ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑΔΟΥ

ΤΟΥ

ΓΟΒΔΕΛΑ

Δόκτωρος καὶ Καθηγητοῦ τῶν Ἐλευθερίων Τεχνῶν καὶ τῆς Φιλοσοφίας.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΟΛΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ
ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

Τύποις τῆς ἐν Ἰασίῳ Ἑλληνικῆς Τυπογραφίας.
͵αωιη΄. 1818.

Πάντα μέτρῳ, καὶ ἀριθμῷ, καὶ σταθμῷ διέταξε.

Σοφ. Κεφ. ΙΑ.' Ἐδ. 20.

ΤΩ. ΥΨΗΛΟΤΑΤΩ.

ΕΥΣΕΒΕΣΤΑΤΩ. ΤΕ. ΚΑΙ.

ΘΕΟΦΡΟΥΡΗΤΩ.

ΑΥΘΕΝΤΗ.

ΚΥΡΙΩ. ΚΥΡΙΩ.

Ι. ΣΚΑΡΛΑΤΩ. ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ.

ΚΑΛΛΙΜΑΧΗ.

ΒΟΕΒΟΔΑ.

ΤΩ. ΜΕΓΑΛΟΠΡΕΠΕΣΤΑΤΩ.

ΗΓΕΜΟΝΙ.

ΠΑΣΗΣ. ΜΟΛΔΟΒΛΑΧΙΑΣ.

ΕΙΣ. ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ.

ΕΥΓΝΩΜΟΣΥΝΗΣ. ΑΙΔΙΟΥ.

ΤΕΚΜΗΡΙΟΝ.

ΙΕΡΑΝ. ΑΝΕΘΕΤΟ.

Ο. ΣΥΓΓΡΑΦΕΥΣ.

ΥΨΗΛΟΤΑΤΕ
ΚΑΙ
ΕΥΣΕΒΕΣΤΑΤΕ
ΗΓΕΜΟΝ!

Ἦν μὲν ἄρα δυσκόλȣ τε καὶ καταγελάςȣ ἀνδρὸς, εἰ ὢν ἂν τὸ ἐπιχειρȣ́μενον αὐτῷ ἐπερείδοιτο βάθρων ἀφεὶς τὸ κεφάλαιον, τῶν τε χρησίμων παραμελείη, καὶ τȣ̃ μονίμȣ καταφρονῶν, ἐπὶ μόνα φρȣ̃δά τε τὰ πολλὰ, καὶ ὀλιγαρκῆ τρέποιτο πράγματα. Ἀλλὰ Τέκτων μὲν, οἰκίας ἀναλογιζόμενος μέγεθος, καὶ ὕψος ἀναμετρῶν, εἰκότως τȣ́τοις θέμεθλόν τοι πήγνυσι καρτερὸν, ȣ̉ μὴν δ' ἕκαςα συμπεριαρμόσας κίοσιν ὑπεςήριξε καὶ ἐκράτυνεν, ὡς ἂν πρὸς τὴν λοιπὴν ὕλην σχοίη τὸ ἔργον ἀκράδαντον. Ἐμοὶ δ᾽ ἐπὶ τοσȣ̃τον ἔργον μογήσαντί τε καὶ καμόντι πολλὰ, δικαίως καὶ μάλ᾽ ἐναπέκειτο, ȣ̓ μόνον τῶν θεμέθλων αὐτῶν μὴ ὀλιγωρεῖν, ἀλλὰ καὶ τὸν κολοφῶνα ἄξιον ἐπιζητῆσαι, καὶ Ἀνδρὸς προςασίαν ἐκλιπαρῆσαι "Χρυσέας ὑποςάσαντι κίονας" ὡς ἂν αὐτȣ̃ ἐπὶ βάθρων ἐρειδομένȣ εὐπαγεϛέρων, μηδέποτε τῆς κακίας τὸ δυσμενὲς κατισχύσειε, καὶ ὥς πȣ ὁ Λυρικὸς ἀποφαίνεται.

. . . . . Ὡς ὅτε θαητὸν μέγαρον
πάξομεν· ἀρχομένȣ δ' ἔργȣ
πρόσωπον χρὴ θέμεν τηλαυγές.

Τίνα γȣ̃ν Προϛάτην ȣ̃τω δαιμόνιον τῆς ἐμῆς Μȣ́σης ἐπιλεξάμενος, ἀτήμελον αὐτὴν καὶ πενιχρῶς ἔχȣσαν συμπροπέμψαιμι, ȣ̓ μόνον περιθάλψοντα, ἀλλὰ καὶ τῇ τῆς

Ἀρετῆς αἴγλῃ καθωραΐσοντά τε καὶ λαμπρυνȣ̃ντα; Τίνα Θεὸν, τίν᾽ Ἥρωα; ἆρα τῶν Μακάρων τίνα, Τοὶ ἀθάνατα δώματ᾽ ἔχȣσιν; Ἀλλ᾽ ȣ̓κέτι Θεοῖς ȣ̃τω κȣ́φοις καὶ ἐπιλήσμοσι πιςευτέον εἶναι, ὁ παλαιὸς ἐκδιδάσκει Μῦθος, Δία ἀπελέγχων αὐτὸν ἐκλαθόμενον ἅμα τε μετὰ τῆς ὄνθȣ καὶ τὰ τȣ̃ πτηνȣ̃ ὠὰ ἀποτρίψαντα.

Τίνι γȣ̃ν ἔδει τὸ τοιȣ̃τον οἰκειότερον ἀναθεῖναι, ἄλλως τε ἐξ Ἀκαδημίας ἀρτίτοκον τὰ πλεῖστα ὑποςελλόμενον: ἢ ΣΟΙ τῇ τῶν Ἀρετῶν ἀγλαΐᾳ ἐν ἅπασι διαλάμποντι τηλαυγέςερον· ΣΟΙ τῷ Φιλοσόφῳ τε καὶ φιλανθρωποτάτῳ τῶν Ἡγεμόνων· ΣΟΙ, ὋΝ Προςάτην ἡμῶν ἀναγράφοντες εὐμενέςατον καὶ τῆς Ἑλληνικῆς Μέσης διαπρύσιον Πρύτανιν, ȣ̓ μόνον Κοίρανον κραταιότατον κατὰ θειοτέραν πως εὐκληρίαν, ἀλλὰ καὶ Φιλοσοφίας τὸν μέγιϛον Κηδεμόνα τε καὶ Μελεδωνέα ἔχειν ἅμα τε καὶ κεκτῆσθαι δαιμονίως κατηξιώμεθα. ΣΥ γὰρ τῶν Ἡγεμόνων Φιλοσοφώτατε, ἐπὶ τὴν ἀκροτάτην τῆς Ἀρχῆς ἄντυγα ἐπαρθεὶς, καὶ τὰς τῆς Πατρῴας Ἡγεμονίας οἴακας ἀποδεξάμενος ἄνωθεν, ὑπερφυᾶ πως τὴν πρὸς τὸ ὑπήκοον εὐδαιμονίαν καὶ ἐλπίδων ἀπέδειξας κρείττονα, τῇ τῶν Μολδαυῶν Γῇ τὸν χρυσοῦν ἐκεῖνον ἀνακαλεσάμενος χρόνον, ὅτε ἐσθλὰ πάντα ἔην βροτοῖς,

. . . . . καρπὸν δ' ἔφερε ζείδωρος ἄρουρα αὐτομάτη . . . .

Καὶ γὰρ, τὸν ἀπὸ τοῦ Ἡγεμονικοῦ Κράτους προχεόμενον τοῖς ὑπὸ χεῖρά ΣΟΙ ὄλβον, καὶ κέρατος Ἀμαλθείας διέγνωμεν δαψιλέστερον, καὶ Νείλου ἀρείονα, καὶ Πακτωλοῦ τιμαλφέστερον· καὶ ὅπερ ἡμῖν ὁ παλαιὸς Φιλόσοφος κατὰ μοῖραν ἐναπεφήνατο, τοῦτ' αὐτὸ ἐπὶ τῇ Ἡγεμονικῇ ἀγλαΐᾳ ἀτρεκῶς ἐξεικονίζεσθαι κατοπτεῦσαι ἐγένετο, ὑπὸ τῷ Φιλοσόφῳ ΑΥΤΗΣ Ὕψει τρισόλβιον γενόμενον τὸ ὑπήκοον.

Πῶς δ' εἶτα ἀξίως τῇ Ἡγεμονικῇ Κηδεμονίᾳ τὰς χάριτας καὶ ἡ Ἑλληνὶς παραπέμψαι Μῦσα δυνήσεται; ἧς Ἡρωϊκῶς ὤφθης προασπιζόμενος, Φέρτατε ἩΓΕΜΟΝ! καὶ Μεγαλοπρεπῶς λίαν προσεπαρκῶν· ὉΣ, καὶ τὴν διὰ *πολλῶν κραδαινομένην ἡμετέραν Σχολὴν εἰς Ἀκαδημίαν ἐξᾶραι λαμπρῶς ἔτως ἐπένευσας· καὶ φιλανθρωποτάτην διηνεκῶς ταῖς Μέσαις τὴν προςασίαν βραβεύων, Θεός τις ἀνεφάνης τοῖς Λόγοις ἀῤῥωγὸς καὶ σωτήριος, τὸ ἄκρον τοῖς πᾶσι προςιθεὶς ἄωτον. Πῶς ἄρα ταῖς Ἡγεμονικαῖς τῦ Ὕψυς τηλικαύταις μαρμαρυγαῖς, οἱ νεογνοὶ Ἀετιδεῖς ἀντιβλέψαι οἷοι ἐσόμεθα; Ποῖον ΑΥΤΗ ἀν-*

τάξιον ἀναπλέξωμεν οἱ Ἕλληνες ςέφανον, ὡς ἀπὸ κρȣνȣ̃ πολυχεύμονος δαψιλῶς ἀρυόμενοι ὁσημέραι τῆς εὐεργεσίας τὰ νάματα; Τȣ̃θ' ἕνεκα καὶ αὐτὸς ἐπὶ τῇ τῶν Ἀρετῶν αἴγλῃ διαπορῶν,

Δίζω, ἤ ΣΕ Θεὸν μαντεύσομαι, ἠὲ καὶ Ἄνδρα.

Τοίνυν ἐξ Ἑλικῶνος ἄνθεα Μȣσῶν δρεψάμενος μαλθακά, τὰ βαιὰ ταῦτα τῶν ἡμετέρων καμάτων προοίμια, αὐτȣργῷ τῇ χειρὶ ὁ οἰκέτης ΑΥΤΗΣ πρὸ τȣ̃ Εὐμενεςάτε παρελθεῖν Ὕψες τεθάῤῥηκα· ὀδόλως, ὄμενεν, πρὸς τὸ ὄβριμον καὶ θεῖον τῶν Ἀρετῶν ἀξίας προσοίσων τὰς χάριτας, ἀλλ' ἰνδάλματα μονονὲ βραχέα ὑποδειξόμενος, ψυχῆς αἰδίως πρὸς τὸν ἑαυτῆς Σωτῆρα εὐγνωμονέσης. Οὐδὲν τὲτο καινὸν, ἀλλ' ἢ ἐκ τε Ἀμπελῶνος, ὃν ἔρκεσιν ἡ Μεγαλοπρεπεςάτη ΑΥΤΗΣ Κηδεμονία περιςοιχήσασα καὶ φραγμῷ, τὴν ἡμετέραν ἀτέλειαν εὐμενῶς μάλα ἐξεργάζεσθαι ἐπετάξατο, ἄρτι διαμελαινόμενος βότρυς, τὰς τῆς Ἀκαδημίας πρώτας ἐπιφερόμενος ἀπαρχὰς, ἃς δή πε Δαίμονί τινι καθιερῦσθαι σεμνότερον ἐκ Πατρίων ἴσμεν ἐθῶν. Καὶ οἶδα μὲν, ὡς ὑδ' ἂν προκαλινδεῖσθαι ταῦτα τῦ Ἡγεμονικῦ Ὕψυς ὁ ὀρθὸς ἀξιώσειε λόγος, μᾶλλον δὲ παραῤῥιπτεῖσθαί πυ καὶ ἐν παραβύςῳ λανθάνειν, μηδέν τι χλιδὸν, ἢ ἀνειμένον ἄλλως, ἐξ αὐτῆς, ὃ λέγεται, τῆς βαλβίδος ἐπαγγελλόμενα. Ἀλλ' ἡ ἀπὸ τοῦ Ἡγεμονικοῦ Θρόνου προϊσταμένη ἐμὴ Τριτογένεια, ὁ ἐν ἅπασιν ἐμοὶ Εὐμενέστατος Κράντωρ, εἴη μοι καὶ ἐν τούτοις ἀποδεχόμενος τὰ τῆς προσφορᾶς προσηνῶς, καὶ ὑπὸ τῇ Κραταιᾷ σκέπῃ αἰδίως εὐγνωμονοῦσαν περιέπων ψυχήν.

Εἴη δέ μοι καὶ τοῦ λοιποῦ δαιμονίως πάνυ καὶ κραταιῶς τὰ τῆς Ὑπερτάτης Ἀρχῆς ἐπὶ μήκιστον Σκῆπτρα ἰθῦνον ΤΟ ΘΕΟΦΡΟΥΡΗΤΟΝ ΑΥΤΗΣ ΥΨΟΣ ἀπειρέσιον μὲν τὴν εὐδαιμονίαν τοῖς Ὑπηκόοις, μεγίστην δὲ καὶ ταῖς Μούσαις τὴν ἀῤῥωγήν τε καὶ προστασίαν ἐπιδαψιλευόμενον.

ΤΗΣ ΘΕΟΣΕΒΕΣΤΑΤΗΣ ΜΟΙ
ΑΥΤΗΣ ΥΨΗΛΟΤΗΤΟΣ

Ἐν Ἰασίῳ.
Ἰαννουαρίου α'.
αωιη'.

ὑποκλινέστατος καὶ ἐλάχιστος δοῦλο[ς]
Δ. Π. ὁ ΓΟΒΔΕΛΑΣ
Δ. κ. Κ. τ. Ελ. Τχ. κ. τ. Φφ

ΕΛΛΗΝΩΝ ΠΑΙΣΙ ΤΟΙΣ ΦΙΛΕΠΙΣΤΗΜΟΣΙ ΧΑΙΡΕΙΝ.

Τὰς τῆς Φιλοσοφίας Ἀρχὰς τοῖς ἡμῶν Φοιτηταῖς ὑπ᾽ ὄψιν προθεῖναι σπουδάζουσιν, ἐκεῖνο πρὸ πάντων τὸν νοῦν ἐπῄει, ὅπως μὴ ἀσυντελῆ αὐτοῖς, μήδ᾽ ἀνόνητον τὴν ἡμῶν ἀπεργασαίμεθα πρόθεσιν. Διὸ δὴ καὶ κατὰ λόγον ἐπιβαλέσθαι ἡμῖν ἔδοξεν, εἰ, πρὸ παντὸς ἄλλου, κρηπίδα οἱονεὶ τῆς Φιλοσοφίας, τῶν Μαθηματικῶν Στοιχείων τὰ βασιμώτατα ὑποθείημεν· ὃ δὴ καὶ ὁ θειότατος Πλάτων φθάσας ὑπέθετο. Τούτων γὰρ ἄνευ πάλαι οὐ μόνον οὐ Φιλοσοφίας, ἀλλ᾽ οὐδὲ τῶν προπυλαίων αὐτῆς θέμις ἦν ἐπιβαίνειν. Τὸ γάρ τοι περιᾳδόμενον ἐκεῖνο, Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω, πρὸ τῶν πυλώνων τῆς Ἀκαδημίας προγράψας, οὐκ ἀλλοτρίαν, οὐδ᾽ ἀσυντελῆ καὶ ἀπρόσφορον τὴν Μαθηματικὴν τυγχάνουσαν, οἰκείαν δὲ καὶ φίλην, καὶ οὐ μικρὰν τὴν συντέλειάν τε καὶ τὸν κόσμον εὐπρεπῆ παρεχομένην, τῇ ὑγιεῖ καὶ ἀσφαλεστέρᾳ Φιλοσοφίᾳ ἐδήλωσε. Καὶ μὲν δὴ τῶν τὰ πρῶτα ἐν Σοφίᾳ φερόντων οἱ αὐτοὶ τήν τε πρεσβυγένειαν ταύτην Μαθηματικὴν καὶ τὴν ἄλλην Φιλοσοφίαν ἀποκυήσαντες ὠκ φθησαν, ὡς ἐνὶ τοκεῖ, ἀδελφὰς οἱονεὶ διδύμη καὶ ἀλλήλων ἀναποσπάςυς, πρὸς ἀδελφὰ γενομέ νας τὰ ὑποκείμενα. Ταῦτα γὰρ τὰ Μαθήματ ἀδελφὰ, κατὰ τὸ Ἀρχύτειον, ὄντα, ἀλλήλων τ ἐχόμενα τρόπον ἁλύσεως κρίκων ἡγεῖσθαι ἐπά ναγκες. Τῆς γὰρ τοιαύτης ἁλύσεως, ἐφ᾽ ἐν καταληγέσης σύνδεσμον, μίαν ἀποφαίνεσθαι προ σήκει τέτων τῶν Μαθημάτων τὴν συγγένειαν τῷ κατὰ τρόπον μανθάνοντι. Τετὶ δὲ ἐ μόνον ἡ τάξις ὅτως αἱρεῖ καὶ νόμος ὁ παλαίτατος ἀποδέχε ται, ἀλλὰ δὴ καὶ αὐτὴ ἡ τῆς Φιλοσοφίας ἀπαιτε φύσις· οὕτω γὰρ αἱ τῆς Μαθηματικῆς Ἀρχαὶ κα τὰ ταύτης Στοιχεῖα εἰς ὅλην διαπεφοίτηκε τὴν Φι λοσοφίαν, ὥςε μηδὲν εἶναι, τῶν ἐκ τῆς περὶ τὴ Φύσιν μάλιςα Πραγματείας, ὃ μὴ πρὸς τὴν Μα θηματικὴν ἀκρίβειαν, οἱονεὶ πρὸς ςάθμην τιν καὶ γνώμονα, ἀναφέρεται.

Ἀλλ᾽ οἱ μὲν ὅτω Φιλοσοφίας ἀρχόμενοι, αὐ τίκα μάλα καλῶς ἴσασι, μὴ τηνάλλως, ἐδὲ σφίσι ἐπιβλαβῶς περὶ τὸ φιλοσοφεῖν κατατριβόμενοι Ἡμῖν δὲ, οἷς ἐ μόνον τῆς τάξεως αὐτῆς, ἀλλ δὴ καὶ τῆς ἐκ τῶν ἡμετέρων πόνων ὠφελείας ὀρ θῶς καὶ μάλα ἐμέλησεν, ἥτω πως ἐκ τῶν ἐνόντων αἱ ἀρχοειδέςαται τῆς Μαθηματικῆς γνώσεις, αἱ Ἀριθμητικαὶ αὗται, φημὶ, θεωρίαι, ἐσχεδίασο, ὡς τοῖς κατὰ Φιλοσοφίαν ἡμῖν, ἐν τῇ Ἡγεμονικῇ τῇδε Ἀκαδημίᾳ προσομιλᾶσί τε καὶ προσομιληκόσι Φοιτηταῖς, αὐτάρκεις τε ἐν ταῖς ἀπὸ Καθέδρας εἰσηγήσεσι ταύτας εἶναι καὶ πολλὴν προμνηςευομένας τὴν ὄνησιν. Ὅθεν καὶ τὴν Πραγματείαν ἅπασαν διχῇ διελᾶσιν, εἴς τε τὸ Θεωρητικὸν καὶ τὸ Πρακτικὸν, τὰ πραγματευόμενα παραδείγμασι καταλλήλοις τι καὶ ἐναργέσι διαλευκᾶναι διὰ φροντίδος ἐγένετο, τῇ τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων Θεωρίᾳ τὴν τῶν Ἑξηκονταδικῶν εἶτα ἐπισυνάψασιν, ὡς λυσιτελεςάτην τὰ μέγιςα ἐν τοῖς κατὰ τὴν Ἀςρονομίαν ὑπολογισμοῖς ἐσομένην.

Ἐπεὶ δ᾽ ἐν τῇ, κατὰ τὸ 1806 Σωτήριον Ἔτος, προεκδοθείσῃ Ἀναλυτικῇ ἡμετέρᾳ Ἀλγέβρᾳ διεξοδικῶς πάνυ τὰς περὶ Δυνάμεων, Ῥιζῶν τε καὶ Λογαρίθμων Θεωρίας Ἀλγεβραϊκῶς τε καὶ Ἀριθμητικῶς ἐνεςησάμεθα, ἵνα μὴ δὶς τὸν αὐτὸν βυθὸν τηνάλλως ὀφθείημεν παραπλέοντες, ἔδοξεν, εἰδὲ μνείαν γᾶν ἐνταῦθα τὸ παράπαν ἐκείνων ποιήσασθαι. Ἄλλως τε γὰρ καὶ οἱ τῶν πρωτοπείρων ὀργάδες τε καὶ ἀνέργαστοι νόες μὴ ὡς δέον ἐν τοῖς στοιχειώδεσι τούτοις προτελεσθέντες, σχολῇ γ' ἂν κατασχεῖν τε καὶ θρέψαι τὰ τῶν καταβαλλομένων σπερμάτων ὑψηλότερά τε καὶ καρπιμώτερα οἷοί ποτ' ἔσονται. Ταύτῃ τοι τῶν μὲν κεφαλαιωδεστέρων, οἷς ἡ Ἀριθμητικὴ θεωρία στηρίζεται καὶ συνέχεται, εὐμεθόδως τε ὡς ἔνι καὶ εὐρύθμως τὸν λόγον ἐποιησάμεθα· τῶν δ' ἐπὶ τούτοις καὶ περὶ ταῦτα, οἷς περὶ τὸ ἁβρότερον ἡ Πραγματεία ἐκπιαίνεται, ἐνταῦθα μὲν οὐδαμῶς ἐμνησάμεθα, τοῖς Ἀλγεβραϊκοῖς δὲ, εἰκότως, ὡς τελεώτερα ἐναπεταμιεύσαμεν. Οὕτω γὰρ ἂν καὶ τῇ Ἀριθμητικῇ τὰ εἰκότα καθυπεργήσαιμεν, μὴ ἐκμελῆ αὐτὴν καὶ ἠκρωτηριασμένην τὰ καίρια χαμαὶ κειμένην ἐάσαντες, καὶ τοῦ χρόνου φεισαίμεθα, μὴ καὶ δόξαιμεν περὶ τὴν τούτου δαπάνην ἀφειδῶς λίαν ἀσωτευόμενοι.

Ἀλλ' αὐτοὶ μὲν οὐκ ἀμογητὶ οὕτω καὶ ἀνὰ τὴν καθ' Ἡράκλειτον τρηχεῖαν ὄνωνιν μαλακὸν ἄνθος ἀληθείας ἀναλεξάμενοι, καὶ ἐξ Ἀριθμητικῶν πιδάκων οὐ βραχύ τι καὶ πεφεισμένον ἀποσταζουσῶν, ὅσον κατὰ τὴν ἐνεστῶσαν χρείαν πότιμον ἀρυσάμενοι καὶ εἰς ἓν συναγαγόντες τὰ παρὰ πολλοῖς ἐν μέρει ἀναπιδύοντα Ἀριθμητικὰ νάματα, πηγὴν ταύτην δίκρουν τοῖς τῷ καλῷ δίψει τῆς Σοφίας συνεχομένοις ἀνεστομώσαμεν. Γένοιτο δέ τις (εὐξαίμεθα γὰρ ἂν τὸ τοῦ Ὁμηρικοῦ Ἀγαμέμνονος) ἄλλος,

. . . . Ὅς τις τῆς δὲ ἀμείνονα μῆτιν ἐνίσπη
Ἢ νέος, ἠὲ παλαιός, ἐμοὶ δέ κεν ἄσμενον εἴη

Ἔγραφον ἐν Ἰασίῳ, κατὰ μῆνα Ἰαννουάριον ἀρχόμενον, τοῦ Χιλιοστοῦ Ὀκτακοσιοστοῦ Δεκάτου Ὀγδόου Σωτηρίου Ἔτους.

ΠΕΡΙ ΑΡΧΗΣ ΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΥ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ.

Τὰς τῆς Ἀριθμητικῆς πρώτας ἀνασκοπᾶσιν Ἀρχὰς, καὶ ὅποι ἄρα ταύτης τὰ ἀρχαιότατα κατεβέβληντο σπέρματα ἐπιεικῶς ἐξετάζᾶσιν, ἐκ ὀλίγα τὰ προσάντη ἀπαντᾶται καὶ δυσεξίτητα, πολλὰ δὲ καὶ ἄγνωςα τὸ σύνολον διαπορᾶμενα ἐκλανθάνεσιν, ὡς τῆς Ἱςορίας διὰ τᾶ τῶν αἰώνων πυκνοτάτα σκότας μηδόλως παρεισδῦναι ἐχάσης. Τοίνυν καὶ αὐτοὶ, ὅπερ αἱ τῶν πρὸ ἡμῶν Γραφαὶ ἀμυδρὸν λόγα παρέχᾶσιν ἔνανσμα, ἀπὸ τῶν ἀξιοπιςοτάτων ἀρχῶν ὅλως καταμαςεύσαντες, εἰ μή γε Συβαριτικὴν ὅλην τράπεζαν, λιτὸν γᾶν δεῖπνον τοῖς ἡμετέροις καὶ αὐτοσχέδιον παρασκευάσαι ὀλιγώρως ἐκ ἔσχομεν· ἵν᾽ ἅτω, ἀσιτᾶσιν ἄλλως καὶ μὴ ὅ, τι τῶν τοιάτων φαγεῖν ἔχᾶσιν, ἐκ τῶν παρόντων εὖ μάλα ἐμφορηθῆναι ἔσοιτο, ἡδεῖ τε καὶ αὐτάρκει περιτυχᾶσι τῷ ἐδέσματι.

Πρώτας τοίνυν Ἰνδᾶς Ἀριθμητικὴν ἀνατάξασθαι φέρεται, διὰ τὸ ἀρχαιοτέρας δῆθεν χρηματίσαι τῶν ἄλλων ἁπάντων, ᾶ μὴν ἀλλὰ καὶ τὴν τῶν Ἀριθμητικῶν χαρακτήρων προσευρεῖν χρῆσιν. Οὐδεὶς δ' ἂν οἶμαι τῦτο, ἐλαχίςης μόνον ἐχόμενον πιθανότητος δίκην, ἀληθείας ἀψευδεςάτης ἀκρίτως πως ἀποδέξαιτο. Παῤ αὐτῦς δὲ καὶ τῦς Αἰγυπτίυς ὐκ ὀλίγον (1), καὶ τῦς Φοίνικας δὲ πολλῷ διενηνοχέναι τῶν ἄλλων ἐπ' Ἀριθμητικῇ παρελάβομεν (2)· τύτυς μὲν ὡς μεγίςην τὴν πρὸς τῦς ἀλλοτρίυς ἔχοντας ἐπιμιξίαν, δι' ἣν εἰ καὶ μὴ τελείαν τὴν τῶν ἀριθμῶν ἐξεπίςαντο τέχνην, ᾔδεισαν γῦν τύτων τὰ βασιμώτατα καὶ ὅσα πρὸς ἐμπορίαν εἶχον προσεπαρκέσαι· ἐκείνυς δὲ ὐ μόνον τῆς Ἀριθμητικῆς, ἀλλὰ δὴ καὶ τῆς Μαθηματικῆς ἕξεως ἁπάσης τῦς πρώτυς ἴσμεν ἀναφανῆναι γεννέτας (3) ἰδίως δὲ τῆς τῶν ἀριθμῶν ἐμπειρίας Θεϋθός τις, ἢ Θώθ, ἢ Θωὺθ, ὁ παρ' ἐκείνοις εὑρετὴς ἐξυμνύμενος φέρεται.

Καὶ δὴ τοιάςδε λαβῦσα ἡ Ἀριθμητικὴ τὰς ἰδίας ἀρχὰς παρὰ τῶν Βαρβάρων, γλίσχρα πάντως καὶ πρὸς τὰς ἀκριβεςέρας τῦ βίυ χρήσεις τὸ παράπαν ἀσύμφορα ἔσχε τὰ πρῶτα βλαςή-

---

(1) Πρόκλος παῤ Εὐκλείδ. Βιβλ. Α.'
(2) Στράβ. Γεωγρ. Βιβλ. Α.'
(3) Πρόκλος ἔνθα ἀνωτέρω.

ματα, ἐν ἐλαχίςῳ περιβόλῳ κυκλίσιν ἀνυπερβλήτοις ὁρίζοιέ τι· καί γε τὰ πολλὰ, οἷά τις ὑπερφυὴς γνῶσις καὶ μυςικὴ τῶν Θεῶν ἐπίπνοια, ἐθαυμάζετο. Οὕτω καὶ γὰρ τὰς παρ' Αἰγυπτίοις Ἱερεῖς, οἷς μόνοις ὑπῆρχε θαμίζειν τοῖς τῆς Σοφίας ἀδύτοις, ἴσμεν τὰ πλεῖςα ἀναμορφωσαμένες ἐπὶ τὸ φοβερὸν καὶ θειότερον τὰ τοῖς ἀριθμοῖς ἰδιάζοντα, τοῖς ἑαυτῶν Ἱερογλυφικοῖς, καὶ ταῖς ἀποῤῥήτοις ὀχ ἧττον τῶν παραδόσεων, δι' ὧν τραχεῖα ὐκ ὀλίγον καὶ ἄβατος ἀπειργάζετο ἡ ἐπὶ τὰς τελειοτέρας ἐκείνων, καὶ πρὸς τὸν κοινὸν βίον λυσιτελεςέρας χρήσεις ἐξάγουσα δίοδος. Οὐκ ὀλίγην δ' ἐπὶ τύτοις καὶ ἡ τῶν λογιζομένων ἀναγραφὴ τὴν δυσχέρειαν ἐμνηςεύετο, δι' ἣν τῇ μνήμῃ μᾶλλον κατέχειν τὰ λογιζόμενα ἢ περὶ τὰς ἀριθμὰς κατηνάγκαζεν ἀπορία, ὃ δὴ ψήφυς ἑαυτοῖς ὕςερον ἐκτιθέντες, ἢ λίθακας, ὑπεσήμαινον, ἀνθ' ὧν καὶ παρὰ μὲν Ἕλλησι, Ψηφίζειν τὸ ἀριθμεῖν καὶ Ψηφηφορεῖν, παρὰ δὲ Ῥωμαίοις Calculos ponere aut subducere, Ψήφυς τιθέναι ἢ ἀφαιρεῖν (1) ἀπὸ τῶν χρωμένων (2) κατήχεσα.

---

(1) Πρόκλ. Αὐτόθι. Γαλλικ. Σύςημ. Κοσμ. Σελ. 3.
(2) Λέγεται καὶ γὰρ παρὰ Ῥωμαίοις Calculus ἡ Ψῆφος, ἀφ' ὗ κοινότερον Calculare τὸ Ἀριθμεῖν.

Οὕτω δὴ καὶ ὁ Σάμιος Πυθαγόρας τήν τε ἄλλην Σοφίαν παρ' Αἰγυπτίων ἐκπαιδευθεὶς, καὶ τῶν ἀριθμῶν τὰ ἀπόῤῥητα ἀπηνέγκατο, διὸ τὰ πλεῖςα ἐν τοῖς Φιλοσοφεμένοις παρεισῆγεν ἐκ τῆς τῶν ἀριθμῶν θειοτέρας κατ' ἐκεῖνον δυνάμεως. Πρῶτον καὶ γὰρ ἁπάντων αὐτὸν ἀσκῆσαι φέρεται τὴν Ἀριθμητικὴν (1), *ταύτην τε ἀντὶ πολλῶν ποιήσασθαι μαθημάτων, εἰς φῶς τε ἐξαιρέτως προαγαγεῖν* (2). *Φασὶ δέ τινες πρῶτον αὐτὸν παρὰ τοῖς Ἕλλησιν Ἀριθμητικὴν διδάξαι, ἣν εἶτα ἀκριβέςερον τὸν Νικόμαχον ὑπεκθεῖναι* (3). *Ἐφέρετο γὰρ τοσαύτη σπεδῇ περὶ τὰς τῶν ἀριθμῶν ἰδιότητας, ὡς τὸ ἔσχατον τῶν ἐν ἀνθρώποις ἀγαθῶν τῇ τέτων γνώσει ἀνατιθέναι* (4). *Ἦσαν δὲ παρ' αὐτῷ διχῶς οἱ ἀριθμοὶ θεωρέμενοι, ἤτοι Νοητῶς, ἢ κατ' Ἐπιςήμην* (5). *καὶ Νοητοὶ μὲν ἦσαν οἱ τὴν αἰωνίαν ἐσίαν πως αἰνιττόμενοι· καὶ γὰρ, „ τὰν ἀριθμῶ ἐσίαν ἀΐδιον*

---

(1) *Τίμαιος παρὰ Λαερτίῳ Κεφ. Η.'* 12.
(2) *Στοβαῖος ἐν Ἐκλογ. Φυσικ. Κεφ. Β.'*
(3) *Ἰσίδ. Ἀρχ. Βιβ. Γ.' Κεφ. Β.' Σιοβ. Ἔνθα ἀνωτ. Μεύρσιος περὶ Πυθαγ. Κεφ. Δ.' Σελ.* 6.
(4) *Θεοδώρητ. Θεραπευτικῶν Βιβ. ΙΔ.' Σελ.* 152. (*ἐκδ.* 1592.).
(5) *Νικόμαχος. Ἀριθμητ. Εἰσαγωγ.*

εἶναι μὲν ἀρχὰν, ἔφα, προμαθεστάταν τῶ παντὸς οὐρανῶ καὶ γᾶς, καὶ τᾶς μεταξὺ φύσιος, ἔτι δὲ καὶ θείων, καὶ θεῶν, καὶ δαιμόνων διαμονῆς ῥίζαν (1). Κατ' Ἐπιστήμην δὲ, ἡ τῶν Μονάδων ἄθροισις, εἴτ' ἐν ἡ τῶν πολλῶν πρόοδος ἀπὸ τῆς Μονάδος ἐναρχομένη (2)· αἱ δὲ τῶν Πυθαγορείων περὶ τὰς ἀριθμὰς κλήσεις, αἷς αὐτὰς Περιττὰς καὶ Ἀρτίας εἰώθασιν ἀποκαλεῖν Ἀρχαὶ τῶν κατ' Ἐπιστήμην ἐλέγοντο (3). Τὴν δὲ Μονάδα διακρίνεσι τᾶ Ἑνὸς εἰ καὶ αὐτὴν Ἀρχύτας, καὶ Φιλόλαος καὶ Θέων Σμυρναῖος, καὶ Πλάτων ὑπὸ μιᾷ τῇ ἐννοίᾳ παρέλαβον, Μονὰς μὲν γὰρ ἐςὶ καὶ λέγεται ἐπὶ τῶν Νοερῶν, Ἓν δὲ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν (4). ἢ, κρεῖττον, Μονὰς μὲν ἐςὶν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν (5), Ἓν δὲ ἐπὶ τῶν Ἀριθμητῶν, ὥςω καὶ Δίω, καὶ ἐφεξῆς. Εἶτα, Ἄπειρον ἔφασαν ἀριθμὸν, ὀχὶ τὸν ὅλως ἀσώματόν τε καὶ ἄυλον (6), ἀλλὰ τὸν ἔνυλον και μηδόλως ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν χωριζόμε-

(1) Ἰάμβλιχ. ἐν Βίῳ Πυθαγόρυ Κεφ. ΚΗ'.
(2) Νικόμ. Ἔνθα ἀνωτ. Μοδεράτος παρὰ Στοβαίῳ ἐν Ἐκλογ. Φυσ. Κεφ. Β'.
(3) Θέων. Σμυρν. Μαθημ. Κεφ. Α'.
(4) Ἀνώνυμος παρὰ Φωτίῳ περὶ Βίυ Πυθαγόρυ. Στοβ. Αὐτ.
(5) Μοδεράτος παρὰ Στοβ. αὐτ.
(6) Θεμίςιος ἐν Φυσ. Τμημ. Γ' 15.

νον (1). Εἰσὶ δὲ καὶ τῶν κατ' Ἐπιστήμην ἀριθμῶν τὰ γένη δύω, ὁ μὲν Περιττὸς, ὁ δὲ Ἄρτιος (2), ἐν οἷς τὲς Πυθαγορείες τῶν Πλατωνικῶν διαφέρειν, λέγοντας μόνον αὐτῶν τὲς περιττὲς ἀπείρες ὑπάρχειν· καὶ γὰρ ὁ περιττὸς εἰς ὅσα περ ἂν μόρια κατατμηθείη, ἐδέποτε ἄρτιος ἀποβήσεται, τμηθήσεταί τε ἔτως οἷον ἐπ' ἄπειρον (3). Εἶναι δὲ τὸν μὲν περιττὸν φύσεως ἀνδρικῆς (4), Θεοῖς ἐρανίοις ἴδιον (5), ὃς καὶ Πλήρης καὶ Τέλειος λέγεται (6)· τὸν δ' ἄρτιον, ἀριθμὸν Ἀτελῆ, γυναικεῖον, ἢ γυναικοειδέα, δαίμοσι καταχθονίοις ἴδιον (7). Οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ τὰ γιγνόμενα ἐξ ἀριθμῦ περιττῦ ἄῤῥενα εἶναι προσήκει, θήλεα δὲ τὰ ἐξ ἀρτίε, ἐςὶ γὰρ ὁ ἄρτιος τμήσει τε καὶ πάθει ὑποβεβλημένος ἀείποτε, ὧν ἁπάντων ὑπερέχειν ἀνάγκη τὸν περιττόν· τῦθ' ἕνεκα Γυνὴ μὲν ὁ ἄρτιος, Ἀνὴρ δὲ ἀποκαλεῖται ὁ περιτ-

---

(1) Ἀριςοτέλ. Φυσικ. Γ.' 4.
(2) Εὐςράτι. ἐν Ἠθικ. Θεμίς. Αὐτ. Σιμπλίκ. Κς.' Σέρβιος ἐν ταῖς τῦ Βιργιλ. Ἐκλογ Βιβ. Ζ.' ςίχ. 66.
(3) Θεμίς. Αὐτ.
(4) Μακρόβ. ἐν Κρον. Ι. 13.
(5) Σέρβ. Αὐτ. Πλύταρχ. ἐν Ἴσ. καὶ Ὀσίριδι.
(6) Πλύταρχ. Περὶ τῆς Ὁμ. Ποιήσ. Κενσορῖν. Κεφ. 20.
(7) Σέρβ. Αὐτ. Μακρόβ. ἐν τῷ τῦ Σκιπ. Ἐνυπν. Α.' 6.

τός (1). Ἐὰν δέ ποτε ἐπὶ τὸν περιττὸν ἀχθῇ τις ἄρτιος ἀριθμὸς, Ἀῤῥενόθηλυ ἔσεται τὸ προκύπτον, ἢ Ἑρμαφρόδιτος (2). Ἐκάλει τε προσέτι τὸς περιττὸς ἀριθμὸς καὶ Γνώμονας (3), προστιθέμενοι καὶ γὰρ τοῖς Τετραγώνοις, καθάπερ οἱ τῶν Γεωμετρῶν γνώμονες φέρουσιν ἰσαεὶ εἶδος τετράγωνον.

Ἡ δὲ τῶν Ἀριθμῶν χρῆσις συμβολικῶς παρὰ τοῖς Πυθαγορείοις ἅπασα εἶχε, παντοίων ὀνομάτων σύζευξιν φέρουσα, ἀφ' ὧν καὶ τὰς τῶν προσαγορευομένων διαφορὰς ἀπελάμβανον (4). Οὕτω τοίνυν τὸν πρῶτον ἀριθμὸν καλεῖσθαι Μονάδα ἔλεγον, ἀπὸ τοῦ μένειν ἢ μεμονῶσθαι· ἦν δὲ ἡ αὐτὴ καὶ Νοῦς (5), ὅτι ἀναλλοίωτος ὁ Νοῦς ἐςι, καὶ ὁ αὐτὸς ἀεί ποτε καθάπερ ἡ Μονὰς διαμένει, ὅτι τε τῶν λοιπῶν ὑπερέχει (6), καὶ

---

(1) Ἀνώνυμ. παρὰ Πτολεμ. Τετραβίβλ. Βιβλ. Α.' Πορφύρ. ἐν Βίῳ Πυθαγόρ. Σελ. 202.
(2) Ἀνώνυμ. Θεολογύμενα Ἀριθμητικῆς.
(3) Θεμίς. Φυσ. Γ.' ἀρ. 26.
(4) Μοδεράτος ἔνθ. ἀνωτ.
(5) Νικόμαχ. παρὰ Φωτίῳ. Ἀνώνυμ. Θεολογυμ. Ἀριθμητ.
(6) Ἀλέξανδ. Ἀφροδ. ἐν Μεταφ. Κεφ. Ε.'

Ἑρμαφρόδιτος, ἤτοι Ἀρρενόθηλυς (1), ἅτε δὴ ἀ-
φυής· τοῖς ἴσοις καὶ γὰρ ἡ Μονὰς προσιθεμένη ἀποτελεῖ ταῦτα ἄνισα, τοῖς δὲ ἀνίσοις ἴσα· καὶ Θεὸς, ὅτι ἀρχὴ ἡ Μονὰς καὶ τέλος ἁπάντων (2), καὶ Ὕλη, καὶ Πανδοχεὺς; ὅτι ἐξ αὐτῆς ἡ μονὰς ἀναδίδοται ἔτι δὲ καὶ Χάος, Σύγχυσις, Σύγκρασις, Ἀλαμπία; Σκοτωτία; Τάρταρος, Στὺξ, Φρικώδια, Ἀμιξία, Βάραθρον ὑποχθόνειον; Λήθη, Στυφρὰ Παρθένος, Ἄτλας, Ἄξων; Ἥλιος, Πυράλιος, Μορφὼ (3). καὶ Ζηνὸς πύργος, Ζηνὸς φυλακὴ, Ζηνὸς θρόνος (4), Σπερματίτης λόγος (5); σπέρμα καὶ γὰρ ἡ Μονὰς τὸ πρώτιστον ἁπάντων τῶν ἀριθμῶν, ἐξ ἧς τὸ λοιπὸν αὐτῶν ἀναπτύσσεται σύνταγμα (6), καὶ Ἀπόλλων Προφήτης (7) καὶ Προμηθεὺς, ὅτι ζωῆς πρόξενος (8)· καὶ Γονὴ, ὅτι ταύτης ἁπάσης οὐδέποτ᾽ ἂν ἕτερος κατορθωθείη ἀριθμός (9)· καὶ Οὐσία,

---

(1) Ἀριστοτέλ. ἐν Πυθαγ. παρὰ Θέωνι Σμυρν. Μαθημ.
(2) Μακρόβ. παρὰ Φωτίῳ ἐν Βίῳ Πυθαγ.
(3) Θεολογούμ. Ἀριθμ.
(4) Σιμπλίκ. περὶ Οὐρανοῦ Βιβ. Β.
(5) Νικόμαχ. Αὐτ.
(6) Μαρτιαν. Καπελ. Βιβ. Ζ. Σελ. 237.
(7) Παρὰ Νικομ.
(8) Θεολογ. Ἀριθμ.
(9) Αὐτόθι.

διὰ τὸ εἶναι ἁπάντων τὴν οὐσίαν πρωτίστην (1)· καὶ Αἴτιον ἀληθείας, καὶ Ἁπλοῦν παράδειγμα, καὶ Συμφωνίας τάξις (2). Ἐπὶ τοῦ μείζονος καὶ ἐλάσσονος Ἴσον, ἐν ἐπιτάσει καὶ ἀνέσει τὸ Μέσον, ἐν πλήθει τὸ Μέτριον, ἐν χρόνῳ τε τὸ Νῦν καὶ τὸ Ἐνεστώς (3). Οὐ μὴν δὲ καὶ Ναῦς ἦν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, καὶ Δίφρος, καὶ Φίλος, καὶ Ζωὴ, καὶ Εὐδαιμονία (4)· καὶ Εἶδος, ὅτι διαγράφει, περιέχει καὶ τελειοῖ (5). ὅτι τε ἐξ αὐτοῦ καὶ ἡ τῶν λοιπῶν γέννησις (6)· καὶ Ἔρως, Ὁμόνοια, Εὐσέβεια, Φιλία, Πρωτεὺς, ὡς ἐν ἑαυτῷ ἅπαντα συνέχων τὰ εἴδη (7)· Μνημοσύνη, Ἑστία, Πῦρ, (8), ἡ γὰρ τῆς Μονάδος φύσις μόνη ἐν τῷ παντὶ καθάπερ τις Ἑστία διάκειται· τέως δὲ ὁ αὐτὸς ἦν καὶ Πολυώνυμος (9).

Πολλοῖς εἶτα καὶ τὴν Δυάδα χαίρειν ὀνόμα-

---

(1) Ἀλέξ. Ἀφρ. Μεταφ. Βιβ. Α'.
(2) Θεολογ. Ἀριθμ.
(3) Ὁ Αὐτὸς αὐτ.
(4) Θεολογ. αὐτ.
(5) Ὁ αὐτ. αὐτ.
(6) Μαρτιανὸς. Καπέλ. αὐτ.
(7) Θεολ. Ἀριθμ. αὐτ.
(8) Πλούταρχ. παρὰ Νομᾶ.
(9) Ἡσύχιος ἐν Λέξει.

σιν, ὑπὸ πολλῶν προσεμεμαρτύρητο. Ἦν γὰρ ἡ αὐτὴ καὶ Δαίμων (1), Τόλμα, Ἀνδρία, Ἔρις (2), Ὕλη (3), Ἀνομοίων αἰτία, Μεταίχμιον πλήθους καὶ μονάδος ἴσον, ἔν τε γὰρ κράσει καὶ τῇ συνθέσει, μόνος οὗτος ὁ ἀριθμὸς τὸ ἴσον ἀποτελεῖ (4)· Ἄνισος, Ἔλλειψις, Πλεονασμὸς, μόνη Ἀσχημάτιστος, Ἀόριστος, Ἄπειρος, ὅτι πᾶν σχῆμα ἐκ τῆς τριάδος ἀπάρχεται. Δύω γὰρ εὐθεῖαι χωρίον ἐ περιέχουσι, τριῶν τοὐλάχιστον εἰς τοῦτο ἀπαιτουμένων. Ἀρτία μόνη

Ἐρατὼ, μονάδι καὶ γὰρ συνέζευκται, οἷον

ος. Ἁρμονία, Τλημοσύνη (5), Ῥίζα, Πό-

δακος Ἴδης, Κορυφὴ Φάνης, Δίκη, Ἶσις,

μήτηρ, Φρυγία, Λυδία, Δινδυμένη, Δήμη-

ενονία, Ἵμερος, Ἐρία, Ἀστερία, Ἄρτεμις, Μυχαῖα, Ἀφροδίτη, Ὁρμὴ, Δόξα, Κινήσεως ἀρχὴ, Διαίρεσις (6) Μαῖα (7).

X X

---

(1) Πλουτάρχ. Ἀρέσκ. τοῖς Φιλοσ. Α.'
(2) Θεολογ. Ἀριθμ.
(3) Νικόμαχ. Ἔνθα ἀνωτ.
(4) Ὁ Αὐτ. Αὐτόθι.
(5) Νικόμ. Ἔνθ. ἀνωτ. Θεολογ. Ἀριθμ.
Ἀφροδ. Θεολογ. Ἀριθμ. Φιλόπον. Μεταφ.
Φιλοσ. Α.' 3.

Οὐκ ὀλίγα δ' ὡσαύτως καὶ περὶ τῆς Τριάδος ἐ-φέρετο, διὰ τὸ ταύτην πρώτην τῶν ἐνεργείᾳ ἀνο-μοίων ὑπάρχειν καὶ τῶν μονάδων πρώτην συλλογήν· διὸ καὶ τὸν Ἀπόλλωνα ἐπὶ τριττοῖς θύμασι χρησ-μοδοτεῖν ἀπὸ Τρίποδος παραδώκασι." Τοὺς σπένδειν τοὺς ἀνθρώπους καὶ μαντεύεσθαι τὸν Ἀπόλλωνα ἀπὸ τοῦ Τρίποδος, διὰ τὸ καὶ τὴν τριάδα πρῶτον φῦναι τὸν ἀρι-θμόν (1)." Ἐλέγετο δ' ἐκείνοις ὁ ἀριθμὸς, Κρόνιος, Λητὼ, Ἀμαλθείας κέρας, Θέτις, Ἁρμονία, Ἑκάτη, Ἐράνη, Χαρίτια, Πολύμνια, Πλούτων, Ἄρκτος, Ἑλί-κη, Εἰς ὠκεανὸν μὴ καταβαίνουσα, Διοσκυρία, Μῆτις, Τριδύμη, Τρίτων, Θαλασσοῦχος. Τριτογένεια, Ἀχελῶος, Ἀργυρόπεζα, Γοργωνία, Φορκία, Λόδιος, Δίκη, Νοῦς (2)

Σέβεσθαι δὲ τοὺς Πυθαγορείους καὶ παρὰ πάν-τας τοὺς ἀριθμοὺς διὰ τιμῆς ἄγειν λέγεται τὴν Τε-τράδα, διὸ αὐτὴν καὶ τελειότατον τῶν ἀριθμῶν καὶ πρῶτον ἐκάλουν, καὶ τοῦ πρώτου Δαίμονα, καὶ Ῥίζαν ἁ-πάντων (3). Ἐβούλετο δὲ καὶ τὸ Θεῖον ὑπαινιτ-

(1) Ἰάμβλιχ. Κεφ. ΚΗ'
(2) Νικόμαχ. Ἔνθ. ἀνωτ. Θεολογ. Ἀριθμ. Σιμπλίκιος περὶ Ψυχῆς Α'
(3) Ἐξήγησ. Φυσικ. παρ' Ἡσιόδ. ἐν Ἔργ. καὶ Ἡμέρ. Λουκιαν. πρὸς Λεπτίνην.

τεσθαι διὰ τῆς Τετράδος, ἔλεγέ τε τὴν Τετράδα τὴν Ἀριθμητικὴν εἶναι μέσην πρὸς τὴν Μονάδα καὶ τὸν ἕβδομον ἀριθμόν. Εἶτα δὲ, καὶ τὸ πρῶτον Στερεὸν τῇ Τετράδι ἐνεῖναι· τὸ γὰρ Σημεῖον, ἴσον εἶναι Μονάδι, Δυάδι δὲ τὴν Γραμμὴν, τῇ δὲ Τριάδι τὴν Ἐπιφάνειαν, καὶ τῷ Στερεῷ τὴν Τετράδα· καὶ γὰρ ἐν αὐτῇ ἡ πρώτη Πυραμὶς σχηματίζεται, ἧς τὴν μὲν τρίεδρον βάσιν συνίστησιν ἡ Τριὰς, τὴν κορυφὴν δὲ ἡ Μονὰς τερματίζει. Ὡσαύτως καὶ τὴν Ψυχὴν ἔφασκεν εἶναι Τετράδα, διὰ τὸ τέσσαρας αὐτὴν κατὰ τὸν ἀριθμὸν ἔχειν τὰς δυνάμεις, Νῦν, Ἐπιστήμην, Δόξαν, καὶ Αἴσθησιν· διὰ ταῦτα καὶ ἡ Τετρακτὺς ἐπὶ τοῖς ὀμνύουσι παρελαμβάνετο. Κἀκεῖνο δὲ τῆς εἰς Θεοὺς αὐτοῦ τιμῆς τεκμήριον, τὸ παρηγγέλθαι μηδέποτε ὀμνῦναι Θεῶν ὀνόμασι, καταχρωμένους, εἶναι δὲ τὸν ὅρκον ἐκ τῆς Τετράδος (1).

Οὐ μὰ τὸν ἁμετέρᾳ γενεᾷ παραδόντα Τετρακτὺν,

Παγὰν ἀενάου φύσεως, ῥίζωμά τ' ἔχουσαν.

Ἐκαλεῖτο διὸ ἡ Τετρὰς, Ἄλλη Θεὸς, Πολύθεος, Πάνθεος (2), Αἰόλου φύσις, Ἡρακλῆς, Ἑρμῆς, Ἡ-

(1) Ἰάμβλιχ. ἐν Βίῳ Πυθαγόρου. Κεφ. ΚΘ.

(2) Νικόμαχ. παρὰ Φωτίῳ. Θεολογ. Ἀριθμ. Ἰάμβλιχ. Ἔνθ. ἄνωτ.

φαιςος, Βάκχος, Μαιάδης, Διόσκυρος, Ἁρμονία, Σῶμα, Ψυχὴ, Πρῶτον βάθος (1), κ. τ. λ.

Παρείπετο δὲ τῇ Τετράδι ἡ Πεντὰς ἐν ἰδίᾳ τάξει, ἀποκαλυμένη, Παντὸς ἀριθμῦ ἡ πρώτη συναρμογὴ, διὰ τὸ ἐν ἑαυτῇ τόν τε ἄρτιον ἅμα περιέχειν καὶ τὸν περιττὸν, εἴτ' ὂν μετὰ τῆς Δυάδος καὶ τὴν Τριάδα. Ἤκυε δὲ καὶ Ἀνεικία καὶ Δίκη, ὅτι διαιρυμένη ἡ Δεκὰς ἐπὶ τὴν Πεντάδα ισως ἐκτέμνεται (2)· Νέμεσις, Βυβαςία, Γαμηλία, Ἀνδρογυνία, Ζωναία, Ἀφροδίτη, Κυκλῦχος, Ζηνὸς Πύργος, Διδυμία, Ἄξων ἰςάμενος, Παλλὰς Ἀθάνατος Καρδιάτις (3).

Τὴν Ἑξάδα ἔφασαν Ἀριθμὸν τέλειον, τὴν ἐν αὐτῇ τῦ Παντὸς διάπλασιν διὰ σέβας ἄγοντες, καθάπυ ὁ Ἱερὸς Κλήμης ἀποφαίνεται (4). Ἐκάλυν δ' αὐτὴν καὶ Εἶδος εἴδυς, Ψυχὴν, Ἁρμονίαν, ἅπασα καὶ γὰρ ἡ Ψυχὴ ἁρμονία τις ὅσα πέφυκε· Ὁλομέρειαν, Ἀφροδίτην, ὅτι ἐξ αὐτῆς τίκτεται Ἁρμονία· ὁ γὰρ ἕκτος πρὸς τὸν δωδέκατον συνίςηα

---

(1) Ἀλέξ. Ἀφροδ. Μεταφ. Ε.' Σιμπλίκ. Βιβλ. Ε.' περὶ Ψυχῆς Πλύταρχ. Ἀριςοτ. Φιλοσ. Α. 3.

(2) Θεολογ. Ἀριθμ. καὶ Νικόμαχ. παρὰ Φωτίῳ.

(3) Ἔνθ' Ἀνωτ.

(4) Στρωμάτ. ς.'

τὴν Διὰ πασῶν συμφωνίαν, πρὸς τὸν ἔνατον τὸν Ἡμιόλιον, πρὸς τὸν ὄγδοον τὸν Ἐπίτριτον, ὅπερ ἐςὶ τὴν Διὰ τεσσάρων συμφωνίαν (1). Ζυγία, Γαμηλία, Γάμος (2), διὰ τὴν τῦ ἀρτίυ καὶ περιττῦ ἀριθμῦ σύμμιξιν (3)· ὥσπερ γὰρ ἐκ τῦ θήλεος διὰ τῦ ἄῤῥενος τῶν ζώων ἡ φύσις ἐναποτίκτεται, ὅτω καὶ διὰ τῦ περιττῦ ἀχθέντος ἐπὶ τὸν ἄρτιον ἡ ἑξὰς, ὅτι ὁ μὲν περιττὸς τύπον τὸν τῦ ἄῤῥενος παρίςησιν, ὁ δ᾽ ἄρτιος τὸν τῦ θήλεος (4)· ἔτι δὲ Ζυγίτις, Φιλοτησία, Φιλίωσις, Ὑγεία, ἣν καὶ διὰ ἀντεςραμμένων, δύω Τριγώνων πρὸς ἑκάτερα, οἷα δὴ συμβόλῳ τινὶ ὑπεσήμαινον. Ἑρμῆς, Ἑκατηβελέτης, Ἑκάτη τριοδῖτις, Ἀμφιτρίτη, Ἀγχιδίκη, ὅτι πρῶτος ἐςὶ μετὰ τὴν Πεντάδα, τὴν ἄλλως καὶ Δίκην ἀκύσαν. Θάλεια Μῦσα, διὰ τὴν πρὸς τὰς λοιπὰς συμφωνίαν. Πανάκεια, Κόσμος (5).

Ἡ δ᾽ Ἑπτὰς ἐςιν, οἱονεί τις Σεπτὰς καὶ Σεβασμοῦ ἀξία, ταύτην καὶ γὰρ ἰδιάζειν μάλιςα τοῖς θείοις τῶν πραγμάτων, ὁ ἡμέτερος Φιλόσοφος ψε-

---

(1) Μαρτιαν. Καπέλ. Βιβ. Ζ. Σελ. 240.
(2) Κλήμ. Στρωμ. Ε.
(3) Πλύταρχ. περὶ Ψυχῆς.
(4) Κλήμ. Ἀλεξ. Στρωμ. Σελ. 683.
(5) Νικόμ. Θεολογ. Ἀριθμ.

το, διὸ καὶ Τέλειος ἀριθμὸς (1), καὶ Τύχη, Ἀμήτωρ Παρθένος (2), Τριτογένεια, ὅτι ὐκ ἐκ συζυγίας ἀριθμῦ, ἀλλ᾽ ἐξ αὐτῆς τῆς τῦ Πατρὸς κεφαλῆς ἀνεπήδησε (3)· Ἄρης, Ἀτρυτώνη, Φυλακῖτις, Ὀβριμοπάτρη, Πολυαρέτη, Οὐλομέλεια, Τελέσφορος, Ἀλαλκομένεια, Ὄσειρις, Φωνὴ, Φθόγγος, Κλειὼ, Κρίσις, Ἀδράστεια (4).

Τὴν Ὀκτάδα ἔφασαν, Πρῶτον κύβον, ἥτις ἄλλως καὶ Παναρμονία ἤκησε, καὶ Θηλυποιὸς, καὶ Καδμεία, Μήτηρ, Ῥέα, Κυβέλη, Ἔρως, Φιλία, Μῆτις, Θέτις, Εὐτέρπη, Ποσειδῶν (5), κ.τ.λ.

Τὸ ἐκ τῦ περιττῦ ἀριθμῦ πρῶτον Τετράγωνον, ἐςὶν ὁ τῆς Ἐννάδος ἀριθμός. Καλεῖται δὲ Ὠκεανὸς, Ὁρίζων, ὅτι ὁρίζεται πως τὺς ἀριθμὺς· ὕτω γὰρ, ἐκτὸς τέτυ ὁ ἀριθμὸς μὴ διεξιεὶς, παλινδρομεῖ αὖθις ἐφ᾽ ἑαυτόν (6). Προμηθεὺς, Ἅλιος, Ἥφαιςος, Ἑκάεργος, Παιὰν, Τερψιχόρη, Τελέσφορος, Τέλειος (7).

---

(1) Ἀλεξ. Ἀφροδ. Προβλ. Β.'

(2) Πρόκλ. ἐν χρυσ. Ἐπ. Πυθαγ. ςίχ. 47.

(3) Θέων Σμυρν. Κεφ. 45.

(4) Νικόμαχ. — Θεολ. Ἀριθμ. Φίλων περὶ Κοσμοπ.

(5) Πλύταρχ. περὶ Ἴσιδος καὶ Ὀσίριδ. Νικόμαχ. Ἀριθμ.

(6) Θεολογ. Ἀριθμητικῆς

(7) Αὐτόθι.

Μέγιςον τέως ἁπάντων ᾤοντο τὸν Δέκατον ἀριθμὸν, εἴτ' οὖν τὴν Δεκάδα, ὅτι ἅπαντας ἐν ἑαυτῷ τούς τε Ἁρμονικὸς καὶ Ἀριθμητικὸς περιέχει λόγους (1). Τὴν γὰρ τοῦ ἀριθμοῦ φύσιν ὁ Πυθαγόρας ἔλεγεν εἶναι Δεκάδα, ὅτι τοῦ ἀριθμοῦ ἐνταῦθα περαιουμένου, ἐπὶ τὴν Μονάδα αὖθις καθυποςρέφειν φιλοῦσιν Ἕλληνές τε καὶ Βάρβαροι. Καὶ Πλούταρχος: Εἶναι δὲ τὴν φύσιν τοῦ ἀριθμοῦ Δεκάδα, μέχρι γὰρ τῶν δέκα πάντες Ἕλληνες, πάντες Βάρβαροι, ἀριθμοῦσιν, ἐφ' ἃ ἐλθόντες πάλιν ἀναποδοῦσιν ἐπὶ τὴν μονάδα· καὶ τῶν δέκα πάλιν, φησιν, ἡ δύναμις ἐςὶν ἐν τοῖς τέσσαρσι καὶ τῇ τετράδι, τὸ δὲ αἴτιον, εἴ τις ἀπὸ τῆς Μονάδος ἀναποδῶν, κατὰ πρόσθεσιν τιθείη τοὺς ἀριθμοὺς ἄχρι τῶν τεσσάρων προελθὼν ἐκπληρώσει τὸν δέκα ἀριθμόν (2). Ἐκαλεῖτο δὲ ὁ αὐτὸς καὶ Κόσμος, ὅτι ἐν ἑαυτῷ τοὺς ἑτέρους περιείληφεν ἀριθμούς (3). Οὐρανὸς (4), ὅτι ἡ Δεκὰς ἐςὶ τῶν ἀριθμῶν ἡ τελειοτάτη, καὶ ὅτι ἅπαντα τὰ ἐν τῷ οὐρανῷ τῇ Δεκάδι προσεπανήκειν ἔφασαν (5). Εἱμαρμένη, Ἀγύη,

---

(1) Ἀθηναγόρας ἐν Νόμοις Χριςιαν. Σελ. 6. (Ἔκδ. 1686 Κολλωνίας.).
(2) Ἀριςοτ. Φιλοσόφ. Βιβ. Α'.
(3) Θεολογούμ. Ἀριθμ. Φιλόπον. ἐν Μεταφ. Βιβ. Α'.
(4) Νικόμαχ. παρὰ Φωτίῳ.
(5) Θεολ. Ἀριθμ. Παχυμέρης ἐν Μεταφυσ. Κεφαλ. Ι'.

Κρῖος, Ἴσις, Ἀνάγκη, Ἄτλας, Φάνης, Ἥλιος, Οὐρανία, Μνήμη, Μνημοσύνη, Τετραγωνισμὸς πρῶτος, Κλειδῦχος, Κλαδῦχος, εἶτα Πανσίλεια (1).

Καὶ ταῦτα μὲν τὰ περὶ τῶν ἀριθμῶν τῷ Πυθαγόρᾳ μυστικώτερον αἰνιττόμενα, πολλάκις δὲ δι᾽ αὐτῶν καὶ τὰς τῶν μελλόντων συνῆγε φορὰς, προειδέναι τε ἐβύλετο τῶν ὄντων ἐκβάσεις, συνιέντων πως αὐτὰς μαντικώτερον, οἰκείαν τέ τινα τὴν ἁρμονίαν πρός τε Θεὺς καὶ τὺς ἀριθμὺς ἐμφιλοχωρεῖν παρ᾽ Ὀρφέως ἐκπαιδευθείς· καὶ γάρ· Ἐποιεῖτο διὰ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, καὶ θαυμαστὴν πρόγνωσιν καὶ θεραπείαν τῶν Θεῶν, κατὰ τὺς ἀριθμὺς ὅτι μάλιστα συγγενεστάτην (2).

Οὐ μὴν δὲ, ἀλλὰ καὶ περαιτέρω τύτων τοῖς Πυθαγορείοις χωρῆσαι ἐγένετο, ποικίλλα περὶ τὴν Ἀριθμητικὴν ἐπινοήσασιν εἴδη, οἷον τὺς Πολυγώνυς τῶν ἀριθμῶν (Τριγώνυς, Τετραγώνυς, κ. τ. λ.), καὶ Πυραμοειδεῖς· τὺς Ἐπιπέδυς καὶ Στερεύς· τὺς Ἀρτίυς, ἢ ἄλλως Τελείυς, καὶ Περιττύς, ἤτοι Ἀτελεῖς, ὅπερ ἦν ἀδιάλυτός τις καθ᾽ ἑαυτὸ τῆς Ἀριθμητικῆς πρὸς τὴν Γεωμετρίαν σχέσις, δι᾽ ὧν ἁπάντων τὴν πρώτην ἐκείνης κρηπῖδα τῇ Ἀναλύσει ὑ-

---

(1) Θεολ. Ἀριθμ. Χαλκιδ. παρὰ Τιμαίῳ.
(2) Ἰάμβλιχ. ἐν Βίῳ Πυθαγ. Κεφ. ΚΗ.

ποθεῖναι φέρεται. Εἶτα δὲ καὶ Τηλαύγην υἱὸν Πυθαγόρυ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ διακρῖναι ἀκήκομεν, εἴτ ... ὅλα Βιβλία ἐκθέμενον περὶ τῆς τῶν ἀριθμῶν Τετράδος (1).

Τὸν Πυθαγόραν εἶτα καὶ ὁ δαιμόνιος Πλάτων μιμέμενος πολλὰ τὰ τῆς Φιλοσοφίας ἀκμαιότερα ἀποκρύπτειν εἰώθει ὑπὸ συμβόλοις, ἄλλο μέν τι ἐοικῶς λέγειν, ἄλλο δέ τι τρώντι νοῶν, καὶ διὰ τῦ παραλόγυ ὕτως εἰς ζήτησιν τῆς κεκρυμμένης ἀληθείας ἐνάγων. Ταύτῃ δέ τοι καὶ τὴν κατὰ τὸ δοκῦν οἱ Ψυχογονίαν, διὰ τῦ Τιμαίυ, ἀνδρὸς ἐς ἄκρον τῆς Γεωμετρίας, καὶ Ἀριθμητικῆς, καὶ Ἁρμονίας, καὶ τῶν ἄλλων Μαθημάτων ἐληλακότος, ὑποτιθέμενος, συμβολικῶς ὕτω τὰ κατ' αὐ„τὴν διεξέρχεται." Ἐκ τῆς ἀμερίςυ (φησὶ) καὶ „ἀεὶ κατὰ τὰ αὐτὰ ἐχύσης ὕσίας, καὶ τῆς αὖ πε„ρὶ τὰ σώματα γινομένης μεριςῆς, τρίτον ἐπ' ἀμ„φοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο ὁ Θεὸς ὕσίας εἶδος, „καὶ ταυτότητα, καὶ ἑτερότητα συνεπιμίξας. „Ταύτην δὲ εἰς μῆκος ἐκτείνας, εὐθεῖαν ἐποίησεν, „εἶτα τὴν εὐθεῖαν ταύτην κατέτεμεν εἰς ἀριθμὺς „ἁρμονικὺς, 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27. Οὕτω δὲ κα-

(1) Κλυγέλιος ἐν Μαθημ. Σελ. 174.

„τατείνας τε καὶ κατατεμὼν διέσχισεν εἰς δύο εὐ-
„θείας, κ.τ.λ (1). Ταῦτα εἰ μέν τις κατὰ τὸ φαινόμενον ἐκλάβοι, ἐδὲν φήσει εἰρῆσθαι ἐν Φιλοσοφία περὶ μυθωδέςερον. Εἰ δὲ εἰς τὸν ἐγκρυπτόμενον νῦν εἰσίοι, ὄψεται δή πε ὑπὸ τῷ πέπλῳ τὴν παρθένον λανθάνεσαν. Τὸ γὰρ τῆς κατὰ τὴν ψυχὴν ἐσίας κρᾶμα, ὡς εὐθεῖαν ὁ Δημιεργὸς προβάλλεται, ῥύσει ὡσπερεί τινι τῆς ἐξ αὐτῦ ἑνώσεως, ὑποςῆναι αὐτὴν ἐνδεικνῦντος τῦ λόγε, ὡς ἂν ἀπὸ πέρατος εἰς πέρας τῦ κατ' αὐτὴν εἶναι μεταβᾶσαι. Κατέτεμε δὲ εἰς ἀριθμὲς δύναμιν ἔχοντας, αὐτήν τε πολλαῖς καὶ καλαῖς πλετίσας δυνάμεσι, καὶ τοῖς λόγοις ἁπάντων τῶν ὄντων καταπυκάσας. Οἱ δὲ δὴ ἀριθμοί, Μονὰς 1 καὶ οἱ πρῶτοι Ἐπίπεδοι, 2 καὶ 3, καὶ οἱ ἀπὸ τέτων πρῶτοι Τετράγωνοι, 4 καὶ 9, καὶ οἱ ἐκ τῶν αὐτῶν πρῶτοι Στερεοὶ 8 καὶ 27. Τέτων δέ, οἱ μὲν Ἄρτιοι ἐφεξῆς 2 καὶ 4 καὶ 8, καὶ οἱ Περιττοὶ ὡσαύτως 3 καὶ 9 καὶ 27, Γεωμετρικὴν περιέχεσιν Ἀναλογίαν· οἱ δὲ ἀπὸ Μονάδος ἄχρι Τετράδος 1, 2, 3, 4, Ἀριθμητικήν. Συντιθέμενοι δὲ τὴν Δεκάδα οἱ αὐτοὶ πληρῦσιν, ὥσπερ ἐν

(1) Πλάτων ἐν Τιμαίῳ.

καὶ οἱ ἓξ ὅροι 1, 2, 3, 4, 9, 8, προσαθροιζόμενοι τῷ ἑβδόμῳ 27 συνισᾶνται. Ὅς δὴ 27 καὶ περιοδικὸς ἐςὶ Σελήνης. Ὡς εἴ γε Τετρακτύς τις ἐκ τῶν δε τῶν ὅρων συςῇ, καὶ τεθῇ μὲν καθ᾽ ἑαυτὴν ἡ Μονὰς, κοινὴ ὅσα ἀρχὴ Ἀρτίων τε καὶ Περιττῶν, κατὰ συςοιχείαν δὲ τέτων οἱ Ἄρτιοι, καὶ ὑπὸ τὺς Ἀρτίυς οἱ Περιττοί·

1, 2, 4, 8.

1, 3, 9, 27.

Ἔσονται μὲν αἱ συζυγίαι τῶν ὁμοίων, ἡ μὲν Α.' τῶν πρώτων Ἐπιπέδων, ἡ δὲ Β.' τῶν πρώτων Τετραγώνων, ἡ δὲ Γ.' τῶν πρώτων Κύβων. Κὰκ τέτων συνθέσει τε καὶ πολλαπλασιασμῷ ἀριθμοὶ ἀναφυήσονται ἐπιφανέςατοι. Οἷον συνθέσει μὲν ἐκ τῆς Α.' ὁ 5, ὁ Πυθαγορικὸς λεγόμενος Φθόγγος. Ἐκ δὲ τῆς Β.' ὁ 13, τὸ Λεῖμμα καλέμενον διὰ τὸ ἀπολείπεσθαι μονάδι τῦ ἡμίσεως τῦ τόνυ, οἷον καλῦσι τὸν 27. Ἐκ δὲ τῆς Γ.' 35 ἡ ἁρμονία, ἡ ἐκ δυοῖν τῶν πρώτων Κύβων ἀπ᾽ Ἀρτίυ καὶ Περιττῦ συνιςαμένη, τῦ μὲν 8, τῦ δὲ 27, καὶ ἀριθμὺς περιέχυσα τέσσαρας 6, 8, 9, 12, ἐν οἷς Ἀριθμητική τε καὶ Ἁρμονικὴ Ἀναλογία ἐςίν. Ἀριθμητικὴ μὲν, ἐπὶ 6, 9, 12. Ἁρμονικὴ δὲ ἐπὶ 6, 8, 12. Οἱ δὲ λόγοι τῶν ἐκκειμένων ἀριθμῶν ἁρμονικώτατοι. Ἐπεὶ ὁ μὲν 8 πρὸς 6 λόγον ἔχει τὸν ἐπίτριτον, καθ' ὃν ἡ διὰ Τεσσάρων. Ὁ δὲ 9 καὶ 6 τὸν ἡμιόλειον, καθ' ὃν ἡ διὰ Πέντε. Ὁ δὲ 12 καὶ 6 τὸν διπλάσιον, καθ' ὃν ἡ διὰ Πασῶν. Ἔνεςι δὲ καὶ ὁ ἐπόγδοος τῷ 9 πρὸς 8, διὸ καὶ τὸν ἐκ τέτων ἀριθμὸν, ἤτοι τὸν 35 Ἁρμονίαν προσεῖπον. Ὁ δὲ καὶ διὰ τῷ τῶν ἐν αὐτῷ Α΄ τῷ 6 πολλαπλασιαζόμενος, τὰ 210 παρά-„γει, ἐν ὅσαις λέγεται ἡμέραις τὰ ἑπτάμηνα τῶν „βρεφῶν τελεογονεῖσθαι (1). Καὶ ταῦτα μὲν συνθέσει. Πολλαπλασιασμῷ δὲ ἐκ μὲν τῆς Α΄ συζυγίας, ὁ 6, ὁ Γάμος ἀκέων, διὰ τὴν τῷ πρώτε Ἀρτίε καὶ Περιττῷ σύμμιξιν, καὶ Τέλειος λεγόμενος διά τε τὸ τοῖς ἑαυτῷ συνισᾶσθαι μέρεσι, καὶ ἐκ τῆς ἀρχῆς καὶ τῶν πρώτων Ἀρτίε καὶ Περιττῷ συναθροίζεσθαι. Ἐκ δὲ τῆς Β΄ ὁ 36, ὁ πρῶτος Τετράγωνος ἅμα καὶ Τρίγωνος, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ἑξάδος, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ὀγδοάδος, καὶ ἐκ τῶν δύω πρώτων Τετραγώνων παραγόμενος, καὶ ἐκ τριῶν Κύβων 1, 8, 27 συντιθέμενος· καὶ ἀπὸ δυεῖν πλευρῶν 3 ἐπὶ 12, ἢ 4 ἐπὶ 9 ἑτερομήκης συνιςάμενος. Ἐν αἷς δὴ πλευ-

---

(1) Πλύταρχ. Περὶ τῆς κατὰ τὸν Τίμαιον Ψυχογονίας.

ραῖς τῦ Τετραγώνυ τε καὶ Τριγώνυ καὶ τῶν Ὀρθογωνίων τῇ ἑτέρᾳ ἐπὶ τῦ ἑτέρυ, οἱ Ἁρμονικοὶ λόγοι, ὡς ἀνωτέρω ἐλέγετο, ἐνθεωρῦνται περιεχόμενοι. Ἀλλὰ γὰρ πλείω τέτων ζητήσας εὑρήσεις παρὰ Πλυτάρχῳ, καὶ Πρόκλῳ, καὶ Ἀλεξάνδρῳ τῷ Ἀφροδισεῖ, τοῖς ἀκριβῶς τὴν κατὰ τὸν Τίμαιον Ψυχογονίαν ἐκθέσθαι προθεμένοις.

Εἶτα δὲ, κατὰ τὸ Διακοσιοςὸν Ἑβδομηκοςὸν πρὸ Χριςῦ ἔτος, ὁ πολὺς ἐν τοῖς Μαθηματικοῖς Εὐκλείδης, ἐκ τῆς τῶν Ἀλεξανδρέων ἀναλάμψας Σχολῆς, ὁ τὰ τοῖς ἄλλοις εὑρημένα εἰς ἓν ἀθροίσας, διατάξας, προσαυξήσας, ἀκριβεςέρον τε ἀποδείξας, καὶ ἐκεῖνα ἡμῖν καταλιπὼν τὰ Στοιχεῖα, δι' ὧν ἁπανταχῦ γῆς οἱ Μαθητιῶντες ςοιχειῦσθαι εἰώθασιν, ἐπὶ τὸ τελεώτερον τὴν τῶν ἀριθμῶν θεωρίαν ἐξᾶραι, καὶ ὑψηλοτέραν μᾶλλον αὐτὴν ἀπεργάσασθαι εἶχεν ἐσπυδακὼς, γενικωτέρας τὰς τῶν ἀριθμῶν Προτάσεις ἐν τῷ Ζ. Η. καὶ Θ. τῶν ἑαυτῦ Στοιχείων πραγματευσάμενος. Οὐχ ἧττον δὲ καὶ περὶ τῶν Πρώτων πρὸς ἀλλήλυς καλυμένων, τῶν Συνθέτων, τῶν τε Ἀρτίων καὶ Περιττῶν, ἀκριβῶς τὰς μελέτας ἐνεςήσατο. Παρὰ ταῦτα δὲ καὶ τὸ Ε. ὅλον Βιβλίον ἰδίαν τὴν τῶν Ἀναλόγων ἀριθμῶν [illegible] οίαν. καὶ ὅσον Γεωμετρᾶσιν εἰς χρῆσιν ἥκει, ἐκτίθησι. Ναὶ μὴν δὲ καὶ τὸ Ι.' ὀλίγα περί τε τῶν Ῥιζικῶν καὶ τῶν Ἀσυμμέτρων Ποσοτήτων ἐμπεριείληφε.

Εὐκλείδη δ' ἐπεγένετο καὶ ὁ πολὺς Ἀρχιμήδης, ὁ κατὰ τὸ Διακοσιοςὸν Δέκατον πρὸ Χριςᾶ Ἔτος ἀΐδιον τὸ κλέος ἐπί τε τοῖς Μαθηματικοῖς καὶ Μηχανικοῖς ἀράμενος, καὶ τῆς ἐν ἀνθρώποις λεπτονοίας κολοφών τις οἷα ἀναφανείς. Τέτε τὰς πολλᾶ θαύματος ἀξίας εὑρέσεις Πολύβιός τε, καὶ Πλέταρχος, καὶ Τζέτζης, καὶ ἄλλοι, τῇ μνήμῃ παρέδωκαν. Ἀλλὰ δὴ καὶ αὐτοὶ ταῖς τῶν Ἀριθμῶν ἰδιότησι τᾶτον ἐγκύψαι, αὐτῶν τε ὀλίγα διαλευκᾶναι μανθάνομεν. Ἐξ ὧν γὰρ ὁ πανδαμάτωρ Χρόνος ἐφείσατο τᾶ Ἀνδρὸς Συγγραμμάτων, θείας ἄντικρυς ὀξυνοίας, τὸ τᾶ Ψαμμίτυ μόνον τῇ Ἀριθμητικῇ διεσέσωςο, ἔνθα τὰς τῆς ψάμμυ κόκκυς, διὰ Μαθηματικῶν προϊὼν λόγων ἐξαριθμεῖ, πηλίκος ἄρα ὁ αὐτῶν ἀριθμὸς ἔσοιτο τᾶ μεταξὺ τῆς Γῆς καὶ τῆς τᾶ Ἡλίυ τροχιᾶς, ὁ μὴν δὲ καὶ τᾶ μέχρι τῶν ἀπλανῶν Ἀςέρων διϊκνυμένυ κενᾶ διαςήματος ἀπειρομεγέθεσι ψάμμυ ἀορείας ἀκριβῶς πληρωθέντος. Τᾶτο δὲ διὰ λόγων ἐμπεδώσων ἑδραίων τὴν τῶν Δεκαπλῶν Πρόοδον, 1, 10, 100, 1000, 10000, κ.τ.λ. ἐπὶ τάξεις, ἐξ ὀκτὼ συντιθεμένας μελῶν διαιρεῖ, ἃς διὰ τοῦτο Ὀκτάδας ἐκάλεσεν, ἀπὸ τῆς Μυριάδος ἀρχόμενος, καὶ ἐφεξῆς ἄχρι τῆς τῶν Μυριάδων Μυριάδος ἐπεξιών. Ἡ τῶν Μυριάδων τοίνυν Μυριὰς, ὁ πρῶτος τῆς δευτέρας τάξεως ἐςὶν ἀριθμὸς, ἧς ὁ ὄγδοος, καθ' ἡμᾶς ἡ δεκάτη πέμπτη Δύναμις τῆς Δεκάδος καλεῖται, ἤτοι 10^{15}. Ἀπὸ τῆς δεκάτης ἕκτης εἶτα Δυνάμεως ἡ τρίτη ἀνελισσομένη Ὀκτὰς, ἐπὶ τὴν εἰκοςὴν τρίτην τῆς Δεκάδος Δύναμιν τερματίζεται, ἤτοι 10^{23}, ἕκαςον δὲ τῶν ἀριθμῶν ἐπὶ πάσης τῆς Προόδου, διά τε τοῦ ἀριθμοῦ τῆς Ὀκτάδος διασημαίνει καὶ τῆς τοῦ μέλους τάξεως. Ἐξ ὧν εἶτα ἀποδεῖξαι ἐπιχειρεῖ ἀριθμητὰς εἶναι ἐν οἱᾳδηποτοῦν ἐκτάσει τὰς τῆς ψάμμου σωρείας. Οὕτω γοῦν ἐν ἑνὶ κόκκῳ Μήκωνος 10000 ψάμμου κόκκους ὑποτιθέμενος, αὖθις τε ἐκ τεσσαράκοντα Μήκωνος κόκκων ἕνα συμπληρῶν δάκτυλον, ἐν Σφαίρᾳ εἶτα, ἧς δακτύλῳ ἡ διάμετρος ἴση, τὴν τῶν ἐκ ψάμμου κόκκων, πειρᾶται ὁλοκλήρως ἐξαριθμῆσαι πλῆθος, ὃν τῇ ἐκ τῆς δευτέρας Ὀκτάδος Δεκάδι ἴσην ὁρίζεται 640 Μιλλιονίοις ἀνάλογον καθ' ἡμᾶς, ἔν τε τῷ ὑπολογισμῷ προϊὼν ἐχομένως, ἐξάγει τὸν τῶν κόκκων ἀριθμὸν ἐν ὄγκοις Σφαιρῶν, ἣν ἑκατονταπλῶς αὔξεσιν αἱ διάμετροι· ἔνθα δὲ ἡ διάμετρος δακτύλων 10000 μέγεθος ἀπηνέγκατο, ἴση τότε Σταδίῳ ἑνὶ ὑποτίθεται τῶ πρώτω μεγέθως (10000) μικρόν τι ἐλάσσονι. Τὴν δὲ τῶ Παντὸς διάμετρον ἐλάσσονα ἢ κατὰ τὴν τῆς Γῆς, καὶ ταύτην αὖθις 10000. 10000. 100 Σταδίων ἐλαχισοτέραν βωλόμενος, δαιμονίως μάλλ᾽ ἐπιφέρει τὴν τῶν ψαμμωδῶν κόκκων πληθὺν, ὁπόση ἂν τῷ τῶ Παντὸς ἐμπερισχεθείη κενῷ ἐλάσσονα εἶναι, ἤπερ χιλιάκις ἐκ τῆς ἑβδόμης Ὀκτάδος εἰς ληφθεὶς ἀριθμὸς (ἐλάσσων, ὅπερ ἐςὶ, τῶ 10^{51}.)· Κατὰ γὰρ τὸν θεῖον Ἀρίςαρχον, ὁ Ἀρχιμήδης φησιν, ὥσπερ ἔχει ἡ τῶν Ἀπλανῶν Σφαῖρα πρὸς τὴν τῶ Παντὸς, ὅτως ἔξει καὶ ἡ τῶ Παντὸς πρὸς τὴν Γῆν. Ἔςαι ἄρα ὁ τῆς ψάμμω ἀριθμὸς, τῷ τῶν Σφαιρῶν κενῷ ἐμπερισχεθεὶς, χιλίων τῶν ἐκ τῆς ὀγδόης Ὀκτάδος Μυριάδων ἐλάσσων (10^{63}), ὃ τὴν ἑξηκοςὴν τετάρτην ἀπὸ Μονάδος ἐν τῇ Προόδῳ εἴληχε τάξιν.

Ουκ ἀπεικὸς δ᾽ ἐνταῦθα καὶ τὸ περὶ τῆς τῶ Κύκλω καταμετρήσεως, καθ᾽ ὅσον Ἀριθμητικῆς ἔχεται ἀκριβείας ἀνενεγκεῖν ἡμῖν ἔδοξε, διὰ τῶν Ἀλόγων ποσοτήτων ἐπιτελόμενον. Περὶ τότε δὴ ὁ τῶν $\sqrt{3} : 1$ λόγος οὕτω πρὸς δύω ἑτέρους διερευνᾶται, ὥστε τὸν τῶν ζητουμένων πρῶτον μικρόν τι τοῦ πρώτου ὑπάρχειν μείζονα, ὀλίγῳ δ' ἐλάσσονα θατέρου τὸν δεύτερον. Καὶ ἐν μὲν τῷ περὶ τὸν Κύκλον περιγραφομένῳ Πολυγώνῳ σταθήσεται λόγος ὁ ἐφεξῆς 265 : 153, ἐν δὲ τῷ ἐκείνῳ ἐγγραφομένῳ ὁ 1351 : 780· καὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ διὰ τῶν συνεχῶν συμπροϊόντος Κλασμάτων, οὐκ ἄλλως ὁ πρῶτος ἐκπερανθήσεται λόγος ἐλαχιστότερον, ἀλλ' ἢ διὰ τῶν τριῶν χαρακτήρων, οὕτω τε ὁ ἕτερος ἐκτεθήσεται διὰ τῶν τεσσάρων· ἀνθ' ὧν ἐκεῖνα μόνον ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν ἐπιζητῆσαι τὸν Ἀρχιμήδην ἐπάναγκες ἦν, ὧν ἂν τὸ τριπλάσιον τετράγωνον ὡς ἔγγιστα εἴη, οἷά εἰσι τὰ τῶν ἀριθμῶν 153 καὶ 780 τετράγωνα. Θείου ἀληθῶς νοὸς δαιμόνιον ἀποκύημα (1)!

Ὁ δὲ κατὰ τὴν Δευτέραν ἀπὸ Θεογονίας Ἑκα-

)( )( )(

(1) Ὅρα Ἀρχιμήδους Ψαμμίτης, ἔνθα καὶ περὶ Καταμετρήσεως Κύκλου, μετὰ τῶν παρ' Εὐτοκίου ἐπ' τούτοις Σχολίων, ἐν Ὀξωνίᾳ. ὑπὸ Βάλλις Γραικολατινιστὶ, 1676, 8. Καὶ Ἀρχιμήδους Ἅπαντα Γραικολατιν. ἐν Βασιλείᾳ ὑπὸ Ἑρβεγίου τῷ 1544, εἰς φύλλον. — Πρόσθες καὶ τὴν ἐν ταῖς τῆς Γαττίγκης Φιλολογικαῖς Ἐφημερίσ. Διάληψιν. Ἔτ. 1809. Ἀριθμ. 9. Σελ. 92.

τονταετηρίδα τὰ τῆς Μαθηματικῆς θαυμασίως διακοσμῶν Θέων Σμυρναῖος, τῶν ἐκ τῆς Ἀκαδημίας Φιλοσόφων ἔνδοξος γενόμενος ὀπαδὸς, πολλὰς τοῖς Πλατωνικοῖς Βιβλίοις παρασημειώσεις ἐξέθετο, ἐκ ὀλίγην ἅμα καὶ τῇ Μεσικῇ θεωρίᾳ ἐνςησάμενος τὴν μελέτην, ἐξ ὧν ἡμιν ἐλάχιςα μόνον Ἀριθμητικῆς τε καὶ Μεσικῆς θεωρίας φέρεται λείψανα, μετά τινων Γεωμετρικῶν Σημειώσεων, ἅπερ Γραικολατινιςὶ ὁ Γάλλος Βελλίαλδος τοῖς Λετετείοις ἐκοινώσατο Τύποις (1).

Περὶ δὲ τὴν αὐτὴν τῶν χρόνων σειρὰν (2) (τῷ 147) τὸ πλεῖςον ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ ὁ Γερασηνὸς ὑπερέσχε Νικόμαχος, περὶ ἰδιοτήτων τε καὶ εἰδῶν τῶν ἀριθμῶν διάφορα ἡμῖν συνεκθέμενος, ὧν τὰ πλεῖςα ἐξίτηλα ὅλως τῷ χρόνῳ γενόμενα σμικρὰ μονονὲκ τεμμάχια ὑπεμφαίνεσιν ἐλλιπῶς τὸ σύνολον ἔχοντα, ἐξ ὧν καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν αὐτᾶ

---

(1) Theonis Smyrnaei, eorum quae in Mathematicis ad Platonis Lectionem utilia sunt, expositio. Edidit Ismaël Bulialdus. Lutet. Paris. 1644. 4.

(2) Saxius in Onomastico Lib. I. p. 307. Ὅπερ ὁ Ἀρβεῦγῖρος κατὰ τὸ 117 ἔτος κριτικώτερον βέλεται ἐπὶ Τραϊανᾶ Καίσαρος. Ὅρα Hamberger zuverlässige Nachrichten II. p. 258.

φέρεται διασωθεῖσα Εἰσαγωγὴ (1), κατά τε τοὺς Πυθαγορείους (ὧν ἐξ ἐπαγγέλματος ἤσκει τὴν αἵρεσιν), καὶ τοὺς ἐκ τῆς Ἀκαδημίας. Ἔγραψε δὲ καὶ Πρακτικὴν Ἀριθμητικὴν καὶ Θεολογόμενα Ἀριθμητικῆς, καὶ πολλὰ Μουσικῆς ἐχόμενα θεωρίας. Ἀλλὰ, τὰ μὲν σχετλίως ὑποβαλόντες εἰκότως θρηνοῦμεν, τῶν δὲ Λείψανά τινα ἰδεῖν ἔνεστιν ἐν τοῖς παρὰ Μεϊβομίου ἐκδοθεῖσιν ἑπτὰ Μουσικοῖς.

Ὁ δὲ κατὰ τὸ Ἑκατοστὸν Ἑξηκοστὸν ἀπὸ Θεογονίας Ἔτος τῆς παλαιᾶς Ἀστρονομίας ἀναφανεὶς μέγας ἐκεῖνος Πατὴρ Κλαύδιος Πτολεμαῖος, τὰς ὑποτεινούσας ταῖς Γωνίαις χορδὰς ἐπὶ ἡμίσειαν Μοῖραν ὑπολογιζόμενος, πλέον τε τοῦ τέτου τῆς Ἡμιδιαμέτρου οὐκ ἐπεκτεινόμενος, κατέτεμε ταύτην εἰς Μοίρας 60. Διὸ καὶ τὴν τῶν Ἑξηκονταδικῶν καλουμένων Κλασμάτων τῇ Ἀριθμητικῇ εἰσηγάγετο χρῆσιν, οὐ σμικρὰν τοῖς Ἀστρονόμοις ἐμποιοῦσαν τὴν λυσιτέλειαν. Διενήνοχε δὲ ταῦτα τῶν λοιπῶν περὶ τὸν Παρονομαστὴν, ὅτι ἐστὶν ὁ 60, ἀφ᾽ οὗ Ἑξηκονταδικὰ λέγεται (2).

---

(1) Ἔκδοσις Λουτετίας τῶν Παρισ. τῷ 1538 εἰς 4. Ἑλληνιστὶ ὑπὸ Χριστιανοῦ Βεχήλου.
(2) Μέιβι Ἀριθμ. Σελ. 240 ὄπισθεν.

Ἰάμβλιχος εἶτα ὁ Χαλκιδεὺς περὶ τὸ 310 Ἔτος ἀπὸ Θεογονίας, Νεοπλατωνικὸς μὲν τὸ πρότερον ὑπάρξας Φιλόσοφος, μετὰ δὲ καὶ Πυθαγόρειος ἅμα γενόμενος, πρὸς το ς λοιποῖς παντοῖα Ἀριθμητικῆς ἐξεπόνησεν εἴδη· ὡς, Εἰσαγωγὴν εἰς τὴν τῦ Γερασηνῦ Νικομάχυ Ἀριθμητικὴν, ὅπερ ἐςὶ τῶν Βιβλίων τὸ Δ.′ (1). Ἔτι δὲ, τὰ Θεολογύμενα τῆς Ἀριθμητικῆς (2), ὅπερ ἐςὶ τὸ Ζ.′ τῶν Βιβλίων· ῥαδίως ἀπὸ τῶν τῦ Νικομάχυ, ἐκλελοιπότων ὅλως καὶ διαφθαρέντων, διακρινόμενα (5).

Ἡ μὲν δὴ Ἀριθμητικὴ γενναίως μέχρι τύτων προβᾶσα νέον ἑαυτῇ αὖθις Ἀςέρα ἐκ τῆς τῶν Ἀλεξανδρέων Σχολῆς ἔσχεν ἐξανατείλλαντα, Διόφαντον, φημὶ, τὸν Μέγαν, ἁπάσης τῆς Ἀριθμητικῆς ὑ μόνον τὸν ἀκρότατον ὕπατον, περὶ τὸ 362 Ἔτος ἀπὸ Θεογονίας ἀναφανέντα (4), ἀλλὰ δὴ καὶ τῆς Ἀναλύσεως, ἣν Ἄλγεβραν ἄλλως ἀποκεκλήκασι, πρώτιςον Καθηγεμόνα γενόμενον.

---

(1) Edidit Sam. Tennullus cum explicatione Joachimi Camerarii ex Not. Tennulii. Arnhemiae 1668. 4.

(2) Parisiis apud Christoph. Wechel. 1543. 4.

(5) Κλυγέλιος ἐν Μαθηματ Conf. Gottfr. Müller, Notitia & recens. Codd. Bibl. Cizens. 1811. 8.

(4) Ὅρα Ἔκθεσιν Ἀφηγηματικὴν Ἀλγέβρας Σχόλ. Σελ. LVI, τῆς ἡμετέρας Ἀλγέβρας.

Ὃς παρὰ τὰς μεγάλας αὐτοῦ Ἀριθμητικὰς Συγγραφὰς ἐν Βιβλίοις Τρισκαίδεκα, καὶ περὶ τοῦ πρακτικοῦ τῶν Ἀριθμῶν ἰδίαν συνετάξατο Βίβλον. Ἀλλ᾽ ἐν τὸ πλεῖστον αὐτῶν οἰκτρῶς τῷ χρόνῳ ἀποιχομένων, ἓξ μόνα καθ᾽ ἡμᾶς φέρεται διασωθέντα Βιβλία, ἀκροτάτην τοῦ Ἀνδρὸς προσμαρτυροῦντα ὀξύνοιαν. Ἐν τούτοις περὶ τῶν ἐκ τοῦ Πρώτου καὶ Δευτέρου Βαθμοῦ Ἐξισώσεων λόγον ποιούμενος, καὶ περὶ τῆς τῶν Ἀορίστων Ἀναλύσεως ἀκριβέστερον ἐξετάζει. Οἷς ἔτι καὶ τὴν τῶν Πολυγώνων Ἀριθμῶν ἔκθεσιν προσθετέαν εἶναι οἰόμεθα ἐν ἑτέρῳ διατηρηθεῖσαν Βιβλίῳ (1).

Πάππος εἶτα ὁ Μαθηματικώτατος ἐκ τῆς Ἀλεξανδρείας καὶ οὗτος Φιλόσοφος, κατὰ τὸ 390 ἀπὸ Θεογονίας, πολλὰ ἡμῖν ἐν ταῖς ἑαυτοῦ Μαθηματικαῖς Συλλογαῖς Ἀριθμητικῆς θεωρίας ἐναπέλιπεν. ἐν οἷς καὶ περὶ τοῦ τῶν Ἀρχαίων πολλαπλασιασμοῦ ἐξῆν ἂν ἰδεῖν, εἴπερ αὐτῶν ὁ πανδαμάτωρ χρόνος ἐφείδετο (2).

---

(1) Διοφάντου τὰ Σωζόμενα, ἐξέδοτο Γυλιέλμος Ξύλανδρος Γραικολατ. ἐν Βασιλείᾳ τῷ 1575. εἰς φύλλον, μετὰ Σχολίων.

(2) Συλλογῶν Μαθηματικῶν τὰ Σωζόμενα, ἐξ ὧν Τεμμάχιον ἐκ τοῦ Β.' Βιβλίου ὑπὸ Βαλισίου Γραι-

Καὶ Τερέντιος δὲ Οὐάῤῥων πρῶτος παρὰ Ῥωμαίοις Ἀριθμητικὸς φέρεται, ἰδίαν Ἀριθμητικὴν Ῥωμαϊκῇ τῇ φωνῇ συνταξάμενος, ἣν ἔτι λανθάνειν που κατὰ τὴν Ῥώμην ἐν Βιβλιοθήκης παραβύσῳ ὁ Εὐβρόνιος παρέδωκεν.

Ἐπέπρωτο ἀλλ᾽ ἂν καὶ τὴν Ἀριθμητικὴν, ὥσπερ τὰς λοιπὰς Ἐπιστήμας, ἐπὶ τὸ τελειότερον ὁσημέραι παῤ Ἕλλησι προσεγγίζουσαν, τῷ πονηρῷ τίνι δαίμονι ὑποχωρῆσαι, καὶ τῷ τῶν αἰώνων αὖθις σκότει μοχθηρῶς πως παραδοθῆναι, ἀναστάτως μὲν τῆς τῶν Μουσῶν χώρας ἐχούσης, ἐφ᾽ ἅπασαν δὲ τὴν ὑφήλιον διασκιδναμένης τῆς ἐκ τῆς ἀμαθείας νυκτός. Ἔνθεν τοι καὶ ἀντ᾽ ἐλευθέρας βάναυσος ἡ Ἀριθμητικὴ ἀπέβαινε, ἀτήμελος τὸ παράπαν πρὸς τὰς χαμαὶ βαίνοντας, καὶ ῥύπῳ ἀνάπλεως ἀνεστρέφετο. Εἶχε τε οὕτω ἄχρι τῆς Δεκάτης ἀπὸ Θεογονίας Ἑκατονταετηρίδος τὰ πράγματα, ὅτε αὐτὴν, ἡ τῶν Ἀραβικῶν Χαρακτήρων ἀνὰ πᾶσαν τὴν Εὐρώπην παρεισφρύσασα χρῆσις, ἑτέρως πάνυ διεμορφώσατο. Ταύτην, συν-

---

κολατινιστὶ ἐν Ὀξωνίᾳ τοῦ 1688. ἐν 8, ἔνθα δὲ μετὰ Σχολίων. Ἔστι τὸ Ε. Ϛ. Ζ. καὶ Η. Βιβλίον Γραικολατ. μετὰ τῶν Κομμανδίνου Σχολ. Ἐνετ. 1589. εἰς Φύλλον.

νήθη τὸ πρότερον ἴδιον τοῖς Ἄραψι καὶ ἐθάδα, τυραννησάντων ἐν Ἰσπανίᾳ Σαρακηνῶν, ὁ περιώνυμος ὑποκλέψας Γερβέρτος, κατὰ τὸ 970 Σωτήριον Ἔτος, τοῖς κατὰ τὴν Εὐρώπην λοιποῖς παρέδωκεν Ἔθνεσι, τότε μὲν ἐκ τῆς τοῦ Φλευρίδος Μονῆς ἀποδράς, ὕστερον δ' ἐπὶ τὸν τῆς Ῥώμης Θρόνον Ποντίφηξ ἀναγορευθείς, ὑπὸ τῷ τοῦ Σιλβέστρου Β΄ ὀνόματι· περὶ οὗ αὐτοῦ ἀλλαχῇ φθάσαντες πληρέστεροι ὤφθημεν (1).

Ἐντεῦθεν, κατὰ τὸ 1250 Σωτήριον Ἔτος, τὰ τῆς Ἀριθμητικῆς πρῶτος ἐπεχείρησεν ἐπεκτεῖναι ὁ Βρεττανὸς Ἰωάννης ἐκ Σακροβόσκος, διὰ τοῦ ἑαυτοῦ Ἀλγορίθμου, ἢ ἄλλως, Εἰσαγωγῆς Ἀριθμητικῆς (2). Μεθ' ὃν Ἰορδάνης ὁ Νεμοράριος, σύγχρονος γενόμενος, Θεωρητικήν τινα Ἀριθμητικῆς Πραγματείαν ἐξέθετο, ἣν ἐν Παρισίοις Γράμμασι Γοτθικοῖς τῶν Τύπων ἐκκύψαι φέρεται τῷ 1496 καὶ 1514. Καὶ Βαρλαὰμ δέ τινα Καλα-

---

(1) Ἀλγέβρας Σελίδι LX ἐν τῇ Ἀφηγηματικῇ ἡμετέρᾳ ἐκθέσει. Ὅρα καὶ Βαλλισίου Μαθηματικῶν Μέρ. Α΄ Ἀριθμ. Κεφ. Θ΄ Σελ. 59. Ἔκδ. Ὀξον. τῷ 1675. Καιστνέρος καὶ Σιγόφριδος ἐν τῇ Γοθαϊκῇ Ἀποθήκῃ περὶ τῶν Ἀραβικῶν τζιφρῶν, καὶ ἐν νέας Φιλολογικῆς Βιβλιοθ. Τόμῳ Α΄

(2) Algorithmus, seu Arithmetica Introductio. Venetiis 1528.

βρὸν, Ἀριθμητικὴν ἴσμεν ξυγγράψαντα περὶ ΙΔ! Ἑκατονταετηρίδα, ἔνθα παρὰ τὰς συνήθεις αὐτῆς Πράξεις, ἐδὲν ἔτως ἄξιον ἕτερον ἔνεςιν. Λουκᾶς εἶτα Πακκίολος, ὁ Δελ Βύργο Σὰν Σεπέλκρο τὴν ἐπίκλησιν φέρων, Μαθηματικὴν ποιησάμενος Συλλογὴν, εἰς ἕν τε τὰ τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ Γεωμετρίας ἐκθέμενος, πολλὰ μὲν καὶ περὶ Ἀλγέβρας, ἐκ ὀλίγα δὲ καὶ περὶ Ἀριθμητικῆς, ἀλλὰ καὶ ὅσα περὶ τὸν ἐμπορικὸν βίον τυγχάνει συμβάλλοντα, ἐπισημώνως λίαν ἐξέδοτο.

Τοτε δὴ καὶ αἱ τῶν Λογαρίθμων βάσιμοι ὤφθησαν ἀρχαὶ, προκαταβαλόντος αὐτὰς πρώτε τε Ἀριθμητικε Στιφελίε, ἐν τῇ ἰδίᾳ αὐτε Συγγραφῇ, ἣν, Ὁλοσχερῆ Ἀριθμητικὴν, ἀπεκάλεσε. Σὺν τέτοις θ᾽ ἅμα καὶ οἱ διώνυμοι Συνθέται, καὶ τὰ Μαγικὰ δὲ Τετράγωνα τὰς ἀρχὰς ἔλαβον· τά γε μὴν Τετράγωνα πολλῷ ἀπελέγχεται ἀρχαιότερα, ὡς πρὸ αὐτῶν Ἐμμανεὴλ τε Μοσχοπέλε, κατὰ τὴν Δεκάτην τετάρτην Ἑκατονταετηρίδα ἰδίαν Πραγματείαν συγγεγραφότος.

Εἶτα δὲ κατὰ τὴν Δεκάτην Ἕκτην Σωτήριον Ἑκατονταετηρίδα πολλὴν καὶ ὁ τῶν Τριγωνομετρικῶν Γραμμῶν ὑπολογισμὸς ἀπηνέγκατο τὴν ἐντέλειαν, πρῶτός τε Κανόνιον τούτων ἐτάξατο ὁ Βρεττανὸς Βιλιᾶμος Βυκλεὺς, κατὰ τὸ 1516, ὑποσυνάπτειν τῷ Τετραγώνῳ διδάσκων ἑξάδα μηδενικῶν, καὶ τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν διαιρεῖν διὰ τῶν χιλίων.

Ἦν δὲ παρὰ τοῖς τότε ἡ τῆς Ἀριθμητικῆς πρὸς τὸν κοινὸν βίον ἐφαρμογὴ ἐν ἐνίαις μόνον τῶν πράξεων ἐπερειδομένη, ὡς ἐν τῇ τῶν Τριῶν μεθόδῳ, τῶν Πέντε, τῆς Ἑταιρείας, τῆς Συγκράσεως καὶ Συμμίξεως, τῶν Τοκισμῶν, κ.τ.λ. Πρῶτος ἀλλ᾽ ἂν ὁ περὶ τῆς Ἀλέσεως ἢ ἄλλως Ῥεσιανῆς Μεθόδου πραγματευσάμενος ὑπῆρξε Πέτρος ὁ Ἀππιανὸς, κατὰ τὸ 1527, καὶ Σίμων Ἰάκωβος Κόβεργος, ὃς αὐτὴν διὰ τῆς τῶν Ἀναλογιῶν Συνθέσεως ἠβούλετο παραστῆσαι, ἣν εἶτα κατὰ τὴν Δεκάτην Ὀγδόην Ἑκατονταετηρίδα ὁ Βέλγης Ῥεέσιος πολλῷ τελειοτέραν ἀπέδειξε.

Ἀλλ᾽ ὁ τῶν Δεκαδικῶν ὑπολογισμὸς ἦν πάντως καὶ παρὰ τοῖς ὑπὸ Ῥεγιομοντάνου ἀναγραφεῖσι Τριγωνομετρικοῖς Πίναξιν ἐν χρήσει, καὶ Ῥάμος αὐτοὺς ἐν τῇ ἰδίᾳ Ἀριθμητικῇ τοῦ 1550 συνεξέθετο· πληρέστερον γε μὴν ἐξεπόνησεν εἶτα Σίμων ὁ Στεβῖνος ἐν τῇ αὐτοῦ Πρακτικῇ Ἀριθμητικῇ τοῦ 1585, μεθ' ὃν ἐ μόνον ταῖς λοιπαῖς 'Αριθμητικαῖς συντάξεσιν ὑπεσυνάπτετο, ἀλλὰ καὶ περὶ τὰς βιωτικὰς προσελαμβάνετο χρήσεις. 'Ο δέ γε Στεβῖνος, εἰ καὶ πρῶτος τὴν ἀκριβῆ τῶν Δεκαδικῶν ἐξηγήσατο ἔκθεσιν, ὅτι ἄρα καὶ πρώτως αὐτῶν τὰς τάξεις τοῖς σημείοις ἐχαρακτηρίσατο, ἐκάλει δὲ μόνον Πρῶτα, Δεύτερα, Τρίτα, κ.τ.λ., ἀντὶ τῦ ὁλοσχερῦς τῦ μηδενικῦ ὑποτιθεμένυ· ὅθεν Βεῦερος ὕστερον ἐν τῇ Δεκαδικῇ αὐτῦ Λογιςικῇ τῷ 1619 τὰ ἐπὶ τύτοις σημεῖα ἐξεύρατο, οἷον o, ', '', ''', πρὸς τὴν τῶν λοιπῶν ἀντιδιαςολὴν κρείσσονα.

Κατὰ δὲ τὴν Δεκάτην Ἑβδόμην Σωτήριον Ἑκατονταετηρίδα διέπρεψαν συνάμα, οἵ τε Νεπῆροι, καὶ οἱ Βρίγγιοι, καὶ οἱ Οὐλάκαι πρὸς τὰς Λογαριθμικὰς Συντάξεις τὰ μάλιςα, ὅτε καὶ ὁ πολὺς κατὰ τὴν Γαλλίαν Φερμᾶτος ἄγνωςον ἔτι τινα τῶν ἀριθμῶν ἰδιότητα σοφῶς κατενόησε. Καὶ Γυλέλμος δ' ὁ Βυδδαῖος Ποιητικὴν 'Αριθμητικὴν συνετάξατο, ἣν τύποις οἱ ἐκ Παρισσίων τῷ 1631 τοῖς ἄλλοις ἐκοινώσαντο, ἔνθα ἡ ἀπὸ τῶν ἀτελῶν Τετραγώνων ἄχρι τῦ τόδε ἐξαγωγὴ τῶν 'Ριζῶν ἑρμηνεύεται.

'Αλλὰ δὴ καὶ τῶν τῆς 'Αναλύσεως ἐπὶ τὸ κρειττον μᾶλλον καὶ τελεώτερον προϊόντων, καὶ τῇ Λογιστικῇ μεγίστη ἡ ἀρρωγὴ ἐπεγένετο· ὅλως τε εἰς ὑψηλοτέρας ταύτης ἐξαιρουμένης τὰς θεωρίας, καὶ τὰ τῆς Ἀναλύσεως οὕτω τέως τῇ Ἀριθμητικῇ προσῳκείωτο, ὥστε ἐφ' ἓν ἀμφοτέρας τρέπεσθαι καὶ τὸ αὐτὸ ὑποκείμενον. Διά τοι ταῦτα, ἅτε δὴ περὶ τὴν τῆς Ἀναλύσεως Ἱστορίαν ἐν τῇ ἡμετέρᾳ Ἀλγέβρᾳ ἀναφανέντες πολυσχεδέστεροι, ἵνα μὴ τὴν αὐτὴν αὖθις τε καὶ τηνάλλως ἕψωμεν κράμβην, ἐκεῖνα μὲν ἀνακεφαλαιοῦσθαι ἐνταῦθα οὐκ ἔγνωμεν, συνιστῶμεν δὲ διὰ πολλοῦ τοῖς Μουσοτρόφοις ἡμῶν Φοιτηταῖς, καὶ ἐς ταῦτα προτρέπειν ἀπό τε Καθέδρας οὐ παυόμεθα ὁσημέραι, καὶ ἤδη δὲ τὰ αὐτὰ ἀναπείθειν τε καὶ παραινεῖν φιλοστόργως ἐπιχειροῦμεν.

Εἰς ὃ μηκέτι θυμὸς ([illegible]οῖς) δεύοιτο δαιτὸς ἐΐσης.

ΠΙΝΑΞ ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΗΣ
ΤΗΣ ΟΛΗΣ ΒΙΒΛΟΥ.

Σελ.

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τῆς τῶν Ἀριθμῶν διαφόρου Σχέσεως.

ΕΠΙΓΡΑΜΜΑ

Τοῦ Ἰατροφιλοσόφȣ Μ. Π. τȣ͂ ΓΟΒΔΕΛΑ, εἰς Συγγραφέα τὸν ἑαυτȣ͂ Ἀδελφόν.

Κάδμος ἀν' Ἑλλάδα δόξαν ἤρατο ὑψόθι φέγγȣς,
Γράμμασιν ἀτρεκέως ἰδμοσύνην ἐάσας.
Καὶ ΤΥ δὴ Σοφίης ἀνεδήσαο ἄμβροτον αἴγλην,
Τὰς Πατρίȣς Μȣ͂σας ἄψ μεταπεμπόμενος.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΕΙΣ ΤΗΝ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 1. Ποσὸν ἤτοι Ποσότης, ἢ Μέγεθος, καλεῖται πᾶν τὸ αὔξησιν καὶ μείωσιν ἐπιδεχόμενον, ὡς, ἀριθμὸς, γραμμὴ, ἐπιφάνεια, ςερεὸν, κ.τ.λ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 2. Ποσότης Διακεκριμένη ἐςὶν, ἡ ἐκ μερῶν κεχωρισμένων τε καὶ χωρὶς θεωρεμένων συνεςηκεῖα· ὡς, ςρατὸς, σωρεία σίτε, κ.τ.λ Συνεχὴς δὲ, ἡ ἐκ μερῶν ἀλλήλοις ἡνωμένων τε καὶ συνεχιζομένων· ὡς, ἔκτασις, ῥάβδος, λίθος, κ.τ.λ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 3. Ἡ μὲν ἐν Διακεκριμένη Ποσότης τῆς Ἀριθμητικῆς ἐςὶν ἀντικείμενον, ἡ δὲ Συνεχὴς τῆς Γεωμετρίας.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 4. Τὰ τῷ τε Ποσε ὀνόματι ὑπαγόμενα, εἴτ' ἂν, τὰ μείωσίν τε καὶ αὔξησιν ἐπιδεχόμενα, τῆς Μαθηματικῆς γενικῶς εἰσὶν ἀντικείμενα. Μέρος δὲ ταύτης ἡ Ἀριθμητικὴ ἔσα τὸ πρώτιςον, ἐχ ἁπλῶς καὶ ἐν γένει ἁπάσας θεωρεῖ τὰς Ποσότητας, ἀλλὰ μόνον τὰς δι' ἀριθμῶν ἰδίως ἐκφραζομένας.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 5. **Ἀριθμητικὴ** ἐςὶν ἐπιςήμη περὶ ἀριθμȣ̀ς ςρεφομένη, τόν τε τρόπον τȣ̃ ἀριθμεῖν τε καὶ ὑπολογίζεσθαι διδάσκȣσα, καὶ ἐκ δοθέντων ἀριθμῶν ἄλλȣς ἀγνώςȣς ἐξάγειν, τὸ ζητȣ́μενον δηλȣ̃ντας.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 6. Ἐπιςήμη μὲν τῶν ἀριθμῶν ἡ Ἀριθμητικὴ εἴρηται, ὡς τὴν φύσιν τȣ́των καὶ τὰς ἰδιότητας θεωρȣ̃σα. Τέλος δὲ ταύτης, τὸ γενικὰς ἡμῖν παρέχειν κανόνας, πρός τε τὴν τῶν ἀριθμῶν παράςασιν καὶ τὴν τȣ́των σύνθεσίν τε καὶ ἀνάλυσιν· ὃ δὴ ἰδίῳ ὀνόματι **Ὑπολογισμὸς** καλεῖται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 7. **Μονὰς** ἐςὶ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ ἀρχὴ, ἁπλῆ τε καὶ ἄνευ ἐκτάσεως, ὡς ὅρος λαμβανομένη, πρὸς παράςασιν ἁπασῶν τῶν ποσοτήτων τȣ̃ αὐτȣ̃ εἴδȣς.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 8. Οὕτω, λέγοντός τινος, ὅτι ἓν σῶμα ςαθμίζει πέντε λίτρας, ἡ λίτρα ἐςὶν ἡ μονὰς, ὡς ȣ̓̃σα ποσότης, πρὸς ἣν τὸ βάρος τȣ̃ δοθέντος παραβάλλεται σώματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 9. Πᾶν τοίνυν τὸ μοναδικῶς τε καὶ καθ' ἑαυ-

ἑαυτὸ θεωρούμενον, Μονὰς κληθῆναι δύναται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 10. Ἀριθμὸς καλεῖται οἱονδηποτοῦν μέγεθος ἐκ δυοῖν ἢ πλειόνων μονάδων συγκείμενον. Οὕτω πέντε χρυσοὶ τὸν πενταδικὸν ἀριθμὸν ἀποτελοῦσιν, ἐκ μονάδων πέντε συγκείμενον, ὧν ἑκάστη ἕνα χρυσὸν δηλοῖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 11. Ἔστι τοίνυν ὁ ἀριθμὸς μερῶν ἀδιαιρέτων ἄθροισμα, πρὸς τὸ αὐτὸ εἶδος ἀναφερομένων. Ἐὰν δὲ ἕν τι τῶν τοιούτων μερῶν ἕτερα ἐν ἑαυτῷ περιέχῃ ἀδιαίρετα μέρη τηνικαῦτα τὸ μὲν μέρος, εἴτ' οὖν ἡ μονὰς, ἀριθμὸς καλεῖται· τὰ δ' ἐν ἐκείνῳ περιεχόμενα μέρη, Μονάδες.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 12. Ὁ ἀριθμὸς τοίνυν γεννᾶται, ἐὰν μία μονὰς ἑτέρᾳ συναφθῇ μονάδι, εἴτ' οὖν εἷς χρυσὸς ἑτέρῳ χρυσῷ. Ἐὰν δὲ τοῖς δυσὶ τούτοις χρυσοῖς, καὶ τρίτος, καὶ τέταρτος καὶ πέμπτος προστεθῇ, τηνικαῦτα ὁ ἀριθμὸς ἐπαύξει καὶ τοσοῦτον, καθ' ὅσον τὰ μέρη μετὰ τῆς μονάδος ἑνούμενα πρόεισι. Τοὐναντίον δὲ, ἐκ πολλῶν μονάδων μιᾶς ἀφαιρεθείσης, ὁ ἀριθμὸς μειοῦται. καὶ τοσοῦτον καθ' ὅσον τὸ μέρος, ἀπὸ τῶν λοιπῶν μερῶν, τῶν τὸ ὅλον συνιστώντων, μᾶλλον καὶ μᾶλλον διαχωρίζεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Α'

§. 13. Χρώμεθα ἐν τῷ ὑπολογισμῷ τοῖς ἀριθμοῖς ἀντὶ τῶν πραγμάτων, ὅτι πολλάκις, ἢ ὁ βουλόμεθα, ἢ ὁ δυνάμεθα αὐτόχρημα αὐτοῖς χρῆσθαι τοῖς πράγμασι. Συντείνουσι δὲ οἱ τῆς Ἀριθμητικῆς κανόνες καὶ μάλα, ἐφ᾽ ᾧ δὶ αὐτῶν, εὐχερῶς τε καὶ βεβαίως, ἀριθμοὺς ἄλλους ἀγνώστους ἐξάγειν ἔχωμεν, ἀναλογίαν ἔχοντας πρὸς τοὺς δοθέντας (§. 3.), ἥπερ τοῖς ἰδίοις ἐν τῷ ἀριθμεῖν ἐχρώμεθα πράγμασι.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'

§. 14. Θεωρουμένης τοίνυν τῆς μονάδος ὡς μέρους καὶ τοῦ ἀριθμοῦ ὡς ὅλου, εἴτ᾽ οὖν ὡς μονάδων ἀθροίσματος (§. 9.)· ὥσπερ τὸ μέρος ὁ δύναται κληθῆναι ὅλον, ἀλλὰ τοῦ ὅλου ἀρχή, οὕτω καὶ ἡ μονὰς οὐκ ἔστιν ἀριθμὸς, ἀλλὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἀρχή. Δυνάμεθα δὲ πολλάκις τὴν αὐτὴν μονάδα καὶ ὡς ἀριθμὸν ἐκλαβεῖν (αὐτόθι). Ὥσπερ γὰρ τὸ μέρος, πρὸς τὰ ὑπ᾽ αὐτὸ ἐλάχιστα μέρη ἀναφερόμενον, ἐστὶν ὅλον· οὕτω καὶ ἡ μονὰς, πρὸς τὰς ὑπ᾽ αὐτὴν μονάδας ἀναφερομένη ἐστὶν ἀριθμός. Οἷον, ὁ ὀβολὸς παραβαλλόμενος πρὸς τὸ ἀργύριον, τὸ κοινῶς λεγόμενον γρόσιον, ἐστὶ μονὰς, ὡσαύτως καὶ τὸ ἀργύριον πρὸς τὸν χρυσόν. Τοὐναντίον δὲ τὸ ἀργύριον πρὸς τὸν ὀβολὸν, καὶ ὁ ὀβολὸς πρὸς τὸ λεπτὸν

πτὸν

πτὸν ἐςὶν ἀριθμός· σύγκειται γὰρ τὸ μὲν ἀργύριον ἐκ τεσσαράκοντα ὀβολῶν, ὁ δὲ ὀβολὸς ἐκ τριῶν λεπτῶν. Τέτε χάριν ἡ αὐτὴ ποσότης ἓν πρᾶγμα καὶ πολλὰ συνάμα δηλῶσαι δύναται, ὑπὸ διάφορον μέν τοιγε παρωνυμίαν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 15. Τὰ, οἷς ἐν τῷ ἀριθμεῖν χρώμεθα, ὀνόματα εἰσὶ ταῦτα: Ἕν, Δύω, Τρία, Τέσσαρα, Πέντε, Ἕξ, Ἑπτὰ, Ὀκτὼ, Ἐννέα.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 16. Χαρακτῆρες, ἢ Σημεῖα ἀριθμητικὰ ἐκκείσθωσαν τὰ ἐφεξῆς ἐννέα: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

§. 17. Οὐδὲν ἐςὶ πᾶν τὸ μὴ ἀριθμεῖσθαι δυνάμενον.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 18. Σημεῖον τε Μηδενὸς ἔςω τοδὶ, 0.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 19. Τὸ μηδενικὸν ἄρα σημεῖον, ἀπεσίαν δηλοῖ μονάδος, ἢ ὁποιεσῦν ἄλλε ἀριθμε.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 20. Δέκα ἄρ' ὀνομάτων χρεία πρὸς τὸ τὲς ἐννέα ἀριθμὲς σὺν τῷ μηδενικῷ συνεκφάναι. Ὅ-γε εἰ μὲν ἐν ἀρχῇ τῆς μονάδος προτίθοιτο, ἐδενὸς τηνικαῦτα σημαντικόν. ἐκείνη δὲ συνταττόμενον τῶν ἐννέα ἀριθμῶν ἐπιταττόμενον, δεκάδα μίαν ἵστησι.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 21. Δεκὰς καλεῖται τὸ ἐκ δέκα μονάδων σύστημα, ὥσπερ καὶ Εἰκὰς τὸ ἐκ δυεῖν δεκάδων, Τριακὰς τὸ ἐκ τριῶν· καὶ ἐφεξῆς ὅτω.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 22. Ἑκατοντὰς, ἢ Ἑκατοστὺς ἀκούει τὸ ἐκ δέκα δεκάδων συμπλήρωμα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 23. Τῶν Ἑκατοστύων ἀριθμουμένων, δέκα ἐξ αὐτῶν καινὴν μονάδα συναποτελοῦσιν, ἣ λέγεται Χιλιάς.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 24. Ἡ μὲν τῶν Χιλιάδων δεκὰς, Μυριὰς κέκληται· ἡ δ᾽ ἑκατοντὰς, Δεκὰς Μυριάδων.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 25. Ἡ τῶν χιλιάδων χιλιὰς Χιλιὼν, ἢ, κατὰ Λατίνες, Μιλλιὼν καὶ Μιλλιόνιον, προσηγόρευται. Τὸ δὲ ἐκ χιλίων χιλιαδικῶν χιλιόνων, ἤτοι τὸ ἐκ Μιλλιονίων Μιλλιόνιον, Δισχιλιὼν, ἢ Διλλιὼν καὶ Διλλιόνιον· ὥσπερ καὶ τὸ ἐκ χιλίων χιλιαδικῶν Δισχιλιόνων, ἤτοι τὸ ἐκ Διλλιονίων Μιλλιόνιον, Τρισχι-

Τρισχιλιὼν, ἢ Τριλλιὼν καί, *Τριλλιόνιον*. καὶ τὸ ἐκ Τριλλιονίων, *Τετραλλιόνιον*· καὶ οὕτως ἐφεξῆς, τῷ αὐτῷ τοῦ ἀριθμεῖν τρόπῳ, ὡς ἐπὶ τῶν Μιλλιονίων προσχρώμενοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 26. Διὰ τῶν ὀλιγαρίθμων τοίνυν τῶν δε ὀνομάτων, ἀριθμοὺς ψαμμακοσίους ἡλίκους ἐκφέρειν δυνάμεθα· εἰσὶ δὲ ταῦτα βαρβαρικὰ μέν, καὶ τῆς καθ' Ἕλληνας συνηθείας πόῤῥω πίπτοντα, διὰ δὲ τὸ ἐν ἁπλότητι εὔχρηστον ἐν τοῖς Ἀριθμητικοῖς ἥκιστα παραιτητέα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 27. Ἡ τῶν ἐκτεθέντων ἀριθμητικῶν χαρακτήρων αἵρεσις τε καὶ χρῆσις ἐκ συνηθείας τοῖς ἀνθρώποις ἐστί, διὸ καὶ ἄλλοι παρ' ἄλλοις ἔθνεσι φέρονται, καθά πυ περὶ τῶν Σινῶν ὁ κλεινὸς παρέδωκε Λειβνίτιος (*), ὅτι Δυαδικῇ τινι Ἀριθμητικῇ χρώμενοι, εἴτ' ἂν τοῖς δυσὶ μόνον ἀριθμητικοῖς χαρακτῆρσι τῷ 1 καὶ τῷ 0, τά τε τῶν ἀριθμῶν πάθη ἐξιχνεύειν δεξιῶς ἴσασι, καὶ οἱονδηποτοῦν ἄλλον δυνατὸν ἀριθμὸν δι' αὐτῶν ἐκφράζειν. Γίνεται δὲ τοῦτο τῆς τιμῆς τοῦ μοναδικοῦ χαρακτῆρος συνεχῶς προσεπιδιπλασιαζομένης, ἄχρις οὗ τουτί-

(*) Ἱστορ. τῆς Βασιλ. τῶν Ἐπις. Ἀκαδ. ἔτ. 1703. σελ. 105.

ȣ τετὶ τὴν αἰτεμένην τοπικὴν δύναμιν πρὸς ἀριςερὰν σχοίη· ὁ δὲ μηδενικὸς χαρακτὴρ 0, ὐδεμίαν παρ' ἐκείνοις τοπικὴν σώζων δύναμιν, τὸ κενὸν μόνον τῶν τόπων ἀναπληροῖ διάςημα. Οὕτω τοίνυν ἀριθμεῖν ἐθέλοντες γράφυσιν: 1 ἕν, 10 δύω, 11 τρία, 100 τέσσαρα, 101 πέντε, 110 ἕξ, 111 ἑπτὰ, 1000 ὀκτὼ, 1001 ἐννέα, 1010 δέκα, 1011 ἕνδεκα 1100 δώδεκα, 1101 δεκατρία, κ. τ. λ. Ἀλλὰ δὴ καὶ Ἕλληνες πάλαι τοῖς τῦ Ἀλφαβήτυ μονον γράμμασι χρώμενοι, δυνατὸν ὁποιονῦν ἀριθμὸν δὶ αὐτῶν ἠρίθμυν. Τύτοις παρηκολέθησαν καὶ Λατίνων παῖδες, τὰ τῦ ἑαυτῶν Ἀλφαβήτυ γράμματα διαφόρως μεταποιήσαντες καὶ ἀντ' ἀριθμητικῶν χαρακτήρων εἰσποιησάμενοι. Ἡμεῖς δὲ ὃν ἀνωτέρω (§. 15. 16.) τῦ ἀριθμεῖν ἐξεθέμεθα νόμον, διά τε τὸ πανταχῦ γῆς (ὅσον ἴσμεν) αὐτὸν ἀσπάσασθαι, καὶ διὰ τὸ ἡμᾶς ἐκ πρώτης ἡλικίας προσεθισθῆναι, ἀπαραίτητον ἡγησάμεθα. Ἀναμφιλέκτως γὰρ τὴν ἀρχὴν, ἡ τοιαύτη Δεκαδικὴ Ἀριθμητικὴ, ἐκ τῦ τῶν δακτύλων ἀριθμῦ ἔσχε. Δακτύλοις καὶ γὰρ ἐν τῷ ἀριθμεῖν προσχρώμεθα, μήπω ἄλις τὴν λογιςικὴν τέχνην πεπαιδευμένοι. Τῶν δὲ Ἀριθμητικῶν τύτων χαρακτήρων (§. 16.) τὴν εὕρεσιν κοινῇ τοῖς Ἄραψι προσάπτυσιν, οἳ δὴ καὶ Ἀραβικοὶ χαρακτῆρες δὶ αὐτὸ τῦτο παρὰ πάντων καλεῖσθαι ἠξίωνται.

Ὑπο-

῾ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 28. Εἰ καὶ οἱ ἀνωτέρω κοινῶς ἐν χρήσει ἀραβικοὶ χαρακτῆρες, ἐννέα μόνον εἰσὶν εἰς παράστασιν οἱουδηποτῦν ἀριθμῦ, ἔδοξε γε μὴν τοῖς Ἀριθμητικοῖς τοπικήν αὐτοῖς δύναμίν τε καὶ σημασίαν ἀπονεῖμαι, κατὰ τόπυς δεξιόθεν πρὸς τὰ λαιὰ ἀριθμυμένυς. Καταλέγονται δὲ οἱ τόποι, ἧπερ ἔθος τοῖς Ἀνατολικωτέροις τῶν Ἐθνῶν τὰ παρ᾽ αὐτοῖς γραφόμενα ἀναγινώσκειν, ἀρχῆς δηλονότι δεξιόθεν πρὸς τὰ λαιὰ γινομένης. Τῶν δὲ τόπων ὁ μὲν δεξιώτατος ταῖς ἁπλαῖς ἀφώρισται Μονάσι, ὁ δ᾽ ἐγγὺς πρὸς ἀρισερὰν μετὰ τῦτον ταῖς Δεκάσιν, ὁ δ᾽ ἐχόμενος ταῖς Ἑκατοντάσιν, οἷον ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς χαρακτήρων 536, δηλῦνται πεντακόσια τριάκοντα ἕξ, τιθεμένων δηλαδή, τῦ μὲν 5 ἀριθμῦ ἐν τῷ τρίτῳ τόπῳ, ὅςτις ἐςὶ τῶν ἑκατοντάδων, τῦ δὲ 3 ἐν τῷ δευτέρῳ τῷ τῶν δεκάδων, καὶ τῦ 6 ἐν τῷ τῶν μονάδων πρώτῳ. Τοιυτοτρόπως δηλῦμεν οἱονδηποτῦν ἄλλον ἀριθμὸν ἄχρι τῶν χιλίων, ἀνάγοντες τῦς τρεῖς τύτυς χαρακτῆρας, ἢ καὶ ἄλλυς ὁπυσυνῦν τρεῖς, ἐν μιᾷ τάξει τῶν Ἁπλῶν ἀριθμῶν.

Εἰ ἂν ἄχρι τῶν χιλίων ἀριθμῦντες γινόμεθα, τηνικαῦτα τετάρτυ χρήζομεν τόπυ καὶ δευτέρας ἀρχόμεθα τάξεως, ἥτις ἐςὶ τῶν Ἁπλῶν χι-

 λιαλιάδων. ἐν ταύτῃ δὲ κατατάττομεν μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας, ὄχι τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ τῶν χιλιάδων. Οὕτω τοίνυν ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμὸς, ἐν ταύτῃ τῇ τάξει ἐςαι, ὁ τῶν Μονάδων τῶν Χιλιάδων, ὁ δὲ δεύτερος τῶν Δεκάδων τῶν Χιλιάδων, ὅ,τε τρίτος τῶν Ἑκατοντάδων τῶν Χιλιάδων. Ἐὰν ὃν τοῖς προεντεθεῖσι τρισὶν ἀριθμοῖς 536, οἱ ἐφεξῆς τρεῖς προςεθῶσιν ἤτοι 473, ὁ ἀριθμὸς οὗτος 473536 δηλώσει τετρακοσίας ἑβδομήκοντα τρεῖς χιλιάδας, πεντακόσια τριάκοντα ἕξ.

Ταύταις ταῖς καθόλυ τῶν Ἁπλῶν τε καὶ τῶν χιλιάδων τάξεσιν ἕπεται τρίτη ἡ τῶν Μιλλιονίων, ἐν ᾗ τρεῖς ἀριθμοὶ δηλᾶσι Μονάδας, Δεκάδας, Ἑκατοντάδας τῶν Μιλλιονίων. Οὕτω τοίνυν ἐν γένει ὁ ἕβδομος ἀριθμὸς, ὁ τῶν Μιλλιονίων ἔςαι τόπος, ὁ ὄγδοος τῆς δεκάδος τῶν Μιλλιονίων, ὁ ἔννατος τῆς ἑκατοντάδος τῶν Μιλλιονίων. Οἷον, ἐν παραδείγματι, ὁ ἐφεξῆς ἀριθμὸς 819473536 δηλοῖ, ὀκτακόσια δεκαεννέα μιλλιόνια, τετρακοσίας ἑβδομήκοντα τρεῖς χιλιάδας, πεντακόσια τριάκοντα ἕξ.

Οὕτω τοίνυν περαιτέρω προϊόντες, καὶ ταῖς προτέραις τρεῖς τάξεσιν ἑτέραν νέαν ἐπισυνάπτον-

τες;

τες, ἔχομεν ἐν μὲν τῇ τετάρτῃ τάξει, Μονάδας. Δεκάδας, καὶ Ἑκατοντάδας Χιλιάδων τῶν Μιλλιονίων. ἐν δὲ τῇ πέμπτῃ, Μονάδας, Δεκάδας καὶ Ἑκατοντάδας τῶν Διλλιονίων ἐν τῇ ἕκτῃ, Χιλιάδων τῶν Διλλιονίων. ἐν τῇ ἑβδόμῃ, τῶν Τριλλιονίων, καὶ ἑξῆς οὕτως ἐπ' ἄπειρον. Ὥςε τὰς ἐννέα τούτους χαρακτῆρας ἀποχρῶντας εἶναι πρὸς παράςασιν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ. Τοῦτο δὲ μόνον καλῶς σημειωτέον, τὴν ἐσχάτην τάξιν ἑνὶ μόνῳ, ἢ δυσὶ χαρακτῆρσι συγκεῖσθαι δύνασθαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 29. Ἔνθα δὲ καὶ ἔλλειψιν τῶν τινος τάξεως μονάδων, ὁ τόπος ἄμοιρος χαρακτῆρος διαμένει καὶ κενὸς, τῷ μηδενικῷ σημείῳ τὸν τόπον πληρῶμεν, ὡς ἂν μὴ τῆς τάξεως παρατραπείσης ἐπιγένοιτο σύγχυσις. Οὕτω δύω χιλιάδας γράψαι ἐθέλοντι, δῆλον ἐκ τῆς προτεθείσης ἐςὶν ὑποθέσεως, τὸν ἀριθμὸν δύω τὸν τέταρτον τόπον κατέχειν· ὁ πρῶτος τοίνυν δεύτερος καὶ τρίτος τοῖς μηδενικοῖς πληρωθήτωσαν. Ὡσαύτως πρὸς τὴν τῆς δεκάδος παράςασιν, ἡ μὲν μονὰς πρὸς τὸν δεύτερον προάγεται τόπον, τὸ δὲ μηδενικὸν τὸν πρῶτον δέον ἀναπληροῦν τόπον. Ἐπεὶ δὲ, ἐν τοῖς τετρακοσίοις,

σίοις ὀκτὼ, ἑκατοντάδες μόνον καὶ μονάδες πάρεισιν, ἡ τῶν δεκάδων ἀπουσία τῷ μηδενικῷ οὕτως ὑπεμφαίνεται 408. Ταυτὸ σημειωτέον καὶ περὶ τῶν λοιπῶν ἐν γένει, ἤτοι ἐν τοῖς κενοῖς διαστήμασιν, ἓν, ἢ καὶ πλείω, τῶν μηδενικῶν θετέον.

Ἔστω δὴ, πρὸς μείζονα τῶν εἰρημένων κατάληψιν, ἡ τῶν ἀριθμῶν τοπικὴ δύναμις τῷ ἑξῆς Πίνακι ἐκτεθειμένη.

Πρώτη Τάξις.	Μονάδες Δεκάδες Ἑκατοντάδες	τῶν Ἁπλῶν.
Δευτέρα Τάξις.	Μονάδες Δεκάδες Ἑκατοντάδες	τῶν Χιλιάδων.
Τρίτη Τάξις.	Μονάδες Δεκάδες Ἑκατοντάδες	τῶν Μιλλιονίων.
Τετάρτη Τάξις.	Μονάδες Δεκάδες Ἑκατοντάδες	τῶν Χιλιάδων. τῶν Μιλλιονίων.
Πέμπτη Τάξις.	Μονάδες Δεκάδες Ἑκατοντάδες	τῶν Διλλιονίων.

Ἕκτη Τάξις.	Μονάδες Δεκάδες Ἑκατοντάδες	τῶν Χιλιάδων. τῶν Διλλιονίων.
Ἑβδόμη Τάξις.	Μονάδες Δεκάδες Ἑκατοντάδες	τῶν Τριλλιονίων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 30. Ἔϛιν ἄρα, τὸ μὲν Μιλλιόνιον, δεκάκις ἑκατὸν χιλιάδες μονάδων· τὸ δὲ Διλλιόνιον, δεκάκις ἑκατὸν χιλιάδες μιλλιονίων. τὸ δὲ Τριλλιόνιον, δεκάκις ἑκατὸν χιλιάδες διλλιονίων. Τὸ δὲ Τετραλλιόνιον, δεκάκις ἑκατὸν χιλιάδες τριλλιονίων· καὶ ἐφεξῆς ὅτως. Ὃν λόγον ἄρα ἔχει τὸ Μιλλιόνιον πρὸς τὸ Διλλιόνιον, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὸ Τριλλιόνιον πρὸς τὸ Τετραλλιόνιον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 31. Ἀρίθμησις ἐϛὶ πλείϛων διεζευγμένων Ποσοτήτων προσφυὴς παράϛασις καὶ ἀπαγγελία.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 32. Ἀριθμὸν ὁποιονῦν δοθέντα ἀπαγγεῖλαι, ἤτοι οἱωδήποτε χαρακτῆρι τὴν ἀνήκυσαν ἀπονεῖμαι τιμήν τε καὶ σημασίαν.

ΛΥΣΙΣ.

Ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς διὰ κομμάτων διῃρήσθω εἰς τὰ εἰς τάξεις, ἀφορισμένων τριῶν χαρακτήρων ἐφ' ἑκάστην τάξιν, ἀρχῆς ἀπὸ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ γενομένης. οἱ δὲ τρεῖς χαρακτῆρες ἔσονται μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες.

Σημειωτέον τὰς μὲν τάξεις πάσας τῶν Χιλιάδων σημείῳ (,). τὰς δὲ τῶν Μιλλιονίων ἑνὶ γραμμιδίῳ ('), πλαγίως κατὰ κορυφὴν ἐπιγεγραμμένῳ· τῶν Διλλιονίων, δυσὶ ('')· τῶν Τριλλιονίων, τρισὶ ('''). καὶ ἐφεξῆς ὅτω· ἔξ μεν δὲ τῷ τρόπῳ τούτῳ ἀντὶ τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, τὰς συντιθείσας ταύτας ἐκθέσεις. Ἔνθα τοίνυν τὸ σημεῖον κεῖται, εἰπὲ, χίλια· ἔνθα τὸ ἓν γραμμίδιον, Μιλλιόνιον· ἔνθα τὰ δύο, Διλλιόνιον· ἔνθα τὰ τρία, Τριλλιόνιον· καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ τῶν ἀριθμῶν δύναμις τοῦ τόπου, ὃν ἐκεῖνοι κατέχουσιν, ἐξήρτηται (§. 28.). Διὰ τῶν σημείων δὲ, τῶν ἐν τῇ Λύσει προμνησθέντων, ἀκριβῶς ἡ τοπικὴ ἐκτίθεται δύναμις, τουτέστιν, αἱ Χιλιάδες, τὰ Μιλλιόνια, Διλλιόνια, Τριλλιόνια, κ.τ.λ. Ἄρα, κατὰ τὸν ὁροθετηθέντα τοῦτον τρόπον τὰς τοπικὰς τῶν ἀριθμῶν δυνάμεις, ὀρθῶς καὶ ὡς δεῖ ἀριθμῆσαι δυνάμεθα, διὰ τῶν ἀνωτέρω ἑρμηνευθέντων σημείων τε καὶ ὀνομάτων δεξιῶς ὑπαναγινώσκοντες.

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Ἔςω ἀπαγγελτέος ὁ ἀριθμὸς 5302480693. Διαιρεθεὶς ὡς ὀεῖ, κατὰ τὰς κανόνας, εἰς τάξεις, καὶ διὰ τῶν προδιαταχθέντων σημείων ἐνσημανθεὶς, ὡδέ πως ἀπαγγελθήτω.

5', 302', 480', 693.

Πέντε χιλιάδες, καὶ τριακόσια (ἐνταῦθα ὐδεμία ἐςὶ δεκὰς) δύω μιλλιόνια, τετρακόσιαι ὀγδοήκοντα (ὐδεμία ἐνταῦθα κεῖται μονὰς) χιλιάδες, καὶ ἑξακόσια ἐννενήκοντα τρία.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 33. Τύτων ὀρθῶς κατανοεμένων εὐχερῶς τὺς ἐφεξῆς ἀριθμὺς ἀπαγγεῖλαι δυνάμεθα.

Α΄. Ὁ Σολομὼν ἐδαπάνησεν εἰς τὴν τῦ Ναῦ τῶν Ἱεροσολύμων κτίσιν νομίσματα,

1369538005o

Δεκατρεῖς χιλιάδας, καὶ ἑξακόσια ἐννενήκοντα πέντε μιλλιόνια, τριακοσίας ὀγδοήκοντα χιλιάδας καὶ πεντήκοντα.

Β, Ἡ πολυτάλαντος τῦ Σαρδαναπάλυ περιυσία νομίζεται ὑπάρξαι.

57320027575 7.

Γ΄. Ἡ τῦ Ἡλίυ ςερεότης, εἴτ' ὖν ὁ τύτυ ὄγκος ἐςὶ 3645252928246960

Δ. Τὸν τῆς Περσίας Βασιλέα ἔδει τῶ-τῦ Ζατρικίυ τριάκοντα εἰκοστῇ Σέσσα δῆναι κόκκες σίτε.

18446744073709551615

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 51. Ἀριθμὸν ἀπαγγελθέντα καταγράψαι.

ΛΥΣΙΣ.

Θεώρησον Α.' εἰ ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς περιέχει Μιλλιόνια, Διλλιόνια, κ. τ. λ. καὶ εἰ ἀμέσως ἀπὸ τέτων ἄρχεται, ἢ ἀπὸ τῶν χιλιάδων, Τέτε γενομένε, τόσας τάξεις κόμματι διάςειλον, ὅσας ὁ ἀριθμὸς ἀπαιτεῖ, ὡς ἐν τῷ προκατασκευασθέντι Προβλήματι δέδεικται.

Κατάγραψον Β. μεταξὺ τῶν διαςελλόντων τέτων κομμάτων τὸν ἀριθμὸν ὕτως, ὥςε τὰς ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ χιλιάδας, τὸν ἀνήκοντα αὐταῖς τόπον κατέχειν· τὰ δὲ κενὰ διαςήματα μηδενικοῖς ἀναπλήρωσον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ τῶν ἀριθμῶν δύναμις, ἀπὸ τῶν τόπων, ὓς ἐκεῖνοι κατέχεσιν, ἐξήρτηται (§. 28.). Ἀλλὰ μήν, τῷ λόγῳ τέτῳ, οἱ ἀριθμοὶ εἰς τὰς οἰκείες τίθενται τόπες. Ἄρα ὡσαύτως κατὰ τὴν ἀνήκεσαν αὐτοῖς δύναμιν γράφονται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Γράψον, δεκαπέντε χιλιάδας, καὶ ἑξακόσια ὀ-

κτὼ

κτὼ μιλλιόνια, τετρακοσίας εἴκοσι ἑπτὰ χιλιάδας, καὶ ὀγδοήκοντα ἐννέα.

Ὡς ὄντων μιλλιονίων, τριῶν τάξεων χρεία ἐστὶ προηγμένων δὲ καὶ χιλιάδων, τετάρτην συζευκτέαν δέον.

Ἐν μὲν ἐν τῇ τετάρτῃ τίθεται ὁ ἀριθμὸς 15. ἐν δὲ τῇ τρίτῃ, ἑξακόσια, εἶτα τὸ μηδενικὸν σὺν ὀκτώ, 608· ἐν τῇ δευτέρᾳ 427· ἐν τῇ πρώτῃ μηδὲν σὺν 89· τουτέστι

15", 608', 427, 089.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

§. 35. Τῇ μεθόδῳ ταύτῃ καὶ οἱ ἐφεξῆς γραφήτωσαν ἀριθμοί.

Α'. Ἡ τῆς γῆς περιφέρεια, εἴτ' ὂν ὁ μέγιστος ταύτης κύκλος ἔχει εἴκοσι μιλλιόνια, καὶ διακοσίας πεντήκοντα ἓξ χιλιάδας ἑξαπόδων.

Β'. Ἐὰν ἑκάστῳ ἀνθρώπῳ παραχωρήσωμεν τέσσαρας τετραγωνικοὺς πόδας, σταθήσονται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς, χίλια τριακόσια τριάκοντα ἓξ διλλιόνια, πεντακόσιαι ἐννενήκοντα πέντε χιλιάδες, καὶ ἐννεακόσια τέσσαρα μιλλιόνια.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Β'.

§. 36, Ὅσον ἡ τῶν ὅρων προσήκουσα χρῆσις, πρὸς τὸ εὐκρινῶς τῶν πραγμάτων ἀντιλαμβάνεσθαι καὶ οἱασοῦν ἀπαλλάττειν συγχύσεως, τὸν ἀνθρώπινον νοῦν ἐπιτείνει, ἐκ περιουσίας συννοίσουσιν οἱ ἀτενέστερον βλέποντες, εἰ τοῖς προσκτεθεῖσι Προβλήμασι προσέχειν ἅλις ἐθελήσουσι.

ΤΜΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΤΩΝ ΤΕ ΟΛΟΣΧΕΡΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΤΩΝ ΟΛΟΣΧΕΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΤΕ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 57. **Ἀφῃρημένος** Ἀριθμὸς ἐςὶν, ὁ πλῆθος μόνον ἀορίςως δηλῶν. **Συγκεκριμένος** δὲ, ὁ συνάμα τῷ πλήθει καὶ τὸ εἶδος ὑπεμφαίνων.

ΣΧΟΛΙΟΝ

§. 58. Οἷον, εἴ τις ἁπλῶς εἴποι, ἓξ, εἴκοσι, ἑκατόν· ὡσαύτως, ἑξάκις, εἰκοσάκις, ἑκατοντάκις· οὗτος οὐδαμῶς ὁρίζεται τίνα δὴ ταῦτα τὰ ἀριθμούμενα, καὶ τῷ Ἀφῃρημένῳ ἀριθμῷ ἐςὶ χρώμενος· Τοὐναντίον δὲ, εἰ μετὰ προσθήκης φαίη, ἓξ σφαῖραι, εἴκοσι ἄνθρωποι, ἑκατὸν χρυσοὶ, τῶν ἀριθμουμένων τὸ εἶδος διορίζεται, καὶ τῷ Συγκεκριμένῳ ἀριθμῷ χρῆται.

ΟΡΙ-

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 39. Ἀριθμοὶ ἀλλήλοις Ὁμογενεῖς εἰσὶν οἱ πρὸς τὴν αὐτὴν, Ἑτερογενεῖς δὲ, οἱ πρὸς διαφερέσας μονάδας ἀναφερόμενοι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 40. Οἷον. Θῶμεν Α σφαῖραν εἶναι λιθίνην, καὶ Β καὶ Γ σφαίρας ὡσαύτως καὶ αὐτὰς λιθίνας, ἔσονται δὴ Α καὶ Β καὶ Γ, ἀριθμοὶ ὁμογενεῖς. Ἐὰν δ' αὖ Α μὲν ᾖ σφαῖρα λιθίνη, Δ δὲ μολιβδίνη, ἔσονται Α καὶ Δ ἀριθμοὶ ἑτερογενεῖς, ὡς τῷ λόγῳ τῆς ὕλης, ἐξ ἧς συμπεπήγασι, διακρινόμενοι· Ὡσαύτως τρεῖς χρυσοὶ καὶ τέσσαρες χρυσοὶ, ἀριθμοὶ εἰσὶν ὁμογενεῖς, ὡς πράγματα τοῦ αὐτοῦ εἴδους καὶ τῆς αὐτῆς ὀνομασίας σημαίνοντες· τρεῖς δὲ χρυσοὶ καὶ ἑπτὰ ἀργύρια, πέντε ἀμφορεῖς οἴνου καὶ ὀκτὼ ὀργυιαὶ ξύλων, ἑτερογενεῖς πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ τυγχάνουσιν, ὡς διάφορα σημαίνοντες πράγματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 41. Ἵν' οὖν μονὰς ἐπὶ μονάδα τεθῆναι ἔχῃ, ὥστε ἀριθμὸν ἐντεῦθεν ἀναδίδοσθαι (§. 12.), δέον τὰς μονάδας τοῦ αὐτοῦ εἶναι εἴδους. Ἀδύνατον γὰρ ἐκ διαφόρων μονάδων, εἴτ' οὖν μερῶν, ὁλοσχερές τι συστηθῆναι· οὕτω μία οἰκία, εἷς ἵππος εἷς στρατιώτης, μία σφαῖρα, ἓν μῆλον ὁμοῦ συναφθέντα, ἀριθμὸν, εἴτ' ὧν ὅλον, ὃ δύναται ἀναδῦναι. Ὡσαύτως τρία μῆλα καὶ τέσσαρα ἄπια, ἐκ ἀποτελῦσιν ἑπτὰ μῆλα, ὅτε μὴν ἑπτὰ ἄπια.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 42. Οἱ ἑτερογενεῖς ἀριθμοὶ εἰσὶν ἐνίοτε ὁμογενεῖς. δυνάμεθα παρονομασίαν κοινὴν εὑρεῖν ὑπὲρ πασῶν τῶν μονάδων. Οὕτω, τρία ἄπια, τέσσαρα μῆλα καὶ πέντε δαμασκηνὰ, εἰ καὶ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ἑτερογενῆ, τῷ γενικῷ μέν τοι γε τῦ καρπῦ ὀνόματι ὑπαγόμενα, ὁμογενῆ ἀνακύπτυσιν, ἑπομένως οἵτε ἀριθμοὶ, δἰ ὧν αὐτὰ δηλῦνται, εἰσὶν ὁμογενεῖς. Ἔνθεν τοι, τρία ἄπια, τέσσαρα μῆλα καὶ πέντε δαμασκηνὰ εἰσὶ δώδεκα καρποί. Οὐχ ἧττον δὲ καὶ ἀριθμοὶ ἑτερογενεῖς ἀνακύπτυσιν ὁμογενεῖς, ἐὰν τὰ δηλῦμενα μέρη πρὸς τὸ αὐτὸ ἀναχθῶσιν εἶδος. Οὕτω τρία ἀγύρια καὶ δύω δεκάρια, νομίσματα διαφόρυ παρονομασίας, ἀναγόμενα εἰς τὺς αὐτοῖς ἐμπεριεχομένυς ὀβολὺς, ἀριθμοὶ ὁμογενεῖς ἀνακύπτυσιν, ὡς τῷ κοινῷ τῶν ὀβολῶν ὀνόματι ὑποσημαινόμενοι.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 43. Ἀριθμοὶ Ἑτερογενεῖς Ἀνάγωγοι εἰσὶν, οἱ πρὸς τὸ αὐτὸ εἶδος καὶ τὴν αὐτὴν παρονομασίαν ἀναχθῆναι δυνάμενοι. Δυσανάγωγοι δὲ, οἱ τὐναντίον ἔχοντες.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 44. Οὕτω, δύω ἀργύρια καὶ πέντε ὀβολοὶ, ἀριθμοὶ εἰσὶν Ἀνάγωγοι· διαλυομένων γὰρ τῶν δύω ἀργυρίων εἰς ὀγδοήκοντα ὀβολὲς, καὶ τέτοις τῶν πέντε ὀβολῶν προστιθεμένων, ἔχομεν ἀντὶ δύω ἀργυρίων καὶ πέντε ὀβολῶν, ὀβολὲς ὀγδοήκοντα καὶ πέντε. Πέντε δὲ ὀργυιαὶ ξύλων καὶ τρεῖς ἀμφορεῖς οἴνε, ἀριθμοὶ εἰσὶ Δυσανάγωγοι, ὡς μὴ δυνάμενοι ὑπὸ κοινὴν παρονομασίαν ἀναχθῆναι.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 45. Ἀριθμὸς Ὁλοσχερὴς ἐςὶν, ὁ πρὸς τὴν μονάδα, ὡς ὅλον πρὸς μέρος τὴν ἀναφορὰν ἔχων.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 46. Ὅλον καλεῖται τὸ ἐκ μερῶν συγκείμενον. Μέρος δὲ, ἐξ ὃ, πολλάκις ἐπαναληφθέντος, τὸ ὅλον ἐκφύπτει.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

§. 47. Τὸ Ὅλον ἄρα, Α.' ἐςὶ μεῖζον ἑκάςε τῶν οἰκείων μερῶν. Β.' τὸ μέρος ἐςὶν ἔλαττον τῦ ὅλε. Γ.' τὸ ὅλον ἐςὶν ἴσον πᾶσι τοῖς αὐτῦ μέρεσιν ὁμῦ ληφθεῖσιν οἷον 8 μεῖζόν ἐςι τῦ 4, καὶ 4 ἔλαττον τῦ 8, καὶ 8 ἴσον 4 σὺν 3 σὺν 1.

ΟΡΙΣΜΟΣ,

§. 48. Ποςαῖον μέρος καλεῖται, ὃ ποσάκις ληφθὲν καταμετρεῖ τὸ ὅλον· οἷον ὁ 3 τετράκις ληφθεὶς καταμετρεῖ ἐντελῶς τὸν 12. *Ποσὸν* δὲ μέρος, τὸ μὴ ἐντελῶς καταμετρῶν· οἷον ὁ 5 πρὸς τὸν 12. ἀναφερόμενος.

ΑΞΙΩΜΑ.

§. 49. Ἐὰν δυοῖν Ὅλων τὰ ἡμίση, ἢ ποσαῖά τινα μέρη, ἴσα ἀλλήλοις ὦσι, καὶ τὰ ὅλα ἴσα ἔσονται. Κἀνάπαλιν, ἐὰν τὰ ὅλα, καὶ τὰ τούτων ἀνάλογα μέρη, Ὃν γὰρ λόγον ἔχουσι τὰ Ὅλα πρὸς ἄλληλα, τὸν αὐτὸν καὶ τὰ τούτων ἡμίση, ἢ καὶ ἄλλο τι ποσαῖον μέρος ὅμοιον. Δύω κύαθοι, 12. λίτρας ἕκαστος ζυγοσταθμῶν, ἔχουσιν ἡμίση 6. λίτρας, ἔχουσι δὲ καὶ τεταρτημόρια 3· ἑπομένως τὰ ἡμίση πρὸς τὰ ἡμίση, καὶ τὸ ποσαῖον μέρος πρὸς τὸ ἕτερον ποσαῖον μέρος, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον, ὃν τὰ ὅλα, ἤτοι ὃν ὁ 12. πρὸς τὸν 12.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 50. *Ἴσα* ἐστιν, ὧν θάτερον, σωζομένης τῆς Ποσότητος ἀντὶ θατέρου τεθῆναι δύναται. *Ἄνισα* δὲ, ἐὰν τὸ θατέρου μέρος, ἀντὶ τοῦ ἑτέρου ὅλου τεθῆναι ἔχῃ.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 51. Σημεῖον Ἰσότητος ἔστω τοδὶ $=$, ὅπερ δυσὶν ἀριθμοῖς ἐγγραφόμενον σημαίνει θάτερον τῷ ἑτέρῳ ἴσον εἶναι. οἷον $8=8$, ὀκτὼ ἴσον ὀκτώ.

ΟΡΙ-

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 52. Μεῖζόν ἐςιν, ὃ μέρος τῷ ἑτέρῳ ὅλῳ ἴσον τυγχάνει. Ἔλαττον δὲ, ὃ τῷ θατέρῳ μέρει ἴσόν ἐςι·

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 53. Σημεῖον τῦ μὲν Μείζονος ἔςω $>$, τῦ δὲ Ἐλάττονος $<$. Ἐκφέρεται δὲ ὕτω, $8 > 5$ ὀκτὼ μείζων τῶν πέντε. καὶ $5 < 8$, πέντε ἐλάττων τῶν 8.

ΑΞΙΩΜΑ.

§. 54. Τὸ αὐτὸ ἑαυτῷ ἐςὶν ἴσον· οἷον $8 = 8$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 55. Ὁ γὰρ αὐτὸς ἀριθμὸς ἴσος ἑαυτῷ ὢν, ὅπως ἂν καὶ προαχθῇ, ἀείποτ' ἴσος ἑαυτῷ ἔςαι· οἷον 8, προςιθεμένων ὁμῦ 2 καὶ 6, 4 καὶ 4, 5 καὶ 3, κ. τ. λ. ἢ καὶ ἀφαιρυμένων 2 τῶν 10, 3 τῶν 11, κ. τ. λ. ἢ πολλαπλασιαζομένων 4 ἐπὶ 2· ἢ διαιρυμένων 24 διὰ 3, 16 διὰ 2. Ὁπωσδηποτῦν καὶ προαχθείη, ἀείποτ' ἑαυτῷ ἐςὶν ἴσος, ὡς τὴν αὐτὴν διασώζων ποσότητα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 56. Ὁπηνίκα τοίνυν αἱ μονάδες, ἢ οἱ ἀριθμοὶ συντίθενται, ἡ τοιαύτη σύνθεσις δύναται, γενέσθαι ἢ συναπτομένων πολλῶν τε καὶ διαφόρων τῶν αὐτῶν μονάδων ἀριθμῶν, ὡς ἕξ, εἴκοσι, ἑκατὸν, χίλια.

ἢ τȣ͂ αὐτȣ͂ ἀριθμȣ͂ πολλάκις λαμβανομένȣ, ὡς τȣ͂ ἓξ, ἑπτάκις. Ὁ μὲν πρῶτος τῆς συνθέσεως τρόπος καλεῖται Πρόσθεσις, ὁ δὲ δεύτερος ἐπιτομὴ ὢν τȣ͂ πρώτȣ, Πολλαπλασιασμός.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 57. Ὁπηνίκα αὖθις οἱ ἀριθμοὶ διαχωρίζονται, τȣτὶ δύναται γενέσθαι, ἢ λαμβανομένȣ ἅπαξ τȣ͂ ἐλάττονος ἀπὸ τȣ͂ μείζονος, ὡς τȣ͂ τεσσαράκοντα ἀπὸ τȣ͂ ἑκατόν· ἢ τȣ͂ αὐτȣ͂ ἐλάττονος ἀριθμȣ͂ πολλάκις ἀπὸ τȣ͂ μείζονος ὑπεξαγομένȣ, ὡς τȣ͂ τέσσαρα τρὶς ἀπὸ τȣ͂ δώδεκα ἀφαιρȣμένȣ. Ὁ μὲν πρῶτος τρόπος καλεῖται Ἀφαίρεσις, ὁ δὲ δεύτερος, ἐκείνȣ ὢν ἐπιτομὴ, Διαίρεσις.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 58. Οἱ τέσσαρες ȣ͂τοι τρόποι, εἴδη Ἀριθμητικῆς, καλȣ͂νται, ἀναγόμενοι ἰδίως τῇ Προσθέσει τε καὶ τῇ Ἀφαιρέσει ὡς τῶν λοιπῶν δυοῖν ἐπιτομῆς τῶν προτέρων ὄντων· ἐπεὶ δὲ καὶ περὶ αὐτῶν ἰδία κανόνες ἐκτίθενται, τέσσαρα Ἀριθμητικῆς Εἴδη κοινῶς ἐπεκράτησε λέγεσθαι, Πρόσθεσιν δηλαδὴ, Ἀφαίρεσιν, Πολλαπλασιασμὸν καὶ Διαίρεσιν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 59. Ἐν τȣ́τῳ τῷ Κεφαλαίῳ περί τε τῆς Προσθέσεως μόνον καὶ τῆς Ἀφαιρέσεως διαληψόμεθα.

Α΄. Πε-

Α. ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 60. **Πρόσθεσις** ἐςὶν ἀριθμοῦ εὕρεσις ἐκ δυοῖν, ἢ πλειόνων ὁμογενῶν δοθέντων, τοῖς δοθεῖσιν ἅμα ληφθεῖσιν ἴσου.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ Α'.

§. 61. Οἱ μὲν δοθέντες ἀριθμοὶ καλοῦνται **Ἀθροιςέοι**, ὁ δὲ ζητούμενος, εἴτ' οὖν τὸ ὅλον **Ἄθροισμα, Κεφάλαιον** καὶ **Συμποσούμενον.**

ΥΠΟΘΕΣΙΣ Β'.

§. 62. Σημεῖον Προσθέσεως ἔςω τοδὶ +, ὃ διὰ τοῦ **συν** ἐκφέρεσθαι εἴωθεν, οὕτω 3 + 4. Σημαίνει δὲ τὸ κεφάλαιον τὸ ἐκ 3 καὶ 4, καὶ ἀπαγγέλεται 3 σὺν 4.

ΑΞΙΩΜΑ Α'.

§. 63. Ἐὰν τοῖς ἴσοις ἴσα προσθῇς, τὸ ἐξ αὐτῶν παραγόμενον ἴσον ἔςαι· οἷον

$$\begin{array}{r} 4+3=7 \\ 2+6=8 \\ \hline 4+3+2+6=7+8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8=6+2 \\ 4=4 \\ \hline 8+4=6+2+4 \end{array}$$

Ἐὰν δ' ἄνισα, καὶ τὰ συμποσούμενα ἄνισα ἔςαι· οἷον.

$$\begin{array}{r} 7+8=15 \\ 5>4 \\ \hline 7+8+5>15+4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8>7 \\ 2=2 \\ \hline 10>9 \end{array}$$

ΑΞΙΩΜΑ Β'

§. 64. *Τὸ θατέρῳ τῶν ἴσων μεῖζον ἢ ἔλαττον, καὶ θατέρῳ τῶν ἴσων ὡσαύτως μεῖζον ἢ ἔλαττόν ἐστιν· οἷον·*

$$\begin{array}{ll} 6 = 5 + 1 & 6 + 3 = 9 \\ \underline{7 > 6} & \underline{7 < 9} \\ 7 > 5 + 1 & 7 < 6 + 3 \end{array}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 65. Ἀριθμοὺς ὁποσουσοῦν δοθέντας ὁμογενεῖς προσθεῖναι.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Οἱ ὁμογενεῖς ἀριθμοὶ ὑπὸ τοῖς ὁμογενέσιν οὕτω τετάχθωσαν γραφόμενοι, ὥστε τὰς μὲν μονάδας ταῖς μονάσι, τὰς δὲ δεκάδας ταῖς δεκάσι, τὰς δὲ ἑκατοντάδας ταῖς ἑκατοντάσι, κ. τ. λ. ἀντιστοιχεῖν. Β'. Ὑπ' αὐτοὺς ἤχθω εὐθεῖα, ἐφ' ᾧ μὴ τὸ ἄθροισμα τοῖς ἀθροιστέοις συγχέοιτο. Γ'. Ἐν μέρει προστεθήτωσαν αἱ μονάδες, καὶ τὸ τούτων ἄθροισμα ὑπ' αὐταῖς γραφήτω. Δ'. Ἐὰν δ' ἐν αὐταῖς εὑρεθῶσι δεκάδες, αὗται ταῖς δεκάσι τῶν δοθέντων ἀριθμῶν προστεθήτωσαν, τὸ δὲ τῶν δεκάδων ἄθροισμα, ὑπὸ ταῖς δεκάσι ταχθήτω. Ε'. Ταύτης δὲ τῆς πράξεως καὶ ἐν ταῖς λοιπαῖς σειραῖς τῶν δοθέντων ἀριθμῶν συνεχιζομένης, ληφθήσεται τὸ ζητού-

ζητούμενον κεφάλαιον τῶν τε ἑκατοντάδων, χιλιάδων, κ. τ. λ·

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α΄ Ἔστωσαν προσθετέοι οἱ ἀριθμοὶ 342., 423, 1214·

342	4 καὶ 3 καὶ 2 ποιοῦσιν 9 μονάδας
423	1 καὶ 2 καὶ 4 ποιοῦσιν 7 δεκάδας
1214	2 καὶ 4 καὶ 3 ποιοῦσιν 9 ἑκατοντάδας
1979	1 χιλιὰς μένει·

Β΄ Ἔστωσαν προσθετέοι οἱ ἀριθμοὶ 3564,

3564
4878
7345
8596
24383

4878, 7345, 8596. 6 καὶ 5 ποιοῦσιν 11, καὶ 8 ποιοῦσι 19, καὶ 4 ποιοῦσιν 23 μονάδας, 3 τοίνυν ὑπὸ ταῖς μονάσι τίθεται, αἱ δὲ 2 δεκάδες μετὰ τῶν λοιπῶν ἀριθμοῦνται· 2 καὶ 9 ποιοῦσιν 11, καὶ 4 ποιοῦσι 15, καὶ 7 ποιοῦσιν 22, καὶ 6 ποιοῦσι 28 δεκάδας, 8 τοίνυν τίθεται ὑπὸ ταῖς δεκάσι, 2 δὲ μετὰ τῶν ἑκατοντάδων ἀριθμοῦνται. 2 καὶ 5 ποιοῦσιν 7, καὶ 3 ποιοῦσι 10, καὶ 8 ποιοῦσι 18, καὶ 5 ποιοῦσι 23, 3 τοίνυν ὑπὸ ταῖς ἑκατοντάσι τίθεται, 2 δὲ ταῖς χιλιάσι προσαριθμεῖται, ὧν τὸ κεφάλαιον 24 ἀποτελεῖ καὶ ὅλον γράφεται.

Γ′ 345678	Δ′ 4567892
45437	758673
1298	42964
345	3875
594	643
393352	285
	3374332

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ πρόσθεσις ἐπὶ πολλῶν ἀριθμῶν ἐν ἑνὶ κεφαλαίῳ σύναψις (§. 59.) ἀλλὰ τούτῳ τῷ λόγῳ αἱ μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες κ.τ.λ. ἤτοι πάντες οἱ ἀριθμοὶ ἐν ἑνὶ κεφαλαίῳ συνηριθμήθησαν, ὡς ἐκ τῆς πράξεως δῆλον. ἄρα ἡ πρόσθεσις ὀρθῶς ἐγένετο.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 66. Εἰ καὶ πλειόνων ἀριθμῶν συνθέτων ἀπαντώντων, οἱ αὐτοί, οὓς παρεδώκαμεν, κανόνες χώραν ἔχουσιν, πρὸς ἀποφυγὴν μέντοι γε τῆς συγχύσεως, ἡ πρόσθεσις ἧττον ὀχληρῶς τελεσθήσεται, ἐάν, τῶν δοθέντων ἐν μέρει συναφθέντων, τὰ ἐντεῦθεν ἀναδιδόμενα μερικὰ κεφάλαια, ἐν ὁλοσχερεῖ αὖθις ἀθροισθῶσι κεφαλαίῳ ὡς ἐφεξῆς.

76354		
8954		
56965		
82413		
	204686	τὰ μερικὰ κεφάλαια.
65582		
7439		
2644		
	75465	
99999		
87776		
68866		
	246641	
	526792 Ὀλικ. κεφά',	

ΚΑΙ ΑΛΛΩΣ

87569			
5498	78567		
3695	4059		
95678	97908		
3097	21706		
909	6637	Κεφ.μερ.	
40895	69578	240919	
3278	59857	338192	
240619	338192	578811	Κεφ. γενικὸν,

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 67. Τὴν Πρόσθεσιν ἀνακρῖναι, ἤτοι ἐξετάσαι, δυνάμεθα, Α΄ ἀντιςρόφως τὴν αὐτὴν ἐπαναλαμβάνοντες οὕτως, ὥςε εἰ πρότερον κάτωθεν πρὸς τὰ ἄνω ἐγένετο, γενέσθω εἶτα ἄνωθεν πρὸς τὰ κάτω. Η ἀλήθεια δειχθήσεται, ἐὰν κατ᾽ ἀμφοτέρους τοὺς τρόπους τὸ αὐτὸ ἀναδοθῇ κεφάλαιον. Β΄ Τὰ κεφάλαια ἑκάςης ςήλης οὕτω χωρὶς γραφήτωσαν, ὥςε τῶν χαρακτήρων ἕκαςον κατὰ τὴν τῶν ςηλῶν σειρὰν τὴν ἑαυτοῦ ἔχειν τάξιν· τούτων δὲ τῶν τάξεων εἶτα ἐν ἑνὶ ἀθροίσματι συναγομένων, ἐὰν τὸ αὐτὸ ἀναδοθῇ κεφάλαιον ὡς καὶ πρότερον, δῆλον τὴν πρόσθεσιν ὀρθῶς διαπραχθῆναι. Θῶμεν δὴ κληρονομίας τινος καταλειφθείσης ἑπτὰ τὰ ἐφεξῆς ὑπάρχειν μερίδια; ὧν τὸ κεφάλαιον, εἴτ᾽ οὖν ἡ ὅλη κληρονομία; ζητεῖται. Ὅθεν ἔςω.

5674	- - - -	5674
5446		5446
4928		4928
4836		4836
4284		4284
3892		3892
3440		3440
32500		- - - 30
		- - 37
		- 41
		28
		32500

Γ'. Βασανίζεται ἡ Πρόσθεσις καὶ διὰ τῆς Ἀφαιρέσεως, περὶ ἧς ἐχομένως ῥηθήσεται· Τῶν δοθέντων συνθέτων ἀριθμῶν εἰς ἓν συναφθέντων κεφάλαιον, παροφθήτω ὁ εἷς σύνθετος ἀριθμὸς, καὶ οἱ αὐτοὶ ὑπόλοιποι εἰς κεφάλαιον αὖθις ἀθροισθήτωσαν. Ἐὰν ἤδη τὸ ἔλαττον κεφάλαιον ἀπὸ τῦ μείζονος ἀφαιρεθὲν, τὸν πρὸ ὀλίγυ παροφθέντα παράσχῃ σύνθετον ἀριθμὸν, ἡ Πρόσθεσις ὀρθῶς καὶ κατὰ κανόνας ἐγένετο. Ἡ δὲ μεταξὺ ἀποδείξεως καὶ βασάνυ ἐγχωρῦσα διαφορὰ σαφὴς ἐςιν. ἡ μὲν γὰρ διὰ τῶν τεταγμένων κανόνων, τὸν ζητύμενον ἀριθμὸν ἐξευρεθῆναι δεῖν ἀποδείκνυσιν. ἡ δὲ τῷ προκειμένῳ ὀρθῶς τὺς κανόνας προσηρμόσθαι διδάσκει.. Διὸ ὐκ ἀλυσιτελεῖς αἱ βάσανοι, ἀλλὰ τὰ μάλιςα ἐν χρήσει τυγχάνυσι.

ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Ἐρώτησις. Ὁ Στρατὸς Μοναρχίας τινὸς σύγκειται ἐκ 238500 Πεζῶν, 65840 Ἱππέων, 10830 Πυροβόλων, καὶ ἐκ Στρατιωτῶν 12340 ἐκ διαφόρων ἄλλων ταγμάτων· Πόσοι ἐν γένει εἰσὶν ἅπαντες;

Ἀπόκρισις 238500 + 65840 + 10830 + 12640 = 327810 Στρατιώταις·

Β'. Ἐρώτησις. Ἔν τινι Στρατοπέδῳ ἀριθμῦνται 12453 Κατάφρακτοι, 25340 Πεζοὶ, 12835 Ἱππεῖς,

πεῖς, 220 Πυροβόλοι, 63 Στρατιωτικοὶ Ἀρχιτέκτονες, 14500 Σύμμαχοι, 3110 ἐλαφρῶς ὡπλισμένοι. Πόσοι ἐν γένει ἀριθμοῦνται πάντες;

Ἀπόκρισις. 13433 + 25340 + 12835 + 220 + 63 + 14500 + 3110 = 71521.

Γ'. Ἐρώτησις. Ἡ πόλις Τρίβερις (Τρίερ.), ὡς ἐξ ἱστορίας, παρελάβομεν, ἀρχαιοτέρα ἐςὶ τῆς ῥώμης 1300 ἐτῶν. ἐκτίσθη δὲ ἡ ῥώμη κατὰ τὸ 753 ἔτος πρὸ Χριςοῦ. Πόσον ἄρα ἀρχαία ἡ πόλις ἐςὶ Τρίβερις, καθ' ἡμᾶς ἤδη, τὸ 1816 Σωτήριον διανύοντας ἔτος;

Ἀπόδοσις. 1300 + 753 + 1816 = 3869.

Δ'. Ἡγεμών τις ἐκ μὲν τοῦ Ἀγροῦ Α, πρόσοδον λαμβάνει, ἀνὰ πᾶν ἔτος 54048 ἀργυρίων· ἐκ δὲ τοῦ Β, 276475· ἐκ δὲ τοῦ Γ, 29870· ἐκ δὲ τοῦ Δ, 70000· ἐκ δὲ τοῦ Ε, 10400· ἐκ δὲ τοῦ Ζ, 14925. Πόσον ἐν αὐτοῖς ἔχει πρόσοδον;

Ἀπόκρισις. 54048 + 276475 + 29870 + 70000 + 10400 + 14925 = 455718.

Β'. ΠΕΡΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 68. Ἀφαίρεσις ἐςὶν ἀριθμοῦ εὕρεσις, ἐκ δυοῖν ὁμογενῶν, δοθέντων, τὴν μεταξὺ τούτων διαφορὰν παριςάνοντος.

ΠΟΡΙ-

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 69. Ἔςι τοίνυν ἡ Ἀφαίρεσις μείωσις δοθείσης τινὸς Ποσότητος, εἴτ' ἂν λῆψις ἑνὸς μέρες ἀπὸ τῦ ὅλυ, ὡς ἂν τὸ ἕτερον γνωσθῇ.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 70. Ἐν τῇ Ἀφαιρέσει, ὁ μὲν ἀφαιρούμενος ἀριθμὸς καλεῖται Ἀφαιρετέος· ὁ δὲ, ἀφ' ὗ ἡ Ἀφαίρεσις γίνεται, Μειωτέος· ὁ δὲ τελευταῖον εὑρισκόμενος, Διαφορά, ὑπὸ δέ τινων Λείψανον, Ὑπόλοιπον καὶ Ὑπεροχή.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 71. Σημεῖον Ἀφαιρέσεως ἔςω τοδὶ —, ὃ διὰ τῦ πλὴν ἀπαγγέλλεσθαι εἴωθεν. οἷον 5 — 7. 5 πλὴν 7 Σημαίνει δὲ τὴν διαφορὰν τὴν μεταξὺ 5 καὶ 7.

ΑΞΙΩΜΑ Α'.

§. 72. Ἐὰν ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσα ἀφέλῃς, τὰ καταλειπόμενα ἴσα ἐςίν· οἷον,

$$\begin{array}{c} 5+6=9 \\ 2+5=7 \\ \hline 5+6-2-5=9-7 \\ 2 \quad = \quad 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 10=2+8 \\ 4=4 \\ \hline 10-4=2+8-4 \\ 6 \quad = \quad 2+4 \end{array}$$

Ἐὰν δ' ἄνισα, καὶ τὰ ἐναπολειπόμενα ἄνισα ἔςαι· οἷον,

$$\begin{array}{c} 12+6=18 \\ 5>4 \\ \hline 12+6-5<18-4 \end{array}$$

ΑΞΙΩΜΑ Β'.

§. 73. Ἐὰν ἀπὸ τȣ̃ μείζονος καὶ τȣ̃ ἐλάττονος τὸ αὐτὸ, ἢ ἴσα ὑφέλῃς, τὸ μὲν πρῶτον καταλειπόμενον μεῖζόν ἐςι, τὸ δὲ δεύτερον ἔλαττον. οἷον·

$$\begin{array}{rcl} 6+3 & > & 8 \\ 4 & = & 4 \\ \hline 6+3-4 & > & 8-4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 7 & < & 10 \\ 3 & = & 3 \\ \hline 7-3 & < & 10-3 \end{array}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 74. **Ἀριθμὸν ἐλάσσονα ἀπὸ τȣ̃ μείζονος ἀφελεῖν.**

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Ὁ ἀφαιρετέος, εἴτ' ȣ̃ν ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς, τοιȣ́τῳ νόμῳ ὑπὸ τῷ μειωτέῳ, εἴτ' ȣ̃ν τῷ μείζονι, ὑπογεγράφθω, ὥςε τὰς μονάδας ταῖς μονάσι, τὰς δεκάδας ταῖς δεκάσι, κ.τ.λ. ἀντιςοιχεῖν, καθάπερ ἐπὶ τῆς προσθέσεως ὑπεθέμεθα (§. 65). Β'. ὑπὸ τȣ́τȣς δὲ τȣ̀ς ἀριθμȣ̀ς ἤχθω εὐθεῖα πρὸς ἀποφυγὴν τῆς συγχύσεως. Γ'. Ἀρχῆς ἀπὸ δεξιῶν γενομένης, ἀφαιρείσθωσαν ἐν μέρει αἱ μονάδες ἀπὸ τῶν μονάδων, αἵ τε δεκάδες ἀπὸ τῶν δεκάδων, καὶ αἱ ἑκατοντάδες ἀπὸ τῶν ἑκατοντάδων, κ.τ.λ. τὰ δὲ ὑπολειπόμενα ἕκαςα ἐν τόπῳ τῷ προσήκοντι ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν γεγράφθω, ἤτοι, τὸ μὲν ὑπόλοιπον τῶν μονάδων ὑπὸ ταῖς μονάσι, τὸ δὲ τῶν δεκάδων ὑπὸ ταῖς δεκάσι, κ.τ.λ. ὡς ἐν τῷ Α'. Παρα-

δειγδείγματι δηλεται. Δ.' Ἐὰν ὁ τε ἀφαιρετέυ χαρακτὴρ ἴσος ᾖ τῷ τε μειωτέυ, τὸ ὑπόλοιπον ἴσον ἐςὶ τῷ μηδενὶ, ὅθεν καὶ τὸ μηδενικὸν ἐν τῇ διαφορᾷ γεγράφθω. Ε.' Δεῆσαν δὲ μείζονα χαρακτῆρα ἀπὸ τε ἐλάττονος ἀφελεῖν, μετηνέχθω ἀπὸ τε ἀριςερωτέρυ τόπυ ἐπὶ τὸν δεξιτερὸν μονὰς, ἥτις ὧδε, ὅσα καὶ 10 ἰσχύσει (§. 29), ἵνα γένηται ἡ ἀφαίρεσις· ὁ δὲ μονάδι μειωθεὶς ἀριθμὸς σημείῳ ἀπεςίχθω, ἐφ' ᾧ μεμειῶσθαι ἤδη τοῦτον μὴ ἐπιλαθοίμεθα, ὡς ἐν τῷ Β.' Παραδείγματι δῆλον. Ἐὰν δὲ τελευταῖον Ϛ': ἄνωθεν καὶ κάτωθεν μηδενικὰ ὦσιν, ἐν τῷ ὑπολοίπῳ ὡσαύτως τὸ μηδενικὸν γεγράφθω. Ἐὰν αὖθις ἀπὸ τε ἀνωτέρω ἀριθμε τὸ κατώτερον μηδενικὸν ἀφαιρετέον τύχῃ; ὁ ἀνώτερος ἀριθμὸς τεθείσθω. Ἐὰν δὲ ἄνωθεν τὸ μηδενικὸν εὑρεθῆναι συμβῇ, ὁ δὲ κάτωθεν ἀφαιρετέος, τύχῃ ἀριθμὸς, εἰλήφθω μονὰς ἀπὸ τε ἐφεξῆς ἐχομένως μειωτέυ ἀριθμε; ςίγματι καὶ αὐτε, ἐπὶ μνήμῃ τε ἤδη μεμειῶσθαι; σημειωμένε· ἡ δὲ μονὰς αὕτη ἐπὶ τὸν δεξιτερὸν τόπον μετενεχθεῖσα, ὅσα καὶ δεκὰς τιμηθήσεται (§.29.). Διὸ καὶ ἔνθα πλείω τύχῃ τὰ τοιαῦτα τε μηδενὸς σημεῖα ἐφεξῆς ἑπόμενα, ἅπαντα τοιῷδε λόγῳ εἰς ἐννάδας τραπήτωσαν, ὡς ἐν τῷ Γ.' Παραδείγματι ὁρᾶται. Κατὰ τούτους δὴ τὰς κανόνας οἱονδηποτεν ἀριθμὸν ἐλάσσονα, ἀφ' οἱυδηποδήποτε μείζονος ἀφαιρεῖν ἔξεστι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α′. 6795 Εἰπὲ 4 ἀπὸ 5 καταλείπ. 1 μονάδ.
1324 — 2 ἀπὸ 9 καταλείπ. 7 δεκάδ.
ὑπόλοιπ. 5471 — 3 ἀπὸ 7 καταλείπ. 4 ἑκατον.
1 ἀπὸ 6 καταλείπ. 5 χιλιάδ.

Β′. 35420 Εἰπὲ 0 ἀπὸ 0 μένει 0
25760 — 6 ἀπὸ 12 μένουσι 6 δεκάδες.
9660 — 7 ἀπὸ 13 μένουσιν 6 ἑκατοντ.
5 ἀπὸ 14 μένουσιν 9 χιλιάδες.
2 ἀπὸ 3 μένει 0.

Γ′. ....
90000 Εἰπὲ 0 ἀπὸ 0 ὑπολείπεται 0.
2340 — 4 ἀπὸ 10 ὑπολείπονται 6.
87660 — 3 ἀπὸ 9 ὑπολείπονται 6.
2 ἀπὸ 9 ὑπολείπονται 7.
μηδὲν ἀπὸ 8 ὑπολείπονται 8.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τῇ Ἀφαιρέσει εὑρετέος πρόκειται τρίτος ἀριθμὸς, ὁ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῶν δοθέντων ὑποσημαίνων. Ἀλλ' ἐν διὰ τῶν προεκτεθέντων κανόνων ἡ μεταξὺ τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, κ.τ.λ. διαφορὰ ἐλήφθη καὶ ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν ἐγράφη. Ἄρα ἡ Ἀφαίρεσις ὀρθῶς διεπράχθη.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α′.

§. 75. Ἡ τῆς Ἀφαιρέσεως βάσανος διὰ τῆς Προσθέσεω εθέσεως γίνεται· ἡ γὰρ διαφορὰ, τῷ ἐλάττονι προςεθεῖσα ἀριθμῷ, τὸν μείζονα ἀναδώσει. Ἐπεὶ γὰρ ἡ διαφορὰ μόνη ποσότητα ἡμῖν παρέχει, καθ' ἣν ὁ ἐλάττων τῦ μείζονος ἐλλείπει· ἐὰν αὖθις τὸτὶ τὸ ἔλλειμα τῷ ἐλάττονι προςεθῇ ἀριθμῷ, ἐκείνυ ἐλλείπειν ὀ δύναται, ἀλλ' ἴσον ἐκείνῳ δέον εἶναι. τῦ Α' τοίνυν Παραδείγματος εἰς Βάσανον ληφθέντος, ἔχομεν τὸν μείζονα ἀριθμὸν τῇ προσθέσει τῦ ἐλάττονος καὶ τῆς διαφορᾶς.

1324	ὁ ἐλάττων ἀριθμός.
5471	ἡ διαφορά.
6795	ὁ μείζων ἀριθμός.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Β'.

§. 76. Ἀλλὰ καὶ διὰ τῆς Ἀφαιρέσεως αὐτῆς, ἡ Ἀφαίρεσις βασανισθῆναι δύναται· ἡ γὰρ διαφορὰ, ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀριθμῦ ἀφαιρεθεῖσα, τὸν ἐλάττω ἀναδώσει, ὅςτις ἡ διαφορὰ ἐςαι μεταξὺ τῦ μείζονος ἀριθμῦ καὶ τῦ ὑπολοίπυ.

6795	ὁ μείζων ἀριθμός.
5471	ἡ διαφορά.
1324	ὁ ἐλάττων ἀριθμός.

ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Ἐρώτησις. τὸ Ἀκρωτήριον τῆς καλῆς Ἐλπίδος εὑρέθη κατὰ τὸ 1490. ἔτος. Πόσος παρῆλθε χρόνος ἐξ ὅτυ ἐγνώσθη;

Ἀπόκρισις. 1816 — 1490 = 326.

Β'. Ἐρώτησις. Ἀθηναγόρας ἐν τῷ 1816 Ἔτει, τὸ 53 ἔτος τῆς ἑαυτȣ̃ ἡλικίας ἐκπληροῖ· πότε ἐγεννήθη;

Ἀπόκρισις. 1816 — 53 = 1763.

Γ'. Ἐρώτησις. Ἡ τῆς Ἀμερικῆς ἀνακάλυψις ἐγένετο ὑπὸ Χριστοφόρȣ Κολόμβȣ κατὰ τὸ 1497 Ἔτος· πόσος ἐκτοτε, ἄχρις ἡμῶν ἤδη, τὸ 1816 διανύοντων Ἔτος, χρόνος παρῆλθε;

Ἀπόκρισις. 1816 — 1497 = 319

Δ'. Ἐρώτησις. Ἡ μεγίστη τȣ̃ Πλανήτȣ Κρόνȣ ἀπὸ τῆς Γῆς ἀπόστασις ἐστὶν, ὡς Ἀστρονόμων παῖδες γνώμης ἔχȣσι, ἡμιδιαμέτρων γηΐνων 244000, ἡ δὲ τȣ̃ Ἡλίȣ, ἡμιδιαμέτρων 22574. Ζητεῖται, πόσοις ἡμιδιαμέτροις ἡ τȣ̃ Κρόνȣ ἀπόστασις ὑπερέχει ὑπὸ τῆς Γῆς τὸν Ἥλιον;

Ἀπόκρισις. 244000 — 22574 = 221626.

Ε'. Ἐρώτησις. Ἡ τȣ̃ Ἡλίȣ ἀπὸ τῆς Γῆς ἀπόστασις ἐστὶν ἡμιδιαμέτρων γηΐνων 22574, ἡ δὲ τῆς Σελήνης μεγίστη ἀπὸ τῆς Γῆς ἀπόστασις ἡμιδιαμέτρων 61. Πόση ἄρα ἡ τῶν ἀποστάσεων διαφορὰ ἀπὸ τῆς Γῆς ἀμφοτέρων;

Ἀπόκρισις. 22574 — 61 = 22513 ἡμιδιαμέτροις γηΐνοις. ἐκτείνεται δὲ ἡ τῆς Γῆς ἡμιδιάμετρος, κατὰ τὸν τῶν Κοσμογράφων ὑπολογισμὸν, εἰς

900.

900 σχεδὸν Γερμανικὰ Μίλλια.

Ϛ.' Ἐρώτησις. Ἔμπορός τις ἐδαπάνησεν ἐν διαφόροις ὠνίων εἴδεσιν ἀργύρια 34060, ἀπέδοτο δὲ τὰ ὤνια 51985 ἀργυρίων. Πόσον ἐκέρδησε;

Ἀπόκρισις. 51985 — 34060 = 17925.

Ζ.' Ἐρώτησις. Στρατός τις ἐκ 280000 Στρατιωτῶν συγκείμενος, ἐν μὲν τῇ πρώτῃ τῆς μάχης συμπλοκῇ ἀπώλεσε 25648 Στρατιώτας, ἔλαβε δὲ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ βοηθοὺς ἐκ τῶν νεοσυλλέκτων Στρατιωτῶν 36800· ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ συμπλοκῇ ἀπώλεσε 38794, ἔλαβε δὲ συνάμα νεοσυλλέκτες 40500· ἐν τῇ τρίτῃ συμπλοκῇ ἀπώλεσε 8456, ἔλαβε δὲ βοηθὲς ἐκ τῶν νεοσυλλέκτων 50000. Τοῦ πολέμε διαλυθέντος, ζητεῖται πόσους τὲς πάντας Στρατιώτας εἶναι;

Ἀπόκρισις. 280000 + 36800 + 40500 + 50000 — 25648 — 38794 - 8456 = 407300 — 72898 = 334402 Στρατιώταις.

Η.' Ἐρώτησις. Ἀνήρ τις ἐν διαστήματι τριετίας ἐκέρδησεν ἔκ τινος ἀγρε 1589 ἀργύρια, ἐδαπάνησε δὲ τῷ μὲν πρώτῳ ἔτει 95 ἀργύρια, τῷ δὲ δευτέρῳ 88, τῷ δὲ τρίτῳ 106 καὶ τῷ τετάρτῳ 69. Πόσον κυρίως ἐκέρδησε;

Ἀπόκρισις. 95 + 88 + 106 + 69 = 358, καὶ 1589 — 358 = 1231.

ΚΕΦΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΤΕ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 77. Πολλαπλασιασμὸς ἐςὶν ἀριθμοῦ εὕρεσις ἐκ δυοῖν δοθέντων, ἐν ᾧ τοσάκις περιέχεται ὁ εἷς τῶν δεδομένων, ὁσάκις ἡ μονὰς ἐν τῷ ἑτέρῳ.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 78. Ἐν τῷ Πολλαπλασιασμῷ ὁ πολλάκις λαμβανόμενος ἀριθμὸς καλεῖται Πολλαπλασιαςέος· ὁ δὲ ἕτερος, ὁ σημαίνων ποσάκις ἐκεῖνος λαμβάνεται, Πολλαπλασιαςής· τὸ δὲ ἐκ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοῖν ἐκκύπτον, Γινόμενον· οἷον 6 ἐςὶν ὁ Πολλαπλασιαςέος, 7 ὁ Πολλαπλασιαςής, καὶ 42 τὸ Γινόμενον. Γενικῶς μέν τοιγε οἱ δοθέντες λέγονται Παράγοντες, ἢ Ποιοῦντες· ὁ δὲ ζητούμενος, τὸ Παραγόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 79. Πολλαπλασιάσαι ἄρα, οὐδὲν ἄλλο ἐςὶν, ὅτι μὴ τὸν Πολλαπλασιαςέον τοσάκις λαβεῖν, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ Πολλαπλασιαςῇ ἐμπεριέχεται, ἐφ' ᾧ τὸ Γινόμενον εὑρεθῇ.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 80. Ὁ δὲ Στοιχειωτὴς (*) οὕτω φησίν· Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν, ὅσαι ἴσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος καὶ γένηταί τις.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.'

§. 81. Ἐν τῷ Γινομένῳ τοίνυν τοσάκις ὁ Πολλαπλασιαστέος ἐμπεριείληπται, ὁσάκις ἡ μονὰς ἐν τῷ Πολλαπλασιαστῇ· Ὥστε ἔχειν, ἀναλογικῶς, τὴν μονάδα πρὸς τὸν Πολλαπλασιαστὴν, ὡς τὸν Πολλαπλασιαστέον πρὸς τὸ Γινόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.'

§. 82 Τὸν Πολλαπλασιαστέον οὐ δέον εἶναι ὁμογενῆ τῷ Πολλαπλασιαστῇ. Ὁποιοσδηποτοῦν καὶ γὰρ ἂν εἴη ἐκεῖνος, οὗτος ἀλλ' ὢν ἀείποτε ἀρρήτως ὡρισμένως τίθεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 83. Ἐπὶ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, ναὶ μὴν κἀπὶ τῆς Διαιρέσεως οὐκ ἔςιν ἐπάναγκες τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ὁμογενεῖς εἶναι ὡς ἐν τῇ Προσθέσει καὶ τῇ Ἀφαιρέσει ἐπεζητεῖτο (§. 60. 68.) Ἐπειδὴ γὰρ ἐν τῇ προσθέσει ἐκ δυοῖν, ἢ πλειόνων ἀριθμῶν συντίθεται ἀριθμὸς εἷς, ὡς ἐκ μερῶν τὸ ὅλον (§ 46.), διὰ τοῦτο πάντας τοὺς ἀθροιςέους ὁμογενεῖς

(*) Βιβλ. Ζ.' Ὁρισ. ΙΕ.'

γενεῖς ἀλλήλοις τυγχάνειν προσήκει. Ἐν δὲ τῇ Ἀφαιρέσει ὁ Μειωτέος ἀριθμὸς ἀναλογεῖ τῷ τῆς Προσθέσεως Κεφαλαίῳ, ὁ δὲ Ἀφαιρετέος καὶ ἡ Διαφορὰ, τοῖς Ἀθροιςέοις (§. 69. 68.). ταύτῃ τοι δῆλον καὶ ἐπὶ τῆς Ἀφαιρέσεως τὸν Μειωτέον καὶ Ἀφαιρετέον, καὶ αὐτὴν δὴ τὴν Διαφορὰν, ἀριθμὲς ὁμογενεῖς εἶναι δεῖν. Τἐναντίον δὲ ἐπὶ τῦ Πολλαπλασιασμῦ, ὁ Πολλαπλασιαςὴς πρὸς τὴν μονάδα λόγον ἔχει, ὃν τὸ Γινόμενον πρὸς τὸν Πολλαπλασιαςέον (§. 81.). Καὶ ἐπὶ τῆς Διαιρέσεως δὲ ὡσαύτως, ὁ Διαιρέτης λόγον ἔξει πρὸς τὴν μονάδα, ὃν ὁ Διαιρετέος πρὸς τὸ Πηλίκον, Διὸ ὑδὲν τὸ ἐπεῖγον τὸν μὲν Πολλαπλασιαςὴν τῷ Πολλαπλασιαςέῳ καὶ τῷ Γινομένῳ, τὸν δὲ Διαιρέτην τῷ Διαιρετέῳ καὶ τῷ Πηλίκῳ, ὁμογενεῖς εἶναι. Ἐὰν δὲ ὁ Διαιρέτης, ὡς μέρος τῦ Διαιρετέυ θεωρηθῇ, ἐκ τῶν εἰρημένων κατάδηλον, ὡς ὁ Διαιρέτης ὁμογενὴς ἐςὶ τῷ Διαιρετέῳ· ἀλλὰ γὰρ τότε τὸ Πηλίκον, τὸ σημαῖνον ποσάκις τὸ τοιόνδε μέρος ἐκ τῦ οἰκείυ ὅλυ ἀφαιρεθῆναι δύναται, ὔτε τῷ Διαιρετέῳ, ὔτε τῷ Διαιρέτῃ ὁμογενές ἐςιν, ὡς ἐν οἰκείῳ τόπῳ ὀψόμεθα.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 84. Σημεῖον Πολλαπλασιασμῦ ἐςὼ τὸ χιαςὸν ×, ὃ δυσὶ Παράγυσι παρεγκείμενον διὰ τῆς

ἐπὶ

ἐπὶ ἢ ἓν ἀπαγγέλεται. οἷον 8×3, 8 ἐπὶ 3. Τινὲς δὲ καὶ στιγμὴν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν παρενσίζουσι, τοῦτ' αὐτὸ δηλοῦντες. οἷον 8, 3.

ΑΞΙΩΜΑ Α'

§. 85. Τὰ τρίτῳ τινὶ ἴσα καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα.

$$\begin{array}{c} 6 = 4 + 2 \\ 6 = 5 + 1 \\ \hline 4 + 2 = 5 + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \text{ Ἀργύριον} = 40 \text{ Ὀβολοῖς} \\ 1 \text{ Ἀργύριον} = 4 \text{ Δεκαρίοις} \\ \hline \text{Ὀβολοὶ } 40 = 4 \text{ Δεκαρίοις} \end{array}$$

ΑΞΙΩΜΑ Β'

§. 86. Ἐὰν ἴσα ἐπὶ ἴσων πολλαπλασιάσῃς, τὰ παραγόμενα ἴσα ἔσαι· οἷον,

$$\begin{array}{c} 8 = 5 + 3 \\ 4 = 4 \\ \hline 8 \times 4 = (5+3) \times 4 \\ 32 = 20 + 12 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 7 + 4 = 14 - 3 \\ 3 = 3 \\ \hline (7+4) \times 3 = (14-3) \times 3 \\ 33 = 42 - 9 \end{array}$$

Ἐὰν δὲ τὸ μεῖζον καὶ ἔλαττον διὰ τῶν αὐτῶν πολλαπλασιάσῃς, ἔσαι ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περισάσει τὸ παραγόμενον μεῖζον, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἔλαττον· οἷον

$$\begin{array}{c} 5 > 4 \\ 3 = 3 \\ \hline 5 \times 3 > 4 \times 3 \\ 15 > 12 \end{array}$$

Ἐλων

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 87. **Δυοῖν Παραγόντων, ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζομένων, τὸ Γινόμενον ταυτὸν ἔςαι, ἢ ὁ πρῶτος ἐπὶ τὸν δεύτερον, ἢ ὁ δεύτερος ἐπὶ τὸν πρῶτον πολλαπλασιασθῇ.**

ΔΕΙΞΙΣ.

Διαληθήτωσαν οἱ Παράγοντες, οἷον ὁ 3 καὶ ὁ 4 εἰς τὰς αὐτῶν μονάδας καὶ τεθήτωσαν οὕτως παράλληλοι, ὡς τὸ ἐφεξῆς παρίσησι Σχῆμα.

	Α	4		Β
	1	1	1	1
3	1	1	1	1
	1	1	1	1
	Γ			Δ

Πολλαπλασιάσαι τοίνυν τὸν ἀριθμὸν 3 ἐπὶ 4, ταυτόν ἐςι, τὸ λαβεῖν τὸν τῶν μονάδων ΑΓ σῖχον τετράκις. Αὖθίς τε, πολλαπλασιάσαι 4 ἐπὶ 3 ταυτὸν ἐςι τὸ τὴν σειρὰν ΑΒ τρὶς λαβεῖν (§. 77.). Ἀλλαμὴν κατ' ἀμφοτέρους τοὺς τρόπους ὁ αὐτὸς τῶν μονάδων ἐκλαμβάνεται ἀριθμὸς, εἴτ' οὖν ὁ τῷ διαςήματι ΑΒΓΔ ἐμπεριεχόμενος καὶ ἴσος ὢν τῷ 12. Ἄρα τὸ αὐτὸ Γινόμενον ἐκλαμβάνεται

νεται

κεται ἡ 3 ἐπὶ 4, ἢ 4 ἐπὶ 5 πολλαπλασιασθῇ. Ταυτὸ ῥητέον καὶ ἐπὶ πολλῶν ἄλλων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 88. Ταυτὸ τοίνυν ἐςὶν, ὁποιοσδηποτοῦν τῶν Παραγόντων εἴη Πολλαπλασιαςέος ἢ Πολλαπλασιαςής. Κἀντεῦθεν, ἐπεὶ τοσάκις ἀείποτε ὁ Πολλαπλασιαςέος τῷ Γινομένῳ ἐμπεριέχεται, ὁσάκις ἡ μονὰς ἐν τῷ Πολλαπλασιαςῇ (§.81.) ἕπεται ἐν γένει, ἕκαςον τῶν Παραγόντων τοσάκις τῷ Γινομένῳ ἐμπερι..εσθαι, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ ἑτέρῳ ἐμπεριείληπται Παράγοντι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 89. Ἐπειδὴ ἐν τῷ Πολλαπλασιασμῷ ἀναγκαῖον ἐςὶ τὰ κατὰ μέρος γινόμενα τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν εἰδέναι, οἷον, πόσα εἰσὶν ἑπτάκις ἐννέα, ἢ ὀκτάκις ὀκτὼ, ἢ πεντάκις ἕξ, κ.τ.λ. τούτου χάριν προσθετέον ἐνταῦθα τὴν τοῦ Πυθαγορικοῦ Ἄβακος κατασκευήν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 90. **Τὸν Πυθαγορικὸν Ἄβακα, ἤτοι Πίνακα, κατασκευάσαι, ἐν ᾧ τὰ ἐξ ἑκάςων ἀριθμῶν ἐφ' ἑκάςοις παραγόμενα παρίςαται.**

ΛΥΣΙΣ.

Α΄ Τῶν πλευρῶν τετραγώνου τινος ἑκάςη εἰς

9 μέ-

Α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Β
Η	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
	6	12	18	24	30	36	42	48	54	
Ζ	7	14	21	28	35	42	49	56	63	Κ
	8	16	24	32	40	48	56	64	72	
Γ	9	18	27	36	45	54	65	72	81	
								Ε		

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

91. *Διὰ τοῦ Πυθαγορικοῦ τούτου Ἄβακος ἕκαστον γινόμενον δυοῖν ἁπλῶν ἀριθμῶν τῷ ἐφεξῆς εὑρίσκεται τρόπῳ. Ἐὰν, ἐπὶ Παραδείγματι, ὁ 8 ἀριθμὸς πολλαπλασιαστέος τύχῃ ἐπὶ 7, ζητηθήτω ἐν τῇ σειρᾷ ΑΒ ὁ 8 ἀριθμὸς, ἐν τε τῇ σειρᾷ ΑΓ ὁ 7, ἢ κἀνάπαλιν· εἶτα ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 8 συνεχισθήτω ἡ σειρὰ ΔΕ, καὶ μὴν καὶ ἀπὸ τοῦ 7 ἡ ΖΚ, ἄχρις οὗ αἱ δύω σειραὶ ὁμοῦ ἐν ἑνὶ τετραγωνιδίῳ συνέλθωσιν· ὁ ἐν τῷ τετραγωνιδίῳ ἐκείνῳ κείμενος ἀριθμὸς 56, τὸ ζητούμενον ἐστὶ γινόμενον. Τῷ αὐτῷ ὡσαύτως τρόπῳ εὑρίσκεται καὶ ὀκτάκις ἐννέα εἶναι ἴσον 72, ἐννεά-*

κις

κις ἐννέα = 8, κ.τ.λ. Εὐχερὴς δὲ μάλα ὁ ἐφεξῆς ἐστὶ Πίναξ, ὁ κοινότερον **Πίναξ τοῦ ἀμελοῦς** ἐπικαλούμενος, ὃν διὰ μνήμης ἔχειν ὀφείλει, ὁ προχείρως Πολλαπλασιασμὸν τε καὶ Διαίρεσιν ἐκτελέσων. Τῷ δὲ μὴ τῇ μνήμῃ ἐγκολάψαντι, ἐν χεροῖν εἶναι δεῖ πολλαπλασιάζοντι ἢ διαιροῦντι·

1	×	1	=	1
2	×	2	=	4
2	×	3	=	6
2	×	4	=	8
2	×	5	=	10
2	×	6	=	12
2	×	7	=	14
2	×	8	=	16
2	×	9	=	18
2	×	10	=	20
3	×	3	=	9
3	×	4	=	12
3	×	5	=	15
3	×	6	=	18
3	×	7	=	21
3	×	8	=	24
3	×	9	=	27
3	×	10	=	30
4	×	4	=	16
4	×	5	=	20
4	×	6	=	24
4	×	7	=	28
4	×	8	=	32
4	×	9	=	36
4	×	10	=	40
5	×	5	=	25
5	×	6	=	30
5	×	7	=	35
5	×	8	=	40
5	×	9	=	45
5	×	10	=	50
6	×	6	=	36
6	×	7	=	42
6	×	8	=	48
6	×	9	=	54
6	×	10	=	60
7	×	7	=	49
7	×	8	=	56
7	×	9	=	63
7	×	10	=	70
8	×	8	=	64
8	×	9	=	72
8	×	10	=	80
9	×	9	=	81
9	×	10	=	90
10	×	10	=	100
10	×	100	=	1000

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.

§. 92. Οἱ ὡρισμένοι τῶν ἀριθμῶν, εἴτ' ὧν οἱ Συγκεκριμμένοι, ἐπ' ἀλλήλους ὀ δύνανται, πολλαπλασιασθῆναι, καὶ ὁμογενεῖς εἰ τύχοιεν· 6 γὰρ χρυσῶν ἐπὶ 3 χρυσοὺς πολλαπλασιαζομένων, τὸ παραγόμενον 18 τί δήποτε ἄρα δηλώσει; Ἀριθμὸς ἀλλ' ὁ ὡρισμένος ἐπ' ἀόριστον, εἴτ' ὁ Ἀφηρημένον και μάλα πολλαπλασιασθῆναι ἔχει. τοῦτ' ἔςι δυνάμεθα τὸν τοιοῦτον τοσάκις λαβεῖν, ὁσάκις ἡμῖν βελτιὸν εἴη· οἷον 6 χρυσοὶ τρὶς λαμβανόμενοι δώσουσι γινόμενον 18 χρυσούς. 4 ὀβολ' $\times$ 5 $=$ 20 ὀβολ' καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 93. **Ἀριθμὸν δοθέντα δι' ἄλλου δοθέντος πολλαπλασιάσαι.**

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Ὁ πολλαπλασιαςὴς οὕτω γραφήτω ὑπὸ τῷ πολλαπλασιαςέῳ, ὥςε τὰς μὲν μονάδας ταῖς μονάσι, τὰς δὲ δεκάδας ταῖς δεκάσι, τὰς δ' ἑκατοντάδας ταῖς ἑκατοντάσι κ.τ.λ. ἀντιςοιχεῖν. Β'. Ὑπ' αὐτοὺς ἀχθήτω γραμμὴ εὐθεῖα πρὸς ἀποφυγὴν τῆς συγχύσεως. Γ'. Ἀρχῆς δεξιόθεν πρὸς ἀριςερὰν γενομένης, ἀχθήτωσαν αἱ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ μονάδες ἐφ' ἑκάςων τῶν τοῦ πολλαπλασιαςέου χαρακτήρων, τὰ δὲ κατὰ μέρος γινόμενα, ἐὰν ἑνὶ μόνῳ χαρα-

 κτῆρι

9 μέρη ἴσα διαιρεθήτω, καὶ τὸ τῦ τετραγώνυ τύτυ ἐμβαδὸν, δι' εὐθειῶν ἐπιπαραλλήλων, εἰς χωρία τετράγωνα ἀναλυθήτω. Β.' Ἐπὶ τῆς ἀνωτάτης ὁριζοντείυ σειρᾶς καὶ τῆς κατὰ πλευρὰν ἀριςερωτάτης γραφήτωσαν οἱ ἐννέα ἀριθμητικοὶ χαρακτῆρες. Γ.' Ἐπὶ τῆς δευτέρας σειρᾶς τεθήτωσαν τὰ τῦ δυαδικῦ ἀριθμῦ ἐπὶ πάντας τὺς ἁπλῦς γινόμενα, προςιθεμένυ δηλονότι τῦ ἀριθμῦ 2 ἐπὶ τὸν πρότερον ἀριθμὸν, ὕτω: Προςεθήτω 2 καὶ 2, τὸ δὲ ἄθροισμα 4 γραφήτω ὑπὸ τὸν 2' ἐφεξῆς γενέσθω 4 + 2 = 6, ὃ ταχθήτω ὑπὸ τὸν 3' αὖθις 6 + 2 = 8, καὶ ἑχομένως ὕτω. Δ.' Ἐπὶ τῆς 3ρίτης σειρᾶς τεθήτωσαν τὰ τῦ τριαδικῦ ἀριθμῦ γινόμενα, συναπτομένυ δηλαδὴ τῦ αὐτῦ ἀριθμῦ 3 ἐπὶ τὸν πρότερον ὕτω; 3 + 3 = 6; ὃ δὴ γραφήτω ὑπὸ τὸν 4, 6 + 3 = 9; κτλ' Ταὐτὸ γενέσθω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἁπασῶν σειρῶν, τὸν ἀπὸ τῆς ἀριςερωτάτης ἀρχόμενων πλευρᾶς. Ἐὰν ἐν Ε.' ἡ Πρόσθεσις αὕτη καὶ διὰ τῶν λοιπῶν συνεχισθῇ ἀριθμῶν, τῶν κατὰ τὴν ἀριςερωτάτην πλευρὰν; τὸ Πυθαγορικὸν Ἀβάκιον κατασκευασθήσεται.

ΣΧΟ-

κτῆρι συντίθηται, ὅτω τῇ τάξει δεξιόθεν πρὸς ἀριςερὰν γραφήτωσαν, ὡς τὰ παραγόμενα τῶν μονάδων, δεκάδων, κ.τ.λ. ὑπὸ τοῖς χαρακτῆρσι τῶν τῦ πολλαπλασιαςέυ μονάδων, δεκάδων, κ.τ.λ. ἐναριθμεῖσθαι· ὡς ἐν τῷ Α΄ Παραδείγματι καθορᾶται. Τοῦ γινομένυ, ἐκ δυοῖν χαρακτήρων συγκειμένυ, ὁ δεξιώτερος γραφήτω, ὁ δ᾽ ἕτερος τῇ μνήμῃ φυλαττόμενος, τῷ γινομένῳ τῦ ἐφεξῆς χαρακτῆρος προςεθήτω, ὡς ἐν τῷ Β΄ Παραδείγματι. Τοῦ διὰ τῶν μονάδων πολλαπλασιασμῦ περαιωθέντος, τῇ αὐτῇ πάντως μεθόδῳ καὶ ὁ διὰ τῶν δεκάδων γενέσθω, ἀγομένυ δηλαδὴ τῦ δεκαδικοῦ πολλαπλασιασῦ χαρακτῆρος ἐφ᾽ ἑκάςων τῶν τῦ πολλαπλασιαςέυ χαρακτήρων, τὸ δὲ γινόμενον ὑπὸ τὸν δεύτερον τῦ πολλαπλασιασῦ χαρακτῆρα, εἴτ᾽ ὖν ἐν τῷ τῶν δεκάδων τόπῳ, τεθήτω· εἰσὶ γὰρ τωόντι πάντα ταῦτα τὰ γινόμενα δεκαδικά. Ἐν γένει δὲ σημειωτέον, τὸ γινόμενον ἐν ἐκείνῳ τῷ τόπῳ ἄρχεσθαι δέον, ἔνθα ὁ πολλαπλασιάζων ἐςὶ χαρακτήρ. Τοῦ διὰ τῶν δεκάδων πολλαπλασιασμῦ πληρωθέντος, γενέσθω ὁ διὰ τῶν ἑκατοντάδων, ἤτοι ὁ διὰ τῦ τρίτυ χαρακτῆρος· εἶτα ὁ διὰ τῦ τετάρτυ, καὶ ὅτως ἐφεξῆς, ὁπόσοι ἂν οἱ χαρακτῆρες τύχωσιν ὄντες, ὡς ἐν τῷ Γ΄ Παραδείγματι δηλῦται. Δ΄. Τὰ κατὰ μέρος γινόμενα

προ

προςεθήτω ἐν ὁλικῷ ἀθροίσματι, ὅ δὴ τὸ ζητέμενον ἔςαι γινόμενον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α.' 1342 Εἰπέ. 2 ἐπὶ 2 δίδει 4 μονάδας
2 4 ἐπὶ 2 δίδει 8 δεκάδας
2684 3 ἐπὶ 2 δίδει 6 ἑκατοντάδας
1 ἐπὶ 2 δίδει 2 χιλιάδας.

Β.' 896 Εἰπέ. 6 ἐπὶ 3 δίδει 18 μένει 1
3 9 ἐπὶ 3 δίδ. 27 καὶ ἓν τὸ ὑπολειφθὲν 28
2688 8 ἐπὶ 3 δίδ. 24, καὶ δύω εἰσὶν 26.

Γ.' 53684 Εἰπέ. 4 ἐπὶ 5 δίδει 20
325 8 ἐπὶ 5 δίδ. 40 καὶ 2 εἰσὶ 42
268420 6 ἐπὶ 5 δίδ. 30 καὶ 4 εἰσὶ 34
107368 3 ἐπὶ 5 δίδ. 15 καὶ 3 εἰσὶ 18
161052 5 ἐπὶ 5 δίδ. 25 καὶ 1 εἰσὶν 26.
17447300 Ἄρχεται εἶτα ὁ διὰ τῦ 2 πολλαπλασιασμὸς, ὗ τίνος τὸ πρῶτον γινόμενον 8 ἐν τῷ τῶν δεκάδων γραφήτω τόπῳ· οἷον 4 ἐπὶ 2 δίδει 8, 8 ἐπὶ 2 δίδει 16, μένει 1, κ. τ. λ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ ἀνώτερος ἀριθμὸς, εἴτ' ὗν ὁ πολλαπλασιαςέος, τοσάκις ἐτέθη, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ κατωτέρῳ, εἴτ' ὗν τῷ πολλαπλασιαςῇ, ἐμπεριείληπται· τρὶς γὰρ ἐν τῷ Β.' Παραδείγματι ἐτέθησαν αἱ μονάδες, τρὶς αἱ δεκάδες, τρὶς αἱ ἑκατοντάδες. Ἀλλα μὴν τοσάκις τὸν πολλαπλασιαςέον λαμβάνειν, ὁσάκις ἡ μονὰς ἐν τῷ πολλαπλασιαςῇ περιέχεται, ἐςὶ πολλαπλασιάζειν, ὡς ἐκ τῦ Ὁρισμῦ δῆλον (§. 77. 79.). Ἄρα οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἀλλήλοις ἐπεπολλαπλασιάσθησαν.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

§. 94. Ἡ τῦ ἀριςερωτέρυ χαρακτῆρος πρὸς τὸ ἐφεξῆς γινόμενον μεταγωγὴ δειχθῆναι ἔχει, καὶ ἐξ ὧν ἐν τῇ Προσθέσει εἰρήκαμεν, ἐὰν δηλαδὴ ἕκαςον τῶν γινομένων χωρὶς ἐν οἰκείῳ καταγραφῇ τύπῳ, ὡς ἐν τῷ ἐφεξῆς Παραδείγματι.

$$\begin{array}{r} 896 \\ 3 \\ \hline 18 \\ 27 \\ 24 \\ \hline 2688 \end{array}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.

§. 95. Ἡ τῦ Πολλαπλασιασμῦ βάσανος διὰ τῆς Διαιρέσεως γίνεται, περὶ ἧς ἐν τῷ ἐφεξῆς διαληφθήσεται Κεφαλαίῳ· ὃ γὰρ ὁ πολλαπλασιασμὸς κατὰ λόγον συντίθησι, τῦτ' αὖ ἡ διαίρεσις τῷ αὐτῷ διαλύει λόγῳ· Ἐὰν ὖν τὸ γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων διαιρεθῇ, ἀναγκαῖον τὸν ἕτερον ἀναδοθῆναι παράγοντα.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.'

§. 96. Ὁπηνίκα ἀριθμός τις ἐπὶ 10 πολλαπλασιαςέος ᾖ, ἐπισυναφθήτω πρὸς τὸ τέλος τȣ̃ ἀριθμȣ̃ ἓν μηδενικόν· ȣ̃τω γὰρ ἑκάςȣ χαρακτῆρος δεκαδικὴν ἐκλαμβάνοντος δύναμιν (§. 29.), ὁ ἀριθμὸς ὅλος ἐπὶ 10 πεπολλαπλασίαςαι (§. 86.) Τῷ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἐπὶ 100 ἀριθμός τις πολλαπλασιασθήσεται, 2 μηδενικῶν πρὸς τὸ τέλος τȣ́τῳ συναπτομένων. ὡς καὶ ἐπὶ 1000, ἐὰν 3 μηδενικὰ τȣ́τῳ συναφθῶσι· καὶ ἐφεξῆς ȣ̃τω.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.'

§. 97. Ἐὰν ἐν τῷ ἑτέρῳ τῶν παραγόντων, ἢ ἑκατέρῳ μηδενικὰ σημεῖα προσῇ, τȣ́των ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζομένων, ἀεὶ τοσαῦτα τῷ παραγομένῳ προσαπτέον, ὅσα ἐκείνοις ἀμφοῖν ἅμα προσαριθμεῖται. Ἔςαι γὰρ τηνικαῦτα, οἷον ἐπὶ τȣ̃ Δ.' Παραδείγματος, $320 \times 600 = 32 \times 10.\ 46 \times 100 = 32.\ 46.\ 1000$. (§. 95.).

Α.'	45864	Β.'	532400
	500		24
	22932000		21296
			10648
			12777600

 Γ.' 24000

Γ'

24000
300
24|00000
3|
7200000

Δ'

4600
320
92
138
1472000

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'

§. 98. *Ἐὰν δ' ἐν τῷ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ διαμέσῳ τόπῳ μηδενικὰ πρόσκειται, ταῦτα παροράσθαι δύνανται, τούτου μόνου καλῶς σημειουμένου, ὃ καὶ ἀνωτέρω περὶ τῶν κατὰ μέρος παραγομένων ἐρρέθη· τοῦτ' ἐστι, τὸ διὰ τοῦ χαρακτῆρος, τοῦ ἀμέσως μετὰ τὰ μηδενικὰ τυγχάνοντος, γινόμενον, ἐκεῖθεν κατωτέρω ἀρκτέον, ἔνθα ὁ πολλαπλασιάζων ἀνωτέρω ἐστὶ χαρακτὴρ, ἤτοι ἐκείνῳ δέον ἀντιστοιχεῖν, ὡς ἐν τοῖς ἐφεξῆς Παραδείγμασι δηλοῦται.*

Α'

4809
2006
28854
9618
9646854

Β'

450864
4002
901728
1803456
1804357728

Ὁ δὲ τῆς τοιαύτης ἐπιτομῆς λόγος σαφής. Ἐὰν γὰρ ὁ πολλαπλασιαστέος διὰ τῶν διαμέσων ἐκείνων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ μηδενικῶν πολλαπλασιασθῇ, τὸ αὐτὸ πάντως ἀναδοθήσεται παραγόμενον, ὡς καὶ ἀνωτέρω, οἷον.

4809

```
   4809
   2006
  ------
  28854
  0000
 0000
9618
-------
9646854
```

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Α΄. Ἐρώτησις. Τῆς Ἑξάποδος 6 Πόδας περιεχȣ́σης, 49 Ἑξάποδες πόσȣς ἀποτελȣ̃σι Πόδας;

Ἀπόκρισις. 6. 49 = 294 Ποσί.

Β΄. Ἐρώτησι. Ξύλȣ τινὸς πρὸς οἰκοδομὴν ἐπιτηδείȣ ὁ Μηκεδανὸς Πȣ̃ς τιμᾶται 36 ὀβολῶν, πόσȣ τιμηθήσεται τὸ ὁλοσχερὲς δένδρον, ȣ̃ τὸ μῆκος 5 Ὀργυιῶν Ἑξαπόδων καὶ 4 ἔτι Ποδῶν;

Ἀπόκρισις. 5 Ὀργυιαὶ καὶ 4 Πόδες ἀποτελȣ̃σι 5. 6+4 = 34 Ποσί. Κᾀντεῦθεν τὸ ὅλον δένδρον τιμηθήσεται 34. 36 = 1224 ὀβολοῖς.

Γ΄. Ἐρώτησις. Ἓν ἐκ τῆς Ἄγαρ Ἀργύριον (Γρόσιον) περιέχει 40 ὀβολȣ́ς. 285 Ἀργύρια καὶ 35 ὀβολοὶ, πόσȣς ἀποτελȣ̃σιν ὀβολȣ́ς;

Ἀπόκρισις 285. 40 + 35 = 11435.

Δ΄. Ἐρώτησις. Νῆσός τις περιέχει 36 Πόλεις, ἑκάστη Πόλις 40 Παροικίας, ἑκάστη Παροικία 98 Πατριὰς, ἑκάστη Πατριὰ 9 ἀνθρώπȣς. Πόσοι οἱ πάντες εἰσὶν ἄνθρωποι;

Ἀπόκρισις. 1270080.

Ε.' Ἐρώτησις. Πεδίον τι, ὃ τὸ μὲν μῆκος Ποδῶν ἐςὶ 102004, τὸ δὲ πλάτος 102003 Ποδῶν, πόσους ὅλον τετραγωνικοὺς ἔχει Πόδας, τοῦ μήκους ἐπὶ τὸ πλάτος πολλαπλασιασθέντος;

Ἀπόκρισις· 10404714012.

ς.' Ἐρώτησις. 1816 ἔτη, πόσας περιέχουσιν ἡμέρας, λογιζομένων 365 ἡμερῶν ἐν ἑνὶ ἔτει; Πόσας τε ὥρας, 24 ὡρῶν ἐφ' ἓν νυχθήμερον ἀριθμουμένων; Πόσα τε λεπτὰ, 60 λεπτῶν ἐν μιᾷ ὥρᾳ λαμβανομένων;

Ἀπόκρισις. 662840 ἡμέρας, 15908160 ὥρας, 954489600 λεπτά.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 99 Διαίρεσις ἐςὶν ἀριθμοῦ εὕρεσις, ἐκ δυοῖν δοθέντων, ἐν ᾧ τοσάκις περιέχεται ἡ μονὰς, ὁσάκις τῶν δοθέντων ἕτερος ἐν θατέρῳ.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 100. Ὁ ἀριθμὸς ὃν χρὴ διελεῖν καλεῖται Διαιρετέος· ὁ δὲ, δι' οὗ ἡ διαίρεσις γίνεται, Διαιρέτης· ὁ δὲ σημαίνων ποσάκις ὁ διαιρέτης τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχεται, Πηλίκον ἀκούει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.'

§. 101. Διαιρεῖν ἄρα οὐδὲν ἄλλο σημαίνει, ἢ

τὸν

τὸν διαιρέτην ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τοσάκις ἀφελεῖν, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ πηλίκῳ ἔνεστιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 102. Ἡ διαίρεσις τοίνυν ἐπίτομός τις ἐστὶν ἀφαίρεσις, δι' ἧς θατέρα τῶν ποσοτήτων θατέρας ἐξαιρεῖται, ἐφ' ᾧ γνωσθῇ, ὁσάκις θατέρα τῇ ἑτέρᾳ ἐνυπάρχει

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 103. Ἐν τῷ διαιρετέῳ ἄρα τοσάκις ὁ διαιρέτης περιέχεται, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ πηλίκῳ ἔνεστιν. Ὥστε ἀναλογικῶς, τὴν μονάδα ἔχειν πρὸς τὸ πηλίκον, ὡς τὸν διαιρέτην πρὸς τὸν διαιρετέον.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 104. Σημεῖον διαιρέσεως ἔστω τὸ δίστιγμον :, ὃ τῇ φωνῇ τῆς διαιρέσεως ἀπαγγέλεται οἷον $48 : 6 = 8$· σημαίνει δὲ τὸ πηλίκον, τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 8 διὰ τοῦ 4 ἐκκύπτον. Τινὲς δὲ καὶ γραμμῇ χρῶνται, ὑπερκειμένη μὲν τοῦ διαιρέτου, ὑποκειμένη δὲ τῷ διαιρετέῳ, ὡς $\frac{28}{7} = 4$· ἀπαγγέλεται δὲ 28 διαιρούμενον διὰ 7 ἴσον ἐστὶ 4.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

§. 105. Τὸν διαιρετέον ὁμογενῆ δέον εἶναι, ἢ τῷ διαιρέτῃ, ἢ τῷ πηλίκῳ· καὶ δὴ Α'. ὁ διαιρετέος ἐστὶν ὁμογενὴς τῷ διαιρέτῃ, εἰ ἡ διαί-

 ρεσις

ρεσις κατὰ τὸν αὐτῆς ὁρισμὸν γένοιτο (§. 99.) οἷον εἰ ζητοῖτο, 3 χρυσοὶ ποσάκις ἐν 12 χρυσοῖς περιέχονται; δῆλον ὅτι 4κις· τὸ πηλίκον ἄρα ἀφῃρημένως εἴληπται, 3 δὲ καὶ 12 εἰσὶν ὁμογενεῖς. Β.′ Ἐὰν ὁ διαιρετέος τῷ πηλίκῳ ὁμογενὴς τύχῃ, τὸ ζητούμενον οὕτως ἔξει· 8 χρυσῶν ἐν 2 πένησι διανεμηθησομένων, πόσους ἕκαστος λήψεται; φημὶ 4· δῆλον τοίνυν, ὅτι ὁ διαιρετέος ὁμογενὴς τῷ πηλίκῳ ἐστὶν, ὁ δὲ διαιρέτης ἀφῃρημένως ἐτέθη.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.′

§. 106. Ἐκ τοῦ τῆς διαιρέσεως ὁρισμοῦ σαφὲς ἐστι, τρία τὰ ἐφεξῆς δέον παρατηρεῖν. Α.′ Ἐπεὶ ὁ διαιρέτης ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τοσάκις ἀφαιρετέος ἐστιν, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ πηλίκῳ ἐμπεριείληπται, δέον πρότερον τὸ πηλίκον εὑρεθῆναι. Β.′ Ἵν᾽ ἐφάπαξ ὁ διαιρέτης ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῆναι ἔχῃ, καὶ δὴ ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῷ πηλίκῳ μονάσι, δέον τοῦτον πρότερον τοσάκις ἐν τῷ διαιρετέῳ τεθῆναι, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ πηλίκῳ ἐμπεριέχεται. Γ.′ Τοὐντεῦθεν ἀναδιδόμενον γινόμενον ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἐστι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.′

§. 107. Δῆλον τοίνυν ἐκ τῶν προλεχθέντων ἐστὶ, τὴν τῆς διαιρέσεως οὐσίαν ἐν τῷ ἐσχάτῳ τούτῳ ὑφίστασθαι (§. 106. Γ.′) ἤτοι, ἐν τῇ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρέσει τοῦ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τȣ̃ διαιρέτȣ διὰ τȣ̃ πηλίκȣ ἐκκύπτοντος γινομένȣ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

§. 108. Ἐπεὶ δὲ ὁ διαιρέτης ȣ̓κ ἔχει ἄλλως ἀπὸ τȣ̃ διαιρετέȣ ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῷ πηλίκῳ μονάσιν ἀφαιρεθῆναι, ἐὰν μὴ πρότερον ἐκείναις ἰσαρίθμως τεθῇ· σαφές ἐςιν, ὡς τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιασθὲν, ἀναδώσει πάντως τὸν διαιρετέον. Τȣ́τȣ χάριν ἡ τῆς διαιρέσεως βάσανος διὰ τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃ ἐπικρίνεται.

ΑΞΙΩΜΑ

§. 109. Ἐὰν ἴσα δι᾽ ἴσων διέλῃς, τὰ Πηλίκα ἴσα ἔςαι· οἷον,

$9 = 6 + 3$	Ὀβολ. $6 = 18$ Λεπτοῖς
$3 = 3$	$2 = 2$
$9 : 3 = 6 : 3 + 3 : 3$	$6 : 2 = 18 : 2$
$3 = 2 + 1$	Ὀβολ. $3 = 9$ Λεπτοῖς

Ἐὰν δ᾽ ἄνισα, καὶ τὰ Πηλίκα, ἄνισα ἔςαι· οἷον,

Α.′	$12 = 9 + 3$	Ὀργ. $2 = 12$ Ποσί.
	$4 > 3$	$2 < 3$
	$12 : 4 < 9 : 3 + 3 : 3$	$2 : 2 > 12 : 3$
	$3 < 3 + 1$	Ὀργ. $1 > 4$ Ποδῶν.
Β.′	$12 > 8$	Ὀβολοὶ $10 < 35$ Λεπτῶν
	$4 = 4$	$5 = 5$
	$12 : 4 > 8 : 4$	$10 : 5 < 35 : 5$.
	$3 > 2$	ὀβολ. $2 < 7$ λεπτ.

ΠΟ-

ΠΟΡΙΣΜΑ

§. 110 Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἡ μονὰς, τὸ πηλίκον ἴσον δέον εἶναι τῷ διαιρετέῳ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ πηλίκον, τοσάκις περιέχειν δεῖ τὴν μονάδα, ὁσάκις ὁ διαιρέτης τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριείληπται (§. 109.), ὁ δὲ διαιρέτης τοσάκις περιέχεται, ὁπόσας ὁ διαιρετέος ἔχει μονάδας, ἤτοι ἐν τῇ ἡμετέρᾳ περιςάσει, παρὰ τὸν δοθέντα αὐτὸν αριθμὸν, πηλίκον ἕτερον ἐκληφθῆναι ἐ δύναται. Κἀντεῦθεν εἴωθε λέγεσθαι ἡ μονὰς ἐδὲν διαιρεῖ. Οὕτω ἡ μονὰς ἐν τῷ 6 περιέχεται ἑξάκις, ἄρα καὶ τὸ πηλίκον ὡσαύτως ἐςὶν 6.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 111. Ἐφ᾽ ᾧ γνωσθῇ, ποσάκις ὁ ἐλάττων ἀριθμὸς τῷ μείζονι ἐμπεριέχεται, ἀμοιρῶμεν ἀσφαλῶς κανόνος· τῦτο δὲ διὰ τῆς συνεχῦς ἐκμανθάνεται πράξεως. Οὐκ ὀλίγον δὲ τὸ ἐπιβοήθημα καὶ ὁ Πυθαγορικὸς ἐπάγει Πίναξ. Ζητεῖται γὰρ ὁ διαιρέτης ἐν τῷ ἀριςερωτάτῳ μέρει, εἶτα, ἐν ταῖς κατὰ τὴν αὐτὴν σειρὰν τετραγωνιδίοις πρὸς δεξιὰν, ὁ δοθεὶς ζητεῖται μείζων ἀριθμὸς, ἢ ὁ τῦτῳ προσεγγίζων· τῦτε ἔν τινι τετραγωνιδίῳ εὑρεθέντος, εὑρεθήσεται ἐν τῇ αὐτῦ σειρᾷ, ἐπ᾽ εὐθείας κατὰ κορυφὴν, τὸ πηλίκον· Οὕτω γαρ, μαθεῖν ἐθέλοντι, ποσάκις τῷ 42 ὁ 6 ἐμπεριέχεται, ἀπὸ τῦ 6 πρὸς δεξιὰν, τῦ 42 εὑρεθέντος, δοθήσεταί μοι 7ὅτε κατὰ κορυφὴν τὸ αἰτέμενον πηλίκον 7. εἰ δὲ τὸ ζητέμενον γιιόμενον τοῖς τετραγωνιδίοις ἐκ ἐνυπάρχει, τὸ τῦ ζητεμένυ προσεχῶς ἔλαττον ἐκλαμβάνεται γινόμενον. Ὁ δὲ λόγος σαφής: Ἐπεὶ γὰρ ἡ διαίρεσις διαλύει τὸ ὑπὸ τῦ πολλαπλασιασμῦ συντεθὲν, δοθέντος τῦ γινομένυ καὶ ἑνὸς τῶν παραγόντων, εἴτ' ἂν τῦ διαιρετέυ καὶ τῦ διαιρέτυ, ὁ ἕτερος ἐκλαμβάνεται παράγων, τῦτ' ἐςι τὸ πηλίκον. Τῶν δὲ παραγόντων πολλαπλασιασθέντων τὸ παραγόμενον, εἴτ' ἂν τὸ γινόμενον, ἀναφύεται, τῇ διαιρέσει εἰς παράγοντας αὖθις διαλυόμενον·

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§.112 Κἀντεῦθεν ποσότης οἱαδηποτῦν διὰ τῦ αὐτῦ ἀριθμῦ πολλαπλασιασθεῖσα τε καὶ διαιρεθεῖσα ὐδεμίαν ὑφίςαται ἀλλοίωσιν, εἰς τὰ αὐτὰ γὰρ διαλύεται μέρη, ἐξ ὧν συνέςη. Οὕτω 42 πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ 6, καὶ τὸ γινόμενον αὖθις διὰ τῦ 6 διαιρεθὲν, 42 μενεῖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§.113. Ἐκ τῆς αὐτῆς ὡσαύτως ἀρχῆς ἐξάγεται, τὸ ἐκ τῆς κατὰ μέρος διαιρέσεως ἐκλαμβανόμενον πηλίκον μεῖζον τῶν 9 εἶναι μὴ δύνασθαι· τὸ γὰρ

μέγι-

μέγιςον. γινόμενον δυοῖν ἀριθμῶν 81 μείζυς ἁπλῦς παράγοντας τῶν 9 καὶ 9 ἔχειν ὁ δύναται.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'

§. 114 Τοῦ διαιρετέυ ἐλάττονος τοῦ διαιρέτυ τυγχάνοντος, ἡ διαίρεσις, κατὰ τὺς προεκτεθέντας κανόνας, πραγματιωδῶς γενέσθαι ὐκ ἔχει, ἀλλὰ μόνον σημαίνεται, γράμμῆς πλαγίως διαχθείσης, καὶ τὸν ἐπιγραφόμενον διαιρετέον, τῦ ὑπογραφομένυ διαιρέτυ διαςειλάσης (§. 104.) ὕτω, ἐὰν ὁ 5 ἀριθμὸς εἰς 6 μέρη διαιρετέος ᾖ, γραφήτω $\frac{5}{6}$, ὅπερ τὴν τῦ Κλάσματος ἔννοιαν ἡμῖν δίδωσι.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'

§. 115 Τῶν λοιπῶν Ἀριθμητικῶν Πράξεων δεξιόθεν πρὸς τὰ ἀριςερὰ διαπεραιυμένων, ἡ τῆς Διαιρέσεως μόνη ἀριςερόθεν πρὸς τὰ δεξιὰ ἐκτελεῖται· ἐν γὰρ τῇ τῶν πραγμάτων διαιρέσει, εἴτ' ἐν διανομῇ, ἐν πρώτοις τὸν τῶν μειζόνων μερῶν λόγον δέον ἀποδοθῆναι, ἵν' ὕτως τὰ ἐκ τῶν μειζόνων μερῶν ὑπόλοιπα, ἐν τοῖς οἰκείοις αὐτῶν ἐλαχίςοις μέρεσι διαιρεθῆναι ἔχωσι.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 116. **Ἐὰν Γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν Παραγόντων διαιρεθῇ, ἕτερος τύτων ἔςαι τὸ Πηλίκον.**

ΔΕΙ-

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ τὸ πηλίκον διὰ τȣ̃ διαιρέτȣ πολλαπλασιασθῇ, ἀναδώσει πάντως τὸν διαιρετέον (§. 108.). Ἀλλὰ μὴν, εἴγε τὸ γινόμενον, δι᾽ ἑνὸς τῶν παραγόντων, διαιρȣ́μενον; ȣ̓κ ἀναδώσει ἐν τῷ πηλίκῳ θάτερον τῶν παραγόντων; ἀλλ᾽ ἕτερόν τι, τηνικαῦτα πάντως γινομένης τῆς διὰ τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃ βασάνȣ, ȣ̓κ ἐκκύψει ὁ διαιρετέος, ἀλλ᾽ ἕτερόν τι. Ἄρα, δέον ἐν τῷ πηλίκῳ τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων ἀναδοθῆναι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 117. Ἐὰν μὲν τοίνυν τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν πολλαπλασιασθέντα διαιρεθῇ, τὸ πηλίκον ἔςαι ὁ πολλαπλασιάσας (§. 79. 81.). Ἐὰν δὲ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιάσαντα, τὸ πηλίκον ἔςαι ὁ πολλαπλασιασθεὶς (Αὐτόθι). Ἐὰν δὲ τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιασθῇ, ἢ ἀνάπαλιν, τὸ γινόμενον ἔςαι ὁ διαιρετέος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 118. Ἀριθμὸν δοθέντα δι᾽ ἄλλȣ ἐλάσσονος διαιρεῖν, ὅταν ὁ διαιρέτης εἷς καὶ μόνος ᾖ χαρακτήρ.

ΛΥΣΙΣ.

Α. Τοῦ διαιρετέȣ παρενθέσει διαςαλέντος ἀπό τε τε τῦ διαιρέτε πρὸς ἀριςερὰν, καὶ τῦ πηλίκε πρὸς δεξιὰν, ζητηθήτω ποσάκις ὁ διαιρέτης ἐν τῷ πρώτῳ τῦ διαιρετέε χαρακτῆρι, ἢ ἐὰν ἐκεῖνος τέτε μείζων ῇ, ἐν τοῖς δυσὶ πρώτοις ἀριςερωτάτοις χαρακτῆρσι περιέχεται· τὸ ὅτως εὑρεθὲν πηλίκον μετὰ τὴν παρένθεσιν δεξιόθεν ἐν οἰκείῳ τόπῳ γραφήτω. Β'. Διὰ τῦ πηλίκε τέτε πολλαπλασιασθήτω ὁ διαιρέτης, τὸ δὲ πηλίκον ὅτω γραφήτω, ὡς ἀκριβῶς τῷ διαιρεθέντι, ἢ τοῖς διαιρεθεῖσι χαρακτῆρσιν ἀντιςοιχεῖν. ὑπὸ δὲ τὸ γινόμενον γραμμὴ ἀχθήτω εὐθεῖα. Γ'. Τετὶ τὸ γινόμενον ἀπὸ τῶν ἀμέσως ἀνωτέρων χαρακτήρων ἀφαιρεθήτω, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ὑπὸ τὴν γραμμὴν γραφήτω. Δ'. Τῷ ὑπολοίπῳ τετῳ συναφθήτω ὁ ἐφεξῆς ἑπόμενος τῦ διαιρετέε χαρακτὴρ, ὃς δὴ ςίγματι ἐν τῷ διαιρετέῳ σημειέσθω, ἐφ' ᾧ δειχθῇ, τὸν χαρακτῆρα τῦτον μεταχθέντα εἶναι· εἶτα αἱ αὐταὶ ἐπαναληφθήτωσαν ἐργασίαι, καὶ συνεχισθήτωσαν ὅτω δι' ἑκάςε τῶν τῦ διαιρετέε χαρακτήρων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Ἔςω διαιρετέος ὁ 7638, διαιρέτης δὲ ὁ 3. Τεθήτω δὴ ὁ 3 πρὸς ἀριςερὰν τῦ διαιρετέε, παρενθέσει διεςαλμένε, καὶ ζητηθήτω ποσα. , ὁ 3

τῷ

3(7658)2546
6
16
15
13
12
18
18
--

τῷ ἀριστερωτέρῳ τοῦ διαιρετέου χαρακτῆρι 7 ἐμπεριέχεται, τὸ δὲ πηλίκον 2 μετὰ τὴν παρένθεσιν πρὸς δεξιὰν γραφήτω· πολλαπλασιασθήτω εἶτα ὁ διαιρέτης 3 ἐπὶ τὸ πηλίκον 2, καὶ τὸ γινόμενον 6 τῷ διαιρεθέντι χαρακτῆρι 7 ὑπογραφὲν, ἐκείνου ἀφαιρεθήτω· τῷ δὲ ὑπολοίπῳ, ὃ δὴ ἐστὶ μονὰς, ὁ ἐφεξῆς τοῦ διαιρετέου χαρακτὴρ 6 συναφθήτω, στίγματι πρότερον διασημανθείς. Ζητηθήτω αὖθις ποσάκις ὁ διαιρέτης 3 τῷ 16 ἐμπεριέχεται, καὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 5, τῷ οἰκείῳ τόπῳ μετὰ τὸν 2 γραφήτω· πολλαπλασιασθήτω εἶτα ὁ 5 ἐπὶ τὸν 3 καὶ τὸ γινόμενον 15 ἀπὸ τοῦ 6 ἀφαιρεθήτω, τῷ δὲ ὑπολοίπῳ 1 ὁ ἐφεξῆς τοῦ διαιρετέου συναφθήτω χαρακτὴρ 5, στίγματι ὡσαύτως διακριθείς. Ζητηθήτω αὖθις ποσάκις ὁ 3 τῷ 13 ἐμπεριέχεται, καὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 4 μετὰ τὸν 5 γραφὲν πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸν διαιρέτην 3, τὸ δὲ γινόμενον 12 ἀπὸ τοῦ 13 ἀφαιρεθὲν, ὑπόλοιπον δώσει 1, ᾧτινι ὁ ἔσχατος τοῦ διαιρετέου συνάπτεται χαρακτὴρ 8. Ζητηθήτω αὖθις, 3 ἐν 18 περιέχεται 6, ὃ δὴ πηλίκον ἐν τῷ οἰκείῳ γραφὲν τόπῳ καὶ ἐπὶ τὸν δι-

 αιρεαιρέτην 3 ἀχθὲν, γινόμενον δώσει 18, ὃ τινος ἀπὸ τοῦ 18 ἀφαιρεθέντος ὑπολειφθήσεται ο· σημεῖον δὲ τοῦτό ἐστι τὸ ὁλοσχερὲς εὑρεθῆναι πηλίκον 2346. Τῷ αὐτῷ τρόπῳ γενέσθω ἡ πρᾶξις καὶ ἐπὶ τῶν ἑφεξῆς παραδειγμάτων.

Β.' 948 : 4 = 237. *Γ.*' 1575 : 5 = 315.

ΔΕΙΞΙΣ.

Διαιρεῖν, ἀριθμὸν ἐστὶ ζητεῖν, τοσάκις τὴν μονάδα περιέχοντα, ὁσάκις ὁ ἐλάττων τῷ μείζονι εἴτ' οὖν ταῖς χιλιάσιν, ἑκατοντάσι κ.τ.λ. ἐμπεριείληπται. Ἀλλαμὴν διὰ τῶν προεκτεθέντων κανόνων τοῦτί ἐζητεῖτο, καὶ ὁ τοῦτο δεικνύων ἀριθμὸς εὑρέθη. Ἄρα ἡ διαίρεσις ὀρθῶς ἐξετελέσθη. Οἷον, ἐν τῷ Α.' Παραδείγματι, 7 χιλιάδες τριχῶς διαιρεθεῖσαι πηλίκον διδοῦσι 2 χιλιάδας, ὑπολείπεται δὲ 1 χιλιὰς, ἤτοι 10 ἑκατοντάδες, αἷς αἱ 6 συνάπτονται ἑκατοντάδες, ἵν' ὦσι 16· αἳ δὴ εἰς 3 μέρη διαιρούμεναι, ἑκάστῳ 5 ἑκατοντάδας διδοῦσι, μεθ' ὑπολοίπου 1 ἑκατοντάδος, ἤτοι 10 δεκάδων. ταύταις αὖθις αἱ 3 δεκάδες συναφθεῖσαι, 13 ἀποτελοῦσι δεκάδας, ἃ δὴ διὰ 3 διαιρούμεναι 4 δεκάδας ἐν τῷ πηλίκῳ ἀναδιδόασι, καὶ μὴν καὶ ὑπόλοιπον 1 δεκάδα, ᾗ τινι αἱ 8 μονάδες συναπτόμεναι 18 ἀποτελοῦσι μονάδας· αὗται αὖθις διὰ 3 διαιρούμεναι πηλίκον μὲν διδοῦσι 6 μονάδας, ὑπόλοιπον δ' οὐδέν.

ΙΙΟ

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 119. *Δῆλον τοίνυν ἐντεῦθεν, τόσας χαρακτῆρας ἐν τῷ πηλίκῳ ἀπολαμβάνεσθαι, ὅσαι αἱ κατὰ μέρος γίνονται διαιρέσεις.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 120 *Τοῦ διαιρέτου ἐν μοναδικῷ χαρακτῆρι κειμένου, τὰ παραγόμενα, ἃ δέον ἀφαιρεῖν, οὐδὲ γράφομεν τὴν ἀρχὴν, ἀλλ' ἀπὸ μνήμης ποιούμενοι τὴν ἀφαίρεσιν ἐπισημειοῦμεν τὴν διαφορὰν οὕτως.*

3 1 52 0 2 4 43

Α'. 15776 : 6 = 2629$\frac{2}{6}$. *Β'.* 5 (357918) 71583$\frac{3}{5}$. *Οἷον, ἐπὶ τοῦ Α' Παραδείγματος·* 6 *ἐν* 15 *εὑρίσκεται* 2 *ἰς,* 2 × 6 = 12, 12 *ἀπὸ* 15 *μένουσι* 3· 6 *ἐν* 37, 6*άκις·* 6 × 6 = 36, 36 *ἀπὸ* 37 *μένει* 1· 6 *ἐν* 17, 2*ἰς,* 2 × 6 = 12, 12 *ἀπὸ* 17 *μένουσι* 5 ·6 *ἐν* 56, 9*άκις,* 9 × 6 = 54, 54 *ἀπὸ* 56 *μένουσι* 2. *περὶ οὗ ὑπολοίπου ἑχομένως ῥηθήσεται·*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 121. Ἀριθμὸν δοθέντα δι' ἄλλου ἐλάσσονος διαιρεῖν, ὅταν ὁ διαιρέτης ἐκ χαρακτήρων πλειόνων συγκείμενος ᾖ.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. *Τοῦ διαιρετέου, ὡς καὶ ἀνωτέρω, παρενθέσει διασταλέντος, ζητηθήτω ποσάκις ὁ πρῶτος τοῦ διαιρέτου χαρακτὴρ ἐν τῷ πρώτῳ (ἢ ἐν τοῖς δυσὶ* πρώτοις) τοῦ διαιρετέου περιέχεται, καὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον μετὰ τὴν παρένθεσιν πρὸς δεξιὰν γραφήτω. Β΄. Τὸ εὑρεθὲν τουτὶ πηλίκον, πολλαπλασιασθήτω ἐφ' ὅλον τὸν διαιρέτην, τὸ δ' ἐντεῦθεν ἐκκύπτον γινόμενον, γραμμῆς ἀχθείσης, τοῖς ἀντιστοιχοῦσι καὶ ἤδη διαιρεθεῖσι τοῦ διαιρετέου χαρακτῆρσιν ὑπογραφὲν, ἀπ' ἐκείνων ἀφαιρεθήτω. Ἐὰν δὲ Γ΄. τὸ γινόμενον μεῖζον ᾖ, ὥστε τὴν ἀφαίρεσιν ἐκτελεσθῆναι μὴ ἔχειν, προσληφθήτω ἀντὶ πηλίκου ἀριθμὸς μονάδι, ἢ μονάσι τισὶν ἐλάσσων, ἕως ἂν τὸ ἐξ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην γινόμενον τοῖς τοῦ διαιρετέου χαρακτῆρσιν ἐγγὺς πελάσῃ καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀφαιρεθῆναι δύνηται. Δ΄. Τῷ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως ὑπολοίπῳ ὁ ἐφεξῆς ἐπισυναφθήτω χαρακτὴρ, ὁ μήπω διαιρεθεὶς, στίγματι ἐπισημειούμενος, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς πρότερον ἐπιτελεσθήτω. Ε΄. Συνεχιζέσθω δὲ ἡ πρᾶξις, ἕως οὗ ὁ διαιρέτης προσωτέρω προαχθῆναι μὴ δύνηται. Ὁ εὑρεθεὶς οὕτως ἀριθμὸς τὸ ζητούμενον ἔσται πηλίκον.

Ἔστω διαιρετέος ὁ 36448 ἐπὶ 68. Εἰπέ· 6 ἐν 36 ποσάκις; ἐμπεριέχεται δὲ 6άκις, ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου τούτου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀχθὲν ἔσται 408, ἤτοι μεῖζον. ἢ ὥστε ἀφαιρεθῆναι δύνασθαι· κἀντεῦθεν πηλίκον ἐκλαμβάνε-

```
68 ( 36448 ) 536
     340
     ---
      244
      204
      ---
       408
       408
       ---
       ---
```

ται

καὶ ὁ 5, ὅσον ἔνι προσεχέςερον, ὃ δὴ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 68 ἀχθὲν, γινόμενον δώσει 340, ὅτινος ἀφαιρεθέντος ὑπολειφθήσεται ὁ 24. Τῷ ὑπολοίπῳ τούτῳ συναφθήτω ὁ ἑπόμενος χαρακτὴρ 4, ἵν' ἡ διαιρετέος 244· ὅτος αὖθις διὰ 68 διαιρεθεὶς δώσει πηλίκον 3, ὃ δὴ ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιασθὲν δώσει 204, καὶ τοῦτο ἀφαιρεθὲν καταλείπει 40, μετὰ τοῦ ἐσχάτου τοῦ διαιρετέου χαρακτῆρος 408· διαιρεθέν τε, πηλίκον δίδωσιν 6, οὗ τινος τὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην γινόμενον 408 ἀφαιρεθὲν, ὑπόλοιπον καταλείπει = 0, ὥςε οὕτω τὸ ὁλοσχερὲς πηλίκον εἶναι = 536. Τῷ αὐτῷ τρόπῳ καὶ τὰ λοιπὰ διαλύονται Παραδείγματα, ἐν οἷς ὁ διαιρέτης ἐκ τριῶν, τεσσάρων, ἢ καὶ πλειόνων σύγκειται χαρακτήρων.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

§. 122. Ἀλλ' ἐπεὶ γὰρ ἡ τοιάδε τῆς ἀφαιρέσεως ἐπανάληψις ἐργώδης ἂν εἴη ἐν μικρῷ μείζονι τοῦ πηλίκου, τούτου δὴ χάριν οὐκ αὐτὸν εἰώθαμεν τὸν διαιρέτην ἀφαιρεῖν, ἀλλ' ἐκ τῶν αὐτοῦ πολλαπλῶν τὰ προσήκοντα. Αἱ γὰρ τούτων ἀφαιρέσεις ἐξ ἀνάγκης ὀλιγαριθμότεραι. Τῶν δὲ τοιούτων πολλαπλῶν, τὰ ἀφαιρετέα παραγόμενα, προχειρότατα ἀνευρίσκεται τοῦ Πίνακος τῶν ἄχρι δεκάδος τοῦ διαιρέτου πολλαπλῶν προκαταγραφέντος. Ἐκείνῳ δὲ χρησαμένοις διαιρετέου μὲν ὑποκειμένε τε 2511648, διαιρέτε δὲ τε 864, δεξιῶς ἅπαντα διαιτηθήσεται τόνδε τὸν τρόπον.

Πίναξ

1 ἁπλεν	864
2 – πλεν	1728
3 – πλεν	2592
4 – πλεν	3450
5 – πλεν	4320
6 – πλεν	5184
7 – πλεν	6048
8 – πλεν	6912
9 – πλεν	7776

```
864(2511648)2907.
    1728 · · ·
    ————
     7856
     7776
     ————
      6048
      6048
      ————
        0
```

Τὰ μέγιςα δὲ τὸ προεκτεθὲν Ἀβάκιον συντελεῖ, ἐπειδὰν πλείονες τῶν ἐν τῷ πηλίκῳ χαρακτήρων διαφέρωσιν ἀπ' ἀλλήλων, καὶ ὅτε ἀριθμοὶ πλείονες διὰ τε αὐτε πρόκεινται διαιρεθῆναι. Ἀλλ' ἐν οἷς τὸ πηλίκον ὀλιγαρίθμες προορῶμεν περιέξον τὲς χαρακτῆρας, μάλιςα δὲ ὅτε καὶ ὁ διαιρέτης ὁ πάνυ μέγας ἐςὶ, τὴν τε ὅλε τηνικαῦτα Πινακίε καταγραφὴν ὑπερβαίνοντες, ὧν μόνον αὐτε μερῶν χρεία ἔςαι ἐπὶ τῆς πράξεως ἐκεῖνα παράγομεν, ὡς ἀνωτέρω (§. 117. 120.) δεδήλωται.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.

§. 123. Αὕτη ἡ τε διαιρεῖν μέθοδος, ἡ ἄνευ τε Πυθαγορικε Ἄβακος γινομένη, καὶ τὸ δυσχερὲς τῆς θεωρίας, καὶ τὸ εὐχερὲς πρὸς ἀπάτην αἴρει, οἷς ὑπόκειται ἡ ἑτέρα (§. 121.). Ἀλλ'

εἰ καὶ

εἰ καὶ ταύτην μετὰ σπεδῆς συνίςημι, ἐκ ἂν ἀλλ' ἂν παραινέσαιμι τὸν Πυθαγορικὸν Ἄβακα παραμεληθῆναι· συμβαίνει γὰρ ἐν πολλοῖς ἐπίπονον γίνεσθαι τέτε τὴν ἄγνοιαν. Ἐμπεδώσει δὲ τὸ λεγόμενον, ἐν τοῖς ἄλλοις, καὶ ἡ τῶν κλασμάτων εἰς ὅρες ἐλάσσονας ἀναγωγή.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.'

§. 124. Ἐὰν τῆς διαιρέσεως περαιωθείσης ὑπόλοιπόν τι ἐκ τῆς ἐσχάτης ὑπολειφθῇ ἀφαιρέσεως, τἕτο πρὸς δεξιὰν τἕ πηλίκε τίθεται, ὑπογραφόμενον φέρον τὸν διαιρέτην (§. 104.). οὕτω, 22 διὰ τἕ 5 διαιρέμενον πηλίκον δώσει 4 μεθ' ὑπολοίπε 2, ὃ δὴ πρὸς τὸ τἕ πηλίκε τέλος ὑπογραφομένε τἕ διαιρέτε τίθεται ὕτως $4\frac{2}{5}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.'

§. 125 Ἐὰν ἐν τῇ διαιρέσει, ὁ τἕ διαιρετέε, τῷ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως ὑπολοίπῳ, συναπτόμενος χαρακτὴρ, ἀριθμὸν τἕ διαιρέτε ἐλάττονα ἀναδίδωσι, τῷ μὲν πηλίκῳ τὸ μηδενικὸν τίθεται, τῷ δὲ προτέρῳ ὑπολοίπῳ ὁ τἕ διαιρετέε ἑπόμενος ἐπισυνάπτεται χαρακτὴρ, καὶ ἡ διαίρεσις συνεχίζεται· ὡς ἐν τοῖς ἐφεξῆς Παραδείγμασι δηλἕται.

Α.' 241672 : 8 = 30209. Β.' 25882891 : 4257 = $6080\frac{331}{4257}$

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 126. Ἐὰν ὁ διαιρέτης ᾖ 10, ἀποτμηθήτω τȣ̃ διαιρετέȣ πρὸς δεξιὰν εἷς χαρακτήρ· ȣ̏τω γὰρ ἕκαςος τῶν τȣ̃ διαιρετέȣ χαρακτήρων 10 κάκις ἐλάττων ἀποβὰς (§. 29.), διὰ 10 διῄρηται (§. 108.). Ὡσαύτως καὶ διὰ 100 ἀριθμός τις διαιρεθήσεται, δυοῖν τȣ̃ διαιρετέȣ ἀποτμηθέντων χαρακτήρων· διὰ 1000, τριῶν. καὶ ἐφεξῆς ȣ̏τω. Οἱ δὲ ȣ̏τως ἀποτμηθέντες χαρακτῆρες, ἐὰν μὴ μηδενικοὶ ὦσιν, ἐν εἴδει κλάσματος τῷ πηλίκῳ ἐπισυνάπτονται· Οἷον, 6837 Λίτραι Γερμανικαὶ πόσα ἀποτελȣ̃σι Κενδηνάρια; Φημί· 6837 : 100 = 68 $\frac{37}{100}$:

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

§. 127. Ἐὰν δ' αὖ ὅ, τε διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος σημεῖα μηδενικὰ προσκείμενα ἔχωσι, τοσαῦτα ἀμφοτέρωθεν ἀποτμηθήτωσαν, ὅσα ὁ διαιρέτης ἔχει· οὕτω γὰρ ὅ, τε διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃ διαιρεθέντες, ἀπαράτρεπτον τὸ πηλίκον διατηρήσȣσιν (§ 109.) Οἷον, 36000 : 600 = 360 : 6 = 60

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'.

§. 128. Τοῦ διαιρέτȣ μόνον τῷ τέλει μηδενικὰ προσκείμενα ἔχοντος, ἰσάριθμοι ἐκείνοις ἀπὸ

τȣ

τῦ διαιρετέυ χαρακτῆρες δεξιόθεν ἀποτμηθήτωσαν. Τῆς διαιρέσεως εἶτα περαιωθείσης, οἱ διαιρεταλτέοι ἐκεῖνοι χαρακτῆρες τῷ πηλίκῳ ἐν εἴδει ἐπισυναφθήτωσαν κλάσματος, ὑπογραφομένυ τύτοις τῦ διαιρέτυ· Οἷον, $2367 : 400 = (2300 + 67) : 400 = 2300 : 400 + \frac{67}{400} = 23 : 4 + 67 : 400 = 5 + \frac{3}{4} + \frac{67}{400} = 5 + \frac{300}{400} + \frac{67}{400} = 5\frac{367}{400}$. Ὡσαύτως $563874 : 2300 = 5638|74 : 23|00 = 245\frac{374}{2300}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 129. Τὸ τῆς διαιρέσεως ὀρθὸν, ἢ μὴ, διὰ τῦ πολλαπλασιασμῦ διακρίνεται· τὸ γὰρ εὑρεθὲν πηλίκον, ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιασθὲν, δώσει ἐν τῷ γινομένῳ τὸν διαιρετέον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ διαίρεσις διαλύει τὸ ὑπὸ τῦ πολλαπλασιασμῦ συντεθὲν, ἐὰν, τῦ διαιρετέυ διὰ τῦ διαιρέτυ εἰς πηλίκον διαλυθέντος, τὸ πηλίκον αὖθις ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιασθὲν εἰς γινόμενον συντεθῇ, τυτὶ ἴσον τῷ διαιρετέῳ εἶναι δέον (§. 108).

ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α΄ Ἐρώτησις. Ἐὰν 8 ἄνθρωποι ἴσως ἀλλήλοις 1248 Ἀργύρια διανεῖμαι βυληθῶσι, πόσα ἕκαςος λήψεται;

'Απόκρισις. 1248 : 8 = 156 'Αργυρίοις.

Β.' 'Ερώτησις. 'Η 'Εξάπυς 'Οργυιὰ περιέχει 6 Πόδας, ὁ Πῦς 12 Δακτύλυς. 23400 Δάκτυλοι πόσας ἀποτελῦσιν 'Οργυιάς;

'Απόκρισις. 23400 Δ.' : 12 = 1950 Π., καὶ 1950 Π. : 6 = 325 'Οργυιαῖς.

Γ.' 'Ερώτησις. "Εν "Ετος περιέχει 31556928 Λεπτὰ δεύτερα· πόσας τῦτο ἀποτελεῖ 'Ημέρας, "Ωρας, Λεπτὰ πρῶτα καὶ δεύτερα;

'Απόκρισις. 'Επεὶ 60 Λεπτὰ δεύτερα συνιςῶσιν ἓν Λεπτὸν πρῶτον, ἔςαι 31556928 Λεπτὰ δεύτ. : 60 = 525948 Λεπτ πρῶτα + 48 δεύτ. Λ. Πόῤῥω, ἐπεὶ 60 Λ. πρ. μίαν ἀποτελῦσιν "Ωραν, ἔςαι 525948 Λ. : 60 = 8765 "Ωρ. + 48 Λ.πρ. Τελευταῖον, 8765 "Ωρ. : 24 = 365 'Ημέραις + 5 ὥραις. "Εχει τοίνυν ἑπομένως ὅλον τὸ "Ετος 365 'Ημ. + 5 "Ωρ. + 48 Λ. πρ. + 48 Λ. δευτ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ.'

ΠΕΡΙ ΤΙΝΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 130. 'Αριθμὸς **Πρῶτος** καλεῖται, ὁ ἄνευ τῦ πολλαπλασιασμῦ ἑτέρυ τινὸς ἀριθμῦ, πλὴν τῆς μονάδος, ἐκλαμβανόμενος.

§. 131 Οὐδεὶς ἄρα ἕτερος τῦ Πρώτυ Ἀριθμῦ διαιρέτης κυρίως ἐςὶ πλὴν τῆς μονάδος καὶ ἑαυτῦ. Εἰσὶ δὲ οἱ Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλυς Ἀριθμοὶ ὅται: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, κ.τ.λ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 132 Ὁ δ' Εὐκλείδης ὕτως αὐτὺς ὁρίζεται (*). Πρῶτος ἀριθμός ἐςιν, ὁ μονάδι μόνη μετρύμενος· Καὶ, Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλυς ἀριθμοί εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρύμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 133 Ἀριθμὸς Σύνθετος ἐςὶν, ὁ ἐκ τῦ πολλαπλασιασμῦ τῶν πρώτων δυοῖν, ἢ πλειόνων, παράγεσθαι πεφυκώς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 134. Τὸν Σύνθετον ἄρα Ἀριθμὸν παρά τε τὴν μονάδα καὶ ἑαυτὸν, καὶ ἕτεροι ἄλλοι ἐκμετρῦσιν ἀριθμοί· εἴτ' ὖν, ὁ Σύνθετος Ἀριθμὸς παρ' ἑαυτόν τε καὶ τὴν μονάδα καὶ ἑτέρυς κέκτηται διαιρέτας· οἷον ὁ 4 τὸν 2, ὁ 6 τὸν 2 καὶ τὸν 3, ὁ 8 τὸν 2 καὶ τὸν 4. ὁ 28 τὸν 2 καὶ τὸν 14, ὡσαύτως τὸν 4 καὶ τὸν 7. Τὰ δὲ τῶν τοιύτων διαιρετῶν γινόμενα Πολλαπλᾶ καλῦνται.

ΣΧΟ-

(*) Βιβ. Ζ.' Ὅρφ ΙΑ.' καὶ ΙΒ.'

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 135. *Ἀναφύονται τοίνυν οἱ Σύνθετοι ὑπὸ ἄλλων διὰ πολλαπλασιασμȣ̃. Εἰσὶ δὲ οἱ τȣ̃ Συνθέτȣ παράγοντες ἐλάσσονες· τὰ δ᾽ ἄλλα καὶ αὐτοὶ ἤτοι Πρῶτοι ἢ Σύνθετοι. Καὶ εἰ τȣ̃το, καὶ αὐτοὶ ἄρα εἰς ἑτέρȣς ἀναλυόμενοι, περὶ ὧν οἷόν τε εἰπεῖν τὸ αὐτό. Ἔνθεντοι ἐπεὶ τȣ̀ς ὁλοσχερεῖς παράγοντας, ȣ̓κ ἔςιν ἐπ᾽ ἄπειρον ἀπομειȣ̃ν, ἐπὶ τȣ̀ς ἁπλȣ̃ς τέως ἐπάναγκες αὐτȣ̀ς ἀποληγειν. Κἀντεῦθεν, πᾶς ἀριθμὸς Σύνθετος ἐξ ὡρισμένων τινῶν συντίθεται Πρώτων, ȣ̓κ ἐξ ἄλλων καὶ ἄλλων. Ὁ δὲ Στοιχειωτὴς (*) Συνθέτȣς Ἀριθμȣ̀ς εἴρηκε, τȣ̀ς ἀριθμῷ τινι, ὡς κοινῷ μέτρῳ μετρȣμένȣς· οἱ γὰρ τοιȣ̃τοι παρὰ τὴν μονάδα καὶ ἕτερον κοινὸν ἔχȣσι μέτρον ὡς εἴρηται* (§. 133).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 136. *Τȣ̃ Συνθέτȣ ἄρα ἀριθμȣ̃, ȣ̓δεὶς ἄλλος διαιρέτης ἐςὶ παρὰ τȣ̀ς ἁπλȣ̃ς ἐξ ὧν σύγκειται, καὶ παρά τινας ἐκ τȣ́των Συνθέτȣς· ȣ̔́τως ὁ* 30, *ὁ ἐκ τῶν ἁπλῶν* 2, 3, 5, *παρὰ τȣ̀ς δε, διαιρέτας ἔχει καὶ τȣ̀ς ἐξ αὐτῶν Συνθέτȣς·* $6 = 2 \times 3$, $10 = 2 \times 5$, $15 = 3 \times 5$· $30 = 2 \times 3 \times 5$ *μόνȣς.*

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 137. Σύμμετροι *Ἀριθμοὶ εἰσιν οἱ κοινὸν*

(*) *Βιβ. Ζ. Ὅρῳ Ε.*

νὸν ἔχοντες μέρος, ἢ ὧν θάτερος, μέρος ἐςὶ τῦ ἑτέρυ. ὡς ὁ 6 καὶ ὁ 4 τὸν 2. Ἀσύμμετροι δὲ, ὧν ὐδὲν ἐςὶ κοινὸν μέρος· οἷον ὁ 7 καὶ ὁ 9, ὐκ ἔχυσι κοινόν τι μέρος, ἐξαιρυμένης τῆς μονάδος.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 138. Ἄρτιος Ἀριθμός ἐςιν, ὁ εἰς δύω ἶσα δυνάμενος διαιρεθῆναι, μέσον μὴ παρεμπιπτέσης μονάδος. Περιττὸς δὲ, ὁ μηδέποτε εἰς δύω ἶσα δυνάμενος διαιρεθῆναι, διὰ τὸ παρεμπίπτειν μονάδα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 139 Ὁ δ' Εὐκλείδης (*), Ἄρτιον ἀριθμὸν προσείρηκε, τὸν δίχα διαιρέμενον. Περιττὸν δὲ, τὸν μὴ δίχα διαιρέμενον, ἢ τὸν μονάδι Ἀρτίυ διαφέροντα· οἷον ὁ 3 τῦ μὲν 2 διαφέρει μονάδι, τῦ δὲ 4 ἐλλείπει.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 140. Κἀντεῦθεν, τῶν ἀριθμῶν τάξει φυσικῇ γραφομένων, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, κ.τ.λ· οἱ μὲν ἐναλλὰξ ἀριθμοὶ εἰσὶν ἄρτιοι, οἱ δὲ λοιποὶ περιττοί· ἐὰν δὲ τῷ περιττῷ μονὰς προςεθῇ, ἀποβήσεται ἄρτιος.

ΟΡΙΣ-

(*) Βιβ. Ζ.' Ὅρ. Ϛ.' καὶ Ζ.'

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 141. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν **Καταμετρεῖν** ἢ **Καταριθμεῖν** λέγεται, ἐὰν αὐτὸν ὅτω διαιρῇ, ὥςε τὸ πηλίκον ἀριθμὸν ὁλοσχερῆ εἶναι κλάσματος ἄνευ, ἢ ἐκείνε τοσακικὸν ὑπάρχειν μέρος, ὡς ὁ 2 τε̃ 8, τῷ 4 ἢ μέρη, ὅταν ὅ καταμετρῇ, ὡς ὁ 4 τε̃ 6, ἢ τε̃ 10.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Α'.

§. 142 Ἔνθεντοι Ἀρτιάκις μὲν ἄρτιος ἀριθμός ἐςιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίε ἀριθμε̃ μετρέμενος, κατὰ ἀριθμὸν ἄρτιον (*), ὡς ὁ 8 ὑπὸ τε̃ 2 κατὰ τὸν 4. Ἀρτιάκις δὲ περισσὸς, ὁ ὑπὸ ἀρτίε ἀριθμε̃ μετρέμενος κατὰ περισσὸν (**), οἷον ὁ 12 ὑπὸ τε̃ 4 κατὰ τὸν 3. Περισσάκις δὲ περισσὸς, ὁ ὑπὸ περισσε̃ κατὰ περισσὸν μετρέμενος (***), ὡς ὁ 15 ὑπὸ τε̃ 3 κατὰ τὸν 5.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 143. Ἐὰν ὅν ἀριθμὸς Σύνθετος τύχῃ, ἐν τῷ τέλει ἄρτιον ἀριθμὸν ἢ μηδενικὸν ἔχων, ὁ τοιῦτος διὰ τε̃ 2 ἐςὶ διαιρέσιμος. 10 καὶ γὰρ, 20, 80, ἢ 100, 200, κ.τ.λ. ἄρτιοι εἰσὶν ἀριθμοί (§. 140). Ταὐτὸ δὲ καὶ ἐπὶ μειζόνων ἀριθμῶν δείκνυται. τε̃ γὰρ 918 = 910 + 8 ὄντος, ἐν Παραδείγματι, καὶ

(*) Εὐκλ. Βιβ. Ζ'. Ὅρ. Η'.
(**) Αὐτόθ. Ὅρ. Θ'.
(***) Αὐτ. Ὅρ. Ι'.

καὶ ἑκάςου μέρους, μοναδικῶς θεωρουμένου, οἷον 910 καὶ 8, διὰ 2 διαιρουμένου, καὶ ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς 918, διὰ 2 διαιρεθήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'

§. 144. Οἱοςδηποτοῦν ἀριθμὸς, οὗτινος ὁ ἔσχατος χαρακτὴρ ἐςὶ 5 ἢ 0, διὰ τοῦ 5 ἐςὶ διαιρέσιμος. Πᾶς γὰρ ἀριθμὸς 5 ἢ 0 τῷ τέλει προσκείμενον ἔχων, ἔχει συνάμα ὑπονοούμενον ἕνα τῶν παραγόντων, ἐξ ὧν ἀναδίδοται, πενταδικόν· ὡς τοῦτο ἐν τοῖς τοῦ πενταδικοῦ ἀριθμοῦ παραγομένοις, δυνάμει τοῦ Πυθαγορικοῦ Πίνακος, ἰδεῖν ἔνεςιν. Ὄντος δὲ ἑνὸς τῶν παραγόντων 5, διὰ τοῦτο ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς, εἴτ' οὖν τὸ παραγόμενον διαιρεθῆναι δύναται. Ἄρα οἱοςδηποτοῦν τοιοῦτος ἀριθμὸς διὰ 5 ἐςὶ διαιρέσιμος· οἷον ἐπὶ τοῦ 8755 = 8750 + 5, διαιρουμένων τοῦ τε 8750 καὶ τοῦ 5 διὰ 5, καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διὰ 5 διαιρεθήσεται. Ἐν γένει δὲ οἱ ἀριθμοὶ, οἷς τὸ μηδενικὸν τῷ τέλει πρόσκειται, ἐπὶ 10 πεπολλαπλασιάσθαι ὑποτίθενται (§. 95.)· τὸν δὲ 10 διὰ 5 διαιρεῖσθαι πασίδηλον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'

§. 145. Τῶν δυοῖν ἐσχάτων χαρακτήρων ἀριθμοῦ τινος διὰ 4 διαιρουμένων, καὶ ὁ ἀριθμὸς ὅλος διὰ 4 διαιρεθήσεται· ἔςι γὰρ, ἐν Παραδείγματι, 317572 = 317500 + 72· πᾶς δ' ἀριθμὸς πρὸς τὸ τέλος

τέλος 2 μηδενικὰ ἔχων διὰ 4 ἐντελῶς ἐςὶ διαιρέσιμος, ὅτι 517500 = 5175. 100, ὁ δὲ 100 διὰ 4 ἐντελῶς διαιρεῖται. Ἐὰν ἐν ἤδη ὁ 72 διὰ 4 ὡσαύτως διαιρέσιμος ἔςαι, καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διὰ 4 διαιρεθῆναι δύναται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'.

§. 146· Τῶν τριῶν ἐσχάτων χαρακτήρων ἀριθμῦ τινος διὰ τῶν 8 διαιρεμένων, καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διὰ τῶν 8 διαιρέσιμος ἔςαι· ἔςι γὰρ, ἐν Παραδείγματι, 4678762 = 4678000 + 762 = 4678. 1000 + 762· διαιρεῖται δὲ ὁ 1000 διὰ τῶν 8, ἄρα καὶ καὶ τὸ πρῶτον μέλος 4678000 διὰ τῶν 8 διαιρέσιμον ἔςαι· ὑπολείπεται τοίνυν εἰδέναι, εἰ οἱ τρεῖς ἔσχατοι χαρακτῆρες διὰ τῶν 8 διαιρεθῆναι δύνανται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛ'.

§. 147. Ἐὰν οἱ τῦ Συνθέτυ ἀριθμῦ χαρακτῆρες, ὡς ἁπλαῖ μονάδες θεωρέμεναι καὶ ἐν ἑνὶ κεφαλαίῳ συναπτόμεναι, τὸν ἐνναδικὸν ἀριθμὸν ἅπαξ ἢ πολλάκις ἀποτελῶσι, καὶ ὁ δοθεὶς ὅλος ἀριθμὸς διὰ τῦ 9 ἐντελῶς διαιρεθήσεται. Οὕτω 6894, ἐν ἑνὶ ὁμῦ συναπτόμενοι ἀθροίσματι τὸν 27 ἀναδιδῦσιν ἀριθμὸν, ὅτι 6 καὶ 8 εἰσὶ 14, καὶ 9 εἰσὶν 23, καὶ 4 εἰσὶν 27· ἀλλ' ὁ 27 ἐντελῶς τρὶς

τὸν

τὸν 9 περιέχει, ἄρα ὡσαύτως καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 6894 ἐντελῶς διὰ τῦ 9 διαιρεθῆναι δύναται. Ἐὰν δὲ οἱ ὅτως ἀθροισθέντες χαρακτῆρες κεφάλαιον ἀναδιδῶσι διὰ τῦ 3 διαιρώμενον, καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς ὡσαύτως διὰ τῦ 3 διαιρεθήσεται. Οὕτως οἱ 2886 κεφάλαιον διδόασι 24 διὰ τῦ 3 διαιρύμενον, ἄρα ὡσαύτως καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διὰ 3 διαιρεθῆναι οἷός τ᾽ ἐςί. Τῦτι δὲ καὶ ἐκ τῦ Πυθαγορικῦ δείκνυται Πίνακος, ἔνθα πάντα τὰ τῦ 9 πολλαπλᾶ, ὡς ἁπλαῖ διαιρύμενα μονάδες καὶ ἐν ἑνὶ συναπτόμενα κεφαλαίῳ, 9 μονάδας ἀποτελῦσιν. Οὕτω 54, γινόμενον ἐκ τῦ 6 καὶ τῦ 9, ἀποτελεῖ 9 μονάδας, ὅτι 5 καὶ 4 εἰσὶν 9· οὕτω ἐπὶ τῦ 72, προςιθεμένων 7 καὶ 2, ἔχομεν 9· ἐπεὶ δ᾽ αὖ ὁ μὲν 15 κεφάλαιον δίδωσιν 6, ὁ δὲ 27, 9, ἐπὶ 3 διαιρύμενον, 15 καὶ 27 ὡσαύτως διὰ 3 διαιρεθῆναι δύνανται. Ο᾽ δὲ λόγος ἐν τύτῳ κεῖται, ὅτι παντὸς χαρακτῆρος ἡ δύναμις, οἱονδήποτῦν τόπον κατέχοντος, 9 μονάδας ὑπερβῆναι ὁ δύναται, ἤτοι αἱ μονάδες ἁπλαῖ εἴησαν, ἢ τῶν ἑκατοντάδων, ἢ τῶν χιλιάδων, ἢ τῶν μιλλιονίων, κ.τ.λ. Οὕτω μέντοι γε, ὡς ἐὰν ἀριθμός τις διὰ 9 διαιρετέος ᾖ, ὑπόλοιπον ἀείποτε καταλείπει, τόσας περιέχον μονάδας, ὅσας οἱ ἐκείνυ χαρακτῆρες ἰδίᾳ ἀθροιζόμενοι ἀποτελῦσιν. Οὕτως ὁ 15 διαιτῦ 9 διαιρεθεὶς, πηλίκον δίδωσι 1 μεθ' ὑπολοίπυ 6, ὃ δὴ ἴσον ἐςὶ 1 καὶ 5 ὁμοῦ συναφθεῖσι· ὁ 34 διὰ τῦ 9 διαιρεθεὶς, πηλίκον δίδωσι 3 μεθ' ὑπολοίπυ 7, ἴσυ ὄντος 3 καὶ 4 ὁμοῦ ληφθεῖσιν. Τὰ τοιαῦτα τοίνυν ὑπόλοιπα ἐν λόγῳ τῶν ἀποςάσεων αὔξυσιν, ἤτοι καθ' ὅσον ἀπὸ τῦ ἑνὸς ἐνναδικῦ ἀριθμοῦ ἀφιςάμεθα καὶ τῷ ἑτέρῳ προσεγγίζομεν· ἐὰν δ' ὐδὲν ὑπολειφθῇ ὑπόλοιπον, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς μεταξὺ 9 καὶ 9 περιληφθῆναι ὐ δύναται, ἀλλ' ἐντελῶς τὺς ἐνναδικὺς ἀναπληρώσει, ἄρα καὶ διὰ τύτων διαιρέσιμος ἔςαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ'.

§. 148. *Γνωσθήσεται δὲ καὶ ὁ διὰ τῦ 11 διαιρέσιμος ἀριθμὸς, ὡς ἐφεξῆς.* Συναφθήτωσαν οἱ τῦ δοθέντος ἀριθμῦ χαρακτῆρες παρ' ἕνα, ἤτοι ὁ πρῶτος, τρίτος, πέμπτος, κ.τ.λ' ἐν ἑνὶ κεφαλαίῳ· εἶτα συναφθήτωσαν οἱ ἐναλλὰξ παροφθέντες ἤδη χαρακτῆρες, ἤτοι ὁ δεύτερος, τέταρτος, ἕκτος, κ.τ.λ. καὶ τὰ κεφάλαια ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρείσθωσαν. Ἐὰν ἡ διαφορὰ ᾖ $= 0$, ᾖ 11, 22, 33, 44, κ.τ.λ. ὁ ἀριθμὸς διὰ 11 διαιρέσιμος ἔςαι. οἷον ἐν τῷ ἀριθμῷ 15752, ἔςαι *Α'* $1 + 7 + 2 = 10$, *Β'* $5 + 5 = 10$, καὶ $10 - 10 = 0$. Ἄρα 15752 : 11. *Πολλαπλασιασθήσεται δὲ καὶ ἀριθμός τις, οἷον ὁ 1432 ἐπὶ 11, ἐὰν ὁ αὐτὸς ἅπαξ ὑφ*

ἑαυ-

ἑαυτὸν οὕτω γραφῇ, ὥστε τὰς μονάδας ταῖς δεκάσιν ἀντιστοιχεῖν, οὕτω·

1432	καὶ	8356
1432		8356
15752		91916

ΟΡΙΣΜΟΣ

§. 149. Ἀριθμοῦ **Μέτρον** ἐστὶν, ἀριθμὸς ἐκεῖνον ἐντελῶς καταμετρῶν· οὕτως ὁ 2 ἐστὶ μέτρον τοῦ 4. **Μέγιστον δὲ μέτρον** ἀριθμοῦ ἐστὶν, ὁ μέγιστος ἀριθμὸς ὁ ἐκεῖνον ἐκμετρῶν· οὕτως ὁ 4 ἐστὶ τὸ μέγιστον μέτρον τοῦ ἀριθμοῦ 8.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 150. Οἱ διαιρέται τοίνυν ἀριθμοῦ τινος, οἱ ἐντελῶς αὐτὸν διαιροῦντες, τοῦ αὐτοῦ εἰσὶ μέτρον. οὕτως ὁ 12 ἔχει μέτρον τὸν 2, 3, 4, 6. Μέγιστον δὲ Μέτρον, ὁ μέγιστος ἐκείνου ἐστὶ διαιρέτης, ὡς ὁ 6 τοῦ 12. Ἐὰν ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς, μόνος ἄνευ τῆς πρὸς ἕτερον παραβολῆς θεωρῆται, ὁ αὐτὸς ἔσται τὸ μέγιστον μέτρον· πᾶς γὰρ ἀριθμὸς ἐν ἑαυτῷ ἅπαξ περιέχεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ

§. 151. **Κοινὸν μέτρον** δυοῖν, ἢ πλειόνων ἀριθμῶν ἐστὶν ἀριθμὸς, ὁ ἕκαστον ἐν μέρει ἐκμετρῶν· οὕτως ὁ 3 κοινὸν ἐστὶ μέτρον τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 24. **Μέγιστον δὲ Κοινὸν Μέ-**

ΤΟΟΝ λέγεται, ἐὰν ἡ ἀριθμὸς μέγιςος, ὁ τὰς πάντας ἐξαριθμῶν· ὅτως ὁ 12 ἐςὶ κοινὸν μέτρον μέγιςον τῶν ἀριθμῶν 24 καὶ 36. ὁ δὲ 3 τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 12.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

§. 152. **Εὑρεῖν πάντας τοὺς Διαιρέτας· ἤτοι τὰ Παραγόμενα ἀριθμᾶ τινος.**

ΛΥΣΙΣ

Ἐὰν μὲν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἦ ἄρτιος, διαιρεθήτω διὰ 2· ἐὰν δὲ περιττὸς, γενέσθω ἡ διαίρεσσις διὰ 3, 5, 7, κ.τ.λ. ἐὰν δὲ δι' ἀμφοτέρων τῶν τρόπων ἡ διαίρεσις ἀδυνατεῖ γενέσθαι, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἐςὶ τῶν Πρώτων πρὸς ἀλλήλες. Τᾶ ἀκριβοῦς δὲ πηλίκυ εὑρεθέντος, γραφήτωσαν χωρὶς τὸ, τε πηλίκον καὶ ὁ διαιρέτης. Τὸ πηλίκον αὖθις τῷ αὐτῷ τρόπῳ διαιρεθήτω, καὶ ὁ διαιρέτης ὡσαύτως σημειωθήτω. Τὰ τῆς διαιρέσεως δὲ ἐπὶ τοσῦτον ἐπαναλαμβανέσθω, ἄχρις ὅ τὸ πηλίκον μονὰς ἀποβῇ, καὶ πάντες οἱ τᾶ δοθέντος ἀριθμᾶ ἁπλοῖ διαιρέται εὑρεθῶσιν. Τῶν ἁπλῶν εἶτα διαιρετῶν ἀλλήλοις, ἀνὰ δύω, ἢ ἀνὰ τρεῖς, ἐπιπολλαπλασιασθέντων, πάντες οἱ σύνθετοι εὑρεθήσονται διαιρέται.

ΔΕΙ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Αἰτείσθωσαν οἱ τῦ ἀριθμῦ 420 διαιρέται.

420(210	210(105	105(35	35(7	7(1
2	2	3	5	7

Οἱ ἁπλοῖ διαιρέται 2, 2, 3, 5, 7.

Οἱ σύνθετοι ἀνὰ δύω.	*Ἀνὰ τρεῖς.*
2 × 2 = 4.	2 × 2 × 3 = 12.
2 × 3 = 6	2 × 2 × 5 = 20.
2 × 5 = 10	2 × 2 × 7 = 28.
2 × 7 = 14	2 × 3 × 5 = 30.
3 × 5 = 15	2 × 3 × 7 = 42.
3 × 7 = 21	2 × 5 × 7 = 70.
5 × 7 = 35	3 × 5 × 7 = 105.

Ἀνὰ τέσσαρες. $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60.$

$2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84.$

$2 \times 2 \times 5 \times 7 = 140.$

$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210.$

Ἀνὰ πέντε. $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420.$

Ἄρα οἱ διαιρέται τάξει γραφόμενοι εἰσὶν οἱ ἐφεξῆς 24 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 28, 30, 35, 42, 60, 70, 84, 105, 140, 210, 420.

ΔΕΙΞΙΣ

Τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀχθὲν ἀναδιδωσι τὸ γινόμενον, εἴτ' οὖν τὸν διαιρετέον ἄρα τά τε πηλίκα καὶ τὰς διαιρέτας, κοινὸς δέον εἶναι παράγοντας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Ἀλλαμὴν τὰ κατὰ μέρος πηλίκα τὰ ἐξ οἱασοῦν διαιρέσεως ἀναδιδόμενα, γινόμενα εἰσὶν αὖθις τῶν ἑαυτῶν διαιρετῶν τε καὶ πηλίκων. Ἄρα, πάντες οἱ διαιρέται, ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζόμενοι, γινόμενα δώσουσιν, ἅ τινα τοῦ δοθέντος ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ ἰσάριθμοι ἔσονται διαιρέται.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

§. 153. Εὑρεθήσονται δὲ καὶ ἄλλως, ὡς ἐφεξῆς, ἀριθμοῦ τινος, οἷον τοῦ 33 πάντες οἱ διαιρέται, εἴτ' οὖν οἱ παράγοντες, οἵτε ἁπλοῖ καὶ οἱ Σύνθετοι. Διαιρεθέντος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἐλαχίστου τῶν ἐν αὐτῷ παραγόντων, τεθήτω ὁ μὲν παράγων οὕτω δεξιόθεν ἐν μέρει μετὰ τὴν γραμμὴν, τὸ δὲ πηλίκον ὑπὸ τὸν δοθέντα ἀριθμόν. Διαιρεθήτω αὖθις τοῦτο τὸ πηλίκον διὰ τοῦ

330	2.
165	3, 6.
55	5, 10, 15, 30.
11	11, 22, 33, 66, 55.
1	110, 165, 330.

ὅσον οἷόν τε ἐλαχίστου ἀριθμοῦ, καὶ τὸ μὲν γινόμενον, εἴτ' οὖν ὁ ἤδη εὑρεθεὶς διαιρέτης, δεξιόθεν ὑπὸ τὸν ἕτερον μετὰ τὴν γραμμὴν τεθήτω, τὸ δὲ δεύτερον πηλίκον ὑπὸ τὸ πρῶτον. Πολλαπλασιασθήτωσαν

τωσαν εἶτα ἀλλήλοις οἱ εὑρεθέντες δύο ἤτοι παράγοντες καὶ τὸ ἐντεῦθεν ἀναδιδόμενον παραγόμενον, ἐφεξῆς ἐν τῇ αὐτῇ σειρᾷ μετὰ τὸν δεύτερον τεθήτω διαιρέτην. Διαιρεθήτω αὖθις τὸ προευρεθὲν πηλίκον διὰ τῦ ἐλαχίςυ τῶν παραγόντων, ὁ δὲ εὑρεθεὶς νέος παράγων μετὰ τὴν γραμμὴν ὑπὸ τὺς λοιπὺς γραφεὶς παράγοντας, πολλαπλασιασθήτω ἐφ' ὅλυς τὺς προευρεθέντας. Συνεχιζέσθω δὲ ἡ πρᾶξις τῷ αὐτῷ τρόπῳ, ἕως οὗ ἡ διαίρεσις προσωτέρω προαχθῆναι μὴ δύνηται, εἴτ' ἂν, ἕως ἂν ἐπὶ πηλίκον μονάδα καταντήσωμεν. Οὕτω τοίνυν οἱ μετὰ τὴν γραμμὴν ὑπάλληλοι πρῶτοι παράγοντες, οἱ ἁπλοῖ ἔσονται παράγοντες, οἱ δὲ λοιποὶ πάντες, οἱ σύνθετοι. Οἷον ἐν τῷ ἐκτεθέντι ἐνταῦθα παραδείγματι, 2, 3, 5, 11, οἱ ἁπλοῖ εἰσὶ παράγοντες, οἱ δὲ 6, 10, 15, 30, 22, 33, 66, 55, 110, 165, 330, οἱ τῦ ἀριθμῦ 330, σύνθετοι εἰσὶ παράγοντες.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.

§. 154. Αἱ τοιαῦται τῶν ἀριθμῶν ἰδιότητες, καὶ μὴν καὶ ἕτεροι ἀναρίθμοι, ἐκ τῶν τῆς Ἀλγέβρας ἀρχῶν εὐχερῶς μάλα δεικνύεσθαι ἔχυσιν. Αἱ γὰρ Ἀλγεβραϊκαὶ ἀρχαὶ γενικαί, ὅσαι δείξεις, πάσαις ταῖς ἐν μέρει περιςάσεσι δεξιῶς ἐφαρμόζονται.

ρονομαςὴν διαιρούντων. Οἷον ἐπὶ τοῦ Παραδείγματος $\frac{252}{315}$, ὁ 63 ἐντελῶς καταμετρεῖ τὸν 252, εἴτ' οὖν τὸν Ἀριθμητὴν ἀλλ' αὐτὸς καὶ τὸν Παρονομαςὴν 315 καταμετρεῖ μεθ' ὑπολοίπε 63, ὅτινος ὑπολοίπε, ὁ αὐτὸς 63 ἐςὶ μέτρον. ἄρα ὁ 63, παράγων ἐςὶν, ὃς ἐνιάκις ληφθεὶς τόν τε Ἀριθμητὴν καὶ τὸν Παρονομαςὴν συντίθησιν, ἑπομένως ἄρα καὶ τὸ παραγόμενον διαλύει. Ἐκ γὰρ τῆς ἐσχάτης διαιρέσεως ἐςὶ 252 ἴσον 63 ἀχθέντι ἐπὶ 4, καὶ $315 = 63 \times 4 + 63$, τετέςιν $= 63 \times 5$· ἄρα ὁ 63 ἅπαξ μὲν ἐπὶ 4 α θεὶς, ἅπαξ δ' ἐπὶ 5 τόν τε Ἀριθμητὴν καὶ τὸν Παρονομαςὴν τοῦ δοθέντος ἀποτελεῖ Κλάσματος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 183. Ἀναμνηςέον δ' ἐνταῦθα τὰ ἐν τῷ Γ'. Κεφαλαίῳ περί τε τῆς τῶν διαιρετῶν εὑρέσεως καὶ περὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν ῥηθέντα, ἐξ ὧν γνωσθήσεται, ὡς ἐὰν μὲν ἔν τε τῷ Ἀριθμητῇ καὶ τῷ Παρονομαςῇ πρὸς τὸ τέλος, ἕν, δύω, ἢ πλείω τῶν μηδενικῶν τύχωσι, τὸ κοινὸν μέτρον εἶναι 10, 100, κ.τ.λ· ἐὰν δὲ 5 ἢ 0, τὸ κοινὸν μέτρον εἶναι 5· ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἄρτιος, τὸ κοινὸν μέτρον εἶναι 2. Ἑπομένως τὰ ὅσα ἐκεῖσε περὶ τῶν ἀριθμῶν ἐῤῥέθη, κἀνταῦθα λεγόμενα κρατήσουσιν· Οἷς ἐπισυναπτέον καὶ τὰ ἐφεξῆς. Α'. Ἐὰν ἀθροίσματος ὁποιασοῦν ἓν τῶν μερῶν ἕκαςον διὰ τᾶ αὐτᾶ διαιρῆται ἀριθμᾶ, καὶ τὸ ὁλοσχερὲς ἄθροισμα διὰ τᾶ αὐτᾶ διαιρέσιμον ἐςαι. Κἀνάπαλιν, ὁπηνίκα τὸ, τε ὁλοσχερὲς ἄθροισμα καὶ τῶν μερῶν τᾶ τοιάτα ἀθροίσματος θάτερον διὰ τᾶ αὐτᾶ διαιρεθῇ ἀριθμᾶ, διὰ τᾶ αὐτᾶ καὶ τὸ ἕτερον τοῦ τοιάτα ἀθροίσματος μέρος διαιρέσιμον ἐςαι. Οἷον, ἐπεὶ ἐν τοῖς 18 + 12 = 30, ὅ, τε 18 καὶ ὁ 12 διὰ τᾶ 6 διαιρεῖται, καὶ ὅλος ὁ 30 διὰ τᾶ 6 διαιρέσιμος ἐςαι· Ἐπεὶ δ' αὖθις ἐπὶ τῶν 14 + 21 = 35, ὅ, τε 35 καὶ ὁ 14 διὰ τῶν 7 διαιρεῖται, καὶ ὁ 21 ὡσαύτως διὰ τῶν 7 διαιρέσιμος ἐςαι. Β.' Τῶν παραγόντων ἑνὸς διά τινος ἀριθμᾶ διαιρεμένα, δι αὐτᾶ καὶ τὸ παραγόμενον διαιρεθήσεται. Οἷον ἐπεὶ, ἐν τοῖς 37 × 14 × 3 = 1554, ὁ παράγων 14 διὰ τᾶ 7 διαιρεῖται, δι αὐτᾶ καὶ τὸ παραγόμενον 1554 διαιρεθήσεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 184. **Ἐὰν, τᾶ αὐτᾶ Παρονομαςᾶ μένοντος, ὁ Ἀριθμητὴς ἐπαύξῃ, τὸ Κλάσμα μεῖζόν ἐςι τᾶ ὅλα.**

ΔΕΙΞΙΣ·

Τᾶ αὐτᾶ γὰρ Παρονομαςᾶ μένοντος, καὶ τᾶ Ἀριθμητᾶ ἐπὶ μονάδι τῇ αὐτῇ πληθυνομένα, ὁ τᾶ ἰδία εἴδας τῶν μερῶν ἀριθμὸς ἐπιμεγεθύνεται· ἑπομέκομένως τε τὸ Κλάσμα, πλείω τῦ αὐτῦ εἴδυς μέρη ἐκ τῦ ἰδίυ ἀκεραίυ δηλώσει, κἀντεῦθεν μεῖζον τῦ ὅλυ ἀποδήσεται. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 185. Τῷ αὐτῷ λόγῳ δείκνυται μειῦσθαι τὴν τῦ Κλάσματος δύναμιν, εἴγε τῦ αὐτῦ μένοντος Παρονομαςῦ ὁ Ἀριθμητὴς μειῦται. Ἐὰν τοίνυν δύω Κλάσματα κοινὸν ἔχωσι Παρονομαςὴν, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐςιν, ὗ τινος ὁ Ἀριθμητὴς μείζων, καὶ δὴ τοσῦτον, ὅσον ῦτος ἐκεῖνον ὑπερέχει. οἷον $\frac{4}{5}$:> $\frac{3}{5}$·

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 186. **Ἐὰν, τῦ αὐτῦ Ἀριθμητῦ μένοντος, ὁ Παρονομαςὴς αὔξῃ, τὸ Κλάσμα μειῦται.**

ΔΕΙΞΙΣ.

Τοῦ αὐτῦ γὰρ Ἀριθμητῦ μένοντος, τὰ αὐτὰ πάντως καὶ τοσαῦτα διέμεινε μέρη· τῦ δὲ Παρονομαςῦ αὔξοντος, τὸ ἓν ἀκέραιον, εἴτ' ὂν ἡ μονὰς, εἰς πλείω μὲν τῷ ἀριθμῷ, ἐλάττω δὲ τῷ εἴδει μέρη διῄρηται. Ἀλλαμὴν, ἐὰν τοσαῦτα μέρη ἐκ τῦ ὅλυ, εἰς ἐλάττω μέρη διαιρεθέντος, ληφθῶσιν, ἐλάχιςα πάντως λαμβάνονται. Ἄρα τοῦ αὐτῦ Ἀριθμητῦ μένοντος καὶ τῦ Παρονομαςῦ αὔξοντος, ἡ

τῦ

τῦ Κλάσματος δύναμις ἀπομειῦται. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Α.

§. 187. Τῷ αὐτῷ ἐν γένει λόγῳ δηλῦται τὸ Κλάσμα ἐπιμεγεθύνεσθαι, ἐὰν τῦ αὐτῦ μένοντος Ἀριθμητῦ, ὁ Παρονομαςὴς μειῶται· τηνικαῦτα γὰρ ὁ Ἀριθμητὴς ἐπαύξει (§. 184.). Ἐὰν τοίνυν δύω Κλασμάτων οἱ Ἀριθμηταὶ ὁμονυμιῶσι, τὸ ἐλάττω Παρονομαςὴν ἀποκεκληρωκὸς μεῖζον ἐςαι, καὶ τοσύτῳ, ὅσῳ ὁ Παρονομαςὴς ἠλάττωται· οἷον, $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 188. Ἡνίκα τοίνυν ὅ, τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς αὔξωσιν ἢ φθίνωσι, τό, τε Κλάσμα συνῳδὰ ἐκείνοις ἐπιμεγεθύνεται ἢ ἀπομειῦται, ἤτοι ὐδεμίαν ὑφίςαται ἀλλοίωσιν (§. 180.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

§. 189. **Τὰ δοθέντα Κλάσματα πρὸς ὅρυς ἐλάττονας ἀναγαγεῖν, ἤτοι ἐξευρεῖν Κλάσμα τοῖς δοθεῖσιν ἰσοδυναμῦν, ἀλλ' ἐλάττοσιν Ἀριθμηταῖς τε καὶ Παρονομαςαῖς ἐμφαινόμενον.**

ΛΥΣΙΣ.

Εὑρεθήτω Α. τὸ κοινὸν Μέτρον (§. 182)

Διαι-

Διαιρεθήτωσαν B.' διὰ τούτου ὅ,τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςής. Τὰ ἐκ τῆς διαιρέσεως ἀναδιδόμενα καινὰ πηλίκα, Κλάσμα συςήσωσιν, ἐν ἐλάττοσι μὲν ὅροις ἐμφαινόμενον, ἰσοδυναμοῦν δὲ τῷ ἐν ἀρχῇ δοθέντι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α.' $\frac{107}{428}=\frac{107\,:\,107}{428\,:\,107}=\frac{1}{4}$. Β. $\frac{252}{315}=\frac{252\,:\,63}{315\,:\,63}=\frac{4}{5}$. Γ.' $\frac{189}{513}=\frac{189:27}{513:27}=\frac{7}{19}$. Δ.' $\frac{456}{1406}=\frac{456\,:\,38}{1406\,:\,38}=\frac{12}{37}$. Ε.' $\frac{105}{210}=\frac{105\,:\,105}{210\,:\,105}=\frac{1}{2}$.

Ὡσαύτως ἀναχθήσονται, καὶ $\frac{255}{663}$ πρὸς $\frac{5}{13}$. $\frac{481}{629}$ πρὸς $\frac{13}{17}$. $\frac{171}{399}$ πρὸς $\frac{3}{7}$. $\frac{85}{425}$ πρὸς $\frac{1}{5}$. $\frac{6}{264}$ πρὸς $\frac{1}{44}$. $\frac{60}{90}$ πρὸς $\frac{6}{9}$ καὶ πρὸς $\frac{2}{3}$. $\frac{100}{150}$ πρὸς $\frac{10}{15}$ καὶ πρὸς $\frac{2}{3}$. $\frac{125}{450}$ πρὸς $\frac{25}{90}$ καὶ πρὸς $\frac{5}{18}$. Ὡσαύτως ἐκ τοῦ $\frac{192}{256}$ ἐκκύπτουσι τὰ ἐφεξῆς ἡμίση $\frac{96}{128}$, $\frac{48}{64}$, $\frac{24}{32}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{3}{4}$.

Ὄντος γὰρ ἑκάςου τῶν Κλασμάτων ὅρου πρὸς τὸ

τέλος

τέλος ἀρτιαρίθμου, ἡ διαίρεσις διὰ 2 ἀεὶ συνεχισθῆναι δύναται.

ΔΕΙΞΙΣ

Τοῦ γὰρ Ἀριθμητοῦ τε καὶ τοῦ Παρονομαστοῦ διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος διαιρουμένων, ἡ τοῦ Κλάσματος δύναμις ἀμετάβλητος σώζεται (§. 180.). Ἀλλαμὴν διὰ τοῦ κοινοῦ μεγίστου μέτρου, οἱονεὶ διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ὅ, τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς διαιρεῖται. Ἄρα ἡ τούτου δύναμις οὐκ ἀλλοιοῦται. Ὄντος δὲ τοῦ διαιρέτου, κοινοῦ μεγίστου μέτρου, τὰ ἐντεῦθεν ἀναδιδόμενα πηλίκα ἐλάχιστα πάντως ἔσονται. Ἄρα τῷ τρόπῳ τούτῳ τὸ Κλάσμα ἐπὶ τοὺς ἐλαχίστους, δι᾽ ὧν ἂν παρίστασθαι δύναιτο, ὅρους ἀνῆκται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 190. Ἀριθμὸν ὁλοσχερῆ πρὸς Κλάσμα ἀναγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ὑπογραφήτω τῷ ὁλοσχερεῖ μονάς, οἷα δὴ Παρονομαστής. Οὕτω ἐκ τοῦ 8 ἀποβήσεται $\frac{8}{1}$, ἐκ τοῦ 32, $\frac{32}{1}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἅπας ἀριθμὸς διὰ τῆς μονάδος διαιρεθῆναι δύναται, ἀμετατρέπτου τῆς τούτου σωζομένης δυνάμεως μιως. Ἄρα τῷ ὁλοσχερεῖ μονὰς, οἷα διαιρέτης, ὑπογράφεσθαι δύναται (§. 175.). Ἀλλὰ μὴν ὅτως ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς ἐν εἴδει ἐκτίθεται Κλάσματος. Ἄρα τῷ λόγῳ τέτῳ οἱοσδήποτεῦν ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς πρὸς κλασματώδη ἀνάγεται ἔκθεσιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

§. 191. **Ἀριθμὸν ὁλοσχερῆ εἰς Κλάσμα, κατ' ὄνομα τὸ δοθὲν, μεταποιῆσαι.**

ΛΥΣΙΣ.

Πολλαπλασιασθήτω τὸ ὁλοσχερὲς διὰ τῦ δοθέντος Παρονομαςῦ. Τὸ ἐντεῦθεν γινόμενον ἔςαι Ἀριθμητὴς, ᾧ τινι ὁ δοθεὶς Παρονομαςὴς ὑπογραφήτω. Οὕτως ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς 8, εἰς Κλάσμα, κατ' ὄνομα τὸ δοθὲν 6 μεταποιηθήσεται, πολλαπλασιαζομένε τῦ 8 διὰ τῦ 6, καὶ τῦ Παρονομαςῦ 6 ὑπογραφομένε. Οἷον $\frac{8}{6}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ τῦ Κλάσματος δύναμις ἐκ ἀλλοιῦται, ἐὰν ὅ, τι Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιάζωνται, ἢ διαιρῶνται (§. 180.). Ἀλλ' ἐν διὰ τῦ προεκτεθέντος κανόνος τὸ δοθὲν ὁλοσχερὲς διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιάζεταί τε καὶ διαιρεῖται. Ἄρα ἡ δύναμις ἐκ

ἀλλοιαλλοιῦται. Ὀρθῶς τοίνυν τῷ τοιούτῳ λόγῳ ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀνάγονται Παρονομαςήν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 192. Σαφέςερον δὲ τοῦτο δειχθήσεται, ἐὰν ὁ Ἀριθμητὴς διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ διαιρεθῇ· οὕτω γὰρ τὸ προτεθὲν ὁλοσχερὲς ἐκκύψει. Ἡ γὰρ διαίρεσις διαλύει, τὸ ὑπὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ συντεθέν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 193. Ἡ τοιαύτη τοῦ Κλάσματος μεταποίησις, εἴτ᾽, οὖν ἡ ἐφ᾽ ἑτεροῦ Παρονομαςοῦ δοθέντος μεταβολὴ, ἐκ περιουσίας ἐν ταῖς Ἀλγεβ ϊκαῖς Ἀναλογίαις διασαφηνισθήσεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 194. **Τὰ δοθέντα ὁποιαδηποτοῦν ἑτερογενῆ Κλάσματα, πρὸς τὴν αὐτὴν ἀναγαγεῖν Παρονομασίαν.**

ΛΥΣΙΣ.

Α. Κλάσματος ἑκάςου ὁ Ἀριθμητὴς πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τοὺς τῶν λοιπῶν Κλασμάτων Παρονομαςὰς, πλὴν τοῦ ἰδίου τὸ ἐντεῦθεν ἐκβάπτον παραγόμενον, Ἀριθμητὴς ἔςαι τοῦ Κλάσματος, οὗπερ ὁ Ἀριθμητὴς πεπολλαπλασίαςαι. Β. Πολλαπλασιασθήτωσαν ἐπ᾽ ἀλλήλους οἱ Παρονομαςαὶ ἅπαξάπαντες, ἵν᾽ οὕτως ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἀναχθῶσιν ὄνομα.

Οὕτω

Οὕτω τῶν Κλασμάτων δυοῖν ὄντων, οἷον τῶν $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$, θάτερον τῶν ἐν τῷ πρώτῳ ὅρων, εἴτ' ἓν τὸν Ἀριθμητὴν, πολλαπλασίασον διὰ τȣ̃ Παρονομαςȣ̃ τȣ̃ δευτέρȣ, ὥςε γενέσθαι $2 \times 4 = 8$ Ἀριθμητῇ τȣ̃ πρώτȣ. Εἶτα θάτερον τῶν τȣ̃ δευτέρȣ, ἤτοι τὸν τȣ̃το Ἀριθμητὴν, διὰ τȣ̃ Παρονομαςȣ̃ τȣ̃ πρώτȣ ἀνάπαλιν, ὥςε προελθεῖν $3 \times 3 = 9$ Ἀριθμητῇ τȣ̃ δευτέρȣ. Ἔσχατον δὲ καὶ τȣ̀ς Παρονομαςὰς ἐπ' ἀλλήλȣς, οἷον $3 \times 4 = 12$ κοινῷ Παρονομαςῇ. Ἔςαι δὴ τὰ ȣ̃τω προϊόντα Κλάσματα $\frac{8}{12}$ καὶ $\frac{9}{12}$, ἤτοι $\frac{8 \text{ καὶ } 9}{12}$, τὰ ζητȣ́μενα.

Ἐὰν δὲ τὰ Κλάσματα τρία ᾖ, οἷον τὰ $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{3}$, καὶ $\frac{4}{5}$, ἑκάτερον τῶν ὅρων τȣ̃ πρώτȣ πολλαπλασίασον διὰ τȣ̃ ἐν τῷ δευτέρῳ Παρονομαςȣ̃ 3, καὶ διὰ τȣ̃ ἐν τῷ τρίτῳ 5, ἢ διὰ τȣ̃ ἐκ τȣ́των πολλαπλασιασμῷ γινομένȣ, ὥςε προελθεῖν $\frac{3 \times 3 \times 5}{7 \times 3 \times 5} = \frac{45}{105}$. Ὡσαύτως δὲ καὶ τȣ̀ς ὅρȣς τȣ̃ δευτέρȣ, διὰ τῶν Παρονομαςῶν τȣ̃ πρώτȣ καὶ τȣ̃ τρίτȣ· καὶ τȣ̀ς τȣ̃ τρίτȣ, διὰ τῶν τȣ̃ πρώτȣ, καὶ τȣ̃ δευτέρȣ· Ὥςε γενέσθαι ἐκ μὲν τȣ̃ δευτέρȣ $\frac{2 \times 7 \times 5}{3 \times 7 \times 5} = \frac{70}{105}$. Ἐκ δὲ τȣ̃ τρίτȣ $\frac{4 \times 7 \times 3}{5 \times 7 \times 3} = \frac{84}{105}$. Ἔςαι δὴ ȣ̃τω

Κλάσματα τὰ ζητέμενα $\frac{45}{105}$, $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$ = $\frac{45,\ 70,\ 84}{105}$

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον προβήσῃ, καὶ τῶν δοθέντων Κλασμάτων πλειόνων ὄντων, ἢ τριῶν ἄμφω δηλονότι τὰς ἐφ' ἑκάςῳ ὅρες, διὰ τῶν Παρονομαςῶν τῶν λοιπῶν ἄγων ἀπαξαπάντων. Ἡ γοῦν, ὃ ταὐτόν ἐςι, διὰ τῦ προκύπτοντος τῷ ἐπ' ἐκείνων πολλαπλασιασμῷ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{7}$ = $\frac{105,\ 112,\ 200}{280}$.

Β'. $\frac{9}{10}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{6}$ = $\frac{648,\ 420,\ 600}{720}$.

Γ'. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$ = $\frac{140,\ 210,\ 112,\ 80}{280}$.

Δ'. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{3}$ = $\frac{135,\ 162,\ 150,\ 180}{270}$,

Ἔςωσαν Ε'. ἀνακτέα, τὰ ἐφεξῆς $\frac{3}{27}$, $\frac{4}{32}$, $\frac{4}{40}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{8}{19}$, $\frac{3}{35}$, $\frac{7}{28}$, $\frac{9}{72}$, $\frac{11}{129}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ τῦ Κλάσματος δύναμις ὁ μεταποιεῖται, ἐὰν ὅ, τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιάζονται (§. 180.). *Ἀλλαμὴ*;

λαμὴν, διὰ τῶν προκατασκευασθέντων κανόνων, ὅ, τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς ἑκάςȣ Κλάσματος διὰ τῆς αὐτῆς πολλαπλασιάζονται ποσότητος· ἑκάτερος γὰρ τῶν ὅρων διὰ τῶν Παρονομαςῶν τῶν λοιπῶν ἄγεται. Ἄρα ἡ τȣ̃ Κλάσματος δύναμις ἀμεταποίητος διὰ τῶν τοιῶνδε πολλαπλασιασμῶν σώζεται. Ἐπεὶ δὲ οἱ αὐτοὶ παράγοντες τὸ αὐτὸ ἀναδιδȣ̃σι παραγόμενον, ὁ ἑκάςȣ Παρονομαςὴς διὰ τῶν Παρονομαςῶν τῶν λοιπῶν πολλαπλασιασθεὶς, τὸ αὐτὸ ἀναδώσει παραγόμενον· ἄρα Παρονομαςὴν ἴσον.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

§. 195. Ὁπηνίκα, πλείω Κλάσματα πρὸς κοινὸν ἀνακτέα τύχωσι Παρονομαςὴν, ἵνα μὴ ἐργώδης πάνυ καὶ δυσχερὴς ἀποβῇ ἡ πρᾶξις, ἐπιτομῆς ἐςὶ χρεία. Γίνεται δὲ τȣ̃το τῇ εὑρέσει κοινȣ̃ Παρονομαςȣ̃, ὡς οἷόν τε ἐλαχίςȣ· Ὅθεν τῇ ἐπινοίᾳ ἀριθμὸν θηρευτέον τῶν δυνατῶς ἐχόντων ἐλάχιςον, ὑφ' ἑκάςȣ τῶν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομαςȣ̃ ἐντελῶς διαιρέσιμον. Οὗ γενομένȣ τὰ ἐντεῦθεν ἐκληφθέντα Πηλίκα, δι' ἑνὸς ἑκάςȣ τῶν τοῖς Κλάσμασιν ἀνηκόντων Παρονομαςῶν πολλαπλασιασμῷ ἀχθήτωσαν, τοῖς δὲ παραγομένοις, οἱονεὶ καινοῖς Ἀριθμηταῖς, ὁ κοινὸς ἔσχατον Παρονομαςὴς ὑπογραφήτω. Κείσθωσαν δὴ, ἐν Πα-

 ραδεί-

ραδείγματι, *Κλάσματα πρὸς κοινὸν ἀνακτέα Παρονομαστὴν*, τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{8}$. Δῆλον ἐστὶ Α.′ τὸν 24 ἀριθμὸν ἐλάχιστον εἶναι, ᾧ τινι οἱ τῶν Κλασμάτων Παρονομασταὶ ἐντελῶς περιέχονται, ἑπομένως τε δι᾽ αὐτὸ τοῦτο κοινὸν Παρονομαστήν. Β.′ Γενέσθω ἡ διαίρεσις διὰ τῶν Παρονομαστῶν. ὡς ἔχουσι τάξεως, ἐπισημειουμένων τῶν Πηλίκων. Γ.′ Τῇ αὐτῇ δὲ τάξει καὶ οἱ τῶν Κλασμάτων Ἀριθμηταὶ πολλαπλασιασθήτωσαν διὰ τῶν ἀνηκόντων αὐτοῖς Πηλίκων. Τοῖς δὲ παραγομένοις, Δ.′ ὁ εὑρεθεὶς κοινὸς Παρονομαστὴς ὑπογραφήτω. Οἷον,

Β′. $2 \mid 24 \mid = 12$ Γ′. $1 \times 12 = 12$

$4 \mid 24 \mid = 6$ $3 \times 6 = 18$

$6 \mid 24 \mid = 4$ $1 \times 4 = 4$

$8 \mid 24 \mid = 3$ $5 \times 3 = 9$

Δ'. $\frac{12}{24}, \frac{18}{24}, \frac{4}{24}, \frac{9}{24}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.

§. 196. Δυσχερὲς μὲν ἐν πάντως τῇ μνήμῃ ἀριθμὸν ἀνευρίσκειν, ὡς οἷον τε ἐλάχιςον, ὃς ἅμα καὶ Παρονομαςὴς κοινὸς εἴη. Δυσχερέςατον δὲ, ὁπηνίκα οἱ τῶν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομαςαὶ, τὰ μὲν ἀρτιάριθμοι, τὰ δὲ περισσάριθμοι, τύχωσιν. Οὕτω γὰρ οἱ τηλικῦτοι Παρονομαςαὶ τηνικαῦνικαῦτα λανθάνουσιν, ὡς τέχνης δεῖν καὶ ἐπινοίας πρὸς τὴν ἐκείνων ἀνεύρεσιν. Ἀλλὰ δὴ καὶ οὕτω οὐ μικρὸν τὸ ἐπιβοήθημα ἡ ἐφεξῆς ἐπάγει Μέθοδος, καθ' ἣν Α.' τῶν Κλασμάτων τῇ τάξει γραφέντων ἀχθήτω γραμμὴ κατὰ κάθετον. Β.' Ζητηθήτω ἀριθμὸς ἐντελῶς διαιρῶν ἕνα, δύω, ἢ πλείω τῶν Παρονομαστῶν τῶν δοθέντων Κλασμάτων. Γ.' Οἱ διαιροῦντες οὗτοι ἀριθμοὶ πρὸ τῆς γραμμῆς ὑπαλλήλως ταχθέντες ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιασθήτωσαν· οὕτω γὰρ, τὸ ἐντεῦθεν ἐκκύπτον γινόμενον, τὸν αἰτούμενον δώσει κοινὸν Παρονομαστήν. Δ.' Ὁ εὑρεθεὶς κοινὸς Παρονομαστὴς διαιρεθήτω δι' ἑκάστων τῶν Παρονομαστῶν τῶν Κλασμάτων, ἐπισημειουμένων τῶν Πηλίκων. Ε.' Τὰ οὕτως εὑρεθέντα Πηλίκα πολλαπλασιασθήτωσαν ἐπὶ τοὺς ἀνήκοντας τῶν Κλασμάτων Παρονομαστάς. Ϛ.' Τοῖς παραγομένοις, ἅτινα καινοὶ εἰσὶν Ἀριθμηταὶ, τοιῷ δε τρόπῳ εὑρεθεῖσιν, ὁ κοινὸς ὑπογραφήτω Παρονομαστής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Α.' Ἔστωσαν ἀνακτέα εἰς κοινὸν ὄνομα τὰ ἐφεξῆς Κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{3}$. Ὅθεν.

	Α.'	
Β καὶ Γ	2	$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{3}$
	3	2:2, 5:5, 9:3, 3:3
	3	1 1 3:3 1
	5	1

Καν-

Κἀντεῦθεν Γ' $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90 =$ *κοινὴ Παρονομαστή.*

Ὅθεν Α' $\frac{90}{2} = 45$ *Β' καὶ* 45×1 *ς'* $= \frac{45}{90}$

$$\frac{90}{5} = 18 \; \ldots \; \text{καὶ } 18 \times 3 \; \ldots \; = \frac{54}{90}$$

$$\frac{90}{9} = 10 \; \ldots \; \text{καὶ } 10 \times 5 \; \ldots \; = \frac{50}{90}$$

$$\frac{90}{3} = 30 \; \ldots \; \text{καὶ } 30 \times 2 \; \ldots \; = \frac{60}{90}$$

Καὶ γὰρ $\frac{45}{90} = \frac{1}{2}$, $\frac{54}{90} = \frac{3}{5}$, $\frac{50}{90} = \frac{5}{9}$, $\frac{60}{90} = \frac{2}{3}$,

Β' *Ἔστωσαν αὖθις ἀνακτέα, τὰ* $\frac{3}{27}$, $\frac{4}{32}$, $\frac{4}{40}$, $\frac{3}{18}$: *Ὅθεν*:

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & \frac{3}{27}, & \frac{4}{32}, & \frac{4}{40}, & \frac{3}{18}. \\
8 & 9 & 4 & 5 & 6 \\
3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\
4 & 1 & & & 1 \\
5 & & & & \\
3 & & & & \\
2 & & & &
\end{array}$$

$$3 \times 8 \times 3 \times 4 \times 5 \times 3 \times 2 = 8640.$$

$$\frac{8640}{27} = 320 \; \ldots\ldots \; 320 \times 3 = \frac{960}{8640}$$

$$\frac{8640}{32} = 270 \; \ldots\ldots \; 270 \times 4 = \frac{1080}{8640}$$

$$\frac{8640}{40} = 216 \; \ldots\ldots \; 216 \times 4 = \frac{864}{8640}$$

$$\frac{8640}{18} = 480 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 480 \times 3 = \frac{1440}{8640}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

§. 197. *Τὴν δοθεῖσαν Μικτὴν Ποσότητα πρὸς Κλάσμα ἀναγαγεῖν ἄμικτον.*

ΛΥΣΙΣ.

Ἐφ' ᾧ ποσότης ὁλοσχερής τε καὶ κλασματώδης ἐφ' ἓν μόνον ἀναχθῇ Κλάσμα, ἀχθήτω ἡ ὁλοσχερὴς ἐπὶ τὸν τῦ Κλάσματος Παρονομαςὴν, τῷ δὲ παραγομένῳ ὁ τέτε Ἀριθμητὴς προσαθροισθήτω. Προκύψει ὅτω ὁ Ἀριθμητὴς τῦ ζητυμένυ Κλάσματος, ὁ Παρονομαςὴς ἔςαι αὐτὸς ὁ τῦ Κλάσματος τῦ δοθέντος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $11\frac{3}{5} = 11 + \frac{3}{5} = \frac{11 . 5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{55}{5} + \frac{3}{5} = \frac{58}{5}$.

Β'. 4 Ἀργ. $+ 7$ Ὀβολ. $= 4$ Ἀργ. $+ \frac{7}{40} = 4\frac{7}{40} = \frac{167}{40}$

Γ'. 3 Φιορ. $+ 7$ Κρεϊζ. $= 3$ Φ. $+ \frac{7}{60} = 3\frac{7}{60} = \frac{187}{60}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΕΝ ΓΕΝΕΙ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 155. Ἀριθμὸς Κλασματικὸς εἴτ' οὖν Κλάσμα ἐςὶ Ποσότης ὁλοσχερῦς τινος μέρος, ἢ μέρη, σημαίνουσα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 156. Μονὰς πᾶσα, εἴτ' οὖν Ποσότης οἱαποτῦν ὁλοσχερὴς, ὡς εἰς πολλὰ ἴσα μέρη διαιρετὴ θεωρεῖσθαι ἔχει. Ἐὰν τοίνυν μέρη τινὰ τῦ ὅλυ τῦτυ, εἴτ' οὖν τῆς μονάδος, ἰδίᾳ ληφθῶσι, Κλάσματα ταῦτα κληθήσονται. Οἷον, ἔςω ὅλον τι διαιρέμενον εἰς 6 ἴσα μέρη, ληφθήτωσαν δὴ μόνον 5, ἔσονται πέντε ἕκτα τῦ ὅλυ. Ἡ Μνᾶ ἐςὶν ἑξηκοςὸν μέρος τῦ Ταλάντυ, τὸ ὅλον ἄρα Τάλαντον εἰς 60 μέρη διῄρηται· ἐὰν ἤδη τύτων 45 ληφθῶσιν, ἔςαι τεσσαράκοντα πέντε ἑξηκοςά.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 157. Δύω τοίνυν ὅρυς ἕκαςον Κλάσμα ἔχειν ἐπάναγκες· τὸν μὲν, ὡς τὰ μέρη εἰς ἃ τὸ ὅλον διῄρηται προσδιορίζοντα, τὸν δὲ, ὡς τὸν τῶν λαμβανομένων μερῶν ἀριθμὸν ἐμπεριλαμβάνοντα. Οἷον, ἐν τῷ ἀνωτέρῳ ληφθέντι Παραδείγματι, ὁ μὲν 60 τὰ τῦ ὅλυ παρονομάζει μέρη, ὁ δὲ 45 τὰ λαμβανόμενα ἀριθμεῖ.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.'

§. 158. Ὅπως τοίνυν τὸ Κλάσμα καλῶς γνωσθῇ, δέον Α.' τό, τε μέρος καὶ τὸ ὅλον σημανθῆναι· οἷον εἴ τις φαίη ὀκτὼ μέρη Ἀργυρίε ἔχειν, ἐκ ἐννοεῖται ὁποῖα. εἰ δὲ προσθείη 8 μέρη Ἀργυρίε εἰς 40 ὅμοια διαιρεθέντος, εὔδηλον τηνικαῦτα ὀκτὼ τεσσαρακοστημόρια Ἀργυρίε ἔχειν, ἤτοι ἓν πεμπτημόριον, ἢ 8 ὀβολὲς. Β.' Ἐπείπερ οἱονδήποτεν τῶν μορίων πρὸς τὰ ὑπ' αὐτὸ παραβαλλόμενα μόρια ὡς ὅλον λογίζεται (§. 14.), δῆλον δίδοσθαι καὶ Κλασμάτων Κλάσματα. οἷον ὁ Ὀβολὸς τῷ μὲν Ἀργυρίῳ παραβαλλόμενος ἐςὶ μέρος, τῷ δὲ λεπτῷ, ὅλον· κἀντεῦθεν τὸ λεπτὸν ἐςὶ τῷ Ὀβολῷ, καὶ δὴ ἑτέρ ἐνως τῷ Ἀργυρίε μόριον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§.' 159. Ἥμισυ μὲν ἐςι τῶν τῆς μονάδος μερῶν εἰς ἴσα διαιρεθείσης ἑκάτερον, ὃ δὴ καὶ Ἡμίσειαν προσαγορεύομεν. Τριτημόριον, ἢ Τρίτον, τὸ ταύτης τρίτον μέρος· ὥσπερ καὶ Τεταρτημόριον, ἢ Τέταρτον· καὶ Πεμπτημόριον, ἢ Πέμπτον. τῷ δ' αὐτῷ λόγῳ καὶ Δεκατημόριον, ἢ Δέκατον· καὶ Ἑκατοςημόριον ἢ Ἑκατοςόν· καὶ Χιλιοςημόριον, ἢ Χιλιοςόν· καὶ ἑξῆς ὁμοίως τῷ τῶν μερῶν

ρῶν ἀριθμῷ φερωνύμως· εἰς ἃ ἡ μονὰς ἰσάκις, ἢ πλεονάκις, ἢ ἐλαττονάκις διήρηται, παρανομαζόμενα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 160. Ἔςι τοίνυν τὸ μὲν Ἑκατοςὸν, Δεκατημορίε Δεκατημόριον· τὸ δὲ Χιλιοςὸν, Ἑκατοςημορίε Δεκατημόριον· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως (§. 24. 25.).

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 161. Ἡ τὰ ἐν τῷ Κλάσματι διδόμενα μέρη ἐξαριθμῦσα Ποσότης, Ἀριθμητὴς ἀκέει. ἡ δὲ τὸ ὅλον εἰς μέρη εἶναι διῃρημένον δηλῦσα, Παρονομαςής· τῦδ' ἕνεκα, ὁ μὲν Ἀριθμητὴς ὕπερθεν γραφέσθω, ὁ δὲ Παρονομαςὴς ἔνερθεν γραμμιδίῳ διαςελλόμενος. Οἷον, τριτημόρια δύω ταλάντε ὕτω γραπτέον $\frac{2}{3}$ ἔνθα ὁ Παρονομαςὴς 3 σημαίνει τὸ τάλαντον εἰς τρία μέρη ἴσα διῃρεῖσθαι, ὁ δὲ Ἀριθμητὴς 2 τῶν τηλικέτων μερῶν τὰ δύω ὑποδηλοῖ, εἴτ' ἂν 40 μνᾶς.

ΣΧΟΛΙΟΝ

§. 162. Ἡ τῦ Κλάσματος ἰδέα μᾶλλον ὀναπτυχθήσεται, ἐὰν τῇ μνήμῃ παραπέμψωμεν τὰ ἐν τῇ Διαιρέσει ῥηθέντα (§. 114). Ὁπηνίκα τυτέςιν, ἐν τῇ διαιρέσει ὑπόλοιπόν τι πρὸς τὸ τέλος ἐγκαταλειφθῇ, ἐκεῖνο ἐπὶ τὴν γραμμὴν γράφεται ὑπογραφο-

μένε

μένυ τῦ διαιρέτυ. ἵν' ὅτως διασημαίνῃ, τὸ ὅλον, εἴτ' ἐν τὴν μονάδα, πλείω τῶν μερῶν, διὰ τῦ διαιρέτυ δηλόμενα (§. 161), περιέχειν, ἥπερ ἐν τῇ παρόσῃ δίδονται περιςάσει· τύτυ χάριν ἡ Διαίρεσις προσωτέρω προαχθῆναι ὐ δύναται, ἀλλὰ μόνον ἐπιδηλῦται. Ταὐτὸ δὲ καὶ ἐν τοῖς Κλάσμασι χώραν ἔχει, ἔνθα ἐλάττω τῶν μερῶν ἐκλαμβάνονται, ἥπερ τὸ ὅλον ἐν ἑαυτῷ περιέχει. Ἄρα ἐν τῇ Διαιρέσει τὸ ἐκ ταύτης ὑπόλοιπον, ὑπογραφομένυ τῦ Διαιρέτυ, ὡς Κλάσμα θεωρεῖται· κἀνάπαλιν, ἅπαν Κλάσμα ὡς Διαίρεσις θεωρεῖσθαι ἔχει, ἐν ᾗ Ἀριθμητὴς μὲν ὁ Διαιρετέος, Παρονομαςὴς δὲ ὁ Διαιρέτης.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 163. Ἀριθμὸς Ἀριθμητός ἐςιν, ᾧ κοινῶς χρώμεθα· οἷον, Ἕν, Δύω, Τρία, κ.τ.λ. Τακτὸς δὲ, ᾧ ςιχηδὸν χρώμεθα· οἷον, Πρῶτος, Δεύτερος, Τρίτος, κ.τ.λ.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 164. Ὁ Ἀριθμητὴς τοίνυν ἐκφραζέσθω τῷ Ἀριθμητῷ ἀριθμῷ, ὁ δὲ Παρονομαςὴς τῷ Τακτῷ· ἀμφότεροι δὲ ἐν ὐδετέρῳ γένει, ὥςε προσυπακύεσθαι μέρη.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 165. Κλάσματα Ὁμογενῆ εἰσὶ τὰ τὺς

παρο-

παρονομαςὰς ὁμοίως ἔχοντα· τὰ δ' ἀνομοίως, Ἑτερογενῆ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 166. Ἡ τῶν Κλασμάτων ὁμογένεια ἐκ τῆς τῶν Παρονομαςῶν ταυτότητος ἤρτηται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ μὲν γὰρ Ἀριθμητὴς μόνον μέρη ὑποποιῖ ὁ δὲ Παρονομαςὴς τὸ εἶδος (§. 161.). Μένοντος τοίνυν τῦ αὐτῦ Παρονομαςῦ, τὸ αὐτὸ εἶδος διέμεινεν, ἑπομένως τε τὰ Κλάσματα ὁμογενῆ ἔςαι. Διαφερόντων δὲ πρὸς ἀλλήλως τῶν Παρονομαςῶν, εἴτ' ὂν ἑτερωνύμων ἀποβάντων, καὶ τὰ εἴδη ὁμοίως διάφορα ἔςαι, ἑπομένως καὶ τὰ Κλάσματα ἑτερογενῆ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

§. 167. Τὸ Κλάσμα τοσάκις ἐμπεριέχεται τῷ ὅλῳ, εἴτ' ὂν τῇ μονάδι, ὁσάκις ὁ Ἀριθμητὴς τῷ Παρονομαςῇ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ μὲν γὰρ Παρονομαςὴς τόσας ἑαυτῷ μονάδας ἐμπεριείληφεν, ὅσα μέρη ἴσα τὸ ὅλον ὁ δ' Ἀριθμητὴς τινὰ μόνον ἐξ ἐκείνων ὑποσημαί-

νει

νει (§. 161.). Ἔςι δὲ το ὅλον κλάσμα ὁ αὐτὸς τῶν μερῶν ἀριθμὸς, τῶν ἐκ τȣ̃ ὅλȣ λαμβανομένων· τὰ ληφθέντα γȣ̃ν μέρη ἐςὶν ὁ, τε Ἀριθμητὴς καὶ τὸ Κλάσμα, τὰ δὲ μέρη αὐτὰ ὅ, τε Παρονομαςὴς καὶ τὸ ὅλον, εἴτ' ȣ̃ν ἡ μονάς. Ἄρα, τοσάκις τὸ Κλάσμα ἐν τῷ ὅλῳ, εἴτ' ȣ̃ν ἐν τῇ μονάδι, περιέχεται, ὁσάκις ὁ Ἀριθμητὴς ἐν τῷ Παρονομαςῇ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 168. Ἔχει τοίνυν ἡ μονὰς πρὸς τὸ Κλάσμα, ὡς ὁ Ἀριθμητὴς πρὸς τὸν Παρονομαςὴν (§. 103.)· ἢ, ὃ ταὐτόν ἐςιν, ἡ μονὰς πρὸς τὸ Κλάσμα, ἤτοι τὸ ὅλον πρὸς τὸ μέρος, ὡς ὁ Παρονομαςὴς πρὸς τὸ αὐτὸ, εἴτ' ȣ̃ν πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν· οἷον, $1 : \frac{3}{4} = 3 . 4$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 169. Ἐὰν μὲν ὁ Ἀριθμητὴς ἴσος ᾖ τῷ Παρονομαςῇ, τὸ Κλάσμα $\frac{4}{4}$ ἰσοδυναμεῖ τῷ ὅλῳ. Ἐὰν δ' ἐλάττων, τὸ Κλάσμα $\frac{3}{4}$, ἔλαττόν ἐςι τȣ̃ ὅλȣ. Ἐὰν δὲ μείζων, τὸ Κλάσμα $\frac{5}{4}$, τȣ̃ ὅλȣ, εἴτ' ȣ̃ν τῆς μονάδος μεῖζόν ἐςι.

ΔΕΙ-

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ μὲν γὰρ Παρονομαςὴς ἐμφαίνει τὴν μονάδα, εἴτ' ἂν τὸ ὅλον εἰς ἴσα μέρη, οἷον, ἐν τῇ καθ' ἡμᾶς περιςάσει, εἰς 4 διῃρημένον, ὁ δὲ Ἀριθμητὴς ἀριθμεῖ τῶν τοιέτων μερῶν τὰ ἐν ὑποθέσει τινὶ δοθέντα (§. 161.). Ἐὰν μὲν οὖν ὁ Ἀριθμητὴς ἴσος τῷ Παρονομαςῇ, ἐξ ὑποθέσεως, τύχῃ, τοσαῦτα δίδονται μέρη, ὅσα τὸ ὅλον ἔχει. Ἄρα τὸ Κλάσμα τῷ ὅλῳ ἴσον (§. 47.). Ὅ ἦν τὸ α. Ἐὰν δὲ ὁ Ἀριθμητὴς ἐλάττων ἢ ἐξ ὑποθέσ. τῦ Παρονομαςῦ, τινὰ γῦν δίδονται μέρη τῦ ὅλυ, ὁ μὴν δὲ πάντα. Ἄρα τὸ Κλάσμα τισὶ μόνον μέρεσι τῦ ὅλυ ἴσον ἐςὶ, καὶ ἑπομένως τῦ αὐτῦ ἔλαττον (Αὐτ.). Ὅ ἦν τὸ β. Ἐὰν δὲ τελευταῖον ὁ Ἀριθμητὴς μείζων ᾖ τῦ Παρονομαςῦ ἐξ ὑποθ. πλείω δίδονται μέρη, ἤπερ τὸ ὅλον ἔχει. Ἀλλαμὴν τοσαῦτα μέρη, ὅσα τῷ ὅλῳ ἔνεισιν, αὐτῷ τύτῳ τῷ ὅλῳ ἴσα εἰσὶν (Αὐτ.) Ἄρα τὸ ὅλον μέρει τῦ Κλάσματος ἐςὶν ἴσον, καὶ ἑπομένως, τὸ Κλάσμα τῦ ὅλυ μεῖζον. Ὅ ἦν τὸ γ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 170. Ἴσα μὲν τοίνυν Κλάσματα εἰσὶν, ὧν οἱ Παρανομαςαὶ ἴσως τοῖς ἑαυτῶν Ἀριθμηταῖς ἐμφαίἐμπεριέχονται, ὡς $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{4}{8}$, ὡσαύτως $\frac{8}{24}$ καὶ $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{99}{270}$ Ἐλάττω δὲ, ὃ ὁ Ἀριθμητὴς πολλάκις τῷ ἑαυτῦ Παρονομαςῇ ἐμπεριέχεται, ἤπερ ὁ τῦ ἑτέρυ Ἀριθμητὴς ἐν τῷ ἑαυτῦ Παρονομαςῇ, ὅτω $\frac{2}{6}$ μεῖζον ἐςὶ τῶν $\frac{3}{24}$ Κἀντεῦθεν ῥαδίως ἡ τῶν Κλασμάτων ἰσότης τε ἣ διαφορὰ προσδιορίζεται, εὐθέως ἡ διαγινωσκομένη. Τῶν γὰρ Ἀριθμητῶν ἐπὶ τὺς Παρονομαςὰς πολλαπλασιαζομένων, ἐὰν τὰ ἐντεῦθεν ἀναδιδόμενα ἴσα ὦσι, καὶ τὰ Κ' 'ματα ἴσα ἔσονται· ὁ τινος δὲ Ἀριθμητῦ, ἐπὶ τὸν τῦ ἑτέρυ Παρονομαςὴν, γινόμενον μεῖζον ἐςὶ, καὶ τὸ Κλάσμα ὡσαύτως μεῖζον ἔςαι. Οὕτω $\frac{8}{24}$ καὶ $\frac{1}{3}$ ἴσα εἰσὶν, ὅτι καὶ τὰ τῶν Ἀριθμητῶν ἐπὶ τὺς Παρονομαςὰς γινόμενα ἴσα ἐςί· $\frac{5}{8}$ δὲ μεῖζον ἐςὶ τῶν $\frac{4}{7}$, ὅτι $5 \times 7 = 35$, καὶ $4 \times 8 = 32$, ἔςι δὲ $35 > 32$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 171. Κλάσμα **Κύριον**, ἢ **Γνήσιον** ἀκύει, τὸ Ἀριθμητὴν ἐλάττω τῦ Παρονομαςῦ ἔχον. **Ἄκυρον** δὲ, ἢ **Νόθον**, τὸ μεῖζω. Καλεῖται δὲ, ἐκεῖνο μὲν **Κανονικὸν**, τῦτο δὲ **Ἀτακτὸν**.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 172. Κυριολεκτῦσιν ἄρα ἡμῖν, ὐκ εἰσὶν ἄλλα Κλάσματα, ὅτι μὴ τὰ τῦ ὁλοσχερῦς ἐλάττω.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

173. Τὸ τῦ ὁλοσχερῦς μεῖζον Κλάσμα, οἷον $\frac{8}{4}$, πόσα περιέχει τῶν ὁλοσχερῶν εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Διαιρεθήτω ὁ Ἀριθμητὴς διὰ τῦ Παρονομαςῦ. Φημὶ δὴ τὸ πηλίκον ἐμφαίνειν τὸ ζητέμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ γὰρ πηλίκον 2 ἐμφαίνει ποσάκις ὁ Παρονομαςὴς 4 τῷ Ἀριθμητῇ 8 ἐμπεριειλημμένος (§. 103.). Ἀλλαμὴν ὁ Παρονομαςὴς ὁ αὐτὸς ἐςὶ τῷ ὁλοσχερεῖ (§. 161.). Ἅμα τὸ πηλίκον ἐμφαίνει ποσάκις ὁ ὁλοσχερὴς ἐν τῷ Κλάσματι περιέχεται. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

§. 174. Ἐν τοῖς μὴ κυρίοις τοίνυν Κλάσμασιν ἀεί ποτε τὸ ὅλον λαθραίως ἐμπεριέχεται, ὅπερ διαγινώσκεται τῇ τῦ Ἀριθμητῦ διὰ τῦ Παρονομαςῦ διαιρέσει. Καὶ γὰρ, ἐὰν μὲν ὁ Ἀριθμητὴς ἴσος ᾖ τῷ Παρονομαςῇ, τὸ Κλάσμα ἰσοδυναμεῖ τῷ ὅλῳ (§. 169.). Ἐὰν δὲ δὶς ἐπαυξῇ, καὶ τὸ δι' ἐκείνε δηλέμενον ποσὸν διπλασιασθήσεται, ἤτοι ἰσοδυναμήσει δυσὶν ὁλοσχερέσιν. Ἐὰν δὲ τρὶς, τρισί· καὶ ἐφεξῆς ὕτω. Ὅσῳ τοίνυν ὁ Ἀριθμητὴς μείζων ἐςὶ τῦ Παρονομαςῦ,

μαςῦ,

μασῦ, τοτέτῳ πλείω ἐκείνῳ ἔνεισιν ὁλοσχερῆ. Ἀλλ' ἐν τὰ τῆς μονάδος ἀριθμέμενα μέρη, ὅσα θατέρα τῶν ποσοτήτων ἔνεισιν, ὅτι μὴ διὰ τῆς διαιρέσεως διαγινώσκεται (§. 173.). Ἄρα ὁ Ἀριθμητὴς διὰ τῦ Παρονομαςῦ διαιρέμενος τὰ ἐν αὐτῷ ἀναδίδωσιν ὁλοσχερῆ· Ἐὰν δὲ ὁ Ἀριθμητὴς ἡμισείων ᾖ τῦ Παρονομαςῦ, καὶ τὸ Κλάσμα ἡμισυνθήσεται, εἴτ' ἂν ἰσοδυναμήσει τῷ ἡμίσει, ὡς $\frac{5}{10}$.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 175. Πᾶς ἀριθμὸς, ὡς Κλάσμα ὑπὸ τῆς μονάδος παρονομαζόμενον, ἐννοείσθω. Οἷον $6 = \frac{6}{1}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 176. Κλάσμα Ἁπλῦν ἐςὶ τὸ Ἀριθμητήν τε μόνον καὶ Παρονομαςὴν ἔχον. Σύνθετον δὲ, ὃ καὶ Κλάσμα Κλάσματος ἀκύει, τὸ ἐκ πολλῶν ἁπλῶν συγκείμενον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 177. Ἁπλῦν μὲν ἐςὶν, ὡς $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{12}{13}$. Σύνθετον δὲ (§. 158) ὡς $\frac{2}{3}$ ἀπὸ $\frac{1}{2}$, οἷον ἀπὸ ἡμίσεως Ἀμφορέως οἴνȣ ληπτέον δύω τριτημόρια. Ὡσαύτως καὶ $\frac{2}{10}$ ἀπὸ $\frac{1}{6}$ τῦ Ἀργυρίȣ, εἴτ' ἂν δύω ὀβολοί. $\frac{1}{6}$ γὰρ Ἀργυρίȣ, ἓν ἐςὶ Δενάριον. Δεναρίȣ δὲ δύω δέκατα, ὀβολοὶ εἰσὶ δύω. Ναὶ μὴν καὶ $\frac{4}{5}$ ἀπὸ

$\frac{2}{3}$ Θαλήρου, ἤτοι τὸ τριτημόριον ἀπὸ $\frac{3}{4}$ Θαλήρου δίς, τοῦτ' ἔστιν $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Ἓν γὰρ τεταρτημόριον Θαλήρου Γρόσσοι εἰσὶν 6, τρία δὲ τεταρτημόρια ἀποτελοῦσι γρόσσους 18, ὧν τὰ $\frac{2}{3}$ Γρόσσοι εἰσὶ 12. Ἵν' οὖν ἡ δύναμις τῶν τοιούτων Κλασμάτων ὁρισθῇ, εἰς χρῆσιν ἥκει ὁ Πολλαπλασιασμὸς, περὶ οὗ ἐν τῷ ἐφεξῆς Κεφαλαίῳ. Εἴωθε δὲ τὸ Σύνθετον Κλάσμα, ὡς $\frac{15}{12}$, εἰς τοὺς ἐν αὐτῷ ἁπλουστέρους παράγοντας ἀναλύεσθαι, οὕτω. $\frac{15}{12} = \frac{3.5}{2.2.3} = \frac{5}{2.2}$ ἐφ' ᾧ πρὸς ἐλάττονας ἐκεῖνο ἀναχθῇ ὅρους (§. 156.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 178. Κλάσμα **Μικτόν** ἐστι, τὸ ἐξ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ συνεστηκὸς καὶ Κεκλασμένου.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 179. Τοιαῦτά εἰσι τὰ ἐφεξῆς $8\frac{1}{4}$, $\frac{7\frac{2}{3}}{18}$, $\frac{8}{4\frac{2}{3}}$, $\frac{4\frac{2}{7}}{9\frac{1}{3}}$. Δηλοῖ δὲ τὸ μὲν $\frac{7\frac{2}{3}}{18}$, τὴν ὡς βάσιν ἐκλαμβανομένην μονάδα εἰς 18 ἴσα διῃρεῖσθαι μέρη, ὧν ὁ ἐκληφθησόμενος ἀριθμὸς Κλασματῶδες ἑκάστου μέρος ἐμπεριείληφε. Τὸ δὲ $\frac{8}{4\frac{2}{3}}$, τὴν μονάδα διττῶς διαιρουμένην παρίστησι, εἰς 4 δηλαδὴ ἴσα καὶ 2 ἐλάττω, ὧν ἕκαστον $\frac{2}{3}$ ἑνὸς ἑκάστου τῶν 4 ἰσοῦται· ἀπὸ δὲ τῶν 4 ἴσων μερῶν τὰ τοῦ Ἀριθμητοῦ 8 ληπτέα. Διὰ δὲ τοῦ $\frac{4\frac{2}{7}}{9\frac{1}{3}}$ ἡ μονὰς εἰς 9 ἴσα διῄρηται μέρη $\frac{1}{3}$ προσκειμένου ἔχοντα.

τα. Ἐμπεριείληφε δὲ ὁ τούτε Ἀριθμητὴς ἐν τῶν 9 μερῶν 4 $\frac{2}{7}$ ἄκις. Ἀλλ' ὅν ἡ τοιαύτη τῶν Κλασμάτων διπλόη πρὸς ἁπλότητα ἀνάγεται διὰ τῦ ἀμοιβαίε πολλαπλασιασμῦ τῶν τοῖς Κλάσμασιν ἐμπεριεχομένων Παρονομαςῶν μετὰ τῦ ἐξ ἐκείνων πρώτως προκύπτοντος γινομένη, καὶ μετὰ τῶν λοιπῶν Παρονομαςῶν ὡσαύτως· Οἷον, $\frac{7\frac{2}{5}}{18}=\frac{37}{90}$, $\frac{8}{4\frac{2}{3}}=\frac{24}{14}=\frac{12}{7}$, $\frac{4\frac{2}{3}}{9\frac{1}{3}}=\frac{150}{322}=\frac{75}{101}$. Ὡσαύτως ἐςαι καὶ $\frac{7}{\frac{2}{3}}=\frac{21}{2}$. Καθ' ἃ δὴ, τιθεμένε τῦ Ἔτυς 365¼ ἡμερῶν, τῦ δὲ Μηνὸς 29½, ἔςαι ὁ Μὴν $=\frac{29\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4}}$ τῦ Ἔτυς.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 180. **Ἀμφοῖν τῶν τῦ Κλάσματος ὅρων, τῦ τε Ἀριθμητῦ δηλαδὴ καὶ τῦ Παρονομαςῦ, διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιαζομένων, ἢ διαιρεμένων, ἡ τῦ Κλάσματος δύναμις ἀμεταποίητος σώζεται, ἤτοι Κλάσμα ἐκκύπτει τῷ δοθέντι ἰσοδυναμῦν.**

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῦ μὲν γὰρ Ἀριθμητῦ πολλαπλασιαζομένε, τὸ Κλάσμα ἐπιμεγεθύνεται ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῷ πολλαπλασιαςῇ μονάσιν οἷον $\frac{3 \cdot 2}{5}=\frac{6}{5}$, ἥτις δὴ

πο-

ποσότης ἐν διπλῷ μείζων τῆς προτέρας ἐξέκυψεν, ὡς πλείσων μερῶν ἐκληφθέντων (§. 79.). Πολλαπλασιαζομένου δὲ τοῦ Παρονομαστοῦ, τὸ Κλάσμα ἐπιμειοῦται κατὰ τὰς ἐν τῷ πολλαπλασιαστῇ περιεχομένας μονάδας· οἷον $\frac{6}{5.2}=\frac{6}{10}$ ποσότητι Κλασματώδει ἐν διπλῷ τῆς προτέρας ἐλάσσονι, ὡς τῶν τοῦ αὐτοῦ ὁλοσχεροῦς μερῶν, πλείσων μὲν, ἐλαχίσων δ' ὂν ἀποβάντων. Ἄρα τὸ Κλασματῶδες ποσὸν $\frac{3}{5}\times\frac{2}{2}=\frac{6}{10}$, ἴσως ἐπαύξει τε καὶ ἐπιμειοῦται. Ὃ ἦν τὸ α'. Διαιρουμένου ἀλλ' ὂν τοῦ Ἀριθμητοῦ, τοσάκις ἡ ποσότης ἠλάττωται, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ διαιρέτῃ ἐμπεριείληπται (§ 99.) Οἷον $\frac{6:2}{10}=\frac{3}{10}$ τῷ τοῦ προτέρου ἡμίσει. Ὡσαύτως δὴ καὶ τοῦ Παρονομαστοῦ διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος 2 διαιρεθέντος, ποσότης ἐν διπλῷ μείζων ἀνέκυψεν, ἤτοι $\frac{3}{10:2}=\frac{3}{5}$ - τρία γὰρ πεμπτημόρια, διπλασίως τῶν τριῶν δεκατημορίων πεφύκασι μείζω. Τῶν τοῦ Κλάσματος τοίνυν ὅρων διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος 2 διαιρουμένων, τὸ Κλάσμα ἴσως τε καὶ τῷ αὐτῷ λόγῳ αὔξει τε καὶ φθίνει, ἄρα οὐδεμίαν ὑφίσαται ἀλλοίωσιν· καὶ γὰρ $\frac{6}{10}:\frac{2}{2}=\frac{3}{5}$, ἑπομένως τε Κλάσμα ἐκκύπτει τῷ δοθέντι ἰσοδυναμοῦν. Ὃ ἦν τὸ β'.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 181. Ἐντεῦθεν τοίνυν δηλᾶται, ὅπως διάφορα Κλάσματα, εἰ καὶ μείζοσιν ἀριθμοῖς ὑποτετυπώμενα, ἰσοδυναμᾶσιν ἀλλ' ἐν Κλάσμασιν ἐλαχίςων ὅρων, καὶ πρὸς ἐκεῖνα ἀναχθῆναι ἔχεσιν, εἰ κοινὸς καὶ μέγιςος εὑρεθείη παράγων, ἀκριβῶς τόν τε Ἀριθμητὴν καὶ τὸν Παρονομαςὴν διαιρῶν· Ὁ δὲ τοιᾶτος κοινὸς παράγων **Κοινὸν μέγιςον Μέτρον**, καλεῖσθαι ἠξίωται (§. 151.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 182. **Τῦ δοθέντος Κλάσματος τὸ μέγιςον κοινὸν Μέτρον προσανευρεῖν.**

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Διαιρεθήτω ὁ Παρονομαςὴς διὰ τῦ Ἀριθμητῦ, ἐὰν μὲν ὐδὲν τὸ ὑπόλοιπον ᾖ, ὁ Ἀριθμητὴς τὸ κοινὸν ἔςαι μέτρον. Οὕτως ἐπὶ τῦ $\frac{7}{56}$, ἐπεὶ ὁ 56 διὰ τῦ 7 διαιρέμενος ὐδὲν καταλείπει ὑπόλοιπον, ὁ 7 τὸ κοινὸν ἐςὶ μέτρον. Ἐὰν δὲ, Β.' μετὰ τὴν πρώτην διαίρεσιν ὑπολείπηταί τι, ὕτως ἡ διαίρεσις συνεχισθήτω, ὥςε τὸν πρότερον διαιρέτην, διαιρετέον ἐφεξῆς γίνεσθαι, τὸ δὲ ὑπόλοιπον διαιρέτην. Τῦτο δὲ ἐπὶ τοσῦτον τέως διαπραχθήτω, ἕως ἂν ὐδὲν μένῃ ὑπόλοιπον· ὗτινος ἐκληφθέντος, ὁ ἔσχατος διαιρέτης τὸ κοινὸν ἀείποτ' ἐςαι μέτρον τῦ δοθέντος Κλάσματος. Ἐὰν δ' ἐπὶ μονάδα, καταντήσωμεν δῆλόν ἐςι, τὸ δοθὲν Κλάσμα ὐδέν τι ἕτερον, παρὰ τὴν μονάδα, κοινὸν ἔχειν μέτρον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Εὑρεθήτω τὸ μέγιςον κοινὸν μέτρον τῦ Κλασματος $\frac{107}{428}$. Ὅθεν $\begin{array}{r|r|l} 107 & 428 & 4 \\ & 428 & \\ \hline & 0 & \end{array}$. Ἐςιν ἄρα ὁ 107 ὁ κοινὸς διαιρέτης,

καὶ $\frac{107}{428} = \frac{1}{4}$.

Β'. Εὑρεθήτω τὸ κοινὸν μέτρον τῦ Κλάσματος $\frac{65}{104}$ τοίνυν,

$$\overbrace{104 : 65}^{1} \overbrace{: 39}^{1} \overbrace{: 26}^{1} \overbrace{: 13}^{2}$$

$$\begin{array}{cccc} 65 & 39 & 26 & 26 \\ \hline 39 & 26 & 13 & 0 \end{array}$$

Εἴτ' ὂν 104 ; 65 δίδωσι 39 ὑπόλοιπον, 69 : 39 δίδωσι 26 ὑπόλοιπον. 39 : 26 ὑπόλοιπον δίδωσι 13, ὁ δὴ ἐντελῶς τὸν 26 καταμετρῶν ἐπὶ 2, τὸ κοινὸν ἐςὶ μέτρον τῦ δοθέντος Κλάσματος.

$$\text{Ἄρα } \frac{65}{104} = \frac{65 : 13}{104 : 13} = \frac{5}{8}.$$

Γ'. Εὑρεθήτω τὸ κοινὸ. μέτρον τῦ Κλάσματος $\frac{361}{1495}$. Ὅθεν ἔςω.

149

```
   4      7      12    1    3
1495 : 361  : 51 : 4  : 3  : 1
1444   357    48   3    3
----   ---    --   -    -
  51     4     3   1    0
```

Ἄρα οἱ ἀριθμοὶ 361 καὶ 1495 παρὰ τὴν μονάδα ὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχυσιν μέτρον, ἑπομένως τε εἰσὶ Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλυς (§. 130.). ***Καὶ τῦτο τεκμήριον, τῦ μηδὲν ἔχειν τὸ Κλάσμα ἐπ' ἔλαττον ἀνάγεσθαι ὄνομα. ὅτι ἡ μονὰς ἥκιςα διαιρεῖ*** (§. 110.)· ***Τοιῦτοι καὶ οἱ τῦ ἐφεξῆς εἰσὶ Κλάσματος*** $\frac{541}{843}$. ***Ἐπεὶ·***

```
α) 541|843|1
      |541|
      -----
   β) 302 |541| 1
          |302|
          -----
      γ) 239|302|1
             |239|
             -----
         δ)  63|239|3
                |189|
                -----
            ε)  50|63|1
                   |50|
                   ----
               ζ) 13|50|3
                     |39|
                     ----
                  η) 11|13|1
                        |11|
                        ----
                     θ)  2|11|5
                           |10|
```

 ι) ι

$$\iota)\ 1 \left| \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \right.$$

$$\text{Ἄρα}\ \frac{541\ :\ 1}{843\ :\ 1} = \frac{541}{843}.$$

Δ'. Εὑρεθήτωσαν ὡσαύτως καὶ τῶν ἑφεξῆς Κλασμάτων τὰ μέγιστα κοινὰ μέτρα· Ἔσαι δὴ ταῦτα εὑρεθέντα.

$\alpha)\ \frac{456}{1406} : \frac{38}{38} = \frac{12}{37}.\ \ \beta)\frac{252}{315} : \frac{63}{63} = \frac{4}{5},$

$\gamma)\frac{189}{513} : \frac{27}{27} = \frac{7}{19}.$

ΔΕΙΞΙΣ.

Ο κοινὸς παράγων, ὁ τόν τε διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐντελῶς διαιρῶν, τὸ κοινὸν ἐςὶ μέτρον· ἀλλὰ τῷ τρόπῳ τέτῳ ὁ κοινὸς ἐξευρίσκεται παράγων, ἡ γὰρ διαίρεσις διαλύει τὸ ὑπὸ τῦ πολλαπλασιασμῦ συντεθέν. Ἔνθεν τοι, ἐπεὶ ὁ ἔσχατος διαιρέτης, διαιρέτης ἅμα τῦ προηγεμένε ἐςὶ διαιρέτε, ἕτος τε αὖθις τῦ πρὸ αὐτῦ· ὅτω δὴ πρόσω χωρῦντες, τέως καὶ ἐπὶ τὸν πρῶτον, εἶτ' ὖν ἐπ' αὐτὸν τὸν Ἀριθμητὴν ἀφιξόμεθα, ὃς ἅμα τῦ Παρονομαςῦ ἐςὶ διαιρέτης· τεκμήριον ἐςὶ, τὸν ἔσχατον διαιρέτην, ἕνα τῶν παραγόντων εἶναι, τῶν ἐντελῶς τόν τε Ἀριθμητὴν καὶ τὸν Παρονο-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΝ ΑΡΙΘΜΟΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙΣ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

§. 198. **Τὰ δοθέντα ὁποιαδηποτοῦν Κλάσματα προσθεῖναι.**

ΛΥΣΙΣ

Α'. Τὰ μὲν πρὸς τὴν αὐτὴν ἀναφερόμενα μονάδα Κλάσματα, ἤτοι τὰ Ὁμογενῆ, ὧν Παρονομασταὶ οἱ αὐτοὶ, προστίθενται ἀλλήλοις, τῶν μὲν Ἀριθμητῶν ἐν κεφαλαίῳ ἐπαθροιζομένων, τοῦ δὲ Παρονομαστοῦ τηρουμένου. *Β'.* Τὰ δὲ πρὸς ἑτέραν ἀναφερόμενα μονάδα, ἤτοι τὰ Ἑτερογενῆ, ὧν οἱ Παρονομασταὶ διάφοροι, συνάπτονται, ἐπὶ τὸ αὐτὸ πρότερον ἀναγόμενα ὄνομα (§. 194.), τῶν ἐντεῦθεν προκυπτόντων Ἀριθμητῶν συμπροσαθροιζομένων, καὶ τοῦ κοινοῦ Παρονομαστοῦ ὑπογραφομένου, ὡς εἴρηται·

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{6}{7}+\frac{17}{7}=2\frac{5}{7}$.

Β. $\frac{3}{18}+\frac{6}{18}+\frac{9}{18}+\frac{13}{18}+\frac{15}{18}=\frac{46}{18}=2\frac{10}{18}$.

Γ. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}=\frac{70+84+90}{105}=\frac{244}{105}=2\frac{34}{105}$

Δ'.

Δ' $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{40+45+24}{60}=\frac{109}{60}=1\frac{49}{60}$.

E' $\frac{7}{8}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{7}{12}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+\frac{19}{24}$

$=\frac{21+16+12+14+20+18+19}{24}=\frac{120}{24}=5.$

ΔΕΙΞΙΣ.

Δῆλόν ἐςι τὰς Ἑτερωνύμως ποσότητας ὡς $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{5}$ ἐν ἑνὶ ποσῷ συγκεφαλαιωθῆναι μὴ δύνασθαι· καὶ γὰρ τηνικαῦτα τὸ ἐκκύπτον Κλασματικὸν ἄθροισμα ὔτε τριτημόρια, ὔτε μην πεμπτημόρια δηλώσει. Ἔνθεν τοι εἰς ὁμωνυμίαν ἀναγόμεναι ὑπὸ κοινῷ Παρονομαςῇ γνωσθήτωσαν (§. 194.). Ἐπεὶ δὲ οἱ Παρονομαςαὶ ἐπωνυμίαι εἰσὶ τῶν μονάδων, ἐξ ὧν οἱ Ἀριθμηταὶ σύγκεινται, τῦθ᾽ ἕνεκα οἱ Ἀριθμηταὶ μόνον συνάπτονται, καὶ τῷ ἀθροίσματι ὁ κοινὸς ὑπογράφεται Παρονομαςής.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 199. Τὰ ἀριθμοῖς ὁλοσχερέσι σύμμικτα Κλάσματα διττῶς ἀλλήλοις προςίθεσθαι ἔχυσι. Α.' Ἐὰν οἵ τε ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ καὶ οἱ Κλασματίαι ἰδίᾳ συναφθέντες, ἐν ἑνὶ εἶτα ἀθροισθῶσι κεφαλαίῳ. Β.' Ἐὰν οἱ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ, εἰς Κλάσμα μικτὸν μεταποιηθέντες, ἐν ἑνὶ προςεθῶσι σι κεφαλαίῳ, διὰ τῦ κοινῦ εἶτα Παρονομαςῦ διαιρημένῳ. Εἰ δέ τινα τῶν Κλασμάτων Ἑτερογενῆ τύχοιεν, ἐπὶ τὸ αὐτὸ πρότερον ἀναχθήτωσαν ὄνομα (§. 198.).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α.' $2\frac{3}{5}+4\frac{2}{5}+6\frac{3}{5}=1+4+6+\frac{3+2+3}{5}=12+\frac{8}{5}=12+1\frac{3}{5}=13\frac{3}{5}$. Τῷ ὁλοσχερεῖ κεφαλαίῳ

Β.' $2\frac{3}{5}+4\frac{2}{5}+6\frac{3}{5}=\frac{13}{5}+\frac{22}{5}+\frac{33}{5}=\frac{68}{5}$

$=13\frac{3}{5}$.

Γ.' $3\frac{2}{5}+4\frac{2}{3}=\frac{17}{5}+\frac{14}{3}=\frac{51+70}{15}=\frac{121}{15}$

$=8\frac{1}{15}$.

Δ.' $3\frac{2}{3}+7\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=3+7+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$:

$=10+\frac{12+15+20}{30}=10+\frac{47}{30}=11\frac{17}{30}$.

Ε.' $3\frac{2}{3}+6\frac{5}{6}+7\frac{3}{4}+8\frac{1}{2}=26+\frac{8+10+9+6}{12}=26+\frac{33}{12}=28\frac{3}{4}$.

ϛ.' Ἐρώ

ϛ'. *Ἐρώτησις.* Ὑπὲρ Ἱματισμοῦ τινος Στρατιωτικοῦ ἀπαιτοῦνται, ὑπὲρ μὲν τοῦ Ἐπενδύτου πήχεις $2\frac{1}{6}$, ὑπὲρ δὲ τοῦ Περιστηθίου $\frac{3}{4}$ πήχεως, ὑπὲρ δὲ τῶν Ἀναξυρίδων $\frac{7}{8}$ πήχ. Πόσον ταῦτα ὁμοῦ ποιοῦσι;

Ἀπόκρισις. $2\frac{1}{6}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}=2\frac{4}{24}+\frac{18}{24}+\frac{21}{24}$ $=2\frac{43}{24}=3\frac{19}{24}$ πήχεως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 200. **Τὸ δοθὲν Κλάσμα ἀφ' ἑτέρου Κλάσματος ἀφελεῖν.**

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Τῶν μὲν ἐπὶ τὴν αὐτὴν μονάδα ἀναφερομένων Κλασμάτων, ἤτοι τῶν Ὁμογενῶν, ἡ διαφορὰ λαμβάνεται, ἀφαιρουμένου τοῦ ἥττονος Ἀριθμητοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ Παρονομαστοῦ τηρουμένου. Τῶν δ' ἐπὶ μονάδα διάφορον, ἤτοι τῶν Ἑτερογενῶν, ἐπὶ τὴν αὐτὴν πρότερον ἀναχθέντων παρονομασίαν, ἀφαιρεθήτω ὁ θατέρου Ἀριθμητής, ἤτοι ὁ τοῦ Ἀφαιρετέου, ἀπὸ τοῦ ἑτέρου, ἤτοι ἀπὸ τοῦ Μειωτέου, τῇ δὲ Διαφορᾷ ὁ κοινὸς Παρονομαστὴς ὑπογραφήτω.

ΠΑ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Α'. $\frac{6}{8} - \frac{4}{8} = \frac{6-4}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Β'. $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$.

Γ'. $\frac{2}{3} - \frac{4}{7} = \frac{14-12}{12} = \frac{2}{21}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ διαφόρου Παρονομασίας Κλάσματα, εἴτ' οὖν τὰ Ἑτερογενῆ, ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεθῆναι οὐκ ἔχουσιν, ἀνακτέα ἄρα πρὸς κοινὸν Παρονομαστήν. Ἐπεὶ δὲ ἐν τῇ Ἀφαιρέσει ἡ τῶν μερῶν ζητεῖται Διαφορὰ, ὁ τῶν μερῶν ἐλάττων ἀριθμὸς εἴτ' οὖν ὁ ἐλάττων ἀριθμητὴς, ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθήτω.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 201. Τὸν μὲν οὖν μείζω ἀριθμὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἀφελεῖν ἀδύνατον, ἀφαιρεῖται δὲ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ἥ τε ἔλλειψις τῷ ἀποφατικῷ σημείῳ — ἐπισημαίνεται, ὡς ἐπὶ τοῦ ἐφεξῆς Παραδείγματος.

$$\frac{5}{12} - \frac{3}{12} - \frac{8}{12} = \frac{5}{12} - \frac{11}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 202. Κλασμάτων Συμμίκτων διδομένων,

διτ-

διττῶς τὰ τῆς Πράξεως γίνεται. Α.' Τῶν μὲν ὁλοσχερῶν ἀπὸ τῶν ὁλοσχερῶν καὶ τῶν Κλασματικῶν ἀπὸ τῶν Κλασματικῶν ἀφαιρεμένων, τῶν δὲ Διαφορῶν εἶτα συναπτομένων. Β.' Τῶν τοιέτων Κλασμάτων ἐπὶ Νόθων μεταποιεμένων (§. 197.), καὶ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεμένων, τὸ Ὑπόλοιπον διὰ τὲ Παρονομαςἒ, εἰ δυνατὸν, διαιρεθήτω. Εἰδὲ τινα τῶν Κλασμάτων Ἑτερογενῆ τύχοιεν, πρὸς Ὁμογενῆ πρότερον μετασχηματισθήτωσαν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Α.' $4\frac{2}{3} - 2\frac{1}{3} = 4 - 2 + \frac{2-1}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Ὡσαύτως καὶ $5\frac{6}{7} - \frac{2}{7} = 5\frac{4}{7}$.

Β.' $6\frac{3}{4} - 5\frac{1}{4} = \frac{27}{4} - \frac{13}{4} = \frac{14}{4} = 3\frac{2}{4}$.

Γ.' $3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} = \frac{7}{2} - \frac{9}{4} = \frac{28}{8} - \frac{18}{8} = \frac{10}{8}$

$= 1\frac{2}{8} = 1\frac{1}{4}$.

Δ.' $5\frac{3}{4} - 3\frac{2}{3} = 5 - 3 + \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = 2\frac{1}{12}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.'

§. 203. Ὡς τὰ πολλὰ συμβαίνει Κλάσμα Γνήσιον ἀπὸ ἀριθμἒ ὁλοσχερἒς ἀφελεῖν, τότε χάριν τὰ ἐφεξῆς τηρήσθωσαν. Α.' Ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς μόναδι νάδι ἐλαττωθήτω. Β.' Ἡ μονὰς αὕτη ἐν εἴδει Νόθε Κλάσματος ἐκτεθήτω, μονάδος ὑπογραφομένης (§. 175.). Γ.' Τῷ μονάδι ἐλαττωθέντος ἀριθμῷ ἐν μέρει ἀποτεθέντος, γενέσθω τῶν Κλασμάτων πρὸς κοινὸν Παρονόμαςὴν μεταγωγή. Δ.' Τῶν καινῶν τέτων Κλασμάτων ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεθέντων, τὸ ὑπόλοιπον τῷ μονάδι ἐλαττωθέντι ἀριθμῷ συναφθήτω. Οἷον, ἐπὶ Παραδείγματι.

$8 - \frac{3}{5} =$ Α.' $8 - 1 = 7$. Β.' $\frac{1}{1}$. Γ.' $\frac{1}{1} - \frac{3}{5}$. Δ.' $\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Οὗ τινος τῷ ἀριθμῷ 7 συναφθέντος, ἔςαι $8 - \frac{3}{5} = 7\frac{2}{5}$.

Γενικῶς μέν τοι γε, ἡ μονὰς, καθ' ἣν ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς ἠλάττωται, αὐτίκα ἐν εἴδει Νόθε Κλάσματος ἐκτεθήτω, Ἀριθμητὴν τε καὶ Παρονομαςὴν ἐπιφέρεσα, τὸν τε δοθέντος Κλάσματος Παρονομαςὴν, ὡς ἐφεξῆς.

$$12 - \frac{4}{5} = 11 + \frac{5}{5} - \frac{4}{5} = 11\frac{1}{5}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α.' $5 - \frac{2}{3} = 4\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 4\frac{1}{3}$,

Β.' $1 - \frac{5}{8} = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

Γ.' $8 - 4\frac{3}{5} = 7\frac{5}{5} - 4\frac{3}{5} = 3\frac{2}{5}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ

§. 204. Ἡ μεγίςη τῆς Μεθόδȣ ταύτης ἐπιτομὴ γίνεται, ἐὰν, ὁ τȣ͂ δοθέντος Κλάσματος Ἀριθμητὴς ἀπὸ τȣ͂ ἑαυτȣ͂ ἀφαιρεθῇ Παρονομαςȣ͂, καὶ τῇ διαφορᾷ ὁ αὐτὸς ὑπογραφῇ Παρονομαςής. Τὸ δὲ ὕτως ἐκπίπτον καινὸν Κλάσμα τῷ ὁλοσχερεῖ προςεθῇ ἀριθμῷ, μονάδι ἐλαττωθέντι. Οὕτως, $6 - \frac{4}{10} = 5\frac{6}{10} = 5\frac{3}{5}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 205. Συμβαίνειν ὡσαύτως εἴωθε τὸ ἀφαιρετέον Κλάσμα μεῖζον εἶναι τȣ͂ μειωτέȣ, ᾧτινι ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς πρόσκειται· ὅθεν τὰ τῆς πράξεως ὡς ἐφεξῆς τελείσθω. Α'. Ὁ τȣ͂ μειωτέȣ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς μονάδι ἐλαττωθήτω. Β'. Ἡ μονὰς αὕτη ἐν εἴδει Κλάσματος ἐκτεθήτω, ὁμογενὲς τῷ πρὸς τῷ ἀριθμῷ Κλάσματι, κἀκείνῳ τε συναφθήτω. Γ'. Τῶν τȣ͂ μειωτέȣ τε καὶ ἀφαιρετέȣ Κλασμάτων Ὁμογενῶν μὲν ὄντων τὰ τῆς Πράξεως γενέσθω, ὡς σύνηθες. Ἑτερογενῶν δὲ, εἰς κοινὸν πρῶτον ἀναχθήτωσαν Παρονομαςὴν, εἶθ' ὕτω ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεθήτωσαν· Τὰ ἐφεξῆς Παραδείγματα κἀνταῦθα τὸ λεγόμενον ἐμπεδώσȣσι.

Α'. $18\frac{1}{3} - 6\frac{2}{3} = 17\frac{3}{3} + \frac{1}{3} - 6\frac{2}{3} = 11\frac{2}{3}$

$= 18\frac{1}{3} - 6\frac{2}{3}$.

Β'

$$B'.\ 8\frac{1}{5}-6\frac{2}{3}=7\frac{5}{5}+\frac{1}{5}-6\frac{2}{3}=7\frac{6}{5}-6\frac{2}{3}=\frac{41}{5}-\frac{20}{3}=\frac{123-100}{15}=\frac{23}{15}=1\frac{8}{15}.$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 208. *Ἐπιτομῇ δὲ χρησόμεθα, ἐὰν, ἀντὶ τῆς ἀπὸ τοῦ μειωτέου ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ λαμβανομένης μονάδος, τῷ προσκειμένῳ τοῦ μειωτέου Κλάσματι Ἀριθμητὴν δώσωμεν, τὸ ἄθροισμα τοῦ τε Ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ αὐτοῦ Κλάσματος, οὕτω.*

$$A'.\ 8\frac{2}{5}-7\frac{3}{5}=7\frac{7}{5}-7\frac{3}{5}=\frac{4}{5}.$$

$$B'.\ 8\frac{2}{5}-7\frac{5}{7}=7\frac{7}{5}-7\frac{5}{7}=\frac{42}{5}-\frac{54}{7}=\frac{294-270}{35}=\frac{24}{35}.$$

$$\Gamma'.\ 8\frac{1}{4}-5\frac{3}{4}=7\frac{5}{4}-5\frac{3}{4}=2\frac{2}{4}=2\frac{1}{2}.$$

$$\Delta'.\ 12\frac{2}{3}-3\frac{4}{5}=12\frac{10}{15}-3\frac{12}{15}=11\frac{25}{15}-3\frac{12}{15}=8\frac{13}{51}.$$

Ε'. Ἐρώτησις. Πυροβόλον τι ἀκατέργαστον Ὅλον σαθμίζον Κεντηνάρια $56\frac{2}{3}$, *εὑρέθη μετὰ τὴν διατόρησιν βάρος ἐν σαθμοῖς ἔχον Κεντηναρίων* $51\frac{3}{4}$. *Πόσον μετάλλιν ἐν τῷ διατορεῖσθαι ἀπώλεσε;*

Ἀπόκρισις. $56\frac{2}{3} - 51\frac{3}{4} = 56\frac{8}{12} - 51\frac{9}{12} = 55\frac{20}{12} - 51\frac{9}{12} = 4\frac{11}{12}$ *Κεντην.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 207. **Τὸ δοθὲν Κλάσμα ἐφ' ἕτερον Κλάσμα πολλαπλασιάσαι.**

ΛΥΣΙΣ.

Πολλαπλασιασθήτωσαν οἱ τῶν Κλασμάτων Ἀριθμηταὶ ἐπὶ τοὺς Ἀριθμητάς, οἵ τε Παρονομασαὶ ἐπὶ τοὺς Παρονομασάς. Τὰ ἐντεῦθεν παραγόμενα συνίσησι τὸ ζητούμενον. Οἷον Α'. $\frac{3}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{21}{32}$. *Β'.* $\frac{9}{15} \times \frac{2}{3} = \frac{18}{45}$. *Γ'.* $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$. *Δ'.* $\frac{7}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{56}{135}$. *Ε'.* $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τῷ τῶν Κλασμάτων πολλαπλασιασμῷ, ἢ Κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ὁλοσχερές, ἢ ὁλοσχερὲς

 ἐπὶ

ἐπὶ Κλάσμα, ἢ Κλάσμα ἐπὶ Κλάσμα, ἐν οἱᾳδηποτῦν περιςάσει, τοσάκις εἷς τῶν παραγόντων ἐκλαμβάνεται, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ ἑτέρῳ ἔνεςιν (§. 77.). Ἐὰν μὲν γὰρ $\frac{3}{4}$ δὶς ἐκληπτέα ὦσιν, εἴτ' ἂν προσθετέα δὶς, ἔςαι $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{3}{4}$, τῦτ' ἔςιν $\frac{6}{4}$ (§. 198.). Ἐὰν δὲ $\frac{3}{4}$ πεντάκις τύχωσιν ἐκληπτέα, ἔςαι $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$ (Αἰτ.). Ἀλλ' ἀνάντι τῆς ἐπαναλαμβανομένης προσθέσεως ὁ πολλαπλασιασμὸς τελεῖται. Ἄρα ὁ Ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν ἕτερον παράγοντα ἄγεται, ὁπηνίκα ἐκεῖνος ὁλοσχερὴς τύχῃ. Οὕτω $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 2 ἀχθὲν δίδωσι $\frac{6}{4}$, καὶ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 5 δίδωσι $\frac{15}{4}$. Ἐὰν ἂν ἤδη τὸ ὁλοσχερὲς ὡς Κλάσμα ἐκτεθῇ, ἔςαι $\frac{3}{4}\times\frac{2}{1}=\frac{6}{4}$, εἴτ' ἂν πολλαπλασιάζονται οἱ Ἀριθμηταὶ ἐπὶ τὺς Ἀριθμητὰς, καὶ οἱ Παρονομαςαὶ ἐπὶ τὺς Παρονομαςάς. Ὅ ἦν τὸ α. Ἐὰν αὖθις 3 πολλαπλασιαςέον ᾖ ἐπὶ $\frac{1}{2}$, μὴ ἅπαξ ληφθῆναι δύναται ἀλλὰ μόνον ἡμίσει ἑαυτῦ μέρει, εἴτ' ἂν διαιρεῖται διὰ 2, ὡς $\frac{3}{2}$. Ἐὰν 3 ἐπὶ $\frac{1}{5}$ πολλαπλασιαςέον τύχῃ, 3 ἐνὶ μόνον πεμπτημορίῳ τίθεται, εἴτ' ἂν διὰ 5 διαιρεῖται,

ρεῖται, ὡς $\frac{3}{5}$. Ἐὰν ἂν ὁ 3 ὡς κλάσμα ἐκληφθῇ, ἔςαι $\frac{3}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, καὶ $\frac{3}{1}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$, τοῦτ' ἔςιν, οἱ Ἀριθμηταὶ ἐπὶ τοὺς Ἀριθμητὰς πολλαπλασιάζονται, καὶ οἱ Παρονομαςαὶ ἐπὶ τοὺς Παρονομαςάς. Ὅ ἦν τὸ β'. Ἄρα ὁμοίως, ἐὰν, ἐπὶ τοῦ Α'. Παραδείγματος, $\frac{3}{4}$ πολλαπλασιαςέα ὦσιν ἐπὶ $\frac{7}{8}$, ἔσονται $\frac{3}{4}$ ἑπτάκις ληπτέα, ὡς ὁ Ἀριθμητὴς 7 δηλοῖ, ἅμα δὲ καὶ διαιρετέα ὀκτάκις, κατὰ τὸ ὑπὸ τοῦ Παρονομαςοῦ 8 δηλούμενον. Ἀλλὰ μὴν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω δειχθέντα, ἑπτάκις λαβεῖν, ἐςὶ τὸν Ἀριθμητὴν ἐπὶ 7 πολλαπλασιάσαι. διαιρεῖν δὲ διὰ 8, τὸν Παρονομαςὴν ἐπὶ 8 πολλαπλασιάσαι. Γενικῶς ἄρα, οἱ Ἀριθμηταὶ ἐπὶ τοὺς Ἀριθμητὰς, καὶ οἱ Παρονομαςαὶ ἐπὶ τοὺς Παρονομαςὰς πολλαπλασιάζονται.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

§. 208. Οὐδὲν θαυμαςὸν, εἰ τὸ ἐκ τῶν γνησίων Κλασμάτων γινόμενον, ἔλαττόν ἐςιν ἑκατέρου τῶν παραγόντων· τοῦτο δὲ ἐκ τῆς τῶν γνησίων Κλασμάτων φύσεως ἤρτηται, ἅτινα πάντως μονάδος εἰσὶν ἐλάττω. Ἐὰν γὰρ, ἐπὶ τοῦ Κ'. Παραδείγματος $\frac{2}{3}$ ἅπαξ πολλαπλασιασθῶσι, τὸ πηλίκον ἔςαι $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$· τοσάκις γὰρ ὁ πολλαπλα-σιαςέος τίθεται, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ πολλαπλα-σιαςῇ περιέχεται (§. 79.). Θῶμεν δὴ $\frac{2}{3}$ πολ-λαπλασιαςέα εἶναι ἐπὶ $\frac{1}{4}$. Ἐπείπερ $\frac{1}{4}$ τέταρτον τῆς μονάδος ἐςὶ μέρος, παραγόμενον ὡσαύτως δέον ἀναδοθῆναι, τῦ προτέρυ, ἤτοι τῦ $\frac{2}{3}$, τέταρτον ὂν μέρος· ἔςαι καὶ γὰρ $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, αὐ-τῷ τύτῳ ἑπομένως τετραπλασίως ἔλαττον, τῶν $\frac{4}{6}$. Πόῤῥω, ἐπεὶ $\frac{3}{4}$ τριπλάσιον ἐςὶ τῦ $\frac{1}{4}$, καὶ τὸ γινόμενον ὡσαύτως ἐκ τῶν $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ τριπλάσιον δέον εἶναι τῦ γινομένυ ἐκ τῶν $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$. Ἐςι δὲ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{3}{6}$ τριπλάσιον τῦ $\frac{1}{6}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.

§. 209. Ἀλλ' ἐνςαίη τις. $\frac{2}{3}$ δραχμῆς, 4 εἰ-σὶν ὀβολοί· $\frac{1}{2}$ δὲ δραχμῆς, ὀβολοὶ εἰσὶ 3. Ἀλ-λὰ γὰρ ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$, ἀποφέ-ρεται $\frac{1}{3}$ δραχμῆς, ἤτοι 2 ὀβολοί. Πῶς ἄρα δυνατὸν, 4 ὀβολῶν πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ 3 ὀβολὺς, ἀποφέρεσθαι ὀβολὺς 12; Πρὸς ὃν φη-μὶ, ὡς ὡς ἡ τῶν ποσοτήτων φύσις διὰ τῦ πολλαπλασιασμῦ μεταλλάττεται· καὶ ὅτι ἑτέρα ἐφ᾽ ἑτέραν ἐπάγεται, ἤγοι ὅτε διττὰς διαςάσεις περιποιῦνται, τὰ τέτων μέρη ἐπὶ τετράγωνα ἐξαίρονται. εἰ δὲ τριῶν διαςάσεων γίνονται, ἐπὶ κύβυς ἐξαίρονται. Διὰ τὸν αὐτὸν τοίνυν λόγον, τὸ γινόμενον ἐκ $\frac{2}{3}$ ἐπὶ $\frac{1}{2}$ δραχμῆς, ἐςὶν $\frac{1}{3}$ δραχμῆς ὀχ ἁπλῆς, ἤτοι τῆς 6 ὀβολὺς ἐχύσης, τῆς δὲ ἐκ 36 ὀβολῶν συνιςαμένης. Επιφαίνεται δὲ $\frac{1}{3}$ δραχμῆς, ὀβολὺς 36 περιεκτικῆς, ὀβολὺς εἶναι 12, ἤτοι ἐξ ὀβολῶν 3×4 γινόμενον. Καὶ γὰρ $\frac{12}{36} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, τῦτ᾽ ἔςιν ὀβολῶν ἐθίμων ἴσον 2, ὧν τινῶν 6, δραχμὴν μίαν ἀποτελῦσι·

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 210. Ἀριθμὸν ὁλοσχερῆ διὰ Κλασματικῦ, ἢ κἀνάπαλιν, πολλαπλασιάσαι δεῆσαν, πολλαπλασιαζέσθω ὁ ὁλοσχερὴς διὰ τῦ ἐν ἐκείνῳ Ἀριθμητῦ, τὸ δ᾽ ἐντεῦθεν γινόμενον διὰ τῦ Παρονομαςῦ διαιρείσθω. Οἷον.

Α'. $4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$· Β'. $5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$· Γ'. $\frac{1}{6} \times 12 = \frac{12}{6} = 2$. Δ'. $\frac{5}{6} \times 12 = \frac{60}{6} = 10$.

Ἢ καὶ ἐν εἴδει νόθου Κλάσματος ὁ ὁλοσχερὴς ἐκτεθείσθω, μονάδος ὑπογραφομένης, ὥστε εἶναι $\frac{4}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\,\frac{2}{3}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 211. Ἀριθμὸν αὖ ὁλοσχερῆ Μικτὸν δι' ὁλοσχεροῦς, ἢ διὰ Κλασματικοῦ πολλαπλασιάσαι δεῖξαν, τοῦ ὁλοσχεροῦς ἐπὶ Κλάσμα μεταγομένου νόθον, τὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τελείσθω, ὡς σύνηθες. Οἷον,

Α΄. $18\,\frac{5}{8} \times 4 = \frac{149}{8} \times 4 = \frac{596}{8} = 74\,\frac{1}{2}$.

Β΄. $6\,\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{32}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{64}{15} = 4\,\frac{4}{15}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

§. 212. Ἑκάτεροι τῶν παραγόντων ἐξ ὁλοσχεροῦς καὶ κεκλασμένου συγκείμενοι, πολλαπλασιάζονται, ἐὰν εἰς κλάσματα νόθα τραπῶσιν (§. 197.), ὧδέ πως.

Α΄. $5\,\frac{5}{6} \times 4\,\frac{2}{3} = \frac{35}{6} \times \frac{14}{3} = \frac{490}{18} = 27\,\frac{2}{9}$.

Β΄. $5\,\frac{2}{3} \times 3\,\frac{4}{5} = \frac{17}{3} \times \frac{19}{5} = \frac{323}{15} = 21\,\frac{8}{15}$.

Ἐρώτησις. Ἐκ τῆς τῶν σωμάτων εἰδικῆς βαρύτητος, τῶν ἐν διαφέρουσιν ὑγροῖς ἐμβαπτομένων, κάλλιστα διαγινώσκεσθαι δύναται, ὡς ὁ μὲν Χρυσὸς

ἐ

ἐξ ὁλοκλήρε τῷ ὕδατι ἐμβαπτόμενος, $\frac{2}{37}$ τῦ ἑαυτῦ βάρες ἀποτίθησιν. ὁ δ᾽ Ἄργυρος $\frac{2}{21}$ ὁ δὲ Χαλκὸς $\frac{5}{43}$. Πόσον ἄρα ἐκ τῆς ἑαυτῦ βαρύτητος ἀπολέσει σῶμά τι ἐνυποδεδυκὸς τῷ ὑγρῷ, ᾧ τινι ἕνεισι $1\frac{1}{2}$ Λίτρα Χρυσῦ, $3\frac{2}{3}$ Λίτ. Ἀργύρε, καὶ $2\frac{3}{4}$ Λίτ. Χαλκῦ;

Ἀπόκρισις. $\frac{2}{37}$ ἀπὸ $1\frac{1}{2} = \frac{2}{37} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{37}$ (§.177.), $\frac{2}{21}$ ἀπὸ $3\frac{2}{3} = \frac{2}{21} \times \frac{11}{3} = \frac{22}{63}$. καὶ $\frac{5}{43}$ ἀπὸ $2\frac{3}{4} = \frac{5}{43} \times \frac{11}{4} = \frac{55}{172}$.

Ἑπομένως ἐςαι ἡ ἐν τῷ ὕδατι τῦ βάρες ἀποβολὴ τῦ δοθέντος σώματος $= \frac{3}{37} + \frac{22}{63} + \frac{55}{172} = \frac{300721}{400932}$ Λίτρ. $=$ 24 Οὐγκίαις σχεδόν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 213. Ἡ τῦ τῶν Κλασμάτων Πολλαπλασιασμῦ ἐπιτομὴ διττῶς εἴωθε γίνεσθαι. Α'. Ἐὰν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς Ἀριθμητὴς μὲν θατέρε τῶν Κλασμάτων τύχῃ, Παρονομαςὴς δὲ τῦ ἑτέρε, ἑκατέρωθεν ἀπαλειφθήτω, τῷ δὲ τῶν ὑπολοίπων Ἀριθμηριθμητῶν γινομένῳ, τὸ τῶν ὑπολειφθέντων Παρονομαςῶν γινόμενον ὑπογραφήτω. Οἷον, $\frac{2}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{2}{1} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$. Β.΄ Ἐὰν πρὸς τούτοις διὰ τοῦ Ἀριθμητοῦ τοῦ ἑνὸς Κλάσματος, ὁ τοῦ ἑτέρου Παρονομαςὴς, καὶ νάπαλιν, ἐντελῶς διαιρεῖσθαι ἔχῃ, γενέσθω ἡ διαίρεσις, οἱ δὲ ὑπόλοιποι τῶν τε Ἀριθμητῶν καὶ τῶν Παρονομαςῶν ἐφ᾽ ἑαυτοὺς πολλαπλασιασθήτωσαν. Ἀρίςως δὲ ἡ τοιαύτη διαπεραίνεται πρᾶξις, τριῶν ςηλῶν γινομένων, ὧν ἐν μὲν τῇ μεσαίᾳ τὰ δοθέντα γραφήτωσαν Κλάσματα, ἐν δὲ τῇ πρὸς δεξιὰν οἱ τούτων Ἀριθμηταὶ, καὶ ἐν τῇ πρὸς ἀριςερὰν οἱ Παρονομαςαί. Οὕτω τῶν ἐφεξῆς διδομένων Κλασμάτων $\frac{2}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{10} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$, ἔςαι.

$$
\begin{array}{rcccl}
1\ (& 5 & \frac{2}{5} & 2 &)\ 1 \\
5\ (& 6 & \frac{5}{6} & 5 &)\ 1 \\
1\ (& 4 & \frac{3}{4} & 3 &)\ 1 \\
 & 10 & \frac{4}{10} & 4 &)\ 1 \\
1\ (& 2 & \frac{1}{2} & 1 & \\
1\ (& 3 & \frac{2}{3} & 2 &)\ 1
\end{array}
$$

Ὑπελείφθη ἄρα Ἀριθμητὴς μὲν 1, Παρονομαστὴς δὲ 3×10, ἑπομένως τὸ γενόμενον $= \frac{1}{30}$. Δηλοῦται δὲ τὸ τῆς πράξεως ὀρθὸν ἐντεῦθεν, ὅτι ἡ τοῦ Κλάσματος δύναμις οὐκ ἀλλοιοῦται, ἐὰν ὅ, τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς διὰ τῆς αὐτῆς διαιρεθῶσι ποσότητος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 214. **Τὸ δοθὲν Κλάσμα δι᾽ ἑτέρου Κλάσματος διελεῖν.**

ΛΥΣΙΣ.

Ἀχθήτω ὁ τοῦ διαιρετέου Ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν τοῦ διαιρέτου Παρονομαστὴν, ὅ, τε τούτου Ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν ἐκείνου Παρονομαστήν· τὸ ἐντεῦθεν γινόμενον, τὸ ζητούμενον ἔσται πηλίκον. Ἢ, ὅπερ ταὐτόν ἐστιν, ἀντεστράφθω ὁ διαιρέτης, καὶ γενέσθω Κλασμάτων πολλαπλασιασμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α΄ $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Β΄ $\frac{3}{5} : \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.

Γ΄ $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$.

Δ΄ $\frac{4}{9} : \frac{2}{5} = \frac{4}{9} \times \frac{5}{2} = \frac{20}{18} = 1\frac{1}{9}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τῇ τῶν Κλασμάτων διαιρέσει, ἢ Κλάσμα δι' ὁλοσχερῦς διαιρεῖται, ἢ ὁλοσχερὲς διὰ Κλάσματος, ἢ Κλάσμα διὰ Κλάσματος, ἐν οἱᾳδηποτῦν περιςάσει ὁ διαιρέτης ἀείποτε δείκνυσιν, εἰς πόσα μέρη τὸ ὅλον διαιρεθῆναι δέον. Ἀλλαμὴν ἐν τοῖς Κλάσμασι τυτὶ ὁ Παρονομαςὴς ὑποσημαίνει. Ἄρα ὁ διαιρέτης πρὸς τὸν παρονομαςὴν ἀνάγεται, ὀχὶ δὲ πρὸς τὸν Ἀριθμητήν. Ἤδη, ἐὰν 2 διαιρετέα ὦσιν εἰς 3 μέρη, 3 ἔςαι Παρονομαςής. Ἄρα, ἐὰν $\frac{1}{2}$ διαιρετέον ᾖ εἰς 3 μέρη, δέον τὸν 3 Παρονομαςὴν ὡσαύτως γενέσθαι. Ἀλλ' ὑπετίθετο πρότερον τὸ ὅλον εἰς 2 μέρη διαιρετέον εἶναι, εἴτ' ὂν $= \frac{1}{2}$, ἤδη δὲ τὰ ἡμίση ταῦτα αὖθις εἰς 3, οἱ διαιρέται ὅτοι ἄμφω ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιασθήτωσαν, καὶ ἐκληφθήσεται $\frac{1}{2}$ διαιρέμενον διὰ 3 ἴσον $\frac{1}{6}$. Ἐὰν ὂν τὸ ὁλοσχερὲς ὡς Κλάσμα ἐκτεθῇ, ἔςαι $\frac{1}{2} : \frac{3}{1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, εἴτ' ὂν τῦ διαιρέτυ ἀντιςραφέντος πολλαπλασιάζεται δι' αὐτῦ ὁ διαιρετέος. Ὅ ἦν τὸ α.

Ἔςω δ' ὁλοσχερὲς διὰ Κλάσματος διαιρετέον εἴτ' ὂν 3 διὰ $\frac{1}{2}$. Ὁπηνίκα μὲν δὴ τὸ ὁλοσχερὲς διὰ 1 διαιρεῖται, τὸ πηλίκον ἴσον τῷ ὁλοσχερεῖ ἐκπίπνίπτει. ὁπηνίκα δὲ διὰ Κλάσματος, τὸ πηλίκον μεῖζον τῦ ὁλοσχερῦς ἀποβήσεται, ἤτοι τὰ ἐκείνε μέρη τοσύτῳ μείζω εἶναι δέον, ὅσῳ ἐλάττω ἐκλαμβάνονται· ἐὰν γὰρ ἡμίση ἐκληφθῶσι μέρη διπλασίω, πλείω ἔσονται, ἐὰν δὲ τριτημόρια τριπλασίως, καὶ ἐφεξῆς ὕτω·

Ἀλλαμὴν ὁ 3 διὰ $\frac{1}{2}$ διαιρέμενος, εἴτ' ἂν μερῶν ἡμίσεων ἐκλαμβανομένων, εἰς μέρη διπλασίως μεταβάλλεται πλείω, τῦτ' ἔςιν ἐπὶ 2 πολλαπλασιάζεται. Ἄρα ὁ τῦ Κλάσματος Παρονομαςὴς ἐπὶ τὸ ὁλοσχερὲς ἀχθήτω. Τῦ δὲ ὁλοσχερῦς ἀντὶ Κλάσματος ἐκτεθειμένε $\frac{3}{1}$, τὸ Κλάσμα $\frac{1}{2}$ ἀντιςραφήσεται, ἐφ' ᾧ ὁ πολλαπλασιασμὸς τελεσθῇ· εἴτ' ἂν, τῦ διαιρετέυ αὖθις ἀντιςραφέντος, Κλασμάτων γίνεται πολλαπλασιασμός. Ὅ ἦν τὸ β.

Ἐὰν δὲ Κλάσμα διὰ Κλάσματος διαιρετέον τύχῃ, οἷον $\frac{3}{4}$ διὰ $\frac{2}{5}$· Ἐπεὶ $\frac{3}{4}$ εἰς πεμπτημόρια μεταβλητέα εἰσί, τὰ μέρη πλείω καὶ ἐλάχιςα ἀποβήσονται, ὃ δὴ ἐκλαμβάνεται πολλαπλασιασμῷ τῦ Ἀριθμητῦ 3 διὰ 5· ἀλλ' ἅμα καὶ διαιρετέα εἰς 2 τοιαῦτα μέρη ἔσονται, ὅθεν ὁ Παρονομαςὴς 4 δὶς ἐκλαμβάνεται, εἴτ' ἂν, ἐπὶ 2 πολλαπλασιάζεται. Ἄρα, τῷ αὐτῷ τρόπῳ, τοῦ διαιρέτε ἀντιςραφέντος ὁ πολλαπλασιασμὸς τελεσθήσεται. Ὅ ἦν τὸ γ. Ταυτὸ δείκνυται, ἐὰν τὰ Κλάσματα

σματα πρὸς κοινὸν μεταχθῶσι Παρονομασὴν, ὅτι καὶ τὸ αὐτὸ πηλίκον ἐξέρχεται. Οἷον. ἐπὶ τῦ Γ'. Παραδείγματος, $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{6}{8} : \frac{4}{8} = \frac{6}{8} \times \frac{8}{4} = \frac{6}{4}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 215. Δῆλον τοίνυν ἐκ τύτων, τῷ μὲν πολλαπλασιασμῷ τὴν τῶν Κλασμάτων δύναμιν μειῶσθαι, τῇ δὲ διαιρέσει αὔξειν· ἐκεῖ μὲν γὰρ αὐτόχρημα διαίρεσις ἐςὶ τὸ τελύμενον, ἐνταῦθα δὲ πολλαπλασιασμός. Ἐὰν ἂν ἡμίσεια ληφθῇ ποσότης, ὅπερ γίνεται ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ ἐπὶ 2, ἢ καὶ ἄλλό τι Κλάσμα, τηνικαῦτα αὐτόχρημα εἰς δύο, ἢ καὶ εἰς ἄλλα μέρη, κατὰ τὸν τῦ Κλάσματος Παρονομαςὴν διαιρεῖται. Ἐὰν δὲ τὸ ὅλον, εἰς ἡμίση μέρη, εἰς τριτημόρια, τεταρτημόρια, κ.τ.λ. διαιρετέον ᾖ, ὅπερ ἐν τῇ τῶν Κλασμάτων διαιρέσει γίνεται, ἀναγκαίως μέρη πλείω, ἤτοι ποσότητα μείζω δέον ἐκκύψαι. Οὕτω 4 πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $\frac{1}{2}$ ἔςαι 2, ἤτοι τὸ τῦ 4 ἥμισυ· 4 δὲ εἰς ἡμίση διαιρόμενον μέρη ἔςαι 8, ἤτοι 4 διαιρόμενον διὰ $\frac{1}{2}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 216. Ἦν δὲ καὶ ἀριθμὸν ὁλοσχερῆ, ἢ Κλάσμασματώδη, ἢ δι' ὁλοσχεροῦς καὶ κεκλασμένου συγκείμενον, διελεῖν δεήσῃ, καὶ μάλιστα δι' ἀριθμοῦ ὁλοσχεροῦς, ἢ Κλασματώδους, ἢ ἐξ ὁλοσχεροῦς ὁμοίως καὶ Κλάσματος συγκειμένου, ταῖς ἐφεξῆς περιςάσεσι καλῶς προσέχοντες, εὐχερῶς τὴν ἀπαντῶσαν δυσχέρειαν ἐκ μέσου ποιησόμεθα.

Α'. Ὁπηνίκα, ὁ μὲν διαιρετέος ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς τύχῃ, ὁ δὲ διαιρέτης Κλάσμα, ὁ ὁλοσχερὴς πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸν τοῦ διαιρέτου Παρονομαςὴν, τὸ δὲ γινόμενον ὁ τοῦ πηλίκου ἔςαι Ἀριθμητὴς, ᾧ τινι Παρονομαςὴς ὁ τοῦ διαιρέτου Ἀριθμητὴς ὑπογραφήτω. Ἐν γένει δὲ, τοῦ διαιρέτου ἀντιςραφέντος, γενέσθω πολλαπλασιασμός. Οἷον, $12 : \frac{3}{10} = 12 \times \frac{10}{3} = \frac{120}{3} = 40$. Καὶ $5 : \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$.

Β'. Τοῦ μὲν διαιρετέου Κλασματώδους τυγχάνοντος, τοῦ δὲ διαιρέτου ὁλοσχεροῦς, ὁ τοῦ κλάσματος Παρονομαςὴς πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ ὁλοσχερές. τὸ ἐντεῦθεν γινόμενον ὁ τοῦ πηλίκου Παρονομαςὴς ἔςαι, ᾧ τινι, Ἀριθμητὴς, ὁ τοῦ διαιρετέου, ἐπιγραφήτω. Οἷον, $\frac{2}{5} : 6 = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$. Καὶ $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Καὶ, $\frac{7}{3} : 5 = \frac{7}{15}$.

Τὸ

Τὸ δὲ Κλάσμα Κλάσματος, γενικῶς μὲν διὰ πολλαπλασιασμῦ, ὡς ἔφθημεν εἰπόντες (§. 177.) ἐκλαμβάνεται, κυρίως δὲ διά τε διαιρέσεως καὶ πολλαπλασιασμῦ. Εἰ γὰρ $\frac{3}{10}$ τῶν $\frac{5}{6}$ δέοι λαβεῖν, ἔςαι ἐν γένει $=\frac{3\times5}{10\times6}=\frac{15}{60}$. Ἀλλ' ὂν $\frac{3}{10}$ ἀπὸ τῦ Κλάσματος $\frac{5}{6}$ λαβεῖν, ὐδὲν ἄλλο δηλοῖ, ὅτι μὴ τὸ Κλάσμα $\frac{5}{6}$ εἰς 10 ἴσα διελεῖν μέρη, ἀφ' ὧν εἶτα 3 λαβεῖν. Ἔςι δὲ $\frac{5}{6}:10=\frac{5}{6\times10}$ · τῦτο δὲ τρὶς ληφθὲν δίδωσι $\frac{3\times5}{10\times6}$.

Γ'. Τοῦ μὲν διαιρετέυ ἐξ ὁλοσχερῦς καὶ Κλάσματος συγκειμένυ, τῦ δὲ διαιρέτυ ἐξ ὁλοσχερῦς μόνον, μεταποιηθήτω ὁ διαιρετέος εἰς Κλάσμα νόθον, ὗ ὁ Παρονομαςὴς ἐπὶ τὸ ὁλοσχερὲς πολλαπλασιασθεὶς, τῷ τῦ νόθυ Κλάσματος Ἀριθμητῇ ὑπογραφήτω. Οἷον, $6\frac{3}{8}:4=\frac{51}{8}:4=\frac{51}{8\times4}=\frac{51}{32}=1\frac{19}{32}$.

Δ'. Τοῦ μὲν διαιρετέυ αὖθις ὁλοσχερῦς τυγχάνοντος, τῦ δὲ διαιρέτυ ἐξ ὁλοσχερῦς καὶ Κεκλασμένυ, ὁ διαιρέτης εἰς Κλάσμα μετασχηματισθεὶς

νόθ-

νόθον καὶ ἀντιςραφεὶς, ἐπὶ τὸ ὁλοσχερὲς πολλαπλασιασθήτω, Οἷον, $48 : 4\frac{1}{2} = 48 : \frac{9}{2} = 48 \times \frac{2}{9} = \frac{96}{9} = 10\frac{2}{3}$. Καί, $3 : 4\frac{1}{2} = 3 : \frac{9}{2} = 3 \times \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Ε'. Τοῦ μὲν διαιρετέου ἐκ Κλάσματος συγκειμένου, τοῦ δὲ διαιρέτου ἐξ ὁλοσχεροῦς καὶ Κλάσματος, μεταποιηθήτω ὁ διαιρέτης εἰς Κλάσμα νόθον. ὃ γινομένου ἀντεςράφθω καὶ γενέσθω Κλασμάτων πολλαπλασιασμός. Οἷον, $\frac{5}{6} : 2\frac{1}{8} = \frac{5}{6} : \frac{17}{8} = \frac{5}{6} \times \frac{8}{17} = \frac{40}{102} = \frac{20}{51}$.

Ϛ'. Τοῦ μὲν διαιρετέου ἐξ ὁλοσχεροῦς καὶ Κεκλασμένου συνεςῶτος, τοῦ δὲ διαιρέτου ἐκ Κλάσματος μόνον, τοῦ διαιρετέου εἰς Κλάσμα μεταχθέντος νόθον, καὶ τοῦ διαιρέτου ἀντιςραφέντος, τὰ Κλάσματα ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιασθήτωσαν. Οἷον, $5\frac{1}{3} : \frac{2}{5} = \frac{16}{3} : \frac{2}{5} = \frac{16}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{80}{6} = 13\frac{1}{3}$. Καί, $3\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{17}{5} : \frac{3}{4} = \frac{17}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{68}{15} = 4\frac{8}{15}$.

Ζ'. Τοῦ τε διαιρετέου, ἔσχατον, καὶ τοῦ διαιρέ-

το

τὸ ἐξ ὁλοσχερῦς καὶ Κεκλασμένε συγκειμένων, ἡ τέτων εἰς νόθα Κλάσματα μεταποίησις, καὶ ἡ τῦ διαιρέτε ἀντιςροφὴ, εἰς πολλαπλασιασμὸν τὴν διαίρεσιν μεταποιήσασι καὶ τὰ τῆς πράξεως, ὡς εἴρηται (§. 214.) ῥᾳδίως ἐκπερανῦσιν. Οἷον, $5\frac{1}{6} : 4\frac{1}{5} = \frac{31}{6} \cdot \frac{21}{5} = 155 : 126 = 1\frac{29}{155}$. Καὶ, $2\frac{1}{3} : 1\frac{3}{4} = \frac{7}{3} : \frac{7}{4} = \frac{7}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 217. Ἐπὶ τῆς τῶν γνησίων Κλασμάτων διαιρέσεως, τὸ πηλίκον ἀείποτε μεῖζον τῦ διαιρετέε ἐκλαμβάνεται. Οἷον, $\frac{6}{4} : \frac{1}{2} = \frac{6}{4}$. Ὁ δὲ λόγος σαφὴς, ὅτι ὁ διαιρέτης ἐλάττων ἐςὶ τῆς μονάδος. Τὸ γὰρ πηλίκον τοσάκις δέον ἐμπεριέχεσθαι τῷ διαιρετέῳ, ὁσάκις ἡ μονὰς ἐν τῷ διαιρέτῃ. Ἀλλὰ γὰρ ἡ μονὰς ἤδη ἐχὶ πλεῖον ἢ τῷ ἡμίσει μέρει ἑαυτῆς ἐμπεριέχεται τῷ διαιρέτῃ $\frac{1}{2}$. Ἄρα ὡσαύτως τὸ τῦ πηλίκε μόνον ἥμισυ δέον τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχεσθαι· Ἀλλ᾽ ἡ ποσότης, ἧς τὸ ἥμισυ θατέρῳ ἐμπεριέχεται τῆς αὐτῆς διπλῆ τυγχάνει. Ἄρα ὡσαύτως $\frac{3}{4}$ διὰ $\frac{1}{2}$ διαιρεθέντων, τὸ πηλί-

κον

κον διπλοῦν ἐςὶ τοῦ διαμέτρου $\frac{3}{4}$, εἴτ' οὖν $\frac{6}{4}$, ἢ $1\frac{1}{2}$.

Ἐρώτησις. Πόσος ἀριθμὸς Φυσεκίων κατασκευασθῆναι δύναται ἀπὸ Κεντηναρίων $3\frac{1}{2}$ Πυρίτιδος Κόνιος, ἐὰν ὑποτεθῇ ἕκαςον Φυσέκιον περιέχειν Λίτρας $1\frac{3}{4}$ Πυρίτιδος Κόνιος;

Ἀπόκρισις. Ἐπεὶ Κεντηνάρια $3\frac{1}{2}$ ἀποτελοῦσι Λίτρας 350, καὶ Λίτραι $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ Λίτραις, ἔςαι ὁ τῶν Φυσεκίων αἰτούμενος ἀριθμὸς $= 350 : \frac{7}{4} = 200$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.
ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΝ ΠΟΣΟΤΗΣΙΝ, ΕΙΤ' ΟΥΝ ΑΡΙΘΜΟΙΣ ΕΤΕΡΟΓΕΝΕΣΙΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 218. Ποσότητες Ἑτερογενεῖς, περὶ ὧν νῦν ἐνταῦθα ὁ λόγος, εἰσὶν, αἱ διαφόρου εἴδους ἢ παρονομασίας πράγματα σημαίνουσαι· οὕτω μέντοιγε, ὡς τὸ ἔλαττον εἶδος τῷ μείζονι ἐμπεριέχεσθαι. Τοιαῦται εἰσὶ, τὰ τῶν Νομισμάτων εἴδη, τὰ τῶν Σταθμῶν, τῦ Χρόνυ, τῶν Μέτρων, κ.τ.λ..

ΣΧΟΛΙΟΝ

§. 219. Η ὡς ὅρος παραθέσεως ὡς τὰ πολλὰ τιθεμένη Ποσότης, ἤτοι ἡ ὡς Μονὰς λαμβανομένη, ἐξ ἄλλων ὑποδεεςέρων μερῶν σύγκειται, ἅπερ καθ' ἑαυτὰ λαμβανόμενα, μονάδες καιναὶ μὲν ὑπάρχυσιν, εἴδει δὲ τῆς αὐτὰ περιεχύσης μείζονος ἐλαττύμενα. Οὕτως ἡ Μονὰς τῦ τῶν γηΐνων διαςημάτων Μέτρυ, εἴτ' ὖν ἡ Ὀργυιὰ, μονάδας 6 εἴδει ἐλάττονας, αἳ καλῦνται Πόδες, ἐμπεριείληφεν· ἡ τῦ Χρόνυ, εἴτ' ὖν εἰς Ἐνιαυτὸς, μονάδας 12 εἴδει ἐλάττονας, αἳ καλῦνται Μῆνες, κ.τ.λ. Η ὖν τῆς τοιαύτης Μονάδος διαίρεσις ἐλευθέρως πρὸς τὸ δοκῦν γινομένη, παρὰ πολὺ διαφέρυσα παρὰ διαφέρυσιν εἴληπται Ἔθνεσιν. Ὥςε ὖ μόνον ἐν τοῖς Μαθηματικοῖς, ἀλλὰ δὴ καὶ ἐν τῷ κοινῷ Βίῳ, ἰδίως δὲ ἐν τοῖς τῶν Ἐμπόρων συναλλάγμασι, ποικίλας τὰς τοιαύτας ἐν χρήσει τῶν Μονάδων, οἷον τῶν Μέτρων, Σταθμῶν τε καὶ Νομισμάτων, διαιρέσεις εἶναι. Ἵν' ὖν αἱ διὰ τῶν τοιύτων Ποσοτήτων πράξεις εὐχερέςεραι ἀποβῶσιν, ἀναγκαῖον ἡγησάμεθα, Πινακάς τινας τύτων ἐνταῦθα ἐκθεῖναι, ἐν οἷς πόσαι τῶν τῦ ἐλάττονος εἴδυς Μονάδων, τὴν τῦ μείζονος εἴδυ, συνιςῶσι Μονάδα, ὑπ' ὄψιν παρίςαται. A.

Ἡ μὲν Λίβρα = *Ἑκατονταγράμμοις* 4, 893.

Τὸ δὲ Χιλιόγραμμον = *Λίβραις* 2, 0429.

80 *Φράγκα* = 81 *Λίβραις* Tournois.

Ταῖς προεκτεθείσαις τοίνυν ταυταισὶ Ἀναλογίαις χρώμενοι, εὐχερῶς οἱονδήποτεν τῶν παλαιῶν Μέτρων ἐπὶ τὸ Νεώτερον, κἀνάπαλιν, τοῦτο ἐκ ἐκείνου, μετάξομεν. Ἵν' οὖν τὴν δύναμιν, ἤτοι τὸ ἐκτίμημα 1000, *φέρ' εἰπεῖν, Φράγκων, ἐν Λίβραις σχῶμεν, προςεθήτω τοῖς* 1000 *Φράγκοις, τὸ τούτου ὀγδοηκοστημόριον, ἢ* 80 *εἴτ' οὖν τὸ τῶν* 100 *Φράγκων ὀκτημόριον, ἢ* 8: *ἕξομεν οὕτω ὑπὲρ* 1000 *Φράγκων*, 1012, 5 *Λίβρας.*

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 225. *Ἐπισυνάγεται τοίνυν καθόλου ἐκ τῶν ἄχρι τοῦ δε ῥηθέντων, Α.' τὰ οἱουδήποτεν Μέτρου μέρη, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἐκδηλούμενα ὀνόματος, Κλάσματα εἶναι τοῦ αὐτοῦ Παρονομαςοῦ. Β.' Τὸν Παρονομαςὴν τοῦτον ἐξισοῦσθαι τῷ τῶν ἴσων μερῶν ἀριθμῷ, ἐφ' οὓς ἡ ποσότης, εἴτ' οὖν τὸ Μέτρον, τὸ προσεχὲς ἀνώτερον ὑποδιαιρεῖται. Οὕτως, οἱ Δάκτυλοι Κλάσματά εἰσιν, ὧν τινων ὁ Παρονομαςὴς ἐςὶ* 12· *καὶ γὰρ ὁ Ποῦς, Μέτρον προσεχῶς ἡγούμενον τοῦ Δακτύλου εἰς* 12 *ἴσα μέρη ὑποδιαιρεῖται, ἑπομένως εἷς Δάκτυλος τὸ* $\frac{1}{12}$ *ἐςὶ τοῦ Ποδός. Αὖθις, τὸ Λεπτὸν, ποσότης ἐλάσσων τῷ εἴδει*

ὅσα,

ἐσα, Κλάσμα ἐςὶ ποσότητος μείζονος, εἴτ᾽ ὖν τῆς Ὥρας, ἐν ᾗ περιέχεται. οἷον ἓν Λεπτὸν ἐςὶ τῆς Ὥρας $\frac{1}{60}$, ἢ τῆς Ἡμέρας $\frac{1}{1440}$, ἢ τῦ Ἐνιαυτῦ $\frac{1}{525600}$. Ὡσαύτως κἂν τοῖς λοιποῖς τῶν Μέτρων.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 224. **Ἀνάλυσις** Ἀριθμῶν ἐςὶν, ἡ τύτων ἀπὸ τῦ μείζονος, ὃ ἐμφαίνυσιν εἴδυς, ἐπὶ τὸ ἔλαττον καταγωγή.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 225. Οὕτω τοίνυν 6 ἀργυρίων εἰς 240 ὀβολὺς ἀναλυομένων, ἢ 4 λιτρῶν εἰς 128 ἡμιυγκίας, τὰ 6 ἀργύρια, ἢ αἱ 4 λίτραι, ἐπὶ τὸ ἔλαττον κατάγεσθαι λέγονται εἶδος. Τύτυ χάριν, αἱ ζητύμεναι τῦ ἐλάττονος εἴδυς μονάδες, αἱ μίαν τῦ δοθέντος μείζονος εἴδυς συντιθεῖσαι μονάδα, ἐπὶ τὸν δοθέντα πολλαπλασιασθήτωσαν ἀριθμόν. Οἷον, Ἀργύρ. 6 ἐπὶ 40 Ὀβ. πολλαπλασιαζόμενα, δώσυσιν 240 Ὀβολύς. Φιορ. 7 × 60 Κρεϊτζ. = 420 Κρεϊτζ. Λίτρ. 4 × 32 Ἡμιυγκ. = 128 Ἡμιυγκ. Ὅθεν, ὃς ἂν πρὸ ὀφθαλμῶν τὺς προεκτεθέντας ἔχοι Πίνακας, εὐπετέςερον τὰς τοιαύτας ἐκπερανοῖ πράξεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 226. **Ἀριθμὸν ὁποιονῦν Ἑτερογε-**

ρογενῆ Σύμμικτον, πρὸς τὸ δοθὲν ἔλαττον ἀγαγεῖν εἶδος.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Πολλαπλασιασθήτω τὸ δοθὲν μέγιςον εἶδος ἐπὶ τὸν τῶν μονάδων ἀριθμὸν τȣ͂ προσεχῶς ἐλάττονος εἴδȣς, τῶν ἐν μιᾷ τȣ͂ προηγȣμένȣ εἴδȣς περιεχομένων μονάδι· τῷ δὲ παραγομένῳ ὁ δοθεὶς τȣ͂ ἑπομένȣ εἴδȣς ἀριθμὸ, συναφθήτω. *Β'.* Τὸ ἐντεῦθεν ἀναδιδόμενον κεφάλαιον πολλαπλασιασθήτω αὖθις ἐπὶ τὸν τῶν μονάδων ἀριθμὸν τȣ͂ προσεχῶς ἐλάττονος εἴδȣς, τῶν τῷ προηγȣμένῳ ἀντιςοιχȣσῶν, καὶ τῷ παραγομένῳ ὁ δοθεὶς τȣ͂ ἑπομένȣ εἴδȣς ἀριθμὸς συναφθήτω. *Γ'.* Συνεχιζέσθω ȣ̔́τω τὰ τῆς πράξεως, ἄχρις ȣ̔͂ ἐπὶ τὸ ἐλάχιςον καταντήσωμεν εἶδος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Τέσσαρας Ὀργυιὰς Γεωμετρικὰς, ἓξ Πόδας, πέντε Δακτύλȣς, ὀκτὼ Γραμμὰς, καὶ τέσσαρα Σημεῖα πρῶτα, εἰς Σημεῖα μεταγαγεῖν δεύτερα· εἴτ' ȣ̔͂ν $4^{\circ}, 6', 5'', 8''', 4''''$. Ὅθεν ἔςω.

Α'. $4 \times 10' = 40'$

$$\begin{array}{r} 40' \\ +\ 6' \\ \hline 46' \end{array}$$

$46'$. Ὅτι $1^{\circ} = 10'$.

Β'. $46 \times 10'' = 460''$

$$\begin{array}{r} 460'' \\ +\ 5'' \\ \hline 465'' \end{array}$$

$465''$. Ὅτι $1' = 10''$.

Γ'.

Γ.' $465 \times 10''' = 4650'''$
$$\begin{array}{r} +\quad 8''' \\ \hline 4658''' \end{array}$$
Ὅτι $1'' = 10'''$.

Δ.' $4658 \times 10'''' = 46580''''$
$$\begin{array}{r} +\quad 4'''' \\ \hline 46584'''' \end{array}$$
Ὅτι $1''' = 10''''$.

Ε.' $46584 \times 10''''' = 465840'''''$. Ὅτι $1'''' = 10'''''$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 227. Ἡ τοιαύτη τῆς Ἀναλύσεως Μέθοδος καὶ ἄλλως γίνεσθαι ἔχει. ἐὰν δηλαδὴ αἱ τοῦ ἐλαχίστου εἴδους μονάδες, ἑκάστῳ τῶν δοθέντων ἀναλογοῦσαι εἴδει, ἐν τῷ ἀνήκοντι εὑρεθεῖσαι Πίνακι, ἐπὶ τοὺς δοθέντας ἑκάστου εἴδους ἀριθμοὺς πολλαπλασιασθῶσι. Τὰ κατὰ μέρος γινόμενα, ἐν ὁλοσχερεῖ συναφθέντα κεφαλαίῳ, τὴν πρὸς τὸ ἐλάχιστον ὡσαύτως εἶδος μεταγωγὴν δώσουσιν. Ὅθεν τοῦ ἀνωτέρω εἰς δεῖξιν ἀχθέντος Παραδείγματος λαμβανομένου, ἔσται.

$$\begin{array}{lccr}
4^{\circ} & \ldots = & 100000 \times 4 = & 400000'''''. \\
6' & \ldots = & 10000 \times 6 = & 60000. \\
5'' & \ldots = & 1000 \times 5 = & 5000. \\
8''' & \ldots = & 100 \times 8 = & 800. \\
4'''' & \ldots = & 10 \times 4 = & 40. \\ \hline
 & & & 465840'''''
\end{array}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 228 **Ἀναγωγὴ** Ἀριθμῶν ἐστὶ πρᾶξις, καθ'

καθ' ἣν οἱ τὸ ἐλάχιϛον εἶδος ἐμφαίνοντες ἀριθμοὶ πρὸς τὸ μέγιϛον ἀνάγονται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 229. Ὑπ' ὄψιν ἐϛὶ τὴν τῶν ἀριθμῶν Ἀναγωγὴν ἀντικεῖσθαι τῇ Ἀναλύσει, ὡς διὰ τῆς διαιρέσεως γινομένην. Διαιρεῖται γὰρ τὸ δοθὲν ἔλαττον εἶδος διὰ τοῦ ἐμφαίνοντος ἀριθμοῦ, πόσαι μονάδες τοῦ δοθέντος ἐλάττονος εἴδους, ἐν μιᾷ τῇ μείζονος μονάδι, πρὸς ὃν ἡ ἀναγωγὴ γίνεται, περιέχονται. Εἰ δέ τι τὸ ὑπολειφθὲν εἴη, τῷ ἐλάττονι ἐκτιθέμενον εἴδει, γράφεται. Οἷον, εἰσὶν ἀνακτέοι Ὀβολοὶ 114260 εἰς Ἀργύρια. Ἐπεὶ ἐκ τοῦ Πίνακος δῆλον ἐν ἑνὶ Ἀργυρίῳ 40 περιέχεσθαι Ὀβολοὺς, ἔϛαι 114260 : 40 = 2856 Ἀργ. καὶ 20 Ὀβολοῖς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 230. **Ἀριθμὸν ὁποιονοῦν Ἑτερογενῆ Σύμμικτον πρὸς τὸ δοθὲν μεῖζον ἀναγαγεῖν εἶδος.**

ΛΥΣΙΣ.

Ἡ τοῦ Ἑτερογενοῦς ἀριθμοῦ πρὸς τὸ μεῖζον, ἢ μέγιϛον, εἶδος ἀναγωγὴ μεγάλως ἐϛὶν ἐν χρήσει, ὡς ἐπιτομὴν μάλιϛα ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ παρέχουσα. Γίνεται δὲ ὡς ἐφεξῆς. Α'. Γραφήτωσαν τὰ εἴδη τῇ τάξει ἀπὸ τοῦ μεγίϛου ἄχρι τοῦ δοθέντος ἐλαχίϛου οὕτως, ὥϛε ἔνθα εἶδός τι ἐλλείπει ἐκεῖ τὸ μηδενικὸν ἀναπληροῦν τὸν

τόπον

τόπον. Β.' Ὑπογραφήτω ἑκάστῳ τῶν εἰδῶν Παρονομαστής, ὁ σημαίνων, πόσαι ἑκάστου εἴδους μονάδες μίαν μονάδα τοῦ ἐχομένως μείζονος συντιθέασιν εἴδους. Γ.' Τὸ κλασματωδῶς ἐκτιθέμενον ἐλάχιστον τῶν δοθέντων εἶδος, πρὸς ἐλαχίστην, εἰ δυνατὸν, μεταχθήτω ἔκθεσιν. Δ.' Ἀρχῆς ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου εἴδους γινομένης, πολλαπλασιασθήτω ὁ τούτου Παρονομαστὴς ἐπὶ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ ἐγγὺς προηγουμένου εἴδους; τῷ δὲ παραγομένῳ ὁ τοῦ ἐλάττονος εἴδους Ἀριθμητὴς προστεθήτω; ὡς συνάμα τῷ ἑαυτοῦ Παρονομαστῇ ἐπὶ τὸ μεῖζον μεταχθεὶς εἶδος. Ε.' Πολλαπλασιασθήτωσαν ἐπ' ἀλλήλους οἱ Παρονομασταὶ, καὶ τὸ ἐξ ἀμφοῖν παραγόμενον, οἷα δὴ κοινὸς Παρονομαστὴς, τῷ προεκληφθέντι κεφαλαίῳ ὑπογραφήτω. Ϛ.' Ἐπαναληφθήτω ἡ τοιαύτη πρᾶξις, ἄχρις οὗ τὸ μέγιστον σχῶμεν εἶδος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α.' Δίδονται Χάρτου Δέματα τρία, Ῥίσματα πέντε, Βίβλοι ἑκκαίδεκα, Φύλλα ὀκτωκαίδεκα.

ΠΡΑΞΙΣ.

$\frac{3}{1}+\frac{5}{10}+\frac{16}{20}+\frac{18}{24}=\frac{3}{1}+\frac{5}{10}+\frac{16}{20}+\frac{3}{4}=\frac{3}{1}+\frac{5}{10}+\frac{67}{80}=\frac{3}{1}+\frac{467}{800}=\frac{2867}{800}$.

Β.' Δίδονται πέντε Κεντηνάρια, Λίτραι ἑβδο-

δο-

δομήκοντα καὶ μία, πέντε Ἡμιουγκίαι, καὶ Δραχμαὶ τρεῖς μετὰ ἡμίσεως.

ΠΡΑΞΙΣ.

$\frac{5}{1}+\frac{91}{150}+\frac{5}{32}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{1}+\frac{91}{150}+\frac{5}{32}+\frac{7}{8}=\frac{5}{1}+\frac{91}{150}$ $+$ [illegible] $=\frac{5}{1}+$ [illegible] $=$ [illegible].

Γ.' Δίδονται δύο Ὀργυιαὶ, οὐδεὶς Πᾶς, ἐννέα Δάκτυλοι.

ΠΡΑΞΙΣ.

$$\frac{2^{\circ}}{1}+\frac{0'}{6}+\frac{9''}{12}=\frac{2^{\circ}}{1}+\frac{0'}{6}+\frac{3}{4}=\frac{2^{\circ}}{1}+\frac{5''}{24}=\frac{2^{\circ}}{1}+\frac{1'}{8}=\frac{17^{\circ}}{8}.$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 231. Καὶ ἄλλως δὲ οἷόν τ' ἐςὶ τὰ τῆς Πράξεως τελεσθῆναι, ὡς ἐφεξῆς. Α.' Ἐκτεθήτωσαν, δυνάμει τῶν προεκτεθέντων Πινάκων, ἕκαςοι τῶν δοθέντων ὅρων, ἐν τῷ ἐλαχίςῳ τῶν δοθέντων εἴδει, εἴς τε ἓν κεφάλαιον συναφθήτωσαν. Β.' Ὑπογραφήτω τῷ ὅτως ἀνακύψαντι κεφαλαίῳ Παρονομαςὴς, ὁ ἀναδιδόμενος ἐκ τῦ πολλαπλασιαζομένε ἁπάντων τῶν Παρονομαςῶν, τῶν ἑκάςῳ ἰδίως προσηκόντων εἴδει. Γ.' Ἐὰν ὁ τῦ μείζονος εἴδος ὅρος, πρὸς ὃν ἡ ἀναγωγὴ γίνεται, ἐλλείπει, τὸ μηδενικὸν γραφήτω, ἵν' ὅτως ὁ ἀναδοθησόμενος Ἀριθμητὴς, τῷ μεγίςῳ προσήκων ᾖ εἴδει. Ἡ δὲ Βάσανος ὀρθῶς γενή-

γενήσεται, ἐὰν τοῦ αὐτοῦ φυλαττομένου Παρονομαστοῦ, ἡ διαίρεσις τελεσθῇ (§ 226), πολλαπλασιαζομένων ἐφεξῆς τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως ὑπολοίπων, ὡς ἔχουσι τάξεως, ἐπὶ τῶν αὐτοῖς ἀνηκόντων Παρονομαστῶν, πρὸς τὴν τοῦ δοθέντος εἴδους ἀπόδοσιν.

Α΄. Ἔστωσαν Χάρτου Λέματα τρία, Ῥίσματα πέντε, Βίβλοι ἑκκαίδεκα, Φύλλα ὀκτωκαίδεκα.

ΠΡΑΞΙΣ.

3 *Λέματα* . .	= 4800×3	= 14400
5 *Ῥίσματα* . .	= 480×5	= 2400
16 *Βίβλοι* . .	= 24×16	= 384
18 *Φύλλα* . .	=	= 18
	Ἀριθμητὴς	= 17202

$1 \times 10 \times 10 \times 24 = 4800 =$ *Παρονομαστῇ*. Κἀντεῦθεν,

$$\frac{17202}{4800}\ \textit{Λέμ.}$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\begin{array}{r|r|l}
4800 & 17202 & 3 \text{ Λέμ. } 5 \text{ Ῥίσμ. } 16 \text{ Βίβλ. } 18 \text{ Φύλ.} \\
 & 14400 & \\
\hline
 & -2802 & \\
 & \times 10 & \\
\hline
4800 & 28020 & 5 \\
 & 24000 & \\
\hline
 & -4020 & \\
 & \times 20 & \\
\hline
\end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
4800 & 8040{,}0 & 16 \\
 & 4800 & \\
\hline
 & 32400 & \\
 & 28800 & \\
\hline
 & 3600 & \\
 & \times 24 & \\
\hline
 & 14400 & \\
 & 7200 & \\
\hline
4800 & 8640{,}0 & 18 \\
 & 4800 & \\
\hline
 & 38400 & \\
 & 38400 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Β.' *Ἔσωσαν* 5 *Κεντηνάρια*, 71 *Λίτραι*, 5 *Ἡμιουγκίαι*, 3 ½ *Δραχμῆς*.

ΠΡΑΞΙΣ.

5	*Κεντην.*	$76800 \times 5 =$	3840000.
71	*Λίτρ.*	$7680 \times 71 =$	545280.
5	*Ἡμιουγκ.*	$240 \times 5 =$	1200.
3	*Δραχ.*	$60 \times 3 =$	180.
½	*Δραχ.*	$60 \times \frac{1}{2} =$	30.
		Ἀριθμ. =	4386690.

$1 \times 100 \times 32 \times 4 \times 60 = 768000 =$ *Παρονομ.*
Κἀντεῦθεν,

$$\frac{4386690}{768000}$$

ΒΑ-

ΒΑΣΑΝΟΣ.

```
768000 | 4386690 | 5 Κεντ. 71 Λίτρ. 5 Ἡμιουγκ. 3 ½
       | 3840000 |                          ( Δραχμ.
       ---------
       - 546690
           × 100
       ---------
768    | 5466,9 | 71
       | 5376   |
       ---------
       - 909
         768
       -----
         141
         × 32
       -----
         282
        423
768    | 4512 | 5
       | 3840 |
       --------
       - 672
         × 4
       --------
768    | 2688 | 3
       | 2304 |
       --------
       - 384        καὶ 384/768 = ½.
```

Γ'. Ἔστωσαν δύο Ὀργυιαὶ, οὐδεὶς Ποῦς, καὶ ἐννέα Δάκτυλοι.

ΠΡΑΞΙΣ.

2° . . . . . = 72 × 2 = 144'

0' . . . . . = 12 × 0' = 0

9'' . . . . . = . . = 9

'Αριθμ. = 153

6 × 12 = 72 = Παρονομ. Κἀντεῦθεν, $\frac{153}{72}$.

$9''$ . . . . $= 9$

Ἀριθμ. $= 21^\circ$

$1 \times 6 \times 12 = 72 =$ *Παρονομαστῇ. Κἀντεῦθεν* $\frac{21^\circ}{72}$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\begin{array}{r|r|l} 72 & 21^\circ & 0^\circ,\ 1',\ 9''. \\ & \times 6' & \\ \hline 72 & 126' & 1' \\ & 72 & \\ \hline \end{array}$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$
\begin{array}{r|l|l}
72 & 153^{\circ} & 2^{\circ},\ 0',\ 9''. \\
 & 144 & \\
\hline
 & --9 & \\
 & \times\ 6' & \\
\hline
72 & 54' & 0'. \\
 & \times\ 12 & \\
\hline
 & 108 & \\
 & 54 & \\
\hline
72 & 648'' & 9'' \\
 & 648 & \\
\hline
 & 0 & \\
\end{array}
$$

Δ. Ἔξω ὀδεμία Ὀργυιά, εἷς Πὲς καὶ ἐννέα Δάκτυλοι.

ΠΡΑΞΙΣ.

0° . . . . . . $72 \times 0 = 0^{\circ}$

$1'$ . . . . . . $12 \times 1 = 12$

```
     54
    ×12''
   ------
    108
    54
   ------
72 |648''| 9''
   |648  |
   ------
     0
```

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§ 232. Ἀριθμοὺς Ἑτερογενεῖς προσθεῖναι.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Γραφήτωσαν τὰ ὁμογενῆ εἴδη ὑπὸ τὰ ὁμογενῆ, οἷον οἱ ὀβολοὶ ὑπὸ τοὺς ὀβολοὺς, τὰ ἀργύρια, ὑπὸ τὰ ἀργύρια, οἱ χρυσοὶ ὑπὸ τοὺς χρυσούς. κ.τ.λ. Αὖθις, τὰ σημεῖα ὑπὸ τὰ σημεῖα, οἱ δάκτυλοι ὑπὸ τοὺς δακτύλους, αἱ γραμμαὶ ὑπὸ τὰς γραμμὰς, κ.τ.λ. Β'. Συλλεχθήτωσαν ἐν ἑνὶ ἀθροίσματι αἱ μονάδες, δεκάδες, κ.τ.λ. ἑκάστου ὁμογενοῦς εἴδους· ὁσάκις τε ἐν τῷ τοῦ ἐλάττονος εἴδους ἀθροίσματι, τὸ προσεχῶς ἀνώτερον περιέχεται εἶδος, τοσάκις τοῦτο ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιρεθήτω, καὶ τῷ προσεχῶς ἀνωτέρῳ εἴδει προσεθήτω, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ὑπὸ τὴν γραμμὴν γραφήτω. Οἷον, ἐὰν τὸ ἄθροισμα ᾖ 7 λεπτῶν, ἐπεὶ 3 λεπτὰ 1 ἐξισοῦνται ὀβολῷ, ὁ ὀβολὸς ἐν 7 λεπτοῖς δὶς περιέχεται, οἱ μὲν 2 ὀβολοὶ

 ἐντε-

Ι'. $\frac{1}{4}$ Ὀργυιᾶς πόσες ἀποτελεῖ Πόδας; Οὔσης τῆς Ὀργυιᾶς = 6 Ποσὶν, ἔςαι $\frac{1}{4} \times 6 = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$ Π.

Ι Α'. $\frac{1}{5}$ ἑνὸς Ἐνιαυτᾶ πόσας ἀποτελεῖ Ἡμέρας; Ἐπεὶ ὁ Ἐνιαυτὸς ἐςὶν = $365\frac{1}{4}$ Ἡμέραις, ἔςαι $\frac{1}{5} \times 365\frac{1}{4} = \frac{1}{5} \times \frac{1461}{4} = \frac{1461}{20} = 73\frac{1}{20}$ Ἡμέραις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 243. Ἀριθμὲς Ἑτερογενεῖς δι' ἀλλήλων διελεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Τᾶ διαιρέτε πρὸς ἀριςερὰν τᾶ μείζονος εἴδες γραφέντος, διαιρεθήτω δι' αὐτᾶ τετὶ τὸ εἶδος, τὸ δὲ πηλίκον πρὸς δεξιὰν τεθήτω, ὡς εἴρηται (§. 118.). Β'. Τὸ ἐκ τᾶ προηγεμένε εἴδες ὑπόλοιπον, ἐπὶ τὰς μονάδας τᾶ προσεχῶς αὐτῷ ἐλάττονος ἀχθὲν εἴδες, τῷ ἑπομένῳ συναφθήτω εἴδει, τὸ δ' ἐντεῦθεν προκύπτον αὖθις διὰ τᾶ δοθέντος διαιρέτε διαιρεθήτω. Ἔςαι ὅτω τὸ ἔσχατον ὑπόλοιπον, τὸ τᾶ ἐλαχίςε εἴδες μέρος, ὡς καὶ ἐν τῇ Διαιρέσει ὑπεθέμεθα (Αὐτ.).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Ἐὰν τις ἐν ὀκταημέρῳ διαςήματι πρόσοδον λαμβάνῃ 14 Χρυσῶν, 12 Ἀργυρίων, 28 Ὀβολῶν, καὶ 2 Λεπτῶν· πόσον αὐτῷ ἡμερήσιον προσγίνεται;

ΠΡΑ-

ΠΡΑΞΙΣ.

8 | 14 Χρ. 12 ᾿Αργ. 28 ᾿Οβ. 2 Λ. | 1 Χρ. 12 ᾿Αργ. 3 ᾿Οβ. $1\frac{3}{4}$ Λ.

Καὶ γὰρ 8 | 14 Χρ. | 1
8
6
× 14
84
+ 12
8 | 96 | 12 ᾿Αργ.
8
16
16
— —
8 | 28 ᾿Οβ. | 3 ᾿Οβ.
24
— 4
× 3
12
+ 2
8 | 14 Λ. | $1\frac{6}{8}$, ἤτοι $1\frac{3}{4}$ Λ.
8
6

῞Η, Γ΄ μεταχθήτω πρότερον ὁ διαιρετέος ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον εἶδος, εἶθ᾽ οὕτω διαιρεθήτω· τὸ δ᾽ εὑρεθὲν πηλίκον ἐπὶ τὸ μέγιστον αὖθις ἀναχθήτω εἶδος. Οἷον.

14 *Χρυσ.* × 14 *Ἀργ.* = 196 + 12 = 208 *Ἀργ.* 208 *Ἀργ.* × 40 *Ὀβ.* = 8320 + 28 = 8348 *Ὀβ.* 8348 *Ὀβ.* × 3 *Λ.* = 25044 + 2 = 25046.

Κἀντεῦθεν 8 | 25046 | 3130 $\frac{6}{8}$ ἢ $\frac{3}{4}$.

Ἔσαι τοίνυν 3 | 3130 $\frac{3}{4}$ | 1043 *μεθ' ὑπολοίπε* 1 $\frac{3}{4}$ *Λ.* *Καὶ* 1043 : 40 = 26 *Ἀργ.* *μεθ' ὑπολοίπε* 3 *Ὀβολῶν*. *Καὶ* 26 : 14 = 1 *μεθ' ὑπολοίπε* 12 *Ἀργυρίων*, *ὡς καὶ ἀνωτέρω. εἴτ' ἐν* 1 *Χρ.* 12 *Ἀργ*, 3 *Ὀβ.* 1 $\frac{3}{4}$ *Λεπτοῖς*.

Β.' *Διηρήσθωσαν εἰς* 9 *Συμμετόχες*, 40 *Φιορήνια καὶ* 54 *Κρεϊτζάρια*. *Τῆς Πράξεως τελεσθείσης, ἔσαι τὸ ἑκάσῳ ἀνῆκον μέρος* 4 *Φ.* 32 *Κρ.* $\frac{6}{9}$ ἢ $\frac{2}{3}$.

Γ.' *Ἔσωσαν εἰς ἑκτημόρια διαιρετέοι*, 19 *Πόδες*, 8 *Δάκτυλοι*, 6 *Γραμμαί*. *Εἶτ' ἐν* $(19^{\circ} + 8' + 6''):6 = 3^{\circ} + 3' + 5''$.

Δ.' $(10^{\circ} + 3' + 9'' + 8'''):4 = 2^{\circ} + 4' + 5'' + 5'''$.

Ε.' (25" *Ὡρ.* + 8 *Λ.* + 30 *Λ. Δ.*) : 6 = 4" *Ὡρ.* + 11 *Λ.* + 25 *Λ. Δ.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 244. *Ταῦτα κἀνταῦθα κρατήσασι λεγόμενα, ἃ κἂν τῷ τῶν Ἑτερογενῶν ἀριθμῶν πολλαπλασιασμῷ ἐξεθέμεθα* (§. 237 . 238.). *Εἴτ' ἐν ὁ διαιρέτης, ὡς συλλογὴ μόνον ἀριθμητικῶν θεωρεί-*

σθω

§. 246. *Τῶν παραγόντων ἀμφοῖν, ἐκ διαφόρων συγκειμένων εἰδῶν, Α.' Ὅ, τε διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος ἐπὶ τὸ μέγιςον μεταχθήτωσαν εἶδος* (§. 229.). *Β.' Τοῦ διαιρέτου ἀντιςραφέντος, γενέσθω Κλασμάτων πολλαπλασιασμὸς* (§. 214). *Γ.' Διαιρεθήτω τὸ ἐντεῦθεν προκύπτον, εἰς ἐλάττω ἐφεξῆς διαλυόμενον εἴδη. Οἷον, ἐν Παραδείγματι,*

Ἔςωσαν διαιρετέαι 4 Ὀργυιαὶ, 4 Πόδες καὶ 4 Δάκτυλοι, διὰ 2 Ὀργυιῶν, 2 Ποδῶν καὶ 2 Δακτύλων.

ΠΡΑ-

σθω μονάδων, ἀφ᾽ οἱασδηποτῦν σημασίας τε καὶ παρωνυμίας ἀφῃρημένως, διὰ τὺς ἐκεῖσε ἐκτεθέντας λόγυς, οἳ δὴ κἀνταῦθα χώραν ἔξυσι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 245. Ἀριθμὸς Ἑτερογενὴς διὰ Κλασματώδυς διαιρεθήσεται, ἐὰν ὁ διαιρετέος ἐπὶ τὸν τῦ Κλάσματος πολλαπλασιασθεὶς Παρονομαςὴν, διὰ τῦ Ἀριθμητῦ διαιρεθῇ. Ἔςωσαν, ἐν Παραδείγματι, 8 Κεντηνάρια, 12 Λίτραι καὶ 4 Οὐγκίαι, ἐπὶ $\frac{5}{8}$ διαιρετέα. Τοίνυν (8 Κ. + 12 Λ. + 4 Οὐγ.) × 8 = (64 Κ. + 96 Λ. + 32 Οὐγ.) : 5 = 12 Κ. + 99 Λ. + 9 $\frac{3}{5}$ Οὐγ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

ΠΡΑΞΙΣ.

Α.' $4^\circ, 4', 4'' = \frac{85^\circ}{18} =$ διαιρετέῳ.

Β.' $2^\circ, 2', 2'' = \frac{85^\circ}{36} =$ διαιρέτῃ.

Γ.' $\frac{85^\circ}{18} : \frac{85^\circ}{36} = \frac{85}{18} \times \frac{36}{85} = \frac{36}{18} = 2^\circ$.

Ἡ. Δ.' ἀναχθήτωσαν ἀμφότεροι εἰς τὸ ἔσχατον εἶδος, ἵν' ὁμοειδεῖς ἀποβῶσιν· εἶτα γενέσθω ἡ διαίρεσις, ὡς εἴπερ ἀφῃρημένοι εἴησαν ἀριθμοί. Οἷον ἐν τοῖς ἐφεξῆς Παραδείγμασιν.

Α.' 1 Φιορήνιον, 45 Κρεϊτζάρια, 2 Δηνάρια, εἴτ' ἐν Φένιγγα, ποσάκις 12 Φιορ., 18 Κρεϊτζ., καὶ 2 Δην. ἐμπεριέχονται;

Τοίνυν (12 Φ. + 18 Κρ. + 1 Δην.) : (1 Φ. + 45 Κρ. + 2 Δην.) = 2954 Δην. : 422 Δην. = 7-άκις.

Β.' $(11^c + 4') : (5' + 10'') = 840'' : 70'' =$ 12-άκις.

Γ.' 3 Κεντ. : 18 Λίτρ. = 9600 Λίτρ. : 18 Λίτρ. $= 533\frac{6}{18}$.

Δ'. ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ.

α) Νομίσματα Τουρκικά.

1 Ἀργύριον (Γρόσιον)	περιέχει	4 Δεκάρια, ἢ 40 Ὀβολ.
1 Δεκάριον . . .		2 Πεντάρια, ἢ 10 Ὀβ.
1 Πεντάριον . .		5 Ὀβολούς.
1 Ὀβολὸς (Παρᾶς)		3 Λεπτά.
1 Λεπτὸν (Ἄσπρον)		2 Δηνάρια.

Ὁ Ὁλλανδικὸς Χρυσὸς ἀναλογεῖ ἤδη 14 Ἀργυρίοις. Τὸ δὲ Τάλαντον (Πουγγίον), εἶδος κατ' ἐπίνοιαν ὂν Νομίσματος, 500 Ἀργυρίων ἐςὶ περιεκτικόν

β) Νομίσματα Γερμανικά, ἢ τοῦ Ἰμπερίου.

1 Καρολῖνον (Carolin)	περιέχει	11 Φιορήνια τοῦ Ἰμπερίου (Reichsgulden), ἢ Θαλήρους 7 ⅓.
1 Διπλοῦν Καρολῖνον		22 Φιορ. τοῦ Ἰμπ. ἢ Θαλήρ. 14 ⅔.
1 Χρυσὸς Ὁλλανδικὸς (Ducat) . . .		5 Φιορ. ἢ Θαλ. 3 ⅓.
1 Θάληρος (Reichsthaler)		1 ½ Φιορήνιον.
1 Φιορήνιον (Gulden)		20 Ἀργυρᾶ Γροσσίκια, ἢ 60 Κρεϊτζάρια.

1 Ἀργυρῦν Γροσσίκιον (Silbergroschen) . . .	κερδίζει	3 Κρεϊτζάρια.
1 Κρεϊτζάριον ἢ Σταυρώνυμον (Creutzer) .		4 Δηνάρια (Pfennige).

Ἀναλογεῖ δὲ νῦν καθ' ἡμᾶς 1 Φιορίνιον τῦ Ἰμπερίυ 3 Ἀργυρίοις.

γ) Νομίσματα Γαλλικά.

1 Λυδοβῖκος Χρυσῦς (Louis d'or) . . .	περιέχει	4 Γαλλικὺς Θαλήρυς, ἤτοι 11 Φιορ. τῦ Ἰμπ.
1 Διπλῦς Λυδοβῖκος Χρυσῦς . . .		8 Γαλλικ. Θαλ. ἢ 22 Φιορ.
1 Γαλλικὸς Θάληρος (Laubthaler) . .		6 Λίβρας, ἢ 2 Φιορ. καὶ 45 Κρεϊτζ.
½ Γαλλικ. Θαλ. (Demi-Ecu.)		3 Λίβρας, ἢ 1 Φιορ. καὶ 22½ Κρεϊτζ.
1 Λίβρα (Livre) .		20 Σολδία, ἢ 27½ Κρ.
1 Σολδίον (Sou) .		10 Δηνάρια, ἢ 1⅜ Κρεϊ.
1 Δηνάριον (Denier) .		Σολδίυ μέρος 12.
1 Λιάρδον (Liard) .		3 Δηνάρια..

Ἡ Πιςόλα (Pistole) κατ' ἐπίνοιαν ἴσα Νόμισμα 10 Λίβραις ὑπολογίζεται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Περὶ τῦ Νεωτέρυ Νομισματικῦ τῶν Γάλλων Συςήματος.

§. 220. Οἱ Γάλλοι, ὕπω πάνυ πρώην, τὴν

ἑαυτῶν

ἑαυτῶν Πολιτικὴν Διοίκησιν καινοτομήσαντες, καὶ τὸ ἀρχαῖον παρ' αὐτοῖς ἐν χρήσει Νομισματικὸν ἀνέτρεψαν Σύςημα, ἐπὶ τὸ νεώτερον, ὡς ἔθος αὐτοῖς, καινουργήσαντες. Ἔςι δὲ ἡ Μονὰς τοῦ νεουργηθέντος τούτου Νομισματικοῦ Συςήματος Ἀργυροῦν τι Νόμισμα Φράγκον Ἀργυροῦν (Franc d' Argent) ἐπονομαζόμενον, καὶ 5 Γαλλόγραμμα (Gramme), ἤτοι 5000 Ὑποχιλιόγραμμα (Milligramme), τοῦ φυσικοῦ βάρους ςαθμίζον. Σύγκειται δὲ ἐξ ἐννέα δεκατημορίων ἀργύρου καὶ ἑνὸς δεκατημορίου μεταλλικοῦ μίγματος· ἤτοι ἐμπεριέχει ἀργύρου καθαροῦ Γαλλόγραμμα 4 ½, μίγματος δὲ μεταλλικοῦ ½, καὶ ἀναλογεῖ μιᾷ Λίβρᾳ καὶ ¼ τοῦ Σολδίου, ὥςε 80 ἀργυρᾶ Φράγκα, ἀποτελεῖν Λίβρας 81. Διαιρεῖται δὲ εἰς 10 Δεκατημόρια (Decimes), ὧν αὖθις ἕκαςον εἰς 10 Ἑκατοςημόρια (Centimes)· εἴτ' οὖν, διαιρεῖται ὁλικῶς τὸ Φράγκον εἰς 100 Ἑκατοςημόρια. Τὸ Χρυσοῦν Φράγκον (Franc d'or) ἀναλογεῖ σχεδὸν 25 ἀργυροῖς Φράγκοις.

δ) Νομίσματα Ἀγγλικὰ, κεχαραγμένα τε καὶ κατ' ἐπίνοιαν.

1 Στερλίγγον, ἤτοι Λιβροςέρλιγγον (Pfund Sterling)	περιέχει	20 Σελλίγγα.
1 Σελλίγγον (Schilling)		12 Πένσας, ἢ 102 ἕως 108 Φένιγγα.

1 Πένσα (Pences) -		$8\frac{1}{2}$ ἕως 9 Φένιγγα.

Τῆς δὲ Γουϊνέας (Guinee) χρυσοῦ ὅσης Νόμισμα 21 Σελλίγγων περιεκτικῆς, ἡ ταύτης πρὸς τὸ Λιβροςέρλιγγον ἀναλογία ἐςὶν, ὡς $6\frac{1}{2}$ πρὸς $6\frac{1}{12}$.

ε) Νομίσματα Ὁλλανδικά.

ΧΡΥΣΑ.

1 Ῥύδερον (Ryders)	περιέχει	14 Φιορήνια.
1 Χρυσοῦς . . .		5 Φιορήνια καὶ 5 Στύβερα.

ΑΡΓΥΡΑ.

1 Δουκατὼν . . .	περιέχει	65 Στύβερα.
1 Θάληρος . . .		3 Φιορήν. ἤτοι 60 Στύβ.
1 Φιορήνιον . . .		20 Στύβερα, ἢ 60 Κρ.
1 Σελλίγγον . . .		6 Στύβερα.
1 Στύβερον . . .		16 Φένιγγα. Δύω Ὁλλανδικὰ Φένιγγα ἀποτελοῦσιν ἓν τοῦ Ἰμπερίου.

Τὸ Ὁλλανδικὸν Στύβερον ἰσοδυναμεῖ σχεδὸν ἑνὶ ἀργυρῷ Γροσσινίῳ.

ς) Νομίσματα Ἱσπανικά.

ΧΡΥΣΑ.

1 Διπλοῦν Χρυσοῦς (Doppio).	περιέχει	40 Ῥεάλας ἀργυρᾶς (Reales de Plata), ἤτοι 9 Φιορ. καὶ 44 Κρευτ. σχεδόν.

ΑΡΓΥΡΑ.

1 *Πιάςρα* (Peso fuerte, duro, Piastre) . .	περιέχει	10 *Ῥεάλας καὶ* 10 *Τέταρτα* (Quartos de Plata). ἢ 1 *Θαλήρῳ*
1 *Ῥεάλη ἀργυρᾶ* (Real, fuerte de Plata) . .		16 *Τέταρτα*, ἢ 14⅛ *Κρεϊτζ.*

ΧΑΛΚΑ.

1 *Τέταρτον* (Quartos) .	περιέχει.	4 *Μαραβήδες* (Maraved is de Vellon)

ζ) Νομίσματα Πορτυγαλλικά.

ΧΡΥΣΑ.

1 *Μοϊδὸρ Λισβονικὸς*	περιέχει	4800 *Ῥέας*, (Rées), ἢ 14 *Φ.* 24 *Κρ.*
1 *Δοπραὸν*, *Πενταπλοῦν Μοϊδὸρ* . . .		24000 *Ῥέας*. ἢ 72 *Φ.*
1 *Τέταρτον* (Quartos de Escudos) . . .		400 *Ῥέας*. ἢ 1 *Φ.* 12 *Κρ.*

ΑΡΓΥΡΑ.

1 *Παταχᾶς* (Patacas) .	περιέχει.	600 *Ῥέας*, ἢ 1 *Φ.* 48 *Κρ.*
1 *Κρυσαδὸς νέος* (Crusados nuovos) . .		480 *Ῥέας*, ἢ 1 *Φ.* 26½ *Κρ.*
1 *Τεςαὼν* (Teston) .		100 *Ῥέας*, ἢ -- 18 *Κρ.*

1 Βιντίνι (Vintaino) . | | 20 'Ρέας, ἢ - - 3¾ Κρ.

η) Νομίσματα 'Ρωσικά.

ΧΡΥΣΑ.

1 Χρυσοῦς 'Ρωσσικὸς .	περιέχει.	2¼ 'Ρούβλια ἀργυρᾶ, ἢ 225 Κοπίκια· ἤτοι 4 Φιορ. καὶ 30 Κρεϊτ.
1 'Ανδρέας Χρυσοῦς .		2 'Ρούβλ. ἀργ. ἢ 200 Κοπίκ. ἤτοι 4 Φιορ.
1 Καισαρικὸς Χρυσοῦς (Imperial) . . .		10 'Ρούβλ. ἀργ. ἤτοι 20 Φιορ.
½ Καισαρικοῦ Χρυσοῦ .		5 'Ρούβλ. ἢ 10 Φιορ.

ΑΡΓΥΡΑ.

1 'Ρούβλιον. . . .	περιέχει.	100 Κοπίκια, ἢ 2 Φ.
½ 'Ρουβλίου, ἢ 'Ημιρούβλιον (Πολτινίκα) .		50 Κοπίκια, ἢ 1 Φ.
¼ 'Ρουβλίου (Πολπολτινίκα)		25 Κοπίκια, ἢ 30 Κρ.
1 Γρίβνα		10 Κοπ. ἢ 12 Κρ.
1 'Αλτίνον . . .		3 Κοπ. ἢ 3¾ Κρ.

ΧΑΛΚΑ.

1 Κοπίκιον . . .	περιέχει.	1 'Οβολ.
1 'Ημικοπίκιον (Δενοῦσκα)		½ 'Οβολ.
1 Τεταρτημόριον Κοπικίου (Πολοῦσκα) .		¼ 'Οβολ.

1 Πιν

1 Γεντάριον, ἢ Πενταπλῶν. Καπίκιον (Πιατσοπέν). .	Καπίκ.	3 Ὀβολούς.

Ι' ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΜΕΤΡΩΝ.

α) Μέτρα τῶν Σταθμῶν τȣ̃ χρυσȣ̃ καὶ Ἀργύρε.

Λίτρα.	Ἡμί-λιτρον.	Οὐγ-κία.	Ἡμι-ογκία	Καρά-τον	Κόκκος	Κόκκος ἐλ-άσσον
1	2	16	32	48	192	576
	1	8	16	24	96	288
		1	2	3	12	36
			1	1½	6	18
				1	4	12
					1	3

β) Μέτρα τῶν Γαλλικῶν, εἴτ' οὖν Παρισιακῶν, Σταθμῶν.

Λίτρα	Ἡμίλιτρον	Οὐγκία	Δραχμή	Δηνάριον	Κόκκος
1	2	16	128	384	9216
	1	8	64	192	4608
		1	8	24	576
			1	3	72
				1	24

γ) Μέτρα τῶν κοινῶν Σταθμῶν.

Κεντηνάριον	Λίτρα	Τεταρτημόριον	Οὐγκία	Ἡμιουγκία	Δραχμή	Κόκκος
1	100	400	1600	3200	12800	768000
	1	4	16	32	128	7680
		1	4	8	32	1920
			1	2	8	480
				1	4	240
					1	60

δ)

δ) Μέτρα τῶν Σταθμῶν τῶν Φαρμακοπώλων.

Λίτρα	Οὐγκία	Ἡμι-ουγκία	Δραχμή	Γραμμάριον	Κόκκος
1	12	24	96	288	5760
	1	2	8	24	480
		1	4	12	240
			1	3	60
				1	20

Η δὲ καθ' ἡμᾶς ἐν χρήσει Ὀκᾶ, μέτρον ἐσὶ περιέχον 4 Λίτρας, ὧν ἑκάστη 100 περιείληφε Δραχμὰς (Δράμια). Ἄρα ἡ Ὀκᾶ ὅλη περιέχει 400, αἳ δὴ ἀναλογοῦσι 288 Δραχμαῖς Παρισιακαῖς, ἢ Οὐγκίαις 36. Ἕλκει τοίνυν ἡ Ὀκᾶ βάρος Λιτρῶν 2 ¼ Παρισιακῶν.

ε) Μέτρα τȣ̃ Μήκȣς τῆς Πολιτικῆς Ὀργυιᾶς.

Ὀργυιά	Πȣ̃ς	Δάκτυλος	Γραμμή	Σημεῖον	Σημ. δεύτερ.
1	12	144	1728	20736	248832
	1	12	144	1728	20736
		1	12	144	1728
			1	12	144
				1	12

ϛ) Μέτρα τȣ̃ Μήκȣς τῆς Γεωμετρικῆς Ὀργυιᾶς.

Ὀργυ.	Πȣ̃ς	Δάκτυλος	Γραμμή	Σημεῖον	Σημ. δεύτερ.
1	10	100	1000	10000	100000
	1	10	100	1000	10000
		1	10	100	1000
			1	10	100
				1	10

ζ) Μέτρα τȣ̃ Μήκȣς τῆς Ἑξάποδος Ὀργυιᾶς.

Ἑξά-πȣς	Πȣ̃ς	Δάκτυ-λος	Γραμ-μή	Σημεῖ-ον	Σημ-δευτ.
1	6	72	864	10368	124416
	1	12	144	1728	20736
		1	12	144	1728
			1	12	144
				1	12

η) Μέτρα τῶν τȣ̃ Κύκλȣ Τόξων.

Περι-φέρεια	Μοῖρα	Λεπτ. Πρῶτ.	Λεπτὸν Δεύτερον	Λεπτὸν Τρίτον
1	360	21600	1296000	77760000
	1	60	3600	216000
		1	60	3600
			1	60

θ)

θ) Μέτρα τοῦ Χρόνου.

Ἐνιαυτ. κοινὸς	Ἡμέρα	Ὥρα	Λεπτὸν πρῶτ.	Λεπτὸν δεύτερον
1	365¼	8766	525960	31557600
	1	24	1440	86400
		1	60	3600
			1	60

Ἔςι δὲ, ὁ μὲν Αἰὼν, διάςημα χρονικὸν ἐτῶν 100 περιεκτικόν. Ὁ δ' Ἰνδικτιὼν, διάςημα περιέχον ἐνιαυτοὺς 15. Ἡ δ' Ὀλυμπιὰς; 4 διάςημα τετραέτηρον. Ἡ δὲ Πενταετηρὶς, (Lustre), διάςημα πενταετές.

ι) Μέτρα τοῦ Χάρτου.

Δέμα	Ῥίσμα	Βίβλος	Φύλλα
1	10	200	4800
	1	20	480
		1	24

ια

ια) Μέτρα τῶν Ὑγρῶν.

Ἀμφορεύς	Στάμνος	Ἡμιστάμν.	Τεταρτημορ.
1	32	64	128
	1	2	4
		1	2

Οὔσης τοίνυν τῆς Στάμνου, Μέτρου χωρητικοῦ $\frac{1}{18}$ Κυβικοῦ Ποδὸς, εἴτ' οὖν Δακτύλων Κυβικῶν 96· τὸ μὲν Ἡμιστάμνιον περιέχει $\frac{1}{36}$ Ποδ. Κυβ. ἢ Δακτ. Κυβ. 48· τὸ δὲ Τεταρτημόριον, $\frac{1}{72}$ Π. Κ. ἢ Δ. Κ. 24. Ἐπεὶ δὲ εἷς Ποῦς Κυβικὸς ὕδατος κοινοῦ, σταθμώμενος, εὑρίσκεται Λίτρας Παρισιανὰς ἕλκων 54, τοῦτον ὡς ὅρον παραθέσεως ἐκλαμβάνοντες, εὑρίσκομεν τὴν Στάμνον ἐν Σταθμοῖς ἐκτιμωμένην, ὡς ἐφεξῆς. Ποῦς Κυβικὸς ὕδατος = 54 Λίτρ. Ἡ Στάμνος ἄρα περιέχει ὕδατος κοινοῦ Λίτρας 3 ($= \frac{1}{18} \times 54$), τὸ Ἡμιστάμνιον Λ. 1½ ($= \frac{1}{36} \times 54$), τὸ Τεταρτημόριον ¾ ($= \frac{1}{72} \times 54$). Ἡ στερεότης μιᾶς Λίτρας ὕδατος, τὸ τριτημόριον οὖσα τῆς Στάμνου, ἔσται 32

Δάκτ-

Δακτ. Κυβικῶν, ὁ ἄρα Κυβικὸς ὕδατος Δάκτυλος ἕλκει βάρος Ἡμιογκίας. Ἐπεὶ ἂν ἡ καθ' ἡμᾶς Ὀκᾶ, Λιτρῶν δύω καὶ ἑνὸς τετάρτȣ βάρος ἕλκει, ὡς εἴρηται (Σελ. 155.), ἔςαι τὸ ςερεὸν ὕδατος μιᾶς Ὀκᾶς Δακτύλων Κυβικῶν 74, ἑπομένως τριῶν τετάρτων τῆς Σταμνȣ.

ιϐ) Μέτρα Γεωγραφικά.

Μίλλιον	Ὥρα	Βῆμα Γεωμ.	Βῆμα κοινὸν	Πόδες
1	2	4000	12000	20000
	1	2000	6000	10000
		1	3	5
			1	$1\frac{2}{3}$

Τὸ Γερμανικὸν Μίλλιον	περιέχει.	315 Ἀλύσσεις Ῥηνικὰς, ἢ 1969 Ὀργυιὰς, ἢ 11814 Πήχεις, ἢ 23628 Πόδας Ῥηνικούς.
1 Ἄλυσσος Ῥηνική.		$6\frac{1}{4}$ Ὀργυιὰς, ἢ $37\frac{1}{2}$ Πήχεις.
1 Ὀργυιὰ . . .		6 Πήχεις.

1 Πῆ-

1 Πῆχυς	περιέχει	2 Πόδας.
1 Πᾶς		12 Δακτύλυς.
1 Δάκτυλος . . .		12 Γραμμάς.
1 Γραμμή . . .		12 Σημεῖα.
1 Γαλλικὸν Μίλλιον.		17712 Πόδας Ῥηνικὰς.
1 Ἀγγλικὸν . . .		7384 — —
1 Ἰταλικὸν . . .		5907 — —
1 Ἰσπανικὸν . . .		19691 — —
1 Σβϊκικὸν . . .		47258 — —
1 Ῥωσσικὸν Βέρςιον.		3575 — —

Ἀναλογία τῶν ἓξ ἐσχάτων Μιλλίων πρὸς τὸ Γερμανικὸν Μίλλιον.

1 Γαλλικὸν Μίλλιον.	περιέχει	$\frac{3}{4}$ Γερμανικᾶ Μιλλία.
1 Ἀγγλικὸν Μ. .		$\frac{5}{16}$ — —
1 Ἰταλικὸν Μ. .		$\frac{1}{4}$ — —
1 Ἰσπανικὸν Μ. .		$\frac{5}{6}$ — —
1 Ῥωσσικὸν Βέρςιον.		$\frac{1}{7}$ — —
1 Σβϊκικὸν Μ . .		2 ὁλοσχερῆ Γερμανικὰ Μίλλια.

Τοῦ τόξυ μιᾶς Μοίρας τᾶ Γηΐνυ Μεσημβρινᾶ 15 Μίλλια Γερμανικὰ, ἢ 25 Λεύκας Γαλλικὰς, εἴτ᾽ ἂν 25 Μίλλια Γαλλικὰ, περιεχέσης, ἴ-

 ςαι

ςαι ἡ τῆς Γῆς Περιφέρεια, ἤτοι ἡ Περίμετρος, 9000 Λευκῶν Γαλλικῶν· ἡ ταύτης Διάμετρος Λευκῶν 2864 $\frac{56}{71}$, καὶ ἡ Ἡμιδιάμετρος, ἤτοι ἡ ἀπὸ τῆς Ἐπιφανείας πρὸς τὸ Κέντρον ἀπόςασις, Λευκῶν 1432, ὡς ἀκριβῶς οἱ Μαθηματικοὶ τῆς Βασιλίδος τῶν Ἀκαδημιῶν ἐν Παρισίοις κατειλήφασι. Περιέχει δὲ ἡ Γαλλικὴ Λεύκη (Lieu) Ἑξάποδας 2282 $\frac{1}{2}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'

Περὶ τȣ͂ Νεωτέρȣ Μετρικȣ͂ τῶν Γάλλων Συςήματος.

§. 221. Α'. Ἡ ὑπὸ τῶν Νεωτέρων Γάλλων ἀντὶ Βάσεως τȣ͂ ἑαυτῶν Μετρικȣ͂ Συςήματος ἐκληφθεῖσα Μονὰς, παρ' ἐκείνοις μὲν **Μέτρον** (Metre) καλεῖται, παρ' ἡμῖν δὲ καλείσθω **Μέτρον Γαλλικὸν**, ἢ **Γαλλόμετρον** πρὸς τὴν τῆς λέξεως διαςολὴν, Mesure παρ' ἐκείνοις δηλȣ͂σαν. Ἔςι δὲ, τὸ Δεκαμιλλιονιςημόριον τȣ͂ καθ' ἡμᾶς Βορείȣ Τεταρτημορίου τȣ͂ Γηΐνȣ Μεσημβρινȣ͂. Τοῦ γὰρ ὁλικȣ͂ Γηΐνȣ Μεσημβρινȣ͂ εἰς τέσσαρα διαιρȣμένȣ Τεταρτημόρια, ἑνός τε τȣ́των, ἤτοι τὸ ἀπὸ τȣ͂ Ἰσημερινȣ͂ ἄχρι τȣ͂ Ἀρκτικȣ͂ Πόλȣ διαςήματος, εἰς 10 ἴσα Μιλλιονιςημόρια ἐννοȣμένȣ ὑποδιαιρεῖσθαι, ἓν τῶν τοιȣ́των μερῶν, τȣτ' ἔςιν ἓν Δεκαμιλλιονιςημόριον, οἱ Γάλλοι ὡς μῆκος τȣ͂ ἑαυτῶν

ἐξȣἐξελέξαντο Μέτρε. Ἠσπάσαντο δὲ, παρὰ πάσας, τὴν τοιαύτην τε Τεταρτημορίε εἰς δεκαδικὰ μέρη διαίρεσιν, τοῖς ἀρχαίοις τῶν Ἑλλήνων ἑπόμενοι. Ἡ γὰρ ὑπὸ ἀμνημονεύτων Ἀνδρῶν ἀρχαιοτάτη τῆς Γῆς καταμέτρησις, ἧς οἱ περὶ Ἀριστοτέλην (*) μνείαν ἐποιήσαντο, τεσσαράκοντα μυριάδας Σταδίων τὸ τῆς Γῆς ἀναλογισαμένη μέγεθος, ἑκατὸν χιλιάδας τέτων τῷ τε Μεσημβρινε Τεταρτημορίῳ ἀπένειμε. Τέτε τοίνυν τε Γαλλομέτρε τὸ μῆκος, πρὸς τὰ λοιπὰ παραβαλλόμενον Μέτρα, περιέχει ὡς ἔγγιστα, τῆς μὲν Βινδοβονικῆς Ὀργυιᾶς, 3 Πόδας, 1 Δάκτυλον, 11 $\frac{1}{2}$ Γραμμάς· τῆς δὲ Παρισιακῆς Ἑξάποδος, 3 Πόδας, 11 $\frac{1}{10}$ Γραμμάς· ἤτοι ἐπ' ἀκριβὲς Γραμμὰς Δωδεκαδικὰς 443 $\frac{4259}{10000}$ τῆς τῶν Παρισίων Ἑξάποδος. Αἱ γὰρ ὑπὸ τῶν ἐπίτηδες, ἐκ τῆς διοικέσης τηνικαῦτα Ἐθνικῆς Συνελεύσεως, ςαλέντων Μαθηματικῶν Ἀνδρῶν, Δελάμβρε τε καὶ Μεσαίνε (Delambre & Mechain), γενόμεναι Νεώταται, τε μεταξὺ Δυνικέρκης τε καὶ Βαρσίνε (Dunkerque & Barcelone) ἐκληφθέντος τόξε τε

Δ 2 Τεταρ-

(*) Καὶ τῶν μαθηματικῶν ὅσοι τὸ μέγεθος ἀναλογίζεσθαι πειρῶνται τῆς περιφερείας, εἰς τετταράκοντα λέγεσιν εἶναι μυριάδας Σταδίων· ἐξ ὧν τεκμαιρομένοις ὁ μόνον τὸν ὄγκον ἀναγκαῖον εἶναι Σφαιροειδῆ τῆς Γῆς· ἀλλὰ καὶ μὴ μέγα πρὸς τὸ τῶν ἄλλων Ἄςρων μέγεθος. Ἀριςοτέλης περὶ Οὐρανε. Βιβ. Β'. Κεφ. ΙΔ.

Τεταρτημορίυ τῦ Γηΐνυ Μεσημβρινῦ, Καταμετρήσεις τε καὶ Ὑπολογισμοὶ, ἀκριβέςατα ἡμῖν διεγνώρισαν τὸ τῦ Γηΐνυ τυτυΐ Μεσημβρινῦ Τεταρτημόριον ἐξισῦσθαι Ἑξάποσι Παρισιακαῖς 5130740, ὅ δὴ μεγέθυς τὸ Δεκαμιλλιονιςημόριον, ὡς μονὰς τῶν Μηκεδανῶν ἐκληφθὲν καταμετρήσεων, τὴν τῦ Γαλλομέτρυ ἡμῖν ἀνέδωκε γένεσιν (*). Ὥςε εἶναι ὅτω τὸ μὲν τῦ Γηΐνυ Μεσημβρινῦ Τεταρτημόριον ἴσον 30,784,440 Ποσὶ Παρισιακοῖς, τὴν δὲ μεταξὺ Δυνκέρκης τε καὶ Βυρσίνυ καταμετρηθεῖσαν 15° = 57012 Ἑξάποσι.

Τῦ τοίνυν Σφαιροειδῦς τῆς Γῆς σχήματος, ἀναμφιλέκτυ αὐταῖς Περιηγήσεσι καταςάντος, Σφαῖραν γε μὴν τὴν Γῆν εἶναι ἀκριβῶς τοιαύτην, καὶ τῶν ἀνωμαλιῶν παραβλεπομένων τῶν κατὰ τὴν Ἐπιφάνειαν, ὐχ ἡγητέον· ἀλλ᾽ Ἐλλειψοειδῆ τινα τὸ σχῆμα, εἴτ᾽ ὖν Κρομμυοειδῆ, ἢ Ὠοειδῆ, τὴν μείζονα τῶν Διαμέτρων ὑπὸ τὸν Ἰσημερινὸν προτεταμένην ἔχυσαν, τὴν δ᾽ ἐλάττονα πρὸς τὺς Πόλυς, σὺν τοῖς καθ᾽ ἡμᾶς Σοφωτέροις Ἀνδρᾶσι δικαςέον (**). Ἐμπεδῦται δὲ τῦτο αὐτὸ καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῆς Βαρύτητος, ἥτις ἥττων μὲν ὖσα κατὰ τὸν Ἰσημερινὸν, ἢ πρὸς τὺς Πόλες, ἔγγιον ἐν-

ταῦ-

(*) Ὅρα. Exposition du Système du Monde par P. S. Laplace. Seconde Edition à Paris An. VII. in 4to pag. 72.

(**) Ὅρα. Laplace Ἔνθα ἀνωτέρω. Σελ. 55.

ταῦθα ἢ ἐκεῖθι τὸ μεσαιτάτῳ ὑποφαίνει Κέντρον, καὶ ἥττονα τὴν *Διάμετρον* (*). Ἐλλειψοειδοῦς οὔσης τῆς Γῆς τὸ σχῆμα, ἐλάσσων ἡ διὰ τῶν Πό-

(*) Ἡ τῶν αὐτῶν σωμάτων Βαρύτης, οὐ πανταχοῦ Γῆς ἡ αὐτή ἐστιν, ἀλλὰ μείζων μὲν κατὰ τὰς χώρας τὰς ἐγγυτέρω τῶν Πόλων, ἐλάσσων δὲ κατὰ τὰς ἀπωτέρω. Δείκνυται τοῦτο διὰ τῶν ἀναλικνίστων τῶν μίτῳ ἐξηρτημένων σωμάτων. ἐὰν γὰρ βραδύτεραι ὦσιν, ἐλάσσων ἡ Βαρύτης· ἐὰν δὲ ταχύτεραι, μείζων. Ἀλλὰ καὶ βραχυνομένων τῶν μίτων ταχύτεραι αἱ ἀναλικνίσεις, μηκυνομένων δὲ βραδύτεραι· ἄρα ἰσοχρόνων γινομένων τῶν ἀναλικνίσεων, μείζων ἐστὶ ἡ Βαρύτης ἔνθα ὁ μίτος ἐστὶ προμηκέστερος, ἐλάσσων δὲ ἔνθα βραχύτερος. Τὸ μὲν οὖν ἐν Παρισίοις, κατὰ Πλάτος κειμένοις μοιρῶν 48°, 50', 14", ἑπιξηκοστοῦ ἀναλικνιζόμενον, ἐν Καϋήνῃ (Cayenne) Νήσῳ μοίραις 4°, 56', 15", ἀπὸ τοῦ Ἰσημερινοῦ ἀπεχούσῃ, γραμμὴν καὶ $\frac{1}{4}$ βραχυνομένου τοῦ μήκους ἀνελικνίζετο· βαρύτερον ἄρα τὸ αὐτὸ σῶμα ἐν Παρισίοις ἢ ἐν Καϋήνῃ. Πρῶτος ὁ τὸ συμβαῖνον παρατηρήσας ἐγένετο Ῥιχέριος ἔτει 1672 (Laplace, αὐτόθι. Σελ. 67.). Πολλοὶ δὲ καὶ ἄλλοι τὸ πρᾶγμα πολλαχοῦ Γῆς παρατετηρηκότες, κοινῇ ἀπεφήναντο τὴν τῆς Βαρύτητος δύναμιν αὔξειν μὲν κατὰ τοὺς Πόλους, συνῳδὰ ταῖς τοῦ Μεσημβρινοῦ Μοίραις, μειοῦσθαι δὲ κατὰ τὸν Ἰσημερινόν, χρῆναι δὲ τῶν ἀναλικνιζομένων τοὺς μίτους κατὰ τὰ Βορειότερα τῆς Γῆς μηκύνεσθαι, βραχύνεσθαι δὲ κατὰ τὰ Νοτιώτερα, ἤτοι τὰ ἐγγυτέρω τοῦ Ἰσημερινοῦ, ἵν' οὕτως ἀκριβῶς τηροῖτο τὸ ἰσόχρονον τῶν ἀναλικνίσεων.

λων Διάμετρος, ἤτοι ὁ Γῆινος ταύτης Ἄξων, τῆς τῆ Ἰσημερινῆ Διαμέτρε, ἐν λόγῳ τῶν 333 πρὸς 334. Ἕπεται ἂν ἐντεῦθεν (ἔκ τε τῆς δοθείσης Ἀναλογίας, καὶ ἐκ τῆ ἀληθῆς Μήκυς τῆ ἐλλειψοειδῆς τῆ Μεσημβρινῆ Τεταρτημορίε), κατὰ τὰς τῆς Ὑπερεχέσης Αναλύσεως Ἀρχὰς, τὴν μὲν τῆ Ἰσημερινῆ Ἡμιδιάμετρον εἶναι = 3271226 Ἑξάποσιν, ἢ Γαλλομέτροις 6375741· τὴν δὲ τῆς Γῆς = 3261-432 Ἑξάποσιν, ἢ Γαλλομέτροις 6356652.

Τῆ ἔτω τοίνυν, ἀντὶ Μονάδος ἀσφαλῆς καὶ ἀμεταπτώτε, ἐκληφθέντος Γαλλομέτρε, τὸ μὲν Δεκατημόριον, ἢ $\frac{1}{10}$, Ὑποδεκάμετρον (Decimètre) ἐκάλεσαν· τὸ δ' Ἑκατοςημόριον, ἢ $\frac{1}{100}$, Ὑφεκατοντάμετρον (Centimètre)· τὸ δὲ Χιλιοςημόριον, ἢ $\frac{1}{1000}$, Ὑποχιλιόμετρον (Millimètre). Αὖθις, τὸ μὲν τέτε Δεκαπλάσιον, ἢ 10 Γαλλόμετρα, Δεκάμετρον (Decamètre) προσηγόρευσαν· τὸ δ' Ἑκατονταπλάσιον, ἢ 100 Γαλλόμετρα, Ἑκατοντάμετρον (Hectomètre)· τὸ δὲ Χιλιοπλάσιον, ἢ 1000 Γαλλόμετρα, Χιλιόμετρον (Kilomètre)· τὸ δὲ Μυριοπλάσιον, ἢ 10,000 Γαλλόμετρα, Μυριόμετρον, (Myriamètre). Χώραν δὲ ταῦτα ἔχει ἐπὶ τῶν τῆ Μήκυς καταμετρήσεων.

Β.' Ἡ τῶν Ἐπιφανειῶν Μονὰς Τετράγωνον ἐςὶν, ἦ τῶν πλευρῶν ἑκάςη δέκα ἐμπεριείληφε Γαλλόμετρα, ἡ δὲ ὅλη Ἐπιφάνεια 100 τετραγωνικὰ Γαλλόμετρα. Καλεῖται δὲ ἡ τοιαύτη Μονὰς, παρὰ μὲν Γάλλοις Ἄρον (Are), ἐκ τῦ Ἀρῦν παραγομένυ τῦ ὀνόματος, παρ' ἡμῖν δὲ καλείσθω Ἄρον Γαλλικὸν, ἢ Γαλλόπλεθρον. Τῦτυ τὸ μὲν Δεκατημόριον, εἴτ' ὂν τὸ Δεκατήαρον (Deciare), τυτέςιν ἡ Ἐπιφάνεια δέκα τετραγωνικῶν Γαλλομέτρων, καλεῖται Ὑποδεκάπλεθρον· τὸ δ' Ἑκατοςημόριον, ἤτοι τὸ Ἑκατοςήαρον (Centiare), εἴτ' ὂν ἡ ἴση τῷ τετραγώνῳ τῶν Γαλλομέτρων Ἐπιφάνεια, Ὑφεκατοντάπλεθρον· τὸ δὲ Χιλιοςημόριον, ἤτοι τὸ Χιλιοςήαρον (Milliare), Ὑποχιλιόπλεθρον. Αὖθις, τὸ μὲν τῦτυ Δεκαπλάσιον, ἢ Δέκαρον (Decare), ἤτοι ἡ Ἐπιφάνεια 10 Γαλλοπλέθρων, ἢ 100 τετραγωνικῶν Γαλλομέτρων, καλεῖται Δεκάπλεθρον· τὸ δ' Ἑκατονταπλάσιον, ἢ Ἑκατόνταρον (Hecctare), εἴτ' ὂν ἡ Ἐπιφάνεια 100 Γαλλοπλέθρων, ἢ 1,000 τετραγωνικῶν Γαλλομέτρων, Ἑκατοντάπλεθρον· τὸ δὲ Χιλιοπλάσιον, ἤτοι τὸ Χιλίαρον (Kilare), ὃ ἡ Ἐπιφάνεια 1,000 περιέχει Γαλλόπλεθρα, ἢ 10,000 τετραγωνικὰ Γαλλόμετρα, Χιλιόπλεθρον·

τὸ δὲ Μυριοπλάσιον, ἤτοι τὸ Μυρίαρον (Myriare), ὃ ἡ Ἐπιφάνεια 10,000 Γαλλοπλέθρων, ἢ 100,000 τετραγωνικῶν Γαλλομέτρων περιεκτικὴ, Μυριόπλεθρον.

Γ'. Ἡ Μονὰς τῶ τῶν ξηρῶν τε καὶ ὑγρῶν μέτρων, ἐςὶ Κύβος, ἒξ ἴσας πανταχόθεν ἔχων Ἐπιφανείας, ὧν ἑκάςη ἑνὶ Ὑποδεκαμέτρῳ ἰσῦται. Καλεῖται δὲ τὸ τοιῦτον Μέτρον, Λίτρος (le Litre). Τέτο τὸ μὲν Δεκατημόριον, ἤτοι τῆς Λίτρυ, καλεῖται Ὑποδεκάλιτρος (Décilitre). τὸ δ' Ἑκατοςημόριον, ἤτοι τῆς Λίτρυ, Ὑφεκατοντάλιτρος (Centilitre)· τὸ δὲ Χιλιοςημόριον, ἢ τῆς Λίτρυ, Ὑποχιλιόλιτρος (Millilitre). Αὖθις, τὸ μὲν Δεκαπλάσιον, ἤτοι οἱ 10 Λίτροι, Δεκάλιτρος (Décalitre)· τὸ δ' Ἑκατονταπλάσιον, ἤτοι οἱ 100 Λίτροι, Ἑκατοντάλιτρος (Hectolitre)· τὸ δὲ Χιλιοπλάσιον, ἤτοι οἱ 1,000 Λίτροι, Χιλιόλιτρος (Kilolitre)· τὸ δὲ Δεκαχιλιοπλάσιον, ἤτοι οἱ 10,000 Λίτροι, Μυριόλιτρος (Myrialitre). Τὸν δὲ τῶ Γαλλομέτρυ Κύβον, οἱ μὲν Γάλλοι Στερεὸν (Stére) ἐκάλεσαν, ἡμῖν δὲ, τὴν τῆς λέξεως διαφορὰν τηρῶσι, Γαλλόςερεον κληθήτω. ἔςι δὲ τὸ Γαλλόςερεον, Σῶμα Στερεὸν, ἒξ πανταχόθεν ἴσον Ἐπιφανείας, ὧν ἑκάςη ἑνὶ τετραγωνικῷ Γαλλομέλομέτρῳ ἐξισοῦται, εἰς χρῆσιν τὰ μάλιςα ἐν τῇ τῶν ξύλων καταμετρήσει λαμβανόμενον. Τούτου τὸ μὲν Δεκατημόριον, ἤτοι τὸ τοῦ Γαλλοςέῤῥου τὸ μέρος, Ὑποδεκάςεῤῥον (Décistère) εἴρηται· τὸ δὲ Δεκαπλάσιον, ἤτοι τὸ ἐκ δέκα Γαλλοςέῤῥων συγκείμενον Στερεὸν Σῶμα, Δεκάςεῤῥον (Décastère). Καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

Περὶ τοῦ Νεωτέρου Σταθμικοῦ τῶν Γάλλων Συςήματος.

§. 222. Ἡ Μονὰς τοῦ βάρους πρὸς ςάθμησιν οἱωνδηποτοῦν Ὠνίων, Φαρμάκων, Νομισμάτων τε καὶ Λιθάκων, ἐςὶ τὸ ἀληθὲς βάρος ὕδατος ἐν κοίλῳ τινὶ Κύβῳ ἐκλαμβανόμενον, οὗ τινος τῶν πλευρῶν ἑκάςη, εἴτ' οὖν πλάτος, μῆκος καὶ βάθος, τῷ τοῦ Γαλλομέτρου Ἑκατοςημορίῳ, ἤτοι τῷ Ὑφεκατονταμέτρῳ, ἰσοῦται. Ἐκλαμβάνεται δὲ ἡ τοιαύτη Κυβικὴ τοῦ ὕδατος ποσότης κεκαθαρμένη τε καὶ διεςαλαγμένη ἐν βαθμῷ Θερμότητος = 0, οἷον ἡμῖν ἐν τῇ τοῦ παγετοῦ διαλύσει τὸ Ῥεώμυρικὸν ὑπεμφαίνει Θερμόμετρον. Ἡ τοιαύτη τοίνυν τοῦ φυσικοῦ βάρους Μονὰς καλεῖται Γαλλόγραμμον (Gramme), ἐκ τοῦ Ἑλληνικοῦ ληφθεῖσα Γραμμάριον, μέρος 24 τῆς οὐγκίας σημαίνοντος. Βαρύνει δὲ ἐν μὲν τῷ Βινδοβονικῷ Σταθμῷ, ᾧ τινι οἱ Φαρμακομακοπῶλαι χρῶνται, εἴτ' ἐν τῷ 12 περιέχοντι ὀγκίας, κόκκες 13 $\frac{714}{1000}$, ἐν δὲ τῷ Παρισιακῷ, ὃ ἡ Λίτρα 16 ὀγκιῶν, ἢ 9216 κόκκων, περιεκτική, κόκκες 18 $\frac{827}{1000}$. Τότε δὴ τῇ Γαλλογράμμε τὸ μὲν Δεκατημόριον, ἢ $\frac{1}{10}$ (κόκκος 1 $\frac{7}{8}$ τε τῶν Παρισίων βάρες), καλεῖται Ὑποδεκάγραμμον (Décigramme)· τὸ δ' Ἑκατοςημόριον, ἢ $\frac{1}{100}$ ($\frac{3}{16}$ κόκκε), Ὑφεκατοντάγραμμον (Centigramme)· τὸ δὲ Χιλιοςημόριον, ἢ $\frac{1}{1000}$ ($\frac{1}{53}$ κόκκε), Ὑποχιλιόγραμμον (Milligramme). Αὖθις τὸ μὲν τέτε Δεκαπλάσιον, ἤτοι 10 Γαλλόγραμμα (2 δραχμαὶ καὶ 44 κόκκοι), Δεκάγραμμον (Décagramme)· τὸ δ' Ἑκατονταπλάσιον, ἤτοι 100 Γαλλόγραμμα (3 ὀγκίαι καὶ 2 δραχμαί), Ἑκατοντάγραμμον (Hectogramme)· τὸ δὲ Χιλιοπλάσιον, ἤτοι 1000 Γαλλόγραμμα (2 λίτραι καὶ δραχμαὶ 5 $\frac{1}{2}$), Χιλιόγραμμον (Kilogramme)· τὸ δὲ Δεκαπλάσιον, ἢ 10,000 Γαλλόγραμμα (ὡς ἔγγιςα 20 λίτραι καὶ 7 ὀγκίαι), Μυριόγραμμον (Myriagramme).

Παρεξεταζομένων τοίνυν τῶν παλαιῶν Γαλλικῶν Μέτρων τοῖς Νεωτέροις ἔςαι.

Ἡ μὲν Ἑξάπες Ὀργυιὰ = 1, 94903 Γαλλομέτροις.

Τὸ δὲ Γαλλόμετρον = 0, 513074 Ἑξάποσι.

Ὁ μὲν

Ὁ μὲν Πῆχυς = Γαλλομέτροις 1, 1824 = 3 Ποσὶ, 7 Δακτ. 8 Γραμ.

Τὸ δὲ Γαλλόμετρον = 0, 846 Πήχεως.

Τὸ μὲν Ἑκατοντάπλεθρον (Hectare) = 2, 9249 Πλέθροις Παρισιακοῖς (Arpens de Paris).

Τὸ δὲ Πλέθρον (Arpent) = 900 Ἑξάποσι Τετραγώνοις = 34, 19 Γαλλοπλέθροις.

Τὸ Πλέθρον ἰσοῦται Ὀργυιαῖς Γαλλικαῖς, πολιτικαῖς, εἴτ' οὖν Πέρκαις (Perches), Τετραγώνοις, 100. Ἔστι δὲ τὸ τῆς τοιαύτης Ὀργυιᾶς μῆκος διάφορον, εἴτ' οὖν Ποδῶν 18, 20 καὶ 22. Ἡ Ὀργυιὰ, ἥτινι μᾶλλον ἐν Παρισίοις χρῶνται ἐστὶν ἡ Ὀκτωκαιδεκάπους, ἢ ἡ ἐκ 18 Ποδῶν συγκειμένη, εἴτ' οὖν ἡ 3 Ἑξαπόδων περιεκτική. Ἀναλογεῖ δὲ τηνικαῦτα ἡ μὲν τοιαύτη Τετράγωνος Ὀργυιὰ, 9 Ἑξάποσι Τετραγώνοις, τὸ δὲ Πλέθρον 900 Τετραγώνοις Ἑξάποσι.

Ἡ μὲν Τετράγωνος Ἑξάπους = 3, 7987 Τετραγώνοις Γαλλομέτροις.

Ἡ δὲ Κυβικὴ Ἑξάπους = Γαλλοστέρροις 7, 4039.

Τὸ δὲ Γαλλόστερρον = Ἑξαπ. Κυβικ 0, 1351 = Σχοίνοις (Cordes) 0, 26.

Τὸ μὲν Λίτρον (Litron), ἢ ἡ Λίτρα = Λίτροις 0, 813.

Ὁ δὲ Λίτρος (Le Litre) = Λίτραις 1, 23.

Ἡ μὲν

Ἐντεῦθεν ἐκλαμβανόμενοι τῷ προσεχῶς τῶν ὀβολῶν συνάπτονται κεφαλαίῳ, τὸ δ' ὑπόλοιπον 1 λεπτὸν, ἐν τῇ τῶν λεπτῶν γράφεται τάξει. Καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'.			
	20 Ἀργ.	39 Ὀβολ	2 Λεπτ.
	35 -	28 -	1 -
	6 -	15 -	2 -
	63	3	2

Ἐπεὶ ἐν τῷ τῶν λεπτῶν ἀθροίσματι 5, ὁ ὀβολὸς ἅπαξ περιέχεται, 1 μὲν εἰς τὸ προσεχὲς μεταφέρεται εἶδος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 2 ἐν τῷ τῶν λεπτῶν ἀθροίσματι γράφεται. Ἐν τῷ τῶν ὀβολῶν αὖθις ἀθροίσματι 83, τὸ ἀργύριον δὶς περιέχεται, ὅτι 40 ὀβολοὶ ἐν ἀποτελοῦσιν ἀργύριον, τὸ μὲν ὑπόλοιπον 3 ἐν τῷ τῶν ὀβολῶν ἀθροίσματι τίθεται, 2 δὲ τῷ ἐφεξῆς τῶν ἀργυρίων 61 προσαριθμεῖται ἀθροίσματι, ἵν' οὕτως τὸ ὁλικὸν σχῶμεν ἄθροισμα 63. Ταυτὸ καὶ ἐπὶ πολλῶν ἄλλων κρατήσει λεγόμενον,

Β'. Πόσον ἐν ἑβδομαδιαίῳ διαστήματι ἐδαπάνησεν, ὁ ἑκάστῃ ἡμέρᾳ ἀποδούς;

	Φιορ.	Γροσ.	Κρεϊτζ.
Κυριακὴ . . .	3 -	7 -	2.
Δευτέρα . . .	2 -	14 -	1.
Τρίτη . . .	2 -	12 -	2.

Τετάρ-

Τετάρτη . .	1 -	18 -	2.
Πέμπτη . .	3 -	4 -	1.
Παρασκευῇ . .	4 -	4 -	2.
Σαββάτῳ . .	2 -	2 -	2.
	20 -	5 -	0.

Καὶ γὰρ 3 | 12 Κρ. | 4 Γροσ.
| 12 |
0

20 | 65 Γρόσ. | 3 Φιορ.
| 60 |
5

Γ'. Πόσον ἐκ τινος Φαρμάκου ἔλαβεν; ὁ πολλάκις ἐκ τούτου λαβών,

	Οὐγκ.	Δραχ.	Γραμμάρ.	Κόκ.
	6 -	2 -	2 -	8.
	5 -	6 -	1 -	12.
	5 -	5 -	2 -	16.
	4 -	4 -	2 -	8.
1 Λίτρ. -	10 -	4 -	0 -	4.

20 | 24 | 2 Γραμ.
40
4 Κόκ

3 | 9 | 3 Δραχ.
9
0

8 | 20 | 2 Οὐγκ.
16
4 Δραχ.

12 | 22 | 1 Λίτρ.
12
10 Οὐγκ.

Δ. Πόσον οἴνε ἐν τῷ αὐτῷ Οἰνοφυλακίῳ κέκτηται; ὁ διαφόρως ἀγοράσας,

Ἀμφορ.	Στάμ.	Ἡμιςάμ.	Τεταρτ.
7	- 18	- 1	- 1.
13	- 4	- 1	- 1.
4	- 20	- 1	- 1.
8	- 16	- 1	- 1.
33	- 29	- 0	- 0.

2 | 4 | 2 Ἡμις,
4
—
0

2 | 6 | 3 Στάμ.
6
—
0

32 | 61 | 1 Ἀμφ.
32
—
29 Στάμ.

Ε. 16 Λίτρ.	6 Οὐγκ.	1 Ἡμιεγ.	2 Δραχ.	2 Γρ.
0 -	7 -	1 -	3 -	0 -
7 -	12 -	0 -	1 -	1 -
24 -	10 -	1 -	3 -	0 -

Ϛ. 1 Ἑξάπ.	5 Ποδ.	9 Δακτ.	11 Γραμ.	10 Σημ.
4 -	3 -	7 -	6 -	5 -
61 -	3 -	5 -	6 -	5.

Ζ. 22 Ὥρ.	45 Λεπτ.	27 Λ. δεύτ.	
13 -	14 -	30 -	-
6 -	0 -	20 -	-
42 -	0 -	17 -	-

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 233 Ἀριθμοὺς Ἑτερογενεῖς ἀπ' ἀλλήλων ἀφελεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Τὰ ἑτερογενῆ τῶν εἰδῶν ὑπὸ τοῖς ἑτερογενέσιν, ὡς καὶ πρότερον γραφήτωσαν. *Β'.* Αἱ μονάδες, δεκάδες, κ.τ.λ. ἑκάστη ὁμονογενοῦς εἴδους, ἀφαιρεθήτωσαν ἀπὸ τῶν ἀνωτέρων ὁμοειδῶν μονάδων, δεκάδων, κ.τ.λ. τὸ δὲ ὑπόλοιπον ὑπὸ τὴν γραμμὴν τεθήτω. Ἐὰν δὲ τὸ ἀφαιρετέον εἶδος μεῖζον τοῦ ἀνωτέρα τύχῃ, ἀπὸ τοῦ προσεχοῦς εἴδους μονὰς ληφθήτω, ἥτις ἐνταῦθα οὐχὶ 10, ἀλλὰ τοσούτων μονάδων ἐκτιμηθήσεται, ὅσαι δήποτε μονάδες τοῦ ἥσσονος εἴδους, τὴν τιμὴν συνιςῶσι τῆς μονάδος τοῦ εἴδους τοῦ μείζονος. Οἷον, ἐὰν ἀπὸ 5 ὀβολῶν ἀφαιρετέοι τύχωσι 17, ἀπὸ τῶν ἀργυρίων μονὰς μεταχθήτω, ἥτις ἐν τῇ τῶν ὀβολῶν τάξει 40 τιμηθήσεται, καὶ τῶν πέντε ὀβολῶν προςιθεμένων ἔχομεν 45, ἀφ' ὧν οἱ 17 ἀφαιρέμενοι καταλείπουσιν 28 ὀβολούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. 103	Ἀργ.	4	Ὀβ.	1	Λεπτ.	
16	-	15	-	2	-	
86		28		2		

Ἀμε-

Ἀμέλει τοι ἐπειδὴ 2 λεπτὰ ἀπὸ τῦ 1 ἀφαιρεθῆναι ἐκ ἔχυσιν, ἀπὸ τῶν 4 ὀβολῶν εἷς τρέπεται εἰς 3 λεπτὰ, ὥςε ἀντὶ 1 κεῖσθαι 4. Ἀφαιρεθέντων ἄρα 2 ἀπὸ τῶν 4 καταλείπονται 2. Παραπλησίως ἐπειδὴ 15 ὀβολοὶ ἀπὸ τῶν ὑπολειφθέντων 3 ἀφαιρεθῆναι ἐκ ἔχυσιν, ἐκ τῶν 104 ἀργυρίων ἓν προσληφθὲν εἰς 40 ὀβολὺς μεταποιεῖται· ἐὰν οὖν ἀφαιρεθῶσι 15 ὀβολοὶ ἀπὸ τῶν 43, τὸ ὑπόλοιπον 28 ἐν τῷ οἰκείῳ τίθεται τόπῳ. Τελευταῖον δὲ 16 ἀργύρια ἀπὸ τῶν 102 ἀφαιρεθέντα 86 καταλείπυσι.

Β.' 18 Ποδ.	5 Δάκτ.	3 Γρ.	8 Σημ.	
6 -	11 -	8 -	10 -	
11 -	5 -	6 -	10 -	

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 234. Αἱρετώτερον δὲ ἐςὶ, πρὸς ἀποφυγὴν τῆς συγχύσεως, ὁπηνίκα τὸ ἀφαιρετέον εἶδος μεῖζον τῦ ἀνωτέρυ, εἴτ' ἂν τῦ μειωτέυ, τύχῃ, τὴν ἀπὸ τῦ ἐφεξῆς εἴδυς προσλαμβανομένην μονάδα, αὐτίκα τῷ ἐλάττονι εἴδει κατὰ τὴν ἀναλογῦσαν αὐτῇ τιμὴν προσθεῖναι, εἶτα τε τὴν ἀφαίρεσιν κατὰ τὺς ἑαυτῆς κανόνας ἐνςήσασθαι. Τύτων γὰρ ὑποτεθέντων, ὕτω τὸ προεκτεθὲν Β.' μεταλλάττεται Παράδειγμα.

17 *Π.*	16 *Δ.*	14 *Γ.*	20 *Σ.*
6 –	11 –	8 –	10 –
11 –	5 –	6 –	10.

Γ'. Ὁ νῦν εὐκλεῶς ἐνταῦθα Ἡγεμονεύων, Ὑψηλότατος Ἡγεμὼν ΣΚΑΡΛΑΤΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ ΚΑΛΛΙΜΑΧΗΣ ἐγεννήθη τῇ 25 Ἰουνίου τοῦ 1774 Σωτηρίου Ἔτους. Πόσον οὖν ἄγων ἦν, ὅτε, τῇ 12 Αὐγούστου τοῦ 1806 Σωτηρίου Ἔτους, τοὺς τῆς Ἡγεμονικῆς Ἀρχῆς τὸ πρῶτον διεδέξατο οἴακας;

Ἔτη.	Μῆνες.	Ἡμέραι.
1806,	8,	12.
1774,	6,	25.
32,	1,	17.

Δ'. Περόναι ἀργυραῖ ςαθμίζουσι 18 ἡμιουγκίας καὶ 5 κόκκους· ὁ δὲ ταύταις συμμιχθεὶς σίδηρος, 4 ἡμιουγκίας καὶ 1 κόκκον. Πόσον ὁ ἄργυρος μόνος ςαθμίζει;

ΠΡΑΞΙΣ.

18 Ἡμιουγκ.	5 Κόκκοι.
4 –	1 –
14 –	4.

Ε'. Ἔμπορός τις λαβὼν σακχάρου 3 Κεντηνάρια, 40 Λίτρας καὶ 2 Τεταρτημόρια, εὗρε τὰ ἐνειλήματα ςαθμίζοντα 52 Λίτρας, 3 Οὐγκίας. Ζητεῖ οὖν μαθεῖν πόσον καθαροῦ σακχάρου ἀπείληφε.

ΠΡΑ-

ΠΡΑΞΙΣ.

Κεντ.	Λίτραι	Τεταρτ.	Οὔγκ.
	(100)		(4)
3'.	40.	2'	0.
0.	52.	0.	3.
2.	88.	1.	1.

ς'. Κάπηλός τις ἐξ ὧν ἠγόρασεν οἴνε Ἀμφορέων 72 καὶ Στάμνων 16, ἐπώλησεν Ἀμφορεῖς 58 καὶ 26 Στάμνες. Πόσον οἴνε αὐτῷ ὑπελείφθη;

ΠΡΑΞΙΣ.

Ἀμφ.	Στάμ.	Ἡμισ.
	(52)	
72',	16;	0.
58,	26;	0.
13,	22,	0.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 235. Ἀριθμὲς Ἑτερογενεῖς ἐπ' ἀλλήλες πολλαπλασιάσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Ὁ πολλαπλασιαςὴς τῷ ἐσχάτῳ ὑπογραφεὶς εἴδει, ἐπὶ τὰ λοιπὰ ἑπομένως ἀχθήτω. Β'. Ὁσάκις ἐν οἱῳδήποτεν εἴδει, τὸ ἑζομένως ἀνώτερον περιέχεται εἶδος, τοσάκις ἀπ' ἐκείνε ἀφαιρεθήτω· τῷ δὲ προσεχῶς ἑπομένῳ, ἰσάριθμοι συναφθείτωσαν μονάδες, ὡς ἐν τῇ Προσθέσει ὑπεθέμεθα (§. 230.).

ΠΑ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Ἔςωσαν πολλαπλασιαςέα 16 Ἀργύρια, 32 Ὀβολοὶ, 2 Λεπτὰ, ἐπὶ 9.

Ἀργ.	Ὀβ.	Λεπ.
16,	32,	2.
		9.
144,	288,	18.

Τῶν 6 Ὀβολῶν ἀπὸ τῶν 18 Λεπτῶν ἀφαιρεθέντων ἐδὲν ὑπολειφθήσεται Λεπτὸν, τοῖς δὲ λοιποῖς συναφθέντων ὀβολοῖς ἄθροισμα ἀναδοθήσεται 294. Ἀφ' ὃ αὖθις τῶν 7 Ἀργυρίων ληφθέντων, Ὀβολοὶ μὲν ὑπολειφθήσονται 14, Ἀργύρια δὲ ἐνληφθήσονται 151. Εἶτ' ἂν Ἀργ. 151, Ὀβ. 14, Λεπτ. 0.

Β'. Ἔςωσαν πολλαπλασιαςέα 30 Φιορίνια, 15 Γρόσσοι, 2 Κρεϊτζάρια ἐπὶ 60. ἔςαι,

30 Φ.	15 Γ.	2 Κ.
		60.
1800,	900,	120. Εἶτ' ἂν 1847 Φ.

Γ'.	42 Ποδ.	7 Δακτ.	8 Γραμ.
			40
	1680,	280,	320.
Εἶτ' ἂν	1705,	6,	8.

Δ'. Ὁ Ἡλιακὸς Ἐνιαυτὸς, εἶτ' ἂν ὁ Χρόνος, καθ' ὃν ὁ Ἥλιος ἀφ' ἑνός τινος τῶν ἐν τῇ Ἐκλειπτικῇ

τικῇ Σημείων ἀποβὰς, ἐπὶ τὸ αὐτὸ αὖθις ἐπανακάμπτει, περιέχει 365 Ἡμέρας, 5 Ὥρας, 48 Λεπτὰ Πρῶτα, 48 Λεπ. Δευτ. Ζητεῖται, πόσαις Ἡμέραις, Ὥραις, καὶ Λεπτοῖς σύγκεινται τρεῖς Ἐνιαυτοί;

Ἡμερ.	Ὥρ.	Λ. Π.	Λ. Δ.
365,	5,	48′,	48″
			3
1095,	17,	24′,	24″

ΣΧΟΛΙΟΝ Α′.

§. 236. Διὰ τῦ πολλαπλασιασμῦ τὸ μεῖζον εἶδος ἐπὶ τὸ ἔλαττον κατάγεται, ἐπὶ τοσύτων δηλαδὴ μονάδων πολλαπλασιαζόμενον, ὅσων τὸ ἔλαττον περιεκτικὸν τυγχάνει. Οὕτω, τὸ Ἀργύριον εἰς Ὀβολὺς μετάγεται, ἐὰν ἐπὶ 40 πολλαπλασιασθῇ. ὁ Πῦς εἰς Δακτύλυς ἐὰν ἐπὶ 12. Ἑπομένως 3 Ἀργύρια ἰσοδυναμήσυσιν Ὀβολοῖς 120. Πόδες 7, δακτύλοις 84. Δάκτυλοι 84, Γραμμαῖς 1008.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β′.

§. 237. Καλῶς δ' ἐνταῦθα σημειωτέον, τῷ τρόπῳ τύτῳ ὐδόλως πολλαπλασιασμὸν διὰ τῦ ἐλάττονος γίνεσθαι εἴδυς, ἀλλὰ μόνον δι' ἀριθμῦ ἁπλῶς, καθόσον ὗτος συλλογὴ ἐςὶ μονάδων (§. 10.)· ἄρα τοσάκις τὸν ἕτερον ἐκλαμβάνεσθαι, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ πολλαπλασιαςῇ ἐμπεριείληπται (§. 79.).

Κὰν-

Κἀντεῦθεν ἐν ταύτῃ τῇ περιςάσει, ὁ τῦ ἐλάττονος εἴδυς ἀριθμὸς, ὁ πολλαπλασιάζων, ὄχὶ κατὰ τὴν ἑαυτῦ παρονομασίαν καὶ τὴν ἐνδόμυχον δύναμιν· ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν αὐτῦ δύναμιν θεωρεῖσθαι ἔχει. Κυρίως γὰρ ὁ τῶν τοιύτων ποσοτήτων ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασμὸς, ὔτε γενέσθαι, ὔτε μὴν ἐκφρασθῆναι δύναται. Τί γὰρ σημάναι βύλεται; 3, Ἀργύρια ἐπὶ 15 πολλαπλασιάσαι Ὀβολῦς; ὔτε γὰρ Ἀργυρίων ἐντεῦθεν, ὔτε Ὀβολῶν γινόμενον ἀναδοθήσεται· ταὐτὸν ἔςαι, ἐὰν 7 Πόδες ἐπὶ 5 Δακτύλυς πολλαπλασιασθῶσι, τὸ γὰρ ἐντεῦθεν γινόμενον ὔτε Ποδῶν ὔτε Δακτύλων ἔςαι. Ἀφῃρημένως τοίνυν ἀείποτε ὁ πολλαπλασιαςὴς ἐκλαμβάνεται, καὶ κατὰ τὴν αὐτῦ μόνον ἀριθμητικὴν σημασίαν (Αὐτόθι). Ἐντεῦθεν ῥαδίως ἐπιλύεται, τῦ χάριν 3 Ἀργύρια ἐπὶ 2 Ἀργύρια πολλαπλασιαζόμενα γινόμενον ἀναδιδῦσιν Ἀργύρια 6· ταῦτα δὲ εἰς Ὀβολῦς διαλυθέντα καὶ πολλαπλασιασθέντα διάφορον ἀναδιδόασι παραγόμενον, οἷον 120 Ὀβολοὶ ἐπὶ 80 πολλαπλασιαζόμενοι παράγυσιν Ὀβολῦς 9600, εἴτ' ὖν 240 Ἀργύρια; Ὅτι ἐν μὲν τῷ προτέρῳ γινομένῳ τὰ 3 Ἀργύρια δὶς εἴληπται (Αὐτ.), ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ τὰ αὐτὰ 3 Ἀργύρια, ὀγδοηκοντάκις, ὅθεν καὶ διάφορον ἀναγκαίως κεφάλαιον ἀναδιδόασι.

ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'.

§. 238. Συμβαίνει δ' ἐνίοτε, τὸν δὲ ἀριθμȣ̃ πολλαπλασιασμὸν ȣ̓ μόνον κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν αὐτȣ̃ δύναμιν ἐκτελεῖσθαι (§. 79.), ἀλλὰ δὴ καὶ κατὰ τὴν ἑαυτȣ̃ σημασίαν τε καὶ παρονομασίαν· οἷον, ἤτοι χρημάτων διὰ χρημάτων πολλαπλασιαζομένων, ὠνίων δι' ὠνίων, κ.τ.λ· ὡς ἐν ταῖς τῶν Ἀναλογιῶν Μεθόδοις ἐπιγίνεται, κυρίως δὲ ἐν τῇ Χρυσῇ λεγομένῃ Μεθόδῳ· ἢ καὶ τῆς τῶν διαςημάτων ποσότητος ἐν τοῖς τȣ̃ μήκȣς τε καὶ πλάτȣς μέτροις αἰτȣμένης, ὡς ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ὀψόμεθα. Ἐν μὲν γὰρ τῇ πρώτῃ περιςάσει ἀφῃρημένως οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τῶν πραγμάτων ἐν ταῖς πράξεσιν ἐκλαμβανόμενοι, ἐφ' ᾧ ἡ προσήκȣσα τȣ́των ἐξαχθῇ ἀναλογία, τοῖς ὑπ' αὐτῶν εἶτα σημαινομένοις ἐφαρμόζονται πράγμασιν· οἷον ἐπὶ τȣ̃ Παραδείγματος, εἰ εἷς τῶν Μαθητῶν Ἀργύρια 3 ἦν ἀποτίσας, πόσα 6 Μαθηταὶ ἀποτίσȣσιν; πολλαπλασιάζεται ὁ 3 ἐπὶ 6, εἴτ' ȣ̓̃ν ὁ 3 6-άκις ἀφῃρημένως ἐκλαμβάνεται ἀπό τε τῶν Μαθητῶν καὶ τῶν Ἀργυρίων, τῶν ἁπλῶν μόνον ἐν τοῖς 3 καὶ 6 μονάδων ἐπιθεωρȣμένων· τῆς δὲ πράξεως τελεσθείσης καὶ τῆς ἀληθȣ̃ς ἀναλογίας εὑρεθείσης, ἡ προσήκȣσα αὖθις αὐτοῖς ἀπονέμεται σημασία. Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ, ὁ διὰ τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃ μέτρȣ διὰ μέτρȣ ἀναδιδόμεδύμενος ἀριθμὸς, τετράγωνον ἐςὶ καὶ τάξεως ὑπερτέρας, ὡς ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἐκ περιουσίας κατάδηλον ἐςαι· ὅτω Δάκτυλος ἢ Πὲς, ἐπὶ Δάκτυλον ἢ Πόδα ἀγόμενος, Δάκτυλον ἢ Πόδα τετράγωνον, εἴτ' ὂν διπλασίυ μέτρυ κατὰ τὸ μῆκος δηλαδὴ καὶ πλάτος ἀναδίδωσιν, ὃ δὴ ἐπὶ τῶν Νομισμάτων καὶ τῶν λοιπῶν Σταθμῶν χώραν ὐκ ἔχει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'

§. 239. Ἐὰν ἀριθμὸς Συγκεκριμμένος, εἴτ' ὢν Ἑτερογενὴς, ἐπὶ Κλάσμα Πολλαπλασιαςέος πρόκειται, ἐπὶ τὸ ἐλάχισον ἀναχθεὶς εἶδος ἐν σχήματι Κλασματώδει ἐκτεθήτω, τῦ τῶν μερῶν ἀριθμῦ, ἐφ' ἃ ἀνῆκται, ἀντὶ Παρονομαςῦ ὑπογραφομένυ (§. 225.). εἶτα δὲ γενέσθω Κλασμάτων πολλαπλασιασμός. Μεθ' ἃ, εἰ βυλητὸν εἴη, πρὸς τὰ μείζω ἀναχθήτω εἴδη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Ἔςωσαν 2 Κεντηνάρια, 36 Λίτραι καὶ 8 Οὐγκίαι ἐπὶ $\frac{2}{3}$ πολλαπλασιαςέα.

ΠΡΑΞΙΣ.

2 *Κεντηνάρια* . . = 200 *Λίτραις.*
36 *Λίτραι* . . . . = 36 *Λίτρ.*

$$\begin{array}{r}
\overline{236.} \\
\times 16 \\
\hline
1416 \\
\underline{236} \\
3776 \\
+8 \\
\hline
=3784
\end{array}$$

ὅτι 1 *Λίτρ.* = 16 *Οὐγκ.*

= 3784 *Οὐγκίαις.*

Ὅθεν 3784 = $\frac{3784}{1600}$, *ὅτι ἓν Κεντηνάριον* = 1600 *Οὐγκίαις* (§. 223.). *Ἔσαι τοίνυν* $\frac{3784}{1600} \times \frac{2}{3}$ = $\frac{7568}{4800}$. *Κἀντεῦθεν*·

$$\begin{array}{r|r|l}
4800 & 7568 & 1\ \textit{Κεντ.}\ 57\ \textit{Λίτ.}\ 10\ \tfrac{2}{3}\ \textit{Οὐγκ.} \\
 & 4800 & \\
\hline
 & 2768 & \\
 & \times 100 & \\
\hline
4800 & 27680{,}0\ \textit{Λίτ} & 57\ \textit{Λίτ.} \\
 & 24000 & \\
\hline
 & -36800 & \\
 & 33600 & \\
\hline
 & -3200 & \\
 & \times 16 & \\
\hline
 & 19200 & \\
 & 3200 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 4800 & 5120,0 & 10\tfrac{2}{3}\ \textit{Οὐγκ.} \\ & 4800 & \\ \hline & 3200. & \end{array}$$

Ὅθεν $\frac{3200}{4800} = \frac{32}{48} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Β.' Ἔςωσαν 4 Ἀργύρια καὶ 5 Ὀβολοὶ, πολλαπλασιαςέα ἐπὶ $\frac{2}{3}$.

ΠΡΑΞΙΣ.

Ἀργύρια 4 $=$ 160 Ὀβολοῖς, $+\ 5 = 165$ Ὀβολ. Ὅθεν $\frac{165}{40}$ (§. 223.). Τοίνυν $\frac{165}{40} \times \frac{2}{3} = \frac{330}{120} = \frac{33}{12} = 2\frac{9}{12} = 2\frac{3}{4}$. Ὅτι δὲ τὰ τῆς Πράξεως ὀρθῶς ἔχει δείκνυται καὶ ἄλλως τοῦ Προβλήματος ἐπεξεργαζομένου. Οἷον 4 Ἀργ. $+\ 5$ Ὀβ. $=$ Ἀργ. $4\frac{1}{8}$. Τοίνυν $4\frac{1}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{33}{8} \times \frac{2}{3}$ (§. 197.) $= \frac{66}{24} = 2\frac{18}{24} = 2\frac{3}{4}$, ὡς καὶ ἀνωτέρω. Ἀλλὰ δὴ καὶ ἄλλως ἔτι δείκνυται, τῶν 4 Ἀργ $+\ 5$ Ὀβ. κατὰ μέρος ἐπὶ $\frac{2}{3}$ πολλαπλασιαζομένων. Οἷον $4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ (§. 210.) $= 2\frac{2}{3}$. Ὀβ. $5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$. Εἰσὶ δὲ $2\frac{2}{3}$ Ἀργ. $=$ Ἀργ. $2 + 26\frac{2}{3}$ Ὀβ. Ἄρα, Ἀργ. $2 +$ Ὀβ. $26\frac{2}{3} + 3\frac{1}{3} =$ Ἀργ. $2 +$ Ὀβ. $29 + \frac{3}{3}$ $=$ Ἀργ. $2 + 30$ Ὀβ. εἴτ' οὖν $=$ Ἀργ. $2\frac{3}{4}$, ὡς ἀνωτέρω.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.'

§. 240. Ἐὰν δ' οἱ παράγοντες, ἀριθμοὶ Ἑτερογενεῖς, εἴτ' οὖν ἐκ διαφόρων συγκείμενοι ὦσιν εἰδῶν, αμφότεροι πρὸς τὸ μέγιςον ἀναγόμενοι εἴ-

 δου

δος (§. 229.), ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιασθήτωσαν· τὸ δ' ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτον διαιρεθὲν, ἐπὶ τὰ ἐλάττω εἴδη μεταχθήτω. (§. 226.).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Δύω Ὀργυιαὶ, εἷς πούς, καὶ τρεῖς Δάκτυλοι, πολλαπλασιασθήτωσαν ἐπὶ τρεῖς Ὀργυιὰς, δύω Πόδας, καὶ τέσσαρας Δακτύλους. Τοῦτ' ἔστι, Πεδίου τινος τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος, ἵνα τὸ τούτου εὑρεθῇ ἐμβαδόν.

ΠΡΑΞΙΣ.

$$2^{\circ}+1'+3''=\frac{53^{\circ}}{24^{\circ}}$$

$$3^{\circ}+2'+4''=\frac{61^{\circ}}{18}$$

Καὶ $\frac{53^{\circ}}{24}\times\frac{61^{\circ}}{24}=\frac{3233^{\circ}}{432}$.

Τοίνυν 432 | 3233° | 7°, 2', 10", 10"'.

3024

209

× 6'

432 | 1254' | 2'

864

390

× 12"

780

390

432 | 4680" | 10"

432

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 360 & \\
 & \times\ 12''' & \\
\hline
 & 720 & \\
 & 360 & \\
\hline
432 & 432,0''' & 10''' \\
 & 432 & \\
\hline
 & —\ 0 &
\end{array}
$$

Β.′ Ὠνήσατό τις Ὑφάσματος Σηρικοῦ Πήχεις $7\frac{3}{4}$ κατὰ λόγον τοῦ Πήχεως πρὸς Ἀργύρια 9 καὶ Ὀβολοὺς 10. Πόσον δέον αὐτὸν ἀποτῖσαι.

ΠΡΑΞΙΣ.

Πήχεις $7\frac{3}{4} = \frac{31}{4}$, τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τέταρτα, εἴτ' οὖν ἐπὶ τὸ ἔλαττον εἶδος, ἀναγομένου. Ἀργύρια 9 καὶ Ὀβολοὶ 10 ἀποτελοῦσιν Ὀβολοὺς 370, ἤτοι $\frac{370}{40}$ (§. 223.). Τοίνυν $\frac{31}{4} \times \frac{370}{40} = \frac{11470}{160} = \frac{1147}{16}$. Καὶ τῆς ἀναγωγῆς γενομένης εὑρεθήσεται τὴν καταβληθησομένην ὅλην τιμὴν εἶναι Ἀργ. 71, Ὀβ. 8. Λεπτ. $2\frac{1}{4}$.

Γ.′ Τῆς Ὀργυιᾶς ἔργου τινὸς τιμωμένης 5 Ἀργυρ. καὶ 17 Ὀβ. πόσον ἀποτίσεταί τις ὑπὲρ $11^{\circ} + 4' + 8''$ ἔργου; Ἐπεὶ $11^{\circ} + 4' + 8'' = \frac{107^{\circ}}{9}$ καὶ

5 Ἀργ. + 17 Ὀβ. $= \frac{217}{40}$ Ἀργ. ἔσαι ἡ ὅλη τιμὴ

$$= \frac{107}{9} \times \frac{217}{40} = \frac{23219}{360} = 64\,\frac{259}{360}.$$

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

§. 241. Τῆς Μηκιδανῆς Ἑξάποδος Ὀργυιᾶς ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιαζομένης, εἴτ' οὖν τοῦ μήκους Ἐπιφανείας τινος ἐπὶ τοῦ ταύτης ἀγομένου πλάτους, Ὀργυιὰ Τετράγωνος πρόεισιν, ἤτοι Ἐπιφάνεια, ἐν ἧ πλείω Τετράγωνα περιέχουσα. 6 Πόδες, φέρ' εἰπεῖν κατὰ μῆκος, ἐπὶ 6 Πόδας κατὰ πλάτος πολλαπλασιασθέντες, Τετράγωνον ἡμῖν Ἐπιφάνειαν ἀναδιδόασιν, εἴτ' οὖν Ἔμβαδον 36 Ποδῶν Τετραγώνων περιεκτικόν, Αὖθις Ὀργυιαὶ 4 κατὰ μῆκος, ἐπὶ 3 κατὰ πλάτος πολλαπλασιασθεῖσαι, Ὀργυιὰς παράγουσι Τετραγωνικὰς 12. Ἐὰν οὖν τὸ οὑτωσὶ προκύπτον, τῶν 36 Τετραγωνικῶν, φέρε, Ποδῶν, ἐπὶ ἑτέρους ἓξ κατὰ ὕψος πολλαπλασιασθῇ Πόδας. 216 παρέξει Πόδας Κυβικούς, εἴτ' οὖν Κύβον, ἢ Σῶμα Στερεόν, ἐξ πανταχόθεν (κατὰ μῆκος, δηλαδή, πλάτος καὶ ὕψος) ἴσαις Ἐπιφανείαις ἀποτερματιζόμενον. Ὡσαύτως, ἐὰν, τὸ ἐκ τοῦ μήκους 4 ἐπὶ τὸ πλάτος 3 προκύπτον 12, ἐπὶ ὕψος αὖθις Ὀργυιῶν 2 πολλαπλασιασθῇ, τὸ ἀναδιδόμενον 24 Ὀργυιὰς Κυβικὰς δηλώσει, ἢ διαστήματα 24 παρεμφερῆ ἕκαστα τοῖς κύβοις, οἷς ἐν τῷ παίζειν προσχρώμεθα, καὶ παρέχοντα Ὀργυιὰν μίαν μὲν κατὰ μῆκος, μίαν δὲ κατὰ πλάτος, μίαν δὲ καὶ πρὸς ὕψος (§. 238.). Ἐπεὶ οὖν διὰ τοῦ τῶν Ὀργυιῶν καὶ

τῶν

τῶν ταύταις ἀνηκόντων μερῶν, ὡς Ποδῶν, Δακτύλων, κ.τ.λ. ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασμῷ, Ὀργυιαὶ Τετράγωνοι καὶ Κυβικαὶ σὺν τοῖς ἑαυτῶν μέρεσιν ἀνακύπτουσιν, αἳ δὴ ἀπό τε τῶν Πολιτικῶν Ὀργυιῶν, εἴτ' ἂν τῶν Δωδεκαποδιαίων, καὶ τῶν τούτων μερῶν παραλλάττουσι. Τούτου χάριν τοὺς ἐφεξῆς δύο ὑπ' ὄψιν ἐκτίθημι Πίνακας, ὧν ὁ μὲν πρῶτος τὰς Τετραγωνικὰς Ὀργυιὰς μετὰ τῶν ἑαυτῶν μερῶν παρίστησιν, ὁ δὲ δεύτερος τὰς Κυβικὰς καὶ τὰ τούτων μέρη. Τούτων δὲ πρὸς δεξιὰν ἡ ἐν ταῖς καταμετρήσεσιν, ἤτοι Τετραγωνικαῖς ἢ Κυβικαῖς, τῶν Πολιτικῶν Ὀργυιῶν ἐπισυνῆπται δύναμις.

ΠΙΝΑΞ ΠΡΩΤΟΣ.

Ἑξάπους Τετρ.	ἢ	1°	=	16'	Ποσὶ Τετρ. Πολ.
Πὸς Ἑξάπ. Τετρ.	ἢ	1'	=	6'	Ποσὶ Τετρ. Πολ.
Δάκτ. Ἑξάπ. Τετρ.	ἢ	1''	=	½'	Ποδ. Τετρ. Πολ.
Γραμμὴ . .	ἢ	1'''	=	6''	Δακ. Τετρ. Πολ.
Σημεῖον Πρῶτ.	ἢ	1''''	=	72'''	Γραμ. Τετρ. Πολ.
Σημεῖον Δεύτ.	ἢ	1'''''	=	6''''	Γραμ. Τετρ. Πολ.

ΠΙΝΑΞ ΔΕΥΤΕΡΟΣ.

Ἑξάπ. Κυβικ. .	ἢ	1°	=	216	Ποσὶ Κυβ. Πολ.
Πὸς Ἑξάπ. Κυβικ.	ἢ	1'	=	36'	Ποσὶ Κυβ. Πολ.
Δάκτυλος. .	ἢ	1''	=	3'	Ποσὶ Κυβ. Πολ.
Γραμμή. .	ἢ	1'''	=	432''	Δακτ. Κυβ. Πολ.
Σημ. Πρῶτ.	ἢ	1''''	=	36'''	Δακτ. Κυβ. Πολ.

Σημ. Λεπτ. . ἢ $1''''$ = $6''$ Δακτ. Κυβ. Πολ

Ἐὰν ἂν, ἐν τῷ προεκτεθέντι (§. 248.) Α΄ Παραδείγματι, 7°, $2'$, $10''$, $10'''$, εἰς δύναμιν καταμετρήσεων Ὀργυιῶν Τετραγώνων Πολιτικῶν ἐκτεθῆναι δέῃ, τῶν δοθέντων ὅρων ἕκαςος πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὴν δύναμιν, ἣν ἐν ταῖς πολιτικαῖς καταμετρήσεσι κέκτηται, τὰ δ᾽ ἐντεῦθεν παραγόμενα ἐν ἑνὶ κεφαλαίῳ ἀθροισθήτωσαν. Οἷον.

$$7^\circ \;.\;.= 7\times 36' = 252'.$$

$$2' \;.\;.= 2\times 6' = 12'$$

$$10'' \;.\;.= 10\times \tfrac{1}{2} = 5'$$

$$10''' \;.\;.= 10\times 6'' = 0',\ 60''.$$

$269'$, $60''$ Τετρ. Πολ.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄

§. 242. Πολλάκις ἀριθμὸς ἑτερογενὴς Κλασματώδης παρεμπίπτει, ὁ τινος τὴν δύναμιν μαθεῖν ἐθέλομεν. Ἵν᾽ ὃν αὕτη ἀπάτης οἱασῦν ἐκτὸς εὑρεθῇ, ἀχθήτω ὁ Κλασματώδης ἐπὶ τὸν τῦ αἰτυμένυ εἴδυς ἀριθμὸν, τὸν σημαίνοντα, πόσα τῦ αἰτυμένυ εἴδυς μέρη ἓν ὅλον, ὃ τινος τὸ Κλάσμα δίδοται, ἀποτελῦσι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α΄ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς Χρυσῦ Ὁλλανδικῦ πόσα ἀποτελῦσιν Ἀργύρια; Ἐπείπερ εἷς Χρυσος Ὁλλανδικος = Ἀργυρίοις, ἔσαι $\frac{3}{4}\times 14 = \frac{42}{4} = 10\frac{1}{2}$.

Β'. $\frac{4}{5}$ ἑνὸς Ἀργυρίȣ πόσȣς ἀποτελȣ̃σιν Ὀβολȣ́ς; Ὄντος ἑνὸς Ἀργυρίȣ $=$ 40 Ὀβολοῖς, ἔϛαι $\frac{4}{5} \times 40 = \frac{160}{5} = 32$ Ὀβολοῖς.

Γ'. $\frac{7}{8}$ Συβηρινίȣ Χρυσȣ̃ πόσα ἀποτελȣ̃σι Φιορήνια; Ἐπειδὴ εἷς Συβηρήνιος Χρυσὸς $=$ 13 Φιορ. καὶ 20 Κρεΐτζ. ἔϛαι $\frac{7}{8} \times 13\frac{1}{3}$ Φ. $= \frac{7}{8} \times \frac{40}{3} = \frac{280}{24} = 11\frac{2}{3}$ Φ.

Δ'. $\frac{5}{6}$ ἑνὸς Χρυσȣ̃ Καισσαρικȣ̃ πόσα ἀποτελȣ̃σι Φιορήνια; Ὄντος 1 Χρυσȣ̃ $= 4\frac{1}{2}$ Φ. ἔϛαι $\frac{5}{6} \times 4\frac{1}{2}$ Φ. $= \frac{5}{6} \times \frac{9}{2} = \frac{45}{12} = 3\frac{3}{4}$ Φ.

Ε'. $\frac{2}{3}$ Ἡμι-Συβηρηνίȣ Χρυσȣ̃ πόσα ἀποτελȣ̃σι Φιορήνια; Ἐπεὶ 1 Ἡμι-Συβηρήνιος Χρυσὸς $= 6\frac{2}{3}$ Φ. ἔϛαι $\frac{2}{3} \times 6\frac{2}{3}$ Φ, $= \frac{2}{3} \times \frac{20}{3} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$ Φ.

ΣΤ'. $\frac{12}{25}$ ἑνὸς Κεντηναρίȣ πόσας ἀποτελȣ̃σι Λίτρας; Ἐπεὶ 1 Κεντηνάριον $=$ 100 Λίτραις, ἔϛαι $\frac{12}{25} \times 100$ Λ. $= \frac{1200}{25} = 48$ Λίτραις.

Ζ'. $\frac{3}{8}$ ἑνὸς Ἀμφορέως πόσας ἀποτελȣ̃σι Στάμνας; Ὄντος τȣ̃ Ἀμφορέως $=$ 32 Στάμνοις, ἔϛαι $\frac{3}{8} \times 32 = \frac{96}{8} = 12$ Στάμνȣς.

Η'. $\frac{3}{4}$ ἑνὸς Μιλλίȣ πόσαι εἰσὶν ὧραι; Ἐπεὶ 1 Μίλλιον $=$ 2 Ὥραις, ἔϛαι $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$ Ὥρ.

Θ'. $\frac{1}{6}$ Ἡμιλίτρȣ (Μάρκας) Χρυσȣ̃ πόσον ϛαθμίζει; Ἐπεὶ 1 Ἡμίλιτρον $=$ 8 Οὐγκίαις, ἔϛαι $\frac{1}{6} \times 8 = \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}$ Οὐγκ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ. Ϛ'.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΤΕ ΚΑΙ ἙΞΗΚΟΝΤΑΔΙΚΩΝ. ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

Α'. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 247. **Κλάσμα Δεκαδικὸν** ἀκύει, ὃ ὁ Παρονομαςὴς μετὰ τὴν μονάδα, ἰσαρίθμως τοῖς τῦ Ἀριθμητῦ χαρακτῆρσι, μηδενικοῖς συνέζευκται·

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 248. Ἔςω Γραμμή τις ἡ *ΑΒ* εἰς 10 ἴσα μέρη διῃρημένη· ἐὰν οὖν ἤδη ἕν τι τῶν τοιέτων δεκαδικῶν μερῶν, εἴτ' ὖν ἡ *ΑΓ* = $\frac{1}{10}$, ληφθῇ, ἔςαι τυτὶ τῆς μονάδος (§. 156.), εἴτ' ὖν τῆς ὅλης *ΑΒ*, ἓν δεκατημόριον. Ὑποδιῃρήσθω αὖθις τὸ ἓν τυτὶ δεκατημόριον, ἤτοι ἡ *ΑΓ* Γραμμή, εἰς ἕτερα ἴσα 10 μέρη, ἔςαι τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς *ΑΓ*, τῆς ὅλης *ΑΒ* $\frac{1}{100}$. Προσυποδιῃρήσθω αὖθις τὸ τοιῦτον ἓν τῆς *ΑΓ* δεκατημόριον εἰς 10 ἴσα ἕτερα μέρη, τῶν ἐκ τῆς τρίτης ταύτης διατμήσεως ἀναδιδομένων μερῶν τὸ ἕν, ἔςαι τῆς ὅλης *ΑΒ* $\frac{1}{1000}$. Καὶ ἐφεξῆς ὕτω.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 249. Τὰ Δεκαδικὰ τῶν Κλασμάτων, ὡς ἐφεξῆς ἐκτιθέμενα, οἷον $\frac{6}{10}$, $\frac{58}{100}$, $\frac{358}{1000}$, ὕτως ἀπαγγελέσθωσαν· 6 δεκατημόρια, 58 ἑκατοςημόρια,

ρια, 433 χιλιοστημόρια. Ἀλλ' οὖν καὶ οἱ τοῦ Ἀριθμητοῦ χαρακτῆρες, σὺν τῷ ἀνήκοντι αὐτοῖς Παρονομαστῇ, ἰδίᾳ οὕτως ἐξαριθμείσθωσαν· οἷον $\frac{433}{1000}$, 4 δεκατημόρια, 3 ἑκατοστημόρια, 3 χιλιοστημόρια.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 250. Τοῦ Ἀριθμητοῦ ἐλάττονας χαρακτῆρας τῶν τῷ Παρονομαστῇ προσκειμένων μηδενικῶν ἔχοντος, ὁ τῶν χαρακτήρων ἀριθμὸς τῇ τῶν μηδενικῶν, ὅσων ἂν ᾖ χρεία, προσθέσει αὐξανέσθω· οἷον $\frac{4}{100}$ $= \frac{40}{1000}$. Ἑνὸς γὰρ μηδενικοῦ τῷ Ἀριθμητῇ, οἷον τῷ 4, προστιθεμένου, αὐτίκα ὁ Παρονομαστὴς ὑπονενόηται προσδιοριζόμενος εἶναι 100 (§. 247.)· δυοῖν, 1000· καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 251. Ἐπεὶ οὖν ἐκ μόνης τῆς τοῦ Ἀριθμητοῦ θεωρίας ὁ Παρονομαμαστὴς διαγνωρίζεται (§. 247.), εἴωθε πολλάκις τὸν Παρονομαστὴν μηδὲ νῦν γράφεσθαι, τὸν δ' Ἀριθμητὴν στίγματι ἀπὸ τῶν ὁλοσχερῶν ὑποδιαστελλόμενον διακρίνεσθαι· οἷον $35 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{9}{10000} = 35 + \frac{7859}{10000} = 35,7859$. Εἰ δὲ τὸ Δεκαδικὸν Κλάσμα ὁλοσχερῶν ἄνευ ἐκτίθεται, καὶ ὁ τούτου Ἀριθμητὴς ἐκ χαρακτήρων συγκροτεῖται πλειόνων, ἢ ἐλαττόνων· ἐκείνως μὲν, τὰς ἐν αὐτῷ τῶν μονάδων τάξεις διοριζόμεθα, ἰσαρίθμους ἐν αὐτῷ ὑποδιαστέλλοντες δεξιόθεν πρὸς τὰ λοιπὰ χαρακτῆρας,

ρας, τοῖς ἐν τῷ παρονομαςῇ μηδενικοῖς, οἷον, $\frac{86504}{1000} = 86,504$· οὕτω δὲ, λαιόθεν πρὸς δεξιὰν τὸν Ἀριθμητὴν μηδενικοῖς, ἰσαρίθμοις τοῖς τοῦ Παρονομαςοῦ, ὁλοσχεροῦμεν, οἷον, $\frac{56}{100} = 0,56$. $\frac{1}{10000} = 0,0001$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 252. Ἔςαι τοίνυν ἐπὶ τοῦ ἐφεξῆς *Διαγράμματος.*

6,   ἓξ ὁλοσχερῆ.
6,1   —   — καὶ 1 δεκατημόριον.
6,01   —   — — 1 ἑκατοςημόριον.
6,001   —   — — 1 χιλιοςημόριον.
6,0001 —   — — 1 μυριοςημόριον.

Καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοιοτρόπως προβαινόντων, ταὐτὸ κρατείσθω λεγόμενον. Ὡσαύτως ἔςαι καὶ 0,2 μηδὲν ὁλοσχερὲς σὺν δυσὶ δεκατημορίοις (§. 250.)· 0,02 ὁλοσχερὲς μηδὲν σὺν δυσὶν ἑκατοςημορίοις. Κἀν τοῖς λοιποῖς ὡσαύτως.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 253. Κλάσματι Δεκαδικῷ ὁποιωοῦν πρὸς δεξιὰν ἕν, ἢ δύω, ἢ τρία κ.τ.λ., τῶν μηδενικῶν προςεθῆναι ἔχουσι, τῆς αὐτῆς, ἧς καὶ πρότερον, τοῦ Κλάσματος τηρουμένης δυνάμεως.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τοῦ τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων Παρονομαςοῦ τόσα ἀείποτε μηδενικὰ μετὰ τὴν μονάδα ὑπονοουμένου ἔχειν, ὅσοις ὁ Ἀριθμητὴς χαρακτῆρσι σύγκειται (§. 247.)· ἐὰν τῷ Ἀριθμητῇ ὁποσαοῦν τῶν μηδενικῶν δεξιόθεν προςεθῶσι, καὶ τῷ Παρονομαςῇ τοσαῦτα ἀείποτε ἐννοοῦνται προςίθεσθαι (§. 250.), οἷον 10, 100, 1000, κ.τ.λ. Ἐπομένως τε ὁ, τε Ἀριθμητὴς, καὶ ὁ Παρονομαςὴς διὰ τῶν αὐτῶν πολλαπλασιάζεταί τε καὶ διαιρεῖται (§. 180.). Ἄρα ἡ τοῦ Κλάσματος δεκαδικὴ δύναμις οὐδεμίαν ὑφίςαται ἀλλοίωσιν. Οἷον, $5,32 = 5,32000$· $0,24 = 0,240 = 0,2400 = 0,24000$· ἐπεὶ γὰρ $0,240 = \frac{240}{1000}$, καὶ $0,2400 = \frac{2400}{10000}$ (§. 251.)· εἰσὶ δὲ ταῦτα ἴσα τῷ $\frac{24}{100} = 0,24$. Ο.Ε.Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 254. Ἐν γένει τοίνυν, τοῦ τῶν ἁπλῶν μονάδων τόπου κατὰ χώραν μένοντος, ὁ δεκαδικῶς καταγεγραμμένος ἀριθμὸς ὅσους ἂν ἑκατέρωθεν προςκειμένους σχοίη μηδενικοὺς χαρακτῆρας, οὐδεμίαν τὸ παράπαν τροπὴν ὑποςήσεται. Οὐκοῦν ὁ ἀριθμὸς 5,32, κἂν οὕτω γραφοίη 005,32, κἂν οὕτω 005,320, κἂν ὡς ἀνωτέρω, κἂν ποικιλαχῶς ἄλλως, ἀεὶ ὁ αὐτὸς ἔςαι.

ΣΧΟ

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 255. Ἐπεὶ οὖν ὁ μετὰ τὸ γραμμίδιον πρῶτος χαρακτὴρ ἐν τῷ Δεκαδικῷ Κλάσματι, τὰ τῶν δεκάδων ἀείποτ' ὑποδηλοῖ μόρια, ὁ δέ τοι δεύτερος τὰ τῶν ἑκατοςύων, ὡς καὶ ὁ τρίτος τὰ χιλιοςὰ, καὶ ἐφεξῆς ὅτω (§. 249.)· ἐὰν Κλάσμα οἱονδηποτῦν ὁμοιογενὲς ὡς 0, 352 ἰδίᾳ ὑτωσὶ γραφόμενον. $\frac{0+300}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{2}{1000}$ ἐκτεθῇ, τὰ τὸν ἔσχατον χαρακτῆρα δεξιάθεν προηγύμενα Κλάσματα, πρὸς ἐλαχίςυς ἀναγόμενα ὅρυς, ὡς ἐφεξῆς μεταῤῥυθμισθήσονται $0 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}$· ὃ δὴ καὶ ἐπὶ πολλῶν ἄλλων προσφυῶς εἰρήσθω ἐφαρμοζόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 256. Ἐντεῦθεν τοίνυν δηλῦται τὴν τῶν δεκαδικῶν χαρακτήρων δύναμιν ἀπὸ τῦ τέλυς ἐπανας ρεφομένων, ἐν δεκαπλασίονι λόγῳ αὔξειν, ὡς κἀν τοῖς ὁλοσχερέσι τῶν ἀριθμῶν (§. 28.)· πλὴν ὅτι κἀν τύτοις, ὥσπερ κἀκείνοις, μηδενικῷ πληρωτέον τὸ μέρος, καθ' ὃ χαρακτήρ τις ἐξέλειπεν ἔμμεσος. οἷον $2 + \frac{3}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{4}{100000} = 2,30104$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 257. Διττῶς ἄρα Κλάσμα οἱονδηποτῦν Δεκαδικὸν ἐκφέρεσθαι ἔχει· ἢ γὰρ, πρῶτον, οἱ αὐτῦ χαρακτῆρες ἅπαντες, τοῖς τῦ ἐσχάτυ Παρο-

 νομα-

νομαςῦ συνάμα ἀπαγγέλονται· ἤ, δεύτερον, ἕκαςος χαρακτὴρ σὺν τῷ ἰδίῳ Παρονομαςῇ χωρίς. οἷον τὸ ἀνωτέρω Κλάσμα 2, 30104, ἡ δηλῶσει 2 ὁλοσχερῆ, καὶ 30104 μονάδος δεκαμυριοςημόρια· ἢ 2 ὁλοσχερῆ, 3 δεκατημόρια, ὐδὲν ἑκατοςημόριον, ἓν χιλιοςημόριον, ὐδὲν μυριοςημόριον, καὶ 4 δεκαμυριοςημόρια.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 258. Δυοῖν τοίνυν Δεκαδικῶν Κλασμάτων, τὸν αὐτὸν τῶν χαρακτήρων ἀριθμὸν ἐχόντων, ἐκεῖνο μεῖζον ἐςαι, ἅτινος οἱ χαρακτῆρες, κατὰ τὴν κοινὴν αὐτῶν συναπτόμενοι δύναμιν, μεῖζον ἄθροισμα σημανῦσιν. Οὕτω 4, 72 > τῶν 4, 69. ὅτι ὁ 72 μείζων τῦ 69. Ὡσαύτως 4, 7211 > τῶν 4, 6999. Τῶν δὲ χαρακτήρων ἀριθμῶν ἀνίσων ὄντων, ἐὰν τῇ πρὸς τὸ τέλος τῶν μηδενικῶν προσθέσει (§. 256.) ἴσοι ἀποβῶσι, τὸ μεῖζον ἀποτελῦν ἄθροισμα, μεῖζον καὶ τὴν δύναμιν καθέςηκεν. Οἷον, διδομένων 4, 7 καὶ 4, 69999, ἴςαι τῇ τῶν μηδενικῶν προσθέσει 4, 70000 > τῶν 4, 69999. Τῶν γὰρ ἴσων Παρονομαςῶν ὑπογραφέντων, τὸ μείζονα Ἀριθμητὴν ἀποκεκληρωκὸς, μεῖζον πάντως ἐςαι (§. 185.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

§. 259. Σαφὲς ὡσαύτως ἐςὶν, ὅσῳ πλείω τὰ

δεκα-

δεκαδικὰ προςίθενται, τοσύτῳ μᾶλλον τὸ Κλάσμα τῷ ὁλοσχερεῖ προσεγγίζειν, ὐδέποτε δὲ ἐκείνῳ ἰσῦσθαι. Οὕτω 4, 999 μᾶλλον τῷ ὁλοσχερεῖ προσεγγίζει, ἤπερ 4, 99· τύτο μὲν γὰρ ἑνὶ μόνον ἑκατοςημορίῳ ἐλλείπει, ἐφ' ᾧ ἴσον ἀποβῇ τῷ 5, ἐκεῖνο δὲ ἑνὶ χιλιοςημορίῳ. Ὅσῳ τοίνυν πλείυς τὸν ἀριθμὸν οἱ ἐνναδικοὶ χαρακτῆρες προσάπτονται, τοσύτῳ ἔλαττον ἀπὸ τῦ ὁλοσχερῦς παραλλάξυσιν, ὐδέποτε δὲ ἐκείνῳ ἐξισωθήσονται, ὡς τῶν προσαπτομένων τῦ Παρονομαςῦ μερῶν, ἐλαττόνων ἀεί ποτε ὄντων· ὥςε, ἐὰν μὴ ἓν τῦ αὐτῦ Παρονομαςῦ μέρος τῷ τῦ Ἀριθμητῦ ἐςχάτῳ προςεθῇ χαρακτῆρι, ἀδύνατον τὸ ὁλοσχερὲς, εἴτ' ὖν τὸ ὅλον, ἐκληφθῆναι. Οὕτως, ἐὰν ἐπὶ τῦ Κλάσματος 4, 999 ἓν προςεθῇ χιλιοςημόριον, κατὰ τὴν τῦ ἐςχάτυ ἐνναδικῦ χαρακτῆρος παρονομασίαν, 5 ἐκύψυσιν ὁλοσχερῆ· οἷον $4\frac{999+1}{1000}=4\frac{1000}{1000}=5$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 280. Ἐπὶ τῶν ἀτελῶν διαιρέσεων, καὶ τῆς παραπλησίας τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς, ὅσῳ περ οἱ διαιρύμενοι, ἢ ἀφ' ὧν αἱ ῥίζαι ἐξάγονται, ἀριθμοὶ εἰσὶν ἥττονες, τοσύτῳ μείζονος δυνάμεως τὰ ὕτωσὶ ἐναπολειπόμενα καθεςήκασι μόρια, ἀναλόγως τε καὶ τὸ ἐμφιλοχωρῦν διάπτωμα τοσύτῳ μεῖζον καὶ

 προ-

προφανὲς ἐκλαμβάνεται, ἡλίκον καὶ ἀδεῶς ὀλιγωρεῖσθαι μὴ ἔχειν. Οἷον, ἔςω ἀριθμὸς ὁ 5, ὃν χρὴ διελεῖν διὰ 2, ἤτοι $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, ὃ δὴ Κλάσμα ἄλλως παροφθῆναι ἐκ ἂν ἔχοι, ὅτι μὴ μετὰ καταφανὲς τῦ διαπτώματος· πρὸς γὰρ τὸν ἐλάττονα τινὶ παραβαλλόμενον ἀριθμὸν 5, καὶ μάλα πολλοςόν τι λογίζεται μόριον. Ἀλλ᾽ ὖν, ἐὰν ὁ διαιρέμενος ἀριθμὸς τῶν μειζόνων τύχῃ ὡς 501 : 2, τηνικαῦτα τὸ ἔτως ἐκ τῆς διαιρέσεως ὑπόλοιπον $\frac{501}{2} = 250 + \frac{1}{2}$ ἥμισυ, πρὸς τὸν ὅτω μείζονα παρεξεταζόμενον ἀριθμὸν, ἄνευ προφανῦς τινος ἐλλείματος παροφθήσεται· ὃ δὴ καὶ περὶ τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς κρατήσει λεγόμενον. Ἵν᾽ ὖν Γεωμετρῶν παῖδες τὸ ἔτωσὶ προκύπτον ὑπόλοιπον ἄνευ παρεμπίπτοντος ἀτόπυ παρορᾶν ἔχωσι, τὸν τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων ὑπολογισμὸν ἐπινενοήκασι. ταύτῃ τοι καὶ τὰ τοιαῦτα μετὰ τὴν διαίρεσιν ὑπολειπόμενα τῶν Κλασμάτων, πρὸς ἕτερα, μείζω μὲν τὸν ἀριθμὸν, ἐλάττω δὲ τὴν δύναμιν, μεταγαγεῖν αὐτοῖς ἔδοξε, διαιρῦσι μὲν αὐτὰ διά τινος προσφυῶς ἔχοντος ἀριθμῦ, οἷοι εἰσὶν οἱ Δεκαδικοὶ 10, 100, 1000, 10000, κ. τ. λ. διὰ τῦ αὐτῦ δὲ καὶ πολλαπλασιάζυσι, πρὸς τὸ τῆς δυνάμεως ἀπαράτρεπτον (§. 253.). Οὕτω τοίνυν τὰ τῶν Κλασμάτων Δεκαδι-

καδι

καδικὰ τῷ πηλίκῳ ἐμπαρεισάγοντες, τὸ δὲ ἐπανειλημμένης ἀφαιρέσεως ὑπόλοιπον παρορᾷν ἐσχάτως εἰώθασιν, ὡς ὁ πάνυ πολλῦ ἄξιον, ὡς ἐφεξῆς ὀψόμεθα. Ὁ δὲ τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων πρῶτος εἰσηγητὴς Ἰωάννης ὑπῆρξεν ὁ Ῥεγιομοντάνος, πρὸς εὐχερεστέραν τῶν Λογαριθμικῶν Πινάκων ἐντεῦθεν κατασκευήν. Διειλήφασι δὲ περὶ τύτων, ὅ, τε περικλεὴς Βαλλήσιος ἐν τῇ αὐτῦ Ἀλγέβρᾳ, Εὐλῆρος, Βερνύλλιος ἐν τοῖς Βερολινικοῖς Ὑπομνήμασι (*), καὶ Ῥοβερτσόνιος ἐν ταῖς Φιλοσοφικαῖς Διαλήψεσι (**).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 261. Κλάσμα Δεκαδικὸν **Ἀκριβές** ἐςι, τὸ τὸν ἀληθῆ παρέχον λόγον τῦ, ὅπερ ἐμφαίνει, μέρυς πρὸς τὸ ὅλον, οἷον δὴ τὸ $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ ἑρμηνεύει γὰρ τὸν τῦ μέρυς 4 πρὸς τὸ ὅλον 5 λόγον τὸν ἀληθῆ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 262. Κλάσμα Δεκαδικὸν **Προσεχὲς**, ἢ **Προσεγγίζον** ἐςὶ, τὸ τὸν λόγον τῦ, ὅπερ δείκνυσι μέρυς πρὸς τὸ ὅλον, ὡς ἔγγιςα ἀληθῆ παρέχον, ὡς $\frac{3}{7} = 0,42857$.

(*) Memoires de Berlin 1771.

(**) Robertson on the theory of circulating Decimal Fractions, Philosophical Transactions 1768.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 263. Ὁμοταγεῖς τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων Χαρακτῆρες, ἤτοι τῦ αὐτῦ βαθμῦ τε καὶ τάξεως ἀκὔυσιν, ὧν Παρονομαςαὶ εἰσὶν οἱ αὐτοί· οἷον 0, 795 καὶ 0, 865, οἱ 9 καὶ 6 χαρακτῆρες τῆς αὐτῆς εἰσὶ τάξεως, ἐν ἑκατέροις γὰρ ὁ αὐτὸς ἀντιςοιχεῖ Παρονομαςὴς 100.

ὙΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 264. Τὰ τῶν Δεκαδικῶν ἐν τῇ Πρακτικῇ Γεωμετρίᾳ ἐκ περιυσίας ἐν χρήσει σύμβολα ἐκπείσθωσαν τὰ ἑξῆς 0) ʹ)ʺ)‴)⁗) ἐν οἷς τὸ μὲν μηδενικὸν 0 μονάδα σημειοῖ· ἔςι γὰρ $a^{0} = 1$, ὡς ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ δειχθήσεται· τὸ δὲ ʹ) τὴν τῦ Κλάσματος δεκαδικὴν ἐμφαίνει δύναμιν, ἢ ὁποιονῦν ἄλλότι ὑποδιαιρέμενον μέγεθος· τὸ δὲ ʺ) τὴν ἑκατονταδικήν· καὶ ἑφεξῆς ὕτω. Οἷον ἀντὶ τῦ Κλάσματος $\frac{3428572}{1000000}$, γραπτέον 3°, 4ʹ 2ʺ 8‴ 5⁗ 7ʹʹʹʹʹ 2ʹʹʹʹʹʹ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 265. Ἡ περὶ τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων θεωρία, ἄλλοις περὶ Γεωμετρικῆς Ψηφηφορίας ἐκφέρεται· ἀμφότερα δὲ γε εἰκότως. Ἐπεὶ γὰρ τοῖς τῶν Γεωμετρῶν παισὶ τῆς τοιαύτης τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων χρήσεως ἐγένετο χρεία, διὰ τῦτο καὶ ἡ περὶ τύτων πραγματεία ὑτωσὶ ἤκμασε. Τοῖς γὰρ Γεωμέτραις περὶ τὴν τῶν μήκεων, ἐπιφανειῶν τε καὶ τῶν ςερεῶν αὐτῶν

σωμά

ωμάτων ἐνασχολεμένοις διαμέτρησίν τε καὶ διανομὴν, ῥάβδος τις ἐφεύρηται, ὃ καὶ κοινὸν παρ' αὐτοῖς καθέςηκε μέτρον, εἰς ἴσα ἀλλήλοις δέκα μέρη διαιρεμένη, ἃ Πόδες καὶ πρῶτα Λεπτὰ παρ' αὐτοῖς προσαγορεύονται, καὶ διὰ τῦτο τὴν αὐτὴν ῥάβδον Δεκάποδα, καὶ Δεκαδικὸν ἀριθμὸν, καὶ Γεωμετρικὴν ψῆφον παρονομάζεσιν. Ὑποδιαιρεῖται δ' ἕκαςον τῶν Δεκαδικῶν αὐτῆς μερῶν αὖθις εἰς δέκα, Δακτύλες λεγόμενα, ἢ δεύτερα· καὶ τέτων ἕκαςον εἰς δέκα, Γραμμὰς, ἢ τρίτα (Σελ. 156 Ἀριθμ. ϛ΄)· καὶ ἑξῆς ὡσαύτως ἄχρι τῶν ἕκτων, πρὸς τὴν ἐν ταῖς πράξεσιν ἀκρίβειαν αὐτοῖς ἐπαρκέντων. Ἐκ τοίνυν τῆς διαιρέσεως ταύτης τῆς Δεκάποδος ῥάβδε ἕπεται ἐξ ἀνάγκης, τῶν μὲν πρώτων ἕκαςον, δεκαδικὸν εἶναι μέρος· τῶν δὲ δευτέρων ἕκαςον, ἑκατοςόν· ὥσπερ δὴ χιλιοςὸν, ἕκαςον τῶν τρίτων· καὶ μυριοςὸν, ἕκαςον τῶν τετάρτων· καὶ δεκάκις μυριοςὸν, τῶν πέμπτων· καὶ ἑκατοντάκις μυριοςὸν, ἕκαςον τῶν ἕκτων, ἤτοι τὸ κατὰ τὴν τῶν Λατίνων φωνὴν, Μιλλιονιςὸν (§. 257. 260). Γνωρίζεται δ' ἕκαςον τέτων, ὁ μὲν Δεκάπες, εἴτ' ἒν τὸ ὁλοσχερὲς, ἢ ἡ μονὰς, ἀπὸ τῦ ἐπικειμένυ σημείυ °)· ὁ δὲ Πὺς, ἤτοι τὸ πρῶτον Λεπτὸν, ἀπὸ τῦ ἐπικειμένυ ἑνὸς γραμμιδίυ ')· ὥσπερ ὁ Δάκτυλος ἀπὸ τῶν δυοῖν "), κ.τ.λ.

κ.τ.λ' (§. 264.). Κἀντεῦθεν καὶ τὴν τύτων, ἔτι δὲ καὶ τῶν παραπλησίων ὑποδιαίρεσιν, καὶ περαιτέρω ἐκράτησε συνεχίζεσθαι, διὰ τὸ τῶν πράξεων εὐμαρέςερον. Ἀλλὰ δὴ καὶ Δωδεκάπυς ἡμῖν ἑτέρα ἀναφύεται κατὰ Πολιτικὸν μέτρον· ὥςε ἐπεὶ αὕτη εἰς 12 ὕτω διῄρηται μέρη, εἴτ' ὖν Πόδας, διαιρεθήσεται αὖθις καὶ ὁ Πῦς εἰς μέρη 12 Δακτύλυς λεγόμενα, ὁ δὲ Δάκτυλος εἰς 12 Γραμμὰς, ἡ δὲ Γραμμὴ εἰς 12 Σημεῖα, ἤτοι Στίγματα. (Σελ. 156.) Αὕτη δὲ ἡ Δεκαδικὴ διαίρεσις παρὰ τὰς Γεωμετρικὰς πράξεις, ἐν τῷ κοινῷ Βίῳ καὶ μάλα ἐν χρήσει καθέςηκε.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 266. Τὸ δοθὲν κοινὸν Κλάσμα πρὸς Δεκαδικὸν μεταγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ὃν γὰρ τρόπον ὑπεθέμεθα (§. 242.), Κλάσμα πρὸς ἕτερον εἶδος, ὃ τὰ μέρη δίδονται, μετάγεσθαι, τὸν αὐτὸν πάντως τρόπον καὶ τὸ κοινὸν Κλάσμα πρὸς Δεκαδικὸν μεταχθήσεται. Εἴτ' ὖν, τῷ τῦ δοθέντος Κλάσματος Ἀριθμητῇ τοσαῦτα τῶν μηδενικῶν ἐν τῷ τέλει προςεθείσθω, ὅσα τῶν δεκαδικῶν ἐν τῷ αἰτυμένῳ δίδονται Κλάσματι, οἷον 10, 100, 1000, κτλ. Εἶτα ὁ ὕτως αὐξηθεὶς Ἀριθμητὴς διὰ τῦ Παρονομαςῦ διαι-

ρύμενο

ρόμενης, τὸ αἰτούμενον ἡμῖν ἀναδώσει Δεκαδικὸν Κλάσμα, τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν, ἐφ' ὃν πεπολλαπλασίασται, ἀντὶ Παρονομαςοῦ φέρον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Μεταχθήτω $\frac{3}{4}$ εἰς ἑκατοςημόρια. Ἔςαι $\frac{3\times 100}{4} = \frac{300}{4} = 75$. Ἄρα $\frac{75}{100} = 0,75$.

Β'. Ἔςωσαν μετακτέα εἰς 10 ςημόρια τὰ Κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, καὶ $\frac{4}{5}$. Ἔςαι $\frac{1\times 10}{2} = \frac{5}{10}$, $\frac{1\times 10}{5} = \frac{2}{10}$, $\frac{2\times 10}{5} = \frac{4}{10}$, $\frac{3\times 10}{5} = \frac{6}{10}$, $\frac{4\times 10}{5} = \frac{8}{10}$.

Γ'. Ἔςωσαν μετακτέα εἰς 100 ςημόρια τὰ Κλάσματα $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{17}{20}$ καὶ $\frac{19}{20}$. Ἔςαι, $\frac{1\times 100}{4} = \frac{25}{100}$, $\frac{3\times 100}{4} = \frac{75}{100}$, $\frac{1\times 100}{20} = \frac{5}{100}$, $\frac{3\times 100}{20} = \frac{15}{100}$, $\frac{7\times 100}{20} = \frac{35}{100}$, $\frac{9\times 100}{20} = \frac{45}{100}$, $\frac{11\times 100}{20} = \frac{65}{100}$, $\frac{17\times 100}{20} = \frac{85}{100}$, $\frac{19\times 100}{20} = \frac{95}{100}$.

Δ'. Ἔ-

Δ. Ἔςωσαν μετακτέα εἰς 100 ςημόρια τὰ Κλάσματα $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{40}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{7}{40}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{11}{40}$ καὶ $\frac{13}{40}$. Ἔσται, $\frac{1\times1000}{8} = \frac{125}{1000}$, $\frac{3\times1000}{8} = \frac{375}{1000}$, $\frac{5\times1000}{8} = \frac{625}{1000}$, $\frac{7\times1000}{8} = \frac{875}{1000}$, $\frac{1\times1000}{40} = \frac{25}{1000}$, $\frac{3\times1000}{40} = \frac{75}{1000}$, $\frac{7\times1000}{40} = \frac{175}{1000}$, $\frac{9\times1000}{40} = \frac{225}{1000}$, $\frac{11\times1000}{40} = \frac{275}{1000}$, $\frac{13\times1000}{40} = \frac{315}{1000}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 167. Ἐὰν οὖν ἡ τοῦ γινομένη διαίρεσις διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ τοῦ δοθέντος Κλάσματος, ἐντελὴς γενέσθαι οὐκ ἔχῃ, ὡς ὑπόλοιπον ἡμῖν ἐγκαταλιμπάνουσα, τῷ τοιούτῳ ὑπολοίπῳ τὸν νοῦν προσεκτέον. Τοῦτο δὲ ἀπὸ $\frac{1}{2}$, ἢ ἐλλείπει, ἢ ὑπερέχει, ἢ ἐκείνῳ ἴσουται· ἐὰν μὲν ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως ἐλλείπει, διόλου παροφθήτω· ἐὰν δ᾽ ἐκείνου ὑπερέχῃ, ἢ ἐκείνῳ ἴσουται, ὁ τοῦ πηλίκου ἔσχατος Χαρακτὴρ μονάδι προσαυξηθήτω· οἷον $\frac{1}{3}$ τῶν 100 ἴσουται 33 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ δὲ τῶν 100 ἴσουται 16 $\frac{2}{3}$. Ἤδη ὁ μὲν 33 $\frac{1}{3}$ ἀντὶ τοῦ 33 μόνον ληφθήσεται, ὡς τοῦ $\frac{1}{3}$ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως ἐλλεῖπονλείποντος· ὁ δὲ 16⅘ μονάδι αὐξηθεὶς ἀντὶ τοῦ 17 ἐκλογισθήσεται, ὅτι τοῦ ἡμίσεως τὰ ⅘ ὑπερέχει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α΄. Ἔςωσαν τρεῖς Δάκτυλοι καὶ ἓξ Σημεῖα πρῶτα Ὀργυιᾶς, πρὸς Κλάσμα Δεκαδικὸν μεταςτέα ἤτοι, ὥςε καὶ μυριοςημόρια, εἴτ' ἂν δεκάκις χιλιοςημόρια, ἐκληφθῆναι. Ὅθεν Α΄. τῆς ἐπὶ τὸ μέγιςον εἶδος ἀναγωγῆς γενομένης (§. 228.), πολλαπλασιασθήτω Β΄. ὁ Ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν 10000· εἶτα Γ΄. γενέσθω διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ ἡ διαίρεσις, καὶ Δ΄. ὁ αὐτὸς δοθεὶς ἀριθμὸς 10000 τῷ πηλίκῳ ὑπογραφήτω (§. 274.).

$$\text{Α΄. } 3'', 6'''' = \frac{0^\circ}{1} + \frac{0'}{6} + \frac{3''}{12} + \frac{0'''}{12} + \frac{6''''}{12}.$$

$$\text{Κἀντεῦθεν } \frac{0^\circ}{1} + \frac{0'}{6} + \frac{3''}{12} + \frac{0'''}{12} + \frac{1'''}{2} = \frac{0^\circ}{1} + \frac{0'}{6} + \frac{3''}{12} + \frac{1'''}{24} = \frac{0^\circ}{1} + \frac{0'}{6} + \frac{73''}{288} = \frac{0^\circ}{1} + \frac{73'}{1728} = \frac{73^\circ}{1728}. \quad \text{Β΄. } \frac{73^\circ \times 10000}{1728} = \frac{730000^\circ}{1728} = \text{Γ΄. } \frac{422^8}{10000} = \text{Δ΄. } 0,0422^\circ \text{ (§. 259.)}.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

10000 | 00422^c | 0°, $0'$, $3''$, $0'''$, $6''''$ = $3''$, $6''''$, (τοῖς ὀρθοῖς.
| × 6′ |

10000 | 2532′ | 0°
| × 12 |

5064
2532

10000 | 30384″ | $3''$
| 30000 |

384
× 12‴

768
484

10000 | 4608‴ | $0''''$
| × 12'''' |

9216
4608

10000 | 55296'''' | $5''''$ + ἡμίσει = $6''''$

Β.′ Ἔςωσαν τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{5}{6}$ εἰς 100 σημόρια μεταβλητέα. Τοίνυν $\frac{2\times 100}{3} = \frac{67}{100}$, $\frac{5\times 100}{6} = \frac{83}{100}$.

Γ.′ Ἔςωσαν τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{5}{6}$ εἰς 1000 σημόρια μεταβλητέα. Τοίνυν, $\frac{2\times 1000}{3} = \frac{667}{1000}$, $\frac{5\times 1000}{6} = \frac{833}{1000}$

ΠΟ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 268. *Εἰδ' ἂν Κλάσμα μικτὸν πρὸς Δεκαδικὸν ἡμῖν μεταχθησόμενον προκέοιτο, ὡς* $7\frac{1}{2}$ *πρὸς* 1000 *τμημόρια, τὰ τῆς πράξεως, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν κοινῶν Κλασμάτων γινέσθω. Οἷον,* $7\frac{1}{2} = 7.\ \frac{1\times1000}{2} = 7,\ 500$. *Ὡσαύτως ἔςαι καὶ* $25\frac{4}{10} = 25,\ 4$, *ὅτι* $\frac{4}{10} = 0,\ 4$ (§. 251.). $23\frac{4}{100} = 23,\ 04$. *Καὶ ἐπὶ πολλῶν ἄλλων ὡσαύτως.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 269. **Κλάσμα Δεκαδικὸν πρὸς κοινὸν, δοθέντος Παρονομαςῦ, μεταγαγεῖν.**

ΛΥΣΙΣ.

Διὰ τῦ δοθέντος Παρονομαςῦ πολλαπλασιαθήτω ὁ τῦ δοθέντος Κλάσματος Ἀριθμητὴς καὶ τὸ ἐντεῦθεν γινόμενον διαιρεθήτω ἐπὶ τὸν τῦ δεκαδικῦ Παρονομαςὴν, τυτέςιν ἀπὸ τῦ γινομένυ τούτοι πρὸς δεξιὰν χαρακτῆρες διακριθήτωσαν, ὁπόσοι οἱ δεκαδικοὶ τυγχάνυσι. Τὸ ὕτωσὶ προκύπτον πηλίκον, ὁ τῦ αἰτεμένυ κοινῦ Κλάσματός ἐςιν Ἀριθμητὴς, ὗ τίνος ὁ Παρονομαςὴς δέδοται. Οἷον εἰ δέοι 0, 6 *πρὸς κοινὸν μεταγαγεῖν Κλάσμα, ὗ τινος ὁ Παρονομαςὴς δέδοται* = 5; *ἔςαι*

 0, 6

$0,6 = \frac{6}{10} \times 5 = \frac{30}{10} = 3$. κἀντεῦθεν $\frac{6}{10} = 0,\dot{6} = \frac{3}{5}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 270. *Εἰ καὶ ὄχι πᾶν Κλάσμα κοινὸν πρὸς Δεκαδικὸν, ὅτως ὀδὲ πᾶν Δεκαδικὸν πρὸς κοινὸν μεταφέρεσθαι δύναται. Ἡ μέν τοι τῦ ἀνωτέρω Προβλήματος χρῆσις τὰ μάλιστα λυσιτελεῖ, ἡνίκα δεκαδικὰ μέρη Ἀργυρίων πρὸς Ὀβολὲς τῦ αὐτῦ εἴδες, ἢ Φιορηνίων πρὸς Κρεϊτζάρια, ἢ Μοιρῶν μέρη πρὸς Λεπτὰ πρῶτα, ταῦτα δὲ πρὸς δεύτερα, Ποδὸς πρὸς Δακτύλες, Δακτύλων πρὸς Γραμμὰς, Ὥρας πρὸς Λεπτὰ πρῶτα, πρῶτα πρὸς δεύτερα, κ.τ.λ. μεταγαγεῖν ἡμῖν πρόκειται. Ὥςε καὶ τὸν Παρονομαςὴν ἐν μὲν τοῖς καθ' ἡμᾶς ἐν χρήσει Ἀργυρίοις εἶναι 40, ἐν δὲ τοῖς Φιορηνίοις, Μοίραις, Ὥραις, Λεπτοῖς, κ.τ.λ. εἶναι 60, ἐν δὲ τοῖς Ποσὶ, Δακτύλοις, κ.τ.λ. εἶναι 12 (§. 219.).*

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 271. *Ἀποδοθήσεται τοίνυν οἱεδηποτῦν Δεκαδικῦ Κλάσματος τὸ ἐκτίμημα, ἐὰν ὁ τέτε Ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν τῶν μερῶν πολλαπλασιασθῇ ἀριθμὸν τὸν μίαν τῦ Ἀριθμητῦ συνιςῶντα μονάδα, τὸ δὲ γινόμενον, διὰ τῦ Παρονομαςῦ τῦ Δεκαδικῦ διαιρεθῇ Κλάσματος.*

ΠΑ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α.' Ἔςωσαν 75 ἑκατοςημόρια *Ποδὸς*, εἴτ' ἓν ο, 75.' Ἐπεὶ ὁ *Πῦς* ἐκ 12 σύγκειται *Δακτύλων*, ἔςαι $\frac{75\times 12''}{100}=\frac{900''}{100}=9'''$ Ἔςι καὶ γὰρ $\frac{75'}{100}=\frac{3'}{4}=9''$.

Β.' Ὡσαύτως ο, 348 *Ποδὸς* $=4'', 2'''$.

Γ.' Ἔςωσαν 75 ἑκατοςημόρια ἑνὸς *Ἀργυρίϰ*, εἴτ' ἓν ο, 75. Ἐπεὶ ἓν ἓν *Ἀργύριον* = 40 *Ὀβολοῖς*, ἔςαι $\frac{75\times 40}{100}=\frac{3000}{100}=30$ ὀβολοῖς. Ἔςι καὶ γὰρ $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}=30$ ὀβολοῖς.

Δ.' Ἔςωσαν 25 ἑκατοςημόρια μιᾶς *Λίτρας*, εἴτ' ἓν ο, 25 *Λίτρ.* Ἐπεὶ ἡ *Λίτρα* ἐκ 32 *Ἡμιυγκιῶν* σύγκειται, Ἔςαι $\frac{25\times 32}{100}=\frac{800}{100}=8$ *Ἡμιυγκίαις*. Καὶ γὰρ $\frac{75}{100}$ *Λ.* $=\frac{1}{4}$ *Λ.* $=8$ *Ἡμ.*

Ε.' Ἔςωσαν 95 ἑκατοςημόρια ἑνὸς *Φιορηνίϰ*, εἴτ' ἓν ο, 95 *Φ.* Ἐπεὶ ἓν *Φιορήνιον* 60 συντίθεται Κρεϊτζάρια, ἔςαι $\frac{95\times 60}{100}=\frac{5700}{100}=57$ *Κρ.*

ς.' Ὡσαύτως ο, 25 *Φ* $=\frac{1}{4}\frac{5}{0}=15$ *Κρ.*

Ζ.' Ἔςωσαν 95 ἑκατοςημόρια ἑνὸς *Θαλήρϰ*, εἴτ' ἓν ο, 25 *Θ.* Ἐπεὶ εἷς *Θάληρος* 90 *Κρεϊτζα*-

ρίοις ἰσῦται, ἔςαι $\frac{95 \times 90}{100} = \frac{8550}{100} = 85\frac{1}{2}$ Κρ.

Η.' 3, 21 Μοίρας $= 3°, 12', 36''$.

Θ.' 8, 204 Ωρ. $= 8$ Ωρ $12'\ 14''$.

Ι.' 4, 3 Ἡμ. $= 4$ Ἡμ. 7 Ωρ. 12'.

$$\begin{array}{l} \quad 24 \\ \hline 7,2 \text{ Ωρ.} \\ \quad 60 \\ \hline 12,0 \text{ Λεπτ.} \end{array}$$

ΙΑ.' 3,41 Ὀργ. $= 3°, 2', 5''$:

$$\begin{array}{l} \quad 6 \\ \hline 2,46 \text{ Ποδ.} \\ \quad 12 \\ \hline \quad 92 \\ \quad 46 \\ \hline 5,52 \text{ Λεπτ. κ.τ.λ.} \end{array}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 272. Ἀριθμὺς ἐξινασῦν, ἐκ Δεκαδικῶν συγκειμένυς Κλασμάτων, προσθεῖναι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν δὴ τὰ Δεκαδικὰ Κλάσματα, δεξιόθεν πρὸς τὰ λαιὰ τοῖς ὁλοσχερέσιν ὁμοίως προβαίνοντα, ἐν δεκαπλασίονι αὔξυσι λόγῳ (§. 259.) τῶν ὁμογενῶν μερῶν. εἴτ' ἂν τῶν ὁλοσχερῶν, τῶν δεκαημο-

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 279. Δεῖσαν δὲ τὸν Δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10 πολλαπλασιάσαι, προαχθήτω τὸ σημεῖον τῆς τῶν ἁπλῶν μονάδων χώρας μιᾶς ὀπίσω πρὸς τὰ δεξιὰ, ὅπως αἱ ἐν τῷ παραγομένῳ ἁπλαῖ μονάδες δεκαπλασίως ὦσιν· ὡσαύτως δὲ ἐντοπιαθήτω δυεῖν, ἢ τριῶν, ἢ τεσσάρων μονάδων περαιτέρω τὸ σημεῖον, εἰ ἐπὶ 100, 1000, 10000, κ. τ. λ. πολλαπλασιάσαι δέοι. ὅπως ἂν ὁ αὐτὸς ἑκατονταπλάσιος, ἢ χιλιοπλάσιος, ἢ ἑκατοντάκις χιλιοπλάσιος δύναιτο. οἷον 4, 587 × 10 = 45, 87. 9, 307 × 100 = 930, 7. 0, 5386 × 1000 = 538, 6. κ. τ. λ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 280. **Ἀριθμὸν Δεκαδικὰ Κλάσματα ὁποιωνδήποτε τάξεων ἐμπεριέχοντα, δι' ἄλλε ὁμοιογενες διελεῖν.**

ΛΥΣΙΣ.

Τῆς διαιρέσεως, ὡς κἀν τοῖς ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς διαπεραιωθείσης (§. 121,). ταῖς τῷ πηλίκῳ τάξεις τῶν μονάδων προσδιοριστέον ἰσαρίθμως ἐν αὐτῷ ἀποδιαστέλλεσι δεξιόθεν πρὸς τὰ λαιὰ χαρακτῆρας, τοῖς ἐν τῷ διαιρετέῳ ὑποδιεσταλμένοις πλὴν τῶν τῶ διαιρέτε· τετέςι τὰς ἐν τῷ πηλίκῳ Δεκαδικὰς, καθ' ἃς ὁ διαιρετέος τὸν διαιρέτην ὑπερήλασε, λίας, διακριτέον. εἰδ' ἂν ἐκεῖνος τῦτον ὑπερβ-αίνει, ἐπαυξητέον τὰς τῦ διαιρετέυ χαρακτῆρας τῇ τῶν μηδενικῶν πρὸς τὸ τέλος ἐμπαρεισαγωγῇ (§. 253.), ὡς ἐν τῷ Β.' τελεῖται Παραδείγματι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α.' 3, 2 : 8, 192 = 0, 56. Β.' 0, 3251 : 1695, 816 = 5240, 00. Γ.' 4, 7 : 3, 7036 = 0, 788.

Δ.' $3,045 : 15 = \frac{3,045}{15,000} = \frac{3045}{15000} = 0,203$

Ε.' $2,134 : 0,12 = \frac{2,134}{0,120} = \frac{2134}{120} = 17,7833.$

ϛ.' $0,0036 : 4,8 = \frac{0,0036}{4,8000} = \frac{36}{48000} = 0,00075$

Ζ.' $24 : 0006 = \frac{24,000}{0,006} = \frac{24000}{6} = 4000.$

Η.' 7, 356 : 6 = 1, 226. Θ.' 0, 06537 : 4, 3 = 0, 0152.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν δή, ὁπηνίκα τοιοῦτόν τι Κλάσμα δι' ἑτέρε ὁμοιογενῦς διαιρεῖται, ἤτοι ὁπηνίκα δι' ἀντεστρόφε τῦ διαιρέτυ πολλαπλασιάζεται (§. 214.), τῷ μὲν τῦ πηλίκυ Ἀριθμητῇ τὰ τῦ Παρονομαςῦ τῦ διαιρετέυ μηδενικὰ προςίθεται, τῷ δὲ Παρονομαςῇ τὰ τῦ Ἀριθμητῦ τῦ διαιρέτυ ἀνάπαλιν· τέτυ χάριν πάντων τῶν ἐν τῷ τῦ πηλίκυ Ἀριθμητῇ μηδενικῶν ἀπαλειφθέντων, ἰσαρίθμως δὲ τέτοις καὶ

καὶ τῶν κατὰ τὸν τȣ͂ αὐτȣ͂ πηλίκȣ Παρονομαςῆς, τοσαῦτα ἐν τῷ τȣ͂ πηλίκȣ Παρονομαςῇ ὑπολειφθήσονται τὰ μηδενικὰ, ὁπόσα τῷ τȣ͂ διαιρετέȣ Παρονομαςῇ ὑπὲρ τὸν τȣ͂ διαιρέτȣ προσῆν· τȣτέςι, καθ' ὅσȣς Δεκαδικȣ̀ς χαρακτῆρας ὁ διαιρετέος τὸν διαιρέτην ὑπερεῖχεν. ἰσάριθμοι ἄρα καὶ ἐν τῷ πηλίκῳ, ἀντὶ τῶν Δεκαδικῶν οἱ χαρακτῆρες ὑποδιαςελλόμενοι ἐκληφθήσονται. Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 281. Πολλάκις εἴωθεν, ἔν τε τῷ γινομένῳ κἂν τῷ πηλίκῳ χαρακτῆρας τȣ̀ς δεξιωτάτȣς, ὡς εὐεξȣθενίςȣ δυνάμεως παραμελεῖσθαι. Ὡς ἂν δὲ τȣ͂το ἄνευ καταφανȣ͂ς τȣ͂ διαπτώματος γένοιτο, τὸν ἐσχάτως ἐκληφθησόμενον χαρακτῆρα μονάδι ἐπαυξητέον, εἰ ὁ τȣ́τῳ ἑπόμενος μείζων τȣ͂ 5 καθέςηκεν, ἢ ὁ αὐτὸς 5 μετ' ἄλλων εἴη. Οἷον, ἐὰν ἐν τῷ Δεκαδικῷ Κλάσματι 4, 3657, οἱ ἔσχατοι δύω χαρακτῆρες παροπτέοι ὦσιν, ἔςαι 4, 37, ȣ̓χὶ δὲ 4, 36· ἐκείνως μὲν γὰρ τὸ Κλάσμα ὑπερέχει τὸ $\frac{43}{10000}$, ȣ̔́τω δὲ ἀπὸ τȣ́τȣ διαφέρει τὸ $\frac{57}{10000}$, τȣ͂ ἐλλείμματος πάντως τὸ πλεονέκτημα ὑπερνικῶντος. Ἐὰν δὲ ὁ παροφθησόμενος χαρακτὴρ τύχῃ 5 μονοχαράκτως ἐν τῷ τέλει ἐκκείμενος καὶ ἄνευ ἑτέρων αὐτῷ ἑφεπομένων, τὸ πλεονέκτημα, εἴτ' ȣ̓͂ν ἡ ὑπεροχὴ, τῷ ἐλλείμματι ἰσοδυναμήσει, ἤτοι ὁ τȣ́-

τῳ

τῶ παραλήγων χαρακτὴρ μονάδι ἐπαυξηθείη, ἢ καὶ ὐχί· οἷον ἐπὶ 0, 265; παραμελυμένυ τῦ ἐσχάτυ ταὐτὸν ἔςαι, ἢ τὸ ὑπόλοιπον γράφειη 0, 27, ἢ 0, 26· ἐκείνως μὲν γὰρ ἡ ὑπεροχὴ, ὕτω δὲ ἡ ἔλλειψις αἰείποτ' ἴση τῦσσυ· Ἐὰν δ' ἐσχάτως ὁ τῶν ... ημθησομένων χαρακτήρων θάτερος, εἴτ' ὖν ὁ πρῶτος ἐλάσσων τύχῃ τῶν 5, οἱ δ' ἐφεξῆς ἑπόμενοι μείζονες; ὁ τὺς παρορφθησομένυς παραλήγων ἔσχατος χαρακτὴρ; ὐδεμιᾶς μοναδικῆς αὐξήσεως δεικτικὸς ἔςαι. Οἷον, εἰ ἐπὶ 0, 31638 παρορφθησόμενοι προκέοιντο οἱ δύω ἔσχατοι 38, εἰ καί περ 3 ἐλλάττω ἐςὶ τῦ 5, προκριτέον ἀλλ' ὖν ὑτωσὶ τὺς λοιπὺς ἀποδῦναι 0, 316, ἤπερ 0, 317. Ἐν γὰρ τῇ πρώτῃ περισώσει ἡ ἔλλειψις ἔςαι τῦ $\frac{38}{\text{ooo}}$υ, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἡ ὑπεροχὴ τῦ $\frac{62}{\text{ooo}}$υ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 282. Ἔςαι ἄρα $\frac{5}{6} : 0,342 = \frac{5}{6 \times 0,342}$

$$= \frac{5}{2,052} = \frac{5000}{2052} = 2,436.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. Β'.

§. 283. Εἰ ὖν τὸ Δεκαδικὸν Κλάσμα διὰ 10, 100, 1000, κ. τ. λ. διελεῖν δέοι, διὰ τοσύτων πρὸς λαιὰν χαρακτήρων τὸ σημεῖον προαγέσθω, ὅσα ἂν τῷ διαιρέτῃ μηδενικὰ σημεῖα 1, 2, 3, . . . προσκέοιτο· ἐφ' ᾧ τὸν αὐτὸν ἑκατοσημόςημόρια, χιλιοςημόρια, δεκαχιλιοςημόρια, καὶ ἐφεξῆς τῷ διαιρέτῃ ἀναλόγως δύνασθαι. Οἷον,

53, 456 : 10 = 5, 3456.
32, 43 : 100 = 0, 3243.
5, 38 : 1000 = 0, 00538.

Β΄. Περὶ τῶν Ἑξηκονταδικῶν Κλασμάτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 284. **Κλάσματα Ἑξηκονταδικὰ** λέγουσιν, ὧν οἱ Παρονομαςαὶ ἐν ἑξηκονταπλασίονι λόγῳ αὔξουσι: Καλοῦνται δὲ καὶ **Λεπτὰ Φυσικά**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 285. Ἐὰν ἓν ὁλοσχερές τι, οἷον ἡ Ὥρα εἰς ἑξήκοντα μέρη, εἴτ' ἂν εἰς Λεπτὰ, διαιρεθῇ· τὸ δ' ἑξηκοςὸν μέρος, εἰς ἕτερα ἑξήκοντα ἐλάττω, εἴτ' ἂν εἰς Λεπτὰ Δεύτερα, ὑποδιαιρεθῇ, καὶ ἐφεξῆς ὕτω, αἱ τοιαῦται διαιρέσεις τὰ Ἑξηκονταδικὰ ἡμῖν ἀναδιδοῦσι Κλάσματα. Οἷον 4 Ὧραι 50 Λεπτὰ Πρῶτα, 20 Δεύτερα, 30 Τρίτα, Κλασματικῶς ὑποτυπέμενα ἔσονται, 4 Ὥρ. $\frac{50}{60} + \frac{20}{60.60} + \frac{30}{60.60.60} = 4$ Ὥρ. $\frac{50}{60} + \frac{20}{3600} + \frac{30}{216000}$ κ.τ.λ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 286. **Λεπτὸν**, εἴτ' ἂν **Μόριον**, Πρῶσημορίων, ἑκατοσημορίων κ.τ.λ. ὑπαλλήλων ταχθέντων, ἡ τέτων σύναψις ὁμοιοτρόπως τοῖς κοινοῖς ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς διαπεραιωθήσεται (§. 65.). Ἐὰν δ' ἔν τινι πλείω τὰ δεκαδικὰ τῦ ἑτέρυ τύχωσιν, ὁ αὐτὸς τῶν χαρακτήρων ἀριθμὸς ἀποδοθήσεται, τῇ πρὸς τὸ τέλος τῶν μηδενικῶν προσθέσει (§. 253.).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Ἔστωσαν προσθετέα τὰ ἐφεξῆς μέρη 3, 0506, καὶ 4, 789, καὶ 6, 62, καὶ 4, 753647. τοίνυν.

3, 0506		3, 050600
4, 789	=	4, 789000
6, 62		6, 620000
4, 753647		4, 753647
19, 212247		19, 213247

Τῦ ἐσχάτυ Κλάσματος δὲ χαρακτῆρας ἔχοντος, καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοιάριθμα ἀποδοθήσονται τῇ τῶν μηδενικῶν προσθέσει. Ἔνθεν οἱ τῷ μὲν πρώτῳ δύω προσεθείσθωσαν, τῷ δὲ δευτέρῳ τρία, τῷ δὲ τρίτῳ τέσσαρα. Εἶτα τὰ μὲν χιλιάκις χιλιοσημόρια ἐςὶ μόνον 7, τὰ δ' ἑκατοντάκις χιλιοσημόρια 4, τὰ δεκάκις χιλιοσημόρια 12 τῶν 2 τοίνυν ἐν οἰκείῳ τεθέντων τόπῳ καὶ τῆς μονάδος πρὸς τὴν ἐχομένην σήλην προβιβασθείσης, ἕξομεν χιλιοσημόρια 13, ὧν τὰ μὲν 3 γράφονται, ἡ δὲ μονὰς μετάγεται τῶν ἑκατοσημορίων αὐθις ληφθέντων 21, ἡ μὲν μονὰς γράφεται, ὁ δὲ 2 πρὸς

 τὰ

τὰ δεκατημόρια μεταγόμενος ἄθροισμα τέτων συναποτελεῖ 22, ὧν τὰ μὲν 2 γράφονται, τὰ δὲ 2 πρὸς τὰ ὁλοσχερῆ μετάγονται, ἵν' ὅτω τὸ τέτων ἄθροισμα ἡμῖν ἀποδοθῇ = 19 ὁλοσχερέσι

Β.'	4,287	*Γ.'*	23,07543
	29,34		0,923
	6,0048		6,0024
	39,6318		30,00083

Δ.' Ἡνίοχός τις ἐκόμισε δύω Κυβικὲς Πόδας ξύλε Δρυΐνε, 3 ὡσαύτως ξύλε Φηγίνε, καὶ 5 Χάλικος. Πόσας ὲν Λίτρας Βινδοβονικὰς ἐκόμισε;

Τιθεμένων μὲν δὴ τῶν δυοῖν Κυβικῶν Ποδῶν ἐν ςαθμῷ Βινδοβονικῷ ἴσων Λίτραις 104 $\frac{977}{1000}$, τῶν δὲ 3 Κυβ. Ποδ. τῦ Φηγίνε ξύλε = 144 $\frac{753}{1000}$ καὶ τῶν 5 Κυβ. Ποδ. τῦ Χάλικος = 632 $\frac{800}{1000}$, ἔςαι.

104,	977
144,	753
632,	800
882,	530.

Ἐκόμισε τοίνυν ἐν ςαθμῷ Βινδοβονικῷ 882 Λίτρας καὶ 530 ἑκατοςημόρια μιᾶς Λίτρας.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εὔδηλον γὰρ κατὰ τὰ δειχθέντα (§. 198. 251.), ὅτι τῶν ὑπὸ τὴν αὐτὴν ὀνομασίαν ἀναφερομένων Κλασμάτων, καὶ ὡς ὁλοσχερῶν θεωρουμένων

μένων, προσίωενται μὲν ἀλλήλοις ἐπαθροιζόμενοι οἱ Ἀριθμηταὶ, τηρῶνται δὲ οἱ τέτων Παρονομαςαί. Ἐπεὶ δὲ τὸ ἐν τοῖς Ἀριθμηταῖς κενὸν τῶν τόπων, ἐκείνων πρὸς τὸ αὐτὸ ὄνομα ἀναγομένων, μηδενικοῖς συμπληρῶται (§. 253.), ὃ δὴ κἀνταῦθα τελεῖται. Ἄρα ἀποδοθήσεται καὶ τὸ κεφάλαιον ἀκριβὲς, ἐὰν οἱ ὑπαλλήλως ςιχηδὸν τεταγμένοι ἰσοδύναμοι χαρακτῆρες, οἳ δὴ Ἀριθμηταὶ τῶν δοθέντων εἰσὶ Κλασμάτων, ἐν ἑνὶ προσαθροισθῶσιν. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 273. Εἰ ἐν Κλάσμα κοινὸν Δεκαδικῷ προςεθησόμενον πρόκειται, ἐκείνε πρὸς Δεκαδικὸν μεταχθέντος (§. 266.), τὰ τῆς πράξεως ὡς ἀνωτέρω τελείσθω. Οἷον 3, 465 + $\frac{3}{4}$ = 3, 465 + 0, 75 = 4, 215.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 274. **Ἀριθμῶν Δεκαδικῶς Κλασματωδῶν προτεθέντων, τὸν ἐλάττω τῦ μείζονος ἀφελεῖν.**

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπειδὴ ἡ ἀφαίρεσις εὕρεσίς ἐςιν ὑπεροχῆς ὁλοσχερῶν πρὸς ὁλοσχερῆ, ἡ πρᾶξις πάντως κατὰ τὰς ὁλοσχερεῖς ἀριθμὲς γενέσθω (§. 74.), τῶν τῦ ἀφαιρετέυ χαρακτήρων τοῖς τῦ μειωτέυ μονάσιν ὑποπογραφομένων, ὡς τῶν μονάδων τὰς ἰσοδυνάμες ὁμοςιχεῖν· οἷον τὰ μὲν ὁλοσχερῆ τοῖς ὁλοσχερέσι, τὰ δὲ δεκαδικὰ τοῖς δεκαδικοῖς, τὰ ἑκατοςὰ τοῖς ἑκατοςοῖς, κ.τ.λ. Εἶτα ὁ ἐλάττων τῶ μείζονος ἀφαιρείσθω, τῆς διαφορᾶς ὑπὸ ςίχον τὸν αὐτὸν σημειωμένης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. 28,438	Β'. 21,464	Γ'. 12,33571
7,642	12,850	4,564
18,796	8,614	7 7057

Δ'. Τιθεμένης Χρυσῶ καθαρωτάτω τῆς ειδικῆς βαρύτητος = 19, 640, Σιδήρω δὲ χαλκευθέντος = 7, 434. Ζητεῖται ἡ τῆς μεταξὺ ἀμφοῖν ειδικῆς βαρύτητος διαφορά, εἴτ' ὂν ἡ ὑπεροχή. Ἔνθεν τοι

$$\begin{array}{r} 19,640 \\ 7.434 \\ \hline 12,206 \end{array}$$

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ αὐτὴ ἔςαι τῇ ἀνωτέρω (§. 272.), τῇ ὀνοματοθεσίᾳ προσέχοσι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 275. Ἐὰν δ' ὁ μειωτέος ἐλάττων τῶ ἀφαιρετέου τύχῃ, ἡ τῶν χαρακτήρων ἔλλειψις τῇ τῶν μηδενικῶν προσθέσει ἀναπληρέσθω (§. 253.). Ὃ δὴ ταυτόν ἐςι, τῇ τῆς μονάδος ἀπὸ τῶ ἐγγὺς χαρακτῆρος προσληφθείσης εἰς δέκα μονάδας τῆς ἐγγὺς ὑπο-

ὑποδεεςέρας τάξεως ἀναλύσει, ὡς εἴρηται (§. 94?
Β.').

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α.' $\begin{array}{r} 16,7 \\ 13,567 \\ \hline 3,133 \end{array} = \begin{array}{r} 16,700 \\ 13,567 \\ \hline 3,133 \end{array}$

Β.' $\begin{array}{r} 7,3 \\ 3,79468 \\ \hline 3,50532 \end{array} = \begin{array}{r} 7,30000 \\ 3,79468 \\ \hline 3,50532 \end{array}$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.'

§. 276. Ἀφαιρεθήσεται ἄρα καὶ κοινὸν Κλάσμα ἀπὸ Δεκαδικοῦ, πρὸς ἐκεῖνο πρότερον μεταχθέν. Οἷον.

$\frac{17}{6} - 1,34 = 2,8333... - 1,34 = 1,4933...$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 277. Ἀριθμὸν ἐκ Κλασμάτων Δεκαδικῶν, τάξεως οἵας δηποτοῦν, συγκείμενον, ἐπ' ἀριθμὸν Δεκαδικῶς ἐκκείμενον πολλαπλασιάσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐν τῷ τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων πολλαπλασιασμῷ, ἅπαντα ὡς κἀπὶ τῶν ὁλοσχερῶν τηρείσθω (§. 93.). πλὴν ὅτι ἐν τῷ ἄτω προκύπτοντι ὁλικῷ

 γινο-

γινομένῳ, τοσοῦτοι δεξιόθεν χαρακτῆρες κόμματι ὑποδιαστελλόμενοι ἀπειλήφθωσαν, ὅσα τῶν δεκαδικῶν ἐν ἑκατέροις τοῖς παράγουσιν ὁμοῦ ληφθεῖσιν ἐμπεριείληπται. Κἀντεῦθεν, ἐὰν τῷ γινομένῳ οἱ χαρακτῆρες ἰσάριθμοι οὐ παρῶσι τοῖς ἐν τοῖς παράγουσι δεκαδικοῖς, τὸ ἐλλεῖπον τῇ τῶν μηδενικῶν προσθέσει ἀναπληρούσθω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. 1,44	Β'. 3,046
1,2	0,32
288	6092
144	9138
1,728	0,97472
Γ'. 0,337	Δ'. 0,26
0,023	17
1011	182
674	26
0,007751	4,42

Ε'. Τῆς τοῦ Ὕδατος εἰδικῆς βαρύτητος πρὸς τὴν τοῦ Χρυσοῦ ἐν λόγῳ τῶν 1 πρὸς 19, 620 ἐκλαμβανομένης, ἐὰν ὁ εἷς Κυβικὸς Βινδοβονικὸς Ποῦς 57 Λιτρῶν τεθῇ περιεκτικὸς, ζητηθῇ δὲ ὁ εἷς τοῦ Χρυσοῦ Κυβικὸς Ποῦς, πόσας ἐν μέτρῳ Βινδοβονικῷ Λίτρας σταθμίζει, ἴσως.

ΔΕΙ-

$$\begin{array}{r} 19,640 \\ 57 \\ \hline 137,480 \\ 982,00 \\ \hline 1119,480 \end{array}$$

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὰν μὲν δὴ τοῦ τοιούτου εἴδους Κλάσματα ἐπ' ἄλληλα πολλαπλασιάζηται, καὶ τοὺς τούτων Παρονομαστὰς ὡσαύτως ἀλλήλοις ἐπάγεσθαι ἐπάναγκες (§. 207.). ἐφ' ὧν δὴ καὶ τὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ περανθήσεται, τῇ τῶν μηδενικῶν, ὧν ἀμφότεροι τῶν παραγόντων μετέχουσιν, ἐπεισάξει. Οἱ γὰρ Παρονομασταὶ οὐδὲν ἄλλο, ὅτι μὴ μονάδες εἰσὶ μηδενικοῖς συνεζευγμέναι (§. 247.)· ἔνθεντοι ὁ τοῦ γινομένου Παρονομαστὴς τοσούτων μετὰ τὴν μονάδα μηδενικῶν περιεκτικὸς ἔσται, ὅσα ὁ τῶν παραγόντων ἀμφοῖν Παρονομαστὴς προσεπαριθμεῖ. Ὁπόσα τοίνυν τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων ἐπ' ἀμφοῖν ἅμα ἐκείνοις παρῇ τοῖς παράγουσι, τοσοῦτοι χαρακτῆρες ἐπὶ τοῦ παραγομένου ὑποδιαστελλόμενοι τῶν τοιῶνδε Κλασμάτων δηλωτικοὶ ἔσονται. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 278. Ἔσται ἄρα, ἐξ ὧν ἴσμεν (§. 210.),
$$2,04 \times \frac{3}{4} = \frac{2,04}{4} \times 3 = \frac{6,12}{4} = 1,53.$$

ΠΟ-

Πρῶτον καλεῖται τὸ τῦ ὁλοσχερῦς ἑξηκοςὸν μέρος. *Λεπτὸν Δεύτερον*, τὸ τῦ Πρώτυ ἑξηκοςόν. *Λεπτὸν Τρίτον*, τὸ τῦ Δευτέρυ ἑξηκοςόν· καὶ ἐφεξῆς ὅτω.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 287. Τὸ μὲν ἓν ὁλοσχερὲς, τῷ σημείῳ °) διαγνωριζέσθω· τὸ δὲ Πρῶτον Λεπτὸν, τῷ γραμμιδίῳ ′)· τὸ δὲ Δεύτερον, τοῖς δυσὶ γραμμιδίοις ″)· τὸ δὲ τρίτον, τοῖς τρισὶ ‴)· Καὶ τὰ λοιπὰ ὡσαύτως. Οἷον, 4 Ὥρ ἢ $4^{\circ} + 50' + 20'' + 30'''$. Κ.τ.λ. (§. 264. 265.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 288. Τῷ τρόπῳ τύτῳ, τὰ Ἑξηκονταδικὰ Κλάσματα ἐπὶ ὁλοσχερῆ ἀναγόμενα, ταῖς αὐταῖς, ὡς κἀκεῖνα Ἀριθμητικαῖς ὑπάγεσθαι ἔχωσι Πράξεσι.

§. 289. *Κλάσμα Ἑξηκονταδικὸν πρὸς Κοινὸν δοθέντος Παρονομαςῦ μεταγαγεῖν.*

ΛΥΣΙΣ.

Πολλαπλασιασθήτω ὁ τῦ Ἑξηκονταδικῦ Κλάσματος Ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν δοθέντα Παρονομαςήν. Τὸ γινόμενον διὰ τῦ Παρονομαςῦ τῦ Ἑξηκονταδικῦ διαιρεθὲν δώσει τὸ ζητύμενον Κλάσμα.

Π Οἷον

Οἷον 0; 4, εἶτ' ὂν $\frac{4}{60}$ ἐπὶ Παρονομαστὴν 100 μεταγόμενον ἐστὶ $\frac{4}{60} \times 100 = \frac{400}{60} = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 290. Ἐὰν δὲ Κοινὸν Κλάσμα ἐπὶ Ἑξηκονταδικὸν μεταχθῆναι δέῃ, πολλαπλασιασθήτω ὁ τοῦ δοθέντος Κλάσματος Ἀριθμητὴς ἐπὶ 60, καὶ τὸ ἐντεῦθεν γινόμενον διὰ τοῦ δοθέντος Παρονομαστοῦ διαιρεθήτω· τὸ πηλίκον Κλάσμα ἐστὶ τὸ Ἑξηκονταδικόν. Οἷον, κείσθω κοινὸν Κλάσμα $\frac{3}{7}$ ἐπὶ Ἑξηκονταδικὸν μετακτέον· ἐστὶ $3 \times 60 : 7 = 180 : 7 = 25\frac{5}{7} = \frac{25}{60} + \frac{5}{7}$. Εἰ δέ τῳ βέλτιον εἴη εἰδέναι πόσα Ἑξηκονταδικὰ δεύτερα ὁ ἐναπολειφθεὶς Κλασματώδης ἀριθμὸς $\frac{5}{7}$ ἀποτελεῖ, τὰ τῆς πράξεως ὡσαύτως τελείσθω· οἷον $5 \times 60 : 7 = 300 : 7 = 42\frac{6}{7}$. Αὖθις τε $6 \times 60 : 7 = 360 : 7 = 51\frac{3}{7}$, καὶ ἐφεξῆς οὕτως. Ἔνθεν τοι τῇ μεθόδῳ ταύτῃ χρώμενοι πρὸς τὴν ἀληθῆ τοῦ ἐν ἀρχῇ δοθέντος Κλάσματος $\frac{3}{7}$ δύναμιν ὅτι ἔγγιστα γενέσθαι δυνάμεθα.

ΠΡΟ-

μένων ἀνεύρεσιν, ὁ τῶν Ἑξηκοντάδων Κανὼν ἐπινενόηται, ὁ τὰ γινόμενα ἐν εἴδεσιν ἀναλελυμένα παριςάνων· οἷον, τὸ ἐκ τῶν 38 ἐπὶ 47 γινόμενον ἐκεῖσε εὑρίσκεται εἶναι = 29, 46. Ὁ δὲ τῆς κατασκευῆς λόγος σαφὴς, ἐκ τῆς ἐν τῷ Προβλήματι διαληφθείσης πράξεως. Σημειωτέον ἀλλ᾽ ἐν, ὡς κἀν τῷ περὶ τῆς τῦ Πυθαγορικῦ Ἀβακίυ κατασκευῆς ἐλέγετο (§. 90.), θάτερον μὲν τῶν παραγόντων κατὰ πλευρὰν, τὸν δ᾽ ἕτερον κατὰ τὴν τῦ Κανόνος κορυφὴν, καταγραφεσθαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 295. Κλάσματα Ἑξηκονταδικὰ, δὶ Ἑξηκονταδικῶν διελεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Τὰ τῆς διαιρέσεως κἀνταῦθα, ὡς κἀν τοῖς Δεκαδικοῖς τελεῖται Κλάσμασι, τηρυμένων καλῶς ἐν τῷ τῦ πηλίκυ διὰ τῦ διαιρέτυ πολλαπλασιασμῷ, τῶν ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ ῥηθέντων (§. 293.). Ἔνθα δὲ τὸ τῦ διαιρετέυ πρῶτον εἶδος, ἔλαττον εἴη τῦ πρώτυ τῦ διαιρέτυ εἴδυς, ἐπὶ τὸ προσεχῶς ἔλαττον ἀναχθὲν εἶδος τῷ ἐφεξῆς προσεθήτω, ὅπως τὰ τῆς διαιρέσεως τελεῖσθαι ἔχῃ. Οἷον, ἐν Παραδείγματι, ἔςωσαν $7^{\circ}, 32', 30'', 38''', 46''''$, διαιρετέα διὰ $2^{\circ}, 18', 49''$. Ζητηθήτω ποσάκις 2 ἐν 7 περιέχεται, τὸ δὲ πηλίκον $\bar{3}^{\circ}$ ἐν οἰκείῳ μετὰ

τὴν

τὴν παρένθεσιν τόπῳ γραφήτω. Ἀχθήτω εἶτα τὸ πηλίκον τουτὶ 3° ἐφ' ὅλον τὸν διαιρέτην 2°, 18', 47", καὶ τὸ γινόμενον 6°, 56', 21" ἀπὸ τῶν 7°, 32', 30" ἀφαιρεθήτω, ἵν ὑπολειφθῇ 36', 9". Τῷ ὑπολοίπῳ τούτῳ συναφθήτω τὸ ἐφεξῆς εἶδος 38, καὶ συνεχισθήτω ἡ διαίρεσις τῷ αὐτῷ τρόπῳ, ἄχρις οὗ οὐδὲν μενεῖ ὑπόλοιπον, ὡς ἐκ τοῦ παραδειγματικοῦ τύπου δηλοῦται.

```
2°,18',47"( 7° 32', 30", 38"', 46"")3°,15',38"
            6, 56, 21  --  --
            ------------------
               36, 9, 38   --
               34, 41, 45  --
            ------------------
                1, 27, 53  --
Εἶτ' οὖν        87, 53, 46
                87, 53, 46
                ----------
                         0
```

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 291. Κλάσματα Ἑξηκονταδικὰ προσθεῖναι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἡ τῶν Ἑξηκονταδικῶν Πρόσθεσις κατὰ τὸν αὐτὸν πάντως τελεῖται τρόπον, καθ' ὃν οἱ Ἑτερογενεῖς ἀριθμοὶ ἐν ἑνὶ κεφαλαίῳ ἀθροίζονται (231.). Οἷον:

Α'.	35°,	46',	8'',	15'''.	
	17°,	20',	15'',	40'''.	
		14',	18''.		
	53°,	20',	41'',	55'''.	

Β'.	6''Ωρ.	4',	32'',	8'''.
	20''Ωρ.	12',	50'',	16'''.
	26''Ωρ.	17',	22'',	24'''.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 292. Κλάσματα Ἑξηκονταδικὰ ἀπ' ἀλλήλων ἀφελεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ταὐτὰ πάντως κἀνταῦθα τηρείσθω, ἃ κἀπὶ τῶν Ἑτερογενῶν ἐλέγετο ἀριθμῶν (§. 233.)· τέτε μόνον σημειωμένε, τὴν ἀπὸ τῦ ἐγγὺς ἑπομένε μείζονος εἴδες ἐκλαμβανομένην μονάδα, εἰς ἑξήκοντα ἀναλύεσθαι, ταῖς ἔνθα ἡ ἀφαίρεσις γίνεται ἰσοδυαναλυσαμένας, καὶ ταύταις προστιθεμένας· οἷον $1''=60'''$, $1'=60''$, $1°=60'$ (§. 286.). Οἷον ἐν Παραδείγμασι.

$$
\begin{array}{ll}
A'. & 28°, 15', 4'', 20''' \\
 & \underline{17°, 29', 18'', 45'''} \\
 & 10°, 45', 45'', 35'''.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
B'. & 12 \text{ Ὥρ. } 18', 52'', 7''' \\
 & \underline{2 \text{ Ὥρ. } 20', 4'', 12'''} \\
 & 9 \text{ Ὥρ. } 58', 47'', 55'''.
\end{array}
$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 293. Κλάσματα Ἑξηκονταδικὰ ἐπὶ Ἑξηκονταδικὰ πολλαπλασιάσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Ὁ τῶν Ἑξηκονταδικῶν Κλασμάτων πολλαπλασιασμὸς, ὁ αὐτὸς ἐςὶ τῷ τῶν Δεκαδικῶν (§. 277.). Διενήνοχε δ' ἐκείνȣ, καθ' ὅσον τοσάκις ἀπὸ τȣ̃ ἐλάττονος εἴδȣς ὁ ἑξηκονταδικὸς ἀποβάλλεται ἀριθμὸς, ὁσάκις ἂν ἐξῇ, ὃ δὴ διὰ τῆς ἐπὶ 60 διαιρέσεως τελεῖται (§. 173.)· τῷ δὲ προσεχῶς μείζονι εἴδει, τόσαι μονάδες ἰσαρίθμως προςίθενται, ὁσάκις ὁ ἑξηκονταδικὸς ἀποβέβληται (§. 286.). Οἷον, ἔςω πολλαπλασιαςέος μὲν ὁ 3°, 15', 38'', πολλαπλασιαςὴς δὲ ὁ 2°, 18', 47''. Ἀχθήτω ἤδη ἕκαςον μέρος τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃ Α' ἐπὶ 47, Β' ἐπὶ 18, καὶ 18, Γ' ἐπὶ 2. Ἔςαι τὸ ἐκ τῶν 18 ἐπὶ 47 ἐκπίπτον γινόμενον = 1786 τετάρτοις λεπτοῖς = 29''' καὶ 46''''. ὅθεν τὰ μὲν 46 μετὰ τῶν αὐτοῖς ἐπικουφαίων σημείων τεθήτωσαν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ὑπὲρ τοῦ ἐλαχίςου εἴδους, τὰ δὲ 29''' τῷ ἐφεξῆς ἑπομένῳ εἴδει συναφθήτωσαν. Ἐπεὶ δέ, τὸ γινόμενον ἐκ τῶν 47'' ἐπὶ 15' = 705''', ἐκκύψει τῇ τῶν 29 προσθήκῃ ἄθροισμα 734''' = 12'', 14'''· ὅθεν τὰ μὲν 14 ὑπὸ τὴν γραμμὴν γράφονται, τὰ δὲ 12'' τῷ ἐφεξῆς ἑπομένῳ γινομένῳ ἐκ τῶν 3° ἐπὶ 47'' προςίθενται. Τῷ αὐτῷ τρόπῳ χωροῦντες, τὰ κατὰ μέρος τέως ἀποίσομεν γινόμενα, ἃ δὴ ἐν ἑνὶ ἀθροιζόμενα κεφαλαίῳ τὸ αἰτούμενον ἀναδώσουσι γινόμενον, εἴτ' οὖν 7°, 32', 30'', 38''', 46'''', ἤ, 7° 32', 31'', εἴπερ τὸ ἐγγὺς τοῦ ἀληθοῦς πρὸς θυμοῦ εἴη σοι λαβεῖν, ὁπηνίκα τὸ προσεχῶς ἑπόμενον μεῖζον εἶδος, τὸ ἥμισυ ἐκείνου ὑπεράλλεται, εἴτ' οὖν τοῦ 30 μεῖζόν ἐςιν, ὡς ἐν τῷ Παραδείγματι δῆλον.

```
      3°, 15', 38''.
      2°, 18', 47''.
   ------------------
     2', 33'', 14''', 46''''
    58, 41, 24
  6, 31, 16
  ---------------------------
  7°, 32', 30'', 38''', 46''''
```

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 294. Πρὸς εὐχερεστέραν τῶν τοιούτων γινο-

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΔΙΑΦΟΡΟΥ ΣΧΕΣΕΩΣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΠΕΡΙ ΛΟΓΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 296. *Λόγος* ἐςίν, ἡ δυοῖν ὁμογενῶν ἀριθμῶν πρὸς ἀλλήλυς παραβολή.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'

§. 297. Ἀριθμὸν τοίνυν μοναδικῶς κείμενον, ὀ δυνάμεθα Λόγον αποκαλέσαι (§. 296.). Ὅπως τοίνυν ὁ Λόγος ἰσότητα ἢ ἀνισότητα ἀποφήνῃ, δύω δέον παρεῖναι τὰ ἀλλήλοις παρατιθέμενα, καὶ ταῦτα ὁμογενῆ, ἃ δὴ καὶ ὅροι καλεῖσθαι εἰώθασι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 298. Ὁ Λόγος τοίνυν ὐδὲν ἄλλό ἐςιν, ὅτι μὴ πράγματός τινος πρὸς ἕτερον ἑαυτῷ ὁμογενὲς ἀναφορὰ, ἥτις τὸ θατέρυ μέγεθος διὰ τῆς τῦ ἑτέρυ, παραβολῆς, ἄνευ προσλήψεως τρίτυ τινος ὁμογενῦς οἱονεὶ μέτρυ, παρεξετάζυσα προσδιορίζει. Οὕτω γὰρ ἐν τῇ Ἀρχιτεκτονικῇ ἐπὶ κατασκευῆς θύρας τινὸς ἢ θυρίδος, ἢ ἑτέρυ τυ τῶν τοιύτων, Τεκτόνων παῖδες αἰτῦσι τὸν τῦ πλάτυς πρὸς τὸ αὐτῦ ὕψος λαβεῖν λόγον. Ἐὰν ὖν τῦ τῆς θυρίδος, ἐξ ὑποθέσεως,

θέσεως, πλάτες ἀντὶ μέτρε ληφθέντος, ζητηθῇ ποσάκις τὸ πλάτος τῷ ὕψει ἐμπεριείληπται, φέρ' εἰπεῖν, δίς· εὑρεθήσεται ὁ τῦ πλάτες πρὸς τὸ ὕψος λόγος ὡς 1 πρὸς 2. Ἐὰν δ' ἀνάπαλιν τῦ ὕψες ἀντὶ μέτρε ληφθέντος, ζητηθῇ ποσάκις τῷ πλάτει ἐκεῖνο ἐμπεριείληπται, εὑρεθήσεται ὁ λόγος, ὡς 2 πρὸς 1.

ʼΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 299. Ἡγέμενον μὲν τῦ λόγε 3 πρὸς 5 ἐςὶν ὁ πρῶτος τῶν ἀλλήλοις παραβαλλομένων ἀριθμῶν, οἷον ὁ 3· Ἑπόμενον δὲ, ὁ δεύτερος 5.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 300. Τὸν, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν ἔχει λόγον, ὁμογενὴς δηλαδὴ πρὸς ὁμογενῆ, οἷον γράφοντες 3 πρὸς 5, διαιρέσει παριςάνομεν τῦ ἡγεμένε διὰ τῦ ἑπομένε, ἢ καὶ ἐν εἴδει κλάσματος ὡς $\frac{3}{5}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 301. Ἄρα κἂν τοῖς Κλάσμασιν, ἡ τῦ Ἀριθμητῦ πρὸς τὸν αὐτῦ Παρονομαςὴν ἀναφορὰ, ὡσαύτως Λόγος ἀποκαλεῖται· ἄνευ γὰρ τρίτε τινὸς διακρίνεται (§. 168.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 302. Οἱ ὁμογενεῖς τοίνυν ἀριθμοὶ, ἀλλήλοις παρα-

παραβαλλόμενοι, ἢ ἀλλήλων ὑπερέχουσιν, ἢ ἀλλήλους μέρει τινὶ ὡρισμένῳ ἐμπεριλαμβάνουσιν. Ἔνθεν τοι δυοῖν ἀριθμῶν τὸν λόγον αἰτοῦσι προσδιορίσαι, κατάδηλον γίνεται, ὅσον θάτερος θατέρου ὑπερέχει, ἢ ποσάκις θάτερος τῷ ἑτέρῳ ἐμπεριείληπται· οἷον ἐπὶ 7 πρὸς 5, ὁ 7 μείζων ἐστὶ τοῦ 5 κατὰ τὸν δύο, κἀνάπαλιν ὁ 5 ἐλάττω τοῦ 7 κατὰ τὸν 2, ὅπερ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως δηλοῦται, οἷον 5 — 7 ἢ 7 — 5. Αὖθις ἐπὶ 8 πρὸς 2, ὁ 8 τετράκις μείζων ἐστὶ τοῦ 2, ὁ 2 δὲ τετράκις ἐλάττων τοῦ 8, ὅπερ διὰ τῆς τοῦ ἡγουμένου διὰ τοῦ ἑπομένου διαιρέσεως σαφὲς καθίσταται (§. 300.), εἴτ' οὖν 8 : 2, ἢ 2 : 8. Καλεῖται δὲ ἐκεῖνο μὲν Διαφορά, τοῦτο δὲ Πηλίκον, ὡς ἐχομένως ἐν οἰκείοις τόποις ἕκαστον ἐκ περιουσίας κατάδηλον ἔσται. Κἀντεῦθεν ἕπεται τὴν τῶν λόγων διαίρεσιν διττὴν εἶναι, Ἀριθμητικήν τε καὶ Γεωμετρικήν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 303. Λόγος Ἀριθμητικὸς ἐστὶ σχέσις, ἐν τῇ τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἑπόμενον, ἢ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἡγούμενον διαφορᾷ κειμένη.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 304. Διαφορὰ καλείσθω τὸ κοινῶς ὑπόλοιπον προσαγορευόμενον.

ΠΟ-

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 305. Ὥσπερ γὰρ πρὸς τὴν τοῦ ὑπολοίπου εὕρεσιν (§. 68.), οὕτω καὶ πρὸς τὴν τῆς διαφορᾶς τό, τε ὅλον καὶ τὸ μέρος παρεῖναι δέον. Οὐδὲν ἄρα διαφέρει, ἢ τὸ ἡγέμενον τοῦ ἑπομένου, ἢ τὸ ἑπόμενον τοῦ ἡγουμένου ἀφαιροῖτο (322.).

ὙΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 306. Σημεῖον Ἀριθμητικοῦ Λόγου ἐστὶ τὸ μονόστιγμον (.), ὅπερ ἢ διὰ τῆς Πρὸς, ἢ διὰ τῆς Διαφέρει ἐκφραζέσθω. οἷον 5. 2, 7. 3.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 307. Ἐὰν δυοῖν Ἀριθμητικῶν Λόγων αἱ διαφοραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, οἱ Λόγοι ἐκεῖνοι ἴσοι εἶναι λέγονται· οἷον ἐπεὶ ἡ τοῦ 1 ἀριθμοῦ ὑπὲρ τὸν 4, ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ τοῦ ἀριθμοῦ 2 ὑπὲρ τὸν 5, τουτέστι 3, φανερὸν τὸν Ἀριθμητικὸν Λόγον 1. 4 τὸν αὐτὸν εἶναι τῷ 2. 5. Ἔνθεν τοι ἡ τοῦ Ἀριθμητικοῦ Λόγου δύναμις ἰσοῦται τῷ ἐκ τῆς τοῦ ἑπομένου ἀπὸ τοῦ ἡγουμένου ἀφαιρέσεως ἐκκύπτοντι ὑπολοίπῳ (§. 300.).

ὉΡΙΣΜΟΣ.

§. 308. Λόγος Γεωμετρικός ἐστι σχέσις, θεωρουμένη, ἐν τῷ τοῦ ἡγουμένου διὰ τῆς τοῦ ἑπομένου διαιρέσεως, ἢ τοῦ ἑπομένου διὰ τῆς τοῦ ἡγουμένου, ἐκκύπτοντι πηλίκῳ.

ὙΠΟ-

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 309. *Πηλίκον* ἐν τῷ Γεωμετρικῷ Λόγῳ, τὸ ἐξ ὃ οἱ λόγοι συνολῶνται μόριον, εἴτ' ἂν ὁ τῶ Λόγω Ἐκθέτης καλείσθω.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 310. *Ἐκθέτης* Γεωμετρικῶ Λόγω ἐςὶ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶ ἡγυμένω διὰ τῶ ἑπομένω ἐκκύπτον πηλίκον· οἷον τῶ μὲν 3 πρὸς 2 ὁ $\frac{3}{2}$, δὲ 2 πρὸς 3 ὁ $\frac{2}{3}$. Καλεῖται δὲ καὶ *Παρωνυμῶν*, ἀφ' ὃ δηλαδὴ ὁ Λόγος παρονομάζεται, καὶ μὴν καὶ Ὄνομα τῶ Λόγω καὶ Ἑρμηνεύς.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 311. Σημεῖον Γεωμετρικῶ Λόγω ἔςω τὸ δίςιγμον (:) (§. 104.), ὅπερ διὰ τῆς *Πρὸς* προφερέσθω· οἷον 2 : 4, 16 : 32· ἢ καὶ ἐν εἴδει Κλάσματος γραφέσθω $\frac{2}{4}$ $\frac{16}{32}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 312. Ἐὰν δυοῖν Γεωμετρικῶν Λόγων τὰ ἡγύμενα πρὸς τὰ ἑαυτῶν ἑπόμενα ἐν τῷ αὐτῷ εἰσὶ λόγῳ, ἤτοι ἐὰν τὰ τύτων πηλίκα ἴσα ὦσιν, ἕπεται καὶ τὸς λόγυς ὡσαύτως ἰσῦσθαι. Οἷον, ἐπεὶ ὁ 2 τοσάκις τῷ 4 ἐμπεριείληπται, ὁσάκις ὁ 5 τῷ 10· ὅ, τε τῶ λόγω 2 : 4 ἐκθέτης, ὁ αὐτός ἐςι τῷ τῶ 5 : 10· ἕπεται τύτυς ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι Γεωμετριτρίκῷ Λόγῳ, εἴτ' ἐν ἀλλήλοις ἴσυς· οἷον, 2: 4 ὡς 5: 12,

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 313. Εἰ μὲν ὖν τὸ ἑπόμενον μονὰς εἴη, ἐκθέτης τῦ Λόγυ ἔςαι τὸ ἡγύμενον, οἷον 4: 1 = 4· εἰ δὲ τὸ ἡγύμενον μονὰς, ἐκθέτης τῦ Λόγυ κλάσμα, ὖ Ἀριθμητὴς μὲν ἡ μονὰς, Παρονομαςὴς δὲ τὸ ἑπόμενον, οἷον 1: 4 = $\frac{1}{4}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 314. Ἐπεὶ ὖν ἅπας Γεωμετρικὸς Λόγος ἐκλαμβάνεται διὰ τῆς διαιρέσεως, πᾶν δὲ Κλάσμα διαίρεσιν ὑποσημαίνει (§. 162.), ἕπεται Κλάσμα ὁιονδήποτῦν ὡς Γεωμετρικὸν θεωρεῖσθαι Λόγον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

§. 315. Θεωρυμένυ τοίνυν ἐκ τῶν λεχθέντων, τῦ μὲν Ἀριθμητικῦ Λόγυ ἐν τῇ τῦ ἡγυμένυ πρὸς τὸ ἑπόμενον διαφορᾷ, τῦ δὲ Γεωμετρικῦ ἐν τῷ τῦ ἡγυμένυ πρὸς τὸ ἑπόμενον πηλίκῳ, ἕπεται ἐν μὲν τῷ Ἀριθμητικῷ Λόγῳ τὴν διαφορὰν προστιθεμένην τῷ ἐλάττονι ὅρῳ ἀναδιδόναι τὸν μείζω, οἷον ἐπὶ τῦ Λόγυ 3. 5, ἔςαι 3 + 2 = 5· ἐν δὲ τῷ Γεωμετρικῷ τὸν ἐλάττονα ὅρον, διὰ τῦ πηλίκυ πολλαπλασιαζόμενον τὸν μείζω ἐξάγειν, οἷον ἐπὶ τῦ Λόγυ 3: 6, ἔςαι 2×3 = 6. Γενικῶς τοίνυν, τὸ ἑπόμενον ἐν τῷ Ἀριθμητικῷ Λό-

γῳ

γῳ ἰσῦται τῷ ἡγυμένῳ σὺν τῇ διαφορᾷ· ἐν δὲ τῷ Γεωμετρικῷ, τὸ ἑπόμενον ἰσῦται τῷ ἡγυμένῳ, πολλαπλασιαζομένῳ ἐπὶ τὸν τῦ Λόγυ ἐκθέτην.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 316. Ἀναλογία ἐςὶ δυοῖν ἢ πλειόνων Λόγων ταυτότης ἢ ἰσότης.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 317. Πᾶσα τοίνυν Ἀναλογία ἐκ δυοῖν συγκειμένη Λόγων, ὡς ἐφεξῆς ἐκτεθείσεται· ὡς πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον ὕτως ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον. Ἐπεὶ δὲ τῶν Λόγων ἑκάτερος ἐκ δυοῖν συγκροτεῖται ὅρων (297.), Ἀναλογία πᾶσα ἐκ τεσσάρων ὅρων συγκείσεται,

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 318. Ὁ δ' Εὐκλείδης ὕτω (*): Ἀναλογία ἐςὶν, ἡ τῶν Λόγων ὁμοιότης· καὶ (**): Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τῦ δευτέρυ καὶ ὁ τρίτος τῦ τετάρτυ ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν. οἷον 6. 3 ὡς 8: 4.

ΠΟ-

(*) Βιβ. Ε'. Ὅρῳ ή.

(**) Βιβ. Ζ'. Ὅρῳ κ'.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 319. *Οἱ ἐκθέτην ἄρα ἔχοντες τὸν αὐτὸν Λόγον συνιςῶσι τὴν Ἀναλογίαν.* ὡς 6: 3 καὶ 8: 3.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 320. *Καθάπερ ὖν οἱ Λόγοι, ὕτω καὶ αἱ Ἀναλογίαι διτταὶ τυγχάνουσιν Ἀριθμητικαὶ δηλαδὴ καὶ Γεωμετρικαί.*

ὉΡΙΣΜΟΣ.

§. 321. *Ἀναλογία* Ἀριθμητικὴ *ἐςὶν ἰσότης ἐκ δυοῖν Ἀριθμητικῶν Λόγων ἀναφυομένη.*

ὙΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 322, *Σημεῖον Ἀριθμητικῆς Ἀναλογίας ἔςω τοδὶ (:)*, οἷον 5. 7: 9. 11. *Ἀπαγγέλεται δὲ* 5 *πρὸς* 7 *ὡς* 9 *πρὸς* 11, *ὑπακουμένυ τῦ, ὕτως ἔχει ἡ τῦ* 5 *διαφορὰ πρὸς τὴν τῦ* 7, *ὡς ἡ τῦ* 9 *πρὸς τὴν τῦ* 11.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 323. *Ἐπεὶ ὖν ἡ διαφορὰ μεταξὺ* 5 *καὶ* 7, 11 *καὶ* 9 *ἐςὶν ἡ αὐτὴ, ἤτοι* 2, *ὡς* $7 - 5 = 11 - 9$, *οἱ Λόγοι ἤτοι* 5, 7, 9, 11 *ἐν Ἀριθμητικῇ Ἀναλογίᾳ ἐκκείσονται.* οἷον 5. 7: 9. 11, *δυσὶ γὰρ μονάσιν ἀμφότεροι ὑπερέχυσιν· ἐξ ὃ δὴ καὶ ἡ Ἀριθμητικὴ Ἀναλογία* Ὑπεροχικὴ *ὡσαύτως ἤκυσεν, Ἐν ἐνίοις δὲ τῶν Ἀριθμητικῶν Βιβλίων σημεῖον Ἀριθμητικῆς Ἀναλογίας τὸ ἐφεξῆς (∸) εἴληπται.*

‛ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 324. *Λόγος* **Ἡγȣ́μενος** *Ἀναλογίας ἐϛὶν, ὁ πρὸ τȣ̃ τῆς Ἀναλογίας σημείȣ ταττόμενος.* **Ἑπόμενος** *δὲ, ὁ μετὰ τὸ σημεῖον. οἷον ἐπὶ* 5. 7: 9. 11; *ἡγȣ́μενος μὲν ὁ* 5. 7, *ἑπόμενος δὲ ὁ* 9. 11. *Ταὐτὸ εἰρήσθω καὶ περὶ τῆς Γεωμετρικῆς Ἀναλογίας.*

‛ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 325. **Ἄκρα** ἢ **Ἀκρότητες** *Ἀναλογίας εἰσίν. ὅ, τε πρῶτος καὶ τέταρτος τῶν ὅρων.* **Μέσα** *δὲ ἢ* **Μεσότητες,** *ὅ, τε δεύτερος καὶ τρίτος.*

‛ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 326. *Ἀναλογία* **Γεωμετρικὴ** *ἐϛὶν ἰσότης, ἐκ δυοῖν Γεωμετρικῶν ἴσων Λόγων ἀναφυομένη.*

‛ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 327. *Σημεῖον Γεωμετρικῆς Ἀναλογίας ἔϛω τὸ τῆς ἰσότητος, οἷον* 2: 4 = 4: 8 *Ἐκφραζέσθω δὲ ὡς ἔχει τὸ τȣ̃ 2 πηλίκου πρὸς τὸ τȣ̃ 4, ȣ̃τω τὸ τȣ̃ 4 πρὸς τὸ τȣ̃ 8.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 328. *Εἰώθασι μὲν τινες, ὡς ἐν τισι τῶν Ἀριθμητικῶν Βίβλων ἰδεῖν ἔνεϛι, τέσσαρσι σημεί-*

οις

οις ἐν σχήματι τετραγώνυ χρῆσθαι, ὡς (: :), ἤ (∸|∸). Ἕτεροι δὲ δύω γραμμίδια ἐπ' εὐθείας, ὡς (||), μεταξὺ δυοῖν Γεωμετρικῶν Λόγων παρειτιθέναι φιλῦσιν, Ἀναλογίας ὁμωνύμυ τεκμήριον. Πλεῖςοι δὲ τῶν καθ' ἡμᾶς Μαθηματικῶν τῷ προεκτεθέντι (§. 327.), ὡς εὐχρήςῳ κέχρηνται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 329. Ἐπεὶ ὖν ἡ τῶν Ἐκθετῶν ἰσότης, τῆς μεταξὺ δυοῖν Γεωμετρικῶν Λόγων θεωρυμένης ἰσότητος δεῖγμα καθέςηκεν (§. 312.), ἡ αὐτὴ ἔςαι πάντως καὶ τῆς Γεωμετρικῆς Ἀναλογίας τεκμήριον.

ὉΡΙΣΜΟΣ.

§. 330. Ἀναλογία **Συνεχὴς** καλεῖται, ὅταν οἱ μέσοι ὅροι ἴσοι ὦσιν, ὡς $2 : 4 = 4 : 8$. **Διεχὴς** δὲ, ἢ **Διεζευγμένη**, ὅταν ἄνισοι, ὡς $2 : 4 = 8 : 16$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 331. Ἐπὶ τῆς Διεχῦς ταύτης Γεωμετρικῆς Ἀναλογίας, ἡ τῶν Τριῶν κοινῇ καλυμένη Μέθοδος τὰ μάλιςα ἐπεςήρικται, ὡς ἐφεξῆς ἐν οἰκείῳ τόπῳ ὀψόμεθα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 332. **Τριῶν τῆς Ἀναλογίας Ὅρων δοθέντων, τὸν τέταρτον ἐξευρεῖν.**

ΛΥΣΙΣ.

Ἐκ τῶν δοθέντων τριῶν τῆς Ἀναλογίας ὅρων, ὁ τέταρτος, διὰ τῦ χ ἢ y σημαινόμενος, ἐξευρίσκεται, ἐὰν ὁ δεύτερος καὶ τρίτος τῶν ὅρων ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιασθῶσι, καὶ τὸ ἐντεῦθεν ἐκκείτον γινόμενον διὰ τῦ πρώτυ ὅρυ διαιρεθῇ. Οὕτως, ἐὰν ἡ $2 : 4 = 8 : y$, ἔςαι $4 \times 8 = 32$· κἀντεῦθεν $\frac{32}{2} = 16$· ἐπομένως $2 : 4 = 8 : 16$. Ὁ δὲ λόγος, ὅτι τὸ ἐκ τῦ πολλαπλασιασμῦ τῶν ἄκρων γινόμενον $2 \times 16 = 32$, ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων. $4 \times 8 = 32$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 333. Ἐκ τῶν δοθέντων τριῶν ὅρων ὁ τέταρτος Ἀναλογικὸς ἐξευρίσκεται, ἐὰν πρὸ τῆς πράξεως, δύω τινὲς ὅροι Ἀνάλογοι ἀλλήλοις διά τινος τρίτυ ἐπιπολλαπλασιασθῶσιν. Οἷον·

Α'.	Β'.
$2 : 4 = 8 : y$	$2 : 4 = 8 : y$
$2 \quad 2$	$2 \qquad 2$
$4 : 8 = 8 : y$	$4 : 4 = 16 : y$
$8 \times 8 = 64$	$4 \times 16 = 64$
καὶ $\frac{64}{4} = 16 = y$	καὶ $\frac{64}{4} = 16$
ὅθεν $4 : 8 = 8 : 16$	ὅθεν $4 : 4 = 16 : 16$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 334. Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ ἐκπίψει ἡ Ἀναλογία, ἐὰν πρὸ τῆς πράξεως ὑπὸ δυοῖν ὅρων, τὰ αὐ-

τὰ

τὰ διαιρέσει ἀρθῶσι, καὶ ταῦτα πάλιν ἐκείνοις προςεθῶσιν, ἢ ἀπ᾽ ἐκείνων ἀφαιρεθῶσιν· Οἷον.

$$\text{Α}'\quad 2:4=8:y \qquad\qquad \text{Β}'\quad 2:4=8:\chi$$

$$\begin{array}{c} 2\quad 2 \\ \hline 1:2 \\ \hline 3:6=8:y \\ 6\times 8=48 \\ \tfrac{48}{3}=16=y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 2\quad 2 \\ \hline 1:\quad 4 \\ \hline 3:4=12:\chi \\ 4\times 12=48 \\ \tfrac{48}{3}=16=\chi \end{array}$$

Ἤτοι καὶ ἄλλως.

$$\text{Γ}'\quad 2:4=8:y \qquad\qquad \text{Δ}'\quad 2:4=8:\chi$$

$$\begin{array}{c} 2\quad 2 \\ \hline 1:2 \\ \hline 1:2=8:y \\ 2\times 8=16 \\ \tfrac{16}{1}=16=y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 2\quad 2 \\ \hline 1:\quad 4 \\ \hline 1:4=4:\chi \\ 4\times 4=16 \\ \tfrac{16}{1}=16=\chi \end{array}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 335. Ἐπεὶ ἐν δύω ὁποιοιῦν τῆς Γεωμετρικῆς Ἀναλογίας ὅροι διαφόρως μετασχηματίζεσθαι ἔχουσι, τῆς Ἀναλογίας ὐδεμίαν τοπαράπαν τροπὴν ὑφισαμένης· Εἴθισαι τὰς τοιαύτας μεταβολὰς ἐν χρήσει ἐκλαμβάνεσθαι ἐν τοῖς τῆς τῶν τριῶν λεγομένης Μεθόδυ Προβλήμασι, περὶ ἧς ἐν τῷ ἐφεξῆς διαληψόμεθα Κεφαλαίῳ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΧΡΥΣΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ, ΕΙΤ' ΟΥΝ ΤΗΣ ΚΟΙΝΟΤΕΡΟΝ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΑΚΟΥΟΥΣΗΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 336. Μέθοδος Χρυσῆ, εἴτ' οὖν Μέθοδος τῶν Τριῶν, ἐςὶ λύσις προβλήματος, δι' ἧς ἐκ τριῶν ὅρων δοθέντων, ὁ τέταρτος Ἀναλογικὸς ἐξευρίσκεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 337. Τὰ τῶν Ἀναλογιῶν εἴδη, Μεθόδους οἱ Ἀριθμητικοὶ καλεῖν εἰώθασιν, ἀμέλει τοι Μέθοδον τῶν Τριῶν, Μέθοδον τῶν Πέντε, Μέθοδον τῶν Ἑπτὰ, καί τοι καὶ τῶν Ἐννέα, καὶ τῶν Ἕνδεκα, κ.τ.λ. κατὰ τοὺς διδομένους ἀριθμούς. Ἡμεῖς ἀλλ' οὖν τὴν τῶν Τριῶν Μέθοδον, Χρυσῆν προσηγορεύσαμεν, διὰ τὸ πάσας τὰς ἄλλας Ἀναλογίας ἐπ' αὐτὴν, ὡς πρωτίςην ἀνάγεσθαι· ὅθεν καὶ Ἀναλογία κατ' ἐξοχὴν προσεκλήθη ὑπὸ πολλῶν. Ἐςὶ δὲ ἡ ταύτης χρῆσις ὅτι πλείςη, ἔν τε τῷ κοινῷ βίῳ, κἂν ταῖς Ἐπιςήμαις. Διήρηται δὲ κατὰ τὰς Ἀναλογίας εἴς τε Συνεχῆ καὶ Διεχῆ, Ὀρθήν τε καὶ Πλαγίαν. Τῆς τε Ὀρθῆς αὖ καὶ Πλαγίας διχῆ διαι-

διαιρεμένης, εἰς Ἁπλῆν δηλαδὴ καὶ Σύνθετον· Ἁπλῆ μὲν ἐςιν, ἡ ἐκ τριῶν, ἢ τεσσάρων συγκειμένη τῶν ὅρων· Σύνθετος δὲ, ἡ ἐκ πλειόνων, ἢ τεσσάρων, ὅρων συνεςηκυῖα· ἥτις ἐςὶν, ἡ μὲν τῶν πέντε, ὡς ἐκ πέντε ὅρων συντιθεμένη· ἡ δὲ τῶν ἑπτὰ, ὡς ἐκ τοσέτων συγκροτεμένη τῶν διδομένων. Ἀμφότεραι δὲ ὡς σύνθετοι, ἐπὶ τὴν πρώτην καὶ ἁπλῆν ἀναγόμεναι διαλύονται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 338. Μέθοδος τῶν Τριῶν Ἁπλῆ Συνεχὴς ἐςιν, ἡ τὲς ὅρες κατὰ συνέχειαν ἀναφέρεσα, ὡς 2 : 4 = 4 : 8. Διεχὴς δὲ, ἡ τὲς ὅρες μὴ συνεχίζεσα ἀλλ' ἀνὰ δύω λαμβάνεσα, ὡς 2 : 4 = 8 : 16.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 339. Ὀρθὴ μὲν ἀκέει ἡ Μέθοδος, ὁπηνίκα ἡ ἀπόκρισις συνάδει τῇ ἐρωτήσει, τῦτ' ἐςιν, ὁπηνίκα ὁ ἐν αἰτήσει ὅρος μείζονα περιέχει ποσότητα, ὡς καὶ ὁ ἐν ἀποκρίσει, ἢ καὶ ἐλάττονα. Πλαγία δὲ, ὅταν ὁ ἐν αἰτήσει τέταρτος ὅρος ἀπάδει τῷ τρίτῳ, ἤτοι ἢ μείζων ἐςὶν ἐκείνε, ἢ ἐλάττων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 340. Εὑρεῖν πόσον λήψονται μισθὲ ἐν ἡμέρα μιᾷ 28 ἐργάται, εἴγε 7 ἐργάταις ἡμερησίᴕ ἐργοληψίας ἕνεκα, ἐδόθησαν 11 ἐκ τῆς Ἄγαρ ἀργύρια.

ΛΥΣΙΣ.

Λεχθήτω πρῶτον, κατὰ τὰς τῆς Ἀναλογίας κανόνας, 7 ἐργάται ἔσχον 11 ἀργύρια ἡμερησίᴕ μισθᴕ, πόσον λήψονται οἱ 28; Πολλαπλασιασθήτωσαν τοίνυν οἱ μέσοι ὅροι καὶ διὰ τᴕ πρώτᴕ διαιρεθήτωσαν (§. 332.). Τὐντεῦθεν ἐξαγόμενον πηλίκον τὸν αἰτύμενον δώσει ἀριθμὸν, εἴτ' ἐν 44 ἀργύρια.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ γὰρ δεύτερος ὅρος 11 ἐμφαίνει τὸν ἴσον τῶν 7 ἐργατῶν μισθὸν, ἄρα καὶ ὁ τέταρτος ὁ τύτῳ ἀντιςοιχῶν τὸ τῶν 28 ἴσον δηλώσει ἐκπλήρωμα. Ἐπεὶ δὲ διὰ τᴕ τῶν 28 ἐπὶ 11 πολλαπλασιασμᴕ ὁ ἀριθμὸς 308 ἐκκύπτει, τᴕτ' ἔςιν ἕκαςος ἐργάτης λήψεται ἡμερήσιον μισθὸν 11 ἀργύρια. Οὐδεμία δ' ἐςὶν ἀναλογία τᴕ ἀριθμᴕ 308 πρὸς τὰς 7 ἐργάτας, τὰς λαμβάνοντας ἡμερήσιον μισθὸν ἀργύρια 11. Τὕνεκα τῆς ἀναλογίας ταχθείσης, ὐχ ἑνὶ ἀλλὰ τοῖς 7 λέγεται ἴση διανομῇ 11 ἀργύρια ἀνήκειν· ὅθεν καὶ τὸ κεφάλαιον 308 διὰ τῶν 7 διαιρεῖται, ὅπερ δηλοῖ τὸν ἀνάλογον πρὸς 28 ἀριθμόν· τὸ δὲ πηλίκον 44

τοσατοσάκις τὸν 28 περιέχει, ὁσάκις ὁ 11 τὸν 7.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Α.

§. 341. Ἡ δὲ Βάσανος τῇ τῶν ὅρων ἀντιςροφῇ εἴωθε γίνεσθαι· οἷον, 28 ἐργάται ἔλαβον 44 ἀργύρια, πόσον; οἱ 7 λήψονται; Τῆς πράξεως γινομένης ὁ 11 ἐκκύψει ἀριθμός.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Β.

§. 342. Ταῦτ' ἄρα, ἵνα καταλλήλως λαμβάνωνται, καὶ ἐκτὸς ἀπάτης ἡ πρᾶξις χωρεῖ, ἐπιςητέον ὅπως ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος, ὅ, τε δεύτερος καὶ ὁ τέταρτος ὁμογενεῖς ὦσιν· ἐὰν γὰρ ἑτερογενεῖς, ὁλόλως τὴν αὐτὴν, ἣν τὰ αὐτοῖς συναντιφθεγγόμενα ἢ δηλόμενα πράγματα, ἀναλογίαν ἕξεσιν. Οἷον, εἰ καὶ ὀρθῶς φημὶ ὑπολογιζόμενος, ὅτι ἐπεὶ ἓν ἐκ τῆς Ἄγαρ ἀργύριον, τεσσαράκοντα ὀβολῶν περιεκτικὸν τυγχάνει, δύω τοιαῦτα ἀργύρια ὀγδοήκοντα ὀβολὺς περιέξεσιν. Ἀλλ' ὐκ ὀρθῶς ἐπάξω, εἰ διὰ τῆς ἐν τῷ πυθμένι, σκεύους τινος εὐμεγέθους ὕδατος πλήρες, μικρᾶς ὀπῆς ἐν 2 λεπτοῖς 8 κύαθοι ἐξέρρευσαν, ἄρα ἐν 4 ἐκρεύσωσι 16. Ἡ γὰρ τοιαύτη ἀναλογία ἐςὶν ἀσύςατος, ὡς τῦ ὑγρῦ ἐν ἀρχῇ μὲν τάχιον ἐκρέοντος, ἑξῆς δὲ βραδύτερον, ἑπομένως τε ἡ τύτυ ποσότης ὐκ ἔςιν ἀνάλογος τῷ χρόνῳ· διά τοι τῦτο τὸ ζήτημα διὰ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδυ ὐκ ἐπιλυθήσεται. Τύτυ χάριν παραφυλακτέον τὸν μὲν ἐν αἰτήσει τέταρτον ὅρον τῷ δευτέρῳ ὁμογενῆ εἶναι, τῦτ' ἔςιν ἀναλόγως ἐκείνῳ αὔξειν ἢ βραχύνεσθαι· τὸν δὲ τρίτον, τὸν τὴν αἴτησιν περιέχοντα, τῷ πρώτῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 343. Ἐὰν τῶν ὅρων ὁ δεύτερος, ἢ ὁ τρίτος κλάσμα ἢ ὑποδιαιρέσεις προσκειμένας ἔχωσι, διαταχθέντων τῶν ὅρων ὀρθῶς, ἐὰν μὲν τὸ τῶν ὑποδιαιρέσεων εἶδος, τὸ ἐν τῷ τρίτῳ ὅρῳ παρεμπίπτον, μεῖζον ᾖ τῦ ἐν τῷ πρώτῳ, ἢ καὶ ἐν τῷ τρίτῳ πλεῖςα ὦσιν εἴδη, τότε γενέσθωσαν διὰ τῦ πολλαπλασιασμῦ ὁμογενῆ τῷ πρώτῳ ὅρῳ (§. 228.). Ἐὰν δὲ ὁ δεύτερος ὅρος ὑποδιαιρέσεις, ἢ κλάσμα προσκείμενον ἔχῃ, ἐκτεθήτω ἐν τῷ ἐλάττονι τῶν δοθέντων εἰδῶν, ἢ καὶ ἐν εἴδει κλάσματος νόθυ. Ἔσχατον, γενέσθω τὰ τῆς πράξεως ὡς ἔθος, πολλαπλασιαζομένων ἀλλήλοις τῶν μέσων ὅρων καὶ διὰ τῦ πρώτυ διαιρεμένων· τὸ δὲ πηλίκον, εἰ δυνατὸν, πρὸς τὸ μεῖζον εἶτα ἀναγέσθω εἶδος (§. 230.).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Ὠνήσατό τις ἡμιουγκίαν 2 ὀβολῶν καὶ 2 λεπτῶν, πόσον ἀποτίσεται ὑπὲρ 3 κεντηναρίων καὶ 16 λιτρῶν;

ΛΥΣΙΣ.

'Ημιουγκ. 'Οβ. κ. λεπτ. Κεντ. κ. Λιτρ. 'Οβ. κ. Λεπτ.

$$1 : 2 + 2 = 3 + 16 : y$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 3 \\ \hline 6 \\ + 2 \\ \hline 8 \end{array} \text{ Λεπτ.} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ \times 100 \\ \hline 300 \\ + 16 \\ \hline 316 \\ 32 \\ \hline 632 \\ 948 \\ \hline 10112 \end{array} \text{ Λιτρ. / 'Ημιογ.}$$

Τοίνυν $10112 \times 8 = 80896 = y$;

Ἤδη, Λεπτ. $80896 : 3 = 26965 \frac{1}{3}$ 'Οβολοῖς; Οἳ δὴ διὰ 40 διαιρούμενοι δώσουσιν 'Αργύρια $674 \frac{1}{8}$ $= y$.

Β'. Εἷς πῆχυς ὑφάσματος τετίμηται ἀργυρίων 4, 8 ὀβολῶν καὶ λεπτῶν $2 \frac{1}{8}$. Πήχεις 225, πόσῳ τιμηθήσονται;

Πήχ. 'Αργ. 'Οβολ. Λεπτ. Πήχ. 'Αργ. κ. τ. λ.

$$1 : 4 + 8 + 2 \tfrac{1}{8} = 225 : y$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 40 \\ \hline 160 \\ + 8 \\ \hline 168 \\ \times 3 \\ \hline 504 \\ + 2\frac{3}{8} \text{ 'Οβολ.} \\ \hline 506\frac{3}{8} \end{array}$$

$$506 \tfrac{3}{8} = \frac{4051}{8} \times 225 = \frac{911475}{8},$$

 Τοί-

Τοίνυν 911475 : 8 = 113934 Λεπτ. Καὶ 113934 : 3 = 37978 Ὀβολ. Καὶ 37978 : 40 = Ἀργ. 949 + 18 Ὀβολ. + $\frac{1}{4}$ Λεπτ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 344. Τȣ͂ πρώτȣ ὅρȣ κλασματώδȣς τυγχάνοντος, τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων κανόνων καλῶς φυλαττομένων, πολλαπλασιασθήτω ὁ τρίτος ὅρος διὰ τȣ͂ παρονομαςȣ͂ τȣ͂ πρώτȣ, ἵν᾽ ὅτως ἀμφότεροι ὁμογενεῖς ἀποβῶσιν· εἶτα παρεωραμένȣ ἀμφοτέρωθεν τȣ͂ παρονομαςȣ͂ τὰ τῆς πράξεως ὡς ἀνωτέρω γενέσθω. Ὅτι δὲ ὁ παρονομαςὴς ἐξ ἀμφοῖν τῶν μερῶν ἀπαλείφεσθαι ἔχει, τȣ͂ τῆς ἀναλογίας ὀρθȣ͂ τηρȣμένȣ, δῆλον ἐντεῦθεν, ὅτι τὸν δεύτερον ὅρον διὰ τȣ͂ αὐτȣ͂ παρονομαςȣ͂ πολλαπλασιασθῆναι καὶ διαιρεθῆναι δέον (§. 180.).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Α'. Ἓν τριτημόριον πήχεως πωλεῖται 40 ςαυρωνύμων ὀβολῶν, εἴτ᾽ ȣ͂ν κρεϊτζαρίων (ὅρα Σελ. 147. 148.) καὶ 2 δηναρίων. Πήχεις 62 πόσȣ πωληθήσονται;

ΑΓ-

ΛΥΣΙΣ

Πήχ. Κρ. καὶ δην. *Πήχ Κρ. καὶ δην.*

$\frac{1}{3} : 40 + 2 = 62 : y$ *Κἀντεῦθεν*

$\frac{1}{3} : 40 + 2 = \frac{60 \times 3}{3} : y$. *εἴτ' ὖν*

$\frac{1}{3} : 40 + 2 = \frac{186}{3} : y$, *εἴτ' ὖν*

$1 : 40 + 2 = 186 : y$· *Ὅθεν*

$$
\begin{array}{ll}
1 & : 40 \\
 & \;\;\underline{\;4\;} \\
 & 160 \\
 & \underline{+\;2} \\
1 : & 162 = 186 : y = 162 \times 186 = 30132
\end{array}
$$

δην. *Εἰσὶ δὲ δηνάρια* $30132 : 4 = 7533$ *κρειτζ.* *Καὶ* $7533 : 60 = 125$ *Φιορην.* $+ 33$ *κρειτζ.*

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 345. *Μονάδος ἐν τῷ δευτέρῳ, ἢ τρίτῳ, τῶν ὅρων ἀπαντώσης, διαταχθήτω Α'. ὡς ἀνωτέρω ἡ ἀναλογία, καὶ ἐὰν αἱ τῦ πρώτυ ὅρυ ὑποδιαιρέσεις μείζυς τῶν τῦ τρίτυ τύχωσι, γενέσθω ἡ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐλάχιςον εἶδος καταγωγή. Ὡσαύτως Β'. εἰ ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ εἴδη ἐμπεριείληπται ὑποδιαιρέσεων, ἢ καὶ μοναδικόν τι εἶδος μόνον, ὃ τινος μέντοιγε ὁ ἀριθμὸς ἐλάττων ἐςὶ τῦ ἀριθμῦ τῦ πρώτυ ὅρυ, δέον, εἰ δυνατὸν, πρὸς τὸ ἔλαττον εἶδος με-*

μετάγεσθαι· εἰ δὲ τοῦτο γενέσθαι οὐκ ἔχει, τηνικαῦτα τὸ γινόμενον ἔςαι κλάσμα, οὗ τινος παρονομαςὴς ὁ πρῶτος ἔςαι τῶν ὅρων, οἷα δὴ διαιρέτης. Ἐπεὶ δὲ Γ.ʹ διὰ τὴν ὑποτεθεῖσαν ἐν τῷ δευτέρῳ ἢ τρίτῳ τῶν ὅρων μονάδα, τὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτόχρημα γενέσθαι οὐκ ἔχει, τοῦθ᾽ ἕνεκα ἀμέσως ὁ δεύτερος, ἢ ὁ τρίτος τῶν ὅρων διὰ τοῦ πρώτου διαιρείσθητω. Συνεχῶς ἀναγκαῖον ἔςαι Δ.ʹ, τὸ πηλίκον, ὡς ἐλάττω ἀείποτε ὑποδιαιρέσεων εἴδη ἐμπεριέχον, πρὸς μείζω ἀνάγεσθαι. Εἰ δὲ Ε.ʹ μετὰ τὸ γενέσθαι τὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρᾶξιν ὑπόλοιπόν τι μενεῖ, τοῦτο, πρὸς ἔλαττον μεταγόμενον εἶδος, οὕτω διαιρεθήσεται. Ἀλλ᾽ ἐὰν Ϛ.ʹ ὁ δεύτερος ὅρος, πλὴν τῶν ὁλοσχερῶν, κλάσμα προσκείμενον σχῇ, διὰ τοῦ παρονομαςοῦ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ὅ, τε πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος ὅρος προηγουμένως πολλαπλασιασθήτωσαν. Ἔσχατον δὲ, ἐὰν Ζ.ʹ ὁ τρίτος ὅρος κλάσμα τύχῃ γνήσιον ἀντὶ ἀριθμητοῦ μονάδα ἔχον, πολλαπλασιασθήτω πρότερον ὁ πρῶτος ὅρος διὰ τοῦ παρονομαςοῦ τοῦ δοθέντος κλάσματος, εἶθ᾽ οὕτω τὰ τῆς πράξεως γενέσθω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α.ʹ Δύω κεντηνάρια καὶ 2 λίτραι ὠνίου τινὸς ἐπράθησαν 404 φιορινίων. Πόσου πραθῆναι δύναται μία ἡμιουγκία;

ΑΥ-

ΛΥΣΙΣ.

Κεντ. Λίτ. Φιορ. Ἡμισ. Φιορ.

2 + 2 : 404 = 1 : χ. ἤτοι

Λίτρ. 202 : 404 = 1 : χ. ἤτοι

202 × 32 Ἡμισγ. : 404 = 1 : χ. ἤτοι

6464 : 404 = 1 : χ.

Κἀντεῦθεν $\chi = \frac{404}{6464}$

Β'. Ὠνήσατό τις 800 Πήχεις ὑφάσματος σηρικοῦ 533 ἀργυρίων καὶ 20 ὀβολῶν. Πόσα ὁ εἷς τετίμηται Πῆχυς;

Πήχ. Ἀργ. Ὀβολ. Πήχ. Ἀργ.

800 : 533 + 20 = 1 : y εἴτ' οὖν

800 : (533 × 40) + 20 = 1 : y εἴτ' οὖν

800 : 21340 ὀβολ. = 1 : y Κἀντεῦθ.

$y = \frac{21340}{800} = 26\frac{14}{35}$ ὀβολ.

Γ'. Πήχεις 6 τετίμηνται 5 φιορηνίων. Πόσα τιμηθήσεται ὁ εἷς;

Πήχ. Φιορ. Πήχ. Φιορ.

6 : 5 = 1 : y εἴτ' οὖν

6 : 5 × 60 κρ. = 1 : y εἴτ' οὖν

6 : 300 = 1 : y Ὅθεν

$y = \frac{300}{6} = 50$ κρεϊτζαρίοις.

Δ'. Ἀμφορεῖς οἴνου 6 ἀπεμπωλοῦνται 24 ἀργυρίοις. Πόσου ἔσται ὁ εἷς;

Ἀμφ-

'Αμφ. 'Αργ. 'Αμφ. 'Αργ

$6 : 24 = 1 : y = \frac{24}{6} = 4$

'Ε.' Κεντηνάρια 7 τιμῶνται 58 ἀργυρίων, 25 ὀβολῶν καὶ 2 λεπτῶν. Πόσο τιμηθήσεται μία λίτρα;

ΛΥΣΙΣ.

Κεντ 'Αργ. 'Οβ. Λεπ. Λίτρ. 'Αργ.

$7 : 58 + 25 + 2 = 1 : y$

Λίτρ. $100 : 1037$ Λεπτ. $= 1 : y = 10 \frac{37}{100}$.

Ϛ.' Λίτραι 16 ἐδόντο 9 φιορηνίοις. Πόσῳ ἡ μία ἐπὶ λίτρα;

Λιτρ. Φιορ. Λίτρ. Φιορ.

$16 : 9 = 1 : y = \frac{9}{16} = \frac{9 \times 60}{16} =$

$\frac{540}{16} =$ 33 κρεῖτζ. καὶ 3 δην.

Ζ.' 'Οργυιὰς 8 ξύλων ὠνήσατο ὁ ἡμέτερος 'Επιςάτης $164\frac{2}{3}$ ἀργ. Πόσῳ ἡ μία τετίμηται;

'Οργ. 'Αργ. 'Οργ 'Αργ.

$8 : 164\frac{2}{3} = 1 : y$ · εἴτ' ἐν

$\frac{24}{3} : \frac{494}{3} = 1 : y$ · εἶτ' ἐν

$24 : 494 = 1 : y = \frac{494}{24} = 20\frac{7}{12}$

Η.'

Η΄. Πήχεις 6 ὑφάσματος ἐκ λίνου τετίμηνται 48 φιορ. Πήχεως $\frac{1}{3}$ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος πόσου λογισθήσεται;

Πήχ. Φιορ. Πήχ. Ἀργ.

$6 : 48 = \frac{1}{3} : y$ · εἴτ' οὖν

$\frac{18}{3} : 48 = \frac{1}{3} : y$ · εἴτ' οὖν

$18 : 48 = \quad : y = \frac{48}{18}$ Φιορ $=$ 2 Φιορ.

$+$ 40 κρεϊτζ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.

§. 346. Ὁπηνίκα δὲ οὐδαμοῦ μονὰς παρεμπίπτῃ, τηνικαῦτα μετὰ τὸ διαταχθῆναι καλῶς τοὺς ὅρους, *Α΄.* ὁ πρῶτος καὶ τρίτος τῶν ὅρων, εἰ τύχοιεν ἑτερογενεῖς, γενέσθωσαν ὁμογενεῖς. *Β΄.* Ἐὰν ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ ὑποδιαιρέσεις τύχωσιν, ἀναχθήτωσαν πᾶσαι πρὸς τὸ ἔλαττον τῶν δοθέντων εἶδος· εἶτα οἱ μέσοι ὅροι ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιασθήτωσαν, καὶ τὸ ἐντεῦθεν ἐκκύπτον γινόμενον διὰ τοῦ πρώτου διαιρεθήτω. *Γ΄.* Ἐὰν τὸ γινόμενον ἔλαττον ᾖ, ὥςε τὴν διαίρεσιν αὐτόχρημα γενέσθαι μὴ ἔχειν, τὸ πηλίκον ἐν εἴδει ἐκτεθήτω κλάσματος, ἢ καὶ ὁ δεύτερος ὅρος, εἰ δυνατὸν, πρὸς ἐλάχιςον ἔτι μεταχθήτω εἶδος. *Δ΄.* Τοῦ πρώτου, ἢ τρίτου τῶν ὅρων, πλὴν τῶν ὁλοσχερῶν, κλάσμα προσκείμενον ἐχόντων, ἀμφότεροι διὰ τοῦ παρο-

παρονομαςῆ τῦ κλάσματος πολλαπλασιασθήτωσαν. Ε'. Αμφοτέρων δὲ, ἤτοι τῦ τε πρώτυ καὶ τῦ τρίτυ, κλάσμα προσκείμενον ἐχόντων, πολλαπλασιασθήτω πρότερον ἕκαςος διὰ τῦ ἰδίυ παρονομαςῦ, εἶτα δ' ἐναλλὰξ καὶ διὰ τῶν παρονομαςῶν τῶν κλασμάτων. Ϛ'. Εὰν δ' ὅ, τε πρῶτος καὶ τρίτος τῶν ὅρων κλάσμα γνήσιον τύχῃ, οἱ ἀριθμηταὶ πολλαπλασιασθήτωσαν ἀμοιβαίως ἐπὶ τὰς παρονομαςὰς, καὶ τῦ κοινῦ παρεαραμένυ παρονομαςῦ τὰ τῆς πράξεως γενέσθω. Ζ'. δὲ, πάντων ἔσχατον τῶν τριῶν ὅρων κλασμάτων γνησίων τυγχανόντων, τὰ τῆς πράξεως χώραν ἔχει, ὡς ἐν τῇ τῶν κλασμάτων θεωρίᾳ ἐξεθέμεθα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Αργυρίοις 7 πιπράσκονται 5 λίτραι, 30 ὀβολοῖς πόσον πραθήσεται;

ΛΥΣΙΣ.

Αργ.		Λίτρ.		Ὀβ.		Λίτρ.	
7	:	5	=	30	:	y ·	εἴτ' ὖν
7 × 40 ὀβ.	:	5 × 32 ἡμ.	=	30	:	y ·	εἴτ' ὖν
280 ὀβ.	:	160 ἡμιυγκ.	=	30	:	y.	Ὅθεν

$$y = \frac{160 \times 30}{280} = \frac{4800}{280} = \frac{480}{28} = 17\tfrac{1}{7} \text{ ἡμιυγκ.}$$

Β'. Πήχεις 4 πωλῦνται 28 ἀργυρίων καὶ 24 ὀβολῶν: ὑπὲρ πήχεων 16 πόσον ἀποτίσεταί τις;

Πήχ.

Πήχ. Ἀργ. Ὀβολ. Πήχ. Ἀργ.

4 : 28 + 24 = 16 : y. εἴτ' οὖν

4 : (28×40) + 24 = 16 : y. Ὅθεν

$y = \frac{1144 \times 16}{4} = 4576$ ὀβολ. $= 114$ ἀργ. + 16 ὀβολ.

Γ'. Πήχεις 200 τιμῶνται 1 ἀργυρίου καὶ 20 ὀβολῶν· Πήχεις 2 πόσου τιμηθήσονται;

Πήχ. Ἀργ. Ὀβολ. Πήχ. Ἀργ.

200 : 1 + 20 = 2 : χ· Καὶ

$\chi = \frac{120}{200} = \frac{12}{20} = \frac{12 \times 3}{20} = 1$ ὀβ. + λεπτ. $1\frac{4}{5}$.

Δ'. Πήχεις $6\frac{2}{3}$ τιμῶνται 25 Φιορηνίων καὶ 18 κρεϊτζαρίων· Πήχεις 52 πόσου τιμηθήσονται;

Πήχ. Φιορ. Κρεϊτζ. Πήχ. Ἀργ.

$6\frac{2}{3}$: 25 + 18 = 52 : y. εἴτ' οὖν

$6\frac{2}{3}$: (25×60) + 18 = 52 : y. εἴτ' οὖν

$\frac{20}{3}$: 1518 κρεϊτζ. $= \frac{52 \times 3}{3}$: y. εἴτ' οὖν

20 : 1518 = 156 : y. εἴτ' οὖν

$y = \frac{1518 \times 156}{20} = \frac{236808}{20} = 197$ φιορ. + $20\frac{2}{5}$ (κρεϊτζ.

Ε'. Πήχεις $4\frac{2}{5}$ δίδονται 42 φιορ. καὶ 32 κρεϊτζ. Πήχεις $2\frac{3}{4}$ πόσου δοθήσονται;

Πήχ. Φιορ. Κρ. Πήχ. Φιορ.

$4\frac{2}{5}$: 42 + 32 = $2\frac{3}{4}$: y· εἴτ' οὖν

22×4 : (42×60) + 32 = 11×5 : y· εἴτ' οὖν

88 : 2552 κρεϊτζ. = 55 : y. Ὅθεν

$y = \frac{2552 \times 55}{88} = \frac{140360}{88} = 26$ Φ. + 35 κρ.

ϛ'. $\frac{2}{3}$ λίτρας ὠνήσατό τις 34 ὀβολοῖς· Πόσοι ὠνήσονται $\frac{3}{4}$;

Λίτρ.		Ὀβ.		Λίτρ.		Ὀβ.	
$\frac{2}{3}$	:	34	=	$\frac{3}{4}$	:	y·	εἴτ' οὖν
8	:	34	=	9	:	y·	Ὅθεν

$$y = \frac{34 \times 9}{8} = 38\frac{2}{8} \text{ Ὀβολ.}$$

ζ'. $\frac{4}{5}$ πήχεως ὑφάσματος ἐκ λίνου τιμῶνται $\frac{2}{3}$ Φιορινίου· $\frac{5}{4}$ πήχεωσι τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος πόσου τιμηθήσονται;

Πήχ.		Φιορ.		Πήχ.		Φιορ.	
$\frac{4}{5}$	:	$\frac{2}{3}$	=	$\frac{5}{4}$	:	y·	Ὅθεν

$$y = \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}\right) : \frac{4}{5} = \frac{10}{12} : \frac{4}{5} = \frac{10}{12} \times \frac{5}{4} = \frac{50}{48}$$
$$= 1\frac{1}{24} \text{ Φιορ.}$$

Ἢ ΑΛΛΩΣ.

$\frac{4}{5}$	:	$\frac{2}{3}$	=	$\frac{5}{4}$	:	y·	εἴτ' οὖν
16	:	$\frac{2}{3}$	=	25	:	y·	Ὅθεν

$$y = \left(\frac{2}{3} \times 25\right) : 16 = \frac{50}{3} : \frac{16}{1} = \frac{50}{3} \times \frac{1}{16} = \frac{50}{48}$$
$$= 1\frac{1}{24} \text{ Φιορ.} = 1 \text{ Φιορ} + 2\frac{1}{2} \text{ κρεϊτζ.}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 347. Μέθοδος Χρυσῆ **Πλαγία**, ἢ **Ἀντίστροφος** ἐστὶν, ἧς τινος οἱ ὅροι ἀτάκτως πως καὶ συγκεχυμένως, καὶ, ἢ φησὶν Εὐκλείδης(*), τεταραγμένως ἔχουσι.

ΣΧΟ-

(*) Βιβ. Ε.' Ὅρ. κ'.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 348. Ἐὰν ἐκ τῆς τῦ πράγματος φύσεως δῆλον ᾖ τὸν τέταρτον ἀνάλογον ὅρον ἐλάττω ἐκπίπτειν, ἤπερ τὸν δοθέντα δεύτερον· ἐάν τε γενομένης τῆς τῶν ὅρων διατάξεως, ὁ τρίτος ὅρος μείζων τῦ πρώτυ ἐκκύψει· ἢ καὶ ἐὰν δῆλον ᾖ τὸν τέταρτον ἀνάλογον ὅρον, μείζονα ἐσόμενον τῦ ἑαυτῦ ὁμογενῦς, ἅμα δὲ καὶ τὸν τρίτον ἐλάττονα τῦ πρώτυ· ἐν ταύταις ταῖς περιςάσεσιν ἡ Χρυσῆ Μέθοδος ἔςαι Πλαγία, εἴτ' ὦν Ἀντίςροφος, ὡς ἐν τῷ ἑφεξῆς Παραδείγματι. Ἐργάται 8 ἐν ἡμέραις 6 συνετέλεσαν ἔργον τι· ἐργάται 10 τὸ αὐτὸ ἔργον ποσαίῳ συντελέσωσι χρόνῳ; Ἐπεὶ ὦν ὁ τὴν αἴτησιν περιέχων ἀριθμὸς 10, μείζων ἐςὶ τῦ πρώτυ ὅρυ 8, τὸ δὲ συντελεσθησόμενον ἔργον ἐςὶ τὸ αὐτὸ, ἀναγκαίως ἕπεται τὸν τέταρτον ὅρον ἐλάττω τῦ ἑαυτῦ ὁμογενῦς δευτέρυ ἀναδοθῆναι. Πλείυς γὰρ ἐργάται πρὸς τὸ αὐτὸ ἔργον συντελεσθησόμενον, ἐλάττονος χρόνυ χρῄζυσιν, ἤπερ οἱ κτὸν ἀριθμὸν ἐλάττυς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 349. Ἐν τῇ Ἀντιςρόφῳ τοίνυν Χρυσῇ Μεθόδῳ ἡ τῆς τῶν ὅρων θέσεως διάταξις, ἡ αὐτὴ ἐςὶ τῇ ἐν τῇ Ὀρθῇ. Διενήνοχε δὲ καθ' ὅσον ἐν τῇ

Ἀντιςρόφῳ ὁ πρῶτος ὅρος διὰ τȣ̃ δευτέρȣ πολλαπλασιάζεται, τὸ δὲ γινόμενον διὰ τȣ̃ τρίτȣ διαιρεῖται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Ἐργάται 8 ἐν ἡμέραις 6 ἔργόν τι συνετέλεσαν· Ποςαίȣ χρόνȣ χρεία ἔςαι ἐργάταις 10, ἐφ' ᾧ τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς πέρας ἀγάγωσιν;

ΛΥΣΙΣ.

Ἐργ.	Ἡμ.	Ἐργ.	Ἡμ.
8 :	6 =	10 :	y

$$y = \frac{8 \times 6}{10} = \frac{48}{10} = 4\tfrac{4}{5} \text{ ἡμ.}$$

Β'. Προσδιωρισμένη τις χόρτȣ ποσότης, 862 βȣσὶν, ἐπὶ 8 μῆνας ἐξήρκεσεν· ἡ αὐτὴ ποσότης ἐπὶ μῆνας 14 πόσοις βȣσὶν ἐξαρκέσειε;

Μην.	Β.	Μ.	Β.
8' :	862 =	14	y· Τοίνυν

$$y = \frac{8 \times 862}{14} = \frac{6896}{14} = 492\tfrac{4}{7}.$$

Γ'. Ὑφάντης ἐκ νήματος καναβικȣ̃ ὕφανε 160 πήχεις ἰςȣ̃ κατὰ μῆκος, ὑποτιθεμένȣ τȣ̃ πλάτȣς τȣ̃ ἰςȣ̃ ἴσȣ $\frac{1}{2}$ πήχεως. Πόσȣς ἀλλ' ἂν πήχεις ὁ ἰςὸς κατὰ μῆκος ἔξει, ὑποτιθεμένȣ τȣ̃ πλάτȣς $\frac{3}{4}$ πήχεως;

Πλ.	Μῆκ.	Πλ.	Μῆκ.
$\frac{1}{2}$:	160 =	$\frac{3}{4}$:	y· εἴτ' ἂν
4 :	160 =	6 :	y. Ὅθεν

$$y = \frac{4 \times 160}{6} = \frac{640}{6} = 106\tfrac{2}{3} \text{ πήχ.}$$

Δ'. Οἰκονόμος τις συνέθετο 15 ἐργάταις σκάψαι τὸν ἑαυτοῦ ἀμπελῶνα διαστήματι 12 Ἑβδομάδων, διὰ δὲ τὸ τοῦ καιροῦ δυσχείμερον ἔγνω τὴν ἐργασίαν ἐν 9 ἑβδομάσι περιστεῖλαι. Πόσων τοίνυν αὐτῷ ἐργατῶν χρεία ἔσται;

Ἑβδ.		Ἐργ.		Ἑβδ.		Ἐργ.	
12	:	15	=	9	:	y ·	Ὅθεν

$$y = \frac{12 \times 15}{9} = \frac{180}{9} = 20.$$

Ε'. Διφρηλάτης 20 κεντηνάρια ἐπὶ ὡρισμένῳ μισθῷ πρὸς ἀπόστασιν 28 μιλλίων ἐξεκόμισε. Κεντηνάρια 56 τῷ αὐτῷ μισθῷ πρὸς τίνα ἀπόστασιν ἐκκομίσει;

Κεντ.		Μιλ.		Κεντ.		Μιλ.	
20	:	28	=	56	:	y'.	Τοίνυν

$$y = \frac{20 \times 28}{56} = \frac{560}{56} = 10.$$

Ϛ'. Ῥάπτης ἐπὶ τὸ συρράψαι χιτῶνα, ὠνήσατο 4 πήχεις ὑφάσματος. $1\frac{1}{2}$ πήχεως πλάτος ἔχοντος. Πόσων πήχεων αὐτῷ χρεία ἔσται ἐξ ὑφάσματος $\frac{5}{6}$ πήχεως πλατέος, πρὸς τὸ ὑποστρῶσαι τὸν αὐτὸν χιτῶνα;

Πήχ. Πλ.		Μῆκ.		Πλ.		Μῆκ.	
$1\frac{1}{2}$	:	4	=	$\frac{5}{6}$	:	x.	εἴτ' οὖν
$\frac{3}{2}$	:	4	=	$\frac{5}{6}$	:	x.	εἴτ' οὖν
18	:	4	=	10	:	x.	Ὅθεν

$$y = \frac{18 \times 4}{10} = \frac{72}{10} = 7\frac{1}{5}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΧΡΥΣΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 350. *Μέθοδος Χρυσῆ* Σύνθετος *καλεῖται ἡ ἐκ πλειόνων ἢ τριῶν ὅρων συγκροτεμένη τῶν διδομένων.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 351. *Σύνθετος δὲ καλεῖται, ὡς ἐκ πλειόνων ἀναλόγων ὅρων συνεσηκυῖα· οἵτινες, ἐὰν μὲν ὦσι πέντε, τὴν τῶν* Πέντε *λεγομένην συνιςᾶσι* Μέθοδον· *ἐὰν δ' ἑπτὰ, ἐννέα, κ. τ. λ' φερωνύμως ἐκ τῦ ἀριθμῦ καὶ τὴν παρωνυμίαν τῇ μεθόδῳ προσεπιδιδόασιν. Ἀλλὰ καὶ ὕτως ἡ σύνθετος ἐπὶ τὴν πρώτην καὶ ἁπλῆν ἀναγομένη διαλύεται.*

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 352. *Ἐκ τῶν διδομένων τοίνυν πέντε ἐν γένει ὅρων, Α'. οἱ μὲν τρεῖς τὴν τῆς Μεθόδυ συνιςᾶσι συνθήκην, οἱ δ' ἕτεροι δύω τὴν ἐρώτησιν ἐκ τῶν προτέρων ἐξηρτημένην· οἷον εἰ εἴποι τις, Γραφεῖς δύω ἐν τέσσαρσιν ἡμέραις ἔγραψαν 18 σχέδας χάρτυ, 5 Γραφεῖς τῆς αὐτῆς δεξιότητος ἐν 30 ἡμέραις πόσας σχέδας γράψυσιν; Ἐν τύτῳ τῷ παραδείγματι οἱ 2 Γραφεῖς, αἱ 4 ἡμέραι, αἱ 18 σχέδαι πρὸς τὴν συνθήκην, εἴτ' ἐν ὑπόθεσιν τῦ πράγματος*

γματος ἀνάγονται, ἧς τινος τεθείσης ζητεῖται πόσον γράψωσιν οἱ 5 Γραφεῖς ἐν 30 ἡμέραις, οἵτινες 5 Γραφεῖς καὶ 30 ἡμέραι τὴν αἴτησιν ἐμπεριέχεσι. Β.' Ἐκ τῶν τριῶν ὅρων, τῶν πρὸς τὴν συνθήκην ἀφορώντων εἷς μόνος ἐςὶ τῷ ζητεμένῳ ὁμογενὴς, ὡς δὴ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι αἱ 18 εἰσὶ σχέδαι· ἐκ δὲ τῶν λοιπῶν τεσσάρων οἱ δύω τὸ αὐτὸ δηλᾶσι πρᾶγμα, ὡς καὶ οἱ λοιποὶ δύω, οἷον 2 καὶ 5 δηλᾶσι Γραφεῖς, 4 δὲ καὶ 30 ἡμέρας. Γ.' Μεταξὺ τῶν πρὸς τὴν συνθήκην ἀναφερομένων τριῶν ὅρων ὁ μὲν εἷς ὡς πρωτίςη θεωρεῖται αἰτία, θάτερος δ' ὡς αἰτιατὸν, εἴτ' ἂν ὡς ἐνέργεια, κέρδες, ζημίας, τόκε, ἐργασίας, κ.τ.λ' ὁ δ' ἕτερος τελευταῖον ὡς συνθήκη, καθ' ἣν τὸ αἰτιατὸν τίθεται, οἷαι εἰσὶν αἱ συμπεπλεγμένως ἐκτιθέμεναι τᾶ χρόνα, τᾶ διαςήματος, κ.τ.λ' ἔννοιαι. Κἀντεῦθεν τᾶ προεκτεθέντος παραδείγματος ὑπ' ὄψιν ληφθέντος, οἱ μὲν Γραφεῖς ὡς αἰτία θεωρᾶνται, ἧς τινος αἰτιατὸν αἱ 18 γραφεῖσαι εἰσὶ σχέδαι, ὁ δὲ τῶν 4 ἡμερῶν χρόνος τὴν τῆς γραφῆς συνθήκην δηλοῖ. Μεταξὺ δὲ τῶν λοιπῶν δυοῖν ὅρων, τῶν τὴν αἴτησιν ἐμπεριλαμβανόντων, ὁ μὲν πρὸς τὴν αἰτίαν, ὁ δὲ πρὸς τὴν συνθήκην ἐπεῖδε, τᾶ τρίτα πρὸς τὸ αἰτιατὸν ἀναφερομένα.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

§. 354. Δυνατὸν ὡσαύτως ἐκ τῆς διπλῆς ἀναλογίας μίαν ἐκκύπτειν, ἐὰν οἱ ἡγούμενοι τῶν ὅρων ἐπὶ τὰς αὐτοῖς προσκειμένας πολλαπλασιασθῶσιν ἀριθμὰς, ὃ γινομένε ἡ ἁπλῆ τῶν Τριῶν ἀναφύεται Μέθοδος· Οἷον.

Γρ. Ἡμ. Σχ. Γρ. Ἡμ. Σχ.

2 . 4 : 18 = 5 . 30 : y. Εἶτ. ὧν.

8 : 18 = 150 : y = 337 ½ Σχ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΤΕΡΑ.

Α'. Οἰκοδεσπότης τις 6 συσσίτες ἐν διαςήματι 20 ἑβδομάδων ἐςιῶν ἐδαπάνησεν ἀργύρια 224. Πόσα δαπανήσει, ἐὰν 8 συσσίτοις τροφὴν παράσχῃ ἐπὶ 32 ἑβδομάσι;

ΛΥΣΙΣ.

Σύσ. Ἑβδ. Ἀργ. Σύσ. Ἑβδ. Ἀργ.

$6 \times 20 : 224 = 8 \times 32 : y$. Εἶτ' ὧν

$120 : 224 = 256 : y$ Τοίνυν.

$y = \frac{224 \times 256}{120} = \frac{57344}{120} = 477$ ἀργ. + 34 ὀβ. + 2 λεπ.

Β'. Στρατιῶται 52, διαςήματι 8 Ἑβδομάδων καὶ 4 ἡμερῶν, κατηνάλωσαν 7800 λίτρας ἄρτε. Οἱ αὐτοὶ πόσας λίτρας καταναλώσεσιν ἐν διαςήματι 12 Ἑβδομάδων;

Στρ. Ἑϐδ. Ἡμ Λίτρ. Στρ. Ἑϐδ. Λίτρ.

$52 \,.\, 8+4 : 7800 = 52 \,.\, 12 : y$ εἴτ' ὂν

52×60 ἡμ. $: 7800 = 52 \times 84 : y$ εἴτ' ὂν

$3120 : 7800 = 4368 : y$ Τοίνυν

$y = \frac{7800 \times 4368}{3120} = \frac{780 \times 4368}{312} = \frac{3407040}{312} =$ 10920 λίτρ.

Γ.' Ὑπὲρ τοῦ συγκομισθῆναι 40 κεντηνάρια πρὸς ἀπόςασιν μιλλίων $4\frac{1}{4}$ ἀπέτισέ τις 9 Φιορήνια καὶ 20 κρεϊτζάρια. Πόσον ἀποτίσει ὑπὲρ 60 κεντηναρίων καὶ 40 λιτρῶν πρὸς ἀπόςασιν μιλλίων $16\frac{1}{4}$ συγκομισθησομένων;

Κεντ. Μιλ. Φ. Κρ. Κεντ. Λίτρ. Μίλ. Ἀργ.

$40 \,.\, 4\frac{1}{4} : 9+20 = 60+40 \,.\, 16\frac{1}{4} : y$ εἴτ' ὂν

4000 λίτ $\times \frac{17}{4} : 560$ κρ. $= 6040 \times \frac{65}{4} : y$ εἴτ' ὂν

$4000 \times 17 : 560 = 6040 \times 65 : y$ εἴτ' ὂν

$68000 : 560 = 392600 : y$ Τοίνυν

$y = \frac{560 \times 392600}{68000} = \frac{56 \times 3926}{68} = 3233$ κρ.

Εἰσὶ δὲ $\frac{3233}{60}$ κρ. $= 53$ Φιορ. $+ 53$ κρ. $= y$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.'

§. 355. Ὁπηνίκα μεταξὺ τῶν δυοῖν ἐσχάτων ὅρων, ὁ εἷς τῆς αὐτῆς εὑρίσκεται ἰδιότητος, ὥςε τὴν ἀπόκρισιν τοσοῦτον ἐλάττονος ἐκλαμβάνεσθαι τιμήματος, ὅσον ἐκεῖνος μείζονος τυγχάνῃ δυνάμεως, τηνικαῦτα ἡ τῶν Πέντε Μέθοδος ἔςαι Πλαγία,

εἴτ' ὂν

εἴτ' οὖν *Ἀντίστροφος*. Σύγκειται δὲ ἡ τῶν Πέντε αὕτη Σύνθετος Μέθοδος ἐκ δυοῖν ἁπλῶν, τῆς μὲν Ὀρθῆς, τῆς δὲ Πλαγίας. Ὅθεν Α'. ἐκ τῶν δοθέντων ὅρων ἡ ὀρθὴ διατυχθήτω ἀναλογία, εἶθ' οὕτω Β'. ἡ ἀντίστροφος. Οἷον ἐν παραδείγματι.

Θερισταὶ 6 ἐν δυσὶν ἡμέραις ἐθέρισαν 8 πλέθρα. Θερισταὶ 10, πλέθρα 16, ποσαίῳ χρόνῳ θερίσωσι;

Πλέθ. Ἡμ. Πλ. Ἡμ.

α'. $8 : 2 = 16 : y$ Τοίνυν

$y = \frac{2 \times 16}{8} = \frac{32}{8} = 4$ ἡμ. Ἡ Μέθοδ. ὀρθή.

Θερ. Ἡμ. Θερ. Ἡμ.

β'. $6 : 4 = 10 : y$. Ὅθεν

$y = \frac{6 \times 4}{10} = \frac{24}{10} = 2\frac{2}{5}$ ἡμ. Ἡ Μέθ. πλαγ.

Πλείονες γὰρ θερισταὶ ἐλάττονος χρήζουσι χρόνου.

ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'.

§. 356. Ἐν τῇ τοιαύτῃ τῶν Πέντε Ἀντιστρόφῳ Μεθόδῳ, καὶ ἑτέρως τὰ τῆς πράξεως τελεῖται, εἴτ' οὖν ὡς ἐφεξῆς. Α'. Οἱ ἀντίστροφον πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντες ὅροι, ἐν τῇ τῆς θέσεως τάξει παρενθέσει διασταλήτωσαν. Β'. Οἱ αὐτοὶ ὅροι μετατιθέμενοι ἐπὶ τοὺς αὐτοῖς γειτνιάζοντας ἀχθήτωσαν· οἷον, ὁ μὲν πρῶτος ἐπὶ τὸν πέμπτον, ὁ δὲ τέταρτος ἐπὶ τὸν δεύτερον. Ἐπεὶ δὲ Γ'. τούτῳ τῷ τρόπῳ ἡ Μέθοδος ὀρθὴ ἀναδίδοται, οἱ μέσοι ὅροι ἀλληἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιασθήτωσαν, καὶ τὸ γινόμενον διὰ τῦ πρώτυ διαιρεθήτω. Οἷον, ἐπὶ τῦ ἀνωτέρω ἐκτεθέντος παραδείγματος.

Θερ.	Πλ.	Ἡμ.		Θερ.	Πλ.	Ἡμ.
(6). 8	:	2	=	(10). 16	:	y

$$10 \times 8 : 2 = 6 \times 16 : y$$

$$80 : 2 = 96 : y$$

$$y = \frac{2 \times 95}{80} = \frac{192}{80} = 2\tfrac{2}{5}\ \text{ἡμ.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α. Ἀργύρια 100, διαστήματι ἑνὸς ἔτυς τοκιζόμενα ἀναδιδῦσι τόκον 5 ἀργύρια. Ἀργύρια 8600 ἐν πόσοις ἔτεσι τοκισθήσονται, ἵν᾽ ἀναδώσωσι τόκον 1800 ἀργύρια;

ΛΥΣΙΣ.

α. Τόκ. Ἔτ. Τόκ. Ἔτ.

$$5 : 1 = 1800 : y \cdot \text{ Ὅθεν}$$

$$y = \frac{1800}{5} = 360$$

β. Κεφ. Ἔτ. Κεφ. Ἔτ.

$$100 : 360 = 8600 : y. \text{ Ὅθεν}$$

$$y = \frac{360 \times 100}{8600} = \frac{360}{86} = 4\ \text{Ἔτ.}\ 2\ \text{μησ.}\ 6\tfrac{84}{86}\ \text{ἡμ.}$$

Ἀλ-

ΑΛΛΩΣ.

Κεφ.	Τόκ.	Ἔτ.		Κεφ.	Τόκ.	Ἔτ.
(100).	5	: 1	=	(8600).	1800	: y

$8600 \times 5 : 1 = 100 \times 1800 : y$

$43000 : 1 = 180000 : y$

$43 : 1 = 180 : y$

$y = \frac{180}{43} = 4$ Ἔτ. 2 μησ. 7 ἡμ. ὡς ἔγγιςα.

Β.' Ἡνίκα ὁ τῦ σίτυ χοῖνιξ 2 ἀργυρίων ὠνεῖτο, ἄρτος, ὁ $6\frac{1}{2}$ ὀβολῶν ὠνέμενος ἐςάθμιζε λίτρας $3\frac{2}{3}$. Πόσον ςαθμίσει ἄρτος, ὁ 12 ὀβολῶν πιπρασκόμενος, ὑποτιθεμένης τῆς τιμῆς ἑνὸς χοίνικος σίτυ 7 ἀργυρίων καὶ 16 ὀβολῶν;

	Ὀβ.		Λίτ.		Ὀβ.		Λίτ.	
α.'	$6\frac{1}{2}$	:	$3\frac{2}{3}$	=	12	:	y·	εἰτ. ἂν
	$\frac{13}{2}$	:	$\frac{11}{3}$	=	12	:	y·	εἰτ. ἂν
	39	:	11	=	24	:	y·	Τοίνυν

$y = \frac{24 \times 11}{39} = \frac{264}{39}$.

	Ἀργ.		Λίτρ.		Ἀργ.		Ὀβ.		
β.'	2	:	$\frac{264}{39}$	=	7	+	16	: y·	εἰτ' ἂν
	80 ὀβ.	:	$\frac{264}{39}$	=	296 ὀβ.			: y·	εἰτ' ἂν

$y = \frac{80 \times 264}{39 \times 296} = \frac{21120}{11544} = 1$ Λίτρ. + 26 ἡμιουγκ. $+ \frac{6288}{11544}$.

Ἀλ-

Ἄλλως.

Ἀργ.	Ὀβ.	Λίτ.	Ἀργ.	Ὀβ.	Οὐγ.	Λίτ.
(2).	$6\frac{1}{2}$	: $3\frac{2}{3}$ =	(7 + 16).	12	:	y

$(7+16)\times 6\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3} = 2 \times 12 : y$

$296 \times 6\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3} = 80 \times 12 : y$

$296 \times \frac{13}{2} : 3\frac{2}{3} = 80 \times 12 : y$

$\frac{3848}{2} : \frac{11}{3} = 960 : y$

$3848 \times 3 : 11 = 960 \times 2 : y$

$11544 : 11 = 1920 : y$

$y = \frac{11 \times 1920}{11544} = \frac{21120}{11544} = 1$ Λίτρ. + 26 ἡμ. + $\frac{6288}{11544}$.

Γ.' Ἀθλίας τὰ ἑαυτῦ χρήματα τοκίσαι βϋλεται πρὸς 5 ὑπὲρ 100. Ἵν' ἐν διαςήματι 8 μηνιῶν τόκον 240 ἀργυρίων λάβῃ, πηλίκον δέον εἶναι τὸ τοκισθησόμενον τῶν χρημάτων κεφάλαιον;

α.' Τόκ. Κεφ. Τόκ. Κεφ.

$5 : 100 = 240 : y$. Τοίνυν.

$y = \frac{240 \times 100}{5} = \frac{24000}{5} = 4800$ ἀργ. ὑπὲρ ἑνὸς Ἔτυς.

β.' Μῆν. Κεφ. Μῆν Κεφ.

$12 : 4800 = 8 : y$ · Ὅθεν

$y = \frac{12 \times 4800}{8} = \frac{57600}{8} = 7200$ ἀργ.

Ἀλ-

ΑΛΛΩΣ.

Μῆν Τόκ. Κεφ. Μῆν. Τόκ. Κεφ.

$(12) \,.\, 5 : 100 = (8) \,.\, 240 : y$

$8 \times 5 : 100 = 12 \times 240 : y$·

$40 : 100 = 2880 : y$·

$y = \frac{100 \times 2880}{40} = \frac{28800}{4} = 7200$ ἀργ.

Δ'. *Ὑπὲρ 40 κεντηναρίων, πρὸς ἀπόςασιν 8 μιλλίων συγκομισθέντων, κατεβλήθησαν ἀργύρια 12. Πόσα κεντηνάρια συγκομισθήσονται πρὸς ἀπόςασιν 24 μιλλίων, καταβαλλομένων 80 ἀργυρίων;*

α'. Ἀργ. Κεντ. Ἀργ. Κεντ.

$12 : 40 = 80 : y$· Ὅθεν

$y = \frac{40 \times 80}{12} = \frac{3200}{12}$ Κεντ.

β'. Μίλ. Κεντ. Μίλ. Κεντ.

$8 : \frac{3200}{12} = 24 : y$· εἴτ' οὖν

$8 : 3200 = 288 : y$· Ὅθεν

$y = \frac{8 \times 3200}{288} = \frac{25600}{288} = 88 \frac{8}{9}$ Κεντ.

ΑΛΛΩΣ.

Μίλ. Ἀργ. Κεντ. Μίλ. Ἀργ. Κεντ.

$(8) \,.\, 12 : 40 = (24) \,.\, 80 : y$·

$24 \times 12 : 40 = 8 \times 80 : y$·

$288 : 40 = 640 : y$·

$y = \frac{40 \times 640}{288} = \frac{25600}{288} = 88\frac{8}{9}$ Κεντ.

ΚΒ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 353. Πέντε δοθέντων ὅρων τὸν Ἕκτον εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Τεθήτω Α.′ ὁ τὴν αἴτησιν περιέχων ὅρος ἐν τῷ τρίτῳ τόπῳ, ᾧ τινι δεξιόθεν προσαφθήτωσαν οἱ τούτῳ ἀνήκοντες ἀριθμοὶ, σημείοις διεςαλμένοι. Β.′ Ὁ τούτῳ ὁμογενὴς ὅρος, τῶν αὐτῶν φυλαττομένων, τεθήτω ἐν τῷ πρώτῳ τόπῳ· ὁ δὲ, ᾧ τινι ὁ ὁμογενὴς ἐκεῖ ζητεῖται δευτέραν ἐχέτω τάξιν (§. 352.). Γ.′ Ὅσα περὶ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου εἴρηται, εἴ γε οἱ ὅροι εἴησαν ἀριθμοὶ ὁλοσχερεῖς, ἢ μικτοὶ, ἢ καὶ κλάσματα γνήσια, ταῦτα κἀνταῦθα τηρείσθωσαν. Εἶτα Δ.′ ἐκ τῶν δοθέντων ὅρων ζητείσθω ἀνάλογος πρὸς τὸν πρῶτον, τρίτον καὶ τέταρτον. Ἔσχατον δὲ Ε.′ πρὸς τὸν δοθέντα δεύτερον, ἤδη εὑρεθέντα, καὶ πρὸς τὸν δοθέντα πέμπτον ζητείσθω ὁ ἕκτος, ὡς ἐν τῷ ἀνωτέρω παραδείγματι, ἐφεξῆς διαληφθησομένῳ, δῆλον ἔςαι· Οἷον.

Γραφ. Ἡμ. Σχέδ. Γραφ. Ἡμ. Σχ.

α.′ $2 \,.\, 4 : 18 = 5 \,.\, 30 : y$ · Κἀντεῦθ:

$2 : 18 = 5 : y$ · Τοίνυν

$y = \frac{18 \times 5}{2} = \frac{90}{2} = 45.$

β.′ $4 : 45 = 30 : y$ · Τοίνυν

$y = \frac{45 \times 30}{4} = \frac{1350}{4} = 337\frac{1}{2}$ Σχέδαις.

ΣΧΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ. Ε'

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 357. Ἑταιρεία ἐςὶν ὁμόνοια τινῶν ἐν συμφώνῳ μετοχῇ κοινῇ τινος, ἐκ συνεισφορᾶς καταβαλλομένων ἀριθμῶν χρηματικῆς διαφόρου ποσότητος συνεςηκότος.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 358. Τὸ ἐν αὐτῇ ἄρα ζητούμενον διανομή ἐ-
~~ςι τοῦ κοινοῦ ἀριθμοῦ, κατὰ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν.~~

ΣΧΟΛΙΟΝ. Α'

§. 359. Ἐπὶ γὰρ κοινῷ τινι συμβολαίῳ πολλῶν συμφώνως διάφορον ἑκάςου χρηματικὴν συνεισενεγκόντων ποσότητα, καὶ τὴν συμποσωθεῖσαν ἐμπορευσαμένων τὸ ἀποδάσμιον ἑκάςῃ ἀνῆκον τοῦ τυχόντος κέρδους, ἢ τῆς ζημίας ζητεῖται. Ἔνθεν τοι ἡ τῆς Ἑταιρείας καλουμένη Μέθοδος τὰ μάλιςα ἐςὶ χρήσιμος, ἐφ' ᾧ τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημίαν, ἀναλόγως τῇ ὑφ' ἑνὸς ἑκάςου καταβληθείσῃ ποσότητι διακρῖναι.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Β'

§. 360. Διὰ τῆς Μεθόδου τῆς Ἑταιρείας διδασκόμεθα ἀριθμοὺς ἐν ἀνίσοις μέρεσιν οὕτω διανέμειν, ὡς τὴν διαφορὰν τούτων τῶν μερῶν, ὡρισμένοις τισὶν ἀριθμοῖς, ὡς βάσει, ἐφηρμοσμέ-

νην

την εἶναι. Οἷον, δύο τινες τὸ ἐκ χοινίκων 6 σίτυ ἀπενεχθὲν κέρδος ἀλλήλοις διανεῖμαι βέλονται· κατέβαλε δὲ ὑπὲρ τῆς τέτυ ὠνήσεως θάτερος μὲν ἀργύρια 8, ὁ δὲ ἕτερος 4. Ἐκ τῆς τῶν ὅρων τοίνυν θέσεως δῆλον καθίςαται, τῷ μὲν πρώτῳ τὸ τῦ κέρδυς ἀνήκειν διπλάσιον, ὡς διπλάσιον καταβαλόντι, ἤπερ τῷ δευτέρῳ. Ἐὰν ὖν θῶμεν τὸ ἐκ τῶν 6 χοινίκων πραθέντων ἀπενεχθὲν κέρδος εἶναι 10 ἀργύρια, ἕξομεν τὴν λύσιν, κατὰ τὺς ἐν τῷ ἐφεξῆς Προβλήματι διαληφθησομένυς κανόνας.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 361. Διὰ τῆς Μεθόδυ τοίνυν τῆς Ἑταιρείας, τὸ ἑνὶ ἑκάςῳ ἀνῆκον κέρδος ἢ ἡ ζημία ἀναλόγως τῇ τε ποσότητι καὶ τῷ χρόνῳ, ἢ καὶ ἀμφοτέροις ὁμῦ, διασημαίνεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 362. Μέθοδος Ἑταιρείας Ἁπλῆ μὲν λέγεται, ὁπηνίκα ἡ διανομὴ ἰδίως μόνον γίνεται· εἴτ᾽ ὖν, ἤτοι μόνον τοῖς συνεισαχθεῖσιν ἀναλόγως, ἢ ἀναλόγως τῷ χρόνῳ, καθ᾽ ὃν ἕκαςος τὸ αὐτῷ προσανῆκον συνεισέφερε. Σύνθετος δὲ ὁπηνίκα ἡ διανομὴ ἀναλόγως τοῖς τε συνεισαχθεῖσι καὶ τῷ χρόνῳ συνάμα ἐκτίθεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 363. Τὸ δοθὲν ὅλον εἰς μέρη

 διε-

διελεῖν, τὴν δοθεῖσαν ἑτέρȣ τινος ὅλȣ τηρȣ͂ντα ἀναλογίαν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐὰν κοινὸν ἑταίρων καὶ συμμετόχων κέρδος, ἢ ζημίαν διανεμητέον ἢ πρὸς ἀλλήλȣς, μερισθήσεται τὸ ἐκ τῆς ἐμπορίας προκύπτον ὅλον, εἴτ᾽ ἂν ὁ τȣ͂ κέρδȣς, ἢ τῆς ζημίας ἀριθμὸς, ἀναλόγως τοῖς ἐφ᾽ ἑκάςȣ συνεισαχθεῖσι τȣ͂ συμποσȣμένȣ κεφαλαίȣ μέρεσι (§. 361.). Ἔνθεν τοι καὶ ἡ μέθοδος τοσάκις παραβάλλεται, ὅσοι ἂν οἱ μέτοχοι καὶ ἑταῖροι ὦσιν· ἔχει γὰρ ὡς ἡ τῶν συνεισαχθέντων σύναψις πρὸς τὸ κοινὸν κέρδος, ȣ̔́τως ὅ,τιȣ͂ν ἀποδάσμιον τῶν συνεισαχθέντων πρὸς τὸ ἀποδάσμιον κέρδος, ἢ τὴν ζημίαν, ἐκείνῳ ἀνάλογον. Διὸ Α.ʹ τὰ παρ᾽ ἑκάςȣ εἰσαχθέντα εἰς ἓν συναπτόμενα τὸν πρῶτον ἀναδώσȣσιν ὅρον. Β.ʹ Ἡ πρὸς τȣ̀ς ἑταίρȣς διανεμηθησομένη ποσότης ἔςαι ὁ τρίτος ὅρος. Γ.ʹ Τὸ ἑνὸς ἑκάςȣ ἰδίως εἰσαχθὲν μέρος τρίτην ἐχέτω τάξιν. Ἔνθεν τοι, ἡ τῶν Τριῶν ἀναλογία τοσάκις παραβληθήσεται, ὅσοι ἂν οἱ ἑταῖροι καὶ συμμέτοχοι εἶεν, ὡς ἐπὶ τοῖς ἐφεξῆς παραδείγμασι δηλȣ͂ται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α.ʹ Τιμόθεος, σὺν τῷ ἑταίρῳ αὐτȣ͂ Γοργίᾳ ἑταιρείαν ποιησάμενοι συνέθεντο βόας ὠνῆσαι. Ἦν δὲ δὲ ἡ μὲν ὑπὸ Τιμοθέου καταβληθεῖσα ποσότης 2040 ἀργυρίων, ἡ δὲ ὑπὸ Γοργίου 1740. Ἀπεμπώληνται δὲ οἱ βόες τιμῆς 4200 ἀργυρίων. Πηλίκη τοίνυν ἡ τοῦ Τιμοθέου, πηλίκη δὲ καὶ ἡ τοῦ Γοργίου μερίς ἐστι;

ΛΥΣΙΣ.

2040 = Τῇ τοῦ Τιμοθέου ποσότητι
1740 = Τῇ τοῦ Γοργίου.

α) 3780 : 4200 = 2040 : y

$y = \frac{4200 \times 2040}{3780} = \frac{8568000}{3780} = \frac{856800}{378} = 2266$ ἀργ. + $\frac{252}{378}$ ὑπὲρ τοῦ Τιμοθέου· Αὖθις·

β) 3780 : 4200 = 1740 : χ

$\chi = \frac{4200 \times 1740}{3780} = \frac{7308000}{3780} = \frac{730800}{378} = 1933$ ἀργ. + $\frac{126}{378}$ ὑπὲρ τοῦ Γοργίου. Καὶ γάρ·

2266 $\frac{252}{378}$ Ἀργ.
1933 $\frac{126}{378}$ = 4200. Τῷ διανεμητέῳ κέρδει.

Β.′ Τρεῖς Μαθηταὶ συνέθεντο καταλῦσαι ἔν τινι οἰκίᾳ ὑπὲρ 48 ἀργυρίων· ὁ μὲν Α.′ ἐν διαστήματι ἑβδομάδων 8, ὁ δὲ Β.′ ἐν 12 ἑβδομάσι, ὁ δὲ Γ.′ ἐν 20. Ζητεῖται, πόσον ἕκαστος τούτων αναλόγως καταβαλεῖ;

Α.′ = 8
Β.′ = 12
Γ.′ = 20

α) Ἑβδομάδ. 40 : 48 ἀργ. = 8 Ἑβδμ. : φ Ἀργ.

$\varphi = \frac{48 \times 8}{40} = \frac{384}{40} = 9\frac{3}{5}$ ἀργ. ὑπὲρ τοῦ Α.′

β)

β) $40 : 48 = 12 : \chi$

$\chi = \frac{48 \times 12}{40} = \frac{576}{40} = 14\frac{2}{5}$ ἀργ. ὑπὲρ τῦ Β΄.

γ) $40 : 48 = 20 : \psi$

$\psi = \frac{48 \times 20}{40} = \frac{960}{40} = \frac{96}{4} = 24$ ἀργ. ὑπὲρ τῦ Γ΄.

$$\text{Καὶ γὰρ} \left.\begin{array}{l} 9\frac{3}{5} \text{ ἀργ.} \\ 14\frac{2}{5} \text{ —} \\ 24 \text{ —} \end{array}\right\} = 48 \text{ ἀργ.}$$

Γ΄. Τέσσαρες συμπαίκτορες ἐν παιδιᾷ τινι ἀριθμὸν χρημάτων συνεισήνεγκον, Καὶ δὴ ὁ μὲν Α΄ 482 ἀργύρια, ὁ δὲ Β΄ 1274, ὁ δὲ Γ΄ 690, ὁ δὲ Δ΄ 888. Ἐκέρδησαν δὲ ἀργύρια 12000. Πόσον τοίνυν ἑκάστῳ ἀνήκει;

$$\begin{array}{l} \text{Α΄} = 482 \\ \text{Β΄} = 1274 \\ \text{Γ΄} = 690 \\ \text{Δ΄} = 888 \\ \hline \end{array}$$

α) $3334 : 12000 = 482 : y$

$y = \frac{12000 \times 482}{3334} = \frac{5784000}{3334} = 1734\frac{2844}{3334}$ ὑπὲρ τῦ Α΄.

β) $3334 : 12000 = 1274 : \varphi$

$\varphi = \frac{12000 \times 1274}{3334} = \frac{15288000}{3334} = 4585\frac{1610}{3334}$

γ) $3334 : 12000 = 690 : \chi$

$\chi = \frac{12000 \times 690}{3334} = \frac{8280000}{3334} = 2483\frac{1678}{3334}$ ὑπὲρ τῦ Γ΄.

δ)

δ) $3334 : 12000 = 888 : \psi$·

$\psi = \frac{12000 \times 888}{3334} = \frac{10656000}{3334} = 3196 \frac{536}{3334}$ ὑπὲρ τοῦ Δ'

Καὶ γὰρ	1734	Καὶ $\frac{2844+1810+1678+536}{3334}$
	4585	
	2483	
	3196	$= \frac{6668}{3334} = 2$
	11998	
	+ 2	
	12000	

Δ'. Ἀγρὸς πρὸς κτηνοτροφίαν ἐπιτήδειος καὶ 20 πλέθρα περιέχων, ὥτω πρὸς χρῆσιν χωρικοῖς πέντε ἐδόθη, ὡς ἀλλήλοις διανεμηθεῖναι κατὰ τὸν τῶν θρεμμάτων ἑκάςου ἀριθμόν. Εἶχε δὲ ὁ μὲν Α'. θρέμματα 16, ὁ δὲ Β'. 14, ὁ δὲ Γ'. 18, ὁ δὲ Δ'. 22, ὁ δὲ Ε'. 12. Πόσα πλέθρα ἕκαςος ἀναλόγως λήψεται,

Α'. = 16
Β'. = 14
Γ'. = 18
Δ'. = 22
Ε'. = 12

α) $82 : 20 = 16 : \tau$·

$\tau = \frac{20 \times 16}{82} = \frac{320}{82} = 3 \frac{74}{82}$ ὑπὲρ τοῦ Α'.

β) $82 : 20 = 14 : \upsilon$·

$\upsilon = \frac{20 \times 14}{82} = \frac{280}{82} = 3 \frac{34}{82}$ ὑπὲρ τοῦ Β'.

 γ)

γ) $82 : 20 = 18 : \varphi$·

$\varphi = \frac{20 \times 18}{82} = \frac{360}{82} = 4\frac{32}{82}$ ὑπὲρ τοῦ Γ.

δ) $82 : 20 = 22 : \chi$·

$\chi = \frac{20 \times 22}{82} = \frac{440}{82} = 5\frac{30}{82}$ ὑπὲρ τοῦ Δ.

ε) $82 : 20 = 12 : \psi$·

$\psi = \frac{20 \times 12}{82} = \frac{240}{82} = 2\frac{76}{82}$ ὑπὲρ τοῦ Ε.

Καὶ γὰρ 3 | Καὶ $\frac{74+34+32+30+76}{82} = \frac{246}{82} = 3$·

3

4

5

2

17

\+ 3

20 πλέθρα

Ε. Πατὴρ τις τὰ λοίσθια πνέων οὕτω διέθετο, ὡς ἐκ μὲν τοῦ ὅλου κεφαλαίου τῶν ὑποληφθέντων 24000 ἀργυρίων $\frac{1}{6}$ τὴν ἑαυτοῦ χήραν λαβεῖν, ἐκ δὲ τῶν ἐντεῦθεν ὑπολειφθησομένων, 1000 τὴν ἑαυτοῦ θυγατέρα. Τὸ δ' ἐσχάτως ὑπολειπόμενον, μεταξὺ τῆς χήρας, τῆς θυγατρὸς καὶ τῶν δυοῖν αὐτοῦ παίδων ἰσομερῶς διανεμηθῆναι. Πόσον ἕκαστος ἐκαρπώσατο;

α) $\frac{24000}{6} = 4000$ ἀργ. $= \frac{1}{6}$ ὑπὲρ τῆς χήρας.

β) $24000 - 4000 = 20000 =$ τῷ πρώτῳ ὑπολοίπῳ.

γ)

γ) Ἐπεὶ δὲ πρὸ τῆς διανομῆς ἡ θυγάτηρ 1000 ἀργύρια λήψεται, ἔςαι 20000 — 1000 = 19000 = τῷ δευτέρῳ ὑπολοίπῳ.

δ) $\frac{19000}{4} = 4750$ ὑπὲρ ἑνὸς ἑκάςε τῶν τεσσάρων συγκληρονόμων.

Καὶ γὰρ, ἡ μὲν χήρα	= 4000 + 4750	=	8750
ἡ δὲ θυγάτηρ	= 1000 + 4750	=	5750
ὁ δ' υἱὸς	= — —	=	4750
ὁ δ' ἑτερ. υἱὸς	=	=	4750
			24000 ἀργ.

ς'. Ἔμπορός τις ἀποθνήσκων κατέλιπε περιουσίαν 15680 ἀργυρίων, ὑπὲρ ὧν διανεμηθησομένων 6 δανειςαὶ συνέρρευσαν. Καὶ δὴ ὁ μὲν Α'. ἀργύρια ὀφειλόμενα ἀπῄτει 2248, ὁ δὲ Β'. 4000, ὁ δὲ Γ'. 6556, ὁ δὲ Δ'. 8240, ὁ δὲ Ε'. 3425, ὁ δὲ ς'. 600. Δεδαπάνηνται δ' ἐν τοῖς δικαςηρίοις ἀργύρια 536. Πόσον τῶν δανειςῶν ἕκαςος λήψεται;

Πρῶτον μὲν τὰ ἐν τοῖς δικαςηρίοις δαπανηθέντα ἀπὸ τῦ ὅλυ κεφαλαίυ ἀφαιρείσθωσαν· οἷον 15680 — 536 = 15144 ἀργ.

Δεύτερον δὲ γενέσθω,

$A' = 2248$

$B' = 4000$

$\Gamma' = 6556$

$\Delta' = 8240$

$E' = 3425$

$\varsigma' = 600$

α) $25069 : 15144 = 2248 : \sigma$.

$$\sigma = \frac{15144 \times 2248}{25069} = \frac{34043712}{25069} = 1358 \tfrac{10}{25069}.$$

β) $25069 : 15144 = 4000 : \tau$.

$$\tau = \frac{15144 \times 4000}{25069} = \frac{60576000}{25069} = 2416 \tfrac{9296}{25069}.$$

γ) $25069 : 15144 = 6556 : \upsilon$.

$$\upsilon = \frac{15144 \times 6556}{25069} = \frac{99284064}{25069} = 3960 \tfrac{10824}{25069}.$$

δ) $25069 : 15144 = 8240 : \varphi$.

$$\varphi = \frac{15144 \times 8240}{25069} = \frac{124786560}{25069} = 4977 \tfrac{18147}{25069}.$$

ε) $25069 : 15144 = 3425 : \chi$.

$$\chi = \frac{15144 \times 3425}{25069} = \frac{51868200}{25069} = 2069 \tfrac{439}{25069}.$$

ϛ) $25069 : 15144 = 600 : \psi$.

$$\psi = \frac{15144 \times 600}{25069} = \frac{9086400}{25069} = 362 \tfrac{11422}{25069}.$$

Καὶ

$$\begin{array}{r|}
\textit{Καὶ γὰρ}\ 1358 \\
2416 \\
3960 \\
4977 \\
2069 \\
362 \\
\hline
15142 \\
+\quad 2 \\
\hline
15144
\end{array}$$

$$\textit{Καὶ}\ \frac{10+9296+10824+18147+430+11422}{25069}$$

$$= \frac{50138}{25069} = 2.$$

ΣΧΟΛΙΟΝ Δ.

§. 364. *Τῆς αὐτῆς δὲ ἐχόμενα εἰσὶ λύσεως καὶ τὰ εἰς σύνθεσίν τινος εἰσερχόμενα διάφορα μόρια, ἐν ᾗ ἡ τῶν εἰσερχομένων πρὸς ἄλληλα ἀναλογία διέγνωσαι. Οἷον, εἰς σύνθεσιν ἑπτήσεω Πυρίτιδος κόνεως εἰσέρχονται* 16 *μέρη νίτρε,* 2 *θείε καὶ* 3 *ἀνθράκων. Δεῖ δὲ ἡμῖν* 600 *Κεντηνάρια κατασκευάσαι Πυρίτιδος, πόσον ἄρα ἐξ ἑνὸς ἑκάςε τῶν εἰς σύνθεσιν εἰσερχομένων ληπτέον; Ἐπεὶ ἂν ἑκάςῃ τῇ τῆς Πυρίτιδος κόνεως ὁλκῇ, αἱ τε νίτρε, θείε τε καὶ ἀνθράκων ὁλκαὶ ἀλλήλαις ἀνάλογόν εἰσιν, ὡς* 16: 2: 3, *ἔςαι·*

$$(16+2+3):600 = \left\{\begin{array}{l} 16 : \varphi. \\ 2 : \chi. \\ 3 : \psi. \end{array}\right.$$

$$\text{Ἄρα}\begin{cases}\varphi = 457\tfrac{1}{7} \text{ Κεντ. νίτρȣ.}\\ \chi = 57\tfrac{1}{7} \text{ Κεντ. θείȣ.}\\ \psi = 85\tfrac{5}{7} \text{ Κεντ. ἀνθράκων.}\end{cases}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.'

§. 365. Οὐκ ἐκλείπȣσι δὲ καὶ ἄλλα ὑποδείγματα τῆς αὐτῆς ψηφηφορίας δεόμενα, οἷον ἐπὶ τῆς Ἰατρικῆς ἢ ἄλλων τεχνῶν, ἐκ τȣ̃ δοθέντος λόγȣ, ὃν αἱ ὁλκαὶ τῶν συμμιχθησομένων πρὸς ἀλλήλας ἔχȣσιν εὑρίσκονται αἱ ὁλκαὶ τῶν ὀφειλόντων συμμίγνεσθαι αἱ ζητȣ́μεναι, ὅπως ἂν ᾗ τὸ ὅλον μικτὸν τῆς δοθείσης ὁλκῆς. Οἷον 3 ἁπλᾶ εἰς σύνθεσιν φαρμάκȣ τινος εἰσέρχονται, ἡ μὲν τȣ̃ πρώτȣ δόσις $= 4$ ȣ̓γκιῶν, ἡ δὲ τȣ̃ δευτέρȣ $= 5$, καὶ ἡ τȣ̃ τρίτȣ $= 2$. Εὑρεθῆναι γȣ̃ν δεῖ τὰς ἐπιζητȣμένας ἑκάςȣ δόσεις, ὥςε τὴν τȣ̃ συνθέτȣ ὁλκὴν 8 λιτρῶν ὅλην εἶναι. Ἔςαι $4 + 5 + 2 = 11$ ȣ̓γκίαις, καὶ τῶν 8 λιτρῶν ἐπ' ȣ̓γκίας ἀναγομένων, εἴτ' ȣ̓̃ν $8 \times 12 = 96$, ῥητέον.

$$11 : 96 = \begin{cases} 4 : \varphi \\ 5 : \chi \\ 2 : \psi \end{cases}$$

$$\text{Ἄρα}\begin{cases}\varphi = 34\tfrac{10}{11} \text{ τῇ τȣ̃ Α.' ἁπλȣ̃ ὁλκῇ.}\\ \chi = 43\tfrac{7}{11} \text{ τῇ τȣ̃ Β.' ἁπλȣ̃ ὁλκῇ.}\\ \psi = 17\tfrac{5}{11} \text{ τῇ τȣ̃ Γ.' ἁπλȣ̃ ὁλκῇ.}\end{cases}$$

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 366. **Μέθοδον Ἑταιρείας Σύνθετον ἐπιλύσαι.**

ΛΥΣΙΣ.

Εἴρηται (§. 360.) τὴν τῆς Ἑταιρείας Μέθοδον εἶναι διανομὴν ἀνάλογον τοῖς συνεισαχθεῖσιν ἅμα καὶ τῷ χρόνῳ. Ὅθεν ἐὰν θῶμεν δύω τινὰς διάφορον χρημάτων ποσότητα ἐν διαφόρῳ χρόνῳ εἰσενεγκεῖν, δῆλον ἐςαι, τὴν τῆ κέρδȣς διανομὴν, κατά τε τὰ εἰσαχθέντα ἀργύρια καὶ κατὰ τὸν χρόνον ἀνάλογον εἶναι. Ἀμφοτέρων γὰρ τὸ τῶν χρημάτων κεφάλαιον ὑποτιθεμένων συνεισαγαγεῖν, ἡ τῆ κέρδȣς διανομὴ τῷ χρόνῳ, καθ᾽ ὃν ἕκαςος τὰ ἑαυτῆ εἰσήγαγε χρήματα, ἀνάλογος ἐςαι. Ἐνθεντοι τὰ ἑνὸς ἑκάςȣ χρήματα ἐν ἑνὶ κεφαλαίῳ ἀθροιζόμενα, ἐπὶ τὸν ἴδιον χρόνον πολλαπλασιασθήτωσαν, τὰ δὲ γινόμενα ἐν ἑνὶ αὖθις συναπτόμενα κεφαλαίῳ τὸν πρῶτον ἀναδώσȣσιν ὅρον, εἴτ᾽ ἐν τὸν διαιρέτην τȣ̃ ἐκ τῶν μέσων ὅρων γινομένȣ. Οὕτω τοίνυν ἡ σύνθετος ἐπὶ τὴν ἁπλῆν τῆς Ἑταιρείας ἀνάγεται Μέθοδον, ἑκάςȣ τῶν εἰσαχθέντων, διὰ τῆς αὐτῷ συνημμένης τȣ̃ χρόνȣ ὑποθέσεως, πολλαπλασιαζομένȣ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α. Τρεῖς Κρεȣργοὶ κατέβαλον ὁμȣ̃, ὑπέρ τινος μισθωθέντος χορτοκοπεῖν, 468 ἀργύρια. Ἀλλ᾽

ὁμῶνδ' ὁ μὲν *Α'* τὰς ἑαυτῦ βόας, 28 τὸν ἀριθμὸν, ἐπὶ ἑβδομάδας 5 πρὸς νομὴν ἤλασεν· ὁ δὲ *Β'* βόας 32 ἐπὶ ἑβδομάδας 8· ὁ δὲ *Γ'* βόας 18, ἐπὶ ἑβδομάδας 12. *Πόσον ἕκαςος τύτων ἀναλόγως τῆς ἐπικαρπίας ἕνεκεν ἀποτίσει;*

ΛΥΣΙΣ.

Γραφήτωσαν οἱ δοθέντες τῶν βοῶν ἀριθμοὶ ὑπάλληλοι, εἶθ' ἕκαςος ἐπὶ τὸν ἴδιον πολλαπλασιασθήτω χρόνον, τὰ ἐντεῦθεν ἐκπίπτοντα γινόμενα, ἐν ἑνὶ ἀθροιζόμενα κεφαλαίῳ, πρῶτον ἡμῖν ἀναδώσουσιν ὅρον. Δεύτερος ὅρος ἔςαι τὰ ὑπὲρ τῆς τῦ χορτοκοπείυ μισθώσεως πᾶσιν ὁμῦ ἀνήκοντα χρήματα. Ὁ Τρίτος δὲ, τὰ ἰδίως ἐκ τῦ πολλαπλασιασμῦ τῦ τῶν βοῶν ἀριθμῦ ἐπὶ τὸν τῆς ἐπικαρπίας χρόνον ἀναδιδόμενα γινόμενα, Κἀντεῦθεν ἐκληφθήσεται ὑπὲρ τῦ τετάρτυ ὅρυ, τὸ ὑφ' ἑνὸς ἑκάςυ καταβληθησόμενον Ὅθεν.

Βό. *Χρ.* *Γιν.*

$A' = 28 \times 5 = 140.$

$B' = 32 \times 8 = 256.$

$\Gamma' = 18 \times 12 = 216.$

$\overline{612.}$ *Κἀντεῦθεν.*

$$612 : 468 = \begin{cases} 140 : \varphi = 107\frac{1}{17} \text{ ὑπὲρ τῦ } A' \\ 256 : \chi = 195\frac{13}{17} \text{ ὑπὲρ τῦ } B' \\ 216 : \psi = 165\frac{3}{17} \text{ ὑπὲρ τῦ } \Gamma' \end{cases}$$

εἰσὶ δὲ ταῦτα - - - $\overline{468} = A + B + \Gamma.$

Β.

Β.' Ἔμποροι τρεῖς ἑταιρείαν ἀλλήλοις ποιησάμενοι κατέβαλον, ὁ μὲν Α.' κεφάλαιον 660 ἀργυρίων ἐν διαστήματι 7 μηνῶν· ὁ δὲ Β.' 880, ἐν τριετίας διαστήματι· ὁ δὲ Γ.', ἐν ἑξαετίᾳ, κεφάλαιον ἀργυρίων 400. Τῆς ἐν ἑξαετίας πληρωθείσης τὸ ἀναδοθὲν κέρδος εὑρέθη εἶναι 2728 ἀργυρίων. Πῶς ἂν τουτὶ ἀναλόγως ἐκείνοις διανεμηθείη;

	Κεφ.		Μῆν.		Γινόμ.
Α.' =	660	×	7	=	4620
Β.' =	880	×	36	=	31680
Γ.' =	400	×	72	=	28800
					65100 Κἀντεῦθεν.

65100 : 2728 = { 4620 : φ = 193 [illegible] ἀργ. (ὑπὲρ τοῦ Α.'
31680 : χ = 1327 [illegible] ὑπὲρ τοῦ Β.'
28800 : ψ = 1206 [illegible] ὑπὲρ τοῦ Γ.'

Τοίνυν Α + Β + Γ —— = 2726 + 2 = 2728 ἀργ.

Γ.' Τέσσαρες συνέθεντο ἐμπορίαν τι ἀναλαβεῖν, ὑπὲρ ὃ καὶ κατέβαλον 12000 ἀργύρια. Εἰ ἂν ὁ μὲν Α.' ἐν διαστήματι 4 μηνῶν, καθ' ὃ τῇ αὐτῇ ἑταιρείᾳ ἐνέμεινεν, ἐκ τῆς τοῦ κέρδους διανομῆς ἐκαρπώσατο ἀργύρια 600· ὁ δὲ Β.' ἐν τρισὶ μησὶν, ὡσαύτως 600· ὁ δὲ Γ.' ἐν μησὶ δυσὶ, 360· ὁ δὲ Δ.' ἐν ἑνὶ, 260. Μαθεῖν θέλω, πόσον ἕ-

καστος

κασος τῷ προμνησθέντι κεφαλαίῳ συνεισήνεγκε;

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ ἐν τῷ παρόντι παραδείγματι τὰ κατὰ μέρος αἰτοῦνται κεφάλαια τοῦ εἰσαχθέντος ὁλικοῦ κεφαλαίου, ἀναλόγως πρὸς τὴν ἐκ τοῦ ὅλου κέρδους ἑκάστου μερίδα· τὰ δ' ἐν μέρει εἰσαχθέντα κεφάλαια ἕξουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ τοῦ κέρδους μέρη, τοῦ ἐν διαφόροις ἐκληφθέντος χρόνοις· ἀναγκαῖόν ἐστι τὸ ἑνὸς ἑκάστου κέρδος ἐπὶ τὸν ἴδιον χρόνον διαιρεθῆναι· οὗ γινομένου, τὰ πηλίκα συναφθέντα τὸν πρῶτον ἀναδώσουσιν ὅρον· οἷον.

		Μῆν	Κέρδ.	Πηλίκ.
Α	=	4	600	150
Β	=	3	600	200
Γ	=	2	350	175
Δ	=	1	260	260
				785.

Κἀντεῦθεν.

$$785 : 12000 = \begin{cases} 150 : \upsilon = 2292\frac{780}{785} \text{ ὑπὲρ τοῦ Α΄} \\ 200 : \varphi = 3057\frac{255}{785} \text{ ὑπὲρ τοῦ Β΄} \\ 175 : \chi = 2675\frac{125}{785} \text{ ὑπὲρ τοῦ Γ΄} \\ 260 : \psi = 3974\frac{410}{785} \text{ ὑπὲρ τοῦ Δ΄} \end{cases}$$

Δ΄ Τέσσαρες συνεισφέρουσι 5000 ἀργύρια, κερδίζουσι δ' ἐντεῦθεν οὕτως, ὥστε τὸν μὲν Α΄ ἐν διαστήματι 3 μηνῶν ἐκ τοῦ ὅλου κέρδους $\frac{1}{5}$ ἀπολαβεῖν, τὸν δὲ Β΄ ἐν 6 μησὶ $\frac{2}{5}$, τὸν δὲ Γ΄ $\frac{1}{4}$ ἐν μησὶν 9, τὸν δὲ

Δ΄

Δ' ἐν 12 μησὶ $\frac{5}{6}$. Πόσον ἕκαςος τέτων συνεισέφερε;

ΛΥΣΙΣ.

Γραφήτωσαν κἀνταῦθα ὑπαλλήλως τὰ ἑνὶ ἑκάςῳ ἀνήκοντα μέρη, εἶτα δὲ ζητείσθω ἀριθμὸς, οἷα κοινὸς παρονομαςὴς, ᾧ τινι οἱ τῶν δοθέντων κλασμάτων παρονομαςαὶ ἰσομερῶς ἐμπεριληφθήσονται· γενέσθω τε κατὰ τάξιν τῶν κλασμάτων ἐπὶ τὸν κοινὸν παρονομαςὴν πολλαπλασιασμὸς, τὰ δ' ἐντεῦθεν ἐκπίπτοντα γινόμενα διαιρείσθωσαν διὰ τῶν ἀντιςοίχων αὐτοῖς χρόνων· τὰ ἐκληφθησόμενα πηλίκα, ἐν ἑνὶ ἀθροιζόμενα κεφαλαίῳ, τὸν πρῶτον ἡμῖν ἀναδώσουσιν ὅρον· οἷον.

Μέρη.	Ὁ κοινὸς παρονομαςὴς = 72
Α' = $\frac{1}{2}$	- - - - - 36
Β' = $\frac{2}{3}$	- - - - - 48
Γ' = $\frac{3}{4}$	- - - - - 54
Δ' = $\frac{5}{6}$	- - - - - 60

Μῆν.	Τὰ Γινόμενα	Τὰ πηλίκα.
Α' = 3	36	12
Β' = 6	48	8
Γ' = 9	54	6
Δ' = 12	60	5
		31 Κἀντεῦθεν.

$$31 : 5000 = \begin{cases} 12 : \upsilon = 1935 \tfrac{15}{31} \text{ ὑπὲρ τοῦ } A' \\ 8 : \varphi = 1290 \tfrac{10}{31} \text{ ὑπὲρ τοῦ } B' \\ 6 : \chi = 967 \tfrac{23}{31} \text{ ὑπὲρ τοῦ } \Gamma' \\ 5 : \psi = \underline{806 \tfrac{14}{31} \text{ ὑπὲρ}} \text{ τοῦ } \Delta' \end{cases}$$

Ὥςε εἶναι $A+B+\Gamma+\Delta - = 4998 + 2 = 5000$.

Ε'. Ἀργύρια 3920 διανεμητέα πρόκεινται εἰς τέσσαρας, ἐξ ὧν τὸν μὲν Α'. δέον λαβεῖν $\frac{1}{3}$ πλὴν 40 ἀργυρίων, τὸν δὲ Β'. $\frac{1}{4}$ πλὴν 60, τὸν δὲ Γ'. $\frac{1}{5}$ πλὴν 80, τὸν δὲ Δ'. $\frac{1}{6}$ πλὴν 100. Πόσον ἕκαςος λήψεται;

ΛΥΣΙΣ.

Ζητείσθω ἐνταῦθα ἀριθμὸς, οἷον ὁ 24, ἐφ' ὃν τὰ κλάσματα πολλαπλασιαζόμενά τε καὶ διαιρόμενα πηλίκα δώσωσιν ὁλοσχερῆ, οἷς δεξιόθεν ἰδίᾳ τὰ ἀφαιρεθησόμενα ἐπισυναφθήτωσαν μέρη. Εἶτα δὲ τά τε πηλίκα καὶ τὰ ἀφαιρεθησόμενα μέρη ἐν ὁλικῷ ἰδίᾳ ἀθροιζέσθωσαν κεφαλαίῳ. Ἤδη, τὸ τῶν ἀφαιρετέων μερῶν κεφάλαιον τῷ διαιρετέῳ προςεθήτω κεφαλαίῳ, ὃ δὴ διὰ τοῦ τῶν πηλίκων κεφαλαίου πραγματιωδῶς διαιρεθήτω. Τὸ ἐντεῦθεν οὕτως ἀναδιδόμενον πηλίκον πολλαπλασιασθήτω ἐφεξῆς ἐπὶ τὰ πρῶτα πηλίκα, ἀπὸ δὲ τῶν παραγομένων ἀφαιρείσθωσαν ἰδίᾳ τὰ δοθέντα ἀφαιρετέα μέρη· οἷον.

Α'.

	24		
$A' = \frac{1}{3}$	$24 \times \frac{1}{3}$	$= 8$	— 40
$B' = \frac{1}{4}$	$24 \times \frac{1}{4}$	$= 6$	— 60
$\Gamma' = \frac{1}{6}$	$24 \times \frac{1}{6}$	$= 4$	— 80
$\Delta' = \frac{1}{8}$	$24 \times \frac{1}{8}$	$= 3$	— 100
		21	280. Καν-(τεῦθεν.

$3920 + 280 = 4200$. Ὅθεν,

$4200 : 21 = 200$: Ἐπομένως.

$A' = (200 \times 8) - 40 = 1600 - 40 = 1560$ ἀργ.
$B' = (200 \times 6) - 60 = 1200 - 60 = 1140$ --
$\Gamma' = (200 \times 4) - 80 = 800 - 80 = 720$ --
$\Delta' = (200 \times 3) - 100 = 600 - 100 = 500$ --

3920 ἀργ.

ϛ'. Τέσσαρες διανέμουσιν ἀργύρια 6220 τοιᾷδε συνθήκῃ, ὡς τὸν μὲν Α' $\frac{1}{2}$ σὺν 60 ἀργυρίοις λαβεῖν, τὸν δὲ Β' $\frac{1}{3}$ σὺν 80, τὸν δὲ Γ' $\frac{1}{4}$ σὺν 120, τὸν δὲ Δ' $\frac{1}{5}$ σὺν 160. Πόσον ἕκαςος λήψεται;

ΛΥΣΙΣ.

Τουτὶ τὸ παράδειγμα τῷ προτέρῳ σχεδὸν ἐςὶ παραπλήσιον, πλὴν ἤ, τὰ τῆς πράξεως ἐναντίως χωρεῖ. Εἶτ' οὖν, αἰτείσθω Α' ἀριθμὸς ἐλάχιςος, ἐφ' ὃν τὰ δοθέντα κλάσματα ἀναγόμενα, πηλίκα δώσουσι πρῶτα ὁλοσχερῆ, οἷς περ δεξιόθεν ἐφαρμοσθήμοσθήτωσαν τὰ ἑκάςῳ ἀνήκοντα συναπτέα μέρη. Β'. Τὸ τῶν προςεθησομένων κεφάλαιον ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ κεφαλαίου ἀφαιρεθήτω· τὸ δὲ ὑπόλοιπον διαιρεθήτω Γ'. διὰ τοῦ τῶν πρώτων πηλίκων κεφαλαίου. Δ'. Τὸ ἤδη εὑρεθὲν πηλίκον πολλαπλασιασθήτω ἰδίᾳ διὰ τοῦ πρώτου εὑρεθέντος πηλίκου, καὶ τῷ γινομένῳ, τὸ ἑνὶ ἑκάςῳ δοθὲν συναφθησόμενον, χωρὶς προςεθήτω. οἷον·

	24	Πηλίκα
Α' $= \frac{1}{2}$	$24 \times \frac{1}{2}$	$12 + 60$
Β' $= \frac{1}{3}$	$24 \times \frac{1}{3}$	$8 + 80$
Γ' $= \frac{1}{4}$	$24 \times \frac{1}{4}$	$6 + 120$
Δ' $= \frac{1}{8}$	$24 \times \frac{1}{8}$	$3 + 160$
		$29 \quad 420$

Καὶ $6220 - 420 = 5800$: Κἀντεῦθεν

$5800 : 29 = 200$. Ὅθεν.

Α' $= (200 \times 12) + 60 = 2460$

Β' $= (200 \times 8) + 80 = 1680$

Γ' $= (200 \times 6) + 120 = 1320$

Δ' $= (200 \times 3) + 160 = 760$

6220 ἀργ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 367. Οὐ ξένη δὲ ταύτης καὶ ἡ τῆς Ψευδοῦς Θέσεως Μέθοδος, ἥτις ἐν χρήσει ἐκλαμβάνεσθαι εἴωθεν, ἐφ' ᾧ ὁ αἰτούμενος ἀριθμὸς, δι' ἑ-

τέρου

τέρου τινος ἐν ὑποθέσει μὲν καὶ κατὰ τὸ δοκὲν ληφθέντος, τῇ δὲ περιςάσει καὶ μάλα συνᾴδοντος, ἐξευρίσκοιτο. Οἷον, Τρεῖς ἑταῖροι κατέβαλον ὁμοῦ ἐν τῇ Κληρωτίδι (Λοταρίᾳ) ἀριθμόν τινα χρημάτων, ἀπενέγκαντο δ' ἐντεῦθεν κέρδος 20000 ἀργυρίων, ὃ δὴ ἀναλόγως τῷ ὑφ' ἑκάςου καταβληθέντι ἔγνωσαν διανεῖμαι. Ἔςιν ἀλλ' ἂν τὸ ὑπὸ τοῦ δευτέρου καταβληθὲν διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τοῦ τρίτου, τὸ δ' ὑπὸ τοῦ πρώτου διπλάσιον τῆς ἐξ ἀμφοῖν ἅμα καταβληθείσης ποσότητος. Πηλίκον ἄρα τὸ ἑνὶ ἑκάςῳ προσηκῆκον ἔςαι μέρος;

Θετέον δὴ ἐξ ὑποθέσεως τὸ ὑπὸ τοῦ τρίτου καταβληθὲν εἶναι 2, τὸ ὑπὸ τοῦ δευτέρου 4, καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ πρώτου 12. Ἔςαι τοίνυν,

$$18 : 20000 = \left\{ \begin{array}{l} 2 : \varphi = 2222\frac{2}{9} \\ 4 : \chi = 4444\frac{4}{9} \\ 12 : \psi = \underline{13333\frac{3}{9}} \\ \qquad\qquad\quad 20000 \end{array} \right.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ϛ'

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΗΣ ΣΥΜΜΙΞΕΩΣ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΑΣΕΩΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 368. Συμμίξεως Μέθοδος ἐςὶ Κανὼν, δι' οὗ διάφοραι τῶν ὀφειλομένων συμμίγνυσθαι ἀναλογίαι πρὸς ἀλλήλας παρεξετάζονται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 369. Οἷον ἀργυρίου δοκίμου καὶ κιβδήλου, οἴνου διαφόρων εἰδῶν, σίτου διαφόρου τιμήματος, μετάλλων διαφόρου δοκιμασίας ἀκριβοῦς τε καὶ παρασήμου, κ. τ. λ.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 370. Τὴν μὲν ἐν τῶν στερεῶν καὶ τῷ πυρὶ χωνευτῶν εἰς ἓν συμμιγήν, **Σύμμιξιν** ἢ **Σύμμιγμα** κλητέον· τὴν δὲ τῶν ὑγρῶν, **Σύγκρασιν**, ἢ **Σύγκραμα**.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 371. Συμμίξεως **Κανὼν Ὀρθὸς** ἀκούει, ἡ τὸ μέσον ἐκτίμημα μίγματος οἱουδηποτοῦν προσευρεῖν διδάσκουσα Μέθοδος, ἡνίκα τὰ τούτου συντιθέντα μόρια ἐν λόγῳ εἰσὶ δεδομένῳ, καὶ μὴν καὶ τὸ τούτων ἐκτίμημα ἔγνωσται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 372. **Πλάγιος Κανὼν** Συμμίξεως ἐστὶ Μέθοδος, δι᾽ ἧς, δοθέντος τοῦ μέσου ἐκτιμήματος τοῦ μετὰ τὴν οἱανδηποτοῦν συμμιγὴν ἐκληφθησομένου, ἔτι δὲ καὶ τοῦ τῶν συμμιχθησομένων διαφόρου ἐκτιμήματος χωρίς, αἰτεῖται προσδιορίσαι τὸν τῶν μορίων ἀριθμόν, ἐξ ὧν ἡ Σύμμιξις συστήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 373. Ἐν τῇ τῆς Συμμίξεως τοίνυν Μεθόδῳ

καλῶς

σότητος, εὑρεῖν τὴν τῶν μιχθησομένων ποσότητα.

ΛΥΣΙΣ.

Πρὸς τὴν τοῦ παρόντος Προβλήματος λύσιν, ἀκριβῶς οἱ ἐφεξῆς κανόνες παρατηρείσθωσαν. Α.' Τὸ τοῦ μικτοῦ δοθὲν ὁλοσχερὲς ἐκτίμημα, διαιρεθήτω διὰ τῆς τοῦ μικτοῦ δοθείσης ποσότητος. Β.' Τὸ ἐκ ταύτης τῆς διαιρέσεως ἀναφυόμενον πηλίκον, τὸ μέσον δώσει τοῦ μικτοῦ ἐκτίμημα, τῷ οἰκείῳ ἐγγραφόμενον τόπῳ. Εἶθ' οὕτω Γ.' Γραφήτωσαν ἐπαλλήλως τά τε τῶν τιμιωτέρων καὶ τῶν κιβδηλοτέρων ἐκτιμήματα· καὶ λαμβανομένου Δ.' τοῦ μεταξὺ τῶν καθαρωτέρων τε καὶ κιβδηλοτέρων ἐκτιμημάτων μέσε ἐκτιμήματος, εὑρεθήτωσαν αἱ τούτων διαφοραί. Ἔσχατον δὲ Ε.' τῆς ἀναλογίας διαταχθείσης, προσδιορισθήτω πόσον ἐξ ἑκάστου δεῖ λαβεῖν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α.' Χρυσοχόος παρασκευάσαι ἐθέλει μικτόν τι, 33 μάρκας σαθμίζον, καὶ περιέχον 313½ ἡμιουγκίας ἀργύρου. Παρασκευάζει δὲ τοῦτο ἐκ τριπλοῦ ἀργύρου εἴδους Α, Β, Γ, οὕτως, ὥστε τὴν μὲν μάρκαν Α τιμᾶσθαι 12 ἡμιουγκιῶν, τὴν δὲ Β 7, τὴν τε Γ 6. Πόσας μάρκας ἐξ ἑκάστου εἴδους λαβεῖν ὀφείλει;

ΛΥΣΙΣ.

Μέσ. ἐκτ.	Ἐκτ. τῶν μιχθ.	Μέσ. ἐκτ.	Διαφ.		
$313\frac{1}{2} : 33$	12	- - - 12	$12 - 9\frac{1}{2}$	=	3
$= 9\frac{1}{2}$	7, 6	- - - $6\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2} - 6\frac{1}{2}$	=	$2\frac{1}{2}$

$$\text{Ἤδη } 5\tfrac{1}{2} : 33 = \begin{cases} 3 : \chi = \frac{198}{11} = 18 \\ 2\tfrac{1}{2} = \frac{165}{22} = 7\tfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ἐςι δὲ $\frac{198}{11} = 18$, καὶ $\frac{165}{22} = 7\frac{1}{2}$. Καὶ γάρ.

$$\begin{array}{r} 12 \times 18 = 216 \\ 7 \times 7\frac{1}{2} = 52\frac{1}{2} \\ 6 \times 7\frac{1}{2} = 45 \\ \hline 313\frac{1}{2} \end{array}$$

Καὶ $313\frac{1}{2} : 33 = 9\frac{1}{2}$ ἡμιουγκίαις.

Β. Κάδων 6 χιλιάδων ἀργυρίων τιμώμενος, καὶ ἐκ τεσσάρων μικτῶν: Α, Β, Γ, Δ, κατασκευασθεὶς, 84 κεντηνάρια εὑρέθη ςαθμίζων. Ἐτιμᾶτο δὲ τοῦ μὲν Α μικτοῦ τὸ κεντηνάριον 48 ἀργυρίων, τοῦ δὲ Β 32, τοῦ δὲ Γ 82, τοῦ δὲ Δ 78. Πόσα ἂν κεντηνάρια ἐξ ἑκάςου τῶν μικτῶν εἴληπται;

Μέσ. ἐκτ.	Ἐκτ. τῶν μιχθ.	Μέσ. ἐκτ.	Διαφ.		
$\frac{6000}{84}$	82, 78	- - - 80	$80 - 71\frac{3}{7}$	=	$31\frac{3}{7}$
$= 71\frac{3}{7}$	48, 32	- - - 40	$71\frac{3}{7} - 40$	=	$8\frac{4}{7}$

Ἤδη

$$\text{Ἤδη } 40 : 84 = \begin{cases} 31\tfrac{3}{7} : \varphi = \dfrac{84 \times 220}{40 \times 7} = 66 \\[2ex] 8\tfrac{4}{7} : \chi = \dfrac{84 \times 60}{40 \times 7} = 18. \end{cases}$$

Καὶ $66 : 2 = 33$, καὶ μὴν καὶ $18 : 2 = 9$. Καὶ γὰρ

$$\begin{array}{rcr} 82 \times 33 & = & 2706 \\ 78 \times 33 & = & 2574 \\ 48 \times 9 & = & 432 \\ 32 \times 9 & = & 288 \\ \hline & & 6000 \text{ ἀργ.} \end{array}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ.'

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΡΕΕΣΙΑΝΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ, ΤΗΣ ΑΛΛΩΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΗΣ ΑΛΥΣΟΥ ΚΑΛΟΥΜΕΝΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 379. **Μέθοδος Ῥεεσιανὴ** ἐςὶν ἐπίτομος Μέθοδος, ὑπὸ Ῥεεσίου εὑρεθεῖσα, πρὸς ἐπίλυσιν πάντων τῶν τῆς Χρυσῆς Μεθόδου εἰδῶν.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Α.'

§. 380. Αἱ τῆς Μεθόδου ταύτης ἰδιότητές εἰσι· Α.' ἵνα πολλοὶ τῶν ὅρων, οἵτινες ἐν τῇ Χρυσῇ Μεθόδῳ πλείους ἀπαιτοῦσιν ἀναλογίας, ἀλληλένδετοι μοναδικῇ διατάξει κατ' ἐπιτομὴν ὑπολογίζεσθαι ἔχωσι· Β.' ὅπως ὁ τῶν κλασμάτων ὑπολογισμὸς εὐχερέςερον δι' αὐτῆς ἐκτελῆται.

καλῶς παρατηρητέον τό, τε ὅλον τῦ μίγματος ἐκτίμημα, καὶ τὸ μέσον, τὸ πρὸς σύμμιξιν ληφθησόμενον. Ὅλον τῦ μίγματος ἐκτίμημά ἐςι τὸ μετὰ τὴν σύμμιξιν τὸν σύμπαντα ὄγκον προσδιορίζον. Μέσον δὲ τῦ μίγματος ἐκτίμημα, τὸ μετὰ τὴν προσδιωρισμένην σύμμιξιν, τὸ τῦ μέρυς ἐκτίμημα προσδιορίζον. Καλεῖται δὲ μέσον, ἐφ' ὅσον μεταξὺ τῶν ἐκτιμημάτων, τῶν, ἃ ὀφείλει συμμίγνεσθαι, μεσάζει.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 374. Δοθείσης τῆς ποσότητος καὶ τῦ ἐκτιμήματος δυοῖν μικτῶν, εὑρεῖν τὸ μέσον τύτων ἐκτίμημα.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐν γένει Α΄, ἀχθήτωσαν χωρὶς ἐπὶ τὰ ἴδια αὐτῶν ἐκτιμήματα, ἕκαςαι τῶν μιχθησομένων ποσότητες. Β΄ Τὰ ἐντεῦθεν ἀναδιδόμενα γινόμενα, ἐν ἑνὶ κεφαλαίῳ ἀθροισθήτωσαν, ὅ, δὴ τὸ τῶν ἐκτιμημάτων ἔςαι κεφάλαιον. Γ΄ Αἱ μιχθησόμεναι ποσότητες ἐν ἑνὶ ὡσαύτως συναφθήτωσαν κεφαλαίῳ, ἵν' ὕτω τὸ τῶν μιχθησομένων σχῶμεν κεφάλαιον. Ἔσχατον δὲ, γενέσθω Δ΄ ἡ ἐφεξῆς ἀναλογία: Τὸ τῶν μιχθησομένων κεφάλαιον ἕξει πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν ἐκτιμημάτων, ὡς τὸ ἐν τοῦ μικτοῦ μέρος πρὸς τὸ ἑαυτοῦ μέσον ἐκτίμημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Μυλωθρός τις συνέμιξε 4 κεντηνάρια ἀλεύρου, οὗ τινος τὸ ἓν κεντηνάριον 9 τιμᾶται ἀργυρίων, σὺν 5 κεντηναρίοις ἑτέρου ἀλεύρου, 5 ἀργυρίων τὸ κεντηνάριον τιμωμένου. Πόσου τιμηθήσεται τὸ ἓν τοῦ τοιούτου μίγματος κεντηνάριον;

ΛΥΣΙΣ.

Κεντ.		Ἀργ.		Γιν.	
4	×	9	=	36	
5	×	5	=	25	
9				61	Ὅθεν

Κεντ. $9 : 61 =$ Κεντ. $1 : y = 6\frac{7}{9}$ ἀργ. Καὶ γὰρ $9 \times 6\frac{7}{9} = 61$.

Β'. Πανδοχεύς τις ὠνήσατο 50 στάμνους οἴνου, καὶ 65 στάμνους ἐξ ἑτέρου εἴδους· ἡ ἐκ τοῦ πρώτου τοῦ οἴνου εἴδους στάμνος τιμᾶται 20 ἀργυρίων, ἡ δ' ἐκ τοῦ ἑτέρου 15. Τῆς ἐξ ἀμφοῖν τῶν εἰδῶν συγκράσεως γενομένης πόσου ἡ στάμνος τιμηθήσεται;

Στάμν.		Ἀργ.		Γιν.	
50	×	20	=	1000	
65	×	15	=	975	
115				1875.	Ὅθεν.

$115 : 1975 = 1 : x = 17\frac{4}{23}$ ἀργ.

Γ'.

Γ. Χρυσοχόος συνέμιξε 12 μάρκας ἀργύρȣ, ὃ τινος ἡ μία $10\frac{1}{2}$ ἡμισγκίαις ἰσοδυναμεῖ, σὺν 16 μάρκαις ἑτέρȣ, ὃ τινος ἡ μία μάρκας $12\frac{1}{4}$ σαθμίζει. Πόσων ἡμισγκιῶν τιμηθήσεται ἡ μία μάρκα μετὰ τὴν συμμιγήν;

Μαρκ.		Ἡμισγκ.		Γινομ.	
12	×	$10\frac{1}{2}$	=	126	
16	×	$12\frac{1}{4}$	=	196	
28				322	Τοίνυν

$28 : 322 = 1 : \varphi = 11\frac{1}{2}$ Ἡμισγκ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 375. **Δοθέντος τȣ̃ μέσȣ ἐκτιμήματος Μικτȣ̃ τινος, καί γε τȣ̃ ἐκτιμήματος δυοῖν ἑτέρων μιχθησομένων, εὑρεῖν τὴν τῶν μιχθησομένων ποσότητα.**

ΛΥΣΙΣ.

Ἐὰν τὸ μέσον τȣ̃ μικτȣ̃ ἐκτίμημα, καὶ τὸ ἐκτίμημα ἑκάςȣ τῶν μιχθησομένων λοιπῶν δυοῖν, δεδομένα ὦσιν, ὥδέ πως εὑρεθήσονται, πόσον ἐξ ἑνὸς ἑκάςȣ ληπτέον πρὸς σύγκρασιν, ἢ σύμμιξιν. Γραφήτω *Α.* τὸ δοθὲν μέσον τȣ̃ μικτȣ̃ ἐκτίμημα· εἶτα *Β.* γραφήτωσαν ὑπαλλήλως τὰ τῶν μιχθησομένων ἐκτιμήματα. *Γ.* Ἀπὸ τȣ̃ ἐκτιμήματος τȣ̃ καθαρωτέρȣ μιχθησομένȣ ἀφαιρεθήτω τὸ μέσον ἐκτίμητίμημα, ἡ δὲ διαφορὰ γραφήτω ἀπέναντι τῦ ἐκτιμήματος τῦ κιβδηλοτέρυ μιχθησομένυ. Δ.' Ἀφαιρεθήτω αὖθις ἀπὸ τῦ μέσυ τῦ μικτῦ ἐκτιμήματος τὸ τῦ κιβδηλοτέρυ μιχθησομένυ ἐκτίμημα. Αἱ ἑτωσὶ ληφθησόμεναι διαφοραὶ σημανῦσι, πόσον ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μιχθησομένων ληπτέον ἔςαι. Ἐὰν δὲ Ε.' ἡ ὡρισμένη τῦ μικτῦ ποσότης αἰτῆται, διαταχθήτω ἀναλογία, ἐν ᾗ πρῶτος μὲν ὅρος ἔςαι τὸ τῶν εὑρεθεισῶν διαφορῶν κεφάλαιον: δεύτερος δὲ ἡ αἰτημένη ὡρισμένη τῦ μικτῦ ποσότης· τρίτος δὲ αἱ ἰδίᾳ εὑρεθεῖσαι ἕκαςαι διαφοραί· καὶ τέταρτος, ὁ αἰτύμενος ἔςαι ὅρος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α.' Ἡ λίτρα μιχθησομένυ τινὸς τιμιωτέρυ τιμᾶται ἀργυρίων 10, τῦ δὲ κιβδηλοτέρυ 5. Γινομένης τῆς ἐξ ἀμφοῖν μίξεως, δέον τὴν μίαν λίτραν ἀπεμποληθῆναι 8 ἀργυρίων. Πόσον ἐξ ἀμφοτέρων ληπτέον ἔςαι;

ΛΥΣΙΣ.

Μέσον ἐκτίμημα	Ἐκτίμημα τῶν μιχθησομένων
8	5 κιβδηλότερον
	10 τιμιώτερον

Διαφορά.		Ποσότητες τῶν μιχθησομένων
8 — 5	=	2 Λίτρ. ἐκ τῦ κιβδηλ.
10 — 8	=	3 Λίτρ. ἐκ τῦ τιμιωτ.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γάρ εἰσι 5 λίτραι τῦ ὅλυ μικτῦ, ὧν μία τιμηθήσεται 8 ἀργυρίων, ἔσαι $8 \times 5 = 40$ ἀργυρίοις· καὶ $40 : 5 = 8$. Τοίνυν $5 \times 2 + 10 \times 3 = 10 + 30 = 40$· κἀντεῦθεν $\frac{40}{5} = 8$ ἀργ. $=$ τῷ μέσῳ ἐκτιμήματι τῆς μιᾶς λίτρας.

Β.′ Πανδοχεύς τις ὠνήσατο οἶνον, ὅ τινος ἡ ςάμνος 8 τιμᾶται ἀργυρίων· βέλεται δὲ τῦτον ὕδατι ὅτω συγκεράσαι, ὡς μετὰ τὴν σύγκρασιν 5 ἀργυρίων τὴν ςάμνον ἀποδῦναι ἔχειν. Πόσον δὲ ἀμφοῖν τῶν ὑγρῶν δεῖ αὐτὸν λαβεῖν;

Μέσ. ἐκτ.	Ἐκτίμημα τῶν μιχθησομένων
5	0 ὕδωρ.
	8 οἶνος

Διαφορ.		Ποσότ. τῶν μιχθησ.
5 — 0	=	3 ςάμν. ἐκ τῦ ὕδατος·
8 — 5	=	5 ςάμν. ἐκ τῦ οἴνυ.

Τὸ γὰρ ὁλικὸν ἐκτίμημα ἐςὶν $= 8 \times 5 = 40$ ἀργυρίοις. Κἀντεῦθεν τὸ μέσον τῆς μιᾶς ςάμνυ ἐκτίμημα ἔσαι $= \frac{40}{8} = 5$ ἀργυρίοις.

Γ.′ Οἰνοπώλης, οἶνον, ὅ τινος ὁ χοεὺς 24 ὀβολῶν τιμᾶται, ἑτέρῳ συνεκέρασεν οἴνῳ, 12 ὀβολῶν τὸν χοέα τιμωμένῳ. Δέον τοίνυν τὸ ὅλον κρᾶμα 416 χοέας ἀποτελέσαι, ὧν ἕκαςον 16 ὀβο-

 λῶν

λῶν πωλῆσαι βέλεται. Πόσον δὲ ἀμφοῖν τῶν τε οἴνε εἰδῶν λήψεται;

Μέσ. ἐκτ.	Ἐκτ. τῶν μιχθ.
16	24 παλαιοτέρε
	12 νεωτέρε

Διαφορ.	Ποσότ. τῶν μιχθησ.
24 — 16 =	4 ἐκ τε παλαιοτέρε.
16 — 12 =	8 ἐκ τε νεωτέρε.

Ἤδη, κατὰ τὰ ἐν τῷ Ε΄ Κανόνι διαταχθέντα (§. 375.), ἔςαι $8+4=12$. Τοίνυν.

$$12 : 416 = \begin{cases} 8 : \varphi = 277\tfrac{1}{3} \text{ χοεῦσιν ἐκ τε νεωτέρε·} \\ 4 : \chi = 138\tfrac{2}{3} \text{ χοεῦσιν ἐκ τε παλαιοτέρε.} \end{cases}$$

Ἔςι γὰρ $277\tfrac{1}{3} + 138\tfrac{2}{3} = 416$, καὶ $416 \times 16 = 6656$.
Ἔςι δ' ὡσαύτως $277\tfrac{1}{3} \times 12 + 138\tfrac{2}{3} \times 24 = 6656$.

Δ΄. Χρυσεργός τις συμμίξαι ἐθέλει δύο ἀργύρε τμήματα· τε μὲν ἡ μάρκα 8 τιμᾶται ἡμιωγκιῶν, τε δὲ 11. τὸ δ' ἐντεῦθεν ἐκπῖπτον μίγμα δέον ςαθμίσαι μάρκας 24, ὧν ἑκάςη 9 ἡμιωγκιῶν τιμηθήσεται. Πόσας μάρκας ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τεμμαχίων λήψεται;

Μέσ.

Μέσ. ἐκτ.	Ἐκτίμ. τῶν μιχθ.
9	11 τιμιωτ.
	8 κίβδηλ.

Διαφορ.		Ποσ. τῶν μιχθ.
11 — 9	=	1 ἐκ τῦ τιμιωτ.
9 8	=	2 ἐκ τῦ κιβδηλ.

Ἐςι δὲ $1 + 2 = 3$· Τοίνυν.

$$3 : 24 = \begin{cases} 1 : \chi = 8 \text{ ἐκ τῦ τιμιωτέρυ·} \\ 2 : \psi = 16 \text{ ἐκ τῦ κιβδηλοτέρυ.} \end{cases}$$

Καὶ γὰρ $8 + 16 = 24$, καὶ $24 \times 9 = 216$. Ἐςι δ' ὡσαύτως $8 \times 11 + 16 \times 8 = 216$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 376. **Δοθέντος τῦ μέσυ ἐκτιμήματος Μικτῦ τινος, καί γε τῦ ἐκτιμήματος πλειόνων, ἢ δυοῖν, μιχθησομένων, εὑρεῖν τὴν τῶν μιχθησομένων ποσότητα**

ΛΥΣΙΣ.

Ὁπηνίκα δυοῖν πλείω τύχωσι τὰ εἰς μῖξιν ληφθησόμενα, τεθήτω Α.' τὸ μέσον τῦ μικτῦ δοθὲν ἐκτίμημα, καὶ Β.' τὰ τῶν μιχθησομένων ἐκτιμήματα. Γ.' Ἐκ τε τῶν τιμιωτέρων, τῶν τὸ μέσον δηλαδὴ ὑπερεχόντων τῦ μικτῦ ἐκτίμημα, κἀκ τῶν κιβδηλοτέρων, τῶν ἀπὸ τῦ μέσυ δοθέντος τῦ μι-

κτῦ

κτῦ ἐκτιμήματος ἐλλειπόντων, ληφθήτω τὸ μέσον ἐκτίμημα. Δ.' Ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῦ μέσυ τῶν τιμιωτέρων μιχθησομένων ἐκτιμήματος τὸ δοθὲν μέσον ἐκτίμημα, ἥ τε διαφορὰ κατέναντι τῶν κιβδηλοτέρων μιχθησομένων γραφήτω. Ε.' Ἀπὸ τῦ δοθέντος μέσυ τῦ μικτῦ ἐκτιμήματος ἀφαιρεθήτω τὸ μέσον τῶν πρὸς μῖξιν κιβδηλοτέρων ἐκτίμημα, ἥ τε διαφορὰ ἀπεναντίον τῶν πρὸς μῖξιν τιμιωτέρων γραφήτω. Ϛ.' Αἱ εὑρεθεῖσαι διαφοραὶ διαιρεθήτωσαν διὰ τῦ ἀριθμῦ τῶν ἀντιςοιχύντων μιχθησομένων· τὰ ὅτως ἐκκύπτοντα πηλίκα σημαινῦσι, πόσον ἐξ ἑκάςυ τῶν μιχθησομένων ληπτέον ἐςαι. Ἀλλ' εἴπερ Ζ.' ἡ προσδιωρισμένη τῦ μικτῦ ζητοῖτο ποσότης. διαταχθήτω τηνικαῦτα ἀναλογία, ἐν ᾗ τὸν μὲν πρῶτον χῶρον ἐφέξει τὸ τῶν εὑρεθεισῶν διαφορῶν κεφάλαιον, τὸν δὲ δεύτερον ἡ αἰτηθεῖσα προσδιωρισμένη τῦ μικτῦ ποσότης. τρίτος δὲ ὅρος, ἑκάςη τῶν διαφορῶν ἰδίᾳ ἔςαι· τὸ δ' ἐκ τῶν μέσων γινόμενον διὰ τῦ πρώτυ ὅρυ διαιρέμενον, τὸν τέταρτον ὅρον ἀναδώσει. Η.' Τὸ ὅτωσὶ ἐν ἑκάςῃ ἀναλογίᾳ εὑρεθὲν πηλίκον, διαιρεθήτω διὰ τῦ τῶν μιχθησομένων ἀριθμῦ, τῶν ἀντιςοιχύντων τὸ ἐσχάτως ἐκ τῆς διαιρέσεως ληφθησόμενον νέον πηλίκον, δηλώσει, πόσον ἔκ τε τῦ τιμιωτέρυ καὶ τῦ κιβδηλοτέρυ ληπτέον ἐςαι.

ΠΑ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α. Μιχθῆναι δέον 5 διάφορα εἴδη *Α*, *Β*, *Γ*, *Δ*, *Ε*, οὕτως ὥςε τὸ ὅλον μικτὸν 50 λίτρας ςαθμίσαι. *Α* τιμᾶται 18 ἀργυρίων, *Β* 16, *Γ* 6, *Δ* 4, *Ε* 2. Ἡ τοῦ μικτοῦ λίτρα τιμηθήσεται ἀργυρίων 8. Πόσον τοίνυν ἐξ ἑκάςου εἴδους ληπτέον;

ΛΥΣΙΣ.

Μέσ. ἐκτ.	Ἐκτ. τῶν μιχθ.	Μεσ. ἐκτ.	Διαφ.	
8	18 16	17	17 — 18 =	4
	6 4 2	4	8 — 4 =	9

Κἀντεῦθεν $\frac{4}{2} = 2$ ἐξ ἑκάςου τῶν τιμιωτέρων, καὶ $\frac{9}{3} = 3$ ἐξ ἑκάςου τῶν κιβδηλοτέρων. Δέον δὲ 50 εἶναι λίτρας· ὅθεν

$$13 : 50 = \begin{cases} 4 : \chi = 15\frac{5}{13} \\ 9 : \psi = 34\frac{8}{13} \end{cases}$$

Κἀντεῦθεν $15\frac{5}{13} : 2 = 7\frac{9}{13}$. Καὶ $34\frac{8}{13} : 3 = 11\frac{7}{13}$.

ΟΙ ΒΑΣΑΝΟΣ.

Ὁ εὑρεθεὶς τῶν λιτρῶν ἀριθμὸς πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ ἀντιςοιχοῦν τοῦ μικτοῦ δοθὲν ἐκτίμημα,

τὰ

τὰ δὲ γινόμενα ἐν ἑνὶ συναφθήτωσαν κεφαλαίῳ· τοῦτο δ' αὖ διὰ τῆς αἰτουμένης τοῦ μικτοῦ ποσότητος διαιρεθὲν, τὸ ὑπὲρ τῆς μιᾶς λίτρας μέσον ἀναδώσει ἐκτίμημα 8. Οἷον·

$$7\tfrac{9}{13} \times 18 = 126 + \tfrac{162}{13}$$
$$7\tfrac{9}{13} \times 16 = 112 + \tfrac{144}{13}$$
$$11\tfrac{7}{13} \times 6 = 66 + \tfrac{42}{13}$$
$$11\tfrac{7}{13} \times 4 = 44 + \tfrac{28}{13}$$
$$11\tfrac{7}{13} \times 2 = 22 + \tfrac{14}{13}$$
$$370 + \tfrac{390}{13} = 370 + 30$$

$= 400$· καὶ $\frac{400}{50} = \frac{40}{5} = 8 =$ τῷ μέσῳ ἐκτιμήματι.

Β.′ Χρυσοχόος ἄργυρον διαφόρυ ἐκτιμήματος, ὅτω βέλεται συμμίξαι, ὡς τὸν ὅλον τῦ μίγματος ὄγκον 56 μάρκας ςαθμίζειν. Ὁ ἄργυρος *Α* τιμᾶται 13 ἡμιυγκιῶν, ὁ *Β* $9\frac{1}{2}$, ὁ *Γ* $11\frac{1}{4}$. Τὸ τῦ μικτῦ ἐκτίμημα δέον εἶναι 12 ἡμιυγκιῶν. Πόσον ἐξ ἑνὸς ἑκάςυ λήψεται;

Μέσ. ἐκτ.	Ἐκτ. τῶν μιχθ.	Μέσ. ἐκτ.	Διαφ.		
	13	— — 13	15 — 12	=	$1\frac{5}{8}$
12	$\left.\begin{matrix}11\frac{1}{4}\\ 9\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$	— — $10\frac{3}{8}$	12 — $10\frac{3}{8}$	=	1

Ἐπεὶ δ᾽ αἰτῦνται 56 μάρκαι, ἔςαι·

$9\frac{5}{8}$

$$2\tfrac{5}{8} : 56 = \begin{cases} 1\tfrac{5}{8} : \varphi = 34\tfrac{2}{3} \text{ μάρκ. ἐκ τῦ τιμιωτ.} \\ 1 : \chi = 21\tfrac{1}{3} \text{ μάρκ. ἐκ τῶν κιβδηλ.} \end{cases}$$

Καὶ γὰρ $13 \times 34\tfrac{2}{3} = 442 + \frac{26}{3}$

$11\tfrac{1}{4} \times 10\tfrac{2}{3} = 120$ - -

$9\tfrac{1}{2} \times 10\tfrac{2}{3} = 101 + \frac{1}{3}$

$663 + \frac{27}{3} = 663 + 9$

$= 672$, καὶ $\frac{672}{56} = 12$ ἡμιυγκίαις ὑπὲρ ἑκάςης μάρκας.

Γ.' Οἰνοπώλης τις ἔχει τρία εἴδη οἴνυ, ἐκ μὲν τῦ εἴδυς Α ὠνήσατο τὴν ςάμνον 12 ἀργυρίων, ἐκ δὲ τῦ Β 14, ἐκ δὲ τῦ Γ 25. Βέλεται δ' ἐκ τύτων κρᾶμα τι λαβεῖν 15 ςάμνων, ὧν ἑκάςη τιμηθήσεται ἀργυρίων 18. Πόσυς ςάμνυς ἐξ ἑκάςυ λήψεται εἴδυς;

Μέσ. ἐκτ.	Ἐκτ. τῶν μιχθ.	Ἐκτ. μέσ	Διαφ.		
18	25	- - - 25	25 — 18	=	5
	14, 12	- - - 13	18 — 13	=	7

Καὶ $\frac{5}{12} = 5$ ἐκ τῦ παλαιοτέρυ, $\frac{7}{12} = 5\tfrac{1}{4}$ ἐκ τῦ νεωτέρυ. Αἰτῦνται δὲ 15 ςάμνοι, ἄρα·.

$$12 : 15 = \left| \begin{array}{l} 5 : \varphi = 6\tfrac{1}{4}. \\ \\ 7 : \chi = 8\tfrac{3}{4}. \end{array} \right.$$

Καὶ γὰρ $25 \times 6\tfrac{1}{4} = 150 + \tfrac{25}{4}$.

$$14 \times 4\tfrac{3}{8} = 56 + \tfrac{21}{4}.$$

$$12 \times 4\tfrac{3}{8} = \underline{48 + \tfrac{18}{4}}.$$

$$254 + \tfrac{64}{4} = 254 + 16 =$$

270. *Καὶ* $\frac{270}{15} = 18$ *τῷ δοθέντι μέσῳ ἐκτιμήματι.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 377. *Δοθέντος τοῦ μέσου τοῦ Μικτοῦ ἐκτιμήματος καὶ τοῦ τῶν μιχθησομένων ἐκτιμήματος, εὑρεῖν τὴν τῶν μιχθησομένων ποσότητα, εἴπερ τις οὐκ ἐθέλει ἴσην ἐκ τῶν μιχθησομένων λαβεῖν ποσότητα.*

ΛΥΣΙΣ.

Ὁπηνίκα διαφόρων τιμῶν δίδονται μιχθησόμενα, ὧν αἱ ποσότητες ἰδίως εὑρετέαι πρόκεινται τοιᾷ δὲ συνθήκῃ, ὡς ἐκ προσδιωρισμένου μικτοῦ τινος, διπλασίαν, ἢ τριπλασίαν, ἢ ὁποιανοῦν ἄλλην ζητεῖσθαι ποσότητα, οἱ ἐφεξῆς παρατηρηθήτωσαν κανόνες. Α.ʹ Γραφήτω τὸ δοθὲν μέσον τοῦ μικτοῦ ἐκτίμημα. Γραφήτωσαν εἶτα Β.ʹ τὰ τῶν μιχθη χθησομένων ἐκτιμήματα, καὶ δὴ τὸ ἐκτίμημα τῦ ἐν αἰτήσει μιχθησομένυ τοσάκις τεθήτω, ὁσάκις τὸ ἐκείνυ πολλαπλῦν ζητεῖται. Ληφθήτω Γ.' μεταξὺ τῶν τε τιμιωτέρων καὶ τῶν κιβδηλοτέρων μιχθησομένων τὸ μέσον ἐκτίμημα, καὶ σημειωθήτωσαν Δ.' αἱ διαφοραί. Ἐὰν δὲ Ε.' ἡ ὡρισμένη τῦ μικτῦ ζητῆται ποσότης, προσδιωρισθήτω διὰ τῆς ὀρθῶς διατεταγμένης ἀναλογίας, πόσον ἐξ ἑκάςυ τῶν μιχθησομένων ληπτέον ἐςαι. Οἷον ἐν παραδείγματι.

Διάφορα οἴνυ εἴδη ἀναμικτέα πρόκεινται ὕτως, ὥςε τὸ ὅλον κρᾶμα 50 ςάμνυς ἀποτελέσαι, ὧν ἑκάςη 8 ἀργυρίων τιμηθήσεται. Πρὸ δὲ τῆς ἀναμίξεως ἡ τῦ οἴνυ Α ςάμνος 2 ἐτιμᾶτο ἀργυρίων, ἡ τῦ οἴνυ Β 4, ἡ τῦ Γ 6, ἡ τῦ Δ 16, ἥ τε τῦ Ε 18· αἰτεῖται δὲ συνάμει ἐκ τῦ οἴνυ Ε τὸ διπλάσιον ληφθῆναι, ἤπερ ἐκ τῦ οἴνυ Δ. Πόσον ἐξ ἑκάςυ ληφθήσεται εἴδυς;

ΛΥΣΙΣ.

Μέσ. ἐκτ.	Ἐκτ. τῶν μιχθ.	Μέσ. ἐκτ.	Διαφορ.		
8	18, 18, 16	17½	17½ — 8	=	4
	6, 4, 2	4	8 — 4	=	9½

Φ Καὶ

Καὶ $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, $9\frac{1}{3} : 3 = 3\frac{1}{9}$· *῞Ηδη*·

$$13\tfrac{1}{3} : 50 = \begin{cases} 4 : \varphi \\ 9\tfrac{1}{3} : \chi \end{cases} \text{εἴτ' οὖν } \tfrac{40}{3} : 50 = \begin{cases} \tfrac{12}{3} : \varphi \\ \tfrac{28}{3} : \chi \end{cases}$$

$$\text{Εἴτ' οὖν } 40 : 50 = \begin{cases} 12 : \varphi = 15 \cdot \\ 28 : \chi = 35. \end{cases}$$

Καὶ $15 : 3 = 5$ *ἐκ τοῦ παλαιοτέρου*, $35 : 3 = 11\frac{2}{3}$ *ἐκ τοῦ νεωτέρου*. *Καὶ γάρ*.

$$\begin{array}{rcll} 18 \times 5 & = & 90 & \text{ἀργ.} \\ 18 \times 5 & = & 90 & — \end{array} \Bigg\} \text{ὅτι τὸ διπλοῦν αἰτεῖται.}$$

$$\begin{array}{rcll} 16 \times 5 & = & 80 & — \\ 6 \times 11\frac{2}{3} & = & 70 & — \\ 4 \times 11\frac{2}{3} & = & 46\frac{2}{3} & — \\ 2 \times 11\frac{2}{3} & = & \underline{23\frac{1}{3}} & — \\ & & 400 & \text{ἀργ.} \end{array}$$

Κἀντεῦθεν $400 : 50 = 8$ *ἀργ*. *῞Οθεν ἐκ μὲν τοῦ παλαιοτέρου οἴνου, τοῦ 18 τιμωμένου ἀργυρίων, 10 ληφθήσονται ςάμνοι, τὸ διπλάσιον δηλαδὴ τῶν 5, τῶν ἐκ τοῦ 16 ἀργυρίων τιμωμένου οἴνου. ᾿Εξ ἑκάςου δὲ τῶν τοῦ νεωτέρου εἰδῶν ςάμνοι 11* $\frac{2}{3}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 378 Δοθέντος τοῦ τῶν μιχθησομένων ἐκτιμήματος, τοῦ ὁλοσχεροῦς ἐκτιμήματος, καὶ τῆς τοῦ μικτοῦ ποσότη-

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄

§. 381. *Γενικῶς μὲν τοίγε οἱ ἐν τῇ Μεθόδῳ ταύτῃ προσπίπτοντες ὅροι διὰ δυεῖν εὐθυγράμμων σηλῶν, ὕτω διανέμονται, ὥςε ἐν μὲν τῇ ἀριςερᾷ τὰς πρὸς τὸν πρῶτον καὶ τέταρτον τῆς χρυσῆς Μεθόδε ὅρον ἀνήκοντας· ἐν δὲ τῇ δεξιᾷ τῇ πρὸς τὸν δεύτερον καὶ τρίτον. Καλεῖται δὲ ἡ μὲν ἀριςερὰ σήλη* Διαιρῦσα, *ἡ δὲ δεξιὰ* Διαιρέτεα. *Οἱονδήποτῦν δὲ Πρόβλημα δύω τελάχιςον μέρη ἐμπεριείληφε, τὴν ζήτησιν δηλαδὴ, εἴτ᾽ ὖν τὸν διὰ τῦ φ, ἢ χ, ἢ y, σημαινόμενον ὅρον· καὶ τὸν ὅρον, ὃς τὸ τῆς ζητήσεως ἐςὶν ἀντικείμενον. Οὕτως εἰ εἴποιμι, 20 κεντηνάρια πόσων ἀργυρίων ὠνήσομαι; ἡ μὲν ζήτησις ἐςὶ πόσων ἀργυρίων, τὸ δὲ τῆς ζητήσεως ἀντικείμενον τὰ 20 κεντηνάρια. Παρὰ δὲ ταῦτα ἔνεισι πάσῃ ζητήσει διπλοῖ οἱ τὴν ὑπόθεσιν ἐμπεριέχοντες ὅροι, εἴτ᾽ ὖν οἱ τὴν ζήτησιν, καὶ οἱ τὴν τῦ Προβλήματος ὑπόθεσιν ἐμπεριλαμβάνοντες.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 382. Ὅρυς οἱυςδηποτῦν δοθέντας, ἀλληλενδέτως ἐν ἀμφοτέραις ταῖς σήλαις ἐκθεῖναι.

ΛΥΣΙΣ.

Γραφήτω Α΄ ἐν τῷ ἀνωτάτῳ τόπῳ ἀριςερόθεν

ὁ ὅρος

θεν, ἀπαλείφεσθαι ἔχωσιν· οὕτως, ἐὰν ὦσιν ἐν μὲν θατέρᾳ τῶν ςηλῶν ἀριθμοὶ 6 καὶ 13, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ 78, πάντες ἅτοι οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀμφοτέρωθεν ἀπαλειφθήτωσαν, ὅτι 6 × 13 = 78. Ἐὰν δὲ Δ.′ ἀριθμοὶ ἑκατέρωθεν τύχωσι διά τινος τρίτȣ ἀριθμȣ ἐντελῶς διαιρέσιμοι, διαιρείσθωσαν ἀμφοτέρωθεν, ἀντ' αὐτῶν δὲ τὰ ἑαυτῶν πηλίκα γραφήτωσαν. Ε.′ Τῶν ἐπιτομιῶν τȣτων διαπραχθεισῶν, πολλαπλασιασθήτωσαν ἀλλήλοις ἰδίως ἐν οἰκείοις τόποις τὰ τῶν ςηλῶν ὑπόλοιπα· τὸ δὲ γινόμενον ἐκ τῆς δεξιᾶς ςήλης, διὰ τȣ ἐκ τῆς ἀριςερᾶς γινομένȣ διαιρȣμενον, τὸ αἰτȣμενον δώσει πηλίκον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α.′ Πόσȣ πραθήσεται τὸ κεντηνάριον ὠνίȣ τινος, εἴ γε 4 ἡμιȣγκίαι 3 δηναρίων πωλȣνται;

ΛΥΣΙΣ.

φιορ.	χ.	1 κεντ.	χ	1
κεντ.	1	100 λίτρ.	1	10
λίτρ.	1	32 ἡμιȣγκ.	1	
ἡμιȣγκ.	4	3 δηναρ.		1
δηναρ.	4	1 κρεϊτζ.		1
κρεϊτζ.	60	1 φιορ.	1	10 φιορ. = χ.

Β.′ 6 Καρολίνων χρυσῶν 66 φιορινίων ἀποτελȣντελέντων, ἑνὸς δὲ φιορινίου 60 κρεϊτζαρίων, πόσα κρεϊτζάρια ἑνὶ Καρολίνῳ ἀναλογοῦσι;

Κρεϊτζ.	y	1 καρολ.	y	1
καρολ.	6	66 φιορ.	1	11
φιορ.	1	60 κρεϊτζ.	1	60
			1	660 κρεϊτζ. = y 1

Γ΄ Ἐὰν ἓν ὁλοσχερὲς τεμμάχιον ὁλλανδικοῦ ῥούχου, 30 βραβαντικοὺς, εἴτ᾽ οὖν βελγικοὺς, πήχεις περιέχον, 260 ὁλλανδικῶν φιορηνίων τιμᾶται, ἓν δ᾽ ὁλλανδικὸν φιορίνιον ἰσοῦται 104 συβέροις, 104 δὲ σύβερα = 1 ὁλλανδικῷ χρυσῷ, 1 δὲ ὁλλανδικὸς χρυσὸς = 14 ἀργυρίοις (γροσίοις). Πόσων ἀργυρίων τιμηθήσεται εἷς Βινδοβονικὸς πῆχυς ἐκ τοῦ ὑφάσματος τούτου, ὄντων 89 Βινδοβονικῶν πήχεων = 100 Βελγικοῖς.

ἀργ.	x	1 βινδοβ. πήχ.	x	
βινδοβ. πήχ.	89	100 βελγ. πήχ.	89	100
βελγ. πήχ.	30	260 ὁλλανδ. φιορ.	3	26
ὁλλανδ. φιορ.	1	20 σύβερ.	26	5
σύβερ.	104	1 ὁλλανδ. χρ.		14
ὁλλανδ. χρυσ.	1	14 ἀργυρ.		

x	
89	100
3	5
	14

Τοίνυν (89×3) : (100×5×14) = 267 : 7000 = 26 ἀργ. 8 ὀβολ. 2 λεπτ.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 385. Ἡ τῆς Μεθόδε ταύτης βάσανος ἐν τῇ τῶν ςηλῶν ἀμφοῖν κεῖται ἰσότητι. Ὅθεν ἀντὶ τῦ αἰτυμένυ ὅρυ φ, ἢ χ, ἢ y, τῆς εἰρεθείσης ἀριθμητικῆς δυνάμεως τιθεμένης, καὶ τῶν λοιπῶν ὅρων, ἢ ἔχυσι, τηρυμένων, ἐὰν τὸ θατέρας ςήλης γινόμενον τῷ τῆς ἑτέρας ἔτως ἢ ἴσον, ὥςε τῆς ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρέσεως τελεσθείσης μηδὲν ὑπολείπεσθαι, δῆλον τὰ τῆς πράξεως ὀρθῶς διαπραχθῆναι· οἷον ἐν Παραδείγματι.

Ἠλων ἡ δωδεκὰς πωλεῖται 40 κρεϊτζαρίων, 330 ἦλοι πόσυ πωληθήσονται;

φιορ. y	330 ἦλ.	y	110
ἦλ. 12	40 κρεϊτζ.	6	
κρεϊτζ. 60	1 φιορ.		1
		6	110

Ἄρα $\frac{110}{6}$ = 18⅓ φιορ. = y.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

φιορ. 18⅓	330 ἦλ.	55	330
ἦλ. 12	40 κρ.	6	1
κρεϊτζ. 60	1 φιορ.	330	330

Ἔςι δὲ 330 — 330 = 0.

ΚΕΦ-ὁ ὅρος, ᾧ τινι ἀπαντῆσαι δέον, διὰ τοῦ φ, ἢ χ, ἢ y, ἐκτιθέμενος. Β΄. Ταχθήτω δεξιόθεν ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ τὸ τῆς αἰτήσεως ἀντικείμενον. Γ΄. Τεθήτω πρὸς ἀριστερὰν μὲν ὑπὸ τὸν πρῶτον, ὁ ὅρος, ὁ κατὰ τὸ ἑαυτοῦ ὄνομα τῷ τῆς αἰτήσεως ἀντικειμένῳ ἀπαντῶν· πρὸς δεξιὰν δὲ, ὁ τῷ πρὸς ἀριστερὰν δευτέρῳ παραβαλλόμενος. Δ΄. Τὸν τρίτον αὖθις πρὸς ἀριστερὰν ὅρον τοιοῦτον εἶναι δέον, ὥστε κατὰ τὸ ἑαυτοῦ ὄνομα πᾶσι τοῖς πρὸς δεξιὰν τοῦ δευτέρου ἀπαντᾷν. Συνεχιζέσθω δὲ οὕτω ἡ πρᾶξις, ἄχρις οὗ ἐπὶ τὸν ὅρον καταντήσωμεν, τὸν πρὸς δεξιὰν τὸν ἔσχατον τόπον κατέχοντα, καὶ τῷ πρὸς ἀριστερὰν πρώτῳ ἐντελῶς συνᾴδοντα. Οἷον, ἐν Παραδείγματι.

Πόσας λίτρας σταθμίζει εἷς ποῦς κυβικὸς χρυσοῦ, οὗ τινος 100 κυβικοὶ πόδες τοσοῦτον σταθμίζουσιν, ὅσον 1960 πόδες κυβικοὶ ὕδατος, τοῦ κυβικοῦ ποδὸς ὕδατος 57 λίτραις ἴσου λογιζομένου;

χ λίτρ.	1 ποῦς κυβικὸς χρυσοῦ.
ποδ. κυβικ. χρυσ. 100	1960 ποδ. κυβ. ὕδατος
ποῦς κυβ. ὕδατος 1	57 λίτρ.

Ὁ πρῶτος τοίνυν ὅρος χ ἀριστερόθεν, αἱ αἰτούμεναι εἰσὶ λίτραι, εἴτ' οὖν τὸ βάρος· ὁ δεξιόθεν πρῶτος, ὁ τοῦ χρυσοῦ εἷς κυβικὸς ποῦς, οὗ τινος τὸ βάρος αἰτεῖται, ἑπομένως τὸ τῆς αἰτήσεως ἀντικείμενον·

ὁ τῇ τάξει τρίτος, δεύτερος δὲ ἀριστερόθεν, ὁμογενὴς τῷ πρὸς δεξιὰν πρώτῳ, ὡς 100 πόδας κυβικὰς χρυσῦ δηλῶν· ὁ τῇ τάξει τέταρτος, δεύτερος δὲ δεξιόθεν, ἀναφορὰν ἔχει μετὰ τῦ πρὸς ἀριστερὰν δευτέρυ, ὡς ἐμφαίνων, ὅτι οἱ 100 κυβικοὶ πόδες ἰσῦνται 1960 κυβικοῖς ποσὶν ὕδατος· ὁ πέμπτος, εἴτ' ὂν ὁ ἀριστερόθεν τρίτος, ὁμογενὴς αὖθις τῷ πρὸς δεξιὰν δευτέρῳ· ὁ ἕκτος, εἴτ' ὂν ὁ δεξιόθεν τρίτος τὴν μετὰ τῦ πέμπτυ ἀναλογίαν ἐκτίθησι, δηλαδὴ 57 λίτραι ἑνὶ κυβικῷ ποδὶ ὕδατος ἀναλογῦσιν, ἅμα τε τῷ πρὸς ἀριστερὰν πρώτῳ ὁμογενὴς, ὡς ἀμφοτέρωθεν βάρυς σημαινομένυ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 383. Ἐπεὶ μέν τοιγε δίδοσθαι δύνανται ὅροι, ἐπὶ διάφορα ἐκτιθέμενοι σχήματα, ἀναγκαῖον πρὸ πάντων, δεόντως τύτυς ὑποτυπῦσθαι, ἵν' ὕτως ἐν ἀμφοτέραις ταῖς στήλαις ὀρθῶς διατάττεσθαι ἔχωσι. Καὶ γὰρ Α.' ἢ κλάσματα γνήσια, ἢ ὁλοσχερῆ κλάσμασι σύμμικτα ἐν ἀμφοτέραις ταῖς στήλαις, ἢ ἐν μοναδικῇ μόνον στήλῃ, παρεμπίπτυσιν. Ἐὰν μὲν ἐν ἀμφοτέραις ταῖς στήλαις κλάσματα τύχωσι γνήσια, πολλαπλασιασθήτωσαν οἱ ἀριθμηταὶ ἐναλλὰξ ἐπὶ τὺς αὐτῶν παρονομαστάς· ἐὰν δὲ ὁλοσχερῆ κλάσμασι σύμμικτα ὦσιν, τύτων ἐπὶ νόθων πρότερον ἀναχθέντων, πολλαπλασιασθή-

σθή-

σθήτωσαν ἐναλλὰξ οἱ ἀριθμηταὶ ἐπὶ τὰς παρονομαςάς· ἐὰν δ' ἐν μοναδικῇ μόνον ςήλῃ κλάσμα γνήσιον, ἢ νόθον τύχῃ, πολλαπλασιασθήτω διὰ τῦ ἑαυτῦ παρονομαςῦ, ὁ τῆς ἑτέρας μόνον ςήλης ὅρος. Ἔσχατον δὲ οἱ παρονομαςαὶ ἀπὸ τῶν ςηλῶν, αἷς ἐνῆσαν, ἀπαλείφονται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α′ Ὑφάντης ἐν ¼ ἡμέρᾳ ὑφαίνει 160 πήχεις ὑφάσματος, πόσας ὑφανεῖ ἐν ¾.

Πήχ. φ	¾ ἡμ.	πήχ. φ	3×2 ἡμ.
	Κἀντεῦθεν.		
Ἡμέρ ¼	160 πήχ.	ἡμ. 1×4	160 πήχ.

Β′ Διαςήματι 1 ½ ,,, ʹ~~ς. ὀρυκτῆρες διορύττουσιν 180 πόδας κυβικὰς γῆς. Ἐν ἡμέραις 3 ¼ οἱ αὐτοὶ ὀρυκτῆρες πόσας διορύξουσι;

Πόδ. κυβ. χ	3 ¼ ἡμ.	πόδ. κυβ. χ	$\frac{13}{4}$ ἡμ.
	Τοίνυν.		
Ἡμέρ. 1 ½	180 πόδ. κυβ.	ἡμέρ. $\frac{3}{2}$	180 πόδ. κυβ.

Κἀντεῦθεν

Πόδ. κυβ. χ	13 × 2 ἡμέρ·
Ἡμέρ 3 × 4	180 πόδ. κυβ.

Γ′ Ὑπὲρ τῆς συγκομιδῆς ὠνίων τινῶν ἐν διαςήματι 7 μιλλίων ἀπεδόθησαν ἀργύρια 4. Ἐν διαςήματι μιλλίων 13 ½ πόσα καταβληθήσονται;

Ἀργ. y	13½ μιλλ.	Τοίνυν	ἀργ. y	27 μιλλ·
Μιλλ. 7	2 ἀργ.		μιλλ. 7×2	4 ἀργ.

Φ 5 Ἐὰν

Ἐὰν δὲ Β'. ἐν ἀμφοτέραις ταῖς ςήλαις διαφόρε παρονομασίας πράγματα συμπίπτωσι, βεβαίαν μέν τοιγε πρὸς ἄλληλα ἀναλογίαν ἔχοντα, γραφήτωσαν ὡς σύνηθες αἱ τοιαῦται παρονομασίαι ἐν ἀμφοτέραις ταῖς ςήλαις, εἶτα δὲ ἡ ἀριθμοῖς ἐκτιθειμένη διαφορὰ τεθήτω· οἷον ἐν Παραδείγματι.

Ὠνήσατό τις 50 πήχεις Βοημικὰς 60 φιορηνίων, πόσον ἀποδώσει ὑπὲρ ἑνὸς πήχεως Βινδοβονικᾶ, ἐξισεμένων 10 πήχεων Βοημικῶν, 9 πήχεσι Βινδοβονικοῖς;

Φιορ.	φ	1 πήχ. Βινδοβ.
Πήχ. Βινδοβ.	9	10 πήχ. Βοημικ.
Πήχ. Βοημικ.	50	60 φιορ.

Ἐὰν δὲ Γ'. διαφέρεσαι παρονομασίαι διάφορα τᾶ αὐτᾶ ἑτερογενᾶς ἀριθμᾶ ἐκτιθέασιν εἴδη, τηνικαῦτα τὰ μειζοδύναμα εἴδη βαθμηδὸν ἐπὶ τὰ ἡττοδύναμα ἀναλυόμενα, ἐν ἀμφοτέραις ταῖς ςήλαις καταγραφήτωσαν, ἄχρις ὃ ἐν ἀμφοτέραις αἱ αὐταὶ παρονομασίαι ἐκληφθῶσιν· οἷον ἐν Παραδείγματι.

Πόσων δηναρίων τιμηθήσεται ἓν φύλλον χάρτε, ὁπηνίκα 8 τᾶ αὐτᾶ χάρτε τεύχη 480 φιορηνίων πιπράσκονται;

Ἵν' ἂν ἐνταῦθα αἱ αὐταὶ παρονομασίαι ἀμφοτέφοτέρωθεν καταταχθῆναι ἔχωσι, διαλυθήτω τὸ μὲν φιορήνιον εἰς 60 κρειτζάρια, τὸ δὲ κρειτζάριον εἰς 4 δηνάρια; ὡσαύτως τὸ μὲν τεῦχος εἰς 10 ῥίσματα, τὸ δὲ ῥίσμα εἰς 20 βίβλυς, ἡ δὲ βίβλος εἰς 24 φύλλα. (Σελ. 158). Ὅθεν.

δηνάρ. φ		1 φύλλον
φύλ	24	1 βίβλος
βίβλ.	20	1 ῥίσμα
ῥισμ.	10	1 τεῦχος
τεύχ.	8	480 φιορ.
φιορ.	1	60 κρεϊτζ.
κρεϊτζ.	1	4 δηνάρ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 584. Ὅρυς ὀρθῶς διατυχθέντας κατασκευάσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐὰν μὲν Α.' ἐν ἀμφοτέραις ταῖς ςήλαις ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς παρεμπίπτῃ, ἑκατέρωθεν ἢ ἀπαλειφθήτω, ἢ μονὰς ἀντ' ἐκείνυ τεθήτω. Ἐὰν δὲ Β.' ἐν ἀμφοτέραις ταῖς ςήλαις ἀριθμὸς μηδενικὰ πρὸς τὸ τέλος ἔχων παρεμπίπτῃ, τηνικαῦτα ἴσος τῶν μηδενικῶν ἀριθμὸς ἀμφοτέρωθεν ἀπαλειφθήτω. Ἐὰν δὲ Γ.' ἐν μιᾷ ςήλῃ δύω ἀριθμοὶ ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζόμενοι γινόμενον ἀναδιδόασιν, ἴσον τῷ ἐν τῇ ἑτέρᾳ ςήλῃ ἀριθμῷ, οἱ τοιῦτοι ἀμφοτέρωθεν

Β.' διὰ τῆς 'Ρεσιανῆς Μεθόδε.

Ὑπὲρ ἑκατὸν y	20 ½ τόκ.	2. y	41
τόκ. 25	5 ὑπὲρ 8	5	
		10	41

Κἀντεῦθεν $y = \frac{41}{10} = 4\frac{1}{10}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.'

§. 395. Ἐὰν δὲ δοθῶσιν ὅ,τε ἐτήσιος ὑπὲρ ἑκατὸν τόκος, καὶ ὁ τῷ δοθέντι χρόνῳ ἀνήκων τόκος, ζητεῖται δὲ τὸ κεφάλαιον, τὰ ἐφεξῆς εἰς χρῆσιν ἥκουσι Παραδείγματα.

Α.' Ἀγ[illegible]λῆς ἀπὸ κεφαλαίε, τοκιζομένε 5 ὑπὲρ ἑκατὸν, ἐτήσιον λαμβάνει τόκον ἀργυρίων 664. Πηλίκον ἐςὶ τὸ τοκιζόμενον κεφάλαιον;

Α.' διὰ τῆς Χρυσῆς Μεθόδε.

ὑπὲρ 8		Κεφ.		Τόκ.		Κεφ.
5	:	100	= 664	:	χ	, Εἴτ' ὖν
1	:	20	= 664	:	χ	= 13280 ἀργ.

Β.' διὰ τῆς 'Ρεσιανῆς Μεθόδε.

Κεφ.	χ	664	τόκ.	y	664
ὑπὲρ 8	5	100	κεφ.	1	20
				$\chi =$	13280

Β.' Κεφάλαιον ἐπὶ τόκῳ 5 ὑπὲρ ἑκατὸν ἐν 2 ἔτεσι, 8 μησὶ καὶ 20 ἡμέραις τοκισθὲν ἀπηνέγκατο τόκον 1415 ⅝ ἀργύρια. Πηλίκον ἦν τὸ κεφάλαιον;

Α.'

Α'. διὰ τῆς Χρυσῆς Μεθόδου.

ὑπὲρ %		Κεφ.		Τόκ.		Κεφ.	
5	:	100	=	$1415\frac{5}{9}$	:	χ,	εἴτ' οὖν
9×5	:	100	=	12740	:	χ,	εἴτ' οὖν
9	:	20	=	12740	:	χ = $28311\frac{1}{9}$.	Ὅθεν

Μην.		Κεφ.		Μην.		Κεφ.	
$32\frac{2}{3}$	:	$28311\frac{1}{9}$	=	12	:	y,	εἴτ' οὖν
$\frac{98}{3}$	:	$\frac{254800}{9}$	=	12	:	y,	εἴτ' οὖν
9×98	:	254800×3	=	12	:	y,	εἴτ' οὖν
3×98	:	254800	=	12	:	y,	εἴτ' οὖν
98	:	254800	=	4	:	y	= 10400 ἀργ.

Β'. διὰ τῆς Ῥεσσιανῆς Μεθόδου.

Κεφ.	y	$1415\frac{5}{9}$ τόκ.	y	12740
ὑπὲρ %	5	12 μην.		10
μην.	$32\frac{2}{3}$	100 κεφ.	49	
			49	127400

Κἀντεῦθεν $y = \frac{127400}{49} = 10400$ ἀργ.

Γ'. Τῶν φιλοκερδῶν τις χρημάτων κεφάλαιον, ἐπὶ τόκῳ 5 ὑπὲρ ἑκατὸν τοκισθὲν, μετὰ ἔτος σὺν τόκῳ ἐπαναλαβὼν, ὁλικὴν ἀργυρίου ποσότητα εὑρέθη συμπαραλαβὼν 16440. Πόσον τὸ τοκισθὲν ἦν κεφάλαιον;

Ἐπεὶ 100 ἀργύρια, τοῦ ἔτους παρελθόντος, μετὰ

μετὰ τῦ ἑαυτῶν τόκυ ὑπολογιζόμενα, ἀποτελῦσιν 105 ἀργύρια, ἔςαι.

Κεφ. σὺν τόκῳ		Κεφ.		Κεφ. σὺν τόκ.		Κεφ.
105	:	100	=	16440	:	x
21	:	20	=	16440	:	x

$$x = \frac{328800}{21} = 15657 \tfrac{1}{7} \text{ ἀργ.}$$

δ'. Ἐπίτροπός τις χρημάτων κεφάλαιον 7 παισὶν ἐγκαταλειφθὲν ἐπὶ τόκῳ 4½ ὑπὲρ ἑκατὸν ἐτόκισε. Μετὰ δεκαετίαν ἕκαςος τῶν παίδων ἀπέλαβεν ἀργύρια 1107 $\frac{1}{7}$. Ἐδαπανήθησαν δ' ἐν ἑκάςῳ ἔτει ὑπὲρ ἑνὸς ἑκάςυ τῶν παίδων ἀργύρια 200. Πηλίκον ἦν τὸ εἰς κλῆρον ἐγκαταλειφθὲν κεφάλαιον.

ΛΥΣΙΣ.

Ὑπολογισθήτω πρῶτον, πόσον ὑπὲρ τῶν 7 παίδων ἐπὶ δεκαετίᾳ δεδαπάνηται, εἴτ' ὖν $200 \times 7 \times 10 = 14000$ ἀργυρίοις. Δεύτερον, ὑπολογισθήτω τὸ τῶν μεριδίων ἄθροισμα, ὡς ἕκαςος τῶν παίδων μετὰ δεκαετίαν ἐκληρώσατο, εἴτ' ὖν $1107\frac{1}{7} \times 7 = 7750$. Τρίτον, συναιρεθήτωσαν ἀμφότερα ἐν ἑνὶ ἀθροίσματι, οἷον $14000 + 7750 = 21750$ = κεφαλαίῳ σὺν τόκῳ. Τέταρτον, ὄντος τῦ ἐνιαυσίυ τόκυ 4½ ὑπὲρ ἑκατὸν, ζητείσθω πόσον ἔςαι ἐν ἔτεσι 10; οἷον $4\frac{1}{2} \times 10 = 45$ ἀργ. Ἔσχατον δὲ, πέμπτον, γενέσθω ἡ ἐφεξῆς ἀναλογία.

Κεφάλ.

Κεφάλ. σὺν τόκῳ ὑπὲρ 8 ἐν 10 ἔτ.		Κεφ. μόνον		Κεφ. σὺν τόκ. ἐν 10 ἔτ.		Κεφ. μόνον
145	:	100	=	21750	:	y

$$y = \frac{2175000}{145} = 15000 \text{ ἀργ.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 394. Ὑπολογίσασθαι Τόκον Τόκου.

ΛΥΣΙΣ.

Οὐ μόνον τοῦ τοκιζομένου κεφαλαίου τὸν τόκον ὑπολογίζεσθαι εἰώθαμεν, ἀλλὰ δὴ καὶ τοῦ τόκου αὐτοῦ τὸν τόκον. Ὁπηνίκα γὰρ ὁ τοῦ τόκου τόκος ἐν τῷ ὑπολογισμῷ αἰτῆται, δῆλόν ἐστι τὸν τοῦ πρώτου ἔτους τόκον, ὡς μέρος θεωρεῖσθαι τῷ κεφαλαίῳ ἀνῆκον· ᾧ τινι διὰ τοῦτο ἐν τῷ δευτέρῳ ἔτει ὁ τῷ κεφαλαίῳ συναπτόμενος τόκος ἀντιστοιχήσει· καὶ ἐφεξῆς οὕτω. Θῶμεν γὰρ, ἐν Παραδείγματι, κεφάλαιον 1000 ἀργυρίων, οὕτω ἐπὶ τόκῳ 5 ὑπὲρ ἑκατὸν τοκίζεσθαι, ὥστε, ἐπειδήπερ ὁ ἐτήσιος ἀγνοεῖται τόκος, ἀνὰ πᾶν ἔτος ἐκεῖνον τῷ κεφαλαίῳ συναύξειν. Ὅθεν, ἐπεὶ τοῦ πρώτου ἔτους παρελθόντος τὰ 100 ἀργύρια εἰς 105 ἀπέβησαν, ἀναλογία ἡ ἐφεξῆς ἐκτεθείσεται.

$$100 : 105 = 1000 : x = 10 \times 105 = 1050 \text{ ἀργ.}$$

Ἐν ᾗ πλὴν τοῦ τῶν 1000 ἀργυρίων κεφαλαίου καὶ ὁ 5 ὑπὲρ 100 ἀναλόγως ἐτήσιος τόκος = 50 ἀργυρί-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α. Χρυσόγονος βέλεται μαθεῖν ἐκ τῶν αὐτῦ 6000 ἀργυρίων, τοκισθέντων ἐπὶ τόκῳ 5 ὑπὲρ %, πόσον μετὰ ἑξαετίαν λήψεται, λογιζευομένυ ὡσαύτως τόκυ ἐπὶ τόκῳ;

ΛΥΣΙΣ.

10000000 : 13400956 = 6000 : y. *Καὶ*

$y = \frac{13400956 \times 6}{10000} = 8040$ ἀργ. 22 ὀβ. 2 λεπτοῖς.

Β. Ἐπίτροπός τις ἐν ἔτεσι 4, ἐκ τῦ τῶν ὀρφανῶν κεφαλαίυ, καταχρησάμενος 2400 ἀργύρια, κατεκρίθη ἀποτίσαι τὸ κεφάλαιον σὺν τόκῳ ἐπὶ τόκῳ, ἐν 4 ἔτεσι τοκισθὲν, λογιζομένυ τῦ τόκυ 6 ὑπὲρ ἑκατόν. *Πόσον ἀποτίσει;*

1000000(0) : 126247769 = 2400 : χ. *Καὶ*

$\chi = \frac{216247769 \times 24}{100000} = 3029$ ἀργ. 52 ὀβ. 2 λεπτοῖς.

Γ. Κατεκρίθη τις ἀποτίσαι 200 ἀργύρια σὺν τόκῳ ἐπὶ τόκῳ, τοκισθέντα ἐν ἔτεσιν 6 καὶ μησὶν 8, ἐπὶ ἐτησίῳ τόκῳ 4 ὑπὲρ ἑκατόν. *Πόσον ἀποτίσει;*

Ἐπεὶ ἐν τῷ παρόντι παραδείγματι πρὸς τοῖς ἔτεσι καὶ μῆνες δίδονται· Πίναξ δὲ ὑπὲρ μηνῶν ὐχ ὑπελογίσθη, διαταχθήτω τὰ τῆς λύσεως ὡς ἐφεξῆς.

Α. Ὁ ἐν τῷ Πίνακι ἀριθμὸς, ὁ τοῖς δοθεῖσιν ἔτεσιν ἐπὶ τῷ δοθέντι ὑπὲρ ἑκατὸν τόκῳ ἀντιϛοιχῶν, ἀφαιρείσθω ἀπὸ τῦ προσεχῶς ἑπομένυ·

ἡ ὅτως ἐκλαμβανομένη διαφορὰ 12 μησὶν ἀντιϛοι-χήσει. Ὅθεν,

Ἔτη 7 ἐπὶ τόκῳ 4 ὑπὲρ % = 13159318
Ἔτη 6 - - - - - = 12653190
Ἡ διαφορὰ = - - - 506128

Β'. Διαταχθήτω εἶτα ἀναλογία ἡ ἐφεξῆς 12 μῆνες πρὸς τὰς δοθέντας 8 μῆνας, ὡς ἡ εὑρεθεῖσα διαφορὰ πρὸς τὴν διαφορὰν τοῖς 8 μησὶν ἀντιϛοιχήσουσαν· εἴτ' οὖν.

12 : 8 = 506128 : χ, εἴτ' οὖν
3 : 2 = 506128 : χ. Καὶ

$$\chi = \frac{506128 \times 2}{3} = 337418\tfrac{2}{3}.$$

Γ'. Ἡ εὑρεθεῖσα ἤδη διαφορὰ προσεθήτω τῷ ἐν τῷ Πίνακι τοῖς δοθεῖσιν 6 ἔτεσιν ἀντιϛοιχοῦντι ἀριθμῷ, εἴτ' οὖν, $12653190 + 337418\tfrac{2}{3} = 12990608\tfrac{2}{3}$.

Δ'. Τούτων διαπραχθέντων, διαταχθήτω ἡ συνήθης ἀναλογία, ὡς ἐφεξῆς.

$10000000 : 12990608\tfrac{2}{3} = 200 : \chi$. εἴτ' οὖν
$100000 : 12990608\tfrac{2}{3} = 2 : \chi$. εἴτ' οὖν
$50000 : \frac{38971826}{3} = 1 : \chi$. εἴτ' οὖν
$150000 : 38971826 = 1 : \chi$. Καὶ

$\chi = \frac{38971826}{150000} = 259$ ἀργ. 32 ὀβ. 1 λεπτῷ.

ΣΧΟΛΙΟΝ ΚΑΘΟΛΟΥ.

§. 396. Καὶ ταῦτα μὲν ἀπόχρη ἐπὶ τοῦ παρόντος τοῖς φιλεπιϛήμοσι τῶν νέων, ὅτι ὁ σκοπὸς ἡμῖν ἀγοραίου Ἀριθμητικῆς ποιήσασθαι ἔκθεσιν, ἀλλὰ

ἀλλὰ μᾶλλον τῆς εἰς τὴν ὁδὸν τῆς Μαθηματικῆς συντεινούσης, καὶ διὰ τοῦτο Στοιχειακῆς. Κατὰ γε-μὴν τὴν τῶν καθ' ἡμᾶς ἀγχίνοιαν, τοῖς πλείοσιν ἤδη τὰ βραχέα ταῦτα καὶ πάνυ πολλὰ δόξει. Ἔτι δὲ τῶν τοιούτων Προβλημάτων ἡ Ἀναλυτικὴ Μέθοδος τὴν ἐπίλυσιν ἔχει ἰδίαν τὰ μάλιστα, ᾗ πάντως ὁ ἐνασχοληθεὶς εἰς δέον ῥαδίως πᾶν ὅ, τιοῦν Πρόβλημα ἐπιλύσεται, ὡς κἀν τῇ περὶ τῶν Ἐξισώσεων πραγματείᾳ ὑφ' ἡμῶν ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ διείληπται.

ΤΕΛΟΣ
ΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

ΠΕΡΙ ΤΟΚΙΣΜΟΥ ΤΕ ΚΑΙ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 386. Τοκισμός ἐςὶ Μέθοδος, δι' ἧς διαφόρας ὑπολογιζόμεθα ἀναλογίας, παρεμπιπτούσας μεταξὺ τῶν τοκιζομένων κεφαλαίων, τῶν τῦ τοκισμῦ χρόνων, καὶ τῶν ἐντεῦθεν ἀναφυομένων τόκων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 387. Ἐν τῇ τῦ Τοκισμῦ Μεθόδῳ κυρίως αἰτεῖται, ἵν' ὁ ἐνιαύσιος ὑπὲρ 100 ἀργυρίων διαγνωσθῇ τόκος, ὃς δὴ διάφορος παρὰ διαφόροις τοκιςαῖς ἐκλαμβάνεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 388. Ἁπλῦς μὲν Τοκισμὸς ἐςιν, ὁ διερευνῶν πόσαν τόκυ ἑκάςοις δοθεῖσι κεφαλαίοις κατ' ἔτος ἀνήκει. Σύνθετος δὲ, ὃς καὶ Ανατοκισμὸς ἰδίῳ ἀκύει ὀνόματι, ὁ τὸν τῦ τόκυ τοκον, τὸν ἀνὰ πᾶν ἔτος τῷ τοκιζομένῳ ἀνήκοντα κεφαλαίῳ, εἰς ὑπολογισμὸν ἀνάγων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 389. Ὁσάκις ἐν τῇ τῦ Τοκισμῦ Μεθόδῳ ἡ Ῥεσιανὴ ἐν χρήσει ἐκλαμβάνεται Μέθοδος, τοῖς ἐχεἐφεξῆς τέτταρσι τὸν νῦν ἀκριβῶς ἐπισητέον, εἴτ' ἐν τῷ κεφαλαίῳ, τῷ τοκισμῷ, τᾶτ' ἔςι, τῷ ἐκλαμβανομένῳ τόκῳ, τῷ χρόνῳ, καὶ τῷ ὑπὲρ ἑκατὸν τόκῳ. Ὅθεν *Α.* Ὅσῳ μεῖζόν ἐςι τὸ κεφάλαιον, τοσέτῳ πλεῖον ἐν τῷ τοκισμῷ λήψομαι, τᾶ αὐτᾶ ὑπὲρ ἑκατὸν τόκε μένοντος. *Β.* Ὅσῳ χρονιώτερον τὸ αὐτὸ κεφάλαιον ἐν τῷ αὐτῷ ὑπὲρ ἑκατὸν τόκῳ τοκίζεται, τοσέτῳ πλεῖον λήψομαι. *Γ.* Ὅσῳ μείζων ὁ ὑπὲρ ἑκατὸν ἐςι τόκος, τοσέτῳ πλεῖον ἐκ τᾶ αὐτᾶ τοκιζομένε κεφαλαίε ἐν τῷ τοκισμῷ λήψομαι. Κἀντεῦθεν τέτων δοθέντων, τὰ κεφάλαια καὶ οἱ τοκισμοὶ, ὁ χρόνος καὶ ὁ τοκισμὸς, ὁ ὑπὲρ ἑκατὸν τόκος καὶ οἱ τοκισμοὶ ἐν ἀντικειμέναις ἔςωσαν ςήλαις. Αὖθις *Α.* Ὅσῳ μεῖζον ἐςὶ τὸ κεφάλαιον, τοσέτῳ ἐλάττονος χρόνε χρεία, ὅπως ὁ προσδιωρισμένος ληφθῇ τοκισμὸς, τᾶ αὐτᾶ ὑπὲρ ἑκατὸν τόκε μένοντος. *Β.* Ὅσῳ μεῖζον ἐςὶ τὸ κεφάλαιον, τοσέτῳ ἐλάττονος τόκε ὑπὲρ ἑκατὸν, ἵν' ὁ προσδιωρισμένος ληφθῇ τοκισμὸς, τᾶ αὐτᾶ μένοντος χρόνε. Ἔνθεν τοι τέτων δοθέντων, τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος, τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ ὑπὲρ ἑκατὸν τόκος τῇ αὐτῇ ἐγκείσθωσαν ςήλῃ. Ἔσχατον δέ· Ἐν γένει, τὸ κεφάλαιον, ὁ χρόνος, καὶ ὁ ὑπὲρ ἑκατὸν τόκος ἐν τῇ αὐτῇ ςήλῃ ταττέσθωσαν.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 390. **Εὑρεῖν τὸν Τοκισμὸν διαφόρων κεφαλαίων, διαφόροις ὑπὲρ ἑκατὸν τόκοις ἀνήκοντα.**

ΛΥΣΙΣ.

Ἐνδέχεται διάφορα κεφάλαια, ἢ ἐν διαφόροις μόνον χρόνοις, ἢ ἐν διαφόροις ὑπὲρ ἑκατὸν τόκοις, τοκίζεσθαι. Ἐν οἱᾳδηποτῦν περιςάσει, τὰ ἐν τῷ αὐτῷ ὑπὲρ ἑκατὸν τόκῳ, ἢ ἐν διαφόροις τόκοις, διδόμενα, ἐν τῷ αὐτῷ ἀνακαλέμενα χρόνῳ, ἀλλήλοις προςεθείσθωσαν, τὸ δὲ τύτων ἄθροισμα ὡς κεφάλαιον θεωρείσθω, ἐν ἑνὶ τοκιζόμενον ἔτει. Ἀνακαλῦνται δὲ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, ἐὰν ἕκαςον τῶν κεφαλαίων ἰδίᾳ, διά τε τῦ ἑαυτῦ χρόνυ, καὶ διὰ τῦ ἰδίυ ὑπὲρ ἑκατὸν τόκυ, πολλαπλασιασθῇ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Ἀργύριος ὅτω τὰ ἑαυτῦ τοκίζει χρήματα· 2000 μὲν ἐν 2 ἔτεσιν, 500 ἐν 4 ἔτεσιν, 6000 ἐν 5, 3000 ἐν 4, ἕκαςα τὰ κεφάλαια ἐπὶ τόκῳ 5 ὑπὲρ 100 λογιςευόμενος. Πηλίκος ὂν ἔςαι ὁ τόκος, ἐκ τῶν ὅτωσὶ τοκισθέντων κεφαλαίων, μετὰ τὴν τῶν ἐτῶν τύτων συμπλήρωσιν;

ΛΥΣΙΣ.

Ἀργ.		Ἔτ.			
2000	×	2	=	4000	ὑπὲρ 1 ἔτους
300	×	4	=	2000	— — —
6000	×	5	=	30000	— — —
3000	×	4	=	12000	— — —
				48000	= κεφαλαίῳ 1 ἔτει

	Κεφ.	ὑπὲρ $\frac{0}{0}$		Κεφ.	Τόκ.
Τοίνυν	100 :	5	=	48000 :	y

$$y = \frac{48000 \times 5}{100} = 2400 \text{ ἀργ.}$$

Ταὐτὸν γὰρ ἔςαι, ἤτοι 100 ἀργύρια ἐπὶ τόκῳ 5 ὑπὲρ ἑκατὸν ἐν τρισὶν ἔτεσι τοκιζόμενα λογισθῶσιν, ἢ 300 ἀργύρια ἐπὶ τῷ αὐτῷ τόκῳ ἐν ἑνὶ ἔτει. Ἀμφοτέρωθεν γὰρ ὁ τόκος ἔςαι = 15 ἀργυρίοις.

Β.' Τῶν φιλοκερδῶν τις τοκίζει, 2000 μὲν ἀργύρια ἐν 2 ἔτεσιν ἐπὶ τόκῳ $4\frac{1}{2}$ ὑπὲρ ἑκατὸν, 6000 δὲ ἐν 5 ἔτεσιν ἐπὶ τόκῳ 4 ὑπὲρ $\frac{0}{0}$, 3000 δὲ ἐν ἔτεσι $4\frac{1}{2}$ ἐπὶ τόκῳ 4 ὑπὲρ $\frac{0}{0}$. Τῶν χρόνων παρελθόντων, πηλίκος ὁ ὁλικὸς ἔςαι τόκος;

Ἀργ. Ἔτ. ὑπ. $\frac{0}{0}$			
$2000 \times 2 \times 4\frac{1}{2}$	= 18000	ὑπὲρ 1 ἔτ. ἐπὶ 1 ὑπὲρ $\frac{0}{0}$	
$6000 \times 5 \times 4$	= 120000	—	—
$3000 \times 4\frac{1}{2} \times 4$	= 54000	—	—
	192000	= κεφ. 1 ἔτ. 1 ὑπὲρ $\frac{0}{0}$	

Κεφ.

Κεφ. ὑπὲρ ℥ Κεφ. τόκ.

Τοίνυν 100 : 1 = 192000 : y = 1920 ἀργ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 391. Τῦ κεφαλαίυ δοθέντος, εὑρεῖν, ὑπὲρ τῦ δοθέντος χρόνυ, τὸν τύτῳ προσήκοντα τοκισμὸν, ἐξ ἐγνωσμένυ ὑπὲρ ἑκατὸν τόκυ.

ΛΥΣΙΣ.

Ὁπηνίκα μὲν δὴ ὁ τόκος αἰτῆται, ὁ τῷ δοθέντι κεφαλαίῳ ἀντιςοιχῶν, εἰώθασι τὸ μὲν ἔτος ἀνὰ 360 ἡμέρας, τὸν δὲ μῆνα ἀνὰ 30, ὑπολογίζεσθαι. Τὰ δὲ προβαλλόμενα Παραδείγματα, ἤτοι διὰ τῆς Χρυσῆς Μεθόδυ, ἢ διὰ τῆς Ῥεεσιανῆς ἐπιλύεσθαι ἔχυσιν. Ὅθεν τῆς Ῥεεσιανῆς Μεθόδυ ἐν χρήσει λαμβανομένης, τὸ κεφάλαιον μετὰ τῦ χρόνυ συναλυσιδῦσθαι ἐπάναγκες. Ἐκ γὰρ τῶν κεφαλαίων, ἐὰν μὴ ταῦτα ἐπὶ ὡρισμένον τοκίζονται χρόνον, ὐδεὶς ἐκλαμβάνεται τόκος. Τύτυ χάριν ἡ τῦ κεφαλαίυ ποσότης, ὁ τῦ τοκισμῦ χρόνος, καὶ ὁ ὑπὲρ ἑκατὸν τόκος, τὸν ἐκλαμβανόμενον τόκον προσδιορίζυσι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α′. Τοκίζει τις ἀργύρια 6200 ἐπὶ τόκῳ 4 ὑπὲρ ἑκατόν. Πόσον ἐτήσιον ἀποίσεται τόκον;

ΛΥΣΙΣ.

Α'. διὰ τῆς Χρυσῆς Μεθόδε

Κεφ.	ὑπὲρ $\frac{0}{0}$	Κεφ.	Τόκ.	
100 :	4 =	6200	: y.	ὅθεν
1 :	4 =	62	: y = 248.	

Β'. διὰ τῆς Ῥεεσιανῆς Μεθόδε.

Τόκος y | 6200 κεφ.
κεφ. 100 | 4 ὑπὲρ $\frac{0}{0}$

y | 62
1 | 4
1 | 248

Β'. Πόσος τόκος ἀποφέρεται ἐκ φιορηνίων 5842 ἐν 9 μησὶ τοκιζομένων, ἐπὶ ἐνιαυσίῳ τόκῳ $4\frac{1}{2}$ ὑπὲρ ἑκατόν;

Α'. διὰ τῆς Χρυσῆς Μεθόδε.

Κεφ.	ὑπὲρ $\frac{0}{0}$	Κεφ.	Τόκ.	
100 :	$4\frac{1}{2}$ =	5842 :	y.	Εἴτ' ἐν
100 :	$\frac{9}{2}$ =	5842 :	y.	Τοίνυν

$y = \frac{5842 \times 9}{100 \times 2} = \frac{52578}{200} = 262$ φιορ. $55\frac{2}{5}$ κρεῖτζ.

	Μῆν.	Τόκος	Μῆν.	Τόκ.	
Ὅθεν	12 :	262 φιορ. $55\frac{2}{5}$ κρ.	= 9 :	y.	Εἴτ' ἐν
	12 :	$\frac{52578}{200}$	= 9 :	y.	Εἴτ' ἐν
	12 × 200 :	52578	= 9 :	y.	Ὅθεν

$y = \frac{52578 \times 9}{12 \times 200} = \frac{473202}{2400} = 197$ φιορ. $10\frac{1}{20}$ κρ.

Β'.

Β΄ διὰ τῆς Ῥεεσιανῆς Μεθόδυ.

Τόκ.	y	5842 *κεφ.*		y	2921
μην.	12	9 *μην.*		4	3
κεφ.	100	$4\frac{1}{2}$ *ὑπὲρ* %		100	9
				400	78867 *φιορ.*

Τοίνυν $y = \frac{78867}{400} = 197$ *φιορ.* $10\frac{1}{20}$ *κρ.*

Γ΄ Πηλίκος τόκος ἀποφέρεται ἐξ ἀργυρίων 5000, *ἐν ἑνὶ χρόνῳ καὶ* 8 *μησὶ τοκιζομένων, ἐπὶ ἐνιαυσίῳ τόκῳ* 5 *ὑπὲρ ἑκατόν;*

Α΄ διὰ τῆς Χρυσῆς Μεθόδυ.

Κεφ.		*ὑπὲρ* %		*Κεφ.*		*Τόκ.*
100	:	5	=	5000	:	y = 250 *ἀργ. ὑπὲρ ἑνὸς ἔτυς*

	Μην.		*Τόκ.*		*Μην.*		*Τόκ.*
Ὅθεν	12	:	250	=	20	:	y = $416\frac{2}{3}$ *ἀργ.*

Β΄ διὰ τῆς Ῥεεσιανῆς Μεθόδυ.

Τόκ.	y	5000 *κεφ.*		y	50
μην.	12	20 *μην.*		3	5
κεφ.	100	5 *ὑπὲρ* %		1	5
				3	1250 *ἀργ.*

Τοίνυν $y = \frac{1250}{3} = 416\frac{2}{3}$ *ἀργ.*

Δ΄ Ἀργύρια 7620 *ἐπὶ ἐνιαυσίῳ τόκῳ* $4\frac{1}{2}$ *ὑπὲρ ἑκατὸν τοκιζόμενα, πόσον δώσουσι τόκον ἐν* 27 *ἡμέραις;*

Α.' διὰ τῆς Χρυσῆς Μεθόδυ.

Κεφ.		ὑπὲρ $\frac{0}{0}$		Κεφ.		
100	:	$4\frac{1}{2}$	=	7620	:	χ, εἴτ. ὖν

$$\chi = \frac{7620 \times 9}{100 \times 2} \text{ Ὅθεν}$$

Ἡμ.	Τόκ.	Ἡμ.	Τόκ.
360 :	$\frac{7620 \times 9}{100 \times 2}$ =	27 :	y Κἀντεῦθεν

$$y = \frac{7620 \times 9 \cdot 27}{100 \times 2 \times 360} = \frac{1851660}{72000} = 25 \text{ ἀργ. } 28 \text{ ὀβ. κ.τ.λ.}$$

Β.' διὰ τῆς Ῥεσσιανῆς Μεθόδυ.

Τόκ.	χ	7620 κεφ.	χ	381
ἡμ.	360	27 ἡμ.	4	27
κεφ.	100	$4\frac{1}{2}$ ὑπὲρ $\frac{0}{0}$	100	
			400	10287

Τοίνυν $\chi = \frac{10287}{400} =$ 25 ἀργ. 28 ὀβολ. κ. τ. λ.

Ε.' Ἀργύρια 400 ἐν 3 ἐνιαυτοῖς ἀποφέρεσι τόκον 48 ἀργ. Ἀργύρια 800 ἐν 26 ἡμέραις πόσον ἀποίσονται, τῦ αὐτῦ ὑπὲρ ἑκατὸν τόκυ μένοντος;

Α.' διὰ τῆς Χρυσῆς Μεθόδυ.

Κεφ.	Ἔτ.	Ἀργ.	Κεφ.	Ἔτ.	Ἀργ.
400 ×	3 :	48 =	800 ×	1 :	y · Εἶτ' ὖν

$$y = \frac{48 \times 800}{1200} = \frac{48 \times 8}{12} = 32 \text{ ἀργ. Ὅθεν}$$

Ἡμ.	Τόκ.	Ἡμ.	Τόκ.
360 :	32 =	26 :	y = 2 ἀργ. 12 ὀβ. $1\frac{1}{3}$ λεπτ.

Β.'

Β'. διὰ τῆς Ῥεσιανῆς Μεθόδε.

Τόκ.	y	800 κεφ.		y	
Ἔτ.	3	1	ἔτ.	45	26
ἡμέρ.	360	26	ἡμ.		4
κεφ.	400	48	τόκ.	45	104

Τοίνυν $y = \frac{104}{45} = 2$ ἀργ. 12 ὀβ. $1\frac{1}{3}$ λεπτ.

ϛ'. Πι… ; ἔσαι ὁ τόκος 1000 ἀργυρίων ἐν 1 ἔτει καὶ 20 ἡμέραις, ἐπὶ τόκῳ 5 ὑπὲρ ἑκατὸν τοκιζομένων;

Α'. διὰ τῆς Χρυσῆς Μεθόδε.

Κεφ. ὑπὲρ ℥ Κεφ. Τόκ.

100 : 5 = 1000 : y = 50 ἀργ.

Μην. Ἀργ. Μην. Ἀργ.

Ὅθεν 12 : 50 = $18\frac{2}{3}$: y· Εἴτ᾽ οὖν

12 : 50 = $\frac{56}{3}$: y· Τοίνυν.

$y = \frac{56 \times 50}{3 \times 12} = 77$ ἀργ. $31\frac{1}{9}$ ὀβ.

Β'. διὰ τῆς Ῥεσιανῆς Μεθόδε.

Τόκ.	y	1000 κεφ.	y	5
μην.	12	$18\frac{2}{3}$ μην.	3×3	28
Κεφ.	100	5 ὑπὲρ ℥		5
			9	700

Ἄρα $y = \frac{700}{9} = 77$ ἀργ. $31\frac{1}{9}$ ὀβ.

Ζ'. Πατὴρ τις τελευτῶν τοῖς ἑ‑υτῷ 4 παισὶ 36000 ἀργύρια κατέλιπεν, ἅ τινα ὁ ἐπίτροπος ἐπὶ πὶ ἐτησίῳ τόκῳ $5\frac{1}{2}$, ἐν ἔτεσι $8\frac{1}{2}$ ἐτοκίσατο. Ἐδαπάνησε δ' ἐν ἑκάστῳ ἔτει διὰ τὴν ἑνὸς ἑκάστου παιδοτροφίαν 240 ἀργύρια. Πηλίκος οὖν ὁ τόκος, πόσον τε ἕκαστος τῶν παίδων ἐκληρώσατο;

Α'. διὰ τῆς Χρυσῆς Μεθόδου.

Κεφ. ὑπὲρ % Κεφ. Ἐτησ. Τόκ.

$100 : 5\frac{1}{2} = 36000 : y$. Κἀντεῦθεν

$y = \frac{36000\times 11}{100\times 2} = \frac{3960}{2} = 1980$ ἀργ. Ὅθεν

Ἔτ. Ἀργ. Ἔτ. Ἀργ.

$1 : 1980 = 8\frac{1}{2} : y$. Τοίνυν

$y = \frac{1980\times 17}{2} = \frac{33660}{2} = 16830$ ἀργ. τόκῳ ὑπὲρ ἐτῶν $8\frac{1}{2}$. Ἤδη $36000 + 16830 = 52830$ κεφαλαίῳ σὺν τόκῳ μετὰ ἔτη $8\frac{1}{2}$. Ἐπεὶ δὲ δεδαπάνηται 240 ἀργύρια ὑπὲρ τῆς τῶν 4 παίδων ἀγωγῆς, εἴτ' οὖν ἀργύρια 960, καὶ δὴ ἐν ἔτεσιν $8\frac{1}{2}$, ἔσαι $960\times 8\frac{1}{2} = 8160$ ἀργυρίοις, ἅτινα ἀπὸ τοῦ ὅλου ἀφαιρούμενα δώσουσι $52830 - 8165 = 44670$ ὑπόλοιπον, τετραχῶς διανεμηθησόμενον, εἴτ' οὖν $44670 : 4 = 11167\frac{1}{2}$ μερίδι ἑνὶ ἑκάστῳ τῶν παίδων ἀνηκούσῃ.

Β'. διὰ τῆς Ῥεεσιανῆς Μεθόδου.

Τόκ.	y	36000 κεφ.	y	90
Ἔτ.	1	$8\frac{1}{2}$ ἔτ.	1	17
Κεφ.	100	$5\frac{1}{2}$ ὑπὲρ %		11
Τὰ δὲ λοιπὰ τελείσθω ὡς ἀνωτέρω.			1	16830 = y.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'

§. 392. Ἐν τοῖς ἐφεξῆς Παραδείγμασι δίδονται τό, τε τοκιζόμενον κεφάλαιον καὶ ὁ ἐκληφθεὶς τόκος, αἰτοῦνται δὲ εἰς εὕρεσιν, ἤτοι ὁ χρόνος, ἢ ὁ ὑπὲρ ἑκατὸν τόκος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. Ἐὰν 12000 ἀργυρίων κεφάλαιον ἐπὶ τόκῳ $4\frac{1}{2}$ ὑπὲρ ἑκατὸν δοθῇ, ἐν πόσῳ χρόνῳ τοκισθήσεται, ἵνα τόκον 2600 ἀργυρίων παράσχῃ;

Α'. διὰ τῆς Χρυσῆς Μεθόδου.

Κεφ.	ὑπὲρ ȣ		Κεφ.		Τόκ.
100	: $4\frac{1}{2}$	=	12000	:	$\chi = 540$ ἀργ. Ὅθεν
Τόκ.	Ἔτ.		Τόκ.		
540	: 1	=	2600	:	$\chi = 4$ ἔτ. 9 μην. $23\frac{1}{3}$ ἡμ.

Β'. διὰ τῆς Ῥεσιανῆς Μεθόδου.

Ἔτ. χ	2600 τόκ.	χ	13
ὑπὲρ ȣ $4\frac{1}{2}$	100 κεφ.	9	20
κεφ. 12000	1 ἔτ.	6	1
		54	260

Κἀντεῦθεν $\chi = \frac{260}{54}$ ὡς ἀνωτέρω.

Β'. Ἀργύρια 24000 εἰς κληρονομίαν 4 παισὶ καταλειφθέντα, ἐπὶ ἐτησίῳ τόκῳ 6 ὑπὲρ ἑκατὸν ἐτοκίσθησαν. Μετά τινα ἔτη, τῆς διανομῆς γενομένης, ἕκαστος τῶν παίδων ἐκληρώσατο ἀργύρια $6756\frac{2}{3}$. Ἐδαπανῶντο δ' ἐν ἑκάστῳ ἔτει ὑπὲρ ἑκάςυ παιδὸς ἀργύρια 230. *Πόσοις ἔτεσι τὸ δοθὲν κεφάλαιον ἐτοκίσθη;*

Αἰτείσθω πρῶτον, πηλίκος τόκος ἐν ἑνὶ ἔτει τῶν 24000 *ἀποφέρεται. Κἀντεῦθεν*

Κεφ.	*ὑπὲρ* 8	*Κεφ.*	*Τόκ.*
100	: 6 =	24000 :	ψ = 1440

Αἰτείσθω δεύτερον, πόσον ὑπὲρ τῶν τεσσάρων παίδων ἐν ἑνὶ ἔτει δεδαπάνηται· τὸ δ' εὑρεθὲν τῶν 1440 *ἀφαιρείσθω, ἵν' οὕτως ὁ ὑπολειπόμενος γνωσθῇ τόκος.*

Παῖς ᾽Αργ. Παίδ. ᾽Αργ.

1 : 230 = 4 : ψ = 920. *Καὶ* 1440 — 920 = 520.

Τρίτον, ἡ ἑνὶ ἑκάςῳ τῶν παίδων ἀνήκουσα μερὶς πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν παίδων, ἀπὸ δὲ τοῦ γινομένου ἀφαιρείσθω τὸ κεφάλαιον· τὸ ἐντεῦθεν προκύπτον ὑπόλοιπον, τὸν πᾶσι τοῖς τοῦ τοκισμοῦ ἔτεσιν ἀνήκοντα τόκον ἀναδώσει. Τοίνυν 6736 $\frac{2}{3}$ × 4 = 26946 $\frac{2}{3}$ — 24000 = 2946 $\frac{2}{3}$ *ἀργ. Κἀντεῦθεν.*

Τόκ.	*῎Ετ.*	*Τόκ.*	*᾽Αργ.*
520	: 1 =	2946 $\frac{2}{3}$:	ψ, εἴτ' οὖν
520 × 3 :	1 =	8840 :	ψ, εἴτ' οὖν
1560	: 1 =	8840 :	ψ = 5 ἔτ. 8 μῆν.

Ι΄. ᾽*Αργύρια* 16480 *διαςήματι* 9 *μηνῶν ἀπήνεγκαν τόκον* 460 *ἀργυρίων καὶ* 32 *ὀβολῶν. Πόσος ἦν ὁ ἐτήσιος ὑπὲρ τῶν ἑκατὸν τόκος;*

Α΄

Α.' διὰ τῆς Χρυσῆς Μεθόδου.

Μην. Τόκ. Μην. Τόκ.

9 : $460\frac{4}{5}$ = 12 : y , εἴτ' οὖν

3 : $460\frac{4}{5}$ = 4 : y , εἴτ' οὖν

15 : 2304 = 4 : y = $614\frac{2}{5}$ ὑπὲρ ἑνὸς ἔτους. Ὅθεν

Κεφ. Τόκ. ἐτήσ. Κεφ. Τόκ. ὑπὲρ ρ̂

16480 : $614\frac{2}{5}$ = 100 : y , εἴτ' οὖν

82400 : 3072 = 100 : y , εἴτ' οὖν

824 : 3072 = 1 : y = $3\frac{3}{4}$ ὡς ἔγγιστα.

Β.' διὰ τῆς Ῥωσσιανῆς Μεθόδου.

Τόκ.	y	100 *κεφ.*	y	10
κεφ.	16480	12 *μην.*	1648	12
μην.	9	$460\frac{4}{5}$ *τόκ.*	9×5	2304
				1152

y	
103	
3	1152
309	1152

Κἀντεῦθεν y = $\frac{1152}{309}$ = $3\frac{3}{4}$ ὡς ἔγγιστα.

Δ.' *Κεφάλαιον* 4800 *ἀργυρίων τρισὶ παισὶν εἰς κλῆρον ἐγκαταλειφθὲν ἐτοκίσθη. Μετὰ ἔτη* 9, *ἕκαστος τῶν παίδων ἐκληρώσατο* 706 *ἀργύρια. Ἐδαπανῶντο δὲ κατ' ἔτος ὑπὲρ ἑνὸς ἑκάστου τῶν παίδων ἀργύρια* 109. *Πηλίκῳ ἐπὶ ἐτησίῳ τόκῳ ὑπὲρ ἑκατὸν, τὸ κεφάλαιον τουτὶ ἐτοκίσθη;*

ΛΥΣΙΣ.

Ὑπολογισθήτωσαν, πρῶτον, τὰ ἐν τοῖς 9 *ἔ-*

τεν

τεσι δαπανηθέντα. Ὅθεν ἀργ. $190 \times 3 \times 9 = 5130$. Ἐπεὶ δὲ δεύτερον, μετὰ τὴν τῶν 9 ἐτῶν συμπλήρωσιν ἕκαστος τῶν παίδων ἔλαβεν ἀργύρια 706, ἔσται τὸ τῶν τριῶν γινόμενον $= 2118$· κἀντεῦθεν τὰ ἐν ἔτεσιν 9 δαπανηθέντα τε καὶ ληφθέντα ἔσται $5130 + 2118 = 7248$ ἀργ. Τρίτον, τοῦ κεφαλαίου ἀπὸ τούτων ἀφαιρουμένου, εἴτ᾽ οὖν $7248 - 4800$, ὑπολειφθήσεται 2448, ὁ τῶν 9 ἐτῶν τόκος. Ὅθεν

Κεφ. Ἔτ. Τόκ. Κεφ. Ἔτ. ὑπὲρ %

$$4800 \times 9 : 2448 = 100 \times 1 : y.$$

Κἀντεῦθεν $y = \frac{2448}{432} = 5\frac{2}{3}$ ὑπὲρ ἑκατόν.

Ε᾽. Κεφάλαιόν τι, τοκισθὲν ἐπὶ ἐτησίῳ τόκῳ 5 ὑπὲρ ἑκατὸν, ἀπηνέγκατο ἐν χρόνῳ τινὶ ὡρισμένῳ 25 ἀργυρίων τόκον. Ἕτερον κεφάλαιον ἐν τῷ ἰδίῳ χρόνῳ ἀπέφερε τόκον $20\frac{1}{2}$ ἀργυρίων. Πόσος ἦν ὁ τούτου ἐτήσιος ὑπὲρ ἑκατὸν τόκος;

Α᾽. διὰ τῆς Χρυσῆς Μεθόδου.

Τῆς αὐτῆς τῶν τε κεφαλαίων καὶ χρόνων ὑπὲρ ἑκατὸν ἰσότητος ἐχούσης, ὡς τῆς τῶν ἀπενεχθέντων τόκων, ἔσται.

Τόκ. ὑπὲρ % Τόκ. ὑπὲρ %

$25 : 5 = 20\frac{1}{2} : y$, εἴτ᾽ οὖν

$25 : 5 = \frac{41}{2} : y$, εἴτ᾽ οὖν

$50 : 5 = 41 : y$, εἴτ᾽ οὖν

$10 : 1 = 41 : y = 4\frac{1}{10}$.

Β᾽.

γυρίοις ἐμπεριείληπται. Διὸ καὶ ὑπὲρ τοῦ δευτέρου ἔτους ἀναλογία ἐκκείσεται ἡ ἐφεξῆς.

$$100 : 105 = \frac{1000 \times 105}{100} : \chi. \text{ Καὶ}$$

$$\chi = \frac{1000 \times 105 \times 105}{100 \times 100} = \frac{11025000}{10000} = \frac{11025}{10} = 1102\tfrac{1}{2} \text{ ἀργ.}$$

Ὑπὲρ δὲ τοῦ τρίτου, ἡ ἐφεξῆς.

$$100 : 105 = \frac{1000 \times 105 \times 105}{100 \times 100} : \chi. \text{ Καὶ}$$

$$\chi = \frac{1000 \times 105 \times 105 \times 105}{100 \times 100 \times 100} = 1157\tfrac{5}{8} \text{ ἀργ.}$$

Γενικῶς τοίνυν δηλοῦται, τὸ αἰτούμενον κεφάλαιον ἐκλαμβάνεσθαι, ἐὰν τοῦτο τοσάκις ἐπὶ 105 ἀχθῇ καὶ τὸ γινόμενον τοσάκις διὰ τῶν 100 διαιρεθῇ, ὅσα τὰ δοθέντα εἰσὶν ἔτη. Ἐπεὶ δ' ὁ τοιοῦτος τοῦ ὑπολογίζεσθαι τρόπος δυσχερὴς πάνυ ἐςί, τούτου χάριν ὁ ἐφεξῆς ἐκτίθεται Πίναξ δι' οὗ ἀπόνως τὰ τῆς πράξεως τελεῖται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 395. Ὁ ἐν τῷ παρόντι Σχολίῳ συναφθεὶς Πίναξ ὑποτίθησι κεφάλαιον 10000000 ἀργυρίων οὕτως ὑπολογιζόμενον, ὥςε τὸν τοῦ τόκου τόκον ἐπὶ 4, 5, 6 ὑπὲρ ἑκατὸν ἄχρις ἐτῶν 20 τῷ κεφαλαίῳ συναύξειν. Ἡ δὲ τοῦ Πίνακος χρῆσις ἐςὶν ὡς ἐφεξῆς. Ζητείσθωσαν ἐν τῇ πρώτῃ ςήλῃ τὰ ἔτη ὑπὲρ τοῦ κεφαλαίου, τοῦ σὺν τῷ ἑαυτοῦ τόκῳ καὶ τῷ τοῦ τόκου τόκῳ ἐπαύξοντος· ὁ δ' ἀριθμός, ὁ ἐν τῇ δευτέρᾳ, τρίτῃ, ἢ τετάρτῃ ςήλῃ ἀντιςοιχῶν, καὶ τὸν

4, 5, 6 ὑπὲρ ἑκατὸν δοθέντα τόκον δηλοῦν, μεταγραφήτω. Εἶτα, γενέσθω ἡ ἐφεξῆς ἀναλογία: Ὡς τὸ κεφάλαιον τῶν 10000000, πρὸς τὸ κεφάλαιον τὸ ἐν τῷ Πίνακι τοῖς δοθεῖσιν ἀντιστοιχοῦν ἔτεσι, καὶ ἀπ᾽ ἐκείνου μεταγραφέν· οὕτως οἱονδηποτοῦν δοθὲν κεφάλαιον, πρὸς τὸ αἰτούμενον.

Ἔτη	4 ὑπὲρ 100	5 ὑπὲρ 100	6 ὑπὲρ 100
1	10400000	10500000	10600000.
2	10816000	11025000	11236000.
3	11248640	11576250	11910160.
4	11698586	12155062	12624769.
5	12166529	12762815	13382255.
6	12653190	13400956	14185191.
7	13159518	14071004	15036302.
8	13685691	14774554	15938480.
9	14233119	15513282	16894789.
10	14802444	16288946	17908477.
11	15394542	17103393	18982985.
12	16010324	17958563	20121964.
13	16650737	18856491	21329282.
14	17316766	19799316	22609039.
15	18009437	20789280	23965582.
16	18729814	21828746	25403516.
17	19479004	22920183	26927727.
18	20258167	24066190	28543391.
19	21068494	25269502	30255995.
20	21911234	26532977	32071354.

ΠΑ-

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ

ΤΩΝ ΕΝ ΜΕΡΕΙ ΦΙΛΟΜΟΥΣΩΝ ΣΥΝΔΡΟΜΗΤΩΝ.

	Σώμ.
Ὁ Πανιερώτατος Μητροπολίτης Μολδαβίας κύριος Βενιαμὶν	5
Ὁ Πανιερώτατος Ἐπίσκοπος Ῥωμάνου κύριος Γεράσιμος	3
Ὁ Πανιερώτατος Εἰρηνουπόλεως καὶ Βατοπαιδίου κύριος Γρηγόριος	2
Ὁ Πανιερώτατος Εὐχαΐτων κύριος Θεόκλητος	2
Ὁ Σοφολογιώτατος Ἡγούμενος Ῥακητούσσας κύριος Στέφανος Δούκας	6
Ὁ Πανοσιολογιώτατος Ἀρχιμανδρίτης καὶ Ἡγούμενος Γαλατᾶ κύριος Παρθένιος	2
Ὁ Πανοσιώτατος Ἀρχιμανδρίτης καὶ Ἡγούμενος Τσετατσουΐας κύριος Γεράσιμος	2
Ὁ Ἱερολογιώτατος Ἀρχιδιάκονος κύριος Κύριλλος	1
Ἡ ἐν Ἰασίῳ Ἡγεμονικὴ Ἀκαδημία διὰ τοῦ Πανιερωτάτου Μητροπολίτου κυρίου Βενιαμὶν	20
Ὁ Ἐκλαμπρότατος Μπεγζαδὲς κύριος Πετράκης Μαυρογένης	2

Σώμ

Σύμ.

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Βόρνικος κύριος Κωστάκης Στούρζας 2

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Ποστέλνικος κύριος Μανωλάκης Μάνος 2

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Ποστέλνικος κύριος Δημήτριος Πλαγινός 2

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Ποστέλνικος κύριος Στεφανάκης Βογορίδης 2

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Βόρνικος κύριος Ἀνδρονάκης Δόνιτζ. 2

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Βόρνικος κύριος Δημήτριος Ῥαλλέτος 2

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Ἄγας κύριος Νικόλαος Ῥωσσέτος 6

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Ἄγας κύριος Κωστάκης Πάλσας 2

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Ἄγας κύριος Δημήτριος Σταθάκη 2

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Ἄγας κύριος Κωστάκης Κονάκης 2

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Σπαθάρης κύριος Θεοδωράσκος Πάλσας 2

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Σπαθάρης κύριος Γεωργάκης Πάλσας 2

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Σπαθάρης κύριος Μιχαὴλ Καντακουζηνός 2

	Σώμ.
Ὁ Εὐγενέςατος Ἄρχων Σπαθάρης κύριος Γεώργιος Γκίκας	2
Ὁ Εὐγενέςατος Ἄρχων Σπαθάρης κύριος Ἀλέξανδρος Στούρζας	2
Ὁ Εὐγενέςατος Ἄρχων Σπαθάρης κύριος Κωςάκης Σοῦτζος	4
Ὁ Εὐγενέςατος Ἄρχων Μπάνος κύριος Γεώργιος Δραγίτζης	4
Ὁ Εὐγενέςατος Ἄρχων Κόμισος κύριος Θεοδωράκης Νέγρης	4
Ὁ Ἐξοχώτατος Ἄρχων Ἰατρὸς κύριος Σπυρίδων Ἀσάνης	2
Ὁ Ἐξοχώτατος Ἄρχων Ἰατρὸς κύριος Εὐςάθιος	2
Ὁ Εὐγενέςατος Ἄρχων Καμινάρης κύριος Μιχαλάκης	2
Ὁ Τιμιώτατος κύριος Ἀνδρέας Παύλȣ. .	2
Ὁ Ἄρχων Δραγομάνος τȣ̃ Ῥωσσικȣ̃ Κονσολάτȣ κύριος Γεώργιος Λεβεντιάδης . .	4
Ὁ Ἄρχων Γραμματικὸς κύριος Γεωργάκης Λάσκαρις Πελοποννήσιος	2
Ὁ Τιμιώτατος κύριος Πάσχαλις Βασιλείȣ .	2
Ὁ Λογιώτατος Διδ. κύριος Παναγιώτης Γεωργίȣ	1

Σώμ.

ΕΚ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ.

'Ο Λόγιος τῆς 'Ηγεμονικῆς 'Ακαδημίας 'Επιςάτης Κωνςαντῖνος Παναγιώτȣ . . .	2
'Ο Λόγιος Σταυρῆς Δȣ́ζογλος	1
'Ο Λόγιος Δημήτριος Παναγιωτάδης Πελοποννήσιος	1
'Ο Λόγιος Νικόλαος Κάρπȣ	2
'Ο Λόγ. Μαργαρίτης Στεφάνȣ	2
'Ο Λόγ. Μιχαὴλ Στίχης	2
'Ο Λόγ. Δημήτριος Διογενίδης	1
'Ο Λόγ. Μιχαὴλ Γιαδιάρης	2
'Ο Λόγ. Κωνςαντῖνος 'Ράδος	3
'Ο Λόγ. Παναγιώτης Καλλινικίδης ἐκ Χαλδίας.	2
'Ο Λόγ. Δημήτριος Ζῶτος	1
'Ο Λόγ. 'Ιωάννης Νικολάȣ	1
'Ο Λόγ. Πέτρος Αντωνίȣ ἐκ τȣ̃ μεγ. 'Ρεύμ.	1
'Ο Λόγ. Βασίλειος Κωνςαντίνȣ	1
'Ο Λόγ. 'Ρήγας Ιωάννȣ Κυσαγγέλȣ . . .	1
'Ο Λόγ. Κωνςαντῖνος 'Ιωάννȣ	
'Ο Λόγ. 'Ιωάννης Βερνέσκος	1
'Ο Λόγ. Κωνςαντῖνος Τζολάκογλος . . .	1

ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΤΕΡΩΝ ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ.

Σελ. 1 Στίχ. 12. συνεςηκεία. Γράφε. συνεςηκυῖα.
— 5 — 15. Τεθήτω, ʽΟΡΙΣΜΟΣ.
— 6 — 2. τῶν. Γράφ. καὶ τῶν.
— 7 — 3, ἀριθμεῖν. Γρ. ἀριθμεῖν.
9 — 17. τὸ τῶν. Γρ. τῷ τῶν
— 17 — 6. 1, Γρ. ',
— 19 — 19. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γρ. ΠΟΡΙΣΜΑ.
— 20 — 6. δυνάμεθα. Γρ. δυνάμεθα γὰρ
— 29 — 13. 246641. Γρ. 256641.
— — — 14. 526792. Γρ. 536792,
— — — 22. 240919. Γρ. 240619.
— 53 — 17. 600. Γρ. 4600.
— 57 — 18. τοῦ 4. Γρ. τοῦ 6.
— 75 — 1. Τεθήτω, ΠΟΡΙΣΜΑ.
— 86 — 12. 30. Γρ. 330.
— 93 — 15. 3. 4. Γρ. 4. 3.
— 95 — 14. $\frac{3}{8}$. Γρ. $\frac{5}{8}$
— 109 — 12. $\frac{607}{90}$ Γρ. $\frac{55}{36}$
— 115 — 22 Παρονομαςῶν. Γρ. ʽΑριθμητῶν
— 117 — 16 Παρονομαςὰς Γρ. ʽΑριθμητὰς
— 118 — 3 Ὅθεν Α.' Γρ. Ὅθεν Δ.',
— 120 — 30 + $\frac{17}{7}$ Γρ. = $\frac{17}{9}$.

Σελ. 122 Στίχ. 6 = 1. Γρ. = 2.

— 123 — 16 διάφορον. Γρ. διάφορον Β.'

— 124 — 4 $\frac{14-12}{12}$ Γρ. $\frac{14-12}{21}$.

— 128. — 16. $8\frac{13}{31}$. Γρ. $8\frac{13}{15}$.

— 132. — 1 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$. Γρ. $\frac{4}{3} \times \frac{4}{2}$.

— 135. — 12 Οὐγκίαις. Γρ. Ἡμιουγκίαις.

— 145. — 11 ΚΕΦΑΛ. Ε.' Γρ. ΚΕΦΑΛ. Ϛ.'

— 158. — 11 Πενταετηρής. Γρ. Πενταετηρὶς

— 160. — 5 74. Γρ. 72.

— — — 12 $1\frac{2}{}$ Γρ. $1\frac{2}{3}$.

— 185. — 20. 24. Γρ. 44.

— 192. — 9. 24. Γρ. 26.

— 198. — 14. $\frac{61}{2}$ Γρ. $6\frac{1}{2}$.

— 199. — 21 ἀποτίσεται. Γρ. ἀποτίσει.

— — — 22. $\frac{107^\circ}{9}$. Γρ. $\frac{106^\circ}{9}$. Γενέσθω δὲ ἡ πρᾶξις ὡς ἐφεξῆς. $\frac{21}{1}+\frac{4}{8}+\frac{8}{12}=\frac{21}{1}+\frac{84}{72}=\frac{848}{72}=\frac{848:8}{72:8}=\frac{106}{9}$. καὶ γενέσθω ἐν τοῖς ἐφεξῆς τὰ τῆς πράξεως διὰ τοῦ $\frac{106}{9}$, ἵν' ἀναδοθῇ $63\frac{344}{588}$.

201 — 14. 16'. Γρ. 56'.

— 202 — 2. §. 248. Γρ. §. 240.

— 203 — 6. $\frac{380}{24}$. Γρ. $\frac{280}{24}$.

— 208 — 12. 2954. Γρ. 2953.

Σελ. 200 Στιχ. 1 *ΚΕΦΑΛ. ϛ.′ Γρ. ΚΕΦΑΛ. Ζ.′*

— 222 — 1 1000σημόρια. *Γρ.* 1000σημόρια.

— 222 — 7 $\frac{315}{1000}$ *Γρ.* $\frac{335}{100}$

— — — 8 § 167. *Γράφ.* §. 267.

— 226 — 2 $\frac{3}{6}$. *Γρ.* $\frac{3}{5}$

— 227 — 13 $\frac{75}{100}$. *Γρ.* $\frac{25}{100}$

— — — 15 *συντίθμησι* . *Γρ.* *συντίθησι*

— — — 19 25 . *Γρ.* 95

— 232 — 9 . 18 . *Γρ* . 20

— 232 — 11 . 5386 × 100 . *Γρ.* 5386 × 1000

— 237 — 5 . 0, 56 . *Γρ.* 2, 56.

— 251 — 4 . *ἤτο ἡγέμενον. Γρ. εἰ ἤτοι τὸ ἡγ.*

— 255 — 2 . 8 : 3 . *Γρ.* 8 : 4

— 267 — 3 . $\frac{60 \times 3}{3}$ *Γρ.* $\frac{62 \times 3}{3}$

— 270 — 6 . 100 : 1037. *Γρ.* 700 : 7037

— 273 — 16 . 38. *Γρ.* 32

— — — 2 . 25 *κρ.* *Γρ.* 35. *κρ.*

— 292 — 3 . $\frac{260}{40}$. *Γρ.* $\frac{960}{40}$

— — 16 . $\frac{15386000}{3334}$. *Γρ.* $\frac{15208000}{3334}$

— 293 — 2 . $\frac{386}{3335}$. *Γρ.* $\frac{536}{3335}$.

— 296 — 19 . $\frac{15144 \times 6029}{25069}$. *Γρ.* $\frac{15144 \times 600}{25069}$

— 310 — 22 . 1875 . *Γρ.* 1975.

— 317 — 8 . 17 — 18 . *Γρ.* 17 — 8

— — — 16 . 11 $\frac{7}{12}$. *Γρ.* 11 $\frac{7}{11}$.

— 318 — 20 . 15 — 12. *Γρ.* 13 — 12

— 325 — 13. *ΛΛΥΣΟΥ. Γρ. ΛΛΥΣΕΩΣ.*