ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ
ΑΛΓΕΒΡΗΣ

ἐκδοθέντα

ὑπὸ

ΣΤΕΦΑΝΟΥ

Ἱεροδιακόνου τοῦ Θετταλοῦ

ΤΟΜΟΣ Β΄.

ἘΝ ΒΙΕΝΝΗ͂, ΤΗΣ ἈΟΥΣΤΡΙΑΣ

Ἐκ τῆς Τυπογραφίας τοῦ Ἰωάν. Βαρθ. Τζβέκιου.

1816.

ΜΕΡΟΣ Β'.

Περὶ κλασμάτων δεκαδικῶν.

§. 229. Ὅτι μὲν δεκαδικὰ κλάσματα ἐκεῖνα καλοῦσιν, ὁπου ἔχουσι περιοδικὸν ἀριθμὸν, εἴρηται (§. 186.)· ἐμάθομεν ὅμως ὅτι καὶ ἡ μονὰς διαιροῦσα ἕκαςον ἀριθμὸν δίδει πηλίκον τὸν αὐτὸν διαιρετέον, κἂν τε ὁλοσχερὴς ἦ, κἂν τε κλασματώδης ἀριθμός· ἐπὶ τούτοις εἴπομεν, ὅτι ὁ περιοδικὸς ἀριθμὸς, ὅταν διαιρῇ τινα ἀριθμὸν, κόπτομεν ἀπ' αὐτοῦ μόνον τόσους χαρακτῆρας πρὸς τὰ δεξιὰ, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ περιοδικὸς ἀριθμὸς, καὶ ὁ μένων ἀριθμὸς πρὸς τ' ἀριςερὰ εἶναι τὸ πηλίκον (§. 117.) ὡς $5200:10=520$, καὶ $5200:100=52$, καὶ $5200:1000=5\frac{200}{1000}$.

Δεδόσθω καὶ ὁ ἑξῆς 5637891 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 100, οὕτω $5637891:100=56378\frac{91}{100}$· ἐὰν δὲ διὰ τοῦ 1000, τὸ πηλίκον $=5637\frac{891}{1000}$· ἐὰν δὲ διὰ τοῦ 10000, τὸ πηλίκον $=563\frac{7891}{10000}$· διὰ δὲ τοῦ 100000, τὸ πηλίκον $=56\frac{37891}{100000}$· καὶ διὰ τοῦ 1000000, τὸ πηλίκον $=5\frac{637891}{1000000}$· καὶ διὰ τοῦ 10000000, τὸ πηλίκον =

$0,\frac{5637891}{10000000}$· τί λοιπὸν ἔγινεν εἰς τὰς διαιρέσεις αὐτάς; ἢ ὅτι ὁ ἀριθμὸς ὁ αὐτὸς μένει, ἐκτὸς μόνου ὅτι χαρακτῆρας πρὸς τὰ δεξιὰ κόπτομεν τόσους, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ περιοδικὸς ἀριθμὸς, καὶ οὗτοι εἰς κλάσμα παρίςανται, εἰς τὸ ὁποῖον οἱ μὲν κεκομμένοι χαρακτῆρες ἀριθμητὴς γίνονται, ὁ δὲ περιοδικὸς, παρονομαςής· ἄρα τὰ κλάσματα τὰ δεκαδικὰ δὲν εἶναι ἄλλο, εἰ μὴ λείψανα διαιρέσεώς τινος, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐλάττονα τοῦ διαιρέτου, ὁποῦ εἶναι περιοδικὸς ἀριθμός.

§. 230. Εἰς αὐτὰ τὰ κλάσματα βλέπομεν, ὅτι ὅσοι χαρακτῆρες εἶναι εἰς τὸν ἀριθμητὴν, τόσα μηδενικὰ εἶναι εἰς τὸν παρονομαςήν. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ διαιρετέος μένει ὁ αὐτὸς, ἐκτὸς μόνου ὅτι κόπτονται τόσοι χαρακτῆρες, ὅσα τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου, ἄρα ἡ ἄνω διαίρεσις τοῦ ἀριθμοῦ 5637891 δίδει καὶ οὕτω τὸ πηλίκον 563789,1· ἔνθα ἡ μὲν διαςολὴ διαςέλλει τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν πρὸς ἀριςερὰ, ὁ δὲ δεξιὸς ἀριθμὸς μετὰ τὴν διαςολὴν σημαίνει τὸ δεκαδικὸν κλάσμα, ἓν δεκατημόριον. Ἐπειδὴ εἷς ὁ χαρακτὴρ, ἓν καὶ τὸ μηδενικὸν τοῦ διαιρέτου, ἤτοι τοῦ παρονομαςοῦ· τοῦτο δὲ 56378,91 εἶναι ὡς ἀνωτέρω ἀκέραιος ἀριθμὸς, καὶ κλάσμα 91, ἤτοι ἐννήκοντα ἓν ἑκατοςημόριον· καὶ ἔτι 5637,891 ὁ ἀριθμὸς 891 εἶναι χιλιοςημόρια· καὶ οὕτω 563,7891, οὗτος ὁ 7891 εἶναι δεκαχιλιοςημόρια, ὅτι τέσσαρα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαςής. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ παρονομαςὴς αὐτῶν τῶν κλασμάτων γνωρίζεται, συνηθίζουσιν οἱ ἀριθμητικοὶ οὕτως ἄνευ παρονομαςοῦ νὰ ἐκφράζωσι ταῦτα τὰ κλάσματα, μόνον μετὰ μιᾶς διαςολῆς. Ὅθεν καὶ $5,\frac{1}{10}=5,1$ καὶ ἔτι $23,48=23\frac{48}{100}$·

καὶ $1,53200=1\frac{53200}{100000}$ κτ: διὸ καὶ τοῦτο $0,1234=$ $\frac{1234}{10000}$· ἔνθα φανερὸν ὅτι οὐδὲν εὑρίσκεται ἀκέραιον.

§. 231. Ἔτι προκείσθω ὁ διαιρετέος 52003 νὰ διαιρεθῇ μὲ 1000, ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι $52,003=52\frac{003}{1000}$· ὅθεν εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα τὰ μηδενικὰ πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ μεταβάλλουσι τὸν ἀριθμόν· διότι δὲν εἶναι ταὐτὸν 52,003, καὶ 52,3· καθότι τὸ μὲν κλάσμα 003 σημαίνει χιλιοστημόρια τρία, ἐπειδὴ ὑπονοεῖται ὁ παρονομαστὴς 1000· τὸ δὲ 3 σημαίνει δεκατημόρια τρία, τοῦ 10 ὑπονοουμένου παρονομαστοῦ· διὸ καὶ δὲν πρέπει νὰ παραμελήσωμεν τὰ μηδενικὰ πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὰ ἀριστερὰ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ὡς εἰς τοὺς ἀκεραίους λέγομεν (§. 18.)· μετὰ δὲ τοὺς ἀριθμοὺς εἰς τὰ δεξιὰ τὰ μηδενικὰ δὲν σημαίνουσι τίποτα, ὅσα καὶ ἂν προσθῶμεν· ὅθεν $53,3=53,30000$· διότι τὰ $,30000=\frac{30000}{100000}=\frac{3}{10}$. διὸ καὶ κάθε ἀκέραιον ἀριθμὸν ποιοῦμεν εἰς κλάσμα δεκαδικόν, ἀφ' οὗ θῶμεν ἓν κόμμα, καὶ μετὰ τὸ κόμμα μηδενικά. 321.0000:

§. 232. Ἐκ τούτων γίνεται δῆλον· Α'. ὅτι καθὲ δεκαδικὸν κλάσμα εὐκόλως εἰς κλάσμα τακτικὸν μεταποιοῦμεν, ὅταν θῶμεν παρονομαστὴν μονάδα μὲ μηδενικὰ σημεῖα τόσα, ὅσοι χαρακτῆρες εἰς τὸ δεκαδικὸν εὑρίσκονται, ὡς $56,132=56\frac{132}{1000}$· καὶ $56,007=56\frac{007}{1000}$.

Β'. Δυνάμεθα τὸ δκεαδικὸν κλάσμα μετὰ ἀκεραίου ὅλου ὁμοῦ εἰς κλάσμα ἓν δεκαδικὸν μεταποιεῖν, γράφοντες κατὰ τάξιν τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀκέραιον, καὶ τὸ δεκαδικὸν ἄνευ κόμματος εἰς ἀριθμητὴν, καὶ εἶτα παρονομαςὴν ἐκεῖνον, ὁποῦ ἀπήτει τὸ δεκαδικὸν μόνον· $32{,}134=\frac{32134}{1000}$· καὶ $5671{,}0023=\frac{56710023}{10000}$.

Γ΄. Ἀνάπαλιν, καθε κλάσμα, ὁποῦ ἔχει παρονομαςὴν περιοδικὸν ἀριθμὸν, εἰς δεκαδικὸν μεταβάλλεται, ἐὰν πρὸς τὰ δεξιὰ τόσους χαρακτῆρας κόψωμεν, ὅσα ἔχει μηδενικὰ ὁ παρονομαςής· ἐὰν ὅμως ὁ ἀριθμητὴς δὲν ἔχει τόσους χαρακτῆρας, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ, πρὸς τ' ἀριςερὰ ἀναπληροῦμεν τὸν τόπον τῶν χαρακτήρων μὲ μηδενικὰ σημεῖα μέχρι τοῦ κόμματος, καὶ εἰς τὸν τόπον τῶν ἀκεραίων μηδενικὸν γράφομεν· $\frac{78923}{100}=789{,}23$. καὶ $\frac{2367102}{10000}=236{,}7102$· καὶ $\frac{56}{100}=0{,}56$. και $\frac{53}{10000}=0{,}0053$. καὶ $\frac{2}{1000000}=0{,}000002$.

Δ΄. Πρὸς τ' ἀριςερὰ λοιπὸν τὰ μηδενικὰ τιθέμενα μεταβάλλουσι τὰ κλάσματα, πρὸς τὰ δεξιὰ δὲ οὐδαμῶς· ὅτι ἐπίσης πλεονάζουσι καὶ τὰ μηδενικὰ τοῦ παρονομαςοῦ, καὶ τὰ μηδενικὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, ἤτοι μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάζεται καὶ ὁ ἀριθμητὴς, καὶ ὁ παρονομαςὴς, καὶ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος δὲν χαλᾷ· (§. 92.) · ὅθεν καὶ 5,3=5,300 κτ.

Ε΄. Κλάσματα δεκαδικὰ εὐκόλως φέρονται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν, ἐὰν μηδενικὰ προςεθῶσιν εἰς τὸ ἔχον ὀλιγωτέρους χαρακτῆρας, ἕως οὗ νὰ γένῃ ὅμοιον μὲ τὸ ἔχον τοὺς χαρακτῆρας πλείονας. Ἔςω 52,3, καὶ 31,534, εἰς ἕνα παρονομαςὴν ταῦτα ἔρχονται ἀμέσως, ἐὰν καὶ τοὺς 52,3 μὲ κλάσμα τριῶν χαρακτήρων ποιήσωμεν· οὕτω 52,300· καὶ ἔτι δέκα αὐτοῦ μίαν τοῦ ἐγγὺς ἀνωτέρου καὶ τὸ $\frac{300}{1000}$ καὶ τὸ $\frac{534}{1000}$ ἔχει τὸν αὐτὸν παρονομαςήν.

§. 233. Ἐκ πάντων τούτων μανθάνομεν, ὅτι τὰ δεκαδικὰ κλάσματα ἐλαττοῦνται κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύςημα, κατὰ τοὺς τόπους (§. 18.) δεκαπλασίως· οὕτως τὸ 0,5 εἶναι δεκαπλάσιον τοῦ 0,05· διότι ἐκεῖνο μὲν $\frac{5}{10}$, τοῦτο δὲ $\frac{05}{100}$· ἐὰν ἔτι ἕνα τόπον πρὸς τὰ δεξιὰ μεταβῇ, γίνεται ἔτι ἔλαττον δεκαπλασίως $0{,}005=\frac{5}{1000}=\frac{005}{1000}$· ὅθεν κἀνταῦθα δέκα μονάδες κατωτέρας τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα ἀνωτέρας τάξεως· ἔςω ὁ ἀριθμὸς 51,5345· δέκα μονάδες τοῦ τόπου 5, ἀποτελοῦσι μίαν τοῦ τόπου 4· καὶ δέκα αὐτοῦ μίαν τοῦ ἐγγὺς ἀνωτέρου 3, καὶ ἔτι δέκα αὐτοῦ μίαν τοῦ ἐγγὺς ἀνωτέρου 5, καὶ ἔτι δέκα αὐτοῦ μίαν τοῦ ἐγγὺς ἀνωτέρου τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν· διότι $\frac{10}{10}=1$ ἀκεραίῳ· διὸ καὶ ὅταν θέλωμεν ἕνα δεκαδικὸν κλάσμα νὰ δεκαπλασιάσωμεν, μόνον τὸ κόμμα ἕνα τόπον πρὸς τὰ δεξιὰ καταβιβάζομεν· ὅταν δὲ ἑκατονταπλασιάζωμεν, δύω τόπους, ὅταν δὲ χιλιοπλασιάζωμεν τρεῖς κτλ· οὕτω $51{,}5345\times10=515{,}345$ καὶ $51{,}5345\times100=5153{,}45$· καὶ $51{,}5345\times1000=51534{,}5$ καὶ ἔτι $51{,}5345\times10000=515345$· καὶ ὃν τρόπον τὰ κλάσματα τὰ δεκαδικὰ ἀναφύονται, ὅταν διὰ περιοδικοῦ ἀριθμοῦ διαιροῦμεν κόπτοντες τόσους χαρακτῆρας, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ περιοδικὸς διαιρέτης, οὕτω καὶ τὰ δεκαδικὰ μεταβαίνουσιν εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν διὰ περιοδικοῦ· ἐπ' ἀναβιβάζοντες τόσους χαρακτῆρας τοῦ δεκαδικοῦ, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ περιοδικὸς πολλαπλασιαστής.

§. 234. Τὰ δεκαδικὰ κλάσματα ἐκφράζονται διχῶς· ἢ ὅλα ὁμοῦ, ὡς εἷς ἀριθμὸς, ὡς εἰς τὸ 2,257 δύω καὶ διακόσια πενῆντα ἑπτὰ χιλιοστημόρια, ὅτι ὁ χίλια ἀριθμὸς εἶναι ὁ παρονομαστὴς, ἢ ἀπὸ ἓν, ἓν, ὡς $2\frac{2}{10}+\frac{5}{100}+\frac{7}{1000}$.

ἤτοι 2, καὶ δύω δεκατημόρια, καὶ 5 ἑκατοστημόρια, καὶ 7 χιλιοστημόρια, διότι καὶ ταῦτα εἰς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν φέρομεν, οὕτω $\frac{2}{10}+\frac{5}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{200}{1000}+$ $\frac{50}{5000}+\frac{7}{1000}$ καὶ συνάπτομεν εἰς ἓν κεφάλαιον οὕτω

$$\begin{array}{r} 200 \\ 50 \\ \underline{7} \\ 257 \end{array}$$

καὶ εὑρίσκεται $\frac{257}{1000}=$ τῷ ἀνωτέρῳ.

Οὕτω καὶ $0{,}345670=\frac{3}{10}+\frac{4}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{6}{10000}+$ $\frac{7}{100000}+\frac{0}{1000000}$· καὶ οὕτως εὐκόλως εἰς ἕνα παρονομαστὴν φέρομεν αὐτὰ καὶ συνάπτομεν· καὶ ἐπειδὴ ταῦτα καλῶς ἐμάθομεν, μεταβαίνομεν εἰς τὰς τέσσαρας ἐργασίας τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Α'.

Περὶ τῶν τεσσάρων ἐργασιῶν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§. 235. Α'. Μαθόντες ὅτι τὰ δεκαδικὰ κλάσματα τηροῦσι τὸν αὐτὸν νόμον μὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα, καὶ ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους οὐδὲν διαφέρουσιν, εἰ μὴ κατὰ τὸ κόμμα τῆς διαστολῆς, εὐκόλως συνάπτομεν κάθε ἀριθμὸν μὲ δεκαδικὰ, καὶ χωρίς· ὅθεν ὅταν δοθῶσι μέρη δύω ἢ πολλὰ νὰ συναφθῶσιν εἰς ἓν κεφάλαιον, τὰ δὲ μέρη εἶναι ἢ μόνον δεκαδικὰ, ἢ δεκαδικὰ μὲ ἀριθμοὺς, ἐπειδὴ εἰς τὴν πρόσθεσιν τὰ ὁμώνυμα συνάπτονται (§. 41.), γράφομεν ὅλα τὰ μέρη ἕνα μετὰ τὸ ἄλλο ὑποκάτω, ὥστε νὰ εἶναι τῶν μὲν ἀριθμῶν αἱ μονάδες μὲ μονάδας, αἱ δεκάδες μὲ δεκάδες κτ: τῶν δὲ δεκαδικῶν κλασμάτων τὰ δεκατημόρια μὲ τὰ δεκατημόρια, τὰ 100 στημόρια, μὲ τὰ 100 στημόρια, τὰ 1000 στημόρ: μὲ τὰ 1000 στημ: καὶ τὰ ν μόρια, μὲ τὰ ν μόρια· καὶ ἔπειτα συνάπτομεν αὐτὰ ὅλα ὡς ἀκεραίους ἀριθμοὺς χωρὶς νὰ στοχασθῶμεν, ὅτι εἶναι δεκαδικὰ κλάσματα, εἰς ἓν κεφάλαιον. Ἔπειτα παρατηροῦμεν ἐκεῖνον τὸν προσθετέον, ὁποῦ ἔχει τοὺς πλείονας χαρακτῆρας τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, πόσους ἔχει χαρακτῆρας, καὶ τόσους κόπτομεν πρὸς τὰ δεξιὰ, καὶ ἀπὸ τὸ κεφάλαιον μὲ τὴν διαστολὴν εἰς δεκαδικὰ κλάσματα οἱ δὲ λοιποὶ ἀριστερὰ εἶναι ἀριθμὸς ὁλόκληρος.

„Εἰς ὅλα αὐτὰ τὰ παραδείγματα ἐγράψαμεν τὰ μέρη κατὰ τάξιν, εἶτα ὡς ἀκεραίους ἐπροσθέσαμεν αὐτὰ ἀριθμοὺς, ἐπειτα διεσείλαμεν τὸ κεφάλαιον μὲ τὸ κόμμα εἰς ἐκεῖνον τὸν τόπον, ὁποῦ εὑρίσκετο ἄνω καὶ εἰς τοὺς προσθετέους ἀριθμούς.

Παράδ: Α'

32,567
2,0004
0,3
564,1782
77,000045

676,045645

Β'

23,07543
0,923
6,0024

30,00083

Γ'

312
25,73
0,364

338,094

Δ'

3,04
25
43,0034
56,5
0,0025

127,5459

Β'. „Τὸ αὐτὸ καὶ περὶ Ἀφαιρέσεως λέγομεν· γράφομεν τὸν μειωτέον, καὶ ὑπ' αὐτὸν κατὰ τάξιν τὸν ἀφαιρετέον, ὥςε νὰ εἶναι ἕκαςος χαρακτὴρ τοῦ ἀφαιρετέου ὑποκάτω εἰς ὁμώνυμον χαρακτῆρα τοῦ μειωτέου, καὶ ἀφαιροῦμεν ὡς καὶ εἰς τοὺς ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς, χωρὶς νὰ ςοχασθῶμεν ὅτι εἶναι δεκαδικὰ κλάσματα, εἰς δὲ τὸ λείψανον κόπτομεν τόσους χαρακτῆρας διὰ τῆς διαςολῆς εἰς δεκαδικὰ κλάσματα, ὅσους εἰς τοὺς ἄνω δοθέντας τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων βλέπομεν· καὶ γίνεται ἡ βάσανος ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς (§. 54.)· τὰ αὐτὰ παρατηρητέον ὡς ἐκεῖ (§. 61.) καὶ εἰς τὰ σημεῖα + καὶ —.

Παράδειγ: Α'

56,43
3,54

52,89

παράδ: Β'

312,52567
48,037

264,48867

παρ: Γ'

5,008
0,78912

4,21888

Δ΄	Ε΄
135,72000	+ 56,45
42,35678	∓ 78,203
93,36322	134,653

Σημείωσαι ὅμως ὅτι ἐὰν ὁ μειωτέος δὲν ἔχει πρὸς τὰ δεξιὰ χαρακτῆρας τόσους, ὅσους ἔχει ὁ ἀφαιρετέος, πληροῦμεν αὐτοὺς τοὺς τόπους μηδενικῶν σημείων, ἡ ἐνεργείᾳ ἢ διὰ τοῦ νοός· διότι τὰ μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ εἰς τὰ κλάσματα τὰ δεκαδικὰ εἶναι ἀδιάφορα· ὅρας, εἰς μὲν τὸ Δ΄ παράδειγμα ἐνεργείᾳ ἐγράψαμεν τὰ μηδενικὰ, εἰς δὲ τὸ Γ΄ διὰ τοῦ νοός.

§. 236. Γ΄. Καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τὰ αὐτὰ λέγομεν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς παράγοντας ὡς ἀκεραίους ἀριθμοὺς, ἐάν τε δεκαδικὰ μόνον ἔχωσι, ἐάν τε ὁλοσχερεῖς καὶ δεκαδικὰ, ἐάν τε ὁ μὲν πάντη ὁλοσχερεῖς, ὁ δὲ πάντη δεκαδικὰ κλάσματα, εἰς τὸ παραγόμενον μόνον κόπτομεν εἰς δεκαδικὰ κλάσματα τόσους χαρακτῆρας, ὅσους ἔχουσιν ὁμοῦ οἱ δύω παράγοντες· διότι ἕκαστος παράγων ἔχει παρονομαστὴν μονάδα μὲ τόσα μηδενικὰ, ὅσοι εἶναι οἱ χαρακτῆρες τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων. (§. 230.). Ὅταν δὲ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ παράγοντες, πολλαπλασιάζονται καὶ οἱ παρονομασταὶ (§. 229.), ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς τούτων εἶναι νὰ γραφῶσι κατὰ συνέχειαν τὰ μηδενικὰ (§. 80.), καὶ τόσα, ὅσοι οἱ δεκαδικοὶ χαρακτῆρες τῶν δύω ὁμοῦ παραγόντων· ἄρα εἰς τὸ παραγόμενον τόσοι χαρακτῆρες εἰς δεκαδικὰ κόπτονται κλάσματα, ὅσοι εἶναι ὁμοῦ τῶν παραγόντων· ὅρα Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ παράδ:

Α΄

1,44
1,2
———
288
144
———
1,728

Β΄

3,046
0,32
———
6092
9138
———
0,97472

Γ΄

4523
3,24
———
18092
9046
13569
———
14654,52

Δ΄

0,4809
2006
———
28854
961800
———
964,6854

Ε΄

0,337
0,003
———
0,001011

§. 237. Ἐὰν δὲ οἱ χαρακτῆρες τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων τῶν παραγόντων πλείονες ὦσι τῶν χαρακτήρων τοῦ παραγομένου, τότε πληροῦμεν πρὸς ἀριστερὰ τοὺς τόπους τῶν ἐλλειπόντων χαρακτήρων μὲ μηδενικὰ, καὶ διὰ τοῦ κόμματος διαστέλλοντες τὸν τόπον τῶν ἀκεραίων, γράφομεν μηδενικὸν εἰς τὸν τόπον τῶν ὁλοσχερῶν, ὡς εἰς τὸ Ε΄ φαίνεται παράδειγμα.

§. 238. Ὅταν δὲ πολλαπλασιάζωμεν δεκαδικὰ κλάσματα μετὰ ἀριθμοῦ ὁλοσχεροῦς, καὶ χωρὶς, ἐπὶ περιοδικοὺς ἀριθμοὺς (§. 233.), τότε μόνον τὸ κόμμα πρὸς τὰ ἀριστερὰ τόσους τόπους μεταβιβάζομεν, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ περιοδικοῦ ἀριθμοῦ, ὡς 5,633 · 10=56,33 · κτ: Ἵνα ὅμως τὸ δεκαδικὸν εἰς ἀκέραιον μεταβάλλωμεν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν μὲ περιοδικὸν ἀριθμὸν, ὁποῦ ἔχει τόσα μηδενικὰ, ὅσους χαρακτῆρας δεκαδικῶν κλασμάτων ἔχει ὁ πολλαπλασιαστέος· οὕτως ὁ ἀριθμὸς

$53{,}302 \times 1000 = 53302$ καὶ $15{,}0003 \times 10000 = 150003$· καὶ $57{,}2 \times 10 = 572$ κτ: οὗτος ὁ τρόπος εἰς τὰς μεθόδους τῶν ἀναλογιῶν χρήσιμος, καὶ εἰς ἄλλα πολλά.

§. 239. Δ΄. Τὰ αὐτὰ λέγομεν καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, διαιροῦμεν ἐπαραλλάκτως ὡς εἰς τοὺς ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς, πλὴν εἰς τὸ πηλίκον διαςέλλομεν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα κατὰ τοὺς χαρακτῆρας, ὅπου ἔχουσιν ὁ διαιρέτης, καὶ διαιρετέος.

Α΄. Ἐὰν ὁ ἀριθμοὺς τῶν χαρακτήρων τοῦ διαιρέτου εἶναι ἴσος τοῖς χαρακτῆρσι τοῦ διαιρετέου, τότε ὅλον τὸ πηλίκον εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἄνευ δεκαδικοῦ κλάσματος, οἷον ἔςω διαιρετέος ὁ 7383,64 καὶ διαιρέτης ὁ 21,34, καὶ γραφήτωσαν ὡς ἀκέραιοι, καὶ διαιρεθήτωσαν κατὰ τοὺς κανόνας τῆς ἁπλῆς διαιρέσεως, ὡς εἰς τὸ Α΄ παράδειγμα φαίνεται. Ἐνταῦθα ἐπειδὴ δύω χαρακτῆρας δεκαδικοὺς ἔχει καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης, τὸ πηλίκον 346 εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός· διότι δεικνύεται ἐὰν τοὺς ἀριθμοὺς κλασματικῶς γράψωμεν, καὶ διέλωμεν· ἔςω ὁ διαιρετέος $7383{,}64 = \frac{738364}{100}$· ὁ δὲ διαιρέτης $21{,}34 = \frac{2134}{100}$· ἄρα $\frac{738364}{100} : \frac{2134}{100} = \frac{738364}{100} \cdot \frac{100}{2134} = \frac{738364}{2134} = 346$

Α΄

$$
\begin{array}{l}
7383{,}64 : 21{,}34 = 346 \\
\underline{6402} \\
9816 \\
\underline{8536} \\
12804 \\
\underline{12804} \\
0
\end{array}
$$

Β΄. Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν χαρακτήρων τοῦ διαιρετέου εἶναι μείζων ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν χαρακτήρων τοῦ διαιρέτου, εἰς τὸ πηλίκον τόσους χαρακτῆρας πρὸς τὰ δεξιὰ κόπτομεν εἰς δεκαδικὰ κλάσματα, ὅσους χαρακτῆρας ἔχει ὁ διαιρετέος πλείονας τῶν χαρακτήρων τοῦ διαιρέτου· ἔςω εἰς τὸ Β΄ παράδειγμα ὁ μὲν διαιρετέος 2879,793546· ὁ δὲ διαιρέτης 802,9, καὶ ὡς ἀκεραίους διαιροῦμεν, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 358674· ἐπειδὴ ὅμως ὁ μὲν διαιρετέος ἔχει ἓξ χαρακτῆρας δεκαδικοὺς, ὁ δὲ διαιρέτης μόνον ἕνα, καὶ 6—1=5, ἄρα ἀπὸ τοῦ πηλίκου πέντε χαρακτῆρες εἰς δεκαδικὰ κλάσματα μεταποιοῦνται· οὕτω 3,58674· ἡ δὲ δεῖξις ἡ ἀνωτέρω· ἔςω ὁ μὲν διαιρετέος $2879{,}793546=\frac{2879793546}{1000000}$, καὶ ὁ διαιρέτης $802{,}9=\frac{8029}{10}$ ἀλλὰ

Β΄

```
802,9|2879,793546=3,58674
       24087
       -----
       47109
       40145
       -----
        69643
        64232
        -----
         54115
         48174
         -----
          59414
          56203
          -----
           32116
           32116
           -----
               0
```

$$\frac{2879793546}{1000000}\cdot\frac{10}{8029}=\frac{2879793546}{802900000}=\frac{2879793546}{(8029)(100000)}$$

$$=\frac{2879793546}{8029}\cdot\frac{1}{100000}\cdot \text{ καὶ } \frac{2879793546}{8029}=358674\cdot$$

$$\text{ἄρα } 358674\cdot\frac{1}{100000}=\frac{358674}{100000}=3{,}58674.$$

Γ΄. Ἐὰν δὲ οἱ χαρακτῆρες τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων τοῦ διαιρέτου εἶναι πλείονες τῶν χαρακτήρων τῶν δεκαδικῶν τοῦ διαιρετέου, εἰς τὸ πηλίκον γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ κατὰ σειρὰν τόσα μηδενικὰ, ὅσους χαρακτῆρας δεκαδικοὺς ἔχει περισσοτέρους ὁ διαιρέτης. Ἔςω εἰς τὸ Γ' παράδειγμα ὁ μὲν διαιρετέος 17058907,2, ὁ δὲ διαιρέτης 8,403· καὶ διαιροῦμεν αὐτοὺς ὡς ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 20543· καὶ ἐπειδὴ ὁ μὲν διαιρέτης ἔχει τρία δεκαδικὰ, ὁ δὲ διαιρετέος ἕν, ἔςαι 3—1=2· ἄρα εἰς τὸ πηλίκον δύω μηδενικὰ γράφομεν· οὕτω 2030400· ἡ δεῖξις ἡ αὐτή· ὁ

Γ'

```
8,304| 170589072|2054300
        16608
        -----
        45090
        41520
        -----
         35707
         33216
         -----
          24912
          24912
          -----
              0
```

μὲν διαιρετέος $170589072=\frac{170589072}{10}$· ὁ δὲ διαιρέτης $8,304=\frac{8304}{1000}$ λοιπὸν $\frac{170589072}{10}:\frac{8304}{1000}=$
$\frac{170589072}{10}\cdot\frac{1000}{8304}=\frac{17058907200}{8304}=2054300.$

Καὶ φανερὸν εἰς τὸν Α' καὶ Γ' τρόπον τὸ πηλίκον πάντοτε ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς δίδεται· πλὴν ὅρα, ὅτι εἰς αὐτὰ τὰ παραδείγματα ἦτον ὁ διαιρέτης ἐπ' ἀκριβὲς εἰς τὸν διαιρετέον· ὅταν δὲ ὁ διαιρέτης δὲν εἶναι ἐπ' ἀκριβὲς, τότε πάλιν εἰς πλείονα δεκαδικὰ διαιροῦμεν· πῶς ὅμως γίνεται, τὸ ἑξῆς κεφάλαιον θέλει μᾶς διδάξει· καὶ εἰς αὐτὸ μανθάνομεν ἔτι ἕτερον τρόπον εὐκολώτερον διαιρέσεως, καὶ ἄλλας ὠφελείας τῶν κλασμάτων τῶν δεκαδικῶν.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ μεταβολῆς Ἀριθμῶν Καὶ κλασμάτων οἱωνδήποτε εἰς δεκαδικὰ κλάσματα, ἔνθα καὶ περὶ διαιρέσεως, καὶ ἄλλων ὠφελίμων.

§. 240. Ἀνωτέρω ἐμάθομεν (§. 232.), ὅτι ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς μεταβάλλεται εἰς δεκαδικὸν κλάσμα, ἐὰν μόνον κόμμα μετὰ τὸν ἀριθμὸν θῶμεν, καὶ μετὰ τὸ κόμμα ὅσα μηδενικὰ θέλομεν· οὕτω $354=354{,}000$· διότι $354{,}000=\frac{354000}{1000}=354$ (§. 92.). Ὅθεν δυνάμεθα καὶ ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος ὡς ὁλοσχερῆ ἀριθμόν. καὶ παρονομαστὴν εἰς δεκαδικὸν κλάσμα μεταποιεῖν οὕτω $\frac{3}{4}=\frac{3{,}00}{4}$, καὶ $\frac{3}{4}=\frac{3}{4{,}000}$ καὶ ἔτι $\frac{3}{4}=\frac{3{,}000}{4{,}000}$ κτ.

§. 241. Εἰς ὅλα τὰ γνήσια κλάσματα ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἀεὶ μείζων τοῦ ἀριθμητοῦ (§. 190.), ὁ δὲ παρονομαστὴς εἶναι διαιρέτης· ἐπειδὴ ὅμως ὁ διαιρέτης τὸν ἀριθμητὴν ὡς μικρότερον δὲν διαιρεῖ ὡς $\frac{3}{4}$· δυνάμεθα τοῦτο καὶ οὕτω γράφειν $\frac{3}{4}=\frac{3.\ 100}{4.\ 100}$ (§. 92.) $=\frac{300}{4}:100$· ἀλλὰ $300:4=75$· ἄρα $\frac{300}{4}:100=75:100=0{,}75$

(§. 229.)· ἄρα ὅσα μηδενικὰ γράφομεν εἰς τὸν διαιρετέον, τόσους χαρακτῆρας κόπτομεν ἀπὸ τοῦ πηλίκου εἰς δεκαδικὰ κλάσματα· διότι ὁ ἀριθμὸς οὕτω μένει ὁ αὐτός· τὸ γὰρ $\frac{3}{4}=0,75=\frac{75}{100}$· ὡς γὰρ ὁ 3 εἰς τὸν 4 ἅπαξ περιέχεται, καὶ ἓν αὐτοῦ τριτημόριον, οὕτω καὶ ὁ 75 εἰς τὸν 100 ἅπαξ περιέχεται, καὶ ἓν αὐτοῦ τριτημόριον 25· οὕτω καὶ $\frac{1}{2}=\frac{1,0}{2}=5:10=\frac{5}{10}=0,5$· ὁ δὲ κανὼν εἰς τὰ τοιαῦτα λέγει· ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς ἢ ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, γράφομεν μηδενικὰ μετὰ τὸν ἀριθμητὴν ὅσα ἂν θέλομεν, καὶ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ διαιροῦμεν, τὸ δὲ πηλίκον, ὁποῦ ἐξέρχεται μετὰ τούτων τῶν μηδενικῶν, γράφεται μετὰ τὸ κόμμα εἰς κλάσμα δεκαδικὸν, ὅπερ ἢ ἴσον ἔσται μὲ τὸ δοθὲν κλάσμα, ἢ ὡς ἔγγιστα· ὡς $\frac{3,000}{8}=0,375$· διότι καὶ $\frac{3}{8}=0,375$· ὁμοίως καὶ $\frac{5}{16}=\frac{5,0000}{16}=0,3125$· καὶ $\frac{2,00}{25}=0,08=\frac{2}{25}$· καὶ $\frac{3,00}{50}=0,06$ καὶ ὅλα τὰ κλάσματα μεταβάλλονται εἰς δεκαδικὰ κλάσματα, χωρὶς λείψανον, ὅσα ἔχουσι παρονομαστὴν, 2, 4, 8, 16, 32, 64 . . . κτ: καὶ ἔτι ὅσα ἔχουσι 5, 10, 15, 25 κτ: ἢ 5, 25, 125 κτ: καὶ ἔτι ὅσα ἔχουσιν ἓν πολλαπλοῦν τούτων τῶν ἀριθμῶν. Ὅσα δὲ ἔχουσι παρονομαστὴν 3, 6, 7, 9 κτ: μεταβάλλονται μὲν εἰς κλάσματα δεκαδικὰ, πλὴν οὐχὶ ἐπ' ἀκριβὲς· διότι εἰς ἄπειρον μένει τι λείψανον ὡς $\frac{2}{3}=\frac{2,00000000}{3}=0,66666666\frac{2}{300000000}$

καὶ ἔτι $\frac{3}{7} = \frac{3,0000000000}{7} = 0,4285714285\frac{5}{70000000000}$. Ταῦτα ὅμως μὲ ὅλον ὁποῦ εἰς ἄπειρον ἐπ' ἀκριβὲς ἡ διαίρεσις δὲν γίνεται, προάγουσι μέντοι τὴν διαίρεσιν μέχρι ἑπτὰ χαρακτήρων, καὶ λαμβάνουσι τὸ δεκαδικὸν ὡς ἔγγιστα τἀληθοῦς· εἰς τὰς ἠκριβωμένας ὅμως μεθόδους προάγουσι τὴν διαίρεσιν μέχρι τῶν 14 χαρακτήρων, εἰς δὲ τὰς κοινὰς μεθόδους, ὅπου ἡ ἀπάτη ἀνεπαίσθητος, προάγουσιν αὐτὴν μέχρι τριῶν, ἢ τεσσάρων χαρακτήρων, καὶ ἐπαρκοῦνται εἰς αὐτοὺς ὡς ἀληθεῖς. Ἰστέον ὅμως ὅτι αὐτὰ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, ὧν ἄνευ τέλους γίνεται ἡ διαίρεσις, εἶναι τῇ ἀληθείᾳ σχεδὸν ἀληθῆ· διότι ἐὰν ἓξ χαρακτῆρας λάβωμεν οὕτω $\frac{1,000000}{6} = 0,166666$, ἡ ἀπάτη εἶναι μήτε ἓν μιλλιοστημόριον, ἤτοι νὰ διέλωμεν τὴν μονάδα εἰς μέρη ἑνὸς μιλλιουνίου, καὶ ἐξ αὐτῶν νὰ λείψῃ ὄχι ἓν σωστόν· διὸ ἐὰν εἰς τὸν ἔσχατον χαρακτῆρα ἓν θῶμεν, τὸ 6 νὰ γένῃ 7, οὕτω 0,1606667 καὶ διὰ τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιάσωμεν, γίνεται μεῖζον τῆς μονάδος· ὡς $6 \times 0,166664 = 1,000002$· διότι ἂν $\frac{1}{6} = 0,166667$, ἦν καὶ $1 = 0,166667 \cdot 6$· ἀλλ' ηὔξησε δύω μιλλιοστημόρια· ὅθεν καὶ εἰς ἓξ χαρακτῆρας ἡ ἀπάτη εἶναι ὀλιγωτέρα ἀπὸ ἓν μιλλιοστημόριον, καὶ τοιαύτη ἀπάτη ὡς μηδὲν εἶναι σχεδὸν ἀνεπαίσθητος, καὶ διὰ τοῦτο ταῦτα τὰ κλάσματα ὡς ὀρθὰ καὶ ἀληθῆ λαμβάνονται. Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὀκτώ, ἢ δέκα καὶ ἐπέκεινα χαρακτῆρας, γίνεται ἡ ἀπάτη μᾶλλον ἀνεπαίσθητος, καὶ ἀπείρως ἐλαχίστη ἴση καὶ τῷ μηδενί· ἄλλως ὅμως ἐὰν ςοχασθῶμεν τὸ ἀκριβὲς τῆς ἀληθείας, ὅπερ ἄλλοι μεταφυσικὸν, καὶ ἄλλοι μαθηματικὸν λέγουσιν, ἐγκαλὰ καὶ πάντη ἀνεπαίσθητον, ἐλλείπεται ὅμως τῆς ἀληθείας, καὶ διὰ τοῦτο ταῦτα ὡς ἔγγιςα, ἢ ὅτι ἔγγιςα τῆς ἀληθείας λέγονται· διὸ καὶ οἱ μαθηματικοὶ ταῦτα ὡς ἀληθῆ ἐκλαμβάνουσιν, ἐπειδὴ καὶ δι' αὐτῶν ὀρθὰς καὶ τὰς ἐργασίας κάμνουσιν. Ὅθεν κάθε κλάσμα γνήσιον μεταβάλλομεν εἰς κλάσμα δεκαδικὸν κατὰ τοὺς ἄνω κανόνας, ἢ ἐκεῖνα, ὅπου διαιροῦνται ἐπ' ἀκριβὲς, ἢ ἐκεῖνα, ὅπου εἰς ἄπειρον διαιροῦνται, καὶ μένει λεῖψανον, καὶ εἰς αὐτὸ ἐπαρκούμεθα μέχρι τῶν 3 ἢ 6 ἢ 8 χαρακτήρων, καὶ παρορῶμεν τὸ λεῖψανον, καὶ ἔχομεν καὶ ταῦτα ὡς ἀκριβῆ καὶ ἀληθῆ.

§. 242. Καὶ τὰ νόθα κλάσματα μεταβάλλονται εἰς δεκαδικὰ, εὑρίσκομεν πρῶτον τοὺς ἀκεραίους αὐτοῦ ἀριθμοὺς διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ μὲ τὸν παρονομαςὴν, καὶ εἰς τὸ λεῖψανον γράφομεν μηδενικὸν, καὶ πάλιν διαιροῦμεν, καὶ τὸ πηλίκον τοῦτο μετὰ τὸ κόμμα εἰς κλάσμα δεκαδικὸν γράφομεν, καὶ πάλιν μηδενικὸν, καὶ πάλιν διαιροῦμεν, ἕως οὗ νὰ λάβωμεν ὅσους χαρακτῆρας δεκαδικῶν θέλομεν· ὅρα παρδ: Α' Β' κτλ

Α'

$\frac{64}{51} = 51 | 64{,}000 = 1{,}254$

51
130
102
280
255
250
204
46 κτλ

Β'

$\frac{65}{32} = 32 | 65{,}0000 = 2{,}0312$

64
100
06
40
32
80
64
18 κτλ

§. 243. Καὶ εἰς τὴν κοινὴν διαίρεσιν εὕρομεν τὸν διαιρετέον πολλάκις, ὅπου ἐπ' ἀκριβὲς δὲν ἐδιαιρεῖτο, ἀλλ' ἔμενέ τι λείψανον, ὅπερ μετὰ τοῦ διαιρέτου εἰς κλάσμα μετὰ τὸ πηλίκον ἐγράφομεν (§. 106.)· ἤδη ὅμως δυνάμεθα εἰς αὐτὸ τὸ λείψανον μηδενικὸν νὰ γράψωμεν, καὶ νὰ διέλωμεν, καὶ τοῦτο τὸ πηλίκον πάλιν μετὰ τὸ κόμμα εἰς δεκαδικὸν κλάσμα νὰ γράψωμεν, καὶ πάλιν μηδενικὸν εἰς τὸ λείψανον νὰ γράψωμεν καὶ νὰ διέλωμεν, καὶ τὸ πηλίκον τοῦτο εἰς δεκαδικὸν, καὶ οὕτω συνεχίζοντες τὴν διαίρεσιν, λαμβάνομεν δεκαδικὸν κλάσμα ὁμοῦ εἰς πηλίκον, ὅσους ἂν χαρακτῆρας θέλωμεν· ὅρα τὸ Γ' παράδειγμα.

Εἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα 6 μηδενικὰ προσεγράψαμεν, καὶ 6 χαρακτῆρας δεκαδικοῦ κλάσματος εὕρομεν, 194444· τὸ ὁποῖον εἶναι σχεδὸν $= \frac{7}{36}$. τοῦτο ποιοῦμεν εἰς πολλὰς διαιρέσεις διὰ νὰ ἔχωμεν δεκαδικὰ κλάσματα, καὶ ὄχι γνήσια.

Γ'

$\frac{4471}{36}$ = 36 | 4471 | 124,194444

```
36
--
 87
 72
 --
 151
 140
 ---
 ..70
   36
   --
   340
   324
   ---
   0160
    144
    ---
     160
     144
     ---
     160...
```

§. 244. Ὅτι ἡ ἀπάτη εἶναι ἐλαχίστη, ἐμάθομεν (§. 240.), καὶ ὅτι διὰ τῆς διαιρέσεως λαμβάνομεν δεκαδικοὺς χαρακτῆρας ὅσους θέλομεν· ὡς $\frac{6}{7}=0,85714285$ · Παρατηροῦσιν ὅμως, ὅτι ἐὰν ὁ ἑξῆς χαρακτὴρ εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ τὸν 5, τότε τὸν ἔσχατον χαρακτῆρα μὲ μίαν μονάδα αὐξάνουσιν, ὡς εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα ὁ ἔσχατος χαρακτὴρ 5, 6 γίνεται· 0,85714286· διότι ὁ ἑξῆς χαρακτὴρ 7 ἐξέρχεται· ἐὰν δὲ ὁ ἑξῆς χαρακτὴρ εἶναι 5, ἢ ἐλάττων, μένει ὁ αὐτὸς χαρακτήρ· ἔτι πολλάκις εἰς πράξεις, ὁποῦ δὲν ἀπαιτῶσιν ἀκρίβειαν, ἐῶσιν ἀπὸ τοὺς ἐσχάτους χαρακτῆρας τινας, δύω ἢ τρεῖς κτ: ὡς ἀντὶ τοῦ ἄνω παραδείγματος λαμβάνουσι τὸν 0,85714· ὅθεν τότε τὸν ἔσχατον χαρακτῆρα, ὡς ἐνταῦθα τὸν 4, μὲ μίαν μονάδα αὐξάνουσιν οὕτω 0,85715.

§. 245. Ὅταν τὰ κλάσματα μεταβληθῶσιν εἰς δεκαδικὰ, καὶ ἡ παράθεσις ἄμεσος γίνεται (§. 199.), ποῖον ἐξ αὐτῶν εἶναι μεῖζον καὶ ἔλαττον· μεῖζον εἶναι ἐκεῖνο, ὁποῦ ἔχει εἰς τὸν αὐτὸν τόπον μείζονα χαρακτῆρα, ἢ εἰς τὸν Α΄, ἢ εἰς τὸν Β΄, ἢ Γ΄. ὡς $\frac{5}{13}$ καὶ $\frac{2}{11}$, ἐκεῖνο $=$ 0,384---, τοῦτο $=0{,}272$--- ἐπεὶ δὲ ὁ Α΄ τόπος $3>2$ τοῦ πρώτου τόπου, ἄρα καὶ $\frac{5}{13}>\frac{2}{11}$ ἔτι καὶ μεταξὺ τοῦ $\frac{3}{13}$ καὶ $\frac{2}{11}$ ἐκεῖνο $=0{,}230$.-- τοῦτο $=0{,}1818$· ἐπεὶ ὁ $2>1$, καὶ τὸ $\frac{3}{13}>\frac{2}{11}$· διότι εἰς τὸν πρῶτον τόπον $2>1$ κτ:

§. 246. Ἤδη δυνάμεθα νὰ συνάψωμεν δεκαδικὰ κλάσματα μὲ κλάσματα γνήσια καὶ νόθα· διότι πρῶτον μεταβάλλομεν τὰ γνήσια καὶ νόθα κλάσματα εἰς δεκαδικὰ (§. 241.), καὶ ἔπειτα συνάπτομεν, ὡς εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν δεκαδικῶν ἐμάθομεν (§. 235.).

§. 247. Καὶ ἀφαιροῦμεν δεκαδικὰ ἀπὸ γνήσια καὶ νόθα κλάσματα, καὶ ἀπὸ δεκαδικὰ πάλιν γνήσια, καὶ νόθα κλάσματα· διότι μεταποιοῦμεν ὅλα αὐτὰ εἰς δεκαδικὰ (§. 241.)· καὶ εἶτα γίνεται ἡ ἀφαίρεσις, ὡς ἐδιδάχθημεν (§. 236.).

§. 248. Πολλαπλασιάζομεν ἔτι ἀριθμοὺς μὲ ἀριθμοὺς καὶ γνήσια κλάσματα, μεταποιοῦντες τὰ γνήσια εἰς δεκαδικά· καὶ ἔτι ἀριθμοὺς μὲ γνήσια κλάσματα ὁμοῦ πολλαπλασιάζομεν ἄλλους ἀριθμοὺς μὲ δεκαδικὰ κλάσματα καὶ χωρίς· καὶ γενικῶς πολλαπλασιάζωμεν κάθε ἀριθμὸν μὲ κλάσματα ἤτοι νόθα ἢ γνήσια, ἢ δεκαδικά, μὲ ἕτερον ἀριθμὸν ἀκέραιον μὲ κλάσματα ἢ νόθα, ἢ γνήσια, ἢ δεκαδικά· ὁ τρόπος εἶναι νὰ μεταβάλλωμεν τὰ γνήσια καὶ νόθα κλάσματα εἰς δεκαδικὰ (§. 241.), καὶ εἶτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν, καὶ εἰς τὸ παραγόμενον νὰ κόψωμεν τόσους χαρακτῆρας μετὰ τὸ κόμμα, ὅσους ἔχουσιν οἱ παράγοντες εἰς δεκαδικὰ κλάσματα. οὗτος ὁ τρόπος πρέπει ἐδῶ νὰ παραδειγματισθῇ, ἐπειδὴ χρησιμεύει εἰς τὴν κοινὴν ζωήν.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α.

Α΄ $53{,}705\times5\frac{3}{5}=53{,}705\times5{,}6$, καὶ τώρα πολλαπλασιασθήτωσαν ὡς εἰς τὸ Α΄ παράδειγμα φαίνεται.

Α΄

$$\begin{array}{r}53{,}705\\ 5{,}6\\ \hline 322230\\ 268525\\ \hline 300{,}7480\end{array}$$

νεται φανερὸν ὅτι ὅταν θέλωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ ἥμισυν καὶ ἕνα ἀριθμὸν, προσγράφομεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν 5, καὶ πολλαπλασιάζομεν κοινῶς, καὶ εἰς τὸ παραγόμενον κόπτομεν ἕνα χαρακτῆρα εἰς δεκαδικὸν, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ γινόμενον· ὁ δὲ χαρακτὴρ, ὁποῦ κόπτομεν, ἢ 5 θέλει εἶναι, ἢ μηδενικόν· καὶ εἰ μὲν εἶναι 5 εἶναι μισόν· διότι $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$· εἰ δὲ καὶ εἶναι μηδενικὸν, τὸ παραγόμενον εἶναι ἀκέραιον· οὕτως ἠγόρασα ἀπὸ μισὸν γρόσι 35 ὀκ: κρέας, πόσα νὰ δώσω; πολλαπλασιάζω μὲ 5 τὸν 35 οὕτω 5. 35=175 κόπτω τὸν ἕνα χαρακτῆρα οὕτω 17,5, καὶ εὑρίσκω νὰ δώσω 17 γρό: καὶ μισὸν ὅτι $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$· ὅταν ὅμως ἀγοράσω 60 ὀκ: εὑρίσκω 60 × 5= 300=30,0.

Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ ἐὰν ἄμφω κλάσματα ἔχωσι· μεταβάλλονται καὶ τῶν δύω τὰ κλάσματα εἰς δεκαδικὰ, καὶ εἶτα πολλαπλασιάζονται ὡς εἰς τὸ Β΄ $62\frac{3}{8} \times 2\frac{1}{7} = 62,375 \times 2,14285$ καὶ οὕτως ἐπολλαπλασιάσθη εἰς τὸ Β΄ παράδειγμα

Β΄

$$
\begin{array}{r}
2,14285 \\
62,375 \\
\hline
1071425 \\
1499995 \\
642855 \\
428570 \\
1285710 \\
\hline
133,66026875
\end{array}
$$

Γ΄. Οὕτω καὶ $5.\frac{1}{2} = 5 \times 0,5 = 2,5$· καὶ ἀπὸ τούτου γί-

Δ΄. Τὸ αὐτὸ γίνεται, καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν μὲ ἀριθμὸν καὶ μισὸν, ὡς 5 ὀκ: μετάξι πρὸς 12 γρόσια καὶ μισόν· εἰς τὰ 12 προσγράφομεν τὸν 5 εἰς μονάδας, καὶ πολλαπλασιάζομεν, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς, καὶ εἰς τὸ παραγόμενον κόπτομεν ἕνα χαρακτῆρα, καὶ οἱ λοιποὶ εἶναι ἀκέραιοι, ὁ δὲ χαρακτὴρ τῶν δεκαδικῶν ἐὰν εἶναι 5 εἶναι μισὸν, ἐὰν δὲ μηδενικὸν, οὐδέν· ὅθεν μετάξι ὀκ: 5. $12\frac{1}{2}$=5. 125=62,5, ἤτοι 62 γρο: καὶ μισόν.

„Ἔτι ἠγόρασα 36 πήχες, τσόχα ἀπὸ 15 γρόσ: καὶ μισὸν, πόσα πληρώνω; 36. $15\frac{1}{2}$=36. 155=558 γρό:, καὶ οὕτω γίνεται ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ἀριθμὸν ὁλόκληρον μὲ πολλαπλασιαστὴν μισὸν, ἢ ἀκέραιον καὶ μισόν.

Ε΄. Ἐὰν δὲ καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος μισὸν, ἢ ἀκέραιον καὶ μισὸν, τότε τὸ αὐτὸ γίνεται, ἀντὶ τοῦ μισοῦ τὸν 5 εἰς τὸν τόπον τῶν μονάδων γράφομεν, καὶ πολλαπλασιάζομεν ὡς μὲ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς, εἰς δὲ τὸ παραγόμενον ἐὰν μόνον ὁ πολλαπλασιαστέος ἔχῃ μισὸν, μόνον ἕνα χαρακτῆρα εἰς κλάσμα δεκαδικὸν κόπτομεν· ἐὰν δὲ ἔχῃ καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς μισὸν, καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος, δύω χαρακτῆρας κόπτομεν εἰς κλάσμα δεκαδικόν.

δηλ: Ἠγόρασα $12\frac{1}{2}$ πήχαις, τσόχαν ἀπὸ 7 γρόσια· λοιπὸν $12\frac{1}{2}$. 7=125. 7=87,5· ἄρα 87 γρόσια πληρώνω καὶ μισὸν διὰ τὸ 5· ἔτι 50 λεμόνια ἀπὸ $2\frac{1}{2}$· οὕτω 50. 25=

125,0 ἤτοι 125 παρ: Ἔτι $56\frac{1}{2}$ πήχαις μεταξωτὸν ἀπὸ 6 γρό: πληρώνω $56\frac{1}{2}$. 6=565. 6=336,0 ἤτοι 336 γρό:

„Ἐὰν δὲ καὶ οἱ δύω ἔχωσι μισὸν, κόπτομεν δύω χαρακτῆρας· $42\frac{1}{2}$ ὀκ: σαποῦν ἀπὸ $1\frac{1}{2}$ γρό: κάμνει ὅλον $42\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$=425. 15=63,75· ἤτοι 63 γρόσ: καὶ $\frac{75}{100}$· διὰ νὰ εὑρίσκωμεν αὐτὰ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα πόσους παράδες ἀξίζουν (§. 92.),. πολλαπλασιάζομεν ἄνω καὶ κάτω μὲ 4· οὕτω $\frac{75.\ 4}{100.\ 4}=\frac{300}{400}$· ἔπειτα ὀπαλείφομεν τὸ ἓν μηδενικὸν ἄνω καὶ κάτω, διὰ νὰ μὴ χαλάσῃ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος (§. 91.) οὕτω $\frac{30}{40}$· καὶ ὁ ἀριθμητὴς παρασταίνει τοὺς παράδες· ἄρα $56\frac{1}{2}$ ὀκ: σαποῦνι ἀπὸ $1\frac{1}{2}$ γρο: κάμνει 63 γρ:, 30 παρ:

„Πρέπει καλῶς νὰ σημειώσῃ ἕκαστος τοῦτον τὸν τρόπον, διὰ νὰ εὑρίσκῃ τοὺς παράδες εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα τῶν γροσίων· δηλ: νὰ πολλαπλασιάζῃ ἄνω καὶ κάτω μὲ 4, καὶ ἔπειτα νὰ κόπτῃ ἄνω καὶ κάτω μηδενικὸ ἕνα, ἕως οὗ νὰ γίνηται ὁ παρονομαστὴς 40, καὶ τότε ὁ ἀριθμητὴς φανερώνει τοὺς παράδες.

„Ἔτι ἠγόρασα $58\frac{1}{2}$ καντάρια ἅλας ἀπὸ $6\frac{1}{2}$ γρο:, πόσα θέλω πληρώσει; $58\frac{1}{2}.\ 6\frac{1}{2}=585.\ 65=380,25$· τὸ δὲ

$25=\frac{25.\ 4}{100.\ 4}=\frac{100}{400}=\frac{10}{40}$· πληρώνω λοιπὸν 380 γρο: καὶ 10 παρ:

„Καὶ διὰ νὰ εἰπῶ καθόλου, ὅταν εἶναι δύω χαρακτῆρες δεκαδικοὶ, ὧν ἡ μονὰς γρόσια, καὶ ζητῶμεν πόσοι παράδες εἶναι ἡ τιμὴ τούτων, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς μὲ 4 καὶ κόπτομεν ἕνα χαρακτῆρα, καὶ ὁ ἀριστερὸς ἀριθμὸς παράδες παρίστησιν.

§. 248. Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἔχῃ ἓν τεταρτημόριον ἢ μὲ ἀριθμὸν, ἢ μόνον· οἷον 5 ὀκ: ὀξυγγοκηρία ἀπὸ 90 παρ: ἤτοι ἀπὸ $2\frac{1}{4}$ γρο: μεταβάλλομεν τὸ $\frac{1}{4}$ εἰς δεκαδικὰ οὕτω $\frac{1}{4}=0,25$· λοιπὸν $5.\ 2,25=11,25=$ $11,\ \frac{25.\ 4}{100.\ 4}$ τὸ δὲ $\frac{25.\ 4}{100.\ 4}=\frac{100}{400}=\frac{10}{40}$· λοιπὸν 5 ὀκ: κηρία ἀπὸ $2\frac{1}{4}$ κοστίζουν γρό: 11 καὶ παρ: 10.

Λ'. Ὅθεν ὅταν θέλωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμέν τι μὲ ἀριθμόν τινα καὶ $\frac{1}{4}$, ἢ μὲ 10 παρ:, προσγράφομεν 25 κατὰ σειρὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν, ὁποῦ ἔχει τὸ τεταρτημόριον, καὶ πολλαπλασιάζομεν, ὡς μὲ ἀκεραίους ἀριθμοὺς, καὶ εἰς τὸ παραγόμενον κόπτομεν δύω χαρακτῆρας εἰς κλάσμα δεκαδικὸν, καὶ εἰς αὐτὸ εὑρίσκομεν κατὰ τὸν ἄνω τρόπον (§. 248 - - ε'.) τοὺς παράδες. Οὕτως ἐὰν θέλωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 62 όκ: λάδι από 50 παρ: ήτοι $1\frac{1}{4}$ γρ: εὑρίσκομεν 62. $1\frac{1}{4}$=62. 125=77,50. ἤτοι 77 γρο: καὶ μισὸν, διότι $\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$.

Β΄. Ἐὰν δὲ καὶ ὁ πολλαπλασιαςέος ἔχῃ ἓν τεταρτημόριον, καὶ εἰς αὐτὸν ὁμοίως 25 προσγράφομεν, καὶ εἰ μὲν οὗτος μόνον ἔχῃ τεταρτημόριον, ὁ δὲ πολλαπλασιαςὴς εἶναι ἀκέραιος, μόνον δύω χαρακτῆρας εἰς τὸ παραγόμενον κόπτομεν· εἰ δὲ καὶ ἔχουσι καὶ οἱ δύω $\frac{1}{4}$, εἰς τὸ παραγόμενον κόπτομεν 4 χαρακτῆρας· ὡς $42\frac{1}{4}$ ὀκ: λάδι ἀπὸ 50 παρ: πόσα γρό: κάμνει; $42\frac{1}{4}$. $1\frac{1}{4}$· ἤτοι 4225. 125=52,8125=$52\frac{8125}{10000}$ τὸ δὲ $\frac{8125.\ 4}{40000}=\frac{32500}{40000}=\frac{32,500}{40,000}$, $\frac{32}{40}+\frac{500}{1000}=\frac{32}{40}+\frac{1}{2}$, ὃ ἐςὶ $31\frac{1}{2}$ παρ:. καὶ λοιπὸν $42\frac{1}{2}$ ὀκ: καὶ 100 δρ: λάδι, πρὸς $1\frac{1}{4}$ γρο: κάμνει γρόσια 52 καὶ παρ: $32\frac{1}{2}$.

Γ΄. Πολλάκις συμβαίνει νὰ ἔχῃ ὁ μὲν πολλαπλαςέος ἓν τεταρτημόριον, ὁ δὲ πολλαπλασιαςὴς μισὸν, τότε ἀντὶ μὲν τοῦ $\frac{1}{4}$ γράφομεν 25, ἀντὶ δὲ $\frac{1}{2}$, 5· εἰς δὲ τὸ παραγόμενον μόνον 3 χαρακτῆρας εἰς δεκαδικὸν κλάσμα κόπτεμεν· ὡς $5\frac{1}{2}$ ὀκ: νῆμα ἀπὸ 6 γρο: καὶ 10 παρ:, πόσα κάμνει; $5\frac{1}{2} \cdot 6\frac{1}{4} = 55.625 = 34,375$· ἀλλὰ $\frac{375.4}{1000.4} = \frac{1500}{4000} = \frac{15}{40}$· ἄρα $5\frac{1}{2}$ ὀκ: νῆμα πρὸς γρο: $6\frac{1}{4}$, κάμνει 34 γρο: καὶ 15 παράδες.

„Σημείωσαι ὅμως ὅταν τρεῖς χαρακτῆρας ἔχωμεν κλασματικοὺς γροσίου, καὶ ζητῶμεν παράδες, πολλαπλασιάζομεν μὲν μὲ 4, κόπτομεν ὅμως δύω χαρακτῆρας· ὅταν δὲ 4 εἶναι οἱ δεκαδικοὶ, τρεῖς κόπτομεν, ὅταν 5, τέσσαρας κτ.

§. 249. Ἐὰν δὲ ἔχωμεν ἢ πολλαπλασιαστὴν μὲ $\frac{3}{4}$, ἢ πολλαπλασιαστέον, ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{4} = 0,25$, ἄρα τὰ $\frac{3}{4} = 0,25 \times 3 = 0,75$· ὅθεν ὅπου ἔχομεν $\frac{3}{4}$ ὡς 30 παρ: τοῦ γρο: ἢ 300 δρ: τῆς ὀκᾶς, κτ:, ἀντὶ τοῦ $\frac{3}{4}$ γράφομεν 75, καὶ πολλαπλασιάζομεν καὶ κόπτομεν εἰς τὸ παραγόμενον δύω χαρακτῆρας, ἐὰν μόνον ὁ εἷς παράγων ἔχῃ τὰ $\frac{3}{4}$, ἢ τέσσαρας, ἐὰν καὶ οἱ δύω ἔχωσι τὰ $\frac{3}{4}$.

Παράδειγματα.

Α΄. 12 πήχαις σιαλὶ ἀπὸ 2 γρο: καὶ 30 παρ: πόσα κάμνει;

12. 275=33,00 ἤτοι 33 γρο:

„13 ὀκ: καὶ 300 δρ: χαβίαρι ἀπὸ 3 γρό: πόσα;

$13\frac{3}{4}$. 3=1375. 3=41,25 ἐπεὶ δὲ $\frac{25.\ 4}{100.\ 4}=\frac{100}{400}=\frac{10}{40}$

λέγομεν 41 γρό: καὶ 10 παρ:

„45 ὀκ: καὶ 300 δρ: μετάξι πρὸς 14 γρο: καὶ 30 παρ:

πόσα γίνονται; $45\frac{3}{4}$. $14\frac{3}{4}$=4575. 1475=674,8125

ἀλλὰ $\frac{8125.\ 4}{10000.\ 4}=\frac{32500}{40000}=\frac{32}{40}+\frac{1}{2}$ λέγομεν λοιπὸν ὅτι

κάμνει 674 γρο: καὶ $32\frac{1}{2}$ παρ:

Β΄. Ἐὰν δ' ὁ μὲν εἷς παράγων ἔχῃ $\frac{1}{4}$, ὁ δ' ἕτερος $\frac{3}{4}$, γράφομεν ἀντ' ἐκείνου 25, ἀντὶ τούτου 75, καὶ πολλαπλασιάζοντες κόπτομεν 4 χαρακτῆρας.

„4 πήχαις καὶ 2 ῥούπια ὕφασμα, ἀπὸ 5 γρό: καὶ 30 παρ:

πόσα γίνονται; $4\frac{1}{4}$. $5\frac{3}{4}$=425. 575=24,4375 ἀλλὰ

$\frac{4375.\ 4}{10000.\ 4}=\frac{17500}{40000}=\frac{17}{40}+\frac{500}{1000}$· λέγομεν 24 γροσ: καὶ

$17\frac{1}{2}$ παρ:

Γ΄. Τὸ αὐτὸ γίνεται, καὶ ἐὰν ὁ μὲν ἔχῃ $\frac{1}{3}$ ὁ δὲ $\frac{3}{4}$· τρεῖς ὅμως χαρακτῆρας κόπτομεν· $4\frac{1}{2}$ ὀκ: κηρίου ἀπὸ

$4\frac{3}{4}$ γρ: $4\frac{1}{2}$. $4\frac{3}{1}$=45. 475=21,375 ἀλλὰ $\frac{375.\ 4}{1000.\ 4}$ =

$\frac{1500}{4000}=\frac{15}{40}$· λέγομεν ἄρα ὅτι κάμνει 21 γρο: καὶ 15 παρ:

§. 250. Αὐτὸν τὸν τρόπον ποιοῦμεν, καὶ ἐὰν οἱ παράγοντες ἔχωσιν $\frac{1}{8}$· εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ δεκαδικὸν τοῦ $\frac{1}{8}$ (§. 241.) οὕτω $\frac{1}{8}=0,125$ καὶ ὅπου ὀκτημόριον εὑρίσκομεν, γράφομεν ἀντ' αὐτοῦ τὸν ἀριθμὸν 125, καὶ πολλαπλασιάζομεν, καὶ εἰς τὸ παραγόμενον τρεῖς χαρακτῆρας κόπτομεν.

Α΄. 32 ὀκ: βούτερον ἀπὸ 45 παρ: ἤτοι ἀπὸ $1\frac{1}{8}$ γροσ:

$32.\ 1\frac{1}{8}=32.\ 1125=36,000$ ἤτοι γρο: 36

„5 πήχαις τσόχα καὶ 1 ρούπι ἀπὸ 13 γρο:, πόσα;

$5\frac{1}{8}.\ 13=5125.\ 13=66,625$· ἀλλὰ $\frac{625.\ 4}{1000.\ 4}=\frac{24,00}{40,00}=\frac{24}{40}$ λέγομεν 66 γρο: καὶ 24 παρ.

Β΄. Ἐὰν δὲ καὶ οἱ δύω ἔχωσιν ὀκτημόρια, γράφομεν καὶ εἰς τοὺς δύω 125, καὶ εἰς τὸ παραγόμενον 6 χαρακτῆρας κόπτομεν.

„9 πήχες καὶ ἓν ροῦπι πανίου ἀπὸ 45 παρ: πόσα;

$9\frac{1}{8}.\ 1\frac{1}{8}=9125\times1125=10,265625$· τὸ δὲ $\frac{265625.\ 4}{1000000.\ 4}=\frac{1062500}{4000000}=\frac{10}{40}+\frac{62500}{100000}$ λέγομεν 10 γρό: καὶ 10 παρ: καὶ περισσότερον τοῦ ἡμίσεως παρᾶ· διότι τὸ $\frac{62500}{100000}>\frac{1}{2}$.

Γ'. Τὸ αὐτὸ γίνεται, καὶ ἐὰν ὁ εἷς παράγων ἔχῃ $\frac{1}{8}$, καὶ ὁ ἕτερος $\frac{1}{4}$· ἢ ὁ εἷς $\frac{1}{8}$, ὁ δ' ἄλλος $\frac{1}{2}$, ἢ ὁ μὲν $\frac{1}{8}$· ὁ δὲ $\frac{3}{4}$· γράφομεν ἀντὶ $\frac{1}{8}$, $,125$, ἀντὶ δὲ $\frac{1}{4}=25$· ἀντὶ δὲ $\frac{1}{2}$, $,5$ καὶ ἀντὶ $\frac{3}{4}$, $,75$ κτ: παραδείγματα ἕκαςος ἠμπορεῖ νὰ γράψῃ ἱκανά.

§. 251. Ἐὰν δ' ἔχωσιν οἱ παράγοντες $\frac{1}{10}$ ὡς 4 παρ: ἢ 40 δρ: κτ: εὑρίσκομεν τὸ δεκαδικὸν τοῦ $\frac{1}{10}=0,1$ καὶ τοῦτο γράφομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν, ὁποῦ ἔχει τὸ $\frac{1}{10}$, καὶ πολλαπλασιάζομεν, καὶ μόνον ἕνα χαρακτῆρα κόπτομεν.

Α'. 15 ὀκ: τυρὶ ἀπὸ 44 παρ: $15.\ 1\frac{1}{10}=15.11=16,5$ λέγομεν 16 γρό: καὶ 20 παρ:, διότι $\frac{5}{10}=\frac{5.\ 4}{10.\ 4}=\frac{20}{40}$

„56 ὀκ: καὶ 40 δρ: μαλλὶ ἀπὸ 44 παρ:. $56\frac{1}{10}\cdot\ 1\frac{1}{10}=561.\ 11=61,71$· ἀλλὰ $\frac{71.\ 4}{100.\ 4}=\frac{284}{400}=\frac{28}{40}+\frac{4}{10}$. λέγομεν 61 γρό: καὶ 28 παρ: καὶ ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεως παρᾶ· ὅτι $\frac{4}{10}<\frac{1}{2}$.

Β'. Τὰ αὐτὰ γίνονται, καὶ ἐὰν ὁ εἷς ἔχῃ $\frac{1}{10}$, ὁ δὲ $\frac{1}{4}$ κτ: μόνον νὰ γράφωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς δεκαδικοὺς, ὁποῦ ἀπὸ τὰ κλάσματα εὕρομεν, καὶ εἶτα νὰ πολλαπλασιάζωμεν, καὶ εἰς τὸ παραγόμενον τόσους χαρακτῆρας νὰ κόπτωμεν, ὅσους ἐγράψαμεν.

§. 252. Ἐὰν δ' ἔχωσιν $\frac{1}{20}$, 2 παρ: ἢ 20 δρ:, εὑρίσκομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν πρῶτον $\frac{1}{20}$=0,05 καὶ οὗτος γράφεται, καὶ δύω χαρακτῆρες εἰς τὸ παραγόμενον κόπτονται, τὰ δὲ λοιπὰ γίνονται ὡς ἀνωτέρω.

§. 253. Ἐὰν δ' ἔχωσιν $\frac{1}{5}$ ὡς 8 παρ: ἢ 80 δρ: εὑρίσκομεν τὸν δεκαδικὸν τοῦ $\frac{1}{5}$=0,2 καὶ οὗτος προσγράφεται, καὶ εἷς χαρακτὴρ κόπτεται· τὰ δὲ λοιπὰ ὡς ἀνωτέρω.

„Ἐὰν δὲ $\frac{3}{10}$ ὡς 12 παρ: ἢ 120 δρ: γράφεται ὁ 3.

„Ἐὰν δὲ $\frac{4}{10}$ γράφεται ὁ 4, ὡς 16 παρ: ἢ 160 δρ:

„Ἐὰν δὲ $\frac{6}{10}$ ὁ 6 γράφεται, ὡς 24 παρ: ἢ 240 δρ:

„Ἐὰν δὲ $\frac{7}{10}$ ὁ 7· ὡς 28 παρ:

„Ἐὰν δὲ $\frac{8}{10}$ ὁ 8· ὡς 32 παρ;

„Ἐὰν δὲ $\frac{9}{10}$ ὁ 9, ὡς 36 παρ: ἢ 360 δρ:

§. 254. Ἐπειδὴ $\frac{1}{40}$ σημαίνει ἕνα παρᾶν ἢ 10 δρ: εὑρεθήτω καὶ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς αὐτοῦ $\frac{1}{40}=0,025$, καὶ οὗτος ὁ ἀριθμὸς γράφεται, ὅπου ἀπαιτεῖται ὁ παρᾶς, καὶ 10 δρ: ἐὰν δὲ ἔχῃς μὲ 7 παρᾶδες νὰ πολλοπλασιάσῃς καὶ γρόσια, πρέπει πρῶτον τὸ 025 μὲ 7 νὰ πολλαπλασιάσῃς, οὕτω 025. 7=175, καὶ οὗτος προσγράφεται διὰ $\frac{7}{10}$. ὁμοίως καὶ 13 παρᾶδες, καὶ 19 καὶ 23 κτ:· ὅσοι ὅμως ἔχουσι παράγοντας, εὑρίσκονται ἀπὸ τοὺς ἄνω δηλ: ὁ 6, ἐπειδὴ 2. 3=6. τὸν δεκαδικὸν τοῦ 2 πολλαπλασίασον μὲ 3, ὡς ὁ 5. 3=15, καὶ οὗτος ἀντὶ $\frac{6}{40}$ γράφεται· ὅθεν κάλλιον εἶναι, ὅταν ἔχωμεν $\frac{13}{40}$, ἤτοι 13 παρ: νὰ σχισθῇ εἰς δύω μέρη 12+1, πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν 12, τοῦ ὁποίου ὁ δεκαδικὸς εἶναι 3, καὶ ἔπειτα εὐκόλως καὶ μὲ τὸν 1, ἤτοι εἰς τὸ παραγόμενον τὸν αὐτὸν προσθέτομεν· ὁμοίως ἐὰν 17 εἶναι· Α΄ μὲ τὸ 16, τοῦ ὁποίου ὁ δεκαδικὸς εἶναι 4, καὶ εἶτα μὲ τὴν μονάδα· ὁμοίως καὶ μὲ τὸν 19, πρῶτον μὲ τὸν 18, οὗ ὁ δεκαδικὸς 9, καὶ ἔπειτα μὲ τὴν μονάδα κτ:

„Ούτω λοιπὸν φιλοτεχνεῖται ἡ μέθοδος ἐκείνων τῶν κλασμάτων, ὁποῦ ἐπ' ἀκριβὲς μεταβάλλονται εἰς δεκαδικὰ κλάσματα· ὅσα δὲ δὲν μεταβάλλονται ἐπ' ἀκριβές, ὡς τὸ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$ κτ: ἐκκλείονται αὐτῆς τῆς μεθόδου, ὅθεν καὶ τὰ μετρα τὰ τούρκικα εἰς αὐτὴν τὴν μέθοδον χρήσιμα· διότι τριτημόρια, εκτημόρια κτ: δὲν ἔχουσιν.

Ὅςις καλῶς παρατηρήσει τοὺς νόμους τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, εὑρίσκει πλείςας ὠφελείας εἰς τὸν κοινὸν ἄνθρωπον.

§. 255. Ἀνωτέρω εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, (§. 239.) ἐπιτηδείως εὕρομεν παραδείγματα, ὅπου ὁ διαιρέτης ἐπ' ἀκριβὲς εἰς τὸν διαιρετέον εὑρίσκετο· ἂν ὅμως εἰς αὐτὰ ὁ διαιρέτης δὲν εὑρίσκηται ἐπ' ἀκριβὲς, ἀλλὰ μένει λείψανον εἰς κλάσμα, τώρα εὐκόλως καὶ τοῦτο εἰς δεκαδικὸν κλάσμα μεταβάλλοντες, ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν οὕτω.

Α΄. Ἐὰν ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ, ἢ ἀκέραιος μὲ δεκαδικὰ, ἢ ὁ εἷς μὲ δεκαδικὰ, ὁ δ' ἕτερος ἀκέραιος, γράφομεν τὸν διαιρέτην ὑπὸ τὸν διαιρετέον εἰς κλάσμα.

Β΄. Εἰς ἐκεῖνον δὲ, ὅπου ἔχει ὀλιγωτέρους χαρακτῆρας δεκαδικοὺς, γράφομεν κατὰ σειρὰν μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ, διὰ νὰ ἔχωσι καὶ οἱ δύω ἴσους χαρακτῆρας δεκαδικούς.

Γ΄. Εἶτα ποιοῦμεν αὐτὸ τὸ κλάσμα ὅλον ἀκεραίους ἀριθμοὺς, ἐπειδὴ τὸ κλάσμα δὲν χαλᾷ, ἐὰν ἄνω καὶ κάτω δι' ἑνὸς περιοδικοῦ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμοῦ (§. 238.)

Δ΄. Διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου τὸν διαιρετέον προσγράφοντες εἰς τὸν διαιρέτην μηδενικὰ, ὅσα θέλομεν, διὰ νὰ λάβωμεν εἰς τὸ πηλίκον δεκαδικοὺς χαρακτῆρας (§. 241.) καὶ οὕτως ἡ διαίρεσις τῶν δεκαδικῶν δίδει καὶ ἕτερον πηλίκον δεκαδικόν.

Παραδείγματα.

$$3{,}045:\ 15=\frac{3{,}045}{15}=\frac{3{,}045}{15{,}000}=\frac{3045}{15000}=0{,}203\ldots$$

$$2{,}134:\ 0{,}12=\frac{2{,}134}{0{,}120}=\frac{2134}{120}=17{,}7833$$

$$0{,}0036:\ 4{,}8=\frac{0{,}0036}{4{,}8000}=\frac{36}{48000}=0{,}00075$$

$$24:\ 0{,}006=\frac{24{,}000}{0{,}006}=\frac{24000}{6}=4000$$

Καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον διαιρεῖται κάθε δεκαδικὸν κλάσμα, εἰς δεκαδικὸν πηλίκον, ὅσον θέλομεν.

§. 256. Ἐὰν τέλος δεκαδικὸν κλάσμα ἢ καὶ ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ περιοδικοῦ ἀριθμοῦ 10, 100 κτ: ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ περιοδικὸς ἀριθμὸς, τόσους τόπους καταβιβάζομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ διαιρετέου· διότι ὁ ἑξῆς τόπος πρὸς τὰ δεξιὰ εἶναι 10 φοραῖς μικρότερος (§. 18.) κτ:

$53{,}436:\ 10=5{,}3436$

$142{,}01:\ 100=1{,}4201$

$23{,}156:\ 1000=0{,}023156$

§. 257. Ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης ἢ ὁ διαιρετέος εἶναι κλάσμα γνήσιον, ἢ φέρομεν πρῶτον τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν, καὶ εἶτα διαιροῦμεν, ὡς εἰς τὸ (§. 242.), ἢ κλασματικῶς διαιροῦμεν, νοοῦντες τὸν δεκαδικὸν, ὡς ἀκέραιον (§. 239.)

$$„2{,}04:\ \frac{3}{4}=2{,}04.\ \frac{4}{3}=\frac{8{,}16}{3}=2{,}73$$

$$„0{,}32:\ 5\frac{2}{3}=0{,}32:\ \frac{17}{3}=0{,}32.\ \frac{3}{17}=\frac{0{,}96}{17}=0{,}564705\ldots$$

$$„\frac{2}{3}:\ 4{,}12=\frac{2}{3.\ 4{,}12}=\frac{2}{12{,}36}=\frac{200}{1236}=0{,}156\ \ldots$$

§. 258. Πολλάκις ὅμως φέρομεν τὸ γνήσιον κλάσμα εἰς δεκαδικὸν, καὶ διαιροῦμεν· δηλ: 5: $\frac{1}{2}$=5: 0,5=$\frac{5,0}{0,5}$=$\frac{50}{5}$=10· δηλ: πόσοι ἄνθρωποι πέρνουν τὰ 5 γρόσ: ἀπὸ μισοῦ; καὶ εὑρίσκονται 10· ἐὰν δὲ πέρνουν ἀπὸ 2$\frac{1}{2}$ πόσοι τὰ πέρνουν; 5: 2$\frac{1}{2}$=5: 2,5=$\frac{5,0}{2,5}$=2 τουτέςι μόνον 2 ἄνθρωποι· καὶ ἐκ τούτου ὁ κανὼν ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

„Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἔχῃ μισὸν, γράφομεν 5 εἰς τὸν διαιρέτην, καὶ μηδενικὸν εἰς τὸν διαιρετέον, καὶ εἶτα διαιροῦμεν, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς· ὡς 6: 4$\frac{1}{2}$= 60: 45=1,333 . . .

„Μὲ 33 γρο: πρὸς 5$\frac{1}{2}$ γρο: τὴν πήχην τὸ ὕφασμα, πόσαις πήχαις ἀγοράζω; 33: 5$\frac{1}{2}$=330: 55=6 πήχ:

„Ἐὰν ὁ διαιρετέος ἔχῃ μισὸν, γενέσθω ἡ διαίρεσις, ὡς ἀνωτέρω 52$\frac{1}{2}$: 4=52,5: 4=$\frac{52,5}{4,0}$=$\frac{525}{40}$=13,125 · δηλ: ὅταν ὁ διαιρετέος ἔχῃ μισὸν, γράφεται εἰς αὐτὸν ὁ 5 καὶ ἓν μηδενικὸν εἰς τὸν διαιρέτην, καὶ διαιροῦμεν ὡς καὶ πρότερον.

„4 ἄνθρωποι εὗρον 52$\frac{1}{2}$ γρο: ἀπὸ πόσα πέρνει ἕκαςος;

$62\frac{1}{2}$: 4=525: 40=13,125· ἀλλὰ $\frac{125.\ 4}{1000.\ 4}=\frac{500}{4000}=\frac{5}{40}$, πέρνει ἕκαςος ἀπὸ 13 γρο: 5 παρ:

„Μὲ $42\frac{1}{2}$ γρο: πρὸς 3 γρό: τὴν ὀκᾶν τὸ χαβιάρι, πόσαις ὀκάδες ἀγοράζομεν; $42\frac{1}{2}$: 3=425: 30=14,1333 . . . ἐπειδὴ ὅμως $\frac{1333.\ 4}{10000.\ 4}=\frac{5332}{40000}=\frac{53}{400}+\frac{32}{100}$· ἤτοι ὀκάδες 14 καὶ 53 δρ: καὶ ἓν τριτημόριον]τοῦ δραμίου σχεδόν· εἰς τὰς ὀκάδες ἀφίνομεν δύω μηδενικὰ, διότι ἡ ὀκᾶ εἶναι 400 δράμια.

γ΄. Ἐὰν δὲ καὶ ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος ἔχωσι μισὸν, τότε καὶ εἰς τοὺς δύω τὸν 5 γράφομεν μόνον, καὶ διαιροῦμεν· τὸ δὲ ἐξερχόμενον ἀπὸ τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ πηλίκον· δηλ:

„Μὲ $62\frac{1}{2}$ γρο: ἀπὸ $2\frac{1}{2}$ τὴν πήχην ἑνὸς ὑφάσματος, πόσαις πήχαις ἀγοράζομεν; $62\frac{1}{2}$: $2\frac{1}{2}$=625: 25=25 πήχ.

„Μὲ $102\frac{1}{2}$ γρό: ἀπὸ $12\frac{1}{2}$ γρο: τὴν πήχην τῆς τζόχας, πόσαις πήχαις ἀγοράζομεν;

$102\frac{1}{2}$: $12\frac{1}{2}$=1025: 125=8,2 τὸ δὲ $\frac{2}{10}=\frac{2.\ 8}{10.\ 8}=\frac{16}{80}=\frac{1}{8}+\frac{6}{10}$, ἤτοι 8 πήχ: καὶ ἓν ῥοῦπι καὶ $\frac{6}{10}$ τοῦ ῥουπίου. εἰς ταῖς πήχαις μὲ 8 πολλαπλασιάζομεν, ὅτι ἡ πήχη εἰς 8 ῥούπια διαιρεῖται.

§. 259. Ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης ἔχῃ $\frac{1}{4}$, τότε γράφομεν εἰς αὐτὸν μὲν τὸ δεκαδικὸν τοῦ $\frac{1}{4}=0,25$, εἰς δὲ τὸν διαιρετέον δύω μηδενικὰ, καὶ διαιροῦμεν συνήθως ὡς πρότερον· οἷον 22010 γρο: πόσα φλωρία γίνονται ἀπὸ $5\frac{1}{4}$ γρο: τὸ κάθε φλωρίον; $22010 : 5\frac{1}{4} = 2201000 : 525 = 4400$ φλωρ:

Β΄. Ἐὰν δὲ καὶ ὁ διαιρέτης, καὶ ὁ διαιρέος ἔχῃ $\frac{1}{4}$, τότε μόνον τὸ δεκαδικὸν τοῦ $\frac{1}{4}$ γράφομεν καὶ εἰς τοὺς δύω, καὶ συνήθως διαιροῦμεν· οἷον

Μὲ 54 γρο: καὶ 10 παρ: πρὸς 50 παρ: τὴν ὀκᾶν τὸ λάδι, πόσαις ὀκάδες λαμβάνομεν; $54\frac{1}{4} : 1\frac{1}{4} = 5425 : 125 = 43,4$· τὸ δὲ $\frac{4.}{10.}\frac{4}{4} = \frac{16}{40}$· λαμβάνομεν 43 ὀκ: καὶ 160 δρ.

§. 260. Διὰ νὰ μὴ ματαιοπονῶμεν γράφοντες, λέγομεν ὅτι τὰ αὐτὰ γίνονται, ἐὰν ὁ διαιρέτης μόνον, ἢ ὁ διαιρετέος μόνον, ἢ καὶ οἱ δύω ὁμοῦ ἔχωσι $\frac{3}{4}$, ἢ $\frac{1}{8}$, ἢ $\frac{3}{8}$, ἢ $\frac{1}{10}$, ἢ ἄλλα κλάσματα, τῶν ὁποίων δίδεται ἐπ' ἀκριβὲς ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός· γράφομεν ἀντ' αὐτοῦ τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν καὶ διαιροῦμεν ὡς ἔθος, καὶ τὸ δεκαδικὸν εἰς τὸ πηλίκον τὸ εὑρίσκομεν, ἐὰν ἄνω καὶ κάτω πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν ἀριθμὸν, εἰς ὃν ἐκεῖνο τὸ ὅλον διαιρεῖται (§. 176.)· δηλ: ἐὰν ζητῶμεν τὸ 25228 γρο: πόσα φλωρία βασιλικὰ γίνονται πρὸς 8 γρο: καὶ 8 παρ: ἠξεύρομεν (§. 253.) ὅτι ὁ δεκαδικὸς τῶν 8 παρ: =2. τούτου γράφομεν εἰς τὸν 8, καὶ μηδενικὸν εἰς τὸν διαιρετέον, καὶ διαιροῦμεν οὕτω· 252280: 82=3076, 585· καὶ ἐπειδὴ $\frac{585}{1000}$ εἶναι κλάσμα αὐτοῦ τοῦ φλωρίου, πολλαπλασίασον μὲ τὴν τιμὴν τοῦ φλωρίου, καὶ δίελε διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ εὑρίσκεις πόσοι παρ: ἔμειναν· ἡ ἀπάτη εἶναι πάντοτε μικροτέρα ἀπὸ ἕνα παρᾶν.

Οὗτος ὁ τρόπος χρησιμεύει εἰς τὴν κοινὴν ζωὴν διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν κλασμάτων.

§. 201. Τὸν αὐτὸν τρόπον μεταβάλλονται ὅλα τὰ δεκαδικὰ κλάσματα τῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν εἰς τὴν ἀληθῆ τιμὴν τῆς ἐγγὺς κατωτέρας μονάδος· δηλ: τὸ δεκαδικὸν τοῦ γροσίου εἰς παρ:, τὸ δεκαδικὸν τῆς ἡμέρας, εἰς ὥρας· καὶ τῆς ὥρας, εἰς λεπτά· τὸ δεκαδικὸν τῆς ὀργυιᾶς εἰς πόδας, καὶ τοῦ ποδὸς εἰς δακτύλους, κτλ, ὅταν κατὰ τὸ δεκαδικὸν πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν ἀριθμὸν τῆς πληθύος τῆς ἐγγὺς κατωτέρας μονάδος, ὁποῦ περιέχει μία μονὰς αὐτοῦ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος· δηλ: ἐὰν τὸ δεκαδικὸν τοῦ γρο: εἶναι 5,168 γρο: ἐπειδὴ ἓν γρόσι περιέχει 40 παρ:, μὲ 40 πολλαπλασιάζομεν τὸ δεκαδικὸν 168, καὶ εὑρίσκομεν 168×40=6,720· ὅθεν ἔσται 5,168 γρο: =5 γρο:, 6 παρ: καὶ $\frac{720}{1000}$· ἐὰν δὲ καὶ μὲ 3 πολλαπλασιάσωμεν τὸ δεκαδικὸν 720, ἔσται 720×3=2,160. καὶ ἶσαι τὸ δεκαδικὸν 5,168 γρο: 5 γρο:, 6 παρ: 2 ἄσπ: καὶ $\frac{1160}{1000}=\frac{4}{25}$ ἄσπ: ὃ καὶ παρορᾶται.

„Η ἰδία ἐργασία γίνεται καὶ εἰς τὸ Α΄, Β΄ καὶ Γ΄ παράδειγμα, πλὴν εἰς μὲν τὸ Α΄, τὸ δεκαδικὸν 33 εἶναι ἡμέρας δεκαδικὸν, καὶ ἡ ἡμέρα =24 ὥραις, ἄρα μὲ 24 πολλαπλασιάζομεν· τῆς δ' ὥρας τὸ δεκαδικὸν μὲ 60 πρῶτα λεπτὰ, καὶ τούτων μὲ 60″ κτ:

„Εἰς δὲ τὸ Β΄ ἐπειδὴ εἶναι δεκαδικὸν ὀργυᾶς, πολλαπλασιάζομεν μὲ 6, καὶ εὑρίσκονται πόδες, τούτων δὲ τὰ δεκαδικὸν μὲ 12 καὶ γίνονται δάκτυλοι, καὶ τούτων τὸ δεκαδικὸν μὲ 12 καὶ γίνονται γραμμαὶ κτ:

„Εἰς δὲ τὸ Γ΄ ἐπειδὴ εἶναι πήχαις, πολλαπλασιάζομεν τὸ δεκαδικὸν αὐτῶν μὲ 8, καὶ γίνονται ῥούπια κτ:

Α΄	Β΄
6,33 ἡμ: =6 ἡμ:, 7 ὥρ, 55΄, 12	6,41 ὀργ: =6°, 2΄, 5″, 6‴.
24 ὥρ:	6΄
132 ὥρ:	2,46΄
66	12″
7,92 ὥρ:	92
60΄	46
55,20΄	5,52″
60″	12‴
12,00″	104
	52
	6,24‴…

Γ΄	Δ΄
7,6 πηχ: =7 πηχ, 4 ῥού: $\frac{8}{10}$	5,125 ὀκ: =5 ὀκ: 50 δρ:
8	400
4,8 ῥού:	50,000

§. 262. Πολλάκις αἱ ἐργασίαι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως συντομεύονται εἰς ἐκεῖνον, ὅπου καλῶς τὰ προηγούμενα ἐκατάλαβεν· δηλ: ἐὰν ὁ ἔσχατος τόπος ἑνὸς παράγοντος ἔχῃ μονάδα, ἢ ὁ δεύτερος, ἢ οἱ δύω ἔσχατοι ἔχουσι μονάδα καὶ ὁ τρίτος ἀριθμὸν, ἢ ἀνάπαλιν, συντομώτερον πολλαπλασιάζομεν· οὕτω

7,832×51 7,832|51
39160
399,432

ἢ 823,7×18· οὕτω 823,7|18
65896
14826,6

ἢ 523,24×711 οὕτω 523,24|711
52324
366268
372023,64

ἢ 3245×117= 3245|117
3245
22715
379665

Ἐὰν δὲ ὁ εἷς παράγων λύεται εἰς παράγοντας, διὰ τὸ πρόχειρον λύομεν αὐτὸν εἰς παράγοντας, καὶ ἕκαστον πολλαπλασιάζομεν. 5324. 25 οὕτω 5324|5
26620|5
133100

Οὕτω καὶ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως.

13379000: 25= 5|13379000
2675800
5| 535160

Πολλάκις κόπτομεν τὸν ἕνα παράγοντα εἰς δύω μέρη μὲ τὸ σημεῖον + καὶ — διὰ τὴν εὐκολίαν.

ὡς 53287×994· ἐπειδὴ δὲ ὁ $994 = 1000 - 6$,

ἄρα $53287 \times 1000 - 6$ εὐκόλως τελεῖται οὕτω.

$$\begin{array}{r|l} 53287000 & 6 \\ -319722 & \\ \hline 52967278 & \end{array}$$

ἔτι 1008×3257, ἔςαι

$$\begin{array}{r|l} 3257000 & 8 \\ 26056 & \\ \hline 3283056 & \end{array}$$

ἔτι 72345×1096· ἀλλ' ὁ $1096 = 1000 + 100 - 4$,

ἄρα

$$\begin{array}{r|l} 72345000 & +100 \\ +7234500 & -4 \\ \hline 79579500 & \\ -289380 & \\ \hline 79290120 & \end{array}$$

Καὶ ἄλλας πολλὰς τοιαύτας συντομίας ἐπινοοῦμεν, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς θέλομεν ἀναφέρῃ.

§. 263. Ἀπὸ ὅλας τὰς συντομίας, ὁποῦ κάμνουσιν οἱ ἀριθμητικοὶ, ἀναγκαία εἶναι ἐκείνη, ὁποῦ μεταχειρίζονται εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα· ἔνθα ὅταν ἔχωσιν ἀριθμοὺ μὲ δεκαδικοὺς χαρακτῆρας πλείονας τῶν 7, ἢ 8, ἢ 6, νὰ πολλαπλασιάσωσι μὲ δεκαδικοὺς χαρακτῆρας 7 ἢ 8 κτ: ἐπειδὴ τὸ παραγόμενον ἐξέρχεται μὲ πολλοὺς δεκαδικοὺς χαρακτῆρας καὶ τόσους δὲν θέλουσι. μεταχειρίζονται τούτου τὸν τρόπον.

Γράφουσι τὸν πολλαπλασιαςέον φέρε τὸν 8,99785477, καὶ τὸν πολλαπλασιαςὴν φερε τὸν 0,43429448 ὡς εἰς τὸ Α' παράδειγμα φαίνεται.

A'
8,99875477
0,43429448

3,599501948
269962643
35995019
1799750
809887
35995
3599
719

3,908109520

Ἔπειτα πολλαπλασιάζουσιν ὅλον τὸν πολλαπλασιαςέον μὲ τὸν πρῶτον ἀριςερόθεν χαρακτῆρα τοῦ πολλαπλασιαςοῦ, ἀρχόμενοι ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ πολλαπλασιαςέου· ὡς ὁ 4 τοῦ πολλαπλασιαςοῦ, ἄρχεται ἀπὸ τὸν 7 τοῦ πολλαπλασιαςέου, νὰ πολλαπλασιάζῃ ὅλον αὐτόν· καὶ γράφεται τὸ παραγόμενον τοῦτο κατὰ τάξιν ὡς ἐδιδάχθημεν· εἶτα μὲ τὸν ἑξῆς χαρακτῆρα τοῦ ἑξῆς τόπου πολλαπλασιάζει πάλιν τὸν πολλαπλασιαςέον ὡς πρότερον, πλὴν ἀφίνει εἰς τὸν πολλαπλασιαςὴν ἕνα χαρακτῆρα, ὡς μὲ τὸν 3 ἐπολλαπλασιάσθη ὁ πολλαπλασιαςέος ὅλος πλὴν τοῦ ἐσχάτου χαρακτῆρος 7· μόνον τὰς δεκάδας τηρεῖ εἰς τὸν νοῦν του ἂν ὁ 3 ἐπολλαπλασίαζε τὸν ἔσχατον 7· καὶ ἐκείνας προσθέτει εἰς τὸ παραγόμενον αὐτό· ὡς ὁρᾷς αὐτὶ 3. 7=21 ἔθηκα 23 διὰ τὰς δύω δεκάδας, ὁποῦ εἰς τὸ χέρι ἔχομεν, ἂν ἐκεῖνος ἐπολλαπλασιάζετο· ἔπειτα τὸ παραγόμενον κατὰ σειρὰν γράφεται ὑποκάτω τοῦ πρώτου ἀπὸ τὰς μονάδας ἀρχίζοντας· διότι ἂν εἰς τὸν πολλαπλασιαςέον ἀρχίζῃ τοῦτο τὸ παραγόμενον ἀπὸ ἕνα τόπον πρὸς ἀριςερὰ ανώτερον, εἰς τὸν πολλαπλασιαςὴν ὅπως ἀρχίζει ἕνα τόπον κατώτερον, καὶ εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς καὶ ὁ ἀριθμὸς ὁ αὐτὸς εἶναι, ἐὰν διὰ 10 διαιρεθῇ καὶ ἅμα πολλαπλασιασθῇ. Τρίτον μὲ τὸν τρίτον χαρακτῆρα πολλαπλασιάζομεν πάλιν τὸν πολλαπλασιαςέον, πλὴν ἀπὸ τὸν τρίτον χαρακτῆρα αὐτοῦ, ὡς ὁ 4 ἀπὸ τὸν 4· συνάπτομεν πάλιν καὶ τὰς δεκάδας, ἐὰν τὸ δεύτερον 7 ἐπολλαπλασιάζομεν· διὸ καὶ ἀντὶ 4. 4 = 16 ἐγράψαμεν 19 διότι 4. 7 = 28 καὶ 2 πρότερον 30· ἔπειτα κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον πολλαπλασιάζομεν καὶ μὲ τὸν τέταρτον χαρακτῆρα τοῦ πολλαπλασιαςοῦ, ἀπὸ τὸν τέταρτον χαρακτῆρα τοῦ πολλαπλασιαςέου, καὶ οὕτω καὶ μὲ τὸν ε', ς', ζ', η' κτ: καὶ συνάπτομεν τὰ κατὰ μέρος παραγόμενα εἰς ἓν κεφάλαιον, καὶ τοῦτο τὸ παραγόμενον· τὸ αὐτὸ ἔγινε καὶ εἰς τὸ Β' παράδειγμα.

Β'

$$\begin{array}{r}
2{,}30258509 \\
3{,}9600901 \\
\hline
6{,}90775527 \\
2{,}07232658 \\
1381551 \\
20723 \\
23 \\
\hline
9{,}1184441
\end{array}$$

Αὕτη ἡ συντομία τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων κυρίως γίνεται, ἐὰν ὁ ἕτερος παράγων ἢ καὶ οἱ δύω ἔχωσι τοὺς ἐσχάτους χαρακτῆρας ἀγνώςους, ὡς εἰς τὴν μεταβολὴν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ἐλέγομεν (§. 240.).

§. 264. Τὸ ἴδιον γίνεται, καὶ ὅταν διαιρῶμεν πολλοὺς χαρακτῆρας δεκαδικοῦ κλάσματος μὲ πολλοὺς χαρακτῆρας δεκαδικοῦ· ἡ μὲν διαίρεσις γίνεται, ὡς ἐδιδάχθημεν, ὅταν ὅμως μὲ ἕκαςον χαρακτῆρα τοῦ πηλίκου πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην, μετὰ μὲν τοῦ πρώτου χαρακτῆρος πολλαπλασιάζομεν ὅλον τὸν διαιρέτην, μετὰ δὲ τοῦ δευτέρου χαρακτῆρος τοῦ πηλίκου πολλαπλασιάζομεν ὅλον τὸν διαιρέτην, ἀφίνοντες τὸν ἔσχατον, καὶ συνάπτομεν εἰς τὸ γινόμενον τὰς δεκάδας, ὁποῦ ἔχομεν εἰς τὸ χέρι, ἐὰν καὶ τὸν ἔσχατον ἐπολλαπλασιάζομεν· μετὰ δὲ τοῦ τρίτου χαρακτῆρος τοῦ πηλίκου πολλαπλασιάζομεν πάλιν τὸν διαιρέτην, πλὴν ἀπὸ τὸν τρίτον χαρακτῆρα ἀρχίζομεν· καὶ οὕτω μὲ τὸν τέταρτον ἀπὸ τὸν τέταρτον κτλ. τὰ δύω παραδείγματα διατρανοῦσιν ὅλα τὰ λεγόμενα.

Α΄

```
 0,75278 πηλίκον
------------
|0,439865  διαιρετέος 0,58432 διαιρέτης
  409024
  ------
   30841
   29216
   -----
    1625
    1168
    ----
     457
     409
     ---
      48
      46
      --
       2
```

B'

```
 4,778 πηλίκον
 ─────
'3,07564 διαιρετέος 0,6437 διαιρέτης
 2,5748
 ──────
   5008
   4505
  ─────
    503
    450
   ────
     53
     51
    ───
      2
```

Τὰ δὲ λείψανα, ὁποῦ μένουσι μετὰ τὴν ὅλην διαίρεσιν, ἢ ἀποῤῥίπτονται, ἢ διὰ μηδενικῶν εἰς δεκαδικὰ κλάσματα προάγομεν τὴν διαίρεσιν.

Καὶ ἴσως ταῦτα περὶ δεκαδικῶν κλασμάτων ἱκανά, ὧν ἡ χρῆσις μεγίστη καὶ ἀναγκαιοτάτη εἰς ὅλην τὴν Μαθηματικήν, καὶ δι' ὧν οἱ ἐπιλογισμοὶ εὐκόλως ἐπιλύονται.

Ἐυχῆς ἔργον ἦν, ἂν τὰ μέτρα ὅλα τὰ ἔθνη τὰ διαιροῦσαν εἰς τὸ δεκαδικόν· ὅπερ οἱ Γάλλοι θαυμασίως ἤδη ἐκατόρθωσαν.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ κλασμάτων συνεχῶν.

§. 265. Κλάσματα συνεχῆ καλοῦσιν οἱ Ἀριθμητικοὶ ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων ὁ μὲν παρονομαστὴς τοῦ πρώτου συνέχεται διὰ τῶν σημείων + καὶ — μὲ ἕτερον κλάσμα, καὶ τούτου πάλιν ὁ παρονομαστὴς μὲ ἕτερον, καὶ ἔτι τούτου ὁ παρονομαστὴς μὲ ἕτερον, καὶ καθεξῆς μέχρι τέλους· ὁ δ' ἀριθμητὴς ὅλων τούτων τῶν κλασμάτων εἶναι ἀεὶ μονάς· ὡς $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}}}}}}$ κτ: ἢ οὕτω $1\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}$ κτ: ἢ οὕτω $2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{9}}}$ κτ:

Ἡμεῖς εἰς ὅλην τὴν θεωρίαν αὐτῶν κατὰ τὸ παρὸν δὲν ἐμβαίνομεν, διότι δὲν ἐμάθομεν ἀκόμη τὰς ἀρχὰς ὅλας, ὁποῦ ἀπαιτοῦνται εἰς αὐτά· καὶ ἠμποροῦν οἱ μαθηταί μας εἰς αὐτὸ τὸ μέρος νὰ ἀπαυδήσωσι· διὸ εἰς τὸ παρὸν μόνον τόσα θέλομεν εἰπῆ, ὅσα εἶναι φοβερὰ καὶ χρήσιμα εἰς τὸν ἑξῆς σκοπόν μας· τὰ δὲ λοιπὰ εἰς ἄλλο μέρος τούτου τοῦ συγγράμματος γενήσονται φανερά.

§. 266. Τὰ τοιαῦτα κλάσματα παράγονται μὲν ἀπὸ ὅλα τὰ κλάσματα, κυρίως ὅμως ἀπὸ ἐκεῖνα τὰ γνήσια κλάσματα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουσι μέτρον κοινὸν (§. 194.), ἤτοι τὰ συνιστάμενα ἐκ δύω πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀριθμῶν· εἰς αὐτὰ ἐὰν διέλωμεν τὸν ἀριθμητὴν μὲ τὸν ἑαυτόν του, καὶ μὲ τὸν αὐτὸν καὶ τὸν παρονομαστήν, διὰ νὰ μὴ χαλάσῃ τὸ κλάσμα (§. 92.), εἰς μὲν τὸν ἀριθμητὴν ἐξέρχεται μονάς, εἰς δὲ τὸν παρονομαστὴν ἀριθμός, καὶ ἓν κλάσμα τοῦ ὁποίου ὁ μὲν ἀριθμητὴς τὸ λεῖψανον, ὁ δὲ παρονομαστὴς ὁ διαιρέτης, ὁποῦ ἦτον τοῦ πρώτου κλάσματος ἀριθμητής· ὡς $\frac{361}{1495}$, οὕτω $\frac{361:361}{1495:361}=\cfrac{1}{4+\cfrac{51}{361}}$

ἀλλὰ καὶ τοῦτο $\frac{51}{361}$ διαιρούμενον ἄνω καὶ κάτω διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ 51 οὕτω· $\frac{51:\ 51}{361:\ 51}$, γίνεται $=\cfrac{1}{7+\cfrac{4}{51}}$, ἄρα

$$\frac{361}{1495}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{4}{51}}}.$$

Διαιρούμενον δὲ καὶ τὸ $\frac{4}{51}$ διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ 4 γίνεται $\frac{4:\ 4}{51:\ 4}=\cfrac{1}{12+\cfrac{3}{4}}$· καὶ ἔτι τὸ $\frac{3:\ 3}{4:\ 3}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}$ καὶ μετεβλήθη τὸ κλάσμα $\frac{361}{1495}$ εἰς τὸ συνεχὲς κλάσμα τὸ ἑξῆς

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}$$

· εἰς αὐτὰ δὲ γίνεται φανερὸν, ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν τῶν κλασμάτων εἶναι μονὰς, οἱ δὲ παρονομασταὶ ἔχουσιν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν μὲ ἓν κλάσμα, ὁποῦ ἔχει τὸν ἀριθμητὴν μονάδα.

§. 207. Ἐὰν ὅμως θεωρήσωμεν τὸν τρόπον, καθ' ὃν μετεβλήθη τὸ κλάσμα $\frac{361}{1495}$ εἰς κλάσματα συνεχῆ, εὑρίσκομεν Α΄, ὅτι ὁ ἀριθμητὴς 361 διεῖλε τὸν παρονομαστὴν 1495, καὶ ἔλαβε πηλίκον 4: καὶ τὸ λείψανον 51 διεῖλε τὸν πρῶτον ἀριθμητὴν 361, καὶ ἔλαβε πηλίκον 7, καὶ ἔμεινε 4· τοῦτο τὸ λείψανον διεῖλε τὸ πρῶτον λείψανον

151, καὶ ἔμεινε λείψανον 3· τοῦτο δὲ διεῖλε τὸν 4 τέλος, καὶ ἀπεσπερματίσθη τὸ κλάσμα εἰς συνεχῆ κλάσματα. Οὗτος δ' ὁ τρόπος εἶναι ὁ ἴδιος, καθ' ὃν ἡμεῖς τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρίσκομεν (§. 194.). Ὅθεν διὰ νὰ φέρωμεν ἕκαστον κλάσμα εἰς συνεχῆ κλάσματα, πρῶτον εὑρίσκομεν μεταξὺ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ ὅλα τὰ πηλίκα κατὰ τὸν τρόπον ἐκεῖνον (§. 198.), δεύτερον εἰς μονάδα ἀριθμητὴν κάμνομεν τὸ ἓν πηλίκον παρονομαστὴν, καὶ συνάπτομεν εἰς αὐτὸν ἕτερον κλάσμα μὲ τὸ σημεῖον + μὲ ἀριθμητὴν μονάδα, καὶ παρονομαστὴν τὸ ἑξῆς πηλίκον· καὶ εἰς αὐτὸν τὸν παρονομαστὴν συνάπτομεν ἕτερον κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν μονάδα, καὶ παρονομαστὴν τὸ ἑξῆς πηλίκον· καὶ ἔτι εἰς αὐτὸν τὸν παρονομαστὴν ἕτερον κλάσμα ὁμοίως, ἕως οὗ νὰ τελειώσωσι τὰ πηλίκα, φέρε τὸ ἄνω παράδειγμα, καὶ δίελε αὐτὸ κατὰ τὸ (§. 194.).

$$\text{οὕτω}\ \frac{361}{1945} = \begin{array}{cccccc} & 4 & 7 & 12 & 1 & 3 \\ 1495 : & 361 : & 51 : & 4 : & 3 : & 1 \\ 1444 & 357 & 48 & 3 & & \\ \hline 51 & 4 & 3 & 1 & & \end{array}$$

τὰ μεταξὺ τούτων πηλίκα εἶναι 4, 7, 12, 1, 3 ἄρα κατὰ τὰ ἄνω εἰρημένα (§. 167.) $\frac{361}{1495} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3.}}}}}$

καὶ εἶναι τὸ αὐτὸ ὁποῦ ἀνωτέρω εὑρίσκομεν.

$$\text{Ἔστω δὲ καὶ τοῦτο}\ \frac{887}{1103} = \begin{array}{cccccccc} & 1 & 4 & 9 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1103 : & 887 : & 216 : & 23 : & 9 : & 5 : & 4 : & 1 \\ 887 & 864 & 207 & 18 & 5 & 4 & 4 & \\ \hline 216 & 23 & 009 & 5 & 4 & 1 & 0 & \end{array}$$

καὶ ἀπὸ αὐτὰ τὰ πηλίκα γίνονται τὰ συνεχῆ·

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4.}}}}}}}$$

Καὶ ἐὰν τὰ πηλίκα γενικῶς ἑνὸς κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$ α, β, γ, δ, ε, ζ κτ: ὀνομάσωμεν. γίνονται τὰ συνεχῆ κλάσματα ὁμοίως $\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon+\cfrac{1}{\zeta}}}}}}$ κτ:

§. 268. Ἄς ἐξετάσωμεν ἤδη τὸ ἄνω κλάσμα

$$\frac{361}{1495}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3.}}}}}$$

ἐὰν ἀπὸ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος μόνον ἓν κλάσμα λάβωμεν τὸ $\frac{1}{4}$, τοῦτο εἶναι τῷόντι μεῖζον τοῦ $\frac{361}{1495}$· διότι γίνεται ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ 4 μικρότερος, ὅταν τὸ λοιπὸν ἀφήσωμεν (§. 199.)· ἐὰν δὲ δύω λάβωμεν ὡς $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}}=\cfrac{1}{\frac{29}{7}}+\frac{7}{29}$ γίνεται ἔλαττον τοῦ $\frac{361}{1495}$· διότι ἀφέντες τὰ λοιπὰ ηὔξησεν ὁ παρονομαστής· διότι τοῦτο $\frac{1}{7}$ ηὔξησε καθ' ὃ ἀφέθησαν τὰ λοιπά· καὶ προστιθέμενον τῷ 4, ηὔξησε τὸν παρονομαστήν· ἄρα ἔλαττον ἔγινεν ὅλον τὸ $\frac{1}{4+\frac{1}{7}}$·

Ἐὰν δὲ τρία μόνον λάβωμεν, καὶ τὰ ἐκτυλίσωμεν, ὡς

$$\frac{1}{4+\frac{1}{7+\frac{1}{12}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{85}{12}}}=\frac{1}{4+\frac{12}{85}}=\frac{1}{\frac{352}{85}}=\frac{85}{352},$$

γίνεται πάλιν κατά τι μικρότερον τοῦ $\frac{361}{1495}$· ἐὰν δὲ τέσσαρα λάβωμεν οὕτω

$$\frac{1}{4+\frac{1}{7+\frac{1}{12+\frac{1}{1}}}}$$

καὶ τὰ ἐκτυλίσωμεν οὕτω

$$\frac{1}{4+\frac{1}{7+\frac{1}{\frac{13}{1}}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{7+\frac{1}{13}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{92}{13}}}=\frac{1}{4+\frac{13}{92}}=\frac{1}{\frac{381}{92}}=\frac{92}{381},$$

γίνεται μεγαλήτερον ἀπὸ τὸ $\frac{361}{1495}$· καὶ οὕτως ἀμοιβαδὸν, ὁτὲ μὲν μεῖζον, ὁτὲ δὲ ἔλαττον γίνεται· πλὴν ὅσῳ περισσότερα κλάσματα ὁμοῦ λαμβάνομεν, τόσῳ μᾶλλον πλησιάζομεν εἰς τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ κλάσματος· διότι ἡ διαφορὰ γίνεται ἀεὶ ἐλάττων, παρὰ μὲ ὀλιγώτερα κλάσματα· καὶ διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν εἰς αὐτὴν τὴν ἀλήθειαν, ἐνέσθωσαν τὰ κλάσματα εἰς δεκαδικὰ κλάσματα κατὰ τὰ ἄνω (§. 240.)

$\frac{361}{1495}=0{,}241471$

$\frac{1}{4}=0{,}25$ ἡ διαφορὰ τούτων $=0{,}008529$

$\frac{7}{29}=0{,}241724$· ἡ διαφορὰ $3{,}000253$

$\frac{85}{352}=0241477$ ἡ διαφορὰ $0{,}000006$.

Ὅθεν μᾶλλον πλησιάζει εἰς τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ κλάσματος $\frac{361}{1495}$ τὸ κλάσμα ἐκ δύω συνεχῶν $\frac{7}{29}$, ἢ τὸ $\frac{1}{4}$· ὅτι καὶ ἡ διαφορὰ ἐκείνου $0{,}000253$ ἐλάττων ἀπὸ τὴν διαφορὰν τούτου $0{,}008529$· καὶ ἔτι μᾶλλον πλησιάζει τὸ $\frac{85}{352}$ εἰς τὴν τιμὴν τοῦ κλάσματος $\frac{361}{1495}$, παρὰ τὸ $\frac{7}{29}$· διότι καὶ ἡ διαφορὰ ἐκείνου ἐλάσσων $0{,}000006$, παρὰ τὴν διαφορὰν τούτου $0{,}000253$.

§. 260. Τὸ ὄφελος τῶν συνεχῶν κλασμάτων κυρίως γίνεται εἰς τὰ κλάσματα τὰ μεγάλα, ὅπου ἔχουσιν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους, καὶ δὲν φέρονται εἰς μικρότερα κλάσματα (§. 194.)· δηλ: ἀπαιτεῖται πολλάκις νὰ φέρωμεν κλάσματα, ὧν ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς εἶναι μέγιστοι ἀριθμοὶ, εἰς ἕτερα κλάσματα μὲ μικροτέρους ἀριθμοὺς, μὲ μίαν ἀνεπαίσθητον μεταβολὴν τοῦ κλάσματος, ὥστε ἀπολύτως ἄνευ βλάβης νὰ ἠμπορῶμεν ταῦτα ἀντ' ἐκείνων νὰ λάβωμεν, τοῦτο δὲ γίνεται ἐὰν τὸ προτεθὲν κλάσμα εἰς κλάσματα κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον μεταβάλλωμεν (§. 266.), καὶ ἔπειτα κατὰ τάξιν νὰ ἐκτυλίσωμεν αὐτὰ ἀπὸ δύω μέλη, ἀπὸ 3, ἀπὸ 4, καὶ καθεξῆς· καὶ οὕτως ἔγινε φανερὸν (§. 268.), ὅτι τὰ ἀκόλουθα ταῦτα κλάσματα ἀεὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πλησιάζουσιν εἰς τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ κλάσματος, καὶ ἐκτὸς τούτων κἀνένα ἄλλο κλάσμα δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ συντομώτερον, καὶ ἅμα νὰ πλησιάζῃ εἰς τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ προτεθέντος κλάσματος. Πολλάκις ἀπὸ δύω ἢ τρία συνεχῆ κλάσματα, παρίσταται κλάσμα ὁποῦ ἔγγιστα πλησιάζει εἰς τὴν τιμὴν τοῦ προτεθέντος κλάσματος, μάλιστα ὅταν τὸ ἑξῆς ἔχῃ μεγάλον παρονομαστὴν, ὡς εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα φαίνεται. Εὑρεθήτωσαν τὰ πηλίκα τοῦ κλάσματος $\frac{25060}{25691}$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & 1 & & 36 & & 5 & & 1 & & 1 & & 2 & & 1 & & 17 & \\
25691 & : & 25000 & : & 691 & : & 124 & : & 71 & : & 53 & : & 18 & : & 17 & : & 1 \\
\underline{25000} & & \underline{2073} & & \underline{620} & & \underline{71} & & \underline{53} & & \underline{36} & & \underline{17} & & & & \\
691 & & 4270 & & 71 & & 53 & & 18 & & 17 & & 1 & & & & \\
 & & \underline{4146} & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 124 & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Καὶ ἐκ τούτων τῶν πηλίκων γίνεται τὸ συνεχὲς κλάσμα καὶ τὰ ἀνωτέρω (§. 267.)

$$\frac{25000}{25691}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{36+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17}}}}}}}}$$

ἐὰν δὲ ταῦτα ἀναπτύξωμεν ἀπὸ ἓν, ἀπὸ 2, ἀπὸ 3, ἀπὸ 4 ἕως, ἀπὸ 5 καὶ κτ., εὑρίσκονται ταῦτα.

$\frac{1}{1}, \frac{36}{37}, \frac{181}{186}, \frac{217}{223}, \frac{308}{409}$. καὶ ὅλων αὐτῶν ἕκαςον, ἀντ' ἐκείνου λαμβάνεται, χωρὶς αἰσθητήν τινα τροπὴν τῆς τιμῆς ἐκείνου· καὶ ἐκεῖ ὅπου μεγάλη ἀκρίβεια δὲν ἀπαιτεῖται, λαμβάνομεν καὶ τὸ δεύτερον $\frac{36}{37}$, ἀντὶ τοῦ $\frac{25000}{25691}$, ἀγκαλὰ καὶ τὸ ἑξῆς μᾶλλον ἀκριβέςερον.

§. 270. Ἐπειδὴ ὅμως οὗτος ὁ τρόπος εἶναι ὀρθὸς μὲν, πλὴν κοπιαςικὸς, καὶ χρόνον ἱκανὸν χρειάζεται ἀπὸ τὴν ἀκολουθίαν τῶν συνεχῶν κλασμάτων, ἡ μέθοδος πολὺ συντομεύεται· ὅθεν διὰ νὰ ἐφεύρωμεν αὐτὴν τὴν μέθοδον, πρέπει πάλιν αὐτὴν τὴν συνέχειαν τῶν κλασμάτων γενικῶς διὰ γραμμάτων νὰ πολυπραγμονήσωμεν.

Ἔςω τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$, καὶ δεδόσθω διὰ τῆς ἀπ' ἀλλήλων διαιρέσεως νὰ εὑρέθησαν τὰ πηλίκα α, β, γ, δ, ε, ζ κτ:

ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu} = \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon + \cfrac{1}{\zeta \text{ κτ:}}}}}}}$

Ἐὰν δὲ κατὰ τὰ ἄνω εἰρημένα ἀναπτύξωμεν αὐτὰ (§. 267.) ἀπὸ ἕνα, ἀπὸ 2 ἀπὸ 3, ἀπὸ 4 κτ: καὶ καλέσωμεν τὸ πρῶτον Α, τὸ ἀπὸ δύω Β, καὶ τὸ ἀπὸ 3, Γ, καὶ τὰ λοιπὰ Δ, Ε, Ζ κτ: εὑρίσκομεν,

$$A=\frac{1}{\alpha}=\frac{1.\ 1}{\alpha.\ 1}$$

$$B=\frac{\beta}{\alpha\beta+1}=\frac{\beta.\ 1}{\beta\alpha+1}$$

$$\Gamma=\frac{\beta\gamma+1}{\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha}=\frac{(\beta\gamma+1)}{\gamma(\alpha\beta+1)+\alpha}$$

$$\Delta=\frac{\delta\beta\gamma+\delta+\beta}{\delta\alpha\beta\gamma+\delta\gamma+\alpha\delta+\alpha\beta+1}=\frac{\delta(\beta\gamma+1)+\beta}{\delta(\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha)+\alpha\beta+1}$$

$$E=\frac{\varepsilon\delta\beta\gamma+\varepsilon\delta+\varepsilon\beta+\beta\gamma+2}{\varepsilon\delta\alpha\beta\gamma+\varepsilon\delta\gamma+\varepsilon\alpha\delta+\varepsilon\alpha\beta+\varepsilon+\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha}=$$

$$\frac{\varepsilon(\delta\beta\gamma+\delta+\beta)+\beta\gamma+1}{\varepsilon(\delta\alpha\beta\gamma+\delta\gamma+\alpha\delta+\alpha\beta+1)+\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha}$$

$$Z=\frac{\zeta\varepsilon\delta\beta\gamma+\zeta\varepsilon\delta+\zeta\varepsilon\beta+\zeta\beta\gamma+\zeta+\delta\beta\gamma+\delta+\beta}{\zeta\varepsilon\delta\alpha\beta\gamma+\zeta\varepsilon\delta\gamma+\zeta\varepsilon\alpha\delta+\zeta\varepsilon\alpha\beta+\zeta\varepsilon+\zeta\alpha\beta\gamma+\zeta\gamma+\zeta\alpha+\delta\alpha\beta\gamma+\delta\gamma+\alpha\delta+\alpha\beta+1}$$

$$\frac{\zeta(\varepsilon\delta\beta\gamma+\varepsilon\delta+\varepsilon\beta+\beta\gamma+1)+\delta\beta\gamma+\delta+\beta}{\zeta(\varepsilon\delta\alpha\beta\gamma+\varepsilon\delta\gamma+\varepsilon\alpha\delta+\varepsilon\alpha\beta+\varepsilon+\alpha\beta\gamma+\gamma+\varepsilon)+\delta\alpha\beta\gamma+\delta\gamma+\alpha\delta+\alpha\beta+1}$$

Ἐὰν λοιπὸν ἐξετάσωμεν τὴν ἀκολουθίαν αὐτῶν τῶν κλασμάτων, εὑρίσκομεν τὸ τρίτον Γ νὰ γίνεται, ἐὰν μὲ τὸ τρίτον πηλίκον γ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ Β καὶ προσθέσωμεν καὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ Α, γίνεται ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ. ὁ δὲ παρονομαστὴς γίνεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν μὲ αὐτὸ τὸ πηλίκον γ τὸν παρονομαστὴν τοῦ Β, καὶ προσθέσωμεν καὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ Α· ὁμοίως καὶ τοῦ Δ τὸ κλάσμα γίνεται, ὁ μὲν ἀριθμητὴς ἐὰν διὰ τοῦ τετάρτου πηλίκου δ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ Γ καὶ προσθέσωμεν καὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ Β· ὁ δὲ παρονομαστὴς ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ Γ, καὶ προσθέσωμεν καὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ Β·

τὸ δὲ κλάσμα τοῦτο γίνεται, ἐὰν διὰ τοῦ πέμπτου πηλίκου ε, πολλαπλασιάσωμμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ Δ, καὶ προσθέσωμεν, καὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ Γ· ὁ δὲ παρονομαςὴς ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸ πηλίκον Ε, τὸν παρονομαςὴν τοῦ Δ, καὶ προσθέσωμεν καὶ τὸν παρονομάςὴν τοῦ Γ, καὶ οὕτω γίνονται καὶ τὰ λοιπὰ ἀπὸ τῶν δύω προηγουμένων κλασμάτων, ὅταν τὸ προσεχῶς ἡγούμενον κλάσμα μὲ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζεται, καὶ τὸ προηγούμενον προςίθεται· ὅθεν ἀνάγκη εἶναι πρῶτον, διὰ τῆς διαλλήλου διαιρέσεως (§. 194.) τὰ πηλίκα νὰ εὕρωμεν, καὶ εἶτα εὐκόλως τὰ κλάσματα κατὰ τὰ λεχθέντα εὑρίσκονται· τὸ μὲν πρῶτον κλάσμα ἔχει πάντοτε μονάδα ἀριθμητὴν, καὶ τὸ πρῶτον πηλίκον παρονομαςήν· καὶ διὰ νὰ γίνεται καὶ τὸ δεύτερον κλάσμα κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον προτιθέασι πρὸ τοῦ κλάσματος τοῦ πρώτου τοῦτο τὸ κλάσμα $\frac{0}{1}$, καὶ οὕτω γίνονται τὰ ἑξῆς κατὰ τὸν κανόνα αὐτόν.

Σημείωσαι ὅτι τοῦτο $\frac{0}{1}$ τίθεται ὡς τύπος καὶ δὲν σημαίνει τίποτε.

§. 271. Ἂς λάβωμεν τώρα τὰ πηλίκα τοῦ ἀνωτέρου κλάσματος $\frac{25000}{25691}$ (§. 269.)· 1, 36, 5, 1, 1, 2, 1, 17 καὶ ὡς ἄνω ἐδιδάχθημεν εὑρεθήτωσαν τὰ κλάσματα

$$\begin{array}{c|cccccccc} & 1, & 36, & 5, & 1, & 1, & 2 & 1 & 17 \\ \hline \frac{0}{1} & \frac{1}{1}, & \frac{36}{37}, & \frac{181}{186}, & \frac{217}{223}, & \frac{398}{409}, & \frac{1013}{1041}, & \frac{1411}{1450}, & \frac{25000}{25691} \end{array}$$

ἐδῶ βλέπομεν τοὺς αὐτοὺς κανόνας.

Α'. Τὸ $\frac{0}{1}$ ἐτέθη ὡς ἀσήμαντον.

Β'. Τὸ μὲν πρῶτον κλάσμα ἔγινεν, ἀφ' οὗ ἐτέθη μονὰς ἀριθμητὴς, καὶ τὸ πρῶτον πηλίκον παρονομαστὴς ἡ μονάς.

Γ'. Τὸ δεύτερον δὲ, μὲ τὸ δεύτερον πηλίκον 36 ἐπολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πρώτου καὶ προσεθέσαμεν καὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ προηγουμένου 36. 1+0=36, καὶ ἔτι τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἡγουμένου καὶ ἐπροσθέσαμεν καὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ προηγουμένου 36. 1+1=37· ὁμοίως καὶ τὸ τρίτον ἔγινε μὲ τὸ πηλίκον 5 οὕτω 5. 36+1=181, καὶ 5. 37+1=186· ὁμοίως τὸ τέταρτον 1. 181+36=217, καὶ 1. 186+37=223· τὸ δὲ πέμπτον 1. 217+181=398, καὶ 1. 223+186=409· τὸ ἕκτον 2. 398+217=1013 καὶ 2. 409+223=1041· τὸ ἕβδομον 1. 1013+398=1411 καὶ 1. 1041+409=1450· τὸ δὲ τελευταῖον 17. 1411+1013=25000· καὶ 17. 1450+1041=25691.

Δ'. Βλέπομεν ἐνταῦθα ὅτι τὸ δεύτερον ἀκριβέστερον τοῦ πρώτου, καὶ τὸ Γ' τοῦ Β' καὶ τὸ Δ' τοῦ Γ' κτλ ὥστε τὸ ἔσχατον ἴσον τῷ δοθέντι (§. 269.)· δεδόσθω ἔτι τὸ κλάσμα $\frac{20929}{86400}$, καὶ ζητείσθω νὰ εὕρωμεν ἕτερα κλάσματα μικρότερα, καὶ ὡς ἔγγιστα αὐτοῦ τοῦ κλάσματος· ἐὰν διελῶμεν κατὰ τὰ ἄνω ῥηθέντα εὑρίσκομεν πηλίκα 4, 7, 1, 3, 1, 16, 1, 1, 15 ἄρα τὰ κλάσματα οὕτω

$$\begin{array}{c|ccccccccc} & 4, & 7, & 1, & 3, & 1, & 16, & 1, & 1, & 15 \\ \hline \frac{0}{1} & \frac{1}{4}, & \frac{7}{29}, & \frac{8}{33}, & \frac{31}{128}, & \frac{39}{161}, & \frac{655}{2604}, & \frac{694}{2765}, & \frac{1349}{5369}, & \frac{20029}{86400} \end{array}$$

Εἰς αὐτὸ τὸν παράδειγμα τὸ $\frac{39}{161}$ εἶναι σχεδὸν ὡς ἔγγιστα τοῦ κλάσματος $\frac{20929}{86400}$· διότι ὁ ἑξῆς παρονομαστὴς κατὰ πολλὰ ηὐξήνθη (§. 269.).

Ληφθείτω ἤδη καὶ ἡ ἀναφορὰ τῆς διαμέτρου μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου $\frac{10000000000}{31415926536}$ καὶ εὑρεθήτωσαν τὰ πηλίκα οὕτω.

3	7	15	1
31415926536 : 10000000000 :	1415926536 :	88514248 :	
30000000000	9951485752	530784056	88212816
1415926536	88514248	442571240	301432
		88212816	

1	292	
: 88212816	: 301432 κτ:	ἄρα τὰ πηλίκα 3,7,15,1,292

κτ. διότι ἀδιάφορον εἶναι καὶ ἐὰν ὅλα τὰ πηλίκα δὲν εὕρομεν· διότι πολλάκις εἶναι ἀρκετὸν νὰ εὕρωμεν τὰ κλάσματα τῶν πρώτων πηλίκων· ὅθεν

	3,	7,	15,	1,	292
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$,	$\frac{7}{22}$,	$\frac{106}{333}$,	$\frac{113}{355}$,	$\frac{33102}{103993}$.

Ἐνταῦθα γίνεται φανερὸν ὅτι τὸ δεύτερον κλάσμα ὁ Ἀρχιμήδης ἔλαβε, πλὴν ἐγγύτερον τῆς ἀληθείας τὸ $\frac{113}{355}$ διότι ὁ ἑξῆς παρονομαστὴς εἶναι κατὰ πολλὰ μεγάλος (§. 269.). Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ $\frac{7}{22}$ καὶ $\frac{113}{355}$ μὲ τὸ δοθὲν $\frac{10000000000}{31415926536}$. εὑρεθήτωσαν πρῶτον τὰ δεκαδικὰ αὐτῶν, καὶ εἶτα διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἡ διαφορὰ εὑρίσκεται·

$$\text{οὕτω } \frac{10000000000}{31415926536}=0,318309886$$

$$\text{ἡ τούτων διαφ:} = \quad 0,00299457{\scriptstyle 1}$$

$$\frac{7}{22}= \ldots \quad 0,3153153{\scriptstyle 1}5$$

$$\frac{113}{355}= \quad 0,318309859\cdot$$

ἄρα ἡ διαφορὰ τούτου ἀπὸ τοῦ δοθέντος $=0,000000027$· ὅθεν γίνεται φανερὸν, ὅτι ἡ διαφορὰ πολὺ μεγαλητέρα τοῦ $\frac{7}{22}$, ἢ τοῦ $\frac{113}{355}$ μὲ τὸ πρῶτον $\frac{10000000000}{31415926536}$.

§. 272. Ἐὰν δὲ τὸ κλάσμα τὸ δοθὲν εἶναι νόθον, μεταβάλλομεν τὸν ἀριθμητὴν εἰς παρονομαστὴν, καὶ τοῦτον εἰς ἀριθμητὴν, καὶ γίνεται τὸ κλάσμα γνήσιον, καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εὑρίσκομεν τὰ βραχύτερα κλάσματα, καὶ εἶτα ποιοῦμεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν παρονομαστὰς, καὶ τούτους ἀριθμητάς. Ἐὰν δοθῇ τοῦτο τὸ νόθον κλάσμα $\frac{2}{1,9129312}=$ $\frac{20000000}{19129312}$ μεταβληθήτω εἰς γνήσιον $\frac{19129312}{20000000}$, καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως εὑρεθήτωσαν τὰ πηλίκα 1, 21, 1, 32 κτλ

$$\text{εἶτα} \quad \begin{array}{c|cccc} & 1, & 21, & 1, & 32 \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{1}, & \frac{21}{22}, & \frac{22}{23}, & \frac{725}{788} \text{ κτλ} \end{array}$$

Λοιπὸν τὰ σύντομα κλάσματα τοῦ νόθου κλάσματος $\frac{2}{1,9129312}$ εἶναι $\frac{1}{1}$, $\frac{22}{21}$, $\frac{23}{22}$, $\frac{758}{725}$ κτ: καὶ τοσαῦτα περὶ τῶν συνεχῶν κλασμάτων εἰς τὸ παρὸν, εἰς ἄλλο μέρος ὅμως πλείονα.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Δ'.

Περὶ κλασμάτων τῶν συγκεκριμένων Ἀριθμῶν.

§. 273. Τὶ ἐννοοῦμεν μὲ τοὺς συγκεκριμένους ἀριθμοὺς καὶ πῶς ἐκλαμβάνονται, εἰς τὸ Γ· μέρος τοῦ πρώτου τμήματος (§. 174.) ἐδηλώθη· ὡσαύτως καὶ πῶς συνάπτομεν, καὶ ἀφαιροῦμεν, πῶς δὲ καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς καὶ διαιροῦμεν, μὲ ἕνα συγκεκριμένον ἀριθμὸν ἀσύμπλεκτον, ἤτοι ἄνευ μερῶν μιᾶς μονάδος, ἱκανῶς εἴρηται (§: 181, 182.)· ἐδῶ μόνον θέλομεν εἰπῇ πῶς πολλαπλασιάζομεν συγκεκριμένους ἀριθμοὺς συμπεπλεγμένους μὲ διαφόρους μονάδας, καὶ πῶς αὐτοὺς διαιροῦμεν, διὰ νὰ μὴν ἀπορῶσιν οἱ ἀναγνῶσται μας εἰς αὐτό.

§. 274. Συγκεκριμένον ἀσύμπλεκτον ἀριθμὸν καλῶ ἐκεῖνον, ὅπου δὲν ἔχει μονάδας κατωτέρας τάξεως ὁμοῦ· ὡς 5 ὀκ:, 15 γροσ:, 3 ἡμ: κτ: Συμπεπλεγμένον δὲ, ὅστις ἔχει ὁμοῦ καὶ μονάδας κατωτέρας τάξεως ὡς 15 γρ: 2 παρ: 1 ἄσπ: καὶ 70 ὀκ: 50 δρ:· καὶ 3 ἡμ:, 15', 22'' κτ:. ὅθεν διχῶς πολλαπλασιάζομεν συγκεκριμένον συμπεπλεγμένον ἀριθμὸν μὲ συμπεπλεγμένον ἀριθμόν.

§. 275. Α΄. Ἐὰν δοθῶσι συμπεπλεγμένοι ἀριθμοὶ καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος, πρῶτον ἀνάγομεν τοῦ πολλαπλασιαστέου ὅλας τὰς ἐσχάτας τάξεις εἰς τὴν ἀνωτέραν τάξιν, ὁμοίως καὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν κατὰ τὰ εἰρημένα (§. 207.)· καὶ εἶτα ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς γίνεται κλάσμα νόθον, ὁμοίως καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος, πολλαπλασιάζονται κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων· καὶ τέλος τοῦτο τὸ παραγόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ εὑρίσκονται κατὰ τάξιν ὅλαι αἱ λοιπαὶ τάξεις ἐν αὐτῷ· ὡς καὶ περὶ τούτου ἱκανὰ εἴπομεν (§. 176.) νῦν δὲ ἄς τὸ διασαφήσωμεν καὶ διὰ παραδειγμάτων.

1) $\overset{ορ}{11}, \overset{π}{4}, \overset{δ}{8}$ τοῖχος κάθε ὀργυιὰν ἀπὸ 5 γρο: 17 παρ: πόσα κοστίζει; φέρομεν τοὺς δακτύλους καὶ πόδας εἰς ὀργυιάς, οὕτω $\overset{ορ}{11}, \overset{π}{4}, \overset{δ}{8} = 11, 4\frac{8}{12} = 11, \frac{56\,π}{12} = 11\frac{56}{6.\,12} =$

$$11\frac{56}{72} = \frac{848}{72} = \frac{212}{18} = \frac{106}{9}$$ ὁ πολλαπλασιαστέος.

Ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς $5+17 = 5\frac{11}{40}$ γρο: $= \frac{211}{40}$ παρ:

λοιπὸν $\frac{106}{9} \cdot \frac{211}{40} = \frac{106.\,211}{9.\,40} = \frac{22366}{360}$ γρο: καὶ τοῦτο τὸ παραγόμενον· δίελε ἤδη τὸν 22366 διὰ τοῦ 360 καὶ εὑρίσκονται τὰ γρο:. ἄρα $\frac{22366}{360}$ γρο: $= 62$ γρο: 5

παρ: $\frac{40}{360}$.

11) 5 ὀκ: $+$52 δρ: μολύβι ἀπὸ 5 γρο: 28 παρ: πόσα γρόσ: γίνονται; πάλιν οὕτω $5+52=5\frac{52}{400}$ ὀκ: $=\frac{2052}{400}=\frac{513}{100}$ ὀκ: ἔτι $5+28=5\frac{28}{40}=\frac{228}{40}=\frac{57}{10}$ γρο: ἄρα $\frac{513}{100}=\frac{57}{10}$ γρ: $=\frac{29241}{1000}=29$ γρο: $+$ 11 παρ: $+$ 1 ἄσπρ: $\frac{920}{1000}$.

Πλὴν ἐπειδὴ τὰ ἐδικά μας μέτρα λύονται εὐκόλως εἰς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$ κτ: κάλλιον ἐκείνη ἡ μέθοδος, ὅπου ἀνωτέρω ἐδιδάξαμεν (§. 247.)· αἱ ἑξῆς μέθοδοι ὅμως ἀνήκουσι μᾶλλον εἰς τὰ μέτρα τῶν ἄλλων ἐθνῶν, ὡς καὶ εἰς τὰς ὀργυιάς, πόδας, κτ: ἐπειδὴ ὅμως ἡμεῖς εἰς ἄλλο μέρος θέλομεν ἀναπτύξει τὰ μέτρα τῶν ἄλλων ἐθνῶν, ἐδῶ λέγομεν μόνον ὅτι οἱ Γερμανοὶ ἔχουσι λεπτά. 4 λεπτὰ $=$ 1 κραϊτζάρι· 3 κραϊτζάρια $=$ 1 γροσίκι· 20 γροσίκια $=$ 1 φιορ:. $1\frac{1}{2}$ φιορίνι $=$ 1 τάληρον.

Πάλιν 1 λίτρα $=32$ λότια· 1 λότι $=4$ δρ: τὸ δὲ δράμι συμφωνεῖ σχεδὸν μὲ τὸ ἐδικόν μας.

Οἱ δὲ Γάλλοι ἔχουσι δηνάρια· 12 δην: $=$ 1 σολδίον· 20 σολ: $=$ 1 λίτρα· 3 λίτρ: $=$ 1 τάληρον μικρὸν, καὶ 6 λίτρ: $=$ 1 μεγάλον τάληρον, καὶ 4 μεγάλα τάληρα $=$ 1 φλωρίον λουϊδὸρ καλούμενον· ἔτι 20 κόκκοι $=$ 1 δηνάριον· 3 δηνάρια $=$ 1 δραχμήν· 8 δραχμαὶ $=$ 1 οὐγγία· 10 οὐγγ: $=$ 1 λίτρ: καὶ αὐτὰ μέτρα θέλομεν παραδειγματίσει εἰς τὰ ἑξῆς.

111) Ἐάν τις ἀγοράσῃ ἕνα τόπον $\overset{ορ}{40}$, $\overset{π}{3}$, $\overset{δ}{2}$ ἀπὸ $\overset{ορ}{30}$, $\overset{π}{4}$, $\overset{δ}{8}$, πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ;

$$\overset{ορ}{40},\ \overset{π}{3},\ \overset{δ}{2} = 40,\ 3\frac{2}{12} = 40\frac{38}{12} = 40\frac{38}{72} = \frac{2918}{72} = \frac{1459}{36}\overset{ορ}{}.$$

ἔτι $\overset{λ}{50}$, $\overset{π}{4}$, $\overset{δ}{8} = \overset{λ}{50}$, $4\frac{8}{12} = 50, \frac{56}{12} = 50\frac{56}{240} = \frac{12056}{240} = \frac{6028}{120} = \frac{1507}{30}$. λιτ: ἄρα $\frac{1459}{36} \cdot \frac{1507}{30} = \frac{2198713}{1080} = 2035$ λιτ: 16 σουλ: 11 δην: $\frac{24}{27}$.

Καὶ οὗτος ὁ τρόπος φαίνεται εἰς ἡμᾶς ὁ καλλήτερος, μὲ ὅλον ὁποῦ ἄλλως ἐργώδης φαίνεται· ἕτεροι δὲ ἀκολουθοῦσι τὴν ἑξῆς μέθοδον.

§. 276. Ἐπειδὴ καὶ ἡμεῖς ἐμάθομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς, ὁποῦ ἐπ' ἀκριβὲς περιέχεται εἰς ἕτερον ἀριθμὸν, οὐ μόνον πολλοςὸν μέρος ἐκείνου λέγεται, ἀλλὰ καὶ παράγων· ὡς ὁ 3 εἰς τὸν 12, ὁ 5 εἰς τὸν 20 κτλ· λοιπὸν ἕκαςος ἀριθμὸς, ὁποῦ πολλαπλασιάζει ἕτερον ἀριθμὸν, ἐπισωρεύει αὐτὸν τόσαις φοραῖς, ὅσας μονάδας αὐτὸς περιέχει (§. 71.) ὅθεν ὅταν πολλαπλασιάσω τὸν 6 μὲ 5, εἶναι νὰ λάβω αὐτὸν 5 φοραῖς· ὅταν δὲ πολλαπλασιάσω αὐτὸν μὲ $5\frac{1}{2}$, εἶναι νὰ λάβω αὐτὸν 5 φοραῖς καὶ ἅμα τὸ ἥμισυ αὐτοῦ· οὕτω, 5. 6+3· διότι $5\frac{1}{2} = 5 + \frac{1}{2}$ καὶ $6.\ 5\frac{1}{2} = 6.\ 5 + 6\frac{1}{2} = 33$· ὁμοίως καὶ $4.\ 8\frac{3}{4} = 4(8 + \frac{2}{4} + \frac{1}{4})$ δηλ: νὰ πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον 4. 8 = 32, εἶτα νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ 4 = 2, καὶ εἶτα τὸ ἓν τεταρτημόριον αὐτοῦ = 1, καὶ εἶναι $4(8+\frac{2}{4}+\frac{1}{4})=32+2+1=35=4.\ 8\frac{3}{4}$.

Ὁμοίως καὶ 20. $3\frac{8}{10}=20(3+\frac{5}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10})$· δηλ: νὰ πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον 20. 3=60· εἶτα διὰ τὸ $\frac{5}{10}$ νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ 20=10· εἶτα νὰ λάβωμεν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 20=4 καὶ τέλος τὸ ἓν δεκατημόριον τοῦ 20=2· καὶ ὅλα ὁμοῦ $60+10+4+2=76=20(3+\frac{5}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10})$· λοιπὸν πρέπει τοὺς ἀριθμοὺς τῶν κατωτέρων μονάδων νὰ τοὺς χωρίζωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, καὶ νὰ λαμβάνωμεν τὸ πολλαπλοῦν τοῦ πολλαπλασιαστέου κατὰ μέρος καὶ νὰ τὰ συνάπτωμεν· πλὴν πρέπει πάντοτε νὰ ἐξεύρωμεν τί παραγόμενον ζητεῖται, καὶ κατὰ τοῦτο νὰ γίνεται ἡ λῆψις τῶν μερῶν.

Ζητεῖται ἐπὶ παραδείγματος νὰ πολλαπλασιάσωμεν 60 μὲ $5\frac{5}{6}$· οὕτω πολλαπλασιάζω πρῶτον μὲ 7 τὸν 60=420· εἶτα ἀντὶ $\frac{5}{6}$ λαμβάνω τὰ $\frac{3}{6}$ ὁποῦ εἶναι μισὸν, καὶ πέρνω τὰ ἡμίση τῶν 60=30· ἔπειτα τὰ 2 ἑκτημόρια

$$\begin{array}{r} 60 \\ 7\frac{5}{6} \\ \hline 420=7.\ 60 \\ 30=\frac{3}{6}.\ 60 \\ 20=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.\ 60 \\ \hline 470 \end{array}$$

τοῦ 60=20, καὶ τὰ συνάπτω εἰς 470, καὶ τοῦτο τὸ παραγόμενον.

Ὡσαύτως 30 ὀκ: ἀπὸ 5 γρο: καὶ 15 παρ:, πόσα κάμνει; πολλαπλασιάζω Α΄ τὸν 30. 5=150, ἔπειτα σχίζω τοὺς 15 παρ: εἰς 10 καὶ 5· καὶ ἐπειδὴ 10 παρ: $\frac{1}{4}$ γρ: λαμβάνω $\frac{1}{4}$ τοῦ 30=7 καὶ 20 παρ:· ἔπειτα 5 παρ: $\frac{1}{8}$ γρ:, καὶ $\frac{1}{2}$ τοῦ $\frac{1}{4}$ δηλ: τοῦ 7 γρο:, 20 παρ:, λαμβάνω τὰ μισὰ τοῦ 7, 20=3 γρο: 30 παρ:, καὶ συνάπτω αὐτὰ, καὶ εἶναι τὸ παραγόμενον =161 γρο: 10 παρ:

$$\begin{array}{rl} & 30 \\ & 5 \\ \hline & 150 \quad 30.\ 5 \\ & 7,20=\frac{1}{4}.\ 30 \\ & 3,30=\frac{1}{8}.\ 30 \\ \hline & 161 \quad 10 \end{array}$$

Ὡσαύτως 42 πήχ: καὶ $\frac{7}{8}$ τζόχας ἀπὸ 25 λίτρ: τὴν πήχην, πόσα ὅλον κοστίζει; βλέπομεν ὅτι πολλαπλασιάζομεν Α΄ 25. 42. ἔπειτα σχίζω διὰ τοῦ νοὸς τὸ $\frac{7}{8}$ εἰς $\frac{4}{8}$ καὶ $\frac{2}{8}$ καὶ $\frac{1}{8}$· ἐπειδὴ τὸ $\frac{4}{8}$ εἶναι μισὸν, λαμβάνω τὰ ἡμίση τοῦ 25=12, 10· ἐπειδὴ δὲ καὶ τὰ $\frac{2}{8}$ εἶναι μισὸν τοῦ $\frac{4}{8}$, λαμβάνω τὸ μισὸν τοῦ 12, 10· ἐπειδὴ καὶ τὸ

$$\begin{array}{rl} & \lambda \\ & 25 \\ & 42,\ \frac{7}{8} \\ \hline & \lambda\ 00\ \delta\eta \\ & 50 \\ & 100 \end{array} = 52.\ 42$$

$$\begin{array}{rl} 12,\ 10 & =\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.\ 25 \\ 6,\ 5 & =\frac{2}{8}.\ 25 \\ 3,\ 2,6 & =\frac{1}{8}.\ 25 \\ \hline 1071,\ 17,6 & \end{array}$$

$\frac{1}{8}$ εἶναι μισὸν τοῦ $\frac{2}{8}$, λαμβάνω, καὶ τὸ μισὸν τοῦ 6, 5=3, 6·. καὶ συνάπτω ὅλα ὁμοῦ εἰς ἓν παραγόμενον 1071 λ: 17: 6 δην:

„Πωλεῖται τόπος τις 27^{o}, 4', 8" ἀπὸ 72 λιτ: 6 σολ: 6 δην: τὴν ὀργ: πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ δι' ὅλου τοῦ τόπου; ἐδῶ ἐπειδὴ καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος συμπεπλεγμένος ἀριθμὸς, καὶ ζητεῖται τὸ παραγόμενον εἰς λίτραις, γράφονται κατὰ τάξιν, οὕτω.

Α'. Πολλαπλασιάζω 72. 27 κατὰ τάξιν.

Β'. Σχίζω τὸν 6 εἰς 5+1 καὶ ἐπειδὴ 5=$\frac{1}{4}$ λ:, λαμβάνω τὸ ἓν τεταρτημόριον τοῦ 27^{o}=6, 15.

Γ'. Ἐπειδὴ τὸ 1 εἶναι ἓν πεμπτημόριον τῶν 5, λαμβάνω ἓν πεμπτημόριον τοῦ 6, 15=1, 7, 0, καὶ αὐτὴ ἡ τιμὴ ἑνὸς σουλδίου.

λ	σ	δη
72,	6,	6
27^{o},	4',	8"
504 λ:,	σου,	δην
144		
6	15-	0 δια 5, σουλδ:
1	7-	0 δι' 1, σουλδ:
0	13,	6 δι' 6, δην.
36,	3,	3 δια 2 ποδ:
12,	1	1 δι' 1 ποδ:
4	0	$4\frac{1}{4}$ δια 4 δακτ:
4	0	$4\frac{1}{4}$ δια 4 δακ:
2009	0	$6\frac{?}{?}$

Δ'. Ἐπειδὴ τὰ 6 δηνάρια εἶναι μισὸν σουλδίου, λαμβάνω τὸ μισὸν τοῦ 1, 7^{o}=0, 13, 6.

Ε'. Πρέπει καὶ μὲ τὸν 4 ὅλου τὸν πολλαπλασιαστέον νὰ πολλαπλασιάσωμεν· ὅθεν σχίζομεν 4'=3'+1'· τρεῖς δὲ πόδες εἶναι $=\frac{1}{2}$ ὀργ. ἄρα λαμβάνομεν ὅλον τὸν μισὸν πολλαπλασιαστὴν $=36^{\lambda},\ 3^{o},\ 3^{\delta}$.

ΣΤ΄. Τὸ δ΄ ἓν εἶναι ἓν τριτημόριον τοῦ 3· ἄρα τὸ ἓν τριτημόριον τοῦ 36, 3, 3 λαμβάνομεν $=12^{\lambda},\ 1^{o},\ 1^{\delta\eta\nu}$· καὶ οὗτος δὲ ἕνα πόδα· σχίζω δὲ καὶ τοὺς δακτύλους εἰς 4+4, 4 δὲ δάκτυλοι $=\frac{1}{3}$ ποδός· ἄρα λαμβάνομεν δὶς ἓν τριτημόριον τοῦ $12^{\lambda},\ 1^{o},\ 1^{\delta\eta\nu}=4^{\lambda},\ 0^{o},\ 4\frac{1}{3}^{\delta}$, καὶ συνάπτομεν εἰς ἓν παραγόμενον.

„Ἔτι ἠγοράσθη ἓν σχοινίου παλαμάρι 17 ὀργυιαῖς ἀπὸ 34 γρόσ: τὴν ὀργυιάν, 10 παρά: καὶ 2 ἄσπ: καὶ ζητεῖται ὅλη ἡ τιμή.

```
     17 ὀργ:
     34 γρο: 10 παρ: 2 ἄσπ.
    ------------------------
     68 γρο: παρ: ἀσπ:
    51
      4 10....διὰ τοὺς 10 π.
      1 7....διὰ τὸν 1 π.
         5 2 διὰ τὸ 1 ἄσπρ.
         5 2 διὰ τὸ 1 ἄσπρ.
    ------------------------
    582 21 1
```

Γράφονται λοιπὸν κατὰ τάξιν, καὶ πολλαπλασιάζονται οὕτως· πολλαπλασιάζομεν ὀρθῶς 17.34· ἔπειτα ἐπειδὴ οἱ 10 παράδες εἶναι $\frac{1}{4}$ τοῦ γροσίου, λαμβάνομεν ἓν τεταρτημόριον τοῦ 17 ὀργ: =4 γρο: 10 παρ: ἐπειδὴ δὲ καὶ 2 ἄσπρ: εἶναι δύω τριτημόρια τοῦ παρᾶ, διὰ νὰ ἔχωμεν καὶ τὸ παραγόμενον ἑνὸς παρᾶ, λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ παραγομένου τῶν 10 παράδων, ὁποῦ εἶναι 4 γρο: 10 παρ: τὸ ἓν δεκατημόριον 17 παρ:, καὶ τοῦτο μὲ χρησιμεύει, ὡς τοῦ ἑνὸς παραγομένου, διὰ νὰ λάβωμεν τὸ πα-

	πήχ	ρ	τεταρ:
	23,	3,	1
	12	:4	1
	46 γρό:	παρ:	ἄσπρ:
	23	0	0
2 ῥούπι:	3	3	$1\frac{3}{4}$
1 ῥούπ:	1	21 -	$2 - \frac{3}{8}$
$\frac{1}{4}$ ῥούπ:	0	15	$1\frac{11}{32}$
10 παρ:	5	36	$3 - \frac{1}{4}$
διὰ 2 παρ:	1	1	$1\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
διὰ 2 παρ:	1	1	$1\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
δι' 1 παρ:	0	20	$2\frac{5}{40} = \frac{1}{8}$
δι' ἓν ἄσπρ:		6	$2\frac{2}{8}$.
	288	16	2

Τὰ αὐτὰ γίνεται εἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα, ἐκτὸς ὅτι ἐλάδομεν παραγόμενον δι' ἕνα παρᾶν τὸ 20 παρ: καὶ $2\frac{5}{40}$

ραγόμενον τῶν 2 ἄσπρ:, εἰς τὸ παραγόμενον ὅμως δὲν λαμβάνεται, διὸ καὶ σβύεται· ὅθεν σχίζω τὰ δύω ἄσπρ: εἰς 1+1 καὶ ταῦτα εἶναι $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ τοῦ παρᾶ, καὶ διὰ νὰ πολλαπλασιάσω μὲ αὐτὰ, λαμβάνω τὸ ἓν τριτημόριον τοῦ 17 δὶς, οὕτω, 4 παρ: 2 ἄσπρ:, καὶ 4 παρ: 2 ἄσπρ: καὶ τὰ συνάπτω ὅλα εἰς ἓν παραγόμενον· 582 γρο: 21 παρ: 1 ἄσπ:

„Ἔτι 23 πήχαις τζόχαν καὶ 3 ρούπια καὶ $\frac{1}{4}$ τοῦ ρουπίου ἀπὸ 12 γρόσια καὶ 14 παρ: καὶ 1 ἄσπρ: τὴν πήχην, πόσα γρόσια κάμνουσι; γράφομεν ὁμοίως τὸν πολλαπλασιαστὴν, καὶ πολλαπλασιαστέον.

ἄσπ: τὸ δὲ κεφάλαιον ὅλων τῶν κατὰ μέρος παραγομένων 288 γρο:, 16 παρ:, 2 ἄσπρ: ἐκτὸς τῶν κλασμάτων.

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{11}{32}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{24}{32}+\frac{12}{32}+\frac{11}{32}+\frac{8}{32}+\frac{8}{32}+\frac{8}{32}+\frac{4}{32},$$

$$\frac{85}{32}=2\frac{21}{32}$$ καὶ ἔτι $\frac{2}{3}$.

Καὶ νομίζομεν ἱκανὰ ταῦτα τὰ παραδείγματα, διὰ νὰ μάθῃ κάθε ἕνας πῶς πολλαπλασιάζομεν συγκεκριμένους ἀριθμοὺς μὲ συγκεκριμένους, ὅταν εἶναι συμπεπλεγμένοι καὶ ἀσύμπλεκτοι. Ἡ μέθοδος αὕτη συνίσταται νὰ ἠμπορῇ νὰ σχίζῃ κἀνένας εἰς μέρη πολλὰ, ὁποῦ νὰ ἠμποροῦν νὰ ληφθῶσιν ὀρθῶς ἀπὸ τάξεις ἀνωτέρας, ὡς εἰς τὰ παραδείγματα ἐμάθομεν.

§. 277. Καὶ ἡ διαίρεσις τούτων διχῶς γίνεται· καὶ πρῶτον φέρομεν τὸν διαιρέτην κατὰ τὸν ἄνω τρόπον (§. 217.) εἰς νόθον κλάσμα, εἶτα καὶ τὸν διαιρετέον, καὶ οὕτω ὡς νέθα διαιροῦνται κλάσματα.

Παραδείγματα.

Α΄. „Ἔχει τὲς 350 ὀκ: κρασὶ, δαπανᾷ δὲ εἰς τὸ σπήτιτου κάθε ἡμέραν $1\frac{3}{4}$ ὀκᾶς, ζητεῖ εἰς πόσας ἡμέρας τὸν φθάνει; λέγομεν εἰς ἡμέρας $350: 1\frac{3}{4}=350: \frac{7}{4}=350\cdot\frac{4}{7}=$ 200 ἡμ:

Β΄. „Μὲ 52 γρο: 10 παρ: ζητεῖται, πόσην τζόχαν λαμβάνομεν ἀπὸ 4 γρο: 30 παρ: τὴν πῆχην; ἰδοὺ πῆχαις

ζητοῦνται, ὅθεν λέγομεν $(\overset{\gamma}{52}, \overset{\pi\alpha}{10}) : (\overset{\gamma\rho}{4}, 30$ παρ:$) =$
$52\frac{10}{40} : 4\frac{30}{40} = \frac{52.\ 40+10}{40} : \frac{4.\ 40+30}{40} = \frac{52.\ 40+10}{40}$
$\frac{40}{40.\ 4+30} = 2090 : 190 = 209 : 19 = 11$ πήχ:

Γ'. Εἰς ἓν ὑποστατικὸν πωλεῖται τόπος ἀπὸ 15 γρό: 16 παρ: 2 ἄσπρ: τὴν ὀργυιάν· ἡμεῖς δὲ ἔχομεν 1160 γρο: 25 παρ: 1 ἄσπ: πόσαις ὀργυιαῖς μὲ αὐτὰ τὰ ἄσπρα λαμβάνομεν;

λέγομεν $(\overset{\gamma\rho}{1160}, \overset{\pi}{25}, \overset{\alpha\sigma}{2}) : \overset{\gamma}{15}, 16$ πα: 2 ἄσ:) ὀργυιαῖς·

φέρομεν πρῶτον εἰς νόθον κλάσμα τὸν διαιρετέον $(\overset{\gamma}{1160}, \overset{\pi}{25}, \overset{\alpha\sigma}{1}) = 1160, 25\frac{1}{3} = 1160, \frac{76^{\pi}}{3} = 1160\frac{76}{120} = \frac{139276}{120}$ γρο:· εἶτα ὁμοίως καὶ τὸν διαιρέτην $\overset{\gamma}{15}, \overset{\pi}{16}, \overset{\alpha\sigma}{2} = 15,$ $16\frac{2}{3} = \overset{\gamma\rho}{15}, \frac{50^{\pi\alpha:}}{3} = 15\frac{50}{120} = \frac{1850}{120}$· ἄρα $\frac{139276}{120} : \frac{1850}{120} =$ $139276 : 1850 = 75$ ὀργ:

139276 : 1850 = 75 ὀργ:
12950
―――――
9776
9250
―――――
426 γενέσθωσαν πόδες
6
―――――
2556 : 1850 = 1 ποδὶ
1850
―――――
706 γενέσθωσαν δάκτυλοι
12
―――――
1412
706
―――――
8472 : 1850 = 4 δάκτυλοι
3400
―――――
1072 γενέσθωσαν γραμμαὶ
12
―――――
154
72
―――――
$\frac{874}{1850}$ = γραμμαῖς

Καὶ λαμβάνομεν 75°, 1', 4'' καὶ οὕτω διαιροῦμεν ὅ,τι ἀριθμοὺς συγκεχριμένους, ἢ ὅταν εἶναι καὶ ὁ διαιρετέος καὶ διαιρέτης συμπεπλεγμένοι, ἢ ὁ εἷς ἀσύμπλεκτος.

§. 278. Ὁ δ' ἕτερος τρόπος τῆς διαιρέσεως σχεδὸν ἔγινε γνωστὸς εἰς ἡμᾶς· διότι πρότερον (§. 182.) ἐμάθομεν, πῶς διαιροῦμεν συμπεπλεγμένον ἀριθμὸν μὲ ἀσύμπλεκτον διαιρέτην. Ἐὰν δὲ δοθῇ καὶ ὁ διαιρέτης συμπεπλεγμένος, φέρομεν αὐτὸν εἰς νόθον κλάσμα καὶ μὲ τὸν παρονομαστὴν πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον κατὰ τὸ

(§. 277.), καὶ εἶτα διαιροῦμεν μὲ τὸν ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον αὐτὸ, ὡς ἀπαιτεῖ ἡ τῶν κλασμάτων διαίρεσις (§. 224.)· διότι οὕτως ἔχομεν πάντοτε διαιρέτην ἀσύμπλεκτον. Ἐπὶ παραδείγματος ἀπαιτούμεθα νὰ διέλωμεν $\overset{\lambda}{854}, \overset{\sigma o \lambda}{17}, \overset{\delta \eta}{11}$ μὲ 57°, 5', 5''· νὰ μάθωμεν πόσαι λίτραι εἶναι τὸ πηλίκον. Ὅθεν φέρομεν εἰς νόθον κλάσμα τὸν διαιρέτην 57°, 5', 5'', $= 57°, 5\frac{5}{15} = 57, \frac{65}{12} = 57\frac{65}{12} = \frac{4169}{72}$

ἐπειδὴ δὲ $(\overset{\lambda}{854}, \overset{\sigma o}{17}, \overset{\delta \eta}{11}) : \frac{4169}{72}$ πρέπει μὲ 72 νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον, καὶ μὲ 4169 νὰ τὸν διέλωμεν (§. 201.)· ὅθεν

854	17	11
72	72	72
1708	34	22
5978	119	77
61488	1224	192 : 12=16 σολ:
62	16	0
61550	1240 : 20	
	62	

Πολλαπλασιάζομεν τὰ δηνάρια μὲ 72, καὶ γίνονται 16 σολδία. Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ σολδία μὲ 72 καὶ προσθέτομεν καὶ τὸ 16 εἰς τὸ παραγόμενον, καὶ γίνονται λίτρ: 62· πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰς λίτρας μὲ τὰ 72 καὶ προσθέτομεν καὶ τὰς 62 λίτρ:, καὶ γίνεται 61550 λίτρ:· ἄρα 61550: 4169=14 λ, 12 σολ:, 10 δην: $\frac{34}{4169}$.

Καὶ τοιοῦτος καὶ ὁ δεύτερος τρόπος τῆς διαιρέσεως τῶν συγκεκομμένων ἀριθμῶν, καὶ ἂς μεταχειρισθῇ καθ' ἕνας ὁποῖον θέλῃ. Ἡμεῖς δὲ εἰς ἕτερα μετακαλῶμεν, δόντες τέλος καὶ εἰς τὸ περὶ τῶν κλασμάτων τμῆμα.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Ε'.

Περὶ προβλημάτων.

§. 279. Εἰς τὸ πρῶτον τμῆμα μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐλύσαμεν ἱκανὰ προβλήματα· ἐπειδὴ ὅμως εἴμεθα περιωρισμένοι μόνον εἰς ἐκεῖνα τὰ προβλήματα, ὁποῦ μόνον διὰ τῶν ἐργασιῶν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἐλύοντο, τώρα, γυμνασθέντες ὅσον ἦν δυνατὸν καὶ εἰς τὰς ἐργασίας τῶν κλασμάτων, ἠμποροῦμεν νὰ λύσωμεν καὶ ἕτερα πλεῖστα προβλήματα. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ προβλήματα ἄλλα μὲν λέγονται τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἤτοι ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς δὲν ἔχει ἐκθέτην, εἰ μὴ τὴν μονάδα ὑπονοουμένην· ἄλλα δὲ τοῦ δευτέρου ἤτοι ὅσα ἔχουσι τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν μὲ ἐκθέτην 2, καὶ ἄλλα τοῦ τρίτου, ὅσα ἔχουσιν αὐτὸν μὲ ἐκθέτην 3· καὶ ἄλλα τοῦ τετάρτου, ὅσα τὸν ἄγνωστον ἔχουσι μὲ ἐκθέτην 4 καὶ καθεξῆς· ἡμεῖς εἰς τὸ παρὸν μόνον τοῦ πρώτου βαθμοῦ θέλομεν λύσει, τὰ δὲ τοῦ δευτέρου εἰς τὸ ἑξῆς Τμῆμα. Τὰ προβλήματα λέγονται ἔτι διωρισμένα, ὅσα δι' ἑνὸς μόνου ἀριθμοῦ λύονται· καὶ ἀδιόριστα, ὅσα διὰ πολλῶν λύονται· ἔτι ἄλλα μὲν ἔχουσιν ἕνα ἄγνωστον ἀριθμὸν, ἄλλα δύω, καὶ ἄλλα τρεῖς κτ. ὅσα δὲ μὲ κανένα ἀριθμὸν δὲν λύονται, λέγονται προβλήματα ἀδύνατα. Ταῦτα μάλιστα ἡ ἐξίσωσις τὰ φανερώνει, ἐν ᾧ εἰς τὴν λύσιν εὑρίσκεται ἀριθμός τις ἴσος ἑτέρῳ μείζονι ἢ ἐλάττονι ἀριθμῷ, ἢ ὁ καταφατικὸς ἴσος ἀποφατικῷ, ὡς $5=0$ ἢ $5=1$ ἢ $5=-5$.

§. 230. Κάθε πρόβλημα ἔχει δύω ἐργασίας, ἡ μία λέγεται σύνθεσις ἢ κατασκευὴ, καὶ ἡ ἄλλη λύσις τοῦ προβλήματος ἢ εὕρεσις.

Εἰς μὲν τὴν σύνθεσιν κανόνες γενικοὶ δὲν ἐδόθησαν, καὶ εἰς αὐτὸ τὸ μέρος θεωρεῖται ἡ ὀξύνοια τοῦ ἀριθμητικοῦ καὶ ἀλγεβρίστου· διότι οὗτος πρέπει.

Α΄. Νὰ νοήσῃ καλῶς τὸ πρόβλημα ὅπου προβάλλεται, διότι πῶς ἠμπορεῖ τινὰς νὰ συνθέσῃ καὶ νὰ κατασκευάσῃ ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου τὰ κατὰ μέρος ἀγνοεῖ;

Β΄. Ἀφ' οὗ καλῶς νοήσει τὸ πρόβλημα, πρέπει καλῶς νὰ διακρίνῃ ὅλας αὐτὰς τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος.

Γ΄. Νὰ διακρίνῃ τὸν γνωστὸν ἀριθμὸν καὶ ἄγνωστον.

Δ΄. Ἀμέσως νὰ διακρίνῃ ποῖαι ἀπὸ αὐτὰς τὰς συνθήκας ἔχουσι τὸν γνωστὸν ἀριθμὸν, καὶ ποῖαι τὸν ἄγνωστον.

Ε΄. Νὰ πολυπραγμονήσῃ ὀρθῶς, νὰ διορίσῃ ἐκείνην τὴν συνθήκην πρῶτον μὲ τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν, διὰ τῆς ὁποίας, ἐὰν ἦτον γνωστὴ, ὅλαι αἱ λοιπαὶ εὑρίσκοντο.

Ϛ΄. Νὰ ἐκφράσῃ ὅλας αὐτὰς τὰς συνθήκας καθὼς τὸ πρόβλημα προβάλλεται μὲ τὰς καθόλου τέσσαρας ἐκείνας ἐργασίας, τῆς προσθέσ: ἀφαιρ: πολλαπλ: καὶ διαιρ: διὰ τῶν σημείων $+$, $-$, $\div$ καὶ $\times$.

Καὶ Ζ΄. Τέλος νὰ εὑρεύρῃ δι' αὐτῆς συμπλοκῆς τῶν σημείων συνθήκας τινας νὰ εἶναι ἴσαι μὲ ἑτέρας τινας, καὶ τότε γινομένης τῆς ἐξισώσεως, τελειώνει καὶ ἡ κατασκευή· ἐπὶ παραδείγματος.

Α΄. Προβάλλεται πρόβλημα τοῦτο τὸ ἁπλοῦν.

„Ἡ ἡλικία ἑνὸς υἱοῦ ἦτον ἓν ἑκτημόριον τῆς ἡλικίας τοῦ πατρός του, πλὴν ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς μετὰ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ ἦτον μαζὺ 91 χρόνων, ζητεῖται ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς καὶ τοῦ υἱοῦ· τοῦτο λοιπὸν ἐγὼ καλῶς νοήσας μεταβαίνω εἰς τό.

Β΄. Αὐτοῦ εὑρίσκω μίαν συνθήκην ὅτι ὁ υἱὸς ἦτον ἓξ φοραῖς μικρότερος ἀπὸ τὸν πατέρα, δευτέραν ἀμέσως ἑπομένην, ὅτι ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτον ἓξ φοραῖς μεγαλητέρα ἀπ' ἐκείνην τοῦ υἱοῦ· τρίτην, τὰς δύω ὁμοῦ νὰ συνάψω, καὶ τετάρτην, τὸ κεφάλαιον τῶν δύω, πρέπει νὰ εἶναι 91 χρόνων.

Γ΄. καὶ Δ΄. Εἰς αὐτὰς διακρίνω ὅτι καὶ ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς καὶ ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ εἶναι ἄγνωστοι ἀριθμοί, καὶ ἀντ' αὐτῶν πρέπει τὸ χ νὰ τεθῇ, καὶ μόνον τὸ κεφάλαιον τούτων γνωστὸν ὁ 91.

Ε΄. Ἐξετάζω ποῖον νὰ λάβω ἄγνωστον $=\chi$ τὴν ἡλικίαν τοῦ πατρὸς, ἢ τὴν τοῦ υἱοῦ; καὶ βλέπω ὅτι ἐδῶ ἀδιάφορον εἶναι ἢ τὴν ἡλικίαν τοῦ πατρὸς νὰ λάβω ἀντὶ χ, ἢ τὴν τοῦ υἱοῦ, καὶ κρίνω κάλλιον τὴν τοῦ πατρός.

ΣΤ΄. Ἐκφράζω λοιπὸν τὰς συνθήκας κατὰ τὸ πρόβλημα διὰ τῶν ἐργασιῶν ἐκείνων, λέγων ὅτι ἂν ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦν $=\chi$, τοῦ υἱοῦ ἦτον $=\frac{\chi}{6}$· ἤτοι ἓν ἑκτημόριον, καὶ αἱ δύω ὁμοῦ $=\chi+\frac{\chi}{6}$· ἐὰν δὲ ὑποθέσω τὴν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ $=\chi$ εἶναι ὅρα ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς $=6\chi$ καὶ αἱ δύω ὁμοῦ $=6\chi+\chi$.

Ζ΄. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ δύω ἡλικίαι ὁμοῦ εἶναι χρόνοι 91, εὑρίσκω τὴν ἐξίσωσιν $6\chi+\chi=91$, ἢ $\chi+\frac{\chi}{6}=91$ καὶ ἐὰν ὀρθῶς οὕτως εὕρω τὴν ἐξίσωσιν, εὐκόλως λύω καὶ τὸ πρόβλημα, ἐπειδὴ εἰς τὴν λύσιν ἔχομεν κανόνας ἀπταίςους καὶ γενικούς.

§. 231. Εἰς δὲ τὴν λύσιν, ἀφ' οὗ λάβωμεν ἤδη κατασκευασμένην τὴν ἐξίσωσιν, πρῶτον ἔργον εἶναι νὰ ἀπαλλαχθῶμεν ἀπὸ τοὺς διαιρέτας, ἢ ἀπὸ τὸν παρονομαςὴν τῶν κλασμάτων, διὰ νὰ μὴ φαίνηται εἰς τὴν ἐξίσωσιν κλάσμα· τοῦτο δὲ γίνεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§. 81.), ὅταν διὰ τοῦ παρονομαςοῦ πολλαπλασιάζωμεν ὅλα τὰ μέρη τῆς ἐξισώσεως ἐκτὸς μόνου ἐκείνου, ὅπου ἔχει αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν παρονομαςήν· οὕτως ἡ ἄνω ἐξίσωσις $\chi+\frac{\chi}{6}=91$, καὶ $6\chi+\chi=91.6$.

Β'. Νὰ φέρωμεν ὅλα τὰ μέρη, ὅπου δὲν ἔχουσι τὸν ἄγνωςον ἀριθμὸν εἰς ἓν μέρος τῆς ἐξισώσεως, καὶ ἐκεῖνα ὅπου ἔχουσι τὸν ἄγνωςον, εἰς τὸ ἕτερον μέρος. Τοῦτο δὲ γίνεται διὰ τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως (§. 68.)· διότι ἕκαςον μέρος μὲ + καὶ — φέρεται εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἐξισώσεως μὲ τὸ ἐναντίον σημεῖον ἤτοι τὸ + γίνεται —, καὶ τοῦτο +· ὡς αὕτη ἡ ἐξίσωσις $a-\chi=\frac{a+\chi}{\gamma}$ κατὰ μὲν τὸ α'.

$a\gamma-\gamma\chi=a+\chi$· κατὰ δὲ τὸ β'. $a\gamma-a=\gamma\chi+\chi$.

Γ'. Ἐὰν οὕτω φερθῶσι τὰ ἄγνωςα εἰς τὸ ἓν σκέλος τῆς ἐξισώσεως, καὶ εἶναι πολλὰ μέρη, ταῦτα ἢ ἔχωσι συνεργοὺς ἀριθμούς, ἢ γράμματα. ἐὰν ἔχωσιν ἀριθμούς, συνάπτονται ἀλλήλοις, ἢ ἀφαιροῦνται κατὰ τὰ σημεῖα ὅπου ἔχουσι $+$ καὶ $-$ (§. 62.)· ὡς ἀνωτέρω $6\chi+\chi=91.\ 6$ καὶ $7\chi+91.\ 6$· ἐὰν δ᾽ ἔχωσι γράμματα, ἐπειδὴ ἡ ἄγνωστος εἶναι εἰς ὅλα αὐτὰ τὰ μέρη, λύομεν αὐτὰ εἰς παράγοντας, ἀφ᾽ οὗ κλείσωμεν ὅλα τὰ λοιπὰ μὲ τὰ σημεῖά των εἰς παρένθεσιν· καὶ ἔξω τῆς παρενθέσεως θέτομεν τὸ ἄγνωστον εἰς παράγοντα· (§. 168.) ὡς ἀνωτέρω ἡ ἑτέρα $\alpha\gamma-\alpha=\gamma\chi+\chi$· οὕτω $\alpha\gamma-\alpha=(\gamma+1)\chi$· καὶ οὕτως ἀεὶ τὸ ἕτερον σκέλος τῆς ἐξισώσεως ἔχει ἓν μέρος μόνον, ἐν ᾧ εἶναι τὸ ἄγνωστον.

Δ΄. Ὅταν οὕτως ἀχθῇ τὸ ἄγνωστον εἰς τὸ ἕτερον σκέλος τῆς ἐξισώσεως μόνον εἰς ἓν μέρος, τοῦτο τὸ μέρος ἢ εἶναι μόνον τὸ ἄγνωστον, καὶ τότε ἐλύθη τὸ πρόβλημα, διότι τὸ ἕτερον μέρος εἶναι ἀπὸ γνωστὰ μόνον, καὶ τὰ εὑρίσκομεν, ἢ εἶναι πολλαπλασιασμένον μὲ ἕνα ἀριθμὸν ὡς $7\chi=91.\ 6$· ἢ μὲ μίαν παρένθεσιν ὡς $\alpha\gamma-\alpha=(\gamma+1)\chi$.

Ε΄. Ὅταν δὲ ἡ ἄγνωστος ἀχθεῖσα εἰς τὸ ἓν σκέλος τῆς ἐξισώσεως, εἶναι πολλαπλασιασμένη μὲ ἀριθμὸν, ἢ μὲ παρένθεσιν, μονώνομεν αὐτὴν ἄνευ ἀριθμῶν καὶ παρενθέσεως, διαιροῦντες διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἢ τῆς παρενθέσεως ὅλης τὸ ἕτερον ὅλον σκέλος τῆς ἐξισώσεως (§. 124.) ὡς $7\chi=91.\ 6$· καὶ $\chi=\frac{91.\ 6}{7}$ ἢ $\alpha\gamma-\alpha=(\gamma+1)\chi$, καὶ $\frac{\alpha\gamma-\alpha}{\gamma+1}=\chi$.

ΣΤ΄. Τέλος ἐκτυλίσσομεν ὅλον τὸ ἕτερον σκέλος τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν, καὶ ἡ ποσότης τούτου εἶναι τὸ ζητούμενον χ· ὡς $\chi=\frac{91.\ 6}{7}=13.\ 6=78$· καὶ ἦν ὁ μὲν πατὴρ 78 χρόνων· ὁ δὲ υἱὸς $\frac{\chi}{6}=\frac{78}{6}=13$ χρόνων.

Ἐὰν δὲ τὸ γνωςὸν σκέλος εἶναι ἀπὸ γράμματα, διορίζομεν τὰ γράμματα κατὰ τὸ ποσὸν ὅπου τὰ ἐξελάβομεν, καὶ εὑρίσκεται τὸ χ· διότι ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\alpha\gamma-\alpha}{\gamma+1}=\chi$

ἦν $\alpha=5$. $\gamma=9$ ἔςαι ἡ ἐξίσωσις $\frac{5.\ 9-5}{9+1}=\chi$ ἤτοι $40:10=\chi=4$. Καὶ λοιπὸν ὅς τις καλῶς ταῦτα ἐνόησεν διάφορα λύει προβλήματα· διότι κατ' αὐτὰ λύονται τὰ ἑξῆς προβλήματα.

§. 282. Εἰς τὸ παρὸν λύονται προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ, καὶ σχεδὸν ὅσα δίδονται μὲ ἕνα ἄγνωςον ἀριθμὸν μόνον νὰ λυθῶσι.

Πρόβλημα Α'.

„Διδάσκαλός τις ἐρωτηθεὶς, πόσους ἔχῃ μαθητὰς, εἶπεν, ἐὰν εἰς τὸ τετραπλοῦν αὐτῶν προσθῇς τὸ πεμπτημόριον καὶ ἔτι 4 γίνονται. 109. Ζητεῖται πόσους εἶχε μαθητάς;

Κατασκευή.

Ἐπειδὴ οἱ μαθηταὶ εἶναι ἄγνωςοι λέγομεν ὅτι εἶχε μαθητὰς χ· ἀλλ' εἶπεν ὅτι ἐὰν εἰς τὸ τετραπλοῦν $=4\chi$ προσθέσῃς τὸ πεμπτημόριον $=\frac{\chi}{5}$ καὶ, 4, γίνονται 109· ἄρα

$$4\chi+\frac{\chi}{5}+4=109.$$

Λύσις.

$$4\chi+\frac{\chi}{5}+4=109 \qquad \text{κατὰ τὸ Α΄ (§. 269.)}$$

$$\times 5$$

$$20\chi+\chi+20=545 \qquad \text{κατὰ τὸ Β΄ καὶ Γ΄}$$

$$20\chi+\chi=545-20$$

$$21\chi=545-20=522$$

$$\chi=\frac{525}{21}=25 \qquad \text{καὶ τὸ Δ΄}$$

Ἀπόκρισις. εἶχε μαθητὰς μόνον 25. διότι $4.25=100$

$$\frac{25}{5}=5$$

καὶ $4=4$

$$109$$

Πρόβλημα Β΄.

Ἕνας ἄνθρωπος ἔλαβεν ἐλεημοσύνην, ἀπὸ τρεῖς ἀνθρώπους, τὸν Πέτρον, Παῦλον καὶ Ἰωάννην· ἐρωτήθη δὲ πόσα ἔλαβεν ἀπὸ τοὺς τρεῖς, καὶ τί ὁ καθεὶς ἔδωκεν; εἶπεν, ὅτι ἐκεῖνα ὁποῦ ἔδωκεν ὁ Πέτρος μὲ ἐκεῖνα τοῦ Παύλου ὁποῦ εἶναι 21· αὐτὰ δὲ τοῦ Πέτρου μὲ ἐκεῖνα τοῦ Ἰωάννου εἶναι 24· καὶ αὐτὰ τοῦ Παύλου μὲ ἐκεῖνα τοῦ Ἰωάννου εἶναι 27· πόσα λοιπὸν ἔδωκεν ὁ καθένας, καὶ πόσα ἐκεῖνος ἔλαβε;

Κατασκευή.

Δεδόσθω ὅτι ὁ Παῦλος ἔδωκε χ· ἐπειδὴ ὅμως τοῦ Παύλου καὶ Πέτρου ὁμοῦ τὰ δοθέντα ἦν $=21$, ἄφελε τοῦ Παύλου τὰ χ, καὶ τὸ λεῖψανον εἶναι ἐκεῖνα ὁποῦ ὁ Πέτρος ἔδωκεν οὕτω $21-\chi$· ἐκεῖνα δὲ ὁποῦ ἔδωκεν ὁ Πέτρος μὲ ἐκεῖνα τοῦ Ἰωάννου ἦτον 24 λοιπὸν ἄφελε τοῦ Πέτρου $21-\chi$ ἀπὸ τὰ 24, καὶ τὸ λείψανον εἶναι ἐκεῖνα τοῦ Ἰωάννου· οὕτως $24-(21-\chi)=24-21+\chi$· καὶ τόσα ἔδωκεν ὁ Ἰωάννης· πλὴν τὰ τοῦ Ἰωάννου μὲ ἐκεῖνα του Παύλου ἦτον ὁμοῦ πάλιν 27· ἄφελε τὰ τοῦ Παύλου τὸ χ ἀπὸ τὰ 27 οὕτω $27-\chi$ καὶ αὐτὰ ἔδωκεν ὁ Ἰωάννης· ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ τοῦ Ἰωάννου ἐκφράζονται καὶ οὕτω $24-21+\chi$ καὶ οὕτω $27-\chi$· ἄρα αἱ δύω ἐκφράσεις εἶναι ἴσαι· καὶ εὑρέθη ἡ ἐξίσωσις $24-21+\chi=27-\chi$.

Λ ύ σ ι ς.

$$\frac{24-21+\chi=27-\chi}{\chi+\chi=27-24+21}+21-24+\chi$$

κατὰ τὸ Β′ εἰς τὸ ἁπλ:

$$2\chi=24 \text{ καὶ } \chi=\frac{24}{2}=12$$

Ἀπόκρισις. ἄρα τὸ $\chi=12$ καὶ τόσα ὁ Παῦλος ἔδωκε, διότι τὸ χ ἐτέθη = ἐκείνοις ὁποῦ ὁ Παῦλος ἔδωκεν· τῶρα εὑρίσκονται καὶ τὰ τῶν ἄλλων, ἐὰν θῶμεν $\chi=12$· τοῦ Πέτρου ἦν $21-\chi=21-12=9$· τοῦ δὲ Ἰωάννου ἦν $=27-\chi=27-12=15$· καὶ ἔλαβεν ἐκεῖνος ἀπὸ μὲν τὸν Πέτρον 9

τὸν Πέτρον	9
ἀπὸ τὸν Παῦλον	12
καὶ ἀπὸ τὸν Ἰωάννην	15
	36

Δεῖξις. $9+12=21$· $9+15=24$· $12+15=27$.

Π ρ ό β λ η μ α Γ′.

„Ἕνας εἰς τὸ παίγνιον τῶν χαρτίων ἐκέρδησεν ἱκανὰ γρό: ἀπ' αὐτὸ τὸ κέρδος ἓν τριτημόριον ἐχάρισεν εἰς τὸν δοῦλον, καὶ ἓν πεμπτημόριον εἰς τὴν δούλην του· βλέπει ὅμως ὁ δοῦλος ὅτι εἶχεν 8 γρο: περισσότερα ἀπὸ τὴν δούλην. Ζητεῖται πόσον ἦν τὸ κέρδος ὅλον, καὶ πόσα ἔλαβεν ὁ δοῦλος καὶ ἡ δούλη, καὶ πόσα ἔμειναν εἰς τὸν δεσπότην;

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Αὐτοῦ ἐὰν τὸ κέρδος εὕρωμεν, εὑρίσκωνται καὶ τὰ λοιπά· ἔςω λοιπὸν ὅλον τὸ κέρδος $=\chi$· ὁ μὲν δοῦλος ἔλαβε $\frac{\chi}{3}$ ἡ δούλη $\frac{\chi}{5}$· ἐπειδὴ δὲ ὁ δοῦλος εἶχε περισσότερα 8 ἀπὸ τὴν δούλην, ἄρα ἐὰν τῆς δούλης τὰ $\frac{\chi}{5}$ ἀφέλωμεν ἀπὸ ἐκεῖνα τοῦ δούλου, τὸ λείψανον τοῦτο $\frac{\chi}{3}-\frac{\chi}{5}$ εἶναι $=8$

οὕτω

$$\frac{\chi}{3}-\frac{\chi}{5}=2$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ .\ 3 \text{ διὰ τὸ Α'}$$

$$\chi-\frac{3\chi}{5}=24$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ .\ 5$$

$$5\chi-3\chi=120$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \text{ πλουν:}$$

$$2\chi=120\text{· καὶ } \chi=\frac{120}{2}=60$$

Λοιπὸν ὅλον τὸ κέρδος ἦν 60 γρόσια.

δείξις $\frac{60}{3}=20$ ἔλαβεν ὁ δοῦλος

$\frac{60}{5}=12$ ἡ δούλη· διότι $20-12=8$· καὶ 28 ὁ δεσπότης ἐκράτησεν.

Π ρ ό β λ η μ α Δ'.

„Δεσπότης ἐσυμφώνησεν εἰς ἕνα δοῦλον νὰ τῷ δώσῃ εἰς ἕνα χρόνον μισθὸν 150 γο: καὶ ἓν φόρεμα· οὗτος δ' ἐδούλευσε μόνον 8 μῆνας, καὶ τοῦ ἐδόθη τὸ φόρεμα καὶ 86 γρ: πόσων γροσίων ἦν τὸ φόρεμα

Κατασκευή:

Ἔςω ἡ τιμὴ τοῦ φορέματος $=\chi$. λοιπὸν εἰς ὁλόκληρον χρόνον ἔπρεπε νὰ λάβῃ 150 γρ: $+\chi$, ἤτοι εἰς ἕνα χρόνον $(150+\chi)\cdot 1$ εἰς δύω χρόνους $(150+\chi)\cdot 2$ κτ. πλὴν αὐτὸς μόνον 8 μῆνας ἐδούλευσεν, ἤτοι τοῦ χρόνου $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$· ἄρα μὲ αὐτὸ πρέπει καὶ τὸ $(150+\chi)$ νὰ πολλαπλασιάσωμεν οὕτω $(150+\chi)\cdot\frac{2}{3}$ καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνα, ὅπου ἔλαβεν.

$$(150+\chi)\cdot\frac{3}{3}=86+\chi$$

$$\overline{}\cdot 3$$

$$(150+\chi)2=258+3\chi$$

$$\overline{}\ \text{ἐνεργεία}$$

$$300+2\chi=258+3\chi$$

$$\overline{}-2\chi-258$$

$$300-258=2\chi-2\chi$$

$$\overline{}\ \text{ἁπλοῦ:}$$

$$42=\chi$$

καὶ ἦν ἡ τιμὴ τοῦ φορέματος γρόσια 42.

Πρόβλημα Ε'.

„Ἰξεύρομεν ὅτι μία συντροφία κτιςῶν εἰς 26 ἡμέρας τελειώνουσιν ἕνα τοῖχον, ἡ ἑτέρα δὲ εἰς 18 ἡμέρας· ἐὰν λάβωμεν καὶ τὰς δύω συντροφίας ὁμοῦ εἰς πόσας ἡμέρας τὸν τελειώνουσιν;

Κατασκευή.

Ἐπειδὴ αἱ ἡμέραι ζητοῦνται ὡς ἄγνωςοι, ὅς ὀνομάσωμεν αὐτὰς χ· καὶ ἐπειδὴ ἡ πρώτη συντροφία εἰς 26 ἡμέρας τὸν τελειώνουσιν, εἰς μίαν ἡμέραν ἄρα $\frac{1}{26}$ τοῦ τοίχου κτίζουσιν· ἐπειδὴ δὲ ἡ δευτέρα εἰς 18 ἡμέρας τὸν τελειώνουσι, εἰς μίαν ἡμέραν ἄρα μόνον $\frac{1}{18}$ τοῦ τοίχου κτίζουσι· καὶ εἰς μίαν ἡμέραν ἐκείνη $\frac{1}{26}$ δουλεύει, ἡ δὲ $\frac{1}{18}$· ἐπειδὴ ὅμως αἱ δύω ὁμοῦ δουλεύουσιν εἰς ἡμέρας χ, δουλεύει λοιπὸν ἐκείνη μὲν εἰς αὐτὰς τὰς ἡμέρας χ· $\frac{1}{26}=\frac{\chi}{26}$· αὕτη δὲ χ· $\frac{1}{18}=\frac{\chi}{18}$· καὶ αἱ δύω ὁμοῦ αὐτὸ μόνον τὸ ἓν ἔργον· ἤτοι

$$\frac{\chi}{26}+\frac{\chi}{18}=1$$

$$\overline{}.26$$

$$\chi+\frac{26\chi}{81}=26$$

$$\overline{}.\ 18$$

$$18\chi+26\chi=26.\ 18$$

$$44\chi=26.\ 18$$

$$\overline{}:\ 44$$

$$\chi=\frac{26:\ 18}{44}=\frac{13.\ 18}{22}=\frac{13.\ 9}{11}=\frac{117}{11}=10\frac{7}{11}$$

Λοιπὸν καὶ δύω ὁμοῦ τὸν τηλειώνουσιν εἰς 10 ἡμ: καὶ σχεδὸν 8 ὥρας.

„Χρησιμεύει τοῦτο, ἐὰν γένῃ γενικὸν διὰ γραμμάτων. Δεδόσθω ὅτι ἡμία συντροφία εἰς α ἡμέρας, ἡ δὲ εἰς β δουλεύει τὸ ἔργον τοῦτο, καὶ αἱ δύω ὁμοῦ εἰς χ ἡμέρας τελειώνουν τοῦτο τὸ ἔργον. ὅθεν ἡ μὲν θέλει δουλεύσει $\chi\frac{1}{\alpha}=\frac{\chi}{\alpha}$ ἡ δὲ $\chi\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\chi}{\beta}$ ἡμέρ: καὶ δύω δὲ ὁμοῦ δουλεύουσιν ὅλον τὸ ἔργον

$$\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}=1 \qquad .\,\alpha$$

$$\chi+\frac{\alpha\chi}{\beta}=\alpha \qquad .\,\beta$$

$$\beta\chi+\alpha\chi=\alpha\beta \text{ ἄρα } \chi(\alpha+\beta)=\alpha\beta \qquad :\,\alpha+\beta$$

$$\chi=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

Ἐὰν δὲ θῶμεν τὸ $\alpha=26$, καὶ $\beta=18$ ἔσαι $\chi=\frac{18\,.\,26}{26+18}=10\frac{7}{11}$, ὡς καὶ καὶ πρότερον.

Ὁ δὲ τύπος οὗτος χρήσιμος εἰς πολλά.

I) Ἕνας ῥάπτης εἰς $8=\alpha$ ἡμέρας ῥάπτει μίαν ἐνδυμασίαν, ἕτερος δὲ εἰς $6=\beta$. οἱ δύω ὁμοῦ εἰς πόσας ἡμέρας;

$\chi=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{8\,.\,6}{6+8}=\frac{48}{14}=3\frac{3}{7}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἡμέρα $=12$ ὥραις τὸ $\frac{3}{7}\,.\,12$ λοιπὸν $=\frac{36}{7}=5$ ὥρ: καὶ $\frac{1}{7}$. ἄρα εἰς 3 ἡμ: 5 ὥρ: ῥάπτεται.

II) Ἕνας ἀντιγράφει ἓν βιβλίον εἰς 6 μῆνας $=\alpha$, ἕτερος δὲ εἰς 3 μῆνας $=\beta$, οἱ δὲ δύω ὁμοῦ εἰς πόσους μῆνας;

$\chi=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{3\,.\,6}{6+3}=\frac{18}{9}=2.$

111) Εἰς ἓν στράτευμα διαρκεῖ μία ζωοτροφία εἰς ἡμέρας 80=α εἰς ἕτερον διαρκεῖ 120=ϐ· εἰς τὰ δύω ὁμοῦ πόσαις ἡμέραις; $\chi=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{80.\ 120}{80+120}=\frac{9600}{200}=48$ ἡμ: καὶ ἄλλα τοιαῦτα λύονται.

„Ἐὰν ὅμως τρεῖς οἱ ἐνεργοῦντες ὁ μὲν εἰς α ἡμέρας, ὁ δὲ εἰς ϐ, ὁ δὲ εἰς γ· εὑρίσκεται

$$\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}+\frac{\chi}{\gamma}=1$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ .\ \alpha$$

$$\chi+\frac{\alpha\chi}{\beta}+\frac{\alpha\chi}{\gamma}=\alpha$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ .\ \beta$$

$$\beta\chi+\alpha\chi+\frac{\alpha\beta\chi}{\gamma}=\alpha\beta$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ .\ \gamma$$

$$\gamma\beta\chi+\alpha\gamma\chi+\alpha\beta\chi=\alpha\beta\gamma$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ \text{εἰς παράγ:}$$

$$\chi(\gamma\beta+\alpha\gamma+\alpha\beta)=\alpha\beta\gamma$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ :\ (\gamma\beta+\alpha\gamma+\alpha\beta)$$

$$\chi=\frac{\alpha\beta\gamma}{\gamma\beta+\alpha\gamma+\alpha\beta}$$

1) Ἐὰν τρεῖς σωλῆνες τρέχωσι, καὶ ὁ μὲν πληροῖ μίαν στέρναν εἰς 18=α ἡμέρας, ὁ δὲ εἰς 25=ϐ ἡμέρ: ὁ δὲ εἰς 8=γ ἡμ: οἱ τρεῖς ὁμοῦ εἰς πόσας ἡμέρας γεμίζουσιν αὐτήν; εἰς $\chi=\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}=\frac{18.\ 25.\ 8}{25.\ 18+8.\ 18+8.\ 25}=$ $\frac{3600}{794}=4\frac{212}{397}$ ἡμ:

11) Μίαν ποσότητα σίτου, ὁ μὲν τῶν τριῶν μύλων ἀλέθει εἰς ἡμέρας 8=α. ὁ δὲ εἰς 14 ἡμέρ: =ϐ ὁ δὲ εἰς

20 = γ· οἱ τρεῖς ὁμοῦ εἰς πόσας ἡμέρας; εἰς $\chi=$

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\beta\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma}=\frac{14.\ 20.\ 8}{14.\ 20+14.\ 8+20.\ 8}=\frac{2240}{552}=4\frac{4}{69}\text{ ἡμ:}$$

Ἐὰν δὲ τέσσαρα τὰ ἐνεργοῦντα $\chi=\dfrac{\alpha\beta\gamma\delta}{\beta\gamma\delta+\alpha\gamma\delta+\alpha\beta\delta+\alpha\beta\gamma}$ καὶ οὕτω εἰς 5 ἐνεργοῦντα καὶ εἰς πλείονα.

Πρόβλημα ϛ.

„Ἔχει τις δύω εἴδη κρασίου καλλίτερου καὶ κατώτερου· καὶ τοῦ μὲν καλλιτέρου τιμᾶται ἡ ὀκᾶ 24 παρ: τοῦ δ' ἑτέρου 16· θέλει δὲ αὐτὸς νὰ μίξῃ αὐτὰ εἰς ἓν οὕτως, ὥςε νὰ τιμᾶται 20 παρ: ἡ ὀκᾶ. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ καλὸν, καὶ πόσον ἀπὸ τὸ κατώτερον διὰ νὰ κάμῃ μίαν μίξιν 150 ὀκάδων;

Κατασκευή.

Λέγομεν νὰ πάρῃ ἀπὸ τὸ κατώτερον χ ὀκ:, καὶ ἐπειδὴ τοῦτο μὲ τὸ καλὸν εἶναι 150 ὀκ: ἄρα τὸ καλὸν θέλει εἶναι 150—χ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ τοῦ καλοῦ εἶναι πρὸς 24 παρ: εἰς τὴν ὀκ: ἄρα πολλαπλασιάζομεν τὸ καλὸν μὲ 24 οὕτω (150—χ)24=150. 24—24χ, καὶ εὑρίσκομεν ὅλην τὴν τιμὴν τοῦ καλοῦ τοῦ ἐν τῇ μίξει. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ ὀκᾶ τοῦ κατωτέρου τιμᾶται 16 παρ: πολλαπλασιάζομεν χ. 16=16χ καὶ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἐν τῇ μίξει κατωτέρου· ἄρα αὕτη ἡ τιμὴ, καὶ ἡ τοῦ καλλιτέρου γίνεται ὅλη ὁμοῦ τῆς μίξεως οὕτω. 150. 24—24χ+16. ἀλλ' ὅλη ἡ τιμὴ τῆς μίξεως εἶναι καὶ 150. 20. διότι 20 παρ: τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τῆς μίξεως. ἄρα καὶ δύω τιμαὶ ἴσαι

$$\frac{150.\ 24-24\chi+16=150.\ 20}{\dfrac{3600-3000=24\chi-16\chi}{\dfrac{600=8\chi}{35=\chi}:8}\ \pi\lambda o\upsilon:}$$

Ἄρα 75 ὀκ: ἀπὸ τὸ κατώτερον λαμβάνει, καὶ ἑπομένως 75 ἀπὸ τὸ καλὸν, καὶ ἡ μίξις τούτων τιμᾶται πρὸς 20 παρά: ἡ ὀκᾶ. διότι 75. 16=1200 παρ:

$$75.\ 24=1800$$

$$\overline{3000}=150.\ 20=3000$$

„Χρήσιμον καὶ τοῦτο τὸ πρόβλημα νὰ κατασκευασθῇ γενικῶς. Ἔςω ἡ ποσότης τῆς μίξεως $=\alpha$, καὶ ἡ τιμὴ μιᾶς ὀκᾶς τοῦ καλλιτέρου οἴνου $=\beta$, ἡ δὲ τοῦ κατωτέρου $=\gamma$, ἡ τιμὴ δὲ τῆς μίξεως $=\delta$, τὸ δὲ ποσὸν τοῦ κατωτέρου, ὁποῦ λαμβάνομεν εἰς τὴν μίξιν $=\chi$. ἄρα τὸ ποσὸν τοῦ καλλιτέρου ἐν τῇ μίξει $=\alpha-\chi$. καὶ ἡ τιμὴ αὐτοῦ ἐν τῇ μίξει $=(\alpha-\chi)\beta=\alpha\beta-\beta\chi$, τοῦ δὲ κατωτέρου $=\gamma\chi$, καὶ ἡ τιμὴ ὅλης τῆς μίξεως $=\alpha\delta$. ἄρα αἱ τιμαὶ τῶν δύω ὁμοῦ $=$

$$\alpha\beta-\beta\chi+\gamma\chi=\alpha\delta \quad -\gamma\chi$$

$$\alpha\beta-\alpha\delta=\beta\chi-\gamma\chi$$

$$\alpha\beta-\alpha\delta=\chi(\beta-\gamma) \quad ;\ (\beta-\gamma)$$

$$\frac{\alpha\beta-\alpha\delta}{\beta-\gamma}=\chi$$

$$\frac{\alpha(\beta-\delta)}{\beta-\gamma}=\chi$$

Δι' αὐτοῦ τοῦ τύπου εὐκόλως λύομεν τῆς μίξεως ὅλα τὰ προβλήματα· διότι ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ τιμιωτέρου τὴν τιμὴν τῆς μίξεως, καὶ τὸ λείψανον πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸ ποσὸν τῆς μίξεως, καὶ τὸ παραγόμενον διαιροῦμεν μὲ τὸ λείψανον ἀφ' οὗ ἀφέλωμεν ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ τιμιωτέρου τὴν τιμὴν τοῦ κατωτέρου. Εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα $2-20=4$. καὶ $4.\ 150=600$ τοῦτο διαιροῦμεν μὲ 8 διότι $24-16=8$. οὕτω $\frac{600}{8}=75$.

I) Ἔτι πόσον κατωτέρου λαμβάνομεν διὰ 200 ὀκ: καὶ ἡ ὀκᾶ ἀτῶν 22 παρ:, ὅταν τὸ τιμιώτερον τιμᾶται 32, καὶ τὸ ἕτερον 18; λέγομεν $32-22=10$· καὶ $10.\ 200=2000$· ἐπειδὴ δὲ $32-18=14$ εὑρίσκεται $\chi=\frac{2000}{14}=\frac{1000}{7}=142\frac{6}{7}$ ὀκ:

II) Ἕτερος ἔχει δύω εἴδη ἀργύρου, τὸ ἓν τιμᾶται τὸ δρ: 16 παρ: τὸ ἕτερον 4 παρ:, θέλει νὰ μίξῃ αὐτὰ εἰς 30 δρ:, ὥστε νὰ τιμᾶται 10 παρ: τὸ δρ: πόσον νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ κατωτέρου; χ. λοιπὸν $\chi=\frac{\alpha(\beta-\delta)}{\beta-\gamma}=\frac{30(16-10)}{16-4}=\frac{30.\ 6}{12}=\frac{30}{2}=15$ δρ:

III) Ἕτερος ἔχει ῥακὴν, τῆς ὁποίας ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 62 παρ: θέλει νὰ μίξῃ αὐτὴν μὲ νερὸν νὰ πωλῇ ἀπὸ 46 παρ: διὰ νὰ κάμνῃ ἓν μίγμα 100 ὀκ:, πόσον νερὸν νὰ μίξῃ; $\chi=\frac{\alpha(\beta-\delta)}{\beta-\gamma}=\frac{100(62-46)}{62-0}=\frac{100.\ 16}{62}=\frac{1600}{62}=\frac{800}{31}=25\frac{25}{31}$ ὀκ: τὸ γ ἐτέθη $=0$, διότι τὸ νερὸν ἀφθόνως ἡ φύσις παρέχει.

„Ἐὰν δέ τις θέλῃ καὶ τὸ ποσὸν τοῦ τιμιωτέρου εὑρίσκει οὕτω, τὸ ποσὸν τοῦ τιμιωτέρου $=\chi$, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἀνωτέρω ἄρα $\alpha-\chi=$ τῷ ποσῷ τοῦ κατωτέρου· ὅθεν $\beta\chi$ καὶ $\gamma\alpha-\gamma\chi$ καὶ $\delta\alpha$

καὶ $\underline{\beta\chi + \gamma\alpha - \gamma\chi = \delta\alpha}$

$$\beta\gamma - \gamma\chi = \delta\alpha - \gamma\alpha = (\delta - \gamma)\alpha, \text{ καὶ } \chi = \frac{\alpha(\delta - \gamma)}{\beta - \gamma}$$

Ἐνταῦθα μόνον τὴν τιμὴν τοῦ κατωτέρου ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ μεμιγμένου ἀφαιροῦμεν· τὰ δὲ λοιπὰ γίνονται κατὰ τὸν ἄνω τρόπον. Τοῦτο τὸ πρόβλημα εἶναι πολύχρηστον εἰς τὰς μίξεις εἰς τὴν νομισματολογίαν, ἔνθα μιγνύεται ὁ χρυσὸς καὶ ὁ ἄργυρος μὲ ἄλλα μέταλλα· εἰς τὰ πολεμικὰ, ἔνθα μιγνύονται τὰ εἴδη τῶν παρουτίων· ἡ κατασκευὴ αὐτῶν· αἱ μίξεις τῶν τοπίων· εἰς τὰς ἀποθήκας, εἰς τὴν χυμικὴν καὶ εἰς ἄλλας πολλὰς τέχνας. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον νοθεύονται τὸ ἔλαια, τὰ κηρία, τὰ βαλσάματα, τὰ βούτυρα, καὶ ἄλλα πάμπολλα. Τοῦτο τὸ πρόβλημα μετὰ τὰς ἀναλογίας πάλιν ἐπαναλαμβάνομεν, καὶ ἕτερα εὑρίσκομεν.

Π ρ ό β λ η μ α Ζ'.

„Πατήρ τις διώρισε τὴν ἑαυτοῦ περιουσίαν εἰς τοὺς υἱούς του οὕτως, ὥςε ὁ μὲν πρῶτος νὰ λάβῃ 1000 γρσ:, καὶ ἓν ἑκτημόριον ἔτι τῆς λοιπῆς περιουσίας· ὁ δὲ Β' 2000 καὶ ἔτι ἓν ἑκτημόριον τῆς λοιπῆς· καὶ ὁ Γ' 3000 καὶ ἔτι ἓν ἑκτημόριον τῆς λοιπῆς· καὶ οὕτως ἐφεξῆς· οὗτοι δὲ λαβόντες οὕτως, εὗρον, ὅτι ἕκαςος ἴσα ἔλαβεν. Ζητεῖται πόση ἦν ἡ περιουσία ὅλη, καὶ πόσοι οἱ υἱοί;

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Ἔςω ἡ περιουσία χ· καὶ ἐξ αὐτῆς ὁ πρῶτος ἔλαβε 1000, καὶ ἔμεινεν ἡ λοιπὴ $\chi - 1000$· οὗτος δ' ἔλαβε καὶ ἓν ἑκτημόριον ἀκόμη ἀπὸ τῆς λοιπῆς οὕτω $\frac{\chi - 1000}{6}$· ἀρα τὸ μέρος τοῦ Α' ἦν $1000+\frac{\chi-1000}{6}=\frac{6000+\chi-1000}{6}$ $=\frac{5000+\chi}{6}$. ἐὰν δὲ τοῦτο ἀφέλωμεν ἀπὸ ὅλης τῆς περιουσίας χ μένει ἡ λοιπὴ διὰ τοὺς ἄλλους· ὅθεν $\chi-\frac{5000+\chi}{6}$ $=\frac{6\chi-5000-\chi}{6}=\frac{5\chi-5000}{6}$.

Ἀφ' οὗ λοιπὸν ὁ πρῶτος ἔλαβε τὸ μερίδιόν του ἔμεινεν ἡ περιουσία $=\frac{5\chi-5000}{6}$· ὁ δὲ Β' λαμβάνει ἀπὸ αὐτὴν 2000· ἐὰν δ' ἀφέλωμεν αὐτὰ ἀπ' αὐτῆς οὕτω· $\frac{5\chi-5000}{6}-2000=\frac{5\chi-5000-12000}{6}$, μένει $\frac{5\chi-17000}{3}$, καὶ ἀπ' αὐτὸ ἔλαβεν ἔτι καὶ ἓν ἑκτημόριον $=\frac{5\chi-17000}{6.\ 6}$ ἄρα τοῦτο μετὰ 2000 ὁμοῦ οὕτω $2000+\frac{5\chi-17000}{6.\ 6}$. εἶναι ὅλον τὸ μερίδιον τοῦ δευτέρου. Ἐπειδὴ ὅμως ὅλοι ἴσα ἔλαβον, τὸ μερίδιον ἄρα τοῦ πρώτου $\frac{5000+\chi}{6}$ μὲ τὸ μερίδιον τοῦ Β' εἶναι ἴσα· καὶ αὕτη ἡ ἐξίσωσις

Λύσις. $\frac{5000+\chi}{6}=2000+\frac{5\chi-17000}{6.\ 6}$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; .\ 6$$

$$5000+\chi=12000+\frac{5\chi-17000}{6}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; .\ 6$$

$$30000+6\chi=72000+5\chi-17000$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; \text{ἁπλοῦ.}$$

$$6\chi-5\chi=72000-30000-17000$$

$$\chi=72000-47000=25000.$$

ἦν ἄρα ὅλη ἡ περιουσία $=25000=\chi$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μερίδιον τοῦ Α'$=\frac{5000+\chi}{6}=\frac{5000+25000}{6}$

$=\frac{30000}{6}=5000$, ἔλαβεν ἕκαςος ἀπὸ 5000 γρο: οἱ δὲ υἱοὶ ἦτον $\frac{25000}{5000}=5$· ἡ δεῖξις εἶναι φανερὰ, ὅταν τις λάβῃ αὐτὰ κατὰ τὸ πρόβλημα.

Πρόβλημα Η'.

„Ἄλλος ἔχων γρόσιά τινα εἰς τὸ πουγγεῖον, ἠγόρασε κρέας, καὶ ἔδωκε τὰ ἡμίση καὶ ἔτι μισὸν γρόσι· ἠγόρασε δὲ μετὰ ταῦτα καὶ χαρυκεύματα διὰ αὐτὸ τὸ κρέας, καὶ ἔδωκεν ἀπὸ τὰ λοιπὰ πάλιν τὰ ἡμίση καὶ μισὸν γρόσι· ἠγόρασε δὲ καὶ πωρικὰ ἀπὸ τὰ λοιπὰ ὅσα ἔμειναν, καὶ ἔδωκε πάλιν τὰ μισὰ ἀπὸ αὐτὰ καὶ ἔτι μισὸν γρόσι· βλέπει ὅμως εἰς τὸ πουγγεῖόν του καὶ δὲν μένει τίποτε. Ζητεῖται πόσα εἶχε, καὶ πόσα ἔδωκεν εἰς κρέας, χαρυκεύματα καὶ πωρικά;

Κατασκευή.

Εἶχε χ γρό: εἰς μὲν τὸ κρέας ἔδωκε $\frac{\chi}{2}+\frac{1}{2}$, καὶ ἔμειναν $\chi-\frac{\chi}{2}-\frac{1}{2}=\chi-\frac{\chi-1}{2}=\frac{2\chi-\chi-1}{2}=\frac{\chi-1}{2}$. εἰς δὲ τὰ χαρυκεύματα ἔδωκε $\frac{\chi-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{\chi-1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{\chi+1}{4}$. Ἐὰν δὲ ταῦτα ἀφέλωμεν ἀπὸ τὰ $\frac{\chi-1}{2}-\frac{\chi+1}{4}=\frac{2\chi-2}{4}-\frac{\chi+1}{4}=\frac{\chi-3}{4}$. ἐν τούτων δ' ἔδωκε καὶ εἰς πωρικὰ τὰ ἡμίση καὶ ἔτι μισὸν γρόσι οὕτω, $\frac{\chi-3}{4.\ 2}+\frac{1}{2}=\frac{\chi-3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{\chi+1}{8}$. ἐὰν δὲ ταῦτα ἀπὸ $\frac{\chi-3}{4}$ ἀφέλωμεν, μένει μηδέν· λοιπὸν $\frac{\chi-3}{4}-\frac{\chi+1}{8}=$ $\frac{2\chi-6}{8}-\frac{\chi+1}{8}=\frac{2\chi-6-\chi-1}{8}=\frac{\chi-7}{8}$. καὶ τοῦτο ἴσον μηδενί· ἄρα ἡ ἀξίωσις. $\frac{\chi-7}{8}=0$

$$\frac{\chi-7}{8}=0$$
$$\overline{\qquad\qquad}.\ 8$$
$$\chi-7=0$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$\chi=7$$

εἶχεν αὐτὸς 7 γρόσια, ἔδωκεν εἰς τὸ κρέας $\frac{\chi+1}{2}=\frac{7+1}{2}=4$ γρό:, εἰς τὰ καρυκεύματα $\frac{\chi+1}{4}=\frac{7-1}{4}\ldots\ldots=2$

εἰς τὰ πωρικὰ $\frac{\chi+1}{8}=\frac{7+1}{8}\ldots\ldots=1$

καὶ $4+2+1=7$

Πρόβλημα Θ'.

„Τέσσαρες ἄνθρωποι Α, Β, Γ, Δ. ἔθηκαν εἰς πραγματείαν 1800 γρό:· ὁ μὲν Β κατέβαλε τριπλάσια τοῦ Α, ὁ Γ κατέβαλε τὰ μισὰ ἀπὸ ὅσα κατέβαλεν ὁ Α καὶ ὁ Β ὀλιγώτερα μόνον 30. καὶ ὁ Δ τὰ μισὰ ἀπὸ ἐκεῖνα ὅπου ὁ Γ κατέβαλε. Ζητεῖται πόσα ὁ καθένας κατέβαλε;

Κατασκευή.

„Ἔστω τὰ χρήματα τοῦ Α=χ, καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος κατέβαλε χ· ὁ Β ἄρα 3χ. καὶ ὁ Γ $\chi.+\frac{3\chi}{2}-30=2\chi-30$. ἄρα ὁ Δ $\frac{2\chi-30}{2}=\chi-15$. λοιπὸν ὅλα ὁμοῦ γίνεται 1800. καὶ ἡ ἐξίσωσις.

$$\chi+3\chi+2\chi-30+\chi-15=1800$$
$$7\chi=1800+45=1845$$
$$\chi=\frac{1845}{7}=263\frac{4}{7}$$

Δεῖξις.

τοῦ Α΄.	$\chi=$	$263\frac{4}{7}$
τοῦ Β΄.	$3\chi=$	$789\frac{12}{7}$
τοῦ Γ΄.	$2\chi-30=530-30=$	$496\frac{8}{7}$
τοῦ Δ΄.	$\chi-25$ . . . . . $=$	$248\frac{4}{7}$
		1800

Πρόβλημα Γ΄.

„Καὶ τὸ ἑξῆς εὐκόλως λύεται. Ἄνθρωπός τις πραγματευόμενος ἐξόδευε τὸν χρόνον ἀπὸ τὴν περιουσίαν του 100 φλωρία εἰς τὸν ἑαυτόν του, καὶ εἰς τὸν χρόνον τὸ τριτημόριον τῆς περιουσίας τῆς λοιπῆς ηὔξανεν, ἤτοι τὸ λείψανον τῆς περιουσίας του μετὰ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν 100 φλωρίων ἐτριπλασίαζε· τοῦτο ποιῶν καὶ εἰς τὸν Β΄ καὶ Γ΄. χρόνον, εὗρεν ὅτι ἐδιπλασιάσθη ὅλη ἡ περιουσία του. Ζητεῖται πόση ἦτον πρῶτον ἡ περιουσία του, καὶ ἔτι πόση μετὰ τοὺς τρεῖς χρόνους ἔγινεν;

Κατασκευή.

„Ἔςω ὅτι κατ᾽ ἀρχὰς εἶχεν αὐτὸς χ φλωρία, καὶ ἀπ᾽

αὐτὴν ἐλάμβανεν 100 φλωρ:, ἔμεινεν ἄρα $\chi-100$. πλὴν εἰς τὸν πρῶτον χρόνον τὸ τριτημόριον τούτου ἤτοι $\frac{\chi-100}{3}$ προσετίθετο κέρδος εἰς τὸ $\chi-100$ οὕτω $\chi-100+\frac{\chi-100}{3}=\frac{3\chi-300+\chi-100}{3}=\frac{4\chi-400}{3}$, καὶ τόση εἰς τὸν πρῶτον χρόνον ἔγινεν ἡ περιουσία του. Εἰς δὲ τὸν Β΄ χρόνον ἔλαβε πάλιν 100 φλωρ:, καὶ ἔμειναν $\frac{4\chi-400}{3}-100=\frac{4\chi-400-300}{3}=\frac{4\chi-700}{3}$. πάλιν τὸ τριτημόριον τοῦτο $\frac{4\chi-700}{3.\ 3}$ προσετίθετο εἰς ἐκεῖνο οὕτω $\frac{4\chi-700}{3}+\frac{4\chi-700}{3.\ 3}=\frac{12\chi-2100+4\chi-700}{3.\ 3}=\frac{16\chi-2800}{3.\ 3}$. καὶ τόση εἰς τὸν δεύτερον χρόνον ἡ περιουσία του.

Εἰς δύω τὸν Γ΄ χρόνον ἔλαβε πάλιν 100 φλωρ: ἀπὸ αὐτὰ, καὶ ἔμειναν $\frac{16\chi-2800}{3.\ 3}-100=\frac{16\chi-2800-900}{3.\ 3}=\frac{16\chi-3700}{3\ 3}$. κέρδος· ὅμως τὸ τριτημόριον αὐτοῦ τοῦτο $\frac{16\chi-3700}{3.\ 3.\ 3}$ προσετίθετο εἰς ἐκεῖνο οὕτω $\frac{16\chi-3700}{3.\ 3}+\frac{16\chi-3700}{3.\ 3.\ 3}=\frac{48\chi-11100+16\chi-3700}{3.\ 3.\ 3}=\frac{64\chi-14800}{3.\ 3.\ 3}$ καὶ τοῦτο ἦν ὅλη ἡ περιουσία τοῦ Γ' χρόνου· ἀλλ' αὕτη γέγονε διπλασία τῆς πρώτης ἄρα

Λύσις. $$\frac{\frac{\frac{64\chi-14800}{3.\ 3.\ 3}}{}}{}=2\chi$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ .\ 3$$

$$\frac{64\chi-24800}{3.\ 3}=6\chi$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ .\ 3$$

$$\frac{64\chi-14800}{3}=18\chi$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ .\ 3$$

$$64\chi-14800=54\chi$$

$$10\chi=14800.\ \text{καὶ}\ \chi=\frac{14800}{10}=1480$$

εἶχε λοιπὸν εἰς τὰς ἀρχὰς 1480 φλωρία. καὶ ἤδη 2960.

Ἡ δεῖξις γίνεται ἐάν τις ἀκολουθήσῃ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος.

Π ρ ό β λ η μ α ΙΑ'.

„Νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμὸν, ὥςε, ἐὰν τὸν πολλαπλασιάσωμεν μὲ 5, τὸ παραγόμενον νὰ εἶναι μικρότερον τόσον ἀπὸ τὸν 40, ὅσον εἶναι αὐτὸς μικρότερος ἀπὸ τὸν 12.

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Ἔςω οὗτος ὁ ἀριθμὸς χ. ἡ ὑπεροχὴ τοῦ 12 πρὸς αὐτὸν εἶναι $12-\chi$· τὸ δὲ παραγόμενον μὲ τὸν 5 εἶναι 5χ, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ 40 πρὸς αὐτὸ τὸ παραγόμενον εἶναι $40-5\chi$· ἄρα αἱ δύω ὑπεροχαὶ ἴσαι

Λύσις. $$12-\chi=40-5\chi$$

$$\overline{\qquad\qquad}+5\chi-12$$

$$5\chi-\chi=40-12$$

$$4\chi=28\ \text{καὶ}\ \chi=\frac{28}{4}=7$$

οὗτος εἶναι ὁ 7.

Δεῖξις, διότι $5 . 7 = 35$, καὶ $40 - 35 = 5$, καὶ $12 - 7 = 5$.

Πρόβλημα ΙΒʹ.

„Νὰ σχίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 25 εἰς δύω μέρη, ὧν τὸ μεγαλήτερον νὰ περιέχῃ τὸ μικρότερον 49 φοραῖς.

Κατασκευή.

Ἔςω τὸ μικρότερον μέρος χ, ἄρα τὸ μεγαλήτερον $25 - \chi$· οὗτος, ἐὰν διαιρεθῇ διὰ τοῦ μικροτέρου χ, δίδει τὸ πηλίκον 49· ἄρα

Λύσις. $\dfrac{25-\chi}{\chi} = 49 \qquad . \chi$

$$25 - \chi = 49 \qquad + \chi$$

$$25 = 49\chi + \chi$$

$$25 = (49+1)\chi \qquad : (49+1)$$

$$\frac{25}{50} = \chi = \frac{1}{2}$$

ἄρα $\frac{1}{2}$ τὸ μικρότερον μέρος, καὶ $24\frac{1}{2}$ τὸ μεγαλήτερον.

Πρόβλημα ΙΓʹ.

„Νὰ εὕρωμεν ἕνα τοιοῦτον ἀριθμὸν, ὥςε, ἐὰν αὐτὸν διπλασιάσωμεν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ μονάδα ἀφέλωμεν, τὸ δὲ λείψανον τοῦτο διπλασιάσωμεν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πάλιν 2 ἀφέλωμεν, καὶ τὸ λείψανον διὰ 4 διέλωμεν, νὰ δίδῃ πηλίκον μίαν μονάδα μικρότερον τοῦ ζητουμένου.

Κατασκευή.

Ἔςω ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς χ· ὁ διπλοῦς $= 2\chi$, καὶ πλὴν μονάδος $=2\chi-1$· ὁ δὲ διπλοῦς οὗτος $=4\chi-2$· ἐὰν δὲ καὶ ἀπ' αὐτοῦ πάλιν 2 ἀφέλωμεν $4\chi-2-2=4\chi-4$ καὶ διὰ 4 τοῦτον διέλωμεν $\frac{4\chi-4}{4}$, ἔσται ἴσος τῷ ζητουμένῳ, πλὴν μιᾶς μονάδος $=\chi-1$·

$$\text{ἄρα } \frac{4\chi-4}{4}=\chi-1$$

$$\overline{\hspace{6em}}\;.\;4$$

$$4\chi-4=4\chi-4, \text{ καὶ } \chi-1=\chi-1$$

Καὶ ἰδοὺ κατηντήσαμεν εἰς μίαν ἰσότητα, τὴν ὁποίαν οἱ Μαθηματικοὶ Ταυτικὴν ὀνομάζουσι· σημεῖον, ὅτι ἡ τοιαύτη ἐξίσωσις λύεται μὲ ὅ,τι ἀριθμὸν ἐκλάβωμεν τὸ χ.

Πρόβλημα ΙΔ΄.

„Ἠγόρασέ τις 12 τόπια ὑφάσματα διὰ 140 γρο:, τῶν ὁποίων δύω ἦτον ἄσπρα, τρία μαῦρα, καὶ 7 γαλάζια· εἰς κάθε κομμάτι μαύρου ἔδωκε 2 γρόσια περισσότερα ἀπὸ τὰ ἄσπρα· καὶ εἰς κάθε γαλάζιον 3 γρόσ: περισσότερα ἀπὸ τὰ τῶν μαύρων. Ζητεῖται ἡ τιμὴ ἑκάστου εἴδους.

Κατασκευή.

„Ἔστω ἡ τιμὴ τοπίου ἄσπρου $=\chi$· καὶ τὰ δύω ὁμοῦ 2χ, ἄρα τὰ τρία μαῦρα $=3\chi+6$· καὶ ἐπειδὴ ἓν μαῦρον τιμᾶται $\chi+2$· ἄρα ἓν γαλάζιον τιμᾶται $\chi+2+3=\chi+5$ καὶ τὰ ἑπτὰ ὁμοῦ $=7\chi+35$· λοιπὸν τὰ δύω ἄσπρα $=2\chi$ καὶ τὰ τρία μαῦρα $=3\chi+6$, καὶ τὰ 7 γαλάζια $=7\chi+35$ ὅλα ὁμοῦ εἶναι ἴσα μὲ 140 γρόσια· λοιπὸν

Λύσις. $\underline{2\chi+3\chi+6+7\chi+35=140}$

$$\underline{12\chi=140-6-35}$$

$$12\chi=99 \text{ καὶ } \chi=\frac{99}{12}=8\frac{1}{4}$$

λοιπὸν ἓν ἄσπρου $= 8\frac{1}{4} . 2 = 16\frac{2}{4}$

ἓν μαύρου $= 10\frac{1}{4} . 3 = 30\frac{3}{4}$

ἓν γαλαζίου $= 13\frac{1}{4} . 7 = 91\frac{7}{4}$

$140{,}0$

Πρόβλημα ΙΕ'.

„Ἕνας ἔχει δύω ταμπακέρας ἀργυρᾶς μὲ ἓν σκέπασμα. ἡ μία βαρύνει 12 δραχμὰς, ὅταν ὅμως ἔχῃ τὸ σκέπασμα, βαρύνει διπλᾶ ἀπὸ τὴν ἄλλην. καὶ ὅταν αὐτὴ ἔχῃ τὸ σκέπασμα βαρύνει τριπλᾶ ἀπὸ τὴν ἄλλην.

Ζητεῖται πόσον τὸ βάρος τοῦ σκεπάσματος καὶ τῆς ἑτέρας;

Κατασκευή.

Ἔςω τὸ βάρος τοῦ σκεπάσματος $=\chi$, ἄρα ἡ πρώτη ταμπακέρα μὲ τὸ σκέπασμα βαρύνει $\chi+12$. τὸ δὲ ἥμισυ τούτου εἶναι τὸ βάρος τῆς ἑτέρας $\frac{\chi+12}{2}$. τοῦτο δὲ τὸ βάρος μὲ τὸ σκέπασμα εἶναι τριπλάσιον τῆς πρώτης, ἤτοι 36 δρ:

ἄρα $\frac{\chi+12}{2}+\chi=36$

$\overline{} \; . \, 2$

Λύσις $\chi+12+2\chi=72$

$3\chi=72-12$

$3\chi=60$ καὶ $\chi=20$

Καὶ 20 δρ: εἶναι τὸ σκέπασμα, καὶ 16 ἡ ἑτέρα.

Δεῖξις. διότι $12+20=2.\ 16$. καὶ $16+20=3.\ 12$.

Πρόβλημα ΙϚ':

„Ἀλιεύς τις ἔλεγεν, ἐὰν πωλήσω τὰς τρίγλας ἀπὸ

2 παρ: καὶ τὰς παλαμίδας ἀπὸ 6, λαμβάνω 70 γρόσ:, διότι ἔχω τρίγλας διπλασίας ἀπὸ τρεῖς παλαμίδες.

Ζητεῖται πόσαι ἦσαν αἱ τρίγλαι καὶ πόσαι καὶ παλαμίδες;

„Ἔςω ὁ ἀριθμὸς τῶν τριγλίων $=\chi$, ἄρα ὁ τῶν παλαμίδων $=\frac{\chi}{2}$. καὶ ἐπειδὴ ἐκεῖναι ἀπὸ 2 παρ: ἡ μία, γίνεται ὅλων ἡ τιμὴ $=2\chi$. αὗται δὲ ἀπὸ 6 παρ: καὶ ἡ τιμὴ τούτων ὅλων $=6\frac{\chi}{2}=3\chi$. γενέσθωσαν καὶ τὰ 70 γρόσ: παράδες $=40 \cdot 70=2800$ καὶ αἱ τιμαὶ τῶν δύω ἴσαι 2800.

ὅθεν $2\chi+3\chi=2800$

$$5\chi=2800$$

$$\chi=\frac{2800}{5}=560$$

καὶ τόσαι αἱ τρίγλαι

αἱ δὲ παλαμίδες $\frac{\chi}{2}=\frac{560}{2}=280$.

Ὅςις καλῶς γυμνασθῇ εἰς αὐτὰ, ἠμπορεῖ νὰ λύσῃ πολλὰ προβλήματα, ὁποῦ εἰς τὰς τῶν Ἀριθμητικῶν βίβλους εὑρίσκονται.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Ϛ'.

Περὶ προβλημάτων πλείονας ἀγνώςους ποσότητας ἐχόντων τῆς μιᾶς.

§. 283. Ἐὰν δοθῶσι τοιαῦτα προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα φαίνονται δύω ἢ τρεῖς κτ: ἄγνωςοι ποσότητες, καὶ αὐτὰς δὲν ἠμποροῦμεν διὰ μιᾶς μόνου ἀγνώςου νὰ τὰς ἐκφράσωμεν, τότε ἡ ἀνάλυσις τῶν προβλημάτων ἐξ ἀνάγκης πρέπει νὰ γίνῃ κατ' ἄλλον τρόπον· καὶ πρέπει δύω ἢ τρεῖς κτ: ἀγνώςους ποσότητας νὰ λάβωμεν, καθὼς ἀπαιτεῖ ἡ λύσις καὶ ἡ σύνθεσις τοῦ προβλήματος· διότι ἀνωτέρω ἐδίδοντο καὶ δύω, καὶ τρεῖς ποσότητες ἄγνωςοι, πλὴν διὰ μιᾶς μόνου ἀγνώςου καὶ αἱ λοιπαὶ διωρίζοντο, ὡς εἰς τὸ πρόβλημα, αἱ τρίγλαι καὶ αἱ παλαμίδες ἦτον ἄγνωςοι, πλὴν διὰ τῶν τριγλίων $=\chi$ ἐδιωρίσθησαν καὶ αἱ παλαμίδες $=\frac{\chi}{2}$. Ὁμοίως καὶ εἰς ἄλλα πολλὰ, ὡς εἰς τὰς κληρονομίας οἱ παῖδες ἦτον ἄγνωςοι, πλὴν δι' ἑνὸς ἀγνώςου διωρισθέντος διωρίζοντο καὶ οἱ λοιποί. Ἐδῶ ὅμως θεωροῦνται τοιαῦτα προβλήματα, τὰ ὁποῖα κατ' οὐδένα τρόπον διὰ μιᾶς μόνου ἀγνώςου αἱ λοιπαὶ διορίζονται, ὡς ὅταν εἴπωμεν, εὑρεθήτωσαν δύω ἀριθμοὶ, ὧν τὸ κεφάλαιον ἴσον 15· τῇ ἀληθείᾳ ἄλλως δὲν ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ, εἰ μὴ μὲ δύω ἀγνώςους, $\chi+\psi=15$, ἢ εὑρεθήτωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, ὧν τὸ κεφάλαιον ἴσον 47, καὶ οὗτοι εἶναι $\chi+\psi+\omega=47$.

§. 284. Ὁ τρόπος δὲ διὰ νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἐξίσωσις καὶ τούτων τῶν προβλημάτων, ὁποῦ δύω, τρεῖς κτ: ἀγνώςους ἔχουσιν, εἶναι ὁ αὐτὸς ὡς ἀνωτέρω. (§. 280.) πρέπει ὁ κατασκευάζων τοιαύτας ἐξισώσεις, νὰ παρατηρήσῃ καλῶς τὰς συνθήκας ὅλας τῶν προβλημάτων, καὶ νὰ συνθέσῃ τὴν ἐξίσωσιν, καὶ ἀπὸ τὰς συνθήκας τῶν προβλημάτων διαιροῦνται αὐτὰ τὰ προβλήματα εἰς Ὡρισμένα, καὶ Ἀόριςα. Ὡρισμένα δὲ λέγονται ἐκεῖνα τὰ προβλήματα, εἰς ὅσα δίδονται συνθῆκαι τοσαῦται, ὥςε νὰ κατασκευασθῶσι τόσαι ἐξισώσεις, ὅσαι εἶναι αἱ ἄγνωστοι ποσότητες· εἰς ὅσα δὲ δὲν δίδονται τόσαι συνθῆκαι διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τόσας ἐξισώσεις, ὅσαι εἶναι αἱ ἄγνωστοι ποσότητες, εἶναι καὶ λέγονται Ἀόριστα προβλήματα, καὶ ταῦτα λύονται μὲ πολλὰς ἀποκρίσεις· ὡς τὸ ἀνωτέρω, εὑρεθήτωσαν δύω ἀριθμοί, ὧν τὸ κεφάλαιον $=17$; ἐδῶ αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος δίδονται μόνον διὰ μίαν ἐξίσωσιν· οὕτω· $\chi+\psi=17$· καὶ τοῦτο τὸ πρόβλημα λέγεται ἀόριστον· διότι λύεται καὶ $7+10=17$, καὶ $8+9=17$, καὶ $3+14=17$ καὶ $\frac{1}{2}+16\frac{1}{2}=17$ καὶ ἀπείρως ἄλλως· ἐὰν ὅμως ῥηθῇ τὸ πρόβλημα οὕτω, εὑρεθήτωσαν δύω ἀριθμοί, ὧν τὸ κεφάλαιον 17, καὶ ἡ διαφορὰ τούτων 7, τότε δίδονται συνθῆκαι νὰ κατασκευάσωμεν δύω ἐξισώσεις οὕτω $\chi+\psi=17$ καὶ $\chi-\psi=7$· καὶ ἐπειδὴ δύω οἱ ἄγνωστοι ἀριθμοί, καὶ δύω ἐξισώσεις κατασκευάζονται, τὸ πρόβλημα εἶναι διωρισμένον, καὶ μόνον μία ἀπόκρισις γίνεται καὶ λύσις. Ἡμεῖς εἰς τὸ παρὸν μόνον περὶ ὡρισμένων προβλημάτων θέλομεν ὁμιλήσει, δηλ: περὶ ἐκείνων εἰς τὰ ὁποῖα τόσαι ἐξισώσεις κατασκευάζονται, ὅσοι εἶναι οἱ ἄγνωστοι ἀριθμοί, τὰ δ' ἀόριστα, ὡς λίαν περιπλεγμένα, ὕστερον ἀναπτύξομεν,

§. 285. Ἐπειδὴ εἰς αὐτὰ τὰ προβλήματα πρέπει νὰ εὕρωμεν τόσας ἐξισώσεις, ὅσοι εἶναι οἱ ἄγνωστοι ἀριθμοί, ὁ τύπος τούτων τῶν ἐξισώσεων ἐκφράζεται οὕτω γενικῶς $\alpha\chi\mp\beta\psi=\gamma=$ καὶ $\delta\chi\mp\varepsilon\psi=\vartheta$ α, β, γ, δ, ε, ϑ εἶναι γνωστοὶ ἀριθμοί, καὶ εἰς αὐτοὺς ἠμποροῦμεν νὰ νοήσωμεν ὅ,τι ἀριθμὸν θέλομεν καταφατικόν, ἀποφατικόν, ἀκέραιον, κεκλασμένον κτλ. μόνοι δὲ ὁ χ καὶ ὁ ψ ἄγνωστοι·

ἔπειτα πρέπει εἰς αὐτὰ τὰ προβλήματα νὰ ϛοχασθῶμεν, ἵνα μὴ πολλαπλασιάζωνται οἱ ἄγνωϛοι εἰς τὴν ἐξίσωσιν, ὡς $\chi\text{ч}+\sigma=\gamma$ κτ: διότι τὰ τοιαῦτα προβλήματα εἰς τὸ ἑξῆς τμῆμα θέλουν ἀναπτυχθῆ· οὔτε νὰ διαιρῶνται $\frac{\chi}{\text{ч}}$, διότι τὰ τοιαῦτα εἰς ἕτερον εἶδος προβλημάτων πίπτουσιν.

§. 286. Ἡ λύσις τούτων τῶν προβλημάτων συνίϛαται εἰς τοὺς ἀνωτέρω νόμους τῶν προβλημάτων, μετὰ μιᾶς ἀγνώϛου· διότι καὶ εἰς αὐτὰ διὰ τῆς συνάψεως, ἀφαιρ:, πολλαπλασ: καὶ διαιρέσ: ἀπὸ μίαν ἐξίσωσιν φέρομεν τὴν μίαν μόνην ἄγνωϛον εἰς τὸ ἓν σκέλος τῆς ἐξισώσεως, καὶ τὰ λοιπὰ ὅλα μὲ τὴν ἄλλην ἄγνωϛον ποσότητα εἰς τὸ ἕτερον σκέλος. Τοῦτο ποιοῦμεν καὶ εἰς τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν, καὶ οὕτως ἀπαλλάττομεν τὰς δύω ἐξισώσεις ἀπὸ μίαν ἄγνωϛον. Ἐπὶ παραδείγματος· ἔϛωσαν αἱ δύω ἐξισώσεις $\alpha\chi+\beta\text{ч}=\gamma$ καὶ $\delta\chi+\varepsilon\text{ч}=\vartheta$ καὶ θέλομεν νὰ ἀπαλλάξωμεν αὐτὰς τὰς δύω ἐξισώσεις ἀπὸ τὴν μίαν ἄγνωϛον χ· κατὰ δὲ τὰ προηγούμενα.

ἡ πρώτη $$\alpha\chi+\beta\text{ч}=\gamma$$
$$\alpha\chi=\gamma-\beta\text{ч}$$
$$\chi=\frac{\gamma-\beta\text{ч}}{\alpha}$$

ἡ δευτέρα $$\delta\chi+\varepsilon\text{ч}=\vartheta$$
$$\delta\chi=\vartheta-\varepsilon\text{ч}$$
$$\chi=\frac{\vartheta-\varepsilon\text{ч}}{\delta}$$

καὶ εὕρομεν $\chi=\frac{\gamma-\beta\text{ч}}{\alpha}$ καὶ $\chi=\frac{\vartheta-\varepsilon\text{ч}}{\delta}$, Β΄. Ἐπειδὴ τὸ χ εἶναι ἴσον μὲ τὰς δύω ἐκφράσεις κατὰ μέρος, καὶ ἐπειδὴ εἴρηται τὰ τρίτῳ τινὶ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα. ἄρα καὶ αἱ δύω ἐκφράσεις ἴσαι. οὕτω $\frac{\chi-\beta\psi}{\alpha}=\frac{\vartheta-\varepsilon\psi}{\delta}$. καὶ ἰδοὺ ἑτέρα ἐξίσωσις, εἰς τὴν ὁποίαν μόνον ἡ ψ ποσότης ἄγνωστος, καὶ ὡς πρότερον εὑρεθήτω καὶ αὕτη.

$$\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}=\frac{\vartheta-\varepsilon\psi}{\delta} \qquad .\ \alpha$$

$$\gamma-\beta\psi=\frac{\alpha\vartheta-\alpha\varepsilon\psi}{\delta} \qquad .\ \delta$$

$$\gamma\delta-\beta\delta\psi=\alpha\vartheta-\alpha\varepsilon\psi \qquad +\alpha\varepsilon\psi-\delta\gamma$$

$$\alpha\varepsilon\psi-\delta\beta\psi=\alpha\vartheta-\gamma\delta \qquad :\ (\alpha\varepsilon-\delta\beta)$$

$$\psi\ (\alpha\varepsilon-\delta\beta)=\alpha\vartheta-\gamma\delta$$

$$\psi=\frac{\alpha\vartheta-\gamma\delta}{\alpha\varepsilon-\delta\beta}$$

Καὶ εὕρηται ἡ ἄγνωστος $\psi=\frac{\alpha\vartheta-\gamma\delta}{\alpha\varepsilon-\delta\beta}$, διότι τὸ ἕτερον σκέλος αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως εἶναι γνωστοὶ ἀριθμοί.

Ἀφ' οὗ δὲ τὸ ψ γνωσθῇ, γνωρίζεται καὶ τὸ χ, διότι ἤτον εἰς τὴν Β΄. $\chi=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$, καὶ εἰς αὐτὴν ἀντὶ τοῦ ψ θέτομεν τὴν εὑρεθῶμεν αὐτοῦ τιμήν.

Γ΄. Ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ εὕρωμεν γενικῶς διὰ γραμμάτων καὶ τὴν τιμὴν τοῦ χ, τεθήτω ἀντὶ τοῦ ψ εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ $\chi=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$ ἡ ἔκφασις τοῦ $\psi=\frac{\alpha\vartheta-\delta\gamma}{\alpha\varepsilon-\delta\beta}$, καὶ ὀρθῶς ἐπισυναρθήτω κατὰ τοὺς νόμους τῆς προσθέσ: πολλαπλ: καὶ διαιρέσ: τῶν κλασμάτων· καὶ ἐκφράζεται τὸ χ εἰς γνωςοὺς ἀριθμούς· πρὸς διασάφησιν δὲ τούτου εἰς τοὺς πρωτοπείρους ἡμεῖς αὐτὸ ποιήσωμεν. Ἐπειδὴ εἰς τὴν ἔκφρασιν $\chi=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$ θέλομεν ἀντὶ τοῦ ψ τὴν ἔκφρασιν $\frac{\alpha\vartheta-\delta\gamma}{\alpha\varepsilon-\beta\delta}$ μὲ τὸ β νὰ πολλαπλασιάσωμεν, βέβαια τοῦτο, οὕτως ἐκφρασθήσεται $\chi=\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta\psi}{\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha\vartheta-\delta\gamma}{\alpha\varepsilon-\beta\delta}\right)=\frac{\gamma}{\alpha}-$

$$\left(\frac{\alpha\beta\vartheta-\beta\gamma\delta}{\alpha\alpha\varepsilon-\delta\beta\alpha}\right)=\frac{\alpha\alpha\gamma\varepsilon-\alpha\gamma\delta\beta-\alpha\alpha\beta\vartheta+\alpha\beta\gamma\delta}{\alpha\alpha\alpha\varepsilon-\alpha\alpha\delta\beta}=\frac{\gamma\varepsilon-\beta\vartheta}{\alpha\varepsilon-\delta\beta}.$$ καὶ

εὑρίσκομεν τὸ $\chi=\frac{\gamma\varepsilon-\beta\vartheta}{\alpha\varepsilon-\beta\delta}$, καὶ $\psi=\frac{\alpha\vartheta-\delta\gamma}{\alpha\varepsilon-\delta\beta}$. πρέπει ὁ πρωτόπειρος νὰ ἐξασκηθῇ ὅσον δύναται εἰς αὐτὰς τὰς ἀντιμεταθέσεις, διὰ νὰ μὴ θέτῃ ἄλλο ἀντὶ ἄλλου· διότι βλέπομεν, μόνον νὰ βάλλωμεν εἰς τὸν τόπον $\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$ ἀντὶ τοῦ ψ τὸ ἴσον $\frac{\alpha\vartheta-\delta\gamma}{\alpha\varepsilon-\beta\delta}$. αὕτη ὅλη ἡ ἐργασία γέγονεν.

§. 287. Πρὸς ἀνάπτυξιν αὐτοῦ ἔςω τόδε τὸ πρόβλημα.

„Δύω ἐξόδευσαν ὁμοῦ 80 γρόσια, οὗτοι ἐρωτηθέντες πόσα ἕκαςος ἐξόδευσεν, εἶπον ὅτι ἀγνοοῦσι τοῦτο δὲ ἠξεύρουσιν, ὅτι ὁ ἕνας ἔδωκε 16 γρό: ἀπὸ τὸν ἄλλον περισσότερα.

Ζητεῖται λοιπὸν πόσα ἕκαςος ἐξόδευσεν;

Ἐνταῦθα ἀγνοεῖται καὶ τοῦ ἄλλου ὁ ἀριθμὸς, γνωςὸν εἶναι μόνον τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ὁμοῦ 80, καὶ ἔτι ἡ διαφορὰ καθ' ἣν ὁ ἕτερος εἶχε 16 περισσότερα· λοιπὸν λέγομεν· ὅτι ὁ ἕνας, ὅςτις εἶχε τὰ περισσότερα εἶχεν $=\chi$ καὶ ὁ ἕτερος ὁποῦ εἶχε τὰ ὀλιγώτερα, εἶχεν $=\text{ч}$, ἄρα, τὸ κεφάλαιον τούτων $\chi+\text{ч}=80$ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δύω $\chi-\text{ч}=16$. καὶ ἰδοὺ οἱ ἄγνωςοι δύω ἀριθμοὶ καὶ δύω ἐξισώσεις· εὑρίσκεται τὸ χ ἀπὸ τὴν μίαν ἐξίσωσιν $\chi=80-\text{ч}$ καὶ ἀπὸ τὴν ἑτέραν $\chi=16+\text{ч}$. ἄρα κατὰ (§. 286)· καὶ αὕτη ἡ ἐξίσωσις ὀρθή, $80-\text{ч}=17+\text{ч}$, ἔνθα μόνον μία ἄγνωςος, καὶ τῶρα λύεται εὐκόλως, καὶ εὑρίσκομεν τὸ $\text{ч}=32$. οὕτω

$$80-\text{ч}=16+\text{ч}$$
$$80-16=2\text{ч}$$
$$64=2\text{ч} \text{ καὶ } \text{ч}=32$$

Καὶ 32 γρόσια εἶχεν ἐκεῖνος, ὁποῦ εἶχε τὰ ὀλιγώτερα, τῶρα εὑρίσκομεν καὶ τοῦ ἄλλου τὸ χ, εἰς μίαν τῶν ἄνω ἐξισώσεων ἀφ' οὗ διορίσωμεν $\text{ч}=32$. διότι ἦν $\chi=16=\text{ч}=16+32=48$. καὶ εἶχε ὁ ἕτερος 48 γρό: ἀλλὰ τοῦτο λύεται εὐκόλως διὰ μιᾶς μόνου ἀγνώςου.

§. 288. Ἡ λύσις τῶν προβλημάτων μὲ πολλὰ ἄγνωςα λύεται εὐκολώτερον μὲ τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν ἐξισώσεων, διότι ἡ ἐξίσωσις δὲν χαλᾶ ἐὰν δύω ἐξισώσεις συναφθῶσιν εἰς μίαν, ἢ ἀφαιρεθῶσι (§. 52. 63). ὅθεν διὰ νὰ ἀποβάλλωμεν ἓν ἄγνωςον ἀπὸ ἐξισώσεις, παρατηροῦμεν, ἐὰν αὐτὸ τὸ ἄγνωςον ὁποῦ θέλομεν νὰ ἀποβάλλωμεν εἶναι καὶ εἰς τὴν μίαν καὶ εἰς τὴν ἄλλην μὲ τὰ αὐτὰ σημεῖα + καὶ + ἢ — καὶ —. ἢ μὲ ἐναντία· καὶ ν μὲ τὰ αὐτὰ σημεῖα, τότε ἀφαιροῦμεν τὴν μίαν ἐξίσωσιν ἀπὸ τὴν ἄλλην, καὶ εἰς τὸ λεῖψανον μένει μία ἐξίσωσις χωρὶς ἐκείνην τὴν ἄγνωστον· ἐὰν δ' ἔχῃ τὰ ἐναντία σημεῖα, τότε προστίθεμεν τὰς δύω ἐξισώσεις, καὶ εἰς τὸ κεφάλαιον μένει μία ἐξίσωσις, εἰς τὴν ὁποίαν ἐκλείπει πάλιν αὐτὴ ἡ ἄγνωστος ποσότης. Ληφθήτωσαν τοῦ ἄνω προβλήματος αἱ δύω ἐξισώσεις $\chi+\text{ч}=80$ καὶ $\chi-\text{ч}=16$ καὶ θέλομεν νὰ ἀπαλείψωμεν τὴν χ. Αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι καὶ εἰς τὰς δύω ἐξισώσεις εἶναι τὸ χ καταφατικὸν, καὶ ὅμοια τὰ σημεῖα. ὅθεν ἀφαιροῦμεν οὕτω, καὶ μένει ἡ κάτω ἐξίσωσις χωρὶς τοῦ χ, δηλ: $2\text{ч}=64$.

$$
\begin{array}{l}
\chi+\text{ч}=80 \\
\chi-\text{ч}=16 \\
-\ +\ - \\
\hline
2\text{ч}=64.\ \text{καὶ}\ \text{ч}=32
\end{array}
$$

„Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ ἀπαλείψωμεν τὴν ч παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰς δύω ἐξισώσεις ἔχει τὸ ч σημεῖα ἀνόμοια· διὸ καὶ προσθέτομεν αὐτὰς οὕτω.

$$
\begin{array}{l}
\chi+\text{ч}=80 \\
\chi-\text{ч}=16 \\
\hline
2\chi=36\ \text{καὶ}\ \chi=48
\end{array}
$$

καὶ μένει τὸ κεφάλαιον μία ἐξίσωσις χωρὶς τοῦ ч, $2\chi=96$ καὶ εὑρίσκεται ἡ ἄγνωστος εὐκόλως. Οὗτος ὁ τρόπος εἶναι ὁ συντομώτερος εἰς τὰς ἐπιλύσεις μὲ πολλὰ ἄγνωστα· διὰ νὰ μὴ καταντῶμεν, εἰς πράξεις δυσκόλας καὶ ἀνωφελεῖς.

§. 289. Ἐπειδὴ τοῦτο τὸ πρόβλημα εἶναι χρήσιμον καὶ ἀναγκαῖον εἰς τὴν Μαθηματικὴν σχεδὸν ὅλην, πρέπει τοὐλάχιστον νὰ ἐκφρασθῇ γενικῶς. Εἶναι δὲ τὸ πρόβλημα τοιοῦτον, νὰ εὑρεθῶσι δύω ἀριθμοὶ, ἐὰν δοθῇ τὸ κεφάλαιον, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν. ἔστω ὁ μείζων ἀριθμὸς χ, καὶ ὁ ἐλάττων ч· τὸ δὲ κεφάλαιον ὡς γνωστὸν $=\alpha$ καὶ ἡ διαφορὰ $=6$ ἄρα τὸ κεφάλαιον τῶν δύω $\chi+\psi=\alpha$ καὶ ἡ διαφορὰ $\chi-\psi=6$· λοιπὸν

$$\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \underline{\chi-\psi=6} \quad + \\ 2\chi=\alpha+6 \quad \underline{\quad} : 2 \\ \chi=\dfrac{\alpha+6}{2}=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{6}{2} \end{array}$$

Ἤτοι εὑρίσκομεν τὸν μείζονα ἀριθμὸν, ἐὰν συνάψωμεν τὸ κεφάλαιον καὶ τὴν διαφορὰν, καὶ τὸ ἥμισυ λάβωμεν.

ἔςω δεύτερον $\chi+\psi=\alpha$

$$\begin{array}{l} \chi-\psi=6 \\ \underline{-\;+\;-} \quad - \\ \underline{2\psi=\alpha-6} \quad : 2 \\ \psi=\dfrac{\alpha-6}{2} \end{array}$$

Ἤτοι εὑρίσκομεν καὶ τὸν ἐλάττονα ἀριθμὸν, ἐὰν τὴν διαφορὰν ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου ἀφέλωμεν, καὶ τὸ ἥμισυ λείψανον λάβωμεν· καὶ τοῦτο εἰς πολλὰ μέρη ζητήσωμεν.

Σημείωσαι· ὅτι πολλὰ τοιαῦτα προβλήματα καὶ δι' ἑνὸς ἀγνώςου λύονται· διότι εἰς τὸ ἄνω ὁποῦ ἦτον τὸ κεφάλαιον 80, καὶ ἡ διαφορὰ 16, λέγομεν ὅτι ὁ μείζων ἀριθμὸς ἦν χ· ἄρα ὁ ἐλάττων $80-\chi$· ἐὰν λοιπὸν τοῦτον τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τὸν μείζονα ἀφέλωμεν, οὕτω $\chi-(80-\chi)$ εἶναι ἴσον 16. ὅθεν

$$\begin{array}{l} \underline{\chi-(80-\chi)=16} \\ \underline{\chi-80+\chi=16} \\ 2\chi=80+16 \text{ καὶ } \chi=8+40=48 \end{array}$$

καὶ εὐκόλως εὑρίσκομεν καὶ τὸν ἐλάττονα $=80-\chi=80-48=32$.

„Ὅπου τοῦτο χωρεῖ, ἐκεῖ κάλλιον διὰ μιᾶς ἀγνώστου

Πρόβλημα Β'.

„Ὄνος πεφορτισμένος παραπονούμενος εἰς μουλάριον καὶ αὐτὸ πεφορτισμένον,, ἔλεγον· ὅτι ὁ δεσπότης ἡμῶν ἀδίκως μᾶς ἐφόρτωσε· διότι ἐὰν σύ μοι δώσῃς 45 ὀκ: ἀπὸ τὸ φόρτωμάσου, ἐγὼ θέλω ἔχῃ διπλοῦν βάρος ἀπὸ ἐσένα. Μὴ παραπονεῖσαι λέγει τὸ μουλάριον:, διότι ἐὰν σύ μοι δώσῃς 45 ὀκ:, ἐγὼ θέλω ἔχῃ βάρος τριπλάσιον ἀπὸ ἐσένα. Ζητεῖται πόσον βάρος ἔχει ὁ ὄνος, καὶ πόσον τὸ μουλάρι;

Κατασκευή.

„Ὁ μὲν ὄνος ἔχει βάρος χ, τὸ δὲ μουλάρι ψ· ἐὰν ὅμως δώσῃ τὸ μουλάρι εἰς τὸν ὄνον 45 ὀκ:, θέλει μείνῃ εἰς μὲν τὸ μουλάρι $\psi-45$, εἰς δὲ τὸν ὄνον $\chi+45$, ἀλλὰ τότε ὁ ὄνος θέλει ἔχει διπλάσιον βάρος· ἄρα $\chi+45=2(\psi-45)$· δεύτερον ἐὰν ὁ ὄνος δώσῃ εἰς τὸ μουλάρι 45 ὀκ:, ὁ μὲν ὄνος θέλει ἔχει $\chi-45$, τὸ δὲ μουλάρι $\psi+45$· τότε ὅμως τὸ μουλάρι θέλει ἔχει βάρος τριπλάσιον· ἄρα $3(\chi-45)=\psi+45$· καὶ αἱ δύω ἐξισώσεις εὑρέθησαν $\chi+45=2(\psi-45)=2\psi-90$· (Α')

καὶ $3(\chi-45)=\psi+45$ ἤτοι $3\chi-135=\psi+45$ (Β')

τώρα διὰ νὰ ἀπαλλαχθῶμεν ἀπὸ τὸ χ ἀφαιροῦμεν τὴν (Α') ἀπὸ τὴν (Β')· οὕτω $3\chi-135=\psi+45$

$$+3\chi+45.3=3.2\psi-90.3$$

$$-\quad -\quad\quad -\quad\quad\quad +$$

$$-270=-5\psi+315$$

$$5\psi=315+270$$

$$5\psi=587 \text{ καὶ } \psi=\frac{585}{5}=117$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν (Α') μὲ 3 διὰ νὰ γένῃ τὸ χ ἴσον μὲ τὸ χ τῆς ἑτέρας· καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εὑρίσκεται τὸ φόρτωμα τοῦ μουλαρίου $\psi=117$ ὀκ.· τώρα εὐκόλως εὑρίσκομεν καὶ τὸ φόρτωμα τοῦ ὄνου, ἐὰν λάβωμεν ἐκ τῶν ἄνω ἐξισώσεων μίαν, καὶ θῶμεν ἀντὶ ψ τὸ ἴσον 117· διότι ἡν $\chi+45=2\psi-90=2.117-90=234-90=144$· καὶ $\chi+45=144$

$\chi=144-45=99$

καὶ οὕτως εὕρηται καὶ τὸ φόρτημα τοῦ ὄνου, $\chi=99$ ὀκ.

Πρόβλημα Γ'.

„Δύω σωλῆνες ἐπλήρωσαν ἓν ἀγγεῖον ὕδατος, μὲ 21 μέτρον, ἐν ᾧ ὁ μὲν σωλὴν ἔτρεξε 2 ὥρας, καὶ ὁ ἕτερος 3 ὥρ: οἱ αὐτοὶ ἐπλήρωσαν ἕτερον ἀγγεῖον 21 μέτρων, ἐν ᾧ ὁ μὲν 7 ὥρας ἔρρεεν, ὁ δὲ 6. εἰς πόσας ὥρας πρέπει νὰ τρέξουν οἱ δύω ὁμοῦ νὰ γεμίσωσιν ἓν ἀγγεῖον ἀπὸ 100 μέτρα;

Κατασκευή.

Ἐδῶ πρέπει πρῶτον νὰ εὑρεθῇ πόσον ῥέει εἰς μίαν ὥραν ἀπὸ κάθε σωλῆνα· ὅθεν λέγομεν ὅτι ἀπὸ τὸν πρῶτον σωλῆνα ἐξέρχεται χ νερὸν εἰς μίαν ὥραν· ἄρα εἰς δύω ὥρας 2χ. ἀπὸ δὲ τὸν δεύτερον ῥέει ψ νερὸν εἰς μίαν ὥραν, εἰς τρεῖς ἄρα 3ψ. καὶ λοιπὸν τὸ νερὸν τοῦ πρώτου ἀγγείου ἦτον $2\chi+3\psi=21$. ὁμοίως εἰς 7 ὥρας τρέχει 7χ ἀπὸ τὸν πρῶτον σωλῆνα, καὶ εἰς 6 ὥρας 6ψ ἀπὸ τὸν δευτέρου· λοιπὸν τὸ νερὸν τοῦ δευτέρου ἀγγείου εἶναι $7\chi+6\psi=51$ καὶ οὕτως εὑρέθησαν αἱ δύω ἐξισώσεις.

$2\chi+3\psi=21$ - - - - - - Α

καὶ $7\chi+6\psi=51$ - - - - - - Β

Μὲ 2 πολλαπλασιάζομεν τὴν Α οὕτω $4\chi+6\text{ч}=42$ - - Γ, διὰ νὰ γένῃ τὸ ч ἴσον μὲ τὸ ч τῆς Β. ἀφαιροῦμεν τὴν Γ ἀπὸ τῆς Β, καὶ εὑρίσκεται ὅ $\chi=3$. καὶ τόσα μέτρα ῥέουσιν ὕδατος ἀπὸ τὸν πρῶτον σωλῆνα· τὸ δὲ ч εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν Α ἐξίσωσιν ὅταν θῶμεν $\chi=3$ ἔνθα εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς μίαν ὥραν 5 μέτρα ῥέουσιν ἀπὸ τὸν δεύτερον σωλῆνα εἰς μίαν ὥραν.

$$\begin{array}{l}7\chi+6\text{ч}=51\\4\chi+6\text{ч}=42\\-\quad-\quad-\\\hline 3\chi=9=3\\2\chi+3\text{ч}=21\\6+3\text{ч}=21\\\hline 3\text{ч}=21-6\\\text{ч}=\frac{15}{3}=5\end{array}$$

Λοιπὸν οἱ δύω ὁμοῦ εἰς μίαν ὥραν ῥέουσιν ὕδωρ $3+5=8$ μέτρα. ἐὰν δὲ μὲ τὸν 8 διέλωμεν τὸν 100, εὑρίσκομεν εἰς πόσαις ὥρας πληροῦσι τὸ τρίτον ἀγγεῖον μὲ 100 μέτρα· ἤτοι $\frac{200}{8}=12\frac{1}{2}$, εἰς 12 ὥρας καὶ μισὴν γεμίζουσιν αὐτὸ τὸ ἀγγεῖον.

§. 290. Ἐὰν δὲ τὸ πρόβλημα ἔχῃ τρεῖς ποσότητος ἀγνώστους, ἀνάγκη τότε νὰ εὑρεθῶσι καὶ τρεῖς ἐξισώσεις· διότι ἄλλως μένει τὸ πρόβλημα ἀδιόριστον. (§. 284). ὅταν ὅμως εὑρεθῶσιν εἰς τρεῖς ποσότητας ἀγνώστους καὶ τρεῖς ἐξισώσεις, τότε λύομεν τὸ πρόβλημα κατὰ τοὺς ἄνω τρόπους.

Α΄. „Ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐξισώσεις εὑρίσκομεν τὴν μίαν μόνον ἄγνωστον, ὡσὰν νὰ εἶναι αἱ λοιπαὶ γνωσταί, ἤτοι μονώνομεν μόνον τὴν μίαν ἄγνωστον εἰς τρεῖς τύπους, πρῶτον, δεύτερον, καὶ τρίτον· καὶ εἰς αὐτοὺς τοὺς τύπους εὑρίσκονται μόνον δύω ἄγνωστοι ποσότητας.

Β΄. Λαμβάνομεν τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον τόπον εἰς ἐξίσωσιν, καὶ εὑρίσκομεν ἑτέραν ποσότητα ἄγνωστον εἰς τύπον τέταρτον. Τὴν αὐτὴν εὑρίσκομεν καὶ ἀπὸ τὸν δευτέρου καὶ τρίτου τύπου εἰς ἕνα πέμπτον τύπον, καὶ οὕτως ὁ τέταρτος καὶ πέμπτος τύπος ἔχει μίαν μόνον ἄγνωστον ποσότητα.

Γ′. Ἀπὸ δὲ τὸν Δ′ καὶ Ε′ τύπον εὑρίσκομεν τὴν ἐν αὐτοῖς ἄγνωστον ποσότητα γνωστὴν (§. 281).

Δ′. Ὅταν αὕτη γνωσθῇ, γνωρίζεται καὶ ἡ δευτέρα εἰς ἕνα τύπον τῶν Α′, Β′, Γ′, ὅταν ἀντὶ τῆς ἀγνώστου τεθῇ ἡ ἴση γνωστή.

Ε′. Καὶ οὕτως ἔχοντες τὰς δύω γνωστὰς, γνωρίζομεν καὶ τὴν ἑτέραν ἄγνωστον εἰς μίαν τῶν τριῶν ἐξισώσεων.

Ἐπὶ παραδείγματος, ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$
\begin{array}{rl}
\text{I)} & 3\chi+5\omega-4\psi=25 \\
\text{II)} & 5\chi-2\omega+3\psi=46 \\
\text{III)} & 3\omega+5\psi-\chi=62
\end{array}
$$

καὶ κατὰ τὸ (Α′) εὑρεθήτω μόνον τὸ χ εἰς τύπους τρεῖς

$$\chi=\frac{25-5\omega+4\psi}{3} \quad \text{- - - Α′.}$$

$$\chi=\frac{46+2\omega-3\psi}{5} \quad \text{- - - - Β′.}$$

$$\chi=3\omega+5\psi-62 \quad \text{- - - - Γ′.}$$

κατὰ δὲ τὸ Β'. εὑρεθήτω ἐκ τῆς Α' καὶ Β' τὸ ω

$$\frac{25-5\omega+4\psi}{3}=\frac{46+2\omega-3\psi}{5} \quad .3$$

$$25-5\omega+4\psi=\frac{138+6\omega-9\psi}{5} \quad .5$$

$$125-25\omega+20\psi=138+5\omega-9\psi \quad \pm$$

$$125-138+20\psi+9\psi=6\omega+25\omega$$

$$29\psi-13=31\omega$$

Δ' - - - $\dfrac{29\ -13}{31}=\omega$

εὑρεθήτω καὶ ἐκ τοῦ Β' καὶ Γ' πάλιν αὐτὸ τὸ ω. διότι

$$\frac{46+2\omega-3\psi}{5}=3\omega+5\psi-62 \quad .5$$

$$46+2\omega-3\xi=15\omega+25\psi-310$$

$$46+310-3\psi-25\psi=15\omega-2\omega$$

$$356-28\psi=13\omega \quad .13$$

$$\frac{356-28\psi}{13}=\omega \text{ - - - - - E'}$$

Κατὰ δὲ τὸ (Γ'.) εὑρίσκεται ἐκ τοῦ Δ' καὶ Ε' τὸ ψ οὕτω

$$\frac{29\psi-13}{31}=\frac{356-28\psi}{13} \quad .13$$

$$\frac{13.\ 29\psi-13.\ 13}{31}=356-28\psi \quad .31$$

$$13.\ 29\psi-13.\ 13=31.\ 356-31.\ 28\psi$$

ἤτοι $377\psi-169=11036-866\psi$

$$377\psi+868\psi=11036+169$$

$$1245\psi=11205.\ \text{καὶ}\ \psi=\frac{11205}{1245}=9$$

Καὶ κατὰ τὸ (Δ') ἐὰν θῶμεν εἰς τὸν τύπον Ε' ἀντὶ τοῦ ψ τὸ ἴσον 9 εὑρίσκεται τὸ ω· ἔτι γὰρ $\omega = \frac{356-28\psi}{31}$.

$$\omega = \frac{356-28.\ 9}{13} = \frac{356-252}{13} = \frac{104}{13} = 8.$$

Κατὰ δὲ τὸ (Ε) ἐπειδὴ εὑρέθη τὸ μὲν $\psi=9$, τὸ δὲ $\omega=8$ εὑρίσκεται καὶ τὸ χ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν III ἐὰν θῶμεν ἀντὶ ψ καὶ ω τὰ ἴσα· ἦν γὰρ $\chi=3\omega+5\psi-62$

ἤτοι $\chi=3.\ 8+5.\ 9-62$

$\chi=24+45-62=96-61=7$

Καὶ εὕρομεν $\chi=7$. $\psi=9$. $\omega=8$.

Καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον λύονται τὰ προβλήματα μὲ τρεῖς ἀγνώςους ποσότητας· πλὴν εὐκολώτερον λύονται ἐὰν διαφόρως μεταχειρισθῶμεν τὰς ἐξισώσεις πολλαπλασιάζοντες, συνάπτοντες, ἀφαιροῦντες κατὰ τὴν χρείαν.

§. 291. Οὗτος ὁ Β' τρόπος εἶναι συντομώτερος, ὅταν ὁ νοῦς τοῦ πρωτοπείρου εὐθὺς νοῇ κατὰ τίνα τρόπον νὰ μεταβληθῶσιν αἱ ἐξισώσεις, διὰ νὰ συναφθῶσιν, ἢ ἀφαιρεθῶσι, καὶ νὰ ἀπαλλαχθῶμεν ἀπὸ τὰ ἄγνωςα.

ἂς λάβωμεν τὰς ἄνω ἐξισώσεις I) $3\chi+5\omega-4\psi=25$

II) $5\chi-2\omega+3\psi=46$

III) $3\omega+5\psi-\chi=62$

πολλαπλασιάζομεν τὴν III) μὲ 3 οὕτω $9\omega+15\psi-3\chi=186$

καὶ τὴν προσθέτομεν εἰς τὴν I) οὕτω $3\chi+5\omega-4\psi=25$

$-3\chi+9\omega+15\psi=186$

$14\omega+11\psi=211$ - - - IIII)

εἶτα τὴν αὐτὴν πολλαπλασιάζομεν μὲ 5 καὶ τὴν συνάπτομεν μὲ τὴν δευτέραν οὕτω $5\chi-2\omega+3\psi=46$

$$-5\chi+15\omega+25\psi=310$$

$$13\omega+28\psi=356 \;\text{- - -}\; V.$$

Καὶ ἰδοὺ εὕρωμεν δύω ἐξισώσεις τὴν IIII καὶ τὴν V μόνον μὲ δύω ἀγνώςους τὴν ω καὶ ψ· αὐτὰς δὲ τὰς λύσμεν κατὰ δύω τρόπος.

Α΄. Πολλαπλασιάζομεν τὴν μὲν IIII μὲ 13 τὴν δὲ V μὲ 14, καὶ τὰς ἀφαιροῦμεν οὕτω

$$13.\ 14\omega+13.\ 11\psi=13.\ 211$$
$$14.\ 13\omega+14.\ 28\psi=14.\ 356$$
$$14.\ 28\psi-13.\ 11\psi=14.\ 356-13.\ 211$$
$$392\psi-143\psi=4984-2743$$
$$249\psi=4984-2743$$
$$\psi=\frac{2241}{249}=9$$

Εὑρόντες τὸ $\psi=9$ εὑρίσκομεν καὶ τὸ ω, ἐὰν ἀντὶ τοῦ ψ θῶμεν 9 εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$14\omega+11\psi=211$$
$$14\omega+11.\ 9=211$$
$$14\omega+99=211.$$
$$14\omega=211-99=112$$
$$\omega=\frac{112}{15}=8$$

Εὑρόντες ἤδη $\psi=9$ καὶ $\omega=8$ εὑρίσκομεν καὶ χ εἰς μίαν τῶν ἄνω ἐξισώσεων.

Β΄. Εὑρόντες τὰς δύω ἐξισώσεις $14\omega+11\psi=211$ καὶ $13\omega+28\psi=356$ εὑρίσκομεν τὸ ω εἰς μίαν τῶν δύω ἐξισώσεων, οὕτω. $13\omega + 28\psi = 326$, καὶ $\omega = \frac{356 - 28\psi}{13}$ καὶ τοῦτο τίθεμεν ἀντὶ τοῦ ω εἰς τὴν ἑτέραν ἐξίσωσιν $14\omega + 11\psi = 211$. οὕτω $14.\frac{356 - 28\psi}{13} + 11\psi = 211$. καὶ κατὰ τὸν τρόπον τῶν ἐξισώσεων μετὰ μιᾶς ἀγνώςου εὑρίσκεται ἡ ψ. διότι $14\frac{356 - 28\psi}{13} + 11\psi = 212$

$$14.\ 356 - 14.\ 28\psi + 13.\ 11\psi = 13.\ 211$$

$$4984 - 392\psi + 143\psi = 2743$$

$$4984 - 2743 = 392\psi - 143\psi$$

$$2241 = 249\psi$$

$$\frac{2241}{249} = \psi = 9$$

Ὡς καὶ πρότερον εὑρέθησαν τὰ αὐτά· ὅθεν διαφόρως λύομεν τὸ αὐτό, καὶ ὁ ἀναγνώςης ἂς μεταχειρισθῇ τὸ εὐκολώτερον· τοῦτο μόνον συμβουλεύομεν, ὅταν θέλῃ τις νὰ συνάψῃ, ἢ νὰ ἀφέλῃ ἐξισώσεις, πρέπει νὰ κατασκευάζῃ τὴν μίαν ἐξίσωσιν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ διαιρέσεως οὕτως, ὥςε ἡ ποσότης, ὁποῦ θέλομεν νὰ ἐκλείψῃ εἰς τὴν ἐξίσωσιν, πρέπει νὰ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὸν συνεργοῦντης καὶ εἰς τὴν μίαν, καὶ εἰς τὴν ἑτέραν ἐξίσωσιν· διότι ἀλλέως μένει ἡ ποσότης πάλιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν, καὶ ὁ κόπος εἰς μάτην γίνεται.

Π ρ ό β λ η μ α Δ΄.

„Ἐρωτήθη κρασοπώλης τις, ἂν ἔχῃ κρασίον καλὸν, καὶ εἶπεν, ὅτι ἔχει τριῶν εἰδῶν κρασίον· ἐρωτήθη πάλιν ποσα εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ καθ' ἑνός; καὶ αὐτὸς ἀπεκρίθη· 2 ὀκ: ἀπὸ τοῦ πρώτου, καὶ 2 ὀκ: ἀπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ μία ὀκᾶ ἀπὸ τοῦ τρίτου ὁμοῦ ἔχει 60 παρ:· καὶ πάλιν, ἂν αὐτὸ δὲν νοεῖτε, λέγει, 2 ὀκ: ἀπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τρεῖς ἀπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ 4 ἀπὸ τοῦ τρίτου ὁμοῦ ἔχει 120 παρ:, καὶ σαφέστερα νὰ σᾶς εἰπῶ, λέγει, 10 ὀκ: ἀπὸ τοῦ πρώτου, καὶ 4 ὀκ: ἀπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ 2 ὀκ: ἀπὸ τοῦ τρίτου, ἔχει ὁμοῦ 180 παρ:. Αὐτοὶ ἀποροῦσι τώρα πόσα ἔχει ἡ ὀκᾶ τοῦ Α' εἴδους, τοῦ Β' καὶ τοῦ Γ'. Ἐνταῦθα καὶ τῶν τριῶν εἰδῶν ἡ τιμὴ εἶναι ἄγνωστος· διὸ ἔστω ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου εἴδους χ, τοῦ δευτέρου ω, τοῦ τρίτου ψ· καὶ καθὼς αὐτὸς εἶπε

τὴν πρώτην φορὰν $2\chi+2\omega+\psi=60$ - - - Α'
τὴν Β' φορὰν $2\chi+3\omega+4\psi=120$ - - Β'
τὴν Γ' φορὰν $10\chi+4\omega+2\psi=180$ - - Γ'

Καὶ ἰδοὺ τρεῖς ἐξισώσεις, ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα τρεῖς ἔχει καὶ ἀγνώστους ποσότητας. πρὸς λύσιν αὐτῶν ὅμως διπλασιασθήτω ἡ πρώτη, καὶ ἀφαιρείσθω ἀπὸ τῆς τρίτης, οὕτω.

$$\begin{array}{r} 10\chi+4\psi+2\psi=180 \\ 4\chi+4\omega+2\psi=120 \\ -\quad -\quad -\quad - \\ \hline 6\chi=60 \text{ καὶ } \chi=\frac{60}{6}=10 \end{array}$$

καὶ οὕτως εὑρέθη ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου εἴδους $\chi=10$ παράδες ἡ ὀκᾶ· ἔπειτα πολλαπλασιασθήτω ἡ τρίτη μὲ 2 καὶ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ αὐτῆς ἡ Β οὕτω

$$
\begin{array}{r}
20\chi+8\omega+4\psi=360 \\
2\chi+3\omega+4\psi=120 \\
-\ \ -\ \ -\ \ - \\
\hline
18\chi+5\omega=240
\end{array}
$$

καὶ θὲς ἐδῶ $\chi=10$ καὶ ἔςαι

$$
\begin{array}{r}
180+5\omega=240 \\
\hline
5\omega=240-180=60 \\
\hline
\omega=\frac{60}{5}=12
\end{array}
$$

Εὑρέθη δὲ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ δευτέρου εἴδους $\omega=12$.

Ἀπὸ δὲ τῆς Α΄ ἐξισώσεως εὑρίσκεται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ τρίτου εἴδους, ἐὰν θῶμεν ἀντὶ χ καὶ ω τὰς εὑρεθείσας τιμὰς, οὕτω

$$
\begin{array}{l}
2\chi+2\omega+\psi=60 \text{ ἤτοι} \\
20+24+\psi=60 \\
\hline
\psi=60-20-24=16.
\end{array}
$$

Καὶ τόσου τιμᾶται ἡ ὀκᾶ, τοῦ τρίτου εἴδους, ἡ δὲ δοκιμὴ γίνεται ἐὰν θῶμεν τὰς τιμὰς τὰς εὑρεθείσας εἰς τὰς ἐξισώσεις ἐξέρχονται, 60, 120, 180 παράδες.

Π ρ ό β λ η μ α Ε.

Τρεῖς παίζουσι χαρτία τὸν πάγκον, καὶ εἰς μὲν τὸ πρῶτον παιγνίδι εἶχεν ὁ πρῶτος τὸν πάγκον, καὶ οἱ λοιποὶ ἔβαλον ἕκαςος τὰ μισὰ ἄσπρα, ὁποῦ εἶχον, καὶ ἐκέρδησαν· εἰς δὲ τὸ δεύτερον παιγνίδι ἔλαβεν ὁ Β΄ τὸν πάγκον, καὶ οἱ λοιποὶ δύω ἔβαλον τὰ ἡμίση ὁποῦ εἶχον εἰς αὐτὸ τὸ παιγνίδι, καὶ ἐκέρδησαν. Εἰς τὸ τρίτον πάλιν παιγνίδι ὁ τρίτος ἔλαβε τὸ πάγκον, καὶ οἱ λοιποὶ ἀπὸ τὰ ἄσπρα, ὁποῦ αὐτοῦ εἶχον, ἔβαλον τὰ μισὰ καὶ ἐκέρδησαν· Μετὰ τὰ τρία παιγνίδια ἐμέτρησεν ἕκαςος τὸ εἶχεν, καὶ εὗρον ὅτι καὶ οἱ τρεῖς εἶχον ἐπίσης ἕκαςος ἀπὸ 27 φλωρία. Ζητεῖται πόσα εἶχον ἕκαςος εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν παιγνιδίων;

λέγομεν, ὁ πρῶτος εἶχε χ, ὁ δεύτερος ω, καὶ ὁ τρίτος ψ. καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ πρῶτον παιγνίδι ὁ μὲν πρῶτος ἔχασε τὰ μισὰ, ὁποῦ εἶχον οἱ δύω, καὶ οἱ δύω ἐκέρδησαν ἕκαστος τὰ μισὰ, ὁποῦ εἶχον· ἄρα εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου παιγνιδίου εἶχεν

ὁ Α′. $\chi - \frac{\omega}{2} - \frac{\psi}{2} = \frac{2\chi - \omega - \psi}{2}$

ὁ δὲ Β′ $\omega + \frac{\omega}{2} = \frac{3\omega}{2}$

ὁ δὲ Γ $\psi + \frac{\psi}{2} = \frac{3\psi}{2}$

Εἰς δὲ τὸ δεύτερον παιγνίδι ἐπειδὴ ὁ δεύτερος ἔχασε τὰ μισὰ ἀφ' ὅ, τι οἱ δύω εἶχον εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου παιγνιδίου, καὶ ὁ πρῶτος καὶ τρίτος ἐκέρδησαν τὰ μισὰ, ὁποῦ εἶχον· ἔχει λοιπὸν εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου παιγνιδίου ὁ μὲν

$$Α′ \frac{2\chi - \omega - \psi}{2} + \frac{2\chi - \omega - \psi}{4} = \frac{4\chi - 2\omega - 2\psi}{4} + \frac{2\chi - \omega - \psi}{4} = \frac{6\chi - 3\omega - 3\psi}{4}$$

$$\text{ὁ Β′ } \frac{3\omega}{2} - \frac{2\chi - \omega + \psi}{4} - \frac{3\psi}{4} = \frac{6\omega - 2\chi + \omega + \psi - 3\psi}{4} =$$

$$\text{ὁ Γ′ } \frac{3\psi}{2} + \frac{3\psi}{4} = \frac{6\psi}{4} + \frac{3\psi}{4} = \frac{9\psi}{4}$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ εἰς τὸ τρίτον παιγνίδι ὁ μὲν τρίτος ἔχασε τὰ μισὰ ἀφ' ὅ, τι εἶχον οἱ λοιποὶ δύω, καὶ ἕκαστος τῶν δύω ἐκέρδησαν τὰ μισὰ ἀφ' ὅ, τι εἶχεν ἕκαστος εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου παιγνιδίου· ἄρα εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου παιγνιδίου ἔχει ὁ μὲν

$$\text{Α}'\ \frac{6\chi-3\omega-3\psi}{4}+\frac{3\chi-3\omega-3\psi}{8}=\frac{12\chi-6\omega-6\psi}{8}+$$

$$\frac{6\chi-3\omega-3\psi}{8}=\frac{18\chi-9\omega-9\psi}{8}$$

$$\text{ὁ Β}'\ \frac{7\omega-2\chi-2\psi}{4}+\frac{7\omega-2\chi-2\psi}{8}=\frac{14\omega-4\chi-4\psi}{8}$$

$$+\frac{7\omega-2\chi-2\psi}{8}=\frac{21\omega-6\chi-6\psi}{}$$

$$\text{ὁ Γ}'.\ \frac{9\psi}{4}-\frac{6\chi-3\omega-3\psi}{8}-\frac{7\omega-2\chi-2\psi}{8}=$$

$$\frac{18\psi-6\chi+3\omega+3\psi-7\omega+2\chi+2\psi}{8}=\frac{23\psi-4\chi-4\omega}{8}$$

καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου παιγνιδου ἔχει ἕκαστος 27 φλωρία. ἄρα αἱ τρεῖς ἐξισώσεις.

$$\frac{18\chi-9\omega-9\psi}{8}=27\ \text{-----}\ \text{Α}'$$

$$\frac{21\omega-6\chi-6\psi}{8}=27\ \text{-----}\ \text{Β}'$$

$$\frac{23\psi-4\chi-4\omega}{8}=27\ \text{-----}\ \text{Γ}'$$

Πρὸς λύσιν δ' αὐτῶν τῶν ἐξισώσεων τριπλασιασθήτω ἡ δευτέρα, καὶ προςεθήτω τῇ Α' οὕτω·

$$\frac{63\omega-18\chi-18\psi}{8}=81$$

$$+\frac{18\chi-9\omega-9\psi}{8}=27$$

$$\frac{54\omega-27\psi}{8}=108\ \text{---}\ \Delta'$$

Ἔτι πολλαπλασιασθήτω ἡ μὲν Β′ μὲ 2, ἡ δὲ Γ′ μὲ 3, καὶ ἀφαιρεθήτω ἡ Β′ ἀπὸ τῆς Γ οὕτω,

$$\frac{3(23\psi-4\chi-4\omega)}{8}-\frac{2(21\omega-6\chi-6\psi)}{8}=3.27-2.27=$$

$$=\frac{69\psi-12\chi-12\omega-42\omega+12\chi+12\psi}{8}=81-54$$

$$=\frac{81\psi-54}{8}=27 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{Ε}'$$

Τέλος συναφθήτω ἡ Δ′ καὶ Ε′ ὁμοῦ οὕτω

$$\frac{54\omega-27\psi}{8}=108$$

$$+\frac{81\psi-54\omega}{8}=27$$

$$\frac{81\psi-27\psi}{8}=135$$

$$\text{ἤτοι } \frac{54}{8}=135$$

$$\overline{}\;.\;8$$

$$54\psi=1080$$

$$\overline{}:\;54$$

$$\psi=\frac{1080}{54}=20$$

Θὲς δὲ εἰς τὴν Δ′ ἀντὶ τοῦ ψ τὸ ἴσον 20 οὕτω.

$$\frac{54\omega-27\psi}{8}=108$$

$$\overline{}\;.\;8$$

$$54\omega-27.20=108.\;8$$

$$54\omega=108.\;8+27.\;20$$

$$\overline{}\;\text{εἰς παράγοντας}$$

$$2.27\omega=4.27.2.4+27.2.10$$

$$\omega=4.\;4+10=26$$

Ἑυρίσκομεν τέλος καὶ τὸ χ, ἐὰν εἰς τὴν Α΄ θῶμεν τὰ ἤδη εὑρεθέντα ἀντὶ ψ καὶ ω· διότι

$$\frac{18\chi-9\omega-9\psi}{8}=27 \text{ ἤτοι}$$

$$\frac{18\chi-9.\ 26-9.\ 20}{8}=27$$

$$18\chi-9.\ 26-9.\ 20=27.\ 8$$

$$18\chi=27.\ 8+9.\ 26+9.\ 20$$

$$2.\ 9\chi=3.\ 9.\ 2.\ 4+9.\ 13.\ 2+9.\ 2.\ 10$$

$$\chi=3.\ 4+13+10=35$$

Καὶ εἶχεν ὁ μὲν Α΄ 35. ὁ Β΄ 26, ὁ Γ΄ 20

Πρόβλημα Ϛ΄.

„Εἰς μίαν συναναστροφὴν ἑνὸς ἡγουμένου, διδασκάλου, καὶ καραβοκυροῦ, ἠρώτησεν ὁ διδάσκαλος τὸν καραβοκύρην, πόσους ἔφερεν συμπλέοντας; ὁ δὲ εἶπεν· ἐὰν εἶχον καὶ τοὺς μισοὺς ὁμοῦ μαθητάς σου, ἤθελον εἶναι 100. ἠρώτησεν ὁ ἡγούμενος τὸν διδάσκαλον, καὶ πόσους μαθητὰς ἔχεις; εἶπε καὶ αὐτὸς, ἐὰν εἶχον τὸ ἓν τριτημόριον τῶν καλογήρων σου, ἤθελαν εἶναι 100· ἐγὼ ὅμως εἶπεν ἤθελεν ἔχω 100 καλογήρους, ἐὰν μόνον τὸ ἓν τεταρτημόριον τῶν συμπλεόντων ἐγίνοντο καλόγηροι. Πόσοι ἦτον οἱ συμπλέοντες, οἱ μαθηταὶ, καὶ οἱ καλόγηροι;

Κατασκευή

Λέγομεν. οἱ μὲν συμπλέοντες ἦτον χ, οι δὲ μαθηταὶ ω, καὶ οἱ καλόγηροι ψ.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ συμπλέοντες μὲ τοὺς μισοὺς μαθητὰς ἐγίνοντο 100. ἄρα $\chi+\frac{\omega}{2}=100$ ἤτοι $2\chi+\omega=200$ - - - - Α.

ἔτι οἱ μαθηταὶ μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν καλογήρων ἦτον 100. ἄρα

$\omega+\frac{\psi}{3}=100$ ἢ $3\omega+\psi=300$ - - - - Β΄.

Καὶ ἐπειδὴ οἱ καλόγηροι μὲ $\frac{1}{4}$ τῶν συμπλεόντων ἦτον

100 ἄρα $\psi+\frac{\chi}{4}=100$ ἢ $4\psi+\chi=400$ - - - - Γ΄

Ἤδη ἀπὸ τῆς Α΄ εὑρεθήτω τὸ χ.

$$2\chi+\omega=200$$
$$2\chi=200-\omega \quad :2$$
$$\chi=\frac{200-\omega}{2}$$

Θὲς δὲ τοῦτο εἰς τὴν Γ΄ ἀντὶ τοῦ χ, καὶ εὑρίσκεται τὸ

ψ οὕτω. $4\psi+\frac{200-\omega}{2}=400$

$$\cdot 2$$
$$8\psi+200-\omega=800$$
$$\cdot 3$$
$$24\psi+600-3\omega=2400$$ (προςεθείσης δὲ ταύῃ
$$\psi\quad+3\omega=300$$ τῆς Β΄)

γίνεται - - $25\psi+600=2700$

$$25\psi=2700-600$$
$$25\psi=2100$$
$$\psi=\frac{2100}{25}=84$$

Θὲς εἰς τὴν Β΄ ἀντὶ ψ, 84 καὶ εὑρίσκεται τὸ ω οὕτω

$$3\omega+\psi=300 \text{ ἤτοι } \begin{array}{l} 3\omega+84=300 \\ \hline 3\omega=300-84 \\ \hline 3\omega=216 \\ \hline \omega=\frac{216}{3}=72 \end{array}$$

Ἀντὶ δὲ ω θὲς εἰς τὴν Α' 72 καὶ εὑρίσκεται τὸ χ. διότι $2\chi+\omega=200$. ἤτοι

$$\begin{array}{l} 2\chi+72=200 \\ \hline 2\chi=200-72 \\ \hline 2\chi=128 \\ \hline \chi=\frac{128}{2}=64 \end{array}$$

Καὶ ἦν οἱ μὲν συμπλέοντες 64, οἱ δὲ μαθηταὶ 72, οἱ δὲ καλόγηροι 84.

Πρόβλημα Ζ'.

„Στρατηγός τις ἔχει τρία τάγματα στρατιωτῶν, Προυσιακοὺς, Ἀουστριακοὺς, καὶ Σάξονας· θέλει μὲ αὐτοὺς νὰ λάβῃ ἐξ ἐφόδου ἓν κάστρον, καὶ διορίζει εἰς αὐτοὺς χάρισμα 901 τάληρα μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον· τοῦ τάγματος, ὁποῦ θέλει ἀνέβῃ εἰς τὸ κάστρον τοῦτο, κάθε στρατιώτης νὰ λάβῃ ἀπὸ ἓν τάληρον, καὶ τὰ λοιπὰ νὰ μοιρασθῶσιν ἐπίσης εἰς ὅλους τοὺς στρατιώτας τῶν δύω λοιπῶν ταγμάτων. πλὴν εὑρίσκεται ἡ διανομὴ τούτου τὸν τρόπον· ἐὰν ἀναβῶσιν οἱ Προυσιακοὶ, ἕκαστος στρατιώτης τῶν λοιπῶν λαμβάνει ἀπὸ μισὸν τάληρον, ἐὰν δ' ἀναβῶσιν οἱ Αουστριακοὶ, λαμβάνει ἕκαστος στρατιώτης τῶν λοιπῶν ταγμάτων ἀπὸ ἓν τριτημόριον ταλήρου· ἐὰν δ' ἀναβῶσιν οἱ Σάξονες, λαμβάνει ἕκαστος στρατιώτης τῶν λοιπῶν ἀπὸ ἓν τέταρτον ταλήρου.

Ζητεῖται: πόσοι ἦτον ὅλοι οἱ ςρατιῶται, καὶ πόσους ςρατιώτας ἔχει κάθε τάγμα;

Ἔςωσαν οἱ ςρατιῶται οἱ Προυσσιακοὶ χ. οἱ Αουςριακοὶ ω, καὶ οἱ Σάξουνς ψ. ἄρα ὅλοι ὁμοῦ $\chi+\psi+\omega=K$.

(Τὸ Κ σημαίνει τὸ κεφάλαιον ὅλων ὁμοῦ τῶν ςρατιωτῶν). λοιπὸν $K-\chi$ εἶναι τὰ δύω τάγματα ὁμοῦ τῶν Αουςριακῶν καὶ Σαξόνων. $K-\omega$ τὰ δύω τάγματα τῶν Προυσιακῶν καὶ Σαξόνων. $K-\psi$ τὰ δύω τῶν Προυσιακῶν, καὶ Αουςριακῶν, Ὅταν δὲ οἱ Προυσιακοὶ πέρνουν ἀπὸ ἓν ταλῆρον, οἱ λοιποὶ πέρνουν ἀπὸ μισόν· ἄρα ὁμοῦ ὅλοι πέρνουν 901 ἤτοι

$$\chi+\frac{K}{2}-\frac{\chi}{2}=901$$

$$\overline{}\ .\ 2$$

$$2\chi+K-\chi=1802$$

$$\chi=1802-K$$

$$\overline{}\ .\ 6$$

$$6\chi=10812-6= \text{ - - - - } A'$$

Ὅταν δὲ οἱ Αουςριακοὶ ἀπὸ ἓν λάβωσιν, οἱ λοιποὶ ἀπὸ $\frac{1}{3}$ πέρνουσιν· καὶ ἐπειδὴ ὁμοῦ ὅλοι 901 πέρνουσιν· ἄρα

$$\omega+\frac{K}{3}-\frac{\omega}{3}=901$$

$$3\omega+K-\omega=2703$$

$$2\omega=2703-K$$

$$\overline{}\ .\ 3$$

$$6\omega=8109-3K \text{ - - - - } B'$$

Ὅταν δὲ οἱ Σάξουνς ἀπὸ ἓν λάβωσιν, οἱ λοιποὶ ἀπὸ $\frac{1}{2}$ καὶ ὅλοι ὁμοῦ 901. ἄρα

$$\psi+\frac{K}{4}-\frac{\psi}{4}=901$$

$$\overline{\qquad\qquad}\,.\,4$$

$$4\psi+K-\psi=3604$$

$$3\psi=3604-K$$

$$\overline{\qquad\qquad}\,.\,2$$

$$6\psi=7208-2K \;.\;.\;.\;.\; \Gamma'.$$

Συναφθήτωσαν αἱ τρεῖς ἐξισώσεις Α, Β, Γ ὁμοῦ

$$6\chi=10812-6K$$

$$6\omega=8109-3K$$

$$6\psi=7208-2K$$

$$6\chi+6\omega+6\psi=26129-11K$$

$$6(\chi+\omega+\psi)=26129-11K$$ ἀντὶ $(\chi+\omega+\psi)$ θὲς K

$$6K=26129-11K$$

$$6K+11K=26129$$

$$17K=26129$$

$$\overline{\qquad\qquad}\,:\,17$$

$$K=\frac{26129}{17}=1537.$$

Καὶ 1537 ἦτον ὅλοι οἱ ϛρατιῶται ὁμοῦ· θὲς ἀντὶ K, 1537 εἰς τὴν Α΄ ἐξίσωσιν, καὶ εὑρίσκεται τὸ χ

$$6\chi=10812-9222$$

ἤτοι $6\chi=1590$

καὶ $\chi=\dfrac{1590}{6}=265$

Θὲς δὲ καὶ εἰς τὴν Β΄ ἀντὶ $K=1537$

$$6\omega=8109-4611$$

$$6\omega=3498$$

$$\omega=\frac{3498}{6}=583$$

Θὲς δὲ καὶ εἰς τὴν Γ΄ ἀντὶ Κ=1537

$$6\psi=7208-3074$$

$$6\psi=4134$$

$$\psi=\frac{4134}{6}=689$$

Καὶ ἦν οἱ μὲν Προυσιακοὶ 265, οἱ δ' Ἀουςριακοὶ 583, καὶ οἱ Σάξονες 689.

Πρόβλημα Θ΄.

„Ἔχων τις τρία εἴδη τζόχας, ἐρωτήθη, πόση εἶναι ἡ τιμὴ μιᾶς πήχεως τοῦ πρώτου εἴδους, πόση τοῦ Β΄, καὶ πόση τοῦ Γ΄. ἐκεῖνος ἀπεκρίθη· ἡ τιμὴ μιᾶς πήχεως τοῦ Α΄ εἴδους μετὰ τῆς μισῆς τιμῆς μιᾶς πήχεως τοῦ Β΄ καὶ Γ΄ εἴδους εἶναι 25 γρόσια· ὅτι ἡ τιμὴ μιᾶς πήχεως τοῦ Β΄ εἴδους μετὰ τῆς μισῆς τιμῆς μιᾶς πήχεως τοῦ Α΄ καὶ Γ΄ εἴδους εἶναι 29, καὶ ἡ τιμὴ μιᾶς πήχεως τοῦ Γ΄. μεθ' ἑνὸς τριτημορίου τῆς τιμῆς μιᾶς πήχεως τοῦ Α΄ καὶ Β΄ εἶναι 26. ζητεῖται πόση εἶναι ἡ τιμὴ μιᾶς πήχεως τῶν τριῶν εἰδῶν τῆς τζόχας; Ἔςω τοῦ μὲν Α΄ εἴδους ἡ τιμὴ μιᾶς πήχεως χ. τοῦ δευτέρου ψ. τοῦ τρίτου ω. ἄρα κατὰ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος τοῦ μὲν Α΄ εἴδους

$$\chi+\frac{\psi}{2}+\frac{\omega}{2}=25 \quad .2$$

$$2\chi+\psi+\omega=50 \; \cdots\cdots \; \text{Α΄}.$$

τοῦ δὲ δευτέρου $\psi+\frac{\chi}{2}+\frac{\omega}{2}=29$

$$\overline{}\;.\;2$$

$2\psi+\chi+\omega=58$ - - - - - - Β'

καὶ τοῦ τρίτου $\omega+\frac{\chi}{3}+\frac{\psi}{3}=26$

$$\overline{}\;.\;3$$

$3\omega+\chi+\psi=78$ - - - - - - Γ'

ἄφελε τὴν Β' ἀπὸ τὴν Γ. οὕτω

$$\begin{array}{l} 3\omega+\chi+\psi=78 \\ 2\psi+\chi+\omega=58 \\ -\;\;-\;\;-\;\;- \\ \hline 2\omega-\psi=20 \end{array}$$ - - - - - - Δ'

πολλαπλασίασον τὴν Β' μὲ 2 καὶ ἄφελε τὴν Δ' ἀπὸ αὐτὴν

$$\begin{array}{l} 4\psi+2\chi+2\omega=116 \\ 2\chi+\psi+\omega=50 \\ -\;\;-\;\;-\;\;- \\ \hline 3\psi+\omega=66 \\ \hline \end{array}$$

$\psi=\frac{66-\omega}{3}$ - - - - - - - - - Ε'

Θὲς ἀντὶ τοῦ ψ τοῦτο τὸ εὑρεθὲν εἰς τὴν ἐξίσωσιν Δ'

$$\begin{array}{l} 2\omega-\frac{66+\omega}{3}=20 \\ \hline 6\omega-66+\omega=60 \\ \hline 7\omega=60+66=126 \\ \hline \omega=\frac{126}{7}=18 \end{array}$$

Ἐὰν δὲ θῶμεν εἰς τὴν Ε' ἐξίσωσιν ἀντὶ ω, 18 εὑρίσκεται τὸ ψ. διότι $\psi\dfrac{66-\omega}{3}=\dfrac{66-18}{3}=\dfrac{48}{3}=16$

Θὲς ἤδη εἰς τὴν Α΄ ἀντὶ ω καὶ ψ τὰ ἴσα 18 καὶ 16, καὶ εὑρίσκεται τὸ χ.

$$\frac{2\chi+\psi+\omega=50}{2\chi+16+18=50}$$

$$\frac{2\chi=50-16-18=16}{\chi=\dfrac{16}{2}=8}$$

Πρόβλημα σ΄.

„Ἄνθρωπός τις ἔλαβε δάνεια ἀπὸ πατέρα, μητέρα, καὶ υἱόν· τὸ ποσὸν τῶν δανείων ἀγνοεῖ· τοῦτο μόνον ἐνθυμεῖται, ὅτι ἀπὸ μὲν τὸν πατέρα ἔλαβεν ὁμοῦ 21 γρόσια, τὰ δὲ τοῦ πατρὸς καὶ υἱοῦ ὁμοῦ ἦν 24 γρόσ., τὰ δὲ τῆς μητρὸς καὶ υἱοῦ ὁμοῦ ἦν 27 γρόσ. Ζητεῖται πόσα ἦσαν ὅλα; καὶ πόσα ἕκαστος ἔδωκεν;

Δίδωκεν ὁ μὲν πατὴρ χ, ἡ μήτηρ ψ, καὶ ὁ υἱὸς ω. ἄρα κατὰ τοὺς λόγους αὐτοῦ

$$\chi+\psi=21 \text{ - - - } A'$$
$$\chi+\omega=24 \text{ - - - } B'$$
$$\psi+\omega=27 \text{ - - - - } \Gamma'$$

Ἄφελε τὴν Α ἀπὸ τὴν Β΄, καὶ εὗρε τὸ ω οὕτως

$$\chi+\omega=24$$
$$\chi+\psi=21$$
$$- \quad - \quad -$$

$$\omega-\psi=3 \text{ καὶ } \omega=3+\psi$$

Θὲς εἰς τὴν Γ΄ ἀντὶ τοῦ ω τὸ εὑρεθὲν ἴσον καὶ εὗρε τὸ ψ.

$\psi+\omega=27$ ἤτοι $\underline{\psi+3+\psi=27}$

$2\psi=27-3=24$

$\psi=12$

Θὲς ἀντὶ τοῦ ψ, 12 εἰς τὴν Α' καὶ εὑρίσκεται τὸ χ

$\chi+\psi=21$ ἤτοι $\underline{\chi+12=21}$

$\chi=21-12=9$

Θὲς δὲ καὶ εἰς τὴν Β' ἀντὶ χ τὸ εὑρεθὲν 9, καὶ εὑρίσκεται τὸ ω.

διότι $\chi+\omega=24$. ἤτοι $\underline{9+\omega=24}$

$\omega=24-9=15$

Καὶ εὕρομεν ὅτι ὁ μὲν πατὴρ ἔδωκεν 9. ἡ δὲ μήτηρ 12, καὶ ὁ υἱὸς 15, καὶ ὅλη ἡ ποσότης $9+12+15=36$.

„Καὶ περὶ τούτων ἱκανά· διότι δίδονται προβλήματα καὶ μὲ τέσσαρας ἀγνώςους ποσότητας, καὶ μὲ πέντε κτ: πλὴν εἰς ἕτερον μέρος ἐροῦμεν περὶ τούτων πλείονα· ἐν οἰκείῳ δὲ τόπῳ ἐροῦμεν καὶ περὶ τῶν ἀορίςων προβλημάτων· ἤδη δὲ μεταβαίνομεν εἰς τὸ Γ' τμῆμα.

ΤΜΗ͂ΜΑ Γ'.

Περὶ πολλαπλασιόνων, καὶ ὑποπολλαπλασιόνων ἀριθμῶν, ἤτοι περὶ δυνάμεων καὶ ῥιζῶν, ἢ περὶ ἐκθετικοῦ καὶ ῥιζικοῦ ἀριθμοῦ.

§. 292. Ἀριθμοὺς πολλαπλασίονας καλοῦμεν ἐκείνους, οἵτινες αὐτοὶ ἐφ' ἑαυτοὺς δὶς, ἢ πολλάκις πολλαπλασιαζόμενοι ἀποτελοῦσί τι παραγόμενον. ὡς 2. 2=4,

3. 3=9. 6. 6=36, καὶ 6. 6. 6=216 καὶ 2. 2. 2=8 κτλ. καὶ ἐν γένει αα ἢ δδδ ἢ γγγγ κτλ· διὸ καὶ διαφέρει ὁ πολλαπλασίων ἀριθμὸς τοῦ πολλαπλασίου· διότι ἐκεῖνος αὐτὸς ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιάζεται, ἤτοι οἱ παράγοντες εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός· ὁ δὲ πολλαπλάσιος ἔχει καὶ διαφόρους παράγοντας ὡς 3. 4=12, καὶ 5. 6=30 κτλ καὶ μερικῶς διαφέρει ὁ διπλασίων τοῦ 3 ἀπὸ τοῦ διπλασίου τοῦ 3· διότι ἐκεῖνος μὲν εἶναι 3. 3. 3=9, οὗτος δὲ 2. 3=6. ὁμοίως ὁ τριπλασίων, τοῦ 4 εἶναι 4. 4. 4=64, τριπλάσιος δὲ τοῦ 4 εἶναι 3. 4=12 κτλ. Ὑποπολλαπλασίονα δὲ λέγομεν ἀνάπαλιν ἐκείνου, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ὁ πολλαπλασίων λέγεται· ὡς ὁ Ὑποδιπλασίων τοῦ 9 εἶναι ὁ 3. διότι ὁ 9 ἀπὸ τοῦ 3 διπλασίων λέγεται· καὶ ὁ 4 εἶναι Ὑποδιπλασίων τοῦ 16. διότι γίνεται 4. 4=16 κτλ. οἱ δὲ νεώτεροι τοὺς μὲν πολλαπλασίονας ἀριθμοὺς, δυνάμεις καὶ βαθμοὺς ὠνόμασαν, τοὺς δ' Ὑποπολλαπλασίονας, ῥίζας· ὅθεν καὶ ἡμεῖς τούτοις ἑπόμενοι Δυνάμεις καὶ Ῥίζας καλοῦμεν αὐτοὺς τοὺς ἀριθμούς.

§. 292. Κάθε ἀριθμὸς λοιπὸν, ὁποῦ γίνεται ἀπὸ ἕτερον ἀριθμὸν, ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος δὶς, ἢ πολλάκις Δύναμις λέγεται ἐκείνου τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν μόνον δὶς γινεται παράγων ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, τὸ γινόμενον λέγεται δευτέρα δύναμις, ὡς 3. 3=9. ὁ 9 δευτέρα δύναμις τοῦ 3. ἐὰν δὲ τρὶς γίνεται παράγων ὡς 4. 4. 4=64, ὁ 64 λέγεται τρίτη δύναμις τοῦ 4. Ἐὰν δὲ τετράκις παράγων γίνεται ὡς 2. 2. 2. 2=16. ὁ 16 τετάρτη δύναμις τοῦ 2. Ἐὰν δὲ πεντάκις, πέμπτη δύναμις, καὶ γενικῶς τόση δύναμις λέγεται, ὁσάκις ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς παράγων γίνεται· μόνον ἡ δευτέρα δύναμις λέγεται καὶ τετράγωνον ὡς 6. 6=36, ὁ 36 τετράγωνον τοῦ 6. καὶ 7. 7=49, ὁ 49 τετράγωνον τοῦ 7. καὶ αα, ββ, φφ κτλ. καὶ ἡ τρίτη δύναμις λέγεται καὶ κύβος, ὡς 2. 2. 2=8, ὁ 8 κύβος τοῦ 2. καὶ 5. 5. 5=125 κύβος τοῦ 5. καὶ 10. 10. 10=1000 ὁ 1000 κύβος τοῦ 10. καὶ ααα, βββ, ωωω κύβος τοῦ α καὶ β, καὶ ω λέγεται· κοινῶς ἔτι συνηθίζουσιν ἀντὶ νὰ γράφωσιν εἰς τὰς δυνάμεις τοὺς παράγοντας, ἢ νὰ πολλαπλασιάζωσιν ἐνεργείᾳ, γράφουσι μόνον ἁπλῶς ἅπαξ τὸν παράγοντα, καὶ ἄνω αὐτοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ τὸν ἀριθμὸν, ἰσάκις οὗτος ὁ παράγων ἐφ' ἑαυτὸν λαμβάνεται· ὅθεν ἀντὶ 5. 5. 5 γράφουσι 5^3. ἀντὶ δὲ 2. 2. 2. 2 γράφουσι 2^4. καὶ ἀντὶ 6. 6. 6. 6. 6 γράφουσιν 6^5 καὶ ἀντὶ αααααααα, οὕτως $\alpha^5\beta^3$. καὶ καλοῦσι τὸν ἐπάνω γεγραμμένον ἀριθμὸν Ἐκθέτην, ἢ Δείκτην, ἢ κατὰ Διόφαντον, Ἐπίσημον τῆς δυνάμεως· διότι οὗτος 3^2 σημαίνει ἡ δευτέρα δύναμις, ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ 3. οὗτος δὲ 7^3, ἡ τρίτη, ἢ ὁ κύβος τοῦ 7. οὗτος δὲ 56^3 ἡ ἑβδόμη δύναμις τοῦ 56. οὗτος δὲ 6^{40} ἡ τεσσαρακοστὴ δύναμις τοῦ 6. καὶ γενικῶς οὗτος 5^{μ}, ἡ μ δύναμις τοῦ 5 ὅ,τι καὶ ἂν σημαίνῃ ὁ μ. καὶ $\alpha\,\gamma^{\rho}$ σημαίνει, ἡ ν δύναμις τοῦ α νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὴν ρ δύναμιν τοῦ γ. Λοιπὸν ὁ Ἐκθέτης σημαίνει τὴν δύναμιν τοῦ ὑπ' αὐτὸν ἀριθμοῦ κἄντε ἀριθμὸς, κἄντε γράμμα ἦ· διὸ καὶ ἀδιάφορον εἶναι ἢ οὕτω, 6. 6. 6 νὰ γραφῇ, ἢ οὕτω 6^3, ἢ οὕτω 216.

Σημείωσαι ὅμως, ὅτι πολὺ διαφέρει ὁ Ἐκθέτης τοῦ Συνεργοῦ (§. 129). διότι ἐκεῖνος σημαίνει πόσαις φοραῖς νὰ γένῃ ὁ αὐτὸς παράγων ὁ ὑποκάτω αὐτοῦ ἀριθμὸς, καὶ αὐτὸς καθ' ἑαυτὸν νὰ πολλαπλασιασθῇ· ὁ δὲ Συνεργὸς σημαίνει πόσαις φοραῖς νὰ ἐλληφθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός· διότι ἀλλο εἶναι ὁ $2a$ καὶ ἄλλο ὁ a^2. ἐκεῖνος μὲν εἶναι διπλάσιος, οὕτω $2a=a+a$ ὁ δὲ διπλασίων, ἤτοι $a^2=aa$. καὶ ἐὰν ὁ $a=5$. ὁ μὲν $2a=10$, ὁ δὲ $a^2=25$. καὶ ἔτι ὁ μὲν $3a=15$. ὁ δὲ $a^3=125$. ὁμοίως καὶ εἰς τὰ λοιπά.

§. 294. Κάθε ἀριθμὸς ὡς βάσις καθ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος, καὶ ἀποτελῶν μίαν δύναμιν, Ῥίζα λέγεται· ὡς ὁ 5 ῥίζα τετραγωνικὴ τοῦ 25. ὁ 2 ῥίζα τῆς τετάρτης δυνάμεως τοῦ 16. διότι $2.\ 2.\ 2.\ 2=16$. καὶ ὁ a ῥίζα τῆς ἕκτης δυνάμεως τοῦ a^6. Σημεῖον δὲ τῶν ῥιζῶν ἔχουσιν οἱ Ἀριθμητικοὶ τοῦτο $\sqrt{\ }$. ὅπερ πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ γράφεται· διότι τοῦτο $\sqrt{25}$, σημαίνει ἡ ῥίζα τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ 25. τὸ δὲ $\sqrt[3]{125}$ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 125. καὶ τόδε $\sqrt[\mu]{a}$, ἡ μ ῥίζα τοῦ a. καὶ ἐν γένει τόδε $\sqrt[\mu]{6}$ ἡ ῥίζα τῆς μ δυνάμεως τοῦ 6. καὶ ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ὅπου ἔχουσι τοῦτο τὸ ῥιζικὸν σημεῖον $\sqrt{\ }$, λέγονται Ῥιζικοὶ ἀριθμοί, ὁ δ' ἀριθμὸς ὅπου γράφεται ἐπάνω τοῦ ῥιζικοῦ σημείου, σημαίνει τίνος δυνάμεως ῥίζα ἐπιζητεῖται· καὶ λέγεται Ἐκθέτης τῆς ῥίζης ἢ ῥιζικός· διὰ τοῦτο καὶ τὸν πολλαπλασίονα καὶ τὸν ὑποπολλαπλασίονα ἀριθμόν, καὶ ἐκθετικὸν ἄλλοι εἰπεῖν οὐκ ὤκνησαν· διότι ὁ ἀριθμός, ὅστις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, καὶ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου γράφεται γενικῷ ὀνόματι, Ἐκθέτης λέγεται· ὡς $\sqrt[7]{128}$ ἡ ῥίζα τῆς ἑβδόμης δυνάμεως τοῦ 128. συνηθίζουσιν ὅμως εἰς τὸ ῥιζικὸν τῆς δευτέρας δυνάμεως νὰ μὴ γράφωσιν ἀριθμὸν εἰς τὸ ῥιζικὸν σημεῖον, ὅθεν, ὅταν τὸ ῥιζικὸν σημεῖον δὲν ἔχῃ ἀριθμόν, σημαίνει τὴν ῥίζαν τὴν τετραγωνικήν, ἢ τῆς δευτέρας δυνάμεως· ὡς $\sqrt{9}$, ἢ $\sqrt{125}$. ἢ $\sqrt{a\beta}$, ἢ $\sqrt{\varphi}$, κτ: ὅλα αὐτὰ ῥίζας τετραγωνικὰς σημαίνουσιν.

§. 295. Ἐκ τούτων μανθάνομεν, ὅτι κάθε ἀριθμὸς δύναται νὰ γένῃ δύναμις, καὶ πάλιν κάθε δύναμις ἔχει καὶ ῥίζαν, καὶ ἠμπορεῖ ἀπὸ δύναμιν εἰς ῥίζαν νὰ μεταβῇ· διότι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς α διὰ μὲν τοῦ ἐκθέτου μεταβαίνει εἰς δύναμιν, ὡς α^2, α^3, α^6, α^ν. καὶ ἔτι $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[6]{\alpha}$, $\sqrt[\nu]{\alpha}$. διὸ καὶ τὸ παρὸν τμῆμα εἰς τὰς δυνάμεις καὶ ῥίζας καταγίνεται, καὶ κατ' αὐτὰ εἰς δύω μέρη διαιρεθήσεται.

ΜΕ΄ΡΟΣ Α΄.

Περὶ δυνάμεων ἐν γένει.

§. 296. Ἐὰν ποσότητά τινα αὐτὴν καθ' ἑαυτὴν πολλαπλασιάσωμεν, τὸ γινόμενον Δευτέρα δύναμις, καὶ Τετράγωνον λέγεται. ὡς $3.\ 3=9=3^2$. καὶ $\alpha\alpha=\alpha^2$. ἐὰν δὲ πάλιν αὐτὸ τὸ γινόμενον μὲ τὴν αὐτὴν πολλαπλασιάσωμεν, Τρίτη δύναμις, καὶ Κύβος λέγεται. ὡς $3.\ 9=27=3.\ 3.\ 3=3^3$. καὶ $\alpha\alpha\alpha=\alpha^3$. Ἐὰν δὲ καὶ τοῦτο τὸ γινόμενον πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸ γινόμενον λέγεται Τετάρτη δύναμις. ὡς $3.\ 27=81=3.\ 3.\ 3=3^4$. καὶ $\alpha\alpha\alpha\alpha=\alpha^4$. Ἐὰν δὲ πάλιν μὲ τὸν αὐτὸν καὶ τοῦτο τὸ γινόμενον πολλαπλασιάσωμεν, λέγεται Πέμπτη δύναμις, ὡς $3.\ 81=243=3.\ 3.\ 3.\ 3.\ 3=3^5$. καὶ $\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha=\alpha^5$. ὁμοίως Ἕκτη δύναμις $3.\ 243=729=3.\ 3.\ 3.\ 3.\ 3.\ 3=3^6$, καὶ $\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha=\alpha^6$ καὶ Ἑβδόμη $3.\ 729=2187=3.\ 3.\ 3.\ 3.\ 3.\ 3.\ 3=3^7$. καὶ $\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha=\alpha^7$. ὁμοίως καὶ α^μ ἡ δύναμις μ τοῦ α. καὶ $\alpha^{\mu+\nu}$ ἡ δύναμις μ σὺν ν τοῦ α. καὶ $\beta^{\mu-\nu}$ ἡ δύναμις μ πλὴν ν τοῦ β. ὁμοίως καὶ $\alpha^{\mu.\nu}$ ἡ δύναμις μ ἐπὶ ν τοῦ α. καὶ ἔτι $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἡ δύναμις μ διὰ τοῦ ν τοῦ α. κτ.

§. 297. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μονὰς δὲν πολλαπλασιάζει (§: 74). ὅλαι ἄρα αἱ δυνάμεις τῆς μονάδος εἶναι πάλιν μονάς· διότι $1.\ 1=1=1^2$ καὶ $1.\ 1.\ 1=1=1^3$. οὕτω καὶ $1^6=1$ καὶ $1^{100}=1$ καὶ $1^{\mu}=1$ καὶ $1^{\mu-\nu}=1$.

§. 289. Καὶ ἐκ τούτων φανερὸν, ὅτι νὰ ὑψώσωμεν ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν εἰς δύναμιν μ, δὲν εἶναι ἄλλο, παρὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν καθ' ἑαυτὸν τοσάκις, ὁσάκις ἡ μονὰς εὑρίσκεται εἰς τὸν μ. δηλ: ἂν ὁ $\mu=3$ δηλοῖ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν· ἂν δὲ $\mu=15$ εἰς τὴν δεκάτην πέμπτην δύναμιν κτ:, καὶ τοῦτο καλεῖται Ὕψωμα ἢ Ἔξαρμα τῶν ἀριθμῶν εἰς δυνάμεις.

§. 299. Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ ὑψώσωμεν δύω παράγοντας εἰς δυνάμεις, τότε ἢ πολλαπλασιάζομεν τοὺς παράγοντας, καὶ ἔπειτα τὸ παραγόμενον ὑψοῦμεν ὡς ἀνωτέρω. (§. 298) εἰς δυνάμεις, ἢ κατὰ μέρος ὑψοῦμεν τοὺς παράγοντας, καὶ εἶτα πολλαπλασιάζομεν. Ζητεῖται δηλ: ἡ τρίτη δύναμις τῶν 3. 2, καὶ τοῦτο διαφόρως γίνεται· ἢ οὕτω $(3.\ 2)^3$. ἢ οὕτω $\overline{3.\ 2.}^{\,3}$ ἢ οὕτω 3^3. 2^3. ἐπειδὴ καὶ τὸ $(3.\ 2)^3$, εἶναι $6^3=216$. εἰς δὲ τὸ $\overline{3.\ 2}^{\,3}$ ἡ ἄνω γραμμὴ ὡς παρένθεσις ἀπὸ τοὺς μαθηματικοὺς λαμβάνεται, καὶ εἶναι $6^3=216$. τοῦτο δὲ 3^3. $2^3=27$. $8=216$. ὅθεν εἰς τοὺς παράγοντας εἶναι τὸ αὐτὸ, ἢ πρῶτον νὰ πολλαπλασιάσῃς τοὺς παράγοντας, καὶ εἶτα νὰ ὑψώσῃς τὸ παραγόμενον εἰς τὴν ζητουμένην δύναμιν, ἢ πρῶτον νὰ ὑψώσῃς ἕκαστον παράγοντα εἰς τὴν ζητουμένην δύναμιν, καὶ εἶτα νὰ πολλαπλασιάσῃς αὐτοὺς εἰς παράγοντας· διὸ καὶ $\overline{2.\ 3.\ 4}^{\,2}=2^2.\ 3^2.\ 4^2=576$. ὁμοίως καὶ εἰς τὰ γράμματα, ἐὰν ζητεῖται ἡ τρίτη δύναμις τοῦ αβγ γίνεται $α^3β^3γ^3=\overline{αβγ}^3$. καὶ ἡ δεκάτη δύναμις τοῦ φχψω γίνεται $φ^{10}χ^{10}ψ^{10}ω^{10}=\overline{φχψω}^{10}$. καὶ ἡ μ δύναμις τοῦ βδεζ, γίνεται $β^μ δ^μ ε^μ ζ^μ=(βδεζ)^μ$

§. 300. Διὰ νὰ ὑψώσωμεν λοιπὸν καὶ ἓν πηλίκον εἰς δύναμίν τινα, πρέπει νὰ ὑψώσωμεν ἢ ἅμα καὶ διαιρετέον, καὶ διαιρέτην εἰς αὐτὴν τὴν δύναμιν, καὶ εἶτα νὰ διέλωμεν, ἢ πρῶτον νὰ διέλωμεν, ἐὰν ἡ διαίρεσις γίνεται ἐπ' ἀκριβὲς, καὶ τὸ πηλίκον νὰ ὑψώσωμεν. Ἔςω νὰ ὑψώσωμεν τὸ πηλίκον $\frac{4}{2}$ εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν. Τοῦτο γίνεται ἢ οὕτω $\frac{4^2}{2^2}$ ἢ οὕτω $(\frac{4}{2})^2$. διότι ἐκεῖνο $\frac{4^2}{2^2}$ εἶναι $\frac{16}{4}=4$. τοῦτο δὲ $(\frac{4}{2})^2=(2)^2=4$. Ὁμοίως ὑψωθείτω τὸ πηλίκον $\frac{10}{5}$ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν· ἄρα ἢ οὕτω $(\frac{10}{5})^3=(2)^3=8$. ἢ οὕτω $\frac{10^3}{5^3}=\frac{1000}{125}=8$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὰ κλάσματα διαιρέσεις εἶναι καὶ πηλίκον (§. 184), πρέπει ὅταν ἀπαιτηθῶμεν νὰ ὑψώσωμεν ἓν κλάσμα εἰς μίαν δύναμιν, νὰ ὑψώσωμεν εἰς αὐτὴν τὴν δύναμιν καὶ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαςήν. Ὑψωθείτω τὸ $\frac{2}{3}$ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν. λοιπὸν οὕτω γενέσθω $\frac{2^3}{3^3}$, ἢ οὕτω $\frac{8}{27}$. ὁμοίως εἰς τὴν τετάρτην τὸ $\frac{1}{4}$. $\frac{1^4}{4^4}=\frac{1}{256}$. Τοῦτο γενέσθω καὶ εἰς τὰ γράμματα· ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, καὶ ἡ τρίτη $\frac{\alpha^3}{\beta^3}$. καὶ ἡ δύναμις $\frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$ ὁμοίως ἡ δευτέρα τοῦ $\frac{\alpha\beta}{\pi\rho}$ εἶναι $\frac{\alpha^2\beta^2}{\pi^2\rho^2}$ καὶ ἡ τρίτη, $\frac{\alpha^3\beta^3}{\pi^3\rho^3}=\frac{\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta}{\pi\pi\pi\rho\rho\rho}$. καὶ ἡ μ δύναμις ὁμοίως $\frac{\alpha^\mu\beta^\mu}{\pi^\mu\rho^\mu}$. ἐὰν δὲ καὶ συνεργὸς ᾖ, αἴρεται καὶ ὁ συνεργὸς, ὡς παράγων, εἰς αὐτὴν τὴν δύναμιν, ὡς ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ $\frac{2\beta}{3\gamma}$ εἶναι $\frac{2^2\beta^2}{3^2\gamma^2}=\frac{4\beta^2}{9\gamma^2}$. καὶ ἡ τρίτη $\frac{2^3\beta^3}{3^3\gamma^3}=\frac{8\beta^3}{27\gamma^3}$.

§. 301. Νὰ εὕρωμεν δὲ τὴν ῥίζαν μιᾶς δυνάμεως, εἶναι νὰ λύσωμεν τὴν ποσότητα αὐτὴν τὴν μετὰ τὸ σημεῖον $\sqrt{\ }$ τοῦ ῥιζικοῦ κειμένην, εἰς τόσους ἴσους παράγοντας, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ ἐκθέτης τοῦ ῥιζικοῦ. Διότι εἴρηται, τοῦτο $\sqrt{\ }$ σημαίνει τὴν ῥίζαν τῆς δευτέρας δυνάμεως, ἢ τὴν τετραγωνικήν· ἄρα $\sqrt[2]{\alpha^2}$ τοῦτο σημαίνει νὰ εὕρωμεν τὴν ποσότητα ἀφ' ἧς ἔγινε τὸ τετράγωνον α^2 καὶ αὕτη ἦν α. ἄρα $\sqrt{{}^2\alpha^2}=\alpha$. καὶ $\sqrt{16}=4$. καὶ $\sqrt{81}=9$. ἔτι τοῦτο $\sqrt[3]{\alpha^3}$ σημαίνει τὴν ῥίζαν τῆς τρίτης δυνάμεως· αὕτη δὲ ἦν α. ἄρα $\sqrt[3]{\alpha^3}=\alpha$. καὶ $\sqrt[3]{8}=2$. καὶ $\sqrt[3]{27}=3$. καὶ $\sqrt[3]{64}=4$. ὡσαύτως καὶ τὸ $\sqrt[4]{\alpha^4}$ σημαίνει τὴν ῥίζαν τῆς τετάρτης δυνάμεως, αὕτη δὲ ἦν α. ἄρα $4\sqrt{\alpha^4}=\alpha$. καὶ $\sqrt[4]{16}=2$ διότι $2.\ 2.\ 2.\ 2=16$. καὶ $\sqrt[4]{81}=3$, διότι. $3.\ 3.\ 3.\ 3=81$. Ὁμοίως καὶ $\sqrt[5]{\alpha^5}=\alpha$. καὶ $\sqrt[6]{\alpha^6}\alpha=\alpha$. καὶ $\sqrt[\mu]{\alpha^\mu}=\alpha$ κτ: καὶ ἐκ τούτου γίνεται φανερὸν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς, ὅπου ἅμα ὑψοῦται εἰς μίαν δύναμιν, καὶ ἅμα ἡ ῥίζα τῆς αὐτῆς ἐξάγεται δυνάμεως, εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός. Ἐπειδὴ ἐὰν ὁ α ὑψωθῇ εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν, καὶ ἅμα ἡ ῥίζα αὐτῆς ἐξαχθῇ, μένει καὶ πάλιν α. ὡς $\sqrt[4]{\alpha^4}=\alpha$. οὕτω καὶ ὁ 2. διότι $\sqrt[4]{2^4}=2$. Ἐπειδὴ $2^4=16$ καὶ $\sqrt[4]{16}=2$. καὶ ἰδοὺ καὶ ἕτερος τρόπος νὰ ἐκφράζωμεν κάθε ἀριθμὸν χωρὶς νὰ μεταβάλλεται ἡ τιμὴ αὐτοῦ. διότι $12=\sqrt[2]{12^2}=\sqrt[5]{12^5}$. καὶ $1=\sqrt[7]{1^6}$ καὶ $\alpha\beta=\sqrt[7]{\alpha^7\beta^7}$ κτλ.

Β'. Ἐντεῦθεν γίνεται φανερὸν, ὅτι εὑρίσκομεν τὴν ῥίζαν, ἐὰν διὰ τοῦ ἐκθέτου τῆς ῥίζης διαιροῦμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ δὲ πηλίκον γράφεται εἰς αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν ὡς ἐκθέτης· διότι $\sqrt[3]{\alpha^3}=\alpha^{\frac{3}{3}}=\alpha$. καὶ $\sqrt[3]{\alpha^{12}}=\alpha^{\frac{12}{3}}=\alpha^4$ καὶ $\sqrt[3]{4^3}=4^{\frac{3}{3}}=4$. καὶ $\sqrt[2]{4^4}=4^{\frac{4}{2}}=4^2=16$. Καὶ Γ'.

Ὅτι ταὐτὸν εἶναι ἢ οὕτω $\sqrt{\alpha}$, ἢ οὕτω $\alpha^{\frac{1}{2}}$. καὶ ἢ οὕτω $\sqrt[3]{\alpha}$, ἢ οὕτω $\alpha^{\frac{1}{3}}$. καὶ ἔτι $\sqrt{4}=4^{\frac{1}{2}}=2$. ὅθεν μία ποσότης, ὁποῦ ἔχει ἐκθέτην κλασματικὸν, γράφομεν πρὸ τῆς ποσότητος τὸ ῥιζικὸν σημεῖον, καὶ ἐπάνω αὐτοῦ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἐκθέτου, καὶ εἰς τὴν ποσότητα τὸν ἀριθμητὴν ὡς ἐκθέτην· οὕτω $\alpha^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\alpha^2}$. καὶ $\beta^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\beta^\mu}$. καὶ $16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$

§. 302. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ δύω παραγόντων ἀποφατικῶν τὸ γινόμενον γίνεται καταφατικόν. (§. 83), ἄρα καὶ τὸ τετράγωνον μιᾶς ἀποφατικῆς ποσότητος καταφατικὸν γίνεται· διότι $(-\alpha)^2=-\alpha.-\alpha=\alpha^2$. καὶ $-2.-2=2^2=4$. ἡ τρίτη δύναμις ὅμως εἶναι ἀποφατικὴ, διότι $(-\alpha)^3=-\alpha.-\alpha.-\alpha=-\alpha^3$ διότι $-\alpha.-\alpha=\alpha^2$, καὶ $\alpha^2.-\alpha=-\alpha^3$. καὶ καθόλου ἀπὸ ἀποφατικὴν ποσότητα, αἱ μὲν δυνάμεις αἱ ἄρτιαι καταφατικαὶ γίνονται, αἱ δὲ περιτταὶ ἀποφατικαί. οὕτως ἀπὸ ῥίζης $-\alpha$ γίνονται αἱ δυνάμεις $+\alpha^2$, $-\alpha^3$, $+\alpha^4$, $-\alpha^5$, $+\alpha^6$ καὶ $\pm\alpha^\mu$. ἤτοι καταφατικὴ μὲν γίνεται ἡ δύναμις τῆς $-\alpha$, ἐὰν ἡ μ ἄρτιος ἀριθμός· ἀποφατικὴ δὲ ἐὰν ἡ μ ἡ περιττός.

§. 303. Ἐκ τούτου μανθάνομεν, ὅτι ἑκάστη δύναμις περιττοβάθμιος καταφατικὴ ἀπὸ καταφατικῆς ῥίζης γίνεται, καὶ ῥίζαν καταφατικὴν ἐξάγομεν ἀπ' αὐτῆς, ὡς $\sqrt[3]{+\alpha^3}=+\alpha$. καὶ $\sqrt[5]{+32}=+2$. ἐὰν δὲ ἡ περιττοβάθμιος ἀποφατική, ἡ ῥίζα ἐξάγεται ἀποφατική, ὡς $\sqrt[3]{-27}=-3$. διότι πρέπει πάντοτε ἡ ῥίζα καθ' ἑαυτὴν πολλαπλασιαζομένη νὰ γίνεται ἡ δύναμις, ὡς $-3.-3.-3=-27$. ἔτι $\sqrt[5]{-\alpha^5}=-\alpha$

§. 304. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀρτιοβάθμιος δύναμις γίνεται καὶ ἀπὸ καταφατικῆς, καὶ ἀπὸ ἀποφατικῆς· ἄρα ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης διχῶς γίνεται εἰς αὐτάς, ἤτοι ἐξέρχεται καὶ καταφατικὴ ῥίζα καὶ ἀποφατική· διότι ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνικὴ τῆς α^2 δυνάμεως εἶναι καὶ $+\alpha$, καὶ $-\alpha$. Ἐπειδὴ καὶ $\alpha.\ \alpha=\alpha^2$. καὶ $-\alpha.-\alpha=\alpha^2$ κτ: καὶ ἔτι ἡ $\sqrt[2]{\alpha^4}=+\alpha^2$, καὶ $=-\alpha^2$, καὶ $=-\alpha^2$. διότι $\alpha^2.\ \alpha^2=\alpha^4$, καὶ $-\alpha^2.-\alpha^2=\alpha^4$. οὕτω καὶ $\sqrt[2]{9}=+3$, καὶ $\sqrt[2]{9}=-3$. Ἐπειδὴ καὶ $3.\ 3=9$. καὶ $-3.-3=9$. Τὸ αὐτὸ ῥητέον περὶ τῆς ῥίζης τῆς α^6, α^8, α^{10}. Ὅθεν ὅταν ἐξάγωμεν ῥίζαν μιᾶς δυνάμεως ἀρτιοβαθμίου πρὸ τῆς ῥίζης, γράφομεν ὁμοῦ τὰ σημεῖα $\pm$ οὕτω $\sqrt[2]{4}=\pm2$· καὶ $\sqrt[4]{16}=\pm2$· καὶ ἀπὸ ἄλλου συνθηκῶν διορίζεται, ἂν ἡ ῥίζα εἶναι καταφατικὴ ἢ ἀποφατική· τότε προτίθεμεν μόνον τὸ σημεῖον $+$ ἢ $-$, ὅταν ἄλλως ἠξεύρωμεν ὅτι ἡ δύναμις ἀπὸ ποσότητα καταφατικὴν ἢ ἀποφατικὴν γέγονεν.

§. 305. Ἐὰν δὲ συμβῇ ἀπὸ ἀποφατικὴν ποσότητα ἄρτιον ῥίζαν ἐξαγαγεῖν, τότε ἀμηχανοῦμεν, πῶς νὰ εὕρωμεν μίαν ποσότητα, ἥτις καθ' ἑαυτὴν πολλαπλασιαζομένη δὶς ἢ τετράκις κτ: νὰ γενῇ παραγόμενον ἀποφατικόν· ὡς $\sqrt{-\alpha}$, ἢ $\sqrt[4]{-\alpha^4}$. ἢ $\sqrt{-4}$ ἢ $\sqrt[4]{-256}$ κτ: · διὰ τοῦτο αὐτὰς τὰς ποσότητας ἀδυνάτους καὶ φανταςικὰς καλοῦσι, πῶς ὅμως αὐτὰς μεταχειριζόμεθα, ὕςερον ἐροῦμεν, ὅσα χρειάζονται.

§. 306. Ἔιπομεν ὅτι τὸ παραγόμενον ἢ ὅλον ὁμοῦ ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἢ ἕκαςος παράγων κατὰ μέρος (§. 299.), τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ῥιζῶν εἰς ἓν παραγόμενον, ἢ ἀπὸ ὅλου ὁμοῦ τὴν ῥίζαν ἐξάγομεν, ἢ κατὰ μέρος, καὶ τὰς ῥίζας πολλαπλασιάζομεν. Δεδόσθω ὅτι ζητεῖται ἡ ῥίζα τοῦ 100. τοῦτο γράφεται ἢ οὕτω $\sqrt[2]{100}=10$, ἢ οὕτω $\sqrt[2]{200}=\sqrt[2]{4.\ 25}=\sqrt[2]{4}\sqrt[4]{25}=2.\ 5=10$. ἔτι ἡ τετραγωνικὴ τοῦ 36 ἢ οὕτω $\sqrt{36}=6$, ἢ οὕτω $\sqrt{4.\ 9}=\sqrt{4}.\ \sqrt{9}=2.\ 3=6$. ὡσαύτως ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 216 ἢ οὕτω $\sqrt[3]{216}=6$, ἢ οὕτω $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{8.\ 27}=\sqrt[3]{8}.\ \sqrt[3]{27}=2.\ 3=9$. ὁμοίως καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 576. ἢ οὕτω $\sqrt{576}=24$, ἢ οὕτω $\sqrt{4.\ 9.\ 16}=\sqrt{4}.\sqrt{9}.\sqrt{16}=2.\ 3.\ 4=24$. ἐὰν δὲ γράμματα ὦσιν ἀεὶ κατὰ μέρος αἱ ῥίζαι τῶν παραγόντων ἐξάγονται, ὡς $\sqrt[2]{\alpha^2\beta^4}=\alpha\beta^2$. διότι, ἐὰν ἡ ῥίζα $\alpha\beta^2$ καθ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθῇ, ἀποτελεῖ πάλιν $\alpha^2\beta^4$. ὁμοίως καὶ $\sqrt[3]{27\alpha^3}=3\alpha$ καὶ $\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu}\beta^{\nu}}=\alpha\beta$. καὶ $\sqrt[3]{\alpha^6\beta^3\gamma^3}=\alpha^2\beta\gamma$. διότι

$$\alpha^{\frac{6}{3}}\ \beta^{\frac{3}{3}}\ \gamma^{\frac{3}{3}}=\alpha^2\beta\gamma.$$

§. 307. Ὁ ἀριθμὸς, ὁποῦ εἰς τὸ τέλος ἔχει μηδενικὰ ὑψοῦται εἰς τετράγωνον ἐὰν τὸν ἀριθμὸν μόνον εἰς τετράγωνον ὑψώσωμεν, καὶ διπλώσωμεν τὰ μηδενικὰ σημεῖα ὁποῦ ἔχει· οὕτω δηλ: $(80)^2=(8.\ 10)^2=8^2.\ 10^2=64.\ 100=6400$. ὁμοίως καὶ $(600)^2=(6.\ 100)^2$

$=6^2 . 100^2=36 . 10000=360000$. ἐὰν δὲ εἰς κύβον ὑψώσωμεν, ὑψοῦται μόνον ὁ ἀριθμὸς εἰς κύβον, καὶ τριπλάσια μηδενικὰ εἰς αὐτὸν ἐπιγράφομεν· διότι $(300)^3=(3 . 100)^3=3^3 . 100^3=27 . 1000000=27000000$. ὁμοίως καὶ $(40)^3=(4 . 10)^3=4^3 . 10^3=64 . 1000=64000$. εἰς δὲ τὴν τετραπλασιάζομεν τὰ μηδενικὰ οὕτω. $(200)^4=(2 . 100)^4=2^4 . 100^4=16 . 100 . 100 . 100 . 100=1600000000$. ὁμοίως καὶ $(30)^4=(3 . 10)^4=810000$.

§. 308. Καὶ ἡ ῥίζα ὁμοίως ἐξάγεται ἀπὸ τοὺς πρὸ τῶν μηδενικῶν σημείων ἀριθμούς· καὶ ἐὰν τετραγωνικὴ εἶναι, τίθενται τὰ μισὰ μηδενικὰ, ἐὰν δὲ κυβικὴ, τὸ τριτημόριον κτλ. π. χ. $\sqrt{640000}=\sqrt{64 . 10000}=\sqrt{64} . \sqrt{10000}=8 . 100=800$. καὶ $\sqrt[3]{27000}=\sqrt[3]{27 . 1000}=\sqrt[3]{27} . \sqrt[3]{1000}=3 . 10=30$.

Καὶ ἐκ τούτου γίνεται φανερὸν, ὅτι, ὅταν τὸ τετράγωνον μὲ 100 πολλαπλασιάζεται, ἡ ῥίζα μόνον μὲ 10. ὅταν δὲ ὁ κύβος μὲ 1000, ἡ ῥίζα αὐτοῦ μὲ 10 κτλ.

§. 309. Ἐπειδὴ δὲ ἓν κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ὅταν καὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν ὑψοῦμεν εἰς αὐτὴν τὴν δύναμιν, ἄρα καὶ ὅταν ῥίζαν τοῦ κλάσματος ἐξάγωμεν, ἐξάγεται ἡ ῥίζα καὶ ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν καὶ ἀπὸ τὸν παρονομαστήν· οὕτω $\sqrt{\frac{49}{25}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}}=\frac{7}{5}$. καὶ $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$. καὶ $\sqrt[\mu]{\frac{\alpha^\mu}{6^\mu}}=\frac{\sqrt[\mu]{\alpha^\mu}}{\sqrt[\mu]{6^\mu}}=\frac{\alpha}{6}$.

Σημείωσις Α΄. Τὸ γνήσιον κλάσμα ὅταν εἰς δυνάμεις ὑψοῦται τοσοῦτον ἐλαττοῦται, ὅσον εἰς μείζονας δυνάμεις αἴρεται· οὕτω $\frac{2}{3}>\frac{2^2}{3^2}>\frac{2^3}{3^3}>\frac{2^4}{3^4}$ κτλ. καὶ ἐὰν $\alpha<6$ ἔσαι

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha^2}{\beta^2} > \frac{\alpha^3}{\beta^3} > \frac{\alpha^4}{\beta^4} > \frac{\alpha^5}{\beta^5}.\ \text{κτ:}$$

Σημείωσις Β΄. ὅταν δὲ τὸ κλάσμα εἶναι νόθον, αὔξει μᾶλλον καὶ μᾶλλον εἰς μείζονας καὶ μείζονας δυνάμεις αἰρόμενον. π. χ. $\frac{3}{2} < \frac{3^2}{2^2} < \frac{3^3}{2^3} < \frac{3^4}{2^4}$ κτ: καὶ ἐὰν $\alpha > \beta$ ἔσται $\frac{\alpha}{\beta}$ $< \frac{\alpha^2}{\beta^2} < \frac{\alpha^3}{\beta^3} < \frac{\alpha^4}{\beta^4}$ κτ:

Σημείωσις Γ΄. ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς ἴσος τῷ παρονομαστῇ εἰς οἵαν δύναμιν καὶ ἂν ὑψωθῇ τὸ κλάσμα ἔσται ἀεὶ ἴσον μονάδι. ὅτι $\frac{3}{3}$ $1 = \frac{3^2}{3^2} = \frac{3^3}{3^3} = \frac{3^4}{3^4}$.

Σημείωσις Δ΄. Τὸ γνήσιον ἢ νόθον κλάσμα, ὅπερ εἰς ἀκέραιον ἀριθμὸν δὲν παρίσταται, εἰς οἵαν δύναμιν καὶ ἂν ὑψωθῇ πάλιν εἰς ὁλόκληρον ἀριθμὸν δὲν παρίσταται· δηλ: ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}$ κλάσμα ᾖ, καὶ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ κλάσμα, καὶ $\frac{\alpha^3}{\beta^3}$, καὶ $\frac{\alpha^4}{\beta^4}$. κτ:

Ἐπειδὴ ὅμως μέχρι τοῦδε ἔγνωμεν τί δύναμις, καὶ ῥίζα, καλὸν καὶ ἰδιαιτέρως περὶ προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ, καὶ διαιρέσεως εἰπεῖν, διότι ἀνωτέρω (§. 38) καὶ περὶ τούτων ἐμνήσθημεν, πλὴν ἐπειδὴ ἰδιαίτερά τινα εἰς τοὺς ἐκθετικοὺς ἀριθμοὺς ἐπισυμβαίνουσιν, ἐροῦμεν καὶ περὶ τούτων βραχέα τινα. Ὅθεν διαιροῦμεν καὶ τὸ παρὸν τμῆμα εἰς μέρη τρία, καὶ τὸ μὲν πρῶτον περιέχει τὰς ἐργασίας τῶν δυνάμεων, καὶ τὰς ἐξαγωγὰς τῶν ῥιζῶν· τὸ δὲ δεύτερον τὰς ῥιζικὰς ποσότητας· καὶ τὸ τρίτον τὰς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

ΜΕ'ΡΟΣ Α'.

Περὶ δυνάμεων κατὰ μέρος.

§. 310. Τὶ ἐκθετικὸς ἀριθμὸς καὶ πολλαπλασίων εἴπομεν (§. 292). εἰς τὸ παρὸν ὅμως μέρος ἰδιαιτέρως τὰ εἰωθότα, καὶ περὶ τούτων ἐροῦμεν.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Α'.

Περὶ τῶν τεσσάρων Ἐργασιῶν τοῦ ἐκθετικοῦ ἀριθμοῦ.

1) Περὶ Προσθέσεως, καὶ Ἀφαιρέσεως.

§. 311. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἐκθετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἡ αὐτὴ, ἣν καὶ εἰς τὰ γράμματα εἴπομεν. δηλ: παρατηρεῖται πρῶτον εἰς τὰ μέρη τὰ δοθέντα, ἂν εἶναι ὁμώνυμα καὶ ταυτοδύναμα· τοῦτο δὲ εἶναι ἐὰν ἔχωσι τὸ αὐτὸ γράμμα, καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἐκθέτην· τότε τὰ μὲν ὅμοια σημεῖα προςίθενται κατὰ τοὺς συνεργοὺς, τὰ δ' ἀνόμοια ἀφαιροῦνται, ὡς ἐκεῖ (§. 61). δηλ: ἐὰν ζητεῖται νὰ προσθέσωμεν $5\alpha^2$ εἰς $3\alpha^2$, γίνεται $5\alpha^2+3\alpha^2=8\alpha^2$. καὶ $3\alpha^2\beta^3$ εἰς $12\alpha^2\beta^3$. οὕτω $3\alpha^2\beta^3+12\alpha^2\beta^3=15\alpha^2\beta^3$ οὕτω καὶ $3\chi^{\rho-1}\alpha\beta$ εἰς τὸ $-2\chi^{\rho-1}\alpha^\beta$ γίνεται $3\chi^{\rho-1}\alpha^\beta-2\chi^{\rho-1}\alpha^\beta=\chi^{\rho-1}\alpha^\beta$ κτ:

§. 312. Ἐὰν δὲ μὴ ὦσι ταυτομερῆ, δηλ: τὰ μέρη δὲν ἔχωσι τὸ αὐτὰ γράμματα, καὶ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας, τότε μόνον διὰ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$ ἡ πρόσθεσις γίνεται, καὶ ὄχι ἀλλέως· ὡς. ἐὰν θέλωμεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ $3\alpha^3$ τὸ $3\beta^3$, οὕτω γίνεται $3\alpha^3+3\beta^3$. ἢ εἰς τὸ $5\gamma^4$ τὸ $6\gamma^2$. οὕτω $5\gamma+6\gamma^2$. ἢ εἰς τὸ $\alpha^2\beta^2$ τὸ $2\alpha^3\beta^2$, οὕτω $\alpha\beta^2+2\alpha^3\beta^2$. ἢ εἰς τὸ $5\alpha^\rho\gamma^\sigma\varepsilon - 2\alpha^\rho\gamma^\sigma\varepsilon^2$. οὕτω $5\alpha^\rho\gamma^\sigma\varepsilon-2\alpha^\rho\gamma^\sigma\varepsilon^2$. κτ: κατ' αὐτὰ ἔςω καὶ τόδε τὸ παράδειγμα.

$$\begin{array}{r}
\beta^{3\rho-1}\chi-4\psi^{4-2\rho}+5\upsilon^{\rho-2}-20 \\
-\beta^{3\rho-1}\chi+5\psi^{4-2\rho}+3\upsilon^{\rho-2}+19 \\
\hline
\psi^{4-2\rho}+8\upsilon^{\rho-2}-1
\end{array}$$

§. 313. Καὶ ἡ ἀφαίρεσις εἰς μὲν τὰ ταυτομερῆ μεταβάλλεται τὸ σημεῖον τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ ὁ ἐλάττων συνεργὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ μείζονος· καὶ τὸ λοιπὸν εἶναι ἡ διαφορὰ ἢ τὸ λείψανον. Οὕτως ἐὰν ἀπὸ τοῦ $5\alpha^3$ ἀπαιτούμεθα ἀφελεῖν τὸ $3\alpha^3$, γίνεται $5\alpha^3-3\alpha^3=2\alpha^3$ ἡ διαφορά. Καὶ ἀπὸ τοῦ $5\alpha^\nu\chi^\mu$ νὰ ἀφέλωμεν τὸν $12\alpha^\nu\chi^\mu$, γίνεται $5\alpha^\nu\chi^\mu-12\alpha^\nu\chi^\mu=-7\alpha^\nu\chi^\mu$. καὶ ἀπὸ τοῦ $3\beta^2\gamma^3$ τὸν $-4\beta^2\gamma^3$, γίνεται $3\beta^2\gamma^3+4\beta^2\gamma^3=7\beta^2\gamma^3$. καὶ ἀπὸ τοῦ $-7\gamma^4\delta$ τὸν $2\gamma^4\delta$, γίνεται $-7\gamma^4\delta-2\gamma^4\delta=-9\gamma^4\delta$.

§. 314. Ἐὰν δὲ μὴ ταυτομερῆ ὦσι, καὶ Ἰσοδύναμα, τότε μόνον τὰ σημεῖα τοῦ ἀφαιρετέου μεταβαβάλλονται, καὶ γράφεται ἡ διαφορὰ κατὰ σειρὰν τῶν γραμμάτων μὲ τὰ σημεῖα, ὅπου μετὰ τὴν μεταβολὴν ἔχουσιν. Οὕτω τὸ α^2 ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ α^3 καὶ τὸ λείψανον ἔςαι $\alpha^3-\alpha^2$. καὶ τὸ δ^3 ἀφαιρεθὲν ἀπὸ υ γράφεται $\upsilon-\delta^3$. καὶ τὸ $-\pi^3$ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $\alpha\pi^3$, ἔςαι $\alpha\pi^3+\pi^3$. οὕτω καὶ τὸ χ^ν ἀπὸ τοῦ

$\pi^{\rho-\mu}$ ἔςαι $\pi^{\rho-\mu} - \chi^{\nu}$.

Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ ἐὰν μείζονα ὦσι τὰ παραδείγματα.

$$
\begin{array}{l}
4\psi^{4-2\rho} + 8\upsilon^{\rho-2} - 1 \\
\pm \beta^{3\rho-1}\chi \mp \psi^{4-2\rho} \pm 5\upsilon^{\rho-2} \mp 20 \\
\hline
-\beta^{3\rho-1}\chi + 5\psi^{4-2\rho} + 3\upsilon^{\rho-2} + 19
\end{array}
$$

ὁμοίως καὶ εἰς τὰ λοιπά.

II) Περὶ πολλαπλασιασμοῦ.

§. 315. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἐκθετικοῦ ἀριθμοῦ πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν εἰς τοὺς παράγοντας, ἂν ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ εὑρίσκωνται. Ὁμοειδεῖς δὲ ἀριθμοὺς ἀλγεβραϊκοὺς καλοῦμεν ἐκείνους, ὁποῦ ἔχουσι τὸ αὐτὸ γράμμα χωρὶς νὰ θεωρήσωμεν τὸν ἐκθέτην, ὡς α^3 καὶ α^5, εἶσιν ὁμοειδεῖς ἀριθμοί· οὕτω καὶ $\alpha\delta\gamma^3$ καὶ $\beta\delta\gamma$. ὁ γ καὶ β εἰσὶν ὁμοειδεῖς ἀριθμοί· ὁ δ ὅμως καὶ α ἑτεροειδεῖς.

§. 316. Πολλαπλασιάζονται οἱ ἐκθετικοὶ ἀριθμοί, ὅταν ὦσιν ὁμοειδεῖς, ἐὰν εἰς τὸ αὐτὸ γράμμα συνάψωμεν τοὺς ἐκθέτας εἰς ἓν κεφάλαιον. Οὕτω $\alpha^3 . \alpha^6 \alpha^{3+6}=\alpha^9$. διότι $\alpha^3 . \alpha^6 = \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha = \alpha^9$. οὕτω καὶ $\varphi^3 . \varphi^2 = \varphi^{3+2} = \varphi^5$. καὶ $\chi^5 . \chi^8 = \chi^{5+8} = \chi^{13}$. οὕτω καὶ $\chi^3\beta^2 . \chi\beta = \chi^{3+1}\beta^{2+1} = \chi^4\beta^3$. καὶ $\alpha\beta\gamma$· $\alpha\beta\delta = \alpha^2\beta^2\gamma\delta$· καὶ $2^4 . \beta^2 . 2^2 . \beta^3 = 2^{4+2} . \beta^{2+3} = 2^6 . \beta^5$. Συνάπτονται δὲ οἱ ἐκθέται εἰς τὰς ὁμοειδεῖς ποσότητας, ἐὰν καὶ γράμματα ὦσιν οἱ ἐκθέται· δηλ: $\beta^{\mu} . \beta^{\nu} = \beta^{\mu+\nu}$. καὶ ἔτι $\alpha\beta^{\nu-1} . \alpha^{\rho}\beta = \alpha^{1+\rho}\beta^{\nu+1-1} = \alpha^{1+\rho}\beta^{\nu}$. καὶ ἔτι $\alpha\chi^{\mu+\nu} . \xi^{\mu-2}\chi^{\mu+\nu} = \alpha\chi^{\mu+\tau\mu+\nu}\xi^{\mu-2} = \alpha\chi^{2\mu+2\nu}\xi^{\mu-2}$. Φανερὸν δὲ ἐκ τούτου ὅτι ἓν γράμμα, ὁποῦ ἔχει ἐκθέτην διμερῆ μὲ τὸ σημεῖον + μένει ὁ ἐκθέτης μονομερής, ἐὰν διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος πολλαπλασιάσωμεν τὸ αὐτὸ γράμμα, ὁποῦ ἔχει τὸν ἐκθέτην, καὶ τὸ ἓν μέρος τοῦ ἐκθέτου θῶμεν ἐκθέτην τοῦ γράμματος· ἤτοι ὁ διμερὴς ἐκθέτης δεικνύει, ὅτι ἤδε ἡ δύναμις εἶναι ἀπὸ δύω παράγοντας ἔχοντας ἕκαςος ἐκθέτην τὸ ἓν μέρος αὐτοῦ τοῦ διμεροῦς ἐκθέτου, δηλ: $a^{\mu+2}=a^2a^\mu$, καὶ $\beta^{\nu+3}=\beta^\nu\beta^3$. ἄρα καὶ $3^{3+3}=3^3.\ 3^3=27.\ 27=729$. Ὁμοίως καὶ $a\gamma^{2+\mu}=a\gamma^2\gamma^\mu$. ἐὰν δὲ τριμερὴς ὁ ἐκθέτης, τὸ γράμμα ἀπὸ τρεῖς παράγοντας ἔχοντα ἓν μέρος τοῦ τριμεροῦς ἐκθέτου εἰς ἐκθέτην ἕκαςον· ὡς $a^{\mu+\nu+1}=a^\mu a^\nu a$. καὶ $a\beta^{\nu+1+2}=a\beta^\nu\beta\beta^2$. ὁμοίως καὶ εἰς τετραμερῆ κτ:. Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ ἐὰν τὰ μέρη ἀποφατικὰ $a^{3-1}=a^3a^{-1}$. καὶ $\beta^{\mu-1}=\beta^\mu\beta^{-1}$. καὶ $a^{\mu-\nu-\rho}=a^\mu a^{-\nu}a^{-\rho}$.

§. 317. Ἐπειδὴ δὲ $a^{3-1}=\dfrac{a^{3-1}a}{a}=\dfrac{a^{3-1+1}}{a}=\dfrac{a^3}{a}$. (§. 142. B). φανερὸν ὅτι ὅταν ἓν γράμμα ἔχῃ ἐκθέτην διμερῆ μὲ τὸ σημεῖον, — ἀπαλλαττόμεθα ἀπὸ τὸ ἀποφατικὸν ἐὰν διέλωμεν τὴν αὐτὴν ποσότητα μὲ τὸ αὐτὸ γράμμα καὶ θῶμεν εἰς αὐτὸ τὸ γράμμα ἐκθέτην τὴν ποσότητα τὴν ἀποφατικὴν μὲ σημεῖον καταφατικόν· ἄρα $a^{\mu-\nu}=\dfrac{a^\mu}{a^\nu}$. καὶ $\beta^{-\mu+\nu}=\dfrac{\beta^\nu}{\beta^\mu}$. ἐὰν δὲ τριμερὴς μὲ δύω ἀποφατικὰ, δύω οἱ παράγοντες γίνονται διαιρέται. ἔχοντες ἕκαςος εἰς ἐκθέτην μετὰ τοῦ + ἕκαςον μέρος ἀποφατικόν· ἄρα $a^{\mu-\nu-\rho}=\dfrac{a^\mu}{a^\nu a^\rho}$. ἀλλ' ἀνωτέρω εὕρηται $a^{\mu-\nu-\rho}=a^{\mu}a^{-\nu}a^{-\rho}$. ἄρα ὁ παράγων, ὁποῦ ἔχει ἀποφατικὸν ἐκθέτην, τίθεται διαιρέτης μὲ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην πλὴν καταφατικῶς, καὶ μένει διαιρετέος, ἢ ὁ αὐτὸν ἐςιν ἀριθμητὴς ὁ ἔχων καταφατικὸν ἐκθέτην· ὡς $a^{\mu}a^{-\nu}a^{-\rho}=\frac{a^{\mu}}{a^{\nu}a^{\rho}}$. καὶ ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἡ ἀποφατικὴ δύναμις μεταβάλλεται εἰς καταφατικὴν, ἐὰν αὐτὴν διαιρέτην θῶμεν, καὶ τὴν μονάδα ἀριθμητὴν. διότι εἰς κάθε ἀριθμὸν ἡ μονὰς ὡς παράγων νοεῖται· λοιπὸν $a^{-3}=\frac{1}{a^{3}}$ ὅτι $1.a^{-3}=a^{-3}$. ἔτι $a^{-2}=\frac{1}{a^{2}}$. καὶ $a^{-4}=\frac{1}{a^{4}}$. καὶ οὕτως οἱ φανταςικοὶ ἀριθμοὶ (§. 305). μεταβάλλονται εἰς ἐνεργεία ἀριθμούς.

§. 318. Ὅταν δ' ἔχωμεν ἀποφατικὸν ἐκθέτην εἰς τὸν παρονομαςὴν, τί γίνεται; μανθάνομεν εὐκόλως, ἐὰν τοῖς ἑξῆς προσέξωμεν. Ἔςω $\frac{a^{2}}{6^{-3}}$. τὸ κλάσμα δὲν χαλᾷ ἐὰν διὰ μιᾶς ποσότητος πολλαπλασιασθῇ ἄνω καὶ κάτω (§. 92). οὕτω $\frac{a^{2}}{6^{-3}}=\frac{a^{2}6^{4}}{6^{-3}6^{3}}=\frac{a^{2}6^{4}}{6^{4-3}}=\frac{a^{2}.\,6^{4}}{16}=\frac{a^{2}6^{3}}{1}=a^{2}6^{3}$. ἄρα $\frac{a^{2}}{6^{-3}}=a^{2}6^{3}$. μανθάνομεν ἄρα, ὅτι ἕκαςος ἐν ἀποφατικῷ ἐκθέτῃ παράγων μὲ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην ἐν ἀντιςρόφῳ σημείῳ εἰς τὸν ἀριθμητὴν, καὶ ἀπαλείφεται ἀπὸ τὸν παρονομαςήν· ὅθεν $\frac{6}{a^{-2}}=6a^{2}$. καὶ $\frac{6a}{a^{2}\gamma^{-3}}=\frac{6a\gamma}{a^{2}}$ καὶ $\frac{6}{\pi^{\rho-2}}=\frac{6}{\pi^{\rho}\pi^{-2}}=\frac{6\pi^{2}}{\pi^{\rho}}$. καὶ γενικῶς μεταφέρομεν ἕκαςον παράγοντα ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν εἰς τὸν παρονομαστὴν ἢ ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν εἰς τὸν ἀριθμητὴν, ἐὰν μόνον τὸ σημεῖον αὐτοῦ τοῦ ἐκθέτου τοῦ παράγοντος εἰς τὸ ἐναντίον τρέψωμεν· οὕτως $\frac{\alpha}{\chi^{-2}}=\alpha\chi^2$. καὶ $\frac{\alpha\beta}{\chi^{-2}}=\frac{1}{\chi^{-2}\alpha^{-1}\beta^{-1}}=\chi^2\alpha\beta$.

§. 319. Ἐκ τούτων ἔτι μανθάνομεν Α'. ὅτι κάθε ἀριθμὸν εἰς κλάσμα μεταβάλλομεν, ἐὰν ἀριθμητὴς τεθῇ ἡ μονὰς, καὶ παρονομαστὴς ὁ ἀριθμὸς μὲ ἐκθέτην ἀντίστροφον τοῦ πρώτου· οὕτως $\alpha^2\beta=\frac{1}{\alpha^{-2}\beta^{-1}}$. καὶ $\gamma\chi^{-2}=\frac{1}{\gamma^{-1}\chi^2}$ καὶ $4=\frac{1}{4^{-1}}$ καὶ $5\beta^2=\frac{1}{5\beta^{-2}}$ καὶ $77^{-2}=\frac{1}{77^2}$.

Β'. Ὅτι κάθε κλάσμα εἰς ἀκέραιον μεταβάλλεται, ἐὰν τὸν παρονομαστὴν θῶμεν εἰς παράγοντα τοῦ ἀριθμητοῦ μὲ τὸ ἐναντίον σημεῖον τοῦ ἐκθέτου. $\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\beta^{-1}$: καὶ $\frac{\alpha}{(\beta-\gamma)^3}=\alpha(\beta-\gamma)^{-3}$. καὶ $\frac{\alpha\beta^2}{\gamma\chi^{-\mu}}=\alpha\beta^2\gamma^{-1}\chi^{\mu}$. καὶ $\frac{5}{9}=5.\frac{1}{9}=5.\frac{1}{3^2}=5.3^{-2}$. καὶ διὰ παρενθέσεων ποικιλλαχῶς τοῦτο γίνεται· ὡς $\frac{\chi^3-\alpha\chi}{\beta\gamma^3}=\frac{\chi(\chi^2-\alpha)}{\beta\gamma^3}=\frac{\chi^2-\alpha}{\chi^{-1}\beta\gamma^3}=\frac{1}{\chi^{-1}\beta\gamma^3(\chi-\alpha)^{-1}}=\chi\beta^{-1}\gamma^{-3}(\chi-\alpha)$ καὶ ἔτι $\frac{\alpha^2\chi(\gamma^2-\chi^2)^{-\mu}}{\pi}=\frac{\alpha^3\chi}{\pi(\gamma^2-\chi^3)^{-\mu}}$. ταῦτα πάντα καλῶς παρατηρηθήτωσαν, διὰ νὰ εἴμεθα πρόχειροι εἰς τὰς κατ' ἀνάγκην μεταβολάς.

§. 320. Ταῦτα μαθόντες διαφόρως πολλαπλασιάζομεν τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

$$\alpha\upsilon^3\chi^4 . \alpha\upsilon\chi = \alpha^{1+1}\upsilon^{3+1}\chi^{4+1} = \alpha^2\upsilon^4\chi^5$$

$$\text{καὶ } \chi^2\omega^2\alpha^2 . \alpha^3\chi^3\omega^3\beta = \chi^5\alpha^5\omega\beta$$

$$\text{καὶ } \chi^{\mu-2}\upsilon^{\rho} . \chi^{\nu}\upsilon^{\rho-1} = \chi^{\mu-2+\nu}\upsilon^{\rho+\rho-1} = \frac{\chi^{\mu}\chi^{\nu}\upsilon^{2\rho}}{\chi^2\upsilon}$$

$$\alpha^{\nu+1}\chi^{3\nu+1}\omega^{1+1} . \alpha^{-\nu}\chi^{-3\nu}\omega^{-\nu} = \alpha^{\nu+1-\nu}\chi^{3\nu+1-3\nu}\omega^{1+1-\nu} = \alpha\chi\omega \text{ κτ.}$$

Καὶ συμπεπλεγμένους ἀριθμοὺς κατὰ τοὺς ἀνωτέρω νόμους ἤδη πολλαπλασιάζομεν, ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν, ὅσα περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν γραμμάτων εἴπομεν (§. 139—140).

$$\begin{array}{l}
\gamma\chi+\alpha\beta^2-\alpha^2-3^2 \\
\quad\chi^2\gamma+\alpha^3-2^3 \\
\hline
\gamma^2\chi^3+\alpha\beta^2\chi^2\gamma-\alpha^2\chi^2\gamma-3^2\chi^2\gamma \\
\alpha^3\gamma\chi+\alpha^4\beta^2-\alpha^5-3^2\alpha^3 \\
-\alpha^3\gamma\chi-2^3\alpha\beta^2+2^3\alpha^2+2^3 . 3^2 \\
\hline
-\alpha^5+2^3\alpha^2-2^3\alpha\beta^2+\alpha\beta^2\chi^2\gamma-\alpha^2\chi^2\gamma+\alpha^4\beta^2+\alpha^3\gamma\chi- \\
3^2\alpha^3+\gamma^2\chi^3-2^3\gamma\chi-3^2\chi^2\gamma+2^3 . 3^2
\end{array}$$

Ταῦτα τὰ μέρη εἰς τὸ ἁπλούστερον δὲν ἀνάγονται, ὅθεν εἰς τὴν πρόσθεσιν γράψου ὅλα τὰ μέρη κατὰ σειράν· οὕτω καὶ τὸ ἑξῆς.

$$\begin{array}{l}
\alpha^{\rho}\beta^{\mu}-\beta\chi^{\nu}+\alpha^2\chi \\
\quad\alpha^{\nu}-\chi^{\mu} \\
\hline
\alpha^{\rho}\alpha^{\nu}\beta^{\mu}-\alpha^{\nu}\beta\chi^{\nu}+\alpha^{\nu+1}\chi^{2\nu} \\
-\alpha^{\rho}\beta^{\mu}\chi^{\mu}+\beta\chi^{\nu+\mu}-\alpha\chi^{\mu+2\nu} \\
\hline
\alpha^{\nu}\alpha^{\rho}\beta^{\mu}-\alpha^{\nu}\beta\chi^{\nu}+\alpha^{\nu+1}\chi^{2\nu}-\alpha^{\rho}\beta^{\mu}\chi^{\mu}+\beta\chi^{\nu+\mu}-\alpha\chi^{\mu+2}
\end{array}$$

§. 321. Εὐκόλ.   ἐξαίρομεν καὶ ποσότητα δυναμικὴν εἰς ἑτέραν δύναμιν, ἐὰν μόνον τὸν ἐκθέτην τῆς ποσότητος πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς ζητουμένης δυνάμεως· δηλ: ζητεῖται ἡ ποσότης α^2 νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, οὕτω $(\alpha^2)^3=\alpha^{2\cdot3}=\alpha^6$. διότι τὸ $(\alpha^2)^3$ εἶναι $\alpha^2\alpha^2\alpha^2=\alpha^{2+2+2}=\alpha^6$. Ὁμοίως ζητεῖται ἡ τετάρτη δύναμις τοῦ α^3. ἄρα $(\alpha^3)^4=\alpha^{3\cdot4}=\alpha^{12}$. διότι $(\alpha^3)^4=\alpha^3\alpha^3\alpha^3\alpha^3=\alpha^{3+3+3+3}=\alpha^{12}$. Τοῦτο συμβαίνει καὶ ὅταν παράγοντες. εἶναι αἱ ποσότητες. δηλ: ζητεῖται ἡ τρίτη δύναμις τοῦ $\beta\alpha^3$. ἄρα $(\beta\alpha^3)^3=\beta^{1\cdot3}\alpha^{3\cdot3}=\beta^3\alpha^9$. καὶ $(\alpha^\mu\beta)^3=\alpha^{3\mu}\beta^3$. καὶ $(\alpha^\mu\beta^\nu)^\rho=\alpha^{\mu\rho}\beta^{\nu\rho}$. Ὁμοίως καὶ $(-\alpha^\mu\beta\gamma^3)^2$. τοῦτο δὲ $-\alpha^\mu\beta\gamma^3.-\alpha^\mu\beta\gamma^3=\alpha^{2\mu}\beta^2\gamma^6$. Τοῦτο συμβαίνει καὶ εἰς τὰ κλάσματα $\left(\frac{\alpha^2}{\beta^3}\right)^2=\frac{\alpha^4}{\beta^6}$. καὶ $\left(\frac{\alpha^3}{\beta^2}\right)^\mu=\frac{\alpha^{3\mu}}{\beta^{2\mu}}$. καὶ ἔτι $\left(\frac{\alpha^{\mu-\nu}}{\rho^{\mu-\rho}}\right)^2=$

$$\frac{\alpha^{2\mu-2}}{\beta^{2\mu-2\rho}}=\frac{\alpha^{2\mu}}{\alpha^{2\nu}\beta^{2\mu-2\rho}}=\frac{\alpha^{2\mu}}{\alpha^{2\nu}\beta^{2\mu}\beta^{-2\rho}}=\frac{\alpha^{2\mu}\beta^{2\rho}}{\alpha^{2\nu}\beta^{2\mu}}.$$

οὕτω καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς $(3^2)^2=3^4$. διότι $(3^2)^2=3^2.3^2=3^{2+2}=3^4$. ὁμοίως καὶ $(2^4)^3=2^{12}$. καὶ εἰς τὰ κλάσματα $\left(\frac{2^2}{3^3}\right)^3=\frac{2^6}{3^9}$. καὶ ἔτι $\left(\frac{1}{4^3}\right)^4=\frac{4}{4^{12}}=\frac{1}{4^{12}}$. τοῦτο αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς παρενθέσεις· διότι $(\alpha^3(\alpha^2+\chi^2)^2)^4=\alpha^{12}(\alpha^2+\chi^2)^8$. διότι ἡ παρένθεσις ὅλη μὲ τὴν α^3 ὡς δύο νοοῦνται παράγοντες.

§. 322. Ὁ αὐτὸς νόμος τηρεῖται καὶ εἰς τὰς ποσότητας μὲ ἀποφατικοὺς ἐκθέτας. Δεδόσθω ὅτι ζητεῖται ἡ τρίτη δύναμις τοῦ α^{-3}. ἄρα $(\alpha^{-3})^3=\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)^3=\frac{1}{\alpha^9}=\alpha^{-9}$.

ἔτι $(\alpha^{-\mu})^5=\left(\frac{1}{\alpha^\mu}\right)^5=\frac{1}{5^\mu}=\alpha^{-5\mu}$. ἔτι $(\alpha^\mu\beta^{-\nu})=$

$(\frac{\alpha^\mu}{\beta^\nu})^\nu = (\frac{\alpha^{\mu\nu}}{\beta^{\nu\nu}}) = \alpha^{\mu\nu}\,\beta^{-\nu\nu}$. καὶ ἔτι $(3^{-3})^7 = (\frac{1}{3^3})^7 = \frac{1}{3^{21}} = 3^{-21}$

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐὰν εἰς ἀποφατικὰς δυνάμεις ἀπαιτούμεθα νὰ ὑψώσωμεν ποσότητά τινα.

Ζητεῖται χ. χ νὰ ὑψώσωμεν τὴν ποσότητα α^2 εἰς τὴν ἀποφατικὴν δύναμιν τὴν τρίτην· ἄρα $(\alpha^2)^{-3} = \frac{1}{(\alpha^2)^3} = \frac{1}{4^6} = \alpha^{-6}$. καὶ ἔτι εἰς τὴν ἀποφατικὴν δύναμιν τὴν ν, τὴν $(\alpha^\mu\beta^{-\nu})$ ἄρα $(\alpha^\mu\beta^{-\nu})^{-\nu} = \frac{1}{(\alpha^\mu\beta^{-\nu})^\nu} = \frac{1}{\alpha^{\mu\nu}\beta^{-\nu\nu}} = \frac{\beta^{\nu\nu}}{\alpha^{\mu\nu}} = \beta^{\nu\nu}\alpha^{-\mu\nu}$.

Σημείωσις Α΄.

Πρέπει καλῶς νὰ διακρίνωμεν τὸ $-\alpha^2$ ἀπὸ τοῦ $(-\alpha)^2$. διότι τὸ $-\alpha^2 = -\alpha . +\alpha = -\alpha^2$. ἢ τὸ τετράγωνον αὐτὸ νὰ ληφθῇ ἀποφατικόν. Τοῦτο δὲ $(-\alpha)^2 = -\alpha . -\alpha = +\alpha^2$ σημαίνει ἡ ῥίζα $-\alpha$ νὰ ὑψωθῇ εἰς τετράγωνον. ὁμοίως καὶ τοῦτο $-\alpha^4 = -\alpha^2 . +\alpha^2 = -\alpha^4$. τοῦτο ὅμως $(-\alpha)^4 = -\alpha^2 . -\alpha^2 = \alpha^4$.

Σημείωσις Β΄.

Ὅπου λοιπὸν ἀπαιτούμεθα νὰ ἐξάρωμεν ἀποφατικὴν ποσότητα ἐντὸς τῆς παρενθέσεως εἰς δύναμιν ἀρτιοβάθμιον, ἐξέρχεται ἡ δύναμις καταφατική. (σημ: Α΄). ἐὰν δὲ τὸ ἀποφατικὸν εἶναι ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως, ἐξέρχεται ἀποφατική· οὕτως ἡ μὲν $(-\alpha^\mu)^6 = \alpha^{6\mu}$. ἡ δὲ $-(\alpha^\mu)^6 = -\alpha^{6\mu}$. διότι οὕτως ἡ ποσότης $(-\alpha^\mu)^6$ σημαίνει τὸ α μόνον εἶναι ἀποφατικόν, καὶ οὐχὶ ὅλη ἡ δύναμις, διὸ ὑψουμένη εἰς μὲν ἀρτιοβάθμιον δύναμιν γίνεται καταφατική, εἰς δὲ περιττοβάθμιον ἀποφατική. Ἐὰν δὲ οὕτως $-(\sigma^\mu)^6$ ἐκφρασθῇ, σημαίνει, ὅταν ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν αὐτήν, νὰ ληφθῇ ἀποφατικῶς ὅλη ἡ ποσότης τῆς δυνάμεως· ὅθεν, $(-\alpha^{\nu})^4 = \alpha^{4\nu}$. καὶ $(-\alpha^{\nu})^5 = -\alpha^{5\nu}$. ὅμως $-(\alpha^{\nu})^4 = -\alpha^{4\nu}$ καὶ $-(\alpha^{\nu})^5 = -\alpha^{5\nu}$.

Περὶ διαιρέσεως τῶν δυνάμεων.

§. 323. Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν γραμμάτων (§. 142). ἐμάθομεν πῶς διαιροῦμεν δυνάμεις. δηλ: ἐὰν ὁμοειδεῖς αἱ δυνάμεις, ἤτοι ἔχουσι τὸ αὐτὸ γράμμα, μόνον ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρέτου ἀφαιρεῖται τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου, καὶ τὸ λοιπὸν εἶναι τὸ πηλίκον, ὡς $\alpha^3 : \alpha^2 = \alpha^{3-2} = \alpha$. διότι $\alpha^3 = \alpha\alpha\alpha$. καὶ $\alpha^2 = \alpha\alpha$ (§. 129). ἄρα $\alpha^3 : \alpha^2 = \frac{\alpha\alpha\alpha}{\alpha\alpha} = \alpha$.

Ἐὰν γὰρ τὸ $\alpha = 2$ τεθῇ, ἔςαι $\alpha^3 : \alpha^2 = 8 : 4 = 2$. διότι $\frac{\alpha\alpha\alpha}{\alpha\alpha} = \frac{2.2.2}{2.2}$ λοιπὸν $\alpha^3\beta^2 : \alpha\beta = \alpha^{3-1}\beta^{2-1} = \alpha^2\beta$. Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ ἐὰν οἱ ἐκθέται εἶνοι γράμματα εἰς τοὺς ὁμοειδεῖς α: $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$ $\alpha^{\mu-\nu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}$: δηλ: ὅπως ἂν ἐκφρασθῇ, τὸ αὐτὸ πηλίκον ἐξέρχεται.

§. 324. Ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης ὁμοειδὴς μὲ ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ διαιρετέου, ἀπ' ἐκείνου μόνου ἀφαιρεῖται ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρέτου, καὶ οἱ ἕτεροι παράγοντες τοῦ διαιρετέου μένουσιν εἰς πηλίκον, ὡς $\alpha^4\beta^2 : \alpha^3 = \alpha^{4-3}\beta^2 = \alpha\beta^2$. καὶ $\alpha\beta^3\gamma^2 : \beta^2\gamma = \alpha\beta^{3-2}\gamma^{2-1} = \alpha\beta\gamma$ κτ. καὶ $\alpha^{2\mu}\beta : \alpha^{\mu} = \alpha^{2\mu-\mu}\beta = \alpha^{\mu}\beta$.

§. 325. Ἐὰν δὲ μέρος τοῦ διαιρετέου κοινὸν, μέρος δ' οὔ, τότε μόνου ὁ ἐκθέτης τοῦ κοινοῦ ἀφαιρεῖται, καὶ τὸ λοιπὸν γράφεται ὑποκάτω εἰς διαιρέτην, $\alpha^3\gamma^4 : \alpha^2\beta = \frac{\alpha^3\gamma^4}{\alpha^2\beta} = \frac{\alpha\gamma^4}{\beta}$. καὶ $5\alpha : 5\varkappa = \frac{5\alpha}{5\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$. Καὶ ἐὰν μεῖζον ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τὸν τοῦ διαιρετέου, τὸ πηλίκον ἀποφατικόν· ὡς $\overset{2}{\alpha} : \overset{5}{\alpha} = \overset{2-5}{\alpha} = \overset{-3}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^3}$.

διότι ἐὰν $\alpha = 2$. ἔσαι $\overset{2}{\alpha} : \overset{5}{\alpha} = 4 : 32 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$. οὕτω

$\overset{5}{\chi}\overset{4}{\upsilon}\alpha : = \overset{7}{\chi}\overset{3}{\upsilon}\overset{2}{\alpha} = \overset{3-7}{\chi}\overset{4-3}{\upsilon}\overset{1-2}{\alpha} = \overset{-4}{\chi}\upsilon\overset{-1}{\alpha} = \frac{\upsilon}{\chi^4\alpha}$.

καὶ $\overset{\nu+1}{\alpha} : \overset{\mu}{\alpha} = \overset{\nu+1-\mu}{\alpha} = \frac{\alpha^{\nu+1}}{\alpha^{\mu}}$

καὶ $\overset{\nu}{\alpha}\overset{\mu}{\chi}\overset{\rho}{\psi} : \alpha\chi^3\psi^3 = \overset{\nu-1}{\alpha}\overset{\mu-3}{\chi}\overset{\rho-3}{\psi}$

καὶ $(\chi^4\psi^2 - \psi^3\chi^5) : \alpha\chi^3\psi = \frac{\chi^4\psi^2 - \psi^3\chi^5}{\alpha\chi^3\psi} = \frac{\chi^4\psi^2}{\alpha\chi^3\psi} - \frac{\psi^3\chi^5}{\alpha\chi^3\psi} = \frac{\chi\psi}{\alpha} - \frac{\psi^2\chi^2}{\alpha} = \frac{\chi\psi - \psi^2\chi^2}{\alpha}$ καὶ $(\alpha\chi^2\psi^3 - \alpha\beta\chi^2\psi^2) : \alpha\chi\psi = \alpha\chi\psi(\chi\psi^2 - \beta\chi\psi - \chi\psi) : \alpha\chi\psi = (\chi\psi^2 - \beta\chi\psi - \chi\psi) = \chi\psi(\psi - \beta - 1)$.

§. 326. Ἐπειδὴ δὲ ποσότης δι' ἑαυτῆς διαιρουμένη δίδει πηλίκον μονάδα· ἄρα $\frac{\chi}{\chi} = 1$ καὶ $\frac{\chi^3}{\chi^3} = 1$ · ἀλλὰ $\chi^3 : \chi^3 = \overset{3-3}{\chi} = \chi^0$ ἡ ποσότης λοιπὸν, ἥτις μηδενικὸν ἔχει ἐκθέτην, μονάδα σημαίνει· ὅθεν $\alpha^0 = 1$ · καὶ $\alpha^0\beta^0\delta^0\gamma^0 = 1$

καὶ $4^0=1$ καὶ $567^0=1$ καὶ $(\alpha+\beta)^0=1$· καὶ $(\alpha-\beta+\alpha\gamma^2)^0=1$.

§. 327. Ἀπ' αὐτοῦ $\chi^0=1$ ἄρχεται πολλαπλασιαζομένη ἡ ποσότης χ, ἀφ' ἑαυτὴν νὰ ὑψοῦται εἰς δυνάμεις ὡς χ^0, χ^1, χ^2, χ^3, χ^4, χ^5 κτ: διότι $\chi^0 . \chi=\chi^{0+1}=\chi^1$. καὶ $\chi^1 . \chi^1=\chi^{1+1}=\chi^2$. καὶ $\chi^2 . \chi^1=\chi^{2+1}=\chi^3$ κτ. διαιρουμένη δὲ ὑψοῦται εἰς δυνάμεις ἀποφατικάς, ὡς $\chi^0 : \chi=\chi^{0-1}=\chi^{-1}$, ἢ $\frac{\chi^0}{\chi}=\frac{1}{\chi}$· καὶ $\chi^{-1} : \chi=\chi^{-1-1}=\chi^{-2}$ ἤτοι $\frac{1}{\chi^2}$ καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω χ^0, χ^{-1}, χ^{-2}, χ^{-3}, χ^{-4} κτ.

§. 328. Μείζονα παραδείγματα τῆς διαιρέσεως τῶν δυνάμεων ἔστωσαν τὰ ἑξῆς.

$$(\alpha^6+\beta^6):(\alpha^2+\beta^2)=\alpha^6+\beta^6 : \alpha^2+\beta^2=\alpha^4-\alpha^2\beta^2+\beta^4$$

$$\begin{array}{l}
\alpha^6+\alpha^4\beta^2 \\
-\quad - \\
\hline
\quad -\alpha^4\beta^2+\beta^6 \\
\quad -\alpha^4\beta^2-\alpha^2\beta^4 \\
\quad +\quad\quad + \\
\hline
\quad\quad +\alpha^2\beta^4+\beta^6 \\
\quad\quad +\alpha^2\beta^4+\beta^6 \\
\quad\quad -\quad\quad - \\
\hline
\quad\quad\quad 0 \quad 0
\end{array}$$

ἔτι

$$\begin{array}{l}
30\gamma^4-5\beta^4\gamma^3+20\alpha^2\gamma^2-18\alpha\gamma^2+3\alpha\beta^4\gamma-12\alpha^3 : (5\gamma^2-3\alpha)= \\
\pm30\gamma^4 \qquad\qquad\qquad \mp18\alpha\gamma^2 \qquad\qquad 6\gamma^2-\gamma\beta^4+4\alpha^2 \\
\hline
0 \quad -5\beta^4\gamma^3+20\alpha^2\gamma^2+3\alpha\beta^4\gamma-12\alpha^3 \\
\quad \mp5\beta^4\gamma^3 \qquad\qquad \pm3\alpha\beta^4\gamma \\
\hline
\quad 0 \quad +20\alpha^2\gamma^2-12\alpha^3 \\
\quad\quad \pm20\alpha^2\gamma^2\mp12\alpha^3 \\
\hline
\quad\quad 0 \qquad 0
\end{array}$$

Ἀπὸ τοῦτο λοιπὸν τὸ κεφάλαιον ἐξέρχονται τὰ ἑξῆς δύο κεφάλαια, ἀπὸ μὲν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ πῶς ὑψοῦται ἕκαστος ἀριθμὸς εἰς δυνάμεις, ἤτοι περὶ ἐξάρματος τῶν δυνάμεων. Ἀπὸ δὲ τῆς διαιρέσεως τὸ πῶς ἀπὸ ἑκάστου ἀριθμοῦ τὰς ῥίζας ἑκάστης ἐξάγομεν δυνάμεως ἤτοι Περὶ ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ τοῦ πῶς ἕκαστος ἀριθμὸς εἰς δυνάμεις ἐξαίρεται, ἤτοι Περὶ ἐξάρματος τῶν δυνάμεων.

§. 329. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν δυνάμεων (§. 321) ἐμάθομεν, πῶς ὑψοῦμεν εἰς δυνάμεις ποσότητας μονομερεῖς· ἄρα ἐνταῦθα ζητεῖται τὸ ἔξαρμα εἰς δυνάμεις τῶν πολυμερῶν ποσοτήτων, ὡς διωνύμων, τριωνύμων, κτ. Ἵνα δὲ καθ' ὁδὸν βαδίσωμεν, φέρε πολλαπλασιάσωμεν τὸ διώνυμον $\alpha+\beta$ αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ, ἵνα μάθωμεν, τί γίνεται ὅταν τετραγωνισθῇ $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$. ἄρα ἐνεργείᾳ

$$\begin{array}{l}
\alpha+\beta \\
\underline{\alpha+\beta} \\
\alpha^2+\alpha\beta \\
\underline{\quad+\alpha\beta+\beta^2} \\
\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2
\end{array}$$

καὶ ἐκ τούτου φανερὸν, ὅτι τὸ τετράγωνον ἑνὸς διωνύμου γίνεται.

1). Ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου μέρους,

2). Καὶ ἀπὸ τοῦ διπλοῦ παραγομένου τοῦ πρώτου μέρους ἐπὶ τὸ δεύτερον μέρος.
καὶ 3). Ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου μέρους.

Ἐὰν δὲ τὸ διώνυμον ἔχῃ τὸ δεύτερον μέρος ἀποφατικὸν οὕτω $(\alpha-\beta)$ εὑρίσκεται οὕτω

$$\begin{array}{l} \alpha-\beta \\ \underline{\alpha-\beta} \\ \alpha^2-\alpha\beta \\ \underline{\quad -\alpha\beta+\beta^2} \\ \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \end{array}$$

Ὅθεν καὶ ὅταν ἀποφατικὸν τὸ δεύτερον μέρος, ἔχει τὸ τετράγωνον τὰ αὐτὰ μέρη, ἐκτὸς μόνου τοῦ διπλοῦ παραγομένου $\alpha\beta$, ὁποῦ εἶναι ἀποφατικόν. Λοιπὸν διὰ νὰ ὑψώσωμεν ἕκαστον διώνυμον εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, θέτομεν πρῶτον μέρος, τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου μέρους τοῦ διωνύμου. Εἰς δεύτερον δὲ μέρος τὸ γενόμενον ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου μέρους διπλοῦν· καὶ εἰς τὸ τρίτον τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου μέρους· οὕτω $(\alpha^2+\beta)=\alpha^4+2\alpha^2\beta+\beta^2$ καὶ $(2\alpha\beta+3\beta^2)^2=4\alpha^2\beta^2+2-2.\ \alpha\beta^3 6\beta+9\beta^4=4\alpha^2\beta^2+12\alpha\beta^3+9\beta^4$ καὶ $(3\alpha-2\beta)^2=9\alpha^2-12\alpha\beta+4\beta^2$

$$(\sigma\gamma^2+\frac{\alpha}{2})^2=\beta^2\gamma^4+\frac{2\beta\gamma^2\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{4}$$

καὶ $(\beta-\frac{\alpha}{\beta})^2=\beta^2-\frac{2\beta\alpha}{\beta}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\beta^2-2\alpha+\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. ὁμοίως $(\alpha^2-1)^2=\alpha^4-2\alpha^2+1$

$(1-\chi)^2=1-2\chi+\chi^2$.

Τὸ αὐτὸ γενέσθω καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς $(62)^2=(60+2)^2$ $=(60+2)^2=3600+240+4=3844$.

$(99)^2=(90+9)^2=8100+1620+81=9801$. ἢ καὶ οὕτω $(99)^2=(100-1)^2=10000-200+1=9801$.

§. 330. Ἐὰν δὲ ζητεῖται νὰ ὑψώσωμεν τριώνυμον εἰς τετράγωνον ὡς τὸ $(\alpha+\beta+\gamma)$, λαμβάνομεν τὰ δύο μέρη ὁμοῦ εἰς παρένθεσιν ἀνθ' ἑνὸς μέρους, καὶ οὕτω τὸ τριώνυμον γίνεται διώνυμον καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω (§. 329) ὑψοῦμεν αὐτὸ εἰς τετράγωνον· ὅπου δὲ μετὰ ταῦτα εὑρεθῇ ἡ παρένθεσις μεταχειριζόμεθα αὐτὴν ἰδιαιτέρως κατὰ τὸ διώνυμον· οὕτω $(\alpha+\beta+\gamma)^2=[(\alpha+\beta)+\gamma]^2=(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2$.

διότι $(\alpha+\beta)=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

καὶ $2(\alpha+\beta)\gamma=2\alpha\gamma+2\beta\gamma$· ἄρα τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων τίθενται, καὶ ἐξέρχεται ἡ ἄνω ἔκφρασις· ὅθεν τὸ τετράγωνον ἑνὸς τριωνύμου συνίσταται ἀπὸ ἓξ μερῶν.

Α΄. Ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου μέρους.

Β΄. Ἀπὸ τοῦ διπλοῦ παραγομένου τοῦ πρώτου μέρους ἐπὶ τὸ δεύτερον.

Γ΄. Ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου μέρους.

Δ΄. Ἀπὸ τοῦ διπλοῦ παραγομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τρίτον.

Ε΄. Ἀπὸ τοῦ διπλοῦ παραγομένου τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ τρίτον.

Ϛ΄. Καὶ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ τρίτου μέρους.

Ὅθεν $(2\alpha+3\gamma+2\delta)=4\alpha^2+12\alpha\gamma+9\gamma^2+8\alpha\delta+12\gamma\delta+4\delta^2$.

Τὸ αὐτὸ γίνεται, καὶ ἐὰν ἓν μέρος, ἢ δύο τοῦ τριωνύμου δίδεται ἀποφατικόν, ἐκτὸς μόνον τοῦ διπλοῦ παραγομένου αὐτοῦ τοῦ μέρος ὁποῦ τίθεται ἀποφατικόν.

$$(\alpha-\chi+\frac{\delta}{2})^2=\alpha^2-2\alpha\chi+\chi^2+\frac{2\alpha\delta}{2}-\frac{2\chi\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}$$

$$(2\alpha^2-3\alpha\chi-4\chi^2)^2=4\alpha^4-12\alpha^3\chi+9\alpha^2\chi^2-16\alpha^2\chi^2+24\alpha\chi^3+16\chi^4$$

$(1-\chi+\chi^2)^2=1-2\chi+\chi^2+2\chi^2-2\chi^3+\chi^4$

οὕτω $(135)^2=(100+30+5)^2=10000+6000+900+1000+300+25=18225$ ὁμοίως καὶ

$(999)^2=(900+90+9)=810000+162000+8100+16200+1620+81=998001.$

ἢ καὶ οὕτω $(100+1-2)$ ὡς ἀνωτέρω.

§. 331. Ἐὰν δὲ ἔχῃ μέρη τέσσαρα, λαμβάνομεν τὰ τρία εἰς παρένθεσιν ἀνθ' ἑνὸς μέρους, καὶ τὸ ἕτερον διὰ νὰ γένῃ διώνυμον, καὶ οὕτως ἀποτελοῦμεν τὸ τετράγωνον, καὶ εἶτα κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ 3 μερὲς ὑψοῦμεν εἰς τετράγωνον κτ.

ἔςω $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2=((\alpha+\beta+\gamma)+\delta)^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2+2\delta(\alpha+\beta+\gamma)+\delta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2+2\delta\alpha+2\delta\beta+2\delta\gamma+\delta^2$. ἤτοι τὸ τετράγωνον ἑκάςου πολυωνύμου συνίςαται.

Α΄. Ἀπὸ τῶν τετραγώνων ἑκάςου μέρους ἰδίως, καὶ

Β΄. Ἀπὸ τῶν διπλῶν παραγομένων, ὁποῦ γίνονται ἀφ' ἑκάςου μέρους, μὲ ἕκαςον μέρος τῶν ἑπομένων μεθ' ἑαυτό. δηλ: $(\alpha^2+2\beta+3\gamma+\beta^2+\varepsilon+4)^2=\alpha^4+4\beta^2+9\gamma^2+\beta^4+\varepsilon^2+16+4\alpha^2\beta+6\alpha^2\gamma+2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\varepsilon+8\alpha^2+1\alpha\beta\gamma+4\beta^3+4\beta\varepsilon+16\beta+6\gamma\beta^2\,6\gamma\varepsilon+24\gamma+2\beta\varepsilon^2+8\beta^2+8\varepsilon$. ὁμοίως $(4+5+2+3+7)^2=16+25+4+9+49+40+16+24+56+20+30+70+12+28+42=441.$

§. 332. Εὑρίσκομεν δὲ καὶ τὰ μέρη τοῦ διωνύμου εἰς κύβον ἀρθέντα, ἐὰν τὸ διώνυμον αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ πολλαπλασιάσωμεν, καὶ τὸ γινόμενον ἔτι ἅπαξ μεθ' ἑαυτὸ πολλαπλασιάσωμεν. διότι $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$

$$
\begin{array}{l}
\alpha+\beta \\
\underline{\alpha+\beta} \\
\alpha^2+\alpha\beta \\
\quad\underline{+\alpha\beta+\beta^2} \\
\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \\
\qquad\quad\underline{\alpha+\beta} \\
\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \\
\quad\underline{+\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3} \\
\alpha^3+3\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3
\end{array}
$$

Ἄρα συνίϛαται ὁ κύβος τοῦ διωνύμου.

1) Ἀπὸ τοῦ κύβου τοῦ πρώτου μέρους.

2) Καὶ ἀπὸ τοῦ τριπλοῦ παραγομένου τοῦ τετραγώνου τοῦ α΄ μέρους ἐπὶ τὸ δεύτερον μέρος.

3) Καὶ ἀπὸ τοῦ τριπλοῦ παραγομένου τοῦ πρώτου μέρους ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου μέρους.

4) Καὶ ἀπὸ τοῦ κύβου τοῦ δευτέρου μέρους.

Ἐὰν δὲ τὸ δεύτερον μέρος ἀποφατικὸν $(\alpha-\beta)$, ἔϛαι $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ (§. 329.) ἄρα ὁ κύβος

$$
\begin{array}{l}
\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \\
\qquad\quad\underline{\alpha-\beta} \\
\alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \\
\quad\underline{-\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3} \\
\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3
\end{array}
$$

Ἄρα καὶ οὕτως ἔχει τὰ αὐτὰ μέρη, πλὴν, ὅπου ἡ δύναμις τοῦ β περιττοβάθμιος, γίνεται ἐκεῖνο τὸ μέρος ἀποφατικόν· καὶ λοιπὸν εὐκόλως ὑψοῦμεν κατ' αὐτὰ τὰ μέρη ἕκαϛον διώνυμον εἰς κύβον.

$(2\alpha\chi+\chi^2)^3=8\alpha^3\chi^3+12\alpha^2\chi^4+6\alpha\chi^5+\chi^6$

$(1-\chi)^3=1-3\chi-3\chi^2-\chi^3$

$(3\alpha+\frac{1}{2})^3=27\alpha^3+\frac{27\alpha^2}{2}+\frac{9\alpha}{4}+\frac{1}{8}$

$(3\alpha-1)^3=27\alpha^3-27\alpha^2+9\alpha-1$

$(11)^3=(10+1)^3=1000+300+30+1=1331.$

$(999)^3=(900+90+9)=729000+218700+2170+729$
$=970299$· ἢ καὶ οὕτως

$(999)^3=(100-1)^3=1000000-30000+300-1=$
$970299.$

§. 333. Ἐὰν δὲ ζητεῖται ὁ κύβος ἑνὸς τριωνύμου, λαμβάνονται τὰ δύο μέρη εἰς ἓν μέρος, καὶ γίνεται διώνυμον· εἶτα ἐκτυλίομεν αὐτὸ εἰς κύβον ὡς ἀνωτέρω καὶ ἔπειτα ἐκτυλίομεν καὶ τὸν κύβον τῶν δύο μερῶν, καὶ εἶτα ἂν θέλωμεν καὶ τὰ τετράγωνα· ζητείσθω ὁ κύβος τοῦ τριωνύμου.

$(\alpha+\beta+\gamma)^3=[(\alpha+\beta)+\gamma]^3=(\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)^2\gamma+3\gamma^2(\alpha+\beta)$
$+\gamma^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+3(\alpha+\beta)^2\gamma+3\gamma^2(\alpha+\beta)+\gamma^3.$

ὁ κύβος λοιπὸν τοῦ τριωνύμου συνίσταται.

1) Ἀπὸ τοῦ κύβου τῶν δύω πρώτων μερῶν.

2) Ἀπὸ τοῦ τριπλοῦ παραγομένου τοῦ τετραγώνου τοῦ κεφαλαίου τῶν δύο πρώτων μερῶν ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος.

3) Καὶ ἀπὸ τοῦ τριπλοῦ παραγομένου τοῦ τετραγώνου τοῦ τρίτου μέρους ἐπὶ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο πρώτων μερῶν. καὶ,

4) Ἀπὸ τοῦ κύβου τοῦ τρίτου μέρους.

Α΄. $(1+\chi-\chi^2)^3=1+3\chi+3\chi^2+\chi^3-3(1+\chi)^2\chi^2+3\chi^4$
$(1+\chi)-\chi^6=1+3\chi+3\chi^2+\chi^3-3\chi^2-6\chi^3-3\chi^4+3\chi^4+$
$3\chi^5-\chi^6=1+3\chi-5\chi^3+3\chi^5-\chi^6$

Β΄. $(\alpha+1+2\chi)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1+3(\alpha+1)^2 2\chi+12\chi$
$(\alpha+1)+8\chi^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1+6\chi\alpha^2+12\chi\alpha+6\chi+12\chi^2\alpha$
$+12\chi^2+8\chi^3.$

Γ'. $(4+2+3)^3=64+96+48+8+9(4+2)^2+27(4+2)+27=64+96+48+8+144+144+36+108+54+27=729$.

Δ'. $(999)^3=(900+90+9)^3=729000000+218700000+21870000+2430000+486000+729000+24300+218700+2430+729=997002999$.

§. 334. Ἐὰν δὲ πολυώνυμον ᾖ, καὶ ζητῆται ὁ κύϐος γίνεται.

1) Ἀπὸ τοῦ κύϐου κατὰ μέρος ἑκάςου μέρους.

2) Ἀπὸ τοῦ τριπλοῦ παραγομένου ἑκάςου μέρους, ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ κεφαλαίου ὅλων τῶν προηγουμένων μερῶν.

3) Ἀπὸ τοῦ τριπλοῦ παραγομένου τοῦ τετραγώνου ἑκάςου μέρους ἐπὶ τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν προηγουμένων μερῶν.

Γενέσθω ὁ κύϐος τοῦ πολυωνύμου $(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+3(\alpha+\beta)^2\gamma+3\gamma^2(\alpha+\beta)+\gamma^3+3(\alpha+\beta+\gamma)^2\delta+3\delta^2(\alpha+\beta+\gamma)+\delta^3+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2\varepsilon+3\varepsilon^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+\varepsilon^3+3(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)^2\zeta+3\zeta^2(\alpha+\beta+\gamma+\gamma+\delta+\varepsilon)+\zeta^3$.

Ἐὰν δὲ καὶ τὰ τετράγωνα ἐκτυλίσωμεν ἔςαι $=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+3\alpha^2\gamma+6\alpha\beta\gamma+3\beta^2\gamma+3\alpha\gamma^2+3\beta\gamma^2+\gamma^3+3\alpha^2\delta+6\alpha\beta\delta+8\beta^2\delta+6\alpha\gamma\delta+6\beta\gamma\delta+3\gamma^2\delta+3\alpha\delta^2+3\beta\delta^2+3\gamma\delta^2+\delta^3+3\alpha^2\varepsilon+6\alpha\beta\varepsilon+3\beta^2\varepsilon+6\alpha\gamma\varepsilon+6\beta\gamma\varepsilon+3\gamma^2\varepsilon+6\alpha\delta\varepsilon+6\beta\delta\varepsilon+6\gamma\delta\varepsilon+3\delta^2\varepsilon+3\alpha\varepsilon^2+3\beta\varepsilon^2+3\gamma\varepsilon^2 3\delta\varepsilon^2+\varepsilon^3+3\alpha^2\zeta+6\alpha\beta\zeta+3\beta^2\zeta+6\alpha\gamma\zeta+6\beta\gamma\zeta+3\gamma^2\zeta+6\alpha\delta\zeta+6\beta\delta\zeta+6\gamma\delta\zeta+3\delta^2\zeta+3\varepsilon^2\zeta+6\alpha\beta\varepsilon+6\gamma\varepsilon\zeta+6\delta\varepsilon\zeta+3\alpha\zeta^2+3\beta\zeta^2+3\gamma\zeta^2+3\delta\zeta^2 3\varepsilon\zeta^2$.

Ἐις τοιαῦτα ὅταν ὁ πρωτόπειρος γυμνασθῇ, προχωρεῖ τὰ μέγιςα.

§. 335. Πῶς τὴν δευτέραν καὶ τρίτην τοῦ διωνύμου δύναμιν ἐκτυλίσομεν μέχρι τοῦδε, ἐμάθομεν. Πῶς ὅμως καὶ τὴν δ' καὶ ε', καὶ ς', καὶ γενικῶς μ δύναμιν ἐκτυλίσομεν, ἑξῆς μανθάνομεν· διότι πολλάκις ζητοῦνται αἱ ἀνωτέρω δυνάμεις τοῦ διωνύμου, καὶ πρέπει τοῦτον τὸν τρόπον νὰ μάθωμεν. Ὅθεν ἐνταῦθα δεικνύομεν μόνον τὴν ἐκτύλισιν αὐτοῦ εἰς ἀνωτέρας δυνάμεις· τὴν δὲ καθ' αὐτὸ δεῖξιν, καὶ τὴν πολύχρηστον χρῆσιν, εἰς τὸ Γ'. Βιβλίου θέλομεν εἰπῆ τὰ δέοντα, ὡς ὁ πολὺς Νεύθων ὁ εὑρετὴς τούτου ἀπέδειξεν. Ἠξεύρομεν ὅμως ὅτι ἐὰν τὸν κύβον τοῦ διωνύμου ἔτι μὲ τὸ αὐτὸ πολλαπλασιάσωμεν, γίνεται ἡ τετάρτη δύναμις αὐτοῦ (§. 296.)· καὶ ἐὰν ἔτι πολλαπλασιάσωμεν γίνεται ἡ πέμπτη, καὶ ἔτι ἡ ἕκτη, καὶ καθ' ἑξῆς· ὅθεν κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον παρίστανται τοῦ διωνύμου $(\alpha+\beta)$ αἱ δυνάμεις ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς δεκάτης κατὰ τὸ ἑξῆς διάγραμμα.

Α' $(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$ δύναμις.

Β' $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

Γ' $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$.

Δ' $(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$.

Ε' $(\alpha+\beta)^5=\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$.

ϛ' $(\alpha+\beta)^6=\alpha^6+6\alpha^5\beta+15\alpha^4\beta^2+20\alpha^3\beta^3+15\alpha^2\beta^4+6\alpha\beta^5+{}^6$.

Ζ' $(\alpha+\beta)^7=\alpha^7+7\alpha^6\beta+21\alpha^5\beta^2+35\alpha^4\beta^3+35\alpha^3\beta^4+21\alpha^2\beta^5+7\alpha\beta^6+\beta^7$.

Η' $(\alpha+\beta)^8=\alpha^8+6\alpha^7\beta+28\alpha^6\beta^2+56\alpha^5\beta^3+70\alpha^4\beta^4+56\alpha^3\beta^5+28\alpha^2\beta^6+8\alpha\beta^7+\beta^8$.

Θ' $(\alpha+\beta)^9+\alpha^9+9\alpha^8\beta+36\alpha^7\beta^2+84\alpha^6\beta^3+126\alpha^5\beta^4+126\alpha^4\beta^5+84\alpha^3\beta^6+36\alpha^2\beta^7+9\alpha\beta^8+\beta^9$.

Γ' $(\alpha+\beta)^{10}=\alpha^{10}+10\alpha^9\beta+45\alpha^8\beta^2+120\alpha^7\beta^3+210\alpha^6\beta^4+252\alpha^5\beta^5+210\alpha^4\beta^6+120\alpha^3\beta^7+45\alpha^2\beta^8+10\alpha\beta^9+\beta^{10}$.

Καὶ αὕτη εἶναι ἡ ἀνάπτυξις τοῦ διωνύμου ἀπὸ τῆς πρώτῆς δυνάμεως, μέχρι τῆς δεκάτης· ἐὰν ὅμως τοῖς ἑξῆς προσέξωμεν, ἐκτυλίσομεν αὐτὸ καὶ εἰς δυνάμεις μείζονας· ἓν μόνον σημειοῦμεν ἐνταῦθα, ὅν τὸ διώνυμον ἔχῃ σημεῖον ἀποφατικὸν οὕτω $(\alpha-\beta)$, ἢ οὕτω $(-\alpha+\beta)$ καὶ εἰς τὴν ἐκτύλισιν τῶν δυνάμεων, τὰ μέλη ἐκεῖνα γίνονται καταφατικὰ, ὅσα ἔχουσιν αὐτὴν τὴν ἀποφατικὴν ποσότητα, εἰς δύναμιν ἐκθέτου περιττήν· δηλ: ἐὰν τὸ β ἀποφατικὸν, ὅλα τὰ μέρη ἀποφατικὰ, ὅσα ἔχουσι β, β^3, β^5, β^7 κτ.

Ἐὰν δὲ τὸ α ἀποφατικὸν. ἐκεῖνα τὰ μέλη ἀποφατικὰ, ὅσα ἔχουσιν α, α^3, α^5, α^7, α^9 κτ.

§. 336. Ἐὰν εἰς αὐτὸν τὸν πίνακα τῶν δυνάμεων παρατηρήσωμεν, εὑρίσκομεν.

Α΄. Ὅτι τὸ πρῶτον μέρος τῆς δυνάμεως ἔχει μόνον τὴν πρώτην ποσότητα τοῦ διωνύμου α, καὶ ὁ ἔσχατος μόνον τὴν δευτέραν ποσότητα τοῦ διωνύμου β· εἰς ὅλας τὰς δυνάμεις· τὰ δὲ μεταξὺ μέρη ὅλα ἔχουσι· καὶ τοὺς δύο ὁμοῦ παράγοντας πολλαπλασιασμένους οὕτω $\alpha\beta$.

Β΄. Εὑρίσκομεν τοὺς ἐκθέτας τῶν γραμμάτων τούτων εὐκόλως· διότι τὸ πρῶτον μέρος εἰς κάθε δύναμιν ἔχει ἐκθέτην τὸ ποσὸν τῆς δυνάμεως· ἐὰν δηλ: εἶναι ὀγδόη δύναμις ἔχει 8, ἐὰν δὲ πέμπτη 5, καὶ δεκάτη ἔχει 10. καὶ μ δύναμις, μ ἔξει ἐκθέτην κτ: καὶ τὰ ἑξῆς μέρη ὅμως ἔχει τὸ α μὲ ἐκθέτην μίαν μονάδα· μικρότερον ἀπὸ τὸ μέρος τὸ προηγούμενον, ἄχρις οὗ τὸ α καταντήσει νὰ ἔχῃ μονάδα ἐκθέτην, καὶ τότε παύει καὶ τὸ α· ὡς εἰς τὴν ἑβδόμην δύναμιν α^7, α^6, α^5, α^4, α^3, α^2, α^1. ἐὰν δὲ μ ἡ δύναμις, πάλιν τὸ α ἔχει α^{μ}, $\alpha^{\mu-1}$, $\alpha^{\mu-2}$, $\alpha^{\mu-3}$, $\alpha^{\mu-4}$, ἕως οὗ νὰ καταντήσῃ τὸ μ νὰ γένῃ $\mu-\mu+1$· δηλ: ἐὰν τὸ μ ᾖ 6. νὰ γένῃ $\mu-2+6=1$.

Γ′. Τὸ β ἄρχεται ἀπὸ τὸ β' μέρος με ἐκθέτην μονάδα, καὶ εἰς τὰ ἑξῆς μέρη αὐξάνει ὁ ἐκθέτης του μὲ μίαν μονάδα, ἕως νὰ γένῃ ὁ ἐκθέτης αὐτοῦ ἴσος μὲ τὴν δύναμιν, ὁποῦ ζητεῖται· π. χ. ἂν ζητῆται ἡ 5 δύναμις ἀπὸ τὸ δεύτερον μέρος, γίνεται β, β^2, β^3, β^4, β^5, ὁμοίως καὶ εἰς τὰς λοιπὰς δυνάμεις. Λοιπὸν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, εὐκόλως εὑρίσκομεν τὴν σειρὰν τοῦ διωνύμου $(\alpha+\beta)$ εἰς τὴν δωδεκάτην δύναμιν, μόνον τὴν κατάςρωσιν τῶν γραμμάτων μὲ τοὺς ἐκθέτας χωρὶς τῶν συνεργῶν οὕτω α^{12}, $\alpha^{11}\beta$, $\alpha^{10}\beta^2$, $\alpha^9\beta^3$, $\alpha^8\beta^4$, $\alpha^7\beta^5$, $\alpha^6\beta^6$, $\alpha^5\beta^7$, $\alpha^4\beta^8$, $\alpha^3\beta^9$, $\alpha^2\beta^{10}$, $\alpha^1\beta^{11}$, β^{12}. αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι ὁ ἐκθέτης τοῦ α ἄρχεται 12 εἰς τὴν δωδεκάτην, καὶ μειοῦται μίαν μονάδα κατὰ τάξιν μέχρι α. τὸ δὲ β ἄρχεται ἀπὸ τὸ δεύτερον μέρος μὲ ἐκθέτην μονάδα, καὶ καθ' ἑξῆς αὐξάνει ὁ ἐκθέτης του μὲ μίαν μονάδα μέχρι β^{12} οὕτω, καὶ ἐὰν ἡ μ δύναμις ζητῆται

$$\alpha^{\mu},\ \alpha^{\mu-1}\beta.\ \alpha^{\mu-2}\beta^2,\ \alpha^{\mu-3}\beta^3,\ \alpha^{\mu-4}\beta^4,\ \beta^4 \text{ κτ.}$$

Δ′. Εὐκόλως μανθάνομεν τέλος καὶ πῶς τοὺς συνεργοὺς εὑρίσκομεν κατὰ δύο τρόπους.

α.) Ἂν ὁ ἐκθέτης τῆς ζητουμένης δυνάμεως ἦναι ἀριθμὸς, κάλλιον τοῦτον τὸν τρόπον γενέσθω ἡ τούτων εὕρεσις. ἐπειδὴ ἡμεῖς εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πρῶτον μέρος εἰς ὅλας τὰς δυνάμεις ἔχει μονάδα συνεργὸν, καὶ τὸ δεύτερον μέρος ἀεὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ πρώτου μέρους λαμβάνει εἰς συνεργόν· δηλ: ἂν πέμπτη δύναμις, τὸ β' ἔχει 5 συνεργὸν, ἂν δεκάτη, τὸ β', 10 κτ: ἄρα ἄνω εἰς τὴν δωδεκάτην εἶναι τὸ πρῶτον· καὶ δεύτερον μέρος τοιοῦτον $\alpha^{12} + 12\alpha^{11}\beta$. τὸν δὲ συνεργὸν τῶν ἑξῆς μερῶν εὑρίσκομεν εὐκόλως ἀπὸ τοῦ ἑξῆς προηγουμένου μέρους, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ α τοῦ προηγουμένου μέρους μὲ τὸν συνεργόν του, καὶ τοῦτο τὸ γινόμενον διέλωμεν μὲ τὸν ἀριθμὸν τῆς τάξεως, ὁποῦ εὑρίσκεται τὸ αὐτὸ μέρος. δηλ: μὲ τὸν 2, ἂν δεύτερον ἦναι τὸ μέρος, μὲ τὸν 3, ἂν τρίτον κτ. ὅθεν εἰς τὴν δωδεκάτην δύναμιν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν συνεργὸν τοῦ τρίτου μέρους, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἐκθέτην τοῦ α τοῦ δευτέρου μέρους μὲ τὸν συνεργόν του, καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ μὲ δύο· διότι δεύτερον τοῦτο τὸ μέρος καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ὁ συνεργὸς τοῦ τρίτου δηλ: $\frac{12.\ 11}{2}=66$. ὅθεν τὰ τρία μέρη οὕτω $\alpha^{12}+12\alpha^{11}\beta+66^{10}\beta^{2}$. Πάλιν ὁ συνεργὸς τοῦ τετάρτου μέρους εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ τρίτου μέρους μὲ τὸν συνεργόν του, καὶ διὰ τοῦ 3 διέλωμεν, ὅτι τρίτον τοῦτο τὸ μέρος. $\frac{10.\ 66}{3}=220$ ἄρα $\alpha^{12}+12\alpha^{11}\beta+66\alpha^{10}\beta^{2}+220\alpha^{9}\beta^{3}$. οὕτως εὑρίσκονται καὶ τὰ λοιπὰ αὐτῆς τῆς δωδεκάτης δυνάμεως οὕτω, $\alpha^{12}+12\alpha^{11}\beta+06\alpha^{10}\beta^{2}+220\alpha^{9}\beta^{3}+405\alpha^{8}\beta^{4}+792\alpha^{7}\beta^{5}+924\alpha^{6}\beta^{6}+792\alpha^{5}\beta^{7}+495\alpha^{4}\beta^{8}+220\alpha^{3}\beta^{9}+66\alpha^{2}\beta^{10}+12\alpha^{1}\beta^{11}+\beta^{12}$.

Τὰ αὐτὰ παρατηρηθήτωσαν καὶ εἰς τὸν πίνακα· διότι εἰς τὴν ἑβδόμην δύναμιν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν συνεργὸν τοῦ τετάρτου μέρους, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἐθέτην τοῦ α τοῦ τρίτου μέρους μὲ τὸ συνεργόν του, καὶ διαιροῦμεν μὲ 3, καὶ ἔςαι ὁ συνεργὸς τοῦ τετάρτου μέρους $\frac{21.\ 5}{3}=35$ κτ. καὶ οὗτος ὁ τρόπος δοκεῖ ἡμῖν ὁ προχειρότερος, ὅταν ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως ἦναι ἀριθμός. Διὸ οὐ τινος μέρους τὸν συνεργὸν ζητοῦμεν ἀπὸ τοῦ ἐγγὺς προηγουμένου, ἀμέσως αὐτὸν εὑρίσκομεν· ὅταν ὅμως ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως εἶναι γράμμα, ἔςαι ὁ δεύτερος τρόπος ὁ ἑξῆς.

6'). Ὁ συνεργὸς ἑκάςου μέρους εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ὅλους τοὺς ἐκθέτας τοῦ α ὅλων τῶν προηγουμένων μερῶν, πλὴν αὐτοῦ τοῦ α τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ συνεργὸς, καὶ διέλωμεν μὲ ὅλους τοὺς ἐκθέτας τοῦ 6 πεπολλαπλασιασμένους, ἀφ' οὗ τὸ 6 ἄρχηται μέχρι καὶ αὐτοῦ τοῦ μέρους, ὅπου ζητεῖται ὁ συνεργός· ὡς ἄνω εἰς τὴν δωδεκάτην δύναμιν ζητεῖται ὁ συνεργὸς τοῦ πέμπτου μέρους· ἄρα οἱ ἐκθέται τοῦ α μέχρι τοῦ τετάρτου ἦν 12. 11. 10. 9. τοῦ δὲ 6 οἱ ἐκθέται μέχρι τοῦ πέμπτου μέρους ἦσαν 1. 2. 3. 4. ἄρα ὁ συνεργὸς τοῦ πέμπτου μέρους $= \frac{12.\ 11.\ 10.\ 9.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} = 11.\ 5.\ 9 = 495$. Ἐὰν δὲ ὁ συνεργὸς τοῦ τετάρτου ὅρου τῆς ἕκτης δυνάμεως ζητεῖται, ἔςαι $\frac{6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3} = 20$. καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον εὐκόλως εὑρίσκομεν τὴν δεκάτην πέμπτην δύναμιν $(\alpha + 6)$

$$(\alpha+6)^{15} = \alpha^{15} + \frac{15}{1}\alpha^{14}6 + \frac{15.\ 14}{1.\ 2}\alpha^{13}6^2 + \frac{15.\ 14.\ 13}{1\ \ 2.\ \ 3}\alpha^{12}6^3 + \frac{15.\ 14.\ 13.\ 12}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}\alpha^{11}6^4 +$$

$$\frac{15.\ 14.\ 13.\ 12.\ 11}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5}\alpha^{10}6^5 + \frac{15.\ 14.\ 13.\ 12.\ 11.\ 10}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6}$$

$$\alpha^9 6^6 + \frac{15.\ 14.\ 13.\ 12.\ 11.\ 10.\ 9}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6.\ \ 7}\alpha^8 6^7 +$$

$$\frac{15.\ 14.\ 13.\ 12.\ 11.\ 10.\ 9.\ 8}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6.\ \ 7.\ \ 8}\alpha^7 6^8 +$$

$$\frac{15.\,14.\,13.\,12.\,11.\,10.\,9.\,8.\,7}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9}\alpha^6\beta^9+$$

$$\frac{15.\,14.\,13.\,12.\,11.\,10.\,9.\,8.\,7.\,6}{1\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9.\,10}\alpha^5\beta^{10}+$$

$$\frac{15.\,14.\,13.\,12.\,11.\,10.\,9.\,8.\,7.\,6.\,5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9.\,10.\,11}\alpha^4\beta^{11}+$$

$$\frac{15.\,14.\,13.\,12.\,11.\,10.\,9.\,8.\,7.\,6.\,5.\,4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9.\,10.\,11.\,12}\alpha^3\beta^{12}+$$

$$\frac{15.\,14.\,13.\,12.\,11.\,10.\,9.\,8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,3}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9.\,10.\,11.\,12.\,13}\alpha^2\beta^{14}+$$

$$\frac{15.\,14.\,13.\,12.\,11.\,10.\,9.\,8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2.}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9.\,10.\,11.\,12.\,13.\,14}$$

$\alpha\beta^{14}+\beta^{15}$.

Εἰς αὐτὸν τὸν τρόπον βλέπομεν ὅτι πολλοὶ παράγοντες συναναιροῦνται, καὶ καὶ μάλιςα εἰς τὸ ἔσχαττον ὅλοι συναναιροῦνται, καὶ μένει μόνον 15 πηλίκον· ἀλλ' εἰς ἀριθμητικὸν ἐκθέτην καὶ μὲ τὸν πρῶτον τρόπον γίνεται· εἰς Ἀγεβραϊκὸν ὅμως κατὰ τοῦτον ἀναγκαίως. Ἔςω ὅτι ζητεῖται ἡ δύναμις μ τοῦ διωνύμου· ἄρα $(\alpha+\beta)^\mu=\alpha^\mu+$

$$\frac{\mu}{1}\alpha^{\mu-1}\beta+\frac{\mu(\mu-1)}{1.\,2}\alpha^{\mu-2}\beta^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.\,2.\,3.}\alpha^{\mu-3}\beta^3+$$

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.\,2.\,3.\,4.}\alpha^{\mu-4}\beta^4+$$

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.}\alpha^{\mu-5}\beta^5.\ \text{κτ.}$$

Καὶ οὕτω τελειώνει ἡ σειρὰ ὅχρις οὗ γένῃ ὁ ἐκθέτης τοῦ $\alpha=\mu-\mu+1$, καὶ ὁ ἐκθέτης τοῦ $\beta=\mu$. Καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ἐκτυλίεται τὸ διώνυμον εἰς οἱανδήποτε ζητουμένην δύναμιν· ἐὰν δὲ καὶ τριώνυμον ᾖ, καὶ τετραώνυμον κτ. λαμβάνομεν δύο μέρη, ἢ τρία εἰς μίαν παρένθεσιν, διὸ νὰ γένῃ διώνυμον, καὶ κατὰ τοὺς ἄνω κανόνας ἐκτυλίομεν αὐτὸ εἰς δυνάμεις. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μ ὡς καθόλου οἱανδήποτε ποσότητα σημαίνει, καὶ ἀκέραιον καὶ κλασματικὴν, καὶ ἀποφατικὴν, καὶ καταφατικήν· ἄρα καὶ τὸ διώνυμον, ὅπου ἔχει ἐκθέτην, ἢ ἀκέραιον, ἢ κλασματικὸν, ἢ ἀποφατικὸν, τούτου τὸν τρόπον εἰς δυνάμεις ὑψοῦται κόλλιςα. Ποῦ ὅμως καὶ εἰς τί τοῦτο χρήσιμον, ὕςερον ῥηθήσεται· διότι δὲν δυνάμεθα ἀκόμη νὰ μάθωμεν τὰς λυσιτελείας αὐτοῦ.

§. 337. Ἐὰν τὰς ἴσας ποσότητας εἰς ἴσας δυνάμεις ὑψώσωμεν καὶ αἱ δυνάμεις ἴσαι εἰσίν. Ἔςω $\alpha=5$, $\beta=3$. λοιπὸν καὶ $\alpha+\beta=5+3$ καὶ $(\alpha+\beta)^2=(5+3)^2$. καὶ $(\alpha+\beta)^3=(5+3)^3$, καὶ $(\alpha+\beta)^\mu=(5=3)^\mu$, καὶ ἔτι $8=(5+3)$ καὶ $8^2=5.\ 5+2.\ 5.\ 3+3.\ 3$ κατὰ τὸ διώνυμον $64=25+30+9=64$.

Ἄρα καὶ τὰ σκέλη μιᾶς ἐξισώσεως, ἐὰν ἄμφω εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν ἀρθῶσιν, ἡ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ. Ἔςω ἡ ἐξίσωσις $4-20+33=5+10+\chi$· ἄρα $(4-20+33)^3=(5+10+\chi)^3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

Περὶ ἐξαγωγῆς ῥιζῶν, τῶν ἁπλῶν, καὶ συμπεπλεγμένων ἀριθμῶν.

§. 338. Μεταξὺ τῶν ἐργασιῶν τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ Ἀλγέβρας, εὑρίσκεται καὶ ἡ ἐργασία τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν, ἐργώδης μὲν κατά τι, πλὴν πόνυ ἀναγκαία· διότι πολλάκις ἀπαιτούμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν ἀπὸ ποσότητας γραμμάτων καὶ ἀριθμῶν πότε τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, πότε τὴν κυβικὴν, καὶ πότε τῆς τετάρτης δυνάμεως τὴν ῥίζαν· σπανίως ὅμως καὶ τῆς πέμπτης δυνάμεως κτ: ἀλλ' ἡμεῖς εἰς τὸ παρὸν Κεφαλαιον μόνον τὴν μέθοδον. πῶς τὴν κυβικὴν, καὶ τετραγωνικὴν ῥίζαν εὑρίσκομεν, καὶ ἐξ αὐτῆς τὴν ῥίζαν τῆς τετάρτης δυνάμεως, θέλομεν διδάξει· τὴν δὲ ῥίζαν τῶν ἀνωτέρων δυνάμεων, ἡ χρῆσις τοῦ διωνύμου, καὶ ἄλλαι μέθοδοι θέλουν μᾶς διδάξει σαφέςερον. Πρὶν ὅμως εἰς αὐτὸ τὸ ἔργον χωρήσωμεν πρέπει νὰ ἐθυμηθῶμεν ὅτι εἰς τοὺς μονομερεῖς ἀριθμοὺς ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν καὶ κυβικὴν ῥίζαν, ἐὰν τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως διέλωμεν διὰ τοῦ ἐκθέτου τῆς ῥίζης (§. 308), ὡς $\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}=a^2$. καὶ $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$ κτ: καὶ ὅτι ἐάν τις δύναμις ἔχῃ ἐκθέτην κλασματικὸν, ἐκεῖ φαίνεται ὅτι ῥίζα μιᾶς δυνάμεως ἀπαιτεῖται, ἧς ὁ ἐκθέτης ὁ παρονομαςὴς τοῦ κλασματικοῦ ἐκθέτου ὡς $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$. καὶ $a^{\frac{5}{2}}=\sqrt[2]{a^5}$. καὶ $a^{\frac{\nu}{\mu}}=\sqrt[\mu]{a^\nu}$ κτ: λείπεται ἄρα ἡ μέθοδος τοῦ πῶς εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας τῶν συμπεπλεγμένων ἀριθμῶν.

§. 339. Ὁ ἀριθμὸς, ὁποῦ εἰς κλάσμα παρίςαται ἢ γνήσιον, ἢ νόθον, καὶ ὁ παρονομαςὴς ἐπακριβὲς εἰς τὸν ἀριθμητὴν δὲν περιέχεται, οὗτος ἐὰν εἰς οἱανδήποτε δύναμιν ἀρθῇ, πάλιν ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν γίνεται. Ἔςω ὁ $\frac{3}{5}$, ἐπειδὴ δὲ ὁ 5 εἰς τὸν 3 ἐπ' ἀκριβὲς δὲν περιέχεται, ἄρα καὶ ὁ 5. 5 εἰς τὸν 3. 3 οὔτω $\frac{3.\ 3}{5.\ 5}$· οὔτε οὕτω $\frac{3^3}{5^3}$

$=\frac{3.\ 3.\ 3}{5.\ 5.\ 5}$· οὔτε οὕτω $\frac{3^4}{5^4}=\frac{3.\ 3.\ 3.\ 3}{5.\ 5.\ 5.\ 5}$· τοῦτο γίνεται καὶ εἰς τὸν $\frac{13}{5}$· διότι ὁ 5 εἰς τὸν 13 ἐπακριβῶς δὲν εὑρίσκεται, καὶ ἑπομένως ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν γίνεται· ἄρα οὔτε ὁ $\frac{13^2}{5^2}$, οὔτε ὁ $\frac{13^3}{5^3}$, οὔτε $\frac{13^\mu}{5^\mu}$· καὶ φανερὸν ὅτι ἀριθμὸς κλασματικὸς ὁσάκις ἂν ἐφ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῇ, ἀκέραιος οὐδέποτε παρίσταται.

§. 340. Ἡ ῥίζα μιᾶς δυνάμεως εἶναι, νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις, ὅστις ἐὰν ἐφ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῇ ἅπαξ, ἢ δὶς, ἢ τρὶς, κατὰ τὸν ἐκθέτην τῆς ῥίζης, τὸ παραγόμενον νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα ἐξάγεται (§. 301.), ὡς ἡ ῥίζα ἡ $\sqrt[2]{\ }$ τοῦ 9 εἶναι ὁ 3. διότι 3. 3 = 9· ἡ δὲ ῥίζα ἡ $\sqrt[3]{\ }$ τοῦ 64, εἶναι ὁ 4· διότι 4. 4. 4 = 64· ἐὰν ὅμως ζητῆται ἡ ῥίζα τοῦ 14 ἡ τετραγωνικὴ, αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι ὁ 3 εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὴν ὀρθὴν ῥίζαν, διότι 3. 3 = 9 καὶ ὄχι 14· ὁ δὲ 4 πάλιν μεγαλήτερος ἀπὸ τὴν ῥίζαν τὴν $\sqrt{14}$· διότι 4. 4 = 16, καὶ ὄχι 14· λοιπὸν ἐπειδὴ εἰς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 14 ὁ μὲν $3<\sqrt{14}$, ὁ δὲ $4<\sqrt{14}$· ἕπεται νὰ εἶναι μεταξὺ τοῦ 3 καὶ 4 ἡ ὀρθὴ ῥίζα $\sqrt{\ }$ τοῦ 14, ἤτοι νὰ εἶναι 3 καὶ ἓν κλάσμα τῆς μονάδος, ἤτοι ἀριθμὸς κλασματικός. Ἀλλ᾽ ἡ ἀληθὴς τετραγωνικὴ ῥίζα, ἀφ᾽ οὗ αὐτὴ καθ᾽ ἑαυτὴν πολλαπλασιασθῇ, γίνεται αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα ἐξάγεται, καὶ ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς ὁσάκις ἂν αὐτὸς καθ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῇ, ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν γίνεται (§. 339.), ἄρα ἡ ἀληθὴς τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 14, καὶ τῶν τοιούτων ὅλων τῶν ἀκεραίων οὔτε εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς εὑρίσκεται, οὔτε εἰς κλασματικούς. Καὶ λοιπὸν ἐντελῆ ῥίζαν δυνάμεων οὐδέποτε εὑρίσκομεν ἐκείνων τῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ῥίζαν εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς δὲν ἔχομεν. ὡς ἡ $^2\sqrt{6}$, ἡ $\sqrt{2}$, ἡ $^3\sqrt{10}$, ἡ $\sqrt{20}$, ἡ $^3\sqrt{75}$ κτλ. ὁμοίως καὶ ἡ $\sqrt{\alpha}$, ἡ $^3\sqrt{\beta}$ κτλ, ἐν ὅσῳ ἡ ποσότης α, καὶ β δὲν διορισθῇ καταμετρητή.

§. 341. Οἱ ἀριθμοὶ, ἢ αἱ ποσότητας ἀπὸ τῶν ὁποίων ἐξάγεται ἡ ῥίζα ἐπ' ἀκριβὲς μιᾶς οἱασδήποτε δυνάμεως, λέγονται καταμετρηταὶ, καὶ λογικαὶ, καὶ ῥηταί· ὡς $\sqrt{4}=2$. καὶ $^3\sqrt{27}=3$· καὶ $^5\sqrt{32}=2$· καὶ $^3\sqrt{1000}=10$· καὶ $^3\sqrt{\beta^3}=\beta$ καὶ $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$· καὶ $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$· καὶ $\frac{\sqrt{\alpha^2}}{^3\sqrt{\beta^6}}=\frac{\alpha}{\beta^2}$ κτλ. Αἱ ποσότητες δὲ ἐκεῖναι ἀπὸ τῶν ὁποίων ἡ ῥίζα μιᾶς δυνάμεως εἰς ὁλοκλήρους ἀριθμοὺς δὲν δίδεται, καὶ ἐπομένως οὔτε εἰς κλασματικοὺς (§. 341.), λέγονται ἀκαταμέτρητοι, καὶ ἄλογοι, καὶ ἄῤῥητοι· ὡς $\sqrt{5}$, $^3\sqrt{6}$, $^5\sqrt{16}$· $\sqrt{\alpha}$, $^3\sqrt{\alpha^2}$, $\frac{\sqrt{8}}{^3\sqrt{16}}$ κτλ καὶ φανερὸν ὅτι ἡ μὲν ποσότης $\sqrt{4}$ λέγεται λογικὴ, ἡ δὲ $^3\sqrt{4}$ ἄλογος. Ἔτι ἡ μὲν $^3\sqrt{27}$ λογικὴ, ἡ δὲ $\sqrt{27}$, ἄλογος· διότι ἐξ ἐκείνων ἡ ῥίζα ἐξάγεται, ἐκ τούτων οὐχί. Ἔτι ἡ ποσότης $^3\sqrt{\alpha^2}$ ἄλογος· ἐὰν ὅμως διορισθῇ $\alpha=8$, γίνεται λογική· τὸ γὰρ λογικὸν, καὶ ἄλογον λέγεται, καθότι ἢ ἐπ' ἀκριβὲς, ἢ μὴ ἐπ' ἀκριβὲς ἡ ῥίζα εὑρίσκεται· διότι τῶν ἀλόγων ἡ ῥίζα ἐπ' ἀκριβὲς οὐδέποτε εὑρίσκεται· οἱ ἀριθμητικοὶ ὅμως εὑρίσκουσι καὶ τούτων τὰς ῥίζας τοσοῦτον ἐγγὺς τῆς ἀληθοῦς, ὥστε ἡ ἀπάτη εἶναι πάντη ἀνεπαίσθητος, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς δείξομεν. Ἀλλὰ διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ταύτη ἀληθὴς ῥίζα, ἡ ἐργασία προβαίνει ἐπ' ἄπειρον, καὶ ἴσως διὰ τοῦτο ἀκαταμετρίτους, καὶ ἀῤῥήτους προσεῖπον αὐτάς.

§. 342. Διὰ νὰ βαδίσωμεν ἰδὲ κατὰ τάξιν, πρέπει πρῶτον νὰ μάθωμεν ἐκείνους τοὺς ἀριθμοὺς, ὁποῦ δίδουσι τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀπὸ τὴν μονάδα ἕως εἰς τὸν 10· δηλ: τοὺς 9 μοναδικοὺς χαρακτῆρας· διότι τοῦ 10 τὰς δυνάμεις ἐμάθομεν (§. 19.)· ἔπειτα ἐκείνους, ὁποῦ δίδουσιν εἰς αὐτοὺς τὴν κυβικὴν ῥίζαν, καὶ ὅςις ἂν θέλῃ, καὶ τὴν ῥίζαν τῆς τετάρτης δυνάμεως· διότι ἀναγκαῖον εἶναι κατ' ἀρχὰς, ὡς καὶ εἰς τὸν πυθαγορικὸν Ἄβακα, νὰ προγινώσκωμεν τίς ὁ ἀριθμὸς, ὅςις παρέχει ῥίζαν τετραγωνικὴν, καὶ κυβικὴν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 καὶ 10, καὶ εἰς τοῦτο ὁ ἑξῆς Πίναξ χρήσιμος.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Ῥίζαι
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Τετράγωνα
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	Κῦβοι
1	16	81	256	625	1296	2401	4096	7561	10000	δ'. δυνάμεις γινόμεναι

Εἰς αὐτὸ τὸ διάγραμμα, ἐάν τις τὴν τετάρτην δύναμιν ἐξέλῃ, πρέπει ἀναγκαίως τὰ λοιπὰ νὰ μάθῃ ἐκ ςήθους, καὶ νὰ ἠξεύρῃ λ. χ. ὅτι ὁ 25 ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν τὸν 5, ὁ 81 τὸν 9, καὶ ἀνάπαλιν. τὸ τετράγωνον τοῦ 6 εἶναι ὁ 36, καὶ τοῦ 7 εἶναι ὁ 49 κτ: καὶ ἔτι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 216 εἶναι ὁ 6, καὶ τοῦ 512, ὁ 8, καὶ τοῦ 27 ὁ 3, καὶ ἀνάπαλιν. ὁ κύβος τοῦ 9 εἶναι ὁ 729, καὶ τοῦ 7 ὁ 343 καὶ τοῦ 5 ὁ 125· ἔτι καὶ τοῦτο ἀπ' αὐτοῦ τοῦ διαγράμματος μανθάνει ἕκαςος, ὅτι ἡ ἐγγὺς ἐλάττων τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 76 εἶναι ὁ 8, καὶ ἡ ἐγγὺς ἐλάττων κυβικὴ ῥίζα τοῦ 352 εἶναι ὁ 7· τοῦ δὲ 218 ὁ 6· καὶ τοῦ 18 ὁ 2· διότι ταῦτα προαπαιτοῦνται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ῥιζῶν.

§. 343. Πρέπει εἰς αὐτὸ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι κανένας ἁπλοῦς χαρακτὴρ τῶν ἐννέα ἔχει τὸ τετράγωνον εἰς πλείονας τῶν δύω χαρακτήρων· ἔχουσιν ὅμως τινὲς αὐτῶν καὶ εἰς ἕνα, ὡς ὁ 2 καὶ 3· οὔτε τὸν κύβον ἔχει τις εἰς πλείονας τῶν τριῶν, ἔχουσιν ὅμως τινὲς αὐτῶν καὶ εἰς δύω, καὶ εἰς ἕνα χαρακτῆρα· οὔτε τὴν τετάρτην δύναμιν εἰς πλείονας τῶν τεσσάρων χαρακτήρων· τινὲς ὅμως αὐτῶν ἔχουσιν αὐτὴν καὶ εἰς ἕνα, ἕτεροι εἰς δύω, καὶ ἕτεροι εἰς τρεῖς χαρακτῆρας, καὶ χρησιμεύει αὕτη ἡ παρατήρησις ὕςερον· καὶ τέλος, ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ, ὁποῦ εἰς αὐτὸν τὸν Πίνακα δὲν εὑρίσκονται εἶναι ἄλογοι.

1) Περὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

§. 344. Η ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης τῆς τετραγωνικῆς εἶναι ἡ ἀπεναντία μέθοδος ἀπὸ ἐκείνην, καθ' ἣν εἰς δύναμιν τετραγωνικὴν ὑψώνομεν· διότι εἰς τὸ ὕψωμα τῶν δυνάμεων (§. 321) ἐζητεῖτο μία ποσότης, ἡ 8 φέρε νὰ ὑψωθῇ εἰς τετράγωνον, καὶ ἦν 64. ἐνταῦθα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τοῦ 64, ὁ 8. ἐκεῖνο ὁποῦ ἐκεῖ ἐζητεῖτο, ἐδῶ δίδεται· ἄρα πρέπει ἐκεῖνα, ὁποῦ ἐκεῖ κατασκευάζομεν, ἐδῶ νὰ ἀνασκευάσωμεν· καὶ ὅλως τὸ ἐναντίον ἐκείνης τῆς μεθόδου νὰ κάμωμεν, ἀλλ' ἀμὴν τὸ ὕψωμα τῶν δυνάμεων εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀνάγεται, οὗτος δ' ἐναντίος τῇ διαιρέσει· ἄρα ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν εἰς τὴν διαίρεσιν ἀνάγεται. Ἐπειδὴ ὅμως τὰς ἐξαγωγὰς τῶν ῥιζῶν εἰς τὰς ἁπλᾶς ποσοτητας τὰς Ἀλγεβραϊκὰς ἐμάθομεν (§. 338), τὰς δ' ἀριθμητικὰς ῥίζας τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ διάγραμμα ἔγνωμεν, λείπεται νὰ μάθωμεν πῶς ἐξάγωμεν τὴν ῥίζαν ἑνὸς διωνύμου εἰς τὰ γράμματα, καὶ τὰς συνθέτους τετραγωνικὰς ῥίζας εἰς τοὺς ἀριθμούς· καὶ εἰς τοῦτο ληφθήτω πάλιν τὸ τετραγωνικὸν διώνυμον.

§. 345. Κάθε ἀριθμὸς σύνθετος, καὶ συμπεπλεγμένος εἴτε ἀριθμοῖς, καὶ γράμμασιν, ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ εἰς διώνυμον (§. 329), ὡς ὁ 13=10+3). καὶ 568=560+8 κτλ· οὕτω καὶ ὁ $\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma$, καὶ $56\beta+\frac{\alpha}{\gamma}-\beta = (56\beta+\frac{\alpha}{\gamma})-\beta$ κτλ· ἄρα καὶ κάθε ποσότης ἀριθμητική, καὶ ἀλγεβραϊκὴ τῆς ὁποίας ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ζητεῖται· νοεῖται, ὅτι ἀπὸ διωνύμου ῥίζης ὑψώθη εἰς τετράγωνον, καὶ κατὰ τὸ διώνυμον κατὰ νόμους ἐναντίους ἡ ῥίζα ἐξάγεται. Ἡμεῖς εὕρομεν τὸ τετράγωνον τοῦ διωνύμου (§. 329) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$. διὰ νὰ εὕρωμεν ἀπ' αὐτοῦ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, πρέπει νὰ εὕρωμεν πάλιν $\alpha+\beta$ τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον μέρος τοῦ διωνύμου· τὸ πρῶτον ὅμως μέρος εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸ πρῶτον μέρος τοῦ τετραγώνου, ἐὰν ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν (§. 301) οὕτω $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$. ἄρα εὕρηται τὸ πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης α. ἤδη ποιοῦμεν αὐτὴν τὴν ῥίζαν τετράγωνον, καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ ὅλον τὸ τετράγωνον, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα φαίνεται· καὶ μένει λείψανον $2\alpha\beta+\beta^2$. διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ τὸ δεύτερον μέρος τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ λειψάνου τὸ β, πρέπει νὰ διπλασιάσωμεν τὸ ἤδη εὑρεθὲν α, καὶ νὰ διέλωμεν τὸν

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}=\alpha+\beta \\
-\alpha^2 \\
\hline
\quad 2\alpha\beta+\beta^2 : 2\alpha+\beta \\
\quad 2\alpha\beta+\beta^2 \\
\quad - \quad - \\
\hline
\quad 0
\end{array}
$$

δεύτερον ὅρον τοῦ τετραγώνου οὕτω $\frac{2\alpha\beta}{2\alpha}=\beta$, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον μέρος τῆς ῥίζης τὸ β. Ἐὰν δὲ εἰς τὸν διαιρέτην αὐτὸν 2α προσγραφῇ τὸ εὑρεθὲν δεύτερον μέρος μὲ τὸ σημεῖον $+$, καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦτο πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸ εὑρεθὲν ἤδη δεύτερον μέρος, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον ἴσον μὲ τὸ λείψανον $2\alpha\beta+\beta^2$. ὅθεν ἐὰν τοῦτο ἀπὸ τοῦ λειψάνου ἀφαιρεθῇ, μένει οὐδὲν· καὶ κρίνομεν·

Α΄. Ὅτι $\alpha+\beta$ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, ἡ ἀκριβής· διότι $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

Β΄. Ὅτι οὐδὲν μέρος τῆς ῥίζης ἐν αὐτῷ περιέχεται, διότι οὐδὲν λείψανον ἔμεινεν.

§. 346. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὸν, ὅτι ἐὰν ζητῆται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα μιᾶς ἐκθέσεως Ἀλγεβραϊκῆς, πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς.

Α΄. Νὰ γράψωμεν πρῶτον τὴν Ἀλγεβραϊκὴν ἔκθεσιν εἰς παρένθεσιν, καὶ πρὸ αὐτῆς μὲν τὸ σημεῖον τὸ ῥιζικὸν, μετ᾽ αὐτὴν δὲ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος. Πρῶτος δ᾽ ὅρος αὐτῆς τῆς ἐκθέσεως γραφήτω ἐκεῖνος, ὅπου ἔχει τὸν μέγιστον ἐκθέτην, καὶ ἐκ τοῦ ὁποίου δύναται νὰ ἐξέλθῃ ῥίζα τετραγωνικὴ, καὶ μετ᾽ αὐτὸν οἱ λοιποὶ κατὰ τάξιν τῶν κατωτέρων δυνάμεων, ὡς τὸ Α΄ παράδειγμα φαίνεται.

$$\sqrt{(\chi^4+6\chi^3\gamma+5\chi^2\gamma^2-12\chi\gamma^3+4\gamma^4)}=\chi^2+3\chi\gamma-2\gamma^2$$

$$-\ \chi^4$$

$$+6\chi^3\gamma+5\chi^2\gamma^2-12\chi\gamma^3+4\gamma^4 \quad \Big| \ 2\chi^2+3\chi\gamma$$

$$\begin{array}{cc} 6\chi^3\gamma & +9\chi^2\gamma^2 \\ - & - \end{array}$$

$$-4\chi^2\gamma^2-12\chi\gamma^3+4\gamma^4 \quad \Big| :\ (2\chi^2+6\chi\gamma)-2\gamma^2$$

$$\begin{array}{ccc} -4\chi^2\gamma^2 & -12\chi\gamma^3 & +4\gamma^4 \\ + & + & - \end{array}$$

$$0$$

Β'. Ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου τῆς δοθείσης ποσότητος ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ (§. 301), ὡς εἰς τὸ παράδειγμα $\sqrt{\chi^4}=\chi^2$. καὶ γράφεται ὡς πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης μετὰ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος· τοῦτο ἔπειτα ὑψοῦμεν εἰς τετράγωνον, καὶ τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς δοθείσης ποσότητος, καὶ ἐκλείπει ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς τῆς ποσότητος, καὶ μένει λείψανον τὸ λοιπόν.

Γ'. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸν δεύτερον ὅρον εὑρίσκεται τὸ διπλοῦν παραγόμενον τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ τοῦ δευτέρου τῆς ῥίζης (§. 345), διπλασιάζομεν τὸ ἤδη εὑρεθὲν πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης, οὕτως $2\chi^2$, καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦμεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ λειψάνου, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον μέρος τῆς ῥίζης· διὸ καὶ γράφεται μὲ τὸ σημεῖον του εἰς δεύτερον μέρος τῆς ῥίζης.

Δ'. Ἐπειδὴ ὅμως, ἐὰν τὸ διπλοῦν μέρος τὸ πρῶτον τῆς ῥίζης πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸ δεύτερον μέρος, καὶ συνάψωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου μέρους, καὶ τοῦτο ὅλον ἀφέλωμεν ἀπὸ τοῦ λειψάνου, δὲν μένει τίποτε, προσγράφομεν τὸ ἤδη εὑρεθὲν μέρος $+3\chi\gamma$ μὲ τὸ σημεῖον του εἰς τὸν διαιρέτην τὸν διπλοῦν τοῦ πρώτου μέρους τῆς ῥίζης, καὶ τοῦτο τὸ κεφάλαιον πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸ ἤδη εὑρεθὲν δεύτερον μέρος τῆς ῥίζης οὕτω, $(\alpha\chi^2+3\gamma\chi)3\chi\gamma=6\chi^3\gamma+9\chi^2\gamma^2$. καὶ τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ λειψάνου μεταβάλλοντες τὰ σημεῖα (§. 61), καὶ ἐὰν δὲν μείνῃ τίποτε, κρίνομεν ὅτι ἀπὸ δύω μέρη μόνον ἡ ῥίζα σύγκειται. Ἐὰν δὲ μείνῃ λείψανον, φανερὸν, ὅτι καὶ ἕτερον μέρος τῆς ῥίζης εἰς αὐτὸ εὑρίσκεται. Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ εἰς τὸ παράδειγμά μας ἔμεινε λείψανον $-4\chi^2\gamma^2-12\chi\beta^3+4\beta^4$, φαίνεται, ὅτι καὶ ἕτερον μέρος ἔχει ἡ ῥίζα αὐτή.

Ε', Διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ τρίτον μέρος αὐτῆς, πρέπει τὰ δύω μέρη ὡς ἓν μέρος τῆς ῥίζης νὰ ἐκλάβωμεν, $(\chi^2+3\chi\sigma)$, καὶ τοῦτο μόνον ὡς πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης, καὶ ζητεῖται τὸ δεύτερον. Πρὸς εὕρεσιν δὲ αὐτοῦ τοῦ ἑξῆς δευτέρου, ποιοῦμεν πάλιν τὰ αὐτά· δηλ: διπλασιάζομεν τοῦτο τὸ συμπεπλεγμένον μέρος οὕτω $2(\chi^2+3\gamma\chi)=(2\chi^2+6\gamma\chi)$ καὶ μὲ αὐτὸ διαιροῦμεν τὸ λείψανον, καὶ τὸ πηλίκον μὲ τὸ σημεῖόν του, τὸ $-2\gamma^2$ γράφεται εἰς τρίτον μέρος τῆς ῥίζης· τοῦτο δὲ κατὰ τὸ (Γ) προσγράφεται μὲ τὸ σημεῖόν του εἰς τὸν δεύτερον διαιρέτην, οὕτω $2\chi^2+6\chi\gamma-2\gamma^2$, καὶ τοῦτο ὅλον πολλαπλασιάζεται μὲ τὸ εὑρεθὲν ἤδη τρίτον μέρος τῆς ῥίζης, καὶ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ λείψανον, καὶ ἐὰν μείνῃ ἕτερον λείψανον εἶναι σημεῖον, ὅτι καὶ ἕτερον μέρος ἔχει ἡ ῥίζα.

Ϛ'. Πρὸς εὕρεσιν δὲ καὶ τοῦ ἑτέρου μέρους, ἐὰν ἔτι ἔχωμεν λείψανον, ποιοῦμεν τὰ αὐτὰ τοῖς ἀνωτέρω· δηλ: διπλασιάζομεν ὁμοῦ τὰ τρία μέρη εἰς ἓν μέρος (Ε), καὶ διαιροῦμεν τὸ λείψανον, καὶ τὸ πηλίκον γράφεται τέταρτον μέρος τῆς ῥίζης. καὶ τοῦτο προσγράφεται μὲ τὸ σημεῖόν του εἰς τὸν τρίτον διαιρέτην, καὶ πολλαπλασιάζεται μὲ τὸ ἤδη τέταρτον μέρος τῆς ῥίζης, καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιρεῖται· καὶ τὰ αὐτὰ γίνονται, καὶ ἐὰν καὶ ἕτερον λείψανον μείνῃ. Καὶ κατ' αὐτὴν τὴν διδασκαλίαν ὅλαι αἱ ῥίζαι τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων εὑρέθησαν.

B'.

$$\sqrt{(\gamma^4+2\gamma^3+3\gamma^2+2\gamma+1)}=\gamma^2+\gamma+1$$
$$-\gamma^4$$
$$\overline{+2\gamma^3+3\gamma^2+2\gamma+1 \;\Big|\; : 2\gamma^2+\gamma}$$
$$+2\gamma^3+\gamma^2$$
$$-\quad -$$
$$\overline{2\gamma^2+2\gamma+1 \;\Big|\; : 2\gamma^2+2\gamma+1}$$
$$2\gamma^2+2\gamma+1$$
$$-\quad -\quad -$$
$$\overline{0}$$

Γ'.

$$\sqrt{(4-8\chi+4\chi^3+\chi^4)}=2-2\chi-\chi^2$$
$$-4$$
$$\overline{-8\chi+4\chi^3+\chi^4 \;\Big|\; : 4-2\chi}$$
$$-8\chi+4\chi^2$$
$$+\quad -$$
$$\overline{-4\chi^2+4\chi^3+\chi^4 \;\Big|\; : 4-4\chi-\chi^2}$$
$$-4\chi^2+4\chi^3+\chi^4$$
$$+\quad -\quad -$$

$$\overline{}$$
$$0$$

Δ'.

$$\sqrt{\left(\chi^2-\alpha\chi+\frac{\alpha^2}{4}\right)}=\chi-\frac{\alpha}{2}$$

$$-\chi^2$$

$$\overline{-\alpha\chi+\frac{\alpha^2}{4}} \;\Big|\; : 2\chi-\frac{\alpha}{2}$$

$$-\alpha\chi+\frac{\alpha^2}{4}$$

$$\overline{}$$
$$0$$

Ε΄.

$$\sqrt{(\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4-2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2+\gamma^4)}=\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$$

$$\begin{array}{l}
\alpha^4 \\
- \\
\hline
-2\alpha^2\beta^2+\beta^4-2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2+\gamma^4 \;|:\; 2\alpha^2-\beta^2 \\
-2\alpha^2\beta^2+\beta^4 \\
+ \quad - \\
\hline
-2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2+\gamma^4 \;|:\; 2\alpha^2-2\beta^2-\gamma^2 \\
-2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2+\gamma^4 \\
+ \quad - \quad - \\
\hline
0
\end{array}$$

§. 347. Ἡ δὲ δοκιμὴ ἂν ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἔγινεν, εἶναι νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν ἐφ' ἑαυτὴν, ἤτοι νὰ ὑψώσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν εἰς τετράγωνον, καὶ ἐὰν εὑρεθῇ ἡ δοθεῖσα ποσότης, ὀρθὴ ἡ πρᾶξις, ἐὰν δὲ μὴ, ἐσφαλμένη· διότι $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

§. 348. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα ποσότης, τῆς ὁποίας ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, εἶναι ἐντελὲς τετράγωνον, διὰ τῆς ἀνωτέρω ἐργασίας μέχρι τινὸς παύει, ὡς εἰς τὰ παραδείγματα φαίνεται· εἰδὲ καὶ δὲν εἶναι ἐντελὲς τετράγωνον, τότε ἡ ἐργασία προχωρεῖ ἐπ' ἄπειρον, χωρὶς νὰ παύσῃ ἀπὸ τὸ νὰ εὑρίσκωμεν νέον μέρος τῆς ῥίζης· διότι πάντοτε μένει λείψανον. Καὶ πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἐξαχθήτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῆς ποσότητος $\alpha^2-\chi^2$, καὶ γενέσθω ἡ ἐργασία ὡς ἀνωτέρω.

$$\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}=\alpha-\frac{\chi^2}{2\alpha}-\frac{\chi^4}{8\alpha^3}-\frac{\chi^6}{16\alpha^5}-\frac{\chi^8}{32\alpha^7}\cdots\cdots$$

$$\alpha^2$$
$$-$$
$$-\chi^2 \quad \Big| : 2\alpha-\frac{\chi^2}{2\alpha}$$
$$-\chi^2+\frac{\chi^4}{4\alpha^2}$$
$$+\quad -$$
$$-\frac{\chi^4}{4\alpha^2} \quad \Big| : 2\alpha-\frac{\chi^2}{\alpha}-\frac{\chi^4}{8\alpha^3}$$
$$\frac{\chi^4}{4\alpha^2}+\frac{\chi^6}{8\alpha^4}+\frac{\chi^8}{64\alpha^6}$$
$$-\quad -\quad -$$
$$-\frac{\chi^6}{8\alpha^4}-\frac{\chi^8}{84\alpha^5} \quad \Big| : 2\alpha-\frac{\chi^2}{\alpha}-\frac{\chi^4}{4\alpha^3}-\frac{\chi^6}{16\alpha^5}$$
$$\frac{\chi^6}{8\alpha^4}+\frac{\chi^8}{16\alpha^6}+\frac{\chi^{10}}{64\alpha^8}\;\frac{\chi^{12}}{16\cdot 16\alpha^{10}}$$
$$+\quad -\quad -$$
$$-\frac{\chi^8}{16\alpha^6}-\frac{\chi^{10}}{64\alpha^8}-\frac{\chi^{12}}{256\alpha^{10}} \quad \Big| \; 2\alpha-\frac{\chi^2}{\alpha}$$

Καὶ καθεξῆς ἐπ' ἄπειρον προχωρεῖ ἄνευ τέρματος ἡ σειρὰ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης. Πῶς δὲ αὐτὰς τὰς ἀπείρους σειρὰς εὑρίσκομεν, εἰς ἕτερον μέρος θέλομεν εἰπῆ ἱκανά. ἔνθα θέλομεν μάθη καὶ ὅτι εὐκόλως ἐκτυλίομεν τὰς τοιαύτας σειράς· διότι ἀφ' οὗ εὕρωμεν τρεῖς, ἢ τέσσαρας ὅρους αὐτῆς τῆς σειρᾶς, εὐκόλως βλέπομεν τοὺς νόμους, καθ' οὓς ἐκτυλίεται. Οὕτως εἰς τὴν παροῦσαν βλέπομεν ὅτι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ἑξῆς κλάσματος ἔχει τὸ χ εἰς μείζονα δύναμιν μὲ ἐκθέτην μείζονα τῆς προηγουμένης κατὰ δύο μονάδας. ὁ δὲ παρονομαστὴς ἔχει τὸν συνεργὸν διπλάσιον τοῦ προηγορμένου, τὴν δὲ ποσότητα α μὲ ἐκθέτην δύο μονάδας μείζονα. Ἀλλὰ περὶ τούτων ὕστερον ἐν οἰκείῳ τύπῳ.

§. 349. Ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν ἐξετάσωμεν, εὑρίσκομεν τοὺς αὐτοὺς νόμους τοῦ διωνύμου, ὡς καὶ εἰς τὰ γράμματα· διότι τὸ αὐτὸ συμβαίνει, καὶ ὅταν ἕνα ἀριθμὸν ἔχοντα πλείονας τοῦ ἑνὸς χαρακτῆρος εἰς τετράγωνον ὑψώνομεν. Ὑψωθήτω, φέρε, εἰς τετράγωνον ὁ ἀριθμὸς 64, καὶ πολλαπλασιασθήτω αὐτὸς ἀφ᾽ ἑαυτὸν κατὰ τάξιν.

64	ἢ	64	ἢ	64
64		64		64
256		16	=	4. 4
384		240	=	60. 4
4096		240	=	60. 4
		3600	=	60. 60
		4096	=	$60^2 + 2.60.4 + 4^2$

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ τάξιν, εὑρίσκομεν.

Α΄. Ὅτι πολλαπλασιάζεται ὁ 4 κάτω μὲ τὸν 4 ἄνω, καὶ τοῦτο τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων.

Β΄. Ὅτι πολλαπλασιάζεται ἅπαξ ὁ 4 κάτω μὲ τὸν 6 ἄνω, καὶ ἔτι ἅπαξ ὁ 6 κάτω μὲ τὸν 4 ἄνω. καὶ τοῦτο εἶναι τὸ διπλοῦν γενόμενον τῶν μονάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας.

Γ΄. Εὑρίσκομεν ὅτι πολλαπλασιάζεται ὁ 6 κάτω, καὶ ὁ 6 ἄνω, καὶ τοῦτο τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων.

Δ΄. Ταῦτα ὅλα εἰς ἓν συναπτόμενα ἀποτελοῦσι τὸ τετράγωνον 4096 ἀπὸ τῆς ῥίζης 64. καὶ συνίσταται καὶ τοῦτο ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, καὶ ἀπὸ τὸ διπλοῦν παραγόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, καὶ ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων, τοῦτο ἦν καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ διωνύμου εἰς τὰ γράμματα (§. 29). Τὸ αὐτὸ συμβαίνει, ἐὰν καὶ τὴν ἐλαχίστην ῥίζαν εἰς δύο χαρακτῆρας τετραγωνίσωμεν καὶ τὴν μεγίστην 99. ὡς τὰ ἑξῆς.

11	99
11	99
1	81
10	810
10	810
100	8100
121	9801

§. 350. Ἐκ τούτων μανθάνομεν ἔτι.

Α΄. Ὅτι τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων οὐδέποτε ἔχει χώραν εἰς τοὺς δύω ἐσχάτους χαρακτῆρας εἰς τὰς μονάδας, καὶ δεκάδας· διότι καὶ 10. 10=100. ἄρα διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ῥίζαν τῶν δεκάδων, πρέπει πρὸ δύο χαρακτήρων κόμμα νὰ κάμωμεν, οὕτω 98, 01, καὶ εἰς τοὺς προηγουμένους δύο 98 νὰ τὴν ἀνιχνεύσωμεν.

Β΄. Οὔτε ἀριστερώτερα ἀπὸ τοὺς τέσσαρας χαρακτῆρας νὰ τὴν ἀνιχνεύσωμεν· διότι ἡ μεγίστη ῥίζα 99 πρὸ τεσσάρων χαρακτήρων οὐδέποτε προέβη.

Γ΄. Καὶ τὸ διπλοῦν παραγόμενον τῶν μονάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας, χώραν εἰς τὰς μονάδας δὲν ἔχει· ὅθεν ὅταν αὐτὸ ἐξετάζωμεν, πρέπει ἐκτὸς τοῦ τόπου τῶν μονάδων ἀριστερώτερα νὰ τὸ ζητῶμεν.

Δ΄. Καθε ἀριθμὸς μὲ πλείονας τῶν δύω χαρακτήρων, δύο χαρακτῆρας ἔχει ῥίζαν τετραγωνικήν.

§. 391. Ἐὰν δὲ καὶ τὰ ἐν τῷ (§. 349) ἀναπολήσωμεν, εὑρίσκομεν ὅτι κάθε ἀριθμὸς εἰς τετράγωνον ὑψούμενος, οὐδέποτε ἔχει πλείονας χαρακτῆρας ἀπὸ τὸ διπλάσιον τῶν χαρακτήρων τῆς ῥίζης, οὔτ' ἐλάσσονας παρ' ἕνα ἀπὸ τὸ διπλάσιον τῶν αὐτῶν χαρακτήρων τῆς ῥίζης· διότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς ἀπὸ τρεῖς χαρακτῆρας τοὺς μεγίστους 999.

οὗτος ὅμως ἐλάσσων τοῦ 1000. τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ 1000, ἀπὸ 7 χαρακτῆρας 1000000 (§. 307). ἄρα τὸ τετράγωνον τοῦ 999 εἰς 7 χαρακτῆρας δὲν ἀνέρχεται. Ἔςω καὶ ἕτερος ἀπὸ 5 χαρακτῆρας ὁ 99999, καὶ οὗτος ὅμως ἐλάσσων τοῦ 100000, καὶ τὸ τετράγωνον τούτου 10000000000 ἀπὸ 11 χαρακτῆρας (§. 307). ἄρα τὸ τετράγωνον τοῦ 99999 ἔχει ἐλάσσονας τῶν 11 χαρακτήρων· ἄρα οὐδέποτε πλείονας τῶν διπλῶν χαρακτήρων τῆς ῥίζης, τὸ τετράγωνον λαμβάνει. Οὔτε παρακάτω πάλιν ἀπὸ ἕνα χαρακτῆρα ἀπὸ τοὺς διπλοῦς, καὶ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· διότι ἔςω ὁ ἀριθμὸς ἀπὸ τρεῖς χαρακτῆρας ὁ ἐλάχιςος 101, οὗτος ὅμως μείζων τοῦ 100. ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τούτου 100^2 $=10000$ μόνον ἀπὸ 5 χαρακτῆρας. Πῶς λοιπὸν τὸ τετράγωνον τοῦ μείζονος τούτου, ἤτοι τὸ 101^2, θέλει ἔχει ὀλιγωτέρους τῶν 5 χαρακτήρων; τοῦτο λεγέσθω καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου ἀριθμοῦ. δηλ: ὁ ἀριθμὸς οὗτος 1000001 μὲ 8 χαρακτῆρας εἶναι μείζων τοῦ 1000.000.0· τὸ δὲ τετράγωνον τούτου 10000000^2 εἶναι $=$ 1000.000.000.000.00 μὲ δεκαπέντε χαρακτῆρας. δύναται ποτὲ ὁ μείζων ἐκεῖνος, ἀφ' οὗ τετραγωνισθῇ νὰ ἔχῃ χαρακτῆρας τῶν 15 ὀλιγωτέρους; διὰ τοῦτο ἄρα καὶ εἴρηται. Κάθε τετράγωνος ἀριθμὸς, ἢ ἔχει τοὺς χαρακτῆρας διπλοῦς, ἀπὸ τοὺς χαρακτῆρας τῆς ῥίζης, ἢ μόνον ἕνα παρακάτω ἀπὸ τοὺς διπλοῦς.

§. 352. Ἐκ τούτου μανθάνομεν ἀμέσως, ὅτι εἰς κάθε ἀριθμὸν, ὅπου δοθῇ, καὶ ζητηθῇ ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα, μὲ πόσους χαρακτῆρας ἡ ῥίζα ἐξάγεται· διότι κόπτομεν εἰς αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν ἀπὸ τὰ δεξιὰ ἀρχίζοντες ἀνὰ δύω χαρακτῆρας εἰς κλάσεις, καὶ ὅσαι κλάσεις εἰς αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν εὑρεθῶσι τόσους χαρακτῆρας ἔχει καὶ ἡ ῥίζα, ὅπου ἐξέγεται· οὕτω 56, 72, 03 εἰς τὸν ὁποῖον ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνικὴ ἐξέρχεται μὲ τρεῖς χαρακτῆρας· εἰς δὲ τὸν 5, 35, 10, 67, 12. μὲ πέντε. Ἀδιαφοροῦμεν ὅμως ἐὰν εἰς τὰ ἀριςερὰ ἡ κλάσις μόνον ἕνα χαρακτῆρα ἔχῃ· διότι ἢ διπλοῦς χαρακτῆρας τὸ τετράγωνον ἔχει ἀπ' ἐκείνους τῆς ῥίζης, ἢ παρ' ἕνα διπλοῦς (§. 451.).

§. 353. Ἀνωτέρω (§. 350.) ἴδομεν, ὅτι οἱ δύω δεξιοὶ χαρακτῆρες τὴν τῶν μονάδων ῥίζαν περιέχουσιν, οἱ δὲ ἑξῆς πρὸς ἀριςερὰ δύω τὴν τῶν δεκάδων ῥίζαν, ἄρα οἱ ἑξῆς δύω ἀριςερώτεροι τὴν τῶν ἑκατοντάδων, καὶ οἱ ἑξῆς δύω ἀνώτεροι τὴν τῶν χιλιάδων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· Λοιπὸν ἐὰν δοθῇ τις ἀριθμὸς, καὶ ζητῆται ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα, πρῶτον ἔργον εἶναι νὰ κόψωμεν ἀπὸ τὰ δεξιὰ τὸν ἀριθμὸν, εἰς κλάσεις ἀνὰ δύω χαρακτῆρας, καὶ ἐὰν εἰς τὴν πρώτην κλάσιν ἐπ' ἀριςερὰ μόνον εἷς χαρακτὴρ εὑρίσκεται, ἀδιάφορον· ὡς εἰς τὸ παράδειγμα φαίνεται· 21, 38, 13, 76 καὶ πρὸ αὐτοῦ νὰ γράψωμεν τὸ σημεῖον τὸ ῥιζικὸν μετ' αὐτὸν δὲ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος. (§. 346.)

Β'. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀνωτέρου χαρακτῆρος τῆς ῥίζης εἰς τὴν ἀριςερωτάτην κλάσιν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εὑρίσκεται (§. 350.)· ἄρα κατ' ἀρχὰς τὴν ῥίζαν τὴν τετραγωνικὴν αὐτῆς τῆς κλάσεως εὑρίσκομεν κατὰ τὸ διάγραμμα (§. 342.), ἢ τὴν ἀληθῆ, ἐὰν αὕτη ἡ κλάσις ἐντελὲς τετράγωνον, ἢ τὴν ἐγγὺς ἐλάττονα· καὶ μάλιςα ἐπειδὴ ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης εἰς τὴν διαίρεσιν πίπτει, καὶ ἡ διαίρεσις ἀπὸ τὰ ἀριςερὰ ἄρχεται (§. 104.)· ἄρα καὶ ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης ἀπὸ τὰ ἀριςερὰ ἄρχεται, ὡς ἀνάπαλιν, ἡ ὕψωσις τῶν δυνάμεων ἀπὸ τὰ δεξιὰ ἄρχεται, καθότι πίπτει εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν. Διὰ τοῦτο ἡ ἔγγιςα ῥίζα τῆς ἀνωτάτης κλάσεως 21 εἶναι ὁ 4, ὃν καὶ γράφομεν μετὰ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος καὶ τετραγωνίζομεν τὸν εὑρεθέντα χαρακτῆρα τῆς ῥίζης, καὶ ἀφαιροῦμεν τούτου τὸ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ἀριςερωτάτης κλάσεως, ὡς 4. 4=16 καὶ 21—16=5 καὶ εἰς τὸ λείψανον τοῦτο καταβιβάζομεν τὴν ἑξῆς κλάσιν 38, καὶ γίνεται 538.

Γ'. Εἰς αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν βέβαια εὑρίσκεται καὶ ἕτερος χαρακτὴρ τῆς ῥίζης· πλὴν ἐὰν οὕτως ἔχῃ, ἐμάθομεν ὅτι μόνον εἰς τοὺς ἀριςεροὺς χαρακτῆρας πλὴν τοῦ δεξιοῦ εὑρίσκεται τὸ διπλοῦν παραγόμενον τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τῆς ῥίζης ἐπὶ τὸν δεύτερον (§. 450). καθότι εἰς τὸν ἔσχατον δεξιὸν 8 μόνον τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου χαρακτῆρος τῆς ῥίζης ἔχει χώραν· ἄρα διπλασιάζομεν τὸν πρῶτον χαρακτῆρα ἤδη εὑρεθέντα τῆς ῥίζης 4 οὕτω, 2. 4=8. καὶ διὰ τοῦ διπλοῦ τούτου 8 διαιροῦμεν τοὺς δύο ἀριςεροὺς χαρακτῆρας αὐτῆς τῆς κλάσεως τοὺς 53. τὸ δ' εὑρεθὲν πηλίκον $\frac{53}{8}=6$ γράφομεν εἰς δεύτερον χαρακτῆρα τῆς ῥίζης οὕτω 46.

Δ'. Διὰ νὰ μάθωμεν ὅμως ἂν ἀπὸ τῶν τριῶν τούτων χαρακτήρων 538 μένει λείψανον, ἢ ὄχι, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν δεύτερον χαρακτῆρα τῆς ῥίζης 6 τὸν διπλοῦν χαρακτῆρα τὸν πρῶτον τῆς ῥίζης 80. 6=480 καὶ νὰ τετραγωνίσωμεν τὸν ἤδη εὑρεθέντα δεύτερον χαρακτῆρα 6. 6=36, καὶ ταῦτα ὁμοῦ νὰ συνάψωμεν εἰς ἓν 480+36=516, καὶ τὸν 516 νὰ ἀφέλωμεν ἀπὸ τὸν 538 οὕτω 538—516=22. πλὴν τοῦτο συντομώτερον γίνεται, ἐὰν τὸν δεύτερον χαρακτῆρα τῆς ῥίζης 6 εἰς τὸν διπλοῦν πρῶτον 8 προσγράψωμεν 86, καὶ διὰ τοῦ δευτέρου ἤδη εὑρεθέντος 6 ὅλον τὸν 86 πολλαπλασιάσωμεν 6. 86=516 καὶ τοῦτον ἀφέλωμεν ἀπὸ τὸν 538 ὡς εἰς τὸ παράδειγμα φαίνεται· εἰς δὲ τὸ λείψανον τοῦτο 22. πάλιν τὴν ἑξῆς τάξιν 13 καταβιβάσωμεν, καὶ γίνεται 2213.

$$\sqrt{21,\ 38,\ 13,\ 76} = 4624$$

	16
86, 6	538
	516
922. 2	2213
	1844
9244. 4	36976
	36976
	0

Ε'. Εἰς αὐτὸν τὸν 2213 βλέπομεν ὅτι εὑρίσκεται καὶ τρίτος χαρακτὴρ τῆς ῥίζης, ὅθεν οἱ δύω εὑρεθέντες χαρακτῆρες 46 λαμβάνονται ὁμοῦ ὡς εἷς χαρακτὴρ (§. 346.), καὶ δι' αὐτοῦ τοῦ συνθέτου χαρακτῆρος ζητεῖται ἕτερος δεύτερος, ὅςις τρίτος εἰς τὴν ῥίζαν γίνεται. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὸν ἀριθμὸν 2213, μόνον εἰς τοὺς χαρακτῆρας 221 τὸ διπλοῦν παραγόμενον τοῦ νομιζομένου πρώτου χαρακτῆρος ἐπὶ τὸν νομιζόμενον δεύτερον εὑρίσκεται, καὶ εἰς τὸν ἔσχατον 3 χώραν δὲν ἔχει, διπλασιάζομεν τὸν 46 οὕτω 2. 46=92, καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦμεν τὸν 221 καὶ τὸ πηλίκον 2 γράφομεν εἰς τρίτον χαρακτῆρα τῆς ῥίζης, καὶ πάλιν ὁ ἤδη εὑρεθεὶς τρίτος χαρακτὴρ, προσγράφεται εἰς τὸν 92, τὸν διπλοῦν τοῦ 46 οὕτω 922, καὶ οὗτος ὅλος πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν τρίτον χαρακτῆρα, ὡς ἀνωτέρω (Δ'), καὶ ἀφαιρεῖται τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸν 2213, οὕτω 2213—1844=369, καὶ ἐὰν ἔχωμεν καὶ ἑτέραν κλάσιν εἰς τὴν δοθεῖσαν ποσότητα, καταβιβάζεται εἰς τὸ λεῖψανον, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα 36976.

ϛ. Ἀλλὰ καὶ εἰς αὐτὸν πάλιν τὰ αὐτὰ γίνονται· δηλαδὴ διπλασιάζομεν ὁμοῦ τοὺς τρεῖς χαρακτῆρας οὕτω 2. 462=924, ὡς πρῶτον χαρακτῆρα τῆς ῥίζης, καὶ διὰ τοῦ διπλοῦ τούτου διαιροῦμεν τὸν 36976 πλὴν τοῦ ἐσχάτου χαρακτῆρος 6, καὶ τὸ πηλίκον ἤτοι ὁ 4 γίνεται τέταρτος χαρακτὴρ τῆς ῥίζης, καὶ προσγράφεται τῷ διπλῷ διαιρέτῃ 9244, καὶ οὗτος διὰ τοῦ ἤδη εὑρεθέντος τετάρτου χαρακτῆρος 4 πολλαπλασιάζεται, καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιρεῖται· καὶ ἐὰν αὖθις μείνῃ λεῖψανον, καὶ ἔχωμεν καὶ ἑτέραν κλάσιν, καταβιβάζεται καὶ αὐτὴ εἰς τὸ λεῖψανον, καὶ κατὰ τὰ ῥηθέντα καὶ ἕτερον χαρακτῆρα τῆς ῥίζης ἰχνηλατοῦμεν, ἐὰν ὅμως κλάσιν ἑτέραν δὲν ἔχωμεν, καὶ μήτε λεῖψανον μένῃ, ὡς εἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα, λέγομεν ὅτι ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς 4624 εἶναι ἡ ῥίζα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ· καὶ ὁ ἀριθμὸς 21381376 εἶναι ἐντελὲς τετράγωνον· διότι 4624. 4624=21381376· ἡ δὲ δοκιμὴ αὐτῆς τῆς ἐργασίας εἶναι, νὰ ἀνάξωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν εἰς τετράγωνον, καὶ ἐὰν τοῦτο εἶναι ἴσον τῷ δοθέντι ἀριθμῷ, ἡ πρᾶξις ὀρθῶς γέγονεν (§. 347.), εἰ δὲ καὶ μείνῃ τι λεῖψανον, χωρὶς νὰ μείνῃ καμμία κλάσις, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν εἶναι ἐντελὲς τετράγωνον, καὶ ἑπομένως ἄλογος, καὶ ἀσύμμετρος (§. 341.).

§. 354. Εἰς ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀπαιτοῦνται, συντόμως εἰπεῖν, τὰ ἑξῆς. Ἀφ' οὗ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς, καὶ πρὸ αὐτοῦ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, καὶ μπ αὐτὸν τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος, Α΄. χωρίζομεν ἀνὰ δύω χαρακτῆρας εἰς κλάσεις τὸν ἀριθμὸν, ὀπὸ τὰ δεξιὰ ἐρχόμενοι (§. 352) ἡ δὲ ἐσχάτη κλάσις δύναται νὰ ἔχῃ καὶ ἕνα χαρακτῆρα (§. 351).

Β΄. Εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῆς ἀριςερωτάτης κλάσεως, καὶ πρῶτος οὗτος χαρακτὴρ μετὰ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος γράφεται.

Γ΄. Οὗτος τετραγωνίζεται, καὶ ἀφαιρεῖται ὀπὸ τῆς ἀριςερωτάτης κλάσεως, καὶ εἰς τὸ λείψανον ἡ ἑξῆς κλάσις καταδιβάζεται.

Δ΄. Διπλασιάζομεν τὸν εὑρεθέντα χαρακτῆρα τῆς ῥίζης, καὶ μὲ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν τοῦτον τὸν ἀριθμὸν, πλὴν τοῦ δεξιωτάτου χαρακτῆρος, τὸ δὲ πηλίκον προσγράφεται ἅμα καὶ εἰς δεύτερον χαρακτῆρα τῆς ῥίζης, καὶ εἰς τὸ διπλοῦν τοῦ πρώτου χαρακτῆρος. (§. 353).

Ε΄. Μὲ αὐτὸν τὸν εὑρεθέντα δεύτερον χαρακτῆρα πολλαπλασιάζομεν ὅλον τὸν διπλοῦν μὲ τὸν προσγραφέντα δεύτερον χαρακτῆρα, καὶ τοῦτο τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν καταδιβασθεῖσαν κλάσιν, καὶ εἰς τὸ λείψανον καταβιβάζομεν τὴν ἑξῆς κλάσιν, καὶ δεύτερος διαιρετέος οὗτος ὁ ἀριθμὸς γίνεται.

Ϛ΄. Πάλιν τοὺς δύο χαρακτῆρας τῆς ῥίζης διπλασιάζομεν, καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦμεν, ὃν δεύτερον διαιρετέον πλὴν τοῦ δεξιοῦ χμρακτῆρος, καὶ τὸ πηλίκον γράφεται τρίτος χαρακτὴρ τῆς ῥίζης, καὶ ἅμα εἰς τὸν δεύτερον διαιρέτην προσγράφεται, καὶ μὲ αὐτὸν πολλαπλασιάζεται ὁμοῦ καὶ ὁ διαιρέτης καὶ αὐτὸς, καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν διαιρετέον, καὶ εἰς τὸ λείψανον ἡ ἑξῆς κλάσις εἰς τρίτον διαιρετέον καταβιβάζεται.

Ζ΄. Πάλιν τὸ διπλοῦν τῶν τριῶν χαρακτήρων τῆς ῥίζης τρίτος διαιρέτης γίνεται, καὶ διαιρεῖ τὸν τρίτον διαιρετέου πλὴν τοῦ δεξιοῦ χαρακτῆρος, καὶ τὸ πηλίκον εἰς τέταρτον χαρακτῆρα τῆς ῥίζης γράφεται, καὶ ἅμα εἰς τὸν τρίτον διαιρέτην, καὶ οὗτος μὲ αὐτὸν τὸν τέταρτον χαρακτῆρα πολλαπλασιάζεται, καὶ ἀφαιρεῖται τὸ γινόμενον ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, καὶ εἰς τὸ λείψανον ἡ ἑξῆς κλάσις καταβιβάζεται, καὶ τὰ αὐτὰ πάλιν κατὰ περίοδον ἐπαναλαμβάνονται.

Η΄. Ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης, ὁποῦ γίνεται ἀπὸ τοὺς διπλοῦς χαρακτῆρας τῆς ῥίζης, εἰς τὸν διαιρετέου πλὴν τοῦ ἐσχάτου πρὸς τὰ δεξιὰ χαρακτῆρος ἅπαξ δὲν περιέχεται, ἤτοι ἐὰν εἶναι μείζων ἀπὸ τὸν διαιρετέου πλὴν τοῦ ἐσχάτου χαρακτῆρος, γράφομεν εἰς τὴν ῥίζαν μηδενικὸν, καὶ καταβιβάζομεν καὶ τὴν ἑξῆς κλάσιν, καὶ ἔπειτα διπλασιάζομεν τὴν ῥίζαν μετὰ τοῦ μηδενικοῦ εἰς ἕτερον διαιρέτην, καὶ ἐξακολουθοῦμεν ὡς ἀνωτέρω.

Σημείωσις Α΄. Ὅταν ἀφαιρῶμεν τὸ γινόμενον, ὁποῦ γίνεται ἀπὸ τοῦ πηλίκου, καὶ τοῦ διαιρέτου ὁμοῦ μὲ αὐτὸ τὸ πηλίκον προσγεγραμμένον, καὶ μείνῃ λείψανον μεῖζον ἀπὸ τοῦ διπλοῦ τῆς ἤδη εὑρεθείσης ῥίζης μετὰ μιᾶς μονάδος, εἶναι σημεῖον ὅτι ἐλάβομεν πηλίκον, ἤτοι χαρακτῆρα τῆς ῥίζης ἐλάττονα τοῦ δέοντος, καὶ πρέπει νὰ αὐξηθῇ μὲ μίαν μονάδα. δηλ: ἐὰν ἡ εὑρεθεῖσα ῥίζα 54, καὶ μείνῃ λείψανον 110. διότι $2. 54+1=109$. ἄρα ἔδει ἀντὶ 4 πηλίκον 5 εἰς δεύτερον χαρακτῆρα τῇ ῥίζης νὰ λάβωμεν.

Σημείωσις Β΄. Ἐὰν δὲ τοῦτο τὸ γινόμενον εἶναι μεῖζον τοῦ διαιρετέου, σημεῖον ὅτι μείζονα χαρακτῆρα τῆς ῥίζης ἐλάβομεν, καὶ πρέπει νὰ τὸν μειώσωμεν.

Ὅστις λοιπὸν ταῦτα καλῶς νοήσει, εὐκόλως ἐξάγει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν οἱουδήτινος δοθέντος ἀριθμοῦ· διότι κατ' αὐτὰ εὑρέθη ἡ ῥίζα εἰς τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

Α΄.

$\sqrt{5,\ 68,\ 76} = 238$

```
 4
----
 168  |: 43
 129
------
  3976 |: 468
  3744
  ----
   232
```

τοῦτο λείψανον καὶ ὁ ἀριθμὸς ἄλογος.

Β΄.

$\sqrt{65,\ 48,\ 04,\ 64,\ 00} = 80920$

```
 64
----
   148 |: 16
-------
  14804   |1609
  14481
  -----
   32364 |: 16182
   32364
   -----
   00000
```

Γ΄.

$\sqrt{81,\ 72,\ 16} = 974$

```
 81
----
  072|: 18
  -----
   7216| : 1804
   7316
   ----
     0
```

Δ΄.

$\sqrt{76,\ 80,\ 76,\ 96} = 8764$

```
 64
----
 1280| : 167
 1169
 ----
  11176| : 1746
  10476
  -----
   70096| : 17524
   70096
   -----
     0
```

§. 355. Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα εὕρομεν τὸν ἀριθμὸν ἀτελὲς τετράγωνον· διότι ἔμεινε λείψανον τὸ 232, καὶ τοιούτους ἀριθμοὺς περισσοτέρους εὑρίσκομεν, παρὰ τετράγωνα ἐντελῆ. Εἰς αὐτὸ ἡ εὑρεθεῖσα ῥίζα εἶναι μικροτέρα τοῦ δέοντος, καὶ ἐλλείπει πάντοτε κλάσμα μονάδος ἔλαττον· καὶ τοῦτο τὸ κλάσμα οὐδέποτε ἐπ' ἀκριβὲς παρίσαται, (§. 339.) ὥςε νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς ῥίζα. Οἱ τεχνικοὶ ὅμως διὰ τῆς μεθόδου τῆς προσεγγίσεως, οὕτω καὶ αὐτὰς τὰς ῥίζας ὡς ἔγγιςα τῆς ἀληθείας εὑρίσκουσιν, ὥςε ἡ ἀπάτη εἶναι ἀνεπαίσθητος καὶ ὡς ὀρθὰς αὐτὰς μεταχειρίζονται. Τοῦτο δὲ ὅλον γίνεται διὰ τῶν κλασμάτων τῶν δεκαδικῶν· ὅσω πλείονα δεκαδικὰ εὑρίσκουσι, τόσω περισσότερον πλησιάζουσιν εἰς τὴν ἀλήθειαν, καθὼς καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦτο ἐμάθομεν (§. 240.). ἀλλ' ἐκεῖ μὲν διὰ νὰ εὕρωμεν πηλίκον ἕνα χαρακτῆρα, μόνον ἕνα χαρακτῆρα καταβιβάζομεν, (αὐτόθι), ἐνταῦθα δὲ διὰ νὰ εὕρωμεν πηλίκον ἕνα χαρακτῆρα τῆς ῥίζης, κλάσιν δύω χαρακτήρων καταβιβάζομεν. Ὅθεν διὰ νὰ εὕρωμεν ἕνα χαρακτῆρα δεκαδικὸν, δύο μηδενικὰ εἰς τὸ λείψανον, ἢ εἰς τὸν ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσγράψωμεν· εἰς εὕρεσιν δὲ δύο χαρακτήρων δεκαδικῶν, τέσσαρα μηδενικὰ προσθέτομεν, διὰ τρεῖς, ἕξ, καὶ ἁπλῶς τόσας τάξεις προσγράφομεν μηδενικῶν, ὅσα δεκαδικὰ εἰς τὴν ῥίζαν εὑρεῖν θέλομεν· καὶ αὕτη ἡ ἐργασία εἰς ἄπειρον προβαίνει, χωρὶς νὰ παύσῃ πώποτε· πλὴν εἰς μὲν τὰς κοινὰς ἐργασίας ἀρκοῦσι μόνον τρία δεκαδικὰ διὰ νὰ ληφθῇ ἡ ῥίζα ὡς ἀληθὴς, καὶ παραμελεῖται τὸ λείψανον· εἰς ἐντελεςέρας δ' ἐργασίας προβαίνει καὶ μέχρι τῶν 6 καὶ 8 δεκαδικῶν· σπανιώτατα δὲ ἐπέκεινα τούτων, εἰ μή τις εἴπῃ τοὺς μείζονας λογαρίθμους, καὶ τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμάς. Διὰ νὰ προβαίνωμεν ὅμως κατὰ τάξιν, ληφθήτω τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

§. 356. Ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 87567.

$\sqrt{8,\ 75,\ 67} = 295,\ 9172$

```
4
-----
475 |: 49
441
-----
3467 |: 585
2925
-----
54200 |: 5909
53181
-----
101900 |: 59181
59181
-----
4271900 |: 591827
4142789
-----
12911100 |: 5918342
11836684
-----
1074416
```

Καὶ κατὰ τὴν ἄνω διδασκαλίαν ἐξάγεται μὲ τρεῖς χαρακτῆρας 295 καὶ μένει λείψανον 542. εἰς αὐτὸ τὸ λείψανον προσγράφομεν δύο μηδενικὰ, καὶ κατὰ τὰ ἄνω εὑρίσκομεν καὶ ἕτερον χαρακτῆρα τῆς ῥίζης οἷον τὸν 9, καὶ μετὰ τὸ κόμμα ὡς κλάσμα δεκαδικὸν προσγράφεται ὁ 9. εἰς δὲ τὸ λείψανον προσγράφονται ἔτι δύο μηδενικὰ, και ἐξάγομεν καὶ ἕτερον χαρακτῆρα δεκαδικὸν, καὶ πάλιν προσγράφομεν δύω μηδενικὰ, καὶ ἐξάγομεν ἕτερον δεκαδικὸν χαρακτῆρα, καὶ οὕτως ἐξάγομεν χαρακτῆρας δεκαδικοὺς εἰς τὴν ῥίζαν ὅπου θέλομεν, τὸ δὲ λείψανον 1074416 ὡς ἐνταῦθα τὸ παρορῶμεν ὡς μηδέν. Ἐπ' ἄπειρον ὅμως δεκαδικὰ ἐξάγομεν, καὶ οὐδέποτε παύει ὥςε νὰ μὴ μείνη λείψανον ἡ ῥίζα ὅμως 295, 9172 εἶναι σχεδὸν ἡ ἀληθὴς τοῦ ἀριθμοῦ 87569. Ἐπειδὴ καὶ ἐλλείπει μόνον ἔλαττον ἑνὸς δεκαχιλιοςημορίου· ἤτοι νὰ διέλωμεν τὴν μονάδα εἰς 10 χιλιάδας μέρη, καὶ ἔλαττον ἑνὸς τοιούτου μέρους ἐκλείπει εἰς τὴν ἀληθῆ ῥίζαν, μέρος τῷ ὄντι ἀνεπαίσθητον, καὶ δυσφάνταστον· καὶ ἐὰν πλείονα δεκαδικὰ ἐξαγάγωμεν, τὸ ἐλλειπὲς μέρος εἶναι ἔτι ἐλάχιςον· διότι ἐὰν εἰς αὐτὴν τὴν ῥίζαν μόνον 295 ἄνευ δεκαδικῶν, τὸ ἔλλεῖπον εἶναι μονάδος ἔλαττον, μὲ ἓν δεκαδικὸν οὕτω 295,9 δεκατημορίου μονάδος ἔλαττον· μὲ δύω δὲ δεκαδικὰ οὕτω 295,91 ἑκατοςημορίου μονάδος ἔλαττον· μὲ τρία 295,917 χιλιοςημορίου μονάδος ἔλαττον· μὲ τέσσαρα δεκαχιλιοςημορίου μονάδος ἔλαττον· μὲ πέντε, μιλλιοςημορίου μονάδος ἔλαττον κτ.

§. 357. Ἡ δεῖξις τούτου εἶναι φανερὰ, διότι ταὐτὸν εἶναι ἢ ἀνὰ δύο μηδενικὰ εἰς τὰ λείψανα νὰ προσγράφωμεν ὡς εἰς τὸ παράδειγμα, ἢ ἀμέσως εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν αὐτὰς τὰς κλάσεις νὰ προσγράψωμεν. Οὕτω, 87567,00,00,00,00 τοῦτο δὲ εἶναι ὡσὰν νὰ ἐπολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 87567 μὲ 100000000. Ἄρα διὰ νὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς ὁ αὐτὸς πρέπει μὲ τὸν αὐτὸν νὰ διέλωμεν (§. 292.), καὶ τότε εἶναι ὁ 67567 $=$

$\frac{875670000000}{100000000}$· ἄρα καὶ $\sqrt{87567} =$

$\frac{\sqrt{875670000000}}{\sqrt{100000000}}$ (§. 309.)· ἀλλ' ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμητοῦ εὕρεται 2929152· ἡ δὲ ῥίζα τοῦ παρονομαστοῦ $\sqrt{100000000} = 10000$ (§. 308.)· ἄρα τὸ κλάσμα

$$\frac{\sqrt{8756700000000}}{\sqrt{100000000}}=\frac{2959152}{10000}=295,9152$$ καὶ εἶναι λοιπὸν $\sqrt{87567}=295,9152$.

Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον εὑρίσκεται ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνικὴ καὶ τοῦ 2, τοῦ 3, τοῦ 5 κτ.

$\sqrt{2}=1,41421$

```
 1
 ----
 100 |:24
  96
 ----
  400 |: 281
   281
  -----
   11900 |: 2824
   11296
  -------
    60400 |: 28282
    56564
   -------
     383600 |: 282841
     282841
    --------
     100759 . . .
```

$\sqrt{5}=2,23606$

```
 4
 ----
 100 |: 42
  84
 ----
  1600 |: 443
  1329
 -----
  27100 |: 4460
  26796
 -------
   30400 |: 4472
 -------
   304000 |:427206
   2683236
  --------
    356764 . . .
```

Καὶ εἶναι τῇ ἀληθείᾳ ἡ ῥίζα $\sqrt{2}>1,41421$ καὶ $\sqrt{2}<1,41422$ ὁμοίως καὶ εἰς τὰς λοιπάς.

§. 258. Ἐὰν δὲ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀπὸ ἀριθμὸν ὁλοσχερῆ ἔχοντα ὁμοῦ καὶ δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, εὐκόλως κατὰ τὰ ἀνωτέρω καὶ αὐτοῦ τὴν ῥίζαν ἐξάγομεν· τοῦτο μόνον νὰ προσέξωμεν.

Α΄. Ὥστε οἱ δεκαδικοὶ χαρακτῆρες μετὰ τὸ κόμμα νὰ εἶναι ἄρτιοι, ἤτοι ζευγάρια· εἰδὲ καὶ εἶναι περιττοί, εἰς τὸ τέλος πρὸς τὰ δεξιὰ πρέπει νὰ γράψωμεν ἓν μηδενικὸν σημεῖον διὰ νὰ γένωσιν ἄρτιοι· διότι τὰ μηδενικὰ εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, ὅσα καὶ ἂν προσγραφῶσι μετὰ τοὺς χαρακτῆρας πρὸς τὰ δεξιά, οὐδὲν σημαίνουσι (§. 232).

Β΄. Διακρίνοντες ἔπειτα τὰς κλάσεις ἀνὰ δύο χαρακτῆρας ὅλου τοῦ ἀριθμοῦ ὡς ὁλοκλήρου, ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ὡς ἐδιδάχθημεν εἰς τοὺς ὁλοκλήρους ἀριθμοὺς χωρὶς διάκρισιν τῶν δεκαδικῶν χαρακτήρων.

Γ΄. Εὐθὺς ὅπου καταβιβασθῇ ἡ πρώτη κλάσις μετὰ τὸ κόμμα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ γράφομεν κόμμα καὶ εἰς τὴν ῥίζαν, καὶ ὅλοι οἱ λοιποὶ χαρακτῆρες τῆς ῥίζης μετὰ τὸ κόμμα εἶναι δεκαδικοί.

Ζητεῖται, φέρ᾽ εἰπεῖν, ἡ ῥίζα τοῦ 594,823321 ἀριθμοῦ ἀκεραίου μὲ δεκαδικὸν κλάσμα· ἡ ῥίζα ἔσται ὡς εἰς τὸ Α΄ παράδειγμα:

Α΄	Β΄
$\sqrt{5,94,82,33,21}=24,389,$	$\sqrt{135,54,30}=11,64$
4	1
194 | : 44	35 | : 21
176	21
1882 | : 483	1454 | : 226
1449	1356
43333 | : 4868	9830 | : 2324
38944	9296
438921 | : 48769	534
438921	
0	

Εἰς μὲν τὸ πρῶτον παράδειγμα 594,823321 τὰ δεκαδικὰ ἦν ἄρτια, εἰς δὲ τὸ δεύτερον 135,543 περιττά· ἐπειδὴ τὰ δεκαδικὰ ἔχουσι τοὺς χαρακτῆρας περιττούς, ἐγράφη καὶ ἓν μηδενικόν, διὰ νὰ γένωσιν ἄρτιοι. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα ἔμεινε λεῖψανον 534. καὶ ἡ ῥίζα εἶναι μικροτέρα, προσγράφομεν ἔτι κλάσεις μηδενικῶν ἀνὰ δύο χαρακτῆρας, καὶ εὑρίσκομεν τὴν ῥίζαν μὲ πλείονας χαρακτῆρας δεκαδικούς· δηλ: ἐὰν ζητῆται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 1,4142, ἥτις μὲ δύο δεκαδικοὺς ἐξέρχεται, ἐὰν θέλω νὰ τὴν εὕρω μὲ τέσσαρας προσγράφω ἔτι μηδενικὰ τέσσαρα, οὕτω 1,41420000· ἐὰν μὲ 5, προσγράφω ἔτι δύω μηδενικὰ οὕτω 1,4142000000 τὰ δὲ λοιπὰ γίνονται ὡς ἐδιδάχθημεν (§. 354.).

```
√1,41,42,00,00,00=1,18920
 1
 ―――――――――
 .41     |: 21
  21
 ―――――――――
  2042   |: 228
  1824
 ―――――――――
 .21800  |: 2369
  21321
 ―――――――――
   47900  |: 23782
   47564
   ―――――――――
   0033600 |: 23784
```

λείψανον τὸ ὁποῖον παραβλέπεται.

§. 259. Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ ἐὰν μόνον δεκαδικὰ κλάσμα εἶναι, χωρὶς ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς, μόνον ἐὰν οἱ χαρακτῆρες εἶναι περιττοὶ προσγράφεται μηδενικὸν, καὶ ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν ἔτι χαρακτῆρας δεκαδικοὺς τῆς ῥίζης, γράφομεν κλάσεις μηδενικῶν τόσας, ὅσους χαρακτῆρας θέλομεν νὰ εὕρωμεν· τὰ δὲ λοιπὰ γίνονται ὡς εἰς τοὺς ὁλοσχερεῖς ἀριθμούς. Ζητεῖται ἡ ῥίζα τοῦ 0,1444.

$\sqrt{0,14,44}=0,38$. ὅτι ἡ $\sqrt{0,00,81,72,16}=0,0904$

```
9                           81
―――――                       ―――――――
544    : 68                 ..72  |: 018
544                         ――――――
―――――                          7216 | 01804
...                            7216
                               ――――
                                  0
```

ἡ $\sqrt{0,94,30}=0,97108$

```
81
――――
1330 |: 187
1309
――――
  2100    |: 1941
  1941
  ――――
  15900    |: 19420
  ―――――
  1590000   |: 194208
  1553664
  ―――――――
    36336   λεῖψανον ὅπερ ἀμελεῖται.
```

Ὡσαύτως ἡ $\sqrt{0,00,00,00,04,85,10}=0,0002202$

```
4
――――
085   |: 42
 84
――――
  110|: 440
  ―――――
   1100     |: 4402
   8804
   ――――
   2196 λεῖψανον.
```

§. 360. Εὐκόλως ἤδη καὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑνὸς κοινοῦ κλάσματος ἐξάγομεν· ἤτοι εὑρίσκομεν τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ τὴν ῥίζαν τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ αἱ ῥίζαι κλασματικῶς γράφονται· (§. 309.)· ὡς $\sqrt{\frac{9}{16}}=$

$\frac{3}{4}$· ἐὰν ὅμως οἱ ἀριθμοὶ τοῦ κλάσματος εἶναι ἄλογοι, εὐκόλως ἀπαλλάττομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ἀπὸ τὸ ῥιζικὸν σημεῖον, ἐὰν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστὴν (§. 92.) ὡς $\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2.\ 5}}{\sqrt{5.\ 5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$· ἤδη εὑρίσκομεν τὴν ῥίζαν τὴν τετραγωνικὴν τοῦ 10 κατὰ τὰ ἄνω $\sqrt{10}=3,1622$ καὶ ταύτην διὰ τοῦ 5 διαιροῦμεν οὕτω $\frac{3,1622}{5}=0,6324$· ἄρα $\sqrt{\frac{2}{5}}=0,6324$· ὁμοίως καὶ ἡ ῥίζα τοῦ $\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3.\ 7}}{\sqrt{7.\ 7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$ ἐὰν εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 21=4,58257 καὶ διὰ τοῦ 7 διέλωμεν οὕτω $\frac{4,58257}{7}=0,65465$ εἶναι ἡ ῥίζα τοῦ κλάσματος $\frac{3}{7}$ ἡ τετραγωνική. Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ἀπαλλάττομεν τὸν παρονομαστὴν ἑκάστου κλάσματος ῥιζικοῦ ἀπὸ τὸ σημεῖον τὸ ῥιζικόν. Τοῦτο γίνεται καὶ εἰς τὰ Ἀλγεβραϊκὰ κλάσματα· ὡς $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\beta\beta}}=$

$\sqrt{10},=3,1622$

```
  9
 ----
 100|: 61
  61
 ----
 3900 : 626
 3756
 -----
  14400|: 6322
  12644
  ------
  175600|:63242
  126484
  ------
   49116
```

$\sqrt{21}=4,58227$

```
 16
 ----
 500|: 85
 425
 -----
 7500|: 908
 7264
 ------
  23600| : 9162
  18324
  -------
   527600|: 91645
   458225
   -------
   6937500...
```

$\frac{\sqrt{\alpha\delta}}{\delta}$ καὶ ἔτι $\sqrt{\frac{\alpha\delta}{2\gamma}}=\frac{\sqrt{2\alpha\delta\gamma}}{2\gamma}$. δηλ: μὲ τὸν παρονομαστὴν πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν ὁποῦ εἶναι ὑπὸ τὸ σημεῖον τὸ ῥιζικὸν, καὶ ἀπαλείφομεν τὸ ῥιζικὸν ἀπὸ τοῦ παρονομαστοῦ· ὡς $\sqrt{\frac{21}{42}}=\frac{\sqrt{21.\ 42}}{42}$, καὶ $\sqrt{\frac{15\,\alpha\gamma}{3\delta\delta}}=\frac{\sqrt{15.\ 3\alpha\delta\gamma\delta}}{3\delta\gamma}$.

§. 301. Ἐξάγομεν δὲ τὴν ῥίζαν τὴν τετραγωνικὴν ἑκάστου κλάσματος καὶ τοῦτον τὸν τρόπον: δηλ: μεταβάλλομεν τὸ κλάσμα πρῶτον εἰς δεκαδικὸν (§. 250). καὶ εἶτα ἀπὸ τοῦτο τὸ δεκαδικὸν ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, καὶ ἡ εὑρεθεῖσα εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα τοῦ κλάσματος. δηλ: ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ κλάσματος $\frac{3}{7}=0{,}42857142$. ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ οὕτω·

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{0{,}42{,}85{,}71{,}42{,}85}=0{,}65465 \\
\quad 36 \\
\hline
\quad .685 \mid: 125 \\
\quad\ 625 \\
\hline
\quad\ .6071 \mid: 1304 \\
\quad\ \ 5216 \\
\hline
\quad\ \ .85542 \mid: 13086 \\
\quad\ \ \ 78516 \\
\hline
\quad\ \ \ 702685 \mid: 130925 \\
\quad\ \ \ 654625 \\
\hline
\quad\ \ \ .48060
\end{array}
$$

ἄρα $\sqrt{\frac{3}{7}}=0{,}65465$ ὡς ἀνωτέρω. καὶ εἶναι τὸ αὐτὸ, ἢ οὕτως, ἢ ἐκείνως ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα τῶν κλασμάτων.

II) Περὶ ἐξαγωγῆς τῆς Κυβικῆς ῥίζης.

§. 362. Πῶς ὁ κύβος ἀπὸ ἕνα χαρακτῆρα γίνεται (§. 298), καὶ πῶς ἡ ῥίζα εἰς ἕνα χαρακτῆρα νὰ ἐξάγεται, εἴπομεν ἱκανὰ εἰς τὸ (§. 301). Ἐμάθομεν ὁμοίως καὶ πῶς ὁ κύβος ἑνὸς διωνύμου γίνεται (§. 332). ὅτι δηλ: ὁ κύβος τοῦ διωνύμου $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$, σύγκειται ἀπὸ μέρη τέσσαρα· ἀπὸ τὸν κύβον τοῦ πρώτου μέρους τῆς ῥίζης, καὶ ἀπὸ τοῦ τριπλοῦ παραγομένου τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου μέρους ἐπὶ τὸ δεύτερον, και ἀπὸ τοῦ τριπλοῦ παραγομένου τοῦ πρώτου μέρους ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου, καὶ ἀπὸ τοῦ κύβου τοῦ δευτέρου μέρους. Τοῦτο συμβαίνει καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς, ἐὰν τὸν κύβον τοῦ 43 ζητήσωμεν, ἔςαι $(40+3)^3=40^3+3.\,40^2.\,3+3.\,40.\,3^2+3^3=64000+14400+1080+27$. ὁ σκοπός μας ὅμως ἐνταῦθα εἶναι ὄχι πῶς ὑψοῦμεν τὰς πολυμερεῖς ῥίζας εἰς κύβον, ἀλλ' ἀνάπαλιν, πῶς αὐτὰς τὰς ῥίζας ἀπὸ τοὺς κυβικοὺς ἀριθμοὺς ἐξάγομεν, καὶ ἡ μέθοδος εἶναι ἐναντία, ἤτοι ἀνασκευὴ τῆς κατασκευῆς τῶν κυβικῶν ἀριθμῶν, μὲ ὅλον ὁποῦ ἡ ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ὡς ἐργωδεςέρα τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης σπανίως συμβαίνει καὶ γίνεται. Ἡμεῖς ὅμως διὰ νὰ μάθωμεν καὶ αὐτὸν τὸν τρόπον, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸν κύβον αὐτοῦ τοῦ διωνύμου, καὶ νὰ πολυπραγμονήσωμεν, πῶς ἡ ῥίζα αὐτοῦ εὑρίσκεται. Καὶ λοιπὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τῆς ἐκθέσεως $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$. λαμβάνομεν τὸ πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης ἐὰν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀπὸ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς ἐκθέσεως ἐξαγάγωμεν $\sqrt[3]{\alpha^3}=\alpha$. διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ τὸ δεύτερον μέρος τῆς ῥίζης β, ἐπειδὴ καὶ τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὸν δεύτερον ὅρον τῆς ἐκθέσεως, πρέπει μὲ ἕνα ἀριθμὸν νὰ διέλωμεν αὐτὸν τὸν δεύτερον ὅρον, καὶ νὰ δοθῇ τὸ πηλίκον· αὐτὸ τὸ β, τὸ ὁποῖον ἄλλως δὲν ἐξέρχεται, εἰ μὴ ἐὰν τετραγωνίσωμεν αὐτὸ τὸ εὑρεθὲν πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης, καὶ εἶτα τριπλασιάσωμεν, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο $3\alpha^2$ διέλῃ τὸν δεύτερον ὅρον οὕτω $3\alpha^2\beta : 3\alpha^2 = \beta$· ἄρα πάντοτε, εὑρόντες τὸν πρῶτον ὅρον τῆς κυβικῆς ῥίζης, τοῦτον τετραγωνίζοντες, καὶ τριπλασιάζοντες, καὶ διαιροῦντες τὸν δεύτερον ὅρον τῆς ἐκθέσεως, εὑρίσκομεν καὶ τὸ δεύτερον μέρος τῆς ῥίζης· εἶτα διὰ νὰ μάθωμεν ἂν ἡ δοθεῖσα ἔκθεσις εἶναι ἐντελὴς κύβος, καὶ δὲν ἔχει ἕτερον μέρος τῆς ῥίζης, πολλαπλασιάζομεν Α΄ αὐτὸν τὸν διαιρέτην μὲ τὸ δεύτερον εὑρεθὲν μέρος· Β΄ τετραγωνίζομεν τὸ δεύτερον μέρος, καὶ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸ πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης, καὶ τὸ γινόμενον τριπλασιάζομεν· Γ΄ ὑψοῦμεν εἰς κύβον τὸ δεύτερον μέρος καὶ τὰ τρία αὐτὰ παραγόμενα ὁμοῦ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν ἔκθεσιν ὅλην πλὴν τοῦ πρώτου ὅρου, καὶ ἐὰν δὲν μείνῃ λείψανον, κρίνομεν, ὅτι ἡ ἔκθεσις εἶναι κύβος ἐντελής, καὶ ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἡ κυβικὴ εἶναι ἡ $\alpha+\beta$· ὡς εἰς τὸ παράδειγμα φαίνεται

$$\sqrt[3]{\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}=\alpha+\beta$$
$$-\alpha^3$$
$$\overline{}$$
$$+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 : 3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$
$$3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$
$$-\quad -\quad -$$
$$\overline{}$$
$$0$$

§. 363. Λοιπὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν μιᾶς ἐκθέσεως τῆς $8\alpha^3+36\alpha^2+54\alpha+27$ φερ' εἰπεῖν.

Α΄. Εὑρίσκομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ἐκθέσεως, ἀφ' οὗ γραφῇ ἡ ἔκθεσις, καὶ πρὸ αὐτῆς τὸ κυβικὸν ῥιζικὸν σημεῖον $\sqrt[3]{}$, καὶ μετ' αὐτὴν τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος οὕτως, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα φαίνεται, καὶ γράφομεν αὐτὴν εἰς τὸ πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης.

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{8\alpha^3+36\alpha^2+54\alpha+27}=2\alpha+3 \\
-8\alpha^3 \\
\hline
\quad +36\alpha^2+54\alpha+27 \;|:\; 12\alpha^2 \\
\quad\;\; 36\alpha^2+54\alpha+27 \\
\quad\;\; - \quad - \quad - \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Β΄. Ὑψοῦμεν εἰς κύβον αὐτὸ τὸ εὑρεθὲν πρῶτον μέρος, καὶ ἀφαιροῦμεν τοῦτο ἀπὸ τὴν ἔκθεσιν, καὶ τὸ λείψανον γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ὡς $8\alpha^3+36\alpha^2+54\alpha+27-8\alpha^3=36\alpha^2+54\alpha+27$.

Γ΄. Τετραγωνίζομεν τὸ εὑρεθὲν πρῶτον μέρος, καὶ τριπλασιάζομεν αὐτὸ, καὶ γίνεται διαιρέτης εἰς τὸ λείψανον τοῦ δευτέρου ὅρου· τὸ δ' εὑρεθὲν πηλίκον γράφεται εἰς δεύτερον μέρος τοῦ πηλίκου, μὲ τὸ ἀνῆκον σημεῖόν του.

Δ΄. Μὲ αὐτὸ τὸ δεύτερον μέρος πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην, καὶ ὑπὸ τὸ λείψανον γράφεται τὸ γινόμενον $36\alpha^2$. εἶτα τετραγωνίζομεν τὸ δεύτερον μέρος $3.\ 3=9$, καὶ τὸ πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸ πρῶτον μέρος $2\alpha.\ 9=18\alpha$ καὶ τοῦτο τριπλασιάζομεν $3.\ 18\alpha=54\alpha$, καὶ μὲ τὸ ἀνῆκον σημεῖόν του γράφεται ὑπὸ τὸ λείψανον μὲ τὸ πρῶτον γινόμενον, τέλος κυβώνομεν αὐτὸ τὸ δεύτερον μέρος οὕτω $3.\ 3.\ 3=27$, καὶ μὲ τὸ ἀνῆκον σημεῖόν του γράφεται ὑπὸ τὸ λείψανον μὲ τὰ δύω πρῶτα γινόμενα.

Ε΄. Τὸ κεφάλαιον τούτων τῶν τριῶν γινομένων ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ λείψανον· καὶ ἐὰν δὲν μείνῃ λείψανον ὡς εἰς τὸ παράδειγμά μας, κρίνομεν ὅτι ἡ ἔκθεσις $8\alpha^3+36\alpha^2+54\alpha+27$ εἶναι κύβος ἐντελὴς, καὶ κυβικὴ ρίζα αὐτοῦ εἶναι ἡ εὑρεθεῖσα $2\alpha+3$· διότι ἐὰν αὐτὴν τρὶς παράγοντα λάβωμεν, καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον εἶναι ἡ ἔκθεσις. (§. 301.)

ϛ'. Ἐὰν δὲ μείνῃ λείψανον, κρίνομεν ὅτι ἔχει ἡ ρίζα καὶ ἕτερον μέρος· διὰ τοῦτο λαμβάνομεν τὰ δύω εὑρεθέντα μέρη τῆς ρίζης ὁμοῦ εἰς ἓν μέρος πρῶτον, καὶ κατὰ τὰ ἄνω τετραγωνίζομεν αὐτὸ, καὶ τριπλασιάζομεν, καὶ γίνεται δεύτερος διαιρέτης εἰς τὸ λείψανον ὡς διαιρετέος, τὸ δὲ εὑρεθὲν πηλίκον γράφεται εἰς τρίτον μέρος τῆς ρίζης· ἔπειτα κατὰ τὰ ἀνωτέρω, πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην μὲ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον, εἶτα τετραγωνίζομεν τὸ τρίτον μέρος τῆς ρίζης, καὶ τριπλασιάζομεν, καὶ πολλαπλασιάζομεν τοῦτο μὲ τὰ δύω πρῶτα μέρη τῆς ρίζης καὶ ἔπειτα κυβώνομεν τὸ ἤδη εὑρεθὲν μέρος, καὶ τὰ τρία ὁμοῦ ὀφαιροῦμεν, καὶ ἐὰν δὲν μείνῃ τίποτε, ἐντελὴς κύβος ἡ ἔκφρασις· εἰ δὲ καὶ μείνῃ, ἢ εἶναι καὶ ἕτερον μέρος τῆς ρίζης, ἢ εἶναι ἄλογος ἡ ἔκφρασις, καὶ γίνεται εἰς ἄπειρον σειρὰν, περὶ ὧν ὕστερον ἐροῦμεν.

Ζητεῖται φέρ' εἰπεῖν ἡ κυβικὴ ρίζα τῆς ἐκθέσεως $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+12\alpha^2+12\beta^2+24\alpha\beta+48\alpha+48\beta+64$, αὕτη ἔσεται

$$\sqrt[5]{\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+12\alpha^2+12\beta^2+24\alpha\beta+48\alpha+48\beta+64}=\alpha+\beta+4$$

$$\alpha^3$$

$$\overline{+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+12\alpha^2+12\beta^2+24\alpha\beta+48\alpha+48\beta+64} \;|:\; 3\alpha^2$$

$$3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

$$\overline{+12\alpha^2+12\beta^2+24\alpha\beta+48\alpha+48\beta+64} \quad . \; 3\alpha^2+6\alpha\beta+3\beta^2$$

$$12\alpha^2+12\beta^2+24\alpha\beta$$

$$+48\alpha+48\beta+64$$

$$\overline{\quad 8 \quad}$$

Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν πολλῶν μερῶν μιᾶς ἐκθέσεως· πλὴν τοῦτο ἢ οὐδέποτε, ἢ σπανιώτατα συμβαίνει εἰς ἐκθέσεις ἀλγεβραϊκάς· ὅθεν εἰς τὸ τρίτον βιβλίον θέλομεν εὕρη ἑτέραν εὔκολον μέθοδον, πῶς τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἐξάγομεν καὶ μάλιςα ὅταν τὴν χρῆσιν τοῦ διωνύμου διδάξωμεν· διότι δι' αὐτοῦ εὑρίσκομεν τὴν ῥίζαν οὐ μόνον τὴν κυβικὴν, ἀλλὰ καὶ ἀνωτέρων δυνάμεων, καὶ πρὸς τὸ παρὸν οἱ μαθητιῶντες ἂν μὴ λυπῶνται διὰ τὸ κοπιαςικὸν τῆς ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης.

Ἤδη δὲ ἂς μάθωμεν, καὶ πῶς εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τὴν κυβικὴν ῥίζαν εὑρίσκομεν.

§. 364. Εἰς τὸ διάγραμμα (§. 342) ἴδομεν ὅτι ὁ κύβος τῆς ῥίζης ἑνὸς χαρακτῆρος ὁ μείζων συνίςαται ἀπὸ τρεῖς χαρακτῆρας ὡς 9. 9. 9=721. εἶναι ὅμως καὶ ὁ κύβος εἰς δύω χαρκτῆρας. ὡς $4^3=64$. καὶ εἰς ἕνα $2^3=8$. λοιπὸν ὁ κύβος μιᾶς ῥίζης μὲ πολλοὺς χαρακτῆρας ὁ μέγιςος δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ περισσοτέρους χαρακτῆρας ἀπὸ τοὺς τριπλασίους τῶν χαρακτήρων τῆς ῥίζης. Ἔςω ἡ ῥίζα τεσσάρων χαρακτήρων ἔχουσα τοὺς μείζονας χαρακτῆρας 9999. οὗτος ὁ ἀριθμὸς ὅμως ἐλάττων τοῦ 10000, καὶ ὁ κύβος τοῦ 10000 εἶναι =1000000000000 μὲ 13 χαρακτῆρας· ἄρα ὁ $(9999)^3$ θέλει ἔχει τοῦ λάχιςον 12 χαρακτῆρας καὶ οἱ 12 εἶναι τριπλάσιοι τῶν τεσσάρων τῆς ῥίζης· ἄρα ὁ κύβος ἑκάςης ῥίζης πλείονας χαρακτῆρας ἀπὸ τριπλασίους τῶν χαρακτήρων τῆς ῥίζης δὲν ἔχει πότε· λέγω δὲ, ὅτι καὶ ὁ ἐλάχιςος κύβος δὲν ἔχει ποτὲ ὀλιγωτέρους χαρακτῆρας ἀπὸ τοὺς τριπλασίους χαρακτῆρας τῆς ῥίζης παρὰ δύω. Ἔςω ὁ ἐλάχιςος ἀριθμὸς μιᾶς ῥίζης μὲ τέσσαρας χαρακτῆρας ὁ 1001 ἀλλ' οὗτος μείζων τοῦ 1000 εἶναι 1000000000 ἔχει δηλ: 10 χαρακτῆρας, ἤτοι τριπλάσιοι τῶν τεσσάρων πλὴν δύο· πῶς δύναται ὁ μείζων αὐτοῦ ἀριθμὸς 1001 νὰ ἔχῃ ὀλιγωτέρους χαρακτῆρας; ἀπὸ τοὺς τριπλασίους τῶν χαρακτήρων τῆς ῥίζης παρὰ δύω δὲν ἔχει πότε.

§. 365. Ἀνάπαλιν λοιπὸν εἰς ἕκαςον ἀριθμὸν κυβικὸν δοθέντα, ἀμέσως μανθάνομεν, πόσους χαρακτῆρας θέλει ἔχει ἡ ῥίζα του, ἐὰν ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας εἰς κλάσεις αὐτῶν χωρήσωμεν, ἀδιαφοροῦντες ἂν ἡ ἀριςερωτάτη κλάσις μείνῃ μὲ δύω, ἢ τρεῖς χαρακτῆρας· διότι ὅσαι εὑρεθῶσιν αἱ κλάσεις τόσας ἔχει καὶ ἡ κυβικὴ ῥίζα του χαρακτῆρας. Οὕτως εἰς τὸν ἀριθμὸν 725310341 ἡ ῥίζα ἔχει τρεῖς χαρακτῆρας· διότι ἀφ' οὗ χωρισθῇ οὕτω 725 | 310 | 341 τρεῖς ἔχει κλάσεις. Εἰς δὲ τὸν 50000431043 ἔχει τέσσαρας χαρακτῆρας, διότι τέσσαρας ἔχει καὶ κλάσεις. 50 | 000 | 431 | 043. καὶ εἰς αὐτὸν 3000413781910, ἔχει πέντε· διότι πέντε κλάσεις ἔχει 3 | 000 | 413 | 781 | 910.

§. 366. Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης εἰς τοὺς ἀριθμοὺς εἶναι ἡ αὐτὴ ἐργασία, ὡς καὶ εἰς τὰ γράμματα. Καὶ διὰ νὰ λάβωμεν καθαρὰν ἰδέαν τοῦ πράγματος, λημθέτω ὁ κύβος τοῦ δυωνύμου ἀριθμοῦ $55=(50+5)^3=50^3+3.50^2.5+3.50.5^2+5^3=125000+3750+125$. ἐὰν δὲ συνάψωμεν ὅλα ὁμοῦ εἶναι ὁ κύβος τοῦ 55.

$$\begin{array}{r} 125000 \\ 37500 \\ 3750 \\ 145 \\ \hline \end{array}$$

ὁ κύβος τοῦ $55=166\,|\,375$

Ἐκ τούτου μανθάνομεν Α΄, ὅτι ὁ κύβος τῆς δεκάδος τοῦ πρώτου μέρους τῆς ῥίζης 50 δὲν ἔχει χώραν εἰς τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς τοὺς δεξιοὺς, ἀλλ' ἀπὸ τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τῆς δευτέρας κλάσεως πρὸς ἀριςερὰ ἐκτείνεται· ὅθεν εἰς πρώτην κλάσιν 166 ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου μέρους τῆς ῥίζης εὑρίσκεται, καὶ τῷ ὄντι ἡ ἐγγὺς ἐλάττων κυβικὴ ῥίζα τοῦ 166 εὑρίσκεται ὁ 5.

Β΄. Ὅτι τὸ τριπλοῦν παραγόμενον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου μέρους ἐπὶ τὸ δεύτερον $3.\ 50^2.\ 5=37500$ ἀπὸ τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τῆς ἑξῆς κλάσεως πρὸς ἀριςερὰ ἐκτείνεται· εἰς δὲ τὸν δεύτερον καὶ τρίτον χαρακτῆρα αὐτῆς τῆς κλάσεως δὲν ἔχει χώραν· ὅθεν ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ δεύτερον μέρος τῆς κυβικῆς ῥίζης, μόνον ἕως εἰς τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τῆς ἑξῆς κλάσεως πρέπει νὰ τὸν ζητήσωμεν, καὶ πλέον οὔ· τὸ δὲ παραγόμενον τὸ τριπλοῦν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου μέρους ἐπὶ τὸ δεύτερον μόνον ἀπὸ τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τῆς ἑξῆς τάξεως ἄρχεται, καὶ πρὸς ἀριςερὰ γράφεται· καὶ αὐτοῦ μόνου ζητεῖται.

Γ΄. Ὅτι τὸ τριπλοῦν παραγόμενον τοῦ πρώτου μέρους ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου μέρους τῆς ῥίζης μέχρι τοῦ δευτέρου χαρακτῆρος τῆς ἑξῆς τάξεως ἐκτείνεται, καὶ εἰς τὸν ἔσχατον χαρακτῆρα αὐτῆς τῆς κλάσεως δὲν ἔχει χώραν· ὅθεν τὸ τριπλοῦν παραγόμενον ἀπὸ τοῦ πρώτου μέρους ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου, ἄρχεται ἀπὸ τοῦ δευτέρου χαρακτῆρος τῆς ἑξῆς κλάσεως, καὶ πρὸς ἀριστερὰ ἐκτείνεται γραφόμενον.

Δ΄. Ὁ κύβος τοῦ δευτέρου μέρους ἔχει χώραν μόνον εἰς τὸν ἔσχατον χαρακτῆρα τῆς ἑξῆς κλάσεως· ὅθεν ὁ κύβος τοῦ δευτέρου μέρους ἄρχεται νὰ γράφηται ἀπὸ τὸν ἔσχα-χαρακτῆρα τῆς ἑξῆς κλάσεως πρὸς ἀριστερά.

§. 367. Ταῦτα πάντα καλῶς μαθόντες εὑρίσκομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἑκάστου δοθέντος ἀριθμοῦ κατὰ τὰ ἑξῆς.

Α΄. Γραφήτω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ἡ κυβικὴ ῥίζα ζητεῖται, ὡς ὁ 45118016, καὶ εἰς κλάσεις ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας διακριθήτω, καὶ πρὸ αὐτοῦ μὲν γραφήτω τὸ σημεῖον τὸ ῥιζικόν, μετ᾽ αὐτὸν δὲ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα φαίνεται

	$\sqrt[3]{45\,\vert\,118\,\vert\,016}=356$	
$3^3=$	27	
λείψανον Α΄.	18118 |	$: 3.\ 3.\ 3=27$
$5.\ 27=$	135	
$3.\ 5^2.\ 3=$	225	
$5^3=$	125	
λείψανον Β΄.	2243016 |	$: 3(35)^2=3675$
$6.\ 3675=$	22050	
$3.\ 6^2.\ 35=$	3780	
$6^3=$	216	
	000000	

Β΄. Τῆς ἀριστερᾶς κλάσεως εὑρεθήτω ἡ κυβικὴ ῥίζα κατὰ τὸ διάγραμμα (§. 342). καὶ ἐὰν δὲν εἶναι ἡ κλάσις κυθος εντελής, ληφθήτω ο εγγύς ελάσσων ως $\sqrt[3]{45}=3$ καὶ γραφήτω πρώτον μέρος της ρίζης. εἶτα τὸ μέρος τοῦτο κυβωθήτω καὶ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ της αριστερωτάτης κλάσεως καὶ εἰς τὸ λείψανον καταβιβασθήτω ἡ ἑξῆς τάξις. 118.

Γ'. Τετραγωνισθήτω τὸ ἤδη εὑρεθὲν μέρος καὶ τριπλασιασθήτω, καὶ τοῦτο διαιρέτης γενέσθω, καὶ δι' αὐτοῦ διαιρεθήτω τὸ λείψανον μέχρι τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τῆς ἑξῆς καταβιβασθείσης κλάσεως, τὸ δὲ πηλίκον 5 εἰς τὸ παράδειγμα γραφήτω δεύτερον μέρος τῆς ρίζης· λοιπὸν δι' αὐτοῦ πολλαπλασιασθήτω ὁ διαιρέτης, 27. 5=135, καὶ γραφήτω τοῦτο τὸ γινόμενον ἀπὸ τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τῆς ἑξῆς κλάσεως· δεύτερον τετραγωνισθήτω τὸ δεύτερον τοῦτο μέρος, καὶ τριπλασιασθήτω, καὶ εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ πρῶτον μέρος, καὶ τοῦτο γραφήτω εἰς δεύτερον γινόμενον ἀπὸ τοῦ δευτέρου χαρακτῆρος τῆς ἑξῆς κλάσεως ὡς $3.5^2.3=225$. τρίτον κυβωθήτω τὸ δεύτερον τοῦτο μέρος $5^3=125$, καὶ γραφήτω ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου χαρακτῆρος τῆς αὐτῆς κλάσεως· εἶτα ταῦτα τὰ τρία παραγόμενα συναφθήτωσαν εἰς ἕν, ὡς 13500+2250+125=15875 καὶ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ ἄνω 181875=2243. ἢ ἐὰν θέλης χωρὶς νὰ τὰ συνόψης ὁμέσως αὐτὰ ἄφελε, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα ἔγινε, καὶ ἐὰν λείψανον μείνῃ καταβιβασθήτω καὶ ἡ ἑξῆς κλάσις 016 καὶ γίνεται ὅλος ὁ ἀριθμὸς 2243016.

Δ'. Λαμβάνομεν ἤδη τοὺς δύο εὑρεθέντας χαρακτῆρας τῆς ρίζης 35 ὡς ἕνα χαρακτῆρα καὶ τετραγωνίζομεν αὐτοὺς, καὶ τριπλασιάζομεν, καὶ τὸ γινόμενον γίνεται δεύτερος διαιρέτης, καὶ διαιρεῖ τὸν διαιρετέον μέχρι τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τῆς καταβιβασθείσης κλάσεως, τὸν ἀριθμὸν

22430 τὸ δὲ πηλίκον 6, γίνεται τρίτος χαρακτὴρ τῆς ῥίζης.

Ε΄. Μὲ αὐτὸν τὸν τρίτον χαρακτῆρα 6 πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην καὶ γράφομεν τὸ γινόμενον πρῶτον ἀπὸ τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τῆς καταβιβασθείσης κλάσεως πρὸς ἀριστερά· εἶτα τετραγωνίζομεν αὐτὸν τὸν τρίτον χαρακτῆρα καὶ τριπλασιάζομεν, καὶ πολλαπλασιάζομεν μὲ τοὺς πρώτους δύο χαρακτῆρας, καὶ γράφεται δεύτερον γινόμενον ἀπὸ τοῦ δευτέρου χαρακτῆρος τῆς καταβιβασθείσης κλάσεως πρὸς ἀριστερά· τέλος κυβώνομεν τὸ τρίτον μέρος αὐτὸ καὶ τὸν κύβον αὐτοῦ γράφομεν εἰς τρίτον γινόμενον ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου χαρακτῆρος τῆς καταβιβασθείσης κλάσεως πρὸς ἀριστερά.

Ϛ΄. Συνάπτομεν αὐτὰ τὰ τρία γινόμενα, καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ ὅλου τοῦ ἄνω διαιρετέου, καὶ ἐὰν ἔχωμεν καὶ ἑτέραν κλάσιν καταβιβάζομεν καὶ αὐτὴν, καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εὑρίσκομεν καὶ ἕτερον μέρος τῆς ῥίζης, ἀφ' οὗ ἤδη τοὺς τρεῖς χαρακτῆρας τετραγωνίσωμεν, καὶ τριπλασιάσωμεν, καὶ τοῦτο διαιρέτην ποιήσωμεν κτ. ἐὰν ὅμως δὲν ἔχωμεν ἄλλην κλάσιν, καὶ δὲν μείνῃ τίποτε, κρίνομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι κύβος ἐντελὴς, καὶ ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα· ὡς εἰς τὸ παράδειγμά μας οὐδὲν ἔμεινε, καὶ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 356 ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 45118016, διότι 356. 356. 356=45118016· καὶ αὕτη εἶναι ἡ δοκιμή. Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ἐξάγεται ἡ ῥίζα καὶ τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν.

Ζ΄. Ὅπου δὲ ὁ διαιρέτης δὲν εὑρίσκει νὰ λάβῃ πηλίκον ἤτοι εἶναι μείζων τοῦ διαιρετέου, ἐκεῖ πηλίκον εἰς μέρος τῆς ῥίζης μηδενικὸν σημεῖον γράφεται· ὡς εἰς τὸ Β΄ ἑξῆς παράδειγμα φαίνεται, καὶ ἀμέσως ἡ ἑξῆς κλάσις καταβιβάζεται.

A′.

$\sqrt[3]{92\,|\,959\,|\,677}=453$

$4^3=\ 64$

$28959\ |:\ 3.\ 4^2=45$

$5.\ 48=\ 240$

$3.\ 5^2.\ 4=\ 300$

$5^3=\ 125$

$1834677\ |:\ 3(45)^2=6075$

$3.\ 6075=\ 18225$

$3.\ 3^2(45)=\ 1215$

$3^3=\ 27$

0000000

B′.

$\sqrt[3]{131\,|\,096\,|\,512}=508$

$5^3=\ 125$

$6096\ |:\ 3.\ 5^2=75$

$6096512\ |:\ 3.(50)^2=7500$

$7500.\ 8\ \ 60000$

$3.\ 8^2.\ 50=\ 9600$

$8^3=\ 512$

0000000

§. 368. Ἐὰν δὲ μείνῃ τι λείψανον μετὰ τὸν καταβιβασμὸν τῶν κλάσεων, τότε ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν εἶναι ἐντελὴς κύβος, καὶ ἐπομένως ἄλογος· τούτου δὲ τὴν κυβικὴν ῥίζαν εὑρίσκομεν διὰ τῆς προσεγγίσεως, προσγράφοντες εἰς τὸ λείψανον κλάσεις ἀνὰ τρία μηδενικὰ τόσας, ὅσα δεκαδικὰ θέλομεν· διότι εἰς κάθε κλάσιν τριῶν μηδενικῶν εὑρίσκομεν ἕνα χαρακτῆρα δεκαδικόν· διὰ τοῦτο μετὰ τὰς κλάσεις τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ γράφομεν το κόμμα εἰς τὴν ῥίζαν, καὶ οἱ ἑξῆς χαρακτῆρες τῆς ῥίζης εἶναι δεκαδικοί· τὰ δὲ λοιπὰ γίνονται ὡς ἐδιδάχθημεν· (§. 367.):

A'.

$\sqrt[3]{4|827}=16,9$

$$
\begin{array}{rrl}
 & 1 & \\
\hline
 & 3827 & |: 3 \\
3.\ 6= & 18 & \\
3.\ 6^2= & 108 & \\
6^3= & 216 & \\
\hline
 & 731000 & : 768=3(16)^2 \\
9.\ 768= & 6912 & \\
3.\ 9^2.\ 16= & 3888 & \\
9^3= & 729 & \\
\hline
 & \ldots\ldots 191 & \\
\end{array}
$$

B'

$\sqrt[3]{10}=2,15$

$$
\begin{array}{rrl}
 & 8 & \\
\hline
 & 2000 & |: 12 \\
1.\ 12= & 12 & \\
1^2.\ 2.\ 3= & 6 & \\
1^3= & 1 & \\
\hline
 & 739000 & |: 1323=3(21)^2 \\
5.\ 1323= & 6615 & \\
3.\ 5^2.\ 21= & 1575 & \\
5^3= & 125 & \\
\hline
 & 61625 & \\
\end{array}
$$

Γ'

καὶ $\sqrt[3]{6}=1,81$

$$
\begin{array}{rl}
 & 1 \\
\hline
 & 5000 \mid : 3 \\
3.\ 8= & 24 \\
3.\ 8^2.\ 1= & 192 \\
8^3= & 512 \\
\hline
 & 0163000 \mid : 972=3(16)^2 \\
1.\ 972= & 972 \\
3.\ 1^2.\ 18= & 54 \\
1^3= & 1 \\
\hline
 & 77259
\end{array}
$$

Εἰς μὲν τὸ Α' παράδειγμα μίαν κλάσιν μηδενικῶν ἐπροσθέσαμεν, καὶ ἕνα χαρακτῆρα δεκαδικὸν εὕρωμεν τὸν 9· τὸ δὲ λείψανον 191 παραμελεῖται· ἐὰν ὅμως καὶ ἑτέραν κλάσιν μηδενικῶν προσθέσωμεν, εὑρίσκομεν καὶ ἕτερον χαρακτῆρα.

Εἰς δὲ τὸ Β' παράδειγμα δύο κλάσεις μηδενικῶν ἐπροσθέσαμεν, καὶ δύω χαρακτῆρας δεκαδικοὺς εὕρωμεν τὸν 1 καὶ 5· καὶ πλείονας ἐπ' ἄπειρον εὑρίσκομεν ἐὰν καὶ ἄλλας κλάσεις μηδενικῶν προσγράψωμεν.

„Ἡ δὲ δεῖξις τῆς προσθέσεως τῶν μηδενικῶν χαρακτήρων εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ ἐκείνην ὁποῦ εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐλάβομεν· (§. 355 καὶ 356.)

§. 369. Ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι ὁλοσχερὴς μετὰ δεκαδικοῦ κλάσματος, βλέπομεν ἐὰν οἱ χαρακτῆρες τοῦ δεκαδικοῦ διακρίνονται εἰς κλάσεις ἐντελεῖς ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας, ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν, εἰ δὲ μή, εἰς τὸ τέλος προσγράφομεν ἐπὶ τὰ δεξιὰ ἓν ἢ δύο μηδενικά, διὰ νὰ εἶναι αἱ κλάσεις ἀνὰ 3 χαρακτῆρες, διότι εἰς τὸ τέλος τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος τὰ μηδενικὰ οὐδὲν σημαίνουσι· (§. 232.). Καὶ τότε διαιροῦμεν ὅλον ὁμοῦ τὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσεις, καὶ ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ὡς ἀπὸ ὁλοσχερῆ ἀριθμόν· πλὴν εἰς τὴν ῥίζαν μετὰ τὰς κλάσεις τῶν ὁλοσχερῶν χαρακτήρων τὸ κόμμα γράφεται, καὶ ἐκεῖθεν δεκαδικοὶ χαρακτῆρες ἐξέρχονται· εἰς δὲ τὸ τέλος ἐὰν λείψανον μείνῃ, προσγράφομεν καὶ ἑτέρας κλάσεις μηδενικῶν, καὶ ἐξάγομεν πλείονας χαρακτῆρας δεκαδικούς.

Ζητεῖται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 70,957944.

Α΄.

ἄρα $\sqrt[3]{70,|957|944} = 4,14$

	64
	6957 |: 48
$1.48 =$	48
$1^2.4.3 =$	12
	1
	2036944 |: 5043 = $3(41)^2$
$4.5043 =$	20172
$3.4^2.41 =$	1968
$4^3 =$	64
	0000000

Ζητεῖται ἔτι ἡ $\sqrt[3]{126,52}$, αὐτοῦ προσγράφεται ἓν μηδενικὸν, διὰ νὰ ἀπαρτισθῇ μία κλάσις τριῶν χαρακτήρων δεκαδικῶν.

B′.

$\sqrt[3]{126,|520} = 5{,}02$
125

1520|: 75

1520000 |: 7500

2. 7500= 15000
3. 2^2. 50= 600
2^3= 8

13992

§. 370. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ ῥίζα, εἶναι μόνον κλάσμα δεκαδικὸν, πάλιν τὰ αὐτὰ γίνονται, πληροῦμεν διὰ μηδενικῶν τοὺς χαρακτῆρας, ὥςε νὰ εἶναι αἱ κλάσεις ἐντελεῖς ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρες, καὶ ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ὡς εἰς τοὺς ὁλοσχερεῖς ἀριθμούς· εἰς τὴν ῥίζαν ὅμως εὐθὺς γράφομεν μηδενικὸν, καὶ μετὰ τοῦτο τὸ κόμμα, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι οὐδεὶς ἀκέραιος ἀριθμούς.

Ὡς ὁ $\sqrt[3]{0{,}5846}$· καὶ ἡ $\sqrt[3]{0{,}0000045}$.

A′.

$\sqrt[3]{0,|584|600} = 0{,}836$
512

72600 |: 192=3. 8^2
3. 192= 576
3. 3^2. 8= 216
3^3= 27

12813000 |: 20667=3$(83)^2$
6. 20667= 124002
3. 6^2. 83 = 8964
4^3= 216

322944

B'.

$$\sqrt[3]{0,|000|004|500} = 0,016 \ldots$$

$$\begin{array}{l} 1 \\ \hline 3500|:3 \\ 18 \\ 108 \\ \ \ 216 \\ \hline 404 \ldots \end{array}$$

§. 371. Ἐὰν δὲ ζητεῖται ἡ κυβικὴ ῥίζα ἑνὸς κλάσματος, εἰ μὲν τὸ κλάσμα εἶναι λογικὸν, ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαςοῦ (§. 361). ὡς $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}$ ἐὰν δὲ ἄλογον, μεταβάλλεται πρῶτον τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν, (§. 240). καὶ εἶτα ἐξάγομεν ὡς ἀνωτέρω ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ τὴν ῥίζαν τὴν κυβικήν.

δηλ: ζητεῖται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κλάσματος $\frac{5}{4} = 1,25$

ἄρα $\sqrt[3]{1,|250} = 1,077$

$$\begin{array}{rl} & 1 \\ \hline & .250\ |:3 \\ \hline & 250000\ |:300 \\ 7.\ 300 = & 2100 \\ 3.\ 7^2.\ 10 = & 1470 \\ 7^3 = & 343 \\ \hline & 24957000|:34347 \\ 7.\ 34347 = & 240429 \\ 107,\ 7^2.\ 3 = & 15729 \\ 7^3 = & 343 \\ \hline & 556467 \end{array}$$

§. 372. Ἢ καὶ οὕτως ἀπαλλάττομεν τὸν παρονομαστὴν κλάσματος ἀπὸ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου ἐὰν ἄνω καὶ κάτω πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ (§. 92), εἶτα ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ ταύτην διὰ τοῦ παρονομαστοῦ διαιροῦμεν εἰς κλάσμα δεκαδικόν. λ. χ. τὸ ἄνω κλάσμα $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{5.\,4^2}}{\sqrt[3]{4.\,4^2}}=$ $\frac{\sqrt[3]{5.\,4^2}}{\sqrt[3]{4^3}}=\frac{\sqrt[3]{5.\,4^2}}{4}=\frac{\sqrt[3]{80}}{4}=\frac{4.308}{4}=1{,}077$ ὡς ἀνωτέρω εὕρηται.

Χρήσιμος οὗτος ὁ τρόπος νὰ ἀπαλλάττωμεν δηλ: τὸν παρονομαστὴν ἀπὸ τοῦ σημείου τοῦ ῥιζικοῦ τοῦ κυβικοῦ, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ, ἐξέρχεται τὸ ῥιζικὸν σημεῖον ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν, καὶ μένει ὁ παρονομαστὴς ἀριθμὸς λογικός. ὡς $\sqrt[3]{\frac{8}{7}}=\frac{\sqrt[3]{8.\,7^2}}{7}$. καὶ $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta\gamma}}=$ $\frac{\sqrt[3]{\alpha\beta^2\gamma^2}}{\beta\gamma}$ κτ:

§. 373. Εὐκόλως εὑρίσκομεν κανόνας, πῶς εἰς τὰς ἀνωτέρω δυνάμεις τὰς ῥίζας ἐξάγομεν, πλὴν εἶναι πάντη ἐργώδεις καὶ κοπιαστικοὶ, μάλιστα λίαν διεξοδικοί. Ὅθεν ἐπειδὴ ὅταν τοὺς λογαρίθμους μάθωμεν, εὐκόλως τὰς ῥίζας τῶν ἀνωτέρων δυνάμεων εὑρίσκομεν· τούτους τοὺς διεξοδικοὺς κανόνας τοὺς παραιτοῦμεν, καὶ εἰς τὸ τρίτον Βιβλίον πολλὰς εὐκολίας τούτων εὑρίσκομεν. Ὅστις ὅμως ἔχει πίνακας, ἐν οἷς αἱ ῥίζαι αἱ τετραγωνικαὶ καὶ κυβικαὶ ἑκάστου ἀριθμοῦ εὑρίσκονται, ἀπαλλάττεται καὶ ἀπ' αὐτοῦ τοῦ κόπου· διὰ τοῦτο καὶ ἡμεῖς πρὸς εὐκολίαν τῶν ἀκροατῶν μας· τοιούτους πίνακας μὲ ἄλλους πολλοὺς ὠφελίμους εἰς βιβλίον χωριςὸν θέλομεν ἐκδόσει, ὅπου θέλομεν γράψει καὶ τὴν ἑρμηνείαν αὐτῶν, διὰ νὰ ἐμπορῇ ἕκαςος νὰ τοὺς μεταχειρίζηται· διότι δι' αὐτῶν ἐλπίζομεν νὰ προξενήσωμεν μεγίςην εὐκολίαν, καὶ ὠφέλειαν εἰς τοὺς ἀναγνώςας, καὶ μαθητιῶντας ἡμῶν.

§. 374. Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν δὲ τὴν ῥίζαν τῆς τετάρτης, ἕκτης, ὀγδόης, καὶ ἐννάτης δυνάμεως, δυνάμεθα καὶ μόνον διὰ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης τῆς τετραγωνικῆς καὶ κυβικῆς· διότι ἡ ῥίζα τῆς τετάρτης δυνάμεως εἶναι $\sqrt[4]{a}=\sqrt[2]{\sqrt{a}}$· καὶ ἐὰν τὸ $a=16$ ἔςαι $\sqrt[2]{\sqrt{16}}$· δηλ: νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὴν ῥίζαν τὴν τετραγωνικὴν τοῦ $16=4$ καὶ ἀπ' αὐτῆς τῆς ῥίζης νὰ εὐγάλωμεν ἔτι ἅπαξ τὴν ῥίζαν τὴν τετραγωνικὴν $\sqrt{4}=2$· καὶ ὁ 2 εἶναι ἡ ῥίζα τῆς τετάρτης δυνάμεως τουτέςι τοῦ 16. Τοῦτο σημαίνει τὸ ῥιζικὸν σημεῖον δὶς γραφόμενον $\sqrt[2]{\sqrt[2]{16}}=\sqrt[2]{4}=2$· ὅθεν τὴν ῥίζαν τῆς τετάρτης δυνάμεως εὑρίσκομεν, ἐὰν πρῶτον ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν ῥίζαν τὴν τετραγωνικὴν εὕρωμεν καὶ ἀπ' αὐτῆς ἔτι τὴν ῥίζαν τὴν τετραγωνικὴν ἐξαγάγωμεν· καὶ λοιπὸν πρέπει καλῶς νὰ διακρίνωμεν.

Α'. Ὅτι ὅταν τὰ ῥιζικὰ ἀλλεπάλληλα κεῖνται ὡς $\sqrt[2]{\sqrt[3]{a}}$, σημαίνει νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται τῶν ῥιζικῶν σημείων, καὶ τὸ γινόμενον νὰ γραφῇ μόνον εἰς ἓν σημεῖον ῥιζικὸν, καὶ μετ' αὐτὸ ἡ ποσότης· ὡς $\sqrt[2]{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[6]{a}$· καὶ $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[24]{a}$.

Β'. Ὅτι ἐὰν ἐκθέτης ἑνὸς ῥιζικοῦ σημείου λύηται εἰς παράγοντας, λύεται καὶ τὸ ῥιζικὸν εἰς τόσα ῥιζικὰ, ἔχοντα ἕνα τούτων τῶν παραγόντων ὡς $\sqrt[16]{a}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}$· καὶ $\sqrt[9]{a}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$.

Γ'. Ὅτι ἐὰν ἀπὸ τῶν τοιούτων ἀλλεπαλλήλων ῥιζικῶν ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα ἑνὸς ῥιζικοῦ κατὰ τὸν ἐκθέτην ὁποῦ ἔχει, αὕτη ἡ ῥίζα ἔχει τὰ λοιπὰ ῥιζικὰ, δηλαδὴ ἐὰν ἡ $\sqrt{^3\sqrt{^4\sqrt{\alpha}}}$, καὶ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα $=6$, τὸ 6 ἔχει τὰ λοιπὰ οὕτω· $^3\sqrt{^4\sqrt{6}}$· ἐὰν δὲ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα $=\gamma$, μένουσι τὰ λοιπὰ $^4\sqrt{\gamma}$· ἐὰν δὲ καὶ ἀπ' αὐτῆς ἐξαχθῇ ἡ τῆς τετάρτης δυνάμεως $=\delta$ εἶναι ἡ τῆς 24 δυνάμεως ῥίζα· δηλ: ἐξαχθήτω ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνικὴ, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἡ κυβικὴ, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἡ τῆς τετάρτης δυνάμεως, τότε ἡ ἐσχάτη αὕτη εἶναι ἡ ῥίζα τῆς 24 δυνάμεως.

„Ὅθεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ῥίζαν τῆς ἕκτης δυνάμεως, πρέπει πρῶτον νὰ εὕρωμεν τὴν ῥίζαν τὴν τετραγωνικὴν, καὶ ἀπ' αὐτῆς νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα· διότι $^6\sqrt{\alpha}= \sqrt{^3\sqrt{\alpha}}={}^3\sqrt{\sqrt{\alpha}}$· ἢ ἀνάπαλιν, πρῶτον ἡ κυβικὴ, καὶ ἔπειτα ἡ τετραγωνική· διότι τοῦτο $^2\sqrt{^3\sqrt{\alpha}}$ ὀρθῶς νοούμενον σημαίνει νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀπὸ τῆς ῥίζης τῆς κυβικῆς· καὶ τοῦ $^3\sqrt{\sqrt{\alpha}}$ νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα ἀπὸ τῆς τετραγωνικῆς· πλὴν καὶ τὰ δύω ἡ ῥίζα τῆς ἕκτης δυνάμεως νοεῖται· διότι $^6\sqrt{\alpha}={}^3\sqrt{\sqrt{\alpha}}=\sqrt{^3\sqrt{\alpha}}$. Τοιοῦτον καὶ τῆς ῥίζης τῆς ἐννάτης δυνάμεως $^9\sqrt{\alpha}={}^3\sqrt{^3\sqrt{\alpha}}$ νὰ ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα ἡ κυβικὴ ἀπὸ τῆς ῥίζης τῆς κυβικῆς. καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως.

§. 37. Διὰ νὰ εὑρίσκωσιν ὅμως διὰ τῆς προσεγγίσεως τὰς ῥίζας τῶν ἀνωτέρω δυνάμεων, τύπους γενικοὺς ἐφεῦρεν ὁ κύριος Ἀλλέϋος, οὓς ἡμεῖς ἀναποδείκτως ἐνταῦθα γράφομεν· διότι ἀδυνατοῦμεν εἰς τὸ παρὸν νὰ μάθωμεν τὴν δεῖξιν ταυτῶν· εἰς τὸ τρίτον μέρος ὅμως τούτου τοῦ βιβλίου θέλομε τοὺς ἀποδείξει· τὴν δὲ χρῆσιν αὐτῶν μετὰ τοὺς λογαρίθμους· μ' ὅλον ὁποῦ ἡμεῖς εἰς τὸ τρίτου βιβλίου ἕτερον τύπον εὐκολώτερον γενικὸν δι' ὅλας τὰς ἐξαγωγὰς τῶν ῥιζῶν τῶν ἀνωτέρω δυνάμεων διὰ τῆς προσεγγίσεως θέλομεν εὕρῃ.

Ἔχουσι δὲ οἱ τύποι οὕτως.

$$^3\sqrt{(\alpha^3 \pm \beta)} = \frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha\alpha \pm \frac{\beta}{3\alpha}\right)}$$

$$^4\sqrt{(\alpha^4 \pm \beta)} = \frac{2}{3}\alpha + \sqrt{\left(\frac{1}{9}\alpha\alpha \pm \frac{\beta}{6\alpha\alpha}\right)}.$$

$$^5\sqrt{(\alpha^5 \pm \beta)} = \frac{3}{4}\alpha + \sqrt{\left(\frac{1}{10}\alpha\alpha \pm \frac{\beta}{10\alpha^3}\right)}.$$

$$^6\sqrt{(\alpha^6 \pm \beta)} = \frac{4}{5}\alpha + \sqrt{\left(\frac{1}{25}\alpha\alpha \pm \frac{\beta}{15\alpha^4}\right)}.$$

$$^7\sqrt{(\alpha^7 \pm \beta)} = \frac{5}{6}\alpha + \sqrt{\left(\frac{1}{36}\alpha\alpha \pm \frac{\beta}{21\alpha^5}\right)}.$$

Ὅλη ἡ μέθοδος ἐνταῦθα κεῖται νὰ διέλωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἀφ' οὗ ζητεῖται ἡ ῥίζα εἰς δύω μέρη α καὶ β ὡς τὸν 10, ἀφ' οὗ ἡ κυβικὴ ζητεῖται, εἰς 8=α, καὶ 2=β. καὶ τοῦ μὲν ἑνὸς α νὰ ἐξάγεται ἡ ῥίζα ἐπ' ἀκριβὲς, κι οὕτω μεταβαίνουσιν αἱ ἐξαγωγαὶ τῶν ῥιζῶν τῶν ἀνωτέρω δυνάμεων εἰς ἐξαγωγὴν ῥίζης τετραγωνικῆς· ἀλλὰ περὶ τούτων ὕστερον.

§. 376. Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ποσοτήτων τὴν ,τὴν ῥίζαν ἐξαγάγωμεν, αἱ ῥίζαι ἴσαι εἰσίν· ἔστω

$64=40+24.$ ἄρα καὶ $\sqrt{64}=\sqrt{(40\ 24)}$

καὶ ἔτι $^3\sqrt{64}={}^2\sqrt{(40+24)}$ κτ:

Λοιπὸν καὶ ὅλη ἡ ἐξίσωσις, μένει πάλιν ἐξίσωσις, ἐὰν ῥίζαν τινα ὁμοβάθμιον καὶ ἀπὸ τὰ δύο κέλη τῆς ἐξισώσεως ἐξαγάγωμεν· καὶ περὶ μὲν τῆς ἀγωγῆς τῶν ῥιζῶν ταῦτα ἱκανά. Ἤδη δὲ καὶ ἰδιαιτέρα θεωρία τῶν ῥιζικῶν ἕπεται γενικῶς.

ΜΕ΄ΡΟΣ Α΄.

Περὶ ῥιζικῶν Ποσοτήτων.

§. 377. Ὅλαι αἱ ποσότητες, ὁποῦ πρὸ αὐτῶν σημεῖον ῥιζικὸν ἔχουσι, ποσότητες ῥιζικαὶ λέγονται· καὶ μάλιςα εἰς τὸ παρὸν μέρος ἐκεῖναι αἱ ῥιζικαὶ νοοῦνται ποσότητες, τῶν ὁποίων ῥίζα οἱαςδηποτοῦν δυνάμεως δὲν ἐξάγεται· ἤτοι αἱ ἄλογοι (§. 341), καὶ ἀδύνατοι (§. 305). ὅλαι ποσότητες, ὡς $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ καὶ $\sqrt[3]{2^2}$. καὶ $\sqrt[3]{\alpha\beta^2}$. καὶ $\sqrt[5]{\beta\gamma}$ κτ:

§. 378. Ὅλαι αἱ ῥιζικαὶ ποσότητες, τῶν ὁποίων τὸ ῥιζικὸν σημεῖον ἔχει τὸν αὐτὸν ἐκθέτην, λέγονται ῥιζικαὶ ποσότητες τῆς αὐτῆς παρονομασίας, ἢ ὁμοβάθμια ῥιζικά, ὡς $\sqrt{\alpha}$, καὶ $\sqrt{5}$, καὶ $\sqrt{\alpha\gamma}$. καὶ ἔτι $\sqrt[4]{\alpha}$, καὶ $\sqrt[4]{3}$, καὶ $\sqrt[4]{\alpha^{\mu}}$ κτ: Ὅσων δ' ὁ ἐκθέτης τοῦ ῥιζικοῦ σημείου εἶναι διάφορος, λέγονται ἑτέρας παρονομασίας, ἑτεροβάθμια ῥιζικά· ὡς $\sqrt[3]{\alpha}$, καὶ $\sqrt{\alpha}$. ἔτι $\sqrt{5}$ καὶ $\sqrt[4]{3}$ κτ:

§. 379. Πρέπει καλῶς νὰ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι ὁ ἐκθέτης τῆς ῥίζης γίνεται κλασματικῶς ἐκθέτης τῆς ποσότητος. πλὴν αὐτὸς παρονομαςὴς, καὶ ὁ ἐκθέτης τῆς ποσότητος ἀριθμητὴς (§. 301.)· ὡς $\sqrt{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{2}}$· καὶ $\sqrt[3]{\alpha+\beta\gamma-\alpha\delta^2)}=(\alpha+\beta\gamma-\alpha\delta^2)^{\frac{1}{3}}$· καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν ἡ ποσότης ἔχει ἐκθέτην κλασματικὸν, ὁ παρονομαςὴς γίνεται ἐκθέτης τοῦ ῥιζικοῦ σημείου, καὶ ὁ ἀριθμητὴς ἐκθέτης τῆς ποσότητου. ὡς $\alpha^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\alpha}$ καὶ $(\alpha+\beta\gamma+\delta)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(\alpha+\beta+\delta)^2}$ καὶ $\alpha\beta^{\frac{\mu-2}{3}} = \alpha\sqrt[3]{\beta^{\mu-2}}$. καὶ $(\alpha^2-\chi^2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{(\alpha^2-\chi^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\alpha^2-\chi^2)}}$ καὶ ὅλα τὰ τοιαῦτα χρήσιμα εἰς τὸ παρόν.

§. 380. Ἐὰν δὲ πρὸς ἑνὸς παραγομένου ἀπὸ διαφόρων παραγόντων εὑρίσκεται ῥιζικὸν, δύναται τὸ ῥιζικὸν σημεῖον καὶ πρὸ πάντων τῶν παραγόντων γραφῆναι· ἄρα $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$. καὶ ἔτι $\sqrt[3]{12\alpha\beta^{\mu}} = \sqrt[3]{12}\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\beta^{\mu}} = 12^{\frac{1}{3}}\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{\mu}{3}}$. καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

§. 381. Ἐὰν δὲ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθῇ ἅμα καὶ ὁ ἐκθέτης τῆς ῥίζης, καὶ ὁ ἐκθέτης τῆς ῥιζικῆς ποσότης μένει ἀμετάβλητος, οἷον $\sqrt[3]{\alpha^2} = \sqrt[3.2]{\alpha^{2.2}} = \sqrt[6]{\alpha^4}$. Ἐπειδὴ $\sqrt[3]{\alpha^2} = \alpha^{\frac{2}{3}}$, καὶ ἐὰν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ὁ ἀριθτητὴς καὶ παρονομαστὴς πολλαπλασιασθῇ τὸ κλάσμα μένει ἀμετάβλητον. (§. 92). λοιπὸν καὶ $\sqrt[\nu]{\alpha^{\pi}} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha^{\pi\mu}}$.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἐὰν διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρεθῇ καὶ ἀριθμητὴς, καὶ παρονομαστὴς τὸ κλάσμα μένει ἀμετάβλητον, ἄρα καὶ $\sqrt[\nu]{\alpha^{\pi}} = \sqrt[\frac{\nu}{\mu}]{\eta^{\frac{\pi}{\mu}}} = \alpha^{\frac{\pi}{\mu}:\frac{\nu}{\mu}} = \alpha^{\frac{\pi\mu}{\nu\mu}}$ · καὶ $\sqrt{\alpha\beta^3} = \sqrt[\frac{2}{3}]{\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{3}{3}}} = \sqrt[\frac{2}{3}]{\alpha^{\frac{1}{3}}\beta}$ · καὶ $\sqrt[4]{\alpha} = \sqrt[2]{\alpha^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\sqrt{\alpha}}$ · καὶ ἔτι $\sqrt[6]{\alpha} = \sqrt[2]{\alpha^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\alpha}} = \sqrt[3]{\sqrt{\alpha}}$ ὡς ἀνωτέρω.

§. 382. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι κάθε ποσότης ἄνευ σημείου ῥιζικοῦ ὑπὸ σημεῖον ῥιζικὸν οἱασοῦν δυνάμεως ὑπάγεται, ἐὰν τὸν ἐκθέτην τῆς ποσότητος πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν ἐκθέτην τοῦ ῥιζικοῦ εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ἡ ποσότης νὰ ὑπαχθῇ. δηλ: ζητεῖται ἡ $\alpha^2\beta$ νὰ ὑπαχθῇ εἰς τὸ κυβικὸν σημεῖον $\sqrt[3]{\ }$, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας τῶν γραμμάτων μὲ 3 οὕτω $\sqrt[3]{\alpha^6\beta^3}=\alpha^2\beta$. ὡσαύτως καὶ $12=\sqrt[4]{12^4}$. καὶ $\alpha^{\mu-1}=\sqrt[5]{\alpha^{5\mu-5}}$ καὶ $\alpha\beta=\sqrt[\nu-2]{\alpha^{\nu-2}\beta^{\nu-2}}$. Ἐὰν δὲ καὶ τὸ δὲ $\sqrt[3]{\alpha\beta}$ ζητῆται νὰ ἀχθῇ εἰς σημεῖον κυβικὸν τὸ $\sqrt[3]{\ }$, τὸν αὐτὸν τρόπον πολλαπλασιάζονται οἱ ἐκθέται τῶν ποσοτήτων καὶ αὐτοῦ τοῦ ῥιζικοῦ οὕτω $\sqrt[3]{\alpha\beta}=\sqrt[9]{\alpha^3\beta^3}$. Ἐὰν δὲ καὶ παράγοντες ὦσι πρὸ τοῦ σημείου τοῦ ῥιζικοῦ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὑπάγονται καὶ οὗτοι οἱ παράγοντες ὑπὸ τὸ σημεῖον· ὡς $12\sqrt{\alpha}=\sqrt{12^2\alpha}$ καὶ $\alpha\beta\sqrt[3]{\alpha\gamma^2}=\sqrt[3]{\alpha^3\beta^3\alpha\nu^2}$. καὶ $\alpha\sqrt{(\beta-\gamma)}=\sqrt{\alpha^2(\beta-\gamma)}=\sqrt{(\alpha^2\beta-\alpha^2\gamma)}$· καὶ $\alpha\beta^2\delta\sqrt[3]{[\alpha-(\gamma+\beta)]}=\sqrt[3]{\alpha^3\beta^6\delta^3[\alpha-(\gamma+\beta)]}=\sqrt[3]{[\alpha^4\beta^6\delta^3-(\alpha^3\beta^6\gamma\delta^3+\alpha^3\beta^7\delta^3)]}$· καὶ $3\alpha\sqrt{2\alpha}=\sqrt{9.2\alpha^2\alpha}=\sqrt{18\alpha^3}$· καὶ $2\sqrt[3]{(\alpha^2-\chi^2)}=\sqrt[3]{(8\alpha^2-8\chi^2)}$ καὶ $(\alpha-\chi)\sqrt{(\alpha+\chi)}=\sqrt{(\alpha-\chi)^2(\alpha+\chi)}=\sqrt{(\alpha-\chi)(\alpha+\chi)(\alpha+\chi)}=\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)(\alpha+\chi)}$.

„Ἐκ τούτων δὲ μανθάνομεν ποῖα ἀπὸ τὰς ποσότητας ὁποῦ ἔχουσι πρὸ τοῦ σημείου ἀκέραιον καὶ μετὰ τὸ σημεῖον ἄλογον ἀριθμὸν εἶναι μείζων καὶ ἐλάττων· ὅταν τοὺς ἀκεραίους μετὰ τὸ σημεῖον ὑπαγάγωμεν· δηλαδὴ ἡ $4\sqrt{2\alpha}<3\sqrt{5}$· ὅτι $4\sqrt{2}=\sqrt{32}$ καὶ $3\sqrt{5}=\sqrt{45}$· καὶ $4\sqrt{2}=2\sqrt{8}$· ὅτι $4\sqrt{2}=\sqrt{32}$ καὶ $2\sqrt{8}=\sqrt{32}$.

§. 383. Πολλάκις τὰς ῥιζικὰς ποσότητας ὑπὸ τὸ σημεῖον ποιοῦμεν λογικὰς, ἐὰν εἰς παράγοντας τοιούτους ἀναλύωνται, ὑφ' ὧν ἡ ῥίζα τοῦ ἐκθέτου τοῦ ῥιζικοῦ σημείου ἐξάγεται· διότι πολλάκις ἡ ποσότης ἄλογος οὖσα ὑπὸ τὸ σημεῖον τὸ ῥιζικὸν, ἐὰν εἰς παράγοντας λυθῇ, κατὰ μέρος μὲν γίνεται λογικὴ, κατὰ μέρος δὲ μένει ἄλογος· ὅθεν λύομεν αὐτὴν εἰς παράγοντας, καὶ ἐν οἷς τῶν παραγόντων ὁ ἐκθέτης διαιρεῖται διὰ τοῦ ἐκθέτου τοῦ ῥιζικοῦ σημείου καὶ δίδει πηλίκον τι· τοῦτο τὸ πηλίκον τίθεται ἐκθέτης εἰς αὐτὸν τὸν παράγοντα, ἐκτὸς τοῦ σημείου τοῦ ῥιζικοῦ· ἢ ὅσων ἡ ῥίζα ἐξάγεται τίθεται αὕτη τοῦ σημείου ἐκτὸς εἰς παράγοντα λογικόν· οἷον $\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu}\beta\gamma^{2\mu}}=\alpha\gamma^{2}\sqrt[\mu]{\beta}$

ὅτι $\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu}\beta\gamma^{2\mu}}=\alpha^{\frac{\mu}{\mu}}\beta^{\frac{1}{\mu}}\gamma^{\frac{2\mu}{\mu}}=\alpha\beta^{\frac{1}{\mu}}\gamma^{2}=\alpha\gamma^{2}\sqrt[\mu]{\beta}$. Καὶ

$\sqrt[3]{16\alpha^4\beta}=\sqrt[3]{2.\ 8\alpha^3.\ \alpha\beta}=2\alpha\sqrt[3]{2\alpha\beta}$. καὶ

$3\sqrt{8\alpha^3\beta^5}=3\sqrt{2.4.\alpha^2.\alpha.\beta^4.\beta}=3.2\alpha\beta^2\sqrt{2\alpha\beta}=6\alpha\beta^2\sqrt{2\alpha.\beta}$

καὶ $2\sqrt{(\alpha^2\chi^2-\chi^4)}=2\sqrt{[\chi^2(\alpha^2-\chi^2)]}=2\chi\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}$· καὶ

$\sqrt{(3\alpha^2\gamma+6\alpha\beta\gamma+3\beta^2\gamma)}=\sqrt{3\gamma(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)}=\sqrt{3\gamma(\alpha+\beta)^2}=$

$(\alpha+\beta)\sqrt{3\gamma}$· καὶ ἐν ἀριθμοῖς· καὶ $\sqrt[3]{56}=\sqrt[3]{7.\ 8}=2\sqrt[3]{7}$·

καὶ $\sqrt{45}+\sqrt{9.\ 4}=3\sqrt{5}$· καὶ $\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{64.\ 3}=4\sqrt[3]{3}$.

καὶ ἔτι $\sqrt[4]{729}=\sqrt[4]{81.\ 9}=3\sqrt[4]{9}$.

καὶ $2\sqrt{48}-4\sqrt{144}-\sqrt[3]{128}=2\sqrt{16.\ 3}-4\sqrt{36.\ 4}-\sqrt[3]{64.\ 2}=8\sqrt{3}-48-4\sqrt[3]{2}$.

Διὰ δὲ τῶν τοιούτων μεταβολῶν πολλάκις τὰ ἑτεροειδῆ ῥιζικὰ γίνονται ὁμοειδῆ· λέγονται δὲ ὁμοειδῆ ῥιζικὰ, ὅσα εἰς τὸ σημεῖον ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς καὶ μετὰ τὸ σημεῖον πάλιν τοὺς αὐτοὺς, ἐξαιρουμένων τῶν συνεργῶν· ὧν $\sqrt[3]{\alpha\beta^2}$ καὶ $5\sqrt[3]{\alpha\beta^2}$· καὶ ἔτι $\sqrt[\mu-1]{\alpha}$ καὶ $\sqrt[\mu-1]{\alpha}$· τὰ δὲ ἑπόμενα $3\sqrt{8\alpha^2\beta}$ καὶ $4\sqrt{18\alpha^2\beta}$, φαίνονται μὲν ἑτεροειδῆ, πλὴν κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶναι ὁμοειδῆ· ἐπειδὴ $6\sqrt{8a^2\beta}=3\sqrt{2}.\ 4a^2\beta=6a\sqrt{2\beta}$ καὶ $4\sqrt{18a^2\beta}=4\sqrt{2}.\ 9a^2\beta=12a\sqrt{2\beta}$ ἄρα τὰ $6a\sqrt{2\beta}$ καὶ $12a\sqrt{2\beta}$ ὁμοειδῆ καὶ συνάπτονται· ὡς $6a\sqrt{2\beta}+12a\sqrt{2\beta}=18a\sqrt{2\beta}$.

§. 384. Ἐνταῦθα ἀνήκει καὶ ἡ ἀπαλλαγὴ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν, ἢ παρονομαστὴν· διότι $\sqrt{\frac{a}{\beta}}=\frac{a}{\sqrt{a\beta}}=a\frac{1}{\sqrt{a\beta}}$· καὶ ἔτι $\sqrt{\frac{a}{\beta}}=\frac{\sqrt{a\beta}}{\beta}=\frac{1}{\beta}\sqrt{a\beta}$· καὶ εἰ μὲν εἶναι λογικὸς ὁ ἀριθμητὴς, αὐτὸς μὲν τίθεται ὡς παράγων, ὁ δ' ἄλογος παρονομαστὴς εἰς κλάσμα ἀριθμητὴν ἔχον τὴν μονάδα, παρίσταται· εἰ δὲ καὶ εἶναι λογικὸς ὁ παρονομαστὴς, αὐτὸς μὲν προσλαβὼν ἀριθμητὴν τὴν μονάδα, εἰς κλάσμα παρίσταται λογικὸν, ὁ δ' ἄλογος ἀριθμητὴς τίθεται ὡς παράγων· ὅτι δὲ τοῦτο συμβαίνει καὶ ἐν ἀριθμοῖς, εἴρηται ἐν τῷ (§. 372.).

Πολλάκις δὲ καὶ διαφόρως ἄλλως μεταβάλλονται τὰ ἄλογα κλάσματα, ὅταν τὰ προηγούμενα καλῶς νοήσωμεν· οὕτω $\frac{16}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{16.\,16}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2.2.4.16}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{2.4.16}}{\sqrt{2}}=\sqrt{4.\,16.\,2}=2.\,4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$. καὶ $\frac{\sqrt{2}}{16}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16.\,16}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2.\,8.\,16}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8.\,16}}=\frac{1}{4\sqrt{8}}=\frac{1}{8\sqrt{2}}=\frac{1}{8}.\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Αἱ δὲ τοιαῦται μεταβολαὶ λίαν χρησιμεύουσιν εἰς τὴν ἀνάλυσιν, καὶ ἂν ἀγωνίζεται ὁ πρωτόπειρος ὅλαις δυνάμεσιν νὰ γυμνασθῇ εἰς αὐτάς.

§. 385. Ποσότητας διαφόρου παρονομασίας δυνάμεθα εἰς τὴν αὐτὴν παρονομασίαν φέρειν, ἐὰν τὰ ῥιζικὰ κλασματικῶς γράψωμεν, καὶ τὰ κλάσματα τῶν ποσοτήτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν φέρωμεν· καὶ εἶτα τοὺς κλασματικοὺς ἐκθέτας ῥιζικῶς γράψωμεν.

π. χ. ζητεῖται τὰ $\sqrt[5]{5}$ καὶ $\sqrt{7}$ νὰ τὰ φέρωμεν εἰς μίαν παρομασίαν, τὰ $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt{7}$, πρῶτον γράφομεν αὐτὰ κλασματικῶς οὕτω $5^{\frac{1}{5}}$, $7^{\frac{1}{2}}$ εἶτα φέρομεν τοὺς κλασματικοὺς ἐκθέτας εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν οὕτω. $5^{\frac{2}{10}}$ καὶ $7^{\frac{5}{10}}$ καὶ τέλος γράφομεν αὐτὰ ῥιζικῶς $\sqrt[10]{5^2}$ καὶ $\sqrt[10]{7^5}$. ἢ συντομώτερον, πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν ἐκθέτην τὴν ῥίζης τοῦ ἑνὸς, τὸν ἐκθέτην τῆς ῥίζης καὶ ποσότητος τοῦ ἑτέρου· καὶ μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς ῥίζης τοῦ ἑτέρου, τὸν ἐκθέτην τῆς ῥίζης καὶ ποσότητός τοῦ ἑτέρου· καὶ οὕτως ἡ ποσότης ἡ ῥιζικὴ μένει ἀμετάβλητος· ὡς $\sqrt[3]{2}$ καὶ $\sqrt[5]{4^2}$ οὕτω $\sqrt[3\cdot5]{2^{1\cdot5}}$ καὶ $\sqrt[3\cdot5]{4^{2\cdot3}}$ ἤτοι $\sqrt[15]{2^5}$ καὶ $\sqrt[15]{4^6}$. τοῦτον τὸν τρόπον φέρονται εἰς τὴν αὐτὴν παρονομασίαν ὅλα τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

οἷον $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{3}=\sqrt[2\cdot4]{3^4}=\sqrt[8]{3^4}=\sqrt[8]{81}. \\ \sqrt[4]{5}=\sqrt[2\cdot4]{5^{1\cdot2}}=\sqrt[8]{5^2}=\sqrt[8]{25}. \end{array}\right.$

καὶ $\left\{\begin{array}{l} \sqrt[7]{2}=\sqrt[14]{2^2}. \\ \sqrt{3}=\sqrt[14]{3^7}. \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \sqrt[\mu]{a^\nu}=\sqrt[\mu\chi]{a^{2\chi}} \\ \sqrt[\chi]{a^\rho}=\sqrt[\mu\chi]{a^{\rho\mu}} \end{array}\right.$

καὶ $\left\{\begin{array}{l} \sqrt[\mu-1]{6^2}=\sqrt[(\mu+3)(\mu-1)]{6^{(2\mu+6)}}=\sqrt[\mu^2+2\mu-3]{6^{2\mu+6}} \\ \sqrt[\mu+3]{\rho^4}=\sqrt[(\mu+3)(\mu-1)]{\rho^{4\mu-4}}=\sqrt[\mu^2+\mu-3]{\rho^{4\mu-4}} \end{array}\right.$

Ἐὰν δὲ καὶ τρία, καὶ τέσσαρα, καὶ ἔτι πλείονα ῥιζικὰ εἰς τὴν αὐτὴν παρονομασίαν θέλωμεν νὰ φέρωμεν, τὰ αὐτὰ ποιοῦμεν, ὡς καὶ εἰς τὰ κλάσματα δηλ: μὲ τοὺς ἐκθέτας τῶν ἄλλων πολλαπλασιάζομεν τὸν ἐκθέτην τοῦ ῥιζικοῦ, καὶ τῆς ποσότητος ἅμα (§. 197).

ὡς

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[4.2.3]{2^{2.4}} = \sqrt[24]{2^{8}}$$

$$\sqrt[4]{4^{3}} = \sqrt[4.2.3]{4^{3.3.2}} = \sqrt[24]{4^{18}}$$

$$\sqrt[2]{3^{2}} = \sqrt[4.2.3]{3^{2.3.2}} = \sqrt[24]{3^{24}}$$

καὶ

$$\sqrt[3]{\alpha^{\rho}} = \sqrt[3\mu\nu]{\alpha^{\rho\nu\mu}}$$

$$\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}} = \sqrt[3\mu\nu]{\alpha^{3\nu\nu}}$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\pi}} = \sqrt[3\mu\nu]{\alpha^{3\mu\pi}}$$

Διὰ δὲ ταύτης τῆς μεθόδου μανθάνομεν ποῖον τῶν ῥιζικῶν μεῖζον, καὶ ποῖον ἔλαττον, ὅταν φέρωμεν τὰ κλάσμα εἰς τὴν αὐτὴν παρονομασίαν· ὡς $\sqrt[3]{3}$. καὶ $\sqrt[4]{3}$· διότι $\sqrt[3]{2} — \sqrt[12]{2^{4}} = \sqrt[12]{16}$· καὶ $\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^{3}} = \sqrt[12]{27}$· ἄρα $\sqrt[12]{27} > \sqrt[12]{16}$. Καὶ ταῦτα ἱκανὰ εἰς τὰς μεταβολὰς αὐτῶν, ἵνα καὶ εἰς τὰς τέσσαρας ἐργασίας αὐτῶν μεταβῶμεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Περὶ τῶν τεσσάρων ἐργασιῶν τῶν ῥιζικῶν Ποσοτήτων.

§. 386. Ἤδη μαθόντες, ὅτι ὁμοειδεῖς ῥίζαι ποσότητες εἶναι ἐκεῖναι. ὅσαι ἔχουσιν εἰς τὸ ῥιζικὸν σημεῖον τὸν αὐτὸν ἐκθέτην, καὶ μετὰ τὸ ῥιζικὸν τὴν αὐτὴν ποσότητα, ἀδιαφοροῦντες ἂν πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου ἔχωσιν ἑτέρους ἀριθμοὺς καὶ ποσότητας, εὐκόλως συνάπτομεν αὐτὰ τὰ ὁμοειδῆ ῥιζικὰ, καὶ ἀφαιροῦμεν· διότι γράφομεν αὐτὰ τὰ ὁμοειδῆ μὲ τὸ ἀνῆκον αὐτοῖς σημεῖον, καὶ εἶτα τὰ ἔχοντα ὅμοιον σημεῖον συνάπτομεν, ἀνόμοιον δὲ ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀλλήλων. δηλ: $7\sqrt{8}$ καὶ $5\sqrt{8}$ γράφονται $7\sqrt{8}+5\sqrt{8}$, καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὁμοειδῆ, καὶ ἔχουσιν ὅμοια σημεῖα, συνάπτονται οὕτω $7\sqrt{8}+5\sqrt{8}=12\sqrt{8}=12\sqrt{4.2}=12.2\sqrt{2}=24\sqrt{2}$. ὁμοίως καὶ ταῦτα $3\sqrt[3]{4}$ καὶ $-\sqrt[3]{4}$ οὕτω $3\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4}$.

Ὅθεν ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ῥιζικῶν ποσοτήτων γίνεται ἐὰν αὗται γράφωνται κατὰ σειρὰν μὲ τὰ σημεῖά των, καὶ τὰ ὁμοειδῆ ἐὰν ἔχωσι σημεῖα τὰ αὐτὰ συνάπτονται, ἐὰν δ' ἀνάμοια ἀφαιροῦνται, καὶ γίνεται τὸ αὐτὸ ὡς καὶ εἰς τὴν ἁπλουστέραν ἀναγωγὴν (§. 62). ἐὰν ὅμως καὶ γράμματα πρὸ τῶν σημείων ἔχωσι τῶν ῥιζικῶν ἀνόμοια, καὶ ἐκεῖνα πρῶτον ἀφαιροῦνται ἐὰν τὰ σημεῖα ἀνόμοια, ἢ συνάπτονται διὰ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$ ἐὰν ἐκεῖνα ὅμοια, ὡς $2\alpha\sqrt{\beta\gamma}$ καὶ $3\delta\sqrt{\beta\gamma}$. οὕτω $2\alpha-\beta\gamma+3\delta\sqrt{\beta\gamma}=(2\alpha+3\delta)\sqrt{\beta\gamma}$· καὶ ἔτι $\alpha\beta\sqrt{\gamma}$ καὶ $-5\gamma\delta\sqrt{\gamma}$· οὕτως $\alpha\beta\sqrt{\gamma}-5\gamma\delta\sqrt{\gamma}=(\alpha\beta-5\gamma\delta)\sqrt{\gamma}$· εἰ μὴ ἐὰν τὰ πρὸ τῶν σημείων γράμματα τὰ αὐτὰ, τότε συνάπτονται μόνον καὶ ἀφαιροῦνται οἱ συνεργοὶ, ὡς $3\alpha\beta\sqrt{\delta}$ καὶ $2\alpha\beta\sqrt{\delta}$· οὕτω $3\alpha\beta\sqrt{\delta}+2\alpha\beta\sqrt{\delta}=5\alpha\beta\sqrt{\delta}$· καὶ ἔτι $5\alpha^2\sqrt{\gamma}$ καὶ $-2\alpha^2\sqrt{\gamma}=3\alpha^2\sqrt{\gamma}$.

Κατ' αὐτοὺς λοιπὸν τοὺς νόμους συνάπτομεν καὶ συμπεπλεγμένα ῥιζικὰ μὲ ἄλλα συμπεπλεγμένα δοθέντα ῥιζικα, δηλ: ζητεῖται νὰ προςεθῇ ἡ ἔκφρασις $2\alpha\sqrt{\beta\gamma}-5\beta\sqrt{\delta\zeta}+\sqrt{\zeta}+\sqrt{5}$ εἰς τὴν ἔκφρασιν $-\alpha\sqrt{\beta\gamma}-\beta\sqrt{\delta\zeta}+\sqrt{\zeta}+\sqrt{\rho}$· γράφονται αὗται ὡς προσθετέοι τὸ ὁμοειδὲς ὑπὸ τὸ ὁμοειδές, εἶτα τὰ ἔχοντα ὅμοια σημεῖα συνάπτονται, τὰ δ' ἀνόμοια ἀφαιροῦνται, καὶ τὰ ἀνομοιοειδῆ ἄλλως οὔτε συνάπτονται, οὔτε ἀφαιροῦνται, εἰ μὴ γράφονται κατὰ σειρὰν μὲ τὰ σημεῖά των.

$$
\begin{array}{rl}
\text{προσθετέοι} & 2\alpha\sqrt{\beta\gamma}-5\beta\sqrt{\delta\zeta}+\sqrt{\zeta}+\sqrt{5} \\
 & -\alpha\sqrt{\beta\gamma}-\beta\sqrt{\delta\zeta}+\sqrt{\zeta}+\sqrt{\rho} \\ \hline
\text{κεφ:} & \alpha\sqrt{\beta\gamma}-6\beta\sqrt{\delta\zeta}+2\sqrt{\zeta}+\sqrt{\rho}+\sqrt{5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 5\sqrt{7}-3\alpha\sqrt{2^3}+\sqrt{7}-13 \\
 & 2\alpha\sqrt{7}+3\beta\sqrt{2^3}+16\sqrt{7}+12 \\ \hline
\text{κεφ:} & (5+2\alpha)\sqrt{7}+(3\beta-3\alpha)\sqrt{2^3}+17\sqrt{7}-1
\end{array}
$$

Εἰς δὲ τὴν Ἀφαίρεσιν, ὁ ἀφαιρετέος μεταβάλλεται.

$$
\begin{array}{rll}
\text{ὡς} & 3\alpha\sqrt{\delta\varepsilon}-2\gamma^{3}\sqrt{\zeta\eta}+7^{5}\sqrt{\alpha o}-4 & \text{. . μειωτέος} \\
 & +\beta\sqrt{\delta\varepsilon}+5\alpha^{3}\sqrt{\zeta\eta}+4^{5}\sqrt{\alpha\delta}-\beta & \text{. . ἀφαιρετέος} \\
 & -\qquad -\qquad -\qquad + & \\ \hline
\text{διαφ:} & (3\alpha-\beta)\sqrt{\delta\varepsilon}-7\alpha^{3}\sqrt{\zeta\eta}+\beta-4 &
\end{array}
$$

ἤτι

$$
\begin{array}{c}
2^{1}\sqrt{6}-\sqrt{48}-3\sqrt{8^2}-6\sqrt{2}-8 \\
2^{3}\sqrt{6}-2\sqrt{48}-\sqrt{8^2}-7\sqrt{2}-8 \\
-\qquad +\qquad +\qquad +\qquad + \\ \hline
3^{3}\sqrt{6}+\sqrt{48}-2\sqrt{8^2}+\sqrt{2}
\end{array}
$$

§. 387. Πολλάκις εὑρίσκονται ποσότητες ῥιζικαί, αἵτινες κατὰ τὸ φαινόμενον νομίζονται ἀνομοιοειδεῖς, ὅμως ἐὰν αὐτὰς εἰς παράγοντας λύσωμεν, (§. 383.), καὶ κατὰ μέρος τῆς ἀλογίας αὐτὰς ἀπαλλάξωμεν (αὐτόθι), ἢ καὶ ἐὰν αὐτὰς εἰς τὴν αὐτὴν παρονομασίαν φέρωμεν (§. 385.), γίνονται ὁμοιοειδεῖς, καὶ τότε ὡς τοιαῦται συνάπτονται, καὶ ἀφαιροῦνται, ὡς ἐμάθομεν (§. 386.)· τὰ ἑξῆς οὕτω γίνονται.

$\sqrt{50}-\sqrt{18}=\sqrt{25.2}-\sqrt{9.2}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

καὶ τὸ ἑξῆς ὡσαύτως

$\sqrt[3]{16\alpha^3\beta}+\sqrt{4\alpha^2\beta}-\sqrt{\alpha^2\beta}-\sqrt[3]{54\alpha^3\beta}=\sqrt[3]{8.\,2\alpha^3\beta}+\sqrt{4\alpha^2\beta}-\sqrt{\alpha^2\beta}-\sqrt[3]{27.\,2\alpha^3\beta}=2\alpha\sqrt[3]{2\beta}+2\alpha\sqrt{\beta}-\alpha\sqrt{\beta}-3\alpha\sqrt[3]{2\beta}=\alpha\sqrt{\beta}-\sqrt[3]{2\beta}$ ἔτι

„$2\sqrt{(16\sqrt{18})}-\sqrt{(12\sqrt{2})}=2\sqrt{(16\sqrt{9.2})}-\sqrt{(4.3\sqrt{2})}=2\sqrt{(16.3\sqrt{2})}-2\sqrt{(3\sqrt{2})}=8\sqrt{(3\sqrt{2})}-2\sqrt{(3\sqrt{2})}=6\sqrt{(3\sqrt{2})}=6\sqrt{\sqrt{18}}=6\sqrt[4]{18}$· ἔτι

„$3\sqrt[3]{(8+16\sqrt{5})}-2\sqrt[3]{(1+\sqrt{20})}=3\sqrt[3]{8(1+2\sqrt{5})}-2\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})}=6\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})}-2\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})}=4\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})}$.

„Εἰς αὐτὰς τὰς μεταβολὰς πρέπει νὰ γυμνασθῇ καλῶς καὶ ἀπιμελῶς ὁ πρωτόπειρος, ὡς πάντῃ ἀναγκαίας εἰς τὰ συγγράμματα τῶν μαθηματικῶν, ἄλλως ἀδύνατον εἰς τὰς πλεκτάνας ἐκείνων νὰ προχωρήσῃ.

§. 388. Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς τελεῖται εἰς τὰ ῥιζικὰ πλὴν εὐκολώτερον. Ἐπειδὴ ἕκαστον ῥιζικὸν γίνεται καὶ ἐκθέτης εἰς τὴν ποσότητα, ὡς $\sqrt{2}=\alpha^{\frac{1}{2}}$. καὶ ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ἀριθμοὺς μὲ ἐκθέτας, γίνεται ἐὰν συνάψωμεν τοὺς ἐκθέτας εἰς ἕν, ὅταν ἔχωσι τὴν αὐτὴν ποσότητα (§. 316.)· λοιπὸν $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\alpha^{\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{2}{2}}=\alpha^1$. Ὅθεν ἐὰν τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτὴ καθ' ἑαυτὴν πολλαπλασιάζεται, ἀπαλλάττεται τὸ γράμμα, ἢ ἡ ποσότης τοῦ ῥιζικοῦ σημείου (§. 360.) ὡς $\sqrt{2}.\sqrt{2}=2$ καὶ $\sqrt{(\alpha+\beta)}.\sqrt{(\alpha+\beta)}$

$=\alpha+\beta$. τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ ἐὰν ἡ κυβικὴ ῥίζα τρὶς ληφθῇ παράγων, τότε ἡ ὑπὸ τὸ σημεῖον ποσότης ἀπαλλάττεται τοῦ κυβικοῦ σημείου ὡς $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{3}.\ \sqrt[3]{3}=3$· διότι $\sqrt[3]{3}.\ \sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$, καὶ $3^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{3}{3}}=3$· καὶ ἐν γένει ἐὰν τὸ ῥιζικὸν ληφθῇ τοσάκις παράγων εἰς γινόμενον, ὁσάκις ἡ μονὰς εὑρίσκονται εἰς τὸν ἐκθέτην τοῦ σημείου, γίνεται ἡ ποσότης λογικὴ ἄνευ τοῦ σημείου· ὡς $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3}=3$· καὶ $\sqrt[3]{(\alpha+\beta)}\cdot\sqrt[3]{(\alpha+\beta)}\cdot\sqrt[3]{(\alpha+\beta)}=\alpha+\beta$.

§. 389. Ἐὰν δὲ ζητῆται νὰ πολλαπλασιάσωμεν ῥιζικὴν ποσότητα μὲ ἀριθμὸν, πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν ἀριθμὸν μόνον τῆς ῥιζικῆς ποσότητος τὸν πρὸ τοῦ σημείου συνεργὸν, ἐὰν δὲ δὲν ἔχῃ συνεργὸν, αὐτὸ μόνον τὸ ῥιζικὸν, τηροῦντες ἀεὶ καὶ τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$· ὡς $(3\sqrt{3})5=15\sqrt{3}$ δηλ: τὸ $\sqrt{3}$ εἶναι δεκαπενταπλάσιον· καὶ $(-7\sqrt{7})4=-28\sqrt{7}$· καὶ $(-2\sqrt{2})-8=+16\sqrt{2}$· καὶ $(-\sqrt{5}).6=-6\sqrt{5}$· καὶ $(-\sqrt{(\alpha\beta)}\gamma=-\gamma\sqrt{\alpha\beta}$.

§. 390. Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ῥιζικὴν ποσότητα μὲ ἑτέραν ῥιζικὴν, πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ἂν τὰ ῥιζικὰ ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας, ἢ μὲ τοὺς αὐτούς· καὶ ἐὰν ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς, τότε πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς συνεργοὺς εἰς ἓν παραγόμενον, καὶ μετὰ τοῦτο γράφομεν τὸ κοινὸν σημεῖον τὸ ῥιζικὸν, καὶ μετὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰς ποσότητας τὰς ὑπὸ ὑπὸ ταῦτα τὰ ῥιζικὰ, φροντίζοντες ἅμα καὶ τῶν σημείων, ὅταν μὲν εἶναι ὅμοια νὰ γίνηται τὸ παραγόμενον καταφατικὸν, ὅταν δὲ ἀνόμοια ἀποφατικόν· οὕτω· $2\beta\sqrt{(\alpha\beta)}\cdot 4\gamma\delta\sqrt{(\alpha\beta)}=8\beta\gamma\delta\sqrt{(\alpha\beta)}\sqrt{\alpha\beta}=8\beta\gamma\delta.\ \alpha\beta$ (§. 388.).

$3\gamma\sqrt{(\delta\varepsilon)}.-20\delta\sqrt{(\gamma\varepsilon)}=-60\gamma\delta\sqrt{(\gamma\delta\varepsilon\varepsilon)}=-60\gamma\delta\varepsilon\sqrt{\gamma\delta}.$

καὶ $-\sqrt[5]{\delta^2}.-\sqrt[5]{\delta^3}=\sqrt[5]{\delta^5}=\delta.$

καὶ $3\sqrt{6}\times 4\sqrt{2}=12\sqrt{12}=12\sqrt{4.3}=24\sqrt{3}$

καὶ $5\sqrt{18}.4\sqrt{2}=20\sqrt{36}=20.6=120$

καὶ $-6\sqrt{20}.-2\sqrt{5}=12\sqrt{100}=120$ καὶ

$3\sqrt{(2\sqrt[3]{10})}.2\sqrt{(5\sqrt[3]{100})}=6\sqrt{(10\sqrt[3]{1000})}=6\sqrt{(10.10)}=60.$

§. 391. Ἐὰν δὲ τὰ ῥιζικὰ δὲν ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς παρονομαστὰς, φέρομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς τὴν αὐτὴν παρονομασίαν· (§. 385.)· καὶ εἶτα ὡς ἀνωτέρω πολλαπλασιάζομεν (§. 390.)· ὡς

$\sqrt[2]{\gamma\delta}.\sqrt[3]{\gamma^2\delta}=\sqrt[6]{\gamma^3\delta^3}\times\sqrt[6]{\gamma^4\delta^2}=\sqrt[6]{\gamma^7\delta^5}.$

καὶ $4\sqrt[3]{\alpha}.-3\sqrt[4]{\varepsilon}=4\sqrt[12]{\alpha^4}.-3\sqrt[12]{\varepsilon^3}=-12\sqrt[12]{\alpha^4\varepsilon^3}.$

καὶ $3\sqrt[3]{3}\times 6\sqrt{3}=3\sqrt[6]{3^2}\times 6\sqrt[6]{3^3}=18\sqrt[6]{3^5}=18\sqrt[6]{243}.$

$\sqrt{5}.\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{5^3}.\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{125.4}=\sqrt[6]{500}.$

καὶ $2\sqrt[3]{5}.-3\sqrt[4]{6}=2\sqrt[12]{5^4}.-3\sqrt[12]{6^3}=-6\sqrt[12]{5^4.6^3}=-6\sqrt[12]{135000}.$

καὶ $\sqrt[4]{20}.6\sqrt{3}=\sqrt{\sqrt{20}}.6\sqrt{3}=\sqrt{\sqrt{4.5}}.6\sqrt{3}=\sqrt{(2\sqrt{5})}.6\sqrt{3}=6\sqrt{(6\sqrt{5})}=6\sqrt{\sqrt{180}}=6\sqrt[4]{180}.$

§. 392. Οὕτω δυνάμεθα καὶ ῥιζικὰς ποσότητας συμπεπλεγμένας νὰ πολλαπλασιάσωμεν, ἐὰν πρῶτον ὅλα τὰ μέρη τῶν παραγόντων εἰς τὴν αὐτὴν παρονομασίαν φέρωμεν. (§. 385). οὕτω τὰ ἑξῆς. $2\sqrt{3}\times(6-\sqrt{7})=12\sqrt{3}-2\sqrt{21}$ καὶ $\alpha\sqrt{\beta\gamma}\times(3\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\gamma})=3\alpha\sqrt{\alpha\beta^2\gamma}-3\alpha\sqrt{\beta\gamma^2}=3\alpha\beta\sqrt{\alpha\gamma}-3\alpha\gamma\sqrt{\beta}.$

$$
\begin{array}{l}
\text{καὶ } \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \\
\quad \sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta} \\
\hline
\alpha+\sqrt{\alpha\beta} \\
\quad -\sqrt{\alpha\beta}-\beta \\
\hline
\alpha-\beta
\end{array}
$$

καὶ ἔτι $5\sqrt{2}.\ 3\sqrt{(4+6\sqrt{2})}=15\sqrt{(8+12\sqrt{2})}=$
$15\sqrt{(4.\ 2+4.\ 3\sqrt{2})}=15\sqrt{4(2+3\sqrt{2})}=30\sqrt{(2+}$
$3\sqrt{2})$. καὶ $3\sqrt{(2+4\sqrt[3]{3})}.\ 4\sqrt{(6+2\sqrt[3]{9})}=$
$12\sqrt{(12+4\sqrt[3]{9}+24\sqrt[3]{3}+8\sqrt[3]{27})}=12\sqrt{(12+}$
$4\sqrt[3]{9}+24\sqrt[3]{3}+24)=12\sqrt{(36+4\sqrt[3]{9}+24\sqrt[3]{3})}=$
$12\sqrt{(9.\ 4+4\sqrt[3]{9}+4.\ 6\sqrt[3]{3})}=12\sqrt{4(9+\sqrt[3]{9}+}$
$6\sqrt[3]{3})=24\sqrt{(9+\sqrt[3]{9}+6\sqrt[3]{3})}=24\sqrt{(9+\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{3}}$
$+6\sqrt[3]{3})=24\sqrt{(9+\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3}+6))}$

καὶ $\gamma\delta\sqrt{\varepsilon}+\zeta\sqrt{\alpha}$	καὶ $1+\sqrt{2}$
$2\delta\sqrt{\varepsilon}+\zeta\sqrt{\alpha}$	$1+\sqrt{2}$
$2\gamma\delta^2\varepsilon+2\delta\zeta\sqrt{\alpha\varepsilon}$	$1+\sqrt{2}$
$+\gamma\delta\zeta\sqrt{\varepsilon\alpha}+\zeta\alpha$	$+\sqrt{2}+2$
$2\gamma\delta^2\varepsilon+2\delta\zeta\sqrt{\alpha\varepsilon}+\gamma\delta\zeta\sqrt{\varepsilon\alpha}+\zeta\alpha$	$1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$

§. 393. Μαθόντες τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ῥιζικῶν ποσοτήτων εὐκόλως καὶ πῶς διαιροῦνται: μανθάνομεν, ἐὰν ὁ διαιρέτης ἢ ὁ διαιρετέος εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, καὶ ὁ ἕτερος ἄλογος, ὑπάγομεν καὶ τὸν ἀκέραιον εἰς τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν, καὶ εἶτα γράφομεν αὐτὸ κλασματικῶς, καὶ ὁ διαιρέτης ὁ ἄλογος διαιρεῖ τὸν διαιρετέον ἔχοντα τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἂν εἰς αὐτὸν περιέχηται ἢ ὅλος, ἢ κατὰ μέρος, χωρὶς νὰ ἀμελῶνται καὶ τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$. Ἔστω διαιρετέος ὁ $\sqrt{28}$ καὶ διαιρέτης ὁ. $\sqrt{28}$ καὶ διαιρέτης 7. οὕτω $\frac{\sqrt{28}}{7}=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7.\ 7}}=\frac{\sqrt{4.\ 7}}{\sqrt{7.\ 7}}=$
$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$. καὶ $\sqrt[3]{24}:6=\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{6.6.6}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{6.\ 6}}=$
$\frac{\sqrt[3]{4}}{36}=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9.\ 4}}=\frac{\sqrt[3]{1}}{9}$. καὶ ἔτι $\frac{\sqrt[4]{\alpha^2\beta}}{\alpha\beta}=\sqrt[4]{\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^4\beta^4}}=$
$\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha^2\beta^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^2\beta^3}}=\frac{1}{\alpha^{\frac{2}{4}}\beta^{\frac{3}{4}}}\ \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{4}}}=\alpha^{-\frac{1}{2}}\beta^{-\frac{3}{4}}$.

οὕτω καὶ ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι ἄλογος,

$$\text{ὡς } \frac{4}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{4.\ 4}}{\sqrt{3.\ 7}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=2\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$$

καὶ ἔτι

$$\frac{-4}{2\sqrt{8}}=\frac{-\sqrt{16}}{2\sqrt{8}}=\frac{-\sqrt{8.\ 2}}{\sqrt{2.\ 2.\ 8}}=-\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{καὶ } \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \text{ κτ:}$$

§. 394. Ἐὰν δὲ καὶ ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος εἶναι ἄλογος, καὶ τῆς αὐτῆς παρονομασίας, τότε γράφομεν αὐτοὺς κλασματικῶς, καὶ καθ' ὅλους τοὺς ἀνωτέρω τρόπους συντομεύομεν αὐτοὺς, ἀναλύοντες ὁτὲ εἰς παράγοντας, ὁτὲ διαιροῦντες, ἐὰν κατὰ μέρος διαιρῶνται, ὁτὲ καὶ ἀπὸ τῶν σημείων τῶν ῥιζικῶν τοὺς ἀριθμοὺς ἀπαλλάττοντες.

$$\text{οὕτω } \sqrt{12}:\sqrt{8}=\sqrt{\frac{12}{8}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{1{,}5}.$$

$$\text{καὶ } (\sqrt{72}-\sqrt{32}):\sqrt{8}=\sqrt{\frac{72}{8}}-\sqrt{\frac{32}{8}}=\sqrt{9}-\sqrt{4}=$$

$$3-2=1 \text{ καὶ } \sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}:\sqrt{(\alpha+\chi)}=\sqrt{\left(\frac{\alpha^2-\chi^2}{\alpha+\chi}\right)}=$$

$$\sqrt{\frac{(\alpha+\chi)(\alpha-\chi)}{\alpha+\chi}}=\sqrt{(\alpha-\chi)}.$$

§. 395. Τέλος, ἐὰν ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος ἔχωσι ῥιζικὰ μὲ ἀνίσους ἐκθέτας, φέρωμεν αὐτοὺς πρῶτον εἰς τὴν αὐτὴν παρονομασίαν (§. 381.), διαιροῦμεν καὶ τοὺς συνεργοὺς ἐκτὸς τοῦ σημείου, καὶ τὰς ῥιζικὰς ποσότητας μετὰ τὸ σημεῖον.

ὡς $\sqrt[3]{24} : \sqrt{6} = \sqrt[6]{24^2} : \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{\frac{24^2}{6^3}} =$

$\sqrt[6]{\frac{24.\ 24}{6.\ 6.\ 6}} = \sqrt[6]{\frac{4.\ 6.\ 4.\ 6}{6.\ 6.\ 6}} = \sqrt[6]{\frac{4.\ 4}{6}} = \sqrt[6]{\frac{2.\ 2.\ 4}{2.\ 3}} =$

$\sqrt[6]{\frac{8}{3}}$ καὶ $\sqrt[8]{48} : \sqrt[4]{12} = \sqrt[8]{48^4} : \sqrt[8]{12^2} =$

$\sqrt[8]{\frac{48.\ 48.\ 48.\ 48}{12.\ 12}} = \sqrt[8]{\frac{4.\ 12.\ 4.\ 12.\ 48.\ 48}{12.\ 12}} =$

$\sqrt[8]{\frac{4.\ 4.\ 48.\ 48}{1}} = \sqrt[4]{\sqrt{4.\ 48.\ 4.\ 48}} = \sqrt[4]{12.\ 12} =$

$\sqrt[4]{4.\ 3.\ 4.\ 3} = 2\sqrt[4]{9} = 2\sqrt{\sqrt{3.\ 3}}$ ἔτι $2\sqrt{6} : 3\sqrt[3]{9} =$

$2\sqrt[6]{6^3} : 3\sqrt[6]{9^2} = \frac{2\sqrt[6]{6^3}}{2\sqrt[6]{9^2}} = \frac{2}{3}.\sqrt[6]{\frac{6.\ 6.\ 6}{9.\ 9}} = \frac{2}{3}.$

$\sqrt[6]{\frac{2.\ 3.\ 2.\ 3.\ 2.\ 3}{3.\ 3.\ 3.\ 3.\ 3}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{2.\ 2.\ 2}{3}}$

ὁμοίως $\sqrt[3]{\gamma\delta} : \sqrt{\gamma\delta} = \sqrt[6]{\gamma^2\delta^2} : \sqrt[6]{\gamma^3\delta^3} = \sqrt[6]{\frac{\gamma^2\delta^2}{\gamma^3\delta^3}} =$

$\sqrt[6]{\frac{1}{\gamma\delta}}$.

Χάριν δὲ τῶν πρωτοπείρων, διαιρεθήτωσαν κατὰ τοὺς αὐτοὺς νόμους καὶ τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

$(\sqrt{24} + \sqrt{48} - \sqrt{72}) : \sqrt{6} = \sqrt{4} + \sqrt{8} - \sqrt{12}$ ἄρα τὸ πηλίκον $\sqrt{4} + \sqrt{8} - \sqrt{12} = 2 + \sqrt{4.\ 3} = 2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = 2(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$.

Ἐὰν δὲ καὶ ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος πολυμερεῖς, βλέπομεν πρῶτον ἐὰν δὲν εἶναι ὁμοειδῆ τὰ ῥιζικὰ σημεῖα, φέρομεν ὅλα εἰς τὴν αὐτὴν παρονομασίαν, καὶ εἶτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ διαιρέτου ἓν μέρος τοῦ διαιρετέου λύοντες αὐτοὺς εἰς παράγοντας, καὶ ἀπαλείφοντες τοὺς κοινοὺς, καὶ τὰ λοιπὰ, ὅσα μέχρι τοῦδε ἴδομεν· εἶτα διὰ τοῦ πηλίκου πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ὅλον, καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον, καὶ ἀπὸ τὸ λείψανον εὑρίσκομεν ἕτερον μέρος πηλίκου, ὡς εἰς τὰς διαιρέσεις ἐμάθομεν.

διαιρετέος

$$\sqrt{36.\,6}+\sqrt{4.\,15}-\sqrt{9.\,10}-\sqrt{25}:$$
$$\sqrt{9.\,2.\,4.\,3}+\sqrt{4.\,3.\,5}-\sqrt{9.\,2.\,5}-\sqrt{25}$$
$$-\qquad\quad -\qquad\quad +\qquad\quad +$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$0\qquad\qquad 0$$

διαιρέτης πηλίκον

$$\sqrt{9.\,2}+\sqrt{5}=\sqrt{4.\,3}-\sqrt{52}=\sqrt{3}-\sqrt{5}.$$

διαιρετέος

$$\gamma\sqrt{\beta\gamma}-\gamma\sqrt{\beta\delta}+\delta\sqrt{\gamma\mu}-\delta\sqrt{\delta\mu}:$$
$$+\sqrt{\gamma^3\beta}-\sqrt{\gamma^2\beta\delta}+\sqrt{\delta^2\gamma\mu}-\sqrt{\delta^3\mu}$$
$$-\qquad +\qquad -\qquad +$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$0\qquad\qquad 0$$

διαιρ: πηλ:

$$\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta}=\sqrt{\gamma^2\beta}+\sqrt{\delta^2\mu}$$

Πλὴν σπανίως τοιαῦται διαιρέσεις συμβαίνουσι, μάλιςα πολλάκις αἱ διαιρέσεις αὗται εἶναι δυσχερεῖς καὶ εἰς ἄπειρον προβαίνουσιν, διὸ γράφουσι τὸν διαιρέτην καὶ διαιρετέον κλασματικῶς, καὶ κατὰ τὰ ἄνω τὸν παρονομαςὴν ποιοῦσι λογικόν. (§. 360.).

ΚΕΦΑ΄ΛΑΙΟΝ Β΄.

Περὶ ἀπαλλαγῆς τῶν ῥιζικῶν τοῦ παρονομαστοῦ.

§. 396. Πρὶν εἰς αὐτὴν τὴν μέθοδον ἔλθωμεν, ἂς πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον μίαν ἔκφρασιν δύω ἀλόγων ῥιζικῶν τῆς δευτέρας δυνάμεως μὲ πολλαπλασιαστὴν αὐτὴν τὴν ἰδίαν, μόνον μὲ σημεῖον ἐναντίον.

ὡς $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})$.

Α΄	Β΄
$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	καὶ $\sqrt{3}-\sqrt{5}$
$\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$	$\sqrt{3}+\sqrt{5}$
$\alpha+\sqrt{\alpha\beta}$	$3-\sqrt{3.\ 5}$
$-\sqrt{\alpha\beta}-\beta$	$+\sqrt{3.\ 5}-5$
$\alpha-\beta$	$3-5$

Ἄρα μία ἔκφρασις, ἐν ᾗ δύω ῥιζικὰ σημεῖα τετραγωνικά, ὅταν πολλαπλασιασθῇ καθ' ἑαυτὴν μὲ ἓν ἐναντίον σημεῖον, τὸ παραγόμενον εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ὑπὸ τὰ σημεῖα ἀριθμῶν ἄνευ σημείων ῥιζικῶν· ἐὰν δὲ καὶ συνεργοὺς ἔχωσιν εἰς τὸ παραγόμενον, εὑρίσκονται οἱ ἀριθμοὶ πεπολλαπλασιασμένοι μετὰ τῶν συνεργῶν εἰς τετράγωνον ὑψουμένων· πολλαπλασιασθήτω καὶ ἡ ἔκφρασις ἐν ᾗ εὑρίσκονται τρία τετραγωνικὰ ῥιζικά, μὲ τὴν αὐτὴν ἔκφρασιν μὲ δύω σημεῖα ἐναντία.

Α'

$$\begin{array}{l}
\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\\
\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}\\
\hline
\alpha+\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\gamma}\\
\quad-\sqrt{\alpha\beta}-\beta-\sqrt{\beta\gamma}\\
\quad-\ -\sqrt{\alpha\gamma}-\sqrt{\beta\gamma}-\gamma\\
\hline
\alpha-\beta-2\sqrt{\beta\gamma}-\gamma
\end{array}$$

Β'

$$\begin{array}{l}
2\sqrt{\alpha}+3\sqrt{\beta}+4\sqrt{\gamma}\\
2\sqrt{\alpha}-3\sqrt{\beta}-4\sqrt{\gamma}\\
\hline
4\alpha+6\sqrt{\alpha\beta}+8\sqrt{\alpha\gamma}\\
\quad-6\sqrt{\alpha\beta}-9\beta-12\sqrt{\beta\gamma}\\
\quad-8\sqrt{\alpha\gamma}-12\sqrt{\beta\gamma}-16\gamma\\
\hline
4\alpha-9\beta-2.\ 12\sqrt{\beta\gamma}-16\gamma
\end{array}$$

Γ'

$$\begin{array}{l}
3\sqrt{\alpha}+2\sqrt{\beta}-5\sqrt{\gamma}\\
3\sqrt{\alpha}-2\sqrt{\beta}+5\sqrt{\gamma}\\
\hline
9\alpha+6\sqrt{\alpha\beta}-15\sqrt{\alpha\gamma}\\
\quad-6\sqrt{\alpha\beta}-4\beta+10\sqrt{\gamma\beta}\\
\qquad\qquad+15\sqrt{\alpha\gamma}+10\sqrt{\beta\gamma}-25\gamma\\
\hline
9\alpha-4\beta+20\sqrt{\beta\gamma}-25\gamma
\end{array}$$

Ὅθεν ἐὰν ἔκφρασις, ἐν ᾗ τρία ῥιζικὰ τετραγωνικὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὴν αὐτὴν ἔκφρασιν, ἀφ' οὗ μόνου δύω σημεῖα τῶν + καὶ — μεταβάλλωμεν εἰς τὰ ἐναντία, εἰς τὸ παραγόμενον μένουσιν οἱ ἀριθμοὶ οἱ αὐτοὶ ἄνευ ῥιζικῶν σημείων μὲ ἀποφατικὰ σημεῖα πλὴν ἐκείνου, οὗ τὸ σημεῖον ἔμεινε τὸ αὐτὸ καὶ ἅμα τὸ διπλοῦν παραγόμενον τῶν δύω ῥιζικῶν, ὧν τὰ σημεῖα μετεβλήθησαν μετὰ ἀποφατικοῦ σημείου, ἐὰν τὸ τριώνυμον ἔχῃ εἰς ὅλα τὰ μέρη τὸ αὐτὸ σημεῖον, τίθεται πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον τὸ καταφατικόν. ὡς τὸ ἄνω $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})=\alpha-\beta-\gamma-2\sqrt{\beta\gamma}$ οὕτως ἄρα καὶ $(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6})=3-5-6-2\sqrt{30}=-8-2\sqrt{30}$. καὶ ἔτι $(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3})=5-2-3+2\sqrt{6}=0+2\sqrt{6}$. ἐὰν δ' ἔχωσι καὶ συνεργοὺς τὰ ῥιζικά, μένουσιν οἱ ἀριθμοὶ τῶν ῥιζικῶν πεπολλαπλασιασμένα μὲ τὰ τετράγωνα τῶν συνεργῶν. τὸ δὲ ῥιζικὸν μὲ συνεργὸν ἀπὸ τὸ διπλοῦν παραγόμενον τῶν συνεργῶν τῶν δύω ἐκείνων, ὧν τὰ σημεῖα μεταβλήθησαν. ὡς $(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+5\sqrt{4})(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-5\sqrt{4})=4.5-9.3-25.4+2.3.5\sqrt{3.4}=8-27-100+30\sqrt{12}=-119+30\sqrt{12}$.

Ταῦτα πρέπει καλῶς νὰ ἐννοήσωμεν, διὰ νὰ λύωμεν εὐκόλως τὰ ἑξῆς.

§. 397. Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς συνίσταται ἀπὸ δύω μέρη, καὶ εἰς αὐτὰ εὑρίσκωνται ἢ ἓν ῥιζικὸν τῆς δευτέρας δυνάμεως, ἢ δύω, ὅπερ συνεχῶς εἰς τὴν Γεωμετρίαν συμβαίνει, ποιοῦμεν τὸν παρονομαστὴν λογικὸν, ἐὰν μὲ τὸν αὐτὸν δι' ἐναντίου σημείου πολλαπλασιάσωμεν ἄνω καὶ κάτω· διότι οὕτω τὸ κλάσμα δὲν μεταβάλλεται (§. 02). καὶ εἶτα τὸν παρονομαστὴν ποιοῦμεν ὡς ἄνω (§. 306). διότι συνίσταται ἀπὸ δύω παράγοντας, ἐν οἷς μόνον τὸ ἓν σημεῖον μετεβλήθη, κατ' αὐτὰ λοιπὸν λύονται τὰ ἑξῆς.

$$\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha\gamma}}=\frac{\alpha\beta(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha\gamma})}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha\gamma})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha\gamma}}=\frac{\alpha\beta\sqrt{\alpha}-\alpha\beta\sqrt{\alpha\gamma}}{\alpha-\alpha\gamma}$$

καὶ $$\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(3+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=$$

$$\frac{3+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}=3\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6}-2:$$ καὶ

$$\frac{8}{\sqrt{(9-\sqrt{5})}}=\frac{8\sqrt{(3-\sqrt{5}}}{3-\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{(3-\sqrt{5})}(3+\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=$$

$$\frac{8\sqrt{(3-\sqrt{5})}(3+\sqrt{5})}{4}=2\sqrt{(3-\sqrt{5})}\sqrt{(3+\sqrt{5})}$$

$(3+\sqrt{5})=2\sqrt{(12+4\sqrt{5})}=4\sqrt{(3+\sqrt{5})}$ καὶ

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{15}-3-\sqrt{10}+\sqrt{6}}{5-3}$$

$$=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}+\sqrt{6}-3}{2}\cdot \text{καὶ}\ \frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}=4+\sqrt{2}.$$

Ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς ἀπὸ τρία μέρη συνίσταται, διὰ νὰ κάμωμεν αὐτὸν λογικὸν, μεταβάλλομεν μόνον δύω σημεῖα τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ πολλαπλασιάζομεν διὰ τοῦ μεταβληθέντος παρονομαστοῦ ἄνω καὶ κάτω τὸ κλάσμα, καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸν παρονομαστὴν μὲ δύω μέρη, εἶτα ὡς ἀνωτέρω μεταβάλλομεν τὸ ἓν σημεῖον τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ πολλαπλασιάζομεν ἄνω καὶ κάτω τὸ κλάσμα, ὡς ἀνωτέρω (αὐτόθι)· καὶ λαμβάνομεν τὸν παρονομαστὴν λογικὸν, ὡς τὸ ἑξῆς.

$$\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{10}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{(2\sqrt{6}+3\sqrt{10})(3\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$$

$$=\frac{(2\sqrt{6}+3\sqrt{10})\ (3\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3^2.2-3-5-2.\sqrt{15}}=$$

$$\frac{(2\sqrt{6}+3\sqrt{10})(3\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{10-2\sqrt{15}}=$$

$$\frac{(2\sqrt{6}+3\sqrt{10})(3\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(10+2\sqrt{15})}{(10-2\sqrt{15})(10+2\sqrt{15})=100-60=40}=$$

$$\text{καὶ}\ \frac{8}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=$$

$$\frac{8(2\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3})}=$$

$$\frac{8(2\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{20-2-3-2\sqrt{6}}=\frac{8(2\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{15-2\sqrt{6}}=$$

$$\frac{8(2\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3})(15+2\sqrt{6})}{(15-\sqrt{6})(15+2\sqrt{6})}=\frac{8(2\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3})(15+2\sqrt{6})}{225-24=201}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ ἀδυνάτων, ἢ φαντασικῶν Ποσοτήτων.

§. 398. Ποσότητας ἀδυνάτους εἴπομεν (§. 305.) ἐκείνας, ὅσαι εἶναι ἀποφατικαί, καὶ ἔχουσιν ἄρτιον ἐκθέτην· ὡς -2^2, $-\alpha^4$, -6^8 κτ:· διότι οὐδένα ἀριθμὸν εἴδομεν ἔχοντα παράγοντας ἀρτίους, νὰ γίνεται ἀποφατικὸς, ὡς $-2.\ -2=4$ καὶ $-\alpha.\ -\alpha.\ -\alpha.\ -\alpha=\alpha^4$ κτ:. μόνον τῇ φαντασίᾳ, ὡς αὐτοὶ λέγουσι, πίπτει, διὸ καὶ φαντασικὸν αὐτὸν ὀνομάζουσι. Φαντασικοὶ δὲ λέγονται καὶ ὅλοι οἱ ἀποφατικοὶ ἀριθμοὶ, ὅσα πρὸ αὐτῶν ἔχουσι σημεῖον ῥιζικὸν μὲ ἐκθέτην ἄρτιον, ὡς $\sqrt{-\alpha}$, $\sqrt[4]{-\alpha}$. διότι οὐδεμία ῥίζα εὑρίσκεται, ἥτις πολλαπλασιασθεῖσα καθ' ἑαυτὴν ἀποτελεῖ τοῦτον τὸν ἀριθμόν· διὸ καὶ ἀδυνάτους αὐτὰς προσεῖπον ποσότητας. Ἂν ὅμως τῇ ἀληθείᾳ οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι φαντασικοὶ, ἡμεῖς δὲν ἀποφασίζομεν· διότι βλέπομεν καὶ ἐκ τούτων ὅτι ἐνεργεῖα καὶ πραγματικὰ, καὶ δυνατὰ ἀποτελέσματα ἕπονται· τοῦτο δὲ οὐδέποτ' ἐγίνετο, ἂν τῷ ὄντι ἀδύνατοι καὶ φαντασικοὶ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι· ἐπειδὴ οὗτοι πάντες ἀπὸ παράγοντας ἐνεργεῖα παράγονται, καὶ ἅμα ἀπὸ τὴν ἀποφατικὴν μονάδα· οὕτω τὸ φαντασικὸν παρ' ἐκείνοις τετράγωνον γίνεται

$-a^2=-a.-a.-1=-a^2$· διότι ἡ μονὰς λύεται εἰς ἀπείρους παράγοντας, καὶ ὅλοι ἅμα πολλαπλασιαζόμενοι μονάδα ἔχουσι τὸ παραγόμενον. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ διὰ τὰ ἀρτιοβάθμια ῥιζικά· διότι $\sqrt{-a}=\sqrt{-1}.\,a$· ὅθεν τοῦτο $\sqrt{-a}$, τὸ τοῦτο $\sqrt[4]{-a}$ σημαίνει, ἡ ῥίζα τοῦ a νὰ πολλαπλασιασθῇ μετὰ τῆς ἀποφατικῆς μονάδος, καὶ νὰ γένῃ ἀποφατική.

§. 399. Ὅσα εἴπομεν περὶ τῶν ῥιζικῶν ποσοτήτων καὶ ἀλόγων, καὶ εἰς αὐτὰς τὰς ἀδυνάτους συμβάλλουσι· διὸ καὶ αὗται διαιροῦνται εἰς παράγοντας, καὶ κατὰ μέρος ἀπαλλάττονται καὶ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου; καὶ ταύτης τῆς ἀδυναμίας· ὡς $\sqrt{-18}=\sqrt{9.-2}=3\sqrt{-2}$· διὰ δὲ τὸ ἀμφίβολον ἂν ἡ ῥίζα καταφατικὴ ἢ ἀποφατική, μένει ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖςον τὸ ῥιζικὸν τῆς μονάδος τῆς ἀποφατικῆς, ὡς $\sqrt{-4}=\sqrt{4.-1}=2\sqrt{-1}$· καὶ ἔτι $\sqrt{-12}=\sqrt{4.-3}=2\sqrt{-3}$· καὶ $\sqrt{-72}=\sqrt{36.-2}=6\sqrt{-2}$ καὶ $\sqrt{-a^3}=\sqrt{a^2-a}=a\sqrt{-a}$ κτ:

§. 400. Ἡ πρόσθεσις, καὶ ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἀπαραλλάκτως, ὡς καὶ ἡ πρόσθεσις, καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἀλόγων ποσοτήτων (§. 386.). δηλ: ὅταν μὲν ὦσιν ὁμοειδῆ, καὶ ἔχωσιν ὅμοια σημεῖα συνάπτονται, ὅταν δὲ ἀνόμοια, ἀφαιροῦνται· τὰ δ' ἀνομοιοειδῆ ἀεὶ διὰ τοῦ σημεῖα τῆς προσθέσεως + ἐκφέρονται, εἰς δὲ τὴν ἀφαίρεσιν μεταβάλλονται τὰ σημεῖα τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ συνάπτονται.

$$\begin{array}{ll}
\text{πρόσθε} & 3\sqrt{-2}+5\sqrt[4]{-3}+\sqrt[6]{-5}-3 \\
\text{τέος} & 5\sqrt{-2}-2\sqrt[4]{-3}-3\sqrt[6]{-5}+4 \\
\hline
 & 6\sqrt{-2}+3\sqrt[4]{-3}-2\sqrt[6]{-5}+1
\end{array}$$

ἐὰν δὲ ζητῆται ἀπὸ $3\sqrt{-2}-7\sqrt[4]{4}+\sqrt[6]{7}+5$ νὰ ἀφελωμεν $3\sqrt{-2}+3\sqrt[4]{-4}-\sqrt[6]{7}+8$, μεταβάλλομεν τὰ σημεῖα τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ συνάπτομεν, οὕτω.

$$3\sqrt{-2}-7\sqrt[4]{-4}+\sqrt[6]{7}+5$$
$$3\sqrt{-2}+3\sqrt[4]{-4}-\sqrt[6]{7}+8$$
$$-\qquad-\qquad+\qquad-$$
$$0\cdot 10\sqrt[4]{-4}+2\sqrt[6]{7}3$$

§. 401. Ὁ δὲ Πολλαπλασιασμὸς γίνεται τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀλόγους ἀριθμοὺς, διαφέρει δὲ μόνον κατὰ τοῦτο, καθ' ὃ οἱ μετὰ τὸ σημεῖον ἀριθμοὶ ἀναγκαίως ἔχουσιν ἕνα παράγοντα ἀποφατικὸν, ἢ τοὐλάχιστον τὴν ἀποφατικὴν μονάδα (§. 899). καὶ ἐὰν τὸ παραγόμενον μετὰ τὸ ῥιζικὸν γένῃ καταφατικὸν, ἀνάγκη τὸ σημεῖον τὸ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ νὰ μεταβληθῇ εἰς τὸ ἐναντίον, ὡς $\alpha\sqrt{-\beta}=-\alpha\sqrt{\beta}$ καὶ $-\alpha\sqrt{-\beta}=+\alpha\sqrt{\beta}$ διότι $-\alpha\sqrt{-\beta}=-\alpha\cdot-\beta^{\frac{1}{2}}=\alpha\beta^{\frac{1}{2}}=\alpha\sqrt{\beta}$· ὅτι ἀεὶ ἀποφατικὴν ῥίζαν δίδουσι τὰ ῥιζικὰ μετὰ ἀποφατικῶν ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τοῦτο $\sqrt{(-\alpha)^2}=-\alpha$ εἶναι ἡ ἀποφατικὴ ῥίζα γνωστὴ, εἰς δὲ τὸ $\sqrt{-\alpha}$ ἄγνωστος, πολλαπλασιάζουσι τὰ ἀδύνατα ῥιζικὰ μόνον διὰ τοῦ σημείου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον· οὕτω $\sqrt{-\alpha}\cdot\sqrt{-\beta}$ καὶ αἱ συνθῆκαι ἢ τοῦ προβλήματος ἢ ἄλλης τινὸς ἐργασίας δεικνύουσιν ὀρθῶς τὴν ῥίζαν, ὅπου πρέπει νὰ ληφθῇ.

§. 402. Ὅταν δύω ἴσαι ἀδύναται ποσότητες ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθῶσι, τὸ τούτων γενόμενον ἀποφατικὸν γίνεται, ὡς $\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-5}=-5^{\frac{1}{2}}\cdot-5^{\frac{1}{2}}=-5^{\frac{2}{2}}=-5$· διὰ τοῦτο καὶ ἐλέγομεν ἡ ῥίζα τοῦ ἀδυνάτου ἀεὶ ἀποφατική· καὶ φανερὸν, ὅτι τὸ σημεῖον μετὰ τὸ ῥιζικὸν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δὲν μεταβάλλεται, ἀλλὰ τὸ σημεῖον τὸ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ· ὅθεν ὁ κανὼν, ὅτι τὰ ὅμοια σημεῖα δίδουσι καταφατικὸν, τὰ δ' ἀνόμοια ἀποφατικὸν (§. 83.) χώραν μετὰ τὸ σημεῖον δὲν ἔχει εἰς τὰς ἀδυνάτους ποσότητας, ὡς $\sqrt{-8}.\sqrt{-3}=-8$ κτλ, ὅταν ὅμως αἱ ποσότητας διάφοροι ἕτερόν τι ἐξέρχεται, καὶ οὐχὶ ἡ αὐτὴ ποσότης· διὰ τοῦτο ἢ διὰ τοῦ σημείου μόνου πολλαπλασιάζομεν, ὡς $\sqrt{-8}.\sqrt{-2}$, ἢ πρὶν τοῦ ῥιζικοῦ τὸ ἐναντίον σημεῖον τίθεμεν· ὡς $\sqrt{-8}.\sqrt{2}=-\sqrt{16}=-4$, καὶ ἰδοὺ ἐξ' ἀδυνάτων δυνατόν τι ἐπιφέρεται. Τοῦτο ἐξέρχεται, καὶ ἐὰν ἐνεργείᾳ πολλαπλασιάσωμεν.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{-8}+\sqrt{-2} \\
\underline{\sqrt{-8}-\sqrt{-2}} \\
-8+\sqrt{-16} \\
\quad -\sqrt{-16}-1.\ -2=+2 \\
\hline
-8+2=-6\ (\qquad)
\end{array}
$$

καὶ φαίνεται ἐνταῦθα ἀνάπαλιν ἐκεῖνος ὁ κανών.

Τὰ ὅμοια πρὸ τῶν ἀδυνάτων ἀριθμῶν σημεῖα, δίδοσι παραγόμενον ἀποφατικὸν, τὰ δ' ἀνόμοια καταφατικόν· ὡς τὸ ἄνω $+\sqrt{-2}.-\sqrt{-2}=2$. καὶ $-\sqrt{-8}.+\sqrt{-2}=-\sqrt{-16}=-(-4)=4$.

§. 403. Ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῶσι δυναταὶ ποσότητες μετ' ἀδυνάτων, τὸ παραγόμενον ἀεὶ ἀδύνατον· ὡς $\sqrt{6}.\sqrt{-8}=\sqrt{-48}$· διότι $\sqrt{-8}=\sqrt{8}.\sqrt{-1}$· ἄρα $\sqrt{6}.\sqrt{8}.\sqrt{-1}=\sqrt{+48}.\sqrt{-1}=\sqrt{16}.3.\sqrt{-1}=4\sqrt{3}\sqrt{-1}=4\sqrt{-3}$. Πολλάκις ὅμως, ὡς ἐλέγομεν εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς, μένει ὁ πολλαπλασιασμὸς δυνάμει $\sqrt{-6}.\sqrt{-8}$, καὶ οὐχὶ ἐνεργείᾳ $\sqrt{-48}$· καὶ $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$· οὐχὶ δὲ $\sqrt{-ab}$· πρὸς γύμνασιν δὲ πολλαπλασιάσθωσαν καὶ τὰ ἑξῆς.

,,$\alpha\sqrt{-\beta\delta}$· $\gamma\sqrt{-\delta}=\alpha\gamma\sqrt{\beta}(-\delta)^2=-\alpha\gamma\delta\sqrt{\beta}$.
,,$\alpha\sqrt{\beta\delta}$. $\alpha\sqrt{-\delta}=\alpha^2\delta\sqrt{-\beta}$· ἀνάγκη νὰ εἶναι ὁ εἷς παράγων ἀποφατικὸς ὡς εἰς τοῦτο ὁ β, καὶ ἄνω ὁ δ.

A′

καὶ
$$\begin{array}{r} 4+\sqrt{-3} \\ 4-\sqrt{-3} \\ \hline 16+4\sqrt{-3} \\ -4\sqrt{-3}-(-3)=3 \\ \hline 19 \end{array}$$

B′

$$\begin{array}{r} \sqrt{2}+\sqrt{-2} \\ 3+\sqrt{-6} \\ \hline 3\sqrt{2}+3\sqrt{-2} \\ \sqrt{-12}+\sqrt{-12} \\ \hline 3\sqrt{2}+3\sqrt{-2}+2\sqrt{-12} \end{array}$$

Γ′

καὶ
$$\begin{array}{r} -1+\sqrt{-3} \\ -1-\sqrt{-3} \\ \hline 1-\sqrt{-3} \\ +\sqrt{-3}+3 \\ \hline 4 \end{array}$$

Δ′

καὶ ἔτι
$$\begin{array}{r} -1+\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline 1-\sqrt{-3} \\ -\sqrt{-3}-3 \\ \hline -2-2\sqrt{-3} \end{array}$$

E′

ἔτι
$$\begin{array}{r} -1-\sqrt{-3} \\ -1-\sqrt{-3} \\ \hline 1+\sqrt{-3} \\ +\sqrt{-3}-3 \\ \hline 1+\sqrt{-3}-3 \end{array}$$

ς′

καὶ ἔτι
$$\begin{array}{r} -1+\sqrt{-3} \\ -2-2\sqrt{-3} \\ \hline 2-2\sqrt{-3} \\ +2\sqrt{-3}-2(-3)=6 \\ \hline 8 \end{array}$$

Καὶ φανερὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 8· γίνεται καὶ ἀπὸ τοὺς δύο παράγοντας $(-1+\sqrt{3})(-2-2\sqrt{-3})$, καὶ ὁ αὐτὸς 8 ἔχει ῥίζαν κυβικὴν $-1-\sqrt{-3}$,

ἔτι Z′

$$\begin{array}{r} 1+2\sqrt{-3}-3 \\ -1-\sqrt{-2} \\ \hline -1-2\sqrt{-3}+3 \\ -\sqrt{-3}-(-6)+3\sqrt{-3} \\ \hline 8 \end{array}$$

§. 404. Ἡ διαίρεσις γίνεται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ὡς καὶ εἰς τὰς δυνατὰς ἀλόγους ποσότητας. καὶ καλοῦ μάλιςα νὰ λύωμεν τὰς ἀδυνάτους ποσότητας, ὡς ἐμάθομεν, εἰς τὸν κοινὸν παράγοντα $\sqrt{-1}$· διότι οὕτω ποιούμεναι μένουσιν αἱ λοιπαὶ ποσότητες δυναταί. καὶ εἶτα διαιροῦμεν, ὡς εἰς τοὺς ἀλόγους ἀριθμοὺς ἐδιδάχθημεν, γράφοντες αὐτοὺς κλασματικῶς· ὡς

$$\sqrt{-6}:\sqrt{-3}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}.\sqrt{-1}}{\sqrt{3}.\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

καὶ $\sqrt{-36}:\sqrt{-4}=\dfrac{\sqrt{36}.\sqrt{-1}}{\sqrt{4}.\sqrt{-1}}=\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}}=\sqrt{9}=3.$

ἄρα καὶ $\sqrt{-36}:\sqrt{-4}=-6:-2=3$·

οὕτω καὶ $\sqrt{-8}:\sqrt{-4}=\dfrac{\sqrt{8}.\sqrt{-1}}{\sqrt{4}.\sqrt{-1}}=\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}}=\sqrt{2}$

καὶ κατὰ ταῦτα καὶ $\sqrt{-\alpha\beta}:\sqrt{-\alpha}=\dfrac{\sqrt{-\alpha\beta}}{\sqrt{-\alpha}}=\sqrt{\beta}.$

Πολλάκις ὅμως ἐὰν ὁ παρονομαςὴς διμελὴς, ἢ τριμελὴς, ἀπαλλάττομεν αὐτὸν ἀπὸ τὰ ῥιζικὰ (§. 397.) ὡς

$$\frac{-3+\sqrt{-5}}{3+\sqrt{-5}}=\frac{(-3+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})}{(3+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})}=$$

$$\frac{-4+6\sqrt{-5}}{14}=\frac{-2+4\sqrt{-5}}{7}.$$

Πολλάκις δὲ καὶ τὴν διαίρεσιν δὲν ἐργαζόμεθα ἐνεργείᾳ, ἀλλὰ μόνον διὰ τῶν σημείων ὡς $\dfrac{\sqrt{-\alpha}}{\sqrt{-\beta}}$, ἢ καὶ εἰς τὸ ἁπλούςερον ἀνάγονται, ὡς $\dfrac{8\sqrt{-6}}{-4\sqrt{-2}}=$

$$\frac{8\sqrt{-3}.\sqrt{-2}}{-4\sqrt{-2}}=-2\sqrt{-4}.$$

§. 405. Τέλος, τὸ ὄφελος αὐτῶν χρησιμεύει τὰ μάλιςα εἰς πολλὰς ἐργασίας τῆς μαθηματικῆς, κυρίως δὲ εἰς τὰ προβλήματα, καὶ εἰς τὰς ἐξισώσεις· διότι ἂν ἐξίσωσίς τις καταντήσῃ νὰ ἔχῃ τὸ ἄγνωςον ἴσην ποσότητα ἀδύνατον, ἀδύνατον κρίνεται καὶ τὸ πρόβλημα, διότι οὐδεμίαν ποσότητα εὑρίσκομεν, ὁποῦ νὰ πολλαπλασιασθῇ καθ' ἑαυτὴν καὶ νὰ γένῃ παραγόμενον τὸ $-\alpha$· διὰ νὰ εὑρεθῇ καὶ ἡ ῥίζα $\sqrt{-\alpha}$· ἢ ἡ $\sqrt[4]{-\delta}$.

§. 406. Ἐν τοῖς ἑξῆς πάνυ ἀναγκαῖον εἶναι νὰ μάθωμεν, πῶς ἀπὸ ἓν μέρος μιᾶς ἐκθέσεως εἰς παρένθεσιν ὁποῦ ὑψοῦται εἰς μίαν δύναμιν, ἕνα παράγοντα, ἢ ὅλον τὸ μέρος αὐτὸ ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως ἐξάγομεν, χωρὶς νὰ βλαβῇ ἡ τιμὴ ὅλης τῆς ἐκθέσεως· δηλ: εἰς τὴν παρένθεσιν $(\alpha^\mu + \beta\chi^\nu)^\rho$ πῶς ἀπαλλάττομεν τὸ μέρος $\beta\chi^\nu$ ἀπὸ τῆς παρενθέσεως, καὶ νὰ μείνῃ ὅλη ἡ ἔκθεσις ἄτρεπτος· καὶ τοῦτο γίνεται ἐξ ἐκείνου (§. 92.), ἐὰν διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος διέλωμεν, καὶ πολλαπλασιάσωμεν, μένει ἡ ποσότης ἄτρεπτος· ὡς $\alpha\beta - \gamma\chi = \chi \cdot \dfrac{\alpha\beta - \gamma\chi}{\chi} = \chi\left(\dfrac{\alpha\beta}{\chi} - \gamma\right)$· ἐὰν δὲ καὶ τὸ γ θέλωμεν ἀπ' αὐτὴν τὴν ἔκφρασιν νὰ εὐγάλωμεν, τὸ αὐτὸ πάλιν γίνεται· $\alpha\beta - \gamma\chi = \gamma\chi \dfrac{\alpha\beta - \gamma\chi}{\gamma\chi} = \gamma\chi\left(\dfrac{\alpha\beta}{\gamma\chi} - 1\right)$· ἐὰν δὲ καὶ τὸ β, πάλιν οὕτω ποιοῦμεν· $\alpha\beta - \gamma\chi = \gamma\chi\beta \cdot \dfrac{\alpha\beta - \gamma\chi}{\gamma\chi\beta} =$

$$\gamma\chi\beta\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma\chi\beta} - \frac{\gamma\chi}{\gamma\chi\beta}\right) = \gamma\chi\beta\left(\frac{\alpha}{\gamma\chi} - \frac{1}{\beta}\right).$$

Ἄρα διὰ νὰ ἀπαλλάξωμεν ἓν μέρος μιᾶς ἐκφράσεως ἀπὸ ἕνα παράγοντα οἱονδήποτε, μὲ τὸν αὐτὸν παράγοντα διαιροῦμεν ὅλα τὰ μέρη τῆς ἐκφράσεως πλὴν αὐτοῦ τοῦ μέρους ὅπου ἔχει τὸν παράγοντα, καὶ κλείομεν τὰ μέρη ταῦτα εἰς παρένθεσιν, καὶ τοῦτον γράφομεν παράγοντα τῆς παρενθέσεως ἐκτὸς, καὶ μένει τὸ μέρος ἐκεῖνο ἄνευ αὐτοῦ τοῦ παράγοντος, χωρὶς τὰ χαλάσῃ ὅλη ἡ ποσότης· οὕτω $(\alpha\beta+2\beta\gamma-\alpha\chi^2)=\chi^2(\frac{\alpha\beta}{\chi^2}+\frac{2\beta\gamma}{\chi^2}-\alpha)=$ $\chi^2\beta(\frac{\alpha}{\chi^2}+\frac{2\gamma}{\chi^2}-\frac{\alpha}{\beta})=\chi^2\beta\gamma(\frac{\alpha}{\gamma\chi^2}+\frac{2}{\chi^2}-\frac{\alpha}{\beta\gamma})$· ὁμοίως $\alpha\beta+\chi^4=$ $\chi^4(\frac{\alpha\beta}{\chi^4}+1)$· καὶ $56-8=8(\frac{56}{8}-1)=8(7-1)$ ἐὰν δὲ ἡ ἔκφρασις εἶναι εἰς παρένθεσιν μὲ ἐκθέτην εἰς δύναμίν τινα, πάλιν ἐξάγομεν οἱανδήποτε ποσότητα εἰς παράγοντα ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· καὶ διὰ τοῦ ἐκθέτου τῆς παρενθέσεως πολλαπλασιάζομεν τὸν ἐκθέτην τῆς ἐξαχθείσης ποσότητος ὡς $(\alpha^\mu+\beta\chi^\nu)^\rho=[\chi^\nu(\frac{\alpha^\mu}{\chi^\nu}+\beta)]^\rho=\chi^{\nu\rho}(\frac{\alpha^\mu}{\chi^\nu}+\beta)^\rho$.

καὶ $(\alpha\beta^\mu-\frac{\gamma\delta}{\vartheta})^\nu=\beta^{\mu\nu}(\alpha-\frac{\gamma\delta}{\beta\vartheta})^\nu=\beta^{\mu\nu}\alpha^\nu(\alpha\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta^\mu\vartheta})^\nu=\alpha^\nu\beta^{\mu\nu}\gamma^\nu(\frac{1}{\gamma}-$ $\frac{\delta}{\alpha\beta^\mu\vartheta})^\nu=\alpha^\nu\beta^{\mu\nu}\gamma^\nu\delta^\nu(\frac{1}{\gamma\delta}-\frac{1}{\varepsilon\beta^\mu\vartheta})^\nu$· ὁμοίως $\chi(\alpha^2\chi-\alpha\chi^2)^{\frac{3}{2}}=$ $\chi(\chi^2)^{\frac{3}{2}}\cdot(\alpha^3\chi^{-1}-\alpha)^{\frac{3}{2}}=\chi\chi^{\frac{6}{2}}(\alpha^3\chi^{-1}-\alpha)^{\frac{3}{2}}=\chi^4(\alpha^3\chi^{-1}-\alpha)^{\frac{3}{2}}$.

καὶ $(\alpha\chi^{\frac{3}{2}}+\alpha^3\chi)^{-\frac{2}{5}}=(\alpha\chi^{\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{5}}\cdot(1+\alpha^2\chi^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{5}}=\alpha^{-\frac{2}{5}}\chi^{-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}}$. $(1+\alpha^2\chi^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{5}}=\alpha^{-\frac{2}{5}}\chi^{-1}(1+\alpha^2\chi^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{5}}$· οὕτω καὶ $(2+5.\ 3)^3=5^3(\frac{2}{5}+3)^3$ κτλ.

§. 407. Ἐὰν δὲ παρονομαςὴν ἀπὸ ἔκθεσίν τινα ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως θέλομεν νὰ ἔχωμεν, γράφομεν αὐτὸν ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως παρονομαςὴν μὲ μονάδα ἀριθμητὴν, καὶ δι' αὐτοῦ πολλαπλασιάζομεν τὰ μέρη τῆς ἐκθέσεως ἐκτὸς αὐτοῦ, ὅπου αἴρεται ὁ παρονομαςής· ὡς $(\frac{\alpha}{\beta}+\gamma)=\frac{1}{\beta}(\alpha+\beta\gamma)$· καὶ $(\frac{2}{5}+3)=\frac{1}{5}(2+3.\ 5)$, τὸ αὐτὸ ποιοῦμεν καὶ ἐὰν δύω παρονομαςὰς εὐγάζωμεν· γράφομεν αὐτοὺς παράγοντας εἰς μονάδα ἀριθμητὴν $(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\gamma}{\delta})=\frac{1}{\alpha\delta}(\alpha\delta-\alpha\gamma)$· καὶ $(\frac{3}{2}+\frac{2}{7})=\frac{1}{35}(3.\ 7+2.\ 5)$· ἐὰν δὲ καὶ ἐκθέτην ἔχῃ ἡ παρένθεσις, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας τῶν ἐξαχθέντων παρονομαςῶν ἐπὶ τοὺς ἐκθέτας τῆς παρενθέσεως· ὡς

$$(\frac{\alpha\beta}{\gamma}-\delta)^3=\frac{1}{\gamma^3}(\alpha\beta-\gamma\delta)^3.$$

καὶ $(\frac{\alpha\chi}{\delta^\nu}+\alpha\gamma)^\mu=\frac{1}{\delta^{\nu\mu}}(\alpha\chi+\alpha\gamma\delta^\nu)^\mu=\frac{\chi^\mu}{\delta^{\nu\mu}}(\alpha+\frac{\alpha\gamma\delta^\nu}{\chi})^\mu$.

§. 408. Καὶ ἀνάπαλιν εἰσάγομεν ἕνα παράγοντα καὶ πολλοὺς εἰς τὴν παρένθεσιν συμπεπλεγμένων ποσοτήτων μὲ ἐκθέτην, ἐὰν διὰ τοῦ ἐκθέτου τῆς παρενθέσεως διέλωμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ ἐκτὸς παράγοντος, καὶ οὕτω μὲ αὐτὸν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαςον μέρος αὐτῆς τῆς παρενθέσεως, ὡς $\alpha^\nu(\beta\gamma^\nu-\delta\epsilon^2)^\mu=(\beta\gamma^\nu\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}-\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}\delta\epsilon)^\mu$· διότι $\alpha^\nu(\gamma^\nu\beta-\delta\epsilon^2)^\mu=(\alpha^{\frac{\nu}{\mu}})^\mu\cdot(\chi^\nu\beta-\delta\epsilon^2)^\mu$ (§. 381.) $=(\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}(\beta\chi^\nu-\delta\epsilon^2))^\mu=(\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}\beta\chi^\nu-\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}$

δε)$^{\mu}$· ἄρα καὶ $\chi^{-\frac{4}{5}}(\alpha\chi-\chi^{3})^{\frac{1}{2}}=(\chi^{-\frac{4}{5}}(\alpha\chi-\chi^{5})=$
$(\alpha\chi^{-\frac{4}{5}+1}-\chi^{-\frac{4}{5}+3})^{\frac{1}{2}}=(\alpha\chi^{-\frac{1}{5}}-\chi^{\frac{5}{5}})^{\cdot\frac{1}{2}}$.

Ὄυτοι οἱ δύω τρόποι συνεχῶς ἀπαντῶσιν εἰς τὴν ἀνάλυσιν, καὶ πρέπει οἱ πρωτόπειροι καλῶς νὰ τοὺς ἐνθυμῶνται.

ΤΜΗΜΑ Γ'.

Περὶ Ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

§. 409. Ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἴπομεν (§. 279.) ἐκείνην, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ἡ ἄγνωσος εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, ὡς $3\chi^2+6\gamma\chi-\chi=\chi^2+5\alpha\chi-\gamma$· ἢ $\chi^2+\alpha=\frac{\gamma}{\delta}$ ἔνθα τὸ χ μόνον νοεῖται ἄγνωσον, τὰ δὲ λοιπὰ γράμματα ὡς γνωσοὶ ἀριθμοὶ (§. 125.). Ὑποδιαιρεῖται ὅμως ἡ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐξίσωσις εἰς ἀμιγῆ, καὶ μεμιγμένην, καὶ ἀμιγὴς λέγεται ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἄγνωσος εὑρίσκεται εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, χωρὶς νὰ ἔχῃ ἄγνωσον, καὶ εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, ὡς ἡ δευτέρα $\chi^2-\alpha=\frac{\gamma}{\delta}$· ἄμικτος εἶναι καὶ ἐκείνη, ὁποῦ εὑρίσκεται ἡ ἄγνωσος εἰς δύο, ἢ εἰς τρία μέρη τῆς ἐξισώσεως εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, ὡς $\epsilon\chi^2+\frac{\beta}{\lambda}=\delta-\gamma\chi^2$· διότι αὕτη μεταβάλλεται, ὡς εἰς τὰς ἐξισώσεις ἐμάθομεν· οὕτω $\epsilon\chi^2+\gamma\chi^2=\delta-\frac{\beta}{\gamma}$, καὶ ἔπειτα εἰς τὴν $\chi^2(\epsilon+\gamma)=\delta-\frac{\beta}{\gamma}$, καὶ πάλιν εἰς ἓν μέρος εὑρίσκεται τῆς ἐξισώσεως. Μεμιγμένη δ᾽ ἐξίσωσις λέγεται ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται μὲν ἡ ἄγνωςος ποσότης εἰς ἓν μέρος, ἢ εἰς δύο τῆς ἐξισώσεως εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, ἀλλ᾽ ἅμα καὶ εἰς ἕτερα μέρη εὑρίσκεται ἡ αὐτὴ ἄγνωςος εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, ὡς $\alpha\chi + \beta\gamma = \frac{\alpha}{\beta}\chi^{\cdot}$ καὶ $\alpha\chi^2 - \beta\gamma + \delta = \frac{\sigma}{\beta}\chi - 3\chi^2$ κτ: Ὅθεν τέμνομεν καὶ τὸ παρὸν τμῆμα εἰς δύω μέρη, ὧν τὸ πρῶτον περὶ ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, τὸ δὲ δεύτερον περὶ ἰδιαιτέρας θεωρίας αὐτῆς, καὶ τινων αὐτῇ ἀνηκόντων.

ΜΕ´ΡΟΣ Α´.

Περὶ Ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

§. 310. Τὶ μὲν ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, καὶ ὅτι εἰς ἀμιγῆ καὶ μεμιγμένην διαιρεῖται, ἀνωτέρω ἐμάθομεν. Ἤδη δὲ καὶ ἰδιαιτέρως περὶ ἑκάςης πολυπραγμονήσωμεν.

ΚΕΦΑ´ΛΑΙΟΝ Α´.

Περὶ τῆς ἀμιγοῦς Ἐξισώσεως.

§. 411. Καὶ εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν οἱ αὐτοὶ τρόποι μεταχειρίζονται, ὡς καὶ εἰς τὰς προηγουμένας τοῦ πρώτου βαθμοῦ, δηλ: μεταφέρονται τὰ μέρη ἀπὸ τὸ ἓν σκέλος τῆς ἐξισώσεως εἰς τὸ ἕτερον μὲ τὰ ἐναντία σημεῖα, οἱ δὲ παρονομαςαὶ μεταποιοῦνται εἰς παράγοντας. Φέρομεν τὴν ἄγνωστον ποσότητα χ^2 εἰς τὸ ἓν σκέλος, καὶ ὅλα τὰ γνωστὰ εἰς τὸ ἕτερον ὡς $\beta\chi^2=\alpha$, ἐὰν τὸ α πολλὰ μέρη σημαίνῃ· ἔπειτα, ἐὰν ἡ ἄγνωστος ἔχῃ συνεργὸν, διαιροῦμεν τὸ ἕτερον σκέλος δι' αὐτοῦ $\chi^2=\frac{\alpha}{\beta}$, καὶ μένει ἡ χ^2 μόνη· τέλος, ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν καὶ ἀπὸ τὰ δύο σκέλη $\sqrt{\chi^2}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, καὶ δίδουσιν ἴσας ῥίζας, καὶ εὑρίσκεται ἡ $\chi=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ ὅ,τι ἂν σημαίνῃ τὸ α διὰ τοῦ β διαιρούμενον.

§. 412. Πολλάκις ὅμως φαίνεται ἡ ἐξίσωσις νὰ εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, καὶ εἶναι τῷ ὄντι τοῦ πρώτου, ὡς αὕτη, $\alpha^2-\chi^2=\frac{\alpha\beta-\beta\chi}{\gamma}$· διότι ἐὰν ἀναλύσωμεν τὰ δύω σκέλη εἰς παράγοντας, γίνεται $(\alpha+\chi)(\alpha-\chi)=\frac{\beta(\alpha-\chi)}{\gamma}$ ἢ $\alpha+\chi=\frac{\beta(\alpha-\chi)}{\gamma(\alpha-\chi)}=\frac{\beta}{\gamma}$, καὶ ἑπομένως $\chi=\frac{\beta}{\gamma}-\alpha$.

Ὅθεν λέγομεν ἡ ἀμιγὴς ἐξίσωσις μεταποιουμένη εἰς τὸ τέλος ἔχει δύω μέρη $\beta\chi^2=\frac{\alpha}{\gamma}$· ἢ $\chi^2=\pm\frac{\alpha}{-\gamma\beta}$, τὸ ἄγνωστον εἰς τετραγωνικὴν δύναμιν καταφατικὸν ἀεὶ, καὶ τὸ γνωστὸν καὶ καταφατικὸν καὶ ἀποφατικὸν δύναται εἶναι καὶ ἀκέραιον, καὶ κλασματικόν· διότι οἱ γνωστοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ σημαίνουσιν οἱονδήποτε ἀριθμὸν δυνατὸν καὶ ἀδύνατον. Δεδόσθω ἡ ἐξίσωσις αὕτη $\alpha\chi^2-\beta\gamma+1=35+\beta\chi^2$, καὶ ζητεῖται ἡ χ· ἄρα

$$\frac{\frac{\alpha\chi^2-\beta\chi^2=35+\beta\gamma-1}{\chi^2(\alpha-\beta)=34+\beta\gamma}}{\chi^2=\frac{34+\beta\gamma}{\alpha-\beta}}$$ ἐὰν εἰς παράγοντας λυθῇ : $(\alpha-\beta)$

$$\chi^2=\frac{34+\beta\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\sqrt{}$$

$$\chi=\sqrt{\left(\frac{34+\beta\gamma}{\alpha-\gamma}\right)}$$

Καὶ πάλιν εἰς δύω μέρη εἰς $\chi^2=\pm\frac{\alpha}{\gamma\beta}$ ὡς εἴρηται.

ἔτι $\alpha\chi^2+\beta=\beta\chi^2+18-\chi^2$ κατ' ἀντιςροφὴν

$$\chi^2+\alpha\chi^2-\beta\chi^2=18-\beta$$

$$\chi^2=\frac{18-\beta}{\alpha-\beta+1}$$

$$\chi=\sqrt{\left(\frac{18-\beta}{\alpha-\beta+1}\right)}$$

Καὶ αὕτη ὡς ὁ γενικὸς τύπος $\chi^2=\pm\frac{\alpha}{\beta\gamma}$.

§. 413. Πρὶν νὰ ἔλθωμεν εἰς τὰ προβλήματα, ἐξετάζοντες τὸν γενικὸν τύπον $\chi=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta\gamma}}$, εὑρίσκομεν ὅτι ἀπαιτεῖται ἀπὸ τὸ ἓν σκέλος νὰ ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνική· τοῦτο δὲ τριχῶς γίνεται.

Α΄. Ἢ εἶναι ὁ ἀριθμὸς μετὰ τὸ ῥιζικὸν σημεῖον καταφατικὸς, καὶ ἐντελὲς τετράγωνον, καὶ τότε ἐξάγεται ἡ ῥίζα ἐντελὴς, καὶ λύεται τὸ πρόβλημα ἐντελὲς, ὡς $\chi=\pm\sqrt{144}=12$ ἐπειδὴ ὅμως καὶ $12.\ 12=144$, καὶ $-12.\ -12=144$ (§. 304.), εἰς κάθε πρόβλημα δύω τιμὰς εὑρίσκομεν, καὶ καταφατικὴν, καὶ ἀποφατικὴν· πλὴν ἀπὸ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος μανθάνομεν ἂν ἡ καταφατικὴ πρέπει νὰ ληφθῇ, ἢ ἡ ἀποφατικὴ, ὡς κατωτέρω θέλομεν μάθῃ σαφῶς· διὰ τοῦτο καὶ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου γράφομεν διπλᾶ σημεῖα $\chi = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta\gamma}}$· ἐπειδὴ καὶ δύναται νὰ ληφθῇ καὶ καταφατικῶς, καὶ ἀποφατικῶς.

Β΄. Ἢ εἶναι ὁ ἀριθμὸς μετὰ τὸ ῥιζικὸν σημεῖον καταφατικὸς, πλὴν ἀτελὲς τετράγωνον ὡς $\chi = \sqrt{12}$, καὶ τότε ἡ ῥίζα εἶναι ἄλογος, καὶ εὑρίσκεται διὰ τῆς προσεγγίσεως (§. 355.), καὶ τὸ πρόβλημα ὅτι ἔγγιςα τῇ ἀληθείᾳ λύεται.

Γ΄. Ἢ εἶναι ὁ ἀριθμὸς μετὰ τὸ ῥιζικὸν σημεῖον ἀποφατικὸς, καὶ ἡ ῥίζα εἶναι ἀδύνατος, καὶ ἐπομένως καὶ τὸ πρόβλημα ἀδύνατον (§. 405.) καὶ οὐδέποτε λύεται· ὡς $\chi = +\sqrt{-15}$· εἰς τὰ ἑξῆς προβλήματα γίνονται τὰ εἰρημένα σαφέςερα.

Πρόβλημα Α΄.

„Ζήτουλας ἔλεγε πρὸς τοὺς ἄλλους, ἐὰν σήμερον συνάξω τόσα γρόσια, ὅσα ἐπιθυμῶ, τὸ βράδυ θέλω σᾶς φιλεύσει· καὶ πόσα ἐπιθυμεῖς λέγουν ἐκεῖνοι; ἐὰν πολλαπλασιάσητε τὰ μισὰ, καὶ τὸ τριτημόριον ἀπὸ αὐτὸ, εὑρίσκεται τὸ γινόμενον 24· ζητεῖται πόσα ἐπεθύμει;

Κατασκευή

Ἐπειδὴ ὅλα εἶναι ἄγνωςα, λέγομεν ὅτι ἐπεθύμει χ· ἄρα $\frac{\chi}{2}$ τὰ μισὰ, καὶ $\frac{\chi}{3}$ τὸ τριτημόριον· ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{\chi}{2}$ μὲ $\frac{\chi}{2}$ εὑρίσκομεν 24, καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\chi}{2}.\frac{\chi}{3}=24$$

$$\frac{\chi^2}{6}=24$$

$$.6$$

$\chi^2=144$· καὶ $\sqrt{\chi^2}=\pm\sqrt{144}=\pm 12$

ἄρα 12 γρόσια ἐπιθυμοῦσε νὰ συνάξῃ· καὶ ἰδοὺ τὸ ἀποφατικὸν σημεῖον καλὸν -12· διότι τὸ μὲν τριτημόριον αὐτῶν -4, τὰ δὲ μισὰ -6, καὶ $-4.-6=24$,

Π ρ ό β λ η μ α Β'.

Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον μὲ 5 παραύω ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν πλὴν 5, γίνεται 96;

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

εἶναι ὁ χ· διότι $(\chi+5)(\chi-5)=96$

$$\chi^2-5\chi+5\chi-25=96$$

$$\chi^2=96+25=121$$

$$\sqrt{\chi^2}=\pm\sqrt{121}$$

$$\chi=\pm\sqrt{11}$$

διότι $(11+5)=16$· καὶ $(11-5)=6$· ἄρα $6.\ 16=96$· καὶ ἀποφατικῶς $(-11+5)=-6$ καὶ $(-11-5)=-16$· καὶ $-6.-16=96$.

Ἂν ὅμως θέλωμεν, καὶ γενικὸν αὐτὸ ποιοῦμεν· δηλ: νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον σὺν α ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν πλὴν α, τὸ παραγόμενον νὰ εἶναι δ· ἄρα

$$
\begin{array}{l}
(\chi+\alpha)(\chi-\alpha)=\delta \\
\hline
\chi^2-\alpha^2=\delta \\
\hline
\chi^2=\delta+\alpha^2 \\
\hline
\sqrt{\chi^2}=\sqrt{(\delta+\alpha^2)} \\
\hline
\chi=\sqrt{(\delta+\alpha^2)}
\end{array}
\quad +\alpha^2
$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ α καὶ δ πάντοτε γνωςὸν, εὑρίσκεται καὶ τὸ χ.

Πρόβλημα Γ΄.

„Εἰς πολλοὺς ἐδάνεισέ τις μίαν ποσότητα γροσίων, καὶ ἔδωκεν εἰς κάθε ἕνα δεκαπλάσια τῶν, ὅσοι ἦταν οἱ δανειζόμενοι, αὐτὸς δὲ λαμβάνει τόκον εἰς τὰ ἑκατὸν διπλάσια τῶν ἀνθρώπων, εἰς τοὺς ὁποίους ἐδάνεισεν· ἂν ὅμως πολλαπλασιάσῃ τις τὸ ἑκατοςημόριον ὅλου τοῦ τόκου μὲ $2\frac{2}{9}$, εὑρίσκονται πόσοι εἶναι οἱ δανειζόμενοι· ζητεῖται πόσοι εἶναι οἱ ὀφειλέται, καὶ πόσα εἰς ἕκαςον ἐδάνεισε;

Κατασκευή.

Ἦσαν οἱ δανειζόμενοι χ· ἄρα ἐδάνεισεν εἰς ἕνα ἕκαςον 10χ, ἄρα ὅλα τὰ γρόσια ἦτον $10\chi\chi$, καὶ εἰς κάθε ἑκατὸν ἐλάμβανε 2χ· ὅθεν διαιροῦμεν μὲ 100 ὅλα τὰ χρήματα $\frac{10\chi\chi}{100}=\frac{\chi\chi}{10}$, διὰ νὰ μάθωμεν πόσαι ἑκατοντάδες εἶναι· ταύτας δὲ πολλαπλασιάζομεν μὲ 2χ οὕτω $2\chi.\frac{\chi\chi}{10}=\frac{\chi\chi\chi}{5}$, καὶ τοῦτο εἶναι ὅλος ὁ τόκος τῶν χρημάτων, τὸ δ' ἑκατοςημόριον τούτων εἶναι $\frac{\chi\chi\chi}{5}:100=\frac{\chi\chi\chi}{500}$· τοῦτο δ' ἐὰν πολλαπλασιασθῆ μὲ $2\frac{2}{9}=\frac{20}{9}$· τὸ γινόμενον εἶναι ὅς ὀφείλεται τὸ χ·

$$\text{ἄρα}\ \frac{\chi\chi\chi}{500}\cdot\frac{20}{9}=\chi$$

$$\frac{\chi\chi\chi}{25}\cdot\frac{1}{9}=\chi$$

$$\frac{\chi\chi\chi}{225}=\chi \quad \cdot 225$$

$$\chi\chi\chi^2=25\chi \quad : \chi$$

$$\chi\chi=225$$

$$\chi=\sqrt{222}=15$$

15 ἦτον οἱ δανειζόμενοι, καὶ ἕκαστος 150 γρόσια ἐδανείσθη, καὶ 30 ἔλαβε τόκον εἰς τὰ 100· ὅλος δὲ ὁ τόκος ἦτον 675· ἦν δὲ καὶ τὸ κεφάλαιον ὅλον 2250.

Πρόβλημα Δ'.

„Ἐὰν δοθῇ δύω ἀριθμῶν τὸ κεφάλαιον $=\alpha$, καὶ τῶν τετραγώνων αὐτῶν τὸ κεφάλαιον $=\gamma$, νὰ εὕρωμεν τοὺς ἀριθμούς.

Κατασκευή.

Εἰς τὰ πρῶτα προβλήματα εὕρομεν (§. 289.) τοὺς ἀριθμοὺς δοθέντος τοῦ κεφαλαίου α, καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν β, τὸν μὲν μείζονα $=\frac{\alpha+\beta}{2}$, τὸν δ' ἐλάσσονα $=\frac{\alpha-\beta}{2}$. ἐνταῦθα ὅμως τὸ μὲν κεφάλαιον ἐδόθη $=\alpha$, ἡ διαφορὰ ὅμως οὐχί· ὅθεν ἀντὶ β ἔχω τὸ χ. ἤτοι ὁ μὲν μείζων

$\frac{\alpha+\chi}{2}$, ὁ δ' ἐλάττων $\frac{\alpha-\chi}{2}$. ἀλλαμὴν τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τούτων δίδοται $=\gamma$, τετραγωνίζομεν ἄρα τοὺς δύω $\frac{\alpha+\chi}{2}$ καὶ $\frac{\alpha-\chi}{2}$, καὶ συνάπτομεν τὰ δύο τετράγωνα $=\gamma$, καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ χ· ἤτοι $(\frac{\alpha+\chi}{2})^2=\frac{\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2}{4}$. καὶ $(\frac{\alpha-\chi}{2})^2=\frac{\alpha^2-2\alpha\chi+\chi^2}{4}$. συνάπτομεν ἤδη τὰ δύω τετράγωνα $=\gamma$.

$$\frac{\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2}{4}+\frac{\alpha^2-2\alpha\chi+\chi^2}{4}=\gamma \quad .4$$

$$\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2+\alpha^2-2\alpha\chi+\chi^2=4\gamma$$

$$2\alpha^2+2\chi^2=4\gamma$$

$$2\chi^2=4\gamma-2\alpha^2$$

$$\chi^2=2\gamma-\alpha^2$$

$$\chi=\pm\sqrt{(2\gamma-\alpha^2)}$$

Ἑυρέθη ἡ διαφορά· ὅθεν θῶμεν ἀντὶ τοῦ χ τὸ ἴσον εἰς μὲν τὸν μείζονα $\frac{\alpha+\chi}{2}$ μὲ τὸ καταφατικὸν σημεῖον, εἰς δὲ τὸν ἐλάσσονα, $\frac{\alpha-\chi}{2}$, μὲ τὸ ἀποφατικὸν, οὕτω $\frac{\alpha+\sqrt{(2\gamma-\alpha^2)}}{2}$, καὶ $\frac{\alpha-\sqrt{(2\gamma-\alpha^2)}}{2}$, καὶ ἐκ τούτων τῶν τύπων εὑρίσκομεν ἐὰν δοθῶσιν οἱ ἀριθμοί· δηλ: ἐὰν τὸ κεφάλαιον τῶν ἀριθμῶν $\alpha=10$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων $\gamma=58$, ἔςαι ὁ μὲν μείζων ἀριθμὸς $\frac{10+\sqrt{(2.\ 58-100)}}{2}=\frac{10+\sqrt{16}}{2}=7$ ὁ δ' ἐλάσσων .

$$\frac{10-\sqrt{(2.\ 58-100)}}{2}=\frac{10-\sqrt{16}}{2}=3$$ ἐπειδὴ καὶ $7+3=$
$10=\alpha$· καὶ $7^2+3^2=58=\gamma$.

Ἐὰν δὲ δοθῇ τὸ μὲν κεφάλαιον αὐτῶν $=15=\alpha$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων $=125=\gamma$ ἔςαι ὁ μείζων ἀριθμὸς $\frac{15+\sqrt{(2.\ 125-220)}}{2}=\frac{15+\sqrt{25}}{2}=10$, καὶ ἐλάσσων $=\frac{15-\sqrt{(2.\ 125-225)}}{2}=\frac{15-\sqrt{25}}{2}=5$·

ὁμοίως καὶ εἰς τὰ λοιπά.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ λύσεως τῶν μεμιγμένων Ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

§. 414. Ὁ τύπος σχεδὸν τῆς μεμιγμένης ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἶναι κατὰ τοῦτο διάφορος τῆς ἀμιγοῦς, καθ' ὃ ὅταν φέρωμεν τὴν ἄγνωςον ποσότητα εἰς τὸ ἓν σκέλος εὑρίσκεται εἰς δύο μέρη, εἰς τὸ ἓν μὲ ἐκθέτην τετραγωνικὸν καταφατικῶς, καὶ ἄνευ συνεργοῦ πλὴν τῆς μονάδος· εἰς δὲ τὸ ἕτερον εἰς τὴν πρώτην δύναμιν καὶ καταφατικῶς, καὶ ἀποφατικῶς· καὶ ἄνευ συνεργοῦ, καὶ μετὰ συνεργοῦ εἴτε ὁλοσχεροῦς εἴτε κλασματικοῦ, οὕτω $\chi^2+\text{б}\chi=\gamma$, ἔνθα ὁ συνεργὸς б, καὶ γ σημαίνουσιν οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἐγνωσμένον, καὶ ὁλοσχερῆ καὶ κεκλασμένον, μονομερῆ, καὶ πολυμερῆ μὲ παρένθεσιν. Ἐξετάζοντες λοιπὸν αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2\pm\text{б}\chi=\gamma$, εὑρίσκομεν.

Α΄. Ὅταν φέρωμεν τὰ ἄγνωστα εἰς τὸ ἓν σκέλος, τὸ πρῶτον μέρος αὐτοῦ τοῦ σκέλους ἔχει τὴν ἄγνωστον εἰς τετράγωνον ἄνευ συνεργοῦ· διότι ἐὰν ἔχῃ συνεργὸν, ὡς $\alpha\chi^2 \pm \beta\chi = \gamma$, ἡμεῖς ἀπαλλάττομεν αὐτὴν ἀπὸ αὐτὸν διὰ τῆς διαιρέσεως μὲ αὐτὸν, ὡς $\chi^2 \pm \frac{\beta}{\alpha}\chi = \frac{\gamma}{\alpha}$· καὶ ἅμα καταφατικόν· διότι ἐὰν εἶναι ἀποφατικὸν, ὡς $-\chi^2 \pm \beta\chi = \gamma$, μεταβάλλομεν ὅλα τὰ σημεῖα, καὶ γίνεται καταφατικόν· ὅτι ἡ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ· ὡς $\chi^2 \pm \beta\chi = \gamma$.

Β΄. Τὸ δεύτερον μέρος αὐτοῦ τοῦ σκέλους ἔχει τὴν ἄγνωστον εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, ὁ δὲ συνεργὸς αὐτοῦ γνωστός· καὶ οὗτος εἶναι ὁτὲ μονὰς, ὡς $\chi^2 \pm \chi = \gamma$, ὁτὲ ἀριθμὸς ἀκέραιος, ὁτὲ κεκλασμένος, ὡς $\chi^2 \pm \frac{\alpha}{\beta}\chi = \gamma$, ὁτὲ καὶ συμπεπλεγμένος μὲ παρένθεσιν, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται πολλὰ μέρη πολλῶν γνωστῶν ἀριθμῶν, ὡς

$\chi^2 \pm (\alpha + \frac{\zeta}{\gamma\delta} - \varepsilon^2)\chi = \gamma$· διότι ὅλη ἡ παρένθεσις αὕτη ἔχει γνωστοὺς ἀριθμοὺς, καὶ δυνάμεθα αὐτοὺς εἰς ἕνα χαρακτῆρα ἀγαγεῖν· διὸ καὶ $(\alpha + \frac{\zeta}{\gamma\delta} - \varepsilon^2) = \beta$ γράφομεν· σημεῖα δ' ἔχει ὁτὲ καταφατικὸν, ὁτὲ ἀποφατικὸν, διὸ καὶ οὕτως αὐτὸ $\pm$ χαρακτηρίζομεν.

Γ΄. Τὸ ἕτερον σκέλος δὲ ἔχει ὅλα τὰ μέρη γνωστοὺς ἀριθμοὺς, καὶ ἡ πολυμερὴς ἔκθεσις τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν εἰς ἓν μέρος ἀνάγεται, ὡς $3 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 3^2 = 11 + \frac{8}{15} = \frac{11.15+8}{15}$ $= \frac{173}{15}$· διὸ καὶ γράφομεν τοῦτο ὅλον τὸ σκέλος

$(3-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+3^2)=\gamma$· ἔχει δὲ καὶ τοῦτο τὸ σκέλος σημεῖα, ὁτὲ ἀποφατικὸν, καὶ ὁτὲ καταφατικόν· ὅθεν καὶ εἰς τοῦτο ἄμφω τὰ σημεῖα γραφήτωσαν, οὕτω $\chi^2 \pm 6\chi = \pm\gamma$· λοιπὸν ἐὰν εὐκόλως τὴν μεμιγμένην ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ λύειν θέλωμεν, πρέπει τοῦτον τὸν γενικὸν τύπον νὰ ἐνθυμώμεθα· διότι ὅ,τι τύπος ἕτερος δοθῇ, εἰς αὐτὸν πάντοτε ἀνάγεται, ὅταν τὰ ἄγνωσα εἰς τὸ ἓν σκέλος φέρωμεν, καὶ τὸ πρῶτον μέρος ἀπὸ τὸν συνεργὸν ἀπαλλάξωμεν. Χάριν ὅμως τῶν πρωτοπείρων γράφομεν τὰ ἑξῆς παραδείγματα τῶν ἐξισώσεων.

1) $$\alpha\chi^2-6\chi=\delta-\alpha\chi \quad +\alpha\chi$$
$$\alpha\chi^2+\alpha\chi-6\chi=\delta \quad :\alpha$$
$$\chi^2+\chi-\frac{6}{\alpha}\chi=\frac{\delta}{\alpha}$$
$$\chi^2+(1-\frac{6}{\alpha})\chi=\frac{\delta}{\alpha}.$$

ὡς ὁ τύπος $\chi^2 \pm 6\chi = \pm\gamma$· διότι αὐτοῦ $6=(1-\frac{6}{\alpha})$ καὶ $\gamma=\frac{\delta}{\alpha}$.

2) $$6\chi-\alpha\chi^2+\delta=\varepsilon\chi-\delta\chi^2+\zeta \quad +\delta\chi^2-\varepsilon\chi-\delta$$
$$\delta\chi^2-\alpha\chi^2-\varepsilon\chi+6\chi=\zeta-\delta$$
$$(\delta-\alpha)\chi^2-(\varepsilon-6)\chi=\zeta-\delta \quad :(\delta-\alpha)$$
$$\chi^2-(\frac{\varepsilon-6}{\delta-\alpha})\chi=\frac{\zeta-\delta}{\delta-\alpha}.$$

καὶ αὐτοῦ ὁ γενικὸς τύπος $\chi^2+6\chi=\gamma$· διότι $\frac{\varepsilon\text{-}6}{\delta\text{-}\alpha}=6$ καὶ $\frac{\zeta\text{-}\delta}{\delta\text{-}\alpha}=\gamma$.

3) $4\alpha\chi - \delta\chi^2 = \delta\chi - \zeta \quad \underline{\quad} - \delta\chi$

$-\delta\chi^2 + 4\alpha\chi - \delta\chi = -\zeta$ εἰς ἐναντία σημεῖα.

$+\delta\chi^2 - 4\alpha\chi + \delta\chi = \zeta \quad : \delta$

$$\chi^2 - \frac{4\alpha\chi}{\delta} + \chi = \frac{\zeta}{\delta}$$

$$\chi^2 - \left(\frac{4\alpha}{\delta} + 1\right)\chi = \frac{\zeta}{\delta}.$$

ὅπου $\beta = -\left(\frac{4\alpha}{\delta} + 1\right)\cdot$ καὶ $\gamma = \frac{\zeta}{\delta}$.

4) $3\chi^2 + 5\chi\zeta - \zeta = 15\chi + \delta \quad \underline{\quad} - 15\chi + \zeta$

$3\chi^2 + 5\chi\zeta - 15\chi = \delta + \zeta \quad : 3$

$$\chi^2 + \frac{5\zeta}{3}\chi - \frac{15}{3}\chi = \frac{\delta + \zeta}{3}$$

$$\chi^2 + \left(\frac{5\zeta}{3} - 5\right)\chi = \frac{\delta}{3} + \frac{\zeta}{3}.$$

ὅπου $\left(\frac{5\zeta}{3} - 5\right) = \beta\cdot$ καὶ $\frac{\delta}{3} + \frac{\zeta}{3} = \gamma$.

5) $$\frac{\alpha\chi - \varepsilon}{\zeta\chi + \delta} = \frac{\eta\chi + \zeta}{\kappa\chi + \theta}$$

$\cdot\, \zeta\chi + \delta$. καὶ $\kappa\chi + \theta$

$\alpha\kappa\chi^2 + \kappa\chi\varepsilon + \alpha\theta\chi + \varepsilon\theta = \zeta\eta\chi^2 + \zeta^2\chi + \delta\eta\chi + \delta\zeta$

$\alpha\kappa\chi^2 - \zeta\eta\chi^2 + \varepsilon\kappa\chi + \alpha\theta\chi - \zeta^2\chi - \delta\eta\chi = \delta\zeta - \varepsilon\theta$

$\chi^2(\alpha\kappa - \zeta\eta) + (\varepsilon\kappa + \alpha\theta - \zeta^2 - \delta\chi)\chi = \delta\zeta - \varepsilon\theta \quad : (\alpha\kappa - \zeta\eta)$

$$\chi^2 + \left(\frac{\varepsilon\kappa + \alpha\theta - \zeta^2 - \delta\eta}{\alpha\kappa - \zeta\eta}\right)\chi = \frac{\delta\zeta - \varepsilon\theta}{\alpha\kappa - \zeta\eta}$$

καὶ αὐτοῦ ὁ συνεργὸς $\frac{\varepsilon\kappa + \alpha\theta - \zeta^2 - \delta\eta}{\alpha\kappa - \zeta\eta} = \beta\cdot$ καὶ $\frac{\delta\zeta - \varepsilon\theta}{\alpha\kappa - \zeta\eta} = \gamma$

καὶ εἰς ὅλας τὰς ἐξισώσεις κρατεῖ ἐκεῖνος ὁ τύπος ὁ γενικὸς $\chi^2 \pm \beta\chi = \pm\gamma$.

§. 415. Ὅλας τὰς ἐξισώσεις τῶν ὑψηλοτέρων βαθμῶν πλὴν τοῦ πρώτου, τὰς φέρουσιν οἱ τεχνικοὶ εἰς τὸ μηδενικὸν διὰ πολλὰς ὠφελείας, ὁποῦ ἐν τοῖς ἑξῆς γνωρίσωμεν· διότι τοῦτο γίνεται εὐκόλως ἐὰν τὸ ἓν σκέλος τῆς ἐξισώσεως φέρωμεν εἰς τὸ ἕτερον μὲ τὰ ἐναντία σημεῖα, μένει αὐτὸ τὸ σκέλος ἴσον μηδενί, ὡς $\chi^2+\beta\chi=\gamma$ καὶ $=\gamma-\beta\chi-\chi^2$· καὶ $\chi^2+\beta\chi-\gamma=0$· λοιπὸν οὗτος ὁ γενικὸς τύπος γίνεται $\chi^2 \underline{+} \beta\chi \pm \gamma=0$ καὶ ὅλοι οἱ ἀνωτέρω, οὕτω γίνονται. Ὁ μὲν πρῶτος (§. 391.) $\chi^2-(1-\frac{\beta}{\alpha})\chi-\frac{\delta}{\alpha}=0$· ὁ δὲ δεύτερος $\chi^2+(\frac{1+\beta}{\delta-\alpha})\chi-\frac{\zeta-\delta}{\delta-\alpha}=0$· οὕτω καὶ οἱ λοιποί. καὶ βλέπομεν καὶ οὕτως ὅτι τρία μέρη ἔχει· τὸ πρῶτον ἔχει τὴν ἄγνωστον εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, τὸ δεύτερον εἰς τὴν πρώτην, τὸ τρίτον ἄνευ τῆς ἀγνώστου, ἀλλὰ γνωστὸν ὅλον, ὡς καὶ $3\chi^2-6\chi-144=0$ ἤτοι $\chi^2-3\chi-48=0$ καὶ αὐτοῦ $\beta=3$ καὶ $-\gamma=-48$· ἀλλ' οὗτος ὁ τρόπος ὕστερον χρησιμεύσει, καὶ ἡμεῖς εἰς τὸ παρὸν τὸν τύπον οὕτω $\chi^2 \pm \beta\chi = \pm\gamma$ ἐξετάσωμεν.

§. 416. Ἐκ τοῦ τύπου $\chi^2 \pm \beta\chi = \pm\gamma$ βλέπομεν, ὅτι ἂν τὸ δεύτερον μέρος $\beta\chi$ ἔλειπεν, ἦν ἡ ἐξίσωσις ἀμιγής· ὅθεν εἰς τὴν ἀμιγῆ ἐξίσωσιν τὸ $\beta=0$ εἶναι, καὶ ἐλλείπει τὸ δεύτερον· ἐὰν ὅμως καὶ ἐκεῖ προστεθῇ, ἡ ἀμιγής, μεμιγμένη γίνεται, ὡς καὶ αὐτὴ ἀμιγὴς ἐὰν $\beta=0$ θῶμεν· ἐκείνη ὅμως ἐλύετο οὕτω $\chi^2=\gamma$, καὶ διὰ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης ἑκάστου σκέλους εὑρίσκεται τὸ χ, ὡς ἀνωτέρω (§. 411.)· ὅθεν καὶ εὕρομεν τὸν πρῶτον τρόπον τῆς λύσεως τῶν τοιούτων ἐξισώσεων, νὰ ἀποσκευάζωσι τὸ δεύτερον μέρος, καὶ νὰ μένῃ ἡ ἐξίσωσις ἀμιγής. Εἰς τοῦτο δὲ πρῶτον μὲν λαμβάνουσιν ἀντὶ τοῦ χ ἕτερον ἄγνωστον μὲ τὸν ἡμίση συνεργὸν τοῦ δευτέρου μέρους $\frac{\beta}{2}$, οὕτω $\psi+\frac{\beta}{2}=\chi$· ὅπου τὸ μὲν ψ ἄγνωστον, ὁ δὲ συνεργὸς ὁ μισὸς λαμβάνεται μὲ τὸ κατοφατικὸν σημεῖον, ἂν ἡ ἐξίσωσις ἔχῃ αὐτὸν ἀποφατικὸν, ἢ ἀποφατικὸν· ἂν ἐκείνη ἔχῃ αὐτὸν καταφατικὸν, ὡς εἰς αὐτὴν $\chi^2+\beta\chi=\gamma$, τότε τὸ $\chi=\psi-\frac{\beta}{2}$ λαμβάνεται. Δεύτερον, ὅπου εἰς τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκεται τὸ χ, ἀντεισάγουσι τὸ ἴσον $\psi\pm\frac{\beta}{2}$, καὶ οὕτω γίνεται ἡ ἐξίσωσις ἀμιγής. Τρίτον, εὑρίσκουσι τὸ ἄγνωστον ψ κατὰ τὴν λύσιν τῶν ἀμιγῶν· καὶ ἐπειδὴ τότε τὸ ψ γνωστὸν γίνεται, γινώσκεται καὶ τὸ $\chi=\psi\pm\frac{\beta}{2}$· ὅτι καὶ τὸ β γνωστόν· ἐπὶ παραδείγματος, θῶμεν εἰς τὸν τύπον $\chi^2+\beta\chi=\gamma$· ἀντὶ χ ἴσον τὸ $\psi-\frac{\beta}{2}$· ἄρα $\chi^2=\psi^2-\psi\beta+\frac{\beta}{2}$· καὶ $\beta\chi=\beta\psi-\frac{\beta\beta}{2}$· ἄρα ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\beta\chi=\gamma$ μεταβάλλει εἰς τὴν

$$\psi^2-\psi\beta+\frac{\beta^2}{4}-\frac{\beta}{2}+\beta\psi=\gamma$$

$$\psi^2+\frac{\beta^2-2\beta^2}{4}=\gamma$$

$$\psi^2\frac{-\beta^2}{4}=\gamma$$

$$\psi^2=\gamma+\frac{\beta^2}{4}.\quad \psi=\pm\sqrt{\left(\gamma+\frac{\beta^2}{4}\right)}$$

ὅπου τὸ $ψ$ γίνεται γνωστόν. Ἐπειδὴ τὸ $γ$ καὶ $β$ εἶναι γνωστά. Ἐπειδὴ ὅμως ἐπετέθη $χ=ψ-\frac{β}{2}$, θῶμεν αὐτὶ $ψ$ τὸ γνωστὸν $\sqrt{(γ+\frac{β^2}{4})}$, εὑρίσκομεν $χ=-\frac{β}{2}\pm\sqrt{(γ+\frac{β^2}{5})}$. καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τύπον εὑρίσκομεν τὸ $χ$ εἰς ὅλας τὰς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Ἐὰν ὅμως ὁ συνεργὸς τοῦ δευτέρου μέρους εἶναι ἀποφατικὸς λαμβάνομεν τὸν συνεργὸν μὲ τὸ $ψ$ καταφατικόν, ὡς εἰς τὸν τύπον $χ^2-βχ=γ$· ἄρα $χ=ψ+\frac{β}{2}$. καὶ $χ^2=(ψ+\frac{β}{2})^2$ $=ψ^2+ψβ+\frac{β^2}{4}$. καὶ $-βχ=-ψβ-\frac{β^2}{2}$. ἡ δ' ἐξίσωσις

$$ψ^2+ψβ+\frac{β^2}{4}-ψβ-\frac{2β^2}{4}=γ$$

$$ψ^2-\frac{β^2}{4}=γ$$

$$ψ^2=γ+\frac{β^2}{4}$$

$$ψ=\pm\sqrt{(γ+\frac{β^2}{4}}$$

ὡς ἀνωτέρω, καὶ $χ=\frac{β}{2}\pm\sqrt{(γ+\frac{β^2}{4})}$. Ἐὰν λοιπὸν ὁ συνεργὸς καταφατικὸς, εὑρίσκομεν τὸ $χ$ κατὰ τὸν πρῶτον τύπον, ἐὰν δὲ ἀποφατικὸς, κατὰ τοῦτον. Δεδόσθω ὅτι ζητεῖται τὸ $χ$ εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν, $χ^2-2χ=48$, ὅπου τὸ μὲν $β=-2$, τὸ δὲ $γ=48$. ἐπειδὴ ὁ συνεργὸς τοῦ δευτέρου μέρους εἶναι ἀποφατικὸς, κατὰ τὸν δεύτερον τύπον λύεται· καὶ ἀδιαφοροῦμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν διὰ τὸ σημεῖον· μόνον $\beta=2$ λέγομεν· ὅθεν $\chi=\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{(\gamma+\frac{\beta^2}{4})}=\frac{2}{2}\pm\sqrt{(48+\frac{4}{4})}=1\pm\sqrt{(48+1)}=1\pm 7=8$ · καὶ ἔςαι $\chi^2-2\chi=48$ ὡς $64-16=48$· ζητεῖται πάλιν τὸ χ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+12\chi=220$· αὐτοῦ $\beta=12$ καὶ $\gamma=220$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 12 καταφατικὸς, λύεται εἰς τὸν πρῶτον τύπον $\chi=-\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{(\gamma+\frac{\beta^2}{4})}=-\frac{12}{2}\pm\sqrt{(220+\frac{12.\ 12}{4})}=-\pm\sqrt{(220+3.\ 12)}=-6\pm\sqrt{(220+3.\ 12)}=-6\pm\sqrt{(256)}=-6\pm 16$· ἐὰν ληφθῇ ἡ ῥίζα ἀποφατικὴ, ἔςαι $\chi=-6-16=-22$· ἐὰν δὲ καταφατικὴ, ἔςαι $\chi=-6+16=10$ καὶ αἱ δύω ὅμως ἀληθεύουσι· διότι εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2+13\chi=220$, καὶ $-22.-22.-12.\ 22=220$, καὶ $10.\ 10+12.\ 10=220$ ὅτι δὲ διὰ τῶν τύπων τούτων εὑρίσκεται τὸ χ, ληφθήτωσαν προβλήματα.

Πρόβλημα Α΄.

„Μεταφυσικαὶ, καὶ φυσικαὶ πωλοῦνται· ἡ τιμὴ τῆς φυσικῆς εἶναι 6 γρόσια μεγαλητέρα ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς μεταφυσικῆς· ἂν ὅμως πολλαπλασιάσῃς τὴν τιμὴν τῆς μεταφυσικῆς μὲ τὴν τιμὴν τῆς φυσικῆς, τὸ παραγόμενον εἶναι ἴσον 91· πόση εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς καὶ τῆς ἑτέρας;

Κατασκευή.

Ἔςω ἡ τιμὴ τῆς μεταφυσικῆς χ, ἄρα τῆς φυσικῆς $\chi+6$. πολλαπλασιάσθω ἤδη $\chi.\ (\chi+6)=\chi^2+6\chi$, καὶ τὸ γινόμενον

$=91$ οὕτω $\chi^2+6\chi=91$, ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ καὶ $6=\beta$ καὶ $91=\gamma$ καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἄγνωστον χ εἰς τὸν πρῶτον τύπον $\chi=-\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{(\gamma+\frac{\beta^2}{4})}=-\frac{6}{2}\pm\sqrt{(91+\frac{36}{4})}=-3\pm\sqrt{100}=7$· εἶναι λοιπὸν ἡ μὲν τιμὴ τῆς φυσικῆς 7 γρόσια, τῆς δὲ φυσικῆς $7+6=13$ γρόσια· διότι $13.\ 7=91$.

Πρόβλημα Β'.

„Πληρόνω εἰς τὴν διοίκησιν δόσιμον τοῦ χρόνου ἕνα ἀριθμὸν γροσίων· ἐὰν δ' ἀπὸ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ ἀφέλω τὸν 9, μένει ἀριθμὸς, ὅστις ὑπερέχει τὸν 100 τόσον, ὅσον ὑπερέχει ὁ 47 τῶν ἀριθμὸν τῶν γροσίων. πόσον εἶναι τὸ δόσιμον;

Κατασκευή.

Εἶναι χ, ἄρα τὸ τετράγωνον αὐτοῦ χ^2, καὶ πλὴν 9 εἶναι $\chi\chi-9$· ἐὰν δ' ἀφέλωμεν ἀπ' αὐτοῦ τὸν 100 οὕτω $\chi\chi-9-100=\chi\chi-109$, εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ὑπὲρ τὸν 100· ἐὰν δὲ καὶ τὸ χ ἀφέλωμεν ἀπὸ τοῦ 47, εὑρίσκομεν καὶ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ 47 ἀπὸ τοῦ χ, οὕτω $47-\chi$· καὶ ἐπειδὴ αἱ δύω ὑπεροχαὶ ἴσαι· ἄρα $\chi\chi-149=47-\chi$ ἤτοι $\chi\chi+\chi=47+109=156$. ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, καὶ εἶναι $\beta=1$ καὶ $\gamma=156$, καὶ εἰς τὸν πρῶτον τύπον εὑρίσκομεν τὸ ἄγνωστον $\chi=-\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{(\gamma+\frac{\beta^2}{4})}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(156+\frac{1}{4})}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{625}{4})}=-\frac{1}{2}+\frac{25}{2}=\frac{24}{12}=12$ καὶ τόσα εἶναι ὁ φόρος.

Πρόβλημα Γ'.

Ἐρωτήθη τις οἰνοπώλης πόσων παράδων πωλεῖ τὴν ὀκᾶν τὸ κρασί; ἐὰν μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῶν πολλαπλασιάσῃς τὸ τριτημόριον αὐτῶν, καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθῇς τοὺς μισοὺς, γίνονται 30 παράδες· πόσων παράδων πωλεῖ αὐτὸς τὴν ὀκᾶν;

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

χ. ἄρα κατὰ τοὺς λόγους αὐτοῦ $\frac{\chi}{2}.\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{2}=30$, ἤτοι

$$\frac{\chi\chi}{6}+\frac{\chi}{2}=30$$
$$\overline{\qquad\qquad}\; .\ 6\ .$$
$$\chi\chi+3\chi=180$$

ἔνθα $\beta=3$ καὶ $\gamma=180$. τὸ δὲ χ εἰς τὸν πρῶτον τύπον εὑρίσκεται $\chi=-\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{(\gamma+\frac{\beta^2}{4})}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{(180+\frac{9}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{729}{4}}=-\frac{3}{2}+\frac{27}{2}=+12$. ἔχοντες λοιπὸν τὸν πρῶτον τύπον λύομεν ὅλα τὰ προβλήματα, πλὴν ἐπειδὴ ἡ λύσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δὲν χρησιμεύει εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων, ἀλλὰ καὶ εἰς ἄλλας πολλὰς ἐργασίας Μαθηματικὰς, διὰ τοῦτο εὗρον τοῦτον τὸν ἕτερον τρόπον, ὅςις εἶναι καὶ συνηθέςερος, καὶ μάλιςα εἰς κάθε ἐξίσωσιν ἀμέσως παρίςαται διὰ τῶν γνωςῶν ἀριθμῶν.

§. 417. Ἐὰν πάλιν τὸν γενικὸν τύπον $\chi^2\pm\beta\chi=\pm\gamma$ ἀναλάβωμεν, βλέπομεν ὅτι ἂν τὸ σκέλος $\chi^2\pm\beta\chi$ ἦτον ἐντελὲς τετράγωνον, ἐξήρχετο ἐνεργείᾳ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, καὶ ἔτι ἡ αὐτὴ ἀπὸ τὸ ἕτερον σκέλος γ, καὶ εὑρίσκετο ἀμέσως ἡ ἄγνωςος, οὕτω $\sqrt{(\chi^2+\beta\chi)}=\sqrt{\gamma}$. ἀλλὰ τὸ σκέλος $\chi^2\pm\beta\chi$ εἶναι φανερὸν, ὅτι δὲν εἶναι ἐντελὲς τετράγωνον, καὶ ἡ ῥίζα δὲν εἶναι μόνον χ, ἀλλὰ καὶ ἕτερον εἰς δυωνύμου, τὸ δὲ δυωνύμου εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, ἐμάθομεν ἀνωτέρω (§. 329), ὅτι σύγκειται ἀπὸ τρία μέρη, ὡς $(\chi+\beta)^2=\chi^2+2\beta\chi+\beta^2$. ἢ $(\chi-\beta)^2=\chi^2-2\beta\chi+\beta^2$. ἄρα εἰς τὸ πρῶτον σκέλος $\chi^2\pm\beta\chi$ ἐλλείπει τὸ τρίτον μέρος· καὶ τοῦτο ἐὰν εὑρεθῇ καὶ πληρωθῇ, γίνεται αὐτὸ τὸ σκέλος ἐντελὲς τετράγωνον· διὰ τοῦτο καὶ ταύτας τὰς ἐξισώσεις πολλοὶ Τετράγωνον κολωβὸν ὠνόμασαν, ὅτι τὸ τρίτον μέρος λείπει ἀπ' αὐτῶν· ἀλλ' ἀπὸ τὰ τετράγωνα τῶν δυωνύμων $\chi+\beta$ καὶ $\chi-\beta$ τὰ $\chi^2+2\beta\chi+\beta^2$, καὶ $\chi^2-2\beta\chi+\beta^2$, μανθάνομεν ὅτι τὸ δεύτερον μέρος $2\beta\chi$ ἔχει τὸ πρῶτον μέρος τοῦ δυωνύμου πάντοτε καὶ συνεργὸν τὸ διπλοῦν δευτέρου μέρος. Ἐὰν λοιπὸν τὸν συνεργὸν 2β μὲ 2 διέλωμεν εὑρίσκομεν βέβαια καὶ τὸ δεύτερον μέρος τοῦ δυωνύμου αὐτὸ τὸ πηλίκον $\frac{2\beta}{2}=\beta$· αὐτὸ λοιπὸν τὸ πηλίκον ἐὰν τετραγωνίσωμεν β^2 γίνεται τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ τοῦ δυωνύμου. Τοῦτο ποιοῦμεν καὶ εἰς τὸ σκέλος αὐτοῦ τοῦ τύπου $\chi^2\pm\beta\chi$· σχίζομεν τὸν συνεργὸν τοῦ δευτέρου μέρους αὐτοῦ τοῦ σκέλους β οὕτω $\frac{\beta}{2}$, καὶ τοῦτο τετραγωνίζομεν $\frac{\beta^2}{4}$ καὶ προσθέτομεν εἰς αὐτὸ τὸ σκέλος, οὕτω $\chi^2\pm\beta\chi+\frac{\beta^2}{4}$, καὶ γίνεται ἐντελὲς τετράγωνον, καὶ ἐξάγεται ἐνεργείᾳ ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνικὴ εἰς δύο μέρη· τὸ μὲν πρῶτον ἡ ῥίζα τοῦ $\chi^2=\chi$, καὶ τὸ δεύτερον ὁ μισὸς συνεργὸς τοῦ δευτέρου μέρους $\frac{\beta}{2}$· οὕτω $\chi\pm\frac{\beta}{2}$· διότι

$(\chi+\frac{\beta}{2})^2=\chi^2+\beta\chi=\frac{\beta^2}{4}$ · τοῦτο ὅμως τῶρα δὲν εἶναι ἴσον τῷ γ· διότι προσετέθη ὁ μισὸς τετραγωνισθεὶς συνεργὸς τοῦ δευτέρου μέρους τῷ ἑνὶ σκέλει· πλὴν ἐὰν καὶ τῷ ἑτέρῳ προςεθῇ, ἡ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ (§. 67.).

διότι $\chi^2+\beta\chi=\gamma \qquad +\frac{\beta^2}{4}$

$$\chi^2+\beta\chi+\frac{\beta^2}{4}=\gamma+\frac{\beta^2}{4}$$

$$\sqrt{(\chi^2+\beta\chi+\frac{\beta^2}{4})}=\sqrt{(\gamma+\frac{\beta^2}{4})}$$

$$\chi+\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{(\gamma+\frac{\beta^2}{4})}$$

καὶ τέλος $\chi=-\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{(\gamma+\frac{\beta^2}{4})}$

καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον πάλιν ὁ ἀνωτέρω τύπος εὕρηται (§. 416.).

„Ἐὰν δὲ καὶ τὸν τύπον τοῦτον $\chi^2-\beta\chi=\gamma$ κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον ἐπιτηδευθῶμεν, εὑρίσκεται ὁ ἀνωτέρω τύπος.

$\chi^2-\beta\chi=\gamma \qquad +\frac{\beta}{4}$ διότι $-\frac{\beta}{2}\cdot-\frac{\beta}{2}=\frac{\beta^2}{4}$

$$\chi^2-\beta\chi+\frac{\beta^2}{4}=\gamma+\frac{\beta^2}{4} \qquad \cdot\sqrt{}$$

$$\chi-\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{(\gamma+\frac{\beta^2}{4}} \qquad +\frac{\beta}{2}$$

$$\chi=\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{(\gamma+\frac{\beta^2}{4})}$$

καὶ εἰς αὐτὸ πάλιν ὁ ἄνω τύπος εὕρηται (§. 416.). ὅθεν καὶ αὕτη καὶ ἐκείνη ἡ μέθοδος ὀρθή.

§. 418. Λοιπὸν διὰ νὰ μὴ ματαιοπονῶμεν εἰς τὰς λύσεις τῶν τοιούτων ἐξισώσεων, πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα ὅτι ἡ ἄγνωςος εἶναι ἴση μὲ τὸν + μισὸν συνεργὸν τοῦ δευτέρου μέρους, καὶ σὺν ἢ πλὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ τετραγώνου τοῦ μισοῦ αὐτοῦ συνεργοῦ, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ γνωςοῦ ὁμοῦ· καὶ εὐκόλως οὕτως εὑρίσκομεν τὸ χ τῆς ἐξισώσεως $\chi\chi=5\chi+7$. διότι εἶναι $\chi=3\pm\sqrt{(9+7)}=3\pm4=7$. ἢ$=-1$. ὁμοίως καὶ τὸ χ τῆς $\chi=\chi10\chi-9$. διότι $\chi=5\pm\sqrt{(25-9)}=5\pm4$ ἢ$=9$ ἢ$=1$.

§. 419. Πρὸς μείζονα εὐκολίαν, ἂς παρατηρηθῶσι καὶ τὰ ἑξῆς εἰς τὸν τύπον $\chi^2\pm\beta\chi=\gamma$.

Α΄. Ἂν τὸ β εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς οὕτω $\chi^2-2\beta\chi=\gamma$ τὸ χ εὑρίσκεται οὕτω, $\chi=\beta\pm\sqrt{(\beta\beta+\gamma)}$.

Β΄. Ἐὰν δὲ τὸ β εἶναι ἀριθμὸς περιττὸς, ὡς $\chi^2-\beta\chi=\gamma$ ἔςαι $\chi=\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{(\frac{\beta^2}{4}+\gamma)}=\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{(\frac{\beta^2+4\gamma}{4})}=\frac{\beta\pm\sqrt{(\beta^2+4\gamma)}}{2}$.

Γ΄. Ἐὰν δὲ β ἀριθμὸς κλασματικὸς, ὡς $\alpha\chi\chi-\beta\chi=\gamma$, ἤτοι $\chi^2-\frac{\beta}{\alpha}\chi=\frac{\gamma}{\alpha}$ ἔςαι $\chi=\frac{\beta}{2\alpha}\pm\sqrt{(\frac{\beta\beta}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha})}=\frac{\beta}{2\alpha}+\sqrt{(\frac{\beta^2+4\alpha\gamma}{4\alpha\alpha})}=\frac{\beta+\sqrt{(\beta\beta+4\alpha\gamma)}}{2\alpha}$,

Καὶ οὗτοι οἱ τρόποι ἱκανοὶ νὰ λύσωσιν ὅλας τὰς ἐξισώσεις τῶν προβλημάτων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

§. 420. Ἐπειδὴ δὲ οὗτος ὁ τύπος διὰ τὰς πολλὰς μεταθέσεις δὲν χρησιμεύει τόσον εἰς πολλὰς ἀλγεβραϊκὰς καὶ μαθηματικὰς λύσεις, ἐφεῦρον τὴν μέθοδον τὴν ἑξῆς.

Α΄. δηλ: Διατάττουσι τὸ πρόβλημα κατὰ τὰς συνθήκας, ὅπου ἐκφράζεται, διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις.

Β'. Διαθέτουσιν αὐτὸ οὕτως, ὥςε τὰ μὲν ἄγνωςα νὰ εἶναι εἰς τὸ ἓν σκέλος, τὰ δὲ γνωςὰ ὅλα εἰς τὸ ἕτερον.

Γ'. Ἀπαλλάττουσι τὸ τετράγωνον τῆς ἀγνώςου καὶ ἀπὸ παρονομαςὴν, καὶ συνεργὸν, ἀφ' οὗ πρῶτον ἀπαλλάξουσιν ὅλην τὴν ἐξίσωσιν ἀπὸ τὰ κλάσματα.

Δ'. Διαιροῦσι τὸν συνεργὸν τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ χ μὲ 2, καὶ τετραγωνίζουσιν αὐτὸ, καὶ τοῦτο τὸ τετράγωνον προσθέτουσι καὶ εἰς τὰ δύο σκέλη τῆς ἐξισώσεως, διὰ νὰ μὲ χαλάσῃ ἡ ἐξίσωσις.

Ε'. Ἐξάγουσι τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν καὶ ἀπὸ τὰ δύο σκέλη, καὶ εὑρίσκουσι τὴν ῥίζαν εἰς τὸ σκέλος τὸ ἀγνώςου ἀπὸ δύο μέρη, ἀπὸ τὴν ἄγνωςον χ, καὶ ἀπὸ τὸν μισὸν συνεργὸν τοῦ δευτέρου μέρους μετὰ τὸ σημεῖον, ὅπου ἔχει πρὸ αὐτοῦ.

Ϛ'. Τοῦτο τὸ μέρος τῆς ῥίζης τὸν μισὸν συνεργὸν μεταφέρουσιν εἰς τὸ ἕτερον σκέλος τῆς ἐξισώσεως, καὶ μένει εἰς μὲν τὸ ἓν σκέλος μόνον τὸ ἄγνωςον ἄνευ ἐκθέτου, εἰς τὸ ἕτερον δὲ τὰ γνωςὰ μέρη.

Ζ'. Ἐκ τῶν γνωςῶν τούτων ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, καὶ καταφοτικῶς, καὶ συνάπτεται μὲ τὸ ἕτερον μέρος κατὰ τὸ σημεῖον, ὅπου ἔχει, καὶ οὕτως εὑρίσκεται πάντοτε τὸ χ μὲ δύω τιμὰς, καὶ κατ' αὐτὰς ὅλαι αἱ ἐξισώσεις αἱ ἑξῆς λύονται: καὶ μετὰ ταύτας καὶ τὰ προβλήματα, ἅπερ ἡμεῖς πρὸς ἄσκησιν τῶν πρωτοπείρων ἀπὸ πολλῶν Μαθηματικῶν ἐπεσωρεύσαμεν.

1) $4\alpha\chi-\beta\chi^2=\beta\chi-\gamma$ κατὰ τὸ Α'

$\beta\chi^2-4\alpha\chi+\beta\chi=\gamma$

$\beta\chi^2-(4\alpha+\beta)\chi=\gamma$ κατὰ τὸ Β'

$\chi^2-(\frac{4\alpha+\beta}{\beta})\chi=\frac{\gamma}{\beta}$ κατὰ τὸ Γ'

$\chi^2-(\frac{4\alpha+\beta}{\beta})\chi+(\frac{4\alpha+\beta}{2\beta})^2=(\frac{4\alpha+\beta}{2\beta})^2+\frac{\gamma}{\beta}$ κατὰ τὸ Δ'

$\chi-\frac{4\alpha+\beta}{2\beta}=\pm\sqrt{[(\frac{4\alpha+\beta}{2\beta})^2+\frac{\gamma}{\beta}]}$ κατὰ τὸ Ε'

$\chi=+\frac{4\alpha+\beta}{2\beta}\pm\sqrt{[(\frac{4\alpha+\beta}{2\beta})^2+\frac{\gamma}{\beta}]}$ κατὰ τὸ ς'

ὅπου τὸ χ εὑρίσκεται ἴσον μὲ τὰ γνωστὰ τοῦ ἑτέρου σκέλους.

2) $\alpha\chi^2-\beta\chi-\gamma=\gamma\chi^2-\alpha\chi$ $\quad -\gamma\chi^2+\alpha\chi+\zeta$

$\alpha\chi^2-\gamma\chi^2-\beta\chi+\alpha\chi=\gamma$

$\chi^2(\alpha-\gamma)-(\beta+\alpha)\chi=\gamma$

$\chi^2-(\frac{\beta+\alpha}{\alpha-\gamma})\chi=\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}$

$\chi^2-(\frac{\beta+\alpha}{\alpha-\gamma})\chi+(\frac{\beta+\alpha}{2\alpha-2\gamma})^2=(\frac{\beta+\alpha}{2\alpha-2\gamma})^2+\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}$

$\chi-\frac{\beta+\alpha}{2\alpha-2\gamma}=\pm\sqrt{[(\frac{\beta+\gamma}{2\alpha-2\gamma})^2+\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}]}$

$\chi=\frac{\beta+\alpha}{2\alpha-2\gamma}\pm\sqrt{[(\frac{\beta+\alpha}{2\alpha-2\gamma})^2+\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}]}$

Πρόβλημα Ε'.

„Μαθητής τις ἔλεγεν, ὅτι διπλοῦν χρόνον κατεδαπάνησεν εἰς τὰ γραμματικά, ἢ εἰς τὰ φιλοσοφικά· ἐρωτηθεὶς ὅμως πόσους χρόνους εἰς ἐκεῖνα, καὶ πόσους εἰς ταῦτα; εἶπεν ἐὰν συνάψῃς τοὺς χρόνους τῶν γραμματικῶν μὲ τοὺς χρόνους τῶν φιλοσοφικῶν εἰς κεφάλαιον, καὶ τοῦτο προσθῇς εἰς τὸ παραγόμενον ἀπὸ τοὺς χρόνους τῶν γραμματικῶν ἐπὶ τοὺς χρόνους τῶν φιλοσοφικῶν, ἐξέρχεται ὁ ἀριθμὸς 90· ζητοῦνται οἱ χρόνοι.

Κατασκευή.

Αὐτὸς εἰς μὲν τὰ φιλοσοφικὰ ἐδαπάνησε χρόνους χ, ἄρα εἰς τὰ γραμματικὰ 2χ· τὸ δὲ κεφάλαιον $2\chi+\chi$ καὶ τὸ παραγόμενον $2\chi\chi$ ἄρα ὁμοῦ 90 γίνονται

$$2\chi\chi+2\chi+\chi=90$$

$$2\chi\chi+3\chi=90 \quad : 2$$

$$\chi\chi+\frac{3}{2}\chi=45$$

$$\chi\chi+\frac{3}{2}\chi+\frac{9}{16}=\frac{9}{16}+45 \quad \cdot \surd$$

$$\chi+\frac{3}{4}=\surd(\frac{9}{16}+45$$

$$\chi=-\frac{3}{4}+\surd(\frac{9}{16}+45)=-\frac{3}{4}+\surd(\frac{729}{16}=$$

$-\frac{3}{4}+\frac{27}{4}=\frac{24}{4}=6$· λοιπὸν 6 χρόνους εἰς τὰ φιλοσοφικά, καὶ 12 εἰς τὰ γραμματικά· διότι 12. 6+12+6=90.

Πρόβλημα ϛ΄.

Ἠγόρασέ τις κομμάτια ὑφασμάτων, καὶ ἔδωκεν 180 γρόσια, ἂν ὅμως ἐλάμβανεν ἔτι εἰς τὰ ἴδια ἄσπρα 3 κομμάτια, ἤθελεν εἶναι ἡ τιμὴ εἰς καθε κομμάτι τρία γρόσια ὀλιγωτέρα· πόσα κομμάτια ἠγόρασε;

Κατασκευή.

χ Κομμάτια· ἂν λοιπὸν μὲ τὸ χ διέλωμεν τὸν ἀριθμὸν 180, εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσα καθὲ ἕνα ἠγοράσθη· δηλ: ἀπὸ $\frac{180}{\chi}$, πλὴν ἂν ἐλάμβανεν ἔτι τρία, ἤθελον εἶναι ὅλα $\chi+3$· καὶ τότε ἦν ἡ τιμὴ ἑκάςου $\frac{180}{\chi+3}$, τότε ὅμως ἦτον εὐθυνώτερα τρία γρόσια ἀπὸ τὰ πρῶτα· ἄρα ἀφαιροῦμεν 3 ἀπὸ τὴν πρώτην τιμὴν $\frac{180}{\chi}$ οὕτω $\frac{180}{\chi}-3$, καὶ τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{180}{\chi+3}$· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{180}{\chi+3}=\frac{180}{\chi}-3 \qquad .(\chi+3) \text{ καὶ } \chi$$

$$180\chi=180\chi-3\chi^2+540-3\chi$$

$$3\chi^2+9\chi=540 \qquad : 3$$

$$\chi^2+3\chi=180$$

$$\chi^2=3\chi+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}+180$$

$$\chi+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{(\frac{9}{4}+180)}$$

$$\chi=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{9}{4}+180)}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{729}{4})}=$$

$$=-\frac{3}{2}\pm\frac{27}{2}=12.$$

Δώδεκα ἄρα κομμάτια ἠγόρασεν: ἡ δὲ τιμὴ ἑκάςου

$\frac{180}{12}=15$. Ἐὰν δ' ἐλάμβανε 15 ἧς ἑκάςου ἡ τιμὴ $\frac{180}{15}=12$, 3 γρόσια εὐθυνώτερα;

Πρόβλημα Ζ΄

Τίνες ἂν εἴησαν οἱ ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων τὸ μὲν κεφάλαιον εἶναι 15, καὶ τὸ παραγόμενον 54;

Κατασκευή.

Ἔςω ὁ εἷς τούτων χ, ὁ ἕτερος ἄρα 15—χ, ἐὰν λοιπὸν τὸν χ μὲ τὸν 15—χ πολλαπλασιάσωμεν οὕτω

$$\chi(15-\chi)=15\chi-\chi\chi,$$ ἔςαι ἴσος 54

ὅθεν.

$$15\chi-\chi\chi=54$$

$$\chi\chi-15\chi=-54$$

$$\chi\chi-15\chi+\frac{15^2}{4}=\frac{15^2}{4}-54$$

$$\chi-\frac{15}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{15.\ 15}{4}-54\right)}$$

$$\chi=\frac{15}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{225}{4}-54\right)}=\frac{15}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{225}{4}-\frac{216}{4}\right)}=\frac{15}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{6}}=\frac{15}{2}+\frac{3}{2}=9$$

ἄρα 15—9=6· καὶ οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ὁ 9 καὶ 6.

Πρόβλημα Η΄.

Πατήρ τις θανὼν ἄφησεν εἰς τοὺς υἱοὺς του κληρονομίαν γρόσια 70000=α· ἀμέσως ὅμως μετὰ τὸν θάνατον τοῦ πατρὸς ἀπέθανον οἱ δύο υἱοί· οἱ λοιποὶ ἔλαβον εἰς μερίδιον 4000 περισσότερον ἀφ' ὅ,τι ἤθελον λάβη, ἂν οἱ δύω ἀδελφοὶ δὲν ἀπέθνησκον πόσοι ἦσαν οἱ υἱοὶ ὅλοι;

Κατασκευή.

Ὅλοι ἦταν χ· ἄρα ἐὰν ἔζουσαν καὶ οἱ ἄλλοι δύω, ἐλάμβανεν ἕκαςος $\frac{70000}{\chi}$ εἰς μερίδιον· ἐπειδὴ ἀπέθανον δύο, ἔμειναν $\chi-2$ καὶ τώρα λαμβάνουσιν $\frac{70000}{\chi-2}$· ἀλλὰ τοῦτο τὸ μερίδιον εἶναι 4000 μεγαλήτερον ἀπὸ τὸ $\frac{70000}{\chi}$.

ἄρα $\frac{70000}{\chi-2}=\frac{70000}{\chi}+4000$

$$\frac{70000}{\chi-2}=\frac{70000}{\chi}+4000 \qquad \cdot\,\chi$$

$$\frac{70000\chi}{\chi-2}=70000+4000\chi \qquad \cdot\,\chi-2$$

$$70000\chi=70000\chi-140000+4000\chi^2-8000\chi$$

$$140000=4000\chi^2-8000\chi$$

$$\chi^2-2\chi=35$$

$$\chi^2-2\chi+1=35+1=36 \qquad \cdot\,\sqrt{}$$

$\chi-1=6$ καὶ $\chi=7$

ἦσαν ὅλοι οἱ υἱοὶ 7, καὶ 5 ἔμειναν· διὸ οἱ μὲν 7 ἐλάμβανον 10000, οἱ δὲ 5 λαμβάνουσι 14000 γρόσια.

Πρόβλημα Θ'.

„Ἠγόρασέ τις τρία εἴδη κρασίου, κουμανταρίαν, μοσχάτον, καὶ σκοπελίτικον, καὶ ἔδωκε γρόσια 79 καὶ 8 παράδες· αἱ ὀκάδες τοῦ σκοπελίτικου ἦτον τριπλάσια: ἀπὸ ταῖς ὀκάδες τοῦ μοσχάτου· καὶ αἱ ὀκάδες τῆς κουμανταρίας δύο τριτημόρια τῶν ὀκάδων τοῦ μοσχάτου· εἰς τὴν ὀκᾶν τῆς κομανταρίας ἐπλήρωσε τόσους παράδες, ὅσαι ἦταν αἱ ὀκάδες τοῦ μοσχάτου· εἰς δὲ τὴν ὀκᾶν τοῦ μοσχάτου ἐπλήρωσε τόσους παράδες, ὅσαι αἱ ὀκάδες τῆς κουμανταρίας, καὶ 4 παράδες ἀκόμι· εἰς δὲ τὴν ὀκᾶν τοῦ σκοπελίτικου ἐπλήρωσε τὸ τριτημόριον. ἀπὸ ταῖς ὀκάδες ὁποῦ ἦτον τὸ μοσχάτον. Ζητεῖται πόσαις ὀκάδες ἦτον κάθε ἕνα, καὶ πόσων παράδων ἡ ὀκὰ ἑκάςου ἠγοράσθη;

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Αἱ ὀκάδες τοῦ μοσχάτου εἶναι χ, ἄρα αἱ τῆς κουμενταρίας εἶναι $\frac{2\chi}{3}$, καὶ αἱ τοῦ σκοπελίτικου 3χ ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ ἑκάςης ὀκᾶς τῆς μὲν κουμανταρίας ἠγοράσθη μὲ τόσους παράδες τοῦ μοσχάτου $=\chi$, ἐὰν μὲ τὸ χ πολλαπλασιάσωμεν τρεῖς ὀκάδες τῆς κουμανταρίας, οὕτω $\frac{2\chi}{3}.\ \chi=\frac{2\chi^2}{3}$, εἶναι ὅλη ἡ τιμὴ τῆς κȣμανταρίας. Ἡ τιμὴ δ' ἑκάςης ὀκᾶς τȣ͂ μοσχάτȣ εἶναι τόσοι παράδες, ὅσαι ὀκάδες εἶναι ἡ κȣμανταρία ϗ 4 προσέτι, ἤτοι $\frac{2\chi}{3}+4$. ἄρα ἐὰν ποτλαπλασιάσωμεν τρεῖς ὀκάδες τοῦ μοσχάτου χ μὲ $\frac{2\chi}{3}+4$ οὕτω $\frac{2\chi^2}{3}+4\chi$, εἶναι ὅλη ἡ τιμὴ τοῦ μουσχάτου· καὶ τέλος ἡ τιμὴ ἑκάςης ὀκᾶς τοῦ σκοπελίτικου εἶναι παράδων, ὅσον τὸ τριτημόριον τῶν ὀκάδων τοῦ μοσχάτου ἤτοι $\frac{\chi}{3}$. ἄρα ἐὰν τὸ $\frac{\chi}{4}$ μὲ τὰς ὀκάδες τοῦ σκοπελίτικου 3χ πολλαπλασιασθῇ οὕτω, $3\chi.\frac{\chi}{3}=$ εἶναι ὅλη ἡ τιμὴ τοῦ σκοπελίτικου· καὶ αἱ τρεῖς αὗται τι-καὶ εἶναι γρόσια 79 παρά 8=3168 καὶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν,

$$\frac{2\chi^2}{2}=\frac{2\chi^2}{3}+4\chi+\chi^2=3168$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\ :3$$
$$2\chi^2+2\chi^2+12\chi+3\chi^2=9504$$
$$7\chi^2+12\chi=9505$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\ :7$$
$$\chi^2+\frac{12}{7}\chi=\frac{9504}{7}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\ \surd$$
$$\chi^2+\frac{12}{7}\chi+\frac{36}{49}=\frac{36}{49}+\frac{9504}{7}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\chi+\frac{6}{6}=\pm\surd\left(\frac{36}{49}+\frac{9504}{7}\right)$$

καὶ $\chi=-\frac{6}{7}\surd\left(\frac{66564}{49}\right)=-\frac{6}{7}+\frac{258}{7}=\frac{252}{0}=36$ αἱ ὀκάδες τοῦ μοσκάτου, καὶ 24 αἱ ὀκάδες τῆς κουμανταρίας, καὶ 108 αἱ ὀκάδες τοῦ σκοπελίτικου· ἡ δὲ τιμὴ ἑκάστης ὀκᾶς τοῦ μὲν μοσκάτου παράδες 28, τῆς δὲ κουμανταρίας 36, καὶ τοῦ σκοπελίτικου 12.

Π ρ ό β λ η μ α Γ.

„Δίελε τὸν 230 ἀριθμὸν εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε ἐὰν τὸ τετραπλοῦν τοῦ μείζονος ἀριθμοῦ πολλαπλασιάσῃς μὲ τὸ ἑξαπλοῦν τοῦ ἐλάσσονος, τὸ γινόμενον νὰ εἶναι ἴσον 144000.

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Ἔστω ὁ μείζων ἀριθμὸς χ, ἄρα ὁ ἐλάττων 230—χ· τὸ δὲ τετραπλοῦν ἐκείνου 4χ, τὸ δ' ἑξαπλοῦν τούτου 6(230—χ)· ἄρα τὸ παραγόμενον

$$4\chi \cdot 6(230-\chi)=144000$$

$$\chi(230-\chi)=\frac{144000}{24}=6000$$

$$\chi^2-230\chi=-6000$$

$$\chi^2-230\chi+115.\ 115=115.\ 115-6000$$

$$\chi-115=\sqrt{(13225-6000)}$$

$$\chi=115+\sqrt{7225}$$

$$\chi=115+85=200$$

εἶναι λοιπὸν 200 τὸ μεῖζον μέρος, καὶ 30 τὸ ἔλαττον.

Πρόβλημα ΙΑ'.

Ἐρωτήθη τις πόσων χρόνων εἶναι. Ὁ πατήρ μου, λέγει, μὲ ἐγέννησεν εἰς τοὺς 40 χρόνους τῆς ἡλικίας του, ἐὰν λοιπὸν τώρα τοὺς χρόνους ἐκείνου καὶ τοὺς χρόνους μου πολλαπλασιάσῃς, ἐξέρχονται οἱ χρόνοι τοῦ Μαθουσάλα, ὅςις 969 χρόνους ἔζησεν· πόσοι οἱ χρόνοι αὐτοῦ;

Κατασκευή.

Εἶναι χρόνων χ· ἄρα ὁ πατήρ του $40+\chi$ καὶ τὸ παράγόμενον

$$\chi(40+\chi)=969$$

$$\chi^2+40\chi=969$$

$$\chi^2+40\chi+400=400+969$$

$$\chi+20=+\sqrt{369}=37$$

$$\chi=-20+37=17$$

ἦν χρόνων δέκα ἑπτά.

Πρόβλημα ΙΒ'

„Δίελε τὸν 121 εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς οὕτως, ὥςε ὁ δεύπέτερος νὰ εἶναι μονάδα μείζων τοῦ πρώτου, καὶ ὁ τρίτος ἴσος τῷ τετραγώνῳ τοῦ πρώτου.

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Ἔςω ὁ πρῶτος χ, ἄρα ὁ δεύτερος $\chi+1$ καὶ ὁ τρίτος χ^2· τὸ δὲ κεφάλαιον τούτων

$$\frac{\chi^2+\chi+\chi+1=121}{\dfrac{\chi^2+2\chi=120}{\dfrac{\chi^2+2\chi+1=121}{\chi+1=\sqrt{(121)}=11}}}$$

$$\chi=-1+11=10$$

ἄρα ὁ μὲν πρῶτος 10, ὁ δεύτερος 11 καὶ ὁ τρίτος 100.

§. 421. Εὑρίσκονται δὲ καὶ ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώςους, καὶ μὲ τρεῖς κτ: ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ (§. 283). ἀλλ' ἡ μέθοδος καὶ εἰς αὐτὰς εἶναι ὡς καὶ ἐκεῖ. δηλ: ἐὰν δύο ἄγνωςοι ὦσι ποσότητες, δύο καὶ αἱ ἐξισώσεις. ἐὰν δὲ τρεῖς, ἐξισώσεις κτ: καὶ ἀπὸ μὲν τῆς μιᾶς ἐξισώσεως εὑρίσκεται ἡ μία ἄγνωςος, καὶ ἀπὸ τῆς ἑτέρας ὁμοίως ἡ ἄλλη· εἶτα ἐκ τῶν δύω τούτων ἴσων σκελῶν ποιοῦμεν νέαν ἐξίσωσιν μὲ μίαν ἄγνωςον, καὶ εὑρίσκομεν ταύτην, καὶ ἐξ αὐτῆς διορίζεται ἡ ἑτέρα ἐκ τῶν ἐκεῖ εἰρημένων ἡ μέθοδος φανερὰ, καὶ λόγων οὐ χρήζει πλειόνων, εἰ μὴ τῆς διὰ προβλημάτων διασαφήσεως.

Π ρ ό β λ η μ α ΙΓ΄.

„Εὑρεθήτωσαν δύω ἀριθμοὶ, ὧν τὸ παραγόμενον 100 καὶ ἡ διαφορὰ 15.

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Ὁ μὲν μείζων χ, ὁ δεύτερος ψ. ἄρα $\psi\chi=100$, καὶ

$\chi - \psi = 15$. εὑρεθήτω πρῶτον ὁ χ, καὶ ληφθήτω ὁ ψ ὡς γνωςὸς $\chi = \frac{100}{\psi}$, καὶ $\chi = 15 + \psi$. ἄρα καὶ

$$\frac{100}{\psi} = 15 + \psi \text{ (§. 67.)}.$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \cdot \psi$$
$$100 = 15\psi + \psi^2$$
$$\frac{15^2}{2^2} + 100 = \frac{15^2}{2^2} + 15\psi + \psi^2$$
$$\psi + \frac{15}{2} = +\sqrt{\left(100 + \frac{15^2}{2^2}\right)},$$
$$\psi = -\frac{15}{2} + \sqrt{\left(100 + \frac{15^2}{2^2}\right)} = -\frac{15}{2} + \sqrt{\left(\frac{625}{4}\right)} =$$
$$-\frac{15}{2} + \frac{25}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

καὶ ὁ μείζων $\chi = 5 + 15$. $\chi = 20$ διότι $5 \cdot 20 = 100$. καὶ $20 - 5 = 15$. Ἐὰν δὲ ληφθῇ ἡ ῥίζα καταφατικῶς, ἔςαι τὸ $\psi = 30 - 20$. καὶ $\chi + 20 = 15$, καὶ $\chi = -5$, τὸ ὁποῖον δὲν γίνεται, εἰμὴ ἀποφατικῶς.

Π ρ ό β λ η μ α ΙΔ΄.

„Εὑρεθήτωσαν δύω ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον, τῶν τετραγώνων αὐτῶν, ἡ διαφορὰ εἶναι $= 78$. ἐὰν δὲ προσθῶμεν εἰς τὸ παραγόμενον αὐτῶν αὐτὸ τὸ κεφάλαιον εἶναι ἴσον 39.

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Ἔςω ὁ μὲν μείζων χ, ὁ δὲ ἐλάττων ψ. ἄρα κατὰ τοὺς λόγους τούτους $\chi^2 + \psi^2 - (\chi + \psi) = 78$. καὶ $\chi\psi + (\chi + \psi) = 39$. ὁ ἐςι $\chi^2 + \psi^2 - \chi - \psi = 78$ - - - - - A

$\chi\psi + \chi + \psi = 39$ - - - - - - - B

Πολλαπλασιάζομεν τὴν Β μὲ 2 οὕτω $2\chi\psi+2\chi+2\psi=78$ Γ' καὶ συνάπτομεν αὐτὴν εἰς τὴν Α. καὶ μετὰ τῆς Α

$$\frac{=\chi^2+2\chi\psi+\psi^2+\chi+\psi=2.\ 78}{(\chi+\psi)^2+(\chi+\psi)=2.\ 78\ \text{- - - -}\ \Delta'}$$

ἄφελε ἔτι τὴν Γ' ἀπὸ τῆς Α'

$$\chi^2+\psi^2-\chi-\psi=78$$
$$2\chi\psi+2\chi+2\psi=78$$
$$-\quad -\quad -\quad -$$

$$\frac{\chi^2-2\chi\psi+\psi^2-3\chi-3\psi=0}{(\chi-\psi)^2-3(\chi+\psi)=0\ \text{- - - -}\ \text{E}'}$$

$$(\chi-\psi)^2=3(\chi+\psi)\ \text{- - - -}\ \text{Z}'$$

Ἤδη ληφθήτω ἡ Δ' ὡς μεμιγμένη ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ καὶ εὑρεθήτω $(\chi+\psi)$ οὕτω.

$$\frac{(\chi+\psi)^2+(\chi+\psi)=2.\ 78}{(\chi+\psi)^2+(\chi+\psi)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+2.\ 78}$$

$$\frac{(\chi+\psi)+\frac{1}{2}=\sqrt{(\frac{1}{4}+2.\ 78)}}{(+\psi)=-\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{625}{4})}=}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{25}{2}=12$$

Ἐπειδὴ εὕρηται τὸ κεφάλαιον $(\chi+\psi)=12$, καὶ ἡ διαφορὰ Z ἄρα $(\chi-\psi)^2=3(\chi+\psi)=36$· κατὰ τὴν Z.

καὶ $(\chi-\psi)=\sqrt{36}=6$· λοιπὸν

$$\chi+\psi=12$$
$$\chi-\psi=6$$

$2\chi=18$ καὶ $\chi=9$ · ἄρα $\psi=3$

διότι $9^2+3^2-(9+3)=78$· καὶ $9.\ 3+(9+3)=39$.

Πρόβλημα ΙΕ΄.

„Ἐυρεθήτω ἀριθμὸς μὲ τρεῖς χαρακτῆρας, μονάδας, δεκάδας, καὶ ἑκατοντάδας τοιοῦτος, ὥςε πρῶτον, τὸ τετράγωνον τοῦ χαρακτῆρος τῶν μονάδων, μὲ τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, καὶ ἑκατοντάδων, χωρὶς νὰ θεωρηθῇ ἡ τάξις αὐτῶν νὰ εἶναι $=104$· δεύτερον, τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου χαρακτῆρος δηλ: τῶν δεκάδων νὰ εἶναι 4 μεγαλήτερον ἀπὸ τὸ διπλοῦν παραγόμενον, τῶν δύω λοιπῶν χαρακτήρων. Τρίτον, ἐὰν ἀπὸ τοῦτον τὸν ἀριθμὸν τῶν τριῶν ζητουμένων χαρακτήρων, τὸν 594 ἀφέλωμεν, οἱ χαρακτῆρες νὰ λαμβάνωσι τὴν ἀντίθετον τάξιν, ἤτοι ὁ χαρακτὴρ τῶν μονάδων νὰ γίνεται τῶν ἑκατοντάδων, καὶ ὁ τῶν ἑκατοντάδων, νὰ γίνεται τῶν μονάδων.

Κατασκευή.

Ἔςω ὁ μὲν ἀριςερώτερος χ, ὁ δὲ τῶν δεκάδων υ, ὁ δὲ τῶν μονάδων ψ· ἄρα κατὰ τὰς συνθήκας

α΄ $\chi^2+\upsilon^2+\psi^2=104$ - - - - - A

β΄ $\upsilon^2=2\chi\psi+4$ - - - - - B

γ΄ $100\chi+10\upsilon+\psi-594=100\psi+10\upsilon+\chi$ - - - Γ

καὶ ἀπὸ τῆς Γ ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $100\chi-\chi=99\psi+594$

$$\chi(100-1)=99\psi+594$$

$$\chi=\frac{99\psi+594}{99}=\psi+6$$

ἀντὶ τοῦ χ θῶμεν εἰς τὴν A καὶ B τὸ ἴσον $\psi+6$·

καὶ ἔςαι $\psi^2+12\psi+36+\upsilon^2+\psi^2=104$

$$2\psi^2+12\psi+\upsilon^2=68 \text{ - - - - } \Delta$$

καὶ $\upsilon^2=2\psi^2+12\psi+4$ - - - - E

καὶ ἀπὸ τῆς Δ ἀφαιρεθήτω ἡ E οὕτω.

$$2\psi^2+12\psi+ϥ^2=68$$

$$ϥ^2=2\psi^2+12\psi+4$$

$$- \quad - \quad - \quad -$$

$$2\psi^2+12\psi=68-2\psi^2-12\psi-4$$

$$2\psi^2+2\psi^2+12\psi+12\psi=68-4=64$$

$$4\psi^2+24\psi=64$$

$$\psi^2+6\psi=16$$

$$\psi+3=\sqrt{(9+16)}=5$$

καὶ $\psi=-3+5=2$. ὁ χαρακτὴρ τῶν μονάδων. ἦν δὲ καὶ $\chi=\psi+6$ ἄρα $\chi=8$. ἦν δὲ καὶ $ϥ^2=2\chi\psi+4=2.8.2+4=36$ ἄρα $ϥ=6$ ὁ χαρακτὴρ τῶν δεκάδων· καὶ εὑρέθη ὁ ἀριθμὸς 862, διότι $862-594=268$. δηλ: ὁ χαρακτὴρ τῶν μονάδων 2 μετέβη εἰς τὸν τόπον τῶν ἑκατοντάδων 8 εἰς τὸν τόπον τῶν μονάδων.

Πρόβλημα ΙϚ'.

„Δίδεται ἡ Ἀλγεβραϊκὴ ἔκθεσις αὕτη $\nu^4\chi+\nu^3ϥ+\nu^2\psi+\nu\omega$, καὶ ζητοῦνται οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, $ϥ$, ω. δηλ: τίνες ἀριθμοὶ τίθενται ἀντὶ τούτων εἰς αὐτὴν τὴν ἔκφρασιν, ὥστε, ἐὰν θῶμεν $\nu=1$, νὰ γίνεται ὅλη ἡ ἔκφρασις $=1$; ἤ, ἐὰν θῶμεν $\nu=3$, νὰ γίνεται $=36$, καὶ ἐὰν $\nu=4$ νὰ γίνεται ἡ ἔκφρασις ὅλη $=100$;

Κατασκευή.

Ἐπειδὴ οἱ ἄγνωστοι εἶναι τέσσαρες, τέσσαρας ἐξισώσεις πρέπει νὰ εὕρωμεν· ὅθεν θῶμεν Α'. $\nu=1$ εἰς τὴν ἔκφρασιν, καὶ μονάδι ἐξισούσθω. εἶτα $\nu=2$, καὶ ἐξισούσθω 9. καὶ $\nu=3$ καὶ ἐξισούσθω 36. καὶ $\nu=4$, καὶ ἐξισούσθω 100. οὕτω,

$$\nu=1.\quad \chi+\text{ч}+\psi+\omega=1 \quad \text{- - - - - -} \quad \text{Α}$$
$$\nu=2.\quad 16\chi+8\text{ч}+4\xi+2\omega=9 \quad \text{- - - -} \quad \text{Β}$$
$$\nu=3.\quad 81\chi+27\text{ч}+9\chi+3\omega=36 \quad \text{- -} \quad \Gamma$$
$$\nu=4.\quad 256\chi+64\text{ч}+16\psi+4\omega=100 \quad \text{-} \quad \Delta$$

Πρῶτον, διπλασιάζομεν τὴν Α, καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὴν ἀπὸ τῆς Β, Δεύτερον, τριπλασιάζομεν αὐτὴν, καὶ τὴν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς Γ. Τρίτον, τριπλασιάζομεν τὴν αὐτὴν, καὶ τὴν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς Δ. καὶ μένουσι τὰ λείψανα τρεῖς ἐξισώσεις μόνον μὲ τρεῖς ἀγνώςους, αἱ ἑξῆς

$$14\chi+6\text{ч}+2\psi=7 \quad \text{- - - - - - -} \quad \text{Ε}$$
$$78\chi+24\text{ч}+6\psi=33 \quad \text{- - - - -} \quad \text{Ζ}$$
$$252\chi+60\text{ч}+12\psi=96 \quad \text{- - -} \quad \text{Η}$$

πάλιν τριπλασιάζομεν τὴν Ε, καὶ τὴν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς Ζ, εἶτα διπλασιάζομεν τὴν Ζ, καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς Η, καὶ τὰ λείψανα εἰσὶ δύο ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώςους αἱ ἑξῆς.

$$36\chi+6\text{ч}=12 \quad \text{- - - - - -} \quad \Theta$$
$$36\chi+12\text{ч}=30 \quad \text{- - - - - -} \quad \text{Ι}$$

Διπλασίασον τὴν = καὶ ἄφελέ την ἀπὸ τῆς Ι, καὶ μένει

$$24\chi=6 \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ χ θῶμεν εἰς τὴν Ι τὸ ἴσον $\frac{1}{4}$ εὑρίσκεται καὶ τὸ ч, διότι εἶναι $36\chi+6\text{ч}=12$

$$36.\frac{1}{4}+6\text{ч}=12$$
$$6\text{ч}=12-9$$
$$\text{ч}=\frac{1}{2}$$

ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὴν Ε ἀντὶ χ καὶ ψ θῶμεν τὰ ἴσα $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{2}$ εὑρίσκομεν καὶ τὸ ψ. διότι

$$14\chi+6\upsilon+2\psi=7$$

$$\frac{14\frac{1}{4}+6\frac{1}{2}+2\psi=7}{14+12+4\psi=28}.4$$

$$8\psi=28-26=2 \text{ καὶ } \psi=\frac{1}{2}$$

θῶμεν τέλος καὶ εἰς τὴν Α ἀντὶ χ, υ, ψ τὰ ἴσα, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ω, οὕτω

$$\chi+\upsilon+\psi+\omega=1$$

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\omega=1}{1+2+1+\omega=4}.4$$

καὶ $\omega=4-4=0$. ἄρα ἡ ἀνωτέρω ἀλγεβραϊκὴ ἔκθεσις $\nu^4\chi+\nu^3\upsilon+\nu^2\psi+\nu\omega=\frac{1}{4}\nu^4+\frac{1}{2}\nu^3+\frac{1}{4}\nu^2$. καὶ ἐὰν ἀντὶ ν θῶμεν 1 εὑρίσκεται ὅλη $=1$ ἐὰν ἀντὶ $\nu=2$ εὑρίσκεται $=9$, ἐὰν δὲ 3, $=36$, καὶ ἐὰν 4, $=100$.

Πρόβλημα ΙΖ΄.

„Εἰς μίαν συναναστροφὴν ἀνδρῶν καὶ γυναικῶν ἐξοδεύθη οἶνος γροσίων 8, 21 παρ: καὶ 1 ἄσπρ:, ὁ δ᾽ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων ἦν μισὸς ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν γυναικῶν, ἤθελον δὲ νὰ βάλωσι κλῆρον, ἂν αἱ γυναῖκες ἔπρεπε νὰ πληρώσωσιν, ἢ οἱ ἄνδρες· καὶ εἰ μὲν οἱ ἄνδρες ἐπλήρωναν, ἔμελλεν ἕκαστος νὰ πληρώσῃ ἄσπρα τετραπλάσια ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνδρῶν· εἰ δὲ αἱ γυναῖκες, ἔμελλον νὰ πληρώσωσιν ἄσπρα ἑκάςη τόσα, ὅσαι αἱ γυναῖκες.

Ζητεῖται πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες, πόσαι ὀκάδες κρασὶ, καὶ πόσον τιμᾶται ἡ μία ὀκᾶ;

Κατασκευή.

Φανερὸν, ὅτι ἐὰν εὑρεθῶσιν οἱ ἄνδρες καὶ αἱ γυναῖκες, εὑρίσκονται καὶ τὰ λοιπά· ὅθεν ἦτον ἄνδρες ų, καὶ γυναῖκες χ· ἐπειδὴ ἕκαςος ἀνὴρ ἤθελε πληρώση τετραπλάσια τόσα, ὅσοι οἱ ἄνδρες ἤτοι 4ų· ἄρα ὅλοι ὁμοῦ ἤθελον πληρώση 4ųų, καὶ τόση ἡ τιμὴ ὅλη τοῦ οἴνου· καὶ πάλιν ἑκάςη γυναῖκα ἤθελε πληρώση τόσα ἄσπρα, ὅσαι ἦτον αἱ γυναῖκες ἤτοι χ, ἄρα ὅλαι ὁμοῦ ἐπλήρωναν χχ, καὶ τόση ἦν καὶ οὕτως ἡ τιμὴ ὅλου τοῦ οἴνου· καὶ λοιπὸν ἐξίσωσις.

$$\chi\chi = 4ųų$$

$$\sqrt{\chi\chi} = \sqrt{4ųų}$$

$$\chi = 2ų$$

Καὶ εὕρομεν πρῶτον ὅτι αἱ γυναῖκες ἦσαν διπλάσιαι τῶν ἀνδρῶν· ἀλλὰ τὸ χ^2 ἡ τιμὴ ὅλη τοῦ οἴνου ἦν, καὶ αὕτη εἶναι γρόσια 8, 21 παρ:, καὶ 1 ἄσπρ: ἢ 1024 ἄσπρα·

$$\text{ἄρα} \quad \chi^2 = 1024$$

$$\chi = \sqrt{(1024)} = 32$$

Καὶ ἦσαν αἱ γυναῖκες 32· ἐπειδὴ καὶ οἱ ἄνδρες 32=2ų, ἤτοι $\frac{32}{2} = ų = 16$· καὶ ὅλοι οἱ ἄνδρες, =16· καὶ ἐπειδὴ ἔπιον ὀκάδες τὸν μισὸν ἀριθμὸν τῶν γυναικῶν, ἔπιον ὀκάδες 16· ἐὰν δὲ καὶ διὰ τοῦ 16 διέλωμεν 1024 ἄσπρ:

οὕτω $\frac{1024}{16}=\frac{256}{4}=64$ ἄσπρα, ἡ τιμὴ ἑκάστης ὀκᾶς τοῦ οἴνου· καὶ οὕτως ἐλύθησαν αἱ τέσσαρες ἐρωτήσεις τοῦ προβλήματος.

ΜΕ'ΡΟΣ Β'.

Περὶ ἰδιαιτέρας θεωρίας τῶν τετραγωνικῶν Ἐξισώσεων.

§. 422. Εἰς αὐτὸ τὸ μέρος ἐξετάζομεν τὴν φύσιν αὐτῶν τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἵνα αὐτὴ ἡ θεωρία ἀγωγὸς καὶ τῶν ὑψηλοτέρων γένηται ἐξισώσεων· καὶ δεύτερον πῶς τινα ἄλογα διώνυμα φέρομεν εἰς τὸ ἁπλούστερον, ὅτι καὶ ταῦτα εἰς πολλὰ τῶν ἑξῆς εἶναι χρήσιμα.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Α'.

Περὶ φύσεως τῆς Ἐξισώσεως, τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

§. 423. Ἡμεῖς μέχρι τοῦδε ἐμάθομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἦν ἀεὶ $\alpha\chi^2 \pm 6\chi = \mp\gamma$ (§. 414), καὶ ὅτι ἐὰν τὸ δεύτερον ἔλιπε μέρος 6χ, ἄμικτος ἦν ἡ ἐξίσωσις (§. 415.). ἄλλως μικτή. Ἐμάθομεν ἔτι, καὶ πῶς αὗται λύονται κατ' ἐκεῖνον τὸν τύπον τὸν γενικόν, $\chi = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}66+\gamma)}$, καὶ ὅτι ἡ ῥίζα τοῦ $\sqrt{(\frac{1}{4}66+\gamma)}$ ὁτὲ λαμβάνεται καταφατικῶς, ὡς $\chi=-\frac{1}{2}\beta+\sqrt{(\frac{1}{4}\beta\beta+\gamma)}$, ὁτὲ ἀποφατικῶς, ὡς $-\frac{1}{2}\beta-\sqrt{(\frac{1}{4}\beta\beta+\gamma)}$, ὁτὲ δὲ καὶ καταφατικῶς, καὶ ἀποφατικῶς ὡς $\chi=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{4}\beta\beta+\gamma)}$. καὶ ὁτὲ μὲν ἄλλογος ἡ ῥίζα, ὡς $\chi=\sqrt{5}$. ὁτὲ δὲ ἀδύνατος ὡς $\chi=\sqrt{-4}$, ὁτὲ δε μέρος ἄλογος, καὶ μέρος λογικὴ ὡς εἰς τὰ δυώνυμα $\chi=5+\sqrt{3}$, ὁτὲ δὲ καὶ κατὰ τὰ δυο μέρη ἄλογος $\chi=\sqrt{(5-\sqrt{2})}$. περὶ ὧν δυωνύμων εἶτα ἐροῦμεν, ἤδη ὅμως ἂς εἴπωμεν περὶ τῶν ἄλλων.

§. 424. Ἡ παροῦσα θεωρία εἶναι νὰ μάθωμεν ὄχι πῶς αἱ ἐξισώσεις λύονται, διότι τοῦτο ἔγινεν ἡμὶν γνωςὸν· ἀλλὰ νὰ μάθωμεν ὅτι δύω τιμὰς λαμβάνει ἡ ἄγνωςος χ, καὶ οὐχὶ ἐπέκεινα, καὶ ὅτι ἑκάςη ἐξίσωσις εἰς δύω λύεται παράγοντας, καὶ ὅτι ἀπὸ δύω παράγοντας ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ κατασκευάζομεν· καὶ τέλος, ἀπὸ τίνων μερῶν οἱ συνεργοὶ τῶν ἀγνώςων συντίθενται κτ: διὰ νὰ γένη βάσις αὕτη ἡ θεωρία εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν· διότι αὗται ἄλλως οὐκ ἐπιλύονται· ὅτι ὅμως τὸ χ δύω τιμὰς λαμβάνει εἰς τὰ προβλήματα, γνωςὸν ἡμῖν ἔγινεν ἀλλὰ καὶ εἰς τὴνδε τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2-12\chi=-35$, ἔςαι $\chi=6\pm\sqrt{(36-35)}=6\pm1$, ἤτοι ἢ $=7$, ἢ $=5$. διότι ἢ $\chi=5$ νὰ ληφθῇ, ἀληθεύει, ὡς $5.5-12.5=-35$. ἢ $\chi=7$ νὰ ληφθῇ, ἀληθεύει ὡς $7.7=+12.7-35$.

§. 425. Ἐὰν τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν $\chi^2-12\chi=-35$ λαβόντες, τὴν -35 γνωςὴν ποσότητα εἰς τὸ ἕτερον μέρος φέρωμεν οὕτω $\chi^2-12\chi+35=0$, μένει τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἐξισώσεως ἴσον τῷ μηδενί· καὶ οὕτω συνηθίζουσι τὰς ἐξισώσεις τῶν δυνάμεων εἰς τὸ μηδὲν νὰ ἐπάγωσιν· Εὕρηται τὸ $\chi=5$ καὶ ἔτι $\chi=7$. ἐὰν δὲ καὶ ταῦτα εἰς τὸ μηδὲν φέρωμεν, ἔςαι $\chi-5=0$ καὶ $\chi-7=0$. ἐὰν δὲ αὐτὰς τὰς δύο ἐξισώσεις πολλαπλασιάσωμεν οὕτω

$$\begin{array}{c} \chi-7=0 \\ \chi-5=0 \\ \hline (\chi-7)(\chi-5)=0 \end{array}$$

εὑρίσκονται οἱ δύω παράγοντες ἴσοι μηδενὶ (§. 67.). Ἐὰν δ' ἐνεργείᾳ τοὺς παράγοντας πολλαπλασιάσωμεν,

εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{l} (\chi-5)(\chi-7)=0 \\ \hline \chi^2-5\chi \\ \quad -7\chi+35 \\ \hline \chi^2-12\chi+35=0 \end{array}$$

ὡς ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις· ἄρα ἑκάςη ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐὰν φερθῇ εἰς τὸ μηδενικὸν, θεωρεῖται πάντοτε ὡς παραγόμενον δύο παραγόντων δυωνύμων, ὧν τὸ ἓν μέρος ἡ ἄγνωςος ποσότης, καὶ τὸ ἕτερον ἡ μία ῥίζα τῆς ἀγνώςου μὲ σημεῖα ἐναντία, ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω ἡ ῥίζα 5 καὶ 7· διότι ἂν αἱ ῥίζαι ἀποφατικαὶ, οἱ παράγοντες καταφατικοὶ, ὡς ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+11\chi+28=0$, αὐτοῦ εὑρίσκονται αἱ ῥίζαι, ἐὰν ἀναλυθῇ, $\chi=-4$, καὶ $\chi=-7$· ἄρα καὶ $\chi+4=0$· καὶ $\chi+7=0$· καὶ $(\chi+4)(\chi+7)=0$, ὧν καὶ ἐνεργείᾳ πολλαπλασιασθέντων, εὑρίσκεται ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+11\chi+28$

οὕτω

$$\begin{array}{l} \chi+4 \\ \chi+7 \\ \hline \chi^2+4\chi \\ \quad +7\chi+28 \\ \hline \chi^2+11\chi+28=0 \end{array}$$

„Ἐὰν δὲ τῶν ῥιζῶν ; ἡ μὲν καταφατικὴ ; ἡ δ᾽ ἀποφατικὴ, ὡς ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-5\chi-14=0$. $\chi=-2$ καὶ $\chi=7$; οἱ παράγοντες εἶναι $\chi+2=0$: καὶ $(\chi+2)(\chi-7)=0$ καὶ ἐξέρχεται πάλιν ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-5\chi-14$

$$\begin{array}{r} \chi+2=0 \\ \chi-7=0 \\ \hline \chi^2+2\chi \qquad \\ -7\chi-14 \\ \hline \chi^2-5\chi-14=0 \end{array}$$

Ἄρα ἑκάστη τοιαύτη ἐξίσωσις συνίσταται ὑπὸ δύο παραγόντων; καὶ ἕκαστος παράγων ῥίζα τῆς ἐξισώσεως λέγεται. τρεῖς παράγοντας τοιούτους ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ποτὲ δὲν ἔχει· διότι τότε ἡ ἄγνωστος χ γίνεται κύβος, καὶ δὲν εἶναι ἡ ἐξίσωσις πλέον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

§. 426. Ἐπειδὴ ἑκάστη ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς τὸ μηδενικὸν μεταβληθεῖσα: συνίσταται ἀπὸ δύο παραγόντων· ἐὰν $\chi=\alpha$ καὶ $\chi=\beta$ θῶμεν, ἔσται $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)=0$· οὗτοι δε εἰς τὸ μηδὲν δὲν ἔρχονται, ἐὰν μὴ ὁ εἷς παράγων εἰς τὸ μηδὲν ἔρχηται· ἢ $(\chi-\alpha)=0$, ἢ $(\chi-\beta)=0$ καὶ διὸ τὰς ἀνωτέρας ἐξισώσεις τοῦτο εἶναι τὸ θεμέλιον τῆς λύσεως:

§. 427. Εἴδομεν ὅτι ὅλαι αἱ ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἀνάγονται εἰς τὸν τύπον $\chi^2\pm\beta\chi\pm\gamma=0$· ἄρα καὶ αὐτὴ ὑπὸ δύο παραγόντων συνίσταται· $(\chi+\beta)\chi\pm\gamma=0$· διὰ νὰ γνωρίσωμεν ὅμως τὴν φύσιν τῆς τετραγωνικῆς ἐξισώσεως $\chi^2\pm\beta\chi\pm\gamma=0$, πρέπει διαφόρως τοὺς δύο παράγοντας νὰ πολλαπλασιάσωμεν; διὰ νὰ μάθωμεν πῶς ὁ συνεργὸς β, καὶ τὸ λοιπὸν μέρος γ γίνεται, καὶ πότε ἔχει τὸ σημεῖον τὸ καταφατικὸν, καὶ πότε ἔχει τὸ ἀποφατικὸν κτλ.

Ἴδομεν πρῶτον, τί γίνεται, ὅταν αἱ δύο ῥίζαι ἀποφατικαί, ὡς $\chi=-\pi$· καὶ $\chi=-\rho$· ἄρα οἱ δύω παράγοντες $(\chi+\pi)$ καὶ $(\chi+\rho)$, καὶ ἑπομένως εἰς αὐτὸ τὸ παραγόμενον μανθάνομεν

$$\begin{array}{l} \chi+\pi \\ \underline{\chi+\rho\quad\quad} \\ \chi^2+\chi\pi \\ \quad\underline{+\chi\rho+\pi\rho\quad\quad} \\ \chi^2+(\pi+\rho)\chi+\pi\rho=0 \end{array}$$

Α΄. Ὅτι τὸ πρῶτον μέρος ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ἀγνώςου ποσότητος, τὸ δεύτερον τὴν ἄγνωςον μόνον ποσότητα, ἐπὶ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ζητουμένων ῥιζῶν· τὸ τρίτον, μόνον τὸ παραγόμενον τῶν ζητουμένων ῥιζῶν.

Β΄. Ὅτι τὸ πρῶτον, δεύτερον, καὶ τρίτον μέρος καταφατικόν· ὅθεν εἰς κάθε τετραγωνικὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸ μηδενικὸν ἀγομένην, ἐὰν ἔχῃ ὅλα τὰ μέρη καταφατικά, αἱ ῥίζαι εὑρίσκονται ἀποφατικαί· ἔπειτα ἐὰν τὸ γνωςὸν τρίτου μέρος λυθῇ εἰς δύο παράγοντας, καὶ τὸ κεφάλαιον τούτων τῶν παραγόντων εἶναι ἴσον τῷ συνεργῷ τοῦ δευτέρου μέρους, οἱ παράγοντες εἶναι αἱ ῥίζαι αἱ ζητούμεναι· δεδόσθω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+16\chi+48=0$. Ἐπειδὴ $48=4.12$, καὶ $4+12=16$· εἶναι $\chi=-4$, καὶ $\chi=-12$· διότι $(\chi+4)(\chi+12)=\chi^2+16\chi+48=0$· ὁμοίως καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2+8\chi+7$· εἶναι $\chi=-1$, καὶ $\chi=-7$· διότι $-1.\ -7=+7$ καὶ $1+7=8$ κτ:

§. 428. Ἴδομεν ἔτι καὶ ὅταν ἄμφω αἱ ῥίζαι καταφατικαί, ὡς $\chi=\pi$, καὶ $\chi=\rho$· ἄρα οἱ παράγοντες $(\chi-\pi)$ $(\chi-\rho)$ καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$\begin{array}{l} \chi-\pi \\ \underline{\chi-\rho\quad\quad} \\ \chi^2-\chi\pi \\ \quad\underline{-\chi\rho+\pi\rho} \\ \chi^2-(\pi+\rho)\chi+\pi\rho \end{array}$$

Ἐις αὐτὴν δὲ πρῶτον μανθάνομεν, ὅτι τὸ δεύτερον μέρος μόνον ἀποφατικόν· καὶ δεύτερον, ὅτι ὅπου τὰ μέρη ἀμοιβαδὸν ἀλλάζουσιν, ἐκεῖ καὶ ῥίζαι καταφατικαὶ δίδονται· διότι τὰ τρία μέρη ἔχουσι τὰ σημεῖα οὕτω $+-+$, καὶ δύο μόνον μεταβολαί εἰσι τῶν σημείων $+-$ καὶ $-+$· ἄρα καὶ δύο ἔχει ῥίζας καταφατικάς. Μανθάνομεν ἔτι καὶ ἐδῶ ὅτι ὁ συνεργὸς τοῦ δευτέρου μέρους εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν ῥιζῶν $\pi+\rho$, καὶ τὸ τρίτον, τὸ παραγόμενον αὐτῶν $\pi\rho$· ὅθεν λύομεν καὶ αὐτοῦ τὰς αὐτὰς ἐξισώσεις, ὅταν τὸ τρίτον μέρος λύσωμεν εἰς παράγοντος, καὶ τὸ κεφάλαιον τούτων τῶν παραγόντων εἶναι ἴσον τῷ συνεργῷ τοῦ δευτέρου μέρους. Οὕτως εἰς τὴν ἐξίσωσιν, $\chi^2-5\chi+6$ εἶναι $\chi=2$ καὶ $\chi=3$· διότι $2.\ 3=6$, καὶ $2+3=5$· καὶ ἔτι εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2-17\chi+60$ εἶναι $\chi=5$ καὶ $\chi=12$ διότι $5.\ 12=60$, καὶ $5+12=17$.

§. 429. Ἐμάθωμεν ἔτι τί γίνεται, ἐὰν ἡ μία τῶν ῥιζικῶν καταφατικὴ, ἡ δὲ ἀποφατικὴ οὕτω, $\chi=\pi$. καὶ $\chi=-\rho$. διότι τότε οἱ παράγοντες εἶναι $(\chi-\pi)(\chi+\rho)$. καὶ ἐνεργείᾳ ἡ ἐξίσωσις οὕτω

$$\begin{array}{l} \chi-\pi \\ \underline{\chi+\rho\quad} \\ \chi^2-\pi\chi \\ \underline{\quad\;\;+\rho\chi-\pi\rho} \\ \chi^2-(\pi-\rho)\chi-\pi\rho \end{array}$$

Αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι τὸ τρίτον μέρος $\pi\rho$ ἀεὶ ἀποφατικὸν τὸ δὲ δεύτερον, ἐὰν τὸ ρ ἔλαττον τοῦ π ἀποφατικὸν, ἐὰν δὲ τὸ ρ μεῖζον τοῦ π, καταφατικὸν, διότι ἐὰν μεῖζον τὸ ρ, καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ π, μένει διαφορὰ ἀποφατικὴ οὕτω $\pi-\rho=-\delta$. καὶ λοιπὸν $-(\pi-\rho)=-(-\delta)=+\delta$. διὰ τοῦτο λοιπὸν τὸ δεύτερον μέρος εἶναι εἰς τοὺς παράγοντας αὐτοὺς, καὶ καταφατικὸν, καὶ ἀποφατικόν. Ἡμεῖς ὅμως, ὅταν ἴδωμεν τὸ τρίτον μέρος ἀποφατικὸν κρίνομεν ὅτι τὸ χ ἔχει δύω τιμὰς, τὴν μὲν καταφατικὴν, τὴν δὲ ἀποφατικήν. Ἔτι τὸ τρίτον μέρος καὶ αὐτοῦ εἶναι παραγόμενον τῶν δύω τιμῶν τοῦ χ. ὁ δὲ συνεργὸς τοῦ δευτέρου μέρους εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο παραγόντων· ὅθεν λύομεν καὶ αὐτὰς τὰς ἐξισώσεις εὐκόλως, ἐὰν πρῶτον λύσωμεν τὸ τρίτον μέρος τῆς ἐξισώσεως εἰς δύο παράγοντας, καὶ ἀφέλωμεν τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὅταν τὸ δεύτερον καταφατικὸν, καὶ μείνῃ ἡ διαφορὰ ἴση τῷ συνεργῷ τοῦ δευτέρου μέρους, ἢ ὅταν τὸ δεύτερον μέρος ἀποφατικὸν ἀφέλωμεν τὸν μείζονα συνεργὸν τοῦ ἐλάσσονος, καὶ μείνῃ διαφορὰ ἴση τῷ τοῦ δευτέρου μέρους συνεργῷ· διότι τότε οἱ δύο παράγοντες εἶναι αἱ δύο τιμαὶ τοῦ χ, καὶ ὁ ἀφαιρετέος παράγων εἶναι ἡ καταφατικὴ ῥίζα, ὁ δὲ μειωτέος ἡ ἀποφατική; ὡς ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-\chi-30=0$ εἶναι $\chi=5$, καὶ $\chi=-6$. διότι $5.\ -6=-30$: καὶ $5-6=-1$ ἀδιαφοροῦντες εἰς τὰ σημεῖα· ὁμοίως καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2+\chi-56=0$ εἶναι τὸ $\chi=7$, καὶ $\chi=-8$. διότι $7.\ 8=56$, καὶ $8-7=+1$. καὶ οὕτως εὐκόλως λύομεν ὅλας τὰς σειρὰς καὶ τὰ προβλήματα τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ὅταν ἡ ἄγνωστος χ ἔχῃ τιμὰς εἰς ὁλοσχερεῖς ἀριθμούς· τὰ δὲ σημεῖα εὐκόλως διορίζονται τῶν ῥιζῶν, ὅταν τὸ ἔσχατον μέρος τῆς ἐξισώσεως ἀποφατικὸν, τότε μόνον ἔχει τὸ χ δύο τιμὰς, τὴν μὲν καταφατικὴν, τὴν δ' ἀποφατικήν· ὅταν δὲ τὸ ἔσχατον καταφατικὸν, ἐὰν μὲν καὶ τὸ δεύτερον καταφατικὸν, ἔχει τὸ χ τὰς δύο τιμὰς ἀποφατικάς· ἐὰν δὲ τὸ δεύτερον ἀποφατικὸν, ἔχει τὰς δύο τιμὰς καταφατικάς.

§. 430. Ἐὰν δὲ τὸ ἔσχατον μέρος τετράγωνον, καὶ οἱ δύο παράγοντες εἰς ἓν κεφάλαιον ἀποτελοῦσι τὸν συνεργὸν τοῦ δευτέρου μέρους, αἱ δύο τιμαὶ τοῦ χ εἶναι ἴσαι· τὰ δὲ σημεῖα ὡς ἄνω (§. 429) διορίζονται, ὡς $\chi^2-10\chi+25=0$ εἶναι $\chi=5$ καὶ $\chi=5$. διότι ἡ ἄνω ἐξίσωσις ἐκ τῶν παραγόντων $(\chi-5)(\chi-5)$ γίνεται· ὁμοίως καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2+14\chi+49=0$ εἶναι $\chi=-7$, καὶ $\chi=-7$.

§. 431. Ἐὰν δὲ τὸ τρίτον μέρος λυθῇ διαφόρως εἰς δύο παράγοντας, καὶ οἱ δύω ὁμοῦ, ἢ ἡ διαφορὰ αὐτῶν, δὲν ἀποτελοῦσι τὸν συνεργὸν τοῦ δευτέρου μέρους, τότε αἱ ῥίζαι τοῦ χ εἶναι ἄλογοι, καὶ λύεται ἡ ἐξίσωσις διὰ τῆς προσεγγίσεως εἰς δεκαδικὰ, περὶ ἧς ὕςερον· ὡς ἡ ἐξίσωσις αὕτη $\chi^2-10\chi+12$, ἧς τὸ ἔσχατον μέρος 12 λύεται εἰς 2. 6 καὶ εἰς 3. 4. ἀλλὰ μήτε $2+6=10$, μήτε $3+4=10$· ἄρα ἡ ῥίζα ταύτης ἄλογος· διότι

$$\chi^2-10\chi=-12$$
$$\chi^2-10\chi+25=25-12$$
$$\chi-5=\pm\sqrt{(25-12)}$$
$$\chi=5\pm\sqrt{13}$$

Πῶς ὅμως εὑρίσκομεν καὶ τὰς τιμὰς τοῦ χ ἐὰν ὦσι κλασματικαὶ, οὐ τοῦ παρόντος καιροῦ.

§. 432. Πολλάκις συμβαίνει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χ ἀδύνατος ποσότης, καὶ τότε τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον· ὡς ὅταν τις εἴπῃ, τμηθήτω ὁ 12 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥςε τὸ παραγόμενον αὐτῶν νὰ εἶναι 40· θῶμεν λοιπὸν τὸ ἓν μέρος χ, ἄρα τὸ ἕτερον $12-\chi$, καὶ τὸ παραγόμενον $12\chi-\chi^2=40$, ἤτοι

$$\chi^2-12\chi=-40$$

$$\chi^2-12\chi+36=36-40$$

$$\chi-6=\sqrt{-4}$$

καὶ $\chi=6\pm\sqrt{-4}$

ἀριθμὸς ἀδύνατος, καὶ ἐπομένως τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀδύνατον· διότι οὐδέποτε ἔχει ὁ 12 δύο μέρη, ὧν τὸ παραγόμενον $=40$· λοιπὸν διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, πότε εἶναι ἀδύνατοι, πρέπει πάλιν τὸν τύπον αὐτῆς $\chi^2-\beta\chi+\gamma=0$ νὰ ἐξετάσωμεν, οὕτω

$$\chi^2-\beta\chi=-\gamma$$

$$\chi^2-\beta\chi+\frac{\beta^2}{4}=\frac{\beta^2}{4}-\gamma$$

$$\chi-\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{(\frac{\beta\beta}{4}-\gamma)}=\pm\sqrt{(\frac{\beta\beta-4\gamma}{4})}$$

Καὶ ἐκ τούτου μανθάνομεν ὅτι ὅταν τὸ γνωςὸν μέρος εἶναι καταφατικὸν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἀχθεῖσαν εἰς τὸ μηδενικὸν, καὶ τὸ τετραπλάσιον τούτου εἶναι μεῖζον τοῦ τετραγώνου τοῦ συνεργοῦ τοῦ δευτέρου μέρους, ἀεὶ ἡ ῥίζα τοῦ χ εἶναι ἀδύνατος καὶ φανταςική, καὶ ἐπομένως τὸ πρόβλημα ἀδύνατον, ὡς ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-10\chi+30=0$, ἡ τιμὴ τοῦ χ ἀδύνατος· διότι $4.\ 30>10.\ 10$· ὁμοίως καὶ εἰς αὐτὴν $\chi^2-6\chi+11=0$· διότι $4.\ 11>6^2$· διὰ νὰ γνωρίσωμεν δὲ καὶ τὰς ἐξισώσεις, ὧν τὸ τετράγωνον τῆς ἀγνώςου ἔχει συνεργὸν, πρὶν νὰ κάμωμεν ἄλλην τινὰ ἐργασίαν ἐπ᾽ αὐτῆς, πότε εἶναι ἀδύνατοι, εἰλήφθω ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha\chi^2 \pm \beta\chi + \gamma = 0$$

$$\chi^2 \pm \frac{\beta}{\alpha}\chi + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

καὶ $$\chi^2 \pm \frac{\beta}{\alpha}\chi = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\chi^2 \pm \frac{\beta}{\alpha}\chi + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\chi \pm \frac{\beta}{2\alpha} = \pm\sqrt{\left(\frac{\beta\beta}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}\right)} = \pm\sqrt{\left(\frac{\beta\beta-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right)}$$

$$\chi = \mp\frac{\beta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\beta\beta-4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{\mp\beta \pm \sqrt{(\beta\beta-4\alpha\gamma)}}{2\alpha}$$

Καὶ ἐκ τούτου φανερὸν ὅτι ἐὰν τὸ τετραπλοῦν παραγόμενον ἀπὸ τοῦ συνεργοῦ τοῦ πρώτου μέρους ἐπὶ τὸ τρίτον εἶναι μεῖζον τοῦ τετραγώνου τοῦ συνεργοῦ τοῦ δευτέρου μέρους, ἡ ἐξίσωσις ἀδύνατος· οὕτως εἶναι ἀδύνατος αὕτη ἡ ἐξίσωσις $3\chi^2-5\chi+4=0$· διότι $4.\ 3.\ 4>5^2$. καὶ αὕτη $2\chi^2+9\chi+11=0$· διότι $4.\ 2.\ 11>9^2$. πλὴν καὶ εἰς αὐτὰς τὰς ἐξισώσεις τὸ μὲν κεφάλαιον τῶν δύο τιμῶν τοῦ χ εἶναι ὁ συνεργὸς τοῦ δευτέρου μέρους· τὸ δὲ παραγόμενον τὸ τρίτον μέρος. Εὑρεθήτωσαν αἱ τιμαὶ τοῦ χ τῆς ἐξισώσεως

$$\chi\chi-6\chi=-10$$

$$\chi\chi-6\chi+9=9-10$$

$$\chi-3=\pm\sqrt{-1}$$

καὶ $\chi=3+\sqrt{-1}$

καὶ $\chi=3-\sqrt{-1}$

ἄρα αἱ δύω τιμαὶ τοῦ χ εἶναι $3+\sqrt{-1}$ καὶ $3-\sqrt{-1}$, ἐὰν αὐτὰς συνάψωμεν,

$$\begin{array}{l} 3+\sqrt{-1} \\ 3-\sqrt{-1} \\ \hline 6 \end{array}$$

εὑρίσκεται ὁ συνεργὸς τοῦ δευτέρου μέρους· ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν, εὑρίσκεται τὸ τρίτον οὕτω

$$\begin{array}{l} 3+\sqrt{-1} \\ 3-\sqrt{-1} \\ \hline 9+3\sqrt{-1} \\ \quad -3\sqrt{-1}-(-1)=1 \\ \hline 9+11=0 \end{array}$$

Καὶ ὁ ἀνωτέρω κανὼν γενικὸς, ὅστις καὶ εἰς αὐτὰς ἁρμόζει τὰς φανταστικὰς (§. 427.).

§. 433. Ἐπειδὴ καὶ κάθε τετραγωνικὴ ἐξίσωσις ἀπὸ δύω παραγόντων συνίσταται, ὅταν ἔλθῃ εἰς τὸ μηδενικὸν (§. 425), καὶ ἕκαστος τούτων ἔχει τὸ ἄγνωστον καὶ μίαν ῥίζαν· ἐὰν ἄρα μίαν τῶν ῥιζῶν ἔχωμεν, μὲ ἐναντίου σημείου συνάπτομεν αὐτὴν τῇ ἀγνώστῳ εἰς ἕνα παράγοντα, καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἕτερον παράγοντα, ἐὰν δηλ: ἔχωμεν μίαν τιμὴν τοῦ $\chi=\rho$, ἔχομεν $\chi-\rho=0$ τὸν ἕνα παράγοντα τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς $\chi^2-(\pi+\rho)+\pi\rho=0$. διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸν ἕτερον παράγοντα αὐτῆς, διαιροῦμεν αὐτὴν ὡς ἐμάθομεν (§. 142) οὕτω,

$$\begin{array}{l} \chi^2-(\pi+\rho)\chi+\pi\rho=0 \\ \chi^2-\pi\chi-\rho\chi+\pi\rho=0 : \chi-\rho=\chi-\pi \\ \chi^2 \quad -\rho\chi \\ - \quad\; + \\ \hline \quad -\pi\chi+\pi\rho \\ \quad -\pi\chi+\pi\rho \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

καὶ τὸ πηλίκον $\chi-\pi$ εἶναι ὁ ἕτερος παράγων. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἐξίσωσις $=0$, καὶ οἱ παράγοντες ἴσοι μηδενί· ἄρα καὶ $\chi-\pi=0$, καὶ $\chi=\pi$. καὶ τοῦτο τὸ π ἡ ἑτέρα τιμὴ τοῦ χ. οὕτω καὶ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-6\chi+5=0$, ἔχομεν γνωστὴν τὴν μίαν τιμὴν τοῦ $\chi=5$. ἄρα $\chi-5=0$ διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν δι' αὐτοῦ,

$$\begin{array}{l}
\chi^2-6\chi+5 : \chi-5=\chi-1 \\
\chi^2-5\chi \\
-\ \ + \\
\hline
\quad -\chi-5 \\
\quad -\chi-5 \\
\quad +\ \ + \\
\hline
\qquad 0
\end{array}$$

καὶ εὕρομεν τὸν ἕτερον παράγοντα $\chi-1$, καὶ ἑπομένως καὶ τὴν ἑτέραν τιμὴν τοῦ $\chi=1$. καὶ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+15\chi+36$ ἔχομεν τὴν μίαν τιμὴν τοῦ $\chi=-12$ ἄρα ὁ παράγων $\chi+12=0$, καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦμεν

$$\begin{array}{l}
\chi^2+15\chi+36 : \chi+12=\chi+3 \\
\chi^2+12\chi \\
-\ \ - \\
\hline
\quad 3\chi+36 \\
\quad 3\chi+36 \\
\quad -\ \ - \\
\hline
\qquad 0
\end{array}$$

καὶ εὕρηται ὁ ἕτερος παράγων $\chi+3=0$, καὶ ἡ ἑτέρα τιμὴ τοῦ $\chi=-3$. καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον, ἐὰν ἡ μία τιμὴ δοθῇ, εὑρίσκομεν τὴν ἑτέραν.

§. 434. Μένει ἤδη νὰ μάθωμεν πῶς εὑρίσκομεν μόνον τὴν μίαν τιμὴν τοῦ χ εἰς μίαν ἐξίσωσιν· διότι ἐὰν τὴν μίαν εὕρωμεν, κατὰ τὸ (§. 433.) εὑρίσκομεν καὶ τὴν ἑτέραν· τοῦτο δὲ γίνεται, ὅταν ἔλθῃ ἡ ἐξίσωσις εἰς τὸ μηδενικόν. Ἐὰν λοιπὸν θῶμεν $\chi=1$, $\chi=2$, $\chi=3$ κτ: καταφατικῶς καὶ ἀποφατικῶς εἰς τὴν ἐξίσωσιν, καὶ συναφθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ τῆς ἐξισώσεως καὶ γένῃ ὅλη $=0$· φανερὸν ὅτι ἐκείνη ἡ τιμὴ τοῦ χ, ὅπου ποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν $=0$, εἶναι ἡ ζητουμένη. Ἔςω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-10\chi-24=0$· θῶμεν $\chi=1$, καὶ $\chi=-1$· καὶ ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης ὑποθέσεως γίνεται $1-14-24=-33$· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας $1+10-24=-13$· ἄρα ἡ τιμὴ τοῦ χ οὔτε $+1$, οὔτε -1 εἶναι· θῶμεν πάλιν $\chi=2$, καὶ $\chi=-2$· καὶ ἐκείνως μὲν ἡ ἐξίσωσις εἶναι $4-20-24=-40$· οὕτω δὲ $4+20-24=0$· καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις γέγονεν ἴση μηδενὶ, ὅταν τὸ $\chi=-2$ ἐλάβομεν, ὁ -2 εἶναι ἡ μία τιμὴ τοῦ χ, καὶ ὁ εἷς παράγων $\chi+2=0$· δι' αὐτοῦ διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\begin{array}{l}
\chi^2-10\chi-24 : \chi+2=\chi-12, \\
\chi^2+2\chi \\
-\;- \\
\hline
0-12\chi-24 \\
\;\;-12\chi-24 \\
\;\;+\quad\;+ \\
\hline
\quad 0
\end{array}$$

καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἕτερον παράγοντα $\chi-12=0$, καὶ ἡ ἑτέρα τιμὴ τοῦ $\chi=12$.

„Ἔςω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-\frac{3}{5}\chi-\frac{2}{5}=0$· θῶμεν $\chi=1$, καὶ ἔσαι ἡ ἐξίσωσις $1-\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=1-1=0$· ἄρα ἡ μία τιμὴ τοῦ $\chi=1$, καὶ ὁ παράγων $\chi-1$· λοιπὸν διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$
\begin{array}{l}
x^2-\frac{3}{5}x-\frac{2}{5} : x-1=x+\frac{2}{5} \\
\underline{\begin{array}{l} x^2-x \\ -\;+ \end{array}} \\
\qquad x-\frac{3}{5}x=\frac{5}{5}x-2x=\frac{2}{5}x-\frac{2}{5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\begin{array}{l} \frac{2}{5}x-\frac{2}{5} \\ -\;+ \end{array}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

καὶ ὁ ἕτερος εὑρίσκεται παράγων $x+\frac{2}{5}=0$, καὶ ἡ ἑτέρα τιμὴ τοῦ $x=-\frac{2}{5}$· καὶ οὗτος ὁ τρόπος χρησιμεύει μάλιστα εἰς τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων τῶν ὑψηλοτέρων βαθμῶν, εἰς τὰς ἐξισώσεις ὅμως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἶναι περιττὸς, διότι οἱ πρότεροι τρόποι εἶναι οἱ εὐκολώτεροι, καὶ οἱ συνηθέστεροι. Ταῦτα δὲ ἐτέθησαν, μόνον διὰ νὰ γένωσιν ἀπαρχαὶ εἰς τὰς λύσεις τῶν ὑψηλοτέρων βαθμῶν.

§. 435. Ἓν μόνον ἔτι ἐνταῦθα σημειοῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς, ὅπου λαμβάνεται καταφατικῶς, καὶ ἀποφατικῶς ἀντὶ τοῦ x, καὶ δοκιμάζεται, ἂν ἡ ἐξίσωσις εἰς τὸ μηδενικὸν καταντᾷ, ἀναγκαίως πρέπει νὰ εἶναι ἕνας παράγων τοῦ ἐσχάτου μέρους· καὶ διὰ νὰ μὴ ματαιοπονῶμεν, ἀποδοκιμάζομεν ἐκείνους, ὅπου δὲν εἶναι παράγοντες, ὡς ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $x^2-10x+21$ ὁ 3 καὶ 7, καὶ 1, καὶ 21 δοκιμάζονται μόνον· ὁ δὲ 2 οὐχί· διότι δὲν εἶναι παράγων τοῦ 21, οὔτε ὁ 4, 5, 6 κτλ. Ἐὰν τοίνυν θῶμεν $x=1$, καὶ $x=-1$, ἔσται ἐκείνως μὲν, $1-10+21=12$·

οὕτως δὲ, $1+10+21=32$· ἐὰν δὲ $x=3$, ἢ $x=-3$, ἴσαι ἐκείνως $9-30+21=0$· καὶ ἔχομεν $x=3$, καὶ ὁ παράγων $x-3$ι καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν, καὶ εὑρίσκεται ὁ ἕτερος παράγων.

$$
\begin{array}{l}
x^2-10x+21 : x-3=x-7 \\
x^2-3x \\
-\ \ + \\
\hline
-7x+21 \\
-7x+21 \\
+\ \ - \\
\hline
0
\end{array}
$$

καὶ ἡ ἑτέρα τιμὴ τοῦ $x=7$· οὗτος ὁ τρόπος λίαν χρήσιμος, ὅταν τὸ ἔσχατον μέρος λύεται εἰς πολλοὺς παράγοντας, ὡς εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2+11x+30$· διότι οἱ παράγοντες τοῦ 30 εἶναι 1. 30, καὶ 2. 15, καὶ 3. 10, καὶ 5. 6. ὅθεν δοκιμάζομεν $x=1$ καὶ $=-1$· καὶ ἡ ἐξίσωσις εἶναι $1+11+30=42$ καὶ $1-11+30=20$· δοκιμάζομεν ἔτι $x=2$. καὶ $=-2$, καὶ ἡ ἐξίσωσις $4+2.11+30=56$· καὶ $4-22+30=12$· δοκιμάζομεν ἔτι $x=3$, ἢ $=-3$, ἡ ἐξίσωσις εἶναι $9+33+30=72$, καὶ $9-33+30=6$· δοκιμάζομεν, τέλος. $x=5$ καὶ $=-5$· καὶ γίνεται ἡ ἐξίσωσις $25+55+30=110$, καὶ $25-55+30=0$· ἄρα ἡ μία τιμὴ τοῦ $x=-5$· καὶ ὁ παράγων $x+5$, καὶ διαιρουμένης τῆς ἐξισώσεως

$$
\begin{array}{l}
x^2+11x+30 : x+5=x+6, \\
x^2+5x \\
-\ \ - \\
\hline
6x+30 \\
6x+30 \\
-\ \ - \\
\hline
0
\end{array}
$$

ἐξέρχεται ὁ ἕτερος παράγων $x+6=0$, καὶ $x=-6$ ὁ ἕτερος παράγων, καὶ περὶ τούτων ἱκανά.

ΚΕΦΑ΄ΛΑΙΟΝ Β΄.

Περὶ Εὑρέσεως προβλημάτων.

§. 436. Μέχρι τοῦδε ἐμάθομεν πῶς τὰ δοθέντα προβλήματα κατὰ τὰς συνθήκας αὐτῶν λύομεν· εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον καταγινόμεθα μόνον νὰ κατασκευάζωμεν ἡμεῖς ἀφ' ἑαυτῶν προβλήματα, καὶ νὰ τὰ προβάλλωμεν εἰς τοὺς ἄλλους· διότι πολλοὶ ἐρωτοῦσι, πῶς ἄρα γε καὶ ἡμεῖς κατασκευάζειν προβλήματα δυνάμεθα; διὰ νὰ ἀναπαύσωμεν λοιπὸν καὶ εἰς τοῦτο τοὺς ἀκροατάς μας, τολμῶμεν εἰς τὸ παρὸν νὰ ἐκθέσωμεν τὴν γνώμην μας, ὡσὰν ὁποῦ οἱ μαθηματικοὶ, ὅσους ἡμεῖς ἀνέγνωμεν, οὐδὲν εἶπον περὶ αὐτοῦ· ὅθεν διὰ νὰ βαδίσωμεν καθ' ὁδὸν, πρέπει πρῶτον νὰ μάθωμεν προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ νὰ κατασκευάζωμεν, καὶ ἔπειτα τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

§. 437. Εἰς ὅλα τὰ προβλήματα, ὁποῦ μέχρι τοῦδε ἐλύσαμεν, δὲν εὑρίσκομεν ἄλλο, εἰ μὴ νὰ εὕρωμεν ἑναδήποτε ἀριθμὸν, ὅστις διαφόρως συναπτόμενος ἀφαιρούμενος, ἢ ἄλλως πως μεταβαλλόμενος νὰ εἶναι ἴσος τῷ δοθέντι ἀριθμῷ, ὡς εἰς τὰ προβλήματα τῶν διαθηκῶν, καὶ ἄλλων πολλῶν, ἄλλοτε ὁ μὲν ἀριθμὸς οὐ δίδεται, ἀλλὰ ζητεῖται, δίδονται δὲ τὰ μέρη αὐτῶν, ἢ ἁπλῶς, ἢ μετασχηματισμένα μὲ τὰ σημεῖα $+, -, \times, :$ κτλ., καὶ ἐκ τῆς ἐπεξεργασίας τούτων τῶν σημείων εὑρίσκεται ὁ ζητούμενος ὅλος ἀριθμὸς, ὡς εἰς τὰ καρπούζια, καὶ εἰς ἄλλα προβλήματα ἀριθμός τις ζητεῖται διαφόρως περιπεπλεγμένος νὰ εἶναι ἴσος μὲ ἕνα δοθέντα, καὶ αἱ περιπλοκαὶ αὗται εἶναι αἱ συνθῆκαι τῶν προβλημάτων. Αὐτὰς δὲ τὰς συνθήκας, ἢ τὰς περιπλοκὰς τὰς ἐκφράζουσιν οἱ τεχνικοὶ μὲ τὰ πράγματα τοῦ κόσμου, ὅποια θέλουσιν. οὕτως εἰς τὸ πρόβλημα τῶν καρπουζίων (§. 173.) ἤτου νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμὸν, ὅπου νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ, τεταρτημόριον, ὀκτημόριον αὐτοῦ, καὶ ἔτι 120. αὐτὰς δὲ τὰς συνθήκας τὰς ἐξέφρασα ἐγὼ, ὅτι ἐκεῖνος τὰ μισὰ ἐπώλησε, τὸ τεταρτημόρια ἔλαβεν ὁ κτήτωρ, τὸ ὀκτημόριον ἔφαγε, καὶ 120 ἔχει· ὅθεν διὰ νὰ συνθέσῃ τις ἓν πρόβλημα, πρέπει νὰ καταςρώσῃ μίαν ἐξίσωσιν μὲ μέρη διάφορα, καὶ εἰς αὐτὰ νὰ εὑρίσκηται ἓν μόνον ἄγνωςον, καὶ κατὰ τὰ μέρη ταῦτα νὰ ἐκφράζῃ τὸ πρόβλημα, ἔςω ἐπὶ παραδείγματος αὕτη ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{2}-10+\frac{x}{5}+40=37$. καὶ ἐξ αὐτῆς παράγω διάφορα προβλήματα.

Π ρ ό β λ η μ α Α΄.

„Εὑρεθήτω ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥςε τὸ κεφάλαιον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ ἡμίσεως, καὶ τοῦ 10, καὶ τοῦ κεφαλαίου τοῦ πεμπτημορίου αὐτοῦ, καὶ τοῦ 40 νὰ εἶναι $=47$.

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ, ἐὰν τὸ μέρος -10 εἰς τὸ ἕτερον σκέλος φέρωμεν, οὕτω $\frac{x}{2}+\frac{x}{5}+40=47$· καὶ ἐξ αὐτῆς.

Π ρ ό β λ η μ α Β΄.

„Εὑρεθήτω ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥςε ἐὰν τὸν μισὸν, καὶ τὸ πεμπτημόριον αὐτοῦ τῷ 40 προσθῶμεν, τὸ κεφάλαιον νὰ εἶναι $=47$. ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις καὶ οὕτω δὲν χαλᾷ

$$\frac{\chi}{2}+40=47-\frac{\chi}{3}.$$ καὶ ἐξ αὐτῆς.

Π ρ ο β λ η μ α Γ'.

„Τίς ἂν εἴη ὁ ἀριθμὸς, καθ' ὃν τὸ κεφάλαιον τοῦ 40 πλὴν τοῦ πεμπτημορίου αὐτοῦ; ἀλλ' αὕτη καὶ οὕτω μεταποιεῖται,

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{5}+40=47$$

$$\frac{5\chi}{2}+\chi+200=235$$

$$2\chi+\frac{\chi}{2}+\chi+200=235$$

$$\chi+\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{2}+100=117\frac{1}{2}$$

$$\chi+\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{2}=17\frac{1}{7}$$

Π ρ ό β λ η μ α Δ'.

„Εὑρεθήτω ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὅςις μὲ τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τεταρτημόριον αὐτοῦ τὸν $17\frac{1}{2}$ ἀποτελεῖ;

Ἀλλὰ καὶ οὕτω μεταποιεῖται $\chi=17\frac{1}{2}-\frac{\chi}{2}-\frac{\chi}{4}$.

Π ρ ό β λ η μ α Ε'.

„Εὑρεθήτω ἀριθμὸς ἴσος τῷ $17\frac{1}{2}$, ἀφ' οὗ ἀφέλωμεν ἀπ' αὐτοῦ τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τεταρτημόριον τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Ἀλλὰ καὶ ἡ $\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{5}+40=47$, γίνεται καὶ $\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{7}=7$ (Πρόβλ: Α'.)

Πρόβλημα Ϛ'.

„Εὑρεθήτω ἀριθμος, ὅςις ἐὰν διὰ 2 καὶ διὰ 5 διαιρεθῇ, τὸ κεφάλαιον τῶν πηλίκων νὰ εἶναι $=7$. καὶ ἄλλα πλεῖςα ἀπ' αὐτῆς μόνης τῆς ἐξισώσεως παράγω προβλήματα, καὶ μάλιςα ὅταν τὸ γνωςὸν μέρος γενικὸν γράμμα λάβω· ὅθεν δύναμαι ὅλα αὐτὰ τὰ προβλήματα νὰ ἐκφράσω μὲ ὑποθέσεις πολιτικὰς, φυσικὰς, καὶ ἄλλων διαφόρων εἰδῶν.

§. 438. Οὕτω λαμβάνω ἀορίςως

$$\frac{\dfrac{2\chi-\beta=\alpha}{\chi+\chi-\beta=\alpha}}{\chi=\alpha-\chi+\beta}$$

Ἐνταῦθα βλέπω ὅτι τὸ χ εἶναι μεγαλήτερον κατὰ τὸ β ἀπὸ τὴν διαφορὰν τοῦ α, πλὴν τοῦ χ, καὶ μόνον τὸ α καὶ β γνωςὸν καὶ λέγω.

Πρόβλημα Ζ'.

Δίελε τὸ α εἰς δύο τοιαῦτα μέρη, ὥςε τὸ ἓν τούτων νὰ ὑπερέχῃ τὸ ἕτερον κατὰ τὸ β. καὶ τῷ ὄντι τὸ ἓν μέρος χ, καὶ τὸ ἕτερον $\alpha-\chi$. ἄρα $\chi-(\alpha-\chi)=\beta$ ἡ δ' ἐξίσωσις $\chi=(\alpha-\chi)+\beta$ γίνεται $2\chi-\beta=\alpha$· ὅθεν.

Πρόβλημα Η'.

Εὑρεθήτω ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥςε ἐὰν ἐκ τοῦ διπλοῦ αὐτοῦ τὸ β ἀφέλῃς, νὰ εἶναι τὸ λείψανον $=\alpha$.

ἐὰν δὲ τὸ $\alpha=10000$, καὶ τὸ $\beta=1000$, ἔςαι

$$\frac{2x-1000=10000}{12x-6000=60000}\cdot 6$$

$$\overline{x+2x+5x+4x-6000=6000}$$

$5x-1000+4x-2000+2x-3000+x=60000$ ἤτοι
$x+2x-3000+4x-2000+5x-1000=60000.$

Π ρ ό β λ η μ α Θ΄.

Δίελε τὸν ἀριθμὸν $\alpha=60000$ εἰς β μέρη $=4$, ὥςε τὸ δεύτερον μέρος νὰ νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ πρώτου, πλὴν 3000, τὸ τρίτον νὰ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ πρώτου, πλὴν 2000, καὶ τὸ τέταρτον πενταπλάσιον, πλὴν 1000.

Ληφθήτω ἔτι ἡ ἐξίσωσις; $\frac{5x=200}{5}$

$$\frac{-x=100}{2}$$

$$\overline{2x+\frac{x}{2}=80+20}$$

$$\overline{x+x+\frac{x}{2}=80+20}$$

$$x+\frac{x}{2}=20=80-x$$

Π ρ ό β λ η μ α Ι.

Ἑυρεθήτω ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥςε μετὰ τοῦ ἡμίσεως, νὰ ὑπερέχῃ ἐπίσης τὸν 20, ὡς καὶ ὁ 80 αὐτὸν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν· ἐὰν δὲ καὶ τὴν ἐξίσωσιν οὕτω ποιήσωμεν

$2x-20=80-\frac{1}{2}x$, λέγομεν ὅτι εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ διπλοῦ, πλὴν 20, ὡς ἡ διαφορὰ τοῦ 80, πλὴν τοῦ ἡμίσεως. Ἔτι ἡ αὐτὴ

$$\begin{array}{l} 5x=200 \\ \underline{-6x=-6x} \\ -x=200-6x \\ \underline{+50=+50} \\ 50-x=250-6x \end{array}$$

Πρόβλημα ΙΑ΄.

„Εὑρεῖν ἀριθμὸν, οὗ ἐπίσης ὁ 50 ὑπερέχει, ὡς τὸν 250. τὸ ἑξαπλοῦν αὐτοῦ˙ καὶ πάμπολλα ἄλλα προβλήματα συνθέτει, ἐὰν ἄλλας λάβῃ ἐξισώσεις, καὶ ποικιλλαχῶς αὐτὰς μεταχειρισθῇ κατὰ τὸν τρόπον τὸν αὐτόν.

§. 439. Διὰ νὰ συνθέσωμεν δὲ καὶ προβλήματα τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, πρέπει πρῶτον ἐξισώσεις τοιαύτας νὰ συνθέσωμεν, λαμβάνοντες ἀντὶ x ἀριθμοὺς, οἵους ἡμεῖς θέλομεν˙ ἐπειδὴ ἐμάθομεν ὅτι ἑκάστη ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ συνίσταται ἀπὸ δύο παράγοντας (§. 425.) διμερεῖς, καὶ ἕκαστος ἔχει εἰς τὸ πρῶτον μέρος τὴν ἄγνωστον ποσότητα x, καὶ εἰς τὸ ἕτερον μέρος μίαν τῶν δύο ῥιζῶν μὲ τὸ ἐναντίον σημεῖον. Ὅθεν εὐκόλως συνθέτομεν ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ ῥίζας διαφόρους, καὶ καταφατικὰς, καὶ ἀποφατικὰς, καὶ ἀκεραίας, καὶ κλασματικὰς, καὶ λογικὰς, καὶ ἀλόγους, καὶ ἀδυνάτους, θέτοντες τὸ x ἴσον τῇ ῥίζῃ, καὶ εἶτα δι' ἐναντίου σημείου $=0$˙ καὶ οὕτως ἐκ δύο τοιούτων παραγόντων πολλαπλασιαζομένων ἐξίσωσις τετραγωνικὴ γίνεται (§. 426.)˙ καὶ διὰ νὰ γένωσι τὰ λεγόμενα φανερὰ, φέρε καὶ διὰ παραδειγμάτων αὐτὰ ἀναπτύξωμεν.

ἔςω $x=3$ καὶ $x=5$· ἄρα $x-3=0$ καὶ $x-5=0$

καὶ

$$\begin{array}{r} x-3 \quad \mathrm{A} \\ x-5 \\ \hline x^2-3x \qquad \\ -5x+15 \\ \hline x^2-8x+15 \end{array}$$

ἐξίσωσις τετραγωνική. Ἔτι $x=-10$, $x=-12$· ἄρα $x+10=0$ καὶ $x+12=0$ καὶ

$$\begin{array}{r} x+10 \quad \mathrm{B} \\ x+12 \\ \hline x^2+10x \qquad \\ +12x+120 \\ \hline x^2+22x+120=0 \end{array}$$

ἐξίσωσις τετραγωνική. Ἔτι $x=-5$ καὶ $x=7$· ἄρα $x+5=0$ καὶ $x-7=0$ καὶ

$$\begin{array}{r} x+5 \quad \Gamma \\ x-7 \\ \hline x^2+5x \qquad \\ -7x-35 \\ \hline x^2-2x-35=0 \end{array}$$

Ἔτι $x=\frac{2}{3}$ καὶ $x=-1$· ἄρα $x-\frac{2}{3}=0$ καὶ $x+1=0$

λοιπὸν

$$\begin{array}{r} x-\frac{2}{3} \quad \Delta \\ x+1 \\ \hline x^2-\frac{2}{3}x \qquad \\ =x-\frac{2}{3} \\ \hline x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}=0 \end{array}$$

Ἔτι $x=\frac{3}{5}$· καὶ $x=\frac{2}{3}$· ἄρα καὶ $x-\frac{3}{5}=0$ καὶ $x-\frac{2}{3}=0$

λοιπὸν $x-\frac{3}{5}$ Ε

$$
\begin{array}{l}
x-\frac{3}{5} \\
x-\frac{2}{3} \\
\hline
x^2-\frac{3}{5}x \\
\quad -\frac{2}{3}x+\frac{6}{15} \\
\hline
x^2-\frac{19}{15}x+\frac{2}{5}=0
\end{array}
$$

Ἔτι $x=3+\sqrt{-3}$ καὶ $x=3-\sqrt{-3}$· ἄρα $x-3-\sqrt{-3}=0$ καὶ $x-3+\sqrt{-3}=0$· ὅθεν

$$
\begin{array}{l}
x-3-\sqrt{-3} \qquad Ϛ \\
x-3+\sqrt{-3} \\
\hline
x^2-3x-x\sqrt{-3} \\
\quad -3x+3\sqrt{-3}+9 \\
\qquad +x\sqrt{-3}-3\sqrt{3}+3 \\
\hline
x^2-6x+9+3=x^2-6x+12=0
\end{array}
$$

§. 440. Διὰ νὰ ἐφεύρωμεν λοιπὸν προβλήματα τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, πρέπει πρῶτον νὰ ὑποθέσωμεν δύο τιμὰς τοῦ x, οἵας θέλομεν, καὶ ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δι' αὐτῶν νὰ κάμωμεν, καὶ εἶτα διαφόρως τὰ μέρη ταῦτα νὰ σχίσωμεν, νὰ πολλαπλασιάσωμεν, νὰ διέλωμεν, νὰ μεταβάλλωμεν τὰ μέρη διαφόρως, χωρὶς νὰ χαλάσῃ ἡ ἐξίσωσις, καὶ ἔπειτα κατὰ τὴν πλοκὴν καὶ τάξιν τῆς ἐξισώσεως νὰ ἐκφράσωμεν τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος. Ἐπὶ παραδείγματος θῶμεν $x=11$, καὶ $x=10$· ἄρα οἱ παράγοντες $(x-10)(x-11)=x^2-21x+110=0$· καὶ ἔτι $x^2-x=20x-110$·

καὶ $x(x-1)=20x-110$ - - - - - - - Α

καὶ $\frac{x(x-1)}{10}=2x-11=0$ - - - - - - - Β

καὶ $110=20x+x-x^2=(20+1-x)x$ - - Γ

καὶ $110-x=(20-x$ - - - - - - - Δ

καὶ $110=(20-x)x+x$ - - - - - - - Ε

καὶ $110=(21-x)x$ - - - - - - - - Ϛ

καὶ $11=\frac{(21-x)x}{10}$ - - - - - - - - Ζ

καὶ $44=\frac{(21-x)4x}{10}$ - - - - - - - - Η

Καὶ ἔτι πλείςας ἐξισώσεις κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ποιοῦμεν· προβλήματα δ' εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τῆς Α ἐξισώσεως

Πρόβλ: Α΄. Νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, ὅςις πολλαπλασιάσας ἑαυτὸν πλὴν μονάδος, εἶναι ἴσος μὲ τὸ εἰκοσαπλάσιον ἑαυτοῦ πλὴν 110.

Ἐκ δὲ τῆς Β΄.

Πρόβλ: Β΄. Νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥςε τὸ δεκατημόριον τοῦ γινομένου αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτὸν πλὴν μονάδος, νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ πλὴν 11.

Ἐκ τῆς Γ΄.

Πρόβλ: Γ΄. Δίελε τὸν 21 εἰς δύο μέρη, ἅτινα πολλαπλασιαζόμενα γίνονται ἴσα μὲ τὸν 110.

Ἐκ τῆς Δ΄.

Πρόβλ: Δ΄. Νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὅςις πολλαπλασιάσας τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ 20 καὶ ἑαυτοῦ, νὰ εἶναι ἴσος τῷ 110 πλὴν ἑαυτοῦ.

'Εκ τῆς Ε'.

Πρόβλ: Ε'. Δίελε τὸν 20 εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ παραγόμενον μετὰ τοῦ μείζονος μέρους ἴσον 110.

'Εκ τῆς Ζ'.

Πρόβλ: Ϛ'. Δίελε τὸν 21 εἰς δύο μέρη, ὥςε τὸ δεκατημόριον τοῦ ἐξ' αὐτῶν γινομένου νὰ εἶναι =11.

Καὶ ἐκ τῆς Η'.

Πρόβλ: Ζ'. Δίελε τὸν 21 εἰς δύο ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥςε τὸ δεκατημόριον τοῦ τετραπλασίου ἐξ' αὐτῶν παραγομένου νὰ εἶναι =44. Καὶ ἐκ τούτων γίνεται φανερὸν ὅτι καὶ ἕτερα διάφορα εὑρίσκονται προβλήματα, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις ἔτι ποικιλλαχῶς μεταποιηθῇ.

§. 441. Ἴδομεν ἤδη τί γίνεται καὶ ἐὰν τὰς ῥίζας διαφόρους λάβωμεν, δηλ: $x=-4$ καὶ $x=25$· διότι οἱ μὲν παράγοντες $x+4=0$, καὶ $x-25=6$· ἡ δ' ἐξίσωσις

$$(x+4)(x-25)=0=\begin{array}{r} x+4 \\ x-25 \\ \hline x^2+4x \\ -25x-100 \\ \hline 0^2-21x-100=0 \end{array}$$

καὶ $x^2-21x=100$ - - - - Α'

καὶ $x(x-21)=100$ - - - - Β'

καὶ $x^2-11x=100+10x$ - - Γ'

καὶ $\frac{x^2}{12}-\frac{11x}{10}=10+x$ - - - Δ' ἢ $\frac{x^2-11x}{10}=10+x$

καὶ $\frac{x^2-11x-100}{10}=x$ - - - Ε'

καὶ $\chi - 21 = \frac{100}{\chi}$ - - - - - - Ϛ ἐκ τῆς Α'

καὶ $\chi = \frac{100}{\chi} + 21$ - - - - - - Ζ'

καὶ $\frac{\chi - 11}{10} = \frac{10}{\chi} + 1$ - - - - Η' (ἐκ τῆς Γ' διὰ τοῦ χ καὶ 10.

καὶ $5(\chi - 21) = \frac{500}{\chi}$ - - - - - Θ' (ἐκ τῆς Ϛ.)

καὶ $5(\chi - 21) = \frac{1000}{\chi} - 5(\chi - 21)$ - Ι' (ἐὰν μὲ 2 τὴν Θ πολλαπλ.)

καὶ $\chi - 21 = \frac{200}{\chi} - (\chi - 21)$ - ΙΑ' (διά: 5)

καὶ $12(\chi - 21) = \frac{1000}{\chi} + \frac{200}{\chi}$ - ΙΒ' (τὴν Ι. καὶ ΙΑ. συνάπτων)

καὶ $\chi = \frac{250}{3\chi} + \frac{50}{3\chi} + 21$ — - - - ΙΓ' (ἐκ τῆς ΙΒ'. διὰ τοῦ 4 καὶ 3.)

Πλεῖςαι ἕτεραι ἐξισώσεις ἐξέρχονται, ἐὰν αὐτὰς μᾶλλον καὶ μᾶλλον μεταβάλλωμεν, οτὲ δύο, ἢ τρεῖς συνάπτοντες, ὀτὲ ἀφαιροῦντες, ὀτὲ δὲ διαιροῦντες, καὶ ὀτὲ πολλαπλασιάζοντες. Ἐκ τούτων δὲ τῶν ἐξισώσεων ἐκφράζομεν πλεῖςα προβλήματα, καὶ μάλιςα, ἐὰν διὰ καθε ἔκφρασιν ἄλλας ῥίζας ἐκλάβωμεν· οὕτως ἐκ μὲν τῆς Α ἐξισώσεως ἔχομεν.

Πρόβλ: Α΄. Τίς ὁ ἀριθμὸς, ὃν ἐπὶ τὸν 21 πολλαπλασιάζοντες, ἀπὸ δὲ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ τούτου ἀφαιροῦντες, ἔχομεν λεῖψανον 100;

Ἢ ἐκ τῆς Β΄,

Πρόβλ. Β΄. Τίς ὁ ἀριθμὸς, ὅςις τὴν διαφορὰν μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ 21 πολλαπλασιάσας, τὸν 100 πεποίηκε;

Ἢ ἐκ τῆς Γ΄.

Πρόβλ: Γ΄. Τίς ὁ ἀριθμὸς, ὅςις δεκαπλασιασθεὶς, καὶ προςεθεὶς τῷ 100, ἑνδεκαπλασιασθεὶς δὲ καὶ ἀφαιρεθεὶς τοῦ ἑαυτοῦ τετραγώνου, δίδει κεφάλαιον καὶ διαφορὰν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν;

Ἐκ τῆς Δ.

Πρόβλ: Δ΄. Τίς ὁ ἀριθμὸς, ὅςις μετὰ τοῦ 10 εἶναι ἴσος τῷ δεκατημορίῳ τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ, καὶ τοῦ ἑνδεκαπλασίου;

Ἐκ τῆς Ε΄.

Πρόβλ: Ε΄. Εὑρεθήτω ἀριθμὸς, ὅςις εἶναι ἴσος τῷ δεκατημορίῳ τοῦ ἑαυτοῦ τετραγώνου, ἀφ᾽ οὗ τὸ ἑνδεκαπλάσιον αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἔτι 100 ἀφέλωμεν.

Καὶ ἐκ τῆς Ϛ΄.

Πρόβλ: Ϛ΄. Τίς ὁ ἀριθμὸς, ὁ διαιρῶν τὸν 100, καὶ δίδων πηλίκον τὴν διαφορὰν μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ 21;

Καὶ ἐκ τῆς Ζ΄.

Πρόβλ: Ζ΄. Τίς ὁ ἀριθμὸς, ὅςις εἶναι ἴσος τῷ 21 μετὰ τοῦ πηλίκου, ὁποῦ ἐξέρχεται, ὅταν αὐτὸς διέλῃ τὸν 100.

Καὶ ἐκ τῆς Η΄.

Πρόβλ: Η΄. Εὑρεθήτω ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥςε τὸ δεκατημόριον τῆς διαφορᾶς αὐτοῦ, καὶ τοῦ 11 νὰ εἶναι ἴσου μονάδι, καὶ τῷ πηλίκῳ, ὁποῦ ἐξέρχεται, ὅταν αὐτὸς εἰς τὸν 100 διαιρέτης γένηται;

Καὶ ἐκ τῆς Θ΄.

Πρόβλ: Θ΄. Ζητεῖται ἀριθμὸς, ὥστε τὸ πενταπλάσιον τῆς διαφορᾶς αὐτοῦ καὶ τοῦ 21 νὰ εἶναι ἴσον τῷ πηλίκῳ τοῦ 500 διὰ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Καὶ ἐκ τῆς Ι΄.

Πρόβλ: Ι΄. Εὑρεθήτω ἀριθμὸς, ὅστις τὸν 1000 διαιρεῖ, καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ πηλίκου τὴν πενταπλάσιον διαφορὰν ἀφέλωμεν μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ 21, μένει πάλιν λείψαιον αὕτη ἡ πενταπλάσιος διαφορά.

Ἐκ τῆς ΙΑ΄.

Πρόβλ: ΙΑ΄. Εὑρεθήτω ἀριθμὸς, ἀφ' οὗ ἐὰν 21 ἀφέλωμεν, μένει διαφορὰ ἴση μὲ τὴν διαφορὰν, ὅταν ἀφέλωμεν αὐτὸν πλὴν 21 ἀπὸ τοῦ πηλίκου, ὁποῦ δίδει ὁ 200 διὰ τοῦ ζητουμένου διαιρεθείς.

Ἐκ τῆς ΙΒ΄.

Πρόβλ: ΙΒ΄. Εὑρεθήτω ἀριθμὸς, ὥστε τὸ δωδεκαπλάσιον τῆς διαφορᾶς αὐτοῦ, καὶ τοῦ 21 νὰ εἶναι ἴσον τῷ κεφαλαίῳ τῶν πηλίκων, ὅταν αὐτὸς τὸν 1000 καὶ 200 διαιρῇ.

Ἐκ τῆς ΙΓ΄.

Πρόβλ: ΙΓ΄. Εὑρεθήτω ἀριθμὸς ἴσος τῷ 21, καὶ τοῖς δυσὶ πηλίκοις, ὁποῦ ἐξέρχονται, ἐὰν αὐτὸς τριπλάσιος διέλῃ τὸν 250 καὶ 50· καὶ οὕτως ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως διάφορα προβλήματα παρηγάγομεν μὲ τὰς ῥίζας τὰς αὐτάς. Ὅστις δὲ θέλει, καὶ τὰς ῥίζας μεταβάλλει, διὰ νὰ γένωσι τὰ προβλήματα διαφόρων ῥιζῶν, καὶ ἔτι ποικίλλει αὐτὰ διὰ διαφόρων ὑποθέσεων. Ἡμεῖς ὅμως ὅλα αὐτὰ τὰ ἀφήνομεν εἰς τοὺς φιλομαθεῖς ἀναγνώςας νὰ τὰ ἐκφράσωσι, διὰ τοὺς ὁποίους καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦτο ἐγράψαμεν, διὰ νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὰ ἀκόλουθα.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ τοῦ πῶς εἰς τὸ ἁπλούςερον ἀνάγομεν ἓν Δυώνυμον ἄλογον, ὅταν ἡ ῥίζα ἀπ' αὐτοῦ ἀπαιτῆται ἡ τετραγωνική.

§. 442. Ἐπειδὴ καὶ ἡ Ἀναλυτικὴ ἔχει τὴν μεγίςην χώραν εἰς τὴν Μαθηματικὴν, καὶ ἄνευ αὐτῆς οὐ μόνον ἀγνοεῖ τις τὰ συγγράμματα τῶν Μαθηματικῶν, ἀλλὰ καὶ πρόοδον μικρὰν κάμνει εἰς τὴν Μαθηματικὴν, διὰ τοῦτο καὶ ἡμεῖς ἀγωνιζόμεθα ὅλαις δυνάμεσιν εἰς τὸ εἶδος τοῦτο νὰ γυμνάσωμεν τοὺς ἀκροατάς μας, χωρὶς νὰ παρορῶμέν τι, ὅτι ἡμῖν χρήσιμον εἰς τοῦτο φαίνεται. Ἓν ἄρα τούτων εἶναι καὶ ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἑνὸς δυωνύμου, ὁποῦ ἔχει ἢ καὶ τὰ δύο μέρη ἄλογα, ὡς $\sqrt{(\sqrt{8}+2\sqrt{2})}$, ἢ τὸ ἕν, ὡς $\sqrt{(3-5\sqrt{3})}$· διότι τὸ εἶδος τοῦτο οὐ μόνον εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῶν ὑψηλοτέρων βαθμῶν ἀπαντᾶ, ἀλλὰ συχνὰ καὶ εἰς τὰς ἀποδείξεις τῆς ςοιχειώδους Μαθηματικῆς, ὡς ἐκεῖ μετὰ τὴν Ἀριθμητικάλγεβραν θέλομεν ἰδῇ.

§. 443. Πολλάκις συμβαίνει εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου, καὶ τετάρτου βαθμοῦ νὰ ζητῆται ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνικὴ ἀπὸ δυώνυμον ἔχον ἢ καὶ τὰ δύο μέρη ἄλογα, ὡς $\sqrt{(\sqrt{8}+\sqrt{3})}$, ἢ μόνον τὸ ἕν, ὡς $\sqrt{(3+\sqrt{5})}$, καὶ ἐπειδὴ ἁπλούςερον εἶναι $2+\sqrt{3}$, ἢ $\sqrt{(7+8\sqrt{3})}$, μὲ ὅλου ὅπου ἰσοδυναμοῦσι, διὰ τοῦτο καὶ ἡμεῖς εἰς τὸ παρὸν πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν τὴν φύσιν αὐτοῦ τοῦ ἀσυμμέτρου δυωνύμου, διὰ νὰ μάθωμεν πῶς εὐκόλως τὰ τοιαῦτα ῥιζικὰ εἰς τὸ ἁπλούστερον φέρονται, καὶ πότε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐξ αὐτῶν ἐξάγεται, ἑπόμενοι τοῖς ἴχνεσι τῶν ἐνδοξοτέρων Ἀναλυτικῶν· ἀδιαφοροῦμεν ὅμως, ἂς τὸ δυώνυμον τοιοῦτον $\alpha+\sqrt{\beta}$, ἢ $\alpha-\sqrt{\beta}$, ἢ $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$· ἐὰν δὲ καὶ συνεργὸς πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου κεῖται, ὡς $\alpha+\gamma\sqrt{\beta}$, ἡμεῖς πάλιν ἄνευ συνεργοῦ τοῦτο ποιοῦμεν $\alpha+\sqrt{\gamma^2\beta}$ (§. 382.)· ὅθεν σημειωτέον, ὅτι τὰ τοιαῦτα δυώνυμα, ἐὰν τετραγωνισθῶσιν, εὑρίσκεται τοὐλάχιστον ἕν, ἢ δύω μέρη λογικὰ, ἐὰν καὶ τὰ ῥιζικὰ ὦσιν ἀδύνατα· καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ α καὶ β ἕκαστον ἀριθμὸν νοῆσαι δυνάμεθα, τετραγωνισθήτω τὸ δυώνυμον

$$\begin{array}{l} \alpha+\sqrt{\beta} \\ \alpha+\sqrt{\beta} \\ \hline \alpha^2+\alpha\sqrt{\beta} \\ \quad +\alpha\sqrt{\beta}+\beta \\ \hline \alpha^2+2\alpha\sqrt{\beta}+\beta=(\alpha^2+\beta)+2\alpha\sqrt{\beta} \end{array}$$

καὶ ἰδοὺ εἰς τὸ τετράγωνον τοῦτο τὸ μὲν μέρος $(\alpha^2+\beta)$ λογικὸν, τὸ δὲ $2\alpha\sqrt{\beta}$ ἄλογον· ὁμοίως καὶ $(\alpha-\sqrt{\beta})^2=(\alpha^2+\beta)-2\alpha\sqrt{\beta}$· λογικὸν τὸ $(\alpha^2+\beta)$· καὶ ἄλογον τὸ $-2\alpha\sqrt{\beta}$· ὁμοίως καὶ τὸ $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha\beta}$· καὶ ἔτι τὸ $(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=(\alpha+\beta)-2\sqrt{\alpha\beta}$ καὶ $(\alpha+\sqrt{-\beta})^2=(\alpha^2-\beta)+2\alpha\sqrt{-\beta}$· καὶ εἰς ὅλους αὐτοὺς τοὺς τύπους ἁπλούστερον ἡ ῥίζα $\alpha+\sqrt{\beta}$, ἢ $\sqrt{(\alpha^2+\beta+2\alpha\sqrt{\beta})}$ κτ:

§. 444. Πρὸς βεβαίωσιν ὅμως ὅτι τὸ τετράγωνον τούτων ἔχει τῷ ὄντι ἀριθμὸν λογικὸν, δεδόσθω ὅτι $6+2\sqrt{8}$ εἶναι ἓν τετράγωνον μιᾶς ῥίζης, καὶ ζητεῖται αὐτη ἡ ῥίζα $=\sqrt{(\alpha+\sqrt{\beta})}$· ἄρα τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι $6+2\sqrt{8}=(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha\beta}$· ἄρα τὸ λογικὸν μέρος $6=(\alpha+\beta)$ τῷ λογικῷ, καὶ τὸ ἄλογον $2\sqrt{8}=2\sqrt{\alpha\beta}$ τῷ ἀλόγῳ. Ἐπειδὴ ὅμως δύο ἐξισώσεις ἔχομεν, καὶ δύο ἀγνώστους, εὑρεθήτωσαν κατὰ τὰ προβλήματα τῶν δύο ἀγνώστων (§. 286.) τὸ α καὶ β· καὶ ἐκ μὲν τῆς $6=\alpha+\beta$ εἶναι $\beta=6-\alpha$· ἐκ δὲ τῆς

$$2\sqrt{\alpha\beta}=2\sqrt{8} \quad : 2$$

$$\sqrt{8}=\sqrt{\alpha\beta}$$

$$8=\alpha\beta$$

$$\frac{8}{\alpha}=\beta$$

ἄρα καὶ $$6-\alpha=\frac{8}{\alpha}$$

$$6\alpha-\alpha^2=8$$

$$\alpha^2-6\alpha+9=-8+9$$

$$\alpha-3=\sqrt{9-8}=1$$

$$\alpha=4$$

ἀλλ' ὁ $6=\alpha+\beta=4+\beta$, ἄρα $\beta=2$· ὅθεν ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνικὴ τοῦ $6+2\sqrt{8}=\sqrt{4}+\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$· καὶ πολὺ ἁπλούστερον εἶναι τὸ $2+\sqrt{2}$, παρὰ τὸ $\sqrt{(6+2\sqrt{8})}$· διότι ἐὰν τετραγωνίσωμεν τὸ

$$2+\sqrt{2}$$

$$2+\sqrt{2}$$

$$4+4\sqrt{2}+2=$$

$6+2.\,2\sqrt{2}=6+2\sqrt{8}$, εἶναι πάλιν τὸ αὐτό.

§. 445. Διὰ νὰ μὴ ματαιοπονῶμεν ὅμως οὕτω, πρέπει ἅπαξ νὰ εὕρωμεν ἕνα τύπον γενικὸν, καὶ κατ' αὐτὸν νὰ λύωμεν τὰ διώνυμα ὅλα, ἀφ' ὅσων εἶναι δυνατὸν ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνικὴ νὰ ἐξαχθῇ. Ὅθεν ληφθήτω τὸ γενικὸν δυώνυμον $\alpha+\sqrt{\beta}$, καὶ τεθήτω αὐτοῦ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα $\sqrt{(\alpha+\sqrt{\beta})}=\sqrt{\chi}+\sqrt{\psi}$, διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὴν τιμὴν τοῦ χ καὶ ψ, τετραγωνισθήτω ὅλη ἡ ἐξίσωσις $\alpha+\sqrt{\beta}=\chi+\psi+2\sqrt{\chi\psi}$· τεθήτω ἤδη, ὡς ἀνωτέρω, τὸ μὲν λογικὸν μέρος τοῦ ἀγνώϛου τετραγώνου $\chi+\psi=\alpha$ τῷ λογικῷ τοῦ γνωϛοῦ, καὶ τὸ ἄλογον $2\sqrt{\chi\psi}=\sqrt{\beta}$ τῷ ἀγνώϛῳ· ἄρα καὶ $4\chi\psi=\beta$, ἐὰν τετραγωνίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $2\sqrt{\chi\psi}=\sqrt{\beta}$· ὅθεν ἔχομεν δύο ἐξισώσεις, Α΄, $\chi+\psi=\alpha$. καὶ Β΄ $4\chi\psi=\beta$· τετραγωνισθήτω ἡ πρώτη ἐξίσωσις οὕτω $\chi^2+2\chi\psi+\psi^2=\alpha\alpha$ καὶ ἀπ᾽ αὐτῆς ἀφαιρείσθω ἡ δευτέρα οὕτω,

$$-4\chi\psi=-\beta$$

ἵνα μείνῃ λείψανον ἡ ἐξίσωσις - -

$$\chi^2-2\chi\psi+\psi^2=\alpha\alpha-\beta$$

· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἓν σκέλος αὐτῆς τετράγωνον ἐντελὲς, καὶ ἡ ῥίζα $\chi-\psi=\sqrt{(\alpha\alpha-\beta)}$ - - Γ, προσθέτομεν αὐτῇ τὴν Α΄. $\chi+\psi=\alpha$, καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{l}\chi-\psi=\sqrt{(\alpha\alpha-\beta)}\\ \chi+\psi=\alpha\\ \hline 2\chi=\alpha+\sqrt{(\alpha\alpha-\beta)}\\ \hline \chi=\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{(\alpha\alpha-\beta)}}{2}\end{array}$$

ἄρα $\sqrt{\chi}=\sqrt{\left(\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha\alpha-\beta)}}{2}\right)}=\sqrt{\left[\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^2-\beta)}\right]}$ διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ τὸ ψ, ἀφαιροῦμεν τὴν Γ ἐξίσωσιν ἀπὸ τῆς Α οὕτω

$$\chi+\psi=\alpha$$
$$\chi-\psi=\sqrt{(\alpha\alpha-\beta)}$$
$$-\;+\;-$$
$$2\psi=\alpha-\sqrt{(\alpha\alpha-\beta)}$$
$$\psi=\frac{\alpha-\sqrt{(\alpha\alpha-\beta)}}{2}$$
$$\sqrt{\psi}=\sqrt{\left(\frac{\alpha-\sqrt{(\alpha\alpha-\beta)}}{2}\right)}=\sqrt{\left[\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha\alpha-\beta)}\right]}$$

ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑκάςου δυωνύμου ἀλόγου εὑρέθη κατὰ τὸν τύπον τὸν ἑξῆς· $\sqrt{(\alpha+\sqrt{\beta})}=\sqrt{\left(\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha\alpha-\beta)}}{2}\right)}$ $+\sqrt{\left(\frac{\alpha-\sqrt{(\alpha\alpha-\beta)}}{2}\right)}$ ἢ $=\sqrt{\left[\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^2-\beta)}\right]}+$ $\sqrt{\left[\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{^2(\alpha^2-\beta)}\right]}$ καὶ ἀδιάφορον εἶναι νὰ λάβῃ τινὰς ὁποιον τύπον θέλῃ, ἐὰν μόνον ἐκλάβῃ τὸ μὲν α ἀντὶ τοῦ λογικοῦ μέρους τοῦ δυωνύμου, τὸ δὲ β ἀντὶ τοῦ ἀλόγου· διότι κατ' αὐτὸν τὸν τύπον ἐξάγονται αἱ ῥίζαι αἱ ἄλογοι τῶν δυωνύμων, καὶ φέρονται εἰς τὸ ἁπλούςερον.

§. 446. Εἰς αὐτὸν τὸν τύπον βλέπομεν πρῶτον, ὅτι μόνον ἐκεῖνα τὰ δυώνυμα φέρονται εἰς τὸ ἁπλούςερον, ὅσα ἔχουσι τὸ ἓν μέρος λογικόν· διότι ὡς τετράγωνα θεωροῦνται, καὶ τοὐλάχιςον ἓν μέρος λογικὸν ἔχει ἕκαςον τετράγωνον ἀπὸ ῥίζης δυωνύμου, ὡς εἴρηται (§. 443.)· Δεύτερον, ἐκεῖνα τὰ δυώνυμα μόνον λύονται, ὧν ὁ ἀριθμὸς τοῦ ῥιζικοῦ, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ λογικοῦ μέρους, μένει λείψανον τετράγωνον· καὶ ἐὰν τὸ λείψανον τοῦτο γγ θῶμεν, πρέπει πάντοτε νὰ εἶναι οὗτος ὁ τύπος $\alpha\alpha - \beta = \gamma\gamma$, ἤτοι τὸ λεῖψανον τετράγωνον, διὰ νὰ ἐξάγεται ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνικὴ, ὡς εἰς τὸν τύπον φαίνεται τοῦτον $\sqrt{(\alpha\alpha - \beta)}$· διότι ἄλλως τὸ ῥιζικὸν μένει, καὶ δὲν φέρεται εἰς τὸ ἁπλούςερον· ὅθεν τὰ τοιαῦτα μόνον διὰ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου παρίςανται διότι τοῦ ἑξῆς $6+\sqrt{11}$ ἡ ῥίζα εὑρίσκεται· διότι $6, 6-11=25=\gamma\gamma$ καὶ ἡ ῥίζα ἐξάγεται· τοῦ δὲ $7+\sqrt{11}$ οὐχί· διότι $7. 7-11=38$, ὅπερ δὲν εἶναι τετράγωνον $=\gamma\gamma$· ὅθεν τοῦτο, οὕτω $\sqrt{(7+\sqrt{11})}$ μόνον παρίςαται.

§. 447. Πρὸς βεβαίωσιν δὲ τούτου ληφθήτω πάλιν τὸ δυώνυμον $\alpha+\sqrt{\beta}$, καὶ ὑποτεθήτω ὅτι $\alpha\alpha-\beta=\gamma\gamma$, καὶ ζητηθήτω ἡ ῥίζα αὐτοῦ οὕτω $\sqrt{(\alpha+\sqrt{\beta})}=\sqrt{\left(\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha\alpha-\beta)}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\alpha-\sqrt{(\alpha\alpha-\beta)}}{2}\right)}$· θῶμεν ἤδη ἀντὶ $\alpha\alpha-\beta$ τὸ ἴσον $\gamma\gamma$· ἄρα $\sqrt{(\alpha+\sqrt{\beta})}=\sqrt{\left(\frac{\alpha+\sqrt{\gamma\gamma}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\alpha-\sqrt{\gamma\gamma}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}$· διότι ἐὰν τετραγωνίσωμεν τοῦτο τὸ δυώνυμον $\sqrt{\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}$ εὑρίσκομεν $\frac{\alpha+\gamma}{2}+2\sqrt{\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}+\frac{\alpha-\gamma}{2}=\alpha+2\sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{4}\right)}$· θῶμεν ἤδη ἀντὶ $\gamma^2=\alpha^2-\beta$, εὑρίσκεται τὸ τετράγωνον $=\alpha+\frac{2}{2}\sqrt{(\alpha^2-\alpha^2+\beta)}=\alpha+\sqrt{\beta}$ τῷ προτέρῳ τετραγώνῳ.

§. 448. Ὅταν λοιπὸν ἔχωμεν ἓν δυώνυμον μὲ ἓν μέρος λογικὸν, καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τοῦ λογικοῦ ἀριθμοῦ καὶ τοῦ ἀλόγου ἁπλῶς εἶναι τετράγωνον, ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τὴν τετραγωνικὴν αὐτῆς τῆς διαφορᾶς, καὶ ἐὰν αὐτὴν τὴν ῥίζαν γ καλέσωμεν, εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ διωνύμου κατὰ τὸν ἑξῆς τύπον $\sqrt{(\frac{\alpha+\gamma}{2})}+\sqrt{(\frac{\alpha-\gamma}{2})}$· παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἑξῆς.

Α΄. Ζητεῖται ἡ ῥίζα τοῦ $3+\sqrt{5}$· ἄρα $3^2-5=4$, καὶ $\sqrt{4}=2=\gamma$, καὶ $\alpha=3$· ὅθεν $\sqrt{(\frac{3+2}{2})}+\sqrt{(\frac{3-2}{2})}=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$ ἤτοι $\sqrt{(3+\sqrt{5})}=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$ ἢ $=\frac{1}{2}\sqrt{10}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Β΄. Ἡ ῥίζα τοῦ $11+6\sqrt{2}=11+\sqrt{72}$· ἄρα $\alpha=11$, καὶ $11^2-72=49$, καὶ $\sqrt{49}=7=$· ὅθεν $\sqrt{(\frac{11+7}{2})}+\sqrt{(\frac{11-7}{2})}=\sqrt{9}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}$.

Γ΄. Ἔτι ἡ ῥίζα τοῦ $11+2\sqrt{30}=11+\sqrt{120}$· ἄρα $\alpha=11$, καὶ $11^2-120=+1$, καὶ $\gamma=+1$· λοιπὸν $\sqrt{(\frac{11+1}{2})}+\sqrt{(\frac{11-1}{2})}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$.

Δ΄. Ἔτι ἡ ῥίζα τοῦ $28+10\sqrt{3}=28+\sqrt{300}$· ἄρα $\alpha=28$, καὶ $28^2-300=484$· ἀλλὰ $\sqrt{484}=22=\gamma$· λοιπὸν $\sqrt{(\frac{28+22}{2})}+\sqrt{(\frac{28-22}{2})}=\sqrt{25}+\sqrt{3}=5+\sqrt{3}$.

Ε΄. Καὶ ἡ ῥίζα $13+2\sqrt{42}$· ἄρα $\alpha=13$. καὶ $13^2-168=1$, καὶ $\gamma=1$· λοιπὸν $\sqrt{\frac{13+1}{2}}+\sqrt{\frac{13-1}{2}}=\sqrt{7}+\sqrt{6}$.

Ἐὰν δὲ τὸ διώνυμον ἔχῃ σημεῖον ἀποφατικὸν, τὰ αὐτὰ πάλιν γίνονται, πλὴν τὸ δεύτερον μέρος $\sqrt{(\frac{\alpha-\gamma}{2})}$ γράφεται μὲ σημεῖον ἀποφατικὸν, καὶ εἶναι ὁ τύπος $\sqrt{(\frac{\alpha+\gamma}{2})} - \sqrt{(\frac{\alpha-\gamma}{2})}$· ὅθεν

ϛʹ. Ζητεῖται ἡ ῥίζα τετραγωνικὴ τοῦ $5-2\sqrt{6}=$ $2-\sqrt{24}$· ἄρα $\alpha=5$, καὶ $25-24=1=\gamma$· λοιπὸν $\sqrt{(\frac{5+1}{2})}-\sqrt{(\frac{5-1}{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Ζʹ. Ζητεῖται ἔτι ἡ ῥίζα τοῦ $7-2\sqrt{12}$· ἄρα $\alpha=7$, καὶ καὶ $49-48=1=\gamma$· ὅθεν ἡ ῥίζα $\sqrt{(\frac{7+1}{2})}-\sqrt{(\frac{7-1}{2})}=$ $\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$· ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

„ Τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν καὶ ἀδύνατα εἶναι τὰ ῥιζικά.

Ηʹ. Ζητεῖται ἡ ῥίζα τοῦ $1-4\sqrt{-3}$· ἄρα $\alpha=1$, καὶ $1-16.-3=1+48=46$ καὶ $\sqrt{49}=7=\gamma$· ὅθεν ἡ ζητουμένη ῥίζα $\sqrt{\frac{1+7}{2}}-\sqrt{\frac{1-7}{2}}=\sqrt{4}-\sqrt{-3}=2-\sqrt{-3}$.

Θʹ. Ἔτι ἡ ῥίζα τοῦ $5-\sqrt{-11}$· ἄρα $\alpha=5$, καὶ $25+11=36$ λοιπὸν $\sqrt{36}=6=\gamma$· καὶ ἡ ζητουμένη ῥίζα $\sqrt{\frac{5+6}{2}}-\sqrt{\frac{5-6}{2}}=\sqrt{\frac{11}{2}}-\sqrt{-\frac{1}{2}}$.

Ιʹ. Ἔτι ἡ ῥίζα τοῦ $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, ἄρα $\alpha=-\frac{1}{2}$ καὶ $\sqrt{6}=\sqrt{\frac{1}{4}}.-3=\sqrt{-\frac{3}{4}}$· ὅθεν $6=-\frac{3}{4}$· λοιπὸν

$\alpha^2-\beta=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=1$ · καὶ $\sqrt{1^2}=1=\gamma$ · ὅθεν ἡ ζητουμένη ῥίζα $\sqrt{\frac{-\frac{1}{2}+1}{2}}+\sqrt{\frac{-\frac{1}{2}-1}{2}}$ ἤτοι $\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

ΙΑʹ. Ἔτι ζητεῖται ἡ ῥίζα τοῦ $3\sqrt{-1}$, καὶ ἐπειδὴ αὐτοῦ οὐδὲν μέρος λογικὸν, ἄρα $\alpha=0$, τὸ δὲ δεύτερον μέρος $\sqrt{\beta}=\sqrt{-9}$ καὶ $\beta=-9$ · ἄρα $\alpha\alpha-\beta=0+9=9$ · καὶ $\sqrt{9}=3=\gamma$· λοιπὸν ἡ ῥίζα $\sqrt{\frac{0+3}{2}}+\sqrt{\frac{0-3}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{-\frac{3}{2}}$.

ΙΒʹ. Ἔτι ἡ ῥίζα τοῦ $2\sqrt{-1}$, καὶ αὐτοῦ $\alpha=0$, καὶ $\beta=-4$, λοιπὸν $\alpha^2-\beta=0+4$, καὶ $\sqrt{4}=2=\gamma$· ἄρα ἡ ῥίζα ἡ ζητουμένη $\sqrt{\frac{0+2}{2}}+\sqrt{\frac{0-2}{2}}=\sqrt{1}+\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1}$.

§. 449. Ἐκ τούτων εἰσερχόμεθα εἰς ἕτερον, ὅπερ χρήσιμον καὶ τοῦτο εἰς τὴν ἀναλυσιν· δηλ: δεδόσθω ἡ ἐξίσωσις αὕτη $\chi\chi=\alpha\pm\sqrt{\beta}$, καὶ ἔστω πάλιν κατὰ τὰ ἄνω $\alpha^2-\beta=\gamma\gamma$, καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ χ εὑρίσκεται $\chi+\sqrt{(\frac{\alpha+\gamma}{2})}\pm\sqrt{(\frac{\alpha-\gamma}{2})}$· καὶ τοῦτο γίνεται ἐν χρήσει πολλῶν προβλημάτων καὶ ἐξισώσεων· δηλ: ζητεῖται τὸ χ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi\chi=17+12\sqrt{2}$· ἐπειδὴ ὅμως $\alpha=17$, καὶ $\beta=288$, καὶ $\alpha^2-\beta=17^2-288=1$, καὶ $\sqrt{1}=1=\gamma$· ἄρα $\chi=\sqrt{\frac{17+1}{2}}+\sqrt{(\frac{17-1}{2})}=3+\sqrt{8}=3+\sqrt{22}$.

§. 450. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἐξίσωσις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ συμφωνεῖ πως μὲ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ὡς ἡμεῖς εἰς ἄλλο μέρος τοῦτο διασαφήσαμεν, καὶ οὗτος ὁ τρόπος χρήσιμος καὶ εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, εἰλήφθω ἓν γενικὸν παράδειγμα τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, διὰ νὰ εὕρωμεν ἕνα τύπον γενικὸν τούτων τῶν ἐξισώσεων νὰ ἐξεύρωμεν ποῖαι ἐξισώσεις οὕτω λύονται τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, καὶ ποῖαι οὐ λύονται οὕτως, ἀλλ' ἄλλως. Δεδόσθω λοιπὸν τοῦ τετάρτου βαθμοῦ ἡ ἐξίσωσις $\chi^4=2\alpha\chi\chi+\delta$, ἐὰν ὅμως ὑποθῶμεν $\chi\chi=\text{ч}$, καὶ θῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ $\chi\chi$ τὸ ἴσον ч, μεταβάλλει αὕτη ἡ ἐξίσωσις εἰς αὐτήν, ἣν λύομεν κατὰ τὰς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

$$\text{чч}=2\alpha\text{ч}+\delta.$$

$$\text{чч}-2\alpha\text{ч}=\delta$$

$$\text{чч}-2\alpha\text{ч}+\alpha^2=\alpha^2+\delta$$

$$\text{ч}-\alpha=\sqrt{(\alpha^2+\delta)}$$

καὶ $$\text{ч}=\alpha+\sqrt{(\alpha^2+\delta)}$$

καὶ ἐπειδὴ $\text{ч}=\chi\chi$, θῶμεν ἤδη τὸ ἴσον ἀντὶ ч, καὶ ἔσται $\chi\chi=\alpha\pm\sqrt{(\alpha\alpha+\delta)}$· ἐδῶ διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ χ, ζητεῖται πάλιν ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνική, καὶ ἀπὸ τὰ δύο σκέλη $\sqrt{\chi\chi}=\sqrt{[\alpha+\sqrt{(\alpha\alpha+\delta)}]}$· ἀλλ' ἀπὸ τοῦ σκέλους $\sqrt{\chi\chi}$ ἐξέρχεται ἡ ῥίζα χ, ἀπὸ δὲ τοῦ ἑτέρου εἶναι νὰ ἐξαχθῇ ἀπὸ δυωνύμου ἄλογου· καὶ κατὰ τοὺς ἄνω τύπους (§. 445.) ἠμποροῦμεν νὰ μάθωμεν πῶς πρέπει νὰ εἶναι τοῦτο τὸ δυώνυμον, διὰ νὰ ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνική· λοιπὸν αὐτοῦ $\alpha=\alpha$ καὶ $\sqrt{\theta}=\sqrt{(\alpha\alpha+\delta)}$

$$\theta=\alpha\alpha+\delta$$

$$\alpha\alpha-\theta=-\delta$$

ἄρα εἰς ὅλας τὰς τοιαύτας ἐξισώσεις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, ἐὰν τὸ γνωςὸν μέρος δ εἶναι ἀποφατικὸν, καὶ τετράγωνον ἐντελὲς $-\delta = -\gamma\gamma$, λύονται αἱ ἐξισώσεις ἄνευ τινὸς προπαρασκευῆς, καὶ εὑρίσκεται τὸ χ· διότι ἡ ἐξίσωσις $\chi\chi = \alpha \pm \sqrt{(\alpha\alpha - \delta)}$ εἶναι $\chi = \sqrt{\frac{\alpha+\gamma}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{2}}$. Δεδόσθω ὅτι ἡ ἀνωτέρα ἐξίσωσις εἶναι $\chi^4 = 2\alpha\chi\chi - \delta$, καὶ $-\delta = -\gamma\gamma$, ἤτοι $\chi^4 = 2\alpha\chi\chi - \gamma\gamma$, λύεται ἀμέσως $\chi = \sqrt{(\frac{\alpha+\gamma}{2})} + \sqrt{(\frac{\alpha-\gamma}{2})}$· λοιπὸν ὅσα προβλήματα ἢ ἐξισώσεις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ ἄρχονται εἰς αὐτὸν τὸν τύπον $\chi^4 = 2\alpha\chi\chi - \gamma\gamma$· δηλ: νὰ ἔχωσιν εἰς τὸ ἓν σκελος τὸ ἄγνωςον εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν, εἰς δὲ τὸ ἕτερον νὰ εἶναι εἰς τὸ ἓν μέρος ἡ ἄγνωςος εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν μὲ οἱονδήποτε συνεργὸν, καὶ τὸ γνωςὸν μέρος ἀποφατικὸν, καὶ ἐντελὲς τετράγωνον, τότε ἀμέσως λύονται αὗται αἱ ἐξισώσεις κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τύπους $\sqrt{(\frac{\alpha+\gamma}{2})} \pm \sqrt{(\frac{\alpha-\gamma}{2})}$· ἐὰν λάβωμεν τὸν ἥμισυν συνεργὸν τοῦ μέρους, ὁποῦ ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ἀγνώςου ἀντὶ α, καὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γνωςοῦ μέρους ἀντὶ γ· κατ᾽ αὐτὰ λύονται τὰ ἑξῆς.

Α΄ Ζητεῖται τὸ γ τῆς ἐξισώσεως $\chi^4 + 9 = 12\chi^2$ ἤτοι $\chi^4 + 12\chi^2 - 9$. ἄρα ὡς ὁ τύπος ὁ γενικὸς $\chi^4 = 12\alpha\chi^2 - \gamma\gamma$. λοιπὸν $\alpha = 6$, καὶ $\gamma = 3$, καὶ ἐπομένως $\chi = \sqrt{\frac{6+3}{2}} + \sqrt{\frac{6-3}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

§. 451. Β'. Ζητοῦνται δύο ἀριθμοί, ὧν τὸ παραγόμενον $=105$, καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο τούτων τετραγώνων ἴσον 274. καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ ἄγνωστοι, καλείσθωσαν ὁ μὲν χ, ὁ δὲ ψ, ἄρα κατὰ τὰς συνηθήκας ἔχομεν δύο ἐξισώσεις. Α'. $\chi\psi=105$, καὶ Β'. $\chi^2+\psi^2=274$.

ἐκ μὲν τῆς Α'. εὑρίσκομεν $\psi=\frac{105}{\chi}$ καὶ $\psi^2=\frac{10^{2}5}{\chi^2}$ θῶμεν ἤδη ἀντὶ τοῦ ψ^2 εἰς τὴν Β'. τὸ ἴσον $\frac{10^{2}5}{\chi^2}$, καὶ ἔσται

$$\chi\chi+\frac{10^{2}5}{\chi^2}=274$$

$$\chi^4=10^{2}5=274\chi^2$$

$$\text{καὶ } \chi^4=274\chi^2-105^2.$$

καὶ ἐπειδὴ αὕτη ἡ ἐξίσωσις, ὡς ἡ γενικὴ $\chi^4=2\alpha\chi^2-\gamma\gamma$, λύεται ἀμέσως, ἐὰν λάβωμεν $\alpha=137$, καὶ $\gamma=105$. ἄρα

$$\chi=\surd\left(\frac{137+105}{2}\right)\pm\surd\left(\frac{137-105}{2}\right)=\surd\left(\frac{242}{2}\right)\pm\surd\left(\frac{32}{2}\right)$$

$=\surd121\pm\surd16=11+4$. καὶ ἐπειδὴ ὁ 4 σημειοῦται, καὶ καταφατικῶς, καὶ ἀποφατικῶς, δύο τιμὰς ἔχει τὸ χ, καὶ $\chi=15$, καὶ $\chi=7$.

Σημειώσεις.

Οἱ Ἀναλυτικοί, ὅπου ἅπαξ ἐστοιχειώθησαν εἰς τὰ ἀνωτέρω, πρέπει εἰς τὰς λύσεις νὰ παρατηρῶσι πολλὰς εὐκολίας, καὶ ἐκ τούτων ἕτερα γενικὰ νὰ ἐπιφέρωσιν. Οὕτως οἱ τεχνικοὶ τὸ ἄνω παράδειγμα λύουσιν εὐκόλως, ἐπειδὴ καὶ ἅπαξ ἔμαθον ὅτι $(\chi+\psi)^2=\psi^2+2\chi\psi+\chi^2$, καὶ $(\chi-\psi)^2=\chi^2-2\chi\psi+\psi^2$. καὶ εἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα τὸ μὲν $\chi^2+\chi^2=274$ γνωστόν, καὶ $\chi\psi=105$. ταύτην ὅμως τὴν ἐξίσωσιν διπλασιάζουσι $2\chi\text{ч}=210$, καὶ εἰς ἐκείνην προσθέτοντες ἔχουσιν ἐντελὲς τετράγωνον. $\chi^2+2\chi\text{ч}+\text{ч}^2=274+210$ καὶ ἑπομένως $\chi+\text{ч}=\sqrt{484}=22$. ἀπ' ἐκείνης δ' ἀφαιροῦντες, ἔχουσι πάλιν ἐντελὲς τετράγωνον $\chi^2-2\chi\text{ч}+\text{ч}^2=274-210$· καὶ ἑπομένως $\chi-\text{ч}=\sqrt{64}=8$, τώρα ἔχοντες γνωςὸν τὸ κεφάλαιον καὶ τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν καὶ τοὺς ἀριθμοὺς (§. 289). διότι $\chi=\frac{22+8}{2}=15$, καὶ $\text{ч}=\frac{22-8}{2}=7$, ὡς καὶ πρότερον.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Β'.

Ἐξ αὐτῆς τῆς εὐκολίας δυνάμεθα καὶ γενικῶς τὸ πρόβλημα τοῦτο νὰ ἐκφράσωμεν· δηλ: ἐὰν οἱ ἄγνωςοι αὖθις τεθῶσι χ καὶ ч, τὸ δὲ παραγόμενον αὐτῶν $\chi\text{ч}=\alpha$, καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων $\chi^2+\text{ч}^2=6$. λοιπὸν τὸ διπλοῦν ἐκείνης τῆς ἰσότητος $=2\chi\text{ч}=2\alpha$, ἐὰν προςεθῇ τῇ $\chi^2+\text{ч}^2=6$, γίνεται $\chi^2+2\chi\text{ч}+\text{ч}^2=6+2\alpha$, καὶ $\chi+\text{ч}=\sqrt{(6+2\alpha)}$. ἐὰν δ' ἀπ' ἐκείνης ἀφαιρεθῇ οὕτω $\chi^2-2\chi\text{ч}+\text{ч}=6-2\alpha$, εὑρίσκεται καὶ $\chi-\text{ч}=\sqrt{(6-2\alpha)}$. ἄρα $\chi=$
$$\frac{\sqrt{(6+2\alpha)}+\sqrt{(6-2\alpha}}{2})=\frac{1}{2}\left(\sqrt{(6+2\alpha)}+\sqrt{(6-2\alpha)}\right)$$
καὶ $\text{ч}=\frac{1}{2}[\sqrt{(6+2\alpha)}-\sqrt{(6+2\alpha)}]$ καὶ οὕτως εὑρίσκομεν κατὰ τούτους τοὺς τύπους τὸ χ καὶ ч καθ' οἱονδήποτε ἀριθμὸν θῶμεν τὸ παραγόμενον α καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων 6.

Γ'. Ζητοῦνται δύο ἀριθμοί, ὧν τὸ παραγόμενον $=35$, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν $=24$. καὶ λοιπὸν οἱ μὲν ζητούμενοι ἀριθμοὶ ἄς εἶναι χ καὶ ч, τὸ δὲ παραγόμένου Α', $\chi\upsilon=35$, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων Β', $\chi^2-\upsilon^2=24$, ἀλλ' ἐκ μὲν τῆς Α εὑρίσκομεν $\upsilon=\frac{35}{\chi}$, καὶ $\upsilon^2=\frac{35^2}{\chi^2}$. ἐὰν δὲ θῶμεν εἰς τὴν Β', ἀντὶ υ^2 τὸ ἴσον $\frac{35^2}{\chi^2}$ εὑρίσκομεν αὐτὴν $\chi^2-\frac{35^2}{\chi^2}=24$

$$\chi^4=24\chi^2+35^2=24\chi^2+1225$$

καὶ εἰς αὐτὸ ἐὰν τὸ μέρος 1225 ἦτον ἀποφατικὸν εὐκόλως ἐλύετο κατὰ τὸν ἄνω τύπον $\chi^4=2\alpha\chi^2-\delta$. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι καταφατικὸν, λύεται κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον, καθ' ὃν ὅλαι αἱ ὁμοιότροποι ἐξισώσεις λύονται· δηλ: λαμβάνομεν ἀντὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ἀγνώστου ἓν ἕτερον ἄγνωστον, ὡς $\chi\chi=\psi$, καὶ $\chi^4=^2$, καὶ μεταφέρομεν αὐτὸ τὸ ἄγνωστον εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν, οὕτω $\psi^2=24\psi+1225$ καὶ οὕτως ἐκείνη μεταβάλει εἰς ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, καὶ κατ' αὐτὰς λύεται, καὶ εὑρίσκομεν τὸ ψ οὕτω

$$\psi^2-24\psi=1225$$

$$\psi^2-24\psi+144=144+1225$$

$$\psi-12=\sqrt{1369}$$

$$\psi=12\pm\sqrt{1369}=12\pm37$$

ἄρα τὸ $\psi=49$, καὶ $\psi=-25$· ἐπειδὴ ὅμως ἐλήφθη $\psi=\chi$; ἄρα καὶ $\chi^2=49$, καὶ $\chi^2=-25$· καὶ ἑπομένως $\chi=7$, καὶ $\chi=\sqrt{-25}=5\sqrt{-1}$· ἐπειδὴ δὲ $\upsilon=\frac{35}{\chi}$, ἐὰν ἀντὶ $\chi=7$ λάβωμεν εὑρίσκεται, καὶ $\upsilon=\frac{35}{7}=5$· ἐὰν δὲ $\chi=\sqrt{-25}$ λθῶμεν, εὑρίσκομεν $\psi=\frac{35}{\sqrt{-25}}=\sqrt{(\frac{1225}{-25}}=\sqrt{-49}=$ $7\sqrt{-1}$· οὗτος ὁ τρόπος εἰς τὰς ἀνωτέρας ἐξισώσεις ἀναπτυχθήσεται.

§. 452. Μὲ αὐτὰ ἐπισυνάπτομεν καὶ τὰ ἑξῆς δύο προβλήματα, ὁποῦ κοινῶς εἰς τὰς βίβλους τῶν Μαθηματικῶν εὑρίσκονται.

Α΄. Νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς, ὧν τό,τε κεφάλαιον, καὶ τὸ παραγόμενον, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἴσα· καὶ ἂς εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οἱ ζητούμενοι χ καὶ ψ· ἄρα τὸ μὲν κεφάλαιον αὐτῶν $\chi+\psi$, τὸ δὲ παραγόμενον $\chi\psi$, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν $\chi^2-\psi^2$· ἐπειδὴ δὲ ἡ ἰσότης καὶ εἰς τὰ τρία θεωρεῖται, εἶναι $\chi+\psi=\chi\psi$, καὶ

$$\psi=\psi\chi-\chi=\chi(\psi-1)$$

καὶ $$\frac{\psi}{\psi-1}=\chi$$

$$\psi=\psi \qquad +\psi$$

$$\frac{\psi}{\psi-1}+\psi=\chi+\psi.$$

$$\frac{\psi+\psi^2-\psi}{\psi-1}=\chi+\psi$$

$$\frac{\psi^2}{\psi-1}=\chi+\psi\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ καὶ $\chi+\psi=\chi\psi$, ἄρα καὶ $\chi\psi=\frac{\psi^2}{\psi-1}$, καὶ $\chi=$ $\frac{\psi}{\psi-1}$· ἐὰν ὅμως τὴν $\chi=\frac{\psi}{\psi-1}$ τετραγωνίσωμεν οὕτω

$$\chi^2=\frac{y^2}{y^2-2y+1}, \text{ καὶ } -y \text{ θῶμεν}$$

$$-y^2=-y^2$$

$$\text{ἔσαι } \chi^2-y^2=\frac{y^2}{y^2-2y+1}-y^2$$

ἀλλὰ καὶ τὸ κεφάλαιον $y+\chi=\chi^2-y^2=\dfrac{y^2}{y-1}$, ἄρα καὶ

$$\frac{y^2}{y-1}=\frac{y^2}{y^2-2y=1}-y^2=\frac{-y^4+2y^3+y^2-y^2}{y^2-2y+1}=\frac{-y+2y^4}{y^2-2y+1}$$

ἄρα $\dfrac{-y^4+2y^3}{y^2-2y+1}=\dfrac{y^2}{y-1}$: y^2

$$\frac{-y^2+2y}{(y-1)(y-1)}=\frac{1}{y-1}\cdot(y-1)(y-1)$$

$$(y^2+2y=y-1$$

$y^2-y=1$ ἄρα ὡς ἀτελὲς τετράγ:

$$y^2-y+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+1$$

$$y-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)}, \text{ καὶ } y=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

καὶ ἐπειδὴ ἄνω εὕρομεν $\chi=\dfrac{y}{y-1}$ θῶμεν ἀντὶ y, τὸ ἴσον

$\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ καὶ εἶναι - - - - - $\chi=\dfrac{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}-1}$. ὅ ἐςι

$$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}:\frac{1\pm\sqrt{5}-2}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}.$$

να αὐτῶν ἀφέλωμεν οὕτω $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2$, εὑρίσκομεν

$$\frac{9+6\sqrt{5}+5-1-2\sqrt{5}-5}{4}=\frac{8+4\sqrt{5}}{4}=2+\sqrt{5}.$$

ὡς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ παραγόμενον.

„Τοῦτο δὲ τὸ οὕτω διεξοδικῶς λυόμενον, λύεται καὶ συντόμως κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον· κατὰ γὰρ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\underline{\chi+y=\chi^2-y^2}$$

$$\underline{\chi+y=(\chi+y)(\chi-y}$$

καὶ $1=\chi-y$. καὶ $\chi=1+y$

$$\underline{+y=+y}$$

$$\chi+y=2y+1.$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων ἴση τῷ κεφαλαίῳ $\chi^2-y^2=\chi+y$· ἄρα καὶ $\chi^2-y^2=2y+1$. ἀλλὰ $\chi=y+1$, καὶ $\chi y=y^2+y$, ἀλλὰ καὶ τὸ παραγόμενον ἴσον τῇ πολλαπλασιάζοντες δὲ ἄνω καὶ κάτω μὲ $\sqrt{5}+1$, εὑρίσκομεν $\chi=\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ καὶ εὕρομεν τὸ μὲν $\chi=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, τὸ δὲ $\psi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$· διότι $\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5}$. ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, ἔσται $\frac{3+\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{4}=\frac{8+4\sqrt{5}}{4}=2+\sqrt{5}$ ὡς τὸ κεφάλαιον· Ἐὰν δὲ τὸ τετράγωδιαφορᾷ, ἤτοι $\chi\psi=\chi^2-\psi^2$. τὸ δὲ $\chi\psi=\psi^2+\psi$, καὶ $\chi^2-\psi^2=2\psi+1$ θῶμεν τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων

$$\psi^2+\psi=2\psi+1$$

$$\psi^2-\psi=1$$

$$\psi^2-\psi+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+1$$

$$\psi-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{5}{4}} \text{ καὶ } \psi=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

ὡς τὸ πρῶτον. Ἔςι δὲ καὶ $\chi=\psi+1$· ἄρα $\chi=1+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ ὡς ἀνωτέρω,

Π ρ ό β λ η μ α Β'.

„Νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς, ὧν τὸ κεφάλαιον, τὸ παραγόμενον, καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἴσον.

„Πάλιν θῶμεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς χ καὶ ψ· ἀλλὰ θῶμεν τὸ μὲν $\chi=\pi+\rho$, καὶ τὸ $\psi=\pi-\rho$, ἄρα τὸ κεφάλαιον αὐτῶν $\pi+\rho+\pi-\rho=2\pi$ - - - Α, τὸ δὲ παραγόμενο $(\pi+\rho)(\pi-\rho)=\pi^2-\rho^2$ - - - Β, καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων $(\pi+\rho)^2+(\pi-\rho)^2=\pi^2+2\pi\rho+\rho^2+\pi^2-2\pi\rho+\rho^2=2\pi^2+2\rho^2$ - - - Γ, καὶ εἰσὶν ἴσαι. Ἄρα ἐξισούσθω ἡ Α' τῇ Β' οὕτω $2\pi=\pi^2-\rho^2$, καὶ ἑπομένως $\rho^2=\pi^2-2\pi$· θῶμεν εἰς τὴν Γ ἀντὶ ρ^2 τὸ ἴσον $\pi^2-2\pi$ εὑρίσκεται, $2\pi^2+2\pi^2-4\pi=4\pi^2-4\pi$· ἀλλὰ καὶ αὕτη ἴση τῇ Α, ἄρα $2\pi=4\pi^2-4\pi$· λοιπὸν ἐξίσωσις.

$4\pi^2-4\pi=2\pi$

$4\pi=6\pi$

$\pi^2=\frac{6}{4}\pi$

καὶ $\pi=\frac{3}{2}$

ἦν δὲ καὶ $\rho^2=\pi^2-2\pi=\frac{9}{4}-\frac{6}{2}=-\frac{3}{4}$, καὶ $\sqrt{\rho^2}=\sqrt{-\frac{3}{4}}$, ἤτοι $\rho=\frac{\sqrt{-3}}{2}$· ἐπειδὴ ὅμως $\pi+\rho=\chi$. ἄρα καὶ $\chi=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, καὶ εὕρομεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς $\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, καὶ $\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$; διότι τὸ κεφάλαιον αὐτῶν $\frac{3+\sqrt{-3}}{2}+\frac{3-\sqrt{-3}}{2}=\frac{6}{2}=3$, καὶ τὸ παραγόμενον $\left(\frac{3+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{-3}}{2}\right)=\frac{9-3\sqrt{-3}+3\sqrt{-3}+3}{4}=\frac{12}{4}=3$ ὡς τὸ κεφάλαιον· καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων αὐτῶν

$$\left(\frac{3+\sqrt{-3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3-\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{9+6\sqrt{-3}-3}{4}+\frac{9-6\sqrt{-3}-3}{4}$$

$=\frac{12}{4}=3$, ὡς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ παραγόμενον.

„Καὶ βλέπομεν, ὅτι ὁ 3 ἀριθμὸς ἔχει παράγοντας, ὡς καὶ ὅλοι οἱ πρῶτοι καθ' ἑαυτοὺς ἀριθμοὶ, πλὴν ἔχουσιν ἀλόγους καὶ ἀδυνάτους. Καὶ τοσαῦτα ἱκανὰ καὶ περὶ τοῦδε τοῦ κεφαλαίου, ἵνα μὴ μένωσιν οἱ ἀκροαταί μας ἄμοιροι τούτων τῶν ἐπωφελῶν ἀναλύσεων.