσιν τοῦ ἕκτου, καὶ ἑβδόμου χαρακτῆρος· ἄνω δὲ τούτων ἁπάντων τῶν ςηλῶν ὁριζοντικῶς εἶναι γεγραμμένον N, καὶ ὁ ἀριθμὸς ὁ φυσικὸς, ὅπου ἄρχεται εἰς αὐτὴν τὴν σελίδα ἡ ςήλη, N, διὰ νὰ εὑρίσκωμεν ἀμέσως τὴν σελίδα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, καὶ μετὰ ταῦτα εἶναι γεγραμμένον καὶ τὸ L μὲ τοὺς τρεῖς πρώτους χαρακτῆρας τοῦ λογαρίθμου, ὅπου ἄρχεται ἡ αὐτὴ σελὶς, διὰ νὰ ευρίσκωμεν ἀμέσως τὴν σελίδα, ἐν ᾗ κεῖται ὁ δοθεὶς λογάριθμος· καὶ τοιαύτη ἡ περιγραφὴ αὐτοῦ τοῦ εἴδους. Λείπεται ἤδη νὰ μάθωμεν πῶς ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον, καὶ δεύτερον πῶς ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμόν.

§. 639. Α΄. πρόβλημα εἶναι, δοθέντος ἀριθμοῦ οἱουδήποτε, τὸν λογάριθμον αὐτοῦ εὑρεῖν.

α΄. Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἐλάττων τοῦ 1000, εὑρίσκομεν αὐτὸν ὁμοίως, ὡς καὶ εἰς τὸ πρῶτον εἶδος τῶν πινάκων ἐμάθομεν (§. 629)

β΄. Ἐὰν δ᾿ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς μὲ 4 χαρακτῆρας, ἤτοι μείζων τοῦ 1000, εὑρίσκομεν πάλιν αὐτὸν, ὡς πρότερον. εἰς τὴν ςήλην N, καὶ ἅμα μετ᾿ αὐτὸν εἰς τὴν ςήλην O κεῖται ὁ λογάριθμος αὐτοῦ, ὡς λογ: 1564=3, 1942367· καὶ λογ: 1565=3, 1945143 κ. τ. λ. εἰς αὐτὴν τὴν ςήλην εὑρίσκομεν καὶ τὸ δεκαπλάσιον ἑκάςου ἀριθμοῦ μὲ τέσσαρας χαρακτῆρας· διότι ὁ αὐτὸς λογάριθμος καὶ 15640 πλὴν τοῦ χαρακτηριςικοῦ (§. 623.)· διὸ καὶ αὕτη ἡ ςήλη μὲ τὸ O ἐπιγράφεται· καθότι ἐν αὐτῇ εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἐκ τεσσάρων χαρακτήρων, ἢ μόνων, ἢ ἅμα καὶ μετὰ μηδενικοῦ.

γ'. Ἐὰν δ' ὁ δοθεὶς ἔχῃ 5 χαρακτῆρας, εὑρίσκομεν πρῶτον εἰς τὴν ςήλην N τοὺς τέσσαρας χαρακτῆρας, ἔπειτα παρατηροῦμεν εἰς τὰς λοιπὰς 10 ςήλας ἄνω, ἢ κάτω εἰς ποίαν ςήλην εὑρίσκεται ὁ πέμπτος χαρακτὴρ γεγραμμένος, καὶ εἰς τὸν οἰκίσκον, ὅπου κοινωνοῦσιν οἱ τέσσαρες χαρακτῆρες μὲ αὐτὸν τὸν πέμπτον, εὑρίσκεται ὁ λογάριθμος αὐτοῦ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ὅταν πρὸς ἀριςερὰ προσγράψωμεν αὐτοῦ καὶ τοὺς τρεῖς χαρακτῆρας, ὅπου ἡ ςήλη O ἔχει πλέον τῶν τεσσάρων, ὡς εἴπομεν (§. 637). π. χ. ζητεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 15646· εὑρίσκομεν πρῶτον εἰς τὴν ςήλην N τὸν 1564, καὶ εἰς τὰς δέκα ςήλας ἄνω, ἢ κάτω ὁριζοντικῶς τὸν 6, καὶ οὗτοι ὁμοῦ κοινωνοῦσιν εἰς τὸν οἰκίσκον 4033· αὐτοῦ προσγράφομεν καὶ τοὺς λοιποὺς 3 χαρακτῆρας 194 ἀπὸ τὴν ςήλην O οὕτω 1944033, καὶ ἔτι τὸ χαρακτηριςικὸν 4 διὰ τὸ εἶναι 5 τοὺς χαρακτῆρας, καὶ ἔςαι λογ: 15646 = 4, 1944033. Ἔτι ζητεῖται ὁ λογ: τοῦ 46548· εὑρίσκομεν πρῶτον ἐν τῇ ςήλῃ N τὸν 4654, εἶτα τὸν 8 εἰς τὰς 10 ςήλας, καὶ ἐν τῷ κοινῷ οἰκίσκῳ τὸν 9010, ἄρα λ 46548 = 4, 6679010· καὶ εἶναι φανερὸν, ὅτι αὗται αἱ ςῆλαι οὕτω κατεσκευάσθησαν· δηλ: τὸ κεφάλαιον τῆς ςήλης O καὶ τῆς διαφορᾶς, ἥτις εἶναι γεγραμμένη εἰς τὴν ςήλην dif, εἶναι ἡ ςήλη ἡ τῆς μονάδος, τὸ δὲ κεφάλαιον ταύτης καὶ τῆς διαφορᾶς γίνεται ἡ τῆς δυάδος, καὶ ὅλως τὸ κεφάλαιον τῆς προηγουμένης ςήλης καὶ τῆς διαφορᾶς γίνεται ςήλη ἡ ἑξῆς· ὅτε ἡ ἑξαπλῆ διαφορὰ, καὶ ἡ ςήλη O γίνεται ἡ ςήλη 6. διὸ καὶ τοῦ 6, τοῦ πέμπτου χαρακτῆρος τοῦ ἀριθμοῦ ὁ λογάριθμος εἰς αὐτὴν τὴν ςήλην εὑρίσκεται· ὁμοίως καὶ τῶν λοιπῶν.

Σημείωσαι ὅμως, ὅταν ὁ ἀριςερώτερος χαρακτὴρ τῶν ἐν τῷ οἰκίσκῳ τέσσάρων ἔλάττων, τοῦ ἀριστερωτέρου χαρακτῆρος τῶν ἐν τῇ στήλῃ O τεσσάρων, τότε οἱ τρεῖς χαρακτῆρες, ὁποῦ λαμβάνομεν ἀπὸ τὴν στήλην O μονάδι αὐξάνουνται, ἢ λαμβάνομεν τοὺς ἐγγὺς κατωτέρω τρεῖς, καὶ οὐχὶ τοὺς ἀνωτέρω· διότι λ 15638=4, 1941812, καὶ ὄχι=4, 1931812· διὰ τοῦτο καὶ εἰς τοὺς πίνακας οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ δι' ἀστερίσκου * ἐσημειώθησαν εἰς προσοχὴν πλείονα. Ἐὰν δὲ μετὰ τοὺς πέντε χαρακτῆρας καὶ μηδενικὰ πρόσκεινται, ὡς 4654800, ἢ 156380000 κτ. τότε μόνον τὸν λογάριθμον τῶν 5 χαρακτήρων εὑρίσκομεν ὡς ἄνω, καὶ μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν γράφεται κατὰ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ ἀριθμοῦ μὲ τόσας μονάδας, πλὴν μιᾶς, ὅσοι οἱ χαρακτῆρες τοῦ ἀριθμοῦ (§. 623).

δ΄. Ἐὰν δ' ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀπὸ 6 χαρακτῆρας, εὑρίσκομεν μόνον πρῶτον τὸν λογάριθμον, ὡς εἰς τὸ p. τῶν πέντε χαρακτήρων· εἶτα διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ τὸν 6 ὁμοῦ χαρακτῆρα, παρατηροῦμεν ποία εἶναι εἰς αὐτὸν τὸν λογάριθμον ἡ κυριεύουσα διαφορὰ εἰς τὴν στήλην p,. p. καὶ diff. αὕτη δ' εὑρίσκεται ἀμέσως, ἐὰν μόνον τὸν δεξιώτερον χαρακτῆρα αὐτοῦ τοῦ οἰκίσκου τοῦ εὑρεθέντος λογαρίθμου ἀφέλωμεν διὰ τοῦ νοὸς ἀπὸ τὸν δεξιώτερον τῶν τεσσάρων χαρακτήρων τοῦ ἑξῆς οἰκίσκου· καὶ ὅπου αὕτη ἡ διαφορὰ συμφωνεῖ μὲ τὸν ἔσχατον χαρακτῆρα τοῦ ἑξῆς οἰκίσκου μιᾶς διαφορᾶς εἰς τὴν στήλην p,. p, ἐκείνη εἶναι ἡ κυριεύουσα διαφορὰ, καὶ κάτω αὐτῆς εὑρίσκονται οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος κατὰ βάθος μέχρι τοῦ 9· εἰς δὲ τὰ ἀριστερὰ τὰ ἀνήκοντα ἀναλογικὰ μέρη ἑκάστου ἀριθμοῦ τούτων τῶν ἐννέα· ὅθεν ἀπὸ τὰ ἀναλογικὰ μέρη λαμβάνομεν ἐκεῖνα, ὁποῦ ἀντιστοιχοῦσι τῷ ἕκτῳ χαρακτῆρι, καὶ τὰ προσθέτομεν εἰς τὸν εὑρεθέντα λογάριθμον τῶν πέντε χαρακτήρων, καὶ γράφομεν καὶ χαρακτηριστικὸν μὲ τόσας μονάδας, ὅσους παρὰ ἕνα χαρακτῆρας ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς, καὶ οὗτος ὁ λογάριθμος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. π. χ. ζητεῖται ὁ λογ: τοῦ 347185 κατὰ δὲ τὰ ἄνω ἔσται λ: 34718=, 5405547

ἀναλογικὰ μέρη τοῦ	5=	63
ἄρα λ: 347185=		5, 5405610.

Ἐὰν δ' εἰς τὸ τέλος καὶ μηδενικὰ, τὸ χαρακτηριστικὸν μόνον αὔξει λ: 3471850000=9, 5405610.

ε'. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς ἀπὸ 7 χαρακτῆρας, εὑρίσκομεν ὡς ἄνω τὸν λογάριθμον τῶν 6 χαρακτήρων, ἔπειτα λαμβάνομεν τὰ ἀναλογικὰ μέρη τοῦ ἑβδόμου χαρακτῆρος, καὶ περικόπτομεν τὸν δεξιὸν χαρακτῆρα αὐτῶν, διὰ νὰ εἶναι τὸ δεκατημόριον, καὶ τοῦτο προσθέτομεν εἰς τὸν λογάριθμον τῶν ἓξ χαρακτήρων, καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦτο μὲ τὸ ἀνῆκον χαρακτηριστικὸν 6 εἶναι ὁ λογάριθμος τῶν 7 χαρακτήρων· ζητεῖται δηλ: ὁ λογάριθμος τοῦ 2083189,

ἄρα λογ:	20831=,	3187101
	8=	167
	9=	18, 9
λογ: 2083189=		6, 3187286

ς'. Ἐὰν δ' ὁ λογ: τῶν 8 χαρακτήρων ζητῆται, λαμβάνομεν πρῶτον τὸν λογάριθμον τῶν 7 χαρακτήρων, εἶτα ἀπὸ τὰ ἀναλογικὰ μέρη τοῦ ὀγδόου χαρακτῆρος λαμβάνομεν τὸ ἑκατοστημόριον, ἤτοι κόπτομεν δύω χαρακτῆρας δεξιὰ, καὶ τὸ ἀριστερὸν προσθέτομεν, καὶ τοῦτο εἶναι ὁ ζητούμενος λογάριθμος· ζητεῖται λογ 20646689.

ἄρα λογ 20646 = 3148359
6 = . . . 127
8 = ... 16, 9
9 = ... 1, 90

λογ: 2064668 9 = 7, 3148503.

Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἡ αὐτὴ (§. 631) δηλ: ὅταν δοθῇ ὁ ἀριθμὸς μὲ 8 χαρακτῆρας, κόπτομεν τοὺς τρεῖς πρὸς τὰ δεξιὰ ὡς τοῦ ἀνωτέρω δοθέντος ἀριθμοῦ 20646689, οὕτω 20646, 689· εἶτα εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τῶν 5 χαρακτήρων 20646 = 3148359 (Γ). εἶτα μὲ τοὺς τρεῖς πρὸς τὰ δεξιὰ χαρακτῆρας 0, 689 πολλαπλασιάζομεν τὴν ἔγγιςα εἰς τοὺς πίνακας διαφορὰν 211, οὕτω 211. 0, 689 = 144, 379 καὶ τὸν ἀκέραιον τοῦτον 144 μόνον προσθέτομεν εἰς τὸν λογάριθμον τῶν 5 χαρακτήρων οὕτω 3148359 + 144 = 3148503· καὶ οὗτος ὁ λογάριθμος τοῦ 20646689 = 7, 3148503.

Σημείωσαι ὅμως, ὅτι ὁ δεκαδικὸς ὁποῦ ἔσται εἰς τὸ παραγόμενον τῆς διαφορᾶς, ἐὰν ἦ μείζων $\frac{1}{2}$ ἢ ἴσος, λαμβάνομεν ἔτι μίαν μονάδα εἰς τὸν ἀκέραιον· δηλ: εἰ ἦν ὁ 379 μείζων ἢ ἴσος τῷ $\frac{1}{2}$, ἔδει λαβεῖν, 145 καὶ οὐχὶ 144· ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ 379 ἐλάττων $\frac{1}{2}$, ἐλάβομεν μόνον 144· τοῦτο γενικὸν εἰς ὅλα τὰ ἐγκαταλιμπανόμενα δεκαδικά:

ζ'. Ἐὰν δὲ τῶν 9 χαρακτήρων ζητῆται ὁ λογάριθμος, ἔπρεπε νὰ λάβωμεν καὶ τὸ χιλιοςημόριον τοῦ 9 χαρακτῆρος· ἐπειδὴ ὅμως τὰ ἀναλογικὰ μέρη μόνον ἀπὸ τρεῖς χαρακτῆρας συνίςανται: εἰς αὐτοὺς τοὺς πίνακας περαιτέρω ἀκριβῆ λογάριθμον δὲν εὑρίσκομεν, εἰ μὴ μόνον τὸ χαρακτηριςικὸν αὐξάνοντες, εὑρίσκομεν αὐτὸν τῆς ἀληθείας ἐγγὺς οὕτω λ 2064668956781 = 12, 3148503. καὶ εἰς τοὺς ἀνωτέρω δὲ μείζονας πίνακας, ὅπου τὰ ἀναλογικὰ μέρη μὲ πλείονας χαρακτῆρας, εὑρίσκομεν καὶ λογαρίθμους πλειόνων χαρακτήρων· τὸ κάλλιστον εἶναι τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς ἐνταῦθα νὰ λύωμεν εἰς παράγοντας, καὶ νὰ εὑρίσκωμεν ἑκάστου παράγοντος τὸν λογάριθμον, καὶ τούτους νὰ συνάπτωμεν, διὰ δὲ τὰ κλάσματα, νόθα, γνήσια, καὶ δεκαδικὰ, καὶ διὰ τὸ ἔξαρμα τῶν δυνάμεων, καὶ διὰ τὰς ἐξαγωγὰς τῶν ῥιζῶν τὰ αὐτὰ ποιοῦμεν καὶ ἐνταῦθα, ὡς ἐκεῖ ἐδιδάχθημεν.

§. 340. Εὑρίσκομεν ὅμως καὶ τὸν λογάριθμον τοῦ ἐν ἐννέα χαρακτῆρσι δοθέντος ἀριθμοῦ δηλ: ἐὰν οἱ πρῶτοι πέντε περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν 100200 καὶ 100800· ἀλλ' εἰς τοὺς πίνακας τοῦ κυρίου Καλλετίου κάλλιον· διότι εἰς ἐκείνους εὑρίσκονται οἱ λογάριθμοι μέχρι τῶν 108000· διὸ καὶ ἐντελέστεροι· ἐπειδὴ εἰς αὐτοὺς λοιπὸν εἰς τὴν πρώτην στήλην N εὑρίσκονται 5 χαρακτῆρες, ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκεται καὶ ὁ λογάριθμος τῶν 9 χαρακτήρων· ἐὰν δηλ: δοθῇ ὁ ἀριθμὸς 100306279, καὶ ζητῆται ὁ λογάριθμος, κόπτομεν πρὸς ἀριστερὰ 6 χαρακτῆρας οὕτω 100306, καὶ εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον οὕτω λ $100306 = 0013269$1· ἔπειτα μὲ τὸν πρὸς δεξιὰ ἀριθμὸν 279 πολλαπλασιάζομεν τὴν ἔγγιστα διαφορὰν 433 οὕτω $0,279 \cdot 433 = 120,807$· ἤδη προσθέτομεν 121 εἰς τὸν εὑρεθέντα λογάριθμον οὕτω $00132691 + 121 = 00132812$, καὶ τοῦτο τὸ δεκαδικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου· ἤτοι λογ: $100306279 = 8,00132812$.

§. 641. Ἐὰν δ' ὁ ἀριθμὸς ὁ δοθεὶς συνίσταται ἀπὸ ἐννέα χαρακτῆρας ἀριθμῶν, καὶ μὴ μηδενικῶν, ἤτοι ἐὰν οἱ 6 προηγούμενοι χαρακτῆρες μείζονες τοῦ 108000, εὑρίσκουσιν ἕνα ἀριθμὸν μὲ δύω, ἢ τρεῖς χαρακτῆρας, καὶ μὲ αὐτὸν διαιροῦσιν, ἢ πολλαπλασιάζουσι τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ οὕτω λαμβάνουσιν ἢ πηλίκον, ἢ παραγόμενον πάλιν, οὗ οἱ ἓξ χαρακτῆρες μεταξὺ τοῦ 101000 καὶ 108000· τότε τὸ κεφάλαιον, ἢ ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τοῦ ληφθέντος ἀριθμοῦ, καὶ τοῦ πηλίκου, ἢ τοῦ παραγομένου εἶναι ὁ ζητούμενος λογάριθμος, καὶ εἰς τοῦτο εἰς διαιρέτην μὲν λαμβάνονται οἱ τρεῖς, ἢ οἱ δύω πρῶτοι χαρακτῆρες αὐτοῦ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ· εἰς πολλαπλασιαςὴν δὲ λαμβάνεται ἐκεῖνος, ὅςις εἰς πηλίκον ἐξέρχεται, ἐὰν διὰ τῶν δύω, ἢ τριῶν χαρακτήρων διέλωμεν τὸν ἀριθμὸν 101000· ζητείσθω ἐπὶ παραδείγματος ὁ λογάριθμος τοῦ 29088209· διαιροῦμεν τοῦτον διὰ τῶν δύω πρώτων χαρακτήρων αὐτοῦ 29, καὶ ἐξέρχεται $\dfrac{29088209}{29} =$ 10030627, 9· κατὰ δὲ τὰ ἀνωτέρω (§. 640) εὑρίσκεται λ 10030627, 9 = 7, 00132812· εὑρίσκομεν δὲ καὶ τὸν λογάριθμον τοῦ 29 = 1, 46239800. ἄρα λογ: 29088209 = 8, 46372612.

Σημείωσαι ὅμως, ὅτι ἡ διαίρεσις γίνεται καὶ εἰς δεκαδικὰ, ἕως οὗ νὰ ἐξέλθωσιν 9 χαρακτῆρες· τὰ δὲ λοιπὰ παραμελοῦνται· ἐπειδὴ ἡ λογαριθμικὴ ἀπάτη εἶναι ἐλαχίςη· ὁ δὲ δεύτερος τρόπος οὕτω γίνεται· ζητείσθω ὁ λογ τοῦ 3, 14159265. (οὗτος δ' εἶναι ἡ ἀναφορὰ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.) ἐὰν τοίνυν διέλωμεν τὸν 101000 διὰ 3, 14 τῶν τριῶν πρώτων χαρακτήρων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ οὕτω $\dfrac{101000}{3,14} = 3,21$ μὲ τὸ πηλίκον αὐτὸ 3, 21 πολλαπλασιάσωμεν τὸν δοθέντα 3, 14159265, καὶ ἐξέρχεται παραγόμενον 10,0845124065· ἡμεῖς ὅμως εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον μόνον τῶν 9 χαρακτήρων αὐτοῦ τοῦ γινομένου οὕτω, λογ 10,0845124=1,00365490, καὶ οἱ λοιποὶ 065 παραμελοῦνται· εὑρίσκομεν ἅμα καὶ τὸν λογάριθμον τοῦ 3,21=0,50650503· καὶ τοῦτον ἀπ' ἐκείνου ἀφαιροῦμεν 1,00365490

0,50650503

0,49714987 καὶ οὗτος ὁ λογάριθμος τοῦ 3,14159265=0,49714987· καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον εὑρίσκομεν ἕκαστον ἀριθμὸν μὲ χαρακτῆρας ἐννέα· ταῦτα τὰ παραδείγματα ἐλήφθησαν ἀπὸ τοῦ Καλλετίου τοὺς πίνακας.

§. 642. Ἀνωτέρω ἐμνήσθημεν πῶς ὁ λογάριθμος του δεκαδικοῦ εὑρίσκεται κλάσματος, ἐὰν ὅμως τὸ δεκαδικὸν ἀπείρως εἰς περιόδους συνεχίζεται (§. 265.), ἢ ἀμέσως τοῦτο ἀπὸ τὰς περιόδους ἄρχεται ὡς 0, 666666 κ. τ. λ. ἢ μετά τινας χαρακτῆρας ὡς 0,005163263263263.... ἐὰν δ' ἀμέσως ἀπὸ περιόδων ἄρχεται, λαμβάνομεν μίαν περίοδον εἰς ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστὴν τόσους χαρακτῆρας τῶν 9, ὅσοι εἶναι εἰς αὐτὴν τὴν περίοδον οὕτω $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ τοῦ κλάσματος εἶναι λογάριθμος τοῦ δεκαδικοῦ ὅλου· ὡς λογ τοῦ $\frac{2}{3}$=0,30103000 —0,47712125=—1,82390875= λογ 0,66666 . . . Ἐὰν δὲ καὶ ἀριθμὸς ὁμοῦ ἀκέραιος, τοῦτον ποιοῦμεν νόθον κλάσμα εἰς τὸν ἐννεαδικὸν ἀριθμὸν, καὶ συνάπτομεν μὲ τὸν ἀριθμητὴν, ὃς ἡ μία εἶναι τῶν περιόδων, καὶ ὁ λογ: τούτου τοῦ νόθου κλάσματος εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ τοῦ δεκαδικοῦ· ζητεῖται λ. χ. ὁ λογ: τοῦ 25,78787878·

ἄρα $25\frac{78}{99}=\frac{2553}{99}$. ἀλλ' ὁ λογάριθμος τοῦ 2553 εὑρίσκεται 4070508· τοῦ δὲ 99 = 1,9956251. ἄρα $\lambda\frac{2553}{99}$
$= 3{,}4070508 - 1{,}9956351 = 1{,}4114157 =$
$\lambda 25{,}78787878$. Ἐὰν δὲ τέλος αἱ περίοδοι μετά τινας χαρακτῆρας δεκαδικοὺς ἄρχονται, τότε λαμβάνομεν τοὺς πρὸ τῶν περιόδων χαρακτῆρας ὡς ἀκέραιον ἀριθμὸν, καὶ ποιοῦμεν πάλιν μίαν τῶν περιόδων ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστὴν τόσους χαρακτῆρας τῶν 9· καὶ φέρομεν μὲ αὐτὸ τὸ κλάσμα τοὺς πρὸ τῶν περιόδων χαρακτῆρας εἰς νόθον κλάσμα, καὶ ὁ λογ: τοῦδε τοῦ νόθου κλάσματος εἶναι ὁ λογ: τοῦδε τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος· π. χ.

Ζητεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ 0,001362562625 κ. τ. λ. ἄρα ποιοῦμεν $13\frac{625}{999}=\frac{13612}{999}$ · ἀλλ' ὁ λογ: 13612 = 4,1339219· τοῦ δὲ 999 = 2,9995654· καὶ ἑπομένως $4{,}1339219 - 29995654 = 11343565$· ἄρα $\lambda 0{,}0013625625$ κ. τ. λ. $= -2{,}1343565$.

§. 643. Β'. Ἀνάπαλιν, ἐὰν δοθῇ ὁ λογάριθμος, νὰ εὕρωμεν τὸν ἀνήκοντα αὐτῷ ἀριθμόν.

α'. Ἐὰν δοθῇ ὁ λογ: καὶ ζητῆται ὁ ἀριθμὸς αὐτοῦ, πρῶτον εἰς τὸ ἄνω μέρος τῶν σελίδων ἐρευνῶμεν ποῦ εὑρίσκονται οἱ ἀρισεροὶ αὐτοῦ πρῶτοι χαρακτῆρες ἐκτὸς τοῦ χαρακτηρισικοῦ· β'. πολυπραγμονοῦμεν εἰς τὴν σήλην Ο, καὶ ἐὰν εὑρίσκεται ἐπ' ἀκριβὲς ὁ δοθεὶς λογάριθμος, ἔσαι ὁ ἀντισοιχῶν αὐτῷ ἀριθμὸς εἰς τὴν Ν σήλην ὁ ζητούμενος· γ'. κατὰ τὸ χαρακτηρισικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου διοριζεται ὁ ζητούμενος ἀριθμός· δεδόσθω ὁ λογάριθμος 2,3791241· ἄρα ὁ ἀριθμὸς αὐτοῦ 2394, διὰ δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν 2 εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς 239,4· ἐὰν δ' ὁ δοθεὶς 8,3791241, ἔσται ὁ ἀριθμὸς 239400000.

Β'. Ἐὰν δ' ὁ δοθεὶς λογάριθμος δὲν εὑρίσκεται ἐπ' ἀκριβὲς εἰς τὴν στήλην Ο, πολυπραγμονοῦμεν μόνον τοὺς 4 χαρακτῆρας τοὺς δεξιοὺς, ἂν εὑρίσκωνται εἰς ἕτερον οἰκίσκον, ὅπου κυριεύωσιν οἱ τρεῖς ὁριστεροὶ χαρακτῆρες, καὶ εἰ μὲν εὑρίσκονται, λαμβάνομεν τοὺς ἄντικρυ 4 χαρακτῆρας ὅπου εὑρίσκονται εἰς τὴν στήλην Ν, καὶ προσγράφομεν καὶ τὸν χαρακτῆρα, ὅπου ἀντικρύζει εἰς αὐτὸν τὸν οἰκίσκον ἀπὸ τὴν στήλην τὴν ὁριζοντικὴν 1, 2, 3...9· καὶ εἶτα κατὰ τὸ χαρακτηριστικὸν διορίζεται ὁ ἀριθμός· ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τοῦ δεδομένου λογαρίθμου 0,3793962· ἄρα εὑρίσκομεν μετὰ τοὺς τρεῖς χαρακτῆρας 379, τοὺς τέσσαρας 3962 ἐπ' ἀκριβὲς εἰς τὸν οἰκίσκον, ὅπου ἔχει ἄνω καὶ κάτω εἰς τὴν ὁριζοντικὴν στήλην 5, καὶ εἰς αὐτὸν ἄντικρυ εἰς τὴν στήλην Ν 2395· ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς 23955· καὶ διὰ τὸ χαρακτηριστικὸν 0, ἔσται ὁ ζητούμενος 2,3955.

γ'. Ἐὰν δὲ μὴ ἐπ' ἀκριβὲς εἴς τινα οἰκίσκον εὑρίσκωνται οἱ 4 χαρακτῆρες οἱ δεξιοὶ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, λαμβάνομεν εἰς αὐτοὺς τοὺς οἰκίσκους ἐκεῖνον, ὅστις ἔχει τέσσαρας χαρακτῆρας ἐγγὺς ἐλάττονας τῶν δοθέντων, καὶ τούτου τοῦ λογαρίθμου ὁ ἀριθμὸς, ὅπου ἀντικρύζει εἰς τὴν στήλην Ν εἶναι οἱ τέσσαρες χαρακτῆρες τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ· ὁ δ' ἄνω καὶ κάτω ἐπιγραφόμενος χαρακτὴρ εἰς αὐτὸν τὸν οἰκίσκον εἶναι ὁ πέμπτος χαρακτήρ· εἶτα ἀφαιροῦμεν τοὺς τοῦ οἰκίσκου 4 χαρακτῆρας ἀπὸ τοὺς δοθέντος 4, καὶ τὸ λεῖψανον τοῦτο παρατηροῦμεν ὑπὸ τὴν κυριεύουσαν διαφοράν, αν ευρίσκηται επ' ακριβές, ή μονάδι μείζων, ή μονάδι ελάττων, ο αριθμός, όπου αντικρύζει εις αυτήν την διαφοράν πρό της γραμμής, είναι ο έκτος χαρακτήρ του ζητουμένου αριθμού· π, χ. δίδεται ο λογ 1,6513517, και βλέπομεν ότι οι τέσσαρες χαρακτήρες 3517 δεν ευρίσκονται εις κάνένα οικίσκον υπό τους τρείς χαρακτήρας 651, ει μη ο ελάχιστος εγγύς οικίσκος 3459· άρα οι 5 χαρακτήρες του ζητουμένου 44807· αφαιρούμεν δε τους 3459 από τους 3517 και μένει λείψανον 58· τούτο το λείψανον ευρίσκεται επ' ακριβές υπό την κυριεύουσαν διαφοράν 97, και αντικρύζει αυτώ ο 6· και ούτος γίνεται έκτος χαρακτήρ του ζητουμένου αριθμού ούτω 448076, και διά το χαρακτηριστικόν 1, είναι 44,8076 ο ζητούμενος αριθμός. Εάν δε ζητήται ο αριθμός του λογαρίθμου 4,5424745, οι εγγύς τέσσαρες χαρακτήρες του 4745 είναι οι 4644, και 4745 — 4644 = 101· άρα ο ζητούμενος 348718· και διά το χαρακτηριστικόν 4 έσται ο ζητούμενος 34871,8· φανερόν δε εις τα αναλογικά μέρη ο 101 δεν ευρίσκεται· αλλ' ο 100· πλήν εάν μονάς είναι η διαφορά, λαμβάνεται ως ακριβής ο άντικρυ χαρακτήρ.

δ'. Εάν δε μετά την αφαίρεσιν των εν τοίς πίναξι τεσσάρων χαρακτήρων από των τεσσάρων του δοθέντος λογαρίθμου, το λείψανον δεν ευρίσκεται επ' ακριβές εις τα αναλογικά μέρη, αλλά μεταξύ δύω άλλων του μεν μείζονος, του δ' ελάττονος, λαμβάνομεν το εγγύτερον αυτώ, και ο αντικρύζων αυτώ αριθμός γίνεται έκτος χαρακτήρ του δοθέντος λογαρίθμου· είτα αφαιρούμεν από της διαφοράς αυτής αυτόν τον αναλογικόν, και εις το λείψανον προσγραφομεν ἓν μηδενικὸν, καὶ ἐὰν εὑρεθῇ οὗτος ὁ ἀριθμὸς, ἢ ὁ ἐγγὺς αὐτῷ μείζων, ἢ ἐλάττων, λαμβάνομεν εἰς ἕβδομον χαρακτῆρα τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ τὸν ἀντιςοιχοῦντα ἀριθμὸν αὐτῷ, καὶ εὑρίσκεται ὁ δοθεὶς μὲ 7 χαρακτῆρας· ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου 5,3669223· καὶ εὑρίσκεται ἐν τοῖς πίναξιν ὁ ἐγγὺς ἐλάττων 36639083 = λ23276· ἐὰν δὲ 9083 ἀπὸ τοῦ 9223 ἀφέλωμεν, ἔςαι

πρώτη διαφορὰ 140

ἡ ἐγγὺς ἐλάττων αὐτῆς 131:7 τὸ ἀντιςοιχοῦν μέρος·

δευτέρα διαφορὰ 90:5 τὸ ἀντιςοιχοῦν τῷ ἐγγὺς μείζονι 194· διότι μᾶλλον πλησιάζει ὁ 94 εἰς τὸν 90, ἢ ὁ 75· διὰ νὰ λάβωμεν τὸν 4, ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς 2327675, καὶ διὰ τὸ χαρακτηριςικὸν 5 ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς 232767,5

ε'. Ἐὰν δ' ἡ διαφορὰ, ἤτοι τὸ λεῖψανον ἔλαττον παντὸς ἀριθμοῦ τῶν ἀναλογικῶν μερῶν, λαμβάνεται ὁ ἕκτος χαρακτὴρ μηδενικὸν, καὶ εἰς αὐτὸν τὸν εὑρεθέντα μὲ 5 χαρακτῆρας προσγράφομεν ἔτι ἓν μηδενικὸν, καὶ ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν καὶ ἕκτον χαρακτῆρα· ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου 8,3669097

οἱ 4 ἔσχατοι τοῦ δοθέντος 9097

οἱ 4 ἑξῆς ἐλάττονες 9083

ἡ διαφορὰ 0014...0. ὁ ἕκτος χαρακτὴρ, ὅτι 14 ἐλάχιςος πάντων τῶν ἀναλογικῶν· προσγράφομεν 0 . . . . . . 140 καὶ 7 ὁ ἕβδομος χαρακτὴρ· ἄρα ὁ λογάριθμος 8,3669097 ἔχει ἀριθμὸν 232760700.

ϛ'. Εὑρίσκομεν δὲ καὶ ὄγδοον χαρακτῆρα, ἂν καὶ μὴ ἐπ' ἀκριβὲς, κἂν ὡς ἔγγιςα· εἰς αὐτὴν τὴν διαφοραν, ὁπου ἐξέρχεται ἀπὸ τοὺς 4 χαρακτῆρας τοῦ δοθέντος, προσγράφομεν 3 μηδενικὰ, καὶ τοῦτον διαιροῦμεν διὰ τῆς κυριευούσης διαφορᾶς, καὶ τὸ πηλίκον τοῦτο μὲ τρεῖς χαρακτῆρας προσγράφομεν εἰς τοὺς εὑρεθέντας 5· ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου 0,4971499, καὶ ἔςαι ὁ ἐγγὺς ἐλάττων 0,4971371· ἄρα 4971499

$$\begin{array}{r} 4971499 \\ 4971371 \\ \hline 128 \end{array}$$

Εἰς αὐτὴν τὴν διαφορὰν προσγράφομεν τρία μηδενικὰ 128000, καὶ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τῆς κυριευούσης διαφορᾶς 138, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 928· ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου 4971371 εἶναι 31415· ἄρα ὁ ζητούμενος 31415928, καὶ διὰ τὸ χαρακτηριςικὸν 0, ἔςαι 3,1415928· λοιπὸν ἀριθμὸν μὲ 9 ἢ 10 καὶ ἐπέκεινα χαρακτῆρας εἰς αὐτοὺς τοὺς πίνακας δὲν εὑρίσκομεν, διότι ἔχουσι μόνον 7 δεκαδικά· πλείονας εὐκολίας εὑρήσομεν εἰς τοὺς πίνακας, οὓς σὺν Θεῷ ἡμεῖς ἐκδώσομεν.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ ποικίλης χρήσεως τῶν λογαρίθμων.

§. 644. Ἐμάθομεν, ὅτι εἰς τὰ γνήσια κλάσματα ὁ λογάριθμος εὑρίσκεται ἀποφατικὸς, ἄρα καὶ εἰς τὰ δεκαδικὰ (§. 611.), πλὴν εἰς αὐτὰ ποικίλως τὰς χρήσεις ἐπιτηδεύονται· διότι $0{,}4332 = \frac{4332}{10000}$· ἄρα $\lambda : \frac{4332}{10000} =$

λ4332 — λ10000· καὶ ἑπομένως ἐπειδὴ λ4332 = 3,6366884· ἄρα λ:0,4332 = 3,6366884 — 4 = 0,6366884—1· καὶ ἑπομένως λ:0,04332=3,6366884 —5=0,6366884—2. Ἔτι λογ: 0,004332=3,6366884 —6=0,6366884—3· καὶ τέλος λ:0,00000004332= 3,6366884—11=0,6366884—8· ἤτοι εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος, ὡσεὶ ἦν ἀριθμὸς ἀκέραιος καταφατικὸς, καὶ ἀντὶ μὲν τοῦ χαρακτηριστικοῦ μηδενικὸν τίθεμεν, ὄπισθεν δὲ μετὰ ἀποφατικοῦ σημείου τίθεμεν τόσας μονάδας, ὅσα μηδενικὰ ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ δεκαδικόν.

§. 645. Ἡ προσθαφαίρεσις χρήσιμος μάλιστα εἰς τὰς ἐφόδους τῶν λογαρίθμων ὡς εἰς τὰ κλάσματα, καὶ εἰς ἄλλα, ὅπου ὁ μείζων ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος· διότι ἡμεῖς ἀφαιροῦμεν τακτικῶς ὡσεὶ ἦν ὁ ἀφαιρετέος μικρότερος, καὶ διὰ τοῦ νοὸς ἡμῖν προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον πρὸ αὐτοῦ τόσας μονάδας, ὅσαι ἱκαναὶ νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀφαιρετέος, καὶ ἅμα μὲ τὸν μειωτέον νοοῦμεν τὰς αὐτὰς ἀποφατικάς· π. χ. ζητεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ κλάσματος $\frac{5}{144}$ καὶ ἔσται λ5—λ144· ὅθεν

$$\begin{array}{rr} +\lambda 5 = & 0{,}6989700 \\ & +2 \qquad -2 \\ -\lambda 144 = & -2{,}\,1583625 \\ \hline & 0{,}5406075-2 \end{array}$$

ὁμοίως καὶ εἰς τὰ λοιπά.

§. 646. Ἐκ τῆς προσθαφαιρέσεως φανερὸν, ὅτι κάθε λογάριθμον διαφόρως μεταποιοῦμεν προσθέτοντες εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν μονάδας, καὶ ἅμα ὄπισθεν αὐτοῦ ἀφαιροῦντες τὰς αὐτάς· διότι ὁ ἄνω λογ $\frac{5}{144}$ γίνεται ὁ αὐτὸς καὶ οὕτως ὡς ἄνω 0,5406075—2 καὶ οὕτω 1,5406075

—3· καὶ οὕτω 4,5406075—6· καὶ τοῦτο μάλιςα χρήσιμον ὅταν ἔχωμεν νὰ διέλωμεν μὲ ἕνα ἀριθμὸν λογαρίθμου τινά· τούτου μεταποιοῦμεν τὸν ἔσχατον ἀποφατικὸν τοιοῦτον, ὥςε νὰ διαιρῇ αὐτὸν ὁ διαιρέτης ἐπ' ἀκριβές· δηλ: ζητεῖται ὁ λογ: τοῦ $\sqrt[3]{\tfrac{5}{144}}$· ἐπειδὴ δ' ὁ λογ: $\tfrac{5}{144}$=0,5406075—2, καὶ τούτου διελεῖν διὰ τοῦ 3 ἀνάγκη, φέρομεν καὶ τὸ ἀποφατικὸν αὐτοῦ μέρος εἰς τρία διὰ νὰ διέλωμεν ἄμφω τὰ μέρη αὐτοῦ οὕτω 1,5406075 —3· ἄρα διὰ τοῦ 3 διαιροῦμεν αὐτὸν οὕτω 0,5135358 —1· ἔςαι λ $\sqrt[3]{\tfrac{5}{144}}$=0,5135358—1· τὸ αὐτὸ γίνεται ἐὰν ζητῆται καὶ λογ $\sqrt[7]{\tfrac{5}{144}}$· διότι ὁ μὲν λ $\tfrac{5}{144}$= 0,5406075—2, γίνεται καὶ 5,5406075—7· καὶ ἑπομένως διὰ τοῦ 7 διαιροῦμεν αὐτὸν οὕτω 0,7915153—1· καὶ λοιπὸν λ $\sqrt[7]{\tfrac{5}{144}}$=0,7915153—1· διότι παραμελοῦμεν τὸ μένον τῶν δεκαδικῶν ὡς ἀνεπαίσθητον.

§. 647. Ἐὰν δὲ δοθῇ λογάριθμος ἔχων μετ' αὐτοῦ καὶ ἀποφατικὸν ἀριθμόν, ὡς ἄνω ποίει αὐτὸν οὕτως, ὥςε νὰ ἔχῃ χαρακτηριςικὸν μηδενικόν· εἶτα εὑρὲ τὸν ἀνήκοντα τούτῳ τῷ λογαρίθμῳ ἀριθμὸν μὲ 6, ἢ 7 χαρακτῆρας, καὶ πρὸ αὐτοῦ προσάρτησον τόσα μηδενικά, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀποφατικὸς ἀριθμός· ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου 2,5450224—5=0,5450224—3· καὶ τούτου 4,5450224—7 οὕτω 0,5450224—3· παραδ. χ. ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου 3,5450224—10= 0,5450224—7· ὁ δ' ἀριθμὸς τοῦ 0,5450224 εὑρίσκεται 35077· ἄρα τοῦ λογαρίθμου 0,5450224—7 εἶναι ὁ ἀριθμὸς =0,0000035077.

§. 648. Ἐὰν δ' ὁ δοθεὶς λογάριθμος ἦ ἀποφατικὸς, ποιοῦμεν αὐτὸν πρῶτον κατὰ τὰ ἄνω καταφατικὸν, καὶ ὡς ἐδιδάχθημεν εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν δηλ: ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τοῦ —2, 4353665. τοῦτον δ' ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 3,0000000 — 3 οὕτω

$$\begin{array}{r} 3,0000000-3 \\ -2,4353665 \\ \hline 0,5646335-3 \end{array}$$

. τούτου ἤδη τὸν ἀριθμὸν ὡς ἄνω εὕρομεν (§. 643) λ: 0, 00366972 = 0,5646335 — 3· πλὴν τοῦτο τὸ εἶδος γίνεται, καὶ ἐὰν τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀνήκοντα αὐτῷ εὕρωμεν, ὡσεὶ ἦν ὁ λογάριθμος οὗτος καταφατικὸς, ὅςις εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας — 2,4353665 = λ. 272,5. οὗτος δὲ γίνεται ἀεὶ παρονομαςὴς ἑνὸς κλάσματος, οὗ ἀριθμητὴς ἡ μονὰς (§. 317) $\frac{1}{272,5}=\frac{10}{2725}$ διότι ἐὰν ἐξετάσωμεν εἰς ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς, εὑρίσκομεν, ὅτι εὑρίσκεταί τις παράγων, ὅςις πολλαπλασιάζει αὐτὸν, καὶ ἴσον τῇ μονάδι ποιεῖ· ἄρα τὴν μονάδα, ἐὰν ἅμα πολλαπλασιάσωμεν καὶ διέλωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, πάλιν μονὰς γίνεται (§. 92). νοηθήτω ὑπὸ τοῦ x ἕκαςος ἀριθμὸς, καὶ ἔςαι $\frac{x.\ 1}{x}=1=x.\ \frac{1}{x}$. ἄρα ὁ παράγων, ὅςις πολλαπλασιάζει τὸν ἀριθμὸν εἰς παραγόμενον μονάδος, εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς παρονομαςὴν, καὶ ἀριθμητὴν ἡ μονάς· ὡς $4.\ \frac{1}{4}=1$ καὶ $568.\ \frac{1}{568}=1$ κ. τ. λ. καὶ οὗτοι οἱ παράγοντες καλοῦνται εἰς μονάδα ἀντίςροφοι· ἔςωσαν γενικῶς δύω ἀντίςροφοι παράγοντες $\beta.\ \frac{1}{\beta}=1$. ἐὰν δ' αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν λογαριθμήσωμεν, ἔςαι $\lambda\beta + \lambda. \frac{1}{\beta} = \lambda.\ 1$ ἤτοι $\lambda.\ \beta + \lambda.\ 1 - \lambda.\ \beta = \lambda.\ 1.$ ἀλλ' ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος $=0$ (§. 601) ἄρα $\lambda.\ \beta - \lambda.\ \beta = 0$ καὶ $\lambda.\ \beta = + \lambda.\ \beta.$ καὶ φανερὸν ὁ αὐτὸς λογάριθμος ἀποφατικὸς καὶ καταφατικὸς ἀντιςοιχεῖ εἰς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν β. πλὴν ὁ ἀριθμὸς τοῦ ἀποφατικοῦ λογαρίθμου γίνεται παρονομαςὴς εἰς μονάδα ἀριθμητήν· διὰ τοῦ ἀποφατικοῦ λογαρίθμου ἢ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ, ὡσεὶ ἦν καταφατικὸς, καὶ οὗτος εἶναι τὸ κλάσμα τὸ δεκαδικὸν, ἢ διὰ τῆς προσθαφαιρέσεως ποιοῦμεν αὐτὸν καταφατικὸν, καὶ ὁ ἀντιςοιχῶν αὐτῷ ἀριθμὸς εἶναι παρονομαςὴς τῆς μονάδος.

§. 649. Εἰς τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, ὅπου λογάριθμοι ἅμα συνάπτονται, καὶ ἀφαιροῦνται, ἐπωφελῶς χρώμεθα τῇ δεκαδικῇ ἀποπληρώσει· δεκαδικὴν δ' ἀποπλήρωσιν καλοῦμεν τὸ ἀποπλήρωμα τινὸς ἀριθμοῦ μέχρι τοῦ ἐγγὺς αὐτῷ περιοδικοῦ ἀριθμοῦ· οὕτως ὁ 7 πρὸς τὸν ἐγγὺς αὐτοῦ περιοδικὸν τὸν 10 ἔχει τὸν 3 δεκαδικὴν ἀποπλήρωσιν· ὁ 44 πρὸς τὸν ἐγγὺς αὐτοῦ τὸν 100 ἔχει τὸν 56· καὶ ὁ 637 πρὸς τὸν ἐγγὺς αὐτοῦ περιοδικὸν 1000 ἔχει τὸν 363· οὗτος ὁ τρόπος γίνεται, ὅταν ἀφαιρῶ τῇ διανοίᾳ ἕκαςον χαρακτῆρα τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δοθέντος, ἀρχόμενος ἀπὸ τὰ δεξιὰ πάντοτε ἀπὸ 10, καὶ μονάδα προσθέτων εἰς τὸν ἑξῆς ἀνώτερον χαρακτῆρα, ὅταν ἔχω μονάδα εἰς τὸ χέρι· ὅθεν τὸ ἀποπλήρωμα τοῦ ἀριθμοῦ $567 = 433$· ἔτι τοῦδε $52034 = 47966$, και ἔτι τοῦ $56201259 1 = 437987409$

§. 650. Τὸ ἴδιον γίνεται, ἢ ἐὰν ἀριθμόν τινα ἀφέλωμεν ἀπό τινος ἀριθμοῦ, ἢ ἐὰν τὸ παραπλήρωμα αὐτοῦ προαθῶμεν, καὶ ἐκ τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τοῦ κεφαλαίου μονάδα ἐάσωμεν· ἔςω μειωτέος 643

232

411. τὸ δὲ παραπλήρωμα τοῦ μειωτέου 232=768, ἄρα 643

768

1411 ἤτοι ὁ 411 ὡς ἡ ἀφαίρεσις· καὶ οὗτος ὁ τρόπος συμβάλλει τὰ μάλιςα εἰς τοὺς λογαρίθμους, ὅταν ἄλλους ἀπ' ἄλλων ἀφαιροῦμεν· διότι τότε κάλλιον τὴν ἀφαίρεσιν εἰς πρόσθεσιν μεταβάλλομεν, γράφοντες ἀντὶ τῶν ἀφαιρετέων τὸ παραπλήρωμα αὐτῶν, καὶ συνάπτομεν ὅλους ὁμοῦ, εἶτα ἀπὸ τὸ κεφάλαιον ἀφαιροῦμεν τόσας δεκάδας ἀπὸ τὸ χαρακτηριςικὸν, ὅσους ἀφαιρετέους ἔχομεν· δεκάδας λέγομεν, ἐπειδὴ εἰς τὸ τέλος τῆς διὰ νοὸς ἀφαιρέσεως ἀπὸ δέκα ἀφαιρεῖται ὁ ἔσχατος ἀριςερὸς χαρακτήρ· εἶπον καὶ διὰ τοῦ νοὸς ἀφαίρεσιν· διότι ἀμέσως ἀπὸ τοὺς πίνακας εὑρίσκω τὸν ἀποφατικὸν λογάριθμον, καὶ ἀπὸ τοῦ δεξιοῦ χαρακτῆρος ἄρχομαι τὴν ἀφαίρεσιν νοῶν τὸν μειωτέον δέκα μὲ μηδενικὰ τόπα, ὅσους χαρακτῆρας ἔχει τὸ δεκαδικὸν τοῦ λογαρίθμου· οὕτως εὑρίσκω τὸν λογάριθμον τοῦ 2, 66 = 0, 4082400. ἡ δεκαδικὴ ἀποπλήρωσις 0, 5917600. ὁμοίως εὑρίσκω καὶ τὸν λογάριθμον τοῦ 203, 47 = 2, 3085004. ἡ δεκαδικὴ ἀποπλήρωσις. 7, 6914996. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν· ἐπὶ παραδείγματος ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ χ =

$$\frac{74256 \, . \, 2045 \, . \, 0,00347.}{2,66 \; . \; 203,47.}$$ ἄρα λ: χ = λ: 74256 + λ: 2045 + λ: 0, 00347 — λ: 2,66 — λ: 203, 47.

ὅθεν εὑρίσκομεν εἰς τοὺς πίνακας,

λ: 74266 = 4,8707816.
λ: 2045 = 3,3106933.
λ: 0,00347 = 0,5403294 — 3
δεκαδ: παραπλ: 2, 56 = 9,6917601
δεκ: παραπλ: 203,47 = 7,6914996

26,9050140 — 3
πλὴν δύο δεκάδων 6,0050140 — 3
καὶ λογάρ: χ = 3,0050140.
καὶ χ = 1011,61 τῷ ἀριθμῷ.
ὅτι χ = λ: 34,56 — λ: 69,9 — λ: 48, 56.
λ: 34,56 = 1,5385737
δεκαδ. παραπλ: λ: 69, 9 = 8,1555229
δεκ: παραπλ: λ: 48,56 = 8,3137213

18,0078179
πλὴν δύο δεκάδων — 2,0078179 ἢ λ: χ = 0,0078179 — 2
„ πρὸς γύμνασιν τῶν πρωτοπείρων ἀναπτυχθήτωσαν καὶ τὰ ἑξῆς.

α'. ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως $\chi = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$, ἐν ᾗ τὸ μὲν

α = 628723 τὸ δὲ β = 83629 καὶ τὸ γ = 567023 εὑρίσκομεν τὴν λογαριθμικὴν ἔκφρασιν οὕτω λ: χ = λ: α + λ: β — λ: γ ἤτοι λ: χ = λ: 628723 + λ: 83629 — λ: 567023.

ἄρα λογ: 628723 = 5,7984594
λογ: 83629 = 4,9223569

λ: α + λ: β = 10,7208163
— λογ. 567023 = — 5,7536007.

4,9672156 ὁ ἀριθμὸς δὲ τούτου εἰς τοὺς πίνακας εὑρίσκεται = 92729 = χ.

β'. Ἐὰν δὲ δοθῇ αὕτη ἡ ἔκφρασις αβ + γ + δπ δὲν δηλοῦται οὕτω $\lambda(\alpha\beta+\gamma+\delta\pi)$ οὔτε οὕτω $\lambda\alpha+\lambda:\beta+\lambda:\gamma+\lambda:\pi$. διότι οὕτω σημαίνει $\alpha\beta\gamma\delta\pi$. (§. 612) ὅθεν ἐκφράζεται οὕτω, $\lambda:\ \alpha+\lambda:\ \beta$, εὑρεθεὶς δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος τῶν δύο λογαρίθμων ὁμοῦ προςίθεται τῷ γ. τοῦτο δὲ τὸ κεφάλαιον προςίθεται τῷ ἀριθμῷ, ὅπου θέλει εὑρεθῇ ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου $\delta+\lambda:\pi$. καὶ ὅλον τὸ κεφάλαιον $=(\alpha\beta+\gamma+\delta\pi)$

γ'. ὑψοῦμεν ἔτι καὶ δυνάμεις διὰ μόνης προσθέσεως τῶν λογαρίθμων· διότι ἡ τρίτη δυναμις τοῦ $\frac{39543}{8504}$ εἶναι $=$

$$\left(\frac{39543}{8504}\right)^3 = 3\ \text{λογ:}\left(\frac{39543}{8504}\right) = 3\,(\text{λογ:}\,39543 - \text{λογ:}\,8504)$$

ἀλλ' ὁ λογ: $39543 = 4,\ 5970696$· ὁ δὲ λογ: τοῦ

$$8504 = -3,\ 9296233$$

$$0,\ 6674463 \times 3 = 2,\ 0023389$$

οὗ ὁ ἀριθμός· 100, 540

ὁμοίως $(564)^5 = 5$ λογ: 564. καὶ λογ: $\alpha\beta^3 =$ λογ: $\alpha + 3\ \lambda:\beta$ καὶ λογ: $\frac{\alpha\beta^5}{\gamma^3} =$ λογ: $\alpha + 5$ λογ: $\beta - 3$ λογ: γ.

Ἔτι λύσωμεν καὶ λογ: $\sqrt[3]{\tfrac{5}{7}} = \tfrac{1}{3}\ \lambda:\ \tfrac{5}{7} = \tfrac{1}{3}\ (\lambda:\ 5 - \lambda.\ 7)$

ὁ δὲ λογ: $5 = \quad 0,\ 6989700$

ὁ δὲ $-\lambda:\ 7 = -\ 0,\ 8450980.$

$-\ 1,\ 8538720$ καὶ ἑπομένως $\tfrac{1}{3}$ λογ

$$\left(\tfrac{5}{7}\right) = \frac{-1,\ 8538720}{3}$$ ἄρα λογ: $$\sqrt[3]{\tfrac{5}{7}} = \frac{-1,\ 8538720}{3}$$

$$= \frac{2,\ 8538720 - 3}{3} = 0,\ 9512907 - 1,$$ ὃς ἀντιςοιχεῖ τῷ ἀριθμῷ 0, 08939036

Ὁμοίως ζητεῖται ἡ ῥίζα $\sqrt[\frac{4}{3}]{\frac{9}{11}}$ καὶ ἔσαι ὁ λογάριθμος τούτου οὕτω $\frac{4}{3}$ λ: $\frac{9}{11} = \frac{3}{4}$ (λ: 9 — λ: 11) $= \frac{3\,λ:9 - 3λ.11}{4}$

$$= \frac{2,8627275 - 3,1241778}{4} = \frac{0,7385497 - 1}{4} =$$

$$\frac{3,7385497 - 4}{4} = 0,9346374 - 1$$ · οὗ λογαρίθμου ὁ ἀριθμὸς $= 0,860275 = \sqrt[\frac{4}{3}]{(\frac{9}{11})}$.

δ'. Διὰ τῶν αὐτῶν λύομεν ἔτι δυσχερέστερα $χ = α^{ρ-3} = \frac{α^ρ}{α^3}$ ἄρα $χ = ρ$ λ: $α - 3$ λ $α$· ἔτι $χ = α^{ω-μ} βγ = ω$ λ:$α$ — $μ$ λ: $α$ + λ: $β$ + λ: $γ$· ὁμοίως καὶ $\frac{α}{β^3}$ = λ: $α$ — 3λ: $β$ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

ε'. Ἀνάπαλιν τὰ ῥιζικὰ διὰ διαιρέσεως εὑρίσκονται (§. 613)· διότι διὰ τοῦ ἐκθέτου τοῦ ῥιζικοῦ διαιροῦμεν τὸν λογάριθμον τῆς ποσότητος, καὶ ὁ ἀνήκων αὐτῷ τῷ λογαρίθμῳ ἀριθμὸς εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα $\sqrt[3]{α} = \frac{λ:α}{3}$ καὶ $\sqrt[5]{α^3} = \frac{λ:α^3}{5}$. ἔτι $χ = \sqrt[5]{4\ α^2\ β}$, ἤτοι λ: $χ$ = $\frac{1}{5}$(λ: 4 + 2 λ: $α$ + λ: $β$) καὶ δεδόσθω $α = 563,28$. $β = 7934$· εὑρίσκομεν ἄρα τὸ $χ = \sqrt[5]{4\,(563\,,\,28)^2\ 7943} = \frac{λ:4 + 2\ λ: 563,28 = λ\ 7934}{5}$, ἐπειδὴ δὲ

$$
\begin{aligned}
\lambda{:}\ 4 &= 0,6020600\\
\lambda{:}\ 563,28 = 2,7507243 \times 2 &= 5,5014486\\
\lambda o\gamma{:}\ 7934 \quad = \quad & \underline{3,8994922}\\
& 10,0030008
\end{aligned}
$$

ἐὰν δὲ καὶ διὰ 5 διαιρεθῇ ἔσται $= 2,0006002 = \lambda{:}\ \chi$, καὶ ἑπομένως $\chi = 100,1383$

§. 651. Κρεῖττον δὲ πάντων τῶν λογαρίθμων εἶναι νὰ εὑρίσκωμεν καὶ τοὺς ἀγνώστους ἐκθέτας τῶν δυνάμεων, ὅπερ ἄλλως ἢ λίαν ἐργῶδες, καὶ ἐν πολλοῖς ὅμως ἀδύνατον· δηλ: ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς $\alpha^{\chi} = \beta$ ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ χ ἄρα $\chi\ \lambda{:}\ \alpha = \lambda\beta$ καὶ $\chi = \frac{\lambda{:}\ \beta}{\lambda{:}\ \alpha}$. Οὕτω καὶ τὸ δέ, τὸ ἄλλως ἀδυνάτως λυόμενον $\alpha^{\chi}\gamma^{\varkappa\chi} = \beta^{\mu\chi-\nu}$, ὅπου τὸ χ, ζητεῖται λοιπὸν $\lambda{:}\ (\alpha^{\chi}\gamma^{\varkappa\chi}) = \lambda{:}\ (\beta^{(\mu\chi-\nu)})$, ὅ ἐστι $\chi\ \lambda{:}\ \alpha + \varkappa\chi\ \lambda{:}\ \gamma = \mu\chi\ \lambda{:}\ \beta - \nu\lambda{:}\beta$, καὶ $\nu\ \lambda{:}\ \beta = \mu\chi\ \lambda{:}\ \beta - \chi\lambda{:}\ \alpha - \varkappa\chi\ \lambda{:}\ \gamma$ καὶ $\chi = \frac{\nu\ \lambda{:}\ \beta}{\mu\lambda{:}\beta - \lambda{:}\ \alpha - \varkappa\lambda{:}\gamma}$.

Ἔτι $\alpha\gamma^{\mu\chi} - \beta\gamma^{\frac{1}{2}\mu\chi} = \delta$ καὶ $\gamma^{\mu\chi} - \frac{\beta}{\alpha}\gamma^{\frac{1}{2}\mu\chi} = \frac{\delta}{\alpha}$, ὡς ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἀναλυέσθω· λοιπόν,

$$\gamma^{\mu\chi} - \frac{\beta}{\alpha}\gamma^{\frac{1}{2}\mu\chi} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\delta}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

$$\gamma^{\frac{1}{2}\mu\chi} + \frac{\beta}{2\alpha} = \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\delta}{\alpha}\right)}$$

$$\gamma^{\frac{1}{2}\mu\chi} = \frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\delta}{\alpha}\right)}$$

$$\lambda\gamma^{\frac{1}{2}\mu\chi} = \lambda{:}\left(\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\delta}{\alpha}\right)}\right)$$

$$\frac{1}{2}\mu\chi\gamma = \lambda{:}\left(\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\delta}{\alpha}\right)}\right)$$

καὶ τέλος $$\chi = \frac{\lambda\left(\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\delta}{\alpha}\right)}\right)}{\frac{\mu}{2}\lambda{:}\ \gamma.}$$

§. 652. Εὑρίσκονται δὲ καὶ ἕτερα διάφορα συςήματα λογαριθμικὰ ὑπὸ ἄλλην βάσιν παρὰ τὴν 10 τοῦ Βριγγίου ὡς τὰ φυσικὰ, καὶ παραβολικὰ καλούμενα· πλὴν ἡμεῖς ἅπαξ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τοῦτο τὸ δεκαδικὸν, εὐκόλως καὶ ἕκαςον ἕτερον εὑρίσκομεν· ἡ δὲ μέθοδος εἶναι νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμὸν, ὅςις ἐὰν πολλαπλασιάσῃ ἕκαςον λογάριθμον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ σύςημα τῶν Βριγγιανικῶν πινάκων, νὰ γίνεται ὁ λογάριθμος ἑτέρου συςήματος εἰς βάσιν οἱανδήποτε· ζητεῖται λοιπὸν διὰ τοῦ Βριγγιανικοῦ συςήματος (βριγ: καλείσθω) ἕτερον νὰ κατασκευάσωμεν ὑπὸ βάσιν 5. καὶ καλείσθω ἡ μὲν βάσις τοῦ Βριγ $10 = \alpha$· ἡ δὲ βάσις $5 = A$ τοῦ ζητουμένου· καλείσθω καὶ ἕκαςος λογ:

ἐκείνου τοῦ Βριγ: μ. καὶ ὁ ἀνήκων αὐτῷ ἀριθμὸς β: ἔτι καλείσθω καὶ ὁ ζητούμενος λογάριθμος ὑπὸ βάσιν 5, χ· καὶ ὁ ἀνήκων αὐτῷ ἀριθμὸς ὁμοίως β. ἄρα $\alpha^\mu = \beta$ (§ 609) καὶ $A^\mu = \beta$· (§. 609) καὶ $A^\chi = \beta$, καὶ εἰς αὐτὰς τὰς ἐξισώσεις γνωςὸν τὸ α, A, β, μ καὶ ἄγνωςον μόνον τὸ χ, καὶ ζητεῖται· διότι τὸ μὲν $\alpha = 10$, $A = 5$. β ἕκαςος ἀριθμὸς τῶν φυσικῶν 1, 2, 3, 4 κτ. μ δὲ ὁ ἀνήκων αὐτῷ λογάριθμος ἐν τοῖς πίναξι τοῦ Βριγ: ἐπειδὴ ὅμως $\alpha^\mu = \beta$, καὶ $A = \beta$, εἶναι καὶ $\alpha^\mu = A^\chi$ καὶ μ λογ $\alpha = \chi$. λογ A καὶ $\chi = \frac{\mu \text{ λογ } \alpha}{\text{λογ } A}$. ἀλλ' ὁ λογ $\alpha =$ λογ: $10 = 1$. ἄρα $\chi = \frac{\mu}{\text{λογ } A}$.

καὶ ἔτι $\mu =$ λογ: β. ἄρα $\chi = \frac{1}{0,6989700} \mu = 1,4306766$.

ἐὰν εἰς τὴν μονάδα μηδενικὰ προσγράψωμεν, καὶ τὴν διαίρεσιν ἐξακολουθήσωμεν· ἐὰν λοιπὸν μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 2, 3, 4, 5 κ. τ. λ. τοῦ Βριγγίου, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τῶν αὐτῶν ὑπὸ τὴν βάσιν 5· ὁ ἀριθμὸς δὲ ὁποῦ εὑρίσκομεν $\chi = \frac{1}{\lambda A}$ λέγεται ῥυθμὸς ἐκείνου τοῦ νέου συςήματος· οὗτος ὁ ῥυθμὸς τοῦ Βριγγικοῦ συςήματος εὑρίσκεται $= 0,4342944819032518276$5 καὶ ἐξ αὐτοῦ λαμβάνομεν τόσους χαρακτῆρας ὁποῦ ἔχει τὸ δεκαδικὸν κλάσμα ἐκείνου τοῦ συςήματος, ὁποῦ μέλλομεν νὰ μεταφέρωμεν εἰς τοὺς τοῦ Βριγγίου λογαρίθμους· πῶς δ' οὕτως εὑρίσκεται, εἰς τὸ τρίτον βιβλίου δείξομεν, καὶ ἐὰν $A = 2$, $= 3$, $= 4$, κ. τ. λ. λάβωμεν, κατασκευάσωμεν ἀμέσως διάφορα συςήματα, ὅταν λάβωμεν $\chi = \frac{1}{\lambda A}$. λογ β. καὶ θῶμεν $\beta = 1, =, 2 = 3$, κ. τ. λ. περὶ εὑρέσεως λογαρίθμων καὶ συςημάτων, καὶ εἰς τὸ γ΄ βιβλίον δείξομεν.

§. 653. Ἐὰν τέλος ζητηθῇ, τὶς ὁ λογάριθμος τοῦ ἀποφατικοῦ ἀριθμοῦ, εἰς αὐτὸ τὸ ζήτημα μεγάλοι μαθηματικοὶ διηνέχθησαν, ἐπειδὴ καὶ ἔνιοι ἔλεγον, ὅτι δίδεται λογάριθμος καὶ τῶν ἀποφατικῶν ἀριθμῶν, ἕτεροι δὲ φαντασικοὺς, καὶ ἀνυπάρκτους ἔλεγον τοὺς τοιούτους· ἡμεῖς ὅμως εἰς τὸ παρὸν μὲν τὰς λογομαχίας ἐκείνων ἀφίνομεν, καὶ λέγομεν, ἐὰν τοιοῦτος λογάριθμος ζητηθῇ, λαμβάνεται μὲν ὁ λογάριθμος, ὃν εἶχεν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς καταφατικὸς, πλὴν πρέπει εἰς τὴν ἀνάλυσιν νὰ σημειωθῇ, ὅτι ἐλήφθη οὗτος ἀντὶ ἀποφατικοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ἄλλως οὐδαμῶς· εἰς δὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν καμπύλων γραμμῶν σαφέςερον καὶ περὶ τούτου ἐξετάσομεν.

ΚΕΦΑ΄ΛΑΙΟΝ Δ΄.

Περὶ χρήσεως τῶν λογαρίθμων εἰς τὰς Γεωμετρικὰς σειράς.

§. 654. Πολλαὶ ἐκφράσεις Γεωμετρικαὶ ἄλλως δὲν λύονται, εἰ μὴ διὰ λογαρίθμων· διὸ καὶ ἡμεῖς εἰς τόδε τὸ κεφάλαιον τὰ μὲν πρόχειρα προβλήματα τῶν γεωμετρικῶν σειρῶν ἐκτὸς ἐάσαμεν, ὅτι οἱ ἀκροαταί μας εἶναι ἱκανοὶ καὶ εἰς τὰς κοινὰς ἀριθμητικὰς ταῦτα εὑρεῖν, καὶ ἀναπτύξαι· ἐνταῦθα συμπεριλαμβάνομεν ταῦτα τὰ περιεργότερα· πλὴν εἶναι γνωςὸν, ὅτι εἰς τὰς γεωμετρικὰς σειρὰς πέντε ἐπίσημα γράμματα ἔχωμεν· α. τὸν πρῶτον ὅρον. τ. τὸν ἔσχατον, π. τὸ πηλίκον· ν. τὸ πλῆθος τῶν ὅρων. καὶ Κ τὸ κεφάλαιον· ὅταν δὲ μόνον τρία τῶν πέντε δοθῶσι, τὰ δύω ἐκ τούτων εὑρίσκονται. Εἰς τὸ ἑξῆς διάγραμμα εὑρίσκομεν ὅλας τὰς δυνατὰς ἐκφράσεις τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς· εἰς μὲν τὴν πρώτην στήλην τὴν ἐπιγραφομένην ζητ. εἶναι αἱ ζητούμεναι ποσότητες· εἰς τὴν δευτέραν δὲ ἐπιγραφομένην δεδ: εἶναι αἱ δεδομέναι ποσότητες· εἰς δὲ τὴν τρίτην ἐπιγεγραμμένην Α ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐκφράσεων· καὶ εἰς τὴν τετάρτην, τύποι· εἶναι οἱ τύποι τῶν ἐκφράσεων· καὶ εἰς τὴν ἑξῆς εἶναι αἱ δείξεις πόθεν αὐτὰς παρηγάγομεν.

διότι ὅλαι ἀπὸ τὰς δύω ἐκείνας τὰς ἀρχικὰς $\tau = \alpha\pi^{\nu-1}$ . . . . . I.

καὶ $\Sigma = \dfrac{\pi\tau - \alpha}{\pi - 1}$ . . . . . I.

παράγονται· ὅταν λοιπὸν εἰς ἓν πρόβλημα τρία τῶν πέντε δοθῶσι, καὶ ζητῆται ἓν τέταρτον, τότε εἰς μὲν τὴν πρώτην στήλην εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον, καὶ εἰς τὴν δευτέραν τοὺς τρεῖς δοθέντας, καὶ εἰς τὴν τετάρτην τὸν τύπον τὸν ἁρμόδιον.

Σημείωσαι ὅμως, ὅτι οἱ τύποι τοῦ ν μόνον λογαριθμικῶς λύονται· οἱ δὲ 4, 8, 13, 15, 16 εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις λύονται, περὶ ὧν εἰς τὸ τρίτον βιβλίον ἐροῦμεν.

Προβλήματα.

προβλ: 1. Γεωργός τις ἔσπειρεν ἓν κοιλὸν σίτου καὶ ἐθέρισε 4, σπείρας δὲ ταῦτα εἰς τὸν δεύτερον χρόνον, ἐθέρισε 16· καὶ ἔτι ταῦτα σπείρας εἰς τὸν τρίτον, ἐθέρισεν ὁμοίως τετραπλάσια 64. καὶ οὕτως εἰς 10 χρόνους ἐξηκολούθησε· ζητεῖται πόσα τὸν 10 χρόνον ἐθέρισεν.

Αὐτοῦ γεωμετρικὴ σειρά, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος $\alpha = 4$, π δὲ $= 4$ καὶ $\nu = 10$. λοιπὸν ὁ ἔσχατος τ ζητεῖται, καὶ α, π, ν οἱ δεδομένοι· ἄρα ὁ πρῶτος τύπος χρήσιμος $\tau =$

$\alpha\pi^{\nu-1} = 4.\ 4^{9} = 4^{10}$. καὶ λογ $\tau = 10$ λογ: $4 = 6,9200000$ εἰς ὃν ἀνήκει ὁ ἀριθμὸς 1048576, καὶ τοσαῦτα ἐθέρισε κοιλά.

προβ: 2 Παίζει τις τὴν ἐνδεκάμισυ, καὶ τίθησι τὸ πρῶτον 3 παρ: καὶ τοὺς χάνει· τίθησιν ἔπειτα 6, καὶ τοὺς χάνει· τρίτον 12 καὶ τοὺς χάνει, καὶ θέτωντας διπλάσια, καὶ χάνωντας, ἔχασε δώδεκα παιγνίδια, ζητεῖται πόσα εἰς τὸ τέλος ἔθηκε, καὶ πόσα ὁμοῦ ἔχασεν;

Καὶ αὐτοῦ γεωμετρικὴ σειρὰ, ἧς ὁ πρωτος ορος $3 = \alpha$, καὶ $\pi = 2$ καὶ $\nu = 12$. καὶ ζητεῖται τὸ τ καὶ K. τὸ μὲν τ εὑρίσκεται ὡς ἄνω $\tau = \alpha\pi^{\nu-1}$ $3.\ 2^{11} = 6144$ παρ $= 153$ γρ: 24 παρ: εἰς δὲ τὸ κεφάλαιον ὁ ἕκτος τύπος χρήσιμος.

$$K = \frac{\alpha(\pi^{12}-1)}{\pi-1} = \frac{3(2^{12}-1)}{2-1} = 3\ (2^{12}-1).$$ ἔτι δὲ καὶ λ $2^{12} = 12$ λογ $2 = 3,6123600$, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς εἶναι 4096. ἄρα $K = 3(4096 - 1) = 12225$ παρ $= 30$ γρ: καὶ παρ: 5.

προβ: 3. Βασιλεύς τις ἐπρόσαξε νὰ διανεμηθῇ ποσότης χρημάτων εἰς 5 στρατηγοὺς οὕτως, ὥστε ὁ μὲν νὰ λάβῃ 1500 γρ: καὶ ὁ ἀξιώτερος τούτου τὰ αὐτὰ, καὶ ἔτι τὰ ἡμίση· καὶ ἔτι ὁ ἀξιώτερος τούτου τὰ τοῦ δευτέρου καὶ ἡμίση, καὶ καθ' ἑξῆς τὸν αὐτὸν τρόπον μέχρι τοῦ πέμπτου· ζητεῖται πόση ποσότης ἦν τῶν χρημάτων

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ πρῶτος ἔλαβε 1500· ὁ δεύτερος ἄρα $1500 + 750 = 2250$· καὶ εἶναι σειρὰ γεωμετρικὴ, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος 1500, ὁ δὲ δεύτερος 2250· καὶ τὸ πηλίκον εὑρίσκεται $\frac{2250}{1500} = \frac{225}{150} = \frac{75.3}{75.2} = \frac{3}{2} = \pi$. ἐπειδὴ ὅμως $\alpha = 1500$, $\pi = \frac{3}{2}$ καὶ $\nu = 5$ δίδονται, εὑρίσκομεν καὶ τὸ κεφάλαιον K ἀπὸ τοῦ 6 τύπου $K = \dfrac{\alpha(\pi^{\nu}-1)}{\pi-1} =$

$$\frac{1500(\frac{3}{2})^5-1500}{\frac{3}{2}-1} = \frac{1500(\frac{243}{32})-1500}{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1500(\frac{243}{32}-1)}{\frac{1}{2}} = \frac{1500(\frac{211}{32})}{\frac{1}{2}} = \frac{1500(\frac{211}{16})}{1} = \frac{316500}{16} =$$

$19781\frac{1}{4}$· καὶ ἡ πρόοδος οὕτω γίνεται $\overset{1}{1500}$, $\overset{2}{1500.\frac{3}{2}}$, $\overset{3}{1500.(\frac{3}{2})^2}$, $\overset{4}{1500(\frac{3}{2})^3}$, $\overset{5}{1500.(\frac{3}{2})^4}$

Πρόβλ. δ΄. Νὰ παρενείρωμεν μεταξὺ 1 καὶ 2 ὅρους ἕνδεκα οὕτως, ὥστε νὰ γένῃ γεωμετρικὴ σειρὰ μὲ ὅρους δεκατρεῖς· εἰς αὐτὴν εἶναι γνωστὰ, ὁ πρῶτος ὅρος $\alpha=1$· ὁ ἔσχατος $\tau=2$· καὶ πλῆθυς τῶν ὅρων $\nu=13$· ζητεῖται λοιπὸν τὸ πηλίκον, μὲ τὸ ὁποῖον ἐὰν τὸν πρῶτον πολλαπλασιάσωμεν ὁ δεύτερος γίνεται· ὁμοίως καὶ ὁ τρίτος, τέταρτος κ. τ. λ. καὶ ὁ 13 τύπος χρήσιμος $\pi = \sqrt[\nu-1]{\frac{\tau}{\alpha}} = \sqrt[12]{\frac{2}{1}}$ $= \sqrt[12]{2}$· λοιπὸν $\lambda o\gamma \sqrt[12]{2} = \dfrac{\lambda o\gamma 2}{12} = 0{,}0250858$, καὶ ὁ ἀνήκων αὐτῷ ἀριθμὸς 1,059· καὶ δι' αὐτοῦ τοὺς λοιποὺς ὅρους εὑρίσκομεν· ἢ γενέσθω ἡ σειρὰ $1, \pi, \pi^2, \pi^3, \pi^4, \pi^5, \pi^6, \pi^7, \pi^8, \pi^9, \pi^{10}, \pi^{11}, \pi^{12}$. ἐπεὶ $\pi =$ τῷ δευτέρῳ ὅρῳ

ἄρα $\lambda o\gamma\, \pi = 0{,}0250858$	ἀνήκων ἀριθμὸς $1{,}059 =$ Β΄ ὅρῳ
$2\lambda o\gamma\, \pi = 0{,}0501716$	. . . . . $1{,}122 =$ Γ΄
$3\lambda o\gamma\, \pi = 0{,}0752574$	. . . . . $1{,}189 =$ Δ΄
. . . .	. . . .
$11\lambda o\gamma\, \pi = 0{,}2759438$	. . . . . $1{,}888 =$ ια΄
$12\lambda o\gamma\, \pi = 0{,}3010296$	. . . . . $2{,}000 =$ ιβ΄

πρόβ. ε΄. Νὰ διέλωμεν μιᾶς σειρᾶς γεωμετρικῆς ἕκαστου ὅρου εἰς μέρη γεωμετρικῶς ἀνάλογα οὕτως, ὥστε τὸ κεφάλαιον αὐτῆς τῆς σειρᾶς νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῆς πρώτης· δηλ: ἐὰν μία σειρὰ ἔχῃ μέρη τέσσαρα, νὰ διέλωμεν ἕκαστον ὅρον αὐτῆς τῆς σειρᾶς εἰς τρία μέρη, διὰ νὰ γένωσιν ὅροι 12 εἰς γεωμετρικὴν σειράν· καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν δώδεκα τούτων ὅρων νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν τεσσάρων τῆς πρώτης. Διὰ νὰ εὕρωμεν τύπον γενικὸν, ἔστω ἡ δοθεῖσα σειρὰ $\alpha,\ \alpha\pi,\ \alpha\pi^2,\ \alpha\pi^3 \ldots$ κτ. καὶ ἕκαστος ὅρος αὐτῆς διαιρεθήτω εἰς μέρη μ.

Λύσις.

Καλείσθω ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ζητουμένης σειρᾶς χ· τὸ δὲ πηλίκον ρ, καὶ τὰ μέρη ἑκάστου ὅρου μ· λοιπὸν

$$\chi,\ \chi\rho^{1},\ \chi\rho^{2}\ \ldots\ \chi\rho^{\mu-1} = \alpha \qquad \text{A}$$

$$\chi\rho^{\mu},\ \chi\rho^{\mu+1},\ \chi\rho^{\mu+2}\ \ldots\ \chi\rho^{2\mu-1} = \alpha\pi \qquad \text{B}$$

Ἐὰν τὴν ἐπὶ ρ^{μ} πολλαπλασιάσωμεν, γίνονται αἱ σειραὶ

$$\chi\rho^{\mu},\ \chi\rho^{\mu+1},\ \chi\rho^{\mu+2}\ \ldots\ \chi\rho^{2\mu-1}\ \ldots\ \alpha\rho^{\mu} \qquad \Delta$$

$$\chi\rho^{\mu},\ \chi\rho^{\mu+1},\ \chi\rho^{\mu+2}\ \ldots\ \chi\rho^{2\mu-1} = \ldots\ \alpha\pi \qquad \text{E}$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὰ ἀριστερὰ σκέλη τῶν ἐξισώσεων ἴσα, ἄρα καὶ τὰ δεξιὰ ἴσα, ἤτοι $\alpha\rho^{\mu} = \alpha\pi$

$$\rho^{\mu} = \pi$$

$$\text{καὶ}\quad \rho = \sqrt[\mu]{\pi}$$

δηλ: εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον τῆς νέας σειρᾶς, ἐὰν ἀπὸ τὸ πηλίκον τῆς δεδομένης ἐξαγάγωμεν τὴν ῥίζαν ἐκείνην, ὅπου δεικνύει ὁ ἐκθέτης τοῦ ῥιζικοῦ σημείου, ὅταν ἐκθέτης σημανθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων, καθ᾿ ὃν ἕκαστος ὅρος διαιρεῖται τῆς δεδομένης σειρᾶς, οἷον δοθήτω ἡ σειρὰ 7, 56, 448, καὶ ζητηθήτω νὰ διαιρεθῇ ἕκαστος ὅρος εἰς 3 ὅρους· ἀλλὰ τὸ πηλίκον αὐτῆς $\frac{56}{7}=8$, ἄρα $\rho=\sqrt[3]{8}=2$· λείπεται ἔτι καὶ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς ζητουμένης εὑρεῖν σειρᾶς, ἐπειδὴ ἔχομεν τὸ πηλίκον ρ, καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων μ, καὶ τὸ κεφάλαιον α· εἰς τὸν ἕκτον τύπον ὅμως $K=\frac{\alpha(\pi^{\nu}-1)}{\pi-1}$· θῶμεν ἐνταῦθα $K=\alpha$ καὶ $\alpha=\chi$ καὶ $\pi=\rho$ καὶ $\nu=\mu$ καὶ εὑρίσκεται ὁ τύπος $\alpha=\frac{\chi(\rho^{\mu}-1)}{\rho-1}$, καὶ $\alpha\rho-\alpha=\chi(\rho^{\mu}-1)$ καὶ $\frac{\alpha(\rho-1)}{\rho^{\mu}-1}=\chi$· ἀνωτέρω ὅμως εὕρομεν καὶ $\rho=\sqrt[\mu]{\pi}$ καὶ $\rho^{\mu}=\pi$· θὲς εἰς τὸν ἄνω τύπον $\chi=\frac{\alpha\rho-\alpha}{\rho^{\mu}-1}$ τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων, καὶ εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\alpha\sqrt{\pi}-\alpha}{\pi-1}$. καὶ ἑπομένως κατ' αὐτὸν τὸν τύπον μόνον ἀπὸ τὴν δεδομένην σειρὰν τὸν πρῶτον ὅρον χ τῆς ζητουμένης εὑρίσκομεν σειρᾶς· τὸ δὲ πηλίκον αὐτῆς ρ ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω τύπον· δεδόσθω ἡ ἄνω σειρὰ 7, 56, 448· καὶ ἕκαστος ὅρος αὐτῆς εἰς τρία μέρη γεωμετρικῶς τετμήσθω ἀνάλογα· ἐπεὶ $\alpha=7$ καὶ $8=\pi$ καὶ $\mu=3$· ἔσται $\chi=\frac{\alpha\sqrt[\mu]{\pi}-\alpha}{\pi-1}=\frac{7\sqrt[5]{8}-7}{8-1}=\frac{7\cdot 2-7}{7}=\frac{7}{7}=1$ εὕρηται δὲ καὶ $\rho=2$· ἔσται ἡ σειρά, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256· διότι $1+2+4=7$ καὶ $8+16+32=56$· καὶ $64+128+256=448$·

ἐπειδὴ ὅμως ὁ πρῶτος ὅρος εὕρηται $x=\frac{\alpha\sqrt[\mu]{\pi}-\alpha}{\pi-1}$ καὶ τὸ πηλίκον $\rho=\sqrt[\mu]{\pi}$, συνεχίζομεν καὶ ὅλην τὴν σειρὰν (§. 535)

$$\frac{\alpha\sqrt[\mu]{\pi}-\alpha}{\pi-1},\quad \frac{(\alpha\sqrt[\mu]{\pi}-\alpha)\sqrt[\mu]{\pi}}{\pi-1},\quad \frac{(\alpha\sqrt[\mu]{\pi}-\alpha)\sqrt[\mu]{\pi^2}}{\pi-1},$$

$\frac{(\alpha(\sqrt[\mu]{\pi}-\alpha)\sqrt[\mu]{\pi^3}}{\pi-1}$ . . . . τὸ δὲ κεφάλαιον αὐτῆς τῆς σειρᾶς εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν τύπον $K=\frac{\alpha(\pi^{\nu}-1)}{\pi-1}$ (6), ἐὰν ἀντὶ μὲν α τὸν πρῶτον ὅρον θῶμεν $\frac{\alpha(\sqrt[\mu]{\pi}-1)}{\pi-1}$· ἀντὶ δὲ π τὸ πηλίκον $\sqrt[\mu]{\pi}$· ἐπεὶ δὲ $\rho^{\nu}=(\sqrt[\mu]{\pi})^{\nu}=\sqrt[\mu]{\pi^{\nu}}$· ἔςαι $K=$

$$\frac{\alpha(\sqrt[\mu]{\pi}-1)}{\pi-1}\times\frac{\sqrt[\mu]{\pi^{\nu}}-1}{\sqrt[\mu]{\pi}-1}=\frac{\alpha(\sqrt[\mu]{\pi}-1)(\sqrt[\mu]{\pi^{\nu}}-1)}{(\pi-1)(\sqrt[\mu]{\pi}-1)}=\frac{\alpha\sqrt[\mu]{\pi^{\nu}}-1}{\pi-1}$$

$\frac{\alpha(\pi^{\frac{\nu}{\mu}}-1}{\pi-1}$· καὶ εἶναι ὁ ἄνω τύπος ὁ αὐτὸς, πλὴν ὅτι ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ πηλίκου, ἤτοι ἡ πληθὺς τῶν ὅρων ν διαιρεῖται διὰ τῆς πληθύος τῶν ὅρων μ, καθ' ἣν ἕκαςος διαιρεῖται. Ἔςω αὖθις ἡ σειρὰ 7, 56, 448, καὶ ἕκαςος τούτων εἰς 3 μέρη διαιρεῖται, καὶ ζητεῖται τὸ κεφάλαιον αὐτῆς· ἄρα εἰς τὸν τύπον $\frac{\alpha(\pi^{\frac{\nu}{\mu}}-1)}{\pi-1}$ ἔςαι $\alpha=7$,

$\pi = 8$, $\nu = 9$, $\mu = 3$ καὶ ἑπομένως $K = \dfrac{7(8^{\frac{9}{3}} - 1)}{8 - 1} =$

$\dfrac{7(8^3 - 1)}{7} = 8^3 - 1 = 512 - 1 = 511$· καὶ οὕτως εὑρίσκομεν καὶ κεφάλαια γεωμετρικῶν σειρῶν μὲ ὅρους κεκλασμένους, δηλ: ὅταν μόνον πέντε ὅρων, καὶ μισοῦ, ἢ τριῶν ὅρων, καὶ ἑνὸς πεμπτημορίου τὸ κεφάλαιον ζητῆται· καὶ καθόλου ὅταν τὸ ν ἀριθμὸν κεκλασμένον, καὶ ἀκέραιον σημαίνη ὁμοῦ· δὶ αὐτοῦ τοῦ τύπου μόνου λύονται τὰ προβλήματα τῶν συναλλαγμάτων, ὁποῦ γίνονται εἰς τὸς τῶν πολυτίμων λίθων τιμάς· διότι ἡ τιμὴ αὐτῶν δὲν αὐξάνει κατὰ λόγον τῆς αὐτῶν βαρύτητος, ὡς αἱ τιμαὶ τῶν ἄλλων χρυσοῦ, ἀργύρου κ. τ. λ. ἀλλὰ κατά τινα λόγον γεωμετρικόν· ἐὰν δηλ: διπλάσιον τὸ βάρος, ἡ τιμὴ γίνεται ἴσως τριπλασία, τετραπλασία κ. τ. λ. καὶ μάλιςα διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου εὑρίσκομεν πόσον αὐξάνει τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{\mu}$ κ. τ. λ. δηλ:

πρόβ: ϛ'. Συνεφώνησέ τις νὰ ἀγοράσῃ ἓν διαμάντι, καὶ νὰ πληρώσῃ δὶ ἓν κεράτιον 40 γρ: διὰ δὲ δύο 120 γρ: διὰ δὲ 3 γρ: 360, καὶ καθ' ἑξῆς κατὰ τὸ τριπλάσιον· εὑρηται ὅμως τὸ βάρος αὐτοῦ $3\frac{1}{4}$ κερ: πόσα νὰ πληρώσῃ;

Ἐνταῦθα σειρὰ γεωμετρικὴ, ἧς $a = 40$, $\pi = 3$ μέρη δὲ $= 3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$, καὶ ἑπομένως $\nu = 13$ καὶ $\mu = 4$· ἄρα $K =$

$\dfrac{a(\sqrt[\mu]{\pi^\nu} - 1)}{\pi - 1} = \dfrac{40(\sqrt[4]{3^{13}} - 1)}{3 - 1} = 20(\sqrt[4]{3^{13}} - 1)$· ἀλλὰ

$\lambda o\gamma \sqrt[4]{3^{13}} = \dfrac{13 \lambda o\gamma 3}{4} = \dfrac{13.0{,}4771213}{4} = 1.5506442$

καὶ ὁ ἀριθμὸς αὐτοῦ τοῦ λογαρίθμου = 35, 53· ἄρα K = 20 (35, 53—1) = 20· 34, 53 = 690, 60, καὶ τόση

εἶναι ἡ τιμὴ αὐτοῦ· ἡ δὲ σειρὰ οὕτως ἔχει $40, 120, 360, 172, 65$· διότι τὸ ἓν τέταρτον 170, 60 τιμᾶται· ἄλλως δ' ἐὰν τὸ $\frac{1}{4}$ οὕτως εὑρίσκεται $40, 120, 360, \frac{1080}{4}$,

ἢν $\frac{1080}{4} = 270$, καὶ ἐπλήρωνε πλέον $270 - 172, 65 = 97, 30$· ἂν δ' ἐπλήρωνε κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον

$40 + 40 . 3 + 40 . 3^2 + 40 . 3^{\frac{3}{4}}$ ἔδιδε σχεδὸν πάλιν 303 γρ περισσότερα· καὶ διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι τὰ τοιαῦτα διὰ τοῦ ἄνω μόνου τύπου λύονται, καὶ ἄλλως οὐχί.

πρόβ: ζ'. Εἶχε τις ἓν βαρέλιον κρασὶ 100 ὀκάδων· καὶ ἦν ἡ τιμὴ μιᾶς ὀκᾶς 36 παρ: ὁ δὲ δοῦλός του εὔγαζε μίαν ὀκᾶν κρασὶ, καὶ ἔῤῥιπτεν ἔτι μίαν νερὸν διὰ νὰ μὴ φωραθῇ· μετὰ παρέλευσιν ὅμως χρόνου, εὗρεν ὁ δεσπότης τοῦ κρασίου τὴν τιμὴν μιᾶς ὀκᾶς 24 παρ: ζητεῖται ποσάκις ὁ δοῦλος εὔγαλε κρασὶ, καὶ ἀντὶ τούτου ἔῤῥιπτε νερὸν, διὰ νὰ καταντήσῃ εἰς αὐτὴν τὴν τιμήν;

Θῶμεν $100 = \alpha$, $36 = \gamma$, μίαν ὀκᾶν $= \beta$, 24 παρ $= \delta$.

Φανερὸν, ὅτι ἐν ᾧ ἔῤῥιπτεν ὁ δοῦλος ἀπὸ μίαν ὀκᾶν νερὸν εἰς τὸ βαρέλιον, ὅλον τὸ κρασὶ ἀνεκατώνετο μὲ τὸ νερὸν, καὶ εἰς τὴν δευτέραν φορὰν εὔγαζεν ὁμοῦ μὲ τὸ νερὸν καὶ κρασί· ὁμοίως καὶ εἰς τὴν τρίτην, τετάρτην, καὶ καθ' ἑξῆς· εἰς μὲν τὴν πρώτην φορὰν εὔγαλε κρασὶ ἄδολον μίαν ὀκᾶν, καὶ ἔμεινεν εἰς τὸ βαρέλι κρασὶ ἄδολον $\alpha - \beta = 99$ ὀκ: ἐν ᾧ εἶχε καὶ μίαν ὀκᾶν νερόν· εἰς δὲ τὴν δευτέραν φορὰν εὔγαλε κρασὶ μὲ νερόν, καὶ σχεδὸν ἀναλόγως τῇ ποσότητι τοῦ κρασίου· δηλ: αἱ 100 ὀκάδες ἔχουσιν ἀπὸ τῆς ὀκᾶς τοῦ νεροῦ ἑκατονταπλάσιον, ἢ ἡ μία ὀκᾶ· λοιπὸν λέγομεν ἂν αἱ 100 ὀκ: ἔγιναν 99, ἡ μία τί γίνεται· καὶ εὑρίσκομεν τὸ καθαρὸν κρασὶ τῆς μιᾶς ὀκᾶς· ἤτοι $\alpha:\beta$ $=\alpha-\beta:\frac{\beta}{\alpha}.(\alpha-\beta)$ λοιπὸν $\frac{\beta}{\alpha}(\alpha-\beta)$ ἔχει καθαρὸν κρασὶ ἡ μία ὀκᾶ· ἀφαιρείσθω τοῦτο ἀπὸ τῶν $99=\alpha-\beta$ τοῦ βαρελίου, καὶ μανθάνομεν πόσον ἔμεινε καθαρὸν κρασὶ εἰς τὸ βαρέλι εἰς τὴν δευτέραν φοράν· ἤτοι $(\alpha-\beta)-$

$$\frac{\beta}{\alpha}(\alpha-\beta)=\frac{\alpha\alpha-\alpha\beta-\alpha\beta+\beta\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha}=\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha}.$$

εἰς δὲ τὴν τρίτην φορὰν εὐγάζει μίαν ὀκᾶν μὲ περισσότερον νερὸν, διότι ἔρριψε καὶ τὴν δευτέραν φορὰν μίαν ὀκᾶν νερόν· πλὴν ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ καθαρὸν κρασὶ ὡς πρότερον τῆς ὀκᾶς οὕτω $\alpha:\beta=\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha}:\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha}\right)$ καὶ τοῦτο τὸ καθαρὸν κρασὶ τῆς ὀκᾶς, εἰς τὴν τρίτην φορὰν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ καθαρὸν τῆς δευτέρας, καὶ εὑρίσκομεν, πόσον εἰς τὴν τρίτην φορὰν ἔμεινε καθαρὸν κρασὶ εἰς τὸ βαρέλιον οὕτω $\left(\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha}\right)-\left(\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha}\right)\right)=\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha}$

$$-\left(\frac{\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^2}\right)=\frac{\alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3}{\alpha^2}$$

$$=\frac{\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3}{\alpha^2}=\frac{(\alpha-\beta)^3}{\alpha^2}.$$ ὅπερ ἔμεινεν εἰς τὸ βαρέλιον καθαρόν· τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τὴν τετάρτην φορὰν εὑρίσκομεν, ὅτι ἔμεινε καθαρὸν κρασὶ εἰς τὸ βαρέλιον

$\frac{(\alpha-\beta)^4}{\alpha^3}$· καὶ εἰς τὴν ν φορὰν ἔμεινε $\frac{(\alpha-\beta)^\nu}{\alpha^{\nu-1}}$· τούτου δὲ ἡ ὀκᾶ τιμᾶται ὁ6 παρ$=\gamma$· ἄρα ὅλου ὁμοῦ $\frac{(\alpha-\beta)^\nu\gamma}{\alpha^{\nu-1}}$· τοῦτο ὅμως ἤδη ἑνωμένου μὲ τὸ νερὸν τιμᾶται τὴν ὀκᾶν 24 παρ$=\delta$ καὶ τὸ ὅλου ἐπειδὴ εἶναι 100 ὀκάδ$=\alpha$ εἶναι δα· ἄρα αἱ τιμαὶ $\frac{(\alpha-\beta)^\nu\gamma}{\alpha^{\nu-1}}$ καὶ αδ εἶναι ἴσαι· καὶ $\frac{(\alpha-\beta)^\nu\gamma}{\alpha^{\nu-1}}$ $=\alpha\delta$ καὶ $(\alpha-\beta)^\nu\gamma=\alpha\delta\,\alpha^{\nu-1}$. ἄρα ν λογ $(\alpha-\beta)=$λογα $+$λογ:δ$+$ν λογα — λογα — λογ:γ· ἤτοι ν λογ$(\alpha-\beta)$ — ν λογα $=$ λογδ — λογ:γ· ἤτοι ν λογα — ν λογ$(\alpha-\beta)$ $=$ λογ:γ — λογ:δ καὶ $\nu=\frac{\text{λογ:γ} - \text{λογ:δ}}{\text{λογα} - \text{λογ}(\alpha-\beta)}$.

λογ:γ $=$ λογ:36 $=$ 1,5563025
—λογδ $=$ —λογ 24 $=$ — 1,3802112
$+$ 1760913 $=$ τῷ ἀριθμητῇ·
λογα $=$ λογ 100 $=$ 2,0000000
λογ $(\alpha-\beta)=$ — λ99 $=$ — 1,9956352
0,0043648 $=$ τῷ παρονομαςῇ·

καὶ $\nu=\frac{1760913}{43648}=40$ καὶ κλάσματι τινί· ἄρα 40 φοραῖς εὔγαλε κρασί· καὶ ἦν ἡ τιμὴ αὐτοῦ ὀλίγον τι καλλίων ἀπὸ 24 παρ: τὴν ὀκᾶν· ἐὰν δ' ἔτι μίαν φορὰν εὔγαζεν, ἤθελεν εἶναι κατώτερον.

πρόβ: 8. Ἐάν τις δανείσῃ α χρήματα πρὸς γ τόκου τῶν ἑκατὸν, καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου θῇ αὖθις τὸν τόκου εἰς κεφάλαιον, καὶ ἔτι εἰς τὸν ἑξῆς ποιήσῃ ὁμοίως, θέτων ἀεὶ τὸν τόκον εἰς κεφάλαιον, εἰς ν χρόνους πόσον ἀποβαίνει τὸ α κεφάλαιον;

Τοῦτο τὸ εἶδος τῶν προβλημάτων καλοῦσιν οἱ τεχνικοὶ ἀνατοκισμόν· καὶ ἡμεῖς εἰς τοῦτο γενικὴν εὕρομεν μέθοδον· ἐπειδὴ 100, γ τόκον περιέχουσιν· ἄρα α χρήματα εἰς ἕνα ἐνιαυτὸν παρέχουσι τόκον $=\frac{\alpha\gamma}{100}$ (§. 510)· διότι $100:\gamma=\alpha:\frac{\gamma\alpha}{100}$· τοῦτο δ' ἐὰν συνάψωμεν μὲ τὸ κεφάλαιον α γίνεται τὸ [illegible] τοῦ δευτέρου χρόνου $\alpha+\frac{\alpha\gamma}{100}=\alpha\left(1+\frac{\gamma}{100}\right)=\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)=$ τῷ κεφαλαίῳ τοῦ δευτέρου χρόνου· πάλιν ὡς ἄνω εὑρίσκομεν καὶ τοῦτ[ο] τί τόκον παρέχει, οὕτως $100:\gamma=\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right):\frac{\alpha\gamma}{100}\times\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)$· ἐὰν δὲ καὶ τοῦτο συνάψωμεν μὲ τὸ κεφάλαιο[ν] τοῦ δευτέρου χρόνου οὕτω $\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)+\frac{\alpha\gamma}{100}\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)$

$$=\alpha\left(\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)+\frac{\gamma}{100}\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)\right)=\alpha\left(\frac{100^2+100\gamma+100\gamma+\gamma^2}{100\,.\,100}\right)$$

$=\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^2$· γίνεται τὸ κεφάλαιον τοῦ τρίτου χρόνου· καὶ τοῦτο αὖθις παρέχει τόκον τὸν τρίτον χρόνον $100:\gamma=\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^2:\frac{\alpha\gamma}{100}\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^2$ τοῦτο πάλιν ἐὰν συνάψωμεν μὲ τὸ κεφάλαιον τοῦ τρίτου χρόνου οὕτω $\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^2+\frac{\alpha\gamma}{100}\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^2=\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^3$ γίνεται κεφάλαιον τοῦ τετάρτου χρόνου καὶ παρέχει καὶ αὐτὸ τόκον $100 : \gamma = \alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^3 : \frac{\alpha\gamma}{100}\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^3$. συνάπτοντες πάλιν καὶ τοῦτο μὲ τὸ κεφάλαιον τοῦ τετάρτου χρόνου $\frac{\alpha\gamma}{100}\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^3+\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^3=\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^4$ γίνεται κεφάλαιον τοῦ ἑξῆς χρόνου· ἄρα εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου χρόνου ἔγινε τὸ ποσὸν οὕτω . . . . $\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)$

τοῦ δὲ Β' . . . . $\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^2$

τοῦ Γ'. . . . . $\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^3$

τοῦ Δ'. . . . . $\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^4$

καὶ τοῦ ν χρόνου . . . . $\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^\nu$

ἐν σειρᾷ γεωμετρικῇ· καὶ ἐνταῦθα μόνον ὁ ἔσχατος ὅρος ζητεῖται $\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^\nu$ ἐὰν αὐτὸν Κ καλέσωμεν, $K=\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^\nu$. διότι ὅλα εἶναι δεδομένα τὸ μὲν ν τὸ ποσὸν σημαίνει τῶν χρόνων· τὸ δὲ α τὸ καταβαλλόμενον κεφάλαιον, καὶ γ ὁ τόκος ὁ ἐνιαύσιος τῶν 100· ἐπειδὴ ὅμως τὸ κλάσμα $\frac{100+\gamma}{100}$ εἶναι ἴσον ἀεὶ με μίαν μονάδα. καὶ με τόσα ἑκατοςημόρια, ὅσα το ν. σημαίνει· δηλ: ἐὰν $\gamma=7$ ἔςαι καὶ $\frac{100+\gamma}{100}=1,07$. ἐαν δε, 12, ἔςαι καὶ $\frac{100+\gamma}{100}$ 1, 12· ἐὰν δὲ $\gamma=5$ ἔςαι καὶ $\frac{100+\gamma}{100}=1,05$· διότι τὸ γ εἶναι ὁ τόκος τῶν 100· θῶμεν $\frac{100+\gamma}{100}=\pi$ καὶ γίνεται ὁ ἄνω τύπος $K=\alpha\pi^{\nu}$· καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τύπον λύονται ὅλα τα προβληματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ· διότι λογ K $=$ λογ α $+$ λογ π· ἤτοι τί γίνεται ἓν κεφάλαιον εἰς χρόνους ν

α΄. δηλ 20000 γρ: δανείζονται πρὸς 5 τὰ 100, καὶ ὁ τόκος προσεπιλογίζεται εἰς κεφάλαιον, εἰς χρόνους 12 πόσον γίνεται: ἔςαι λογ K $=$ λογ α $+$ 12 λογ π. ἀλλὰ

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ \alpha &= \lambda o\gamma\, 20000 = 4,3010300 \\ 12\ \lambda o\gamma\ \pi &= 12\,\lambda o\gamma\, 1,05 = \underline{0,2542716} \\ \lambda o\gamma\ K &= \qquad\qquad 4,5553016. \end{aligned}$$

ἄρα K $=$ 35917, 12 γρόσ: κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκουται,... καὶ ἐὰν διανεισθῶσι πρὸς 7 ἢ 8, ἢ 9, ἢ 10, ἢ 11, ἢ 12, κ. τ. λ. τὰ 100.

β΄. Πολλάκις ζητεῖται εἰς πόσους χρόνους διπλασιάζεται τὸ κεφάλαιον, ἐὰν δανεισθῇ πρὸς τόκον τινὰ τὰ 100, καὶ ὁ τόκος εἰς ἕκαςον χρόνον κεφάλαιον νὰ γίνηται· διότι τότε ἀπ' αὐτοῦ τοῦ τύπου τὸ ν ζητεῖται· καὶ εὑρίσκεται οὕτω λογ 2 K $=$ λογ α $+$ ν λογ π. καὶ $\nu=\frac{\lambda 2K - \lambda o\gamma\,\alpha}{\lambda o\gamma\,\pi}$.

δηλ 20000 γρ: πρὸς 5 τὰ 100 εἰς πόσους χρόνους διπλασιάζονται; $\lambda o\gamma\, 2K = \lambda o\gamma\, 40000 = \ 4{,}6020600$

$$-\lambda o\gamma\, \alpha = -\lambda o\gamma\, 20000 = -\underline{4{,}3010300}$$

0,3010300 ἀριθμ.

$\lambda o\gamma\, \pi = \lambda o\gamma\, 1{,}\, 05 = \quad 0{,}0211893$ παρον:

καὶ $\nu = \dfrac{3010300}{211893} = 14^{\chi},\ 2^{\mu},\ 14^{\eta\mu}$. εἰς χρόνους δηλ: 14 καὶ σχεδὸν $2\frac{1}{2}$ μῆνας διπλασιάζονται.

„ 5000 ὅμως πρὸς 10 τὰ 100 εἰς πόσους χρόνους διπλασιάζονται:

$$\lambda o\gamma\, 2K = \lambda o\gamma\, 10000 = \ 4{,}0000000$$
$$-\lambda o\gamma\, \alpha = -\lambda o\gamma\, 5000 = -\underline{3{,}6989700}$$
$$3010300$$

$\lambda o\gamma\, \pi = \lambda o\gamma\, 1{,}\, 1 = 0413927$ καὶ $\nu = \dfrac{3010300}{413927} = 7^{\chi},\ 3^{\mu}$ εἰς ἑπτὰ ἐνιαυτοὺς καὶ μῆνας 3.

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ τύπος εἶναι $K = \alpha\pi^{\nu}$, καὶ ἐνταῦθα διπλοῦν ἀπαιτεῖται τὸ κεφάλαιον, ἔςαι ἄρα $K = 2\alpha$· καὶ ὁ τύπος $2\alpha = \alpha\pi^{\nu}$, καὶ $2 = \pi^{\nu}$· ἄρα $\lambda o\gamma\, 2 = \nu\, \lambda o\gamma\, \pi$ καὶ $\nu = \dfrac{\lambda o\gamma 2}{\lambda\, \pi.}$· ἄρα οἱ χρόνοι εὑρίσκονται, ἐὰν ἀεὶ τὸν λογαρίθμου τοῦ 2 διαιρῶμεν διὰ τοῦ λογαρίθμου τοῦ π

γ. Ἐὰν δ' εἰς ἓξ μῆνας θέτῃ τις τὸν τόκον εἰς κεφάλαιον ὡς εἰς τὸ κοινὸν τῆς Αὐςρίας γίνεται, τότε εἰς τὸν τύπον $K = \alpha\pi^{\nu}$· τὸ μὲν ν διπλοῦν λαμβάνεται· τὸ δὲ γ τὸ ἥμισυ· διότι ἓξ μηνῶν μόνον τόκον τίθησι, καὶ οὐχὶ ἑνὸς ἐνιαυτοῦ· δηλ: δανείζεταί τις 25000 γρ: εἰς τὸν βασιλικὸν Παγκον πρὸς $3\frac{1}{2}$ τὰ 100 καὶ εἰς κάθε ἓξ μῆνας θέτει τὸν τόκον εἰς κεφάλαιον, ζητεῖ δὲ εἰς 20 χρόνους πόσον ἀποβαίνει τὸ κεφάλαιον; $K = a\pi^{\nu} = a\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^{\nu}$. τὸ μὲν $a =$ 2500 τὸ δὲ $\nu = 40$· τὸ δὲ $\gamma = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ ἐπεὶ δὲ ὁ ἥμισυς τόκος λαμβάνεται, ἔςαι $\gamma = \frac{7}{4} = 1,75 = \frac{175}{100}$. ἐπειδὴ δὲ $\pi = \left(\frac{100+\gamma}{100}\right)$ ἔςαι $\pi = (100 + \frac{175}{100}) : 100 = 1,0175$· ὅθεν λογ K = λογ a + ν λογ π = λογ: 2500 + 40 λογ 1, 0175.

λογ a = λογ 25000 = 4,3979400
40 λογ π = 40λ 1,0175 = 0,3013760
λογ K = 4,6993160
καὶ K = 50039 σχεδὸν,

πρόβ: θ΄. Ἐκ τοῦ τύπου $K = a\pi^{\nu}$ εὑρίσκονται οἱ ἑξῆς 4 τύποι.

I λογ K = λογ a + ν λογ π

II λογ a = λογ K — ν λογ π

III λογ $\pi = \frac{\text{λογ } K - \text{λογ } a}{\nu}$

IV $\nu = \frac{\text{λογ } K - \text{λογ } a}{\text{λογ } \pi}$

καὶ κατ' αὐτοὺς τοὺς τύπους λύονται τὰ ἑξῆς.

α΄. Εἰς μίαν ἐπαρχίαν εὑρίσκονται 2000000 ἄνθρωποι, ἐὰν δὲ αὐξάνονται εἰς τοὺς 50 εἷς, ἢ εἰς τοὺς 100 δύω, πόσοι εἰς 100 χρόνους γίνονται;

Ἐκ τοῦ I τύπου $a = 2000000$· $\pi = 1,02$· $\nu = 100$· ἄρα λογ K = λογ 2000000 + 100 λογ 1, 02,

λογ 1, 02 = 0,0086002
100
0,8600200
λογ 2000000 = 6,3010300
λογ K = 7,1610500

καὶ $K = 1,4590000$, καὶ λύεται τὸ ἄπορον, πῶς ἀπὸ ἓν ἀνδρόγυνον ἐν τῇ πλάσει τοῦ κόσμου εἰς τόσον οἱ ἄνθρωποι ἐπολλαπλασιάσθησαν μέχρι τῆς σήμερον.

β΄. Λέγει τις κεφάλαιον 6000 γρ ὅπου εἰς 4 χρόνους ἐδάνεισε, καὶ ἐλογίζετο τὸν τόκον 4 τὰ 100 εἰς κεφάλαιον, πόσα ἦν ἐξ ἀρχῆς;

Ἐκ τοῦ 11 τύπου $\lambda o\gamma\, \alpha = \lambda o\gamma\, K - \nu\, \lambda o\gamma\, \pi$. ἔςαι $K = 6000 - \nu = 4\, \pi = 1,04$

$$\begin{array}{rr} \lambda o\gamma\, 6000 = & 3,7781513 \\ -4\, \lambda o\gamma\, 1,04 = - & 0,0681332 \\ \hline \lambda o\gamma\, \alpha = & 3.7100181. \end{array}$$

ἄρα $\lambda o\gamma\, 6000 - 4\, \lambda o\gamma\, 1,04 = 3,7100181$ καὶ $\alpha = 5128,83$

γ΄. Ἕτερος δανείσας 600 γρ: εἰς 3 χρόνους παρέςησεν ὁμολογίαν 800 γρ: ἄνευ τόκου· πόσον τόκον αὐτὸς ἐλογίσατο εἰς τὰ 100.

Ἐκ τῆς τρίτης $\lambda o\gamma\, \pi = \dfrac{\lambda o\gamma\, K - \lambda o\gamma\, \alpha}{\nu}$, $\alpha = 600$, $K = 800$, $\nu = 3$ ἄρα $\lambda o\gamma\, \pi = \dfrac{\lambda o\gamma\, 800 - \lambda o\gamma\, 600}{3}$

$$\begin{array}{rr} \text{ἤτοι } \lambda o\gamma\, 800 = & 2,9030900 \\ -\lambda o\gamma\, 600 = - & 2,7781512 \\ \hline & 0,1249387 \\ \hline & 3 \end{array} = 0,0416462\cdot$$

καὶ $\pi = 1,1006$· ἐλογίσατο ἄρα τὸν τόκον πλέον τι, ἢ 10 εἰς τὰ 100.

πρόβ. ι. Ἐὰν δὲ τὸν δοθῇ κλασματικὸν ὡς εἰς χρόνους $3\frac{1}{2}$, ἢ $5\frac{1}{3}$, ἢ $6\frac{1}{4}$, ἢ $\nu = \mu + \frac{1}{\sigma}$ τότε ὁ ἄνω τύπος ἄχρηςος· ἐπειδὴ οὐ μόνον ὁ χρόνος μ δίδει τόκον, ἀλλὰ καὶ ὁ κλασματικὸς $\frac{1}{\sigma}$· ὅθεν ἀφ' οὗ εὕρομεν τὸ κεφάλαιον τῶν χρόνων μ οὕτω $\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^{\mu}$, πρέπει νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦ χρόνου $\frac{1}{\sigma}$, καὶ νὰ τὰ συνάψωμεν ὁμοῦ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὅλον κεφάλαιον· λοιπὸν εὑρίσκομεν πρῶτον ἐὰν ὁ χρόνος 1 δίδῃ γ, ὁ $\frac{1}{\sigma}$ χρόνος τί δίδει; καὶ εὑρίσκομεν $1:\gamma=\frac{1}{\sigma}:\frac{\gamma}{\sigma}$ καὶ $\frac{\gamma}{\sigma}$ δίδουσι τὰ 100 τόκον εἰς τοῦ χρόνου $\frac{1}{\sigma}$. λέγομεν ἔτι ἐὰν τὰ 100 δίδουσι $\frac{\gamma}{\sigma}$ τόκον, ὅλον τὸ κεφάλαιον $\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^{\mu}$ τί δίδει; $100:\frac{\gamma}{\sigma}=\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^{\mu}:\frac{\alpha\gamma}{100\sigma}\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^{\mu}$. καὶ τόσον τόκον παρέχει ὁ κλασματικὸς χρόνος $\frac{1}{\sigma}$ εἰς χρόνους μ. ἐὰν δὲ ταῦτα τὰ κεφάλαια συνάψωμεν, τὸ κεφάλαιον τούτων εἶναι τὸ ζητούμενον κεφάλαιον, ὁμοῦ μὲ τὸν τόκον εἰς $\mu+\frac{1}{\sigma}$ χρόνους· λοιπὸν $K=\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^{\mu}+\frac{\alpha\gamma}{100\sigma}\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^{\mu}=\alpha\left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^{\mu}\times\left(1+\frac{\gamma}{100\sigma}\right)=\alpha\pi^{\mu}\left(1+\frac{\gamma}{100\sigma}\right)$. (πρόβ. ή.) καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τύπον εὑρίσκεται ὁ κλασματικὸς χρόνος, ἐὰν δὲ ὁ κλασματικὸς χρόνος εἶναι $\frac{2}{3}$ ἢ $\frac{3}{4}$ ἢ $\frac{\beta}{\pi}$, ἔσαι $K = \alpha\pi(1+\frac{\gamma\beta}{100\sigma})$.

πρόβ: ιά. Ἐὰν δέ τις δανείσῃ ἓν κεφάλαιον α πρὸς γ τὰ 100, καὶ λογίζεται τὸν τόκον εἰς κάθε χρόνον κεφάλαιον, καὶ προσθέτῃ ἀκόμη εἰς κάθε χρόνον ποσὸν χρημάτων β, ἅτινα λογίζονται ὁμοίως πρὸς γ τὰ 100, καὶ ὁ τόκος εἰς κεφάλαιον, πῶς εὑρίσκομεν πόσον γίνεται τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον εἰς χρόνους ν;

Αὐτοῦ τὸ μὲν κεφάλαιον α εἰς χρόνους ν γίνεται ὡς ἄνω $K = \alpha\pi^\nu$· (πρόβ. ή). ὅπου $\pi = \frac{100+\gamma}{100}$ ἀεί· ἐὰν δ' εὕρωμεν καὶ τὸ κεφάλαιον, ὁποῦ γίνεται ἀπὸ τοῦ ποσοῦ β, ὁποῦ εἰς κάθε χρόνον προςίθεται, καὶ προσθῶμεν αὐτὸ εἰς τὸ $\alpha\pi^\nu$, εὑρίσκομεν ὅλον τὸ ζητούμενον· πόσον δὲ γίνεται τὸ β εἰς χρόνους, ὁποῦ τὸ α δίδεται, οὕτως εὑρίσκεται· τὸ β ἄρχεται ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ πρώτου χρόνου, ἄρα δουλεύει μόνον $\nu-1$ χρόνους· θῶμεν ἄρα ἀντὶ α, β. καὶ ἀντὶ ν, $\nu-1$ εἰς τὸν τύπον $K = \alpha\pi^\nu$· καὶ εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον τοῦ β εἰς τοὺς ἑξῆς χρόνους $= \beta\pi^{\nu-1}$· ἀλλὰ εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου χρόνου πάλιν προσθέτει β, καὶ τοῦτο δουλεύει $\nu-2$ χρόνους· ἄρα καὶ τὸ κεφάλαιον τούτου $= \beta\pi^{\nu-2}$· εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου χρόνου πάλιν δίδει β ποσόν· καὶ τοῦτο δουλεύει $\nu-3$ χρόνους· ἄρα καὶ τὸ κεφάλαιον τούτου εἰς ν χρόνους $= \beta\pi^{\nu-3}$· καὶ τέλος εἰς τὸν ἔσχατον χρόνον ν τὸ ποσὸν β ὁποῦ δίδεται δουλεύει μόνον ἕνα χρόνον, καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτοῦ $=\beta\pi$· ἄρα ὅλων τῶν προσθέσεων τοῦ β εἶναι ἀπὸ τοῦ δευτέρου χρόνου $\beta\pi^{\nu-1}$, $\lambda\pi^{\nu-2}$, $\beta\pi^{\nu-3} \ldots \beta\pi^{\nu(\nu-1)} = \beta\pi$· ἐὰν δ' ἀπὸ τὸν ἔσχατον χρόνον ἄρξωμεν, ἔςαι $\beta\pi$, $\beta\pi^2$. $\beta\pi^3$, $\beta\pi^4$, $\beta\pi^5 \ldots\ldots \beta\pi^{\nu-1}$ σειρὰ γεωμετρική· διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον ὅλων τῶν κατὰ μέρος κεφαλαίων, κεφαλαιώσωμεν τὴν σειρὰν κατὰ τὸν τύπον $K=\frac{\tau\pi-\alpha}{\pi-1}$ θέντες $\beta\pi$ ἀντὶ α καὶ $\beta\pi^{\nu-1}$ καὶ π ἀντὶ $\tau\pi$ οὕτω $K=\frac{\beta\pi^{\nu-1}\pi-\beta\pi}{\pi-1}=\frac{\beta\pi^{\nu}-\beta\pi}{\pi-1}=$

$\frac{\beta\pi(\pi^{\nu-1}-1)}{\pi-1}$. προσθῶμεν ἤδη καὶ τὴν αὔξησιν καὶ τοῦ κεφαλαίου α, $\alpha\pi^{\nu}$ εἰς αὐτὸ, καὶ ἔςαι $K=\alpha\pi^{\nu}+\frac{\beta\pi(\pi^{\nu-1}-1)}{\pi-1}$

δηλ $\lambda o\gamma\, K = \lambda o\gamma\, \alpha + \nu\, \lambda o\gamma\, \pi$. καὶ ἅμα $\lambda o\gamma\, \beta + \lambda o\gamma\, \pi + \lambda o\gamma\, (\pi^{\nu-1}-1) - \lambda o\gamma\, (\pi-1)$.

Ἔςω ὅτι ἐδάνεισέ τις 6000 γρ πρὸς 5 τὰ 100· καὶ εἰς κάθε χρόνον δίδει προσέτι ἀπὸ 500 γρ. λογιζόμενος ὅμως ἀεὶ τὸν τόκον εἰς κεφάλαιον, ζητεῖ νὰ μάθῃ εἰς 10 χρόνους πόσον γίνεται;

Αὐτοῦ $\alpha = 6000$, $\beta = 500$, $\nu = 10$, π—1, 05, λογαριθμικῶς εὑρίσκομεν.

$\alpha\pi^{\nu} = 9773,37$

$\pi^{\nu-1} = 1,551328$

ἄρα $\pi^{\nu-1}-1=0,551328$· λοιπὸν $\dfrac{6\pi(\pi^{\nu-1}-1)}{\pi-1}=$

$\dfrac{500.\ 1,05.\ 0,551328}{0,05}=5788,94$· μετὰ δὲ τοῦ $\alpha\pi^{\nu}$, γίνονται $9773,37+57881,94=15562,31$ ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

Πρόβλ. ιβ'. Ἐὰν δὲ δίδῃ εἰς καθε χρόνον τὸ αὐτὸ ποσὸν, ὅσον πρότερον ἐξ ἀρχῆς α ἔδωκε· γίνεται ἡ ἄνω σειρὰ, $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^3$, $\alpha\pi^4$. . . $\alpha\pi^{\nu-1}$. ἐὰν δὲ καὶ τὸ πρῶτον κεφάλαιον προσθῶμεν $\alpha\pi^{\nu}$, ἔςαι ἡ σειρὰ $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^3$. . . $\alpha\pi^{\nu-1}$, $\alpha\pi^{\nu}$ σειρὰ γεωμετρικὴ, ἧς τὸ κεφάλαιον (τύπος 6.) $\dfrac{\alpha(\pi^{\nu}-1)}{\pi-1}=\dfrac{\alpha\pi(\pi^{\nu}-1)}{\pi-1}$· καὶ ἐξ αὐτῆς ἐξέρχονται.

I. $\lambda o\gamma K=\lambda o\gamma.\alpha+\lambda o\gamma\pi+\lambda o\gamma(\pi^{\nu}-1)-\lambda o\gamma(\pi-1)$

II. $\lambda o\gamma.\alpha=\lambda o\gamma K-\lambda o\gamma(\pi^{\nu}-1)-\lambda o\pi+\lambda o\gamma(\pi-1)$

III. $\nu=\dfrac{\lambda o\gamma(\alpha\pi+K(\pi-1))-\lambda o\gamma.\alpha}{\lambda o\gamma\pi}-1$

διότι $K=\dfrac{\alpha\pi(\pi^{\nu}-1)}{\pi-1}$· καὶ $K(\pi-1)=\alpha\pi(\pi^{\nu}-1)=\alpha\pi\pi^{\nu}-\alpha\pi$

καὶ $K(\pi-1)+\alpha=\pi\alpha\pi\pi^{\nu}$, καὶ $\pi^{\nu}=\dfrac{K(\pi-1)+\alpha\pi}{\alpha\pi}$. ὅ ἐςί·

$\nu.\lambda o\gamma\pi=\lambda o\gamma(\alpha\pi+K(\pi-1))-\lambda o\gamma.\alpha-\lambda o\gamma\pi$

καὶ $\nu=\dfrac{\lambda o\gamma(\alpha\pi+K(\pi-1))-\lambda\gamma.\alpha}{\lambda o\gamma\pi}-\dfrac{\lambda o\gamma\pi}{\lambda o\gamma\pi}=$

$\frac{\lambda(\alpha\pi+K(\pi-1))-\lambda.\alpha}{\lambda o\gamma\pi}-1$ κατ' αὐτοὺς λοιπὸν τοὺς τρεῖς τύπους λύονται διάφορα προβλήματα, ὧν τινα καὶ ἡμεῖς χάριν τῶν πρωτοπείρων λύσωμεν.

α'. Ζημιώσας τις, καὶ συμφωνήσας μὲ τοὺς δανειςὰς νὰ ἀποπληρώσῃ τὸ χρέος του εἰς 6 χρόνους, ἀποτίων ἕκαςον χρόνου ἀνὰ 4000 γρ: ὁ δὲ εἰς αὐτοὺς τοὺς χρόνους ἐπλήρωσεν οὐδὲν, καὶ ζητεῖται, πόσων εἶναι χρεώςης εἰς τὸ τέλος τῶν 6 χρόνων· ἐὰν θῶμεν καὶ τὸν τόκον πρὸς 4 τὰ 100 εἰς κεφάλαιον ἐκ τοῦ I: τύπου $\alpha = 4000$, $\nu = 6$, $\gamma = 4$ καὶ $\pi = 1,04$· ἦν δὲ λογ K = λογ 4000 + λογ 1, 4 — λογ 0,04 + λογ $(1,04^6 - 1)$ ἀλλὰ λογ $1,04 - 0,04 = \frac{1,04}{0,04} = 26$· ἄρα λογ K = λογ 4000 + λογ 26 + λογ $(1,04^6 - 1)$· ὅμως λογ $(1,04)^6 =$ $0,0170333 . 6 = 0,1021998$, ᾧ ἀντιςοιχεῖ ἀριθμὸς ὁ $1,265318$· ἄρα $(1,04^6 - 1) = 0,265318$· λοιπὸν λογ $(1,04^6 - 1)$ = λογ $0,265318 = 0,4237667 - 1$

$$\begin{array}{rl} \lambda o\gamma\ 26. = & 1,4149733 \\ \lambda\ 4000 = & \underline{3,6020600} \\ \lambda o\gamma\ K = & 4,4408000 \end{array}$$

καὶ K = 27593,07 γρ:

β'. Ἔλαβέ τις 10000 γρ: ἄνευ τόκου εἰς 20 χρόνους· ζητεῖ ὅμως νὰ μάθῃ πόσα ἐξ αὐτῶν νὰ δώσῃ μὲ τόκον 4 τὰ 100, ὁποῦ εἰς 20 χρόνους νὰ γένωσι 10000 διὰ νὰ τὰ ἀποδώσῃ· λογιζόμενος τὸν κάθε χρόνου τὸν τόκον κεφάλαιον;

Ἐκ τοῦ II τύπου λύεται λογ α = λογ K + λογ $(\pi - 1)$ — λογ π — λογ $(\pi^\nu - 1)$· διότι K = 1000, $\nu = 20$, γ

$= 4$, καὶ $\pi = 1,04$· ἄρα λογ $\alpha =$ λογ $10000 +$ λογ $0,04 -$ λ $1,04^{20} -$ λογ $(1,04^{20} - 1)$· ἐπεὶ δὲ $(1,04)^{20} = 2,19112$ λογαριθμικῶς εὑρημένῳ, καὶ $(1,04^{20} - 1) = 1,9112$· ἡ δὲ δεκαδικὴ ἀποπλήρωσις τοῦ λογ $1,19112 = 9,9240445$· ἄρα

$$\begin{aligned}
\text{λογ } 1,0000 &= 4,0000000\\
\text{λογ } 0,04 &= 0,6020600 - 2\\
\text{δεκ: ἀποπλήρ: λογ } (1,04 - 1) &= 9,9240445\\
\text{δεκ: ἀποπλήρ: λογ } 1,04 &= \underline{9,9829667}\\
\text{λογ } \alpha &= 2,5090712
\end{aligned}$$

καὶ $\alpha = 322,902$, καὶ τόσα πρέπει νὰ δώσῃ εἰς τόκον, διὰ νὰ γίνωσιν εἰς 20 χρόνους 10000.

προβ: ιγ'. Δίδουσι τινὲς α χρήματα πρὸς γ τόκον, καὶ τιθέασι τὸν χρονικὸν τόκον εἰς κεφάλαιον· λαμβάνουσιν ὅμως ἐξ αὐτῶν β χρήματα καθ' ἕκαστον χρόνον, διὰ τὰ χρονικάτων ἔξοδα· εἰς χρόνους ὅμως ν τί μένει λείψανον $= \Lambda$; Ἐὰν ἀπὸ τοῦ α κεφαλαίου δὲν ἐλάμβανον, ἦτον τὸ κεφάλαιον εἰς ν χρόνους $\alpha\pi^{\nu}$ (προβ: η'.). ἐπειδὴ ὅμως εἰς κάθε χρόνον λαμβάνουσι β, εὑρεθήτω τὰ κεφάλαια τοῦ β, καὶ ἀφαιρεθήτωσαν ἀπὸ τοῦ $\alpha\pi^{\nu}$, καὶ τὸ μένον εἶναι τὸ λείψανον· ὅθεν τὸ κεφάλαιον τοῦ β εἰς τὸν πρῶτον χρόνον εἶναι (προβ: 9.) $\beta\pi^{\nu-1}$. εἰς τὸν δεύτερον $\beta\pi^{\nu-2}$· εἰς τὸν τρίτον $\beta\pi^{\nu-3}$ μέχρι τοῦ τελευταίου χρόνου ὅπου τὸ β ἔμεινεν ἄνευ τόκου· ἄρα ἐὰν ἀνάπαλιν ληφθῇ ἡ σειρὰ εἶναι β, $\beta\pi$, $\beta\pi^2$, $\beta\pi^3 \ldots \beta\pi^{\nu-1}$ ἐὰν δὲ καὶ ταύτην τὴν σειρὰν κεφαλαιώσωμεν, ἔσται

$$K=\frac{\tau\pi-\alpha}{\pi-1}=\frac{\beta\pi^{\nu-1}.\pi-\beta}{\pi-1}=\frac{\beta(\pi^\nu-1)}{\pi-1}\cdot$$ τοῦτο δ' ἄφελε ἀπὸ τοῦ $\alpha\pi^\nu$

ἔςαι $\mathrm{I}\Lambda=\alpha\pi^\nu-\dfrac{\beta(\pi^\nu-1)}{\pi-1}$

$$\mathrm{II}\alpha=\frac{\beta(\pi^\nu-1)}{\pi^\nu(\pi-1)}+\frac{\Lambda}{\pi^\nu}$$

$$\mathrm{III}\beta=(\alpha\pi^\nu-\Lambda)\,\frac{\pi-1}{\pi^\nu-1}$$

$$\mathrm{IV}\nu=\frac{\lambda o\gamma((\pi-1)\Lambda-\beta)-\lambda o\gamma((\pi-1)\alpha-\beta)}{\lambda o\gamma\,\pi}$$

διότι $\alpha=\dfrac{\beta(\pi^\nu-1)}{\pi^\nu(\pi-1)}+\dfrac{\Lambda}{\pi^\nu}\cdot$ καὶ $\alpha\pi^\nu=\dfrac{\beta(\pi^\nu-1)}{\pi-1}+\Lambda$

καὶ $\alpha\pi^\nu(\pi-1)=\beta(\pi^\nu-1)+\Lambda(\pi-1)$

$\alpha\pi^\nu(\pi-1)=\beta\pi^\nu-\beta+\Lambda(\pi-1)$

$\alpha\pi^\nu(\pi-1)-\beta\pi^\nu=\Lambda(\pi-1)-\beta$

$\pi^\nu(\alpha(\pi-1)-\beta)=\Lambda(\pi-1)-\beta$

καὶ $\pi^\nu=\dfrac{\Lambda(\pi-1)-\beta}{\alpha(\pi-1)-\beta}$

καὶ $\nu\,\lambda o\gamma\pi=\lambda o\gamma(\Lambda(\pi-1)-\beta)-\lambda o\gamma(\alpha(\pi-1)-\beta)$

καὶ $\nu=\dfrac{\lambda(\Lambda(\pi-1)-\beta)-\lambda o\gamma(\alpha(\pi-\nu)-\beta)}{\lambda o\gamma\,\pi}$

καὶ πάλιν κατ' αὐτοὺς τοὺς τέσσαρας τύπους λύονται διάφορα προβλήματα.

α'. Δανείζει τις ἓν κεφάλαιον 30000 γρ πρὸς 4 τὰ 100· λαμβάνει ὅμως ἀνὰ πᾶν ἔτος 800 γρ: καὶ θέτει τὸν τόκον εἰς κεφάλαιον, πόσον γίνεται εἰς 15 χρόνους; Ἐκ τοῦ πρώτου τύπου $\Lambda = \alpha\pi\nu - \frac{\beta(\pi\nu - 1)}{\pi - 1}$ τὸ μὲν $\alpha = 30000$ τὸ δὲ $\pi = 1,04$, $\beta = 800$· $\nu = 15$· ὅθεν $\Lambda = 30000$· $(1,04)^{15} - \frac{800(1,04)^{15} - 800}{0,04}$· ἐπεὶ ὅμως $(1,04)^{15}$ $= 1,800941$· ἄρα $\Lambda = 38009,41$.

β΄. Θέλει τις νὰ σπουδάσῃ 6 χρόνους, καὶ ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσα χρήματα νὰ δώσῃ εἰς τὸν τόκον πρὸς $3\frac{1}{2}$ τὰ 100, ὥςε νὰ λαμδάνῃ τὸν καθ' ἕκαςον χρόνον διὰ τὰ ἔξοδά του 500 γρ· καὶ νὰ θέτῃ τὸν τόκον εἰς κεφάλαιον, καὶ νὰ ἔλθῃ εἰς τὸ τέλος τῶν 6 χρόνων ἴσα χωρὶς νὰ μείνῃ λείψανον.

Ἐκ τῆς $\alpha = \frac{\beta(\pi^\nu - 1)}{\pi^\nu(\pi - 1)} + \frac{\Lambda}{\pi^\nu}$· ἐπειδὴ ὅμως αὐτοῦ $\Lambda = 0$, ἔςαι $\alpha = \frac{\beta(\pi^\nu - 1)}{\pi^\nu(\pi - 1)}$· ὅθεν $\beta = 500$, $\nu = 6$, $\gamma = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ $\pi = 1,035$ ϗ $\alpha = \frac{500(1,035)^6 - 500}{(1,035)^6\,(0,035)} = \frac{500(1,035)^6}{(1,035)^6(0,035)} - \frac{500}{(1,035)^6(0,035)} = \frac{500}{0,035} - \frac{500}{(1,035)^6(0,035)} = 14286$ $- \frac{14286}{(1,035)^6} = 2662$ γρ· καὶ τόσα εἶναι ἱκανὰ διὰ ἓξ χρόνους· κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκομεν ἐάν τις ἔχῃ ἓν σιτηρέσιον, ἢ εἰσόδημα χρονικὸν εἰς χρόνους διωρισμένους δηλ: 6, καὶ θέλει νὰ τὸ πωλήσῃ διὰ νὰ λάδῃ ἀμέσως αὐτὸ τὸ εἰσόδημα, ἀφ' οὗ διωρίσῃ τὸν τόκον πρὸς τὰ 100 δηλ $3\frac{1}{2}$, καὶ ζητῇ νὰ μάθῃ πόσον ἀξίζει αὐτὸ, διὰ νὰ μὴν ἀπατηθῇ· χρησιμεύει μάλιςα τοῦτο τὸ πρόδλημα εἰς τὰ ἐνοίκια τῶν ὑποςατικῶν κ. τ. λ.

γʹ. Πωλεῖται ἓν ὑποςατικόν· καὶ ὁ μὲν Αʹ δίδει 34500 γρ: μετρητά· ὁ δὲ Β 38000 γρ: πλὴν μόνον 6000 μετρητά, καὶ τὰ λοιπὰ ἀνὰ 8000 καθʼ ἕκαςον χρόνον· ὁ δὲ Γ δίδει 40000 γρ: πλὴν μόνον 4000 μετρητὰ, καὶ τὰ λοιπὰ ἀνὰ 6000 τὸν χρόνον· ζητεῖται τὶς τῶν τριῶν δίδει περισσότερα; Ἐὰν ὑποθῶμεν 5 τὰ 100, ἀπὸ τοῦ II τύπου εὑρίσκομεν τὸ τοῦ δευτέρου πρὸς 5 τὰ 100 πόσα εἶναι τὰ μετρητά· διότι $\beta=8000$, $\nu=4$, $\gamma=5$ καὶ $\pi=1,05$ · $\Lambda=0$ · ἄρα $a=\frac{8000(1,05)^4-8000}{(1,05)^4(0,05)}=160000$ $-\frac{160000}{(1,05)^4}=28367,6$· δίδει δὲ καὶ μετρητὰ 6000, ὅλα $6000+28367,6=34367,6$.

Ἐξετάζοντες καὶ τὰ τοῦ τρίτου ἐν ᾧ $\beta=6000$, $\nu=6$, $\pi=1,05$ · καὶ $\Lambda=0$ · εὑρίσκομεν $a=\frac{6000(1,05)^6-6000}{(1,05)^6(0,05)}$ $=30454,15$· ἔδιδε δὲ καὶ μετρητὰ 4000· ὅλα ὁμοῦ λοιπὸν $4000+30454,14=34454,14$· ἄρα ὁ Α ἔδιδε περισσότερα· τὰ μάλιςα χρησιμεύει τοῦτο εἰς τὰς ἐμπορίας· κτλ.

δʹ. Ὑπόσχεταί τις νὰ πληρώσῃ 1000 γρ: εἰς 5 χρόνους πρὸς 5 τὰ 100, πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ τὸν καθʼ ἕκαςον χρόνον, ἕως εἰς 5 χρόνους νὰ ξεπληρωθῇ;

Ἐὰν τὴν χρονικὴν πληρωμὴν ὡς εἰσόδημα χρονικὸν νοήσωμεν ἀπὸ ἓν κεφάλαιον, $a=1000$, εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸν III τύπου $\beta=(a\pi^\nu-\Lambda).\ \frac{\pi-1}{\pi^\nu-1}=\frac{a\pi^\nu(\pi-1)}{\pi^\nu-1}$ ὅτι $\Lambda=0$ καὶ $\pi=1,05$ · ἄρα $\beta=\frac{1000(1,05)^5(0,05)}{(1,05)^5-1}=$ 230, 97 γρ: πρέπει τὸν καθʼ ἕκαςον χρόνον νὰ πληρώνῃ.

ε'. Ἔχειτις ἓν κεφάλαιον 100000 γρ: εἰς τόκον πρὸς 5 τὰ 100, πλὴν ὁ τόκος τούτων δὲν ἐξαρκεῖ εἰς τὰ ἔξοδά του, διότι χρειάζεται 6000 γρ: λοιπὸν μετὰ τοῦ τόκου σηκώνει ὁμοῦ καὶ κεφάλαιον διὰ τὰ ἔξοδά του· ζητεῖται εἰς πόσους χρόνους τελειώνει τοῦτο ὅλον τὸ κεφάλαιον;

Αὐτοῦ ζητεῖται τὸ ν ἀπὸ τὸν τέταρτον τύπον.

$$\nu = \frac{\lambda o\gamma((\pi-1)\Lambda-\beta) - \lambda o\gamma((\pi-1)\alpha-\beta)}{\lambda o\gamma\,\pi}$$. καὶ ἔςαι

$\Lambda = 0$, $\pi = 1{,}05$, $\beta = 6000$ $\alpha = 100000$· ἄρα

$$\nu = \frac{\lambda o\gamma - 6000 - \lambda o\gamma(0{,}05)\ 100000 - 6000}{\lambda o\gamma\ 1{,}05}$$

$$= \frac{\lambda o\gamma - 6000 - \lambda o\gamma\ (5000 - 6000)}{\lambda o\gamma\ 1{,}05} =$$

$$\frac{\lambda o\gamma - 6000 - \lambda o\gamma - 1000}{\lambda o\gamma\ 1{,}05} = \lambda o\gamma \left(\frac{-6000}{-1000}\right):$$

$$\lambda o\gamma\ 1{,}05 = \frac{\lambda o\gamma\ 6}{\lambda 1{,}05} = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211893} = 36$$ χρόνοις σχεδὸν. καὶ μένειτι. αὐτὸ δὲ τὸ μένον εὑρίσκομεν εἰς τὸν 1 τύπον, ἐὰν θῶμεν $\alpha = 100000$, $\beta = 6000$, $\pi = 1{,}05$, $\nu = 36$· εὑρίσκεται αὐτοῦ $\Lambda = 4163{,}2$ γρ:

ς'. Ἄνθρωπός τις ἐδανείσθη παράτινος 20000 γρ: καὶ ἔδωκεν ὑποςατικόν τι, νὰ νέμηται ὁ δανείσας τὸ εἰσόδημα αὐτοῦ, τοῦτο δὲ φέρει εἰσόδημα χρονικὸν 1500 γρ: καθαρόν· ζητεῖται τοίνυν εἰς πόσους χρόνους πρέπει ὁ δανείσας νὰ κρατήσῃ τὸ ὑποςατικὸν, ἕως οὗ νὰ ἀποπληρωθῇ τὸ χρέος, ἐὰν ὁ τόκος 5 εἰς τὰ 100 νομισθῇ, καὶ ὁ τόκος εἰς ἕκαςον χρόνον νὰ λογίζηται κεφάλαιον; λύεται ἀπὸ τοῦ IV τύπου.

$$\nu = \frac{\lambda o\gamma((\pi-1))(\Lambda-\beta)-\lambda o\gamma((\pi-1)\alpha-\beta)}{\lambda o\gamma\ \pi}$$ · ἐπειδὴ ὅμως $\Lambda = 0$ καὶ $\alpha = 20000$ καὶ $6 = 1500$ καὶ $\pi = 1{,}05$· ἴσαι $\nu = \frac{\lambda o\gamma - 1500 - \lambda - 500}{\lambda o\gamma\ 1{,}05} = \left(\lambda o\gamma \cdots \frac{-1500}{-500}\right) : \lambda o\gamma\ 1{,}05 = \frac{\lambda\ 3}{\lambda\ 1{,}05} = \frac{4771213}{211893} = 22$ χρόνοις σχεδόν.

Ἐὰν δ' εἰς τὸν τύπον I θῶμεν $\nu = 22$ $\alpha = 20000$, $\beta = 1500$ καὶ $\pi = 1{,}05$· εὑρίσκομεν $\Lambda = 747{,}4$ γρ: ὅπου πρέπει νὰ ἀποδώσῃ ὁ δανεισθεὶς, καὶ νὰ ἐπαναλάβῃ τὸ ὑποςατικόν του.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ.

Περὶ Ἀπείρου.

§. 655. Ἄπειρον κοινῶς λέγομεν, οὗ τινος ἀγνοοῦνται τὰ πέρατα, ἢ ἐκεῖνο, ὁποῦ πέρατα δὲν ἔχει, ἤτοι πρᾶγμα ἀπερίοριςον· καὶ ἐπειδὴ πᾶν τὸ ἀπερίοριςον εἶναι καὶ ἀπαράςατον, ἄρα καὶ τὸ ἄπειρον ἀπαράςατον, καὶ ἐν τῷδε τῷ παντὶ δὲν ὑφίςαται· διότι ὅ,τι ἐν τῷ κόσμῳ τῷδε ὑφίςαται, εἶναι περιωρισμένον, καὶ πεπερασμένον, καὶ ἑπομένως αἰσθητόν· λοιπὸν τὸ ἄπειρον εἶναι οὐ μόνον ἀπαράςατον, ἀλλὰ καὶ νοητὸν, διότι τῇ αἰσθήσει πίπτει οὐδέποτε· ἀλλ' ἐν τοῖς ἔμπροσθεν εἴπομεν, ὅτι τὸ ἀπερίοριςον εἶναι καθόλου, γενικὸν, καὶ ἐσωτερικὸν (§. 5.)· ἄρα καὶ τὸ ἄπειρον εἶναι καθόλου, γενικὸν, καὶ ἐσωτερικὸν, διὰ τοῦτο καὶ μόνον νοητόν· εὕρομεν δὲ καὶ τὸν ἀριθμὸν καθόλου, νοητὸν, καὶ ἐσωτερικὸν (§. 7.)· ἄρα παρομαρτεῖ καὶ τῷ ἀριθμῷ, καὶ συγγενεύει τὸ ἄπειρον· διότι εἰς πολλὰ μέρη ἐν τοῖς προηγουμένοις εἰς τὸ ἄπειρον κατηντήσαμεν· δηλ: εἰς πολλὰ μέρη τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ἐλέγομεν, ὅτι ἡ διαίρεσις γίνεται ἄνευ τέρματος, καὶ εἰς τὰς σειρὰς τοῦτο εὕρομεν, ὅτι εἰς μὲν τὴν ἀριθμητικὴν διὰ τῆς διαφορᾶς καὶ τοῦ πρώτου ὅρου συνεχίζεται ἡ σειρὰ ἄνευ τέρματος· εἰς δὲ τὴν γεωμετρικὴν, διὰ τοῦ πηλίκου ὁμοίως, καὶ τοῦ πρώτου ὅρου, καὶ τὰ λοιπά· καὶ ἐν ἀρχῇ αὐτὴ ἡ παράςασις τοῦ ἀριθμοῦ ἄλλως δὲν ἐγίνετο, εἰμὴ διὰ περιόδων ἄνευ τέρματος· διὸ φύσις τοῦ ἀριθμοῦ ὡς καθόλου, καὶ ἐσωτερικοῦ, τὸ νὰ εἶναι ἄπειρος, ἐπερατοῦτο δ' ὑπὸ τῶν διορισμῶν, ὡς ἐλέγομεν. Καὶ περὶ μὲν τῶν διορισμῶν αὐτοῦ ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἴσως ἱκανὰ εἴπομεν, ἤδη δὲ περὶ τοῦ ἀπείρου αὐτοῦ εἰς τὸ παρὸν βιβλίον ἰδίως διαληψόμεθα.

§. 656. Ἄπειρον δ' ἡμεῖς λέγοντες δὲν νοοῦμεν τὸ ἀσχέτως, καὶ ἀπολύτως ἄπειρον, τὸ διὰ πάντων, καὶ κατὰ πάντα, καὶ ἐν πᾶσιν ἄπειρον, τὸ κατὰ τὴν ἀρχὴν, καὶ τὸ τέλος ἄπειρον, ὅπερ ἡμεῖς τῷ λατρευτικῷ, καὶ προσκυνητῷ Θείῳ προσνέμομεν· ἀλλ' ἄπειρον νοοῦμεν ἐνταῦθα τὸ σχετικῶς ἄπειρον, τὸ πρός τι μὲν ἄπειρον, πρός τι δὲ πεπερασμένον· κυρίως τὸ ὑπὸ διορισμῶν περατούμενον· οὕτω τὸ φῶς πρὸς μὲν τὸν λύχνον, ἀφ' οὗ ἐκπηγάζει, πεπερασμένον, ἐὰν δὲ μὴ ἐν τῷ μεταξὺ διορισμοί τινες, ἀπείρως ἐκτείνεται· οὕτω καὶ τὸ ποσὸν πρὸς τὸ τέλος διὰ τῆς προσθέσεως ἀπείρως αὐξάνει, πρὸς τὴν ἀρχὴν ὅμως, ἀφ' οὗ αὔξειν ἄρχεται, πεπερασμένον· ὁ νοῦς δὲ πρὸς τὴν ἀρχὴν μὲν πεπερασμένος, καθ' ὃ δὲ τὸ πέρας ἄχρις οὗ ἐκτείνεται ἀγνοοῦμεν, ἄπειρος· καὶ τοιαῦτα ἐν τῇ φύσει πλεῖςα ἄπειρα, ὡς ὅλα τὰ καθόλου, γενικὰ, καὶ ἐσωτερικά.

§. 657. Οὐσιῶδες ἦν τοῦ ποσοῦ τὸ αὔξησιν καὶ μείωσιν ἐπιδέχεσθαι· ἄρα καὶ τὸ ποσοτικὸν ἄπειρον διχῶς γίνεται ἢ κατ' αὔξησιν, ἢ κατὰ μείωσιν· κατ' αὔξησιν ἄπειρον γίνεται, ὡς ὅταν διὰ τῆς προσθέσεως, ἢ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἄπειρον τὸ ποσὸν γίνεται, ὡς
$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ καὶ καθεξῆς ἐπ' ἄπειρον ἄνευ

τέρματος· ὁμοίως διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ 2, ἢ 3, κτ. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... καὶ καθεξῆς ἄνευ τέρματος· καὶ τοῦτο τὸ ἄπειρον καλοῦμεν ἀπείρως μέγιςον, καὶ διὰ τοῦδε τοῦ σημείου ∞ χαρακτηρίζουσιν, ὡς 3, 9, 27, 81, ... ∞· κατὰ δὲ μείωσιν ἀπείρου γίνεται διὰ τῆς διαιρέσεως, ὅταν ἕν τι διχάζωμεν, καὶ ἔτι ἓν τούτων ὑποδιχάζωμεν, καὶ ἔτι ἓν τούτων εἰς δύο τέμνωμεν, καὶ οὕτως ἀκολουθοῦμεν εἰς ἄπειρον τὴν διαίρεσιν οὕτω $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \ldots \frac{1}{\infty}$ διότι τοῦτο $\frac{1}{\infty}$ σημαίνει, ἐὰν ἄπειροι ἄνθρωποι διέλωσι τὴν μονάδα, λαμβάνουσιν ἀπείρως ἐλάχιςον μέρος· διὸ καὶ τὸ τοιοῦτον ἄπειρον ἀπείρως ἐλάχιςον ὀνομάζουσι, καὶ ἀπειροςὸν ἰδιαίτερον· χαρακτηρίζουσι καὶ τοῦτο μὲ τὸ σημεῖον $\frac{1}{\infty}$, καὶ καλεῖται ἀπείρως ἐλάχιςον· ὅθεν καὶ τὸ ἀπείρως μέγιςον ∞ εἶναι πάντη ἐναντίον ἀπὸ τὸ ἀπείρως ἐλάχιςον $\frac{1}{\infty}$· παραδείγματος χάριν, ἐὰν θέλω διὰ τοῦ δακτύλου νὰ κινήσω ἓν ὄρος, ἡ μὲν ἀνθίςασις τοῦ ὄρους πρὸς τὴν δύναμιν τοῦ δακτύλου μου εἶναι ἀπείρως μεγίςη, ἡ δὲ δύναμις τοῦ δακτύλου μου πρὸς τὴν ἀνθίςασιν ἐκείνου εἶναι ἀπείρως ἐλαχίςη· καὶ ἐκείνη ἐκφράζεται διὰ τοῦ ∞, αὕτη διὰ τοῦ $\frac{1}{\infty}$· διὸ καὶ λέγουσιν ἀπείρως μέγιςον ποσὸν εἶναι ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου μεῖζον ἕτερον νοῆσαι οὐ δυνάμεθα, καὶ ἀπείρως ἐλάχιςον ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ἔλαττον ἄλλο νοῆσαι οὐ δυνάμεθα.

§. 658. Εἰς πολλὰ μέρη εἴπομεν, ὅτι καὶ τὸ μηδενικὸν αὐτὸ περιέχει ἀπείρους παράγοντας (§ 15.) ὡς 5.0=0 καὶ α.0=0, ὅ,τι ἂν σημαίνῃ τὸ α ἀριθμὸν καταφατικὸν, ἢ ἀποφατικὸν, ἀκέραιον, ἢ κεκλασμένον, πραγματικὸν καὶ φανταςικόν· ἔτι τὸ ἄπειρον εἶναι τι ἄνευ πέρατος, ἤτοι ἀπεριόριςον· τοῦτο δὲ τὸ ἄπειρον εἶναι πρός τι πεπερασμένον, πρός τι δ' οὔ (§. 658.)· ἀόριςον ἄρα· λοιπὸν καὶ τὰ ἀόριςα προβλήματα εἰς αὐτὸ τὸ βιβλίον περιλαμβάνονται· διὰ τοῦτο καὶ τὸ παρὸν βιβλίον περὶ ἀπείρου ἐπιγράφομεν· εἰς τρία τμήματα σχίζεται, καὶ τὸ μὲν πολυπραγμονεῖ αὐτὸ τὸ ἄπειρον, ἐν ᾧ ἀπείρως ἐκτυλίεται, καὶ εἰς ἀπείρους σειρὰς παρίςαται· τὸ δὲ πολυπραγμονεῖ αὐτὸ τὸ μηδὲν, καθ' ὃ ἀπὸ ἀπείρων παραγόντων συνίςαται· τὸ δὲ τρίτον αὐτὰ τὰ ἀόριςα προβλήματα· καὶ τὸ μὲν ἐπιγράφομεν περὶ τῆς τοῦ ἀπείρου ἐκτυλίξεως, τὸ δὲ περὶ εὑρέσεως τῶν παραγόντων τοῦ μηδενικοῦ, τὸ δὲ τελευταῖον περὶ τῶν ἀορίςων προβλημάτων αὐτῶν.

ΤΜΗΜΑ Α'.

Περὶ τῆς τοῦ Ἀπείρου ἐκτυλίξεως.

§. 659. Εἰς τὸν παράγραφον (§. 657.) ἔγνωμεν τὴν ἐκδοχὴν τοῦ ἀπείρου, καὶ ὅτι ἢ εἶναι ἀπείρως μέγιςον, ἢ ἀπείρως ἐλάχιςον, καὶ ἄμφω ἐσωτερικὰ, ἤτοι ἀπαράςατα· τὸ δ' ἐσωτερικὸν παρίςαται ἀπείρως κατὰ νόμους τινας, ἢ κατὰ περιόδους (§. 14.)· τὸ δ' ἀπείρως κατὰ νόμους τινας παριςάμενον, πάντως εἰς σειρὰν ἄπειρον παρίςαται, οὕτω τὸ ἀπείρως μέγιςον εἰς τήνδε τὴν σειρὰν $1+2+3+4+5+6 \ldots \infty$. οὕτω καὶ τὸ ἀπείρως ἐλάχιςον εἰς τήνδε $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\frac{1}{\infty}$· ἄρα τὸ παρὸν τμῆμα εἰς σειρὰς οὕτως ἀπείρως καταγίνεται· πλὴν πρὶν περὶ τοιούτων πραγματευθῶμεν, εἴπομεν πρῶτον τίνα ἰδιώματα ἔχει τὸ ἄπειρον εἰς τὴν σύναψιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμὸν, καὶ διαίρεσιν.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Α'.

Περὶ τῶν τεσσάρων ἐργασιῶν τῶν ἀπείρως μεγίςων καὶ ἐλαχίςων.

Σημείωσις. Καλὸν ἡμῖν ἐφάνη πρὶν νὰ εἰσέλθωμεν εἰς αὐτὰς τὰς ἐργασίας νὰ πολυπραγμονήσωμεν, ὅτι καὶ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ εὐκόλως εἰς τὴν ἰδέαν τοῦ ἀπείρου ἐρχόμεθα· ἐὰν θῶμεν εἰς τὸ κλάσμα τόδε $\frac{1}{Z}$ τὸν παρονομαςὴν νὰ ἐλαττοῦται μᾶλλον καὶ μᾶλλον, ἕως οὗ νὰ καταντήσῃ σχεδὸν ὡς μηδὲν, οὕτω $\frac{1}{0}$· καὶ ἐπειδὴ ὅσῳ ὁ παρονομαςὴς ἐλαττοῦται, αὔξει τὸ πηλίκον κατὰ τὸ πολλαπλοῦν (§. 101.)· ἄρα ἐὰν ἀπείρως ἐλαττωθῇ ὁ παρονομαςὴς, τὸ πηλίκον γίνεται ἄπειρον, καὶ ἔςαι $\frac{1}{0}=\infty$· διότι ἔςω $\frac{1}{2}$, ἐὰν ἡμισεύσωμεν τὸν παρονομαςὴν ἔςαι $\frac{1}{1}=1$ διπλασιάζεται τὸ πηλίκον· ἐὰν δ' ὁ παρονομαςὴς γίνῃ $\frac{1}{2}$, ἔςαι $\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$· ἐὰν δ' οὗτος $\frac{1}{4}$ ἔςαι $\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$· ἐὰν δ' οὗτος $\frac{1}{8}$ ἔςαι $\frac{1}{\frac{1}{S}} = S$, καὶ ἐὰν οὗτος ἀπείρως ἐλάχιςος $\frac{1}{\infty}$ ἔςαι $\frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \infty$· ἀλλὰ τοῦτο $\frac{1}{\infty}$ ὡς μηδὲν ἐκλαμβάνεται· ἄρα $\frac{1}{0} = \infty$· ὅθεν ὅταν τὸ μηδὲν ἀριθμὸν διαιρῇ, δίδει πηλίκον ἀπείρως μέγιςον, καὶ εἶναι τὰ ἑξῆς ἴσα $\frac{1}{0} = \infty = \frac{1}{\frac{1}{\infty}}$, καὶ ἕκαςον ἀνθ' ἑτέρου λαμβάνεται· ὅτι δὲ τοῦτο $\frac{1}{0} = \infty$ οὕτω δείξομεν· ἔςω τὸ κλάσμα $\frac{1}{Z} = \frac{1}{a-\chi}$· ἐὰν $Z = a - \chi$ θῶμεν· ἐὰν δὲ $a = 1$, καὶ $\chi = 1$ ἔςαι $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$; εὑρεθήτω τὸ πηλίκον $\frac{1}{1-1}$ κατὰ τοὺς νόμους τῆς διαιρέσεως.

$$
\begin{array}{l}
1 : 1 - 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \;\ldots\; \text{κτ.} \\
\underline{-1 - 1} \\
\quad\quad + \\
\quad\quad +1 \\
\quad\quad \underline{-1 - 1} \\
\quad\quad\quad\quad + \\
\quad\quad\quad\quad +1 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{-1 - 1} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad + \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad +1 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{-1 - 1} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad +1 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{-1 - 1} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad +1
\end{array}
$$

καὶ οὕτως ἐξέρχεται ἡ σειρὰ $1+1+1+1+1 \ldots \infty$ ἐπ' ἄπειρον· ἄρα $\frac{1}{0}=\infty$· ὁμοίως καὶ τόδε $\frac{a}{0}=\frac{1}{0}\cdot a=\infty a$, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

§. 660. Πρέπει καλῶς νὰ νοήσωμεν τὴν ἀπείρως μεγίστην ποσότητα, ἥτις οὐδεμίαν μεταβολὴν πάσχει, ἐάν τε ἀριθμὸς πεπερασμένος αὐτῷ προστεθῇ, ἐάντε ἀφαιρεθῇ· ἐὰν δηλ: προστιθεμένου ἀριθμοῦ τινος μεταβάλλεται, ἤθελεν εἶναι οὕτω $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \ldots \infty . \infty+a$ δηλ: ἦτον ἡ σειρὰ μέχρι τινος ὅρου, ὅπου τὸ ἄπειρον ἐγίνετο, καὶ ἐπέκεινα ὅρος ἕτερος προσετέθη, ὅπερ ἐναντίον ἐκείνου, ὁποῦ ἡμεῖς εἴπομεν, ὅτι οὐδὲ νοῆσαι ἐκτὸς αὐτοῦ μέγιστον ἀριθμὸν δυνάμεθα (§. 657.), καὶ ἦν τὸ ἄπειρον οὐχὶ τοῦτο ∞, ἀλλὰ $\infty+a$, καὶ ἔδει τοῦτο $\infty+a=\infty$, καὶ $a\beta+\gamma+\frac{\beta\delta}{a}+\infty=\infty$ κτ. ὁμοίως καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀπείρου ἀφαιρεθῇ τί πεπερασμένον, ἡ ποσότης ἡ ἄπειρος δὲν μεταβάλλεται· διότι ἐὰν μετεβάλλετο, ἔδει εἶναι πεπερασμένην, ἀφ' ἧς ἀφαιρεῖταί τι· καὶ εἰς τὸ ἄπειρον πέρατα τίθεμεν, καὶ εἶναι ἅμα πεπερασμένον, καὶ ἄπειρον, ἀντίφασις προφανής· ὅθεν $\infty-a=\infty$, καὶ $\infty-\frac{\beta}{\gamma}-\delta\epsilon=\infty$· καὶ $a+\beta\gamma-\delta\epsilon+\infty+3+567=\infty$· καὶ φανερὸς ὁ κανών. „Ἐὰν τῷ ἀπείρῳ πρόσκεινται ποσότητες μετὰ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$ ὅλαι αὗται ἀπαλείφονται.“

§. 661. Ἐπεὶ δ' ἀπείρως ἐλαχίστη ποσότης εἶναι, ὅταν ἡ μονὰς ἔχῃ παρονομαστὴν ἀπείρως μέγιστον οὕτω $\frac{1}{\infty}$·

ἔσται καὶ $\frac{a}{\infty} = \frac{1}{\infty} \cdot a$, ἤτοι τὸ ἀπείρως ἐλάχιστον μόριον τοῦ a, ἤτοι τὸ στοιχεῖον αὐτοῦ, ὅπερ οὔτε προστιθέμενον, οὔτε ἀφαιρούμενον εἰς πεπερασμένην ποσότητα ἐπιφέρει μεταβολὴν εἰς αὐτήν· ὅθεν καὶ $1 + \frac{1}{\infty} = 1$. καὶ $1 - \frac{1}{\infty} = 1$· διότι ἐὰν δὲν ἦτον $1 + \frac{1}{\infty} = 1$, ἔδει εἰς τὴν ἀπείρως ἐλαχίστην ποσότητα διαφοράν τινα ἐνεῖναι, καὶ δὲν ἦτον ἀπείρως ἐλάχιστον μόριον, ὡς ἡμεῖς ἐξελάβομεν. (§. 651). λοιπὸν καὶ $a \pm \frac{1}{\infty} = (1 \pm \frac{1}{\infty})a = a.1 = a$· ὅθεν καὶ ὁ κανὼν „ἡ „ἀπείρως ἐλαχίστη ποσότης ὡς μηδὲν νομίζεται πρὸς τὰς „πεπερασμένας ποσότητας, εἴτε ἀποφατικῶς εἴτε καταφατικῶς ἐκλαμβανομένη.“

Σημειώσεις. Ὅλοι κοινῶς τὴν Μαθηματικὴν εἶναι τὴν ἀποδεικτικωτάτην λέγουσιν, ἡ δὲ λαβεῖν ἄπειρα οὐκ αἰδεῖται, καὶ ἀδύνατα· ὡς $\sqrt[2\nu]{-a}$· διότι δι᾽ αὐτῶν ἐπιφέρει ἀποδείξεις καὶ ὠφελείας εἰς τὰς μεθόδους τὰς ἰσχυράς· οἱ δὲ φυσικοὶ, καὶ ὑλισταὶ οἱ ταῖς αἰσθήσεσι μόνον ἑπόμενοι, ἕως οὗ ταῦτα διευλαβοῦνται, δικαίως εἰς τὰς ἐπιστήμας χωλαίνουσιν, ἐὰν μὴ τὸν ἄπειρον νοῦν ἡγεμόνα τῶν αἰσθήσεων ποιήσωσι· διότι οὗτοι ἀγνοοῦσιν, ὅτι τὰ αἰσθητήρια ὄργανα εἶναι καὶ τρόποι, δι᾽ ὧν ὁ ἄπειρος νοῦς περιορίζεται, καὶ εἰς ἕν τι περατοῦται, ὡς καὶ ὁ ἐμὸς κάλαμος περιορίζει, εἰς τὸ γράφειν τοὺς χαρακτῆρας, τὴν ἄπειρον κατὰ τὰς εὐθύνσεις τῆς χειρός μου δύναμιν.

§. 662. Ἐθίζουσιν οἱ Μαθηματικοὶ τὰς δυνάμεις τῶν ἀπείρων τάξεις νὰ καλῶσι· δηλ: ∞^2 καλοῦσι δευτέρας τάξεως, ∞^3 τρίτης τάξεως, ∞^4 τετάρτης τάξεως, ∞^μ μ τάξεως· ἐὰν δηλ: ἀπείρους κύκλους νοήσωμεν, παρίςανται διὰ τοῦ ∞· ἐπεὶ δὲ καὶ ἕκαςος κύκλος συνίςαται ὑπὸ ἀπείρων γραμμῶν, ἄρα ὅλων τούτων τῶν γραμμῶν τὸ κεφάλαιον παρίςαται οὕτω ∞^2· εἰς δὲ τὰ ἀπειροςὰ δείξομεν καὶ τὰς ἀνωτέρας ἔτι τάξεις αὐτῶν· καὶ γίνονται αἱ τάξεις αὗται κατὰ σειρὰν ∞, ∞^2, ∞^3, ∞^4, ∞^5. κτ. δηλ: τὸ τῆς πρώτης τάξεως ἄπειρον ἀπειράκις ἐμπεριέχεται εἰς τὸ τῆς δευτέρας τάξεως, διότι $\frac{\infty^2}{\infty}=\infty$· ἢ τὸ τῆς δευτέρας τάξεως ἄπειρον ἀπείρως περιέχει τὸ τῆς πρώτης· ὁμοίως καὶ τὸ τῆς τρίτης ἄπειρον ἀπείρως ἐμπεριέχει τὸ τῆς δευτέρας, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως· ὅθεν πᾶν ἄπειρον κατωτέρας τάξεως, ἐάν τε προςεθῇ, ἐάν τε ἀφαιρεθῇ εἰς ἄπειρον ἀνωτέρας τάξεως, οὐδεμίαν ἐπιφέρει μεταβολήν· διότι $\infty^2 + \infty = (\infty + 1),\infty$ · ἀλλὰ $\infty + 1 = \infty$ · ἄρα καὶ $\infty^2 + \infty = \infty^2$ · καὶ ἔτι $\infty^2 - \infty = (\infty - 1)\infty$ · ἐπεὶ δὲ καὶ $\infty - 1 = \infty$, ἄρα καὶ $\infty^2 - \infty = \infty^2$ · ὅθεν τὰ ἄπειρα τῶν ὑποδεεςέρων τάξεων, ὅταν παρευρίσκωνται εἰς τὰ ἄπειρα τῶν ἀνωτέρων τάξεων μετὰ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$, ἀπαλείφονται χωρὶς νὰ χαλάσῃ τὸ σημαινόμενον· $\alpha\infty + \infty^2\beta - \infty = \infty^2\beta$, καὶ $\infty^3 - \infty^4 + \infty^2 = -\infty^4$ · κτ.

§. 663. Τάξεις τινὲς εὑρίσκονται καὶ εἰς τὰς ἀπείρως ἐλαχίςας ποσότητας· πρώτης τάξεως καλεῖται τόδε $\frac{1}{\infty}$, δευτέρας $\frac{1}{\infty^2}$, τρίτης $\frac{1}{\infty^3}$, καὶ καθεξῆς κατὰ τὴν ἑξῆς σειρὰν $\frac{1}{\infty}, \frac{1}{\infty^2}, \frac{1}{\infty^3}, \frac{1}{\infty^4}, \frac{1}{\infty^\mu}$· πλὴν αὐτοῦ τὸ ἀπειροςὸν τῆς πρώτης τάξεως ἀπείρως περιέχει τὸ τῆς δευτέρας τάξεως, καὶ τόδε τὸ τῆς τρίτης τάξεως κτ. διὸ καὶ ἡ ἀνωτέρα τάξις τῶν ἀπειροςῶν πρὸς τὴν κατωτέραν ὡς οὐδὲν λογίζεται, καὶ ἀπαλείφεται· παραδ: χαρ: $\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}=$ $\frac{1}{\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{\infty}\right)=\frac{1}{\infty}\left(1+\frac{1}{\infty}\right)$· ἀλλὰ $1+\frac{1}{\infty}=1$ (§. 660) ἄρα καὶ $\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}=\frac{1}{\infty}$, ὁμοίως καὶ $\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}=\frac{1}{\infty}$ $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)=\frac{1}{\infty}$. ὅθεν, ὅταν ἀπειροςὰ ἀνωτέρων τάξεων πρόσκεινται μετὰ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$ εἰς ἀπειροςὰ κατωτέρων τάξεων, ἀπαλείφονται· διότι $\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^4}=\frac{1}{\infty}$ καὶ $\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}=\frac{1}{\infty^2}$, ὁμοίως καὶ εἰς τὰ λοιπά.

§. 664. Τὰ ἄπειρα τά τε μέγιςα καὶ ἐλάχιςα πολλαπλασιάζονται καὶ διαιροῦνται κατὰ τοὺς νόμους τῆς διαιρέσεως, καὶ πολλαπλασιασμοῦ· ὅθεν $2.\infty = 2\infty$ δηλ: δὶς ἐκλαμβάνεται τὸ ἀπείρως μέγιςον, ὡς ὅταν νοήσωμεν ἀπείρους ἀνθρώπους, ἄρα αἱ χεῖρες αὐτῶν δὶς ἄπειροι· ὁμοίως καὶ $\alpha\infty$ καὶ $\infty^2(\alpha-\beta)=\alpha\infty^2-\infty^2\beta$· καὶ $\left(\gamma-\frac{\delta}{2}+3\right)\infty=\gamma\infty-\frac{\delta\infty}{2}+3\infty$ κτ. ὁμοίως καὶ $\alpha:\infty=\frac{\alpha}{\infty}$, καὶ $\infty:\beta=\frac{\infty}{\beta}$ κτ. τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐπὶ τῶν ἀπείρως ἐλαχίστων $\alpha.\ \frac{1}{\infty}=\frac{\alpha}{\infty}$ καὶ $\frac{1}{\infty}(2+\beta\gamma-\delta)=\frac{2}{\infty}+\frac{\beta\gamma}{\infty}-\frac{\delta}{\infty}$. καὶ τὴν τετάρτην ἀνάλογον διὰ τῶν ἀπείρων εὑρίσκομεν $\alpha:\infty=\beta:\frac{\beta\infty}{\alpha}$, καὶ σειρὰς γεωμετρικὰς συνεχίζομεν, ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος $\frac{\alpha}{\infty^4}$ δοθῇ καὶ τὸ πηλίκον ∞ οὕτω $\frac{\alpha}{\infty^4},\frac{\alpha}{\infty^3},\frac{\alpha}{\infty^2},\frac{\alpha}{\infty},\alpha,\alpha\infty,\alpha\infty^2,\alpha\infty^3,$ $\alpha\infty^4,\alpha\infty^5$ κτ. καὶ ἔτι $\frac{\alpha\infty^2}{\infty}=\alpha\infty$. καὶ ἔτι $\frac{\infty\beta}{\infty\beta}=1$.

§. 665. Τὸ γινόμενον ἀπὸ ἀπείρως μεγίστου, καὶ ἀπείρως ἐλαχίστου ἐξισοῦται τῇ μονάδι· ὡς δύο ἀριθμοὶ ἀντιστρεπτικοὶ (§. 648)· διότι $\infty\cdot\frac{1}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}=1$. Τὸ δὲ γινόμενον ὑπὸ ἀριθμοῦ πεπερασμένου καὶ ἀπείρως ἐλαχίστου εἶναι ἴσον τῷ μορίῳ, ἢ τῷ στοιχείῳ αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha.\ \frac{1}{\infty}=\frac{\alpha}{\infty}$. ὅθεν διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ στοιχεῖον τινος ἀριθμοῦ, ἢ ἄλλης ποσότητος β, διαιροῦμεν αὐτὴν διὰ τοῦ ∞ οὕτω $\frac{\beta}{\infty}$.

§. 666. Αἱ ὁμοταγεῖς ἄπειροι ποσότητες συνάπτουται καὶ ἀφαιροῦνται κατὰ τοὺς νόμους τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, ὡς καὶ αἱ φανταςικαὶ ποσότητες, ὡς $\infty + \infty = 2\infty$, καὶ $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = \frac{2}{\infty}$. $8\infty - 6\infty = 2\infty$.

Σημείωσις.

Σχεδὸν πάντες λέγουσιν, ὅτι τὸ ἄπειρον ἐνταῦθα δὲν εἶναι ποσότης, ἐπειδὴ τὸ μὲν ποσὸν ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ μείωσιν (§. 55), καὶ πᾶσα ποσότης μεγεθύνεται ἢ μειοῦται, προςιθεμένης αὐτῇ, ἢ ἀφαιρουμένης ἀπ' αὐτῆς καὶ τῆς ἐλαχίςης ποσότητος· ἀλλαμὴν ἡ ἄπειρος ποσότης οὔτ' αὔξησιν, οὔτε μείωσιν πάσχει, ἐὰν αὐτῇ πεπερασμένη ποσότης προςεθῇ, ἢ ἀφαιρεθῇ· ἄρα ποσότης οὐκ ἂν εἴη· πλὴν λέγομεν, ἐὰν μὴ ἦν ποσότης, πῶς δι' αὐτῶν ἐπιλογισμοὶ πλεῖςοι εἰς τὴν ἀριθμητικὴν γίνονται, ἥτις ἔχει αὐτὸ τὸ ποσὸν ἀντικείμενον; ἀγνοοῦσιν οὗτοι τῇ ἀληθείᾳ, ὅτι αὔξησιν καὶ μείωσιν ἐκεῖνα τὰ ποσὰ λαμβάνουσιν, ὅσα εἶναι τῆς αὐτῆς φύσεως, ὡς εἰς τὴν πρόσθεσιν, καὶ ἀφαίρεσιν ἐδείξαμεν (§. 32.), ἄρα καὶ αὐτὰ ἐὰν ὦσιν ὁμοφυῆ, καὶ ὁμοταγῆ, ὅλα τὰ ἰδιώματα τοῦ ποσοῦ ἐπιδέχονται· διὸ καὶ $\infty + \infty = 2\infty$· καὶ $5\infty - \infty = 4\infty$· καὶ $\infty + \frac{\infty}{\alpha\beta} = \frac{\alpha\beta\infty + \infty}{\alpha\beta}$. τοῦτο δὲ $\infty \pm \frac{1}{\infty} = \infty$. διότι ἄλλης φύσεως τὸ ∞, καὶ ἑτέρας τὸ $\frac{1}{\infty}$. ἐκεῖνο μὲν ἀπείρως μέγιςον, τοῦτο δ' ἀπείρως ἐλάχιςον· λοιπὸν τὰ ὁμοφυῆ εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τηροῦσιν ὅλους τοὺς νόμους τοῦ ποσοῦ, τὰ δ' ἑτεροφυᾶ οὐδαμῶς, ὡς καὶ ἡ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ἀπαιτεῖ· διότι καὶ εἰς τοὺς πεπερασμένους ἀριθμοὺς ἐλέγομεν, 5 ἄνθρωποι καὶ 10 ὀργυιαί, ποτὲ δὲν γίνονται 15· διότι ἑτεροφυᾶ τὰ μέρη· τοῦτο μόνον εἰς τοὺς ἀφηρημένους ἀριθμοὺς γίνεται, ὅτι οὐδεμία τούτων διάκρισις· καὶ ἐνταῦθα διάκρισις γίνεται, ὡς καὶ εἰς τοὺς συγκεκριμένους ἀριθμούς· ἐπειδὴ ὅμως ὁ πολλαπλασιασμὸς, καὶ ἡ διαίρεσις καὶ εἰς ἑτεροφυᾶ γίνεται, διὰ τοῦτο καὶ ταῦτα τὰ ἄπειρα ποσὰ διαιροῦνται καὶ πολλαπλασιάζονται, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, καθ' ὃν καὶ οἱ πεπερασμένοι ἀριθμοί. Ἡμεῖς μέντοι διὰ τοὺς ἄνω, καὶ ἄλλους πολλοὺς λόγους καλῶς φρονοῦντες, καὶ ταῦτα τὰ ἄπειρα ποσὰ λέγομεν, τὸ μὲν ∞ ἀπείρως μέγιςον $= \frac{1}{0}$. τὸ δὲ ἀπείρως ἐλάχιςον $\frac{1}{\infty} = 0$· διότι τοῦτο $\frac{1}{\infty}$ ὡς ἀπείρως ἐλάχιςον, εἶναι ἀπαράςατον, καὶ διὰ τοῦτο οὔτε αὔξησιν οὔτε μείωσιν ἐπάγει εἰς τὰ πεπερασμένα ποσὰ, διὰ τοῦτο καὶ ὡς μηδὲν λογίζεται, καὶ $=0$ τίθεται, διότι καὶ τὸ μηδὲν ποσὸν, πλὴν ἀπαράςατον· διότι τὸ μηδὲν ἐνταῦθα $=0$ δὲν εἶναι κατ' ἀπόφασιν. μηδὲν, εἰδ' ἦν τοιοῦτον, ἔδει μὴ δεκαπλασιάζειν ἕκαςον ἀριθμὸν προσγραφόμενον· ἀλλ' ἀναιρεῖν αὐτόν· εἶναι λοιπόν τι, πλὴν ἀπαράςατον, ὡς ὅλα τὰ καθόλου ἀπαράςατα· παραςατικὸν τοίνυν αὐτοῦ εἶναι τὸ $\frac{1}{\infty}$· διὰ τοῦτο καὶ ὅλοι κοινῶς ἐκλαμβάνουσι $\frac{1}{\infty} = 0$· καὶ εἰ μὴ εἶχεν ὀρθῶς, ἔδει καὶ τοὺς ὑπολογισμοὺς μὴ εἶναι ὀρθοὺς, ὅταν ἀντὶ $\frac{1}{\infty}$ τὸ 0 ἐκλαμβάνωμεν· πλεῖςα περὶ τούτων, καὶ περὶ ἄλλων ἀνθιςάσεων εἰς τὸ ἄπειρον, εἰς τὸ ἡμέτερον σύςημα περὶ ἀπείρου ἐγράφησαν ἱκανά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ τοῦ πῶς ἕκαςον ποσὸν εἰς ἀπείρους ἐκτυλίσσεται σειράς.

§. 667. Σειρὰν ἄπειρον καλῶ ἐκείνην, ἧς οἱ ὅροι συναπτόμενοι τῷ σημείῳ + ἢ — ἀπείρως προάγονται ἄνευ τέρματος κατά τινα λόγον ἀριθμητικὸν ἢ γεωμετρικόν· οὕτως οἱ φυσικοὶ ἀριθμοί· $1+2+3+4+5+6+7+\ldots\infty$ ἄνευ τέρματος· καὶ αὕτη $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\ldots\frac{1}{\infty}$ ἄνευ τέρματος· ὁμοίως καὶ αὕτη $1+\frac{1.\ 2.}{1.\ 3.}+\frac{1.\ 2.\ 3.}{1.\ 3.\ 5.}+\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.}{1.\ 3.\ 5.\ 7.}+\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.}+\ldots\ldots$ κτλ· τοιαῦται ἄπειροι σειραὶ εἰσὶ καὶ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα ὡς $\frac{3}{7}=0{,}428571428$ κτ. $=\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{7}{100000}+\frac{1}{10^6}+\frac{4}{10^7}+\frac{2}{10^8}+\frac{8}{10^9}$ κτ. τοιαύτας σειρὰς λαμβάνομεν καὶ ὅταν ἐκτυλίσωμεν τὸ διώνυμον, καὶ ἔχει ἐκθέτην κλάσμα γνήσιον $\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{4}{7}$ κτ. (§. 336)· διότι ἐὰν τὸ κλάσμα τοῦτο $=\mu$ θῶμεν, γίνεται $(\alpha+\beta)^\mu=\alpha^\mu+\frac{\mu}{1}\alpha^{\mu-1}\beta+\frac{\mu(\mu-1)}{1.\ 2.}\alpha^{\mu-2}\beta^2+\frac{\alpha(\mu-1)(\mu-2)}{1.\ 2.\ 3.}\alpha^{\mu-3}\beta^3+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\alpha^{\mu-4}\beta^4$ ἄνευ τέρματος, πλὴν περὶ τούτου ὕςερον. Τούτων ὅμως ἁπάντων τῶν σειρῶν, ὅσαι μὲν αὔξουσιν ἄνευ τέρματος, αὔξουσαι λέγονται, ὅσαι δὲ μειοῦνται ἄνευ τέρματος φθίνουσαι (ἕτεροι δὲ ἀποκλινούσας καὶ συγκλινούσας καλεῖν ἠξίωσαν, κατὰ μετάφρασιν τῶν ἑτερογλώσσων Convergentes, et divergentes· ἡμεῖς ὅμως εἰς τὰς αὐξούσας καὶ φθινούσας ἐμμένομεν)· καὶ ἐκεῖναι ἔχουσι τὸν ἔσχατον ὅρον ἀπείρως μέγιςον, ∞, αὗται δὲ ἀπείρως ἐλάχιςον, $\frac{1}{\infty}$.

§. 668. Κάθε πρᾶγμα ἐν τῷδε τῷ κόσμῳ πεπερασμένον εἶναι καὶ λέγεται, καὶ διὰ τοῦτο ἕν ἐςιν· ὅθεν καὶ ἄπειρα τοιαῦτα ἓν ἀποτελοῦσι τὸ ἀπείρως μέγιςον· ἀλλὰ καὶ ἀφ' ἑνὸς τούτων ἀποτελεῖται τὸ ἀπείρως ἐλάχιςον· διότι ἕκαςον συνίςαται ὑπὸ ἀπείρων μερῶν· ἔςω τόδε τὸ ποδιαῖον μῆκος, μὲ ὅλον ὁποῦ εἶναι πεπερασμένον, διαιρεῖται ὅμως εἰς δύο, καὶ ἕκαςον τούτων τῶν δύο αὖθις εἰς δύο, καὶ τούτων ἕκαςον αὖθις εἰς δύο, καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον κατὰ τήνδε τὴν σειράν, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$· ἐὰν ὅμως ταύτην τὴν σειρὰν συνάψω, οὐδέποτε τὸν πόδα ἀποτελῶ, διότι ὁ ἔσχατος ὅρος προβαίνει ἄνευ τέρματος, καὶ διὰ τῆς ἐνεργείᾳ προσθέσεως οὐδαμῶς τοῦτον εὑρίσκω· ὅσῳ ὅμως πλείονας ὅρους συνάπτω, τόσῳ μᾶλλον ἐγγὺς τῆς ἀληθείας γίνομαι· διότι $\frac{1}{2} = 6$ δακτ: $\frac{1}{4} = 3$ δακτ: $\frac{1}{8} = 1\frac{1}{2}$ δακτ: $\frac{1}{16} = \frac{3}{4}$ δακτ: ἐὰν δὲ ταῦτα συνάψω $6 + 3 + 1\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 11\frac{1}{4}$· ἐὰν ἔτι καὶ $\frac{1}{32}$ συνάψω μὲ $\frac{1}{4}$ γίνεται $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$· εὑρίσκω $11\frac{5}{8}$ δακτ: ἐὰν ἔτι πλείονας ὅρους συνάψω, τῇ ἀληθείᾳ πλησιάζω μέν, ἔτ' ἀκριβῶς δὲ ἀφικέσθαι οὐ δύναμαι, ὅτι τὰ ἔσχατα ςοιχεῖα τῶν σωμάτων ἀπαράςατα κατωτέρω ὅμως διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἀπείρων εὑρίσκομεν τὴν σειρὰν ταύτην ἴσην μονάδι, ὡς ἀπαιτεῖ τὸ ποσόν.

§. 669. Ἕκαστον ἀριθμὸν νὰ ἐκφράσωμεν εἰς ἄπειρον σειρὰν, εἶναι κύριος σκοπὸς τούτου τοῦ κεφαλαίου· ἀλλ' ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἢ κλασματικὸς ἐστὶ, ἢ ἀκέραιος ἀριθμός· ἐὰν οὖν ᾖ κλασματικὸς, ποιοῦμεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ διμελῆ διὰ τοῦ σημείου $+$ ἢ $-$, καὶ οὕτω διαιροῦμεν διὰ τοῦδε τοῦ διμελοῦς παρονομαστοῦ τὸν ἀριθμητὴν, καὶ τὸ πηλίκον ἐξέρχεται εἰς σειρὰν ἄπειρον· οὕτω γενέσθωσαν τὰ ἑξῆς κλάσματα $\frac{1}{1}=\frac{1}{2-1}$, ἢ $\frac{3}{7}=\frac{3}{5+2}$, ἢ $\frac{2}{3}=\frac{2}{2+1}$, ἢ $\frac{2}{9}$ $\frac{2}{8+1}$ κτ. Ἐὰν δ' ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀκέραιος, ποιοῦμεν αὐτὸν κλασματικὸν, καὶ εἶτα ποιοῦμεν τὸν παρονομαστὴν διμελῆ, καὶ διὰ τοῦ τοιούτου παρονομαστοῦ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν, καὶ πάλιν τὸ πηλίκον ἐξέρχεται εἰς ἄπειρον σειράν· δηλ: $4=\frac{12}{3}=\frac{12}{2+1}$ καὶ $5=\frac{10}{2}=\frac{10}{3-1}$ κτ. ἵνα δὲ μὴ ματαιοπονῶμεν εἰς αὐτὰ τὰ κατὰ μέρος κλάσματα, λάβωμεν ἐν γένει τόδε τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$· καὶ διέλωμεν α διὰ τοῦ $\beta+\gamma$· καὶ εἶτα εἰς τὸν τύπον αὐτὸν ἀναγάγωμεν ἕκαστον τοιοῦτον κλάσμα· ἡ δὲ διαίρεσις οὕτω γενέσθω διαιρετέ: διαιρέτ: πηλίκον.

$$\alpha : \beta+\gamma = \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}+\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3}-\frac{\alpha\gamma^3}{\beta^4}+\frac{\alpha\gamma^4}{\beta^5}-\frac{\alpha\gamma^5}{\beta^6} \text{ κτ.}$$

$$\begin{array}{l}
+\alpha+\dfrac{\alpha\gamma}{\beta} \\
-\quad - \\
\hline
\quad -\dfrac{\alpha\gamma}{\beta} \\
\quad \begin{matrix}-\\+\end{matrix}\dfrac{\alpha\gamma}{\beta}\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\dfrac{\alpha\gamma^2}{\beta^2} \\
\hline
\qquad +\dfrac{\alpha\gamma^2}{\beta^2} \\
\qquad \begin{matrix}+\\-\end{matrix}\dfrac{\alpha\gamma^2}{\beta^2}\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\dfrac{\alpha\gamma^3}{\beta^3} \\
\hline
\qquad\quad -\dfrac{\alpha\gamma^3}{\beta^3} \text{ κτ.}
\end{array}$$

Εἰς τὰς τοιαύτας διαιρέσεις, ἐν αἷς τὸ πηλίκον ἐξέρχεται εἰς ἄπειρον σειρὰν, πρέπει μόνον τόσους ὅρους νὰ εὕρωμεν, εἰς ὅσους δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κατὰ τίνα νόμον ἐκτυλίεται ἡ σειρὰ, διὰ τοῦτο εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν σειρὰν εὑρίσκομεν.

α'. Οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς ἐναλλὰξ ἔχουσι τὸ σημεῖον τὸ + καὶ — ἐπ' ἄπειρον· καὶ πρὸ μὲν τῶν περιττῶν ὅρων τὸ καταφατικὸν, πρὸ δὲ τῶν ἀρτίων τὸ ἀποφατικὸν τίθεται.

β'. Ὁ πρῶτος ὅρος ἔχει ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέου, καὶ παρονομαστὴν τὸ πρῶτον μέρος τοῦ διαιρέτου· καὶ οὗτος ὁ διαιρετέος εὑρίσκεται παράγων εἰς ὅλους τοὺς ἑξῆς ὅρους.

γ'. οὗτος πολλαπλασιασθεὶς μὲ ἓν πηλίκον κλασματῶδες, οὗ ὁ μὲν ἀριθμητὴς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ διαιρέτου, ὁ δὲ παρονομαστὴς τὸ πρῶτον αὐτοῦ, γίνεται ὁ δεύτερος ὅρος, καὶ ἔτι οὗτος πολλαπλασιασθεὶς διὰ τοῦ αὐτοῦ πηλίκου γίνεται ὁ τρίτος, καὶ ἔτι ὁ τέταρτος, καὶ ἔτι ὁμοίως ἐπ' ἄπειρον.

δ'. Παρατηροῦμεν ἔπειτα, ὅτι ὁ παρονομαστὴς εἰς ὅλους τοὺς ὅρους εἶναι τὸ πρῶτον μέρος τοῦ διαιρέτου, καὶ οἱ ἐκθέται αὐτοῦ προβαίνουσιν ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· ὁ δὲ διαιρετέος μόνον εἰς τὸν πρῶτον ὅρον εὑρίσκεται μόνος ἀριθμητής, εἰς δὲ τοὺς λοιποὺς ἔχει καὶ παράγοντα τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ διαιρέτου μὲ ἐκθέτας ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Τούτους τοὺς ὅρους εἰδότες εὐκόλως, ἕκαστον ἀριθμὸν ἀκέραιον καὶ κλασματικὸν ἄνευ διαιρέσεως εἰς σειρὰν ἄπειρον μεταβάλλομεν.

Γενέσθω τὸ κλάσμα εἰς ἄπειρον σειρὰν τό δε $\frac{2}{3}=\frac{2}{2+1}$ ἄρα $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{2}-\frac{2.1}{2^2}+\frac{2.1^2}{2^3}-\frac{2.1^3}{2^4}+\frac{2.1^4}{2^5}\pm\dots=1-\frac{1}{2}+\frac{2}{8}-\frac{2}{16}+\frac{2}{32}=\frac{32}{32}-\frac{16}{32}+\frac{8}{32}-\frac{4}{32}+\frac{2}{32}=\frac{42-20}{32}=\frac{22}{32}=\frac{11}{16}$.

ἐὰν ὅμως ἔτι πολλοὺς ὅρους συνάψωμεν, πλησιάζομεν εἰς τὸ $\frac{2}{3}$· καὶ τό δε $\frac{1}{6}$ γενέσθω $=\frac{1}{4+2}=\frac{1}{4}-\frac{1.2}{4^2}+\frac{1.2^2}{4^3}-\frac{1.2^3}{4^4}+\frac{1.2^4}{4^5}\dots$ ἐὰν δὲ τούτους συνάψωμεν ὀρθῶς, εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον αὐτῶν $=\frac{11}{64}$ σχεδὸν $=\frac{1}{6}$.

τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν $4 = \frac{12}{3} =$

$$\frac{12}{2+1} = \frac{12}{2} - \frac{12.1}{2^2} + \frac{12.1^2}{2^3} - \frac{12.1^3}{2^4} + \frac{12.1^4}{2^5} \ldots$$

§. 670 Ἐμάθομεν πῶς ἐκτυλίσσεται ἡ σειρά, ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἔχῃ τὸ σημεῖον +· μάθωμεν ἤδη καὶ πῶς ἐκτυλίσσεται, ὅταν ἔχῃ τὸ σημεῖον —, καὶ ληφθήτω ὡς ἀνωτέρω τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta - \gamma}$ ἄρα

$$\alpha : \quad \beta - \gamma = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} + \frac{\alpha\gamma^3}{\beta^4} + \ldots\ldots$$

$$-\alpha \substack{-\\+} \frac{\alpha\gamma}{\beta}$$

$$+\frac{\alpha\gamma}{\beta}$$

$$+\frac{\alpha\gamma}{\beta} \substack{-\\+} \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2}$$

$$+\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2}$$

$$-\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2} \substack{-\\+} \frac{\alpha\gamma^3}{\beta^3}$$

$$+\frac{\alpha\gamma^3}{\beta^3}$$

$$+\frac{\alpha\gamma^3}{\beta^3} \substack{-\\+} \frac{\alpha\gamma^4}{\beta^4} \text{ κτ.}$$

Ἐὰν δὲ καὶ ταύτην τὴν σειρὰν σκεφθῶμεν, εὑρίσκομεν τὴν ἡγουμένην ἀπαράλλακτον, πλὴν ὅτι ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι καταφατικοί· ὅθεν καὶ τοιαῦτα κλάσματα μεταβάλλονται εἰς σειρὰν ἄπειρον $\frac{1}{2}=\frac{1}{4-2}=\frac{1}{4}+\frac{1.\ 2}{4^2}+\frac{1.\ 2^2}{4^3}+\frac{1.\ 2^3}{4^4}+$ . . . . κτ. Ἐὰν ὅμως 5 ὅρους τῆς σειρᾶς συνάψωμεν, εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον $=\frac{31}{64}$ σχεδὸν $=\frac{1}{2}$ διότι ἡ διαφορὰ εἶναι $=\frac{1}{64}$· καὶ δικαίως τὰ τοιαῦτα κλάσματα λαμβάνονται ἀντὶ τῆς σειρᾶς, καὶ ἀνάπαλιν· $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{4}{64}+\frac{8}{1024}$·· καὶ εἶναι τῷ ὄντι αἱ σειραὶ αὗται γεωμετρικαὶ φθίνουσαι, ὧν τὸ πηλίκον $=\frac{\gamma}{6}$, ἐὰν τὸν δεύτερον ὅρον διὰ τοῦ πρώτου διέλωμεν.

§. 671. Ἐπειδὴ αὗται αἱ σειραὶ ὁμολογουμένως Γεωμετρικαί, καὶ πηλίκον τούτων $\frac{\gamma}{6}$ ἀεί, ἔςω ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῶν $=\alpha$, ἐάντε ἀκέραιος, ἢ κλάσμα $\frac{\tau}{\eta}$. καὶ ἡ σειρὰ τότε ἐπ' ἄπειρον οὕτω προέρχεται $\alpha+\frac{\alpha\gamma}{6}+\frac{\alpha\gamma^2}{6^2}+\frac{\alpha\gamma^3}{6^3}+\frac{\alpha\gamma^4}{6^4}$. . . . . ἐπ' ἄπειρον φθίνουσα, ἄρα $K=\alpha+\frac{\alpha\gamma}{6}+\frac{\alpha\gamma^2}{6^2}+\frac{\alpha\gamma^3}{\beta^3}+\ldots\frac{1}{\infty}$ δηλ: ἐπειδὴ εἶναι φθίνουσα ἡ σειρὰ καὶ ἄπειρος, καταυτὰ ὁ ἔσχατος ὅρος νὰ εἶναι ἀπείρως ἐλάχιςος ἤτοι $\tau=\frac{1}{\infty}=0$, καὶ ὁ πρῶτος ὅρος $=\alpha$· τὸ δὲ πηλίκον $\pi=\frac{\gamma}{\beta}$. ἐὰν τοίνυν εἰς τὸν πέμπτον τύπον τοῦ διαγράμματος (§. 654) $K=\frac{\tau\pi-\alpha}{\pi-1}$ τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων θῶμεν, εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον ὅλης τῆς ἀπείρου ταύτης σειρᾶς $K = \dfrac{\frac{1}{\infty}.\frac{\gamma}{\beta} - \alpha}{\frac{\gamma}{\beta} - 1} = \dfrac{o.\frac{\gamma}{\beta} - \alpha}{\frac{\gamma}{\beta} - 1} = \dfrac{-\alpha}{\frac{\gamma-\beta}{\beta}} = \dfrac{-\alpha\beta}{\gamma-\beta} =$

$\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}$ (§. 171)· καὶ δι' αὐτοῦ τοῦ τύπου λύομεν ἑκάστην ἄπειρον μειουμένην σειρὰν, ὅταν ἔχῃ ὅλους τοὺς ὅρους καταφατικοὺς, ἐὰν τὸν δεύτερον αὐτῆς ὅρον διὰ τοῦ πρώτου διέλωμεν, καὶ τὸ πηλίκον αὐτῆς $= \frac{\gamma}{\beta}$ θῶμεν· διότι πολλαπλασιάζομεν τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς διὰ τοῦ β, τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πηλίκου, καὶ τοῦτο τὸ παραγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ λειψάνου, ὅπου εὑρίσκομεν, ἐὰν ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πηλίκου ἀφέλωμεν τὸν ἀριθμητήν· ἔστω ἡ σειρὰ τοῦ ποδιαίου μήκους ἀνωτέρω (§. 668). α΄. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} \dots \frac{1}{\infty}$ ἐπ' ἄπειρον ἄρα $\alpha = \frac{1}{2}$ καὶ πηλίκον $= \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{\gamma}{\beta}$ · ὅθεν $\beta = 2$ καὶ $\gamma = 1$ · λοιπὸν $K = \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\gamma} = \dfrac{\frac{1}{2}.2}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$ · καὶ ὀρθῶς τὸ ποδιαῖον διάστημα $= \dfrac{1}{2-1} = 1$.

β΄. Ζητείσθω ἤδη καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῆς τῆς σειρᾶς· $3+2+1\frac{1}{3}+\frac{8}{9}+\dots$ ἄρα $\alpha = 3$, $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{2}{3}$ καὶ $\gamma = 2$, $\beta = 3$ · λοιπὸν $K = \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\gamma} = \dfrac{3.3}{3-2} = 9$.

γ'. Ζητείσθω τὸ κεφάλαιον καὶ τῆς δὲ τῆς σειρᾶς $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\ldots$ ἄρα $\alpha=\frac{1}{2}$. $\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ καὶ $\gamma=1, \beta=4$. λοιπὸν $K=\frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 4}{4-1}=\frac{2}{3}$.

δ'. Καὶ ἔτι τὸ κεφάλαιον ταύτης $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{100000}$ κτ. ἄρα $\alpha=\frac{1}{10}$. καὶ $\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{10}}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$. ὅθεν $\gamma=1$ καὶ $\beta=10$ καὶ $K=\frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\frac{1}{10}\cdot 10}{10-9}=\frac{1}{9}$. καὶ δι' αὐτοῦ τοῦ τύπου λύεται τὸ ἐπιχείρημα, ὅπου ἐπέφερον οἱ πάλαι κατὰ κινήσεως.

§. 672. Τῆς δὲ σειρᾶς τὸ κεφάλαιον, ἧς οἱ ὅροι ἔχουσιν ἐναλλὰξ τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$, οὕτως εὑρίσκεται· ἔςω πάλιν ὁ μὲν πρῶτος ὅρος $=\alpha$, τὸ δὲ πηλίκον $=\frac{\gamma}{\beta}$, καὶ ἡ σειρὰ οὕτω $K=\alpha-\frac{\alpha\gamma}{\beta}+\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2}-\frac{\alpha\gamma^3}{\beta^3}+\frac{\alpha\gamma^4}{\beta^4}\ldots$ ἐπ' ἄπειρον· ἄρα ὡς φθίνουσα καὶ αὕτη, καὶ ἄπειρος, εἶναι ὁ ἔσχατος ὅρος $\tau=\frac{1}{\infty}$, ἤτοι ἀπείρως ἐλάχιςος· θῶμεν ἤδη καὶ ταῦτα εἰς τὸν ἄνω τύπον πέμπτον ἀντὶ τῶν ἴσων, καὶ ἔςαι $K=\frac{\tau\pi-\alpha}{\pi-1}=\frac{-\frac{1}{\infty}\cdot\frac{\gamma}{\beta}-\alpha}{\frac{\gamma}{\beta}-1}=\frac{-\alpha}{\frac{-\gamma-\beta}{\beta}}=\frac{-\alpha\beta}{-\gamma-\beta}=\frac{\alpha\beta}{\gamma+\beta}$ ὁ αὐτὸς ἄνω τύπος, πλὴν ἐκεῖνος μὲν ἔχει τὸ σημεῖον — γ εἰς τὸν παρονομαστὴν, οὗτος δὲ τὸ σημεῖον $+\gamma$· καὶ δι' αὐτοῦ λύομεν ὅλας τὰς ἀπείρους σειρὰς, ὧν οἱ ὅροι ἔχουσιν ἐναλλὰξ τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$.

α΄. Ζητείσθω τὸ κεφάλαιον αὐτῆς τῆς ἀπείρου σειρᾶς $\frac{5}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{4}{27}$ . . . . ἐπ' ἄπειρον· ἄρα $\alpha=\frac{5}{4}$. καὶ $-\dfrac{\gamma}{\beta}=-\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}}=-\frac{2}{3}$ καὶ $\gamma=2$. καὶ $\beta=3$· ἄρα $K=\dfrac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}=\dfrac{\frac{5}{4}\cdot 3}{3+2}=\dfrac{\frac{9}{4}}{5}=\frac{9}{20}$.

β΄. Καὶ ταύτης $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ . . . κτ. ἄρα $\alpha=1$· καὶ $\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$ καὶ $\gamma=1$, καὶ $\beta=2$, λοιπὸν $K=\dfrac{1.2}{2+1}=\frac{2}{3}$

γ΄. Καὶ ταύτης $\frac{12}{1}-\frac{12}{4}+\frac{12}{8}-\frac{12}{16}$ . . . κτ. ἄρα $\alpha=6$, καὶ $\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{\frac{12}{4}}{\frac{12}{2}}=\dfrac{\frac{12}{4}}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$· ὅθεν $\gamma=1$· καὶ $\beta=2$ καὶ ἑπομένως $K=\dfrac{\alpha\beta}{\gamma+\beta}=\dfrac{6.2}{2+1}=4$ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως.

§. 373. Αἱ ἄπειροι σειραὶ ἢ αὔξουσαι εἰσὶν ἢ φθίνουσαι, περὶ μὲν ἐκείνων ἐν ἄλλοις ἐροῦμεν, αἱ δὲ φθίνουσαι διάφοροι εἰσὶν, ἢ εἰσὶ τοιαῦται δηλ: ὧν τὸ πηλίκον διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ δευτέρου ὅρου ἐπὶ τοῦ πρώτου εἶναι στερεὸν, καὶ ἐπὶ τοῦτο πολλαπλασιαζόμενος ὁ προηγούμενος ὅρος ἀποτελεῖ τὸν ἑπόμενον, περὶ ὧν μέχρι τοῦδε ἱκανῶς ἐπραγματεύθημεν, ἢ εἰσὶ τοιαῦται, ὧν τὸ πηλίκον διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ δευτέρου ὅρου διὰ τοῦ πρώτου δὲν εἶναι στερεὸν, ἀλλὰ μεταβλητὸν, δηλ: κατά τινα ἄλλον νόμον αὐζεται, ἢ μόνον κατὰ τὸν παρονομαςὴν, ἢ ἅμα καὶ κατὰ τὸν ἀριθμητὴν· καὶ ἤδη ἡ αὔξησις ἢ γίνεται κατὰ σειρὰν ἀριθμητικὴν, ἢ κατὰ σειρὰν γεωμετρικὴν, ἢ ἐνταυτῷ κατάτε ἀριθμητικὴν, καὶ γεωμετρικὴν σειράν· καὶ τοῦτον τὸν νόμον πρέπει νὰ παρατηρήσῃ ἕκαςος εἰς μίαν σειρὰν ἄπειρον, διὰ νὰ συνεχίσῃ τοὺς ὅρους τῆς σειρᾶς, ὅσους ἂν θέλῃ· οὕτως ἡ ἑξῆς σειρὰ, $\frac{1}{1}+\frac{2}{3}+\frac{4}{15}+\frac{8}{105}+\frac{16}{945}$ . . . κτ. ἀγνοεῖται κατὰ τίνα νόμον γίνεται, ἐὰν μὴ οὕτω γραφῇ,

$$\frac{1}{1}+\frac{1.2}{1.3}+\frac{1.2.2}{1.3.5}+\frac{1.2.2.2}{1.3.5.7}+\frac{1.2.2.2.2}{1.3.5.7.9}+\ldots\ldots \text{κτ.}$$

εἰς αὐτὴν τὴν ἔκφρασιν ὁ νόμος γίνεται φανερὸς, διότι εἰς μὲν τὸν ἀριθμητὴν ὁ ἑξῆς ὅρος λαμβάνει ἔτι ἕνα παράγοντα ἀεὶ 2. εἰς δὲ τὸν παρονομαςὴν λαμβάνει ὁ ἑξῆς ὅρος τὸν προηγούμενον παρονομαςὴν, καὶ ἔτι ἕνα καινὸν παράγοντα, πλὴν μείζονα τοῦ προηγουμένου ὅρου κατὰ δυάδα· καὶ κατὰ τὸν νόμον τοῦτον εἰς ἄπειρον προβαίνει ἡ σειρά· ἐξαχθήτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐνεργείᾳ κατὰ τοὺς νόμους τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν (§. 346) αὐτῆς τῆς ἐκφράσεως

$$\sqrt{(aa-\chi\chi)}=a-\frac{\chi^2}{2a}-\frac{\chi^4}{8a^3}-\frac{\chi^6}{16a^5}-\frac{5\chi^8}{128a^7}-\frac{7\chi^{10}}{256a^9}$$

$$\begin{array}{llll}
-aa & & & \\
\hline
-\chi\chi & & & \\
-\chi\chi \underset{-}{+} \frac{\chi}{4aa} & & & :2a-\frac{\chi^2}{2a} \\
\underset{+}{} & & & \\
\hline
-\ \frac{\chi^4}{4aa} & & & :2a-\frac{\chi^2}{a}-\frac{\chi^4}{8a^3} \\
\underset{+}{-}\ \frac{\chi^4}{4aa} \underset{-}{+} \frac{\chi^6}{8a^4} \underset{-}{+} \frac{\chi^8}{64a^6} & & &
\end{array}$$

$$-\frac{\chi^6}{8a^4}-\frac{\chi^8}{64a^6} \qquad \cdot\; 2a-\frac{\chi^2}{a}-\frac{\chi^4}{4a^3}-\frac{\chi^6}{16a^5}$$

$$\mp\frac{\chi^6}{8a^4}\pm\frac{\chi^8}{16a^6}\pm\frac{\chi^{10}}{64a^8}\pm\frac{\chi^{12}}{256a^{10}}$$

$$-\frac{5\chi^8}{64a^6}-\frac{\chi^{10}}{64a^8}-\frac{\chi^{12}}{256a^{10}} \text{ κτ.}$$

Ἐὰν δὲ περαιτέρω τὴν πρᾶξιν ἐξακολουθήσωμεν, εὑρίσκομεν τὴν ῥίζαν οὕτω $\sqrt{(aa-\chi\chi)}=a-\frac{\chi^2}{2a}-\frac{\chi^4}{8a^3}-\frac{\chi^6}{16a^5}-\frac{5\chi^8}{128a^7}-\frac{7\chi^{10}}{256a^9}-\frac{21\chi^{12}}{1024a^{11}}\ldots\ldots$

ἥτις συνίσταται ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου a, καὶ ἀπὸ δύο ἔτι σειρὰς, ὧν ἡ μὲν ἀλγεβραϊκὴ, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος $\frac{\chi^2}{a}$, καὶ τὸ πηλίκον $\frac{\chi^2}{a^2}$· ἡ δ' ἀριθμητικὴ οὕτω $-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{5}{128}-\frac{7}{256}-\frac{21}{1024}$ ἴση τῇ ἑξῆς $-\frac{1}{2}-\frac{1.\,1}{2.\,4}-\frac{1.\,1.\,3}{2.\,4.\,6}-\frac{1.\,1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6.\,8}-\frac{1.\,1.\,3.\,5.\,7}{2.\,4.\,6.\,8.\,10}$ κτ.

καὶ οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῆς εἰσι μιᾶς σειρᾶς, ἥτις ἀπὸ παραγόντων περιττῶν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν αὔξεται εἰς τοὺς ἀριθμητάς· εἰς δὲ τοὺς παρονομαστὰς ἀπὸ παραγόντων ἀρτίων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· διὸ καὶ εἰς αὐτὰς τὰς σειρὰς πρέπει νὰ εὑρίσκωμεν πρῶτον τέσσαρας, ἢ πέντε ὅρους, ἕως οὗ νὰ εὕρωμεν αὐτὸν τὸν νόμον ςερεόν· καὶ εἶτα κατὰ τὸν νόμον τοῦτον ἐπ' ἄπειρον ἡ σειρὰ ἀπαρτίζεται· εὐκολώτερον ὅμως τὰς σειρὰς τῶν ῥιζῶν εἰς τὸ διώνυμον εὑρίσκομεν, ἢ κατὰ τὰ ἀνωτέρω· ἐπειδὴ ὅμως ἡ σειρὰ αὕτη ἐν ἄλλοις ἔσεται ἡμῖν χρήσιμος, εὑρέθη τούτου τὸν τρόπον· ἕτερα δὲ εἴδη σειρῶν ἀπείρων εὑρήσωμεν, ὅταν καὶ περὶ ἀνακεφαλαιώσεως ἐροῦμεν αὐτῶν· ἤδη ὅμως περὶ συνεργασιῶν ἐροῦμεν, ἐν αἷς ἑκάστη ἔκφρασις εἰς ἄπειρον σειρὰν μεταβάλλεται.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ διαφόρων ἐκφράσεων τῶν συνεργασιῶν, καὶ πῶς δι' αὐτῶν ἑκάστη ἔκφρασις εἰς ἄπειρον μεταβαίνει σειράν.

§. 674. Εἰς πολλὰς ἐργασίας μαθηματικάς, καὶ ἀριθμητικὰς εὑρίσκομεν διὰ μίαν ζητουμένην ποσότητα ἀναλυτικὰς ἐκφράσεις, ἐν αἷς αἱ ἀόριστοι ποσότητες ποικιλαχῶς μετὰ διωρισμένων ἄλλων συμπλεκόμεναι, καὶ διαφόρως τιμώμεναι, γνωσταὶ γίνονται. Εἰς τὰς ἀριθμητικὰς σειρὰς ἴδομεν (§. 537. καὶ καθεξῆς), ὅτι ἐν ᾧ τὸ ν ἐδιωρίζετο $=2=3=4=5$ κτ. ὁ πρῶτος, β', γ', δ' κτ. ὅρος εὑρίσκετο. Καὶ ἐν τῷ ἀριθμῷ $12=\chi+\psi$· ἐὰν ὅμως ἡ μία ἄγνωστος αὐτῶν ψ διορισθῇ $=1=2=3=4=5=-3=-5$ κτ. εὑρίσκεται τὸ $\chi=11=10=9=8=15=17$ κτ. Ὁμοίως καὶ ἐὰν ζητῶμεν δύο ἀριθμοὺς χ καὶ ψ, ὧν τὸ παραγόμενον $=\alpha$ εὑρίσκομεν αὐτοὺς εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν $\chi\psi=\alpha$ τὴν μίαν $\psi=\frac{\alpha}{\chi}$· ἐὰν τὴν ἑτέραν χ διορίσωμεν $=2$ ἔσται $\psi=\frac{\alpha}{2}$· ἐὰν δ' ἐκείνην $=3$ ἔσται $\psi=\frac{\alpha}{3}$ καὶ ἐὰν ἐκείνην $=4$ αὕτη $\psi=\frac{\alpha}{4}$· ἐὰν δ' ἐκείνην $=\alpha$, ἔσται $\psi=1$, καὶ ἀνάπαλιν· ἐὰν τὴν ψ διορίσωμεν ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν $\chi = \frac{a}{2} = \frac{a}{3} = \frac{a}{4} = \frac{a}{a} = 1$· καὶ ἐκ τούτων φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἡ μία διαφόρως ἐκτιμηθῇ, καὶ ἡ ἑτέρα διαφόρως ἐκτιμᾶται, καὶ διορίζεται, καὶ μόνον τὸ α ἀεὶ ἀμετάβλητον μένει, καὶ λέγεται. Διὰ τοῦτο καὶ τὰς ποσότητας τὰς μὲν μεταβλητὰς λέγουσι, καὶ διὰ τῶν ἐσχάτων γραμμάτων, ρ, σ, τ, υ, φ, χ κτ. τοῦ ἀλφαβήτου ἐκφράζουσι (§. 125.)· τὰς δ' ἀμεταβλήτους, καὶ διὰ τῶν προτέρων α, β, γ ἐκθέττουσιν.

§. 675, Ὅλαι αἱ ἀλγεβραϊκαὶ ποσότητες, ἐν αἷς εὑρίσκεται μία, ἢ πολλαὶ ἀόριστοι ποσότητες μεταβληταὶ μετὰ ὡρισμένων, ποικιλαχῶς συμπεπλεγμέναι οὕτως, ὥστε ἀπ' αὐτῶν ἡ τιμὴ τῶν ἀγνώστων νὰ ἐξαρτᾶται, καλεῖται συνεργασία τῆς μεταβλητῆς ἐκείνης ποσότητος· διότι αὗται αἱ ἐκφράσεις $a+\chi$, $a\chi-\chi^2$, $\frac{\beta}{a-\chi}$, $a-\sqrt{a\chi}$ κ. τ. λ. ἐν αἷς ἡ μεταβλητὴ ποσότης χ εὑρίσκεται, καλοῦνται συνεργασίαι τῆς μεταβλητῆς ποσότητος χ. αἱ δὲ ἐκφράσεις $a\chi\psi$, $\chi^2-a\psi$, $\frac{\beta+a\chi}{\psi}$ κτ. ἐν αἷς εὑρίσκονται δύο μεταβληταὶ, αἱ χ καὶ ψ, καλοῦνται συνεργασίαι τῶν μεταβλητῶν χ καὶ ψ ποσοτήτων· κτ.

§. 676. Ἐὰν δ' ἐν ἰσότητί τινι δύο μεταβληταὶ εὑρίσκονται ποσότητες, ὡς $\psi^2 = \chi a - \chi^2$, καὶ ἡ μία διὰ τῆς ἑτέρας διορίζεται, ἡ δ' ἑτέρα διὰ τῆς ἑτέρας, καλεῖται τότε ἡ μὲν χ συνεργασία τῆς ψ, καὶ ἡ ψ συνεργασία τῆς χ· ὁμοίως καὶ εἰς τὰς τὰς λοιπάς. Κυρίως συνεργασία μιᾶς ποσότητος ἢ πολλῶν καλοῦμεν ὅλην τὴν ἔκφρασιν, ὅπου εἰ-ναι διαφόρως συμπεπλεγμένη μὲ αὐτὰς τὰς ποσότητας, καὶ ἀφ' ὧν ἡ τιμὴ αὐτῆς τῆς ἐκφράσεως ἐξήρτηται· οὕτως εἰς τὴν ἐξίσωσιν $K=\frac{\nu^2+\nu}{2}$ (§. 543.) εἶναι συνεργασία τῆς ν· διότι ἡ τιμὴ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως κρέμαται ἀπὸ τῆς ποσότητος ν.

§. 677. Διαιροῦνται αἱ συνεργασίαι εἰς ὁλοκλήρους· καὶ κλασματικὰς, καὶ ἐκεῖναι μὲν ἢ ἐκφράζονται ἁπλῶς ὡς $\alpha+\chi$, $\alpha\chi-\chi^2$ κτ. ἢ κλασματικῶς, ἐὰν ὁ παρονομαστὴς δὲν ἔχῃ μεταβλητὴν ποσότητα, ὡς $\frac{\alpha\chi+\beta}{\alpha}$. καὶ $\frac{\alpha+\alpha\chi+\chi^3}{\beta\gamma-\alpha}$ αὗται δ' ἀεὶ κλασματικῶς ἐκφράζονται, καὶ ὁ παρονομαστὴς αὐτῶν ἔχει ἀεὶ ποσότητα μεταβλητήν.

§. 678. Ὑποδιαιροῦνται αὖθις εἰς λογικὰς καὶ ἀλόγους· καὶ λογικαὶ εἶναι ἐκεῖναι, ἐν αἷς κἄντε κλασματικαὶ, κἄντε ὁλόκληροι ὦσιν, εἰσὶ μεταβληταὶ ποσότητες, ἄνευ σημείου ῥιζικοῦ, ὡς ὅλαι αἱ ἄνω· ἄλογοι δὲ ὅταν ἡ μεταβλητὴ ποσότης ἔχῃ σημεῖον ῥιζικὸν, ὡς $\frac{\alpha\sqrt{\chi}-\beta}{\chi}$. $\frac{\alpha\chi-\zeta}{\sqrt[8]{\chi}}$ κτ.

§. 679. Πᾶσα πολυμερὴς συνεργασία μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος, ὅσα ἂν μέρη ἔχῃ, φέρεται εἰς τόσους μόνον ὅρους, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης τῆς μεγίστης δυνάμεως τῆς ἀγνώστου ποσότητος, ἐκτὸς ὅμως ἐὰν ἔχῃ καὶ ὅρους ἄνευ τῆς μεταβλητῆς ποσότητος, διότι ὅλα αὐτὰ τὰ μέρη ὁμοῦ εἰς ἓν ἀνάγονται· ἔστω ἡ ἔκθεσις

$\alpha\chi^3+2\alpha\chi^2+5\chi-\alpha+\beta+3\gamma\chi^2-\chi^3+\beta\gamma+3\beta\chi+\chi^2=\alpha\chi^3-\chi^3+2\alpha\chi^2+3\gamma\chi^2+\chi^2+5\chi+3\beta\chi+\beta-\alpha+\beta\gamma=(\alpha-1)\chi^3+(2\alpha+3\gamma+1)\chi^2+(5+3\beta)\chi+(\beta-\alpha+\beta\gamma)$. . ἐὰν δὲ θῶμεν $(\beta-\alpha+\beta\gamma)=\mathrm{A}$ καὶ $(5+3\beta)=\mathrm{B}$ καὶ $(2\alpha+3\gamma+1)=\Gamma$ καὶ $(\alpha-1)=\Delta$· γίνεται ἡ ἔκθεσις

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3$$

ἄρα ἡ ἄνω ἔκθεσις μ' ὅλον ὁποῦ εἶχε μέρη δέκα μετέβη εἰς αὐτὴν μὲ μέρη τέσσαρα, τρία μεν διὰ τὸν μέγιςον ἐκθετην τῆς χ, καὶ ἓν διὰ τὰ μέρη τὰ ἀμετάβλητα· ὅθεν, ὅσα ἂν μέρη ἔχῃ ἡ ἔκθεσις, μεταβαίνει μόνον εἰς τόσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ μέγιςος ἐκθέτης τῆς ἀγνώςου, καὶ ἔτι ἓν, ἐὰν ἔχῃ καὶ μέρη γνωςά· λοιπὸν δεν εἶναι καμμία συνεργασία ὁλόκληρος, ἥτις δὲν μεταφέρεται εἰς τόδε τὸ σχῆμα $\mathrm{A}+\mathrm{B}\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3+\mathrm{E}\chi^4$. . . . οἱ δὲ συνεργοὶ δύνανται εἶναι καὶ καταφατικοὶ, καὶ ἀποφατικοὶ, καὶ ὁλόκληροι, καὶ κλασματικοὶ, καὶ λογικοὶ, καὶ ἄλογοι· πῶς ὅμως διορίζονται, ὕςερον· καὶ ἔτι πᾶσα κλασματικὴ συνεργασία εἰς αὐτὸ τὸ σχῆμα $\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3}{\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2+\delta\chi^3}$ φέρεται· οἱ δὲ συνεργοὶ τῶν μὴ ὑπαρχόντων μεταβλητῶν ποσοτήτων εἶναι ἴσοι τῷ μηδενὶ, ὡς εἰς αὐτὴν τὴν ἔκθεσιν $\dfrac{\mathrm{A}+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3 \ldots}{\alpha+\beta\chi+\delta\chi^3 \ldots}$ ὅπου $\mathrm{B}\chi=0\chi$· καὶ $\gamma\chi^2=0\chi^3$.

§. 680. Καὶ ἐὰν δύο συνεργασίας μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος πολλαπλασιάσωμεν, ὁμοιοσχήμονας, καὶ ἐχούσας ἴσους ὅρους, ἢ μὴ ἴσους, τὸ παραγόμενον λαμβάνει πάλιν τὸ αὐτὸ σχῆμα τῶν παραγόντων. Πολλαπλασιασθήτωσαν κατὰ τὰ εἰρημένα (§. 139. 140.) οἱ δύο οὗτοι παράγοντες οὕτω,

$$(A+B\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3+E\chi^4)\;(a+b\chi+c\chi^2+d\chi^3+e\chi^4)$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
aA+aB & \chi+a\Gamma & \chi^2+a\Delta & \chi^3+aE & \chi^4 \\
bA & +bB & +b\Gamma & +b\Delta & \\
 & +cA & +cB & +c\Gamma & \\
 & & +dA & +dB & \\
 & & & eA &
\end{array}$$

Ἐὰν δὲ θῶμεν $aA=\alpha$ καὶ τοὺς λοιποὺς συνεργοὺς $AB+bA=\beta$ $a\Gamma+bB+cA=\gamma$· $a\Delta+b\Gamma+cB+dA=\delta$· καὶ $aE+b\Delta+c\Gamma+dB+eA=\varepsilon$· ἔσται τὸ παραγόμενον $(A+B\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3+E\chi^5)\,(a+b\chi+c\chi^2+d\chi^3+e\chi^4)=\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2+\delta\chi^3+\varepsilon\chi^4$. . . . . Ἐὰν δὲ καὶ μὲ ἕτερον παράγοντα τοῦτο τὸ παραγόμενον πολλαπλασιάσωμεν, κατὰ τὸν ὅμοιον τρόπον τὸ παραγόμενον ἀπὸ τρεῖς καὶ ἀπὸ πολλοὺς παράγοντας λαμβάνει τὸ ἴδιον σχῆμα τῶν παραγόντων· ὅθεν εὐκόλως συνεργασίας πολλαπλασιάζομεν ὁμοιοσχήμονας, ἐὰν τὰ ἀνωτέρω καλῶς νοήσωμεν.

§. 681. Ἔτι ἡ συνεργασία μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος, ὁποῦ ἔχει τοὺς ὅρους πεπερασμένους, ἢ μὴ πεπερασμένους, ἐὰν εἰς τετράγωνον ἀρθῇ καὶ διαταχθῶσιν αἱ δυνάμεις αὐτῆς κατὰ τάξιν, ὡς ἀνωτέρω, τὸ τετράγωνον καὶ τότε τὸ αὐτὸ σχῆμα τηρήσει· ἐὰν γὰρ κατὰ τοὺς νόμους τῶν πολυωνύμων ἀρθῇ εἰς τετράγωνον ἤδη ἡ ἔκφρασις $(A+B\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3+E\chi^4)^2=$

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
A^2+2AB & \chi+B^2 & \chi^2+2B\Gamma & \chi^3+\Gamma^2 & \chi^4+\ldots \\
 & +2A\Gamma & +2A\Delta & +2B\Delta & +\ldots \\
 & & & +2AE & +\ldots
\end{array}$$

καὶ θῶμεν $A^2=\alpha$

$2AB=\beta$, $B^2+2A\Gamma=\gamma$

$2B\Gamma+2A\Delta=\delta$, $\Gamma^2+2B\Delta+2AE=\varepsilon$ ἔσται

$$(A+B\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3+E\chi^4)^2=\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2+\delta\chi^3+\varepsilon\chi^4\ldots\ldots$$

§. 682. Τὸ αὐτὸ σχῆμα λαμβάνει καὶ ὁ κύβος αὐτῆς, ἐὰν εἰς κύβον ἀρθῇ οὕτω $(A+B\chi+\Gamma\chi^2+\ldots)^3 = \alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2+\delta\chi^3\ldots$ καὶ εἰς ὁποιανδήποτε δύναμιν ἀρθῇ τὸ ἴδιον σχῆμα λαμβάνει, διότι ἡ ὕψωσις τῶν δυνάμεων εἶναι παραγόμενον ὑπὸ ὁμοίων παραγόντων· (§. 298).

§. 683. Ἑκάστη κεκλασμένη συνεργασία μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος κατὰ τὸ σχῆμα τόδε $\frac{1}{\alpha+\beta\chi}$ λαμβάνει καὶ αὖθις τὸ ἀνώτερον σχῆμα· ἐὰν γὰρ διαιρεθῇ τόδε τὸ κλάσμα κατὰ τοὺς νόμους τῆς διαιρέσεως, μεταβαίνει εἰς ἄπειρον σειρὰν (§. 668.) οὕτω

$$1 : \alpha+\beta\chi = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta\chi}{\alpha^2} + \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^3} - \frac{\beta^3\chi^3}{\alpha^4}.$$

$$\begin{array}{l}
\pm 1 \pm \frac{\beta\chi}{\alpha} \\
\hline
\quad - \frac{\beta\chi}{\alpha} \\
\quad \mp \frac{\beta\chi}{\alpha} \mp \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} \\
\hline
\qquad + \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} \\
\qquad \pm \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} \pm \frac{\beta^3\chi^3}{\alpha^3} \\
\hline
\qquad\quad - \frac{\beta^3\chi^3}{\alpha^3}.
\end{array}$$

Θῶμεν ἤδη τοὺς ἀμεταβλήτους

συνεργὸς $\frac{1}{\alpha}=A$, $\frac{\beta}{\alpha^2}=B$, $\frac{\beta^2}{\alpha^3}=\Gamma$, $\frac{\beta^3}{\alpha^4}=\Delta$ κτ.

γίνεται $\frac{1}{\alpha+\beta\chi}=A+B\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

Κατὰ τὸν ὅμοιον τρόπον μεταβαίνει καὶ ἥδε ἡ ἔκφρασις

$\frac{1}{\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2+\delta\chi^3}$ εἰς τήνδε $A+B\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3+E\chi^4 \ldots$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τοῦτο τὸ κλάσμα $\frac{\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2+\delta\chi+^3}{a+b\chi+C\chi^2+d\chi+^3}=$

$(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2+\delta\chi^3)\ \chi\ \frac{1}{a+b\chi+C\chi^2+d\chi^3}$· ἀλλὰ τόδε

$\frac{1}{a+b\chi+C\chi^2+d\chi^3}=\alpha'+\beta'\chi+\gamma'\chi^2+\delta'\chi^3$· ἄρα καὶ

$(\alpha+\beta\gamma+\gamma\chi^2+\delta\chi^3)\ (\alpha+\beta'\chi+\gamma'\chi^2+\delta'\chi^3) = A+B\chi+\Gamma\chi^2+\Gamma\chi^4+ \ldots\ldots$ Λοιπὸν ἐκ πάντων τούτων μανθάνομεν, ὅτι πᾶσα συνεργασία μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος λογική, εἴτε ὁλόκληρος, εἴτε κεκλασμένη, ἢ καὶ παραγόμενον ἐκ παραγόντων, ἢ ὑψωθεῖσα εἴς τινα δύναμιν, λαμβάνει αὐτοῦ τὸ σχῆμα $A+B\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3+ \ldots$ καὶ ἐξισοῦται αὐτῇ· οἱ δὲ συνεργοὶ Α. Β. Γ κτ. πῶς διορίζονται, ὕςερον διδάξομεν.

§. 634. Λείπεται ἤδη νὰ δείξωμεν, ὅτι κάθε συνεργασία μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος κατὰ τὸ σχῆμα τόδε $A+B\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3 \ldots\ldots$ κἄν τε οἱ ὅροι αὐτῆς πεπερασμένοι ὦσι, κἄν τε μή, ἐὰν τεθῇ ἴση τῷ μηδενί, καὶ ἡ μεταβλητὴ αὐτῆς ποσότης λαμβάνει ἑκάςην τιμήν, καὶ τὸ μηδὲν αὐτό· ἀνάγκη οἱ ἀμετάβλητοι συνεργοὶ αὐτῆς νὰ ἦναι ὅλοι ἴσοι τῷ μηδενὶ $A=0$. $B=0$. $\Gamma=0$. $\Delta=0$ κτ.

διότι θῶμεν τὴν ἔκφρασιν αὐτὴν $A+B\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3+\ldots=o$ ἐὰν δὲ θῶμεν $\chi=o$ ἔςαι $A+Bo+\Gamma o+\Delta o=o$ καὶ ἑπομένως $A=0$, $Bo=o$. $\Gamma o=o$ κτ. πλὴν εἰς αὐτὴν τὴν ἔκφρασιν ἡ A ποσότης ἀμετάβλητος, καὶ εἶναι ἡ αὐτὴ ὁποίαν τιμὴν λάβῃ ἡ μεταβλητὴ χ. ἀλλ' αὐτη εὕρηται $A=o$. ἄρα καὶ οἱανδήποτε τιμὴν ἡ χ λάβῃ, ἡ ἀμετάβλητος $A=o$, ὅταν ἡ ἔκθεσις ὅλη ἴση τῷ μηδενί· λοιπὸν ἡ ἄνω ἔκθεσις μένει $B\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3=o$. διότι ἡ μὲν $A=o$, καὶ ἡ χ ἔλαβεν οἱανδήποτε τιμήν· διέλωμεν ἤδη τὰ δύο σκέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς διὰ χ καὶ μένει $B+\Gamma\chi+\Delta\chi^2=o$ καὶ κατὰ τὰ ἄνω καὶ ἡ $B=o$. ἡ ἤδη ἀμετάβλητος· ἄρα ἡ ἐξίσωσις μένει $\Gamma\chi+\Delta\chi^2=o$· διέλωμεν καὶ ταύτην διὰ χ, ἔςαι $\Gamma+\Delta\chi=o$. ἄρα καὶ $\Gamma=o$. διότι εἶναι ἤδη ἀμετάβλητος· ἄρα μένει $\Delta\chi=o$· ἐὰν δὲ καὶ ταύτην διὰ χ διέλωμεν ἔςαι $\Delta=o$. καὶ ὅλοι οἱ συνεργοὶ οἱ ἀμετάβλητοι $=o$, ὅταν ἡ ἔκθεσις ὅλη $=o$, καὶ ἡ χ λάβῃ οἱανδήποτε τιμήν· εἰς πλείονα ὅμως πίςωσιν οὕτω δείξομεν, θῶμεν εἰς τὴν ἔκθεσιν $A+B\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3=o$ τὴν $\chi=1=2$, $=3$, $=4$ καὶ ἔςαι ἡ ἐξίσωσις.

$$A+B+\Gamma+\Delta=o \ldots \qquad \mathrm{I}$$
$$A+2B+4\Gamma+8\Delta=o \qquad \mathrm{II}$$
$$A+3B+9\Gamma+27\Delta=o \qquad \mathrm{III}$$
$$A+4B+16\Gamma+64\Delta=o \qquad \mathrm{IV}$$

Ἐὰν δὲ ταύτας ὀρθῶς ἀφέλωμεν, εὑρίσκομεν πάλιν $\Delta=o$· $\Gamma=o$. $B=o$· $A=o$· διότι ἐὰν τὴν I ἀπὸ τῆς II ἀφέλωμεν ἔςαι,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{II} & A+2B+4\Gamma+8\Delta=0\\ \text{I} & \underset{-}{A}\underset{-}{+}B\underset{-}{+}\Gamma\underset{-}{+}\Delta=0\end{array}\right\} \; \underset{-}{B}\underset{-}{+}3\Gamma\underset{-}{+}7\Delta=0$$

ὁμοίως τὴν II ἀπὸ τῆς III

$$\left.\begin{array}{ll}\text{III} & A+3B+9\Gamma+27\Delta=0\\ \text{II} & \underset{-}{A}\underset{-}{+}2B\underset{-}{+}4\Gamma\underset{-}{+}8\Delta=0\end{array}\right\} \; B+5\Gamma+19\Delta=0$$

ὁμοίως τὴν III ἀπὸ τῆς IV

$$\left.\begin{array}{ll}\text{IV} & A+4B+16\Gamma+64\Delta=0\\ \text{III} & \underset{-}{A}\underset{-}{+}3B\underset{-}{+}9\Gamma\underset{-}{+}27\Delta=0\end{array}\right\} \; B+7\Gamma+37\Delta=0$$

ἴση τῷ λειψάνῳ τῶν δύο πρώτων λειψάνων.

$$\underset{-}{2\Gamma}\underset{-}{+}12\Delta=0$$

$$2\Gamma+18\Delta=0$$

λείψανον τῶν δευτέρων λειψάνων.

$$6\Delta=0 : 6$$

$$\Delta=0$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ $\Delta=0$ ἐκλείπει ὁ τέταρτος ὅρος, καὶ αἱ ἐξισώσεις εἰσὶν οὕτω.

$$A+B+\Gamma=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I}$$

$$A+2B+4\Gamma=0 \quad \text{II}$$

$$A+3B+9\Gamma=0 \quad \text{III}$$

$$A+4B+16\Gamma=0 \quad \text{IV}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{II}\ A+2B+4\Gamma=o\\ \underline{\mathrm{I}\ A+\ B+\ \Gamma=o}\end{array}\right\}\ B+3\Gamma=o$$
$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{III}\ A+3B+9\Gamma=o\\ \underline{\mathrm{II}\ A+2B+4\Gamma=o}\end{array}\right\}\ B+5\Gamma=o$$
$$\left.\begin{array}{l}B+3\Gamma=o\\ B+5\Gamma=o\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}2\Gamma=o:2\\ \Gamma=o\end{array}$$

ἐπειδὴ δὲ καὶ $\Gamma=o$ εὕρηται· ἐκλείπει καὶ ὁ τρίτος ὅρος καὶ αἱ ἐξισώσεις μένουσιν.

$A+\ B = o \ldots\ldots$ I

$A+2B = o \ldots\ldots$ II

$A+3B = o \ldots\ldots$ III

$A+4B = o \ldots\ldots$ IV

ἄρα

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{II}\ A+2B = o\\ \underline{\mathrm{I}\ A+\ B = o}\end{array}\right\}\ B=o$$

καὶ ἀκολούθως καὶ $A=o$· καὶ ὅλοι οἱ ἄτρεπτοι συνεργοὶ ἴσοι τῷ μηδενί, ἐὰν μόνον ἡ ἔκθεσις τεθῇ ἴση τῷ μηδενί, καὶ λάβῃ ἡ ποσότης οἱανδήποτε τιμὴν καταφατικήν, ἀποφατικήν, κεκλασμένην, καὶ ἄλογον κτ. καὶ αὐτὸ τὸ μηδέν· διότι αὕτη ἡ πρότασις ἔχει τὴν ἰσχὺν γενικῶς, καὶ ἐὰν ἡ συνεργασία λάβῃ ἕτερον σχῆμα οἱονδήποτε ὡς

$$A + B\chi^{\pi} + \Gamma\chi^{\pi+\sigma} + \Delta\chi^{\pi+2\sigma} + E\chi^{\pi+3\sigma} + Z\chi^{\pi+4\sigma} . = o.$$

διότι οὕτως εἰς τὸ π καὶ σ δυνάμεθα οἱονδήποτε νοῆσαι ἀριθμόν.

§. 685. Ἐάν τις συνεργασία ἴση μὲ ἄλλην συνεργασίαν, καὶ ἄμφω ἔχωσι τὰς αὐτὰς μεταβλητὰς ποσότητας, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν τῶν ἐν αὐταῖς δυνάμεων, δηλ: ἐὰν τὸ αὐτὸ σχῆμα ἄμφω ἔχωσι, τοὺς δὲ συνεργοὺς διαφόρους, οἱ συνεργοὶ οἱ παρευρισκόμενοι εἰς τὰς αὐτὰς δυνάμεις τῆς ἀγνώστου ποσότητος εἰσὶν ἴσοι· ὁ δὲ συνεργός, ὅπου δὲν ἔχει εἰς τὴν ἑτέραν τὸν ἀντιςοιχοῦντα ὅρον εἶναι ἴσος τῷ μηδενί· ἔςω τοίνυν

$$\alpha\chi^{\pi}+\beta\chi^{\pi+\kappa}+\gamma\chi^{\pi+2\kappa}+\delta\chi^{\pi+\nu\kappa}+\dots\vartheta\chi=\alpha'\chi^{\pi}+\beta'\chi^{\pi+\kappa}+\gamma'\chi^{\pi+2\kappa}+\delta'\chi^{\pi+\nu}+\dots\rho'\chi+\sigma\chi^{\pi+\tau\kappa}$$

Εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν ἡ τρεπτὴ ποσότης χ καὶ ἡ τάξις τῶν δυνάμεων ἡ αὐτή· φέρωμεν ἤδη τὸ ἓν σκέλος τῆς ἐξισώσεως εἰς τὸ ἕτερον μὲ ἐναντία σημεῖα (§. 64.) καὶ ἡ ἐξίσωσις ἴση μηδενί· οὕτω

$$0=\begin{array}{c|c|c|c}\alpha'+\beta' & \chi^{\pi}+\gamma' & \chi^{\pi+\kappa}+\delta' & \chi^{\pi+2\kappa}+\dots\rho' \\ -\alpha-\beta & -\gamma & -\delta & \dots-\vartheta\end{array}\chi^{\pi+\nu\kappa}+\sigma'\chi^{\pi+\tau\kappa}$$

ἄρα κατὰ τὸ ἄνω (§. 684) $\alpha'-\alpha=0$ καὶ $\alpha'=\alpha$· ἔτι $\beta'-\beta=0$ καὶ $\beta'=\beta$. $\gamma'-\gamma=0$ καὶ $\gamma'=\gamma$. $\delta'-\delta=0$ καὶ $\delta'=\delta$. $\rho'-\vartheta=0$ καὶ $\rho'=\vartheta$· καὶ $\sigma=0$.

καὶ οὗτοι οἱ ἀναγκαιότεροι κανόνες τῶν συνεργασιῶν εἰς τὰς αὐτῶν μεταβολάς, οὓς ὁ πρωτόπειρος πρέπει νὰ ἔχῃ πρὸ ὀφθαλμῶν, ἐὰν εἰς τὰ ἑξῆς νὰ προχωρήσῃ ἐφίεται· τὰ δὲ λοιπά, ὅσα περὶ αὐτῶν οἱ ἀναλυτικοὶ ἔτι διδάσκουσιν, εἰς τὸ παρὸν δὲν εἶναι ἔτι ἀναγκαῖα· εἴπωμεν ἤδη τινα καὶ περὶ τῆς χρήσεως αὐτῶν.

§. 686. α΄. Τὴν κλασματικὴν συνεργασίαν $\frac{\alpha-\chi}{\alpha+\chi}$ εἰς ἰσοδύναμον ἄπειρον σειρὰν μεταβαλεῖν κατὰ τὰ ἄνω·(§.679). Θέτομεν τὸ κλάσμα ἴσον σειρᾷ τῶν ἀνωτέρω σχημάτων

$$\frac{\alpha-\chi}{\alpha+\chi}=\mathrm{A}+\mathrm{B}\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3+\mathrm{E}\chi^4\dots\dots$$ εἶτα ἀπαλλαττόμεθα τοῦ παρονομαςοῦ $\alpha+\chi$ πολλαπλασιάζοντες τὸ ἕτερον σκέλος ἐπὶ τὴν $\alpha+\chi$.

$$\alpha-\chi=\begin{array}{c|c|c|c|c}\alpha\mathrm{A}+\alpha\mathrm{B} & \chi+\alpha\Gamma & \chi^2+\alpha\Delta & \chi^3+\alpha\mathrm{E} & \chi^4 \\ \mathrm{A} & +\mathrm{B} & +\Gamma & +\Delta & \end{array}$$

εἶτα φέρομεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδὲν, οὕτω

$$0=\alpha A+\alpha B\left|\chi+\alpha\Gamma\right|\chi^2+\alpha\Delta\left|\chi^3+\alpha E\right|\chi^4 \ldots$$
$$\begin{array}{r|r|r|r|} -\alpha+A & +B & +\Gamma & +\Delta \\ +1 & & & \end{array}$$

Ἐὰν δὲ τοὺς συνεργοὺς ἴσους θῶμεν τῷ μηδενί, διορίζονται αἱ ποσότητες A, B, Γ, Δ, E. διότι $\alpha A-\alpha=0$ $A-1=0$ $A=1$. $\alpha B+A+1=0$ καὶ $B=-\frac{2}{\alpha}$. ἔτι $\alpha\Gamma+B=0$ $\alpha\Gamma-\frac{2}{\alpha}=0$ $\alpha\Gamma=\frac{2}{\alpha}$ καὶ $\Gamma=\frac{2}{\alpha^2}$. ἔτι $\alpha\Delta+\Gamma=0$ $\alpha\Delta+\frac{2}{\alpha^2}=0$ καὶ $\alpha\Delta=-\frac{2}{\alpha^2}$ καὶ $\Delta=-\frac{2}{\alpha^3}$. ἔτι $\alpha E+\Delta=0$. $\alpha E-\frac{2}{\alpha^3}=0$ $\alpha E=\frac{2}{\alpha^3}$ καὶ $\Delta=\frac{2}{\alpha^4}$. Ἐὰν λοιπὸν ἀντὶ A, B, Γ, Δ κτ. εἰς τὴν ἄνω συνεργασίαν θῶμεν τὰ εὑρεθέντα, ἔςαι

$$\frac{\alpha-\chi}{\alpha+\chi}=1-\frac{2}{\alpha}\chi+\frac{2}{\alpha^2}\chi^2-\frac{2}{\alpha^3}\chi^3+\frac{2}{\alpha^4}\chi^4 \ldots$$ ἐπ' ἄπειρον. Ἐπειδὴ ὅμως $\frac{\alpha-\chi}{\alpha+\chi}=\frac{1}{\alpha+\chi}\cdot\alpha-\chi$, ἡ σειρὰ αὕτη ἐξέρχεται, καὶ ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{1}{\alpha+\chi}$ ἐνεργείᾳ διῃροῦμεν, καὶ διὰ τοῦδε $\alpha-\chi$ τοὺς ὅρους ἐπολλαπλασιάζομεν·

§. 687. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μεταβάλλομεν ἑκάςην κλασματικὴν συνεργασίαν εἰς ἄπειρον σειρὰν, ἐὰν τὸ κλάσμα τόδε ἴσον θῶμεν μιᾷ σειρᾷ ἰσοτίμῳ τῶν ἀνωτέρω σχημάτων, καὶ εἶτα διὰ τοῦ παρονομαςοῦ τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν τὴν ὑποτεθεῖσαν σειρὰν, καὶ φέρωμεν τὴν ἐξίσωσιν $=0$, καὶ ὡς ἀνωτέρω διορίσωμεν τοὺς ἀγνώςους συνεργοὺς Α, Β, Γ, κτ. ἕως οὗ νὰ εὕρωμεν τὸν νόμον καθ' ὃν ἡ σειρὰ συνεχίζεται· ἡ δὲ λαμβανομένη σειρὰ πρέπει νὰ ληφθῇ ἐπιτηδεία εἰς αὐτὴν τὴν συνεργασίαν, ὅπου αὕτη λαμβάνεται κατὰ τόνδε τὸν τύπον

$A\chi^{\pi}+B\chi^{\pi+\rho}+\Gamma\chi^{\pi+2\rho}+\Delta\chi^{\pi+3\rho}\ldots\ldots$ δηλ: α'. εἰς αὐτὴν τὴν σειρὰν ὁ πρῶτος ὅρος τότε λαμβάνεται ἀμετάβλητος μόνον Α, ὅταν εἰς τὴν συνεργασίαν μένῃ τις ἀριθμὸς ἀμετάβλητος, ἐὰν $\chi=0$ ληφθῇ, ὡς εἰς τὴν ἄνω $\frac{a-\chi}{a+\chi}=\frac{a-0}{a+0}=1$. ὅθεν εἰς αὐτὴν ἀντὶ πρώτου ὅρου τὸ αὐτὸ ἦν ἡ Α ἢ 1 ἐλαμβάνομεν· εἰς ταύτην $\frac{\chi-1}{2+\chi^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}$ λαμβάνεται Α ὁ πρῶτος ὅρος· ὅταν δὲ οὐδεὶς ὅρος ἀμετάβλητος μένῃ, ἐὰν $\chi=0$, τότε καὶ εἰς τὴν ὑποτεθεῖσαν σειρὰν οὐδένα ὅρον ἀμετάβλητον λαμβάνομεν, ὡς εἰς τήνδε $\frac{3\chi-\sqrt{\chi}}{\chi+\chi^3}=\frac{3.0-\sqrt{0}}{0+0^3}=0$,

Β'. Ἐὰν ληφθῇ εἰς τὴν σειρὰν Α ἀμετάβλητον τὸ $\pi=0$, ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὅρου ἄρχεται τὸ ρ, ἄρα εἰς τὸν τρίτον 2ρ, εἰς τὸν τέταρτον 3 ρ, κτ. κατὰ σειρὰν ἀριθμητικήν, πλὴν ρ λαμβάνεται ὁ ἐλάχιςος ἐκθέτης τῆς συνεργασίας, ὡς $\frac{\chi+1}{\sqrt[3]{2+\chi^{\frac{1}{2}}}}=A+B\chi^{\frac{1}{2}}+\Gamma\chi^{\frac{2}{2}}+\Delta\chi^{\frac{3}{2}}$, κτ. καὶ ἔτι $\sqrt{(a^3-\chi^3)}=\sqrt{(A+B\chi^3+\Gamma\chi^6+\Delta\chi^9)}$ κτ.

γ. Ἐὰν δὲ δὲν ληφθῇ ὁ πρῶτος ὅρος ἀμετάβλητος, ἀλλ' ἀμέσως μετὰ μεταβλητῆς ποσότητος, τότε τὸ μὲν π ἐκλαμβάνεται = τῷ ἐλαχίςῳ ἐκθέτῃ τῆς συνεργασίας, τὸ δὲ ρ εἰς τὸν β' ὅρον = τῇ διαφορᾷ μεταξὺ αὐτοῦ τοῦ ἐλαχίςου ἐκθέτου, καὶ τοῦ ἑξῆς μείζονος ὡς,

$$(\chi-2\chi^2+3\chi^3-4\chi^4\ldots)^{\frac{1}{2}}=A\chi^{\frac{1}{2}}+B\chi^{\frac{3}{2}}+\Gamma\chi^{\frac{5}{2}}+\ldots.$$

ὅπου $\pi=\frac{1}{2}$ καὶ $\rho=1$. Ὁ ταῦτα καλῶς νοήσας, εὐκόλως λύει τὰ ἑξῆς.

β΄. Μεταβληθήτω καὶ ἤδη ἡ συνεργασία $\dfrac{1+\chi^2}{1-\chi-\chi^3}$ εἰς ἄπειρον σειρὰν, ὅθεν

$$\frac{1+\chi^2}{1-\chi-\chi^3}=1+A\chi+B\chi^2+\Gamma\chi^3\Delta\chi^4+E\chi^5+Z\chi^6+\ldots$$

$$\overline{}\ \chi(1-\chi-\chi^3)$$

$$\begin{array}{ll|l|l|l|l|l|l}
1+\chi^2= & 1+A & \chi+B & \chi^2+\Gamma & \chi^3+\Delta & \chi^4+E & \chi^5+Z & \chi^6+\ldots \\
 & -1 & -A & -B & -\Gamma & -\Delta & -E & -\ldots \\
 & & & -1 & -A & -B & -\Gamma & -\ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l|l|l|l|l|l}
\text{καὶ } 0= & 1+A & \chi+B & \chi^2+\Gamma & \chi^3+\Delta & \chi^4+E & \chi^5+Z & \chi^6+\ldots \\
 & -1-1 & -A & -B & -\Gamma & -\Delta & -E & -\ldots \\
 & & -1 & -1 & -A & -B & -\Gamma &
\end{array}$$

ἄρα κατὰ τὸ (§. 686) $A-1=0$ καὶ $A=1$

ἔτι $B-A-1=0$ καὶ $B=2$. ἔτι $\Gamma-B-1=0$ καὶ $\Gamma=3$

ἔτι $\Delta-\Gamma-A=0$ καὶ $\Delta=4$. ἔτι $E-\Delta-B=0$ καὶ $E=6$

ἔτι $2-E-\Gamma=0$ καὶ $Z=9$. ὅθεν

$$\frac{1+x^2}{1-x-x^3}=1+x+2x^2+3x^3+4x^4+6x^5+9x^6+13x^7+19x^8+\ldots$$

διότι ὁ συνεργὸς τοῦ ἑξῆς ὅρου εἶναι τὸ κεφάλαιον τοῦ συνεργοῦ τοῦ προηγουμένου, καὶ ἅμα τοῦ προπροηγουμένου δηλ: $Z=E+\Gamma$ καὶ $E=\Delta+B$ κτ. καλοῦμεν καὶ ἡμεῖς αὐτὰς τὰς σειρὰς, ὧν ὁ ἑξῆς ὅρος ἀπό τινων προηγουμένων γίνεται, σειρὰς ἐπαναληπτικάς· διότι ἡ διαφορὰ εἰς ὅρους τινὰς τηρεῖται ἀμετάβλητος, καὶ εἰς τὸν ἑξῆς μεταβάλλεται, καὶ αὕτη ἡ μεταβολὴ γίνεται πάλιν ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ·

οὕτως ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ $x+2x^2+3x^3+4x^4$ σερεὰ $=1$. ἔπειτα ὅμως ἡ διαφορὰ ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ, 2, 3, 4, 5, ὥστε μετὰ μίαν σειρὸν ἑτέρα ἐπαναλαμβάνεται.

γ'. Ἀχθήτω καὶ ἦδε $\dfrac{a^2}{a^2+2ax-x^2}$ εἰς ἄπειρον σειράν.

$$\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}=A+Bx+\Gamma x^2+\Delta x^3+Ex^4+Zx^5+\dots$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\cdot(a^2+2ax-x^2)$$

$a^2=a^2A+a^2B$	$x+a^2\Gamma$	$x^2+a\Delta$	x^3+aE	x^4+a^2Z	$x^5+\dots$
$+2aA$	$+2aB$	$+2a\Gamma$	$+2a\Delta$	$+2aE$	$+\dots$
καὶ $0=-a^2$	$-A$	$-B$	$-\Gamma$	$-\Delta$	$-\dots$

ἄρα $a^2A-a^2=0$ καὶ $a^2A=a^2$ καὶ $A=\dfrac{a^2}{a^2}=1$

ἔτι $a^2B+2aA=0$ καὶ $a^2B=-2a$ καὶ $B=-\dfrac{2}{a^2}$

ἔτι $a^2\Gamma+2aB-A=0$ ἤτοι $a^2\Gamma-\dfrac{4a}{a}-1=0$· $a^2\Gamma-$

$$2-1=0\cdot\ \text{καὶ}\ \Gamma=\frac{2}{a^2}.$$

ἔτι $a^2\Delta+2a\Gamma-B=0$ καὶ $a^2\Delta+\dfrac{10}{a}+\dfrac{2}{a}=0$ $a^3\Delta+10+2=0$.

$$\Delta=-\frac{12}{a^3}.$$

ἔτι $a^2E+2a\Delta-\Gamma=0$ ἤτοι $a^2E-\dfrac{24}{a^2}-\dfrac{5}{a^2}=0$ a^4E-

$$24-5=0.\ E=\frac{29}{a^4}.$$

ὅτι $a^2Z+2aE-\Delta=0$ καὶ $a^2Z+\dfrac{58}{a^3}+\dfrac{12}{a^3}=0\cdot a^5Z+58+12=0$·

$$Z=\frac{70}{a^5},$$

Καὶ ὁ νόμος αὐτῆς τῆς σειρᾶς, καθ' ὃν ἡ σειρὰ συνεχίζεται, εἶναι κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον· ὁ μὲν παρονομαστὴς, ἤτοι ἡ ἀμετάβλητος a ὑψοῦται εἰς δυνάμεις κατὰ σειρὰν ἀριθμητικὴν 1, 2, 3, κτ. ὁ δὲ συνεργὸς τοῦ ἀριθμητοῦ γίνεται, ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸν προηγούμενον συνεργὸν, καὶ εἰς τὸ διπλοῦν αὐτὸ προσθῶμεν καὶ τὸν ἑξῆς ἡγούμενον· διότι $H=2Z+E=169$.

δ'. Τοῦτον τὸν τρόπον εὑρίσκεται καὶ $\dfrac{1+2\chi}{1-\chi-\chi^2}=$ $1+3\chi+4\chi^2+7\chi^2+11\chi^4+18\chi^5+29\chi^6$ κτ. εἰς αὐτὴν ὁ ἑξῆς ὅρος γίνεται ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τῶν συνεργῶν τῶν δύο προηγουμένων.

ε'. Τοῦτον τὸν τρόπον καὶ τοῦτο $\dfrac{\chi+1}{2+\chi^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\chi+1}{2+\sqrt{\chi}}$ εἰς ἄπειρον μεταβάλλεται σειρὰν $\dfrac{\chi+1}{2+\chi^{\frac{1}{2}}}=A+B\chi^{\frac{1}{2}}+\Gamma\chi+\Delta\chi^{\frac{3}{2}}+E\chi^2$.

$$\overline{\phantom{A+B\chi^{\frac{1}{2}}+\Gamma\chi+\Delta\chi^{\frac{3}{2}}}}\;\cdot(2+\chi^{\frac{1}{2}})$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} 0=2A+2B & \chi^{\frac{1}{2}}+2\Gamma & \chi+2\Delta & \chi^{\frac{3}{2}}+2E & \chi^2 \\ -1+A & +B & +\Gamma & +\Delta & \\ & -1 & & & \end{array}$$

ἄρα $\dfrac{2A-1=0}{A=\frac{1}{2}}$ ὅτι $\dfrac{2B+A=0}{\dfrac{2B=-A}{B=-\frac{1}{4}}}$ ὅτι $\dfrac{2\Gamma+B-1}{\dfrac{2\Gamma=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}}{\Gamma=\frac{5}{8}}}$.

ἔτι $\dfrac{2\Delta+\Gamma=0}{\dfrac{2\Delta=-\frac{5}{8}}{\Delta=-\frac{5}{16}}}$ ἔτι $\dfrac{2E+\Delta=0}{\dfrac{2E=+\frac{5}{16}}{E=\frac{5}{32}}}$

$$\text{ἄρα}\ \frac{\chi+1}{2+\sqrt{\chi}}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\chi^{\frac{1}{2}}+\tfrac{5}{8}\chi-\tfrac{5}{16}\chi^{\frac{3}{2}}+\tfrac{5}{32}\chi^{2}-\ldots=$$

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\sqrt{\chi}+\tfrac{5}{8}\sqrt{\chi^2}-\tfrac{5}{16}\sqrt{\chi^3}+\tfrac{5}{32}\sqrt{\chi^4}-\tfrac{5}{64}\sqrt{\chi^5}+\ldots$$

Καί αὐτοῦ ὁ νόμος σαφής· ἡ μὲν μεταβλητὴ ποσότης ἄρχεται ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὅρου μὲ ῥίζαν τετραγωνικὴν, καὶ εἰς τὸ ἑξῆς ὑψοῦται εἰς δυνάμεις κατὰ σειρὰν 1, 2, 3, 4, 5, καὶ τ: λ: οἱ δὲ συνεργοὶ γίνονται ἐν σειρᾷ γεωμετρικῇ ἀπὸ πηλίκου $\frac{1}{2}$, πλὴν ἀπὸ τοῦ γ′ ὅρου ἄρχεται ὁ ἀμετάβλητος ἀριθμητὴς 5, τὰ δὲ σημεῖα ἀμοιβαδὸν τίθενται.

ϛ′. Μεταβληθήτω καὶ ἤδε ἡ συνεργασία $(\chi-2\chi^2+3\chi^3-4\chi^4+5\chi^5-6\chi^6+\ldots)^{\frac{1}{2}}$ εἰς σειρὰν ἄπειρον· Θῶμεν ταύτην ἴσην τῇ ἑξῆς σειρᾷ

$$(\chi-2\chi^2+3\chi^3-4\chi^4+5\chi^5-6\chi^6\pm\ldots)^{\frac{1}{2}}=A\chi^{\frac{1}{2}}+B\chi^{\frac{3}{2}}+\Gamma\chi^{\frac{5}{2}}+\ldots\ \text{κτ.}$$

καὶ ὑψωθήτωσαν εἰς τετράγωνα ἄμφω τὰ σκέλη οὕτω

$$\chi-2\chi^2+3\chi^3-4\chi^4+5\chi^5-6\chi^6=$$

$$\begin{array}{r|l|l|r|l|l}
A^2 & \chi+2AB & \chi^2+B^2 & \chi^3+2B\Gamma & \chi^4+\Gamma^2 & \chi^5 \\
 & & +2A\Gamma & +2A\Delta & +2B\Delta & \\
 & & & & +2AE &
\end{array}$$

Ἐὰν δ᾽ εἰς τὸ μηδὲν τὴν ἐξίσωσιν φέρωμεν, ἔσαι

$$0=\begin{array}{r|l|l|r|l|l}
A^2 & \chi+2AB & \chi^2+B^2 & \chi^3+2B\Gamma & \chi^4+\Gamma^2 & \chi^5 \\
-1 & +2 & +2A\Gamma & +2A\Delta & +2B\Delta & \\
 & & -3 & -4 & +2AE & \\
 & & & & +5 &
\end{array}$$

καὶ ἑπομένως $\dfrac{A^2-1=0}{A=1}$ ἔτι $\dfrac{2AB+2=0}{B=-1}$

$$\text{ἔτι } B+2A\Gamma-3=0 \quad \text{ἔτι } 2B\Gamma+2A\Delta-4=0 \quad \text{ἔτι } \Gamma+2B\Delta+2AE+5=0$$

$$2A\Gamma=3-1 \quad 2\Delta=-4-2B\Gamma=-2 \quad 1+2B\Delta+2E-5=0$$

$$\Gamma=1 \quad \Delta=-1 \quad 2E=-1-2+5=2$$

$$E=1$$

ἄρα $(\chi-2\chi^2+3\chi^3-4\chi^4+5\chi^5-6\chi^6\pm\ldots\ldots)^{\frac{1}{2}}=$
$\chi^{\frac{1}{2}}-\chi^{\frac{3}{2}}+\chi^{\frac{5}{2}}-\chi^{\frac{7}{2}}+\chi^{\frac{9}{2}}-\chi^{\frac{11}{2}}+\chi^{\frac{13}{2}}+\ldots$ Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκτυλίομεν καὶ ἑτέρας ἀλόγους συνεργασίας, ἐὰν αὐτὴν ἴσην θῶμεν μιᾷ σειρᾷ ἐπιτηδεία εἰς αὐτὴν, καὶ ἔπειτα τοὺς ἀγνώςους συνεργοὺς τῆς σειρᾶς διορίσωμεν.

§. 688. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἐπαναληπτικὰς σειρὰς κατὰ τάξιν, ἐπαναληφθήτωσαν τὰ κλάσματα τὰ ἑξῆς εἰς ἀπείρους σειράς.

$$\alpha'.\ \frac{\alpha}{\alpha'+\beta'\chi}=A+B\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3+E\chi^4+\ldots\ldots$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \cdot(\alpha'+\beta'\chi)-\alpha$$

$$0=\begin{array}{c|c|c|c|l}\alpha'A+\alpha'\beta & \chi+\alpha'\Gamma & \chi^2+\alpha\Delta & \chi^3+\alpha'E & \chi^4+\ldots\ldots\\ -\alpha+\beta'A & +\beta'B & +\beta'\Gamma & +\beta'\Delta & \end{array}$$

$$\alpha'A-\alpha=0 \text{ καὶ } A=\frac{\alpha}{\alpha'},\quad \alpha'B+\beta'A=0 \text{ καὶ } B=-\frac{\beta'}{\alpha'}A=\frac{\alpha\beta'}{\alpha'^2}$$

$$\alpha'\Gamma+\beta'B=0 \text{ κ. } \Gamma=-\frac{\beta'}{\alpha'}B=\frac{\alpha\beta'^2}{\alpha'^3}.\ \alpha'\Delta+\beta'\Gamma=0.\ \Delta=\frac{\beta'}{\alpha'}\Gamma=\frac{\alpha\beta'^3}{\alpha'^4}$$

$$\text{ἄρα } \frac{\alpha}{\alpha'+\beta'\chi}=\frac{\alpha}{\alpha'}-\frac{\alpha\beta'}{\alpha'^2}\chi+\frac{\alpha\beta'^2}{\alpha'^3}\chi^2-\frac{\alpha\beta'^3}{\alpha'^4}\chi^3\pm\ldots\ldots$$

Καὶ αὐτοῦ ὁ νόμος φανερὸς, ὅτι ἕκαςος ὅρος τῶν συνεργῶν γίνεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν προηγούμενον ὅρον διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{\beta'}{\alpha'}$, οὗ ἀριθμητὴς ὁ συνεργὸς τῆς μεταβλητης ποσότητος του παρονομαστού, καὶ παρονομαστὴς ὁ ἀμετάβλητος α΄ ὅρος του παρονομαστοῦ αὐτοῦ· ὁ δὲ πρῶτος ὅρος γίνεται, ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δοθέντος κλάσματος θῶμεν παρονομαστὴν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος κλάσματος.

β΄. Μεταβληθήτω καὶ τόδε $\frac{\alpha+\beta\chi}{\alpha'+\beta'\chi+\gamma'\chi^2}$ εἰς ἄπειρον σειρὰν

$$\frac{\alpha+\beta\chi}{\alpha'+\beta'\chi+\gamma'\chi^2}=\mathrm{A}+\mathrm{B}\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3+\mathrm{E}\chi^4+\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{}\cdot(\alpha'+\beta'\chi+\gamma'\chi^2)-(\alpha+\beta\chi)$$

$$\mathrm{o}=\begin{array}{r|l|l|l|l}\alpha'\mathrm{A}+\alpha'\mathrm{B} & \chi+\alpha'\Gamma & \chi^2+\alpha'\Delta & \chi^3+\alpha'\mathrm{E} & \chi^4\\ +\beta'\mathrm{A} & +\beta'\mathrm{B} & +\beta'\Gamma & +\beta'\Delta & \\ -\alpha-\beta & +\gamma'\mathrm{A} & +\gamma'\mathrm{B} & +\gamma'\Gamma & \end{array}$$

$\alpha'\mathrm{A}-\alpha=\mathrm{o}$ ἤτοι $\mathrm{A}=\frac{\alpha}{\alpha'}$. $\alpha'\mathrm{B}+\beta'\mathrm{A}-\beta=\mathrm{o}$. $\mathrm{B}=\frac{\beta-\beta'\mathrm{A}}{\alpha'}$ $=\frac{\beta}{\alpha'}-\frac{-\beta'}{\alpha'}\mathrm{A}=\frac{\beta-}{\alpha'}\frac{\alpha\beta'}{\alpha'^2}$. $\alpha'\Gamma+\beta'\mathrm{B}+\gamma'\mathrm{A}=\mathrm{o}$ $\Gamma=\frac{-\beta'\mathrm{B}-\gamma'\mathrm{A}}{\alpha'}=-\frac{\gamma'\mathrm{A}}{\alpha'}\frac{-\beta'\mathrm{B}}{\alpha'}$, $\alpha'\Delta+\beta'\Gamma+\gamma'\mathrm{B}=\mathrm{o}$ $\Delta=\frac{-\gamma'\mathrm{B}-\beta'\Gamma}{\alpha'}$. $\alpha'\mathrm{E}+\beta'\Delta+\gamma'\Gamma=\mathrm{o}$ $\mathrm{E}=\frac{-\gamma'\Gamma-\beta'\Delta}{\alpha'}$

καὶ $\frac{\alpha+\beta\chi}{\alpha'+\beta'\chi+\gamma'\chi^2}=\frac{\alpha}{\alpha'}+\frac{\beta-\beta'\mathrm{A}}{\alpha}\chi+\left(\frac{-\gamma'\mathrm{A}-\beta'\mathrm{B}}{\alpha'}\right)\chi^2+$ $\left(\frac{-\gamma'\mathrm{B}-\beta'\Gamma}{\alpha'}\right)\chi^3+\left(\frac{-\gamma'\Gamma-\beta'\Delta}{\alpha'}\right)\chi^4$. Καὶ ὁ νόμος αὐτῆς τῆς σειρᾶς εἶναι νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀπὸ τοῦ τρίτου ὅρου καὶ καθεξῆς τοὺς δύο προηγουμένους ὅρους, τὸν μὲν ἡγούμενον διὰ τοῦ $-\frac{\beta'}{\alpha'}$, καὶ τὸν προηγούμενον διὰ τοῦ —

$\frac{\gamma'}{\alpha'}$, καὶ τὸ κεφάλαιον τούτων εἶναι ὁ συνεργὸς τοῦ ἑπομένου ὅρου, δηλ: $Z=\frac{-\beta'E-\gamma'\Delta}{\alpha'}$· ὁ δὲ πρῶτος εἶναι κλάσμα, οὗ ὁμὲν ἀριθμητὴς ὁ ἀμετάβλητος τοῦ ἀριθμητοῦ, ὁ δὲ παρονομαςὴς ὁ ἀμετάβλητος πρῶτος τοῦ παρονομαςοῦ· $\frac{\alpha}{\alpha'}$· Ὁ δὲ δεύτερος γίνεται, ἐὰν διὰ τοῦ πρώτου ἀμεταβλήτου τοῦ παρονομαςοῦ α' διέλωμεν τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ συνεργοῦ τῆς μεταβλητῆς χ τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ τοῦ παραγομένου ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ συνεργοῦ τοῦ παρονομαςοῦ, καὶ τοῦ πρώτου ὅρου $\frac{\beta-\beta'A}{\alpha'}$· καὶ λοιπὸν τόδε

$$\frac{1+2\chi}{1+3\chi+5\chi^2}=1-\chi-2\chi^2+11\chi^3-23\chi^4+14\chi^5+\ldots\ldots$$

γ'. Γενέσθω εἰς ἄπειρον σειρὰν καὶ τόδε

$$\frac{\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2}{\alpha'+\beta'\chi+\gamma'\chi^2\times\delta\chi^3}=A+B\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3+E\chi^4+\ldots$$

$$\overline{\qquad\qquad}\,.(\alpha'+\beta'\chi+\gamma'\chi^2+\delta'\chi)-(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2)$$

$$O=\begin{array}{r|r|r|r|r|l} \alpha'A+\alpha'B & \chi+\alpha'\Gamma & \chi^2+\alpha'\Delta & \chi^3+\alpha'E & \chi^4+\alpha'Z & \chi^5 \\ +\beta'A & +\beta'B & +\beta'\Gamma & +\beta'\Delta & +\beta'E & \\ -\alpha-\beta & +\gamma'A & +\gamma'B & +\gamma'\Gamma & +\gamma'\Delta & \\ & -\gamma & +\delta'A & +\delta'B & +\delta'\Gamma & \end{array}$$

$\alpha'A-\alpha=0$ ἐξ ὧν $A=\frac{\alpha}{\alpha'}$

$\alpha'B+\beta A-\beta=0$ $\beta=\frac{\beta-\beta'A}{\alpha'}=\frac{\beta}{\alpha'}-\frac{\beta'}{\alpha'}A.$

$\alpha'\Gamma+\beta'\Gamma+\gamma'A-\gamma=0.\Gamma=\frac{\gamma-\gamma'A-\beta'B}{\alpha'}=\frac{\gamma}{\alpha'}-\frac{\gamma'}{\alpha'}A-\frac{\beta'}{\alpha'}B$

$$\alpha'\Delta+\beta'\Gamma+\gamma'B+\delta'A=0.\ \Delta=-\frac{\delta'}{\alpha'}A-\frac{\gamma'}{\alpha'}B-\frac{\beta'}{\alpha'}\Gamma.$$

$$\alpha'E+\beta'\Delta+\gamma'\Gamma+\delta'B.\ E=-\frac{\delta'}{\alpha'}B-\frac{\gamma'}{\alpha'}\Gamma-\frac{\beta'}{\alpha'}\Delta$$

ὅθεν $\dfrac{\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2}{\alpha'+\beta'\chi+\gamma'\chi^2+\delta'\chi^3}=\dfrac{\alpha}{\alpha'}+\left(\dfrac{\beta}{\alpha'}-\dfrac{\beta'}{\alpha'}A\right)\chi+$

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha'}-\frac{\gamma'}{\alpha'}A-\frac{\beta'}{\alpha'}B\right)\chi^2+\left(-\frac{\delta'}{\alpha'}A-\frac{\gamma'}{\alpha'}B-\frac{\beta'}{\alpha'}\Gamma\right)\chi^3$$

Καὶ αὐτοῦ ὁ νόμος τῶν συνεργῶν φανερὸς, ὅτι ὁ πρῶτος καὶ δεύτερος ὅρος γίνεται ὡς εἰς τὸ ἡγούμενον β' παράδειγμα· ὁ δὲ τρίτος τὸ κεφάλαιον τοῦ κλάσματος $\frac{\gamma}{\alpha'}$ οὗ ἀριθμητὴς ὁ συνεργὸς τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος, καὶ παρονομαστὴς ἡ ἀμετάβλητος ποσότης τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τῶν δύο παραγομένων τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ὅρου τοῦ μὲν A ἐπὶ τὸ $-\frac{\gamma'}{\alpha'}$. τοῦ δὲ B ἐπὶ τὸ $-\frac{\beta'}{\alpha'}$ ὡς εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα· οἱ δ' ἑξῆς ὅροι γίνονται ἀεὶ ἀπὸ τρεῖς προηγουμένους ὅρους, ἐὰν ὁ προπροηγούμενος πολλαπλασιασθῇ διὰ τοῦ $-\frac{\delta'}{\alpha'}$, καὶ ὁ προηγούμενος διὰ τοῦ $-\frac{\gamma'}{\alpha'}$, καὶ ὁ ἡγούμενος διὰ τοῦ $-\frac{\beta'}{\alpha'}$, καὶ τὰ παραγόμενα συναφθῶσιν εἰς ἕν· ὅθεν ἐὰν δοθῇ τοιοῦτον κλάσμα κατὰ τὸν τύπον $\dfrac{\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2}{\alpha'+\beta'\chi+\gamma'\chi^2+\delta'\chi^3}$ κατὰ τοὺς αὐτοὺς κανόνας εἰς σειρὰν ἄπειρον μεταβάλλεται.

δ'. Ἀχθήτω εἰς ἄπειρον σειρὰν καὶ τόδε

$$\frac{\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2+\delta\chi^3}{\alpha'+\beta'\chi+\gamma'\chi^2+\delta'\chi^3+\epsilon'\chi^4}=A+B\chi+\Gamma\chi^2+\Delta\chi^3+E\chi^4+\ldots$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\cdot(\alpha'+\beta'\chi+\gamma'\chi^2+\delta'\chi'^3+\epsilon'\chi^4)$$

$$\begin{array}{ll|l|l|l|l|l|l}
\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2+\delta\chi^3= & \alpha'A+\alpha'B & \chi+\alpha'\Gamma & \chi+\alpha'\Delta & \chi^3+\alpha'E & \chi^4+\alpha'Z & \chi^5+\alpha'H & \chi^6 \\
 & \quad\;\;\, +\beta'A & \;\; +\beta'B & \;\; +\beta'\Gamma & \;\; +\beta'\Delta & \;\; +\beta'E & \;\; +\beta'Z & \\
\text{καὶ } O= & -\alpha\;\;-\beta & \;\; +\gamma'A & \;\; +\gamma'B & \;\; +\gamma'\Gamma & \;\; +\gamma'\Delta & \;\; +\gamma'E & \\
 & & \;\; -\gamma & \;\; +\delta'A & \;\; +\delta'B & \;\; +\delta'\Gamma & \;\; +\delta'\Delta & \\
 & & & \;\; -\delta & \;\; +E'A & \;\; +E'B & \;\; +\epsilon'\Gamma & \\
\end{array}$$

$$\alpha' A - \alpha = o \text{ ἐξ ὧν } A = \frac{\alpha}{\alpha'}$$

$$\alpha' B + \beta' A - \beta = o. B = \frac{\beta}{\alpha'} - \frac{\beta'}{\alpha'} A$$

$$\alpha' \Gamma + \beta' B + \gamma' A - \gamma = o. \Gamma = \frac{\gamma}{\alpha'} - \frac{\gamma'}{\alpha'} A - \frac{\beta'}{\alpha'} B$$

$$\alpha' \Delta + \beta' \Gamma + \gamma' B + \delta' A - \delta = o. \Delta = \frac{\delta}{\alpha'} - \frac{\delta'}{\alpha'} A - \frac{\gamma'}{\alpha'} B - \frac{\beta'}{\alpha'} \Gamma$$

$$\alpha' E + \beta' \Delta + \gamma' \Gamma + \delta' B + \varepsilon' A = o. E = -\frac{\varepsilon'}{\alpha'} A - \frac{\delta'}{\alpha'} B - \frac{\gamma'}{\alpha'} \Gamma - \frac{\beta'}{\alpha'} \Delta.$$

$$\alpha' Z + \beta' E + \gamma' \Delta + \delta' \Gamma + \varepsilon' B = o. Z = -\frac{\varepsilon'}{\alpha'} B - \frac{\delta'}{\alpha'} \Gamma - \frac{\gamma'}{\alpha'} \Delta - \frac{\beta'}{\alpha'} E$$

$$\alpha' H + \beta' Z + \gamma' E + \delta' \Delta + \varepsilon' \Gamma = o. H = -\frac{\varepsilon'}{\alpha'} \Gamma - \frac{\delta'}{\alpha'} \Delta - \frac{\gamma'}{\alpha'} E - \frac{\beta'}{\alpha'} Z$$

Κανταῦθα ὁ α΄, β΄, καὶ γ΄ ὅρος γίνεται ὡς εἰς τὸ γ΄ παράδειγμα· ὁ δὲ τέταρτος γίνεται ἐκ τῶν προηγουμένων τριῶν ὅρων, ὡς οἱ ὅροι τοῦ τρίτου παραδείγματος ἐγίνοντο, καὶ προςίθεται καὶ $\frac{\delta'}{\alpha'}$ δηλ. τὸ κλάσμα, οὗ τινος ὁ ἀριθμητὴς ὁ συνεργὸς τῆς μείζονος δυνάμεως τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ παρονομαςὴς ἡ ἀμετάβλητος ποσότης τοῦ παρονομαςοῦ, ἀπὸ δὲ τοῦ πέμπτου ὅρου γίνονται οἱ ὅροι ἀπὸ τεσσάρων ὅρων προηγουμένων, ἐὰν οὗτοι ἀπὸ τοῦ ἀπωτέρου ἀρχόμενοι, πολλαπλασιασθῶσιν ὁ μὲν μὲ $-\frac{\varepsilon'}{\alpha'}$· ὁ δὲ μὲ $-\frac{\delta'}{\alpha'}$· ὁ δὲ μὲ $-\frac{\gamma'}{\alpha'}$· ὁ δὲ μὲ $-\frac{\beta'}{\alpha'}$ καὶ τὰ γινόμενα συναφθῶσιν εἰς ἕν.

§. 689. Οἱ ὅροι τῶν τοιούτων σειρῶν, ὁποῦ ἐκτυλίονται ἀπὸ τοῦ γένους τῶν τοιούτων λογικῶν τύπων

$$\frac{\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2 \ldots\ldots\ldots +\rho\chi^{\mu-1}}{\alpha'+\beta'\chi+\gamma'\chi^2 \ldots\ldots\ldots \rho\chi^{\mu-1}+\sigma\chi^{\mu}}$$ γίνονται ἀπὸ τοσούτων προηγουμένων ὅρων, ὅσαι μονάδες εἰσὶν εἰς τὸν μείζονα ἐκθέτην τῆς τρεπτῆς χ· οἱ δὲ παράγοντες μὲ τοὺς ὁποίους πολλαπλασιάζονται οἱ προηγούμενοι ὅροι εἶναι ἀεὶ κλάσματα ἀποφατικὰ, ὧν οἱ μὲν παρονομασαὶ ἡ ἀμετάτρεπτος ποσότης τοῦ παρονομασοῦ α΄ εἰς ὅλα· ἀριθμηταὶ δὲ οἱ συνεργοὶ τῆς τρεπτῆς χ τοῦ παρονομασοῦ ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς μεγίσης δυνάμεως τῆς χ οὕτω $-\frac{\sigma'}{\alpha'}-\frac{\rho'}{\alpha'}\ldots\ldots-\frac{\gamma'}{\alpha'},-\frac{\beta'}{\alpha'}$. Καὶ ὁ ἀπώτερος ὅρος τῶν προηγουμένων πολλαπλασιάζεται μὲ τὸ κλάσμα, οὗ ὁ ἀριθμητὴς ὁ συνεργὸς τῆς μείζονος δυνάμεως τοῦ παρονομασοῦ, ὁ δ' ἑξῆς μὲ τὸ κλάσμα, οὗ ἀριθμητὴς τῆς ἑξῆς ἐλάττονος δυνάμεως κτ. Ο' νόμος δ' οὗτος ἄρχεται μετὰ τοσούτους ὅρους τῆς σειρᾶς, ὅσοι ὅροι εἰσὶν ἐν τῷ ἀριθμητῇ τοῦ κλάσματος· οὗτοι δὲ οἱ ὅροι γίνονται τοῦτον τὸν τρόπον, ὁ πρῶτος ἀεὶ $\frac{\alpha}{\alpha'}$, ὁ δεύτερος ἀναλόγως ἔχει κλάσμα $\frac{\beta}{\alpha'}$, οὗ ὁ ἀριθμητὴς ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ ἀριθμητοῦ, ὁ γὰρ παρονομασὴς ἀεὶ εἰς ὅλα ἡ ἀμετάβλητος ποσότης α΄, καὶ ἅμα τὸ γινόμενον ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου καὶ $-\frac{\beta'}{\alpha'}$. ὁ δὲ τρίτος ἀπό τε

τοῦ κλάσματος $\frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ ἀπὸ τὰ γινόμενα τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ὅρου μὲ $-\frac{\gamma'}{\alpha}$ καὶ $-\frac{\beta'}{\alpha}$. ὁ τέταρτος ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{\delta'}{\alpha}$ καὶ ἀπὸ τῶν προηγουμένων τριῶν, ἐπὶ $-\frac{\delta'}{\alpha}, -\frac{\gamma'}{\alpha}, -\frac{\beta'}{\alpha}$ πολλαπλασιαζομένων· καὶ οὕτω κατ' αὐτὴν τὴν μέθοδον ἐκτυλίεται ἕκαςον εἶδος τοιοῦτον εἰς ἄπειρον σειράν. Τοὺς δ' ἀριθμοὺς, μὲ τοὺς ὁποίους οἱ προηγούμενοι ὅροι πολλαπλασιάζονται ὡς $-\frac{\beta'}{\alpha}, -\frac{\gamma'}{\alpha}, -\frac{\delta'}{\alpha}$ κτ. καλοῦσι κλίμακα τῆς ἀναφορᾶς· πῶς ὅμως εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον τούτων κτ. ὕςερον.

§. 690. Διὰ δὲ τῆς καλῆς ταύτης μεθόδου τοῦ νὰ φέρωμεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδὲν, καὶ νὰ διορίζωμεν τοὺς συνεργοὺς, λύονται διάφορα προβλήματα· Δεδόσθω δηλ: ὁ γενικὸς ὅρος μιᾶς σειρᾶς $\tau = 25 + 4\upsilon^2 - \upsilon$, καὶ ζητεῖται τὸ κεφάλαιον αὐτῆς· ἐπειδὴ δὲ οὗτος ὁ τύπος συνεργασία τῆς μεταβλητῆς ποσότητος υ εἶναι, καὶ εἶναι τῆς δευτέρας τάξεως τῶν ἀριθμητικῶν σειρῶν· διότι ὁ μέγιςος ἐκθέτης τῆς $\upsilon=2$· ἄρα οὗτος ὁ τύπος ὁ γενικὸς ὅρος ἀριθμητικῆς σειρᾶς τῆς δευτέρας τάξεως (§. 562). ἀλλ' ἐκεῖ εὕρηται τὸ κεφάλαιον τῆς δευτέρας τάξεως $K = A\upsilon + B\upsilon^2 + \Gamma\upsilon^3$ (αὐτοῦ). Ἐὰν ὅμως αὐτοῦ ἀντὶ υ θῶμεν $(\upsilon - 1)$, εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον μιᾶς σειρᾶς παρὰ ἕνα ὅρον ἐκείνης· ἐὰν τὸ κεφάλαιον αὐτῆς K' οὕτω σημειώσωμεν, ἔςαι

$K' = A(\nu-1) + B(\nu-1)^2 + \Gamma(\nu-1)^3 = A\nu - A + B\nu^2 - 2B\nu + B + \Gamma\nu^3 - 3\Gamma\nu^2 + 3\Gamma\nu - \Gamma$. Ἐὰν ὅμως ταύτην τὴν ἐξίσωσιν ἀπὸ τῆς πρώτης ἀφέλωμεν, τὸ λείψανον ἔςαι ἴσον τῷ ἐσχάτῳ ὅρῳ τῆς σειρᾶς, ἤτοι $K - K' = \tau$ λοιπὸν

$A\nu + B\nu^2 + \Gamma\nu^3 - A\nu + A - B\nu^2 + 2B\nu - B + 3\Gamma\nu^2 - \Gamma\nu^3 - 3\Gamma\nu + \Gamma$
$= \tau = A + 2B\nu - B + 3\Gamma\nu^2 - 3\Gamma\nu + \Gamma$.

ἐὰν δ' ἀντὶ τ θῶμεν τὴν ἴσην αὐτῷ ἔκθεσιν, καὶ φέρωμεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδὲν, διορίζονται οἱ συνεργοὶ A, B, Γ, οὕτω

$25 + 4\nu^2 - \nu = A + 2B\nu - B + 3\Gamma\nu^2 - 3\Gamma\nu + \Gamma$

$$\begin{array}{rr|r|l} \text{καὶ ἑπομένως} & 0 = A + 2B & \nu + 3\Gamma & \nu^2 \\ \text{λοιπὸν (§. 685)}\ A - B + \Gamma - 25 = 0 & -B - 3\Gamma & -4 & \\ 2B - 3\Gamma + 1 = 0 & +\Gamma + 1 & & \\ 3\Gamma - 4 = 0\ \text{καὶ}\ \Gamma = \tfrac{4}{3} & -25 & & \end{array}$$

καί, $2B = 3$, καὶ $B = \frac{3}{2}$, καὶ $A = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + 25 = \frac{9}{6} - \frac{8}{6} + \frac{150}{6} = \frac{151}{6}$ καὶ τέλος $K = \frac{151}{6}\nu + \frac{3}{2}\nu^2 + \frac{4}{3}\nu^3 = \dfrac{151\nu + 9\nu^2 + 8\nu^3}{6}$. Γίνεται δὲ ἡ σειρὰ οὕτως, ἀπὸ τοῦ δοθέντος $\tau = 25 + 4\nu^2 - \nu$, ἐὰν θῶμεν $\nu = 1 = 2, = 3 = 4$ κτ. 28, 39, 58, 85, 120· τὸ δὲ κεφάλαιον αὐτῆς εὑρίσκομεν κατὰ τὸν τύπον $K = \dfrac{151\nu + 9\nu^2 + 8\nu^3}{6}$. Ἐὰν δέ τις θέλῃ, εὑρίσκει κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον καὶ τὰ κεφάλαια τῶν ἑξῆς σειρῶν, ὅταν δοθῶσιν οἱ ἔσχατοι γενικοὶ ὅροι $\tau = 3\nu - 1$. 5ν. $3\nu + 1$. $\dfrac{\nu^2 + \nu}{2}$. $\dfrac{3\nu^2 + \nu}{2}$. $\dfrac{5\nu^2 + 5\nu}{2}$. $\dfrac{3\nu^2 + 5\nu}{2}$. $\dfrac{\nu^3 + 3\nu^2 + 2\nu}{6}$ κτ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Πῶς ἡ κλασματικὴ συνεργασία εἰς μερικὰ κλάσματα μεταβάλλεται.

§. 691. Εἰς τὸν ὁλοκληρωτικὸν ἐπιλογισμὸν ἐπιζητεῖται νὰ μεταβληθῇ μία κλασματικὴ συνεργασία εἰς μερικὰ κλάσματα· τοῦτο δὲ γίνεται πάλιν διὰ τῆς ἄνω προτάσεως (§. 685). Λοιπὸν μία συνεργασία κλασματικὴ, ἧς ὁ παρονομαςὴς εἰς παράγοντας λύεται ἀνομοίους, ἕκαςος δὲ τούτων ἔχει τὴν μεταβλητὴν ποσότητα μὲ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην, λύεται εἰς μερικὰ κλάσματα τοῦτον τὸν τρόπον.

α'. Θέτομεν τὴν κλασματικὴν συνεργασίαν ἴσην τοσούτοις κλάσμασι, ὅσοι οἱ παράγοντες τοῦ παρονομαςοῦ αὐτῆς· καὶ ἕκαςον τούτων τῶν κλασμάτων ἔχει ἕνα παράγοντα τοῦ παρονομαςοῦ αὐτῆς τῆς συνεργασίας παρονομαςὴν, ἀριθμητὴν δὲ ἓν τῶν ἀδιορίςων γραμμάτων Α, Β, Γ κτ. οὕτω·

$$\frac{1}{a^2\chi-\chi^3}=\frac{1}{\chi(a+\chi)(a-\chi)}=\frac{A}{\chi}+\frac{B}{a+\chi}+\frac{\Gamma}{a-\chi}.$$

β'. φέρομεν τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν (§. 197) οὕτω

$$\frac{1}{\chi(a+\chi)(a-\chi)}=\frac{a^2A-A\chi^2+aB\chi-B\chi^2+a\Gamma\chi+\Gamma\chi^2}{a^2\chi-\chi^3}$$

γ'. Ἀπαλλαττόμεθα εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν ἀπὸ τὸν παρονομαςὴν, καὶ φέρομεν ὡς ἀνωτέρω τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδενικόν· εἶτα παραβάλλονται οἱ συνεργοὶ τῆς μεταβλητῆς ποσότητος μὲ τὸ μηδὲν (αὐτοῦ), καὶ διορίζονται αἱ ἄγνωςοι ποσότητες Α, Β, Γ, καὶ ἀντὶ τούτων αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαί τίθενται ἀριθμηταί εἰς τὰ μερικὰ κλάσματα, καὶ ταῦτα εἶναι ἴσα τῇ δοθείσῃ κεκλασμένῃ συνεργασίᾳ οὕτω·

$$\frac{1}{\alpha^2\chi-\chi^3}=\frac{\alpha^2\mathrm{A}-\mathrm{A}\chi^2+\alpha\mathrm{B}\chi-\mathrm{B}\chi^2+\alpha\Gamma\chi+\Gamma\chi^2}{\alpha\chi^2-\chi^3}$$

$$\overline{}\ \alpha^2\chi-\chi^3$$

$$1=\alpha^2\mathrm{A}-\mathrm{A}^2\chi+\alpha\mathrm{B}\chi-\mathrm{B}\chi^2+\alpha\Gamma\chi+\Gamma\chi^2$$

$$\overline{}\ -1$$

$$\begin{array}{l|l|l} 0=\alpha^2\mathrm{A}+\alpha\mathrm{B} & \chi-\mathrm{B} & \chi^2 \\ \quad -1+\alpha\Gamma & \quad+\Gamma & \\ & \quad-\mathrm{A} & \end{array}$$

καὶ $\alpha^2\mathrm{A}-1=0$ ἢ $\mathrm{A}=\frac{1}{\alpha^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\mathrm{B}+\alpha\Gamma=0 \quad \text{ἢ} \quad \mathrm{B}=-\Gamma \\ \Gamma-\mathrm{B}-\mathrm{A}=0 \ \text{ἢ}\ \mathrm{B}=\Gamma-\frac{1}{\alpha^2} \end{array}\right\}\mathrm{B}=-\frac{1}{2\alpha^2}\ \text{ἄρα καὶ}\ \Gamma=\frac{1}{2\alpha^2}$$

ἄρα $\frac{1}{\alpha^2\chi-\chi^3}=\frac{1}{\alpha^2\chi}-\frac{1}{2\alpha^2(\alpha+\chi)}+\frac{1}{2\alpha^2(\alpha-\chi)}$. διότι ἐὰν τὰ τρία ὁμοῦ εἰς ἓν συνάψωμεν, εὑρίσκεται τὸ κεφάλαιον ἴσον τῷ $\frac{1}{\alpha^2\chi-\chi^3}$· καὶ κατ' αὐτὴν τὴν μέθοδον ἀναλύονται ὅλαι αἱ συνεργασίαι αἱ κλασματικαί.

§. 692. Ἡ λύσις αὕτη εἰς τὰ μερικὰ κλάσματα ἔχει χώραν, καὶ ὅταν ἡ κλασματικὴ ἔκθεσις δὲν ἔχῃ μονάδα ἀριθμητὴν, ἀλλὰ πολυσύνθετον ποσότητα· πλὴν πρέπει πάντοτε ὁ μέγιςος ἐκθέτης τῆς μεταβλητῆς ποσότητος τοῦ ἀριθμητοῦ νὰ εἶναι τουλάχιςον κατὰ μονάδα ἐλάττων ἀπὸ τὸν μέγιςον ἐκθέτην τῆς ἐν τῷ παρονομαςῇ μεταβλητῆς ποσότητος, ὡς εἰς αὐτὴν $\frac{\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2}{\chi^3-2\alpha\chi^2+\alpha^2\chi}$· διότι ὅταν ὁ ἐκθέτης ὁ μέγιςος αὐτῆς ἐν τῷ ἀριθμητῇ μείζων τοῦ ἐν τῷ παρονομαςῇ, τότε νόθον κλάσμα ἡ συνεργασία, καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαςοῦ τὸν ἀριθμητὴν, καὶ καταντῶμεν πάλιν εἰς γνήσιον κλάσμα μετὰ ἀκεραίου, καὶ τοῦτο τὸ γνήσιον κλάσμα εἰς μερικὰ κλάσματα λύομεν π: χ·

$\frac{1-\chi+2\alpha^4\chi+\chi^2-2\chi^5}{\alpha^2\chi-\chi^3}$ ἔνθα ὁ μέγιςος ἐκθέτης τῆς ἐν τῷ ἀριθμητῇ μεταβλητῆς μείζων τοῦ τῆς ἐν τῷ παρονομαςῇ, διότι $5 > 3$ ἄρα διαιροῦμεν οὕτω·

$$\begin{array}{l} 1-\chi+2\alpha^4\chi+\chi^2-2\chi^5 \ : \ \alpha^2\chi-\chi^3=2\chi^2+2\alpha^2 \\ \quad \underline{\pm 2\alpha^2\chi \qquad \mp 2\chi^5} \\ \quad 1-\chi+2\alpha^4\chi-2\alpha^2\chi^3+\chi^2 \\ \qquad \underline{\pm 2\alpha^4\chi\mp\ 2\alpha^2\chi^3} \\ \qquad 1-\chi+\chi^2 \end{array}$$

$$\text{ἄρα } \frac{1-\chi+2\alpha^4\chi+\chi^2-2\chi^5}{\alpha^2\chi-\chi^3}=2\chi^2+2\alpha^2+\frac{1-\chi+\chi^2}{\alpha^2\chi-\chi^3}$$

τοῦτο ἤδη $\frac{1-\chi+\chi^2}{\alpha^2\chi-\chi^3}=\frac{1-\chi+\chi^2}{\chi(\alpha+\chi)(\alpha-\chi)}$ εἰς κλάσματα ὡς ἄνω λύομεν· θέτομεν λοιπὸν

$$\frac{1-\chi+\chi^2}{\chi(\alpha+\chi)\,(\alpha-\chi)}=\frac{A}{\chi}+\frac{B}{(\alpha+\chi)}+\frac{\Gamma}{(\alpha-\chi)}=\alpha^2A-A\chi^2+\alpha B\chi-B\chi^2+\alpha\Gamma\chi+\Gamma\chi^2$$

$$\text{ἄρα } 1-\chi+\chi^2=\alpha^2A-A\chi^2+\alpha B\chi-B\chi^2+\alpha\Gamma\chi+\Gamma\chi^2$$

$$\text{καὶ } 0=\begin{array}{r|r|l} \alpha^2A+\alpha B & \chi+\Gamma & \chi^2 \\ -1+\alpha\Gamma & -B & \\ +1 & -A & \\ & -1 & \end{array}$$

καὶ $\alpha^2A-1=0$ ἤτοι $A=\frac{1}{\alpha^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha B+\alpha\Gamma+1=0 \quad \text{ἤτοι } B=-\Gamma-\dfrac{1}{\alpha} \\ \Gamma-B-A-1=0 \text{ ἤτοι } B=\ \Gamma-\dfrac{1}{\alpha^2}-1 \end{array}\right\} 2B=-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}$$

$$-1=\frac{-\alpha-1-\alpha^2}{\alpha^2} \text{ καὶ } B=-\frac{1+\alpha+\alpha^2}{2\alpha^2} \text{ ὅθεν καὶ } \Gamma=-$$

$$\frac{1+\alpha+\alpha^2}{2\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}+1=\frac{-1-\alpha-\alpha^2+2+2\alpha^2}{2\alpha^2}=\frac{1-\alpha+\alpha^2}{2\alpha^2}$$

καὶ λοιπὸν $\dfrac{1-\chi+2\alpha^4\chi+\chi^2-2\chi^5}{\alpha^2\chi-\chi^3}=2\chi^2+2\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2\chi}-$

$$\frac{1+\alpha+\alpha^2}{2\alpha^2(\alpha+\chi)}+\frac{1-\alpha+\alpha^2}{2\alpha^2(\alpha-\chi)}.$$

Εἰς μερικὰ κλάσματα λύεται καὶ τοῦτο $\dfrac{\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2}{\chi^3-2\alpha\chi^2+\alpha^2\chi}=$

$$\frac{\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2}{\chi(\chi-\alpha)^2}=\frac{A}{\chi}+\frac{B\chi+\Gamma}{(\chi-\alpha)^2}=\frac{A\chi^2-2\alpha A\chi+\alpha^2A+B\chi^2+\Gamma\chi}{\chi(\chi-\alpha)^2}$$

καὶ $\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2=A\chi^2-2\alpha A\chi+\alpha^2A+B\chi^2+\Gamma\chi.$

$$\text{καὶ } 0=\begin{array}{r|r|l} \alpha^2A+\Gamma & \chi+A & \chi^2 \\ -\alpha-2\alpha A & +B & \\ -\beta & -\gamma & \end{array}$$

$\alpha^2A-\alpha=0$ καὶ $A=\dfrac{1}{\alpha}$

$\Gamma-2\alpha A-\beta=0$ καὶ $\Gamma=2+\beta$

$A+B-\gamma=0$ καὶ $B=\gamma-\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\alpha\gamma-1}{\alpha}$

ἄρα $\dfrac{\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2}{\chi^3-2\alpha\chi^2+\alpha^2\chi}=\dfrac{1}{\alpha\chi}+\dfrac{\gamma\alpha\chi-\chi+2\alpha+\alpha\beta}{\alpha(\chi-\alpha)^2}$

Ἔτι λύεται εἰς μερικὰ κλάσματα καὶ τόδε $\frac{1+\chi^3}{\alpha^3\chi+\chi^4}=$

$$\frac{1+\chi^3}{\chi(\alpha+\chi)(\alpha^2-\alpha\chi+\chi^2)}=\frac{A}{\chi}+\frac{B}{(\alpha+\chi)}+\frac{\Gamma\chi+\Delta}{(\alpha^2-\alpha\chi+\chi^2)}=$$

$$\frac{\alpha^3A+A\chi^3+\alpha^2B\chi-\alpha B\chi^2+B\chi^3+\alpha\Gamma\chi^2+\Gamma\chi^3+\alpha\Delta\chi+\Delta\chi^2}{\alpha^3\chi+\chi^4}.$$

Ἐὰν δὲ καὶ αὕτη εἰς τὸ μηδενικὸν ἀχθῇ, ἔςαι

$$0=\left.\begin{array}{r}\alpha^3A\\-1\end{array}\right.\left.\begin{array}{r}+\alpha^2B\\+\alpha\Delta\end{array}\right|\left.\begin{array}{r}\chi+\alpha\Gamma\\-\alpha B\\+\Delta\end{array}\right|\left.\begin{array}{r}\chi^2+A\\+B\\+\Gamma\\-1\end{array}\right|\chi^3$$

1. $\alpha^3A-1=0$ καὶ $A=\frac{1}{\alpha^3}$

2. $\alpha^2B+\alpha\Delta=0$ ἤτοι $\alpha B+\Delta=0$

3. $\alpha\Gamma-\alpha B+\Delta=0$ ἤτοι $\Delta=\alpha B-\alpha\Gamma$

4. $A+B+\Gamma-1=0$ Ἀντὶ Δ θῶμεν τὸ ἴσον εἰς τὴν 2 καὶ ἔςαι $2\alpha B-\alpha\Gamma=0=2B-\Gamma$, ἣν συνάπτοντες τῇ 4 εὑρίσκομεν B

Ἐκ τούτων δὲ τῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $A=\frac{1}{\alpha^3}$. $B=\frac{\alpha^3-1}{3\alpha^3}$. $\Gamma=\frac{2\alpha^3-2}{3\alpha^3}$. $\Delta=\frac{\alpha^4-\alpha}{3\alpha^3}$, καὶ ἑπομένως καὶ τὰ μερικὰ κλάσματα.

Ἔτι τέλος μεταβληθήτω εἰς μερικὰ κλάσματα καὶ τόδε

$$\frac{\alpha}{\chi^3(\beta+\chi)^2}=\frac{A+B\chi+\Gamma\chi^2}{\chi^3}+\frac{\Delta\chi+E}{(\beta+\chi)^2=\beta^2+2\beta\chi+\beta^2}=$$

$$\frac{\beta^2A+2\beta A\chi+A\chi^2+\beta^2B\chi^2+B\chi^3+\beta^2\Gamma\chi^2+2\beta\Gamma\chi^3+\Gamma\chi^4+E\chi^3}{\chi^3(\beta+\chi)^2}$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|l}
0=\beta^2A+2\beta A & \chi+A & \chi^2+B & \chi^3+\Gamma & \chi^4\\
-\alpha-\beta^2B & +2\beta B & +2\beta\Gamma & +\Delta & \\
 & +\beta^2\Gamma & +E & &
\end{array}$$

$\beta^2A-\alpha=0$ καὶ $A=\dfrac{\alpha}{\beta^2}$

$2\beta A+\beta^2B=0$ καί $B=-\dfrac{2\alpha}{\beta^3}$

$A+2\beta B+\beta^2\Gamma=0$ καὶ $\beta^2\Gamma=\dfrac{-\alpha}{\beta^2}+\dfrac{4\alpha}{\beta^2}$ καὶ $\Gamma=\dfrac{3\alpha}{\alpha^2}$

$B+2\beta\Gamma+E=0$ $E=\dfrac{2\alpha}{\beta^3}-\dfrac{6\alpha}{\beta^3}$ καὶ $E=-\dfrac{4\alpha}{\beta^3}$

$\Gamma+\Delta=0$ $\Delta=-\Gamma=\dfrac{-3\alpha}{\beta^4}$

καὶ ἐκ τούτων διορίζονται τὰ ἄνω κλάσματα.

Σημείωσις. Εἰς τὰ κατὰ μέρος κλάσματα τίθεμεν τόσα μέρη εἰς ἓν κλάσμα A, $B\chi$, $\Gamma\chi^2$ κτ. ὅσαι μονάδες ἐνεισιν εἰς τὸν ἐκθέτην τὸν μέγιστον τῆς μεταβλητῆς ποσότητος τοῦ παρονομαστοῦ, ὡς εἰς τὸ $\dfrac{A+B\chi+\Gamma\chi^2}{\chi^3}$ κτ. Πλείονα περὶ λύσεως τῶν κεκλασμένων συνεργασιῶν εἰς τὰ κατὰ μέρος κλάσματα εὑρίσκει ἕκαστος εἰς Εὐλέρου περὶ τῆς τῶν ἀπειροστῶν ἀναλύσεως, πλείονα καὶ ἡμεῖς περὶ τῶν συνεργασιῶν εἰς ἕτερον παράρτημα ἐροῦμεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Περὶ μεθόδου τῶν ἀντιστρεπτικῶν σειρῶν, ἢ πῶς αἱ σειραὶ ἀντιστρέφουσι.

§. 693. Πολλάκις εἰς τὴν ἀνάλυσιν μία μεταβλητὴ ποσότης ἐκφράζεται διὰ μιᾶς σειρᾶς, ἐν ᾗ ἑτέρα μετα-

βλητὴ συνεχίζεται μετὰ συνεργῶν εἰς δυνάμεις, ὡς $\chi =$
$3y - 6y^2 + 12y^3 - 24y^4 + \dots 2^{\nu-1} y^{\nu} \dots$ 1
ὅπου ἡ χ συνεργασία τῆς y. Καὶ εἰς τοιαύτας ἐξισώσεις πολλάκις ἐπιζητεῖται πάλιν ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως νὰ ἐκφρασθῇ ἡ y διὰ τῆς χ εἰς μίαν σειρὰν, χωρὶς νὰ βλαβῇ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς, καὶ τῆς ἑτέρας ἀγνώςου ποσότητος, διὰ νὰ γένῃ ἡ y συνεργασία τῆς χ· τοῦτο δὲ γίνεται τοῦτον τὸν τρόπον.

α΄. Θέτομεν τὴν y εἰς σειρὰν τῆς χ μετὰ συνεργῶν Α, Β, Γ κτ. οὕτως $y = A\chi + B\chi^2 + \Gamma\chi^3 \dots$ II

β΄. Τετραγωνίζομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν, καὶ ἔτι ὑψώνομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν κατὰ μέρος εἰς κύβον τετάρτηδύναμιν, πέμπτην κτ. κατὰ τὰς δυνάμεις, ἃς ἔχει ἡ y ἐν τῇ πρώτῃ δοθείσῃ σειρᾷ.

γ΄. Εἰς τὴν ἄνω δοθεῖσαν ἐξίσωσιν (1) ἀντὶ $y, y^2\ y^3$ κτ. θέτομεν τὰ ἴσα αὐτῶν, καὶ φέρομεν τὴν ἐξίσωσιν ἐκείνην εἰς τὸ μηδέν.

δ΄. Παραβάλλομεν τοὺς συνεργοὺς τῶν δυνάμεων τῆς χ, ἴσου τῷ μηδενὶ, καὶ διορίζομεν τὴν Α, Β, Γ κτ. (§. 685).

ε΄. Εἶτα ἀντὶ Α, Β, Γ κτ. θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (II) τὰ ἴσα εὑρεθέντα, καὶ οὕτως ἐκφράζεται ἡ y διὰ τῆς χ ἀντίςροφα, διὸ καὶ ἀντιςρεπτικαὶ αἱ σειραὶ αὗται λέγονται π. χ.

$$y = A\chi + B\chi^2 + \Gamma\chi^3 + \Delta\chi^4 + \dots\dots$$
$$y^2 = A^2\chi^2 + 2AB\chi^3 + B^3\chi^4 + 2A\Gamma\chi^4 + \dots$$
$$y^3 = A^3\chi^3 + 3A^2B\chi^4 + \dots\dots$$
$$y^4 = A^4\chi^4 + \dots\dots\dots$$

Θῶμεν ἤδη εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων, εἰς τὴν $\chi = 3y - 6y^2 + 12y^3 - 24y^4 + \dots\dots$

$$\chi=\begin{array}{l|l|l|l|l}
3A & \chi+3B & \chi^2+3\Gamma & \chi^3+3\Delta & \chi^4+\dots\\
 & -6A^2 & -12AB & -6B^2 & \\
 & & +12A^3 & -12A\Gamma & \\
 & & & +36A^2B & \\
 & & & -24A^2 &
\end{array}$$

Ἐὰν δ' εἰς τὸ μηδὲν ἀχθῇ, ἔσται

$$0=\begin{array}{l|l|l|l|l}
3A & \chi+3B & \chi^2+3\Gamma & \chi^3+3\Delta & \chi^4\\
-1 & -6A^2 & -12AB & -6B^2 & \\
 & & +12A^3 & -12A\Gamma & \\
 & & & +36A^2B & \\
 & & & -24A^4 &
\end{array}$$

Λοιπὸν $3A-1=0$ ἤτοι $A=\frac{1}{3}$

$3B-6A^2=0 \qquad B=\frac{2}{3^2}$

$3\Gamma-12AB+12A^3=0$

$3\Delta-6B^2-12A\Gamma+36A^2B-24A^4=0$

καὶ ἐκ τῆς τρίτης $3\Gamma=12AB-12A^3$ ἤτοι $\Gamma=4AB-4A^3=$

$4\cdot\frac{2}{3^3}-4\cdot\frac{1}{3^3}=\frac{4}{3^3}=\frac{2^2}{3^3}.$

ἐκ δὲ τῆς τετάρτης $3\Delta=6B^2+12A\Gamma-36A^2B+24A^4.$

ἤτοι $\Delta=2B^2+4A\Gamma-12A^2B+8A^4=2\cdot\frac{2^2}{3^4}+4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{3^3}-$

$12\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{2}{3^2}+8\cdot\frac{1}{3^4}=\frac{8}{3^4}+\frac{16}{3^4}-\frac{24}{3^4}+\frac{8}{3^4}=\frac{8}{3^4}=\frac{2^3}{3^4},$

Θῶμεν ἤδη εἰς τὴν ἐξίσωσιν $y=A\chi+B\chi^2+\Gamma\chi^3+\dots$ κτ.

τὰ ἴσα τῶν A, B, κτ. καὶ ἔσται $y=\frac{1}{3}\chi+\frac{2}{3^2}\chi^2+\frac{2^2}{3^3}\chi^3+$

$\frac{2^3}{3^4}\chi^4+\dots\dots$ εὐκόλως τοὺς ὅρους προάγομεν, ὅσους ἂν θέλωμεν· διότι ἕκαςος ὅρος εἶναι $\frac{2^{\nu-1}}{3^{\nu}}$. ἡ δὲ προηγουμένη σειρὰ (1) ἐξῆλθεν ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\chi = \frac{3\psi}{1+2\psi}$, ἐὰν τὸν ἀριθμητὴν 3ψ διὰ τοῦ παρονομαςοῦ $1+2\psi$ διέλωμεν ἐξ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως $\chi = \frac{3\psi}{1+2\psi}$ εὑρίσκεται καὶ $\psi = \frac{\chi}{3-2\chi}$, ὅθεν ἐὰν χ διὰ $3-2\chi$ διέλωμεν εὑρίσκομεν τὴν ἄνω εὑρεθεῖσαν σειρὰν τοῦ ψ, ἐξ οὗ καὶ ἡ ἀντιςρεπτικὴ ἐξῆλθε σειρά.

Σημείωσις. Ὅταν ὑψώνωμεν τὰς σειράς εἰς δυνάμεις δηλ: εἰς τετράγωνον, κύβον, διτετράγωνον κτ. ἐπειδὴ ἡ σειρὰ ἀπείρως προάγεται, μένον ἕως ἐκείνου τὸν ὅρον ἐκτυλίομεν τὰς δυνάμεις εἰς ὃν ςοχαζόμεθα, ὅτι εὑρίσκομεν τὸν νόμον τῆς ἐκτυλίσσεως τῆς σειρᾶς, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ ἐκτυλίξαμεν τὰς δυνάμεις, ἄχρις οὗ εἶχεν ἡ ἄγνωςος χ ἐκθέτην 4, εἰς ἄλλας σειρὰς ὅμως ἀπαιτεῖται μέχρι χ^7.

§. 694. Εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς ἀντιςρεπτικὰς σειράς, προσοχῆς χρεία εἰς τὴν σειράν, ὁποῦ ἐκλαμβάνεται ἀπὸ τοὺς ἀορίςους συνεργοὺς Α, Β, Γ κτ. κατὰ τίνα σειρὰν τίθενται οἱ ἐκθέται τῆς μεταβλητῆς ποσότητος· διότι δὲν εἶναι τὸ ἴδιον νὰ λάβωμεν $\chi = AZ + BZ^2 + \Gamma Z^3$ καὶ $\chi = AZ^3 + BZ^6 + \Gamma Z^9$ κτ. ἀλλὰ νὰ λάβωμεν αὐτὴν τὴν σειράν, ὡς ἡ τάξις, καὶ αἱ συνθῆκαι τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων ἐπιζητοῦσιν· ἄλλως δὲ εἰς τὸν διορισμὸν τῶν συνεργῶν ἀντιφάσεις ἕπονται· ὅθεν εἰς τοῦτο εἰλήφθω γενικῶς ἡ σειρὰ αὐτοῦ τοῦ σχήματος

$\chi = \alpha Z^{\pi} + \beta Z^{\pi+\kappa} + \gamma Z^{\pi+2\kappa} + \delta Z^{\pi+3\kappa} + \ldots\ldots$ καὶ ζητεῖται νὰ ἀντιςραφῇ, ἵνα ἡ ποσότης Z εἰς σειρὰν ἄπειρον διὰ τῆς χ ποσότητος ἐκφρασθῇ· ἡ ζητουμένη λοιπὸν σειρὰ ἀναγκαίως τὸ ἑξῆς σχῆμα λαμβάνει

$$Z = A\chi^{\frac{\nu}{\pi}} + B\chi^{\frac{\nu(1+\kappa)}{\pi}} + \Gamma\chi^{\frac{\nu(1+2\kappa)}{\pi}} + \Delta\chi^{\frac{\nu(1+3\kappa)}{\pi}} + \ldots\ldots \text{ κτ.}$$

δηλ: εἰς τὴν δοθεῖσαν ἔκθεσιν ἀφαιροῦμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τὸν τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ λεῖψανον εἶναι ἡ κ· π δὲ ὁ ἐκθέτης τοῦ πρώτου ὅρου, καὶ ν ὁ ἐκθέτης τῆς ποσότητος, εἰς ἣν ἡ σειρὰ ἀντιςρέφει· ὅθεν ὁ πρῶτος ἐκθέτης τοῦ πρώτου ὅρου $\frac{\nu}{\pi}$· τοῦ δευτέρου $\frac{\nu(1+\kappa)}{\pi}$ κτ. λοιπὸν ἐκ τούτου καὶ τῶν ἀνωτέρω λύομεν εὐκόλως τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

α΄. Εὑρεθήτω ἡ τιμὴ τῆς χ ἐκ τῆς ἐξισώσεως.

$$Z = \chi + \frac{1.\chi^3}{2.3} + \frac{1.3.\chi^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5\chi^7}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7\chi^9}{2.4.6.8.9} + \ldots \quad \text{A}$$

Εἰς σειρὰν ἀντίςροφον τῆς Z. ἄρα (§. 695).

$$\chi = AZ + BZ^3 + \Gamma Z^5 + \Delta Z^7 + \ldots\ldots\ldots \quad \text{B}$$

$$\chi^3 = A^3Z^3 + 3A^2BZ^5 + 3AB^2Z^7 + 3A^2\Gamma Z^7 + \ldots$$

$$\chi^5 = A^5Z^5 + 5A^4BZ^7 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\chi^7 = A^7Z^7 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Αντικαταςήσωμεν ἤδη εἰς τὴν ἐξίσωσιν A, ἀντὶ χ, χ^3, χ^5 κτ. τὰς ἤδη εὑρεθείσας ἴσας τιμὰς, ἢ ἀχθήτω ἡ ἐξίσωσις εἰς τὸ μηδὲν, οὕτω

$$\begin{array}{r|c|c|c|l}
0=A & Z+B & Z^3+\Gamma & Z^5 \quad + \quad \Delta & Z^7 \\
-1 & +\frac{A^3}{2.3} & +\frac{3A^2B}{2.\ 3} & +\frac{3\ AB^2}{2.\ 3} & \\
 & & \frac{1.\ 3\ A^5}{2.\ 4.\ 5} & +\frac{3.5A^4B}{2.\ 4.\ 5} & \\
 & & & \frac{1.\ 3.\ 5\ A^7}{2.\ 4.\ 6.\ 7} & \\
 & & & \frac{3A^2\Gamma}{2.\ 3} &
\end{array}$$

καὶ λοιπὸν $A-1=0$ καὶ $A=1$. $B+\frac{A^3}{2.3}=0$ καὶ $B=-\frac{1}{2.3}$, $\Gamma+\frac{3A^2B}{2.3}=\frac{3A^5}{2.4.5}=0$. $\Gamma=-\frac{B}{2}-\frac{3}{2.4.5}=$

$$-\frac{\frac{1}{2.3}}{2}-\frac{3}{2.\ 4.\ 5}=\frac{1}{3.\ 4}-\frac{3}{2.\ 4.\ 5}=\frac{1.\ 2.\ 5}{2.3.5.4}-\frac{3.\ 3}{2.\ 4.\ 3.\ 5}=\frac{1}{2.\ 3.\ 4.\ 5}.$$

$$\Delta+\frac{3AB^2}{2.\ 3}+\frac{3A^2\Gamma}{2.\ 3}+\frac{3.\ 5A^4B}{2.\ 4.\ 6}+\frac{3.\ 5\ A^7}{2.\ 4.\ 6.\ 7}=0$$

$$\Delta=-\frac{B^2}{2}-\frac{\Gamma}{2}-\frac{3B}{2.4}-\frac{3.\ 5}{2.\ 4.\ 6.\ 7}=-\frac{\frac{1}{3.\ 2.\ 3.\ 2}}{2}-\frac{\frac{1}{2.\ 3.\ 4.\ 5}}{2}+\frac{\frac{3.\ 1}{2.\ 3}}{2.\ 4}-\frac{3.\ 5}{2.\ 4.\ 6.\ 7}=-\frac{1}{3.\ 2.\ 3.\ 2.\ 2}-$$

$$\frac{1}{2.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}+\frac{1}{2.\ 2.\ 4}-\frac{3.\ 5}{2.\ 4.\ 6.\ 7}=\frac{1}{2.\ 2.\ 3.\ 6}-$$

$$\frac{1}{2.4.5.6}+\frac{3}{2.4.6}-\frac{3.5}{2.4.6.7}=-\frac{2.5.7}{2.3.4.5.6.7}-$$

$$\frac{3.7}{2.3.4.5.6.7}+\frac{3.3.5.7}{2.3.4.5.6.7}-\frac{3.5.3.5}{2.3.4.5.6.7}=$$

$$\frac{-70-21+315-225}{2.3.4.5.6.7}=\frac{1}{2.3.4.5.6.7}=\Delta.$$

Ἐὰν δ' εἰς τὴν σειρὰν B θῶμεν ἀντὶ A, B, Γ, κτ. τὰ ἴσα

$$\text{ἔςαι } \chi=Z-\frac{Z^3}{2.3}+\frac{Z^5}{2.3.4.5}-\frac{Z^7}{2.3.4.5.6.7}+\dots$$

καὶ ἐξακολουθεῖται ἡ σειρὰ ἐπ' ἄπειρον, διότι ὁ νόμος εἰς τὸ νὰ προβῇ ἐπ' ἄπειρον ἐγνώσθη τῶν συνεργῶν· οὗτος δ' εἶναι νὰ λαμβάνωμεν τὸ προηγούμενον κλάσμα μὲ ἐναντίου σημείου, καὶ εἰς τὸν παρονομαςὴν νὰ γράφωμεν ἔτι δύο παράγοντας κατὰ μονάδα μείζονας τῶν προηγουμένων.

Ἔτι ζητεῖται τὴν σειρὰν $Z^3=\frac{1}{2}\chi^2+\frac{1}{3}\chi^3+\frac{1}{4}\chi^4+\dots+$ ἀντιςρέψαι, διὰ νὰ ἐκφρασθῇ ἡ χ διὰ τῆς Z, ἐνταῦθα $\nu=3$,

$\pi=2$, καὶ $\kappa=1$ ἄρα $\frac{\nu}{\pi}=\frac{3}{2}$ καὶ $\frac{\nu(1+\kappa)}{\pi}=\frac{6}{2}=3$· λοιπὸν

οἱ ἐκθέται τῆς μελλούσης σειρᾶς ἐν ἀριθμητικῇ σειρᾷ $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{9}{2}$ κτ. ἄρα.

$$\chi=AZ^{\frac{3}{2}}+BZ^{\frac{6}{2}}+\Gamma Z^{\frac{9}{2}}+\Delta Z^{\frac{12}{2}}+EZ^{\frac{15}{2}}+\text{κτ.}$$ καὶ ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν τὰ ἴσα τῇ χ^2, τῇ χ^3, τῇ χ^4. Ἀντικαταςῶμεν λοιπὸν τὰ ἴσα, καὶ διορίζομεν τοὺς συνεργοὺς A, B, Γ, κτ. καὶ εὑρίσκεται ἡ χ· ἀλλ' ἵνα τὰς τοιαύτας σειρὰς εὐκόλως ἀντιςρέφωμεν, εἰλήφθω γενικὸν παράδειγμα διὰ νὰ ἔχωμεν τύπον γενικόν.

ἀντιςραφήτω ἡ ἐξίσωσις πρῶτον

$\chi=\alpha\psi+\beta\psi^2+\gamma\psi^3+\delta\psi^4+\dots$ A εἰς ἑτέραν διὰ νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ψ διὰ τῆς χ εἰς σειράν, εἰς ἣν αὕτη ἀντιστρέφει· καὶ ἔστω εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν $\upsilon=1$ καὶ $\pi=1$ καὶ $\kappa=1$

Ὑποθῶμεν λοιπὸν

$$\psi=A\chi+B\chi^2+\Gamma\chi^3+\Delta\chi^4+\dots\dots\dots \quad B$$
$$\psi^2=A^2\chi^2+2AB\chi^3+B^2\chi^4+2A\Gamma\chi^4+\dots$$
$$\psi^3=A^3\chi^3+3A^2B\chi^4\dots$$
$$\psi^4=A^4\chi^4\dots$$

Ἐὰν δ' εἰς τὴν σειρὰν A τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων θῶμεν, ἔσται

$$\chi=\left\{\begin{array}{l|l|l|l} \quad\quad\ \alpha A\ \chi+\alpha B & \chi^2+\alpha\Gamma & \chi^3+\alpha\Delta & \chi^4 \\ \alpha\psi \quad\quad\quad\quad +\beta A^2 & +2\beta AB & +\beta B^2 & \\ \beta\psi^2\ - & +\gamma A^3 & +2\beta A\Gamma & \\ \gamma\psi^3\ - & & +3\gamma A^2B & \\ \delta\psi^4 & & +\delta A^4 & \end{array}\right.$$

Ἐὰν δ' εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν φέρωμεν καὶ τὴν χ ἀποφατικῶς εἰς τὸ ἕτερον σκέλος, εὑρίσκομεν $\alpha A=1$ καὶ $A=\frac{1}{\alpha}$ καὶ ἔτι ἐκ τῆς $\alpha B+\beta A^2=0$ εὑρίσκομεν $\alpha B=-\frac{\beta}{\alpha^2}$ καὶ $B=\frac{-\beta}{\alpha^3}$ ἔτι ἐκ τῆς $\alpha\Gamma+2\beta AB+\gamma A^3=0$ ἔσται $\alpha\Gamma=-2\beta AB-\gamma A^3$ ἤτοι $\alpha\Gamma=\frac{2\beta\beta}{\alpha^4}-\frac{\alpha\gamma}{\alpha^4}$ καὶ $\Gamma=\frac{2\beta^2-\alpha\gamma}{\alpha^5}$. καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\alpha\Delta+\beta B^2+2\beta A\Gamma+3\gamma A^2B+\delta A^4=0$ εὑρίσκομεν $\alpha\Delta=-\beta B^2-2\beta A\Gamma-3\gamma A^2B-\delta A^4$, ὅ ἐστιν $\alpha\Delta=-\frac{\beta^3}{\alpha^6}-\frac{2\beta}{\alpha}.\frac{2\beta^2-\alpha\gamma}{\alpha^5}+\frac{3\beta\gamma}{\alpha^6}-\frac{\delta}{\alpha^4}=-\frac{\beta^3}{\alpha^6}-\frac{4\beta^3-2\alpha\beta\gamma}{\alpha^6}+\frac{3\alpha\beta\gamma}{\alpha^6}-\frac{\alpha^2\delta}{\alpha^6}=\frac{5\alpha\beta\gamma-\alpha^2\delta-5\beta^3}{\alpha^6}$ καὶ τέλος $\Delta=\frac{5\alpha\beta\gamma-\alpha^2\delta-5\beta^3}{\alpha^7}$. Ἐὰν δ' ἔτι ἕνα ὅρον τῆς σειρᾶς ἐκτυλίξωμεν, εὑρίσκομεν καὶ $E=\frac{14\beta^4-21\alpha\beta^2\gamma+6\alpha^2\beta\delta+3\alpha^2\gamma^2-\alpha^3\varepsilon}{\alpha^3}$, καὶ ἡ σειρὰ γίνεται ἐὰν ἀντὶ τῶν ἴσων τὰ ἴσα θῶμεν τὰ εὑρεθέντα εἰς τὴν Β.

$$\psi=\frac{1}{\alpha}\chi-\frac{\beta}{\alpha^3}\chi^2+\frac{2\beta^2-\alpha\gamma}{\alpha^5}\chi^3+\frac{5\alpha\beta\gamma-\alpha^2\delta-5\beta^3}{\alpha^7}\chi^4+\frac{14\beta^4-21\alpha\beta^2\gamma+6\alpha^2\beta\delta+3\alpha^2\gamma^2\ \alpha^3\varepsilon}{\alpha3}\chi^5$$

α'. Ἀντιςραφήτω ἡ ἐξίσωσις $\chi=\psi-\psi^2+\psi^3-\psi^4+\ldots\ldots$ εἰς ἑτέραν ἐν ᾗ ἡ ψ διὰ τῆς χ ἐκφράζεται, εἰς αὐτὴν $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=1$, $\delta=-1$. $\varepsilon=1$ καὶ $\pi=1$. $\nu=1$. $\varkappa=1$ ὅθεν εἰς τὸν ἄνω τύπον $\psi=\chi+\chi^2+\chi^3+\chi^4$ . . . κτ.

β'. Ἀντιςραφήτω καὶ αὕτη $\chi=\psi+\frac{\psi^2}{2}+\frac{\psi^3}{3}+\frac{\psi^4}{4}+\frac{\psi^5}{5}+\ldots$ ἄρα $\alpha=1$. $\beta=\frac{1}{2}$. $\gamma=\frac{1}{3}$. $\delta=\frac{1}{4}$. $\varepsilon=\frac{1}{5}$, εἰς δὲ τὸν ἄνω τύπον ἔςαι $\psi=\chi-\frac{1}{2}\chi^2+\frac{1}{2.3}\chi^3-\frac{1}{2.3.4}\chi^4\ldots$ καὶ συνεχίζεται ἐπ' ἄπειρον ἡ σειρά.

γ'. Ἀντιςραφήτω καὶ αὕτη $Z=\frac{\chi}{\alpha}-\frac{\chi^2}{2\alpha^2}+\frac{\chi^3}{3\alpha^3}-\frac{\chi^4}{4\alpha^4}+\ldots$ ὅπου $\alpha=1$. $\beta=-\frac{1}{2\alpha^2}$, $\gamma=\frac{1}{3\alpha^3}$ $\delta=\frac{1}{4\alpha^4}$. ἄρα $\chi=\alpha Z+\frac{\alpha}{2}Z^2+\frac{\alpha}{2.3}Z^3+\frac{\alpha}{2.3.4}Z^4+\ldots$

Β'. Ἀντιςραφήτω δεύτερον ἡ ἐξίσωσις, ἧς $\nu=1$. $\pi=1$

καὶ κ=2 αὕτη $\chi=\alpha\psi+\beta\psi^3+\gamma\psi^5+\delta\psi^7+\ldots$ A εἰς ἑτέραν, ἐν ᾗ ἡ ψ διὰ τῆς χ ἐκφράζεται οὕτω

$$\psi=\mathrm{A}\chi+\mathrm{B}\chi^3+\Gamma\chi^5+\Delta\chi^7+\ldots\ldots\ \mathrm{B}$$
$$\psi^3=\mathrm{A}^3\chi^3+3\mathrm{A}^2\mathrm{B}\chi^5+3\mathrm{A}\mathrm{B}^2\chi^7+3\mathrm{A}^2\Gamma\chi^7+\ldots$$
$$\psi^5=\mathrm{A}^5\chi^5+5\mathrm{A}^4\mathrm{B}\chi^7\ldots\ldots$$
$$\psi^7=\mathrm{A}^7\chi^7\ldots\ldots$$

Θῶμεν εἰς τὴν A ταῦτα ἀντὶ τῶν ἴσων, ἔσται

$$\chi=\left\{\begin{array}{ll|l|l|l|l}
\alpha\psi = & \alpha\mathrm{A} & \chi+\alpha\mathrm{B} & \chi^3+\alpha\Gamma & \chi^5+\alpha\Delta & \chi^7 \\
 & & +\beta\mathrm{A}^3 & +3\beta\mathrm{A}^2\mathrm{B} & +3\beta\mathrm{A}\mathrm{B}^2 & \\
\beta\psi^3 = & & & +\gamma\mathrm{A}^5 & +3\beta\mathrm{A}^2\Gamma & \\
 & & & & +5\gamma\mathrm{A}^4\mathrm{B} & \\
\gamma\psi^5 = & & & & +\delta\mathrm{A}^7 &
\end{array}\right.$$

Ἐὰν δὲ καὶ χ εἰς τὸ ἕτερον μέρος φέρωμεν, ἔσται $\alpha\mathrm{A}-1=0$ καὶ $\mathrm{A}=\frac{1}{\alpha}$. ἔτι $\alpha\mathrm{B}+\beta\mathrm{A}^3=0$ καὶ $\mathrm{B}=-\frac{\beta}{\alpha^4}$. ἔτι $\alpha\Gamma+3\beta\mathrm{A}^2\mathrm{B}+\gamma\mathrm{A}^5$. καὶ $\alpha\Gamma=-3\beta.\frac{1}{\alpha^2}.\frac{-\beta}{\alpha^4}-\gamma\frac{1}{\alpha^5}$ καὶ $\Gamma=\frac{3\beta^2}{\alpha^7}-\frac{\alpha\gamma}{\alpha^7}=\frac{3\beta^2-\alpha\gamma}{\alpha^7}$. ἔτι $\alpha\Delta+3\beta\mathrm{A}\mathrm{B}^2+3\beta\mathrm{A}^2\Gamma+5\gamma\mathrm{A}^4\mathrm{B}+\delta\mathrm{A}^7=0$ λοιπὸν $\alpha\Delta=-3\beta.\frac{1}{\alpha}.\frac{\beta^2}{\alpha^8}-3\beta.\frac{1}{\alpha^2}.\frac{3\beta^2-\alpha\gamma}{\alpha^7}-5\gamma\alpha^{\frac{1}{4}}.\frac{-\beta}{\alpha^4}-\frac{\delta}{\alpha^7}=-\frac{3\beta^3}{\alpha^9}-\left(\frac{9\beta^3-3\alpha\beta\gamma}{\alpha^9}\right)+\frac{5\alpha\beta\gamma}{\alpha^9}-\frac{\alpha^2\delta}{\alpha^9}=\frac{-12\beta^3+3\alpha\beta\gamma+5\alpha\beta\gamma-\alpha^2\delta}{\alpha^9}$

καὶ $\Delta=\frac{8\alpha\beta\gamma-\alpha^2\delta-12\beta^3}{\alpha^{10}}$. Ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὴν σειρὰν B τὰ ἴσα τοῖς A, B, Γ, κτ. ἀντικαταστήσωμεν, εὑρίσκομεν

$$\psi = \frac{1}{\alpha}\chi + \frac{\beta}{\alpha^4}\chi^3 + \frac{3\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha^7}\chi^5 + \frac{8\alpha\beta\gamma - \alpha^2\delta - 12\beta^3}{\alpha^9}\chi^7 + \ldots$$

καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τύπον ἀντιςρέφουσιν αἱ σειραί, ὅταν ἔχωσι $\pi=1$. $\nu=1$ καὶ $\kappa=2$. δηλ: ἀντιςραφήτω ἡ σειρὰ

$$\chi = \psi - \frac{\psi^3}{2.3.\pi^2} + \frac{\psi^5}{2.3.4.5.\pi^4} - \frac{\psi^7}{2.3.4.5.6.7\pi^6} + \ldots.$$

εἰς ἑτέραν, ἐν ᾗ ἡ ψ διὰ τῆς χ ἐκφράζεται· λοιπὸν $\alpha=1$

$$\beta = -\frac{1}{2.3.\pi^2}\ \gamma = \frac{1}{2.3.4.5.\pi^4} \text{ καὶ } \delta = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7.\pi^6}$$

. ἐκ δὲ τοῦ ἀνωτέρου τύπου εὑρίσκεται

$$\psi = \chi + \frac{1}{2.3\,\pi^2}\chi^3 + \frac{3}{2.4.5\,\pi^4}\chi^5 + \frac{3.5}{2.4.6.7\,\pi^6}\chi^7$$

Γ'. Εὑρεθήτω τρίτον καὶ τύπος τῶν σειρῶν, ὅταν ἔχωσι π καὶ κ οἱουδήποτε ἀριθμὸν ἀκέραιον ἢ κεκλασμένον, καὶ ζητηθήτω ἐκ τῆς σειρᾶς $\chi = \alpha\psi^{\pi} + \beta\chi^{\pi+\kappa} + \gamma\psi^{\pi+2\kappa} + \delta\psi^{\pi+3\kappa} + \ldots..$ ἀντιςραφείσης νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ψ διὰ τῆς χ. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ψ μόνη ζητεῖται ἄνευ συνεργοῦ, γίνεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{X}{\alpha} = \psi^{\pi} + \frac{\beta}{\alpha}\psi^{\pi+\kappa} + \frac{\gamma}{\alpha}\psi^{\pi+2\kappa} + \ldots..$ καὶ θῶμεν ἤδη $\frac{X}{\alpha} = \omega$. ἄρα ἡ ἐξίσωσις $\omega = \psi^{\pi} + \frac{\beta}{\alpha}\psi^{\pi+\kappa} + \frac{\gamma}{\alpha}\psi^{\pi+2\kappa} \ldots..$ λοιπὸν ἔςω

$$(\S.\ 694.)\quad \psi = \omega^{\frac{1}{\pi}} + \mathrm{B}\,\omega^{\frac{1+\kappa}{\pi}} + \Gamma\,\omega^{\frac{1+2\kappa}{\pi}} + \Delta\,\omega^{\frac{1+3\kappa}{\pi}} + \ldots$$

Ἐὰν δ' ἀναλυθῇ κατὰ τὸ διώνυμον αὕτη ἡ ἐξίσωσις, εὑρίσκομεν τὸ

$$y^{\pi} = \omega + \alpha B\,\omega^{\frac{\pi+x}{\pi}} + \pi\Gamma\,\omega^{\frac{\pi+2x}{\pi}} + \frac{\pi(\pi-1)}{2}B^2\,\omega^{\frac{\pi+2x}{\pi}}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}y^{\pi+x} = \frac{\beta}{\alpha}\omega^{\frac{\pi+x}{\pi}} + (\pi+x)\frac{\beta}{\alpha}B\,\omega^{\frac{\pi+2x}{\pi}}$$

$$\frac{\gamma}{\alpha}y^{\pi+2x} = \frac{\gamma}{\alpha}\omega^{\frac{\pi+2x}{\pi}}$$

Θῶμεν ἤδη τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\omega = y^{\pi} + y^{\pi+x} + y^{\pi+2x} + \dots$ καὶ εὑρίσκεται οὕτω

$$\omega = \left\{ \begin{array}{l|l|l} y^{\pi} = \omega + \pi B & \omega^{\frac{\pi+x}{\pi}} \quad + \pi\Gamma & \omega^{\frac{\pi+2x}{\pi}} \\ \frac{\beta}{\alpha}y^{\pi+x} = \quad + \frac{\beta}{\alpha} & + \frac{\pi(\pi-1)}{2}B^2 & \\ \frac{\gamma}{\alpha}y^{\pi+2x} = & + (\pi+x)\frac{\beta}{\alpha}B & \\ & \quad + \frac{\gamma}{\alpha} & \end{array} \right.$$

Ἐὰν καὶ ταύτην τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδὲν φέρωμεν, ἔσται

$\omega - \omega = 0$. $\pi B + \frac{\beta}{\alpha} = 0$ καὶ $B = -\frac{\beta}{\alpha\pi}$. καὶ ἔτι

$$\pi\Gamma + \frac{\pi(\pi-1)}{2}B^2 + (\pi+x)\frac{\beta}{\alpha}B + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$ ἄρα

$$\pi\Gamma + \frac{\pi^2-\pi}{2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2\pi^2} + \frac{\beta\pi+\kappa\beta}{\alpha} \cdot \frac{-\beta}{\alpha\pi} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

$$\pi\Gamma + \frac{\beta^2\pi^2-\beta^2\pi}{2\alpha^2\pi^2} - \frac{\beta^2\pi-\beta^2\kappa}{\alpha^2\pi} + \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$2\alpha^2\pi^3\Gamma = -\beta^2\pi^2 + \beta^2\pi + 2\beta^2\pi^2 + 2\beta^2\pi\kappa - 2\alpha\pi^2\gamma$$

$$2\alpha^2\pi^3\Gamma = \beta^2\pi^2 + \beta^2\pi + 2\beta^2\pi\kappa - 2\alpha\pi^2\gamma$$

$$\Gamma = \frac{(\pi+2\kappa+1)\beta^2 - 2\alpha\pi\gamma}{2\alpha^2\pi^2}$$

οὕτως εὑρίσκομεν καὶ $\Delta = -\left(\frac{(2\pi^2+9\pi\kappa+9\kappa^2+3\pi+6\kappa+1)}{6\alpha^3\pi^3}\right)\beta^3$

$-\left(\left(\frac{\pi+3\kappa+1}{\alpha^2\pi^2}\right)\beta\gamma + \frac{\delta}{\alpha\pi}\right)$ καὶ ἔςαι ὁ τύπος

$$y = \omega^{\frac{1}{\pi}} - \frac{\beta}{\alpha\pi}\,\omega^{\frac{1+\kappa}{\pi}} + \frac{(\pi+2\kappa+1)\beta^2-2\alpha\gamma\pi}{2\alpha^2\pi^2}\,\omega^{\frac{1+2\kappa}{\pi}}$$

$$-\left(\frac{(2\pi^2+9\pi\kappa+9\kappa^2+3\pi+6\kappa+1)\beta^3}{6\alpha^3\pi^3} - \frac{(\pi+3\kappa+1)\beta\gamma}{\alpha^2\pi^2} + \frac{\delta}{\alpha\pi}\right)$$

$\omega^{\frac{1+3\kappa}{\pi}}$ κτ.

Κατὰ τοῦτον τὸν τύπον λύομεν καὶ ἀντιςρέφομεν τὰς σειρὰς, ὧν οἱ ἐκθέται καὶ συνεργοὶ κλασματικοί· κτ.

α΄. Ἀντιςραφήτω ἡ $\chi = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4$ κτ. εἰς ἑτέραν, εἰς ἣν ἡ y διὰ τῆς χ ἐκφράζεται· εἰς δὲ τὸν εὑρεθέντα τύπον ἔςαι $\alpha = \frac{1}{2}$. $\beta = \frac{1}{3}$. $\gamma = \frac{1}{4}$. $\pi = 2$. $\kappa = 1$ καὶ $\omega = 2\chi$, καὶ εὑρίσκομεν $y = \omega^{\frac{1}{2}}\ \frac{1}{3}\,\omega + \frac{1}{36}\omega^{\frac{3}{2}} +$ $\frac{1}{270}\,\omega^2 \ldots = 2^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\chi + \frac{1}{36}2^{\frac{3}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{270}\chi^2.$

β'. Ἀντιςραφήτω καὶ ἤδη ἡ σειρὰ $-\chi = \psi^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\psi^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}\psi^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}\psi^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}\psi^{\frac{7}{2}}$. ὅπου $\alpha = 1$ $\beta = -\frac{1}{2}$. $\gamma = -\frac{1}{8}$. $\omega = \chi$. $\pi = -\frac{1}{2}$. $\varkappa = 1$ καὶ ἑπομένως· $\psi = \frac{1}{\chi^2} - \frac{1}{\chi^4} + \frac{1}{\chi^6} - \frac{1}{\chi^8}$.

ΚΕΦΑ´ΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

Περὶ χρήσεως τῶν σειρῶν ἐπὶ τῆς κατασκευῆς τῶν λογαρίθμων.

§. [illegible] Τὶ βάσις τῶν λογαρίθμων ἐμάθομεν, καὶ ὅτι ἐὰν ἡ βάσις α κληθῇ, καὶ ληφθῇ μείζων μονάδος $\alpha > 1$ καὶ εἰς δυνάμεις μ, ν, ξ. κτ. ὑψωθῇ οὕτω $\alpha^\mu = \beta$. $\alpha^\nu = \gamma$ $\alpha^\xi = \delta$ κτ. αἱ ποσότητες μ, ν, ξ. εἶναι λογάριθμοι τῶν παραχθέντων δυνάμεων, β, γ, δ, κτ. (§. 607), καὶ ὅτι εἰς ὅλα τὰ λογαριθμικὰ συςήματα ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος $= 0$. διότι ἐὰν $\mu = 0$ ἔςαι $\alpha^\mu = \beta$ καὶ $\beta = \alpha^0 = 1$ (§. 610 Β')· ἄρα ἡ ποσότης ἑκάςου λογαρίθμου καταφατικοῦ εἶναι μείζων μονάδος ἀεὶ $\beta > 1$· ἐὰν ὅμως τὴν ὑπεροχὴν τῆς μονάδος ταύτης Ζ καλέσωμεν, ἔςαι $\beta = 1 + Z$· ὅτι ἡ ποσότης ἑκάςου ἀποφατικοῦ λογαρίθμου μ εἶναι ἀεὶ κλάσμα γνήσιον (§. 611) ἤτοι ἔλαττον μονάδος $\beta > 1$. ἐὰν ὅμως καὶ ταύτην τὴν ἐλάττωσιν ω καλέσωμεν, ἔςαι $\beta = 1 - \omega$. καὶ οὕτως ἀφ' οὗ ταῦτα καλῶς νοήσωμεν, λείπεται εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον ἐκεῖνα τὰ δύο προβλήματα τῶν λογαρίθμων νὰ λύσωμεν· α΄ τοῦ ἀριθμοῦ δοθέντος τὸν λογάριθμον εὑρεῖν, καὶ β΄ δοθέντος τοῦ λογαρίθμου, τὸν ἀριθμόν.

§. 696, Πρῶτον διὰ νὰ εὕρωμεν ἑνὸς ἑκάστου ἀριθμοῦ τὸν λογάριθμον ἐπὶ μιᾶς δοθείσης βάσεως α, πρέπει τὸν ἐκθέτην μ νὰ ἐφεύρωμεν, ὥστε νὰ εἶναι $\alpha^{\mu} = \beta$. εἰλήφθω λοιπὸν ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ $1+\chi$· διότι δι' αὐτοῦ τοῦ τύπου ἐκφράζεται ἕκαστος ἀριθμὸς μείζων καὶ ἐλάττων μονάδος, καταφατικὸς καὶ ἀποφατικὸς, ὅταν κατὰ τὴν χρείαν ἡ χ ποσότης ληφθῇ καταφατικῶς καὶ ἀποφατικῶς, ἀκεραίως καὶ κλασματικῶς· καὶ λοιπὸν ὁ λογάριθμος ζητεῖται $\alpha^{\mu} = 1+\chi$· λάβωμεν ὅμως ἀντὶ μ τοιοῦτον ἐκθέτην χ'. ὥστε νὰ εἶναι συνεργασία τῆς ποσότητος χ οὕτω $\alpha^{\chi'} = 1+\chi$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ζητεῖται καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ $1+\psi$

ψ'

καὶ ὁ ἐκθέτης ψ' συνεργασία τῆς ψ ποσότητος $\alpha = 1+\psi$, καὶ ἑπομένως $\lambda: (1+\chi) = \chi'$· καὶ $\lambda\,(1+\psi) = \psi'$. Λείπεται ἤδη νὰ ἐκφράσωμεν τὴν ποσότητα χ καὶ ψ μὲ δυναμικὴν συνεργασίαν τῆς χ καὶ ψ ποσότητος εἰς σειρὰν ἄπειρον.

§. 697. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τοιαύτην συνεργασίαν, λάβωμεν ἀντὶ $\lambda(1+\chi)$ καὶ $\lambda(1+\psi)$ τὰς ἑξῆς ἀδιαφόρους σειρὰς

$$\lambda:(1+\chi) = \mathrm{A}\,\chi + \mathrm{B}\chi^2 + \Gamma\chi^3 + \Delta\chi^4 + \mathrm{E}\chi^5 + \ldots\ldots \quad \mathrm{A}$$

$$\lambda:(1+\psi) = \mathrm{A}\,\psi + \mathrm{B}\psi^2 + \Gamma\psi^3 + \Delta\psi^4 + \mathrm{E}\psi^5 + \ldots\ldots \quad \mathrm{B}$$

εἰς τὰς ὁποίας οἱ ἀμετάβλητοι συνεργοὶ Α, Β, Γ κτ. εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε ἡ σειρὰ Α εἰς κάθε τιμὴν τῆς χ ποσότητος, καὶ ἐὰν ἡ χ εἰς τὴν ψ μεταβῇ, νὰ εἶναι ὀρθὴ, καὶ οἱ συνεργοὶ νὰ τηρῶσι τὴν αὐτὴν τιμήν. Ἔτι αἱ σειραὶ αὖται καὶ εἰς τὸν πρῶτον ὅρον ἔχουσι τὴν μεταβλητὴν αὐτῶν ποσότητα, διότι $\lambda(1+0)=0$ (§. 690 α', ἐὰν $\chi=0$ θῶμεν· λείπεται ἤδη τοὺς συνεργοὺς A, B, Γ κτ. νὰ διορίσωμεν.

§. 698. Εἰς τὸν διορισμὸν τοῦτον λάβωμεν εἰς τὰς ἄνω ἐξισώσεις $a^{\chi'}=(1+\chi)$ καὶ $a^{\psi'}=(1+\psi)$ ὅτι ψ' εἶναι πολλαπλοῦν τῆς χ' δηλ: $2\chi'=\psi'$· ἄρα ἡ B σειρὰ διπλασία τῆς A, καὶ ἐπομένως

$$2A\chi+2B\chi^2+2\Gamma\chi^3+2\Delta\chi^4+2E\chi^5=A\psi+B\psi^2+\Gamma\psi^3+\Delta\psi^4+E\psi^5 .. \;\Gamma$$

Ἐπειδὴ ὅμως $(1+\psi)=a^{\psi'}=a^{2\chi'}=(a^{\chi'})^2=(1+\chi)^2$, ἔςαι καὶ $1+\psi=(1+\chi)^2=1+2\chi+\chi^2$ καὶ ἐπομένως $\psi=2\chi+\chi^2$

Λοιπὸν εὕρωμεν τὰς δυνάμεις τῆς ψ ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\psi=2\chi+\chi^2 \qquad \begin{aligned} \psi&=2\chi+\chi^2+\;.\;.\;.\;.\\ \psi^2&=4\chi^2+4\chi^3+\chi^4+\;.\;.\\ \psi^3&=8\chi^3+12\chi^4+6\chi^5+\;.\;.\\ \psi^4&=16\chi^4+32\chi^5+\;.\;.\;.\\ \psi^5&=32\chi^5+\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned}$$

Ἐὰν ἤδη θῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν Γ ἀντὶ ψ, ψ^2, ψ^3, ψ^4 κτ. τὰ ἴσα εὑρεθέντα γίνεται

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l} 2A & \chi+2B & \chi^2+2\Gamma & \chi^3+2\Delta & \chi^4+2E & \chi^5= \\ =2A & +A & +4B & +B & & \\ & +4B & +8\Gamma & +12\Gamma & +6\Gamma & \\ & & & +16\Delta & +32\Delta & \\ & & & & +32E & \end{array}$$

καὶ ἐπομένως

$2A=2A$ ἢ $A=A$

$2B=A+4B \quad B=-\frac{1}{2}A$

$2\Gamma=4B+8\Gamma \quad \Gamma=\frac{1}{3}A$

$2\Delta = B + 12\Gamma + 16\Delta \quad \Delta = -\frac{1}{4}A$

$2E = 6\Gamma + 32\Delta + 32E. \; E = \frac{1}{5}A$

ἄρα καὶ $Z = -\frac{1}{6}A$ καὶ $H = \frac{1}{7}A$· καὶ $\Theta = -\frac{1}{8}A$, κτ.

Θῶμεν ἤδη εἰς τὴν ἐξίσωσιν A τοὺς διορισμοὺς τῶν συνεργῶν A, B, Γ καὶ εὑρίσκεται

$\lambda(1+\chi) = A\chi - \frac{1}{2}A\chi^2 + \frac{1}{3}A\chi^3 - \frac{1}{4}A\chi^4 + \frac{1}{5}A\chi^5 \pm \ldots$

Καὶ ἐνταῦθα μόνον ὁ συνεργὸς A μένει ἀδιόριςος, καὶ κατὰ τὸ δοκοῦν διορίζεται, ὡς καὶ ἡ βάσις α ἑκάςου συςήματος· τίνα ὅμως ὁ συνεργὸς A ἔχει συνάφειαν μὲ τὴν βάσιν α, κατωτέρω δείξομεν.

§. 699. Διὰ νὰ ἐπιβραχυνθῇ εὐθὺς ἡ ἄνω σειρὰ $\lambda(1+\chi) = A\chi - \frac{1}{2}A\chi^2 + \frac{1}{3}A\chi^3 - \frac{1}{4}A\chi^4 + \frac{1}{5}A\chi^5 - \frac{1}{6}A\chi^6 + \frac{1}{7}A\chi^7 - \frac{1}{8}A\chi^8 \pm . \Delta$ πρέπει ἡ ποσότης χ νὰ εἶναι κλάσμα γνήσιον, διὰ νὰ συνάπτωμεν μόνον ὅρους τινὰς τῆς σειρᾶς εἰς εὕρεσιν ἀκριβῆ ἀριθμοῦ οἱουδήποτε τοῦ λ: $(1+\chi)$ καὶ διὰ τοῦτο ἔςω $\chi = \frac{1}{Z}$ καὶ. $(1+\chi) = 1 + \frac{1}{Z} = \frac{Z+1}{Z}$, καὶ ἑπομένως (§. 613) $\lambda(1+\chi) = \lambda(Z+1) - \lambda Z$. Λοιπὸν θῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν Δ ἀντὶ μὲν $\lambda(X+1)$ τὸ, $\lambda(Z+1) - \lambda Z$, ἀντὶ δὲ χ τὸ, $\frac{1}{Z}$ καὶ γίνεται

$$\lambda(Z+1) - \lambda Z = \frac{A}{Z} - \frac{A}{2Z^2} + \frac{A}{3Z^3} - \frac{A}{4Z^4} + \frac{A}{5Z^5} - \frac{A}{6Z^6} \pm \ldots \; E$$

Ἔτι διὰ νὰ ἀπαλλαχθῶμεν εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν ἀπὸ τοὺς ἀποφατικοὺς ὅρους, θῶμεν $\chi = -\frac{1}{Z}$ ἄρα καὶ $1+\chi = 1 - \frac{1}{Z} = \frac{Z-1}{Z}$ καὶ ἑπομένως $\lambda(1+\chi) = \lambda(Z-1) - \lambda Z$.

Θῶμεν ἔτι εἰς τὴν ἐξίσωσιν Δ ἀντὶ χ τὸ ἴσον $-\frac{1}{Z}$, ἀντὶ δὲ λ(1+χ), τὸ ἴσον λ(Z−1)−λZ, καὶ ἔςαι

$$\lambda(Z-1)-\lambda Z=-\frac{A}{Z}-\frac{A}{2Z^2}-\frac{A}{3Z^3}-\frac{A}{4Z^4}-\frac{A}{5Z^5}\ldots Z$$

Ἐὰν δ' ἀφέλωμεν τὴν Z ἐξίσωσιν ἀπὸ τῆς Ε, εὑρίσκομεν τὸ λείψανον οὕτω

$$\lambda(Z+1)-\lambda Z=\frac{A}{Z}-\frac{A}{2Z^2}-\frac{A}{3Z^3}-\frac{A}{4Z^4}-\frac{A}{5Z^5}+\ldots\ldots$$

$$\pm\lambda(Z-1)\mp\lambda Z=-\frac{A}{+Z}-\frac{A}{+2Z^2}-\frac{A}{+3Z^3}-\frac{A}{+4A^4}-\frac{A}{+5Z^5}-\ldots$$

$$\lambda(Z+1)-\lambda(Z-1)=\frac{2A}{Z}+\frac{2A}{3Z^3}+\frac{2A}{5Z^5}+\frac{2A}{7Z^7}+\ldots\ldots Z$$

ἤτοι $\lambda(Z+1)=\lambda(Z-1)+2A\left(\frac{1}{Z}+\frac{1}{3Z^3}+\frac{1}{5Z^5}\frac{1}{7Z^7}+\ldots\right)$

Καὶ δι' αὐτῆς τῆς σειρᾶς δυνάμεθα εὑρεῖν τοὺς λογαρίθμους ὅλων τῶν περιττῶν ἀριθμῶν, ὅταν ὅρους τινὰς αὐτῆς μέχρις ἑπτὰ, ἢ δέκα καὶ ἐπέκεινα χαρακτῆρας τῶν δεκαδικῶν ἐκτυλίσωμεν· διότι ἐὰν θῶμεν Z=2 ἔςαι $\lambda{:}\,3=\lambda{:}\,1+2A\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3.\,2^3}+\frac{1}{5.\,2^5}+\frac{1}{7.\,2^7}+\ldots\right)$. Ἐὰν δέ τινας ὅρυς ἐκτυλίσωμεν, εὑρίσκομεν

$\frac{1}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0{,}5000000.$

$\frac{1}{3.\ 2^3} = \frac{1}{24} = \ldots\ldots\ldots \quad 0{,}0416667.$

$\frac{1}{5.\ 2^5} = \frac{1}{160} = \ldots\ldots\ldots \quad 0{,}0062500.$

$\frac{1}{7.\ 2^7} = \frac{1}{896} = \ldots\ldots\ldots \quad 0{,}0011161.$

$\frac{1}{9.\ 2^9} = \frac{1}{4608} = \ldots\ldots\ldots \quad 0{,}0002171.$

$\frac{1}{11.\ 2^{11}} = \frac{1}{22528} = \ldots\ldots \quad 0{,}0000444.$

$\frac{1}{13.\ 2^{13}} = \frac{1}{106496} = \ldots\ldots \quad 0{,}0000094.$

$\frac{1}{15.\ 2^{15}} = \frac{1}{491520} = \ldots\ldots \quad 0{,}0000020.$

$\frac{1}{17.\ 2^{17}} = \frac{1}{3263244} = \ldots\ldots \quad 0{,}0000004.$

καὶ $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3.\ 2^3} + \frac{1}{5.\ 2^5} + \ldots) = 0{,}5493061.$

ἄρα λ: $3 = 2A.\ 0{,}5493061 = A.\ 1{,}0986122.$

Ἐὰν δὲ $Z=4$ θῶμεν, εὑρίσκομεν λ: $5 =$ λ: $3 + 2A(\frac{1}{4} + \frac{1}{3.\ 4^3} + \frac{1}{5.\ 4^5} + \ldots) = A.\ 1{,}0986122 + 2A(\frac{1}{4} + \frac{1}{3.\ 4^3} + \frac{1}{5.\ 4^5} + \ldots) = A.\ 1{,}6094370$· καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὸν λογάριθμον τοῦ 7, 9, 11, 13 κτ. ἐὰν θῶμεν $Z=6=8=10$ κτ. πλὴν δι' αὐτῆς τῆς σειρᾶς ὁ λογάριθμος τοῦ 2 δὲν εὑρίσκεται, διότι λ: $2=$λ$:0+2A(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+.)$ καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ μηδενὸς ἀδύνατος· διότι οὐδέποτε ἡ βάσις α εἰς δύναμίν τινα ὑψωθεῖσα ἐκθέτην ἔδωκε τὸ μηδέν· διὰ τοῦτο ἑτέραν εὕρωμεν σειρὰν, διὰ τῆς ὁποίας ἑκάστου ἀριθμοῦ τὸν λογάριθμον εὐκολώτερον εὑρίσκομεν.

§. 700. Εἰς τοῦτο πρέπει νὰ λάβωμεν ἀντὶ Z εἰς τὴν ἐξίσωσιν II, ἕνα τοιοῦτον ἀριθμὸν, ὥστε $\lambda(Z+1)-\lambda(Z-1)$ νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων δύο ἀριθμῶν, οἵτινες μόνον κατὰ μονάδα διαφέρουσι, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν μίαν ἐξίσωσιν, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον ἑκάστου ἀριθμοῦ, ἐὰν εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἐγγὺς προηγουμένου ἀριθμοῦ· ὅθεν ἔςω

$\lambda.\ (Z+1)=\lambda:\ \pi.$ καὶ $\lambda(Z-1)=\lambda:\ \pi-1$ ἄρα $\lambda(Z+1)$

$(-\lambda(Z+1)=\lambda:\ \pi-\lambda(\pi-1)$· καὶ $\lambda\frac{Z+1}{Z-1}=\lambda\frac{\pi}{\pi-1}$ (§. 613)· καὶ ἐπομένως $\frac{Z+1}{Z-1}=\frac{\pi}{\pi-1}$· καὶ $Z=2\pi-1$· ἐπειδὴ δ' εὕρομεν $\lambda(Z+1)=\lambda:\ \pi$· καὶ $\lambda.\ (Z-1)=\lambda(\pi-1)$ καὶ ἅμα $Z=2\pi-1$· Θῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν H τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων, καὶ εὑρίσκομεν $\lambda:\ \pi-\lambda(\pi-1)=2A$

$\left(\frac{1}{2\pi-1}+\frac{1}{3(2\pi-1)^3}+\frac{1}{5(2\pi-1)^5}+\ .\ .\ .\ .\right)$καὶ ἐπομένως

$$\lambda:\ \pi=\lambda(\pi-1)+2A\left(\frac{1}{2\pi-1}+\frac{1}{3(2\pi-1)^3}+\frac{1}{5(2\pi-1)^5}+\ .\ .\ .\right)\cdot\ \mathrm{I}$$

Ἐὰν δ' εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν $\pi=2$ Θῶμεν, ἔςαι

$$\lambda : 2 = \lambda : 1 + 2A\left(\tfrac{1}{3} + \frac{1}{3.\ 3^3} + \frac{1}{5.\ 3^5} + \ \ldots\right) = 0, + 2A$$

$$\left(\tfrac{1}{3} + \frac{1}{3.\ 3^3} + \frac{1}{5.\ 3^5} + \frac{1}{7.\ 3^7} + \ldots\right)$$

Ἐὰν δ' ἀπ' αὐτῆς τῆς σειρᾶς μόνον ἓξ ὅρους ἐκτυλίσωμεν ὀρθῶς, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τοῦ 2 = A. 0, 693—1472. εἰς 7 δεκαδικά· ἐὰν δὲ τὸν λογάριθμον μὲ πλείονα δεκαδικὰ ζητῶμεν, πρέπει πλείονας ὅρους νὰ ἐκτυλίσωμεν, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν δι' αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως τὸν λογάριθμον τοῦ 3, 4, 5, 6, 7 κτ. ὅταν κατ' ἀκολουθίαν θῶμεν $\pi = 3 = 4 = 5 = 6$ κτ.

§. 701. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ λογάριθμος τοῦ 2 εὑρέθη, δυνάμεθα τὴν ἐξίσωσιν 1 εἰς περαιτέρω χρῆσιν νὰ κάμωμεν, διὰ νὰ γένῃ περισσότερον μειουμένη, ὥστε μὲ τὴν ἐκτύλισιν τριῶν ἢ δύο ὅρων νὰ εὑρίσκωμεν τὸν λογάριθμον εἰς 7 ἢ 10 καὶ ἐπέκεινα δεκαδικὰ κλάσματα, ἐὰν $\pi = \rho^2$ θῶμεν· διότι ἡ ἐξίσωσις 1 μεταβαίνει εἰς τὴν ἑξῆς

$$\lambda : \rho^2 = \lambda(\rho^2 - 1) + 2A\left(\frac{1}{2\rho^2 - 1} + \frac{1}{3(2\rho^2 - 1)^3} + \frac{1}{5(2\rho^2 - 1)^5}\right) + \frac{1}{7(2\rho^2 - 1)^7}\ 7 + \ \ldots\ldots$$

καὶ ἑπομένως (§. 615).

$$2\lambda\rho = \lambda(\rho + 1)(\rho - 1) + 2A\ \frac{1}{2\rho^2 - 1} + \frac{1}{3(2\rho^2 - 1)^3} + \ldots)$$

καὶ τέλος

$$\lambda : \rho = \frac{\lambda(\rho + 1) + \lambda(\rho - 1)}{2} + A\left(\frac{1}{2\rho^2 - 1} + \frac{1}{3(2\rho^2 - 1)^3} + \frac{1}{5(2\rho^2 - 1)^5} + \frac{1}{7(2\rho^2 - 1)^7}\right.$$

. Θῶμεν ἤδη εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν $\rho=3, 5, 7, 9, 11$ κτ. δηλ: θῶμεν ἀντὶ ρ τὴν σειρὰν τῶν φυσικῶν πρώτων καθ' ἑαυτοὺς ἀριθμῶν, καὶ εὑρίσκομεν $\lambda{:}\,3=\frac{\lambda{:}4+\lambda{:}2}{2}+A\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{3.17^3}+\frac{1}{5.17^5}+\ldots\right)$

$$=\frac{2\lambda{:}2+\lambda{:}2}{2}+A\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{3.17^3}+\frac{1}{5.17^5}+\ldots\ldots\right.$$

καὶ τέλος $\frac{2\lambda{:}\,2+\lambda{:}\,2}{2}=\frac{3}{2}\,\lambda{:}\;2=$

$$\frac{2{,}0794416}{2}=1{,}0397208$$

$$\frac{1}{17}\ldots\ldots=0{,}0588235$$

$$\frac{1}{3.17^3}\ldots=0{,}0000678$$

$$\frac{1}{5.17^5}\ldots=\underline{0{,}0000001}$$

$$\lambda{:}\,3=A.\,1{,}0986122$$

$$4=2\lambda{:}\;2=A.\,1{,}3862944.$$

$$\lambda{:}\;5=\frac{\lambda{:}\,6+\lambda{:}\,4}{2}+A\left(\frac{1}{49}+\frac{1}{3.49^3}\right)=\frac{\lambda{:}\,2+\lambda{:}3+\lambda{:}4}{2}+$$

$$A(0{,}0204082+0{,}0000028)=A.\;1{,}6094379.$$

καὶ ἔτι $\lambda{:}\,6=\lambda{:}\,3+\lambda{:}\,2=A.\;1.\;7917595.$

ἔτι $\lambda{:}\;7=\frac{\lambda{:}\,8+\lambda{:}\,6}{2}+A\left(\frac{1}{97}+\frac{1}{3.97^3}\right.=\frac{3\lambda{:}\,2+\lambda{:}6}{2}+$

$$A(0{,}0103093+0{,}0000003)=A.\;1{,}9459101.$$

ἔτι $\lambda{:}\;8=3\lambda{:}2=A.\;2{,}0794416.$

ἔτι $\lambda{:}\;9=2\lambda{:}\,3=A.\;2{,}1972244.$

$$\lambda{:}\,10=\lambda{:}5+\lambda{:}\,2=A.\;2{,}3025851.$$

$$\lambda: 11 = \frac{\lambda: 12 + \lambda: 10}{2} + A\,\tfrac{1}{241} = \frac{\lambda: 4 + \lambda: 3 + \lambda: 10}{2} +$$

A. 0,0041494 = A. 2,3978952. Καὶ οὕτως εὑρίσκομεν λογαρίθμους ὅσους ἂν θέλωμεν, ἐκτὸς μόνον ὅτι ἡ ποσότης Α μένει ἀδιόριςος, ἣν διορίζομεν κατὰ τὸ δοκοῦν δηλ: $A = 1 = 2 = 3 = \frac{1}{10} = \frac{1}{18}$ κτ. Ἡ δὲ σειρὰ αὕτη οὕτω ταχέως βραχύνεται, ὥςε ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου 11 καὶ καθεξῆς ἀρκεῖ μόνον εἷς ὅρος αὐτῆς, διὰ νὰ εὑρίσκωμεν τὸν λογάριθμον ἑκάςου ἀριθμοῦ εἰς ἑπτὰ δεκαδικὰ ὀρθῶς· μὲ δέκα δὲ δεκαδικὰ ἄρχεται ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 23 ἀριθμοῦ, διότι εἰς τοὺς ἑξῆς λογαρίθμους μόνον εἷς ὅρος τῆς σειρᾶς ἱκανός, διότι ὁ ἑξῆς ὅρος δίδει χαρακτῆρα ἀνεπαίσθητον.

§. 702. Ἐὰν δὲ λάβωμεν κατὰ τὸ δοκοῦν ἕνα ἀριθμὸν οἱονδήποτε ἀντὶ τοῦ Α, καὶ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς εὑρεθέντας λογαρίθμους δι' αὐτοῦ, λαμβάνομεν ἐν λογαριθμικὸν σύςημα· φυσικῶς δὲ λαμβάνομεν Α=1 διὰ νὰ μὴ πολλαπλασιάζωνται περαιτέρω οἱ λογάριθμοι· καὶ οὕτως ἔχομεν λ: 3 = 1,0986122. λογ: 4 = 1, 3862944. Οὗτοι δὲ καλοῦνται λογάριθμοι φυσικοί, καὶ ἕτεροι καλοῦσιν αὐτοὺς λογαρίθμους ὑπερβολικούς, ἕτεροι δὲ καλοῦσιν αὐτοὺς Νεπεριανούς· ἡμεῖς ὅμως πρὸς διάκρισιν τῶν Βριγγιανῶν λογαρίθμων ὀξύνομεν τὸ λ' αὐτῶν οὕτω λ': 10 = 2, 302585ι κτ.

§. 703. Ἀφ' οὗ εὑρεθῶσιν οἱ φυσικοὶ λογάριθμοι, κατασκευάζομεν εὐκόλως καὶ ἕτερον οἱονδήποτε σύςημα λογαριθμικὸν μὲ ἑτέραν βάσιν, ἀπὸ τὸν τύπον, ὅπου ἐκεῖ εὕρομεν (§. 653)· ὁ λογάριθμος δηλ: ἑκάςου ἀριθμοῦ β εἰς τὸ κοινὸν σύςημα ἐπὶ βάσεως 10 ἣν λ: β =

$\frac{1}{\lambda':10}.\lambda':\beta = \frac{1}{2,3025851}.\lambda:\beta = 0,4342944.\lambda:$ β. ἢ εἰς μείζονας πίνακας λαμβάνομεν τοῦτο τὸ δεκαδικὸν οὕτω

$$0,43429448058184689848 4036 \text{ κτ.}$$

καὶ κατὰ τὴν χρείαν λαμβάνομεν ἀπ' αὐτοῦ ὅσους ὅρους ἂν θέλωμεν· ὅθεν ἐὰν ὅλους τοὺς φυσικοὺς λογαρίθμους ἐπὶ 0,4342944 πολλαπλασιάσωμεν, λαμβάνομεν τοὺς κοινοὺς λογαρίθμους τοῦ Βριγγίου· διὰ τοῦτο καὶ ὁ ἀριθμὸς 0,4342944 ῥυθμὸς τοῦ Βριγγιανικοῦ συςήματος καλεῖται. Ἀνάπαλιν, ἐὰν τοὺς κοινοὺς λογαρίθμους διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 0,4342944 διέλωμεν, ἢ ἐπὶ τὸν 2,3025851 πολλαπλασιάσωμεν, λαμβάνομεν τοὺς φυσικοὺς λογαρίθμους· καὶ καθόλου ἡ Α ποσότης ῥυθμὸς λογαριθμικὸς καλεῖται· καὶ ἐὰν ἄλλως διορισθῇ, ἕτερον λογαριθμικὸν λαμβάνομεν σύςημα· ἡ δὲ Α εἰς καθε λογαριθμικὸν σύςημα ἐξαρτᾶται ἀπὸ τῆς βάσεως α οὕτως $A = \frac{1}{\lambda' a}$ ὁ ῥυθμὸς τοῦ Βριγγιανικοῦ, καὶ $A = \frac{1}{\lambda:a} = 1$ ὁ ῥυθμὸς τοῦ φυσικοῦ συςήματος.

§. 704. Διὰ νὰ εὑρίσκωμεν δὲ καὶ εἰς καθε σύςημα τὴν ἀνήκουσαν αὐτῷ βάσιν, ὅταν κατὰ τὸ δοκοῦν ληφθῇ $A = \mu$ θῶμεν ἀντὶ τῆς βάσεως $a = 1 + \text{ч}$· ἐπειδὴ ἡ βάσις ἀεὶ μείζων μονάδος εἶναι δεῖ· διότι ἡ μονὰς ὑψουμένη εἰς δυνάμεις, μένει καὶ αὖθις μονάς· λοιπὸν (§. 610. Β.) $\lambda\cdot(1+\text{ч}) = 1$, ἄρα κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τύπους (§. 698)· ἐὰν $A = \mu$ θῶμεν, καὶ $\chi = \text{ч}$· $\lambda(1+\text{ч}) = \mu\left(\text{ч} - \frac{\text{ч}^2}{2} + \frac{\text{ч}^3}{3} - \frac{\text{ч}^4}{4} + \frac{\text{ч}^5}{5} + \ldots\right)$· ἐπειδὴ ὅμως

$$\lambda(\psi+1)=1 \text{ ἄρα } 1=\mu\left(\psi^2-\frac{\psi^2}{2}+\frac{\psi^3}{3}-\frac{\psi^4}{4}+\frac{\psi^5}{5}+\ldots\right)$$

ἐὰν δὲ διὰ μ διέλωμεν ἄμφω τὰ σκέλη, ἔςαι

$$\mu^{-1}=\left(\psi-\frac{\psi^2}{2}+\frac{\psi^3}{3}-\frac{\psi^4}{4}+\ldots\right) \ldots\ldots \text{A}$$

Θῶμεν ἤδη ἀντὶ ψ σειρὰν ἀνήκουσαν ἀπείρου (§. 693) οὕτω κατὰ τοὺς νόμους τῆς ἀντιςροφῆς τῶν σειρῶν,

$$\psi=\text{A}\mu^{-1}+\text{B}\mu^{-2}+\Gamma\mu^{-3}+\Delta\mu^{-4}+\ldots\ldots \text{B}$$

ἄρα καὶ $\psi^2=\text{A}^2\mu^{-2}+2\text{AB}\mu^{-3}+\text{B}^2\mu^{-4}+2\text{A}\Gamma\mu^{-4}+$

$$\psi^3=\text{A}^3\mu^{-3}+3\text{A}^2\text{B}\mu^{-4}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi^4=\text{A}^4\mu^{-4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Θῶμεν ἤδη εἰς τὴν ἐξίσωσιν A ἀντὶ ψ, ψ^2, ψ^3, ψ^4, τὰ ἴσα εὑρεθέντα, καὶ γίνεται ἡ ἐξίσωσις

$$\begin{array}{rl|l|l|l}
\mu^{-1} = & \text{A} & \mu^{-1}+\text{B} & \mu^{-2}+\Gamma & \mu^{-3}+\Delta & \mu^{-4}+\ldots \\
0 = & -1 & -\frac{1}{2}\text{A}^2 & -\text{AB} & -\frac{1}{2}\text{B}^2 & \\
 & & & +\frac{1}{3}\text{A}^3 & +\text{A}^2\text{B} & \\
 & & & & -\text{A}\Gamma & \\
 & & & & -\frac{1}{4}\text{A}^4 &
\end{array}$$

A $=1$

$\text{B}=\frac{1}{2}\text{A}^2$ καὶ $\text{B}=\dfrac{1}{1.\,2}$

$\Gamma-\text{AB}+\frac{1}{3}\text{A}^3$ καὶ $\Gamma=\dfrac{1}{1.\,2.\,3}$

$\Delta-\frac{1}{2}+\text{A}^2\text{B}-\text{A}\Gamma-\frac{1}{4}\text{A}^4$ καὶ $\Delta=\dfrac{1}{1.\,2.\,3.\,4}$

καὶ ἑπομένως $\text{E}=\dfrac{1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$

$$\text{Z}=\frac{1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6}$$

Θῶμεν ἤδη τοὺς διορισμοὺς τῶν συνεργῶν A, B, Γ κτ. εἰς τὴν ἐξίσωσιν B, καὶ γίνεται $\psi = \mu^{-1} + \frac{\mu^{-2}}{1.\ 2} + \frac{\mu^{-3}}{1.2.3}$

$$+ \frac{\mu^{-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \frac{\mu^{-5}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

καὶ $\psi + 1 = 1 + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{1.\ 2\,\mu^2} + \frac{1}{1.2.3\,\mu^3} + \frac{1}{1.\ 2.\ 3.\ 4\,\mu^4}$

$$+ \frac{1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\,\mu^5}$$

Ἐὰν δὲ θῶμεν εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν $\mu = 1$, ὡς εἰς τοὺς φυσικοὺς λογαρίθμους λαμβάνουσι τὴν $A = 1$, ἔσται

$$1 + \psi = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{1.\ 2.\ 3} + \frac{1}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \ldots =$$

2,7182818· ὀρθότερον $= 2,71828182845904523536$ κτ. ἡ βάσις τῶν φυσικῶν λογαρίθμων· τοῦτον τὸν ἀριθμὸν χαρακτηρίζομεν εἰς τὸ ἑξῆς μὲ τὸ γράμμα ω, καὶ ὅπου ω εἰς τὸν ὁλοκληρωτικὸν ἀριθμὸν εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 2,7182818 κτ. τὴν βάσιν τῶν φυσικῶν λογαρίθμων νοοῦμεν· ἡ χρῆσις τούτου πολλὴ εἰς τὰ ἀπειροστά, ἕτεροι δὲ διὰ τοῦ e χαρακτηρίζουσιν αὐτόν.

§. 705. Ἤδη ἔλθωμεν εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα, δηλ: εἰς τὸν δοθέντα φυσικὸν λογάριθμον χ τὸν ἀνήκοντα ἀριθμὸν ω^χ δι' ἀπείρου νὰ εὕρωμεν· ἔσω λοιπὸν $\omega^\chi = 1 + \psi$ καὶ ἑπομένως (§. 698) $\chi = \lambda(1+\psi)$. ὅθεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω

(§. 704). $\chi = \psi - \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{3} - \frac{\psi^4}{4} + \frac{\psi^5}{5} \ldots\ldots\ldots$ A

ἂς ἀντιστραφῇ αὕτη ἡ ἐξίσωσις, καὶ ἂς ἐκφρασθῇ ἡ ψ διὰ τῆς χ (§. 693) ὅθεν

$$y=A\chi+B\chi^2+\Gamma\chi^3+\Delta\chi^4+\ldots\ldots\ldots\ldots\ B$$

ἄρα $$y^2=A^2\chi^2+2AB\chi^3+B^2\chi^4+2A\Gamma\chi^4\ldots\ldots$$

$$y^3=A^3\chi^3+3A^2B\chi^4+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^4=A^4\chi^4\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ἐὰν δ' εἰς τὴν ἐξίσωσιν A ἀντικαταςήσωμεν ἀντὶ y, y^2, y^3 κτ. τὰ ἴσα, καὶ εἰς τὸ μηδενικὸν αὐτὴν φέρωμεν, ἔςαι

$$0=\begin{array}{l|l|l|l|l} A & \chi+B & \chi^2+\Gamma & \chi^3+\Delta & \chi^4 \\ -1 & -\frac{1}{2}A^2 & -AB & -\frac{1}{2}B^2 & \\ & & +\frac{1}{3}A^3 & -A\Gamma & \\ & & & +A^2B & \\ & & & -\frac{1}{4}A^4 & \end{array}$$

εὑρίσκομεν

$A-1=0$ καὶ $A=1$

$$B-\tfrac{1}{2}A=0 \qquad B=\frac{1}{1.\,2}$$

$$\Gamma-AB+\tfrac{1}{3}A^3=0 \quad \Gamma=\frac{1}{1.\,2.\,3}$$

$$\Delta-\tfrac{1}{2}B^2-A\Gamma+A^2B-\tfrac{1}{4}A^4=0 \quad \Delta=\frac{1}{1.\,2.\,3.\,4}$$

καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις B γίνεται

$$y=\chi+\frac{\chi^2}{1.2}+\frac{\chi^3}{1.\,2.\,3}+\frac{\chi^4}{1.2.3.4}+\ldots \text{ ἄρα } y+1=1+\chi+\frac{\chi^2}{1.\,2}+\frac{\chi^3}{1.\,2.\,3}+\frac{\chi^4}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\ldots$$

καὶ $$\omega^{\chi}=1+\chi+\frac{\chi^2}{1.\,2}+\frac{\chi^3}{1.2.3}+\frac{\chi^4}{1.2.3.4}+\frac{\chi^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}+\frac{\chi^6}{1.2.3.4.5.6}$$ καὶ δι' αὐτῆς εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς ἑνὸς φυσικοῦ λογαρίθμου· ἔςω ὁ δοθεὶς φυσικὸς λογάριθμος

$\chi = 1,5000000 = 1,5 = \frac{3}{2}$. οὗ τινος ὁ ἀριθμὸς ζητεῖται· λοιπὸν

$$\omega^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3^2}{1.2.2^2} + \frac{3^3}{1.2.3.2^3} + \frac{3^4}{1.2.3.4.2^4} + \ldots$$

$= 4,4816$, σχεδὸν ἐὰν ἐνίους ὅρους μόνον τῆς σειρᾶς λάβωμεν· ἐὰν δὲ θῶμεν $\chi = 1$, ὡς εἰς τοὺς φυσικοὺς λογαρίθμους λαμβάνομεν, ἔσαι $\omega = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = 2,7182818$. ὡς καὶ πρότερον εὕρηται ἡ βάσις τοῦ φυσικοῦ συςήματος.

Σημείωσαι, ὅτι $\omega^{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{\omega}$ ἄρα καὶ διὰ τοιούτων σειρῶν καὶ ῥίζας ἀνωτέρων δυνάμεων ἐξάγομεν, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς ὀψόμεθα.

§. 706. Μέχρι τοῦδε εὑρίσκομεν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου τὸν ἀριθμὸν μόνον ἀπὸ τῆς βάσεως· πλὴν διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων εὑρίσκομεν αὐτὸν καὶ ἀπὸ ὁτινοσοῦν λογαρίθμου, δηλ: εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου καὶ ἐπὶ ἑτέρας βάσεως α, ἢ εὑρίσκομεν διὰ τῶν ἑξῆς ῥίζαν τινὰ ἑνὸς δήποτε ἀριθμοῦ, ἐὰν ἔχῃ ἐκθέτην χ κλασματικὸν, εἴτε καταφατικὸν, εἴτε ἀποφατικόν· ἐπειδὴ ὅμως ἐδείχθη (§. 705) $\omega^{\chi} = 1 + \chi + \frac{\chi^2}{1.2} + \frac{\chi^3}{1.2.3} + \frac{\chi^4}{1.2.3.4} + \ldots$ δεικνύεται καὶ γενικῶς.

$$\alpha^{\chi} = 1 + \chi\lambda':\alpha + \frac{(\chi\lambda':\alpha)^2}{1.2} + \frac{(\chi\lambda':\alpha)^3}{1.2.3} + \frac{(\chi\lambda':\alpha)^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

διὰ νὰ ἀποδειχθῇ αὕτη ἡ ἐξίσωσις, ὅτι εἶναι ὀρθὴ, λητεθήτω $\alpha^{\chi} = 1 + \upsilon$ ἄρα $\chi\,\lambda'{:}\,\alpha = \lambda'(1+\upsilon)$· ἀλλὰ μὴν ἀνωτέρω εὕρομεν (§. 705.) $\lambda'(1+\upsilon = \upsilon) - \frac{\upsilon^2}{2} + \frac{\upsilon^3}{3} - \frac{\upsilon^4}{4} + \ldots$ A ἄρα $\chi\,\lambda'{:}\ \alpha = \upsilon - \frac{\upsilon^2}{2} + \frac{\upsilon^3}{3} - \frac{\upsilon^4}{4} + \frac{\upsilon^5}{5} \mp \ldots$ B

Θῶμεν ἤδη $Z = \chi\,\lambda'{:}\,\alpha$· ἄρα $Z = \upsilon - \frac{\upsilon^2}{2} + \frac{\upsilon^3}{3} - \frac{\upsilon^4}{4} \mp \ldots$ Γ

ἐὰν δ᾽ αὕτη ἀντιςραφῇ κατὰ τὰ ἀνωτέρω (§. 705.) ἔςαι

$$\upsilon = Z + \frac{Z^2}{1.2} + \frac{Z^3}{1.2.3} + \frac{Z^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Delta$$

ἀλλὰ $Z = \chi\lambda'{:}\ \alpha$· $Z^2 = (\chi\,\lambda'{:}\ \alpha)^2$· $Z^3 = (\chi\,\lambda'{:}\ \alpha)^3$ καὶ $\upsilon + 1 = \alpha^{\chi} = 1 + \chi\lambda'{:}\ \alpha + \frac{(\chi\,\lambda'{:}\,\alpha)^2}{1.\ 2} + \frac{(\chi\,\lambda'{:}\,\alpha)^3}{1.2.3.} + \frac{(\chi\,\lambda'{:}\ \alpha)^4}{1.2.3.4.}$ ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις· ἐὰν ὅμως θῶμεν $\alpha = \chi$· ἔςαι

$$\chi^{\chi} = 1\,(+)\,\lambda'{:}\ \chi^{\chi} + \frac{1}{1.2}(\lambda'{:}\,\chi^{\chi})^2 + \frac{1}{1.2.3}(\lambda'{:}\,\chi^{\chi})^3 + \frac{1}{1.2.3.4}(\lambda'{:}\ \chi\chi)^4 \ldots\ldots$$

§. 707. Εἴπομεν, ὅτι ἡ βάσις ω τῶν φυσικῶν λογαρίθμων λυσιτελεῖ τὰ μάλιςα οὐ μόνον εἰς τὰ ἀπειροςὰ, ἀλλὰ καὶ εἰς πολλὰς ἐξισώσεις δυσδιαλύτους, δηλ. εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\lambda'{:}\,\chi^2 = \frac{\mu}{\nu} + \lambda'{:}\ \frac{\gamma}{\chi}$. καὶ ζητεῖται ἡ χ.

λοιπὸν $\quad 2\,\lambda'{:}\,\chi = \frac{\mu}{\nu} + \lambda'{:}\,\gamma - \lambda'{:}\,\chi$

ἤτοι $\quad 3\,\lambda'{:}\,\chi = \frac{\mu}{\nu} + \lambda'{:}\gamma$

$$\lambda'{:}\,\chi^3 - \lambda'{:}\,\gamma = \frac{\mu}{\nu}$$

καὶ $\lambda'{:}\,\frac{\chi^3}{\gamma} + \frac{\mu}{\nu}.\,1$

ἀλλὰ $1 = \lambda'{:}\,\omega$ ὅτι μονὰς ὁ λογάριθμος τῆς βάσεως· ἄρα

$$\lambda'{:}\,\frac{\chi^3}{\gamma} = \frac{\mu}{\nu}\lambda'{:}\,\omega$$

καὶ $\lambda'{:}\,\frac{\chi^3}{\gamma} = \lambda'{:}\,\omega^{\frac{\mu}{\nu}}$

καὶ $\frac{\chi^3}{\gamma} = \lambda'{:}\,\omega^{\frac{\mu}{\nu}}$

καὶ $\chi^3 = \gamma'{:}\,\omega^{\frac{\mu}{\nu}}$

καὶ $\chi = \sqrt[3]{\gamma\,\omega^{\frac{\mu}{\nu}}}$

Ἔςω τέλος ἡ ἐξίσωσις $\lambda'{:}\,\frac{\alpha}{\chi} = \mu\,\chi - \lambda'{:}\gamma$ καὶ ζητεῖται ἡ χ. λοιπὸν $\lambda'{:}\,\frac{\alpha}{\chi} + \lambda'{:}\,\gamma = \mu\,\chi$ ἤτοι $\lambda'{:}\,\frac{\alpha\gamma}{\chi} = \mu\,\chi\,\lambda'{:}\,\omega$

$$\lambda'{:}\,\frac{\alpha\gamma}{\chi} = \lambda'{:}\,\omega^{\mu\chi}$$

$$\frac{\alpha\gamma}{\chi} = \chi\,\omega^{\mu\chi}$$

$$\alpha\gamma = \chi\,\omega^{\mu\chi}.$$

καὶ πλέον δὲν λύεται· συμβαίνει δὲ τοῦτο τὸ ἀδιάλυτον εἶναι, ὅταν ἡ ἄγνωςος ποσότης εἶναι ἐκθέτης ἅμα καὶ συνεργός· ἐπὶ παρ. ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς χ, ὅςις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν $\frac{64}{5}$ νὰ εἶναι ἴσος τῷ 4, ἐὰν εἰς τὴν δύναμιν χ ὑψωθῇ, ἤτοι $\frac{64\chi}{5} = 4^{\chi}$. λ': $64 +$ λ': $\chi -$ λ': $5 = \chi$ λ': 4· καὶ χ λ': $4 -$ λ': $\chi =$ λ': $64 -$ λ': 5· ἐπειδὴ δὲ λ': $4 = 0{,}60206$. καὶ λ: $64 = 1{,}80618$· καὶ λ': $5 = 0{,}69897$· καὶ ἑπομένως λ': $64 -$ λ: $5 = 1{,}10721$. ἄρα $\chi . 0{,}60206 -$ λ': $\chi = 1{,}10721$. Α· ἀλλὰ τὰ τοιαῦτα λύονται διὰ δοκιμῆς οὕτως, ὥςε τὸ πρῶτον σκέλος τῆς ἐξισώσεως νὰ εἶναι ἴσον τῷ ἑτέρῳ·· διότι ἐὰν θῶμεν $\chi = 2$ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον σκέλος $= 0{,}90309$, ἤτοι ἔλαττον, καὶ πρέπει ἡ χ μείζων τοῦ 2· ἐὰν δὲ θῶμεν $\chi = 3$ ἔςαι τὸ πρῶτον σκέλος $= 1{,}3290587$, ἤτοι μεῖζον, καὶ πρέπει ἡ χ νὰ εἶναι ἐλάττων τοῦ 3 ἤτοι μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 3· ἐὰν δὲ θῶμεν $\chi = \frac{3+2}{2} = 2{,}5$ εὑρίσκομεν σχεδὸν τὸ πρῶτον σκέλος ἴσον τῷ ἑτέρῳ, καὶ ἔςαι $\chi = 2{,}5 = \frac{5}{2}$· τὰς τοιαύτας ἐξισώσεις ὅμως κάλλιον εὑρίσκομεν δι' ἐκτυλίξεως εἰς ἀπείρους σειράς· διότι τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως $\alpha\gamma = \chi\omega^{\mu\chi}$ ἐκτυλίεται τὸ ἕτερον σκέλος $\chi\omega^{\mu\chi}$ κατὰ τὰ ἀνωτέρω (§. 706)

$$\omega^{\chi}=1+\chi+\frac{\chi^2}{1.2}+\frac{\chi^3}{1.2.3}+\frac{\chi^4}{1.2.3.4}+\frac{\chi^5}{1.2.3.4.5}+\ldots$$

$$\text{καὶ } \chi\,\omega^{\mu\chi}=\chi\left(1+\mu\chi+\frac{\mu^2\chi^2}{1.2.}+\frac{\mu^3\chi^3}{1.2.3}+\frac{\mu^4\chi^4}{1.2.3.4}+\ldots\right)$$

$$\text{καὶ } \alpha\gamma=\chi+\mu\,\chi^2+\frac{\mu^2\chi^3}{1.2}+\frac{\mu^3\chi^4}{1.2.3}+\frac{\mu^4\chi^5}{1.2.3.4}+\ldots\ldots$$

ἐὰν δὲ θῶμεν $\alpha\gamma=\eta$ ἔςαι $\eta=\chi+\mu\chi^2+\frac{\mu^2\chi^3}{1.2}+\frac{\mu^3\chi^4}{1.2.3}+$

$\frac{\mu^4\chi^5}{1.2.3.4}+\ldots$ A, καὶ κατὰ τοὺς νόμους τῆς ἀντιςροφῆς (§. 693) θέτομεν

$$\chi=\mathrm{A}\eta+\mathrm{B}\eta^2+\Gamma\eta^3+\Delta\eta^4+\mathrm{E}\eta^5+\ldots\ldots\;\mathrm{B}$$

καὶ ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν χ^2, χ^3, χ^4, χ^5, κτ. καὶ ἀντὶ τούτων θέτομεν τὰ ἴσα εἰς τὴν ἐξίσωσιν A, καὶ διορίζομεν τοὺς ἀγνώςους συνεργοὺς A, B, Γ, Δ· καὶ τέλος τοὺς εὑρεθέντας διορισμοὺς θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν β, καὶ ἀντὶ η τὸ ἴσον αγ, καὶ εὑρίσκεται ἡ χ ἴση τῇ ἀπείρῳ σειρᾷ, περὶ τῶν ὁποίων κατωτέρω ἐροῦμεν πλεῖονα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

Χρῆσις τῶν σειρῶν πρὸς καθόλου ἀνάλυσιν τῶν δυνάμεων καὶ ἀπόδειξις τοῦ Διωνύμου.

§. 708. Εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον (§. 335) ἐμάθομεν, ὅτι ἡ κατ' ἀκολουθίαν ὕψωσις τοῦ Διωνύμου ἦν

$$(\alpha+\beta)' = \alpha+\beta$$
$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\,\alpha\beta+\beta^2$$
$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\,\alpha^2\beta+3\,\alpha\beta^2+\beta^3$$
$$(\alpha+\beta)^4 = \alpha^4+4\,\alpha^3\beta+6\,\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$$
$$(\alpha+\beta)^5 = \alpha^5+5\,\alpha^4\beta+10\,\alpha^3\beta^2+10\,\alpha^2\beta^3+5\,\alpha\beta^4+\beta^5$$
$$(\alpha+\beta)^6 = \alpha^6+6\,\alpha^5\beta+15\,\alpha^4\beta^2+20\,\alpha^3\beta^3+15\,\alpha^2\beta^4+6\,\alpha\beta^5+\beta^6$$
$$(\alpha+\beta)^7 = \alpha^7+7\,\alpha^6\beta+21\,\alpha^5\beta^2+35\,\alpha^4\beta^3+35\,\alpha^3+\beta^4+21\,\alpha^2\beta^5+7\,\alpha\beta^6+\beta^7$$
$$(\alpha+\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu}+\mathrm{A}\,\alpha^{\nu-1}\beta^2+\mathrm{B}\,\alpha^{\nu-2}\beta^2+\Gamma\,\alpha^{\nu-3}\beta^2+\Delta\,\alpha^{\nu-4}\beta^4+\mathrm{E}\,\alpha^{\nu-5}\beta^5+\mathrm{Z}\,\alpha^{\nu-6}\beta^6+\ldots\beta^{\nu}$$

Ἡμεῖς εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον ἐμάθομεν τοὺς νόμους, καθ' οὓς ἐκτυλίσσεται τὸ διώνυμον εἰς τὰς ἀνωτέρω δυνάμεις· ἐνταῦθα μόνον δεικνύομεν διατί οἱ συνεργοὶ Α, Β, Γ, Δ κτ. λαμβάνουσιν ἐκείνους τοὺς τύπους· ὅθεν βλέπομεν Α' „ ὅτι εἰς ὅλας τὰς δυνάμεις τοῦ διωνύμου ὁ πρῶτος ὅρος ἔχει συνεργὸν τὴν μονάδα· καὶ ἐὰν παρατηρήσωμεν εἰς τὸ ἄνω διάγραμμα, εὑρίσκομεν τοὺς συνεργοὺς τῶν πρώτων ὅρων κατὰ σειρὰν τοιαύτην 1, 1, 1, 1, 1, κτ. τῆς πρώτης καθ' ἡμᾶς τάξεως, ἧς ὁ ἔσχατος ὅρος $\tau = 1$ (549)

Β΄. Ἐὰν δὲ παρατηρήσωμεν κατὰ κάθετον τοὺς συνεργοὺς τῶν δευτέρων ὅρων τῶν ἐπακολουθουσῶν δυνάμεων, εὑρίσκομεν αὐτοὺς εἰς σειρὰν ἀριθμητικὴν τῆς δευτέρας τάξεως 1, 2, 3, 4, 5 κτ. ἧς ὁ ἔσχατος ὅρος $= \nu$ (§. 560) ἀλλ' ὁ συνεργὸς τοῦ δευτέρου ὅρου A εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ διωνύμου $(\alpha + \beta)^\nu$ εἶναι ὁ ἔσχατος ὅρος $A = \nu$.

Γ΄. Καὶ οἱ κατὰ κάθετον συνεργοὶ τῶν ἀκολουθουσῶν δυνάμεων τῶν τρίτων ὅρων εὑρίσκονται ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ τῆς τρίτης τάξεως 0, 1, 3, 6, 10, 15 . . . . ἧς ὁ ἔσχατος ὅρος $= \dfrac{\nu(\nu-1)}{1.2}$ (§. 561) ὁ δὲ B συνεργὸς τοῦ διωνύμου $(\alpha+\beta)^\nu$ ὁ ἔσχατος αὐτῆς ὅρος, ἄρα $B = \dfrac{\nu(\nu-1)}{2}$.

Δ΄. Καὶ οἱ τῶν τετάρτων ὅρων συνεργοὶ κατὰ κάθετον ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ τῆς τετάρτης τάξεως 0, 0, 1, 4, 10, 20, ἧς ὁ ἔσχατος ὅρος $= \dfrac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.\ 2.\ 3}$ (§. 562) καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\Gamma = \dfrac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.\ 2.\ 3}$

Ε΄. Ὁμοίως καὶ οἱ κατὰ κάθετον συνεργοὶ τῶν πέμπτων ὅρων ἐν ἀριθμητικῇ σειρᾷ τῆς πέμπτης τάξεως, 0, 0, 0, 1, 5, 15 . . . . ἧς ὁ ἔσχατος ὅρος

$\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ καὶ ἑπομένως $\Delta = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

ἄρα καὶ $E = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$ καὶ οὕτω διορίζονται οἱ ἄγνωστοι συνεργοὶ τοῦ διωνύμου $(\alpha+\beta)^\nu$ καὶ ἔσται $(\alpha+\beta)^\nu = \alpha^\nu + \frac{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\alpha^{\nu-3}\beta^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$ ἄχρις οὗ καταντήσει ὁ ἐκθέτης τοῦ $\alpha = 0$, καὶ τότε παύει ἡ σειρὰ τῆς ἐκτυλίξεως, δηλ. ἔστω $\nu = 2$· λοιπὸν εὑρίσκεται $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \frac{2}{1}\alpha\beta + \frac{2.1}{1.2}\alpha^0\beta^2 + \frac{2.\ 1.\ 0}{1.\ 2.\ 3}\alpha^{-1}\beta^3 + \ldots = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$· διότι $\frac{2.1}{1.2}\alpha^0\beta^2 = \beta^2$ καὶ $\frac{2.\ 1.\ 0}{1.2.3}\alpha^{-1}\beta^3 = 0$ ὁμοίως καὶ εἰς τὰς λοιπὰς δυνάμεις·

Ἐὰν δέ τις προσέξῃ καλῶς εἰς τὴν ἐκτύλιξιν τοῦ διωνύμου οἵας δήποτε δυνάμεως $(\alpha+\beta)^\nu = \alpha^\nu + \frac{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \ldots\ldots$ ἐκτυλίει ἕκαστον διώνυμον, ἐὰν δύω σειρὰς οὕτω ποιήσῃ

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha^{\nu}. & \alpha^{\nu-1}. & \alpha^{\nu-2}. & \alpha^{\nu-3}. & \alpha^{\nu-4}. & \alpha^{\nu-5} & 1 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 & \beta^4 & \beta^5 & \beta^\nu \end{array}$$

τὴν μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διωνύμου α, καὶ ὁ ἐκθέτης αὐτῆς ἄρχεται ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διωνύμου εἰς σειρὰν ἀριθμητικὴν φθίνουσαν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἄχρις οὗ καταντήσει εἰς τὴν μονάδα· τὴν δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὅρου τοῦ διωνύμου, καὶ ὁ ἐκθέτης αὐτῆς ἄρχεται ἀπὸ τῆς μονάδος εἰς σειρὰν ἀριθμητικὴν αὐξανομένην τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἄχρις οὗ καταντήσει εἰς τὸν ἐκθέτην τοῦ διωνύμου· καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος τῆς πρώτης νὰ εἶναι μονάς, ὁ δὲ πρῶτος ὅρος τῆς δευτέρας νὰ εἶναι μονάς· ἐὰν δ' ἕκαστος ὅρος τῆς πρώτης κατ' ἰδίαν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕκαστον τῆς δευτέρας τὰ παραγόμενα εἶναι οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς τοῦ διωνύμου, ἄνευ τῶν συνεργῶν α^ν, $\alpha^{\nu-1}\beta$, $\alpha^{\nu-2}\beta^2$, $\alpha^{\nu-3}\beta^3$, $\alpha^{\nu-4}\beta^4$, $\alpha^{\nu-5}\beta^5$, β^ν· ὁ δὲ συνεργὸς τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου ὅρου εἶναι μονάς, τοῦ δὲ δευτέρου εἶναι ὁ ἐκθέτης τοῦ α'. ὅρου, τοῦ δὲ τρίτου ὁ τύπος τῶν ἀνὰ δύο συζεύξεων (§. 584)· τοῦ δὲ τετάρτου ὁ τύπος τῶν ἀνὰ τρία συζεύξεων, καὶ τοῦ πέμπτου ὁ τύπος τῶν ἀνὰ τέσσαρα συζεύξεων κτ. ὅταν δοθῶσι ποσὰ τοσαῦτα, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ ἐκθέτης τοῦ διωνύμου· ὅθεν

$$(\alpha+\beta)^{10}=\alpha^{10}+10\,\alpha^9\beta+\frac{10.\,9}{1.\,2}\,\alpha^8\beta^2+\frac{10.\,9.\,8}{1.\,2.\,3}\,\alpha^7\beta^3$$

$$+\frac{10.\,9.\,8.\,7}{1.\,2\,3.\,4}\,\alpha^6\beta^4+\frac{10.\,9.\,8.\,7.\,6}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\,\alpha^5\beta^5+$$

$$\frac{10.\,9.\,8.\,7.\,6.\,5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6}\,\alpha^4\beta^6+\frac{10.\,9.\,8.\,7.\,6.\,5.\,4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}\,\alpha^3\beta^7+$$

$$\frac{10.\,9.\,8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,3.}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8}\,\alpha^2\beta^8+\frac{10.\,9.\,8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9}$$

$$\alpha\,\beta^9+\beta^{10}.$$

§. 709. Ἐὰν δ' ἔτι λάβωμεν τὸν τύπον $(\alpha+\beta)^\nu = \alpha^\nu + \frac{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta + \frac{\nu(\nu-1)}{1.\ 2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.\ 2.\ 3}\alpha^{\nu-3}\beta^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\alpha^{\nu-4}\beta^4 \dots$ οὕτω $=$

$$\alpha^\nu + \nu\,\alpha^{\nu-1}\beta + \nu\cdot\frac{\nu-1}{2}\,\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \nu\cdot\frac{\nu-1}{2}\cdot\frac{\nu-2}{3}\cdot\alpha^{\nu-5}\beta^3 + \nu\cdot\frac{\nu-1}{2}\cdot\frac{\nu-2}{3}\cdot\frac{\nu-3}{3}\,\alpha^{\nu-4}\beta^4 + \nu\cdot\frac{\nu-1}{2}\cdot\frac{\nu-3}{3}\cdot\frac{\nu-3}{4}\cdot\frac{\nu-4}{5}\cdot\alpha^{\nu-5}\cdot\beta^2 + \dots$$

ἐπειδὴ δὲ $\alpha^{\nu-1}\beta = \frac{\alpha^\nu\beta}{\alpha}$ καὶ $\alpha^{\nu-2}\beta^2 = \frac{\alpha^\nu\beta^2}{\alpha^2}$ κτ. ἔςαι τὸ διώνυμον καὶ οὕτως

$$(\alpha+\beta)^\nu = \alpha^\nu + \nu\frac{\alpha^\nu\beta}{\alpha} + \nu\cdot\frac{\nu-1}{2}\cdot\frac{\alpha^\nu\beta^2}{\alpha^2} + \nu\cdot\frac{\nu-1}{2}\cdot\frac{\nu-2}{3}\cdot\frac{\alpha^\nu\beta^3}{\alpha^3} + \nu\cdot\frac{\nu-1}{2}\cdot\frac{\nu-2}{3}\cdot\frac{\nu-3}{4}\cdot\frac{\alpha^\nu\beta^4}{\alpha^4} + \dots =$$

$$\alpha^\nu\left(1 + \nu\cdot\frac{\beta}{\alpha} + \nu\cdot\frac{\nu-1}{2}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \nu\cdot\frac{\nu-1}{2}\cdot\frac{\nu-2}{3}\cdot\frac{\beta^3}{\alpha^3} + \nu\cdot\frac{\nu-1}{2}\cdot\frac{\nu-2}{3}\cdot\frac{\nu-3}{4}\,\frac{\beta^4}{\alpha^4} + \dots\dots\right)$$

καὶ εἰς αὐτὴν τὴν ἔκφρασιν παρίςαται ἡ σειρὰ τοῦ διωνύμου ἀπὸ δύω παράγοντας ἀπὸ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διωνύμου ὑψούμενον εἰς τὴν δύναμιν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διωνύμου, καὶ ἀπὸ μίαν παρένθεσιν, ἐν ᾗ μία σειρὰ, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος ἀεὶ μονὰς, οἱ δ' ἑξῆς ὅροι γίνονται κατ' ἀκολουθίαν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τον ἑξῆς ἡγούμενον μὲ ἓν παραγόμενον ἀπὸ δύο παράγοντας, ὧν ὁ μὲν ἀεὶ τὸ πηλίκον, ἢ τὸ κλάσμα, οὗ ἀριθμητὴς ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ διωνύμου, καὶ παρονομαςὴς ὁ πρῶτος τοῦ αὐτοῦ· ὁ δὲ μεταβλητὸς εἰς μὲν τὸν δεύτερον ὅρον ὁ ἐκθέτης τοῦ διωνύμου ν· εἰς τὸν τρίτον $\frac{\nu-1}{2}$· εἰς τὸν τέταρτον $\frac{\nu-2}{3}$· εἰς τὸν πέμπτον $\frac{\nu-3}{4}$ κατὰ σειρὰν τοιαύτην, ν, $\frac{\nu-1}{2}$, $\frac{\nu-2}{3}$, $\frac{\nu-3}{4}$, $\frac{\nu-4}{5}$, $\frac{\nu-5}{6}$ .... ὅθεν καὶ ἀνάγουσιν εὐκόλως ἓν διώνυμον εἰς οἱανδήποτε δύναμιν, ὄντων τῶν ὅρων τοῦ διωνύμου ἁπλῶν, ἢ συνθέτων μὲ συνεργοὺς, ἢ εἰς δυνάμεις ὑψουμένων, ἢ καὶ καταφατικῶν ἢ ἀποφατικῶν, ἐὰν

α΄. Σειρὰν τοιαύτην ποιήσωσιν, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ Διωνύμου ν. $\frac{\nu-1}{2}$, $\frac{\nu-2}{3}$, $\frac{\nu-3}{4}$, $\frac{\nu-4}{5}$, $\frac{\nu-5}{6}$ .... κτ.

β΄. Ἐὰν θῶσιν εἰς πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα.

γ΄. Ἐὰν ποιήσωσι τὸ κλάσμα $\frac{\mu\beta}{\rho\alpha}$, οὗ ἀριθμητὴς τὸ δεύτερον μέρος τοῦ διωνύμου, καὶ παρονομαςὴς τὸ πρῶτον, καὶ δι' αὐτοῦ πολλαπλασιάσωσι τὸν πρῶτον ὅρον τῶν σειρῶν ν, λαμβάνουσι τὸν δεύτερον $\nu.\frac{\mu\beta}{\rho\alpha}$. ὁ δὲ τρίτος ὅρος εἶναι τὸ παραγόμενον ἀπότε τοῦ δευτέρου ὅρου τούτου, καὶ τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς σειρᾶς, καὶ αὐτοῦ τοῦ κλάσματος $\nu.\frac{\nu-1}{2}.\frac{\mu^2\beta^2}{\rho^2\alpha^2}$. ὁ τέταρτος ὅρος γίνεται τὸ παραγόμενον ἀπότε τοῦ τρίτου ὅρου τούτου, καὶ τοῦ τρίτου ὅρου τῆς σειρᾶς, καὶ αὐτοῦ τοῦ κλάσματος. $\nu.\frac{\nu-1}{2}.\frac{\nu-2}{3}.\frac{\mu^3\beta^3}{\rho^3\alpha^3}$ κτ. ἤτοι

$$(\rho\alpha+\mu\beta)^\nu=\rho^\nu\alpha^\nu\left(1+\nu.\frac{\mu\beta}{\rho\alpha}+\nu\frac{\nu-1}{2}.\frac{\mu^2\beta^2}{\rho^2\alpha^2}+\nu.\frac{\nu-1}{2}.\frac{\nu-2}{3}.\frac{\mu^3\beta^3}{\rho^3\alpha^3}+\ldots\right)=\rho^\nu\alpha^\nu+\nu.\rho^{\nu-1}\alpha^{\nu-1}\mu\beta+\frac{\nu(\nu-1)}{2}\rho^{\nu-2}\alpha^{\nu-2}\mu^2\beta^3+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2.3.}\rho^{\nu-3}\alpha^{\nu-3}\mu^3\beta^3+\ldots\ldots$$

ἔτι ζητεῖται ἡ ἕκτη δύναμις τοῦ διωνύμου $(\alpha^3+\beta^3)^6$ ἔσαι $6, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}$. καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\beta^3}{\alpha^3}$ ἄρα ἡ παρένθεσις

$$\left(1+\frac{6\beta^3}{\alpha^3}+\frac{15\beta^6}{\alpha^6}+\frac{20\beta^9}{\alpha^9}+\frac{15\beta^{12}}{\alpha^{12}}+\frac{6\beta^{15}}{\alpha^{15}}+\frac{\beta^{18}}{\alpha^{18}}\right)$$

Ἐὰν δὲ θῶμεν τὸν παράγοντα α^3 εἰς τὴν ἕκτην δύναμιν ἀναχθέντα α^{18} ἔσαι

$$(\alpha^3+\beta^3)^6=\alpha^{18}\left(1+\frac{6\beta^3}{\alpha^3}+\frac{15\beta^6}{\alpha^6}+\frac{20\beta^9}{\alpha^9}+\frac{15\beta^{12}}{\alpha^{12}}+\frac{6\beta^{15}}{\alpha^{15}}+\frac{\beta^{18}}{\alpha^{18}}\right)=\alpha^{18}+6\alpha^{15}\beta^3+15\alpha^{12}\beta^6+20\alpha^9\beta^9+15\alpha^6\beta^{12}+6\alpha^3\beta^{15}+\beta.^{18}.$$

Ἔτι ὑψωθήτω τὸ διώνυμον τοῦτο $(2\alpha^2+3\beta)^5$. λοιπὸν ἡ μὲν σειρὰ $5, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}$ ἤτοι $5, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$. τὸ δὲ κλάσμα $\frac{3\beta}{2\alpha^2}$ ἄρα ἡ παρένθεσις οὕτω

$$\left(1+\frac{15\beta}{2\alpha^2}+\frac{45\beta^2}{2\alpha^4}+\frac{135\beta^3}{4\alpha^6}+\frac{405\beta^4}{16\alpha^8}+\frac{1215\beta^5}{160\alpha^{10}}.\right)$$

Ἐὰν δ' ὑψωθῇ καὶ τὸ πρῶτον μέρος $2\alpha^2$ εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν $32\alpha^{10}$ ἔσται

$$(2\alpha^2+3\beta)^5=32\alpha^{10}\left(1+\frac{15\beta}{2\alpha^2}+\frac{45\beta^2}{2\alpha^4}+\frac{135\beta^3}{4\alpha^6}+\frac{405\beta^4}{16\alpha^8}+\frac{1215\beta^5}{16\alpha^{10}}\right)=32\alpha^{10}+16.\,15\,\alpha^8\beta+16.\,45\,\alpha^6\beta^2+8.\,135\,\alpha^4\beta^3+2.\,405\,\alpha^2\beta^4+\frac{3.2.\,1215\beta^5}{160}$$

Ἔτι ζητεῖται ἡ ἐκτύλισις τοῦ διωνύμου $(\alpha^{-3}+\beta^2)^4$ ἡ μὲν σειρὰ $4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$· τὸ δὲ κλάσμα $\frac{\beta^2}{\alpha^{-3}}$ ἄρα ἡ παρένθεσις $(1+4\alpha^3\beta^2+6\alpha^6\beta^4+4\alpha^9\beta^6+\alpha^{12}\beta^8)$ ὁ δ' ἕτερος παράγων $(\alpha^{-3})^4=\alpha^{-12}$· ἄρα $(\alpha^{-3}+\beta^2)^4=\alpha^{-12}$

$$(1+4\alpha^3\beta^2+6\alpha^6\beta^4+4\alpha^9\beta^6+\alpha^{12}\beta^8)=\alpha^{-12}+4\alpha^{-9}\beta^2+6\alpha^{-6}\beta^4+4\alpha^{-3}\beta^6+\beta^8.$$

Ὁμοίως καὶ ἐὰν ὁ εἷς ὅρος, ἢ καὶ ἄμφω ἀποφατικοί· διότι ἐκείνως τὸ κλάσμα ἀποφατικόν, ὡς ἀπὸ τοῦ $(\alpha-\beta)$ τὸ κλάσμα $-\frac{\beta}{\alpha}$, ἀπὸ δὲ τοῦ $(-\alpha+\beta)$ πάλιν $\frac{\beta}{-\alpha}$. οὕτω δὲ καταφατικὸν $(-\alpha-\beta)$ τὸ κλάσμα $\frac{\beta}{\alpha}$. καὶ κατὰ τὰ ἄνω ἐκτυλέονται.

Τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκτυλίονται τὰ διώνυμα, καὶ ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῶν ῥιζικοί, ὡς $(\sqrt{\alpha}+\beta)$ διότι τὸ κλάσμα τούτου εἶναι $\frac{\beta}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$. ἢ οὕτως $(\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\beta})$, οὗ τὸ κλάσμα $\frac{\beta^{\frac{1}{3}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$; καὶ ὡς ἀνωτέρω ἐκτυλίονται.

Ἐκτυλιέσθω τὸ διώνυμον $(\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\beta})^4$ ὅθεν ἡ μὲν σειρὰ $4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$· τὸ δὲ κλάσμα $\frac{\beta^{\frac{1}{3}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$, καὶ ἡ παρένθεσις

$$\left(1+\frac{4\beta^{\frac{1}{3}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}+\frac{6\beta^{\frac{2}{3}}}{\alpha}+\frac{4\beta}{\alpha^{\frac{3}{2}}}+\frac{\beta^{\frac{4}{3}}}{\alpha^2}\right)$$ · ὁ δὲ πρῶτος ὅρος $(\alpha^{\frac{1}{2}})^4=\alpha^2$

ἄρα $(\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\beta})^4=\alpha^2\left(1+\frac{4\beta^{\frac{1}{4}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}+\frac{6\beta^{\frac{2}{3}}}{\alpha}+\frac{4\beta}{\alpha^{\frac{3}{2}}}+\frac{\beta^{\frac{4}{3}}}{\alpha^2}\right)=$

$\alpha^2+4\alpha^{\frac{3}{2}}\beta^{\frac{1}{3}}+6\alpha\beta^{\frac{2}{3}}+4\alpha^{\frac{1}{2}}\beta+\beta^{\frac{4}{3}}=\alpha^2+4\sqrt{\alpha^3}\sqrt[3]{\beta}+$ $6\alpha\sqrt[3]{\beta^2}+4\beta\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\beta^4}$.

§. 710. Ὅτι δὲ τὸ διώνυμον οὕτως ἐκτυλίεται οὐ μόνον ὅταν ἔχῃ ἐκθέτην καταφατικὸν καὶ ὁλόκληρον, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἔχῃ αὐτὸν ἀποφατικόν, κἄντε ὁλόκληρον, κἄντε κεκλασμένον, δεικνύεται τὸν ἑξῆς τρόπον· ἔστω ν ὁ ἐκθέτης τοῦ διωνύμου οὕτω $(\alpha+\beta)^\nu$ ὑπὸ δὲ τὸν ν νοεῖται ἕκαστος ἀριθμὸς καταφατικός, καὶ ἀποφατικός, ὁλόκληρος καὶ κεκλασμένος· ἡμεῖς προηγουμένως ἐμάθομεν

(§. 406) ὅτι $(\alpha+\beta)^\nu=(\alpha(\frac{\alpha+\beta}{\alpha})^\nu)=\alpha^\nu(\frac{\alpha+\beta}{\alpha})^\nu=\alpha^2.$

$(1+\frac{\beta}{\alpha})^\nu$. Θῶμεν ἤδη $\frac{\beta}{\alpha}=\chi$ καὶ ἔσται $\alpha^\nu\,(1+\frac{\beta}{\alpha})^\nu=$ $(\alpha+\beta)^\nu=\alpha^\nu(1+\chi)^\nu$. ἀνάγκη λοιπὸν τὸν συνεργὸν $(1+\chi)^\nu$ δι' ὁμοδυνάμου ἀπείρου σειρᾶς νὰ ἐκφράσωμεν, ὥστε νὰ εἶναι ἡ σειρὰ ὀρθὴ, ἐὰν ἡ χ λάβῃ τιμὴν οἱανδήποτε, καὶ τοιαύτη εἶναι ἡ ἑξῆς $(1+\chi)^\nu=1+A\chi+B\chi^2+\Gamma\chi^3+\Delta\chi^4+\ldots$ A

Ελήφθω ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς μονὰς, διότι ἐὰν ἡ $\chi=0$ ληφθῇ, πλὴν τῆς μονάδος αἱ λοιπαὶ δυνάμεις γίνονται $=0$ ὡς εἰς τὸ πρῶτον σκέλος τῆς ἐξισώσεως.

Διὰ νὰ διορισθῶσι δὲ οἱ συνεργοὶ, θῶμεν τοὺς λοιποὺς ὅρους τῆς σειρᾶς πλὴν μονάδος $=\psi$ ἄρα

$$\psi=A\chi+B\chi^2+\Gamma\chi^3+\Delta\chi^4+\ldots\ldots\quad B$$
$$\psi^2=A^2\chi^2+2AB\chi^3+B^2\chi^4+2A\Gamma\chi^4+\ldots\ldots$$
$$\psi^3=A^3\chi^3+3A^2B\chi^4+\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi^4=A^4\chi^4+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Πλὴν ἐπειδὴ $\psi=A\chi+B\chi^2+\Gamma\chi^3+\Delta\chi^4+\ldots$ καὶ $\psi+1=$ $1+A\chi+B\chi^2+\Gamma\chi^4+\Delta\chi^4\ldots$ καὶ ἑπομένως $(1+\chi)^\nu=\psi+1$ ἄρα $\nu\lambda'\,(1+\chi)=\lambda'(1+\psi)$· ἀλλ' ἀνωτέρω εὑρέθη (§. 705) $\lambda:(1+\psi)=A\chi-\frac{1}{2}A\chi^2+\frac{1}{3}A\chi^3-\frac{1}{4}A\chi^4\pm\ldots\ldots$

Ἐπειδὴ ὅμως $A=1$ ἔσται καὶ $\nu\,\lambda':\,(1+\chi)=\nu\chi-\frac{\nu\chi^2}{2}+$ $\frac{\nu\chi^3}{3}-\frac{\nu\chi^4}{4}\pm\ldots\ldots\ldots$ ἦν δὲ καὶ $\lambda':(\psi+1)=\psi-$ $\frac{\psi^2}{2}+\frac{\psi^3}{3}-\frac{\psi^4}{4}\pm\ldots\ldots$ καὶ τέλος αἱ δύο σειραὶ ἴσαι

$$\nu\chi-\frac{\nu\chi^2}{2}+\frac{\nu\chi^3}{3}-\frac{\nu\chi^4}{4}\pm\ldots\ldots=\psi-\frac{\psi^2}{2}+\frac{\psi^3}{3}-$$

$\frac{\psi^4}{4} + \ldots \ldots \ldots \ldots$

Θῶμεν ἤδη εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν τὰ ἄνω εὑρεθέντα ἴσα τοῖς ψ, ψ^2, ψ^3, ψ^4 κτ. καὶ ἀγάγωμεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδὲν οὕτω.

$$
\begin{array}{rl|l|l|l|l}
0 = & A & \chi + B & \chi^2 + \Gamma & \chi^3 + \Delta & \chi^4 + \ldots \\
 & -\nu & -\frac{1}{2}A^2 & -AB & -\frac{1}{2}B^2 & \\
 & & +\frac{1}{2}\nu & +\frac{1}{3}A^3 & -A\Gamma & \\
 & & & -\frac{1}{3}\nu & +A^2B & \\
 & & & & -\frac{1}{4}A^4 & \\
 & & & & +\frac{1}{4}\nu &
\end{array}
$$

καὶ τοὺς συνεργοὺς διορίσωμεν

$A-\nu=0 \quad A=\nu$

$B-\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{2}\nu=0 \qquad B=\frac{\nu(\nu-1)}{2}$

$\Gamma-AB+\frac{1}{3}A^3-\frac{1}{3}\nu=0 \qquad \Gamma=\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2.\,3}$

$\Delta-\frac{1}{2}B^2-A\Gamma+A^2B-\frac{1}{4}A^4+\frac{1}{4}\nu=0 \quad \Delta=$ $\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2.\,3.\,4}$ κτ.

Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὴν ἐξίσωσιν A ἀντὶ A, B, Γ κτ. τὰ εὑρεθέντα θῶμεν, ἔσαι $(1+\chi)^\nu = 1+\nu\chi+\frac{\nu(\nu-1)}{2}\chi^2+$ $\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2.\,3}\chi^3+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2.\,3.\,4}\chi^4+\ldots\ldots$

Ἐὰν δὲ ἀντὶ χ τὸ ἴσον $\frac{\beta}{\alpha}$ θῶμεν, ἔσαι $(1+\frac{\beta}{\alpha})^\nu=1+\frac{\nu}{1}\cdot\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\nu(\nu-1)}{2}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2.\,3.}\cdot\frac{\beta^3}{\alpha^3}+\ldots$ καὶ ἐπειδὴ $(\alpha+\beta)^\nu=\alpha^\nu(1+\frac{\beta}{\alpha})^\nu$ ἔςαι καὶ

$$(\alpha+\beta)^\nu=\alpha^\nu(1+\frac{\nu}{1}.\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}.\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}.\frac{\beta^3}{\alpha^3}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.2.3.4}.\frac{\beta^4}{\alpha^4}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{1.2.3.4.5}.\frac{\beta^5}{\alpha^5}$$

ἤτοι

$$(\alpha+\beta)^\nu=\alpha^\nu+\frac{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\alpha^{\nu-2}\beta+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\alpha^{\nu-3}\beta^3+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.2.3.4}\alpha^{\nu-4}\beta^4+\dots$$

ὅπου α καὶ β καὶ ν καθε ἀριθμὸν καταφατικὸν, ἀποφατικὸν, κεκλασμένον, καὶ ἀκέραιον σημαίνουσι· ὅταν ὅμως ὁ ἐκθέτης ν ἀποφατικὸς ἢ κλασματικὸς, ἡ σειρὰ εἰς ἄπειρον ἐκτυλίεται· ἡμεῖς ὅμως τόσους ὅρους ἐκτυλίομεν, ὅσοι εἰσὶν ἱκανοὶ εἰς τὸν σκοπόν μας· καὶ τοῦτο εἶναι τὸ θρυλλούμενον τοῦ Νεύτωνος διώνυμον.

§. 711. Πρὶν εἰς τὴν χρῆσιν τοῦ διωνύμου ἔλθωμεν, πρέπει πρῶτον αὐτὸ εἰς τὸ ἁπλούςερον νὰ ἐκφράσωμεν, διὰ νὰ μάθωμεν, ὅτι ἐκ τῶν προηγουμένων ὅρων καὶ οἱ ἑξῆς ἑπόμενοι λύονται· διότι ἐὰν πάλιν ληφθῇ ἡ ἄνω σειρὰ, καὶ σημειώσωμεν τοὺς ὅρους αὐτῆς διὰ τῶν Α, Β, Γ κτ. ἔςαι

$$(\alpha+\beta)^\nu=\overset{A}{\alpha^\nu}+\overset{B}{\frac{\nu}{\alpha}\alpha^{\nu-1}\beta}+\overset{\Gamma}{\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\alpha^{\nu-2}\beta^2}+\overset{\Delta}{\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\alpha^{\nu-3}\beta^3}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.2.3.4}\alpha^{\nu-4}\beta^4=\alpha+\frac{\nu\alpha^\nu}{1}.\frac{\beta}{\alpha}+$$

$$\frac{\nu(\nu-1)\alpha^\nu}{1.\,2.}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\alpha^\nu}{1.\,2.\,3}\cdot\frac{\beta^3}{\alpha^3}+$$

$$\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\alpha^\nu}{1.\,2.\,3.\,4}\cdot\frac{\beta^4}{\alpha^4}.$$

Θῶμεν ὅμως τὸ πηλίκον, ὅπερ ἐξέρχεται, ἐὰν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ διωνύμου διὰ τοῦ πρώτου διέλωμεν $\frac{\beta}{\alpha}=$ Ζ. ἔσαι

$$(\alpha+\beta)^\nu=\alpha^\nu+\frac{\nu}{1}\alpha^\nu Z+\frac{\nu(\nu-1)}{1.\,2}\alpha^\nu Z.\,Z+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.\,2.\,3}.$$

$$\alpha^\nu Z.Z.Z+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\,2.\,3.\,4}\alpha^\nu Z.Z.Z.Z.+\ldots\ldots$$

Ἐὰν δὲ τὸν ὅρον $\alpha^\nu=\pi^\nu=A$ θῶμεν, ἔσαι ὁ δεύτερος $\frac{\nu}{1}$,

$\alpha^\nu Z=\frac{\nu}{1}AZ=B\cdot$ ὁ τρίτος $\Gamma=\frac{\nu(\nu-1)}{1.\,2}\alpha^\nu Z.\,Z=\frac{\nu}{1}.$

$\frac{(\nu-1)}{2}.\alpha^\nu Z.Z=\frac{\nu-1}{2}BZ\cdot$ ὁ $\Delta=\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.\,2.\,3}.$

$\alpha^\nu Z.Z.Z=\frac{\nu}{1}.\frac{\nu-1}{2}\alpha^\nu Z.\,Z.\,\frac{\nu-2}{3}Z=\frac{\nu-2}{3}\Gamma Z.$ ὁ πέμπτος $E=\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\,2.\,3.\,4}\alpha^\nu Z.\,Z.\,Z.\,Z=$

$\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.\,2.\,3}\alpha^\nu Z.Z.Z.\,\frac{\nu-3}{4}Z=\frac{\nu-3}{4}\Delta Z.$ ἄρα ἡ σειρὰ

$$(\alpha+\beta)^\nu=\pi^\nu+\nu AZ+\frac{\nu-1}{2}BZ+\frac{\nu-2}{3}\Gamma Z+\frac{\nu-3}{4}$$

$\Delta Z+\frac{\nu-4}{5}EZ+\ldots\ldots$ καὶ φανερὸν ὅτι ἐὰν τὸν πρῶτου ὅρου εὕρωμεν, καὶ τούτου ἐπὶ τὸν ν καὶ Ζ πολλαπλασιάσωμεν, εὑρίσκεται ὁ δεύτερος, τοῦτον πάλιν ἐπὶ τὸν $\frac{\nu-1}{2}$ καὶ Ζ πολλαπλασιάζοντες εὑρίσκομεν τὸν τρίτον καὶ καθεξῆς· καὶ δι' αὐτοῦ τοῦ διωνύμου ἀριθμοὺς εἰς δυνάμεις ὑψοῦμεν, καὶ ῥίζας διαφόρων ἐξάγομεν δυνάμεων· ἐπειδὴ δὲ τὸ α^ν ἀκέραιος ἀριθμός· ἐὰν ὁ α^ν ἐκτὸς εἰς παράγοντα τεθῇ, μένει ἡ σειρὰ οὕτω $\alpha^\nu\left(1+\nu AZ+\frac{\nu-1}{2}BZ+\frac{\nu-2}{3}\Gamma Z+\frac{\nu-3}{4}\Delta Z+\frac{\nu-4}{5}EZ.\right)$ καὶ μόνον διὰ τοῦ Ζ πολλαπλασιάζομεν τὸν προηγούμενον μετὰ τοῦ δικαίου συνεργοῦ, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἑξῆς καὶ τ: λ: εἶτα τὸ κεφάλαιον τῶν ὅρων πολλαπλασιάζομεν μετὰ τοῦ α^ν, καὶ τοῦτο τὸ γινόμενον ἴσον τῷ διωνύμῳ.

α΄. Ζητηθήτω ἡ τρίτη δύναμις τοῦ 12^3· σχίζομεν αὐτὸν εἰς διώνυμον $(4+8)^3=(\alpha+\beta)^3$ ὅθεν $\frac{8}{4}=\frac{\beta}{\alpha}=2=Z$

καὶ $\nu=3$ $\alpha^\nu=4^3=64=A$

$\nu AZ=3.64.2=384=B$

$\frac{\nu-1}{2}BZ=1.384.2.=768=\Gamma$

$\frac{\nu-2}{3}\Gamma Z=\frac{1}{3}.768.2=512=\Delta$

$\frac{\nu-3}{4}\Delta Z=0.512.2=0=E$

$$
\begin{aligned}
\text{ἄρα } 12^3 &= 64 = A\\
384 &= B\\
768 &= \Gamma\\
512 &= \Delta\\
\hline
1728
\end{aligned}
$$

διότι εἰς τὸν πέμπτον ὅρον ἔληξεν ἡ σειρά.

β'. Ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2. ἄρα $(1+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\alpha+\beta)}$ ὅπου $\alpha=1$· $\beta=1$ καὶ $\frac{1}{1}=1=Z$ καὶ $\nu=\frac{1}{2}$

$$\pi^{\nu} = 1^{\frac{1}{2}} = 1 = A$$

$$\nu AZ = \tfrac{1}{2}.\,1.\,1 = \tfrac{1}{2} = B$$

$$\frac{\nu-1}{2}BZ = -\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 1 = -\tfrac{1}{8} = \Gamma$$

$$\frac{\nu-2}{3}\Gamma Z = -\tfrac{1}{2}\cdot -\tfrac{1}{8}\cdot 1 = \tfrac{1}{16} = \Delta$$

$$\frac{\nu-3}{4}\Delta Z = -\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{1}{16}\cdot 1 = \frac{-5}{128} = E$$

$$\frac{\nu-4}{5}EZ = -\tfrac{7}{10}\cdot -\tfrac{5}{128}\cdot 1 - \tfrac{35}{1280} = H.$$

$$\frac{\nu-5}{6}HZ = -\tfrac{9}{12}\cdot\tfrac{35}{1280}\cdot 1 = -\tfrac{105}{5120} = \Theta.\ \text{κτ,}$$

ἄρα $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{45}{1280} - \frac{105}{5120}$. ἐὰν δ' ὀρθῶς ταῦτα συνάψωμεν, εὑρίσκομεν σχεδὸν $\sqrt{2} = 1,405$.

§. 712. Οἱ μαθηματικοὶ, εἰς τὰς ἐξαγωγὰς τετραγωνικῶν, κυβικῶν καὶ τ: λ: ῥιζῶν, σειρὰς γενικὰς εὑρίσκουσι διὰ τοῦ διωνύμου, καὶ κατ' ἐκείνας πραγματεύονται

Πρὸς μὲν τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ὁλόγων ἀριθμῶν, ἐκτυλίσωμεν τοῦτον τὸν τύπον $(\alpha^2 \pm \chi)^{\frac{1}{2}}$.

πρὸς δὲ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν κυβικῶν ῥιζῶν τοῦτον $(\alpha^3 \pm \chi)^{\frac{1}{3}}$.

ἔςω λοιπὸν $(\alpha^2 \pm \chi)^{\frac{1}{2}}$ ἀπ' αὐτοῦ $\pi = \alpha^2$ καὶ $Z = \pm \frac{\chi}{\alpha^2}$ καὶ

$\nu = \frac{1}{2}$ κατὰ δὲ τὰ ἄνω

$$\pi^\nu = (\alpha^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha = A$$

$$\nu AZ = \tfrac{1}{2}\alpha \frac{\chi}{\alpha^2} = + \frac{\chi}{2\alpha} = B$$

$$\frac{\nu-1}{2} BZ = -\tfrac{1}{4} . \pm \frac{\chi}{2\alpha} . \pm \frac{\chi}{\alpha^2} = - \frac{\chi^2}{2.4\,\alpha^3} = \Gamma$$

$$\frac{\nu-2}{3} \Gamma Z = -\tfrac{3}{6} . - \frac{\chi^2}{2.4\,\alpha^3} . \pm \frac{\chi}{\alpha^2} = \pm \frac{1.3\,\chi^3}{2.4.6\,\alpha^5} = \Delta$$

$$\frac{\nu-3}{4} \Delta Z = -\tfrac{5}{8} . \pm \frac{1.3\,\chi^3}{2.4.6\,\alpha^5} . \pm \frac{\chi}{\alpha^2} = \frac{1.3.5\,\chi^4}{2.4.6.8\,\alpha^7} = E.$$

καὶ ἀκολούθως εὑρίσκονται καὶ ἕτεροι ὅροι, ὥςε $(\alpha^2 \pm \chi)^{\frac{1}{2}} =$

$$\alpha \pm \frac{\chi}{2\alpha} - \frac{\chi^2}{2.4\,\alpha^3} \pm \frac{1.3\,\chi^3}{2.4.6\,\alpha^5} - \frac{1.3.5\,\chi^4}{2.4.6.8\,\alpha^7} \pm \frac{1.3.5.7\,\chi^5}{2.4.6.8.10\,\alpha^9} \ldots$$

καὶ ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν τῆς σειρᾶς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν διὰ τῆς προσεγγύσεως ἑκάςου ἀλόγου ἀριθμοῦ, ἐὰν τὸν ἀριθμὸν εἰς δύο μέρη σχίσωμεν, καὶ τὸ ἓν αὐτῶν ἐντελὲς τετράγωνον ᾖ· τὰ δὲ δύο ὁμοῦ ἴσα τῷ ἀριθμῷ· καὶ μάλιςα ἐὰν τὸ μέρος τὸ τετράγωνον εἶναι πολὺ μεγαλήτερον πρὸς τὸ ἕτερον· διότι τότε ταχέως φθίνει ἡ σειρὰ καὶ ὀλίγοι ὅροι ἱκανοὶ τῆς σειρᾶς· ζητεῖται δηλ: ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\sqrt{30}$· ἄρα $(25+5)^{\frac{1}{2}}$ καὶ $(36-6)^{\frac{1}{2}}$ ἴσος τῷ $\sqrt{30}$· κάλλιον ὅμως οὗτος ὁ τύπος $(36-6)$· $\alpha^2=36$ καὶ $\alpha=6$· $\chi=-6$· ἄρα $\sqrt{30}=$

$$6-\frac{1}{2}-\frac{1}{2.4.6}-\frac{1.3}{2.4.6(6)^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8(6)^3}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10(6)^4}-\ldots\ldots$$

τάχιον ὅμως φθίνει ἡ σειρά, ἐὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς ἐξαγωγὴν τῆς ῥίζης πολλαπλασιάσωμεν, καὶ ἅμα διέλωμεν δι' ἑνὸς ἀκριβοῦς τετραγώνου (§. 72.) οὕτω $\sqrt{\frac{30.100}{100}}$, καὶ εἶτα τὸν παρονομαστὴν ἐκτὸς τοῦ σημείου ἀγάγωμεν οὕτω $\frac{1}{10}\sqrt{3000}=\frac{1}{10}\sqrt{(3025-25)}$ ὅπου $\alpha=55$, καὶ $\chi=-25$, καὶ ἡ ἀνωτέρω σειρά.

$$\sqrt{(30)}=\frac{1}{10}\left(55-\frac{25}{2.55}-\frac{1.25^2}{2.4.55^3}-\frac{1.3.25^3}{2.5.4\,6.55^5}-\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{10}\left(55-\frac{55.25}{2.55^2}-\frac{55.\ 25^2}{2.4.55^4}-\frac{1.3.25^3.55}{2.4.6.55^6}-\ldots\right)=$$

$$\frac{55}{10}\left(1+\frac{1}{2.121}-\frac{1}{2.4(121)^2}-\frac{1}{2.4.6(121)^3}-\ldots\ldots\right)$$

διότι $\frac{25}{55^2}=\frac{25}{55.\ 55}=\frac{5.\ 5}{5.\ 11.\ 5.\ 11}=\frac{1}{11.\ 11}=\frac{1}{121}$.

ἐὰν δ' ἀπ' αὐτῆς τῆς σειρᾶς τρεῖς ὅρους μόνον συνάψωμεν, εὑρίσκομεν.

$$\sqrt{(30)}=\frac{55}{10}(1-0{,}004140804)=5{,}477225758.$$

§. 713. Ἐὰν δ' ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς μέγας πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς ῥίζης, καὶ οὗ τὸ ἕτερον μέρος χ ἐλάχιςον παραβαλλόμενον πρὸς τὸ ἕτερον α^2, ἀπὸ μόνον ἕνα ὅρον τῆς σειρᾶς $\frac{\chi}{2\alpha}$ λαμβάνομεν σχεδὸν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν εἰς δεκαδικὰ κλάσματα τῇ ἀληθείᾳ ἔγγυςα· ζητηθείτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 675915 ἄρα $\sqrt{675915}=\sqrt{(675684+221)}$ ὅπου $\alpha^2=675684$· καὶ $\chi=231$ καὶ $\alpha=822$· ἄρα

$$\sqrt{675915}=822+\frac{231}{2.822}=822{,}1405$$

· ἔνθα ὁ τέταρτος δεκαδικὸς χαρακτὴρ ἔτι ὀρθός· καὶ ὁ ἑξῆς ὅρος τῆς σειρᾶς $-\frac{(231)^2}{2.4.(822.)^3}$ οὐδένα αἰσθητὸν τέταρτον χαρακτῆρα παρέχει· ὁμοίως ζητηθείτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 8596,47 ἄρα $\sqrt{(8596{,}47)}=(8593{,}29+3{,}18)$ ὅπου $\alpha=92{,}7$, $\chi=3{,}18$ λοιπὸν $\sqrt{(8593{,}29+3{,}18)}=92{,}7+\frac{3.18}{2.92{,}7}=92{,}7171$, καὶ ἐνταῦθα ἕπεται ὁ κανὼν ὅπου εἰς μερικὰ βιβλία πρακτικὰ εὑρίσκεται δηλ. ἐὰν δοθῇ ἀριθμός τις ἄλογος, καὶ ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα, εὑρίσκομεν αὐτήν, ἢ διὲ ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν, (§. 346), ἢ διὰ τῶν λογαρίθμων, ἢ διὰ τῶν ῥιζικῶν πινάκων, καὶ ταύτην ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν δοθέντα ἀριθμόν, τὸ δὲ λείψανον διαιροῦμεν διὰ τῆς διπλῆς ἤδη εὑρεθείσης ῥίζης εἰς δεκαδικά.

§. 714. Ἤδη εὕρωμεν καὶ τὴν σειρὰν τῆς κυβικῆς ῥίζης· ἐκτυλιέσθω λοιπὸν ὁ τύπος $(\alpha^3+\chi)^{\frac{1}{3}}$. ὅπου $\nu=\frac{1}{3}$· $\pi=\alpha^3$ καὶ $Z=\frac{\chi}{\alpha^3}$· ἄρα $\pi^\nu=(\alpha^3)^{\frac{1}{3}}=\alpha=A$

$$\nu AZ = \tfrac{1}{3}\alpha \cdot \pm \frac{\chi}{\alpha^3} = \pm \frac{\chi}{3\alpha^2} = B$$

$$\frac{\nu-1}{2}\beta Z = -\frac{2}{2.\,3}\cdot \pm \frac{\chi}{3\alpha^2}\cdot \pm\frac{\chi}{\alpha^3} = -\left(\frac{2\chi^2}{2.\,3^2\alpha^5}\right) = \Gamma$$

$$\frac{\nu-2}{3}\Gamma Z = -\frac{5}{3.3}\cdot -\frac{2\chi^2}{2.\,3^2\alpha^5} \pm \frac{\chi}{\alpha^3} = \pm\frac{2.\,5\chi^3}{2.3.3^3\alpha^8} = \Delta.$$

$$\frac{\nu-3}{4}\Delta Z = -\frac{8}{3.\,4}\cdot \pm\frac{2.\,5}{2.3.3^3\alpha^8}\cdot\pm\frac{\chi}{\alpha^3} = -\frac{2.5.8\chi^4}{2.3.4.3^4\alpha^{11}} = E$$

$$\frac{\nu-4}{5}EZ = -\frac{11}{3.5}\cdot -\frac{2.\,5.\,8\,\chi^4}{2.\,3.\,4.\,3^4\alpha^{11}}\cdot\pm\frac{\chi}{\alpha^3} = \frac{2.\,5.\,8.\,11\,\chi^5}{1.2.3.4.5.\,3^5\alpha^{14}} = H$$

· ἄρα $\sqrt[3]{(\alpha^3+\chi)} = \alpha \pm \frac{\chi}{1.3\alpha^2} - \frac{2\chi^2}{1.2.3^2\alpha^5} \pm \frac{2.\,5\,\chi^3}{1.2.3.3^3\alpha^8} - \frac{2.\,5.\,8\,\chi^4}{1.2.3.4.3^4\alpha^{11}} \pm \frac{2.\,5\,\,8\,\,11\,\chi^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5\,\,3^5\,\alpha^{14}} - \dots\dots$

καὶ δι' αὐτῆς τῆς σειρᾶς εὐκόλως εὑρίσκομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὅταν σχίσωμεν αὐτὸν εἰς δύο μέρη α καὶ χ, καὶ τὸ ἓν εἶναι κύβος ἐντελὴς, καὶ μεγάλος πρὸς τὸν ἕτερον χ· διότι οὕτως εὐκόλως φθίνει ἡ σειρά· καὶ δι' ἑνὸς ἢ δύο ὅρων εὑρίσκομεν τὴν ῥίζαν· οὕτως ἐὰν ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 500 ζητῆται, ἔςαι $\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{(512-12)}$, ὅπου $\alpha^3 = 512$ κ. $\alpha = 8$, κ. $\chi = -12$ ἄρα $\sqrt[3]{(512-12)} = 8 - \frac{12}{3.\,64} = 8 - 0,062 = 7,938$· ὁμοίως $\sqrt[3]{572319} = \sqrt[3]{(571787 + 532)}$ ὅπου $\alpha = 83$ καὶ $\chi = 532$ ἄρα $\sqrt[3]{572319} = 83 + \frac{532}{3(83)^2} = 83,02574$· καὶ ἐντεῦθεν ἔπεται ὁ ἕτερος κανὼν, εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ὡς ἔγγιστα κυβικὴν ῥίζαν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ διὰ τῶν λογαρίθμων, ἢ διὰ τῶν κυβικῶν πινάκων, καὶ τὸν κύβον αὐτῆς ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τὸ δὲ λείψανον διαιροῦμεν διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου αὐτῆς.

Ὅστις ὅμως καὶ περαιτέρω τὸ διώνυμον προαγαγεῖν βούλεται, εὑρίσκει σειρὰν, καὶ διὰ τὴν ῥίζαν τῆς πέμπτης, ἑβδόμης κτ. δυνάμεως.

§. 715. Πρὸς εὐκολωτέραν χρῆσιν τοῦ διωνύμου ληφθήτω καὶ ἀντὶ τοῦ διωνύμου $\frac{\mu}{\nu}$, οὕτως.

$$(\alpha + \beta)^{\frac{\mu}{\nu}} = \overset{\mathrm{A}}{\pi^{\frac{\mu}{\nu}}} + \overset{\mathrm{B}}{\frac{\mu}{\nu}\,\mathrm{A}\,\mathrm{Z}} + \overset{\Gamma}{\frac{\mu-\nu}{2\nu}\,\mathrm{B}\,\mathrm{Z}} + \overset{\Delta}{\frac{\mu-2\nu}{3\nu}\,\Gamma\,\mathrm{Z}} + \overset{\mathrm{E}}{\frac{\mu-3\nu}{4\nu}\,\Delta\,\mathrm{Z}} \dots$$

(§. 711) δηλ. ζητεῖται ἡ σειρὰ τοῦ $(\beta^2 + \chi^2)^{\frac{2}{5}}$·

ὅπου $\alpha = \beta^2 = \pi$ $\beta = \chi^2$· $\mu = 2$· $\nu = 5$· καὶ $\mathrm{Z} = \frac{\chi^2}{\beta^2}$·

$$\pi^{\frac{\mu}{\nu}} = \beta^{2\cdot\frac{2}{5}} = \beta^{\frac{4}{5}} = \mathrm{A}$$

$$\frac{\mu}{\nu}\,\mathrm{A}\,\mathrm{Z} = \frac{2}{5}\cdot\beta^{\frac{4}{5}}\,\frac{\chi^2}{\beta^2} = \frac{2\,\beta^{\frac{4}{5}}\,\chi^2}{5\,\beta^2} = \frac{2\chi^2}{5\beta^2\,\beta^{-\frac{4}{5}}} = \frac{2\chi^2}{5\beta^{\frac{6}{5}}} = \mathrm{B}$$

$$\frac{\mu-\nu}{2\nu}\,\mathrm{B}\,\mathrm{Z} = -\frac{3}{2.5}\cdot\frac{2\,\chi^2}{5\beta^{\frac{6}{5}}}\cdot\frac{\chi^2}{\beta^2} = -\frac{2.\,3\,\chi^4}{2.\,5^2\beta^{\frac{16}{5}}} = \Gamma$$

$$\frac{\mu-2\nu}{3\nu}\Gamma Z=-\frac{8}{3.5}\cdot-\frac{2.\,3\;\chi^4}{2.\,5^2\beta^{\frac{16}{5}}}\cdot\frac{\chi^2}{\beta^2}=+$$

$$\frac{2.\,3.\,8\;\chi^6}{2.\,3.\,5^3\;\beta^{\frac{26}{5}}}=\Delta.$$

$$\frac{\mu-3\nu}{4\nu}\Delta Z=-\frac{13}{4.5}\cdot\frac{2.\,3.\,8.\,\chi^6}{2.3.5^3\beta^{\frac{26}{5}}}\cdot\frac{\chi^2}{\beta^2}=-$$

$$\frac{2.\,3.\,8.\,13\;\chi^8}{2.3.4.5^4\beta^{\frac{36}{5}}}=E.$$

$$\frac{\mu-4\nu}{5\nu}EZ=-\frac{18}{5.5}\cdot-\frac{2.\,3.\,8.\,13\,\chi^8}{2.\,3.\,4.\,5^4\,\beta^{\frac{36}{5}}}\cdot\frac{\chi^2}{\beta^2}=$$

$$\frac{2.\,3.\,8.\,13.\,18\,\chi^{10}}{2.\,3.\,4.5.5^5\,\beta^{\frac{46}{5}}}=H$$

$$\text{ἄρα}\;(\beta^2+\chi^2)^{\frac{2}{5}}=\beta^{\frac{4}{5}}+\frac{2\chi^2}{5\beta^{\frac{6}{5}}}-\frac{2.\,3\;\chi^4}{2.5^2\beta^{\frac{16}{5}}}+\frac{2.\,3.\,8\;\chi^6}{2.3.5^3\beta^{\frac{26}{5}}}-$$

$$\frac{2.\,3.\,8.\,13\;\chi^8}{2.3.4.5^4\beta^{\frac{36}{5}}}+\frac{2.\,3.\,8.\,13.\,18\;\chi^{10}}{2.\,3.\,4.\,5.\,5^5\beta^{\frac{46}{5}}}\pm\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Ἐκτυλιέσθω καὶ οὗτος ὁ τύπος $(\alpha+\chi)^{-\frac{3}{4}}$. ὅπου $\pi=\alpha$,

καὶ $Z=\frac{\chi}{\alpha}$. καὶ $-\mu=-3$. καὶ

$\nu=4$. καὶ $\pi^{\frac{-\mu}{\nu}}=\alpha^{\frac{-3}{4}}$. ἄρα

$$\pi^{\frac{-\mu}{\nu}}=\alpha^{\frac{-3}{4}}=A.$$

$$\frac{-\mu}{\nu} A Z = -\frac{3\chi}{4\, a^{\frac{7}{4}}} = B$$

$$\frac{-\mu-\nu}{2\nu} B Z = \frac{-7}{2.4} \cdot \frac{-3\chi}{4 a^{\frac{7}{4}}} \cdot \frac{\chi}{a} = \frac{3.7\chi^2}{2.4^2 a^{\frac{11}{4}}} = \Gamma$$

$$\frac{-\mu-2\nu}{3\nu}\Gamma Z = -\frac{11}{3.4}\cdot\frac{3.7\chi^2}{2.4^2 a^{\frac{11}{4}}}\cdot\frac{\chi}{a} = -\frac{3.7.11\chi^3}{2.3.4^3 a^{\frac{15}{4}}} = \Delta.$$

$$\frac{-\mu-3\nu}{4\nu}\Delta Z = -\frac{15}{4.4}\cdot\frac{-3.7.11\chi^3}{2.3.4^3 a^{\frac{15}{4}}}\cdot\frac{\chi}{a} = \frac{3.7.11.15\chi^4}{2.3.4.4^4 a^{\frac{19}{4}}} = E.$$

καὶ καθεξῆς· ἄρα $(\alpha+\chi)^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} + \frac{3\chi}{4a^{\frac{7}{4}}} + \frac{3.7\chi^2}{2.4a^{\frac{11}{4}}} - \frac{3.7.11\chi^3}{2.3.4^3a^{\frac{15}{4}}} + \frac{3.7.11.15\chi^4}{2.3.4.4^4a^{\frac{19}{4}}}$

§. 716. Ἐὰν δὲ καὶ ἓν πολυώνυμον δοθῇ νὰ ἐξαρθῇ εἰς δύναμίν τινα διὰ τοῦ διωνύμου ὡς $(\gamma^2+\chi^2-\chi)^{\frac{1}{3}}$· τότε λαμβάνομεν $\gamma^2=\pi$ καὶ $\frac{\chi^2-\chi}{\gamma^2}=Z$ καὶ $\mu=1$· καὶ $\nu=3$ καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτυλίομεν αὐτό.

$$\pi^{\frac{1}{3}} = (\gamma^2)^{\frac{1}{3}} = \gamma^{\frac{2}{3}} = A.$$

$$\frac{\mu}{\nu} A Z = \frac{1}{3}\cdot\gamma^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\chi^2-\chi}{\gamma^2} = \frac{(\chi^2-\chi)}{3.\gamma^2.\gamma^{\frac{2}{3}}} = \frac{1.(\chi^2-\chi)}{3.\gamma^{\frac{4}{3}}} = B$$

$$\frac{\mu-\nu}{2\nu} B Z = -\frac{2}{2.3}\cdot\frac{1.)\chi^2-\chi)}{3.\gamma^{\frac{4}{3}}}\cdot\frac{(\chi^2-\chi)}{\gamma^2} = -\frac{1.2(\chi^2-\chi)^2}{2.\,3^2\,\gamma^{\frac{10}{3}}} = \Gamma$$

$$\frac{\mu-2\nu}{3\nu}\Gamma Z=-\frac{5}{3.3}\cdot\frac{1.2(\chi^{2}-\chi)^{2}}{2.3^{2}\gamma^{\frac{10}{3}}}\cdot\frac{(\chi^{2}-\chi)}{\gamma^{2}}=$$

$$\frac{1.2.5.(\chi^{2}-\chi^{3})^{3}}{2.3.3^{3}\gamma^{\frac{16}{3}}}=\Delta$$

$$\frac{\mu-3\nu}{4\nu}\Delta Z=-\frac{8}{3.4}\cdot\frac{1.2.5(\chi^{2}-\chi)^{3}}{2.3.3^{3}\gamma^{\frac{16}{3}}}\cdot\frac{(\chi^{2}-\chi)}{\gamma^{2}}=-$$

$$\frac{1.2.5.8.(\chi^{2}-\chi)^{4}}{2.3.4.3^{4}\gamma^{\frac{22}{3}}}=E.$$

$$\text{ἄρα }(\gamma^{2}+\chi^{2}-\chi)^{\frac{1}{3}}=\gamma^{\frac{2}{3}}+\frac{1(\chi^{2}-\chi)}{3\gamma^{\frac{4}{3}}}-$$

$$\frac{1.2(\chi^{2}-\chi)^{2}}{2.3^{2}.\gamma^{\frac{10}{3}}}+\frac{1.2.5(\chi^{2}-\chi)^{3}}{2.3.3^{3}\gamma^{\frac{16}{3}}}-\frac{1.2.5.8(\chi^{2}-\chi)^{4}}{2.3.4.3^{4}\gamma^{\frac{22}{3}}}\mp\ldots$$

Πλὴν περὶ τοιούτων ἐκτυλίξεων ἡμεῖς τὸν χρόνον μάτην δὲν δαπανῶμεν, διότι εἶσὶν εἰς τὴν πρᾶξιν ἄχρηστοι, ἐν ἄλλοις ὅμως γενικόν τινα τύπον δώσομεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η.

Περὶ Ἀνακεφαλαιώσεώς τινων κατὰ μέρος μὲν πεπερασμένων, κατὰ μέρος δὲ ἀπείρων σειρῶν.

§. 717. Ἡμεῖς εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον τούτου τοῦ βιβλίου εἴπομέν τινα περὶ τοιούτων σειρῶν, πλὴν εἰς τὸ παρὸν γενικώτερον περὶ αὐτῶν λέξομεν. Ζητεῖται τοινυν τὸ κεφάλαιον τῆς δὲ τῆς ἀπείρου σειρᾶς $\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma\mu}+\frac{\beta}{\gamma\mu^2}+\frac{\beta}{\gamma\mu^3}+\ldots$ ἐν ᾗ ἀριθμητὴς μεῖ ὁμετάβλητος, ὁ δὲ παρονομαςὴς ἐν γεωμετρικῇ σειρᾷ, καὶ οἱ ὅροι ἄπειροι, ἄρα ὁ πρῶτος ὅρος $\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ τὸ πηλίκον $\pi=\frac{1}{\mu}$ καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων $\nu=\infty$· εὕρομεν δὲ καὶ τὸ κεφάλαιον ἐν τοῖς ἔμπροσθεν

$$K=\frac{\alpha(\pi^\nu-1)}{\pi-1}\ (\S.694)\ \text{ἄρα}\ K=\frac{\left(\frac{\beta}{\gamma}\left(\frac{1}{\mu}\right)^\nu-1\right)}{\left(\frac{1}{\mu}-1\right)}=\frac{\frac{\beta}{\gamma}\left(\frac{1}{\mu\nu}-1\right)}{\frac{1-\mu}{\mu}}=$$

$$\frac{\frac{\beta}{\gamma}\left(\frac{1-\mu^\nu}{\mu^\nu}\right)}{\frac{1-\mu}{\mu}}=\frac{\beta(1-\mu^\nu)}{\nu(1\mu--)\mu^\nu)\mu}$$ θῶμεν ἤδη $\nu=\infty$ ἔςαι

$$\frac{\beta(1-\mu^\nu)\mu}{\gamma(1--\mu)\mu^\nu}=\frac{\beta(1-\frac{\infty}{\mu})\mu}{\gamma(1-\mu)\frac{\infty}{\mu}}=-\frac{\beta\mu(\frac{\infty}{\mu})}{\gamma(1-\mu)\frac{\infty}{\mu}}=-\frac{\beta\mu}{\gamma(1-\mu)}=\frac{\beta\mu}{\gamma(\mu-1)}$$

διότι $1-\frac{\infty}{\mu}=-\frac{\infty}{\mu}$ (§. 660.), καὶ ὅταν ἄνω καὶ κάτω τὰ σημεῖα μεταβάλλωνται, τὸ κλάσμα μένει ἀμετάβλητον (§. 222). Λοιπὸν ἐκ τοῦ κεφαλαίου τοῦδε $\frac{\beta\mu}{\nu(\mu-1)}$ λύονται τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

1. Ζητεῖται τὸ κεφάλαιον τῆς δε τῆς σειρᾶς $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ $+\frac{1}{16}\ldots\frac{1}{\infty}=1$. ἐπειδὴ $\beta=1$· $\gamma=2$· $\mu=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{1}}=2$ ἄρα

$$K=\frac{1.2}{2.1}=1.$$

2. Ζητεῖται καὶ τῆς δε $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\ldots\frac{1}{\infty}=\frac{2}{3}$· διότι $\beta=1$. $\gamma=2$. $\mu=4$ καὶ $K=\frac{1.4}{2.3}=\frac{2}{3}$

3. καὶ τῆς δε $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\pm\ldots\pm\frac{1}{\infty}=\frac{1}{3}$· διότι $\beta=1$, $\gamma=2$ $\mu=-2$· ἄρα $K=\frac{-1.2}{-2.3}=\frac{1}{3}$

4. καὶ τῆς δε $\frac{3}{2}-\frac{6}{8}+\frac{12}{18}-\frac{24}{54}+\frac{48}{162}\pm\ldots=\frac{9}{10}$. διότι $\beta=3$. $\gamma=2$ καὶ $\mu=-\frac{3}{2}$ ἄρα $K=\frac{3.-\frac{3}{2}}{2(-\frac{3}{2}-1)}$

$$=\frac{-\frac{9}{2}}{2(-\frac{5}{2})}=\frac{-9}{-10}=\frac{9}{10}.$$

5. Ἐὰν δοθῇ ἓν δεκαδικὸν κλάσμα, ὅπερ περιοδικῶς (§. 265) ἄνευ τέρματος συνεχίζεται, εὑρίσκομεν καὶ τοῦδε τὸ κεφάλαιον, ἤτοι τὸ ἀρχικὸν αὐτοῦ κλάσμα, ἀφ' οὗ τὸ δεκαδικὸν ἐξῆλθε· δηλ: ζητεῖται τὸ ἀρχικὸν κλάσμα τοῦδε τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 0, 1 1 1 1 1 1 1 1 ..... ἄρα καὶ τοῦδε ὁ ἀριθμὸς ἐν τοιαύτῃ σειρᾷ συνεχίζεται· διότι

$$0,11111=0,\ \frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{100000}.$$

ὅπου $\beta=1$ $\gamma=10$ καὶ $\mu=10$ ἄρα K

$$\frac{1.10}{10.9}=\frac{1}{9}.$$

6: Ζητεῖται τὸ ἀρχικὸν κλάσμα καὶ τοῦδε τοῦ δεκαδικοῦ 0,575757· ἄρα 0, $\frac{57}{100}+\frac{57}{10000}+\frac{57}{1000000}$. ὅπου

$\beta = 57.\gamma = 100$ καὶ $\mu = 100$ λοιπὸν $K = \frac{57.\ 100}{100.\ 99} =$

$\frac{57}{99} = \frac{19}{33}$.

7: Ζητεῖται τὸ ἀρχικὸν κλάσμα καὶ αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ 0, 99999, ὅπου $\beta = 9$· $\gamma = 10$ καὶ $\mu = 10$ ἄρα $K =$

$\frac{9.\ 10}{10.\ 9} = 1$ δηλ: τὸ κλάσμα οὐ δίδεται, διότι ἡ· σειρὰ προβαίνει ἐπ' ἄπειρον, καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ μονάδος καὶ τοῦ κλάσματος ἀπείρως ἐλαχίστη καὶ ἀνεπαίσθητος· καὶ ὀρθῶς ἔχει τὸ εἰρημένον (§. 660), ὅτι ἡ ἀπείρως ἐλαχίστη ποσότης οὔτε αὔξησιν προστιθεμένη, οὔτε μείωσιν ἀφαιρουμένη ἐπάγει εἰς τοὺς διορισμένους ἀριθμούς.

§. 718. Ἐὰν δὲ τοὺς ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς $\alpha,\ \alpha+\delta,\ \alpha+2\delta \ldots\ldots \alpha+(\nu-1)\delta$ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέρος ἕκαστον κατὰ τάξιν μὲ τοὺς ὅρους τῆς ἑξῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς $\beta,\ \beta\pi, \beta\pi^2,\ \beta\pi^3 \ldots \beta\pi^{\nu-1}$ ἐξέρχεται ἡ ἑξῆς σειρὰ

$$\begin{array}{l} \alpha,\ \alpha+\delta,\ \alpha+2\delta,\ \alpha+3\delta \ldots\ldots \alpha+(\nu-1)\delta \\ \underline{\beta,\ \beta\pi,\quad \beta\pi^2,\quad \beta\pi^3 \ldots\ldots\ldots \beta\pi^{\nu-1}} \end{array}$$

$$\alpha\beta, (\alpha+\delta)\beta\pi, (\alpha+2\delta)\beta\pi^2, (\alpha+3\delta)\beta\pi^3 \ldots (\alpha+(\nu-1)\delta)\beta\pi^{\nu-1}.$$

ἧς ὁ γενικὸς ὅρος $\tau = (\alpha+(\nu-1)\delta)\beta\pi^{\nu-1}$

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῆς, ἀναλυέσθω ἕκαστος αὐτῆς ὅρος εἰς τόσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ συνἔργος τοῦ δ, ὡς ὁ τέταρτος δηλ: $(\alpha+3\delta)\,\beta\pi^3=(\alpha+\delta+\delta+\delta)$ $\beta\pi^3=\alpha\beta\pi^3+\delta\beta\pi^3+\delta\beta\pi^3+\delta\beta\pi^3$ ἄρα

$$
\begin{aligned}
K = {} & \alpha\beta \\
& + \alpha\beta\pi+\beta\delta\pi \\
& + \alpha\beta\pi^2+\beta\delta\pi^2+\beta\delta\pi^2 \\
& + \alpha\beta\pi^3+\beta\delta\pi^3+\beta\delta\pi^3+\beta\delta\pi^3 \\
& + \alpha\beta\pi^4+\beta\delta\pi^4+\beta\delta\pi^4+\beta\delta\pi^4+\beta\delta\pi^4 \\
& + \alpha\beta\pi^5+\delta\beta\pi^5+\delta\beta\pi^5+\delta\beta\pi^5+\delta\beta\pi^5+\delta\beta\pi^5 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \alpha\beta\pi^{\nu-1}+\beta\delta\pi^{\nu-1}+\beta\delta\pi^{\nu-1}+\beta\delta\pi^{\nu-1}+\beta\delta\pi^{\nu-1}+\beta\delta\pi^{\nu-1}.
\end{aligned}
$$

Ἐὰν δὲ τούτους τοὺς ὅρους τοῦ κεφαλαίου κατὰ κάθετον ὅλους συνάψωμεν, καὶ ἑκάστην στήλην διὰ τοῦ Α, Β, Γ κτ. σημειώσωμεν, εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον οὕτω

$$
\begin{aligned}
K = {} & (\alpha\beta+\alpha\beta\pi+\alpha\beta\pi^2+\alpha\beta\pi^3+\alpha\beta\pi^4+\alpha\beta\pi^5+\ldots\,\alpha\beta\pi^{\nu-1})\ \mathrm{A} \\
& + (\beta\delta\pi+\beta\delta\pi^2+\beta\delta\pi^3+\beta\delta\pi^4+\beta\delta\pi^5+\ldots\ldots\,\beta\delta\pi^{\nu-1})\ \mathrm{B} \\
& + (\beta\delta\pi^2+\beta\delta\pi^3+\beta\delta\pi^4+\beta\delta\pi^5+\ldots\ldots\,\beta\delta\pi^{\nu-1})\ \Gamma \\
& + (\beta\delta\pi^3+\beta\delta\pi^4+\beta\delta\pi^5+\ldots\ldots\,\beta\delta\pi^{\nu-1})\ \Delta \\
& + (\beta\delta\pi^4+\beta\delta\pi^5+\ldots\ldots\,\beta\delta\pi^{\nu-1})\ \mathrm{E} \\
& + (\beta\delta\pi^5+\ldots\ldots\,\beta\delta\pi^{\nu-1})\ \mathrm{Z}
\end{aligned}
$$

Αὐτοῦ βλέπομεν, ὅτι ὁ Α ὅρος εἶναι σειρὰ γεωμετρική, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος $\alpha=\alpha\beta$· καὶ τὸ πηλίκον $\pi=\pi$, καὶ $\tau=\alpha\beta\pi^{\nu-1}$. καὶ οὗτος ὁ τύπος εὕρηται (§. 654..ϛ΄.) $K=\dfrac{\pi\tau-\alpha}{\pi-1}$ Θῶμεν εἰς αὐτὸν ἀντὶ τ τὸ ἴσον $\alpha\beta\pi^{\nu-1}$, καὶ $\alpha=\alpha\beta$. καὶ εὑρίσχομεν $K = \frac{\alpha\beta\pi^{\nu-1} . \pi - \alpha\beta}{\pi - 1} = \frac{\alpha\beta\pi^{\nu} - \alpha\beta}{\pi - 1} = A.$

Καὶ ὁ Β ὅρος εἶναι σειρὰ γεωμετρικὴ, ὡς ἡ σειρὰ Α πλὴν ἑνὸς ὅρου καὶ $\alpha = \beta\delta\pi$· καὶ $\pi = \pi$ καὶ $\tau = \beta\delta\pi^{\nu-1}$ ὅθεν, εἰς τὸν τύπον $K = \frac{\tau\pi - \alpha}{\pi - 1}$ θῶμεν τὰ ἴσα καὶ εὑρίσκεται

$$K = \frac{\beta\delta\pi^{\nu-1} . \pi - \beta\delta\pi}{\pi - 1} = \frac{\beta\delta\pi^{\nu} - \beta\delta\pi}{\pi - 1} = B.$$

Σειρὰ δὲ γεωμετρικὴ καὶ εἰς τὸν Γ ὅρον, ἧς $\alpha = \beta\delta\pi^2$ καὶ $\pi = \pi$ καὶ $\tau = \beta\delta\pi^{\nu-1}$· ἐὰν δὲ τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων θῶμεν, ἔςαι $K = \frac{\tau\pi - \alpha}{\pi - 1} = \frac{\beta\delta\pi^{\nu-1} . \pi - \beta\delta\pi^2}{\pi - 1} = \frac{\beta\delta\pi^{\nu} - \beta\delta\pi^2}{\pi - 1} = \Gamma$

Ὁμοίως καὶ εἰς τὸν Δ ὅρον ἡ γεωμετρικὴ σειρὰ ἔχει, $\alpha = \beta\delta\pi^3$, $\pi = \pi$, $\tau = \beta\delta\pi^{\nu-1}$ · καὶ λοιπὸν $K = \frac{\tau\pi - \alpha}{\pi - 1} =$
$\frac{\beta\delta\pi^{\nu-1} \cdot \pi - \beta\delta\pi^3}{\pi - 1} = \frac{\beta\delta\pi^{\nu} - \beta\delta\pi^3}{\pi - 1} = \Delta.$ καὶ ἑπομένως $K = \frac{\tau\pi - \alpha}{\pi - 1}$
$= \frac{\beta\delta\pi^{\nu-1} \cdot \pi - \beta\delta\pi^4}{\pi - 1} = \frac{\beta\delta\pi^{\nu} - \beta\delta\pi^4}{\pi - 1} = E$ καὶ $Z =$
$\frac{\beta\delta\pi^{\nu} - \beta\delta\pi^5}{\pi - 1}$, καὶ ἑπομένως τὸ κεφάλαιον τῆς ζητουμένης σειρᾶς.

$$K = \frac{\alpha\beta\pi^{\nu} - \alpha\beta}{\pi - 1} + \frac{\beta\delta\pi^{\nu} - \beta\delta\pi}{\pi - 1} + \frac{\beta\delta\pi^{\nu} - \beta\delta\pi^{2}}{\pi - 1} +$$

$$\frac{\beta\delta\pi^{\nu} - \beta\delta\pi^{3}}{\pi - 1} + \frac{\beta\delta\pi^{\nu} - \beta\delta\pi^{4}}{\pi - 1} + \frac{\beta\delta\pi^{\nu} - \beta\delta\pi^{5}}{\pi - 1} + \frac{\beta\delta\pi^{\nu} - \beta\delta\pi^{\nu-1}}{\pi - 1} + \ldots$$

'Εὰν δὲ τοὺς λοιποὺς ὅρους, πλὴν τοῦ πρώτου εἰς δύο λύσωμεν κατὰ τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$ ἔςαι

$$K = \frac{\alpha\beta\pi^{\nu} - \alpha\beta}{\pi - 1} + \frac{\beta\delta\pi^{\nu}}{\pi - 1} - \frac{\beta\delta\pi}{\pi - 1} + \frac{\beta\delta\pi^{\nu}}{\pi - 1} - \frac{\beta\delta\pi^{2}}{\pi - 1} +$$

$$\frac{\beta\delta\pi^{\nu}}{\pi - 1} - \frac{\beta\delta\pi^{3}}{\pi - 1} + \frac{\beta\delta\pi^{\nu}}{\pi - 1} - \frac{\beta\delta\pi^{4}}{\pi - 1} + \frac{\beta\delta\pi^{\nu}}{\pi - 1} - \frac{\beta\delta\pi^{5}}{\pi - 1}$$

$$+ \frac{\beta\delta\pi^{\nu}}{\pi - 1} - \frac{\beta\delta\pi^{\nu-1}}{\pi - 1} \pm \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Εἰς αὐτὴν τὴν σειρὰν εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν καταφατικῶν ὅρων, πλὴν τοῦ πρώτου, $= (\nu - 1)$. $\frac{\beta\delta\pi^{\nu}}{\pi - 1}$. ἐπειδὴ δ' ἀφέθη ὁ πρῶτος ὅρος, ἔςαι ἡ πληθὺς τῶν ὅρων $\nu - 1$· τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν ἀποφατικῶν ὅρων $=$

$$- \frac{\beta\delta\pi}{\pi - 1} - \frac{\beta\delta\pi^{2}}{\pi - 1} - \frac{\beta\delta\pi^{3}}{\pi - 1} - \frac{\beta\delta\pi^{4}}{\pi - 1} - \frac{\beta\delta\pi^{5}}{\pi - 1} - \frac{\beta\delta\pi^{\nu-1}}{\pi - 1}.$$

Ἐπειδὴ δ' εἰς ὅλους τοὺς ὅρους κοινὸς παράγων ὁ $\frac{\beta\delta\pi}{\pi - 1}$ ἔςαι τὸ κεφάλαιον τῶν ἀποφατικῶν ὅρων $- \frac{\beta\delta\pi}{\pi - 1}$

$(1+\pi+\pi^2+\pi^3+\pi^4+\dots\dots\pi^{\nu-1})$ · ἀλλ' ἡ παρένθεσις ἐνταῦθα σειρὰ γεωμετρικὴ, ἧς $\alpha=1$ καὶ $\pi=\pi$ καὶ $\tau=\pi^{\nu-2}$

ἄρα τὸ κεφάλαιον αὐτῆς $K=\dfrac{\tau\pi-\alpha}{\pi-1}=\dfrac{\pi^{\nu-2}\cdot\pi-1}{\pi-1}=$

$\dfrac{\pi^{\nu-1}-1}{\pi-1}$. καὶ $-\dfrac{\beta\delta\pi}{\pi-1}(1+\pi+\pi^2+\pi^3+\dots\pi^{\nu-2})=-$

$\dfrac{\beta\delta\pi}{\pi-1}\cdot\dfrac{\pi^{\nu-1}-1}{\pi-1}$ καὶ ἑπομένως τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον

$$K=\frac{\alpha\beta\pi^{\nu}-\alpha\beta}{\pi-1}+(\nu-1)\frac{\beta\delta\pi^{\nu}}{\pi-1}-\frac{\beta\delta\pi}{\pi-1}\cdot\frac{\pi^{\nu-1}-1}{\pi-1}=$$

$$\frac{\alpha\beta\tau^{\nu}-\alpha\beta}{\pi-1}+\frac{\nu\beta\delta\pi^{\nu}}{\pi-1}-\frac{\beta\delta\pi^{\nu}}{\pi-1}-\frac{\beta\delta\pi^{\nu}-\beta\delta\pi}{(\pi-1)^2}=$$

$$\frac{\alpha\beta\pi^{\nu}-\alpha\beta}{\pi-1}+\frac{\nu\beta\delta\pi^{\nu}}{\pi-1}-\frac{\beta\delta\pi^{\nu+1}+\beta\delta\pi^{\nu}-\beta\delta\pi^{\nu}+\beta\delta\pi}{(\pi-1)^2}=$$

$$\frac{\alpha\beta(\pi^{\nu}-1)+\nu\beta\delta\pi^{\nu}}{\pi-1}-\frac{\beta\delta\pi(\pi^{\nu}-1)}{(\pi-1)^2}$$ ἄρα εὑρίσκεται

$$K=\frac{\alpha\beta(\pi^{\nu}-1)+\nu\beta\delta\pi^{\nu}}{\pi-1}-\frac{\beta\delta\pi(\pi^{\nu}-1)}{(\pi-1)^2}.$$

Ζητεῖται τὸ κεφάλαιον ταύτης τῆς σειρᾶς

$1.3+3.3.2+5.3.2^2+7.3.2^3+9.3.2^4+\dots\dots$

ἄρα $\alpha=1$, $\beta=3$, $\delta=2$. $\pi=2$. $\nu=5$ ἄρα

$$K=\frac{1.3\,(2^5-1)+5.3.2.2^5}{2-1}-\frac{3.2.2\,(2^5-1)}{(2-1)^2}=$$

$$\frac{93+960}{1}-\frac{372}{1}=681.$$

719. Ἐὰν δ' εἰς τὴν ἄνω σειρὰν $\alpha\beta$, $(\alpha+\delta)\beta\pi$, $(\alpha+2\delta)\beta\pi^2$ κτ. ἀντὶ μὲν β, $\frac{1}{\beta}$ ἀντὶ δὲ π, $\frac{1}{\pi}$ θῶμεν, ἐξέρχεται ἡ σειρὰ $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha+\delta}{\beta\pi}, \frac{\alpha+2\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\alpha+3\delta}{\beta\pi^3}$ κτ. καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος $\frac{\alpha+(\nu-1)\delta}{\beta\pi^{\nu-1}}=\tau$. Ἐὰν ἀναλύσωμεν δὲ καὶ ταύτην τὴν σειρὰν ὡς ἀνωτέρω (§. 718).

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta\pi}+\frac{\delta}{\beta\pi}+\frac{\alpha}{\beta\pi^2}+\frac{\delta}{\beta\pi^2}+\frac{\delta}{\beta\pi^2}+\frac{\alpha}{\beta\pi^3}+\frac{\delta}{\beta\pi^3}+\frac{\delta}{\beta\pi^3}+\frac{\delta}{\beta\pi^3}+\frac{\alpha}{\beta\pi^4}+$$

$$\frac{\delta}{\beta\pi^4}+\frac{\delta}{\beta\pi^4}+\frac{\delta}{\beta\pi^4}+\frac{\delta}{\beta\pi^4}$$ κτ. εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς γεωμετρικὰς σειρὰς

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta\pi}+\frac{\alpha}{\beta\pi^2}+\frac{\alpha}{\beta\pi^3}+\frac{\alpha}{\beta\pi^4}+\ldots\ldots\ldots+\frac{\alpha}{\beta\pi^\infty}\quad\ldots\quad A.$$

$$\frac{\delta}{\beta\pi}+\frac{\delta}{\beta\pi^2}+\frac{\delta}{\beta\pi^3}+\frac{\delta}{\beta\pi^4}+\ldots\ldots\ldots+\frac{\delta}{\beta\pi^\infty}\quad\ldots\quad B.$$

$$\frac{\delta}{\beta\pi^2}+\frac{\delta}{\beta\pi^3}+\frac{\delta}{\beta\pi^4}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\delta}{\beta\pi^\infty}\quad\ldots\quad \Gamma.$$

$$\frac{\delta}{\beta\pi^3}+\frac{\delta}{\beta\pi^4}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\delta}{\beta\pi^\infty}\quad\ldots\quad \Delta.$$

$$\frac{\delta}{\beta\pi^4}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\delta}{\beta\pi^\infty}\quad\ldots\quad E.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἰς αὐτὰς τὰς σειρὰς ὁ μὲν ἀριθμητὴς ἀμετάβλητος, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἐν σειρᾷ γεωμετρικῇ, κεφαλαιοῦνται ὅλαι κατὰ τὸν τύπον $\frac{\beta\mu}{\gamma(\mu-1)}$, ὃν εὕρομεν ἐκεῖ (§. 717)· ἄρα εἰς τὴν Α σειρὰν $\beta=\alpha$· $\mu=\pi$· καὶ $\gamma=\beta$. καὶ ἑπομένως $\frac{\alpha\pi}{\beta(\pi-1)}=A$. εἰς δὲ τὴν Β σειρὰν $\beta=\delta$. $\gamma=\beta\pi$ καὶ $\mu=\pi$ ἄρα $\frac{\delta\pi}{\beta\pi(\pi-2)}=\frac{\delta}{\beta\pi-\beta}=B$

εἰς τὴν Γ $\beta=\delta.\gamma=\beta\pi^2$ καὶ $\mu=\pi$ ἴσαι $\frac{\delta\pi}{\beta\pi^2(\pi-1)}=\frac{\delta}{\beta\pi^2-\beta\pi}=\Gamma$.

εἰς τὴν Δ $\beta=\delta.\gamma=\beta\pi^3.\ \mu=\pi$ ἄρα $\frac{\delta\pi}{\beta\pi^3(\pi-1)}=\frac{\delta}{\beta\pi^3-\beta\pi^2}=\Delta$.

εἰς τὴν Ε. $\beta=\delta.\ \gamma=\beta\pi^4.\ \mu=\pi.$ καὶ τέλος $\frac{\delta\pi}{\beta\pi^4(\pi-1)}=$ $\frac{\delta}{\beta\pi^4-\beta\pi^3}=E$. καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον.

ἄρα $K=\frac{\alpha\pi}{\beta\pi-\beta}+\frac{\delta}{\beta\pi-\beta}+\frac{\delta}{\beta\pi^2-\beta\pi}+\frac{\delta}{\beta\pi^3-\beta\pi^2}+$ $\frac{\delta}{\beta\pi^4-\beta\pi^3}+\ .\ .\ .\ .\ .$ ὅμως ὅλοι οἱ ἑξῆς ὅροι, πλὴν τοῦ πρώτου, εἰσὶν αὖθις ἐν σειρᾷ τοιαύτῃ, ὧν ὁ ἀριθμητὴς ἀμετάβλητος, καὶ ὁ παρονομαστὴς ἐν σειρᾷ γεωμετρικῇ· ἄρα κατὰ τὸν αὐτὸν τύπον $K=\frac{\delta}{\beta\pi-\beta}+$

$$\frac{\delta}{\beta\pi^2-\beta\pi}+\frac{\delta}{\beta\pi^3-\beta\pi^2}+\frac{\delta}{\beta\pi^4-\beta\pi^3}=\frac{\delta\pi}{(\beta\pi-\beta)(\pi-1)}$$

ὅτι $\beta=\delta$. $\gamma=\beta\pi-\beta$. καὶ $\mu=\pi$ λοιπὸν τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον τῆς σειρᾶς

$$K=\frac{\alpha\pi}{\beta(\pi-1)}+\frac{\delta\pi}{(\beta\pi-\beta)(\pi-1)}=\frac{\alpha\pi(\pi-1)}{\beta(\pi-1)(\pi-1)}+$$
$$\frac{\delta\pi}{\beta(\pi-1)(\pi-1)}=\frac{\alpha\pi(\pi-1)+\delta\pi}{\beta(\pi-1)^2}=\frac{\pi(\alpha\pi-\alpha+\delta)}{\beta(\pi-1)^2}$$

α'. παράδ: $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\ldots\ldots$ ἧς τὸ κεφ:

$\frac{2.(2-1+2)}{2(2-1)^2}=3$. ὅτι $\alpha=1$. $\beta=2$. $\delta=2$. $\pi=2$.

β'. $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\ldots\ldots=\frac{3}{4}$.

γ'. $\frac{1}{2}+\frac{4}{6}+\frac{12}{18}+\frac{32}{54}+\frac{80}{162}+\ldots\ldots=\frac{9}{2}$. καὶ αὐτοῦ

$\alpha=1$. $\delta=1$. $\beta=2$ $\pi=\frac{3}{2}$· ὅτε εἰς τὸν τρίτον ὅρον $\frac{3^2}{2^2}$

εἰς τὸν τέταρτον $\frac{3^3}{2^3}$ ἄρα $K=\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1+1)}{2(\frac{3}{2}-1)^2}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{18}{4}=4\frac{1}{2}$.

δ'. οὕτω καὶ $0{,}1234567890123456789 0123=\frac{10}{81}$. ὅτι $\alpha=1$. $\delta=1$. $\beta=10$. $\pi=10$. ὅπερ καὶ κατὰ τὸν ἄνω τύπον $\frac{\beta\mu}{\gamma(\mu-1)}$ εὑρίσκεται· διότι $\beta=1234567890$. καὶ $\gamma=10^9$ καὶ $\mu=10$. πλὴν ἐργωδέςερον· κατ' αὐτὸν τὸν τύπον κεφαλαιοῦμεν πλείςας σειρὰς, καὶ κατὰ τὸν τύπον $\tau=\frac{\alpha+(\nu-1)\delta}{\beta\pi^{\nu-1}}$ ἀποτελοῦμεν πολλὰς σειρὰς ἐὰν $\nu=1,2,3,4,5$ κτ. θῶμεν, καὶ ἅμα τὰ λοιπὰ $\alpha, \delta, \beta, \pi$, διορίσωμεν.

§. 720. Δυνάμεθα εὑρεῖν τὸν ἔσχατον ὅρον, καὶ τὸ κεφάλαιον καὶ ἑτέρων διαφόρων κλασμάτων σειρῶν, εἰς τὰς ὁποίας ὁ μὲν ἀριθμητὴς τῶν κλασμάτων νὰ εἶναι ἀμετάβλητος, ὁ δὲ παρονομαςὴς ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ τῆς δευτέρας τάξεως, καὶ ἄλλων πολλῶν, ὧν ὁ μὲν ἀριθμητὴς τῶν κλασμάτων ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ, ὁ δὲ παρονομαστὴς μετὰ πολλῶν παραγόντων, οἵτινες ἕπονται ἐν σειρᾷ καὶ οὗτοι ἀριθμητικῇ· πλὴν εἰς αὐτὰς πρέπει ὁ παρονομαστὴς νὰ ὑπερέχῃ κατὰ δύο παράγοντας τῇ τάξει τοῦ ἀριθμητοῦ· ἐπειδὴ ὅμως αἱ τοιαῦται σειραὶ δὲν εἶναι τόσον χρήσιμοι, ἱκανὸν ἡμῖν φαίνεται, ἐὰν μόνον τοὺς τύπους τῶν ἐσχάτων ὅρων καὶ τῶν κεφαλαίων ἐκθέσωμεν· ὅστις ὅμως θέλει καὶ τὴν εὕρεσιν τούτων μαθεῖν, ἃς προσέξῃ μετὰ τοὺς τύπους, μεθ' οὓς καὶ τὸν τρόπον τοῦτον δείξομεν.

α΄. Ἐὰν ᾖ αὕτη ἡ σειρὰ $\frac{\alpha}{\beta(\beta+\delta)}+\frac{\alpha}{(\beta+\delta)\,(\beta+2\delta)}+\frac{\alpha}{(\beta+2\delta)(\beta+3\delta)}+\ldots$ εἶναι ὁ γενικὸς αὐτῆς τύπος $\tau=\frac{\alpha}{\beta(\nu-1)\delta\,(\beta+\nu\delta)}$ καὶ τὸ κεφ: $K=\frac{\nu\alpha}{\beta(\beta+\nu\delta)}$. ἐὰν δὲ $\nu=\infty$ θῶμεν, ἐπειδὴ ἄπειροι αἱ σειραὶ, ἔσται $K=\frac{\infty\,\alpha}{\beta(\beta+\infty\,\delta)}=\frac{\infty\,\alpha}{\beta\,\infty\,\delta}=\frac{\alpha}{\beta\delta}$ λοιπὸν τὸ κεφ: τῆς $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.\,3}+\frac{1}{3.4}+\ldots=\frac{1}{1.\,1}=\frac{1}{1}=1$. διότι $\alpha=1$ $\beta=1.$ $\delta=1$

ὁμοίως καὶ αὐτῆς $\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.\,7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots=\frac{1}{2.\,3}=\frac{1}{6}$. διότι $\alpha=1.$ $\beta=3.$ $\delta=2.$

β΄. Ἐὰν δ' ἡ σειρὰ οὕτω προβαίνῃ $\frac{\alpha}{\beta(\beta+\delta)(\beta+2\delta)}+\frac{\alpha}{(\beta+\delta)\,(\beta+2\delta)\,(\beta+3\delta)}+\frac{\alpha}{(\beta+2\delta)(\beta+3\delta)(\beta+4)\delta}+\ldots$

ἔςαι ὁ γενικὸς ὅρος αὐτῆς $\tau = \dfrac{\alpha}{\beta(\nu-1)\delta(\beta+\nu\delta)(\beta+(\nu+1)\delta)}$

καὶ $K = \dfrac{\alpha(2\beta+\delta)\nu+\alpha\delta\nu^2}{2\beta(\beta+\delta)(\beta+\nu\delta)(\beta+(\nu+1)\delta)}$ θῶμεν $\nu=\infty$

καὶ ἔςαι $K = \dfrac{2\alpha\beta\,\infty+\alpha\delta\,\infty+\alpha\delta\,\infty^2}{2\beta(\beta+\delta)(\beta+\infty\delta)(\beta+\infty\delta+\delta)} =$

$\dfrac{\alpha\,\delta\infty^2}{2\beta(\beta+\delta(\infty\,\delta.\,\infty\,\delta)} = \dfrac{\alpha}{2\beta\delta(\beta+\delta)}$

Λοιπὸν ἐὰν ζητῆται τὸ κεφάλαιον τῆς σειρᾶς $\dfrac{1}{1.2.3} +$

$\dfrac{1}{2.3.4} + \dfrac{1}{3.4.5} + \dfrac{1}{4.5.6}$ .... ἐπειδὴ $\alpha=1$·

$\beta = 1$· καὶ $\delta = 1$· ἔςαι καὶ $K = \dfrac{1}{2.1.1.2} =$

$\dfrac{1}{4}$· ὁμοίως καὶ τῆς δὲ $\dfrac{3}{2.4.6} + \dfrac{3}{4.6.8} + \dfrac{3}{6.8.10} + \ldots$

ἐπειδὴ $\alpha=3$· $\beta=2$· $\delta=2$· ἔςαι $K = \dfrac{3}{2.2.2.(2+2)} =$

$\dfrac{3}{32}$· καὶ τῆς δὲ $\dfrac{8}{5.7.9} + \dfrac{8}{7.9.11} + \dfrac{8}{9.11.13} +$

$\dfrac{8}{11.13.15} + \ldots K = \dfrac{8}{2.5.2.7} = \dfrac{2}{5.7} = \dfrac{2}{35}$.

γ΄. Ἐὰν δ' ἡ σειρὰ προβαίνῃ $\dfrac{\alpha}{\beta((\beta+\delta)\beta+2\delta)} +$

$\dfrac{\alpha+\gamma}{(\beta+\delta)(\beta+2\delta)(\beta+3\delta)} + \dfrac{\alpha+2\gamma}{(\beta+2\delta)(\beta+3\delta)(\beta+4\delta)}$ ὁ μὲν ἔσχατος ὅρος αὐτῆς εὑρίσκεται $\tau =$

$$\frac{\alpha+(\nu-1)\gamma}{(\beta+(\nu-1)\delta)(\beta+\nu\delta)(\beta+(\nu+1)\delta)}$$ τὸ δὲ κεφ: $K =$

$$\frac{(2\alpha\beta-\beta\gamma+\alpha\delta)\nu+(\alpha\delta+\beta\gamma)\nu^2}{2\beta(\beta+\delta)(\beta+\nu\delta)(\beta+(\nu+1)\delta)}$$ θῶμεν $\nu = \infty$ εἰς αὐτὴν

καὶ γίνεται $K = \frac{(2\beta-\beta\gamma+\alpha\delta)\infty+(\alpha\delta+\beta\gamma)\infty^2}{2\beta(\beta+\delta)(\beta+\infty\delta)(\beta+(\infty+1)\delta)} =$

$\frac{(\alpha\delta+\beta\gamma)\infty^2}{2\beta(\beta+\delta)\infty\delta.\infty\delta.} = \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{2\beta\delta^2(\beta+\delta)}$· καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τύπον εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον τῆς σειρᾶς $\frac{1}{1.3.5}+\frac{2}{3.5.7}+\frac{3}{5.7.9.}+..$ ἐπειδὴ δὲ $\alpha=1$· $\gamma=1$· $\beta=1$· $\delta=2$ εὑρίσκεται $K=\frac{2+1}{2.3.4}=\frac{1}{8}$· ὁμοίως καὶ τῆς δὲ $\frac{1}{2.4.6}+\frac{3}{4.6.8}+\frac{5}{6.8.10}+.....$ ἐπειδὴ δὲ $\alpha=1$· $\gamma=2$· $\beta=2$ $\delta=2$· ἔσαι $K=\frac{2+4}{2.2.4.4.}=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$

δ'. Ἐὰν δ' ἡ σειρὰ κατὰ τὴν ἑξῆς προβαίνη

$$\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{\alpha+\delta}{(\alpha+1)(\alpha+1+\delta)}+\frac{\alpha+2\delta}{(\alpha+1)(\alpha+1+\delta)(\alpha+1+2\delta)}$$

εὑρίσκομεν τὸν μὲν ἔσχατον γενικὸν ὅρον $\tau =$

$$\frac{\alpha+(\nu-1)\delta}{(\alpha+1)(\alpha+1+\delta)(\alpha+1+2\delta).....(\alpha+1+(\nu-1)\delta)}$$ καὶ

$K=1-\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+1+\delta)....(\alpha+1+(\nu-1)\delta)}$· ἐὰν ἔμως καὶ εἰς αὐτὴν $\nu = \infty$ θῶμεν, ἔσαι τέλος $K = 1 - \frac{1}{\infty}$

ἀλλὰ $\frac{1}{\infty}$ ἀπείρως ἐλάχισον (§. 668) ἄρα $K = 1$.

λοιπὸν $\frac{1}{2} + \frac{2}{2.3} + \frac{4}{2.3.4} + \frac{4}{2.3.4.5} + \ldots\ldots = 1$, ἔτι

$\frac{2}{3} + \frac{4}{3.5} + \frac{6}{3.4.5} + \frac{8}{3.4.5.7} + \frac{10}{3.4.5.7.10} = 1$· καὶ

ἰδοὺ καὶ ἑτέρα τῆς μονάδος ἔκφρασις καὶ ἑτέρων πλειόνων σειρῶν τὸ κεφάλαιον κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον εὑρίσκειν δυνάμεθα.

§. 721, Τὰ δὲ κεφάλαια τῶν τοιούτων σειρῶν οὕτως ἐφευρέθησαν· πρῶτον ἔλαβον διαφόρους συνεργασίας ὡς

$\frac{A\nu}{B + \Gamma\nu}$, καὶ $\frac{A\nu + B\nu^2}{\Gamma + \Delta\nu + E\nu^2}$ κτ· ἀντὶ τοῦ κεφαλαίου σειρῶν τινῶν ἀγνώςων, ἔπειτα ἀπ' αὐτῶν τῶν ληφθέντων κεφαλαίων εὗρον τὸ κεφάλαιον τῆς αὐτῆς σειρᾶς, πλὴν ἑνὸς

ὅρου (§. 560.) δηλ. εἰς τὸ κεφάλαιον $\frac{A\nu}{B + \Gamma\nu}$ ἀντὶ τοῦ ν ἔ-

λαβον $\nu - 1$ οὕτως $\frac{A(\nu-1)}{B + \Gamma(\nu-1)}$, ἐὰν δὲ τοῦτο ἀπ' ἐκείνου

ἀφέλωμεν, ἔσαι τῷ ὄντι ὁ γενικὸς ὅρος τοῦ κεφαλαίου

$\frac{A\nu}{B + \Gamma\nu}$ οὕτω $\frac{A\nu}{B + \Gamma\nu} - \frac{A(\nu-1)}{B + \Gamma(\nu-1)} = \frac{AB}{(B + \Gamma\nu)(B + \Gamma(\nu-1))}$,

ἄρα $\tau = \frac{AB}{(B + \Gamma\nu)(B + \Gamma(\nu-1))}$ εἰς αὐτὸν τὸν τύπον ἤδη

ἔθηκαν ἀντὶ μὲν τῶν γραμμάτων μονάδα, ἀντὶ δὲ $\nu - 1$

καὶ εὗρον τὸν πρῶτον ὅρον τῆς σειρᾶς· ἀντὶ δὲ $\nu = 2$ τὸν δεύτερον, ἀντὶ $\nu = 3$ τὸν τρίτον· καὶ ἐπομένως εὑρέθη ἡ ἑξῆς σειρά· $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots$ κτ. ἐπ' ἄπειρον· καὶ ἐξ αὐτῆς ἡ καθόλου αὕτη

$$\frac{\alpha}{6(6+\delta)} + \frac{\alpha}{(6+\delta)(6+2\delta)} + \frac{\alpha}{(6+2\delta)(6+3\delta)} +$$

$$\frac{\alpha}{(6+3\delta)(6+4\delta)} + \frac{\alpha}{(6+4\delta)(6+\nu\delta)}$$ · τέλος λαβόντες τὸ γενικὸν κεφάλαιον $\frac{A\nu}{B+\Gamma\nu}$ καὶ θέντες $\nu = 1$ εὗρον τὸ κεφάλαιον ἑνὸς ὅρου $\frac{A}{B+\Gamma} = \frac{\alpha}{6(6+\delta)} \ldots$ Α· θέντες δὲ καὶ $\nu = 2$ εὗρον $\frac{2A}{B+2\Gamma} = \frac{\alpha}{6(6+\delta)} + \frac{\alpha}{(6+\delta)(6+2\delta)} \ldots$ Β· θέντες τέλος καὶ $\nu = 3$ εὗρον $\frac{3A}{B+3\Gamma} = \frac{\alpha}{6(6+\delta)} + \frac{\alpha}{(6+\delta)(6+2\delta)} +$ $\frac{\alpha}{(6+2\delta)(6+3\delta)} + \ldots$ Γ. Καὶ ἐκ τῶν τριῶν τούτων ἐξισώσεων διώρισαν εἰς τὸ κεφάλαιον $\frac{A\nu}{B+\Gamma\nu}$ τὰ ἄγνωστα Α, Β, Γ ὀρθῶς τὰς ἐξισώσεις μεθοδεύσαντες.

§. 722. Καθόλου δυνάμεθα μὲν συνεργασίαν τῆς ν ποσότητος ὡς τὸ κεφάλαιον σειρᾶς τινος ἐκλαβεῖν, καὶ ἀπ' αὐτῆς εὑρεῖν τὸν γενικὸν ὅρον, ἀφ' οὗ εἰς τὴν συνεργασίαν θῶμεν $\nu - 1$ ἀντὶ ν, καὶ τοῦτον τὸν τύπον ἀπ' ἐκείνης ἀφαιρῶμεν (§. 721) διότι τὸ λεῖψανον τοῦτο εἶναι ὁ γενικὸς ὅρος· ὁ δὲ γενικὸς οὗτος ὅρος πρέπει νὰ εἶναι ἴσος τῷ κεφαλαίῳ ἐὰν τὸ $\nu = 1$ διορίσωμεν, ὡς ἀνωτέρω ἦν ὁ μὲν γενικὸς ὅρος $\tau = \frac{AB}{(B+\Gamma\nu)(B+\Gamma(\nu-1))}$ τὸ δὲ κεφαλαιον $K = \frac{A\nu}{B+\Gamma\nu}$. ἐὰν δὲ $\nu = 1$ θῶμεν ἔςαι $\frac{A\nu}{B+\Gamma\nu} = \frac{AB}{(B+\Gamma\nu)(B+\Gamma(\nu-1))}$· ἔτι ἐὰν δοθῇ ἡ συνεργασία $K = (A + B\nu + \Gamma\nu^2)\Delta^\nu$, ὡς κεφάλαιον σειρᾶς τινος, εὑρίσκομεν τὸν γενικὸν ὅρον ἐὰν εἰς αὐτὴν $\nu - 1$ ἀντὶ ν θῶμεν $(A+B(\nu-1)+\Gamma(\nu-1)^2)\Delta^{\nu-3}$ καὶ ταύτην ἀπ' ἐκείνης ἀφέλωμεν, ἔςαι $\tau = (A+B\nu+\Gamma\nu^2)\Delta^\nu - (A+B(\nu-1)+\Gamma(\nu-1)^2)\Delta^{\nu-1}$ θῶμεν ἤδη $\nu = 1$ καὶ εἰς τὸ κεφάλαιον, καὶ εἰς τὸν γενικὸν ὅρον, καὶ εὑρίσκομεν.

$K = (A + B + \Gamma)\Delta$ καὶ $\tau = (A + B + \Gamma)\Delta - A$· ὅθεν κρίνομεν ὅτι ἡ συνεργασία $(A+B\nu+\Gamma\nu^2)\Delta^\nu - A$, εἶναι ἐπιτηδεία νὰ ληφθῇ ἀντὶ τοῦ ἐσχάτου ὅρου σειρῶν τινῶν· καὶ οὐχὶ ἡ ἄνω $(A+B\nu+\Gamma\nu^2)\Delta^\nu$ διότι τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ γενικὸς ὅρος δὲν εὑρέθη ὁ αὐτὸς, ὅταν θῶμεν $\nu - 1$ ἀντὶ ν.

§. 723. Δίδονται καὶ ἕτεραι σειραὶ, ὧν τὸ κεφάλαιον εὑρεῖν ἡ ἄλγεβρα μέχρι τοῦδε οὐκ ἠδυνήθη, ὡς $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \ldots$ καὶ γενικῶς

$$\frac{\alpha}{\beta(\beta+\delta)} + \frac{\alpha}{(\beta+2\delta)(\beta+3\delta)} + \frac{\alpha}{(\beta+4\delta)(\beta+5\delta)} + \ldots$$

Κυρίως δὲ εἶναι ὅλαι αἱ σειραὶ τοιαῦται ἐκεῖναι, ὧν ὁ παρόγων τοῦ παρονομαςοῦ τοῦ ἑπομένου ὅρου δὲν ἄρχεται ἀπὸ τοῦ παρονομαςοῦ τοῦ ἐγγὺς προηγουμένου ὅρου· εἰς τὰ προηγούμενα εἴχομεν σειρὰν τοιαύτην λ': $2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots$ κτ. $= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \ldots$ καὶ διὰ νὰ ἐπιβραχυνθῇ τάχιον μετηλλάξαμεν αὐτὴν (§. 698.)

$$λ': 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right)$$ ὥςε

ἐὰν 8 ἢ 9 ὅρους αὐτῆς συνάψωμεν, εὑρίσκομεν αὐτὴν ὡς ἔγγιςα τῆς ἀληθείας, ὁπου μόλις ἡ ἀπάτη εἶναι μιλλιοςημόριον ἕν.

§. 7-4. Ἤδη εἴμεθα ἱκανοὶ νὰ εὕρωμεν τοὺς ὅρους τοὺς μεταξὺ μιᾶς ἀγνώςου σειρᾶς, ὅταν ὅροι τινὲς αὐτῆς μόνον δοθῶσι, καὶ ἡμεῖς ἀγνοοῦμεν κατὰ τίνας λόγους ἡ σειρὰ ἀπαρτίζεται, δηλ. ἀπὸ μιᾶς σειρᾶς μᾶς δίδονται ὅροι πέντε ὁ εἰκοςὸς, τριακοςὸς, τεσσαρακοςὸς, καὶ ὁ πεντηκοςὸς, καὶ ἑξηκοςὸς· καὶ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τοὺς μεταξὺ ὅρους αὐτῆς τῆς σειρᾶς· καὶ ἄς ζητηθῇ τοῦτο εἰς τὰς βολὰς τῶν κανονίων· δηλ. εἰς πείρας τινας ἔγινε γνωςὸν, ὅτι διὰ τοῦ αὐτοῦ κανονίου, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ὕψει τῆς γωνίας μὲ 20 τετράδραχμα κόνεως πυρίτιδος, εὕρηται τὸ μῆκος τῆς βολῆς ὀργυιὰς = 80· καὶ μὲ 30, ὀργυιὰς = 250· καὶ μὲ 40, ὀργυιὰς = 420· καὶ μὲ 50, ὀργυιὰς = 550· καὶ μὲ 60, ὀργυιὰς = 650· ζητεῖται λοιπὸν πόσων ὀργυιῶν ἤθελεν εἶναι τὸ μῆκος τῶν βολῶν μὲ τετράδραχμα 21, 22, 23 ... μέχρι τῶν 60 τετραδράχμων; ἐκ τούτου ἠξεύρομεν μόνον, ὅτι ὅσῳ αὔξει ἡ πυρίτις κόνις, ἐν τῇ αὐτῇ γωνίᾳ καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος, αὔξει καὶ τὸ μῆκος τῆς σειρᾶς, καὶ ἡ σειρὰ εἶναι αὔξουσα, ἀφ' ἧς οὔτε τοὺς νόμους, καθ' οὓς αὐτὴ ἀπαρτίζεται, οὔτε ἄλλο τι ἠξεύρομεν, εἰμὴ τοὺς πέντε δεδομένους ὅρους, τὸν 20,30, 40,50, καὶ 60.

Λάβωμεν ἤδη εἰς ν τετράδραχμα τὸ μῆκος $K = A\nu + B\nu^2 + \Gamma\nu^3 + \Delta\nu^4 + E\nu^5$. διὰ νὰ διορίσωμεν δὲ τοὺς ἀγνώστους συνεργοὺς A, B, Γ, κτ. θῶμεν $\nu=20$, καὶ ἔσται $K=80$· ἐὰν δὲ $\nu=30$, ἔσται $K=250$· ὁμοίως ἐὰν $\nu=40$, $K=420$· ἐὰν δὲ καὶ $\nu=60$, $K=650$· ἂς πολλαπλασιασθῇ ἡ ὑποτεθεῖσα σειρὰ μὲ $\nu=20$· μὲ $\nu=30$· μὲ $\nu=40$· μὲ $\nu=50$ καὶ μὲ $\nu=60$, καὶ εὑρίσκεται,

$$80=20A+400B+8000\Gamma+160000\Delta+3200000E$$
$$250=30A+900B+27000\Gamma+810000\Delta+24300000E$$
$$420=40A+1600B+64000\Gamma+2560000\Delta+102400000E$$
$$550=50A+2500B+125000\Gamma+6250000\Delta+312500000E$$
$$650=60A+3600B+216000\Gamma+12960000\Delta+777600000E.$$

Ἐκ τούτων δὲ τῶν πέντε ἐξισώσεων ὀρθῶς ἐπιλογιζομένων εὑρίσκομεν $A=\frac{-5120000}{480000}$, $B=\frac{418000}{480000}$, $\Gamma=\frac{-1700}{480000}$, $\Delta=\frac{-100}{480000}$, $E=\frac{1}{480000}$· ἐὰν δ' εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν ἀντὶ A, B, Γ κτ. τὰ ἴσα εὑρεθέντα θῶμεν, εὑρίσκομεν γενικῶς εἰς ν τετράδραχμα κόνεως τὸ μῆκος τῆς βολῆς κατὰ τὸν ἑξῆς τύπον

$$K=\frac{-5120000\nu+418000\nu^2-1700\nu^3-100\nu^4+\nu^5}{480000}=$$
$$\frac{(418000\nu^2+\nu^5)-(5120000\nu+1700\nu^3+100\nu^4)}{480000}\text{· διότι}$$

ἐὰν εἰς αὐτὸν τὸν τύπον θῶμεν $\nu = 20, 30, 40, 50, 60$, εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς βολῆς. ὡς ἡ πεῖρα ἔδειξεν· ἄρα τὸ ἀνάλογον μῆκος τῆς βολῆς εὑρίσκομεν, ἐὰν καὶ $\nu = 21, 22, 23, 24, 25$, μέχρι τοῦ $\nu = 59$ θῶμεν.

§. 725. Ἐνταῦθα καὶ ὁ τόπος τῆς ἀλγεβραϊκῆς παρενθέσεως· παρένθεσιν Ἀλγεβραϊκὴν καλῶ ἓν εἶδος ἐπιλογισμοῦ, καθ' ὃ μεταξὺ δύο ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς σειρᾶς ὅρόν τινα παρενείρομεν, ὡς κατωτέρω ἐπὶ τῶν λογαρίθμων γενήσεται φανερόν. Εἰς τοῦτο λοιπὸν ληφθήτω σειρά τις ὑψηλοτέρας τάξεως, καὶ εὑρεθήτωσαν αἱ διαφοραὶ αὐτῆς πρώτη, δευτέρα, τρίτη κτ. αἵτινες εἰς ἀριθμητικὴν σειρὰν κατωτέρας παρίςανται τάξεως (§. 546).

I II III IV V VI VII VIII IX X
A Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z ἀριθμητικὴ
5 15 35 70 126 210 330 495 714 1001 1365 σειρά.
I II III IV V VI VII VIII IX
ΔZ ΔZ ΔZ ΔZ ΔZ ΔZ ΔZ ΔZ ΔZ ΔZ α. διαφορά.
10 20 35 56 84 120 165 220 286 364
I II III IV V VI VII VIII
Δ^2Z Δ^2Z Δ^2Z Δ^2Z Δ^2Z Δ^2Z Δ^2Z Δ^2Z Δ^2Z β'. διαφορά.
10 15 21 28 36 45 55 66 78
I II III IV V VI VII
Δ^3Z Δ^3Z Δ^3Z Δ^3Z Δ^3Z Δ^3Z Δ^3Z Δ^3Z γ'. διαφορά.
5 6 7 8 9 10 11 12
I II III IV V VI
Δ^4Z Δ^4Z Δ^4Z Δ^4Z Δ^4Z Δ^4Z Δ^4Z δ'. διαφορά.
1 1 1 1 1 1 1

Εἰς αὐτὴν τὴν ἔκθεσιν τὸ μὲν γράμμα Z παρίςανει τοὺς ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς ὁμοῦ μὲ τοὺς λατινικοὺς χαρακτῆρας· τὸ δὲ Δ τὴν πρώτην διαφοράν, τὸ δὲ Δ^2 τὴν δευτέραν· τὸ Δ^3 τὴν τρίτην, καὶ τὸ Δ^4 τὴν τετάρτην κτ.

Ἐὰν ὅμως τὸν ὅρον, τὸν ὁποῖον νὰ παρενείρωμεν θέλομεν, χ καλέσωμεν, ἔςαι ὁ ὅρος οὗτος κατὰ τὸν τύπον τὸν ἑξῆς

$$\chi = Z + \frac{\nu}{\mu}\Delta Z - \frac{\nu(\mu-\nu)}{2\mu^2}\Delta^2 Z + \frac{\nu(\mu-\nu)(2\mu-\nu)}{2.\ \ 3\mu^3} + \frac{\nu(\mu-\nu)(2\mu-\nu)(3\mu-\nu)}{2.\ 3.\ \ 4\mu^4}\Delta^3 Z \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad B$$

Πρὶν ὅμως τὴν εὕρεσιν αὐτοῦ τοῦ τύπου δείξομεν λάβωμεν πρότερον ἓν παράδειγμα διὰ νὰ γένωμεν καὶ εἰς τὰ λοιπὰ σαφέςεροι· ἔςω ὅτι ἔχει τις τοὺς λογαρίθμους ἐν ἑπτὰ δεκαδικοῖς χαρακτῆρσι μέχρι μόνου τῶν 100 καὶ πλέον οὔ, καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ 94,63· διὰ τῆς παρενθέσεως, μὴ εἰδότες πλέον τὰς ἰδιότητας τῶν λογαρίθμων· τοῦτον ἄλλως δὲν εὑρίσκομεν, εἰμὴ διὰ τοῦ ἀνωτέρου τύπου· ἐπειδὴ δὲ οἱ λογάριθμοι ἐν σειρᾷ ἀριθμητικῇ, εὕρωμεν τὴν διαφορὰν τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 94,95,96, 97,98, ἕως οὗ περαιτέρω διαφορὰν δὲν εὑρίσκομεν· διότε

	ΔZ	$\Delta^2 Z$	$\Delta^3 Z$	$\Delta^4 Z$
λ: 94 = Z λοιπόν.				
λ: 94 = 9731279	45957	481	10	
λ: 95 = 9777236	45476	471		0
λ: 96 = 9822712	45005	461	10	
λ: 97 = 9867717	44544		σχεδόν·	
λ: 98 = 9912261				

Καὶ ἀπὸ τούτων ἐγνώσθησαν οἱ ἑξῆς ὅροι $Z = 9731279$

$\Delta Z = 45957 \cdot \Delta^2 Z = -481,\ \Delta^3 Z = 10 \cdot \Delta^4 Z = 0$ καὶ $\frac{\nu}{\mu} =$ 0,63. δηλ: $\nu = 0,63$ καὶ $\mu = 100$· ἄρα εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον χ, ἐὰν εἰς τὴν ἄνω σειρὰν θῶμεν τὰ εὑρεθέντα οὕτω.

$$x = 9731279 + 0{,}63 \times 45957 - \frac{63\,(100-63)}{2\,(100)^2} \times 481 + \frac{63\,(100-63)\,(2.100-63)}{2.3\,(100)^3} . 10 = 9731279 +$$

$0{,}63.\ 45957 + 0{,}116.\ 481 + 0{,}05.\ 10 = 1{,}9760288.$ ὁ λογάριθμος ἄρα $94{,}63 = 1{,}9760288$· διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ἤδη τὸν ἄνω ληφθέντα τύπον β, πρέπει ἀπὸ τῶν διαφορῶν τῆς ἀνωτέρω ἀριθμητικῆς σειρᾶς (A) νὰ εὕρωμεν τὰς ἑξῆς ἐξισώσεις·

$\Delta Z = \overset{\text{I}}{Z} - Z.\ \ \Delta\overset{\text{I}}{Z} = \overset{\text{II}}{Z} - \overset{\text{I}}{Z}.\ \ \Delta\overset{\text{II}}{Z} = \overset{\text{III}}{Z} - \overset{\text{II}}{Z}.\ \ \Delta\overset{\text{III}}{Z} = \overset{\text{IV}}{Z} - \overset{\text{III}}{Z}.$

$\Delta^2 Z = \Delta\overset{\text{I}}{Z} - \Delta Z.\ \Delta^2\overset{\text{I}}{Z} = \Delta\overset{\text{II}}{Z} - \Delta\overset{\text{I}}{Z}.\ \Delta^2\overset{\text{II}}{Z} = \Delta\overset{\text{III}}{Z} - \Delta\overset{\text{II}}{Z}.\ \Delta^2\overset{\text{III}}{Z} = \Delta\overset{\text{IV}}{Z} - \Delta\overset{\text{III}}{Z}$

$\Delta^3 Z = \Delta^2\overset{\text{I}}{Z} - \Delta^2 Z.\ \Delta^3\overset{\text{I}}{Z} = \Delta^2\overset{\text{II}}{Z} - \Delta^2\overset{\text{I}}{Z}.$ . . . .

$\Delta^4 Z = \Delta^3\overset{\text{I}}{Z} - \Delta^3 Z.\ \ \Delta^4\overset{\text{I}}{Z} = \Delta^3\overset{\text{II}}{Z} - \Delta^3\overset{\text{I}}{Z}.$ . . . .

$\Delta^5 Z = \Delta^4\overset{\text{I}}{Z} - \Delta^4 Z.$ . . . .

Τὸ πιςὸν τούτων δείκνυται ἀπὸ τῆς σειρᾶς A· πλὴν πρέπει ἐξ αὐτῶν νὰ διορίσωμεν τὰς τιμὰς Z, $\overset{\text{I}}{Z}$, $\overset{\text{II}}{Z}$, $\overset{\text{III}}{Z}$ μόνον διὰ τοῦ Z, καὶ ΔZ, $\Delta^2 Z$, $\Delta^3 Z$. κτ.

1 Ἐπειδὴ ἄνω $\Delta Z = \overset{\text{I}}{Z} - Z$ ἔσται καὶ $\overset{\text{I}}{Z} = Z + \Delta Z$ ..α'.

2 Δεύτερον ἐπειδὴ $\Delta\overset{\text{I}}{Z} = \overset{\text{II}}{Z} - Z$ καὶ $\overset{\text{II}}{Z} = \overset{\text{I}}{Z} + \Delta\overset{\text{I}}{Z}$. ἄρα καὶ $\overset{\text{II}}{Z} = Z + \Delta Z + \Delta\overset{\text{I}}{Z}$. ἀλλ' ὅμως $\Delta Z = \Delta\overset{\text{I}}{Z} - \Delta Z$ ἤτοι $\Delta\overset{\text{I}}{Z} = \Delta Z + \Delta^2 Z$. ἄρα ἐὰν θῶμεν εἰς τὴν $\overset{\text{II}}{Z} = Z + \Delta Z + \Delta\overset{\text{I}}{Z}$ τὸ ἴσον αὐτῇ $\Delta\overset{\text{I}}{Z}$ ἔσται $\overset{\text{II}}{Z} = Z + \Delta Z + \Delta Z + \Delta^2 Z = Z + 2\Delta Z + \Delta^2 Z$ ..β'

3 Τρίτον $\Delta\overset{II}{Z}=\overset{III}{Z}-\overset{II}{Z}$ καὶ $\overset{III}{Z}=\overset{II}{Z}+\Delta\overset{II}{Z}=Z+2\Delta Z+\Delta\overset{II}{Z}$.
δια νὰ διορίσωμεν δὲ καὶ τὰ $\Delta\overset{II}{Z}$ εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν, οὕτως ἐπιχειροῦμεν· ἣν ἀνωτέρω $\Delta^2\overset{I}{Z}=\Delta\overset{II}{Z}-\Delta\overset{I}{Z}$ καὶ ἐπομένως $\Delta\overset{II}{Z}=\Delta\overset{I}{Z}+\Delta^2\overset{I}{Z}$· ἀλλ' εἰς τὸ δεύτερον εὕρομεν $\Delta\overset{I}{Z}=\Delta Z+\Delta^2 Z$· καὶ $\Delta^2\overset{I}{Z}=\Delta^2 Z+\Delta^3 Z$· ἄρα $\Delta\overset{II}{Z}=\Delta Z+\Delta^2 Z+\Delta^2 Z+\Delta^3 Z=\Delta Z+2\Delta^2 Z+\Delta^3 Z$· θῶμεν τοῦτο ἀντὶ $\Delta\overset{II}{Z}$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\overset{III}{Z}=Z+2\Delta Z+\Delta^2 Z+\Delta\overset{II}{Z}$ καὶ εὑρίσκομεν
$\overset{III}{Z}=Z+3\Delta Z+3\Delta^2 Z+\Delta^3 Z$ . . . . γʹ.

4 Τέταρτον $\Delta\overset{III}{Z}=\overset{IV}{Z}-\overset{III}{Z}$ καὶ $\overset{IV}{Z}=\overset{III}{Z}+\Delta\overset{III}{Z}=Z+3\Delta Z+3\Delta^2 Z+\Delta^3 Z+\Delta\overset{III}{Z}$· λείπεται καὶ εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν νὰ διορίσωμεν $\Delta\overset{III}{Z}$· εἶναι ὅμως ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως $\Delta^2\overset{II}{Z}=\Delta\overset{III}{Z}-\Delta\overset{II}{Z}$. $\Delta\overset{III}{Z}=\Delta\overset{II}{Z}+\Delta^2\overset{II}{Z}$· ἀλλ' εἰς τὸ τρίτον εὕρομεν $\Delta\overset{II}{Z}=\Delta Z+2\Delta Z+\Delta^3 Z$· ἄρα $\Delta\overset{III}{Z}=\Delta Z+2\Delta^2 Z+\Delta^3 Z+\Delta^2\overset{II}{Z}$· διορίσωμεν ἤδη καὶ $\Delta^2\overset{II}{Z}$, διότι ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως $\Delta^3\overset{I}{Z}=\Delta^2\overset{II}{Z}-\Delta^2\overset{I}{Z}$ εὑρίσκομεν $\Delta^2\overset{II}{Z}=\Delta^2\overset{I}{Z}+\Delta^3\overset{I}{Z}$· καὶ εἰς μὲν τὸ τρίτον εὕρηται $\Delta^2\overset{I}{Z}=\Delta^2 Z+\Delta^3 Z$ ἄρα $\Delta^2\overset{II}{Z}=\Delta^2 Z+\Delta^3 Z+\Delta^3\overset{I}{Z}$· ἀπὸ δὲ τῆς ἐξισώσεως $\Delta^4 Z=\Delta^3\overset{I}{Z}-\Delta^3 Z$ εὑρίσκομεν $\Delta^3\overset{I}{Z}=\Delta^4 Z+\Delta^4 Z$· καὶ ἐπομένως $\Delta^2\overset{II}{Z}=\Delta^2 Z+\Delta^3 Z+\Delta^3 Z+\Delta^4 Z=$

$\Delta^2 Z + 2\Delta^3 Z + \Delta^4 Z$· ἐὰν τοίνυν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\Delta \overset{III}{Z} = \Delta Z + 2\Delta^2 Z + \Delta^3 \overset{II}{Z} + \Delta^2 Z$ θῶμεν ἀντὶ $\Delta^2 \overset{II}{Z}$ τὸ ἴσον εὑρεθὲν, ἔσται.

$\Delta \overset{III}{Z} = \Delta Z + 3\Delta^2 Z + 3\Delta^3 Z + \Delta^4 Z$· καὶ τέλος ἀντὶ $\Delta \overset{III}{Z}$· τοῦτο τὸ ἴσον ἐὰν θῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\overset{IV}{Z} = Z + 3\Delta Z + 3\Delta^2 Z + \Delta^3 Z + \Delta \overset{III}{Z}$ εὑρίσκεται $\overset{IV}{Z} = Z + 4\Delta Z + 6\Delta^2 Z + 4\Delta^3 Z + \Delta^4 Z$. . . . . δ'

Ὅθεν εὑρέθησαν, α', β', γ', δ'. κτ. οὕτω.

$\overset{I}{Z} = Z + \Delta Z.$

$\overset{II}{Z} = Z + 2\Delta Z + \Delta^2 Z.$

$\overset{III}{Z} = Z + 3\Delta Z + 3\Delta^2 Z + \Delta^3 Z.$

$\overset{IV}{Z} = Z + 4\Delta Z + 6\Delta^2 Z + 4\Delta^3 Z + \Delta^4 Z$ ἄρα καὶ

$\overset{V}{Z} = Z + 5\Delta Z + 10\Delta^2 Z + 10\Delta^3 Z + 5\Delta^4 Z + \Delta^5 Z.$

Καὶ φανερὸν, ὅτι οἱ συνεργοὶ ἐκτυλίονται καὶ ἐνταῦθα ὡς καὶ οἱ συνεργοὶ τοῦ διωνύμου· ὅθεν ἐὰν ζητηθῇ ὁ ὅρος $\overset{\sigma}{Z}$ ἔσται.

$$\overset{\sigma}{Z} = Z + \sigma\Delta Z + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}\Delta^2 Z + \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)}{2.3}\Delta^3 Z + \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)(\sigma-3)}{2.3.4}\Delta^4 Z \ldots .$$

Θῶμεν εἰς αὐτὴν τὴν σειρὰν ἀντὶ σ τὸ κύριον κλάσμα

$\frac{\nu}{\mu}$ δηλ: τὸν ὅρον $Z^{\frac{\nu}{\mu}}$ τοῦ ζητουμένου, καὶ εὑρίσκομεν εἰς τὴν ἄνω σειρὰν τὸν ὅρον X ὁποῦ μεταξὺ τοῦ Z καὶ $\overset{I}{Z}$ παρενείρεται, ἐὰν καὶ τοῖς σημείοις + καὶ — προσέξωμεν οὕτω.

$$X=Z+\frac{\nu}{\mu}\Delta Z-\frac{\nu(\mu-\nu)}{2\mu^2}\Delta^2 Z+\frac{\nu(\mu-\nu)(2\mu-\nu)}{2.\,3\,\mu^3}\Delta^3 Z\pm\ldots$$

.. ὅτι τὸ κλάσμα μένει τὸ αὐτὸ, ἐὰν μεταβληθῶσι τὰ σημεῖα τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ $-\frac{13-3}{5}=\frac{3-13}{5}$.

§. 726. Ἐὰν ὅμως εἰς τὴν ἄνω σειρὰν ἀντὶ σ θῶμεν ν—1 εὑρίσκομεν καθόλου τὸν γενικὸν τύπον διὰ τὸν ὅρον T ἑκάστης σειρᾶς ἀριθμητικῆς ἀνωτέρω τάξεως οὕτω.

$$T=Z+(\nu-1)\Delta Z+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}\Delta^2 Z+$$
$$\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2.\,3}\Delta^3 Z+\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{2.\,3.\,4}\times$$

$\Delta^4 Z+\ldots$ καὶ δι' αὐτῆς τῆς σειρᾶς εὑρίσκομεν οἱονδήποτε ὅρον ἑκάστης σειρᾶς τῶν ἀνωτέρω τάξεων, ἐὰν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος $\alpha=Z$ καὶ αἱ διαφοραὶ ΔZ, $\Delta^2 Z$, $\Delta^3 Z$ κτ.

§. 727. Ἐὰν ἐπί τινος σειρᾶς τῶν ἀνωτέρω τάξεων $Z, \overset{II}{Z}, \overset{III}{Z}, \overset{IV}{Z}, \overset{V}{Z}, \overset{VI}{Z}, \overset{VII}{Z}$, κτ. καλέσωμεν $\overset{I}{K}$ τὸ κεφάλαιον τοῦ ἑνὸς ὅρου, $\overset{II}{K}$ τῶν δύο, $\overset{III}{K}$, τῶν τριῶν, $\overset{IV}{K}$ τῶν τεσσάρων, καὶ $\overset{V}{K}$ τῶν ν ὅρων $\overset{I}{K}=Z$ καὶ $\overset{II}{K}=Z+\overset{I}{Z}$· ἀντὶ δὲ τοῦ $\overset{I}{Z}$ θῶμεν τὸ ἴσον ἄνω εὑρεθὲν, ἔσται $\overset{II}{K}=Z+Z+\Delta Z=$

$2Z+\Delta Z$. ὁμοίως καὶ $\overset{III}{K} = Z + \overset{I}{Z} + \overset{II}{Z} = 2Z + \Delta Z + \overset{II}{Z}$ καὶ ἐὰν ἀντὶ $\overset{II}{Z}$ τὸ ἄνω εὑρεθὲν θῶμεν, ἔςαι $\overset{III}{K} = 3Z + 3\Delta Z + \Delta^2 Z$. καὶ ἑπομένως $\overset{IV}{K} = 4Z + 6\Delta Z + 4\Delta^2 Z + \Delta^3 Z$

καὶ $\overset{V}{K} = 5Z + 10\Delta Z + 10\Delta^2 Z + 5\Delta^3 Z + \Delta^4 Z$.

καὶ $\overset{\nu}{K} = \nu Z + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\Delta Z + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2.\,3}\Delta^2 Z. + \frac{\nu(\nu-1)\,(\nu-2)\,(\nu-3)}{2.\,3.\,4}\Delta^3 Z \ldots$ τύπος τῷ ὄντι χρήσιμος εἰς τὰς ἀνωτέρω τάξεις τῶν ἀριθμητικῶν σειρῶν.

§. 728. Ἐν τούτοις εὑρίσκομεν εὐκόλως καὶ τὸ κεφάλαιον τῆς μ δυνάμεως τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5 κτ. ἤτοι τὸ κεφάλαιον τῆς σειρᾶς

$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2$

ἢ τῆς $1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3$

ἢ τῆς $1^4,\ 2^4,\ 3^4,\ 4^4,\ 5^4$

καὶ τέλος $1^\mu,\ 2^\mu,\ 3^\mu,\ 4^\mu,\ 5^\mu$

ὅπου ὁ ἔσχατος ὅρος αὐτῆς $\tau = \nu^\mu$.

ἀλλ' εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον (§. 562) εὕρομεν γενικῶς

$$K = A\nu^{\mu+1} + B\nu^{\mu} + \Gamma\nu^{\mu-1} + \Delta\nu^{\mu-2} + E\nu^{\mu-3} + \ldots\ldots\ldots \text{A.}$$

Ἐὰν εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν ἀντὶ ν, ν—1 θῶμεν, εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον ν—1 ὅρων

$$K' = A(\nu-1)^{\mu+1} + B(\nu-1)^{\mu} + \Gamma(\nu-1)^{\mu-1} + \Delta(\nu-1)^{\mu-2} + \ldots \text{B.}$$

Ἐὰν δὲ τὴν ἐξίσωσιν B ἀπὸ τῆς A ἀφελῶμεν, ἀνάγκη νὰ ἐξέλθῃ ὁ ἔσχατος ὅρος ν^μ οὕτως $K - \overset{I}{K} = \nu^\mu$. ἄρα

$$\nu^{\mu}=A\nu^{\mu+1}+\beta\nu^{\mu}+\Gamma\nu^{\mu-1}+\Delta\nu^{\mu-2}+\ldots-A(\nu-1)^{\mu+1}-B(\nu-1)^{\mu}$$
$$-\Gamma(\nu-1)^{\mu-1}-\Delta(\nu-1)^{\mu-2}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;\Gamma$$

Ἄς ἐκτυλίσωμεν ἤδη τοὺς ὅρους $-A(\nu-1)^{\mu+1}$. καὶ $-B\times(\nu-1)^{\mu}$ — καὶ $-\Gamma(\nu-1)^{\mu-1}$. κτ. κατὰ τὸ διώνυμον οὕτω

$$-A(\nu-1)^{\mu+1}=-A\nu^{\mu+1}+A(\mu+1)\nu^{\mu}-A\frac{\mu(\mu+1)}{2}\nu^{\mu-1}+$$
$$A\frac{\mu(\mu+1)(\mu-1)}{2.\ 3}\nu^{\mu-2}-A\frac{(\mu+1)\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.\ 3\qquad 4}\nu^{\mu-3}+$$
$$\Delta\frac{(\mu+1)\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\nu^{\mu-4}$$

$$-B(\nu-1)^{\mu}=-B\nu^{\mu}+B\mu\nu^{\mu-1}-B\frac{\mu(\mu-1)}{2}\nu^{\mu-2}+$$
$$B\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.\ 3}\nu^{\mu-3}-B\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2.\ 3.\ 4}\nu^{\mu-4}.$$

$$-\Gamma(\nu-1)^{\mu-1}=-\Gamma\nu^{\mu-1}+\Gamma(\mu-1)\nu^{\mu-2}-\Gamma\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}\nu^{\mu-3}+$$
$$\Gamma\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2.\ 3}\nu^{\mu-4}$$

$$-\Delta(\nu-1)^{\mu-2}=-\Delta\nu^{\mu-2}+\Delta(\mu-2)\nu^{\mu-3}-\Delta\frac{(\mu-2)(\mu-3)}{2}\nu^{\mu-4}.$$

$$-E(\nu-1)^{\mu-3}=-E\nu^{\mu-3}+E(\mu-3)\nu^{\mu-4}+\ldots\ldots$$

$$-Z(\nu-1)^{\mu-4}=-Z\nu^{\mu-4}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ $-H(\nu-1)^{\mu-5}$ καὶ $-\Theta(\nu-1)^{\mu-6}$. κτ. ἐὰν δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν Γ θῶμεν ἀντὶ $-A(\nu-1)^{\mu+1}$. καὶ $-B(\nu-1)^{\mu}$ κτ.. τὰ ἴσα εὑρεθέντα, καὶ διατάξωμεν κατὰ τάξιν τὰς δυνάμεις τοῦ ν, καὶ φέρωμεν εἰς τὸ ἕτερον σκέλος ν^{μ}, ἐξέρχεται εἰς τὸ μηδενικὸν ἡ ἐξίσωσις, καὶ διορίζομεν τοὺς συνεργοὺς A, B, Γ κτ. οὕτω

$$0 = \left.\begin{matrix} A \\ -A \end{matrix}\right| \nu^{\mu+1} + \left.\begin{matrix} B \\ +A(\mu+1) \\ -1 \\ -B \end{matrix}\right| \nu^{\mu} + \left.\begin{matrix} \Gamma \\ -A\frac{(\mu+1)\mu}{2} \\ +B\mu \\ -\Gamma \end{matrix}\right| \nu^{\mu-1} + \left.\begin{matrix} \Delta \\ +A\frac{(\mu+1)\mu(\mu-1)}{2.3} \\ -B\frac{\mu(\mu-1)}{2} \\ +\Gamma(\mu-1) \\ -\Delta \end{matrix}\right| \nu^{\mu-2} +$$

$$+ \left.\begin{matrix} E \\ +B\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.3} \\ -\Gamma\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2} \\ +\Delta(\mu-2) \\ -E \end{matrix}\right| \nu^{\mu-3}$$

$$+ \left.\begin{matrix} Z \\ +A\frac{(\mu+1)\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2.3.4.5} \\ -B\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2.3.4} \\ +\Gamma\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2.3} \\ -\Delta\frac{(\mu-2)(\mu-3)}{2} \\ +E(\mu-3) \\ -Z \end{matrix}\right| \nu^{\mu-4}$$

Καὶ κατ' αὐτοὺς τοὺς νόμους διορίζομεν καὶ ἄλλους πολλοὺς ὅρους, πλὴν ἐκ τούτων εὑρίσκομεν $A - A = 0$ καὶ $B + A \times (\mu+1) - 1 - B = 0$ ἤτοι $A(\mu+1) = 1$· καὶ $A = \frac{1}{\mu+1} - 1 - B = 0$, ἤτοι $A(\mu+1) = 1$, καὶ $A = \frac{1}{\mu+1}$. ἔτι $\Gamma - A\frac{(\mu+1)\mu}{2} + B\mu - \Gamma = 0$ καὶ $B\mu = A\frac{\mu(\mu+1)}{2}$. καὶ $B = \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{\mu+1}{2}$. ὅ ἐστι $B = \frac{1}{2}$. καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκομεν $\Gamma = \frac{1}{6} \cdot \frac{\mu}{2}$. καὶ $\Delta = 0$. $E = -\frac{1}{30} \cdot \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.\ 3.\ 4}$, $Z = 0$, $H = \frac{1}{42} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$. καὶ $\Theta = 0$ κτ.

Ἐὰν δὲ τοὺς εὑρεθέντας συνεργοὺς θῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν A, γίνεται

$$K = \frac{1}{\mu+1}\nu^{\mu+1} + \tfrac{1}{2}\nu^{\mu} + \tfrac{1}{6} \cdot \frac{\mu}{2}\nu^{\mu-1} - \tfrac{1}{30} \cdot \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.3.4}\nu^{\mu-3} + \tfrac{1}{42} \cdot \frac{\mu(\mu-1)}{2}\ \frac{(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{3.4.5.6}\nu^{\mu-5}.\ \text{κτ.}$$

ὅμως ἐπειδὴ εὑρέθησαν οἱ συνεργοὶ ὅρων τινων τῆς σειρᾶς, εὐκόλως εὑρίσκομεν τοὺς ἑξῆς συνεργοὺς, ἐὰν ἀπὸ τοῦ τρίτου ὅρου τῆς σειρᾶς γράψωμεν ἀντὶ τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων $\frac{1}{6}, -\frac{1}{30} + \frac{1}{42}$ κτ. τοὺς χαρακτῆρας $A', B', \Gamma', \Delta', E'$ κτ.

$$K = \frac{1}{\mu+1}\nu^{\mu+1} + \tfrac{1}{2}\nu^{\mu} + A'.\frac{\mu}{2}\nu^{\mu-1} + B'\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.\ 3.\ 4}\nu^{\mu-3}$$

$$+ \Gamma'\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}\nu^{\mu-5} + \Delta' \times$$

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)(\mu-5)(\mu-6)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}\nu^{\mu-7}+$$

$$E'\frac{\mu(\mu-1)\ldots\ldots(\mu-8)}{2.\ 3\ldots\ldots\ldots 9.\ 10}\nu^{\mu-9}+Z'\frac{\mu(\mu-1)\ldots\ldots(\mu-10)}{2.\ 3\ldots\ldots\ldots 11.\ 12}\times$$

$+\nu^{\mu-11}$ ὅπου $A'=\frac{1}{6}$. $B'=-\frac{1}{30}$. $\Gamma=\frac{1}{42}$. ἐὰν δὲ Δ εὑρεῖν θέλωμεν, παρατηροῦμεν τὶς ἀριθμὸς πρέπει νὰ εἶναι ὁ ἐκθέτης τοῦ ν ὁ μ, ὥςε ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ ἕτερον μέρος ἀπ' αὐτοῦ νὰ μένῃ μονὰς δηλ: $\mu-7=1$, ἄρα $\mu=8$. ἐὰν δὲ καὶ $\nu=1$ θῶμεν, ἔςαι $K=1$ ἴσον τῷ πρώτῳ ὅρῳ τῆς ὀγδόης δυνάμεως τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· ἐπειδὴ δὲ τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου ὅρου εἶναι μονὰς, ἐὰν ἀντὶ μὲν K μονάδα θῶμεν, καὶ διορίσωμεν τὰ λοιπὰ τῆς σειρᾶς $A'=\frac{1}{6}$. $B'=-\frac{1}{30}$. $\Gamma=\frac{1}{42}=$. $\mu=8$ καὶ $\nu=1$ ἔςαι $1=\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}.4-\frac{1}{30}14+\frac{1}{42}.\frac{28}{3}+\Delta$. καὶ ἐξ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\Delta=-\frac{1}{30}$. εὑρίσκομεν ὁμοίως καὶ $E=\frac{5}{66}$· ἐὰν $\mu=10$ θῶμεν, καὶ ἀντὶ A', B', Γ', Δ', τὰ ἴσα καὶ $\nu=1$ καὶ $K=1$· ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ $Z=-\frac{691}{2730}$. ἐὰν τὰ ἴσα τῶν A', B', Γ', Δ', E', θῶμεν καὶ $\mu=12$, $\nu=1$, $K=1$ κτ. ὁ δὲ τύπος οὗτος εἰς πολλὰ χρήσιμος.

α'. Ἀπ' αὐτοῦ τοῦ γενικοῦ τύπου εὐκόλως ἤδη εὑρίσκομεν τὰ κεφάλαια τῶν δυναμικῶν σειρῶν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· διότι τὸ κεφάλαιον τῶν φυσικῶν τετραγώνων εὑρίσκεται, ἐὰν θῶμεν $\mu=2$ οὕτω $K=\frac{1}{3}\nu^3+\frac{1}{2}\nu^2+\frac{1}{6}\nu$. ὡς πρότερον (§. 565).

β'. Τὸ κεφάλαιον τῶν φυσικῶν κύβων ἐὰν $\mu=3$ θῶμεν $K=\frac{1}{4}\nu^4+\frac{1}{2}\nu^3+\frac{1}{4}\nu^2=\left(\frac{1}{2}\nu(\nu+1)^2\right)$ αὐτοῦ

γ'. Τὸ κεφάλαιον τῶν διτετραγώνων, ἐὰν $\mu=4$ θῶμεν $K=\frac{1}{5}\nu^5+\frac{1}{2}\nu^4+\frac{1}{3}\nu^3-\frac{1}{30}\nu$.

§. 729. Ἐὰν δ' εἰς αὐτὸν τὸν τύπον θῶμεν $\nu=\infty$ εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον $K = \frac{1}{\mu+1}\infty^{\mu+1}$ = τῷ κεφαλαίῳ ἀπείρων ὅρων τῆς μ δυνάμεως τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· ἐπειδὴ οἱ λοιποὶ ὅροι παρορῶνται, ὡς τάξεις καταδεέστεραι· ἄρα

$$K = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots\ldots\ \infty^2 = \tfrac{1}{3}\infty^3$$

ἔτι $K = 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\ldots\ldots\ \infty^3 = \tfrac{1}{4}\infty^4$

ἔτι $K = 1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\ldots\ldots\ \infty^4 = \tfrac{1}{5}\infty^5$

ἔτι $K = 1^5+2^5+3^5+4^5+5^5+\ldots\ldots\ \infty^5 = \tfrac{1}{6}\infty^6$

ἔτι $K = 1^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}+\ldots\ldots\ \infty^{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}}$

καὶ ἄλλας ὠφελείας πολλὰς εἰς τὴν ἀνάλυσιν παρέχει ἡμῖν ὁ τύπος αὐτός.

§. 730. Τέλος καὶ τὸ κεφάλαιον τῆς μ δυνάμεως ἑκάστης ἀριθμητικῆς σειρᾶς ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε εἰρημένων εὐκόλως εὑρίσκομεν· δηλ: ζητεῖται τὸ κεφάλαιον τῆς ἑξῆς γενικωτάτης σειρᾶς.

$$\alpha^\mu + (\alpha+\beta)^\mu + (\alpha+2\beta)^\mu + (\alpha+3\beta)^\mu + \ldots . Z^\mu \text{ καὶ } \tau = Z^\mu = (\alpha+(\nu-1)\beta)^\mu.$$

Ἐὰν ὅμως τὸ κεφάλαιον K καλέσωμεν συνήθως, ἔσαι

$$\overset{\mu}{K} = \frac{Z^{\mu+1}-\alpha^{\mu+1}}{(\mu+1)\beta} + \tfrac{1}{2}(Z^\mu-\alpha^\mu) + A\,\frac{\mu\beta}{2}(Z^{\mu-1}-\alpha^{\mu-1}) + B\times$$

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\beta^3}{2.\,3}(Z^{\mu-3}-\alpha^{\mu-3}) + \Gamma\times$$

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)\beta^5}{2.\,3.\,4.\,5.\,6}(Z^{\mu-5}-\alpha^{\mu-5}) + \Delta\times$$

$\frac{\mu(\mu-1)\ldots\ldots(\mu-6)\beta^7}{1.\,2.\,\ldots\ldots\ldots\,7.\,8}\left(\overset{\mu-7}{Z}-\overset{\mu-7}{\alpha}\right)$ καὶ οἱ συνεργοὶ A, B, Γ, Δ κτ. οὓς καὶ Βερνουλλικοὺς καλοῦσιν ἀπὸ τοῦ εὑρέτου, ἔχουσι τὰς αὐτὰς τιμὰς, ὡς ἀνωτέρω (§. 728) $A=\frac{1}{6}\cdot B=-\frac{1}{30}\cdot \Gamma=\frac{1}{42}\cdot \Delta=-\frac{1}{30}\cdot E=\frac{5}{66}\cdot$

$$Z=-\frac{691}{2730}\cdot H=\frac{7}{6}\cdot \Theta=-\frac{3617}{510}\text{ κτ.}$$

διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅμως αὐτὴν τὴν σειρὰν, πρέπει καλῶς εἰς τὰ ἑξῆς νὰ προσέξωμεν.

1) Ἐὰν τῆς ληφθείσης σειρᾶς τὸν μὲν πρῶτον ὅρον A καλέσωμεν, ἔσται $\alpha^\mu = A^\mu\cdot$ τὸν δὲ δεύτερον B, ἔσται $(\alpha+\beta)^\mu = (A'+\beta)^\mu\cdot$ καὶ τὸν τρίτον Γ, ἔσται $(\alpha+2\beta)^\mu = (\alpha+\beta+\beta)^\mu = (B+\beta)\cdot$ καὶ τὸν τέταρτον Δ, ἔσται $(\alpha+3\beta)^\mu = (\alpha+2\beta+\beta) = (\Gamma'+\beta)^\mu\cdot$ τὸν δὲ πέμπτον $(\alpha+1\beta)^\mu$, ὃν ἡμεῖς ἔσχατον ὅρον τῆς σειρᾶς ἐξελάβομεν Z· καὶ $(\alpha+4\beta)^\mu = Z^\mu$.

2) Ἐὰν αὐτοὺς τοὺς ὅρους κατὰ τὸ διώνυμον ἐκτυλίσωμεν (§. 336.), εὑρίσκομεν

$$\alpha^\mu = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, A^\mu$$

$$(\alpha+\beta)^\mu=(A'+\beta)^\mu=A'^\mu+\mu \overset{\mu-1}{A'}\beta+\tfrac{1}{2}\mu(\mu-1)\times \overset{\mu-2}{A'}\beta^2+\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)(\mu-2)\overset{\mu-3}{A'}\beta^3=B'\mu\times$$

$$(\alpha+2\beta)^\mu=(B'+\beta)^\mu=B'^\mu+\mu \overset{\mu-1}{B'}\beta+\tfrac{1}{2}\mu(\mu-1)\times \overset{\mu-2}{B'}\beta^2+\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)(\mu-2)\overset{\mu-3}{B'}\beta^3=\Gamma'^\mu\times$$

$$(\alpha+3\beta)^\mu=(\Gamma'+\beta)^\mu=(\Gamma'^\mu+\mu \overset{\mu-1}{\Gamma'}\beta+\tfrac{1}{2}\mu(\mu-1)\times \overset{\mu-2}{\Gamma'}\beta^2+\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)(\mu-2)\overset{\mu-3}{\Gamma'}\beta^3=\Delta'^\mu+$$

$$(\alpha + 4\beta)^{\mu} = (\Delta' + \beta)^{\mu} = \Delta'^{\mu} + \mu\,\Delta'^{\mu-1}\,\beta + \tfrac{1}{2}\mu(\mu-1)\times$$
$$\Delta'^{\mu-2}\,\beta^2 + \tfrac{1}{6}\,\mu\,(\mu-1)\,(\mu-2)\,\Delta'^{\mu-3}\,\beta^3 = Z^{\mu}$$

3) Ἐὰν δ' εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὴν ἐσχάτην, ἐν ᾗ τὸ Z^{μ}, ἀντὶ μὲν Δ'^{μ} θῶμεν τὴν ἴσην προηγουμένην ἔκφρασιν, καὶ ἐν αὐτῇ ἀντὶ Γ'^{μ} θῶμεν πάλιν τὴν ἴσην προηγουμένην ἔκφρασιν, καὶ ἐν αὐτῇ ἀντὶ B'^{μ} θῶμεν τὴν ἡγουμένην ἔκφρασιν, καὶ ἀντὶ A'^{μ} ἐν αὐτῇ θῶμεν α^{μ}, εὑρίσκομεν τὴν ἑξῆς ἐξίσωσιν

$$Z^{\mu} = \mu\,\Delta^{\mu-1}\,\beta + \tfrac{1}{2}\,\mu(\mu-1)\Delta'^{\mu-2}\,\beta^2 + \tfrac{1}{6}\,\mu(\mu-1)(\mu-2)\times$$
$$\Delta'^{\mu-3}\,B^3 + \ldots\ \mu\,\Gamma'^{\mu-1}\,\beta + \tfrac{1}{2}\,\mu\,(\mu-1)\,\Gamma'^{\mu-2}\,\beta^2 + \tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)\times$$
$$(\mu-2)\,\Gamma'^{\mu-3}\,\beta^3 + \ldots\ldots\ \mu\,B'^{\mu-1}\,\beta + \tfrac{1}{2}\,\mu\,(\mu-1)\,B'\beta^2 + \tfrac{1}{6}\mu\times$$
$$(\mu-1)\,(\mu-2)\,B'^{\mu-3}\,\beta^3 + \ldots\ldots\ \mu\,A'^{\mu-1}\,\beta + \tfrac{1}{2}\mu(\mu-1)\times$$
$$A'^{\mu-2}\,\beta^2 + \tfrac{1}{6}\,\mu\,(\mu-1)(\mu-2)\,A'^{\mu-3}\,\beta^5 + \ldots\ \alpha^{\mu}.$$

4) εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) θῶμεν ἤδη ἀντὶ μ, $\mu + 1$ καὶ εὑρίσκεται ἡ ἐξίσωσις.

$$Z^{\mu+1} = (\mu + 1)\,\Delta'^{\mu}\,\beta + \tfrac{1}{2}\,(\mu+1)\mu\Delta\,\beta^2 + \tfrac{1}{6}(\mu+1)\mu(\mu-1)\times$$
$$\Delta'^{\mu-2}\,\beta^3 + \ldots\ldots$$
$$+ (\mu+1)\,\Gamma'^{\mu}\,\beta + \tfrac{1}{2}(\mu+1)\,\mu\,\Gamma'^{\mu-1}\,\beta^2 + \tfrac{1}{6}\,(\mu+1)\,\mu\times$$
$$(\mu-1)\,\Gamma'^{\mu-2}\,\beta^3 + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ (\mu+1)\,B'^{\mu}\beta + \tfrac{1}{2}\,(\mu+1)\,\mu\,B'^{\mu-1}\,\beta^2 + \tfrac{1}{6}\,(\mu+1)\,\mu\times$$

$$(\mu-1)B'^{\mu-2}\beta^3+\ldots\ldots$$

$$+(\mu+1)A'^{\mu}\beta+\tfrac{1}{2}(\mu+1)\mu A'^{\mu-1}\beta^2+\tfrac{1}{6}(\mu+1)$$

$$\mu(\mu-1)A'^{\mu-2}\beta^3+\ldots\ldots$$

$$+\alpha^{\mu+1}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ἐὰν εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν φέρωμεν $\alpha^{\mu+1}$ εἰς τὸ ἕτερον σκέλος τῆς ἐξισώσεως, καὶ διὰ τοῦ $(\mu+1)\beta$ ἄμφω τὰ σκέλη διέλωμεν, ἐπειδὴ εἰς ὅλους τοὺς ὅρους $(\mu+1)\beta$ κοινὸς παράγων εὑρίσκεται, καὶ ὡς μηδὲν $Z^{\mu}-Z^{\mu}$ θῶμεν, γίνεται ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{Z^{\mu+1}-\alpha^{\mu+1}}{(\mu+1)\beta}=A'^{\mu}+B'^{\mu}+\Gamma'^{\mu}+\Delta'^{\mu}+Z^{\mu}-Z^{\mu}$$

$$+\tfrac{1}{2}\mu\beta\left(A'^{\mu-1}+B'^{\mu-1}+\Gamma'^{\mu-1}+\Delta'^{\mu-1}+Z^{\mu-1}-Z^{\mu-1}\right)$$

$$+\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)\beta^2\left(A'^{\mu-2}+B'^{\mu-2}+\Gamma'^{\mu-2}+\Delta'^{\mu-2}+Z^{\mu-2}-Z^{\mu-2}\right)$$

$$+\tfrac{1}{24}\mu(\mu-1)(\mu-2)\beta^3\left(A'^{\mu-3}+\ldots Z^{\mu-3}-Z^{\mu-3}\right)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5) Ἤδη θῶμεν τὸ κεφάλαιον τῶν Α′, Β′, Γ′, Δ′, Ζ′ ὑψουμένων εἰς τὴν μ δύναμιν $=K^{\mu}$. ὑψουμένων δὲ εἰς τὴν $\mu-1$ δύναμιν $=K^{\mu-1}$, ὑψουμένων δὲ εἰς τὴν $\mu-2$ δύναμιν $=K^{\mu-2}$, ὑψουμένων δ' εἰς τὴν $\mu-3$ δύναμιν $=K^{\mu-3}$, εὑρίσκεται ἡ ἐξίσωσις ἡ ἐν τῷ 4) οὕτω

$$\frac{Z^{\mu+1}-\alpha^{\mu+1}}{(\mu+1)\beta}=K^{\mu}-Z^{\mu}$$

$$+\tfrac{1}{2}\mu\beta K^{\mu-1}-\tfrac{1}{2}\mu\beta Z^{\mu-1}$$

$$+\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)\beta^{2}K^{\mu-2}-\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)\beta^{2}Z^{\mu-2}$$

$$+\tfrac{1}{42}\mu(\mu-1)(\mu-2)\beta^{3}K^{\mu-3}-\tfrac{1}{42}\mu(\mu-1)(\mu-2)$$

$$\beta^{3}Z^{\mu-3}$$

6) Ἐὰν δὲ τοὺς ὅρους τοὺς ἐν τῷ (5) ὅλους, πλὴν τοῦ K^{μ} εἰς τὸ ἕτερον τῆς ἐξισώσεως μέρους φέρωμεν, εὑρίσκομεν

$$K^{\mu}=\frac{Z^{\mu+1}-\alpha^{\mu-1}}{(\mu+1)\beta}+Z^{\mu}$$

$$+\tfrac{1}{2}\mu\beta Z^{\mu-1}-\tfrac{1}{2}\mu\beta K^{\mu-1}$$

$$+\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)\beta^{2}Z^{\mu-2}-\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)\beta^{2}K^{\mu-2}$$

$$+\tfrac{1}{42}\mu(\mu-1)(\mu-2)\beta^{3}Z^{\mu-3}-\tfrac{1}{42}\mu(\mu-1)(\mu-2)\times$$

$$\beta^{3}K^{\mu-3}$$

$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;$ A.

7) Θῶμεν καὶ εἰς τὴν A ἐξίσωσιν ἀντὶ μ, $\mu-1$, καὶ εὑρίσκομεν

$$K^{\mu-1}=\frac{Z^{\mu}-\alpha^{\mu}}{\mu\beta}+Z^{\mu-1}$$

$$+\tfrac{1}{2}(\mu-1)\beta Z^{\mu-2} - \tfrac{1}{2}(\mu-1)\beta K^{\mu-2}$$

$$+\tfrac{1}{6}(\mu-1)(\mu-2)\beta^2 Z^{\mu-3} - \tfrac{1}{6}(\mu-1)(\mu-2)\times$$

$\beta^2 K^{\mu-3}$ κτ . . . . B

8) α'. Πολλαπλασιάσωμεν τὴν B ἐξίσωσιν μὲ $-\frac{1}{2}\times$ $\mu\beta$ οὕτω

$$-\tfrac{1}{2}\mu\beta K^{\mu-1} = -\tfrac{1}{2}(Z^{\mu}-a^{\mu}) - \tfrac{1}{2}\mu\beta Z^{\mu-1} -$$

$$\tfrac{1}{2}\mu(\mu-1)\beta^2 Z^{\mu-2} + \tfrac{1}{2}\mu(\mu-1)\beta^2 K^{\mu-2}$$

$$-\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)(\mu-2)\beta^3 Z^{\mu-3} + \tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)$$

$$(\mu-2)\beta 3 K^{\mu-3} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

β'. εἰς τὴν ἐξίσωσιν A ἀντὶ $-\frac{1}{2}\mu\beta K^{\mu-1}$ θῶμεν τὸ ἴσον αὐτῷ εὑρεθὲν οὕτω

$$K^{\mu} = \frac{Z^{\mu+1}-a^{\mu+1}}{(\mu+1)\beta} + Z^{\mu} - \tfrac{1}{2}(Z^{\mu}-a^{\mu}) + \tfrac{1}{2}\mu\beta Z^{\mu-1} - \tfrac{1}{2}\mu\beta Z^{\mu-1}$$

$$+\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)\beta^2 Z^{\mu-2} - \tfrac{1}{4}\mu(\mu-1)\beta^2 Z^{\mu-2}$$

$$-\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)\beta^2 K^{\mu-2} + \tfrac{1}{4}\mu(\mu-1)\beta^2 K^{\mu-2}$$

$$+\tfrac{1}{24}\mu(\mu-1)(\mu-2)\beta^3 Z^{\mu-3} - \frac{1}{2.6}\mu(\mu-1)\times$$

$$(\mu-2)\beta^3 Z^{\mu-3}$$

$$-\tfrac{1}{24}\mu(\mu-1)(\mu-2)\beta^3 K^{\mu-3} + \frac{1}{2.6}\mu(\mu-1)$$

$$(\mu-2)\beta^3 K^{\mu-3} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \Gamma$$

Ἐὰν δ' ἐνεργείᾳ τὴν ἀφαίρεσιν ποιήσωμεν, ἔσαι

$$Z - \tfrac{1}{2}(Z^{\mu} - \alpha^{\mu}) = \tfrac{2}{2} Z^{\mu} - \tfrac{1}{2} Z^{\mu} + \tfrac{1}{2}\alpha^{\mu} = \tfrac{1}{2}(Z^{\mu} + \alpha^{\mu}).$$

καὶ $\tfrac{1}{2}\mu \beta Z^{\mu-1} - \tfrac{1}{2}\mu\beta Z^{\mu-1} = 0$

καὶ $\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)\beta^2 Z^{\mu-2} - \tfrac{1}{4}\mu(\mu-1)\beta^2 Z^{\mu-2} = -\tfrac{1}{6}\dfrac{\mu(\mu-1)}{2}\times$

$\beta^2 Z^{\mu-2}$

καὶ $-\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)\beta^2 K^{\mu-2} + \tfrac{1}{4}\mu(\mu-1)\beta^2 K^{\mu-2} =$

$\tfrac{1}{6}\dfrac{\mu(\mu-1)}{2}\beta^2 K^{\mu-2}$.

καὶ $\tfrac{1}{42}\mu(\mu-1)(\mu-2)\beta^3 Z^{\mu-3} - \tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)(\mu-2)\beta^3\times$

$Z^{\mu-3} = -\tfrac{6}{7}\dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.\ 3}\beta^3 Z^{\mu-3}$

καὶ $-\tfrac{1}{42}\mu(\mu-1)(\mu-2)\beta^3 K + \tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)(\mu-2)\beta^3\times$

$K^{\mu-3} = \tfrac{6}{7}\dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.\ 3}\beta^3 K^{\mu-3}$

ἄρα εὑρίσκομεν $K^{\mu} = \dfrac{Z^{\mu+1} - \alpha^{\mu+1}}{(\mu+1)\beta} + \tfrac{1}{2}(Z^{\mu} + \alpha^{\mu})$

$$-\tfrac{1}{6}\frac{\mu(\mu-1)}{2}\beta^2 Z^{\mu-2} + \tfrac{1}{6}\frac{\mu(\mu-1)}{2}\beta^2 K^{\mu-2}$$

$$-\tfrac{6}{7}\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.\ 3}\beta^3 Z^{\mu-3} +$$

$$\tfrac{6}{7}\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.\ 3}\beta^3 K^{\mu-3} \text{ κτ.}$$

Ἐὰν δὲ καὶ πάλιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν 6) ἀντὶ μ, $\mu-2$ θῶμεν, καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν Γ ἀντὶ $K^{\mu-2}$ τοῦτο θῶμεν, καὶ ἔτι ἀντὶ μ, $\mu-3$, καὶ ἔτι ἀντὶ μ, $\mu-4$, καὶ τὰ ἴσα ἀντικαθιςῶμεν, ἀπαλείφεται μὲν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $K^{\mu-2}$, $K^{\mu-3}$ $K^{\mu-4}$, εὑρίσκεται δὲ ἡ ἄνω προτεθεῖσα ἐξίσωσις,

$$K^{\mu}=\frac{Z^{\mu+1}-a^{\mu+1}}{(\mu+1)\beta}+\tfrac{1}{2}(Z^{\mu}+a^{\mu})+\tfrac{1}{6}\,\frac{\mu\beta}{2}\,(Z^{\mu-1}-a^{\mu-1})-$$

$$\tfrac{1}{30}\cdot\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.\ 3.\ 4}\beta^{3}(Z^{\mu-3}-a^{\mu-3})+$$

$$\tfrac{1}{42}\cdot\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}\beta^{5}\left(Z^{\mu-5}-a^{\mu-5}\right)$$

$$-\tfrac{1}{30}\frac{\mu(\mu-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(\mu-6)}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 8}\beta^{7}\times$$

$$\left(Z^{\mu-7}-a^{\mu-7}\right)\ \text{κ. τ.}$$

Καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον ἑκάςης σειρᾶς ἀριθμητικῆς οἱαςδηποτοῦν δυνάμεως, ἐὰν μόνον ὁ πρῶτος καὶ ἔσχατος ὅρος γνωσθῇ, καὶ ἡ διαφορά·

§. 731. Ἐὰν δ' εἰς τὴν σειρὰν (§ 730) ἀποφατικὸν τὸ μ ληφθῇ, γίνεται ἡ σειρὰ $a^{-\mu}+(a+\beta)^{-\mu}+(a+2\beta)^{-\mu}+\ldots+$

$$Z^{-\mu}=\frac{1}{a^{\mu}}+\frac{1}{(a+\beta)^{\mu}}+\frac{1}{(a+2\beta)^{\mu}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{Z^{\mu}}.$$

Ἐὰν δὲ καὶ τὴν σειρὰν νοήσωμεν ἄπειρον, ἔςαι τῷ ὄντι $\frac{1}{Z^{\mu}}$ ἀπείρως ἐλάχιςον, καὶ ἑπομένως $\frac{1}{Z^{\mu}}=0$ (§ 661)

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ κεφάλαιον αὐτῆς τῆς σειρᾶς, πρέπει τὸν ἀνωτέρω τύπον νὰ λάβωμεν, καὶ μόνον τοὺς ἐκθέτας νὰ μεταβάλλωμεν κατὰ τὰ σημεῖα, ἤτοι.

$$K = \frac{1}{(\mu-1)\,\alpha^{\mu-1}\,\beta} + \frac{1}{2\,\alpha^{\mu}} + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{\mu\beta}{2\,\alpha^{\mu+1}} - \tfrac{1}{30}\cdot \times$$

$$\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{2.3.4.\,\alpha^{\mu+3}} + \tfrac{1}{42}\cdot\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6\,\alpha^{\mu+5}} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Διότι $\frac{1}{Z^{\mu-1}}$, $\frac{1}{Z^{\mu}}$, $\frac{1}{Z^{\mu+1}}$ κτ. ὡς ἀπείρως ἐλάχιστα ἀπαλείφονται· αὕτη δὲ ἡ σειρὰ φθίνει τάχιστα, ἐὰν α ληφθῇ ἀριθμὸς μείζων ἀρκετὰ τοῦ β, ὅπερ εὐκόλως γίνεται, ἐὰν μόνον τῆς σειρᾶς ἐνίους ὅρους συνάψωμεν διὰ μόνης τῆς προσθέσεως, τοὺς δὲ λοιποὺς κατὰ τὸν ἄνω τύπον εὕρωμεν, δηλ:

Δεδόσθω ἡ ἄπειρος σειρὰ $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{14^2} + \cdot\cdot\cdot\cdot$ καὶ ζητεῖται τὸ κεφάλαιον αὐτῆς· συνάπτομεν τὴν ἀρχὴν τοὺς πρώτους τέσσαρας ὅρους

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{64} = \tfrac{21}{64} + \tfrac{1}{36} =$$

$$\frac{21.36+64}{64.\,36} = \frac{21.\,9+16}{16.\,36} = \frac{205}{576} = 0,\ 355903\,\cdot$$

ἔπειτα διὰ τοῦ ἄνω τύπου εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον τῶν ἑξῆς ὅρων, ἐὰν θῶμεν $\alpha=10$· $\beta=2$· καὶ $\mu=2$· καὶ μόνον τέσσαρας ὅρους ἐκτυλίσωμεν οὕτω $\tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{200} +$,

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{2000}-\frac{1}{30}\cdot\frac{8}{100000}=\frac{600000}{12000000}+\frac{60000}{12000000}+\frac{4000}{12000000}-\frac{32}{12000000}=\frac{664000}{12000000}-\frac{32}{12000000}=$$

$$\frac{663968}{12000000}=0{,}05533$$ · ἤτοι εὑρίσκεται τὸ κεφάλαιον τῶν ἀπείρων ὅρων ἀπὸ τοῦ $\frac{1}{10^2}$ καὶ ἐπέκεινα $=0{,}055330$, εὕρηται δὲ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν προηγουμένων τεσσάρων ὅρων $=0{,}355903$, ἄρα τὸ κεφάλαιον αὐτῆς τῆς ἀπείρου σειρᾶς $=0{,}355903+0{,}055330=0{,}411—233$· φανερὸν, ὅτι δὲ αὐτοῦ τοῦ τύπου εὑρίσκομεν καὶ τὸ κεφάλαιον ὅρων διωρισμένων, δηλ: ἐὰν ζητηθῇ τὸ κεφάλαιον μόνον 100 ὅρων, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ κεφάλαιον ὅλης τῆς ἀπείρου σειρᾶς, ὡς πρότερον, ἔπειτα δὲ εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον τῆς σειρᾶς ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ἑκατοςοῦ ἑνὸς ὅρου, καὶ ἡ διαφορὰ τούτων τῶν δύο κεφαλαίων εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν 100 ὅρων.

Εἰς τοῦτο δὲ τὸ τμῆμα καὶ ἕτερα πλεῖςα περὶ συνεργασιῶν, σειρῶν καὶ ἄλλων γενικῶν τύπων ἀνάγονται· ἡμεῖς ὅμως ἐλάβομεν τὰ ἀναγκαιότερα, καὶ μάλιςα, ὅσα εἰς τὸ λοιπὸν μέρος τῆς μαθηματικῆς ἀπαιτοῦνται· εἰς ἰδιαίτερον ὅμως παράρτημα πλεῖςα καὶ τούτων ἀναπτύξομεν.

ΤΜΗΜΑ. Β'.

Περὶ Εὑρέσεως τῶν παραγόντων τοῦ μηδενικοῦ.

§. 732. Περὶ εὑρέσεως τῶν παραγόντων τοῦ μηδενικοῦ ἐπιγράφομεν αὐτὸ τὸ τμῆμα, ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ περιλαμβάνομεν ὅλην τὴν θεωρίαν ἐκείνων τῶν ἐξισώσεων, αἵτινες εὐκόλως λύονται, ἐὰν εἰς τὸ μηδενικὸν αὐτὰς φέρωμεν· διότι εἰς τὰ ἑξῆς θέλομεν μάθῃ, ὅτι φέρομεν ἐξισώσεις τινας εἰς τὸ μηδενικὸν, καὶ τὸ ἕτερον σκέλος λύεται εἰς παράγοντας, τὸ δὲ εἶναι μόνον τὸ μηδενικὸν αὐτὸ, καὶ ἐπειδὴ ἐμφιλοχωρεῖ μεταξὺ τῶν παραγόντων τούτων καὶ τοῦ μηδενικοῦ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος, καὶ ὅλοι οὗτοι οἱ παράγοντες εἶναι ἴσοι τῷ μηδενικῷ τούτῳ· τί κωλύει νὰ εἴπωμεν, ὅτι τοῦτ' αὐτὸ δύναται καὶ τὸ μηδενικὸν, ὅπερ καὶ οἱ ἴσοι τούτῳ παράγοντες· ἐπειδὴ ὅμως ἡ εὕρεσις τῶν παραγόντων τοῦ μηδενικοῦ κοινῶς λύσις τῶν ἀνωτέρων ἐξισώσεων λέγεται, ἄρα τὸ παρὸν τμῆμα μόνον εἰς τὰς ἐξισώσεις, οὐχὶ τοῦ πρώτου ἢ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, περὶ ὧν ἡμεῖς ἱκανῶς ἐπραγματεύθημεν, ἀλλὰ τῶν μειζόνων βαθμῶν, ὧν ἡ λύσις ἡμῖν ἔτι ἄγνωςος. Εἶναι ἔτι καὶ ἄλλο εἶδος ἐξισώσεων, αἵ τινες ποικιλλαχῶς καὶ ἀπείρως λύονται, καὶ διὰ τοῦτο τὰ δι' ἐκείνων λυόμενα προβλήματα ἀόριςα καλοῦνται· διὰ τὸ ποικίλλον ὅμως καὶ ἄπειρον τῶν ἀποκρίσεων καὶ τούτων εἰς τὸ παρὸν τμῆμα καὶ ταύτας περιλαμβάνομεν. Σχίζεται λοιπὸν καὶ τοῦτο τὸ τμῆμα εἰς δύο μέρη, εἰς τὸ πρῶτον περὶ ἀνωτέρων ἐξισώσεων, καὶ εἰς τὸ δεύτερον περὶ ἀορίςων προβλημάτων, ἢ ἐξισώσεων.

ΜΕ'ΡΟΣ Α'.

Περὶ ἀνωτέρων ἐξισώσεων.

§. 733. Ἀνωτέρας ἐξισώσεις καλοῦσιν ἐκείνας, εἰς ὅσας ὁ μέγιςος ἐκθέτης τῆς ἀγνώςου ποσότητος εἶναι μείζων τοῦ 2 ἀριθμοῦ· τούτων λοιπὸν, ὅσου ὁ μέγιςος ἐκθέτης τῆς ἀγνώςου ποσότητος 3, ἐξισώσεις καλοῦνται τοῦ τρίτου βαθμοῦ, ὅσων δὲ 4 τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, καὶ γενικῶς τοῦ μ βαθμοῦ, ἐὰν ὁ μέγιςος ἐκθέτης τῆς ἀγνώςου μ εὑρίσκεται. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἐξισώσεις αὗται ἄλλως οὐ λύονται, εἰμὴ ἐὰν εἰς τὸ μηδενικὸν ἀχθῶσιν, ἄρα καὶ τὸ παρὸν μέρος εἰς αὐτὰς μόνον καταγίνεται· πλὴν διὰ νὰ μάθωμεν κατὰ τάξιν τὰς μεθόδους καὶ τοὺς τρόπους, πῶς αἱ τοιαῦται ἐξισώσεις λύονται, εἴπωμεν πρῶτον γενικῶς πῶς ἑκάςη τῶν τοιούτων βαθμῶν λύεται, ἤτοι τοὺς νόμους, καὶ κανόνας, ὁποῦ εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς ἐξισώσεις ἐφαρμόζουσιν· εἶτα δὲ καὶ κατὰ μέρος ἐκείνους, ὁποῦ μόνον εἰς τὸν τρίτον, καὶ τέταρτον βαθμὸν ἰδιαιτέρως ἐφαρμόζουσιν.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Α'.

Γενικῶς Περὶ λύσεως τῶν ἀνωτέρων ἐξισώσεων.

§. 734. Εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον (§. 424) ἐμάθομεν, ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ἐξίσωσις διχῶς ἐλύετο, ἤτοι δύο τιμὰς τῆς χ ἀγνώςου ποσότητος εὑρίσκομεν· ἐπειδὴ ὁ μέγιςος ἐκθέτης τῆς ἀγνώςου ἦν ἐκεῖ 2, τὸ αὐτὸ συμβαίνει κανταῦθα· ἐὰν ὁ μέγιςος ἐκθέτης τῆς ἀγνώςου ποσότητος εἶναι 3, τρεῖς εὑρίσκομεν τιμὰς τῆς ἀγνώςου ποσότητος.

Ἐὰν δ' ὁ μέγιςος ἐκθέτης 4, τέσσαρας τιμὰς εὑρίσκομεν, ἐὰν δὲ μ, μ τιμὰς εὑρίσκομεν, ὅ,τι ἂν ἀριθμὸς νοεῖται ὑπὸ τὴν μ, ἤτοι ὅσας μονάδας περιέχει ὁ μέγιςος ἐκθέτης τῆς ἀγνώςου ποσότητος, τοσαυταχῶς καὶ ἡ ἐξίσωσις λύεται· πρὸς ἀπόδειξιν ὅμως τῆς ἀληθείας αὐτῆς, λάβωμεν τὰς ἐκθέσεις τὰς ἑξῆς $\chi^2-\alpha^2$, $\chi^3-\alpha^3$· καὶ γενικῶς $\chi^\mu-\alpha^\mu$· ὅλαι αὗται αἱ ἐκθέσεις διαιροῦνται διὰ $\chi-\alpha$ καὶ εἰς μὲν τὴν πρώτην ἡ διαίρεσις εἶναι φανερὰ ὅτι $1.(\chi-\alpha)=\chi-\alpha$· καὶ ἡ δευτέρα ὁμοίως ὅτι $(\chi-\alpha)\times(\chi+\alpha)=\chi^2-\alpha^2$· γενέσθω δὲ καὶ εἰς τὴν τρίτην ἡ διαίρεσις, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον $\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2$. $\chi^3-\alpha^3 : \chi-\alpha. = \chi^2+\alpha\chi+\alpha^2$.

$$\begin{array}{l}
\chi^3 \overline{+} \alpha\chi^2 \\
\hline
\alpha\chi^2-\alpha^3 \\
-\alpha\chi^2 \overline{+} \alpha^2\chi \\
\hline
\qquad \alpha^2\chi-\alpha^3 \\
\qquad -\alpha^2\chi \overline{+} \alpha^3 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

ἐὰν δὲ οὕτω καὶ τὴν γενικὴν $\chi^\mu-\alpha^\mu$ διέλωμεν διὰ $\chi-\alpha$· ἐξέρχεται πηλίκον

$$\chi^{\mu-1}+\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}+\alpha^3\chi^{\mu-4}+\ldots\ldots\alpha^{\mu-2}\chi+\alpha^{\mu-1}$$

ἡ διαίρεσις αὕτη ἔχει ὀρθῶς, ὅτι ὀρθὴ καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\chi^\mu-\alpha^\mu}{\chi-\alpha}=\chi^{\mu-1}+\alpha\chi^{\mu-2}+\ldots\ldots\ldots\alpha^{\mu-2}\chi+\alpha^{\mu-1}\cdot$$

διότι ἐὰν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἕτερον σκέλος, γίνεται $\chi^{\mu}-\alpha^{\mu}=\chi^{\mu}+\alpha\chi^{\mu-1}+\alpha^{2}\chi^{\mu-2}\cdot\cdot\,\alpha^{\mu-2}\chi^{2}+\alpha^{\mu-1}\chi-\alpha\chi^{\mu-1}$ $-\alpha^{2}\chi^{\mu-2}\cdots-\alpha^{\mu-2}\chi^{2}-\alpha^{\mu-1}\chi-\alpha^{\mu}$· ἐπειδὴ λοιπὸν $\chi^{\mu}-\alpha^{\mu}$ διαιρεῖται διὰ $\chi-\alpha$ ἔσαι $\chi^{\mu}-\alpha^{\mu}=(\chi-\alpha)\times$ $(\chi^{\mu-1}+\alpha\chi^{\mu-2}\cdots\cdots\alpha^{\mu-2}\chi+\alpha^{\mu})$· ἐὰν δὲ θῶμεν $\chi=\alpha$ ἔσαι καὶ $\chi^{\mu-1}+\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha\chi^{\mu-3}\cdots\cdot\,\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^{\mu-1}=0$ καὶ εὑρίσκεται ποσότης ἴση τῇ χ, ἥτις ἐφαρμόζει εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν· διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ αὐτὴν τὴν ποσότητα, θῶμεν $\chi=\alpha\psi$, καὶ δι' αὐτῆς ἡ ἐξίσωσις $\chi^{\mu}-\alpha^{\mu}=0$ γίνεται $\alpha^{\mu}\psi^{\mu}-\alpha^{\mu}=0$ ἤτοι $\psi^{\mu}-1=0$: καὶ ἑπομένως $\psi^{\mu}=1$ καὶ $\psi=\sqrt[\mu]{1}=1$· ἄρα μονὰς ἡ μία τιμὴ τῆς ψ^{μ} ἤτοι ἡ μία ῥίζα· ἐπειδὴ ὅμως $\psi=1$ καὶ $\psi-1=0$ καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\psi-1=0$ διαιρεῖ τὴν $\psi^{\mu}-1=0$· καὶ δίδει πηλίκον $\psi^{\mu-1}+\psi^{\mu-2}+\psi^{\mu-3}+\cdots\cdot\,\psi^{2}+\psi+1=0$· καὶ ἔχομεν δύο τιμὰς $\psi=1$ καὶ τὴν ἐξίσωσιν $\psi^{\mu-1}+\psi^{\mu-2}+\cdots\cdots+1=0$.

§. 735. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἔκθεσις $\psi^{\mu}-1$ εἶναι διαιρέσιμος διὰ $\psi-1$· εἰλήφθω ἡ ἐξίσωσις $\psi^{\mu}-1=0$, καὶ θῶμεν $\mu=2$ ἄρα $\psi^{2}-1=0$ καὶ $\psi^{2}=1$ ἤτοι $\psi=1$· ἐὰν δὲ διὰ τῆς $\psi-1=0$ διέλωμεν τὴν $\psi^{2}-1=0$ εὑρίσκομεν $\psi+1=0$ καὶ $\psi=-1$ ἄρα δύο αἱ ῥίζαι $\psi=1$, καὶ $\psi=-1$ ὅταν ὁ ἐκθέτης τῆς ἀγνώστου εἶναι 2.

Θῶμεν δεύτερον $\mu=3$, ἄρα $y^3-1=0$, ἀλλ' ἡ πρώτη ῥίζα εἶναι $y=1$· ἐὰν δὲ διὰ $y-1=0$ διέλωμεν, εὑρίσκομεν πηλίκον $y^2+y+1=0$ ἤτοι ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ· ἐὰν αὐτὴν ὡς ἐκεῖ λύσωμεν, ἔςαι

$$y^2+y=-1$$
$$y^2+y+1+\tfrac{1}{4}=-\tfrac{3}{4}$$
$$y+\tfrac{1}{2}=\pm\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$
$$y=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{3}{4}}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

ἄρα τρεῖς αἱ ῥίζαι 1) $y=1$. 2) $y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Γ) $y=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ διότι ἐὰν τὰς τρεῖς αὐτὰς ῥίζας πολλαπλασιάσωμεν, εὑρίσκομεν πάλιν τὴν ἐξίσωσιν.

Τρίτον ἐὰν δὲ καὶ $\mu=4$ θῶμεν, ἔςαι $y^4-1=0$ ἄρα $(y^2-1)(y^2+1)=0$ καὶ $y^2-1=0$· καὶ $y^2+1=0$ ἄρα 1) $y=1$ (2 $y=-1$· 3) $y=+\sqrt{-1}$· 4) $y=-\sqrt{1}$·

καὶ φανερὸν, ὅτι ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης τῆς ἀγνώςου ποσότητος y, τόσας τιμὰς, ἤτοι ῥίζας ἔχει ἡ ἐξίσωσις, οὗ ἡ ἄγνωςος ποσότης· καὶ αἱ μὲν αὐτῶν εἶναι φανταςικαὶ, αἱ δὲ πραγματικαὶ, ὡς κατωτέρω σαφηνίσομεν.

§. 736. Γενικῶς θεωροῦντες τὰς ἐξισώσεις τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν, διαιροῦμεν αὐτὰς εἰς ἐντελεῖς καὶ ἀτελεῖς· ἐντελεῖς καλοῦμεν, ὅσαι ἔχουσι τὴν ἄγνωςον ποσότητα ἀπὸ τῆς πρώτης δυνάμεως, ἕως τῆς ἐσχάτης· ὡς $\chi^3-4\chi^2+3\chi=12$. ἐξίσωσις τοῦ γ' βαθμοῦ, καὶ ἡ ἄγνωςος εὑρίσκεται μὲ ἐκθέτας 1, 2, 3. αὕτη δὲ $\chi^3-19\chi$

$+30=0$ ἀτελὴς, ὅτι ἐλλείπει ὁ ὅρος τῆς χ^2· ἀτελὴς ἐξίσωσις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ καὶ ἡ $\chi^4-5\chi^3+25\chi=125$· ὅτι ἐλλείπει ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ χ^2· ὅθεν καὶ σημειοῦσι τὰς ἐλλειπεῖς ἐξισώσεις μὲ ἕνα ἀςερίσκον, ὅπου δὲν εἶναι ὁ ὅρος τῆς ἀγνώςου, ὡς, $\chi^4-5\chi^3 * +25\chi=125$· καὶ $\chi^3 * -19\chi+30=0$. κτ.

§. 737. Πρῶτον ἔργον εἰς τὴν λύσιν τῶν περιπεπλεγμένων ἀνωτέρων ἐξισώσεων εἶναι νὰ κατατάξωμεν τὴν ἐξίσωσιν κατὰ τὰ ἑξῆς.

α΄. Φέρομεν ὅλα τὰ μέρη τῆς ἐξισώσεως εἰς τὸ ἓν σκέλος, καὶ μένει εἰς τὸ ἕτερον σκέλος αὐτῆς 0, καὶ τοῦτο λέγεται, ἄγομεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδέν.

β΄. Διατάττομεν τὴν ἐξίσωσιν οὕτως, ὥςε ὁ πρῶτος ὅρος αὐτοῦ τοῦ σκέλους νὰ ἔχῃ τὴν ἄγνωςον εἰς τὴν μεγίςην δύναμιν καταφατικῶς καὶ ἄνευ συνεργοῦ· διότι ἐὰν ἔχῃ συνεργὸν, δι' αὐτοῦ διαιροῦμεν τοὺς λοιποὺς ὅρους, καὶ ἀπαλλαττόμεθα αὐτοῦ, ὡς

$$\frac{4\chi^2-2\chi^3}{3}=8-5\chi$$

$$4\chi^2-2\chi^3=24-15\chi$$

$$2\chi^3-4\chi^2=15\chi-24$$

$$\chi^3-2\chi^2-\tfrac{15}{2}\chi+12=0.$$

γ΄. Οἱ δὲ λοιποὶ ὅροι κατὰ τάξιν νὰ ἔχωσι τὴν ἄγνωςον μὲ ἐκθέτην μονάδι ἐλάττονα, καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος γνωςὸς ἄνευ τῆς ἀγνώςου ποσότητος· διότι ἐὰν ὅλοι οἱ ὅροι ἔχωσι τὴν ἄγνωςον ποσότητα, διαιρεῖται ὅλη ἡ ἐξίσωσις δι' αὐτῆς, καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται κατωτέρα ἑνὸς βαθμοῦ, ὡς $100\chi^2-40\chi^3+4\chi^4=12\chi$ ἄρα $\chi^3-10\chi^2+25\chi-3=0$.

δ΄. Ἐὰν δ' εἰς τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκεταί τις ὅρος μὲ ῥιζικὸν σημεῖον, ἢ μὲ ἐκθέτην κεκλασμένον, τότε φέρομεν τοὺς λοιποὺς ὅρους εἰς τὸ ἓν σκέλος, τοὺς δ' ὅρους μὲ τὰ ῥιζικὰ σημεῖα, ἢ μὲ τοὺς κεκλασμένους ἐκθέτας εἰς τὸ ἕτερον, καὶ τότε ὑψοῦμεν ἄμφω τὰ σκέλη τῆς ἐξισώσεως, καὶ ἀπαλλαττόμεθα ἀπὸ τὰ ῥιζικὰ, ὡς

$10\chi - \sqrt{12\chi} = 2\chi^2$

$10\chi - 2\chi^2 = \sqrt{12\chi}$ ἄρα $100\chi^2 - 40\chi^3 + 4\chi^4 = 12\chi$. καὶ τέλος $\chi^3 - 10\chi^2 + 25\chi - 3 = 0$.

καὶ ἔτι τετάχθω ἡ ἐξίσωσις $2 - \sqrt{3\chi} = \sqrt[3]{2\chi^2}$· ὑψωθήτω εἰς κύβον $8 - 12\sqrt{3\chi} + 18\chi - \sqrt{27\chi^3} = 2\chi^2$. ἄρα $8 + 18\chi - 2\chi^2 = 12\sqrt{3\chi} + \sqrt{27\chi^3}$· τέλος εἰς τετράγωνον ὑψωθεῖσα γίνεται $64 + 288\chi + 292\chi^2 - 72\chi^2 + 4\chi^4 = 432\chi + 216\chi^2 + 27\chi^3$· ἤτοι $4\chi^4 - \frac{99}{4}\chi^3 + 19\chi^2 - 36\chi + 16 = 0$. ἡ οὕτω διατεθεῖσα ἐξίσωσις, καλεῖται ἐξίσωσις τεταγμένη, καὶ παρίσταται διὰ τοῦ ἑξῆς τύπου

$$\chi^{\mu} + \alpha\chi^{\mu-1} + \beta\chi^{\mu-2} + \gamma\chi^{\mu-3} + \delta\chi^{\mu-4} + \ldots + \rho = 0.$$

οὕτως εἰς τὸ ἑξῆς ἡγούμενον παράδειγμα ἦν $\mu = 4$, $\alpha = \frac{99}{4}$· $\beta = 19$. $\gamma = -36$. καὶ $\rho = 16$.

§. 738. Εἰς τὴν τεταγμένην οὕτως ἐξίσωσιν ἡ τιμὴ τῆς ἀγνώστου χ, ἢ ὁ ἀριθμὸς, ὅπου τίθεται ἀντὶ τῆς ἀγνώστου, καὶ ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ εἰς τὸ μηδὲν, καλεῖται ῥίζα τῆς ἐξισώσεως· οὕτως εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^3 - 9\chi^2 + 11\chi + 21 = 0$ ὁ ἀριθμὸς 3, 7 καὶ -1 εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως· διότι ἐὰν ἕκαστον τούτων ἀντὶ χ εἰς τὴν ἐξίσωσιν θῶμεν· καταντᾷ ἡ ἐξίσωσις εἰς τὸ μηδὲν, οὕτω $27 - 81 + 33 + 21 = 0$· διότι ἐτέθη $\chi = 3$.

§. 739. Διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὴν σύνθεσιν τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων, ἂς πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν $\chi - \alpha = 0$, μὲ ἓν διώνυμον τοιοῦτον $\chi - \beta$

$$\begin{array}{l} \chi - \alpha \\ \chi - \beta \\ \hline \chi^2 - \alpha \left| \chi + \alpha\beta = 0. \right. \\ \quad\; - \beta \left| \right. \end{array}$$

ἐξίσωσις τετραγωνική, ἐν ᾗ α καὶ β αἱ ῥίζαι· διότι ἐὰν τεθῇ $\alpha = \chi$· καὶ $\beta = \chi$ ἡ ἐξίσωσις εἰς τὸ μηδὲν καταντᾷ.

β'. πολλαπλασιάσωμεν ἔτι τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ τὸ διώνυμον $\chi - \gamma$ ἤτοι

$(\chi - \alpha)(\chi - \beta)(\chi - \gamma) = 0$ εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{r|c|l} \chi^3 - \alpha & \chi^2 + \alpha\beta & \chi - \alpha\beta\gamma = 0 \\ -\beta & +\alpha\gamma & \\ -\gamma & +\beta\gamma & \end{array}$$

ἐξίσωσις τοῦ τρίτου βαθμοῦ, ἧς αἱ ῥίζαι, α, β, γ, ὡς ἤδη $\chi^3 - 8\chi^2 + 7\chi - 9 = 0$.
ἄρα $\alpha + \beta + \gamma = 8$ καὶ $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 7$ · καὶ $\alpha\beta\gamma = 9$.

γ'. πολλαπλασιάσωμεν ἔτι καὶ ταύτην τὴν ἐξίσωσιν μὲ τὸ διώνυμον $\chi - \delta$ ἤτοι $(\chi - \alpha)(\chi - \beta)(\chi - \gamma)(\chi - \delta) = 0$ καὶ ἐξέρχεται ἡ ἑξῆς

$$\begin{array}{r|c|c|l} \chi^4 - \alpha & \chi^3 + \alpha\beta & \chi^2 - \alpha\beta\gamma & \chi + \alpha\beta\gamma\delta = 0. \\ -\beta & +\alpha\gamma & -\alpha\beta\delta & \\ -\gamma & +\alpha\delta & -\alpha\gamma\delta & \\ -\delta & +\beta\gamma & -\beta\gamma\delta & \\ & +\beta\delta & & \\ & +\gamma\delta & & \end{array}$$

Ἐξίσωσις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ ἧς αἱ ῥίζαι α, β, γ, δ.

§. 740. Καὶ γενικῶς ἡ ἐξίσωσις οἱουδήποτοῦν βαθμοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἓν παραγόμενον ἀπὸ παράγοντας διωνύμους, οἵτινες ἔχουσι κοινῶς τὸ πρῶτον μέρος τὴν ἄγνωστον ποσότητα τῆς ἐξισώσεως, τὸ δ' ἕτερον μίαν τῶν ῥιζῶν μὲ σημεῖον ἐναντίον, ὡς ἐκ τῶν ἀνωτέρω τὰ λεγόμενα φανερὰ γίνονται.

Παραδείγματα.

α΄. $(\chi-3)(\chi-5)(\chi-6)(\chi+10)=0$ γίνεται $\chi^4 = 4\chi^3 - 77\chi^2 + 540\chi - 900 = 0$
ἧς αἱ ῥίζαι 3, 5, 6 — 10.

β΄. $(\chi+3)(\chi+6)(\chi-9)=0$ γίνεται $\chi^3 * - 63\chi - 162 = 0$, ἧς αἱ ῥίζαι $-3, +9, -6$.

γ΄: $(\chi+\sqrt{-3})(\chi-4)(\chi-\sqrt{-3})=0$ γίνεται $\chi^3 - 4\chi^2 + 3\chi - 12 = 0$, ἧς αἱ ῥίζαι $\sqrt{-3}$, 4, $-\sqrt{-3}$.

δ΄. $(\chi-2+\sqrt{5})(\chi+1)(\chi-4)(\chi-2)(\chi-2-\sqrt{5})=0$ γίνεται $\chi^5 - 9\chi^4 + 21\chi^3 + 5\chi^2 - 34\chi - 8 = 0$· ἧς αἱ ῥίζαι $2-\sqrt{5}$, -1, $+4$, $+2$, $2+\sqrt{5}$· καὶ ἐκ τούτων τὰ ἑξῆς παρατηροῦμεν.

1) Ἑκάστη ἀνωτέρα ἐξίσωσις ἔχει τόσας ῥίζας, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ μέγιστος ἐκθέτης τῆς ἀγνώστου χ (§. 735), ὧν αἱ μὲν καταφατικαί, αἱ δ' ἀποφατικαί, ἄλλαι λογικαί, καὶ ἄλλαι ἄλογοι, καί τινες πραγματιώδεις, τινὲς δὲ καὶ φανταστικαί.

2) Ἐὰν ἅπαξ μία ῥίζα τῆς ἐξισώσεως γνωσθῇ, λαμβάνομεν ταύτην μὲ ἐναντίον σημεῖον εἰς δεύτερον μέρος ἑνὸς διωνύμου, πρῶτον δ' ἡ ἄγνωστος ποσότης τῆς ἐξισώσεως, καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦντες τὴν ἐξίσωσιν τεταγμένην οὖσαν, λαμβάνομεν ἐξίσωσιν ἑνὸς βαθμοῦ κατωτέρου, ἴσην πάλιν τῷ μηδενί. (§. 734).

3) Εἰς κάθε τεταγμένην ἐξίσωσιν τῶν ἀνωτέρω βαθμῶν ὁ συνεργὸς τοῦ δευτέρου ὅρου εἶναι τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως μὲ ἐναντία σημεῖα $(-\alpha-\beta-\gamma-\delta)$ ἐὰν δὲ ὁ δεύτερος ὅρος ἐκλείπει, αἱ καταφατικαὶ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἀποφατικὰς καὶ συναναιροῦνται,

ὡς εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα φαίνεται δηλ. ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $\chi^4 - \pi\chi^3 + \rho\chi^2 + \sigma\chi - \tau = 0$· καὶ αἱ ῥίζαι α, β, γ. δ ἴσαι $\pi = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ καὶ $(\alpha + \beta + \gamma + \delta) - \pi = 0$.

4) Ὁ συνεργὸς τοῦ τρίτου ὅρου εἶναι ἴσος τῷ κεφαλαίῳ τῶν παραγομένων ὅλων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως ἀνὰ δύο λαμβανομένων $\rho = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)$ ὁ δὲ συνεργὸς τοῦ τετάρτου ὅρου εἶναι ἴσος τῷ κεφαλαίῳ ὅλων τῶν παραγομένων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως ἀνὰ τρεῖς λαμβανομένων μὲ ἐναντία σημεῖα $\sigma = (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)$.

5) Ὁ ἔσχατος ὅρος τῆς τεταγμένης ἐξισώσεως εἶναι ἴσος τῷ παραγομένῳ ὅλων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἐὰν ὁ μέγιςος ἐκθέτης τῆς ἀγνώςου εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς, μὲ ἐναντίον ἐὰν οὗτος περιττός.

6). Εἰς κάθε τεταγμένην ἐξίσωσιν ἐὰν δὲν περιέχηταί τις ῥίζα ἀδύνατος, εὑρίσκονται ῥίζαι καταφατικαὶ ὁσάκις τὰ σημεῖα + καὶ — ἀμειβαδὸν εἰς τοὺς ὅρους εὑρίσκονται· καὶ πάλιν τόσας ἀποφατικὰς ῥίζας ἔχει ἡ ἐξίσωσις, ὁσάκις κατ' ἀκολουθίαν εἰς δύο ὅρους + + καὶ — — εὑρίσκονται, ὡς εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα εὑρίσκονται τὰ σημεῖα + — καὶ — — καὶ — + καὶ + — διὸ καὶ μίαν ἔχει ῥίζαν ἀποφατικὴν διὰ τὸ — —.

7) Ἐὰν εἰς μίαν τεταγμένην ἐξίσωσιν ἀδύνατοι ῥίζαι εὑρεθῶσιν, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα δ', πρέπει αὗται νὰ εἶναι τὸ πλῆθος ἄρτιαι, καὶ δεύτερον νὰ διαφέρωσι μόνον κατὰ τὰ σημεῖα + καὶ —· τὸ μὲν πρῶτον δείκνυται, ἐπειδὴ ἐὰν ὦσι τὸ πλῆθος περιτταὶ τὸ παραγόμενον δυνατὸν, καὶ λογικὸν οὐδέποτε δίδοσι· καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος, ὡς τὸ παραγόμενον ὅλων τῶν ῥιζῶν 5) ἔςαι ἀδύνατος· ἄρα ἐναντίον τῆς ὑποθέσεώς μας, καθ' ἣν ἡμεῖς τεταγμένην τὴν ἐξίσω-

σιν ἐλάβομεν· τὸ δὲ δεύτερον δεικνύεται, ἐπειδὴ εἰμὴ ἦν αἱ ῥίζαι μόνον κατὰ τὰ σημεῖα + καὶ — διάφοροι, ἔπρεπεν εἰς τὸν συνεργὸν τοῦ δευτέρου ὅρου νὰ εὑρίσκωνται, ὡς τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ῥιζῶν 3), καὶ οὕτως ἔδει πάλιν νὰ εἶναι ἡ ἐξίσωσις μὴ τεταγμένη.

8) Εἰς καθε τεταγμένην ἐξίσωσιν, ἐὰν ὁ μέγιστος ἐκθέτης τῆς ἀγνώστου ποσότητος εἶναι περιττὸς ἀριθμὸς, περιέχει τοὐλάχιστον μίαν ῥίζαν πραγματικὴν λογικὴν, αἱ δὲ λοιπαὶ δύνανται νὰ εἶναι καὶ πραγματικαὶ, καὶ φανταστικαὶ, καὶ λογικαὶ, καὶ ἄλογοι· ἐὰν δ' ὁ ἐκθέτης ἄρτιος, αἱ ῥίζαι τότε ἢ εἰσὶν ὅλαι λογικαὶ, ἢ ὅλαι ἄλογοι, ἢ καίτινες λογικαὶ, καίτινες ἄλογοι καὶ φανταστικαὶ κτ.

§. 741. Εὐκόλως ἤδη καὶ ἐξισώσεις ἀνωτέρων βαθμῶν συνθέτομεν, ἐὰν λάβωμεν ῥίζας ἀκεραίων, κεκλασμένων, ἀλόγων, καὶ ἀδυνάτων ἀριθμῶν· διότι ἡ ἄγνωστος γράφεται τὴν ἀρχὴν μὲ ἐκθέτην ἔχοντα τόσας μονάδας, ὅσαι αἱ ῥίζαι καὶ καθ' ἑξῆς παρὰ μονάδα· διότι ὁ συνεργὸς τοῦ δευτέρου ὅρου εἶναι τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ῥιζῶν μὲ ἐναντία σημεῖα· ὁ δὲ τοῦ τρίτου, τὸ κεφάλαιον τῶν ἀνὰ δύο ῥίζας παραγομένων μὲ τὰ αὐτὰ σημεῖα· καὶ ὁ τέταρτος, τὸ κεφάλαιον τῶν ἀνὰ τρεῖς παραγομένων μὲ ἐναντία σημεῖα, καὶ ὁ ἔσχατος, τὸ παραγόμενον ὅλων τῶν ῥιζῶν.

παραδείγματα.

Ἐὰν αἱ ῥίζαι 4, 2, 3, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\chi^3 - 9\chi^2 + (8+12+6.)\chi - 24 = \chi^3 - 9\chi^2 + 26\chi - 24 = 0$ αἱ ῥίζαι 2, $\sqrt{-5}$, 3, $-\sqrt{-5}$· ἡ ἐξίσωσις $\chi^4 - (2+\sqrt{-5}+3-\sqrt{-5})\chi^3 + (2\sqrt{-5}+6-2\times\sqrt{-5}+3\sqrt{-5}+5-3\sqrt{-5})\chi^2 - (6\sqrt{-5}+$

$10 - 6\sqrt{-5} + 15)\chi - (2\sqrt{-5}\cdot 3\cdot - \sqrt{-5}) =$
$\chi^4 - 5\chi^3 + 11\chi^2 - 25\chi - 30 = 0.$
ὅτι αἱ ῥίζαι $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, 2, $\chi^3 - (\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 2)\chi^2 + (\frac{1}{3}\cdot + \frac{4}{3} + 1)\chi - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot = 0 = \chi^3 - \frac{19}{6}\chi^2 + \frac{8}{3}\chi - \frac{2}{3} = 0$. ὁμοίως καὶ εἰς τὰ λοιπά.

§. 742. Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν τὰ ἑξῆς πολυπραγμονήσωμεν.

α'. Τάττομεν τὴν ἐξίσωσιν, ὡς ἐδιδάχθημεν· (§. 740)

β'. Λύομεν τὸν ἔσχατον ὅρον αὐτῆς εἰς τοὺς δυνατοὺς παράγοντας (§. 167)· καὶ ἐπειδὴ ὁ ἔσχατος ὅρος τὸ παραγόμενον ὅλων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως 5), ἄρα αἱ ῥίζαι, δι' ὧν γινώσκεται ἡ ἄγνωςος, ἀναγκαίως εἰς αὐτοὺς εὑρίσκεται τοὺς παράγοντας.

γ'. Ἐὰν δ' ἡ ἐξίσωσις δεικνύῃ, ὅτι ἔχει ὅλας τὰς ῥίζας καταφατικὰς ὡς $\chi^3 - 9\chi^2 + 20\chi - 12 = 0$· καὶ οἱ παράγοντες τοῦ 12, 1, 2, 3, 4, 6, 12· θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ χ ἕκαςον τούτων τῶν παραγόντων μὲ σημεῖον καταφατικὸν, καὶ δοκιμάζομεν τὴν ἐξίσωσιν μὲ τίνας τούτων τῶν παραγόντων εἰς τὸ μηδενικὸν καταντᾷ, καὶ τούτους κρίνομεν εἶναι τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως δηλ: ἐὰν $\chi = 1$ ἴςαι

$1 - 9 + 20 - 12 = 0$ $\quad$ $\chi = 4$ ἴςαι $64 - 144 + 80 - 12 = -12$

$\chi = 2$ ἴςαι $8 - 36 + 40 - 12 = 0$. $\chi = 6 \ldots\ 216 - 324 + 120 - 12 = 0$

$\chi = 3 \ldots 27 - 81 + 60 - 12 = -6$, $\chi = 12$ $\quad 1728 - 1296 + 240 - 12 = 660.$

Ἐπειδὴ ὅμως μόνον ὅταν ἐλάβομεν $\chi = 1$· $\chi = 2$, $\chi = 6$·

κατήντησεν εἰς τὸ μηδὲν ἡ ἐξίσωσις, ἄρα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως, 1, 2, 6.

Σημείωσις α'. Ἐπειδὴ ὁ συνεργὸς τοῦ δευτέρου ὅρου εἶναι ἴσος τῷ κεφαλαίῳ ὅλων τῶν ῥιζῶν 3)· εὑρίσκομεν μόνον τὰς δύο ῥίζας, ὡς ἐνταῦθα 1, 2· καὶ τὴν ἐσχάτην ἀμέσως εὑρίσκομεν ἀπὸ τοὺς παράγοντας, ἥτις μὲ τὰς εὑρεθείσας ἀποτελεῖ τὸν συνεργὸν τοῦ δευτέρου ὅρου, ὡς ἐνταῦθα $1+2+6=9$.

Σημείωσις β'. Ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ῥιζῶν τῆς τεταγμένης ἐξισώσεως εἶναι ἴσον τῷ συνεργῷ τοῦ δευτέρου ὅρου, ἀπὸ τῶν παραγόντων τοῦ ἐσχάτου ὅρου· οἱ μείζονες παράγοντες τοῦ συνεργοῦ τοῦ δευτέρου ὅρου οὐδέποτε εἰς ῥίζας δοκιμάζονται, ὡς $\chi^3-13\chi^2+54\chi-72=0$· καὶ οἱ παράγοντες τοῦ 72 εἶναι 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 12, 18, 24, 36, 72· οἱ 18, 24, 36, 72 ἀποδοκιμάζονται.

δ'. Ἐὰν δὲ βλέπωμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἔχει ὅλας τὰς ῥίζας ἀποφατικὰς, λαμβάνομεν τοὺς παράγοντας τοῦ ἐσχάτου ὅρου ἀποφατικῶς, καὶ δοκιμάζομεν τὴν ἐξίσωσιν μὲ τίνα τούτων καταντᾷ εἰς τὸ μηδὲν, $\chi^3+10\chi^2+31\chi+30=0$· ἄρα ἐὰν

$$\begin{aligned} \chi&=-1 \text{ ἔσαι } -1+10-31+30=8. \\ \chi&=-2 \;\ldots\; -8+40-62+30=0. \\ \chi&=-3 \;\ldots\; -27+90-93+30=0. \end{aligned}$$

ὅθεν $\chi=-2$· καὶ $\chi=-3$· καὶ ἐπειδὴ ὁ συνεργὸς τοῦ δευτέρου ὅρου 10 ἄρα καὶ $\chi=-5$· διότι μὲ τὰ ἐναντία σημεῖα εἶναι $2+3+5=10$.

ε'. Ἐὰν δ' εὑρίσκωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν, ὅτι ἔχει ῥίζας καταφατικὰς καὶ ἀποφατικὰς, τότε λαμβάνεται ἕκαςος παράγων καὶ καταφατικῶς καὶ ἀποφατικῶς· καὶ δοκιμάζομεν τὴν ἐξίσωσιν ὡς ἀνωτέρω, ὡς ἡ ἐξίσωσις $\chi^3+4\chi^2+\chi-6=0$ καὶ τοῦ 6 οἱ παράγοντες 1, 2, 3, 6.

ὅθεν ἐὰν $\chi=1$ ἔςαι $1+4+1-6=0$

ἐὰν $\chi=-1$ ἔςαι $-1+4-1-6=-4$

ἐὰν $\chi=2$ ἔςαι $8+16+2-6=20$

ἐὰν $\chi=-2$ ἔςαι $-8+16-2-6=0$.

ἄρα αἱ δύο ῥίζαι $\chi=1$ καὶ $\chi=-2$· ἐὰν δὲ καὶ τὴν τρίτην χ καλέσωμεν, ἔςαι τὸ λείψανον ἴσον, ἐὰν ἀπὸ τοῦ συνεργοῦ τοῦ δευτέρου ὅρου ἀφέλωμεν τὰς εὑρεθείσας ῥίζας μὲ ἐναντία σημεῖα, οὕτως $4+1-2=3$ καὶ $\chi=3$ ἡ τρίτη ῥίζα· ὁμοίως καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^4+18\chi^3*-274\chi+255\chi=0$. οἱ παράγοντες τοῦ ἐσχάτου ὅρου 255 εἶναι 1, 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255· καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν ἐνορῶμεν ῥίζας καταφατικὰς, καὶ ἀποφατικὰς· δοκιμάζομεν τὴν ἐξίσωσιν καὶ μὲ ἕκαςον παράγοντα, λαμβάνοντες αὐτὸν ὁτὲ καταφατικὸν ὁτὲ ἀποφατικὸν, καὶ εὑρίσκομεν αὐτὴν εἰς τὸ μηδὲν ἐρχομένην, διὰ τοῦ $+1$, $+3$, -5, -17· ἄρα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi=1$, $\chi=3$· $\chi=-5$, $\chi=-17$.

ϛ΄. Ἐὰν δὲ δι᾽ αὐτῆς τῆς ἐργασίας μίαν μόνην ἢ δύο ῥίζας εὑρίσκομεν, καὶ οὐχὶ τόσας, ὅσας ὁ βαθμὸς ἀπαιτεῖ τῆς ἐξισώσεως, τότε εἶναι σημεῖον, ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἔχει καὶ ῥίζας ἀλόγους, ἢ ἀδυνάτους κτ· ἀλλὰ καὶ τότε λύεται ἡ ἐξίσωσις, ἐὰν αὐτὴν εἰς κατώτερον βαθμὸν καταβιβάσωμεν· ὁ δὲ καταβιβασμὸς τῶν ἐξισώσεων γίνεται, ἐὰν διὰ τοῦ ἀνωτέρου τρόπου εὕρωμεν μίαν ῥίζαν, τότε λαμβάνομεν αὐτὴν μὲ ἐναντίου σημείου εἰς δεύτερον μέρος ἑνὸς διωνύμου, εἰς δὲ πρῶτον τὴν ἄγνωςον τῆς ἐξισώσεως, καὶ δι' αὐτοῦ τοῦ διωνύμου διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν, καὶ γίνεται κατωτέρα ἑνὸς βαθμοῦ, δηλ. ἀπὸ κυβικὴν ἐξίσωσιν μεταβαίνει εἰς τετραγωνικήν· καὶ τότε λύομεν αὐτὴν ὡς τὰ ἀτελῆ τετράγωνα (§. 411) οὕτως εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^3 * -\chi -6=0$· οἱ παράγοντες τοῦ 6 εἶναι 1, 2, 3, 6 καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ $2=\chi$ φέρει εἰς τὸ μηδὲν τὴν ἐξίσωσιν· ἄρα καὶ $\chi-2=0$· καὶ διὰ τοῦ $\chi-2$ διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν.

$$
\begin{array}{r|l|l}
\chi-2 & \chi^3-\chi-6 & \chi^2+2\chi+3=0. \\
 & \chi^3-2\chi^2 & \\
 & -\quad+ & \\
\hline
 & 2\chi^2-\chi-6 & \\
 & 2\chi^2-4\chi & \\
 & -\quad+ & \\
\hline
 & 3\chi-6 & \\
 & 3\chi-6 & \\
 & -\quad+ & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

ἄρα κατὰ τὰς τετραγωνικὰς ἐξισώσεις εὑρίσκεται οὕτως ἡ $\chi^2+2\chi+3=0$.

καὶ $\chi^2+2\chi=-3$

$\chi^2+2\chi+1=-3+1=-2$

$\chi+1=\sqrt{-2}$ καὶ $\chi=-1\pm\sqrt{-2}$ ἄρα αἱ ῥίζαι τῆς ἄνω ἐξισώσεως $\chi=2$· $\chi=-1+\sqrt{-2}$ καὶ $\chi=-1-\sqrt{-2}$· κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον λύεται καὶ ἡ ἐξίσωσις $\chi^3-4\chi^2+3\chi-12=0$· διότι οἱ παράγοντες τοῦ 12 εἶναι 1, 2, 3, 4, 6, 12· καὶ ἐκ τούτων ὁ 4 φέρει αὐτὴν εἰς τὸ μηδέν· ἄρα διὰ τοῦ $\chi-4$ διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\begin{array}{r|l|l} \chi-4 & \chi^3-4\chi^2+3\chi-12 & \chi^2+3 \\ & \chi^3-4\chi^2+3\chi-12 & \\ & -\ +\ \ -\ \ + & \\ \hline & \cdot 0 & \end{array}$$

ἄρα $\chi^2+3=0$ καὶ $\chi^2=-3$ καὶ $\chi=\sqrt{-3}$ καὶ $\chi=-\sqrt{-3}$.

ζʹ. Τέλος ἐὰν δὲ δύο ρίζας κατὰ τὰ ἀνωτέρω εὕρωμεν, δι' αὐτῶν ποιοῦμεν κατὰ τὰ ἄνω δύο διώνυμα, καὶ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν, καὶ διὰ τοῦ παραγομένου τούτων διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν, καὶ οὕτω καταβιβάζεται δύο βαθμοὺς ἡ ἐξίσωσις· οὕτως ἐὰν τρεῖς ρίζας ἔχωμεν, καὶ διὰ τοῦ παραγομένου τῶν τριῶν διωνύμων διαιροῦντες τὴν ἐξίσωσιν, τρεῖς βαθμοὺς αὐτὴν καταβιβάζομεν· ἐὰν δὲ διὰ ν διωνύμων διαιρεθῇ ἡ ἐξίσωσις, ν βαθμῶν ἐλάττων γίνεται· ἔςω ἡ ἐξίσωσις

$\chi^4+2\chi^3-7\chi^2-8\chi+12=0$· οἱ δὲ παράγοντες τοῦ 12 εἶναι 1, 2, 3, 4, 6, 12· καὶ ἐξ αὐτῶν ὁ 1 καὶ ὁ 2 φέρει τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδέν, ἄρα

$$\begin{array}{l} \chi-1=0 \\ \underline{\chi-2=0} \\ \chi^2-\chi \\ \underline{\quad -2\chi+2} \\ \chi^2-3\chi+2. \end{array}$$

καὶ διὰ τοῦ παραγομένου τούτου διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\begin{array}{l|l} \chi^4+2\chi^3-7\chi^2-8\chi+12=0 & \chi^2-3\chi+2=\chi^2+5\chi+6. \\ \chi^4-3\chi^3\pm2\chi^2 & \\ -\quad+ & \\ \hline 5\chi^3-9\chi^2-8\chi+12 & \\ 5\chi^3-15\chi^2+10\chi & \\ -\quad+\quad- & \\ \hline 6\chi^2-18\chi+12 & \\ 6\chi^2-18\chi\pm12 & \\ -\quad+\quad- & \\ \hline 0. & \end{array}$$

τὸ δὲ πηλίκον τοῦτο $\chi^2+5\chi+6=0$. λύεται κατὰ τὰς ἐξισώσεις τοῦ Β βαθμοῦ ὅτι

$$\chi^2+5\chi=-6$$

$$\chi^2+5\chi+\tfrac{25}{4}=-6+\tfrac{25}{4}=\tfrac{1}{4}.$$

ἄρα $\chi+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$.

καὶ $\chi=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1}=-\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}$ ἤτοι $\chi=-3$ καὶ $\chi=-2$· ἄρα αἱ ῥίζαι τῆς ἄνω ἐξισώσεως $\chi=1$· $\chi=2$· $\chi=-3$, $\chi=-4$

Κατὰ τὰ αὐτὰ λύεται καὶ ἡ ἑξῆς ἐξίσωσις

$\chi^5-9\chi^4+21\chi^3+5\chi^2-34\chi-8=0$· διότι οἱ παράγοντες τοῦ 8 εἶναι 1, 2, 4, 8 ἐκ τῶν ὁποίων μόνον ὁ -1, $+2$, $+4$, φέρει τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδὲν, ἄρα τὰ διώνυμα $(\chi+1)(\chi-2)(\chi-4)=\chi^3-5\chi^2+2\chi+8$. Ἐὰν δὲ δι' αὐτοῦ τὴν ἐξίσωσιν διέλωμεν, ἔςαι τὸ πηλίκον

$(\chi^5-9\chi^4+21\chi^3-34\chi-8):(\chi^3-5\chi^2+2\chi+8)=$ $\chi^2-4\chi-1=0$. καὶ ἑπομένως $\chi^2-4\chi+4=5$

$\chi-2=\pm\sqrt{5}$ καὶ $\chi=2+\sqrt{5}$ καὶ ἔτι $\chi=2-\sqrt{5}$· ἄρα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi=-1$ $\chi=2$· $\chi=4$· $\chi=2+\sqrt{5}$· $\chi=2-\sqrt{5}$.

ὁμοίως καὶ αὕτη ἡ ἐξίσωσις $\chi^5+3\chi^4-7\chi^3-25\chi^2+8\chi+60=0$· τοῦ δὲ 60 οἱ παράγοντες εἰσὶν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, ἐξ ὧν ὁ $+2$ καὶ ὁ -3 φέρει τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδέν· ἄρα $(\chi-2)(\chi+3)=\chi^2+\chi-6=0$· καὶ $(\chi^5+3\chi^4-7\chi^3-25\chi^2+8\chi+60):(\chi^2+\chi-6)=\chi^3+2\chi^2-3\chi-10=0$· ἐπειδὴ δὲ τὸ πηλίκον τοῦτο κυβικὴ ἐξίσωσις, εὑρίσκομεν ἀπὸ τοὺς παράγοντας τοῦ 10, 1, 2, 5, 10, ὅτι ὁ $+2$ φέρει αὐτὴν εἰς τὸ μηδέν· ὅθεν $(\chi^3+2\chi^2-3\chi):\chi-2=\chi^2+4\chi+5=0$· καὶ ἑπομένως.

$$\chi^2+4\chi=-5.$$
$$\chi^2+4\chi+4=-5+4$$
$$\chi+2=\pm\sqrt{-1}$$
$$\chi=-2+\sqrt{-1}.\ \text{καὶ}\ \chi=-2-\sqrt{-1}.$$

ἄρα $\chi=+2$. $\chi=-3$. $\chi=+2$ καὶ $\chi=-1+\sqrt{-1}$ καὶ $\chi=-1-\sqrt{-1}$.

§. 743. Ἐξ αὐτῶν δυνάμεθα ἤδη μίαν ἔκθεσιν ἀλγεβραϊκήν, ἐν ᾗ μόνον ἓν γράμμα εὑρίσκεται, εἰς πολυωνύμους παράγοντας νὰ λύσωμεν.

α'. Διαιροῦμεν ὅλα τὰ μέρη τῆς ἐκθέσεως διὰ τῆς ποσότητος, ὁποῦ εἰς ὅλα τὰ μέρη κοινὴ εὑρίσκεται· δηλ: ἐὰν ζητῶνται οἱ παράγοντες τῆς ἐκθέσεως $\upsilon^4-6\upsilon^3+11\upsilon^2-6\upsilon$, ἔσται καὶ $\upsilon(\upsilon^3-6\upsilon^2+11\upsilon-6.)$

β'. Τὰ δὲ λοιπὰ μέρη αὐτῆς, ὁποῦ δὲν ἔχουσι πλέον κοινὸν παράγοντα, θέτομεν εἰς μηδενικὸν οὕτω $\upsilon^3-6\upsilon^2+11\upsilon-6=0$· καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εὑρίσκονται οἱ παράγοντες αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως· διότι τοῦ 6 οἱ παράγοντες εἶναι 1, 2, 3, 6. καὶ ἡ μονὰς φέρει αὐτὴν εἰς τὸ μηδέν· ἄ-

ρα $(\upsilon^3 - 6\upsilon^2 + 11\upsilon - 6) : (\chi - 1) = \upsilon^2 - 5\upsilon + 6 = 0$. αὕτη δὲ λύεται ὡς τετραγωνικὴ ἐξίσωσις.
$\upsilon^2 - 5\upsilon + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4} = \frac{1}{4}$ καὶ $\upsilon - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$ ἄρα $\upsilon = +\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$ ὅ ἐςι $\upsilon = 3$ καὶ $\upsilon = 2$ καὶ λοιπὸν οἱ παράγοντες $(\upsilon)(\upsilon-1)(\upsilon-2)(\upsilon-3) = \upsilon^4 - 6\upsilon^3 + 11\upsilon^2 - 6\upsilon$.
Ἔτι ζητοῦνται οἱ παράγοντες τῆς ἐκθέσεως
$\chi^3 + 2\chi^2 + 2\chi^2\psi + \chi\psi + \chi\psi^2 - 3\chi - \psi^2 - 3\psi$. τούτων τὸ ἔσχατον μέρος, ἐν ᾧ ἡ χ δεν εὑρίσκεται, εἶναι $-(\psi^2 + 3\psi)$ καὶ οἱ παράγοντες αὐτοῦ $-\psi(\psi + 3)$. ἐὰν ὅμως $-\psi$ ἀντὶ χ εἰς τὴν ἐξίσωσιν Ͽῶμεν, καταντᾷ ἡ ἐξίσωσις εἰς τὸ μηδέν· ἄρα ὁ διαιρέτης $\chi + \psi$· ἄρα $(\chi^3 + 2\chi^2 + 2\chi^2\psi + \chi\psi + \chi\psi^2 - 3\chi - \psi^2 - 3\psi) : (\chi + \psi)$
$= \chi^2 + \chi\psi + 2\chi - \psi - 3$ ἤτοι $\chi^2 + (\psi + 2)\chi = \psi + 3$

$$\chi^2 + (\psi+2)\chi + \frac{\psi^2+4\psi+4}{4} = \psi + 3 + \frac{\psi^2+4\psi+4}{4}$$

$$\text{καὶ } \chi = -\left(\frac{\psi+2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\psi^2+8\psi+16}{4}\right)}\right) = -\frac{\psi+2}{2} \pm \frac{\psi+4}{2}$$

$$\text{ὅ ἐςι } \chi = \frac{-\psi-2+\psi+4}{2} = 1.\ \text{καὶ ἔτι } \chi = \frac{-\psi-2-\psi-4}{2}$$

$= \frac{2-6}{2} = -(+\psi 3)$· ἄρα οἱ παράγοντες τῆς ἐξισώσεως οἱ ζητούμενοι εἶναι $\chi + \psi$, $\chi - 1$. $\chi\psi + +3$.

§. 744. Αἱ ἐξισώσεις τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν διὰ νὰ λύωνται εὐκόλως, λαμβάνουσι τὰς ἑξῆς μεταβολάς· ἑκάςη τεταγμένη ἐξίσωσις τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν μεταβάλλεται εἰς ἑτέραν, ἐν ᾗ ὅλαι αἱ ῥίζαι ἐκείνης ἢ αὐξάνονται μὲ μίαν τινα ποσότητα, ἢ μειοῦνται κατὰ τὸ δοκοῦν· ἐὰν λάβωμεν τὴν ἄγνωςον μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅπου Ͽέλομεν νὰ αὐξηνθῇ καταφατικῶς, ἢ τὴν αὐτὴν μὲ ἀποφατικὸν σημεῖον, ἐὰν θέλωμεν νὰ σμικρυνθῇ, ἴσην ἑτέρᾳ ἀγνώςῳ ποσότητι ὡς $\chi + 4 = \text{ч}$· ἢ $\chi - 4 = \text{ч}$. καὶ εἶτα ἀπ' αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως μονώσωμεν τὴν χ ἢ $\chi = \text{ч} - 4$, ἢ $\chi = \text{ч} + 4$, καὶ τέλος θῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ χ τὴν ἑτέραν $\text{ч} - 4$ ἢ $\text{ч}+4$ ἢ δηλ: εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^3 - \chi^2 - 10\chi - 8 = 0$, ἧς αἱ ῥίζαι $4, -1, -2$, θέλομεν νὰ μεταβληθῇ εἰς ἑτέραν, ἧς αἱ ῥίζαι νὰ αὐξηνθῶσι μὲ 3· λοιπὸν $\chi + 3 = \text{ч}$ καὶ $\chi = \text{ч} - 3$, ἄρα

$$\begin{aligned}
\chi^3 &= \text{ч}^3 - 9\text{ч}^2 + 27\text{ч} - 27. \\
-\chi^2 &= -\text{ч}^2 + 6\text{ч} - 9 \\
-10\chi &= -10\text{ч} + 30 \\
-8 &= \qquad -8 \\
\hline
&\text{ч}^3 - 10\text{ч}^2 + 23\text{ч} - 14 = 0
\end{aligned}$$

καὶ αὕτη ἡ μεταβληθεῖσα ἐξίσωσις, ἧς αἱ ῥίζαι $7, 2, 1$, ἔχει κατὰ 3 μείζονας τῶν ῥιζῶν τῆς πρώτης.

Ἐὰν δὲ καὶ ταύτην $\text{ч}^3 - 10\text{ч}^2 + 23\text{ч} - 14 = 0$ εἰς ἑτέραν μεταβάλλωμεν, ὥςε αἱ ῥίζαι τῆς νέας νὰ εἶναι ἐλάττονες κατὰ 10 ἀπὸ τὰς ῥίζας αὐτῆς· θέτομεν

$\text{ч} - 10 = Z$ καὶ $\text{ч} = Z + 10$: ἄρα

$$\begin{aligned}
\text{ч}^3 &= Z^3 + 30Z^2 + 300Z + 100. \\
-10\text{ч}^2 &= -10Z^2 - 200Z - 1000. \\
+23\text{ч} &= \qquad 23Z + 230. \\
-14 &= \qquad\qquad 14. \\
\hline
&Z^3 + 20Z^2 + 123Z + 216 = 0.
\end{aligned}$$

καὶ αἱ ῥίζαι ταύτης $-3, -8, -9$ ἐλάττονες ἐκείνων κατὰ 10.

Εἰλήφθω ἔτι καὶ γενικῶς ἡ ἐξίσωσις οὕτη $\chi^{\mu} + \alpha\chi^{\mu-1} +$

$\beta\chi^{\mu-2} + \gamma\chi^{\mu-3} + \ldots\ldots + K = o.$ Θῶμεν εἰς αὐτὴν $\psi+\rho=\chi$ καὶ $\chi^{\mu}=(\psi+\rho)^{\mu}$· ἐὰν ἤδη κατὰ τὸ διώνυμον $(\psi+\rho)^{\mu} . (\psi+\rho)^{\mu-1}$ κτ. ἐκτυλίσωμεν, εὑρίσκεται ἡ ἄνω ἐξίσωσις οὕτω·

$$\chi^{\mu}=\psi^{\mu}+\mu\rho\psi^{\mu-1}+\frac{\mu(\mu-1)}{2}\rho^{2}\psi^{\mu-2}\ldots+\rho^{\mu}$$

$$\alpha\chi^{\mu-1}=\alpha\psi^{\mu-1}+\alpha(\mu-1)\rho\psi^{\mu-2}+\ldots\alpha\rho^{\mu-1}$$

$$\beta\chi^{\mu-2}=\beta\psi^{\mu-2}+\ldots\ldots\ldots\beta\rho^{\mu-2}$$

$$K=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+K.$$

ἡ ἀπ' ἐκείνης μεταβληθεῖσα ἐξίσωσις, ἐν ᾗ κάθε ῥίζα μείζων ἢ ἐλάττων τῶν ῥιζῶν ἐκείνης κατὰ τὸ ρ, ἐὰν ληφθῇ καταφατικῶς ἢ ἀποφατικῶς· διότι ἐὰν ἐκτυλίσωμεν αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως ὅρους τινας ἔτι, καὶ συνάψωμεν αὐτούς, εὑρίσκομεν αὐτήν.

$$\psi^{\mu}+(\mu\rho+\alpha)\psi^{\mu-1}+\left(\frac{\mu(\mu-1)}{2}\rho^{2}+\alpha(\mu-1)\rho+\beta\right)\psi^{\mu-2}+\ldots$$

$$+\left(\rho^{\mu}+\alpha\rho^{\mu-1}+\beta\rho^{\mu-2}\right)+K=o.$$

Εἰς αὐτὴν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν ἔχοντες α, β, γ, κτ. καὶ μ καὶ $+\rho$, ἐὰν θέλωμεν τὰς ῥίζας νὰ μειώσωμεν $-\rho$ δὲ ἐὰν θέλωμεν νὰ αὐξήσωμεν αὐτὰς κατὰ τὸ ρ, εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν.

§. 745. Ἐκ τῆς μεταβληθείσης ταύτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὴν μέθοδον, καθ' ἣν εἰς μίαν ἀνωτέραν ἐξίσωσιν ἀποσκυβαλίζομεν τὸν δεύτερον ὅρον τῆς ἐξισώσεως'· διότι ἐὰν τὸν δεύτερον ὅρον αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως ἴσον τῷ μηδενὶ θῶμεν, εὑρίσκομεν τίνα ἀριθμὸν τῆς ἐξισώσεως ἀντὶ τοῦ ρ λαμβάνομεν, διὰ νὰ ἀποσκυβαλισθῇ ὁ δεύτερος ὅρος, καὶ νὰ εἶναι$=0$· ἐπειδὴ $\mu\rho\psi^{\mu-1}+\alpha\psi^{\mu-1}=0$· καὶ ἑπομένως $\mu\rho\psi^{\mu-1}=-\alpha\psi^{\mu-1}$ $\mu\rho=-\alpha$ καὶ $\pi=-\frac{\alpha}{\mu}$ ἄρα $\psi-\frac{\alpha}{\mu}$ ἀντὶ χ εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἀντικαθίσταται, δηλ: διὰ νὰ ἀποσκυβαλισθῇ ὁ δεύτερος ὅρος μιᾶς ἐξισώσεως, λαμβάνομεν εἰς αὐτὴν ἀντὶ χ ἑτέραν ἄγνωστον ποσότητα, καὶ εἰς αὐτὴν προσθέτομεν καὶ τὸ πηλίκον τοῦ συνεργοῦ τοῦ δευτέρου ὅρου, διὰ τοῦ ἐκθέτου τῆς μεγίστης δυνάμεως τῆς ἐξισώσεως, μὲ ἐναντίου σημεῖον ἀπὸ τοῦ σημείου τοῦ συνεργοῦ τοῦ δευτέρου ὅρου· ζητεῖται παρ: χ: νὰ ἀποσκυβαλισθῇ ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ἐξισώσεως

$\chi^3-12\chi^2+41\chi-42=0$. λοιπὸν ληφθήτω $\chi=\psi+\frac{12}{3}$ ἤτοι $\chi=\psi+4$ ἄρα

$$\begin{aligned} \chi^3 &= \psi^3+12\psi^2+48\psi+64 \\ -12\chi^2 &= -12\psi^2-96\psi-192 \\ +41\chi &= \ 41\psi+164 \\ -42 &= \ -42. \end{aligned}$$

καὶ ἐὰν ταῦτα εἰς ἓν συνάψωμεν, ἔσται $\psi^3 * -7\psi-6=0$. ἐν ᾗ ὁ δεύτερος ὅρος ἐξέλιπε, καὶ αἱ ῥίζαι $\psi=-2$. $\psi=-1$. $\psi=3$. ἄρα αἱ ῥίζαι τῆς ἀνωτέρω $\chi=2$. $\chi=3$. $\chi=7$. ζητεῖται ἔτι νὰ ἀποσκυβαλίσωμεν τὸν δευτέρου ὅρου τῆς ἐξισώσεως $\chi^3+\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$. ἄρα $\chi=\psi-\frac{\alpha}{3}$ ὅθεν

$$\begin{array}{rl}
\chi^3 = & \psi^3 - \alpha\psi^2 + \frac{1}{3}\alpha^2\psi - \frac{1}{27}\alpha^3 \\
\alpha\chi^2 = & \alpha\psi^2 - \frac{2}{3}\alpha^2\psi + \frac{1}{9}\alpha^3 \\
\beta\chi = & \beta\psi - \frac{1}{3}\alpha\beta \\
\gamma = & +\gamma. \\
\hline
 & \psi^3 - (\frac{1}{3}\alpha^2 - \beta)\psi + \frac{2}{27}\alpha^3 - \frac{1}{3}\alpha\beta + \gamma.
\end{array}$$

ὅπου ὁ δεύτερος ὅρος ἐξέλιπεν.

§. 746. Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην ὅλαι αἱ μεμιγμέναι τετραγωνικαὶ ἐξισώσεις γίνονται καθαραὶ καὶ ὁμιγεῖς, δηλ: εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2 + \alpha\chi + \beta$. ληφθήτω $\chi = \psi - \frac{\alpha}{2}$. ἄρα

$$\begin{array}{rl}
\chi^2 = & \psi^2 - \alpha\psi + \frac{\alpha^2}{4} \\
\alpha\chi = & \alpha\psi - \frac{\alpha^2}{2} \\
-\beta = & -\beta. \\
\hline
 & \psi^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \beta.
\end{array}$$

καὶ $\psi = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4\beta + \alpha^2)}$.

ὁμοίως εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2 - \chi - 42 = 0$. ἔςαι $\chi = \psi + \frac{1}{2}$ ἄρα

$$\begin{array}{rl}
\chi^2 = & \psi^2 + \psi + \frac{1}{4} \\
-\chi = & -\psi - \frac{1}{2} \\
-42 = & -42. \\
\hline
 & \psi^2 - \frac{1}{4} - 42 = 0
\end{array}$$ καὶ

$\psi = \pm\sqrt{(\frac{1}{4} + 42)} = \pm 6\frac{1}{2}$ ἄρα $\chi = 6\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 7$. καὶ $\chi = -6\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -6$.

§. 747. Ἔτι ἐξ αὐτῆς τῆς μεθόδου δυνάμεθα μεταβαλεῖν μίαν ἐξίσωσιν, ἧς ὁ ἔσχατος ὅρος μέγιςος μὲ πολλοὺς παράγοντας, καὶ εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ῥιζῶν ἐργώδης, εἰς ἑτέραν ἐξίσωσιν, ἧς ὁ ἔσχατος ὅρος ἐλάττων, καὶ λύεται εἰς πόνυ ὀλίγους παράγοντας· ἐπειδὴ εἰς τὴν παραχθεῖσαν ἀνωτέρω (§. 744.) μεταβληθεῖσαν γενικὴν ἐξίσωσιν ὁ ἔσχατος ὅρος ἔχει τὸν αὐτὸν τύπον, ὡς καὶ ἡ προϋποτεθεῖσα, ἄρα λαμβάνομεν εἰς κάθε ἐξίσωσιν μὲ ἔσχατον ὅρον ἀπὸ πολλοὺς παρόγοντας μίαν ποσότητα ρ καταφατικὴν, καὶ τίθεμεν εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ χ, καὶ ὅταν τὰ μέρη τῆς ἐξισώσεως καλῶς ἐπισυνάψωμεν, προκύπτει ἀριθμός τις, ὅςις εἶναι ὁ ἔσχατος ὅρος μιᾶς ἑτέρας ἐξισώσεως, ἧς αἱ ῥίζαι ἐλάττουες τῆς προτέρας κατὰ τὸν ἀριθμὸν ρ, ἢ ἀντὶ χ τίθεμεν τὴν ποσότητα ρ ἀποφατικὴν, καὶ τῶν μερῶν τῆς ἐξισώσεως καλῶς ἐπισυναφθέντων, προκύπτει ἀριθμὸς αὖθις μιᾶς ἑτέρας ἐξισώσεως, ἧς αἱ ῥίζαι μείζουες τῆς προτέρας κατὰ τὸ ρ· ὅθεν αὐτὴν τὴν μέθοδον μεταχειριζόμεθα εἰς τὰς ἐξισώσεις, ὁποῦ ἔχουσι τὸν ἔσχατον ὅρον μεγάλον, καὶ λύεται εἰς πολλοὺς παράγοντας, δηλ: α΄ λαμβάνομεν ἀντὶ χ ἁρμόδιον ἀριθμὸν ρ τοιοῦτον, ὥςε νὰ προκύπτῃ ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἐλάττων ἀριθμὸς, καὶ νὰ λύεται εἰς ὀλίγους παράγοντας.

β΄. Λύομεν τὸν ἀριθμὸν, ὁποῦ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν, εἰς τοὺς παράγοντας αὐτοῦ.

γ΄ Εἰς ἕκαςον παράγοντα τούτων καταφατικὸν, καὶ ἀποφατικὸν προσθέτομεν τὸν ληφθέντα ρ, ἐὰν ἐλάβωμεν αὐτὸν καταφατικὸν, ἢ ἀφαιροῦμεν αὐτὸν, ἐὰν ἀποφατικόν.

δ΄. Εἶτα τὸ κεφάλαιον τοῦτο, ἢ τὴν διαφορὰν θέτομεν ἀντὶ χ εἰς τὴν ἐξίσωσιν, καὶ δοκιμάζομεν μετὰ τίνος ἔρχεται εἰς τὸ μηδὲν ἡ ἐξίσωσις, ὅσοι δὲ τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδὲν φέρουσιν, εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως· ἢ καὶ ἐὰν μίαν ἢ δύο ῥίζας εὕρωμεν, καταβιβάζομεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς κατωτέρους βαθμοὺς (§. 741). ζητεῖται λ: χ: ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $\chi^4-40\chi^3+695\chi^2-3900\chi+9504=0$ ἧς ὁ ἔσχατος ὅρος εἰς πολλοὺς λύεται παράγοντας· λαμβάνομεν τοίνυν $\chi=10=\rho$, καὶ ἔςαι ἡ ἐξίσωσις $10000-40000+59500-39000+9504=4$· ἄρα οἱ παράγοντες τοῦ 4 εἶναι 1, 2, —1, —2· ὅθεν καὶ $\chi=1+10=11$, $\chi=2+10=12$, $\chi=-1+10=9$. $\chi=-2+10=8$· διότι ἑκάςη τούτων φέρει τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδέν.

Ἔτι ζητεῖται ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $\chi^3+2\chi^2-56\chi-192+0$. ἐὰν δὲ λάβωμεν $\chi=-3=\rho$, ἔςαι ἡ ἐξίσωσις $-27+18+168-192=33$· καὶ οἱ παράγοντες τοῦ 33 εἶναι 1, 3, 11. —1, —3, —11. ἄρα $\chi=1-3=-2$· καὶ $\chi=3-3=0$. καὶ $\chi=11-3=8$· καὶ $\chi=-1-3=-4$· καὶ $\chi=-3-3=-6$· καὶ $\chi=-11-3=-14$· ἀλλὰ μόνον $\chi=8$ καὶ $\chi=-4$, καὶ $\chi=-6$ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως· διότι αὗται μόνον φέρουσι τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδέν.

Τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ ἡ ἑξῆς ἐξίσωσις $\chi^3+19\chi^2+94\chi+120=0$· ληφθήτω αὐτὶ $\chi=-4=\rho$ ἔςαι $-64+304-376+120=16$· τοῦ δὲ 16 οἱ παράγοντες 1, 2, 4, 8 καὶ —1, —2, —4, —8. καὶ ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ὅλαι ἀποφατικαί, ἔςαι $\chi=-8-4=-12$. καὶ $\chi=-1-4=-5$ καὶ $\chi=-2-4=-6$.

§. 748. Καὶ ὅρόν τινα παρευρίσκομεν, ἐὰν θέλωμεν, ὅταν δὲν εὑρίσκεται εἰς μίαν τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων· ἐὰν ἀντὶ τῆς ἀγνώςου ἑτέραν ἄγνωςον μετά τινος ἀριθμοῦ καταφατικοῦ καὶ ἀποφατικοῦ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν λάβωμεν, δηλ: δεδόσθω ἡ ἐξίσωσις $Z^3 - 13Z - 12 = 0$· ἐν ᾗ ὁ δεύτερος ὅρος ἐλλείπει, καὶ ζητεῖται νὰ εἰσενεχθῇ· εἰς τοῦτο λοιπὸν ἔςω $Z = \chi + 1$ καὶ $Z^3 = \chi^3 + 3\chi^2 + 3\chi + 1$ ἑπομένως

$$\begin{array}{rl} -13Z = & -13\chi - 13 \\ -12 = & -12 \\ \hline & \chi^3 + 3\chi^2 - 10\chi - 24 = 0. \end{array}$$

καὶ αἱ ῥίζαι αὐτῆς $\chi = -2$. $\chi = -4$. $\chi = 3$· τῆς δὲ ἀνωτέρας ἦν $Z = -1$. $Z = -3$· $Z = 4$.

§. 749. Δυνάμεθα ἑκάςην τεταγμένην ἐξίσωσιν τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν εἰς ἑτέραν μεταβαλεῖν, ἧς αἱ ῥίζαι πολλαπλασιάζονται ἐπίτινα ἀριθμὸν, ὃν ἂν ἡμεῖς θέλωμεν· εἰς τοῦτο λαμβάνομεν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν $\chi^{\mu} + \alpha\chi^{\mu-1} + \beta\chi^{\mu-2} + \gamma\chi^{\mu-3} + \ldots\ldots + K = 0$· εἰς αὐτὴν ὅμως ζητεῖται ἡ χ ἄγνωςος νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ ν οὕτω $\nu\chi$· ἔςω δὲ $\nu\chi = y$ ἄρα $\chi = \frac{y}{\nu}$. ἐὰν δὲ εἰς τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ χ τὸ ἴσον $\frac{y}{\nu}$ θῶμεν, ἔςαι ἡ ἐξίσωσις

$$\left(\frac{y}{\nu}\right)^{\mu} + \left(\frac{y}{\nu}\right)^{\mu-1} + \left(\frac{y}{\nu}\right)^{\mu-2} + \ldots\ldots K = 0.$$

ἐὰν δὲ ταύτης ἄμφω τὰ σκέλη διὰ ν^{μ} πολλαπλασιάσωμεν, ἔςαι

$$\frac{\nu^{\mu} y^{\mu}}{\nu^{\mu}} + \frac{\nu^{\mu} y^{\mu-1}}{\nu^{\mu-1}} + \frac{\nu^{\mu} y^{\mu-2}}{\nu^{\mu-1}} + \ldots\ldots\ldots \nu^{\mu} K = 0$$·

καὶ ἐξ' αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως, ἤτοι τῆς $y^{\mu} + a\nu y^{\mu-1} + \beta \nu^2 y^{\mu-2} + \gamma \nu^3 y^{\mu-3} + \ldots\ldots \nu^{\mu} K = 0$, πολλαπλασιασθείσης καὶ μετὰ τῶν συνεργῶν τῆς πρώτης. γίνεται φανερὸν, ὅτι ἐὰν θέλωμεν νὰ μεταβάλλωμεν μίαν ἐξίσωσιν τεταγμένην τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν εἰς ἑτέραν, καθ' ἣν αἱ ῥίζαι, ἢ ἡ ἄγνωςος ποσότης νὰ εἶναι πεπολλαπλασιασμένη μὲ τὸν δοκοῦντα ἀριθμόν· θέτομεν ὑπὸ τοὺς ὅρους τῆς δοθείσης ἐξισώσεως κατὰ τάξιν τοὺς ὅρους μιᾶς γεωμετρικῆς σειρᾶς, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος ἡ μονὰς, καὶ πηλίκον ὁ ἀριθμὸς, ἐφ' ὃν ἡ ἄγνωςος ζητεῖται νὰ πολλαπλασιασθῇ οὕτω, 1, υ, υ^2, υ^3, υ^4, υ^5, κτ. καὶ ἔπειτα ἕκαςος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ὅρος πολλαπλασιάζεται μὲ ἕκαςον ὅρον τῆς σειρᾶς, καὶ τὸ παραγόμενον εἶναι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις, ἐὰν δέ τις ὅρος μὴ ἐνυπάρχῃ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἀλλ' ἀςερίσκος (§. 736), καὶ ὑπὸ τοῦ ἀςερίσκου ὁ ἀνάλογος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς τίθεται π: χ: τῆς ἐξισώσεως $\psi^3 - 10\psi^2 + 23\psi - 14 = 0$, αἱ ῥίζαι $1, 2, 7$, καὶ ζητεῖται νὰ μεταβληθῇ εἰς ἑτέραν, ἥτις νὰ ἔχῃ τὰς ῥίζας μὲ 3 πολλαπλασιαζομένας· ὅρα $\psi^3 - 10\psi^2 + 23\psi - 14 = 0$, ἧς αἱ ῥίζαι 3, 6, 21.

$$\frac{1,\quad 3,\quad 9,\quad 27}{\psi^3 - 30\psi^2 + 207\psi - 378 = 0.}$$

ἔτι καὶ ταύτης τῆς ἐξισώσεως $\chi^4 * - 5\chi^2 * + 4 = 0$, ἧς αἱ ῥίζαι 1, 2, -1, -2. τὸ πολλαπλοῦν ἐπὶ 2 εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

$$\chi^4 * + 5\chi^2 * + 4 = 0$$
$$\frac{1\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad 16}{\chi^4 * - 20\chi^2 * + 64 = 0.}$$

καὶ αἱ ῥίζαι ταύτης, $2, 4, -2, -4$.

§. 750. Δι' αὐτῆς τῆς μεθόδου δυνάμεθα νὰ ἀπαλλαχθῶμεν ἀπὸ τοὺς κλασματικοὺς συνεργοὺς μιᾶς ἐξισώσεως τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως μὲ μίαν ποσότητα, εἰς τὴν ὁποίαν ὅλοι οἱ παρονομασαὶ τῶν κλασμάτων ἐμπεριέχονται, ὡς παράγοντες, δηλ: ὡς ἄνω πολλαπλασιάζομεν ἕκασον ὅρον τῆς ἐξισώσεως μὲ ἕκασον ὅρον μιᾶς σειρᾶς γεωμετρικῆς, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος μονὰς, καὶ πηλίκον ἡ ποσότης, ἐν ᾗ οἱ παρονομασαὶ ὡς παράγοντες ἐμπεριέχονται, δηλ: διὰ νὰ ἀπαλλαχθῶμεν ἀπὸ τοὺς κλασματικοὺς συνεργοὺς αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως $\chi^3 - \frac{9}{2}\chi^2 + \frac{55}{18}\chi + \frac{14}{9} = 0$, λαμβάνομεν πηλίκον 18, ἐν ᾧ καὶ ὁ 2 καὶ ὁ 9 ἐμπεριέχονται, καὶ πολλαπλασιάζομεν οὕτω

$$\begin{array}{r} \chi^3 - \frac{9}{2}\chi^2 + \frac{55}{18}\chi + \frac{14}{9} = 0. \\ 1,\ 18,\ \ 18^2,\ \ 18^3 \\ \hline \chi^3 - 81\chi^2 + 55.\ 18\chi + 14.\ 18^2.\ 2 = 0 \end{array}$$

$= \chi^3 - 81\chi^2 + 990\chi + 9072 = 0$. ἀλλ' αὕτη καὶ διὰ τοῦ 6 πηλίκου μετεβάλλετο· καθότι τὸ τετράγωνον τοῦ 6 περιέχει τὸν 18 παρονομαςὴν, ὅςις περιέχει τοὺς λοιποὺς παρονομαςάς. Τὰ τοιαῦτα πρέπει καλῶς νὰ παρατηρῇ ὁ πρωτόπειρος διὰ νὰ λαμβάνῃ ὅσον δύναται σειρὰν μὲ μικροτέρους παράγοντας·

$$\begin{array}{r} \chi^3 - \frac{9}{2}\chi^2 + \frac{55}{18}\chi + \frac{14}{9} = 0 \\ 1,\ 6,\ \ 36,\ 216 \\ \hline \end{array}$$

καὶ ταύτης αἱ ῥίζαι εὑρίσκονται $\chi^3 - 27\chi^2 + 110\chi + 336 = 0$. $-2, 8, 21$. ἄρα τῆς πρώτης ἦν $\chi = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$. $\chi = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. καὶ $\chi = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.

Ἔςω ἔτι ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 - \frac{3}{4}.\chi^2 + \frac{3}{16}\chi + 20 = 0$.

ὁ δὲ κοινὸς παράγων 4, 1, 4, 16, 64.

$$\overline{\chi^3 - 3\chi^2 + 3\chi + 1280.}$$

Ἔςω ἔτι καὶ αὕτη, $\chi^3 - 3\chi^2 + \frac{11}{4}\chi - \frac{3}{4}$

ἧς ὁ κοινὸς παράγων 2, ἄρα $\underline{1\ ,\ 2\ ,\ \ 4\ ,\ \ 8}$

$$\chi^3 - 6\chi^2 + 11\chi - 6 = 0.$$

καὶ γενικῶς αὕτη $\chi^3 + \frac{\alpha}{\beta}\chi^2 + \frac{\gamma}{\delta}\chi + \frac{\gamma}{\zeta} = 0.$

ἄρα βδζ ὁ παράγων $\underline{1,\ \ \beta\delta\zeta\ ,\ \beta^2\delta^2\zeta^2,\ \beta^3\delta^3\zeta^3}$

$$\chi^3 + \alpha\delta\zeta\chi^2 + \gamma\beta^2\delta\zeta^2\chi + \gamma\beta^3\delta^3\zeta^2 = 0.$$

§. 751. Καὶ πῶς διά τινος ἀριθμοῦ διαιρουμένων τῶν ῥιζῶν ἑκάςης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν εὐκόλως τὴν μέθοδον· γίνεται δ' ἐὰν ληφθῇ ἡ ἄνω ἐξίσωσις (§. 740)

$$\overset{\mu}{y} + \nu\alpha\overset{\mu-1}{y} + \nu^2\beta\overset{\mu-2}{y} + \nu^3\gamma\overset{\mu-3}{y} + \ldots \nu K = 0$$ · καὶ ἐὰν

θῶμεν εἰς αὐτὴν $\nu = \frac{1}{\pi}y$ ἔςαι $\overset{\mu}{y} + \frac{\alpha\overset{\mu-1}{y}}{\pi} + \frac{\beta\overset{\mu-2}{y}}{\pi^2} + \frac{\gamma\overset{\mu-3}{y}}{\pi^3} + \ldots$

$\frac{K}{\pi^\mu} = 0$, ἥτις ἔχει τὰς αὐτὰς ῥίζας τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, εἰμὴ ὅτι ἔχει τὰς ῥίζας ἐκείνης διὰ τοῦ π διῃρημένας, ὅθεν ἑκάςη τεταγμένη τῶν ἀνωτέρων ἐξισώσεων μεταβάλλεται εἰς ἑτέραν, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι τὸ πηλίκον, ὁποῦ ἐξέρχεται, ἐὰν διέλωμεν τὰς ῥίζας τῆς πρώτης διά τινος ἀριθμοῦ. Ἐὰν εἰς ἕκαςον ὅρον αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως γράψωμεν ὅρους μιᾶς σειρᾶς γεωμετρικῆς, ἀρχόμενοι ἀπὸ τὸν ἔσχατον ὅρον τῆς ἐξισώσεως, ἤτοι τὰ αὐτὰ γίνονται, ὡς ὅταν αἱ ῥίζαι πολλαπλασιάζονται· εἰμὴ ὅτι ἡ σειρὰ ἡ γεωμετρικὴ ἄρχεται ἀνάπαλιν ἀπὸ τὸν ὅρον τοῦ ἐσχάτου. Ἐὰν δ' ἡ σειρὰ καὶ ἀςερίσκον ἔχῃ, γράφεται ὁ ἀνήκων ὅρος τῆς σειρᾶς ὑπὸ τὸν ἀςερίσκον, καὶ ἕκαςος ὅρος πολλαπλασιάζεται, π: χ: ζητεῖται ἡ σειρὰ $\chi^3 + 2\chi^2 + \chi - 12 = 0.$

νὰ μεταβληθῇ εἰς ἑτέραν, ἧς αἱ ῥίζαι νὰ εἶναι τὸ πηλίκον τῶν ῥιζῶν αὐτῆς διὰ τοῦ 2· ἄρα $\chi^3+2\chi^2+\chi-12=0.$

$$\frac{\begin{array}{c}\chi^3+2\chi^2+\chi-12=0.\\ 8,\ 4,\ 2,\ 1\end{array}}{8\chi^3+8\chi^2+2\chi-12=0.}$$

§. 752. Αὐτὴν καὶ τὴν ἡγουμένην μέθοδον μεταχειριζόμεθα, ὅταν ἡ ἄγνωστος ποσότης ἔχῃ συνεργὸν ἄλογον, διὰ νὰ ἀπαλλάξωμεν τῆς ἀλογίας αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν· ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^3-4\chi^2\sqrt{3}+12\chi-24\sqrt{3}=0$, γράφομεν λοιπὸν ὑπὸ τοὺς ὅρους αὐτῆς τὴν γεωμετρικὴν σειρὰν ἀνάπαλιν τὴν δε $1,\ \sqrt{3},\ 3,\ 3\sqrt{3}$ καὶ διὰ ταύτης ἢ διαιροῦμεν τοὺς ὅρους ἐκείνης, ἢ πολλαπλασιάζομεν, καὶ ἐξέρχεται ἡ σειρὰ ἄνευ σημείων ῥιζικῶν· διότι ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἑξῆς

$$\frac{\begin{array}{c}\chi^3-4\chi^2\sqrt{3}+12\chi-24\sqrt{3}=0\\ 1,\ \ \sqrt{3},\ \ 3,\ \ 3\sqrt{3}\end{array}}{\chi^3-12\chi^2+36\chi-216=0.}$$

Ὁμοίως ἀπαλλάττεται τῆς ἀλογίας καὶ ἡ ἑξῆς

$$\frac{\begin{array}{c}\chi^3+\chi^2\sqrt{5}-3\chi-3\sqrt{5}=0.\\ 1,\ \ \sqrt{5},\ \ 5,\ \ 5\sqrt{5}\end{array}}{\chi^3+5\chi^2-\tfrac{3}{5}\chi-\tfrac{3}{5}=0}$$

ἢ οὕτως, πολλαπλασιάσωμεν $\chi^3+5\chi^2-15\chi-75=0.$

τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ εἰς τὸ ἑξῆς παράδ:

$$\frac{\begin{array}{c}\chi^3-4\chi^2\sqrt{3}+12\chi-24\sqrt{3}=0\\ 1,\ \ \sqrt{3},\ \ 3,\ \ 3\sqrt{3}\end{array}}{\chi^3-4\chi^2+4\chi-8=0.}$$

ἢ οὕτω $\chi^3-12\chi^2+36\chi-216=0.$

§. 753. Ἐὰν δέ τις ἀνωτέρα τεταγμένη ἐξίσωσις περιέχῃ ῥίζας δυνατὰς μὲν πλὴν ἀλόγους, τότε εὑρίσκομεν αὐτὰς διὰ τῆς προσεγγύσεως κατὰ τὰ ἑξῆς.

α'. Ἀντιμεταθέτομεν ἀντὶ τῆς ἀγνώστου χ κατὰ τάξιν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, 4, 5 . . . . ἐὰν βλέπωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἔχῃ καταφατικὰς ῥίζας, ἐὰν δ' ἀποφατικὰς, τούτους 0, —1, —2, —3, —4, —5 . . . ἕως οὗ μεταβληθῇ τὸ σημεῖον + εἰς —, ἢ ἀνάπαλιν εἰς τὸ ἕτερον σκέλος τῆς ἐξισώσεως, ὅπου προκύπτει ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως· λοιπὸν οὗτος ὁ ἀριθμὸς ὁ ἀντὶ χ λαμβανόμενος, εἰς ὃν καὶ τὸ σημεῖον μεταβάλλεται εἰς τὸ προκύπτον ἕτερον σκέλος, εἶναι μείζων τῆς ζητουμένης ῥίζης, καὶ ἐλάττων ὁ ἐγγὺς ἡγούμενος, π: χ: ζητοῦνται αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως, ἐν ᾗ δύο καταφατικαὶ καὶ μία ἀποφατικὴ $χ^3—3χ^2—17χ+43=0$. ἄρα ἐὰν ληφθῇ

$χ=0$ γίνεται ἡ ἐξίσωσις καὶ τὰ προκύπτοντα

	0	0	0	0 + 43	= + 43
	1	+ 1	— 3	— 17 + 43	= + 24
ὅθεν ἐπειδὴ	2	8	— 12	— 34 + 43	= + 5
εἰς τὸ 3 ἀν-	3	27	— 27	— 51 + 43	= — 8
τὶ χ μετε-	4	64	— 48	— 68 + 43	= — 9
βλήθη τὸ	5	125	— 75	— 85 + 43	= + 8
σημεῖον +	6	216	— 108	— 102 + 43	= + 49

εἰς —· φανερὸν ὅτι μία ῥίζα ἡ καταφατικὴ εἶναι μείζων τοῦ 2, καὶ ἐλάττων τοῦ 3· ἤτοι ἡ ἀληθὴς ῥίζα εἶναι μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 3· ἐπειδὴ δὲ καὶ εἰς τὸν 5 μετεβλήθη τὸ σημεῖον — εἰς +, φανερὸν ὅτι καὶ ἡ ἑτέρα ἡ καταφατικὴ ῥίζα εἶναι ἐλάττων τοῦ 5 καὶ μείζων τοῦ 4, ἤτοι ἡ ἀληθὴς ῥίζα πίπτει μεταξὺ τοῦ 5 καὶ 4.

β'. Εὑρόντες οὕτω τὴν ἐγγὺς ἐλάττονα ῥίζαν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, θέτομεν τὸ ἐλλιπὲς τῆς ῥίζης $=τ$· καὶ ἔσαι $χ=2+τ$, ἢ $χ=4+τ$.

γ'. Θέτομεν ἤδη εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἀντὶ χ τὸ ἴσον $2+\tau$ · ἢ $4+\tau$. καὶ ἔςαι

$$\begin{aligned} \chi^3 &= 8+12\tau+6\tau^2+\tau^3 \\ -3\chi^2 &= -12-12\tau-3\tau^2 \\ -17\chi &= -34-17\tau \cdot \\ 43 &= \quad 43. \\ \hline 0 &= 5-17\tau+3\tau^2+\tau^3 \end{aligned}$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ τ εἶναι ἔλαττον μονάδος, καὶ ἑπομένως γνήσιον κλάσμα, δυνάμεθα νὰ ἀποῤῥίψωμεν τὴν δευτέραν καὶ τρίτην δύναμιν τοῦ τ ὡς πάνυ σμικρὰν ποσότητα, καὶ ἔςαι $0=5-17\tau$ · καὶ $\tau=\frac{5}{17}=0,\ 29$ · ἄρα $\chi=2,\ 29$ τῆς ἀληθείας ἐγγύτερον.

δ'. Ἐὰν δὲ αἱ περιςάσεις τοῦ προβλήματος ἀκριβεςέραν τὴν ῥίζαν ἐπιζητῶσι, θέτομεν ἔτι εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $\chi=2,\ 29+\tau$ καὶ τὴν αὐτὴν ἐργασίαν ἐπαναλαμβάνομεν, καὶ εὑρίσκεται ἡ ῥίζα μᾶλλον ἀκριβεςέρα. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκεται καὶ ἡ δευτέρα καταφατικὴ ῥίζα, ἐὰν θῶμεν $\chi=4+\tau$, καὶ ἀντικαταςήσωμεν ἀντὶ χ, $4+\tau$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν οὕτω

$$\begin{aligned} \chi^3 &= 64+48\tau+12\tau^2+\tau^3=0. \\ -3\chi^2 &= -48-24\tau-3\tau^2 \\ -17\chi &= -68-17\tau. \\ 43 &= 43 \\ \hline 0 &= -9+7\tau+9\tau^2+\tau^3 ; \end{aligned}$$

καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\tau=\frac{9}{7}$ σημεῖον ὅτι ἡ ῥίζα μᾶλλον πλησιάζει τῷ 5 ἢ τῷ 4 · καὶ τὸ κλάσμα, ὅπερ ἀντὶ τοῦ τ ἐκλαμβάνεται εἶναι μεῖζον μονάδος, καὶ διὰ τοῦτο αἱ δυνάμεις τοῦ τ δὲν ἐγκαταλιμπάνονται· ὅθεν ληφθήτω $5-\tau=\chi$ καὶ γίνεται ἡ ἐξίσωσις.

$$\chi^3 = 125 - 75\tau + 15\tau^2 - \tau^3$$
$$-3\chi^2 = -75 + 30\tau - 3\tau^2$$
$$-17\chi = -85 + 17\tau$$
$$+43 = 43.$$
$$0 = 8 - 28\tau \text{ καὶ } \tau = \tfrac{8}{28} = 0{,}29 \text{ σχεδὸν.}$$

ἄρα $\chi = 5 - 0{,}29 = 4{,}71$.

Ἐὰν δὲ καὶ τὴν ἀποφατικὴν ῥίζαν εὑρεῖν θέλωμεν, θῶμεν εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν ἀντὶ χ, $0, -1, -2, -3, -4$, κτ οὕτω

$\chi=$	ἐξίσωσεις προκύπτοντα
0	$0 \; 0 \; 0 + 43 = +43$
-1	$-1 - 3 + 17 + 43 = +56$
-2	$-8 - 12 + 34 + 43 = +57$
-3	$-27 - 27 + 51 + 43 = +40$
-4	$-64 - 48 + 68 + 43 = -1$

καὶ βλέπομεν, ὅτι εἰς τὸν -4 μετεβλήθη τὸ σημεῖον $+$ εἰς $-$· ἄρα ἡ ῥίζα μεταξὺ τοῦ -4 καὶ -3 ὅθεν $\chi = -4 + \tau$· καὶ ἑπομένως

$$\chi^3 = -64 + 48\tau - 12\tau^2 + \tau^3$$
$$-3\chi^2 = -48 + 24\tau - 3\tau^2$$
$$-17\chi = +64 - 17\tau$$
$$+43 = +43\cdot$$
$$0 = -1 + 55\tau \text{ καὶ } \tau = \tfrac{1}{55} = 0{,}018.$$

καὶ ἑπομένως $\chi = -3{,}982$· καὶ λοιπὸν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως σχεδὸν $\chi = 2{,}29$· καὶ $\chi = 4{,}72$ καὶ $\chi = -3{,}982$.

§. 754. Πολλάκις συμβαίνει νὰ αὐξάνωσι τὰ προκύπτοντα, ἐν ᾧ πρότερον ἐλαττοῦσθαι ἤρχοντο· εἰς αὐτὴν ὅμως τὴν περίςασιν ὁ ἀριθμὸς, δι' οὗ τὸ προκύπτον αὐξάνεσθαι, ἄρχεται, δὲν εἶναι ποτὲ κατὰ μίαν μονάδα διάφορος ἀπὸ μίαν ῥίζαν τῆς ἐξισώσεως· ὅθεν μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν λαμβάνομεν καὶ ἔτι ἓν κλάσμα, δι' οὗ, ἐὰν τεθῇ εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ χ, πλησιάζει ἡ ἐξίσωσις μᾶλλον εἰς τὸ μηδέν· π. χ. ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^3 - 2\chi^2 - 21\chi + 55 = 0$ θῶμεν ἀντὶ $\chi = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ κτ. ἔσαι

$\chi =$	ἡ ἐξίσωσις, τὰ προκύπτ.
0	$0\ 0\ 0 + 55 = +55$
1	$1 - 2 - 21 + 55 = +33$
2	$8 - 8 - 42 + 55 = +13$
3	$27 - 18 - 63 + 55 = +1$
4	$64 - 32 - 84 + 55 = +3$
5	$125 - 50 - 105 + 55 = +25$·

καὶ λοιπὸν αἱ ῥίζαι αἱ καταφατικαὶ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 3, καὶ τοῦ 3 καὶ 4· ἤτοι ἄμφω εὑρίσκονται μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 3, ἢ ἄμφω μεταξὺ τοῦ 3 καὶ 4· ἐὰν δέ τι κλάσμα ληφθῇ $3 + \frac{1}{\nu}$, καὶ ἀντικατασαθῇ εἰς τὴν προϋποτεθεῖσαν ἐξίσωσιν $\chi = 3 + \frac{1}{\nu}$, καὶ ὀφθῇ τὸ προκύπτον μᾶλλον πλησιάζον εἰς τὸ μηδέν, τότε κρίνομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ῥίζα κεῖται μεταξὺ αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ 3 καὶ αὐτοῦ τοῦ ἰδίου μετὰ τοῦ κλάσματος· θῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi = 3 + \frac{1}{2}$ καὶ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς $-\frac{1}{8}$· ἄρα ἡ ῥίζα εἶναι μεταξὺ τοῦ 3 καὶ $3\frac{1}{2}$, καὶ ἡ ἑτέρα καταφατικὴ ῥίζα μεταξὺ τοῦ $3\frac{1}{2}$ καὶ 4· ὅθεν ὡς ἄνω θέτομεν $\chi = 3\frac{1}{2} + \tau$ καὶ $3\frac{1}{2} - \tau = \chi$, καὶ διὰ τῆς προσεγγύσεως εὑρίσκομεν ἀκριβεσέρας τὰς ῥίζας (§. 753).

§. 755. Τέλος ἐὰν εἰς μίαν ἐξίσωσιν, ἀφ' οὗ θῶμεν ἀντὶ χ, 0, 1, 2, 3, 4, 5 . . . . . ἢ 0, -1, -2, -3, -4, -5 . . . . καὶ τὰ προκύπτοντα οὐ μόνον τὸ σημεῖον δὲν μεταβάλλωσιν, ἀλλὰ καὶ ἀδιακόπως αὐξάνονται, τότε κρίνομεν ὅτι αἱ ῥίζαι αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἀδύνατοι, ὡς εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^4 - 2\chi^3 + 4\chi^2 - 2\chi + 3$, ἧς αἱ ῥίζαι ἀδύνατοι ἀριθμοί· πῶς δὲ καὶ ταύτας εὑρίσκομεν, ὕστερον διδάξομεν.

§. 756. Ἀδυνάτους ῥίζας ἔχουσι καὶ ἐκεῖναι αἱ ἐξισώσεις, ὧν τὰ προκύπτοντα, ἐὰν θῶμεν 0, 2, 3, 4, 5 κτ. ἢ 0, —1, —2, —3, —4, —5 κτ. ἀντὶ χ, τὴν ἀρχὴν μὲν σμικρύνονται, ὕστερον δ' αὔξονται ἀδιακόπως. Ἐὰν ὅμως ληφθῇ καὶ ἓν κλάσμα μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ, δι' οὗ τὸ ἐλάχιστον προκύπτον ἐξῆλθε, καὶ τεθῇ εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ χ, τὸ προκύπτον δὲν πλησιάζει μᾶλλον εἰς τὸ μηδέν, π. χ. εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^4 - 12\chi^3 + 56\chi^2 - 120\chi + 101 = 0$ εἶναι καὶ αἱ τέσσαρες ῥίζαι ἀδύνατοι· διότι ἐὰν θῶμεν $\chi = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ τὰ προκύπτοντα εἶναι 101, 2, 5, 26· κτ. Ἐὰν ὅμως λάβωμεν μετὰ τοῦ 3 καὶ ἓν κλάσμα οἱονδήποτε $\chi = 3 + \frac{1}{\nu}$ εἰς τὴν προτεθεῖσαν ἐξίσωσιν, πάντοτε τὸ προκύπτον ἐξέρχεται μεῖζον τοῦ 2· τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ἀποφατικὰς τιμὰς τοῦ χ.

§. 757. Εἰς τὸ παρὸν λείπεται ἔτι νὰ εὕρωμεν ἕνα γενικὸν τύπον τῆς προσεγγύσεως τῶν ῥιζῶν ὅλων τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων· διότι ἑκάστη ἀνωτέρω τεταγμένη ἐξίσωσις εἰς τὸν ἑξῆς τύπον ἀνάγεται

$$\chi^{\mu} + \alpha\chi^{\mu-1} + \beta\chi^{\mu-2} + \gamma\chi^{\mu-3} + \delta\chi^{\mu-4} + \ldots + K = 0.$$

Δεδόσθω ὅτι εὑρίσκομεν μίαν τινὰ ῥίζαν αὐτῆς φ, ἀφ' ἧς μόνον ἕν τι κλάσμα ἐλλείπει τ, διὰ νὰ εἶναι ἡ ῥίζα ἡ ἀληθής· ἄρα $\chi = \varphi + \tau$· λοιπὸν θῶμεν εἰς τὴν γενικὴν ἄνω ἐξίσωσιν ἀντὶ χ τὸ ἴσον $\varphi + \tau$· ἄρα ἡ ἄνω ἐξίσωσις γίνεται οὕτω $(\varphi+\tau)^{\mu} + \alpha(\varphi+\tau)^{\mu-1} + \beta(\varphi+\tau)^{\mu-2} + \gamma(\varphi+\tau)^{\mu-3} + \delta(\varphi+\tau)^{\mu-4} + \ldots\ldots\ldots K = 0$. Ἐὰν ὅμως αὐτὰ διώνυμα ἐκτυλίξωμεν, ἔσται

$$\chi^{\mu} = \varphi^{\mu} + \mu\varphi^{\mu-1}\tau + \frac{\mu(\mu-1)}{2}\varphi^{\mu-2}\tau^{2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.\ 2.\ 3}\times$$

$$\varphi^{\mu-3}\tau^{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha\chi^{\mu-1} = \alpha\varphi^{\mu-1} + (\mu-1)\alpha\varphi^{\mu-2}\tau + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.\ 2}\alpha\varphi^{\mu-3}\tau^{2} +$$

$$\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.\ 2.\ 3}\alpha\varphi^{\mu-4}\tau^{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta\chi^{\mu-2} = \beta\varphi^{\mu-2} + (\mu-2)\beta\varphi^{\mu-3}\tau + \frac{(\mu-2)(\mu-3)}{1.\ 2}\times$$

$$\beta\varphi^{\mu-4}\tau^{2} + \frac{(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{1.\ 2.\ 3}\beta\varphi^{\mu-5}\tau^{3} + \ldots\ldots$$

$$\gamma\chi^{\mu-4} = \gamma\varphi^{\mu-3} + (\mu-3)\gamma\varphi^{\mu-4}\tau + \frac{(\mu-3)(\mu-4)}{1.\ 2}\times$$

$$\gamma\varphi^{\mu-5}\tau^{2} + \frac{(\mu-3)(\mu-4)(\mu-5)}{1.\ 2.\ 3}\gamma\varphi^{\mu-6}\tau^{3} + \ldots\ldots$$

$$\delta\chi^{\mu-4} = \delta\varphi^{\mu-4} + (\mu-4)\delta\varphi^{\mu-5}\tau + \frac{(\mu-4)(\mu-5)}{1.\ 2}\times$$

$$\delta\varphi^{\mu-6}\tau^{2} + \frac{(\mu-4)(\mu-5)(\mu-6)}{1.\ 2.\ 3}\delta\varphi^{\mu-7}\tau^{3} + \ldots\ldots$$

$$K = K$$

$$O = 0$$

ἀλλ' ἄμφω αὗται αἱ ἐξισώσεις εἰσὶν ἴσαι τῷ μηδενί, αἱ δὲ δυνάμεις τοῦ κλάσματος τ, πλὴν τῆς πρώτης, ἄνευ πταίσματος ἐγκαταλιμπάνονται, καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται.

$$0=\varphi^{\mu}+\alpha\varphi^{\mu-1}+\beta\varphi^{\mu-2}+\gamma\varphi^{\mu-3}+\dots\dots\dots K+$$

$$\tau\left(\mu\varphi^{\mu-1}+(\mu-1)\alpha\varphi^{\mu-2}+(\mu-2)\beta\varphi^{\mu-3}+(\mu-3)\gamma\varphi^{\mu-4}+\dots\right)$$

καὶ ἐξ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν

$$\tau=\frac{-\varphi^{\mu}-\alpha\varphi^{\mu-1}-\beta\varphi^{\mu-2}-\gamma\varphi^{\mu-3}\dots-K}{\mu\varphi^{\mu-1}+(\mu-1)\alpha\varphi^{\mu-2}+(\mu-2)\beta\varphi^{\mu-3}+(\mu-3)\gamma\varphi^{\mu-4}+\dots}$$ Ἐτέθη ὅμως

καὶ $\chi=\varphi+\tau$· διὰ τοῦτο ἐὰν εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν θῶμεν ἀντὶ τ τὴν ἡγουμένην ἔκφρασιν ἔσται.

$$\chi=\varphi-\frac{\left(\varphi^{\mu}+\alpha\varphi^{\mu-1}+\beta\varphi^{\mu-2}+\gamma\varphi^{\mu-3}+\dots+K\right)}{\mu\varphi^{\mu-1}+(\mu-1)\alpha\varphi^{\mu-2}+(\mu-2)\beta\varphi^{\mu-3}+\dots}$$

Ἐὰν δὲ τὸ δεύτερον σκέλος εἰς ἕνα παρονομαστὴν φέρωμεν, ἔσται

$$\chi=\frac{-\mu\varphi^{\mu}+(\mu-1)\alpha\varphi^{\mu-1}+(\mu-2)\beta\varphi^{\mu-2}+(\mu-3)\gamma\varphi^{\mu-3}-}{\mu\varphi^{\mu-1}+(\mu-1)\alpha\varphi^{\mu-2}+(\mu-2)\times}$$

$$\frac{\varphi^{\mu}-\alpha\varphi^{\mu-1}-\gamma\varphi^{\mu-2}-\gamma\varphi^{\mu-3}-\dots-K}{\beta\varphi^{\mu-3}+(\mu-3)\gamma\varphi^{\mu-4}\dots\dots\dots}$$ ἀλλὰ μὴν $\mu\varphi^{\mu}-\varphi^{\mu}=$ $(\mu-1)\varphi^{\mu}$· καὶ $(\mu-1)\alpha\varphi^{\mu-1}-\alpha\varphi^{\mu-1}=(\mu-2)\alpha\varphi^{\mu-1}$·

καὶ $(\mu-2)\beta\varphi^{\mu-2}-\beta\varphi^{\mu-2}=(\mu-3)\beta\varphi^{\mu-2}$· κτ. ἄρα

$$\chi=\frac{(\mu-1)\varphi^{\mu}+(\mu-2)\alpha\varphi^{\mu-1}+(\mu-3)\beta\varphi^{\mu-2}+(\mu-4)\gamma\varphi^{\mu-3}\ldots-K.}{\mu\varphi^{\mu-1}+(\mu-1)\alpha\varphi^{\mu-2}+(\mu-2)\beta\varphi^{\mu-3}+(\mu-3)\gamma\varphi^{\mu-4}+\ldots}$$

καὶ οὗτος ὁ γενικὸς τύπος τῆς προσεγγύσεως τῶν ἀνωτέρων ἐξισώσεων, δηλ: εἰς μὲν τὴν κυβικὴν ἐξίσωσιν $\chi^3+\alpha\chi^2+\beta\chi+K=0$ ἔςαι $\chi=\dfrac{2\varphi^3+\alpha\varphi^2-K=0}{3\varphi^2+2\alpha\varphi+\beta}$· εἰς δὲ τὴν τοῦ τετάρτου βαθμοῦ $\chi^4+\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+K=0$ ἔςαι

$\chi=\dfrac{3\varphi^4+2\alpha\varphi^3+\beta\varphi^2-K}{4\varphi^3+3\alpha\varphi^2+2\beta\varphi+\gamma}$. εἰς δὲ τὴν τοῦ ε βαθμοῦ $\chi^5+\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+K=0$ ἔςαι $\chi=\dfrac{4\varphi^5+3\alpha\varphi^4+2\beta\varphi^3+\gamma\varphi^2-K.}{5\varphi^4+4\alpha\varphi^3+3\beta\varphi^2+2\gamma\varphi^2+\delta.}$

Ἀλλὰ διὰ νὰ γένῃ ἡ ἐφαρμογὴ αὐτοῦ τοῦ τύπου τῆς προσεγγύσεως, λάβωμέν τινα παραδείγματα ἐξισώσεων τοῦ γ΄ βαθμοῦ ὡς $\chi^3-12\chi^2+57\chi+94=0$· καὶ διὰ τῶν ἄνω μεθόδων (§ 753 § 754) εὑρίσκομεν σχεδὸν $\chi=3$· ἄρα εἰς τὸν κυβικὸν τύπον $\chi=\dfrac{2\varphi^3+\alpha\varphi^2-K}{3\varphi^2+2\alpha\varphi+\beta}$ ἔςαι $\varphi=3$ $\alpha=-12$· $\beta=57$. $K=-94$· ὅθεν καὶ $\chi=\dfrac{2.3^3-12.3^2+94}{3.3^2-2.12.3+57}$.

$$=\frac{54-108+94}{27-72+57}=\frac{40}{12}=\frac{10}{3}=3,33=\chi.$$

Ἐὰν δ' ἀκριβέςερον τὸ χ εὑρεῖν θέλωμεν, θῶμεν ἔτι εἰς αὐτὸν τὸν τύπον $\varphi=3,33$, καὶ ἔςαι

$$\chi=\frac{2.(3,33)^3-12(3,33)^2+94}{3(3,33)^2-2.12(3,33)+57}=3,3619.$$

Ὁμοίως ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως $\chi^3 — 15\chi^2 + 72\chi — 199 = 0$. ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς χ· ἄρα κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

$\chi=$	Ἡ ἐξίσωσις.							Τὰ προκύπτ:
0	0		0		0	—	109	= — 109
1	1	—	15	+	72	—	109	= — 61
2	8	—	60	+	144	—	109	= — 17
3	27	—	135	+	216	—	109	= — 1
4	64	—	240	+	288	—	109	= + 3
5	125	—	375	+	360	—	109	= — 1
6	216	—	540	+	432	—	109	= — 1
7	343	—	735	+	504	—	109	= + 3
8	512	—	960	+	576	—	109	= + 9

Ἐκ τούτων αἱ ἐγγὺς ῥίζαι εἶναι $\chi=3$, καὶ $\chi=5$, καὶ $\chi=6$· θῶμεν ἤδη εἰς τὸν ἄνω τύπον τῆς προσεγγύσεως $\varphi=3$· $\alpha=—15$· $\beta=72$· καὶ $K=—109$· καὶ ἔσαι

$$\chi = \frac{54 — 135 + 109}{27 — 90 + 72} = \frac{28}{9} = 3{,}11.$$

Ἐὰν δ' ἔτι εἰς αὐτὸν τὸν τύπον θῶμεν $\varphi=3{,}11$, ἔσαι

$$\chi = \frac{60{,}166462 — 145.0815 + 109}{29{,}0163{,}93 + 72} = \frac{24{,}078962}{7{,}7163}.$$

$=3{,}1205$, πάνυ ἀκριβέςερον. Τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὰς λοιπὰς ῥίζας, ἐὰν θῶμεν $\varphi=5$, καὶ $\varphi=6$· πλὴν κάλλιον διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^3 — 15\chi^2 + 72\chi — 109 = 0$ διὰ $\chi — 3{,}1206 = 0$· καὶ εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ἐξίσωσιν $\chi^2 — 11{,}8794\chi + 34{,}92914 + 0$· καὶ ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $\chi = 5{,}9397 \pm \sqrt{}(5{,}9397)^2 + 34{,}92914$·) καὶ τούτων ὀρθῶς ἐπαναχθέντων ἔσαι $\chi=5{,}3473$, καὶ $\chi=6{,}5321$· λοιπὸν αἱ ῥίζαι τῆς προβληθείσης ἐξισώσεως εἶναι 3,1206· 5,3473, καὶ 6,5321.

Ὁμοίως εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ τετάρτου βαθμοῦ τοῦδε $\chi^{4*}-20\chi^2-12\chi+13=0$, ζητοῦνται αἱ ῥίζαι· ἐὰν δὲ θῶμεν συνήθως $\chi=0, 1, 2, 3, 4, 5$ κτ. καὶ $\chi=0, -1, -2, -3, -4, -5$ κτ. εὑρίσκομεν τὰς ἐγγὺς τιμὰς $\chi=1$· $\chi=5$· $\chi=-1$· $\chi=-4$.

Ἐὰν δ' εἰς τὸν τύπον τῆς προσεγγύσεως τοῦ τετάρτου βαθμοῦ $\chi=\frac{3\varphi^4+2\alpha\varphi^3+\beta\varphi^2-K}{4\varphi^3+3\alpha\varphi^2+2\beta\varphi+\gamma}$· θῶμεν $\varphi=1$· $\alpha=0$· $\beta=-20$· $\gamma=-12$· καὶ $K=13$· ἔσται

$$\chi=\frac{3-20-13}{4-40-12}=\frac{-30}{-48}=0{,}625$$

· καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκονται καὶ αἱ λοιπαὶ ῥίζαι· λοιπὸν αἱ τέσσαρες τιμαὶ τοῦ χ εἶναι $0{,}625$· $4{,}728$· $-1{,}250$· $-4{,}027$.

§ 758. Ἐνταῦθα δυνάμεθα εὑρεῖν καὶ γενικὸν τύπον προσεγγύσεως δι' οἱανδήποτε ῥίζαν ἑκάστης δυνάμεως, ἀπὸ οἱουδήποτε δοθέντος ἀριθμοῦ· διότι ἐὰν δοθῇ ὁ ἀριθμὸς χ (ὑπὸ τὸν χ δὲ σημαίνεται ἕκαστος ἀριθμὸς) καὶ ζητῆται ἡ ῥίζα τῆς μ δυνάμεως οὕτω $\sqrt[\mu]{\chi}$, εὑρίσκομεν ἢ διὰ λογαρίθμων, ἢ δι' ἑτέρας μεθόδου προεγνωσμένης τὴν ἐγγὺς ἐλάττονα ῥίζαν φ, καὶ ἔσται σχεδὸν $\sqrt[\mu]{\chi}=\varphi$· ἀλλ' ἔστω ὅτι λείπεται ἔτι ἓν σμικρὸν κλάσμα $=\tau$, ὅπερ μετὰ τοῦ φ εἶναι ἡ ἀληθὴς ῥίζα του $\sqrt[\mu]{\chi}$· ἄρα $\sqrt[\mu]{\chi}=\varphi+\tau$· καὶ $\chi=(\varphi+\tau)^\mu$ καὶ κατὰ τὸ διώνυμον (§336)

$$(\varphi+\tau)^\mu=\varphi^\mu+\mu\varphi^{\mu-1}\tau+\frac{\mu(\mu-1)}{2}\varphi^{\mu-2}\tau^2\ldots\ldots$$

$$\text{ἄρα καὶ } \chi=\varphi^\mu+\mu\varphi^{\mu-1}\tau+\frac{\mu(\mu-1)}{2}\varphi^{\mu-2}\tau^2\ldots\ldots 1.$$

Ἐὰν δὲ τὰς δυνάμεις τοῦ τ ἐγκαταλείπωμεν ὡς κλάσματα ἐλάχιστα, ἔσται $\chi = \varphi^{\mu} + \mu\varphi^{\mu-1}\tau$ καὶ $\tau = \dfrac{\chi - \varphi^{\mu}}{\mu\varphi^{\mu-1}}$ ....II. σχεδὸν ἀκριβές.

Ἐὰν ὅμως ἔτι ἕνα ὅρον τῆς σειρᾶς I λάβωμεν, ἔσται $\chi = \varphi^{\mu} + \mu\varphi^{\mu-1}.\tau + \dfrac{\mu(\mu-1)}{2}\varphi^{\mu-2}\tau^{2}$· ἤτοι $\chi - \varphi^{\mu} = (\mu\varphi^{\mu-1} + \frac{1}{2}\mu(\mu-1)\varphi^{\mu-2}\tau)\tau$ ἔσται καὶ $\tau = \dfrac{\chi - \varphi^{\mu}}{\mu\varphi^{\mu-1} + \frac{1}{2}\mu(\mu-1)\varphi^{\mu-2}\tau}$ . . . . . III. πάνυ ἀκριβέστερον· ἀλλ' εἰς τὸ δεύτερον σκέλος αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως θῶμεν ἀντὶ τ τὸ ἴσον εἰς τὴν II $\dfrac{\chi - \varphi^{\mu}}{\mu\varphi^{\mu-1}}$ καὶ εὑρίσκομεν,

$$\tau = \frac{\chi - \varphi^{\mu}}{\mu\varphi^{\mu-1} + \frac{1}{2}\mu(\mu-1)\varphi^{\mu-2}\left(\dfrac{\chi - \varphi^{\mu}}{\mu\varphi^{\mu-1}}\right)} =$$

$$\frac{\chi - \varphi^{\mu}}{\dfrac{\mu\varphi^{\mu-1}\cdot\mu\varphi^{\mu-1} + \frac{1}{2}\mu(\mu-1)\varphi^{\mu-2}(\chi - \varphi^{\mu})}{\mu\varphi^{\mu-1}}} =$$

$$=\frac{\dfrac{\chi-\varphi^{\mu}}{\mu\varphi^{\mu-1}\cdot\mu\varphi^{\mu-1}+\frac{1}{2}(\mu-1)\,\mu\varphi^{\mu-1}\,\varphi(\chi-\varphi^{\mu})}}{\mu\varphi^{\mu-1}}=$$

$$\frac{\chi-\varphi^{\mu}}{\varphi\mu\,\varphi^{\mu-1}+\frac{1}{2}(\mu-1)\,\varphi^{-\mu}(\chi-\varphi^{\mu})}.$$

καὶ τέλος $\tau=\dfrac{\varphi(\chi-\varphi^{\mu})}{\mu\varphi^{\mu}+\frac{1}{2}(\mu-1)(\chi-\varphi^{\mu})}=$

$$\frac{2\varphi(\chi-\varphi^{\mu})}{2\mu\varphi^{\mu}+\mu\chi-\mu\varphi^{\mu}-\chi+\varphi^{\mu}}=$$

$$\frac{2\varphi(\chi-\varphi^{\mu})}{\mu\varphi^{\mu}+\varphi^{\mu}+\mu\chi-\chi}=$$

$$\frac{2\varphi(\chi-\varphi^{\mu})}{(\mu+1)\varphi^{\mu}+(\mu-1).\chi}$$

ἀλλ' ἦν $\sqrt[\mu]{\chi}=\varphi+\tau$ ἄρα καὶ $\sqrt[\mu]{\chi}=\varphi+\dfrac{2\varphi(\chi-\varphi^{\mu})}{(\mu+1)\varphi^{\mu}+(\mu-1)\chi}$.

ὁ τύπος δι' οὗ εὑρίσκομεν τὴν ἔγγιστα ῥίζαν ἑκάστης δυνάμεως· ὅθεν ἡ μὲν τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι ἡ

$$\sqrt{\chi}=\varphi+\frac{2\varphi(\chi-\varphi^{2})}{3\varphi^{2}+\chi}.$$

ἡ κυβικὴ $$\sqrt[3]{\chi}=\varphi+\frac{\varphi(\chi-\varphi^{3})}{2\varphi^{3}+\chi}.$$

ἡ τῆς δ' δυνάμεως. $\sqrt[4]{\chi} = \varphi + \frac{2\varphi(\chi - \varphi^4)}{5\varphi^4 + 3\chi}$

ἡ τῆς ε' δυνάμ: $\sqrt[5]{\chi} = \varphi + \frac{\varphi(\chi - \varphi^5)}{3\varphi^5 + 2\chi}$. κτ.

τύποι πάνυ δοκιμώτεροι εἰς τὴν χρῆσιν, ἢ ἐκεῖνοι οἱ τύποι τοῦ Χαλλεΰου, οὓς ἡμεῖς (§. 375) ἐσημειώσαμεν· διότι εἰς ἐκείνους τοὺς τύπους πάλιν ἐπιζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ἑνὸς διωνύμου ῥίζα· ἵνα δὲ καὶ ἡ χρῆσις τούτου σαφὴς ἡμῖν γένηται, ζητείσθω ἡ ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 572· διὰ δὲ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν τὴν ἐγγὺς ῥίζαν αὐτοῦ οὕτω $\frac{1}{3}$ λ: $572 = \frac{2,7573960}{3} =$ 0, 9191320. καὶ εἰς αὐτὸν τὸν λογάριθμον ἀνήκει ὁ ἀριθμὸς 8, 30103. καὶ σχεδὸν ἡ ῥίζα $\sqrt[3]{572} = 8,30103 = \varphi$ καὶ $\sqrt[3]{\chi} = 572$. ἐὰν δ' εἰς τὸν τύπον $\sqrt[3]{\chi} = \varphi + \frac{\varphi(\chi - \varphi^3)}{2\varphi^3 + \chi}$ αὐτὶ χ καὶ φ τὰ ἴσα Θῶμεν, ἔςαι $\sqrt[3]{572} =$

$$8,30103 + \frac{8,30103\,(572-(8,30103)^3)}{2(8,30103)^3 + 572.} = 8,30103 +$$

$$\frac{0,00085901131433809119.}{1715,9997930350005454} = 8,30103 + 0,000000500$$

— 5894044. δηλ: $\sqrt[3]{572} = 8,3010305005894044$. πάνυ ἀκριβὴς μέχρι τοῦ ἐσχάτου δεκαδικοῦ χαρακτῆρος· τούτου τὸν τρόπον ἐξάγομεν καὶ τὰς λοιπὰς ῥίζας τῶν ἀνωτέρω δυνάμεων.

§. 759. Ἐὰν δέ τις ἐπιθυμῇ μαθεῖν καὶ πῶς ὁ Χαλλεῦος τοὺς τύπους ἐφεῦρεν ἐκείνους (§. 375), εὐκόλως ἤδη δεικνύομεν γενικῶς, μηδόλως φροντίζοντες διὰ τοὺς ἄλλους, οἵτινες μερικῶς, ἢ κατὰ μέρος ἀναλόγως αὐτοὺς ἐβεβαίωσαν· ζητεῖται παρ' χ: ἡ ῥίζα τῆς χ οἱασοῦν δυνάμεως μ, ἤτοι ἡ ῥίζα $\sqrt[\mu]{\chi}$· ἄρα τὸν χ ἀριθμὸν σχίζομεν εἰς δύο μέρη α^{μ} καὶ β, ὥστε ὁ μὲν α^{μ} νὰ εἶναι ἀκριβὴς δύναμις τῆς ζητουμένης ῥίζης· ὁ δὲ β νὰ εἶναι ἀριθμὸς πάνυ βραχύτατος πρὸς τὸν α^{μ} παραβαλλόμενος, καὶ οὕτως ἔχομεν $\sqrt[\mu]{\chi} = \sqrt[\mu]{(\alpha^{\mu} \pm \beta)}$, λοιπὸν ἔσαι ἡ ζητουμένη ῥίζα $\sqrt[\mu]{(\alpha^{\mu} \pm \beta)} =$ $\alpha + \tau$· ἐ τ εἶναι κλάσμα σμικρὸν, ὅπερ ἐὰν προσεθῇ εἰς τὸν α νὰ εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα ἡ ἐντελής· ἐπειδὴ δὲ $\sqrt[\mu]{(\alpha^{\mu} \pm \beta)} = \alpha + \tau$· ἔσαι καὶ $(\alpha^{\mu} \pm \beta) = (\alpha + \tau)^{\mu}$· καὶ ἑπομένως κατὰ τὸ διώνυμον ἔσαι

$$(\alpha+\tau)^{\mu} = \alpha^{\mu} + \mu\alpha^{\mu-1}\tau + \frac{\mu(\mu-1)}{2}\alpha^{\mu-2}\tau^{2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.\,3}\alpha^{\mu-3}\tau^{3} + \ldots.$$

Ἐὰν δὲ τοὺς λοιποὺς ὅρους τῆς σειρᾶς, ἐν οἷς ἡ δύναμις τ^{3}, τ^{4} κτ. ἀφήσωμεν, ὡς πάνυ ἐλαχίσους, ἔσαι $(\alpha+\tau)^{\mu} = \alpha^{\mu} + \mu\alpha^{\mu-1}\tau + \frac{\mu(\mu-1)}{2}\alpha^{\mu-2}\tau^{2}$. ἦν δὲ καὶ $\alpha^{\mu} \pm \beta = (\alpha+\tau)^{\mu}$· ἄρα $\alpha^{\mu} \pm \beta = \alpha^{\mu} + \mu\alpha^{\mu-1}\tau +$ $\frac{\mu(\mu-1)}{2}\alpha^{\mu-2}\tau^{2} + \ldots$ ἤτοι $\pm\beta = \mu\alpha^{\mu-1}\tau + \frac{\mu(\mu-1)}{2}$

$\overset{\mu-2}{\alpha}\overset{2}{\tau}$ ἐξίσωσις τοῦ β΄ βαθμοῦ· διότι ἐὰν διὰ $\frac{\mu(\mu-1)}{2}+\overset{\mu-2}{\alpha}$ ἄμφω τὰ σκέλη διέλωμεν, ἔσαι

$$\pm\frac{2\beta}{\mu(\mu-2)\,\alpha^{\mu-2}}=\frac{2\,\alpha\,\tau}{\mu-1}+\tau^2 .$$

Ἐὰν δὲ τὸν συνεργὸν τοῦ δευτέρου ὅρου $\frac{2\alpha}{\mu-1}$ εἰς δύο διέλωμεν, καὶ τετραγωνίσωμεν, καὶ εἰς τὰ δύο σκέλη προσθῶμεν, ἔσαι

$$\tau^2+\frac{2\alpha}{\mu-1}\tau+\frac{\alpha^2}{(\mu-1)^2}=\frac{\alpha^2}{(\mu-1)^2}\pm\frac{2\beta}{\mu(\mu-1)\,\alpha^{\mu-2}}\,;$$

καὶ ἑπομένως ἐὰν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐξαχθῇ, ἔσαι

$$\tau+\frac{\alpha}{\mu-1}=\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{(\mu-1)^2}\pm\frac{2\beta}{\mu(\mu-1)\,\alpha^{\mu-2}}\right)}\ \text{ἤτοι}$$

$$\tau=-\frac{\alpha}{\mu-1}\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{(\mu-1)^2}\pm\frac{2\beta}{\mu(\mu-1)\,\alpha^{\mu-2}}\right)}$$

ἦν δὲ καὶ $\sqrt[\mu]{(\alpha^{\mu}\pm\beta)}=\alpha+\tau$ ἕπεται καὶ

$$\sqrt[\mu]{(\alpha^{\mu}\pm\beta)}=\alpha-\frac{\alpha}{\mu-1}\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{(\mu-1)^2}\pm\frac{2\beta}{\mu(\mu-1)\,\alpha^{\mu-2}}\right)}.$$

τέλος ἐπειδὴ $\alpha-\frac{\alpha}{\mu-1}=\frac{\mu\alpha-\alpha-\alpha}{\mu-1}=\frac{(\mu-2)\alpha}{\mu-1}$, ἔσαι

$$\sqrt[\mu]{(\alpha^\mu \pm \beta)} = \frac{(\mu-2)\alpha}{\mu-1} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{(\mu-1)^2} \pm \frac{2\beta}{\mu(\mu-1)\;\alpha^{\mu-2}}\right)}$$

καὶ ἀπ' αὐτοῦ τοῦ τύπου εὑρίσκονται ἐκεῖνοι (§. 375), ἐὰν θῶμεν $\mu = 3 = 4 = 5$ κτ. ἔςω πρῶτον $\mu = 3$ ἄρα

$$\sqrt[3]{(\alpha^3 \pm \beta)} = \tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\alpha^2 \pm \frac{\beta}{3\alpha}\right)}$$

ἐὰν δὲ $\mu=4$ ἔςαι $\sqrt[4]{(\alpha^4 \pm \beta)} = \tfrac{2}{3}\alpha + \sqrt{\left(\tfrac{1}{9}\alpha^2 \pm \frac{\beta}{6\alpha^2}\right)}$.

ἐὰν δὲ $\mu = 5$, ἔςαι $\sqrt[5]{(\alpha^5 \pm \beta)} = \tfrac{3}{4}\alpha + \sqrt{\left(\tfrac{1}{16}\alpha^2 \frac{\beta}{10\alpha^3}\right)}$

ὁμοίως καὶ $\mu=6$· $\sqrt[6]{(\alpha^6 \pm \beta)} = \tfrac{4}{5}\alpha + \sqrt{\tfrac{1}{25}\alpha^2 \pm \frac{\beta}{15\alpha^4}}$.

καὶ $\mu = 10$ $\sqrt[10]{(\alpha^{10} \pm \beta)} = \tfrac{8}{9}\alpha + \sqrt{\left(\tfrac{1}{81}\alpha^2 \pm \frac{\beta}{45\alpha^8}\right)}$ κτ.

ἐπὶ παρ: ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὴν ῥίζαν τῆς πέμπτης δυνάμεως μὲ 12 δεκαδικὰ τοῦ ἀριθμοῦ 161900· ἀλλὰ λογάρ: 161900 = 5, 2092468· καὶ ἐὰν τοῦτο διὰ 5 διέλωμεν ἔςαι $\frac{5,2092468}{5} = 1,0418494$· καὶ εἰς αὐτὸν τὸν λογάριθμον ἀντιςοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς $11,012 = \alpha$· ἄρα $\alpha^5 = (11,012)^5 = 161931,37873202072 8832 = \alpha^5$ ὅςις ὑπερέχει τοῦ 161900 κατὰ $31,3787320207 28832 = -\beta$. ἄρα $\alpha^5 - \beta = 161900$· ἐὰν δὲ τὰ ἴσα ἀντὶ α, β εἰς τὸν τύπου $\sqrt[5]{(\alpha^5 - \beta)} = \tfrac{3}{4}\alpha + \sqrt{\left(\tfrac{1}{16}\alpha^2 - \frac{\beta}{10\alpha^3}\right)}$ θῶμεν, ἔςαι

$\sqrt[5]{(a^5 - \beta)} = 8,259 + \sqrt{(7,579009 -}$
$\dfrac{31,3787320207288}{13353,607537280}) = 8,259 + \sqrt{(7,579009 -}$
$\dfrac{313787320207288}{133573607537280006}) = 8,259 + \sqrt{(7,579009}$
$- 0,00234983182931552903611 4) = 8,259 +$
$\sqrt{(7,5766591681706844709638 86)} = 8,259 +$
$2,752571372039 = 11,011571372039.$

καὶ αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα κατὰ τοὺς ἄνω τύπους τοῦ Χαλλεΰου· πλὴν ἐπιτηδειότερος ὁ ἄνω τύπος τῆς προσεγγίσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ λύσεως προβλημάτων τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων.

§. 760. Μέχρι τοῦδε εἰς τὸ ἡγούμενον κεφάλαιον ἀνεπτύξαμεν ὅλας τὰς μεθόδους, ὅσαι εἶναι νὰ λύσωσι γενικῶς ἑκάστην ἐξίσωσιν τῶν ἀνωτέρω βαθμῶν· διὰ νὰ γένη πως καὶ ἡ χρῆσις τούτων ἡμῖν σαφεστέρα, φέρε καί τινα προβλήματα λύσωμεν.

Α'. Προβλήματα τοῦ γ' βαθμοῦ.

§. 761. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ γ' βαθμοῦ ἢ εἰσὶ καθαραί, ἢ μεμιγμέναι· καὶ ὁ μὲν τύπος τῶν καθαρῶν εἶναι $\chi^3 = \alpha$· ἢ $\chi^3 = \dfrac{\alpha}{\beta}$· τῶν δὲ μεμιγμένων ὁ τύπος $\chi^3 \pm \alpha\chi^2 \pm \beta\chi$

$+ K = o$ · ἢ $\chi^3 * \pm \beta\chi + K = o$ · ἔνθα ὅρος τις ἐκλείπει· καὶ ἡ μὲν λύσις τῶν καθαρῶν ἐξισώσεων εἶναι σαφής, ἐὰν ἐξαγάγωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν, καὶ ἀπὸ τὰ δύο σκέλη τῆς ἐξισώσεως, διότι τότε ἡ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ ὡς $\chi^3 = \alpha$ ἄρα $\chi = \sqrt[3]{\alpha}$ καὶ $\chi^3 = \frac{\alpha}{\beta}$ ἄρα $\chi = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}$. ὁμοίως $\chi^3 = 125$. καὶ $\chi = 5$· καὶ τούτων πρῶτον προβλήματά τινα λύσωμεν, ὕστερον δὲ καὶ τῶν μεμιγμένων, ὧν οἱ κανόνες οἱ κεφαλαιωδέστεροι πρὸς τὴν ἀνάλυσιν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἀνεπτύχθησαν.

Πρόβλημα α'.

Ἀξιωματικός τις ἐρωτηθεὶς, τί ἀξίωμα ἔχει; εἶπεν ὅτι τὸ ἀξίωμά του ὀνομάζεται ἀπὸ τοῦ ποσοῦ τῶν στρατιωτῶν του· καὶ πόσους ἔχει στρατιώτας ἐρωτηθεὶς, εἶπεν, ἐὰν μὲ τὸ τέταρτον τῆς ποσότητος αὐτῶν πολλαπλασιάσωμεν τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης ποσότητος, ἐξέρχεται ὁ ἀριθμὸς 31250.

Κατασκευή.

Ἔστω τὸ ποσὸν τῶν στρατιωτῶν χ, ἄρα τὸ τέταρτον $\frac{\chi}{4}$, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῶν χ^2· ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τοῦτο χ^2 ἐπὶ $\frac{\chi}{4}$ ἔσται

$$\frac{1}{4}\chi^3 = 31250 \quad \cdot 4$$

$$\chi^3 = 125000 \quad \sqrt[3]{\ }$$

$$\chi = 50.$$

εἶχεν ἄρα στρατιώτας 50. καὶ τὸ ἀξίωμα αὐτοῦ πεντηκόνταρχος.

Πρόβλημα β'.

Εἶπε τις δεσπότης τῷ δούλῳ, θέλω κάθε ἡμέραν νὰ ἀγοράζῃς τόσες ὀκάδες κρέας, ὥςε ἐὰν διέλῃς τὴν τετάρτην δύναμιν τοῦ ποσοῦ τῶν ὀκάδων διὰ τοῦ ἡμίσεως ποσοῦ, καὶ εἰς τὸ προκύπτον προσθῇς $14\frac{1}{4}$ νὰ ἐξέρχηται ὁ ἀριθμὸς 100. μᾶς ζητεῖ ὁ δοῦλος πόσας ὀκάδες κρέας νὰ ἀγοράζῃ τὴν ἡμέραν.

Κατασκευή.

χ ὀκάδ: ἄρα ἡ μὲν τετάρτη δύναμις χ^4 τὸ δὲ ἥμισυ αὐτῶν $\frac{\chi}{2}$· ἐὰν δὲ ἐκεῖνο χ^4 διὰ $\frac{\chi}{2}$ διέλωμεν, ἔςαι $\chi^4:\frac{\chi}{2}=2\chi^3$· ἐὰν δὲ καὶ εἰς τοῦτο προσθῶμεν $14\frac{1}{4}$ ἔςαι

$$2\chi^3+14\tfrac{1}{4}=100. \quad .4$$

$$8\chi^3=400-57=343$$

$$\chi^3=\frac{343}{8}$$

$$\chi=\frac{7}{2}=3\tfrac{1}{2}$$

λαμβάνει ἄρα ἑκάςης ἡμέρας $3\frac{1}{2}$ ὀκ. κρέας.

Πρόβλημα γ.

Ἄνθρωποί τινες ἠγόρασαν τζόχας καὶ μεταξωτά· καὶ ἕκαςος αὐτῶν ἔλαβε τρὶς τόσαις πῆχαις τζόχα, ὅσοι ἦτον αὐτοί· ἔλαβε δὲ ἕκαςος αὐτῶν καὶ εἰκοσάκις τόσαις πῆχαις μεταξωτῶν, ὅσοι ἦτον οἱ ἀγορασαί· ἑκάςη πῆχη ὅμως τῆς τζόχας ἐτιμήθη τόσα γρόσια, ὅσοι ἦσαν οἱ ἀγορασαί, ἑκάςη δὲ πῆχη τῶν μεταξωτῶν ἐτιμήθη τὸ ἥμισυ ποσὸν τῆς τιμῆς τῆς τζόχας· ἦν δὲ καὶ ὅλον τὸ ποσὸν τῶν ἄσπρων, ὁποῦ ὅλοι ἐπλήρωσαν 13000 γρ. ζητεῖται πόσοι ἦτον οἱ ἀγορασαί, πόσους πήχεις τῆς τζόχας καὶ τῶν μεταξωτῶν ἕκαςος ἔλαβε, καὶ πόσα ἑκάςη πῆχη τῆς τζόχας καὶ τῶν μεταξωτῶν ἐτιμήθη.

κατασκευή.

Ἦσαν οἱ ἀγορασαὶ χ, καὶ ἐπειδὴ ἕκαςος τρὶς τόσαις πήχαις ἔλαβεν, ὅσοι οἱ ἀγορασαί, ἄρα ἕκαςος ἔλαβεν τῆς τζόχας πήχεις 3χ· τῶν δὲ μεταξωτῶν 20χ· ἄρα ὅλαι αἱ πήχεις τῆς μὲν τζόχας $=3\chi^2$, τῶν δὲ μεταξωτῶν $=20\chi^2$· ἀλλ' ἡ τιμὴ ἑκάςης πήχεως τῆς μὲν τζόχας χ, καὶ ὅλων τῶν πήχεων αὐτῆς $3\chi^3$· τῶν δὲ μεταξωτῶν $\frac{1}{2}\chi$ καὶ ὅλων τῶν πήχεων αὐτῶν $=\frac{1}{2}\chi\cdot 20\chi^2=10\chi^3$· ἄρα αἱ δύο αὗται τιμαὶ

$$3\chi^3+10\chi^3=13000$$

$$\chi^3=\frac{13000}{13}=1000.$$

καὶ τέλος $\chi=10$· ὅθεν 10 ἦτον οἱ ἀγορασαί, καὶ ἕκαςος ἔλαβε πήχαις τῆς μὲν τζόχας $3\chi=30$· τῶν δὲ μεταξωτῶν $=20\chi=200$· ὅλαι δὲ αἱ πήχεις τῆς μὲν τζόχας $=3\chi^2=300$· τῶν δὲ μεταξωτῶν $=20\chi^2=2000$ καὶ ὅλη ἡ τιμὴ τῆς τζόχας $=3000\cdot 10=3000$· τῶν δὲ μεταξωτῶν $2000\cdot 5=10000$

πρόβλημα δ'.

Ἄνθρωποί τινες κατέβαλον ἓν κεφάλαιον εἰς πραγματείαν, καὶ ἕκαςος τούτων κατέβαλεν ἑκατοντάκις τόσα γρόσια, ὅσοι ἦσαν οἱ σύντροφοι· πραγματεύοντες δὲ μὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιον εἰς τὸν χρόνον ἐκέρδησαν εἰς τὰ 100 δὶς τόσα γρόσια, ὅσοι οἱ σύντροφοι, καὶ ἐκέρδησαν γρόσια 2662· ζητεῖται πόσοι ἦσαν οἱ σύντροφοι, καὶ πόσον τὸ κεφ: κτ.

κατασκευή.

Οἱ μὲν σύντροφοι ἦσαν χ, ἕκαςος δὲ τούτων κατέβαλεν 100χ γρόσ. καὶ ὅλον τὸ κεφ: $100\chi^2$· τὸ δὲ κέρδος ἦ-

του 2 χ εἰς κάθε ἑκατόν· ἄρα αἱ ἑκατοσταὶ ὅλου τοῦ κεφ.:
$\frac{100\chi^2}{100} = \chi^2$, καὶ ὅλου τὸ κέρδος 2 χ· $\chi^2 = 2\chi^3$· ἄρα
$2\chi^3 = 2662$· ἤτοι $\chi^3 = 1331$· καὶ ἑπομένως $\chi = 11$ καὶ τόσοι ἦτον οἱ σύντροφοι· καὶ ἕκαστος κατέβαλε 1100, καὶ ὅλου τὸ κεφ. = 12100.

πρόβλημα ε'.

Γυνή τις ἔχουσα τυρούς, ἔκαμεν ἀλλαγὴν μὲ ὄρνιθας, καὶ ἔλαβεν εἰς δύο τυρούς, τρεῖς ὄρνιθας· ὠοτόκησαν αἱ ὄρνιθες ἑκάστη τόσα αὐγά, ὅσας μονάδας περιέχει τὸ ἓν τριτημόριον τῶν ὀρνίθων· ἀπὸ δὲ τῶν αὐγῶν ὅλων ἔλαβε 72 παράδες, ἀφ' οὗ ἐπώλησε τὰ ἐννέα ἀπὸ παράδες τόσους, ὅσα αὐγὰ ἑκάστη ὄρνιθα ἐγέννησεν· ζητεῖται πόσοι ἦσαν οἱ τυροί, αἱ ὄρνιθες, τὰ αὐγὰ κτ.

κατασκευή.

Ἦσαν οἱ τυροὶ χ· καὶ ἐπειδὴ 2 τυροὶ ἐγίνοντο 3 ὄρνιθες, λέγομεν $2 : 3 = \chi : \frac{3}{2}\chi$ ἄρα $\frac{3}{2}\chi$ ἦσαν αἱ ὄρνιθες· τὸ δ' ἓν τριτημόριον τῶν ὀρνίθων $\frac{3}{2}\chi \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\chi$ καὶ τόσα αὐγὰ ἑκάστη ὠοτόκησεν· ἄρα ὅλα τὰ αὐγὰ $\frac{1}{2}\chi \cdot \frac{3}{2}\chi = \frac{3}{4}\chi^2$· ὅλαι δὲ αἱ ἐννάδες τούτων $\frac{3}{4\cdot 9}\chi^2 = \frac{3}{36}\chi^2$· ἐπειδὴ ὅμως ἑκάστη ἐννὰς ἐπωλήθη ἀπὸ $\frac{1}{2}\chi$ ἄρα ὅλη ἡ τιμὴ αὐτῶν

$$\frac{3}{36}\chi^2 \cdot \frac{1}{2}\chi = 72\cdot$$

$$\frac{3}{72}\chi^3 = 72\cdot$$

καὶ $\chi^3 = 8\cdot 3\cdot 8\cdot 9$· καὶ $\chi = 2\cdot 3\cdot 2 = 12$· ἦσαν ἄρα οἱ μὲν τυροὶ = 12·

$$\frac{1}{24}\chi^3 = 72.$$

αἱ δ' ὄρνιθες $= \frac{3}{2}\chi = 18$· ἑκάστη δ' ὠοτόκησε $= \frac{1}{2}\chi = 6$·

Προβλήματα τῶν μεμιγμένων ἐξισώσεων.

§. 762. πρόβλ: α΄. εἰς ἕνα γάμον ἔγινεν ἐρώτησις, πόση εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ γαμβροῦ καὶ τῆς νύμφης. καὶ ἡ ἀπόκρισις ἦν, ὁ μὲν γαμβρὸς εἶναι μεγαλήτερος 12 χρόνους ἀπὸ τὴν νύμφην· ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ χρόνοι τοῦ γαμβροῦ μὲ τῆς νύμφης τοὺς χρόνους, καὶ τὸ παραγόμενον τοῦτο πολλαπλασιάσῃς μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν χρόνων τοῦ γαμβροῦ καὶ τῆς νύμφης, ἐξέρχεται ὁ ἀριθμὸς 1456ο· καὶ πάλιν ἀποροῦνται αἱ ἡλικίαι αὐτῶν.

κατασκευή.

Ἔςω ἡ ἡλικία τῆς νύμφης x ἄρα τοῦ γαμβροῦ $x+12$ καὶ τὸ παραγόμενον ἐκ τῶν $(x+12)\cdot x = x^2+12x$ καί ἔτι τὸ παραγόμενον τούτου ἐπὶ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ἡλικιῶν $(x+x+12)(x^2+12) = (2x+12)(x^2+12x) = 2x^3+24x^2+12x^2+144x = 2x^3+36x^2+144x = 14560$· ἐὰν διὰ 2 διέλωμεν, ἔςαι ἡ ἐξίσωσις $x^3+18x^2+72x = 7280$.

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἔσχατος ὅρος 7280 ἔχει πολλοὺς παράγοντας, λαμβάνομεν $x=2y$ καὶ ἀντὶ x, $2y$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν θέτομεν.

$$\begin{array}{r} x^3 = 8y^3 \\ +18x^2 = 72y^2 \\ +72x = 144y \\ +7280 = 7280 \\ \hline 8y^3+72y^2+144y=7280. \\ \hline y^3+9y^2+18y=910. \end{array}$$

καὶ οἱ παράγοντες τοῦ 910 εἶναι 1, 2, 5, 7, 10, 13 καὶ ἐπομένως ὁ παράγων 7 φέρει τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδὲν (§. 738)· ἄρα $y = 7$· διότι $343 + 441 + 126 = 910$· καὶ ἐπεὶ $x = 2y$, ἔςι καὶ $x = 14$, $=$ τοῖς χρόνοις τῆς νύμφης· ἄρα οἱ χρόνοι τοῦ γαμβροῦ $14 + 12 = 26$· εὑρίσκονται καὶ αἱ λοιπαὶ δύο ῥίζαι, ἐὰν (§. 740) διὰ $y - 7$ διέλωμεν τὴν ἐξίσωσιν $(y^3 + 9y^2 + 18y - 910 = 0) : (y - 7) = y^2 + 16y + 130$· καὶ κατὰ τὰς τετραγωνικὰς ἐξισώσεις θέλει εὑρεθῇ $y = -8 \pm \sqrt{-66}$· πλὴν αἱ ῥίζαι ἀδύνατοι, ὡς καὶ αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος ἀπαιτοῦσι.

πρόβλημα β'.

Εὑρεθήτωσαν δύο ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥςε οὐ μόνον ἡ διαφορὰ αὐτῶν νὰ εἶναι 18, ἀλλὰ καὶ ἐὰν ἐπὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν τῶν κύβων αὐτῶν νὰ εἶναι τὸ παραγόμενον $= 275184$.

Ἔςω ὁ ἐλάττων αὐτῶν ἀριθμὸς x· ἄρα ὁ μείζων $x + 18$· ὁ δὲ κύβος τοῦ πρώτου x^3, καὶ τοῦ δευτέρου $(x + 18)^3 = x^3 + 54x^2 + 972x + 5832$· ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν κύβων $54x^2 + 972x + 5832 = 54(x^2 + 18x + 108)$· τοῦτο πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ἀριθμῶν $2x + 18$ καὶ ἔςαι τὸ παραγόμενον

$$\frac{108(x^3 + 27x^2 + 270x + 972 = 275184.}{\dfrac{x^3 + 27x^2 + 270x + 972 = 2548.}{x^3 + 27x^2 + 270x = 1576.} - 972}$$

ἀλλ' οἱ παράγοντες τοῦ 1576 εἰσὶν 1, 2, 4, 8, κτ. καὶ ὁ 4 φέρει εἰς τὸ μηδὲν τὴν ἐξίσωσιν (§. 738)· ἄρα $x = 4$. ὁ ἐλάττων ἀριθμός· καὶ ὁ μείζων $x + 18 = 22$· καὶ οὐτοι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί, ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκονται καὶ αἱ λοιπαὶ ῥίζαι $\chi = -\frac{31}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{961}{4} - \frac{1576}{4}\right)}$ πλὴν ἀδύνατοι.

πρόβλημα γ'.

Εὑρεθήτωσαν ἔτι δύο ἀριθμοί, ὧν ἡ διαφορὰ 720· καὶ ἐὰν τὸν ἐλάττονα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μείζονος, τὸ γινόμενον νὰ εἶναι 20736.

Ἐπειδὴ ὁ μείζων ἀπαιτεῖται νὰ εἶναι τετράγωνον, ἔςω ὁ μείζων χ^2 ἄρα ὁ ἐλάτων $\chi^2 - 720$· οὗτος δ' ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μείζονος, ἤτοι ἐπὶ χ, ἔςαι $\chi^3 - 720\chi = 20736$. ἤτοι

$$\chi^3 - 720\chi = 64 \cdot 27 \cdot 12 \cdot$$

Θῶμεν ἤδη $\chi = 4\psi$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν, καὶ γίνεται

$$\frac{64\psi^3 - 720 \cdot 4\psi = 64 \cdot 27 \cdot 12 \cdot}{\psi^3 - 45\psi = 27 \cdot 12 \cdot} : 64 \cdot$$

Θῶμεν ἔτι $\psi = 3Z$ εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν καὶ γίνεται

$$\frac{27Z^3 - 135Z = 27 \cdot 12 \cdot}{Z^3 - 5Z = 12 \cdot} : 27$$

καὶ οἱ παράγοντες τοῦ 12 εἶναι 1, 2, 3, 4, 6, 12· ὁ δὲ $3 = Z$ φέρει εἰς τὸ μηδὲν τὴν ἐξίσωσιν· ἄρα $Z = 3$· ἐπεὶ δὲ καὶ $\psi = 3Z$, ἄρα $\psi = 9$· ἦν δὲ καὶ $\chi = 4\psi$, ἄρα καὶ $\chi = 36$· καὶ $3\chi 6^2 = 1296$· καὶ οὗτος ὁ μείζων ἀριθμός, ὁ δ' ἐλάττων $1296 - 420 = 576$· καὶ εὑρέθη ὁ μὲν μείζων 1296, ὁ δ' ἐλάττων 756.

πρόβλημα δ'.

Εὑρεθήτωσαν ἔτι δύο ἀριθμοί, ὧν ἡ διαφορὰ 12, τὸ δὲ παραγόμενον αὐτῆς τῆς διαφορᾶς καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν κύβων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν $=102144$·

Ἐὰν ὁ ἐλάττων χ ληφθῇ, ὁ μείζων ἔςαι $\chi+12$, καὶ ὁ μὲν κύβος ἐκείνου χ^3 τούτου δὲ $(\chi+12)^3=\chi^3=36\chi^2+432\chi+1728$· τὸ δὲ κεφάλαιον τούτων τῶν κύβων ἐπὶ τὴν διαφορὰν 12 ἔςαι

$$\frac{12(2\chi^3+36\chi^2+432\chi+1728)=102144\cdot}{\chi^3+18\chi^2+216\chi+864=8\cdot532\cdot}$$

Ἐὰν δ' εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν θῶμεν $\chi=2\psi$, ἔςαι

$$\frac{8\psi^3+72\psi^2+432\psi+864=8\cdot532\cdot}{\psi^3+9\psi^2+54\psi=8\cdot53\cdot}$$

καὶ οἱ παράγοντες τοῦ $8\cdot53$ εἶναι 1, 2, 4, 8, 53 καὶ τούτων ὁ 4 φέρει τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδέν· ἄρα $\psi=4$, ἦν δὲ καὶ $\chi=2\psi$ ἄρα $\chi=8$· ὁ δὲ μείζων ἀριθμὸς $\chi+12=20$.

πρόβλημα ε'.

Συντροφεύσαντες τινὲς ἀπετέλεσαν ἓν κεφάλαιον, ἀφ' οὗ ἕκαςος κατέβαλε δεκάκις τόσα γρόσια, ὅσοι ἦσαν οἱ σύντροφοι· ἐκέρδησαν δὲ εἰς τὰ 100 τόσα, ὅσοι οἱ σύντροφοι καὶ ἔτι 6 περισσότερα, τὸ δὲ κέρδος ὅλον ἦν 392 γρόσια· πόσοι ἦτον οἱ συντροφεύσαντες; οὗτοι ἄρα ἦσαν χ, καὶ ἕκαςος κατέβαλε 10χ· λοιπὸν ὅλον τὸ κεφάλαιον $10\chi^2$· καὶ αἱ ἑκατοςαὶ τούτων εἶναι $\frac{10\chi^2}{100}=\frac{\chi^2}{10}$· ἀλλαμὴν ἑκάςη ἑκατοςὺς ἐκέρδησε $\chi+6$· ἄρα ὅλον τὸ κέρδος

$$\frac{\chi^2}{10}(\chi+6)=$$

$$\frac{\chi^3+6\chi^2}{10}=392.$$

$$\chi^3+6\chi^2=3920$$

θῶμεν ἤδη εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν $\chi=2\psi$·
καὶ ἔςαι

$$\frac{8\psi^3+24\psi^2=3920}{\psi^3+3\psi^2=490.} : 8$$

τοῦ δὲ 490 οἱ παράγοντες, 1, 2, 5, 7, 10 κτ· καὶ ὁ 7 φέρει εἰς τὸ μηδὲν τὴν ἐξίσωσιν, ἄρα $\psi=7$· καὶ ἑπομένως $\chi=14$· διὰ τὸ εἶναι $\chi=2\psi$· ὅθεν ἦσαν οἱ συντροφεύσαντες 14· καὶ τὸ κεφάλαιον 14· 14· 10=1960·

πρόβλ. ϛ΄.

Ἑταιρεία τις εἶχε κεφάλαιον 8240 γρ., καὶ εἰς αὐτὸ ἕκαςος τῆς ἑταιρείας ἐχορήγησεν ἔτι τεσσαρακοντάκις τόσα γρόσια, ὅσοι οἱ ἑταῖροι· μὲ ὅλον ὅμως αὐτὸ τὸ κεφάλαιον ἐκέρδησαν εἰς τὰ 100 τόσα, ὅσοι οἱ ἑταῖροι· ἀπὸ δὲ τὸ κέρδος τοῦτο ὅλον, ἀφ' οὗ ἕκαςος ἔλαβε δεκάκις τόσα, ὅσοι οἱ ἑταῖροι, ἔμειναν γρόσια 224· πόσοι ἦσαν οἱ ἑταῖροι;

κατασκευή.

Ἦσαν χ, καὶ ἕκαςος ἐπρόσθεσεν εἰς τὸ κεφάλαιον 8240, 40χ, ἄρα ὅλη αὕτη ἡ προσθήκη ἦν $40\chi^2$· καὶ τὸ κεφάλαιον ὅλον ἔγινε $8240+40\chi^2$ εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ἑκατοςαὶ $\frac{40\chi^2+8240}{100}$. ἀλλ' εἰς καθε 100 ἐκέρδησαν χ· ἄρα ὅλον τὸ κέρδος εἶναι

$$\frac{40\chi^2+8240}{100}.\chi=\frac{40\chi^3+8240\chi}{100}=\frac{40\chi^3}{100}+\frac{8240\chi}{100}=$$

$\frac{2}{5}x^3+\frac{412}{5}x$· ἀλλ' ἕκαστος ἔλαβεν ἀπὸ τὸ κέρδος $10x^2$, καὶ ὅλοι ὁμοῦ $10x^2$ καὶ ἔμεινεν ἔτι 224· ἄρα.

$$\frac{2}{5}x^3+\frac{412}{5}x=10x^2+224 \quad \cdot 5$$

$$2x^3+412x=50x^2+1120 \quad : 2$$

$$x^3+206x=25x^2+560$$

$$x^3-25x^2+206x-560=0.$$

καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν ὅλαι αἱ ῥίζαι καταφατικαὶ, ἄρα τριχῶς λύεται τὸ πρόβλημα.

Διὰ νὰ λύσωμεν ὅμως τοῦτο τὸ πρόβλημα, εὑρεθήτωσαν οἱ παράγοντες τοῦ ὅρου 560, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14 κτ. καὶ ἐξ αὐτῶν ὁ 7, 8 καὶ 10 φέρουσι τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδέν· ἄρα οἱ ἑταῖροι ἦσαν ἢ 7, ἢ 8, ἢ 10· διότι εἰς ὅλους αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος ἁρμόζουσι.

Ἔςω ἐπὶ παραδείγματος ὅτι

ἦσαν οἱ ἑταῖροι.	7	8	10
ἕκαςος ἐχορήγησεν ἔτι $40x$	280	320	400
ὅλοι ὁμοῦ $40x^2$	1960	2560	4000
τὸ ἀρχαῖον κεφάλαιον	8240	8240	8240
καὶ ὅλον ὁμοῦ $40x^2+8240$·	10200	10800	12240
κερδίζουσιν εἰς τὰ 100 ὅσοι οἱ ἑτ:	714	864	1224
ἕκαςος λαμβάνει	70	80	100
ὅλοι δ' ὁμοῦ	490	640	1000
καὶ μένει	224	224	224

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ τῆς Καρδανικῆς Μεθόδου.

§. 763. Η' μέθοδος αὕτη συμβαίνει μόνον εἰς τὰς κυβικὰς ἐξισώσεις, ὅταν ὁ δεύτερος ὅρος λείπῃ, καὶ ἔχῃ αὐτὸν τὸν τύπον $x^3 \pm \pi x \pm \rho = 0$· καὶ ἐπειδὴ ἡμεῖς ἐμάθομεν εἰς τὰ προηγούμενα (§ 736) ὅτι ἑκάστης εντελοῦς ἐξισώσεως τὸν δεύτερον ὅρον ἀποσκευάζειν δυνάμεθα, ἄρα αὕτη ἡ μέθοδος εἰς ὅλας τὰς κυβικὰς ἐξισώσεις ἐφαρμόζεται· πλὴν αἱ κυβικαὶ ἐξισώσεις, ὅσαι ἔχουσι τοὐλάχιστον μίαν ῥίζαν λογικὴν, ὁλόκληρον, ἢ κεκλασμένην, λύονται μὲν καὶ διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου, εὐκολώτερον ὅμως διὰ τῶν προηγουμένων· ὅσοι δὲ ἀλόγους ῥίζας ἔχουσιν, ἄλλως οὐ λύονται, εἰμὴ διὰ τῆς μεθόδου τῆς Καρδανικῆς, ἥτις ἀπὸ τοῦ εὑρέτου Καρδάνου οὕτως ὠνόμασται· ἕτεροι δὲ τὴν εὕρεσιν αὐτῆς εἰς τὸν Σκιπίωνα τὸν Φερρέα, καὶ ἄλλοι εἰς τὸν Ταρταλέα τὸν Ἰταλὸν προσνέμουσι.

§. 764. Διὰ νὰ μάθωμεν ἐντελῶς τὰ ἰδιώματα αὐτῆς τῆς ἐπωφελοῦς μεθόδου, πρέπει πρῶτον νὰ ἐρευνήσωμεν τὸν κύβον ἑνὸς διωνύμου $\alpha \pm \beta$, ὅςις εὑρίσκεται (§ 332) $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$· ἢ $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$· ἄρα ὁ κύβος τοῦ διωνύμου συνίσταται ἀπὸ $\alpha^3 \pm \beta^3$ καὶ $3\alpha\beta(\alpha \pm \beta)$, ἤτοι ἀπὸ τὸ κεφάλαιον, ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν κύβων τῶν μερῶν τοῦ διωνύμου, καὶ ἀπὸ τὸ παραγόμενον τοῦ τριπλοῦ παραγομένου, ἀπὸ τῶν μερῶν τοῦ διωνύμου καὶ αὐτοῦ τοῦ διωνύμου δηλ: ἐὰν θῶμεν μίαν ῥίζαν μιᾶς κυβικῆς ἐξισώσεως $\chi = \alpha \pm \beta$ ἔςαι $\chi^3 = \alpha^3 \pm \beta^3 \pm 3\alpha\beta(\alpha \pm \beta)$· ἐπειδὴ ὅμως $\chi = \alpha \pm \beta$ ἄρα $\chi^3 = \alpha^3 \pm \beta^3 + 3\alpha\beta\chi$ καὶ ἑπομένως $\chi^3 = 3\alpha\beta\chi + \alpha^3 + \beta^3$· ὅθεν ὅπου οὗτος ὁ τύπος δίδεται, ἔχομεν ἀεὶ $\chi = \alpha \pm \beta$· ἐπὶ παραδείγματος ἔςω ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 = 18\chi + 35 = 3.2.3\chi + 2^3 + 3^3$ ἄρα $\chi = 2 + 3 = 5$· ἐὰν δὲ θῶμεν $\alpha = 4$ καὶ $\beta = 5$ ἔςαι $\chi^3 = 3.4.5\chi + 4^3 + 5^3 = 60\chi + 189$· καὶ ἀπ' αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως μετ' ἀσφαλείας λαμβάνομεν $\chi = 9$.

§ 765. Ἐὰν ἔτι ὑποθῶμεν $\alpha^3 = \sigma$ καὶ $\beta^3 = \eta$ ἔςαι $\alpha = \sqrt[3]{\sigma}$· καὶ $\beta = \sqrt[3]{\eta}$ ἄρα καὶ $\alpha\beta = \sqrt[3]{\sigma\eta}$ καὶ $\chi^3 = 3\chi\sqrt[3]{\sigma\eta} + \sigma + \eta$· καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω (§ 764) $\chi = \sqrt[3]{\sigma} + \sqrt[3]{\eta}$· ἄρα δυνάμεθα λύειν καὶ τοιαύτας ἐξισώσεις, ὅταν $3\sqrt[3]{\sigma\eta}$ καὶ $\sigma + \eta$ εἰσὶν ἴσαι ἑνὶ δοθέντι ἀριθμῷ· πλὴν ἀπ' αὐτοῦ εὑρεθήτωσαν κατὰ τὰ ἀκόλουθα οἱ τύποι οἱ Καρδάνιοι.

§. 766. Ἔςω γενικῶς ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 = \pi\chi + \rho$· ἄρα $\pi = 3\sqrt[3]{\sigma\eta}$ καὶ $\rho = \sigma + \eta$· καὶ ἀπὸ μὲν τῆς ἐξισώσεως $3\sqrt[3]{\sigma\eta} = \pi$ εὑρίσκομεν $\sqrt[3]{\sigma\eta} = \frac{\pi}{3}$ ἤτοι $\sigma\eta = \frac{\pi^3}{27}$ καὶ $4\sigma\eta = \frac{4\pi^3}{27}$ . . . . . . I. ἀπὸ δὲ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως $\sigma + \eta = \rho$ ἔςαι τὸ τετράγωνον $\rho^2 = \sigma^2 + 2\sigma\eta + \eta^2$ . . II.

Ἐὰν δ' ἀφέλωμεν τὴν I ἀπὸ τῆς II, ἔςαι $\rho^2 - \frac{4\cdot\pi^3}{27}$

$$=\sigma^2+2\sigma\upsilon-4\sigma\upsilon+\upsilon^2=\rho^2-\frac{4\pi^3}{27}=\sigma^2-2\sigma\upsilon+\upsilon^2\cdot$$ ἐὰν δ' ἀπ' ἀμφοῖν τῶν σκελῶν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἐξαγάγωμεν, ἔσται·

$\sigma-\upsilon=\sqrt{\left(\rho^2-\frac{4\pi^3}{27}\right)}\cdot$ ἐὰν ἔτι εἰς αὐτὴν τὴν $\sigma+\upsilon=\rho$ προσθῶμεν, εὑρίσκομεν $2\sigma=\rho+\sqrt{\left(\rho^2-\frac{4\pi^3}{27}\right)}$, ἢ $\sigma=\frac{\rho+\sqrt{\left(\rho^2-\frac{4\pi^3}{27}\right)}}{2}$ ἐὰν ἔτι ἀπὸ τῆς $\sigma+\upsilon=\rho$ τὴν $\sigma-\upsilon=\sqrt{\left(\rho^2-\frac{4\pi^3}{27}\right)}$ ἀφέλωμεν, ἔσται $2\upsilon=\rho-\sqrt{\left(\rho^2-\frac{4\pi^3}{27}\right)}$ καὶ ἑπομένως $\upsilon=\frac{\rho-\sqrt{\left(\rho^2-\frac{4\pi^3}{27}\right)}}{2}\cdot$ ἦν δὲ καὶ ἡ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $\chi=\sqrt[3]{\sigma}+\sqrt[3]{\upsilon}\cdot$ ἄρα ἐὰν θῶμεν ἀντὶ σ καὶ υ τὰ ἤδη εὑρεθέντα, εὑρίσκομεν ἀεὶ τὴν μίαν ῥίζαν τῆς ἐξισώσεως $\chi^3=\pi\chi+\rho$ οὕτω.

$$\chi=\sqrt[3]{\frac{\left(\rho+\sqrt{\left(\rho^2-\frac{4\pi^3}{27}\right)}\right)}{2}}+\sqrt[3]{\frac{\left(\rho-\sqrt{\left(\rho^2-\frac{4\pi^3}{27}\right)}\right)}{2}}$$

$$\text{ἢ}=\sqrt[3]{\left(\frac{\rho}{2}+\sqrt{\left(\frac{\rho^2}{4}-\frac{\pi^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{\rho}{2}-\sqrt{\left(\frac{\rho^2}{4}-\frac{\pi^3}{27}\right)}\right)}$$

Ἐὰν ὅμως ἡ γενικὴ ἐξίσωσις ἐκφρασθῇ οὕτω $\chi^3=\pi\chi-\rho$, ἡ ῥίζα αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως χ εἶναι ἴση τῷ ἀνωτέρῳ τύπῳ, ἐὰν μόνον τὸ ρ ληφθῇ μὲ τὸ ἐναντίον σημεῖον, ἤτοι

$$\chi=\sqrt[3]{\left(-\frac{\rho}{2}+\sqrt{\left(\frac{\rho^2}{4}-\frac{\pi^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\frac{\rho}{2}-\sqrt{\left(\frac{\rho^2}{4}-\frac{\pi^3}{27}\right)}\right)}$$

· ἐὰν δὲ τέλος οὕτω δοθῇ ἡ γενικὴ ἐξίσωσις $\chi^3=-\pi\chi+\rho$, τὴν ῥίζαν εἰς αὐτὸν τὸν τύπον εὑρίσκομεν, ἐὰν ἀντιςραφῇ τὸ σημεῖον τοῦ π, ἤτοι

$$\chi=\sqrt[3]{\left(\frac{\rho}{2}+\sqrt{\left(\frac{\rho^2}{4}+\frac{\pi^3}{27}\right)}\right)}-\sqrt[3]{\left(\frac{\rho}{2}+\sqrt{\left(\frac{\rho^2}{4}+\frac{\pi^3}{27}\right)}\right)}$$

καὶ ἔςαι τῆς μὲν γενικῆς ἐξισώσεως $\chi^3=\pi\chi+\rho$· ὁ τύπος Α, $\chi=\sqrt[3]{\left(\frac{\rho}{2}+\sqrt{\left(\frac{\cdot\cdot}{2}-\frac{}{27}\right)}\right)}+$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\rho}{2}-\sqrt{\left(\frac{\rho^2}{4}-\frac{\pi^3}{27}\right)}\right)}$$

τῆς δὲ $\chi^3=\pi\chi-\rho$.

$$\text{B}\quad \chi=\sqrt[3]{\left(-\frac{\rho}{2}+\sqrt{\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\pi^3}{27}\right)}\right)}+$$

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{\rho}{2}-\sqrt{\left(\frac{\rho^2}{4}-\frac{\pi^3}{27}\right)}\right)}\cdot$$

τῆς δὲ $\chi^3=-\pi\chi+\rho$.

$$\Gamma\quad \chi=\sqrt[3]{\left(\frac{\rho}{2}+\sqrt{\left(\frac{\rho^2}{4}+\frac{\pi^3}{27}\right)}\right)}-$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\rho^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{\rho^2}{4}+\frac{\pi^3}{27}\right)}\right)}$$

Καὶ οὗτοι οἱ τρεῖς τύποι οἱ Καρδανικοί, μάλιςα ὁ πρῶτος ἱκανός, φέρε τούτους καὶ διὰ παραδειγμάτων διασαφήσωμεν·

ἔςω $\chi^3 = 6\chi + 9$· ὅπου $\pi = 6$ καὶ $\rho = 9$ ἄρα $\frac{\pi^3}{27} = 8$ καὶ

$\frac{\rho^2}{4} = \frac{81}{4}$ καὶ $\frac{\rho^2}{4} - \frac{\pi^3}{27} = \frac{49}{4}$· ὅθεν

$$\chi = \sqrt[3]{(\tfrac{9}{2} + \sqrt{\tfrac{49}{4}})} + \sqrt[3]{(\tfrac{9}{2} - \sqrt{(\tfrac{49}{4})})} =$$

$\sqrt[3]{(\tfrac{9}{2} + \tfrac{7}{2})} + \sqrt[3]{(\tfrac{9}{2} - \tfrac{7}{2})} = \sqrt[3]{\tfrac{16}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{2}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3.$

Ἔςω ἔτι ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 = 3\chi + 2$ ὅπου $\pi = 3$ καὶ $\rho = 2$ ἄρα $\frac{\pi^3}{27} = \frac{27}{27} = 1$. καὶ $\frac{\rho^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$. ὅθεν $\chi =$

$\sqrt[3]{(1 + \sqrt{0})} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{0})} = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 1 + 1 = 2$· πλὴν τὰ τοιαῦτα προβλήματα λύονται καὶ διὰ τῶν ἀνωτέρω μεθόδων διὰ τὸ ἔχειν ῥίζαν λογικήν, τὰ δ' ἑξῆς διὰ τὸ ἄλογον μόνον δι' αὐτῆς λύονται. Δεδόσθω ἔτι ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 = 15\chi + 4$· ὅπου $\pi = 15$ καὶ $\rho = 4$· ἄρα $\frac{\pi^3}{27} = \frac{15^3}{27} = \frac{3^3.5^3}{27} = 5^3 = 125$· καὶ $\frac{\rho^2}{4} = 4$· ἄρα $\frac{\rho^2}{4} - \frac{\pi^3}{27} = 4 - 125 = -121$· ὅθεν $\chi =$

$\sqrt[3]{(2 + \sqrt{(-121)})} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})}$· ἀλλὰ κατωτέρω εὑρήσωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ μὲν διωνύμου $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} = 2 + \sqrt{-1}$, τοῦ δὲ $\sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})} = 2 - \sqrt{-1}$· καὶ ἑπομένως $\chi = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$.

δεδόσθω ἔτι $\chi^3 = -2$· ὅπου $\pi = 1$ καὶ $\rho = -6$ ἄρα $\frac{\pi^3}{27} = \frac{1}{27}$ καὶ $\frac{\rho^2}{4} = 9$· καὶ $\frac{\rho^2}{4} - \frac{1}{27} = 9 - \frac{1}{27} = \frac{242}{27}$ ἄρα $\chi = \sqrt[3]{\left(-3 + \sqrt{\frac{242}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-1 - \sqrt{\frac{242}{27}}\right)}$· ὅ ἐςι $\chi = -1 - \sqrt{\frac{2}{3}} - 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$·
δεδόσθω ἔτι $\chi^3 = -3\chi + 3$· ὅπου $\pi = -3$ καὶ $\rho = 6$ ἄρα $\frac{\pi^3}{27} = -\frac{27}{27} = -1$ καὶ $\frac{\rho^2}{4} = 9$· ὅθεν $\frac{\rho^2}{4} + \frac{\pi^3}{27} = 9 + 1 = 10$· λοιπὸν $\sqrt[3]{(6 + \sqrt{10})} + \sqrt[3]{(3 - \sqrt{10})}$ ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

§. 767. Εἰς αὐτοὺς τοὺς τύπους συνεχῶς περιπίπτομεν εἰς ἐξαγωγὴν κυβικῆς ῥίζης ἑνὸς διωνύμου, οὗ τὸ πρῶτον μέρος λογικὸν, καὶ τὸ δεύτερον ἄλογον, ἤτοι ῥίζα τετραγωνική· καὶ πολλὰ εἰσὶ τοιαῦτα, ὧν ἡ ῥίζα ἡ κυβικὴ ἐξάγεται, ὡς ἀνωτέρω· $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{-12})} = 2 + \sqrt{-1}$· ἵνα δὲ τὴν μέθοδον τῆς ἐξαγωγῆς τῶν τοιούτων ῥιζῶν μάθωμεν, ζητηθείτω ἐν γένει ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ διωνύμου $\alpha + \beta\sqrt{\gamma}$· οὗ τινος καὶ α, καὶ β, καὶ γ οἱ δοθέντες εἰσὶν ἀριθμοί· καὶ ἔςαι πάντως ἡ ῥίζα τούτου τοῦ διωνύμου ἡ κυβικὴ $\chi + \mu\sqrt{\gamma}$· διότι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ῥιζικοῦ μέρους μένει ὁ αὐτὸς καὶ εἰς τὴν ῥίζαν τὴν κυβικὴν γ· λοιπὸν ἔςαι $\sqrt[3]{(\alpha + \beta \times \sqrt{\gamma})} = \chi + \mu\sqrt{\gamma}$· ὑψώσωμεν τὰ δύο σκέλη εἰς κύβον, καὶ ἔςαι $\alpha + \beta\sqrt{\gamma} = \chi^3 + 3\chi^2\mu\sqrt{\gamma} + 3\chi\mu^2\gamma + \mu^3\gamma \times \sqrt{\gamma}$· ἄρα ἔςαι τὸ μὲν λογικὸν μέρος αὐτοῦ τοῦ κύβου ἴσον τῷ λογικῷ μέρει τοῦ διωνύμου $\alpha = \chi^3 + 3\chi\mu^2\gamma$. . 1

τὸ δ' ἄλογον ἴσον τῷ ἀλόγῳ.

$$3\chi^2\mu\sqrt{\gamma}+\mu^3\gamma\sqrt{\gamma}=\beta\sqrt{\gamma} \quad : \sqrt{\gamma}$$

$$3\chi^2\mu+\mu^3\gamma=\beta \quad -\mu^3\gamma$$

$$3\chi^2\mu=\beta-\mu^3\gamma \quad : 3\mu$$

$$\chi^2=\frac{\beta-\mu^3\gamma}{3\mu} \quad \sqrt{}$$

$$\chi=\sqrt{\left(\frac{\beta-\mu^3\gamma}{3\mu}\right)} \quad \ldots \; 11$$

Καὶ δι' αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης, ἐὰν μόνον πρῶτον θῶμεν τὸ $\mu=1$· δεύτερον εὑρεθέντος τοῦ χ δι' αὐτῆς, θέτομεν τοῦτο εἰς τὴν πρώτην 1 ἐξίσωσιν, καὶ ἐὰν εὑρεθῇ τὸ α ἴσον τῷ πρώτῳ μέρει τοῦ δοθέντος διωνύμου, ὀρθῶς ἔχει τὸ εὑρεθὲν χ, ἐὰν δὲ ἔλαττον, λαμβάνομεν $\mu=2$· καὶ πάλιν δοκιμάζομεν τὴν ἐξίσωσιν 1· καὶ ἐὰν αὖθις ἔλαττον λαμβάνομεν $\mu=3$ κτ. ἄχρις οὗ εὑρεθῇ α ἴσον τῷ πρώτῳ μέρει τοῦ δοθέντος διωνύμου· ἐὰν ὅμως εὑρεθῇ τὸ α μεῖζον, φανερὸν ὅτι μεῖζον τοῦτο τοῦ δικαίου ἐλάβομεν, καὶ ἔδει ἔλαττον τὸ μ ληφθῆναι· τὸ μ λαμβάνεται καὶ $=1\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$ κτ· ἐὰν ὅμως τὸ α δὲν εὑρίσκεται ἴσον τῷ δοθέντι πρώτῳ μέρει τοῦ δοθέντος διωνύμου, οὔτε ὅταν τὸ μ μεῖζον, οὔτε ὅταν ἔλαττον, ἄλογον τοῦτο τὸ διώνυμον, καὶ ἡ εὕρεσις τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀμήχανος· οὔτε εἰς τὸ ἁπλούστερον ἐπανέρχεται· καὶ ἄλλως οὐ λύεται, εἰμὴ διὰ τῶν γεωμετρικῶν γραμμῶν, ὡς ἐν οἰκείῳ τόπῳ ἐροῦμεν περὶ αὐτῶν.

παραδείγματα.

Ζητεῖται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ διωνύμου $\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})}=\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})}$ ἄρα $\alpha=20$, $\beta=14$ καὶ $\gamma=2$· ὅθεν εὑρίσκεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὸ $\chi = \sqrt{\left(\frac{\beta-\mu^3\gamma}{3\mu}\right)}$· ἐὰν θῶμεν $\mu = 1$ ἔσαι $\chi = \sqrt{\left(\frac{14-2}{3}\right)} = \sqrt{4} = 2$· δοκιμάζομεν ἤδη εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν $\alpha = \chi^3 + 3\chi\mu^2\gamma = 8 + 12 = 20$· καὶ ἐπεὶ συνᾴδει τῷ πρώτῳ μέρει τοῦ δοθέντος διωνύμου, ἔσαι $\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2}$.

Ζητεῖται ἔτι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ διωνύμου $\sqrt[3]{(27+6\times\sqrt{21})}$ ὅπου $\alpha = 27$· $\beta = 6$ καὶ $\gamma = 21$· εἰς δὲ τὸν τύπον $\chi = \sqrt{\left(\frac{\beta-\mu^3\gamma}{3\mu}\right)}$ ἐὰν λάβωμεν ἀντὶ μ οἰονδήποτε ἀριθμὸν ἀκέραιον, βλέπομεν ὅτι μὲ κανένα δὲν ἐξέρχεται χ ἀριθμὸς λογικός· ὅθεν λαμβάνομεν $\mu = \frac{1}{2}$ καὶ ἐξέρχεται

$$\chi = \sqrt{\frac{6-\frac{1}{8}-21}{3\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{48-21}{8}}{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{27}{8}}{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{54}{24}} = \sqrt{\frac{9}{4}}$$

καὶ $\chi = \frac{3}{2}$ ἐὰν δὲ τοῦτο καὶ μὲ $\mu = \frac{1}{2}$ θῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha = \chi^3 + 3\chi\mu^2\gamma$· $= \frac{27}{8} + 3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 21 = \frac{27}{8} + \frac{189}{8} = \frac{216}{8} = 27$· εὑρίσκομεν ὅτι καλῶς εἰλήφθη $\mu = \frac{1}{2}$· ἄρα ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ διωνύμου

$$\sqrt[3]{(27+6\sqrt{21})} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21} = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$$

Ζητεῖται ἔτι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\sqrt[3]{(-135+\sqrt{18252})}$ $=\sqrt[3]{(-135+78\sqrt{3})}$ ὅπου $\alpha=-135$· $\beta=78$· καὶ $\gamma=3$· ἐὰν δὲ θῶμεν $\mu=1$· εἰς τὸν τύπον 11 ἔσαι $\chi=$ $\sqrt{\frac{78-3}{3}}\sqrt{=25}=5$· ἐὰν δὲ $\chi=5$· καὶ $\mu=1$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν θῶμεν τὴν $-\alpha=-\chi^3-3\chi\mu^2\gamma=-$ $125-45=-170$· μανθάνομεν ὅτι $\mu=1$ δὲν εἰλήφθη ὀρθῶς, διότι ἔλαττον ἐξῆλθε $\alpha=-170$, καὶ ἔδει ἐξελθεῖν $\alpha=-135$· ὅθεν ληφθήτω $\mu=2$. καὶ εὑρίσκομεν $\chi=$ $\sqrt{\frac{78-24}{6}}=\sqrt{\frac{54}{6}}=\sqrt{9}=3$· καὶ ἐπειδὴ συνάδει τοῦτο εἰς τὴν ἐξίσωσιν 1 οὕτω $-\alpha=-27-108=-135$· ἔσαι ἡ ῥίζα τοῦ $\sqrt[3]{(-135+78\sqrt{3}}=-3+2\sqrt{3}$.

Ἔσω καὶ τὸ διώνυμον τοῦτο $\sqrt[3]{(3+\sqrt{-\frac{100}{27}})}$ καὶ ζητεῖται ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα· ἐὰν δ' ἀναχθῇ εἰς τὸ ἁπλούστερον, ἔσαι $\sqrt[3]{(3+\frac{5}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}})}$ ὅπου $\alpha=3$· $\beta=\frac{5}{3}$ καὶ $\gamma=-\frac{4}{3}$ θῶμεν $\mu=1$· καὶ ταῦτα εἰς τὴν ἐξίσωσιν 11· ἔσαι $\chi=\sqrt{\frac{\frac{5}{3}+\frac{4}{3}}{3}}=\sqrt{1}=\pm 1$· ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν I τὰ αὐτὰ δοκιμάσωμεν, εὑρίσκομεν $\alpha=\chi^3+3\chi\mu^2\gamma$ $=1-3\cdot\frac{4}{3}=-3$, καὶ ἐπειδὴ ἐξέρχεται $\alpha=-3$ ἀποφατικὸν δεῖ το $\chi=-1$ λαβεῖν· ὅθεν

$$\sqrt[3]{(3+\tfrac{5}{3}\sqrt{-\tfrac{4}{3}})}=-1+\sqrt{-\tfrac{4}{3}}.$$

§. 768. Τὸν αὐτὸν τρόπον ἐξάγεται ἡ κυβικὴ ῥίζα καὶ πολλῶν διωνύμων, ὁποῦ ἔχουσι καὶ τὰ δύο μέρη ἄλογα καὶ φέρονται εἰς τὸ ἁπλούςερον· πλὴν εἰς αὐτὰ τὸ πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης πάλιν ἄλογον εὑρίσκεται, καὶ οὐχὶ λογικὸν, ὡς εἰς τὰ ἀνωτέρω εὑρίσκετο.

Ἔςω τὸ διώνυμον $\sqrt[3]{(\sqrt{243}+\sqrt{242})}=\sqrt[3]{(9\sqrt{3}+11\sqrt{2})}$ ὅπου $\alpha=9\sqrt{3}$· $\beta=11$· $\gamma=2$· ἐὰν δὲ θῶμεν $\mu=1$ εἰς τὸν τύπον 11 εὑρίσκομεν $\chi=\sqrt{\dfrac{11-3}{3}}=\sqrt{3}$· ἐὰν δὲ τοῦτο, καὶ $\mu=1$ δοκιμάσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν 1 εὑρίσκομεν $\alpha=3\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{3}\cdot 2=9\times\sqrt{3}$· ὡς εἰς τὸ διώνυμον δέδοται· ἄρα $\sqrt[3]{(\sqrt{243}+\sqrt{242})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$·

Σημείωσις α΄. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ γ΄ βαθμοῦ λύονται μὲν ὅλαι διὰ τῶν Καρδανικῶν τύπων (§. 766), ἀλλ' ἐκεῖναι μάλιςα, ὅσαι ἀλόγους ἔχουσι ῥίζας· ἐπειδὴ ὅμως οἱ Καρδανικοὶ τύποι φέρονται πάντοτε εἰς διώνυμον ἄλογον μετὰ τοῦ κυβικοῦ ῥιζικοῦ σημείου, διὰ τῆς δευτέρας μεθόδου ἀνάγομεν αὐτὸ εἰς τὸ ἁπλούςερον, καὶ συναπτόμενα τὰ δύο διώνυμα εἰς ἓν, ἐὰν γίνωνται εἰς τὸ κεφάλαιον ὁλόκληρος ἀριθμὸς, καλῶς ἔχει ἡ μία ῥίζα, αἱ δ' ἕτεραι εὑρίσκονται κατὰ τὸ (§. 738)· ἐὰν δὲ πάλιν καὶ οὕτως ἄλογοι, διὰ δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἀπαλλάττομεν καὶ τοῦτο τῆς ἀλογίας, καὶ εὑρίσκεται ἡ ῥίζα διὰ τῆς προσεγγίσεως. (§. 757).

Σημείωσις β΄. ἐὰν εἰς τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν $\chi^3=\pi\chi\pm\rho$· εὑρίσκεται εἰς τοὺς Καρδανικοὺς τύπους τὸ ἀποφατικὸν

$\frac{\pi^3}{27} > \frac{\rho^2}{4}$ τὸ χ εἰς αὐτοὺς τοὺς τύπους εἶναι ἀδύνατος ἀριθμός· καὶ οἱ τύποι εἰς τὰ τοιαῦτα εἶναι ἀνωφελεῖς.

§. 769. Εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ τρίτου βαθμοῦ, αἵτινες ἔχουσι τοὐλάχιστον μίαν ῥίζαν λογικὴν, καὶ τοῦ δευτέρου ὅρου σπανίζουσιν, εἰς τὴν τούτων λύσιν συντομωτέρα μέθοδος εἶναι ἡ ἑξῆς.

ἔςω ἡ γενικὴ ἐξίσωσις $\chi^2 \pm \beta\chi \pm \gamma = 0$· ἤτοι $\chi^3 \pm \beta\chi = \pm \gamma$· ἐπειδὴ δὲ $\chi^3 < \gamma$ ἀεὶ, διότι $\chi^3 + \beta\chi = \gamma$· ἄρα ληφθήτω ὁ ἔγγιςα κύβος τοῦ γ, ὃν ἡμεῖς Θ καλέσωμεν, καὶ τεθείτω $\chi^3 = \Theta$· ἀφέλωμεν ἤδη ταύτην τὴν ἐξίσωσιν ἀπὸ τῆς δοθείσης.

$$\begin{array}{r} \chi^3 \pm \beta\chi = \pm \gamma. \\ -\chi^3 \quad = -\Theta. \\ \hline \pm \beta\chi = \pm \gamma - \Theta \\ \hline \chi = \dfrac{\pm \gamma - \Theta.}{\beta} \end{array}$$

Καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τύπον λύονται ὅλαι αἱ ἐξισώσεις τοῦ τρίτου βαθμοῦ, ὅσαι τοὐλάχιςον ἔχουσι μίαν ῥίζαν λογικὴν, καὶ ὁ δεύτερος ὅρος ἐν αὐταῖς ἀπεςι· διότι τὸ γ καὶ β δίδεται, καὶ μόνον ὁ ἔγγιςα κύβος τοῦ $\gamma = \Theta$ εὐκόλως εὑρίσκεται· πλὴν ὅταν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\beta\chi$ εἶναι ἀποφατικὸν, πρέπει ἀντὶ Θ νὰ λαμβάνωμεν τὸν ἐγγὺς μείζονα κύβον τοῦ γ, διότι τότε $\chi^3 > \gamma$· ἐπὶ παραδείγματος.

1) Ζητεῖται ἡ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $\chi^3 + 12\chi = 427$. ὅπου $\beta = 12$ καὶ $\gamma = 427$. ὁ δ' ἔγγιςα κύβος τοῦ 427

εἶναι $343 = \Theta$· ἄρα $\chi = \frac{427-343}{12} = \frac{84}{12} = 7$. καὶ ἐὰν 7 ἀντὶ χ εἰς τὴν ἐξίσωσιν θῶμεν, ἔρχεται εἰς τὸ μηδέν.

2) Ζητεῖται ἡ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $\chi^3 - 12\chi = 1584$. ὅπου $-\beta = -12$. καὶ $\gamma = 1584$. ὁ δ' ἔγγιςα μείζων κύβος τοῦ 1584 εἶναι 1728. ἄρα

$$\chi = \frac{1584-1728}{-12} = \frac{-144}{-12} = 12.$$ καὶ οὗτος τεθεὶς ἀντὶ χ εἰς τὴν ἐξίσωσιν φέρει αὐτὴν εἰς τὸ μηδέν.

3). Ἔςω ἔτι ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 \pm 27\chi = 28$, ὅπου $\beta = 27$. $\gamma = 28$, καὶ ὁ ἐγγὺς κύβος τοῦ 28 εἶναι ὁ $27 = \Theta$. ἄρα $\chi = \frac{28-27}{27} = \frac{1}{27}$· πλὴν οὗτος ὁ ἀριθμὸς ἀντὶ χ τὴν ἐξίσωσιν οὐ φέρει εἰς τὸ μηδέν· ἄρα ληφθήτω ἀντὶ χ ὁ ὑποδεέςερος κύβος 8, καὶ εὑρίσκομεν $\frac{28-8}{27} = \frac{20}{27}$· πλὴν οὗτος ὁ ἀριθμὸς ἀφελής· λαμβάνομεν ἔτι ἀντὶ χ τὸν ἔτι ὑποδεέςερον τῆς μονάδος κύβον $\Theta = 1$. ἄρα $\chi = \frac{28-1}{27} = 1$. οὗτος ὁ ἀριθμὸς ἴσος χ· διότι τὴν ἐξίσωσιν φέρει εἰς τὸ μηδέν.

4). Ἔςω τέλος ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 - 39\chi = -70$, καὶ ζητεῖται ἡ ῥίζα αὐτῆς· ὁ μείζων κύβος τοῦ -70. οὔτε ὁ ἀπὸ τῆς ῥίζης 5 ἁρμόζει, οὔτε ὁ ἀπὸ τῆς ῥίζης 6, ἀλλ' ὁ ἀπὸ τῆς ῥίζης 7, ὅθεν $\Theta = 343$ καὶ ἑπομένως

$$\chi = \frac{-70+343}{-39} = \frac{273}{-39} = -7$$· καὶ αὕτη ἡ ῥίζα αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως.

Σημείωσις. Είς αὐτὸν τὸν τύπον πρέπει νὰ εὑρίσκηται πάντοτε ἡ ῥίζα τοῦ ληφθέντος κύβου $=\Theta$· ἄλλως γὰρ φαίνεται ὅτι δὲν ἐλάβομεν τὸν ἁρμόδιον κύβον· φέρε ἤδη καὶ προβλήματά τινα διὰ τῶν δύο τούτων μεθόδων λύσωμεν.

Πρόβλημα. α'.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς, ὧν τὸ τῶν κύβων κεφάλαιον $=28$, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν $=1$· ἔςω ὁ μὲν μείζων τούτων ἀριθμὸς $=\chi+1$, ὁ δ' ἐλάττων $=\chi-1$· ἄρα ὁ μὲν κύβος ἐκείνου $\chi^3+3\chi^2+3\chi+1$· τούτου δὲ $\chi^3-3\chi^2+3\chi-1$. τὸ δ' ἄθροισμα τῶν δύο $2\chi^3+6\chi=28$

$$\frac{2\chi^3+6\chi=28}{\chi^3+3\chi=14} \quad :2$$

$\chi^3+3\chi=14$. καὶ ἐπειδὴ ὁ ἔγγιςα κύβος τοῦ 14, $8=\Theta$ ἄρα $\chi=\dfrac{14-8}{3}=2$. ὅθεν ὁ μὲν μείζων ἀριθμὸς $\chi+1=3$· ὁ δ' ἐλάττων $\chi-1=1$

Πρόβλημα β'.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς, ὧν τὸ μὲν κεφάλαιον τῶν κύβων αὐτῶν 72, τὸ δὲ παραγόμενον ἀπ' αὐτῶν 8.

Ἔςω ὁ μὲν εἷς ἀριθμὸς χ, ἄρα ὁ ἕτερος $\dfrac{8}{\chi}$. ἐκείνου δ' ὁ κύβος χ^3, τούτου $\dfrac{8^3}{\chi^3}$ ἄρα $\chi^3+\dfrac{8^3}{\chi^3}=72$.

$$\frac{\chi^3+\dfrac{8^3}{\chi^3}=72}{\chi^6+8^3=72\chi^3} \quad \cdot \chi^3$$

ἐὰν δὲ θῶμεν $\chi^3=\text{ч}$ ἔςαι ἡ ἐξίσωσις $\text{ч}^2-72\text{ч}=-512$, τετραγωνικὴ ἐξίσωσις· ἄρα $\text{ч}^2-72\text{ч}+1296=-512+1296$. ἤτοι

$\text{ч}-36=\sqrt{784}=28$.

καὶ ἑπομένως $\text{ч}=64$· ἦν δὲ καὶ $\chi^3=\text{ч}$ καὶ $\chi=\sqrt[3]{\text{ч}}$

ἄρα $=\chi\sqrt[3]{64}=4$. ὅς ἐστιν ὁ εἷς ζητούμενος ἀριθμός· ὁ δ' ἕτερος $\frac{8}{4}=2$.

Πρόβλημα γ'.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἀριθμητικῇ σειρᾷ, ὧν ἡ μὲν διαφορὰ $=3$, τὸ δὲ παραγόμενον τῶν τριῶν $=28$. Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος χ. ὁ δεύτερος $\chi+3$ καὶ ὁ τρίτος $\chi+6$ (§. 535)· ἄρα τὸ παραγόμενον $\chi(\chi+3)(\chi+6)=\chi^3+3\chi^2+6\chi^2+18\chi=28$ ἤτοι $\chi^3+9\chi^2+18\chi=28$. ἐὰν δ' εἰς αὐτὴν θῶμεν $\chi=\psi-3$, διὰ νὰ ἀποσκευάσωμεν τὸν δεύτερον ὅρον, ἔσται $\psi=\chi+3$ ἄρα

$$\begin{array}{rr}\chi^3= & \psi^3-9\psi^2+27\psi-27.\\ 9\chi^2= & 9\psi^2-54\psi+81.\\ 18\chi= & 18\psi-54.\\ 28= & 28.\\ \hline & \psi^3 * -9\psi=28.\end{array}$$

ἤτοι $\psi^3=9\psi+28$ ὅπου $\pi=9$ καὶ $\rho=28$.
Ἐὰν εὑρεῖν εἰς τοὺς Καρδανικοὺς τύπους τὴν ῥίζαν αὐτῆς θέλωμεν, ἔσται $\frac{\pi^3}{27}=\frac{9.9.9.}{27}=\frac{3.3.9.9}{3.9}=27$· καὶ $\frac{\rho^2}{4}=\frac{28.\ 28}{4}=196$. ἄρα $\frac{\rho^2}{4}-\frac{\pi^3}{27}=196-27=169$ καὶ ἑπομένως $\chi=\sqrt[3]{(14+\sqrt{169})}+\sqrt[3]{(14-\sqrt{169})}$.
Ἐὰν δὲ τὰ ῥιζικὰ ταῦτα εἰς τὸ ἁπλούστερον φέρωμεν, ἔσται $\sqrt[3]{(14+13\sqrt{1})}+\sqrt[3]{(14-13\sqrt{1})}$ ὅπου $\alpha=14$· $\beta=13$ καὶ $\gamma=1$· ἄρα εἰς τὸν τύπον $\chi=\sqrt{\frac{\beta-\mu^3\gamma}{3\mu}}$.

ἐὰν $\mu=1$ θῶμεν, ἔσται $\chi=\sqrt[3]{\frac{13-1}{3}}=\sqrt{4}=2$·

εἰς δὲ τὸν τύπον $\alpha = \chi^3 + 3\chi\mu^{-}\gamma$ εὑρίσκομεν $\alpha = 8+6$ 14· ἄρα καὶ $\chi = 2 + \sqrt{1} + 2 - \sqrt{1} = 4$· καὶ ἑπομένως ἡ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $\text{ϥ} = 4$· ἦν δὲ καὶ $\chi = \text{ϥ} - 3$ ἄρα $\chi = 1$· καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων 1, ὁ δεύτερος 4 καὶ ὁ τρίτος 7. διὰ τῆς β' μεθόδου λύεται κάλλιον ἡ ἐξίσωσις $\text{ϥ}^3 - 9\text{ϥ} = 28$· διότι $\beta = 9$ καὶ $\gamma = 28$. ὁ δ' ἔγγὺς μείζων κύβος τοῦ 28 εἶναι $64 = \Theta$·

$$\text{ἄρα ϥ} = \frac{28-64}{-9} = \frac{-36}{-9} = 4 \text{ κτ.}$$

καὶ ἄλλα τοιαῦτα προβλήματα δίδονται, ἀλλ' ὁ εἰς ταῦτα στοιχειωθεὶς ἀπόνως λύσει καὶ τὰ λοιπά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Περὶ ἐξισώσεων τοῦ τετάρτου βαθμοῦ.

§. 770. Ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ τηρεῖ ἐν μέρει τὸν τύπον $\chi^4 + \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \delta = 0$· (§. 737), καὶ ὅτι αὕτη μεμιγμένη καλεῖται τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, ἡ δ' ἑξῆς $\chi^4 = \varphi$ ἀμιγὴς (§. 761), καὶ ὅτι ἐξ αὐτῆς ἡ ῥίζα εὑρίσκεται, ἐὰν δὶς ἐξαγάγωμεν τὴν ῥίζαν τὴν τετραγωνικὴν, ἤτοι ἀπὸ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἔτι τὴν τετραγωνικὴν οὕτω $\chi = \sqrt{\sqrt{\varphi}}$, καθ' ὃ καὶ ἐξισώσεις διτετραγωνικαὶ παρ' ἄλλων ὠνομάσθησαν κτ. εἰς πολλὰ μέρη τούτου τοῦ συγγράμματος ἐμάθομεν. Γνωστὸν ἔτι (§. 735) καὶ ὅτι εἰς αὐτὰς τὰς ἐξισώσεις ῥίζας τέσσαρας εὑρίσκομεν· ἔτι καὶ τοῦτο ἐμάθομεν ὅτι εἰς τὴν διτετραγωνικὴν ἐξίσωσιν $\chi^4 + \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \delta = 0$ ὁ μὲν συνεργὸς α εἶναι ἴσος τῷ κεφαλαίῳ τῶν τεσσάρων ῥιζῶν· ὁ δὲ συνεργὸς β ἴσος τῷ κεφαλαίῳ τῶν γινομένων ἀνὰ δύω ῥίζας λαμβανομένων· ὁ δὲ τοῦ γ ἴσος τῷ κεφαλαίῳ τῶν γινομένων ἀνὰ τρεῖς λαμβανομένων ῥίζας· καὶ ὁ ἔσχατος δ' ἴσος τῷ γινομένῳ ὅλων τῶν ῥιζῶν· διότι ἐὰν θῶμεν $\chi=\rho$ $\chi=\sigma$· $\chi=\tau$ $\chi=\upsilon$· ἔςαι $\chi-\rho=0$· $\chi-\sigma=0$ $\chi-\tau=0$ $\chi-\upsilon=0$, αἱ ῥίζαι αἱ τέσσαρες· καὶ ἐὰν οἱ παράγοντες τῆς ἐξισώσεως πολλαπλασιασθῶσιν ἐνεργείᾳ, γίνεται $(\chi-\rho)(\chi-\sigma)(\chi-\tau)(\chi-\upsilon)=\chi^4-(\rho+\sigma+\tau+\upsilon)\times\chi^3+(\rho\sigma+\rho\tau+\rho\upsilon+\sigma\tau+\tau\upsilon)\chi^2-(\rho\sigma\tau+\rho\sigma\upsilon+\rho\tau\upsilon+\sigma\tau\upsilon)\times\chi+\rho\sigma\tau\upsilon=0$, καὶ ἔςαι φανερὸν τὸ λεγόμενον· ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἔσχατος ὅρος ἄνευ τῆς ἀγνώςου χ συνίςαται ἀπὸ παράγοντας τῶν ῥιζῶν, λύομεν τοῦτον τὸν ὅρον εἰς τοὺς οἰκείους παράγοντας, καὶ δοκιμάζομεν τὴν ἐξίσωσιν διὰ τίνος τούτων ἔρχεται εἰς τὸ μηδὲν, ὅταν λαμβάνωμεν ἀντὶ χ ἕκαςον τούτων καταφατικὸν, ϗ ἀποφατικὸν, καὶ τότε κρίνομεν, ὅτι οὗτος ὁ παράγων εἶναι ἡ μία ῥίζα τῆς ἐξισώσεως· εἶτα συνήθως μετὰ ἐναντίου σημείου προσγράφεται τῇ ἀγνώςῳ χ, καὶ διαιρεῖ ἐπ' ἀκριβὲς τὴν ἐξίσωσιν, καὶ τὸ πηλίκον γίνεται ἀεὶ ἐξίσωσις τοῦ τρίτου βαθμοῦ, καὶ τότε κατὰ τὰς μεθόδους τοῦ τρίτου εὑρίσκομεν τὰς τρεῖς λοιπὰς ῥίζας, καὶ οὕτω λύεται ἡ διτετραγωνικὴ ἐξίσωσις· πλὴν καὶ εἰς αὐτὰς θεωροῦνται ὅλαι ἐκεῖναι αἱ μέθοδοι, ὅπου γενικῶς ἡμεῖς εἴπομεν, δηλ: ἐὰν οἱ ὅροι κλασματώδεις νὰ ἀπαλλαχθῇ ἡ ἐξίσωσις ἀπὸ τὰ κλάσματα (§. 755)· ἐὰν δὲ μείζων ὁ ἔσχατος ὅρος, καὶ ἔχῃ πολλοὺς παράγοντας, νὰ μεταβληθῇ εἰς ἐλάττονα (§. 747)· ἐὰν ἡ ἐξίσωσις ἔχῃ ὅρους ἀλόγους, νὰ ἀπαλλαχθῇ τῆς ἀλογίας κτ.

Ἐπὶ παραδείγματος δηλ: ζητεῖται ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως

$\chi^4+2\chi^3-7\chi^2-8\chi+12$. εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν ἀπὸ τῶν μεταβολῶν τῶν σημείων (§. 740) μανθάνομεν ὅτι δύο ἔχει καταφατικὰς ῥίζας, καὶ δύο ἀποφατικάς· ἐὰν δὲ λύσωμεν τὸν ἔσχατον ὅρον 12 εἰς παράγοντας 1, 2, 3, 4, 6, 12, εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=+1$ φέρει τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδέν· ἄρα ἡ μονὰς ἡ μία ῥίζα τῆς ἐξισώσεως· διέλωμεν ἤδη τὴν ἐξίσωσιν διὰ $\chi-1$ οὕτω

$$\chi^4+2\chi^3-7\chi^2-8\chi+12:(\chi-1)=\chi^3+3\chi^2-4\chi-12=0.$$

$$\begin{array}{llllll}
-\chi^4 & \mp\chi^3 & & & & \\
\hline
0 & +3\chi^3 & & & & \\
 & \pm 3\chi^3 & \mp 3\chi^2 & & & \\
\hline
 & & -4\chi^2 & & & \\
 & & \mp 4\chi^2 & \pm 4\chi & & \\
\hline
 & & & -12\chi & & \\
 & & & \mp 12\chi & \pm 12 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

καὶ ἰδοὺ τὸ πηλίκον $\chi^3+3\chi^2-4\chi-12=0$, ἐξίσωσις τοῦ τρίτου βαθμοῦ· ἄρα διαφόρως κατὰ τὰς μεθόδους ἐκείνης εὑρίσκονται καὶ αἱ λοιπαὶ ῥίζαι· διότι ἀπὸ τοὺς παράγοντας τοῦ ἐσχάτου ὅρου -12, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ 2 ἀντὶ χ φέρει τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδέν, καὶ ὁ 2 ἄρα ἡ δευτέρα ῥίζα· διέλωμεν αὖθις καὶ αὐτὴν διὰ $\chi-2$, καὶ εὑρίσκομεν

$$\chi^3+3\chi^2-4\chi-12=0 : \chi-2=\chi^2+5\chi+6=0.$$
$$\frac{-\chi^3 \mp 2\chi^2}{5\chi^2}$$
$$\frac{\pm 5\chi^2 \mp 10\chi}{+6\chi}$$
$$\frac{+6\chi \mp 12}{0.}$$

καὶ τὸ πηλίκον $\chi^2+5\chi+6=0$· δευτέρου βαθμοῦ ἐξίσωσις· ἄρα $\chi^2+5\chi+\frac{25}{4}=\frac{25}{4}-6=\frac{1}{4}$ καὶ $\chi+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$· καὶ ἑπομένως $\chi=-\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}$ ἤτοι $\chi=3$ καὶ $\chi=2$· αἱ ῥίζαι αἱ λοιπαί· καὶ ἰδοὺ τέσσαρες ῥίζαι τῆς ἄνω ἐξισώσεως $\chi=1$· $\chi=2$· $\chi=-3$· $\chi=-2$.

Ἐκ τούτων μανθάνομεν πρῶτον ὅτι ἡ λύσις τῶν ἀνωτέρω βαθμῶν προαπαιτεῖ τὴν λύσιν τῶν κατωτέρω βαθμῶν, διότι βλέπομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ μεταβαίνει εἰς τὴν τοῦ τρίτου, ὡς ἡ τοῦ τρίτου εἰς τὴν τοῦ δευτέρου· τὸν αὐτὸν τρόπον μεταβαίνει καὶ ἡ τοῦ πέμπτου βαθμοῦ εἰς τὴν τοῦ τετάρτου κτ.

Μανθάνομεν δεύτερον ὅτι τοῦτον τὸν τρόπον δὲν λύονται αἱ ἐξισώσεις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, ὅσαι ἔχουσι τοὐλάχιστον μίαν ῥίζαν λογικὴν ἀκέραιον· ὅσαι δὲ μὴ τοιαῦται, τοῦτον τὸν τρόπον δὲν λύονται· διὸ καὶ ἕτεραι μέθοδοι ἐπενοήθησαν εἰς αὐτάς, ἃς ἡμεῖς εἰς τὸ παρὸν κατὰ τάξιν διασαφήσομεν.

§. 771 Τῶν διτετραγωνικῶν ἐξισώσεων εἰς τινὰς συνυπάρχουσιν ὅλοι οἱ ὅροι, ὡς $\chi^4+\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta=0$· εἰς ἄλλας ἐλλείπει ὁ δεύτερος ὅρος, ὡς $\chi^4 * \beta\chi^2+\gamma\chi+\delta=0$· εἰς ἄλλας δὲ λείπει ὁ δεύτερος καὶ τέταρτος, ὡς $\chi^4 * + \beta\chi^2 * + \delta = 0$ ὅθεν καὶ διαφόρως ἑκάστη τούτων λύεται· ἡμεῖς ὅμως περὶ τούτων πραγματευόμενοι ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου τούτου ἀρξώμεθα, ὅπου ὁ δεύτερος ὅρος καὶ τέταρτος ἄπεισιν, ὡς $\chi^4 + \beta\chi^2 + \delta = 0$· καὶ οὗτος ὁ τύπος λύεται εὐκολώτερον, ἐπειδὴ μεταβαίνει εἰς ἐξίσωσιν τετραγωνικήν· διότι ἐὰν θῶμεν $\chi^4 = \psi^2$, ἔσται $\psi^2 + \beta\psi + \delta = 0$, τύπος τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, καὶ κατ' ἐκεῖνον καὶ αὕτη λύεται, ἤτοι

$$\psi^2 + \beta\psi = -\delta \qquad + \frac{\beta^2}{4}$$

$$\psi^2 + \beta\psi + \frac{\beta^2}{4} = \frac{\beta^2}{4} - \delta \cdot$$

$$\psi + \frac{\beta}{2} = \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{4} - \delta\right)}$$

καὶ τέλος $\psi = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta^2 - 4\delta}{4}\right)} =$

$-\frac{\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - 4\delta)}}{2}$ ἀλλὰ μὴν $\psi = \chi^2$ ἄρα $\chi = \pm$ $\sqrt{\left(\frac{-\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - 4\delta)}}{2}\right)}$ καὶ αὗται εἰσὶν αἱ ῥίζαι αἱ τέσσαρες· ἔστω ἐξίσωσις $\chi^4 + 5\chi^2 - 126 = 0$· ἐὰν δὲ $\chi^2 = \psi$ ἔσται $\psi^2 + 5\psi = 126$· ἄρα $\psi + \frac{5}{2} = \pm$ $\sqrt{(126 + \frac{25}{4})} = \pm\sqrt{529} = \pm\frac{23}{2}$· ἄρα $\psi = -\frac{5}{2} \pm \frac{23}{2}$· ὅ ἐστιν ἅπαξ $\psi = -14$, καὶ $\psi = 9$· ἐπειδὴ $\chi^2 = \psi$ ἔσται $\chi = \pm\sqrt{-14}$· καὶ $\chi = \pm\sqrt{9}$· καὶ εἰσὶν αἱ τέσσαρες ῥίζαι $\chi = 3$· $\chi = -3$· $\chi = +\sqrt{-14}$· $\chi = -\sqrt{-14}$· καὶ ἐπειδὴ οὗτος ὁ τύπος εὐκόλως λύεται, μεταβῶμεν εἰς τὸν δεύτερον, ὅπου ὁ δεύτερος ὅρος μόνον ἀπεςι.

Σημείωσις. Ἑκάςη ἐξίσωσης, ὅπου ἔχει τοὺς ἐκθέτας ὅλους τῆς ἀγνώςου ποσότητος διαιρεσίμους διὰ 2, ἢ 3, ἢ 4 κτ. αὕτη μεταβαίνει εἰς ἐκεῖνον τὸν κατώτερον βαθμὸν, καθ' ὃν ἐξέρχεται τὸ πηλίκον τοῦ μείζονος ἐκθέτου, ὡς εἰς τὴν ἡγουμένην $\chi^4 + \alpha\chi^2 + \delta = o$ μετέβαινεν εἰς τὸν δεύτερον βαθμόν· διότι $\frac{4}{2} = 2$· ὁμοίως καὶ αὕτη, $\chi^6 + \alpha\chi^4 + \beta\chi + \delta = o$ μεταβαίνει εἰς τὸν τρίτον βαθμόν· διότι $\frac{6}{2} = 3$· καὶ διότι ἐὰν θῶμεν $\chi^2 - \text{ϥ}$ ἔςαι $\text{ϥ}^3 + \alpha\text{ϥ}^2 + \beta\text{ϥ} + \delta = o$· ὁμοίως καὶ αὕτη $\chi^9 + \alpha\chi^6 + \beta\chi^3 + \delta = o$ μεταβαίνει εἰς τὸν τρίτον βαθμόν· διότι ἐὰν θῶμεν $\chi^3 = \text{ϥ}$ ἔςαι $\text{ϥ}^3 + \alpha\text{ϥ}^2 + \beta\text{ϥ} + \delta = o$.

§. 772. Ὁ δεύτερος τρόπος διὰ νὰ λύσωμεν τὰς διτετραγωνικας ἐξισώσεις γίνεται εἰς ἐκείνας τὰς ἐξισώσεις, ὅσαι τὸν δεύτερον ὅρον δὲν ἔχουσιν· ἀλλ' ἡμεῖς μέθοδον ἐμάθομεν πῶς ἠμποροῦμεν ἀπὸ καθε ἐξίσωσιν τὸν δεύτερον ὅρον νὰ ἀποσκευάσωμεν (§ 745)· ἄρα ἡ ἑξῆς μέθοδος εἰς ὅλας τὰς διτετραγωνικὰς ἐξισώσεις ἐφαρμόζεται· ἡ δὲ μέθοδος αὕτη συνίςαται·

α΄. Νὰ φέρωμεν τὴν διτετραγωνικὴν ἐξίσωσιν εἰς κυβικὴν, καὶ οὕτω τοιαύτην οὖσαν νὰ λύωμεν δεύτερον κατὰ τὰς τῆς κυβικῆς μεθόδους· ὅθεν εὕρωμεν πρῶτον τύπον γενικὸν πῶς ἡ διτετραγωνικὴ ἐξίσωσις μεταβαίνει εἰς κυβικήν· καὶ εἰς τοῦτο ληφθήτω ὁ γενικὸς οὗτος τύπος $\text{ϥ}^4 + \sigma\text{ϥ}^2 + \pi\text{ϥ} + \rho = o$· ἐν ᾗ ἐλλείπει ὁ δεύτερος ὅρος· ταύτην δὲ δυνάμεθα ἐκλαβεῖν ὅτι γίνεται ἀπὸ δύο παράγοντας δευτεροδυνάμους $\text{ϥ}^2 + \chi\text{ϥ} + \zeta = o$· καὶ $\text{ϥ}^2 - \chi\text{ϥ} + \vartheta = o$ ἐν οἷς χ, ϑ, ζ. εἰσὶ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ, ὥςε ἐὰν ἄμφω πολλαπλασιασθῶσιν, ἀποτελοῦσι τὴν ἀνωτέρω· λοιπὸν πολλαπλασιασθήτωσαν, καὶ τὸ γινόμενον τούτων ἐξισούσθω τῇ ἀνωτέρω ἐξισώσει οὕτω $(\upsilon^2+\chi\upsilon+\zeta)(\upsilon^2-\chi\upsilon+\vartheta)=\upsilon^4+\chi\upsilon^3+\zeta\upsilon^2-\chi\upsilon^3-\chi^2\upsilon^2-\zeta\chi\upsilon+\vartheta\upsilon^2+\vartheta\chi\upsilon+\zeta\theta=\upsilon^4+\zeta\upsilon^2-\chi^2\upsilon^2-\zeta\chi\upsilon+\vartheta\upsilon^2+\vartheta\chi\upsilon+\zeta\vartheta=0$· ἤτοι $\upsilon^4+(\zeta-\chi^2+\vartheta)\upsilon^2+(\chi\vartheta-\zeta\chi)\upsilon+\zeta\theta=0$.

Ἐξίσωσις ἴση τῇ γενικῇ ληφθείσῃ ἀνωτέρω, ἔχουσα τὸν δεύτερον ὅρον ἐλλειπῆ· καὶ ἐπειδὴ αὕτη ἴση τῇ $\upsilon^4+\sigma\upsilon^2+\pi\upsilon+\rho=0$· ἔστιν ἄρα καὶ $\zeta+\vartheta-\chi^2=\sigma$ καὶ $\vartheta\chi-\zeta\chi=\pi$· καὶ $\zeta\vartheta=\rho$.

β'. Ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἔσται $\dfrac{\zeta+\vartheta=\sigma+\chi^2}{\zeta\chi+\vartheta\chi=\sigma\chi+\chi^3}$·
ἐὰν δὲ τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν $\vartheta\chi-\zeta\chi=\pi$ εἰς τὴν δε προσθῶμεν, ἔσται $2\vartheta\chi=\sigma\chi+\chi^3+\pi$. 1
ἐὰν δ' αὐτὴν ἀπ' ἐκείνης ἀφέλωμεν, ἔσται $2\zeta\chi=\sigma\chi+\chi^3-\pi$·
καὶ ἐκ μὲν ἐκείνης εὑρίσκομεν $\vartheta=\dfrac{\sigma\chi+\chi^3+\pi}{2\chi}$· ἐκ δὲ ταύτης εὑρίσκομεν $\zeta=\dfrac{\sigma\chi+\chi^3-\pi}{2\chi}$· ἄρα καὶ $\zeta\vartheta=$

$$\frac{\sigma\chi+\chi^3+\pi}{2\chi}\times\frac{\sigma\chi+\chi^3-\pi}{2}=$$

$$\frac{\sigma^2\chi^2+\sigma\chi^4+\sigma\chi\pi+\sigma\chi^4+\chi^6+\pi\chi^3-\sigma\chi\pi-\pi\chi^3-\pi^2}{4\chi^2}$$ ἤτοι $\zeta\theta=$

$$\frac{\dfrac{\sigma^2\chi^2+2\sigma\chi^4+\chi^6-\pi^2}{4\chi^2}\cdot 4\chi^2}{4\zeta\vartheta\chi^2=\sigma^2\chi^2+2\sigma\chi^4+\chi^6-\pi^2}$$

ἣν δὲ καὶ ἡ τρίτη ἐξίσωσις $\zeta\theta=\rho$· ἄρα καὶ $4\zeta\theta\chi^2=4\rho\chi^2$ ἐὰν ἄμφω τὰ σκέλη ἐπὶ $4\chi^2$ πολλαπλασιάσωμεν.

Θῶμεν ἤδη εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν ἀντὶ $4\zeta\vartheta\chi^2$ τὸ νη μέν·

$$\text{B} \quad \psi^2+\chi\psi+\frac{\chi^2}{2}+\frac{\sigma}{2}-\frac{\pi}{2\chi}=0 \text{· αὕτη δὲ}$$

$$\Gamma \quad \psi^2-\chi\psi+\frac{\chi^2}{2}+\frac{\sigma}{2}+\frac{\pi}{2\chi}=0.$$

Λοιπὸν διὰ τῶν τριῶν τούτων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν τὰς τέσσαρας ῥίζας ἑκάστης διτετραγωνικῆς ἐξισώσεως, ἐὰν εἰς τὰ ἑξῆς προσέξωμεν·

1) Ἐὰν ἔχῃ ἡ δεδομένη ἐξίσωσις ὅλους τοὺς ὅρους, ἀποσκευάζομεν τὸν δεύτερον ὅρον αὐτῆς, ὡς εἰς τοὺς γενικοὺς κανόνας ἐμάθομεν (§ 754.)·

2) Τὴν διτετραγωνικὴν ἐξίσωσιν ἄνευ τοῦ δευτέρου ὅρου κατὰ τὸν γενικὸν τύπον A μεταφέρομεν εἰς κυβικὴν ἐξίσωσιν, ἐὰν θῶμεν σ ἴσον τῷ συνεργῷ τοῦ τρίτου ὅρου, καὶ π = τῷ συνεργῷ τοῦ τετάρτου, καὶ ρ = τῷ ἐσχάτῳ ὅρῳ· π : χ : ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις $\psi^4-4\psi^2-8\psi+35=0$ νὰ μεταβῇ εἰς

ἴσον $4\rho\chi^2$ καὶ ἔςαι $4\rho\chi^2=\sigma^2\chi^2+2\sigma\chi4+\chi^6-\pi^2$· ἐὰν δ' αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδὲν φέρωμεν καὶ τεταγμένην ἀποκαταςήσωμεν, ἔςαι·

Δ. $\chi^6+2\sigma\chi^4+(\sigma-4\rho)\chi^2-\pi^2=0$· ἐξίσωσις τῷ ὄντι τρίτου βαθμοῦ· καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τύπον ὅλαι αἱ διτετραγωνικαὶ ἐξισώσεις, τὸν δεύτερον ὅρον ἐλλειπῶς, φέρονται εἰς ἐξίσωσιν τοῦ γ' βαθμοῦ· πρὸς διάκρισιν ὅμως καλείσθω αὕτη ἡ ἐξίσωσις παρηγμένη· αἱ δὲ παρόγοντες ἐκεῖνοι $\psi^2+\chi\psi+\zeta=0$ καὶ $\psi^2-\chi\psi+\vartheta=0$, παράγουσαι· ἐὰν δὲ καὶ εἰς αὐτὰς ἀντὶ μὲν ζ τὸ εὑρεθὲν ἴσον $\frac{\sigma\chi+\chi^3-\pi}{2\chi}$· ἀντὶ δὲ ϑ τὸ ἴσον θῶμεν οὕτω $\vartheta=\frac{\sigma\chi+\chi^3+\pi}{2\chi}$· ἔςαι ἐκείἐξίσωσιν τρίτου βαθμοῦ· ἄρα $\sigma=-4$, $\pi=-8$· καὶ $\rho=35$· ὅθεν εἰς τὸν τύπον Α $\chi^6+2\sigma\chi^4+(\sigma^2-4\rho)-\pi^2=0$, ἔσαι $\chi^6-8\chi^4-124\chi^2-64=0$· καὶ αὕτη τῷ ὄντι ἐξίσωσις κυβικὴ (§ 775· σημεί.)· καὶ αὕτη $\psi^4-17\psi^2-20\psi-6=0$ κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον μεταβαίνει εἰς κυβικήν· διότι $\sigma=-17$· $\pi=-20$· $\rho=-6$· ἄρα $\chi^6-34\chi^4+313\chi^2-400=0$· καὶ αὕτη ἐξίσωσις κυβική, ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

3) Ὅταν μεταβληθῇ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἰς τὴν φαινομένην αὐτὴν τοῦ ἕκτου βαθμοῦ, τίθεμεν $\chi^2=\omega$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν, καὶ γίνεται ἐνεργείᾳ ἐξίσωσις τοῦ τρίτου βαθμοῦ, εἶτα κατὰ τὰς μεθόδους τοῦ τρίτου βαθμοῦ εὑρεθήτω ἡ ῥίζα εἴτε λογικὴ εἴη, εἴτε ἄλογος $=\omega$, καὶ ἐξ αὐτῆς $\chi=\sqrt{\omega}$.

4) Ἀφ' οὗ γνωσθῇ τὸ χ, ὄντων καὶ σ, π, ρ δεδομένων, ἀντικαθίςανται εἰς τὰς ἐξισώσεις τὰς παραγούσας Β καὶ Γ, καὶ ταύτας εἰς τετραγωνικὰς ἐξισώσεις λύομεν, καὶ εὑρίσκομεν τὸ ψ τετραχῶς, ἤτοι τὰς 4 ῥίζας τὰς ζητουμένας τῆς ἐξισώσεως· καὶ ταύτην τὴν μέθοδον τῷ Καρτεσίῳ προσνέμουσι. Διὰ νὰ γένωσι τὰ λεγόμενα σαφῆ, εἰλήφθωσαν παραδείγματα.

Ζητεῖται ἡ λύσις τῆς $\psi^4-17\psi^2-20\psi-6$, ἥτις κατὰ τὸ δεύτερον μεταβαίνει εἰς τὴν $\chi^6-34\chi^4+313\chi^2-400=0$· θῶμεν $\chi^2=\omega$, καὶ ἔσαι $\omega^3-34\omega^2+313\omega-400=0$, ἥτις κατὰ τὰ ἀνωτέρω διαφόρως λύεται· πλὴν ἡμεῖς ἐνορῶμεν ἐὰν $16=\omega$ ληφθῇ, φέρει εἰς τὸ μηδὲν τὴν ἐξίσωσιν, καὶ ἔσαι $\omega=16$· ἀλλ' ἦν $\chi^2=\omega$ ἄρα $\chi=\sqrt{\omega}=\sqrt{16}=4$· ἤδη θῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις β καὶ Γ $\chi=4$· $\sigma=-17$· $\pi=-20$· $\rho=-6$· καὶ γίνεται ἡ μὲν $\psi^2+\chi\psi+\frac{\chi^2}{2}+\frac{1}{2}\sigma-\frac{\pi}{2\chi}=\psi^2+4\psi+8-\frac{17}{2}+\frac{20}{8}=$

$\gamma^2 - 4\gamma + 2 = 0$· καὶ ἐκ μὲν ἐκείνης εὑρίσκομεν ὡς τετραγωνικῆς ἐξισώσεως $\gamma^2 + 4\gamma = 3$

$$\gamma = -2 \pm \sqrt{7}\cdot$$

ἐκ δὲ ταύτης $\gamma^2 - 4\gamma = -2$·

$\gamma = 2 \pm \sqrt{2}$ ἄρα αἱ τέσσαρες ῥίζαι

$\gamma = -2 + \sqrt{7}$· $\gamma = -2 - \sqrt{7}$· $\gamma = 2 + \sqrt{2}$· $\gamma = 2 - \sqrt{2}$·

Ἔςω ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\gamma^4 - 12\gamma^2 + 12\gamma - 3 = 0$· καὶ διὰ τοῦ Α τύπου μετακομισθήτω εἰς ἐξίσωσιν τρίτου βαθμοῦ· διότι $\sigma = -12$· $\pi = 12$· $\rho = -3$· ἄρα $\chi^6 - 24\chi^4 + 156\chi^2 - 144 = 0$· ἐὰν $\chi^2 = \omega$ θῶμεν, ἔςαι $\omega^3 - 24\omega^2 + 156\omega - 144 = 0$· καὶ βλέπομεν ὅτι ὁ 12 παράγων φέρει εἰς τὸ μηδὲν τὴν ἐξίσωσιν, ἄρα $\omega = 12$· καὶ $\chi = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$· θῶμεν ἤδη εἰς τὰς δύο παραγούσας ἐξισώσεις ἀντὶ μὲν $\chi = 2\sqrt{3}$, ἀντὶ δὲ $\sigma = -12$, καὶ ἀντὶ $\pi = 12$· καὶ εὑρίσκονται ἡ μὲν $\gamma^2 + 2\gamma\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$· ἡ δὲ $\gamma^2 - 2\gamma\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$· καὶ ἀπὸ μὲν τῆς πρώτης εὑρίσκομεν

$$\gamma^2 + 2\gamma\sqrt{3} = \sqrt{3}\cdot$$

$$\gamma + 2\gamma\sqrt{3} + 3 = \sqrt{3} + 3$$

ἄρα $\gamma + \sqrt{3} = \sqrt{(3 + \sqrt{3})}$

καὶ $\gamma = \pm\sqrt{(3 + \sqrt{3})} - \sqrt{3}$.

ἀπὸ δὲ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον $\gamma = \sqrt{3} \pm \sqrt{(3 - \sqrt{3})}$· διὰ δὲ τὰ σημεῖα $\pm$ εὑρίσκονται αἱ τέσσαρες ῥίζαι ἄλογοι.

Σημείωσαι ὅμως, ἐὰν εἰς τὴν παρηγμένην ἐξίσωσιν καὶ αἱ τρεῖς ῥίζαι εἰσὶ πραγματιωδῶς ἄλογοι, τὸ πρόβλημα δὲν λύεται.

§. 773. Ἵνα δὲ μὴ ματαιοπονῶμεν τὸν δεύτερον ὅρον ἀποσκευάζοντες, ἐρευνήσωμεν κατ' ἀκολουθίαν μεθόδους τινάς, δι' ὧν ἀναλύομεν τεταρτοταγεῖς ἐξισώσεις ἐντελεῖς. ἔστω ἡ γενικὴ ἐξίσωσις $\psi^4+\sigma\psi^3+\pi\psi^2+\rho\psi+\tau=0$· καὶ ἔσται $\psi^4+\sigma\psi^3=-\pi\psi^2-\rho\psi-\tau$.

Ἐὰν δὲ εἰς ἄμφω τὰ σκέλη προσθῶμεν $\frac{1}{4}\sigma^2\psi^2+\frac{1}{2}\sigma\chi\psi+\frac{1}{4}\chi^2+\chi\psi^2$· ἔσται $\psi^4+\sigma\psi^3+\frac{1}{4}\sigma^2\psi^2+\frac{1}{2}\sigma\chi\psi+\frac{1}{4}\chi^2+\chi\psi^2=-\pi\psi-\rho\psi-\tau.+\frac{1}{4}\sigma^2\psi^2+\frac{1}{2}\sigma\chi\psi+\frac{1}{4}\chi^2+\chi\psi^2=(\frac{1}{4}\sigma^2+\chi-\pi)\psi^2+(\frac{1}{2}\sigma\chi-\rho)\psi+\frac{1}{4}\chi^2-\tau$· καὶ τοῦ μὲν πρώτου σκέλους ὡς ἀκριβοῦς τετραγώνου ἔσται ἡ ῥίζα $\psi^2+\frac{1}{2}\sigma\psi+\frac{1}{2}\chi$ . . . . Δ

ἀλλὰ διὰ τοῦτο καὶ τὸ δεύτερον σκέλος πρέπει νὰ εἶναι τετράγωνον ἐντελές· καὶ διὰ τοῦτο τεθείτω ἡ ῥίζα $\lambda\psi\pm\varphi$· ἄρα πρέπει νὰ διορισθῇ ἡ λ ποσότης καὶ ἡ $\pm\varphi$· εἰς τοῦτο τοίνυν τετραγωνισθήτω ἡ ῥίζα $\lambda\psi\pm\varphi$· καὶ γίνεται $\lambda^2\psi^2+2\lambda\psi\varphi+\varphi^2$· καὶ τοῦτο ἔσται τῷ ὄντι ἴσον τῷ δευτέρῳ σκέλει τῆς ἐξισώσεως, $\lambda^2\psi^2+2\lambda\psi\varphi+\varphi^2=(\frac{1}{4}\sigma^2+\chi-\pi)\psi^2+(\frac{1}{2}\sigma\chi-\rho)\psi+\frac{1}{4}\chi^2-\tau$. . . . Ε·
ἄρα οἱ συνεργοὶ τοῦ ψ^2 καὶ ψ τῶν δύω σκελῶν ἴσοι (§. 685), ἤτοι $\lambda^2=\frac{1}{4}\sigma^2+\chi-\pi$. $2\lambda\varphi=\frac{1}{2}\sigma\chi-\rho$· καὶ $\varphi^2=\frac{1}{4}\chi-\tau$. ἕπεται ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως $\lambda=\sqrt{(\frac{1}{4}\sigma^2-\pi+\chi)}$

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $2\lambda\varphi=\frac{\sigma\chi}{2}-\rho$· καὶ $\varphi=\frac{\frac{1}{2}\sigma\chi-\rho}{2\chi}$.

ἐὰν δὲ τὰ ἴσα ταῦτα εἰς τὴν ληφθεῖσαν ῥίζαν $\lambda\psi\pm\varphi$ θῶμεν, ἔσται $\lambda\psi\pm\varphi=\sqrt{(\frac{1}{4}\sigma^2-\pi+\chi)}\,\psi\pm$

$$\frac{\frac{1}{2}\sigma\chi-\rho}{2\sqrt{(\frac{1}{4}\sigma^2-\pi+\chi)}} \quad . . . . \quad Z\cdot$$

ἀλλ' ἡ ῥίζα $\lambda\text{ч}\pm\varphi$ ὑπετέθη ἴση τῇ ῥίζῃ τοῦ πρώτου σκέλους τῆς πρώτης ἐξισώσεως $\text{ч}^2+\frac{1}{2}\sigma\text{ч}+\frac{1}{2}\chi$· ἄρα καὶ $\text{ч}^2+\frac{1}{2}\sigma\text{ч}+\frac{1}{2}\chi=\sqrt{(\frac{1}{4}\sigma^2-\pi+\chi)}\pm\frac{\frac{1}{2}\sigma\chi-\rho}{2\sqrt{(\frac{1}{4}-\pi+\chi)}}$

Ἐὰν δὲ ταύτην εἰς τὸ μηδὲν φέρομεν, εὑρίσκομεν δύο ἐξισώσεις

$$\text{ч}^2+\tfrac{1}{2}\sigma\text{ч}+\tfrac{1}{2}\chi-\sqrt{(\tfrac{1}{4}\sigma^2-\pi+\chi)}\text{ч}+\frac{\frac{1}{2}\sigma\chi-\rho}{2\sqrt{(\frac{1}{4}\sigma^2-\pi+\chi)}}=0 .. \text{A}$$

$$\text{ч}^2+\tfrac{1}{2}\sigma\text{ч}+\tfrac{1}{2}\chi-\sqrt{(\tfrac{1}{4}\sigma^2-\pi+\chi)}\text{ч}-\frac{\frac{1}{2}\sigma\chi-\rho}{2\sqrt{(\frac{1}{4}\sigma^2-\pi+\chi)}}=0 .. \text{B}$$

Ἐν αἷς εὑρίκομεν ч, ἐὰν ᾖ μόνον χ γνωςόν· λοιπὸν εἰς τοῦτο τετραγωνισθήτω ἡ ἐξίσωσις Z.

$\lambda^2\text{ч}^2+2\lambda\text{ч}\varphi+\varphi^2=(\frac{1}{4}\sigma^2-\pi+\chi)\text{ч}^2+(\frac{1}{2}\sigma\chi-\rho)+\frac{\frac{1}{4}\sigma^2\chi^2-\pi\rho\chi+\rho^2}{\sigma^2-4\pi+4\chi}$ ἀλλ' ὑπετέθη τὸ τετράγωνον

$\lambda^2\text{ч}^2=2\lambda\text{ч}\varphi+\varphi^2=(\frac{1}{4}\sigma^2-\pi+\chi)\text{ч}^2+(\frac{1}{2}\sigma\chi-\rho)\times\text{ч}+\frac{1}{4}\chi^2-\tau$· ἄρα καὶ $(\frac{1}{4}\sigma^2-\pi+\chi)\text{ч}^2+(\frac{1}{2}\sigma\chi-\rho)\text{ч}+\chi^2\frac{1}{4}\chi^2-\tau$· $=(\frac{1}{4}\sigma^2-\pi+\chi)\text{ч}^2+(\frac{1}{2}\sigma\chi-\rho)\text{ч}+\frac{\frac{1}{4}\sigma^2\chi^2-\sigma\rho\chi+\rho^2}{\sigma^2-4\pi+4\chi}$ ἤτοι $\frac{1}{4}$

$$\chi^2-\tau=\frac{\frac{1}{4}\sigma^2\chi^2-\sigma\rho\chi+\rho^2}{\sigma^2-4\pi+4\chi}\cdot\ \sigma^2-4\pi+4\chi\cdot$$

$$\tfrac{1}{4}\sigma^2\chi^2-\pi\chi^2+\chi^3-\tau\sigma^2+4\tau\pi-4\tau\chi=\tfrac{1}{4}\sigma^2\chi^2-\sigma\rho\chi+\rho^2.$$

Ἐὰν δὲ καὶ ταύτην εἰς τὸ μηδὲν φέρωμεν, ἔςαι $\chi^3-\pi\chi^2-4\tau\chi+\sigma\rho\chi-\sigma^2\tau+4\tau\pi-\rho^2=0$· καὶ τέλος ἐὰν αὐτὴν διατάξωμεν, ἔςαι:

$\chi^3 - \pi\chi^2 + (\sigma\rho - 4\tau)\chi + (4\tau\pi - \sigma^2\tau - \rho^2) = 0$ .. Γ ἐξίσωσις τοῦ τρίτου βαθμοῦ, εἰς ἣν ἀνάγεται ἑκάστη διτετραγωνικὴ ἐξίσωσις, ἐὰν ἀντὶ σ, π, ρ, τ θῶμεν τοὺς ἴσους συνεργοὺς τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, καὶ κατὰ τοὺς νόμους τῆς τοῦ τρίτου βαθμοῦ ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὴν ἄγνωστον χ· ταύτην δὲ θέτομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις Α καὶ Β· καὶ ἀπ' αὐτῶν, ὡς δευτεροταγῶν ἐξισώσεων, εὑρίσκομεν τὰς 4 τιμὰς τοῦ ψ,

Σημείωσαι, ὅτι τότε μόνον εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις Α καὶ Β εὑρίσκομεν τὴν ψ, ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν Γ εὑρεθῇ ἡ χ λογικὸς ἀριθμός· ἄλλως δὲ δι' αὐτῆς τῆς μεθόδου ἡ τεταρτοβάθμιος ἐξίσωσις δὲν λύεται· παραδείγματα ἔστω τὰ ἑξῆς.

α'. Δεδόσθω ἡ ἐξίσωσις $\psi^4 - \psi^3 - 3\psi^2 + \psi + 2 = 0$· ὅπου $\sigma = -1$· $\pi = -3$ $\rho = 1$· $\tau = 2$· ἄρα ἡ Γ ἐξίσωσις $\chi^3 + 3\chi^2 - 9\chi - 27 = 0$·
καὶ αὐτὴν φέρει εἰς τὸ μηδὲν ὁ παράγων -3· ἄρα $\chi = -3$· ἐὰν δὲ καὶ $\chi = -3$ εἰς τὴν πρώτην Α ἐξίσωσιν τεθῇ, ἔσται $\psi^2 - 1 = 0$· ἐὰν δ' εἰς τὴν δευτέραν Β ἐξίσωσιν, ἔσται $\psi^2 - \psi - 2 = 0$· καὶ ἀπὸ μὲν ἐκείνης εὑρίσκομεν $\psi^2 - 2$ καὶ $\psi = \pm 1$· ἀπὸ δὲ ταύτης εὑρίσκομεν $\psi = 2$ καὶ $\psi = -2$· ἄρα αἱ τιμαὶ τῆς ψ εὑρίσκονται $1, -1, 2, -2$.

β'. Ἔστω ἔτι ἡ ἄνω ἐξίσωσις $\psi^4 - 17\psi^2 - 20\psi - 6$. ὅπου $\sigma = 0, \pi = -17$· $\rho = -20$· $\tau = -6$· ἄρα μεταβαίνει ἡ Γ εἰς τὴν $\chi^3 + 17\chi^2 + 24\chi + 8 = 0$· καὶ ἡ -1 φέρει τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδέν· λοιπὸν $\chi = -1$· θῶμεν λοιπὸν $\chi = -1$ εἰς τὰς Α καὶ Β, καὶ γίνονται $\psi^2 + 4\psi + 2 = 0$· καὶ $\psi^2 - 4\psi - 3 = 0$· καὶ ἀπὸ μὲν ἐκείνης εὑρίσκομεν $y=-2\pm\sqrt{2}$· ἀπὸ δὲ ταύτης $y-2=\sqrt{7}$· καὶ $y=2\pm\sqrt{7}$ αἱ τέσσαρες ῥίζαι.

§. 774. Βομβέλλιος δέ τις Ἰταλὸς εὗρε τὴν ἑξῆς μέθοδον εἰς τὴν λύσιν τῶν διτετραγωνικῶν ἐξισώσεων· ἔςω γενικῶς ἐξίσωσις $\chi^4+\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta=0$· καὶ αὕτη ὑποτίθεται ἴση τῇ $(\chi^2+\frac{1}{2}\alpha\chi+\pi)^2-(\sigma\chi=\rho)^2=0$· καὶ ἀπ' αὐτῆς ἕπεται ἤδη νὰ διορισθῶσι τὰ ληφθέντα ἄγνωςα π, ρ, σ, ὅθεν τετραγωνισθήτω ἡ ἐξίσωσις ἐνεργείᾳ οὕτω. $\chi^4+\alpha\chi^3+\frac{1}{4}\alpha^2\chi^2+\alpha\pi\chi+\pi\pi+2\pi\chi^2-2\pi\rho\chi-\rho^2-\sigma^2\chi^2=0$· καὶ ἐπειδὴ αὕτη ἴση τῇ ἀνωτέρω ὑπετέθη, ἄρα οἱ συνεργοὶ τῶν ὁμοταγῶν δυνάμεων τῆς ἀγνώςου ἴσοι (§. 685) καὶ ἐπομένως,

1) $\beta=\frac{1}{4}\alpha^2+2\pi-\sigma^2$

2) $\gamma=\alpha\pi-2\sigma\rho$

3) $\delta=\pi^2-\rho^2$.

καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἕπεται $\sigma^2=\frac{1}{4}\alpha^2+2\pi-\beta$ ἤτοι

$$\sigma=\sqrt{(\tfrac{1}{4}\alpha^2+2\pi-\beta)}\quad\alpha$$

ἐκ τῆς δευτέρας δὲ $\quad 2\sigma\rho=\alpha\pi-\gamma\quad\beta$

ἐκ τῆς τρίτης $\quad \rho^2=\pi^2-\delta.\quad\gamma$

τετραπλασιασθήτω δὲ ἡ πρώτη $4\sigma^2=\alpha^2+8\pi-4\beta$, καὶ τὸ τετραπλοῦν τοῦτο πολλαπλασιασθήτω μὲ τὴν ἐξίσωσιν γ.) καὶ ἔςαι $4\sigma^2\rho^2=\pi^2\alpha^2+8\pi^3-4\beta\pi^2-\alpha^2\delta-8\delta\pi+4\beta\delta$, ἤτοι

$4\sigma^2\rho^2=8\pi^3+(\alpha^2-4\beta)\pi^2-8\delta\pi-\delta(\alpha^2-4\beta)$.$\delta$.

Ἐὰν δὲ τὴν β ἐξίσωσιν τετραγωνίσωμεν, ἔςαι $4\rho^2\sigma^2=\alpha^2\pi^2-2\alpha\pi\gamma+\gamma^2$· θῶμεν ἤδη ἀντὶ $4\sigma^2\rho^2$ τὸ ἴσον ἐνταῦθα εἰς τὴν ἐξίσωσιν δ, καὶ, ἔςαι $8\pi^3+(\alpha^2-4\beta)\pi^2-8\delta\pi-\delta(\alpha^2-4\beta)=\alpha^2\pi^2-$

$2\alpha\pi\gamma+\gamma^2$ ἐὰν δ' αὐτὴν εἰς τὸ μηδὲν φέρωμεν, ἔςαι $8\pi^3 - 4\beta\pi^2 + (2\alpha\gamma - 8\delta)\pi - \alpha^2\delta + 4\beta\delta - \gamma^2 = 0$.. A ἐξίσωσις τοῦ τρίτου βαθμοῦ, καὶ διὰ τῶν προηγουμένων κανόνων λύεται, καὶ εὑρίσκομεν π· ἐπειδὰν δὲ τὸ π γνωσθῇ ἀπὸ τῆς A καὶ ὡσεὶ δεδομένα α, β, γ· εὑρίσκομεν καὶ $\sigma = \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha^2 + 2\pi - \beta)}$· καὶ τέλος καὶ ρ ἀπὸ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως $\rho = \dfrac{\alpha\pi - \gamma}{2\sigma}$ . . . . ε.

γνωσθέντων δὲ τούτων κατὰ τὰ ἑξῆς εὑρίσκονται αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως· διότι αὕτη ἡ ἐξίσωσις, $(\chi^2 + \frac{1}{2}\alpha\chi + \pi)^2 - (\sigma\chi + \rho)^2 = 0$ ἔςαι $(\chi^2 + \frac{1}{2}\alpha\chi + \pi)^2 = (\sigma\chi + \rho)^2$· καὶ $\chi^2 + \frac{1}{2}\alpha\chi + \pi = \pm\sqrt{(\sigma\chi + \rho)^2}$·

ἄρα $\chi^2 + \frac{1}{2}\alpha\chi + \pi = \sigma\chi + \rho$, ἢ $\chi^2 + \frac{1}{2}\alpha\chi + \pi = -\sigma\chi - \rho$· καὶ

ἀπὸ μὲν ἐκείνης $\qquad \chi^2 = (\sigma - \frac{1}{2}\alpha)\chi - \pi - \rho$· B

ἀπὸ δὲ ταύτης $\qquad \chi^2 = -(\sigma + \frac{1}{2}\alpha)\chi - \pi - \rho$. Γ

δύο ἐξισώσεις, δι' ὧν αἱ τέσσαρες ῥίζαι εὑρίσκονται.

α΄. παράδειγμα. Δεδόσθω ἡ ἐξίσωσις $\chi^4 - 10\chi^3 + 35\chi^2 - 50\chi + 24 = 0$ καὶ ζητοῦνται αἱ ῥίζαι αὐτῆς, καὶ ἐπειδὴ ἴση τῇ γενικῇ ἐξισώσει ὑποτίθεται, ἔςαι $\alpha = -10$· $\beta = 35$, $\gamma = -50$, $\delta = 24$· ἐὰν δ' εἰς τὴν ἐξίσωσιν A ταῦτα θῶμεν, ἔςαι $8\pi^3 - 140\pi^2 + 808\pi - 1540 = 0$, ἤτοι $2\pi^3 - 35\pi^2 + 202\pi - 385 = 0$· καὶ οἱ παράγοντες τοῦ -385· 1, 5, 7, 11 κτ. ἐξ ὧν ὁ 5 καὶ ὁ 7 φέρει τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδέν· ἄρα $\pi = 5$ καὶ $\pi = 7$ αἱ δύο ῥίζαι αὐτῆς· ἡ τρίτη εὐκόλως ἤδη εὑρίσκεται, ἐὰν διὰ 2 διέλωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\pi^3 - \dfrac{35}{2}\pi^2 + 101\pi - \dfrac{385}{2} = 0$·

διότι τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν ῥιζῶν εἶναι ὁ συνεργὸς τοῦ δευτέρου ὅρου· ἄρα $\frac{35}{2} = 5 + 7 + \chi$, ἤτοι $35 = 10 + 14 + 2\chi$· καὶ $11 = 2\chi$, καὶ $\chi = \frac{11}{2}$, ἡ τρίτη ῥίζα· πλὴν εἰς αὐτὴν τὴν μέθοδον ἀρκεῖ μόνον μία ῥίζα νὰ εὑρεθῇ· διότι καὶ διὰ μιᾶς ἑκάστης τῶν τριῶν τούτων αἱ αὐταὶ ῥίζαι εὑρίσκονται.

α) λάβωμεν $\pi = 5$, ἄρα εἰς τὴν ἐξίσωσιν α ἔσται $\sigma = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = 0$· εἰς δὲ τὴν ε ἔσται $\rho = -\frac{50 - 50}{0} = 0$· ἀλλ' εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν τὸ ρ δὲν διορίζεται, καὶ διὰ τοῦτο εἰλήφθω ἡ γ· ἔσται $\rho^2 = \pi^2 - \delta = 25 - 24$· ὅπου $\rho = 1$· ὅθεν ἡ μὲν ἐξίσωσις Β ἔσται $\chi^2 = 5\chi - 4$· ἡ δὲ Γ ἔσται $\chi^2 = 5\chi - 6$· καὶ ἀπ' ἐκείνης ἔσται $\chi = 4$ καὶ $\chi = 1$· ἀπὸ δὲ ταύτης εὑρίσκεται $\chi = 3$, καὶ $\chi = 2$· αἱ τέσσαρες ῥίζαι· καὶ συνίσταται ἡ ἐξίσωσις ἀπὸ $(\chi - 4)(\chi - 1)(\chi - 3)(\chi - 2)$.

β) λάβωμεν ἔτι $\pi = 7$· καὶ ἀπὸ μὲν τῆς α εὑρίσκομεν $\sigma = \sqrt{(25 + 14 - 35)} = 2$· ἄρα καὶ ἀπὸ τῆς ε· $\rho = -\frac{70 + 50}{4} = -5$· λοιπὸν ἔσται ἡ μὲν Β $\chi^2 = 7\chi - 12$· ἡ δὲ Γ $\chi^2 = 3\chi - 2$· καὶ ἀπὸ μὲν ἐκείνης εὑρίσκεται $\chi = 4$· καὶ $\chi = 3$· ἀπὸ δὲ ταύτης $\chi = 2$ καὶ $\chi = 1$ ὡς πρότερον.

γ) ληφθήτω ἔτι $\pi = \frac{11}{2}$ ἄρα $\sigma = \sqrt{(25 + 11 - 35)}$

$=1$, καὶ $\rho = -\dfrac{55-50}{2} = -\frac{5}{2}$· ἄρα γίνεται ἡ μὲν Β $\chi^2 = 6\chi - 8$ ἡ δὲ Γ $\chi^2 = 4\chi - 3$· λοιπὸν ἡ μὲν πρώτη δίδει $\chi = 3 \pm \sqrt{1}$ ἤτοι $\chi = 4$, καὶ $= 2$· ἡ δὲ δευτέρα $\chi = 2 \pm \sqrt{1}$, ἤτοι $\chi = 3$ καὶ $= 1$, ὡς πρότερον.

β'.) παράδειγμα. Ἔςω ἡ ἐξίσωσις $\chi^4 - 16\chi - 12 = 0$ ὅπου $\alpha = 0$· καὶ $\beta = 0$· γ δὲ $= -16$, καὶ $\delta = -12$· ἡ δὲ ἐξίσωσις Α μεταβαίνει εἰς τὴν $\pi^3 + 12\pi - 32 = 0$ οἱ δὲ παράγοντες τοῦ 32 εἶναι 1, 2, 4, 8, 32, ἐξ ὧν ὁ 2 φέρει τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδέν, ἄρα $\pi = 2$· καὶ ἀπὸ μὲν τῆς ἐξισώσεως α εὑρίσκομεν $\sigma = \sqrt{4} = 2$· ἀπὸ δὲ τῆς ε, $\rho = \dfrac{16}{4} = 4$· ἄρα ἡ μὲν ἐξίσωσις Β ἔςαι $\chi^2 = 2\chi + 2$· ἡ δὲ Γ $\chi^2 = + -2\chi - 6$· καὶ ἀπὸ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων εὑρίσκεται $\chi = 1 + \sqrt{3}$· $\chi = 1 - \sqrt{3}$· $\chi = -1 + \sqrt{-5}$· $\chi = -1 - \sqrt{-5}$· ἄρα ἡ ἄνω ἐξίσωσις $(\chi - 1 - \sqrt{3})\ (\chi - 1 + \sqrt{3})\ (\chi + 1 - \sqrt{-5})\ (\chi + 1 + \sqrt{-5})$.

γ'. παράδειγμα. Ζητηθήτωσαν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^4 - 6\chi^3 + 12\chi^2 - 12\chi + 4 = 0$· ὅπου $\alpha = -6$· $\beta = 12$, $\gamma = -12$ καὶ $\delta = 4$· ἄρα ἡ Α ἐξίσωσις μεταβαίνει εἰς τὴν $8\pi^3 - 48\pi^2 + 112\pi - 96 = 0$· ἤτοι $\pi^3 - 6\pi^2 + 14\pi - 12 = 0$· καὶ ὁ 2 παράγων φέρει αὐτὴν εἰς τὸ μηδέν, ἄρα $\pi = 2$· λοιπὸν ἔςαι $\sigma = \sqrt{(9 + 4 - 12)} = 1$· καὶ $\rho = \dfrac{-12+12}{2} = 0$· λοιπὸν ἐξέρχεται ἡ μὲν Β ἐξίσωσις $\chi^2 = 4\chi - 2$· ἡ δὲ $\Gamma = 2\chi - 2$· καὶ ἀπὸ μὲν ἐκείνης εὑρίσκομεν $\chi = 2 + \sqrt{2}$ καὶ $\chi = 2 - \sqrt{2}$ ἀπὸ δὲ ταύτης $\chi = 1 + \sqrt{-1}$, καὶ $\chi = 1 - \sqrt{-1}$.

§. 775. Ἑτέραν μέθοδον εἰς τὴν λύσιν τῶν διτετραγωνικῶν ἐξισώσεων Ἀϋλέρος ἐκεῖνος ὁ Γερμανὸς, τὸ κλέος τῶν μαθηματικῶν, ἐπενόησεν· ἔςω φησὶν ἡ ῥίζα μιᾶς διτετραγωνικῆς ἐξισώσεως $\chi = \sqrt{\pi} + \sqrt{\rho} + \sqrt{\sigma}$· τὰ δὲ γράμματα π, ρ, σ εἰσὶν αἱ τρεῖς ῥίζαι μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ τρίτου βαθμοῦ $Z^3 - \varepsilon Z^2 + \eta Z - \vartheta = 0$· εἰς ἣν μεταβαίνει ἡ δοθεῖσα διτετραγωνικὴ ἐξίσωσις· ἄρα $\pi + \rho + \sigma = \varepsilon$· $\pi\rho + \pi\sigma + \sigma\rho = \eta$· $\pi\rho\sigma = \vartheta$· (§ 740).

Ἐὰν δὲ τετραγωνίσωμεν $\chi = \sqrt{\pi} + \sqrt{\rho} + \sqrt{\sigma}$ ἔςαι $\chi^2 = \pi + \rho + \sigma + 2\sqrt{\pi\rho} + 2\sqrt{\pi\sigma} + 2\sqrt{\rho\sigma}$· ἀλλὰ μὴν $\varepsilon = \pi + \rho + \sigma$· ἄρα $\chi^2 - \varepsilon = 2\sqrt{\pi\rho} + 2\sqrt{\pi\sigma} + 2\sqrt{\rho\sigma}$· ἐὰν δὲ καὶ ταύτην τετραγωνίσωμεν, ἔςαι $\chi^4 - 2\varepsilon\chi^2 + \varepsilon^2 = 4\pi\rho + 4\pi\sigma + 4\rho\sigma + 8\sqrt{\pi^2\rho\sigma} + 8\sqrt{\pi\rho^2\sigma} + 8\sqrt{\pi\rho\sigma^2}$· ἀλλ' εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν $4\pi\rho + 4\pi\sigma + 4\rho\sigma = 4\eta$· καὶ $8\sqrt{\pi^2\rho\sigma} + 8\sqrt{\pi\rho^2\sigma} + 8\sqrt{\pi\rho\sigma^2} = 8\sqrt{\pi\rho\sigma}(\sqrt{\pi} + \sqrt{\rho} + \sqrt{\sigma})$· ἦν δὲ καὶ $\chi = \sqrt{\pi} + \sqrt{\rho} + \sqrt{\sigma}$· καὶ $\sqrt{\pi\rho\sigma} = \sqrt{\vartheta}$· ἄρα
$8\sqrt{\pi^2\rho\sigma} + 8\sqrt{\pi\rho^2\sigma} + 8\sqrt{\pi\rho\sigma^2} = 8\chi\sqrt{\vartheta}$· καὶ ἔςαι ἡ ἐξίσωσις, ἐὰν τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων θῶμεν,

$$\chi^4 - 2\varepsilon\chi^2 - 8\chi\sqrt{\vartheta} + \varepsilon^2 - 4\eta = 0.$$

ἧς ἀφεύκτως ἡ μία ῥίζα $\chi = \sqrt{\pi} + \sqrt{\rho} + \sqrt{\sigma}$· τὸ δὲ π, ρ, σ, αἱ τρεῖς ῥίζαι μιᾶς κυβικῆς ἐξισώσεως $Z^3 - \varepsilon Z^2 + \eta Z - \vartheta = 0$· λοιπὸν ἑκάςη διτετραγωνικὴ ἐξίσωσις λύεται κατ' αὐτὴν τὴν μέθοδον, ἐὰν μόνον ὁ δεύτερος ὅρος ἀπέςιν· ἐὰν δ' οὗτος εὑρίσκεται, διὰ τῶν ἀνωτέρω (§. 745) ἀπαλείφομεν ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως αὐτὸν, καὶ οὕτως ἔχομεν ὅλας τὰς διτετραγωνικὰς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου ὅρου χωῥίζ· ἤδη ὅμως λείπεται νὰ διορίσωμεν ε, η, ϑ· διὰ νὰ φέρωμεν ἑκάστην ἐξίσωσιν τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, ὅταν λείπῃ ὁ δεύτερος ὅρος, εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ τετάρτου βαθμοῦ· ἔστω λοιπὸν ὁ γενικὸς τύπος τῶν ἐξισώσεων τοῦ τετάρτου βαθμοῦ χωρὶς τοῦ ὅρου τοῦ δευτέρου $\chi^4 - \alpha\chi^2 - \beta\chi - \gamma = 0$· καὶ αὕτη ἔσται ἴση τῇ ἀνωτέρω $\chi^4 - 2\varepsilon\chi^2 + 8\chi\sqrt{\vartheta} + \varepsilon^2 - 4\eta = 0$· ἄρα καὶ οἱ συνεργοὶ τῶν ἴσων δυνάμεων ἴσοι (§. 685)· ἤτοι $2\varepsilon = \alpha$· καὶ 1) $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ ἔτι $8\sqrt{\vartheta} = \beta$· καὶ 2) $\vartheta = \frac{\beta^2}{64}$· ἔτι $\varepsilon^2 - 4\eta = -\gamma$· ἀλλ' $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ ἄρα καὶ $-\frac{\alpha^2}{4} + 4\eta = \gamma$ καὶ 3) $\eta = \frac{\gamma}{4} + \frac{\alpha^2}{16}$· ἄρα ἡ ἐξίσωσις $Z^3 - \varepsilon Z^2 + \eta Z - \vartheta = 0$ γίνεται $Z^3 - \frac{\alpha}{2}Z^2 + \left(\frac{1}{16}\alpha^2 + \frac{1}{4}\gamma\right)Z - \frac{\beta^2}{64} = 0$· ἐὰν λοιπὸν εἰς αὐτὴν εὕρωμεν τὰς τρεῖς ῥίζας $Z = \pi$· $Z = \rho$· $Z = \sigma$, ἔσται πάντως ἡ ῥίζα τοῦ τετάρτου βαθμοῦ $\chi = \sqrt{\pi} + \sqrt{\rho} + \sqrt{\sigma}$· ἀλλ' αἱ ἐξισώσεις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ δίδουσι τέσσαρας ῥίζας, ἡμεῖς δ' ἐνταῦθα μόνον εὑρίσκομεν τρεῖς. ἀλλὰ δυνάμεθα τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ δὶς λαβεῖν $\pm$, καὶ σχεδὸν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον· ἐπειδὴ τὸ παραγόμενον τῶν τριῶν ῥιζῶν $\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\rho} \cdot \sqrt{\sigma} = \sqrt{\pi\rho\sigma} = \sqrt{\vartheta}$ καὶ $\sqrt{\vartheta} = \frac{1}{8}\beta$· κατὰ τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, καὶ λοιπὸν $\sqrt{\pi\rho\sigma} = \frac{1}{8}\beta$· ἄρα ἐὰν $\frac{1}{8}\beta$ εἶναι καταφατικόν, πρέπει καὶ οἱ παράγοντες $\sqrt{\rho}$, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\sigma}$ τοιοῦτοι νὰ ληφθῶσιν, ὥστε τὸ παραγόμενον καταφατικόν, τοῦτο δὲ τετραχῶς λύεται.

I) $\chi=\sqrt{\pi}+\sqrt{\rho}+\sqrt{\sigma}$. ὅτι τὸ παραγόμενον $\sqrt{\pi\rho\sigma}$.
II) $\chi=\sqrt{\pi}-\sqrt{\rho}-\sqrt{\sigma}$. ὅτι τὸ παραγόμενον $\sqrt{\pi\rho\sigma}$.
III) $\chi=-\sqrt{\pi}+\sqrt{\rho}-\sqrt{\pi}$. ὡσαύτως $\sqrt{\pi\rho\sigma}$.
VI) $\chi=-\sqrt{\pi}-\sqrt{\rho}+\sqrt{\sigma}$. ὡσαύτως $\sqrt{\pi\rho\sigma}$.

καὶ κατὰ τούτους τοὺς τύπους αἱ τέσσαρες ῥίζαι ὅτι $\sqrt{\pi\rho\sigma}$ $=\frac{1}{8}\ \beta$ καταφατικόν· ὅταν δὲ $-\frac{1}{8}\ \beta$ αἱ τέσσαρες ῥίζαι κατὰ τοὺς ἑξῆς τύπους.

I) $\chi=\sqrt{\pi}+\sqrt{\rho}-\sqrt{\sigma}$ ὅτι — — $\sqrt{\pi\rho\sigma}$.
II) $\chi=\sqrt{\pi}-\sqrt{\rho}+\sqrt{\sigma}$ ὅτι — $\sqrt{\pi\rho\sigma}$.
III) $\chi=-\sqrt{\pi}+\sqrt{\rho}+\sqrt{\sigma}$. ὅτι — $\sqrt{\pi\rho\sigma}$.
IV) $\chi=-\sqrt{\pi}-\sqrt{\rho}-\sqrt{\sigma}$. ὅτι — $\sqrt{\pi\rho\sigma}$.

α΄. Παράδειγμα. Ζητεῖται ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως. $\chi^4-25\chi^2+60\chi-36=0$· Ἐὰν δὲ ταύτην τῷ γενικῷ τύπῳ $\chi^4-\alpha\chi^2-\beta\chi-\gamma=0$ παραβάλωμεν, ἔσαι $\alpha=25$· $\beta=-60$· $\gamma=36$· ἄρα, $\epsilon=\frac{25}{2}$· $\varkappa=\frac{1}{16}$

$$\alpha^2+\tfrac{1}{4}\gamma=\tfrac{625}{16}+9=\tfrac{769}{16}\cdot \text{ καὶ } \vartheta=\frac{\beta^2}{64}=\tfrac{225}{4}\cdot$$

λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις $Z^3-\epsilon Z^2+\eta Z-\vartheta=0$ μεταβαίνει εἰς τὴν $Z^3-\frac{25}{2}Z^2+\frac{769}{16}Z-\frac{225}{4}=0$.

Ἐὰν δ' εἰς αὐτὴν θῶμεν $4Z=\omega$, ἔσαι καὶ $Z=\dfrac{\omega}{4}$· καὶ ἔσαι ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\omega^3}{64}-\frac{25}{2}\cdot\dfrac{\omega^2}{16}+\frac{769}{16}\cdot\dfrac{\omega}{4}-\frac{225}{4}=0.$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\ .\ 64.$$

$$\omega^3-50\omega^2+769\omega-3600=0.$$

καὶ ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ ὅρου 3600 ὁ 9 φέρει τὴν ἐξίσωσιν εἰς μηδέν· ἄρα $\omega=9$· ἐὰν δὲ ταύτην διὰ $\omega-9=0$ διέλωμεν, ἔσαι τὸ πηλίκον $\omega^2-41\omega+400=0$·

ἄρα ὡς τετραγωνικὴ ἐξίσωσις ἔςαι· $\omega^2 - 41\omega = -400$

$$\omega^2 - 41\omega + \tfrac{1681}{4} = \tfrac{1681}{4} - 400.$$

$$\omega - \tfrac{41}{2} = \sqrt{\tfrac{81}{4}} = \pm \tfrac{9}{2}$$

$$\omega = \frac{41 \pm 9}{2}.$$

ὥςε αἱ τρεῖς ῥίζαι $\omega = 9$· $\omega = 16$· $\omega = 25$· ἐπειδὴ δὲ

$Z = \frac{\omega}{4}$· ἄρα 1) $Z = \frac{9}{4}$· 2) $Z = \frac{16}{4}$· 3) $Z = \frac{25}{4}$·

ἐπειδὴ ὅμως $\sqrt{9} = -\sqrt{\tfrac{225}{4}} = -\tfrac{25}{2}$· ἄρα αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως,

$$\text{I)}\ \chi = \sqrt{\tfrac{9}{4}} + \sqrt{\tfrac{16}{4}} - \sqrt{\tfrac{25}{4}} = 1$$
$$\text{II)}\ \chi = \sqrt{\tfrac{9}{4}} - \sqrt{\tfrac{16}{4}} + \sqrt{\tfrac{25}{4}} = 2$$
$$\text{III)}\ \chi = -\sqrt{\tfrac{9}{4}} + \sqrt{\tfrac{16}{4}} + \sqrt{\tfrac{25}{4}} = 3$$
$$\text{IV)}\ \chi = -\sqrt{\tfrac{9}{4}} - \sqrt{\tfrac{16}{4}} - \sqrt{\tfrac{25}{4}} = -6.$$

καὶ ἡ ἄνω ἐξίσωσις συνίςαται ἀπὸ $(\chi-1)(\chi-2)(\chi-3)(\chi+6)=0$.

β. Παράδειγμα. Ἔςω ἡ ἐξίσωσις $y^4 - 8y^3 + 14y^2 + 4y - 8 = 0$· διὰ νὰ ἀποσκευάσωμεν τὸν δεύτερον ὅρον αὐτῆς, ἴςω $\chi + 2 = y$· ἐὰν δὲ ἀντὶ y θῶμεν $\chi + 2$ εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν, ἔςαι

$$\begin{aligned}
y^4 &= \chi^4 + 8\chi^3 + 24\chi^2 + 32\chi + 16.\\
-8y^3 &= -8\chi^3 - 48\chi^2 - 96\chi - 64.\\
14y^2 &= \qquad\quad 14\chi^2 + 56\chi + 56.\\
4y &= \qquad\qquad\qquad 4\chi + 8.\\
-8 &= \qquad\qquad\qquad\quad - 8.\\
\hline
&\chi^4 - 10\chi^2 - 4\chi + 8 = 0.
\end{aligned}$$

Ἐὰν δὲ καὶ τῇ γενικῇ ἐξισώσει ταύτην παραβάλωμεν, ἔςαι $\alpha = 10 \cdot \beta = 4 \cdot \gamma = -8 \cdot$ καὶ ἐπομένως $\varepsilon = 5 \cdot \eta = \frac{17}{4} \cdot \vartheta = \frac{1}{4} \cdot$ ἄρα $\sqrt{\vartheta} = \frac{1}{2}$ ὥςε $\sqrt{}$ προ καταφατικόν· λοιπὸν ἡ $Z^3 - \varepsilon Z^2 + \eta Z - \vartheta = 0$ γίνεται

$Z^3 - 5Z^2 + \frac{17}{4} Z - \frac{1}{4} = 0 \cdot$ ἐὰν δὲ $Z = \frac{\omega}{4}$ θῶμεν, ἔςαι

$$\frac{\omega^3}{8} - 5 \cdot \frac{\omega^2}{4} + \frac{17}{4} \cdot \frac{\omega}{2} - \frac{1}{4} = 0.$$

$$\omega^3 - 10\omega^2 + 17\omega - 2 = 0.$$

καὶ $\omega = 2$ φέρει τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδέν· ἐὰν δ' αὐτὴν διὰ $\omega - 2 = 0$ διέλωμεν, ἔςαι πηλίκον

$$\omega^2 - 8\omega = -1$$

$$\omega - 8\omega + 16 = 15$$

$$\omega - 4 = \pm\sqrt{15}$$

$$\omega = 4 \pm \sqrt{15}.$$

ἄρα $\omega = 2 \cdot \omega = 4 + \sqrt{15}, \ \omega = 4 - \sqrt{15} \cdot$ ἦν δὲ καὶ $Z = \frac{\omega}{2}$ ἄρα $Z = 1 = \pi, \ Z = \frac{4+\sqrt{15}}{2} = \rho \ \ Z = \frac{4-\sqrt{15}}{2} = \sigma$, καὶ ἐπομένως $\sqrt{\pi} = \sqrt{1} = 1 \cdot \ \sqrt{\rho} = \sqrt{\left(\frac{4+\sqrt{15}}{2}\right)} = \frac{(\sqrt{8+2\sqrt{15}})}{2} \cdot$ καὶ $\sqrt{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{4-\sqrt{15}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{(8 - 2\sqrt{15})}}{2}$ ἀλλὰ τὸ ῥιζικὸν διώνυμον φέρομεν ἡμεῖς εἰς τὸ ἁπλούςερον κατὰ τὸ (§. 440). ἄρα $\sqrt{(8+2\sqrt{15})} = \sqrt{5} - \sqrt{3} \cdot$ καὶ $\sqrt{(8-2\sqrt{15})} = \sqrt{5} - \sqrt{3} \cdot$

καὶ ἑπομένως $\sqrt{\pi}=1$ · $\sqrt{\rho}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}$. $\sqrt{\sigma}=$ $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ · ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ παραγόμενον $\sqrt{\pi\rho\sigma}=\frac{1}{2}$ καὶ καταφατικὸν αἱ τέσσαρες ῥίζαι εἰσὶ

$$\text{I)}\ \chi=\sqrt{\pi}+\sqrt{\rho}+\sqrt{\sigma}=1+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$
$$=1+\sqrt{5}.$$

$$\text{II)}\ \chi=\sqrt{\pi}-\sqrt{\rho}-\sqrt{\sigma}=-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$
$$=1-\sqrt{5}.$$

$$\text{III)}\ \chi=-\sqrt{\pi}+\sqrt{\rho}-\sqrt{\sigma}=-1+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}-$$
$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=-1+\sqrt{3}.$$

$$\text{IV)}\ \chi=-\sqrt{\pi}-\sqrt{\rho}-\sqrt{\sigma}\cdot=-1-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$
$$-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=-1-\sqrt{3}.$$

ἀλλ' ἐτέθη καὶ $\psi=\chi+2$ · ἄρα 1) $\psi=3+\sqrt{5}$ · 2) $\psi=3-\sqrt{5}$ · 3) $\psi=1+\sqrt{3}$ · καὶ 4) $\psi=1-\sqrt{3}$ · καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται ἀπὸ $(\psi-3-\sqrt{3})(\psi-3+\sqrt{5})(\psi-1-\sqrt{3})(\psi-1+\sqrt{3})=0$ · καὶ αὗται αἱ κεφαλαιωδέστεραι μέθοδοι τῆς ἀναλύσεως τοῦ τετάρτου βαθμοῦ · κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον λύονται καὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ πέμπτου βαθμοῦ, δηλ: λύουσιν αὐτὰς εἰς παράγοντας κατωτέρων βαθμῶν, καὶ τοὺς παράγοντας τούτους λύουσι κατὰ τοὺς προηγουμένους ὅρους · ἡμεῖς μέντοι τὸν ὄγκον τῆς βίβλου διευλαβούμενοι, καὶ ὡς μὴ γενικοὺς τοὺς κανόνας τούτων ἁπάντων ἐάσαμεν· ἕτεροι δὲ τὰς πολυσυνθέτους ἐξισώσεις τῶν ἀνωτέρω βαθμῶν διὰ τῶν συνεργασιῶν λύουσι καὶ διὰ τοῦ τριγώνου τοῦ ἐναλυτικοῦ· ἀλλὰ περὶ τούτων ἁπάντων ἴσως ἐροῦμεν ἐν ἰδιαιτέρῳ παραρτήματι· ἐνταῦθα δὲ μόνον δύο προβλήματα τοῦ τετάρτου βαθμοῦ λύσωμεν.

Πρόβλημα α΄.

Νὰ σχίσωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν οὕτως εἰς δύο μέρη, ὥςε τὸ παραγόμενον τῶν τετραγώνων αὐτῶν τῶν δύο ἀποτελεῖν ἕτερον ἀριθμὸν, καὶ αὐτὸν δοθέντα $= \gamma$.

Ἔςω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς $= 2\alpha$· ἐπειδὴ ὅμως τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ζητουμένων ἀριθμῶν $= 2\alpha$· ἐὰν καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν εἴχομεν, εὑρίσκοντο οἱ ἀριθμοὶ κατὰ τὸ (§. 289)· διὰ τοῦτο ληφθήτω ἡ διαφορὰ αὐτῶν ἄγνωςος $= 2\chi$· ἄρα ὁ μὲν μείζων τούτων ἀριθμὸς $= \dfrac{2\alpha + 2\chi}{2} =$

$\alpha + \chi$· ὁ δ' ἐλάττων $\dfrac{2\alpha - 2\chi}{2} = \alpha - \chi$· λείπεται τοίνυν χ εὑρεῖν· ἀλλὰ $(\alpha + \chi)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\chi + \chi^2$· καὶ $(\alpha - \chi)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2$ καὶ τὸ παραγόμενον τούτων $(\alpha^2 + 2\alpha\chi + \chi^2)(\alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2) = \chi^4 - 2\alpha^2\chi + \alpha^4 = \gamma$. ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ (§. 771 σημειω.), καθ' ἣν τὸ χ εὑρίσκεται, ἐπεὶ α καὶ γ γνωςά, ἔςω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ εἰς δύο τμηθησόμενος $= 14 = 2\alpha$· καὶ τὸ γινόμενον ἀπὸ τῶν δύο τετραγώνων τῶν μερῶν $= 2304 = \gamma$·

ἄρα $\chi^4 - 98\chi^2 + 2401 = 2304$.

$\chi^4 - 98\chi^2 = -97$ ἤτοι $\chi^4 - 98\chi^2 + 2401 = 2401 - 97$

ἤτοι $\chi^2 - 49 = \pm 48$· καὶ $\chi^2 = 49 \pm 48$·

καὶ τέλος $\chi = 1$· ἄρα $\alpha + \chi = 8$

καὶ $\alpha - \chi = 6$· καὶ οὕτως ἐσχίσθη εἰς δύο ὁ 14· οὕτως εὑρίσκεται καὶ ἐὰν ἕτερος ἀριθμὸς δοθῇ $= 2\alpha$ καὶ $= \gamma$.

Πρόβλημα. β'.

Νὰ εὕρωμεν ἀριθμοὺς τέσσαρας ἐν συνεχεῖ ἀριθμητικῇ σειρᾷ, καὶ τὸ παραγόμενον τούτων νὰ εἶναι ἴσον α δοθέντι ἀριθμῷ· ἐὰν ὅμως θῶμεν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς σειρᾶς χ καὶ τὴν διαφορὰν δ, ἔσται ἡ σειρὰ $\chi, \chi+\delta, \chi+2\delta, \chi+3\delta$· τὸ δὲ παραγόμενον τούτων $\chi(\chi+\delta)(\chi+2\delta)(\chi+3\delta)$· $=$ $\chi^4 + 6\delta\chi^3 + 11\delta^2\chi^2 + 6\delta^3\chi = \alpha$· ἄρα ἐξίσωσις τοῦ τετάρτου $\chi^4 + 6\delta\chi^3 + 11\delta^2\chi^2 + 6\delta^3\chi - \alpha = 0$· διὰ νὰ ἀποσκευάσωμεν τὸν δεύτερον ὅρον αὐτῆς, ἔστω $\chi = \psi - \frac{3}{2}\delta$· καὶ ἐπομένως

$$\begin{aligned}
\chi^4 &= \psi^4 - 6\psi^3\delta + \tfrac{54}{4}\psi^2\delta^2 - \tfrac{108}{8}\psi\delta^3 + \tfrac{81}{16}\delta^4\\
6\delta\chi^3 &= +6\delta\psi^3 - 27\psi^2\delta^2 + \tfrac{81}{2}\psi\delta^3 - \tfrac{81}{4}\delta^4\\
11\delta^2\chi^2 &= \qquad\qquad 11\psi^2\delta^2 - 33\psi\delta^3 + \tfrac{99}{4}\delta^4\\
6\delta^3\chi &= \qquad\qquad\qquad 6\psi\delta^3 - 9\delta^4\\
-\alpha &= \qquad\qquad\qquad\qquad -\alpha.
\end{aligned}$$

$$\psi^4 * - \tfrac{5}{2}\psi^2\delta^2 * + \tfrac{9}{16}\delta^4 - \alpha = 0.$$

ἐξίσωσις τῷ ὄντι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ· $\psi^4 - \frac{5}{2}\psi^2\delta^2 = \alpha - \frac{9}{16}\delta^4$· καὶ $\psi^4 - \frac{5}{4}\delta^2 = \pm\sqrt{(\alpha - \frac{9}{16}\delta^4 + \frac{25}{16}\delta^4)}$· ἐπεὶ δ' ἐτέθη $\chi = \psi - \frac{3}{2}\delta$, ἔσται ὁ πρῶτος Α ὅρος $\chi = \pm \sqrt{(\frac{5}{4}\delta^2 + \sqrt{(\alpha - \frac{9}{16}\delta^4 + \frac{25}{16}\delta^4)}} - \frac{3}{2}\delta$.

ὁ Β. $\chi+\delta = \delta+\sqrt{(\frac{5}{4}\delta^2+\sqrt{(\alpha-\frac{9}{16}\delta^4+\frac{25}{16}\delta^4)})}-\frac{3}{2}\delta.$
ὁ Γ. $\chi+2\delta=2\delta+\sqrt{(\frac{5}{4}\delta^2+\sqrt{(\alpha-\frac{9}{16}\delta^4+\frac{25}{16}\delta^4)})}-\frac{3}{2}\delta.$
ὁ Δ. $\chi+3\delta=3\delta+\sqrt{(\frac{5}{4}\delta^2+\sqrt{(\alpha-\frac{9}{16}\delta^4+\frac{25}{16}\delta^4)})}-\frac{3}{2}\delta.$
τίνες εἰσὶν οἱ ἀριθμοὶ ἐν ἀριθμητικῇ σειρᾷ οἱ τέσσαρες, ὧν τὸ γινόμενον $=100=\alpha$, καὶ ἡ διαφορὰ $=1=\delta$.

ἔσαι ὁ Πρῶτος $\sqrt{(\frac{5}{4}+\sqrt{(100)})}-\frac{3}{2}$
ὁ   ὁ Δεύτερ. $\sqrt{(\frac{5}{4}+\sqrt{(101)})}-\frac{1}{2}$
ὁ Τρίτος. $\sqrt{(\frac{5}{4}+\sqrt{(101)})}+\frac{1}{2}$
ὁ Τέταρτος $\sqrt{(\frac{5}{4}+\sqrt{(101)})}+\frac{3}{2}$

ἄρα τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου

$$\begin{array}{l} \sqrt{(\frac{5}{4}+\sqrt{(101)})}-\frac{3}{2} \\ \underline{\sqrt{(\frac{5}{4}+\sqrt{(101)})}+\frac{3}{2}} \\ (\frac{5}{4}+\sqrt{(101)})-\frac{3}{2}(\sqrt{(\frac{5}{4}+\sqrt{(101)})}+ \end{array}$$

$\frac{3}{2}\sqrt{(\frac{5}{4}+\sqrt{(101)})}-\frac{5}{4}=-\frac{9}{4}+\frac{5}{4}+\sqrt{101}=-1+\sqrt{101})$.

κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκεται καὶ τὸ παραγόμενον τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου ὅρου $(\sqrt{(\frac{5}{4}+\sqrt{101})}\frac{1}{2})(\sqrt{(\frac{5}{4}+\sqrt{101})}+\frac{1}{2})=1+\sqrt{101}$.

ἄρα τὰ δύο παραγόμενα

$$\begin{array}{r} 1+\sqrt{101} \\ \underline{-1+\sqrt{101}} \\ -1-\sqrt{101} \\ \underline{+\sqrt{101}+101} \\ 100. \end{array}$$

Ἐὰν δὲ καὶ $\alpha=100$ θῶμεν, καὶ $\delta=2$· ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος ὅρος Α $\chi=\sqrt{(5+\sqrt{116})}-3$
ὁ Β $\chi=\sqrt{(5+\sqrt{116})}-1$
ὁ Γ $\chi=\sqrt{(5+\sqrt{116})}+1$
ὁ Δ $\chi=\sqrt{(5+\sqrt{116})}+3.$

καὶ τὸ παραγόμενον αὐτῶν $(\sqrt{(5+\sqrt{116})}-3)$ $(\sqrt{(5+\sqrt{116})}-1)$ $(\sqrt{(5+\sqrt{116})}+1)$ $(\sqrt{(5+\sqrt{116})}+3)=100.$

καὶ ὅτι ἂν ἄλλον ἀριθμὸν θῶμεν ἀντὶ α καὶ δ εὑρίσκομεν ὀρθῶς τοὺς τέσσαρας ὅρους.

Σημείωσις. Εἰς τὸ παρὸν ἡμεῖς ποσῶς δὲν ἐμβαίνομεν εἰς τὴν διδασκαλίαν τοῦ πῶς αἱ ἀνώτεραι ἐξισώσεις λύονται διὰ τῶν μοναδικῶν ῥιζῶν, ἐπειδὴ καὶ ὀλίγην ἐλπίζομεν τὴν ἀπ' αὐτῆς ὠφέλειαν· περὶ τούτων τεμάχια εὑρίσκει ὁ φιλομαθὴς ἀναγνώστης εἰς τὸ μαθηματικὸν τοῦ Θεοτόκη, πλατυτέρας δὲ διδασκαλίας εὑρίσκει τις εἰς τὰς τῶν ἑτερογλώσσων μαθηματικάς.

ΜΕΡΟΣ Β'.

Περὶ ἀορίστων προβλημάτων.

§. 776. Ἐὰν δὲ αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος δὲν χορηγῶσι τόσας ἐξισώσεις, ὅσαι αἱ ἄγνωστοι ποσότητες, τὸ τοιοῦτον πρόβλημα ἀόριστον ἐκαλέσαμεν (§. 279) διότι τὸ τοιοῦτον πολλὰς καὶ διαφόρους ναὶ μὴν καὶ ἀπείρους λαμβάνει τὰς ἀποκρίσεις ἐνίοτε· διεγε τοῦτο καὶ τὰς λύσεις τῶν τοιούτων εἰς τὸ βιβλίον τοῦ ἀπείρου ἀπεταμιεύσαμεν· τοῦτο δὲ τὸ μέρος ἔχει τόσους κλάδους, ὥστε ἐὰν θελήσωμεν περὶ πάντων εἰπεῖν, τόμον ὁλόκληρον γράψωμεν· πλὴν ἐπειδὴ πλεῖστα τούτων εἶσιν εὔκολα, καὶ οἱ μαθηταὶ ἡμῶν ἐκ μόνης ὄψεως τὰ τοιαῦτα λύουσιν· ἡμεῖς εἰς τὸ παρὸν τὰ κυριώτερα παρὰ τῶν ἐνδόξων μαθηματικῶν λαβόντες ἐνταῦθα καταςρώνομεν· πρὸς γνῶσιν δὲ τῶν λοιπῶν εἰς ἄλλους μαθηματικοὺς τοὺς ἀναγνώςας ἡμῶν παραπέμψομεν.

§. 777. Ἐπειδὴ εἰς αὐτὰ τὰ προβλήματα πλείονες εἰσὶ αἱ ἄγνωςοι ποσότητες, ἢ καὶ ἐξισώσεις· εἰς τὸ τέλος λοιπὸν τῆς λύσεως ἀνάγκη μίαν τῶν ἀγνώςων ποσοτήτων διορίζειν ἐθελουσίως μὲ ἀριθμὸν οἱονδήποτε· διότι ἐάν τις εἴπῃ εὑρεθήτωσαν δύο ἀριθμοί, ὧν τὸ κεφάλαιον $= 10$· συνθήσομεν $\upsilon + \chi = 10$· ἐὰν τοὺς δύο ζητουμένους τούτους υ καὶ χ καλέσωμεν· ἄρα καὶ $\chi = 10 - \upsilon$· λοιπὸν τότε τὸν χ εὑρίσκομεν, ὅταν ὁ υ διορισθῇ ἀφ' ἡμῶν μὲ ἀριθμὸν οἱονδήποτε· διότι ἐὰν ὑποθῶμεν $\upsilon = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 6\frac{1}{2}, -6, -7, -8, -\frac{1}{2}$, κτ. ἔςαι $\chi = 9, 8, 7, 6, 5, 3\frac{1}{2}, 16, 18, 10\frac{1}{2}$ κτ. καὶ εἰς ὅλα λοιπὸν τὰ ἑξῆς προβλήματα μία ποσότης τῶν ἀγνώςων τοὐλάχιςον ἀφ' ἡμῶν διορίζεται· καὶ ἔςαι τῷ ὄντι ἡ μία ἄγνωςος ποσότης, συνεργασία τῆς ἑτέρας, καὶ ἀνάπαλιν (§. 675)· διὰ νὰ περιλάβωμεν τὰ τοιαῦτα προβλήματα εἰς τύπους τινὰς καθόλου, λέγομεν ὅτι εἰς αὐτὰ ἢ δύο ἄγνωςοι δίδονται, ἢ τρεῖς, καὶ ἐπέκεινα, καὶ ἐὰν δύο δίδονται, ἀναγκαίως μία ἐξίσωσις δίδεται, ἡ δὲ διχῶς ἐκφράζεται κατὰ τοὺς τύπους τούτους $\alpha\chi + \beta\upsilon = \gamma$· ἢ $\alpha\chi - \beta\upsilon = \gamma$. καὶ τούτους εἰς τὸ πρῶτον ἀναπτύξωμεν κεφάλαιον· ἐὰν δὲ τρεῖς καὶ ἐπέκεινα δοθῶσιν ἄγνωςοι, τότε δίδονται ἐξισώσεις τόσαι, ὅσοι παρ' ἕνα οἱ ἄγνωςοι· καὶ οἱ τύποι τούτων ποικίλοι $\chi \pm \upsilon \pm \rho = \gamma$· καὶ $\alpha\chi \pm \beta\upsilon \pm \delta\rho = \varepsilon$· καὶ τούτους εἰς τὸ δεύτερον λύομεν κεφάλαιον· εἰς δὲ τὸ τρίτου λύσομεν ἐκείνους τοὺς τύπους, ὅσοι ἔχουσι τοὺς ἀγνώςους ἐφ' ἑαυτοὺς πεπολλαπλασιασμένους, ἢ εἰς δυνάμεις ὑψουμένους· κτ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Λ'.

Περὶ προβλημάτων τοῦ τύπου $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$.

§. 778. Αὕτη ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ εὐκόλως λύεται εἰς τὴν $\chi=\frac{\gamma\mp\beta\psi}{\alpha}$· καὶ ὅταν τὴν ψ διορίσωμεν, εὐκόλως καὶ ἡ χ εὑρίσκεται· ὅθεν λύσωμεν προβλήματα εἰς τοῦτο ἀνήκοντα, ἵνα μάθωμεν πῶς διαφόρως ὁ τύπος οὗτος διορίζεται.

Πρόβλ. α'.

Πραγματευτής τις ἐδανείσθη γρ: 100, καὶ ὁ δανειςὴς ἀπαιτεῖ παρ' αὐτοῦ ἀντὶ τῶν ἄσπρων δύο εἴδη τζόχας, καὶ τοῦ μὲν ἑνὸς εἴδους τιμᾶται ἡ πήχη γρ: 9, τοῦ δὲ γρ: 7· πόσας πήχεις νὰ δώσῃ ἀπὸ κάθε εἴδους, διὰ νὰ ἀποπληρώσῃ τὰ 100 γρόσια.

Κατασκευή.

Ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου εἴδους χ πήχεις δίδει, ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου ψ πήχεις· ἄρα ἡ μὲν τιμὴ ἐκείνου 9χ, τούτου δὲ 7ψ, καὶ ἑπομένως αἱ δύο ὁμοῦ $9\chi+7\psi=100$· ἄρα

$$\chi=\frac{100-7\psi}{9}.$$

Ἐὰν λοιπὸν τὴν ψ διορίσωμεν, εὑρίσκομεν καὶ τὴν χ· ἐνταῦθα οὐδεμία ποσότης ἀποφατική, ἄρα διορισθήτω ὁ ψ οὕτως, ὥςε εἶναι $100 > 7\psi$· ἤτοι μείζων τοῦ 14 μὴ διορισθήτω ὁ ψ· ἄρα αἱ λύσεις διάφοροι, ἐὰν τεθῇ $\psi = 14$, 13, 12, 11, 10, 9, 8· κτ. $\chi = 1\frac{2}{9}$, $\frac{16}{9}$, $\frac{23}{9}$, $\frac{30}{9}$, $4\frac{1}{9}$· $5\frac{2}{9}$· κτ· καὶ οὕτως αἱ λύσεις ἄπειροι, ἐὰν καὶ κλάσμα γνήσιον, ἢ νόθον ἀντὶ ψ λάβωμεν.

Πρόβλημα β'.

Τίνες οἱ ἀριθμοί, ὧν ὁ μὲν διὰ 2 διαιρέσιμος, ὁ δὲ διὰ 3, καὶ τὸ κεφάλαιον τούτων $= 25$·

Κατασκευή.

Ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι ὁ μὲν ἕτερος διὰ 2 διαιρέσιμος, ἔςω οὗτος $= 2\chi$, ὁ δὲ διὰ 3 ἔςω οὗτος $= 3\psi$· ἄρα τὸ κεφάλαιον αὐτῶν $2\chi + 3\psi = 25$· καὶ $\chi = \frac{25 - 3\psi}{2}$· καὶ λοιπὸν αὐτοῦ λαμβάνεται ὁ 3ψ οὕτως, ὥςε εἶναι $25 > 3\psi$. καὶ διὰ δύο διαιρέσιμος, ἤτοι μικρότερος λαμβάνεται, ἢ 8. πλὴν διὰ νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιος ἀριθμός, ἔςω $\chi = \frac{25 - 3\psi}{2} =$

$12 - \psi + \frac{1 - \psi}{2} = 12 - \psi - \frac{\psi - 1}{2}$· ἐὰν διὰ 2 διαιρεθῇ $25 - 3\psi$ λοιπὸν πρέπει καὶ $\psi - 1$ νὰ εἶναι διαιρέσιμος διὰ 2· καὶ διὰ τοῦτο ἔςω $\psi - 1 = 2\zeta$ καὶ $\psi = 2\zeta + 1$· θῶμεν ἤδη εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi = 12 - \psi - \frac{\psi - 1}{2}$ ἀντὶ ψ τὸ ἴσον $2\zeta + 1$ καὶ ἔςαι $\chi = 12 - 2\zeta - 1 - \zeta = 11 - 3\zeta$· ἄρα καὶ ζ ἐνταῦθα λαμβάνεται οὕτως, ὥςε $3\zeta < 11$, ἤτοι μικρότερον τοῦ 4· ὅθεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\psi = 2\zeta + 1$ καὶ $\chi = \frac{25 - 3\psi}{2}$ εὑρίσκομεν ψ καὶ χ οὕτως, ἐὰν

$$Z=0,\ 1,\ 2,\ 3$$
$$y=1,\ 3,\ 5,\ 7\cdot$$
$$x=11,\ 8,\ 5,\ 2\cdot$$

καὶ ἐπομένως τέσσαρας ἔχει λύσεις· $22+3$· καὶ $16+9$ καὶ $10+15$, καὶ $4+21$·

πρόβλημα γ'.

Τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ τοῦτο λύεται, νὰ διέλωμεν τὸν 100 εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ μὲν νὰ διαιρῆται διὰ 7, τὸ δὲ διὰ 11.

κατασκευή.

Ἔςω τὸ μὲν $7x$, τὸ δὲ $11y$· ἄρα τὸ κεφάλαιον $7x+11y=100$· καὶ $x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98-7y+2-4y}{7}=$ $14-y+\frac{2-4y}{7}\cdot=14-y-\frac{4y-2}{7}\cdot$ ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x=14-y-\frac{4y-2}{7}$ . . . . A· πρέπει καὶ $4y-2$ νὰ εἶναι διὰ 7 διαιρέσιμον, καὶ τὸ ἥμισυ $2y-1$ δὲ 7 διαιρέσιμον· ἄρα $2y-1=7Z$· ἤτοι $2y=7Z+1=6Z+Z+1$· καὶ ἐπομένως $y=3Z+\frac{Z+1}{2}$ . . . . . B. λοιπὸν ἔςω καὶ $Z+1=2\omega$ καὶ τέλος $Z=2\omega-1$· ἐὰν δὲ τοῦτο θῶμεν εἰς τὴν B ἐξίσωσιν $y=3Z+\frac{Z+1}{2}$, ἔςαι $y=6\omega-3+\frac{2\omega-1+1}{2}=7\omega-3$, καὶ ἐπειδὴ $y=7\omega-3$, θῶμεν $\omega=1,2,3,4,5$ κτ. καὶ εὑρίσκομεν y τοιοῦτον, ὥςε ἐὰν τεθῇ εἰς τὴν ἐξίσωσιν A· $x=\frac{100-11y}{7}$ νὰ δίδῃ ἀκέραιον ἀριθμόν· ἀκέραιος δ' ἀριθμὸς δίδεται εἰς τοῦ τύπου $\frac{100-11\text{ч}}{7}$ μόνον ἐὰν τεθῇ $\omega = 1$· διότι τότε $\text{ч} = 4$· καὶ ἐπομένως $\chi = \frac{100-11\text{ч}}{7} = \frac{100-44}{7} = 8$· ἄρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ $7\chi = 56$· καὶ $11\,\text{ч} = 44$· διὸ καὶ $56+44=100$.

Πρόβλημ. δ'.

Θέλει τις νὰ δώσῃ 4 φιορ. καὶ 15 κρεϋτζάρια, καὶ νὰ λάβῃ δύο εἴδη νομισμάτων ἀντ' αὐτῶν, δηλ. ἑπτάρια καὶ καὶ δεκαεπτάρια· ζητεῖ πόσα κομμάτια λαμβάνει.

Κατασκευή.

Λαμβάνει ἑπτάρια $\chi = 7\,\chi$ κραϋτζάρια· καὶ δεκαεπτάρια $\text{ч} = 17\,\text{ч}$ κραϋτζ. τὰ δύω ὁμοῦ $7\,\chi + 17\text{ч} = 4$ φιορ: 15 κραϋτζ. ἤτοι $7\chi + 17\text{ч} = 255$· δηλ. $\chi =$

$$\frac{255-17\text{ч}}{7} = 36 - 2\,\text{ч} + \frac{3-3\text{ч}}{7} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{A}$$

Θῶμεν ἤδη $\frac{3-3\text{ч}}{7} = \text{Z}$ καὶ $3 - 3\,\text{ч} = 7\,\text{Z}$· ἄρα $\text{ч} =$

$$\frac{3-7\text{Z}}{3} = 1 - 2\,\text{Z} - \frac{\text{Z}}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{B}.$$

Θῶμεν ἔτι καὶ $-\frac{\text{Z}}{3} = \omega$ ἄρα $\text{Z} = -3\,\omega$· τοῦτο ἀντικαταςήσωμεν εἰς τὴν B ἐξίσωσιν, καὶ εὑρίσκομεν $\text{ч} = 7\,\omega + 1$. καὶ εἰς τὴν A ἐξίσωσιν $\chi = 34 - 17\,\omega$· ὅθεν ἐὰν θῶμεν $\omega = 0,\ 1,\ 2$, ἔςαι $\text{ч} = 1,\ 8,\ 15$· καὶ $\chi = 34,\ 17,\ 0$· διχῶς λοιπὸν ἀλλάζονται τὰ 4 φιορ: καὶ 15 κραϋτζ: ἢ λαμβάνει 34 ἑπτάρια καὶ 1 δεκαεπτάριον, ἢ 8 ἑπτ. καὶ 17 δεκαεπτ.

Πρόβλ. ε'.

Διέλυν μοι τὸν 100 εἰς δύο μέρη, ὥςε ἐὰν τὸ ἓν διὰ 5 διαιρεθῇ, 2 νὰ μένωσιν, ἐὰν δὲ τὸ ἕτερον διὰ 7, 4 νὰ μένωσι.

Κατασκευή.

Ἐπειδὴ τὸ ἓν διαιρέσιμον διὰ 5 καὶ 2 μένουσιν, ἔςαι $5\chi+2$· ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ ἕτερον δι' 7 καὶ 4 μένουσιν, ἔςαι $7\psi+4$· ἄρα τὰ δύο ὁμοῦ $5\chi+2+7\psi+4=100$· ἤτοι $5\chi+7\psi=94$ καὶ $\chi=\frac{94-7\psi}{5}=18-\psi+\frac{4-2\psi}{5}$·· Α

Θῶμεν $\frac{4-2\psi}{5}=\zeta$· ἄρα $4-2\psi=5\zeta$· καὶ $\psi=\frac{4-5\zeta}{2}=$

$2-2\zeta-\frac{\zeta}{2}$· Β· Θῶμεν ἔτι καὶ $-\frac{\zeta}{2}=\omega$· ἔςαι $\zeta=-2\omega$· ἀντικαταςήσωμεν τοῦτο εἰς τὴν Β ἐξίσωσιν, καὶ εὑρίσκομεν $\psi=5\omega+2$· καὶ ἀπὸ τῆς Α ἐξισώσεως

$$\chi=16-7\omega\cdot$$

ὅθεν ἐὰν θῶμεν $\omega=0,\ 1,\ 2$·

$$\psi=2,\ 7,\ 12\cdot$$

$$\chi=16,\ 9,\ 2\cdot$$

ἄρα τριχῶς λύεται 12 καὶ 88· ἔτι 47 καὶ 53· καὶ ἔτι 82 καὶ 18·

Πρόβλ. ς'.

Ἐχάρισέ τις εἰς δύο 100 γρόσια, καὶ ὁ μὲν ἔλεγεν ἔλαβον τόσα, ὥςε ὅταν αὐτὰ διαιρῶ μὲ 8 μένουσιν 7· ὁ δ' ἕτερος ἔλεγεν ἔλαβον τόσα, ὥςε ὅταν αὐτὰ διαιρῶ μὲ 10 μένουσιν 7· πόσα ἕκαςος ἔλαβε; κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔλαβεν ὁ μὲν $8\chi+7$· ὁ δὲ $10\psi+7$· καὶ τὰ δύο ὁμοῦ $8\chi+$

$7+10\psi+7=100$· ἤτοι $8\chi+10\psi=86$· ἤτοι $4\chi+5\psi=43$

ἄρα $\chi=\dfrac{43-5\psi}{4}=10-\psi+\dfrac{3-\psi}{4}$ . . . . . . A.

Θῶμεν $\dfrac{-3+\psi}{4}=\zeta$ καὶ ἔσται $\psi=3+4\zeta$·

καὶ εἰς τὴν A $\qquad \chi=7-5\zeta$.

ἄρα ἐὰν Θῶμεν $\qquad \zeta=0,\ 1$

ἔσται $\qquad \psi=3,\ 7$

καὶ $\qquad \chi=7,\ 2\quad$ ὅ ἐστι 1) ὁ μὲν 37· ὁ δὲ 63· 2) ὁ μὲν 77, ὁ δὲ 23.

Πρόβλ. ζ'.

Πορθμεύς τις ἐπέρασεν εἰς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ποταμοῦ ἕνα ἀριθμὸν ἀνδρῶν, καὶ γυναικῶν· καὶ οἱ μὲν ἄνδρες ἐπλήρωσαν ἀνὰ 19 παρ. αἱ δὲ γυναῖκες ἀνὰ 13 παρ. ὁ δὲ πορθμεὺς εὗρεν ὅλα ὁμοῦ 25 γρόσια· ζητεῖται πόσοι οἱ ἄνδρες, καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

Κατασκευή.

Ἔστωσαν οἱ μὲν ἄνδρες χ, αἱ δὲ γυναῖκες ψ· ἄρα τὸ μὲν ποσὸν τῶν παράδων ἐκείνων 19χ, τούτων 13ψ· τῶν δύο ὁμοῦ $19\chi+13\psi=25$ γρόσια $=1000$ παρ. καὶ ἑπομένως $\psi=\dfrac{1000-19\chi}{13}=76-\chi+\dfrac{12-6\chi}{13}$ . . A.

Θῶμεν $\dfrac{12-6\chi}{13}=\zeta$· καὶ ἔσται $\chi=\dfrac{12-13\zeta}{6}=2-2\zeta-\dfrac{\zeta}{6}$· B· Θῶμεν καὶ $-\dfrac{\zeta}{6}=\omega$· ἄρα $\zeta=-6\omega$· τοῦτο ἀντικαταστήσαντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν B εὑρίσκομεν

$$\chi=13\omega+2$$

ἀπὸ δὲ τῆς Α· $\quad y=74-19\omega$

ἐὰν δὲ θῶμεν $\quad \omega=0,\ 1,\ 2,\ 3$·

ἔσαι $\quad \chi=2,\ 15,\ 28,\ 41$·

καὶ $\quad y=74,\ 55,\ 36,\ 17$· ἄρα τετραχῶς λύεται.

Πρόβλημα η'.

Ἐπώλησέ τις δύο εἴδη ὑφασμάτων, καὶ ἕκασον κομμάτι τοῦ πρώτου εἴδους ἐπώλησεν ἀπὸ 31 γρόσ. ἕκασον δὲ τοῦ δευτέρου ἀπὸ 21· εὗρε μὲν ὅτι ἔλαβε δι᾽ αὐτὰ 1770 γρ. ἀγνοεῖ δὲ πόσα κομμάτια τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου εἴδους ἐπώλησε

Κατασκευή.

Ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου χ κομμάτια ἐπώλησεν, ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου y· ἦν δὲ καὶ ἡ τιμὴ ἐκείνων 31χ, τούτων $21y$. τῶν δὲ δύο ὁμοῦ $31\chi+21y=1770$· ἄρα $y=$

$$\frac{1770-31\chi}{21}=84-\chi+\frac{6-10\chi}{21} \quad \ldots\ldots \quad \text{A.}$$

ἐὰν δὲ θῶμεν $\dfrac{6-10\chi}{21}=Z$· ἔσαι $\chi=\dfrac{6-21Z}{10}=-2Z$

$$+\frac{6-Z}{10} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{B}\cdot$$

ἔσω δὲ $\dfrac{6-Z}{10}=\omega$· ἄρα $Z=6-10\omega$· ἐὰν ἀντικατασήσωμεν τοῦτο εἰς τὴν Β ἐξίσωσιν, ἔσαι, $\chi=21\omega-12$· καὶ ἔτι ἀπὸ τῆς Α ἐξισώσεως $\quad y=102-31\omega$

ἐὰν δὲ θῶμεν $\quad \omega=0,\ 1,\ 2,\ 3$

ἔσαι $\quad \chi=-12,\ 9,\ 30,\ 51$

καὶ $\quad y=102,\ 71,\ 40,\ 9$.

καὶ τριχῶς λύεται 9 καὶ 71· 30 καὶ 40· 51 καὶ 9.

§. 779. Τὸν αὐτὸν τρόπον λύονται καὶ τὰ προβλήματα τοῦ τύπου $\alpha\chi - \beta\psi = \gamma$· ἡ μέθοδος τούτων καὶ τῶν ἀνωτέρω εἶναι νὰ θέτωμεν τὸ μένον κλάσμα ἴσον τινὶ ἀγνώςῳ, καὶ νὰ εὑρίσκωμεν τὸν πρῶτον ἄγνωςον ἀριθμὸν, ἕως οὗ νὰ καταντῶμεν εἰς ἐξίσωσιν μὴ κλασματικὴν, διότι τότε εὑρίσκομεν ἀκεραίους τὸν χ καὶ ψ· καὶ τὰ τοιαῦτα προβλήματα λύονται πολλάκις ἀπειραχῶς· δηλ. ἐὰν ζητηθῇ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς, ὧν ἡ διαφορὰ 5· θῶμεν εἰς τοῦτο χ τὸν μείζονα ἀριθμὸν, καὶ ψ τὸν ἐλάττονα, καὶ ἔςαι $\chi - \psi = 5$, ἤτοι $\chi = 5 + \psi$· οὐκοῦν φανερὸν ὅτι ἀντὶ ψ λαμβάνονται ἀπείρως οἱ ἀριθμοὶ, καὶ εὑρίσκεται ὁμοίως καὶ ὁ χ· πολλάκις εὑρίσκεται ὁ τύπος οὗτος $\alpha\chi - \beta\psi = 0$· ὅπου $\gamma = 0$· καὶ ἔςαι $\alpha\chi = \beta\psi$· δηλ. ἐάν τις εἴπῃ τίς ὁ ἀριθμὸς, ὅςις ἅμα διαιρεῖται διὰ 5 καὶ 7; ἐὰν δὲ τοῦτον τὸν ἀριθμὸν Z θῶμεν, ἔςαι $Z = 5\chi$· καὶ $Z = 7\psi$· ἄρα καὶ $5\chi = 7\psi$· καὶ $\chi = \frac{7\psi}{5} = \psi + \frac{2\psi}{5}$· ἐὰν δὲ θῶμεν καὶ $\frac{2\psi}{5} = \omega$·

ἔςαι $\psi = \frac{5\omega}{2} = 2\omega + \frac{\omega}{2}$· τοῦτο δὲ $\frac{\omega}{2} = \varphi$· ἄρα $\omega = 2\varphi$, ὅ ἐςιν $\psi = 5\varphi$· καὶ $\chi = 7\varphi$· ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς $Z = 35\varphi$, λοιπὸν ἐὰν θῶμεν $\varphi = 1, 2, 3, 4, 5, 6$· ἔςαι $Z = 35, 70, 105, 140, 175, 210$. ἐπ' ἄπειρον.

Ἐὰν δ' ἐπὶ τούτοις ἔτι προσθῶμεν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς Z νὰ διαιρῆται ἅμα καὶ διὰ 9, ἔςαι τότε καὶ $Z = 9\tau$· ἄρα $35\varphi = 9\tau$· ὅπου $\tau = 3\varphi + \frac{8}{9}\varphi$· ἐὰν δὲ καὶ $\frac{8}{9}\varphi = \rho$· ἔςαι $\varphi = \rho + \frac{\rho}{8}$, $\frac{\rho}{8} = \sigma$, καὶ $\rho = 8\sigma$· ἄρα $\varphi = 9\sigma$· καὶ $\tau = 35\sigma$· καὶ ἑπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς $Z = 315\sigma$· καὶ εὑρίσκομεν εἰς αὐτὰ ἀπείρους ἀριθμούς. Σημείωσις· χρὴ σιμον τοῦτο νὰ εὑρίσκωμεν ὅλους τοὺς συνθέτους ἀριθμοὺς, ὅσους ἂν θέλωμεν ἀπὸ ἁπλῶν παραγόντων, ὅσων καὶ οἵων ἂν θέλωμεν.

Πρόβλημα α'.

Εὑρεθήτω ὁ ἀριθμὸς, ὅςις διὰ 6 μὲν διαιρεθεὶς ἐᾷ λείψανον 2, διὰ δὲ 13 ἐᾷ 3.

Κατασκευή.

Ἔςω οὗτος χ· ἄρα $\frac{\chi-2}{6}$ καὶ $\frac{\chi-3}{13}$ · ἐὰν δὲ θῶμεν $\frac{\chi-3}{13}=Z$, ἔςαι $\chi=13Z+3$ . . . . Α· θῶμεν τοῦτο εἰς τὴν πρώτην ἔκφρασιν ἀντὶ χ, καὶ ἔςαι $\chi = \frac{13Z+3-2}{6}=2Z+\frac{Z+1}{6}$· θῶμεν καὶ $\frac{Z+1}{6}$ ἄρα $Z=6\omega-1$· θῶμεν ἤδη τοῦτο εἰς τὴν Α ἐξίσωσιν, καὶ ἔςαι $\chi=78\omega-13+3=78\omega-10$· ἐὰν δὲ θῶμεν $\omega=1, 2, 3, 4, 5$ κτ.
ἔςαι $\chi = 68, 146, 224, 302$, κτ. οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί.

Πρόβλ. β'.

Εὑρεθήτω ἔτι ὁ ἀριθμὸς, ὅςις διὰ 39 ἐὰν διαιρεθῇ μένει λείψανον 16, ἐὰν δὲ διὰ 56 μένει λείψανον 27.

Κατασκευή.

Ἔςω ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς χ· ἄρα $\frac{\chi-16}{39}$· καὶ $\frac{\chi-27}{56}$

θῶμεν ὁμοίως $\frac{\chi-27}{56}=Z$· καὶ ἔςαι $\chi=56Z+27$.. Α.
ἐὰν δὲ τοῦτο εἰς τὴν πρώτην ἔκφρασιν ἀντικαταςήσωμεν, ἔςαι $\chi=\frac{56Z+27-16}{39}=Z+\frac{17Z+11}{39}$ · θῶμεν

δὲ καὶ $\frac{17Z+11}{39}=\omega$· καὶ ἔϛαι $Z=\frac{39\omega-11}{17}=$

$2\omega+\frac{5\omega-11}{17}$ . . . . B.

Θῶμεν ἔτι $\frac{5\omega-11}{17}=\tau$ καὶ ἔϛαι $\omega=\frac{17\tau+11}{5}=$

$3\tau+2+\frac{2\tau+1}{5}$ . . . . Γ.

Θῶμεν ἔτι $\frac{2\tau+1}{5}=\sigma$ καὶ ἔϛαι $\tau=\frac{5\sigma-1}{2}=2\tau+\frac{\sigma-1}{2}$. Δ.

Θῶμεν ἔτι $\frac{\sigma-1}{2}=\rho$ καὶ ἔϛαι $\sigma=2\rho+1$· ἄρα ἐκ τούτων ἡ Δ ἐξίσωσις $\tau=5\rho+2$· ἐκ τῆς Γ, $\omega=15\rho+6+2+2\rho+1=17\rho+9$· ἐκ τῆς B, $Z=34\rho+18+5\rho+2=39\rho+20$· ἐκ τῆς A, $\chi=56.\ 39\rho+56.\ 20+27=2184\rho+1147$· ὅθεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν $\chi=2184\rho+1147$ ἐὰν θῶμεν $\rho=0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ κτ. εὑρίσκομεν $\chi=1147,\ 3331,\ 5515,\ 7699$ κτ.

Πρόβλημα γ'.

Ζητηθήτω ἔτι καὶ ὁ ἀριθμὸς χ, ὅϛις ἐὰν μὲν διαιρεθῇ διὰ 2 ἐᾷ λείψανον 1, ἐὰν δὲ διὰ 3 ἐᾷ 2· ἐὰν δὲ διὰ 4 ἐᾷ 3.

Κατασκευή.

Γενέσθωσαν αἱ ἐκφράσεις $\frac{\chi-1}{2}$, $\frac{\chi-2}{3}$, $\frac{\chi-3}{4}$· καὶ γενέσθω $\frac{\chi-3}{4}=Z$· ἄρα $\chi=4Z+3$ . . . . A.

καὶ ἔσαι ἡ β' ἔκφρασις $\frac{4Z+1}{3} = Z + \frac{Z+1}{3}$ θῶμεν δὲ $\frac{Z+1}{3} = \omega$· καὶ ἔσαι $Z = 3\omega - 1$ καὶ ἡ Α ἐξίσωσις γίνεται $\chi = 12\omega - 1$. . . . . B.

Ἐὰν δὲ καὶ τοῦτο εἰς τὴν τρίτην ἔκφρασιν θῶμεν, ἔσαι $\frac{12\omega - 2}{2} = 6\omega - 1$ ἀριθμὸς ἀκέραιος, ἄρα μένει $\chi = 12\omega - 1$· ἐὰν τοίνυν ἀντὶ $\omega = 1, 2, 3, 4, 5.$ κτ. θῶμεν, ἔσαι $\chi = 11, 23, 35, 47, 59$ κτ.

Πρόβλ: δ'.

Χρυσοχόος τις κατασκευάζει δύο εἴδη θηκῶν ἀργυρῶν, καὶ τοῦ μὲν ἑνὸς εἴδους ἑκάση βαρύνει 12 δραχμὰς, τοῦ δὲ δευτέρου ἑκάση ἀπὸ 25· πλὴν ὅλαι ἐκεῖναι ὁμοῦ βαρύνουσι μίαν δραχμὴν πλέον, ἢ αὗται· ζητεῖται πόσαι εἰσὶ τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἑτέρου εἴδους;

Κατασκευή.

Τοῦ μὲν πρώτου εἴδους εἰσὶ χ· ἄρα τὸ βάρος ὅλων αὐτῶν 16χ. τοῦ δὲ δευτέρου ψ, καὶ τὸ βάρος αὐτῶν 25ψ· λοιπὸν $16\chi = 25\psi + 1$ καὶ $\chi = \frac{25\psi + 1}{16} = \psi + \frac{9\psi + 1}{16}$. . . Α.

θῶμεν $\frac{9\psi + 1}{16} = Z$ καὶ ἔσαι $\psi = \frac{16Z - 1}{9} = Z + \frac{7Z - 1}{9}$ . . . . B.

θῶμεν ἔτι $\frac{7Z - 1}{9} = \omega$ καὶ $Z = \frac{9\omega + 1}{7} = \omega + \frac{2\omega + 1}{7}$ . . Γ.

θῶμεν ἔτι $\frac{2\omega+1}{7}=\rho$ καὶ $\omega=\frac{7\rho-1}{2}=3\rho+\frac{\rho-1}{2}$ . . . . . Δ.

θῶμεν ἔτι $\frac{\rho-1}{2}=\sigma$ καὶ $\rho=2\sigma+1$· ἄρα ἀπὸ μὲν τῆς

Δ ἐξισώσεως $\omega = 7\sigma + 3$

ἀπὸ τῆς Γ. $Z = 9\sigma + 4$

ἀπὸ τῆς Β. $\psi = 16\sigma + 7$

ἀπὸ τῆς Α. $\chi = 25\sigma + 11$.

καὶ ἀπὸ τῶν δύο ἐξισώσεων $\psi=16\sigma+7$

καὶ $\chi=25\sigma+11$.

ἐὰν θῶμεν $\sigma=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ κτ.

εὑρίσκομεν $\psi=7,\ 23,\ 39,\ 55,\ 77$ κτ.

καὶ $\chi=11, 36,\ 61,\ 86, 111$ κτ.

Πρόβλημα ε'.

Ὁ Κωνσταντῖνος χρεωστεῖ τῷ Ἰωάννῃ 24 κραϋτζάρια, οὗτοι δ' ἔχουσιν ἑπτάρια καὶ δεκαεπτάρια, κ. ἕτερον νόμισμα οὐδέν· πῶς πρέπει ἐκεῖνος νὰ ἀποπληρώσῃ τοῦτα τὰ 24 κραϋτζάρια;

Κατασκευή.

Ἂς δώσῃ ὁ Κωνσταντῖνος ἑπτάρια ἐκείνῳ, καὶ ἐκεῖνος δεκαεπτάρια τούτῳ, ἕως οὗ ἀποπληρωθῶσι 24 κραϋτζ: πλὴν πόσα; δότω ὁ μὲν Κωνσταντῖνος χ ἑπτάρια, ἤτοι 7χ κραϋτζ: δότω καὶ ὁ Ἰωάννης ψ δεκαεπτάρια, ἤτοι 17ψ κραϋτζ: ἕως οὗ γένωσι $7\chi=17\psi+24$. λοιπὸν $\chi=$ $\frac{17\psi+24}{7}=2\psi+3+\frac{3\psi+3}{7}$ . . . . Α.

γενέσθω ἤδη $\frac{3\psi+3}{7}=Z$, ἄρα $\psi=\frac{7Z-3}{3}=2Z-1+\frac{Z}{3}$. Β'.

γενέσθω ἔτι $\frac{z}{3} = \omega$ καὶ $z = 3\omega$· καὶ ἐκ τούτου εὑρίσκομεν $\psi = 7\omega - 1$ καὶ $\chi = 17\omega + 1$· ἐὰν δὲ θῶμεν $\omega =$ 1, 2, 3, 4, 5, κτ. ἔςαι $\psi =$ 6, 13, 20, 27, 34 κτ.
$\chi =$ 18, 35, 52, 69, 86 κτ.

Πρόβλημα ς΄.

Εἰς ἕνα ἔρανον ἔδωκαν ἄνδρες καὶ γυναῖκες, ἐκεῖνοι μὲν, ἕκαςος ἀπὸ 31 παρᾶν, αὗται δ' ἀπὸ 20 παράδες, εὑρέθη ὅμως τὸ ποσὸν τῶν παράδων τῶν γυναικῶν 7 παρ: περισσότερον ἀπὸ τὸ ποσὸν τῶν ἄσπρων τῶν ἀνδρῶν· πόσοι οἱ ἄνδρες, καὶ πόσαι γυναῖκες;

Κατασκευή.

ἔςωσαν αἱ μὲν γυναῖκες χ· ἄρα ἡ καταβολὴ αὐτῶν 20χ, οἱ δ' ἄνδρες ψ, καὶ ἡ καταβολὴ αὐτῶν 31ψ, καὶ ἐπομένως $20\chi = 31\psi + 7$ καὶ $\chi = \psi + \frac{11\psi + 7}{20}$ . . . . A.

θῶμεν $\frac{11\psi + 7}{20} = \rho$· ἄρα $\chi = \psi + \rho$, καὶ ἅμα $\psi = \frac{20\rho - 7}{11} = \rho + \frac{9\rho - 7}{11}$, ἢ $\psi = \rho + \tau$ . . . . B.

ἐὰν θῶμεν $\frac{9\rho - 7}{11} = \tau$ καὶ $\rho = \frac{11\tau + 7}{9} = \tau + \frac{2\tau + 7}{9}$ . . Γ.

ἐὰν δὲ θῶμεν $\frac{2\tau + 7}{9} = \omega$ ἔςαι $\rho = \tau + \omega$· καὶ $\tau = \frac{9\omega - 7}{2} = 4\omega + \frac{\omega - 7}{2}$ . . . . Δ.

ἐὰν δὲ καὶ $\frac{\omega - 7}{2} = \varphi$ θῶμεν, ἔςαι $\tau = 4\omega + \varphi$ καὶ $\omega = 2\varphi + 7$. καὶ διὰ τούτου εὑρίσκομεν ἀπὸ τῆς

Δ. $\tau = 9\varphi + 28$.
ἀπὸ τῆς Γ. $\rho = 11\varphi + 35$.
καὶ Β. $\upsilon = 20\varphi + 63$.
καὶ Α. $\chi = 31\varphi + 98$.

ὅθεν ἀπὸ μὲν τῶν ἐξισώσεων $\upsilon = 20\varphi + 63$
καὶ $\chi = 31\varphi + 98$
εὑρίσκομεν, ἐὰν θῶμεν $\varphi = -3, -1, 0\ 1$ κτ.
αἱ γυναῖκες $\chi = 5, 36, 67, 98, 129$ κτ.
οἱ ἄνδρες $\upsilon = 3, 23, 43, 63, 83$ κτ.

Ἐὰν δ' εἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα $20\chi = 31\upsilon + 7$ ἐνατενίσωμεν, εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς

τὰ δὲ γραμ: ἄρα $\tau = 9\varphi + 28$

$31 = 1.20 + 11$	$\chi = 1.\upsilon + \rho$	$\rho = 11\varphi + 35$
$20 = 1.11 + 9$	$\upsilon = 1.\rho + \tau$	$\upsilon = 20\varphi + 63$
$11 = 1.\ 9 + 2$	$\rho = 1.\tau + \omega$	$\chi = 31\varphi + 98$.
$9 = 4.\ 2 + 1$	$\tau = 4.\omega + \varphi$	
$2 = 2.\ 1 + 0$	$\omega = 2.\varphi + 7$	

α'. εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ἐλάττων συνεργὸς τῆς ἐξισώσεως $20\chi = 31\upsilon + 7$· ὁ 20 διαιρεῖ τὸν μείζονα, καὶ ἐκφράζεται ὁ μείζων εἰς διώνυμον μετὰ τοῦ λειψάνου $31 = 1.20 + 11$· καὶ ἔτι τοῦτο τὸ λείψανον τὸν πρῶτον διαιρέτην 20, καὶ τὸ δεύτερον λείψανον τὸν πρῶτον, ἕως οὗ δὲν μένει λείψανον ὡς $\frac{2}{1} = 2.1 + 0$·

β'. Εἰς αὐτὰς τὰς ἐξισώσεις εὑρίσκομεν ἑτέρας ἴσας· καὶ ἡ πρώτη εἰς τὸ ἓν σκέλος τὴν ἄγνωςον ποσότητα, ὅπου ἔχει τὸν ἐλάττονα ἀριθμὸν, ὡς ἐνταῦθα ὁ χ. τὸ δ' ἕτερον διώνυμον, οὗ τὸ ἓν μέρος συνίςαται ἀπὸ παράγοντας τὴν ἑτέραν ἄγνωςον καὶ τὸν παράγοντα, ὃν ἔχει ἡ ἄντικρυ ἐξίσωσις· τὸ δ' ἕτερον ἔχει οἱονδήποτε ἄγνωςον· καὶ οὕτω κατὰ τὰς προτέρας ἐξισώσεις γίνονται τοσαῦται ἐξισώσεις.

γ'. ἡ ἐσχάτη ἐξίσωσις ἔχει εἰς τὸ διώνυμον τὸ δεξιὸν μέρος τὴν γνωςὴν ποσότητα τοῦ προβλήματος· πλὴν ἐὰν αἱ ἐξισώσεις περιτταί, λαμβάνεται αὕτη καταφατική, ἐὰν δὲ ἄρτιαι, ἀποφατική.

δ'. Τέλος ἀναποδίζοντες διὰ τῆς ἐσχάτης ταύτης ἐξισώσεως, καὶ ἀντικαθιςάμενοι τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν τὴν ἔκφρασιν τῆς ψ καὶ χ, καὶ ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν τὰς λύσεις τοῦ προβλήματος, καὶ ὅςις ταῦτα καλῶς κατανοήσει, οὗτος ἐκ τοῦ προχείρου λύει τὰ τοιαῦτα προβλήματα· καὶ διὰ νὰ γένωσι ταῦτα σαφῆ, εἰλήφθωσαν παραδείγματα· ἡ ἐξίσωσις τοῦ τετάρτου προβλήματος ἦν $16\chi = 25\psi + 1$.

ἄρα	$25=1\cdot16+9$	ἔτι	$\chi=1.\psi+\rho$	$\sigma=\ \ 7\omega+3$
	$16=1.\ \ 9+7$		$\psi=1.\rho+\sigma$	καὶ ἑπομένως
	$9=1.\ \ 7+2$		$\rho=1.\sigma+\tau$	$\rho=\ \ 9\omega+1$
	$7=3.\ \ 2+1$		$\sigma=3.\tau+\omega$	$\psi=16\omega+7$
	$2=2.\ \ 1+0.$		$\tau=2.\omega+1$	$\chi=25\omega+11.$

ὡς ἐκεῖ εὑρέθησαν $\psi\ 16\omega + 7$ καὶ $\chi=25\omega + 11$.

Πρόβλ: ζ'.

Εὑρεθήτω ἀριθμὸς, ὅςις διαιρεῖται διὰ 11 καὶ μένει λείψανον 3, διαιρεῖται δὲ καὶ διὰ 19 καὶ μένει 5.

Κατασκευή.

Ἔςω ὁ ζητούμενος $\nu=11\chi + 3$ · καὶ $\nu=19\psi+5$.

ἄρα καὶ $11\chi+3=19\psi+5$· ἤτοι $11\chi=19\psi+2$ ἄρα

$$\begin{array}{llll} 19=1.11+8 & \text{λοιπὸν}\ \chi=1\cdot\psi+\rho & \text{καὶ}\ \sigma=3\omega+2 \\ 11=1.\ 8+3 & \psi=1.\rho+\sigma & \rho=8\omega+6 \\ 8=2.\ 3+2 & \rho=2.\sigma+\tau & \psi=11\omega+8 \\ 3=1,\ 2+1 & \sigma=1.\tau+\omega & \chi=19\omega+14. \\ 2=2.\ 1+0 & \tau=2.\omega+2\cdot & \end{array}$$

ἄρα $\upsilon=11$, $19\omega+11\cdot14+3=209\omega+157$.

Σημείωσις. διὰ νὰ λυθῶσι τὰ τοιαῦτα προβλήματα $\alpha\chi=\beta\psi+\gamma$. πρέπει ἐξ ἀνάγκης ὁ α καὶ β νὰ μὴν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην, εἰμὴ τὴν μονάδα, ὡς τὰ ἄνω παραδείγματα· ἐὰν δὲ οἱ συνεργοὶ τῶν ἀγνώςων χ καὶ ψ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην· τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον· διότι ἔςω ἡ ἐξίσωσις $9\chi=15\psi+2$· ὅπου 9 καὶ 15 ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην τὸν 3· καὶ λοιπὸν $\chi=\dfrac{15\psi+2}{9}=\psi+\dfrac{6\psi+2}{9}$.

ἐὰν δὲ $\dfrac{6\psi+2}{9}=Z$ τεθῇ, ἔςαι καὶ $\psi=Z+\dfrac{3Z-2}{6}$.

ἔςω ἔτι $\dfrac{3Z-2}{6}=\omega$ καὶ $Z=\dfrac{6\omega+2}{3}=2\omega+\frac{2}{3}$· καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι $2\omega+\frac{2}{3}$ ἀδυνάτως ἔχει, νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἄρα καὶ τὸ πρόβλημα ἀδύνατον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ Προβλημάτων, ἐν οἷς αἱ ἄγνωςοι πλείονες τῶν δύο.

§. 780. Καὶ εἰς αὐτὰ τὰ προβλήματα ὁ αὐτὸς τηρεῖται τρόπος· εἰμὴ ὅτι δύο ἐξισώσεις δίδονται, καὶ δὲ αὐτῶν ἡ μία ἄγνωστος ἀποσκευάζεται, εἶτα ἡ μία ἄγνωστος τῶν μενόντων δύο κατὰ τὸ δοκοῦν διορίζεται, καὶ οὕτω ποικιλαχῶς καὶ ταῦτα λύονται.

Προβλ: α'.

Εἰς τριάντα ὁμοῦ χήναις, πάπιαις, καὶ ὄρνιθαις ἔδωκέτις 50 γρόσια· διὰ μὲν ἑκάστην χῆνα τρία γρόσια, διὰ δὲ ἑκάστην πάπιαν δύο γρόσια, καὶ δὲ ἑκάστην ὄρνιθα ἕνα γρόσι.

Ζητεῖται πόσαι ἦσαν αἱ χῆνες, πάπιαις, καὶ ὄρνιθαις; ἦσαν χῆναις $=\chi$· πάπιαις $=\eta$· καὶ ὄρνιθαις $=Z$· ἄρα $\chi+\eta+Z=30$· καὶ ἀπὸ τῆς τιμῆς ἡ μὲν τιμὴ τῶν χηνῶν $=3\chi$, τῶν παπιῶν $=2\eta$, τῶν ὀρνίθων $=Z$· καὶ ὅλων ὁμοῦ $3\chi+2\eta+Z=50$· καὶ ἀπὸ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως $Z=30-\eta-\chi$· θῶμεν τοῦτο εἰς τὴν δευτέραν, καὶ ἔσαι $3\chi+2\eta+30-\eta-\chi=50$ ἢ $2\chi+\eta=20$· καὶ τέλος $\eta=20-2\chi$· καὶ φανερὸν ὅτι τὸ χ ἔλαττον ἢ 10 πρέπει νὰ εἶναι· λοιπὸν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\eta=20-2\chi$ καὶ $Z=30-\eta-\chi$ εὑρίσκομεν $\chi=1, 2, 3$, κτ. αἱ μὲν

χῆνες	=	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
αἱ δ' πάπιαις	=	20,	18,	16,	14,	12,	10,	8,	6,	4,	2,
αἱ δ' ὄρνιθ:	=	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19, 20.

Προβλ: β'.

Ἠγόρασέ τις 100 πήχεις πανίον τριῶν εἰδῶν διὰ 100 γρόσια, τοῦ μὲν πρώτου εἴδους ἀπὸ $3\frac{1}{2}$ γρ: τὴν πῆχην· τοῦ δὲ δευτέρου ἀπὸ $1\frac{1}{3}$ γρο. καὶ τοῦ τρίτου ἀπὸ $\frac{1}{2}$ γρ· πόσαις πήχεις ἦτου ἀπὸ κάθε εἴδους;

Κατασκευή.

Τοῦτο ὡς τὸ ἄνω λύεται· ἔσωσαν αἱ πήχεις τοῦ πρώτου εἴδους $= \chi$· τοῦ δευτέρου $= \psi$ τοῦ τρίτου $= Z$· ἄρα $\chi + \psi + Z = 100$· καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν $3\frac{1}{2}\chi + 1\frac{1}{3}\psi + \frac{1}{2}Z = 100$· ἐὰν δὲ ταύτην τῶν κλασμάτων ἀπαλλάξωμεν, ἔςαι $21\chi + 8\psi + 3Z = 600$· ἀλλ' ἀπὸ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $Z = 100 - \psi - \chi$. καὶ τὸ τριπλοῦν $3Z = 300 - 3\psi - 3\chi$ θῶμεν τοῦτο ἀντὶ $3Z$ εἰς τὴν δευτέραν, καὶ εὑρίσκομεν $21\chi + 8\psi + 300 - 3\psi - 3\chi = 600$, ἢ $18\psi + 5\psi = 300$· ἢ $5\psi = 300 - 18\chi$ καὶ $\psi = 60 - \frac{18\chi}{5}$· θῶμεν $\chi = 5\omega$, καὶ ἔςαι $\psi = 60 - 18\omega$· ἐὰν δὲ ἀντὶ ψ θῶμεν $60 - 18\omega$ καὶ ἀντὶ $\chi = 5\omega$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $Z = 100 - \psi - \chi$· ἔςαι $Z = 100 - 60 + 18\omega - 5\omega = 13\omega + 40$· λοιπὸν ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\chi = 5\omega$

$$\psi = 60 - 18\omega.$$

$Z = 13\omega + 4$ εὑρίσκονται αἱ τρεῖς ἄγνωςοι, ἐὰν θῶμεν $\omega = 1,\ 2,\ 3$

$$\chi = 5,\ 10,\ 15$$
$$\psi = 42,\ 24,\ 6$$
$$Z = 53,\ 66,\ 79$$

διότι ἐὰν λάβωμεν $\omega = 4$ εὑρίσκεται ψ ἀποφατικὸν, καὶ ἐναντίον τοῦ προβλήματος μήτε $\omega = 0$ διότι ἔςαι $\chi = 0$ κτ.

Πρόβλημα γ'.

Εἰς μίαν ἀκαδημίαν ἦσαν 1000 μαθηταὶ, καὶ ἔλαβον γέρας 1200 γρόσια τοῦτον τὸν τρόπον, ὥςε τῆς μὲν πρώτης κλάσεως νὰ λάβῃ ἕκαςος ἀνὰ 3 γρόσια· τῆς δὲ δευτέρας ἕκαςος ἀνὰ 2, καὶ τῆς γ'. ἀνὰ 1. ζητεῖται πόσοι ἦσαν ἑκάςης κλάσεως;

Κατασκευή.

τῆς μὲν τρίτης $=\chi$· τῆς δὲ δευτέρας ч· καὶ τῆς τρίτης $=Z$.

ἄρα $\chi+\text{ч}+Z=1000$ . . . . A.

καὶ $\chi+2\text{ч}+3Z=1200$ . . . . B.

ἐὰν δ' ἀφέλωμεν τὴν A ἀπὸ τῆς B ἔςαι $\text{ч}+2Z=200$·

καὶ $\text{ч}=200-2Z$· ἔςι δὲ καὶ ἡ A $\chi=1000-\text{ч}-\chi$.

ἐὰν δ' εἰς αὐτὴν ἀντὶ ч θῶμεν $200-2\chi$ ἔςαι $\chi=800+Z$.

ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς $\text{ч}=200-2Z$

εὑρίσκομεν, ἐὸν θῶμεν τῆς A τὸ $Z=1, 2, 3, 4 \ldots 99$ κτ.

τῆς B, $\text{ч}=198, 196, 194, 192.$ κτ.

τῆς Γ, $\chi=801, 802, 803, 804$ .. κτ.

Πρόβλημα δ'.

Ἔχει τις τριῶν εἰδῶν ἄργυρον, καὶ τοῦ μὲν πρώτου εἴδους τιμᾶται ἡ δραχμὴ 36 ἄσπρων, τοῦ δὲ δευτέρου 24, καὶ τοῦ τρίτου 16· θέλει δ' αὐτὸς ἐκ τῶν τριῶν νὰ κατασκευάσῃ ἓν ἀγγεῖον 40 δραχμῶν, καὶ νὰ τιμᾶται ἡ δραχμὴ αὐτοῦ 20 ἄσπρων· πόσον νὰ λάβῃ ἀφ' ἑκάςου;

Κατασκευή.

Ἔςω τὸ ποσὸν ὁποῦ πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου δραχμὰς $=\chi$· ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου $=\text{ч}$· καὶ ἀπὸ τοῦ τρίτου $=Z$· ἄρα $\chi+\text{ч}+Z=40$ . . . . A.

καὶ αἱ τιμαὶ τούτων $36\chi+24\text{ч}+16Z=40\cdot 20=800$...B

καὶ ἀπὸ μὲν τῆς A ἔςαι $\chi=40-\text{ч}-Z$· ἀπὸ δὲ τῆς

B ἔςαι $\chi = \frac{800 - 24y - 16Z.}{36} = \frac{200 - 4Z - 6y}{9}$ ἄρα

$$\text{καὶ } 40 - y - Z = \frac{200 - 4Z - 6y}{9} \cdot 9$$

$$360 - 9y - 9Z = 200 - 4Z - 6y$$

$$160 - 5Z = 3y$$

$$y = \frac{160 - 5Z}{3} \; \Gamma$$

Θῶμεν καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi = 40 - y - Z$ τὸ ἴσον τῇ y, καὶ ἔςαι

$$\chi = 40 - \left(\frac{160 - 5Z}{3}\right) - Z \cdot$$

$$3\chi = 120 - 160 + 5Z - 3Z.$$

$$\chi = \frac{2Z - 40}{3} \text{ καὶ ἐκ}$$

τῶν ἐξισώσεων $y = \frac{160 - 5Z}{3}$

καὶ $\chi = \frac{2Z - 40}{3}$ γίνεται γνωςὸν ἐὸν ὑποθῶμεν $Z > 20$ οὕτω

$$Z = 21,\ 22,\ 23,\ 24 \text{ κτ.}$$

$$y = 18\tfrac{1}{3} \cdot\ 16\tfrac{2}{3},\ 15,\ 13\tfrac{1}{3}$$

$$\chi = \tfrac{2}{3},\ 1\tfrac{1}{3},\ 2,\ 2\tfrac{2}{3} \text{ κτ.}$$

Πρόβλημα. ε΄.

Ἠγόρασέ τις 100 ζῶα μὲ 100 φλωρία, δηλ. διὰ κάθε βόδι 10 φλ. διὰ κάθε ἀγελάδα 5 φλ. διὰ κάθε μοσχάρι 2 φλ.· καὶ διὰ κάθε ἀρνίου $\frac{1}{2}$ φλ. ζητεῖται πόσοι οἱ βόες, αἱ ἀγελάδες, τὰ μοσχάρια, τὰ ἀρνία;

Κατασκευή.

Οἱ μὲν βόες $=\chi$, αἱ ἀγελάδες $=\psi$· τὰ μοσχάρια$=\varphi$, καὶ τὰ ἀρνία$=Z$· ἄρα $\chi+\psi+\varphi+Z=100 \quad . \quad . \quad A.$

καὶ $10\chi+5\psi+2\varphi+\frac{1}{2}Z=100 \quad . \quad B$

ἣν διπλασιάζομεν $20\chi+10\psi+4\varphi+Z=200$ ἀφ' ἧς ἀφαιροῦμεν τὴν A $-\chi\underline{+}\psi\underline{+}\varphi\underline{+}Z=100$

$$19\chi+9\psi+3\varphi=100\text{· ἄρα}$$

$3\varphi=100-19\chi-9\psi$· ἤτοι $\varphi=33+\frac{1}{3}-6\chi-\frac{1}{3}\chi-3\psi=33-6\chi-3\psi+\dfrac{1-\chi}{3}$· ἐπεὶ δὲ καὶ $1-\chi$ ἢ $\chi-1$ διαιρέσιμον εἶναι δεῖ διὰ 3 ἄρα $\dfrac{-1+\chi}{3}=\tau$ καὶ $\chi=3\tau+1$· ἄρα $\varphi=33-18\tau-6-3\psi-\tau=27-19\tau-3\psi$· ἀπὸ δὲ τῆς A· ἐξισώσεως ἔσαι $Z=100-\chi-\psi-\varphi$· καὶ ἐὰν αὐτοῦ θῶμεν $\chi=3\tau+1$ καὶ $\varphi=27-19\tau-3\psi$ εὑρίσκομεν $Z=100-3\tau-1-27+19\tau+3\psi-\psi=72+2\psi+16\tau$· ὅθεν ἔχομεν τὰ ἑξῆς

$$\chi=3\tau+1$$
$$\psi=\psi$$
$$\varphi=27-19\tau-3\psi$$
$$Z=72+2\psi+16\tau\text{·}$$

ἐὰν λοιπὸν εἰς αὐτὰς τὰς ἐξισώσεις θῶμεν $\tau=0$· ἔσαι

$\chi=1$ ἐὰν δὲ $\tau=1$

$\psi=1$ ἔςαι $\chi=4$

$\varphi=27-3\psi$ $\psi=\psi$

$Z=72+2\psi$ $\varphi=8-3\psi$

$Z=88+2\psi.$

καὶ εἰς μὲν τὸν πρῶτον τρόπον ψ δὲν λαμβάνεται 9, ἀλλὰ $\psi<9$, διότι εὑρίσκομεν $\varphi=0$· εἰς δὲ τὸν δεύτερον ψ νὰ μὴ ληφθῇ μεῖζον τοῦ 2· διότι εὑρίσκομεν φ ἀποφατικόν· λοιπὸν ψ πρέπει νὰ ληφθῇ μεταξὺ 2 καὶ 8· ἄρα ἐὰν $\tau=0$ καὶ $\psi=1, 2, 3, 4, 5$ κτ.

ἔςαι
$$\chi=1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,$$
$$\psi=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$
$$\varphi=24, 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3$$
$$Z=74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88.$$

ἐὰν δὲ κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον $\tau=1$ καὶ $\psi=0$, 1, 2, 3,

ἔςαι
$$\chi=4, 4, 4,$$
$$\psi=0, 1, 2$$
$$\varphi=8, 5, 2,$$
$$Z=88, 90, 92.$$

Πρόβλημα ϛ'.

Εὑρεθήτωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥςε ἐὰν τὸν μὲν διὰ 3, τὸν δὲ διὰ 5, τὸν δὲ διὰ 7 πολλαπλασιάσωμεν νὰ γίνηται $=560$· καὶ ἐὰν τὸν μὲν διὰ 9, τὸν δὲ διὰ 25, τὸν δὲ διὰ 49 νὰ γίνηται $=2920$·

Κατασκευή.

Ἔςωσαν οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, Z· ἄρα
$$3\chi+5\psi+7Z=560\ldots A.$$
καὶ
$$9\chi+25\psi+49Z=2920\ldots B$$

τριπλὴν τὴν Α ἄφελον ἐκ τῆς Β $\underline{9\chi + 15y + 21Z = 1680}$

$$\frac{10y + 28Z = 1240}{5 + 14Z = 620} : 2\cdot$$

καὶ $y = \dfrac{620 - 14Z}{5} = 124 - 2Z - \dfrac{4Z}{5}$ · ἐὰν δὲ θῶμεν

$\dfrac{4Z}{5} = \tau$ καὶ $5\tau = Z$ ἔσαι $y = 124 - 14\tau$ · θῶμεν ἤδη εἰς τὴν Α ἐξίσωσιν $5\tau = Z$ καὶ $124 - 14\tau = y$ καὶ ἔσαι

$$3\chi + 620 - 70\tau + 35\tau = 560.$$

καὶ $3\chi = 35\tau - 60$ καὶ $\chi = \dfrac{35\tau}{3} - 20.$

θῶμεν ἔτι $\tau = 3\omega$ καὶ ἔσαι $\chi = 35\omega - 20$ . . . . . Γ

ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὴν $y = 124 - 14\tau$ ἀντὶ $\tau = 3\omega$ θῶμεν, ἔσαι $y = 124 - 42\omega$ . . . . Δ

λοιπὸν εἰς τὰς ἐξισώσεις $\chi = 35\omega - 20$ · $y = 124 - 42\omega$ · $Z = 15\omega$ · ἐὰν θῶμεν $\omega = 1, 2$, κτ εὑρίσκομεν

$\chi = 15$ ·
$y = 82$ ·
$Z = 15$ ·

ἐὰν δὲ $\omega = 2$ $\quad$ $\chi = 50$ ·
$y = 40$ ·
$Z = 30.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ συνθέτων ἀορίςων ἐξισώσεων, ἐν αἷς δύο ἄγνωςοι, ὧν ὁ ἕτερος ἐςὶν ἀεὶ τοῦ α'. βαθμοῦ.

§. 781. Καὶ εἰς αὐτὰς δύο ζητοῦμεν ἀγνώςους, πλὴν ὁ μὲν δύναται εἶναι καὶ α', καὶ β' καὶ γ' κτ βαθμοῦ, ὁ δὲ μόνον τοῦ α' βαθμοῦ· κατὰ τὸν τύπον τὸν ἀκόλουθον $\alpha+\beta+\gamma\psi+\delta\chi^2+\epsilon\chi\psi+\zeta\chi^3+\gamma\chi^2\psi+\eta\chi^4+\vartheta\chi^2\psi$· κτ. πλὴν εἰς αὐτὰς εἰς τὸ τέλος ὁ χ καὶ ψ ζητεῖται εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς· ἡ μέθοδος δὲ πῶς οἱ τοιοῦτοι εὑρίσκονται, γενήσεται γνωςὸν εἰς τὰ ἑξῆς προβλήματα.

Πρόβλημα α'.

Εὑρεθήτωσαν δύο τοιοῦτοι ἀριθμοὶ, ὥςε ἐὰν εἰς τὸ παραγόμενον αὐτῶν προσθῶμεν τὸ ἐξ αὐτῶν κεφάλαιον, ἔςαι $=79$.

Κατασκευή.

Ἔςωσαν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ χ καὶ ψ· ἄρα $\chi\psi=$
$\chi+\psi=79$· καὶ $\chi\psi+\psi=79-\chi$, καὶ $\psi=\dfrac{79-\chi}{\chi+1}=$

$-1+\dfrac{80}{\chi+1}$· ὅπου φανερὸν, ὅτι ὁ $\chi+1$ εἶναι εἷς παράγων τοῦ 80 διὰ νὰ ἐξέλθῃ ὁ ψ ἀκέραιος ἀριθμός· οἱ δὲ παράγοντες τοῦ 80 εἶναι 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80.

ἄρα $\chi=0,\ 1\ 3,\ 4,\ 7\ 9,\ 15,\ 19,\ 39,\ 79$·

καὶ ἑπομένως $\text{ч}=79, 39, 19, 15, 9, 7, 4, 3, 1, 0$. διότι ἐὰν τεθῇ $\chi+1$ ἴσον ἑνὶ τῶν παραγόντων χ, ἔςαι πλὴν μονάδος ὁ αὐτὸς παράγων· διότι $\chi+1=2$· ἄρα $\chi=1$ καὶ $\chi+1=20$· ἄρα $\chi=19$· κτ. ἔτι ἐπειδὴ αἱ πρῶται καὶ ἔσχατοι λύσεις εἶναι αἱ αὐταί, μόνον πενταχῶς λύεται

$$\chi=0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,$$
$$\text{ч}=79,\ 39,\ 19,\ 15,\ 9.$$

Γενικώτερον δὲ λύεται τοῦτο τὸ πρόβλημα τὸν ἑξῆς τρόπον: $\chi\text{ч}+\alpha\chi+\beta\text{ч}=\gamma$. $\chi\text{ч}+\beta\text{ч}=\gamma-\alpha\chi$·

καὶ $\text{ч}=\dfrac{\gamma-\alpha\chi}{\chi+\beta}=-\alpha+\dfrac{\alpha\beta+\gamma}{\chi+\beta}$· ἄρα $\chi+\beta$ πρέπει νὰ εἶναι εἷς τῶν παραγόντων $\alpha\beta+\gamma$· ἐὰν ὅμως θῶμεν $\alpha\beta+\gamma=\delta\varepsilon$· καὶ $\chi+\beta=\delta$, ἔςαι $\chi=\delta-\beta$· φανερὸν δὲ ὅτι $\text{ч}=-\alpha+\dfrac{\delta\varepsilon}{\delta}=-\alpha+\varepsilon$· ἤτοι $\text{ч}=\varepsilon-\alpha$· ὅθεν ἐκ τῶν τριῶν

ἐξισώσεων $\alpha\beta+\gamma=\delta\varepsilon$ . . . . A.

$\chi=\delta-\beta$ . . . . B.

$\text{ч}=\varepsilon-\alpha$ . . . . Γ.

διορίζεται ὁ χ καὶ ч, ἐὰν εὕρωμεν $\alpha\beta+\gamma$· ἀνὰ δύο παράγοντας $\delta\varepsilon$, καὶ ἀπὸ τὸν δ εὑρίσκομεν χ, ἀπὸ δὲ τὸν ε, ч· ἐὰν τοὺς δοθέντας β καὶ α ἀφέλωμεν. Ἔςω ἡ ἐξίσωσις $\chi\text{ч}+2\chi+3\text{ч}=42$· ὅπου $\alpha=2$· $\beta=3$· $\gamma=42$· ἄρα $\alpha\beta+\gamma=6+42=48$· ὅςις λύεται εἰς παράγοντας

1·48	2·24	3. 16	4. 12	6. 8	
χ·ч	χ ч	χ ч	χ ч	χ ч	
—2, 46	—1, 22	0, 14	1, 10	3. 6	ἐὰν $\delta=1$ καὶ $\varepsilon=48$.
45, —1	21, 0	13, 1	9, 2	5, 4·	ἐὰν $\delta=48$ καὶ $\varepsilon=1$.

§. 782. Ἐκφρασθήτω ἔτι γενικώτερον ἡ ἐξίσωσις $\mu\chi\text{ч}$

$=\alpha\chi+\beta\psi+\gamma$· ὅπου μ, α, β, γ εἰσὶν ἀριθμοὶ δοθέντες, καὶ ζητοῦνται ψ καὶ χ εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς· ἄρα $\mu\psi\chi-\beta\psi=\alpha\chi+\gamma$· καὶ $\psi=\frac{\alpha\chi+\gamma}{\mu\chi-\beta}$ ἤτοι $\mu\psi=\frac{\mu\alpha\chi+\mu\gamma}{\mu\chi-\beta}=\alpha+\frac{\mu\gamma+\alpha\beta}{\mu\chi-\beta}$· ἐὰν δὲ πάλιν θῶμεν $\mu\gamma+\alpha\beta=\delta\varepsilon$, καὶ ὁ $\mu\chi-\beta$ εἶναι εἷς παράγων τοῦ $\mu\gamma+\alpha\beta$· ἔςαι καὶ $\mu\chi-\beta=\delta$· ἄρα $\mu\psi=\alpha+\frac{\delta\varepsilon}{\delta}=\alpha+\varepsilon$ καὶ $\chi=\frac{\delta+\beta}{\mu}$· ἄρα καὶ μ πρέπει νὰ εἶναι εἷς παράγων τοῦ $\delta+\beta$· ὅθεν εἰς τοὺς παράγοντας τοῦ $\mu\gamma+\alpha\beta$ δὲν λαμβάνομεν ἄλλους, εἰμὴ ἐκείνους, εἰς οὓς ἐὰν β προσθῶμεν εἰς τὸ κεφάλαιον νὰ εἶναι ὁ μ εἷς τῶν παραγόντων, διότι $\chi=\frac{\delta+\beta}{\mu}$ καὶ $\psi=\frac{\alpha+\varepsilon}{\mu}$.

Ἔςω ἡ ἐξίσωσις $5\chi\psi=2\chi+3\psi+18$· ὅπου $\mu=5$· $\alpha=2$· $\beta=3$· καὶ $\gamma=18$· ἄρα $\mu\gamma+\alpha\beta=18\cdot5+2\cdot3=96$· καὶ οἱ παράγοντες τούτου 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96· ἄρα εἰς εὕρεσιν τοῦ $\chi=\frac{\delta+3}{5}$ εἶναι οἰκεῖος μόνον ὁ 2, ὁ 12, ὁ 32· καὶ εὑρίσκομεν $\chi=1, 3, 7$, καὶ ἑπομένως $\psi=\frac{\varepsilon+2}{5}$· $\psi=10, 12$·

§. 783. Εἰς αὐτὴν τὴν γενικὴν λύσιν εὑρίσκομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\mu\psi=\alpha+\frac{\mu\gamma+\alpha\beta}{\mu\chi-\beta}$ ϗ $\mu\psi-\alpha=\frac{\mu\gamma+\alpha\beta}{\mu\chi-\beta}$· καὶ ἑπομένως $(\mu\chi-\beta)(\mu\psi-\alpha)=\mu\gamma+\alpha\beta$· ἐπειδὴ ὅμως ἀναγκαίως ὁ $(\mu\chi-\beta)$ εἶναι εἷς παράγων τοῦ $\mu\gamma+\alpha\beta$· ἄρα ὁ ἕτερος παράγων τοῦ $\mu\gamma + \alpha\beta$· εἶναι ὁ $\mu y - \alpha$· καὶ ἐκφράζεται ἄρα ὁ $\mu\gamma + \alpha\beta$· οὕτω $(\mu\chi - \beta)(\mu y - \alpha)$· διότι ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσίν μας εἶναι $\mu = 12$, $\alpha = 5$, $\beta = 7$ καὶ $\gamma = 15$· ἴσαι $\mu\gamma + \alpha\beta = 12 \cdot 15 + 5 \cdot 7 = 215$· ἄρα $12y$

$$- 5 = \frac{215}{12\chi - 7}$$

· οἱ δὲ παράγοντες τοῦ 215 εἶναι 1, 5, 43, 215· καὶ πρέπει ἀπ' αὐτῶν νὰ ἐκλέξωμεν τοὺς παράγοντας ἐκείνους, οἵτινες ἐμπεριέχονται εἰς τὴν ἔκφρασιν $12\chi - 7$· οὗτοι δ' εἰσιν ἐκεῖνοι, οἷς ἐὰν 7 προσθῶμεν εἶναι διὰ 12 διαιρέσιμοι· καὶ ἐκ τῶν τριῶν τούτων μόνον ὁ 5 τοιοῦτος εὑρίσκεται· διότι $12\chi - 7 = 5$· ἄρα $\chi = 1$· καὶ ὁ ἕτερος $43 = 12y - 5$· καὶ $12y = 48$· καὶ $y = 4$· αὕτη ἡ ἰδιότης εἶναι ἀναγκαία νὰ παρατηρῆται εἰς τὰ τοιαῦτα προβλήματα.

§. 784. Ἔτι ἔσω καὶ ἐξίσωσις τούτου τοῦ εἴδους $\chi y + \chi^2 = 2\chi + 3y + 29$, ἤτοι $\chi y - 3y = 2\chi - \chi^2 + 29$· καὶ τέλος

$$y = \frac{2\chi - \chi^2 + 29}{\chi - 3} = -\chi - 1 + \frac{26}{\chi - 3}$$

· ἤτοι

$$y + \chi + 1 = \frac{26}{\chi - 3}$$

· καὶ ἐπειδὴ καὶ αὐτοῦ ὁ $\chi - 3$ εἶναι εἷς παράγων τοῦ 26, ἄρα ὁ ἕτερος εἶναι $= y + \chi + 1$ διότι ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως εἶναι $(y + \chi + 1)(\chi - 3) = 26$· ὅθεν εὑρεθήτωσαν οἱ παράγοντες τοῦ 26, 1, 2, 13, 26· καὶ τεθήτω $\chi - 3$ ἴσον ἑνὶ παράγοντι, καὶ εὑρεθήτω χ, καὶ δι' αὐτοῦ εὑρίσκομεν καὶ y κατὰ τὰ ἄνω.

Θῶμεν λοιπὸν $\chi - 3 = 1$, καὶ $\chi = 4$· ἄρα $y + 4 + 1 = 26$ καὶ $y = 21$· δεύτερον $\chi - 3 = 2$, καὶ $\chi = 5$· λοιπὸν $y + 5 + 1 = 13$ καὶ $y = 7$· τρίτον $\chi - 3 = 13$, καὶ $\chi = 16$, καὶ $ψ+16+1=2$, ἤτοι $ψ=-15$· καὶ ἐπειδὴ οὗτος ἀποφατικὸς ἔσται· καὶ οὕτω καὶ $χ-3=26$, δὲν λαμβάνεται, ὅτι ἐξέρχεται ψ ἀποφατικόν· οἱ τύποι δὲ ἐν οἷς ἡ $χ$ εὑρίσκεται εἰς ἀνωτέρας ἔτι δυνάμεις, καὶ ἡ ψ εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, οὐ μόνον σπανιώτατα συμβαίνουσιν, ἀλλὰ καὶ κατὰ τὰς ἄνω μεθόδους λύονται· πλὴν ἐπειδὴ πολλάκις εἰς αὐτὰς πίπτομεν εἰς ῥιζικὰ καὶ ἄλογα τῆς $χ$, διὰ τοῦτο εἰς τὸ ἑξῆς κεφάλαιον δείξομεν, πῶς ἀπὸ τῆς ἀλογίας τούτων ἀπαλλαττόμεθα, καὶ ἔπειτα καὶ εἰς τοῦτο τείνοντα προβλήματα λύσομεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

Περὶ τοῦ πῶς ὁ ἄλογος οὗτος τύπος $\sqrt{(α+βχ+γχ^2)}$ λογικὸς γίνεται.

§. 785. Ἄλλως ἡμεῖς ἀπὸ τοῦ ῥιζικοῦ τοῦ τύπου $α+βχ+γχ^2$ δὲν ἀπαλλαττόμεθα, εἰμὴ ἐὰν ᾖ ἐντελὲς τετράγωνον· ἀλλὰ πολλάκις ἐντελὲς τετράγωνον ὄν, εἶναι οὕτω περιπεπλεγμένον, ὥστε μένειν αὐτὸ ἄλογον· διὸ καὶ τὸ παρὸν κεφάλαιον διδάξει ἡμᾶς, πῶς τὸ φαινόμενον ἄλογον, λογικὸν γίνεται· καὶ ποῖοι τύποι γίνονται λογικοὶ, καὶ ποῖοι ἄλογοι· οἱ ἀριθμοὶ δὲ $α$, $β$, $γ$ εἰσὶ γνωστοὶ, καὶ ἐκ τούτων κρέμαται ὁ διορισμὸς τῆς $χ$ ἀγνώστου, καὶ εἰς πολλὰ δὲ τούτων ἡ λύσις εἶναι ἀδύνατος· ἀλλὰ καὶ εἰς τὰ δυνατὰ αὐτῶν τὴν ἀρχὴν ὑποτίθεταί τις ἀριθμὸς λογικὸς ἀντὶ $χ$, χωρὶς νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι οὗτος ἐστιν ὁ ὀρθός· εἶτα δὲ γίνεται ἡ ἐξέτασις κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον, πλὴν ἐνταῦθα ὑποτίθεται ἡ χ μὴ εἶναι δυνάμεως ἀνωτέρας τῆς δευτέρας.

§. 786. Ἐὰν δὲ ἡ χ εἶναι εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, ὅταν $\gamma = 0$, τότε ὁ τύπος εἶναι $\sqrt{(\alpha + \beta\chi)}$, καὶ τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει δυσκολίαν· διότι αὐτοῦ ζητεῖται νὰ τεθῇ χ ἀνθ' ἑνὸς τοιούτου ἀριθμοῦ, ὥστε $\alpha + \beta\chi$ εἶναι ἀριθμὸς τετράγωνος· ὅθεν Θῶμεν $\alpha + \beta\chi = \eta^2$ καὶ ἐξέρχεται $\chi = \frac{\eta^2 - \alpha}{\beta}$· λοιπὸν ὅ,τι ἂν ἀριθμὸν Θῶμεν αὐτοῦ ἀντὶ η εὑρίσκομεν τὸν χ, καὶ ἔσται $\alpha + \beta\chi$ τὸ τετράγωνον, καὶ ἡ ῥίζα $\sqrt{(\alpha + \beta\chi)}$ εὐκόλως ἐξάγεται· ἔσω $\sqrt{(2 + 3\chi)}$ ὅπου εα$=2$, $\beta = 3$· ἄρα $\chi = \frac{\eta^2 - 2}{3}$, ἐὰν $\eta = 2$ Θῶμεν, ἔσται $\chi = \frac{2}{3}$ καὶ $\sqrt{(2 + 3 \cdot \frac{2}{3})} = \sqrt{4} = 2$· κτ. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

§. 787. Ἀρξώμεθα ἀπὸ τοῦ τύπου τούτου $\sqrt{(1 + \chi\chi)}$ δηλ. ζητεῖται ἀριθμὸς ἀντὶ χ, ὥστε ἐὰν εἰς τὸ τετράγωνον αὐτοῦ Θῶμεν μονάδα, εἶναι καὶ αὖθις τετράγωνος· καὶ ἐπειδὴ οὕτως ἀκέραιος δὲν δίδεται, ἐπαρκούμεθα καὶ εἰς τοὺς κεκλασμένους· ἐὰν δέ τις Θῇ $1 + \chi\chi = \eta^2$, ἐπειδὴ καὶ $1 + \chi\chi$ πρέπει νὰ εἶναι τετράγωνος, ἔσται $\chi^2 = \eta^2 - 1$· καὶ $\chi = \sqrt{(\eta^2 - 1)}$· αὐτοῦ ὅ,τι ἂν Θῶμεν ἀντὶ η, πίπτομεν πάλιν εἰς ἀλογίαν ὡς πρότερον· διότι εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς δὲν γίνεται· ὅτι δὲ κλασματώδεις ἀριθμοὶ δίδονται, γίνεται φανερὸν ἐκ τῶν ἀκολούθων, ἐὰν Θῶμεν $\chi = \frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{12}$· διότι πρῶτον $\sqrt{(1 + \chi\chi)} = \sqrt{(1 + \frac{9}{16})} = \sqrt{\frac{16 + 9}{16}}$

$=\frac{5}{4}$· δευτέρου $\sqrt{(1+\chi^2)}=\sqrt{(1+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{9+16}{9}}=\frac{5}{3}$·

τρίτου $\sqrt{(1+\chi^2)}=\sqrt{(1+\frac{25}{144})}=\sqrt{(\frac{144+25}{144})}=\frac{13}{12}$·

ὅθεν ἀπαιτεῖται νὰ μάθωμεν, πῶς εὑρίσκονται οὗτοι οἱ δυνατοὶ ἀριθμοὶ τοῦ χ, καὶ εἰς τοῦτο δύο μεθόδους ἐκδίδει ὁ περικλεὴς Αὐλέρος.

§. 788. Ἡ πρώτη μέθοδος εἶναι νὰ ἐξετάσωμεν $\sqrt{(1+\chi^2)}=\chi+\rho$· ἤτοι $1+\chi^2=\chi^2+2\chi\rho+\rho^2$· καὶ ἑπομένως $2\rho\chi+\rho^2=1$, ἤτοι $\chi=\frac{1-\rho^2}{2\rho}$· καὶ ἀντὶ ρ λαμβάνομεν ἀριθμὸν οἱονδήποτε, καὶ τὸν κλασματώδη αὐτόν· ἀλλ' ὑποθῶμεν ὅτι $\rho=\frac{\mu}{\nu}$ ἄρα $\rho=\frac{\mu\mu}{\nu\nu}$· καὶ $2\rho=\frac{2\mu}{\nu}$· Θῶμεν ἤδη εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi=\frac{1+\rho^2}{2\rho}$ τὰ ἴσα, καὶ ἔσται $\chi=$

$$\frac{1-\frac{\mu\mu}{\nu\nu}}{\frac{2\mu}{\nu}}$$ καὶ $\chi=\frac{\nu-\mu^2}{2\mu\nu}$· ὅθεν εὑρίσκομεν ποικιλλαχῶς χ· ἐὰν θῶμεν μ καὶ ν οἱουσδήποτε ἀριθμούς, καὶ οὕτως ἡ ἔκφρασις $\sqrt{(1+\chi\chi)}$ γίνεται τετράγωνος, καὶ τοῦ ῥιζικοῦ ἀπαλλαττόμεθα· γενικώτερον δὲ γίνεται, ἐὰν θῶμεν $\chi^2=\frac{\nu^4-2\mu^2\nu^2+\mu^4}{4\mu^2\nu^2}$ εἰς τὸν τύπον $1+\chi^2=\frac{\nu^4-2\mu^2\nu^2+\mu^4}{4\mu^2\nu^2}$, ἤτοι $1+\chi^2=\frac{\nu^4+2\mu^2\nu^2+\mu^4}{4\mu^2\nu^2}$· καὶ εἶναι τοῦτο τὸ κλάσμα τῶ

ὄντι τετράγωνον ἐντελὲς, καὶ δίδει $\sqrt{(1+\chi\chi)}=\frac{\nu^2+\mu^2}{2\mu\nu}$.

ἄρα εὑρίσκεται ποικιλλαχῶς χ ἐὰν θῶμεν

$$\nu=2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5\ \text{κτ.}$$
$$\mu=1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \text{κτ.}$$

ἄρα $\chi=\frac{3}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{12},\ \frac{15}{8},\ \frac{7}{24},\ \frac{12}{5},\ \frac{21}{20},\ \frac{8}{15},\ \frac{9}{40}$ κτ.

§. 789. Ἐπειδὴ δ' εὕρηται $1+\frac{(\nu^2-\mu^2)^2}{(2\mu\nu)^2}=\frac{(\nu^2+\mu^2)^2}{(2\mu\nu)^2}$, ἔςαι καὶ $(2\mu\nu)^2+(\nu^2-\mu^2)^2=(\nu^2+\mu^2)^2$· καὶ ἐξ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως δίδονται τὰ ἑξῆς προβλήματα

Εὑρεθήτωσαν δύο ἀριθμοὶ τετράγωνοι, ὧν τὸ κεφάλαιον καὶ αὖθις τετράγωνον· ἐὰν θῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς χ καὶ ψ ἔςαι $\chi^2+\psi^2=\gamma^2$· ἤτοι $\chi=2\mu\nu$· καὶ $\psi=\nu^2-\mu^2$· καὶ ἑπομένως $\gamma=\nu^2+\mu^2$· θῶμεν ὡς ἀνωτέρω $\gamma=\psi+\rho$· ἄρα $\gamma^2=\psi^2+2\psi\rho+\rho^2$· καὶ ἑπομένως $\chi^2+\psi^2=\psi^2+2\psi\rho+\rho^2$· ἤτοι $\chi^2=2\rho\psi+\rho^2$· ὅπου $\psi=\frac{\chi^2-\rho^2}{2\rho}$· ἐὰν δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\gamma=\psi+\rho$ θῶμεν ἀντὶ ψ τὸ ἴσον $\frac{\chi^2-\rho^2}{2\rho}$ ἔςαι $\gamma=\frac{\chi^2-\rho^2}{2\rho}+\rho=\frac{\chi^2-\rho^2+2\rho^2}{2\rho}=\frac{\chi^2+\rho^2}{2\rho}$. ἄρα ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\psi=\frac{\chi^2-\rho^2}{2\rho}$ καὶ $\gamma=\frac{\chi^2+\rho^2}{2\rho}$ δυνάμεθα γ καὶ ψ διορίσαι, ἐὰν ἀντὶ ρ καὶ χ οἱονδήποτε κατὰ τὸ δοκοῦν ἀριθμὸν λάβωμεν.

ἔςω $\rho = 1,\ 1,\ 1$	$2,\ 2$	$3,\ 3$ κτ.
$\chi = 3,\ 5,\ 7$	$4,\ 6$	$9,\ 15$ κτ.
$\psi = 4,\ 12,\ 24$	$3,\ 8$	$12,\ 36$ κτ.
καὶ $\gamma = 5,\ 13,\ 25$	$5,\ 10$	$15,\ 39$ κτ.

β'. Ἐπεὶ δ' ἐξ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως ἔςαι καὶ $(\nu^2+\mu^2)^2 - (2\mu\nu)^2 = (\nu^2-\mu^2)^2$ ἕπεται τὸ δεύτερον πρόβλημα, εὑρεῖν δύο τετράγωνα, ὧν ἡ διαφορὰ καὶ αὖθις τετράγωνον· ἤτοι $\chi^2 - \psi^2 = \rho^2$· διότι ἔςαι $\chi = (\nu^2+\mu^2)$ καὶ $\psi = 2\mu\nu$, καὶ $\rho^2 = (\nu^2-\mu^2)$· ἄρα ἐκ τοῦ τύπου $\chi = \nu^2+\mu^2$, καὶ τοῦ $\psi = 2\mu\nu$· καὶ τοῦ $\rho^3 = \nu^2-\mu^2$ εὑρίσκομεν χ, ψ, ρ· ἐὰν θῶμεν οἱονδήποτε κατὰ τὸ δοκοῦν ἀριθμὸν ἀντὶ ν, καὶ μ, ἢ ὀρθώτερον ἔςω $\chi^2 - \psi^2 = \gamma^2$· καὶ $\psi^2 = \chi^2 - \gamma^2$ καὶ γ ἔςω $= \chi - \rho$· ἄρα $\gamma^2 = \chi^2 - 2\chi\rho + \rho^2$· καὶ $\chi^2 - \psi^2 = \chi^2 - 2\chi\rho + \rho^2$, καὶ $\psi^2 = 2\rho\chi - \rho^2$· ἤτοι $\chi = \frac{\psi^2+\rho^2}{2\rho}$· καὶ $\gamma = \frac{\psi^2+\rho^2}{2\rho} - \rho = \frac{\psi^2-\rho^2}{2\rho}$· ὅθεν ἀντὶ ρ καὶ ψ θῶμεν ἕκαςον ἀριθμὸν, καὶ εὑρεθήσονται οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί.

§. 790. Ἡ δευτέρα μέθοδος συνίςαται εἰς τὰ ἀκόλουθα· ζητεῖται ὁ τύπος $\sqrt{(1+\chi\chi)}$ νὰ εἶναι τετράγωνον, καὶ ἔςω $\sqrt{(1+\chi\chi)} = 1 + \frac{\mu\chi}{\nu}$· καὶ ἑπομένως $1 + \chi\chi = 1 + \frac{2\mu\chi}{\nu} + \frac{\mu^2\chi^2}{\nu^2}$ ἤτοι $\chi\chi = \frac{2\mu\chi}{\nu} + \frac{\mu^2\chi^2}{\nu^2}$· ἄρα $\nu^2\chi^2 = 2\nu\mu\chi + \mu^2\chi^2$· ἤτοι $\nu^2\chi = 2\mu\nu + \mu^2\chi$, καὶ ἀντιςροφῇ τῶν ὅρων $\nu^2\chi - \mu^2\chi = 2\mu\nu$· $\chi = \frac{2\mu\nu}{\nu 2 - \mu^2}$ ἐὰν δὲ ἅμα τετραγωνίσωμεν, καὶ τὴν μονάδα θῶμεν, ἔςαι

$$1+\chi^2=1+\frac{4\mu^2\nu^2}{\nu^4-2\mu^2\nu^2+\mu^4}=\frac{\nu^4+2\mu^2\nu^2+\mu^4}{\nu^4-2\mu^2\nu^2+\mu^4}\cdot$$ καὶ

τοῦτο τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{(\nu^2+\mu^2)^2}{(\nu^2-\mu^2)^2}$ · εὕρηται δὲ ἄνω $1+$

$$\frac{(2\mu\nu)^2}{\nu^4-2\mu^2\nu^2+\mu^4}=\frac{\nu^4+2\mu^2\nu^2+\mu^4}{\nu^4-2\mu^2\nu^2+\mu^4}\cdot$$ ἄρα

$$1+\frac{(2\mu\nu)^3}{(\nu^2-\mu^2)^2}=\frac{(\nu^2+\mu^2)^2}{(\nu^2+\mu^2)^2}\cdot(\nu^2-\mu^2)^2$$

$$(\nu^2-\mu^2)^2+(2\mu\nu)^2=(\nu^2+\mu^2)^2\cdot$$

τὸ αὐτὸ ὅπερ καὶ ἀνωτέρω, δηλ. τὸ κεφάλαιον τῶν δύο τετραγώνων πάλιν εἶναι τετράγωνον.

§. 791. Ἡ ἑξῆς μέθοδος παρέχει ἡμῖν δύο μεθόδους, διὰ νὰ μετασχηματίσωμεν τὸν γενικὸν τύπον $\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2$ εἰς τετράγωνον ἐντελές· ὁ πρῶτος συμβάλλει ὅταν γ εἶναι ἀριθμὸς τετραγωνικὸς, ὁ δεύτερος δὲ ὅταν α·

Α ὑποθετέον οὖν ὅτι γ εἶναι τετράγωνον, καὶ ἔςαι ὁ τύπος $\alpha+\beta\chi+\delta^2\chi^2$ · καὶ ὡς ἀνωτέρω

$$\sqrt{(\alpha+\beta\chi+\delta^2\chi^2)}=\delta\chi+\frac{\mu}{\nu}\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \mathrm{A}.$$

ἄρα καὶ $\alpha+\beta\chi+\delta^2\chi^2=\delta^2\chi^2+\frac{2\mu\delta\chi}{\nu}+\frac{\mu^2}{\nu^2}$

$$-\delta^2\chi^2$$

$$\alpha+\beta\chi=\frac{2\mu\delta\chi}{\nu}+\frac{\mu^2}{\nu^2}$$

$$\times\nu^2$$

$$\nu^2\alpha+\nu^2\beta\chi=2\nu\mu\delta\chi+\mu^2$$

$$\nu^2\beta\chi-2\mu\delta\nu\chi=\mu^2-\nu^2\alpha$$

$$\chi=\frac{\mu^2-\nu^2\alpha}{\nu^2\beta-2\mu\delta\nu}$$

Θῶμεν τοῦτο ἀντὶ χ εἰς τὸν τύπον Α, καὶ ἔςαι

$$\sqrt{(\alpha+\beta\chi+\delta^2\chi^2)}=\frac{\mu^2\delta-\nu^2\alpha\delta}{\nu^2\beta-2\mu\nu\delta}+\frac{\mu}{\nu}=$$

$\frac{\mu\nu\beta-\mu^2\delta-\nu^2\alpha\delta}{\nu^2\beta-2\mu\nu\delta}$. ἐπειδὴ ὅμως εὕρομεν $\chi=\frac{\mu^2-\nu^2\alpha}{\nu^2\beta-2\mu\nu\delta}$.

ἔςω καὶ $\chi=\frac{\pi}{\rho}$· ἄρα $\pi=\mu^2-\nu^2\alpha$· καὶ $\rho=\nu^2\beta-2\mu\nu\delta$· καὶ ἑπομένως ὁ τύπος $\alpha+\beta\chi+\delta\delta\chi^2=\alpha+\frac{\beta\pi}{\rho}+\frac{\delta^2\pi^2}{\rho^2}$ εἶναι τετράγωνον· ἐπειδὴ ὅμως τοῦτο ἐν τετραγώνον· ἐὰν καὶ διὰ τοῦ τετραγώνου ρ^2 πολλαπλασιάσωμεν $\alpha\rho^2+\beta\pi\rho+\delta^2\pi^2$, ἔςαι αὖθις τετράγωνον (299. §. 306). ἄρα φανερὸν ἐὰν $\pi=\mu^2-\nu^2\alpha$· καὶ $\rho=\nu^2\beta-2\mu\nu\delta$· εὕρωμεν, εὑρίσκομεν εἰς τὸν τύπον $\alpha\rho^2+\beta\pi\rho+\delta^2\pi^2$ λύσεις διαφόρους, ἐπειδὴ καὶ μ καὶ ν λαμβάνονται κατὰ τὸ δοκοῦν· παραδείγματα δὲ τοιαῦτα ὕςερον.

Β. Ὑποθετέον ὅτι α εἶναι τετράγωνον, ἄρα ὁ τύπος $\delta^2+\beta\chi+\gamma\chi^2$· καὶ ἑπομένως ὑποθετέον

$$\sqrt{(\delta^2+\beta\chi+\gamma\chi^2)}=\delta+\frac{\mu\chi}{\nu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{A.}$$

$$\delta^2+\beta\chi+\gamma\chi^2=\delta^2+\frac{2\mu\delta\chi}{\nu}+\frac{\mu^2\chi^2}{\nu^2}$$

$$-\delta^2 \text{ καὶ } \nu^2$$

$$\nu^2\beta\chi+\nu^2\gamma\chi^2=2\delta\mu\nu\chi+\mu^2\chi^2\cdot$$

$$:\chi$$

$$\nu^2\gamma\chi-\mu^2\chi=2\delta\mu\nu-\nu^2\beta$$

$$\chi=\frac{2\delta\mu\nu-\nu^2\beta}{\nu^2\gamma-\mu^2}.$$

ἐὰν δὲ τοῦτο ἀντὶ χ εἰς τὴν ἐξίσωσιν A θῶμεν

ἔςαι $\sqrt{(\delta^2+\beta\chi+\gamma\chi^2)}=\delta+\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{2\delta\mu\nu-\nu^2\beta}{\nu^2\gamma-\mu^2}=$

$\delta+\frac{2\mu^2\delta-\mu\nu\beta}{\nu^2\gamma-\mu^2}=\frac{\nu^2\gamma\delta+\mu^2\delta-\mu\nu\beta}{\nu^2\gamma-\mu^2}$· καὶ ὡς ἀνωτέρω

ποιοῦντες $\chi=\frac{\pi}{\rho}$ ἔχομεν $\pi=2\,\mu\nu\delta-\nu^2\beta$· καὶ $\rho=\nu^2\gamma$

$-\mu^2$· ἐὰν δ' ἀντὶ χ θῶμεν $\frac{\pi}{\rho}$ εἰς τὸν τύπον $\delta^2+\beta\chi+$

$\gamma\chi^2$, ἔςαι $\delta^2+\frac{\beta\pi}{\rho}+\frac{\gamma\pi^2}{\rho^2}$· ἐὰν δὲ καὶ διὰ ρ^2 πολλαπλασιάσωμεν, ἔςαι $\delta^2\rho^2+\beta\,\pi\rho+\gamma\pi^2$ ἐντελὲς τετράγωνον· ὅθεν ἐὰν $\pi=2\,\mu\nu\delta-\nu^2\beta$ καὶ $\rho=\nu^2\gamma-\mu^2$ εὕρωμεν, λύομεν διαφόρως καὶ τοῦτον τὸν τύπον.

§. 702 Ἀλλ' ὁ τύπος ἐν ᾧ $\alpha=0$, ἤτοι οὗτος $\sqrt{(\beta\chi+\gamma\chi^2)}$ πρέπει νὰ διακριθῇ· διότι ὑποτίθεται $\sqrt{(\beta\chi+\gamma\chi^2)}=\frac{\mu\chi}{\nu}$ καὶ $\beta\chi+\gamma\chi^2=\frac{\mu^2\chi^2}{\nu^2}$

$$\nu^2\beta\chi+\nu^2\gamma\chi^2=\mu^2\chi^2$$

$$\nu^2\beta=\mu^2\chi-\nu^2\gamma\chi\cdot\ \text{καὶ}\ \chi=\frac{\nu^2\beta}{\mu^2-\nu^2\gamma}\quad .\ .\ .\ \text{A.}$$

ζητεῖται παραδ. χ. νὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς τριγωνικοὺς ἀριθμοὺς, οἵτινες ἅμα εἶναι καὶ τετράγωνα· ἀλλ' ὁ τύπος τῶν τριγωνικῶν ἀριθμῶν εὑρέθη $\frac{\nu^2+\nu}{2}$ ἢ $\frac{\chi^2+\chi}{2}$· καὶ ἐὰν διὰ 2 πολλαπλασιάσωμεν, ἔςαι $2\,\chi^2+2\,\chi$, ὡς ὁ τύπος $\beta\chi+\gamma\chi^2$, ὅπου $\beta=2$· καὶ $\gamma=2$· ἐὰν δὲ ἀντὶ γ καὶ β εἰς τὸν A τύπου ταῦτα θῶμεν, ἔςαι $\chi=\frac{2\nu^2}{\mu^2-2\nu^2}$· ὅθεν ἐὰν θῶμεν εἰς αὐτὸν τὸν τύπον ἀντὶ ν καὶ μ ἀριθμοὺς τοιούτους, ἵνα τὸ χ ἀκέραιος δοθῇ ἀριθμὸς, οὗτος ἔςαι τριγωνικὸς, καὶ ἅμα τετράγωνον· ἔςω $\mu=3$ καὶ $\nu=2$· ἄρα $\chi=\frac{8}{9-8}$ $=8$, ὅθεν $\frac{\chi^2+\chi}{2}=\frac{8^2+8}{2}=36$, ὅςις τριγωνικὸς καὶ ἅμα τετράγωνον.

ἔςω ἔτι $\mu=7$ καὶ $\nu=5$· ἄρα $\chi=\frac{2.25}{7\cdot7-2.25}=-50$ καὶ $\frac{\chi^2+\chi}{2}=\frac{2500-50}{2}=1225$, ὅςις ἅμα τριγωνικὸς, καὶ τετράγωνον, οὗ ῥίζα 35· καὶ οὕτως εὑρίσκομεν πλείονας.

§. 793. Ἐξ αὐτοῦ τοῦ τύπου $\beta\chi+\gamma\chi\chi$, ὁποῦ σχίζεται εἰ δύο παράγοντας $(\chi\beta+\gamma\chi)$, ἐρχόμεθα εἰς ἑτέραν μέθοδον, καθ' ἣν ὁμοίως ὁ τύπος $\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2$ δύναται εἰς δύο ἀναλυθῆναι παράγοντας, ὅταν μήτε α μήτε γ εἶναι τετράγωνον· οὗτος δ' ὁ τρόπος εἶναι ὅταν $\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2$ εἰς δύο παράγοντας λύεται· ἐὰν μόνον συμβαίνῃ $\beta^2-4\alpha\gamma$, εἶναι τετράγωνον ἐντελές· ἐπειδὴ καὶ οἱ παράγοντες κρέμανται ἀπὸ τῶν ῥιζῶν μιᾶς ἐξισώσεως (§. 744), ὑποθῶμεν τοίνυν $\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2=0$, καὶ ἑπομένως

$$\gamma\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$$

$$\chi^2+\frac{\beta}{\gamma}\chi=-\frac{\alpha}{\gamma}$$

$$\chi+\frac{\beta}{2\gamma}=\pm\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{4\gamma^2}-\frac{\alpha}{\gamma}\right)}$$

καὶ $\chi = -\frac{\beta}{2\gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{4\gamma^2} - \frac{\alpha}{\gamma}\right)} = -\frac{\beta}{2\gamma} \pm \frac{\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2\gamma}$ · ἄρα ἐὰν $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ εἶναι τετράγωνον, ὁ τύπος σχίζεται εἰς δύο παράγοντας· διότι ἔςαι $\alpha + \beta\chi + \gamma\chi^2 = \left(-\frac{\beta}{2\gamma} + \frac{\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2\gamma}\right)\left(-\frac{\beta}{2\gamma} - \frac{\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2\gamma}\right)$ · ἐὰν δὲ Ͽῶμεν $\beta^2 - 4\alpha\gamma = \delta\delta$, ἔςαι καὶ $\pm\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)} = \pm\delta$ · καὶ ἑπομένως $\chi = -\frac{\beta - \delta}{2\gamma}$ · καὶ $\chi = -\frac{\beta + \delta}{2\gamma}$ · ἄρα οἱ δύο παράγοντες τοῦ τύπου $\alpha + \beta\chi + \gamma\chi^2 = \left(\chi + \frac{\beta - \delta}{2\gamma}\right)\left(\chi + \frac{\beta + \delta}{2\gamma}\right)$ · διότι ἐὰν τούτους ἐνεργείᾳ πολλαπλασιάσωμεν, ἔςαι

$$\begin{array}{l} \chi + \frac{\beta - \delta}{2\gamma} \\ \chi + \frac{\beta + \delta}{2\gamma} \\ \hline \chi^2 + \frac{\beta\chi - \delta\chi}{2\gamma} + \frac{\beta\chi + \delta\chi}{2\gamma} + \frac{\beta^2 - \delta^2}{4\gamma^2} \end{array}$$

$= \chi^2 + \frac{\beta\chi}{\gamma} + \frac{\beta^2}{4\gamma^2} - \frac{\delta^2}{4\gamma^2}$ · ἐὰν δ' αὐτοῦ Ͽῶμεν $\delta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, ἔςαι $\chi^2 + \frac{\beta\chi}{\gamma} + \frac{\beta^2}{4\gamma^2} - \frac{\beta^2}{7\gamma^2} + \frac{4\alpha\gamma}{4\gamma^2} = \gamma\chi^2 + \beta\chi + \alpha$ ἡ προτέρα· ὅθεν ἐὰν τὸν ἕνα παράγοντα διὰ γ πολλαπλασιάσωμεν οὕτω $\gamma\left(\chi + \frac{\beta - \delta}{2\gamma}\right)$ · καὶ τούτου μὲ τὸν ἕτερον, εὑρίσκομεν τὸν πρότερον τύπον· ὅθεν οἱ παράγοντες, εἰς οὓς ὁ δοθεὶς τύπος λύεται, εἶναι

$$(\gamma\chi + \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2})\ (\chi + \frac{\beta}{2\gamma} + \frac{\delta}{2\gamma})$$

καὶ αὕτη ἡ λύσις συμβαίνει πάντοτε, ὅταν $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ εἶναι ἐντελὲς τετράγωνον· ὡς ὁ τύπος οὗτος.

$$2+5\chi+2\chi^2 = (2\chi+\tfrac{5}{2}-\tfrac{3}{2})(\chi+\tfrac{5}{4}+\tfrac{3}{4})=(2\chi+1)(\chi+2).$$

§. 794. Ἐκ τούτου ἕπεται ὁ τρίτος τρόπος, ὅςις τοῖς δυσὶν ἐκείνοις προςίθεται, ἵνα ὁ τύπος $\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2$ μετασχηματισθῇ εἰς ἐντελὲς τετράγωνον· οὗτος ὁ τρόπος συνίςαται εἰς ἐκείνους τοὺς τύπους, ὁποῦ παρίςανται ὡς παραγόμενον ἀπὸ παράγοντας· $(\delta+\eta\chi)(\vartheta+\kappa\chi)$ διὰ νὰ γένῃ οὗτος ὁ ἀριθμὸς τετράγωνον, ὑποθῶμεν τὴν ῥίζαν αὐτοῦ

$$\sqrt{(\delta+\eta\chi)(\vartheta+\kappa\chi)} = \frac{\mu(\delta+\eta\chi)}{\nu}$$

καὶ

$$(\delta+\eta\chi)(\vartheta+\kappa\chi) = \frac{\mu^2(\delta+\eta\chi)^2}{\nu^2}$$

$$\vartheta+\kappa\chi = \frac{\mu^2(\delta+\eta\chi)}{\nu^2}$$

$$\nu^2\vartheta+\nu^2\kappa\chi = \mu^2(\delta+\eta\chi)$$

$$\nu^2\vartheta+\nu^2\kappa\chi = \mu^2\delta+\mu^2\eta\chi$$

$$\nu^2\kappa\chi-\mu^2\eta\chi = \mu^2\delta-\nu^2\vartheta.$$

$$\chi = \frac{\delta\mu^2-\vartheta\nu^2}{\kappa\nu^2-\eta\mu^2}$$

διὰ νὰ ἐξηγηθῶσιν ὅλοι οἱ τρόποι, ἔςωσαν ἐνταῦθα προβλήματά τινα.

Πρόβλημα α'.

Εὑρεθήτωσαν ἀριθμοὶ χ τοιοῦτοι, ὥςε ἐὰν τετραγωνισθῶσι, καὶ διπλασιασθῶσι, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρεθῶσι 2, τὸ λεῖψανον νὰ εἶναι τετράγωνον

Κατασκευή.

Ἔςω χ ὁ ἀριθμὸς, καὶ τούτου τὸ τετράγωνον $2\chi^2$, καὶ ἐὰν 2 ἀφέλωμεν $2\chi^2 - 2$, τοῦτο μένει τετράγωνον· καὶ ἐπειδὴ τοῦτο λύεται εἰς παράγοντας $2(\chi+1)(\chi-1)$ θῶμεν $\sqrt{(2(\chi+1)(\chi-1)} = \dfrac{\mu(\chi-1)}{\nu}$

$$\text{ἄρα}\quad 2(\chi+1)(\chi-1) = \frac{\mu^2(\chi-1)^2}{\nu^2}$$

$$2\nu^2(\chi+1) = \mu^2(\chi-1)$$

$$2\nu^2\chi + 2\nu^2 = \mu^2\chi - \mu^2$$

$$2\nu^2 + \mu^2 = \mu^2\chi - 2\nu^2\chi.$$

$$\chi = \frac{\mu^2 + 2\nu^2}{2\nu^2 - \mu^2}$$

ἐὰν θῶμεν $\mu = 1$, καὶ $\nu = 1$, ἔςαι καὶ $\chi = 3$· ἄρα $3.\ 3.\ 2 - 2 = 16 = 4^2$· ἔτι $\mu = 3$ καὶ $\nu = 2$, ἔςαι $\chi = -17$· ἄρα $2. -17. -17 - 2 = 576 = 24^2$. κτ.

Πρόβλημα β'.

Ὁ τύπος $6 + 13\chi + 6\chi^2$ μετασχηματισθήτω εἰς τετράγωνον· ὅθεν $\alpha = 6$, $\beta = 13$ καὶ $\gamma = 6$· ὅθεν οὔτε α, οὔτε β τετράγωνον· βλέπομεν ὅμως ὅτι $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 25$ εἶναι ἐντελὲς τετράγωνον· ἄρα λύεται εἰς παράγοντας, οἵτινες εἰσὶ κατὰ (§. 793) $(6\chi + 4)(\frac{3}{2} + \chi)$, ἤτοι $(2 + 3\chi)(3 + 2\chi)$ δηλ: ὅταν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τὸν μὲν διε-

ζητ:	διδ:	A	τύποι	δείξεις
τ	α, π, ν	1	$\tau=\alpha\pi^{\nu-1}$	ἐκ τῆς I
	α, π, K	2	$\tau=\frac{\alpha+(\pi-1)K}{\pi}$	ἐκ τῆς II
	π, ν, K	3	$\tau=\frac{\pi^{\nu-1}+(\tau-1)K}{\pi-1}$	τὸ α ἐκ τῆς I εἰς τὴν II μετακομισθὲν
	α, ν, K	4	$\tau=\frac{\alpha(K-\alpha)^{\nu-1}}{(K-\tau)^{\nu-1}}$	τὸ π ἐκ τῆς I εἰς τὴν II ἐν ταῖς ἄνωτ: ἐξισ:
K	α, π, τ	5	$K=\frac{\tau\pi-\alpha}{\pi-1}$	ἐκ τῆς II
	α, π, ν	6	$K=\frac{\alpha(\pi^{\nu}-1)}{\pi-1}$	τὸ τ ἐκ τῆς I εἰς τὴν II
	π, ν, τ	7	$K=\frac{\tau(\pi^{\nu}-1)}{\pi^{\nu-1}(\pi-1)}$	τὸ α ἐκ τῆς I εἰς τὴν II
	α, ν, τ	8	$K=\frac{\tau^{\frac{\nu}{\nu-1}}-\alpha^{\frac{\nu}{\nu-1}}}{\tau^{\frac{1}{\nu-1}}-\alpha^{\frac{1}{\nu-1}}}$	τὸ π ἐκ τῆς I εἰς τὴν II εἰς τὰς ἄνωτ: ἐξισ:
α	π, ν, τ	9	$\alpha=\frac{\tau}{\pi^{\nu-1}}$	ἐκ τῆς I
	π, τ, K	10	$\alpha=\tau\pi-(\pi-1)K$	ἐκ τῆς II
	π, ν, K	11	$\alpha=\frac{(\pi-1)K}{\pi^{\nu}-1}$	τὸ τ ἐκ τῆς I εἰς τὴν II
	ν, τ, K	12	$\alpha=\frac{\tau(K-\tau)^{\nu-1}}{(K-\alpha)^{\nu-1}}$	τὸ π ἀπὸ τῆς I εἰς τὴν II ἐν ταῖς ἄνωτ:
π	α, ν, τ	13	$\pi=\sqrt[\nu-1]{\frac{\tau}{\alpha}}$	ἐκ τῆς I
	α, τ, K	14	$\pi=\frac{K-\alpha}{K-\tau}$	ἐκ τῆς II
	α, ν, K	15	$\pi^{\nu}=\frac{K}{\alpha}\pi+\frac{\alpha-K}{\alpha}$	τὸ τ ἐκ τῆς I εἰς τὴν II εἰς τὰς ἄνωτ.
	ν, τ, K	16	$\pi^{\nu}=\frac{K}{K-\tau}\pi^{\nu-1}-\frac{\tau}{K-\tau}$	τὸ α ἐκ τῆς I εἰς τὴν II ἐν ταῖς ἄνωτ:
ν	α, π, τ	17	$\pi^{\nu}=\frac{\tau\pi}{\alpha}$	ἐκ τῆς I διαλογ:
	α, τ, K	18	$\left(\frac{K-\alpha}{K-\tau}\right)^{\nu-1}=\frac{\tau}{\alpha}$	τὸ π ἐκ τῆς I εἰς τὴν II διὰ λογ:
	π, τ, K	19	$\pi^{\nu}=\frac{\tau\pi}{\tau\pi-(\pi-1)K}$	τὸ α ἐκ τῆς I εἰς τὴν II διὰ λογ:
	α, π, K	20	$\pi^{\nu}=\frac{\alpha+(\pi-1)K}{\alpha}$	τὸ τ ἐκ τῆς I εἰς τὴν II διὰ λογ:

λωμεν, τὸν δὲ πολλαπλασιάσωμεν, τὸ παραγόμενον μένει τὸ αὐτό.

Θῶμεν τοίνυν $\sqrt{(2+3\chi)(3+2\chi)} = \frac{\mu(2+3\chi)}{\nu}$

$$(2+3\chi)(3+2\chi) = \frac{\mu^2(2+3\chi)^2}{\nu^2}$$

$$(3+2\chi) = \frac{\mu^2(2+3\chi)}{\nu^2}$$

$$3\nu^2+2\nu^2\chi = 2\mu^2+3\mu^2\chi$$

$$3\nu^2-2\mu^2 = 3\mu^2\chi-2\nu^2\chi$$

$$\chi = \frac{3\nu^2-2\mu^2}{3\mu^2-2\nu^2}.$$

ἔςω $\mu=6$· καὶ $\nu=5$· ἄρα $\chi=\frac{3}{58}$· ἐὰν δὲ τοῦτο εἰς τὸν τύπον $6+13\chi+6\chi^2$ θῶμεν, εὑρίσκομεν τετράγωνον.

Πρόβλημα γ'.

Ζητηθήτωσαν οἱ ἀριθμοὶ χ, ὧν τὰ τετράγωνα, ἐὰν διπλασιασθῶσι, γίνονται ἕτερα τετράγωνα πλέον μιᾶς μονάδος, ὡς τὸ τετράγωνον 25, τὸ διπλοῦν εἶναι $49+1$· ἄρα ὁ τύπος εἶναι $2\chi^2-1$· ὅθεν παραβαλλόμενον μὲ τὸν ἡμέτερον τρόπον, ἔςαι $\alpha=-1$· $\beta=0$· καὶ $\gamma=2$· λοιπὸν τοῦτο μήτε κατὰ τὸν πρῶτον λύεται, ὅτι γ δὲν εἶναι τετράγωνον· μήτε κατὰ τὸν δεύτερον, ὅτι $\alpha=1$· δὲν εἶναι τετράγωνον, οὔτε μὴν κατὰ τὸν τρίτον, ὅτι $\beta^2-4\alpha\gamma$ δὲν εἶναι τετράγωνον· ἐπειδὴ ὅμως $2\chi^2-1=\chi^2+(\chi^2-1)=\chi^2+(\chi+1)(\chi-1)$ εὑρίσκομεν καὶ τέταρτον τρόπον τῆς λύσεως τῶν τοιούτων, ὅταν ὁ τύπος εὑρίσκεται ἔχων δύο μέρη, τὸ μὲν τετράγωνον, τὸ δὲ παραγόμενον ἀπὸ δύο παράγοντας, ὡς $\chi^2+(\chi+1)(\chi-1)$· διότι οὕτω τίθεμεν τὴν ῥίζαν $\sqrt{(\chi^2+(\chi+1)(\chi-1))}=\chi+\frac{\mu(\chi+1)}{\nu}$

$$\chi^2+(\chi+1)(\chi-1)=\chi^2+\frac{2\mu\chi(\chi+1)}{\nu}+\frac{\mu^2(\chi+1)^2}{\nu^2}$$

$$\chi-1=\frac{2\mu\chi}{\nu}+\frac{\mu^2(\chi+1)}{\nu^2}$$

$$\cdot\ \nu^2$$

$$\nu^2\chi-\nu^2=2\mu\nu\chi+\mu^2\chi+\mu^2$$

$$\nu^2\chi-2\mu\nu\chi-\mu^2\chi=\mu^2+\nu^2$$

$$\chi=\frac{\mu^2+\nu^2}{\nu^2-2\mu\nu-\mu^2}$$

Θῶμεν ἤδη $\mu=1$, καὶ $\nu=1$, καὶ ἔσαι $\chi=1$· ἄρα $2\chi^2-1=1$· Θῶμεν ἔτι $\mu=2$, καὶ $\nu=2$, καὶ ἔσαι $\chi=\frac{8}{-8}=-1$· καὶ $2\chi^2-1=1$· Θῶμεν ἔτι $\mu=1$, καὶ $\nu=2$· ἄρα $\chi=\frac{5}{7}$ καὶ $2\chi^2-1=\frac{1}{49}$·
ἐὰν δὲ $\mu=1$, καὶ $\nu=-2$, ἔσαι $\chi=5$, ἢ $=-5$ καὶ $2\chi^2-1=49$ κτ.

Πρόβλημα δ΄.

Εὑρεθήτωσαν ἀριθμοὶ, ὧν τὰ τετράγωνα διπλὰ μετὰ δύο μονάδας εἶναι πάλιν τετράγωνα, ἤτοι ὁ τύπος οὗτος $2\chi^2+2$ νὰ εἶναι τετράγωνον· αὐτοῦ $\alpha=2$, $\beta=0$, καὶ $\gamma=2$· ὅπου μήτε α τετράγωνον, μήτε γ, μήτε $\beta^2-4\alpha\gamma$· ἄρα κατὰ τὸν τέταρτον τύπον λύεται· πλὴν $2\chi^2+2=4+2\chi^2-2$· ἄρα $4+2(\chi+1)(\chi-1)$ καὶ ἡ ῥίζα τούτου $\sqrt{(4+2(\chi+1)(\chi-1))}=2+\frac{\mu(\chi+1)}{\nu}$

$$4+2(\chi+1)(\chi-1)=4+\frac{4\mu(\chi+1)}{\nu}+\frac{\mu^2(\chi+1)^2}{\nu^2}$$

$$2\chi-2=\frac{4\mu}{\nu}+\frac{\mu^2\chi+\mu^2}{\nu^2}$$

$$2\nu^2\chi-2\nu^2=4\mu\nu+\mu^2\chi+\mu^2.$$

$$\chi=\frac{4\nu\mu+2\nu^2+\mu^2}{2\nu^2-\mu^2}$$

Θῶμεν ἤδη $\mu=1$, καὶ $\nu=1$ καὶ ἔςαι $\chi=7$· ἄρα $2\chi^2+2=100$. ἔτι $\mu=0$, καὶ $\nu=1$ ἔςαι $\chi=1$ καὶ $2\chi^2+2=4$. κτ.

§. 795. Συμβαίνουσι πολλάκις τύποι τοιοῦτοι τετραγωνικοὶ· νὰ μὴ λύονται κατὰ τοὺς πρώτους τρεῖς τρόπους· ἐὰν δὲ κατὰ τὸν τέταρτον τρόπον νὰ λύσωμεν αὐτοὺς θέλωμεν, ἀμηχανοῦμεν πῶς νὰ λύσωμεν αὐτοὺς εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ μὲν τετράγωνον, τὸ δὲ παραγόμενον, ὡς εἰς τὸν τύπον $7+15\chi+13\chi^2$ τοῦτον· οὗτος γίνεται μὲν ἐντελὲς τετράγωνον, πλὴν εἰς τὸν πρῶτον τρόπον δὲν λύεται, διότι $\gamma=13$ δὲν εἶναι τετράγωνον, οὔτε κατὰ τὸν δεύτερον, ὅτι $\alpha=7$ δὲν εἶναι τετράγωνον, οὔτε κατὰ τὸν τρίτον, ὅτε $\beta^2-4\alpha\gamma=15.\,15-4.\,7.\,13$ δὲν εἶναι τετράγωνον· ἄρα κατὰ τὸν τέταρτον· διότι $(1-\chi)^2+(2+3\chi)(3+4\chi)=7+15\chi+13\chi^2$· διότι ἐὰν $(1-\chi)^2=1-2\chi+\chi^2$ ἀφέλωμεν ἀπὸ τοῦ $7+15\chi+13\chi^2$· ἔςαι $6+17\chi+12\chi^2$· καὶ αὐτοῦ ἔςαι $\beta^2-4\alpha\gamma=17.\,17-4.6.\,12=1$· ἄρα κατὰ τὸν τρίτον τρόπον ἔςαι $6+17\chi+12\chi^2=(2+3\chi)(3+4\chi)$ καὶ ἑπομένως κατὰ τὸν τέταρτον τρόπον ἔςαι

$$\sqrt{(1-\chi)^2+(2+3\chi)(3+4\chi)}=1-\chi+\frac{\mu(3+4\chi)}{\nu}$$

$$(1-\chi)^2+(2+3\chi)(3+4\chi)=(1-\chi)^2+\frac{2\mu(1-\chi)(3+4\chi)}{\nu}+$$

$$\frac{\mu^2(3+4\chi)^2}{\nu^2},\ 2+3\chi=\frac{2\mu-2\mu\chi}{\nu}+\frac{3\mu^2+4\mu^2\chi}{\nu^2}$$

$$2\nu^2+3\nu^2\chi=2\mu\nu-2\mu\nu\chi+3\mu^2+4\mu^2\chi$$

$$3\nu^2\chi+2\mu\nu\chi-4\mu^2\chi=2\mu\nu-2\nu^2$$

καὶ τέλος $\chi=\dfrac{2\mu\nu-2\nu^2}{3\nu^2+2\mu\nu-4\mu^2}$ ἢ $=-\dfrac{2\nu^2-2\mu\nu}{4\mu^2-3\nu^2-2\mu\nu}$.

Θῶμεν ἤδη ἀντὶ μ καὶ ν οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς, καὶ ἔςαι ὁ τύπος ὁ ἄνω τετράγωνος·

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ λύσις ἑκάςου τύπου εἰς δύο μέρη τοιαῦτα εὐκόλως δὲν εὑρίσκεται· δείξομεν ἤδη μέθοδόν τινα, διὰ νὰ γνωρίζωμεν πρότερον, ἂν ἡ λύσις τοῦ δοθέντος τύπου εἶναι δυνατὴ, ἢ ἀδύνατος· διότι πλῆθος τύπων δίδονται ὅπου παντελῶς δὲν λύονται ὡς οὗτος $3\chi^2+2$· κτ.

§. 790 α΄. Εἰς τοῦτο πρέπει πρῶτον νὰ παρατηρήσωμεν, ἂν ὁ δοθεὶς τύπος $\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2$ ἐξέρχεται τετράγωνον, ἐὰν θῶμεν $\chi=1=2=3=4=5$ κτ. καὶ ἐπειδὴ πολλάκις δίδεται ὁ χ κλασματικὸς, διὰ νὰ ἐξέλθῃ ὁ τύπος τετράγωνον, ὅταν δοκιμάσωμεν μὲ χ = ἀριθμῷ ἀκεραίῳ, καὶ δὲν ἐξέρχεται.

β΄. Θέτομεν $\chi=\frac{\tau}{\omega}$ εἰς τὸν τύπον, καὶ γίνεται $\alpha+\frac{\beta\tau}{\omega}+\frac{\gamma\tau^2}{\omega^2}$, ὅςις ἐντελὲς ἂν εἴη τετράγωνον· ἄρα καὶ ἐὰν διὰ ω^2 πολλαπλασιάσωμεν τὸ παραγόμενον, καὶ αὖθις τετράγωνον (§. 299). καὶ γίνεται ὁ τύπος $\omega^2\alpha+\beta\tau\omega+\gamma\tau^2$. ὅθεν εἰς αὐτὸν θέλομεν ἀντὶ τ καὶ ω ἀριθμοὺς ἀκεραίους, καὶ ἐὰν καὶ οὕτως δὲν ἀποβῇ τετράγωνον, ὑποπτευόμεθα ὅτι ὁ τύπος εἰς λύσιν ἀδύνατος· ἐὰν ἐξ ἐναντίας ἐξέρχεται τετράγωνον, εὑρίσκομεν χ ἀντὶ τίνος κλάσματος νὰ ληφθῇ, διὰ νὰ ἐξέλθῃ ὁ τύπος τετράγωνον, ἤτοι $\chi = \frac{\tau}{\omega}$

γ'. Ὅταν οὕτως ἐξέλθῃ ὁ τύπος τετράγωνον, καὶ εὑρεθῇ $\chi =$ ἑνὶ ἀριθμῷ· τοῦτον λαμβάνομεν μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου $+ \psi$, δηλ: $\chi = \pm \delta$· οὕτως $\psi \pm \delta$· καὶ τοῦτο τὸ διώνυμον ἀντὶ χ θέτομεν εἰς τὸν τύπον, καὶ ἐξέρχεται ὁ νέος τύπος, ὅστις εἰς δύο μέρη τῷ ὄντι τοιαῦτα λύεται, καὶ κατὰ τὸν δ' τρόπον ὁ τύπος εὑρίσκεται.

1). Δεδόσθω ὁ τύπος $2+7\chi\chi$, ὅπου $\alpha=2$· $\beta=0$· $\gamma=7$. οὗτος τῷ ὄντι ἐξέρχεται τετράγωνον, ἐὰν $\chi=1$ θῶμεν· διότι $2+7\chi^2=9$· ἄρα τίθεμεν $\chi=1+\psi$ καὶ ἔσται ὁ τύπος $2+7\chi^2=2+7+14\psi+7\psi^2=9+14\psi+7\psi^2$· καὶ ἔσονται τὰ δύο μέρη $9+\psi(14+\psi)$· ἐπεὶ δὲ $\psi=\chi=1$, ἔσται $2+7\chi^2= 9+(\chi-1)(7+7\chi)$ καὶ $2+7\chi^2= 9+(\chi-1)(7+7\chi)$. θῶμεν ἤδη κατὰ τὸν δ' τρόπον τὴν ῥίζαν

$$\sqrt{(9+(\chi-1)(7+7\chi)} = 3 + \frac{\mu(\chi-1)}{\nu},$$ καὶ εὑρίσκομεν $$\chi = \frac{6\mu\nu-7\nu^2-\mu^2}{7\nu^2-\mu^2}$$· καὶ ἐὰν ἀντὶ μ καὶ ν θῶμεν ἀριθμὸν, εὑρίσκομεν τετράγωνα διάφορα· ἔστω $\mu=1$, καὶ $\nu=1$· καὶ ἔχομεν $\chi = -\frac{1}{3}$ ἢ $\frac{1}{3}$· ἄρα $2+7\chi^2 = \frac{25}{9}$.

ἔτι $\mu=3$, καὶ $\nu=1$, καὶ ἑπομένως $\chi=-1$ ἢ $=1$· ἄρα $2+7\chi^2=9$.

ἔτι $\mu=3$, καὶ $\nu=-1$ ἔχομεν $\chi=17$· ἄρα $2+7\chi^2=2025=45^2$

ἔτι $\mu=8$ καὶ $\nu=3$ καὶ $\chi=-17$ ἢ $=17$· ἐὰν δὲ $\mu=8$

καὶ $\upsilon = -3$, ἔςαι $\chi = 271$· καὶ $2+7\chi^2 = 514089 = 717^2$.

2). Ἔςω ὅτι ὁ τύπος $5\chi^2+3\chi+7$. καὶ εἰς αὐτὸν ἐὰν τεθῇ $\chi=-1$, ἐξέρχεται ὁ τύπος $=9$ τετράγωνον· ἄρα $\chi = \psi - 1$· ἐὰν δὲ τοῦτο εἰς τὸν τύπον θῶμεν, ἔςαι

$$\begin{array}{l}5\chi^2 = 5\psi^2 - 10\psi + 5.\\ 3\chi \;= \qquad 3\psi - 3\\ 7 \qquad\quad = \quad 7.\\ \hline 5\psi^2 - 7\psi + 9 = 9 + \psi(5\psi - 7).\end{array}$$

ἐπειδὴ $\psi = \chi + 1$, ἔςαι $7+3\chi+5\chi^2 = 9+(\chi+1)(5\chi-2)$ ἐὰν ὅμως θῶμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν $\sqrt{(9+\psi(5\psi-7)} = 3 - \frac{\mu\psi}{\upsilon}$, εὑρίσκομεν κατὰ τὸν τέταρτον τρόπον $\psi = \frac{7\upsilon^2 - 6\mu\upsilon}{5\upsilon^2 - \mu^2}$ καὶ $\chi = \frac{2\upsilon^2 - 6\mu\upsilon + \mu^2}{5\upsilon^2 - \mu^2}$· ἔςω τοίνυν $\mu = 2$ καὶ $\upsilon = 1$· ἄρα $\chi = -6$, καὶ $5\chi^2+3\chi+7 = 169 = 13^2$.

3). Εἰς τὸν δοθέντα τύπον $7\chi^2+15\chi+13$ παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν χ ἴσον ἀκεραίῳ ἀριθμῷ λάβωμεν· ὁ τύπος τετράγωνου δὲν ἐξέρχεται· ἄρα λαμβάνομεν $\chi = \frac{\tau}{\omega}$ καὶ ἔςαι ὁ τύπος· $7\frac{\tau^2}{\omega^2} + 15\frac{\tau}{\omega} + 13$· ἐὰν δὲ διὰ ω^2 πολλαπλασιάσωμεν, ἔςαι $7\tau^2+15\tau\omega+13\omega^2$· ἐὰν δ' εἰς αὐτὸν τὸν τύπον θῶμεν $\tau=1$ καὶ $\omega=1$, ὁ τύπος γίνεται

$$\begin{array}{llll}\tau = 1\cdot & \text{καὶ } \omega = 1 & = & 35\\ \tau = 2 & \omega = 1 & = & 71\\ \tau = 2 & \omega = -1 & = & 11\\ \tau = 3 & \omega = 1 & = & 121.\end{array}$$

ἀλλ' 121 εἶναι τετράγωνον· ἄρα $\chi = \frac{3}{1} = 3$, καὶ ἑπομένως $\chi = 3 + \psi$· θέτομεν εἰς τὸν τύπον $7\chi\psi + 15\chi +$

13 οὕτω

$$\begin{array}{l} 7\chi\psi = 7\psi\psi + 42\psi + 63 \\ 15\chi = \quad 15\psi + 45 \\ 13 = \quad +13 \\ \hline 7\psi^2 + 57\psi + 121 = \end{array}$$

$121 + \psi(7\psi + 57)$· καὶ ἐπεὶ $\psi = \chi - 3$ ἄρα $7\chi^2 + 15\chi + 13 = 121 + (\chi - 3)(7\chi + 36)$· θῶμεν ἤδη τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν $\sqrt{(121 + \psi(7\psi + 57))} = 11 + \frac{\mu\psi}{\nu}$.

καὶ εὑρίσκομεν $\psi = \frac{57\nu^2 - 22\mu\nu}{\mu^2 - 7\nu^2}$

καὶ $\chi = \frac{36\nu^2 - 22\mu\nu + 3\mu^2}{\mu^2 - 7\nu^2}$

ἔϛω $\mu = 1$ καὶ $\nu = 1$· ἄρα $\chi = -\frac{17}{6}$ καὶ $7\chi^2 + 15\chi + 13 =$

$\frac{7.17^2}{6^2} - \frac{15.17}{6} + 13 = \frac{7.17^2 - 15.17.6 + 13.36}{36} =$

$\frac{2023 - 1530 + 468}{36} = \frac{961}{36} = \frac{31^2}{6^2}$.

ἔτι $\mu = 3$, καὶ $\nu = 1$· ἄρα $\chi = -\frac{3}{2}$ καὶ ὁ τύπος $\frac{25}{4} =$

$\frac{5^2}{2^2}$· ἔτι $\mu = 3$ καὶ $\nu = -1$· ἄρα $\chi = \frac{129}{2}$ καὶ ὁ τύπος

$\frac{120409}{4^2} = \frac{347^2}{2^2}$

Σημειώσεις. Δι' αὐτῆς τῆς μεθόδου ἐμάθομεν ἔτι, πῶς λύονται ἐκφράσεις εἰς παράγοντας, ὅπερ χρησιμεύει τὰ μάλιϛα εἰς πολλά.

Τέλος.